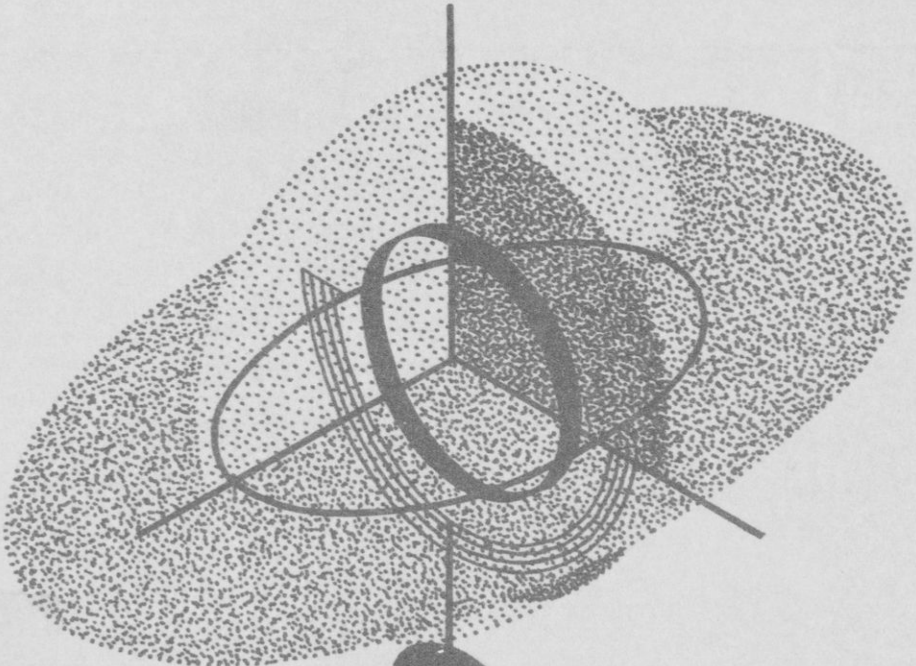
ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΦΥΣΙΚΗ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1978

Μὲ διορθώσεις

Ὁδηγίες γιά τήν ἀνατύπωση

1. Τά προβλήματα μέ στοιχεῖα τῶν 8, οἱ αὔξοντες ἀριθμοί μέ μαῦρα στοιχεῖα.
2. Τά σχήματα θά πλέκουν μέσα στό κείμενο. Ἡ λεζάντα κάτω ἀπό τό σχῆμα.
3. Τά παραθέματα μέσα στό κείμενο μέ στοιχεῖα τῶν 8.

ΦΥΣΙΚΗ

4. Ὅπου εἶναι ℓ πλάγιο, θά μείνει πλάγιο.
5. Τό βιβλίο θά γίνει, ὅπως γίνεται τό ἀντίστοιχο βιβλίο τῆς Β' Λυκείου (Κορμοῦ), δηλαδή μέ κεφαλίδες καί διχρωμία.
6. Οἱ δείκτες θά μπαίνουν δεξιά καί κάτω, π.χ γ_E, γ_K καί ὅπου εἶναι κάτω καί πάνω δείκτες θά εἶναι στήν ἴδια γραμμή, π.χ. v_0^2, γ_E^2
7. Νά τυπωθεῖ τό βιβλίο καθαρά μέ ζωηρή ἀπόχρωση, γιατί τώρα ὁρισμένες σελίδες εἶναι ἀχνές καί στό κάτω μέρος μισοτυπωμένες.

ΑΛΚΙΝΟΟΥ Ε. ΜΑΖΗ

ΦΥΣΙΚΗ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1978

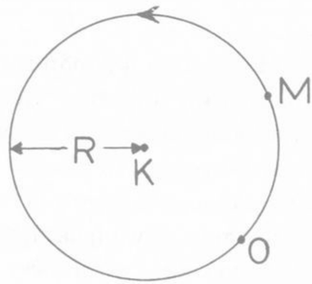
Μηχανική

Καμπυλόγραμμη κίνηση

1. Καμπυλόγραμμη κίνηση

Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω σέ *καμπύλη τροχιά* (σχ. 1), πού τή θεωροῦμε ὡς ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς. Ὁρίζουμε ἕνα σημεῖο Ο τῆς τροχιᾶς ὡς ἀρχή τῶν διαστημάτων καί τή θετική φορά. Τότε ἡ θέση Μ τοῦ κινητοῦ πάνω στήν τροχιά του προσδιορίζεται ἀπό τό μέτρο καί τή φορά τοῦ τόξου $\widehat{OM} = s$. Ἄν εἶναι γνωστή ἡ μορφή τῆς τροχιᾶς τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί ἡ ἐξίσωση τῆς κινήσεώς του $s = f(t)$, τότε προσδιορίζεται τελείως ἡ κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου.

Σχ. 1. Καμπυλόγραμμη κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

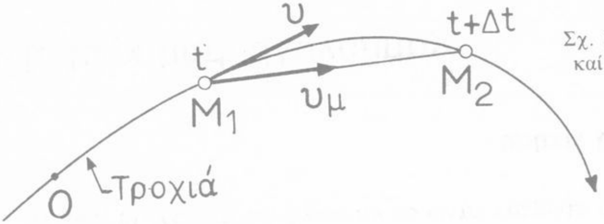


Σχ. 2. Κυκλική κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

Ἔστω π.χ. ὅτι ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά πού ἔχει ἀκτίνα R (σχ. 2.). Ἡ ἐξίσωση τῆς κινήσεως εἶναι $s = 3t^2 - 2t + 4$. Τότε σέ κάθε τιμή τοῦ χρόνου t ἀντιστοιχεῖ ὁρισμένη θέση τοῦ κινητοῦ πάνω στήν τροχιά του.

2. Ταχύτητα στήν καμπυλόγραμμη κίνηση

Στίς χρονικές στιγμές t καί $t + \Delta t$ *τό ὑλικό σημεῖο* Μ βρίσκεται ἀντίστοιχα στίς θέσεις M_1 καί M_2 (σχ. 3) καί οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τήν ἀρχή Ο τῶν διαστημάτων εἶναι $OM_1 = s_1$ καί $OM_2 = s_2$. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό κινητό διατρέχει τό τόξο M_1M_2 πού ἔχει μέτρο $\Delta s = s_2 - s_1$.



Σχ. 3. Μέση ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon_\mu}$ καί στιγμαία ταχύτητα $\overrightarrow{\upsilon}$.

Ὀνομάζουμε *μέση ταχύτητα* ($\overrightarrow{\upsilon_\mu}$) τοῦ κινητοῦ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό ἄνυσμα:

$$\text{μέση ταχύτητα} \qquad \overrightarrow{\upsilon_\mu} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

ὅπου M_1M_2 εἶναι ἡ χορδή τοῦ τόξου M_1M_2. Ἡ μέση ταχύτητα δέν ἔχει καμιά φυσική σημασία, γιατί ἡ μετατόπιση M_1M_2, πού ἀναφέρεται στόν παραπάνω ὁρισμό, διαφέρει ἀπό τό διάστημα πού στήν πραγματικότητα διατρέχει τό κινητό.

Ὀνομάζουμε *ταχύτητα* ($\overrightarrow{\upsilon}$) τοῦ κινητοῦ στή χρονική στιγμή t τό ὅριο πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ μέση ταχύτητα στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν.

$$\text{ταχύτητα} \qquad \overrightarrow{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

Ὅταν τό Δt τείνει πρός τό μηδέν, ἡ διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ τείνει νά συμπέσει μέ τή διεύθυνση τῆς *ἐφαπτομένης* τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο M_1, στό ὁποῖο βρίσκεται τό κινητό στή χρονική στιγμή t (σχ. 3). Τό μέτρο υ_μ τῆς μέσης ταχύτητας τείνει πρός ἕνα ὅριο υ, πού εἶναι τό μέτρο τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ Μ στή χρονική στιγμή t. Ὥστε:

Στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ἡ ταχύτητα τοῦ κινητοῦ σέ μιά ὁρισμένη χρονική στιγμή t εἶναι ἄνυσμα $\overrightarrow{\upsilon}$, πού ἔχει ἀρχή τό

κινητό, φορέα τήν ἐφαπτομένη στό ἀντίστοιχο σημεῖο τῆς τροχιᾶς, φορά τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ καί μέτρο υ πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\boxed{\text{ταχύτητα} \qquad \upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}} \tag{1}$$

Εὕρεση τοῦ μέτρου υ τῆς ταχύτητας. Τό μῆκος τοῦ τόξου M_1M_2 (σχ. 3) εἶναι Δs. Τό μέτρο τῆς ταχύτητας εἶναι τό ὅριο στό ὁποῖο τείνει ἡ μέση ταχύτητα, ὅταν τό Δt τείνει στό μηδέν, δηλαδή εἶναι:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{χορδή } M_1M_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\text{χορδή } M_1M_2}{\text{τόξο } M_1M_2} \cdot \frac{\text{τόξο } M_1M_2}{\Delta t} \right)$$

καί $$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{χορδή } M_1M_2}{\text{τόξο } M_1M_2} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\text{τόξο } M_1M_2}{\Delta t}$$

Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει στό μηδέν, τό σημεῖο M_2 διαρκῶς πλησιάζει στό σημεῖο M_1 καί τότε ὁ λόγος χορδή M_1M_2/τόξο M_1M_2 τείνει πρός τή μονάδα. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overset{\frown}{M_1M_2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Διαγράφεται

Παρατήρηση. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) συνάγεται ὅτι τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας εἶναι ἴσο μέ τήν *παράγωγο* τῆς ἀπομακρύνσεως s ὡς πρός τό χρόνο.

$$\text{ταχύτητα} \quad \upsilon = \frac{ds}{dt} \tag{2}$$

Ἄν μιά καμπυλόγραμμη κίνηση ἔχει (σέ μονάδες MKS) ἐξίσωση κινήσεως:

$$s = 3t^2 - 2t + 4$$

τότε σέ κάθε χρονική στιγμή t τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας δίνεται ἀπό τή σχέση:

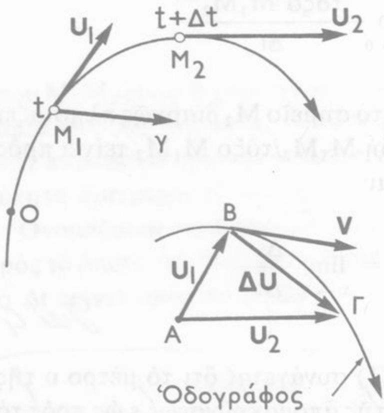
$$\upsilon = \frac{ds}{dt} \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = 6t - 2$$

Ἔτσι στίς χρονικές στιγμές $t_1 = 2$ sec καί $t_2 = 2{,}5$ sec ἡ ταχύτητα ἔχει ἀντίστοιχα μέτρο:

$$\upsilon_1 = 10 \text{ m/sec} \quad \text{καί} \quad \upsilon_2 = 13 \text{ m/sec}$$

3. Ἐπιτάχυνση στήν καμπυλόγραμμη κίνηση

Στίς χρονικές στιγμές t καί t + Δt τό ὑλικό σημεῖο Μ ἔχει ἀντίστοιχα ταχύτητα $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ (σχ. 4). Σέ ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου ἐφαρμόζουμε



Σχ. 4. Ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

δύο ἀνύσματα $\vec{AB} = \vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{A\Gamma} = \vec{\upsilon_2}$. Τό ἄνυσμα $\vec{B\Gamma}$ εἶναι ἡ ἀνυσματική διαφορά τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, δηλαδή εἶναι $\vec{\Delta\upsilon} = \vec{\upsilon_2} - \vec{\upsilon_1}$. Ὀνομάζουμε *μέση ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma_\mu}$ τό ἄνυσμα:

$$\text{μέση ἐπιτάχυνση} \qquad \vec{\gamma_\mu} = \frac{\vec{B\Gamma}}{\Delta t}$$

Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, ἡ μέση ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma_\mu}$ τείνει πρός ἕνα ἀνυσματικό ὅριο $\vec{\gamma}$, πού εἶναι *ἡ ἐπιτάχυνση* τοῦ κινητοῦ Μ στή χρονική στιγμή t.

$$\boxed{\text{ἐπιτάχυνση} \quad \vec{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\Delta t}} \qquad (1)$$

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας $\overrightarrow{AB}$ συνεχῶς μεταβάλλεται καί ἡ ἄκρη Β τοῦ ἀνύσματος διαγράφει μιά καμπύλη γραμμή, πού λέγεται *ὁδογράφος* τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ Μ. Τό σημεῖο Β μποροῦμε λοιπόν νά τό θεωρήσουμε σάν ἕνα *βοηθητικό κινητό*, πού στή χρονική στιγμή t ἔχει *ταχύτητα* V πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\vec{V} = \lim \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\Delta t} \quad \text{ἄρα εἶναι} \quad \vec{V} = \vec{\gamma}$$

Τό ἄνυσμα $\vec{V}$ ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς ὁδογράφου στό σημεῖο Β (σχ. 4). Παρατηροῦμε ὅτι τό ἄνυσμα $\vec{\gamma}$ τῆς ἐπιταχύνσεως βρίσκεται πάντοτε στήν κοιλότητα τῆς τροχιᾶς. Ὥστε:

Στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ κινητοῦ σέ μιά ὁρισμένη χρονική στιγμή t εἶναι ἕνα ἄνυσμα $\vec{\gamma}$, πού ἔχει ἀρχή τό κινητό, εἶναι παράλληλο μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς ὁδογράφου στό σημεῖο Β, βρίσκεται στήν κοιλότητα τῆς τροχιᾶς καί τό μέτρο του ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τήν ταχύτητα (V) τοῦ βοηθητικοῦ κινητοῦ (Β) τήν ἴδια χρονική στιγμή t.

Ἐφαρμογή. Θά ἐφαρμόσουμε τήν παραπάνω μέθοδο τῆς ὁδογράφου, γιά νά προσδιορίσουμε τήν ἐπιτάχυνση σέ μιά ἁπλή καμπυλόγραμμη κίνηση. Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση (σχ. 5). Ὅπως ξέρουμε, τό μέτρο τῆς ταχύτητας εἶναι *σταθερό* καί ἴσο μέ $\upsilon = \frac{2\pi R}{T}$ ἤ $\upsilon = \omega \cdot R$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, T ἡ περίοδος τῆς κινήσεως καί ω ἡ γωνιακή ταχύτητα. Ἀλλά ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ συνεχῶς *μεταβάλλεται*. Ἡ ὁδογράφος τῆς κυκλικῆς κινήσεως εἶναι περιφέρεια πού ἔχει κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα $\overrightarrow{OB} = \vec{\upsilon}$. Ἡ ἄκρη Β (βοηθητικό κινητό) τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{OB}$ σέ χρόνο Τ διαγράφει ὁλόκληρη τήν ὁδογράφο, πού ἔχει μῆκος $s_{οδογρ} = 2\pi\upsilon$. Τό ἄνυσμα $\overrightarrow{V}$ τῆς ταχύτητας τοῦ σημείου Β εἶναι ἐφαπτόμενο τῆς ὁδογράφου, ἄρα πάντοτε εἶναι *κάθετο* στό ἄνυσμα τῆς ταχύτητας $\overrightarrow{\upsilon}$ καί τό μέτρο V τῆς ταχύτητας τοῦ σημείου Β εἶναι ἴσο μέ:

$$V = \frac{2\pi\upsilon}{T}$$

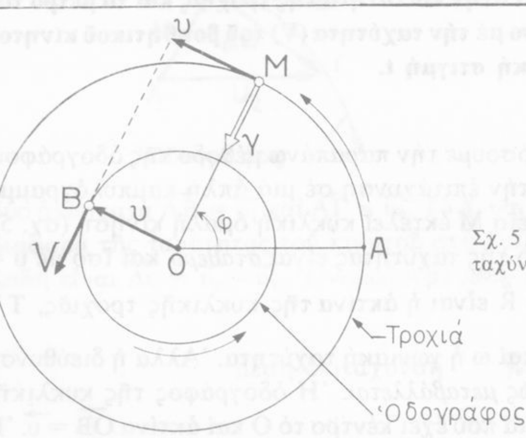
Ἐπειδή εἶναι $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\gamma}$, ἕπεται ὅτι τό ἄνυσμα τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ Μ ἔχει *φορέα* τήν ἐπιβατική ἀκτίνα ΟΜ, *φορά* πρός τό κέντρο Ο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ κινητοῦ καί *μέτρο* γ ἴσο μέ:

$$\gamma = V \quad ἄρα \quad \gamma = \frac{2\pi\upsilon}{T}$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\upsilon = \dfrac{2\pi R}{T}$ ἔχουμε $\dfrac{\upsilon}{R} = \dfrac{2\pi}{T}$

Ὥστε *ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση* (γ_K) τοῦ κινητοῦ Μ ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{κεντρομόλος ἐπιτάχυνση} \quad \gamma_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \quad ἤ \quad \gamma_\kappa = \omega^2 \cdot R}$$

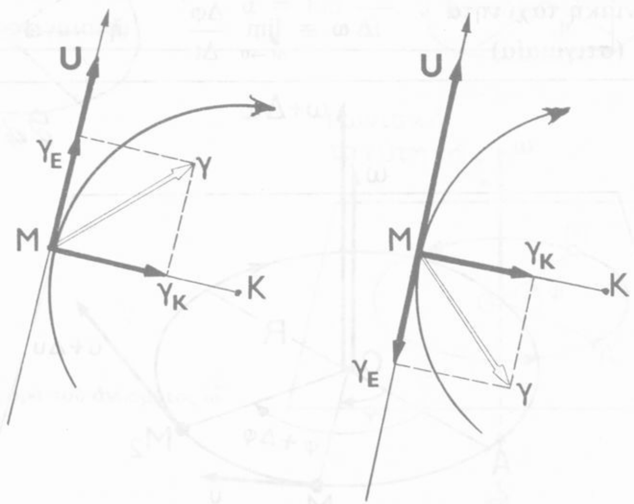


Σχ. 5 Γιά τόν προσδιορισμό τῆς ἐπιταχύνσεως $\overrightarrow{\gamma}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου Μ.

Ἐπιτρόχια καί κεντρομόλος ἐπιτάχυνση. Ἀναλύουμε τήν ἐπιτάχυνση $\overrightarrow{\gamma}$ σέ δύο συνιστῶσες, μιά κατά τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς καί τήν ἄλλη κατά διεύθυνση κάθετη στήν ἐφαπτομένη (σχ. 6). Ἡ *ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση* $\overrightarrow{\gamma_E}$ χαρακτηρίζει τή μεταβολή τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητας υ τοῦ κινητοῦ. Ἡ *κεντρομόλος ἐπιτάχυνση* $\overrightarrow{\gamma_K}$ χαρακτηρίζει τή μεταβολή τῆς διευθύνσεως τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{\upsilon}$ τῆς ταχύτητας τοῦ κινητοῦ. Ὅταν τά ἀνύσματα $\overrightarrow{\upsilon}$ καί $\overrightarrow{\gamma_E}$ εἶναι ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα, τότε ἡ κίνηση εἶναι ἀντίστοιχα *ἐπιταχυνόμενη* ἤ *ἐπιβραδυνόμενη*. Καί ἄν ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\overrightarrow{\gamma_E}$ εἶναι διαρκῶς ἴση μέ μηδέν ($\overrightarrow{\gamma_E} = 0$), τότε τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό καί ἡ κίνηση εἶναι *ὁμαλή*. Ὥστε:

Στήν καμπυλόγραμμη κίνηση ἡ ἐπιτάχυνση $\overrightarrow{\gamma}$ εἶναι συνισταμένη τῆς ἐπιτρόχιας ἐπιταχύνσεως $\overrightarrow{\gamma_E}$ καί τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\overrightarrow{\gamma}$. $\overrightarrow{\gamma_K}$

$$\boxed{\text{ἐπιτάχυνση} \quad \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{\gamma_E} + \overrightarrow{\gamma_K} \quad \text{καί} \quad \gamma = \sqrt{\gamma_E^{\,2} + \gamma_K^{\,2}}}$$



Σχ. 6. Ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\overrightarrow{\gamma_E}$ καί κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\overrightarrow{\gamma_K}$.

4. Κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ κινεῖται μέ *μεταβαλλόμενη κίνηση* πάνω σέ περιφέρεια, πού ἔχει ἀκτίνα R, καί στήν ἀρχή τῶν χρόνων (t =0) βρίσκεται στήν ἀρχή τῶν διαστημάτων Α (σχ. 7). Στίς χρονικές στιγμές t καί t+Δt τό κινητό βρίσκεται ἀντίστοιχα στίς θέσεις M_1 καί M_2 καί ἔχει:

χρόνος t	γωνιακή ταχύτητα ω	ταχύτητα υ
χρόνος t + Δt	γωνιακή ταχύτητα ω+Δω	ταχύτητα υ+Δυ

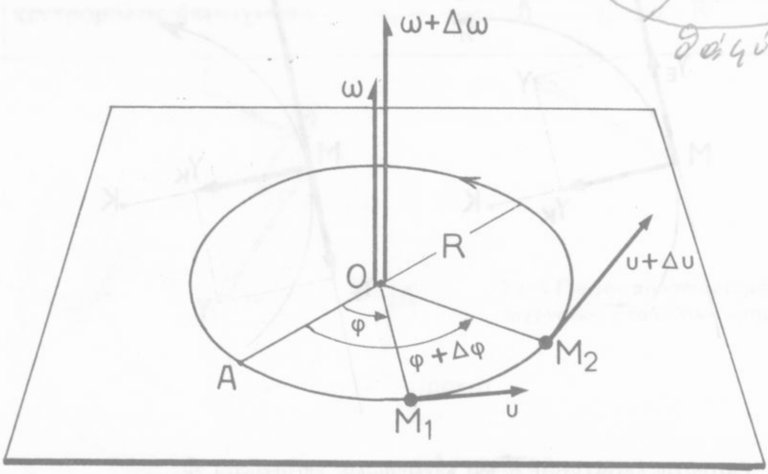
α. **Γωνιακή ταχύτητα καί γωνιακή ἐπιτάχυνση.** Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ ἐπιβατική ἀκτίνα διαγράφει τή γωνία Δφ καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt *ἡ μέση γωνιακή ταχύτητα* (ω_μ) ἔχει *μέτρο:*

$$\text{μέση γωνιακὴ ταχύτητα} \quad \omega_\mu = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν ἡ μέση γωνιακή ταχύτητα Δφ/Δt τείνει πρός ἕνα ὁρισμένο ὅριο, πού εἶναι *ἡ γωνιακή ταχύτητα* (ω) στή χρονική στιγμή t καί ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ:

$$\boxed{\text{γωνιακή ταχύτητα (στιγμιαία)} \quad \omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{ἤ} \quad \cancel{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}}$$

φεύγει



Σχ. 7. Κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση ὑλικοῦ σημείου.

Ὅπως στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση καί στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση τό ἄνυσμα $\vec{\omega}$ τῆς γωνιακῆς ταχύτητας ἔχει ἀρχή τό κέντρο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, διεύθυνση κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς τροχιᾶς καί φορά πού καθορίζεται μέ τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία. (σχ. 7α).

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἡ γωνιακή ταχύτητα μεταβάλλεται κατά Δω καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό κινητό ἔχει *μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση* (α_μ) πού ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ:

$$\text{μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση} \qquad \alpha_\mu = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Ἄν σ' αὐτή τήν ἐξίσωση βάλουμε Δω = 1 rad/sec καί Δt = 1 sec, βρίσκουμε ὅτι *μονάδα γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως* εἶναι: 1 rad/sec^2.

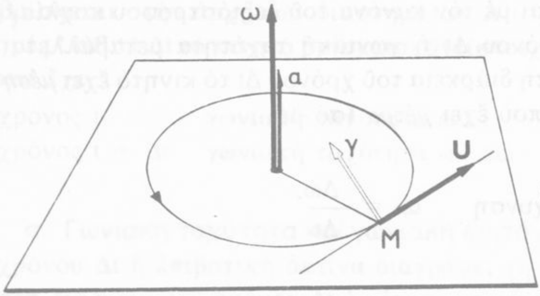
Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, τότε ἡ μέση γωνιακή ἐπιτάχυνση Δω/Δt τείνει πρός ἕνα ὁρισμένο ὅριο, πού εἶναι *ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση* (α) στή χρονική στιγμή t καί ἔχει *μέτρο* ἴσο μέ:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{γωνιακή ἐπιτάχυνση}\\ \text{(στιγμιαία)}\end{array} \qquad \alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \text{ἤ} \qquad \cancel{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}}$$

δεν ισχύει

Σχ. 7α. Ἡ φορά τοῦ ἀνύσματος $\vec{\omega}$.

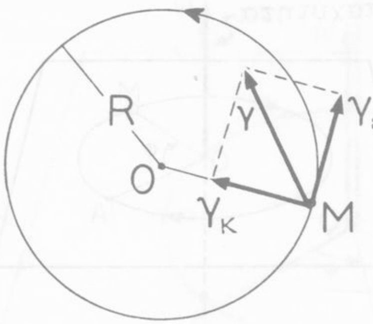
Η γωνιακή ἐπιτάχυνση εἶναι ἕνα ἄνυσμα $\vec{\alpha}$ πού ἔχει *τή διεύθυνση* καί *τή φορά* τοῦ ἀνύσματος $\overrightarrow{\Delta\omega}$ (σχ. 8).



Σχ. 8. Γωνιακή ἐπιτάχυνση $\vec{\alpha}$.

β. Ἐπιτάχυνση. Στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση *ή ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ εἶναι σέ κάθε στιγμή ἡ συνισταμένη δύο κάθετων μεταξύ τους συνιστωσῶν (σχ. 9), οἱ ὁποῖες εἶναι *ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}_E$ καί *ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}_K$.

$$\boxed{\begin{array}{ll}\text{ἐπιτάχυνση} & \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_K \\ \text{(στιγμιαία)} & \end{array}} \qquad (1)$$



Σχ. 9. Οἱ δύο συνιστῶσες $\vec{\gamma}_E$ καί $\vec{\gamma}_K$ τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$.

1γ⃗

Ἐπειδή τά ἀνύσματα $\vec{\gamma}_E$ καί $\vec{\gamma}_K$ εἶναι πάντοτε κάθετα μεταξύ τους, ἕπεται ὅτι σέ κάθε στιγμή *τό μέτρο* γ τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι ἴσο μέ:

ἐπιτάχυνση (στιγμιαία)	$\gamma = \sqrt{\gamma_E^{\,2} + \gamma_K^{\,2}}$	

Τό μέτρο τῆς ἐπιτρόχιας καί τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως εἶναι:

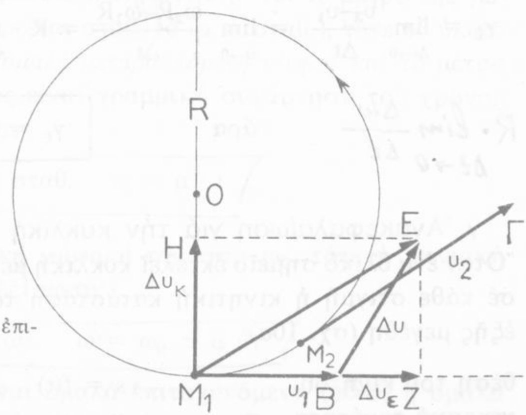
ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\gamma_E = \alpha \cdot R$	κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\gamma_K = \omega^2 \cdot R$

μαύρο

Εὕρεση τῆς ἐξισώσεως (1). Στίς χρονικές στιγμές t καί t+Δt τό κινητό Μ βρίσκεται ἀντίστοιχα στίς θέσεις M_1 καί M_2 στίς ὁποῖες ἔχει ταχύτητα $\vec{M_1B} = \vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{M_2\Gamma} = \vec{\upsilon_2}$ (σχ. 10). Ἀπό τό σημεῖο M_1 φέρνουμε τό ἄνυσμα $\vec{M_1E} = \vec{M_2\Gamma} = \vec{\upsilon_2}$. Τότε τό ἄνυσμα $\vec{BE}$ εἶναι ἡ ἀνυσματική διαφορά τῶν δύο ταχυτήτων τοῦ κινητοῦ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, δηλαδή εἶναι $\vec{\Delta\upsilon} = \vec{\upsilon_2} - \vec{\upsilon_1}$. Τό ἄνυσμα $\vec{BE}$ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ἑξῆς δύο ἀνυσμάτων:

1. τοῦ ἀνύσματος $\vec{BZ}$, πού εἶναι ἡ προβολή τοῦ $\vec{BE}$ πάνω στή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο M_1·
2. τοῦ ἀνύσματος $\vec{M_1H}$, πού εἶναι ἡ προβολή τοῦ $\vec{BE}$ πάνω στή διεύθυνση τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτίνας OM_1. Ἄρα εἶναι:

$$\vec{BE} = \vec{BZ} + \vec{M_1H} \quad \text{ἤ} \quad \vec{\Delta\upsilon} = \vec{\Delta\upsilon_E} + \vec{\Delta\upsilon_K}$$



Σχ. 10. Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$.

Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διά Δt, βρίσκουμε:

$$\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon_E}}{\Delta t} + \frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon_K}}{\Delta t} \qquad (2)$$

Ὥστε ἡ μέση ἐπιτάχυνση $\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon}}{\Delta t}$ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt εἶναι ἴση μέ *τό ἀνυσματικό ἄθροισμα* τῆς μέσης ἐπιτρόχιας ἐπιταχύνσεως $\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon_E}}{\Delta t}$ καί τῆς μέσης κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon_K}}{\Delta t}$. Ὅταν ὁ χρόνος Δt τείνει πρός τό μηδέν, κάθε πηλίκο τῆς ἐξισώσεως (2) τείνει σέ ἕνα ὁρισμένο ὅριο πού εἶναι:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon_E}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{\Delta\upsilon_K}}{\Delta t} \qquad \text{ἤ} \qquad \vec{\gamma} = \vec{\gamma}_E + \vec{\gamma}_K$$

Ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_E$ ἔχει τή διεύθυνση *τῆς ἐφαπτομένης* τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο M_1 καί ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_K$ ἔχει τή διεύθυνση *τῆς ἐπιβατικῆς ἀκτίνας* OM_1 (σχ. 9).

Εὕρεση τοῦ μέτρου τῆς ἐπιτρόχιας ἐπιταχύνσεως. Εἶναι:

⟩||c

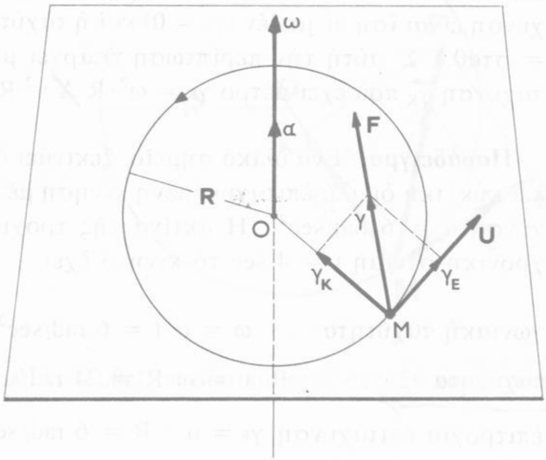
$$\gamma_E = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\upsilon_2-\upsilon_1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega_2 R-\omega_1 R}{\Delta t} = R\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\omega_2-\omega_1}{\Delta t} \cancel{= R\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

ἤ $\gamma_E = R\cdot\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ ἄρα $\boxed{\gamma_E = \alpha\cdot R}$

γ. Ἀνακεφαλαίωση γιά τήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση. Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση, τότε σέ κάθε στιγμή ἡ κινητική κατάστασή του προσδιορίζεται ἀπό τά ἑξῆς μεγέθη (σχ. 10α):

θέση τοῦ κινητοῦ	$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
γωνιακή ταχύτητα	ω	$\omega = d\varphi/dt$

γωνιακή ἐπιτάχυνση	$\vec{\alpha}$	$\alpha = d\omega/dt$
ταχύτητα (γραμμική)	$\vec{\upsilon}$	$\upsilon = ds/dt$
ἐπιτάχυνση	$\vec{\gamma}$	$\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$
ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\vec{\gamma}_E$	$\gamma_E = \alpha \cdot R$
κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\vec{\gamma}_K$	$\gamma_K = \omega^2 \cdot R$
δύναμη	$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$	$F = m \cdot \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$



Σχ. 10α. Τά μεγέθη στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση.

δ. Κυκλική ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Ἄν τό μέτρο τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως διατηρεῖται σταθερό (α = σταθ.), τότε τό ὑλικό σημεῖο Μ ἐκτελεῖ *κυκλική ὁμαλά μεταβαλλόμενη κίνηση* καί τό μέτρο (ω) τῆς γωνιακῆς ταχύτητας εἶναι γραμμική συνάρτηση τοῦ χρόνου καί δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\alpha = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \omega = \alpha \cdot t}$$

Ἄν τό κινητό ἔχει *ἀρχική γωνιακή ταχύτητα* ω_0, τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\alpha = \sigma\tau\alpha\theta. \quad \omega = \omega_0 \pm \alpha \cdot t}$$

Ἡ κίνηση μπορεῖ νά εἶναι ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη (α>0) ἤ ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη (α<0) κίνηση. Ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ εἶναι σέ κάθε στιγμή

Ἡ γωνιακή ἀπομάκρυνση (φ) τοῦ κινητοῦ δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \quad \text{ἤ} \quad \varphi = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2}$$

ἡ συνισταμένη τῆς ἐπιτρόχιας $\vec{\gamma}_E$ καὶ τῆς κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_K$ καί ἑπομένως τό μέτρο γ τῆς ἐπιταχύνσεως εἶναι:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$$

Μερική περίπτωση. Ἄν ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\alpha = 0$), τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα ω διατηρεῖται *σταθερή* (ω = σταθ.) καί τό κινητό ἐκτελεῖ *κυκλική ὁμαλή κίνηση*. Τότε ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\gamma_E = 0$) καί ἡ ταχύτητα υ εἶναι *σταθερή* (*υ* = = σταθ.). Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὑπάρχει μόνο ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_K$ πού ἔχει μέτρο $\gamma_K = \omega^2 \cdot R \cancel{=} \upsilon^2/R$.

Παράδειγμα. Ἕνα ὑλικό σημεῖο, ξεκινάει ἀπό τήν ἠρεμία καί ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση α = 6 rad/sec². Ἡ ἀκτίνα τῆς τροχιᾶς εἶναι R = 2 m. Στή χρονική στιγμή t = 4 sec τό κινητό ἔχει:

γωνιακή ταχύτητα	$\omega = \alpha \cdot t = 6\ \text{rad/sec}^2 \cdot 4\ \text{sec} = 24\ \text{rad/sec}$
ταχύτητα	$\upsilon = \omega \cdot R = 24\ \text{rad/sec} \cdot 2\ \text{m} = 48\ \text{m/sec}$
ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\gamma_E = \alpha \cdot R = 6\ \text{rad/sec}^2 \cdot 2\ \text{m} = 12\ \text{m/sec}^2$
κεντρομόλο ἐπιτάχυνση	$\gamma_K = \omega^2 \cdot R = (24\text{rad/sec})^2 \cdot 2\ \text{m} = 1152\ \text{m/sec}^2$
ἐπιτάχυνση	$\gamma = \sqrt{\gamma_E^2 + \gamma_K^2}$ καί $\gamma = 364{,}49\ \text{m/sec}^2$

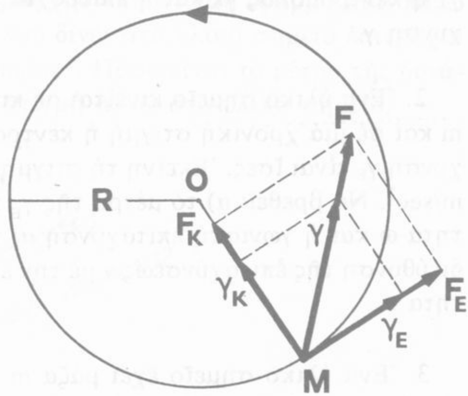
Τή στιγμή t = 4 sec ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως γ σχηματίζει μέ τήν ἐπιβατική ἀκτίνα ΟΜ (σχ. 9) γωνία θ, πού προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση εφ $\theta = \gamma_E/\gamma_K$

5. Ἐφαρμογή τῆς ἐξισώσεως $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ στήν κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση.

Ἕνα ὑλικό σημεῖο Μ ἔχει μάζα m καί ἐκτελεῖ *κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση* πάνω σέ τροχιά πού ἔχει ἀκτίνα R (σχ. 11). Σέ μιά χρονική στιγμή t τό κινητό ἔχει ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο

γωνιακή ἀπομάκρυνση $\varphi = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{rad}{sec^2} \cdot 16 sec^2 = 48 rad$

τῆς Δυναμικῆς ἐκείνη τή στιγμή ἐνεργεῖ πάνω στό ὑλικό σημεῖο δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$, ἡ ὁποία ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}$ καί μέτρο $F = m \cdot \gamma$. Ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς.



Σχ. 11. Στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ ἡ δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$.

Ἡ δύναμη F μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστῶσες:

τήν ἐπιτρόχια συνιστῶσα $\vec{F_E} = m \cdot \vec{\gamma_E}$

καί τήν κεντρομόλο συνιστῶσα $\vec{F_K} = m \cdot \vec{\gamma_K}$

Ἄν ἡ ἐπιτρόχια συνιστῶσα $\vec{F_E}$ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($F_E = 0$), τότε στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ μόνο ἡ κεντρομόλος συνιστῶσα $\vec{F_K}$ καί τό ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ *κυκλική ὁμαλή κίνηση*.

Γενική περίπτωση. Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m, ἐκτελεῖ ὁποιαδήποτε *καμπυλόγραμμη κίνηση*, τότε σέ κάθε χρονική στιγμή t τό κινητό ἔχει *ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ καί στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ *ἡ δύναμη*

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}.$$

1. Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $R =$ $= 20$ cm μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha = 2$ rad/sec^2. Στή χρονική στιγμή $t = 3$ sec νά βρεθεῖ: α) ἡ γωνιακή ταχύτητα ω· β) ἡ ταχύτητα υ· γ) ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E· καί δ) ἡ ἐπιτάχυνση γ.

2. Ἕνα ὑλικό σημεῖο κινεῖται σέ κυκλική τροχιά, ἀκτίνας $R = 0{,}2$ m καί σέ μιά χρονική στιγμή ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E εἶναι ἴσες. Ἐκείνη τή στιγμή ἡ ἐπιτάχυνση ἔχει μέτρο $\gamma = 4$ m/sec^2. Νά βρεθεῖ: α) τό μέτρο τῆς γ_E καί τῆς γ_K· β) ἡ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α· γ) ἡ γωνία θ πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως γ μέ τήν ἐπιβατική ἀκτίνα· καί δ) ἡ ταχύτητα υ.

3. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 2$ kgr, κινεῖται πάνω σὲ κυκλικὴ τροχιὰ ἀκτίνας $R = 0{,}4$ m μέ σταθερή γωνιακή ἐπιτάχυνση $\alpha =$ $= 3$ rad/sec^2. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι τό μέτρο F τῆς δυνάμεως πού ἐνεργεῖ πάνω στό ὑλικό σημεῖο στή χρονική στιγμή $t = 10$ sec.

4. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 100$ gr, εἶναι δεμένο στήν ἄκρη νήματος πού ἔχει μῆκος $R = 1$ m καί διαγράφει κατακόρυφο κύκλο. Σέ μιά στιγμή πού τό σῶμα κατεβαίνει, τό νῆμα σχηματίζει γωνία $\theta = 30^o$ μέ τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου. Ἐκείνη τή στιγμή τό ὑλικό σημεῖο ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 2$ m/sec. Νά βρεθεῖ: α) ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση γ_E καθώς καί ἡ ἐπιτάχυνση γ ἐκείνη τή στιγμή· β) ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α· καί γ) ἡ γωνία φ πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως γ μέ τό νῆμα.
$g = 10$ m/sec^2.

5. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα $m = 600$ gr καί κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά ἀκτίνας $R = 6$ m. Σέ μιά χρονική στιγμή τό ὑλικό σημεῖο ἔχει ταχύτητα $\upsilon = 48$ m/sec καί ἡ δύναμη πού ἐνεργεῖ πάνω στό ὑλικό σημεῖο ἔχει μέτρο $F = 230{,}5$ N. Νά βρεθεῖ: α) ἡ ἐπιτάχυνση γ καί ἡ γωνιακή ταχύτητα ω· β) ἡ κεντρομόλος γ_K καί ἡ ἐπιτρόχια

ἐπιτάχυνση γ_E· καί γ) ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α καί ὁ χρόνος t πού κινήθηκε τό ὑλικό σημεῖο.

6. Ἕνα ὑλικό σημεῖο ἔχει μάζα m = 4 kgr καί ἐκτελεῖ ὁμαλή κυκλική κίνηση μέ σταθερή ταχύτητα υ = 10 m/sec πάνω σέ κυκλική τροχιά, ἀκτίνας R = 2,5 m. Σέ μιά χρονική στιγμή ἐφαρμόζεται πάνω στό ὑλικό σημεῖο μιά δύναμη πού δίνει στό ὑλικό σημεῖο ἐπιτρόχια ἐπιβράδυνση ἴση μέ $\gamma_E = 2{,}25\ \mathrm{m/sec^2}$. Πόσο εἶναι τό μέτρο τῆς δυνάμεως F πού ἐνεργεῖ ἐκείνη τή στιγμή πάνω στό ὑλικό σημεῖο;

νεί υχμίδει
ιό πινό

Μερικές περιπτώσεις παραγωγῆς ἔργου

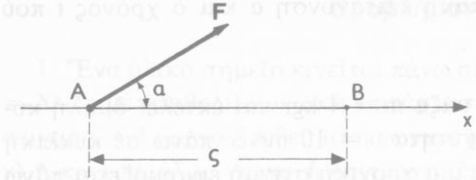
6. Ἡ παραγωγή ἔργου

Σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ μιά *σταθερή δύναμη* F, ἡ ὁποία μετακινεῖ τό ὑλικό σημεῖο κατά διάστημα s (σχ. 12). Ὅπως ξέρουμε, σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι *ἡ δύναμη παράγει ἔργο* W ἴσο μέ:

$$W = F \cdot s \cdot \text{συν}\,\alpha \qquad (1)$$

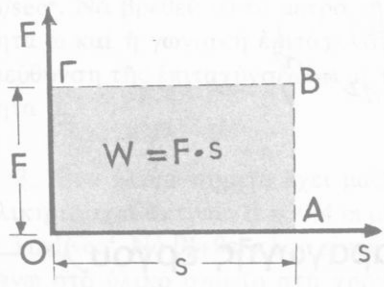
ὅπου α εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ἡ διεύθυνση τῆς δυνάμεως μέ τή διεύθυνση τῆς μετατοπίσεως. Ἄν εἶναι α = 0°, τότε ἡ δύναμη μετατοπίζει τό ὑλικό σημεῖο κατά τή διεύθυνσή της καί ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$W = F \cdot s \qquad (2)$$



Σ.χ 12. Ἡ δύναμη F παγάγει ἔργο.

Γραφική παράσταση τοῦ ἔργου. Παίρνουμε δύο ὀρθογώνιους ἄξονες OF καί Os (σχ. 13). Μιά σταθερή δύναμη F μετακινεῖ τό ὑλικό σημεῖο κατά δάστημα s πάνω στή διεύθυνσή της. Τότε αὐτή ἡ δύναμη παράγει



Σχ. 13. Διάγραμμα τοῦ ἔργου σταθερῆς δυνάμεως.

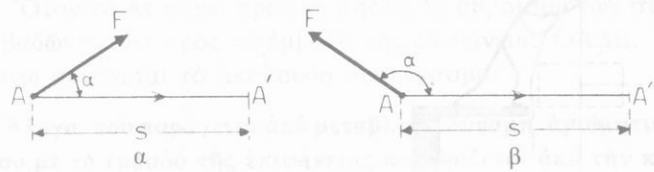
ἔργο $W = F \cdot s$. Ἔτσι παίρνουμε *τό διάγραμμα τοῦ ἔργου,* στό ὁποῖο παρατηροῦμε ὅτι:

Τό ἔργο (F · s), πού παράγει μιά σταθερή δύναμη (F), ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό ἑνός ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου, πού οἱ δύο κάθετες πλευρές του ἔχουν μήκη ἀριθμητικά ἴσα μέ τίς ἀριθμητικές τιμές τῆς δυνάμεως (F) καί τῆς μετατοπίσεως (s).

α. Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως (1). Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) συνάγονται τά ἑξῆς συμπεράσματα:

α) Ὅταν εἶναι $0^o \leqslant \alpha < 90^o$, τότε εἶναι συν $\alpha > 0$ καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως F εἶναι *θετικό* ($W > 0$). Ἡ δύναμη F συντελεῖ στήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου, πάνω στό ὁποῖο ἐνεργεῖ καί τότε λέμε ὅτι ἡ δύναμη F παράγει *κινητήριο ἔργο.* Ὅταν εἶναι $\alpha = 0^o$, τό ἔργο ἔχει τή μέγιστη τιμή $W = F \cdot s$.

β) Ὅταν εἶναι $90^o < \alpha \leqslant 180^o$, τότε εἶναι συν $\alpha < 0$ καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως F εἶναι *ἀρνητικό* ($W<0$). Ἡ δύναμη F ἀντιδρᾶ στήν κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τότε λέμε ὅτι ἡ δύναμη F παράγει *ἔργο ἀντιστάσεως* (σχ. 14).



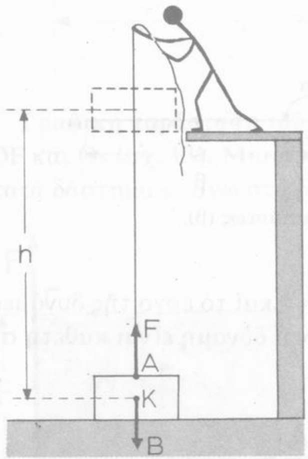
Σχ. 14. Ἔργο κινητήριο (α) καί ἔργο ἀντιστάσεως (β).

γ) Ἄν εἶναι $\alpha = 90^\circ$, τότε εἶναι συν $\alpha = 0$ καί τό ἔργο τῆς δυνάμεως F εἶναι *ἴσο μέ μηδέν* ($W = 0$). Ὅταν λοιπόν ἡ δύναμη εἶναι κάθετη στή μετατόπιση s, ἡ δύναμη *δέν παράγει ἔργο*.

7. Ἔργο κινητήριο καί ἔργο ἀντιστάσεως

Ἕνα στερεό σῶμα ἔχει βάρος $\vec{B}$ καί βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ἔδαφος. Ὅταν ἀφήσουμε ἐλεύθερο τό σῶμα, αὐτό πέφτει κατακόρυφα μέ τήν ἐπίδραση τοῦ βάρους του. Τότε τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σώματος παράγει *κινητήριο ἔργο* ἴσο μέ $W_B = B \cdot h$. Ἕνας ἐργάτης, γιά νά ἀνεβάσει τό ἴδιο σῶμα ἀπό τό ἔδαφος ὡς τό ὕψος h, ἐφαρμόζει στό σῶμα μιά κατακόρυφη σταθερή δύναμη $\vec{F}$ (σχ. 15). Τότε πάνω στό σῶμα ἐνεργοῦν οἱ δύο δυνάμεις $\vec{F}$ καί $\vec{B}$ πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά. Τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δύο δυνάμεων μετακινοῦνται *ταυτόχρονα* πάνω στήν ἴδια κατακόρυφο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ δύναμη F εἶναι κινητήρια δύναμη καί παράγει *κινητήριο ἔργο* ἴσο μέ $W_F = F \cdot h$. Κατά τήν ἀνύψωση τοῦ σώματος τό βάρος του $\vec{B}$ *ἀντιδρᾶ* στή μετακίνηση τοῦ σώματος, δηλαδή ἐνεργεῖ σάν *ἀντίσταση* καί παράγει *ἔργο ἀντιστάσεως* κατ' ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ $W_{αντ} = B \cdot h$. Ὥστε, ὅταν ἕνα σῶμα πέφτει ἐλεύθερα, τό βάρος του $\vec{B}$ παράγει *κινητήριο ἔργο*, ἐνῶ ὅταν τό ἴδιο σῶμα ἀνυψώνεται, τό βάρος του $\vec{B}$ παράγει *ἔργο ἀντιστάσεως*.

Γενικά οἱ δυνάμεις πού χαρακτηρίζονται ὡς *ἀντιστάσεις*, ὅπως π.χ. ἡ τριβή ὀλισθήσεως, παράγουν *ἔργο ἀντιστάσεως*.



Σχ. 15. Τό βάρος Β παράγει ἔργο ἀντιστάσεως.

8. Ἔργο μεταβλητῆς δυνάμεως

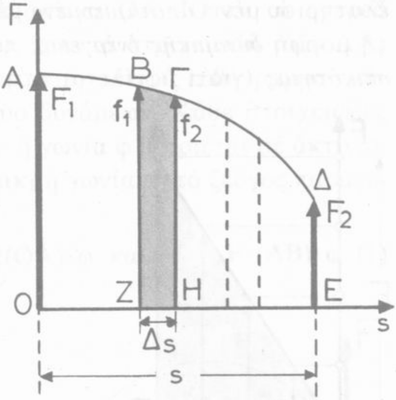
$\vec{F}$

Μιά δύναμη ἔχει σταθερή διεύθυνση καί φορά καί μετακινεῖ πάνω στή διεύθυνσή της τό σημεῖο ἐφαρμογῆς κατά διάστημα s, ἀλλά στή διάρκεια αὐτῆς τῆς μετακινήσεως τό μέτρο τῆς δυνάμεως *συνεχῶς μεταβάλλεται*. Ἡ μεταβολή τῆς δυνάμεως σέ συνάρτηση μέ τή μετατόπιση s παριστάνεται ἀπό μιά καμπύλη γραμμή ΑΒΓΔ (σχ. 16). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ μετατόπιση s ἀποτελεῖται ἀπό πολλές στοιχειώδεις μετατοπίσεις Δs. Τότε μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι στή διάρκεια μιᾶς στοιχειώδους μετατοπίσεως τό ἀντίστοιχο τμῆμα ΒΓ τῆς καμπύλης τῶν μεταβολῶν τῆς δυνάμεως εἶναι εὐθύγραμμο καί τό μέτρο τῆς δυνάμεως εἶναι *σταθερό* καί κατά μέσο ὅρο ἴσο μέ $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$. Ἑπομένως τό στοιχειῶδες ἔργο (ΔW) πού παράγεται κατά τή στοιχειώδη μετατόπιση Δs εἶναι ἴσο μέ:

$$\Delta W = f \cdot \Delta s \quad \text{ἤ} \quad \Delta W = \frac{f_1 + f_2}{2} \cdot \Delta s$$

Αὐτό τό στοιχειῶδες ἔργο ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ἑνός στοιχειώδους τραπεζίου ΖΒΓΗ. Τό ὁλικό ἔργο (W), πού παράγει ἡ μεταβλητή δύναμη, εἶναι ἀριθμητικά ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν ἐμβαδῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται ἡ ἐπιφάνεια ΟΑΔΕ. Ὅταν τό Δs τείνει πρός τό μηδέν, τό ἄθροισμα τῶν στοιχειωδῶν ἐμβαδῶν τείνει πρός τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας ΟΑΔΕ. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Τό ἔργο, πού παράγεται ἀπό μεταβλητή δύναμη, ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τῆς ἐπιφάνειας πού ὁρίζεται ἀπό τήν καμπύλη τῶν μεταβολῶν τῆς δυνάμεως καί τόν ἄξονα τῆς μετατοπίσεως (διάγραμμα τοῦ ἔργου).

