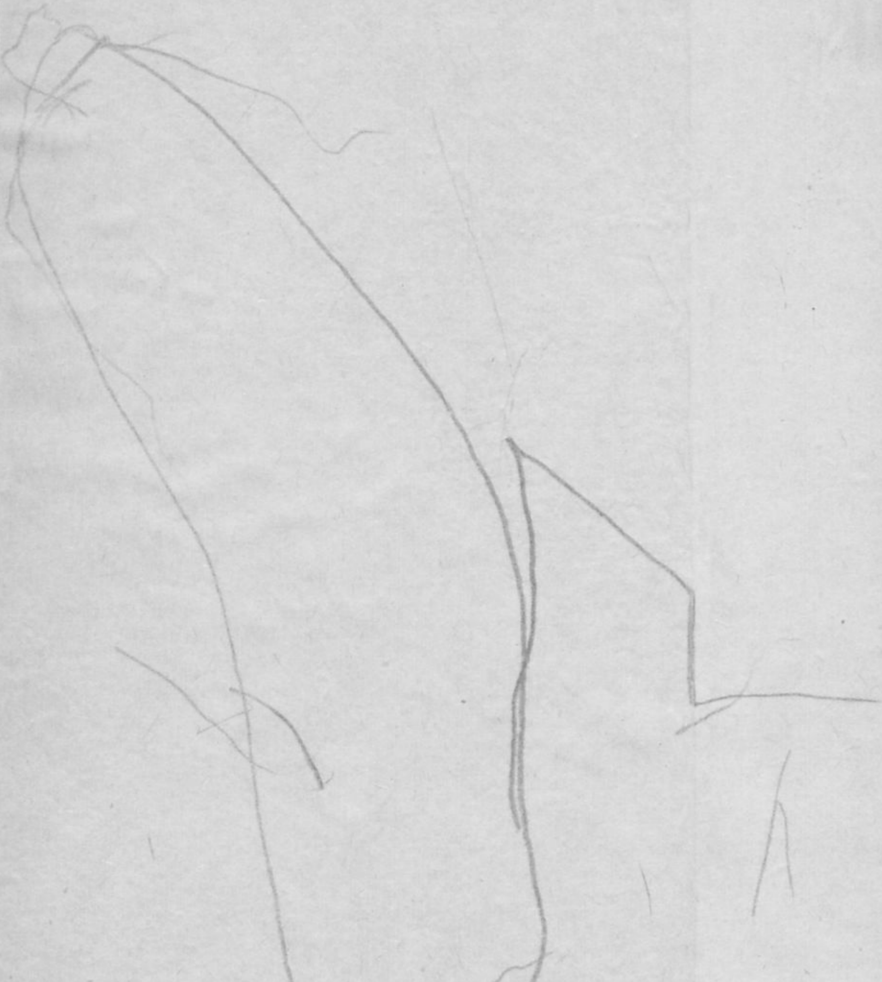


1

2000

Βασιλικούλα Γ. Δροσοπούλου.

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
Τακτικοῦ Καθηγητοῦ ἐν τῷ Πανεπιστημίῳ Ἀθηνῶν.

Κούλα Γ. Δροσινάκη.

# ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

## ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ



Ἐνεκρίθη κατὰ τὴν ὑπ' ἀριθ. $\frac{21714}{11-7-1928}$ κοινοποίησιν τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ
*(Ἀπὸ τῆς τελευταίας ἐγκρίσεως)*

5

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ—52
1929

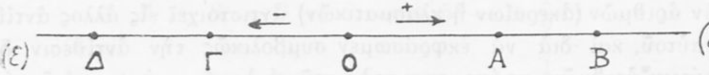
ῖται κλεψίτυπον.

Τύποις ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ Στοὰ Σιμοπούλου

## Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

*1.* Διὰ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν) δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μειωτέος εἶνε μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτω π. χ. δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 3—7, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου. Διότι, δὲν ὑπάρχει οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν 7 δίδει ἄθροισμα τὸν 3. Θὰ μάθωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ πᾶσα ἀφαίρεσις.

*2.* Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους δι᾽ ἄλλου ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὸ εἶνε ἀριθμός τις. Ἔστω εὐθεῖά τις (Ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας διακρίνομεν δύο φοράς, μίαν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ σημεῖον Α, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***θετικὴν*** φοράν, καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ σημεῖον Γ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ἀρνητικὴν*** φοράν (Σχ. 1).




(Σχ. 1).

Καλοῦμεν ***θετικὸν*** μὲν μέρος τῆς (Ε) πᾶν τμῆμα αὐτῆς, ἂν θεωρῆται διαγραφόμενον ὑπὸ κινητοῦ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ***ἀρνητικὸν*** δέ, ἂν κατὰ τὴν ἀρνητικήν. Οὕτω ἐπὶ τῆς εὐθείας (Ε) διακρίνομεν μεγέθη θετικά, ὡς τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ, καὶ ἀρνητικὰ ὡς τὰ ΟΓ, ΟΔ, ΓΔ. Τὰ μὲν θετικὰ μεγέθη τῆς εὐθείας μετρούμενα ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς ΟΑ, παριστάνονται ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν ***θετικούς,*** τὰ δὲ ἀρνητικὰ ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν ***ἀρνητικούς.***

*3.* Ἐν γένει, πρὸς παράστασιν τῶν τιμῶν τῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, τὰ ποῖα διακρίνομεν εἰς θετικὰ καὶ ἀρνητικά, μεταχειριζόμεθα τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καὶ δεχόμεθα ὅτι· εἰς ἕκαστον θετικὸν ἀριθμόν, παριστάνοντα τὴν τιμὴν ποσοῦ ἢ μεγέθους τινὸς θετικοῦ, ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀρνητικός, παριστάνων τὴν τιμὴν ἀρνητικοῦ ποσοῦ ἢ μεγέθους, ἀντιστοίχου τοῦ θετικοῦ, ἂν τὰ ποσὰ ἢ μεγέθη ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀντίστοιχοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί, ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅτι, τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ μηδέν. Οὕτω π. χ. ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 6 δραχμαί, δώσωμεν τὸ γνώρισμα, ὅτι εἶνε κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχωμεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 6 δραχμῶν, ὁ ὁποῖος παριστάνει ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου, καὶ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τῶν δύο ὁμοειδῶν μὲν αὐτῶν ἀριθμῶν, ἀλλ᾽ ἐχόντων διάφορον γνώρισμα, καθεμία μονὰς τοῦ κέρδους ἐξουδετερώνει μίαν τῆς ζημίας. Οὕτω τὸ ἐξαγόμενον τῆς τοιαύτης ἑνώσεως εἶνε ἴσον μὲ μηδέν. Ὅμοιόν τι ἔχομεν καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις. Π. χ. ἐὰν διανύσῃ τις ἐπ᾽ εὐθείας ὁδοῦ, ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς, ἕνα ἀριθμὸν βημάτων πρὸς μίαν φοράν, ἔστω πρὸς βορρᾶν, καὶ ἔπειτα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν βημάτων πρὸς νότον, ἀπὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασε προηγουμένως, ζητεῖται δὲ πόσον θὰ ἀπέχῃ εἰς τὸ τέλος ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, οἵτινες ἔχουν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, λέγομεν ὅτι ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων, ἀλλ᾽ ὅτι εἶνε ***ἀντίθετοι.*** Ὥστε, «***ἀντίθετοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν ἔχουν ἴσον πλῆθος μονάδων, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μὲ μηδέν***».

*4.* Γενικώτερον, δεχόμεθα ὅτι, εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) ἀντιστοιχεῖ εἷς ἄλλος ἀντίθετος αὐτοῦ, καὶ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν συμβολικῶς τὴν ἀντίθεσιν δύο τοιούτων ἀριθμῶν, γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, τοῦ μέχρι τοῦδε γνωστοῦ, τὸ σημεῖον + ***(σύν)***, πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου τὸ — ***(πλήν)***· καὶ τὸ μὲν + λέγεται ***θετικὸν σημεῖον***, τὸ δὲ — ***ἀρνητικὸν σημεῖον.*** Οὕτω, οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει 6 μονάδας γράφονται + 6 καὶ — 6, ἀπαγγέλλονται δὲ ὡς ἑξῆς : ***σὺν ἕξ*** καὶ ***πλὴν ἕξ.*** Συνήθως ὅμως παραλείπεται τὸ σημεῖον + εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑπομένως, ὅταν εἷς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον, ὑποτίθεται ὅτι ἔχει τὸ +. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ + 6 καὶ — 6 γράφονται καὶ οὕτω 6 καὶ — 6. Ὁμοίως ἀντίθετοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ

$$23 \text{ καὶ} -23, \quad \text{οἱ } \frac{3}{5} \text{ καὶ } -\frac{3}{5}, \quad \text{οἱ } 6{,}15 \text{ καὶ } -6{,}15, \text{ κλπ.}$$

Δροσοπουλου.



*5.* Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἑτερόσημοι***, ἐὰν ὁ μὲν εἷς ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$, ἢ οὐδὲν σημεῖον, ὁ δὲ ἄλλος τὸ $-$, ἀδιαφόρως τοῦ πλήθους τῶν μονάδων ἑκάστου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ $+8$ καὶ $-3$ λέγονται ἑτερόσημοι· ὁμοίως ἑτερόσημοι λέγονται οἱ $-15$ καὶ $+\frac{5}{9}$, οἱ $2{,}15$ καὶ $-6\frac{3}{4}$, οἱ $7$ καὶ $-12$ κλπ.

***Ὁμόσημοι*** λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ αὐτὸ σημεῖον (εἴτε τὸ σὺν εἴτε τὸ πλήν). Οὕτω, ὁμόσημοι λέγονται οἱ ἀριθμοὶ $+3$ καὶ $+12$, οἱ $-7$ καὶ $-\frac{3}{4}$, οἱ $-2{,}5$ καὶ $-6$ κλπ.

Οἱ μὲν ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $-$ λέγονται ***ἀρνητικοὶ ἀριθμοί***, οἱ δὲ ἔχοντες τὸ $+$ (ἢ καὶ οὐδὲν σημεῖον) λέγονται ***θετικοὶ ἀριθμοὶ*** καὶ ὑποτίθεται ὅτι, ἂν οἱ θετικοὶ παριστάνουν τιμὰς ποσῶν ἢ μεγεθῶν θετικῶν, οἱ ἀρνητικοὶ θὰ παριστάνουν ἀρνητικῶν τοιούτων. Καὶ τὰ δύο ταῦτα εἴδη τῶν ἀριθμῶν τούτων λέγονται μὲ ἓν ὄνομα ***ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί.***

Κατὰ ταῦτα ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ ἀριθμοὶ (ἀκέραιοι καὶ κλασματικοί), οἵτινες ἐκλήθησαν καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ οἱ ἀντίθετοι τούτων, οἵτινες λέγονται ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

*6.* Καλοῦμεν ***ἀπόλυτον ἀριθμὸν*** ἢ ***ἀπόλυτον τιμὴν*** ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ ἀλγεβρικοῦ, ἂν παραλείψωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ, καὶ θεωροῦμεν μόνον τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτου. Οὕτω οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν

$$4\cdot\ -8\cdot\ -6\cdot\ +2\cdot\ -3{,}5\cdot\ -3\frac{1}{2}$$

$$\text{εἶνε οἱ } 4\cdot\quad 8\cdot\quad 6\cdot\quad 2\cdot\quad 3{,}5\cdot\quad 3\frac{1}{2}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τῶν μὲν θετικῶν ἀριθμῶν οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ εἶνε αὐτοὶ οἱ ἴδιοι ἀριθμοί, τῶν δὲ ἀρνητικῶν οἱ ἀντίθετοί των θετικοί.

*7.* Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀπολύτως ἴσοι ἢ ἀπολύτως ἰσοδύναμοι,*** ἐὰν αἱ ἀπόλυτοι αὐτῶν τιμαὶ εἶνε ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι· καθὼς π. χ. οἱ $5$ καὶ $-5$, οἱ $3\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{13}{4}$. Κατὰ ταῦτα οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶνε ἀπολύτως ἴσοι.

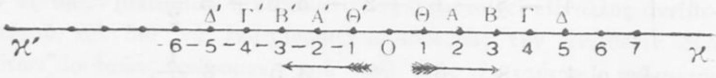
***Ἴσοι ἢ ἰσοδύναμοι*** λέγονται δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἂν εἶνε ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους ἀπολύτους τιμάς, καθὼς π. χ.

οἱ 3 καὶ $\frac{6}{2}$, οἱ $-\frac{1}{3}$ καὶ $-\frac{2}{6}$, οἱ $-4$ καὶ $-\frac{12}{3}$ κλπ., διότι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν π. χ. τῶν $-4$ καὶ $-\frac{12}{3}$ εἶνε ἴσαι, σημειώνομεν δὲ τοῦτο διὰ τοῦ συμβόλου = (*ἴσον*), τιθεμένου μεταξὺ αὐτῶν, ἤτοι $-4=-\frac{12}{3}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερωνύμους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν ὁμωνύμους, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμωνύμους τὰς ἀπολύτους των τιμάς, καὶ νὰ διατηρήσωμεν τὰ σημεῖα αὐτῶν. Οὕτω π. χ. ἀντὶ τῶν $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}$, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς ἰσοδυνάμους αὐτῶν $\frac{4}{8}, -\frac{6}{8}, -\frac{1}{8}$.

## Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

**8.** Ἔστω εὐθεῖά τις xx′. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον ἔστω τὸ Ο, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ τὸ μηδέν, καὶ ὡς θετικὴν μὲν φορὰν ἐπ' αὐτῆς τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x, ὡς ἀρνητικὴν δὲ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x′. Ἂν λάβωμεν τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΟΘ ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, π. χ. 1 μ., τότε τὸ μὲν τμῆμα ΟΘ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ +1, ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΘ (Σχ. 2).




(Σχ. 2).

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁδοιπόρος τις διατρέχει δύο μέτρα ἐπὶ τῆς Οx ἀπὸ τὸ Ο· θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν διὰ τοῦ τμήματος ΟΑ, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος δύο μονάδων μήκους τῆς εὐθείας xx′. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ ἂν ἄλλος ὁδοιπόρος διατρέξῃ δύο μέτρα ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς Οx′. Ὁ δρόμος αὐτὸς θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΑ′. Οὕτω προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν ἐν γένει τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τμημάτων τῆς εὐθείας xx′, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν*** ἢ ἄξονα τῶν ***τετμημένων***, τοῦ μήκους αὐτῶν μετρουμένου ἀπὸ ὡρισμένου σημείου ταύτης. Εἶνε δὲ τὸ μῆκος τμήματος, παριστάνοντος ὡρισμένον ἀριθμόν, ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικὸν διάστημα, π. χ. μετὰ 2 ἔτη (+2 ἔτη), λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου Ο ἓν μῆκος ΟΑ ἴσον μὲ δύο μονάδας μήκους καὶ τὸ τμῆμα ΟΑ παριστάνει τὸ διάστημα + 2 ἐτῶν. Ὁμοίως χρονικὸν διάστημα πρὸ 3 ἐτῶν (— 3 ἔτη) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΒ′. Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ διευθύνωνται ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἷς μὲ ταχύτητα 5 χιλμ. πρὸς τὴν θετικὴν φοράν, ὁ δὲ πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μὲ ταχύτητα 4 χμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΔ, ἴσου μὲ 5 μονάδας μήκους καὶ κειμένου ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΓ′, ἀντιθέτου τοῦ πρώτου καὶ ἔχοντος μῆκος ἴσον μὲ 4 μονάδας μήκους. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ θερμόμετρον κλπ.

*9.* Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ἂν ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Θ ἄκρον τοῦ τμήματος ΟΘ, ἔχοντος μῆκος + 1, ὅτι παριστάνει τὴν + 1, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς + 2, + 3, + 4,... ἐὰν τὰ Α, Β, Γ εἶνε τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,... τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶνε ἴσα μὲ + 2, + 3, + 4,... Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς προηγουμένης, τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x′, λάβωμεν ὁμοίως τὸ μῆκος ΟΘ′ ἴσον μὲ μίαν μονάδα μήκους, τὸ Θ′ θὰ παριστάνῃ τὸ —1. Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′,... τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς — 2· — 3· — 4.... (σχ. 2).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἕνα κλασματικὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν $\frac{1}{2}$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας μῆκος ἴσον μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν, π. χ. ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος μήκους, καὶ πρὸς τὴν φορὰν Οx μὲν ἀπὸ τοῦ Ο, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε θετικός, πρὸς τὴν Οx′ δέ, ἂν εἶνε ἀρνητικός.

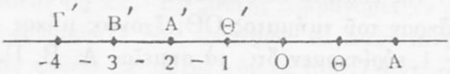
*10.* Τὸ μέρος Οx τῆς εὐθείας x′ x λέγεται ***θετικὸν τμῆμα τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν*** ἢ τοῦ ἄξονος ***τῶν τετμημένων***, καὶ ἐπ᾿ αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς. Τὸ Οx′ λέγεται ***ἀρνητικὸν τμῆμα*** καὶ ἐπ᾿ αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς. Ἡ φορὰ

Οx λέγεται ***θετική***, ἡ δὲ Οx′ ***ἀρνητική***, καὶ καθεμία σημειώνεται μὲ ἕν βέλος, καθὼς εἰς τὸ σχ. (2).

**Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος.**

*11.* Γνωρίζομεν ὅτι πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν αὐτῆς, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Καθ' ὅμοιον τρόπον, πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος, ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν αὐτῆς, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Οὕτω ὁ $-3$ γίνεται ἐκ τῆς $-1$, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς· ὁ $-\frac{3}{5}$ γίνεται ἐκ τοῦ πέμπτου τῆς $-1$, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φοράς.

Ἔστω ἀρνητικός τις ἀριθμὸς π. χ. ὁ $-4$, ὅστις παριστάνει ἀρνητικόν τι μέγεθος, π.χ. τὸ ΟΓ′ ἐπὶ τῆς εὐθείας xx′, μετρηθὲν ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς ΟΘ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης τοῦ ΟΓ′ ὑπὸ τοῦ ΟΘ παριστάνομεν διὰ τοῦ $\frac{ΟΓ'}{ΟΘ} = -4$.




(Σχ. 3).

Ἀλλὰ τὸ ΟΓ′ γίνεται ἐκ τοῦ ΟΘ′ (δηλαδὴ ἐκ τοῦ ΟΘ ἀφοῦ τραπῇ εἰς ΟΘ′), καθὼς καὶ ὁ ἀριθμὸς $-4$ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος $-1$, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τέσσαρας φοράς. Διὰ τοῦτο δεχόμεθα ὅτι,

***«πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς, καὶ ταύτην ἢ μέρος ταύτης ἐπαναλάβωμεν πολλάκις».***

Οὕτω δεχόμεθα ὅτι ὁ $-7$ γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς $-1$, καὶ αὐτὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φοράς· ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς $-1$, καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρίς.

### *Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.*

*12.* Δεχόμεθα ὅτι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς διατηρεῖται ἡ ἰσχὺς τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων (τοῦ νόμου τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν.

## Πρόσθεσις.

***13. Πρόσθεσις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ἄλλον ἀποτελούμενον ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων.***

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ***προσθετέοι***, τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως ***ἄθροισμα***, τὸ δὲ σημεῖον τῆς πράξεως εἶνε (καθὼς καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν) τὸ + ***(σὺν)*** ἢ ***καί***.

*14.* Ὅταν σημειώνωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτούς, συνήθως, ἐν παρενθέσει μετὰ τοῦ σημείου αὐτῶν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῶν πράξεων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Π.χ. γράφομεν $(-3)+(+5)$ ὅταν πρόκειται νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς $-3$ καὶ $+5$.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις εἰς τὴν πρόσθεσιν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, καθ᾽ ὅσον οἱ προσθετέοι εἶνε ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι.

***15. Πῶς προσθέτομεν ὁμοσήμους ἀριθμούς.***

Τὸ ἄθροισμα $7+(+5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+12$. Διότι 7 θετικαὶ μονάδες καὶ 5 θετικαὶ κάμνουν 12 θετικάς.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα $(-7)+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ $-12$. Διότι 7 ἀρνητικαι μονάδες καὶ 5 ἀρνητικαὶ κάμνουν 12 ἀρνητικάς. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν,

$$-3+(-2)+(-8)=-13.$$

Ἐπίσης $$+5+(+6)+(+10)=+21.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς αὐτῶν, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν προσθετέων».***

***16. Πῶς προσθέτομεν δύο ἑτεροσήμους ἀριθμούς.***

Τὸ ἄθροισμα $+7+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+2$. Διότι, καθεμία τῶν 5 ἀρνητικῶν μονάδων ἐξουδετερώνεται μὲ ἀνὰ μίαν ἀντίστοιχον αὐτῆς θετικὴν ἐκ τῶν 7, καὶ μένουν μόνον δύο θετικαί. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὑρίσκομεν ὅτι,

$$-7+(+5)=-2 \qquad -10+(+10)=0.$$

$$-\frac{3}{4}+\left(+\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{1}{4}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἑτεροσήμους ἀριθμούς, ἀφαιροῦμεν τὴν μικροτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν θέτομεν τὸ σημεῖον τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν».***

*17.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ σημεῖον + καὶ χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ —· οὕτω προκύπτουν δύο ἑτερόσημοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων παριστάνει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Κατὰ ταῦτα διὰ τὸ ἄθροισμα

$$-3+(-5)+(+2)+(+3)+(-7)+(+6)$$

ἔχομεν $-3+(-5)+(-7)=-15$,

καὶ $+2+(+3)+(+6)=+11$,

τέλος $+11+(-15)=-4$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους· ἀκολούθως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μὲ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου. Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ $3+(-8)+(-6)+(-2)+10$, ἔχομεν $3+(-8)=-5$· ἀκολούθως λέγομεν $-5+(-6)=-11$· τώρα $-11+(-2)$ ἴσον $-13$· τέλος $-13+10=-3$. Ἤτοι, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε $-3$.

*18.* Αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἀποδεικνύονται δὲ ὁμοίως.

*19.* Πρὸς παράστασιν ἀθροίσματός τινος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν πρὸ τῆς εὑρέσεως αὐτοῦ, θέτομεν ἐνίοτε τοὺς προσθετέους μετὰ τῶν σημείων τῆς προσθέσεως αὐτῆς ἐν παρενθέσει ἢ ἐν ἀγκύλαις. Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν $-3+5+(-8)$ σημειώνεται καὶ οὕτω $[-3+5+(-8)]$.

*20.* Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Διὰ νὰ παραστήσωμεν οὕτω τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)$ π. χ., ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ $-8$, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδας μήκους. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον σημεῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)=-5$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει π.χ. τὸ ἄθροισμα $4+(-8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ 4, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους.

### *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα

α΄) $5+(-3)$. β΄) $-9+(-3)$. γ΄) $-15+3$

δ΄) $12+(-83)$. ε΄) $(-1864)+(+9134)$.

2) Ὁμοίως α΄) $-18{,}1+13{,}6$. β΄) $-9{,}13+(-29{,}1)$

γ΄) $0{,}13+(-13{,}4)$.

3) Ὁμοίως α΄) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)$.

β΄) $-3\frac{2}{3}+\left(-4\frac{1}{4}\right)$, γ΄) $1\frac{1}{8}+(-8{,}45)$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα.

α΄) $12+(-18)+24$. β΄) $-29+(-13)+(-35)$.

γ΄) $13{,}7+(-1{,}118)+9{,}25$.

δ΄) $8\frac{2}{3}+\left(-17\frac{1}{2}\right)+4\frac{1}{2}$. ε΄) $\left(-13\frac{1}{5}\right)+26\frac{1}{3}+\left(-1\frac{2}{15}\right)$. στ΄) $-8{,}3+7{,}93+35{,}6-\frac{4}{5}$.

2) Ὁμοίως α΄) τὸ $-125+\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{6}\right)+14\frac{1}{2}+\left(-3\frac{1}{8}\right)$. β΄) τὸ $[-13{,}5+(-8{,}4)]+6{,}1+(-7{,}5)$.

***Ὁμὰς τρίτη.*** 1) Κερδίζει τις 234 δραχμάς, ἔπειτα χάνει 216,40 δραχμάς· κερδίζει πάλιν 215,70 δραχμὰς καὶ χάνει ἐκ νέου 112 δραχμάς. Ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τελικῶς καὶ πόσον ; (ἐκ. 121,30).

2) Ἔμπορός τις αὐξάνει τὸ ἐνεργητικὸν αὐτοῦ κατὰ 128 δραχμάς, τὸ δὲ παθητικόν του κατὰ 312,40 δραχμάς. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει τὸ κεφάλαιον αὐτοῦ ; (ἐλ. 184,40).

3) Σῶμα θερμανθὲν ἀπὸ $0^{\circ}$ (βαθμῶν) ἔλαβε θερμοκρασίαν $17{,}6^{\circ}$· ἔπειτα ἐψύχθη κατὰ $19{,}1^{\circ}$· καὶ τέλος ἐθερμάνθη κατὰ $3{,}1^{\circ}$. Ηὐξήθη ἢ ἠλαττώθη ἡ ἀρχική του θερμοκρασία καὶ πόσον ; (ἠλ. $1{,}6^{\circ}$).

## Ἀφαίρεσις.

***21. Ἀφαίρεσις δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκεται***

***τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἕνα δίδει ἄθροισμα τὸν ἄλλον.***

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ***μειωτέος*** καὶ ***ἀφαιρετέος,*** ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ***διαφορά,*** τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶνε τὸ — ***(πλήν),*** τιθέμενον μεταξὺ αὐτῶν.

*22.* Διὰ νὰ εὕρωμεν π. χ. τὴν διαφορὰν 7— (—5), δυνάμεθα, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 7 θετικὰς μονάδας 5 ἀρνητικάς, νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰς 7 θετικὰς 5 θετικάς.

Ἤτοι θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ $7-(-5)=7+(+5)$.

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ δ τὴν ζητουμένην διαφοράν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ὅτι, $\delta+(-5)=7$. Ἂν εἰς τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $(+5)$ (δεχόμεθα ὅτι) προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι· ἤτοι

$$\delta+(-5)+(+5)=7+(+5).$$

Ἀλλὰ τὸ $(-5)+(+5)$ ἰσοῦται μὲ μηδὲν (ἐπειδὴ εἶνε ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν). Ἄρα ἔχομεν $\delta=7+(+5)$. Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλον, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου».***

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

$$-3-(-5)=-3+(+5)=+2.$$

$$12-(+6)=12+(-6)=+6.$$

$$-\frac{4}{9}-\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{4}{9}+\left(+\frac{2}{9}\right)=-\frac{2}{9}.$$

*23.* Αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως, αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἰσχύουν καὶ ὅταν πρόκειται περὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἀποδεικνύονται δ' ὁμοίως.

*24.* Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $-4-(+5)=-4+(-5)=-9$.

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν $-4$ καὶ προχωροῦμεν ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας. Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν $-7-(-4)=-7+(+4)$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστάνοντος τὸν $-7$ κατὰ τέσσαρας μονάδας πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

## Ἐκτέλεσις οἱασδήποτε ἀφαιρέσεως.

*25.* Εἶνε εὔκολον τώρα νὰ ἴδωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

Μαρία Ζαφειροπούλου.



Ἤτοι, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶνε δυνατή, καὶ ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου. Τῷ ὄντι, ἔχομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα π. χ. ὅτι,

$3-5=3-(+5)=3+(-5)=-2 \cdot \quad 3-7=3+(-7)=-4.$
$10-25=10+(-25)=-15 \cdot \quad 1-24=1-(+24)=$
$1+(-24)=-23 \cdot \quad 0-7=-7 \cdot \quad 0-12=-12.$

## Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραὶ

α′) $8-(-4)$. β′) $-18-(+19)$. γ′) $-14-(-7)$.
δ′) $19-(-27)$.

) Ὁμοίως α′) $0{,}9-(-0{,}13)$. β′) $2{,}25-(-1{,}65)$.

Ὁμοίως α′) $2\frac{5}{6}-\left(-3\frac{1}{3}\right)$· β′) $9\frac{1}{7}-\left(-7\frac{1}{3}\right)$

γ′) $-16\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{13}\right)$

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων α′) $120+19-(-18)$. β′) $-17-(-4)+(+8)$·
γ′) $21{,}4-7{,}14-(-13)$·
δ′) $-5\frac{1}{2}+\left(-6\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)-4\frac{3}{4}$.

2) Ἐπίσης α′) $16-[28+(-8)]-3$·
β′) $-20+[29-10]-[95+(-14)]-[38-(-9)]$.

***Ὁμὰς τρίτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἑξῆς πράξεων.

α′) $2-7$· β′) $8-10$· γ′) $15-22$· δ′) $15-130$· ε′) $125-965$·
ϛ′) $,42-9{,}04$· ζ′) $3-3\frac{3}{4}$. η′) $14-8-6-19{,}5$.

***Ὁμὰς τετάρτη.*** 2) Αὐξάνει τις τὸ ἐνεργητικόν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικόν του κατὰ 384,20 δρ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του; (αὐξ. 768,40,).

2) Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 84,3 δρχ. καὶ αὐξάνει τὸ παθητικόν του κατὰ 64,70 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του; (ἐλατ. 149).

3) Ἀναχωρεῖ τις ἔκ τινος ὡρισμένου σημείου Α. Βαδίζει ἐπ᾿ εὐθείας ὁδοῦ 238 βήματα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β. Πόσα βήματα πρέπει νὰ βαδίσῃ ἐκ τοῦ Β πρὸς τἀριστερά, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον τοῦ Α 3846 βήματα; (4084).

4) Χάνει τις 16,3 δρχ.· πόσα πρέπει νὰ κερδίση διὰ νὰ ἔχη 58,65 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὅσων εἶχεν ἀρχικῶς ; (74,95).

## Πολλαπλασιασμός.

*26.* ***Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, σχηματίζεται ἐκ τοῦ ἑνὸς τρίτος, ὅπως ὁ ἄλλος σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος.***

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ***παράγοντες (πολλαπλασιαστέος*** καὶ ***πολλαπλασιαστής)***, ὁ δὲ προκύπτων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ***γινόμενον.***

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἔχομεν ὅτι.

$(+8).(+3) = (+8) + (+8) + (+8) = (+2\,4) = 24.$

Ὁμοίως

$(-8).(+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24.$

*27.* Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα, π. χ. τοῦ —9 ἐπὶ $\frac{3}{4}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ — 9, καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἤτοι ἔχομεν

$$(-9).\ \frac{3}{4} = \frac{(-9)}{4}.\ \ 3 = \frac{(-27)}{4} = -\,6\ \frac{3}{4}.$$

*28.* Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, «***τὸ γινόμενον ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον θετικόν, ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, σημεῖον δὲ τὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου***».

### *Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμόν.*

*29.* Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον

$$(+\,8).\ \ (-\,3).$$

Τὸ —3 γίνεται ἐκ τῆς +1, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της —1, καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν τρίς. Ἄρα, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(+\,8).\ \ (-\,3),$$

θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον του +8, δηλαδὴ τὸν —8, καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς, ἤτοι θὰ εἶνε

$(+8).(-3) = (-8).\,3 = (-8) + (-8) + (-8) = -\,24.$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν ὅτι,

$$(-8).(-3) = (+\,8).\ 3 = 24.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«τὸ γινόμενον ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, σημεῖον δὲ ἀντίθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου».***

*30.* Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω κανόνος φαίνεται, ὅτι ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων δι' ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς. Ἤτοι ὅτι,

***«τὸ γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων».***

Οὕτω εἶνε $(+8).(-3) = -24, \quad -24 = (-3).(+8)$.

*31.* Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.

***«Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμάς των, καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ δύο παράγοντες εἶνε ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν εἶνε ἑτερόσημοι».***

*32.* Κατὰ τἀνωτέρω προκειμένου περὶ τοῦ σημείου δύο παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου των, θὰ ἔχωμεν ὅτι,

***«τὸ γινόμενον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν».***

***«Τὸ γινόμενον δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶνε ἀρνητικόν».***

*33.* Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἂν εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ἐξ αὐτῶν εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε ἀρνητικόν. Ἂν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε θετικόν. Π. χ.

$$(-3).(+5).(-2).(-1).(-5) = +150.$$
$$(-3).(-2)(-1).(+5) = -30.$$

*34.* Αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως.

## Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ἕν, ἢ ἐπὶ μηδέν.

*35.* Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα (+1) μὲν σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐπὶ (—1) δὲ τὸν ἀντίθετόν του, Οὕτω θὰ εἶνε

$$(-4).1 = -4 \cdot \qquad (+5).1 = +5$$
$$(-5).(-1) = +5 \cdot \qquad (+7).(-1) = -7.$$

*36.* Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ μηδὲν σημαίνει, νὰ θέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἴσον μὲ μηδέν. Οὕτω δεχόμενοι ὅτι, ἡ ἰδιότης τῆς ἐναλλαγῆς τῶν παραγόντων ἰσχύει καὶ ὅταν εἷς τούτων εἶνε 0, ἔχομεν

$(+3).\,0=0.$ Διότι $(+3).\,0=0.\,(+3)=0+0+0=0.$
$(-7).\,0=0.\,(-7)=0.\,7=0,$

ἐπειδὴ ὁ ἀντίθετος τοῦ μηδὲν εἶνε πάλιν μηδέν.

### Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα.

α΄) $(-5).\,(+8)$. β΄) $(+18).\,(-4)$. γ΄) $(-7).\,(+15)$. δ΄) $(-9).\,(-7)$. ε΄) $(+35).\,(-19)$.

2) Ὁμοίως τὰ

α΄) $\left(+1\frac{1}{4}\right).\left(-1\frac{3}{4}\right)$. β΄) $\left(-6\frac{1}{7}\right).\,(-3,7)$

γ΄) $(-8,4).\,(-6,5)$. δ΄) $(-9,8).\,8,5.\,(-4,3).\,(-2,3)$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Ὁμοίως α΄) $(-3,9).\,(-7,6)$. β΄) $(-9,45).\,3,5$. γ΄) $(-9).\ (-7).\,(-3)$. δ΄) $\left(+4\frac{1}{2}\right).\left(-3\frac{1}{6}\right).\,(-6,8)$

2) Ὁμοίως τὰ α΄) $(-16).\,14.\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)$.

β΄) $(-3,1).\,(+6).\,(+8).\,(-7)$. γ΄) $(+7).\,(-4)\,(+8).\,(+3)$

δ΄) $(0,6).\,[\,(+9,74)-0,9.\,(+7,5)\,].\,0,3$.

## Διαίρεσις.

*37.* ***Διαίρεσις ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας, δοθέντων δύο τοιούτων ἀριθμῶν, εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕνα, δίδει γινόμενον τὸν ἄλλον.***

Ὁ εἷς ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ***διαιρετέος,*** ὁ ἄλλος ***διαιρέτης,*** καὶ ὁ ζητούμενος ***πηλίκον,*** τὸ δὲ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ : ***(διά)***.

*38.* Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον $(+8):(+2)$. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$. Διότι τὸ γινόμενον δύο θετικῶν ἀριθμῶν θὰ εἶνε θετικός. Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον 8. Ἄρα θὰ εἶνε ἴση μὲ $8:2=4$, ἤτοι θὰ εἶνε $(+8):(+2)=+4$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι, $(+8):(-2)=-4$.

Ἐπίσης $(-8):(+2)=-4$. $(-8):(-2)=+4$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

***«Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δοθέντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ***

*διαιρετέου καὶ διαιρέτου, καὶ σημεῖον θετικὸν μέν, ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἑτερόσημοι».*

*39.* Ἡ διαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ μηδενὸς εἶνε ***ἀδύνατος***. Διότι, ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $-6:0$, ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0, δίδει γινόμενον τὸν $-6$. Τοῦτο ὅμως εἶνε ἀδύνατον· διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Ἀλλ᾽ οὐδὲ νὰ δημιουργήσωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν εἶνε δυνατόν, ὥστε νὰ καταστήσωμεν τοιαύτην διαίρεσιν δυνατήν. Διότι, ἂν π. χ. ὑπῆρχε νέος τοιοῦτος ἀριθμός, ἔστω ὁ $\alpha$, ὅστις θὰ εἶνε πηλίκον τοῦ $-6:0$, θὰ εἴχομεν $-6=0.\alpha$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἴσους τούτους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 5, (δεχόμεθα ὅτι) προκύπτουν ἴσοι· ἤτοι $-6.5=0.\alpha.5$. Ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων, εὑρίσκομεν $-6.5=0\ 5.\alpha=0.\alpha$ (ἐπειδὴ εἶνε $0.5=0$). Τὸ $-6.5=-30$, τὸ δὲ $0.\alpha=-6$ (ἐξ ὑποθέσεως)· ἄρα θὰ ἔχωμεν $-30=-6$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 0 διά τινος ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ μηδενὸς) ἰσοῦται μὲ 0. Οὕτω π. χ $0:(-7)=0$. Διότι εἶνε $0.(-7)=0$.

*40.* Αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως, αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἰσχύουν καὶ δι᾽ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως.

**Περὶ τοῦ σημείου τοῦ πηλίκου ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.**

*41.* Προκειμένου περὶ τῆς σχέσεως τῶν σημείων τοῦ διαιρετέου, τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, θὰ ἔχωμεν ὅτι,

«*τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν*».

«*Τὸ πηλίκον δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶνε ἀρνητικόν*».

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ τῶν ἐν (§ 32) ἕπεται ὅτι,

***«τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε θετικόν, δύο δ᾽ ἑτεροσήμων ἀρνητικόν».***

*Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα α΄) $(+28):(+4)$. β΄) $(+28):(-7)$. γ΄) $(-45):(+9)$. δ΄) $(-49):9$. ε΄) $(-1543):(-36)$.
2) Ὁμοίως α΄) $(+0{,}95):(-0{,}5)$. β΄) $(-340);1,8$, γ΄) $-143{,}5:-32{,}1$.

δ΄) $5\,\frac{1}{4}:(-0{,}6)$. ε΄) $14\,\frac{1}{6}:\left(-\frac{2}{7}\right)$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα α΄) $(-0):(-9).15$.
β΄) $3\,\frac{2}{3}:\left(-1\frac{4}{5}\right):8$. γ΄) $(-9{,}6):(-26):0{,}7.\,6\,\frac{1}{2}$.

2) Ὁμοίως τὰ α′) $(-34):[-9-8]$. β′) $-18:9-(-4):2$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος x, ὥστε νὰ εἶνε α′) $(-40).\ x=160$. β′) $(-6).\ x=24$. γ′) $12.\ x=-48$. δ′) $31{,}4.\ x=-18{,}84$.

## Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραίους ἀριθμούς.

**42.** Καθὼς (εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν) τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ ἕνα ἀριθμόν, π. χ. τὸ 3. 3. 3. 3, καλοῦμεν ***τετάρτην δύναμιν*** τοῦ 3, καὶ παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ $3^4$, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ, π. χ. τὸ $(-5).(-5)$ καλεῖται ***δευτέρα δύναμις*** τοῦ $(-5)$ καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ $(-5)^2$. Ὁμοίως τὸ $(-3).(-3)$ λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ $-3$, καὶ παριστάνεται μὲ $(-3)^2$.

Τὸ $(-7).(-7).(-7)=$ μὲ $(-7)^3$ καὶ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ $-7$.

Ἐν γένει, «***καλοῦμεν δύναμιν ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ τὸν ἀριθμόν***».

Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται ***ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως. Ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὴν δύναμιν λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως.

Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται καὶ ***τετράγωνον*** τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ τρίτη δύναμις αὐτοῦ καὶ ***κύβος*** τοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι $(-7)^2=(-7).(-7)=49$.

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}.$$

$$\text{τὸ}\quad \alpha^\mu=\underbrace{\alpha\ \alpha\ \ldots\ldots,\ \alpha}_{\mu\ \text{φορὰς}}$$

ὅπου τὸ α φανερώνει ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ μ ἀκέραιον καὶ θετικόν. Τὸ $\alpha^\mu$ καλεῖται μυοστὴ ($\mu^{\eta}$) δύναμις τοῦ α.

### Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων.
α′) $(-6)^3$. β′) $(-9)^2$. γ′) $(+8)^5$. δ′) $(-3)^3$. ε′) $(-7)^5$. ς′) $(-1)^3$.

2) Δείξατε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ θετικὸν εἶνε ἀριθμὸς θετικός, περιττὸν δὲ ἔχουσα εἶνε ἀρνητικός.

### Περὶ τῶν συμβόλων $\alpha^1$ καὶ $\alpha^0$.

*43*. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ ἔχομεν ὅτι,

$$\alpha^5 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha, \qquad \alpha^4 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha$$
$$\alpha^3 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha, \qquad \alpha^2 = \alpha.\ \alpha.$$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὴν δύναμιν ταύτην, διαιρεῖται δι᾽ ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων αὐτοῦ. Ἂν δεχθῶμεν ὅτι τοῦτο ἰσχύει καὶ δι᾽ ἐκθέτας (ἀκεραίους) μικροτέρους τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\alpha^{2-1} = (\alpha.\ \alpha) : \alpha$.

Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{2-1}$ ἰσοῦται μὲ $\alpha^1$, τὸ δὲ $(\alpha.\ \alpha) : \alpha =$ μὲ α.

Ἄρα εἶνε $\alpha^1 = \alpha$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τοῦ $\alpha^1$.

«***Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν***».

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$\alpha^{1-1} = \alpha : \alpha = 1$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{1-1} =$ μὲ $\alpha^0$. Ἄρα εἶνε $\alpha^0 = 1$, ὅταν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός. Ἤτοι ἔχομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν αὐτοῦ $\alpha^0$,

«***τὸ $\alpha^0$ ὅπου τὸ α εἶνε ἀριθμός τις ἀλγεβρικός, διάφορος τοῦ μηδενός, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα***».

Καὶ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

$$(-3)^0 = 1, \qquad 47^0 = 1, \quad (-10)^0 = 1, \qquad \left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1,$$

$$(-2)^1 = -2, \qquad \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}, \qquad 4{,}3^1 = 4{,}3.$$

### Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

*44*. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

«***τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων***».

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βάσις εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ ἐκθέτης θετικὸς καὶ ἀκέραιος. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον

$$\alpha^3.\ \alpha^2, \quad \text{θὰ εἶνε} \quad \alpha^3 = \alpha.\ \alpha.\ \alpha,$$
$$\alpha^2 = \alpha.\ \alpha,$$

καὶ ἐπομένως τὸ $\alpha^3.\ \alpha^2$ εἶνε ἴσον μὲ $\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha = \alpha^5$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $x^4.\ x^2. = x^6$,

καὶ ἐν γένει, τὸ γινόμενον $\alpha^\mu\ .\ \alpha^\nu$ , ὅπου μ καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ α ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, ἰσοῦται μὲ $\alpha^{\mu+\nu}$.

Διότι ἔχομεν ὅτι,

$$\alpha^{\mu} = \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ldots\ \alpha}_{\mu\ \text{φορὰς}}, \quad \alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ldots\ \alpha}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

ἑπομένως εἶνε

$$\alpha^{\mu}.\ \alpha^{\nu} = \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ldots.\alpha}_{\mu\ \text{φορὰς}}\ \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ldots.\alpha}_{\nu\ \text{φορὰς}} = \underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ldots\ \alpha}_{(\mu+\nu)\ \text{φορὰς}} = \alpha^{\mu+\nu}.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, τὸ γινόμενον

$$\alpha^{\mu}.\ \alpha^{\nu}.\ \alpha^{\varrho}.\ \ldots\ldots\ \alpha^{\lambda} = \alpha^{\mu+\nu+\varrho+\ \ldots\ \ldots\ +\lambda},$$

ὅπου τὸ α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, τὰ δὲ μ, ν, ρ, . . . λ ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

***«τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων».***

*45.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(2^3)^2$.

Τοῦτο σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων μὲ τὸ $2^3$, ἤτοι τὸ $2^3.\ 2^3$.

Ἀλλὰ τοῦτο ἰσοῦται κατὰ τὰ ἀνωτέρω μὲ

$$2^{3+3} = 2^{3.2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε,

$$(\alpha^3)^4 = \alpha^{3.4},$$

καὶ ἐν γένει ὅτι,

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu.\nu},$$

ὅπου α μὲν εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, μ καὶ ν δὲ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«ἂν δύναμίς τις ἀριθμοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν».***

## *Ἀσκήσεις.*

Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν

α′) $\left((-2)^2\right)^3$. β′) $\left((-3)^2\right)^2$. γ′) $\left((-1)^2\right)^3$. δ′) $\left((-1)^3\right)^3$

46. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι,

***«διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καθένα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν ταύτην, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα».***

Πράγματι ἔχομεν ὅτι (ἂν τὸ ν εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός),

$$(2.3)^2 = (2.3).\,(2.3) = 2.\,3.\,2.\,3 = 2.\,2.\,3.\,3 = 2^2.\,3^2.$$

$$\big((-5).\,(-3)\big)^3 = (-5).\,(-3).\,(-5).\,(-3).\,(-5).\,(-3).$$
$$= (-5)^3.\,(-3)^3.$$

Καὶ γενικῶς ὅτι,

$$(\alpha\beta\gamma)^\nu = \underbrace{(\alpha\beta\gamma).\,(\alpha\beta\gamma)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(\alpha\beta\gamma)}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

$$= \underbrace{\alpha.\,\alpha.\,\alpha.\,.\,.\,.\,.\,.\,\alpha}_{\nu\ \text{φορὰς}}.\ \underbrace{\beta.\,\beta.\,\beta.\,.\,.\,.\,.\,\beta}_{\nu\ \text{φορὰς}}.\ \underbrace{\gamma.\gamma.\gamma.\,.\,.\,.\,.\,.\,\gamma}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

$$= \alpha^\nu\,.\,\beta^\nu\,.\,\gamma^\nu\,.$$

47. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι,

***«κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων του ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην».***

Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}.$$

Διότι τὸ

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \overbrace{\frac{\alpha}{\beta}.\ \frac{\alpha}{\beta}\ .\,.\,.\,.\ \frac{\alpha}{\beta}}^{\mu\ \text{φορὰς}} = \frac{\overbrace{\alpha.\,\alpha.\,\alpha.\,.\,.\,\alpha}^{\mu\ \text{φορὰς}}}{\beta.\,\beta.\,\beta.\,.\,.\,\beta} = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu},$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, τὰ δὲ α καὶ β ἀριθμοὺς ἀλγεβρικούς.

48. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως $2^5$ διὰ τῆς $2^2$. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι, τὸ πηλίκον τοῦτο $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$. Ἤτοι ὅτι,

***«τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου».***

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βάσις τῶν δυνάμεων εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, οἱ ἐκθέται ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ ἐξαιρέσεως (δηλαδὴ καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου εἶνε μικρότερος ἀπὸ τὸν τοῦ διαιρέτου). Οὕτω π. χ. ἔχομεν

$$\alpha^5 : \alpha^7 = \frac{\alpha^5}{\alpha^7} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2} = \alpha^{5-7}.$$

Ὁμοίως $\quad \alpha^{-2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2 . \alpha^3} = \alpha^{-5} = \alpha^{-2-3}.$

## Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων·

$$5^{-3}, \quad 3{,}5^{-2}, \quad 7^{-2}, \quad 20^{-2}, \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}, \quad \left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}.$$

2) Ὁμοίως τῶν $(-1)^{-3}$, $(-0{,}01)^{-4}$, $\frac{1}{2^{-3}}$, $\frac{1}{5^{-2}}$, $\frac{1}{(-7)^{-4}}$.

3) Θέσατε κατωτέρω ὅπου $x=1, -2, -3$, καὶ εὕρετε μὲ τί ἰσοῦντα τὰ ἐξαγόμενα τῶν α′) $5^{x-1} + 7^x + 3^{x-1}$,

β′) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$.

4) Νὰ εὑρεθῇ μὲ τὶ ἰσοῦνται τὰ $2^5 \cdot 2 \cdot 2^0 \cdot 2^{-2}$, $4^{-3}$, $4^{-3}$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$, $\left(\frac{1}{0{,}1}\right)^{-3}$.

5) Ὁμοίως τῶν $\alpha^{-3} . \alpha^{-4} . \alpha^0 . \alpha^5$, $2^3 . 2^0 . 2^1 . 2^{-8}$, $7^{-8} : 7^{-9}$.

6) Ὁμοίως τῶν $(2\alpha\beta)^{-3}$, $x^\nu . x^{2\nu} : x^{-\nu}$, $5^2 : 5^{-4}$, $(3\alpha^{-3} \beta\gamma^{2-4})^{-2}$.

## Περὶ ἀνισοτήτων.

*53.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι ἂν δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι, π. χ. οἱ 5 καὶ 8, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των αὐτὴν διὰ τοῦ $5<8$ ἢ $8>5$, ἥτις καλεῖται ***ἀνισότης***. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἂν εἰς ἀνίσους (θετικοὺς) ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται. Δεχόμενοι ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἶνε ἀλγεβρικός, ἔχομεν, προσθέτοντες τὸν $-5$ π. χ. εἰς τοὺς δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς 5 καὶ 8, ὅτι $5+(-5)<8+(-5)$· ἢ $0<3$. Ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς 5 καὶ 8 προσθέσωμεν τὸν $-8$, θὰ ἔχωμεν $5+(-8)<8+(-8)$· ἢ $-3<0$.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ἐν γένει ὅτι,

***«Τὸ 0 εἶνε μικρότερον μὲν παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, μεγαλύτερον δὲ παντὸς ἀρνητικοῦ».***

*54.* Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $5>0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 5 καὶ 0 προσθέσωμεν τὸν $-7$ π. χ., εὑρίσκομεν $5+(-7)>0+(-7)$ ἢ $-2>-7$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ἐν γένει ὅτι,

***«ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶνε ὁ ἀπολύτως μικρότερος».***

*55.* Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $8>0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 8 καὶ 0 προσθέσωμεν π. χ. τὸν $-3$, εὑρίσκομεν $8+(-3)>0+(-3)$ ἢ $5>-3$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ἐν γένει ὅτι,

***«πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ».***

Λέγομεν ὅτι, ***«ἀλγεβρικός τις ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος μὲν ἄλλου, ἂν ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἶνε θετική, μικρότερος δὲ ἂν εἶνε ἀρνητική».***

Κατὰ ταῦτα ἂν δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶνε ἄνισοι καὶ ὁ α μεγαλύτερος τοῦ β, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των ταύτην συμβολικῶς διὰ τοῦ $α>β$ ἢ $β<α$, ἥτις καλεῖται ***ἀνισότης*** καὶ τότε ἡ διαφορὰ $α-β$ εἶνε θετικὸς ἀριθμός. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ***μέλη*** τῆς ἀνισότητος.

## *Ἰδιότητες.*

*56.* Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες $α>β$ καὶ $γ>δ$, ὅτε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $α-β=$θετικὸς ἀριθμός, καὶ $γ-δ=$θετικὸς ἀριθμός.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ $α-β$ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ $γ-δ$ ὁμοίως θετικός, τὸ $α-β+γ-δ$ θὰ εἶνε θετικός, ἤτοι τὸ $(α+γ)-(β+δ)=$θετικός. Ἑπομένως εἶνε καὶ $α+γ>β+δ$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ***«ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους οὕτως, ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον, καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται».***

Οὕτω π. χ. ἂν ἔχωμεν τὰς $-5>-12$ καὶ $-3>-10$, προσθέτοντες τοὺς μεγαλυτέρους καὶ τοὺς μικροτέρους χωριστά, εὑρίσκομεν $-5-3>-12-10$ ἢ $-8>-22$.

*57.* Ἔστω ὅτι ἔχομεν $α>β$, ὅτε θὰ εἶνε $α-β>0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους $α-β$ καὶ 0 προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμὸν γ, θὰ ἔχωμεν $α-β+γ>γ$. Ἂν δ' εἰς τοὺς ἀνίσους $α-β+γ$ καὶ γ προσθέσωμεν τὸν β θὰ ἔχωμεν $α-β+γ+β>γ+β$, ἢ $α+γ>β+γ$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

*«ἂν εἰς ἀνίσους ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται».*

**58.** Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε εἶνε $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμός. Ἂν λ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ταῦτα ἴσα ἐπὶ λ, θὰ ἔχωμεν $(\alpha - \beta).\lambda =$ θετ. $\times$ θετ. $=$ θετ. ἀριθμός· ἢ $\alpha.\lambda - \beta.\lambda =$ θετικός. Ἑπομένως εἶνε $\alpha.\lambda > \beta.\lambda$.

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ λ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ἂν τὰ ἴσα $\alpha - \beta =$ θετ. ἀριθμός, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν λ, θὰ εὕρωμεν $(\alpha - \beta).\lambda =$ θετ. ἀριθμὸς $\times$ ἀρνητικὸν $=$ ἀρνητικός. Ἑπομένως εἶνε $\alpha.\lambda - \beta.\lambda =$ ἀρνητικός· ἤτοι $\alpha.\lambda < \beta.\lambda$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

*«ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ θετικὸν μὲν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται, ἐπὶ ἀρνητικὸν δὲ ἀντιστρέφεται».*

Οὕτω ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5 > -8$ ἔχομεν $-5.4 > -8.4$, ἤτοι $-20 > -32$, ἐνῷ ἐκ τῆς $6 < 10$ εὑρίσκομεν (διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ $-2$) τὴν $6.(-2) > 10.(-2)$ ἢ $-12 > -20$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔχομεν ὅτι, *«ἂν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ — 1, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται».* Π. χ. ἐκ τῆς $3 < 5$ ἔχομεν $3.(-1) > 5.(-1)$ ἢ $-3 > -5$.

**59.** Ἐὰν εἶνε $\alpha > \beta$ θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu > \beta^\mu$, ἂν οἱ α καὶ β εἶνε θετικοὶ ἀριθμοὶ τὸ δὲ μ καὶ ἀκέραιος.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν ἔχωμεν

$\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, εἶνε δὲ οἱ α, β, γ, δ θετικοί, θὰ εἶνε καὶ $\alpha.\gamma > \beta.\delta$. Διότι ἀφοῦ εἶνε $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$ θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\alpha - \beta = \text{θετ. ἀριθ., ἢ } \alpha = \beta + \text{θετικόν.}$$
$$\gamma - \delta = \text{θετ. ἀριθ., ἢ } \gamma = \delta + \text{θετικόν.}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\alpha.\gamma = \beta\delta + \beta.\ \text{θετ.} + \delta.\ \text{θετ.} + \text{θετ.} \times \text{θετικόν.}$$

Δηλαδὴ $\alpha\gamma - \beta\delta =$ θετ. ἀριθμός.

Ἑπομένως εἶνε $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Κατὰ ταῦτα ἐπειδὴ εἶνε $\begin{cases} \alpha > \beta \\ \alpha > \beta \end{cases}$ θὰ ἔχωμεν κατὰ τἀνωτέρω,

$\alpha.\alpha > \beta.\beta$, ἢ $\alpha^2 > \beta^2$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^3 > \beta^3$ καὶ γενικῶς $\alpha^\mu > \beta^\mu$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha > \beta$, θὰ εἶνε $\alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}$, ἂν α καὶ β εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ καὶ ἀκέραιος.

Διότι ἀφοῦ εἶνε $\alpha > \beta$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $\frac{1}{\alpha\,\beta}$, Από όλα τα κορίτσια του Σχολείου αγαπώ ξεχωριστό έρον την Κούλα Φραγκογιάννη.



Μαρία Γ. Ξ...

εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\alpha\beta} > \frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta}, > \frac{1}{\alpha}$, ἢ $\alpha^{-1} < \beta^{-1}$.

Ἐγὼ αυτήν δεν την αγαπώ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{-2} < \beta^{-2}$, καὶ γενικῶς $\alpha^{-\mu} < \beta^{-\mu}$.

Μαρία

*Ἀσκήσεις.*

1) Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶνε ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ τὰ ~~ὑψώσωμεν~~ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.

2) Ἐὰν εἶνε $\alpha > 1$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{\mu} < 1$, ἂν τὸ μ εἶνε ἀρνητικός.

3) Ἐὰν εἶνε $0 < \alpha < 1$, θὰ εἶνε $\alpha^{\mu} > 1$, ἂν τὸ μ εἶνε ἀρνητικός.

4) Ἂν εἶνε $\alpha > 1$, θὰ εἶνε $\alpha^{-3} < \alpha^{-2} < \alpha^{-1} < \alpha^{0} < \alpha < \alpha^{2}$...,

5) Ἂν εἶνε τὸ α θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{-3} > \alpha^{-2} > \alpha^{-1} > \alpha^{0} > \alpha > \alpha^{2}$ ...

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

## *Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.*

### **Χρήσεις γραμμάτων. Γενικοὶ ἀριθμοί. Ἀλγεβρικοὶ τύποι.**

*60.* Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὑπάρχουν πολλὰ προβλήματα ὅμοια μεταξύ των, διαφέροντα μόνον κατὰ τὰς τιμὰς τῶν δεδομένων των, τὰ ὁποῖα λύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἢ τὸν αὐτὸν κανόνα. Οὕτω π. χ. τὰ ἑξῆς προβλήματα.

***1) Αἱ 4 ὀκάδες ἑνὸς πράγματος τιμῶνται 8 δρ.· πόσον τιμῶνται αἱ 6 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ πράγματος;***

***2) Οἱ 5 πήχεις ἑνὸς ὑφάσματος τιμῶνται 36 δρ.· πόσον τιμῶνται οἱ 30 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;***

Εἰς ἕκαστον τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, καὶ εἰς τὰ ὅμοια πρὸς αὐτά, δίδεται ἡ τιμὴ πλήθους μονάδων (4 ὀκ., 5 πήχ.) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ ἄλλου πλήθους μονάδων (6 ὀκ., 30 πήχ.) Ὡς εἶνε γνωστόν, πρὸς λύσιν τούτων ἀρκεῖ, νὰ διαιρέσωμεν τὴν τιμὴν τῶν δοθεισῶν μονάδων διὰ τοῦ πλήθους τῶν μονάδων τούτων, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν μονάδων, τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν τιμήν. Οὕτω διὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα ἔχομεν ὡς ἐξαγόμενον τὸ

$$\frac{8}{4} \cdot 6 \text{ δρ.}, \text{ διὰ δὲ τὸ δεύτερον } \frac{36}{5} \cdot 30 \text{ δρ.}$$

Χάριν γενικότητος καὶ διὰ τὴν συντομίαν, ἀντὶ νὰ μεταχειριζώμεθα τὰς ἐκφράσεις «*ἀριθμός τις ὀκάδων, πήχεων κλπ.*» ἔχει μίαν δοθεῖσαν ***τιμήν***, μεταχειριζόμεθα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, διὰ νὰ παραστήσωμεν ποσότητας, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ δὲν εἶνε μὲν ἀμέσως ὡρισμένη, ἀλλ' ἡ ὁποία ὁρίζεται, ὅταν τὰ γράμματα ἀντικατασταθοῦν δι' ὡρισμένων ἀριθμῶν. Οὕτω, ἂν ἀντὶ τῶν ἐν λόγῳ γραμμάτων θέσωμεν διαφόρους ἀριθμούς, λαμβάνομεν διάφορα προβλήματα, διαφέροντα μόνον κατὰ τὰς δεδομένας τιμάς, ἀλλὰ λυόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ κανόνος. Π. χ. ἀντὶ τῶν ἀνωτέρῳ δύο προβλημάτων λύομεν τὰ ἑξῆς γενικώτερον.

«***Ἐὰν α μονάδες (ἀκέραιαι ἢ κλασματικαὶ) ἑνὸς πράγματος τιμῶνται β δρ., πόσον τιμῶνται γ μονάδες τοῦ αὐτοῦ πράγματος;***»

Πρὸς λύσιν αὐτοῦ λέγομεν·

ἀφοῦ αἱ **α** μονάδες ἀξίζουν ***β*** δρ., διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμᾶται ἡ 1 μονὰς τοῦ αὐτοῦ πράγματος, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰς ***β*** δρ. διὰ τοῦ α. Ἤτοι ἡ μία μονὰς θὰ τιμᾶται $\frac{\beta}{\alpha}$ δρ. Καὶ γ μονάδες θὰ τιμῶνται $\frac{\beta}{\alpha}\cdot\gamma$ δρ. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γράμματος x τὴν ζητουμένην τιμὴν τῶν γ μονάδων, θὰ ἔχωμεν

$$x = \frac{\beta}{\alpha}.\ \gamma \text{ δρ.}$$

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, οἱ ὁποῖοι παριστάνονται μὲ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, καὶ δύνανται νὰ εἶνε ἀλγεβρικοί, ἢ καὶ ἀπόλυτοι, λέγονται ***γενικοὶ ἀριθμοί***.

*61.* Ἡ γραφὴ τοῦ ἀνωτέρω ἐξαγομένου καλεῖται ***τύπος***, καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς). Τοιούτους τύπους καὶ τοιαύτας γραφάς, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν κατὰ τὴν λύσιν διαφόρων προβλημάτων, μεταχειριζόμενοι ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, καλοῦμεν ***ἀλγεβρικοὺς τύπους***. Οὕτω εὑρίσκομεν (εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν) διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τόκου Τ, ὅταν γνωρίζωμεν ***τὸ ἐπιτόκιον, τὸ κεφάλαιον καὶ τὸν χρόνον***, (εἰς ἔτη), παριστάνοντες αὐτὰ ἀντιστοίχως διὰ τῶν γραμμάτων Ε, Κ, Χ, τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον

$$T = \frac{K.\ E.\ X.}{100}.$$

Ἐπίσης διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ χρόνου (εἰς ἔτη) ἔχομεν,

$$X = \frac{T.\ 100}{K.\ E.} \quad \text{κ. ο. κ.}$$

## Ὁρισμὸς καὶ σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας.

**62.** Ἡ *Ἄλγεβρα* εἶνε γενικωτέρα τῆς Ἀριθμητικῆς, σκοπὸς δ' αὐτῆς εἶνε νὰ λύῃ τὰ διάφορα προβλήματα ἐκείνης, καὶ πολλὰ ἄλλα σχετικὰ πρὸς ἐκεῖνα, ἢ καὶ μή, διὰ γενικωτέρου τρόπου καὶ διὰ συλλογισμῶν γενικωτέρων, μὲ τὴν βοήθειαν τῆς χρήσεως τῶν γραμμάτων καὶ τῶν ἀλγεβρικῶν τύπων.

Θὰ παριστάνωμεν συνήθως τὸν μὲν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους ζητοῦμεν εἰς τὰ διάφορα προβλήματα, διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x, y, ω, φ, . . ., τοὺς δὲ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ὑποτίθενται γνωστοί, διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων **α, β, γ. . . .**

### Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ κεφάλαιον Κ (ἢ τὸ ἐπιτόκιον Ε), ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐπιτόκιον Ε (ἢ τὸ κεφάλαιον Κ) τὸν χρόνον Χ εἰς ἔτη καὶ τὸν τόκον Τ. **)

2) Εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν τιμὴν α μονάδων ἑνὸς πράγματος, ὅταν ἡ μία μονὰς αὐτοῦ τιμᾶται $\frac{\beta}{\gamma}$ δρ.

3) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ ἀνωτέρω τύπου, ὅταν εἶνε $\alpha = \frac{4}{9}$ (ἢ 3,6), $\beta = 6{,}4 \left(\text{ἢ } 4\frac{1}{3}\right)$, $\gamma = 6\frac{1}{5}$ (ἢ 7,82).

4) Ποῖοι τύποι δίδουν τὰ μερίδια x, y, ω, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς Κ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν λ, μ, ν ;

5) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν ἀνωτέρω τύπων, ὅταν εἶνε $K = 38\,000$, $\lambda = 4$, $\mu = \frac{1}{3}$, $\nu = \frac{6}{7}$.

6) Ποῖος τύπος δίδει τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ ;

7) Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ τύπου τούτου, ὅταν εἶνε $\alpha = 6{,}8 \left(\text{ἢ } 4\frac{1}{3}\right)$, $\beta = 12 \left(\text{ἢ } 2\frac{3}{4}\right)$, $\mu = \frac{1}{5}$ (ἢ 13,3).

**) Ἀντὶ νὰ ἐπαναλαμβάνεται ἡ διατύπωσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος μὲ διάφορα δεδομένα, γράφομεν πρὸς συντομίαν (καὶ εἰς τὰ κατωτέρω) τὰ νέα δεδομένα ἐν παρενθέσει.

## Συμβολικὴ παράστασις πράξεων.

*63.* Ἐὰν δοθοῦν οἱ γενικοὶ ἀριθμοὶ **α, β, γ**, καὶ προστεθοῦν οἱ **α** καὶ **β**, εἰς τὸ ἄθροισμα δὲ τούτων προστεθῇ ὁ **γ**, θὰ ἔχωμεν ἐξαγόμενον τὸν τύπον, $(\alpha+\beta)+\gamma$.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν **α** καὶ **β** ἀφαιρεθῇ ὁ **γ**, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha+\beta)-\gamma,$$

ὅπου τὸ **(α+β)** παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν **α** καὶ **β**.

Ἤτοι, ἐὰν εἰς τὸ ἄθροισμα (ἢ τὴν διαφορὰν) δύο ἀριθμῶν θέλωμεν νὰ προσθέσωμεν ἢ ἀφαιρέσωμεν τρίτον, θέτομεν τοὺς δύο πρώτους μὲ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον τοὺς συνδέει, ἐν παρενθέσει ἢ ἐν ἀγκύλαις, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο συνδέομεν μὲ τὸν τρίτον διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως. Ὁμοίως τὸ α—**(β—γ)** φανερώνει ὅτι, ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν **α** θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ **(β—γ)**.

Ἄθροισμα ἴσων προσθετέων γράφομεν συντόμως, γράφοντες ἕνα μόνον τῶν προσθετέων, καὶ πρὸ αὐτοῦ ὡς παράγοντα τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, μὲ τὸ σημεῖον σὺν μέν, ἂν οἱ προσθετέοι εἶνε θετικοί, μὲ τὸ πλὴν δέ, ἂν εἶνε ἀρνητικοί. Οὕτω ἀντὶ τοῦ $\alpha+\alpha+\alpha$ γράφομεν $3\alpha$ ἀντὶ τοῦ $(-\beta)+(-\beta)+(-\beta)$ τὸ $-3\beta$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον, τὸ μὲν γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν π. χ. τοῦ **α** καὶ **β** παριστάνεται ὑπὸ **α.β** ἢ τοῦ **αβ**, τὸ δὲ πηλίκον τοῦ **α** καὶ τοῦ **β** ὑπὸ τοῦ **α : β** ἢ ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$.

## Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.

*64.* Τὰ διάφορα σύμβολα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα εἰς τὴν Ἄλγεβραν διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ σημεῖον ἑνὸς ἀριθμοῦ, ***σὺν*** (+) ἢ ***πλὴν*** (—), τὸ γινόμενον (.), τὸ πηλίκον (:), τὸ ἄθροισμα (+), τὴν διαφορὰν (—), τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ($\sqrt{\ }$) ἀριθμῶν κτλ., καλοῦμεν ***ἀλγεβρικὰ σύμβολα.***

## Ὁρισμὸς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

*65.* ***Ἀλγεβρικὴ παράστασις καλεῖται τὸ σύνολον ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ γραμμάτων, συνδεομένων δι' ἀλγεβρικῶν συμβόλων».***

Οὕτω ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις εἶνε αἱ

$$\alpha+\beta,\quad \alpha+\beta-(\gamma+\delta),\quad \alpha,\quad 5\alpha,\quad \beta\gamma,\quad 6\alpha+\beta-8\gamma.$$

Ἐκ τούτων ἡ παράστασις $\alpha+\beta$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β. Ἡ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β, καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἀφαιρεθῇ τὸ $\gamma+\delta$. Ἡ παράστασις α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α, κτλ.

**66.** Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ***ἰσοδύναμοι,*** ἐὰν προκύπτῃ ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Οὕτω π. χ. αἱ $\alpha^2+\alpha\beta$ καὶ $\alpha(\alpha+\beta)$ εἶνε ἰσοδύναμοι· διότι, ἂν εἰς τὴν δευτέραν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ α ἐπὶ τὸ $(\alpha+\beta)$ εὑρίσκομεν τὴν πρώτην $\alpha^2+\alpha\beta$.

## Εἴδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

**67.** Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ***ῥητή,*** ἐὰν τὰ μόνα σημεῖα τῶν πράξεων, τὰ ὁποῖα εἶνε σημειωμένα ἐπὶ τῶν γραμμάτων αὐτῆς, εἶνε τῆς προσθέσεως, τῆς ἀφαιρέσεως, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἢ ὑψώσεως εἰς δύναμιν ἀκεραίαν) ἢ διαιρέσεως, ὄχι δὲ ἐξαγωγῆς ῥίζης. Οὕτω αἱ παραστάσεις

$$\frac{\alpha}{\ }, \quad 3\alpha\sqrt{3}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}+\alpha^2\beta, \quad \frac{x}{3\sqrt{13}}+y$$

εἶναι ῥηταί, διότι ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχουν, εἶνε σημειωμένη ῥίζα τις.

Παράστασις ἀλγεβρικὴ λέγεται ***ἄρρητος,*** ἐὰν τουλάχιστον ἐπὶ ἑνὸς τῶν γραμμάτων αὐτῆς εἶνε σημειωμένη ῥίζα τις. Π. χ. αἱ παραστάσεις.

$$\alpha+\sqrt{\beta}, \quad \alpha-\sqrt{\alpha^5\beta}, \quad 6\sqrt{x}+y$$

εἶνε ἄρρητοι.

***(Θὰ ἀσχοληθῶμεν κατωτέρω κυρίως μὲ ῥητὰς παραστάσεις).***

**68.** Παράστασίς τις λέγεται ***ἀκεραία,*** ἐὰν δὲν περιέχῃ καμμίαν διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ καὶ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων της. Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha+\beta, \quad 8\alpha^3-\frac{3}{4}\alpha^2\beta+\gamma, \qquad \frac{4}{5}\alpha^2$$

λέγονται ἀκέραιαι, ἐνῷ τοὐναντίον αἱ

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{12\alpha^2-\beta}{\alpha+\beta}, \quad \frac{3}{5}\alpha^2+\frac{\beta^3}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$$

λέγονται ***κλασματικαὶ*** ἢ ***ἀλγεβρικὰ κλάσματα,*** ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιέχει διαίρεσιν διὰ τοῦ β, ἡ δευτέρα διὰ τοῦ $α+β$, ἡ τρίτη διὰ τοῦ $α^2$, κ.ο.κ.

### Ἀσκήσεις.

1) Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶνε ῥηταί; Ἄρρητοι; Ἀκέραιαι; Κλασματικαί; Διατί;

α′) $9α^2β—αβ^2$ β′) $\sqrt{28α^2β}$. γ′) $8\sqrt{xy}—9α$. δ′) $\dfrac{α}{β}+\dfrac{19β^2}{γ}$.

2) Αἱ παραστάσεις α′) $\sqrt{α^2}$. β′) $\sqrt{(α+β)^2}$. γ′) $\dfrac{7γ}{\sqrt[3]{δ^3}}$

εἶνε ῥηταὶ ἢ ἄρρητοι; Διατί;

3) Εὕρετε παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι μόνον φαινομενικῶς εἶνε ἄρρητοι.

4) Αἱ κατωτέρω παραστάσεις εἶνε ἀκέραιαι, ἢ κλασματικαί; Διατί;

α′) $\dfrac{9α^2β}{5α}$. β′) $\dfrac{16α(α—β)^2}{7.(α—β)}$. γ′) $\dfrac{6γ^2xy^2}{5γxy^2}$.

## Περὶ μονωνύμων.

69. *«Μονώνυμον λέγεται παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σημειωμένη».*

Π. χ. αἱ παραστάσεις

$$α,\quad —6\,xy^2,\quad \frac{3}{7}αβγδ,\quad —\frac{8\,αβ}{9\,γδ}$$

λέγονται μονώνυμα.

***Ἀκέραιον*** λέγεται ἓν μονώνυμον, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων του περιέχῃ. Ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ διαίρεσιν, λέγεται ***κλασματικόν***. Οὕτω ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τὰ μὲν τρία πρῶτα εἶνε ἀκέραια, τὸ δὲ τελευταῖον κλασματικόν.

70. Ἐὰν εἰς τὸ μονώνυμον ὑπάρχῃ ἀριθμητικός τις παράγων, γράφεται οὗτος πρῶτος, καὶ λέγεται ***συντελεστὴς*** τοῦ μονωνύμου. Οὕτω εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα οἱ συντελεσταὶ εἶνε κατὰ σειρὰν οἱ

$$1,\quad —6,\quad \frac{3}{7},\quad —\frac{8}{9}.$$

Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου δύναται νὰ λέγεται ***κύριον ποσὸν*** αὐτοῦ, εἶνε δὲ αὐτὰ εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα κατὰ σειρὰν τὰ

$$α,\quad xy^2,\quad αβγδ,\quad \frac{αβ}{γδ}.$$

Εἰς τὰ μονώνυμα, τὰ μὴ ἔχοντα συντελεστήν, ἐννοοῦμεν τοιοῦτον τὴν θετικὴν μονάδα. Π. χ. τοῦ α συντελεστὴς εἶνε ἡ μονάς· διότι τὸ α δύναται νὰ γραφῇ 1. α ἐνῷ τοῦ —α εἶνε ὁ —1, ἐπειδὴ γράφεται —1. α.

Ἂν ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἑνὸς ἀριθμητικοὶ παράγοντες εἰς ἓν μονώνυμον, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ γινομένου των, τὸ ὁποῖον γράφεται ὡς πρῶτος παράγων αὐτοῦ καὶ εἶνε ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου. Οὕτω ἂν ἔχωμεν $-\alpha^2\beta\frac{4}{5}\gamma^3$, γράφομεν

$(-1).\frac{4}{5}\alpha^2\beta\gamma^3$ ἢ $-\frac{4}{5}\alpha^2\beta\gamma^3$ καὶ ὁ $-\frac{4}{5}$ εἶνε ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου τούτου.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἕπεται ὅτι, τὰ μονώνυμα τὰ ἔχοντα θετικὸν συντελεστὴν (ἢ μονάδα), θὰ ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον +, τα δὲ ἔχοντα ἀρνητικὸν συντελεστὴν τὸ —. Οὕτω τὰ μονώνυμα

$$\alpha,\quad -9xy,\quad 8\,\alpha.\beta\gamma.\delta,\quad \frac{-2\alpha\beta}{9\gamma\delta}$$

γράφονται καὶ οὕτω $(+1).\alpha$, $(-9).\ xy$, $(+8).\ \alpha\beta\gamma\delta$, $\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$.

Ὥστε, τὸ πρὸ τοῦ μονωνύμου γραφόμενον σημεῖον + ἢ — εἶνε τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ, καὶ δεικνύει τὸ εἶδος τούτου, τὸ δε κύριον ποσὸν τοῦ μονωνύμου θεωρεῖται ὅτι εἶνε θετικόν. Δύο μονώνυμα λέγονται ἀντίθετα, ἂν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τῶν συντελεστῶν αὐτῶν, ὡς τὰ $25\alpha^2$ καὶ $-25\alpha^2$.

**71. *Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τὸ μονώνυμον.*** Π. χ. τοῦ μονωνύμου $7\,\alpha^3\,\beta$, ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ γράμμα α εἶνε 3, ὡς πρὸς δὲ τὸ β ὁ 1· τοῦ $\frac{3}{4}\alpha^3\ \beta^2\ \gamma$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶνε 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 2, καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

Ἐὰν ἓν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμός του ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτὸ εἶνε μηδέν. Π.χ. τὸ μονώνυμον $3\alpha^2$ εἶνε μηδεν βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ β. Διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3\alpha^2$ τὸ $3\alpha^2\beta^0$, ἐπειδὴ εἶνε $\beta^0=1$. Καὶ τῷ ὄντι, εἶνε $3\alpha^2\beta^0=3\alpha^2.\ 1=3\alpha^2$.

***Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα γράμ-***

***ματά του λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα εἰς τὸ μονώνυμον.***

Π. χ. τὸ μονώνυμον $\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3\gamma$ εἶνε πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς β καὶ γ, τρίτου ὡς πρὸς α καὶ γ, καὶ ἕκτου ὡς πρὸς α, β, γ.

*Ἀσκήσεις.* Τίνος βαθμοῦ εἶνε καθὲν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς α καὶ β; ὡς πρὸς α ; ὡς πρὸς β ; ὡς πρὸς γ ; ὡς πρὸς α,β,γ ;

α΄) $13\,\alpha^2\beta\gamma^5$. β΄) $\frac{11}{32}\alpha^3\delta^2\gamma$. γ΄) $\frac{24}{19}\alpha\beta^5\gamma^2$. δ΄) $-3\alpha^3\beta^2\gamma^3$.

72. Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ***ὅμοια,*** ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν, διαφέρουν δὲ κατὰ τοὺς συντελεστάς των (ἂν διαφέρουν). Οὕτω τὰ μονώνυμα $6\alpha$, $\frac{2}{7}\alpha$, $-23\alpha$ εἶνε ὅμοια, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν α, διαφέρουν δὲ μόνον κατὰ τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν. Ἐπίσης τὰ $-\frac{39}{47}\beta$, $6\beta$, $-17\beta$ εἶνε ὅμοια, ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν τὸ β, καθὼς εἶνε ὅμοια καὶ τὰ

$12\alpha^2\beta$, $-15\alpha^2\beta$, $23\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$, ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν $\alpha^2\beta$, καὶ διαφόρους τοὺς συντελεστάς των.

Μονώνυμα λέγονται ὅμοια ὡς πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα αὐτῶν, ἂν ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας. Οὕτω τὰ μονώνυμα $5\alpha^2\beta\gamma$, $-6\alpha^2\beta\delta^2$, $18\alpha^2\beta\delta$ εἶνε ὅμοια ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτῶν α καὶ β, ὡς ἔχοντα ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

## Πρόθεσις μονωνύμων.

73. Καλοῦμεν πρόσθεσιν δοθέντων μονωνύμων (ἢ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας γράφομεν τὰ δοθέντα μονώνυμα τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, καθὲν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως μονωνύμων λέγεται ἄθροισμα αὐτῶν. Οὕτω ἡ πρόσθεσις τῶν μονωνύμων $9\alpha^2$, $-15\beta^2$, $\frac{6}{\gamma^3}$ δίδει ἄθροισμα τὸ $9\alpha^2-15\beta^2+\frac{6}{\gamma^3}$.

*«Τὸ ἄθροισμα δοθέντων ὁμοίων μονωνύμων εἶνε μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων».*

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων $3\alpha$ καὶ $4\alpha$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶνε τὸ $3\alpha + 4\alpha$, τὸ ὁποῖον $=$ μὲ $(3+4).\alpha$. Διότι ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον (κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον τῆς Ἀριθμητικῆς), εὑρίσκομεν $(3+4).\alpha = 3\alpha + 4\alpha$. Ἀλλὰ τὸ $3+4=$ μὲ $7$· ἄρα εἶνε $3\alpha + 4\alpha = (3+4).\alpha = 7\alpha$.

Ὁμοίως ἔχομεν $-3\alpha + 4\alpha + \frac{2}{3}\alpha - 13\alpha = \left(-3+4+\frac{2}{3}-13\right).\alpha$

Καὶ ἐπειδὴ εἶνε $-3+4+\frac{2}{3}-13 = -12+\frac{2}{3} = -\frac{36}{3}+\frac{2}{3}$ $= -\frac{34}{3}$, ἔπεται ὅτι ἔχομεν ἐξαγόμενον τὸ $-\frac{34}{3}\alpha$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν $2\alpha^2\beta - 6\alpha^2\beta + 13\alpha^2\beta - \alpha^2\beta = (2-6+13-1)\,\alpha^2\beta = 8\alpha^2\beta$.

*«Καλοῦμεν **ἀναγωγὴν** ὁμοίων μονωνύμων τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν δι' ἑνὸς τοιούτου ἴσου μὲ τὸ ἄθροισμα».*

## Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

**74.** Καλοῦμεν ***ἀριθμητικὴν τιμὴν*** ἀλγεβρικῆς τινος παραστάσεως τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον ἐὰν τὰ εἰς τὴν παράστασιν ὑπάρχοντα γράμματα ἀντικαταστήσωμεν δι' ἀριθμῶν ὡρισμένων καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἵτινες σημειοῦνται εἰς αὐτήν.

Οὕτω, ἐὰν εἶνε $\alpha = 3$ ἡ παράστασις $4\alpha$ ἔχει τὴν τιμὴν $4.\,3 = 12$. Ἡ παράστασις $\alpha^4 = \alpha.\,\alpha.\,\alpha.\,\alpha$, ὅταν εἶνε $\alpha = 3$ ἔχει τὴν τιμὴν $3.\,3.\,3.\,3. = 81$. Ἐὰν εἶνε $\alpha=5, \beta=6, \gamma=7$, ἡ παράστασις $\frac{9}{14}\,\alpha\,\beta\,\gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $\frac{9}{14}\,5.\,6.\,7. = 135$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = -2, \beta = 1, \gamma = 5$, ἡ παράστασις $3\alpha^2 - 5\beta + 2\gamma$ ἔχει τὴν τιμὴν $3.\,(-2)^2 - 5.1 + 2.5 = 12 - 5 + 10 = 17$.

Ἐὰν εἶνε $x = 2$, $y = 3$, $\omega = 4$, ἡ παράστασις $\frac{8x^2y}{3\omega^3}$ ἔχει τὴν τιμὴν

$$\frac{8.\ 2.\ 2.\ 3.}{3.\ 4.\ 4.\ 4.} = \frac{1}{2}.$$

## Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α′) $\alpha\mu + 4\mu$· β′) $-8\mu + (-6\mu)$· γ′) $-4\mu + 7\mu$. δ′) $5\mu + (-9\mu)$. ε′) $8\alpha + \alpha + 9\alpha$· στ′) $\varrho + 7\varrho + (6\varrho - 3\varrho)$· ζ′) $7x + (-8x) + 6x$· η′) $9\alpha + (-6\alpha + \alpha)$. ϑ′) $-\alpha + 9\alpha + [(-3\alpha) + 9\alpha]$.

2) Ὁμοίως τὰ α′) $-8\mu + \mu$· β′) $10\mu - (-\mu)$· γ′) $-9\mu - \mu$· δ′) $-7\mu - (-\mu)$· ε′) $8x - 10x - 6x$. στ′) $-\varrho + 15\varrho - (-6\varrho - 9\varrho)$·

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαί των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α′) $-6x + 7y + (-3x)$, ὅταν εἶνε $x = -3$, $y = 4$.

β′) $-7x + [(-8x) + 4]$, ὅταν εἶνε $x = 0$.

γ′) $-9x + (-7y) + (-3y + (-6x)$, ὅταν εἶνε $x = 3$, $y = -4$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν

α′) $\alpha^3 - 6\alpha^2\beta + \beta^3$ ὅταν εἶνε $\alpha = 2$, $\beta = 6$.

β′) $\frac{(\alpha + \beta,\ (\alpha - 3\beta)}{6\alpha - 2\beta}$ ὅταν εἶνε $\alpha = 2$, $\beta = 5$.

γ′) $\alpha\ (\beta - \gamma) + \beta\ (\gamma - \alpha)$, ὅταν εἶνε $\alpha = -2$, $\beta = -2$, $\gamma = -1, 7$.

5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων

α′) $(\alpha + \beta)\ [\alpha^2 - (\beta^2 - 6\alpha\gamma)]$, ὅταν εἶνε $\alpha = -5$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$.

β′) $\sqrt{\alpha^3 - 2\beta} - 4\gamma - 2\sqrt{4\alpha^2 + \beta}\cdot(\alpha + \gamma)$, ὅταν εἶνε $\alpha = 9$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$.

## Περὶ πολυωνύμων.

**75.** ***Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶνε πάντα ὅμοια.***

Οὕτω τὰ $3\alpha^2 + 5\alpha\beta\gamma - 13\gamma^2$, $8\alpha^2 - 2\alpha\beta + 4\gamma^2 - 6\gamma\delta$ εἶνε πολυώνυμα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $3\alpha^2$, $5\alpha\beta\gamma$, $-13\gamma^2$, τὸ δὲ δεύτερον τῶν $8\alpha^2$, $-2\alpha\beta$, $4\gamma^2$, $-9\gamma\delta$.

Καθὲν μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ **ὅρος** αὐτοῦ, θεωρεῖται δὲ θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἂν ὁ συντελεστής αὐτοῦ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$ ἢ $-$, δύναται δὲ εἷς ὅρος νὰ εἶνε καὶ ἀριθμός τις. Πολυώνυμόν τι λέγεται ***διώνυμον*** μέν, ἐὰν ἔχῃ δύο ὅρους, καθὼς τὰ

$$\alpha + \beta, \qquad \alpha^2 + \beta^2, \qquad x^2 + 6,$$

*τριώνυμον* δέ, ἐὰν ἔχῃ τρεῖς ὅρους, καθὼς τὰ

$$x^2 + \lambda x - 8, \quad \alpha + \beta - \gamma, \quad \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

***Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του λέγεται ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.***

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶνε 1, 2, 3,.. τὸ πολυώνυμον λέγεται ***πρώτου, δευτέρου, τρίτου...***, βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ

$$3\ \alpha^2 - 5\ \alpha\beta\gamma - 13\ \gamma^3$$

εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, καὶ τρίτου ὡς πρὸς τὸ γ, πρώτου δὲ ὡς πρὸς τὸ β.

***Βαθμὸς πολυωνύμου τινὸς ὡς πρὸς δύο, τρία,.. γράμματα αὐτοῦ καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.*** Οὕτω τὸ πολυώνυμον $3x^2 - 3xy + 2x - 7$ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ y. Τὸ $5\alpha^2 - 3\alpha\beta^2\gamma + 13\ \gamma\beta$ εἶνε τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ, καὶ τρίτου ὡς πρὸς β, γ.

*76.* Ἔστω τὸ πολυώνυμον $8x + x^2 + 16$. Ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματσς x νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ ὡς ἑξῆς, $16 + 8x + x^2$, λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε ***διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος*** x.

Ὁμοίως ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ x νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ ὡς κατωτέρω

$$x^2 + 8x + 16,$$

λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε ***διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος*** x.

Ἐν γένει λέγομεν ὅτι, «***πολυώνυμόν τι εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας ἢ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος αὐτοῦ, ἐὰν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνονται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον***».

Οὕτω τὸ πολυώνυμον

$$25\alpha^4 - 12\alpha^3\beta + 10\alpha^2\beta^2\gamma - 7\alpha\beta^3\gamma^2 + 6\beta^4\gamma^3 - 2\gamma^4$$

εἶνε διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας μὲν δυνάμεις τοῦ γράμματος α, κατὰ τὰς ἀνιούσας δὲ τοῦ β καὶ τοῦ γ.

## *Περὶ συναρτήσεων.*

### Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.

**77. *Ταξειδεύων τις λαμβάνει μαζύ του 350 δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει καθ' ἡμέραν 8 δραχμάς.***

Ἐὰν ταξειδεύσῃ ἐπὶ 2 ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 8.2 δρχ· ἐὰν ἐπὶ τρεῖς, τέσσαρας, ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 8.3· 8.4 δραχ... Καὶ ἐὰν ἐπὶ x ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ 8.x δρχ., θὰ τοῦ μείνουν δὲ καὶ 350—8.x δρχ.