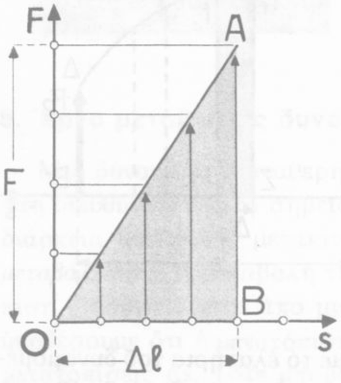


Σχ. 16. Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἔργου μεταβλητῆς δυνάμεως.

α. Ἔργο τάσεως. Γιά νά ἐπιμηκύνουμε τό ἐλατήριο τοῦ δυναμομέτρου, ἐφαρμόζουμε σ' αὐτό μιά δύναμη πού ἔχει σταθερή διεύθυνση καί φορά, ἀλλά τό μέτρο της *αὐξάνεται ἀνάλογα* μέ τήν ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου. Ἡ μεταβολή λοιπόν τῆς δυνάμεως εἶναι *γραμμική συνάρτηση* τῆς ἐπιμηκύνσεως καί ἡ σχέση αὐτή ἐκφράζεται μέ τήν ἐξίσωση $F = k \cdot \Delta l$, ὅπου Δl εἶναι ἡ ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου καί k μιά σταθερή, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση καί τίς διαστάσεις τοῦ ἐλατηρίου καί ὀνομάζεται *σκληρότητα τοῦ ἐλατηρίου(*)*. Ἐφαρμόζοντας συνεχῶς μιά δύναμη προκαλοῦμε ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου, δηλαδή μετατόπιση τοῦ σημείου ἐφαρμογῆς τῆς δυνάμεως ἴση μέ Δl. Στή διάρκεια αὐτῆς τῆς μετατοπίσεως ἡ δύναμη συνεχῶς μεταβάλλεται ἀπό μηδέν ὥς μιά τιμή F. Αὐτή τήν τελική τιμή F τῆς δυνάμεως δείχνει τό δυναμόμετρο, ὅταν ἔχουμε προκαλέσει τήν ἐπιμήκυνση Δl. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ μεταβολή τῆς δυνάμεως παριστάνεται ἀπό τήν εὐθεία ΟΑ (σχ. 17) καί ἑπομένως τό ἔργο πού παράγει ἡ *μεταβλητή δύναμη* ἀριθμητικά εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδό τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΟΑΒ. Τό ἔργο αὐτό ὀνομάζεται *ἔργο τάσεως* καί εἶναι ἴσο μέ:

$$\boxed{\text{ἔργο τάσεως} \quad W = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l \quad \text{ἤ} \quad W = \frac{1}{2} k \cdot (\Delta l)^2}$$

Αὐτό τό ἔργο πού ξοδεύτηκε γιά τήν ἐλαστική παραμόρφωση τοῦ ἐλατηρίου μένει *ἀποταμιευμένο* μέσα στό παραμορφωμένο ἐλατήριο μέ τή μορφή *δυναμικῆς ἐνέργειας*, πού ὀνομάζεται *δυναμική ἐνέργεια ἐλαστικότητας* (γιατί ὀφείλεται στήν ἐλαστική παραμόρφωση).



Σχ. 17. Ὑπολογισμός τοῦ ἔργου τάσεως.

* Εἶναι $k = F/\Delta l$. Ἄν εἶναι $\Delta l = 1$, τότε εἶναι $k = F$. Ὥστε ἡ σταθερή k ἐκφράζει τή δύναμη, πού πρέπει νά ἐφαρμόσουμε στό ἐλατήριο, γιά νά προκαλέσουμε ἐπιμήκυνσή του ἴση μέ μιά μονάδα μήκους. Στό σύστημα MKS ἡ σταθερή k μετριέται σέ N/m.

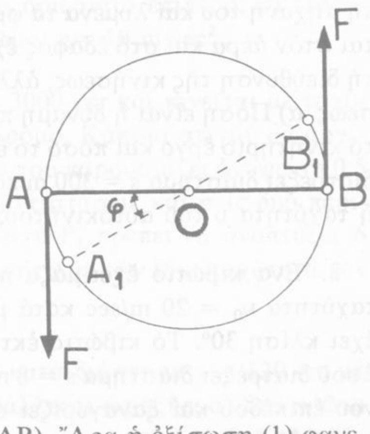
Παράδειγμα. Στό ἐλατήριο τοῦ δυναμομέτρου ἐφαρμόζουμε μιά μεταβλητή δύναμη καί προκαλοῦμε ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου κατά Δl = 2 cm. Ἐκείνη τή στιγμή τό δυναμόμετρο δείχνει ὅτι ἡ δύναμη εἶναι ἴση μέ $F = 60$ N. Τό ἔργο πού καταβάλαμε, γιά νά προκαλέσουμε τήν ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου, δηλαδή *τό ἔργο τάσεως* εἶναι ἴσο μέ:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 60\ \text{N} \cdot 0{,}02\ \text{m} \qquad \text{καί} \qquad W = 0{,}60\ \text{Joule}$$

9. Ἔργο ζεύγους δυνάμεων

Σέ ἕνα στερεό ἐνεργεῖ ζεῦγος δυνάμεων, πού οἱ δυνάμεις του $\vec{F}$ καί $\vec{F}$ εἶναι πάντοτε κάθετες στήν εὐθεία AB, ἡ ὁποία συνδέει τά σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δύο δυνάμεων (σχ. 18). Τό στερεό στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ ζεύγους καί περνάει ἀπό τό μέσο O τῆς εὐθείας AB. Τότε τά σημεῖα ἐφαρμογῆς A καί B τῶν δύο δυνάμεων διαγράφουν περιφέρεια μέ ἀκτίνα OA. Ὅταν τό στερεό στραφεῖ κατά μιά πολύ μικρή γωνία φ, τότε τά στοιχειώδη τόξα AA_1 καί BB_1 μποροῦν νά θεωρηθοῦν κατά προσέγγιση ὡς εὐθύγραμμα τμήματα πού ἔχουν τή διεύθυνση τῶν δύο δυνάμεων. Κάθε στοιχειῶδες τόξο ἔχει μῆκος $\widehat{AA_1} = OA \cdot \varphi$, ὅπου ἡ γωνία φ μετριέται σέ ἀκτίνια. Ὅταν τό στερεό στρέφεται κατά τή μικρή γωνία φ, τό ζεῦγος παράγει ἔργο, ἴσο μέ:

$$W = F \cdot \widehat{AA_1} + F \cdot \widehat{BB_1} \quad \text{ἤ} \quad W = F \cdot 2(OA) \cdot \varphi \quad \text{καί} \quad W = F \cdot (AB) \cdot \varphi \quad (1)$$



Σχ. 18. Ἔργο τοῦ ζεύγους δυνάμεων.

Ἡ ροπή τοῦ ζεύγους ~~εἶναι~~ $M = F \cdot (AB)$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι:

ἔχει μέτρο

Τό ἔργο ζεύγους (W) εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς ροπῆς τοῦ ζεύγους (M) ἐπί τή γωνία (φ) πού στράφηκε τό σῶμα.

$$\boxed{\text{ἔργο ζεύγους} \qquad W = M \cdot \varphi}$$

ὅπου ἡ γωνία φ μετριέται σέ ἀκτίνια.

Παράδειγμα. Ἕνας τροχός στρέφεται μέ τήν ἐπίδραση ζεύγους, πού ἔχει ροπή $M = 30\ N \cdot m$. Ὅταν ὁ τροχός στρέφεται κατά γωνία $\varphi = 60^o = \pi/3$ rad, τό ζεῦγος παράγει ἔργο:

$$W = 30\ N \cdot m \cdot \pi/3\ rad = 31{,}4\ Joule$$

νά γεμίσει τό κενό

Προβλήματα

7. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα m = 600 kgr καί ἀρχίζει νά κατεβαίνει ἕναν εὐθύγραμμο κατηφορικό δρόμο, πού ἔχει κλίση 5‰, μέ σβυμμένη τή μηχανή του καί λυμένα τά φρένα του. Οἱ ἀντιστάσεις πού ὀφείλονται στόν ἀέρα καί στό ἔδαφος ἔχουν συνισταμένη $F_{αντ} = 70$ N πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς κινήσεως, ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως. α) Πόση εἶναι ἡ δύναμη πού κινεῖ τό αὐτοκίνητο; β) Πόσο εἶναι τό κινητήριο ἔργο καί πόσο τό ἔργο ἀντιστάσεων, ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέξει διάστημα s = 300 m πάνω σ' αὐτό τό δρόμο; Πόση εἶναι τότε ἡ ταχύτητα υ τοῦ αὐτοκινήτου; $g = 10\ m/sec^2$.

8. Ἕνα κιβώτιο ἔχει μάζα m = 5 kgr καί ἐκτοξεύεται μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 20$ m/sec κατά μῆκος ἑνός κεκλιμένου ἐπιπέδου, πού ἔχει κλίση 30^o. Τό κιβώτιο ἐκτοξεύεται ἀπό κάτω πρός τά πάνω καί ἀφοῦ διατρέξει διάστημα s = 8 m, κατεβαίνει κατά μῆκος τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί ξαναγυρίζει στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Πόση εἶναι ἡ τριβή ὀλισθήσεως T, πόσο εἶναι τό ἔργο W_T τῆς τριβῆς καί μέ πόση ταχύτητα υ φτάνει τό κιβώτιο στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο; $g = 10\ m/sec^2$.

9. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα m = 1000 kgr καί ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει μέ σταθερή ταχύτητα υ = 8 m/sec ἕναν εὐθύγραμμο ἀνηφορικό δρόμο, πού ἔχει κλίση 5%. Οἱ ἀντιστάσεις πού ὀφείλονται στόν ἀέρα καί στό ἔδαφος ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ $F_{αντ}$ = 120 N, ἡ ὁποία ἔχει τή διεύθυνση τῆς κινήσεως, φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ταχύτητα. α). Πόση εἶναι ἡ δύναμη F πού ἀντιδρᾶ στήν κίνηση τοῦ αὐτοκινήτου καί πόσο τό ἔργο τῆς συνισταμένης τῶν ἀντιστάσεων κατά δευτερόλεπτο; β) Πόση εἶναι ἡ δύναμη ἕλξεως $F_{κιν}$ καί ἡ ἰσχύς P πού ἀναπτύσσει ὁ κινητήρας; g = 10 m/sec^2.

10. Ἕνα φορτηγό αὐτοκίνητο ἔχει μάζα m = 20 tn καί κινεῖται μέ ταχύτητα υ_0 = 20 m/sec. Σέ μιά στιγμή ἀρχίζει νά κατεβαίνει ἕναν κατηφορικό δρόμο εὐθύγραμμο, πού ἔχει κλίση 3%. Ἡ μηχανή δέν ἀναπτύσσει καμιά ἕλξη. Οἱ διάφορες ἀντιστάσεις ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ 80 N κατά τόνο. Πόσο εἶναι τό ἔργο τῶν ἀντιστάσεων, ὅταν τό αὐτοκίνητο διατρέξει διάστημα s = 400 m πάνω σ' αὐτό τό δρόμο καί πόση εἶναι τότε ἡ ταχύτητα υ τοῦ αὐτοκινήτου; g = 10 m/sec^2.

11. Ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m = 1 kgr καί μπορεῖ νά κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς ὁριζόντιας δυνάμεως F = 6 N. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι η = 0,25. α) Πόσο εἶναι τό ἔργο ἀντιστάσεως, ἐξαιτίας τῆς τριβῆς ὀλισθήσεως T, ὅταν τό σῶμα διατρέξει διάστημα s = 3 m πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο; β) Πόση τελικά κινητική ἐνέργεια E ἔχει τό σῶμα; g= 10 m/sec^2.

12. Ἕνα αὐτοκίνητο ἔχει μάζα m = 3000 kgr καί κινεῖται μέ ταχύτητα υ = 10 m/sec πάνω σέ ὁριζόντιο δρόμο. Κάποια στιγμή θά ἀρχίσει νά ἀνεβαίνει ἕναν ἀνηφορικό δρόμο πού παρουσιάζει ἀνύψωση 0,5 m γιά κάθε διάστημα ἴσο μέ 10 m. Οἱ ἀντιστάσεις καί στίς δύο περιπτώσεις εἶναι ἴδιες. Πόση πρόσθετη ἰσχύ P_1 πρέπει νά ἀναπτύξει ὁ κινητήρας, γιά νά ἀνεβαίνει τό αὐτοκίνητο μέ τήν ἴδια ταχύτητα τόν ἀνηφορικό δρόμο; g = 10 m/sec^2.

13. Ἕνα ὑλικό σημεῖο μετακινεῖται κατά διάστημα s = 120 cm μέ τήν ἐπίδραση δυνάμεως, ἡ ὁποία μεταβάλλεται ὡς ἑξῆς: α) Στό πρῶτο 1/3 τοῦ διαστήματος ἡ δύναμη αὐξάνεται γραμμικά ἀπό 0 ὡς 10 N. β) Στό ἑπόμενο 1/3 τοῦ διαστήματος ἡ δύναμη διατηρεῖται σταθερή.

γ) Στό τελευταῖο 1/3 τοῦ διαστήματος ἡ δύναμη ἐλαττώνεται γραμμικά ἀπό 10 N ὥς 0. Πόσο εἶναι τό ὁλικό ἔργο τῆς δυνάμεως;

14. Ἕνα ὑλικό σημεῖο μετακινεῖται κατά διάστημα s μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς μεταβλητῆς δυνάμεως, πού οἱ μεταβολές της σέ συνάρτηση μέ τή μετατόπιση παριστάνονται ἀπό τόξο ἡμιπεριφέρειας πού ἔχει διάμετρο τό διάστημα s. Πόσο εἶναι τό ἔργο αὐτῆς τῆς μεταβλητῆς δυνάμεως; Ἐφαρμογή: s= 4 m.

15. Ὅταν, τραβώντας, ἐπιμηκύνουμε τό ἐλατήριο ἑνός δυναμομέτρου κατά $\Delta l = 2{,}5$ cm, τό δυναμόμετρο δείχνει ὅτι ἐφαρμόζουμε δύναμη F = 60 N. Πόσο ἔργο ξοδέψαμε, γιά νά ἐπιμηκύνουμε τό ἐλατήριο;

16. Γιά νά συμπιέσουμε ἕνα ἐλατήριο κατά Δl = 3 cm, καταβάλλουμε ἔργο ἴσο μέ W = 1,8 Joule. Πόση εἶναι ἡ μέγιστη τιμή τῆς δυνάμεως F πού ἐφαρμόσαμε στό ἐλατήριο;

17. Στό ἐλατήριο δυναμομέτρου ἐφαρμόζουμε δύναμη F_1 = 50 N καί τότε τό ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατά Δl_1. Στό ἐλατήριο τοῦ δυναμομέτρου ἐφαρμόζουμε μαζί μέ τή δύναμη F_1 καί μιά ἄλλη δύναμη F = 80 N πού προκαλεῖ αὔξηση τῆς ἐπιμηκύνσεως τοῦ ἐλατηρίου κατά Δl = 20 cm. α) Πόσο ἔργο παράγεται κατά τή δεύτερη ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου; β) Πόση εἶναι ἡ ὁλική δυναμική ἐνέργεια τοῦ τεντωμένου ἐλατηρίου;

18. Μιά τροχαλία ἔχει ἀκτίνα R = 10 cm καί στρέφεται μέ ἕνα λουρί πού τά δύο τμήματά του εἶναι κάθετα στίς ἄκρες μιᾶς διαμέτρου τῆς τροχαλίας. Ὅταν ἡ τροχαλία κάνει 6 στροφές, τότε παράγεται ἔργο ἴσο μέ W = 226,08 Joule. Πόση εἶναι ἡ καθεμιά δύναμη τοῦ ζεύγους πού ἐνεργεῖ πάνω στήν τροχαλία;

19. Μιά τροχαλία ἔχει ἀκτίνα R = 10 cm καί στρέφεται μέ τήν ἐπίδραση ζεύγους δυνάμεων, πού καθεμιά εἶναι ἴση μέ F = 30 N καί εἶναι πάντοτε κάθετη στήν ἄκρη τῆς ἴδιας διαμέτρου. Σέ χρόνο t = 10 sec ἡ τροχαλία ἐκτελεῖ 80 στροφές. Πόση εἶναι ἡ ἰσχύς πού ἀναπτύσσει τό ζεῦγος τῶν δυνάμεων;

Κίνηση τῶν βλημάτων

10. Ἡ κίνηση τῶν βλημάτων

Ὅταν ἕνα βλῆμα κινεῖται μέσα στόν ἀέρα, τότε πάνω στό βλῆμα ἐνεργοῦν δύο ἐξωτερικές δυνάμεις, *τό βάρος* $\vec{B}$ τοῦ βλήματος καί *ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα* $\vec{F}_{αντ.}$ Ἡ ἐπίδραση πού ἐξασκεῖ ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα πάνω στήν κίνηση τοῦ βλήματος, εἶναι ἀρκετά πολύπλοκη καί γι' αὐτό στή στοιχειώδη μελέτη τῆς κινήσεως τῶν βλημάτων παραλείπουμε τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα καί ὑποθέτουμε ὅτι τά βλήματα *κινοῦνται στό κενό*. Τότε πάνω στό βλῆμα ἐπιδροῦν δύο αἴτια κινήσεως, *τό βάρος* $\vec{B}$ τοῦ βλήματος καί *ἡ ἀρχική ταχύτητα* $\vec{υ}_0$ πού δίνουμε στό βλῆμα, καί τό βλῆμα ἐκτελεῖ μιά *συνισταμένη κίνηση*, πού προκύπτει ἀπό τή σύνθεση δύο εὐθύγραμμων κινήσεων. Ἡ κίνηση τοῦ βλήματος ἀνάγεται στήν κίνηση πού ἔχει τό κέντρο βάρους του, δηλαδή τό βλῆμα θεωρεῖται ὡς *ὑλικό σημεῖο*, πού ἔχει μάζα m ἴση μέ τή μάζα τοῦ βλήματος.

11. Κατακόρυφη βολή

Ὅταν ἕνα βλῆμα (ὑλικό σημεῖο) ἐκτοξεύεται *κατακόρυφα πρός τά πάνω* μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{υ}_0$, τότε τό βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο εὐθύγραμμες κινήσεις: α) ἐξαιτίας τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $\vec{υ}_0$ ἐκτελεῖ *εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση πρός τά πάνω* καί β) ἐξαιτίας τοῦ βάρους του $B = mg$ τό βλῆμα *πέφτει κατακόρυφα* μέ σταθερή ἐπιτάχυνση g. Γιά τήν ταχύτητα καί τήν ἐπιτάχυνση θεωροῦμε θετική φορά τή φορά ἀπό κάτω πρός τά πάνω. Ἄν τό βλῆμα κινηθεῖ ἐπί χρόνο t, ἀποκτᾶ ταχύτητα υ, πού εἶναι συνισταμένη τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $υ_0$ καί τῆς ταχύτητας $υ_{πτώσεως} = -gt$, πού ἀποκτᾶ ἐξαιτίας τῆς πτώσεώς του. Ὥστε στή χρονική στιγμή t *ἡ συνισταμένη ταχύτητα εἶναι κατακόρυφη* καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ: μεγαλύτερο τό

$$υ = υ_0 - g \cdot t \qquad (1)$$

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό βλῆμα, ἐξαιτίας τῆς ἀρχικῆς ταχύτητάς του $υ_0$, θά ἀνέβαινε σέ ὕψος $υ_0 t$, ἀλλά ταυτόχρονα, ἐξαιτίας τοῦ βάρους του Β, θά ἔπεφτε κατά $-gt^2$. Ἄρα στή χρονική στιγμή t τό βλῆμα βρίσκεται σέ ὕψος h ἴσο μέ:

$$h = \upsilon_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) συνάγεται ὅτι ἡ κατακόρυφη βολή πρός τά πάνω εἶναι *εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη κίνηση*.

Ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος συνεχίζεται ὅσο ἡ συνισταμένη ταχύτητα υ ἔχει *θετική τιμή* ($\upsilon>0$). Ἡ ταχύτητα γίνεται ἴση μέ μηδέν στή χρονική στιγμή:

$$\boxed{\text{διάρκεια ἀνόδου} \qquad t_{\alpha\nu o\delta} = \frac{\upsilon_0}{g}} \qquad (3)$$

1g

Βάζοντας αὐτή τήν τιμή τοῦ χρόνου στήν ἐξίσωση (2) βρίσκουμε ὅτι τό βλῆμα φτάνει σέ ὕψος:

$$\boxed{\text{μέγιστο ὕψος} \qquad h_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}} \qquad (4)$$

Ὅταν ὁ χρόνος εἶναι $t<\frac{\upsilon_0}{g}$, ἡ ταχύτητα εἶναι *θετική* ($\upsilon>0$) καί τό βλῆμα *ἀνεβαίνει*.

Ὅταν ὁ χρόνος γίνει $t>\frac{\upsilon_0}{g}$, ἡ ταχύτητα εἶναι *ἀρνητική* ($\upsilon<0$), δηλαδή ἔχει φορά πρός τά κάτω καί τό βλῆμα *κατεβαίνει*.

Ὥστε στή χρονική στιγμή $t = \frac{\upsilon_0}{g}$ *ἀντιστρέφεται* ἡ φορά τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος καί τό βλῆμα ἀρχίζει νά πέφτει ἐλεύθερα χωρίς ἀρχική ταχύτητα.

Τό βλῆμα φτάνει στό ἔδαφος μέ ταχύτητα υ΄ ἴση μέ:

$$\upsilon' = \sqrt{2g \cdot h_{\mu\varepsilon\gamma}} = \sqrt{2g \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2g}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\upsilon' = \upsilon_0}$$

Ἡ διάρκεια τῆς καθόδου εἶναι:

$$t_{\kappa\alpha\theta} = \sqrt{\frac{2h_{\mu\varepsilon\gamma}}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \frac{\upsilon_0^2}{2g}} = \frac{\upsilon_0}{g} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{t_{\kappa\alpha\theta} = t_{\alpha\nu o\delta}}$$

12

Ὥστε ἡ κάθοδος τοῦ βλήματος διαρκεῖ, ὅσο καί ἡ ἄνοδός του καί τό βλῆμα ἐπιστρέφει στό ἔδαφος μέ ταχύτητα, πού τό μέτρο της (υ΄) εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας (υ_0). Τό συμπέρασμα αὐτό εἶναι συνέπεια *τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας*, γιατί ἡ ἀρχική κινητική ἐνέργεια τοῦ βλήματος στό ὕψος h ἔχει μεταβληθεῖ σέ δυναμική ἐνέργεια, ἡ ὁποία κατά τήν κάθοδο τοῦ βλήματος μεταβάλλεται πάλι σέ κινητική ἐνέργεια. Ὥστε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_0^2 = m \cdot g \cdot h$$

Ὅταν τό βλῆμα ἐκτοξεύεται *κατακόρυφα πρός τά κάτω* μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0, τότε τό σῶμα ἐκτελεῖ μιά συνισταμένη κίνηση, πού εἶναι *εὐθύγραμμη ὁμαλά ἐπιταχυνόμενη κίνηση* καί ἰσχύουν οἱ ἐξισώσεις:

$$\upsilon = \upsilon_0 + g \cdot t \qquad \text{καί} \qquad h = \upsilon_0 \cdot t + \frac{1}{2}\, g \cdot t^2$$

Παρατήρηση. Ἄν στήν ἐξίσωση (2) βάλουμε τήν τιμή τοῦ t ἀπό τήν ἐξίσωση (1), βρίσκουμε:

$$h = \frac{\upsilon_0^2 - \upsilon^2}{2g} \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = \pm\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh} \tag{5}$$

Ἡ ἐξίσωση (5) φανερώνει ὅτι τό βλῆμα περνάει δύο φορές ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς κατακορύφου, πού βρίσκεται σέ ὕψος h, καί τή μιά φορά τό βλῆμα ἔχει ταχύτητα θετική (+υ), ἐνῶ τήν ἄλλη φορά ἔχει ταχύτητα ἀρνητική (–υ). Ὥστε στό σημεῖο Μ ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος ἔχει *τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή*.

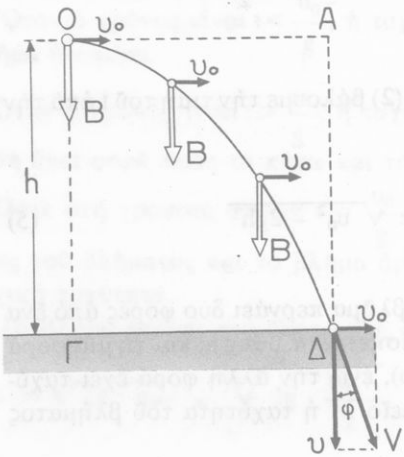
12. Ὁριζόντια βολή

Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο πού βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τοῦ ἐδάφους, ἐκτοξεύεται *μέ ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα* υ_0 ἕνα βλῆμα (ὑλικό σημεῖο), πού ἔχει βάρος $B = mg$ (σχ. 19). Τότε τό βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα δύο εὐθύγραμμες κινήσεις: α) ἐξαιτίας τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}_0$ ἐκτελεῖ *ὁριζόντια ὁμαλή κίνηση*· β) ἐξαιτίας τοῦ βάρους του $\vec{B}$ τό βλῆμα *πέφτει κατακόρυφα* μέ σταθερή ἐπιτάχυνση g. Ἡ συνισταμένη κίνηση εἶναι μιά *καμπυλόγραμμη κίνηση* καί τό βλῆμα διαγράφοντας ἕνα τόξο *ἡμιπαραβολῆς* (ΟΔ) φτάνει στό σημεῖο Δ, πού εἶναι ἡ τέταρτη κορυφή τοῦ παραλληλογράμμου, πού ὁρίζεται ἀπό τούς δύο δρόμους:

$$O\Gamma = h = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (1) \quad \text{καί} \qquad OA = \Gamma\Delta = s = \upsilon_0 \cdot t \quad (2)$$

Τό βλῆμα κινεῖται κατά ὁριζόντια διεύθυνση, ὅσο χρόνο διαρκεῖ ἡ ἐλεύθερη πτώση του. Ὥστε *ἡ διάρκεια* τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος προσδιορίζεται ἀπό τήν ἐξίσωση (1) καί εἶναι:

$$\boxed{\text{διάρκεια κινήσεως} \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$



Σχ. 19. Ὁριζόντια βολή.

῾Επομένως τό διάστημα s, πού διανύει τό βλῆμα κινούμενο ὁριζόντια, εἶναι:

βεληνεκές (ὁριζόντια μετατόπιση)	$s = \upsilon_0 \cdot \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (3)

῾Η ἐξίσωση (3) δίνει τήν ἀπόσταση τοῦ σημείου Δ τοῦ ἐδάφους ἀπό τήν κατακόρυφο ΟΓ, δηλαδή δίνει *τό βεληνεκές* τοῦ βλήματος. Τό βλῆμα φτάνοντας στό σημεῖο Δ ἔχει τήν ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα υ_0 καί τήν κατακόρυφη ταχύτητα $\upsilon = gt$, πού ἀπόκτησε κατά τήν πτώση του. ῞Ωστε τό βλῆμα φτάνει στό σημεῖο Δ μέ ταχύτητα V, πού εἶναι *ἡ συνισταμένη* τῶν ταχυτήτων τῶν δύο συνιστωσῶν κινήσεων ($\vec{V} = \vec{\upsilon_0} + \vec{\upsilon}$), ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος στό σημεῖο Δ καί μέτρο ἴσο μέ:

$$V = \sqrt{\upsilon_0{}^2 + \upsilon^2} \quad \text{ἤ} \quad V = \sqrt{\upsilon_0{}^2 + 2gh}$$

Τό βλῆμα συναντᾶ τό ἔδαφος μέ μιά γωνία φ πού προσδιορίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{\upsilon_0}{\upsilon} \quad \text{ἤ} \quad \varepsilon\varphi\ \varphi = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{2gh}}$$

῾Η τελική ταχύτητα V τοῦ βλήματος βρίσκεται εὔκολα καί ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας. Στό σημεῖο Ο τό βλῆμα ἔχει ὁλική μηχανική ἐνέργεια:

$$E_{o\lambda} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0{}^2$$

῞Οταν τό βλῆμα φτάνει στό σημεῖο Δ, ὅλη ἡ ἀρχική ἐνέργεια τοῦ βλήματος ἔχει μεταβληθεῖ σέ κινητική ἐνέργεια καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\frac{1}{2}\, m \cdot V^2 = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\, m \cdot \upsilon_0^{\,2} \quad \text{ἄρα} \qquad V = \sqrt{\upsilon_0^{\,2} + 2gh}$$

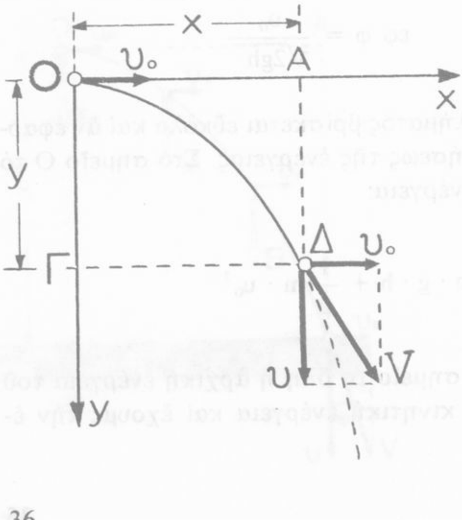
Ὅταν ἕνα ἀεροπλάνο ἀφήνει μιά βόμβα νά πέσει, τότε συμβαίνει ὁριζόντια βολή, γιατί τή στιγμή πού ἀφήνεται ἐλεύθερη ἡ βόμβα, αὐτή ἔχει ὁριζόντια ταχύτητα υ_0 ἴση μέ τήν ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου. Γι' αὐτό ἡ βόμβα ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει πρίν φτάσει τό ἀεροπλάνο πάνω ἀπό τό στόχο.

Προσδιορισμός τῆς τροχιᾶς. Θεωροῦμε τούς δύο ὀρθογώνιους ἄξονες Ox καί Oy (σχ. 20). Στή χρονική στιγμή t τό βλῆμα βρίσκεται στό σημεῖο Δ πού ὁρίζεται ἀπό τά διαστήματα ΟΑ = x καί ΟΓ = y πού εἶναι:

$$x = \upsilon_0 \cdot t \qquad \text{καί} \qquad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Ἐπειδή εἶναι $t = \dfrac{x}{\upsilon_0}$ ἔχουμε $y = \dfrac{g}{2\upsilon_0^{\,2}} \cdot x^2$

Ἡ ἐξίσωση πού βρήκαμε, παριστάνει μιά *παραβολή* πού ἔχει ἄξονα τόν Oy.



Σχ. 20. Ἡ τροχιά ΟΔ εἶναι τόξο παραβολῆς.

Παράδειγμα. Ἕνα ἀεροπλάνο κινεῖται μέ σταθερή ὁριζόντια ταχύτητα υ σέ ὕψος h = 2000 m καί σέ κάποια στιγμή ἀφήνει ἐλεύθερη νά πέσει μιά βόμβα. Αὐτή φτάνει σέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐδάφους πού ἀπέχει s = 5000 m ἀπό τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό σημεῖο στό ὁποῖο ἦταν τό ἀεροπλάνο τή στιγμή πού ἄφησε τή βόμβα ἐλεύθερη. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ ἀεροπλάνου; $g = 10\ m/sec^2$.

Ἡ βόμβα κινεῖται ἐπί χρόνο:

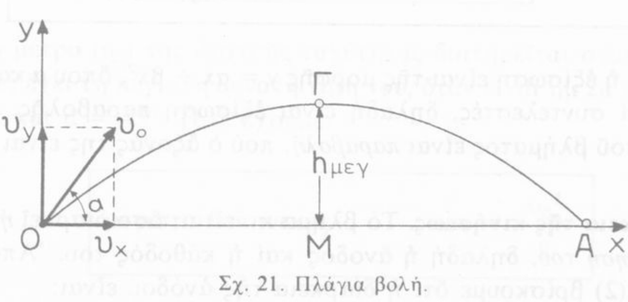
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2000\ m}{10\ m/sec^2}} = 20\ sec$$

Ὥστε εἶναι:
$$\upsilon = \frac{s}{t} = \frac{5000\ m}{20\ sec} = 250\ m/sec$$

13. Πλάγια βολή

Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ἐκτοξεύεται ἕνα βλῆμα (ὑλικό σημεῖο) μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0, πού ἡ διεύθυνσή της σχηματίζει γωνία α μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 21). Τό βλῆμα ἔχει βάρος B = mg. Ἀναλύουμε τήν ταχύτητα υ_0 σέ δύο συνιστῶσες, *τήν ὁριζόντια συνιστῶσα* υ_x καί *τήν κατακόρυφη συνιστῶσα* υ_y, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\ \alpha \qquad \text{καί} \qquad \upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \text{ημ}\ \alpha$$



Σχ. 21. Πλάγια βολή.

Ὥστε τό βλῆμα ἐκτελεῖ ταυτόχρονα *δύο εὐθύγραμμες κινήσεις*, μιά *ὁριζόντια ὁμαλή* κίνηση μέ ταχύτητα υ_x καί μιά *κατακόρυφη ὁμαλά ἐπιβραδυνόμενη* κίνηση μέ ἀρχική ταχύτητα υ_y (δηλαδή κατακόρυφη βολή πρός τά πάνω). Τό βλῆμα ξεκινάει στή χρονική στιγμή $t = 0$ καί στή χρονική στιγμή t ἔχει:

$$\text{ὁριζόντια ταχύτητα} \qquad \upsilon_x = \upsilon_0 \cdot \text{συν}\, \alpha \qquad (1)$$

$$\text{κατακόρυφη ταχύτητα} \qquad \upsilon_y = \upsilon_0 \cdot \text{ημ}\, \alpha - gt \qquad (2)$$

Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό βλῆμα ἔχει διανύσει κατά τίς διευθύνσεις Ox καί Oy τά διαστήματα:

$$\text{ὁριζόντια} \qquad x = \upsilon_x \cdot t \qquad \text{ἤ} \qquad x = \upsilon_0 t \cdot \text{συν}\, \alpha \qquad (3)$$

$$\text{κατακόρυφα} \qquad y = \upsilon_y t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{ἤ} \qquad y = \upsilon_0 t \cdot \text{ημ}\, \alpha - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) προσδιορίζουν *τήν ταχύτητα* τοῦ βλήματος σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο καί οἱ ἐξισώσεις (3) καί (4) προσδιορίζουν σέ κάθε χρονική στιγμή *τή θέση* τοῦ βλήματος πάνω στό κατακόρυφο ἐπίπεδο xOy στό ὁποῖο κινεῖται τό βλῆμα.

Σχῆμα τῆς τροχιᾶς. Ἄν στήν ἐξίσωση (4) ἀντικαταστήσουμε τήν τιμή τοῦ t ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε:

$$\boxed{\text{ἐξίσωση τῆς τροχιᾶς} \quad y = x \cdot \text{εφ}\, \alpha - \frac{g}{2\upsilon_0^2 \cdot \text{συν}^2 \alpha} \cdot x^2} \qquad (5)$$

Αὐτή ἡ ἐξίσωση εἶναι τῆς μορφῆς $y = \alpha x + \beta x^2$, ὅπου α καί β εἶναι σταθεροί συντελεστές, δηλαδή εἶναι ἐξίσωση παραβολῆς. Ὥστε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *παραβολή*, πού ὁ ἄξονάς της εἶναι κατακόρυφος.

Διάρκεια τῆς κινήσεως. Τό βλῆμα κινεῖται, ὅσο διαρκεῖ *ἡ κατακόρυφη κίνησή του*, δηλαδή ἡ ἄνοδος καί ἡ κάθοδός του. Ἀπό τήν ἐξίσωση (2) βρίσκουμε ὅτι ἡ διάρκεια τῆς ἀνόδου εἶναι:

$$\text{διάρκεια ἀνόδου} \quad t_{ανοδ} = \frac{\upsilon_0 \cdot ημ\,α}{g}$$

Τόση εἶναι καί ἡ διάρκεια τῆς καθόδου (§11) καί ἑπομένως *ἡ ὁλική διάρκεια* ($t_{ολ}$) τῆς κινήσεως εἶναι:

$$\boxed{\text{ὁλική διάρκεια κινήσεως} \qquad t_{ολ} = \frac{2\upsilon_0 \cdot ημ\,α}{g}}$$

Μέγιστο ὕψος. Ἄν στήν ἐξίσωση (4) ἀντικαταστήσουμε τό t μέ τήν τιμή τοῦ $t_{ανοδ}$, βρίσκουμε ὅτι τό βλῆμα φτάνει σέ μέγιστο ὕψος:

$$\boxed{\text{μέγιστο ὕψος} \qquad h_{μεγ} = \frac{\upsilon_0{}^2}{2g} \cdot ημ^2α}$$

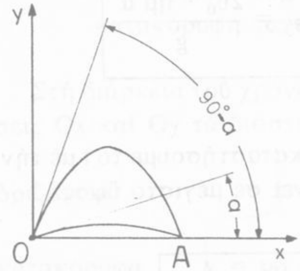
Βεληνεκές. Ἡ ὁριζόντια κίνηση τοῦ βλήματος διαρκεῖ, ὅσο καί ἡ κατακόρυφη κίνησή του (ἄνοδος καί κάθοδος). Ἄν στήν ἐξίσωση (3) ἀντικαταστήσουμε τό t μέ τήν τιμή τοῦ $t_{ολ}$ βρίσκουμε ὅτι *τό βεληνεκές* (s) εἶναι:

$$\boxed{\text{βεληνεκές} \qquad s = \frac{\upsilon_0{}^2}{g} \cdot ημ\,2α} \qquad (6)$$

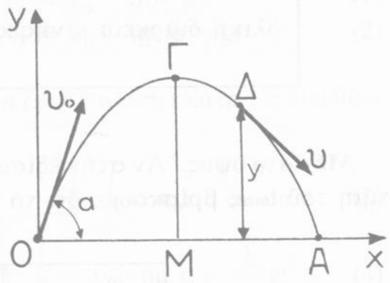
Ἄν τό μέτρο (υ_0) τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό, τό βεληνεκές ἔχει τή μέγιστη δυνατή τιμή του, ὅταν εἶναι ημ 2α = 1, ἄρα 2α = 90° καί α = 45°. Τότε ἔχουμε:

$$\boxed{\text{μέγιστο βεληνεκές} \qquad s_{μεγ} = \frac{\upsilon_0{}^2}{g}}$$

'Από τήν ἐξίσωση (6) φαίνεται ὅτι σέ δύο συμπληρωματικές γωνίες (α καί $90^{\circ} - \alpha$) ἀντιστοιχεῖ *τό ἴδιο βεληνεκές* (s), γιατί τότε ἡ τιμή τοῦ ημ 2α ἀντιστοιχεῖ σέ δύο παραπληρωματικές γωνίες (σχ. 22). Ἡ βολή, πού ἀντιστοιχεῖ στή μικρότερη γωνία, ὀνομάζεται *εὐθύφορη*, ἐνῶ ἐκείνη, πού ἀντιστοιχεῖ στή μεγαλύτερη γωνία, ὀνομάζεται *ἐπισκηπτική*.



Σχ. 22. Δύο γωνίες βολῆς μέ τό ἴδιο βεληνεκές.



Σχ. 23. Ἡ ταχύτητα τοῦ βλήματος σέ ἕνα σημεῖο τῆς τροχιᾶς του.

Ταχύτητα τοῦ βλήματος σέ ὁρισμένο ὕψος. Σέ μιά χρονική στιγμή t τό βλῆμα βρίσκεται στό σημεῖο Δ τῆς τροχιᾶς του, δηλαδή σέ ὕψος y πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο Ox (σχ. 23). Ἐκείνη τή στιγμή ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ βλήματος ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Δ, εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon}_x$ καί $\vec{\upsilon}_y$ $(\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y)$ καί τό μέτρο της (υ) δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \quad \text{ἤ} \quad \upsilon^2 = (\upsilon_0 \cdot \text{συν}\ \alpha)^2 + (\upsilon_0 \cdot \text{ημ}\ \alpha - gt)^2$$

καί $$\upsilon^2 = \upsilon_0^2 - 2g\ (\upsilon_0 t \cdot \text{ημ}\ \alpha - \frac{1}{2}\ gt)^2$$

'Από τήν τελευταία ἐξίσωση καί τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

ταχύτητα στό ὕψος y	$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}$

α. Ἄλλος τρόπος μελέτης τῆς πλάγιας βολῆς. Τό βλῆμα κινεῖται πάνω στό κατακόρυφο ἐπίπεδο xOy (σχ. 23). Ἡ ἐξίσωση (5) τῆς τροχιᾶς τοῦ βλήματος γράφεται καί ἔτσι:

$$y = x\left(\varepsilon\varphi\,\alpha - \frac{g}{2\upsilon_0^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\cdot x\right) \qquad (7)$$

Ὅταν τό βλῆμα βρίσκεται στό ἔδαφος (σημεῖα O καί A), εἶναι $y = 0$ καί τότε σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (7) εἶναι:

$$x = 0 \quad \text{ἤ} \quad \varepsilon\varphi\,\alpha - \frac{g}{2\upsilon_0^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\cdot x = 0 \qquad (8)$$

Ὅταν εἶναι $x = 0$ καί $y = 0$, τό βλῆμα βρίσκεται στήν ἀρχή O τῶν ἀξόνων. Ἄρα ἡ δεύτερη τιμή τοῦ x, πού βρίσκουμε ἀπό τήν ἐξίσωση (8) ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο A τοῦ ἐδάφους καί φανερώνει τό βεληνεκές $OA = s$ πού εἶναι ἴσο μέ:

$$x = \frac{2\upsilon_0^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\varepsilon\varphi\,\alpha}{g} \quad \text{ἄρα} \quad s = \frac{\upsilon_0^2}{g}\cdot\eta\mu\,2\alpha$$

Στήν κορυφή Γ τῆς παραβολῆς, δηλαδή στό μέγιστο ὕψος ($h_{\mu\varepsilon\gamma}$), τό βλῆμα ἔχει μόνο ὁριζόντια ταχύτητα $\upsilon_x = \upsilon_0\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha$. Σύμφωνα μέ τήν ἀρχή διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια τοῦ βλήματος στό σημεῖο Γ εἶναι ἴση μέ τήν ἀρχική κινητική ἐνέργειά του καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$mg\cdot h_{\mu\varepsilon\gamma} + \frac{1}{2}m\cdot(\upsilon_0\cdot\sigma\upsilon\nu\,\alpha)^2 = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon_0^2$$

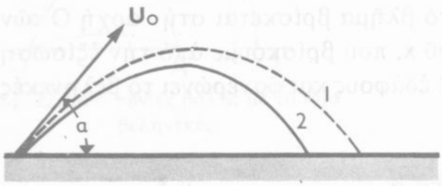
$$\text{ἄρα} \qquad h_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\,(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)$$

$$\text{καί} \qquad h_{\mu\varepsilon\gamma} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}\cdot\eta\mu^2\alpha$$

Στό σημεῖο Δ τῆς τροχιᾶς, πού βρίσκεται σέ ὕψος h, τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας τοῦ βλήματος βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$mg \cdot y + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_0{}^2 \qquad \text{ἄρα} \qquad \upsilon = \sqrt{\upsilon_0{}^2 - 2gy}$$

β. Τροχιά τοῦ βλήματος στόν ἀέρα. Ὅταν τό βλῆμα κινεῖται μέσα στόν ἀέρα, τότε στό βλῆμα ἐνεργοῦν *δύο ἐξωτερικές δυνάμεις*, τό βάρος του $\vec{B}$ καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα $\vec{F}_{αντ}$, πού ἐπηρεάζει τήν κίνηση τοῦ βλήματος. Μέσα στόν ἀέρα τό βλῆμα διαγράφει μιά ἀσύμμετρη καμπύλη τροχιά, πού ὀνομάζεται *βλητική τροχιά* (σχ. 24).



Σχ. 24. Τροχιά τοῦ βλήματος χωρίς ἀντίσταση τοῦ ἀέρα (1) καί μέ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα (2).

Τό μέγιστο ὕψος καί τό βεληνεκές εἶναι μικρότερα ἀπό ἐκεῖνα πού ἀντιστοιχοῦν στήν ἰδανική παραβολική τροχιά. Ἐκτός ὅμως ἀπό τήν ἀντίσταση τοῦ ἀέρα ἐπιδροῦν στό βλῆμα καί ἄλλα αἴτια (π.χ. ἡ περιστροφική κίνηση τῆς Γῆς), πού ἐπηρεάζουν τή διαμόρφωση τῆς βλητικῆς τροχιᾶς.

να μειώσει το ύψος

Προβλήματα

20. Ἕνα βλῆμα ἐκτοξεύεται κατακόρυφα πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $\upsilon_0 = 80$ m/sec. Νά βρεθεῖ πόσο διαρκεῖ ἡ ἄνοδος τοῦ βλήματος, σέ πόσο μέγιστο ὕψος θά φτάσει καί πόση ταχύτητα υ ἔχει στή χρονική στιγμή t = 12 sec. g = 10 m/sec².

21. Ἕνα παιδί ρίχνει κατακόρυφα πρός τά πάνω σφαῖρες μέ τήν ἴδια ἀρχική ταχύτητα $υ_0$. Κάθε σφαίρα τή ρίχνει, ὅταν ἡ ἀμέσως προηγούμενη φτάσει στό μέγιστο ὕψος. Σέ πόσο ὕψος φτάνουν οἱ σφαῖρες, ἄν ρίχνονται δύο σφαῖρες κατά δευτερόλεπτο; $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

22. Μέ πόση ἀρχική ταχύτητα πρέπει νά ρίξουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω ἕνα σῶμα, ὥστε αὐτό νά ξαναγυρίσει στό ἔδαφος ἔπειτα ἀπό χρόνο $t = 20$ sec; Σέ πόσο ὕψος θά φτάσει τό σῶμα; $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

23. Ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τοῦ ἐδάφους καί μέ τήν ἴδια ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ ἐκτοξεύουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω δύο βλήματα. Στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἐκτοξεύουμε τό πρῶτο βλῆμα Α. Ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο t πρέπει νά ἐκτοξεύσουμε τό δεύτερο βλῆμα Β, ὥστε τά δύο βλήματα νά συναντηθοῦν στό μέσο τοῦ μέγιστου ὕψους στό ὁποῖο ἔφτασε τό βλῆμα Α;

24. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐδάφους στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἐκτοξεύουμε κατακόρυφα πρός τά πάνω ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_1 = 100$ m/sec. Τήν ἴδια χρονική στιγμή ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς κατακορύφου πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Ο ἐκτοξεύουμε ἕνα ἄλλο βλῆμα Β μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_2 = 60$ m/sec. Ἡ ἀπόσταση ΟΜ εἶναι ἴση μέ $α = 120$ m. Ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο t θά συναντηθοῦν τά δύο βλήματα καί σέ πόσο ὕψος; $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

25. Ἕνα ἀεροπλάνο πετάει ὁριζόντια σέ ὕψος $h = 1125$ m μέ σταθερή ταχύτητα 360 km/h καί ἀφήνει ἐλεύθερη νά πέσει μιά βόμβα πάνω σέ ἕνα στόχο Δ πού βρίσκεται στό ἔδαφος. Ἐκείνη τή στιγμή τό ἀεροπλάνο βρίσκεται πάνω σέ μιά κατακόρυφο ΑΓ. Νά βρεθεῖ ἡ ὀξεία γωνία ΓΑΔ. $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

26. Στό ἔδαφος ὑπάρχει ἕνας στόχος Σ, πού βρίσκεται πάνω στήν κατακόρυφο ΚΣ. Ἕνα ἀεροπλάνο πού κινεῖται μέ ταχύτητα $υ = 360$ km/h ὁρμάει πρός τό στόχο ἔτσι, ὥστε ἡ τροχιά του νά σχηματίζει γωνία $α = 9^\circ$ μέ τήν κατακόρυφο ΚΣ. Ἀπό ποιό ὕψος πρέπει νά ἀφήσει ἐλεύθερη τή βόμβα, ὥστε νά πέσει σέ ἀπόσταση ἀπό τό σημεῖο Σ μικρότερη ἀπό 156 m; $g = 10 \text{ m/sec}^2$.

27. Πόση πρέπει νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ταχύτητα $υ_0$ ἑνός βλήματος, πού τό βεληνεκές του θέλουμε νά εἶναι s μέτρα;
Ἐφαρμογή: $s = 9000$ m.$g = 10$ m/sec^2.

28. Νά βρεθεῖ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία βολῆς α, ὥστε τό βεληνεκές s νά εἶναι ν φορές μεγαλύτερο ἀπό τό μέγιστο ὕψος h πού φτάνει τό βλῆμα. Ἐφαρμογή: $ν = 6$.

29. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α πού βρίσκεται σέ ὕψος $h_1 = 50$ m πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο τοῦ ἐδάφους ἐκτοξεύουμε βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 60$ m/sec καί μέ γωνία βολῆς $α = 30^{\circ}$. Τό βλῆμα φτάνει σέ ἕνα σημεῖο Γ τοῦ ἐδάφους. Νά βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Γ ἀπό τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α καί ἡ ταχύτητα πού ἔχει τό βλῆμα, ὅταν φτάνει στό ἔδαφος. $g = 10$ m/sec^2.

30. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ρίχνουμε ἕνα σῶμα πλάγια πρός τά πάνω μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0 = 50$ m/sec. Νά βρεθεῖ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία βολῆς, ὥστε τό βεληνεκές νά εἶναι ἴσο μέ $s = 125$ m · $g = 10$ m/sec^2.

31. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ἐκτοξεύεται βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$. Νά βρεθεῖ πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία βολῆς φ, γιά νά φτάσει τό βλῆμα σέ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Μ τοῦ κατακόρυφου ἐπιπέδου xOy, ὅταν οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ εἶναι $x = α$ καί $y = β$. Θά λάβουμε εφ $φ = z$.

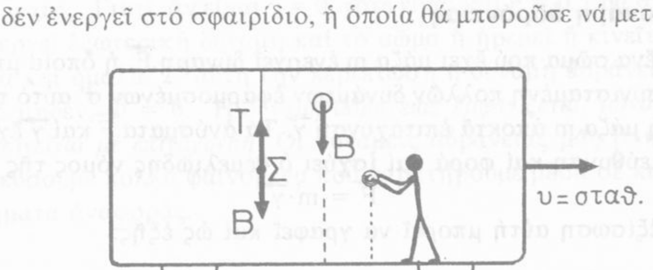
32. Στό σημεῖο Ο τοῦ ὁριζόντιου ἐδάφους ὑπάρχει ἕνα ἀντιαεροπορικό πυροβόλο. Στή χρονική στιγμή $t = 0$ ἕνα ἀεροπλάνο, κινούμενο μέ σταθερή ταχύτητα υ καί σέ σταθερό ὕψος h, βρίσκεται πάνω στήν κατακόρυφο Oy. Τήν ἴδια χρονική στιγμή $t = 0$ τό πυροβόλο ρίχνει ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ πού ἡ διεύθυνσή του σχηματίζει γωνία α μέ τήν κατακόρυφο Oy. Νά βρεθεῖ: α) πόση πρέπει νά εἶναι ἡ γωνία α, γιά νά συναντήσει τό βλῆμα τό ἀεροπλάνο, καί β) ποιές χρονικές στιγμές θά γίνει αὐτή ἡ συνάντηση.

14. Κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς

Ὅταν ἐξετάζουμε τά φαινόμενα τῆς κινήσεως, θεωροῦμε ὅτι ὁ παρατηρητής εἶναι *ἀκίνητος*, δηλαδή συνδέεται μέ τό *ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς*. Συνήθως ὡς ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς παίρνουμε τή Γῆ πού τή θεωροῦμε ἀκίνητη. Σέ πολλές ὅμως περιπτώσεις ὁ παρατηρητής βρίσκεται μέσα σέ *κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς* καί ὁ ἴδιος μετέχει στήν κίνηση, π.χ. ὅταν βρίσκεται μέσα σέ ὀχήματα, σέ ἀνελκυστῆρες κ.ἄ. Ὅλη τή ζωή μας τή ζοῦμε μέσα σέ ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς πού περιστρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα (περιστροφή τῆς Γῆς). Θά ἐξετάσουμε ποιά ἐπίδραση ἔχει στά φαινόμενα πού παρατηροῦμε ἡ *μεταφορική κίνηση τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς*.

15. Σύστημα ἀναφορᾶς μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα ὄχημα, πού κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά (υ = σταθ.) πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 25), ἔχει ἀδιαφανή τοιχώματα, ὥστε οἱ παρατηρητές, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, δέν μποροῦν νά ἀναφερθοῦν στά σώματα πού βρίσκονται ἔξω ἀπό τό ὄχημα. Ἕνα νῆμα τῆς στάθμης, πού βρίσκεται μέσα στό ὄχημα, εἶναι κατακόρυφο, γιατί στό σφαιρίδιό του ἐνεργοῦν δύο ἀντίθετες ἐξωτερικές δυνάμεις, τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ σφαιριδίου καί ἡ τάση $\vec{T}$ τοῦ νήματος. Τό σφαιρίδιο κινεῖται μέ τήν ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ πού ἔχει τό ὄχημα καί καμιά ἐξωτερική δύναμη δέν ἐνεργεῖ στό σφαιρίδιο, ἡ ὁποία θά μποροῦσε νά μεταβάλει



Σχ. 25. Σύστημα ἀναφορᾶς μέ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση.

τήν ταχύτητά του. Ἄν οἱ παρατηρητές, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, ἐξετάσουν πειραματικά τήν ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων, θά βροῦν ὅτι ἡ ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων μέσα στό κινούμενο ὄχημα ἀκολουθεῖ *ἀκριβῶς τούς ἴδιους νόμους*, πού ἰσχύουν γιά τήν ἐλεύθερη πτώση τῶν σωμάτων μέσα στό ἀκίνητο ἐργαστήριό μας. Ὥστε οἱ νόμοι τῆς ἐλεύθερης πτώσεως τῶν σωμάτων *ἰσχύουν ἀμετάβλητοι* γιά τό *ἀκίνητο* ἐργαστήριό μας καί γιά τό ὄχημα πού *κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά* σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, ἄν μέσα στό ὁμαλά κινούμενο ὄχημα ἐξετάσουμε πειραματικά ὁποιοδήποτε *μηχανικό φαινόμενο*. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι παρατηρητές πού βρίσκονται μέσα σέ θάλαμο, χωρίς καμιά ἐπικοινωνία μέ τό ἐξωτερικό περιβάλλον, μέ κανένα *μηχανικό πείραμα* δέν μποροῦν νά ἀποδείξουν ὅτι ὁ θαλαμός τους *ἠρεμεῖ* ἤ ὅτι *κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά* σχετικά μέ ἄλλο ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς.

Ὁ Einstein ἀπέδειξε ὅτι γιά ὅλα γενικά τά φυσικά φαινόμενα ἰσχύει ἡ ἑξῆς *γενική ἀρχή:*

Οἱ νόμοι τῆς Φυσικῆς, πού ἰσχύουν σέ ἕνα ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς Α, ἰσχύουν ἀμετάβλητοι καί σέ κάθε ἄλλο σύστημα ἀναφορᾶς Β, πού κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά ὡς πρός τό σύστημα Α.

Αὐτό τό γενικό συμπέρασμα εἶναι βασική ἀρχή *τῆς εἰδικῆς θεωρίας τῆς σχετικότητας*.

16. Δύναμη ἀδράνειας

Σέ ἕνα σῶμα πού ἔχει μάζα m ἐνεργεῖ δύναμη $\vec{F}$, ἡ ὁποία μπορεῖ νά εἶναι συνισταμένη πολλῶν δυνάμεων ἐφαρμοσμένων σ' αὐτό τό σῶμα. Τότε ἡ μάζα m ἀποκτᾶ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Τά ἀνύσματα $\vec{F}$ καί $\vec{\gamma}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά καί ἰσχύει ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Δυναμικῆς:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή μπορεῖ νά γραφεῖ καί ὡς ἑξῆς:

$$\vec{F} - (m \cdot \vec{\gamma}) = 0 \qquad \text{ἤ καί} \qquad \vec{F} + (-m \cdot \vec{\gamma}) = 0 \qquad (1)$$

Ἡ μορφή τῆς ἐξισώσεως (1) θυμίζει τή *συνθήκη ἰσορροπίας δύο δυ-*

νάμεων, ἀρκεῖ νά δεχτοῦμε ὅτι ἡ παράσταση $(-m \cdot \vec{\gamma})$ φανερώνει μιά δύναμη $\vec{\Phi}$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *δύναμη ἀδράνειας.* Ὥστε:

Δύναμη ἀδράνειας ($\vec{\Phi}$) ὀνομάζεται ἡ δύναμη, τήν ὁποία παριστάνει τό ἄνυσμα $-m \cdot \vec{\gamma}$. Ἡ δύναμη ἀδράνειας ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐπιταχύνσεως ($\vec{\gamma}$), ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τοῦ ἀνύσματος τῆς ἐπιταχύνσεως καί μέτρο ἴσο μέ τό γινόμενο τῆς μάζας (m) ἐπί τήν ἐπιτάχυνση (γ).

δύναμη ἀδράνειας	$\vec{\Phi} = -m \cdot \vec{\gamma}$

Ὅταν λοιπόν ἕνα σῶμα ἔχει μάζα m καί μέ τήν ἐπίδραση ἐξωτερικῆς δυνάμεως $\vec{F}$ κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τότε ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη *ἀρχή τοῦ d'Alembert:*

Ἡ ἐξωτερική δύναμη $\vec{F}$ πού ἐνεργεῖ σέ ἕνα σῶμα καί ἡ δύναμη ἀδράνειας $-m \cdot \vec{\gamma}$ ἀποτελοῦν σέ κάθε στιγμή σύστημα δυνάμεων, πού ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν.

ἀρχή τοῦ d'Alembert:	$\vec{F} - m \cdot \vec{\gamma} = 0$	(2)

Ἡ ἐξίσωση (2) περιλαμβάνει ὅλες *τίς δυνατές κινητικές καταστάσεις ἑνός σώματος.* Γιατί, ἄν εἶναι $\vec{\gamma} = 0$, τότε εἶναι καί $\vec{F} = 0$, ἄρα στό σῶμα δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική δύναμη καί τό σῶμα ἤ ἠρεμεῖ ἤ κινεῖται εὐθύγραμμα καί ὁμαλά. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ δύναμη ἀδράνειας εἶναι ἴση μέ μηδέν, $\vec{\Phi} = 0$. Ἡ *δύναμη ἀδράνειας ἐμφανίζεται, μόνο ὅταν τό σῶμα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση.* Οἱ δυνάμεις ἀδράνειας μᾶς βοηθοῦν νά ἑρμηνεύσουμε πολλά φαινόμενα πού παρατηροῦμε μέσα σέ κινούμενα συστήματα ἀναφορᾶς.

Ἡ ἐμφάνιση δυνάμεων ἀδράνειας. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως ἀδράνειας μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἡ δύναμη ἀδράνειας εἶναι μιά ἔν-

7/1C

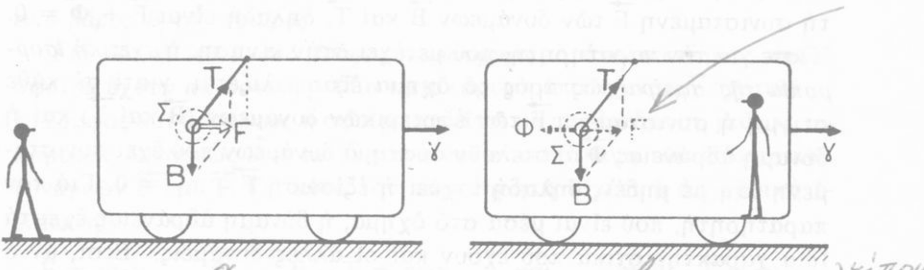
Σχ. 26. Γιά τόν ἐπιβάτη ἐμφανίζεται ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$.

νοια χωρίς φυσική ὑπόσταση. Μερικές ὅμως ἁπλές παρατηρήσεις μποροῦν νά μᾶς δείξουν τήν ἐμφάνιση τῶν δυνάμεων ἀδράνειας. Ξέρουμε ὅτι μέ τόν ὅρο *δύναμη* ἐννοοῦμε ἕνα φυσικό μέγεθος, πού τό ἀντιλαμβανόμαστε, καθορίζεται καί μετριέται *μόνο ἀπό τά ἀποτελέσματα* πού ἐπιφέρει. Οἱ δυνάμεις ἀδράνειας ἐπιφέρουν τά ἴδια ἀποτελέσματα πού ἐπιφέρουν καί οἱ ἄλλες δυνάμεις. Ἔτσι, ὅταν τό αὐτοκίνητο ξεκινάει ἀπότομα, ὁ ἐπιβάτης, πού κάθεται μέσα στό αὐτοκίνητο, ἐξασκεῖ στό πίσω μέρος τοῦ καθίσματός του μιά δύναμη $-m\vec{\gamma}$, ἡ ὁποία προκαλεῖ ἐλαστική παραμόρφωση τῶν ἐλατηρίων τοῦ καθίσματος (σχ. 26). Αὐτή ἡ ἐλαστική παραμόρφωση εἶναι ἴδια μέ τήν παραμόρφωση πού προκαλεῖ στά ἐλατήρια τοῦ καθίσματος καί μιά συνηθισμένη δύναμη, πού ἔχει φορά πρός τά πίσω. Αὐτό τό παράδειγμα δείχνει ὅτι ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi} = -m\vec{\gamma}$ ἐμφανίζεται ὡς μιά *ἀντίδραση* τῆς μάζας m τοῦ ἐπιβάτη στό νά ἀποκτήσει ἐπιτάχυνση, δηλαδή ὡς ἀντίδραση τῆς μάζας m στό νά μεταβληθεῖ ἡ ταχύτητά της. Ὥστε μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι *οἱ ἐκδηλώσεις τῆς ἀδράνειας μιᾶς μάζας m ἰσοδυναμοῦν μέ ἀποτελέσματα δυνάμεων,* τίς ὁποῖες γι' αὐτό τίς ὀνομάζουμε *δυνάμεις ἀδράνειας.* Ἐπειδή ἐκδηλώσεις τῆς ἀδράνειας ἔχουμε, μόνο ὅταν ὑπάρχει ἐπιτάχυνση (δηλαδή μεταβολή τῆς ταχύτητας), γι' αὐτό καί οἱ *δυνάμεις ἀδράνειας ἐμφανίζονται, μόνο ὅταν μιά μάζα κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση.*

17. Σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενο εὐθύγραμμα μέ ἐπιτάχυνση

Ξέρουμε ὅτι ἡ *ἠρεμία* ἤ ἡ *κίνηση* ἑνός σώματος εἶναι *σχετική* καί συνδέεται πάντοτε μέ ὁρισμένο σύστημα ἀναφορᾶς, πού *αὐθαίρετα τό θεωροῦμε ἀκίνητο.* Θά ἐξετάσουμε δύο συνηθισμένες περιπτώσεις συστημάτων ἀναφορᾶς, πού κινοῦνται *εὐθύγραμμα μέ σταθερή ἐπιτάχυνση* (γ = σταθ.).

α) Ὄχημα κινούμενο εὐθύγραμμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο.
Ἕνα ὄχημα κινεῖται εὐθύγραμμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ *σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$ (σχ. 27). Ἕνας *ἀκίνητος* παρατηρητής στέκεται στό ἔδαφος (ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς) καί μπορεῖ νά παρατηρεῖ ὅ,τι συμβαίνει μέσα στό ὄχημα. Ἕνας ἄλλος παρατηρητής εἶναι ἀκίνητος μέσα στό ὄχημα, δηλαδή *μετέχει* στήν κίνηση τοῦ ὀχήματος, πού αὐτός ὁ παρατηρητής τό παίρνει ὡς σύστημα ἀναφορᾶς (κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς).



Σχ. 27. Σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενο εὐθύγραμμα μέ σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση.

Ἀπό τήν ὀροφή τοῦ ὀχήματος εἶναι κρεμασμένη μέ νῆμα μιά μεταλλική σφαίρα Σ, πού ἔχει μάζα m καί βάρος $B = mg$. Γιά τόν *ἀκίνητο* στό ἔδαφος παρατηρητή τό ὄχημα καί ἡ σφαίρα ἔχουν πάντοτε τήν ἴδια ἐπιτάχυνση ὡς πρός τό ἔδαφος. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό πείραμα δείχνει ὅτι τό νῆμα σχηματίζει μιά *σταθερή γωνία* θ μέ τήν κατακόρυφο (σχ. 27α). Γιά τόν *ἀκίνητο παρατηρητή* στή σφαίρα ἐνεργοῦν μόνο δύο ἐξωτερικές δυνάμεις, τό *βάρος* $\vec{B}$ τῆς σφαίρας καί ἡ *τάση* $\vec{T}$ τοῦ νήματος. Γιά νά κινεῖται ὅμως ἡ σφαίρα μέ σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, πρέπει νά ἐνεργεῖ στή σφαίρα μιά σταθερή ὁριζόντια δύναμη $\vec{F}$, πού ἔχει τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως. Αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$ καί γι' αὐτό τό νῆμα ἐκτρέπεται ἀπό τήν κατακόρυφο καί σχηματίζει μέ αὐτή γωνία θ, ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐπιτάχυνση. Ὥστε γιά τόν ἀκίνητο παρατηρητή ἡ *σφαίρα κινεῖται* σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση:

$\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ καί ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι $\vec{F} = \vec{B} + \vec{T}$

Ὁ παρατηρητής πού μετέχει στήν κίνηση τοῦ ὀχήματος παρατηρεῖ ὅτι ἡ *σφαίρα ἰσορροπεῖ* σέ ὁρισμένη θέση ὡς πρός τό ὄχημα καί ὅτι τό νῆμα σχηματίζει *σταθερή γωνία* θ μέ τήν κατακόρυφο (σχ. 27β). Αὐτός ὁ παρατηρητής, γιά νά ἑρμηνεύσει τή *σχετική ἰσορροπία τῆς σφαίρας* ὡς πρός τό ὄχημα, πρέπει νά δεχτεῖ ὅτι στή σφαίρα ἐνεργοῦν οἱ ἑξῆς τρεῖς δυνάμεις: τό *βάρος* $\vec{B}$ τῆς σφαίρας, ἡ *τάση* $\vec{T}$ τοῦ νήματος καί ἡ *δύναμη ἀδράνειας* $\vec{\Phi}$. Αὐτές οἱ τρεῖς δυνάμεις ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, ἄρα ἡ καθεμιά εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη τῶν δύο ἄλλων δυνάμεων καί ἑπομένως ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$, δηλαδή εἶναι $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$. Ὥστε γιά τόν παρατηρητή, πού μετέχει στήν κίνηση, ἡ *σχετική ἰσορροπία τῆς σφαίρας* ὡς πρός τό ὄχημα ἐξασφαλίζεται, γιατί σέ κάθε στιγμή ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ($\vec{B}$ καί $\vec{T}$) καί ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ἀποτελοῦν σύστημα δυνάμεων πού ἔχει συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{F} - m\vec{\gamma} = 0$. Γιά τόν παρατηρητή, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, ἡ δύναμη ἀδράνειας ἔχει τά ἴδια χαρακτηριστικά πού ἔχουν καί οἱ ἄλλες δυνάμεις. Ἔτσι, ἄν ὁ παρατηρητής αὐτός ἀφήσει νά πέσει ἐλεύθερα ἕνα σῶμα, αὐτό δέν πέφτει κατακόρυφα, ἀλλά διαγράφει μιά ἄλλη τροχιά. Ἄν τό ὄχημα ἠρεμεῖ, ἤ κινεῖται ὁμαλά ($\vec{\gamma} = 0$), τότε ἡ δύναμη ἀδράνειας εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{\Phi} = 0$) καί τό νῆμα εἶναι κατακόρυφο.

Συμπέρασμα. Καί οἱ δύο παρατηρητές διαπιστώνουν ὅτι κατά τήν κίνηση τοῦ ὀχήματος μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ τό νῆμα ἐκτρέπεται ἀπό τήν κατακόρυφο, σχηματίζει μέ αὐτή μιά σταθερή γωνία θ καί ἡ *σφαίρα ἰσορροπεῖ* σέ ὁρισμένη θέση ὡς πρός τό ὄχημα. Αὐτό τό φαινόμενο ὁ ἀκίνητος στό ἔδαφος παρατηρητής τό ἑρμηνεύει σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς *Δυναμικῆς*, ἐνῶ ὁ παρατηρητής πού μετέχει στήν κίνηση τό ἑρμηνεύει σύμφωνα μέ τό νόμο τῆς *Στατικῆς* γιά τήν ἰσορροπία τριῶν δυνάμεων, παραδεχόμενος ὅτι ἡ τρίτη δύναμη εἶναι ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$. Καί οἱ δύο τρόποι ἑρμηνείας εἶναι σύμφωνοι μέ τούς νόμους τῆς Μηχανικῆς.

β) Ἀνελκυστήρας κινούμενος μέ σταθερή ἐπιτάχυνση. Στήν ὀροφή ἑνός ἀνελκυστήρα, πού κινεῖται κατακόρυφα, εἶναι στερεωμένο δυναμόμετρο, ἀπό τό ὁποῖο κρέμεται μιά σφαίρα πού ἔχει βάρος

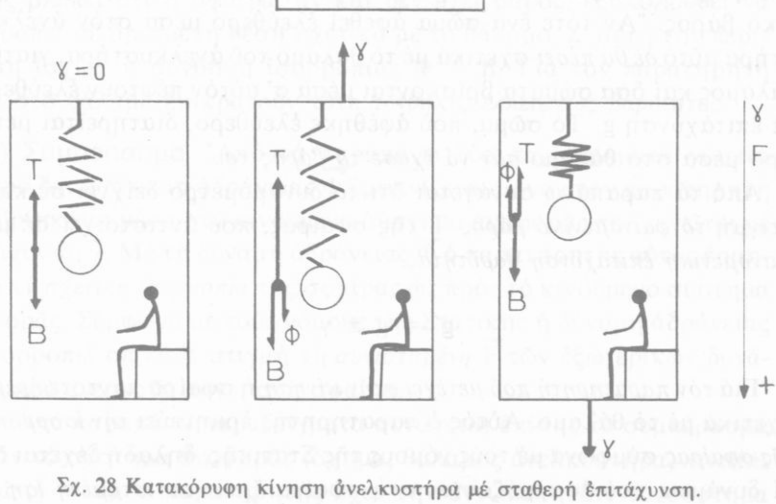
B = mg (σχ.28). Ὡς θετική φορά τῶν κατακόρυφων ἐπιταχύσεων καί δυνάμεων θεωροῦμε τή φορά ἀπό πάνω πρός τά κάτω. Ὁ ἀνελκυστήρας κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση πού ἔχει σταθερό μέτρο γ. Ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας ἠρεμεῖ στό ἔδαφος (γ = 0) ὁ ἀκίνητος παρατηρητής, πού βρίσκεται στό ἔδαφος καί ὁ παρατηρητής, πού εἶναι μέσα στόν ἀνελκυστήρα, διαπιστώνουν ὅτι στή σφαίρα ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις, τό *βάρος* $\vec{B}$ τῆς σφαίρας καί ἡ *τάση* $\vec{T}$ τοῦ ἐλατηρίου, οἱ ὁποῖες ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ μηδέν. Τότε τό δυναμόμετρο δείχνει τό *πραγματικό βάρος B τῆς σφαίρας*.

Γιά τόν ἀκίνητο στό ἔδαφος παρατηρητή ὁ ἀνελκυστήρας καί ἡ σφαίρα ἔχουν πάντοτε τήν ἴδια κατακόρυφη ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ σχετικά μέ τό ἔδαφος καί ἐπομένως ἡ σφαίρα κινεῖται μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς κατακόρυφης δυνάμεως $\vec{F} = m\cdot\vec{\gamma}$, πού εἶναι συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$. Γι' αὐτό τόν παρατηρητή ἰσχύει ἡ ἀλγεβρική ἐξίσωση:

$$F = m\cdot\gamma \qquad \text{ἤ} \qquad B - T = m\cdot\gamma \qquad \text{καί} \qquad m\cdot g - T = m\cdot\gamma$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε ὅτι σέ κάθε στιγμή ἡ *τάση* T τοῦ ἐλατηρίου εἶναι:

$$\boxed{T = m(g - \gamma)} \qquad (1)$$



Σχ. 28 Κατακόρυφη κίνηση ἀνελκυστήρα μέ σταθερή ἐπιτάχυνση.

Ἡ ἐξίσωση (1) δείχνει ὅτι τό *φαινομενικό βάρος* T τῆς σφαίρας μέσα στόν κινούμενο ἀνελκυστήρα ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἐπιτάχυνση τῆς κινήσεως. Θά ἐξετάσουμε τίς ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου, δηλαδή τό φαινομενικό βάρος T τῆς σφαίρας, σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (1) κατά τίς διάφορες φάσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἀνελκυστήρα.

1. *Ἄνοδος*. Τότε εἶναι $\gamma < 0$ ἄρα

$$T = m\,[g - (-\gamma)] = m(g + \gamma) \quad \text{καί} \quad T > B$$

2. *Κίνηση ὁμαλή*. Τότε εἶναι $\gamma = 0$ ἄρα

$$T = m(g - 0) = m \cdot g \quad \text{καί} \quad T = B$$

3. *Κάθοδος*. Τότε εἶναι $\gamma > 0$ ἄρα

$$T = m(g - \gamma) \quad \text{καί} \quad T < B$$

4 *Κάθοδος μέ ἐπιτάχυνση* $\gamma = g$. Τότε εἶναι

$$T = m(g - g) \quad \text{ἄρα} \quad T = 0$$

Τό φαινομενικό βάρος εἶναι *ἴσο μέ μηδέν*. Ἐπειδή ὁ ἀνελκυστήρας καί ἡ σφαίρα πέφτουν ἐλεύθερα, γι' αὐτό ἡ σφαίρα δέν ἔχει φαινομενικό βάρος. Ἄν τότε ἕνα σῶμα ἀφεθεῖ ἐλεύθερο μέσα στόν ἀνελκυστήρα αὐτό *δέ θά πέσει* σχετικά μέ τό θάλαμο τοῦ ἀνελκυστήρα, γιατί ὁ θάλαμος καί ὅσα σώματα βρίσκονται μέσα σ' αὐτόν πέφτουν ἐλεύθερα μέ ἐπιτάχυνση g. Τό σῶμα, πού ἀφέθηκε ἐλεύθερο, διατηρεῖται μετέωρο μέσα στό θάλαμο *σάν νά ἔχασε τό βάρος του*.

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι τό δυναμόμετρο δείχνει σέ κάθε στιγμή *τό φαινομενικό βάρος* T τῆς σφαίρας, πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά *φαινομενική ἐπιτάχυνση βαρύτητας:*

$$g' = g \pm \gamma$$

Γιά *τόν παρατηρητή πού μετέχει στήν κίνηση* ἡ σφαίρα πάντοτε *ἠρεμεῖ* σχετικά μέ τό θάλαμο. Αὐτός ὁ παρατηρητής ἑρμηνεύει *τήν ἰσορροπία τῆς σφαίρας* σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς Στατικῆς, δηλαδή δέχεται ὅτι οἱ δυνάμεις πού ἐφαρμόζονται στή σφαίρα *ἔχουν συνισταμένη ἴση μέ* *μηδέν*. Θά ἐξετάσουμε τίς ἐνδείξεις τοῦ δυναμομέτρου πού βλέπει αὐτός ὁ παρατηρητής κατά τίς διάφορες φάσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἀνελκυστήρα.

1. *Ἄνοδος*. Βλέπει ὅτι εἶναι $T > B$, ἄρα ἰσχύει *ἡ συνθήκη ἰσορροπίας:*

$$B + \Phi - T = 0 \quad \text{ἤ} \quad T = B + \Phi = m \cdot g + m \cdot \gamma$$
$$\text{καί} \quad T = m(g + \gamma)$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἴδια μέ τήν ἐξίσωση πού βρίσκει σ' αὐτή τήν περίπτωση καί ὁ ἀκίνητος παρατηρητής.

2. *Κίνηση ὁμαλή*. Τότε εἶναι $T = B$

3. *Κάθοδος*. Ὁ παρατηρητής βλέπει ὅτι εἶναι $T < B$, ἄρα ἰσχύει ἡ συνθήκη ἰσορροπίας:

$$B - (T + \Phi) = 0 \quad \text{ἤ} \quad T = B - \Phi \quad \text{καί} \quad T = m(g - \gamma)$$

Ἡ ἐξίσωση εἶναι ἴδια μέ ἐκείνη πού βρίσκει καί ὁ ἀκίνητος παρατηρητής.

4. *Κάθοδος μέ ἐπιτάχυνση* $\gamma = g$. Τότε εἶναι $T = 0$, ἀλλά ὁ παρατηρητής βλέπει ὅτι ἡ σφαίρα, ἄν καί δέν ἔχει βάρος, ἐξακολουθεῖ νά ἰσορροπεῖ σέ ὁρισμένη θέση σχετικά μέ τό θάλαμο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἰσχύει ἡ συνθήκη ἰσορροπίας $\Phi = B$. Γιά τόν παρατηρητή μέσα στό θάλαμο ἐπικρατοῦν τότε *συνθῆκες ἐλλείψεως βαρύτητας*.

γ) **Συμπέρασμα**. Ἀπό τά παραπάνω δύο παραδείγματα γίνεται φανερό ὅτι ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ἐμφανίζεται μόνο στόν παρατηρητή πού βρίσκεται μέσα στό κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς πού κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$. Μέ τή δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ὁ παρατηρητής αὐτός ἑρμηνεύει τή *σχετική ἰσορροπία* τῆς σφαίρας ὡς πρός τό κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς. Σύμφωνα μέ τούς νόμους τῆς Στατικῆς ἡ δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ ἰσορροπεῖ σέ κάθε στιγμή τή *συνισταμένη* $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων πού ἐνεργοῦν πάνω στή σφαίρα.

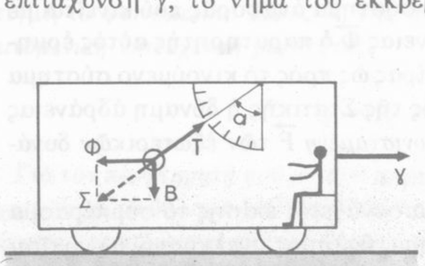
Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα συνάγεται ἐπίσης τό συμπέρασμα ὅτι, ἄν τό σύστημα ἀναφορᾶς (ὄχημα, θάλαμος ἀνελκυστήρα) *κινεῖται ὁμαλά* ($\gamma = 0$), ὁ παρατηρητής ἔχει τήν ἐντύπωση ὅτι τό σύστημα ἀναφορᾶς του εἶναι *ἀκίνητο*. Ἂν ὅμως ὁ παρατηρητής διαπιστώσει ὅτι στό σύστημα ἀναφορᾶς του ἐμφανίζονται δυνάμεις ἀδράνειας, τότε συμπεραίνει ὅτι τό σύστημά του *κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση*, πού μπορεῖ νά τήν ὑπολογίσει ἀπό τή δύναμη ἀδράνειας $\Phi = m \cdot \gamma$. Ὥστε:

Ὅταν δέν ἔχουμε ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς, εἶναι ἀδύνατο νά ὑπολογίσουμε τήν ταχύτητα μέ τήν ὁποία κινεῖται τό σύστημα ἀναφορᾶς μας. Μποροῦμε μόνο νά διαπιστώσουμε τή μεταβολή πού παθαίνει ἡ ταχύτητά μας, δηλαδή μποροῦμε νά διαπιστώσουμε τήν ἐπιτάχυνση τῆς κινήσεώς μας.

18. Μετρητές ἐπιταχύνσεως

Ὅταν ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς κινεῖται μέ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τότε ἕνας παρατηρητής, πού μετέχει στήν κίνηση, διαπιστώνει ὅτι ἐμφανίζονται *δυνάμεις ἀδράνειας*, πού ἔχουν τή διεύθυνση τῆς ἐπιταχύνσεως, φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως καί μέτρο κατά ἀπόλυτη τιμή ἴσο μέ $\Phi = m\gamma$. Ἔτσι αὐτός ὁ παρατηρητής ἀπό τίς δυνάμεις ἀδράνειας μπορεῖ νά προσδιορίσει τή διεύθυνση, τή φορά καί τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως. Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται ἡ λειτουργία τῶν *μετρητῶν ἐπιταχύνσεως*. Ἀναφέρουμε δύο ἁπλούς τύπους τέτοιων μετρητῶν, μέ τούς ὁποίους μποροῦμε νά μετρήσουμε ὁριζόντιες ἤ κατακόρυφες ἐπιταχύνσεις.

α. Μετρητής ὁριζόντιων ἐπιταχύνσεων. Ἀπό τήν ὀροφή ἑνός ὀχήματος, πού κινεῖται εὐθύγραμμα πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, κρέμεται ἕνα ἁπλό ἐκκρεμές (σχ. 29). Ὅταν τό ὄχημα κινεῖται μέ ὁριζόντια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, τό νῆμα τοῦ ἐκκρεμοῦς σχηματίζει γωνία α μέ τήν



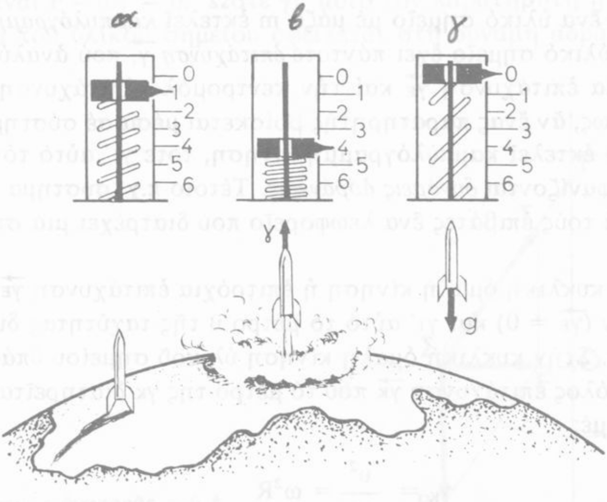
Σχ. 29. Μετρητής ὁριζόντιων ἐπιταχύνσεων.

κατακόρυφο καί γιά τόν παρατηρητή, πού εἶναι μέσα στό ὄχημα, ἡ σφαίρα *ἰσορροπεῖ* μέ τήν ἐπίδραση τῶν τριῶν ὁμοεπίπεδων δυνάμεων $\vec{B}$, $\vec{T}$ καί $\vec{\Phi}$. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\Phi = B \cdot \varepsilon\varphi\, \alpha \quad \text{ἤ} \quad m \cdot \gamma = m \cdot g \cdot \varepsilon\varphi\, \alpha \quad \text{ἄρα} \quad \gamma = g \cdot \varepsilon\varphi\, \alpha$$

Ὥστε ἡ μέτρηση τῆς ἐπιταχύνσεως γ ἀνάγεται σέ μέτρηση τῆς γωνίας α. Τό νῆμα μετακινεῖται ἐμπρός ἀπό τόξο, στό ὁποῖο ἀναγράφονται οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς ἐπιταχύνσεως γ.

β. Μετρητής κατακόρυφων ἐπιταχύνσεων. Ὁ μετρητής αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα συμπαγή μεταλλικό δακτύλιο, πού στηρίζεται πάνω σέ ἐλατήριο καί μπορεῖ νά μετακινεῖται ἐλεύθερα κατά μῆκος μιᾶς κατακόρυφης ράβδου (σχ. 30). Ἄς θεωρήσουμε ὅτι ὁ μετρητής βρίσκεται μέσα σέ ἕναν πύραυλο πού εἶναι *ἀκίνητος* στό ἔδαφος. Τότε ἡ τάση T τοῦ ἐλατηρίου εἶναι ἀντίθετη μέ τό πραγματικό βάρος B = mg τοῦ δακτυλίου καί ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου δείχνει τή διαίρεση 1 (σχ. 30α). Ὅταν ὁ πύραυλος *ἀνεβαίνει κατακόρυφα* μέ ἐπιτάχυνση γ, τότε τό φαινομενικό βάρος τοῦ δακτυλίου αὐξάνεται καί ὁ δακτύλιος ἰσορροπεῖ σέ τέτοια θέση, ὥστε ἡ τάση T τοῦ ἐλατηρίου (φαινομενικό βάρος)



Σχ. 30. Μετρητής κατακόρυφων ἐπιταχύνσεων.

νά εἶναι ἀντίθετη μέ τή συνισταμένη τοῦ βάρους B καί τῆς δυνάμεως ἀδράνειας Φ (σχ. 30β) καί τότε ἰσχύει ἡ σχέση:

$$T = B + \Phi \quad ἤ \quad T = m(g + \gamma) \qquad (1)$$

Ἄν τότε ὁ ὁ δείκτης τοῦ ὀργάνου δείχνει π.χ. τή διαίρεση 4, αὐτό σημαίνει ὅτι τό φαινομενικό βάρος T τοῦ δακτυλίου εἶναι 4 φορές μεγαλύτερο ἀπό τό πραγματικό βάρος B = mg, πού ἔχει ὁ δακτύλιος, ὅταν εἶναι ἀκίνητος στό ἔδαφος. Ὥστε, ἄν στήν ἐξίσωση (1) βάλουμε T = 4 mg, βρίσκουμε γ = 3g.

Ἄν ὁ πύραυλος *πέφτει ἐλεύθερα* πρός τή Γῆ, τό φαινομενικό βάρος τοῦ δακτυλίου γίνεται ἴσο μέ μηδέν (συνθῆκες ἐλλείψεως βαρύτητας) καί ὁ δείκτης δείχνει τότε τή διαίρεση μηδέν (σχ. 30γ). Ἔτσι ὁ παρατηρητής μπορεῖ νά μετρήσει τήν ἐπιτάχυνση πού ἔχει ἡ κατακόρυφη κίνησή του. Σήμερα χρησιμοποιοῦνται τελειοποιημένοι μετρητές ἐπιταχύνσεως, πού ἀναφέρονται στή μέτρηση τῆς ἐπιταχύνσεως γ ἀπό τά ἀποτελέσματα πού ἐπιφέρει ἡ ἀναπτυσσόμενη δύναμη ἀδράνειας:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{\gamma}$$

19. Στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς

Ὅταν ἕνα ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m ἐκτελεῖ *καμπυλόγραμμη κίνηση*, τότε τό ὑλικό σημεῖο ἔχει πάντοτε *ἐπιτάχυνση* $\vec{\gamma}$, πού ἀναλύεται στήν ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma_E}$ καί τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma_K}$ (§ 3). Ἑπομένως, ἄν ἕνας παρατηρητής βρίσκεται μέσα σέ σύστημα ἀναφορᾶς, πού ἐκτελεῖ καμπυλόγραμμη κίνηση, τότε γι' αὐτό τόν παρατηρητή ἐμφανίζονται *δυνάμεις ἀδράνειας*. Τέτοιο π.χ. σύστημα ἀναφορᾶς εἶναι γιά τούς ἐπιβάτες ἕνα λεωφορεῖο πού διατρέχει μιά στροφή τοῦ δρόμου.

Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ἡ ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma_E}$ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\vec{\gamma_E} = 0$) καί γι' αὐτό τό μέτρο υ τῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό. Στήν κυκλική ὁμαλή κίνηση ὑλικοῦ σημείου ὑπάρχει μόνο κεντρομόλος ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma_K}$ πού τό μέτρο της γ_K διατηρεῖται σταθερό καί ἴσο μέ:

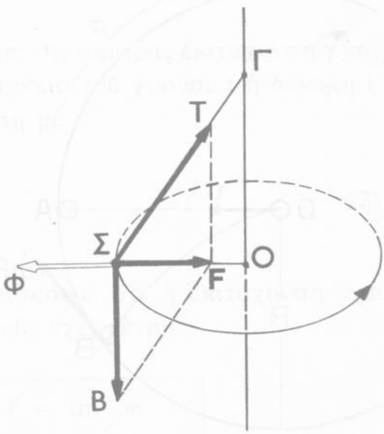
$$\gamma_K = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$$

α. Σύστημα ἀναφορᾶς πού ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση. Μιά μικρή σφαίρα Σ, πού τή θεωροῦμε ὡς ὑλικό σημεῖο μέ μάζα m, εἶναι δεμένη σέ ἕνα νῆμα καί διαγράφει πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο κυκλική τροχιά ἀκτίνας R μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω (σχ. 31). Σέ κάθε στιγμή πάνω στό ὑλικό σημεῖο ἐφαρμόζονται μόνο δύο ἐξωτερικές δυνάμεις, *τό βάρος* $\vec{B}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί *ἡ τάση* $\vec{T}$ τοῦ νήματος.

Γιά *τόν ἀκίνητο στό ἔδαφος παρατηρητή* ἡ κυκλική κίνηση τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὀφείλεται στήν ὁριζόντια κεντρομόλο δύναμη $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma_\kappa}$, ἡ ὁποία εἶναι συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων $\vec{B}$ καί $\vec{T}$ καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ:

κεντρομόλος δύναμη $\quad F = m \cdot \omega^2 \cdot R$

Γιά *τόν παρατηρητή πού μετέχει στήν κίνηση,* δηλαδή πού συνδέεται μέ τό κινούμενο σύστημα ἀναφορᾶς, τό ὑλικό σημεῖο Σ βρίσκεται σέ *σχετική ἰσορροπία* ὡς πρός αὐτό τό σύστημα ἀναφορᾶς. Τό ὑλικό σημεῖο Σ *ἰσορροπεῖ* πάνω στήν κυκλική τροχιά του, γιατί σέ κάθε στιγμή ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων καί *ἡ δύναμη ἀδράνειας* $\vec{\Phi}$ ἀποτελοῦν σύστημα δυνάμεων πού ἔχει συνισταμένη ἴση μέ μηδέν, δηλαδή εἶναι $\vec{F} - m\vec{\gamma} = 0$. Ὥστε γι' αὐτό τόν παρατηρητή ἡ σχετική ἰσορροπία τοῦ ὑλικοῦ σημείου ὀφείλεται στή δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$,



Σχ. 31. Σύστημα ἀναφορᾶς πού ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση.

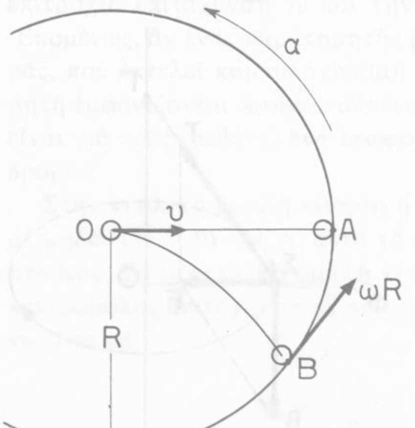
πού εἶναι *ἀντίθετη* μέ τήν κεντρομόλο δύναμη $\vec{F}$, ὀνομάζεται *φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας* καί κατ' ἀπόλυτη τιμή τό μέτρο της εἶναι:

φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας	$\Phi = m \cdot \omega^2 \cdot R$

β. Στρεφόμενος δίσκος. Ὅταν βρισκόμαστε μέσα σέ στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς, τότε γιά νά ἑρμηνεύσουμε ὁρισμένα μηχανικά φαινόμενα εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά λάβουμε ὑπόψη *τή δύναμη ἀδράνειας*. Θά ἐξετάσουμε ἕνα ἐνδιαφέρον παράδειγμα. Θεωροῦμε ὅτι ἕνας παρατηρητής εἶναι ἀκίνητος στό κέντρο Ο ἑνός ὁριζόντιου δίσκου, πού στήν ἀρχή ἠρεμεῖ (σχ. 32). Στήν περιφέρεια εἶναι στερεωμένος ἕνας στόχος σέ σχῆμα τόξου. Ὅταν ὁ δίσκος ἠρεμεῖ, ὁ παρατηρητής ἐκτοξεύει ὁριζόντια μιά σφαίρα μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Τριβές δέν ὑπάρχουν. Ἡ σφαίρα ἐκτελεῖ *εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση* καί στή διάρκεια τοῦ χρόνου t διατρέχει τήν ἀκτίνα ΟΑ = R τοῦ δίσκου καί φτάνει στό σημεῖο Α τοῦ στόχου. Τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$R = \upsilon \cdot t$$

Ἔστω ὅτι ὁ δίσκος *στρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα* ω γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ δίσκου. Ὁ



Σχ. 32. Ἡ σφαίρα φτάνει στό σημεῖο Β καί ὄχι στό Α.

παρατηρητής ἐκτοξεύει πάλι τή σφαίρα μέ τήν ἴδια ὁριζόντια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί κατά τήν ἴδια διεύθυνση ΟΑ. Ὁ παρατηρητής βλέπει ὅτι ἡ σφαίρα διαγράφει *καμπύλη τροχιά* ΟΒ καί φτάνει στό σημεῖο Β τοῦ στόχου. Ὁ παρατηρητής, γιά νά ἐξηγήσει αὐτή τήν κίνηση τῆς σφαίρας, δέχεται ὅτι στή διάρκεια τῆς κινήσεως ἐνεργεῖ πάνω στή σφαίρα *μιά δύναμη* $\vec{F}$ πού *ἐκτρέπει* τή σφαίρα ἀπό τήν εὐθύγραμμη τροχιά της. Αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ὀνομάζεται *δύναμη Coriolis* καί εἶναι δύναμη ἀδράνειας.

Γιά τόν ἀκίνητο στό ἔδαφος παρατηρητή ἡ σφαίρα ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση κατά μῆκος μιᾶς στρεφόμενης ἀκτίνας τοῦ δίσκου.

Ὑπολογισμός τῆς δυνάμεως Coriolis. Ἡ δύναμη Coriolis $\vec{F}$ εἶναι κάθετη στή διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καί στόν ἄξονα περιστροφῆς, ἄρα εἶναι κάθετη στή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$. Βρήκαμε παραπάνω τήν ἐξίσωση $R = \upsilon \cdot t$. Ὅταν ὁ δίσκος στρέφεται, τότε στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας τοῦ δίσκου, κινούμενο μέ γραμμική ταχύτητα ωR, διαγράφει τόξο πού ἀντιστοιχεῖ στή γωνία κατά τήν ὁποία στράφηκε ὁ δίσκος στή διάρκεια τοῦ χρόνου t. Τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ εἶναι:

$$\widehat{AB} = \omega R \cdot t = \omega \cdot (\upsilon t) \cdot t \qquad \text{καί} \qquad \widehat{AB} = \omega \cdot \upsilon \cdot t^2 \qquad (1)$$

Ἡ δύναμη Coriolis $\vec{F}$ δίνει στή μάζα m τῆς σφαίρας ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$ καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἡ δύναμη $\vec{F}$ προκαλεῖ μετατόπιση τῆς σφαίρας ἴση μέ:

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2}\gamma \cdot t^2 \qquad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) βρίσκουμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση ἔχει μέτρο $\gamma = 2\omega\upsilon$. Ἄρα ἡ δύναμη Coriolis ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{δύναμη Coriolis} \qquad F = 2m \cdot \omega \cdot \upsilon}$$

20. Ἡ Γῆ ὡς στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς

Συνήθως, ὅταν ἐξετάζουμε τήν κίνηση τῶν σωμάτων, δεχόμαστε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι ἕνα ἀκίνητο σύστημα ἀναφορᾶς. Ἀλλά ὁ πλανήτης μας περιστρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονά του μέ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἑπομένως σέ ὅλη τή ζωή μας βρισκόμαστε μέσα σέ ἕνα *στρεφόμενο σύστημα ἀναφορᾶς*. Ἔτσι σέ ὁρισμένα γήινα μηχανικά φαινόμενα μᾶς ἐμφανίζεται *ἡ δράση τῶν δυνάμεων ἀδράνειας*, δηλαδή ἐμφανίζονται ἡ φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας καί ἡ δύναμη Coriolis. Ἀναφέρουμε δύο σημαντικά γήινα μηχανικά φαινόμενα.

1. Ἀποδείχνεται ὅτι:

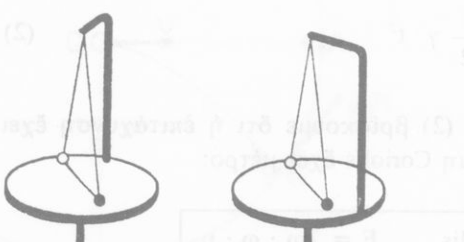
Ἐξαιτίας τῆς φυγόκεντρης δυνάμεως ἀδράνειας ἡ τιμή τοῦ g συνεχῶς ἐλαττώνεται, ὅσο προχωροῦμε ἀπό τόν πόλο πρός τόν ἰσημερινό.

2. Ἀποδείχνεται ὅτι:

Ἐξαιτίας τῆς δυνάμεως Coriolis ἕνα κινούμενο σῶμα ἐκτρέπεται ἀπό τή διεύθυνση τῆς κινήσεώς του.

Αὐτή ἡ ἐκτροπή γίνεται ἰδιαίτερα αἰσθητή στήν κίνηση τῶν ρευμάτων τῆς θάλασσας, τῶν ἀνέμων καί τῶν βλημάτων.

Στροφή τοῦ ἐπιπέδου αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς. Σέ ἕναν ὁριζόντιο δίσκο, πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα, βρίσκεται ἕνα ἐκκρεμές πού τό νῆμα του εἶναι στερεωμένο στό σημεῖο ἀπό τό ὁποῖο περνάει ὁ ἄξονας περιστροφῆς τοῦ δίσκου (σχ. 33). Τό ἐκκρεμές μπορεῖ νά αἰωρεῖται πάνω σέ ὁποιοδήποτε κατακόρυφο ἐπίπεδο, πού περνάει ἀπό τό σημεῖο στηρίξεως τοῦ νήματος. Τό ἐκκρεμές αἰωρεῖται ἐξαιτίας τοῦ βάρους τῆς σφαίρας, δηλαδή μιᾶς κατακόρυφης δυνάμε-



Σχ. 33. Τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς διατηρεῖται σταθερό.

ως. Ἔτσι στό ἐκκρεμές δέν ἐνεργεῖ καμιά δύναμη κάθετα στό ἐπίπεδο αἰωρήσεως καί ἑπομένως, ὅταν ὁ δίσκος στρέφεται, τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς *δέ μεταβάλλεται*.

Ἄς φανταστοῦμε ἕνα τέτοιο ἐκκρεμές πάνω ἀπό τό Βόρειο πόλο. Μέσα σέ μιά ἀστρική ἡμέρα ἡ Γῆ στρέφεται κατά γωνία 2π rad καί κατά φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ. Τότε καμιά δύναμη δέν ἀναγκάζει τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς νά παρακολουθήσει τήν περιστροφή τῆς Γῆς. Ἀλλά ὁ παρατηρητής, πού βρίσκεται πάνω στή Γῆ, βλέπει ὅτι τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς *στρέφεται* κατά τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ, δηλαδή βλέπει ὅτι ἡ σφαίρα σέ κάθε μετάβαση καί ἐπιστροφή της *ἐκτρέπεται πρός τά δεξιά*. Αὐτή ἡ ἐκτροπή τῆς σφαίρας ὀφείλεται στή δύναμη Coriolis καί παρατηρεῖται σέ ὅλα τά γεωγραφικά πλάτη. Γενικά ἀποδείχνεται ὅτι:

Σέ γεωγραφικό πλάτος φ τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς μέσα σέ 24 ὧρες στρέφεται κατά γωνία β πού εἶναι ἴση μέ:

$$\beta = 360^{\circ} \cdot \eta\mu\ \varphi$$

Στόν πόλο ($\varphi = 90^{\circ}$) στή διάρκεια μιᾶς ἡμέρας τό ἐπίπεδο αἰωρήσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς στρέφεται κατά 360°, ἐνῶ στόν ἰσημερινό ($\varphi = 0^{\circ}$) ἡ γωνία στροφῆς αὐτοῦ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴση μέ μηδέν. Ὁ Foucault, στηριζόμενος στό παρακάτω φαινόμενο, ἀπέδειξε μέ τό ἐκκρεμές *τήν περιστροφή τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της (ἐκκρεμές τοῦ Foucault)*.

γιά μελέτη

Προβλήματα

33. Στό πάτωμα ἑνός ἀνελκυστήρα βρίσκεται ἕνα κιβώτιο πού ἔχει βάρος B = 800 N. Νά βρεθεῖ πόση δύναμη ἐξασκεῖ τό σῶμα στό πάτωμα τοῦ ἀνελκυστήρα: α) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας ἀνεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 1\ m/sec^2$· β) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας κατεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 1\ m/sec^2$· καί γ) ὅταν ὁ ἀνελκυστήρας κατεβαίνει μέ ἐπιβράδυνση $\gamma = 2\ m/sec^2$. $g = 10\ m/sec^2$

34. Στό πάτωμα ἑνός βαγονιοῦ βρίσκεται κιβώτιο πού ἔχει μάζα $m = 100$ kgr. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως τοῦ κιβωτίου εἶναι $\eta = 0{,}2$. Τό βαγόνι ἀρχίζει νά κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο μέ ἐπιτάχυνση γ. Πόσο πρέπει νά γίνει τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως γ, γιά νά ἀρχίσει τό κιβώτιο νά γλιστράει πάνω στό πάτωμα τοῦ βαγονιοῦ; $g = 10$ m/sec^2.