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξείδιον. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ τοῦ μείνουν μετὰ x ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν ὅτι y = 350δρ. — 8.xδρ., καὶ ἐὰν εἶνε τὸ

$$x = 5, \text{ τὸ } y = 350 - 8.5 = 350 - 40 = 310 \text{ δρχ.}$$

***Εἷς ποδηλάτης διήνυσε 21 χιλιόμετρα, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον, ἀπὸ τοῦτον δὲ διήνυε 17 χιλ. καθ' ὥραν.***

Μετὰ x ὥρας διήνυσε 17. x χμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ' ἀρχῆς δ' ἐν ὅλῳ 21 + 17. x χμ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν διανυθέντα δρόμον, θὰ ἔχωμεν ὅτι, $y = 21 + 17.x.$ (1)

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του ἀπὸ τὸν ὡρισμένον τόπον, δηλαδὴ ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς ἰσότητος (1). Π. χ. ἂν εἶνε τὸ x = 2, θὰ ἔχωμεν $x = 21 + 17.\ 2 = 21 + 34 = 55.$

Ἂν εἶνε x = 3, τότε $y = 51 + 17.\ 3 = 21 + 51 = 72.$

Αἱ ποσότητες x καὶ y, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων λέγονται ***μεταβληταί***. Ἐνῷ αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ἓν πρόβλημα λέγονται ***σταθεραί***. Π. χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ταξειδιώτης μαζύ του καὶ ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχάς, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ὡρισμένον τόπον, εἶνε σταθεραὶ ποσότητες.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης y συνδέεται μὲ τὴν x οὕτως, ὥστε ὅταν δώσωμεν εἰς τὴν x τιμήν τινα ὡρισμένην, εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ y. Ἡ μεταβλητὴ x, εἰς τὴν ὁποίον δίδομεν αὐθαιρέτως τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν θέλομεν, καλεῖται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, ἡ δὲ y, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x, καλεῖται συνάρτησις τῆς x.

Ἐν γένει, «*ἐὰν δύο μεταβληταὶ* x *καὶ* y *συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ* x *νὰ εὑρίσκωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς* y, *τότε ἡ* y *θὰ λέγεται συνάρτησις τῆς* x, *ἡ δὲ* x *ἀνεξάρτητος μεταβλητή*».

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶνε συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Διότι, ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, καὶ διὰ τοῦ y τὸ ἐμβαδόν του, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἶνε, $y = \pi x^2$, καὶ τὸ μὲν π εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος (ἴσος μὲ 3,141 περίπου), τὸ δὲ y εὑρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὡρισμένη τις τιμή. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ἔχοντος βάσιν ὡρισμένην α, εἶνε συνάρτησις τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Διότι ἔχομεν ὅτι, $y = \frac{1}{2} \alpha x$, ἂν τὸ x παριστάνῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ y τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

## Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶνε συνάρτησις τοῦ ἄλλου (χρόνος, ἐργασία καὶ ἀμοιβή, ἀξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κλπ).

2) Εὕρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ διανυόμενον διάστημα καὶ ἡ ταχύτης εἰς τὸ κενόν, τὸ διάστημα καὶ ὁ χρόνος κλπ.). Ὁμοίως ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

## Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως.

*78.* Ἔστω μία συνάρτησις y, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 13+5x. Ἤτοι ἔστω ὅτι ἔχομεν,

$$y = 13 + 5x \qquad (1)$$

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0,1,2,3,... δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, ἂν θέσωμεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμάς του. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

ὅταν εἶνε $x=0$, τὸ $y= 13+5.0=13$·
ὅταν εἶνε $x=1$, τὸ $y= 13+5.1=18$·
ὅταν εἶνε $x=2$, τὸ $y= 13+5.2=23$.

Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $y = 144 - 6x$ ἔχομεν ὅτι,

ὅταν εἶνε $x=0$, $y=144-6.0=144$·
ὅταν εἶνε $x=1$, $y=144-6.1=138$·
ὅταν εἶνε $x=2$, $y=144-6.2=132$.

Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις π. χ. ἡ y, μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x, καὶ διὰ δοθείσας τιμὰς τῆς x γράφωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, καθὼς εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τούτων τῆς συναρτήσεως ταύτης.

### *Ἀσκήσεις.*

1) Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $x=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot -1 \cdot\ x=-2 \cdot -3 \cdot -\frac{1}{4}$

α′) $y=3x+6$. β′) $y=8x-25$, γ′) $y=x$, δ′) $y=-x$

ε′) $y=\frac{3}{4}x-62$, ϛ′) $y=\frac{x^2}{2}-3x-7$

ζ′) $y=\frac{4}{19}x^2+\frac{3}{8}x+9 \cdot$ η′) $y=600-35x^2+\frac{13}{15}x$.

2) Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν καθεμιᾶς τῶν κάτωθι συναρτήσεων, ὅταν εἶνε $x=0,\ \frac{1}{2}.\ 1 \cdot\ 1\frac{1}{2}.\ 2 \cdot\ 2\frac{1}{2}$.

α′) $y=\frac{6x-7}{9x+6}$. β′) $y=\frac{3}{4}x-\frac{7}{5x+6}+9$. γ′) $y=\frac{1}{x^3+6}$.

## Ἀπεικόνισις τῶν τιμῶν συναρτήσεως.

**79.** Καθὼς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς παριστάνομεν (§ 9) διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ συναρτήσεως ταύτης. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν

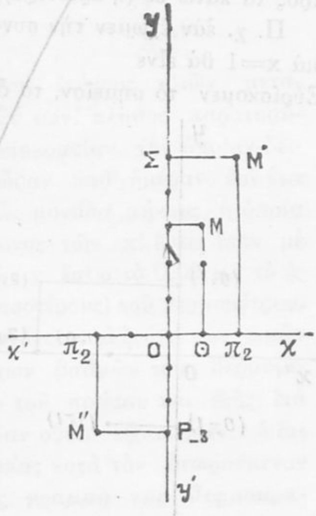
$$y=2.\ x+1 \tag{1}$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τιμὴν 1, εὑρίσκομεν

$$y=2.\ 1+1=3.$$

Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων x′x καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ (ὅπου ΟΘ=1), τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν τιμὴν x=1. Τὴν τιμὴν τοῦ y θὰ παριστάνωμεν κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον δι᾽ ἑνὸς σημείου μιᾶς ἄλλης εὐθείας y′y, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν x′x εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ταύτης τὸ μὲν μέρος Oy εἶνε τὸ τμῆμα τῶν θετικῶν τιμῶν τοῦ y, τὸ δὲ Oy′ τὸ τῶν ἀρνητικῶν (Σχ. 4).

Οὕτω ἡ τιμὴ τῆς $y=3$ θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου P τῆς Oy. Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν Oy, καὶ ἐκ τοῦ P πρὸς τὴν Ox, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ M. Θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον M παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ $x=1$, καὶ $y=3$ τῆς συναρτήσεως $y=2x+1$.



(Σχ. 4)

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x=2$, καὶ $y=2.2+1=5$, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1), ἂν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2. Τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου M′, τὸ ὁποῖον εἶνε ἡ τομὴ τῆς εὐθείας $\Pi_2 M'$, ἥτις ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν Oy ἐκ τοῦ σημείου $\Pi_2$ τῆς x′x, παριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν $x=2$, καὶ τῆς ΣM′, ἥτις ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν Ox ἐκ τοῦ σημείου Σ, τοῦ παριστάνοντος τὴν τιμὴν $y=5$.

Διὰ τὴν τιμὴν $x=-2$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

$$y=2.(-2)+1=-4+1=-3.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον $\Pi_{-2}$ ἐπὶ τῆς εὐθείας x′x, τὸ $P_{-3}$ ἐπὶ τῆς y′y, καὶ τὸ σημεῖον M″, τομὴ τῆς ἐκ τοῦ $\Pi_{-2}$ παραλλήλου πρὸς y′y, καὶ τῆς ἐκ τοῦ $P_{-3}$ παραλλήλου πρὸς τὴν x′x, παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x=-2$, $y=-3$, τοῦ x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

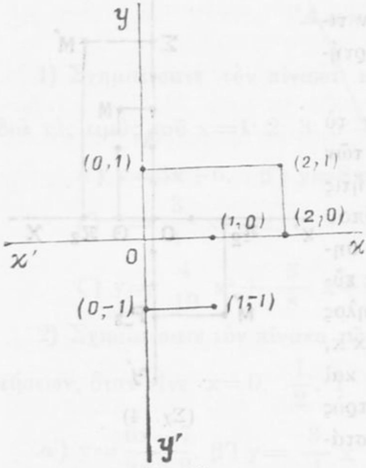
Ἐν γένει, καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνεται ὑπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας x′x καὶ y′y. Ἐκ τούτων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν y′y ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου, τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x ἐπὶ τῆς εὐθείας x′x, ἡ δὲ πρὸς τὴν x′x ἐκ τοῦ σημείου, τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ y ἐπὶ τῆς εὐθείας y′y.

Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ὡς ἑξῆς. Ἐκ τοῦ σημείου τῆς x′x, (ἢ τῆς y′y), τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x (ἢ τοῦ y) φέρομεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν y′y (ἢ τὴν x′x), καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅση εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x), πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιά), ἂν ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x) εἶνε θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ (ἢ ἀριστερά), ἂν εἶνε ἀρνητική.

Π. χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $y=2x-3$

διὰ $x=1$ θὰ εἶνε $y=2.\,1-3=-1$.

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 1 καὶ —1 τῆς x καὶ y, ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὴν τιμὴν —1 τοῦ y ἐπὶ τοῦ Oy φέρωμεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον τῆς Ox, καὶ ἴσον μὲ 1. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημειώνομεν διὰ τοῦ (1,— 1) εἰς τὸ σχῆμα. (5).




(Σχ. 5)

Ὁμοίως διὰ $x=2$ εἶνε $y=2.\,2-3=+1$. Τὸ σημεῖον (2,1) παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 1, κ.ο.κ.

Τὴν εὐθεῖαν x′x καλοῦμεν συνήθως ***ἄξονα τῶν*** x ἢ ***τῶν τετμημένων***, τὴν δὲ εὐθεῖαν y′y ***ἄξονα τῶν*** y ἢ ***τῶν τεταγμένων***, τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἓν ὄνομα ***ἄξονας τῶν συντεταγμένων*** x καὶ y. Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὁριζόντιον, τὸν δὲ τῶν y κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τοῦ x καὶ y καλοῦμεν ἀντιστοίχως ***τετμημένην*** καὶ ***τεταγμένην*** τοῦ σημείου, τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν, καὶ τὰς δύο δὲ μὲ ἓν ὄνομα ***συντεταγμένας*** τοῦ σημείου.

### *Ἀσκήσεις.*

Παραστήσατε διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ y τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τοῦ x.

α′) $y=x+2$. β′) $y=\frac{1}{2}x+1$. γ′) $y=\frac{3}{4}x-2$.

δ′) $y=\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x^2$ Ὅταν εἶνε x=0· 1· 2· 3· 4·

ε′) $y=\frac{1}{2}x^2-x^3$. ϛ′) $y=-\frac{3}{4}x^2+5$. ζ′) $y=\frac{x-1}{2}+1$.

η΄) $y = \frac{x^2}{2} - x + 1$. Ὅταν εἶνε $x = 0 \cdot -1 \cdot -2, \frac{3}{2}, 2$.

ϑ΄) $y = x^4 - x + 3$. Ὅταν εἶνε $x = 0 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -\frac{1}{3}, 0{,}1$.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παραστάσεως ζεύγους τιμῶν μεταχειρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των πλῆθος παρατηρήσεων. Ἔστω π. χ. ὅτι γνωρίζομεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ θερμόμετρον τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥραν καθ' ἡμέραν ἐπὶ ἕνα μῆνα. Λαμβάνομεν ἓν ὡρισμένον τμῆμα ὡς μονάδα μήκους, ἡ ὁποία θὰ παριστάνῃ τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔστω ἴσον μὲ 0,01 μ. Ἐπίσης ἓν ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, ἔστω τὸ 0,02 μ., τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνῃ τὸν ἕνα βαθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν ἡμερῶν τοῦ μηνός, καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου) συνδέομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα, ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς διὰ τμημάτων εὐθειῶν. Ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν οὕτω εὑρίσκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται, συνήθως, ***γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας*** τοῦ ἐν λόγῳ μηνός.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς, παρατηροῦντες αὐτὴν π.χ. δὶς τῆς ἡμέρας (τὴν πρωΐαν καὶ ἑσπέραν συνήθως), καὶ λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον των, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμὴν τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν, καλοῦμεν συνήθως ***γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ*** τοῦ ἀσθενοῦς.

### ***Ἀσκήσεις.***

1) Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶνε διὰ πάντας τοὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν $-4^0, -2{,}3^0 \cdot 3{,}3^0 \cdot 6{,}5^0 \cdot 13^0 \cdot 16{,}6^0 \cdot 17{,}8^0 \cdot 19{,}5^0 \cdot 13{,}9^0 \cdot 9^0 \cdot 3{,}1^0 - 2{,}6^0$. Λάβετε ὡς μονάδα μὲν μετρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01 μ., ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπίσης τὸ 0,01 μ. Εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

2) Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 54 χιλιάδες, καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 ἦτο 56· 46· 38· 32· 35. 37· 48· 52· 87· 79· 69· 90· 97 χιλιάδες. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x

καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y τὸ 0,005 μ. Ἀπεικονίσατε τὴ πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως.

## *Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων.*

### Πρόσθεσις πολυωνύμων.

*80.* Καλοῦμεν ***ἄθροισμα*** δοθέντων πολυωνύμων τὸ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ὅρων τῶν δοθέντων ἑκάστου ὅρου λαμβανομένου μετὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4$, $\quad -\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x$ τὸ ὁποῖον παρ στάνομεν ὡς ἑξῆς : $\quad (3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4)+(-\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x$ εἶνε τὸ πολυώνυμον

$$3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4-\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐκτελοῦν τες τὴν ἀναγωγὴν αὐτῶν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸ

$$5\alpha^2x+3\alpha^4-2,$$

τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων δύο πολυωνύμων.

Καθ' ὅμοιον τρόπον διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτ πολυωνύμων, σχηματίζομεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶ δοθέντων, διατηροῦντες τὰ σημεῖα τῶν ὅρων των, καὶ ἐκτελοῦμεν ἀκο λούθως ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐὰ ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Συνήθως ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολυωνύμων ἐχόντων ὁμοίους ὅρους, γράφομεν τὸ ἓν κάτω τοῦ ἄλλου, ὥστε ο ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, καθόσον τοῦτο εἶν δυνατόν, καὶ αὐτὸ διὰ νὰ εὐκολύνεται ἡ ἀναγωγὴ τούτων. Οὕτω π. χ ἂν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$5\alpha^5-4\alpha^3\beta^2+8\alpha^4\beta-7\alpha\beta^4\gamma^2+2\alpha^2\beta^3\gamma+\gamma^3,$$
$$2\alpha^2\beta^3\gamma+6\alpha^5-12\alpha^4\beta+2\alpha^3\beta^2+-\alpha\beta^4\gamma^2-3\gamma^3,$$
καὶ $$-2\alpha^5-6\alpha^4\beta+9\alpha^2\beta^3\gamma-12\alpha^3\beta^2+\alpha\beta^4\gamma^2-7\gamma^3,$$

γράφομεν πρῶτον αὐτὰ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{rrrrrr} 5\alpha^5 & +8\alpha^4\beta & -4\alpha^3\beta^2 & +2\alpha^2\beta^3\gamma & -7\alpha\beta^4\gamma^2 & +\gamma^3 \\ +6\alpha^5 & -12\alpha^4\beta & +2\alpha^3\beta^2 & +2\alpha^2\beta^3\gamma & -\alpha\beta^4\gamma^2 & -3\gamma^3 \\ -2\alpha^5 & -6\alpha^4\beta & -12\alpha^3\beta^2 & +9\alpha^2\beta^3\gamma & +\alpha\beta^4\gamma^2 & -7\gamma^3. \end{array}$$

Ἀκολούθως κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, κει μένων εἰς τὰς αὐτὰς στήλας, καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$9\alpha^5-10\alpha^4\beta-14\alpha^3\beta^2+13\alpha^2\beta^3\gamma-7\alpha\beta^4\gamma^2-9\gamma^3.$$

### γ΄) Ἀφαίρεσις πολυωνύμων.

**81.** Καλοῦμεν ἀφαίρεσιν δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τὴν εὕρεσιν τρίτης τοιαύτης, ἡ ὁποία προστιθεμένη εἰς τὴν μίαν τούτων δίδει ἄθροισμα τὴν ἄλλην. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται ***διαφορά.***

***«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν παράστασιν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος».***

Διότι, ἂν π. χ. θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ $-\alpha^2$ ἀπὸ τοῦ $\alpha^3y$ καὶ παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ δ, θὰ εἶνε $\delta=\alpha^3y-(-\alpha^2)$. Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, θὰ ἔχωμεν, $\delta+(-\alpha^2)=\alpha^3y$. Προσθέτοντες εἰς τὰ ἴσα τὸ $\alpha^2$ εὑρίσκομεν,

$\delta+(-\alpha^2)+\alpha^2=\alpha^3y+\alpha^2$, καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν $-\alpha^2$ καὶ $\alpha^2$, ἔχομεν $\delta=\alpha^3y+\alpha^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ $\alpha^2\beta$ ἀπὸ τοῦ $3\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-\beta^2$ εἶνε

$$3\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-\beta^2-\alpha^2\beta=2\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-\beta^2.$$

Ἐὰν ζητῆται π. χ. ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $\alpha^3x-\alpha^2y+\alpha^3$ νὰ ἀφαιρεθοῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς μονώνυμα, π.χ. τὰ

$$\alpha^2x, \quad -3\alpha^2y^3, \quad -\alpha^4, \quad 2\alpha y^2,$$

ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ πρῶτον μονώνυμον, καὶ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ δεύτερον, καὶ ἀκολούθως ἀπὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἢ συντομώτερον προσθέτομεν εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον καθὲν τῶν πρὸς ἀφαίρεσιν δοθέντων μονωνύμων μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ἤτοι ἔχομεν κατὰ ταῦτα,
$\alpha^3x-\alpha^2y+\alpha^3-\alpha^2x+3\alpha^2y^3+\alpha^4-2\alpha y^2$.

**82.** ***«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν ἔπειτα αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του».***

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθ᾽ ὅμοιον τρόπον καθὼς καὶ ἀνωτέρω.

Οὕτω ἡ διαφορὰ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$3\alpha^2x-9\alpha^3x^2-6\alpha^2x^2$ ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου

$9\alpha^2x+18\alpha^3x^2-\alpha^2x^2$, τὴν ὁποίαν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$(9\alpha^2x+18\alpha^3x^2-\alpha^2x^3)-(3\alpha^2x-9\alpha^3x^2-6\alpha^2x^2)$$

εἶνε $9\alpha^2x+18\alpha^3x^2-\alpha^2x^2-3\alpha^2x+9\alpha^3x^2+6\alpha^2x^2$,

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν,

$$6\alpha^2x+27\alpha^3x^2+5\alpha^2x^2.$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμα, ἔχοντα ὁμοίους ὅρους, συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμ-ματος καὶ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον καθὼς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀλλὰ μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τούτου, ἵνα εὐκολώτερον γίνεται ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων. Οὕτω π. χ. ἂν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν τοῦ $9\alpha^3-8\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-7\beta^3$ ἀπὸ τοῦ $7\alpha^3+2\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2-11\beta^3-4\gamma^2$ γράφομεν:

$$\begin{array}{l} 7\alpha^3+2\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2-11\beta^3-4\gamma^2 \\ -9\alpha^3+8\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+7\beta^3 \end{array}$$

καὶ ἐκτελοῦντες ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων (κειμένων εἰς τὰς αὐτὰς στήλας) εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $-2\alpha^3+10\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-4\beta^3-4\gamma^2$

## Περὶ χρήσεως παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν.

*83.* Τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο πολυωνύμων παριστάνο-μεν ὡς εἴδομεν (§ 80 καὶ 82), κλείοντες ἕκαστον αὐτῶν ἐντὸς παρενθέ-σεως (ἢ ἀγκύλης) καὶ συνδέοντες ταύτας μὲ τὸ σημεῖον + ἢ — τῆς πρά-ξεως. Π. χ. τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν $2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2$ καὶ $-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma$ παριστάνομεν διὰ τοῦ $(2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)+(-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma)$ καὶ ἰσοῦται μὲ

$$2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν παραστάσεων παριστάνεται διὰ τοῦ $(2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)-(-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma)$ καὶ ἰσοῦται μὲ

$$2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta-\gamma.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«ἐὰν μὲν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔχο-μεν ὅρους, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον +, δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψω-μεν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων· ἂν δὲ ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον —, τὴν παραλείπομεν ἀφοῦ προηγουμέ-νως ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων».***

Οὕτω ἔχομεν $\alpha-(\beta-\gamma+\delta)=\alpha-\beta+\gamma-\delta$.

Διότι, τὸ σημεῖον τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως φανερώνει, νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\beta-\gamma+\delta$ ἀπὸ τὸ $\alpha$, καὶ κατὰ τἀνωτέρω, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $\alpha$ τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του.

Ὁμοίως ἔχομεν,

$$\begin{aligned} \alpha-[-(\beta+\gamma)+(\alpha-\beta)-\gamma+\alpha] &= \alpha+(\beta+\gamma)-(\alpha-\beta)+\gamma-\alpha \\ &=\alpha+\beta+\gamma-\alpha+\beta+\gamma-\alpha=-\alpha+2\beta+2\gamma. \end{aligned}$$

Τοὐναντίον, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρεν-θέσεως ἢ ἀγκύλης, καὶ ἂν μὲν θέσωμεν τὸ σημεῖον + πρὸ αὐτῆς ἕκαστος ὅρος διατηρεῖ τὸ σημεῖόν του ἐντὸς ταύτης, ἂν δὲ τὸ — ὁ ὅροι γράφονται μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν των ἐντὸς αὐτῆς. Οὕτω π. χ. ἔχομεν $\alpha-\beta-\gamma=\alpha+(-\beta-\gamma)$ ἢ = μὲ $\alpha-(\beta+\gamma)$.

## Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

*Ὁμὰς πρώτη.* Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

1) $3x-(6x-4y)$. » διὰ $x=y=3$.

2) $7\alpha-8\beta-(19\alpha+3\beta)$. » » $\alpha=\beta=10$.

3) $3x+6y-9\omega+(14x-7y+6\omega)$. » » $x=9, y=3, \omega=4$.

4) $\vartheta-(\mu-\nu)$, ἐὰν εἶνε $\vartheta=x+9y-6\omega$, $\mu=4x+7y+2\omega$, $\nu=x+y+\omega$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* Δείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν

1) $3x+9y+(6x-7y)=8x+6y-(4y-x)$.

2) $3\alpha+2\beta-(4\alpha-\beta)=2\beta+4\alpha+(\beta-5\alpha)$.

3) $2x-3y-5\omega-(3x+2y-\omega)=2x+5y+6\omega-(3x+10y+10\omega)$.

*Ὁμὰς τρίτη.* Ἐκτελέσατε τὰς πράξεις κατωτέρω, ὥστε νὰ ἐξαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι, καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

1) $(8\alpha-3\beta-\Big[(9\alpha-\gamma)-(6\beta-9\gamma)\Big]$ » διὰ $\alpha=\beta=\gamma=2$,

2) $(8\alpha-9\gamma)-\Big[[(6\beta-5\gamma)+7\alpha]-2\beta\Big]$ » » »

3) $19-x-\Big(8x-[8-9x-(7-9x)]\Big)$ » » » $x=-3$.

4) α΄) $-(x^3-4x^2-7x+)$ β΄) $-\Big[5\alpha-(\alpha^2-\beta^2)+3\alpha^3-3\beta^3+\gamma\Big]$.

5) Δίδονται τὰ πολυώνυμα $2-2x^2+7x^3-9x^4+x^5$, $x+2x^2-3x^3+4x^4-x^5$, καὶ $x^2+2x^3-3x^4+4x^5$. Νὰ εὑρεθῇ α΄) Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. β΄) Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ ἀκολούθως ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τοῦ τρίτου. γ΄) Νὰ προστεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἰς τὸ τρίτον.

*Ὁμὰς τετάρτη.* Γράψατε καταλλήλως τὰς κατωτέρω παραστάσεις, ὥστε οἱ ὅροι των ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς νὰ εἶνε εἰς παρένθεσιν, ἔχουσαν τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —.

1) $13x-6x^2+19x^3-14\alpha+5\gamma$.

2) $x^3+7x^2-3x-5$.

3) $-5x^4-(3x^3-8x2)-6x+9$.

*Ὁμὰς πέμπτη.* 1) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, π. χ. τῶν α καὶ β, αὐξηθῇ κατὰ τὴν διαφοράν των, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ. Διατί ;

2) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐλαττωθῇ κατὰ τὴν διαφοράν των, προκύπτει τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ. Διατί ;

3) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, π. χ. τῶν α καὶ β, δὲν μεταβάλλεται, ἂν τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον αὐξήσωμεν ἢ ἐλαττώσωμεν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Διατί ;

*Ὁμὰς ἕκτη.* 1) Ἕν παιδίον εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ πατήρ του ἔχει τριπλασίαν ἡλικίαν τούτου. Πόσην ἡλικίαν θὰ ἔχουν (ἢ εἶχον) καὶ οἱ δύο μετὰ (ἢ πρὸ) μ ἔτη (ἐτῶν) ; (4α + 2μ, (4α—2μ).

2) Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου τινὸς φοιτῶσιν α μαθηταί, εἰς τὴν δευτέραν β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν τρίτην 2β ὀλιγώτεροι τῶν εἰς τὴν πρώτην. Πόσους μαθητὰς ἔχουν ἐν ὅλῳ αἱ τρεῖς τάξεις ; Πόσους ἔχουν περισσοτέρους αἱ δύο πρῶται τάξεις τῆς τρίτης ; 3 (α—β)· (α+β).

3) Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β ὁ πρῶτος ἔχει x δραχ., καὶ οἱ δύο ὁμοῦ y δραχ. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Β 3 δρ. πόσας θὰ ἔχῃ ἕκαστος ;

x—3, y—x+3.

4) Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δραχ. ἢ ὁ Α. Ὁ Γ διπλασίας τῶν τοῦ Β· ὁ δὲ Α ἔχει μ δραχ. Πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς : (10 μ).

## Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.

*84.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται καθ' οἱονδήποτε τάξιν καὶ ἂν γράψωμεν τοὺς παράγοντας»***.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει, καὶ ἂν οἱ παράγοντες εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἀποδεικνύεται δ' ὁμοίως. Οὕτω, ἂν διὰ τῶν α, β, γ, παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας παράγοντας, θὰ ἔχωμεν,

$$\alpha\beta\gamma = \beta\alpha\gamma = \gamma\alpha\beta = \gamma\beta\alpha = \alpha\beta\gamma, \ldots$$

οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶνε οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ.

Ἐπειδὴ ἕκαστον μονώνυμον εἶνε γινόμενον παραγόντων, ***«καλοῦμεν γινόμενον μονωνύμων τὸ μονώνυμον, τὸ ὁποῖον ἔχει παράγοντας τὰ δοθέντα μονώνυμα»***.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $5\alpha^2\beta^2\gamma$, καὶ $3\beta\gamma^2$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τὸ γινόμενον αὐτῶν, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω :

$$(5\alpha^2\beta^2\gamma).(3\beta\gamma^2)$$

ἰσοῦται μὲ $5\alpha^2\beta^2\gamma.3\beta\gamma^2$.

Καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων θὰ ἔχωμεν,

$$5\alpha^2\beta^2\gamma.\ 3\beta\gamma^2 = 5.\ 3.\ \alpha^2.\ \beta^2.\ \beta.\ \gamma.\ \gamma^2 = 15\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Ὁμοίως τὸ γινόμενον τῶν

$$-\frac{3}{4}\alpha^2\beta^4\gamma,\quad \frac{2}{5}\alpha^3\beta^2\gamma,\quad \frac{1}{6}\beta\gamma^2\delta \quad \text{εἶνε}$$

$$-\frac{4}{3}\alpha^2\beta^4\gamma.\ \frac{2}{5}\alpha^3\beta^2\gamma.\ \frac{1}{6}\beta\gamma^2\delta = \frac{-4}{3}.\ \frac{2}{5}.\ \frac{1}{6}\ \alpha^2\alpha^3\beta^4\beta^2\beta\gamma\gamma\gamma^2\delta$$

$$= -\frac{4}{45}\alpha^5\beta^7\gamma^4\delta.$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι, ***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστάς των, καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου τούτων γράφομεν καθὲν γράμμα, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα, μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους τοῦτο ἔχει εἰς τὰ δοθέντα».***

### *Ἀσκήσεις.*

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα.

α') $x^7(-x^3).\ y^6y^4.$ β') $(-x^4x),\ \alpha^3.\ \alpha^5.\ \alpha^2.$ γ') $(x^2)^2,\ (\beta^3)^4$

δ') $x^{\nu-2}.\ x^{2\nu}.\ x.$ ε') $x^{3\nu-1}.\ x.\ x^{2\nu-2}\ x^2.$

ϛ') $6\alpha x.\ 5\alpha^3x^2.\ (-9x^3)^3.$ ι') $(-xy\omega).x^2y^2\omega^2.$ ια') $(-7xy\omega).(4x^2y^2).$

ιβ') $\left(\frac{2}{4}x^2y\right).\ 2xy^2\left(-\frac{4}{5}yx\right)^2.$

## Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον.

*85.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta-\gamma).\ \mu,$$

ὅπου τὸ μ παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 26) θὰ ἔχωμεν,

$$(\alpha+\beta-\gamma).\ \mu = \overbrace{(\alpha.+\beta-\gamma)}^{1\eta} + \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{2\alpha} + \ldots + \overbrace{(\alpha+\beta-\gamma)}^{\mu\eta}$$

$$= \left(\overset{1\eta}{\alpha} + \overset{2\alpha}{\alpha} + \ldots \overset{\mu\eta}{\alpha}\right) + \left(\overset{1\eta}{\beta} + \overset{2\alpha}{\beta} + \ldots, + \overset{\mu\eta}{\beta}\right) - \left(\overset{1\eta}{\gamma} + \overset{2\alpha}{\gamma} + \ldots \overset{\mu\eta}{\gamma}\right)$$

καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha.\mu+\beta.\mu-\gamma.\mu.$

Ἤτοι, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπὶ ἀριθμόν,***

***ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».***

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἀληθεύει, καὶ ἂν εἶνε ἀρνητικὸς ὁ πολλαπλασιαστής, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως, ἐὰν στηριχθῶμεν εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 26). Οὕτω π. χ. τὸ γινόμενον τοῦ $(\alpha+\beta-\gamma).(-\mu)$ (ἐνῶ τὸ $-\mu$ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς) εἶνε ἴσον μὲ $-(\alpha+\beta-\gamma).\mu=(-\alpha-\beta+\gamma).\mu=-\alpha\mu-\beta\mu+\gamma\mu$.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2) \text{ ἐπὶ τὸ } 2\alpha.$$

Θὰ ἔχωμεν, ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ,

$$(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2).\,2\alpha=[\alpha^2+(-3\alpha\beta)+\beta^2].\,2\alpha.$$

Καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, ἐπειδὴ πρόκειται περὶ πολλαπλασμοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ

$$\alpha^2.\,2\alpha+(-3\alpha\beta).\,2\alpha+\beta^2.\,2\alpha=2\alpha^3-6\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+7\beta^3).\,(-3\alpha\beta)=-15\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3-21\alpha\beta^4.$$

Ὥστε, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα».***

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (θεωροῦντες τὸ πολυώνυμον ὡς ἕνα ἀριθμόν, ἐπειδὴ εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Π. χ. τὸ γινόμενον

$$\alpha.\,(\beta-\alpha+\gamma)=\text{μὲ } (\beta-\alpha+\gamma).\,\alpha,$$

καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha\beta-\alpha^2+\alpha\gamma$.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ αἱ τιμαί των καθὼς καὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $(x^3+9x^2-6x+1).\,x^2$. β') $7\alpha^2.\,(\alpha^2-9\beta^2)$. Διὰ $x=\alpha=\beta=-4$.

γ') $3\alpha x.\,(\alpha^2-4\alpha x+x^2)$. Διὰ $x=-1,\ \alpha=2$.

δ') $5x-3.\,(x+4)$. ε') $(3\beta-5\alpha).\,\beta$. Διὰ $x=1,\ \alpha=-1,\ \beta=-3$.

ς') $(3\alpha+7\beta)-(9\beta-5x).\,\beta$. Διὰ $\alpha=2,\ \beta=-3$.

ζ') $(3\alpha^2+7\beta^2)\,\alpha\beta-(9\alpha^2-8\beta^2)\,\alpha\beta-(9\alpha^2-8\beta^2)\,\alpha\beta$. Διὰ $\alpha=-1,\ \beta=-2$.

ζ') $(3\alpha^3\beta^3+7\beta^2).\,3\alpha^2\beta^3-(9\alpha^3\beta^3-8\beta^2).\,2\alpha^2\beta.^3$ Διὰ $\alpha=-1,\ \beta=-2$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* Λύσατε τὰ ἑξῆς προβλήματα.

1) Ἐκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι πρὸς ἀντιθέτους διευθύνσεις. Ὁ μὲν πρῶτος διανύει καθ' ἡμέραν $\alpha+\mu$ χιλιόμετρα, ὁ δὲ δεύτερος $2\mu$ χμ. ὀλιγώτερα τοῦ πρώτου. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας; $(2\alpha\tau)$.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶνε α. Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶνε μ. Πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμός, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του; $(18\mu - 9\alpha)$.

3) Ἐκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων 30 χμ. ἡμερησίως· μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος, διανύων γ χμ. ἡμερησίως καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου (ἢ τοῦ δευτέρου); $30\tau+\gamma(\mu-\tau)$, $30(\tau+\mu)-\gamma\tau$.

## Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμων.

**86.** Ἔστω πρῶτον ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀθροισμάτων, π. χ. τὸ

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta).$$

Ἐὰν τὸ $(\gamma+\delta)$ παραστήσωμεν διὰ τοῦ Α, ἤτοι ἂν θέσωμεν

$$(\gamma+\delta)=A,$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta).A=\alpha.A+\beta.A=A.\alpha+A.\beta.$$

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ Α θέσωμεν τὸν ἴσον του $(\gamma+\delta)$, ἔχομεν,

$$(\alpha+\beta).(\gamma+\delta)=(\gamma+\delta).\alpha+(\gamma+\delta).\beta=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha-\beta).(\gamma-\delta)=[\alpha+(-\beta)].[\gamma+(-\delta)]$

$$=\alpha\gamma+(-\beta\gamma)+(-\alpha\delta)+\beta\delta=\alpha\gamma+\beta\delta-\beta\gamma-\alpha\delta.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶνε γινόμενον ἀθροίσματος ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα (διότι ἕκαστον πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του), ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».***

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος αὐτῶν, καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν (πρὸς εὐκολίαν εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων), ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

1ον). Ἔστω τὸ γινόμενον

$$(2x^2 - x + 3).(x - 4).$$

Ἔχομεν

$$\begin{array}{lr} & 2x^2 - x + 3 \\ & x - 4 \\ \hline (1) \ \ldots\ldots & 2x^3 - x^2 + 3x \\ (2) \ \ldots\ldots & -8x^2 + 4x - 12 \\ \hline (3) \ \ldots\ldots & 2x^3 - 9x^2 + 7x - 12. \end{array}$$

Τὰ (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ x, καὶ ἐπὶ — 4, λέγονται δὲ ***μερικὰ γινόμενα.*** Τὸ (3) προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ λέγεται ***τελικὸν γινόμενον.***

2ον) Ἔστω τὸ γινόμενον.

$$(4x^5 - 3x^4 + x^2 - 1).(x^3 - x + 2)$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\begin{array}{l} 4x^5 - 3x^4 + x^2 - 1 \\ x^3 - x + 2 \\ \hline 4x^8 - 3x^7 \qquad + x^5 \qquad - x^3 \qquad (***) \\ \qquad -4x^6 + 3x^5 \quad - x^3 \qquad + x \\ \qquad\qquad 8x^5 - 6x^4 \qquad + 2x^2 \qquad -2 \\ \hline 4x^8 - 3x^7 - 4x^6 + 12x^5 - 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 2. \end{array}$$

3ον) Ἐπίσης διὰ τὸ γινόμενον

$$(x^3 - 3\alpha x^2 + \alpha^3).(2\alpha x - \alpha^2)$$

ἔχομεν

$$\begin{array}{r} x^3 - 3\alpha x^2 + \alpha^3 \\ 2\alpha x - \alpha^2 \\ \hline 2\alpha x^4 - 6\alpha^2 x^3 \qquad + 2\alpha^4 x \\ - \alpha^2 x^3 + 3\alpha^3 x^2 \qquad - \alpha^5. \\ \hline 2\alpha x^4 - 7\alpha^2 x^3 + 3\alpha^3 x^2 + 2\alpha^4 x - \alpha^5. \end{array}$$

(***) Ὁ διδάσκων πρέπει νὰ ἐξηγῇ ὅτι πρὸς εὐκολίαν, ἐὰν ὁ πολλαπλαστέος δὲν εἶνε πλῆρες πολυώνυμον, καθὼς τὸ $4x^5 - 3x^4 + x^2 - 1$, εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα ἀφήνομεν ἀντιστοίχως κενὰς θέσεις ἰσαρίθμους πρὸς τοὺς ἐλλείποντας ἐνδιαμέσους ὅρους αὐτῶν, καὶ τοῦτο γίνεται, ἵνα εὐκολύνεται ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν γινομένων.

87. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τελευταίου παραδείγματος παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου $x^3$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον $2\alpha x$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὸν πρῶτον ὅρον $2\alpha x^4$ τοῦ γινομένου. Ὁμοίως τὸ γινόμενον τῶν δύο τελευταίων ὅρων αὐτῶν $\alpha^3$ καὶ $-\alpha^2$ δίδει τὸν τελευταῖον ὅρον $-\alpha^5$ τοῦ γινομένου. Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰ προηγούμενα τούτου παραδείγματα. Ἤτοι, ***«ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου δύο πολυωνύμων εἶνε διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων ἄκρων ὅρων των (πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοίχους ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου (πρῶτον καὶ τελευταῖον), διατεταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα»***.

### *Ἀσκήσεις.*

Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν διδομένων καὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α΄) $(3x+5y).(9x-8y)$. $\quad x=2,\ y=3.$

β΄) $(4xy+8\gamma\delta).(7xy-6\gamma\delta)$. $\quad \gamma=-3.\ \delta=-1.$

γ΄) $(7\varrho^2-6\lambda^2).(9\varrho^2-3\lambda^2)$. $\quad \varrho=-2.$

δ΄) $(6\varrho^2-7\varrho+5).(3\varrho+6)$. $\quad \lambda=-3.$

ε΄) $(\mu^2-7\mu\nu+5\nu^2).(7\mu^2+3\mu\nu+6\nu^2)$. $\quad \mu=-3,\ \nu=2.$

ϛ΄) $(x+1).(x+2).(x+3)$. $\quad x=-5.$

ζ΄) $(3\alpha+4).(5\alpha-6).(7\alpha+9)$. $\quad \alpha=-4.$

η΄) $(xy-3).(x^2y^2-4).(x^2y^2+9)$. $\quad x=y=-6.$

θ΄) $(x^2+x+1).(x-2)-(x^2-x+6).(x+3)$. $\quad x=2.$

ι΄) $(x^3+4x^2+6x-7).(x-3)-(x^3-6x^2-5x+9).(x-2)$. $\quad x=-2.$

## Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.

88. Παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$(\alpha+\beta)^2,\quad (\alpha+\beta).(\alpha-\beta),\quad (\alpha+\beta)^3,\quad (\alpha-\beta)^3$$

παρουσιάζονται πολὺ συχνά, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐὰν εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Οὕτω ἔχομεν,

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἤτοι, ***«τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, σὺν τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ»***.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι,

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἤτοι, ***«τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, πλὴν τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου».***

Ἐπίσης εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2.$$

Δηλαδή, ***«τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφοράν των δίδει γινόμενον τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου πλὴν τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου».***

Ἐπίσης εὐκόλως εὑρίσκομεν $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)=$
$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$

Ἤτοι, ***«ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶνε ἴσος μὲ τὸ κύβον τοῦ πρώτου, σὺν τὸ τριπλάσιον τετράγωνον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, σὺν τὸν κύβον τοῦ δευτέρου».***

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράψωμεν $-\beta$ ἀντὶ τοῦ $\beta$, προκύπτει, $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2.(-\beta)+3\alpha.(-\beta)^2+(-\beta)^3$ ἢ

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3.$$

## *Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.*

1) Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν διδομένων καὶ τῶν ἐξαγομένων των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $(4x+7y)(4x-7y)$. β') $(x^2+y^2).(x^2-y^2)$, $x=2$, $y=-1$
γ') $(9x+6y)^2$. δ') $(9xy-xy^2)^2$, ε') $(4\alpha+\beta)^3$. $x=y=-1$
$\alpha=4$, $\beta=3$.

2) Νὰ διατυπώσετε τὸν κανόνα διὰ τὸν τελευταῖον ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων κατ' ἀναλογίαν τῶν ἄλλων, ὅστις δίδει τὸ $(\alpha-\beta)^3$.

3) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαί των ὡς καὶ τῶν δεδομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $(x+y+\omega)^2$. β') $(\alpha x^2+\beta y^2-\gamma\omega^2)^2$. Διὰ $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega=3$
γ') $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$. δ') $(\alpha+\beta-\gamma+\delta)^2$. ε') $(\gamma+\delta-\alpha-\beta)^2$
Διὰ $\alpha, \beta=2$, $\gamma, \delta=1$.

4) Εὕρετε ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων κανόνα συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος περισσοτέρων τῶν δύο προσθετέων.

5) Ἐπαληθεύσατε ὅτι εἶνε α') $(\alpha^2+\beta^2).(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=$
$=(\alpha y-\beta x)^2.$

β′) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha\omega-\gamma x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2$. [Αὐταὶ λέγονται ταὐτότητες τοῦ Lagrange].

6) Συμπληρώσατε τὸ $\alpha^2+\beta^2$, ὥστε νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $(\alpha+\beta)^2$.

7) Ὁμοίως τὸ $\alpha^3\pm\beta^3$ καὶ τὸ $\alpha^4+\beta^4$, ὥστε νὰ γίνῃ τὸ μὲν ἴσον μὲ $(\alpha\pm\beta)^3$, τὸ δὲ μὲ τὸ $(\alpha^2+\beta^2)^2$, ἢ μὲ τὸ $(\alpha^2-\beta^2)^2$.

## Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.

*89.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος τῶν παραγόντων του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸν παραγόντα τοῦτον».***

Οὕτω ἔχομεν ὅτι $(\alpha\beta\gamma\delta):\beta=\alpha\gamma\delta$. Πράγματι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς πράξεως ταύτης, ἔχομεν $(\alpha\gamma\delta).\beta=\alpha\beta\gamma\delta$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, καὶ ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀλγεβρικοί.

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν γινόμενον διά τινος ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ὅταν ἡ διαίρεσις εἶνε τελεία), τὸ δὲ οὕτω προκῦπτον πηλίκον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τοὺς ἄλλους παράγοντας».***

Οὕτω τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\alpha\beta):\gamma$, εἶνε ἴσον μὲ τὸ $(\alpha:\gamma).\beta$.

Τῷ ὄντι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς πράξεως ταύτης, ἔχομεν

$$(\alpha:\gamma).\beta.\gamma=(\alpha:\gamma).\gamma.\beta=\alpha\beta$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως (καθὼς εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν) καὶ ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀλγεβρικοί.

Ἐκ τοῦ κανόνος, συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ θετικοὺς (§ 48), συνάγομεν ὅτι,

***«ἵνα δύναμίς τις ἀριθμοῦ εἶνε διαιρετὴ διὰ δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, πρέπει ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου νὰ εἶνε ἴσος ἢ μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου».***

Λέγομεν ὅτι ἀκέραιόν τι μονώνυμον εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, ἂν δύναται νὰ εὑρεθῇ τρίτον ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ ἓν δίδει γινόμενον τὸ ἄλλο.

Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον μονώνυμον καλεῖται ***πηλίκον*** τῆς διαιρέσεως τῶν δύο δοθέντων, τὰ ὁποῖα λέγονται ***διαιρετέος καὶ διαιρέτης.***

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $24\,\alpha^7$ διὰ τοῦ $8\,\alpha^5$, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω $24\alpha^7:8\alpha^5$.

Ζητοῦμεν δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν ἓν μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $8α^5$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον $24α^7$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ Π θὰ ἔχωμεν (ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρετέον)

$$Π. 8α^5 = 24α^7.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ 8 εὑρίσκομεν $Π. α^5 = 24. α^7 : 8$ ἢ $Π. α^5 = 3. α^7$. Διαιροῦντες καὶ τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ $α^5$, ἔχομεν $Π = 3. α^7 : α^5 = 3α^{7-5} = 3. α^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $20α^5β^6 : (-4αβ^5) = -5α^4 β$.

Τὸ $-30α^3β^3γ^1 : (-20αβγ^3) = \dfrac{3}{2} α^2β^2γ$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

***«ἵνα γινόμενόν τι ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ ἄλλου, καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον».***

Προσέτι ὅτι,

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μονωνύμων, ὅταν τὸ μονώνυμον τοῦ διαιρετέου διαιρῆται διὰ τοῦ μονωνύμου τοῦ διαιρέτου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καθὲν μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν του εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην».***

***90.*** Ἐὰν τὸ μονώνυμον τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ μονωνύμου τοῦ διαιρέτου, ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἐὰν ὑπάρχουν (ἐπειδὴ ἂν τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται), ἔπειτα δὲ σχηματίζομεν κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν μένοντα ὡς διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν μένοντα ὡς διαιρέτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων μονωνύμων εἶνε ***κλασματικὸν*** (ἢ παράστασις κλασματικὴ (§ 68) ).

Οὕτω διὰ τὴν διαίρεσιν $20α^2β^8γ^4 : -5αβ^4γ^7$ ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας 5, α, $β^3$ καὶ $γ^4$ τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $4α : -βγ^3$, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον γράφομεν οὕτω: $\dfrac{4α}{-βγ^3}$ ἢ $-\dfrac{4α}{βγ^3}$ καὶ εἶνε τοῦτο κλασματικόν.

## Διαίρεσις πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου.

**91.** Γνωρίζομεν ἐκ τῆς (Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα (ἂν οἱ προσθετέοι διαιροῦνται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ)».***

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅταν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ἀλγεβρικοί.

Οὕτω διὰ τὴν διαίρεσιν $(\alpha+\beta-\gamma):\mu$. ἔχομεν ὅτι

$$(\alpha+\beta-\gamma):\mu=(\alpha:\mu)+(\beta:\mu)+(-\gamma):\mu.$$

Λέγομεν ὅτι δοθὲν πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν διά τινος ἀκεραίου μονωνύμου, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλο πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ μονώνυμον δίδει γινόμενον τὸ δοθὲν πολυώνυμον. Καλοῦμεν διαίρεσιν δοθέντος πολυωνύμου (διαιρετέου) διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου (διαιρέτου), τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος, ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμόν τι (διαιρετὸν) δι' ἀκεραίου μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του διὰ τοῦ μονωνύμου, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».***

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν,

$$(7\,\alpha^3\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\,\alpha^3\beta^3):\alpha\,\beta=7\,\alpha\beta^2+6\,\alpha^2\beta-15\,\alpha^2\beta^2.$$

$$(42\,\alpha\,x-48\,\alpha\,y+18\,\alpha\,\omega):(-6\,\alpha)=-7x+8y-3\omega.$$

$$(-80\alpha^5-24\alpha^{10}):(8\,\alpha^3)=-10\,\alpha^2-3\,\alpha^7.$$

**92.** Ἐὰν πολυώνυμον διαιρῆται δι' ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, θὰ ἰσοῦται, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Οὕτω ἔχομεν διὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα:

(1) $(7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3)=\alpha\beta.\,(7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2)$.

(2) $(42\alpha x-48\alpha y+18\alpha\omega)=(-6\alpha).\,(-7x+8y-3\omega)$.

(3) $(-80\alpha^5-24\alpha^{10})=8\alpha^3.\,(-10\alpha^2-3\alpha^7)=-8\alpha^3.\,(10\alpha^2+3\alpha^7)$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἂν πάντες οἱ ὅροι δοθέντος πολυωνύμου ἔχουν κοινὸν τινὰ διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως ὡς παράγοντα γινομένου, τοῦ ὁποίου ὁ ἄλλος παράγων εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ τεθέντος ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως κοινοῦ παράγοντος. Οὕτω εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πολυώνυμον (1) ὡς κοινὸς διαιρέτης ἐλήφθη τὸ αβ, καὶ ἐτέθη ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) εἰς τὸ δεύτερον πολυώνυμον (2) ἐλήφθη ὡς διαιρέτης κοινὸς τὸ $-6\alpha$, καὶ εἰς τὸ τρίτον (3) τὸ $8\alpha^3$, καὶ ἐτέθησαν ἐκτὸς τῶν παρενθέσεων εἰς τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3).

### *Ἀσκήσεις.*

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ νὰ τραπῇ ἀκολούθως ὁ διαιρετέος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Εὕρετε καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἰσοτήτων, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α΄) $(14x^8y^2 - 28x^4y^2) : 2x^2y^2$. Διὰ $x=2,\ y=-2$.

β΄) $60x^5y^5 : (4x^3y) \cdot (4xy^3)$. » » $x=-3,\ y=-2$.

γ΄) $(x+y) \cdot (\alpha+\beta) : (x+y)$. » » $x=y=4,\ \alpha=\beta=1$.

δ΄) $(16\alpha^2x^4 : \alpha x) : 9\alpha x^2$ » » $\alpha=2,\ x=-3$.

2) Ὁμοίως τῶν

α΄) $(8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2) : (-4\alpha^2\beta^2)$. $\alpha=3,\ \beta=-2$.

β΄) $(\alpha^5+3\alpha^3+3\alpha^2+\alpha) : \frac{2}{3}\alpha$. Διὰ $\alpha=2$.

γ΄) $(x^{\mu+2}y^{\nu}+2x^{\mu+1}y^{\nu+1}-x^{\mu}y^{\nu+2}) : x^{\mu}y^{\nu}$.

Διὰ $x=4,\ y=1,\ \mu=\nu=-1$.

## Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.

*93.* Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τρίτον τοιοῦτον ἐν γένει, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ ἓν δίδει γινόμενον τὸ ἄλλο. Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ τρίτον πολυώνυμον λέγεται διαίρεσις (τελεία) τοῦ ἑνὸς πολυωνύμου (διαιρετέου) διὰ τοῦ ἄλλου, (διαιρέτου), τὸ δὲ εὑρισκόμενον πολυώνυμον καλεῖται ***πηλίκον*** τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1 \text{ διὰ τοῦ } \alpha+1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶνε διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου $\alpha^3$. Ἐπομένως, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶνε $α^3 : α = α^2.$

Ἀλλὰ τὸ $α^2$ δὲν δύναται νὰ εἶνε ὁλόκληρον τὸ πηλίκον. Διότι, ἐὰν κάμωμεν τὴν δοκιμήν, εὑρίσκομεν

$$α^2.(α+1) = α^3 + α^2.$$

Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει

$$(α^3+3α^2+3α+1)-(α^3+α^2)=2α^2+3α+1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου νὰ προστεθῇ παράστασίς τις ἀκόμη, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $(α+1)$ νὰ δίδῃ τὸ $2α^2+3α+1$.

Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ

$$2α^2+3α+1 \text{ διὰ τοῦ } (α+1).$$

Ἔχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη εἶνε ἁπλουστέρα τῆς δοθείσης, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος ταύτης εἶνε προφανῶς ἁπλούστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶνε $2α^2 : α = 2α$.

Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ $2α$ ἐπὶ τὸν διαιρέτην $(α+1)$, δηλαδὴ τὸ $2α.(α+1) = 2α^2+2α$, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον

$$2α^2+3α+1,$$

εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $(2α^2+3α+1)-(2α^2+2α)=α+1$. Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εὑρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον, ἀλλ' ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $(α+1)$ διὰ τοῦ $α+1$.

Ἐπαναλαμβάνομεν πάλιν τὴν αὐτὴν πορείαν ἢ καὶ ἀμέσως παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως εἶνε 1, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶνε

$$α^2+2α+1,$$

τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς κατωτέρω.

Γράφομεν τὸν διαιρετέον δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, κάτωθεν τούτου τὸ πηλίκον, καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἑκάστου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον σημεῖον, καὶ προσθέτομεν. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἑκάστοτε ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων.

$$\begin{array}{ll|l}
 & α^3+3α^2+3α+1 & α+1 \\
\cline{3-3}
 & -α^3-α^2 & α^2+2α+1 \\
\cline{1-2}
(1) \;\ldots\ldots & 2α^2+3α+1 & \\
 & -2α^2-2α & \\
\cline{1-2}
(2) \;\ldots\ldots & α+1 & \\
 & -α-1 & \\
\cline{1-2}
(3) \;\ldots\ldots & 0 &
\end{array}$$

Αἱ παραστάσεις (1), (2), (3) λέγονται ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ τελευταῖον καὶ τῆς ὅλης διαιρέσεως.

***94.*** Ἐν γένει, διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν δύο πολυωνύμων ἀποδεικνύεται ὅτι,

α') ***«ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διατεταγμένου ὁμοίως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου».***

*) Διότι ἔστω $\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου, καὶ $\delta+\delta'+\delta''+\ldots$ τῶν τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένων π. χ. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Παριστάνομεν διὰ τοῦ $\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου, διαταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν ὅτι,

$$\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots=(\delta+\delta'+\delta''+\ldots).\ (\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots).$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\delta.\,\Pi$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης παριστάνει τὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπετέθησαν διατεταγμένα τὰ πολυώνυμα (§ 87). Ἑπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον $\Delta$ τοῦ πρώτου μέλους. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι,

$$\delta.\,\Pi=\Delta, \quad \text{καὶ} \quad \Pi=\Delta:\delta,$$

ἐξ' οὗ συνάγομεν, ὅτι τὸ $\Pi$ εἶνε πηλίκον τοῦ $\Delta$ διὰ τοῦ $\delta$.

β') ***«Ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἢ περισσοτέρους τῶν πρώτων ὅρων τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν διαφοράν, ἡ ὁποία καλεῖται μερικὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἐὰν τοῦτο διαιρέσωμεν διὰ τοῦ διαιρέτου, θὰ εὕρωμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου».***

*) Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\Pi$ μὲν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου (ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν γνωστῶν ἐκ τῶν πρώτων ὅρων αὐτοῦ), διὰ τοῦ $P$ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων τούτου, διὰ $\Delta$ τὸν διαιρετέον καὶ τοῦ $\Delta'$ τὸν διαιρέτην, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta=\Delta'.\,(\Pi+P)=\Delta'.\Pi+\Delta'.P\cdot$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν ἀφαιροῦντες τὸ $\Delta'.\Pi$ ἀπὸ τὰ ἴσα, $\Delta-\Delta'.\Pi=\Delta'.P$,

*) Τὰ φέροντα τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς μᾶλλον θεωρητικά, δύνανται νὰ παραλείπωνται κατὰ τὴν διδασκαλίαν μόνον εἰς τὰ κλασικὰ γυμνάσια, ἂν δὲν ἐπαρκῇ καὶ ὁ χρόνος.

ἐξ οὗ ἕπεται (ἂν διαιράσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ Δ′), $(\Delta - \Delta'.\Pi) : \Delta'. = P$· δηλαδὴ τὸ Ρ, ἤτοι οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ πηλίκου θὰ εὑρεθοῦν, ἂν διαιρέσωμεν τὸ $\Delta - \Delta'.\Pi$ διὰ τοῦ διαιρέτου Δ′.

***95.*** Καλοῦμεν ***πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον*** τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνυμων, τὸ εὑρισκόμενον, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· ***δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον*** λέγεται τὸ εὑρισκόμενον, ἐὰν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρέσωμεν τὸν γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ πηλίκου. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὸ ***τρίτον μερικὸν ὑπόλοιπον,*** καὶ οὕτω καθεξῆς.

***96.*** Ἐν γένει, ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν ἓν πολυώνυμον Δ διὰ τοῦ Δ′, διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, καὶ ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶνε βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Καὶ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν, ἂν ἡ διαίρεσις αὐτῶν εἶνε τελεία, ἀρχίζομεν τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς, ὡς ἀνωτέρω, καὶ θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ὅρων τοῦ πηλίκου, καθὼς καὶ μίαν σειρὰν πολυωνύμων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶνε ***πρῶτον, δεύτερον,*** κλπ. μερικὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως. Ὁ βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων ὡς πρὸς τὸ ἐν λόγῳ γράμμα θὰ βαίνῃ ἐλαττούμενος· διότι μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου π. χ., δὲν θὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου. Ἐὰν λοιπὸν ἡ διαίρεσις δὲν εἶνε τελεία, θὰ εὕρωμεν κατ᾽ ἀνάγκην ὅρους τινὰς τοῦ πηλίκου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἔστω Π, καὶ ὑπόλοιπον ἔστω υ, ***τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ διαιρέτου,*** ὅτε καὶ θὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν. Οὕτω θὰ ἔχωμεν ὅτι $\Delta = \Delta'.\Pi + \upsilon$· διότι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ταύτης τὸ υ εὑρέθη μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὸν διαιρετέον Δ τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου Δ′ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον Π. Τὰ οὕτω εὑρισκόμενα Π καὶ υ καλοῦνται ***πηλίκον*** καὶ ὑπόλοιπον τῆς μὴ ***τελείας*** ἢ ***ἀτελοῦς*** ταύτης διαιρέσεως. Ἐὰν τὸ υ εἶνε ἴσον μὲ μηδὲν ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τῆς τελείας διαιρέσεως.

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 19x - 8 \text{ διὰ τοῦ } x^2 - 4x - 2.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ἔχομεν

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & -2x^3 & -7x^2 & -19x & -8 & x^2-4x-2 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +4x^3 & +2x^2 & & & x^2+2x+3 \\
\hline
 & 2x^2 & -5x^2 & -19x & -8 & \\
 & -2x^3 & +8x^2 & +4x & & \\
\hline
 & & 3x^2 & -15x & -8 & \\
 & & -3x^2 & +12x & +6 & \\
\hline
 & & & -3x & -2. &
\end{array}
$$

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $-3x-2$ εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ διαιρέτου $x^2-4x-2$ ἔπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει μονώνυμον ἢ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $x^2-4x-2$ νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $-3x-2$. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, καὶ τὸ $-3x-2$ καλεῖται **ὑπόλοιπον** τῆς ἀτελοῦς ταύτης διαιρέσεως, τὸ δὲ $x^2+2x+3$ πηλίκον αὐτῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μὲν τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν ὅτι,

«*ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον*»,

εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ ὅτι, «***ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τὸ ὑπόλοιπον***».

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων, ὁμοίαν πρὸς τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων.

«***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ πολυωνύμου: α΄) διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των· β΄) διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· γ΄) πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον· δ΄) διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ οὕτω εὑρεθέντος πρώτου ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκομεν οὕτω τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου· ε΄) πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον, καὶ εὑρίσκομεν νέον τοιοῦτον· στ΄) διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ νέου ὑπολοίπου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ πολυώνυμον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου***».

Ἐφαρμογή. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εὑρίσκομεν

$$
\begin{array}{l|l}
\alpha^5-3\alpha^4+\alpha^3-2\alpha^2 & \alpha^3-5 \\
\cline{2-2}
-\alpha^5 \qquad\qquad +5\alpha^2 & \alpha^2-3\alpha+1 \\
\hline
-3\alpha^4+\alpha^3+3\alpha^2 & \\
+3\alpha^4 \qquad -15\alpha & \\
\hline
\alpha^3+3\alpha^2-15\alpha & \\
-\alpha^3 \qquad\qquad +5 & \\
\hline
3\alpha^2-15\alpha+5 &
\end{array}
$$

πηλίκον μὲν τὸ $\alpha^2-3\alpha+1$,

ὑπόλοιπον δὲ τὸ $3\alpha^2-15\alpha+5$.

97. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἐὰν διαιροῦμεν πολυώνυμον δι' ἄλλου, διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, καὶ διακρίνωμεν ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν δύναται νὰ τελειώσῃ ποτέ, διατάσσομεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις, ὅτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0 καὶ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου, ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶνε ἀτελής.

2) Πολυώνυμόν τι δὲν εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, καὶ τῶν δύο διατεταγμένων ὁμοίως ὡς πρὸς ἕν γράμμα των: α') ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ἑνὸς ἐκ τῶν εὑρισκομένων μερικῶν ὑπολοίπων δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου· β') ὅταν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ἑνὸς τῶν ὑπολοίπων δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου· γ') ὅταν δὲν πληροῦνται μὲν αἱ συνθῆκαι αὗται, ἀλλὰ δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

*Ὁμὰς πρώτη.* Νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των.

1) $(5\alpha\gamma + 3\beta\gamma - 5\alpha\delta - 3\beta\delta) : (5\alpha + 3\beta)$.

2) $(10x^3 + 21x^2 + 5x - 6) : (3 + 2x)$.

3) $(125\,\mu^3 + x^3) : (x^2 - 5\,\mu x + 25\,\mu^2)$.

4) $(x^3 + \alpha^3) : (x - \alpha)$.

5) $(27\,x^3 - 8y^3) : (3x - 2y)$.

6) $\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$.

7) $(\alpha^8 x^{12} - 81\,\beta^{12}) : (\alpha^6 x^9 - 3\,\alpha^4\beta^3 x^6 + 9\,\alpha^2\beta^6 x^3 - 27\,\beta^9)$.

8) $(32\,\alpha^5 + \beta^5) : (2\alpha + \beta)$. 9) $(x^3 + \alpha^3) : (x + \alpha)$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* 1) Ἔμπορος ἀγοράζει α ὀκάδας ἐμπορεύματός τινος πρὸς μ δραχμὰς ἑκάστην ὀκᾶν· β ὀκ. πρὸς ν δρχ. καὶ γ ὀκ. πρὸς ρ δρχ. ἑκάστην. Πόσον κοστίζει ἑκάστη ὀκᾶ κατὰ μέσον ὅρον, καὶ πόσον ἀγοράζει κατὰ μέσον μὲ 1 δραχμήν;

$$\frac{(\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\rho)}{(\alpha+\beta+\gamma)},\quad \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\rho)}$$

2) Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει α ὀκ. οἴνου μὲ β ὀκ. ἄλλης ποιότητος καὶ μὲ γ ὀκ. ὕδατος. Ἡ μὲν ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται μ δρχ., τοῦ δὲ δευτέρου ν δρχ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος, καὶ πόσας ὀκάδας μείγματος ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν;

$$\frac{(\alpha\mu+\beta\nu)}{(\alpha+\beta+\gamma)},\quad \frac{(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha\mu+\beta\nu)}$$

3) Ἁμαξοστοιχία τις τρέχει α ὥρας μὲ ταχύτητα τ χιλιομέτρων

καθ' ὥραν. Ἔπειτα τρέχει β ὥρας μὲ ταχύτητα τ' χιλ. τὴν ὥραν. Πόση εἶνε ἡ μέση ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν ; Πόσας ὥρας χρειάζεται κατὰ μέσον ὅρον, ἵνα διατρέξῃ 1 χιλιόμετρον ; $\frac{(\alpha\tau+\beta\tau')}{(\alpha+\beta)}$, $\frac{(\alpha+\beta)}{(\alpha\tau+\beta\tau')}$

## Περὶ τοῦ ὑπολοίπου διαιρέσεως πολυωνύμου, περιέχοντος τὸν x, διὰ τοῦ (x—α).

*98.* Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^3 - 3x^2 + 3x + 2) : (x - 1)$.

Ἐὰν διὰ τοῦ ρ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, θὰ ἔχωμεν

$$(x^3 - 3x^2 + 3x + 2) = \rho.\,(x - 1) + \upsilon. \qquad (1)$$

Τὸ ὑπόλοιπον υ δὲν περιέχει τὸ x εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, διότι ὁ διαιρέτης εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x (§ 97 καὶ σελὶς 61 καὶ 62).

Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ τοῦ x=1.

Θέτοντες εἰς αὐτὴν x = 1, εὑρίσκομεν,

$$1^3 - 3.\ 1^2 + 3.\ 1 + 2 = \upsilon,$$

ἤτοι $$\upsilon = 3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἐν γένει, ἔστω ὅτι Π (x) παριστάνει τὸν διαιρετέον, ὁ ὁποῖος ὑποτίθεται ὅτι εἶνε πολυώνυμον περιέχον τὸν x, ὅτι τὸ ρ (x) παριστάνει τὸ πηλίκον, καὶ τὸ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ (x—α), τὸ ὁποῖον (ὑπόλοιπον) δὲν περιέχει τὸ x, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶνε πρώτου βαθμοῦ (§ 97). Λέγω ὅτι τὸ υ εἶνε ἴσον μὲ Π (α). Δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκῦπτον, ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ α.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι $\Pi(x) = \rho(x).\,(x-\alpha)+\upsilon$.

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ α, λαμβάνομεν

$$\Pi(\alpha) = \rho(\alpha).\,(\alpha-\alpha)+\upsilon,$$

ἢ $$\Pi(\alpha) = \rho(\alpha).\ 0+\upsilon = \upsilon.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου τινός, περιέχοντος τὸ x, διὰ τοῦ (x—α), ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν διαιρετέον ἀντὶ τοῦ x τὸν α».***

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(x^6 - \alpha^6) : (x+\alpha)$.

Τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ $(-\alpha)$. Διότι τὸ $x+\alpha =$ μὲ $x-(-\alpha)$. Ὥστε, ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν $(x^6-\alpha^6) : [x-(-\alpha)]$. Ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x = (-\alpha)$ εἰς τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^6 - \alpha^6 = \alpha^6 - \alpha^6$.

Ἐν γένει, ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ πολυωνύμου Π (x) περιέχοντος τὸ x (καὶ διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τούτου), διὰ τοῦ $x+\alpha$. Ἂν διὰ τοῦ ρ (x) παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν $\Pi(x) = \rho(x).(x+\alpha) + \upsilon$. Θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν $x = -\alpha$ καὶ εὑρίσκομεν $\Pi(-\alpha) = \rho(-\alpha).(-\alpha+\alpha)+\upsilon = \rho(-\alpha).0+\upsilon$. ἤτοι, τὸ $\upsilon = \Pi(-\alpha)$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου, περιέχοντος τὸ*** x, ***διὰ τοῦ*** $x+\alpha$, ***ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ὅπου*** x ***τὸ*** $-\alpha$ ***εἰς τὸ πολυώνυμον καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τούτου».***

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^4+\alpha^4) : (x+\alpha)$ εἶνε τὸ

$$(-\alpha)^4 + \alpha^4 = \alpha^4 + \alpha^4 = 2\alpha^4.$$

***99.*** Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι, ***«πολυώνυμόν τι*** Π (x) ***περιέχον τὸ*** x, ***εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ*** $x-\alpha$ ***ἢ τοῦ*** $x+\alpha$, ***ἂν τὸ ὑπόλοιπον*** Π (α) ***ἢ*** Π (—α) ***τῆς πράξεως ταύτης εἶνε ἴσον μὲ μηδέν».***

Κατὰ ταῦτα τὸ $x^5-\alpha^5$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^5-\alpha^5 : x-\alpha$ εἶνε $\upsilon=\alpha^5-\alpha^5=0$.

Τὸ $x^3+\alpha^3$ διαιρεῖται διὰ $x+\alpha$, διότι εἶνε (ἂν τεθῇ $x=-\alpha$ εἰς τὸν διαιρετέον) $(-\alpha)^3+\alpha^3 = -\alpha^3+\alpha^3 = 0$.

Ἐν γένει τὸ $x^\mu - \alpha^\mu$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε $\alpha^\mu - \alpha^\mu = 0$.

Τὸ $x^\mu + \alpha^\mu$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶνε $\alpha^\mu + \alpha^\mu = 2\alpha^\mu \neq 0$.

Τὸ $x^\mu - \alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν τὸ μ εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ, ὅταν τὸ μ εἶνε περιττός. Διότι, εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu = \alpha^\mu - \alpha^\mu = 0$ (§ 33), εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶνε $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu = -2\alpha^\mu \neq 0$.

Τὸ $x^\mu + \alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν τὸ μ εἶνε περιττός, διότι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu = -\alpha^\mu + \alpha^\mu = 0$, ἀλλ' ὄχι ὅταν τὸ μ εἶνε ἄρτιος, διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^\mu + \alpha^\mu = \alpha^\mu + \alpha^\mu = 2\alpha^\mu \neq 0$.

### Πηλίκα τῶν διαιρέσεων $x^\mu \pm \alpha^\mu : x \pm \alpha$, ὅταν τὸ μ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός.

*100.* Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^\mu - \alpha^\mu$, ἢ τοῦ $x^\mu + \alpha^\mu$, διὰ τοῦ $x-\alpha$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0 διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, $2\alpha^\mu$ δὲ διὰ τὴν δευτέραν.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν διαίρεσιν $x^{2\nu} - \alpha^{2\nu}$ διὰ τοῦ $x+\alpha$ ὅτι τὸ μὲν πηλίκον εἶνε $x^{2\nu-1} - \alpha x^{2\nu-2} + \ldots - \alpha^{2\nu-1}$ τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $x^{2\nu+1} + \alpha^{2\nu+1}$ διὰ τοῦ $x+\alpha$ ἔχομεν πηλίκον $x^{2\nu} - \alpha x^{2\nu-1} + - \ldots + \alpha^{2\nu}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $x^{2\nu} + \alpha^{2\nu}$ διὰ $x+\alpha$ ἔχομεν πηλίκον $x^{2\nu-1} - \alpha x^{2\nu-1} + \ldots - \alpha^{2\nu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^{2\nu}$.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $x^{2\nu+1} - \alpha^{2\nu+1} : x+\alpha$ ἔχομεν πηλίκον μὲν $x^{2\nu} - \alpha x^{2\nu-1} + - \ldots + \alpha^{2\nu}$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^{2\nu+1}$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν,

$x^4 - \alpha^4 : x-\alpha = x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$.

$x^6 - \alpha^6 : x+\alpha = x^5 - \alpha x^4 + \alpha^2 x^3 - \alpha^3 x^2 + \alpha^4 x - \alpha^5$.

$x^3 + \alpha^3 : x - \alpha = x^2 + \alpha x + \alpha^2$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^3$.

$x^3 + \alpha^3 : x + \alpha = x^2 - \alpha x + \alpha^2$.

$\beta^5 - \gamma^5 : \beta+\gamma = \beta^4 - \beta^3\gamma + \beta^2\gamma^2 - \beta\gamma^3 + \gamma^4$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\gamma^5$.

Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶνε ὁμογενὲς βαθμοῦ τινος ὡς πρὸς ὡρισμένα γράμματα αὐτοῦ, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι του εἶνε τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $x^3 + 5\alpha x^2 - 12\alpha^2 x + \alpha^3$ εἶνε ὁμογενὲς βαθμοῦ τρίτου ὡς πρὸς τὰ α καὶ x. Τὸ $5xy - 8x^2 + 4y^2$ εἶνε ὁμογενὲς βαθμοῦ δευτέρου ὡς πρὸς τὰ x καὶ y.

Κατὰ ταῦτα τὰ ἀνωτέρω πηλίκα τῶν διαιρέσεων $x^\mu \pm \alpha^\mu : x \pm \alpha$ εἶνε πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ βαθμοῦ μ—1 ὡς πρὸς x καὶ α. Οὕτω τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $x^4 - \alpha^4 : x - \alpha$ εἶνε τὸ $x^3 + \alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha^3$, ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ α.

### *Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.*

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις.

α΄) $(2x^2 + x - 19) : (x-2)$. β΄) $(x^2 + \alpha x - 3\alpha^2) : (x-\alpha)$.

γ΄) $(x^2+6x+7) : (x+2)$.

2) Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων.

α΄) $(x^6+y^6) : (x+y)$. β΄) $(x^6-y^6) : (x-y)$. γ΄) $(x^3+y^3) : (x+y)$.
δ΄) $(x^5+\alpha^5) : (x+\alpha)$. ε΄) $(x^7+1) : (x+1)$. ϛ΄) $(x^3+\alpha^3) : (x-\alpha)$.
ζ΄) $(x^5+y^5) : (x-y)$. η΄) $(x^2+9x+6) : (x+5)$.
θ΄) $(x^3+6x^2-7x+1) : (x+3)$.
ι΄) $x^\nu + 1 : x-1$, $x^\nu + 1 : x+1$, $x^\nu - 1 : x+1$, ὅταν τὸ ν εἶνε ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμὸς (θετικός).

3) Εὕρετε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(2x^4 + 17x^3 - 68x - 32) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

χωρὶς νὰ ἐκτελέσετε τὴν πρᾶξιν.

4) Εὕρετε τίνων διαιρέσεων εἶνε τέλεια πηλίκα τὰ κάτωθι

α΄) $x^2+x+1$. β΄) $x^2-x+1$. γ΄) $x^3+x^2+x+1$. δ΄) $x^3-x^2+x-1$.
ε΄) $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$. ϛ΄) $x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3 x+\alpha^4$.

## *Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.*

## Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων.

*101.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

*«πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων».*

Ἔστω μονώνυμόν τι ἀκέραιον, π. χ. τὸ $24\ \alpha^2\ \beta^3\ \gamma$.

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους του παράγοντας, θὰ εὕρωμεν ὅτι εἶνε $24=2^3.\ 3$. Ἄρα $24\alpha^2\beta^3\gamma=2^3.\ 3\ \alpha^2.\ \beta^3.\ \gamma$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω μονωνύμου εἶνε οἱ 2, 3, α, β, γ. Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἔχοντος συντελεστὴν ἀκέραιον ἀριθμόν, γίνεται εὐκόλως, διότι πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν συντελεστήν του εἰς πρώτους παράγοντας. Τοὐναντίον, ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἁπλοῦν εἶνε δυνατὴ εἰς ὡρισμένας τινὰς περιπτώσεις, καὶ ἐκ τούτων ἀναφέρομέν τινας κατωτέρω.

***α΄)*** Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶνε γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουν καινόν τινα παράγοντα, τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων (§ 92).

Οὕτω τὸ $\alpha\mu + \beta\mu - \gamma\mu = \mu.\ (\alpha + \beta - \gamma)$.

Ὁμοίως τὸ $\mu\alpha + \mu = \mu.\ (\alpha + 1)$.

Ἐπίσης τὸ $2\,x^2 + 6\,x\,y = 2\,x\,(x + 3\,y)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸ κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

*Ἀσκήσεις.*

Τρέψατε εἰς γινόμενα τὰ

1) $8\,\alpha^2\,\beta - 6\,\alpha^3 + 4\,\alpha\,\beta$. 2) $4\,x^2\,y - 8\,x\,y^2 - 4xy$.
3) $8\alpha^3\beta^2\gamma^2 - 4\alpha^2\beta^3\gamma^3 + 2\alpha^2\beta^2\gamma^3$. 4) $15\alpha^3x - 10\alpha^3y + 5\alpha^3\omega$
5) $\alpha^3\gamma y^3 + 2\alpha^2\gamma^2y^2 - \alpha^2\gamma y^4$. 6) $3\beta^3\gamma^3 + 2\beta^2\gamma^2 - 6\beta\gamma^3$.
7) $x^2y^2\omega^2 - x^3y^2\omega^3 + x^2y^3\omega$. 8) $\alpha\beta^2\gamma^3 - 2\alpha^2\beta\gamma + 3\alpha^3\beta^3\gamma^2$.
9) $6\alpha^2 - 12\alpha^3$. 10) $3x^2 - 6x$. 11) $8x^2y^2 + 16xy\omega - 24\,x^2y^2\omega^2$
12) $\alpha\beta^2 - \beta\gamma^2 + \beta x$.

***β')*** Ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ διαταχθοῦν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἑκάστην τούτων νὰ ὑπάρχῃ ὁ αὐτὸς παράγων, τότε τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $\alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$

εἶνε ἴσον μὲ

$$(\alpha\gamma + \alpha\delta) + (\beta\gamma + \beta\delta) = \alpha\,(\gamma + \delta) + \beta\,(\gamma + \delta) = (\gamma + \delta)\,(\alpha + \beta).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$3x^3 - 5x^2 - 6x + 10 = (3x^3 - 5x^2) - (6x - 10)$$
$$= x^2(3x - 5) - 2\,(3x - 5) = (3x - 5)\,(x^2 - 2).$$

*Ἀσκήσεις.*

Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις

1) $x^2 - x^3 + 1 - x$. 2) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10$. 3) $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$
4) $\alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha + x$. 5) $(x - y)^2 + 2y(x - y)$. 6) $1 + 15x^4 - 5x - 3x^3$
7) $x^3 + x - x^2\omega - \omega$. 8) $\alpha x^4 + \beta x^3 - \alpha x - \beta$. 9) $2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$
10) $\alpha^2\,\beta - \alpha\beta x - \alpha\,\gamma + \gamma\,x$.

***γ')*** Ἐὰν τριώνυμόν τι ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον, τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων, ἤτοι, ἐὰν ἕκαστος τῶν δύο ὅρων του εἶνε τέλειον τετράγωνον, ὁ δὲ τρίτος ὅρος εἶνε τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δύο ἄλλων, Οὕτω τὸ

$$x^2 + 2x\,y + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)\,(x + y).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2 = (4\alpha - 3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta)\,(4\alpha - 3\beta).$$

Ἐπίσης τὸ $x^4 - 2x^2 y + y^2 = (x^2-y)^2 = (x^2-y)(x^2-y)$.

### *Ἀσκήσεις.*

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις.

1) $9x^2+24xy+16y^2$. 2) $49x^2-28xy+4y^2$. 3) $1-20\beta+100\beta^2$. 4) $49-140\lambda^2+100\lambda^4$. 5) $81\alpha^2+126\alpha\beta+49\beta^2$. 6) $\mu^2\nu^2-16\mu\nu\alpha^2+64\alpha^4$. 7) $4\alpha^2-20\alpha x+25x^2$. 8) $121\alpha^2+198\alpha y+81y^2$. 9) $\alpha^2\beta^4\gamma^6-2\alpha\beta^2\gamma^3x^8+x^{16}$. 10) $49\alpha^2+42\alpha\gamma^2+9\gamma^4$. 11) $121+110x+25x^2$. 12) $144+168\omega+49\omega^2$. 13) $36x^2+60xy+25y^2$. 14) $y^2-50y\omega+625\omega^2$.

***δ')*** Ἐὰν διώνυμόν τι εἶνε διαφορὰ δύο τετραγώνων, τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν ὅτι $16x^2-9y^6=(4x+3y^3)(4x-3y^3)$.

Ὁμοίως τὸ $25-16\alpha^2=(5+4\alpha)(5-4\alpha)$.

### *Ἀσκήσεις.*

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

1) $\alpha^2\beta^2-1$. 2) $4\alpha^2-49\beta^2$. 3) $121\alpha^2-36\beta^2$. 4) $49\alpha^{14}-y^{12}$. 5) $81\alpha^4\beta^4-\gamma^4$. 6) $4\alpha^2\gamma-9\gamma^3$. 7) $20\alpha^3\beta^3-5\alpha\beta$. 8) $3\alpha^5-12\alpha^3\gamma^2$. 9) $1-400x^4$. 10) $4x^{16}-y^{20}$. 11) $9x^8-\alpha^6$. 12) $16x^{17}-6xy^6$. 13) $25x^{10}-16\alpha^8x^8$. 14) $121\alpha^2-36\beta^2$.

***ε')*** Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους δοθέντος πολυωνύμου καθ' ὁμάδας οὕτως, ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων. Οὕτω ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Π.χ. ἔχομεν ὅτι, $\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^2-9\gamma^2=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-9\gamma^2$
$=(\alpha-\beta)^2-9\gamma^2=(\alpha-\beta+3\gamma)\ (\alpha-\beta-3\gamma)$.

Ὁμοίως $12\alpha\beta+9x^2-4\alpha^2-9\beta^2=9x^2-(4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2)$
$=9x^2-(2\alpha-3\beta)^2=(3x-2\alpha+3\beta)(3x+2\alpha-3\beta)$.

### *Ἀσκήσεις.*

1) $\alpha^2-(3\beta-2\gamma)^2$. 2) $\beta^2-(2\alpha+3\gamma)^2$. 3) $9\alpha^2-(x-3\gamma)^2$. 4) $16\alpha^2-(2y-3\omega)^2$. 5) $(\alpha+2\beta-3\gamma)^2-(\alpha+5\gamma)^2$. 6) $(2\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-2\beta+\gamma)^2$. 7) $(x-5)^2-(x+y-5)^2$. 8) $(2\alpha-1)^2-(2\alpha+1)^2$. 9) $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta-\gamma)^2$. 10) $x^2-(y-\omega)^2$. 11) $(\alpha-3x)^2-(3\alpha-2x)^2$. 12) $1-(x+5\beta)^2$.

***στ')*** Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4$$

παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2 - \alpha^2\beta^2$
$= \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$
$= (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta)\,(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta).$

Π. χ. τὸ $= x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$
$= (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)\,(x^2 - x + 1).$

***ζ')*** Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$x^2 + \beta x + \gamma$$

καὶ τὸ μὲν β εἶνε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἔστω τῶν ϱ καὶ ϱ', τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν ὅτι, $\beta = \varrho + \varrho'$, $\gamma = \varrho.\varrho$. Ἄρα τὸ $x^2 + \beta x + \gamma = x^2 + (\varrho + \varrho')x + \varrho\,\varrho$
$= x^2 + \varrho x + \varrho' x + \varrho\varrho' = (x^2 + \varrho x) + (\varrho' x + \varrho'\varrho)$
$= x(x + \varrho) + \varrho'(x + \varrho) = (x + \varrho)\,(x + \varrho').$

Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^2 + 8x + 15$,
παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $8 = 5 + 3$, καὶ $15 = 3.5$.
Διὰ τοῦτο τὸ $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)\,(x + 5)$.
Ὁμοίως τὸ $x^2 + 11x + 30 = (x + 5)\,(x + 6)$.
Διότι εἶνε $5 + 6 = 11$ καὶ $30 = 5.\,6$.

***η')*** Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ τὴν τρέψωμεν εἰς γινόμενον, ἐπαναφέροντες πρῶτον αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν.

Ἔστω π. χ. ἡ παράστασις $3x^2 - x - 2$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\frac{1}{3}(3.\,3x^2 - 3x - 3.\,2)$.

Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3\,x$ τὸ ω, δηλαδὴ $3\,x = \omega$,

ἔχομεν $3x^2 - x - 2 = \frac{1}{3}\,(\omega^2 - \omega - 6)$.

Ἀναλύομεν τὸ $\omega^2 - \omega - 6$ εἰς τὸ $(\omega - 3)\,(\omega + 2)$ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν

$$3x^2 - x - 2 = \frac{1}{3}\,(\omega - 3)\,(\omega + 2).$$

Γράφομεν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον του $3\,x$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{1}{3}\,(3\,x - 3)\,(3\,x + 2) = \frac{3}{3}\,(x - 1)\,(3\,x + 2)$$
$$= (x - 1)\,(3\,x + 2).$$

Ἤτοι $3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$.

*ϑ')* Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε ἄθροισμα ἢ διαφορὰ δύο κύβων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ $x+\alpha$, ἢ τοῦ $x-\alpha$. Οὕτω π. χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$. Ἑπομένως εἶνε

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).$$

Ὁμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. Ἄρα εἶνε $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ $x^6+y^9=(x^2+y^3)(x^4-x^2y^3+y^6)$.

Τὸ $(x-y)^3+\omega^3=(x-y+\omega)[(x-y)^2-(x-y)\omega+\omega^2]$ $=(x-y+\omega)(x^2-2xy+y^2-x\omega+y\omega+\omega^2)$.

### *Ἀσκήσεις.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις.

1) $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$. 2) $4x^4-21x^2y^2+9y^4$. 3) $4\alpha^4-29\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4$. 4) $4\alpha^4-13\alpha^2+1$. 5) $4x^4-37x^2y^2+9y^4$. 6) $9\alpha^4-15\alpha^2+1$. 7) $x^4+x^2y^2+y^4$. 8) $\alpha^4+\beta^4$. 9) $\alpha^8+\beta^8$. 10) $\lambda^4+\lambda^2+1$. 11) $9\alpha^8-15\alpha^4+1$. 12) $16\alpha^4-17\alpha^2+1$. 13) $25x^4+31x^2y^2+16y^4$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** Ὁμοίως αἱ παραστάσεις.

1) $x^2-7x-8$. 2) $x^2+9x+8$. 3) $x^2-3x-18$. 4) $x^2-9x+18$. 5) $x^2+4x-5$. 6) $\gamma^2-58\gamma+57$. 7) $\alpha^2\beta^2-13\alpha\beta\gamma+22\gamma^2$. 8) $\alpha^2+17\alpha-390$. 9) $\alpha^2-7\alpha\beta+10\beta^2$. 10) $\alpha^4-11\alpha^2\beta^3+30\beta^6$. 11) $\alpha^2x^2-3\alpha x-54$. 12) $\omega^2+9\omega y+20y^2$.

***Ὁμὰς τρίτη.*** Ἐπίσης αἱ παραστάσεις.

1) $6x^2-x-2$. 2) $18x^2+9x-2$. 3) $12x^2-7x+1$. 4) $12x^2-x-1$. 5) $3x^2-2x-5$. 6) $3x^2+4x-4$. 7) $6x^2+5x-4$. 8) $4x^2+13x+3$. 9) $6x^2+17x+12$. 18) $11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2$.

***Ὁμὰς τετάρτη.*** Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις.

1) $x^3+64$. 2) $x^3y^3-64$. 3) $343-x^3$. 4) $\alpha^3\beta^3+243$. 5) $8\alpha^3-\beta^6$. 6) $216\mu^3+\nu^6$. 7) $x^3y^3-512\omega^3$. 8) $729y^3-64\omega^3$. 9) $(\omega+5)^3-\alpha^3$. 10) $(y-\omega)^3+(y+\omega)^3$.

## Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

**102.** Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ἀριθμῶν, ἀναλύομεν ἕκαστον αὐτῶν εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων, καὶ σχηματίζομεν***

***τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν παραγόντων των, καθενὸς τούτων λαμβανομένου μὲ τὸν ἐλάχιστον τῶν ἐκθετῶν του».***

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἂν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Οὕτω ὁ μ. κ. δ. τῶν

$$6\alpha^2\beta^3 = 2.\ 3.\ \alpha^2.\beta^3,\ 9\ \alpha^3\beta^2 = 3^2.\ \alpha^3.\ \beta^2,\ 16\ \alpha^4\beta^3 = 2^4\ \alpha^4\ \beta^3$$

εἶνε τὸ $\alpha^2\ \beta^2$. Ὁ μ. κ. δ. τῶν

$$\alpha^2 - \alpha\beta = \alpha\ (\alpha - \beta),\quad \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\ (\alpha - \beta)^2$$

καὶ $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\ (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$, εἶνε τὸ $(\alpha - \beta)$.

## *Ἀσκήσεις.*

Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν παραστάσεων.

1) $120\alpha^2$ καὶ 168 2) τῶν $36\alpha^3x$ καὶ $28x^3y$. 3) τῶν $36x^3$ καὶ $27x^4$. 4) τῶν $(x-1)^2\ (x+2)^3$ καὶ $(x-1)\ (x+3)^3$. 5) τῶν $x-16$ καὶ $(x+4)^2$. 6) τῶν $35\ x^2\ (\mu+\nu)^2$, $(\mu-\nu)^3$, $20x^3\ (\mu+\nu)^2\ (\mu-\nu)^2$ καὶ $45x^4\ (\mu+\nu)^3\ (\mu-\nu)^3$.

## Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

§ *103.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐ. κ. π. ἀριθμῶν, ἀναλύομεν ἕκαστον αὐτῶν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν παραγόντων των, ἑκάστου λαμβανομένου μὲ τὸν μέγιστον τῶν ἐκθετῶν του».***

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ. κ. π. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἂν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Οὕτω τὸ ἐ. κ. π. τῶν παραστάσεων

$$18\ \alpha^3\ \beta^2 = 2.\ 3^2.\ \alpha^3.\ \beta^2,\ 9\ \alpha\ \beta^2 = 3^2.\ \alpha.\ \beta^2,\ 12\ \alpha\beta = 2^2.\ 3.\ \alpha.\ \beta,$$

εἶνε τὸ γινόμενον $2^2.\ 3^2.\ \alpha^3.\ \beta^2 = 36\ \alpha^3\ \beta^2$.

Ὁμοίως τῶν $6\ (\alpha+\beta)$, $4\ (\alpha+\beta)^2.\ (\alpha-\beta)$, $9\ (\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)^2$ τὸ ἐ. κ. π. εἶνε $2^2.\ 3^2\ (\alpha+\beta)^2\ (\alpha-\beta)^2 = 36\ (\alpha^2-\beta^2)^2$.

## *Ἀσκήσεις.*

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παραστάσεων.

1) $18\ x\ (\alpha+2\beta)^3$, $9\ xy\ (\alpha+2\beta)^2\ (\alpha-2\beta)$, $18\ x^2y^2\ (\alpha-2\ \beta)^2$.

2) $(\mu+1)^2$, $(\mu-1)$, $\mu^2-2\ \mu+1$, $\mu^3-1$.

3) $(x^5+x^4)$, $(x^5+x)$, $(x^5-x)^2$.

4) $(3\ x^4+3x)$. $(5\ x^3-5\ x)$, $(10\ x^2+10\ x)$.

## *Περὶ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.*

*104.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

**«τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν παρίσταται διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην».**

Οὕτω καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, π. χ. τῶν $-5\alpha^2+\beta^3$ καὶ $8\gamma^3+9\alpha$ παρίσταται ὑπὸ τοῦ κλάσματος $\frac{-5\alpha^2+\beta^3}{8\gamma^3+9\alpha}$, τὸ ὁποῖον λέγεται **ἀλγεβρικὸν κλάσμα.** Γενικῶς,

**«ἀλγεβρικὸν κλάσμα καλεῖται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἐν γένει ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, παριστάνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ».**

### *Ἰδιότητες ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.*

*105.* Ἐπειδὴ οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, οἱ ὅροι αὐτοῦ παριστάνουν ἀριθμούς, ἕπεται ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

**«Ἐὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται».**

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}$, $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὁμοίως $\frac{57\,\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3.\,19.\,\alpha^3\beta\gamma^2}{2\;\,19.\,\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^2}$

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθὲν κλάσμα ἀλγεβρικὸν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ἔχον ὅρους ἁπλουστέρους ἢ μὴ τοῦ δοθέντος.

**Ἁπλοποίησις** ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμόν του, καὶ ἔχον ὅρους ἁπλουστέρους.

Ἵνα ἁπλοποιήσωμεν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του διά τινος κοινοῦ διαιρέτου των. Οὕτω τὸ κλάσμα

$$\frac{(\alpha+5)(\alpha+3)}{(\alpha+3)(\alpha+2)} \text{ τρέπεται εἰς τὸ } \frac{(\alpha+5)}{(\alpha+2)},$$

ἀφοῦ οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ $(\alpha+3)$.

***Ἀνάγωγον*** καλεῖται κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα. Ἑπομένως ἀνάγωγον κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται.

Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«ἵνα κάμωμεν κλάσμα τι ἀνάγωγον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ μ. κ. δ. των».***

Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα (ἢ τὰς ἀλγεβρικὰς κλασματικὰς παραστάσεις), ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως.

Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2^2\alpha^2\beta^2\gamma}{2.3\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2\alpha}{3\gamma^2} \quad (\text{μ. κ. δ. εἶνε ὁ } 2\alpha\beta^2\gamma).$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha+1)}{\alpha} \quad (\text{μ. κ. δ. εἶνε ὁ } \alpha-1).$$

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{(x+\alpha+\beta)(x+\alpha-\beta)}{(x+\beta+\alpha)(x+\beta-\alpha)}=\frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha} \quad (\text{μ.κ.δ. ὁ } x+\alpha+\beta).$$

### *Ἀσκήσεις.*

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα, ὥστε νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀνάγωγα ἰσοδύναμα πρὸς αὐτά.

α') $\frac{16\alpha^2\beta^2}{18\alpha\beta^2}$. β') $\frac{9\alpha\beta^2\gamma}{45\alpha^2\beta^2\gamma^2}$. γ') $\frac{46x^2y^3}{36x^3y^5}$. δ') $\frac{98xy-24y^2}{24x^2-32xy}$.

ε') $\frac{8x^2+24\alpha x+18\alpha^2}{16x^3+54\alpha^3}$. ϛ') $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$. ζ') $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$. η') $\frac{x^4-9^4}{x^2-9^2}$.

## Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

*106.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα· 1) ἀναλύομεν τὸν παρανομαστὴν καθενὸς εἰς γινόμενον παραγόντων· 2) εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν γινομένων τούτων· 3) διαιροῦμεν τὸ ἐ. κ. π. διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν· 4) ἐπὶ καθὲν τῶν πηλίκων τῶν διαιρέσεων τούτων πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους καθενὸς τῶν ἀντιστοίχων κλασμάτων».***

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα, διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα ἀλγεβρικὰ κλάσματα (ἢ ἀλγεβρικὰς κλασματικὰς παραστάσεις), ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Ἔστωσαν π.χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{\beta}{6\alpha},\quad \frac{\alpha}{9\beta},\quad \frac{1}{4\alpha^2\beta},\quad \frac{1}{18\alpha^2\beta^3}.$$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε τὸ $3^2 . 2^2 . \alpha^2\beta^3$. Διαιροῦντες αὐτὸ διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $6\alpha\beta^3$, $4\alpha^2\beta^2$, $9\beta^2$, $2$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους καθενὸς τῶν δοθέντων κλασμάτων κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰ πηλίκα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{6\alpha\beta^4}{36\alpha^2\beta^3},\quad \frac{4\alpha^3\beta^2}{36\alpha^2\beta^3},\quad \frac{9\beta^2}{36\alpha^2\beta^3},\quad \frac{2}{36\alpha^2\beta^3}.$$

## Ἀσκήσεις.

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα ἀλλ' οὕτως, ὥστε τὰ νέα νὰ ἔχουν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

1) $\frac{1}{x^2-1},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{x+1}.$

2) $\frac{\mu}{3x^3y^2},\quad \frac{\nu}{8xy^3},\quad \frac{\varrho}{9x^4y^3},\quad \frac{7}{24x^2y^4}.$

3) $\frac{1}{4(\alpha+\beta)^3},\quad \frac{5}{8(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)},\quad \frac{9}{5(\alpha-\beta)^2}.$

4) $\frac{\alpha^2}{(x^2-4)(x-1)},\quad \frac{\alpha}{(x+2)(x+1)},\quad \frac{3}{x^2-4x+4}.$

5) $\frac{x^2}{\varrho(\alpha\mu+\mu^2)},\quad \frac{x}{\varrho^2(\alpha^2-\alpha\mu)},\quad \frac{1}{\varrho^3(\alpha^2-\mu^2)}.$

## Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος.

**107.** ***Καλοῦμεν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἀλγεβρικοῦ κλάσματος τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν εἰς τὰ γράμματα τοῦ κλάσματος δώσωμεν ὡρισμένας τιμὰς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις.***

Ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ κλάσματος εἶνε συνήθως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ παρονομαστοῦ του. Π. χ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha+1}{\alpha-2}$ ὅταν τὸ $\alpha =$ μὲ 4, εἶνε ἴση πρὸς $\frac{4+1}{4-2} = \frac{5}{2}$.

Ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{2\,\alpha}{3\gamma^2}$ ὅταν εἶνε $\alpha = 1$, $\gamma = 2$, εἶνε ἴση

μὲ $\frac{2.1}{3.2^2} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

## Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$.

***108.*** Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}$. Ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὸ $x = \alpha$, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha^2 - \alpha^2}{\alpha - \alpha} = \frac{0}{0}$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἐνίοτε οἱ ὅροι δοθέντος κλάσματος διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος γίνονται ἴσοι μὲ μηδέν, καὶ ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ κλάσματος ἔχει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἀλλ᾽ ἡ παράστασις αὕτη δὲν ἔχει καμμίαν ὡρισμένην τιμὴν καὶ λέγεται **ἀόριστος**, ἐπειδὴ ἂν θέσωμεν τὸ $\frac{0}{0}$ ἴσον μὲ οἱονδήποτε ἀριθμόν, π. χ. $\frac{0}{0} = 7$, θὰ ἔχωμεν $0 = 0.\,7 = 0$. Διότι, πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδὲν δίδει γινόμενον μηδέν. Διὰ ταῦτα, (ὅταν συμβαίνῃ τοῦτο), διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ δοθέντος κλάσματος, ἀντικαθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ κλάσμα, τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ δοθέντος, μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὅρων του, καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης θὰ παριστάνῃ τὴν ζητουμένην ἀληθῆ τιμὴν αὐτοῦ. Οὕτω π. χ. ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}$, ὅταν τὸ x διηνεκῶς πλησιάζῃ πρὸς τὸ α καὶ τεθῇ $x = \alpha$, δὲν εἶνε ἡ ἀόριστος παράστασις $\frac{0}{0}$, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἂν θέσωμεν εἰς τὸ κλάσμα $\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha}$ τὸ x ἴσον μὲ τὸ α, ἀλλ᾽ ἡ τιμὴ 2α, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ $\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} = \frac{(x - \alpha)(x + \alpha)}{x - \alpha} = x + \alpha$, ἐὰν τεθῇ εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο $x + \alpha$ ἀντὶ τοῦ x τὸ α (ὅτε ἔχομεν $\alpha + \alpha = 2\alpha$).

***109.*** Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{3x^3}{x - 2}$ διὰ $x = 2$.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ 2 εὑρίσκομεν $\frac{3.2^3}{2-2}=\frac{3.8}{0}=\frac{24}{0}$.

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἐνίοτε ἡ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος λαμβάνει μορφὴν κλάσματος μέν, ἀλλ' ἔχοντος παρονομαστὴν τὸ μηδὲν καὶ ἀριθμητὴν ὡρισμένον τινὰ ἀριθμόν. Ἐν γένει, ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ κλάσματός τινος εἶνε ἡ $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμόν τινα διάφορον τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι, ***«ἡ παράστασις*** $\frac{\alpha}{0}$ ***οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν, ἢ ὅτι, ἡ τιμὴ τοῦ*** $\frac{\alpha}{0}$ ***εἶνε μεγαλυτέρα ἀπολύτως (§ 6) παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου».***

Καὶ τὸ μὲν ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν, φαίνεται ἐκ τοῦ ὅτι οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ μηδέν, δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸ α, ἀφοῦ, τὸ 0 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενον ἰσοῦται μὲ μηδὲν (§ 36). Ἐξ ἄλλου ὅμως, ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν ὡρισμένον ἀριθμὸν α (διάφορον τοῦ μηδενός), εἶνε πολὺ μικρός, ἔστω ὁ 0,000. . . . 1, τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha}{0{,}000,\ldots 1}=\alpha\times\frac{1000\ldots\ldots}{1}=1000\,.\,.\,.\,.\,\alpha.$$

Δηλαδὴ εἶνε ἀριθμὸς ἀπολύτως (§ 6) πολὺ μέγας· καὶ ὅσῳ ὁ παρονομαστὴς ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ μηδέν, τόσῳ τὸ κλάσμα γίνεται ἀπολύτως μεγαλύτερον καὶ ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν, παραστάνομεν δὲ τὴν τοιαύτην τιμήν του διὰ τοῦ συμβόλου $\pm\infty$ ***(ἄπειρον)*** καθόσον ὁ ἀριθμητὴς α εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

Διὰ τοῦτο πάντοτε ***«ἐν πάσῃ διαιρέσει πρέπει νὰ ὑποθέτωμεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ μηδενός».***

### ***Ἀσκήσεις.***

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $\frac{x^3+2x^4}{x}$ διὰ $x=0$. β') $\frac{y^4-\alpha^4}{y^2-\alpha^2}$ διὰ $y=\alpha$.

γ') $\dfrac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}$ διὰ $x=\alpha$. δ') $\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$ διὰ $\alpha=\beta$.

ε') $\dfrac{(x^2+2\alpha x+\alpha^2)\,(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$ καὶ ϛ') $\dfrac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}$ διὰ $x=\alpha$.

ζ') $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}$ διὰ $x=1$. η') $\dfrac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1}$ διὰ $\alpha=1$.

ϑ') $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}$ διὰ $x=-1$. ι') $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-8x+15}$ διὰ $x=5$.

## Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων.

*110.* Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι,

***«διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα· 1) ἐὰν μὲν εἶνε ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητάς των, καὶ τὸ ἄθροισμα γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστὴν δὲ τὸν κοινὸν παρονομαστήν των· 2) ἐὰν δ' εἶνε ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα, καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ὁμώνυμα κλάσματα».***

Ὁ ἀνωτέρω κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν πρόσθεσιν ἀλγεβρικῶν κλασματικῶν παραστάσεων, ἀνάλογος δ' εἶνε καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως. Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}.$$

$$\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}=\frac{\alpha\nu+\beta\mu}{\mu.\nu},\quad \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}.$$

$$\frac{20xy}{9}-\frac{25xy}{9}-\frac{4xy}{9}=-\frac{9xy}{9}=-xy.$$

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=\frac{4x}{20}-\frac{5x}{20}=-\frac{x}{20}.$$

### Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

1) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{6}$. Διὰ $x=0,3$.

2) $\dfrac{2(x+3)}{7}-\dfrac{3(x-4)}{4}+\dfrac{5(x+5)}{12}+\dfrac{x+2}{21}$. Διὰ $x=-0,5$.

3) $\dfrac{2}{2x+5}+\dfrac{3}{3x+7}-\dfrac{2(5x+12)}{(2x+5)\,(3x+7)}$. Διὰ $x=2$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* Ὁμοίως τῶν

1) $\frac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-3\beta}-\frac{2\alpha-3\beta}{2\alpha+3\beta}+\frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{(4\alpha^2-9\beta^2)}$. Διὰ $\alpha=1,\ \beta=2$.

2) $\frac{4\alpha}{x^2-4}+\frac{\alpha}{x+2}-\frac{\gamma}{x^2-4x+4}$. Διὰ $x=-3,\ \alpha=2,\ \gamma=-1$.

3) $\frac{\alpha}{\alpha x+x^2}+\frac{\beta}{\alpha^2-\alpha x}+\frac{2\alpha}{\alpha^2-x^2}$. Διὰ $x=3,\ \alpha=\beta=\gamma=-1$).

*Ὁμὰς τρίτη.* Ὁμοίως τῶν

2) $5x^2+3xy+4y^2+\frac{x^3+y^3}{x-y}$. Διὰ $x=-1,\ y=5$.

2) $\frac{1}{2x^2+2x}+\frac{3}{5x^2-5x}-\frac{3}{10x^2-10x}$. Διὰ $x=-3$.

3) $\frac{4x^3}{x^4-16}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}$. Διὰ $x=-3$.

4) $\frac{1}{(x-3)(x+5)}+\frac{1}{(5-x)(x-7)}+\frac{2}{(x-7)(3-x)}$. Διὰ $x=8$.

5) $\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

Διὰ $\alpha=1,\ \beta=7,\ \gamma=2$.

## Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

*111.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$ (ὑποτιθεμένου ὅτι οἱ α, β, γ, δ εἶνε ἀκέραιοι ἀριθμοὶ θετικοί). Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (§ 26) ἐπειδὴ ὁ δεύτερος τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν, ὁ $\frac{\gamma}{\delta}$, γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{\delta}$ αὐτῆς καὶ τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ, ἔπεται ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ $\frac{1}{\delta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ γ. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{\delta}$ τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶνε $\frac{\alpha}{\beta\delta}$. Διότι πράγματι τὸ $\frac{\alpha}{\beta\delta}$ ἐπὶ δ δίδει τὸν $\frac{\alpha}{\beta}$. Ὥστε ἔχομεν, $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta\delta}\cdot\gamma=\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$.

Ἤτοι, «**τὸ γινόμενον δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ**

***κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων, παρονομαστὴν δὲ τὸ γινόμενον τῶν παρανομαστῶν των».***

Ὁ κανὼν οὗτος ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ α, β, γ, δ εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, καθὼς καὶ διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, ἀποδεικνύεται δ' ὁμοίως. Οὕτω π. χ. ἔχομεν

$$\frac{12\,x^2y}{7\,\omega\,\varphi^2}\cdot\frac{14\,\omega^2\varphi}{3\,x\,y^2}=\frac{12\,x^2y.\ 14\,\omega^2\varphi}{7\,\omega\varphi^2.\ 3\,x\,y^2}=\frac{12.14\ x^2y\omega^2\varphi}{7.\ 3\,xy^2\,\omega\varphi^2}=\frac{8x\omega.}{y\,\varphi}$$

Παρατηρητέον ὅτι, δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιοῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων μὲ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν (§ 105) πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν τοῦτο εἶνε δυνατόν.

Π. χ. εἶνε $\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}\cdot\dfrac{\alpha-x}{\alpha^2+x^2}=\dfrac{\alpha+x}{\alpha^2+x^2}.$

Ἐπίσης $\dfrac{x\ (\alpha+x)}{\alpha\ (\alpha-x)}\cdot\dfrac{\alpha^2\ (\alpha-x)^2}{x^2\ (\alpha+x)^2}=\dfrac{x(\alpha+x)}{\alpha(\alpha-x)}\cdot\dfrac{\alpha^2(\alpha-x)\,(\alpha-x)}{x^2(\alpha+x)\,(\alpha+x)}=$

$$=\frac{\alpha\ (\alpha-x)}{x\ (\alpha+x)}.$$

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι γινομένων·

1) $\dfrac{\alpha\ x+\alpha y}{\gamma\ x+\gamma y}\times\dfrac{\gamma x^2-\gamma y^2}{\beta x+\beta y}$. 2) $\dfrac{3\ x^2-6\ x\ y+3y^2}{x+y}\times\dfrac{x^3+y^3}{6x-y}$.

3) $\left(\dfrac{x^2+1}{x^3+x^2}-\dfrac{1}{x+1}\right).(x+1)$. 4) $\left(1+\dfrac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4x^2y^2}\right).$ $(x^4-2x^2y^2+y^4).$

5) $\left(\dfrac{2x^2+3\ x\ y}{2x^2-3\ x\ y}\right)^2$. 6) $\left(\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}\right)\times\left(\dfrac{\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta}\right)$

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Ἔχει τις 5λ δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐξοδεύ[ει] πρῶτον τὸ τρίτον, ἔπειτα τὸ ἕβδομον καὶ τέλος τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀρχικοῦ π[ο]σοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν ; $\frac{25\,\lambda}{63}$

2) Ἔχει τις (β—1) δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει τὸ τέταρτον αὐτῶν κ[αὶ] $\frac{3}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα τοῦ ἔμειναν ; $\frac{3}{7}$ (β—

3) Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 90 δρχ. καὶ ἔπει[τα] τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου· πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένουν ; $\left(\frac{5\alpha}{9}-50\right.$

4) Ἔχει τις γ δραχμὰς καὶ χάνει πρῶτον τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτῶν, ἔπειτα τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν· τέλος χάνει πάλιν τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν ; $\frac{2\gamma}{7} - \frac{5}{3}$.

5) Ἀπὸ μίαν βρύσιν τρέχουν 7 ὀκ. ὕδατος εἰς 5″· ἀπὸ ἄλλην 9 ὀκ. εἰς 4″. Πόσαι ὀκάδες θὰ τρέξουν καὶ ἐκ τῶν δύο, ἐὰν ἡ μὲν πρώτη τρέχῃ ἐπὶ τ″, ἡ δὲ ἄλλη ἀνοιχθῇ 2″ βραδύτερον, κλείσουν δὲ συγχρόνως ; $\frac{73\,\tau}{20} - \frac{9}{2}$.

## Διαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

**112.** Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι, τὸ πηλίκον δύο κλασματικῶν ἀριθμῶν π. χ. τῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ (τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶνε θετικοὶ ἀριθμοὶ) ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$.

Πράγματι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς πράξεως ἔχομεν ὅτι,
$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ δι᾿ ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως. Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ διαιρέσωμεν παράστασίν τινα ἀλγεβρικὴν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν δοθεῖσαν παράστασιν ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ δοθέντος κλάσματος».***

Οὕτω π. χ. τὸ
$$\frac{12\alpha^2}{\beta^2} : \frac{3\alpha\beta^2}{10} = \frac{12\alpha^2}{\beta^2} \cdot \frac{10}{3\alpha\beta^2} = \frac{120\alpha^2}{3\alpha\beta^4} = \frac{40\,\alpha}{\beta^4}.$$

Τὸ $\frac{15\,(\alpha+\beta)}{22\,(\alpha-\beta)} : \frac{5\,(\alpha+\beta)^2}{11(\alpha-\beta)} = \frac{15\,(\alpha+\beta)}{22\,(\alpha-\beta)} \cdot \frac{11\,(\alpha-\beta)}{5\,(\alpha+\beta)^2} = \frac{3}{2\,(\alpha+\beta)}$.

## Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς σημειωμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

1) $\dfrac{12\,xy^2}{7\alpha^2\beta} : \dfrac{8\,x^2\,y}{15\,\alpha\beta^2}$. 2) $\dfrac{12\,\alpha^2}{5\beta^2\gamma^3} : \dfrac{3\alpha\beta^2}{10\gamma^2}$. Διὰ $x=y=1, \alpha=2, \beta=\gamma=3$.

3) $\alpha^3 : \left(\alpha^2 : \dfrac{\alpha}{\beta}\right)$. 4) $\dfrac{9\,\gamma^2}{28\,\alpha^3\,\beta^2} : \left(\dfrac{12\,\alpha^2\beta}{7\,\gamma^2} : 4\,\beta^2\gamma\right)$.

Διὰ $\alpha=2$, $\beta=\gamma=-3$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** Ὁμοίως τῶν

1) $\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} - \dfrac{\alpha}{\beta} - 1\right) : \dfrac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}$. 2) $\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-y^2}\right) : \left(\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{x^4-2x^2y+y^4}\right)$.

3) $\left(\dfrac{\alpha-2}{3} - \dfrac{\alpha-4}{5}\right) : \dfrac{6}{25}(\alpha+1)$. 4) $\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}\right) : \dfrac{x}{x^2-1}$.

5) $\dfrac{\alpha^2+\alpha x+\alpha y+xy}{\alpha^2-\alpha x-\alpha y+xy} : \dfrac{\alpha^2-\alpha x+\alpha y-xy}{\alpha^2+\alpha x-\alpha y-xy}$. Διὰ $x=y=3$,

6) $\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta} + \dfrac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right) : \dfrac{2\,\alpha^2}{\alpha^2 - 4\beta^2}$. $\alpha=\beta=2$.

***Ὁμὰς τρίτη.*** 1) Ἔχει τις α δραχμάς. Τὸ ποσὸν τοῦτο αὐξάνει κατὰ τὸ πέμπτον αὐτοῦ. Ἐξοδεύει τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν ὅσων οὕτω ἔχει, καὶ αὐξάνει ὅσα τοῦ μένουν κατὰ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῶν. Πόσα ἔχει εἰς τὸ τέλος ; $\frac{27\alpha}{20}$.

2) Ἔχων τις α δραχμάς, τὰς αὐξάνει κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῶν. Ἐξοδεύει ἔπειτα 5 δραχμάς, καὶ τὸ ὑπολειφθὲν αὐξάνει κατὰ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ, ἐξοδεύει δὲ πάλιν 5 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς τὸ τέλος ; $\frac{25\,\alpha - 180}{16}$.

3) Χωρικός τις ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν $(16\,\alpha + 30)$ ᾠὰ πρὸς πώλησιν. Ἐν πρώτοις ἐπώλησε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ὅσων ἔφερε καὶ ἓν ᾠὸν ἐπὶ πλέον· ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ ἀκόμη ἓν ᾠόν. Ὁμοίως ἐπώλησε καὶ τρίτην καὶ τετάρτην φοράν. Πόσα ᾠὰ τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ τέλος ; α.

## Σύνθετα κλάσματα.

**113.** ***Σύνθετον κλάσμα*** καλεῖται κλάσμα τι, ἐὰν τοὐλάχιστον εἷς τῶν ὅρων του δὲν εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\dfrac{3x}{\dfrac{4x-1}{4y}}$

εἶνε σύνθετον, διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶνε κλασματικὴ παράστασις.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ παρονομαστοῦ του, ἔπεται ὅτι ἔχομεν,

$$\frac{3x}{\dfrac{4x-1}{4y}} = 3x : \frac{4x-1}{4y} = 3x \times \frac{4y}{4x-1} = \frac{12xy}{4x-1}.$$

Ἐν γένει, ***«ἵνα κλάσμα σύνθετον καταστήσωμεν ἁπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του».***

Συντομώτερος τρόπος διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετόν τι κλάσμα ἁπλοῦν, εἶνε ὁ ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος συνθέτου κλάσματος, καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος (§ 105).

Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα

$$\frac{\dfrac{\alpha}{\alpha-x} - \dfrac{\alpha}{\alpha+x}}{\dfrac{x}{\alpha-x} + \dfrac{x}{\alpha+x}}.$$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν α—x καὶ α+x εἶνε τὸ γινόμενον αὐτῶν (α—x)(α+x). Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha(\alpha+x)-(\alpha-x)\alpha}{x(\alpha+x)+x(\alpha-x)} = \frac{\alpha^2+\alpha x-\alpha^2+\alpha x}{\alpha x+x^2+\alpha x-x^2} = \frac{2\alpha x}{2\alpha x} = 1.$$

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}}$

πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1-x}}$$

ἐπὶ (1—x) καὶ εὑρίσκομεν $\frac{1-x}{2-x}$. Ὥστε ἀντὶ τοῦ δοθέντος ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ

$$\frac{1}{1+\frac{1-x}{2-x}}.$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τούτου ἐπὶ 2—x καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{2-x}{3-2x}.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύνθετον κλάσμα ἰσοῦται μὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἁπλοῦν κλάσμα.

## *Ἀσκήσεις.*

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

1) $\dfrac{\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\mu}}{\frac{\omega}{\mu}}$. 2) $\dfrac{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}+1}{1+\frac{\nu}{\mu+\nu}}$. Διὰ $x=y=\omega=\mu=4$, $\nu=-2$.

3) $\dfrac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1}$. 4) $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{x-\frac{1}{x}}$. Διὰ $\alpha=2$, $\beta=1$, $x=2$.

5) $\dfrac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}}$. Διὰ $\alpha=1$ $\beta=-1, \gamma=2$.

6) $\dfrac{x+y}{x+y+\dfrac{1}{x+y+\frac{1}{x+y}}}$

7) $\dfrac{x+\frac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\frac{1}{x}}}-\dfrac{1}{y\,(x\,y\,\omega+x+\omega)}$ Διὰ $x=2, y=\omega=1$.

8) $\dfrac{\dfrac{x^2-y^2-\omega^2-2y\omega}{x^2-y^2-\omega^2+2y\omega}}{\dfrac{x-y-\omega}{x+y-\omega}}$. Διὰ $x=3$, $y=1$, $\omega=-1$.  9) $\dfrac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}}$.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

## *Ἐξιώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.*

### **Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.**

***114.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3\,x=15$.
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν ἀμέσως, ὅτι τὸ x ἔχει τὴν τιμὴν 5. Ἑπομένως, ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν 5, θὰ εὕρωμεν,

$$3.\ 5=15. \quad \text{Ἤτοι} \quad 15=15.$$

Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀριθμοὺς ἴσους, ἤτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως ἡ ἰσότης $3x=12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x=4$, καθὼς εὐκόλως βλέπομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸν 4. Ἐὰν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἰσότητα

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

ἀντικαταστήσωμεν τὸν α καὶ β δι' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, π. χ. τῶν $\alpha=1$ καὶ $\beta=3$, ἢ τῶν $\alpha=5$ καὶ $\beta=7$, παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $4=4$, $12=12$. Ἐκ τούτων συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματά των λάβουν ἁρμοδίας τιμάς, καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Τὰς πρώτας καλοῦμεν ***ἐξισώσεις*** τὰς δ' ἄλλας ***ταὐτότητας.*** Ὥστε,

***Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα αὐτῆς λάβουν ἁρμοδίας τιμάς.***

***Ταὐτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς καθενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει.***

Καλοῦμεν ***ἀγνώστους*** ἐξιώσεώς τινος τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν ὡρισμένας τιμάς, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσωσις.

***Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων*** λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐξιώσεώς τινος λέγονται καὶ ***ρίζαι τῆς ἐξισώσεως.***

Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνώστους ἐξισώσεώς τινος διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x, y, ω, φ, . . . , τοὺς δὲ γνωστοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν α, β, γ, . . .

***Λύσις ἐξισώσεως*** λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, ἢ ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν ταύτης.

*115.* ***Ἰσοδύναμοι*** λέγονται δύο ἢ περισσότεραι ἐξισώσεις, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, ἤτοι·

α') ***ἐὰν πᾶσα ρίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε καὶ ρίζα τῆς δευτέρας***· β') ***πᾶσα ρίζα τῆς δευτέρας εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης»***.

Αἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος παραστάσεις λέγονται ***μέλη τῆς ἐξισώσεως (πρῶτον ἢ ἀριστερόν, καὶ δεύτερον ἢ δεξιόν)***.

Ἐξίσωσίς τις λέγεται ***ἀριθμητικὴ*** μέν, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὅρων της περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων· ***ἐγγράμματος*** δέ, ἂν τοὐναντίον. Οὕτω ἡ ἐξίωσις $8x + 12x - 3 = 4x$ εἶνε ἀριθμητική, ἐνῶ ἡ $3x - 5α = 8β + 2$ εἶνε ἐγγράμματος.

*116.* Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων,

***«ἐὰν εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος»***.

Πράγματι, ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $8x = 32$.

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 6, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $8x + 6 = 32 + 6$,

ἡ ὁποία λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Διότι ἡ τιμὴ τοῦ x εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εἶνε ὁ 4, καθὼς εὐκόλως φαίνεται, καὶ εἶνε $8.\ 4 = 32$.

Ἀλλ' ἂν εἰς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν 6, προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι. Ἤτοι θὰ εἶνε καὶ

$$8.\ 4 + 6 = 32 + 6. \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶμεν καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ x διὰ τοῦ 4. Εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους της $8.\ 4 + 6$, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου $32 + 6$. Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα, ὡς εἴδομεν (1

Ὥστε ἡ ρίζα 4 τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως. Καὶ ἀντιστρόφως· ἡ ρίζα τῆς δευτέρας εἶνε καὶ τῆς πρώτης ἐξισώσεως. Διότι, ἐπειδὴ ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν 4, θὰ ἔχωμεν, ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ x τὸ 4,

$$8.\ 4 + 6 = 32 + 6.$$

Ἂν δὲ ἀπὸ τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν 6, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $8.\,4=32$ (2)

Θέτομεν τώρα εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὴν ρίζαν 4 τῆς δευτέρας. Εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς 8. 4, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τὸ 32. Ἀλλ' αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι (2). Ἑπομένως ἡ ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης.

*) Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma\,(x, y, \ldots) = \varphi\,(x, y, \ldots) \qquad (1')$$

ὅπου τὸ σ (x y, . . .) καὶ φ (x, y, . . .) εἶνε συναρτήσεις τῶν x, y, . . καὶ παριστάνουν τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως, τὰ δὲ x, y, . . . τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς. Λέγω ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma\,(x, y, \ldots) + \alpha = \varphi\,(x, y, \ldots) + \alpha \qquad (2')$$

ὅπου τὸ α παριστάνει οἱονδήποτε ἀριθμόν, εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἐλύσαμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, καὶ εὕρομεν τὰς τιμὰς x=λ, y=μ, . . . τῶν ἀγνώστων, θὰ εἶνε

$$\sigma\,(\lambda, \mu, \ldots) = \varphi\,(\lambda, \mu, \ldots).$$

Θέτομεν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2') ἀντὶ τοῦ x, y, . . . τὰ λ, μ, . . ὅτε ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους εὑρίσκομεν σ (λ, μ, . . .) + α, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου φ (λ, μ, . . .) + α. Ἀλλ' ἀφοῦ οἱ ἀριθμοὶ σ (λ, μ, . . .) καὶ φ (λ, μ, . . .) εἶνε ἴσοι, καὶ οἱ σ (λ, μ, . . .) + α, φ (λ, μ, . . .) + α εἶνε ἴσοι. Δηλαδὴ αἱ ρίζαι τῆς (1') εἶνε ρίζαι καὶ τῆς (2'). Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εὑρήκαμεν τὰς τιμὰς x=λ', y=μ', . . . ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2'), θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$$\sigma\,(\lambda', \mu', \ldots) + \alpha = \varphi\,(\lambda', \mu' \ldots) + \alpha.$$

Ἂν θέσωμεν καὶ εἰς τὴν (1') τὸ x = λ', y = μ', . . θὰ εὕρωμεν ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος σ (λ', μ', . .), ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερον φ (λ', μ', . . .). Ἀλλ' ἀφοῦ τὸ σ (λ', μ', . . .) + α εἶνε ἴσον μὲ τὸ φ (λ', μ', . . .) + α, ἕπεται ὅτι καὶ $\sigma\,(\lambda', \mu', \ldots) = \varphi\,(\lambda', \mu', \ldots)$.

Δηλαδὴ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2') εἶνε ρίζαι καὶ τῆς (1'). Ἑπομένως αἱ ἐξισώσεις (1') καὶ (2') εἶνε ἰσοδύναμοι.

### *Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἓν μέλος ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο.*

*117.* Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x-\beta=\alpha$.

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν β, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν (πρὸς τὴν προηγουμένην), $x-\beta+\beta=\alpha+\beta$. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $-\beta+\beta=$ μὲ μηδέν, μένει $x=\alpha+\beta$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει, καὶ ἐὰν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν μεταφέρωμεν τὸ $-\beta$ ἐκ τοῦ πρώτου μέλους εἰς τὸ δεύτερον μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x+\beta=\alpha$, λαμβάνομεν $x=\alpha-\beta$, ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἀφαιρέσωμεν τὸ $\beta$, ἢ ἂν μεταφέρωμεν τὸ $\beta$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ὅθεν ἔχομεν ὅτι,

***«εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν του».***

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

***«ἂν ὅρος τις ὑπάρχῃ εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως μὲ τὸ αὐτὸ σημεῖον, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείπωμεν, καὶ ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν».***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\gamma-x=\alpha-\beta$. (1)

Ἐὰν μεταφέρωμεν καθένα ὅρον αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μέλος ταύτης μὲ ἀντίθετον σημεῖον, εὑρίσκομεν

$$\beta-\alpha=x-\gamma, \text{ ἢ } x-\gamma=\beta-\alpha. \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς τῶν ὅρων αὐτῆς. Ὥστε,

***«ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἐξισώσεως, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».***

Προφανῶς ἔχομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (ὅπου τὸ $A$ καὶ $B$ παριστάνουν τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος αὐτῆς) εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A-B=B-B$, ἢ μὲ τὴν $A-B=0$.

***118.*** Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων,

***«ἐὰν τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ μηδενός), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».***

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $7x=35$.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ $\dfrac{7x}{3}=\dfrac{35}{3}$,

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης, ἂν διαιρέσωμεν τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ 3, εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν. Διότι, καθὼς εὐκόλως φαίνεται, ἡ ῥίζα τῆς πρώτης εἶνε ἡ $x=5$. Ἄρα, ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ $x$ τὸν 5 εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔχομεν

$$7.5=35.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ $x$ διὰ τοῦ 5 καὶ εὑρί-

σκομεν ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος $\frac{7.5}{3}$, ἀπὸ δὲ τὸ δεύρερον $\frac{35}{3}$.
Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα. Διότι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς 7. 5 καὶ 35, ἀφοῦ τοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 3. Ἑπομένως ἡ ρίζα $x=5$ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς δευτέρας. Καὶ ἀντιστρόφως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως $\frac{7x}{3}=\frac{35}{3}$, αὐτὴ θὰ εἶνε ρίζα καὶ τῆς πρώτης $7x=35$. Διότι ἡ ρίζα αὐτὴ εἶνε ἡ 5, ὡς εὐκόλως φαίνεται, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{7.5}{3}=\frac{35}{3}$.

Ἀλλὰ τότε καὶ 7.5 εἶνε ἴσον μὲ 35. Δηλαδὴ καὶ ἡ πρώτη ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ $x=5$.

*) Γενικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\sigma(x, y, \ldots) = \varphi(x, y, \ldots)$$

εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$\sigma(x, y, \ldots).\varrho = \varphi(x, y, \ldots).\varrho,$$

ὅπου τὸ $\varrho$ εἶνε ἀριθμός τις διάφορος τοῦ μηδενός. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθὼς καὶ ἡ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος τῆς § 116.

Ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεώς τινος ἐπὶ μηδὲν προκύπτει $0=0$, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ τοῦ μηδενὸς εἶνε ἀδύνατος (§ 109), ἕπεται ὅτι, ***ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἀληθεύει, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως εἶνε μηδέν».***

Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἡ ὁποία περιέχει γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως, ἡ νέα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν παράστασιν. Π. χ. ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε $\alpha-\beta$, πρέπει τὸ $\alpha-\beta$ νὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενὸς (σημειώνομεν δ' αὐτὸ οὕτω

$$\alpha-\beta \neq 0 \text{ ἢ καὶ } \alpha \neq \beta).$$

Διότι, ἂν εἶνε $\alpha-\beta=0$, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, τὴν ὁποίαν ἐξῃρέσαμεν.

Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἔχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶνε πάντοτε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $3x=4$, καὶ ἡ $3x(x-2)=4(x-2)$ δὲν εἶνε ἰσοδύναμοι.

Διότι, ἡ δευτέρα ἔχει τὴν ρίζαν 2 καθὼς φαίνεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ 2 εἰς αὐτήν, ἐνῶ ἡ πρώτη δὲν τὴν ἔχει.

### *Ἀπαλοιφὴ τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως.*

***119. Καλοῦμεν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως τὴν εὕρεσιν ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ἄνευ παρονομαστῶν.***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x - 9.$

Ἐὰν τὰ δύο ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἑ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, δηλαδὴ ἐπὶ 33, καὶ ἁπλοποιήσωμεν, εὑρίσκομεν τὴν

$$11\,x - 3\,x + 3 = 33\,x - 297.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Ἐν γένει, ***«ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ ὅρους κλασματικούς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν, ἐάν· 1) εὕρωμεν τὸ ἑ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων· 2) πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ἑ. κ. π.· 3) ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων».***

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6} = \frac{x-7}{x-8} - \frac{x-8}{x-9}.$

Τὸ ἑ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε

$$(x-5).\,(x-6)\,(x-8).\,(x-9).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἑ. κ. π. καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν,

$$(x-4)\,(x-6)\,(x-8)\,(x-9) - (x-5)^2\,(x-8)\,(x-9)$$
$$=(x-7)\,(x-5)\,(x-6)\,(x-9) - (x-8)^2\,(x-5)\,(x-6),$$

ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν.

Διὰ συντομίαν, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἑ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ νὰ ἁπλοποιοῦμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζωμεν καθένα ἀριθμητὴν τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἑ. κ. π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου, καὶ νὰ παραλείπωμεν τοὺς παρονομαστάς. Π. χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x-1}{5} - 1 = \frac{2}{3}$$

ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$\overbrace{\frac{3x}{4}}^{15} - \overbrace{\frac{2x-1}{5}}^{12} - \overbrace{\frac{1}{1}}^{60} = \overbrace{\frac{2}{3}}^{20} . \ (\text{ἐ. κ. π. } 60).$$

Ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 15, 12, 60, 20 εἶνε τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3. Ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν ὅρων, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει πλέον τοὺς παρονομαστάς. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὑρίσκομεν

$$45\,x - 24\,x + 12 - 60 = 40.$$

## Λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

*120.* ***Πρώτου βαθμοῦ (ἢ ἁπλῆ)*** λέγεται μία ἐξίσωσις ἔχουσα ἕνα ἄγνωστον, ἐὰν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, προκύπτῃ ἐξίσωσις εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος περιέχεται εἰς πρῶτον βαθμόν.

Οὕτω π. χ. αἱ ἐξισώσεις $3\,x - 7 = 14 - 4\,x$, $\alpha x + \beta = \gamma$ εἶνε πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3\,x - 7 = 14 - 4\,x.$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $-4\,x$ μεταφέρωμεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τὸν δὲ $-7$ εἰς τὸ δεύτερον, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$3\,x + 4\,x = 14 + 7.$$

Ἐκτελοῦντες εἰς αὐτὴν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν

$$7x = 21.$$

Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 7 τοῦ x, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x = 3$, ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν, καὶ ἀληθεύει, ἂν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ 3. Ἄρα καὶ ἡ ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε ἡ 3.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$1 - 4\,(x - 2) = 7\,x - 3\,(3\,x - 1).$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ $-4$ ἐπὶ $(x-2)$ καὶ τοῦ $-3$ ἐπὶ $(3\,x - 1)$ εὑρίσκομεν,

$$1 - 4\,x + 8 = 7\,x - 9\,x + 3.$$

Εἰς αὐτὴν μεταφέρομεν τοὺς μὲν ὅρους τοὺς ἔχοντας τὸν x εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τοὺς δὲ ἄλλους εἰς τὸ δεύτερον, ὅτε προκύπτει ἡ

ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $-4x+9x-7x=3-1-8$,
καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $-2x=-6$.

Διαιροῦντες τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ x εἶνε ἡ $x=\frac{-6}{-2}=3$.

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{3}-\frac{x-1}{11}=x-9.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. 3. 11 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, ἢ καθένα τῶν ἀριθμητῶν ἀντιστοίχως ἐπὶ 11· 3· 33· 33 καὶ εὑρίσκομεν

$$11x-3x+3=33x-297.$$

Ἐργαζόμενοι ἐπ᾽ αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $x=12$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον· 1) ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, ἐὰν ἔχῃ (ἤτοι εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν)· 2) ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύναμον· 3) χωρίζομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον ἀπὸ τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτόν, εἰς τὴν νέαν ἐξίσωσιν· 4) ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου».***

## Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως.

*121.* Ἐὰν μετὰ τὴν λύσιν δοθείσης ἐξισώσεως ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἴσους ἢ μίαν ταυτότητα ὡς πρὸς τὰ ἄλλα γράμματα τῆς ἐξισώσεως, ἐὰν ἔχῃ τοιαῦτα. Ἡ ἐργασία αὕτη διὰ τῆς ὁποίας δεικνύομεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἀληθεύει τὴν ἐξίσωσιν, λέγεται ***ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως.*** Π. χ. ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{x-\alpha}{5}=2\alpha,$$

εὑρίσκομεν $x=11\alpha$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀντὶ τοῦ x τὸ $11\alpha$, εὑρίσκομεν $\frac{11\alpha-\alpha}{5}=2\alpha$, ἢ $11\alpha-\alpha=10\alpha$, ἢ $10\alpha=10\alpha$, ἡ ὁποία εἶνε ταυτότης.

## Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x - \beta = 0$.

**122.** Ἐκ πάσης ἐξισώσεως ἐχούσης ἕνα ἄγνωστον, τὸν $x$, εἰς πρῶτον βαθμὸν προκύπτει ἰσοδύναμος αὐτῆς τῆς μορφῆς $\alpha x = \beta$, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν $x$ ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι δὲν τὸν ἔχουν, καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Τὸ $\alpha$ καὶ $\beta$ θὰ εἶνε ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x - \beta = 0$ ἢ τὴν $\alpha x = \beta$, ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις· 1) ἡ ἐξίσωσις $\alpha x = \beta$ ἔχει μίαν ρίζαν, ἢ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περισσοτέρας; 2) τὶ πρέπει νὰ εἶνε τὰ $\alpha$ καὶ $\beta$ διὰ νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν, καὶ τὶ διὰ νὰ ἔχῃ περισσοτέρας, ἢ καμμίαν;

Ἂν ἔχωμεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x = \beta$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ $\alpha$, μόνον ὅταν τοῦτο εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός· ἐὰν τοῦτο συμβαίνῃ καὶ διαιρέσωμεν, θὰ ἔχωμεν $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ἂν τὸ $\alpha$ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ τιμὴ $\dfrac{\beta}{\alpha}$ εἶνε ὡρισμένη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην ρίζαν, ἢ μίαν μόνην λύσιν.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = 0$, καὶ $\beta \neq 0$, θὰ ἔχωμεν $0 . x = \beta$, ἢ $0 = \beta$, διότι τὸ μηδὲν ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν δίδει γινόμενον 0, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, ἐπειδὴ τὸ δεύτερον μέλος $\beta$ ὑπετέθη διάφορον τοῦ 0. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ἀδύνατος, ἢ ὅτι δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = 0$, καὶ $\beta = 0$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $0 . x = \beta$, ἢ $0 = 0$ καὶ προφανῶς τὸ $x$ δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν, λέγομεν δέ, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ταυτότης (§ 114) ἢ ὅτι ἔχει ἀπείρους ρίζας τὸ πλῆθος.

Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περιπτώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x = \beta$.

***Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x = \beta$.***

***1) Ἂν εἶνε $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta$ οἱονδήποτε ὑπάρχει μία ρίζα, ἡ $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$***

***2) Ἂν εἶνε $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ δὲν ὑπάρχει καμμία ρίζα.***

***3) Ἂν εἶνε $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ὑπάρχουν ἄπειροι ρίζαι (ταυτότης).***

### *Ἀσκήσεις.*

*Ὁμὰς πρώτη.* Νὰ γίνῃ ἡ λύσις καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐξισώσεων.

α΄) $3(x+4)=(x+2)$. β΄) $\frac{x}{2}=3$. γ΄) $\frac{x-1}{2}=3x-1$. δ΄) $\frac{x-2}{2}=\frac{x-3}{3}$.

ε΄) $\frac{3x}{2}-1=4+\frac{x}{4}$. στ΄) $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=5$. ζ΄) $\frac{2}{3}=\frac{x-7}{5}$.

η΄) $27x-5(2x-5)=6(3x-5)+5(2x-1)-2$.

θ΄) $\frac{3x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{4x}{5}+\frac{5x}{6}=\frac{7x}{12}+238$.

ι΄) $\frac{2(3x-5)}{5}-\frac{5(5x+10)}{12}=\frac{6(3x+2)}{4}-71$.

ια΄) $x-\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}\right)-\left(\frac{3x}{4}-\frac{4x}{6}\right)-\frac{6x}{7}=66$.

ιβ΄) $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=(x+5)(x-5)$.

ιγ΄) $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)$.

ιδ΄) $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}+\frac{16}{(x-3)(x-4)}=\frac{19}{(x-2)(x-4)}$.

ιε΄) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2}+\frac{4}{x^2(x-2)}=0$.

ις΄) $\frac{2x^3}{x^4-16}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-2}$.

ιζ΄) $\frac{1}{2x^2+2x}+\frac{1}{5x^3-5x^2}-\frac{1}{2x^2-2x}=0$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις.

α΄) $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=2\alpha^3$. β΄) $\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{x}{\alpha\gamma}=\frac{1}{\beta\gamma}$.

γ΄) $\alpha(\nu x-\mu+\beta)=\beta(\mu-\nu x+\varrho)$.

δ΄) $\alpha(x-\alpha-3)=2(1-x)$.

ε΄) $2\mu(x-\mu)-2\nu(\nu-x)=(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2$.

ς΄) $(x+\alpha)^2-(x+\beta)^2=\beta-\alpha$.

ζ΄) $(x+1)^2-\alpha(5-2\alpha-x)=(x-2\alpha)^2+5$.

η΄) $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha+\beta}=2\alpha+\beta$. θ΄) $\frac{\beta x+\alpha}{2\alpha^2\beta}+\frac{x-1}{3\beta^2}=\frac{3\beta^2+7\alpha^2}{6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)}$.

ι') $\dfrac{2x+3\beta}{x\,(x-\alpha)}+\dfrac{3\,x-5\,\alpha}{(x-\alpha)\,(x-\beta)}=\dfrac{5}{x-\beta}.$

ια') $\dfrac{2x+3}{\alpha}+\dfrac{3x-2\beta+\alpha-1}{3\alpha\,\beta+\alpha^2}=\dfrac{2\,x+1}{\alpha+3\,\beta}+\dfrac{3}{\alpha}.$

ιβ') $\dfrac{8\,\alpha}{(x+2)^2}+\dfrac{8\,\beta}{(x-2)^2}-\dfrac{(\alpha+\beta)\,x^4}{(x^2-4)^2}=-(\alpha+\beta).$

## Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ εἰς τὴν λύσιν προβλημάτων.

*123.* Γνωρίζομεν (§ 61) ὅτι, ἂν Κ παριστάνῃ κεφάλαιόν τι, Τ τὸν τόκον αὐτοῦ εἰς χρόνον Χ ἔτη καὶ Ε τὸ ἐπιτόκιον, πρὸς τὸ ὁποῖον ἐτοκίσθη, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$T=\frac{K.\ E.\ X.}{100} \qquad (1).$$

Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὴν τιμὴν τοῦ Τ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τῶν Κ, Ε, Χ. Ἐὰν ὑποτεθοῦν γνωστὰ τὰ Κ, Ε, Χ, καὶ ἄγνωστον τὸ Τ ἡ (1) εἶνε ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς Τ. Ἐκ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ Κ ἢ τὸ Ε ἢ τὸ Χ, ἐὰν τὰ ἀντίστοιχα τρία ἄλλα ποσὰ εἶνε γνωστά. Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἐξισώσεων δυνάμεθα, ἐνίοτε, νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα ἀπὸ ἕνα καὶ μόνον τύπον, ὁ ὁποῖος συνδέει τὰ ποσὰ τῶν προβλημάτων.

Ἐπίσης εἰς τὴν Γεωμετρίαν, τὴν Φυσικὴν καὶ τὴν Χημείαν δυνάμεθα, ἐνίοτε, διὰ τῆς χρήσεως τῶν ἐξισώσεων νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις συνδέεται μὲ τὴν λύσιν σχετικοῦ πρὸς αὐτὰ προβλήματος. Οὕτω π. χ. ἐὰν Ε παριστάνῃ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις μὲν α καὶ β, ὕψος δὲ υ, θὰ ἔχωμεν ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας,

$$E=\frac{(\alpha+\beta)\,\upsilon}{2}. \qquad (2)$$

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ υ, τοῦ α, ἢ τοῦ β, ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2), θεωροῦντες καθεμίαν φορὰν τὰς ἄλλας ποσότητας ὡς γνωστάς. Οὕτω π. χ. εὑρίσκομεν ὅτι τὸ

$$\beta=\frac{2\,E-\alpha\,\upsilon}{\upsilon}.$$

Ἂν ε εἶνε τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος καὶ ω ὁ ὄγκος αὐτοῦ, τὸ βάρος τούτου β θὰ εἶνε $\qquad \beta=\varepsilon\,\omega \qquad (3)$

240 | 5
40 48

240 | 12
0 20

240 | 4
0 60

240 | 71

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ε ἢ τὸ ω ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχως, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (3) ὡς πρὸς ε ἢ ὡς πρὸς ω, θεωροῦντες τὰς ἄλλας ποσότητας ἀντιστοίχως ὡς γνωστάς.

Οὕτω ἔχομεν $\varepsilon = \dfrac{\beta}{\omega}$, καὶ $\omega = \dfrac{\beta}{\varepsilon}$.

Εἰς πᾶν πρόβλημα διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα πάντοτε εἶνε ἀριθμοί. Διὰ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν τὰ ζητούμενα, τὰ ὁποῖα ὡς ἄγνωστα παριστάνομεν συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων x, y, ω, . . . . , τὰ δὲ γνωστὰ δι' ἀριθμῶν, ἢ διὰ τῶν α, β, γ, . . . . .

Διὰ νὰ λυθῇ πρόβλημά τι, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ νὰ πληροῦν ὡρισμένας τινὰς ἀπαιτήσεις. Τὰς ἀπαιτήσεις αὐτὰς καλοῦμεν ***ὅρους τοῦ προβλήματος.***

Ἐκείνους ἐκ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα, καλοῦμεν ***ἐπιτάγματα.*** Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος. Π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα

***«νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερβαίνῃ κατὰ 6»,***

τὸ ἐπίταγμα εἶνε ὅτι,

***«τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ 6».***

Ἑπομένως, ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ x, τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶνε 2x. Ἐπειδὴ τὸ 2 x θὰ ὑπερβαίνῃ τὸν x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις 2 x καὶ x + 6 νὰ εἶνε ἴσαι. Οὕτω ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $2x = x + 6$,
ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 6$.

Ἐνίοτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστάνει τὴν τιμὴν ποσοῦ τινος, τὸ ὁποῖον ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους τινάς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιούτους ὅρους καλοῦμεν ***περιορισμούς.*** Π. χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματός τινος ζητῆται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός.

*124.* Ἐν γένει, διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

***1) Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος· δηλαδὴ ἐκφράζομεν δι' ἐξισώσεως τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ζητούμενα μὲ τὰ δεδομένα.***

*2) Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν καὶ οὕτω εὑρίσκομεν, ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα.*

*3) Ἐξετάζομεν, ἂν ὁ ἐκ τῆς λύσεως εὑρεθεὶς ἀριθμὸς πληροῖ καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, διὰ νὰ γίνῃ δεκτὴ ἢ ὄχι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις.*

## Λύσις ἁπλῶν προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ον). «***Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀριθμόν, αὐξηθέντα κατὰ 60. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;***».

Ἔστω ὅτι x εἶνε ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶνε $4x$, τὸ δὲ $x+60$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 60. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶνε τὸ $4x$ ἴσον μὲ $x+60$. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $4x=x+60$ ἢ $3x=60$.

Λύοντες δ' αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=20$.

Πρόβλημα 2ον). «***Ὁ Ἰωάννης ἔχει τετραπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία, καὶ οἱ δύο δὲ μαζὺ ἔχουν 45. Πόσα μῆλα ἔχει καθείς;***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τοῦ Ἰωάννου θὰ παρασταθοῦν διὰ τοῦ $4x$, τῶν δύο δὲ μαζὺ διὰ τοῦ $4x+x$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε 45. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x+4x=45$ ἢ $5x=45$.

Ἐκ τῆς λύσεως δ' αὐτῆς εὑρίσκομεν $x=9$.

Ἤτοι ἡ μὲν Μαρία ἔχει 9, ὁ δὲ Ἰωάννης $9.4=36$ μῆλα.

Πρόβλημα 3ον). «***Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 25, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου δίδει 150· ποῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοί;***»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶνε $25-x$, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου $6x$, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου $4(25-x)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ $6x-4(25-x)$ εἶνε ἴση μὲ 50, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$6x-4(25-x)=50, \quad ἢ \quad 6x+4x-100=50,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=15$.

Ἄρα οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 15 καὶ $25-15=10$.

Πρόβλημα 4ον). «***Ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ· πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι τούτων***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ, ἡ τοῦ πατρὸς θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $3x$. Ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ πρὸ 8 ἐτῶν ἦτο $x-8$, τοῦ δὲ πατρὸς $3x-8$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τὸ $3x-8$ εἶνε τετραπλάσιον τοῦ $x-8$. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x-8=4(x-8), \quad ἢ \quad 3x-4x=8-32,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=24$. Ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶνε 24, τοῦ δὲ πατρὸς $24.3=72$ ἔτη.

Πρόβλημα 5ον). «***Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{7}{11}$ τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{4}$***».

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $x$ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{7+x}{11+x}=\frac{1}{4}$, ἢ $4(7+x)=11+x$, ἢ $3x=-17$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=-\frac{17}{3}=-5\frac{2}{3}$.

Πρόβλημα 6ον) «***Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάσις εἶνε 4 μ. μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τὸ δὲ ὕψος 3 μ. μικρότερον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ***».

Ἐὰν διὰ τοῦ $x$ παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε $x.x=x^2$. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ παρασταθῇ τότε διὰ τοῦ $x+4$, τὸ δὲ ὕψος τούτου διὰ $x-3$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶνε $(x+4).(x-3)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὸ τετράγωνον εἶνε ἰσοδύναμα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(x+4).(x-3)=x^2, \quad ἢ \quad x^2+4x-3x-12=x^2,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=12$. Ὥστε ἡ μὲν βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος $12+4=16$ μ. τὸ δὲ ὕψος $12-3=9$ μ.

Πρόβλημα 7ον). «***Ὁ Α ἐκτελεῖ ἕν ἔργον εἰς 7 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζύ, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον;***»

Ἐὰν διὰ τοῦ $x$ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἰς $x$ ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο, μαζὺ ἐργαζόμενοι, ὁλόκληρον τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ἐξ ἄλλου ἀφοῦ, ὁ Α εἰς 7 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκτελῇ τὸ $\frac{1}{7}$, ὁ δὲ Β εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Καὶ οἱ δύο μαζὺ εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$, ἢ $5x+7x=35$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ $x=2\frac{11}{12}$. Ὥστε καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι, θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς $2\frac{11}{12}$ ἡμέρας.

Πρόβλημα 8ον). «***Ἔχει τις 100 ὀκάδες οἴνου τῶν 4,5 δρ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον οἶνον τῶν 6 δρ. κατ' ὀκᾶν πρέπει ν' ἀναμείξῃ, διὰ νὰ κοστίζῃ 5 δρ. ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος ;***».

Ἔστω x ὀκ. τὸ ζητούμενον ποσὸν τοῦ οἴνου. Τοῦτο τιμᾶται 6.x δρ. Τὸ μεῖγμα θὰ εἶνε (100+x) ὀκ., θὰ τιμᾶται δὲ 5. (100+x) δρ. Ὁ οἶνος τῶν 100 ὀκ. τιμᾶται 4,5.100 δρχ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5.(100+x)=4,5.100+6.x, \text{ ἢ } 5x-6x=-500+450,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=50$. Ἤτοι πρέπει νὰ θέσῃ 50 ὀκ. τῶν 6 δρχ. 9/12/31

Πρόβλημα 9ον). «***Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ δύο τόπων συγχρόνως καὶ κινοῦνται ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως, ὥστε νὰ συναντηθοῦν. Τὸ μὲν πρῶτον διανύει 5 χμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ δεύτερον 5, 5 χμ. Εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τόπων εἶνε 60 χμ. ;***»

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ x τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν, τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ διανύσῃ αὐτὴν εἰς $\frac{x}{5}$ ὥρας. Τὸ δεύτερον θὰ διανύσῃ (60—x) χμ. καὶ ταῦτα εἰς $\frac{60-x}{5,5}$ ὥρας. Ἀλλ' αὐτοὶ οἱ χρόνοι εἶνε ἴσοι. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x}{5}=\frac{60-x}{5,5}$, ἢ τὴν $5,5x=300-5x$ ἢ $10,5x=300$, ἢ $105x=3000$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=28\frac{4}{7}$ χμ.

Πρόβλημα 10ον). «***40 ὀκ. ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3, 4 ὀκ. ἅλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 40 ὀκ. τοῦ νέου κράματος περιέχῃ 2 ὀκ. ἅλατος ;***»

Ἔστωσαν x αἱ ζητούμεναι ὀκάδες τοῦ ὕδατος. Τὸ νέον κρᾶμα θὰ ἔχῃ (40+x) ὀκ., καὶ θὰ περιέχῃ τὸ αὐτὸ ἅλας 3,4 ὀκ., τὸ ὁποῖον εἶχε τὸ πρῶτον κρᾶμα. Ἀλλὰ αἱ 40 ὀκ. θὰ περιέχουν τώρα 2 ὀκ. ἅλατος.

῎Αρα αἱ $(48+x)$ θὰ περιέχουν $\frac{2}{40}(40+x)$. Τοῦτο δὲ θὰ εἶνε ἴσον μὲ 3, 4 ὀκ. ῎Ητοι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{2(40+x)}{40}=3{,}4$, ἢ $40+x=3{,}4.\ 20$.

᾿Εκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν $x = 28$ ὀκάδες.

Πρόβλημα 11ον). «***Πατὴρ τις εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β ἐτῶν· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε ἢ ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ ;***»

᾿Εὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ $x$, ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς μετὰ $x$ ἔτη θὰ εἶνε $\alpha+x$, τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta+x$. ᾿Επειδὴ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha+x=3(\beta+x)$, ἢ $x-3x=3\beta-\alpha$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $2x=\alpha-3\beta$, καὶ $x=\frac{\alpha-3\beta}{2}$.

***Διερεύνησις.*** ᾿Εὰν μὲν τὸ $\alpha-3\beta$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. ᾿Εὰν δ' εἶνε ἀρνητικός, ἔγινεν εἰς τὸ παρελθόν, καὶ ἂν εἶνε $\alpha-3\beta=0$, τὸ $x=0$. ῎Ητοι ἡ σημερινὴ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Πρόβλημα 12ον). «***Τὸ μὲν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε α, ἡ δὲ διαφορὰ αὐτῶν δ. Ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί ;***»

᾿Εὰν διὰ τοῦ $x$ παραστήσωμεν τὸν μικρότερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μεγαλύτερος θὰ παρίσταται διὰ τοῦ $x+\delta$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ $x+x+\delta$. ῞Ωστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x+x+\delta=\alpha, \text{ ἢ } 2x=\alpha-\delta,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha-\delta}{2}$. ῎Αρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ $\frac{\alpha-\delta}{2}$, καὶ $\frac{\alpha-\delta}{\alpha}+\delta=\frac{\alpha+\delta}{2}$.

Πρόβλημα 13ον). «***᾿Εργάτης τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερος τις τελειώνει τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς β ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι ;***».

᾿Εὰν διὰ τοῦ $x$ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἰς $x$ ἡμέρας τελειώνουν 1 ἔργον, εἰς 1 ἡμ. τελειώνουν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. ῾Ομοίως, ἀφοῦ ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰς α ἡμέρας τελειώνει 1 ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ τελειώνῃ τὸ $\frac{1}{\alpha}$ τοῦ ἔργου, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{\beta}$ αὐτοῦ. Ἑπομένως καὶ οἱ δύο ἐργάται, μαζὺ ἐργαζόμενοι, θὰ τελειώνουν εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{1}{x}$, ἢ $\beta x+\alpha x=\alpha\beta$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. Ἤτοι, καὶ οἱ δύο ἐργάται, μαζὺ ἐργαζόμενοι, τελειώνουν τὸ ἔργον εἰς $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ἡμέρας.

Πρόβλημα 14ον). ***«Ἀπὸ τοῦ σημείου Α κινεῖται σημεῖόν τι ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα τ μέτρων κατὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὴν (εὐθύγραμμον) φορὰν ΑΓ· δ δευτερόλεπτα βραδύτερον κινεῖται ἀπὸ τοῦ σημείου Β, κειμένου μ μέτρα ὄπισθεν τοῦ Α, ἄλλο σημεῖον ἐπίσης ὁμαλῶς καὶ μὲ ταχύτητα τ΄ κατὰ δευτερόλεπτον κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὸ πρῶτον. Πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο κινητά ;».***

Ἃς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως τοῦ πρώτου σημείου. Εἶνε φανερόν, ὅτι τὸ δεύτερον σημεῖον θὰ κινῆται $x-\delta$ δευτερόλεπτα μέχρι τῆς συναντήσεως. Ὁ δρόμος τὸν ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ πρῶτον θὰ εἶνε $\tau . x$, ἐκεῖνος δὲ τὸν ὁποῖον θὰ διανύσῃ τὸ δεύτερον θὰ εἶνε $\tau'.(x-\delta)$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\tau'(x-\delta)=\tau x+\mu$.

Διότι ὁ δρόμος τοῦ δευτέρου, ὁ $\tau'.(x-\delta)$, εἶνε ἴσος μὲ τὸν δρόμον $\tau\, x$, τὸν ὁποῖον διήνυσε τὸ πρῶτον, ηὐξημένον κατὰ τὴν ἀπόστασιν μ, καθ' ἣν ἦτο ὀπίσω τὸ δεύτερον, ἀφοῦ τοῦτο ἔφθασε τὸ πρῶτον. Λύοντες τὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν $\tau'x-\tau x=\mu+\tau'\delta$, εὑρίσκομεν $x=\frac{\mu+\tau'\delta}{\tau'-\tau}$, ὑποτιθεμένου ὅτι εἶνε τὸ $\tau'-\tau\neq 0$.

***Διερεύνησις.*** Ἂν τὸ $\tau'-\tau$ εἶνε θετικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἂν τὸ τ΄ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ τ, ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον. Ἂν τὸ $\tau'-\tau$ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἂν τὸ τ΄ εἶνε μικρότερον τοῦ τ, ἡ συνάντησις ἔγινεν εἰς τὸ παρελθόν. Διότι, ἡ τιμὴ τοῦ x θὰ εἶνε ἀρνητικὴ (ὑποτίθεται ὅτι τὸ τ, τ΄, δ καὶ μ εἶνε θετικοὶ ἀριθμοί). Ἂν τὸ $\tau'-\tau$ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, ἡ συνάντησις δὲν θὰ γίνῃ ποτέ. Διότι, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶνε κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν ἀριθμόν τινα ὡρισμένον, καὶ παρονομαστὴν μηδέν. Ἄρα ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶνε ἀπείρως μεγάλη (§ 109).

## *Προβλήματα πρὸς λύσιν.*

**Ὁμὰς πρώτη.** 1) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ὀκταπλάσιον σὺν 10, ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν 100, ἰσοῦται μὲ 10 ; 10.

2) Ἐὰν εἰς τὸ τρίτον $\left(\text{τὸ}\ \frac{1}{2}\right)$ ἀριθμοῦ προστεθῇ τὸ τέταρτον $\left(\text{τὸ}\ \frac{1}{5}\right)$ αὐτοῦ καὶ 2 (1) προκύπτει 5 (2). Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; $5\frac{1}{7}\left(1\frac{3}{7}\right)$.

3) Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τοὺς 3 (9) καὶ 10 (5), ὥστε νὰ προκύπτουν ἀριθμοὶ ἔχοντες λόγον $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$; $\frac{1}{2}\left(-10\frac{1}{3}\right)$.

4) Ἐὰν διψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 9 (8), αὐξήσωμεν κατὰ 27 (18), λαμβάνομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός. (Βλέπε σελίδα 51, Ὁμάδα δευτέραν, πρόβλημα 2). 36 (35).

5) Παιδίον λέγει. Ἐὰν προσθέσω τὸ ἥμισυ $\left(\text{τὸ}\ \frac{1}{3}\right)$, τὸ τρίτον (3), τὸ $\frac{1}{4}\left(\text{τὸ}\ \frac{1}{5}\right)$ τῶν μήλων μου καὶ 20 $\left(\text{καὶ τὸ}\ \frac{1}{4}\right)$ ἀκόμη, θὰ ἔχω 150 (50) μῆλα. Πόσα μῆλα ἔχει τὸ παιδίον ; 120 (60).

6) Ἀφοῦ ἐξώδευσέ τις 20 (30) δρχ. ἐκ τῶν χρημάτων αὐτοῦ καὶ τὰ $\frac{3}{4}\left(\text{τὰ}\ \frac{5}{8}\right)$ τοῦ ὑπολοίπου, τοῦ ἔμειναν 10 (3) δρ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἐξ ἀρχῆς ; 60 (38).

7) Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β. Ἔχω 3 (4) πλάσια μῆλα ἢ σύ. Ὁ Β ἀπαντᾷ· δός μου 16 (12) ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, καὶ θὰ ἔχωμεν ἴσον ἀριθμὸν μήλων. Πόσα μῆλα εἶχεν ἕκαστος ; ὁ Β′ 16 (8).

**Ὁμὰς δευτέρα.** 1) Εἴς τινα συναναστροφὴν ἦσαν τριπλάσιοι ἄνδρες ἢ γυναῖκες. Μετὰ τὴν ἀναχώρησιν 4 (3) ἀνδρῶν μετὰ τῶν συζύγων των ἔμειναν πενταπλάσιοι ἄνδρες ἢ γυναῖκες. Πόσοι ἦσαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐξ ἀρχῆς ; 24· 8 (18· 6).

2) Χωρικὴ ἐπώλησε τὸ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$ τῶν ὠῶν, τὰ ὁποῖα εἶχε, καὶ $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)$ ὠοῦ, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησε πάλιν τὸ

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)$ τῶν ὑπολοίπων καὶ $\frac{1}{2}\left(1\,\frac{1}{3}\right)$ τοῦ ᾠοῦ, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως (τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ $\frac{1}{3}$ ᾠοῦ· τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$ ᾠοῦ). Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν τῆς ἔμειναν 1 (8) ᾠά; 31 (49).

3) Ἠρωτήθη τις πόσην ἡλικίαν ἔχει, καὶ ἀπεκρίθη· μετὰ μ (21) ἔτη θὰ εἶνε ν(3) φορὰς μεγαλυτέρα ἐκείνης, τὴν ὁποίαν εἶχε πρὸ μ (5) ἐτῶν. Ποία εἶνε ἡ ἡλικία του; $\frac{\mu\,(\nu+1)}{(\nu-1)}$, (18).

4) Χωρικὴ ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα ᾠὰ εἶχε πρὸς 50 (70) λ. ἕκαστον. Ἐπειδὴ ἐθραύσθησαν 3 (1), ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 60 (80) λ. καὶ δὲν ἐζημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; 18 (8).

5) Ἔχασέ τις τὰ $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$ τῶν χρημάτων του καὶ 1 (3) δρχ. Ἐκέρδισεν ἔπειτα τὰ $\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)$ τῶν ὅσων οὕτω εἶχε καὶ 1 (3) δρχ. Τέλος ἔχασε τὰ $\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)$ τῶν ὅσων οὕτω εἶχε καὶ 1 (3) δρχ. Οὕτω εἶχεν 8, 5 (10) δρ. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς; 108 (54).

***Ὁμὰς τρίτη.*** 1) Ποσὸν 110 (130) δρ. πρόκειται νὰ διανεμηθῇ μεταξὺ τριῶν προσώπων εἰς τρόπον, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ 30 δρ. ὀλιγωτέρας (περισσοτέρας) τοῦ πρώτου, καὶ ὁ τρίτος διπλάσια τοῦ δευτέρου· πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος; Ὁ α΄ 50 (10).

2) Τὸ βάρος τῆς οὐρᾶς ἰχθύος ἦτο τὸ $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)$ τοῦ ὅλου βάρους του. Τὸ σῶμά του ἐζύγιζε 5 (11) ὀκ., ἡ δὲ κεφαλή του τὸ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)$ τοῦ ὅλου βάρους του. Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζεν ὁ ἰχθῦς; 12 (10).

3) Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς $3\left(3\,\frac{1}{2}\right)$ ὥρας· ἄλλος τὴν πληροῖ εἰς 4 (4), καὶ τρίτος εἰς $6\left(6\,\frac{1}{5}\right)$ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν πληροῦν, ἂν ῥέουν καὶ οἱ τρεῖς συγχρόνως; $1\,\frac{1}{3}\left(1\,\frac{263}{605}\right)$.

4) Βρύσις πληροῖ δεξαμένην εἰς 2 (4,5), ὥρας δευτέρα εἰς 4 $\left(4\ \frac{1}{3}\right)$ καὶ τρίτη εἰς 6 (5,5) ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή, ἂν ἀνοίξῃ ἡ πρώτη (δευτέρα), μετὰ μίαν δὲ ὥραν καὶ αἱ ἄλλαι δύο ;

$1\ \frac{6}{11}\left(2\ \frac{173}{817}\right)$.

***Ὁμὰς τετάρτη*** (κινήσεως). 1) Ἔκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζός, διατρέχων 60 (80) χιλ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 (3) ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολήν, νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 (6) ἡμ. Πόσα χιλ. πρέπει νὰ διανύῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν ; 90 (120).

2) Ἐκ τῶν δύο τόπων, ἀπεχόντων 575 (216,75) χιλ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι, διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ εἷς διανύῃ 50 (40,5) χιλ., ὁ δὲ ἄλλος 55 (50) χιλ. καθ' ἡμέραν, πότε θὰ συναντηθοῦν ;

5 (2,39...).

3) Ἀπὸ σημείου Α κινεῖται εὐθυγράμμως σῶμά τι, διανῦον 32 (τ) μέτρα εἰς 4'' (δ) καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ Β. Μετὰ 3'' (ρ) ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν φορὰν Α Β κινούμενον, καὶ διανῦον 60 (τ') μέτρα εἰς 5'' (δ')· πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον ;

$6{\cdot}72\left(\frac{\delta\rho\tau'}{\delta\tau'-\delta'\tau}\right)$.

4) Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν Β, διανύουσα 30 (45,5 χιλ.) καθ' ὥραν· 1 $\left(1\ \frac{3}{4}\right)$ ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνομένη πρὸς τὸ Β ἁμαξοστοιχία, διανύουσα 50 $\left(50\ \frac{1}{2}\right)$ χιλ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ φθάσῃ ἡ δευτέρα τὴν πρώτην ;

1 ὥρ. 50 χιλ. (15 ὥρ. 55,5').

5) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου, διανύων 12 (8,75) χιλ. τὴν ὥραν· 3 $\left(2\ \frac{1}{3}\right)$ ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου, ἄλλος διανύων 16 (15,5) χιλ. τὴν ὥραν· α') πότε θὰ προηγῆται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου 12 $\left(9\ \frac{1}{3}\right)$ χιλ ; β') πότε θὰ προηγῆται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου 50 $\left(26\ \frac{5}{6}\right)$ χιλ ; $9{\cdot}24{,}5\left(3\ \frac{79}{81},\ 9\ \frac{1}{3}\right)$.

6) Τὴν 10 (12) πρωϊνὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τόπου Α, διανύων 12 (15) χιλ. καθ' ὥραν· ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ

δεύτερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 (20) χιλ. καθ' ὥραν, νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 3 (2,5) ὥρας ; 11 (50′).

7) Ἀπὸ δύο τόπων ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ὁδοιπόροι πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου· ὁ εἷς χρειάζεται 7 (5) ὥρας διὰ νὰ διανύσῃ τὴν ἀπόστασιν τῶν τόπων, ὁ δὲ ἄλλος 2 ὥρας ὀλιγώτερον (περισσότερον) τοῦ πρώτου. Πότε θὰ συναντηθοῦν ; 2 ὥρ. 55′$\left(2\,\frac{11}{12}\right)$.

8) Ἀπὸ σημείου περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ διανύουν ἀντιστοίχως $\alpha^0$ καὶ $\beta^0$ $(\alpha>\beta)$ εἰς 1″. Πότε θὰ συναντηθοῦν (διὰ νὴν φοράν) ; α′) ἂν διευθύνωνται ἀντιθέτως· β′) πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν ; 360 ; $(\alpha\pm\beta)$· [360. ν : $(\alpha\pm\beta)$].

9) Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητά, διανύοντα αὐτὴν εἰς χρόνους $t_1$ καὶ $t_2$ $(t_1>t_2)$. Πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ 1ην, 2αν, . . . . νὴν φοράν, ἂν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φοράν ; $\frac{t_1\ t_1}{t_1 \mp t_2}\,.\,\nu$

10) Ἀπὸ σημεῖον περιφερείας ἀκτῖνος ρ ἀναχωροῦν δύο κινητὰ μὲ ταχύτητας $\tau_1$ καὶ $\tau_2$· πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ νὴν φοράν, ἂν ἔχουν ἀντίθετον ἢ τὴν αὐτὴν φοράν ; $\left(\frac{2\pi\rho\nu}{t_1 \pm t_2}\right)$.

11) Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου ; $\left(1\,\frac{1}{11}\text{ὥρ.}\right)$.

12) Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται (τοῦ προηγουμένου προβλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην, . . . φοράν ; $\left(\frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \ldots\right)$.

13) Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται (τοῦ προβλήμ. 11) σχηματίζουν γωνίαν $\alpha^0$ διὰ 1ην; 2αν, 3ην. . . φοράν ; $\left(\frac{\alpha}{330}, \frac{360-\alpha}{330}\right)$.

14) Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων διὰ πρώτην φοράν ; $\left(1'\,\frac{780''}{1427}\right)$.

15) Κύων διώκει ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει 60 (40) πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὐτὴ κάμνῃ 9 (10) πηδήματα, ὁ κύων κάμνει 6 (5). Ἀλλὰ 3 πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκείνης. Μετὰ πόσα πηδήματα αὐτοῦ θὰ τὴν φθάσῃ ὁ κύων ; 72 (120).

*Ὁμὰς πέμπτη* (γεωμετρικά). 1) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ διαφορὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε 20 (15° 18′ 12′′)· πόση εἶνε ἑκάστη τῶν γωνιῶν ; 35° (37° 20′ 54′′).

2) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\right)$ τῶν παρὰ τὴν βάσιν. Πόσαι εἶνε αἱ γωνίαι του ; 36° $\left(51\frac{3}{7}\right)$.

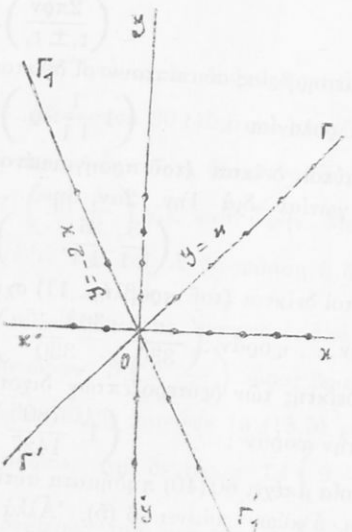
3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν καθεμία εἶνε κατὰ 20° (30°) μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της. 60°,... (45°,...).

4) Πόσας πλευρὰς ἔχει κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη γωνία εἶνε 144° (1,5 ὀρθῆς) ; 10 (8).

5) Ποῖαι εἶνε αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν εἶνε μεταξύ των καθὼς οἱ ἀριθμοὶ 1 $\left(\frac{1}{2}\right)$ : 2$\left(\frac{3}{4}\right)$ : 3 $\left(\frac{2}{3}\right)$ : 4 (1); Ἡ α′ 36°$\left(\frac{24}{35}\text{ ὀρθ.}\right)$.

**Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων** $y=\alpha x$, καὶ $y=\alpha x+\beta$.

***125.** Ἡ συνάρτησις* $y=\alpha x$, *ὅπου τὸ α εἶνε σταθερά τις ποσότης, παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ Ο.*



(Σχ. 6)

Διότι, ἔστω πρῶτον ὅτι τὸ α εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς π. χ. ὁ 1, ὅτε ἡ συνάρτησις εἶνε $y=x$. Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0·1·2·3.4, (1) αὐξανομένας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1, ἡ συνάρτησις λαμβάνει ἀντιστοίχως τὰς τιμὰς 0·1·2·3, (2) αὐξανομένας κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 1. Ἐὰν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (Σχ. 6) τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς τιμὰς (1) τοῦ x, καὶ τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς τιμὰς (2) τοῦ y, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (0,0)· (1,1)· (2,2),... κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, τῆς ΟΓ.

Ἐὰν εἰς τὸν x δώσωμεν τὰς τιμὰς $-1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot \ldots$
εὑρίσκομεν ὅτι τὸ y λαμβάνει τὰς τιμὰς $-1 \cdot -2 -3 \cdot \ldots$
τὰ δὲ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη

$$(-1,-1), \quad (-2,-2), \ldots$$

κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΓ', ἡ ὁποία εἶνε προέκτασις τῆς ΟΓ. Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $y=x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν ΓΓ' (Σχ. 6)

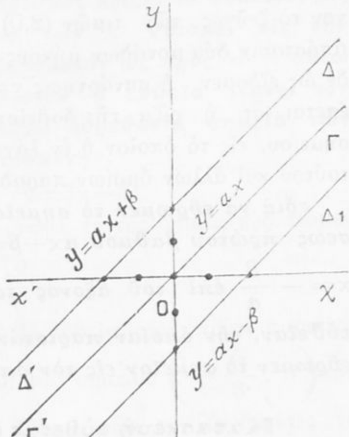
Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ $-2$. Εὑρίσκομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=-2x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν $Γ_1Γ_1'$ (Σχ. 6)

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχῃ ἄλλην οἱανδήποτε τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y=αx$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ Ο.

Τὴν συνάρτησιν $y=αx+β$

δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γραφικῶς, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην ἑκάστου σημείου τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $y=αx$, προσθέσωμεν τὴν ποσότητα β. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει, νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $y=αx$ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἄνω ἢ κάτω, καθέσον τὸ β εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

Ἐπομένως ἡ συνάρτησις $y=αx+β$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν (βλ. Σχ. 7 τὰς εὐθείας ΔΔ' καὶ $Δ_1Δ_1'$).



(Σχ. 7)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τί παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=β$, παρατηροῦμεν ὅτι, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ x, τὸ y ἰσοῦται μὲ β. Ἤτοι, ἡ ἐξίσωσις $y=β$ παριστάνει πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τεταγμένην ἴσην μὲ β. Προφανῶς τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτοῦ. Ἐπομένως, ὅταν τὸ α εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, ἡ συνάρτησις $y=αx+β$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

### *Ἀσκήσεις.*

Εὕρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ συναρτήσεις

1) $y=3x$. 2) $y=2x+3$. 3) $y=\frac{3}{4}x$. 4) $y=x-\frac{2}{3}$.

5) $y=\frac{x}{2}+5$. 6) $y=-\frac{5x}{6}-\frac{1}{8}$. 7) $y=8$.

8) $y=-\frac{1}{2}$. (Θέσατε $x=0 \cdot 1 \cdot 2 \ldots$).

## Γραφικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

*126.* Ἔστω μία ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ π. χ. ἡ $3x-6=0$. Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παραστήσωμεν διὰ τοῦ y, ἔχομεν τὴν συνάρτησιν. $y=3x-6$.

Διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, δηλαδὴ τὴν $x=2$, τὸ y εἶνε ἴσον μὲ μηδέν. Τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν (2,0) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ εἰς ἀπόστασιν δύο μονάδων μήκους ἀπὸ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων. Ἐπειδὴ δὲ ὡς εἴδομεν, ἡ συνάρτησις $y=3x-6$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, ἔπεται ὅτι ἡ ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον τὴν ῥίζαν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ $\alpha x+\beta=0$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον $x=-\frac{\beta}{\alpha}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x. ἢ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον εἰς τὸν ὁποῖον αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x».***

## Κατασκευὴ εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

*127.* Ὑπάρχει σύντομος τρόπος συμφώνως πρὸς τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha x+\beta$, καὶ ἥτις καλεῖται ἐξίσωσις τῆς εὐθείας. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἡ ἄγνωστος εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ τεταγμένη y εἶνε ἴση μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὸν y ἴσον μὲ μηδὲν εἰς τὴν ἐξίσωσιν, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x + \beta = 0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\quad x = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\ ,\ 0\right)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, ἔχει τετμημένην ἴσην μὲ μηδέν. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὸ μηδέν, θὰ εὕρωμεν

$$y = \beta.$$

Τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος $(0,\beta)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y, εἶνε ἐκεῖνο εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθεῖαν, ὅταν δοθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς, θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ y=μὲ 0, καὶ λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς πρὸς x, ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς ὁρίζει τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x· θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν x=μὲ 0, καὶ λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς πρὸς τὸ y, οὕτω δ' εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y· συνδέομεν τὰ δύο οὕτω εὑρεθέντα σημεῖα τῶν ἀξόνων δι' εὐθείας, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη».***

***Ἐφαρμογή.*** Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\quad y = 3x - 5$.

Θέτομεν $y = 0$, καὶ ἔχομεν $3x - 5 = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$x = +\frac{5}{3}.$$

Θέτομεν $x = 0$, καὶ μένει $y = -5$. Ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $\left(+\dfrac{5}{3}\ ,\ 0\right)$ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ τοῦ $(0,-5)$ τοῦ ἄξονος τῶν y. Συνδέοντες τὰ σημεῖα αὐτὰ δι' εὐθείας, ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $\quad y = 3x - 5$.

Ἐὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς $y = \alpha x$, π. χ. ἡ ἐξίσωσις $y = 2x$, παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $x = 0$ εἶνε καὶ τὸ $y = 0$. Ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων. Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ ἓν ἄλλο ἀκόμη σημεῖον αὐτῆς, θέτομεν $x = 1$ (ἢ ἄλλην τινὰ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενὸς) καὶ εὑρίσκομεν $y = 2$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος (1,2) καὶ ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου τούτου (1,2).

***Ἀσκήσεις.***

Κατασκευάσατε τὰς εὐθείας τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις,

1) $y=9x$. 2) $y=3x+1$. 3) $y=-2x$. 4) $y=-7x+1$.

5) $y=\frac{1}{2}x-1$. 6) $3y-2x=2$. 7) $\frac{1}{2}y-\frac{3}{4}x-1=0$.

---

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

### *Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.*

*128.* Ἔστωσαν δύο ἐξισώσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀγνώστους $x$ καὶ $y$, καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν, αἱ

$$x+y=10, \quad x-y=2.$$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀγνώστων $x=6$, καὶ $y=4$, καὶ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ***σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.***

Ἐν γένει, «***καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν. Ἐὰν δὲ αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος περιέχουν τοὺς ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν, λέγεται σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτοῦ***».