35. Μέσα σέ ἀκίνητο ἀνελκυστήρα βρίσκεται ὑδραργυρικό βαρόμετρο, πού δείχνει ὅτι ἡ ἀτμοσφαιρική πίεση εἶναι $p_0 = 76$ cm Hg. Ὁ ἀνελκυστήρας ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma_1 = 1$ m/sec^2, ἔπειτα κινεῖται ὁμαλά καί τέλος κινεῖται μέ ἐπιβράδυνση πού ἔχει ἀπόλυτη τιμή $\gamma_2 = 2$ m/sec^2. Τί πίεση δείχνει τό βαρόμετρο κατά τίς τρεῖς φάσεις τῆς κινήσεως τοῦ ἀνελκυστήρα; $g = 10$ m/sec^2.

36. Ἕνα αὐτοκίνητο κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντιο δρόμο μέ σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 20$ m/sec. Γιά νά σταματήσει ἀρχίζει νά φρενάρει καί τότε ἕνα νῆμα τῆς στάθμης, πού κρέμεται ἀπό τήν ὀροφή τοῦ αὐτοκινήτου, γέρνει πρός τά ἐμπρός κατά μιά γωνία φ, γιά τήν ὁποία εἶναι $\varepsilon\varphi\ \varphi = 0{,}2$. Ἔπειτα ἀπό πόσο χρόνο θά σταματήσει τό αὐτοκίνητο;

1ℓ

37. Ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο ἔχει ἀσήμαντη μάζα καί μῆκος $l = 0{,}25$ m. Ἡ σταθερή τοῦ ἐλατηρίου εἶναι $k = 200$ N/m. Τό ἐλατήριο εἶναι στερεωμένο στήν ὀροφή λεωφορείου καί ἀπό τήν ἄκρη τοῦ ἐλατηρίου κρέμεται μεταλλική σφαίρα πού ἔχει βάρος $F = 0{,}5$ N. Τό λεωφορεῖο κινεῖται μέ σταθερή ὁριζόντια ἐπιτάχυνση πού ἔχει μέτρο γ καί τότε τό ἐλατήριο σχηματίζει γωνία $\alpha = 15^\circ$ μέ τήν κατακόρυφο. Πόση εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση καί πόσο εἶναι τότε τό μῆκος τοῦ ἐλατηρίου; $g = 10$ m/sec^2. $\varepsilon\varphi\ 15^\circ \simeq 0{,}27$. $\sigma\upsilon\nu\ 15^\circ \simeq 0{,}96$.

1ℓ

38. Ἕνας γυάλινος σωλήνας ΑΒΓΔ μέ σταθερή διάμετρο ἔχει σχῆμα Ш (ἀναποδογυρισμένου Π) καί εἶναι ἀνοιχτός στίς δύο ἄκρες του. Μέσα στό σωλήνα ὑπάρχει ἕνα ὑγρό καί οἱ ἐλεύθερες ἐπιφάνειές του βρίσκονται στό ἴδιο ὁριζόντιο ἐπίπεδο ΟΟ΄. Τό ὁριζόντιο τμῆμα ΒΓ τοῦ σωλήνα ἔχει μῆκος $l = 20$ cm. Ἡ διάταξη αὐτή τοποθετεῖται στό ὁριζόντιο πάτωμα αὐτοκινήτου ἔτσι, ὥστε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ νά εἶναι παράλληλο μέ τή διεύθυνση τῆς κινήσεως τοῦ αὐτοκινήτου. Ὅταν τό αὐτοκίνητο κινεῖται μέ ὁριζόντια ἐπιτάχυνση $\gamma = 0{,}5\,g$ ἤ

ἐπιβράδυνση $\gamma = 0{,}5\ g$, τότε ἡ στάθμη τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα AB ἀντίστοιχα ἀνεβαίνει κατά h ἤ κατεβαίνει κατά h. Νά ὑπολογιστεῖ αὐτή ἡ μεταβολή τῆς στάθμης h.

39. Ἀπό τήν ὀροφή ἑνός λεωφορείου πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 20$ m/sec πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, κρέμεται ἕνα νῆμα τῆς στάθμης. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία πού σχηματίζει τό νῆμα τῆς στάθμης μέ τήν κατακόρυφο, ὅταν τό λεωφορεῖο διατρέχει μέ τήν παραπάνω ταχύτητα μιά στροφή, πού ἔχει ἀκτίνα καμπυλότητας R = 1 km. $g = 10\ m/sec^2$.

40. Ἕνας ἀκροβάτης, πάνω στή μοτοσικλέτα του, κινεῖται πάνω στήν ἐσωτερική ἐπιφάνεια κώνου, πού ἔχει τήν κορυφή του στό ἔδαφος καί τόν ἄξονά του κατακόρυφο. Τό βάρος τοῦ ἀκροβάτη καί τῆς μηχανῆς του εἶναι B = 900 N καί κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 10$ m/sec πάνω σέ ὁριζόντια τροχιά ἀκτίνας R = 20 m. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία φ πού σχηματίζει ἡ κωνική ἐπιφάνεια μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο καί ἡ δύναμη πού ἐξασκεῖ ὁ ἀκροβάτης μέ τή μηχανή του πάνω στήν κωνική ἐπιφάνεια. Οἱ τριβές παραλείπονται. $g = 10\ m/sec^2$.

41. Μιά ράβδος Ox στρέφεται μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα Oy, σχηματίζοντας μέ αὐτόν γωνία φ. Ἡ ράβδος Ox διαγράφει ἐπιφάνεια κώνου, πού ἡ κορυφή του εἶναι πρός τά κάτω στό σημεῖο O. Πάνω στή ράβδο μπορεῖ νά κινεῖται χωρίς τριβή ἕνα ὑλικό σημεῖο Σ πού ἔχει μάζα m. Νά βρεθεῖ σέ ποιά θέση ΟΣ = x μπορεῖ νά ἰσορροπεῖ τό ὑλικό σημεῖο Σ. Τί θά συμβεῖ, ἄν αὐξηθεῖ ἤ ἐλατωθεῖ αὐτή ἡ ἀπόσταση x;
Ἐφαρμογή: $\varphi = 60^\circ$. Συχνότητα περιστροφῆς τῆς ράβδου Ox: $\nu = 2$ Hz. $g = 10\ m/sec^2$.

42. Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί σέ γεωγραφικό πλάτος $\varphi = 45^\circ$ ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει μέτρο $g = 9{,}811\ m/sec^2$. Δεχόμαστε ὅτι τό βάρος ἑνός σώματος εἶναι ἡ συνισταμένη τῆς ἕλξεως, πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ, καί τῆς φυγόκεντρης δυνάμεως ἀδράνειας, πού ὀφείλεται στήν περιστροφή τῆς Γῆς. Θεωροῦμε τή Γῆ σφαιρική μέ ἀκτίνα R = 6370 km. Ὁ χρόνος μιᾶς περιστροφῆς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονα της εἶναι T = 86 164 sec. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ g στόν πόλο καί στόν

ἰσημερινό. Ἄν μιά γωνία α εἶναι πολύ μικρή, τότε θά πάρουμε κατά προσέγγιση συν α ≃ 1.

43. Ὅταν ἕνας τεχνητός δορυφόρος βρίσκεται ἀκίνητος πάνω στό ἔδαφος, στερεώνουμε στήν ὀροφή του μέσα στό θάλαμο τή μιά ἄκρη σπειροειδοῦς ἐλατηρίου καί στήν ἄλλη ἄκρη του στερεώνουμε μιά μάζα m. Τότε τό ἐλατήριο ἐπιμηκύνεται κατά $l = 20$ cm. Ἡ σταθερή τοῦ ἐλατηρίου εἶναι k. Ὅταν ὁ δορυφόρος θά κινεῖται γύρω ἀπό τή Γῆ πάνω στήν κυκλική τροχιά του, πόση θά εἶναι ἡ ἐπιμήκυνση τοῦ ἐλατηρίου; Ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στό ἔδαφος $g_0 = 10$ m/sec².

1l

Ἐφαρμογές τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

21. Ἡ ὁρμή ὑλικοῦ σημείου

Ἕνα ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m καί κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ἔχει ὁρμή $\vec{J} = m \cdot \vec{\upsilon}$ πού τό μέτρο της εἶναι ἴσο μέ $J = m \cdot \upsilon$.

Ἄν στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργήσει ἐπί χρόνο Δt μιά σταθερή δύναμη $\vec{F}$, τότε ἡ ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου μεταβάλλεται κατά $\vec{\Delta\upsilon}$ καί σύμφωνα μέ τό θεμελιώδη νόμο τῆς Δυναμικῆς ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{\vec{\Delta\upsilon}}{\Delta t} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \vec{\Delta\upsilon}} \qquad (1)$$

Τό γινόμενο $m \cdot \vec{\Delta\upsilon}$ ἐκφράζει *τή μεταβολή τῆς ὁρμῆς* τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί τό γινόμενο $\vec{F} \cdot \Delta t$ ἐκφράζει *τήν ὤθηση δυνάμεως* πού δέχτηκε τό ὑλικό σημεῖο.

Στό σύστημα μονάδων MKS εἶναι:
μονάδα ὁρμῆς 1 kgr·m/sec· μονάδα ὠθήσεως δυνάμεως 1 N·sec
Ἡ ἐξίσωση (1) φανερώνει ὅτι:

Ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἴση μέ τήν ὤθηση τῆς δυνάμεως.

α. Ὁρμή στερεοῦ σώματος πού ἔχει μεταφορική κίνηση. Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα ἔχει *μεταφορική κίνηση*, τότε σέ κάθε στιγμή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν τήν ἴδια ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ καί ἑπομένως ἡ ὁρμή τοῦ στερεοῦ εἶναι:

$$\vec{J} = (m_1 + m_2 + m_3 + \ldots) \cdot \vec{\upsilon} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\vec{J} = m \cdot \vec{\upsilon}}$$

ὅπου m εἶναι *ἡ ὁλική μάζα* του στερεοῦ.
Ἀποδείχνεται ὅτι:

Ἡ ὁρμή ἑνός ὑλικοῦ συστήματος εἶναι ἴση μέ τήν ὁρμή ἑνός ὑλικοῦ σημείου, πού συμπίπτει μέ τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος καί ἔχει μάζα m ἴση μέ τήν ὁλική μάζα τοῦ συστήματος.

Ἄν λοιπόν σέ κάποια χρονική στιγμή τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ἔχει ταχυτητα $\vec{\upsilon}$, τότε *ἡ ὁρμή τοῦ ὑλικοῦ συστήματος* εἶναι:

$$\boxed{\text{ὁρμή ὑλικοῦ συστήματος}\; \vec{J} = m \cdot \vec{\upsilon}}$$

Ἕνα *στερεό σῶμα* θεωρεῖται ὡς σύστημα ὑλικῶν σημείων.

22. Ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς

Γιά ἕνα ὑλικό σύστημα ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m \cdot \overrightarrow{\Delta\upsilon}$$

Τό $\overrightarrow{\Delta\upsilon}$ εἶναι ἡ μεταβολή τῆς ταχύτητας τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος, ὅπου θεωρεῖται συγκεντρωμένη ὅλη ἡ μάζα m τοῦ συστήματος. Ἡ συνισταμένη $\vec{F}$ τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος.

Ἡ κίνηση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος *προσδιορίζεται μόνο ἀπό τή συνισταμένη* $\vec{F}$ *τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων* πού ἐνεργοῦν στό σύστημα. Ἡ κίνηση τοῦ κέντρου βάρους *δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τίς ἐσωτερικές δυνάμεις* τοῦ συστήματος.

Ἄν λοιπόν στό ὑλικό σύστημα δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη ἤ ἡ συνισταμένη τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων εἶναι ἴση μέ μηδέν, δηλαδή ἄν εἶναι $\vec{F} = 0$, τότε καί *ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς* $m \cdot \Delta\vec{\upsilon}$ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν*. Ἐπομένως τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος ἤ ἠρεμεῖ ($\vec{\upsilon} = 0$) ἤ ἐκτελεῖ εὐθύγραμμη ὁμαλή κίνηση ($\vec{\upsilon}$ = σταθ.). Σ' αὐτή τήν περίπτωση *ἡ ὁρμή* τοῦ ὑλικοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή*.

Ἕνα ὑλικό σύστημα λέγεται *μονωμένο*, ὅταν δέν ἐπιδρᾶ πάνω του *καμιά ἐξωτερική δύναμη*. Τότε ἰσχύει ἡ ἑξῆς *ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς:*

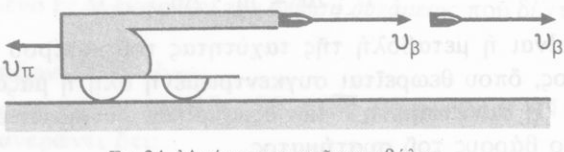
Ἡ ὁλική ὁρμή ἑνός μονωμένου συστήματος μαζῶν διατηρεῖται σταθερή.

ἀρχή διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς	$m \cdot \vec{\upsilon}$ = σταθ.

ὅπου m εἶναι *ἡ ὁλική μάζα* τοῦ συστήματος, πού τή θεωροῦμε συγκεντρωμένη στό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος καί $\vec{\upsilon}$ εἶναι *ἡ ταχύτητα* τοῦ κέντρου βάρους τοῦ συστήματος.

23. Ἐφαρμογή τῆς ἀρχῆς τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς στήν κίνηση τοῦ πυραύλου

Μιά πολύ σημαντική ἐφαρμογή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς ἔχουμε στήν κίνηση τοῦ πυραύλου. Ἄς φανταστοῦμε ὅτι πάνω σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο μπορεῖ νά κινεῖται ἕνα ἐλαφρό πυροβόλο, πού ἔχει μάζα m_π (σχ. 34). Τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ πυροβόλου καί ἡ ἀντίδραση $\vec{A}$ τοῦ



Σχ. 34. Ἀνάκρουση τοῦ πυροβόλου.

λείου ἐπιπέδου ἔχουν συνισταμένη $\vec{F}$ ἴση μέ μηδέν ($\vec{F}=0$). Ὥστε τό σύστημα θεωρεῖται *μονωμένο*. Τό βλῆμα ἔχει μάζα m_β καί βγαίνει ἀπό τό πυροβόλο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon_\beta}$. Ἀπό τήν ἀνάφλεξη τῆς ἐκρηκτικῆς ὕλης παράγονται μέσα σέ μικρό χῶρο πολύ θερμά ἀέρια πού ἔχουν πολύ μεγάλη πίεση. Ἔτσι ἀπό τήν πίεση τῶν ἀερίων ἀναπτύσσονται *μεγάλες δυνάμεις* πάνω στό βλῆμα καί στά ἐσωτερικά τοιχώματα τοῦ σωλήνα τοῦ πυροβόλου. Αὐτές οἱ δυνάμεις εἶναι *ἐσωτερικές δυνάμεις* τοῦ μονωμένου συστήματος.

Ἀνάκρουση τοῦ πυροβόλου. Ἀρχικά ἡ ὁρμή τοῦ μονωμένου συστήματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν*. Ὅταν τό βλῆμα βγαίνει ἀπό τό πυροβόλο μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon_\beta}$, τότε τό βλῆμα ἀπόκτησε ὁρμή $m_\beta \cdot \vec{\upsilon_\beta}$. Τό πυροβόλο ὀπισθοχωρεῖ (*ἀνάκρουση*) μέ ταχύτητα $\vec{\upsilon_\pi}$, ὥστε σύμφωνα μέ τήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς νά ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$m_\pi \cdot \vec{\upsilon_\pi} + m_\beta \cdot \vec{\upsilon_\beta} = 0 \quad \text{ἄρα} \quad \vec{\upsilon_\pi} = -\upsilon_\beta \cdot \frac{m_\beta}{m_\pi}$$

Οἱ ταχύτητος $\vec{\upsilon_\pi}$ καί $\vec{\upsilon_\beta}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά. Τό πυροβόλο κινεῖται μέ φορά ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος.

Κίνηση τοῦ πυραύλου. Στήν ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς στηρίζεται *ἡ κίνηση τοῦ πυραύλου*. Ἀντί γιά βλῆμα, ἐκτοξεύεται *συνεχῶς μάζα ἀερίων*, πού εἶναι πολύ θερμά, ἔχουν μεγάλη πίεση καί παράγονται ἀπό τήν καύση ἑνός καύσιμου ὑλικοῦ. Τό ἀπαιτούμενο γιά τήν καύση ὀξυγόνο ἤ ὑπάρχει μέσα στόν πύραυλο ἤ παίρνεται ἀπό τήν ἀτμόσφαιρα. Ἡ πίεση τῶν ἀερίων δημιουργεῖ *μεγάλες δυνάμεις*, πού πιέζουν τά ἐσωτερικά τοιχώματα τοῦ πυραύλου. Αὐτές οἱ δυνάμεις ἔχουν μιά *συνισταμένη* $\vec{F}$, πού ἔχει *τή διεύθυνση* τῆς κινήσεως τῶν ἀερίων, ἀλλά *φορά* ἀντίθετη μέ τή φορά τῆς κινήσεως τῶν ἀερίων. Ἔτσι ἀναπτύσσεται πάνω στόν πύραυλο μιά πολύ μεγάλη *προωστική δύναμη*.

Οἱ πύραυλοι εἶναι *κινητῆρες* μεγάλης ἰσχύος (*κινητῆρες ἀντιδράσεως*) καί τούς χρησιμοποιοῦμε γιά τήν κίνηση τῶν πυραύλων πού μεταφέρουν τεχνητούς δορυφόρους, γιά τήν κίνηση διαστημοπλοίων καθώς καί γιά τήν κίνηση ἀεροπλάνων (ἀεριωθούμενα) καί διηπειρωτικῶν βλημάτων. Ἡ μελέτη τῆς κινήσεως τῶν πυραύλων εἶναι πολύπλοκο πρόβλημα, γιατί ἐπεμβαίνουν πολλοί παράγοντες (π.χ. ἡ ἕλξη τῆς Γῆς, ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ἡ γρήγορη ἐλάττωση τῆς μάζας τοῦ πυραύλου κ.ἄ.).

α. Ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου. Γιά εὐκολία θεωροῦμε ὅτι ὁ πύραυλος εἶναι *μονωμένο σύστημα* στό ὁποῖο δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη (ἀντίσταση τοῦ ἀέρα, ἕλξεις ἀστρικῶν σωμάτων). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ πύραυλος κινεῖται εὐθύγραμμα (σχ. 35) καί ὅτι στή χρονική στιγμή t ἔχει ταχύτητα $υ_π$ *σχετικά μέ τή Γῆ*. Ἄν τά ἀέρια ξεφεύγουν ἀπό τόν πύραυλο μέ σταθερή ταχύτητα $υ_Α$ σχετικά μέ τόν πύραυλο, τότε ἡ ταχύτητα τῆς μάζας τῶν ἀερίων *σχετικά μέ τή Γῆ* εἶναι $υ_π - υ_Α$.

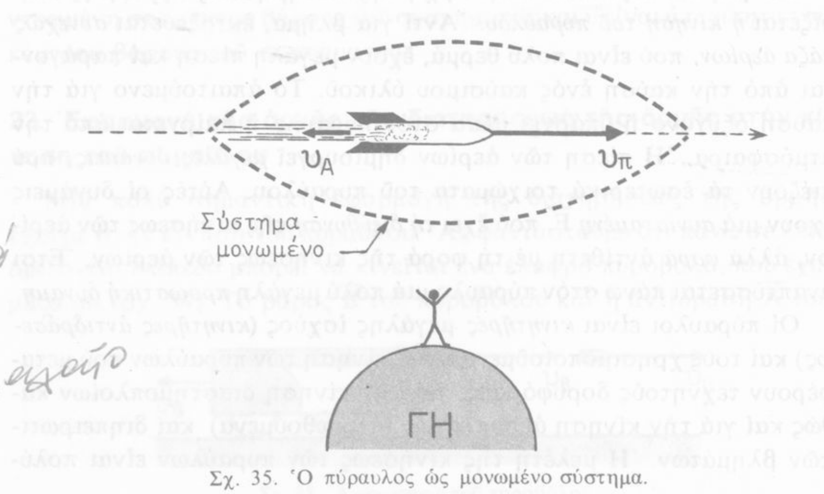
//υπ

Κατά τήν κίνηση τοῦ πυραύλου *ἡ μάζα* δ τῶν ἀερίων, πού ξεφεύγουν ἀπό τόν πύραυλο *κατά μονάδα* χρόνου, διατηρεῖται σταθερή.

Τή στιγμή πού ὁ πύραυλος ἀρχίζει νά κινεῖται (t = 0), *ἡ ὁλική ἀρχική μάζα του* εἶναι m_0. Στή χρονική στιγμή t ὁ πύραυλος ἔχει ταχύτητα $υ_π$, μάζα m (ὅπου $m < m_0$) καί ἐπομένως τό μονωμένο σύστημα (δηλαδή ὁ πύραυλος) ἔχει *ὁρμή* $m \cdot υ_π$. Σέ μιά ἑπόμενη χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ἡ μάζα τοῦ πυραύλου εἶναι $m - \Delta m$, γιατί στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ξέφυγε μάζα ἀερίων Δm. Τήν ἴδια αὐτή χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ὁ πύραυλος ἔχει ταχύτητα $υ_π + \Delta υ_π$. Ἑπομένως στή χρονική

//υπ

//υπ ⊥π



σε όλα λάθ υπ
το π μικρό

Σχ. 35. Ὁ πύραυλος ὡς μονωμένο σύστημα.

στιγμή $t + \Delta t$ *ἡ ὁλική ὁρμή* τοῦ μονωμένου συστήματος εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ὁρμῶν:

ὁρμή τοῦ πυραύλου	$(m - \Delta m) \cdot (\upsilon_\pi + \Delta\upsilon_\pi)$
ὁρμή τῶν ἀερίων πού ξέφυγαν	$\Delta m \cdot (\upsilon_\pi - \upsilon_A)$

Ἐπειδή τό σύστημα εἶναι μονωμένο, ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή* καί ἑπομένως ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\underbrace{(m - \Delta m) \cdot (\upsilon_\pi + \Delta\upsilon_\pi) + \Delta m \cdot (\upsilon_\pi - \upsilon_A)}_{\text{ὁρμή τή στιγμή } t + \Delta t} - \underbrace{m \cdot \upsilon_\pi}_{\text{ὁρμή τή στιγμή } t} = 0$$

Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις βρίσκουμε:

$$m \cdot \Delta\upsilon_\pi - \Delta m \cdot \Delta\upsilon_\pi - \Delta m \cdot \upsilon_A = 0$$

Ὁ ὅρος $\Delta m \cdot \Delta\upsilon_\pi$ εἶναι πολύ μικρός σχετικά μέ τούς δύο ἄλλους ὅρους καί μποροῦμε νά τόν παραλείψουμε. Ὥστε εἶναι:

$$m \cdot \Delta\upsilon_\pi - \Delta m \cdot \upsilon_A = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad m \cdot \Delta\upsilon_\pi = \Delta m \cdot \upsilon_A$$

Ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διά Δt, παίρνουμε τήν ἐξίσωση:

$$m \cdot \frac{\Delta\upsilon_\pi}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon_A \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{\Delta\upsilon_\pi}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \frac{\upsilon_A}{m} \qquad (1)$$

Τό $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \delta$ ἐκφράζει τή μάζα τῶν ἀερίων πού ξεφεύγει ἀπό τόν πύραυλο κατά μονάδα χρόνου. Τό $\frac{\Delta\upsilon_\pi}{\Delta t}$ εἶναι *ἡ μέση ἐπιτάχυνση* στή διάρκεια τοῦ ἐλάχιστου χρόνου Δt καί, ὅταν αὐτός ὁ χρόνος τείνει πρός τό μηδέν, τό $\frac{\Delta\upsilon_\pi}{\Delta t}$ τείνει πρός μιά ὁριακή τιμή πού εἶναι *ἡ ἐπιτάχυνση* γ τοῦ πυραύλου στή χρονική στιγμή t. Ἄρα: Δt

$$\text{ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου (στή στιγμή } t) \qquad \gamma = \frac{\delta \cdot \upsilon_A}{m}$$

Στή χρονική στιγμή t ἡ μάζα m τοῦ πυραύλου εἶναι $m = m_0 - \delta \cdot t$.

Ἄρα ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου σέ συνάρτηση μέ τό χρόνο τῆς κινήσεώς του δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{ἐπιτάχυνση πυραύλου (στή στιγμή t)} \qquad \gamma = \frac{\delta \cdot \upsilon_A}{m_0 - \delta \cdot t}} \qquad (2)$$

Τό γινόμενο $\delta \cdot \upsilon_A$ εἶναι θετικό. Τό γινόμενο $\delta \cdot t$ ἐκφράζει τήν ἐλάττωση τῆς μάζας τοῦ πυραύλου καί ἑπομένως πάντοτε εἶναι $m_0 > \delta \cdot t$. Ὥστε ἡ διαφορά $m_0 - \delta \cdot t$ εἶναι θετική, ἀλλά μέ τό πέρασμα τοῦ χρόνου αὐτή ἡ διαφορά συνεχῶς ἐλαττώνεται καί τελικά γίνεται ἴση μέ $m_{\tau\epsilon\lambda}$, πού ἐκφράζει τή μάζα τοῦ πυραύλου, ὅταν ἐξαντληθεῖ ὅλο τό καύσιμο ὑλικό. Ὅσο λοιπόν διαρκεῖ ἡ ἐνεργητική προώθηση τοῦ πυραύλου, *ἡ ἐπιτάχυνση* γ εἶναι πάντοτε θετική καί *συνεχῶς αὐξάνεται.* Σ' αὐτή τή φάση τῆς κινήσεως τοῦ πυραύλου ἡ ταχύτητά του διαρκῶς αὐξάνεται, ὥσπου νά ἐξαντληθεῖ τό καύσιμο ὑλικό. Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι:

Ὅταν ἡ μάζα (δ) τῶν ἀερίων, πού ξεφεύγουν κατά μονάδα χρόνου, διατηρεῖται σταθερή, ἡ ἐπιτάχυνση (γ) τοῦ πυραύλου συνεχῶς αὐξάνεται, ὥσπου νά ἐξαντληθεῖ τό καύσιμο ὑλικό.

β. Προωστική δύναμη τοῦ πυραύλου. Ἡ προώθηση τοῦ πυραύλου ὀφείλεται σέ μιά δύναμη $\vec{F}$ πού ἔχει μέτρο $F = m \cdot \gamma$. Στή χρονική στιγμή t ἡ μάζα τοῦ πυραύλου εἶναι:

$$m = m_0 - \delta \cdot t$$

Τό μέτρο τῆς ἐπιταχύνσεως γ στή χρονική στιγμή t δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (2). Ἑπομένως στή χρονική στιγμή t *ἡ προωστική δύναμη* (F) τοῦ πυραύλου ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{προωστική δύναμη} \qquad F = \delta \cdot \upsilon_A} \qquad (3)$$

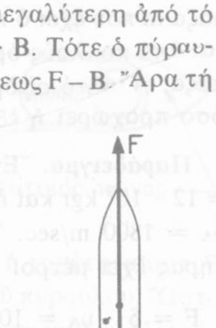
Ἡ προωστική δύναμη ($\vec{F}$), πού ἀναπτύσσεται στόν πύραυλο εἶναι

ἀνάλογη μέ τή μάζα (δ) τῶν ἀερίων πού ξεφεύγουν κατά μονάδα χρόνου καί ἀνάλογη μέ τήν ταχύτητα ($υ_Α$) ἐξόδου τῶν ἀερίων ἀπό τόν πύραυλο.

Τά μεγέθη δ καί $υ_Α$ εἶναι δύο σταθερές πού ἐξαρτῶνται ἀπό τήν κατασκευή τοῦ πυραύλου καί ἑπομένως *ἡ προωστική δύναμη* F τοῦ πυραύλου εἶναι *σταθερή* καί ἐξαρτᾶται ἀπό τήν κατασκευή του. Γι' αὐτό οἱ κινητῆρες ἀντιδράσεως τῶν ἀεροπλάνων χαρακτηρίζονται συνήθως ἀπό τήν προωστική δύναμη πού ἀναπτύσσουν.

Ἀπογείωση τοῦ πυραύλου. Οἱ συνθῆκες, πού ἐπικρατοῦν κατά τήν ἀπογείωση τοῦ πυραύλου, διαφέρουν ἀπό τίς συνθῆκες πού θεωρήσαμε παραπάνω (κίνηση στό κενό, ἔλλειψη τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς). Ἡ ἀπογείωση τοῦ πυραύλου συνήθως γίνεται σέ κατακόρυφη θέση (σχ. 36). Ἔστω ὅτι ὁ πύραυλος βρίσκεται ἀκόμη ἀκίνητος στό ἔδαφος, ἀλλά ὁ κινητήρας του ἄρχισε νά λειτουργεῖ καί ἐκτοξεύει κατακόρυφα πρός τά κάτω μιά μάζα δ ἀερίων μέ ταχύτητα $υ_Α$. Τότε ἀναπτύσσεται πάνω στόν πύραυλο κατακόρυφη προωστική δύναμη, πού ἔχει φορά πρός τά πάνω καί μέτρο $F = δ \cdot υ_Α$. Γιά νά ἀποσπαστεῖ ὁ πύραυλος ἀπό τό ἔδαφος, πρέπει ἡ προωστική δύναμη F νά γίνει μεγαλύτερη ἀπό τό βάρος Β τοῦ πυραύλου, δηλαδή πρέπει νά γίνει $F > B$. Τότε ὁ πύραυλος ἀρχίζει νά ἀνεβαίνει μέ τήν ἐπίδραση τῆς δυνάμεως $F - B$. Ἄρα τή

τα μηχάνια
το μικρό



Σχ. 36. Ἀπογείωση τοῦ πυραύλου.

στιγμή τῆς ἀπογειώσεώς του ὁ πύραυλος ἔχει *ἀρχική ἐπιτάχυνση* γ_0 ἴση μέ:

$$\text{ἀρχική ἐπιτάχυνση} \qquad \gamma_0 = \frac{F - B}{m_0}$$

ὅπου m_0 εἶναι ἡ ἀρχική μάζα τοῦ πυραύλου.

Ὅσο χρόνο ὁ πύραυλος κινεῖται μέσα στήν ἀτμόσφαιρα καί κοντά στή Γῆ, ἐνεργοῦν πάνω του δύο σημαντικές *ἐξωτερικές δυνάμεις*, δηλαδή *τό βάρος του*, πού ἐλαττώνεται μέ τό ὕψος καί *ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα*, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ πυραύλου καί τό ὕψος στό ὁποῖο βρίσκεται. Σ' αὐτή τήν πρώτη φάση τῆς κινήσεώς του ὁ πύραυλος δέν μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς μονωμένο σύστημα καί ὁ νόμος τῆς κινήσεώς του εἶναι πολύπλοκος. Ὅταν ὅμως ὁ πύραυλος βγεῖ ἔξω ἀπό τήν ἀτμόσφαιρα καί ἀπομακρυνθεῖ πολύ ἀπό τή Γῆ, τότε ὁ πύραυλος μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς *μονωμένο σύστημα*, δηλαδή σύστημα στό ὁποῖο δέν ἐνεργοῦν ἐξωτερικές δυνάμεις. Σ' αὐτή τή φάση τῆς κινήσεως τοῦ πυραύλου ὁ νόμος τῆς κινήσεώς του ἁπλοποιεῖται.

Ἀπόρριψη ὀρόφων. Σέ μιά χρονική στιγμή t ἡ ἐπιτάχυνση τοῦ πυραύλου εἶναι $\gamma = \delta \cdot \upsilon_A/m$, δηλαδή εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογη μέ τή μάζα m πού ἔχει ὁ πύραυλος ἐκείνη τή στιγμή. Ὁ πύραυλος ἀποτελεῖται ἀπό πολλούς ὀρόφους. Γιά νά μή μεταφέρει ὁ πύραυλος ἄχρηστη μάζα, γι' αὐτό οἱ ὄροφοί του *ἀποσπῶνται διαδοχικά* ἀπό τόν πύραυλο, ὅσο προχωρεῖ ἡ ἐξάντληση τοῦ καύσιμου ὑλικοῦ.

Παράδειγμα. Ἕνας πύραυλος τύπου V_2 ἔχει ἀρχική μάζα $m_0 = 12 \cdot 10^3$ kgr καί ἐκτοξεύει μάζα ἀερίων $\delta = 100$ kgr/sec μέ ταχύτητα $\upsilon_A = 1800$ m/sec. Ἡ προωστική δύναμη F πού ἀναπτύσσει ὁ κινητήρας ἔχει μέτρο:

$$F = \delta \cdot \upsilon_A = 100 \text{ kgr/sec} \cdot 1800 \text{ m/sec} \quad \text{καί} \quad F = 18 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Τό ἀρχικό βάρος τοῦ πυραύλου εἶναι:

$$B = m_0 \cdot g = 12 \cdot 10^3 \text{ kgr} \cdot 10 \text{ m/sec}^2 \quad \text{καί} \quad B = 12 \cdot 10^4 \text{ N}$$

Ἡ ἀρχική ἐπιτάχυνση γ_0 τοῦ πυραύλου εἶναι:

$$\gamma_0 = \frac{F - B}{m_0} = \frac{6 \cdot 10^4 \text{ N}}{12 \cdot 10^3 \text{ kgr}} \quad \text{καί} \quad \gamma_0 = 5 \text{ m/sec}^2$$

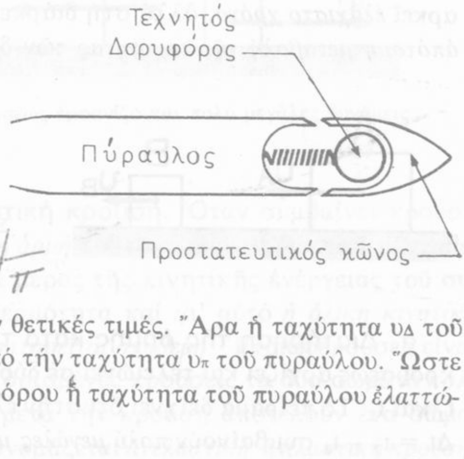
γ. Ἐκτόξευση βλήματος ἀπό πύραυλο. Ὅταν ὁ πύραυλος ἐξαντλήσει τό καύσιμο ὑλικό, ἐξακολουθεῖ νά κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα $υ_0$, ἄν πάνω στόν πύραυλο δέν ἐνεργεῖ καμιά ἐξωτερική δύναμη. Τότε ἀπό τόν πύραυλο μπορεῖ νά ἐκτοξευτεῖ ἕνα βλῆμα, π.χ. ἕνας τεχνητός δορυφόρος τῆς Γῆς. Ἡ ἐκτόξευση μπορεῖ νά γίνει μέ τή βοήθεια ἑνός συμπιεσμένου ἐλατηρίου, πού ἀπότομα ἐκτείνεται (σχ. 37). Ἔστω ὅτι ὁ πύραυλος ἔχει μάζα $m_π$ καί ὁ τεχνητός δορυφόρος ἔχει μάζα $m_Δ$. Πρίν ἀπό τήν ἐκτόξευση τοῦ δορυφόρου τό σύστημα ἔχει:

μάζα $\quad m_π + m_Δ \quad$ καί ταχύτητα $\quad υ_0$

Μετά τήν ἐκτόξευση ὁ πύραυλος καί ὁ δορυφόρος ἔχουν ἀντίστοιχα ταχύτητα $υ_π$ καί $υ_Δ$. Θεωροῦμε ὅτι τό σύστημα εἶναι *μονωμένο* καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς:

$$(m_π + m_Δ) \cdot υ_0 = m_π \cdot υ_π + m_Δ \cdot υ_Δ$$

$$\text{ἤ} \quad m_π (υ_0 - υ_π) = m_Δ (υ_Δ - υ_0) \qquad (4)$$



Σχ. 37. Ἐκτόξευση τεχνητοῦ δορυφόρου ἀπό πύραυλο.

Τά μεγέθη $m_π$ καί $m_Δ$ ἔχουν θετικές τιμές. Ἄρα ἡ ταχύτητα $υ_Δ$ τοῦ δορυφόρου εἶναι *μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα $υ_π$ τοῦ πυραύλου. Ὥστε κατά τήν ἐκτόξευση τοῦ δορυφόρου ἡ ταχύτητα τοῦ πυραύλου *ἐλαττώνεται* ἀπό $υ_0$ σέ $υ_π$.

Παράδειγμα. Ἕνας πύραυλος ἔχει μάζα $m_π = 2700$ kgr καί φέρνει πάνω του τεχνητό δορυφόρο, πού ἔχει μάζα $m_Δ = 90$ kgr. Ἀπό τίς παρατηρήσεις βρήκαμε ὅτι μετά τήν ἐκτόξευση τοῦ δορυφόρου ἡ ταχύτητά του αὐξήθηκε κατά 2 m/sec. Θά βροῦμε πόσο ἐλαττώθηκε ἡ ταχύτητα τοῦ πυραύλου. Ἀπό τήν ἐξίσωση (4) ἔχουμε:

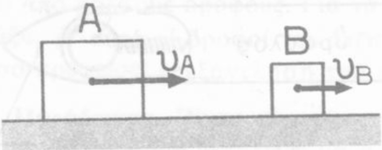
$$(\upsilon_0 - \upsilon_\pi) = \frac{m_\Delta}{m_\pi} \cdot (\upsilon_\Delta - \upsilon_0) = \frac{90 \text{ kgr}}{2700 \text{ kgr}} \cdot 2 \text{ m/sec}$$

καί $\quad \upsilon_0 - \upsilon_\pi \simeq 0{,}066 \text{ m/sec}$

Ἡ διαφορά μεταξύ τῶν ταχυτήτων υ_Δ καί υ_π εἶναι περίπου ἴση μέ 2 m/sec. Αὐτή ἡ διαφορά, ἄν καί εἶναι μικρή, εἶναι ὅμως ἀρκετή, ὥστε ἔπειτα ἀπό μερικές περιφορές γύρω ἀπό τή Γῆ ὁ φορέας πύραυλος καί ὁ δορυφόρος διακρίνονται ἀπό ἕναν παρατηρητή, πού βρίσκεται στή Γῆ, σάν δύο ξεχωριστά σώματα πού κινοῦνται στό διάστημα.

24. Κρούση δύο στερεῶν σωμάτων

Δύο στερεά σώματα Α καί Β κινοῦνται χωρίς τριβή πάνω σέ λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο (σχ. 38) κατά τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ ἀντίστοιχες σταθερές ταχύτητες υ_A καί υ_B. Τό καθένα σῶμα ἐκτελεῖ μεταφορική κίνηση καί ἐπειδή εἶναι $\upsilon_A > \upsilon_B$ τά δύο σώματα θά συγκρουστοῦν. *Ἡ κρούση* δύο στερεῶν σωμάτων εἶναι ἕνα φαινόμενο πού διαρκεῖ *ἐλάχιστο χρόνο,* ἀλλά στή διάρκεια αὐτοῦ τοῦ χρόνου συμβαίνει *ἀπότομη μεταβολή τῆς ταχύτητας* τῶν δύο σωμάτων.



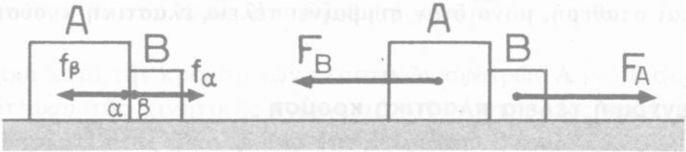
Σχ. 38. Κρούση δύο στερεῶν σωμάτων.

α. Διατήρηση τῆς ὁρμῆς κατά τήν κρούση. Τό φαινόμενο τῆς κρούσεως ἀρχίζει καί τελειώνει σέ δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 καί t_2. Τό πείραμα δείχνει ὅτι στήν ἐλάχιστη διάρκεια τῆς κρούσεως $\Delta t = t_2 - t_1$ συμβαίνουν *πολύ μεγάλες μεταβολές τῆς ταχύτητας* τῶν δύο σωμάτων καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἐμφανίζονται *τεράστιες ἐπιταχύνσεις,* πού ὀφείλονται σέ *πολύ μεγάλες δυνάμεις.* Σχετικά μέ αὐτές τίς δυνάμεις ὅλες οἱ ἄλλες δυνάμεις, πού ἐνεργοῦν στά δύο σώματα, θεωροῦνται *ἀσήμαντες* καί γι' αὐτό, τό σύστημα τῶν δύο σωμάτων πού συγκρούονται, τό θεωροῦμε ὡς *μονωμένο σύστημα.* Στή διάρκεια τῆς κρούσεως λαβαίνουμε ὑπόψη μόνο τίς τεράστιες δυνάμεις πού ἐμφανίζονται στά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο στερεῶν σωμάτων. Τό πείραμα δείχνει ὅτι:

Κατά τήν κρούση δύο στερεῶν σωμάτων (μονωμένο σύστημα) ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή.

Μεταξύ τῶν χρονικῶν στιγμῶν t_1 καί t_2 τά παραπάνω δύο στερεά σώματα βρίσκονται σέ ἐπαφή (σχ. 39). Τότε ἕνα ὑλικό σημεῖο α τοῦ σώματος Α ἐξασκεῖ σέ ἕνα σημεῖο β τοῦ σώματος Β μιά *δύναμη* f_α, ἀλλά καί τό σημεῖο β ἐξασκεῖ στό σημεῖο α μιά *ἀντίδραση* f_β, ἀντίθετη μέ τή δύναμη f_α. Ὥστε στή διάρκεια τοῦ χρόνου $t_2 - t_1$ τῆς κρούσεως ἐφαρμόζονται στά σώματα Α καί Β ἀντίστοιχα οἱ ἀντίθετες δυνάμεις.

$$F_A = \Sigma f_\alpha \qquad \text{καί} \qquad F_B = \Sigma f_\beta$$



Σχ. 39. Στή διάρκεια τῆς κρούσεως ἐμφανίζονται πολύ μεγάλες δυνάμεις.

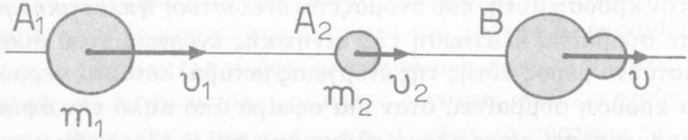
β. Ἀνελαστική καί ἐλαστική κρούση. Ὅταν συμβαίνει κρούση δύο στερεῶν σωμάτων, *ἡ ὁλική ὁρμή* τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή*, ἀλλά σχεδόν πάντοτε ἕνα μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος μετατρέπεται σέ θερμότητα καί γι' αὐτό *ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια* τοῦ συστήματος *δέ διατηρεῖται σταθερή*. Ἐνδιαφέρουσες εἶναι δύο ἀκραῖες περιπτώσεις. Σέ ὁρισμένες κρούσεις τά δύο σώματα *κολλᾶνε* τό ἕνα μέ τό ἄλλο καί μετά τήν κρούση ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα. Κατά τήν κρούση αὐτή, πού ὀνομάζεται *ἀνελαστική* ἤ *πλαστική κρούση*, πάντοτε συμβαίνει ἐλάττωση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος, γιατί ἕνα μέρος αὐτῆς τῆς ἐνέργειας μεταβάλλεται σέ θερμότητα. Τέτοια κρούση συμβαίνει, ὅταν μιά σφαίρα ἀπό πηλό τήν ἀφήσουμε ἐλεύθερη νά πέσει πάνω σέ μιά πλάκα ἀπό πηλό. Μετά τήν κρούση ἡ μάζα τῆς σφαίρας εἶναι ἐνσωματωμένη μέ τή μάζα τῆς πλάκας.

Ἀντίθετα, σέ μερικές κρούσεις τά δύο στερεά σώματα, μετά τή σύγκρουσή τους, πάντοτε *ἀποχωρίζονται* τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο. Κατά τήν κρούση αὐτή, πού ὀνομάζεται *ἐλαστική κρούση*, συμβαίνει πολύ μικρή ἐλάττωση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος. Καί ἄν τά συγκρουόμενα σώματα εἶναι τελείως ἐλαστικά, τότε συμβαίνει *τέλεια ἐλαστική κρούση* καί ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή*. Τέτοια κρούση συμβαίνει, ὅταν ἀπό ὁρισμένο ὕψος h ἀφήσουμε μιά σφαίρα ἀπό χάλυβα νά πέσει ἐλεύθερα πάνω σέ μιά πλάκα ἀπό χάλυβα. Τότε ἡ σφαίρα μετά τήν κρούση ἀνεβαίνει στό ἴδιο ὕψος h, γιατί ἡ μηχανική ἐνέργεια τῆς σφαίρας *διατηρεῖται σταθερή*. Οἱ κρούσεις τῶν στερεῶν σωμάτων παρουσιάζουν διάφορες μορφές, ἀπό τήν τέλεια ἀνελαστική ὥς τήν τέλεια ἐλαστική κρούση. Ὥστε:

Κατά τήν κρούση ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή, ἐνῶ ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια τοῦ συστήματος διατηρεῖται σταθερή, μόνο ὅταν συμβαίνει τέλεια ἐλαστική κρούση.

25. Κεντρική τέλεια πλαστική κρούση

Θεωροῦμε δύο *τελείως πλαστικές σφαῖρες* A_1 καί A_2, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μάζες m_1 καί m_2, ἐκτελοῦν εὐθύγραμμη μεταφορική κίνηση καί τά κέντρα βάρους τῶν δύο σφαιρῶν βρίσκονται πάντοτε πάνω στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 40). Οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ τῶν δύο σφαιρῶν ἔχουν τόν ἴδιο φορέα καί τήν ἴδια φορά. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ κρούση ὀνομάζεται *κεντρική κρούση*. Κατά τή σύγκρουσή τους οἱ δύο σφαῖρες κολλᾶνε ἡ μιά μέ τήν ἄλλη καί ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα B, πού ἔχει μάζα m_1+m_2 καί ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, ἡ ὁποία ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῶν ταχυτήτων $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$. Ἀλλά κατά τήν κρούση αὐτή συμβαίνει πάντοτε παραμόρφωση τῶν σωμάτων, γιά τήν ὁποία ἀπαιτεῖται *δαπάνη ἐνέργει-*



Σχ. 40. Κεντρική κρούση δύο τελείως πλαστικῶν σφαιρῶν A καί B.

ας. Ἡ ὁλική ὁρμή τοῦ συστήματος *διατηρεῖται σταθερή* καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἀλγεβρική ἐξίσωση:

$$(m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2) - (m_1 + m_2) \cdot \upsilon = 0$$

ἄρα $$\boxed{\upsilon = \frac{m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2}{m_1 + m_2}} \qquad (1)$$

Ἄν οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση, ἀλλά ἀντίθετη φορά, τότε στήν ἐξίσωση (1) οἱ ταχύτητες υ_1 καί υ_2 εἶναι ἑτερόσημες. Ὅταν οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ ἔχουν διαφορετικές διευθύνσεις, τότε ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ νέου σώματος προσδιορίζεται ἀπό τήν ἀνυσματική ἐξίσωση:

$$m_1\vec{\upsilon_1} + m_2\vec{\upsilon_2} = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}$$

Γενικά κατά τήν κρούση τῶν πλαστικῶν σφαιρῶν Α καί Β συμβαίνει *ἐλάττωση* τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ συστήματος κατά ΔΕ, ἡ ὁποία ὑπολογίζεται εὔκολα ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2\upsilon_2^2\right) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\upsilon^2 \qquad \text{ἄρα}$$

$$\boxed{\text{ἐλάττωση κινητικῆς ἐνέργειας} \quad \Delta E = \frac{m_1 m_2(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}}$$

7/C

Παράδειγμα. Ἕνα σιδηροδρομικό βαγόνι Α ἔχει μάζα $m_1 = 10^4$ kgr, κινεῖται πάνω σέ ὁριζόντια εὐθύγραμμη τροχιά μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 1$ m/sec. Τό βαγόνι Α συγκρούεται μέ ἕνα ἄλλο βαγόνι Β, πού ἔχει μάζα $m_2 = 15 \cdot 10^3$ kgr καί εἶναι σταματημένο πάνω στή γραμμή μέ λυμένα τά φρένα του. Κατά τή σύγκρουση τά δύο βαγόνια συνδέονται τό ἕνα μέ τό ἄλλο καί ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα πού κινεῖται μέ ταχύτητα υ. Τό βαγόνι Β ἀρχικά εἶχε ταχύτητα $\upsilon_2 = 0$. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε:

$$\upsilon = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \upsilon_1 = \frac{10^4 \text{ kgr}}{25 \cdot 10^3 \text{ kgr}} \cdot 1 \frac{m}{sec} = 0{,}40 \frac{m}{sec}$$

Ἡ μεταβολή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας εἶναι:

$$\Delta E = \frac{10^4 \text{ kgr} \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ kgr}}{2 \cdot 25 \cdot 10^3 \text{ kgr}} \cdot 1 \frac{m^2}{sec^2} = \frac{150 \cdot 10^6}{50 \cdot 10^3} \text{ Joule} = 3000 \text{ Joule}$$

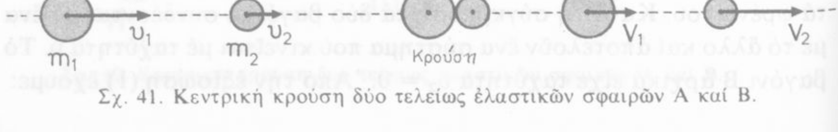
26. Κεντρική τέλεια ἐλαστική κρούση

Ὅταν συμβαίνει *τέλεια ἐλαστική κρούση* προκαλοῦνται στά δύο σώματα *ἐλαστικές παραμορφώσεις*, πού διαρκοῦν ἐλάχιστο χρόνο. Σ' αὐτό τόν ἐλάχιστο χρόνο τά δύο *τελείως ἐλαστικά σώματα* ξαναπαίρνουν τό ἀρχικό σχῆμα τους, καί μεταξύ τῶν δύο σωμάτων ἀναπτύσσονται ἰσχυρές δυνάμεις, πού ἀναγκάζουν τά σώματα *νά ἀπομακρυνθοῦν* τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

Ἄς θεωρήσουμε δύο τελείως ἐλαστικές σφαῖρες A_1 καί A_2, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μάζες m_1 καί m_2, ἐκτελοῦν εὐθύγραμμη μεταφορική κίνηση καί τά κέντρα βάρους τῶν δύο σφαιρῶν βρίσκονται πάντοτε πάνω στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 41). Οἱ ταχύτητες $\overrightarrow{\upsilon_1}$ καί $\overrightarrow{\upsilon_2}$ τῶν δύο σφαιρῶν ἔχουν τόν ἴδιο φορέα, τήν ἴδια φορά καί ἡ κρούση τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι κεντρική. Μετά τήν κρούση οἱ σφαῖρες A_1 καί A_2 ἔχουν ἀντίστοιχες ταχύτητες $\overrightarrow{V_1}$ καί $\overrightarrow{V_2}$, πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση καί φορά μέ τίς ταχύτητες $\overrightarrow{\upsilon_1}$ καί $\overrightarrow{\upsilon_2}$. Κατά τήν τέλεια ἐλαστική κρούση *ἡ ὁλική ὁρμή* καί *ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια* τοῦ συστήματος *διατηροῦνται σταθερές* καί ἑπομένως ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἀλγεβρικές ἐξισώσεις:

$$m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 = m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2$$

$$\text{ἤ} \qquad m_1(\upsilon_1 - V_1) = m_2(V_2 - \upsilon_2) \qquad (1)$$



Σχ. 41. Κεντρική κρούση δύο τελείως ἐλαστικῶν σφαιρῶν Α καί Β.

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot \upsilon_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2$$

$$\text{ἤ} \quad m_1(\upsilon_1^2 - V_1^2) = m_2(V_2^2 - \upsilon_2^2) \qquad (2)$$

Ἂν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\upsilon_1 + V_1 = V_2 + \upsilon_2 \qquad (3)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (3) βρίσκουμε ὅτι *μετά τήν κρούση* οἱ σφαῖρες A_1 καί A_2 ἔχουν ἀντίστοιχες ταχύτητες:

$$\boxed{V_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\,\upsilon_1}{m_1 + m_2}} \quad (4) \qquad \boxed{V_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\,\upsilon_2}{m_1 + m_2}} \quad (5)$$

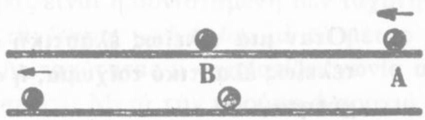
Ὅταν οἱ ταχύτητες $\vec{\upsilon_1}$ καί $\vec{\upsilon_2}$ ἔχουν διαφορετικές διευθύνσεις, τότε γιά νά ἐκφράσουμε τό νόμο τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς, ἐκλέγουμε κατάλληλους ἄξονες καί πάνω σ' αὐτούς προβάλλουμε τά ἀνύσματα τῶν ὁρμῶν πρίν καί μετά τήν κρούση.

α. Μερικές περιπτώσεις. **1. Σφαῖρες μέ ἴσες μάζες.** Ἂν οἱ παραπάνω δύο τελείως ἐλαστικές σφαῖρες A_1 καί A_2 ἔχουν ἴσες μάζες $m_1 = m_2 = m$, τότε ἀπό τίς ἐξισώσεις (4) καί (5) βρίσκουμε:

$$V_1 = \frac{2m\,\upsilon_2}{2m} \quad \text{ἤ} \quad V_1 = \upsilon_2 \quad \text{καί} \quad V_2 = \frac{2m\,\upsilon_1}{2m} \quad \text{ἤ} \quad V_2 = \upsilon_1$$

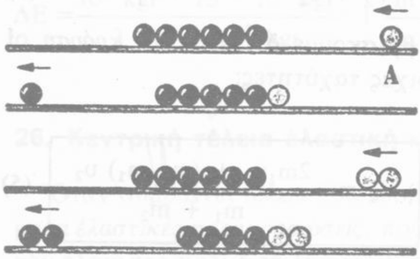
Κατά τήν κεντρική κρούση δύο τελείως ἐλαστικῶν σφαιρῶν, πού ἔχουν ἴσες μάζες, οἱ σφαῖρες ἀνταλλάσσουν τίς ταχύτητές τους.

Ἂν λοιπόν ἡ μιά ἀπό τίς δύο σφαῖρες, π.χ. ἡ Β (σχ. 42) ἀρχικά εἶναι ἀκίνητη ($\upsilon_2 = 0$), τότε μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα Α μένει ἀκί-



Σχ. 42. Οἱ δύο ἴσες σφαῖρες ἀνταλλάσουν τίς ταχύτητές τους.

νητη ($V_1 = 0$), ἐνῶ ἡ σφαίρα Β ἀποκτᾶ τήν ταχύτητα πού εἶχε ἡ σφαίρα Α ($V_2 = \upsilon_1$). Ἡ ὁρμή καί ἡ κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας Α μποροῦν νά μεταδοθοῦν στήν ἀκίνητη σφαίρα Β καί διά μέσου μιᾶς σειρᾶς ἀπό ἴσες ἐλαστικές σφαῖρες, πού ἐφάπτονται ἡ μιά μέ τήν ἄλλη (σχ. 43).



Σχ. 43. Μετάδοση τῆς ὁρμῆς καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας.

2. Κρούση πάνω σέ τελείως ἐλαστικό τοίχωμα. Μιά τελείως ἐλαστική σφαίρα, πού ἔχει μάζα m_1 καί ταχύτητα υ_1, συγκρούεται *κάθετα* μέ ἕνα τελείως ἐλαστικό τοίχωμα πού ἠρεμεῖ (σχ. 44). Τότε εἶναι $m_2 = \infty$ καί $\upsilon_2 = 0$. Μετά τήν κρούση τό μέτρο V_1 τῆς ταχύτητας πού ἔχει ἡ σφαίρα εἶναι:

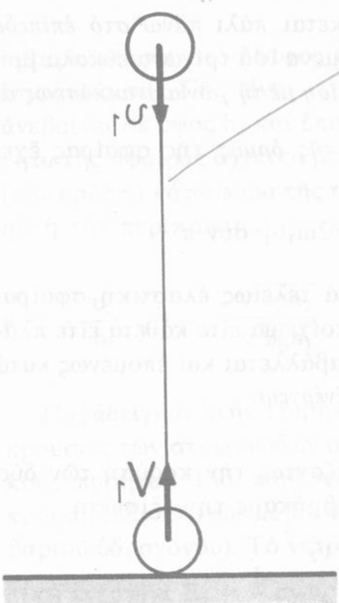
$$V_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + (m_1 - m_2)\,\upsilon_1}{m_1 + m_2}$$

Ἄν διαιρέσουμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διά m_2 καί βάλουμε $\upsilon_2 = 0$, ἔχουμε:

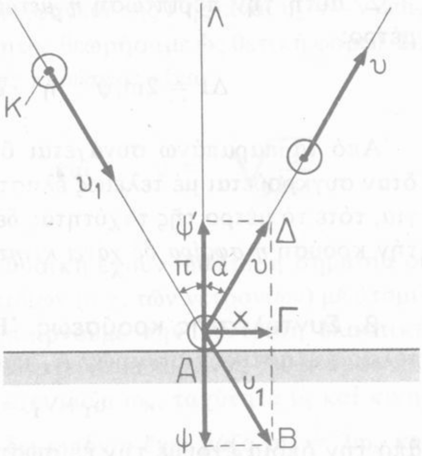
$$V_1 = \frac{\left(\dfrac{m_1}{m_2} - 1\right)\upsilon_1}{\left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right)} \qquad \text{ἄρα} \qquad V_1 = -\upsilon_1$$

γιατί εἶναι $m_1/m_2 = 0$. Ὥστε:

Ὅταν μιά τελείως ἐλαστική σφαίρα χτυπάει κάθετα πάνω σέ τελείως ἐλαστικό τοίχωμα, ἡ σφαίρα ἀνακλᾶται μέ ἀντίθετη ταχύτητα.



Σχ. 44. Κάθετη κρούση ἐλαστικῆς σφαίρας.



Σχ. 45. Πλάγια κρούση ἐλαστικῆς σφαίρας.

Κατά τήν κρούση αὐτή ἡ *μεταβολή τῆς ὁρμῆς* ἔχει μέτρο:

$$\Delta J = m_1\,(\upsilon_1 - V_1) = m_1\,[\upsilon_1 - (-\upsilon_1)] \quad \text{ἤ} \quad \Delta J = 2m_1\upsilon_1$$

Ἄν ἡ τελείως ἐλαστική σφαίρα χτυπάει *πλάγια* πάνω στό ἀκίνητο ἐλαστικό τοίχωμα (σχ. 45), τότε ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεως τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς σφαίρας σχηματίζει γωνία π μέ τήν κάθετο στό σημεῖο Α (σημεῖο προσπτώσεως). Ἡ τροχιά τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς σφαίρας βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο ΚΑΛ *(ἐπίπεδο προσπτώσεως)*, πού εἶναι κάθετο στό τοίχωμα. Τή στιγμή πού ἡ σφαίρα χτυπάει πάνω στό τοίχωμα ἀναλύουμε τήν ταχύτητά της $\vec{\upsilon_1}$ σέ δύο συνιστῶσες $\vec{\chi}$ καί $\vec{\psi}$. Κατά τήν κρούση ἡ συνιστώσα $\vec{\chi}$ διατηρεῖται σταθερή, ἐνῶ ἡ συνιστώσα $\vec{\psi}$ μετατρέπεται στήν ἀντίθετη συνιστώσα $\vec{\psi}'$. Ἔτσι *μετά τήν κρούση* ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τῆς σφαίρας εἶναι ἡ συνισταμένη τῶν ταχυτήτων $\vec{\chi}$ καί $\vec{\psi}'$. Τώρα *τό μέτρο τῆς ταχύτητας* υ *εἶναι ἴσο* μέ τό μέτρο τῆς ταχύτητας υ_1. Ἡ διεύθυνση τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ σχηματίζει γωνία α μέ τήν κάθετο ΛΑ *(γωνία ἀνακλάσεως)*. Μετά τήν κρούση ἡ τροχιά τοῦ κέντρου βάρους Κ τῆς σφαίρας βρίσκεται πάλι *πάνω στό ἐπίπεδο προσπτώσεως* ΚΑΛ. Ἀπό τά σχηματιζόμενα ἴσα τρίγωνα εὔκολα βρίσκουμε ὅτι *ἡ γωνία προσπτώσεως* π *εἶναι ἴση μέ τή γωνία ἀνακλάσεως* α.

Σ' αὐτή τήν περίπτωση *ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς* τῆς σφαίρας ἔχει μέτρο:

$$\Delta J = 2m_1\psi \quad \text{ἤ} \quad \Delta J = 2m_1\upsilon_1 \cdot \text{συν}\ \pi$$

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι μιά τελείως ἐλαστική σφαίρα, ὅταν συγκρούεται μέ τελείως ἐλαστικό τοίχωμα εἴτε κάθετα εἴτε πλάγια, τότε τό μέτρο τῆς ταχύτητας δέ μεταβάλλεται καί ἑπομένως κατά τήν κρούση *ἡ σφαίρα δέ χάνει κινητική ἐνέργεια.*

β. **Συντελεστής κρούσεως.** Ἐξετάζοντας τήν κρούση τῶν δύο τελείως ἐλαστικῶν σφαιρῶν A_1 καί A_2 βρήκαμε τήν ἐξίσωση

$$\upsilon_1 + V_1 = V_2 + \upsilon_2$$

ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\underbrace{\upsilon_1 - \upsilon_2}_{\text{πρίν ἀπό τήν κρούση}} = -\underbrace{(V_1 - V_2)}_{\text{μετά τήν κρούση}}$$

Αὐτές οἱ δύο διαφορές ταχυτήτων φανερώνουν *τή σχετική ταχύτητα* τῆς σφαίρας A_1 σχετικά μέ τή σφαίρα A_2 πρίν καί μετά τήν κρούση. Παρατηροῦμε ὅτι στήν τελείως ἐλαστική κρούση τό μέτρο τῆς σχετικῆς ταχύτητας διατηρεῖται σταθερό, ἡ φορά της ὅμως ἀντιστρέφεται. Γιά δύο σώματα πού συγκρούονται, ὀνομάζεται *συντελεστής κρούσεως* (u) ὁ μέ ἀντίθετο σημεῖο λόγος τῆς σχετικῆς ταχύτητας μετά τήν κρούση πρός τή σχετική ταχύτητα πρίν ἀπό τήν κρούση.

$$\text{συντελεστής κρούσεως} \qquad u = -\frac{V_1 - V_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2}$$

Στήν τέλεια ἐλαστική κρούση εἶναι $u = 1$, ἐνῶ στήν τέλεια ἀνελαστική κρούση εἶναι $u = 0$. Γενικά ὁ συντελεστής κρούσεως παίρνει τιμές ἀπό μηδέν ὥς τή μονάδα.

Μιά σφαίρα ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει ἀπό ὕψος h_1. Ὅταν ἡ σφαίρα φτάσει στό ἔδαφος ἡ σχετική ταχύτητά της σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς εἶναι $\upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}$. Μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα ἀνεβαίνει σέ ὕψος h_2 καί ἐπομένως μετά τήν κρούση ἡ σχετική ταχύτητα τῆς σφαίρας σχετικά μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς εἶναι $\upsilon_2 = -\sqrt{2gh_2}$ (τήν πρός τά κάτω φορά τῆς ταχύτητας θεωρήσαμε ὡς θετική φορά). Σέ αὐτή τήν περίπτωση *ὁ συντελεστής κρούσεως* εἶναι:

$$u = -\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = -\frac{-\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} \qquad \text{καί} \qquad u = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Παράδειγμα. Στήν Πυρηνική Φυσική ἔχουν ἰδιαίτερη σημασία οἱ κρούσεις τῶν στοιχειωδῶν σωματιδίων (π.χ. τῶν νετρονίων) μέ ἀτομικούς πυρῆνες. Γιά παράδειγμα παίρνουμε τήν κεντρική ἐλαστική κρούση *τοῦ νετρονίου μέ ἕνα δευτερόνιο* (εἶναι ὁ πυρήνας τοῦ ἀτόμου τοῦ βαριοῦ ὑδρογόνου). Τό νετρόνιο ἔχει μάζα m_N, ταχύτητα υ_1 καί κινητική ἐνέργεια $E_1 = \frac{1}{2} m_N \upsilon_1^2$. Τό δευτερόνιο ἔχει μάζα $m_\Delta = 2m_N$ καί ἀρχικά ἠρεμεῖ ($\upsilon_2 = 0$). Τό νετρόνιο καί τό δευτερόνιο τά θεωροῦμε ὡς τελείως ἐλαστικές σφαῖρες καί ἡ κρούση τους εἶναι κεντρική. Ἄρα ἡ ταχύτητα V_1 τοῦ νετρονίου μετά τή σύγκρουσή του μέ τό δευτερόνιο (ἐξίσωση 4) εἶναι:

$$V_1 = \frac{2m_\Delta\upsilon_2 + (m_N - m_\Delta)\upsilon_1}{m_N + m_\Delta} = \frac{(m_N - 2m_\Delta)\upsilon_1}{3m_N} \quad \text{ἤ} \quad V_1 = -\frac{\upsilon_1}{3}$$

Μετά τήν κρούση τό νετρόνιο ἔχει κινητική ἐνέργεια:

V_1^2

$$E_N = \frac{1}{2} m_N \cdot V_1^2 = \frac{1}{2} m_N \cdot \left(-\frac{\upsilon_1}{3}\right)^2$$

$$\text{ἤ} \quad E_N = \frac{1}{9} E_1$$

Ὥστε κατά τήν κρούση τό νετρόνιο *ἀποβάλλει* τά 8/9 τῆς ἀρχικῆς κινητικῆς ἐνέργειάς του. Αὐτή τήν ἐνέργεια τήν παίρνει τό δευτερόνιο. Ἔτσι τό νετρόνιο *ἐπιβραδύνεται* καί γι' αὐτό λέμε ὅτι τό βαρύ ὑδρογόνο εἶναι ἕνας *ἐπιβραδυντής νετρονίων*.

Προβλήματα

44. Μιά βάρκα εἶναι ἀκίνητη πάνω στήν ἤρεμη ἐπιφάνεια μιᾶς λίμνης. Ἡ βάρκα ἔχει μῆκος $l = 3$ m. Ἕνας ἄνθρωπος, πού ἦταν ἀκίνητος πάνω στή βάρκα, ἀρχίζει νά βαδίζει ἀπό τήν πλώρη πρός τήν πρύμνη. Κατά πόσο διάστημα θά μετακινηθεῖ ἡ βάρκα, ἄν ἡ μάζα τοῦ ἀνθρώπου εἶναι $m_A = 60$ kgr καί τῆς βάρκας εἶναι $m_B = 120$ kgr; Ἡ ἀντίσταση τοῦ νεροῦ παραλείπεται.

45. Ἕνα σφυρί ἔχει μάζα $m = 2$ kgr καί χτυπάει πάνω στό κεφάλι καρφιοῦ, πού θέλουμε νά χωθεῖ μέσα σέ ξύλο. Πόση δύναμη F ἐνεργεῖ πάνω στό καρφί, ἄν μέσα σέ χρόνο $\Delta t = 0{,}01$ sec ἡ ταχύτητα τοῦ σφυριοῦ μεταβάλλεται ἀπό $\upsilon = 5$ m/sec σέ μηδέν;

46. Ἕνα πυροβόλο ἔχει μάζα $m_\Pi = 300$ kgr καί ρίχνει βλῆμα πού ἔχει μάζα $m_B = 5$ kgr καί μέ γωνία βολῆς $\alpha = 30^o$ σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Τό βλῆμα ἔχει ταχύτητα $\upsilon_B = 500$ m/sec καί τό πυροβόλο βρίσκεται πάνω στό ὁριζόντιο ἔδαφος. Πόση εἶναι ἡ ὁριζόντια ταχύτητα ἀνακρούσεως τοῦ πυροβόλου;

47. Ἕνας δοκιμαστικός σωλήνας ἔχει μάζα M καί κλείνεται μέ φελλό πού ἔχει μάζα m. Ὁ σωλήνας περιέχει λίγες σταγόνες αἰθέρα καί εἶναι στερεωμένος σέ ὁριζόντια θέση στήν ἄκρη μιᾶς κατακόρυφης ράβδου πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα O πού περνάει ἀπό τήν πάνω ἄκρη τῆς ράβδου. Ἡ μάζα τῆς ράβδου θεωρεῖται ἀσήμαντη. Ὅταν θερμάνουμε ἐλαφρά τό σωλήνα, παράγονται ἀτμοί αἰθέρα μέ πίεση καί ὁ φελλός ἐκτοξεύεται. Πόση ἀρχική ταχύτητα υ πρέπει νά ἀποκτήσει ὁ φελλός, γιά νά διαγράψει ὁ σωλήνας ὁλόκληρη κυκλική τροχιά γύρω ἀπό τόν ἄξονα O;

48. Ἕνας πύραυλος ἔχει μάζα $m = 200$ tn καί τά ἀέρια ξεφεύγουν μέ ταχύτητα $\upsilon = 24$ km/sec σχετικά μέ τόν πύραυλο. Νά βρεθεῖ πόση μάζα δ ἀερίων πρέπει νά ξεφεύγει κατά δευτερόλεπτο: α) γιά νά ἀρχίσει ὁ πύραυλος νά ἀνεβαίνει καί β) γιά νά ἀνεβαίνει μέ ἐπιτάχυνση $\gamma = 5$ m/sec^2. $g = 10$ m/sec^2.

49. Σέ ἕναν πύραυλο, πού ἡ ἀρχική μάζα του εἶναι $m_0 = 18$ tn,

ἐφαρμόζεται μιά σταθερή κατακόρυφη προωστική δύναμη $F = 3 \cdot 10^5$ N. Ἡ μάζα δ τῶν ἀερίων πού ξεφεύγουν κατά δευτερόλεπτο εἶναι σταθερή. Στό τέλος τοῦ χρόνου $t_1 = 90$ sec ἡ ὁλική μάζα τοῦ πυραύλου εἶναι $m_{τελ} = 6$ tn καί ὅλο τό καύσιμο ὑλικό ἔχει ἐξαντληθεῖ. Νά βρεθεῖ ἡ ἐπιτάχυνση γ τοῦ πυραύλου σέ μιά χρονική στιγμή t, ὅπου $0 \leqslant t \leqslant 90$ sec. $g = 10$ m/sec^2.

50. Ὁ τελευταῖος ὄροφος ἑνός πυραύλου βρίσκεται πολύ μακριά ἀπό τή Γῆ, ὥστε θεωρεῖται μονωμένο σύστημα, ἔχει μάζα m καί ἀπομακρύνεται ἀπό τή Γῆ μέ ταχύτητα $\upsilon = 1500$ m/sec. Ξαφνικά συμβαίνει ἔκρηξη καί αὐτό τό κινητό χωρίζεται σέ δύο κομμάτια Α καί Β. Ἡ μάζα m_2 τοῦ Β εἶναι τά 3/5 τῆς μάζας m_1 τοῦ Α. Τό κομμάτι Α ἐξακολουθεῖ νά ἀπομακρύνεται μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 1700$ m/sec καί ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεώς του σχηματίζει γωνία $\alpha = 45^\circ$ μέ τή διεύθυνση τῆς ἀρχικῆς κινήσεως. 1) Νά βρεθεῖ σέ συνάρτηση μέ τή μάζα m καί νά παρασταθεῖ γραφικά ἡ ὁρμή $\vec{J}$ τοῦ πυραύλου πρίν ἀπό τήν ἔκρηξη καί ἡ ὁρμή $\vec{J_1}$ τοῦ κομματιοῦ Α μετά τήν ἔκρηξη. 2) Νά προσδιοριστεῖ ἡ ὁρμή $\vec{J_2}$ τοῦ κομματιοῦ Β, ἡ διεύθυνση τῆς κινήσεώς του καί τό μέτρο υ_2 τῆς ταχύτητάς του.

51. Ἀπό ὕψος $h = 10$ m ἀφήνουμε ἐλεύθερη νά πέσει μιά σφαίρα πού ἔχει μάζα $m_1 = 30$ gr. Ἡ σφαίρα πέφτει πάνω σέ πλάκα μολύβδου πού ἔχει μάζα $m_2 = 500$ gr καί διατηρεῖται ὁριζόντια, κρεμασμένη ἀπό κατακόρυφα σπειροειδή ἐλατήρια. Μετά τήν κρούση ἡ σφαίρα μένει ἐνσωματωμένη μέσα στήν πλάκα τοῦ μολύβδου. Πόση εἶναι μετά τήν κρούση ἡ ταχύτητα υ_1 τοῦ συστήματος πλάκα-σφαίρα καί πόση ἡ ἐλάττωση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας; $g = 10$ m/sec^2.

52. Ἕνα βλῆμα, πού ἔχει μάζα $m_1 = 15$ gr κινεῖται μέ ὁριζόντια ταχύτητα υ_1 καί συγκρούεται μέ ἕνα κομμάτι ξύλου, πού ἔχει μάζα $m_2 = 3$ kgr καί κρέμεται ἀκίνητο ἀπό ἕνα μακρύ κατακόρυφο σχοινί. Τό βλῆμα σφηνώνεται μέσα στό ξύλο καί ἀμέσως μετά τήν κρούση τό κέντρο βάρους τοῦ ξύλου ἀνεβαίνει κατά $h = 20$ cm ψηλότερα ἀπό τήν ἀρχική θέση του. Νά βρεθεῖ τό μέτρο υ_1 τοῦ ταχύτητας τοῦ βλήματος. $g = 10$ m/sec^2.

53. Δύο ἀπόλυτα πλαστικές σφαῖρες Α καί Β ἔχουν ἀντίστοιχα

μάζες m_1 καί m_2 καί τό ἄθροισμα τῶν μαζῶν τους εἶναι $M = 200$ kgr. Ἡ σφαίρα Α κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 80$ m/sec, ἐνῶ ἡ σφαίρα Β κινεῖται κατά τήν ἀντίθετη φορά μέ ταχύτητα $\upsilon_2 = 45$ m/sec. Μετά τήν κεντρική κρούση τους οἱ δύο σφαῖρες ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα Γ πού κινεῖται μέ ταχύτητα $\upsilon = 30$ m/sec κατά τή φορά τῆς κινήσεως τῆς σφαίρας Α. Νά βρεθεῖ ἡ μάζα τῆς κάθε σφαίρας καί ἡ ἀπώλεια κινητικῆς ἐνέργειας πού σημειώθηκε κατά τήν κρούση.

54. Πάνω στήν ὁριζόντια ἐπιφάνεια μιᾶς παγωμένης λίμνης βρίσκεται ἀκίνητη μιά πέτρα Α πού ἔχει μάζα $m_1 = 3$ kgr. Πάνω της χτυπάει μιά ἄλλη πέτρα Β, πού ἔχει μάζα $m_2 = 5$ kgr. Οἱ δύο πέτρες θεωροῦνται ὡς μή ἐλαστικά σώματα καί ἡ κρούση εἶναι κεντρική. Μετά τή σύγκρουση ἡ πέτρα Α διατρέχει πάνω στόν πάγο διάστημα $s = 60$ m. Ὁ συντελεστής τριβῆς ὀλισθήσεως εἶναι $\mu = 0{,}02$. Πόση ταχύτητα εἶχε ἡ πέτρα Β τή στιγμή πού ἔγινε ἡ σύγκρουση; $g = 10$ m/sec^2.

55. Μιά σφαίρα Α ἔχει μάζα $m_1 = 100$ gr καί κινεῖται ὁριζόντια μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 20$ cm/sec. Μιά ἄλλη σφαίρα Β πού ἔχει μάζα $m_2 = 25$ gr κινεῖται κατακόρυφα ἀπό κάτω πρός τά πάνω μέ ταχύτητα $\upsilon_2 = 50$ cm/sec. Οἱ δύο σφαῖρες συγκρούονται κεντρικά καί ἀποτελοῦν ἕνα σῶμα Γ. Νά βρεθεῖ κατά ποιά διεύθυνση καί μέ πόση ταχύτητα υ κινεῖται τό νέο σῶμα Γ.

56. Δύο ἀπόλυτα ἐλαστικές σφαῖρες Α καί Β ἔχουν ἀντίστοιχα μάζα m_1 καί $m_2 = 2\,m_1$ καί κρέμονται ἀπό κατακόρυφο νῆμα, πού ἔχει μῆκος $l = 1$ m. Οἱ ἀκτίνες τῶν δύο σφαιρῶν θεωροῦνται ἀσήμαντες. Ἀρχικά οἱ δύο σφαῖρες ἐφάπτονται ἡ μιά μέ τήν ἄλλη. Ἀπομακρύνουμε τή σφαίρα Α ἀπό τή θέση ἰσορροπίας της, ὥστε τό νῆμα νά σχηματίσει γωνία $\alpha = 60^\circ$ μέ τήν κατακόρυφο πού περνάει ἀπό τό σημεῖο στηρίξεως τοῦ νήματος καί ἀφήνουμε τή σφαίρα ἐλεύθερη, χωρίς ἀρχική ταχύτητα. Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα υ_1 καί υ_2 ἀντίστοιχα τῶν σφαιρῶν Α καί Β μετά τήν κρούση. $g = 10$ m/sec^2.

57. Δύο ὅμοιες σφαῖρες Α καί Β πού ἡ καθεμιά ἔχει μάζα $m = 20$ gr, ἠρεμοῦν πάνω στήν ὁριζόντια ἐπιφάνεια μιᾶς παγωμένης λίμνης. Ἡ σφαίρα Α ρίχνεται πάνω στήν ἄλλη σφαίρα Β μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 50$

cm/sec. Ἄν ὁ συντελεστής κρούσεως μεταξύ τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι $u = 0,75$, νά βρεθοῦν οἱ ταχύτητες V_A καί V_B τῶν δύο σφαιρῶν μετά τήν κρούση.

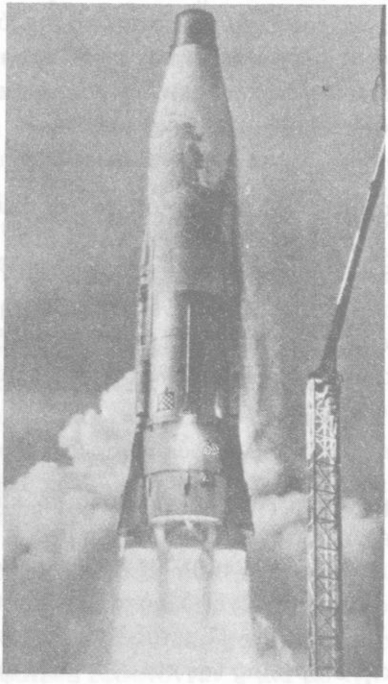
58. Ἐμπρός ἀπό ἕνα ἀνένδοτο κατακόρυφο τοίχωμα ΔΕ βρίσκονται δύο σημεῖα Α καί Β, πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό τό τοίχωμα εἶναι ἀντίστοιχα $\alpha = 2,75$ m καί $\beta = 4$ m. Ἡ ἀπόσταση τῶν σύο σημείων εἶναι $AB = \gamma = 10$ m. Ἀπό τό σημεῖο Α ἐκτοξεύεται πρός τό τοίχωμα μιά ἐλαστική σφαίρα, πού κινεῖται πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο χωρίς τριβή. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι τό μῆκος s τοῦ δρόμου πού διατρέχει ἡ σφαίρα, γιά νά πάει ἀπό τό σημεῖο Α στό σημεῖο Β, ἀφοῦ πρῶτα ἀνακλαστεῖ ἡ σφαίρα πάνω στό τοίχωμα.

59. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἔδαφος, ἀρχίζει νά κινεῖται μιά σφαίρα κατά μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, πού ἔχει μῆκος $l = h/3$ καί κλίση 30° σχετικά μέ τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Ἡ σφαίρα φτάνει στήν ἄκρη Γ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί ἀπό ἐκεῖ πέφτει πάνω στήν ἀνένδοτη ὁριζόντια ἐπιφάνεια τοῦ ἐδάφους. Ἡ κρούση θεωρεῖται ἐλαστική. Σέ πόσο ὕψος Η ἀνεβαίνει ἡ σφαίρα μετά τήν κρούση; 1l

60. Μιά μικρή σφαίρα Α, πού ἔχει μάζα m_1 καί κινεῖται μέ ταχύτητα υ_1, συγκρούεται κεντρικά μέ μιά ἄλλη μικρή σφαίρα Β, πού ἔχει μάζα m_2 καί εἶναι ἀκίνητη ($\upsilon_2 = 0$). Ἡ κρούση εἶναι ἐλαστική. α) Νά βρεθεῖ ποιά τιμή πρέπει νά ἔχει ὁ λόγος m_1/m_2 τῶν μαζῶν τῶν δύο σφαιρῶν, ὥστε: 1) ἡ μάζα m_1 νά μεταδώσει στή μάζα m_2 πολύ μικρό μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειας της καί 2) ἡ μάζα m_1 νά μεταδώσει στή μάζα m_2 τό μεγαλύτερο μέρος τῆς κινητικῆς ἐνέργειας της. β) Πῶς μπορεῖ νά ἐφαρμοστεῖ τό παραπάνω φαινόμενο τῆς κρούσεως γιά τό φρενάρισμα νετρονίων πού ἔχουν μεγάλη ταχύτητα; (μάζα νετρονίου m_n = μάζα πρωτονίου m_p).

61. Δύο μικρές σφαῖρες Α καί Β θεωροῦνται ὡς ὑλικά σημεῖα καί ἔχουν τήν ἴδια μάζα m. Ἡ σφαίρα Α κινεῖται κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα x μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 300$ m/sec καί συγκρούεται μέ τή σφαίρα Β

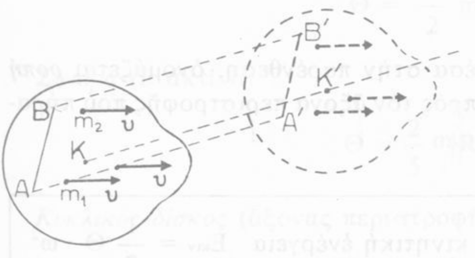
πού εἶναι ἀκίνητη ($\upsilon_2 = 0$). Μετά τήν κρούση οἱ διευθύνσεις τῆς κινήσεως τῶν σφαιρῶν Α καί Β σχηματίζουν μέ τόν ἄξονα x ἀντίστοιχα γωνίες θ_1 καί $\theta_2 = 30^o$. Νά βρεθοῦν ἡ γωνία θ_1 καί οἱ ταχύτητες V_1 καί V_2 τῶν σφαιρῶν μετά τήν κρούση.



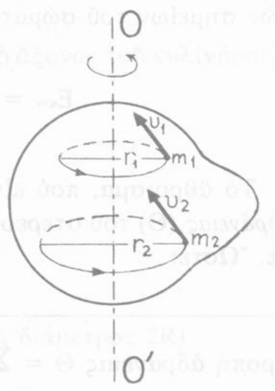
Κατακόρυφη ἀπογείωση πυραύλου. Ὁ πύραυλος ἔχει μῆκος 24 m, μάζα 110 000 kgr καί τά καύσιμα καί τό ὀξυγόνο ἔχουν μάζα 100 000 kgr.

27. Στροφική κίνηση στερεοῦ

Ἕνα στερεό σῶμα ἀποτελεῖται ἀπό στοιχειώδεις μάζες m_1, m_2, m_3, …m_ν πού τίς θεωροῦμε σάν ὑλικά σημεῖα. Ὅταν τό στερεό ἐκτελεῖ *μεταφορική κίνηση*, ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔχουν σέ κάθε στιγμή *τήν ἴδια ταχύτητα* $\vec{\upsilon}$ καί μιά εὐθεία τοῦ στερεοῦ μένει πάντοτε παράλληλη μέ τόν ἑαυτό της (σχ. 46). Ἡ μεταφορική κίνηση τοῦ στερεοῦ ἀνάγεται στήν κίνηση πού ἐκτελεῖ *τό κέντρο βάρους* τοῦ σώματος. Τότε τό σῶμα τό θεωροῦμε ὡς ὑλικό σημεῖο, πού ἔχει μάζα m ἴση μέ τήν ὁλική μάζα τοῦ στερεοῦ σώματος.



Σχ. 46. Μεταφορική κίνηση στερεοῦ.



Σχ. 47. Στροφική κίνηση στερεοῦ.

Ἄν τό ἴδιο στερεό στρέφεται γύρω ἀπό ἕνα *σταθερό ἄξονα* ΟΟ′, τότε τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ, πού ἀποτελοῦν *τόν ἄξονα περιστροφῆς*, παραμένουν *ἀκίνητα* (σχ. 47). Ὅλα τά ἄλλα ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔχουν σέ κάθε στιγμή *τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα* $\vec{\omega}$ καί διαγράφουν κυκλικές τροχιές, πού τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Τότε λέμε ὅτι τό στερεό σῶμα ἐκτελεῖ *στροφική κίνηση*. Ἄν ἡ γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ τοῦ στερεοῦ διατηρεῖται σταθερή, τό στερεό ἐκτελεῖ *ὁμαλή στροφική κίνηση*. Ὑποθέτουμε ὅτι τό στερεό δέ γλιστράει κατά μῆκος τοῦ ἄξονα περιστροφῆς.

28. Κινητική ἐνέργεια στρεφόμενου στερεοῦ

Ἕνα στερεό σῶμα, πού ἔχει μάζα m, στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 47) μέ σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Ἕνα ὑλικό σημεῖο τοῦ σώματος ἔχει μάζα m_1, βρίσκεται σέ ἀπόσταση r_1 ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς, διαγράφει τήν κυκλική τροχιά του μέ ταχύτητα πού ἔχει μέτρο $\upsilon_1 = \omega \cdot r_1$ καί ἑπομένως ἔχει κινητική ἐνέργεια:

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \upsilon_1^2 \quad \text{ἤ} \quad E_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1^2$$

Ἡ ὁλική κινητική ἐνέργεια ($E_{κιν}$) τοῦ στρεφόμενου στερεοῦ σώματος εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν κινητικῶν ἐνεργειῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ σώματος, δηλαδή εἶναι:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2}\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots m_ν r_ν^2\right) \cdot \omega^2$$

Τό ἄθροισμα, πού εἶναι μέσα στήν παρένθεση, ὀνομάζεται *ροπή ἀδράνειας* (Θ) τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς πού πήραμε. Ὥστε:

ροπή ἀδράνειας $\Theta = \sum mr^2$ κινητική ἐνέργεια $E_{κιν} = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2$

Ἡ ροπή ἀδράνειας εἶναι *μονόμετρο* μέγεθος καί στό σύστημα μονάδων MKS *μονάδα ροπῆς ἀδράνειας* εἶναι $1\ kgr \cdot m^2$.

Ἡ ροπή ἀδράνειας στερεοῦ. Στή στροφική κίνηση τοῦ στερεοῦ σώματος σημασία ἔχει *τό πῶς κατανέμεται ἡ μάζα* τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἀπό αὐτή τήν κατανομή τῆς μάζας m τοῦ σώματος *ἐξαρτᾶται* ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος. Ἄν τό στερεό σῶμα εἶναι *ὁμογενές* καί ἔχει ἁπλό γεωμετρικό σχῆμα, τότε ἔχει καί *ἄξονα συμμετρίας*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὑπολογίζεται ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας του.

Ροπή ἀδράνειας μερικῶν στερεῶν σωμάτων. Θεωροῦμε ὁμογενή στερεά σώματα πού ἔχουν γεωμετρικό σχῆμα, ἔχουν μάζα m καί ὁ ἄξονας περιστροφῆς περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ καθενός σώματος καί εἶναι ἄξονας συμμετρίας. Στόν παρακάτω πίνακα δίνεται ἡ ροπή ἀδράνειας Θ γιά μερικά στερεά.

Ράβδος (l μῆκος ράβδου, ἄξονας κάθετος στή ράβδο)

$$\Theta = \frac{1}{12}\, m \cdot l^2$$

Κυκλικός δίσκος (R ἀκτίνα, ἄξονας κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου)

$$\Theta = \frac{1}{2}\, m \cdot R^2$$

Κύλινδρος (R ἀκτίνα, ἄξονας περιστροφῆς ὁ ἄξονας τοῦ κυλίνδρου)

$$\Theta = \frac{1}{2}\, m \cdot R^2$$

Σφαίρα (R ἀκτίνα)

$$\Theta = \frac{2}{5}\, m \cdot R^2$$

Κυκλικός δίσκος (ἄξονας περιστροφῆς μιά διάμετρος 2R)

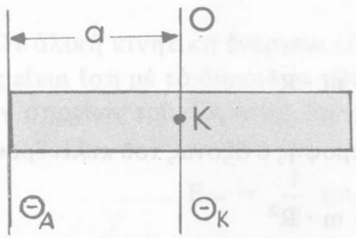
$$\Theta = \frac{1}{4}\, m \cdot R^2$$

Σφόνδυλος (ἀκτίνα R, ἡ μάζα στήν περιφέρεια)

$$\Theta = m \cdot R^2$$

α. Παράλληλοι ἄξονες περιστροφῆς. Ἡ ροπή ἀδράνειας ἑνός στερεοῦ σώματος ἐξαρτᾶται ἀπό τό πῶς κατανέμεται ἡ μάζα m τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἐάν ὁ ἄξονας περιστροφῆς μετατεθεῖ παράλληλα μέ τόν ἑαυτό του, τότε ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος *μεταβάλλεται.* Ἄς θεωρήσουμε ἕνα στερεό σῶμα (σχ. 48) καί *δύο παράλληλους ἄξονες* περιστροφῆς, τόν ἄξονα Ο, πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους Κ τοῦ σώματος καί τόν ἄξονα Α, πού ἡ ἀπόστασή του ἀπό τόν ἄξονα Ο εἶναι α. Ἐάν Θ_K εἶναι ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα Ο καί Θ_A *ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ σώματος ὡς πρός τόν ἄξονα* Α ἀποδείχνεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{παράλληλοι ἄξονες περιστροφῆς} \qquad \Theta_A = \Theta_K + m \cdot \alpha^2}$$



Σχ. 48. Παράλληλοι ἄξονες περιστοφῆς.

Παράδειγμα. Ἡ ροπή ἀδράνειας ὁμογενοῦς ράβδου (σχ. 48) ὡς πρός τόν ἄξονα Ο εἶναι $\Theta_K = \frac{1}{12} m \cdot l^2$, ὅπου l εἶναι τό μῆκος τῆς ράβδου. Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς ράβδου ὡς πρός ἄξονα Α κάθετο στή ράβδο καί πού περνάει ἀπό τήν ἄκρη τῆς ράβδου εἶναι:

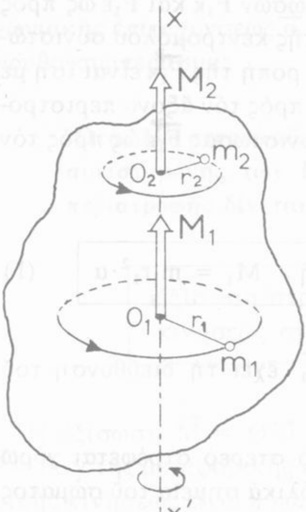
$$\Theta_A = \Theta_K + m \cdot \alpha^2 \quad \text{ἤ} \quad \Theta_A = \frac{1}{12} m \cdot l^2 + m \cdot \frac{l^2}{4}$$

$$\text{καί} \quad \Theta_A = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$

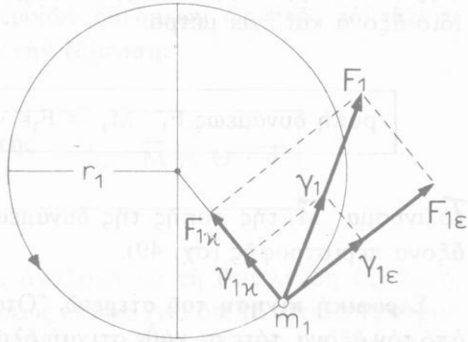
29. Ἐξίσωση τῆς στροφικῆς κινήσεως στερεοῦ

Ὅταν τό στερεό στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 49), ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ διαγράφουν κυκλικές τροχιές, πού τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Σέ κάθε στιγμή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ ἔχουν *τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα* ω καί *τήν ἴδια γωνιακή ἐπιτάχυνση* α.

γ_{1K} γ_{1E}



Σχ. 49. Στροφική κίνηση στερεοῦ.



Σχ. 50. Κυκλική κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου τοῦ στερεοῦ.

Κίνηση ἑνός ὑλικοῦ σημείου τοῦ στερεοῦ. Ἕνα ὑλικό σημεῖο τοῦ στερεοῦ ἔχει μάζα m_1 καί βρίσκεται σέ ἀπόσταση r_1 ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄν τό ὑλικό σημεῖο ἐκτελεῖ *κυκλική μεταβαλλόμενη κίνηση,* τότε σέ μιά χρονική στιγμή t τό ὑλικό σημεῖο ἔχει:

γωνιακή ταχύτητα	ω	ταχύτητα	$\upsilon_1 = \omega \cdot r_1$
γωνιακή ἐπιτάχυνση	α	ἐπιτάχυνση	γ_1

Ἡ ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_1$ ἀναλύεται σέ δύο συνιστῶσες, τήν κεντρομόλο ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_{1K}$ καί τήν ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}_{1E}$ (σχ. 50). Σύμφωνα μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ στό ὑλικό σημεῖο ἐνεργεῖ μιά δύναμη $\vec{F}_1$ πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\gamma}_1$ καί μέτρο ἴσο μέ $F_1 = m_1 \cdot \gamma_1$. Ἡ δύναμη $\vec{F}_1$ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς τοῦ ὑλικοῦ σημείου καί ἀναλύεται σέ δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστῶσες, *τήν κεντρομόλο συνιστῶσα* $\vec{F}_{1K}$ καί *τήν ἐπιτρόχια συνιστῶσα* $\vec{F}_{1E}$, πού ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο:

$F_{1K} = m_1 \cdot \gamma_{1K}$ ἤ $F_{1K} = m_1 \cdot \omega^2 \cdot r_1$

$F_{1E} = m_1 \cdot \gamma_{1E}$ ἤ $F_{1E} = m_1 \cdot \alpha \cdot r_1$

Ἡ ροπή τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν δύο συνιστωσῶν $\vec{F}_{1K}$ καί $\vec{F}_{1E}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα. Ἐπειδή ὅμως ἡ διεύθυνση τῆς κεντρομόλου συνιστώσας $\vec{F}_{1K}$ συναντᾶ τόν ἄξονα περιστροφῆς, ἡ ροπή τῆς $\vec{F}_{1K}$ εἶναι ἴση μέ μηδέν. Ἄρα ἡ ροπή $\vec{M}_1$ τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴση μέ τή ροπή τῆς ἐπιτρόχιας συνιστώσας $\vec{F}_{1E}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα καί ἔχει μέτρο:

$$\boxed{\text{ροπή δυνάμεως } F_1 \quad M_1 = F_{1E} \cdot r_1 \text{ ἤ } \quad M_1 = m_1 r_1^2 \cdot \alpha} \qquad (1)$$

Τό ἄνυσμα $\vec{M}_1$ τῆς ροπῆς τῆς δυνάμεως $\vec{F}_1$ ἔχει τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς (σχ. 49).

Στροφική κίνηση τοῦ στερεοῦ. Ὅταν τό στερεό στρέφεται γύρω ἀπό τόν ἄξονα, τότε σέ κάθε στιγμή ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ σώματος ἔχουν *τήν ἴδια γωνιακή ἐπιτάχυνση* $\vec{\alpha}$. Οἱ ἐσωτερικές δυνάμεις τοῦ συστήματος τῶν ὑλικῶν σημείων δέν ἐπηρεάζουν τήν κίνηση τοῦ στερεοῦ, γιατί κατά ζεύγη εἶναι ἀντίθετες (δράση - ἀντίδραση) καί ἑπομένως τό ἄθροισμα τῶν ροπῶν ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν δυνάμεων τοῦ συστήματος ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι ἴσο μέ μηδέν. Οἱ ροπές *τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων*, πού ἐφαρμόζονται στά διάφορα ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ, ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς ἔχουν μέτρο:

$$M_1 = m_1 r_1^2 \cdot \alpha \quad M_2 = m_2 r_2^2 \cdot \alpha \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; M_\nu = m_\nu r_\nu^2 \cdot \alpha$$

Τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν ροπῶν εἶναι ἴσο μέ τό μέτρο M τῆς ροπῆς *τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων* ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ. Ἄρα ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$M = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots m_\nu r_\nu^2) \cdot \alpha \quad \text{ἤ} \quad \boxed{M = \Theta \cdot \alpha}$$

Εἶναι φανερό ὅτι τά ἀνύσματα τῶν στοιχειωδῶν ροπῶν ἔχουν φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς καί ὅλα ἔχουν τήν ἴδια φορά. Ὥστε τό ἄνυσμα $\vec{M}$ τῆς ροπῆς τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ἔχει τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς, δηλαδή τή διεύθυνση τῆς γωνιακῆς ἐπιταχύνσεως $\vec{\alpha}$. Ἀπό τά παραπάνω καταλήγουμε στό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

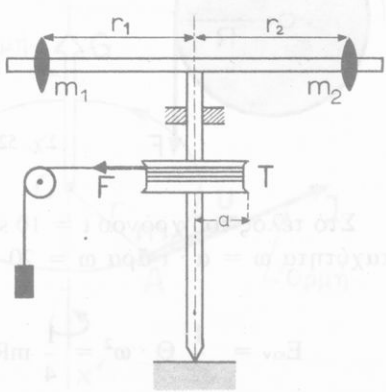
Ὅταν ἕνα στερεό σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ἡ ροπή $\vec{M}$ τῆς συνισταμένης τῶν ἐξωτερικῶν δυνάμεων ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

ἐξίσωση στροφικῆς κινήσεως στερεοῦ	$\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$

Ἡ ἐξίσωση $\vec{M} = \Theta \cdot \vec{\alpha}$ εἶναι ἀνάλογη μέ τή θεμελιώδη ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$ τῆς μεταφορικῆς κινήσεως καί δείχνει ὅτι τό αἴτιο τῆς στροφικῆς κινήσεως εἶναι *ἡ ροπή* $\vec{M}$. Ἡ ἀντίσταση τοῦ στερεοῦ στή μεταβολή τῆς ταχύτητάς του ἐκδηλώνεται μέ *τή ροπή ἀδράνειας* Θ τοῦ σώματος καί ἡ ὁποία ἐξαρτᾶται ἀπό τό πῶς κατανέμεται ἡ μάζα m τοῦ σώματος γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

Ἄν στό στερεό σῶμα δέν ἐφαρμόζεται καμιά ροπή ($\vec{M} = 0$), τότε δέν ὑπάρχει γωνιακή ἐπιτάχυνση ($\vec{\alpha} = 0$) καί τό σῶμα ἤ ἠρεμεῖ ($\vec{\omega} = 0$) ἤ ἐκτελεῖ ὁμαλή στροφική κίνηση ($\vec{\omega}$ = σταθ.).

Πειραματική ἐπαλήθευση τῆς ἐξισώσεως M = Θ · α. Μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 51 ἐπαληθεύουμε πειραματικά τήν ἐξίσωση M = Θ · α.



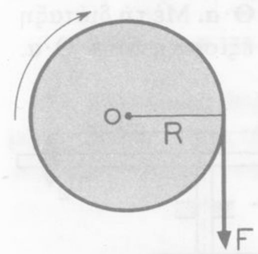
Σχ. 51. Σχηματική διάταξη γιά τήν πειραματική ἀπόδειξη τῆς ἐξισώσεως M = Θ · α

Ἡ δύναμη F ἀναπτύσσει στήν τροχαλία τή ροπή $F \cdot R$ καί αὐτή δίνει γωνιακή ἐπιτάχυνση α στό σύστημα τῶν δύο ἴσων μαζῶν m_1 καί m_2, πού μπορεῖ νά περιστρέφεται γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα. Μεταβάλλοντας τήν ἀπόσταση τῶν δύο μαζῶν ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς, μεταβάλλουμε τή ροπή ἀδράνειας (Θ) τοῦ συστήματος. Παρατηροῦμε ὅτι, ὅσο μεγαλύτερη γίνεται ἡ ροπή ἀδράνειας (Θ), τόσο μικρότερη γίνεται ἡ γωνιακή ἐπιτάχυνση α τοῦ συστήματος.

Παράδειγμα. Ἕνας μεταλλικός δίσκος ἔχει διάμετρο 2R = 1 m, μάζα m = 6 kgr καί στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου καί περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους του (σχ. 52). Ὁ δίσκος ἀρχίζει νά στρέφεται (t = 0) μέ τήν ἐπίδραση μιᾶς δυνάμεως F = 3 N, πού ἐφαρμόζεται στήν περιφέρεια τοῦ δίσκου καί ἡ διεύθυνσή της εἶναι πάντοτε ἐφαπτομένη τοῦ δίσκου. Τότε ἔχουμε:

$$M = \Theta \cdot \alpha \quad ἤ \quad F \cdot R = \frac{1}{2}\, mR^2 \cdot \alpha \quad ἄρα$$

$$\alpha = \frac{2F}{m \cdot R} = \frac{2 \cdot 3\ N}{6\ kgr \cdot 0{,}6\ m} = 2\ \frac{rad}{sec^2}$$



Σχ. 52. Περιστροφή δίσκου.

Στό τέλος τοῦ χρόνου t = 10 sec ὁ δίσκος ἔχει ἀποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω = α · t ἄρα ω = 20 rad/sec καί ἔχει κινητική ἐνέργεια:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2}\,\Theta \cdot \omega^2 = \frac{1}{4}\, mR^2 \cdot \omega^2 \quad καί \quad E_{κιν} = 150\ Joule$$

α. Ὁμαλή λειτουργία μηχανῆς. Σέ μιά μηχανή, πού λειτουργεῖ κανονικά, ὁ σφόνδυλος (ἤ ἄξονας τῆς μηχανῆς) στρέφεται μέ *σταθερή γωνιακή ταχύτητα* ω καί ἡ ἰσχύς P, τήν ὁποία προσφέρει ἡ μηχανή στό σφόνδυλο, ξοδεύεται ὡς ἔργο ἀντιστάσεων. Ἡ μηχανή ἀναπτύσσει στό σφόνδυλο μιά ροπή M, ἡ ὁποία σέ χρόνο t παράγει ἔργο:

$$W = M \cdot \varphi \quad \text{ἄρα} \quad W = M \cdot \omega \cdot t$$

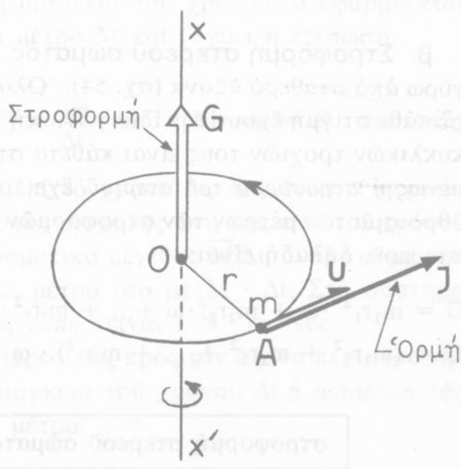
Ἐπειδή εἶναι $W = P \cdot t$

βρίσκουμε τήν ἐξίσωση $\boxed{P = M \cdot \omega}$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ἐξίσωση $P = F \cdot \upsilon$ πού ἔχουμε στή μεταφορική κίνηση.