***Καλοῦμεν λύσιν συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.***

Δύο ἢ περισσότερα συστήματα ἐξισώσεων λέγονται ***ἰσοδύναμα***, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Εἶνε φανερόν, ὅτι ἐὰν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι' ἰσοδυνάμων των προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχὸν σύστημα

$$A_1=B_1, \quad A_2=B_2, \quad A_3=B_3,$$

ὅπου τὰ $A_1$, $B_1$, . . , παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἐξισώσεων, εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα

$$A_1-B_1=0, \quad A_2-B_2=0, \quad A_3-B_3=0, \quad (\S\ 117).$$

### *Ἰδιότητες τῶν συστημάτων.*

*129.* Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν συστημάτων,

«***ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας αὐτῶν κατὰ μέλη, καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν***».

Ἔστω τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{array}{l} x-y+\omega=12 \\ 2x+3y-\omega=15 \\ x-2y+2\omega=17. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ἂν προσθέσωμεν π.χ. τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $x+2x-y+3y+\omega-\omega=12+15$.

Ἂν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ (1) μίαν, ἔστω τὴν πρώτην, ἐκ τῶν δύο προστεθεισῶν ἐξισώσεων διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x+2x-y+3y+\omega-\omega=12+15 \\ 2x+3y-\omega=15 \\ x-2y+2\omega=17, \end{array}\right\} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν. Διότι, αἱ τιμαὶ τῶν x, y, ω αἱ ἀπαληθεύουσαι τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶνε αἱ $x=7$, $y=3$, $\omega=8$. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) ἀντὶ τῶν x, y, ω εὑρίσκομεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς

$$\left.\begin{array}{l} 7-3+8=12 \\ 2.7+3.3-8=15 \\ 7-2.3+2.8=17. \end{array}\right\} \quad (1')$$

Ἂν τὰς δύο πρώτας ταύτας ἰσότητας προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $7+2.7-3+3.3+8-8=12+15$ (2′).

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα καὶ εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (2) τὰ x, y, ω διὰ τῶν τιμῶν 7, 3 καὶ 8, ὅτε εὑρίσκομεν ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων τοὺς ἀριθμοὺς

$$\begin{array}{l} 7+2.7-3+3.3+8-8 \\ 2.7+3.3-8 \\ 7-2.3+2.8 \end{array}$$

ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε ἴσοι κατὰ σειρὰν μὲ $12+15$, 15 καὶ 17 ὡς ἀνωτέρω φαίνεται εἰς τὰς (2′) καὶ (1′). Ἑπομένως αἱ τιμαὶ 7, 3, 8 τῶν ἀγνώστων x, y, ω, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ἐξισώσεις τοῦ (2). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x, y, ω αἱ ἐπαληθεύουσαι τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (2) ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ἐξισώσεις τοῦ (1). Ἤτοι τὰ δύο συστήματα (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα.

*) Ἐν γένει, ἔστω π. χ. τὸ σύστημα τριῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{array}{l} A_1 - B_1 = 0, \\ A_2 - B_2 = 0, \\ A_3 - B_3 = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

ὅπου τὰ $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$, $A_3$, $B_3$ εἶνε παραστάσεις περιέχουσαι ἐν γένει ἀγνώστους τῶν ἐξισώσεων.

Λέγω ὅτι, ἂν προσθέσωμεν, ἔστω δύο ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη, π.χ. τὴν πρώτην καὶ τὴν δευτέραν, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $(A_1+A_2)-(B_1+B_2)=0$, καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸ (1) ἔστω τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, προκύπτει τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} A_1 - B_1 = 0 \\ (A_1+A_2)-(B_1+B_2) = 0 \\ A_3 - B_3 = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν (1). Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἐλύσαμεν τὸ σύστημα (1) καὶ ἀντεκατεστήσαμεν εἰς αὐτὸ τοὺς ἀγνώστους διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν των, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{array}{l} \text{τιμὴ τοῦ } A_1 - \text{τιμὴ τοῦ } B_1 = 0, \\ \text{τιμὴ τοῦ } A_2 - \text{τιμὴ τοῦ } B_2 = 0, \\ \text{τιμὴ τοῦ } A_3 - \text{τιμὴ τοῦ } B_3 = 0. \end{array}$$

Ἂν τώρα προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἐκ τῶν ἰσοτήτων (τῶν τιμῶν) τούτων, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν δευτέραν αὐτῶν, διὰ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς προθέσεως, θὰ ἔχωμεν

$$\left.\begin{array}{l} \text{τιμὴ τοῦ } A_1 - \text{τιμὴ τοῦ } B_1 = 0 \\ \text{τιμὴ τοῦ } (A_1+A_2) - \text{τιμὴ τοῦ } (B_1+B_2) = 0, \\ \text{τιμὴ τοῦ } A_3 - \text{τιμὴ τοῦ } B_3 = 0. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Τέλος ἀντικαθιστῶμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (1) εἰς τὸ σύστημα (2), ὅτε θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξαγόμενα τῶν πρώτων μελῶν τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ

$$\left.\begin{array}{l} \text{τιμὴ τοῦ } A_1 - \text{τιμὴ τοῦ } B_1 \\ \text{τιμὴ τοῦ } (A_1+A_2) - \text{τιμὴ τοῦ } (B_1+B_2) \\ \text{τιμὴ τοῦ } A_3 - \text{τιμὴ τοῦ } B_3 \end{array}\right\} \quad (4)$$

Ἀλλ' αἱ διαφοραὶ αὗται εἶνε οἱ ἀριθμοὶ (3) καὶ ἰσοῦνται μὲ μηδέν· ἤτοι διὰ τὰς ἐν λόγῳ τιμὰς τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύεται καὶ τὸ σύστημα (2).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ (2), ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (1). Ἄρα τὰ δύο συστήματα (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα.

*130.* Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν συστημάτων, ***«ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία ἐξ αὐτῶν εἶνε λυμένη πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων, καὶ ἀντικαταστήσωμεν τοῦτον διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὰς ἄλλας (ἢ εἴς τινας μόνον), εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν».***

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x=y-\omega+12 \\ 2x+3y-\omega=15 \\ x-2y+2\omega=17 \end{array}\right\} \quad (1)$$

εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶνε λυμένη ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x. Ἐὰν τὴν ἀνωτέρω τιμὴν τοῦ x, δηλαδὴ τὴν $y-\omega+12$, θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x=y-\omega+12 \\ 2.(y-\omega+12)+3y-\omega=15 \\ y-\omega+12-2y+2\omega=17, \end{array}\right\} \quad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν. Διότι, αἱ τιμαὶ τῶν x, y, ω, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1) εἶνε αἱ $x=7, y=3, \omega=8$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ x, y, ω διὰ τῶν τιμῶν τούτων εἰς τὸ σύστημα (1), εὑρίσκομεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς

$$\left.\begin{array}{l} 7=3-8+12 \\ 2.7+3.3-8=15 \\ 7-2.3+2.8=17. \end{array}\right\} \quad (1')$$

Ἂν τὰς αὐτὰς τιμὰς 7, 3 καὶ 8 θέσωμεν ἀντὶ τῶν x, y, ω εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (2), θὰ εὕρωμεν ἴσους ἀριθμούς. Διότι ἡ μὲν πρώτη καὶ ἡ τρίτη τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2) εἶνε αὐτὴ ἡ πρώτη καὶ ἡ τρίτη τοῦ συστήματος (1), καὶ θὰ δώσουν ἴσους ἀριθμοὺς ὡς καὶ προηγουμένως, ἡ δὲ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) δίδει (μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν) ἐκ τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς τὸ

$$2.(3-8+12)+3.3-8 \qquad (2')$$

ἢ τὸ

$$2.7+3.3-8 \qquad (2'')$$

διότι τὸ $(3-8+12)$ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν τοῦ x, δηλαδὴ μὲ 7. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον $(2')$ ἢ τὸ ἴσον αὐτοῦ $(2'')$ ἰσοῦται μὲ 15, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων $(1')$. Ἄρα καὶ τὸ σύστημα (2) ἐπαληθεύεται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, διὰ τὰς ὁποίας ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἤτοι τὰ δύο συστήματα (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα.

*) Ἐν γένει ἔστω π. χ. τὸ σύστημα τριῶν ἐξισώσεων

$$\left.\begin{array}{l} x = A_1(y, \omega, \ldots) \\ A_2(x, y, \omega, \ldots)=0 \\ A_3(x, y, \omega, \ldots)=0, \end{array}\right| \quad (1)$$

ὅπου τὰ $A_1$, $A_2$, $A_3$ εἶνε μέλη τῶν ἐξισώσεων, περιέχοντα ἐν γένει τοὺς ἀγνώστους x, y, ω, . . Ἄν τὴν τιμὴν $A_1$ τοῦ x ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν καὶ τρίτην τῶν ἐξισώσεων, λαμβάνομεν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x=A_1(y, \omega, \ldots), \\ A_2(A_1, y, \omega, \ldots)=A'_2=0, \\ A_3(A_1, y, \omega, \ldots)=A_3'=0, \end{array}\right| \quad (2)$$

ὅπου τὰ $A_2'$, $A_3'$ παριστάνουν τὰ ἐξαγόμενα τῶν $A_2$, $A_3$, ἀφοῦ ἀντεκατεστάθη τὸ x ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτοῦ $A_1(y, \omega, \ldots)$.

Λέγω ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο (2) εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν (1). Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι λύομεν τὸ σύστημα (1) καὶ ἀντικαθιστῶμεν τοὺς ἀγνώστους εἰς τὸ σύστημα τοῦτο, διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν των, τὸ x καὶ τὸ $A_1$ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τῶν (1) θὰ γίνουν ἴσοι ἀριθμοί. Ἄν ἀντικαταστήσωμεν καὶ εἰς τὸ σύστημα (2) τοὺς ἀγνώστους διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν των, θὰ ἀληθεύσῃ καὶ τοῦτο. Διότι τὸ (2) διαφέρει τοῦ (1) μόνον κατὰ τὸ ὅτι, ἀντὶ τοῦ x ἔχει τεθῆ εἰς τὴν θέσιν του τὸ $A_1$. Ἀλλὰ καὶ τὰ δύο ταῦτα, τὸ x καὶ τὸ $A_1$, θὰ εἶνε ἴσοι ἀριθμοὶ (ὡς εἴδομεν) μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν ἀγνώστων ὑπὸ τῶν ἐν λόγῳ τιμῶν των.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ (2), ἐπαληθεύεται καὶ τὸ (1). Ἄρα τὰ δύο συστήματα (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα.

## Μέθοδοι λύσεως συστήματος δύο ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μὲ δύο ἀγνώστους.

*131. Μέθοδος ἀντιθέτων συντελεστῶν.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν π. χ. τὸ σύστημα (1) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11. \end{cases}$

Ἐπιδιώκομεν πρῶτον νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις (ἢ μίαν ἐξ αὐτῶν) εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους τούτων εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων των, π. χ. τοῦ x, νὰ εἶνε ἀντίθετοι. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν (τὰ μέλη αὐτῆς) ἐπὶ τὸν 3 (συντελεστὴν τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν) καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν —2 (ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εἰς τὴν πρώτην). Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον σημειώνομεν γράφοντες παραπλεύρως ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ὡς κατωτέρω

(1) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11 \end{cases} \left|\begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right.$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα (2) $\begin{cases} 6x+9y=24 \\ -6x-8y=-22. \end{cases}$

Προφανῶς τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα (§ 118). Προσθέτομεν τώρα τὰς ἐξισώσεις τοῦ (2) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν y=2. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μὲ μίαν τῶν προστεθεισῶν τοῦ (2) ἢ μὲ μίαν τοῦ (1), ἔστω τὴν πρώτην, ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1) κατὰ τὰ ἐν § 129. Δηλαδὴ τὸ σύστημα (3) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ y=2 \end{cases}$ εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ (3) καὶ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y αἱ ὁποῖαι θὰ εὑρεθοῦν, θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ y=2, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν 2x+3y=8 τὸ y διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν 2x+3.2=8, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν x=1. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶνε αἱ x=1. y=2. Πράγματι, ἂν θέσωμεν εἰς τὸ (1) ἀντὶ τοῦ x=1 καὶ y=2, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων (διὰ τοῦ ὁποίου ἐπιτυγχάνομεν πρῶτον νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶνε ἀντίθετοι) λέγεται ***μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ τῆς προσθέσεως***. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν οὕτω εὑρεθεισῶν ἐξισώσεων προκύπτει μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον τῶν ἀγνώστων, λέγομεν ὅτι ***ἀπαλείφομεν*** τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων τοῦ δοθέντος συστήματος. Διὰ τοῦτο δ' ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται καὶ ***τῆς ἀπαλοιφῆς.***

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα (1′) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{10}+\dfrac{x-y}{2}=0, \\ \dfrac{x+y}{5}+\dfrac{x-y}{2}=1. \end{array}\right.$

Ἀπαλείφοντες πρῶτον τοὺς παρονομαστὰς ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τούτων καὶ ἐκτελοῦντες ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(2')\quad \left\{\begin{array}{l} 12\,x-8y=0, \\ 7\,x-3y=10, \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{r} -3 \\ 8 \end{array}\right.$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν πρώτην τούτων ἐπὶ $-3$, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ 8, διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν y, καὶ εὑρίσκομεν $-36x+24y=0$, $56x-24y=80$.

Διὰ προθέσεως τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν $20x=80$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x=4$, καὶ ἥτις μὲ μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2′), ἔστω τὴν δευτέραν, ἀποτελεῖ τὸ σύστημα

$$(3')\quad \left\{\begin{array}{l} 7x-3y=10 \\ x=4, \end{array}\right.$$

τὸ ὁποῖον εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ (2′) καὶ τὸ δοθὲν (1′).

Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $x=4$ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ (3′) καὶ λύομεν ὡς πρὸς y, ὅτε εὑρίσκομεν $y=6$. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶνε $x=4$ καὶ $y=6$. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν, θέτομεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα ἀντὶ τοῦ x καὶ y τὰς τιμὰς 4 καὶ 6 ἀντιστοίχως, καὶ βλέπομεν ὅτι, καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

Διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις δοθέντος συστήματος εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶνε ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ τὰ πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} 12x+5y=17 \\ -8\,x+7y=1, \end{array}\right|\quad (1'')$$

τὸ ἐ. κ. π. τῶν 12 καὶ 8 εἶνε τὸ 24. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ $24:12=2$, καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ $24:8=3$, καὶ λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (2″) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1″).

$$\begin{array}{c|l} 2 & 12x+5\,y=\ \ 17 \\ 3 & -\,8\,x+7\,y=-\,1. \\ \hline & \left.\begin{array}{l} 24\,x+10\,y=\ 34, \\ -\,24\,x+21\,y=-\,3. \end{array}\right\} (2'') \end{array}$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2″) κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἐξίσωσις 31 y=31, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν y=1, καὶ ἀκολούθως ἐργαζόμενοι ὡς καὶ ἀνωτέρω εὑρίσκομεν x=1.

*132*. ***Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.*** Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἀπομονοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν x, ἔστω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων. Ἤτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x, θεωροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν. Οὕτω λαμβάνομεν $x=\dfrac{8-3y}{2}$.

Αὕτη μὲ τὴν ἄλλην τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν τὸ σύστημα (2) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1)

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{8-3y}{2} \\ 3x+4y=11. \end{array}\right| \quad (2)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ x τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἢ τοῦ (2) καὶ εὑρίσκομεν $3.\dfrac{8-3y}{2}+4y=11$ (ἡ ὁποία μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1) κατὰ τὰ εἰς τὴν § 130).

Λύομεν τὴν τελευταίαν ταύτην ὡς πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν y=2.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀντικαθιστῶμεν τὸ y διὰ τοῦ 2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, ἢ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ $x=\dfrac{8-3y}{2}$ ὅτε εὑρίσκομεν

$$x=\frac{8-6}{2}=1.$$

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς λύσεως συστήματος καλοῦμεν συνήθως ***μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως.***

*133*. ***Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 3x+4y&=11. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἀπομονοῦμεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν x, εἰς τὴν πρώτην καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ἤτοι, λύομεν καθεμίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τὸν x, θεωροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν, καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x=\frac{8-3y}{2}$

ἐκ τῆς δευτέρας $x=\frac{11-4y}{3}$

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ y πρέπει νὰ εἶνε ἴσαι, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{8-3y}{2}=\frac{11-4y}{3}$, ἡ ὁποία μὲ μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν $y=2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, καὶ εὑρίσκομεν $x=1$.

Τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως συστημάτων καλοῦμεν συνήθως ***μέθοδον τῆς συγκρίσεως.***

## Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν.

α′) $\begin{aligned} 2x+4y&=14 \\ 3x-2y&=5. \end{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$ β′) $\begin{aligned} 3x+5y&=20 \\ 2x-10y&=0. \end{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$

γ′) $\begin{aligned} 12x-3y&=12 \\ 8x+y&=20. \end{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$ δ′) $\begin{aligned} x+y&=\alpha+\beta \\ \beta x+\alpha y&=2\alpha\beta. \end{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$

ε′) $\begin{aligned} \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}&=1 \\ \frac{x}{\beta}+\frac{y}{\alpha}&=1. \end{aligned} \left(\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right).$ στ′) $\begin{aligned} x+y&=\gamma \\ \alpha x-\beta y&=\gamma(\alpha-\beta). \end{aligned} \begin{pmatrix} \alpha\gamma:(\alpha+\beta) \\ \beta\gamma:(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$

***Ὁμὰς δευτέρα.*** Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν.

α′) $\begin{aligned} x&=3y+1 \\ 3x&=4y+8. \end{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ β′) $\begin{aligned} \frac{x}{y}&=\frac{3}{4} \\ 5x&=4y-3. \end{aligned} \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ γ′) $\begin{aligned} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}&=\frac{4}{3} \\ \frac{x}{y}&=\frac{1}{2}. \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

δ') $\beta x+\alpha y=2\alpha\beta$, $\beta x-\alpha y=0.$ $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ ε') $\alpha(x+y)+\beta(x-y)=1$, $\alpha(x-y)+\beta(x+y)=1.$ $\begin{pmatrix}1:(\alpha+\beta)\\ 0\end{pmatrix}$

στ') $\dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=2\alpha$, $\dfrac{x-y}{2\alpha\beta}=\dfrac{x+y}{\alpha^2+\beta^2}.$ $\begin{pmatrix}(\alpha+\beta)^2\\ (\alpha-\beta)^2\end{pmatrix}.$ ζ') $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\alpha^2\beta$, $\dfrac{x}{\alpha^2}+\dfrac{y}{\beta^2}=-\beta^2.$ $\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha^2\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{-\alpha\beta^3(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}\end{bmatrix}$

*Ὁμὰς τρίτη.* Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα.

α') $\dfrac{x+1}{y}=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{5}.$ $\begin{pmatrix}5\\ 24\end{pmatrix}.$ β') $2x+\dfrac{y-2}{5}=21$, $4y+\dfrac{x-4}{6}=29.$ $\begin{pmatrix}10\\ 7\end{pmatrix}.$

γ') $2(2x+3y)=3(2x-3y)+10$, $4x-3y=4(6y-2x)+3,$ $\begin{pmatrix}2{,}5\\ 1\end{pmatrix}$

δ') $\dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0$, $\dfrac{3}{6x-5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1}.$ $\begin{pmatrix}7\\ 8\end{pmatrix}.$ ε') $\dfrac{5x+7y}{3x+11}=\dfrac{13}{7}$, $\dfrac{11x+27}{7x+5y}=\dfrac{19}{11}$ $\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}.$

στ') $\dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha-\beta}$, $\dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ $\begin{vmatrix}\dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}\\ \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\end{vmatrix}$ ζ') $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=\dfrac{10}{xy}$, $\dfrac{5}{3x}+\dfrac{3}{4y}=\dfrac{49}{12xy}$ $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$

η') $\dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{4\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2}$, $\dfrac{x+y}{\alpha+\beta}-\dfrac{x-y}{\alpha-\beta}=\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$ $\begin{pmatrix}\alpha-\beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix}.$

ϑ') $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=2\alpha\beta$, $(\alpha+\gamma)x+(\alpha-\gamma)y=2\alpha\gamma.$ $\begin{pmatrix}\alpha\\ -\alpha\end{pmatrix}.$

160
144
16

## Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς

$$\left.\begin{aligned}\alpha x+\beta y&=\gamma\\ \alpha_1 x+\beta_1 y&=\gamma_1\end{aligned}\right| \qquad (1)$$

***134.*** Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἐπὶ $\beta_1$ καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ $-\beta$ (ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ β καὶ $\beta_1$ εἶνε διάφορα τοῦ μηδενός), προσθέσωμεν δὲ τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\,x=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta. \qquad (2)$$

12
12
24
12
12
144

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἂν τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης τῶν (1) πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $-\alpha_1$, τῆς δευτέρας ἐπὶ α καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα,

$$(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\,x=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma, \qquad (3)$$

Τὸ σύστημα (1) εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3). Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3), ἐπαληθεύουν καὶ τὰς (1).

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἂν ὁ συντελεστὴς $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ τῶν x καὶ y εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ (3) εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, δηλαδὴ ἂν εἶνε

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0, \quad \text{ἢ} \quad \alpha\beta_1\neq\alpha_1\beta$$

ἢ καὶ $\dfrac{\alpha}{\alpha_1}\neq\dfrac{\beta}{\beta_1}$ (τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν τοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς $\alpha\beta_1$ καὶ $\alpha_1\beta$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\alpha_1\beta_1$, ὑποτιθεμένου διαφόρου τοῦ μηδενός), τότε, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα τῶν (2) καὶ (3) διὰ τοῦ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, καὶ εὑρίσκομεν ὡς τιμὰς τῶν x καὶ y, τὰς

$$x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}, \qquad y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta} \qquad (4)$$

αἱ ὁποῖαι εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς παρατηροῦμεν, τὸ σύστημα τῶν (2) καὶ (3), ἄρα καὶ τὸ δοθέν, ἔχει μίαν μόνην λύσιν τὴν (4).

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ τῶν x καὶ y τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, ἀλλὰ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (2) καὶ (3), δηλαδὴ τὰ $\gamma\beta_1-\gamma_1\beta$ καὶ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ εἶνε διάφορα τοῦ μηδενός, θὰ ἔχωμεν

$$0.x=0=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta, \quad 0.y=0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma \qquad (5)$$

τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶνε διάφορα τοῦ μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δοθὲν σύστημα (1) δὲν ἐπιδέχεται καμμίαν λύσιν μὲ τιμὰς τῶν ἀγνώστων ὡρισμένους ἀριθμούς· διότι δὲν ὑπάρχει τιμή τις τῶν x καὶ y, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ μηδὲν νὰ δίδῃ τὰ $\gamma\beta_1-\gamma_1\beta$ καὶ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ τῶν (5). Ἀλλὰ καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν τιμῶν (4) τῶν x καὶ y παρατηροῦμεν ὅτι, καθεμία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας παριστάνουν τὰ κλάσματα (4) εἶνε ἀδύνατος, ἀφοῦ ὁ διαιρέτης εἶνε μηδέν, ὁ δὲ διαιρετέος ποσότης ὡρισμένη καὶ διάφορος τοῦ μηδενὸς (§ 109). Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν κλασμάτων (4) αὐξάνονται εἰς ἄπειρον, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν τείνῃ νὰ γίνῃ μηδέν, διὰ τοῦτο, θὰ λέγωμεν ὅτι, ὅταν εἶνε

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0, \quad \text{καὶ} \quad \gamma\beta_1-\gamma_1\beta\neq 0, \qquad \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq 0,$$

τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον, ἢ ὅτι ἐπιδέχεται μὲν μίαν λύσιν, ἀλλ' αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμὸν ἢ εἶνε ἄπειροι.

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta$ τῶν x καὶ y τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) καὶ τοὐλάχιστον ἓν τῶν δευτέρων μελῶν αὐτῶν εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, δηλαδὴ ἂν εἶνε τὸ $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, καὶ ἔστω τὸ $\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta = 0$, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος λύσεων.

Διότι ἐκ τῆς $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$

ἔχομεν εὐκόλως $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1}$.

Ὁμοίως ἐκ τῆς $\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta = 0$

λαμβάνομεν $\dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$.

Συγκρίνοντες τὰς δύο ἀνωτέρω ἀναλογίας ἔχομεν $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$.

Ἂν τοὺς ἴσους τούτους λόγους παραστήσωμεν διὰ τοῦ ϱ, θὰ εἶνε

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \varrho.$$

Ἄρα ἔχομεν καὶ $\alpha = \alpha_1\varrho$, $\beta = \beta_1\varrho$, $\gamma = \gamma_1\varrho$.

Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν α, β, γ θέτομεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν $\alpha x + \beta y = \gamma$ τοῦ συστήματος (1), ὅτε προκύπτει

$$\alpha_1\varrho x + \beta_1\varrho y = \gamma_1\varrho.$$

Διαιροῦντες διὰ τοῦ ϱ (ὑποτιθεμένου διαφόρου τοῦ μηδενὸς) ἔχομεν $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$.

Ἀλλ' αὐτὴ εἶνε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (1),

Ὥστε τὸ σύστημα (1) περιορίζεται κατὰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, δίδομεν εἰς τὸν ἕνα τῶν δύο ἀγνώστων, ἔστω εἰς τὸν y, μίαν οἱανδήποτε τιμήν, π. χ. τὴν $y = 1$, ὅτε ἔχομεν $\alpha_1 x + \beta_1 = \gamma_1$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν (ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εἶνε $\alpha_1 \neq 0$) $x = \dfrac{\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_1}$.

Ἐὰν εἰς τὸν y δώσωμεν ἄλλας τιμάς, π. χ. τὰς 0· 2, κλπ. θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν x τὰς τιμὰς

$$x = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \qquad \frac{\gamma_1 - 2\beta_1}{\alpha_1}, \text{ κλπ.}$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν ἄπειρον πλῆθος τιμῶν εἰς τὸν y, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ ἄπειρον πλῆθος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ x. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι, τὸ δοθὲν σύστημα, κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐπιδέχεται ἄπειρον πλῆθος λύσεων, καὶ θὰ τὸ καλοῦμεν ***ἀόριστον***.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = \alpha_1 = \beta = \beta_1 = 0$, τὰ δὲ $\gamma$ καὶ $\gamma_1$, ἢ ἓν ἐκ τούτων διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ δοθὲν σύστημα (1) εἶνε ***ἀδύνατον***. Διότι, τὰ μὲν πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) γίνονται μηδέν, τὰ δὲ δεύτερα ἢ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, θὰ εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Τέλος, ἐὰν εἶνε καὶ τὸ $\gamma$ καὶ $\gamma_1$ ἴσα μὲ μηδέν, αἱ ἐξισώσεις (1) εἶνε ταὐτότητες, καὶ ἐπαληθεύονται δι᾽ οἱασδήποτε τιμὰς τῶν x καὶ y.

Ἀνακεφαλαιοῦντες τ᾽ ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

***Λύσις τοῦ συστήματος*** $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1. \end{cases}$

***1) ἂν εἶνε*** $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} \neq \dfrac{\beta}{\beta_1}$, ***τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν, τὴν*** $x = \dfrac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$, $x = \dfrac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$.

***2) ἂν εἶνε*** $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta}{\beta_1} \neq \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$ ***τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.***

***3) ἂν εἶνε*** $\dfrac{\alpha}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_1}{\beta_1} = \dfrac{\gamma}{\gamma_1}$ ***τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον.***

***4) ἂν εἶνε*** $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 0$, ***εἶνε ἀόριστον.***

***5) ἂν εἶνε*** $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 = 0$, ***καὶ*** $\gamma$ ***ἢ καὶ*** $\gamma_1 \neq 0$, ***τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.***

***Ἐφαρμογή.*** Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + y = 2, \end{cases}$ ὅπου τὸ $\lambda$ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε ποσότης γνωστή. Ἔχομεν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = \lambda - 1$. Ἐπομένως, ἐὰν τὸ $\lambda$ εἶνε διάφορον τῆς 1, τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν, τὴν

$$x = \frac{2(1-\lambda)}{\lambda-1} = -2, \quad y = \frac{2(\lambda^2-1)}{\lambda-1} = 2(\lambda+1).$$

Ἐὰν εἶναι τὸ $\lambda=1$, τὸ $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, καὶ τὸ σύστημα γίνεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ $\lambda$ τὸ 1,

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Ἤτοι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην ἐξίσωσιν καὶ εἶνε ἀόριστον.

*Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.*

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

α′) $\lambda x + y = 2.$ β′) $\lambda x - 2y = \lambda$ γ′) $x + (3\lambda - 1)y = 0,$
$x + y = 2\lambda.$ $(\lambda - 1)x - y = 1.$ $x + 2y = \lambda - 4.$

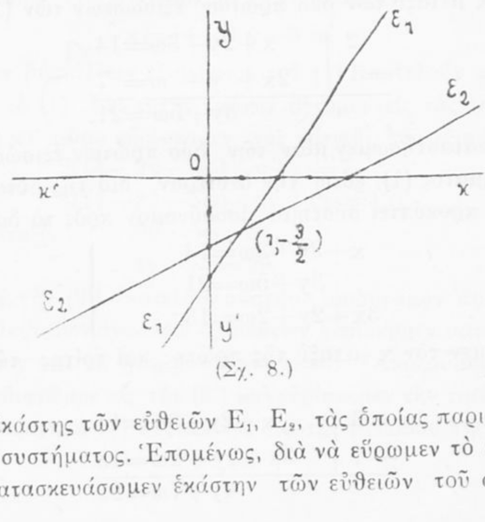
δ′) $y = \lambda + 2x,$ ε′) $x + y = \lambda,$ στ′) $(\lambda^2 - 1)x - y = \lambda$
$3y - \lambda = x + 3.$ $\lambda x + y = 1.$ $2x - y = \lambda - 1.$

## Γραφικὴ λύσις συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

*135.* Ἔστω τὸ σύστημα

$$(1) \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - 2y = 4. \end{cases}$$

Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $x = 1, y = -\dfrac{3}{2}$. Τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$




(Σχ. 8.)

κεῖται ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν $E_1$, $E_2$, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἑκάστην τῶν εὐθειῶν τοῦ συστήματος (1) αἱ δὲ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν παριστάνουν τὰς ρίζας τοῦ δοθέντος συστήματος (Σχ. 8).

### Ἀσκήσεις.

Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν.

α′) $4x-5y=1$, $3x+7x=6$. β′) $\frac{3}{4}x-9y-5=0$, $x-3y=0$. γ′) $\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}y-\frac{1}{2}=0$, $x+9y-7=0$.

δ′) $\frac{x-1}{3}=\frac{x+4}{2}$, $x-2y=0$. ε′) $\frac{x-y}{3}-\frac{x-y}{2}+1=10$, $x-7y=0$. στ′) $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=\frac{2}{xy}$, $x+y=3$.

## Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους.

*136.* Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους, π.χ. τὸ

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3\omega&=14\\ 2x+y+\omega&=7\\ 3x+2y+2\omega&=13, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ διὰ μιᾶς τῶν μεθόδων, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν. Οὕτω διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀπαλείφομεν π.χ. τὸν x μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῶν (1) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 2 & x+2y+3\omega=14\\ -1 & 2x+y+\omega=7\\ \hline & 3y+5\omega=21. \end{array}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος (1), ἔστω τὴν δευτέραν, διὰ τῆς οὕτω εὑρεθείσης $3y+5\omega=21$, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (§ 129) τὸ

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3\omega&=14\\ 3y+5\omega&=21\\ 3x+2y+2\omega&=13. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (2) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 3 & x+2y+3\omega=14\\ -1 & 3x+2y+2\omega=13\\ \hline & 4y+7\omega=29. \end{array}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρώτην ἢ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) διὰ τῆς προκυψάσης $4y+7\omega=29$, ἔστω τὴν τρίτην, καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (3) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1)

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3\omega&=14\\ 3y+5\omega&=21\\ 4y+7\omega&=29. \end{aligned}\right\}\quad(3)$$

Μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3) ἀπαλείφομεν τὸν y καὶ εὑρίσκομεν $\omega=3$. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν μίαν τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3), ἔστω τὴν τρίτην, διὰ τῆς $\omega=3$, καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (4)

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3\omega&=14\\ 3y+5\omega&=21\\ \omega&=5, \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

τὸ ὁποῖον εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὰ προηγούμενα. Ἀντικαθιστῶμεν τὸ ω διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $y=2$.

Ἐὰν τὰς τιμὰς τῶν ω καὶ y ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ (1) ἢ τοῦ (4) εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶνε $x=1$, $y=2$ καὶ $\omega=3$.

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) λύομεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως ὡς ἑξῆς. Λύομεν τὴν μίαν τῶν (1), ἔστω τὴν πρώτην, ὡς πρὸς τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π. χ. ὡς προς x, θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς ἀγνωστούς. Οὕτω εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=14-2\,y-3\,\omega. \qquad (2')$$

Αὕτη μετὰ τῶν δύο ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1). Τὴν τιμὴν ταύτην θέτομεν εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις τοῦ (1) καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους

$$2(14-2y-3\omega)+y+\omega=7,$$
$$3(14-2y-3\omega)+2y+2\omega=13,$$

ἢ μετὰ τὴν διάταξιν

$$3y+5\omega=21,$$
$$4y+7\omega=29,$$

καὶ αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν (2′) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω, ἤτοι $y=2$ καὶ $\omega=3$. Ἀκολούθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2′) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$.

Τὸ δοθὲν σύστημα (1) λύομεν καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως ὡς ἑξῆς.

Ἀπομονοῦμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. τὸν x, εἰς καθεμίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων (1), θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ἀγνώστους ὡς γνωστούς. Τὴν πρώτην τῶν οὕτω εὑρισκομένων τιμῶν τοῦ x ἐξισώνομεν μὲ ἑκάστην τῶν τιμῶν αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἐξισώσεων. Οὕτω λαμβάνομεν δύο ἐξισώσεις δὲ δύο ἀγνώστους αἱ ὁποῖαι μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, τὸ ὁποῖον λύομεν, καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὸ y καὶ τὸ ω διὰ τῶν τιμῶν αὐτῶν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν.

*137.* Ἐν γένει, διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν, ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν καὶ ἑκάστης τῶν (μ—1) ἄλλων ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον. Οὕτω προκύπτουν (μ—1) νέαι ἐξισώσεις μὲ (μ—1) ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐργαζόμεθα ὁμοίως, λαμβάνοντες τὰς νέας (μ—1) ἐξισώσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἑξῆς. Οὕτω προκύπτουν (μ—2) ἐξισώσεις μὲ (μ—2) ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Οὕτω προχωροῦντες, θὰ εὕρωμεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν μὲ μ ἐξισώσεις. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἡ τελευταία θὰ ἔχῃ ἕνα ἄγνωστον· ἡ προτελευταία δύο· ἡ πρὸ αὐτῆς τρεῖς· καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ πρώτη θὰ ἔχῃ μ ἀγνώστους. Λύοντες τὴν τελευταίαν, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου. Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τούτου εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ λύομεν αὐτήν, ὡς πρὸς τὸν ἄλλον ἄγνωστον· προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῆς πρώτης.

## Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα.

α′) $\begin{cases} x+y+\omega=11 \\ 2x-y+\omega=5 \\ 3x+2y+\omega=24. \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

β′) $\begin{cases} x-y+\omega=7 \\ x+y-\omega=1 \\ y+\omega-x=3. \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

γ′) $\begin{cases} x+4y-8\omega=-8 \\ 4x+8y-\omega=76 \\ 8x-y-4\omega=110. \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

δ′) $\begin{cases} 2x+7y-11\omega=10 \\ 5x-10y+3\omega=-15 \\ -6x+12y-\omega=31. \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$.

ε') $$\frac{x+2y}{5x+6\omega}=\frac{7}{9},\quad \frac{3y+4\omega}{x+2y}=\frac{8}{7},\quad x+y+\omega=128 \qquad \begin{bmatrix}51\\76\\1\end{bmatrix}.$$

στ') $$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2\omega}{7}=58,\quad \frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{\omega}{3}=76,\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7\omega}{40}=\frac{147}{5}. \qquad \begin{bmatrix}12\\30\\168\end{bmatrix}.$$

*Ὁμὰς δευτέρα.* Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἑξῆς συστήματα

α') $$x+y+\omega=\alpha+\beta,\quad x-y=2\beta,\quad \frac{x}{y-\omega}=\frac{1}{1}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}. \qquad \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\\alpha-\beta\\\beta-\alpha\end{bmatrix}$$

β $$x+y+\omega=0,\quad (\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega=0,\quad \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=1. \qquad \begin{vmatrix}1:(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\\1:(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\\1:(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\end{vmatrix}.$$

γ') $$x+y+\omega=1,\quad \alpha x+\beta y+\gamma\omega=k,\quad \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=k^2. \qquad \begin{vmatrix}(k-\gamma)(k-\beta):(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)\\(k-\alpha)(k-\gamma):(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)\\(k-\alpha)(k-\beta):(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\end{vmatrix}.$$

δ') $$\begin{aligned}&3x+6y-2\omega+9\varphi=6\\&4y-5x+5\omega-5\varphi=5\\&2\omega-3x+8y-3\varphi=3\\&9\varphi+10y+3\omega-4x=6.\end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}2\\0{,}5\\3\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

ε') $$\begin{aligned}&x-3\omega+\varphi=10\\&4y+\omega-4\varphi=1\\&3y+\varphi=1\\&x+2y+3\varphi=25.\end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}2\\4\\1\\5\end{bmatrix}.$$

στ') $$\begin{aligned}&4x-3\omega=10\\&2y-5\varphi=5\\&\omega+3\tau=19\\&3x+y=13\\&2y-3\varphi=11.\end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}1\\10\\-2\\3\\7\end{bmatrix}$$

ζ') $$\begin{aligned}&x-2y+3\omega-4\varphi=-8\\&y-2\omega+3\varphi-4x=6\\&\omega-2\varphi+3x-4y=-8\\&\varphi-2x+3y-4\omega=-2.\end{aligned} \qquad \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

*Ὁμὰς τρίτη.* 1) Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματά τινα, στηριζόμενα ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Τὸ εἶδος τούτων δὲν εἶνε ὡρισμένον καὶ φανερὸν διὰ καθὲν σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν. Οὕτω π. χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{aligned}&x+6x+7\omega=30\\&x:y:\omega=6:8:3\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

γράφομεν τὴν δευτέραν ὡς ἑξῆς $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{8}=\dfrac{\omega}{3}$.

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς τῶν ἴσων κλασμάτων θὰ εἶνε (καὶ ἕνεκα τῆς πρώτης ἐξισώσεως)

$$\frac{x}{6}=\frac{6y}{48}=\frac{7\omega}{21}=\frac{x+6y+7\omega}{75}=\frac{30}{75}=\frac{2}{5}.$$

Ἑπομένως $x=$ εἶνε $\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$, $y=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$, $\omega=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$.

2) Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰ κάτωθι συστήματα.

α′) $\begin{array}{l} x+y=5 \\ y+\omega=8 \\ \omega+\varphi=9 \\ \varphi+\tau=11 \\ \tau+x=9. \end{array} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$

β′) $\begin{array}{l} x+y+\omega=15 \\ x+y+\tau=16 \\ x+\omega+\tau=18 \\ y+\omega+\tau=20. \end{array} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$

γ′) $\begin{array}{l} \frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{18} \\ 3x+5y+\omega=34. \end{array} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}.$

δ′) $\begin{array}{l} \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{\varphi}{\delta} \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi=\frac{\alpha}{\beta} \end{array} \quad \left(x=\alpha^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).\beta\right)$

ε′) $\begin{array}{l} \mu x=\nu y=\rho\omega \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta. \end{array}$

$\left(x=\delta\nu\rho:(\alpha\nu\rho+\beta\mu\rho+\gamma\mu\nu)\right)$

στ′) $\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}. \end{array} \quad \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}.$

ζ′) $\begin{array}{l} \frac{1}{3x-2y+1}+\frac{1}{x+2y-3}=\frac{5}{12} \\ \frac{1}{x+2y-3}-\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{1}{12}. \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

η′) $\begin{array}{l} \frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=\mu \\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\nu. \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2\mu:(\mu^2-\nu^2) \\ 2\nu:(\mu^2-\nu^2) \end{pmatrix}.$

θ′) $\dfrac{xy}{5x+4y}=6$　$\left[\begin{matrix}48\\60\\36\end{matrix}\right]$.　ι′) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5$　$\left[\begin{matrix}\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{2}\end{matrix}\right]$

$\dfrac{y\omega}{3y+5\omega}=6$　　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=2xy.$

$\dfrac{\omega x}{2\omega+3x}=8.$

*Ὁμὰς τετάρτη.* 1) Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$$\left\{\begin{matrix}\alpha x+\beta y=\gamma\\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1\end{matrix}\right.$$

γραφικῶς· ἤτοι α′) τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἄπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶνε ἀδύνατον;

2) Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

## Προβλήματα συστημάτων.

*138.* Διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων εἰς τὰ ὁποῖα τὰ ζητούμενα εἶνε ἐν γένει περισσότερα τοῦ ἑνὸς ἐργαζόμεθα κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τὰ εἰς τὴν § 124, καὶ πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν προβλήματά τινα κατωτέρω.

Πρόβλημα 1ον). «***Ἐὰν ὁ Α δώσῃ 10 δρ. εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ οὗτος τριπλάσια τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 δρ. εἰς τὸν Α, θὰ ἔχῃ ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δραχμὰς εἶχε καθείς;***»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὰς δραχμὰς τοῦ Α, καὶ διὰ τοῦ y τὰς τοῦ Β, δώσῃ δὲ 10 δρχ. ὁ Α εἰς τὸν Β, τὰ μὲν χρήματα τὰ ὁποῖα θὰ μείνουν εἰς τὸν Α θὰ παριστάνωνται διὰ τοῦ (x—10), τὰ δὲ τοῦ Β διὰ τοῦ (y+10). Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν

$$3(x-10)=y+10.$$

Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 δρ. εἰς τὸν Α, θὰ εἶνε $x+20=2(y-20)$.

Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα

$\left.\begin{matrix}3(x-10)=y+10\\ x+20=2(y-20)\end{matrix}\right\}$ ἢ μετά τινας ἁπλοποιήσεις τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό

$$\left.\begin{matrix}3x-y=40\\ x-2y=-60\end{matrix}\right\}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι x=28 δρ., y = 44 δρ.

Πρόβλημα 2ον). «***Ἐὰν κλάσματός τινος διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητής, ὁ δὲ παρανομαστὴς ἐλαττωθῇ κατὰ 1, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$. Ἐὰν διπλασιασθῇ ὁ παρονομαστής, αὐξηθῇ δ' ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ κατὰ 1, γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{7}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα***».

Ἔστω x ὁ ἀριθμητὴς καὶ y ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος. Ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ ἔχωμεν συμφώνως μὲ τὴν ἐκφώνησιν

$$\frac{2x}{y-1}=\frac{1}{2}, \text{ ἐξ ἄλλου δὲ } \frac{x+1}{2y}=\frac{1}{7},$$

ἤτοι τὸ σύστημα $\left.\begin{aligned}\frac{2x}{y-1}&=\frac{1}{2}\\ \frac{x+1}{2y}&=\frac{1}{7}.\end{aligned}\right|$

ἢ μετά τινας ἁπλοποιήσεις τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ $\left.\begin{aligned}4x-y&=-1\\ 7x-2y&=-7.\end{aligned}\right\}$

Λύοντες τοῦτο, εὑρίσκομεν $x=5$ καὶ $y=21$. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶνε τὸ $\frac{5}{21}$.

Πρόβλημα 3ον). «***Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ϑ' ἀπέχουν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου 12 μ. μέν, ἐὰν κινηθοῦν ἐπὶ 12″ πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, 204 μ. δέ, ἐὰν πρὸς ἀντιθέτους. Πόση εἶνε ἡ ταχύτης καθενὸς (κινούμενου ὁμαλῶς);***»

Ἔστω x ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου καὶ y τοῦ δευτέρου. Μετὰ 12″ τὸ πρῶτον θὰ διατρέξῃ 12x καὶ τὸ δεύτερον 12y μέτρα, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε τότε (12x—12y) μ., ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ (12x+12y) μ. ἐὰν ἀντίθετον. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ ἑξῆς σύστημα

$$\left\{\begin{aligned}12x-12y&=12,\\ 12x+12y&=204,\end{aligned}\right. \quad \text{ἢ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ} \quad \left\{\begin{aligned}x-y&=1\\ x+y&=17.\end{aligned}\right.$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=9$ μ. καὶ $y=8$ μ.

Πρόβλημα 4ον). «***Ἐὰν εἰς τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ προστεθῇ τὸ τετραπλάσιον ἄλλου, προκύπτει ἄθροισμα 22. Ἐὰν εἰς τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου προστεθῇ τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου, προκύπτει 29. Ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί ;***»

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ πρῶτον καὶ διὰ τοῦ y τὸν δεύτερον ἀριθμόν, τὸ μὲν διπλάσιον τοῦ πρώτου θὰ εἶνε 2x, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ δευτέρου 4y. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήμαος ἔχομεν $2x+4y=22$.

Ἐξ ἄλλου τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου 3x καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ δευτέρου 5y ἔχουν ἄθροισμα 29. Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x+4y=22 \\ 3x+5y=29, \end{cases} \text{ ἢ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ } \begin{cases} x+2y=11 \\ 3x+5y=29, \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=3$, $y=4$.

Πρόβλημα 5ον). «***Παιδίον λέγει εἰς ἄλλο· ἐὰν μοῦ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων σου, θὰ ἔχω 40 μῆλα. Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ· δός μου τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν ἰδικῶν σου διὰ νὰ ἔχω 35. Πόσα μῆλα εἶχε τὸ καθέν;***»

Ἐὰν διὰ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ διὰ y τοῦ δευτέρου, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\left| \begin{array}{l} x+\frac{y}{2}=40 \\ y+\frac{x}{2}=35, \end{array} \right. \text{ ἢ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ } \left| \begin{array}{l} 2x+y=80 \\ x+2y=70. \end{array} \right.$$

Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $x=30$ καὶ $y=20$ μῆλα.

Πρόβλημα 6ον). «***Ἔχει τις δύο εἴδη οἴνου· τῆς μὲν πρώτης ποιότητος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δρ., τῆς δὲ δευτέρας β δρ.· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ καθὲν εἶδος, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ ὀκάδων καὶ νὰ τιμᾶται ἡ ὀκᾶ γ δρ.;***»

Ἔστω ὅτι θὰ θέσῃ x ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ y ἐκ τῆς δευτέρας· θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸ σύστημα

$$x+y=\mu$$
$$\alpha x+\beta y=\gamma\mu,$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=\mu\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}$, $y=\mu\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$.

Ἵνα ὑπάρχῃ μία λύσις τοῦ συστήματος, πρέπει νὰ εἶνε $\beta-\alpha\neq0$, ἢ $\beta\neq\alpha$. Καὶ ἂν εἶνε $\beta>\alpha$, πρέπει καὶ $\beta\geq\gamma$, $\gamma\geq\alpha$, ὥστε αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ y νὰ εἶνε θετικαί, ἢ μηδέν. Ἂν εἶνε $\beta<\alpha$, πρέπει καὶ $\beta\leq\gamma$, $\gamma\leq\alpha$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἂν εἶνε $\beta=\alpha$, τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ἐκτὸς ἂν εἶνε καὶ $\beta=\gamma$, ὅτε καταντᾷ ἀόριστον. Ἐν γένει, διὰ νὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶνε $\beta>\gamma>\alpha$, ἢ $\beta<\gamma<\alpha$, δηλαδὴ τὸ γ πρέπει νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν α καὶ β.

Πρόβλημα 7ον). «***Τριψηφίου ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 21· τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων αὐτοῦ εἶνε διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται κατὰ 90. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός***».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀριθμοῦ, διὰ τοῦ y τῶν δεκάδων καὶ διὰ τοῦ ω τὸ τῶν μονάδων, ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $100x+10y+\omega$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} &x+y+\omega=21 \\ &x+\omega=2y \\ &100y+10x+\omega=100x+10y+\omega-90, \end{aligned}$$

ἢ μετά τινας ἀναγωγὰς τὸ ἰσοδύναμον τοῦ ἀνωτέρω

$$\begin{aligned} &x+y+\omega=21 \\ &x-2y+\omega=0 \\ &x-y=1, \end{aligned}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν, ὅτι

$$x=8, \quad y=7, \quad \omega=6.$$

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 876.

Πρόβλημα 8ον). «***Ὁ Α καὶ Β μαζὺ ἐργαζόμενοι, τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 5 ἡμ., ὁ Α καὶ Γ εἰς 6 ἡμ., ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς 5, 5 ἡμ., (τὸ αὐτὸ ἔργον). Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α,Β,Γ, δύναται νὰ τὸ ἐκτελέσῃ;***»

Ἔστω ὅτι εἰς x, y, ω ἡμέρας δύναται ἀντιστοίχως ὁ Α, Β, Γ νὰ ἐκτελέσῃ μόνος τὸ ἔργον. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ μέρος τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ $\frac{1}{y}$, καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Ἄρα ὁ Α καὶ Β εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ τοῦ ἔργου. Ἀλλ' αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$. Διότι ἀφοῦ οἱ δύο εἰς 5 ἡμ. ἐκτελοῦν τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν ὅτι $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σκεπτόμενοι ἔχομεν τὸ σύστημα

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\\ &\frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{6}\\ &\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{2}{11}.\ \left(\text{Εἶνε } \frac{1}{5,5}=\frac{10}{55}=\frac{2}{11}\right). \end{aligned}\right| \quad (1)$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες διὰ 2, ἔχομεν

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{181}{660}.$$

Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτῆς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τῶν (1), εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega}=\frac{49}{660}$. Ἄρα $\omega=\frac{660}{49}=13\frac{23}{49}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{y}=\frac{71}{660},\quad y=9\frac{21}{71},\quad \frac{1}{x}=\frac{61}{660},\quad x=10\frac{50}{61}.$$

### *Προβλήματα πρὸς λύσιν.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) 2 (3) ὀκ. ζαχάρεως καὶ 3 (4) ὀκ. καφὲ ἐκόστιζον 9,12 (14,94) δρ.· 3 (4) ζαχάρεως καὶ 2 (5) ὀκ. καφὲ τῶν αὐτῶν ποιοτήτων ἐκόστιζον 7,68 (18,92) δρ. Πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ καθενός ; 0,96· 2,4. (0,98·3).

2) Ἔχει τις κεφάλαιον 5400 (8100) δρ. καὶ ἄλλο 6500 (3600) δρ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 384 (462) δρ. καὶ ἐκ τῶν δύο. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου, καὶ τοὐναντίον, θὰ ἐλάμβανε $5\frac{1}{2}$ (24) δρ. περισσοτέρας (ὀλιγωτέρας) ὡς τόκον ἢ πρίν. Τίνα εἶνε τὰ ἐπιτόκια ; 3,5·3· (4·3,5).

3) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον (ἡ διαφορά), καὶ τὸ πηλίκον (γινόμενον) νὰ εἶνε ἴσα (ὡς 5:3:16). 0,5·—1 (16·4).

4) Ποσὸν 8 100 (8 600) δρ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ α' καὶ β' νὰ εἶνε ὡς 2: 3 (2: 3) τοῦ δὲ β' καὶ γ' ὡς 3: 4 (5:6). Ποῖα τὰ μερίδια ; 1800· 2700· 3600. (2000· 3000· 3600).

5) Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5 (8) μ. ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6 (10) μ. ἀντὶ 122 (132) δρ. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος, ἐνήλλαξε τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη (ἐκέρδισεν) ὁ ἀγοραστὴς 2 (6) δρ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἴδους ; 10·12 (9·6).

6) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶνε 10 (13). Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλυτέρου διὰ τοῦ μικροτέρου εἶνε 2 (3), τὸ δὲ ὑπόλοιπον 3 (1). Τίνες οἱ ἀριθμοί ; 17·7 (19·6).

7) Δύο δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁμορρόπως μέν, ἔχουν συνισταμένην 16 (23) χρ., ἀντιρρόπως δὲ 2 (7) χρ. Πόση εἶνε ἡ ἔντασις καθεμιᾶς τούτων ; 9·7 (15·8).

8) Ἐὰν εἰς τοὺς ὅρους κλάσματός τινος προστεθῇ 1 (2), προκύπτει $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$· ἐὰν ἀφαιρεθῇ 1 (2) προκύπτει $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)$. Ποῖον εἶνε τὸ κλάσμα ; $\frac{3}{7}\left(\frac{3}{8}\right)$.

9) Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β· δός μου 10 (20) ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω $1\frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2}\right)$ τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ, δός μου 10 (20) ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα εἶχε καθείς ; 20·30 (40· 60).

***Ὁμὰς δευτέρα*** (κινήσεως). 1) Ἐκ δύο σημείων, ἀπεχόντων δ (1500) μ. ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητά, ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. Ὅταν συνηντήθησαν τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει δ′ (300) μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Τίς ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των ;
Νὰ γίνῃ καὶ διερεύνησις (30:20).

2) Ἀπὸ δύο τόπων ἀπεχόντων $\delta_1$ (1500) μ. ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συναντῶνται μετὰ $t'_1$ (10′). Ἐὰν ηὐξάνετο ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου κατὰ λ (20) °/₀, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἠλαττώνετο κατὰ $\lambda_1$ (20)°/₀, θὰ συνηντῶντο μετὰ $t'_2$ (12′). Τίνες εἶνε αἱ ταχύτητες αὐτῶν ;
Νὰ γίνῃ καὶ διερεύνησις (12,5·437,5).

3) Ἀπὸ τῶν ἄκρων τόξου κύκλου α° (45°) κινοῦνται ἐπ᾽ αὐτοῦ δύο κινητὰ ἀντιθέτως, καὶ συναντῶνται μετὰ $\tau_1''$ (3″). Ἐὰν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, συναντῶνται μετὰ $\tau_2''$ (5″). Πόσων μοιρῶν τόξον διανύει καθὲν κινητὸν εἰς 1″ ; Νὰ γίνῃ καὶ διερεύνησις (12 3).

***Ὁμὰς τρίτη*** (γεωμετρικά). 1) Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶνε α (8) μ., β (10) μ., γ (12) μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὁμοίου αὐτοῦ τριγώνου, ἔχοντος περίμετρον τ (60) μ ; 16· 20· 24

2) Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Πόσαι εἶνε αἱ ἀκτῖνές των, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶνε α (4), β (5), γ (8);
(3,5·0,5· 4, 5).

3) Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου εἶνε ὡς μ:ν (3 : 4). Ἂν ἡ μὲν

βάσις του αὐξηθῇ κατὰ α (2), τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ κατὰ β (5), τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνεται κατὰ γ (30). Τίνες αἱ διαστάσεις αὐτοῦ;

$$\left(2\,\frac{14}{23},\ 3\,\frac{11}{23}\right).$$

4) Δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς (ἐσωτερικῶς) ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶνε 0,30 (4) μ. Πόσαι εἶνε αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, ἐὰν ἔχουν λόγον 2:3 (5·4); 0,12 0,18· (20·16).

5) Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις τοῦ τριγώνου κατὰ 1 (2) μ. καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ κατὰ 2 (2) μ. ἐλαττοῦται (αὐξάνεται) τὸ ἐμβαδόν του κατὰ 7 (2) $\mu^2$. Ἐὰν ἐλαττωθῇ ἡ βάσις του κατὰ 2 (3) μ., καὶ αὐξηθῇ τὸ ὕψος του κατὰ 3 (2) μ., τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται (ἐλαττοῦται) κατὰ 10 (15) $\mu^2$. Πόση εἶνε ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του; 38·64.(12·16).

***Ὁμὰς τετάρτη.*** 1) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε $\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ τοῦ τῶν μονάδων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 (15) μεγαλύτερός του. 46 (Εἶνε ἀδύνατον).

2) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, περιεχόμενος μεταξὺ 400 (200) καὶ 500 (300), ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶνε 9 (8). Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ $\frac{36}{47}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$ τοῦ πρώτου. 423 (Εἶνε ἀδύνατον).

3) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶνε $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{3}{5}\right)$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 (200) μεγαλύτερος αὐτοῦ. 345 (Εἶνε ἀδύνατον).

4) Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸν 4 (5), τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶνε 604 (392). Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 (9) καὶ ὑπόλοιπον 34 (32). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός. 57 (36).

## *Περὶ ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ.*

*139.* Καλοῦμεν ***ἀνισότητα πρώτου βαθμοῦ*** τὴν ἀνισότητα ἡ ὁποία ἔχει ἕνα ἄγνωστον εἰς πρῶτον βαθμόν.

Λύσις ***ἀνισότητος*** λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

Δύο ἀνισότητες λέγονται ***ἰσοδύναμοι,*** ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.

Αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων (§ 116—118) ἰσχύουν καὶ δι' ἀνισότητας, ἐχούσας ἀγνώστους, καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισοτήτων (§ 56—58).

Κατὰ ταῦτα,

***«ἐὰν εἰς τὰ μέλη ἀνισότητος ἐχούσης ἀγνώστους προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος».***

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος ταύτης στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρους ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους ἀνισότητος εἰς τὸ ἄλλο ἕκαστον μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖον αὐτοῦ. Δὲν δυνάμεθα ὅμως καὶ νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἀνισότητος, χωρὶς νὰ ἀντιστρέψωμεν τὴν ἀνισότητα, διότι τότε πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ —1 (§ 58).

***«Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος, ἐχούσης ἀγνώστους, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν θετικόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος».***

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, δυνάμεθα ἀνισότητά τινα νὰ ἀπαλλάξωμεν τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς, (καθὼς καὶ τὰς ἐξισώσεις (§ 119).

Διὰ τὴν λύσιν ἀνισότητος πρώτου βαθμοῦ ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὴν λύσιν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας τῶν ἀνισοτήτων.

Π. χ. διὰ τὴν ἀνισότητα $(2x+3)-(x+1)>5$,
ἔχομεν $2x+3-x-1>5$.

Ἐκ ταύτης μετὰ τὴν μεταφορὰν τῶν 3 καὶ — 1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγήν, ἔχομεν $x>3$. Δηλαδὴ πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὰς ἀνισότητας $x+3<4$, καὶ $x-5>-8$.
Ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν λύοντες αὐτὴν $x<1$.
Ὥστε τὴν πρώτην ἐπαληθεύουν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 0· —1· —2· —3,. . .

Μαρία



Ἐκ τῆς δευτέρας ὁμοίως εὑρίσκομεν $x > -3$. Ἤτοι τὴν δευτέραν ἐπαληθεύουν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ $-2 \cdot -1 \cdot 0 \cdot +1 \cdot +2, \ldots$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν λύσεων συνάγομεν ὅτι οἱ $0, -1, -2$ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο δοθείσας ἀνισότητας.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $x + \frac{x}{4} > \frac{x}{5} - 4$.

Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζοντες τὰ ἄνισα ἐπὶ $4.5 = 20$ (ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν) καὶ λαμβάνομεν $20x + 5x > 4x - 80$ καὶ ἐκ ταύτης τὴν ἰσοδύναμον

$$25x - 4x > -80, \quad \text{ἢ} \quad 21x > -80$$

καὶ διαιροῦντες τὰ ἄνισα ταῦτα διὰ τοῦ 21 εὑρίσκομεν $x > -\frac{80}{21}$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $\frac{x}{7} - \frac{x}{5} < 2$.

Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $7.5 = 35$ καὶ εὑρίσκομεν $5x - 7x < 70$, ἐκ ταύτης δὲ τὴν $-2x < 70$. Διαιροῦντες τὰ ἄνισα διὰ τοῦ $-2$, εὑρίσκομεν $x > -35$ (ἐπειδὴ ἡ προηγουμένη ταύτης ἀνισότης ἀντιστρέφεται, διότι διῃρέσαμεν μὲ ἀρνητικὸν ἀριθμόν).

Μαρία Γ. Ζαχαρόπουλου

## Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὰς κάτωθι ἀνισότητας.

α') $2x + 5 > 0$, $\frac{1}{2}x + 5 < 0$. β') $-3x > \frac{5}{3}$, $9x - 18 > 0$. γ') $-4x - 9 > 0$, $9x - 12 > 0$.

δ') $9x + 7 > 0$, $9x - 13 > 0$. ε') $-7x - 48 > 0$, $-9x + 32 > 0$. στ') $0{,}6x - 5 > 0{,}25(x - 1)$, $0{,}5x - 1 < 0{,}7x - 1$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη ἰσότητος ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη ἀνισότητος, λαμβάνομεν ἀνισότητα ἀντεστραμμένην.

2) Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν μὲ τὰ μέλη τῆς ἀντιστρόφου αὐτῆς, ἐχούσης μέλη ἀρνητικά, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς πρώτης.

3) Ἐὰν τὰ μέλη ἰσότητος διαιρέσωμεν μὲ τὰ μέλη ἀνισότητος προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης.

***Ὁμὰς τρίτη.*** 1) Ἐὰν ἐκ δύο ἀριθμῶν ὁ πρῶτος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου, τὸ ἄθροισμά των εἶνε μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ δευτέρου, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου.

2) Ἐὰν ἐκ τῶν τριῶν ἀριθμῶν ἕκαστος εἶνε μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καὶ οἱ τρεῖς εἶνε θετικοί.

3) Ἐὰν ἐκ τριῶν ἀριθμῶν ἕκαστος εἶνε μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἕκαστος ἐξ αὐτῶν εἶνε μεγαλύτερος τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

4) Ἐὰν εἶνε $\alpha > \beta$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^2 > \alpha\beta$, ἂν τὸ α εἶνε θετικός, καὶ $\alpha^2 < \alpha\beta$, ἂν τὸ α εἶνε ἀρνητικός.

5) Ἐὰν εἶνε $\alpha > 1$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu > 1$, ἐὰν μ εἶνε θετικὸς ἀριθμός. Ἂν δ' εἶνε $\alpha < 1$ θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu < 1$.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

## *Περὶ ὁρίων.*

*140.* Καθὼς γνωρίζομεν (§ 77) ποσότης τις λέγεται ***μεταβλητὴ*** μέν, ἂν λαμβάνῃ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις, ***σταθερὰ*** δέ, ἂν μένῃ ἀμετάβλητος, ἐνῷ ἄλλαι μετὰ τῶν ὁποίων συνδέεται μεταβάλλονται.

Μεταβλητὸς μὲν ἀριθμὸς λέγεται ὁ παριστάνων μεταβλητὸν ποσόν, ***σταθερὸς*** δὲ ὁ παριστάνων σταθερὸν τοιοῦτον. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, ἡ γωνία ἡ ὁποία ἐγγράφεται εἰς δοθὲν τμῆμα κύκλου εἶνε ποσότητες σταθεραί, ἐνῷ τὸ ἐγγραφόμενον ἢ περιγραφόμενον πολύγωνον εἰς κύκλον εἶνε ποσότητες μεταβληταί.

Λέγομεν ὅτι, «***ποσότης τις μεταβλητή, λαμβάνουσα ἄπειρον πλῆθος τιμῶν, ἔχει ὅριον ποσότητά τινα σταθεράν, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως (§ 6) ἀπὸ τὴν σταθερὰν κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικρὰν (διάφορον τοῦ μηδενός)***».

Κατὰ ταῦτα, «***ἐὰν αἱ τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος (λαμβανούσης ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, εἶνε μικρότεραι δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, λέγομεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ αὕτη ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ἢ ὅτι τείνει εἰς τὸ μηδέν***». Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ μηδέν, κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν.

Ἂν π.χ. μεταβλητή τις x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots,$

ἐπειδὴ ἑκάστη τούτων, μετὰ τὴν πρώτην, εἶνε τὸ δέκατον τῆς προηγουμένης αὐτῆς, βαίνουν αὗται ἐλαττούμεναι καθόσον προχωροῦμεν. Ἑπομένως αἱ τιμαὶ αὗται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς δύνανται νὰ γίνουν μικρότεραι ἀριθμοῦ τινος ὁσονδήποτε μικροῦ. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι, ὅριον τοῦ x=μὲ μηδέν.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 0,3333.... Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots$ Ἡ τιμὴ ἑκάστου τῶν κλασμάτων τούτων, μετὰ τὸ πρῶτον, εἶνε τὸ δέκατον τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ· αἱ τιμαὶ λοιπὸν τῶν διαδοχικῶν τούτων κλασμάτων ἐλαττοῦνται διηνεκῶς, καθόσον προχωροῦμεν. Ἑπομένως, ὅταν θεωροῦμεν τὰ κλάσματα ταῦτα, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἐξ αὐτῶν, ὥστε τοῦτο καὶ τὰ ἑπόμενα τούτου νὰ εἶνε ὅσον θέλωμεν μικρά· ἤτοι νὰ διαφέρουν ἀπὸ τὸ μηδὲν κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν διαδοχικῶν τούτων κλασμάτων ἔχουν ὅριον τὸ μηδέν.

Τὸ ἄθροισμα κλασμάτων τινῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρων εἶνε (ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) μικρότερον τοῦ $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$· καὶ ὅσον περισσοτέρους ὅρους ἐξ ἀρχῆς προσθέτομεν τόσον περισσότερον πλησιάζομεν πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$. Ἤτοι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν τόσα πολλὰ ἐκ τῶν κλασμάτων τούτων, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν νὰ διαφέρῃ (ἀπολύτως) ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$ κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν λόγῳ κλασμάτων ἔχει ὅριον τὸ $\frac{1}{3}$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἔχωμεν ὅριον τοῦ (x—α)=μὲ 0, ἐνῷ τὸ μὲν x παριστάνει μεταβλητὴν ποσότητα (λαμβάνουσαν ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) τὸ δὲ α σταθεράν, τὸ ὅριον τοῦ x=μὲ α. Διότι, ἀφοῦ ὅριον τοῦ (x—α)=0, αἱ τιμαὶ τῆς διαφορᾶς x—α (ὅταν τὸ x μεταβάλλεται) ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, εἶνε μικρότεραι ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ· ἄρα αἱ τιμαὶ τῆς x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὴν α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν· δηλαδὴ εἶνε ὅριον τοῦ x=μὲ α.

***141.*** Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«***Ἐὰν τὸ ὅριον μεταβλητῆς τινος*** x ***εἶνε τὸ μηδέν, τὸ ὅριον τοῦ λ.***x, ***ἐνῷ τὸ λ εἶνε ποσότης σταθερὰ διάφορος τοῦ μηδενός, εἶνε ἴσον μὲ τὸ μηδέν»***.

Πράγματι ἐπειδὴ ὑπετέθη ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ x=0, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, εἶνε μικρότεραι ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ. Ἔστω λοιπὸν ὅτι τὸ ε παριστάνει ἀριθμὸν θετικὸν ὁσονδήποτε μικρὸν καὶ τοιοῦτον, ὥστε καὶ τὸ $\frac{\varepsilon}{\lambda}$ νὰ παριστάνῃ ἐπίσης ἀριθμὸν ὅσον θέλωμεν μικρόν, ὅπου τὸ λ λαμβάνεται κατ' ἀπόλυτον τιμήν (§ 6). Αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, θὰ εἶνε ἐξ ὑποθέσεως μικρότεραι τοῦ $\frac{\varepsilon}{\lambda}$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ λ.x (δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x πολλαπλασιασμέναι ἐπὶ τὸ δοθέντα θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν λ ἑκάστη) ἀπότινος καὶ ἑξῆς ἀπολύτως θεωρούμεναι, θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ $\frac{\varepsilon}{\lambda}$. λ, τοῦ λ θεωρουμένου ἀπολύτως, ἤτοι καὶ τοῦ ε, τὸ ὁποῖον ὑπετέθη ἀριθμὸς θετικὸς ὅσον θέλωμεν μικρός. Ἄρα τὸ ὅριον τοῦ λ.x=μὲ 0.

Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν τώρα ὅτι,

*«ἐὰν ὅριον μεταβλητῆς τινος* x *εἶνε ἡ σταθερὰ α, τὸ ὅριον τοῦ λ.*x, *ἐνῶ λ εἶνε σταθερὰ διάφορος τοῦ μηδενός, εἶνε ἴσον μὲ λ.α».*

Πράγματι, ἀφοῦ ὅριον τοῦ x=α, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικρὰν (διάφορον τοῦ 0). Ἀλλὰ τότε αἱ τιμαὶ τῆς διαφορᾶς x—α (ὅταν τὸ x μεταβάλλεται) ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, γίνονται μικρότεραι ποσότητος θετικῆς ὁσονδήποτε μικρᾶς· ἄρα τὸ x—α ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, καὶ (κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν) τὸ γινόμενον λ.(x—α) ἔχει ὅριον τὸ μηδέν. Ἤτοι εἶνε ὅριον τοῦ (λ.x—λ.α)= μὲ 0. Ἑπομένως εἶνε (§ 140 σελ. 139) καὶ ὅριον τοῦ λ.x=λ.α.

## Περὶ τοῦ ὁρίου ἀθροίσματος.

142. *«Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος πεπερασμένου πλήθους μεταβλητῶν ποσοτήτων (ἐχουσῶν ὅρια) ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν προσθετέων».*

Ἔστω πρῶτον ὅτι ἔχομεν δύο μεταβλητὰς x καὶ y, καὶ ὅτι ὅρια αὐτῶν εἶνε τὰ α καὶ β.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ x+y ἔχει ὅριον τὸ α+β, ἤτοι ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ x+y= μὲ ὅριον τοῦ x+ ὅριον τοῦ y.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ὅριον τοῦ x= μὲ α, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικρὰν (διάφορον τοῦ 0) ἔστω τὴν δ. Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν ὅτι, αἱ τιμαὶ τοῦ y ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ β κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, ἔστω τὴν δ′. Ἐπομένως, αἱ τιμαὶ τοῦ ἀθροίσματος $x+y$ ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ $\alpha+\beta$ κατὰ ποσότητα $\delta+\delta'$. Ἀλλ' αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλωμεν μικρά, ἀφοῦ ἕκαστον τῶν δ καὶ δ′ δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλωμεν μικρόν. Ἄρα τὸ $x+y$ ἔχει ὅριον τὸ $\alpha+\beta$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους προσθετέους, ἀλλὰ πεπερασμένους πάντοτε τὸ πλῆθος, καθὼς καὶ ὅτι,

***«τὸ ὅριον τῆς διαφορᾶς δύο μεταβλητῶν (ἐχουσῶν ὅρια) ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων αὐτῶν».***

*143.* Κατὰ ταῦτα, ἂν εἶνε ὅριον τοῦ $(x-y)=0$, ὅπου x καὶ y παριστάνουν μεταβλητὰς ἐχούσας ὅρια, θὰ ἔχωμεν, ὅριον τοῦ x— ὅριον τοῦ y= μὲ 0, ἢ ὅριον τοῦ x= μὲ ὅριον τοῦ y. Δηλαδή, ***«ἂν τὸ ὅριον τῆς διαφορᾶς δύο μεταβλητῶν (ἐχουσῶν ὅρια) ἰσοῦται μὲ μηδέν, αἱ μεταβληταὶ αὗται ἔχουν ἴσα ὅρια».***

## Περὶ τοῦ ὁρίου γινομένου.

*144.* *«Τὸ ὅριον γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων πεπερασμένων τὸ πλῆθος μεταβλητῶν ποσοτήτων (ἐχουσῶν ὅρια) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων».*

Ἔστω πρῶτον ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$ καὶ ὅριον τοῦ $y=\beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ὅριον τοῦ $x.y=$ μὲ ὅριον τοῦ x ἐπὶ ὅριον τοῦ$y=\alpha.\beta$.

Ἐπειδὴ τὸ ὅριον τοῦ $x=\alpha$, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ α κατὰ ποσότητα ὅσον δήποτε μικράν, ἔστω τὴν δ (διάφορον τοῦ 0). Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν λοιπὸν $x-\alpha=\delta$ ἢ $x=\alpha+\delta$. Ὁμοίως ἔχομεν $y=\beta+\delta'$, ἐνῶ τὸ δ′ παριστάνει ποσότητα ὁσονδήποτε μικρὰν (διάφορον τοῦ 0). Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας ἰσότητας, εὑρίσκομεν $xy=(\alpha+\delta).(\beta+\delta')=\alpha\beta+\alpha\delta'+\beta\delta+\delta\delta'$, ἢ $x.y-\alpha\beta=\alpha\delta'+\beta\delta+\delta.\delta'$. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἕκαστον τῶν αδ′, βδ καὶ δδ′ δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως ὅσον θέλωμεν μικρόν, ἂν λάβωμεν ἐξ ἀρχῆς ἀρκούντως μικρὰ τὰ δ καὶ δ′. Ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha.\delta'+\beta.\delta+\delta.\delta'$ δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον ἑνὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ὅσον θέλωμεν μικροῦ (ἂν λάβωμεν ἐξ ἀρχῆς καταλλήλως μικρὰ τὰ δ καὶ δ′). Ἀλλὰ τότε τὸ $x.y-\alpha\beta$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, διότι αἱ τιμαὶ αὐτοῦ ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, εἶνε μικρότεραι ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ. Ἐπομένως εἶνε (§ 140) καὶ ὅριον τοῦ $x.y=\alpha.\beta$.

Ἔστω τώρα ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$, ὅριον τοῦ $y=\beta$ καὶ ὅριον τοῦ $\omega=\gamma$. Τὸ ὅριον τοῦ $x.y.\omega=$ μὲ ὅριον τοῦ $[(xy).\omega]$, καὶ τοῦτο (κατὰ τὰ ἀνωτέρω) = μὲ ὅριον τοῦ $(xy)$ ἐπὶ ὅριον τοῦ $\omega=$ μὲ ὅριον τοῦ $x$ ἐπὶ ὅριον τοῦ $y$ ἐπὶ ὅριον τοῦ $\omega=$μὲ $\alpha\,\beta.\gamma$.

Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πάντοτε πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

*145.* Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς προηγουμένης προτάσεως ἀποδεικνύεται ὅτι,

***«τὸ ὅριον δυνάμεως (μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον καὶ θετικὸν) μεταβλητῆς ποσότητος (ἐχούσης ὅριον) ἰσοῦται μὲ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ ὁρίου τῆς μεταβλητῆς».***

Ἔστω ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ $x^\nu=$μὲ (ὅριον τοῦ $x)^\nu=\alpha^\nu$ (ὅπου τὸ $\nu$ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ ἀκέραιος).

Διότι, ἐπειδὴ τὸ $x^\nu=x.x.\ldots x$ ($\nu$ φοράς), θὰ ἔχωμεν, ὅριον τοῦ $x^\nu=$ ὅριον τοῦ $(x.x.x.\ldots x)=$ μὲ $\alpha.\alpha\,\alpha\ldots\alpha=\alpha^\nu$.

## Περὶ τοῦ ὁρίου πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων.

*146.* ***«Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων (ἐχουσῶν ὅρια), ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων αὐτῶν, ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ὅριον διάφορον τοῦ μηδενός».***

Ἔστω ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$ καὶ ὅριον τοῦ $y=\beta$, τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται διάφορον τοῦ μηδενός.

Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε ὅριον τοῦ $\dfrac{x}{y}=$ μὲ $\dfrac{\text{ὅριον τοῦ } x}{\text{ὅριον τοῦ } y}=$ μὲ $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Διότι ἀφοῦ εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$, αἱ τιμαὶ τοῦ $x$ ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸ $\alpha$ κατὰ ποσότητα ὁσονδήποτε μικρὰν, ἔστω τὴν $\delta$ (διάφορον τοῦ 0). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν $x-\alpha=\delta$, ἢ $x=\alpha+\delta$. Καθ᾿ ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $y=\beta+\delta'$, ὅπου τὸ $\delta'$ εἶνε ποσότης ὅσον θέλωμεν μικρὰ (διάφορος τοῦ 0). Διαιροῦντες τὰς δύο ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\dfrac{x}{y}=\dfrac{\alpha+\delta}{\beta+\delta'}$. Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ ἴσα ταῦτα τὸ $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ἔχομεν

$$\frac{x}{y}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+\delta}{\beta+\delta'}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\beta+\beta\delta-\alpha\beta-\alpha\delta'}{(\beta+\delta').\beta}=\frac{\beta\delta-\alpha\delta'}{\beta^2+\beta\delta'}.$$

Ἤτοι $\dfrac{x}{y}-\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta\delta-\alpha\delta'}{\beta^2+\beta\delta'}$. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἀφοῦ τὰ δ καὶ δ′ εἶνε ποσότητες ὅσον θέλωμεν μικραί, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ ἀπολύτως καὶ διὰ τὰ β.δ καὶ αδ′ (ἂν ἐκλέξωμεν τὰ δ καὶ δ′ καταλλήλως ἐκ τῶν προτέρων ὅσον θέλωμεν μικρά). Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ διαφορὰ βδ—αδ′ γίνεται ἀπολύτως ὅσον θέλωμεν μικρά, ἐνῶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ τελευταίου κλάσματος, δηλαδὴ τὸ $\beta^2 + \beta\delta'$, εἶνε πάντοτε μεγαλύτερος τῆς σταθερᾶς ποσότητος $\beta^2$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\beta\delta-\alpha\delta'}{\beta^2+\beta\delta'}$ παριστάνει ποσότητα, ἡ ὁποία δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως ὅσον θέλωμεν μικρὰ (διὰ καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν δ καὶ δ′). Ἄρα ἡ διαφορὰ $\frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, καὶ ἑπομένως εἶνε ὅριον τοῦ $\frac{x}{y} =$ μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$.

### Πῶς διακρίνομεν ἂν μεταβλητὴ ποσότης ἔχῃ ὅριον.

147.«***Ἐὰν αἱ τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος (ἡ ὁποία λαμβάνει ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) βαίνουν πάντοτε αὐξανόμεναι, ἀλλὰ μένουν μικρότεραι δοθέντος ἀριθμοῦ, ἡ μεταβλητὴ ἔχει ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου***».

Ἔστω ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, ἀλλὰ μένουν μικρότεραι ἀριθμοῦ τινος Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ x ἔχει ὅριον μικρότερον ἢ ἴσον μὲ τὸ Α.

Ἂν ὁ Α περιλαμβάνεται π. χ. μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5 καὶ 6, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς δύνανται νὰ ὑπερβαίνουν τινὰς ἐκ τῶν 0,1,2,3,4,5, ἀλλὰ θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ 6, ἐπειδὴ αὗται μένουν μικρότεραι τοῦ Α,τὸ ὁποῖον εἶνε μικρότερον τοῦ 6.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς εἶνε ὁ 5. Σχηματίζομεν τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

5· 5,1· 5, 2· 5,3· 5,4· 5,5· 5,6· 5, 7· 5,8· 5,9· 6.

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶνε μεγαλύτεραι τοῦ 5, θὰ ὑπερβαίνουν ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ἀριθμοὺς τινὰς τῆς σειρᾶς ταύτης, ἀλλὰ θὰ εἶνε μικρότεραι τοῦ 6. Ἔστω λοιπὸν ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς ταύτης, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ ἐν λόγῳ τιμαί, ὁ 5,7 ὅτε αὗται θὰ εἶνε μικρότεραι τοῦ 5,8. Σχηματίζομεν τώρα τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν

5,7· 5,71· 5,72· 5,73· 5,74· 5,75· 5,76· 5,77· 5,78· 5,79· 5,8.

Παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶνε ἀπό τινος καὶ ἑξῆς μεγαλύτεραι τοῦ 5,7, θὰ ὑπερβαίνουν αὗται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς τινὰς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς ταύτης, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸν 5,8 (ὡς εἴδομεν). Ἔστω ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς ταύτης, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ ἐν λόγῳ τιμαὶ ὁ 5,73, ὅτε αὗται θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ 5,74. Ἐξακολουθοῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ θὰ ἔχωμεν π. χ. ὅτι, αἱ τιμαὶ τοῦ x ὑπερβαίνουν τὸν ἀριθμὸν 5,738426, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸν 5,738427, ὅστις διαφέρει τοῦ 5,738426 κατὰ ἓν ἑκατομμυριοστόν. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὁμοίως ὅσον θέλωμεν, θὰ εὕρωμεν ὅτι, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς περιέχονται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶνε ἴση μὲ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν οἱ ἐν λόγῳ ἀριθμοί. Ἂν τὸν μικρότερον τῶν ἀριθμῶν τούτων παραστήσωμεν διὰ τοῦ α, αἱ τιμαὶ τοῦ x (ἀπό τινος καὶ ἑξῆς) διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸν α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὅσον θέλωμεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ α. Ἑπομένως εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$, τὸ ὁποῖον εἶνε μικρότερον τοῦ A ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ A. Τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ συμβαίνῃ, ἂν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως τοῦ A κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν. Ὥστε θὰ ἔχωμεν ἐν γένει ὅτι ὅριον τοῦ $x \leqq A$.

*) Γενικῶς ἂν ϱ καὶ ϱ+1 εἶνε οἱ διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ A καὶ αἱ τιμαὶ τοῦ x ὑπερβαίνουν τὸν ϱ, θὰ ἔχωμεν, ἂν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$\varrho,\ \varrho+0{,}1\cdot\ \varrho+0{,}2\cdot\ \varrho+0{,}3\cdot\ldots,\ \varrho+0{,}9\cdot\ \varrho+1,$$

ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ὑπερβαίνουν ἔστω τὸν $\varrho+\dfrac{\varrho_1}{10}$, ἀλλὰ μένουν μικρότεραι τοῦ $\varrho+\dfrac{\varrho_1+1}{10}$ (ὅπου τὸ $\varrho_1$ ἔχει μίαν τῶν τιμῶν 0, 1, 2, 3, . . . 9). Ὁμοίως προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς θὰ ὑπερβαίνουν π. χ. τὸν $\varrho+\dfrac{\varrho_1}{10}+\dfrac{\varrho_2}{10^2}$ ἀλλὰ θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ $\varrho+\dfrac{\varrho_1}{10}+\dfrac{\varrho_2+1}{10^2}$ (ὅπου τὸ $\varrho_2$ ἔχει μίαν τῶν τιμῶν 0, 1, 2, . . . 9). Καὶ οὕτω καθεξῆς προχωροῦντες θὰ ἔχωμεν ἐν γένει ὅτι, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν $\varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + \ldots + \frac{\varrho_\mu}{10^\mu}$ καὶ $\varrho + \frac{\varrho_1}{10} + \frac{\varrho_2}{10^2} + \ldots$ $+ \frac{\varrho_\mu + 1}{10^\mu}$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{10^\mu}$. Ἂν παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ τοῦ α, αἱ τιμαὶ τοῦ x (ἀπό τινος καὶ ἑξῆς) θὰ διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸν α κατὰ ποσότητα μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{10^\mu}$, τὸ ὁποῖον γίνεται ὅσον θέλωμεν μικρόν, ἂν ἐξακολουθήσωμεν ἀρκούντως πρὸς εὕρεσιν τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ α. Ἑπομένως εἶνε ὅριον τοῦ x=μὲ α, τοῦτο δὲ εἶνε προφανῶς μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸν Α.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι,

***«ἐὰν αἱ τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος (ἡ ὁποία λαμβάνει ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) βαίνουν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ μένουν μεγαλύτεραι δοθέντος ἀριθμοῦ, ἡ μεταβλητὴ ἔχει ὅριον μεγαλύτερον ἢ ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον».***

*148.* Λέγομεν ὅτι ποσότης τις μεταβλητὴ (λαμβάνουσα ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) ἔχει ***ὅριον τὸ ἄπειρον*** ($\infty$), ἂν αἱ τιμαὶ αὐτῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμὸν θετικὸν ὁσονδήποτε μεγάλον. Καὶ ἂν μὲν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἀπό τινος καὶ ἑξῆς εἶνε θετικαί, λέγομεν ὅτι ὅριον τῆς μεταβλητῆς εἶνε τὸ θετικὸν ἄπειρον ($+\infty$), ἂν δὲ εἶνε ἀρνητικαί, τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον ($-\infty$).

***«Ἐὰν ὅριον μεταβλητῆς τινος*** x ***εἶνε τὸ μηδέν, τὸ ὅριον τῆς*** $\frac{1}{x}$ ***εἶνε τὸ*** $\infty$»***.

Πράγματι, ἵνα τὸ ὅριον τοῦ $\frac{1}{x}$ εἶνε τὸ $\infty$, ἀρκεῖ αἱ τιμαὶ αὐτοῦ (τοῦ x λαμβάνοντος ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, νὰ εἶνε μεγαλύτεραι ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, ἔστω τοῦ Μ. Ἀλλ' ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο, ἀρκεῖ αἱ τιμαὶ τοῦ x (ἀντιστρόφου τοῦ $\frac{1}{x}$), ἀπολύτως θεωρούμεναι, ἀπό τινος καὶ ἑξῆς νὰ μένουν μικρότεραι τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{M}$ ὁσονδήποτε μικροῦ (ἀντιστρόφου τοῦ Μ). Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ, ἀφοῦ εἶνε ὅριον τοῦ x=μὲ 0. Ἄρα εἶνε καὶ ὅριον τοῦ $\frac{1}{x}$=μὲ $\infty$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, *«ἂν ὅριον τοῦ $x$=μὲ $\infty$, τὸ ὅριον τοῦ $\frac{1}{x}$=μὲ 0».*

Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι,

*«ἂν ὅριον τῆς μεταβλητῆς $x$ εἶνε τὸ $\infty$, ὅριον τοῦ $\lambda.x$, ὅπου τὸ λ παριστάνει ἀριθμὸν σταθερόν, εἶνε τὸ $\infty$».*

***149.*** Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν.

***«Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος αὐξάνεται καὶ ὑπερβαίνει δοθέντα ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μεγάλον, ἂν ὁ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἐκθέτης αὐτῆς αὐξάνεται ἀρκούντως».***

Ἔστω $\alpha$ ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς μονάδος καὶ δύναμις αὐτοῦ $\alpha^{\mu}$ μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον καὶ θετικόν. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ δύναμις αὕτη δύναται νὰ ὑπερβῇ ἀριθμόν τινα δοθέντα ὁσονδήποτε μεγάλον, ἔστω τὸν Α, ἂν ὁ ἐκθέτης $\mu$ γίνῃ ἀρκούντως μεγάλος.

Πρὸς ἀπόδειξιν παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ εἶνε $\alpha>1$, ἔστω ὅτι $\alpha=1+\delta$. Τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha^2=(1+\delta)^2=1+2.\delta+\delta^2$ καὶ εἶνε $(1+\delta)^2>1+2.\delta$ (διότι παραλείφθη ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τὸ $\delta^2$). Ὁμοίως ἔχομεν $(1+\delta)^3=1+3.\delta+3.\delta^2+\delta^3$, καὶ εἶνε $(1+\delta)^3>1+3.\delta$.

Ἂν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $(1+\delta)$ εὑρίσκομεν $(1+\delta)^3.(1+\delta)>(1+3.\delta).(1+\delta)=1+3.\delta+\delta+3.\delta^2$.