30. Στροφορμή

α. Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου. Ἕνα ὑλικό σημεῖο A ἔχει μάζα m καί διαγράφει κυκλική τροχιά μέ ἀκτίνα r γύρω ἀπό ἄξονα x΄x, πού εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς στό κέντρο τοῦ κύκλου (σχ. 53). Σέ μιά χρονική στιγμή t ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ



Σχ. 53. Στροφορμή ὑλικοῦ σημείου.

σημείου ἔχει μέτρο ω καί ἑπομένως ἡ στιγμιαία ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἔχει μέτρο $\upsilon = \omega \cdot r$. Στή χρονική στιγμή t τό ὑλικό σημεῖο ἔχει *ὁρμή*, ἡ ὁποία παριστάνεται μέ τό ἄνυσμα $\vec{J}$, πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ καί μέτρο ἴσο μέ:

$$J = m \cdot \upsilon \quad \text{ἤ} \quad J = m \cdot \omega \cdot r$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἔχουμε τόν ἑξῆς *ὁρισμό:*

Στροφορμή ($\vec{G}$) τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x ὀνομάζεται ἡ ροπή τοῦ ἀνύσματος $\vec{J}$ ὡς πρός τόν ἴδιο ἄξονα.

Τό ἄνυσμα $\vec{G}$ τῆς στροφορμῆς ἔχει *ἀρχή* τό κέντρο Ο τῆς κυκλικῆς τροχιᾶς, *φορέα* τόν ἄξονα περιστροφῆς, *φορά* πού καθορίζεται ἀπό τόν κανόνα τοῦ δεξιόστροφου κοχλία καί *μέτρο* G ἴσο μέ:

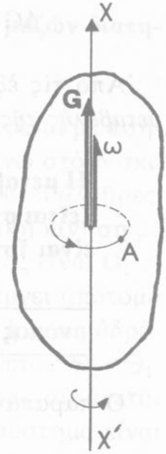
στροφορμή ὑλικοῦ σημείου	$G = m\upsilon \cdot r \quad \text{ἤ} \quad G = mr^2 \cdot \omega$	(1)

Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι στό σύστημα μονάδων MKS *μονάδα στροφορμῆς* εἶναι $1\ \text{kgr} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$.

β. Στροφορμή στερεοῦ σώματος. Ἕνα στερεό σῶμα στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα (σχ. 54). Ὅλα τά ὑλικά σημεῖα τοῦ στερεοῦ σέ κάθε στιγμή ἔχουν τήν ἴδια γωνιακή ταχύτητα ω καί τά ἐπίπεδα τῶν κυκλικῶν τροχιῶν τους εἶναι κάθετα στόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἑπομένως *ἡ στροφορμή τοῦ στερεοῦ* ἔχει μέτρο G ἴσο μέ τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν στροφορμῶν ὅλων τῶν ὑλικῶν σημείων τοῦ στερεοῦ, δηλαδή εἶναι:

$$G = m_1 r_1^2 \cdot \omega + m_2 r_2^2 \cdot \omega + \ldots + m_\nu r_\nu^2 \cdot \omega \quad \text{ἤ}$$
$$G = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_\nu r_\nu^2) \cdot \omega \quad \text{ἄρα}$$

στροφορμή στερεοῦ σώματος	$G = \Theta \cdot \omega$	(2)



Σχ. 54. Στροφορμή στερεοῦ σώματος.

Τά ἀνύσματα $\vec{G}$ καί $\vec{\omega}$ ἔχουν φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ. Ἡ ἐξίσωση (2) ἐκφράζεται μέ τήν ἀνυσματική ἐξίσωση:

$$\vec{G} = \Theta \cdot \vec{\omega}$$

γ. Μεταβολή τῆς στροφορμῆς στερεοῦ σώματος. Τό στερεό στίς χρονικές στιγμές t καί t+Δt ἔχει ἀντίστοιχα γωνιακή ταχύτητα ω καί ω+Δω. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt τό στερεό ἔχει ἐπιτάχυνση $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ καί ἑπομένως στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἐφαρμόζεται στό στερεό μιά *ροπή* πού ἔχει μέτρο Μ καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$M = \Theta \cdot \alpha \quad \text{ἤ} \quad M = \Theta \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{καί} \quad M \cdot \Delta t = \Theta \cdot \Delta\omega \qquad (3)$$

Τό γινόμενο τῆς ροπῆς Μ ἐπί τό χρόνο Δt, πού ἐνεργεῖ ἡ ροπή πάνω στό σῶμα, ὀνομάζεται *ὤθηση τῆς ροπῆς* στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt. Ἡ ὤθηση ροπῆς εἶναι ἀνυσματικό μέγεθος $\vec{M}\cdot\Delta t$, ἀνάλογο μέ τήν ὤθηση δυνάμεως $\vec{F}\cdot\Delta t$ καί ἔχει μέτρο ἴσο μέ $M \cdot \Delta t$. Στό σύστημα μονάδων MKS *μονάδα ὠθήσεως ροπῆς* εἶναι 1 N · m · sec.

Ἡ ροπή ἀδράνειας Θ τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς εἶναι μέγεθος σταθερό. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt *ἡ μεταβολή τῆς στροφορμῆς* τοῦ σώματος ἔχει μέτρο:

/ Δω

$$\Delta G = \Theta \cdot (\omega+\Delta\omega) - \Theta \cdot \omega \quad \text{ἄρα} \quad \Delta G = \Theta \cdot \cancel{\omega} \qquad (4)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (3) καί (4) συνάγεται ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς:*

Ἡ μεταβολή τῆς στροφορμῆς (ΔG) τοῦ σώματος, ἡ ὁποία προκαλεῖται στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἀπό τή δράση μιᾶς ροπῆς (Μ), εἶναι ἴση μέ τήν ὤθηση τῆς ροπῆς.

νόμος μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς	$\Delta G = M \cdot \Delta t$

Ὁ παραπάνω νόμος ἐκφράζεται μέ τήν ἀνυσματική ἐξίσωση:

$$\overrightarrow{\Delta G} = \overrightarrow{M} \cdot \Delta t$$

δ. Διατήρηση τῆς στροφορμῆς. **Στερεό σῶμα.** Ἀπό τήν ἐξίσωση $\Delta G = M \cdot \Delta t$ συνάγεται ὅτι, ἄν στό στρεφόμενο στερεό δέν ἐνεργεῖ καμιά ροπή (Μ = 0), τότε καί ἡ μεταβολή τῆς στροφορμῆς τοῦ στερεοῦ εἶναι ἴση μέ μηδέν (ΔG = 0) καί ἑπομένως ἡ στροφορμή τοῦ στερεοῦ *διατηρεῖται σταθερή* (G = σταθ.) Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό στερεό σῶμα ἤ ἠρεμεῖ (G = 0) ἤ ἐκτελεῖ ὁμαλή στροφική κίνηση (G = σταθ.). Γενικά ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς:*

Ὅταν σέ ἕνα στερεό σῶμα, πού μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό σταθερό ἄξονα, δέν ἐνεργεῖ καμιά ροπή, ἡ στροφορμή τοῦ σώματος διατηρεῖται σταθερή.

Ὁ παραπάνω νόμος μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἐκφράζει τήν ἀρχή τῆς ἀδράνειας στήν περίπτωση τῆς στροφικῆς κινήσεως.

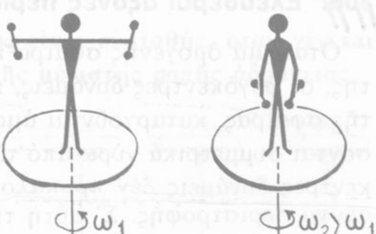
Μονωμένο σύστημα. Θεωροῦμε ἕνα *μονωμένο σύστημα*, δηλαδή σύστημα μαζῶν στό ὁποῖο δέν ἐφαρμόζονται ἐξωτερικές δυνάμεις ἤ ἐφαρμόζονται ἐξωτερικές δυνάμεις, ἀλλά *ἡ συνισταμένη τῶν ροπῶν τους* ὡς πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ συστήματος εἶναι *ἴση μέ μηδέν.* Ὅπως στή μεταφορική κίνηση (§ 22) ἔτσι καί στή στροφική κίνηση ἰσχύει *ἡ ἀρχή τῆς διατηρήσεως τῆς στροφορμῆς:*

Ἡ ὁλική στροφορμή ἑνός μονωμένου συστήματος μαζῶν διατηρεῖται σταθερή.

Παράδειγμα. Ἕνας ὁριζόντιος δίσκος μπορεῖ νά στρέφεται μέ ἀσήμαντη τριβή γύρω ἀπό κατακόρυφο ἄξονα (σχ. 55). Πάνω στό δίσκο στέκεται ἄνθρωπος πού στά δύο τεντωμένα χέρια του κρατεῖ ἀλτῆρες. Βάζουμε τό σύστημα δίσκος-ἄνθρωπος σέ ὁμαλή στροφική κίνηση μέ γωνιακή ταχύτητα ω_1. Τότε ἡ στροφορμή τοῦ συστήματος εἶναι $G_1 = \Theta_1 \cdot \omega_1$. Ὅταν τό σύστημα στρέφεται, ὁ ἄνθρωπος φέρνει ἀπότομα τούς δύο ἀλτῆρες κοντά στόν ἄξονα περιστροφῆς. Τότε ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ συστήματος ἐλαττώνεται ἀπότομα καί γίνεται $\Theta_2 < \Theta_1$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ συστήματος αὐξάνεται ἀπότομα καί γίνεται $\omega_2 > \omega_1$. Αὐτό συμβαίνει, γιατί τό σύστημα εἶναι μονωμένο καί ἑπομένως *ἡ στροφορμή του διατηρεῖται σταθερή*, δηλαδή εἶναι:

$$\Theta_1 \cdot \omega_1 = \Theta_2 \cdot \omega_2 \quad \text{ἄρα} \quad \omega_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \cdot \omega_1$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση δείχνει ὅτι, ἄν ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ συστήματος ἐλαττωθεῖ ($\Theta_2 < \Theta_1$), τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ συστήματος αὐξάνεται ($\omega_2 > \omega_1$) καί ἀντίστροφα.



Σχ. 55. Διατήρηση τῆς στροφορμῆς.

Ἀντιστοιχία τῶν μεγεθῶν τῆς μεταφορικῆς καί τῆς στροφικῆς κινήσεως. Μελετώντας *τή μεταφορική* καί *τή στροφική κίνηση* τοῦ στερεοῦ σώματος βρήκαμε διάφορα φυσικά μεγέθη πού εἶναι ἀπόλυτα ἀντίστοιχα στίς δύο αὐτές κινήσεις, ὅπως φαίνεται στόν παρακάτω πίνακα.

Ἀντιστοιχία μεταφορικῆς καί στροφικῆς κινήσεως

Μεταφορική κίνηση		Στροφική κίνηση	
Διάστημα	s	Γωνία στροφῆς	φ
Ταχύτητα	υ	Γωνιακή ταχύτητα	ω
Ἐπιτάχυνση	γ	Γωνιακή ἐπιτάχυνση	α
Δύναμη	F	Ροπή	M
Μάζα	m	Ροπή ἀδράνειας	Θ
Θεμελιώδης ἐξίσωση	$F = m \cdot \gamma$	Θεμελιώδης ἐξίσωση	$M = \Theta \cdot \alpha$
Ἔργο	$W = F \cdot \Delta s$	Ἔργο	$W = M \cdot \Delta\varphi$
Κινητική ἐνέργεια	$E = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2$	Κινητική ἐνέργεια	$E = \frac{1}{2} \Theta \cdot \omega^2$
Ὁρμή	$J = m \cdot \upsilon$	Στροφορμή	$G = \Theta \cdot \omega$
Ὤθηση δυνάμεως	$F \cdot \Delta t$	Ὤθηση ροπῆς	$M \cdot \Delta t$
Μεταβολή ὁρμῆς	$\Delta J = F \cdot \Delta t$	Μεταβολή στροφορμῆς	$\Delta G = M \cdot \Delta t$

Σχέσεις πού συνδέουν τή μεταφορική μέ τή στροφική κίνηση

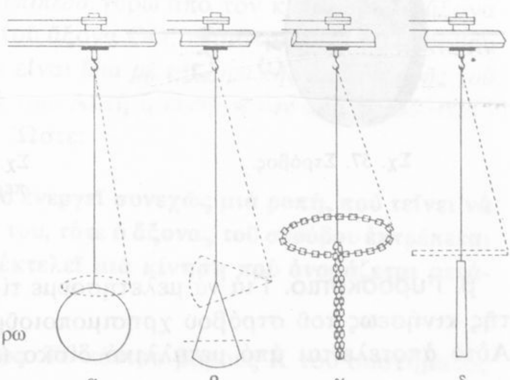
Μῆκος τόξου καί γωνία στροφῆς	$s = R \cdot \varphi$
Ταχύτητα καί γωνιακή ταχύτητα	$\upsilon = \omega \cdot R$
Κεντρομόλος ἐπιτάχυνση	$\gamma_K = \omega^2 \cdot R$
Ἐπιτρόχια ἐπιτάχυνση	$\gamma_E = \alpha \cdot R$

31. ~~30α.~~ Ἐλεύθεροι ἄξονες περιστροφῆς

Ὅταν μιά ὁμογενής σφαίρα περιστρέφεται γύρω ἀπό μιά διάμετρό της, οἱ φυγόκεντρες δυνάμεις, πού ἀναπτύσσονται στά ὑλικά σημεῖα τῆς σφαίρας, καταργοῦνται ἀμοιβαῖα, γιατί τά ὑλικά σημεῖα διατάσσονται συμμετρικά γύρω ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἔτσι οἱ φυγόκεντρες δυνάμεις δέν προκαλοῦν καμιά ἀλλαγή στή διεύθυνση τοῦ αξονα περιστροφῆς. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ἄξονας περιστροφῆς λέγεται *ἐλεύθερος ἄξονας*. Γενικά ὅλα τά σώματα ἔχουν ἐλεύθερους ἄξονες, πού περνοῦν ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ σώματος. Ἡ σφαίρα ἔχει ἄπειρους ἐλεύθερους ἄξονες. Σέ κάθε ἄλλο ὅμως σῶμα ὑπάρχουν τουλάχιστον *τρεῖς ἐλεύθεροι ἄξονες*, πού ὁ καθένας εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τῶν δύο ἄλλων.

Ὅταν ἕνα στερεό, πού περιστρέφεται γρήγορα, *μπορεῖ νά ἐκλέξει* ἀνάμεσα στούς διάφορους ἐλεύθερους ἄξονές του, τότε τό σῶμα προτιμᾶ ἐκεῖνο τόν ἐλεύθερο ἄξονα, ὡς πρός τόν ὁποῖο τό σῶμα ἀποκτᾶ *τή μεγαλύτερη ροπή ἀδράνειας*. Σ' αὐτή τήν περίπτωση παρατηροῦμε ὅτι οἱ στοιχειώδεις μάζες τοῦ στερεοῦ σώματος προσπαθοῦν *νά ἀπομακρυνθοῦν,* ὅσο μποροῦν περισσότερο ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Αὐτό φαίνεται στό ἑξῆς πείραμα. Ἕνας ὁμογενής κυκλικός δίσκος εἶναι στερεωμένος στή μιά ἄκρη σύρματος, πού ἡ προέκτασή του συμπίπτει μέ μιά διάμετρο τοῦ δίσκου (ἄξονας συμμετρίας). Ὅταν τό σύρμα στρέφεται πολύ γρήγορα γύρω ἀπό τόν κατά μῆκος ἄξονά του (σχ. 56α), ὁ δίσκος παίρνει ὁριζόντια θέση καί ἐξακολουθεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἐλεύθερο ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ δίσκου καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου. Ἄν διαταράξουμε γιά λίγο τό στρεφόμενο δίσκο, αὐτός ξανάρχεται στήν ὁριζόντια θέση. Γι' αὐτό λέμε ὅτι αὐτός ὁ ἐλεύθερος ἄξονας εἶναι *εὐσταθής ἐλεύθερος ἄξονας*. Τό στερεό σῶμα ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα ἔχει *τή μέγιστη ροπή ἀδράνειας*. Τό ἴδιο φαινόμενο παρατηροῦμε καί ὅταν περιστρέφεται γρήγορα ἕνας κῶνος, μιά θηλιά ἀπό ἁλυσίδα, ἕνας κύλινδρος (σχ. 56β, γ, δ). Ἡ περιστροφή τοῦ στερεοῦ γύρω ἀπό ἐλεύθερο ἄξονα μέγιστης ροπῆς ἀδράνειας δημιουργεῖ κατάσταση *εὐσταθοῦς* περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ *(εὐσταθής ἐλεύθερος ἄξονας)*. Ἀντίθετα ἡ περιστροφή τοῦ στερεοῦ γύρω ἀπό ἐλεύθερο ἄξονα ἐλάχιστης ροπῆς ἀδράνειας δημιουργεῖ κατάσταση *ἀσταθοῦς* περιστροφῆς τοῦ στερεοῦ *(ἀσταθής ἐλεύθερος ἄξονας)*. Ὥστε:

Ἡ περιστροφή στερεοῦ σώματος εἶναι εὐσταθής, ὅταν γίνεται γύρω ἀπό τόν ἐλεύθερο ἄξονα τῆς μέγιστης ροπῆς ἀδράνειας.

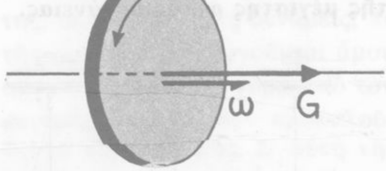


Σχ. 56. Περιστροφή στερεοῦ γύρω ἀπό ἐλεύθερο ἄξονα.

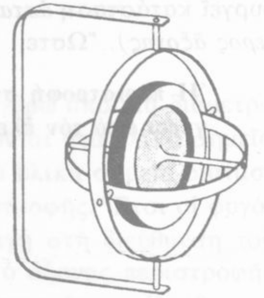
32. Στρόβος

α. [redacted] Διατήρηση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου. Ὀνομάζεται *στρόβος* ἕνας κυκλικός δίσκος πού ἔχει μεγάλη μάζα καί περιστρέφεται πολύ γρήγορα γύρω ἀπό ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ δίσκου καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου (σχ. 57). Ὁ ἄξονας αὐτός εἶναι ἄξονας συμμετρίας, ἐλεύθερος ἄξονας καί ἄξονας τῆς μέγιστης ροπῆς ἀδράνειας. Μιά βαριά σβούρα, πού στρέφεται πολύ γρήγορα, ἀποτελεῖ στρόβο. Τά ἀνύσματα τῆς γωνιακῆς ταχύτητας $\vec{\omega}$ καί τῆς στροφορμῆς $\vec{G}$ ἔχουν φορέα τόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου. Ὅταν στό στρεφόμενο στρόβο δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική ροπή, τό ἄνυσμα τῆς στροφορμῆς του $\vec{G}$ *διατηρεῖται σταθερό* (κατά διεύθυνση, φορά καί μέτρο). Ἔτσι ὁ στρεφόμενος στρόβος *διατηρεῖ ἀμετάβλητη τή διεύθυνση τοῦ ἄξονά του*. Αὐτό δείχνεται πειραματικά μέ τή διάταξη τοῦ σχήματος 58. Ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου στηρίζεται σέ σύστημα δακτυλίων, πού οἱ ἄξονες περιστροφῆς τους εἶναι κάθετοι μεταξύ τους (διάταξη Cardan). Ὅταν ὁ στρόβος στρέφεται γρήγορα, παρατηροῦμε ὅτι ὁπωσδήποτε καί ἄν μετακινήσουμε τή διάταξη αὐτή, ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου *δέν ἀλλάζει διεύθυνση*. Ὥστε:

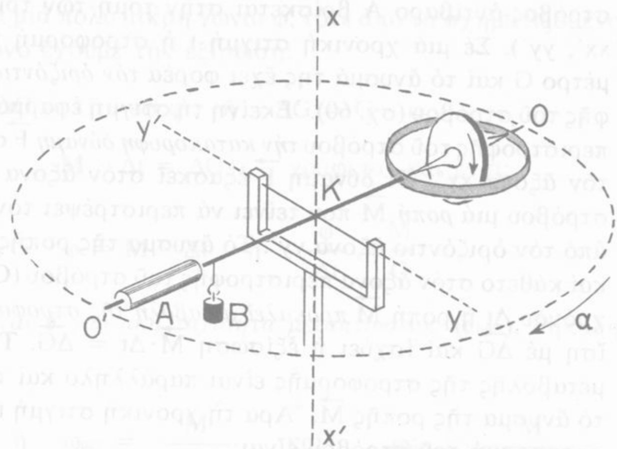
Ὅταν στό στρόβο δέν ἐνεργεῖ ἐξωτερική ροπή, ὁ στρόβος διατηρεῖ σταθερή τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς του.



Σχ. 57. Στρόβος.


Σχ. 58. Ἡ διεύθυνση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς διατηρεῖται σταθερή.

β. Γυροσκόπιο. Γιά νά μελετήσουμε τίς ἐνδιαφέρουσες ἰδιότητες τῆς κινήσεως τοῦ στρόβου χρησιμοποιοῦμε *τό γυροσκόπιο* (σχ. 59). Αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό μεταλλικό δίσκο (*στρόβο*), πού ἔχει μεγάλη



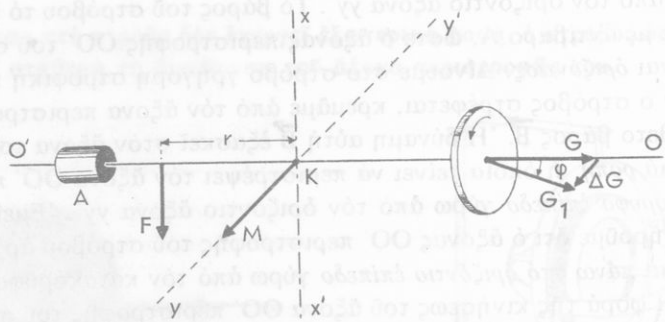
Σχ. 59. Γυροσκόπιο.

μάζα καί στρέφεται πολύ γρήγορα γύρω ἀπό ἄξονα ΟΟ΄. Ὁ ἄξονας αὐτός μπορεῖ νά στρέφεται γύρω ἀπό τόν κατακόρυφο ἄξονα xx΄ καί γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα yy΄. Τό βάρος τοῦ στρόβου τό ἰσορροποῦμε μέ ἀντίβαρο Α, ὥστε ὁ ἄξονας περιστροφῆς ΟΟ΄ τοῦ στρόβου νά εἶναι *ὁριζόντιος*. Δίνουμε στό στρόβο γρήγορη στροφική κίνηση. Ὅταν ὁ στρόβος στρέφεται, κρεμᾶμε ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς τό πρόσθετο βάρος $\vec{B}$. Ἡ δύναμη αὐτή $\vec{B}$ ἐξασκεῖ στόν ἄξονα τοῦ στρόβου μιά *ροπή*, ἡ ὁποία τείνει νά περιστρέψει τόν ἄξονα ΟΟ΄ *πάνω σέ κατακόρυφο ἐπίπεδο* γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα yy΄. Ἐμεῖς ὅμως παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἄξονας ΟΟ΄ περιστροφῆς τοῦ στρόβου ἀρχίζει νά κινεῖται *πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο* γύρω ἀπό τόν κατακόρυφο ἄξονα xx΄. Ἡ φορά τῆς κινήσεως τοῦ ἄξονα ΟΟ΄ περιστροφῆς τοῦ στρόβου πάνω στό ὁριζόντιο ἐπίπεδο εἶναι *ἴδια μέ τή φορά τῆς περιστροφῆς τοῦ στρόβου* γύρω ἀπό τόν ἄξονά του. Αὐτή ἡ κίνηση τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου ὀνομάζεται *μετάπτωση*. Ὥστε:

Ὅταν πάνω στό στρόβο ἐνεργεῖ συνεχῶς μιά ροπή, πού τείνει νά περιστρέψει τόν ἄξονά του, τότε ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου ἐκτρέπεται κατά ὀρθή γωνία καί ἐκτελεῖ μιά κίνηση πού ὀνομάζεται μετάπτωση.

Ἑρμηνεία τῆς μεταπτώσεως. Τό κέντρο βάρους Κ τοῦ συστήματος στρόβος-ἀντίβαρο Α βρίσκεται στήν τομή τῶν τριῶν ἀξόνων (ΟΟ΄, xx΄, yy΄). Σέ μιά χρονική στιγμή t ἡ στροφορμή τοῦ στρόβου ἔχει μέτρο G καί τό ἄνυσμά της ἔχει φορέα *τόν ὁριζόντιο ἄξονα* περιστροφῆς τοῦ στρόβου (σχ. 60). Ἐκείνη τή στιγμή ἐφαρμόζουμε στόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου *τήν κατακόρυφη δύναμη* $\vec{F}$ σέ ἀπόσταση r ἀπό τόν ἄξονα xx΄. Ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἐξασκεῖ στόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου μιά *ροπή* $\vec{M}$ πού τείνει νά περιστρέψει τόν ἄξονα ΟΟ΄ γύρω ἀπό τόν ὁριζόντιο ἄξονα yy΄. Τό ἄνυσμα τῆς ροπῆς $\vec{M}$ εἶναι *ὁριζόντιο* καί κάθετο στόν ἄξονα περιστροφῆς τοῦ στρόβου (ΟΟ΄). Στή διάρκεια χρόνου Δt ἡ ροπή $\vec{M}$ *προκαλεῖ μεταβολή τῆς στροφορμῆς* τοῦ στρόβου ἴση μέ $\vec{\Delta G}$ καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{M}\cdot\Delta t = \vec{\Delta G}$. Τό ἄνυσμα $\vec{\Delta G}$ τῆς μεταβολῆς τῆς στροφορμῆς εἶναι παράλληλο καί τῆς ἴδιας φορᾶς μέ τό ἄνυσμα τῆς ροπῆς $\vec{M}$. Ἄρα τή χρονική στιγμή $t + \Delta t$ ἡ καινούρια στροφορμή τοῦ στρόβου εἶναι:

$$\vec{G_1} = \vec{G} + \vec{\Delta G}$$



Σχ. 60. Ἑρμηνεία τῆς μεταπτώσεως.

Τό ἄνυσμα $\vec{G_1}$ πρέπει νά εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου τοῦ στρόβου καί γι' αὐτό ὁ ἄξονας περιστροφῆς τοῦ στρόβου (ΟΟ΄) στρέφεται καί παίρνει τή διεύθυνση τοῦ ἀνύσματος τῆς καινούριας στροφορμῆς $\vec{G_1}$. Ἔτσι δημιουργεῖται συνεχής μετακίνηση τοῦ ἄξονα περιστροφῆς ΟΟ΄ πάνω σέ ὁριζόντιο ἐπίπεδο, δηλαδή *προκαλεῖται ἡ μετάπτωση* τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου.

Ἐάν στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ὁ ἄξονας περιστροφῆς τοῦ στρόβου στραφεῖ κατά μιά πολύ μικρή γωνία φ, τότε ἀπό τό σχηματιζόμενο ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\Delta G = G \cdot \varepsilon\varphi\, \varphi \quad \text{ἤ} \quad \Delta G = G \cdot \varphi$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση $M \cdot \Delta t = \Delta G$ γράφεται καί ἔτσι:

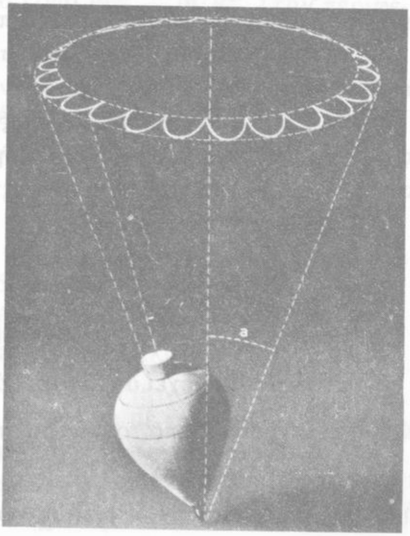
$$G \cdot \varphi = M \cdot \Delta t \quad \text{ἤ} \quad \frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{M}{G}$$

Ἀλλά $\varphi/\Delta t$ εἶναι *ἡ γωνιακή ταχύτητα μεταπτώσεως* ($\omega_{\mu\varepsilon\tau}$), δηλαδη εἶναι:

$$\omega_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{M}{G} \quad \text{ἤ} \quad \omega_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{M}{\Theta \cdot \omega} \quad \text{καί} \quad \omega_{\mu\varepsilon\tau} = \frac{M}{\Theta \cdot 2\pi\nu}$$

ὅπου ν εἶναι ἡ συχνότητα περιστροφῆς τοῦ στρόβου.

Κλόνιση τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου. Στό παραπάνω πείραμα μέ τό γυροσκόπιο βλέπουμε ὅτι ὁ ἄξονας τοῦ στρόβου ἐκτελεῖ *μετάπτωση*, ἀλλά ταυτόχρονα ἐκτελεῖ καί μιά μικρή ταλάντωση. Αὐτή ἡ δεύτερη



Σχ. 61. Μετάπτωση καί κλόνιση τοῦ ἄξονα τῆς σβούρας.

κίνηση τοῦ ἄξονα τοῦ στρόβου ὀνομάζεται *κλόνιση* καί ὀφείλεται στό ὅτι τό κέντρο βάρους τοῦ συστήματος στρόβος-ἀντίβαρο Α δέ συμπίπτει μέ τό σημεῖο στηρίξεως τοῦ συστήματος. Ἄν παρατηρήσουμε ἀπό πάνω μιά βαριά σβούρα πού στρέφεται πολύ γρήγορα, βλέπουμε ὅτι ἡ ἄκρη τοῦ ἄξονά της ἐκτελεῖ *μετάπτωση* καί *κλόνιση* (σχ. 61). Ἡ μετάπτωση προκαλεῖται ἀπό τό βάρος $\vec{B}$ τῆς σβούρας, τό ὁποῖο τείνει νά κατεβάσει τόν ἄξονα περιστροφῆς. Τότε ὁ ἄξονας ἐκτρέπεται κατά ὀρθή γωνία καί διαγράφει *κωνική ἐπιφάνεια*.

γ. Ἐφαρμογές τῶν ἰδιοτήτων τοῦ στρόβου.

Σέ πολλές ἐφαρμογές *ἐκμεταλλευόμαστε* τίς ἰδιότητες τοῦ στρόβου.

1. *Στή δισκοβολία* δίνουμε στό δίσκο ὅσο μποροῦμε πιό γρήγορη περιστροφική κίνηση καί τότε ὁ δίσκος εἶναι στρόβος, πού διατηρεῖ σταθερή τή διεύθυνση τοῦ ἄξονά του.
2. *Στή βλητική* δίνουμε στό βλῆμα γρήγορη περιστροφική κίνηση μέ ἕνα σύστημα ἑλικώσεων, πού ὑπάρχουν στά ἐσωτερικά τοιχώματα τῆς κάνης.
3. *Στήν ἀεροπορία* χρησιμοποιοῦμε τό γυροσκόπιο γιά *τήν αὐτόματη πλοήγηση*.
4. *Στή ναυπηγική* χρησιμοποιοῦμε γυροσκόπια, γιά νά ἐξασφαλίσουμε μεγαλύτερη εὐστάθεια τοῦ πλοίου.
5. *Ἡ γυροσκοπική πυξίδα* εἶναι στρόβος, πού διατηρεῖ πάντοτε τόν ἄξονά του παράλληλο μέ τόν ἄξονα τῆς Γῆς.
6. *Ἡ Γῆ εἶναι τεράστιος στρόβος*, πού ὁ ἄξονάς του ἐκτελεῖ μετάπτωση καί κλόνιση. Ἡ μετάπτωση ὀφείλεται στήν ἕλξη τοῦ Ἡλίου καί ἡ κλόνιση ὀφείλεται στήν ἕλξη τῆς Σελήνης.

Προβλήματα

62. Μιά σφαίρα ἔχει ἀκτίνα R, μάζα m καί ροπή ἀδράνειας ὡς πρός ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο της ἴση μέ $\Theta = \frac{2}{5} mR^2$. Ἀφήνουμε τή σφαίρα ἐλεύθερη νά κυλίσει ἀπό τήν κορυφή κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ ὁποία βρίσκεται σέ ὕψος h πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο. Πόση

ταχύτητα υ ἔχει τό κέντρο βάρους τῆς σφαίρας, ὅταν αὐτή φτάνει στό κατώτερο σημεῖο τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου καί πόση εἶναι τότε ἡ γωνιακή ταχύτητα ω καί ἡ κινητική ἐνέργεια Ε τῆς σφαίρας; Ἐφαρμογή: h = 40 cm. R = 10 cm. m = 3 kgr. g = 10 m/sec^2

63. Μιά ὁμογενής ράβδος ἔχει μῆκος l = 2 m καί στέκεται κατακόρυφη πάνω σέ ὁριζόντιο ἔδαφος. Μέ πόση ταχύτητα υ φτάνει στό ἔδαφος ἡ ἀνώτερη ἄκρη τῆς ράβδου, ὅταν ἡ ράβδος ἀνατρέπεται; Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς ράβδου ὡς πρός ἄξονα κάθετο στή ράβδο καί ὁ ὁποῖος περνάει ἀπό τήν ἄκρη τῆς ράβδου εἶναι $\Theta = \frac{1}{3} m \cdot l^2$, ὅπου m ἡ μάζα τῆς ράβδου. g = 10 m/sec^2.

1l

1l

64. Ὁ κινητήριος ἄξονας ἑνός αὐτοκινήτου ἐκτελεῖ 3000 στροφές τό λεπτό καί μεταδίδει ἀπό τή μηχανή στούς πίσω τροχούς ἰσχύ P= 60 kW. Πόση εἶναι ἡ ροπή πού ἀναπτύσσει ἡ μηχανή πάνω στόν ἄξονα;

65. Ἕνας ὁμογενής δίσκος ἔχει διάμετρο 2R = 40 cm, μάζα m = 3 kgr καί στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα πού περνάει ἀπό τό κέντρο τοῦ δίσκου καί εἶναι κάθετος στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου. Ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ δίσκου ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα εἶναι $\Theta = \frac{1}{2} m \cdot R^2$. Στήν περιφέρεια τοῦ δίσκου καί κάθετα στήν ἴδια πάντοτε ἀκτίνα ἐφαρμόζεται δύναμη F. Πόσο πρέπει νά εἶναι τό μέτρο αὐτῆς τῆς δυνάμεως, ὥστε ὁ δίσκος νά στρέφεται μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση α = 2 rad/sec^2; Πόση κινητική ἐνέργεια Ε ἔχει ὁ δίσκος μετά χρόνο t = 4 sec ἀπό τή στιγμή πού ξεκίνησε ἀπό τήν ἠρεμία;

66. Μιά ἕλικα ἀεροπλάνου ἔχει μάζα m = 50 kgr, πού τή θεωροῦμε συγκεντρωμένη σέ ἀπόσταση R = 60 cm ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ὅταν ἡ ἕλικα στρέφεται μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση α = 15 rad/sec^2, πόση εἶναι ἡ ροπή Μ πού ἐφαρμόζεται πάνω στήν ἕλικα;

67. Ἕνας σφόνδυλος ἀρχίζει νά στρέφεται μέ γωνιακή ἐπιτάχυνση α = 3 rad/sec^2 καί στή χρονική στιγμή t ἔχει ἀποκτήσει συχνότητα ν = = 24 Hz. Νά βρεθεῖ ὁ χρόνος t καί πόσες στροφές Ν ἔκανε ὁ σφόνδυλος, ὥσπου νά ἀποκτήσει αὐτή τή συχνότητα.

68. Ἕνας ὁμογενής δίσκος ἔχει διάμετρο $2R = 1{,}20$ m, μάζα $m = 300$ kgr καί στρέφεται χωρίς τριβές γύρω ἀπό ἄξονα κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ δίσκου καί ὁ ὁποῖος περνάει ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ δίσκου. Ἡ ροπή ἀδράνειας τοῦ δίσκου ὡς πρός αὐτό τόν ἄξονα εἶναι $\Theta = \frac{1}{2} m R^2$. α) Πόση γωνιακή ἐπιτάχυνση α ἀποκτᾶ ὁ δίσκος, ὅταν ἐνεργεῖ πάνω του συνεχῶς μιά ροπή ἴση μέ $M = 378$ N·m; β) Ἄν ὁ δίσκος στρέφεται ὁμαλά μέ συχνότητα $\nu = 20$ Hz, πόση ροπή M_1 πρέπει νά ἐνεργήσει συνεχῶς πάνω στό δίσκο, ὥστε αὐτός νά σταματήσει στή διάρκεια τοῦ χρόνου $t = 180$ sec;

69. Μιά ὁμογενής σφαίρα ἔχει μάζα m, ἀκτίνα R καί ἀφήνεται ἐλεύθερη νά κυλίσει κατά μῆκος κεκλιμένου ἐπιπέδου, πού ἔχει κλίση $\varphi = 30^\circ$. α) Ὅταν τό κέντρο βάρους τῆς σφαίρας ἔχει μεταφορική ταχύτητα υ, νά βρεθεῖ ὅτι ἡ ὀλική κινητική ἐνέργεια τῆς σφαίρας δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση $E = \frac{7}{10} m \cdot \upsilon^2$ β) Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα υ τοῦ κέντρου βάρους τῆς σφαίρας, ὅταν αὐτή θά ἔχει διατρέξει πάνω στό κεκλιμένο ἐπίπεδο διάστημα $s = 2$ m στίς ἑξῆς περιπτώσεις: 1) ὅταν δέν ὑπάρχουν τριβές καί 2) ὅταν ὑπάρχουν τριβές, πού ἡ συνισταμένη τους T ἐφαρμόζεται στό κέντρο βάρους τῆς σφαίρας καί εἶναι ἴση μέ τό 1/80 τῆς δυνάμεως F πού προκαλεῖ τήν κάθοδο τῆς σφαίρας. Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς σφαίρας ὡς πρός ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό κέντρο της, εἶναι $\Theta = \frac{2}{5} mR^2$. $g = 10$ m/sec^2.

70. Μιά μάζα $m = 100$ gr μπορεῖ νά γλιστράει χωρίς τριβή πάνω σέ μιά ὁριζόντια ράβδο AB. Ἡ ράβδος AB εἶναι στερεωμένη στό κέντρο της O πάνω σέ κατακόρυφο ἄξονα (Δ). Ἡ μάζα m θεωρεῖται ὡς ὑλικό σημεῖο καί ἀρχικά ἰσορροπεῖ σέ ἀπόσταση $O\Gamma = l = 16$ cm. Ἕνα λεπτό νῆμα συνδέει τή μάζα m μέ τό σημεῖο O. Τό τμῆμα OA τῆς ράβδου ἔχει μῆκος $OA = L = 32$ cm. Ἡ ροπή ἀδράνειας τῆς ὁμογενοῦς ράβδου AB ὡς πρός τόν ἄξονα (Δ) εἶναι $\Theta = 10^{-2}$ kgr · m^2. Δίνουμε στό σύστημα μιά γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 5$ rad/sec καί ἔπειτα τό ἀφήνουμε ἐλεύθερο. Τό νῆμα σπάζει καί ἡ μάζα m πετάγεται στήν ἄκρη A τῆς ράβδου. Πόση εἶναι ἡ νέα γωνιακή ταχύτητα ω_2 τοῦ συστήματος;

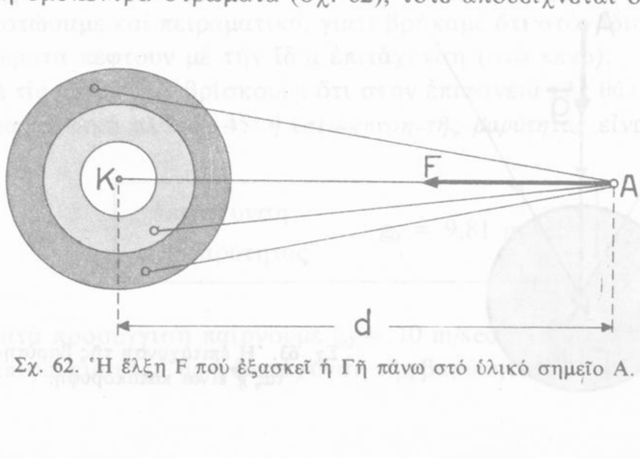
71. Δύο ἴσες μάζες $m_1 = m_2 = 2$ gr εἶναι στερεωμένες στίς ἄκρες μιᾶς ράβδου AB, πού ἔχει ἀσήμαντη μάζα, μῆκος $2l = 60$ cm καί στρέφεται χωρίς τριβή μέ συχνότητα $\nu = 2$ Hz γύρω ἀπό ὁριζόντιο ἄξονα, πού περνάει ἀπό τό μέσο O τῆς ράβδου. α) Νά βρεθεῖ ἡ στροφορμή G τοῦ συστήματος. β) Μέ μιά διάταξη, πού δέ δημιουργεῖ ἐξωτερικές δυνάμεις, μετακινοῦμε ταυτόχρονα τίς δύο μάζες m_1 καί m_2 καί τίς φέρνουμε σέ ἀπόσταση $l_1 = 10$ cm ἀπό τό σημεῖο O. Νά βρεθεῖ ἡ νέα γωνιακή ταχύτητα ω_1 τοῦ συστήματος καί ἡ νέα συχνότητα ν_1.

νά σχηματοι τό κενό

Πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς

33. Τό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς

Ὅπως ξέρουμε *ἡ μάζα* τῆς Γῆς δημιουργεῖ γύρω ἀπό τή Γῆ *τό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς*, δηλαδή ἕνα χῶρο μέσα στόν ὁποῖο πρέπει νά βρίσκεται ἕνα σῶμα, γιά νά ἕλκεται ἀπό τή Γῆ. Ἄν κατά προσέγγιση θεωρήσουμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαίρα ἀκτίνας R καί ἀποτελεῖται ἀπό ὁμογενή ὁμόκεντρα στρώματα (σχ. 62), τότε ἀποδείχνεται ὅτι:



Σχ. 62. Ἡ ἕλξη F πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ πάνω στό ὑλικό σημεῖο A.

Ἡ ἕλξη ($\vec{F}$) πού ἐξασκεῖ ἡ Γῆ πάνω σέ ἕνα ὑλικό σημεῖο μάζας m, πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, δίνεται ἀπό τό νόμο τοῦ Νεύτωνα, ἄν θεωρήσουμε ὅτι ὅλη ἡ μάζα M τῆς Γῆς εἶναι συγκεντρωμένη στό κέντρο τῆς Γῆς.

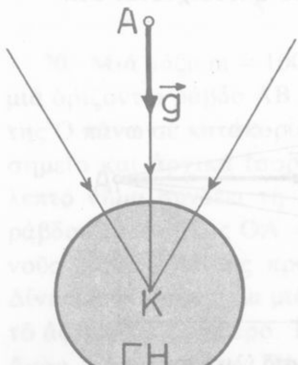
Δηλαδή δεχόμαστε ὅτι σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ Γῆ θεωρεῖται ὡς ὑλικό σημεῖο, πού συμπίπτει μέ τό κέντρο τῆς Γῆς καί ἔχει μάζα M ἴση μέ ὅλη τή μάζα τῆς Γῆς. Τότε ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{ἕλξη τῆς Γῆς} \qquad F = k \cdot \frac{M \cdot m}{d^2}} \tag{1}$$

ὅπου k εἶναι *ἡ σταθερή τῆς παγκόσμιας ἕλξεως:*

$$k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kgr^2$$

α. Βάρος ὑλικοῦ σημείου. Ἡ ἐξίσωση (1) δίνει τό μέτρο τῆς δυνάμεως $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖ ἡ μάζα τῆς Γῆς πάνω στή μάζα τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α. Αὐτή ἡ ἕλξη $\vec{F}$ εἶναι ἡ δύναμη πού ὀνομάζουμε *βάρος* $\vec{B}$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α. Πειραματικά βρήκαμε ὅτι ἡ δύναμη $\vec{B}$ εἶναι κατακόρυφη (δηλαδή ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἀκτίνας τῆς Γῆς), δίνει στή μάζα m τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α ἐπιτάχυνση $\vec{g}$, πού ἔχει τή διεύθυνση καί τή φορά τῆς δυνάμεως $\vec{B}$ (σχ. 63) καί ἰσχύει ἡ ἐξίσωση $\vec{B} = m \cdot \vec{g}$.



Σχ. 63. Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας $\vec{g}$ εἶναι κατακόρυφη.

Τό μέτρο τοῦ βάρους τοῦ ὑλικοῦ σημείου Α εἶναι Β = m · g.

Ἄν ἐκφράσουμε ὅτι *τό βάρος* $\vec{B}$ εἶναι *ἡ δύναμη βαρύτητας* $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖ πάνω στή μάζα m τό πεδίο βαρύτητας τῆς Γῆς, ἔχουμε τήν ἀλγεβρική ἐξίσωση:

$$m \cdot g = k \cdot \frac{M \cdot m}{d^2} \quad \text{ἄρα} \quad \boxed{g = k \cdot \frac{M}{d^2}}$$

Ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας (g) μεταβάλλεται ἀντιστρόφως ἀνάλογα μέ τό τετράγωνο τῆς ἀποστάσεως (d) ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς.

34. Μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ g μέ τό ὕψος

Ἄν θεωρήσουμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι σφαιρική, μέ ἀκτίνα R, τότε στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει μέτρο ἴσο μέ:

$$\boxed{g_0 = k \cdot \frac{M}{R^2} = \text{σταθ.}} \qquad (1)$$

Ὥστε, σέ ἀπόσταση R ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, δηλαδή στόν ἴδιο τόπο, *ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας εἶναι σταθερή*. Τό συμπέρασμα αὐτό τό διαπιστώσαμε καί πειραματικά, γιατί βρήκαμε ὅτι στόν ἴδιο τόπο ὅλα τά σώματα πέφτουν μέ τήν ἴδια ἐπιτάχυνση (στό κενό).

Μέ τίς μετρήσεις βρίσκουμε ὅτι στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί σέ γεωγραφικό πλάτος 45° *ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας* εἶναι ἴση μέ:

ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας	$g_0 = 9{,}81 \text{ m/sec}^2$

Κατά προσέγγιση παίρνουμε $g_0 \simeq 10 \text{ m/sec}^2$. Σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει μέτρο ἴσο μέ:

$$g_h = k \cdot \frac{M}{(R+h)^2} \qquad (2)$$

Ἐάν διαιρέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις (1) καί (2), βρίσκουμε ὅτι στό ὕψος h *ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας* δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

τιμή τοῦ g σέ ὕψος h	$g_h = g_0 \cdot \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$	(3)

Ἄν κατά προσέγγιση πάρουμε R = 6400 km, τότε σέ ὕψος h = 600 km πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, τό g ἔχει τήν τιμή:

$$g_h = g_0 \cdot \frac{(6400 \text{ km})^2}{(7000 \text{ km})^2} \quad \text{καί} \quad g_h \simeq 0{,}8\ g_0$$

α. Μικρές μεταβολές τοῦ ὕψους. Ὅταν τό ὕψος h εἶναι μικρό σχετικά μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς R, ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε ὅτι στό ὕψος h τό g ἔχει τήν τιμή:

τιμή τοῦ g σέ ὕψος h	$g_h = g_0 \left(1 - \dfrac{2h}{R} \right)$	(4)

Ὅταν λοιπόν ἀνεβαίνουμε σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας, *ἡ ἐλάττωση* τῆς τιμῆς τοῦ g εἶναι:

$$\Delta g = g_0 - g_h \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\Delta g = \frac{2h}{R} \cdot g_0}$$

Εὕρεση τῆς ἐξισώσεως (4). Ἀπό τήν ἐξίσωση (3) ἔχουμε:

$$\frac{g_0}{g_h} = \left(\frac{R+h}{R} \right)^2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{g_0}{g_h} = \left(1 + \frac{h}{R} \right)^2$$

Ἐπειδή τό h/R εἶναι πολύ μικρό, μποροῦμε κατά προσέγγιση νά θεωρήσουμε ὅτι τό $(h/R)^2$ εἶναι ἀσήμαντο καί ἐπομένως εἶναι:

$$\frac{g_0}{g_h} = \left(1 + \frac{2h}{R}\right) \qquad \text{καί} \qquad g_h = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{2h}{R}\right)}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί $\left(1 - \frac{2h}{R}\right)$ καί παραλείψουμε τό $(h/R)^2$, βρίσκουμε:

$$g_h = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\right)$$ B_h

Ἕνα σῶμα, πού στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἔχει βάρος $B_0 = mg_0$, σέ ὕψος h ἔχει βάρος $B_h = mg_h$. Ἡ ἐλάττωση τοῦ βάρους εἶναι $\Delta B = B_0 - B_h$ ἄρα:

$$\Delta B = m(g_0 - g_h) = mg_0 \cdot \frac{2h}{R} \qquad \text{καί} \qquad \Delta B = B_0 \cdot \frac{2h}{R}$$

Ἄν π.χ. εἶναι $B_0 = 100$ kp, $R \simeq 6400$ km καί $h = 4$ km, τότε ἡ ἐλάττωση τοῦ βάρους εἶναι $\Delta B = 0{,}125$ kp.

β. Πειραματική ἀπόδειξη. Τό ἐκκρεμές ἑνός ρολογιοῦ στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας καί σέ ὕψος h ἔχει ἀντίστοιχα περίοδο T_0 καί T_h, πού δίνονται ἀπό τίς ἐξισώσεις: ℓℓ/ℓ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}} \qquad \text{καί} \qquad T_h = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_h}} \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{T_h}{T_0} = \sqrt{\frac{g_0}{g_h}}$$

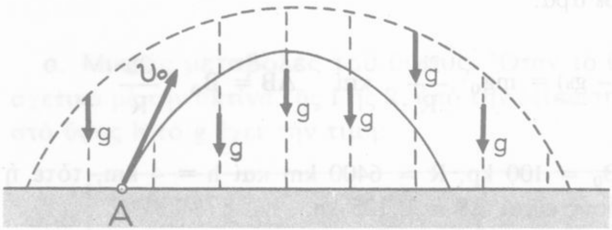
$$\text{ἤ} \qquad \frac{T_h}{T_0} = \sqrt{\left(\frac{R+h}{R}\right)^2} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\text{καί} \qquad T_h = T_0\left(1 + \frac{h}{R}\right) \tag{5}$$

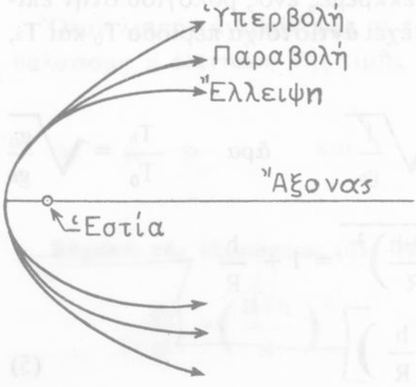
Ἐπειδή εἶναι $g_h < g_0$ ἕπεται ὅτι εἶναι $T_h > T_0$. Ἡ ἐξίσωση (5) ἐπαληθεύεται, ἄν στό ὕψος h μετρήσουμε πόσο καθυστερεῖ τό ρολόι στή διάρκεια μιᾶς ἡμέρας.