Ἑπομένως εἶνε καὶ $(1+\delta)^4>1+4.\delta$. Ὁμοίως προχωροῦντες εὑρίσκομεν $(1+\delta)^5>1+5.\delta$ καὶ οὕτω καθεξῆς φθάνομεν εἰς τὸ ὅτι εἶνε $(1+\delta)^{\mu}>1+\mu.\delta$.

Ἤτοι ἔχομεν $\alpha^{\mu}=(1+\delta)^{\mu}>1+\mu.\delta$· καὶ διὰ νὰ εἶνε τὸ $\alpha^{\mu}>A$, ἀρκεῖ νὰ γίνῃ τὸ $1+\mu.\delta>A$, διότι τότε κατὰ μείζονα λόγον τὸ $(1+\delta)^{\mu}$, τὸ ὁποῖον εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $1+\mu.\delta$, θὰ γίνῃ μεγαλύτερον τοῦ Α. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $1+\mu.\delta>A$, ἂν λάβωμεν τὸ $\mu.\delta>A-1$, ἢ τὸ $\mu>\frac{A-1}{\delta}$. Ἂν λοιπὸν θέσωμεν $\frac{A-1}{\delta}=B$, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸν ἀκέραιον $\mu$ μεγαλύτερον τοῦ Β, καὶ διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ $\mu$ θὰ εἶνε τὸ $\alpha^{\mu}>A$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«ἂν ὁ ἐκθέτης δυνάμεως ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, λαμβάνῃ τιμὰς ἀκεραίας θετικὰς καὶ τείνῃ εἰς τὸ $\infty$, καὶ ἡ δύναμις τείνει εἰς τὸ $\infty$».***

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις.

***«Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῆς μονάδος ἐλαττοῦται καὶ γίνεται μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ θετι-***

*κοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ἂν ὁ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἐκθέτης αὐτῆς αὐξάνεται ἀρκούντως».*

Διότι, ἂν π.χ. ἔχωμεν α θετικὸν καὶ εἶνε $\alpha<1$, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\alpha}>1$, καὶ κατὰ τἀνωτέρω τὸ $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\mu=\frac{1}{\alpha^\mu}$ δύναται νὰ γίνῃ μεγαλύτερον δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, ἂν λάβωμεν τὸ μ ὅσον ἀρκούντως μέγα. Ἂν λοιπὸν θέλωμεν νὰ γίνῃ τὸ $\alpha^\mu<\frac{1}{A}$ ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{\alpha^\mu}>A$ (ἡ σχέσις αὐτὴ προκύπτει ἐκ τῆς $\alpha^\mu<\frac{1}{A}$ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ $\frac{A}{\alpha^\mu}$), τὸ ὁποῖον δύναται νὰ γίνῃ, ἂν λάβωμεν τὸ μ ἀρκούντως μέγα. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«ἂν ὁ ἐκθέτης δυνάμεως ἀριθμοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῆς μονάδος, λαμβάνῃ ἀκεραίας θετικὰς τιμὰς καὶ τείνῃ εἰς τὸ ∞, ἡ δύναμις τείνει εἰς τὸ μηδὲν (κατὰ τὰ εἰς τὴν § 140)».***

### *Ἀσκήσεις.*

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$, τὸ ὅριον τοῦ $\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}$. καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ὅριον τοῦ $\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}$, τὸ ὅριον τοῦ $x=\alpha$.

2) Ἂν εἶνε ὅριον τοῦ $x=\pm\infty$, τὸ ὅριον τοῦ $(x+\alpha)=\pm\infty$, ἂν τὸ α εἶνε σταθερόν.

3) Ἂν εἶνε ὅριον τοῦ $x=\alpha$, τὸ ὅριον τοῦ $(x+\lambda)=\alpha+\lambda$, ἂν τὸ **λ** εἶνε σταθερόν.

## Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

*150.* Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 2. Αὕτη δὲν εἶνε ἀκέραιός τις ἀριθμός, διότι εἶνε $1^2=1$ καὶ $2^2=4$. Ἀλλ' οὔτε ἄλλος τις ἀριθμὸς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμὸς δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, δύναται οὗτος νὰ παρασταθῇ (ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) διὰ κλάσματος ἀναγώγου. Ἔστω τοῦτο τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$. Τότε θὰ εἶνε

$\frac{\lambda^2}{\mu^2}=2$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον. Διότι, ἐπειδὴ τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶνε ἀνάγωγον, καὶ τὸ $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ θὰ εἶνε ἀνάγωγον, καὶ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ 2.

Θεωροῦμεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1· 1,1· 1,2· 1,3· . . . .1,7· 1,8· 1,9· 2 καὶ σχηματίζομεν ἀκολούθως τὰ τετράγωνα τούτων 1· 1,21· 1,44· 1,69· 1,96· 2,25· . . . . Παρατηροῦμεν ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν 2 καὶ ὅτι ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,96 καὶ 2,25, τετραγώνων τῶν 1,4 καὶ 1,5 δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Ἤτοι ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν $1{,}4^2$ καὶ $1{,}5^2$. Θεωροῦμεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1,4· 1,41· 1,42· 1,43.....1,49· 1,5. Ἐπειδὴ ὁ 2 δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἐκ τούτων, θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Πράγματι, ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν $1{,}41^2$ καὶ $1{,}42^2$. Ἑπομένως ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,41 καὶ 1,42. Ὁμοίως προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,414 καὶ 1,415, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διαφέρουν κατὰ ἓν χιλιοστόν. Κατ' ἀνάλογον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ ἓν δέκατον χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐν γένει λοιπόν, ἂν προχωρήσωμεν ὁμοίως οὕτω, θὰ εὕρωμεν ὅτι, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 2 περιέχεται μεταξὺ δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως τὴν ὁποίαν περιέχουν, καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλωμεν μικρὰ (ἂν ἐξακολουθήσωμεν ἀρκούντως). Ἄρα ἕκαστος τῶν μεταβλητῶν τούτων ἀριθμῶν, κατὰ μείζονα λόγον, θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνοντα τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2 κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν. Ἑπομένως ἕκαστος τῶν μεταβλητῶν τούτων ἀριθμῶν ἔχει ὅριον (§ 147), καὶ ἐπειδὴ καὶ αὐτοὶ διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, ἔχουν τὸ αὐτὸ ὅριον (§ 143). Τὸ κοινὸν ὅριον τῶν μεταβλητῶν τούτων ἀριθμῶν καλοῦμεν ***τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2*** καὶ παριστάνεται αὕτη ὑπὸ ἀριθμοῦ, ἔχοντος ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, μὴ περιοδικά· διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς οὗτος θὰ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον (ὡς εἴδομεν).

«*Ἐν γένει, καλοῦμεν ἀσυμμέτρους μὲν ἀριθμοὺς ἐκείνους, οἵτινες ἔχουν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν*, καὶ εἶνε θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἂν ἔχουν τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —, ***συμμέτρους*** δὲ τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς ἀριθμοὺς (ἀκεραίους ἢ κλασματικοὺς ἐν γένει). Κατὰ ταῦτα ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2 εἶνε ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ὁ 1,41421. . . . ἢ ὁ 1,41421 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 8,341572181. . . . καὶ 3,547184032. . . . εἶνε ἀσύμμετροι (ἔχοντες ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Καθὼς γνωρίζομεν, οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γίνουν ἐκ τῆς μονάδος ἢ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, πρὸς δὲ ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα, τὰ ὁποῖα εἶνε ἴσα μὲ ἀριθμούς, ἔχοντας μὲν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ὁμοίως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγομεν ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$

Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα ὅτι, «***τὸ σύνολον πλήθους ἐκ τῶν ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων*** $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots\right)$, ***ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων δὲν εἶνε περισσότεραι τῶν ἐννέα, θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὰ ψηφία διὰ τῶν ὁποίων γράφονται αὗται***».

Ἀριθμός τις θετικὸς λέγεται ***μεγαλύτερος*** ἄλλου, ὁ ὁποῖος λέγεται ***μικρότερος*** αὐτοῦ, ἂν περιέχῃ τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου καὶ ἄλλας ἀκόμη.

Δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ λέγονται ***ἴσοι***, ἂν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὁ ὁποῖος εἶνε μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,9999 . . . . εἶνε ἴσοι. Διότι, πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, π. χ. ὁ $\frac{147}{148}$, εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ $\frac{999}{1000}$, ἐπειδὴ ὁ μὲν $\frac{999}{1000}$ διαφέρει ἀπὸ τὴν μονάδα κατὰ $\frac{1}{1000}$, ὁ δὲ $\frac{147}{148}$ κατὰ $\frac{1}{148}$, ἤτοι περισσότερον. Ἐπομένως ὁ $\frac{147}{148}$, ὁ ὁποῖος εἶνε μικρότερος τοῦ 0,999, εἶνε ἀκόμη μικρότερος καὶ τοῦ 0,9999. . . Ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου, ὁσαδήποτε δὲ ψηφία τοῦ

0,9999. . . καὶ ἂν λάβωμεν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος· ἄρα εἶνε 1=0,9999. . . Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 0,1=0,09999. . . ., καὶ 0,01=0,00999. . . . κλπ.

### *Ἰσότης καὶ ἀνισότης δεκαδικῶν ἀριθμῶν.*

*151.* Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀκεραίας καὶ δεκαδικὰς μονάδας, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶνε ἴσοι : 1) ἂν πάντα τὰ ψηφία των τῆς αὐτῆς τάξεως εἶνε τὰ αὐτά· 2) ἂν τινὰ μὲν ψηφία των ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς εἶνε κατὰ σειρὰν τὰ αὐτά, καὶ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τούτων τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφέρει ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχόν του (τῆς αὐτῆς τάξεως) τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, τὰ δὲ ἑπόμενα ψηφία τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ἐκ τῶν ἀνίσων ψηφίων εἶνε πάντα 9, τοῦ δὲ ἄλλου εἶνε πάντα 0 (τὰ ὁποῖα καὶ παραλείπονται). Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, οἱ ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι.

Οὕτω π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 3,1539999 . . . καὶ 3,154 εἶνε ἴσοι, καθὼς οἱ 0,54327 καὶ 0,543269999. . . , ἐνῷ οἱ 3,1452. . . . καὶ 2,1478. . . εἶνε ἄνισοι.

Καὶ μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διατηροῦνται οἱ ὁρισμοὶ τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν συμμέτρων, δεικνύεται δ' εὐκόλως ὅτι, εἶνε δυνατὴ ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς (καὶ ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν ἀκεραίαν) καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν. Ἐπίσης δεικνύεται εὐκόλως ὅτι, ἰσχύουν καὶ ἐπ' αὐτῶν αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν πράξεων.

Εἰς τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείπομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν ἀπό τινος δεκαδικῆς τάξεως καὶ ἑξῆς, καὶ οὕτω ἔχομεν συμμέτρους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶνε κατὰ προσέγγισιν ἴσοι μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους, καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν συμμέτρων τούτων κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας.

### Σημεῖα εὐθείας ὁριζόμενα ὑπὸ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

*152.* Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν 2,3143794. . . Ἐπειδὴ τὸν ἀσύμμετρον τοῦτον προσεγγίζει ἀρκούντως ὁ σύμμετρος ἀριθμὸς 2,314379, τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν σύμμετρον τοῦτον ἀριθμὸν εἶνε ἀρκούντως πλησίον ἑνὸς ἄλλου σημείου, παριστάνοντος τὸν ἀσύμμετρον 2,3143794. . . . Εἶνε φανερὸν ὅτι πλησιάζομεν περισσότερον τὸ σημεῖον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ ἀσυμμέτρου τινός, ὅσον ὁ σύμμετρος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ἀντὶ τοῦ ἀσυμμέτρου, προσεγγίζει περισσότερον αὐτόν. Ἐν γένει δὲν εἶνε εὔκολον νὰ εὕρωμεν ἀκριβῶς τὸ σημεῖον, τὸ παριστάνον δοθέντα ἀσύμμετρον ἀριθμόν. Ἐν τούτοις δι᾿ ὡρισμένους τινὰς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς δυνάμεθα διὰ γεωμετρικῆς τινος κατασκευῆς νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον. Ἐὰν π.χ. κατασκευάσωμεν ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ἴσας μὲ 1, ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴση, ὡς εἶνε γνωστόν, μὲ τὴν $\sqrt{2}$. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν $\sqrt{2}$ ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, ἐὰν λάβωμεν ἐπ᾿ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ σημείου O (παριστάνοντος τὸ 0), τμῆμα ἴσον μὲ τὴν ἐν λόγῳ ὑποτείνουσαν.

## Περὶ τῶν ριζῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

*153.* Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) καλοῦμεν ***τετραγωνικὴν ρίζαν ἢ δευτέρας τάξεως ρίζαν*** δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὸ τετράγωνον ἢ τὴν δευτέραν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα. Κατ᾿ ἀνάλογον τρόπον καλοῦμεν ***τρίτην, τετάρτην, .... μυοστὴν*** ρίζαν (ἢ ***μυοστῆς τάξεως ρίζαν)*** δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν τρίτην, τετάρτην, .... μυοστὴν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα. Καθὼς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α σημειοῦμεν διὰ τοῦ $\sqrt{\alpha}$, οὕτω τὴν τρίτην, τετάρτην,... μυοστὴν ρίζαν αὐτοῦ σημειοῦμεν διὰ τοῦ $\sqrt[3]{\alpha}, \sqrt[4]{\alpha}, \ldots \sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha, \quad \left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha, \ldots \quad \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\alpha.$$

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται ***ριζικόν,*** ἡ ὑπ᾿ αὐτὸ ποσότης ***ὑπόρριζος ποσότης,*** ὁ δὲ ἀριθμὸς ὅστις δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ρίζης τῆς ὑπορρίζου ποσότητος λέγεται ***δείκτης τῆς ρίζης.*** Οὕτω εἰς τὴν παράστασιν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ ὑπόρριζος ποσότης εἶνε τὸ α καὶ δείκτης ὁ μ, εἰς δὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐννοεῖται δείκτης ὁ 2. Ρίζα τις λέγεται ***ἀρτίας ἢ περιττῆς τάξεως,*** ἂν ὁ δείκτης ταύτης εἶνε ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττός.

***«Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ρίζας ἀρτίας τάξεως ἀντιθέτους, μίαν δὲ περιττῆς τάξεως (θετικήν)».***

Διότι ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν, ἐνῷ ἀφ᾿ ἑτέρου μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν. Οὕτω π. χ. ἡ $\sqrt{16}=\pm 4$, διότι εἶνε $(\pm 4)^2=16$.

Ἐπίσης εἶνε $\sqrt[3]{27}=+3$, ἐπειδὴ εἶνε $3^3=27$, καὶ $\sqrt[5]{32}=2$.

*«Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ῥίζαν περιττῆς τάξεως, θετικήν, καὶ οὐδεμίαν ἀρτίας τάξεως».*

Διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν, ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) ὑψούμενος εἰς δύναμιν ἀρτίαν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Οὕτω π. χ. ἡ $\sqrt[5]{-32}=-2$, ἐπειδὴ εἶνε $(-2)^5=-32$.

Ἔστω ἡ $\sqrt[3]{-8}$. Αὕτη $=$ μὲ $-2$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\sqrt[3]{8}=2$.

Ἑπομένως ἔχομεν $\sqrt[3]{-8}=-2=-\sqrt[3]{8}$, ἤτοι $\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}$.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

*«ἡ ῥίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀρνητικὴν ῥίζαν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἀντιθέτου του (θετικοῦ) ἀριθμοῦ».*

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται (ὡς ἐδείχθη διὰ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2 εἰς τὴν § 150) ὅτι αἱ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶνε ἢ ἀκέραιοι ἢ ἀσύμμετροι ἀριθμοί, ἀλλ' οὐδέποτε κλάσματα. Εἶνε δὲ γνωστὸν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι, ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων δοθέντος ἀριθμοῦ ἀκεραίου α διαιροῦνται διὰ τοῦ δείκτου ν ζητουμένης ῥίζης αὐτοῦ, ἡ ῥίζα αὐτὴ εἶνε ἀριθμὸς ἀκέραιος, ὅστις ἔχει τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ α μὲ ἐκθέτας τὰ πηλίκα τῶν ἐκθετῶν τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διῃρημένων διὰ τοῦ ν.

Παρατηρητέον ὅτι, ὅταν ὁ δείκτης τῆς ῥίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, ἡ ὕψωσις εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ ἡ ἐν λόγῳ ῥίζα ἐξουδετεροῦνται. Οὕτω ἔχομεν προφανῶς ὅτι, $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$, $\sqrt[3]{\alpha^3}=\alpha, \ldots, \sqrt[\mu]{\alpha^\mu}=\alpha$.

## Ἀσκήσεις.

1) Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον $\sqrt{25} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{-125}$.

2) Ὁμοίως τὸ α′) $\sqrt{4} + \sqrt[3]{8} - \sqrt[4]{16}$. β′) $\sqrt[3]{27} - \sqrt[5]{32} + \sqrt[3]{-64}$.

3) Ὁμοίως τῶν α′) $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3}$. β′) $\sqrt{x^4 y^4}$. γ′) $\sqrt[3]{\alpha^6} + \sqrt[3]{-8}$.

4) Εὕρετε μὲ τί ἰσοῦται τὸ $\sqrt{\alpha^4} + 3\sqrt[3]{\alpha^6} - 2\sqrt[4]{\alpha^8}$.

5) Ὁμοίως τῶν α′) $\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)$. β′) $\left(\sqrt[3]{\alpha^4}\right)^3$.

γ′) $\left(\sqrt[4]{x:y}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[4]{x:y}\right)$.

## Ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν.

**154.** ***«Ἂν εἰς τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ εἰς τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ὑπορρίζου ποσότητος ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείφωμεν αὐτόν».***

Οὕτω π. χ. εἶνε $\sqrt[3.2]{\alpha^{2\cdot5}} = \sqrt[3]{\alpha^5}$. Διότι, ἂν τὰς δύο ταύτας παραστάσεις ὑψώσωμεν εἰς τὴν 3.2 δύναμιν, εὑρίσκομεν ἴσα ἐξαγόμενα. Πράγματι ἔχομεν $\left(\sqrt[3.2]{\alpha^{2\cdot5}}\right)^{3\cdot2} = \alpha^{2\cdot5}$, καὶ $\left(\sqrt[3]{\alpha^5}\right)^{3\cdot2} = \left[\left(\sqrt[3]{\alpha^5}\right)^3\right]^2 = (\alpha^5)^2 = \alpha^{5\cdot2} = \alpha^{2\cdot5}$.

Ὁμοίως ἔχομεν ἐν γένει $\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu\varrho}} = \sqrt[\mu]{(\alpha^\varrho)^\mu} = \alpha^\varrho$.

Καὶ ἀντιστρόφως, ***«δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν»***, δεικνύεται δ' ὁμοίως.

***«Ἂν εἰς τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπάρχῃ παράγων ἔχων ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης, δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἂν ὁ ἐκθέτης αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου».***

Οὕτω π. χ. θὰ ἔχωμεν $\sqrt[3]{64.15} = \sqrt[3]{2^6.15} = 2^2.\sqrt[3]{15}$. Διότι, ἂν αἱ παραστάσεις αὗται ὑψωθοῦν εἰς τὴν τρίτην δύναμιν δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα.

Ἐν γένει ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta} = \alpha.\sqrt[\mu]{\beta}$, διότι εἶνε $\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu.\beta}\right)^\mu = \alpha^\mu.\beta$

καὶ $\left(\alpha.\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu = \alpha^\mu \left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu = \alpha^\mu \beta$.

Καὶ ἀντιστρόφως, «***παράγων τις ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς αὐτοῦ, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης***», δεικνύεται δ' ὁμοίως. Οὕτω π. χ. εἶνε

$$3.\sqrt{2} = \sqrt{3^2.2} = \sqrt{18},\ \alpha^2\sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{\alpha^{2\cdot3}\beta} = \sqrt[3]{\alpha^6\beta}.$$

«***Ἵνα ῥίζα ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἰς τὴν δύναμιν ταύτην***».

Ἔστω π. χ. ἡ $\sqrt[\mu]{\alpha}$, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν ρ δύναμιν. Θὰ εἶνε $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\rho = \sqrt[\mu]{\alpha^\rho}$. Διότι, ἂν ὑψώσωμεν εἰς τὴν μ δύναμιν τὰς δύο ταύτας παραστάσεις, λαμβάνομεν ἐξαγόμενα ἴσα. Πράγματι ἔχομεν

$$\left[\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\rho\right]^\mu = \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\rho\cdot\mu} = \left[\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu\right]^\rho = \alpha^\rho,$$

$$\text{καὶ } \left(\sqrt[\mu]{\alpha^\rho}\right)^\mu = \alpha^\rho.$$

***155. Παρατήρησις.*** Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\rho = \sqrt[\mu]{\alpha^\rho}$ δὲν εἶνε τελείως ἀκριβής. Διότι, ἂν ὁ ρ καὶ ὁ μ εἶνε ἄρτιοι (ὅτε κατ' ἀνάγκην ὁ α θὰ εἶνε θετικός διότι ἄλλως δὲν θὰ ὑπάρχῃ ῥίζα αὐτοῦ), τότε τὸ μὲν $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\rho$ θὰ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ διὰ τὰς δύο ἀντιθέτους τιμὰς τοῦ $\sqrt[\mu]{\alpha}$, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος, τὸ $\sqrt[\mu]{\alpha^\rho}$, ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους. Οὕτω π. χ. ἂν ἔχωμεν $\sqrt[4]{\alpha^6}$ καὶ $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^6$, τὸ μὲν πρῶτον ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἐνῶ τὸ δεύτερον μόνον μίαν θετικήν, ἐπειδὴ αἱ ἀντίθετοι ῥίζαι τοῦ $\sqrt[4]{\alpha}$ ὑψούμεναι εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδουν ἐξαγόμενον θετικόν (§ 153).

Διὰ τοῦτο, «***ἵνα ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἀληθεύῃ ἄνευ περιορισμοῦ, ἀρκεῖ νὰ θεωροῦμεν μόνον τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν ῥιζικῶν***».

*156. «Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν ἄλλης ρίζης ποσότητός τινος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δείκτας τῶν δύο ριζῶν καὶ νὰ ἀφήσωμεν ὡς ὑπόρριζον ποσότοτα τὴν αὐτήν».*

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν $4^{\eta\nu}$ ρίζαν τοῦ $\sqrt[3]{\alpha}$. Θὰ εἶνε $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}=\sqrt[4.3]{\alpha}$. Διότι, ἂν αἱ δύο αὗται παραστάσεις ὑψωθοῦν εἰς τὴν 4.3 δύναμιν, δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα. Πράγματι ἔχομεν

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^{4\cdot 3}=\left[\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^{4}\right]^{3}=\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^{3}=\alpha, \text{ καὶ } \left(\sqrt[4.3]{\alpha}\right)^{4\cdot 3}=\alpha.$$

*157. «Ἐὰν ἔχωμεν ρίζας μὲ διαφόρους δείκτας, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὰς εἰς ἄλλας ἴσας πρὸς αὐτὰς καὶ ἔχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην».*

Ἔστωσαν π. χ. αἱ ρίζαι $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ἑκάστης ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἑπομένως, ἐπειδὴ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δεικτῶν 2, 3, 4 τῶν ριζῶν εἶνε ὁ 12, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὰ δοθέντα ριζικὰ εἰς ἄλλα ἴσα μὲ αὐτὰ καὶ ἔχοντα δείκτην τὸν 12, ἂν τοὺς ἐκθέτας τῶν ὑπορρίζων πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6, 3, 3 (§ 154).

Οὕτω ἔχομεν ἀντὶ τῶν δοθέντων τὰ $\sqrt[12]{\alpha^6}$, $\sqrt[12]{\beta^4}$, $\sqrt[12]{\gamma^3}$.

Ἐν γένει, ἡ τροπὴ ριζικῶν εἰς ἄλλα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην γίνεται καθὼς καὶ ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Οὕτω π.χ. τὰ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta}$ τρέπονται εἰς τὰ $\sqrt[\mu.\nu]{\alpha^{\nu}}$ καὶ $\sqrt[\mu.\nu]{\beta^{\mu}}$.

Τὰ $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\varrho]{\gamma}$ εἰς τὰ $\sqrt[\mu.\nu.\varrho]{\alpha^{\nu.\varrho}}$, $\sqrt[\mu.\nu.\varrho]{\beta^{\mu.\varrho}}$, $\sqrt[\mu.\nu.\varrho]{\gamma^{\mu.\nu}}$. κ.ο.κ.

## Γινόμενον καὶ πηλίκον ριζῶν.

*158. «Τὸ γινόμενον ριζῶν, ἐχουσῶν τὸν αὐτὸν δείκτην, ἰσοῦται μὲ τὴν ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων, τὴν ἔχουσαν τὸν δείκτην τῶν παραγόντων».*

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον $\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta}.\sqrt[\mu]{\gamma}$. Τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\sqrt[\mu]{\alpha.\beta.\gamma}$. Διότι ἂν καὶ αἱ δύο αὗται παραστάσεις ὑψωθοῦν εἰς τὴν μ δύναμιν, δίδουν ἐξαγόμενα ἴσα. Ἤτοι ἔχομεν

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\beta}.\sqrt[\mu]{\gamma}\right)^\mu=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu.\left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu.\left(\sqrt[\mu]{\gamma}\right)^\mu=\alpha.\beta.\gamma,$$

καὶ $\left(\sqrt[\mu]{\alpha.\beta.\gamma}\right)^\mu=\alpha.\beta.\gamma$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{5}=\sqrt{30}$. Τὸ $\sqrt{2}.\sqrt{32}=\sqrt{64}=\pm 8$.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ριζικῶν ἐχόντων διαφόρους δείκτας, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἄλλα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα. Οὕτω θὰ ἔχωμεν π. χ.

$$\sqrt{5}.\sqrt[3]{2}.\sqrt[4]{60}=\sqrt[12]{5^6}.\sqrt[12]{2^4}.\sqrt[12]{60^3}=\sqrt[12]{5^6.2^4.60^3}.$$

***«Τὸ πηλίκον δύο δοθεισῶν ῥιζῶν, ἐχουσῶν τὸν αὐτὸν δείκτην, ἰσοῦται μὲ τὴν ῥίζαν τοῦ πηλίκου τῶν ὑπορρίζων, ἔχουσαν τὸν δείκτην τῶν δοθεισῶν».***

Ἔστω ὅτι ζητεῖται π.χ. τὸ πηλίκον $\sqrt[\mu]{\alpha}:\sqrt[\mu]{\alpha}$. Τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\sqrt[\mu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$. Ἤτοι εἶνε $\dfrac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}=\sqrt[\mu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$. Διότι ἂν καὶ τὰς δύο τελευταίας ταύτας παραστάσεις ὑψώσωμεν εἰς τὴν μ δύναμιν, εὑρίσκομεν ἴσα ἐξαγόμενα.

Πράγματι ἔχομεν $\left[\dfrac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}\right]^\mu=\dfrac{\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu}{\left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^\mu}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, καὶ $\left(\sqrt[\mu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^\mu=\dfrac{\alpha}{\beta}$,

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν π. χ. $\sqrt{32}:\sqrt{2}=\sqrt{32:2}=\sqrt{16}=\pm 4$.

Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο ῥιζῶν, ἐχουσῶν διαφόρους δείκτας, τρέπομεν αὐτὰς εἰς ἄλλας ἴσας των, ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην, καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα.

Οὕτω ἔχομεν π. χ. $\sqrt[3]{20}:\sqrt{5}=\sqrt[6]{20^2}:\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{20^2:5^3}$.

*159.* Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ῥίζης κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ῥίζης ἀκεραίας παραστάσεως ἐν γένει, ἂν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τὸν κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ παρονομαστὴς νὰ ἔχῃ ὡς ὑπόρριζον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν δείκτην τῆς ρίζης. Οὕτω ἔχομεν π. χ.

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}.\ \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ὁμοίως $\sqrt[4]{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{\sqrt[4]{10}}{2}.$

Γενικῶς, ἂν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ ριζικόν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κατάλληλον παράστασιν, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν τὴν δοθεῖσαν εἰς ἄλλην μὴ ἔχουσαν ριζικὸν εἰς τὸν παρονομαστήν. Οὕτω π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\frac{\gamma}{\alpha+\sqrt{\beta}}$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$ εὑρίσκομεν $\frac{\gamma}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{\gamma(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})}=\frac{\gamma(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}.$

Ἂν ἔχωμεν τὸ $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$, ὅτε προκύπτει τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=$$

$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$. Τοὺς ὅρους τούτου πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ $\sqrt{6}$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα πρὸς τὰ ἀνωτέρω

$$\frac{1}{12}(\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30})=\frac{1}{12}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}).$$

### *Ἀσκήσεις.*

1) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α′) $2\sqrt{54}+3\sqrt{24}-3\sqrt{6}$. β′) $2\sqrt{45\alpha^3}+\sqrt{125\alpha^3}-\sqrt{320\alpha^3}$.

2) Ὁμοίως αἱ α′) $\sqrt{\frac{11^4.5}{7^3}}+\sqrt{\frac{11^2.5^3}{7.13^2}}-\sqrt{\frac{11^2.13^2}{7.5^2}}$.

β′) $\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\gamma^2}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{1}{\beta}}$.

3) Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

α′) $x.\sqrt{x-1}$. β′) $3.\sqrt{5}$. γ′) $\alpha\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}$ δ′) $2\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$. ε′) $7\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$.

4) Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν, ἐχούσας τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην.

α′) $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$. β′) $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt[12]{\gamma}$. γ′) $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$.

5) Νὰ γίνῃ ἀναγωγὴ τῶν ριζῶν $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[6]{48}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[2\mu]{\alpha^{\mu}}$.

6) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α′) $\sqrt{5}\,.\sqrt{20}$. β′) $\sqrt[3]{4}\,.\sqrt[3]{2}$. γ′) $\sqrt[3]{5}\,.\sqrt[4]{30}$. δ′) $\sqrt[3]{\alpha^2}\,.\sqrt[5]{\alpha}$.

ε′) $\sqrt[3]{xy}\,.\sqrt{\frac{x}{y}}$. στ′) $\sqrt{2\alpha}\,.\sqrt[3]{3\beta}\,.\sqrt[4]{5\alpha\beta}$. ζ′) $\sqrt{5}\,.\sqrt{2}$.

η′) $\sqrt[4]{x}\,.\sqrt[3]{y}$. θ′) $\sqrt[3]{x}\,.\sqrt[5]{y}$.

7) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα

α′) $\sqrt{24}:\sqrt{2}$. β′) $\sqrt[3]{7000}:\sqrt[3]{875}$. γ′) $\sqrt[3]{x^4}:\sqrt[3]{x^2}$. δ′) $\sqrt[3]{6\alpha^4}.\sqrt[3]{2\alpha}$.

ε′) $\sqrt{\frac{3xy}{\omega}}:\sqrt{\frac{2x^3y}{\omega^3}}$.

8) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ α′) $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})^2$.

β′) $\left(2\sqrt[3]{x}+8\sqrt[3]{x^2}\right).\sqrt[3]{x}$. γ′) $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[4]{\alpha}\right).\sqrt{\alpha}$.

δ′) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\left(1-\sqrt[3]{3}\right)$.

9) Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἰσοδύναμα αὐτῶν μὲ ρητοὺς παρονομαστάς.

α′) $\frac{3}{\sqrt{2}}$. β′) $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$. γ′) $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}$. δ′) $\frac{4.\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$. ε′) $\frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{2}}$ στ′) $\frac{3}{\sqrt[4]{2}}$.

ζ′) $\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\alpha\sqrt[5]{\alpha}}$. η′) $\frac{\alpha}{\alpha-\sqrt{\alpha}}$. θ′) $\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

## Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

*160.* Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$, ὅπου τὸ α παριστάνει ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν. Δεχόμενοι ὅτι, ἡ ἰδιότης περὶ τοῦ γινομένου δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε κλασματικοὶ ἀριθμοὶ θὰ ἔχωμεν· $\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\alpha^1=\alpha$. Ἤτοι $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2=\alpha$ καὶ ἑπομένως τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha}$.

Κατὰ ταῦτα εἶνε $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=\pm 2$, $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=\pm 3$.

Ἂν δοθῇ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ καὶ ζητῆται νὰ ὡρίσωμεν τὴν σημασίαν αὐτοῦ, ἐνῷ εἶνε $\nu>0$ καὶ ἀκέραιος, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω,

$$\underbrace{\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\alpha^{\frac{1}{\nu}}\dots\alpha^{\frac{1}{\nu}}}_{\nu\ \text{φοράς}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\dots+\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{\nu}{\nu}}=\alpha^1=\alpha,$$

ἤτοι $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha$ καὶ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Γενικώτερον, ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐνῷ εἶνε μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Λαμβάνομεν τοῦτο ὡς παράγοντα ν φοράς, ὅτε ἔχομεν

$$\underbrace{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\dots\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}_{\nu\ \text{φοράς}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}+\dots\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}.\nu}=\alpha^{\mu},\ \text{ἤτοι}\ \left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha^{\mu},\ \text{καὶ}$$

τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ εἶνε ἡ νυοστὴ ῥίζα τοῦ $\alpha^{\mu}$, δηλαδὴ ἔχομεν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ λάβωμεν ὡς παράγοντα μ φορὰς θὰ ἔχωμεν

$$\underbrace{\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\alpha^{\frac{1}{\nu}}\dots\alpha^{\frac{1}{\nu}}}_{\mu\ \text{φοράς}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\dots+\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}.\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.$$ Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}=$ μὲ $\sqrt[\nu]{\alpha}$,

καὶ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}.\mu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τῆς δυνάμεως ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα.

***«Δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην κλάσμα, ἔχον ὅρους ἀκεραίους καὶ θετικούς, παριστάνει ἢ τὴν ρίζαν, τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπόρριζον τὸν ἀριθμὸν μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ἢ τὴν δύναμιν ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσαν δείκτην μὲν τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος, ἐκθέτην δὲ τὸν ἀριθμητὴν τούτου».***

Κατὰ ταῦτα εἶνε $\alpha^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\alpha^3}$ ἢ καὶ $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^3$. Τὸ $100^{\frac{3}{2}} =$

$\sqrt{100^3} = \sqrt{1000000} = \pm 1000$, ἢ καὶ $\left(\sqrt{100}\right)^3 = \pm 10^3 = \pm 1000$.

Τὸ $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = \pm 8$, ἢ καὶ $\left(\sqrt{4}\right)^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8$.

Παρατηρητέον ὅτι, «*ἡ ἀνωτέρω ἰσότης* $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu$ ***δὲν εἶνε τελείως ἀκριβής, ὅταν τὸ ν καὶ μ εἶνε ἄρτιοι ἀριθμοί, τὸ δὲ α θετικός, δι' ὃν λόγον εἴδομεν εἰς τὴν § 155, καὶ ἵνα ἀληθεύῃ αὕτη ἄνευ περιορισμοῦ, ἀρκεῖ νὰ θεωροῦμεν μόνον τὰς θετικὰς τιμὰς τῶν ριζῶν, ὅτε ἑκάστη τούτων θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ*** $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ***οἱωνδήποτε ὄντων τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων μ καὶ ν».***

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν δύναμιν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ὅπου τὰ μ καὶ ν εἶνε ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι, γράψωμεν δὲ ἀντὶ τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$ τὸ ἴσον αὐτοῦ π. χ. $\frac{\mu.\varrho}{\nu.\varrho}$,

θὰ ἔχωμεν, $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu.\varrho}{\nu.\varrho}}$. Ἑπομένως εἶνε κατὰ τὰ προηγούμενα,

$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu.\varrho]{\alpha^{\mu.\varrho}}$. Ἤτοι, «***δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ρίζης τινὸς καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (§ 154)»***.

Στηριζόμενοι ἐπὶ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν ρίζας, ἐχούσας διαφόρους δείκτας, εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην (§ 157), καθὼς καὶ νὰ δείξωμεν τὰς ἰδιότητας τῶν ριζῶν περὶ τῶν ὁποίων ἐκάμαμεν λόγον εἰς τὴν § 154.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Ἔχομεν (ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ γινομένου δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε καὶ ἀρνητικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί),

$\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \alpha^0 = 1$. Διαιροῦντες τὰ ἴσα μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = 1$ διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2}}$, εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{\nu}}} = \dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}}$ (ὅπου τὸ ν εἶνε θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός), καὶ γενικῶς $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$ (ἂν τὰ μ καὶ ν εἶνε θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ 0).

Ἤτοι, ***«δύναμις ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ 0) μὲ ἐκθέτην δοθὲν ἀρνητικὸν κλάσμα παριστάνει κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος»*** (παραβάλετε μὲ τὴν § 50).

Οὕτω π. χ. ἔχομεν $\alpha^{-\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{\alpha^5}}$, $4^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{64}} = \pm\dfrac{1}{8}$,

$$(-4)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{(-4)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(-4)^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-64}} = \frac{1}{-\sqrt[5]{64}} = -\frac{1}{2\sqrt[5]{2}} \;.$$

Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀριθμοὺς (θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς) ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε κλασματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ) καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

Οὕτω ἔχομεν π.χ., ἂν οἱ μ, ν, ρ, λ, εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί,

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\rho}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\rho}{\lambda}}. \qquad (1)$$

Διότι, ἂν ἑκάστη τῶν παραστάσεων τούτων ὑψώσωμεν εἰς τὴν ν. λ δύναμιν, ἔχομεν ἴσα ἐξαγόμενα. Πράγματι, ἵνα ἡ πρώτη παράστασις ὑψωθῇ εἰς τὴν ν. λ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων αὐτῆς εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ ἔχομεν

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\rho}{\lambda}}\right)^{\nu.\lambda} = \left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu.\lambda} \cdot \left(\alpha^{\frac{\rho}{\lambda}}\right)^{\nu.\lambda} = \alpha^{\mu.\lambda} \cdot \alpha^{\rho.\nu} = \alpha.^{\mu\lambda+\rho\nu} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν τὴν δευτέραν παράστασιν τῆς ἰσότητος (1) εἰς τὴν ν. λ δύναμιν, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\rho}{\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu.\lambda+\rho.\nu}{\nu.\lambda}}$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν ν. λ δύναμιν τὴν τελευταίαν παράστασιν, ὅτε ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{\mu\lambda+\rho\nu}{\nu.\lambda}}\right)^{\nu.\,\lambda}=\alpha^{\mu\lambda+\rho\nu}$ (3).

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ἐξαγόμενα (2) καὶ (3) εἶνε ἴσα, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ δύο παραστάσεις τῆς (1) εἶνε ἴσαι μὲ τὴν ν. λ ῥίζαν τοῦ $\alpha^{\mu\lambda+\rho\nu}$, ἄρα καὶ μεταξύ των ἴσαι.

## Ἀσκήσεις.

1) Τί σημαίνει α′) $\alpha^{3\frac{1}{2}}$; β′) $\alpha^{-4\frac{1}{5}}$; γ′) $\alpha^{-\frac{3}{8}}$;

δ′) $25^{-\frac{1}{2}}$; ε′) $32^{-\frac{1}{4}}$; στ′) $64^{-\frac{1}{2}}$;

2) Εὕρετε τὸ α′) $\left(3+2^{-\frac{1}{2}}\right)\left(3-2^{-\frac{1}{2}}\right)$. β′) $\left(\alpha+\beta^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha-\beta^{+\frac{1}{2}}\right)$.

γ′) $\left(4^{-\frac{1}{2}}+8^{-\frac{1}{3}}-16^{-\frac{1}{4}}\right.$. δ′) $3\alpha^{4^{-\frac{1}{2}}}+4\alpha^{-2}-5\alpha^{-\frac{3}{6}}$.

3) Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα

α′) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1-3^{-\frac{1}{2}}\right)$. β′) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2$. γ′) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\pm\beta^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

δ′) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)^2\times\left(2.3\right)^{-\frac{1}{2}}$ ε′) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}-1\right)^2$.

## Περὶ τῆς ῥίζης μονωνύμων.

*161.* Γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ ὑψωθῇ γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμίν τινα, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον μονωνύμου τινὸς εὑρίσκεται, ἂν διπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2».***

Οὕτω ἔχομεν ὅτι $\sqrt{25\alpha^4\beta^2\gamma^6}=25^{\frac{1}{2}}.\left(\alpha^4\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\gamma^6\right)^{\frac{1}{2}}=\pm5\alpha^2\beta\gamma^3$.

Ὁμοίως τὸ $\sqrt{16\alpha^2\beta^4}=\pm4\alpha\beta^2$.

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ ἐγράφη πρὸ τῶν ἐξαγομένων, ἐπειδὴ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα (καθὼς καὶ πᾶσα ἀρτίας τάξεως) ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους (§ 153). Καθ᾽ ὅμοιον τρόπον ἐξάγεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κλασματικοῦ μονωνύμου, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ῥίζα ἑκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ. Οὕτω π. χ. ἔχομεν $\sqrt{\dfrac{9\alpha^6\beta^2\gamma^4}{16\delta^2\varepsilon^4}}=\pm\dfrac{3\alpha^3\beta\gamma^2}{4\,\delta\,\varepsilon^2}$.

Ἐὰν παράγοντός τινος δὲν ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκριβῶς (δηλαδὴ ἂν ὁ ἐκθέτης του δὲν διαιρῆται διὰ 2), ἀφίνομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ σημειωμένην τὴν πρᾶξιν, ἤ, ἐὰν εἶνε δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς παράγοντας, ὥστε νὰ ἐξάγεται ἡ ῥίζα τοὐλάχιστον ἑνὸς ἐκ τούτων. Οὕτω π. χ. ἔχομεν $\sqrt{24\alpha^2\beta^3\gamma}=\sqrt{4.6.\alpha^2\beta^2.\beta\gamma}=\pm\,2\alpha\beta\sqrt{6\beta\gamma}$.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὴν κυβικὴν ῥίζαν μονωνύμων καθὼς καὶ οἱασδήποτε τάξεως ῥίζαν.

### *Ἀσκήσεις.*

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἑξῆς μονωνύμων.

α΄) $64\alpha^4\beta^2\gamma^6$. β΄) $\dfrac{4}{9}\alpha^3\beta^2\gamma$. γ΄) $\dfrac{\beta^2\gamma^3\delta^5}{4\alpha^4}$. ε΄) $\dfrac{32\alpha^3\beta^4\gamma^2}{49\delta^4\varepsilon^6}$.

στ΄) $\dfrac{125}{64}\alpha^3\beta^4\gamma^6$. ζ΄) $\dfrac{9x^2y^4}{64\alpha^4\beta^2}$. η΄) $\dfrac{3\alpha^2\beta^3\gamma\eta^6}{16\varepsilon^3\delta^4\vartheta^8}$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν ἑξῆς μονωνύμων.

α΄) $8\alpha^2\beta^6\gamma^9$. β΄) $-64\alpha^6\beta^3\gamma^9$. γ΄) $\dfrac{-8\alpha^3\beta^5\gamma^6}{125\delta^3\varepsilon^3}$. δ΄) $\dfrac{8\alpha^3\beta^6\gamma}{27\delta^9\varepsilon^4}$.

## Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

*162.* Καθὼς εἴδομεν (§ 153) οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ῥίζαν ἀρτίας τάξεως· π. χ. ὁ $-4$, ὁ $-1$ κλπ. δὲν ἔχουν τετραγωνικὴν ῥίζαν. Ἐὰν θέλωμεν λοιπὸν νὰ ἔχουν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ τετραγωνικὴν ῥίζαν, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ μίαν νέαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον δεχόμεθα ὅτι ἰσοῦται μὲ $-1$. Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς θὰ καλοῦμεν ***φανταστικοὺς ἀριθμούς,*** τοὺς δὲ μέχρι τοῦδε γνωστοὺς πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων ***πραγματικούς,*** σχηματίζονται δ᾽ οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ὡς ἑξῆς. Τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῆς ἀρνητικῆς μονάδος θὰ καλοῦμεν ***φανταστικὴν μονάδα*** (τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον θὰ ἰσοῦται μὲ $-1$), καὶ θὰ τὴν παριστάνωμεν διὰ τοῦ συμβόλου i, τὴν δὲ ἀντίθετον ταύτης διὰ τοῦ $-i$. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\sqrt{-1}=\pm i$ καὶ εἶνε $i^2=-1$. καὶ $(-i)^2=-1$. Ἐκ τῆς φανταστικῆς μονάδος ἢ μέρους αὐτῆς γίνονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ (καθὼς καὶ οἱ πραγματικοὶ θετικοὶ ἐκ τῆς $+1$). Π. χ. ἔχομεν ὅτι $2i=i+i$, $3i=i+i+i$,

$$\frac{4}{9}i=\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σχηματίζονται καὶ οἱ ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$, ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἐκ τῆς $-1$. Π. χ. εἶνε $-4\,i=(-i)+(-i)+(-i)+(-i)$.

Οὕτω ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δύναται νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ φανταστικοῦ. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $-25$ γράφεται ὡς ἑξῆς.

$$\sqrt{-25}=\sqrt{(-1).25}=\sqrt{i^2.25}=\pm i\sqrt{25}=\pm 5i.$$

Καὶ γενικῶς θὰ εἶνε $\sqrt{-\alpha^2}=\sqrt{(-1).\alpha^2}=\sqrt{i.^2\alpha^2}=\pm\alpha\, i.$

Οὕτω $\sqrt{-8}=\sqrt{(-1).8}=\sqrt{i^2.8}=\pm i\sqrt{8.}=\pm 2\,i\cdot\sqrt{2}.$

«***Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων***».
Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι $\alpha\, i.\beta=\alpha\,\beta\, i=i\,\alpha\,\beta$.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα φανταστικοῦ καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καλοῦμεν ***μιγάδα ἀριθμόν***. Οὕτω οἱ $3-5i$, $-8+4i$, $9-7i$ εἶνε ἀριθμοὶ μιγάδες. Ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ εἶνε $\alpha+\beta i$, ὅπου $\alpha$ καὶ $\beta$ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

Δύο μιγάδες ἢ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***συζυγεῖς***, ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Π.χ. οἱ $7+3i$ καὶ $7-3i$ λέγονται συζυγεῖς μιγάδες, καθὼς καὶ οἱ $-5i$ καὶ οἱ $5i$ κλπ.

## Πράξεις ἐπὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

***163.*** Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις φανταστικῶν ἀριθμῶν γίνεται καθὼς καὶ τῶν πραγματικῶν καὶ δίδει ἐν γένει φανταστικὸν ἀριθμόν. Π. χ. εἶνε $8i+5i=13i$. Ὁμοίως, $-17i-6i=-23i$, $24i-5i=19i$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμόν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιον. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$i.i=i^2=-1$, $(-i)\,(-i)=(-i)^2=i^2=-1$,

$i^3=i^2.i=-1.i=-i$, $i^4=i^2.i^2=(-1)\,(-1)=+1$.

Γενικῶς εἶνε $i^{4\nu}=(i^4)^\nu=1^\nu=1$, $i^{4\nu+1}=i^{4\nu}.i=1.i=i$,

$i^{4\nu+2}=i^{4\nu}.i^2=1.(-1)=-1$, $i^{4\nu+3}=i^{4\nu}.i^3=1(-i)=-i$,

$i^{4\nu+4}=i^{4\nu}.i^4=1.1=1$,

ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν. Ὁμοίως ἔχομεν $\alpha i.\beta i=\alpha\beta.i.i=\alpha\beta.i^2=\alpha\beta.(-1)=-\alpha\beta$.

Ἡ διαίρεσις τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ εἶνε

$$\alpha i:\beta i=\frac{\alpha i}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta},\ \alpha:\beta i=\frac{\alpha}{\beta i}=\frac{\alpha i}{\beta i.i}=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=-\frac{\alpha}{\beta}i.$$

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν δίδει ἐξαγόμενα ἐν γένει μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

1) $(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i$.

2) $(\alpha-\beta i)-(\gamma+\delta i)=\alpha-\gamma-(\beta+\delta)i$.

3) $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=\alpha\gamma-\beta\delta+(\beta\gamma+\alpha\delta)i$.

4) $(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$.

## Ἰδιότητες φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

164. *«Τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς πραγματικός».*

Οὕτω τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=\alpha+\beta i+\alpha-\beta i=2\alpha$.

Ἐὰν ζητῆται τὸ γινόμενον τῶν συζυγῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$ ἔχομεν $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\alpha\beta i-\alpha\beta i-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2$.

Ἤτοι, *«τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε πραγματικὸς ἀριθμός, καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς τούτων».*

Καλοῦμεν *μέτρον* ἑνὸς μιγάδος ἢ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ $\alpha+\beta i$, τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν (θετικῶς λαμβανομένην) τοῦ γινομένου τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ συζυγοῦς αὐτοῦ $\alpha-\beta i$. Κατὰ ταῦτα τὸ μέτρον τοῦ $\alpha+\beta i$ ἢ τοῦ $\alpha-\beta i$, εἶνε τὸ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, τοῦ $\beta i$ τὸ $\sqrt{\beta^2}$. Π. χ. τὸ μέτρον $4-3i$ εἶνε τὸ $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=+5$, τοῦ $\pm 3i=0\pm 3i$ εἶνε τὸ $\sqrt{3^2}=+3$.

Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta\, i$ καὶ $\gamma+\delta\, i$ εἶνε μεταξύ των ἴσοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta\, i=\gamma+\delta\, i$.

Ἐκ τῆς ἰσότητός ταύτης προκύπτει $(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i=0$

ἢ $(\alpha-\gamma)=-(\beta-\delta)i=(\delta-\beta)\, i$.

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα $\alpha-\gamma$ καὶ $(\delta-\beta)i$ εὑρίσκομεν, $(\alpha-\gamma)^2=(\delta-\beta)^2.i^2=(\delta-\beta)^2.(-1)=-(\delta-\beta)^2$.

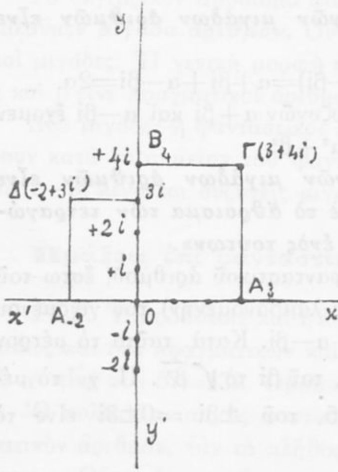
Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἶνε $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶνε ἴσα μὲ μηδέν, ἐνῶ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν ὅτι, θετικός τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι μεταξύ των, θὰ εἶνε χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη αὐτῶν»***, καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξὺ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικοὺς ἀριθμούς.

## Σημεῖα ὁριζόμενα διὰ τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

***165.*** Καθὼς οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἂν θέλωμεν, ὁρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ᾽ αὐτῶν (§ 9), οὕτω καὶ οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ὁρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ᾽ αὐτῶν ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν x′x (σχ. 9) φέρομεν τὴν κάθετον y′y διὰ τοῦ σημείου O, καὶ τὸ (ἄνω) ἄκρον τμήματος ταύτης, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἴσον μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, θὰ λέγωμεν ὅτι παριστάνει τὴν φανταστικὴν μονάδα i. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 2i, 3i,..βi, ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ O τμῆμα ἴσον μὲ 2, 3,.. β μονάδας μήκους πρὸς τὴν φορὰν Oy, καὶ τὰ ὁποῖα λέγομεν ὅτι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν φανταστικῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐὰν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν φορὰν Oy′, θὰ λέγωμεν ὅτι αὐτὰ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν —i, —2i, —3i . . . , — βi καὶ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους (σχ. 9).



(Σχ. 9)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ μιγάδος τινὸς ἀριθμοῦ, π. χ. ὑπὸ τοῦ 3+4i, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, $A_3$ ἐπὶ τῆς x′x, τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 3, τὸ $B_4$, παριστάνον τὸν 4 i ἐπὶ τῆς y′ y, καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον $OA_3B_4Γ$· τούτου δὲ ἡ τετάρτη κορυφὴ Γ εἶνε τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν 3+4i. Καθὼς βλέπομεν, τὸ σημεῖον Γ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4. Ἐν γένει, θὰ λέγωμεν ὅτι, ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, ἢ ὅτι ὁρίζει τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$.

Καλοῦμεν ***ὄρισμα*** τοῦ μιγάδος $3+4i$ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα $0x$ μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΓ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν $3+4i$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ ὅρισμα τοῦ $\alpha+\beta i$ εἶνε ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ $0x$ καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα 0Μ, ἂν τὸ Μ παριστάνῃ τὸν $\alpha+\beta i$.

*Ἀσκήσεις.*

1) Παραστήσατε διὰ σημείων τοὺς μιγάδας.

α') $2-\frac{3}{4}i$. β') $5+3i$. γ') $6-5i$. δ') $-\frac{3}{4}-\frac{5}{8}i$.

2) Εὕρετε τὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα τοὺς μιγάδας

α') $4+5i$. β') $3-4i$. γ') $-\frac{3}{4}i$. δ') $5+2i$. ε') $6-3i$,

καὶ τἀντίστοιχα ἀθροίσματα, διαφοράς, γινόμενα, πηλίκα αὐτῶν ἀνὰ δύο.

3) Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Τὴν διαφορὰν τῶν γ') καὶ δ').

4) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων, καὶ νὰ παρασταθοῦν αὐτὰ διὰ σημείων.

α') $(5+3i).(7+3i)$. β') $(8+2i).(3-4i)$. γ') $(2-7i).(9-2i)$.

δ') $(6+7i):(6-7i)$. ε') $(11-8i):(11+8i)$. στ') $(14+15i):(14-15i)$.

ζ') $(3+i\sqrt{2})\,(4-3i\sqrt{2})$. η') $(9-7i\sqrt{3}):(5+4i\sqrt{3})$.

δ') $\sqrt{\alpha+\beta i}.\sqrt{\alpha-\beta i}$. ι') $(1+i)^2$. ια') $(1-i)^2$. ιβ') $(i\pm1)^3$.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

## *Περὶ ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.*

***166.*** Ἐξίσωσίς τις ἔχουσα ἕνα ἄγνωστον, λέγεται ***δευτέρου βαθμοῦ*** ὡς πρὸς αὐτόν, ἂν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν αὐτῆς καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων προκύπτῃ ἐξίσωσις εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τοῦ ἀγνώστου εἶνε ὁ δύο. Οὕτω π.χ. αἱ ἐξισώσεις

$$3x^2-4x+6=0,\quad 7x^2+6=0,\quad \frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}-1=0$$

εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὰ ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς δύο ἀγνώστους x καὶ y. Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+2xy-3y^2+2x-5y+1=0$ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

***Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως β' βαθμοῦ*** μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν x, εἶνε ἡ

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \qquad (1)$$

ὅπου τὰ α, β, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς πραγματικοὺς ἢ παραστάσεις γνωστάς, καὶ καλοῦνται ***συντελεσταί,*** τὸ δὲ γ καὶ ***σταθερὸς ὅρος*** τῆς ἐξισώσεως (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὑποτίθεται δὲ ὅτι εἶνε $\alpha \neq 0$· διότι ἂν ἦτο $\alpha=0$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν θὰ ἦτο β' βαθμοῦ.

***Μορφαὶ τῆς ἐξισώσεως (1) β' βαθμοῦ.*** Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) οἱ συντελεσταὶ εἶνε διάφοροι τοῦ μηδενός, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ***πλήρης,*** ἐὰν δὲ εἶνε μόνον τὸ $\beta=0$, ἢ μόνον τὸ $\gamma=0$, ὅτε θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x^2+\gamma=0$, ἢ τὴν $\alpha x^2+\beta x=0$, λέγεται ***μὴ πλήρης.***

Αἱ ρίζαι ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἀκριβῶς (ἤτοι εἶνε ἀκέραιοι ἢ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ) καλοῦνται ***σύμμετροι,*** ἐνῷ αἱ εὑρισκόμεναι κατὰ προσέγγισιν (ὅτε ἰσοῦνται μὲ ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς) λέγονται ***ἀσύμμετροι.*** Αἱ σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι ρίζαι καλοῦνται μὲ ἓν ὄνομα ***πραγματικαί,*** πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς ***φανταστικάς,*** αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἔχῃ ὑπόρριζον ποσότητα ἀρνητικὴν (ὑποτιθεμένου οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί).

## Ἰδιότης τῶν ἐξισώσεων.

***167. «Ἐὰν ἐξισώσεως ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἐξίσωσις, ἔχουσα τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς».***

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A=B \qquad (1)$$

ὅπου τὰ Α καὶ Β παριστάνουν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν ταύτης ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$A^2=B^2, \qquad (2)$$

Λέγω ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$, καὶ τῆς $A=-B$. Τῷ ὄντι, πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶνε ρίζαι καὶ τῆς (2). Διότι, ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τὰς ρίζας αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ $A$=μὲ τὴν οὕτω προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ $B$. Ἄρα καὶ (ἡ τιμὴ τοῦ $A)^2$= μὲ (τὴν τιμὴν τοῦ $B)^2$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ (2) εἶνε προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$A^2-B^2=0,$$

ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτω $(A-B).(A+B)=0$.

Ἵνα αὕτη ἐπαληθεύεται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων $A-B$ καὶ $A+B$ νὰ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν. Ἐὰν μὲν εἶνε $A-B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (1), ἂν δὲ εἶνε $A+B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ $A=-B$. Ἄρα ἡ $A^2=B^2$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

## Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\gamma=0$.

*168.* Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5x^2-48=2x^2$. (1)

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3x^2=48$. Διαιροῦμεν διὰ 3 τὰ δύο ἴσα, ὅτε προκύπτει $x^2=16$. Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν δύο ἴσων, ὅτε ἔχομεν καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 167) ὅτι $x=\pm 4$. Δηλαδὴ αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶνε αἱ 4 καὶ $-4$.

Ἐν γένει, πρὸς λύσιν τῆς μὴ πλήρους ἐξισώσεως $\alpha x^2+\gamma=0$ (ἐνῶ εἶνε $\alpha\neq 0$), μεταφέρομεν τὸ $\gamma$ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε προκύπτει $\alpha x^2=-\gamma$. Διαιροῦμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha$ καὶ ἔχομεν $x^2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$, ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν δύο ἴσων μελῶν ἔχομεν,

$$x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Ἐὰν τὸ $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, αἱ ρίζαι θὰ εἶνε πραγματικαί, ἂν δὲ ἀρνητικός, αἱ ρίζαι θὰ εἶνε φανταστικοὶ ἀριθμοὶ συζυγεῖς. Δηλαδή, ἂν τὰς δύο ρίζας τῆς ἐξισώσεως παραστήσωμεν διὰ τῶν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$, θὰ εἶνε, $\varrho_1=\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\alpha}}$, $\varrho_2=-\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $x=\pm\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\alpha}}=\pm\sqrt{(-1).\dfrac{\gamma}{\alpha}}$

$$=\pm\sqrt{i^2\,\frac{\gamma}{\alpha}},$$

ἤτοι $\qquad \varrho_1=i\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}},\ \varrho_2=-i\sqrt{\dfrac{\gamma}{\alpha}}.$

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x^2+25=0$.

Μεταφέρομεν τὸ 25 εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε ἔχομεν $5x^2=-25$. Διαιροῦμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ 5, ὅτε ἔχομεν $x^2=-5$. Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν ἴσων τούτων ἔχομεν,

$$x=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{(-1).5}=\pm\sqrt{i^2.\,5},\quad \text{καὶ}\quad x=\pm i\sqrt{5},$$

ἢ $\qquad \varrho_1=i\sqrt{5}, \qquad \varrho_2=-i\sqrt{5}.$

## Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α΄) $4x^2-3=x^2+6$. β΄) $5x^2+6=6x^2+2$.

γ΄) $9x^2-\dfrac{1}{5}=3x^2+15$. δ΄) $\dfrac{x^2-9}{3}=\dfrac{x^2-1}{2}$.

ε΄) $\dfrac{3x^2-5}{6}+\dfrac{x^2+2}{3}=7$. στ΄) $\dfrac{6}{7x^2}-\dfrac{4}{9x^2}=\dfrac{4}{25}$.

ζ΄) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{3}$. η΄) $\alpha x^2+\beta=\gamma$.

θ΄) $\alpha x^2+\beta-\beta x^2+\alpha$. ι΄) $x^2+5\lambda x+\mu=\lambda(5x+1)$.

## Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x=0$.

***169.*** Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\qquad 3x^2+5x=0$.

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $\qquad x(3x+5)=0$.

Τὸ γινόμενον $x.(3x+5)$ γίνεται μηδὲν ὅταν εἶνε ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ ἴσος μὲ μηδέν. Δηλαδὴ ὅταν εἶνε $x=0$, καὶ ὅταν $3x+5=0$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x=-\dfrac{5}{3}$. Ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε 0 καὶ $-\dfrac{5}{3}$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x=0$ (ἐνῷ εἶνε $\alpha\neq 0$). Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $x.(\alpha x+\beta)=0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, ὅτι αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης εἶνε αἱ 0 καὶ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

## Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α΄) $6x^2-8x+7x^2=12x^2-8x$. β΄) $\dfrac{3}{4}x^2=7\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{3}$.

γ') $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{x}{\beta}=\frac{x^2+\alpha x}{\alpha\beta}$. δ') $\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{x^2}{\alpha+\beta}=\frac{x^2-x}{\alpha-\beta}$.

## Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

*170.* Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (ἐνῶ εἶνε $\alpha\neq 0$), μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $\alpha x^2+\beta x=-\gamma$.

Προσπαθοῦμεν τώρα νὰ καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τὸ πρῶτον μέλος ταύτης. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὸ τετράγωνον τοῦ β. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$, ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη γράφεται καὶ οὕτω

$$(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τῶν μελῶν ταύτης ἔχομεν

$$2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}.$$

Ἐκ ταύτης δ' εὑρίσκομεν, ἂν μεταφέρωμεν τὸ β εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ 2α, $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Ἤτοι ἂν καλέσωμεν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\quad \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τούτους, εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας οἱασδήποτε τῶν μορφῶν ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ.

Ἔστω π.χ. ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2-5x+2=0$.

Εἶνε τὸ $\alpha=3$, τὸ $\beta=-5$, τὸ $\gamma=2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους τὰς τιμὰς ταύτας εὑρίσκομεν,

$\varrho_1=\frac{5+\sqrt{25-24}}{2.3=6}$, $\varrho_2=\frac{5-\sqrt{25-24}}{6}$. Ἤτοι $\varrho_1=1$ καὶ $\varrho_2=\frac{2}{3}$.

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $4x^2+25=0$.

Ἔχομεν $\alpha=4$, $\beta=0$, $\gamma=25$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους εὑρίσκομεν, $\varrho_1=\frac{\sqrt{-4.4.25}}{2.4}$, $\varrho_2=-\frac{\sqrt{-4.4.25}}{2.4}$

ἢ $\varrho_1=\frac{+4.5.i}{2.4}=\frac{5}{2}i$, $\varrho_2=-\frac{5}{2}i$.

## Ἀσκήσεις.

*Ὁμὰς πρώτη.* Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις.

1) $3x^2-3x=8$. 2) $3x^2-\frac{2}{3}x=25$. 3) $x^2-\frac{3}{4}x=3x+1$.

4) $\frac{7x}{5}-\frac{5}{3x}=\frac{2}{3}$. 5) $\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x}=2$.

6) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}$. 7) $(x+2)(2x+1)+(x-1)(3x+2)=57$.

8) $\frac{x-5}{x+3}+\frac{x-8}{x-3}=\frac{80}{x^2-9}+\frac{1}{2}$. 9) $\frac{2x+1}{7-x}+\frac{4x+1}{7+x}=\frac{45}{49-x^2}+1$.

10) $\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{1-x}{x+2}=\frac{2}{5(x-2)}$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* Ὁμοίως τὰς ἐξισώσεις.

1) $x^2+2\alpha x=3\alpha^2$. 2) $2\alpha^2x^2+\alpha x-1=0$.

3) $\frac{2x^2}{3}+\frac{\alpha x}{4}=11\alpha(x-3\alpha)$. 4) $\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{2\alpha}=\frac{3}{2\alpha^2}$.

5) $\frac{2\alpha+x}{2\alpha-x}+\frac{\alpha-2x}{\alpha+2x}=\frac{8}{3}$. 6) $\frac{x+\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\beta-\alpha}{x+\alpha}=2$. 7) $\frac{1}{\alpha+\beta+x}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}$. 8) $\lambda x^2-1=\frac{x(\lambda^2-\mu)^2}{\lambda\mu}$. 9) $\frac{x^2}{3\lambda-2\alpha}-\frac{\lambda^2-4\alpha^2}{4\alpha-6\lambda}=\frac{x}{2}$. 10) $\frac{x+3\beta}{8\alpha^2-12\alpha\beta}-\frac{3\beta}{9\beta^2-4\alpha^2}-\frac{\alpha+3\beta}{(2\alpha+3\beta)(x-3\beta)}=0$.

*Ὁμὰς τρίτη.* 1) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ $x^2$ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ εἶνε τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $x^2$.

Οὕτω διὰ τὴν ἐξίσωσιν $4x^2-23x=-30$, προσθέτομεν τὸ $\left(\frac{23}{4}\right)^2$ καὶ ἔχομεν $4x^2-23x+\left(\frac{23}{4}\right)^2=\frac{529}{16}-30=\frac{49}{16}$. Ἐξ οὗ ἔχομεν $\left(2x-\frac{23}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$, καὶ $2x-\frac{23}{4}=\frac{7}{4}$ καὶ $2x-\frac{23}{4}=-\frac{7}{4}$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο ῥίζας $x=3\frac{3}{4}$ καὶ $x=2$.

2) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ $x^2$ δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ

συντελεστὴς τοῦ $x^2$ νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον, καὶ ἀκολούθως προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω. Ἐὰν π. χ. ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=-2$, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἐπὶ $-3$, καὶ ἔχομεν $9x^2-15x=6$, τὴν ὁποίαν λύομεν καὶ κατὰ τἀνωτέρω.

3) Ἐνίοτε λύομεν ἐξίσωσιν β′ βαθμοῦ δι' ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου αὐτῆς εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^2+7x-60=0$. Ἐπειδὴ τὸ $x^2+7x-60=(x+12)(x-5)$, (§ 101, ζ), ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται καὶ οὕτω $(x+12)(x-5)=0$.

Ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων $x+12$ καὶ $x-5$ εἶνε ἴσος μὲ μηδέν, τὸ γινόμενον γίνεται μηδέν, καὶ ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ἑπομένως, ἂν θέσωμεν καθένα τούτων ἴσον μὲ μηδέν, θὰ ἔχωμεν $x+12=0$ καὶ $x-5=0$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς δύο ρίζας $x=-12$ καὶ $x=5$.

4) Διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3-x^2-6x=0$, γράφομεν $x(x^2-x-6)=0$, ἢ $x(x-3)(x+2)=0$. Αὐτὴ ἐπαληθεύεται ὅταν εἶνε $x=0, x=3, x=-2$. Ἤτοι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε $0 \cdot 3 \cdot -2$.

5) Νὰ λυθοῦν διὰ τῆς ἀνωτέρω μεθόδου καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α′) $x^3-8=0$. β′) $x^3+8=0$. γ′) $x^4-16=0$. δ′) $(3x^3+2x^2).(3x+2)=0$. ε′) $x^3+x^2-4(x+1)=0$. στ′) $x^3-27-13(x-3)=0$. ζ′) $x^2-4x-5=0$, η′) $5x^2-16x+11=0$. θ′) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$. ι′) $(x-3)x.(\alpha.x-1)(\beta x-1)=0$.

## Περὶ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

***171.*** Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν, ὡς εἴδομεν (§ 170)

$$\varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε θετικόν, αἱ ρίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, διότι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ποσότητος θετικῆς δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν καὶ εἶνε διπλῆ (θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ κατὰ τὰ εἰς τὴν § 153).

Ἐπὶ πλέον ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε τέλειον τετράγωνον, αἱ ρίζαι εἶνε σύμμετροι, ἄλλως ἀσύμμετροι.

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε ἴσον μὲ μηδέν, αἱ δύο ρίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$.

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε ἀρνητικόν, αἱ ρίζαι εἶνε μιγάδες ἐν γένει, ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τοῦ ἀρνητικοῦ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε φανταστικαὶ συζυγεῖς, εἶνε δὲ αὗται, ἐπειδὴ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ γράφεται καὶ οὕτω $-(4\alpha\gamma-\beta^2)=$ μὲ $i^2(4\alpha\gamma-\beta^2)$

αἱ $\varrho_1=\frac{-\beta+i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$, $\varrho_2=\frac{-\beta-i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

***Εἶδος τῶν ριζῶν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ τῆς ἐξισώσεως*** $\alpha x^2+\beta x^2+\gamma=0$.

1) ***Ἐὰν εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ $\varrho_1$, $\varrho_2$ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (σύμμετροι μὲν ἂν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma=$τέλειον τετράγωνον, ἄλλως ἀσύμμετροι).***

2) ***Ἐὰν εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ $\varrho_1$, $\varrho_2$ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.***

3) ***Ἐὰν εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ $\varrho_1$, $\varrho_2$ εἶνε μιγάδες ἢ φανταστικαὶ συζυγεῖς.***

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2-5x+6=0$.

Εἶνε $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=6$ $\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1$.

Ἑπομένως αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαὶ ἄνισοι καὶ σύμμετροι.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2-12x+12=0$.

Εἶνε $\alpha=3$, $\beta=-12$, $\gamma=12$, $\beta^2-4\alpha\gamma=144-144=0$.

Ἄρα αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-3x+4=0$

εἶνε $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=4$, $\beta^2-4\alpha\gamma=9-32=-23$.

Ἄρα αἱ ρίζαι ταύτης εἶνε μιγάδες συζυγεῖς.

### *Ἀσκήσεις.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν.

1) $x^2+5x-15=0$. 2) $x^2-5x+15=0$. 3) $x^2+3x+9=0$.

4) $6x^2-x+7=0$. 5) $9x^2+x-33=0$. 6) $5x^2+8x+\frac{16}{5}=0$.

*Ὁμὰς δευτέρα.* 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις $2\mu x^2+(5\mu+2)x+(4\mu+1)=0$ ἔχει ῥίζας ἴσας.

Εἶνε $\alpha=2\mu$, $\beta=5\mu+2$, $\gamma=4\mu+1$. Διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι ἴσαι, πρέπει νὰ ἔχωμεν $(5\mu+2)^2-8\mu(4\mu+1)=0$. Ἐὰν λύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς μ, εὑρίσκομεν $\mu=2$ καὶ $\mu=-\frac{2}{7}$.

2) Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις.

1) $(\mu+1)x^2+3(\mu-1)x+\mu+1=0$. 2) $(2\mu-3)x^2+\mu x+\mu-1=0$. 3) $2\mu x^2+3\mu x-6=3x-2\mu-x^2$. 4) $\mu x^2+9x-10=3\mu x-2x^2+2\mu$.

## Σχέσεις μεταξὺ συντελεστῶν καὶ ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

*172.* Ἐκ τοῦ τύπου (§ 170) τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ καὶ } \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \qquad (1)$$

Ἐὰν τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ τὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\varrho_1+\varrho_2=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἐὰν τὰς ἰσότητας (1) πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τὰ μέλη, ἔχομεν

$$\varrho_1.\varrho_2=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}.$$

Εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν $(-\beta)$ καὶ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$.

Τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ μὲ

$$\beta^2-(\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma})^2=\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)=4\alpha\gamma.$$

Ἐπομένως ἔχομεν $\varrho_1.\varrho_2=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Ἐὰν τὰς ἰσότητας (1) ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\varrho_1-\varrho_2=\frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

| |
|---|
| ***Ἂν $\varrho_1$, $\varrho_2$ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ***θὰ εἶνε*** 1) $\varrho_1+\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, 2) $\varrho_1 . \varrho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ 3) $\varrho_1-\varrho_2=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}$ |

Ἂν ζητῆται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $\varrho_1^2+\varrho_2^2$ τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ τὰ $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ εἶνε αἱ ῥίζαι αὐτῆς, ἐπαληθεύουν αὗται τὴν ἐξίσωσιν· ἤτοι θὰ εἶνε

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\varrho_1^2+\beta\varrho_1+\gamma=0\\ \text{καὶ}\quad \alpha\varrho_2^2+\beta\varrho_2+\gamma=0.\end{array}\right\} \quad (2)$$

Ἐὰν ταύτας προσθέσωμεν κατὰ τὰ μέλη εὑρίσκομεν

$\alpha\,(\varrho_1^2+\varrho_2^2)+\beta\,(\varrho_1+\varrho_2)+2\,\gamma=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$\varrho_1^2+\varrho_2^2=-\frac{\beta\,(\varrho_1+\varrho_2)+2\gamma}{\alpha}$. Ἂν δὲ ἀντὶ τοῦ $\varrho_1+\varrho_2$ θέσωμεν τὸ ἴσον αὐτοῦ $\frac{-\beta}{\alpha}$, εὑρίσκομεν $\varrho_1^2+\varrho_2^2=\frac{\beta^2-2\,\alpha\gamma}{\alpha^2}$.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ $\varrho_1^3+\varrho_2^3$ πολλαπλασιάζομεν τὰς (2) ἐπὶ $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ ἀντιστοίχως, προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη, καὶ ἀκολούθως λύομεν τὴν προκύπτουσαν ἰσότητα ὡς πρὸς $\varrho_1^3+\varrho_2^3$, ἀφοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\varrho_1^2+\varrho_2^2$ καὶ τὸ $\varrho_1+\varrho_2$ διὰ τῶν ἴσων αὐτῶν, τὰ ὁποῖα εὑρήκαμεν ἀνωτέρω.

### *Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.*

1) Εὕρετε τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, τὴν διαφοράν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν ῥιζῶν τῆς $x^2+\pi x+k=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὐτη.

2) Προσδιορίσατε τὸν λ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(\lambda-2)x-(\lambda+3)=0$ νὰ εἶνε ἴσον μὲ δοθέντα ἀριθμὸν μ. $\lambda=1\pm\sqrt{\mu-9}$.

3) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β καὶ γ, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχουν λόγον λ; $\frac{\beta^2}{\gamma}=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda}$.

4) Εὕρεται σχέσιν μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶνε ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν. $\dfrac{(\mu+\nu)^2}{\mu\nu}=\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}$.

5) Προσδιορίσατε τὰ β καὶ γ, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ νὰ εἶνε 4, τῶν δὲ κύβων των 208.
$\beta=\pm 8, \gamma=12$.

6) Προσδιορίσατε τὸ ν, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\alpha-\beta)^2x^2+2(\alpha^2-\beta)x+\nu=0$ νὰ εἶνε ἴσαι (ἢ ἀντίστροφοι). $(\alpha\pm\beta)^2$.

7) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2-10x+\gamma=0$ νὰ εἶνε μιγαδικαί, $\gamma>\dfrac{25}{3}$.

8) Προσδιορίσατε τὸ γ εἰς τρόπον ὥστε αἱ ρίζαι $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ τῆς ἐξισώσεως $x^2-8x+\gamma=0$ νὰ πληροῦν τὰς ἑξῆς σχέσεις.

α΄) $\rho_1=\rho_2$. β΄) $\rho_1=3\rho_2$. γ΄) $\rho_1\rho_2=\pm 1$. δ΄) $3\rho_1=4\rho_2+3$.
ε΄) $\rho_1^2+\rho_2^2=40$. $16 \cdot 12 \cdot \pm 1 \cdot 15 \cdot 12$.

## Πῶς εὑρίσκομεν δύο ἀριθμούς, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν.

*173.* Ἔστω β τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα καὶ γ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν. Ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

Ἂν καλέσωμεν $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $\rho_1+\rho_2=\beta$, $\rho_1.\rho_2=\gamma$. Ἑπομένως τὰ $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ θὰ εἶνε αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, ὡς πρὸς x π. χ., τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς τοῦ $x^2$ εἶνε ἡ μονάς, τοῦ x τὸ —β, ὁ δὲ σταθερὸς ὅρος εἶνε τὸ γ. Δηλαδὴ τῆς ἐξισώσεως $x^2-\beta x+\gamma=0$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς.

Κατὰ ταῦτα, ἂν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε τὸ —4 καὶ τὸ γινόμενον —45, οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+4x-45=0$, ἤτοι οἱ $\rho_1=-9$ καὶ $\rho_2=5$.

### Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα μὲν $18 \cdot 14 \cdot 5 \cdot -10 \cdot 5$, γινόμενον δὲ $45 \cdot 49 \cdot -12 \cdot 22 \cdot 6$ ἀντιστοίχως.

## Περὶ τοῦ σημείου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

*174.* Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ποῖον εἶνε τὸ σημεῖον καθεμιᾶς τῶν ριζῶν αὐτῆς, ἂν εἶνε πραγματικαί, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἶνε $\rho_1 . \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ ἔπεται ὅτι ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

*Σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως* $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

1) ***Ἂν εἶνε*** $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, ***αἱ ρίζαι εἶνε ὁμόσημοι· θετικαὶ μέν, ἂν εἶνε καὶ*** $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ***ἀρνητικαὶ δέ, ἂν εἶνε καὶ*** $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

2) ***Ἂν εἶνε*** $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, ***αἱ ρίζαι εἶνε ἑτερόσημοι· ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετικὴ μέν, ἂν εἶνε καὶ*** $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ***ἡ ἀρνητικὴ δέ, ἂν εἶνε καὶ*** $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

3) ***Ἂν εἶνε*** $\frac{\gamma}{\alpha} = 0$, ***ἡ μία ρίζα εἶνε ἴση μὲ μηδέν, ἡ δὲ ἄλλη μὲ*** $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2 + 8x + 12 = 0$. Ἔχομεν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 64 - 48 = 16 =$ θετικός. Ἄρα αἱ ρίζαι $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ εἶνε ὁμόσημοι· τὸ $\rho_1 + \rho_2 = -8$, ἑπομένως καὶ αἱ δύο εἶνε ἀρνητικαί.

### *Ἀσκήσεις.*

Εὕρετε τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται.

α΄) $x^2 - 8x + 12 = 0$. β΄) $6x^2 - 15x - 50 = 0$. γ΄) $7x^2 - 14x - 1 = 0$. δ΄) $5x^2 - 6x - 12 = 0$. ε΄) $3x^2 + 12x + 4 = 0$. στ΄) $5x^2 - 15x - 1 = 0$. ζ΄) $7x^2 - 5x - 1 = 0$. η΄) $x^2 - 3x + 4 = 0$.

## Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς $x$.

*175.* Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Ζητεῖται νὰ τραπῇ τοῦνο εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἄς ὑποτεθῇ ὅτι ἐλύθη ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ ἔστωσαν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ αἱ ῥίζαι αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ ῥίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου. Γνωρίζομεν ὅτι θὰ εἶνε (§ 172).

$$\varrho_1+\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad (1), \qquad \varrho_1.\varrho_2=\frac{\gamma}{\alpha} \quad (2)$$

Ὑποθέτοντες ὅτι τὸ $\alpha$ εἶδε διάφορον τοῦ μηδενός, γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-(\varrho_1+\varrho_2)$ ἐκ τῆς (1), τὸ δὲ $\frac{\gamma}{\alpha}$ διὰ τοῦ $\varrho_1.\varrho_2$ ἐκ τῆς (2), εὑρίσκομεν ὅτι

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &=\alpha[x^2-(\varrho_1+\varrho_2)x+\varrho_1.\varrho_2]\\ &=\alpha[x^2-\varrho_1x-\varrho_2x+\varrho_1\varrho_2]\\ &=\alpha[(x-\varrho_1).x-\varrho_2(x-\varrho_1)]\\ &=\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2).\end{aligned}$$

Ἤτοι τὸ $\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha.(x-\varrho_1).(x-\varrho_2).$

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

***1)*** *Ἂν αἱ ῥίζαι $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, θὰ ἔχωμεν* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$.

***2)*** *Ἂν εἶνε* $\varrho_1=\varrho_2$, *θὰ ἔχωμεν* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)^2$.

***3)*** *Ἂν εἶνε* $\varrho_1=\gamma+\delta i$, $\varrho_2=\gamma-\delta i$ *(μιγάδες συζυγεῖς), θὰ ἔχωμεν* $(x-\varrho_1)=(x-\gamma)-\delta i$, $x-\varrho_2=(x-\gamma)+\delta i$, *καὶ* $(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)=[(x-\gamma)-\delta i][(x-\gamma)+\delta i]=(x-\gamma)^2+\delta^2$.

*Ἄρα* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[(x-\gamma)^2+\delta^2)]$.

Ἤτοι, ***«τὸ τριώνυμον*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***τρέπεται εἰς γινόμενον μὲν τοῦ α ἐπὶ δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς*** $x$, ***ἂν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ***εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι· εἰς γινόμενον δὲ τοῦ α ἐπὶ ἓν τέλειον τετράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἂν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε ἴσαι, ἢ μιγάδες συζυγεῖς».***

Π.χ. διὰ τὸ $2x^2-3x-2$, τοῦ ὁποίου αἱ ῥίζαι εἶνε $+2$ καὶ $-\frac{1}{2}$

ἔχομεν $2x^2-3x-2=2(x-2).\left(x+\frac{1}{2}\right).$

Διὰ τὸ $2x^2-12x+18$, τοῦ ὁποίου αἱ ρίζαι εἶνε ἴσαι μὲ 3, ἔχομεν $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$.

## Πῶς εὑρίσκομεν τριώνυμον β' βαθμοῦ ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.

*176.* Ὅταν δοθοῦν αἱ ρίζαι $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ ἑνὸς τριωνύμου β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $(x-\rho_1).(x-\rho_2)=x^2-(\rho_1+\rho_2).x+\rho_1.\rho_2$ πολλαπλασιασμένον τὸ πολὺ ἐπὶ παράγοντά τινα σταθερόν.

Ἤτοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τριώνυμον τοῦτο (παραλειπομένου τοῦ σταθεροῦ παράγοντος) ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.

Π.χ. τὸ τριώνυμον, τὸ ἔχον ρίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶνε ἴσον μὲ

$$(x-3).\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-3).\left(\frac{2x-1}{2}\right)=\frac{2x^2-7x+3}{2},$$

τὰ δὲ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-7x+3=0$.

### Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα.

1) $x^2-9x+18$. 2) $x^2+4x+3$. 3) $2x^2+3x-2$.

4) $2x^2+12x+18$. 5) $x^2-4x-5$. 6) $x^2-5x+6$.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα.

1) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. 2) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$. 3) $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$.

4) $\frac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12}$. 5) $\frac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$. 6) $\frac{x^2-9x+18}{2x^2-12x+18}$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** Εὕρετε ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους, ἔχουσαν ρίζας

1) 3, $\frac{1}{2}$. 2) $3+\sqrt{2}$ καὶ $3-\sqrt{2}$. 3) $4+\frac{2}{\sqrt{5}}$ καὶ $4-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

4) $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$. 5) $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha-\sqrt{\beta}$. 6) $\alpha+i\sqrt{\beta}$, $\alpha-i\sqrt{\beta}$.

7) $\alpha+\beta$, $\frac{1}{\alpha+\beta}$. 8) $2\alpha+\beta$, $2\alpha-\beta$. 9) $\alpha+\sqrt{\alpha}$, $\alpha-\sqrt{\alpha}$.

## Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

*177.* Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, καὶ ὅτι τὸ x λαμβάνει πραγματικὰς τιμάς.

Ἂν αἱ ρίζαι αὐτοῦ $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω δὲ ὅτι εἶνε καὶ $\rho_1<\rho_2$) θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\rho_1).\,(x-\rho_2)$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε μικρότεραι τοῦ $\rho_1$, ἐπομένως καὶ τοῦ $\rho_2$. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ καὶ $(x-\rho_2)$ εἶνε ἀρνητικά, τὸ δὲ $(x-\rho_1).\,(x-\rho_2)$ ὡς γινόμενον ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε θετικόν, καὶ τὸ $\alpha\,(x-\rho_1)\,(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε μεγαλύτεραι τοῦ $\rho_2$, ἐπομένως καὶ τοῦ $\rho_1$. Τότε τὸ $(x-\rho_1)$ καὶ $(x-\rho_2)$ εἶνε θετικά· ἐπίσης καὶ τὸ $(x-\rho_1)\,(x-\rho_2)$ εἶνε θετικόν· τὸ δὲ $\alpha\,(x-\rho_1).\,(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε μεγαλύτεραι τοῦ $\rho_1$, ἀλλὰ μικρότεραι τοῦ $\rho_2$. Δηλαδή, ἔστω ὅτι αὗται κεῖνται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Τότε τὸ μὲν $(x-\rho_1)$ εἶνε θετικόν, τὸ δὲ $(x-\rho_2)$ ἀρνητικόν· τὸ $(x-\rho_1).\,(x-\rho_2)$ εἶνε ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμων παραγόντων· ἄρα τὸ $\alpha\,(x-\rho_1).\,(x-\rho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

Ἂν αἱ ρίζαι $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ εἶνε ἴσαι ἢ μιγάδες ἐν γένει, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x πραγματικὴν καὶ διάφορον τῶν ριζῶν, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α. Διότι ἂν μὲν εἶνε $\rho_1=\rho_2$, τὸ $\alpha\, x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\rho_1)^2$. Ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α. Ἂν δὲ αἱ ρίζαι εἶνε μιγάδες ἐν γένει, τὸ $\alpha\, x^2+\beta\, x+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων (§ 175), ἐπομένως ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

***«ὅταν τὸ x ἔχῃ τιμὴν πραγματικήν, κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α, ἐνῷ διὰ τιμὴν τοῦ x κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α».***

### *Ἀσκήσεις.*

*Ὁμὰς πρώτη.* Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικάς; ἀρνητικάς; μηδέν;

1) $2x^2-16\,x+24$. 2) $-2\,x^2+16\,x-24$. 3) $2\,x^2-16x+32$.
4) $-2x^2+16x-32$. 5) $2x^2-16\,x+40$. 6) $-2x^2+16\,x-40$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Δοθέντος ἀριθμοῦ πραγματικοῦ λ, νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν (πραγματικῶν) ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν διὰ $x=\lambda$ τὸ $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α, τὸ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$. Μένει νὰ εὕρωμεν, ἂν εἶνε μικρότερον τῆς μικροτέρας $\varrho_1$ ἢ μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας $\varrho_2$. Ἂν εἶνε $\lambda<\varrho_1$, θὰ εἶνε $\lambda<\dfrac{\varrho_1+\varrho_2}{2}$, ἢ $\lambda<-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Ἂν εἶνε $\lambda>\varrho_2$, θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\dfrac{\varrho_1+\varrho_2}{2}$, ἢ $\lambda>-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Ἀντιστρόφως, ἀποδείξατε διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι, ἂν εἶνε $\lambda<-\dfrac{\beta}{2\alpha}$, τότε εἶνε $\lambda<\varrho_1$, καὶ ἂν εἶνε $\lambda>-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\varrho_2$. Ἐκ τούτων ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας, καθόσον εἶνε $\lambda \gtrless -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

2) Τὶς ἡ θέσις τῶν $1, \dfrac{3}{4}, 5, -1$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

α′) $x^2+3x-2=0$. β′) $2x^2+7x-1=0$. γ′) $x^2-4x+3=0$.