35. Ἡ πραγματική τροχιά τῶν βλημάτων

Ὅταν ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς ἐκτοξεύουμε ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ καί μέ ὁρισμένη γωνία βολῆς (σχ. 64), βρίσκουμε ὅτι ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι παραβολή (§ 13) καί ἕνα σημεῖο της εἶναι τό σημεῖο Α. Σ' αὐτή τήν περίπτωση θεωροῦμε ὅτι ἡ Γῆ εἶναι *ἐπίπεδη* καί ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας $\vec{g}$ *δέ μεταβάλλεται* μέ τό ὕψος. Αὐτή ἡ ἁπλοποιημένη ἐξέταση τῶν βλημάτων ἰσχύει γιά τά βλήματα τῶν πυροβόλων μας, γιατί τό βεληνεκές τῶν βλημάτων καί τό ὕψος πού φτάνουν εἶναι μικρά σχετικά μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς (R = = 6366 km).



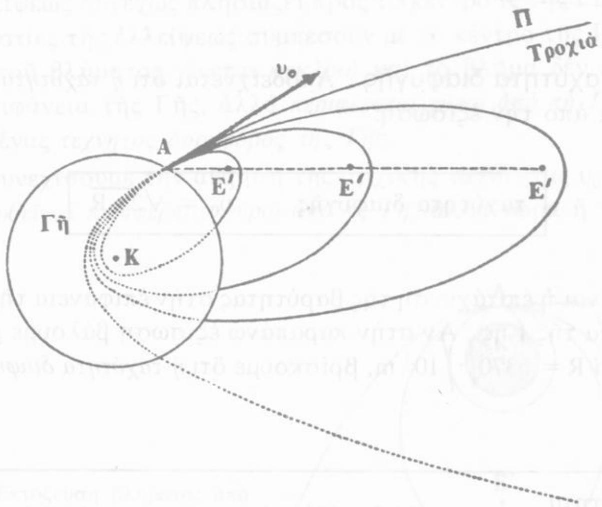
Σχ. 64. Ἡ τροχιά τοῦ βλήματος μᾶς φαίνεται παραβολή.



Σχ. 65. Δέν ξεχωρίζουμε τό τόξο παραβολῆς ἀπό τόξο ἐλλείψεως.

Ἀποδείχνεται ὅτι ἡ πραγματική τροχιά τοῦ βλήματος μέσα στό γήινο πεδίο βαρύτητας εἶναι τόξο *ἐλλείψεως*, πού ἡ μιά ἑστία της βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς. Ἐπειδή στά συνηθισμένα βλήματα τῶν πυροβόλων μας τό βεληνεκές εἶναι πολύ μικρό σχετικά μέ τήν ἀκτίνα τῆς Γῆς, γι' αὐτό ἡ τροχιά τοῦ βλήματος μᾶς φαίνεται τόξο παραβολῆς, πού δέν μποροῦμε νά τό ξεχωρίσουμε ἀπό τόξο ἐλλείψεως (σχ. 65).

α. Ἐκτόξευση βλήματος ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐδάφους ἐκτοξεύουμε βλήματα μέ τήν ἴδια γωνία βολῆς, ἀλλά μέ διαφορετική ἀρχική ταχύτητα υ_0. Ὅταν ἡ ἀρχική ταχύτητα υ_0 συνεχῶς αὐξάνεται, τότε οἱ τροχιές τῶν βλημάτων εἶναι τόξα *ἐλλείψεων*, πού ὅλες ἔχουν κοινό σημεῖο ἐπαφῆς τους τό σημεῖο Α, ἔχουν *μιά κοινή ἑστία* Ε πού βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς καί μιά δεύτερη ἑστία Ε΄ πού βρίσκεται πάνω σέ μιά εὐθεία πού περνάει ἀπό τό σημεῖο Α (σχ. 66). Ὅταν προοδευτικά αὐξάνεται ἡ ἀρχική ταχύτητα υ_0, ἡ δεύτερη ἑστία Ε΄ τῶν ἐλλείψεων συνεχῶς ἀπομακρύνεται, ἀλλά *τό βλῆμα διαγράφοντας ἕνα τόξο ἐλλείψεως πάντοτε ξαναγυρίζει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς*.



Σχ. 66. Τό βλῆμα διαγράφει τόξο ἐλλείψεως, παραβολῆς ἤ ὑπερβολῆς.

Ὅταν ὅμως ἡ ἀρχική ταχύτητα λάβει μιά ὁρισμένη τιμή, πού ὀνομάζεται *ταχύτητα διαφυγῆς* (velocity of escape), τότε ἡ δεύτερη ἑστία Ε΄ τῆς ἐλλείψεως ἀπομακρύνεται στό ἄπειρο καί ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *παραβολή*, πού ἡ ἑστία της Ε βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς. Καί ἄν ἡ ἀρχική ταχύτητα τοῦ βλήματος γίνει *μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, τότε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι *ὑπερβολή*. Ὥστε ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς:

– ἄν ἔχει ἀρχική ταχύτητα *μικρότερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, διαγράφει *τόξο ἐλλείψεως καί ἐπιστρέφει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς*·

– ἄν ἔχει ἀρχική ταχύτητα *ἴση ἤ μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, διαγράφει ἀντίστοιχα *τόξο παραβολῆς ἤ ὑπερβολῆς καί φεύγει γιά πάντα στό διάστημα*.

Ἀπό τά παραπάνω συνάγεται τό ἑξῆς γενικό συμπέρασμα:

Ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς μέ ὁποιαδήποτε γωνία βολῆς ἤ ἐπιστρέφει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς ἤ ἐλευθερώνεται ἀπό τήν ἕλξη τῆς Γῆς καί φεύγει γιά πάντα στό διάστημα.

β. Ἡ ταχύτητα διαφυγῆς. Ἀποδείχνεται ὅτι *ἡ ταχύτητα διαφυγῆς* υ_0 δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

ταχύτητα διαφυγῆς	$\upsilon_0 = \sqrt{2g_0R}$

ὅπου g_0 εἶναι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί R ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς. Ἄν στήν παραπάνω ἐξίσωση βάλουμε $g_0 = 9,81$ m/sec^2 καί $R = 6370 \cdot 10^3$ m, βρίσκουμε ὅτι *ἡ ταχύτητα διαφυγῆς* εἶναι ἴση μέ:

c//

ταχύτητα διαφυγῆς	$\upsilon_0 = 11,2 \cdot 10^3$ m/sec ἤ $\upsilon_0 = 11,2$ km/sec

ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς

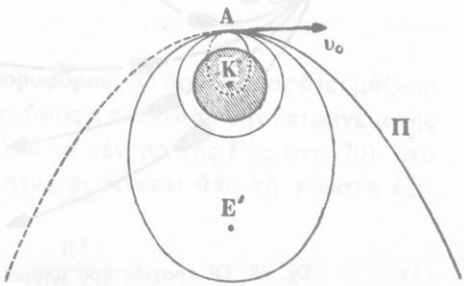
Ἀνακεφαλαιώνοντας τά παραπάνω γιά ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται *ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς* ἔχουμε:

ἐπιστροφή στή Γῆ (τροχιά ἔλλειψη)	$\upsilon_0 < 11{,}2$ km/sec
διαφυγή στό διάστημα (τροχιά παραβολή ἤ ὑπερβολή)	$\upsilon_0 \geqslant 11{,}2$ km/sec

36. Περιφορά βλήματος γύρω ἀπό τή Γῆ. Τεχνητός δορυφόρος.

Εἴδαμε ὅτι εἶναι ἀδύνατο νά ἐκτοξεύσουμε ἕνα βλῆμα, πού νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται *πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς*, ἐκτοξεύουμε ἕνα βλῆμα μέ ἀρχική ταχύτητα υ_0 (σχ. 67). Ὅταν *ἡ ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα* υ_0 εἶναι μικρή, τό βλῆμα διαγράφει *τόξο ἐλλείψεως* καί ξαναπέφτει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ἡ μιά ἑστία Ε τῆς ἐλλείψεως βρίσκεται στό κέντρο τῆς Γῆς καί ἡ ἄλλη ἑστία Ε΄ βρίσκεται ἀνάμεσα στό κέντρο τῆς Γῆς καί τό σημεῖο Α. Ὅταν ἡ ἀρχική ταχύτητα υ_0 συνεχῶς αὐξάνεται, ἡ δεύτερη ἑστία Ε΄ τῆς ἐλλείψεως συνεχῶς πλησιάζει πρός τό κέντρο Κ τῆς Γῆς καί ὅταν οἱ δύο ἑστίες τῆς ἐλλείψεως συμπέσουν μέ τό κέντρο τῆς Γῆς, τότε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος γίνεται *κυκλική* καί τό βλῆμα δέν ἐπιστρέφει στήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, ἀλλά *περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ,* δηλαδή γίνεται ἕνας *τεχνητός δορυφόρος τῆς Γῆς.*

Ἄν συνεχίσουμε τήν αὔξηση τῆς ἀρχικῆς ταχύτητας υ_0, τό βλῆμα *ἐξακολουθεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ,* ἀλλά τώρα ἡ τροχιά τοῦ



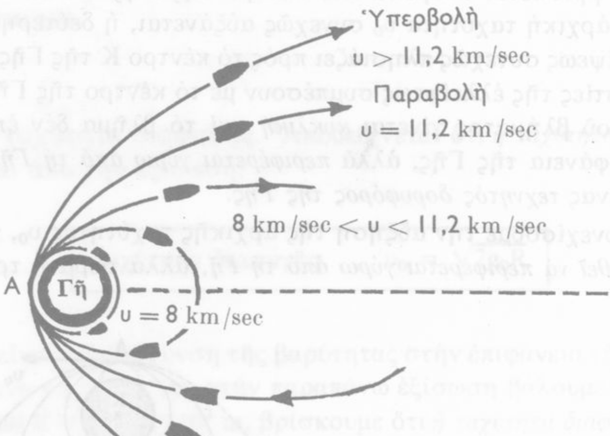
Σχ. 67. Ἐκτόξευση βλήματος ἀπό σημεῖο πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς.

βλήματος εἶναι *ἔλλειψη*, πού ἡ δεύτερη ἑστία της Ε΄ ἔχει μετατοπιστεῖ πέρα ἀπό τό κέντρο Κ τῆς Γῆς (σχ. 67).

Τέλος, ἄν ἡ ἀρχική ταχύτητα $υ_0$ γίνει *ἴση ἤ μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς, τότε ἡ τροχιά τοῦ βλήματος εἶναι ἀντίστοιχα *τόξο παραβολῆς ἤ ὑπερβολῆς* καί τό βλῆμα φεύγει γιά πάντα στό διάστημα. Ὥστε:

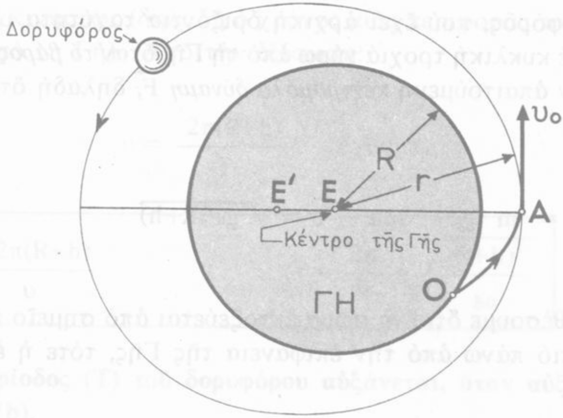
Ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό σημεῖο, πού βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, μπορεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ σέ κυκλική ἤ ἐλλειπτική τροχιά, ὅταν ἡ ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα $υ_0$ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς.

περιφορά γύρω ἀπό τή Γῆ	$υ_0 < \sqrt{2g_0R}$ ἤ	$υ_0 < 11{,}2$ km/sec



Σχ. 68. Οἱ τροχιές πού μπορεῖ νά διαγράψει τό βλῆμα.

α. Κυκλική κίνηση τεχνητοῦ δορυφόρου. Ἕνα σῶμα μπορεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή Γῆ σέ κυκλική ἤ ἐλλειπτική τροχιά, δηλαδή μπορεῖ τό σῶμα αὐτό νά γίνει *τεχνητός δορυφόρος* τῆς Γῆς, ἄν ἐκτοξεύσουμε τό σῶμα ἀπό ἕνα σημεῖο πού βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί μέ ὁριζόντια ἀρχική ταχύτητα υ_0 μικρότερη ἀπό τήν ταχύτητα διαφυγῆς. Γιά νά τοποθετήσουμε τό δορυφόρο στήν προκαθορισμένη τροχιά του, ἐφαρμόζουμε τήν ἑξῆς μέθοδο: Ἕνας πύραυλος διαγράφει βλητική τροχιά καί φέρνει τό δορυφόρο στό σημεῖο Α τῆς κυκλικῆς ἤ ἐλλειπτικῆς τροχιᾶς πού θέλουμε νά διαγράφει ὁ δορυφόρος (σχ. 69). Στό σημεῖο Α ὁ δορυφόρος δέχεται μιά κατάλληλη ὤθηση καί ξεφεύγει ἀπό τόν πύραυλο μέ τήν ἀπαιτούμενη ἀρχική ταχύτητα υ_0, πού ἔχει τή διεύθυνση τῆς ἐφαπτομένης τῆς τροχιᾶς στό σημεῖο Α.

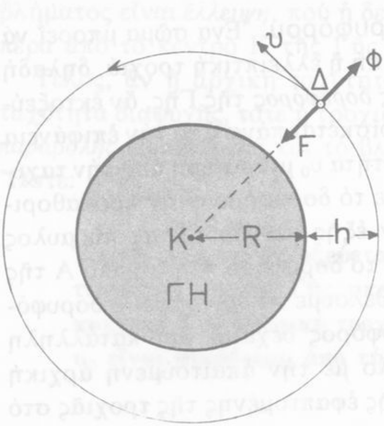


Σχ. 69. Τοποθέτηση τεχνητοῦ δορυφόρου στήν τροχιά του.

Ἐξισώσεις τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου. Ὁ δορυφόρος ἔχει μάζα m καί θά διαγράφει *κυκλική τροχιά* σέ ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, δηλαδή σέ ἀπόσταση R+h ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς (σχ. 70). Στό ὕψος h ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας g_h δίνεται ἀπό τή γνωστή ἐξίσωση:

$$g_h = g_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} \qquad (1)$$

g_h



γιά μηλιόσι
τό μινό

Σχ. 70. Κυκλική κίνηση τεχνητοῦ δορυφόρου.

Ὁ δορυφόρος, πού ἔχει ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητα υ, μπορεῖ νά κινεῖται σέ κυκλική τροχιά γύρω ἀπό τή Γῆ, ὅταν *τό βάρος του* $\vec{B}$ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπαιτούμενη *κεντρομόλο δύναμη* $\vec{F}$, δηλαδή ὅταν ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{(R+h)} = m \cdot g_h \quad \text{ἄρα} \quad \upsilon = \sqrt{g_h \cdot (R+h)} \qquad (2)$$

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα σῶμα ἐκτοξεύεται ἀπό σημεῖο πού βρίσκεται λίγο πιό πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, τότε ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται:

$$\upsilon = \sqrt{g_0 \cdot R} \qquad (2')$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (2΄) βάλουμε $g_0 = 9{,}81$ m/sec^2 καί $R = 6366 \cdot 10^3$ m, βρίσκουμε:

$$\upsilon = 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ m/sec} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\upsilon \simeq 8 \text{ km/sec}}$$

Ὥστε, ἕνα βλῆμα πού ἐκτοξεύεται ἀπό σημεῖο, πού βρίσκεται λίγο πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς, μπορεῖ νά περιφέρεται γύρω ἀπό τή

Γῆ σέ *κυκλική τροχιά*, ὅταν ἡ ἀρχική ὁριζόντια ταχύτητά του υ εἶναι κατά προσέγγιση ἴση μέ $\upsilon \simeq 8$ km/sec.

Ἄν στήν ἐξίσωση (2) ἀντικαταστήσουμε τό g_h ἀπό τήν ἐξίσωση (1), βρίσκουμε ὅτι *ἡ ταχύτητα* υ τοῦ δορυφόρου εἶναι ἴση μέ:

$$\boxed{\text{ταχύτητα δορυφόρου} \qquad \upsilon = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}} \qquad (3)$$

Ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ δορυφόρου εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τή μάζα τοῦ δορυφόρου καί ἐλαττώνεται, ὅταν αὐξάνεται τό ὕψος (h).

Ἡ γωνιακή ταχύτητα τοῦ δορυφόρου εἶναι $\omega = 2\pi/T$, ὅπου T εἶναι *ἡ περίοδος* τῆς κινήσεως (δηλαδή ὁ χρόνος μιᾶς περιφορᾶς τοῦ δορυφόρου γύρω ἀπό τή Γῆ). Ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\upsilon = \frac{2\pi(R+h)}{T} \quad \text{ἔχουμε}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi(R+h)}{\upsilon} \quad \text{ἤ} \quad T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g_0}}} \qquad (4)$$

Ἡ περίοδος (T) τοῦ δορυφόρου αὐξάνεται, ὅταν αὐξάνεται τό ὕψος (h).

Ἡ κεντρομόλος δύναμη $\vec{F}$, πού ἐφαρμόζεται στό δορυφόρο, ἔχει μέτρο:

$$F = m \cdot g_h = mg_0 \cdot \frac{R^2}{(R+h)^2} = \frac{m \cdot \upsilon^2}{R+h} = \frac{4\pi^2 m \cdot (R+h)}{T^2}$$

Γιά *τόν ἀστροναύτη*, πού βρίσκεται μέσα στό δορυφόρο, ἡ σχετική ἰσορροπία τοῦ δορυφόρου ἐξασφαλίζεται πάνω στήν τροχιά του ἀπό τή φυγόκεντρη δύναμη ἀδράνειας $\vec{\Phi}$ πού εἶναι ἀντίθετη μέ τό βάρος $\vec{B}$ τοῦ δορυφόρου στό ὕψος h, δηλαδή ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{m \cdot \upsilon^2}{(R+h)} = m \cdot g_h$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή βρίσκουμε τίς ἴδιες πάλι ἐξισώσεις.

Παράδειγμα. Ἄν ἕνας τεχνητός δορυφόρος διαγράφει κυκλική τροχιά σέ ὕψος h = 600 km καί κατά προσέγγιση πάρουμε R = 6400 km καί $g_0 = 10\ m/sec^2$, τότε ἀπό τήν ἐξίσωση (3) βρίσκουμε ὅτι ὁ δορυφόρος κινεῖται μέ ταχύτητα:

$$\upsilon = 7616\ m/sec$$

Καί ἀπό τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε ὅτι ἡ περίοδος τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου εἶναι:

$$T = 5772\ sec = 1\ h\ 36\ min\ 12\ sec$$

β. Στάσιμος τεχνητός δορυφόρος. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος κινεῖται σέ κυκλική τροχιά πού βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τοῦ ἰσημερινοῦ. Ἡ γωνιακή ταχύτητα ($\omega = 2\pi/T$) τοῦ δορυφόρου εἶναι ἴση μέ τή γωνιακή ταχύτητα τῆς περιστροφικῆς κινήσεως τῆς Γῆς καί επομένως ἡ περίοδος (T) τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου εἶναι ἴση μέ τό χρόνο μιᾶς περιστροφῆς τῆς Γῆς γύρω ἀπό τόν ἄξονά της, δηλαδή εἶναι T = 24 ὧρες. Τότε ὁ δορυφόρος βρίσκεται πάντοτε στό ἐπίπεδο *τοῦ ἴδιου μεσημβρινοῦ* καί ὁ δορυφόρος παραμένει πάντοτε πάνω ἀπό *τό ἴδιο σημεῖο* τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς, δηλαδή μᾶς φαίνεται ἀκίνητος καί γι' αὐτό ὀνομάζεται *στάσιμος δορυφόρος*. Ἀπό τίς ἐξισώσεις πού ἰσχύουν γιά τήν κυκλική κίνηση τῶν τεχνητῶν δορυφόρων, εὔκολα βρίσκουμε ὅτι ὁ στάσιμος δορυφόρος κινεῖται σέ ὕψος h = 36 000 km περίπου. Οἱ στάσιμοι δορυφόροι χρησιμοποιοῦνται σήμερα στή Μετεωρολογία γιά τήν παρακολούθηση τῶν φαινομένων πού συμβαίνουν στήν ἀτμόσφαιρα καί στίς τηλεπικοινωνίες γιά τήν ἀναμετάδοση τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων (ραδιοτηλεφωνία, ραδιοφωνία, τηλεόραση).

Προβλήματα

72. Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει τήν τιμή $g_0 = 9,81$ m/sec^2. Νά βρεθεῖ σέ πόσο ὕψος h πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ τιμή τοῦ g εἶναι: α) $g = 9,71$ m/sec^2 καί β) $g = g_0/2$. Ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς εἶναι R = 6370 km.

73. Στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει τήν τιμήν $g_0 = 9,81$ m/sec^2. 1) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ g σέ ἀπόσταση 60 R ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς Γῆς, R = 6370 km. 2) Ἡ Σελήνη περιφέρεται πάνω σέ σχεδόν κυκλική τροχιά γύρω ἀπό τή Γῆ καί σέ ἀπόσταση 60 R ἀπό τό κέντρο τῆς Γῆς. Ἀπό τό ἐξαγόμενο, πού βρήκαμε παραπάνω, μποροῦμε νά βροῦμε πόση εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνση γ_κ τῆς κυκλικῆς κινήσεως τῆς Σελήνης;

74. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος, πού ἔχει μάζα m = 1000 kgr ἐκτελεῖ κυκλική ὁμαλή κίνηση σέ ὕψος h = 1600 km πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. 1) Πόση ταχύτητα υ ἔχει ὁ δορυφόρος καί πόση εἶναι ἡ διάρκεια T μιᾶς περιφορᾶς του γύρω ἀπό τή Γῆ; 2) Πόση εἶναι ἡ κινητική ἐνέργεια ($E_{\kappa\iota\nu}$) τοῦ δορυφόρου; 3) Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἀπό τό ὕψος 0 ὥς τό ὕψος 1600 km ἔχει κατά μέσο ὅρο τή σταθερή τιμή $g_\mu = 8$ m/sec^2, νά βρεθεῖ ἡ δυναμική ἐνέργεια ($E_{\delta\upsilon\nu}$) πού ἔχει ὁ δορυφόρος, ὅταν βρίσκεται πάνω στήν τροχιά του. 4) Νά βρεθεῖ ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργεια ($E_{o\lambda}$) τοῦ δορυφόρου. Ἀκτίνα τῆς Γῆς R = 6400 km. Τιμή τοῦ g στήν ἐπιφάνεια τῆς θάλασσας $g_0 = 10$ m/sec^2. Τιμή τοῦ g σέ ὕψος h:

$$g_h = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

75. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος διαγράφει γύρω ἀπό τή Γῆ ἐλλειπτική τροχιά. Τό σημεῖο Π τῆς ἐλλείψεως εἶναι τό πιό κοντινό σημεῖο της μέ τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί βρίσκεται σέ ὕψος h_Π πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Τό σημεῖο A τῆς ἐλλείψεως εἶναι τό πιό μακρινό σημεῖο της ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς καί βρίσκεται σέ ὕψος h_A πάνω

ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. Ὑποθέτουμε ὅτι ἀπό τό ὕψος 0 ὥς τό ὕψος h_A ἡ ἐπιτάχυνση τῆς βαρύτητας ἔχει κατά μέσο ὅρο τή σταθερή τιμή $g_\mu = 8$ m/sec^2. 1) Νά βρεθεῖ ἡ διαφορά τῶν ταχυτήτων $\upsilon_\Pi^2 - \upsilon_A^2$, τίς ὁποῖες ἔχει ὁ δορυφόρος στά σημεῖα Π καί Α τῆς τροχιᾶς του. 2) Ἄν εἶναι $h_A - h_\Pi = 600$ km καί ἡ ταχύτητα τοῦ δορυφόρου στό σημεῖο Π εἶναι $\upsilon_\Pi = 8000$ m/sec, νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα υ_A τοῦ δορυφόρου στό σημεῖο Α.

76. Ἕνας τεχνητός δορυφόρος ἔχει μάζα m = 100 kgr καί κινεῖται πάνω σέ κυκλική τροχιά σέ ὕψος h = 2000 km πάνω ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς Γῆς. 1) Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ δορυφόρου, ἡ περίοδος Τ τῆς κινήσεώς του καί ἡ κινητική ἐνέργειά του ($E_{\kappa\iota\nu}$); 2) Βρήκαμε ὅτι στό ὕψος h = 2000 km ἡ τιμή τοῦ g εἶναι ἴση μέ g = 5,80 m/sec^2. Νά βρεθεῖ ἡ δυναμική ἐνέργεια ($E_{\delta\upsilon\nu}$) τοῦ δορυφόρου στό ὕψος h καί ἡ ὁλική μηχανική ἐνέργειά του ($E_{o\lambda}$). 3) Στό ὕψος $h_1 = 1000$ km ἡ τιμή τοῦ g εἶναι ἴση μέ $g_1 = 7{,}50$ m/sec^2. Ὁ δορυφόρος, ἔπειτα ἀπό ὁρισμένο χρόνο, πέφτει σιγά-σιγά καί τότε διαγράφει κυκλική τροχιά σέ ὕψος $h_1 = 1000$ km. Νά βρεθεῖ ἡ ταχύτητα υ_1, ἡ περίοδος T_1, ἡ κινητική, ἡ δυναμική καί ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ δορυφόρου στό ὕψος h_1. 4) Νά συγκριθοῦν τά διάφορα στοιχεῖα τῆς κινήσεως τοῦ δορυφόρου στά δύο ὕψη. $g_0 = 10$ m/sec^2. R = 6370 km.

77. Θέλουμε νά τοποθετήσουμε ἕνα στάσιμο δορυφόρο στήν κυκλική τροχιά του, πού τό ἐπίπεδό της θά συμπίπτει μέ τό ἐπίπεδο τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς Γῆς. Ὁ δορυφόρος αὐτός θά βρίσκεται σέ κάθε στιγμή πάνω ἀπό τό ἴδιο σημεῖο τῆς ἐπιφάνειας τῆς Γῆς. 1) Σέ πόσο ὕψος h πρέπει νά τοποθετηθεῖ ὁ δορυφόρος; 2) Πόση ἀρχική ταχύτητα υ πρέπει νά δώσουμε στό δορυφόρο (ὅταν τόν φέρουμε στό ὕψος h), γιά νά ἀρχίσει νά κινεῖται πάνω στήν τροχιά του;

$g_0 = 10$ m/sec^2. R = 6400 km. $\pi^2 = 10$.
$291{,}6 = (6{,}63)^3$. $864 = 64 \cdot 13{,}5$.

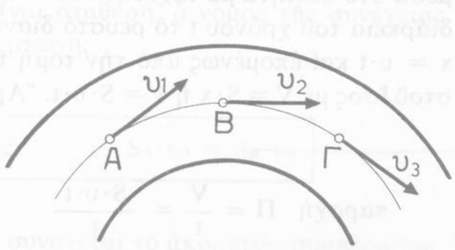
37. Ἰδανικά ρευστά

Τά ὑγρά καί τά ἀέρια ὀνομάζονται *ρευστά* καί ὅταν ἠρεμοῦν, ἔχουν πολλές κοινές ἰδιότητες (π.χ. δέν ἔχουν ὁρισμένο σχῆμα, ἰσχύουν καί γιά τά ὑγρά καί τά ἀέρια ἡ ἀρχή τοῦ Pascal καί ἡ ἀρχή τοῦ Ἀρχιμήδη), ἔχουν ὅμως καί σημαντικές διαφορές (π.χ. τά ὑγρά ἀντίθετα μέ τά ἀέρια ἔχουν ὁρισμένο ὄγκο). Ὅταν τά ὑγρά καί τά ἀέρια κινοῦνται, τότε ἔχουν *ἀπόλυτα ἴδιες ἰδιότητες*. Σέ πολλές περιπτώσεις μποροῦμε νά δεχτοῦμε ὅτι τό κινούμενο ρευστό (ὑγρό ἤ ἀέριο) εἶναι *ἀσυμπίεστο* καί ὅτι *δέν ἔχει ἐσωτερική τριβή*. Αὐτό τό ρευστό ὀνομάζεται *ἰδανικό ρευστό*. Ὥστε:

Τά ἰδανικά ρευστά εἶναι ἀσυμπίεστα καί δέν ἔχουν ἐσωτερική τριβή.

38. Ὁρισμοί

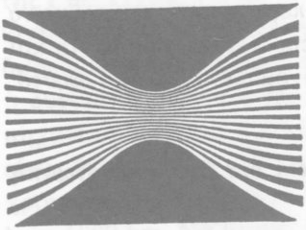
Ὁ χῶρος, πού μέσα σ' αὐτόν κινεῖται τό ρευστό, ὀνομάζεται *πεδίο ροῆς*. Ἕνα πεδίο ροῆς καθορίζεται τελείως, ὅταν σέ κάθε χρονική στιγμή εἶναι γνωστή ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ γιά ὅλα τά σημεῖα τοῦ πεδίου. Ἡ τροχιά πού διαγράφει ἕνα μόριο τοῦ ρευστοῦ ὀνομάζεται *ρευματική γραμμή* (σχ. 71). Ἡ ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ τοῦ μορίου τοῦ ρευστοῦ εἶναι πάντοτε ἐφαπτομένη τῆς ρευματικῆς γραμμῆς. Μποροῦμε νά παρατηρήσουμε τίς ρευματικές γραμμές, ἄν μέσα στό ρευστό ὑπάρχουν ὁρατά σωματίδια (π.χ. κομματάκια χρωματιστοῦ χαρτιοῦ, σκόνη ἀλουμι-



Σχ. 71. Ρευματική γραμμή.

νίου). Τό σχῆμα 72 δείχνει τήν πύκνωση τῶν ρευματικῶν γραμμῶν σέ μιά στένωση τοῦ σωλήνα.

Ἄν σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ροῆς ἡ ταχύτητα *δέ μεταβάλλεται* μέ τό χρόνο, τότε ἡ ροή ὀνομάζεται *στρωτή ροή*. Ἀντίθετα, ἄν σέ κάθε σημεῖο τοῦ πεδίου ροῆς ἡ ταχύτητα μεταβάλλεται μέ τό χρόνο, τότε ἡ ροή ὀνομάζεται *στροβιλώδης ροή*. Στά παρακάτω θά ἐξετάσουμε τή στρωτή ροή, πού ἔχει ἰδιαίτερη σημασία γιά πολλές πρακτικές ἐφαρμογές (δίκτυα ὑδρεύσεως ἤ φωταερίου, πετρελαιοαγωγοί, τροφοδότηση ὑδροστροβίλων κ.ἄ.)..



πιό μεγάλη
τό μικρό

Σχ. 72. Παρατήρηση ρευματικῶν γραμμῶν.

Παροχή τοῦ σωλήνα. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t ἀπό μιά τομή τοῦ σωλήνα περνάει ὄγκος V ρευστοῦ. Ὀνομάζουμε *παροχή* (Π) τοῦ σωλήνα τό πηλίκο τοῦ ὄγκου V τοῦ ρευστοῦ, πού περνάει ἀπό τήν τομή τοῦ σωλήνα, διά τοῦ ἀντίστοιχου χρόνου t.

$$\boxed{\text{παροχή} \quad \Pi = \frac{V}{t}}$$

Στό σύστημα MKS *μονάδα παροχῆς* εἶναι 1 m^3/sec.

Τό ἐμβαδό τῆς τομῆς τοῦ σωλήνα εἶναι S καί τό ρευστό κινεῖται μέσα στό σωλήνα μέ ταχύτητα πού τό μέτρο της υ εἶναι σταθερό. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου t τό ρευστό διανύει μέσα στό σωλήνα διάστημα $x = \upsilon \cdot t$ καί ἑπομένως ἀπό τήν τομή τοῦ σωλήνα περνάει ὄγκος ρευστοῦ ἴσος μέ $V = S \cdot x$ ἤ $V = S \cdot \upsilon \cdot t$. Ἄρα ἡ παροχή τοῦ σωλήνα εἶναι:

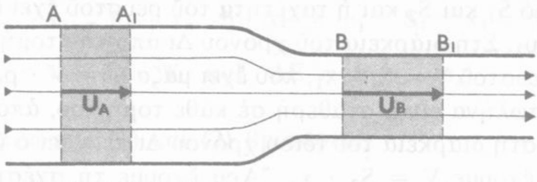
$$\text{παροχή} \quad \Pi = \frac{V}{t} = \frac{S \cdot \upsilon \cdot t}{t} \qquad \text{καί} \qquad \boxed{\Pi = S \cdot \upsilon}$$

Ἡ παροχή (Π) τοῦ σωλήνα εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ (S) τῆς τομῆς τοῦ σωλήνα ἐπί τήν ταχύτητα ροῆς (υ) τοῦ ρευστοῦ.

39. Νόμος τῆς συνέχειας

Μέσα σ' ἕναν ὁριζόντιο σωλήνα, πού ἡ τομή του δέν ἔχει σταθερό ἐμβαδό, κινεῖται *μέ στρωτή ροή ἕνα ἰδανικό ρευστό* (σχ. 73). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἀπό τήν τομή Α περνάει ὄγκος ρευστοῦ μεγαλύτερος ἀπό ἐκεῖνο, πού στόν ἴδιο χρόνο Δt περνάει ἀπό τήν τομή Β, τότε στό χῶρο πού ὑπάρχει ἀνάμεσα στίς δύο τομές τοῦ σωλήνα θά αὐξανόταν τό περιεχόμενο ρευστό. Αὐτό ὅμως εἶναι ἀδύνατο, γιατί τό ρευστό εἶναι *ἀσυμπίεστο*. Ἄρα στό χρόνο Δt ἀπό τίς τομές Α καί Β τοῦ σωλήνα περνάει ὁ ἴδιος ὄγκος V ρευστοῦ καί ἑπομένως στίς δύο τομές *ἡ παροχή εἶναι ἴδια καί ἴση μέ* $\Pi = V/\Delta t$. Τό συμπέρασμα αὐτό τό ἐκφράζει *ὁ νόμος τῆς συνέχειας:*

Ὅταν μέσα σέ σωλήνα ρέει ἰδανικό ρευστό, ἡ παροχή εἶναι σταθερή σέ κάθε τομή τοῦ σωλήνα.



Σχ. 73. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ νόμου τῆς συνέχειας.

Οἱ τομές Α καί Β ἔχουν ἀντίστοιχα ἐμβαδό S_A καί S_B. Ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ στίς τομές Α καί Β εἶναι ἀντίστοιχα $υ_A$ καί $υ_B$. Ἐπειδή κατά μῆκος τοῦ σωλήνα ἡ παροχή εἶναι σταθερή, ὁ νόμος τῆς συνέχειας ἐκφράζεται μέ τήν ἀκόλουθη ἐξίσωση:

νόμος τῆς συνέχειας	$S_A \cdot υ_A = S_B \cdot υ_B$

Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση συνάγεται τό ἀκόλουθο συμπέρασμα:

Ὅταν μέσα σέ σωλήνα μεταβλητῆς τομῆς ρέει ἰδανικό ρευστό, οἱ ταχύτητες τοῦ ρευστοῦ στίς τομές τοῦ σωλήνα εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες μέ τά ἐμβαδά αὐτῶν τῶν τομῶν.

σχέση ταχύτητας καί ἐμβαδοῦ τομῆς	$\frac{\upsilon_A}{\upsilon_B} = \frac{S_B}{S_A}$

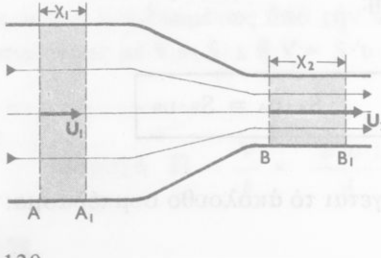
Ὥστε *στή στένωση* τοῦ σωλήνα ἀντιστοιχεῖ *μεγαλύτερη ταχύτητα* τοῦ ρευστοῦ καί ἀντίστροφα *στή διαπλάτυνση* τοῦ σωλήνα ἀντιστοιχεῖ *μικότερη ταχύτητα* τοῦ ρευστοῦ.

40. Νόμος τοῦ Bernoulli

Μέσα σέ ὁριζόντιο σωλήνα, πού ἡ τομή του δέν ἔχει σταθερό ἐμβαδό, κινεῖται μέ στρωτή ροή ἕνα ἰδανικό ρευστό πού ἔχει πυκνότητα ρ (σχ. 74). Στά σημεῖα A καί B ἡ τομή τοῦ σωλήνα ἔχει ἀντίστοιχα ἐμβαδό S_1 καί S_2 καί ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ ἔχει ἀντίστοιχα μέτρο υ_1 καί υ_2. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt ἀπό τήν τομή A περνάει ἕνας ὄγκος ρευστοῦ $V = S_1 \cdot x_1$, πού ἔχει μάζα $m = V \cdot \rho$. Ἐπειδή ἡ παροχή τοῦ σωλήνα εἶναι σταθερή σέ κάθε τομή του, ἀπό τή μικρότερη τομή B στή διάρκεια τοῦ ἴδιου χρόνου Δt περνάει ὁ ἴδιος ὄγκος ρευστοῦ καί ἔχουμε $V = S_2 \cdot x_2$. Ἄρα ἔχουμε τή σχέση:

$$V = S_1 \cdot x_1 = S_2 \cdot x_2$$

Στή μικρότερη τομή B τό ρευστό ἔχει ταχύτητα $\upsilon_2 > \upsilon_1$. Ὥστε,



Σχ. 74. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli.

ὅταν ἡ μάζα m τοῦ ρευστοῦ μετακινεῖται ἀπό τή θέση AA_1 στή θέση BB_1, *ἡ κινητική ἐνέργεια* τῆς μάζας m αὐξάνεται κατά:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2} m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2} m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

$$\text{καί} \quad \Delta E = \frac{1}{2} V\rho \, (\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \quad (1)$$

Αὐτή ἡ αὔξηση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῆς μάζας m τοῦ ρευστοῦ κατά ΔE ὀφείλεται *στό ἔργο δυνάμεων*, οἱ ὁποῖες δημιουργοῦνται ἀπό *τήν πίεση* πού ἐπικρατεῖ μέσα στό ρευστό. Ὥστε στίς τομές A καί B τοῦ σωλήνα ἐπικρατοῦν ἀντίστοιχα πιέσεις p_1 καί p_2. Αὐτές οἱ πιέσεις δημιουργοῦν δυνάμεις, πού εἶναι κάθετες στό ἐπίπεδο τῆς τομῆς καί ἀντίστοιχα ἔχουν μέτρο $F_1 = p_1 \cdot S_1$ καί $F_2 = p_2 \cdot S_2$. Ἐπειδή δέν ὑπάρχουν τριβές, *ἡ διαφορά τοῦ ἔργου* τῶν δύο δυνάμεων εἶναι ἴση *μέ τή μεταβολή τῆς κινητικῆς ἐνέργειας* ΔE τῆς μάζας m τοῦ ρευστοῦ, ὅταν αὐτή μεταφέρεται ἀπό τή θέση AA_1 στή θεση BB_1. Ἄρα ἔχουμε:

$$\Delta E = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 \quad \text{ἤ} \quad \Delta E = p_1 \cdot S_1 \cdot x_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot x_2$$

$$\text{ἤ} \quad \Delta E = p_1 \cdot V - p_2 \cdot V \quad \text{καί} \quad \Delta E = V(p_1 - p_2) \quad (2)$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) καί (2) βρίσκουμε:

$$\frac{1}{2} V\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) = V(p_1 - p_2) \quad \text{καί} \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Bernoulli:*

Κατά μῆκος ὁριζόντιου σωλήνα τό ἄθροισμα τῆς πιέσεως (p) τοῦ ρευστοῦ καί τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τῆς μάζας (ρ) τοῦ ρευστοῦ, πού περιέχεται στή μονάδα ὄγκου, εἶναι σταθερό.

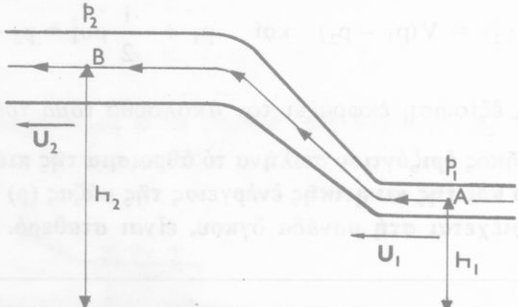
$$\boxed{\text{νόμος τοῦ Bernoulli} \qquad p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{σταθ.}} \quad (3)$$

῾Ο νόμος τοῦ Bernoulli ἐκφράζει *τήν ἀρχή διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας* σέ ἕνα ρεῦμα. Τό $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ μετράει *τήν κινητική* ἐνέργεια καί τό p μετράει *τή δυναμική* ἐνέργεια τῆς μάζας πού περιέχεται μέσα στή μονάδα ὄγκου τοῦ κινούμενου ρευστοῦ. ῾Επομένως, ὅπου αὐξάνεται ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ ρευστοῦ, ἐλαττώνεται ἡ πίεση (p) τοῦ ρευστοῦ καί ἀντίστροφα. Τό p ὀνομάζεται *στατική πίεση* καί τό $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ ὀνομάζεται *δυναμική πίεση*. Τό σταθερό ἄθροισμα $p_{ολ}$ τῆς στατικῆς καί τῆς δυναμικῆς πιέσεως ὀνομάζεται *ὁλική πίεση*.

Μή ὁριζόντιος σωλήνας. Ἕνας σωλήνας δέν εἶναι ὁριζόντιος καί σέ δύο θέσεις Α καί Β (σχ. 75), πού βρίσκονται ἀντίστοιχα σέ ὕψος h_1 καί h_2 πάνω ἀπό τό ὁριζόντιο ἐπίπεδο, ἡ πίεση τοῦ ρευστοῦ ἀντίστοιχα εἶναι p_1 καί p_2 καί ἡ ταχύτητα τοῦ ρευστοῦ εἶναι υ_1 καί υ_2. Τό ρευστό ἔχει πυκνότητα ρ. Σ' αὐτή τη γενική περίπτωση ἀποδείχνεται ὅτι *ὁ νόμος τοῦ Bernoulli* ἐκφράζεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$\boxed{\text{νόμος τοῦ Bernoulli} \quad p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = \text{σταθ.}} \tag{4}$$

ὅπου $h = h_2 - h_1$ εἶναι ἡ κατακόρυφη ἀπόσταση τῶν δύο θέσεων Α καί Β τοῦ ρευστοῦ. Ἄν εἶναι $h = 0$, ὁ σωλήνας εἶναι ὁριζόντιος καί τότε εἶναι:



Σχ. 75. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli σέ μή ὁριζόντιο σωλήνα.

$$p + \frac{1}{2}\,\rho\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Τό γινόμενο ρgh ὀνομάζεται *ὑψομετρική πίεση*. Ὥστε *ὁ νόμος τοῦ Bernoulli* μπορεῖ γενικά νά διατυπωθεῖ ὡς ἑξῆς:

Κατά μῆκος σωλήνα τό ἄθροισμα τῆς στατικῆς πιέσεως p, τῆς ὑψομετρικῆς πιέσεως ρgh καί τῆς δυναμικῆς πιέσεως $\frac{1}{2}\rho\upsilon^2$ τοῦ ρευστοῦ εἶναι σταθερό.

Ἀπόδειξη τῆς ἐξισώσεως (4). Γιά τή μάζα m τοῦ ρευστοῦ, πού πηγαίνει ἀπό τή θέση Α στή θέση Β, *ἡ μεταβολή τῆς ὁλικῆς μηχανικῆς ἐνέργειας* (δυναμική + κινητική) τῆς μάζας m εἶναι:

$$\Delta E = (mgh_2 - mgh_1) + \left(\frac{1}{2}\,m\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\,m\upsilon_1^2\right)$$

$$\text{ἤ} \qquad \Delta E = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\,m\,(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \tag{5}$$

Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς μηχανικῆς ἐνέργειας τῆς μάζας m εἶναι ἴση μέ τό ἔργο πού παράγουν οἱ δυνάμεις, οἱ ὁποῖες δημιουργοῦνται ἀπό τίς πιέσεις (ἐξίσωση 2), καί ἑπομένως ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$V(p_1 - p_2) = mg(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\,m(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$$

$$\text{ἤ} \qquad p_1 - p_2 = \frac{m}{V}\,g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}\,\frac{m}{V}(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) \tag{6}$$

Ἐπειδή εἶναι ρ = m/V ἀπό τήν ἐξίσωση (6) βρίσκουμε:

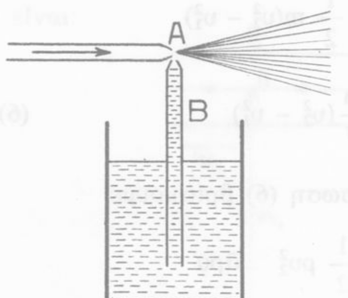
$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\,\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\,\rho\upsilon_2^2 \quad \text{ἄρα}$$

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\,\rho\upsilon^2 = \sigma\tau\alpha\theta.$$

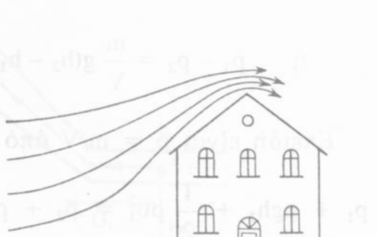
41. Ἐφαρμογές τοῦ νόμου τοῦ Bernoulli

1. Ἀναρροφητική δράση τοῦ ρεύματος. Σέ ἕνα σωλήνα, πού καταλήγει σέ στενό ἄνοιγα Α (*ἀκροφύσιο*), διαβιβάζουμε ἰσχυρό ρεῦμα ἀέρα (σχ. 76). Κοντά στό ἄνοιγμα Α βρίσκεται ἡ μιά ἄκρη λεπτοῦ σωλῆνα Β πού ἡ ἄλλη ἄκρη του εἶναι βυθισμένη μέσα σέ ὑγρό. Ἡ φλέβα τοῦ ἀέρα βγαίνει ἀπό τό στενό ἄνοιγμα Α *μέ μεγάλη ταχύτητα*, ἔπειτα ὅμως ἡ φλέβα τοῦ ἀέρα ἀπότομα διαπλατύνεται καί ἡ πίεση τοῦ ἀέρα γίνεται ἴση μέ τήν ἀτμοσφαιρική πίεση. Ἑπομένως στή θέση Α ἐπικρατεῖ *πίεση μικρότερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική*. Τότε τό ὑγρό ἀνεβαίνει στό σωλήνα Β, παρασύρεται ἀπό τό ρεῦμα τοῦ ἀέρα καί διαχωρίζεται σέ πολύ μικρά σταγονίδια (ψεκασμός). Σ' αὐτή τήν ἀρχή στηρίζεται ἡ λειτουργία *τοῦ ψεκαστήρα* καί *τῆς ἀντλίας μέ ροή ὑγροῦ ἤ ἀτμῶν ὑδραργύρου*.

Ὅταν ὁ ἄνεμος εἶναι πολύ ἰσχυρός, τότε πάνω ἀπό τή στέγη τοῦ σπιτιοῦ συμβαίνει *πύκνωση* τῶν ρευματικῶν γραμμῶν (σχ. 77). Ἑπομένως πάνω ἀπό τή στέγη ἡ ταχύτητα τοῦ ἀέρα αὐξάνεται, ἐνῶ ἡ πίεσή του ἐλαττώνεται καί γίνεται *μικρότερη* ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση, πού ἐπικρατεῖ μέσα στό σπίτι. Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ἀνέμου εἶναι μεγάλη, τότε *ἡ διαφορά* μεταξύ τῶν παραπάνω δύο πιέσεων δημιουργεῖ *ἰσχυρές δυνάμεις* πού ἔχουν φορά ἀπό κάτω πρός τά πάνω καί ἡ στέγη ἀποσπᾶται ἀπό τήν οἰκοδομή (*ἁρπαγή στέγης*).



Σχ. 76. Ἀναρροφητική δράση ρεύματος.



Σχ. 77. Ἁρπαγή στέγης.

2. Βεντουρίμετρο. *Τό βεντουρίμετρο* εἶναι ὄργανο πού τό χρησιμοποιοῦμε γιά νά μετρᾶμε *τήν ταχύτητα* τοῦ ρεύματος. Ἀποτελεῖται ἀπό ὁριζόντιο σωλήνα πού σέ μιά περιοχή του παρουσιάζει στένωση (σχ. 78). Μέ ἕνα μανόμετρο βρίσκουμε τή διαφορά πιέσεως (Δp) πού ὑπάρχει μεταξύ δύο τομῶν (A καί B) τοῦ σωλήνα. Ἐφαρμόζοντας τό νόμο τῆς συνέχειας καί τό νόμο τοῦ Bernoulli ὑπολογίζουμε τήν ταχύτητα τοῦ ρεύματος. Σύμφωνα μέ τούς παραπάνω δύο νόμους ἔχουμε τίς δύο ἐξισώσεις:

$S_A\ \upsilon_A$ [illegible]

$S_B\ \upsilon_B$

$$S_A \cdot \upsilon_A = S_B \cdot \upsilon_B \qquad (1)$$

$\upsilon_A^2 \quad \upsilon_B^2$

$$\text{καί} \qquad p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 \qquad (2)$$

Θά ὑπολογίσουμε τίς ταχύτητες υ_A καί υ_B. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε:

[illegible]

$$\upsilon_A = \frac{S_B}{S_A} \cdot \upsilon_B \qquad (3)$$

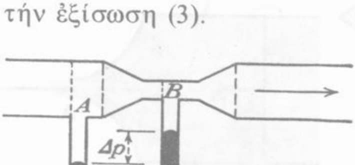
$$\text{καί} \qquad \upsilon_A^2 = \left(\frac{S_B}{S_A}\right)^2 \cdot \upsilon_B^2 \qquad (4)$$

Ἄν στήν ἐξίσωση (2) ἀντικαταστήσουμε τό υ_A^2 ἀπό τήν ἐξίσωση (4) βρίσκουμε:

$$\upsilon_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho\,[1 - (S_B/S_A)^2]}} \quad \text{ἤ} \quad \upsilon_B = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho\,[1 - (S_B/S_A)^2]}}$$

$\rho_A \quad \rho_B$

Τό S_B/S_A εἶναι μιά σταθερή τοῦ ὀργάνου. Ἡ ταχύτητα υ_A βρίσκεται ἀπό τήν ἐξίσωση (3).