3) ***Εὕρεσις τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ κατὰ προσέγγισιν.*** Ἐὰν διὰ $x=\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ ($\lambda_1$, $\lambda_2$ εἶνε ἀριθμοὶ πραγματικοί) τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους, μεταξὺ τῶν $\lambda_1$, $\lambda_2$ περιέχεται μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (ἐχούσης ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους).

Διότι τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$, ἂν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ εἶνε αἱ ρίζαι.

Διὰ $x=\lambda_1$ γίνεται $\alpha(\lambda_1-\varrho_1)(\lambda_1-\varrho_2)$.

Διὰ $x=\lambda_2$ γίνεται $\alpha(\lambda_2-\varrho_1)(\lambda_2-\varrho_2)$. Ἂν λοιπὸν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἑτερόσημα, τὸ πηλίκον των $\dfrac{(\lambda_1-\varrho_1)(\lambda_1-\varrho_2)}{(\lambda_2-\varrho_1)(\lambda_2-\varrho_2)}$ εἶνε ἀρνητικόν. Ἂν ὁ παράγων $\dfrac{\lambda_1-\varrho_1}{\lambda_2-\varrho_1}$ εἶνε $<0$, ἔστω $\lambda_1-\varrho_1>0$, $\lambda_2-\varrho_1<0$, τότε $\lambda_1>\varrho_1$, $\lambda_2<\varrho_1$. Δηλαδὴ $\lambda_1>\varrho_1>\lambda_2$. Ἤτοι ἡ ρίζα $\varrho_1$ περιέχεται μεταξὺ τῶν $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς (πραγματικὰς) ρίζας ἐξισώσεως κατὰ προσέγγισιν. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2-2x-3=0$. Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x δύο ἀριθμούς, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2-2x-3$ νὰ εἶνε ἑτερόσημα.

Διὰ $x=0$ εὑρίσκομεν $-3$, διὰ $x=1$ ἔχομεν $+3$· ἐπομένως μεταξὺ 0 καὶ 1 περιέχεται μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξὺ 0 καὶ 1· δηλαδὴ θέτομεν $x=0,5$ ὅτε εὑρίσκομεν $2-4=-2$· ἐπομένως ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ τοῦ 1.

Ἡ μέση τιμὴ μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ 1 εἶνε 0,75. Θέτομεν λοιπὸν $x=0,75$ καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 0. Ἄρα 0,75 εἶνε ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Διὰ $x=-1$ ἔχομεν $8+2-3=7$. Ἄρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ $-1$. Προσεγγίσατε περισσότερον, ἢ εὕρετε αὐτήν.

## Λύσεις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ.

*178.* Καλοῦμεν ἀνισότητα β′ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον τὴν ἀνισότητα, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ μεγαλύτερος ἐκθέτης τοῦ ἀγνώστου αὐτῆς εἶνε ὁ 2. Οὕτω π. χ. ἡ $3x^2-7x+6>0$, καὶ ἡ $-3x^2+7x-2>0$ λέγονται ἀνισότητες β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον (τὸν ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι ἔχει) εἶνε ἐν γένει τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0, \quad \text{ἢ} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0,$$

μετὰ τὴν ἀπάλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων. Ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων, ὅτε ἡ ἀνισότης ἀλλάσσει διεύθυνσιν. Ὥστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0,$$

ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Λύσις τῆς ἀνισότητος $\qquad \alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \qquad (1)$

λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶνε θετικόν, καὶ λέγομεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τούτων, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου τῆς (1) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι ($\rho_1<\rho_2$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1).(x-\rho_2)$. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶνε θετικόν.

Ἂν τὸ α εἶνε θετικόν, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον γίνεται θετικὸν διὰ $x<\rho_1$ καὶ $x>\rho_2$ (§ 177). Ὥστε, ἂν εἶνε τὸ $\alpha>0$, αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα, εἶνε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης $\rho_1$ καὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας $\rho_2$ τοῦ ἀνωτέρω τριωνύμου.

Ἂν εἶνε $\alpha<0$, τότε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$, τὸ γινόμενον $\alpha\,(x-\varrho_1)\,(x-\varrho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδὴ θετικόν (§ 177). Ἑπομένως, ἂν εἶνε $\alpha<0$, αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα (1), εἶνε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$.

Ἂν αἱ ῥίζαι $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ εἶνε ἴσαι, καὶ εἶνε τὸ $\alpha>0$, τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, διάφορον τῆς ῥίζης τοῦ τριωνύμου, τὸ γινόμενον $\alpha\,(x-\varrho_1)^2$, εἶνε θετικόν. Δηλαδὴ τότε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἐκτὸς τῆς $\varrho_1$ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα· ἂν εἶνε τὸ $\alpha<0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται διὰ καμμίαν τιμὴν πραγματικὴν τοῦ x, διότι τότε εἶνε $\alpha\,x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\varrho_1)^2$ καὶ ἀφοῦ τὸ α εἶνε ἀρνητικὸν τὸ $\alpha\,(x-\varrho_1)^2$ εἶνε ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἂν αἱ ῥίζαι $\varrho_1$ καὶ $\varrho_2$ εἶνε μιγάδες ἐν γένει, ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x μέν, ἂν εἶνε $\alpha>0$, δι' οὐδεμίαν δέ, ἂν εἶνε $\alpha<0$. Διότι τὸ τριώνυμον τῆς (1) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων (§ 175)· ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2-3\,x+7>0$. Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε μιγάδες καὶ εἶνε τὸ $\alpha=1>0$· ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $x^2-x-6>0$.

Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε αἱ $-2$ καὶ $3$ καὶ εἶνε τὸ $\alpha=1>0$. Ἑπομένως αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα εἶνε αἱ $x>3$, καὶ $x<-2$.

### Ἀσκήσεις.

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες.

1) $x^2+3x-4>0$. 2) $-x^2+3x-6>0$. 3) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3x}{4}<-2$.

4) $\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)}>1$. 5) $\dfrac{x^2-3\,x+2}{x^2+3\,x-2}>0$. 6) $3+\dfrac{1}{3-x}>\dfrac{1}{5x+1}$.

Εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς ἐπαληθευούσας τὰς ἀνισότητας.

1) $x^2-12x+32>0$ καὶ $x^2-13x+22<0$. 2) $5x^2-7x+1<0$ καὶ $x^2-9x+30>0$. 3) $x^2-3x+2>0$ καὶ $4x^2+5x+1<0$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

1) $(x-\alpha)\,(x-\beta).\,(x-\gamma)>0$. 2) $(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)\,(x-\delta)>0$, ἂν εἶνε $\alpha<\beta<\gamma<\delta$.

3) $4\,x^3-10x^2+18\,x<0$. 4) $3\,x^3-5x^2+2x>0$. 5) $x^3-x^2+4x<0$.

(Γράψατε τὴν 3) π. χ. οὕτω $x(4x^2-10x+18)<0$.

*Ὁμὰς τρίτη.* 1) Μεταξὺ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+(\mu-1)x+2\mu=0$ νὰ ἔχῃ τὰς ῥίζας αὐτῆς πραγματικάς, ἴσας ἢ μιγάδας ἐν γένει ;

2) Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, ἵνα ἡ ἀνισότης $x^2+2x+\lambda>10$ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ;

## * Περὶ τῶν τιμῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

*179.* Ἔστω π. χ. τὸ τριώνυμον $7x^2-5x+6$.

Ἂν παραστήσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ y, θὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν

$$y=7x^2-5x+6 \tag{1}$$

Ἂν τὸ x ἀντικαταστήσωμεν διά τινος τιμῆς, π.χ. διὰ τῆς $x=3$, τὸ y λαμβάνει μίαν μόνην τιμήν, τὴν

$$7.3^2-5.3+6. \tag{2}$$

Ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν $3+\varepsilon$, ὅπου τὸ ε παριστάνει ποσότητά τινα, θὰ ἔχωμεν ὡς τιμὴν τοῦ y τὴν

$$\begin{aligned} &7.(3+\varepsilon)^2-5.(3+\varepsilon)+6\\ &=7(3^2+2.3.\varepsilon+\varepsilon^2)-5.3-5\,\varepsilon+6\\ &=(7.3^2-5.3+6)+7.2.3.\varepsilon+7.\varepsilon^2-5.\varepsilon \end{aligned} \tag{3}$$

Ἐὰν ἀπὸ τὴν τιμὴν ταύτην (3) τοῦ y ἀφαιρέσωμεν τὴν προηγουμένην τιμὴν αὐτοῦ (2), εὑρίσκομεν διαφορὰν τὴν

$$7.2.3.\varepsilon+7.\varepsilon^2-5.\varepsilon \tag{4}$$

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ε εἶνε ποσότης (θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ) τείνουσα εἰς τὸ μηδὲν (§ 140), τότε καὶ ἡ ποσότης (4) τείνει εἰς τὸ μηδέν· διότι ἕκαστος τῶν προσθετέων τῆς (4) περιέχει ὡς παράγοντα τὸν ε καὶ τείνει τὸ μηδὲν (§ 141 καὶ 144). Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι εἰς μεταβολὴν τῆς τιμῆς 3 τοῦ x κατὰ ποσότητα ε πολὺ μικρὰν (ἀπολύτως) καὶ τείνουσαν εἰς τὸ μηδέν, ἀντιστοιχοῖ καὶ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ δοθέντος τριωνύμου ἢ τῆς συναρτήσεως (1) κατὰ ποσότητα πολὺ μικρὰν καὶ τείνουσαν εἰς τὸ μηδέν. Διὰ τοῦτο ***τὸ τριώνυμον (1) λέγεται συνεχὲς ὡς πρὸς*** x ***ἢ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ*** x ***διὰ τὴν τιμὴν τοῦ*** $x=3$. Ἀλλ' οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x, καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ δοθὲν τριώνυμον εἶνε συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x διὰ πᾶσαν τιμὴν τούτου.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι καὶ πᾶν τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶνε συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Πράγματι, ἂν θέσωμεν $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διά τινος τιμῆς, ἔστω τῆς λ, θὰ ἔχωμεν ὡς ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ y τὴν

$$\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma.$$

Θέτομεν τώρα $\lambda+\varepsilon$ ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν ἰσότητα $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ λαμβάνομεν ὡς τιμὴν τοῦ y τὴν

$$\begin{aligned}&\alpha(\lambda+\varepsilon)^2+\beta(\lambda+\varepsilon)+\gamma\\&=\alpha(\lambda^2+2\lambda\varepsilon+\varepsilon^2)+\beta\lambda+\beta\varepsilon+\gamma\\&=(\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma)+2\alpha\lambda.\varepsilon+\alpha.\varepsilon^2+\beta.\varepsilon.\end{aligned}$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν τελευταίαν αὐτὴν τιμὴν τὴν $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$, ἔχομεν ὡς διαφορὰν τὴν

$$2\alpha\lambda.\varepsilon+\alpha.\varepsilon^2+\beta.\varepsilon.$$

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ε τείνει εἰς τὸ μηδέν, τότε τὸ $2\alpha\lambda.\varepsilon$, τὸ $\alpha.\varepsilon^2$ καὶ τὸ $\beta.\varepsilon$ τείνουν εἰς τὸ μηδὲν (§ 141), ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ὥστε ἡ μεταβολὴ τῆς τιμῆς τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς μεταβολὴν τῆς τιμῆς λ τοῦ x κατὰ ποσότητα πολὺ μικρὰν καὶ τείνουσαν εἰς τὸ μηδέν, εἶνε ποσότης πολὺ μικρὰ καὶ τείνουσα εἰς τὸ μηδέν. Ἄρα, «***τὸ τριώνυμον*** $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ ***εἶνε συνεχὴς συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν τοῦ*** $x=\lambda$».

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ λ δύναται νὰ εἶνε οἱαδήποτε τιμὴ τοῦ x, ἕπεται ὅτι, «***τὸ τριώνυμον*** $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma}$ ***εἶνε συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ*** x».

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν συνέχειαν οἱασδήποτε συναρτήσεως τοῦ x· ἂν δὲ συνάρτησίς τις δὲν εἶνε συνεχὴς διά τινα τιμὴν τοῦ x λέγεται ***ἀσυνεχὴς*** διὰ τὴν τιμὴν ταύτην. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπό τινος τιμῆς λ π.χ. εἰς ἄλλην τιμὴν μ, λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς, τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν λ καὶ μ, τὸ τριώνυμον θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ εἰς τὴν τιμὴν $\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$, λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς, τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν δύο τούτων τιμῶν.

Καλοῦμεν ***θετικὸν μὲν ἄπειρον,*** καὶ παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ συμβόλου $+\infty$, τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶνε μεγαλύτερος παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μεγάλου, ***ἀρνητικὸν δὲ ἄπειρον*** καὶ παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ $-\infty$, τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶνε μικρότερος παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ (§ 148).

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πῶς μεταβάλλεται τοῦτο, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$ λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους πραγματικὰς τιμάς. Γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς.

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)$$
$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$
$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν εἶνε τὸ $\alpha>0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εἶνε ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν· ἂν δ' εἶνε $\alpha<0$, θὰ ἔχῃ τὸ ἀντίθετον σημεῖον τῆς ἐν ἀγκύλαις ποσότητος.

1) ***Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε θετικόν.*** Ὅταν τὸ $x=-\infty$, τὸ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶνε ἴσον μὲ $+\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{2\alpha^2}$, μένει πάλιν $+\infty$. Ὥστε διὰ $x=-\infty$ τὸ τριώνυμον γίνεται $+\infty$.

Ἐὰν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς, λαμβάνον τιμὰς ἀρνητικάς, ἀλλ' ἀπολύτως μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε ἀρνητικόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶνε θετικόν, καὶ ἐλαττοῦται συνεχῶς. Ὅταν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται ἴσον μὲ μηδέν, τὸ δὲ τριώνυμον μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.\alpha$. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ συνεχῶς μέχρις ὅτου γίνει $+\infty$, ἡ ποσότης $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε θετική, καὶ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ μηδενὸς μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἄρα καὶ τὸ τριώνυμον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.\alpha$ μέχρι τοῦ $+\infty$.

2) ***Ἔστω ὅτι τὸ α εἶνε ἀρνητικόν.*** Ὅταν τὸ $x=-\infty$, τὸ τριώνυμον εἶνε $-\infty$. Ὅταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ τὸ τριώνυμον ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.\alpha$, καὶ διὰ $x=+\infty$ γίνεται πάλιν $=$ μὲ $-\infty$. Ἤτοι ἐνῷ ὅταν εἶνε τὸ $\alpha>0$ καὶ μεταβάλλεται συνεχῶς τὸ x λαμβάνον τὰς τιμὰς $-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$, τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$

μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνεται συνεχῶς μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν εἶνε τὸ $\alpha<0$ διὰ $x=-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$, αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$, γίνεται ἴσον μὲ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$, καὶ ἐλαττοῦται πάλιν συνεχῶς μέχρι τοῦ $-\infty$.

Ὅταν μία τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης εἶνε μεγαλυτέρα πασῶν τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτῆς, λέγομεν ὅτι αὐτὴ εἶνε, ***μέγιστον*** τῆς μεταβλητῆς. Τοὐναντίον, ἐὰν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶνε ἡ μικροτέρα τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτῆς, καλοῦμεν αὐτὴν ***ἐλάχιστον*** τῆς μεταβλητῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι,

***«ὅταν μὲν τὸ α εἶνε θετικόν, τὸ τριώνυμον*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἔχει ἐλάχιστον διὰ*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ***ὅταν δὲ τὸ α εἶνε ἀρνητικόν, ἔχει μέγιστον διὰ*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$***».***

Ἔστω π. χ. τὸ τριώνυμον $3x^2-6x+7$. Τὸ $\alpha=3>0$, ἄρα ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{6}{6}=1$.

Θέτοντες $x=1$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλάχιστον εἶνε 4.

### *Ἀσκήσεις.*

Δι' ἕκαστον τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x εὑρίσκεται τοῦτο.

1) $-x^2+4x+3$. 2) $19x^2-7x+3$. 3) $x^2-7x-13$. 4) $7x^2-6x+3$. 5) $15x^2+12x-7$. 6) $-x^2+3x-6$. 7) $9{,}5x^2-0{,}25x-2=0$.

## *) Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

***180.*** Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ, θέτομεν

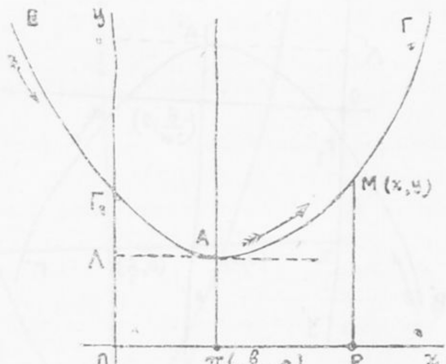
$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \qquad (1)$$

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1) ***Ὅταν τὸ α εἶνε θετικόν.*** Γνωρίζομεν (§ 179) ὅτι, ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ y ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ

$+\infty$ μέχρι τοῦ $\dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\,\alpha}$. Ἑπομένως ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) (ἂν τὰς μὲν τιμὰς τοῦ x θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας, τὰς δὲ τοῦ y ὡς τεταγμένας σημείων ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους 0 x, 0 y), θὰ ἔχῃ ἕνα κλάδον συνεχῆ (ἄνευ διακοπῆς τινος), ὁ ὁποῖος θὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν y 0 x′, καὶ εἶνε πολὺ μεμακρυσμένον (ἔχει τετμημένην $-\infty$ καὶ τεταγμένην $+\infty$), διέρχεται δὲ κατερχόμενος διὰ τοῦ σημείου Α, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $-\dfrac{\beta}{2\,\alpha}$ καὶ τεταγμένην $\dfrac{4\,\alpha\gamma - \beta^2}{4\,\alpha}$ (Σχ. 10).

Ὅταν τὸ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\dfrac{\beta}{2\,\alpha}$ αὐξάνεται συνεχῶς εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἄλλον συνεχῆ κλάδον τῆς γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν x o y, ἔχον τετμημένην καὶ τεταγμένην ἴσας μὲ $+\infty$.



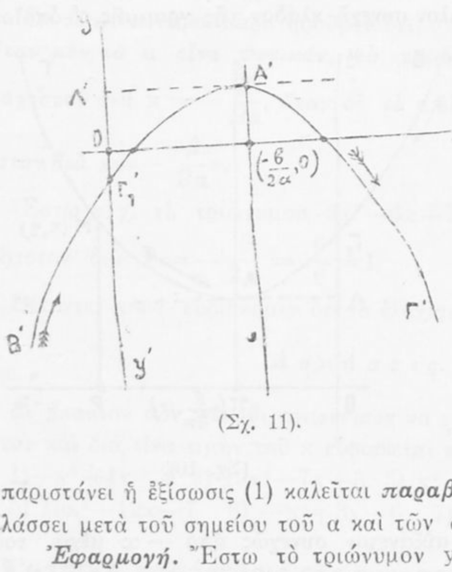
(Σχ. 10).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ὅταν τὸ α εἶνε θετικὸν παριστάνει τὴν καμπύλην ΒΑΓ (Σχ. 10).

2) ***Ὅταν τὸ α εἶνε ἀρνητικόν.*** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\dfrac{-\beta}{2\alpha}$, τὸ y αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\dfrac{4\,\alpha\gamma - \beta^2}{4\,\alpha}$. Ἑπομένως, διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἕνα συνεχῆ κλάδον, ὁ ὁποῖος ἔρχεται ἀπὸ ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον καὶ κείμενον εἰς τὴν γωνίαν x′ o y′, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη εἶνε ἴσαι μὲ $-\infty$, καταλήγει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α′, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν τετμημένη ἰσοῦται μὲ $\dfrac{-\beta}{2\,\alpha}$, ἡ δὲ τεταγμένη μὲ $\dfrac{4\,\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ (Σχ. 11).

῞Οταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{-\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ τριώνυμον, ἄρα καὶ τὸ y, ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$, καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς παριστάνει συνεχῆ κλάδον καμπύλης γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἄρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A′ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, κείμενον εἰς τὴν γωνίαν x o y′, καὶ ἔχον τετμημένην καὶ τεταγμένην ἴσας μὲ $+\infty$ καὶ $-\infty$ (Σχ. 11).

Διὰ νὰ εὕρωμεν ποῦ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν $x=0$. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $x=0$ εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $y=\gamma$. ῞Ωστε ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα yoy′ εἰς τὸ σημεῖον $\Gamma_1$ (Σχ. 10) ἢ τὸ Γ′ (Σχ. 11), ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ. ῎Αν $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου, διὰ $x=\rho_1$ καὶ $\rho_2$ ἔχομεν $y=0$. ῞Επεται ὅτι ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα τετμημένην $\rho_1$ καὶ $\rho_2$. ῎Αν τὰ $\rho_1$ καὶ $\rho_2$ εἶνε φανταστικοὶ ἢ μιγάδες ἀριθμοί, ἡ καμπύλη δὲν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.



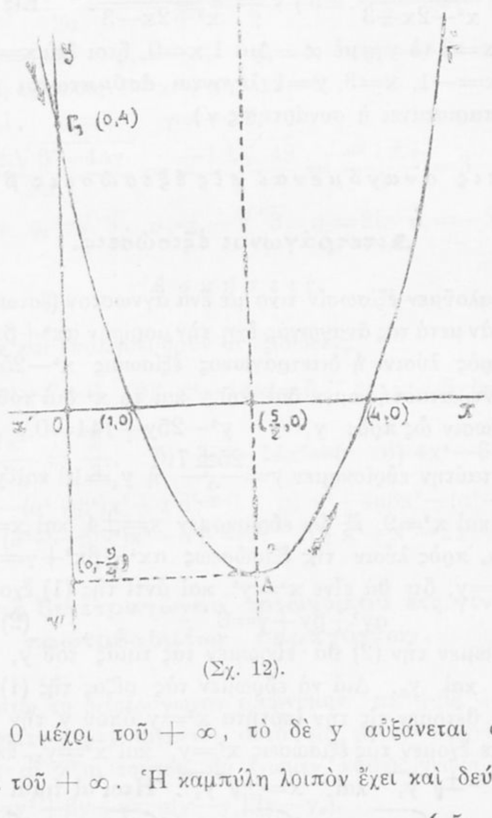
(Σχ. 11).

Ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται ***παραβολή***, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ἀλλάσσει μετὰ τοῦ σημείου τοῦ α καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

***Ἐφαρμογή.*** ῎Εστω τὸ τριώνυμον $y=x^2-5x+4$. ῎Εχομεν

$$y=x^2-5x+4+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+4-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

῞Οταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$, τὸ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ μηδενός, τὸ δὲ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\dfrac{9}{4}$. Οὕτω ἡ καμπύλη ἔχει συνεχῆ κλάδον $ΒΓ_1Α$ (Σχ. 12), ἐρχόμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην καὶ τεταγμένην $-\infty$ καὶ $+\infty$, καὶ περατοῦται εἰς τὸ σημεῖον $Α\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\dfrac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2$ αὐξάνεται συνε-




(Σχ. 12).

χῶς ἀπὸ τὸ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ y αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\dfrac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον συνεχῆ κλάδον ΑΓ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου $Α\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $+\infty$ καὶ $+\infty$ (Σχ. 12).

Διὰ $x=0$ τὸ $y$ εἶνε ἴσον μὲ 4. Ἄρα ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν $y$ εἰς τὸ σημεῖον $\Gamma_1$ (0,4). Ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν $x$ εἰς τὸ σημεῖον (1,0) καὶ (4,0) ἐπειδὴ εἶνε $\varrho_1=1$, καὶ $\varrho_2=4$.

### Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν

α΄) $y=x^2-x-3$. β΄) $y=3x^2-7x+3$.

γ΄) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x-3}$. δ΄) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+2x-3}$. Εἰς τὴν γ΄) διὰ $x=-1$ καὶ $x=3$ τὸ $y=$μὲ $\infty$. Διὰ $1:x=0$, ἤτοι διὰ $x=\infty$, τὸ $y=1$. Αἱ εὐθεῖαι $x=-1$, $x=3$, $y=1$ λέγονται ***ἀσύμπτωτοι*** τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις γ΄).

## Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ.

### Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

*181.* Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα μὲ ἕνα ἄγνωστον (ἔστω τὸν $x$) ***διτετράγωνον,*** ἐὰν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1).

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4-25x^2+144=0$. Ἂν τὸ $x^2$ ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ $y$ καὶ τὸ $x^4$ διὰ τοῦ $y^2$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς $y$, $y^2-25y+144=0$.

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $y=\dfrac{25\pm 7}{2}$ ἢ $y_1=16$ καὶ $y_2=9$. Ἄρα εἶνε $x^2=16$ καὶ $x^2=9$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $x=\pm 4$ καὶ $x=\pm 3$.

Ἐν γένει, πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, γράφομεν εἰς αὐτὴν $x^2=y$, ὅτε θὰ εἶνε $x^4=y^2$, καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=0 \qquad (2).$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (2) θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ $y$, καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ $y_1$ καὶ $y_2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς (1), δηλαδὴ τὰς τιμὰς τοῦ $x$, θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα $x^2=y$ ὅπου $y$ τὴν τιμὴν αὐτοῦ $y_1$ καὶ $y_2$, ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2=y_1$ καὶ $x^2=y_2$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x=\pm\sqrt{y_1}$ καὶ $x=\pm\sqrt{y_2}$. Ἤτοι αἱ τιμαὶ τοῦ $x$ εἶνε αἱ

$$+\sqrt{y_1}, \quad -\sqrt{y_1}, \quad +\sqrt{y_2}, \quad -\sqrt{y_2}.$$

Ἀλλ' αἱ τιμαὶ $y_1$ καὶ $y_2$ εἶνε καθὼς γνωρίζομεν αἱ

$$y_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad y_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἑπομένως ἂν παραστήσωμεν διὰ $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$ καὶ $\varrho_4$ τὰς ῥίζας τῆς (1)

θὰ ἔχωμεν, $\varrho_1=\sqrt{\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$, $\varrho_2=-\sqrt{\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$

$\varrho_3=\sqrt{\dfrac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$, $\varrho_4=-\sqrt{\dfrac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$

***Ἐφαρμογαί.*** 1) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $x^4-10x^2+9=0$.

Ἔχομεν $\alpha=1$, $\beta=-10$, $\gamma=9$.

Ἑπομένως $\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\dfrac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\dfrac{10\pm8}{2}=9$ ἢ 1

καὶ $\varrho_1=+3$, $\varrho_2=-3$, $\varrho_3=1$, $\varrho_4=-1$.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4+x^2-12=0$.

Εἶνε $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-12$,

καὶ $\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\dfrac{-1\pm7}{2}=3$ ἢ $-4$.

Ἑπομένως εἶνε $\varrho_1=\sqrt{3}$, $\varrho_2=-\sqrt{3}$, $\varrho_3=2i$, $\varrho_4=-2i$.

## *Ἀσκήσεις.*

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

1) $x^4-8x^2+7=0$. 2) $x^4-14x^2=5$. 3) $x^4+5x^2=\dfrac{11}{4}$.

4) $x^4-\dfrac{7x^2}{3}=\dfrac{2}{3}$. 5) $3x^4-14x^2=5$. 6) $4x^4-37x^2+9=0$.

7) $\alpha^2\beta^2x^4-(\alpha^4+\beta^4)x^2+\alpha^2\beta^2=0$. 8) $x^4+4\alpha\beta x^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=0$.

9) $\gamma^4x^4+(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2)x^2-\alpha^2\beta^2=0$. 10) $x^4+x^2-2x^4+3=0$.

## Ἀνάλυσις διτετραγώνου τριωνύμου εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

***182.*** Ἔστω τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$.

Ἐὰν θέσωμεν $x^2=y$ τρέπεται αὐτὸ εἰς τὸ $\alpha y^2+\beta y+\gamma$. Ἀλλ' ἂν $y_1$ καὶ $y_2$ εἶνε αἱ ῥίζαι τούτου, θὰ ἔχωμεν, καθὼς γνωρίζομεν, ὅτι,

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma=\alpha(y-y_1).(y-y_2).$$

Ἐπαναφέροντες ἀντὶ τοῦ y τὸ $x^2$, εὑρίσκομεν

$$\alpha x^4+\beta x+\gamma=\alpha(x^2-y_1)\,(x^2-y_2)$$

ἢ $$=\alpha(x+\sqrt{y_1})\,(x-\sqrt{y_1})\,(x+\sqrt{y_2})\,(x-\sqrt{y_2}).$$

Ἄρα εἶνε $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)(x-\varrho_3)(x-\varrho_4)$, ὅπου $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$, $\varrho_4$ εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου.

Κατὰ ταῦτα, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ῥίζας τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον τοῦ $\alpha$ ἐπὶ τέσσαρας πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x.

## *Ἀσκήσεις.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ α′) $4x^4-17x^2+1$. β′) $7x^4-35x^2+28$. γ′) $x^4-13x^2+36$.

2) Εὕρετε τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ῥίζας τὰς α′) $\pm3, \pm1$. β′) $\pm\alpha, \pm\sqrt{\alpha}$ γ′) $\pm0{,}5, \pm4i$. δ′) $\pm3, \pm i$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Εὕρετε τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, ὅταν τὸ x εἶνε ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν του $\varrho_1$, $\varrho_2$, $\varrho_3$, $\varrho_4$ (ἂν εἶνε $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3<\varrho_4$). Δηλαδὴ ἂν $x<\varrho_1$, ἢ $x>\varrho_4$, καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ῥιζῶν, δηλαδὴ ἂν εἶνε $\varrho_1<x<\varrho_2$, $\varrho_2<x<\varrho_3$, καὶ $\varrho_3<x<\varrho_4$. (Διακρίνατε δύο περιπτώσεις ὅταν εἶνε $\alpha>0$ καὶ ὅταν $\alpha<0$).

2) Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-(\lambda^2+1)x+(\lambda^2+3)=0$ τίνα τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ $\lambda$, διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ῥίζαι αὐτῆς κατὰ 1 ;

## Τροπὴ διπλῶν τινων ῥιζικῶν εἰς ἁπλᾶ.

***183.*** Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $x^4-6x^2+1=0$.

Ἐπειδὴ εἶνε $\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=1$, ἂν ἐφαρμόσωμεν τὸν εὑρεθέντα τύπον (τῆς προηγουμένης παραγράφου), εὑρίσκομεν ὡς τιμὰς τοῦ x τὰς

$$\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{39-4}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{32}}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \pm\sqrt{\frac{6-\sqrt{32}}{2}}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ λύσις τῶν διτετραγώνων ἐξισώσεων δίδει ἐνίοτε παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διπλοῦν ῥιζικόν, καθὼς ἡ αἱ ἀνωτέρω, ἢ γενικώτερον παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{A-\sqrt{B}}.$$

Ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν πότε εἶνε δυνατὸν τὰς τοιαύτας παραστάσεις νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν μὲ ἁπλᾶ ῥιζικά.

Θὰ δείξωμεν ἐν γένει ὅτι, ***παραστάσεις τῆς μορφῆς*** $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

*τρέπονται εἰς ἄλλας, ἐχούσας ἁπλᾶ ῥιζικά, ὅταν τὸ $A^2-B$ εἶνε τέλειον τετράγωνον, καὶ ἂν τοῦτο τεθῇ ἴσον μὲ $Γ^2$, θὰ εἶνε*

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+Γ}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-Γ}{2}}.$$

Διότι ἂν θέσωμεν

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{ψ}+\sqrt{ω}$$

καὶ
$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{ψ}-\sqrt{ω},$$

θὰ ἔχωμεν ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον

$$A+\sqrt{B}=ψ+ω+2\sqrt{ψω}$$
$$A-\sqrt{B}=ψ+ω-2\sqrt{ψω}.$$

Προσθέτοντες μὲν τὰς ἰσότητος ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν,

$$A=ψ+ω,$$

ἀφαιροῦντες δὲ ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν,

$$2\sqrt{B}=4\sqrt{ψω}\,,\ \text{ἢ}\ \sqrt{B}=2\sqrt{ψω}.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης εὑρίσκομεν, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον $B=4ψω.$

Οὕτω ἔχομεν $ψ+ω=A,\ ψω=\frac{B}{4}.$

Ἐπειδὴ γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα A καὶ τὸ γινόμενον $\frac{B}{4}$ τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ψ καὶ ω, θὰ εἶνε οὗτοι ῥίζαι ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ τῆς μορφῆς

$$x^2-Ax+\frac{B}{4}=0.$$

Αἱ ῥίζαι ταύτης εἶνε $\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ καὶ $\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$,

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη ὅτι ἔχομεν $A^2-B=Γ^2$, αἱ ῥίζαι, ἤτοι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ ψ καὶ ω, θὰ εἶνε

$$ψ=\frac{A+Γ}{2}\ \text{καὶ}\ ω=\frac{A-Γ}{2}.$$

Ἑπομένως ἔχομενν

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{ψ}+\sqrt{ω}=\sqrt{\frac{A+Γ}{2}}+\sqrt{\frac{A-Γ}{2}}.$$

$$\text{καὶ} \quad \sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\psi}-\sqrt{\omega}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}-\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}$$

$$\text{καὶ ἐν γένει} \quad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \quad \text{ὅταν εἶνε } A^2-B=\Gamma^2.$$

Κατὰ ταῦτα διὰ τὴν ἀνωτέρω παράστασιν $\sqrt{6+\sqrt{32}}$

ἔχομεν $A=6$, $B=32$, $A^2-B=36-32=4=2^2=\Gamma^2$.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν γενικώτερον

$$\sqrt{6\pm\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{6+2}{2}}\pm\sqrt{\frac{6-2}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}\pm\sqrt{2}=2\pm\sqrt{2}.$$

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν παράστασιν $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Εἶνε $A=2$, $B=3$, $A^2-B=4-3=1=1^2=\Gamma^2$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

### *Ἀσκήσεις.*

Τρέψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους **αὐτῶν** ἐχούσας ἁπλᾶ ριζικά.

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$. 2) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. 3) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

4) $\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}$. 5) $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$.

6) $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\gamma\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$. 7) $\sqrt{x+xy-2x\sqrt{y}}$.

## Λύσεις ἐξισώσεων μὲ ριζικά.

**184.** Ἐξίσωσίς τις λέγεται ***μὲ ριζικόν***, ἂν ἔχῃ τοὐλάχιστον ἓν ριζικὸν ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτω αἱ ἐξισώσεις $\sqrt[3]{2x+6}=2$, $4+\sqrt{x^2+5}=x-1$ λέγονται ἐξισώσεις μὲ ριζικά.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt[3]{2x+6}=2$.

Διὰ νὰ νὰ ἐξαλειφθῇ τὸ ῥιζικόν, ὑψοῦμεν τὰ ἴσα εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, ὅτε προκύπτει ἡ $2x+6=2^3=8$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν $x=1$.

Θέτοντες $x=1$ εἰς τὴν δοθεῖσαν, εὑρίσκομεν $\sqrt[3]{2.1+6}=\sqrt[3]{8}=2$. Ἤτοι ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $4+\sqrt{x^2+5}=x-1$.

Διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τὸ ῥιζικόν, πρῶτον ἀπομονώνομεν αὐτό, δηλαδὴ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὸ ῥιζικὸν εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς.

Οὕτω ἔχομεν τὴν $\sqrt{x^2+5}=x-5$.

Τώρα ὑψοῦμεν τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+5=(x-5)^2=x^2-10x+25$, ἢ $10x=20$, ἥτις δὲν εἶνε ἐν γένει ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν (§ 167).

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=2$.

Ἐὰν θέσωμεν $x=2$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν καὶ λάβωμεν τὴν θετικὴν ῥίζαν τοῦ $\sqrt{2^2+5}=\sqrt{9}$, δηλαδὴ τὸ 3, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἐπαληθεύεται. Ἂν ὅμως λάβωμεν τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν $-3$ τῆς $\sqrt{9}$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ $x=2$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν μὲ ῥιζικά, ἀπομονώνομεν τὰ ῥιζικὰ ὥστε, ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, νὰ προκύπτῃ ἐξίσωσις χωρὶς ῥιζικά. Ἀκολούθως λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶνε καὶ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως».***

Ἂν ἔχωμεν π. χ. τὴν ἐξίσωσιν $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν, ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ ῥιζικόν,

$$2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x.$$

Ὑψοῦντες πάλιν τὰ ἴσα ταῦτα εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν ἀναγωγὴν $x^2-288x+1136=0$. Αἱ ῥίζαι ταύτης εἶνε αἱ 4 καὶ 284. Θέτοντες $x=4$ καὶ $x=284$ εἰς τὴν δοθεῖσαν, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ μὲν $x=4$ τὴν ἐπαληθεύει, ἂν λάβωμεν τὸ θετικὸν σημεῖον καὶ τῶν δύο ῥιζικῶν (τῆς δοθείσης ἐξισώσεως), ἡ δὲ $x=284$ ἂν τὸ ἀρνητικὸν τοῦ πρώτου καὶ τὸ θετικὸν τοῦ δευτέρου ῥιζικοῦ.

## *Ἀσκήσεις.*

1) Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν.

α΄) $\sqrt{x+4}=7$. β΄) $\sqrt{36+x}=\sqrt{x}+2$. γ΄) $x+\sqrt{25-x^2}=7$.

(45· 64· 3 καὶ 4).

δ΄) $\sqrt{1+\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$. ε΄) $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$.

ς΄) $\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}=\dfrac{4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. (1,25·9·4).

2) Ὁμοίως αἱ α΄) $2(x+\sqrt{\alpha^2+x^2}).\sqrt{\alpha^2+x^2}=5\alpha^2$.

β΄) $\sqrt{3x+7+3\sqrt{2x-4}}=7$. γ΄) $\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}=\sqrt{\beta}$.

δ΄) $\dfrac{(1-\alpha x).\sqrt{1+\beta x}}{(1+\alpha x).\sqrt{1-\beta x}}=1$. $\left(\text{Ἀπ. } \dfrac{2\alpha\sqrt{\beta}}{1+\beta},\ \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\dfrac{2\alpha}{\beta}-1}\right)$.

### *) Ἐξισώσεις τριώνυμοι.

**185.** Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα ***τριώνυμον,*** ἂν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς (ὅταν τὸ δεύτερον εἶνε μηδὲν) ἀποτελῆται ἀπὸ τρεῖς ὅρους. Οὕτω ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ β΄ βαθμοῦ λέγεται καὶ τριώνυμος. Ἐπίσης καὶ ἡ ἐξίσωσις $x^6-19x^3-216=0$ λέγεται τριώνυμος, ἀλλ᾽εἶνε ἕκτου βαθμοῦ.

Ἡ λύσις τριωνύμου ἐξισώσεως (ἀνωτέρου τοῦ β΄ βαθμοῦ) ἀνάγεται, ἐνίοτε, εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^6-19x^3-216=0$.

Πρὸς λύσιν αὐτῆς θέτομεν $x^3=y$, ὅτε εἶνε $x^6=y^2$.

Οὕτω ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $y^2-19y-216=0$.

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $y=27$ καὶ $y=-8$.

Ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ y τὸ $x^3$, θὰ ἔχωμεν $x^3=27$ καὶ $x^3=-8$.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν δύο μόνον ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως τοῦ ἕκτου βαθμοῦ, τὰς $x=3$, $x=-2$, ἐνῷ ἔχει ἐν ὅλῳ ἓξ ῥίζας, διότι ἀποδεικνύεται ὅτι ἐξίσωσίς τις δευτέρου, τρίτου,... βαθμοῦ ἔχει δύο, τρεῖς,... ῥίζας (πραγματικὰς ἢ μιγαδικὰς ἐν γένει).

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^8-97x^4+1296=0$.

Θέτομεν $x^4=y$, ὅτε εἶνε $x^8=y^2$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$y^2-97y+1296=0.$$

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $y=81$ καὶ $y=16$.
Ἑπομένως εἶνε καὶ $x^4=81$ καὶ $x^4=16$.
Ἄρα $x=\pm 3$ καὶ $x=\pm 2$
εἶνε αἱ τέσσαρες ῥίζαι ἐκ τῶν ὀκτὼ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

### Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.
1) $x^6+4x^3=96$. 2) $x^{10}-12x^5=56133$. 3) $\alpha x^{11}+\beta x^9+\gamma x^7=0$,
4) $\frac{\alpha}{x^4}-\frac{2\beta^9}{x^2}=\frac{2\beta^2}{\alpha}$. 5) $2x\sqrt{x^3}=-3\sqrt{x}$. 6) $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{x^2}=-18$.

### *) Περὶ ἀντιστρόφων ἐξισώσεων.

**186.** Ἐξίσωσίς τις μὲ ἕνα ἄγνωστον (τῆς ὁποίας τὸ μὲν δεύτερον μέλος εἶνε μηδὲν τὸ δὲ πρῶτον εἶνε πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου) λέγεται ***ἀντίστροφος, ἂν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων, τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶνε ἴσοι ἢ ἀντίθετοι (ὅταν τὸ πολυώνυμον δὲν ἔχῃ μεσαῖον ὅρον ἂν εἶνε ἀρτίου βαθμοῦ).***

Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$,
καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καθὼς καὶ ἡ
$$\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0.$$
Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$
καὶ ἡ $\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0$
καλοῦνται ἀντίστροφοι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν θέσωμεν $x=-1$ εἰς αὐτήν, ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος ταύτης διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)$ (§ 98). Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha$ διὰ τοῦ $x+1$, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha$ (§ 100). Ἑπομένως ἔχομεν
$$\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=(x+1)\,[\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha]=0.$$
Ἡ μὲν μία ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε προφανῶς ἡ $x=-1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0$, παρατηροῦμεν ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $x-1$. Ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι
$$\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=(x-1)\,[\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha].$$
Εἶνε φανερόν, ὅτι ἡ μὲν μία ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε ἡ $x=1$,

αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ $\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)=0$,

ἢ $\alpha(x^2-1)(x^2+1)+\beta x(x^2-1)=0$,

ἢ $(x^2-1)\,[\alpha(x^2+1)+\beta x]=0$.

Εἶνε φανερὸν ὅτι αἱ μὲν δύο ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς δοθείσης, θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2-1=0$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(x^2+1)+\beta x=0$. Ἡ πρώτη ἔχει ρίζας τὰς $+1$ καὶ $-1$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$, (1).
Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ $x^2$ (ὑποθέτοντες τὸ τὰς τιμὰς τοῦ $x\neq 0$) καὶ εὑρίσκομεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=0,$$

ἢ
$$\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0. \qquad (2)$$

Θέτομεν

$$x+\frac{1}{x}=y, \text{ ὅτε } \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2, \text{ ἢ } x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2,$$

καὶ
$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰς τιμὰς τῶν $x^2+\frac{1}{x^2}$ καὶ $x+\frac{1}{x}$, εὑρίσκομεν $\alpha(y^2-2)+\beta y+\gamma=0$, ἡ ὁποία εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς y. Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν ἐν γένει δύο τιμὰς τοῦ y, τὰς ὁποίας ἂς παραστήσωμεν διὰ τῶν $y_1$ καὶ $y_2$. Ἀντικαθιστῶμεν καθεμίαν τῶν τιμῶν τοῦ y εἰς τὴν $x+\frac{1}{x}=y$ καὶ ἔχομεν

$$x+\frac{1}{x}=y_1 \quad \text{καὶ} \quad x+\frac{1}{x}=y_2,$$

ἢ
$$x^2-xy_1+1=0, \qquad x^2-xy_2+1=0.$$

Ἤτοι δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τὰς ὁποίας ἐὰν λύσωμεν, θὰ εὕρωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (1).

Π. χ. ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6x^3-35x^4+62x^2-35x+6=0$. Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς (ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ $x\neq 0$).

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$$

Θέτομεν $x+\frac{1}{x}=y$,

ὅτε εὑρίσκομεν $6(y^2-2)-35y+62=0$, ἢ $6y^2-35y+50=0$.

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶνε αἱ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$.

Ἑπομένως αἱ ῥίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ καὶ $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$,

ἢ τῆς $2x^2-5x+2=0$ καὶ $3x^2-10x+3=0$.

Αἱ ῥίζαι τούτων εἶνε αἱ 2 καὶ $\frac{1}{2}$, 3 καὶ $\frac{1}{3}$.

Ἀνὰ δύο οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶνε ἀντίστροφοι καθὼς βλέπομεν.

## *Ἀσκήσεις.*

1) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

1) $x^4+x^3+x^2+1=0$. 2) $x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}=41$.

3) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$. 4) $3x^3-13x^2+13x-3=0$.

5) $2x^3+7x^2+7x+2=0$. 6) $2x^4+5x^3-5x-2=0$.

7) Ἡ ἐξίσωσις τοῦ πέμπτου βαθμοῦ $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ ἀνάγεται εἰς τὴν $\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\gamma-\beta+\alpha)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$, ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα ἐπαληθεύεται διὰ $x=-1$. Πῶς γίνεται τοῦτο ;

8) Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0$ ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$, καὶ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν,

$$\alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0.$$

Πῶς γίνεται τοῦτο ; Πῶς εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τοῦ πέμπτου βαθμοῦ;

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

9) $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$.

10) $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$.

## Συστήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

*187.* Ἐνῷ τὴν λύσιν συστημάτων ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἀνάγομεν εἰς τὴν λύσιν μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, μόνον εἰς περιπτώσεις τινὰς ἀνάγομεν τὴν λύσιν συστήματος ἐξισώσεων β' βαθμοῦ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἤτοι καταντῶμεν ἐνίοτε εἰς μίαν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον· καὶ ἀφοῦ διὰ τῆς λύσεως ταύτης εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου, ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς εἰς τὰς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν βαθμηδὸν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων ἀγνώστων.

Τοῦτο συμβαίνει π. χ. ἐὰν ἐκ δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους ἡ μία εἶνε πρώτου βαθμοῦ. Διότι, ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου ἐκ τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία ἔχει τοὺς δύο εἰς πρῶτον βαθμόν, εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον εἰς δεύτερον βαθμόν.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἐπίσης, ἐὰν εἰς δοθὲν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους δευτέρου βαθμοῦ οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Διότι τότε διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ὅρων τούτων προκύπτει ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν.

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα $3x^2-5xy+4y^2-8x+7y=8,$

$$9x^2-15xy+12y^2+11x-3y=32.$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ $-3$ καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 1, προσθέσωμεν δὲ τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$35\,x-24\,y=8$$

Ἐὰν λύσωμεν ταύτην ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, προκύπτει μία ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Ἐὰν καθεμία τῶν δύο ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, ἐκτὸς τῶν σταθερῶν ὅρων, περιέχῃ μόνον ὅρους μὲ τὸ $x^2$, τὸ $y^2$ καὶ τὸ $xy$, διὰ καταλλήλου διατάξεως καὶ διαιρέσεως τῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν μίαν ἐξίσωσιν ἔχουσαν ὡς ἄγνωστον τὸ $\frac{x}{y}$. Ἐὰν λύσωμεν ταύτην, τότε μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῆς δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καθεμίαν τῶν δοθεισῶν πρὸς εὕρεσιν τῶν τιμῶν τοῦ $x$ καὶ $y$.

Ἔστω π.χ. τὸ σύστημα $x^2+3xy-5y^2=208,$

$$xy-2\,y^2=16.$$

Ἐκ τούτων διὰ διαιρέσεως τῆς πρώτης διὰ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{x^2+3xy-5y^2}{xy-2y^2}=\dfrac{208}{16}=13,$

ἐκ τῆς ὁποίας, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ πρώτου μέλους διὰ τοῦ $y^2$, εὑρίσκομεν τὴν

$$\frac{\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}-5}{\frac{x}{y}-2}=13,$$

ἢ τὴν
$$\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y}-5=13\left(\frac{x}{y}-2\right).$$

ἢ
$$\frac{x^2}{y^2}-10\frac{x}{y}+21=0.$$

Θεωροῦντες ὡς ἄγνωστον τὸν λόγον $\frac{x}{y}$ καὶ λύοντες τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\frac{x}{y}=7$, καὶ $\frac{x}{y}=3$, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει $x=7y$ καὶ $x=3y$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν $5y^2=16$ καὶ $y^2=16$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ y καὶ ἀκολούθως τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἀξία προσοχῆς εἶνε ἡ περίπτωσις καθ' ἣν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $xy$ καὶ τὸ $(x+y)$ ἢ τὸ $(x-y)$. Διότι, ἐὰν εὕρωμεν π. χ. ὅτι εἶνε $x+y=\alpha$ καὶ $xy=\beta$, τότε τὸ x καὶ y εἶνε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία εἶνε τῆς μορφῆς $\omega^2-\alpha\omega+\beta=0$.

Ἐὰν εὕρωμεν ὅτι εἶνε $x-y=\alpha$ καὶ $xy=\beta$, τότε τὸ x καὶ $(-y)$ εἶνε ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\alpha\omega-\beta=0$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $x.(-y)=-\beta$.

## *Ἀσκήσεις.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα.

1) $6xy-7x=184$. $5x+6y=70$.

2) $3xy-5x=192$ $3x-4y=8$.

3) $7x^2-3y^2=135$ $7x-3y=27$.

4) $5x^2+3y^2=2300$ $3x-2y=40$.

5) $\frac{15}{x}+\frac{22}{y}=5$, $x+y=16$.

6) $\frac{9}{x}-\frac{8}{y}=1$ $2x+y=10$.

7) $\frac{5x-3y}{2x-y}=\frac{20}{9}$ $x^2+y^2=74$.

8) $\frac{7}{x^2}-\frac{7}{y^2}=10$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=11$.

9) $\frac{3}{x^2}-\frac{5}{y^2}+33=0$ $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}+1=0$.

10) $x-\sqrt{2y+4}=9$, $3x-2y=3.$ 11) $\dfrac{7x+12y}{12x+7y}=\dfrac{26}{31}$, $7x^2-12y^2=144.$ 12) $\dfrac{8}{x}+\dfrac{9}{y}=7$, $2x-y=3.$

*Ὁμὰς δευτέρα.* (Ἐκ τῆς μιᾶς τῶν δύο ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους).

1) $9x^2+5x-7y=25$, $(x+y)^2-3(x+y)=10.$ 2) $2x^2-3xy+9x=29$, $(x-y)^2+7(x-y)=30.$

3) $14x^2-11xy+4y^2=10$, $(2x-3y)^2+4(2x-3y)=5.$ 4) $8x^2-2xy+7y^2=527$, $(3x+y)^2-9(3x+y)-20=0.$

5) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}=21$, $(x+y+7)(x+y-5)=64.$ 6) $\dfrac{2x+3y}{13}=\dfrac{4}{2x-3y}$, $(12-x+y)(x-y+1)=12(x-y).$

7) $4x^2 20xy+25y^2-12x+30y=-9$, $5x^2-7xy+4y^2-3x+2y=46.$

8) $9x^2-12xy+4y^2+12x-8y+4=0$, $3x^2-5xy+y^2+x+y+6=0.$

9) $3(8x^2+7y^2-4)=29(5x^2-11y^2+6)$, $\sqrt{27x-36y+4}=6x-8y-3.$

10) $7(x-2\sqrt{21x-6y-2})=2(y-25)$, $13x^2-3y^2=4.$

*Ὁμὰς τρίτη.* (Προσδιορίζεται πρῶτον ὁ λόγος $\dfrac{x}{y}$).

1) $x^2+y^2=100$, $x:y=3:5.$ 2) $x^2-y^2=56$, $x:y=9:5.$ 3) $24y(x-5y)=(x+2y)(5x-28y)$, $5x^2-12y^2=32.$

4) $x^2+xy+y^2=76$, $(x+y):(x-y)=5:2.$ 5) $x^2-xy+y^2=91$, $(x+y):(x-y)=8:3.$ 6) $(x+5)^2=xy$, $y^2=(y+9)(x+4).$

7) $(x^2+xy^2)(x+y)=1080$, $(x^2+y^2)(x-y)=540.$ 8) $(x^2-y^2)(2x-3y)=192$, $(x^2-y^2)(3x+y)=1344.$

*Ὁμὰς τετάρτη.* (Θεωρήσατε νέας μεταβλητὰς τὰ $x+y$ καὶ $x-y$).

1) $x^2-xy=14$, $xy-y^2=10.$ 2) $x^2+y^2=73$, $x+y=24.$ 3) $x^2+y^2=97$, $xy=36.$ 4) $x^2+y^2=586$, $x+y=34.$

5) $x^2+y^2=125$, $3xy=150.$ 6) $x^2+y^2=585$, $4xy=258.$ 7) $x^2+y^2=\dfrac{25}{36}$, $6xy=2.$

8) $x^2+xy+y=121$, $x^2+xy+x=61$. 9) $x^2-y^2=87$, $x-y=3$. 10) $x^2+xy=187$, $y^2+xy=102$.

11) $x^2+9y^2=136$, $x-3y=4$. 12) $3(x+y)^2-5(x+y)=50$, $5(x-y)^2+6(x-y)=11$.

*Ὁμὰς πέμπτη.* (Θεωρήσατε νέας μεταβλητὰς τὰ $xy$, $x^2+y^2$ ἢ τὸ $x\pm y$).

1) $x+y=21-\sqrt{xy}$, $x^2+y^2=527$. 2) $2(x^2+y^2)^2-7(x^2+y^2)=1479$, $3x^2y^2-2\frac{1}{2}xy-275=0$.

3) $x^2+y^2=\sqrt{x^2y^2+273}$, $x:y+y:x=4\frac{1}{4}$. 4) $x^2-y^2=21(x-y)$, $x-3:y=2\frac{xy-1}{xy+2y}$.

5) $x+y+\sqrt{x+y-2}=14$, $\frac{x^2y^2}{3}-\frac{3xy}{4}=174$. 6) $\frac{2(x+y)-7}{5(x+y-4)}=\frac{5}{6}-\frac{2}{x+y}$, $x:y=y:(x+3y)$.

*Ὁμὰς ἕκτη.* Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα.

1) $x^3+y^3=\frac{1}{3}$, $\frac{x+y+5}{2}-\frac{4}{x+y+1}=1$. 2) $x^3-y^3=728$, $\sqrt{\frac{x-y+2}{x-y-1}}+\sqrt{\frac{x-y-1}{x-y+2}}=\frac{5}{2}$.

3) $x^3+y^3=973$, $(x-y)^2-7(x+y)=90-xy$. 4) $x^3+y^3=19$, $x+y=4$. 5) $x^3-y^3=341$, $x-y=11$.

6) $\sqrt{x}(\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3})=273$, $x\sqrt{xy}+y^2=364$. 7) $xy=72$, $x^2+y^2+\omega^2=289$, $x+y+\omega=29$.

9) $x^2-y\sqrt{xy}=535$, $y^2=x\sqrt{xy}-234$. 9) $x^2+y^2=40$, $xy=\omega$, $x+y=8$. 10) $y^2+\omega^2-x(y+\omega)=25$, $\omega^2+x^2-y(\omega+x)=16$, $x^2+y^2-\omega(x+y)=9$.

## Προβλήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

*188.* Διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἀκολουθοῦμεν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν καὶ διὰ τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν κατωτέρω ἁπλᾶ τινα προβλήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Πρόβλημα 1ον). ***«Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 1 ἰσοῦται μὲ 86 ;».***

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ x εἶνε τὸ $x^2$, τὸ μὲν τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θὰ εἶνε $3x^2$, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε τὸ 2x. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x^2+2x+1=86.$$

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $x=5$, $x=-\frac{17}{3}$. Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5 ἢ ὁ $-\frac{17}{3}$.

Πρόβλημα 2ον). ***«Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, ἵνα τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ κατὰ 4 τὸν διαιρέτην;».***

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{96}{x}-x=4$, ἢ $x^2+4x-96=0$.

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=8$.

Πρόβλημα 3ον). ***«Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων κλάσματος εἶνε 120· οἱ ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφηροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν καὶ ἐπροσθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖοι εἶνε οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ;»***

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητήν, ὁ παρανομαστὴς θὰ εἶνε $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x+1=\frac{120}{x}-1$ ἢ $x^2+x=120-x$ ἢ $x(x+2)=120$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν $x=10$, $x=-12$.

Ἑπομένως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος θὰ εἶνε οἱ 10 καὶ 12 ἢ οἱ $-12$ καὶ $-10$.

Πρόβλημα 4ον). ***«Τίς εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{4}$ αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουν τὸν 16 διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὸ $\frac{4}{5}$ τοῦ ζητουμένου πλὴν 15 ;»***

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{4}+1=\frac{16}{\frac{4x}{5}-15}.$$

Ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=20$, καὶ $x=-\frac{31}{12}$.

Πρόβλημα 5ον). «*Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ περιττοὶ διαδοχικοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶνε 8000*».

Ἔστωσαν $2x-1$ καὶ $2x+1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν $(2x+1)^2-(2x-1)^2=8000$,
ἢ $8x=8000$, καὶ $x=1000$.
Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε 2001, καὶ 1909.

Πρόβλημα 6ον). «*Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι τῶν 3·2·5· τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε ἴσον μὲ 342· νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί*».

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν x, y, ω τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $x^2+y^2+\omega^2=342$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ x, y καὶ ω εἶνε ἀνάλογοι τῶν 3, 2 καὶ 5 θὰ εἶνε $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{\omega}{5}$. Ἐκ τούτων ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους διὰ τοῦ ρ, $x=3.\rho$, $y=2.\rho$, $\omega=5.\rho$.
Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $9\rho^2+4\rho^2+25\rho^2=342$,
ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\rho=\pm3$. Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ $\pm9 \cdot \pm6 \cdot \pm15$.

Πρόβλημα 7ον). «*Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τούτων*».

Ἔστωσαν $x-1$, x καὶ $x+1$ οἱ τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοί.

Θὰ ἔχωμεν $(x-1).\ x.\ (x+1)=5\ (x-1+x+x+1)$,

ἢ $(x^2-1).\ x=15x$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x=\pm4$ καὶ $x=0$. Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 3·4·5, ἢ οἱ $-5 \cdot -4 \cdot -3$, ἢ οἱ $-1 \cdot 0 \cdot +1$.

Πρόβλημα 8ον). «*Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀκέραιοι διαδοχικοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ κύβος τοῦ μεγαλυτέρου αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν δύο ἄλλων*».

Ἔστωσαν x, $x+1$ καὶ $x+2$ οἱ τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Θὰ ἔχωμεν $(x+2)^3=3[(x+1)^3+x^3]$ ἢ $5x^3+3x^2-3x-5=0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτη εἶνε ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ἡ μὲν μία ῥίζα εἶνε 1, αἱ δὲ δύο ἄλλαι μιγαδικαί. Ἐπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶνε οἱ 1·2·3.

Πρόβλημα 9ον). «***Ἐγευμάτισάν ποτε 15 ἄτομα· πάντες οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 36 δρχ. καὶ πᾶσαι αἱ γυναῖκες 36 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα ἐξώδευσε καθείς, ἐὰν καθεμία γυνὴ ἐδαπάνησε 2 δρχ. ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός ;***»

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε 15—x θὰ εἶνε ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς μὲν ἀνδρὸς θὰ εἶνε $\frac{36}{x}$, καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{36}{15-x}$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $\frac{36}{15-x}=\frac{36}{x}-2$,

ἢ $x^2-51x+270=0$, καὶ $x=\frac{51\pm 39}{2}$.

Ἐκ τῶν δύο σημείων ἀποκλείεται τὸ +, διότι ὅταν εἶνε $x=\frac{51+39}{2}=45$, θὰ ἔχωμεν 45 ἄνδρας, ἐνῶ ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἦσαν 15. Ὥστε εὑρίσκομεν $\frac{51-39}{2}=6$ ἄνδρας καὶ 15—6=9 γυναῖκας.

Πρόβλημα 10ον*). «***Σῶμά τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενὸν) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος υ ;***»

Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Φυσικῆς) τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους, γνωστοὺς ἐκ τῆς Φυσικῆς,

$$\upsilon=\alpha t-g\frac{t^2}{2},\quad \tau=\alpha-gt, \qquad (1)$$

ὅπου τὸ τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t, καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν ἴσην μὲ 9, 81 μ. (κατὰ προσέγγισιν). Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$gt^2-2\alpha t+2\upsilon=0. \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ t.

***Διερεύνησις.*** Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς (2) πραγματικαὶ εἶνε

$\alpha^2 - 2\,g\,\upsilon \geqq 0$, ἢ $\upsilon \leqq \frac{\alpha^2}{2g}$. Ἐπομένως $\upsilon = \frac{\alpha^2}{2g}$ εἶνε τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ κινητόν, ἂν ριφθῇ μὲ ταχύτητα ἀρχικὴν α. Ἐὰν εἶνε $\upsilon = \frac{\alpha^2}{2g}$ αἱ δύο ρίζαι τῆς (2) εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\alpha}{g}$.

Ἐπομένως χρειάζεται $\frac{\alpha}{g}$ χρόνον, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος τὸ κινητόν. Εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ ταχύτητα ἴσην μὲ μηδέν. Ἀντικαθιστῶντες πράγματι εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) τὸ t διὰ τοῦ $\frac{\alpha}{g}$, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον ἴσον μὲ μηδέν. Ἤτοι $\tau = \alpha - \frac{g\alpha}{g} = 0$. Ἐὰν εἶνε $\upsilon < \frac{\alpha^2}{2g}$, αἱ δύο ρίζαι τῆς πρώτης τῶν (1) εἶνε πραγματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαί, ὁ δὲ ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει αὐτὰς εἶνε ὁ

$$t = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2g\upsilon}}{g}.$$

Καὶ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ t ἁρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα. Διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φορὰς διὰ καθενὸς σημείου, κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν παριστάνει τὸ ὕψος υ, μίαν ἀνερχόμενον καὶ μίαν κατερχόμενον. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν μία τῶν τιμῶν τούτων τοῦ t εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{g}$ κατὰ $\frac{\sqrt{\alpha^2 - 2g\upsilon}}{g}$, ἡ δὲ ἄλλη εἶνε μικροτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{g}$ κατὰ τὴν ποσότητα ταύτην. Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι διὰ τὰς δύο αὐτὰς τιμὰς τοῦ t αἱ ταχύτητες (δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ τ τῆς δευτέρας τῶν (1) ) εἶνε ἀντίθετοι.

Ἐὰν τεθῇ υ=0, θὰ ἔχωμεν t=0, καὶ $t = \frac{2\alpha}{g}$.

Τὸ $\frac{2\alpha}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον μετὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησεν. Ὅθεν ὁ χρόνος καθ' ὃν γίνεται ἡ ἀνάβασις ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον καθ' ὃν γίνεται ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

Πρόβλημα 11ον*). ***«Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος φρέατος, ἂν ἐπέρασαν* t *δεύτερα λεπτά, ἀφ' ὅτου ἀφέθη νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἠκούσθη ὁ ἦχος, ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς*** *πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται)».*

Παριστάνομεν διὰ τοῦ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος, καὶ διὰ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη.

1) Ἀπὸ τὸν χρόνον $t_1$ τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ.

2) Ἀπὸ τὸν χρόνον $t_2$ τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς τὴν ἀπόστασιν x.

Ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x = \frac{1}{2} g t_1^2$,

ὅστις δίδει τὸ διάστημα διὰ τοῦ χρόνου κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶνε καὶ ἡ κίνησις κατὰ τὴν πτῶσιν τοῦ λίθου.

Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ (1)

Ἐκ τοῦ τύπου $x = \tau . t_2$, ὅστις δίδει τὸ διάστημα διὰ τῆς ταχύτητος τ καὶ τοῦ χρόνου $t_2$ κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἤχου, εὑρίσκομεν

$$t_2 = \frac{x}{\tau}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{\tau} = t, \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{\tau}. \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x,

$$gx^2 - 2\tau(gt+\tau)x + g\tau^2 t^2 = 0. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ $t_1$ εἶνε θετικὸν κατὰ τὴν (1) ἢ τὴν (2) τὸ ἴσον αὐτοῦ $t - \frac{x}{\tau}$ πρέπει νὰ εἶνε θετικόν, ἤτοι,

$$t - \frac{x}{\tau} > 0, \quad \text{ἢ} \quad x < \tau t. \qquad (4)$$

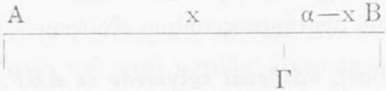
Ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς (3) εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶνε θετικὸν τὸ $\tau^2(gt+\tau)^2 - g^2\tau^2t^2$, ἢ τὸ $\tau^3(\tau+2gt)$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει. Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε $\tau^2t^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{2\tau(gt+\tau)}{g}$, τὰ ὁποῖα εἶνε θετικά. Ἐπομένως αἱ δύο ῥίζαι εἶνε θετικαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶνε κατὰ τὴν (4) τὸ $x < \tau t$ (καὶ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε $\tau.t.\tau.t$, εἶνε δὲ αὗται ἄνισοι), ἕπεται ὅτι ἡ μία τῶν ῥιζῶν εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ $\tau.t$ καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα τούτου, ἡ ὁποία καὶ θὰ εἶνε δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα διὰ νὰ πληροῦται ἡ ἀνισότης (4).

Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (3) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμήν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον πλὴν τοῦ ριζικοῦ. Ἤτοι ἔχομεν

$$x = \frac{\tau}{g}\left( gt + \tau - \sqrt{\tau(\tau + 2gt)} \right).$$

Πρόβλημα (τῆς χρυσῆς τομῆς) 12ον)*. *«Δοθεῖσαν εὐθεῖαν μήκους α νὰ διαιρέσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον».*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ διαιρεῖ τὴν (ΑΒ)=α εἰς δύο μέρη, τὰ




(Σχ. 13)

(ΑΓ)=x καὶ (ΓΒ)=α—x, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ x εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ α—x, θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}$ ἢ $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0.$

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{5\alpha^2}}{2} = \frac{-\alpha \pm \alpha\sqrt{5}}{2} = \frac{\alpha(\pm\sqrt{5} - 1)}{2}$$

***Διερεύνησις.*** Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε πραγματικαὶ καὶ μὲ σημεῖα ἀντίθετα, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε $-\alpha^2$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3. Ἑπομένως ἡ ρίζα, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον σὺν τοῦ ριζικοῦ, θὰ εἶνε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α, ἄρα δίδει τὴν ζητουμένην λύσιν. Ἡ ἄλλη ρίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική. Ὥστε ἔχομεν $x = \frac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀπὸ τοῦ Α, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{\alpha}{2}$.

Πρόβλημα 13ον). *«Νὰ μερισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν 1620».*

Ἐὰν διὰ τοῦ x καὶ y παραστήσωμεν τὰ δύο μέρη, θὰ ἔχωμεν

$$x + y = 27, \qquad 4x^2 + 5y^2 = 1620.$$

Ἀπαλείφοντες τὸν $x$ εὑρίσκομεν $y^2-24y+144=0$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως ταύτης $y=12$. Ἄρα εἶνε $y=12$ καὶ $x=27-12=15$.

Πρόβλημα 14ον). «***Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν διαγώνιος εἶνε 17 μ., τὸ δὲ ἐμβαδὸν 120 ($\mu^2$)***».

Ἐὰν διὰ $x$ καὶ $y$ παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας διαστάσεις, ἔχομεν $xy=120$, $x^2+y^2=17^2=289$. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x=15$ καὶ $y=8$.

Πρόβλημα 15ον). «***Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.***».

Ἂν διὰ τοῦ $x$ καὶ $y$ παραστήσωμεν τὰς ζητουμένας διαστάσεις, θὰ ἔχωμεν $x-y=17$, $x^2+y^2=25^2=625$.
Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x=24$ καὶ $y=7$.

Πρόβλημα 16ον). «***Δίδεται τρίγωνόν τι ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὥστε ἂν ἀπὸ τούτου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευράν, νὰ διαιρῆται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα***».

Παριστάνομεν διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ διὰ τὴν $x$ τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν ΑΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ (ΑΕ εἶνε παράλληλος τῆς ΓΒ) θὰ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας. Ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ τούτων θὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν. Ἤτοι θὰ εἶνε

$$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{x^2}{\alpha^2}.$$

Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος· ἤτοι ἔχομεν $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{1}{2}$ καὶ $x^2=\frac{\alpha^2}{2}$, $x=\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ (ἀπορριπτομένης τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς τοῦ $x$).

## *Προβλήματα πρὸς λύσιν.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1}{6}\right)$ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{5}$ $\left(\frac{1}{11}\right)$ αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 80 (16,5) ; 40 (33).

2) Διὰ τίνος ἀριθμοῦ διαιρούμενος ὁ 147(384) δίδει πηλίκον 3 (6) πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ ; 7 (8).

3) Τίς ὁ μικρότερος δύο ἀριθμῶν, διαφερόντων κατὰ 3 (7), ἂν ἔχουν γινόμενον 54 (198) ; 6·—9·(11·—18).

4) Τίς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε κατὰ 29 (55) μικρότερος τοῦ τετραγώνου, τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου αὐτοῦ ; 7·—4·(9—6).

5) Εὕρετε δύο ἀριθμούς, ἔχοντας γινόμενον 2 (1), ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $1\frac{5}{12}$ (2). $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ (1·1).

6) Εὕρετε κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶνε κατὰ 4 (1) μικρότερος (μεγαλύτερος) τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν αὐξηθῇ (ἐλαττωθῇ) ὁ ἀριθμητὴς κατὰ 7 (1) καὶ ἐλαττωθῇ ὁ παρονομαστὴς κατὰ 5 (1) διαφέρει τοῦ προηγουμένου κατὰ $1\frac{1}{15}$ (4). $\frac{11}{15}$ (ἀδύνατον).

*Ὁμὰς δευτέρα.* 1) Τὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε κατὰ 29 (55) μικρότερος τοῦ τετραγώνου, τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου αὐτοῦ ; 7·—4·(9·—6).

2) Εὕρετε διψήφιον ἀριθμὸν ὅστις, ἂν μὲν προστεθῇ εἰς τὸν 9 (27) νὰ δίδῃ τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἂν διαιρεθῇ δὲ διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ δίδῃ 6 (2). 12(36).

3) Ἐπλήρωσέ τις κάποτε 160 (300) δρχ. διὰ καφὲ καὶ 180 (500) δρχ. διὰ τέϊον, ἔλαβε δὲ 40 (60) χρ. καφὲ ἐπὶ πλέον τοῦ τεΐου. Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμον τοῦ καφέ, ἂν τοῦ τεΐου ἐκόστιζε 5 (5) δρχ. ἐπὶ πλέον; 2,5 (2,34).

4) Εἰς ἐκδρομὴν αἱ γυναῖκες ἦσαν 3 (7) ὀλιγώτεραι (περισσότεραι) τῶν ἀνδρῶν. Ἂν οἱ μὲν ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ 1750 (1800) δρχ. αἱ δὲ γυναῖκες 800(500) δρχ., πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες, ἐὰν καθεὶς τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 50 (100) δρχ. περισσότερον ἢ καθεμία γυνή ; 15 ἢ 7 (ἀδύνατον).

5) Εἰς 27 (50) ἄνδρας καὶ γυναῖκας ἐπληρώθησαν 21 (65,4) δρ. μὲν διὰ τοὺς ἄνδρας καὶ 42 (80) διὰ τὰς γυναῖκας. Πόσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, ἂν καθεμία ἐπληρώνετο 1,50 (2) δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ ἀνδρός ; 21 (ἀδύνατον).

6) Εἰς πόσας ὥρας διανύει κινητὸν δρόμον 180 (250) χμ. ἐὰν ἐκέρδιζε (ἔχανε) 40′ (6 ὥρ.), διανῦον 9 (5) χμ. καθ' ὥραν ἐπὶ πλέον (ὀλιγώτερον) ; 4 (20,78).

7) Ἐπλήρωσαν δι' οἶνον 30 (50) δρχ. Ἐὰν ἡ φιάλη ἐκόστιζε 25 (50) λ. ὀλιγώτερον (περισσότερον) θὰ ἐλάμβανε 4 (2) φιάλας περισσοτέρας (ὀλιγοτέρας). Πόσας φιάλας ἠγόρασε ; 20 (ἀδύνατον).

8) Ἐπλήρωσέ τις διὰ τεΐον 224 (350) δρχ. Ἐπειδὴ τὸ χιλιόγρ. ἐκ[ό]στιζε 0,6 (1) δρχ. περισσότερον (ὀλιγώτερον) ἢ ὅσον ἐνόμιζεν, ἔλα[β]ε 3 (10) χρ. ὀλιγώτερον (περισσότερον). Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμο[ν;] 6,4 (6,44...

9) Ἔμπορος μετεπώλησεν ἔπιπλον ἀντὶ 144(39) δρχ., κερδίσα[ς] τόσα τοῖς ἑκατόν, ὅσον τὸ ἠγόρασε. Πόσον ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγ[ο]ρὰν αὐτοῦ ; 80 (30

10) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα (ἢ δι[α]φορὰ) μὲ (ἀπὸ) τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ εἶνε 282 (1332 256 (1369

*Ὁμὰς τρίτη*. 1) Κεφάλαιον ἐτοκίσθη πρὸς 4 ο/ο κατ' ἔτος. Πο[λ]λαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν τόκον αὐτοῦ εἰς 5 μῆνας γίνεται 117041 $\frac{2}{3}$. Πόσον ἦτο ; 265[0]

2) Ποσὸν 864 δρχ. πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς πτωχούς. Ἐὰν οὗτ[οι] ἦσαν κατὰ 6 ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 2 δρχ. περισσοτέρα[ς]. Πόσοι εἶνε οἱ πτωχοί ; 54

3) Δύο ἔμποροι πωλήσαντες ὑφάσματα, ὁ α΄ 3 πήχεις ὀλιγώτερ[ον] τοῦ β΄ ἔλαβον μαζὺ 35 δρχ. Ἂν ὁ α΄ ἐπώλει ὅσον ὁ β΄, θὰ ἐλάμβανε 24 δρχ. Ἂν ὁ β΄ ἐπώλει ὅσον ὁ α΄, θὰ ἐλάμβανε 12,5 δρχ. Πόσου[ς] πήχεις ἐπώλησε καθείς ; 15 ἢ 5· 18 ἢ 8

4) Δύο ἔμποροι ἐκέρδισαν ἀπὸ ἐπιχείρησιν 660 δρχ., ἐνῷ ὁ α΄ εἶχ[ε] διαθέσει 600 δρχ. περισσοτέρας τοῦ β΄. Πόσας δρχ. εἶχε διαθέσει ὁ α΄ ἐὰν ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 3960 δρχ. ; 360[0]

5) Δύο ἔμποροι κατέθεσαν ὁμοῦ 5000 δρχ. δι' ἐπιχείρησιν καὶ ἔλα[β]ον ὁ μὲν α΄ 2544 δρχ. μετὰ 9 μῆνας, ὁ δὲ β΄ 2860 δρχ. μετὰ 15 μ[ῆνας]. Πόσας δραχμὰς κατέθεσε καθείς ; 2400·260[0]

6) Κεφάλαιον 1300 δρχ. ἐχωρίσθη εἰς δύο ἄνισα μέρη, τὰ ὁποῖα τοκισθέντα μὲ διάφορα ἐπιτόκια, ἔδιδον τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τόκον. Ἐὰ[ν] μὲν τὸ α΄ ἐτοκίζετο μὲ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ β΄, θὰ ἔδιδεν ἐτησίως 360 δρχ. ἐὰν δὲ τὸ β΄ μὲ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ α΄, θὰ ἔδιδε 490 δρχ. Τίνα τὰ ἐπι[τ]όκια ; 7·6

*Ὁμὰς τετάρτη*. (Γεωμετρικά). 1) Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος σημείω[ν] μεταξὺ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν 78(300) εὐθείας συνδεούσα[ς] αὐτὰ ἀνὰ δύο ; 13 (25)

2) Ποῖον ἐπίπεδον πολύγωνον ἔχει 104(189) διαγωνίους ; 16(21)

3) Ἐκ δύο πολυγώνων τὸ α΄ ἔχει 6(4) πλευρὰς ἐπὶ πλέον τοῦ β΄

καὶ $3\frac{1}{3}\left(3\frac{8}{9}\right)$ φορὰς περισσοτέρας διαγωνίους· πόσας πλευρὰς ἔχει καθέν; τὸ β' 9 (6).

4) Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ 3 (2) μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου θὰ εἶνε 2,25 $\left(1\frac{9}{16}\right)$ φορὰς τοῦ ἀρχικοῦ. Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ; 6 (8).

5) Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 150 (270 ($\mu^2$), ἂν ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶνε $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{12}\right)$; 15·20 (15·36).

6) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μὲν βάσις εἶνε κατὰ 19 (22) μ. μεγαλυτέρα καθὲν δὲ τῶν σκελῶν του κατὰ 8 (9) μέτρα μεγαλύτερον τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Πόση εἶνε ἡ βάσις τούτου; 40 ἢ 24· (40 ἢ 30).

7) Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 192 (91) ($\mu^2$), ἂν διαφέρουν κατὰ 4 (ἔχουν ἄθροισμα 20) μ; 16·12·(13·7).

8) Ῥόμβου ἡ μὲν πλευρὰ ἔχει μῆκος 17 (25) μ., αἱ δὲ διαγώνιοι διαφορὰν 14 (34) μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ μικροτέρα διαγώνιος αὐτοῦ; 16 (14).

9) Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 12,5 μ., ἂν ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε 17 μ.; 24·7.

10) Εὕρετε τὰς πλευρὰς δύο τετραγώνων, ἐχόντων ἄθροισμα ἐμβαδῶν 8621 ($\mu^2$), ἂν τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων αὐτῶν εἶνε 8540. 61·70.

***Ὁμὰς πέμπτη.*** (Συστημάτων). 1) Δύο βρύσεις τρέχουσαι μαζύ, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς $2\frac{2}{5}$ (18) ὥρ. Ἡ β' (α') μόνη χρειάζεται 2 (27) ὥρας ἐπὶ πλέον τῆς α' (β'). Εἰς πόσον χρόνον ἑκάστη τὴν πληροῖ μόνη; 6·4 (54·27).

2) Δύο ἐργάται, ἐργαζόμενοι χωριστά, χρειάζονται 25 ὥρας διὰ νὰ τελειώσῃ ἕκαστος τὸ $\frac{1}{2}$ ἔργου. Ἂν εἰργάζοντο μαζύ, θὰ ἐχρειάζοντο 12 ὥρ. δι' ὁλόκληρον τὸ ἔργον. Πόσον χρόνον ἐχρειάζετο ἕκαστος διὰ τὸ ἔργον; 30·20.

3) Δύο ἐπιχειρηματίαι κατέθεσαν ὁμοῦ 2000 δρχ., ὁ α' διὰ 2 μῆνας καὶ ὁ β' διὰ 8 μ. Ὁ μὲν α' ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 1800 δρχ., ὁ δὲ β' 900 δρχ. Πόσα ἐκέρδισεν ἕκαστος; 300·400.

4) Δύο κεφάλαια ἔχοντα ἄθροισμα 30 000 δρχ., ἐτοκίσθησαν πρὸς

6 o/o. Τὸ μὲν α' ἔμεινε 4 μῆνας ἐπὶ πλέον καὶ ἔδωκε τόκον 1280 δρχ., τὸ δὲ β' 840 δρχ. Τίνα τὰ κεφάλαια ; 16 000·14 000.

5) Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε 62,5, καὶ ὁ μὲν α' ὑπερβαίνῃ τὸν β' κατὰ 4, ὁ δὲ γ' τὸν δ' κατὰ 3. 6·2·4,5·1,5.

6) Εὕρετε διψήφιον ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος μὲν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει 5 $\frac{1}{3}$, ἐλαττούμενος δὲ κατὰ 9 δίδει τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν δι' ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων αὐτοῦ. 32.

7) Εὕρετε τριψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν β' ψηφίον εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ δὲ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτου εἶνε ὡς 124 : 7· δι' ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων αὐτοῦ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς ηὐξημένος κατὰ 594. 248.

8) Εὕρετε τρεῖς ἀριθμούς, ἂν ὁ β' εἶνε μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 21, τῶν δὲ τετραγώνων τούτων 189. 12·6·3.

9) Εἰς δεξαμενὴν ρέει τὸ ὕδωρ βρύσεως ἐπὶ 3/5 τοῦ χρόνου, καθ'ὃν ἄλλη βρύσις μόνη θὰ τὴν ἐπλήρωνε. Κλείεται ἡ α' βρύσις καὶ ἀνοίγεται ἡ β' μέχρις ὅτου πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἠνοίγοντο μαζύ, θὰ ἐπληροῦτο εἰς 6 ὥρας, θὰ ἔτρεχον δ' ἐκ τῆς α' τὰ 2/3 τοῦ ἐκ τῆς β', ἀφ' ὅτου ἐκλείσθη ἡ α'. Εἰς πόσον χρόνον καθεμία βρύσις πληροῖ τὴν δεξαμενήν ; 15·10.

***Ὁμὰς ἕκτη***. (Φυσικῆς). 1) Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 μ., ἀφιέμενος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ ; (Παραβλέπεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος). 3'.

2) Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος, ριπτόμενος ἄνω κατακορύφως (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ. καὶ ἐπαναπέσῃ ; 10'.

3) Πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ριφθῇ κατακορύφως ἄνω (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ; 49'.

4) Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1460 μ. σφαῖρα, ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενὸν) καὶ ἀναχωροῦσα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 185 μ. ;

5) Ποίαν πίεσιν ἐξασκεῖ σφαῖρα 41 χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐὰν ἰσορροπῇ δύναμιν 9 χιλιογράμμων ;

6) Εἰς πόσα δευτερόλεπτα κυλίεται σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κατὰ 39,2 μ. μῆκος καὶ ὕψος 10 μ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω; 5,6''.

## *) Περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

*189.* Εἰς τὴν § 179 (σελὶς 188) εἴδομεν ὅτι τὸ τριώνυμον $αx^2+βx+γ$ λαμβάνει διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x=-\frac{β}{2α}$ τὴν ἐλαχίστην μὲν τῶν τιμῶν αὐτοῦ, ἂν εἶνε τὸ $α>0$, τὴν μεγίστην δ' αὐτῶν, ἂν εἶνε τὸ $α<0$.

Ἐν γένει, ἂν μία συνάρτησις συνεχὴς λαμβάνῃ τιμὰς αὐξανομένας καὶ ἔπειτα ἐλαττουμένας, διέρχεται διὰ μιᾶς τιμῆς, ἡ ὁποία εἶνε ἡ μεγαλυτέρα τῶν προηγουμένων καὶ ἑπομένων αὐτῆς. Ἡ τιμὴ αὕτη τῆς ἐν λόγῳ συναρτήσεως λέγεται ***μέγιστον*** αὐτῆς. Τοὐναντίον, ἐὰν συνεχὴς συνάρτησις λαμβάνῃ τιμὰς ἐλαττουμένας καὶ ἔπειτα αὐξανομένας, διέρχεται διὰ μιᾶς τιμῆς, ἡ ὁποία εἶνε μικροτέρα τῶν προηγουμένων καὶ ἑπομένων αὐτῆς καὶ λέγεται ἡ τιμὴ αὕτη ***ἐλάχιστον*** τῆς συναρτήσεως.

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον συναρτήσεών τινων. Οὕτω π. χ. προκειμένου περὶ τοῦ τριωνύμου $αx^2+βx+γ$, παριστάνομεν αὐτὸ διὰ τοῦ y, ἤτοι θέτομεν $αx^2+βx+γ=y$ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας τὸ y θὰ γίνῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, θὰ ἔχωμεν $αx^2+βx+γ-y=0$ (1).

Ἐπειδὴ αἱ ἐν λόγῳ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶνε πραγματικαί, θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ ὑπόρριζον ἐκ τῆς λύσεως τῆς (1) θὰ εἶνε θετικὸν ἢ μηδέν· δηλαδὴ θὰ εἶνε $β^2-4αγ+4αy\geqq0$, ἢ $4αy\geqq4αγ-β^2$.

Ἑπομένως, ἂν μὲν εἶνε $α>0$, θὰ ἔχωμεν $y\geqq\frac{4αγ-β^2}{4α}$, δηλαδὴ τὸ $\frac{4αγ-β^2}{4α}$ ἢ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-\frac{β^2-4αγ}{4α}$ εἶνε ἐλάχιστον τοῦ y, ἤτοι τοῦ δοθέντος τριωνύμου· ἂν δ' εἶνε $α<0$, θὰ ἔχωμεν $y\leqq\frac{4αγ-β^2}{4α}$, δηλαδὴ τὸ $\frac{4αγ-β^2}{4α}$ ἢ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-\frac{β^2-4αγ}{4α}$ εἶνε τὸ μέγιστον τοῦ δοθέντος τριωνύμου.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ὅταν τὸ ὑπόρριζον $β^2-4αγ+4αy$ γίνῃ ἴσον μὲ μηδέν, τὸ x ἰσοῦται μὲ $-\frac{β}{2α}$. Ἑπομένως τὸ δοθὲν τριώνυμον γίνεται μέγιστον (ἂν εἶνε $α<0$) ἢ ἐλάχιστον (ἂν εἶνε $α>0$) διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x=-\frac{β}{2α}$. (Παραβάλετε μὲ τὰ εἰς τὴν § 179 σελ. 187—8).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι,

*«τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν, γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι».*

Ἔστωσαν y καὶ ω δύο μεταβλητοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ ἔχουν ἄθροισμα β, καὶ ἂς παραστήσωμεν τὸ γινόμενον αὐτῶν διὰ τοῦ γ. Ἐπειδὴ εἶνε $y+\omega=\beta$ καὶ $y.\omega=\gamma$, αἱ τιμαὶ τῶν y καὶ ω θὰ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β΄ βαθμοῦ ἔστω ὡς πρὸς x (§ 173)

$$x^2-\beta x+\gamma=0. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ δ' αἱ ῥίζαι ταύτης πρέπει νὰ εἶνε πραγματικαί, θὰ ἔχωμεν $\beta^2-4\gamma\geqq 0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\gamma\leqq\frac{\beta^2}{4}$. Ἤτοι τὸ $\frac{\beta^2}{4}$ εἶνε ἡ μεγίστη ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ γ, δηλαδὴ τοῦ γινομένου $y.\omega$. Ἀλλ' ἂν εἶνε $\gamma=\frac{\beta^2}{4}$, τότε αἱ ῥίζαι τῆς ἐν λόγῳ ἐξισώσεως (1) εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\beta}{2}$.

Δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τῶν y καὶ ω εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\beta}{2}$, ἤτοι μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.

***Ἐφαρμογή.*** Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη τιμὴ τοῦ γινομένου $(2\alpha - x).\,x$, τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες ἔχουν ἄθροισμα $2\alpha-x+x=2\alpha=$σταθερόν

Κατὰ τἀνωτέρω θὰ συμβαίνῃ τοῦτο, ὅταν οἱ παράγοντες $2\alpha-x$ καὶ x γίνουν ἴσοι· ἤτοι θὰ ἔχωμεν $2\alpha-x=x$, ἐξ οὗ ἕπεται $x=\alpha$, καὶ τὸ μέγιστον γινόμενον εἶνε $(2\alpha-\alpha).\,\alpha=\alpha.\alpha=\alpha^2$.

Ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἰσχύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως καὶ διὰ περισσοτέρους θετικοὺς μεταβλητοὺς παράγοντας, ἔχοντας ἄθροισμα σταθερόν.

Πράγματι, ἔστωσαν π. χ. οἱ θετικοὶ μεταβλητοὶ παράγοντες $x, y, \omega, \varphi, \ldots$ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα $x+y+\omega+\varphi+\ldots=$ μὲ $\alpha=$ σταθερόν. Ἐὰν οἱ παράγοντες οὗτοι δὲν εἶνε ἴσοι, δυνάμεθα χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὸ ἄθροισμα των νὰ ἀντικαταστήσωμεν δύο ἐξ αὐτῶν, π.χ. τοὺς x καὶ y, διὰ τοῦ ἡμιαθροίσματός των $\frac{x+y}{2}$, ὅτε τὸ γινόμενον $\left(\frac{x+y}{2}\right).\left(\frac{x+y}{2}\right)$ (κατὰ τἀνωτέρω) εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $xy$. Κατὰ ταῦτα, ὅταν δύο ἐκ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου δὲν εἶνε ἴσοι, δυνάμεθα νὰ κάμωμεν αὐτοὺς ἴσους, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἄθροισμά των, καὶ νὰ αὐξήσωμεν οὕτω τὸ γινόμενον. Ἑπομένως τὸ γινόμενον γίνεται μέγιστον, ὅταν πάντες οἱ παράγοντες εἶνε ἴσοι.

Καθ' ὅμοιον τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον ἐδείχθη ἡ προηγουμένη πρότασις (διὰ δύο παράγοντας) θὰ δείξωμεν ὅτι,

***«τὸ ἄθροισμα δύο θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶνε σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι».***

Ἔστωσαν y καὶ ω δύο θετικοὶ μεταβλητοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ ἔχουν γινόμενον $\gamma^2$ σταθερόν, καὶ ἔστω τὸ ἄθροισμα αὐτῶν β. Ἐπειδὴ εἶνε $y+\omega=\beta$ καὶ $y.\omega=\gamma^2$, αἱ τιμαὶ τῶν y καὶ ω θὰ εἶνε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ ἔστω ὡς πρὸς x (§ 173).

$$x^2-\beta x+\gamma^2=0.$$

Ἐπειδὴ δ' αἱ ρίζαι ταύτης πρέπει νὰ εἶνε πραγματικαί, θὰ ἔχωμεν

$$\beta^2-4\gamma^2\geqq 0, \quad \text{ἐξ οὗ ἕπεται} \quad \beta\geqq 2\gamma.$$

(Ἐκ τῶν δύο σημείων τῆς ρίζης τοῦ $4\gamma^2$ ἐλάβομεν τὸ θετικόν, ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ y καὶ ω ὑπετέθησαν θετικοὶ καὶ ἔχουν ἄθροισμα β θετικόν). Δηλαδὴ τὸ $2\gamma$ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος β τῶν y καὶ ω. Ἀλλ' ἂν εἶνε $\beta=2\gamma$, τότε αἱ ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\beta}{2}$. Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν y καὶ ω εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{\beta}{2}$, τὸ ὁποῖον ἰσοῦναι μὲ γ, ἤτοι μὲ τὴν θετικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ δοθέντος γινομένου αὐτῶν $\gamma^2$.

***Ἐφαρμογή. «Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν μικροτέραν ὑποτείνουσαν».***

Ἂν y καὶ ω παριστάνουν τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ἐμβαδὸν δοθὲν σταθερὸν $\frac{1}{2}k^2$, θὰ εἶνε

$$\frac{1}{2}y\omega=\frac{1}{2}k^2, \quad \text{ἢ} \quad y\omega=k^2=\text{σταθερόν},$$

καὶ $\quad y^2+\omega^2=x^2$, ἂν x παριστάνῃ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης τοῦ τριγώνου, τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὸ ἐλάχιστον.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ x γίνῃ ἐλάχιστον, καὶ τὸ $x^2$ γίνεται ἐλάχιστον, δηλαδὴ τὸ $x^2$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τῶν τιμῶν αὐτοῦ, ὅταν τὸ x λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τῶν τιμῶν του. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ $x^2$ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο θετικῶν ἀριθμῶν $y^2$ καὶ $\omega^2$, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον $y^2.\omega^2=$ μὲ $k^2=$ σταθερόν, ἕπεται ὅτι, τὸ ἐλάχιστον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς ἴσας τιμὰς $y^2=\omega^2$ ἢ $y=\omega$. Ἤτοι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν τὴν ἐλαχίστην ὑποτείνουσαν ἔχει ***τὸ ἰσοσκελές.***

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει διὰ περισσοτέρους τῶν δύο θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἐχόντων γινόμενον σταθερόν, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν τοῦ μεγίστου γινομένου περισσοτέρων τῶν δύο θετικῶν παραγόντων, ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα.

Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν.

*«Τὸ γινόμενον* $x^{\mu}.y^{\nu}$ *τῶν μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν* x *καὶ* y, *ἐχόντων ἄθροισμα* $x+y$ *σταθερὸν α, γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ* x *καὶ* y *εἶνε ἀνάλογοι τῶν ἐκθετῶν αὐτῶν μ καὶ ν (ὑποτιθεμένων θετικῶν καὶ ἀκεραίων)».*

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $x^{\mu}.y^{\nu}$ γράφεται καὶ οὕτω

$$\frac{x^{\mu}.y^{\nu}}{\mu^{\mu}.\nu^{\nu}}\times\mu^{\mu}.\nu^{\nu}.$$

Τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς $\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}.\left(\frac{y}{\nu}\right)^{\nu}\times\mu^{\mu}.\nu^{\nu}.$

Ὁ μὲν παράγων $\mu^{\mu}.\nu^{\nu}$ εἶνε σταθερός, τὸ δὲ γινόμενον $\left(\frac{x}{\mu}\right)^{\mu}.\left(\frac{y}{\nu}\right)^{\nu}$ ἀποτελεῖται ἐκ μ παραγόντων ἴσων μὲ $\frac{x}{\mu}$ καὶ ν ἄλλων ἴσων μὲ $\frac{y}{\nu}$. Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν παραγόντων τούτων εἶνε ἴσον μὲ

$$\mu.\frac{x}{\mu}+\nu.\frac{y}{\nu}=x+y= \text{ μὲ } \alpha= \text{ σταθερόν.}$$

Ἄρα τὸ γινόμενον θὰ γίνῃ μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες γίνουν ἴσοι, δηλαδὴ ὅταν εἶνε

$$(1) \qquad \frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}, \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{y}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (1) ἔχομεν ἐφαρμόζοντες γνωστὴν ἰδιότητα (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) τῶν ἴσων κλασμάτων

$$\frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{x+y}{\mu+\nu}=\frac{\alpha}{\mu+\nu}, \text{ (ἐπειδὴ ὑπετέθη } x+y=\alpha).$$

Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶνε $x=\frac{\alpha.\mu}{\mu+\nu}$ καὶ $y=\frac{\alpha.\nu}{\mu+\nu}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεικνύεται ὅτι ἡ ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους θετικοὺς ἀριθμούς, ἔχοντας ἄθροισμα σταθερόν.

***Ἐφαρμογή.*** Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $x^4(3\alpha-x)^3$, ἐνῷ εἶνε $x+3\alpha-x=3\alpha=$σταθερόν.

Κατὰ τἀνωτέρω θὰ εἶνε $\frac{x}{4}=\frac{3\alpha-x}{3}=\frac{3\alpha}{7}$,

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=\frac{3\alpha.4}{7}=\frac{12\alpha}{7}$.

Καὶ καθ' ἣν περίπτωσιν οἱ ἐκθέται $\mu,\nu,\varrho$ π. χ. τῶν δυνάμεων $x^{\mu}$, $y^{\nu}$, $\omega^{\varrho}$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $x,y,\omega$, ἐχόντων ἄθροισμα σταθερὸν $\alpha$, εἶνε κλασματικοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, ἰσχύει ἡ ἀνωτέρω πρότασις. Διότι, ἂν π.χ. εἶνε τὸ $\mu=\frac{3}{4}$, τὸ $\nu=\frac{2}{3}$ καὶ τὸ $\varrho=\frac{1}{2}$, τρέπομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, καὶ εὑρίσκομεν ἀντ' αὐτῶν τὰ $\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{6}{12}$.

Ἀκολούθως ὑψοῦμεν τὸ γινόμενον $x^{\frac{3}{4}}.y^{\frac{2}{3}}.\omega^{\frac{1}{2}}$ εἰς τὴν $12^{\text{ην}}$ δύναμιν· καὶ εὑρίσκομεν τὸ $x^9.y^8.\omega^6$, τὸ ὁποῖον λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν, ὅταν καὶ τὸ δοθὲν γινόμενον λάβῃ τὴν μεγίστην αὐτοῦ τιμήν. Ἑπομένως πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{x}{9}=\frac{y}{8}=\frac{\omega}{6}=\frac{x+y+\omega}{9+8+6}=\frac{\alpha}{23}$ τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ οὕτω (ἂν πάντας τοὺς παρονομαστὰς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 12)

$$\frac{x}{3/4}=\frac{y}{2/3}=\frac{\omega}{1/2}=\frac{\alpha}{3/4+2/3+1/2=23/12}.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς τιμὰς τῶν $x,y$ καὶ $\omega$.

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται τὸ μέγιστον τοῦ $x^2.\sqrt{\alpha^4-x^4}$

Θεωροῦντες ἀντὶ τοῦ δοθέντος γινομένου τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $x^4.(\alpha^4-x^4)$ ἐνῷ εἶνε $x^4+\alpha^4-x^4=\alpha^4=$σταθερόν, θὰ ἔχωμεν κατὰ τἀνωτέρω

$$\frac{x^4}{4}=\frac{\alpha^4-x^4}{1}=\frac{\alpha^4}{5},\ \text{καὶ}\ x=\sqrt[4]{\frac{4\alpha^4}{5}}=\alpha\sqrt[4]{\frac{4}{5}}.$$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς λύσεως ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ εὑρίσκομεν ἐνίοτε τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ κλασματικῶν συναρτήσεων.

Ἔστω π. χ. ὅτι ζητεῖται τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως

$$y=\frac{\beta(\alpha^2+x^2)}{2(\alpha+x)}. \tag{1}$$

Ἀπαλείφοντες τὸν παρονομαστὴν (ὑποθέτοντες τὸ $\alpha+x\neq 0$) ἔχομεν

$$\beta x^2-2yx+\alpha(\alpha\beta-2y)=0.$$

Διὰ νὰ εἶνε δ' αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης (ὡς πρὸς $x$) πραγματικαί, πρέπει νὰ ἔχωμεν,

$$y^2-\alpha\beta(\alpha\beta-2y)\geqq 0,\ \text{ἢ}\ y^2+2\alpha\beta y-\alpha^2\beta^2\geqq 0.$$

Ἂν τὴν τελευταίαν ἀνισότητα λύσωμεν ὡς πρὸς $y$ (ἂν εἶνε τὰ $\alpha$ καὶ $\beta$ ὁμόσημα) θὰ ἔχωμεν $\quad y\leqq-\alpha\beta(1+\sqrt{2})$ καὶ $y\geqq\alpha\beta(-1+\sqrt{2})$.

Ἑπομένως τὸ $y=-\alpha\beta(1+\sqrt{2})$ εἶνε μέγιστον, τὸ δὲ $y=\alpha\beta(-1+\sqrt{2})$

ἐλάχιστον τοῦ y ἢ τῆς δοθείσης συναρτήσεως (1). Ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν διαδοχικῶς ἀντὶ τοῦ y τὰς ἀνωτέρω δύο τιμὰς αὐτοῦ καὶ λύσωμεν τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μὲν μέγιστον τοῦ y ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν τοῦ $x=$ μὲ $-\alpha\,(1+\sqrt{2})$, τὸ δὲ ἐλάχιστον εἰς τὴν τιμὴν $x=$ μὲ $\alpha(-1+\sqrt{\ })$.

## *Προβλήματα καὶ ἀσκήσεις.*

1) Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων (παραλληλογράμμων) τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

2) Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

3) Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα μήκους α εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων τοῦ μήκους ἑκάστου διὰ τοῦ ἄλλου νὰ εἶνε ἐλάχιστον.

4) Ἐκ πάντων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

5) Ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου (παραλληλογράμμου), ἔχοντος σταθερὰν περίμετρον, κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς οὕτω σχηματιζομένης ἐπιφανείας ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τῶν σχηματιζομένων τετραγώνων.

6) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τῶν ἐχόντων ἀκμὰς μὲ σταθερὸν ἄθροισμα, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν.

7) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον.

8) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῶν κάτωθι συναρτήσεων.
α') $\dfrac{\alpha+x}{\alpha-x}+\dfrac{\alpha-x}{\alpha+x}$. β') $\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{x}$. γ') $\dfrac{4x^2+1}{(x-1)^2}$. δ') $\dfrac{1-2x}{(x+2)^2}$.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

## *Περὶ προόδων.*

### Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

**190.** ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος*** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι τῆς προόδου,*** ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς καθένα ὅρον δίδει τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, λέγεται ***λόγος τῆς προόδου.***

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶνε ἀριθμὸς θετικός, οἱ ὅροι αὐτῆς βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα,*** ἐὰν δ' εἶνε ἀριθμὸς ἀρνητικός, οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***φθίνουσα.***

Οὕτω ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, . . . . . . . . . . . . 48 εἶνε πρόοδος ἀριθμητικὴ αὔξουσα μὲ λόγον 1, καθὼς καὶ

ἡ σειρὰ 1, 3, 5, . . . . . . . . . . . . . . . 53 μὲ λόγον 2,

ἡ δὲ 35, 30, 25, . . . , . . . . . . 0 εἶνε πρόοδος ἀριθμητικὴ φθίνουσα μὲ λόγον —5.

Ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀριθμητικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ δεύτερος ὅρος θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha+\omega$, ὁ τρίτος ὑπὸ τοῦ $\alpha+2\omega$, ὁ τέταρτος ὑπὸ τοῦ $\alpha+3\omega$, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε οἱ ὅροι τῆς προόδου θὰ εἶνε

$$\alpha,\ \alpha+\omega,\ \alpha+2\omega,\ \alpha+3\omega,\ \alpha+4\omega,\ \dots \qquad (1)$$

Ἄρα,

***«ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων».***

Οὕτω ὁ ὅρος τῆς ἀνωτέρω προόδου (1) ὁ ἔχων τὴν τριακοστὴν τάξιν ἰσοῦται μὲ $\alpha+29\omega$.

Ἐὰν διὰ τοῦ ν παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (1) καὶ διὰ τοῦ τ τὸν ἔχοντα τὴν νυοστὴν τάξιν ὅρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτου θὰ εἶνε (ν—1) τὸ πλῆθος. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\tau=\alpha+(\nu-1)\omega.$$

Π.χ. ἂν ζητῆται ὁ ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου, ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τρίτην τάξιν, καὶ τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶνε 3 καὶ ὁ λόγος 5, ἔχομεν $\alpha=3$, $\omega=5$, $\nu=13$. Ἑπομένως ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τρίτην τάξιν ὅρος ἰσοῦται μὲ

$$3+(13-1).5=3+12.5=3+60=63.$$

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ ὅρος ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τάξιν εἶνε 31 καὶ ὁ τὴν εἰκοστὴν τάξιν 61. Ἔχομεν ὅτι,

ὁ δέκατος ὅρος εἶνε $\alpha+9\omega=31$, ὁ εἰκοστὸς ὅρος εἶνε $\alpha+19\omega=61$.

Ἀφαιροῦντες ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha+19\omega=61$ τὴν $\alpha+9\omega=31$, εὑρίσκομεν $10\omega=61-31=30$, ἢ $10\omega=30$ καὶ $\omega=3$.

Ἑπομένως εἶνε $\alpha+9.3=31$ καὶ $\alpha=4$. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶνε 4, 7, 10, 13,....

### *Ἀσκήσεις.*

1) Εὕρετε τὸν δέκατον ὅρον

α΄) τῆς προόδου $9\cdot13\cdot17\cdot\ldots$ β΄) τῆς $-3\cdot-1\cdot+1\cdot\ldots$

2) Εὕρετε τὸν ὄγδοον ὅρον τῆς

$\alpha$, $\alpha+3\beta$, $\alpha+6\beta$,..... $(\alpha+21\beta)$.

## Ἄθροισμα ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

***191.*** Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

***«Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων».***

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \kappa, \lambda, \tau$ (1)
καὶ λόγος μὲν αὐτῆς ὁ $\omega$, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὅρων ταύτης $\nu$.
Ἔχομεν ὅτι $\beta=\alpha+\omega$, $\gamma=\alpha+2\omega$.
Ἐπίσης ὅτι $\tau=\lambda+\omega$ καὶ $\tau=\kappa+2\omega$.
Ἑπομένως $\lambda=\tau-\omega$ καὶ $\kappa=\tau-2\omega$.
Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας $\beta=\alpha+\omega$ καὶ $\lambda=\tau-\omega$, εὑρίσκομεν $\beta+\lambda=\alpha+\tau$.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\gamma=\alpha+2\omega$ καὶ $\kappa=\tau-2\omega$ εὑρίσκομεν, προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη $\gamma+\kappa=\alpha+\tau$, κ.ο.κ.

Ἔστω τώρα ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς (1). Ἂς παραστήσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ Σ· ἤτοι ἂς θέσωμεν

$$\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\kappa+\lambda+\tau,$$

ἢ

$$\Sigma=\tau+\lambda+\kappa+\ldots\ldots+\gamma+\beta+\alpha.$$

Ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\lambda)+(\gamma+\kappa)+\ldots\ldots+(\tau+\alpha).$$

Ἐπειδὴ καθὲν τῶν ἐν παρενθέσει ἀθροισμάτων εἶνε ἴσον μὲ $(\alpha+\tau)$, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶνε ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, δηλαδὴ μὲ ν, ἔχομεν $2\Sigma=(\alpha+\tau).\nu$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ ν

$$\Sigma=\frac{(\alpha+\tau).\ \nu}{2}. \tag{2}$$

Ἤτοι, ***«τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς, ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς».***

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha+(\nu-1).\ \omega$, ὅπου ω παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου, εὑρίσκομεν

$$\Sigma=\frac{[\alpha+\alpha+(\nu-1).\omega]\nu}{2}=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}.\ \nu \tag{3}$$

Ὁ τύπος αὐτὸς χρησιμεύει νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἄθροισμα Σ, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου.

Π.χ. ἂν ζητῆται τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα πρώτων ὅρων τῆς προόδου

$$2,\ 5,\ 8,\ldots..$$

ἔχομεν $\alpha=2$, $\omega=3$, $\nu=10$. Ἑπομένως ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (3), εὑρίσκομεν

$$\Sigma=\frac{(2.2+9.3).10}{2}=\frac{31.5}{1}=155.$$

### *Ἀσκήσεις.*

1) Εὕρετε τὰ ἀθροίσματα τῶν προόδων.

α′) 5·3·1·.. (ἐκ δέκα ὅρων). β′)—4·—1·2·.. (ἐξ ἑπτὰ ὅρων).

γ′) α,4α,7α, (ἐκ ν ὅρων). δ′) $\frac{10}{15}, \frac{7}{15}, \frac{4}{15}, \ldots$ (ἐξ 21 ὅρων).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν (150). $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (11325).

## Περὶ παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν ὅρων.

*192.* Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ὁσουσδήποτε ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν διὰ τῶν α καὶ τ παραστήσωμεν τοὺς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι θὰ παρεμβληθοῦν, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου, τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ σχηματίσωμεν, θὰ εἶνε $(\nu+2)$. Ὁ τελευταῖος αὐτῆς ὅρος θὰ εἶνε ὁ τ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu+1)\omega_1$, ὅπου τὸ $\omega_1$ παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος εὑρίσκομεν $\omega_1=\dfrac{\tau-\alpha}{\nu+1}$.

Οὕτω δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ζητουμένην πρόοδον ἀφοῦ γνωρίζομεν τὸν πρῶτον ὅρον, τὸν λόγον καὶ τὸν τελευταῖον ὅρον αὐτῆς.

Ἂν π. χ. ζητῆται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 16 ἀριθμοὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικὴν μετὰ τῶν δοθέντων, ἔχομεν $\alpha=1$, $\tau=4$, $\nu=16$.

Ἑπομένως θὰ εἶνε, $\omega_1=\dfrac{4-1}{16+1}=\dfrac{3}{17}$.

Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶνε ἡ $1,\ 1\dfrac{3}{17},\ 1\dfrac{6}{17},\ \dots\ 4.$

### *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

*Ὁμὰς πρώτη.* 1) Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 (17) νὰ παρεμβληθοῦν 9 (3) ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικήν. 0,1 (5,25).

2) Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἡμερονυκτίου ; 156.

3) Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἂν πληρώνεται εἰς 12 δόσεις, καὶ ἡ α′ δόσις εἶνε 10 δρ., ἡ β′ 15 δρ., ἡ γ′ 20 δρ. κ. ο. κ. ; 450.

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 300 $(2\nu+1)$. $150^2(\nu+1)^2$.

5) Ἂν ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ ὁ 11ος 71, τίνες εἶνε οἱ τέσσαρες ὅροι ;

εἶνε τὸ μὲν $\alpha=58$, 25 τὸ δὲ $\omega=-3{,}5$.

6) Εὕρετε πρόοδον ἀριθμητικὴν ἐκ 12 ὅρων, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέσων ὅρων αὐτῆς εἶνε 74, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων 70. (2·5·8·…35).

7) Εὕρετε ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ 3 (11) ὅρων, ἐχόντων ἄθροισμα 33 (176) γινόμενον (διαφορὰν τῶν ἄκρων αὐτῶν) δὲ 1287 (30) $[9 \cdot 11 \cdot \ldots (1 \cdot 4 \cdot \ldots)$.

8) Εὕρετε τοὺς πέντε ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν τὸ μὲν γινόμενον αὐτῶν (τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων) εἶνε $12320 \left(\frac{137}{180}\right)$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν 40(45). $2 \cdot 5, \ldots (3 \cdot 6)$.

9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου $1, \frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu-2}{\nu}, \frac{\nu-3}{\nu}, \ldots \frac{1}{\nu}, \frac{(\nu+1)}{2}$.

10) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$\frac{\nu^2-1}{\nu}, \nu, \frac{\nu^2+1}{\nu}, \frac{\nu^2+2}{\nu}, \ldots \ldots \frac{\nu^2+(\nu-2)}{\nu}, \frac{(2\nu^2+\nu)-3}{2}.$$

*Ὁμὰς δευτέρα.* 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων (τῶν κύβων) τῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ ν.

Παριστάνομεν διὰ $S_1$ καὶ $S_2$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἀπὸ 1 μέχρι ν.

Ἔχομεν, ὡς γνωστόν, $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

Θέτομεν $\beta=1$, ὅτε $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2.1+3.\alpha.1^2+1$.

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα τὸ α διὰ τῶν $1, 2, 3, \ldots \ldots \nu$

ὅτε ἔχομεν

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3.1^2+3.1+1$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3.2^2+3.2+1$$
$$4^3=(3+1)^3=3^3+3.3^2+3.3+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\nu+1)^3=\nu^3+3.\nu^2+3.\nu+1.$$

Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\nu+1)^3=1+3.S_2+3.S_1+\nu,$$

ἢ
$$(\nu+1)^3=1+3S_2+3.\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu,$$

ἐξ οὗ προσδιορίζομεν τὸ $S_2$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων $S_3$, θὰ χρησιμοποιήσωμεν καθ' ὅμοιον τρόπον τὸν τύπον $(\alpha+1)^4=\alpha^4+4\alpha^3.1+6\alpha^2.1^2+4\alpha.1^3+1^4$ καὶ θὰ εὕρωμεν $(\nu+1)^4=1+4S_3+6S_2+4S_1+\nu$.

2) Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 20 καὶ τὸ τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν $1\frac{1}{24}$. $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$.

## Πρόοδοι γεωμετρικαί.

**193.** ***Γεωμετρικὴ πρόοδος*** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι τῆς προόδου,*** ὁ δὲ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὅρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, λέγεται ***λόγος τῆς προόδου.***

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενος (§ 6), εἶνε εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος οἱ ὅροι αὐτῆς, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενοι, βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα,*** ἐὰν δ' ὁ λόγος αὐτῆς, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενος, εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος, οἱ ὅροι αὐτῆς, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενοι, βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***φθίνουσα.***

Κατὰ ταῦτα ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots 64$$

ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν, τῆς ὁποίας λόγος εἶνε ὁ 2. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ

$$-5, 10, -20, 40, -80, \ldots$$

ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον αὔξουσαν μὲ λόγον τὸν $-2$.

Οἱ ἀριθμοὶ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

καὶ οἱ $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \ldots$

ἀποτελοῦν φθινούσας γεωμετρικὰς προόδους μὲ λόγους τοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{3}$.

Ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ ὅρος ταύτης ὁ ἔχων τὴν δευτέραν τάξιν θὰ εἶνε $α.ω$. Διότι γίνεται ἐκ τοῦ α διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ω. Ὁ ἔχων τὴν τρίτην τάξιν ὅρος θὰ παριστάνεται ὑπὸ $α.ω.ω = α.ω^2$ ὁ ἔχων τὴν τετάρτην τάξιν ὅρος παρίστανεται ὑπὸ τοῦ $αω^3$ κ.ο.κ. Ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτω $α, α.ω, αω^2, αω^3, αω^4, \ldots$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος γεωμετρικῆς τινος προόδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν οἱονδήποτε ὅρον αὐτῆς. Οὕτω ὁ ἔχων τὴν δευτέραν τάξιν ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὸν λόγον· ὁ ἔχων τὴν τρίτην τάξιν ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ὅρον ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ λόγου· ὁ ἔχων τὴν τετάρτην τάξιν ὅρος = μὲ τὸν πρῶτον ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ λόγου κ.ο.κ.

Ἐν γένει, ***«ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων».***

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν διὰ τοῦ τ παραστήσωμεν τὸν νυοστῆς τάξεως ὅρον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον τὸν ω, θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha\omega^{\nu-1}$.

Π. χ. ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου 2, 6, 18, . . . . . εἶνε ὁ $2.3^9$, διότι εἶνε $\alpha=2$ καὶ $\omega=3$ τὸ δὲ $\nu=10$.

Ὁ ἔχων τὴν ἑνδεκάτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου $9, 3, \frac{1}{3}, \ldots$ εἶνε ὁ $9.\frac{1}{3^{10}}$. Διότι εἶνε $\alpha=9$ καὶ $\omega=\frac{1}{3}$ τὸ δὲ $\nu=11$.

Ὁ ἔχων τὴν ἕκτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου $\frac{13}{10}, \frac{13}{100}, \ldots\ldots$ εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\alpha=\frac{13}{10}$, $\omega=\frac{1}{10}$ καὶ $\nu=6$ θὰ εἶνε $\frac{13}{10}\times\frac{1}{10^5}$.

## Ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

***194.*** Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \ldots, \alpha\omega^{\nu-1}$ ἐκ ν ὅρων. Ἐὰν διὰ τοῦ Σ παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots\ldots+\alpha\omega^{\nu-1} \tag{1}$$

Ἐὰν τῆς ἰσότητος ταύτης πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐπὶ ω, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον

$$\Sigma\omega=\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3+\ldots+\alpha\omega^\nu$$

τὴν (1) (κατὰ μέλη) προκύπτει

$$\Sigma\omega-\Sigma=\alpha\omega^\nu-\alpha \text{ ἢ } \Sigma.(\omega-1)=\alpha\omega^\nu-\alpha,$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\omega-1$ (τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται $\neq 0$, δηλαδὴ $\omega\neq 1$)

$$\Sigma=\frac{\alpha\omega^\nu-\alpha}{\omega-1}. \tag{2}$$

Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην θέσωμεν τὸ τ ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^{\nu-1}$, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς δοθείσης προόδου (1), θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\Sigma=\frac{\alpha\omega^{\nu-1}\,\omega-\alpha}{\omega-1}=\frac{\tau.\omega-\alpha}{\omega-1}} \tag{3}$$

Ἤτοι, ***«τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου (ἐχούσης ὡρισμένον πλῆθος ὅρων) ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν*** *μὲν τὴν διαφορὰν τοῦ πρώτου ὅρου ἀπὸ τοῦ γινομένου τοῦ τελευταίου ὅρου ἐπὶ τὸν λόγον αὐτῆς, παρονομαστὴν δὲ τὸν λόγον ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα».*

*195.* Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶνε φθίνουσα καὶ ὅτι ἔχει ἄπειρον πλῆθος ὅρων, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3,\ \ldots \qquad (\text{ἐπ' ἄπειρον})$$

καὶ τὸ ω εἶνε ἀπολύτως $<1$, τότε τὸ $\omega^\nu$ θὰ εἶνε ἀριθμὸς ἐλάχιστος, ὅταν τὸ ν εἶνε πολὺ μεγάλος (θετικὸς) ἀριθμός· τείνει δὲ τὸ $\omega^\nu$ εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν ὑπερβαίνῃ πάντα δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν (§ 149 σελ. 147). Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα (2) τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου, τὸ $\Sigma = \dfrac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$, γράψωμεν οὕτω

$$\Sigma = \frac{\alpha - \alpha\omega^\nu}{1-\omega} = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$$

καὶ λάβωμεν τὰ ὅρια τῶν ἴσων τούτων, ὑποθέτοντες ὅτι τὸ ν τείνει εἰς τὸ ἄπειρον (ὅτε ὑποθέτομεν ὅτι προσθέτομεν τοὺς ἀπείρους ὅρους τῆς προόδου), ἐπειδὴ τὸ μὲν $\dfrac{\alpha}{1-\omega}$ εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος, τὸ δὲ $\alpha\omega^\nu$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν (§ 149), θὰ ἔχωμεν ὅριον τοῦ $\Sigma = \dfrac{\alpha}{1-\omega}$.

Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ἁπλῶς ὅτι, τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς δοθείσης φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ $\dfrac{\alpha}{1-\omega}$, καὶ γράφομεν

$$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega}}$$

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

***«τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης ἀπείρους ὅρους, εἶνε ἴσον μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς προόδου, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἠλαττωμένην κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου».***

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots\ldots\ldots$$

εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\omega = \dfrac{1}{2}$, καὶ $\alpha = 1$, θὰ εἶνε $\Sigma = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων $\dfrac{25}{100},\ \dfrac{25}{100^2},\ \ldots\ldots$

εὑρίσκομεν, ἐὰν παρατηρήσωμεν ὅτι εἶνε $\alpha=\frac{25}{100}$, καὶ $\omega=\frac{1}{100}$ καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον, ὅτε ἔχομεν

$$\Sigma=\frac{25}{100\left(1-\frac{1}{100}\right)}=\frac{25}{99}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ εἶνε $\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8.$

## *Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.*

*Ὁμὰς πρώτη.* 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης τῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους ὅρους·

α′) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots\ldots$ β′) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots\ldots$

γ′) $2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$ δ′) 0,8686. . . . ε′) 0,54444. . . .

2) Εὕρετε τὸν εἰκοστὸν ὅρον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν εἴκοσι πρώτων ὅρων τῶν προόδων α′) $1, -3, 9, -27, \ldots$ β′) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου διὰ τὴν ὁποίαν εἶνε $\omega=\frac{1}{4}$, $\nu=6$, $\Sigma=2730$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\tau=384$, $\omega=2$, $\nu=8$. 3·765.

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ σειρὰ

$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots$ [Γράψατε αὐτὸ ὡς ἑξῆς

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{8}+\ldots\right)\ldots$]

6) Ποῦ τείνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς

$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots$ $4+3\sqrt{2}$.

7) Ἂν εἶνε $\alpha>\beta$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν

α') $\alpha^\nu+\beta\alpha^{\nu-1}+\beta^2\alpha^{\nu-2}+\ldots$ β') $\alpha+\beta+\dfrac{\beta^2}{\alpha}+\dfrac{\beta^3}{\alpha^2}+\ldots\ldots$

$\dfrac{\alpha^{\nu+1}}{\alpha-1}$, $\dfrac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Εἰς τετράγωνον (ἰσόπλευρον τρίγωνον) πλευρᾶς α συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν νέον τοιοῦτον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων (τριγώνων). $2\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον· εἰς τοῦτο κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδὸν τῶν κύκλων καὶ τῶν τετραγώνων. $2\pi\rho^2$, $4\rho^2$.

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἂν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἡ τετάρτη εἶνε ἐννεαπλασία τῆς β'. 9·27·81·243.

4) Νὰ μερισθῇ ὁ 221 εἰς τρία μέρη, ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ τῆς ὁποίας ὁ γ' ὅρος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν α' κατὰ 136. 47·51·153.

5) Τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν τριῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶνε 248, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶνε 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὅροι; 8·40·200.

6) Δείξατε ὅτι εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον τὸ γινόμενον δύο ὅρων, ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων.

## Περὶ παρεμβολῆς γεωμετρικῶν ὅρων.

*196.* Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ν ἄλλους, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν καλέσωμεν $\omega_1$ τὸν λόγον τῆς προόδου, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς θὰ εἶνε $(\nu+2)$, ὁ τελευταῖος ὅρος β θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον α ἐπὶ τὴν $(\nu+1)$ δύναμιν τοῦ λόγου $\omega_1$. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν $\beta=\alpha.\omega_1^{\nu+1}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\omega_1^{\nu+1}=\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \omega_1=\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\,.$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶνε ἡ

$$\alpha,\ \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\ \alpha\sqrt[\nu+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2},\ \ldots\ldots,\ \beta.$$

Π.χ. ἂν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν ἐννέα ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελέσουν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἔχομεν $\nu=9$, ἄρα εἶνε $\omega_1=\sqrt[10]{2}=2^{\frac{1}{10}}$.

Ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶνε $1,\ 2^{\frac{1}{10}},\ 2^{\frac{2}{10}},\ 2^{\frac{3}{10}},\ \ldots\ldots\ 2.$

### Ἄσκησις.

Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν 161(3) καὶ 4347(243) δώδεκα (τρεῖς) ἀριθμοί, ὥστε νἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

## *Περὶ λογαρίθμων.*

### *) Περὶ τῶν δυνάμεων $y=10^x$ καὶ $y=\alpha^x$.

*197.* Ἐὰν σχηματίσωμεν τὰς δυνάμεις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτας τοὺς διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 0,1,2,3,... καθὼς καὶ τοὺς $-1, -2, -3, \ldots$, θὰ ἔχωμεν, $10^0=1$, $10^1=10$, $10^2=100$, $10^3=1000, \ldots$ καὶ $10^{-1}=0{,}1$· $10^{-2}=0{,}01$· $10^{-3}=0{,}001$ κλπ. Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $y=10^x$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε ἀκέραιαι καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι $(\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως (δηλαδὴ τῆς δυνάμεως $10^x$) βαίνουν αὐξανόμεναι. Ἐν γένει θὰ δείξωμεν ὅτι,

***«ἂν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς αὐξανομένας, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $10^x$ βαίνουν αὐξανόμεναι».***

Παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην θετικὸν π. χ. ἡ $10^{\frac{3}{4}}$ εἶνε$>1$· διότι τὸ μὲν $10^3$ εἶνε$>1$, ἐπειδὴ εἶνε $10^3=10.10.10>1$ (καὶ προκύπτει ἐκ τῶν ἀνισοτήτων $10>1$, $10>1$, $10>1$, ἂν πολλαπλασιασθοῦν κατὰ μέλη), τὸ δὲ $10^{\frac{3}{4}}$ εἶνε ἐπίσης$>1$, Διότι ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐναντίον, θὰ ἔχωμεν $10^{\frac{3}{4}} \leqq 1$, καὶ ὑψοῦντες τὰ μέλη ταύτης εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, θὰ ἔχωμεν $10^3 \leqq 1$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὸ ὅτι εἶνε $10^3>1$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται γενικώτερον ὅτι, ἂν τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς θὰ εἶνε τὸ $10^{\frac{\mu}{\nu}} > 1$.

Ἔστω τώρα δύναμίς τις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, π. χ. ἡ $10^{-\frac{3}{4}}$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε (§ 160, σελὶς 161) $10^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{10^{\frac{3}{4}}}$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε τὸ $10^{\frac{3}{4}} > 1$ (ὡς ἐδείχθη) τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ, δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{10^{\frac{3}{4}}} = 10^{-\frac{3}{4}}$ εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος (§ 59 σελὶς 26 — 27).

Καθ' ὅμοιον τρόπον δεικνύεται ὅτι, ἂν εἶνε $\alpha > 1$, θὰ εἶνε τὸ μὲν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} > 1$, τὸ δὲ $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} < 1$, ἐὰν τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος πᾶσα μὲν δύναμις μὲ ἐκθέτην θετικὸν εἶνε μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, πᾶσα δὲ μὲ ἀρνητικὸν εἶνε μικροτέρα τῆς μονάδος».***

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι,

***«ἀριθμοῦ θετικοῦ καὶ μικροτέρου τῆς μονάδος πᾶσα μὲν δύναμις μὲ ἐκθέτην θετικὸν εἶνε μικροτέρα τῆς μονάδος, πᾶσα δὲ μὲ ἀρνητικὸν μεγαλυτέρα τῆς μονάδος».***

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἀνωτέρω πρότασιν περὶ τῆς $10^x$, ἔστω ὅτι ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς μ καὶ ν θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς καὶ ὅτι εἶνε $\mu > \nu$. Θὰ δείξωμεν ὅτι θὰ ἔχωμεν $10^\mu > 10^\nu$.

Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸ πηλίκον $\frac{10^\mu}{10^\nu}$, τὸ ὁποῖον = μὲ $10^{\mu-\nu}$ (§ 52 καὶ σελὶς 161). Ἐπειδὴ εἶνε $\mu > \nu$, ἔχομεν $\mu - \nu > 0$ (§ 55) καὶ κατὰ τἀνωτέρω τὸ $10^{\mu-\nu}$ ἢ τὸ ἴσον τούτου εἶνε μεγαλύτερον τῆς μονάδος· δηλαδὴ εἶνε $\frac{10^\mu}{10^\nu} > 1$ καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνίσων τούτων ἐπὶ $10^\nu$ ἔχομεν $10^\mu > 10^\nu$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τὴν τιμὴν ν εἰς τὴν (μεγαλυτέραν) τιμὴν μ, ἡ δύναμις $10^x$ αὐξάνεται ἀπὸ τὴν τιμὴν $10^\nu$ εἰς τὴν (μεγαλυτέραν) $10^\mu$.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει γενικῶς καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως καὶ ὅταν ὡς βάσις τῆς δυνάμεως εἶνε ἀριθμὸς $\alpha > 1$, ἐνῶ συμβαίνει τὸ ἀντίστροφον, ὅταν εἶνε τὸ $\alpha < 1$ ἀλλὰ θετικόν. Διότι τότε θὰ εἶνε $\alpha^{\mu-\nu} < 1$ (ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν)· ἤτοι $\alpha^{\mu-\nu} = \dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} < 1$, καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀνίσων ἐπὶ $\alpha^{\nu}$ ἔχομεν $\alpha^{\mu} < \alpha^{\nu}$ · δηλαδὴ τότε αἱ τιμαὶ τῆς δυνάμεως $\alpha^{x}$ βαίνουν ἐλαττούμεναι, ὅταν ὁ ἐκθέτης x λαμβάνῃ τιμὰς αὐξανομένας.

*198.* Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς πρότασιν.

«***Εἰς μεταβολὴν ὡρισμένης τινὸς τιμῆς τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως $10^x$ κατὰ ποσότητα τείνουσαν εἰς τὸ μηδὲν ἀντιστοιχεῖ μεταβολὴ τῆς δυνάμεως ταύτης τείνουσα εἰς τὸ μηδέν***».

Ἔστω π. χ. ἡ δύναμις $10^{\mu}$, ἐνῶ τὸ μ εἶνε ἀριθμός τις ὡρισμένος (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) καὶ ε ποσότης τείνουσα εἰς τὸ μηδέν. Ἂν σχηματίσωμεν τὴν δύναμιν $10^{\mu+\varepsilon}$, θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ μεταβολὴ $10^{\mu+\varepsilon} - 10^{\mu}$ τῆς δυνάμεως $10^x$, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν μεταβολὴν $(\mu+\varepsilon)-\mu=\varepsilon$ τοῦ x, τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Ἐπειδὴ εἶνε $10^{\mu+\varepsilon} - 10^{\mu} = 10^{\mu} . 10^{\varepsilon} - 10^{\mu} = 10^{\mu}(10^{\varepsilon} - 1)$ καὶ τὸ $10^{\mu}$ εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὅριον τοῦ $(10^{\varepsilon} - 1)$ εἶνε τὸ μηδέν. Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν (§ 140) ὅτι, ὅταν τὸ ε μεταβάλλεται, αἱ τιμαὶ τῆς διαφορᾶς $10^{\varepsilon} - 1$, ἀπολύτως θεωρούμεναι, ἀπό τινος καὶ ἑξῆς δύνανται νὰ γίνουν μικρότεραι παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ἔστω τοῦ δ. Ἤτοι ὅτι θὰ ἔχωμεν ἀπό τινος τιμῆς καὶ ἑξῆς ἀπολύτως $10^{\varepsilon} - 1 < \delta$, ἢ καὶ $10^{\varepsilon} < 1 + \delta$. Ἐπειδὴ τὸ ε τείνει εἰς τὸ μηδέν, δύναται νὰ γίνῃ (ἀπολύτως) ὁσονδήποτε μικρὸν θέλωμεν, καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\varepsilon = \dfrac{1}{\varrho}$, ὅπου τὸ ρ παριστάνει ἀριθμὸν ἀκέραιον θετικὸν ἀρκούντως μεγάλον (ὅτε τὸ $\dfrac{1}{\varrho} = \varepsilon$ γίνεται ὅσον θέλωμεν μικρόν). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἔχωμεν $10^{\frac{1}{\varrho}} < 1 + \delta$, ἢ ὑψοῦντες τὰ ἄνισα εἰς τὴν ρ δύναμιν $10 < (1+\delta)^{\varrho}$. Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶνε πάντοτε δυνατὸν νὰ γίνῃ. Διότι εἶνε $(1+\delta)^{\varrho} > 1 + \varrho . \delta$ (ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 149), καὶ ἐπειδὴ ὅταν λάβωμεν τὸ ρ ἀρκούντως μέγα τὸ καὶ ρ.δ γίνεται ἀρκούντως μέγα (τοῦ δ παριστάνοντος ὡρισμένον ἀριθμόν), κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶνε τὸ $(1+\delta)^{\varrho}$ ὅσον θέλωμεν μέγα· ἄρα μεγαλύτερον καὶ τοῦ 10· ἤτοι

$10<(1+\delta)^{\varrho}$. Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν καὶ $10^{\frac{1}{\varrho}}<1+\delta$, ἢ $10^{\varepsilon}<1+\delta$, ἢ ἀπολύτως $10^{\varepsilon}-1<\delta$, δηλαδὴ ὅριον τοῦ $10^{\varepsilon}-1=$ μὲ μηδέν.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως καὶ ὅταν ἡ βάσις τῆς δυνάμεως εἶνε ἀριθμός τις $\alpha>1$. Καθ' ἣν περίπτωσιν εἶνε τὸ $\alpha<1$, ἀλλὰ θετικόν, τὸ ἀντίστροφον τούτου, τὸ $\frac{1}{\alpha}$ θὰ εἶνε μεγαλύτερον τῆς μονάδος· ἤτοι εἶνε $\frac{1}{\alpha}>1$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τιμαὶ τοῦ $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\varepsilon}$ ἀπό τινος καὶ ἑξῆς θὰ διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὴν μονάδα κατὰ ποσότητα θετικὴν ὅσον θέλωμεν μικράν, ὅταν τὸ ε ληφθῇ ἀρκούντως μικρὸν (κατὰ τἀνωτέρω), καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου, τὸ $\alpha^{\varepsilon}$, θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ τὴν μονάδα κατά ποσότητα θετικὴν ὅσον θέλωμεν μικράν (§ 146), ἤτοι εἶνε πάλιν ὅριον τοῦ $\alpha^{\varepsilon}-1=$μὲ μηδέν. Ἄρα ὅταν εἶνε $\alpha>0$ ἔχομεν ὅριον τοῦ $(\alpha^{\varepsilon}-1)=0$ καὶ ἑπομένως ὅριον τοῦ $\alpha^{\mu}(\alpha^{\varepsilon}-1)=0$ (κατὰ τὰ εἰς τὴν § 141).

### *) Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀσυμμέτρους.

*199.* Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν δύναμιν $5^{\sqrt{2}}$ ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὅστις παριστάνει τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2.

Γνωρίζομεν (§ 150) ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ εἶνε τὸ κοινὸν ὅριον δύο ἀριθμῶν μεταβλητῶν, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα θετικὴν ὅσον θέλωμεν μικράν. Ἂν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους παραστήσωμεν διὰ τῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, ἡ διαφορὰ αὐτῶν $\frac{1}{\nu}$ θὰ εἶνε ποσότης ὅσον θέλωμεν μικρά, ὅταν τὸ ν γίνῃ ἀρκούντως μέγα. Ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν τὰς δυνάμεις τοῦ 5 μὲ ἐκθέτας τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, θὰ ἔχωμεν $5^{\frac{\mu+1}{\nu}}$ καὶ $5^{\frac{\mu}{\nu}}$. Ἡ διαφορὰ τούτων $5^{\frac{\mu+1}{\nu}}-5^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἰσοῦται μὲ $5^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot 5^{\frac{1}{\nu}}-5^{\frac{\mu}{\nu}}=5^{\frac{\mu}{\nu}}\left(5^{\frac{1}{\nu}}-1\right)$.

Ἀλλ' ὅταν τὸ ν γίνῃ ἀρκούντως μέγα, τὸ $\frac{1}{\nu}$ γίνεται ὅσον θέλωμεν μικρόν, ἤτοι ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν καὶ ἡ διαφορὰ $5^{\frac{1}{\nu}}-1$ ἔχει ὅριον τὸ μηδὲν (κατὰ τὰ εἰς τὴν § 198). Ἑπομένως οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ $5^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $5^{\frac{\mu+1}{\nu}}$ (ὅταν τὸ ν μεταβάλλεται αὐξανόμενον ἀρκούντως), ἔχουν τὸ αὐτὸ ὅριον. Τὸ κοινὸν τοῦτο ὅριον τῶν $5^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $5^{\frac{\mu+1}{\nu}}$ λέγομεν ὅτι παριστάνει τὴν δύναμιν $5^{\sqrt{2}}$.

Ἂν λάβωμεν ἀντὶ τῆς $\sqrt{2}$ τὴν προσεγγίζουσαν (π. χ. κατὰ ἓν χιλιοστὸν) τιμὴν 1,414, ἡ $5^{\sqrt{2}}$ θὰ ἔχῃ ὡς προσεγγίζουσαν τιμὴν τὴν $5^{1,414}$ $= 5^{\frac{1414}{1000}} = 5^{\frac{707}{500}} = 5^{\frac{500}{500}} \cdot 5^{\frac{207}{500}} = 5\sqrt[500]{5^{207}}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὴν δύναμιν ἀριθμοῦ τινος α μὲ ἐκθέτην οἱονδήποτε ἀσύμμετρον· ἐπειδὴ δὲ ἂν παραλείψωμεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τούτου ἀπό τινος τάξεως καὶ ἑξῆς, ἔχομεν κατὰ προσέγγισιν ἀντὶ τοῦ ἀσυμμέτρου σύμμετρον ἀριθμόν, ἕπεται ὅτι,

***«οἱ κανόνες διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς τοιαύτης δυνάμεως, καθὼς καὶ αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας συμμέτρους ἀριθμοὺς ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι».***

## *) Περὶ τῶν τιμῶν τοῦ $10^x$ διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

*200.* Ἐκ τῶν προηγουμένων (§ 198) ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις $y=10^x$ εἶνε ***συνεχὴς*** διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἡ ἰδιότης δ' αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βάσις εἶνε ἀριθμός τις θετικὸς (μεγαλύτερος ἢ μικρότερος τῆς μονάδος) καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν $10^x$.

Ἐὰν θέσωμεν $x=0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}, \ldots$ ὅπου τὸ ν εἶνε θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ συνάρτησις $10^x$ θὰ λάβῃ τὰς τιμὰς

$$10^0=1,\ 10^{\frac{1}{\nu}},\ 10^{\frac{2}{\nu}},\ 10^{\frac{3}{\nu}}, \ldots$$

Ἂν θέλωμεν δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω διαδοχικῶν τιμῶν τοῦ x νὰ διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα θετικὴν ὅσον θέλωμεν μικράν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ν ἀρκούντως μέγα, ὅτε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τούτων τιμαὶ τῆς $10^x$ θὰ διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικρὰν (ὡς ἀνωτέρω ἐδείχθη (§ 198). Ἑπομένως, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ***συνεχῶς*** ἀπὸ τὴν τιμὴν 0 μέχρι τοῦ $+\infty$ (λαμβάνον διαδοχικῶς πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς), ἡ συνάρτησις $10^x$ αὐξάνεται ***συνεχῶς*** ἀπὸ τῆς τιμῆς 1 μέχρι τοῦ $+\infty$ (ἐπειδὴ εἶνε $10^{+\infty}=+\infty$ κατὰ τὴν § 149 σελὶς 146).

Ὁμοίως ἂν θέσωμεν $x=0, -\frac{1}{\nu}, -\frac{2}{\nu}, -\frac{3}{\nu}, \ldots$

θὰ ἔχωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $10^x$ λαμβάνει τὰς τιμὰς

$$10^0=1,\ 10^{-\frac{1}{\nu}},\ 10^{-\frac{2}{\nu}},\ 10^{-\frac{3}{\nu}},\ \ldots$$

ἢ τὰς ἴσας πρὸς αὐτὰς

$$1,\ \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{\nu}},\ \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{\nu}},\ \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{3}{\nu}},\ \ldots \quad (\text{κατὰ τὴν § 160, σελ. 161}).$$

Ἂν θέλωμεν δύο διαδοχικαὶ τιμαὶ (ἐκ τῶν ἀνωτέρω) τοῦ x νὰ διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ν ἀρκούντως μέγα, ὅτε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς $10^x$ θὰ διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν. Ἐπομένως, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται *συνεχῶς* ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$, ἡ συνάρτησις $10^x$ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς 1 μέχρι τοῦ 0 (διότι εἶνε $10^{-\infty}=\frac{1}{10^{\infty}}=0$, κατὰ τὰ εἰς τὴν § 149, σελὶς 147).

Ἐν γένει λοιπόν, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ συνάρτησις $10^x$ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, λαμβάνουσα τιμὰς θετικάς, καὶ εἰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x ἀντιστοιχοῦν διάφοροι τιμαὶ τοῦ $10^x$. Διότι ἂν ὑποτεθῇ π. χ. ὅτι διὰ δύο διαφόρους τιμὰς τοῦ x, ἔστω τὰς ν καὶ μ, ἀντιστοιχοῦν ἴσαι τιμαὶ τοῦ $10^x$, δηλαδὴ ἂν εἶνε $10^{\mu}=10^{\nu}$, τότε θὰ ἔχωμεν (διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ $10^{\nu}$), $\frac{10^{\mu}}{10^{\nu}}=1$, ἢ $10^{\mu-\nu}=1$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶνε $10^0=1$ (κατὰ τὴν § 43) ἔχομεν $\mu-\nu=0$ ἢ $\mu=\nu$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι τὸ μ εἶνε διάφορον τοῦ ν.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ἀποδεικνύεται ὁμοίως καὶ ὅταν ἡ βάσις τῆς δυνάμεως εἶνε ἀριθμός τις $\alpha>1$. Ἂν τὸ $\alpha$ εἶνε θετικὸς ἀριθμὸς ἀλλὰ μικρότερος τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ συνάρτησις $\alpha^x$ μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0, λαμβάνουσα θετικὰς τιμάς, καὶ εἰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x ἀντιστοιχοῦν διάφοροι τιμαὶ τοῦ $\alpha^x$.

## Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων καὶ ἰδιότητες αὐτῶν.

*201.* Καθὼς γνωρίζομεν εἶνε $10^2=100$, $10^3=1000$ κλπ. Τὸ 2 λέγεται λογάριθμος τοῦ 100 ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10, τὸ 3 λογάριθμος τοῦ 1000 ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10 κλπ.

Ἐν γένει, *«καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος Α ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10 τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10, εἰς τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις διὰ νὰ δώσῃ τὸν Α»*.

Κατὰ ταῦτα, ἂν εἶνε $10^{\alpha}=\mathrm{A}$, τὸ α λέγεται λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10, ἢ ἁπλῶς λογάριθμος τοῦ Α, καὶ σημειώνεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς α=λογΑ ἢ λογΑ=α, ἀπαγγέλλεται δ' ἡ ἰσότης αὕτη οὕτω *ὁ λογάριθμος τοῦ Α εἶνε ἴσος μὲ α*.

Ἐπειδὴ εἶνε $10^0=1$ καὶ $10^1=10$, ἕπεται ὅτι,

*«ὁ λογάριθμος τῆς μὲν μονάδος ἰσοῦται μὲ μηδέν, τοῦ δὲ 10 ἡ μονάς»*.

*) *202*. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι,

*«δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θετικοῦ, ὑπάρχει λογάριθμος αὐτοῦ»*.

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς Α ὅστις εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Λαμβάνομεν ἕνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν ν καὶ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$1,\ 1+\frac{1}{\nu},\quad 1+\frac{2}{\nu},\quad 1+\frac{3}{\nu},\ \ldots$$

καὶ τὰς δυνάμεις

$$10^1,\ 10^{1+\frac{1}{\nu}},\ 10^{1+\frac{2}{\nu}},\ 10^{1+\frac{3}{\nu}},\ldots$$

αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν, ἐπειδὴ ὁ λόγος $10^{\frac{1}{\nu}}$ εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος (διότι ἀφοῦ εἶνε $10>1$, εἶνε καὶ $10^{\frac{1}{\nu}}>1$, § 197, σελ. 234). Οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς βαίνουν αὐξανόμενοι, καὶ ἂν μὲν τύχῃ εἷς ἐξ αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α, τότε ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ Α ἂν δὲ δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ περιέχεται ὁ Α μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου, ἔστω τῶν $10^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}}$,

ἤτοι θὰ εἶνε $$10^{\frac{\mu}{\nu}}<\mathrm{A}<10^{\frac{\mu+1}{\nu}}.$$

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α διαφέρουν

κατὰ $$10^{\frac{\mu+1}{\nu}}-10^{\frac{\mu}{\nu}}=10^{\frac{\mu}{\nu}}.10^{\frac{1}{\nu}}-10^{\frac{\mu}{\nu}}=10^{\frac{\mu}{\nu}}\left(10^{\frac{1}{\nu}}-1\right).$$

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ὅσον θέλωμεν μικροῦ, ἂν τὸ ν λάβωμεν ἀρκούντως μέγα (διότι τότε τὸ $10^{\frac{1}{\nu}} - 1$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν § 198). Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ δύο ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικρὰν (ὅταν λάβωμεν τὸ ν ἀρκούντως μέγα), κατὰ μείζονα λόγον ὁ Α θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸν Α ἴσον μὲ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων (ὅταν τὸ ν ληφθῇ ἀρκούντως μέγα)· ἤτοι θὰ θέσωμεν

$$10^{\frac{\mu}{\nu}} = A \quad \text{ὅτε εἶνε} \quad \log A = \frac{\mu}{\nu}$$

ἢ καὶ
$$10^{\frac{\mu+1}{\nu}} = A, \quad \text{ὅτε εἶνε} \quad \log A = \frac{\mu+1}{\nu},$$

διαφέρουν δι' οἱ δύο οὗτοι λογάριθμοι τοῦ Α κατὰ $\frac{1}{\nu}$, τὸ ὁποῖον τείνει εἰς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον.

Ἐὰν πρόκειται περὶ ἀριθμοῦ $A<1$ ἀλλὰ θετικοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι θὰ εἶνε $\frac{1}{A}>1$, ἑπομένως θὰ ἔχῃ οὗτος λογάριθμον, ἔστω τὸν $\frac{k}{\lambda}$, δηλαδὴ θὰ εἶνε
$$\frac{1}{A} = 10^{\frac{k}{\lambda}}$$
καὶ ἀντιστρέφοντες τὰ ἴσα, θὰ ἔχωμεν $A = \frac{1}{10^{\frac{k}{\lambda}}} = 10^{-\frac{k}{\lambda}}$, ἑπομένως ἔχομεν $\log A = -\frac{k}{\lambda}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ ἐκ τῆς § 200 ἕπεται ὅτι, «***πᾶς ἀριθμὸς θετικὸς ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα λογάριθμον, θετικὸν μὲν ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἀρνητικὸν δὲ ἂν εἶνε μικρότερος τῆς μονάδος***».

***203.*** Παρατηρητέον ὅτι, «***ἀρνητικός τις ἀριθμὸς δὲν ἔχει λογάριθμον***» ἐπειδὴ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x ἡ δύναμις $10^x$ δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν. Διότι, καὶ ἂν ὁ ἐκθέτης τοῦ 10 εἶνε κλασματικὸς μὲ παρονομαστὴν ἄρτιον, ὅτε θὰ ἔχωμεν ἀρτίας τάξεως ῥίζαν ἀκεραίας δυνάμεως τοῦ 10, περιοριζόμεθα εἰς μόνην τὴν θετικὴν ῥίζαν ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτων (§ 155 καὶ 160 σελὶς 160)· καὶ ἐὰν δὲ ἐλαμβάνομεν καὶ τὴν ἀρνητικὴν ῥίζαν, τότε ἡ συνάρτησις $y=10^x$ δὲν θὰ ἦτο συνεχὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων καὶ ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι, πᾶς ἀριθμὸς σύμμετρος, ἔστω ὁ α, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λογάριθμος ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ, εἶνε δὲ οὗτος ὁ $10^{\alpha}$, καὶ ὁ μόνος ὅστις ἔχει λογάριθμον τὸν α.

Παρατηρητέον ὅτι, πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν σύμμετρον ἔχει λογάριθμον τὸν σύμμετρον τοῦτον ἐκθέτην, πᾶς δ' ἄλλος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἀσύμμετρον ἀριθμόν· διότι ἂν εἶχε λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμόν, θὰ ἦτο οὗτος ἴσος μὲ δύναμιν τοῦ 10, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν σύμμετρον τοῦτον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

**204.** ***Περὶ τοῦ λογαρίθμου γινομένου καὶ πηλίκου ἀριθμῶν.***

***«Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων».***

Ἔστω ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma A=\alpha$, $\lambda o\gamma B=\beta$, $\lambda o\gamma \Gamma=\gamma$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τότε εἶνε $\lambda o\gamma(A.B.\Gamma)=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma B+\lambda o\gamma \Gamma=\alpha+\beta+\gamma$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν

$$10^{\alpha}=A$$
$$10^{\beta}=B$$
$$10^{\gamma}=\Gamma,$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ταῦτα κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$10^{\alpha}.\,10^{\beta}.\,10^{\gamma}=10^{\alpha+\beta+\gamma}=A.B.\Gamma.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ὅτι $\lambda o\gamma(A.B.\Gamma)=\alpha+\beta+\gamma=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma B+\lambda o\gamma \Gamma$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας. Κατὰ τἀνωτέρω ἔχομεν π. χ.

$$\lambda o\gamma 105=\lambda o\gamma(3.5.7)=\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 5+\lambda o\gamma 7.$$

***«Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου πλὴν τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου».***

Ἔστω ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma A=\alpha$ καὶ $\lambda o\gamma B=\beta$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τότε εἶνε $\lambda o\gamma \dfrac{A}{B}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν $10^{\alpha}=A$, $10^{\beta}=B$,

διαιροῦντες δὲ τὰ ἴσα ταῦτα κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\dfrac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}=\dfrac{A}{B}$ ἢ $10^{\alpha-\beta}=\dfrac{A}{B}$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ὅτι

$$\lambda o\gamma \frac{A}{B}=\alpha-\beta=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B.$$

Οὕτω ἔχομεν π.χ. $\lambda o\gamma\, 5\frac{2}{3}=\lambda o\gamma \frac{17}{3}=\lambda o\gamma\, 17-\lambda o\gamma 3.$

***205. Περὶ τοῦ λογαρίθμου δυνάμεως ἀριθμοῦ.***

***«Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως αὐτῆς».***

Ἔστω ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma A=\alpha$ καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν $A^\mu$ μὲ ἐκθέτην μ οἱονδήποτε. Θὰ δείξωμεν ὅτι τότε εἶνε $\lambda o\gamma\, A^\mu=\mu.\ \lambda o\gamma\, A.$

Ἐπειδὴ εἶνε $\lambda o\gamma A=\alpha$, θὰ ἔχωμεν $10^\alpha=A$.

Ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὴν μ δύναμιν εὑρίσκομεν

$$(10^\alpha)^\mu=A^\mu,\ \text{ἢ}\ 10^{\mu.\alpha}=A^\mu.$$

Ἀλλ᾽ ἡ ἰσότης αὐτη ὁρίζει ὅτι

$$\lambda o\gamma\, A^\mu=\mu.\alpha=\mu.\lambda o\gamma A.$$

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\lambda o\gamma\, A^{\frac{1}{\nu}}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\, A,$

ἤτοι, ***«ὁ λογάριθμος ῥίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου, διῃρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης».***

### *Ἀσκήσεις.*

Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων.

α΄) $\lambda o\gamma\, 15=\lambda o\gamma\, 3+\lambda o\gamma\, 5$. β΄) $\lambda o\gamma\, 55=\lambda o\gamma.\ 5+\lambda o\gamma\, 11.$

γ΄) $\lambda o\gamma\, 2\frac{1}{3}=\lambda o\gamma\, 7-\lambda o\gamma\, 3$. δ΄) $\lambda o\gamma\, 49=2.\ \lambda o\gamma.\ 7.$

ε΄) $\lambda o\gamma \sqrt{20}=\frac{1}{2}\lambda o\gamma.\ 20$. στ΄) $\lambda o\gamma.\ \sqrt{647^3}=\frac{3}{2}\lambda o\gamma\, 647.$

ζ΄) $6.\ \lambda o\gamma\, 32=\lambda o\gamma\, 32^6$, η΄) $\lambda o\gamma\, 5+\lambda o\gamma\, 7+\lambda o\gamma\, 4=\lambda o\gamma\, 140.$

## Περὶ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τῶν λογαρίθμων.

*206.* Καλοῦμεν ***χαρακτηριστικὸν*** λογαρίθμου τινὸς τὸ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 7. Ἐπειδὴ οὗτος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 1 καὶ μικρότερος τοῦ 10, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 1 καὶ μικρότερος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 10· ἤτοι ὁ λογάριθμος τοῦ 7 θὰ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 0 καὶ μικρότερος τοῦ 1. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν διὰ πάντα ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 1 καὶ μικρότερον τοῦ 10. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι, ὅταν ἀριθμός τις εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 10 καὶ μικρότερος τοῦ 100, ἔχει λογαριθμον μεγαλύτερον τοῦ 1 καὶ μικρότερον τοῦ 2· ὅταν ἀριθμός τις εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 100 καὶ μικρότερος τοῦ 1000, ἔχει λογάριθμον μεγαλύτερον τοῦ 2 καὶ μικρότερον τοῦ 3 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ 1 καὶ 10 εἶνε μονοψήφιος, πᾶς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τοῦ 10 καὶ 100 εἶνε διψήφιος, πᾶς μεταξὺ τοῦ 100 καὶ 1000 τριψήφιος, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕπεται ὅτι,

*«τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, ἔχει τόσας ἀκεραίας μονάδας ὅσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα».*

Οὕτω τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 345 εἶνε ὁ 2, τοῦ 12 ὁ 1, τοῦ 1 056 ὁ 3 κλπ.

Ἔστω ὁ μικρότερος τῆς μονάδος ἀριθμὸς 0,34. Ἐπειδὴ οὗτος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 0,1 καὶ μικρότερος τοῦ 1, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ εἶνε μεγαλύτερος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 0,1 δηλαδὴ τοῦ —1, καὶ μικρότερος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 1, δηλαδὴ τοῦ 0. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν διὰ πάντα ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 0,1 καὶ μικρότερον τοῦ 1. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ τῶν 0,01 καὶ 0,1 ἔχει λογάριθμον μεγαλύτερον τοῦ —2 καὶ μικρότερον τοῦ —1, καὶ οὕτω καθ᾿ ἑξῆς.

Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν 0,1 καὶ 1, ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικός, θὰ ἔχῃ σημαντικὸν ψηφίον τὸ πρῶτον αὐτοῦ δεκαδικὸν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, ὁμοίως πᾶς ἀριθμὸς περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν 0,01 καὶ 0,1 ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικός, θὰ ἔχῃ σημαντικὸν ψηφίον τὸ δεύτερον αὐτοῦ δεκαδικὸν μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕπεται ὅτι,

*«τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος καὶ γραφομένου ὑπὸ δεκαδικὴν μορφὴν ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅση εἶνε ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τούτου, τοῦ κειμένου δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς».*

Οὕτω τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ 0,3 εἶνε ὁ —1, τοῦ 0,0147 ὁ —2, τοῦ 0,00356 ὁ —3 κλπ.

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι,

*«ἐὰν μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινὸς εἶνε θετικὸν ἢ μηδέν, ὁ ἀριθμὸς ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν σὺν ἕν, ἐὰν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε ἀρνητικόν, ὁ ἀριθμὸς εἶνε δεκαδικὸς μὲ ἀκέραιον μὲν μηδέν,*

***τὴν δὲ τάξιν τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τούτου ὁρίζει τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν μονάδων, τοῦ χαρακτηριστικοῦ».***

Οὕτω, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εἶνε 3, ὁ ἀριθμὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 0, ὁ ἀριθμὸς ἔχει ἓν ἀκέραιον ψηφίον· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸ εἶνε —2, ὁ ἀριθμὸς εἶνε δεκαδικὸς μὲ ἀκέραιον μὲν μηδέν, τὸ δὲ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ εἶνε δεύτερον.

*207.* Ἔστω ἀριθμός τις π. χ. ὁ 3 271 καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ 3,51 468. Ἐὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν διαιρέσωμεν διὰ 100 π. χ., θὰ ἔχωμεν 3 271 : 100=32,71. Ἄρα εἶνε λογ 32,71 = λογ (3 271 : 100) = λογ3 271—λογ100. Ἤτοι λογ32,71=3,51 468—2=1,51 468. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 3 271 καὶ 32,71 εἶνε τὸ αὐτό.

Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν ὅτι $10^{\alpha}=A$, καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ἴσα ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν $10^3$, θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha}.10^3=A.10^3$, ἢ $10^{\alpha+3}=A.10^3$, καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν ὅτι λογ.$(A.10^3)=\alpha+3$. Ἀλλ' ἔχομεν α=λογA. Ἑπομένως εἶνε λογ$(A.10^3)=\alpha+3=$λογA$+3$. Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ $10^2$ π. χ. τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $10^{\alpha}=A$, εὑρίσκομεν ὅτι λογ$(A:10^2)=$ λογ. A—2. Ἤτοι ***«ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) μὲ τὸ 10·100·1000.... ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ 1·2·3...».*** Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

***«ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν».***

Οὕτω ὁ λογάριθμος τοῦ 5 εἶνε 0,69 897
τοῦ 50 » 1,69 897
τοῦ 500 » 2,69 897
τοῦ 0,5 » $\bar{1}$,69 897
τοῦ 0,05 » $\bar{2}$,69 897 κλπ.

## *Ἀσκήσεις.*

Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων

α') λογ. 35 β') λογ. 4513. γ') λογ. 0,5. δ') λογ. 1,37. ε') λογ. 0,00132. στ') λογ. $\frac{13}{3}$. ζ') λογ. 397,451. η') λογ. $\frac{1}{250}$. θ') λογ. $62\frac{4}{9}$. ι') λογ. $2\frac{1}{7}$.

*208. Τροπὴ ἀρνητικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἐν μέρει ἀρνητικόν.*

Τὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος, τὸ ὁποῖον εἶνε μικρότερον τῆς μονάδος, ἐκφράζεται συνήθως διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (κατὰ προσέγγισιν). Ὥστε ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ θὰ εἶνε ἐν γένει ἀκέραιος ἢ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (κατὰ προσέγγισιν). Ἐπειδὴ τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος (θετικῶν) ἀριθμῶν ὁ λογάριθμος εἶνε ἀρνητικός, τρέπομεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος εἶνε ὁλόκληρος ἀρνητικός, εἰς ἄλλον ἴσον του, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ἀκέραιον μέρος νὰ εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν.

Ἔστω π.χ. ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος—2,54 327. ἤτοι ὁ —2—0,54 327. Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν —1 καὶ τὸν +1 (τὸ ὁποῖον δὲν μεταβάλλει τὴν ἀξίαν αὐτοῦ), εὑρίσκομεν —2—1+1—0,54 327=—3+1—0,54 327.

Ἀφαιροῦντες τώρα τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,54 327 ἀπὸ τῆς μονάδος, εὑρίσκομεν —3+0,45 673, τὸ ὁποῖον γράφεται, συνήθως, καὶ ὡς ἑξῆς $\overline{3}$,45 673. Δηλαδὴ γράφομεν τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τοῦτο μόνον εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

***«διὰ νὰ τρέψωμεν λογάριθμον ὅλως ἀρνητικὸν εἰς ἄλλον ἴσον αὐτοῦ, ἔχοντα μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου τοῦ δοθέντος κατὰ 1, γράφομεν τὸ σημεῖον πλὴν μὲν ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, δεξιὰ αὐτοῦ δέ, ὡς δεκαδικὸν τὰ ὑπόλοιπα τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου, ἀπὸ τοῦ 10, τῶν δ' ἄλλων ἀπὸ τὸ 9».***

## Πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων.

*209.* Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν μὲ παραλλαγάς τινας, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, καὶ αἱ ὁποῖαι φαίνονται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

*Πρόσθεσις.* Διὰ νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς π. χ. 2,57 834 καὶ $\overline{1}$,67 943, τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2=3 καὶ —1=2. Οὕτω εὑρίσκομεν ἄθροισμα 2,25 777.

*Ἀφαίρεσις.* Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν π. χ. ἀπὸ τοῦ $\overline{5}$,67 893 τὸν $\overline{8}$,75 928, τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ —8 ἴσον —7, διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται +7 καὶ σὺν —5=+2. Ἐπομένως τὸ ὑπόλοιπον εἶνε 2,91 965.

***Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν $\bar{5},62\ 893$ ἐπὶ 3.

Ἔχομεν προφανῶς $\bar{5},62\ 893 = -5.3 + 0,62\ 893.3$

$$= -15 + 1,88\ 679 = \bar{14},88\ 679.$$

***Διαίρεσις δι' ἀκεραίου.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ 5,62 891 διὰ τοῦ 3. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$= \bar{5},62\ 891 : 3 = (-5+0,62\ 891) : 3 = (-5-1+1+0,\ 62\ 891) : 3$
$= (-6+1,62\ 891) : 3 = -2+0,54\ 297 = \bar{2},54\ 297.$ Ὁμοίως διὰ νὰ διαιρέσωμεν π.χ. τὸ $\bar{4},67\ 837$ διὰ τοῦ 9, ἔχομεν $\bar{4},67\ 837 : 9 =$

$$(-4+0,67\ 837) : 9 = (-4-5+5+0,67\ 837) : 9 =$$
$$(-9+5,67\ 837) : 9 = -1+0,63\ 093 \quad ἢ \quad \bar{1},63\ 093.$$

## Ἀσκήσεις.

1) Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\bar{2},34\ 987 \cdot \bar{6},97\ 852 \cdot 9,82\ 057$.

2) Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\bar{3},9809$ ἀπὸ $\bar{8},30467 \cdot$ ὁ $\bar{9},93\ 726$ ἀπὸ τὸν $\bar{3},86\ 564$.

3) Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\bar{9},30\ 942$ ἐπὶ $3 \cdot 7 \cdot 42$.

4) Νὰ διαιρεθῇ ὁ $\bar{9},93\ 642$ διὰ $8 \cdot 9 \cdot 12$ (ἐξακολουθήσατε τὴν πρᾶξιν μέχρις ὅτου τὰ πηλίκα ἔχουν πέντε δεκαδικὰ ψηφία).

## Πῶς εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν.

***210. Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, ἢ 0,1 ἢ 0,01... τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν δύο δυνάμεων τοῦ 10, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμός, καὶ οἵτινες (ἐκθέται) διαφέρουν κατὰ μονάδα, ἢ 0,1 ἢ 0,01,...»***

Οὕτω ἐὰν ἔχωμεν $10^{\varrho} < A < 10^{\varrho+1}$ (ἐνῷ τὸ ρ εἶνε ἀκέραιος) τὸ ρ λέγεται λογάριθμος τοῦ α κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ἤτοι τὸ ρ εἶνε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α.

Ἂν ἔχωμεν $\quad 10^{\frac{\lambda}{10}} < A < 10^{\frac{\lambda+1}{10}}$

τὸ $\dfrac{\lambda}{10}$ λέγεται λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν 0,1 καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν 0,1. Ἂν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ $\frac{x}{10}$ θὰ ἔχωμεν

$$10^{\frac{x}{10}} < A < 10^{\frac{x+1}{10}}.$$

Ὑψοῦμεν τὰ ἄνισα εἰς τὴν δεκάτην δύναμιν καὶ εὑρίσκομεν

$$10^{x} < A^{10} < 10^{x+1}.$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ x εἶνε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ $A^{10}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἂν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἢ 0,001,...

Ἑπομένως, ***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01,... ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν 10ην, ἢ εἰς τὴν 100ὴν, . . δύναμιν, τοῦ ἐξαγομένου νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10 ἢ 100, . .».***

## Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

***211.*** Ἐνῶ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ (ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν), ἐν τούτοις ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶνε λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπονος. Διὰ τοῦτο ὑπάρχουν πίνακες, οἵτινες λέγονται ***λογαριθμικοὶ πίνακες,*** περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως (§ 206), διὰ τοῦτο οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες περιέχουν ἑκάστου λογαρίθμου μόνον τὸ δεκαδικὸν μέρος, συνήθως μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν καὶ πίνακες, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑκάστου λογαρίθμου μὲ ἑπτὰ δεκαδικὰ ψηφία ἕκαστον ἢ καὶ μὲ δώδεκα.

Συνήθως μεταχειριζόμεθα πίνακας λογαρίθμων πενταψηφίων, δηλαδὴ περιέχοντας τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων ἀκεραίων τινῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς καὶ ἕκαστον μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία. Ἡ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος (ληφθέντος ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis) *).

Τὸ μὲν σύνολον τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν εἶνε γραμμένον εἰς τὴν

*) Ἐκ τῶν ἑλληνικῶν ἐκδόσεων νεωτέρα εἶνε ἡ τοῦ *Α. Παπασπυροπούλου* μὲ διάταξιν τῶν λογαρίθμων ἁπλουστέραν.

πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἰς τὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τοῦ N. Ὁ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ πρῶτα ψηφία τῶν λογαρίθμων αὐτῶν κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 69 897 | 906 | 914 | 923 | 932 | 940 | 949 | 958 | 966 | 975 |
| 1 | 984 | 992 | *001 | *010 | *018 | *027 | *036 | *044 | *053 | *062 |
| 2 | 70 070 | 079 | 088 | 096 | 105 | 114 | 122 | 131 | 140 | 148 |
| 3 | 157 | 165 | 174 | 183 | 191 | 200 | 209 | 217 | 226 | 234 |
| 4 | 243 | 252 | 260 | 269 | 278 | 286 | 295 | 303 | 312 | 321 |
| 5 | 329 | 338 | 346 | 355 | 364 | 372 | 381 | 389 | 398 | 406 |
| 6 | 415 | 424 | 432 | 441 | 449 | 458 | 467 | 475 | 481 | 492 |
| 7 | 501 | 509 | 518 | 526 | 535 | 544 | 552 | 561 | 569 | 578 |
| 8 | 586 | 595 | 603 | 612 | 621 | 627 | 638 | 646 | 655 | 663 |
| 9 | 672 | 680 | 689 | 697 | 706 | 714 | 723 | 431 | 740 | 749 |
| 510 | 757 | 766 | 774 | 783 | 791 | 800 | 809 | 817 | 825 | 834 |
| 1 | 842 | 851 | 859 | 868 | 876 | 885 | 893 | 902 | 910 | 915 |
| 2 | 927 | 935 | 944 | 952 | 961 | 969 | 978 | 986 | 995 | *003 |

Ὁ ἀστερίσκος, ὁ ὁποῖος ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ, σημαίνει ὅτι τὰ παραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι, λογ. $500 = 2{,}69\ 897$.
λογ. $5000 = 3{,}69\ 897$, λογ.$5017 = 3{,}70\ 044$.
λογ. $5063 = 3{,}70\ 441$, λογ.$5129 = 3{,}71\ 003$.

## Χρήσεις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.

*212.* Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις.

*1)* ***«Ὅταν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ».***

*2)* ***«Ὅταν δοθέντος λογαρίθμου τινός, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὸν ἀριθμόν».***

***Περίπτωσις πρώτη.*** Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὑρίσκομεν αὐτό, καθὼς εἴδομεν ἀνωτέρω.

Οὕτω ἔχομεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, διότι γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν καὶ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ (§ 206).

*Ἀσκήσεις*. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν 0,003817· 1,141· 0,0845· 107,3. 1203· 13,07· 0,0013· 0,0004124.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ἔχει ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, χωρίζομεν τὰ τέσσαρα πρῶτα δι' ὑποδιαστολῆς, ἀφοῦ προηγουμένως εὕρωμεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου αὐτοῦ. Ἐὰν π.χ. ζητῆται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 50 735, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶνε 4, χωρίζοντες δὲ τὰ 4 πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 5073,5. Ἐπειδή, ὡς εἶνε γνωστὸν (§ 207), τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶνε τὸ αὐτό, ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5073,5. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν 5 073 καὶ 5 074. Ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,5 θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 5074. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o \gamma 5073 = 3{,}70\,526 \text{ καὶ } \lambda o \gamma 5074 = 3{,}70\,535.$$

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶνε 9 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Τώρα δεχόμεθα ὅτι, ***αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν)***, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶνε μικρότεραι τῆς μονάδος καὶ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5 073 αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ γίνῃ 5 074, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως· ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 0,5 διὰ νὰ γίνῃ 5073,5, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ $9 \times 0{,}5 = 4{,}5$ ἢ κατὰ 5 περίπου ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Ὥστε, πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον 3,70 526 νὰ προσθέσωμεν 5 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 5073,5. Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o \gamma 5073{,}5 = 3{,}70\,531. \text{ Ἄρα ὁ } \lambda o \gamma 50\,735 = 4{,}70\,531.$$

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε 5,0735 τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ θὰ εἶνε 0, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τούτου θὰ εἶνε τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 50 735 (§ 207). Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν ὅτι $\lambda o \gamma\ 5{,}0735 = 0{,}70\,531$.

***Περίπτωσις δευτέρα.*** Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν ἀπέναντι αὐτοῦ τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶνε ὁ 3,70 140. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 3, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία (§ 207, σελ. 243—4)· ἄρα εἶνε ἀκριβῶς ὁ 5028. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον $\bar{1}$,70 552 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμον 0,70 995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

Ἂν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου δὲν ὑπάρχῃ εἰς τοὺς πίνακας, θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. ὅτι δίδεται ὁ λογάριθμος 2,70 169 καὶ ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός. Τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 0,70 165 καὶ τοῦ 0,70 174 τῶν ἀριθμῶν 5031 καὶ 5032. Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων διαφέρουν, ὡς βλέπομεν, κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν κατὰ 1. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 5031, ὁ ὁποῖος εἶνε 3,70 165, αὐξηθῇ κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 1. Ἂν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως καὶ γίνῃ 3,70 169, ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος αὐτῆς, ἤτοι κατὰ 0,44 . . , ***«δεχόμενοι ὅτι αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶνε (κατὰ προσέγγισιν) ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν λογαρίθμων αὐτῶν, ὅταν εἶνε μικραὶ αὗται»***. Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶνε 0,70 169 θὰ εἶνε ὁ 5031,44... Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶνε 2, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα εἶνε ὁ 503,144.

## Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν.

α΄) 95 348. β΄) 6,8 372 γ΄) 0,98 629. δ΄) 968 $\frac{3}{8}$. ε΄) 3,6 598.

στ΄) 6,3 347. ζ΄) 326,537. η΄) 5 278 37. θ΄) 15389,45.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ x ἐκ τοῦ δεδομένου κατωτέρω λογαρίθμου αὐτοῦ.

α΄) λογ.x=0,63 147. β΄) λογ.x=1,72 127. γ΄) λογ.x=0,68 708.

δ΄) λογ.x=$\bar{3}$,92 836, ε΄) λογ.x=$\bar{4}$,38 221. στ΄) λογ.x=$\bar{3}$,70 032.

## Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

*213.* Διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων (§ 204 καὶ 205) δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς διαίρεσιν. Πράγματι, ἂν ζητοῦμεν τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ προσθέτομεν αὐτούς· τὸ ἄθροισμα τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν θὰ εἶνε, ὡς γνωστόν, ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὸν λογάριθμον αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας (ἢ μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν) καὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὗτος θὰ παριστάνῃ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα ὁμοίως, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

Πρὸς ἐφαρμογὴν τῶν προηγουμένων λύομεν τὰ κατωτέρω προβλήματα.

*1)* ***Νὰ εὑρεθῇ ὁ*** x, ***ἐὰν εἶνε*** $x=72{,}214\times0{,}08\,203$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν (§ 204).

$$\lambda o\gamma.x=\lambda o\gamma.72{,}214+\lambda o\gamma.0{,}08\,203.$$

Εὑρίσκοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο παραγόντων, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma.72{,}214=1{,}85\,862,\quad \lambda o\gamma 0{,}08\,203=\bar{2}{,}91\,397.$$

Ἑπομένως, προσθέτοντες εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma x=0{,}77\,259$, τούτου δ' εὑρίσκοντες τὸν ἀντιστοιχοῦντα ἀριθμόν, ἔχομεν $x=5{,}9\,236$.

*2)* ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον*** $-908{,}4\times0{,}05\,392\times2{,}117$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου διὰ τοῦ x καὶ λάβωμεν τοὺς λοχαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma 908{,}4+\lambda o\gamma 0{,}05\,392+\lambda o\gamma 2{,}117.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν ὅτι $\lambda o\gamma 908{,}4=2{,}95\,828$,

$$\lambda o\gamma.0{,}05\,392=\bar{2}{,}73\,175,\quad \lambda o\gamma.2{,}117=0{,}32\,572.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων προκύπτει ὅτι $\lambda o\gamma.x=2{,}01\,572$.

Ὁ μὲν ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶνε ὁ 103,69, ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε ἀρνητικὸν (§ 33), ἔπεται ὅτι εἶνε $x=-103{,}69$.

*3)* ***Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον*** $x=5\,250:23{,}487$,

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma 5\,250-\lambda o\gamma 23{,}487.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma\, 5\,250 = 3{,}72\,016, \quad \lambda o\gamma\, 23{,}487 = 1{,}37\,086.$$

Δι᾽ ἀφαιρέσεως τοῦ δευτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν ὅτι λογx=2,34 930.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι x=223,51...

***4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἐὰν εἶνε*** $x = \dfrac{7{,}56 \times 4667 \times 567}{899{,}1 \times 0{,}00\,337 \times 23\,435}$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma 7{,}56 + \lambda o\gamma 4\,667 + \lambda o\gamma 567$$
$$-\lambda o\gamma 899{,}1 - \lambda o\gamma 0{,}00\,337 - \lambda o\gamma 23\,435.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

| | |
|---|---|
| λογ7,56 =0,81 852, | λογ 899,1=2,95 381, |
| λογ4667=3,66 904, | λογ0,00 337=$\overline{3}$,52 763, |
| λογ 567=2,75 358, | λογ 23 435=4,36 986. |

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma 7{,}56 + \lambda o\gamma 4\,667 + \lambda o\gamma 567 = 7{,}30\,114,$$
$$\lambda o\gamma 899{,}1 + \lambda o\gamma 0{,}00\,337 + \lambda o\gamma 23\,435 = 4{,}85\,130.$$

Δι᾽ ἀφαιρέσεως προκύπτει λογx=2,44 983.

Εὑρίσκοντες τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμόν, ἔχομεν x=281,73.

***5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ x ἐκ τῆς ἰσότητος*** $x = 376^3$.

Λαμβάνοντες τοὺ λογαρίθμους τῶν ἴσων, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma x = 3 \times \lambda o\gamma 376.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν λογ376=2,57 519.

Ἑπομένως λογx=3×2,57 519=7,72 557.

Ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει x=53 159 000.

***6) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ*** 0,000 043 461.

Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt{0{,}000\,043\,461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma x = \dfrac{1}{2} \times \lambda o\gamma 0{,}000\,043\,461$

ἢ $\lambda o\gamma\, x = \dfrac{1}{2} \times \overline{5}{,}63\,989$, ἢ $\lambda o\gamma x = \overline{3}{,}81\,995$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι x=0,0066062.

***7) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x ἐκ τῆς ἰσότητος*** $81^x = 10$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$\lambda o\gamma 81^x = \lambda o\gamma 10,$$

ἢ

$$x\lambda o\gamma 81 = \lambda o\gamma 10 = 1.$$

Ἄρα

$$x = \frac{1}{\lambda o\gamma\, 81}.$$

Εἶνε $\lambda o\gamma .81=1,90\,849.$

Ἑπομένως καὶ $x=\dfrac{1}{1,90\,849}=\dfrac{1,00\,000}{1,80\,849}=0,52\,397.$

Ἤτοι $x=0,52\,397.$

### Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων διὰ λογαρίθμων.

α΄) $0,4326^3$. β΄) $12^{\frac{1}{3}}$. γ΄) $\sqrt[5]{0,07776}$. δ΄) $13^{\frac{1}{5}}$

$\left(\text{Ἀπ.}\ \begin{matrix}0,0809579\cdot 2,289428\\ 0,6\cdot\ 0,959322\end{matrix}\right).$

ε΄) $-875,6348\times 62,82407$. στ΄) $\dfrac{\sqrt[15]{25,36496}}{(0,0893462)^3}$. $\left(\text{Ἀπ.}\ \begin{matrix}-55010,95\\ 305498300\end{matrix}\right).$

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιφέρεια κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶνε 2,51075 δ. (7,8875).

3) Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος. (ὁ λόγος = μὲ 5).

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως σώματος, πίπτοντος ἐν τῷ κενῷ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4810 μ. (τῆς κορυφῆς τοῦ λευκοῦ ὄρους). (31,317΄΄).

## *) Περὶ τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

***214.*** Καλοῦμεν ***ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν*** πᾶσαν ἐξίσωσιν εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωσνος εἶνε ἐκθέτης δυνάμεως, ἐχούσης βάσιν ἀριθμόν τινα ἢ παράστασιν γνωστὴν (διάφορον τοῦ μηδενός).

Οὕτω π. χ. αἱ ἐξισώσεις $5^{x^2-2x+2}=1$, $\alpha^{2x+3}=\alpha^2$ εἶνε ἐκθετικαί. Τὰς μέχρι τοῦδε γνωστὰς ἐξισώσεις καλοῦμεν ***ἀλγεβρικὰς*** πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἐκθετικῶν.

Ἐκθετική τις ἐξίσωσις λέγεται ***πρώτου, δευτέρου*** κλπ. βαθμοῦ, ἂν ὁ (εἰς τὸν ἐκθέτην) ἄγνωστος περιέχεται εἰς πρῶτον, δεύτερον κλπ. βαθμόν. Οὕτω ἡ μὲν πρώτη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ἐκθετική, ἡ δὲ δευτέρα εἶνε πρώτου βαθμοῦ τοιαύτη.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὰ συστήματα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ κλπ. ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. ***Λύσις*** ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἢ συστήματος ἐκθετικῶν ἐξισώσεων λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις.

Ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως. Τοῦτο δὲ γίνεται ὅταν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης, τῆς ὁποίας τὸ μὲν δεύτερον μέλος εἶνε ἡ μονάς, τὸ δὲ πρῶτον δύναμις ἀριθμοῦ τινος ἢ παραστάσεως γνωστῆς (διαφόρου τοῦ μηδενὸς) τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης περιέχει τὸν ἄγνωστον τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἄρα καὶ τῆς δοθείσης, θέτομεν τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ πρώτου μέρους ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ἔχομεν νὰ λύσωμεν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν.

Οὕτω, ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $3^{3x}=\frac{1}{27}$.

Δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν $3^{3x}.\,27=1$ ἢ $3^{3x}.\,3^3=1$ ἢ $3^{3x+3}=1=3^0$ (§ 43).

Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ἐπειδὴ αἱ ἴσαι δυνάμεις ἴσων βάσεων θὰ ἔχουν ἐκθέτας ἴσους) $3x+3=0$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $x=-1$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3^{2x+5}=2^{2x+5}$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\quad 3^{2x+5}:2^{2x+5}=1$

ἢ καὶ οὕτω $\quad \left(\frac{3}{2}\right)^{2x+5}=1=\left(\frac{3}{2}\right)^0$.

Ἐκ ταύτης ἂν ἐξισώσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως $\frac{3}{2}$, ἔχομεν $2x+5=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$x=-\frac{5}{2}=-2{,}5.$$

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-3}+3^{x-4}$.

Δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν $\dfrac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}}=\dfrac{2^x\,.\,2^{-1}-2^x\,.\,2^{-3}}{3^x\,.\,3^{-3}+3^x\,.\,3^{-4}}=1$

$$\text{ἢ}\quad \frac{2^x\,.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}{3^x\,.\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)}=\frac{\frac{3}{8}\,2^x}{\frac{4}{81}\,3^x}=\frac{3.81.2^x}{4.\,8.3^x}=\frac{3^5\,.\,2^x}{2^5\,.\,3^x}=\frac{2^x\,.\,2^{-5}}{3^x\,.\,3^{-5}}$$

$$=\frac{2^{x-5}}{3^{x-5}}=1,\ \text{ἢ}\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}=1=\left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως $\frac{2}{3}$, ἔχομεν $x-5=0$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $x=5$.

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον γίνεται ἐνίοτε καὶ ἡ λύσις συστήματος ἐκθετικῶν ἐξισώσεων μὲ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἀγνώστους, ἀναγομένου εἰς τὴν λύσιν συστήματος ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων.

Ἔστω π. χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^8 \\ \dfrac{\alpha^x}{\alpha^y} = \dfrac{1}{\alpha^2}. \end{cases}$$

Γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\begin{cases} \alpha^{x+y} = \alpha^8 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{x+y} : \alpha^8 = 1 \\ \alpha^{x-y} = \alpha^{-2} \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{x-y} : \alpha^{-2} = 1 \end{cases}$$

τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ οὕτω :

$$\begin{cases} \alpha^{x+y-8} = 1 = \alpha^0 \\ \alpha^{x-y+2} = 1 = \alpha^0. \end{cases}$$

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως ἔχομεν τὸ ἑξῆς ἀλγεβρικὸν σύστημα, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν

$$\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=3$ καὶ $y=5$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $10^{(5-x)(6-x)} = 100$.
Διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ 100, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $10^2$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $10^{(5-x)(6-x)} : 10^2 = 1$
ἢ τὴν $10^{(5-x)(6-x)-2} = 1 = 10^0$.

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως (τοῦ 10) ἔχομεν $(5-x)(6-x)-2=0$,
ἤτοι τὴν ἑξῆς ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν, $x^2 - 11x + 30 - 2 = 0$.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν $x=7$ καὶ $x=4$.

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{(\beta-x)x} = \alpha^x$ ἐνῷ ὑποτίθεται ὅτι εἶνε τὸ α θετικὸν καὶ διάφορον τοῦ 0 καὶ τῆς 1.

Διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\alpha^x$, εὑρίσκομεν $\alpha^{(\beta-x)x} : \alpha^x = 1$
ἢ τὴν $\alpha^{(\beta-x)x-x} = 1 = \alpha^0$.

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ α, ἔχομεν

$$(\beta - x)x - x = 0$$

ἢ τὴν $x^2 + x - \beta x = 0$,
ἡ ὁποία εἶνε ἀλγεβρικὴ ἐξίσωσις ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης ἢ τῆς $x(x-\beta+1)=0$ εὑρίσκομεν $x=0$ καὶ $x=\beta-1$.

## *Ἀσκήσεις.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις·

1) $\alpha^{x+\mu}=\alpha^{2\mu}$. 2) $\alpha^{3x+2}=\alpha^{x+4}$. 3) $\gamma^{2-5x}=\gamma^{x+3}$.
4) $\beta^{(2x+1)(3x+4)}=\beta^{(3x+1)(2x+5)}$. 5) $(\alpha^{\mu})^{(x+3)}=\alpha^{x+2\nu}$.
6) $\alpha^{2x+3}.\alpha^{3x+1}=\alpha^{5x+6}$. 7) $2^{2x}=32$. 8) $(-2)^x=16$.
9) $-2^x=-32$ 10) $100^{2x+3}=100$.

***Ὁμὰς δευτέρα.*** Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις·

1) $5^{2x}-7.5^x=450$. 2) $\sqrt[x]{\alpha}=\alpha^x$. 3) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$. (±1·3)
4) $2^x+4^x=272$. 5) $\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma 24-\lambda o\gamma 3$. (4·3).
6) $5.\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma\, 288+3\,\lambda o\gamma\,\frac{x}{2}$. 7) $2\,\lambda o\gamma x-\lambda o\gamma 192+\lambda o\gamma\,\frac{3}{4}$.
8) $2^{x+1}+4^x=80$. (12·3).

***Ὁμὰς τρίτη.*** Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα.

1) $\begin{cases}\alpha^{2x}.\alpha^{5y}=\alpha^8\\ \dfrac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3y}}=\dfrac{1}{\alpha^6}.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5^{3x}.5^{4y}=(5^6)^3\\ \dfrac{5^{2x}}{5^{7y}}=5^{-17}.\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+y^2=425\\ \lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=2.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=65\\ \lambda o\gamma(x-y)=3.\end{cases}$

5) $\begin{cases}5x^2-3y^2=11\,300\\ \lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=3.\end{cases}$ (Ἀπ. 20·5 25·40 20·20)

### *) Περὶ τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

***215.*** Καλοῦμεν ***λογαριθμικὰς ἐξισώσεις*** τὰς ἐξισώσεις τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εὑρίσκονται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων καὶ τὴν χρῆσιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν καὶ τὰ ***συστήματα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.***

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3^x=729$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, ἔχομεν $x.\lambda o\gamma 3=\lambda o\gamma 729$ καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν ἴσων διὰ τοῦ $\lambda o\gamma 3$ εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\lambda o\gamma 729}{\lambda o\gamma 3}=\dfrac{2{,}86\,273}{0{,}47\,712}=6{,}00002\ldots$

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x^2-9x-24}=4\,096$.
Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$(x^2-9x-24).\lambda o\gamma 2=\lambda o\gamma 4096.$$

Καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ λογ2, εὑρίσκομεν

$$x^2-9\,x-24=\frac{\lambda o\gamma 4\,096}{\lambda o\gamma 2}=\frac{3{,}61\,236}{0{,}30\,103}=12.$$

Ἤτοι $x^2-9\,x-24=12.$

Λύοντες τὴν ἀλγεβρικὴν ταύτην ἐξίσωσιν, ἰσοδύναμον πρὸς τὴν δοθεῖσαν, εὑρίσκομεν $x=12$ καὶ $x=-3$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $0{,}75^x=51{,}5$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$x.\lambda o\gamma 0{,}75=\lambda o\gamma 51{,}5$. Ἐξ οὗ $x=\dfrac{\lambda o\gamma 51{,}5}{\lambda o\gamma 0{,}75}=\dfrac{3{,}61236}{0{,}30103}=-13{,}701.$

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 3^x\,.\,4^y=3\,981\,312 \\ 2^y\,.\,5^x=400\,000. \end{cases}$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθέν,

$$\begin{cases} x.\lambda o\gamma 3+y.\lambda o\gamma 4=\lambda o\gamma 3\,981\,312 \\ y.\lambda o\gamma 2+x.\lambda o\gamma 5=\lambda o\gamma 400\,000. \end{cases}$$

Θέτοντες $\lambda o\gamma 4=\lambda o\gamma 2^2=2\lambda o\gamma 2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν

$$\begin{cases} x.\lambda o\gamma.3+2y.\lambda o\gamma 2=\lambda o\gamma 3\,981\,312 \\ 2y.\lambda o\gamma 2+2x.\lambda o\gamma 5=2\,\lambda o\gamma 400\,000. \end{cases}$$

Ἐὰν τὴν πρώτην τούτων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν

$$x(2.\lambda o\gamma.5-\lambda o\gamma 3)=2\,\lambda o\gamma 400\,000-\lambda o\gamma 3\,981\,312$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$x=\frac{2\lambda o\gamma 400\,000-\lambda o\gamma 3\,981\,312}{2.\lambda o\gamma 5-\lambda o\gamma 3},$$

καὶ μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν $x=5$.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν

$$2^y=\frac{400\,000}{5^5}=\frac{4.10^5}{5^5}=\frac{2^2.2^5.5^5}{5^5}=2^7,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $2^y:2^7=1$ ἢ $2^{y-7}=1=2^0$ καὶ $y-7=0$, $y=7$.

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 2\lambda o\gamma y-\lambda o\gamma x=0{,}12\,494 \\ \lambda o\gamma 3+2\lambda o\gamma x+\lambda o\gamma y=1{,}73\,239. \end{cases}$$

Τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς

$$2\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 1{,}73\,239 - \lambda o\gamma 3 = 1{,}73\,239 - 0{,}47\,712 = 1{,}25\,527.$$

Μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἀπαλείφομεν τὸ λογx καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν,

$$5.\lambda o\gamma y = 1{,}50\,515$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει διὰ διαιρέσεως τῶν ἴσων διὰ 5

$$\lambda o\gamma y = \frac{1{,}50\,515}{5} = 0{,}30\,103$$

καὶ y=2. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ x=3.

## Ἀσκήσεις.

*Ὁμὰς πρώτη.* Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

1) $3^x = 177\,147$. 2) $3^{\frac{x}{2}} = 768$. 3) $3^{\sqrt{x}} = 243$. $\left(\text{Ἀπ.}\ \begin{matrix} 11 \cdot 12{,}09 \\ 25 \end{matrix}\right)$.

4) $24^{3x-2} = 10\,000$. 5) $5^{x^2-3x} = 625$. 6) $x^{x^2-7x+12} = 1$.

(Ἔχομεν $(x^2 - 7x + 12).\lambda o\gamma x = 0$, ἐξ οὗ ἢ $\lambda o\gamma x = 0$ ἄρα $x = 1$, ἢ $x^2 - 7x + 12 = 0$ ὅτε $x = 3$ ἢ $x = 4$).

7) $6^{x^4-18x^2+86} = 7\,776$. 8) $\alpha.\alpha^3.\alpha^5.\alpha^7 \ldots \alpha^{2x-1} = \nu$.

$$\left(\text{Ἀπ.}\ 3 \cdot -3,\ \left(\frac{\lambda o\gamma\, \nu}{\lambda o\gamma\, \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

*Ὁμὰς δευτέρα.* Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα.

1) $x^4 + y^4 = 641$, $\lambda o\gamma(xy)^2 = 2$.

4) $\lambda o\gamma xy = 1{,}5$, $\lambda o\gamma \dfrac{x}{y} = 0{,}5$. $\left(\text{Ἀπ.}\ \begin{matrix} 2 \cdot 5 \\ 10, \sqrt{10} \end{matrix}\right)$.

2) $5^{3x-2y} = 3\,125$, $11^{6x-7y} = 14\,641$.

5) $\lambda o\gamma xy = 3$, $5x^2 - 3y^2 = 11\,300$. $\left(\begin{matrix} 3 \cdot 2 \\ 50 \cdot 20 \end{matrix}\right)$.

3) $\lambda o\gamma\sqrt{x} - \lambda o\gamma\sqrt{5} = 0{,}5$, $3.\lambda o\gamma x + 2.\lambda o\gamma y = 1{,}50\,515$.

6) $\lambda o\gamma \dfrac{x}{5} = \lambda o\gamma\, 10$, $\lambda o\gamma x^3 + \lambda o\gamma y^2 = \lambda o\gamma 32$. $\left(\begin{matrix} 50 \cdot 0{,}016 \\ 50 \cdot 0{,}016 \end{matrix}\right)$

### *) Περὶ λογαρίθμων ὡς πρὸς βάσιν οἱανδήποτε.

***216. Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος A ὡς πρὸς βάσιν τινά, ἔστω τὴν β, τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ β, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν δοθέντα ἀριθμόν.*** Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ εἶνε·

$$2^3 = 8,\ 3^4 = 81,$$

ὁ λογάριθμος τοῦ 8 ὡς πρὸς βάσιν 2 εἶνε τὸ 3, ὁ λογάριθμος τοῦ 81 ὡς πρὸς βάσιν 3 εἶνε τὸ 4.

Ἐν γένει, ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν $\beta^x = A$, ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως ταύτης, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν ἐπαληθεύεται ἡ ἐξίσωσις, καλεῖται ***λογάριθμος τοῦ A ὡς πρὸς βάσιν β***, καὶ παριστάνεται συμβολικῶς οὕτω

$$\lambda o \gamma_\beta A = x.$$

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ οἱ λογάριθμοι, τοὺς ὁποίους ἐξητάσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἔχουν βάσιν τὸν 10, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὸ ***δεκαδικὸν*** σύστημα τῶν λογαρίθμων **).

Παρατηρητέον ὅτι ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων πρέπει νὰ εἶνε ἀριθμὸς ***διάφορος τῆς μονάδος (καὶ τοῦ μηδενὸς) καὶ θετικός***. Διότι π.χ. ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $1^x = A$ εἶνε ἀδύνατος διὰ τιμὴν τοῦ A διάφορον τῆς μονάδος, ἡ δὲ ἐξίσωσις $(-\beta)^x = A$ δὲν ἐπιδέχεται πάντοτε λύσιν, ὅταν εἶνε $\beta > 0$, καθὼς π. χ. ἡ $(-10)^x = 1\,000$.

***Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος A ὡς πρὸς βάσιν τινὰ β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τὸν ἀριθμὸν $\frac{x}{\nu}$ (ὅπου τὰ x καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοί), ἐὰν ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\beta^{\frac{x}{\nu}} < A < \beta^{\frac{x+1}{\nu}}$.***

Ἐὰν εἶνε $\beta^{\frac{x}{\nu}} = A$, τότε τὸ $\frac{x}{\nu} = \lambda o \gamma_\beta A$.

Ἐὰν τὰ ἀνωτέρω ἄνισα ὑψώσωμεν εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν εὑρίσκομεν

$$\beta^x < A^\nu < \beta^{x+1}.$$

Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι, ***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ A ὡς πρὸς βάσιν β κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν A εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, τούτου νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον κατὰ προσέγγισιν μονάδος, καὶ τὸ ἐξαγόμενον νὰ διαιρέσωμεν διὰ ν»***.

Ἐκτὸς τῶν ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν εἰς τὸ δεκαδικὸν σύ-

---

**) Ἐκ τῶν διαφόρων συστημάτων λογαρίθμων, ἐκτὸς τοῦ δεκαδικοῦ ἀξιοσημείωτον εἶνε τὸ καλούμενον *νεπέρειον σύστημα*, ἔχον ὡς βάσιν ἀριθμὸν ἀσύμμετρον, ὁ ὁποῖος παριστάνεται ὑπὸ τοῦ γράμματος e καὶ εἶνε

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots \text{ (ἐπ' ἄπειρον) ἢ } e = 2{,}718\,281\,828\ldots$$

στημα τῶν λογαρίθμων, αἱ ὁποῖαι (ἰσχύουν δι' οἱονδήποτε σύστημα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως), ἔχομεν ἀκόμη τὰς ἑξῆς.

*«Οἱ λογάριθμοι ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστρόφους εἶνε ἀντίθετοι».*

Ἤτοι θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma_{\frac{1}{\beta}} A = -\lambda o\gamma_\beta A$.

Διότι ἔστω ὅτι ὁ $\lambda o\gamma_\beta A = x$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $\beta^x = A$.

Ἐὰν λάβωμεν ἀντὶ τοῦ $\beta^x$ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\frac{1}{\beta^{-x}}$ ἢ τὸ $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-x}$ θὰ ἔχωμεν $\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-x} = A$. Ἀλλὰ τοῦτο φανερώνει ὅτι $\lambda o\gamma_{\frac{1}{\beta}} A = -x$. Ἑπομένως εἶνε $\lambda o\gamma_\beta A = -\lambda o\gamma_{\frac{1}{\beta}} A$.

*«Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀντιστρόφων ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν εἶνε ἀντίθετοι».*

Θὰ δείξωμεν δηλαδὴ ὅτι $\lambda o\gamma_\beta A = -\lambda o\gamma_\beta \frac{1}{A}$.

Διότι ἔστω x ὁ λογάριθμος τοῦ A ὡς πρὸς βάσιν τὴν β. Θὰ ἔχωμεν τότε $\beta^x = A$ καὶ ἀντιστρέφοντες τοὺς ἴσους τούτους, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\beta^x} = \frac{1}{A}$ ἢ καὶ $\beta^{-x} = \frac{1}{A}$.

Ἡ ἰσότης αὐτὴ φανερώνει ὅτι $\lambda o\gamma_\beta \frac{1}{A} = -x$, ἤτοι εἶνε $\lambda o\gamma_\beta \frac{1}{A} = -\lambda o\gamma_\beta A$.

**217.** ***Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως τῶν λογαρίθμων.*** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ ἔστω τοῦ A ὡς πρὸς βάσιν β, καὶ ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω τὴν $\beta_1$. Δίδεται δηλαδὴ ὁ $\lambda o\gamma_\beta A$ καὶ ζητεῖται τὸ $\lambda o\gamma_{\beta_1} A$. Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν $\lambda o\gamma_\beta A$ διὰ τοῦ x, ἤτοι, ἂν θέσωμεν $\lambda o\gamma_\beta A = x$, θὰ ἔχωμεν $\beta^x = A$. Ἂν τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς βάσιν $\beta_1$, θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma_{\beta_1} (\beta^x) = \lambda o\gamma_{\beta_1} A$.

Ἀλλ' εἶνε $\lambda o\gamma_{\beta_1} (\beta^x) = x . \lambda o\gamma_{\beta_1} \beta$ (κατὰ τὰ εἰς τὴν § 205).

Ἑπομένως ἔχομεν $x . \lambda o\gamma_{\beta_1} \beta = \lambda o\gamma_{\beta_1} A$.

Ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma_\beta A . \lambda o\gamma_{\beta_1} \beta = \lambda o\gamma_{\beta_1} A.$$

Ἤτοι, *«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς νέαν τινὰ βάσιν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς*

***πρὸς τὴν παλαιὰν βάσιν ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς παλαιᾶς βάσεως ὡς πρὸς τὴν νέαν».***

### Ἀσκήσεις.

1) Δείξατε ὅτι ὁ $λογ_{β_1} β. λογ_β β_1 = 1$.

2) Τί ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν νεπέρειον λογάριθμον ἀριθμοῦ τινος;

## Περὶ ἀνατοκισμοῦ καὶ χρεωλυσίας.

### Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.

*218.* Τὰ προβλήματα τόκου, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ κεφάλαιον δὲν μένει τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου ἀλλ' εἰς τὸ τέλος ὡρισμένου τινὸς χρόνου προστίθεται εἰς αὐτὸ ὁ τόκος αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ νέον κεφάλαιον, λέγονται ***προβλήματα ἀνατοκισμοῦ ἢ συνθέτου τόκου.*** Ἐνῷ ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἐξητάσαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν λέγονται πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τούτων προβλήματα ἁπλοῦ τόκου. Ὥστε, προβλήματα ἀνατοκισμοῦ λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς μονάδος.

Πρόβλημα 1ον). «***Δανείζει τις ποσὸν α δραχμῶν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (εἰς ἓν ἔτος ἢ μίαν ἑξαμηνίαν ἢ μίαν τριμηνίαν, κλπ.) τ δραχμάς· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας;***»

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ ἡ μία δραχμὴ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δραχμάς, αἱ α δραχμαὶ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον α. τ δραχμάς. Ἐπομένως τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε

$$α + ατ = α.(1+τ) \text{δραχμαί}.$$

Ἤτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1+τ)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον $α\,(1+τ)$ εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀκόμη χρονικῆς μονάδος θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ

$$α(1+τ).(1+τ) \text{ ἢ } α\,(1+τ)^2.$$

Ὥστε τὸ ἀρχικὸν ποσὸν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος.

$$α(1+τ)^2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος **ν** χρονικῶν μονάδων τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α θὰ γίνῃ

$$α.(1+τ)^ν.$$

Ἂν τὸ ποσὸν τοῦτο παραστήσωμεν διὰ τοῦ Σ θὰ ἔχωμεν

$$Σ=α\ (1+τ)^ν \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν Σ, α, **ν**, **τ** μὲ τὴν βοήθειαν καὶ τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), ὅταν γνωρίζωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν.

Ἐφαρμογή *«Δανείζει τις 1 500 δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4%, κατ' ἔτος· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ ἓξ ἔτη ;»*

Ἐνταῦθα ζητεῖται μὲν τὸ Σ, ἔχομεν δὲ α=1 500, ν=6 καὶ τ=0,04, διότι αἱ 100 δραχμαὶ εἰς ἓν ἔτος φέρουν 4 δραχμάς, ἄρα ἡ 1 δραχμὴ εἰς ἓν ἔτος φέρει τόκον 0,04 δραχμάς.

Ἐπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) ἔχομεν

$$Σ=1\,500.1{,}04^6.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$λογΣ=λογ1\,500+6.λογ1{,}04.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ. 1 500=3,17 609·
6.λογ1,04=6.0,01 703=0,10 218, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως λογΣ=3,27 827 καὶ ἐκ τούτου Σ=1 897,9.

Ἤτοι ὁ τοκίσας τὰς 1 500 δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4% θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὅλῳ 1 897,90 δρχ.

Πρόβλημα 2ον). *«Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6%, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὅλῳ 5 000 δραχμάς ;»*

Ἔχομεν Σ=5 000, τ=0,06· 1+τ=1,06, ν=15 καὶ ζητεῖται **τὸ α.**

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$$5000=α.1{,}06^{15}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν λογ5 000=λογα+15.λογ1,06 ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν λογα=λογ5 000—15.λογ1,05

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν λογ.5 000=3,69 897, ἐπομένως εἶνε

15. $\lambda o\gamma 1{,}06 = 15 . 0{,}02\ 531 = 0{,}37\ 965$ καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως $\lambda o\gamma \alpha = 3{,}31\ 932$ ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι,

$$\alpha = 2\ 086 \text{ δραχμαί.}$$

Πρόβλημα 3ον). *«Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 862 δραχμαί, ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος, γίνονται μετὰ 5 ἔτη 1 048,70 δραχμαί».*

Ἔχομεν $\alpha = 862$, $\nu = 5$, $\Sigma = 1048{,}70$ καὶ ζητεῖται τὸ $\tau$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν $1\ 048{,}70 = 862 . (1+\tau)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο τούτων ἴσων εὑρίσκομεν

$\lambda o\gamma 1\ 048{,}70 = \lambda o\gamma 862 + 5 . \lambda o\gamma(1+\tau)$ ἐκ τοῦ ὁποίου

ἕπεται ὅτι, $\lambda o\gamma(1+\tau) = \dfrac{\lambda o\gamma 1\ 048{,}70 - \lambda o\gamma 862}{5}$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$\lambda o\gamma 1\ 048{,}70 = 3{,}02\ 065$, $\lambda o\gamma 862 = 2{,}93\ 591$, ἐκ τῶν ὁποίων

ἔχομεν $\lambda o\gamma 1048{,}70 - \lambda o\gamma 862 = 0{,}08\ 474$

καὶ $\lambda o\gamma(1+\tau) = 0{,}08\ 474 : 5 = 0{,}01\ 695$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $(1+\tau) = 1{,}0398$ καὶ $\tau = 0{,}0\ 398$.

Αὐτὸς εἶνε ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς 1 ἔτος, ἄρα τὸ ἐπιτόκιον $100 . \tau$ θὰ εἶνε 3,98 δραχμαί.

Πρόβλημα 4ον). *«Μετὰ πόσον χρόνον 12 589 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 5% γίνονται 45 818 δραχμαί;»*

Ἔχομεν $\alpha = 12\ 589$, $\tau = 0{,}05$, $\Sigma = 45\ 818$ καὶ ζητεῖται τὸ $\nu$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$45\ 818 = 12\ 589 . 1{,}05^{\nu}$. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma 45\ 818 = \lambda o\gamma 12\ 589 + \nu . \lambda o\gamma 1{,}05$ ἐκ τοῦ ὁποίου

προκύπτει ὅτι $\nu = \dfrac{\lambda o\gamma 45\ 818 - \lambda o\gamma 12\ 589}{\lambda o\gamma 1{,}05}$.

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $\lambda o\gamma 45\ 818 = 4{,}66\ 104$

$\lambda o\gamma 12\ 589 = 4{,}09\ 999$, $\lambda o\gamma 1{,}05 = 0{,}02\ 119$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶνε 0,56 105. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν

$\nu = \dfrac{0{,}5\ 6105}{0{,}0\ 2119} = 26$ ἔτη καί τι ἐπὶ πλέον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 27ου ἔτους, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 26ου ἔτους αἱ 12 589 δραχμαὶ γίνονται $12\ 589 . 1{,}05^{26}$. Ἐὰν δὲ τὸ κεφάλαιον αὐτὸ τοκισθῇ μὲ ἁπλοῦν τόκον ἐπὶ η ἡμέρας, θὰ φέρῃ τόκον $\dfrac{12\,589\ 1{,}05^{26}.\ 5.\eta}{360\,100}$ (τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας). Ἑπομένως τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον θὰ γίνῃ μετὰ 26 ἔτη καὶ η ἡμέρας

$$12\,589.1{,}05^{26}+12\,589.\ 1{,}05^{26}\ \frac{5.\eta}{36\,000}$$

ἢ $12\,589.1{,}05^{26}\left(1+\dfrac{5.\eta}{36\,000}\right)$, τοῦτο δὲ ἐδόθη ὅτι εἶνε ἴσον μὲ τὸ 45 818· ἤτοι ἔχομεν $45\,818=12\,589,\ 1{,}05^{26}\left(1+\dfrac{5.\eta}{36\,000}\right)$

ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων ὅτι εἶνε η=172. Ἑπομένως τὸ δάνειον διήρκεσε 26 ἔτη καὶ 172 ἡμέρας.

Τὸν ἀριθμὸν η εὑρίσκομεν μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν καὶ ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν 12 589 $1{,}05^{26}$ καὶ τοῦτον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 45 818. Ἡ οὕτω προκύπτουσα διαφορὰ παριστάνει τὸν ἁπλοῦν τόκον τοῦ ποσοῦ τῶν 12 589.$1{,}05^{26}$ δραχμῶν πρὸς 5 %ο εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, λύοντες πρόβλημα ἁπλοῦ τόκου εἰς τὸ ὁποῖον ζητεῖται ὁ χρόνος.

***Παρατήρησις.*** Ἐν γένει, ἔστω ὅτι ἐδάνεισέ τις ποσὸν α δραχμῶν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ᾽ ἔτος καὶ μὲ τόκον τ δρχ. τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας. Παρατηροῦμεν ὅτι μετὰ ν μὲν ἔτη θὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$ καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν πόσα θὰ λάβῃ καὶ μετὰ η ἡμέρας ἀκόμη, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ἁπλοῦν τόκον τῶν $\alpha(1+\tau)^\nu$ δρχ. εἰς η ἡμέρας πρὸς ἐπιτόκιον 100.τ κατ᾽ ἔτος ἤτοι τὸ $\dfrac{\alpha(1+\tau)^\nu\ .\ 100.\tau.\eta}{360.100}=\dfrac{\alpha(1+\tau)^\nu\ .\ \tau.\eta}{360}$ καὶ τοῦτο νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Οὕτω εὑρίσκομεν ὡς τελικὸν ἐξαγόμενον ἔστω Σ, τὸ $\Sigma=(1+\tau)^\nu+\alpha(1+\tau)^\nu\ \dfrac{\tau\,\eta}{360}=\alpha(1+\tau)^\nu\left(1+\dfrac{\tau.\eta}{360}\right)$.

Ἐκ τούτου ἔχομεν, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους

$$\text{λογ}\ \Sigma=\text{λογ}\,\alpha+\nu.\text{λογ}(1+\tau)+\text{λογ}\left(1+\frac{\tau.\eta}{360}\right). \qquad (1)$$

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\dfrac{\text{λογ}\Sigma-\text{λογ}\alpha}{\text{λογ}(1+\tau)}$ θὰ ἔχωμεν, ἀφοῦ γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ν τῶν ἐτῶν, λογΣ—λογα

$=\nu.\lambda o\gamma(1+\tau)+\upsilon$ καὶ ἕνεκα τῆς (1) θὰ εἶνε (2) $\upsilon=\lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)$.

Ὅθεν, ὁ λογάριθμος τοῦ $1+\frac{\eta\tau}{360}$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\lambda o\gamma\Sigma-\lambda o\gamma\alpha$ διὰ τοῦ $\lambda o\gamma(1+\tau)$, τῆς ὁποίας τὸ ἀκέραιον πηλίκον εἶνε ὁ ἀριθμὸς ν τῶν ἐτῶν. Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης (2) δυνάμεθα εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὸ η.

## *Προβλήματα πρὸς λύσιν.*

***Ὁμὰς πρώτη.*** 1) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα 4ον εὕρετε τὸ η διὰ τοῦ ἐκθέντος τρόπου, λύοντες πρόβλημα ἁπλοῦν τόκου.

2) Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις, ἐὰν ἀνατοκίσῃ κατ᾽ ἔτος 5 600 (160,45) δρχ. ἐπὶ 100(17) ἔτη πρὸς 5 (3,5))°/₀; 736 407,2(287,95).

3) Πατήρ τις κατέθεσεν εἰς τράπεζαν 750(5 876) δρ. κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ μὲ ἀνατοκισμὸν κατ᾽ ἔτος πρὸς 4,5(4,5)°/₀. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱός του εἰς τὸ τέλος τοῦ 20(25) ἔτους τῆς ἡλικίας αὐτοῦ;
1 809,85 (17 659,95).

4) Πόσην αὔξησιν παθαίνει κεφάλαιον 100 000 δρχ. εἰς 8 ἔτη καὶ 8 μῆνας, ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος πρὸς 4°/₀; (40 507,55).

***Ὁμὰς δευτέρα.*** 1) Ποῖον ἀρχαῖον κεφάλαιον γίνεται μετὰ τῶν τόκων αὐτοῦ ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος πρὸς 3,5 (4,5)°/₀ εἰς 20 (10) ἔτη 3 730,85 (14 495) ;
1 875,43 (9 397,4).

2) Τίς ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45 896(25 130) δρχ., πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμ. (12,5 ἔτη) μὲ ἀνατοκισμὸν κατ᾽ ἔτος πρὸς 8 (4)°/₀;
13 831,7 (15 388).

3) Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ᾽ ἑξαμηνίαν πρὸς 4°/₀ ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 20 000 δρχ. ; 9804,4.

***Ὁμὰς τρίτη.*** 1) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη μὲ ἀνατοκισμὸν κατ᾽ ἔτος κεφάλαιον 625 (3 200) δρχ. ἐπὶ 15 (37) ἔτη καὶ ἔγινε 11 66,9 (11 427,1) δρχ. ;
4,257 (3,5).

2) Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἐὰν 100 δρχ. εἰς 22 ἔτη γίνωνται 2 247,7 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι ;

3) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν᾽ ἀνατοκισθῇ ἓν κεφάλαιον κατ᾽ ἔτος διὰ νὰ τετραπλασθῇ μετὰ 31 ἔτη; 4,5°/₀.

***Ὁμὰς τετάρτη.*** 1) Εἰς πόσον χρόνον ἀνατοκιζόμενον κατ᾽ ἔτος κεφάλαιον 3 580(25 837) δρχ. πρὸς 4,5(8)°/₀ γίνεται 56 000(49 853) δρχ.;
6 ἔτη 221 ἡμ. (8 ἔτη 193 ἡμ.).

2) Πότε κατετέθησαν 630 δρχ. εἰς τράπεζάν τινα μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς $4^0/_0$, ἐὰν τὴν 1ην Ἀπριλίου 1909 εἶχπν γίνει 969,80 δρχ. ;

3) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος ποσόν τι πρὸς $3,5^0/_0$ διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ ἢ τετραπλασιασθῇ ;

20 ἔτη 51 ἡμ.· 31 ἔτη 336 ἡμ.· 40 ἔτη 103 ἡμ.

4) Ὁ πληθυσμὸς ἑνὸς Κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ ; 56 περίπου.

5) Μία πόλις ἔχει 8 000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5 000 κατοίκους ; 23 περίπου.

## Προβλήματα ἴσων καταθέσεων.

*219.* Πρόβλημα 1ον). «***Καταθέτει τις εἰς τὴν τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4,5⁰/₀ ποσὸν 2 050 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 15 ἔτη ;***».

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν 2 050 δραχμῶν θὰ μείνῃ 15 ἔτη ἀνατοκιζομένη πρὸς $4,5^0/_0$. Ἑπομένως θὰ γίνῃ $2\,050.1,045^{15}$.

Ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους γινομένη κατάθεσις θὰ μείνῃ μόνη 14 ἔτη εἰς τὸν τόκον· ἄρα θὰ γίνῃ $2\,050.1,045^{14}$.

Ὁμοίως ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάθεσις θὰ γίνῃ $2\,050.1,045^{13}$ κ. ο. κ., ἡ τελευταία θὰ μείνῃ μόνον ἓν ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $2\,050.1,045$.

Ὥστε τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτῶν θὰ εἶνε $2\,050.1,045^{15}+2\,050.1,045^{14}+\ldots+2\,050.1,045$.

ἢ $2\,850.1,045+2\,050.1,045^2+2\,050.1,45^3+\ldots+2\,050.1,45^{15}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶνε 1,045. Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, (§ 194), εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ποσόν, ἔστω Σ, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἶνε

$$\Sigma=\frac{2\,050.1,045^{15}1,045-2\,050.1,045}{1,045-1=0,045}$$

ἢ $$\Sigma=2\,050.\,1,045\,\frac{1,045^{15}-1}{0,045}.$$

Διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ $1,045^{15}$. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x=1,045^{15}$

$$\lambda o\gamma x = 15.\lambda o\gamma 1{,}045 = 0{,}28\,680,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔπεται ὅτι $x = 1{,}93\,554$.

Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\Sigma = 2\,050.1{,}045\,\dfrac{0{,}93\,554}{0{,}045}$

ἢ

$$\Sigma = \frac{2\,050.1{,}045.935{,}54}{45}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\Sigma = \lambda o\gamma 2\,050 + \lambda o\gamma 1{,}045 + \lambda o\gamma 935{,}54 - \lambda o\gamma 45.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\ 2\,050 &= 3{,}31\,175 \\ \lambda o\gamma\ 1{,}045 &= 0{,}01\,912 \\ \lambda o\gamma 935{,}54 &= 2{,}97\,107 \\ \hline \text{ἄθροισμα}\ \ & 6{,}30\,194 \\ \lambda o\gamma 45 &= 1{,}65\,321 \end{aligned}$$

καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\Sigma = 4{,}64\,873$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $\Sigma = 44\,518$· ἤτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 44 518 δραχμάς.

Ἐν γένει, ἐὰν καταθέτῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς εἴς τινα τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητῆται δὲ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἡ δευτέρα $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κ. ο. κ. ἡ τελευταία $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν μονάδων θὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἂν παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha.(1+\tau)\,\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἢ τὸ α, ἐὰν δοθῇ τὸ Σ, τὸ τ καὶ τὸ ν.

Πρόβλημα 2ον). «***Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας;***».

Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ ἐπὶ ν—1 χρονικὰς μονάδας. Ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\nu)^{\nu-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ ν—2 χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς ἡ τελευταία θὰ εἶνε μόνον α. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha+\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$

ἢ $\Sigma = \dfrac{\alpha(1+\tau)^{\nu}-\alpha}{\tau} = \alpha.\,\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α, τ, ν. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὑρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ Σ, ν, τ.

## Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1) Ἔμπορός τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 350 δρχ. ἐκ τῶν κερδῶν αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4%. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους; 10 835,25.

2) Καταθέτει τις κατ' ἔτος μὲ σύνθετον τόκον 1 000 δρχ. πρὸς 5%. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ 13 210 δρχ.; 11 ἔτη.

3) Ἡ διατροφὴ καὶ τὰ ἔξοδα τῶν σπουδῶν τέκνου κατεγράφοντο ὑπὸ τοῦ πατρὸς εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· ἀνήρχοννο δὲ κατὰ μέσον ὅρον εἰς 2 000 δρχ. ἐτησίως, Πόσα θὰ ἐγίνοντο αὐτὰ μετὰ 2 ἔτη, ἐὰν ἀνετοκίζοντο κατ' ἔτος πρὸς 3,5%;

4) Πατὴρ τις ἀποκτήσας κόρην, θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσόν τι ὡρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5% γίνουν μετὰ 21 ἔτη 25 000 δραχμαί. Πόσα πρέπει νὰ εἶνε ἡ ἐτησία κατάθεσις; 666,57.

## Προβλήματα χρεωλυσίας.

**220.** ***Χρεωλυσία*** λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται ***χρεωλύσιον*** καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

Πρόβλημα 1ον). «***Ἐδανείσθη τις 18 500 δρχ. πρὸς 4,5% μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον;***».

Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν 18 500 δρσχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη $18\,500 . 1{,}045^{12}$. Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον, ἡ πρώτη δόσις ἐκ x δραχμῶν θὰ γίνῃ $x . 1{,}045^{11}$ μετὰ 11 ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται ὅτι ἔμειναν εἰς τὸν τόκον. Ἡ δευτέρα δόσις θὰ γίνῃ $x.1{,}045^{10}$, ἡ τρίτη $x.1{,}045^{9}$ κ. ο. κ. ἡ τελευταία θὰ μείνῃ x. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν πληρωθέντων ποσῶν μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν θὰ εἶνε

$$x+x.1{,}045+x.1{,}045^2+\ldots+x.1{,}045^{11}$$

ἢ $x.\dfrac{1{,}045^{12}-1}{0{,}0\,45}$. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον, συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$x.\frac{1{,}045^{12}-1}{0{,}045}=18\,500.1{,}045^{12},$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $1{,}045^{12}$ θέτοντες αὐτὴν ἴσην μὲ τὸ ψ, ὅτε εἶνε $\psi=1{,}045^{12}$

καὶ $\text{λογ}\,\psi=12\,\text{λογ}1{,}045=0{,}22\,974$,

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\psi=1{,}696$.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $1{,}045^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ 1,696 εὑρίσκομεν

$x=\dfrac{18\,500\times0{,}045\times1696}{696}$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$\text{λογ}x=\text{λογ}18\,500+\text{λογ}0{,}045+\text{λογ}1\,696-\text{λογ}696.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}\text{λογ}\ 18\,500&=4{,}26\,717\\ \text{λογ}\ 0{,}045&=\bar{2}{,}65\,321\\ \text{λογ}\ 1696&=3{,}22\,943\\ \hline \text{ἄθροισμα}\ &\ \ 6{,}14\,981\end{aligned}$$

$\text{λογ}696=2{,}84\,261$. Ἑπομένως $\text{λογ}x=6{,}14\,981-2{,}84\,261=3{,}30\,720$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $x=2\,028{,}6$ δραχμαί.

Ἐν γένει, ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενον ποσὸν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ' ὡρισμένην χρονικὴν μονάδα, διὰ τοῦ τ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν δόσεων ἐκ x δραχμῶν ἑκάστη θὰ εἶνε

$$x+x(1+\tau)+x(1+\tau)^2+\ldots+x(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἢ $$x.\ \frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $$x\ \frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha.\ (1+\tau)^{\nu} \qquad (1)$$

ἐκ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

Πρόβλημα 2ον). *«Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 6 ἔτη διὰ ἐτησίου χρεωλυσίου 8 000 δραχμῶν, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4%;»*

Ἔχομεν $x=8\,000, \quad \nu=6, \quad \tau=0{,}04$

ζητεῖται δὲ τὸ α. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον (1) τὰς τιμὰς τῶν x, ν, τ εὑρίσκομεν $8\,000.\dfrac{1{,}04^6-1}{0{,}04}=\alpha.\ 1{,}04^6$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $\alpha=\dfrac{8\,000.[1{,}04^6-1]}{0{,}04.1{,}04^6}$. Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $1{,}04^6$, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων α=41 900, δραχμάς.

Πρόβλημα 3ον). *«Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 20 000 δραχμῶν διὰ χρεωλυσίου 1300 δραχμῶν, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 3%;»*

Ἔχομεν $\alpha=20\,000, \quad x=1\,300, \quad \tau=0{,}03.$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὸν τύπον (1) εὑρίσκομεν

$1\,300.\dfrac{1{,}03^\nu-1}{0{,}03}=20\,000.1{,}03^\nu$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$1\,300.1{,}03^\nu-1\,300=0{,}03.20\,000.\ 1{,}03^\nu$$

ἢ $\quad 1{,}03^\nu\,[1\,300-0{,}03.20\,000]=1\,300$

καὶ $\quad 1{,}03^\nu=\dfrac{1300}{700}=\dfrac{13}{7}.$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν ν.λογ1,03=λογ13−λογ7, ἢ 0,01 284.ν=1,11 494−0,84 510=0,26 884, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν ν=20,943 ἔτη. Ἤτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνῃ μετὰ 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶνε κατά τι μικροτέρα τῶν ἄλλων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν εἰκοστὴν πρώτην δόσιν, εὑρίσκομεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον τῶν 20 000 εἰς 21 ἔτη, δηλαδὴ τὸ $20\,000\ 1{,}03^{21}$, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 37 210,84 δρ.· ἀκολούθως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ εἴκοσι δόσεις τῶν 1300 δρ. ἑκάστη εἰς 21 ἔτη γίνονται

$1300.\dfrac{1{,}03^{21}-1{,}03}{0{,}03}=35\,990{,}15$, Ἡ διαφορὰ 37 210,84−35 990 15 =1 220,69 δρ. παριστάνει τὴν τελευταίαν (εἰκοστὴν πρώτην) δόσιν.

*Π ρ ο β λ ή μ α τ α π ρ ὸ ς λ ύ σ ι ν.*

1) Πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐξοφλεῖται χρέος 100(200) ἑκατομμυρίων δρχ., ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4 (5) %, ἂν ἐξοφλῆται ἐντὸς 50 (80) ἐτῶν δι' ἴσων δόσεων ; 4 655 000(4 020 592).

2) Χρέος ἐξοφλεῖται δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30(10) ἐτῶν. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶνε 2 180(421,5) καὶ τὸ ἐπιτόκιον 4,5 (4,5)% ; 51 800(3 335).

3) Ἔμπορος ἐδανείσθη 450 000 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 5 %. Ἐὰν πληρώνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 30 000 δρ., μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ τό χρέος αὐτοῦ ; 29· ἡ τελευταία δόσις 29 655.

4) Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Καθεμία δόσις (ἐτησία) θὰ εἶνε 461 300 δρχ., θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικῶς δανεισθὲν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 4,5 % ; 4 815 000.

5) Κράτος ἐδανείσθη ποσόν τι διὰ νὰ κατασκευάσῃ στόλον πρὸς 3,75 %. Ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησίς του ἄρχεται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου καὶ θὰ πληρώνωνται 158 800 δρχ ἐτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν ποσόν ; 1 167 910.

6) Χρέος ἐξ 1,5 ἑκατομμυρίων δρχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων δόσεων ἐτησίων, ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶνε τὸ χρεωλύσιον, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 3,75%; 169 310,9.

7) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20 000 (10 000) διὰ 16 (6) ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,3 δρχ. (1 907,62) ἑκάστην ;

(Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) (σελ 269) εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}} = \frac{20\,000}{1780{,}30} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμόν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις αὐτῆς, ἐν γένει, δὲν εἶνε γνωστή, καὶ καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶνε μεγαλύτερον, ὅσῳ ὁ τ εἶνε μικρότερος. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ διὰ μικροῦ ἀριθμοῦ, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20\,000}{1780{,}30}$.

Θέτοντες π. χ. τ=0,04 εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{0{,}04}\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{16}}\right) = 25\left(1 - \frac{1}{1{,}04^{16}}\right) = 11{,}6\,522\,845,$$

ἐνῶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2) εὑρίσκομεν τὸ 11,234. Θέτομεν λοιπὸν τώρα $\tau=0,045$, ἔπειτα $\tau=0,0475$ κ. ο. κ. προχωροῦντες προσεγγίζομεν περισσότερον πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ τ.).

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

## *Περὶ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν.*

### Περὶ μεταθέσεων.

*221.* Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν ν ἐν ὅλῳ ἀντικείμενα ἐκ τῶν ὁποίων καθὲν δύναται νὰ διακρίνεται τῶν ἄλλων· π. χ. 7 φιάλας, 10 μῆλα, τοὺς 7 μονοψηφίους ἀριθμοὺς κλπ. Παριστάνομεν αὐτὰ συμβολικῶς διὰ τῶν $\alpha_1\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_\nu$ καὶ θὰ τὰ καλοῦμεν ***στοιχεῖα.*** Τὰ ν ταῦτα στοιχεῖα δύνανται νὰ τεθοῦν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου κατὰ πολλοὺς τρόπους. Π.χ. ἂν ἔχωμεν μόνον δύο, τὰ $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$, δύνανται νὰ τεθοῦν κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους $\alpha_1\ \alpha_2$ καὶ $\alpha_2\ \alpha_1$. Ἂν ἔχωμεν τρία, τὰ $\alpha_1$, $\alpha_2$ καὶ $\alpha_3$ δύνανται νὰ τεθοῦν κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3,\ \alpha_1\ \alpha_3\ \alpha_2,\ \alpha_2\ \alpha_1\ \alpha_3,\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1,\ \alpha_3\ \alpha_1\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \alpha_2\ \alpha_1.$$

Τὰς διαφόρους αὐτὰς ὁμάδας τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, καλοῦμεν μεταθέσεις αὐτῶν.

Ἐν γένει, ***«καλοῦμεν μεταθέσεις ν στοιχείων τὰς διαφόρους ὁμάδας, τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν, ἐὰν θέσωμεν καὶ τὰ ν στοιχεῖα τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ὥστε νὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὴν θέσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου».***

Θὰ παριστάνομεν συμβολικῶς τὰς μεταθέσεις ν στοιχείων διὰ τοῦ $M_\nu$ ἢ διὰ $\nu\,!$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε $M_\nu=1.2.3.4\ldots\nu$.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\nu=2$, δηλαδὴ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰ δύο στοιχεῖα $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ μεταθέσεις αὐτῶν εἶνε αἱ $\alpha_1\ \alpha_2$ καὶ $\alpha_2\ \alpha_1$. Ἑπομένως ἔχομεν $M_2=2=1.2$.

Ἐὰν εἶνε τὸ $\nu=3$, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὰ τρία στοιχεῖα $\alpha_1$, $\alpha_2$ καὶ $\alpha_3$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων αὐτῶν. Λαμβάνομεν τὰς μεταθέσεις τῶν δύο στοιχείων $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$, τὰς $\alpha_1\ \alpha_2$, $\alpha_2\ \alpha_1$, καὶ εἰς καθεμίαν ἐξ αὐτῶν παραθέτομεν τὸ τρίτον στοιχεῖον $\alpha_3$ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις ὡς πρὸς τὰ ἄλλα στοιχεῖα. Οὕτω, ἀπὸ τὴν $\alpha_1 \alpha_2$ θὰ προκύψουν αἱ $\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_3 \alpha_2$, $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, ἀφοῦ θέσωμεν τὸ $\alpha_3$ πρὸ τοῦ $\alpha_1$, μετὰ τὸ $\alpha_1$ καὶ μετὰ τὸ $\alpha_2$. Ὁμοίως ἐκ τῆς $\alpha_2 \alpha_1$ προκύπτουν καθ' ὅμοιον τρόπον αἱ

$$\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1,\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1,\ \alpha_2 \alpha_1 \alpha_3.$$

Ἤτοι ἐν ὅλῳ ἕξ. Παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἕξ αὐταὶ μεταθέσεις τῶν τριῶν στοιχείων εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι, ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_1 \alpha_2$ διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τοῦ τρίτου στοιχείου. Ἐπίσης διαφέρουν ὅσαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_2 \alpha_1$, συγκρινόμεναι πρὸς ἑαυτάς. Συγκρινόμεναι δὲ αἱ τελευταῖαι πρὸς ἐκείνας αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ τὴν $\alpha_1 \alpha_2$ εἶνε διάφοροι, διότι διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἄλλων στοιχείων $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$. Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι ἐσχηματίσαμεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν τριῶν στοιχείων διὰ τοῦ ἀνωτέρω τρόπου. Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, καὶ ἀποκόψωμεν τὸ στοιχεῖον $\alpha_3$ ἀπ' αὐτῆς, θὰ προκύψῃ μία μετάθεσις τῶν δύο στοιχείων $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$· ἂν δὲ ἐπαναφέρωμεν τὸ $\alpha_3$ εἰς τὴν θέσιν αὐτοῦ, εὑρίσκομεν πάλιν τὴν μετάθεσιν τῶν τριῶν στοιχείων. Ἀλλ' αὐτὸ ἀκριβῶς ἐκάμαμεν ἀνωτέρω, δηλαδὴ ἐλάβομεν πάσας τὰς μεταθέσεις τῶν δύο στοιχείων, καὶ ἐθέσαμεν τὸ νέον στοιχεῖον $\alpha_3$ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις καθεμιᾶς τῶν δύο· ἐπομένως, καὶ ἡ ὑποτεθεῖσα νέα μετάθεσις τῶν τριῶν στοιχείων ἔχει περιληφθῆ εἰς τὸν πίνακα τῶν σχηματισθεισῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι, αἱ μεταθέσεις τριῶν στοιχείων προκύπτουν ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν δύο στοιχείων, ἂν εἰσαγάγωμεν τὸ τρίτον στοιχεῖον εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις καθεμιᾶς τῶν δύο στοιχείων. Ὥστε ἐκ τῶν $M_2$ προκύπτουν $M_2 \times 3$ καὶ ἔχομεν

$$M_3 = M_2 . 3 = 1.2.3 = 3\,!$$

Ἐὰν ἔχωμεν $\nu=4$, δηλαδὴ ἂν ἔχωμεν τὰ στοιχεῖα $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ καὶ $\alpha_4$ λαμβάνομεν τὰς ἕξ μεταθέσεις

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,\ \alpha_1 \alpha_3 \alpha_2,\ \alpha_2 \alpha_1 \alpha_3,\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1,\ \alpha_3 \alpha_1 \alpha_2,\ \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$$

τῶν τριῶν στοιχείων καὶ εἰς καθεμίαν τούτων θέτομεν τὸ $\alpha_4$ εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις· δηλαδὴ κατὰ σειρὰν πρὸ τοῦ πρώτου, μεταξὺ πρώτου καὶ δευτέρου, μεταξὺ δευτέρου καὶ τρίτου, τελευταῖον. Οὕτω ἔχομεν ἀπὸ καθεμίαν τῶν τριῶν τέσσαρας μεταθέσεις τῶν τεσσάρων στοιχείων, ἐπομένως εἶνε

$$M_4 = M_3 \times 4 = 1.2.3.4 = 4\,!$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε

$$M_5 = M_4 \times 5 = 1.2.3.4.5 = 5\,!$$

$$M_\nu = M_{\nu-1} \times \nu = 1.2.3.4.....(\nu-1).\nu = \nu\,!$$

## Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

1) Δείξατε ὅτι αἱ μεταθέσεις τῶν τεσσάρων στοιχείων, αἱ σχηματισθεῖσαι κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον, εἶνε διάφοροι μεταξύ των καὶ ὅτι εἶνε πᾶσαι.

2) Νὰ γενικευθῇ ἡ ἀπόδειξις πρὸς σχηματισμὸν τῶν μεταθέσεων ν στοιχείων, δηλαδὴ νὰ δειχθῇ α') πῶς σχηματίζονται αὗται ἐκ τῶν μεταθέσεων τῶν ν—1 στοιχείων· β') ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι εἶνε διάφοροι μεταξύ των· γ') ὅτι εἶνε πᾶσαι.

3) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παρακαθήσουν 18 ἄτομα περὶ τράπεζαν ;

## Περὶ διατάξεων.

**222.** Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των, τὰ

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots, \alpha_\mu.$$

Ἐὰν ἐκ τῶν μ τούτων στοιχείων λάβωμεν ν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, ὥστε αἱ ὁμάδες αἱ ὁποῖαι προκύπτουν (καὶ καθεμία τῶν ὁποίων ἔχει πάντοτε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ) νὰ διαφέρουν μεταξὺ αὐτῶν ἢ κατὰ τὴν φύσιν ἢ κατὰ τὴν θέσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς τῶν στοιχείων των, τότε καλοῦμεν τὰς ὁμάδας αὐτὰς ***διατάξεις τῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν λαμβανομένων.***

Θὰ παριστάνωμεν τὰς διατάξεις μ στοιχείων ἀνὰ ν διὰ τοῦ συμβόλου $\Delta_\nu^\mu$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$\Delta_\nu^\mu = \mu.(\mu-1).(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1).$$

Παρατηρητέον, ὅτι πρέπει νὰ εἶνε τὸ ν μικρότερον τοῦ μ. Ἂν εἶνε μ=ν, θὰ ἔχωμεν μεταθέσεις μ στοιχείων.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε ν=1. Δηλαδὴ ὅτι τὰ μ στοιχεῖα λαμβάνομεν ἀνὰ ἕν. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ διατάξεις εἶνε ὅσα καὶ τὰ στοιχεῖα ἤτοι αἱ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots\ldots, \alpha_\mu$ καὶ ἑπομένως ἔχομεν ὅτι $\Delta_1^\mu = \mu$.

Ἔστω ὅτι εἶνε ν=2, δηλαδὴ ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα καὶ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὰς διατάξεις αὐτῶν ἀνὰ δύο. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν μίαν διάταξιν αὐτῶν ἀνὰ ἕν, ἔστω τὴν $\alpha_1$. Εἰς αὐτὸ τὸ στοιχεῖον αὐτῆς παραθέτομεν καθὲν τῶν ἄλλων $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\mu$. Οὕτω σχηματίζομεν διατάξεις τῶν μ ἀνὰ δύο· τὰς

$$\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \ldots\ldots\ldots, \alpha_1\alpha_\mu$$

ἓν ὅλῳ $\mu-1$. Διότι $\mu-1$ εἶνε τὰ ἄλλα στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα παραθέτομεν εἰς τὸ $\alpha_1$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ καθεμίαν ἄλλην τῶν διατάξεων ἀνὰ ἕν. Οὕτω ἀπὸ τὴν $\alpha_2$ θὰ σχηματίσωμεν τὰς

$\alpha_2\,\alpha_1,\ \alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_2\,\alpha_4, \ldots, \alpha_2\,\alpha_\mu$ κ. ο. κ. Ἀπὸ τὴν $\alpha_\mu$ τὰς

$$\alpha_\mu\,\alpha_1,\ \alpha_\mu\,\alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_\mu\,\alpha_{\mu-1}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι ὅσαι μὲν ἔγιναν ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν διάταξιν τῶν ἀνὰ ἓν διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν τοῦ δευτέρου στοιχείου, ὅσαι δὲ προέκυψαν ἐκ διαφόρων τῶν ἀνὰ ἓν διαφέρουν κατὰ τὸ πρῶτον στοιχεῖον. Εἶνε φανερόν, ὅτι αἱ οὕτω σχηματισθεῖσαι διατάξεις τῶν ἀνὰ δύο εἶνε πᾶσαι. Διότι, ἂν ὑπῆρχεν ἄλλη τις καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον στοιχεῖον αὐτῆς, θὰ προκύψῃ μία τῶν ἀνὰ ἕν. Ἀλλ' ἀκριβῶς ἐλάβομεν πάσας τῶν ἀνὰ ἕν, καὶ παρεθέσαμεν εἰς καθεμίαν τούτων ὅλα τὰ ἄλλα στοιχεῖα. Ἄρα καὶ ἡ ὑποτεθεῖσα νέα διάταξις τῶν ἀνὰ δύο πάντως περιέχεται εἰς τὰς σχηματισθείσας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι αἱ διατάξεις τῶν $\mu$ ἀνὰ δύο εἶνε ἐν ὅλῳ $\Delta_1^\mu.(\mu-1)$ ἤτοι $\Delta_2^\mu=\Delta_1^\mu.(\mu-1)=\mu.(\mu-1)$.

Διότι, ἀπὸ καθεμίαν τῶν ἀνὰ ἓν προκύπτουν $\mu-1$ τῶν ἀνὰ δύο καὶ ἐκ τῶν $\Delta_1^\mu$ προκύπτουν $\Delta_1^\mu.(\mu-1)$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἂν εἶνε $\nu=3$, λαμβάνομεν καθεμίαν τῶν ἀνὰ δύο, παραθέτομεν εἰς ἑκάστην καθὲν τῶν ἄλλων στοιχείων, καὶ σχηματίζομεν τὰς διατάξεις τῶν ἀνὰ τρία. Οὕτω ἐκ τῆς $\alpha_1\,\alpha_2$ σχηματίζομεν τὰς $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3,\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_4,\ \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_5, \ldots \ldots, \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_\mu$ ἐν ὅλῳ $\mu-2$.

Ὥστε ἔχομεν $\Delta_3^\mu=\Delta_2^\mu.(\mu-2)=\mu.(\mu-1)(\mu-2)$.

Καὶ γενικῶς, προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον, εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta_\nu^\mu=\Delta_{\mu-1}^\nu.(\mu-(\nu-1))=\mu(\mu-1).(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$.

## Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

1) Δείξατε ὅτι αἱ διατάξεις τῶν $\mu$ στοιχείων ἀνὰ τρία, καθ' ὃν τρόπον ἐσχηματίσθησαν ἀνωτέρω, εἶνε διάφοροι μεταξύ των καὶ πᾶσαι.

2) Γενικεύσατε τὴν ἀπόδειξιν πρὸς εὕρεσιν τῶν διατάξεων $\mu$ στοιχείων ἀνὰ $\nu$ ἐκ τῶν διατάξεων ἀνὰ $\nu-1$· δηλαδὴ δείξατε α') πῶς σχηματίζονται αἱ ἀνὰ $\nu$ ἐκ τῶν ἀνὰ $\nu-1$· β') ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι εἶνε διάφοροι μεταξύ των· γ') ὅτι εἶνε πᾶσαι.

3) Πόσοι ἀριθμοὶ διψήφιοι ὑπάρχουν, ἔχοντες σημαντικὰ ψηφία διάφορα μεταξύ των ; Πόσοι τριψήφιοι ;

## Περὶ συνδυασμῶν.

*223.* Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν μ στοιχεῖα διάφορα μεταξύ των, τὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\mu$. Καλοῦμεν ***συνδυασμοὺς τῶν μ τούτων στοιχείων, ἀνὰ ν λαμβανομένων,*** τὰς διαφόρους ὁμάδας τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν, ἐὰν λάβωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ν ἐκ τῶν μ οὕτως, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ νὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ τὴν φύσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου.

Θὰ παριστάνομεν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν διὰ τοῦ $\Sigma^\mu_\nu$ καὶ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$\Sigma^\mu_\nu = \frac{\Delta^\mu_\nu}{M_\nu} = \frac{\mu(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots\nu}$$

Πρὸς ἀπόδειξιν φανταζόμεθα ὅτι ἔχομεν ἕνα συνδυασμὸν τῶν μ ἀνὰ ν. Οὗτος ἔχει ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ (ὑποτίθεται ὅτι εἶνε $\nu<\mu$). Ἂν εἰς τὰ ν αὐτὰ στοιχεῖα κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς ἐναλλαγὰς μεταξύ των, σχηματίζομεν τὰς μεταθέσεις τῶν ν τούτων στοιχείων, αἱ ὁποῖαι εἶνε $M_\nu$, καθὼς γνωρίζομεν.

Τὸ αὐτὸ φανταζόμεθα ὅτι κάμνομεν εἰς τὰ στοιχεῖα καθενὸς συνδυασμοῦ, ὁπότε προκύπτουν ἀπὸ καθένα $M_\nu$ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα μεταξύ των συγκρινόμενα (χωρὶς νὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι εἶνε ν ἐκ τῶν μ) εἶνε μεταθέσεις ν ἀντικειμένων. Ἐπειδὴ ἀπὸ καθένα συνδυασμὸν προκύπτουν $M_\nu$ τοιαῦτα ἐξαγόμενα, ἀπὸ τοὺς $\Sigma^\mu_\nu$ συνδυασμοὺς προκύπτουν $\Sigma^\mu_\nu \cdot M_\nu$ τοιαῦτα. Ἀλλὰ καθὲν τῶν ἐξαγομένων τούτων, συγκρινόμενον πρὸς τὰ μ δοθέντα στοιχεῖα, εἶνε μία διάταξις τῶν μ ἀνὰ ν, ἐπειδὴ εἶνε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ, τεθειμένα κατά τινα τρόπον. Αἱ διατάξεις αὐταὶ τῶν μ ἀνὰ ν εἶνε διάφοροι μεταξύ των. Διότι, ὅσαι μὲν προέκυψαν ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διὰ τῆς μεταθέσεως τῶν στοιχείων αὐτοῦ, διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν στοιχείων τούτων· ὅσαι δὲ προέκυψαν ἀπὸ διαφόρους συνδυασμούς, θὰ διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν τοὐλάχιστον ἑνὸς στοιχείου. Τέλος, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ $\Delta^\mu_\nu$ αὐταὶ εἶνε πᾶσαι. Διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλη τις, αὐτὴ θὰ εἶχε ν στοιχεῖα ἐκ τῶν μ κατά τινα τάξιν μεταξύ των τεθειμένα. Ἑπομένως, ἡ διάταξις αὐτὴ θὰ προκύπτῃ ἀπὸ συνδυασμόν τινα τῶν μ ἀνὰ ν διὰ μεταθέσεως τῶν στοιχείων αὐτοῦ, καὶ ἐπειδὴ ὅλων τῶν συνδυασμῶν μετεθέσαμεν τὰ στοιχεῖα, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ διάταξις αὐτὴ δὲν εἶνε νέα, ἀλλὰ περιέχεται εἰς τὰς ἤδη σχηματισθείσας.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι εἶνε $\Sigma^\mu_\nu \times M_\nu = \Delta^\mu_\nu$, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι

$\Sigma^\mu_\nu = \dfrac{\Delta^\mu_\nu}{M_\nu}$ καὶ ἂν ἀντὶ τῶν $\Delta^\mu_\nu$ καὶ $M_\nu$ θέσωμεν τὰ ἴσα αὐτῶν

εὑρίσκομεν $\Sigma^\mu_\nu = \dfrac{\Delta^\mu_\nu}{M_\nu} = \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\ldots\nu}$.

Ἐὰν τοῦ τελευταίου αὐτοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον $(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)\ldots\ldots 3.\ 2.\ 1$, εὑρίσκομεν

$$\Sigma^\mu_\nu = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)(\mu-\nu)(\mu-\nu-1)\ldots 3.2.1}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\nu.\quad (\mu-\nu).(\mu-\nu-1)\ldots 3.2.1}$$

ἢ $$\Sigma^\mu_\nu = \frac{1.2.3\ldots(\mu-\nu)(\mu-\nu+1)\ldots(\mu-1).\mu}{1.2.3\ldots\nu.\ 1.2.3\ldots(\mu-\nu)}$$

ἢ $$\Sigma^\mu_\nu = \frac{M_\mu}{M_\nu.\ M_{\mu-\nu}} = \frac{\mu!}{\nu!\,(\mu-\nu)!}.$$

Θὰ δείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

*«Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ στοιχείων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ στοιχείων ἀνὰ μ—ν».*

Πράγματι, εὑρήκαμεν ἀνωτέρω ὅτι εἶνε $\Sigma^\mu_\nu = \dfrac{\mu!}{\nu!(\mu-\nu)!}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς $\Sigma^\mu_{\mu-\nu}$ ἀρκεῖ ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω τελευταίαν ἰσότητα τὸ ν διὰ τοῦ μ—ν, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\Sigma^\mu_{\mu-\nu} = \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!\,(\mu-(\mu-\nu))!} = \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!\nu!}$$

Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε τὸ $\Sigma^\mu_\nu$, ἄρα ἔχομεν $\Sigma^\mu_\nu = \Sigma^\mu_{\mu-\nu}$.

### *Ἀσκήσεις.*

1) Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν
α΄) 7) στοιχείων ἀνὰ 3. β΄) 10 στοιχείων ἀνὰ 7.
γ΄) 25 στοιχείων ἀνὰ 17. δ΄) 12 ἀνὰ 6.

2) Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ συνδυάσωμεν 7 ἡλιακὰ χρώματα (προστιθεμένων τοῦ λευκοῦ καὶ τοῦ μέλανος) πρὸς σχηματισμὸν τριχρώμου (διχρώμου) σημαίας ;

## Περὶ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\mu$.

*224.* Γνωρίζομεν ὅτι εἶνε $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$,
$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + \alpha^3$.

Ἐὰν τὸ μ εἶνε ἀκέραιός τις καὶ θετικὸς ἀριθμός, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶνε

$$(x+\alpha)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1} x^{\mu-1}\alpha + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^{\mu-2}\alpha^2 + \dots$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\dots\nu} x^{\mu-\nu}\alpha^\nu + \dots + \alpha^\mu.$$

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$(x+\alpha)^\mu = \overbrace{(x+\alpha)(x+\alpha)\dots(x+\alpha)}^{\mu \text{ φοράς}}.$$

Σχηματίζομεν πρῶτον τὸ γινόμενον τῶν μ διαφόρων παραγόντων

$$(x+\alpha),\ (x+\beta),\ (x+\gamma),\ \dots,\ (x+\vartheta)$$

ἤτοι τὸ $(x+\alpha).(x+\beta).(x+\gamma).\ \dots\ .(x+\vartheta)$.

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ γινομένου τούτου εὑρίσκεται, καθὼς γνωρίζομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν πρῶτον παράγοντα $(x+\alpha)$ ἐπὶ τὸν δεύτερον $(x+\beta)$, τὸ ἐξαγόμενον ἐπὶ $(x+\gamma)$ κ. ο. κ. μέχρι τοῦ τελευταίου $(x+\vartheta)$. Ἂν τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον διατάξωμεν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ x, θὰ ἔχωμεν προφανῶς πολυώνυμον ὡς πρὸς x βαθμοῦ μ. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρώτους ὅρους x τῶν διωνύμων παραγόντων καὶ εὑρίσκομεν $x^\mu$. Ἀκολούθως πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς πρώτους ὅρους x ἐκ τῶν μ—1 διωνύμων παραγόντων ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ὑπολειπομένου διωνύμου παράγοντος καὶ εὑρίσκομεν $\alpha x^{\mu-1}$, ἂν ἐκ τοῦ πρώτου διωνύμου παράγοντος λάβωμεν τὸν α καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τὸν x· τὸ $\beta x^{\mu-1}$, ἂν ἐκ τοῦ δευτέρου παράγοντος λάβωμεν τὸν β καὶ ἐκ τῶν ἄλλων τὸν x. Ὁμοίως ἔχομεν $\gamma x^{\mu-1}, \dots, \vartheta x^{\mu-1}$, τὸ δὲ ἄθροισμα πάντων τούτων δίδει ὅρον $(\alpha+\beta+\gamma+\dots+\vartheta)\,x^{\mu-1}$ τοῦ ἐξαγομένου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν x εἰς τὴν μ—1 δύναμιν. Ἀκολούθως λαμβάνομεν τὸν x ἀπὸ μ—2 διωνύμους παράγοντας, ἀπὸ δὲ τοὺς ὑπολειπομένους δύο παράγοντας τοὺς δευτέρους ὅρους αὐτῶν, καὶ τοῦτο κάμνομεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Οὕτω εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta+\alpha\gamma+\dots+\alpha\vartheta+\beta\gamma+\dots)\,x^{\mu-2}.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες, εὑρίσκομεν

$$(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\dots)\,x^{\mu-3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Τέλος λαμβάνομεν καὶ πολλαπλασιάζομεν μόνον τοὺς δευτέρους ὅρους τῶν διωνύμων, ὅτε εὑρίσκομεν $\alpha\beta\gamma\dots\vartheta$.

Ὥστε οὕτω εὑρήκαμεν

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)\ldots\ldots(x+\vartheta)$$
$$=x^{\mu}+(\alpha+\beta+\ldots+\vartheta)x^{\mu-1}+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\ldots)x^{\mu-2}$$
$$+(\alpha\beta\gamma+\ldots\ldots)x^{\mu-3}+\ldots+\alpha\beta\gamma\ldots\vartheta.$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε $\alpha=\beta=\gamma=\ldots=\vartheta$, θὰ ἔχωμεν

$$(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+(\alpha+\alpha\ldots+\alpha)x^{\mu-1}$$
$$+(\alpha^2+\alpha^2+\ldots)x^{\mu-2}+(\alpha^3+\alpha^3+\ldots)x^{\mu-3}$$
$$+\ldots\ldots+(\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu}+\ldots)x^{\mu-\nu}+\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Τὸ πλῆθος τῶν προσθετέων α τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης εἶνε προφανῶς ὅσοι οἱ συνδυασμοὶ μ στοιχείων ἀνὰ ἕν, ἤτοι $\Sigma_1^{\mu}$. Τὸ πλῆθος τῶν $\alpha^2$ εἶνε $\Sigma_2^{\mu}$, τῶν $\alpha_3$ εἶνε $\Sigma_3^{\mu}$ κ. ο. κ. τὸ πλῆθος τῶν $\alpha_{\nu}$ εἶνε $\Sigma_{\nu}^{\mu}$. Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι

$$(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+\Sigma_1^{\mu}\,\alpha x^{\mu-1}+\Sigma_2^{\mu}\,\alpha^2x^{\mu-2}+\ldots\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots+\Sigma_{\nu}^{\mu}\,\alpha^{\nu}\,x^{\mu-\nu}+\ldots+\alpha^{\mu}$$

Τέλος, ἂν ἀντὶ τῶν $\Sigma_1^{\mu}, \Sigma_2^{\mu}, \ldots\ldots \Sigma_{\nu}^{\mu}$ γράψωμεν τὰ ἴσα αὐτῶν, εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον τύπον, ὁ ὁποῖος καλεῖται ***ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^{\mu}$*** καὶ εἶνε

$$(x+\alpha)^{\mu}=x^{\mu}+\frac{\mu}{1}\,x^{\mu-1}\,\alpha+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,x^{\mu-2}\,\alpha^2+\ldots\ldots \quad (1)$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\nu}\,x^{\mu-\nu}\,\alpha^{\nu}+\ldots+\alpha^{\mu}.$$

Ἂν εἶνε $\mu=4$ θὰ ἔχωμεν

$$(x+\alpha)^4=x^4+4\,x^3\,\alpha+6\,x^2\,\alpha^2+4\,x\,\alpha^3+\alpha^4.$$

Ἂν εἶνε $\mu=5$ θὰ ἔχωμεν

$$(x+\alpha)^5=x^5+5\,x^4\alpha+10\,x^3\,\alpha^2+10\,x^2\,\alpha^3+5\,x\,\alpha^4+\alpha^5.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x-\alpha)^{\mu}$, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν ἀνωτέρω γενικὸν τύπον τὸ α διὰ τοῦ $-\alpha$. Τότε, ἐπειδὴ αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ $-\alpha$ εἶνε ἀρνητικοὶ αἱ δὲ ἄρτιαι θετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν

$$(x-\alpha)^{\mu}=x^{\mu}-\frac{\mu}{1}\,x^{\mu-1}\,\alpha+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\,x^{\mu-2}\,\alpha^2$$
$$-\ldots\ldots\pm\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.\,2.\,3.\ldots\nu}\,x^{\mu-\nu}\,\alpha^{\nu}$$
$$\mp\ldots\ldots\ldots\pm\alpha^{\mu}.$$

Π. χ. θὰ εἶνε $(x-\alpha)^3=x^3-3x^2\alpha+3x\alpha^2-\alpha^3.$

$$(x-\alpha)^4=x^4-4x^3\alpha+6x^2\alpha^2-4x\alpha^3+\alpha^4.$$

## Ἰδιότητες τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\mu$.

**225.** *«Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων αὐτοῦ εἶνε ἴσοι».*

Πράγματι, οἱ μὲν συντελεσταὶ τῶν ἄκρων ὅρων $x^\mu$ καὶ $\alpha^\mu$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) εἶνε ἴσοι μὲ τὴν μονάδα. Διὰ τοὺς ἄλλους συντελεστὰς παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς εἶνε ἴσοι μὲ

$$\Sigma_1^\mu,\ \Sigma_2^\mu,\ \Sigma_3^\mu, \ldots \ldots \Sigma_\nu^\mu, \ldots \ldots \Sigma_{\mu-2}^\mu,\ \Sigma_{\mu-1}^\mu.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητητα τῶν συνδυασμῶν (§ 223, σελὶς 277) εἶνε $\Sigma_1^\mu = \Sigma_{\mu-1}^\mu,\ \Sigma_2^\mu = \Sigma_{\mu-2}^\mu, \ldots \ldots$ ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης.

Ὁ συντελεστὴς οἱουδήποτε ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ εὑρίσκεται, ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ ὅρου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x εἰς αὐτόν, καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α εἰς τὸν ὅρον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ συντελεστής.

Οὕτω π.χ. ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτέρου ὅρου εἶνε $\frac{\mu}{1}$ καὶ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ συντελεστοῦ 1 τοῦ προηγουμένου αὐτοῦ ὅρου, ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ 1 ἐπὶ τὸν ἐκθέτην μ τοῦ x εἰς τὸν πρῶτον ὅρον καὶ τὸ γινόμενον διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἐκθέτου 1 τοῦ α εἰς τὸν δεύτερον ὅρον. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος προχωροῦν αὐξανόμενοι μέχρι τοῦ μέσου ὅρου, ἐκεῖθεν δὲ ἐπαναλαμβάνονται οἱ αὐτοὶ συντελεσταὶ κατ'ἀντίθετον σειράν, ὥστε οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες τῶν ἄκρων νὰ εἶνε ἴσοι.

Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ εἶνε $\mu+1$. Διότι τὸ ἀνάπτυγμα (1) τοῦ $(x+\alpha)^\mu$ ἔχει πάντας τοὺς ὅρους πολυωνύμου βαθμοῦ μ ὡς πρὸς τὸ x, ἢ ὡς πρὸς τὸ α· ἄρα ἔχει $\mu+1$ ὅρους.

Συνδυάζοντες τὴν ἰδιότητα ταύτην μὲ τὴν προηγουμένην, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν τὸ μ εἶνε ἀριθμὸς ἄρτιος, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶνε περιττὸς ἀριθμός, καὶ ὑπάρχει εἷς ὅρος, ὁ μεσαῖος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μέγιστον συντελεστήν. Ἂν δὲ τὸ μ εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, καὶ τότε ὑπάρχουν δύο ὅροι μεσαῖοι, διαδοχικοὶ ἴσοι μεταξύ των, οἱ μέγιστοι τῶν συντελεστῶν.

### *Ἀσκήσεις.*

Εὕρετε τὰ ἀναπτύγματα τῶν

$$(x+\alpha)^6,\ (x-\alpha)^5,\ \left(2x-\frac{1}{3}\right)^4,\ (2\alpha-\beta)^5,\ \left(\frac{1}{2}x+3\right)^6,\ \left(\frac{2}{3}x-5\right)^7.$$

## Περὶ πιθανοτήτων.

*226.* Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν 15 κλήρους ἐντὸς κυτίου ἀριθμημένους ἀπὸ 1 μέχρι 15. Ἐὰν ἐξαγάγωμεν ἕνα κλῆρον ἐκ τῶν 15, θέλομεν νὰ μάθωμεν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι ὁ κλῆρος τὸν ὁποῖον θὰ ἐξαγάγωμεν, θὰ φέρῃ τὸν ἀριθμὸν 7.

Ἐπειδὴ καθεὶς τῶν 15 κλήρων ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ ἐξαχθῇ, ὅταν ἐξαγάγωμεν ἕνα, ἕπεται ὅτι ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς, π. χ. ὁ 7, ὅταν ἐξάγωμεν ἕνα, θὰ εἶνε τὸ ἓν δέκατον πέμπτον τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἤτοι τὸ $\frac{1}{15}$.

Ἐὰν ἐκ τῶν 15 κλήρων ἐξαγάγωμεν δύο, ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς ὡρισμένος ἐξ αὐτῶν, π. χ. ὁ 7, θὰ εἶνε προφανῶς $\frac{2}{15}$, ἂν δὲ ἐξαγάγωμεν τρεῖς θὰ εἶνε $\frac{3}{15}$ κ. ο. κ.

Κατὰ ταῦτα λέγομεν ὅτι, *«ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τι παριστάνεται διὰ κλάσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸν ἀριθμὸν τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ὑποτιθεμένου, ὅτι πᾶσαι αἱ περιπτώσεις εἶνε ἐξ ἴσου πιθαναί».*

Πρὸς ἐφαρμογὴν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐντὸς κυτίου ἔχομεν 15 βώλους τοῦ αὐτοῦ μεγέθους, ἀλλὰ τοὺς μὲν 6 λευκοὺς τοὺς δὲ 9 μαύρους. Θέλομεν νὰ μάθωμεν, ποία εἶνε ἡ πιθανότης, ἂν ἐξαχθῇ κατὰ τύχην εἷς βῶλος ἐκ τοῦ κυτίου, αὐτὸς νὰ εἶνε λευκός.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 15. Διότι τόσοι εἶνε οἱ βῶλοι καὶ καθεὶς ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ ἐξαχθῇ. Ὅταν ἐξαγάγωμεν ἕνα, αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶνε 6. Διότι τόσοι εἶνε οἱ λευκοὶ βῶλοι, ἄρα ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{6}{15}$. Ἂν ζητοῦμεν τὴν πιθανότητα τοῦ νὰ ἐξαχθῇ εἷς μαῦρος βῶλος, αὕτη θὰ εἶνε $\frac{9}{15}$.

Ἐὰν ἡ πιθανότης εἶνε ἴση μὲ τὴν μονάδα, τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει βεβαιότης τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον. Ἂν δὲ ἡ πιθανότης παριστάνεται διὰ τοῦ μηδενός, τότε λέγομεν ὅτι δὲν ὑπάρχει καμμία πιθανότης τοῦ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον, ἢ ὅτι εἶνε ἀδύνατον νὰ συμβῇ.

Ἐν γένει, ἐὰν αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις τοῦ νὰ συμβῇ τι, εἶνε α τὸν ἀριθμόν, αἱ δὲ περιπτώσεις τοῦ ἐναντίου εἶνε β, ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τὸ πρῶτον θὰ εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, ἡ δὲ πιθανότης τοῦ ὅτι δὲν θὰ συμβῇ θὰ εἶνε $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν μὲν πρῶτον ἀριθμὸν διὰ τοῦ λ τὸν δὲ δεύτερον διὰ τοῦ μ, θὰ ἔχωμεν

$$\lambda+\mu=1 \text{ καὶ } \lambda=1-\mu.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν δύο κύβους, τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι φέρουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 1·2·3·4·5·6. Ἂν ρίψωμεν αὐτοὺς κατὰ τύχην ἐπὶ τῆς τραπέζης, ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ ἔλθουν ἐπάνω θὰ ἔχουν ἄθροισμα 8 ;

Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶνε 36. Διότι καθεὶς ἀριθμὸς τοῦ ἑνὸς κύβου δύναται νὰ συνδυασθῇ μὲ καθένα τῶν ἀριθμῶν τοῦ δευτέρου κύβου, ἐκ τούτων δὲ ἔχομεν ἄθροισμα 8, ὅταν εἶνε 2+6· 3+5· 4+4· 5+3· 6+2. Ἤτοι 5 ἐν ὅλῳ. Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνε $\frac{5}{36}$.

Ἐντὸς κυτίου ἔχομεν δύο μαύρους βώλους καὶ δύο λευκοὺς τοῦ αὐτοῦ μεγέθους. Ἐξάγομεν κατ᾽ ἀρχὰς ἕνα ἐξ αὐτῶν καὶ ἔπειτα δεύτερον, χωρὶς νὰ θέσωμεν τὸν ἐξαχθέντα ἐντὸς τοῦ κυτίου. Ποία εἶνε ἡ πιθανότης ὅτι καὶ οἱ δύο ἐξαχθέντες βῶλοι θὰ εἶνε λευκοί ;

Ἡ πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθῇ τὴν πρώτην φορὰν ὁ λευκὸς βῶλος εἶνε $\frac{1}{2}$. Ἡ ζητουμένη πιθανότης τοῦ νὰ ἐξαχθοῦν καὶ οἱ δύο λευκοὶ μετὰ τὰς δύο ἐξαγωγάς, λέγω ὅτι εἶνε $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ $\lambda_1$ καὶ $\lambda_2$ τοὺς λευκοὺς βώλους, καὶ διὰ $\mu_1$ καὶ $\mu_2$ τοὺς μαύρους, καὶ σχηματίσωμεν τὰς δυνατὰς περιπτώσεις θὰ ἔχωμεν

$$\lambda_1\,\lambda_2,\ \lambda_1\,\mu_1,\ \lambda_1\,\mu_2,\ \lambda_2\,\lambda_1,\ \lambda_2\,\mu_1,\ \lambda_2\,\mu_2$$
$$\mu_1\,\lambda_1,\ \mu_1\,\lambda_2,\ \mu_1\,\mu_2,\ \mu_2\,\lambda_1,\ \mu_2\,\lambda_2,\ \mu_2\,\mu_1.$$

Ἤτοι 12 ἐν ὅλῳ ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶνε αἱ πιθαναί, αἱ $\lambda_1\,\lambda_2$ καὶ $\lambda_2\,\lambda_1$, δηλαδὴ ἡ πιθανότης εἶνε $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

---

# ΠΡΟΣΘΗΚΗ ΚΑΙ ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

α') ***Προσθήκη.***

Εἰς τὸ τέλος τῆς παραγάφου 22 τῆς σελίδος 12 προστίθενται τὰ ἑξῆς.

***Παρατήρησις.*** Ἔστω ὅτι ἔχομεν π.χ. τὸ $-5-9$. Κατὰ τἀνωτέρω εἶνε $-5-9=-5-(+9)=-5+(-9)=-14$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$-5-9=-5-(+9) \text{ ἢ } -5-9=-5+(-9).$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν ἔχομεν π.χ. ὅτι

$$3-4-6+7=3-(+4)-(+6)+(+7)$$

ἢ

$$3-4-6+7=3+(-4)+(-6)+(+7).$$

Δηλαδή, ὅταν ἀριθμοὶ χωρίζωνται μεταξύ των διὰ τοῦ σημείου $+$ ἢ $-$, τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ὑπάρχει μεταξὺ αὐτῶν δύναται νὰ θεωρηθῇ ἢ ὡς δηλωτικὸν προσθέσεως (τὸ $+$) ἢ ἀφαιρέσεως (τὸ $-$) ἢ καὶ ὡς δηλωτικὸν τοῦ εἴδους τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου προηγεῖται, ὅτε οἱ ἐκ λόγῳ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ θὰ ἐννοοῦνται συνδεόμενοι διὰ τοῦ σημείου $+$. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν π.χ. ὁμοίως $12-7=12-(+7)=12+(-7)$, $-20-5+10-8=-20-(+5)+(+10)-(+8)=-20+(-5)+(+10)+(-8)$, $30-40-10-25=30+(-40)+(-10)+(-25)=30-(+40)-(+10)-(+25)$.

β) ***Διορθωτέα.***

σελὶς 68, β') Ἀσκήσεις, 9) τὸ $2x^3-3x^2-4x+5$ εἰς $2x^3-3x^3-4x+6$

» 93 στίχος 7ος ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω τὸ ἀπείρους ῥίζας εἰς ***ῥίζας πάντας τοὺς ἀριθμούς.***

» 176 στίχος 4ος (εἰς μερικὰ μόνον ἀντίτυπα) τὸ

$$\frac{\sqrt{\beta^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \text{ εἰς } \frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\alpha}$$

» 177 στίχος 6ος ἐκ τῶν ἄνω, ἄσκησις 5, τὸ $2(\alpha^2-\beta)x$ εἰς $2(\alpha^2-\beta^2)x$.

» 194 στίχος 8ος ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω τὸ

$$\frac{\pm\sqrt{6\pm\sqrt{39-4}}}{2} \text{ εἰς } \frac{\pm\sqrt{6\pm\sqrt{36-4}}}{2}.$$

# ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

*Περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.*



*Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.*



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

*Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.*



*Περὶ συναρτήσεων.*

σελὶς



### *Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις β′ βαθμοῦ.*



## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

### *Περὶ προόδων.*



### *Περὶ λογαρίθμων.*

Βιβλίον Ἀλγέβρας
τῆς μαθητρίας
Κούλας Γ. Δροσοπούλου



σελὶς



*Περὶ ἀνατοκισμοῦ καὶ χρεωλυσίας.*



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

*Περὶ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν.*

024000019899