Σχ. 78. Βεντουρίμετρο.

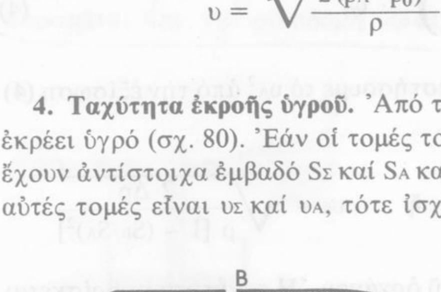
3. Σωλήνας Pitot. Ὁ *σωλήνας Pitot* χρησιμεύει γιά τή μέτρηση τῆς ταχύτητας ἑνός ρεύματος ἀέρα, ἤ ἀντίστροφα γιά τή μέτρηση τῆς ταχύτητας τοῦ ἀεροπλάνου πού κινεῖται μέσα σέ ἀκίνητο ἀέρα. Ἀποτελεῖται ἀπό μεταλλικό σωλήνα μέ «ἀεροδυναμικό» σχῆμα (σχ. 79) καί στά σημεῖα Α καί Β ὑπάρχουν ἀνοίγματα πού συγκοινωνοῦν μέ μανόμετρο. Τά μόρια τοῦ ἀέρα, πού κινοῦνται πρός τό σημεῖο Α, ἐπιβραδύνονται καί τελικά ἡ ταχύτητά τους γίνεται ἴση μέ μηδέν, ὥστε εἶναι $\upsilon_A = 0$. Στό σημεῖο Α (*σημεῖο ἀνακοπῆς* τοῦ ρεύματος) συμβαίνει στίβαγμα τοῦ ἀέρα καί ἡ πίεση p_A γίνεται μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀτμοσφαιρική πίεση p_0, πού ἐπικρατεῖ ἐκείνη τή στιγμή. Στά πλάγια τοῦ σωλήνα (σημεῖο Β) ὁ ἀέρας ἔχει περίπου τήν ἀτμοσφαιρική πίεση p_0 καί ταχύτητα υ, δηλαδή τήν ταχύτητα τοῦ κινούμενου ἀέρα σχετικά μέ τό ἀκίνητο ὄργανο ἤ ἀντίστροφα. Σύμφωνα μέ τό νόμο τοῦ Bernoulli ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \quad \text{ἤ} \quad p_A = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2$$

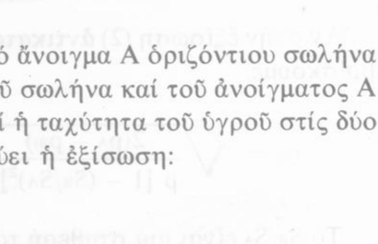
γιατί εἶναι $\upsilon_A = 0$. Ἔτσι βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,(p_A - p_0)}{\rho}} \quad \text{ἤ} \quad \upsilon = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}$$

4. Ταχύτητα ἐκροῆς ὑγροῦ. Ἀπό τό ἄνοιγμα Α ὁριζόντιου σωλήνα ἐκρέει ὑγρό (σχ. 80). Ἐάν οἱ τομές τοῦ σωλήνα καί τοῦ ἀνοίγματος Α ἔχουν ἀντίστοιχα ἐμβαδό S_Σ καί S_A καί ἡ ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ στίς δύο αὐτές τομές εἶναι υ_Σ καί υ_A, τότε ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:



Σχ. 79. Σωλήνας Pitot.



Σχ. 80. Ἐκροή ὑγροῦ.

$$S_A \cdot \upsilon_A = S_\Sigma \cdot \upsilon_\Sigma \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{\upsilon_\Sigma}{\upsilon_A} = \frac{S_A}{S_\Sigma}$$

Ἄν τό ἐμβαδό S_A τοῦ ἀνοίγματος εἶναι πολύ μικρό σχετικά μέ τό ἐμβαδό S_Σ τῆς τομῆς τοῦ σωλήνα, τότε ὁ λόγος S_A/S_Σ εἶναι πολύ μικρός καί ἑπομένως ἡ ταχύτητα υ_Σ τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα εἶναι πολύ μικρή σχετικά μέ τήν ταχύτητα υ_A. Γιά μιά ὁποιαδήποτε τομή τοῦ σωλήνα καί τό ἄνοιγμα Α ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Bernoulli:

$$p_\Sigma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Sigma^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2$$

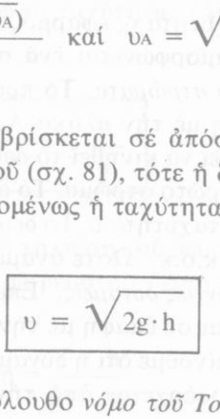
Ἐπειδή ἡ ταχύτητα υ_Σ εἶναι πολύ μικρή σχετικά μέ τήν ταχύτητα υ_A, μποροῦμε κατά προσέγγιση νά θεωρήσουμε ὅτι εἶναι $\upsilon_\Sigma = 0$ καί ἑπομένως ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση ἔχουμε:

$$p_\Sigma = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 \quad \text{ἤ} \quad \upsilon_A = \sqrt{\frac{2(p_\Sigma - p_A)}{\rho}} \quad \text{καί} \quad \upsilon_A = \sqrt{\frac{2\,\Delta p}{\rho}}$$

Ἐάν τό ὑγρό ἐκρέει ἀπό ἄνοιγμα πού βρίσκεται σέ ἀπόσταση h κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ (σχ. 81), τότε ἡ διαφορά πιέσεως Δp εἶναι ἴση μέ $\Delta p = h \cdot \rho \cdot g$ καί ἑπομένως ἡ ταχύτητα ἐκροῆς τοῦ ὑγροῦ εἶναι:

$$\upsilon_A = \sqrt{\frac{2\,h \cdot \rho \cdot g}{\rho}} \quad \text{καί} \quad \boxed{\upsilon = \sqrt{2g \cdot h}}$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωση ἐκφράζει τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Torricelli:*

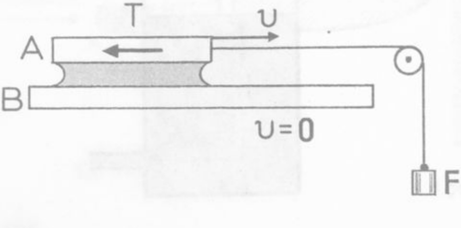


Σχ. 85.Τό ἄνοιγμα βρίσκεται σέ βάθος h.

Ἡ ταχύτητα (υ) ἐκροῆς ὑγροῦ ἀπό ἄνοιγμα, πού βρίσκεται σέ βάθος h κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ ὑγροῦ, εἶναι ἴση μέ τήν ταχύτητα πού θά εἶχε τό ὑγρό, ἄν ἔπεφτε ἐλεύθερα ἀπό τό ὕψος h.

42. Ἐσωτερική τριβή τῶν ρευστῶν

α. Ἐσωτερική τριβή τῶν ὑγρῶν. Ἀπό τήν καθημερινή ζωή ξέρουμε ὅτι τά διάφορα ὑγρά (π.χ. ὁ αἰθέρας, τό νερό, ἡ γλυκερίνη) δέν ἔχουν τήν ἴδια *ρευστότητα*. Ἡ παρατήρηση αὐτή δείχνει ὅτι κατά τήν κίνηση ἑνός ὑγροῦ ἀνάμεσα σέ δύο γειτονικά στρώματά του ἀναπτύσεται *ἀντίσταση*, πού ὀνομάζεται *ἐσωτερική τριβή*. Ἄς θεωρήσουμε ὅτι ἀνάμεσα σέ δύο ὁριζόντιες πλάκες Α καί Β, πού ἔχουν μεγάλη ἐπιφάνεια, ὑπάρχει ἕνα στρῶμα ὑγροῦ (σχ. 82). Ἡ κάτω πλάκα Β εἶναι ἀκίνητη ($\upsilon = 0$). Γιά νά κινήσουμε τήν πάνω πλάκα Α μέ μικρή σταθερή ταχύτητα υ, ἐφαρμόζουμε μιά *ὁριζόντια δύναμη* $\vec{F}$. Τότε μέσα στό ὑγρό διαμορφώνεται ἕνα σύστημα ροῆς, πού ἀποτελεῖται *ἀπό λεπτά ἐπάλληλα στρώματα*. Τό πρῶτο ἀπό αὐτά τά στρώματα, πού βρίσκεται σ' ἐπαφή μέ τήν πλάκα Α, κινεῖται μέ ταχύτητα υ. Τό στρῶμα αὐτό ἀναγκάζει νά κινηθεῖ τό δεύτερο στρῶμα, πού βρίσκεται ἀμέσως κάτω ἀπό τό πρῶτο στρῶμα. Τό δεύτερο στρῶμα ἀποκτᾶ ταχύτητα *μικρότερη* ἀπό τήν ταχύτητα υ. Τό δεύτερο στρῶμα ἀναγκάζει νά κινηθεῖ τό τρίτο στρῶμα κ.ο.κ. Ὥστε ἀνάμεσα στά στρώματα τοῦ ὑγροῦ ἀναπτύσσονται *ὁριζόντιες δυνάμεις*. Ἐπειδή τό πρῶτο λεπτό στρῶμα τοῦ ὑγροῦ, πού βρίσκεται σέ ἐπαφή μέ τήν πλάκα Α, κινεῖται μέ σταθερή ταχύτητα υ, συμπεραίνουμε ὅτι ἡ δύναμη $\vec{F}$ εἶναι ἀντίθετη μέ *τήν ἐσωτερική τριβή* $\vec{T}$. Αὐτή προέρχεται ἀπό τήν ἀντίσταση πού παρουσιάζει τό δεύτερο στρῶμα τοῦ ὑγροῦ στό νά παρασυρθεῖ σέ κίνηση.



Σχ. 82. Ἀπόδειξη τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς τῶν ρευστῶν.

β. Συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς. Στή διάταξη πού δείχνει τό σχῆμα 82, ὅταν ἡ πλάκα Α κινεῖται, μέσα στό ὑγρό διαμορφώνεται ἕνα σύστημα ἀπό ὁριζόντιες ρευματικές γραμμές (σχ. 83). Σέ μιά κατακόρυφη τομή ΕΖ τοῦ ὑγροῦ οἱ ταχύτητές του ἔχουν ὁριζόντια διεύθυνση, ἀλλά τό μέτρο τους *αὐξάνει γραμμικά* ἀπό μηδέν ὥς υ, ὅσο προχωροῦμε κατά μῆκος τῆς κατακορύφου ΕΖ. Τό στρῶμα τοῦ ὑγροῦ, πού εἶναι ἀνάμεσα στίς πλάκες Α καί Β, ἔχει πάχος h. Ἐάν ἡ πλάκα Α ἔχει ἐμβαδό S, τότε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ καθενός ἀπό τά μετακινούμενα ἐπάλληλα στρώματα τοῦ ὑγροῦ, ἔχει ἐμβαδό S. Στά σημεῖα Ε καί Ζ τοῦ ὑγροῦ, πού ἡ κατακόρυφη ἀπόστασή τους εἶναι h, ἀντιστοιχεῖ *μεταβολή τῆς ταχύτητας* ἴση μέ $\Delta\upsilon = \upsilon - 0 = \upsilon$. Τό πηλίκο $\Delta\upsilon/h$ ὀνομάζεται *πτώση ταχύτητας*. Τό πείραμα δείχνει ὅτι ἰσχύει ὁ ἀκόλουθος *νόμος τῆς ἐσωτερικῆς τριβῆς:*

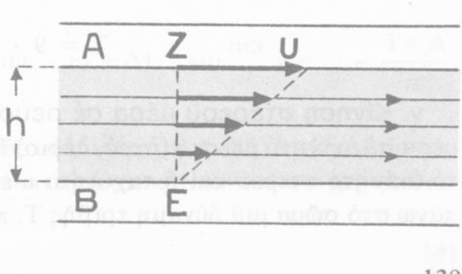
Ἡ ἐσωτερική τριβή (T) τοῦ ὑγροῦ εἶναι ἀνάλογη μέ τό ἐμβαδό (S), πού ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἐπαφῆς τῶν μετακινούμενων ἐπάλληλων στρωμάτων, ἀνάλογη μέ τήν πτώση ταχύτητας (Δυ/h) καί ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ ὑγροῦ.

νόμος ἐσωτερικῆς τριβῆς τῶν ρευστῶν	$T = \eta \cdot S \cdot \dfrac{\Delta\upsilon}{h}$

(1)

ὅπου η εἶναι συντελεστής πού ἐξαρτᾶται ἀπό τή φύση τοῦ ρευστοῦ καί ὀνομάζεται *συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς* τοῦ ρευστοῦ. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς ρευστῶν $\quad \eta = \dfrac{T \cdot h}{S \cdot \Delta\upsilon}$



Σχ. 83. Γραμμική ἐλάττωση τῆς ταχύτητας.

Στό σύστημα MKS *μονάδα συντελεστῆ ἐσωτερικῆς τριβῆς* εἶναι:

$$1 \text{ N} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2}$$

Ἐσωτερική τριβή τῶν ὑγρῶν. Ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ *αὐξάνεται,* τότε ὁ συντελεστής του ἐσωτερικῆς τριβῆς (η) *ἐλαττώνεται.*

Ἐσωτερική τριβή τῶν ἀερίων. Γενικά ἡ ἐσωτερική τριβή τῶν ἀερίων εἶναι μικρή σέ σύγκριση μέ τά ὑγρά. Ἀντίθετα μέ τά ὑγρά, ὅταν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου *αὐξάνεται,* τότε ὁ συντελεστής του ἐσωτερικῆς τριβῆς (η) *αὐξάνεται.*

Συντελεστές ἐσωτερικῆς τριβῆς (η) τοῦ νεροῦ καί τοῦ ἀέρα
(σέ $\text{N} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2}$)

Θερμοκρασία	0°C	20°C	40°C
Νερό	$1{,}79 \cdot 10^{-3}$	$1{,}01 \cdot 10^{-3}$	$0{,}66 \cdot 10^{-3}$
Ἀέρας	$1{,}71 \cdot 10^{-5}$	$1{,}81 \cdot 10^{-5}$	$1{,}90 \cdot 10^{-5}$

Πρατηροῦμε τήν ἐπίδραση τῆς θερμοκρασίας στό ὑγρό καί στό ἀέριο.

Παράδειγμα. Θεωροῦμε δύο παράλληλα στρώματα νεροῦ πού κινοῦνται μέ ἀντίστοιχες ταχύτητες $\upsilon_1 = 3$ cm/sec καί $\upsilon_2 = 2$ cm/sec. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κάθε στρώματος ἔχει ἐμβαδό $S = 5 \text{ cm}^2$ καί ἡ ἀπόστασή τους εἶναι $h = 2$ mm. Ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς τοῦ νεροῦ εἶναι $\eta = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2}$. Ἡ ἐσωτερική τριβή πού ἀναπτύσσεται μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο στρωμάτων εἶναι:

$$T = \eta \cdot S \cdot \frac{\Delta\upsilon}{h} = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{N} \cdot \text{sec}}{\text{m}^2} \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \frac{10^{-2} \text{ m/sec}}{2 \cdot 10^{-3} \text{m}}$$

$$\text{καί} \qquad T = 9 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

γ. Κίνηση στερεοῦ μέσα σέ ρευστό. Ὅταν ἕνα στερεό κινεῖται μέσα σέ ἀκίνητο ρευστό (ὑγρό, ἀέριο) ἤ τό ρευστό κινεῖται σχετικά μέ τό ἀκίνητο στερεό καί ἡ ταχύτητα υ εἶναι μικρή, τότε ἀναπτύσσεται πάνω στό σῶμα μιά δύναμη τριβῆς Τ, πού εἶναι ἀνάλογη μέ τήν ταχύτητα υ, ἔχει τή διεύθυνση τῆς ταχύτητας, ἀλλά φορά ἀντίθετη μέ αὐτή καί μέτρο ἴσο μέ:

$$T = k \cdot \eta \cdot \upsilon$$

ὅπου k εἶναι συντελεστής πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος. Ἰδιαίτερα ἐνδιαφέρουσα εἶναι ἡ περίπτωση σώματος μέ σφαιρικό σχῆμα. Τότε ἡ ροή γύρω ἀπό τή σφαίρα εἶναι στρωτή καί οἱ ρευματικές γραμμές εἶναι συνεχεῖς. Γιά τό σφαιρικό σχῆμα ὁ συντελεστής k βρέθηκε πειραματικά ὅτι ἔχει τήν τιμή $k = 6\pi R$, ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας. Ἔτσι *ἡ τριβή*, πού ἀναπτύσσεται πάνω σέ μιά σφαίρα, δίνεται ἀπό τόν ἀκόλουθο *νόμο τοῦ Stokes:*

νόμος τοῦ Stokes	$T = 6\pi R \cdot \eta \cdot \upsilon$

Πτώση σώματος μέσα σέ ἀκίνητο ρευστό. Μιά σφαίρα, πού ἔχει πυκνότητα ρ, πέφτει ἐξαιτίας τοῦ βάρους της $B = mg$ καί κινεῖται μέσα σέ ρευστό, πού ἔχει πυκνότητα ρ_0. Τότε πάνω στή σφαίρα ἐνεργοῦν οἱ ἑξῆς τρεῖς ἐξωτερικές δυνάμεις:

τό βάρος τῆς σφαίρας $B = m \cdot g$ ἤ $B = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \cdot g$

ἡ ἄνωση $A = V \cdot \rho_0 \cdot g$ ἤ $A = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0 \cdot g$

ἡ τριβή $T = 6\pi R \cdot \eta \cdot \upsilon$

Ἡ σφαίρα κινεῖται μέ τήν ἐπίδραση τῆς συνισταμένης $\vec{F}$ τῶν τριῶν δυνάμεων $\vec{B}$, $\vec{A}$, $\vec{T}$ καί δίνει στή σφαίρα ἐπιτάχυνση $\vec{\gamma}$, σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση $\vec{F} = m \cdot \vec{\gamma}$. Ἄρα ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$F = B - (T + A) \quad ἤ \quad m\gamma = mg - (T + A) \quad καί \quad \gamma = g - \frac{T + A}{m}$$

Ἐπειδή ἡ ταχύτητα υ συνεχῶς αὐξάνεται, ἡ τριβή T αὐξάνεται καί ἐπομένως ἡ δύναμη F συνεχῶς ἐλαττώνεται καί κάποια στιγμή γίνεται ἴση μέ μηδέν (F = 0). Τότε γίνεται καί γ = 0 καί ἑπομένως τό μέτρο τῆς ταχύτητας διατηρεῖται *σταθερό*, υ = σταθ. Ἡ σφαίρα ἐξακολουθεῖ νά κινεῖται ὁμαλά μέ *τήν ὁριακή ταχύτητα* $υ_{ορ}$, πού τήν ὑπολογίζουμε ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$B - (T + A) = 0$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \cdot g = 6\pi R \cdot \eta \cdot υ_{ορ} + \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho_0 \cdot g \quad \text{ἄρα}$$

$$\boxed{\text{ὁριακή ταχύτητα} \quad υ_{ορ} = \frac{2}{9} \cdot \frac{R^2 g}{\eta} \cdot (\rho - \rho_0)}$$

Παράδειγμα. Μιά γυάλινη σφαίρα ἔχει ἀκτίνα R = 1 mm καί πέφτει μέσα σέ ἕνα λάδι (κικινέλαιο, κοινῶς ρετσινόλαδο) μέ ὁριακή ταχύτητα υ = 3 mm/sec. Ἡ πυκνότητα τοῦ γυαλιοῦ εἶναι $\rho = 2{,}6\ \text{gr/cm}^3$ καί τοῦ λαδιοῦ εἶναι $\rho_0 = 0{,}97\ \text{gr/cm}^3$. Θά βροῦμε τό συντελεστή ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ λαδιοῦ. Εἶναι:

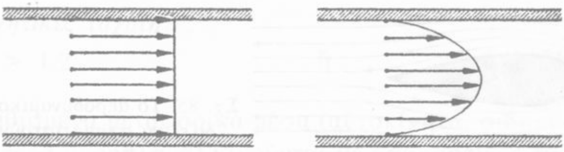
$$\rho = 2600\ \text{kgr/m}^3 \qquad \rho_0 = 970\ \text{kgr/m}^3 \qquad g = 9{,}81\ \text{m/sec}^2$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἐξίσωση βρίσκουμε:

$$\eta = \frac{2}{9}\ \frac{R^2 \cdot g}{υ}(\rho - \rho_0) = \frac{2}{9} \cdot \frac{10^{-6}\ \text{m}^2 \cdot 9{,}81\ \text{m/sec}^2}{3 \cdot 10^{-3}\text{m/sec}} \cdot 1{,}63 \cdot 10^3\ \frac{\text{kgr}}{\text{m}^3}$$

$$\text{καί} \qquad \eta = 1{,}18\ \text{N} \cdot \text{sec} \cdot \text{m}^{-2}$$

δ. Στρωτή ροή φυσικοῦ ὑγροῦ. Ἕνα *ἰδανικό ὑγρό* δέν ἔχει ἐσωτερική τριβή καί ὅταν ρέει μέσα σέ ὁριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα μέ σταθερή διατομή, τότε σέ μιά χρονική στιγμή ὅλα τά μόρια τοῦ ὑγροῦ, πού περνοῦν ἀπό μιά τομή τοῦ σωλήνα, ἔχουν *τήν ἴδια ταχύτητα* (σχ. 84α). Ἕνα ὅμως *φυσικό ὑγρό* ἔχει πάντοτε ἐσωτερική τριβή καί, ὅταν ρέει μέσα στόν ὁριζόντιο σωλήνα, τότε σέ μιά τομή τοῦ σωλήνα ἡ ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ εἶναι *μέγιστη* κατά τή διεύθυνση τοῦ ἄξονα τοῦ



Σχ. 84. Στρωτή ροή ἰδανικοῦ ὑγροῦ (α) καί φυσικοῦ ὑγροῦ (β).

σωλήνα, ἀλλά ἀπό ἐκεῖ καί πέρα ἐλαττώνεται συνεχῶς καί στά τοιχώματα τοῦ σωλήνα γίνεται *ἴση μέ μηδέν* (σχ. 84 β). Μέσα στό σωλήνα τό ὑγρό κινεῖται σχηματίζοντας λεπτά ὁμοαξονικά κυλινδρικά στρώματα, πού γλιστροῦν τό ἕνα πάνω στό ἄλλο. Τό κεντρικό κυλινδρικό στρῶμα τρέχει πιό γρήγορα ἀπό τά ἄλλα στρώματα, ἐνῶ ἐκεῖνο τό στρῶμα, πού ἐφάπτεται μέ τά τοιχώματα τοῦ σωλήνα, παραμένει ἀκίνητο.

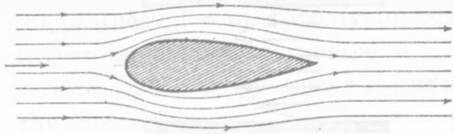
Ὅταν ἡ ταχύτητα ροῆς ξεπεράσει μιά ὁρισμένη τιμή, πού λέγεται *κρίσιμη ταχύτητα,* ἡ ροή τοῦ ὑγροῦ μέσα στό σωλήνα παύει νά εἶναι στρωτή ροή. Τότε οἱ ρευματικές γραμμές δέν εἶναι παράλληλες μέ τόν ἄξονα τοῦ σωλήνα, ἀλλά σχηματίζουν στροβίλους καί σέ κάθε σημεῖο μιᾶς τομῆς τοῦ σωλήνα ἡ ταχύτητα μεταβάλλεται σέ κάθε χρονική στιγμή. Αὐτή ἡ ροή λέγεται *στροβιλώδης ροή*.

43. Κίνηση σώματος μέσα στόν ἀέρα

Ὅταν ἕνα σῶμα κινεῖται μέσα σέ ἀκίνητο ἀέρα, ἤ ἀντίστροφα ὁ ἀέρας κινεῖται σχετικά μέ τό ἀκίνητο σῶμα, τότε στό σῶμα ἐξασκεῖται μιά δύναμη, πού τήν ὀνομάζουμε *ἀντίσταση τοῦ ἀέρα* καί ἐξαρτᾶται ἀπό τρεῖς κυρίως παράγοντες: α) τό ἐμβαδό (S) τῆς μετωπικῆς ἐπιφάνειας, β) τό σχῆμα τοῦ σώματος, καί γ) τήν ταχύτητα (υ) τοῦ σώματος(*).

Ὅταν ἡ ταχύτητα εἶναι μικρή, ἡ ροή τοῦ ἀέρα γύρω ἀπό τό σῶμα εἶναι *στρωτή* καί ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα εἶναι μικρή. Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ σώματος εἶναι μεγάλη, τότε στό πίσω μέρος τοῦ σώματος σχηματίζονται στρόβιλοι. Ἐκεῖ ἡ ταχύτητα τοῦ ἀέρα εἶναι μεγάλη καί ἑπομένως ἡ πίεση εἶναι μικρή (νόμος τοῦ Bernoulli). Ἔτσι ἀνάμεσα στό

* Φυσική Α΄ Λυκείου § 149



Σχ. 85. Τό ἀεροδυναμικό σχῆμα ἐμποδίζει νά σχηματιστοῦν στρόβιλοι.

ἐμπρόσθιο καί στό πίσω μέρος τοῦ σώματος δημιουργεῖται μιά *διαφορά πιέσεως*, πού εἶναι τό σπουδαιότερο αἴτιο τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρα. Γιά νά μή σχηματίζονται πίσω ἀπό τό σῶμα οἱ ἀνεπιθύμητοι στρόβιλοι, δίνουμε στό σῶμα σχῆμα «ἀεροδυναμικό» καί τότε οἱ ρευματικές γραμμές γύρω ἀπό τό σῶμα εἶναι *συνεχεῖς γραμμές* (σχ. 85).

α. Ἐπίδραση τῆς ταχύτητας. Τό σῶμα πού κινεῖται μέσα στόν ἀέρα, συγκρούεται μέ τά μόρια τοῦ ἀέρα καί ἑπομένως προκαλεῖ μιά *μεταβολή* στήν πίεση τοῦ ἀέρα. Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς πιέσεως διαδίδεται μέσα στόν ἀέρα πρός ὅλες τίς διευθύνσεις *μέ τήν ταχύτητα* διαδόσεως τοῦ ἤχου (γιατί ὁ ἦχος εἶναι διάδοση μιᾶς μεταβολῆς πού προκλήθηκε στήν πίεση τοῦ ἀέρα). Στή συνηθισμένη θερμοκρασία ἡ ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἤχου εἶναι $υ_Η = 340$ m/sec ἤ $υ_Η \simeq 1200$ km/h.

Ἡ ἀεροδυναμική ἔρευνα ἀπέδειξε ὅτι *ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα* ἐξαρτᾶται ἀπό *τό λόγο* τῆς ταχύτητας τοῦ σώματος (υ) πρός τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου ($υ_Η$) στόν ἀέρα. Αὐτός ὁ λόγος ὀνομάζεται *ἀριθμός τοῦ Mach*.

$$\text{ἀριθμός τοῦ Mach (M)} = \frac{\text{ταχύτητα σώματος}}{\text{ταχύτητα ἤχου}} \qquad M = \frac{υ}{υ_Η}$$

Μέ βάση τόν ἀριθμό τοῦ Mach χωρίζουμε τίς ταχύτητες στίς ἑξῆς τρεῖς κατηγορίες:

– *ὑποηχητικές ταχύτητες*

$M < 0{,}8$ ἤ $υ < 1000$ km/sec

– *ἠχητικές ταχύτητες*

$0{,}8 < M < 1{,}2$ ἤ $1000 \text{ km/h} < υ < 1400 \text{ km/h}$

– *ὑπερηχητικές ταχύτητες*

$M > 1{,}2$ ἤ $\upsilon > 1400$ km/h

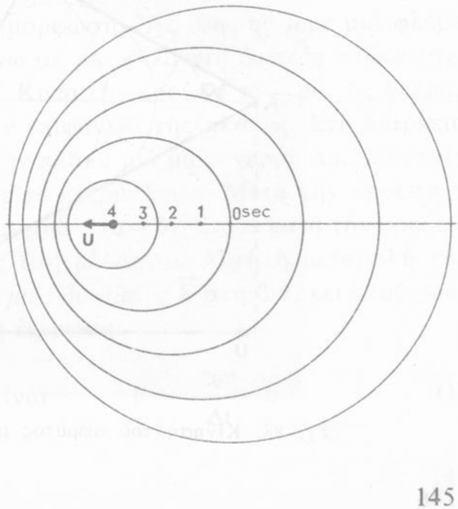
Τά συνηθισμένα μεταφορικά μέσα (αὐτοκίνητα, σιδηρόδρομοι καί τά περισσότερα ἀεροπλάνα) κινοῦνται μέ ὑποηχητικές ταχύτητες. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἡ ἀντίσταση τοῦ ἀέρα (F) εἶναι ἀνάλογη μέ *τό τετράγωνο τῆς ταχύτητας* (υ) τοῦ σώματος καί δίνεται ἀπό τή γνωστή ἐξίσωση:

$$F = k \cdot S \cdot \upsilon^2$$

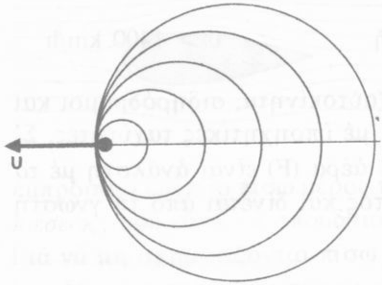
ὅπου k εἶναι *ὁ συντελεστής ἀντιστάσεως*, πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό σχῆμα τοῦ σώματος.

β. Ὑπερηχητικές ταχύτητες. Ὅταν ἡ ταχύτητα (υ) τοῦ σώματος, π.χ. τοῦ ἀεροπλάνου, εἶναι *μικρότερη* ἀπό τήν ταχύτητα (υ_H) τοῦ ἤχου, τά ἠχητικά κύματα τρέχουν πιό γρήγορα ἀπό τό ἀεροπλάνο καί ἔτσι *δέν ἐπηρεάζουν* τήν κίνηση τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 86). Ὅταν ὅμως ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου γίνει *ἴση* μέ τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου, τότε τό ἀεροπλάνο καί τά ἠχητικά κύματα κινοῦνται μαζί καί στό ἐμπρόσθιο μέρος τοῦ ἀεροπλάνου συμβαίνει *πύκνωση* τῶν ἠχητικῶν κυμάτων,

καί μικρότερη



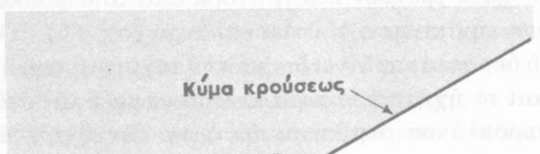
Σχ. 86. Κίνηση τοῦ σώματος μέ ὑποηχητική ταχύτητα.



Σχ. 87. Κίνηση τοῦ σώματος μέ ἠχητική ταχύτητα.

πού ὀνομάζεται *κύμα κρούσεως* (σχ. 87). Μέσα σ' αὐτή τήν πύκνωση δημιουργοῦνται νέες συνθῆκες, οἱ ὁποῖες ἐπηρεάζουν τήν κίνηση τοῦ ἀεροπλάνου. Τά σύγχρονα ἀεροπλάνα ἔχουν διαμορφωθεῖ κατάλληλα, ὥστε εὔκολα μποροῦν νά περνοῦν μέσα ἀπό «τό τεῖχος τοῦ ἤχου», ὅταν μεταβαίνουν ἀπό τήν ὑποηχητική στήν ὑπερηχητική πτήση.

7/12



Σχ. 88. Κίνηση τοῦ σώματος μέ ὑπερηχητική ταχύτητα.

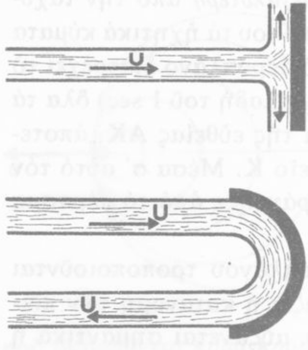
Ὅταν ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου γίνει *μεγαλύτερη* ἀπό τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου, τότε τό ἀεροπλάνο ἀφήνει πίσω του τά ἠχητικά κύματα (σχ. 88). Στή διάρκεια ἑνός δευτερολέπτου τό ἀεροπλάνο διατρέχει τό διάστημα ΑΚ. Στό τέλος αὐτοῦ τοῦ χρόνου (δηλαδή τοῦ 1 sec) ὅλα τά ἠχητικά κύματα, πού ἔφυγαν ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΚ, ἀποτελοῦν μιά *ἐπιφάνεια κώνου* μέ κορυφή τό σημεῖο Κ. Μέσα σ' αὐτό τόν κῶνο βρίσκεται ἡ ζώνη τοῦ ἀέρα πού διαταράχτηκε ἀπό τό πέρασμα τοῦ ἀεροπλάνου.

Κατά τήν ὑπερηχητική πτήση τοῦ ἀεροπλάνου τροποποιοῦνται ὁρισμένες συνθῆκες τῆς πτήσεως, π.χ. ἀλλάζει ἡ κατανομή τῶν πιέσεων πάνω στίς ἐπιφάνειες τοῦ ἀεροπλάνου, αὐξάνεται σημαντικά ἡ δυναμική ἀντίσταση, μετατοπίζεται τό σημεῖο ἐφαρμογῆς τῆς δυναμικῆς ἀνώσεως κ.ἄ. Μέ τίς ἐργαστηριακές μετρήσεις μπορέσαμε νά λύσουμε ἀρκετά ἀπό τά προβλήματα πού παρουσιάζει ἡ ὑπερηχητική πτήση.

44. Ὑδροκινητῆρες

α. Ἐκμετάλλευση τῆς κινητικῆς ἐνέργειας τοῦ νεροῦ. Ὅταν μιά φλέβα νεροῦ συγκρουστεῖ μέ μιά ἀκλόνητη πλάκα, τότε κατά μεγάλη πρσέγγιση αὐτή ἡ κρούση εἶναι *τέλεια πλαστική κρούση* (§ 25) καί ὅπως ξέρουμε σ' αὐτή τήν περίπτωση συμβαίνει *παραμόρφωση* τοῦ ἑνός ἤ καί τῶν δύο σωμάτων πού συγκρούονται. Κατά τήν πλαστική κρούση μέρος ἤ καί ὁλόκληρη *ἡ κινητική ἐνέργεια* τῶν δύο σωμάτων ξοδεύεται γιά νά γίνει ἡ παραμόρφωση. Ἄς θεωρήσουμε μιά φλέβα νεροῦ, πού πέφτει κάθετα πάνω σέ μιά *ἀκλόνητη ἐπίπεδη πλάκα* (σχ. 89α). Τό νερό ἔχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. Κατά τήν κρούση τό νερό τῆς φλέβας ἁπλώνεται καί ρέει πάνω στήν ἐπιφάνεια τῆς πλάκας. Στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt πέφτει πάνω στήν πλάκα μιά μάζα νεροῦ Δm, πού πρίν ἀπό τήν κρούση ἡ ὁρμή της εἶχε μέτρο $\Delta m \cdot \upsilon$. Μετά τήν κρούση ἡ ταχύτητα τοῦ νεροῦ εἶναι ἴση μέ μηδέν ($\upsilon = 0$). Ὥστε κατά τήν κρούση συμβαίνει *μεταβολή τῆς ὁρμῆς* ἴση μέ $\Delta m \cdot \upsilon$. Αὐτή ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς εἶναι ἴση μέ *τήν ὤθηση μιᾶς δυνάμεως* $\vec{F}$ στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt καί ἑπομένως ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$F \cdot \Delta t = \Delta m \cdot \upsilon \quad \text{ἄρα εἶναι} \qquad F = \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon \qquad (1)$$



Σχ. 89. Κρούση μιᾶς φλέβας νεροῦ.

Τό πηλίκο $\Delta m/\Delta t$ φανερώνει *τή μάζα τοῦ νεροῦ* πού πέφτει πάνω στήν πλάκα *κατά μονάδα χρόνου.* Ἡ ἐξίσωση (1) δίνει τό μέτρο τῆς δυνάμεως F πού ἐξασκεῖ *ἡ πλάκα πάνω* στό νερό (ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει φορά πρός τά ἀριστερά). Ἀλλά σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς δράσεως καί ἀντιδράσεως καί *ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ* ἐξασκεῖ πάνω στήν πλάκα μιά δύναμη ἀντίθετη (μέ φορά πρός τά δεξιά) καί πού τό μέτρο της δίνεται ἀπό τήν ἐξίσωση (1). Αὐτή ἡ δύναμη $\vec{F}$ ἔχει τή φορά τῆς ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ τοῦ νεροῦ.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ὅτι ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ πέφτει πάνω σέ *ἀκλόνητη πλάκα,* πού ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι κοίλη (σχ. 89β). Ἡ πλάκα μέ αὐτή τή μορφή ἀποτελεῖ ἕνα *σκαφίδιο.* Δεχόμαστε ὅτι δέν ὑπάρχουν τριβές. Ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ ρέει ὁμαλά κατά μῆκος τῆς κοίλης ἐπιφάνειας τοῦ σκαφιδίου καί τότε συμβαίνει τέλεια ἀναστροφή τῆς κινήσεως τοῦ νεροῦ, ἐπομένως συμβαίνει *τέλεια ἀναστροφή τῆς ταχύτητας τοῦ νεροῦ.* Σ' αὐτή τήν περίπτωση, στή διάρκεια τοῦ χρόνου Δt, *ἡ μεταβολή τῆς ὁρμῆς* τῆς μάζας Δm τοῦ νεροῦ ἔχει μέτρο ἴσο μέ:

$$\Delta J = \Delta m\,[\upsilon - (-\,\upsilon)] \quad \text{ἄρα} \quad \Delta J = 2\Delta m \cdot \upsilon$$

Ἑπομένως *ἡ δύναμη* $\vec{F}$ πού ἐξασκεῖ ἡ φλέβα τοῦ νεροῦ πάνω στό ἀκλόνητο σκαφίδιο ἔχει μέτρο:

$$F = 2\,\frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot \upsilon$$

Ἄν τό σκαφίδιο, ἐξαιτίας τῆς δυνάμεως F, ἀρχίσει νά κινεῖται μέ ταχύτητα $υ_Σ$, τότε *ἡ σχετική ταχύτητα* τοῦ νεροῦ ὡς πρός τό σκαφίδιο εἶναι $υ - υ_Σ$ καί ἡ δύναμη, πού ἐξασκεῖ τό νερό πάνω στό σκαφίδιο, ἔχει μέτρο:

$$F = 2 \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot (υ - υ_Σ)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἀποδείχνεται ὅτι:

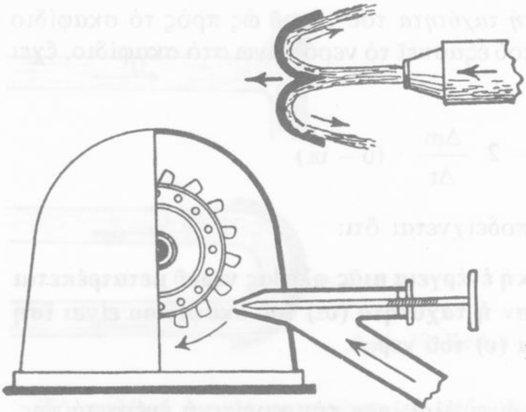
> **Ὁλόκληρη ἡ κινητική ἐνέργεια μιᾶς φλέβας νεροῦ μετατρέπεται σέ ὠφέλιμο ἔργο, ὅταν ἡ ταχύτητα ($υ_Σ$) τοῦ σκαφιδίου εἶναι ἴση μέ τή μισή ταχύτητα ($υ$) τοῦ νεροῦ.**

Ὥστε μιά φλέβα νεροῦ *δίνει ὁλόκληρη* τήν κινητική ἐνέργειά της, ὅταν εἶναι $υ_Σ = υ/2$, ἄρα $υ - υ_Σ = υ/2$. Τότε τό νερό, μετά τή σύγκουσή του μέ τό σκαφίδιο, ἔχει σχετικά μέ τό ἔδαφος ταχύτητα ἴση μέ μηδέν.

Γιά νά ἐκμεταλλευτοῦμε τήν κινητική ἐνέργεια πού ἔχει ἕνα ρεῦμα νεροῦ, χρησιμοποιοῦμε *τούς ὑδροκινητῆρες*.

β. Ὑδροκινητῆρες. Ἡ ἀρχαιότερη μορφή ὑδροκινητήρων εἶναι *ὁ ὑδραυλικός τροχός* (σχ. 90). Σήμερα ὡς ὑδροκινητῆρες χρησιμοποιοῦνται *οἱ ὑδροστρόβιλοι*. Αὐτοί εἶναι τροχοί, πού στήν περιφέρειά τους εἶναι στερεωμένα σκαφίδια ἤ πτερύγια. Τό σχῆμα 91 δείχνει ἕναν τύπο ὑδροστροβίλου *(ὑδροστρόβιλος Pelton)*. Τό νερό βγαίνει μέ μεγάλη ταχύτητα ἀπό ἕναν ἤ περισσότερους στενούς σωλῆνες (ἀκροφύσια) καί συγκρούεται μέ τά σκαφίδια, πού ἔχουν διαμορφωθεῖ κατάλληλα, ὥστε νά γίνεται τέλεια ἀναστροφή τῆς φλέβας τοῦ νεροῦ (ἑπομένως

Σχ. 90. Ὑδραυλικοί τροχοί.



Σχ. 91. Ὑδροστρόβιλος Pelton

καί τέλεια ἀναστροφή τῆς ταχύτητας τοῦ νεροῦ). Σήμερα οἱ ὑδροστρόβιλοι ἔχουν μεγάλη σημασία, γιατί μέ αὐτούς ἐκμεταλλευόμαστε τήν κινητική ἐνέργεια τοῦ νεροῦ καί τή μετατρέπουμε σέ ἠλεκτρική ἐνέργεια *(ὑδροηλεκτρική ἐγκατάσταση)*. Οἱ ὑδροστρόβιλοι ἔχουν μεγάλη ἀπόδοση (ὥς 95%) καί ἀναπτύσσουν μεγάλη ἰσχύ.

Προβλήματα

78. Μέσα σέ ὁριζόντιο σωλήνα, πού τό ἐμβαδό τῆς τομῆς του εἶναι $S_1 = 25\ cm^2$, ρέει νερό μέ ταχύτητα $\upsilon_1 = 0{,}60\ m/sec$ καί πίεση $p_1 = 4 \cdot 10^4\ N/m^2$. Ὁ σωλήνας παρουσιάζει στένωση, πού ἡ τομή της ἔχει ἐμβαδό $S_2 = 5\ cm^2$. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα υ_1 καί ἡ πίεση p_1 τοῦ νεροῦ στή στένωση;

79. Ἕνα χωνί ἀπό διηθητικό χαρτί σφηνώθηκε μέσα σέ γυάλινο χωνί. Μποροῦμε νά διώξουμε τό χαρτί, φυσώντας ἀέρα ἀπό τή στενή ἄκρη τοῦ σωλήνα;

80. Μέσα σέ ὁριζόντιο σωλήνα ρέει νερό. Σέ δύο τομές Α καί Β τοῦ σωλήνα τό ἐμβαδό εἶναι ἀντίστοιχα $S_1 = 4\ cm^2$ καί $S_2 = 1\ cm^2$. Στίς

τομές Α καί Β εἶναι στερεωμένοι δύο κατακόρυφοι λεπτοί σωλῆνες καί στόν πρῶτο ἀπό αὐτούς (τομή Α) τό νερό σχηματίζει στήλη, πού ἔχει ὕψος $h_1 = 15$ cm. Ἡ ταχύτητα τοῦ νεροῦ στήν τομή Β εἶναι $\upsilon_2 = 0{,}8$ m/sec. Νά βρεθεῖ πόσο εἶναι τό ὕψος h_2 τῆς στήλης τοῦ νεροῦ στό δεύτερο σωλήνα. Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/sec^2. $g = 10$ m/sec^2.

81. Ἕνας ὁριζόντιος σωλήνας, πού οἱ τομές σέ δύο σημεῖα του ἔχουν λόγο $S_1/S_2 = 3$, διαρρέεται ἀπό ὑγρό πυκνότητας ρ. Ἄν στή μεγαλύτερη τομή S_1 ἡ ταχύτητα τοῦ ὑγροῦ εἶναι υ_1, νά ἐκφραστεῖ ἡ διαφορά πιέσεως Δp μεταξύ τῶν δύο τομῶν σέ συνάρτηση μέ τήν ταχύτητα υ_1.

82. Σέ ἕνα βεντουρίμετρο πού διαρρέεται ἀπό νερό, ἡ μεγαλύτερη τομή τοῦ σωλήνα ἔχει ἀκτίνα R_1 καί ἡ μικρότερη τομή ἔχει ἀκτίνα $R_2 = R_1/2$. Μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο τομῶν ὑπάρχει διαφορά πιέσεως. $\Delta p = 10^4$ N/m^2. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ νεροῦ στή μεγαλύτερη τομή τοῦ σωλήνα; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m^3. $g = 10$ m/sec^2.

83. Ἕνα ἀεροπλάνο πετάει σέ ὕψος 3000 m, ὅπου ἡ πυκνότητα τοῦ ἀέρα εἶναι $\rho = 0{,}887$ kgr/m^3. Στό σωλήνα Pitot βλέπουμε τότε μιά διαφορά πιέσεως $\Delta p = 4{,}78$ cm Hg. Πόση εἶναι ἡ ταχύτητα τοῦ ἀεροπλάνου; Πυκνότητα ὑδραργύρου $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kgr/m^3. $g = 10$ m/sec^2.

84. Μέ πόση ταχύτητα θά βγαίνει τό νερό ἀπό μιά τρύπα τοῦ ἀτμολέβητα, ἄν ἡ πίεση μέσα στόν ἀτμολέβητα εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ἐξωτερική πίεση κατά $\Delta p = 25$ at; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m^3.

85. Μιά ἀντλία ἀνυψώνει μάζα νεροῦ $m = 1400$ kgr σέ ὕψος $h = 7$ m καί τό ἀναγκάζει νά συγκεντρωθεῖ ὑπό πίεση $p = 3$ at. Πόσο ἔργο ἐκτελεῖ ἡ ἀντλία; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m^3. $g = 10$ m/sec^2.

86. Στό τοίχωμα δεξαμενῆς καί σέ βάθος $h = 10$ m κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ὑπάρχει κυκλικό ἄνοιγμα πού ἔχει ἐμβαδό $S = 6$ cm^2. Πόσος ὄγκος νεροῦ βγαίνει ἀπό τή δεξαμενή κατά λεπτό;

87. Ἀπό τό ἄνοιγμα μιᾶς δεξαμενῆς βγαίνει ὄγκος νεροῦ $V = 2$ lt/sec, ὅταν τό ἄνοιγμα βρίσκεται σέ βάθος $h = 3{,}6$ m κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ τῆς δεξαμενῆς. Πόσος ὄγκος V_1 νεροῦ θά βγαίνει κατά δευτερόλεπτο ἀπό τή δεξαμενή, ὅταν στήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ἐξασκεῖται μιά πρόσθετη πίεση ἴση μέ $p_1 = 8$ at; Πυκνότητα τοῦ νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m^3. $g = 10$ m/sec^2.

88. Στό πάτωμα βρίσκεται ἕνα κατακόρυφο κυλινδρικό δοχεῖο πού περιέχει νερό. Πάνω στήν ἴδια γενέτειρα τοῦ κυλίνδρου ὑπάρχουν δύο μικρές τρύπες, βουλωμένες. Ἡ πάνω τρύπα βρίσκεται σέ ὕψος $h_1 = 10$ cm καί ἡ κάτω τρύπα βρίσκεται σέ ὕψος $h_2 = 3{,}6$ cm ἀπό τόν ὁριζόντιο πυθμένα τοῦ δοχείου. Ὅταν ξεβουλώσουμε ταυτόχρονα τίς δύο τρύπες, σχηματίζονται δύο καμπυλόγραμμες λεπτές φλέβες νεροῦ, πού πέφτουν στό ἴδιο σημεῖο τοῦ πατώματος. Σέ πόσο ὕψος h πάνω ἀπό τόν πυθμένα τοῦ δοχείου βρίσκεται ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ἐκείνη τή στιγμή;

89. Ἕνα δοχεῖο περιέχει νερό καί μπορεῖ νά γλιστράει χωρίς τριβή πάνω στό λεῖο ὁριζόντιο ἐπίπεδο πού ἀκουμπάει ὁ ὁριζόντιος πυθμένας τοῦ δοχείου. Σέ μιά κατακόρυφη ἕδρα τοῦ δοχείου καί σέ βάθος $h = 1$ m κάτω ἀπό τήν ἐλεύθερη ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ὑπάρχει μιά μικρή τρύπα βουλωμένη μέ φελλό. Ξαφνικά ὁ φελλός φεύγει καί τό νερό ἀρχίζει νά βγαίνει ἀπό τή μικρή τρύπα, πού ἔχει διάμετρο $\delta = 1$ cm. Τότε τό δοχεῖο ἀρχίζει νά κινεῖται. Νά βρεθεῖ πόση εἶναι ἡ δύναμη F πού κινεῖ τό δοχεῖο. Πυκνότητα νεροῦ $\rho = 10^3$ kgr/m^3. $g = 10$ m/sec^2.

90. Δύο λεπτά παράλληλα στρώματα γλυκερίνης, πού ἡ μεταξύ τους ἀπόσταση εἶναι $h = 2$ mm, κινοῦνται μέ ταχύτητες ἀντίστοιχα $\upsilon_1 = 3$ cm/sec καί $\upsilon_2 = 2$ cm/sec. Κάθε στρῶμα ἔχει ἐπιφάνεια $S = 5$ cm^2. Ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς τῆς γλυκερίνης εἶναι $\eta = 0{,}83$ N · sec · m^{-2}. Νά βρεθεῖ ἡ ἐσωτερική τριβή T πού ἀναπτύσσεται ἀνάμεσα σ' αὐτά τά δύο στρώματα γλυκερίνης.

91. Μιά σφαίρα ἀπό χάλυβα, μέ ἀκτίνα $R = 2$ mm, ἀφήνεται ἐλεύ-

θερη νά πέσει μέσα σέ γλυκερίνη. Πόση εἶναι ἡ ὁριακή ταχύτητα $υ_{ορ}$ πού ἀποκτᾶ ἡ σφαίρα: Πυκνότητες: χάλυβας $ρ = 7{,}9 \cdot 10^3$ kgr/m^3, γλυκερίνη $ρ_0 = 1{,}3 \cdot 10^3$ kgr/m^3. Συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς γλυκερίνης $η = 0{,}83$ N · sec · m^{-2} · g = 10 m/sec^2.

92. Μιά σφαίρα ἀπό χάλυβα, μέ ἀκτίνα R = 2 mm, ἀφήνεται ἐλεύθερη νά πέσει μέσα σέ ἕνα ὑγρό, πού ἔχει πυκνότητα $ρ_0 = 800$ kgr/m^3. Βρίσκουμε ὅτι ἡ σφαίρα ἀποκτᾶ ὁριακή ταχύτητα $υ_{ορ} = 3 \cdot 10^{-3}$ m/sec. Νά βρεθεῖ ὁ συντελεστής ἐσωτερικῆς τριβῆς η τοῦ ὑγροῦ. Πυκνότητα χάλυβα $ρ = 7800$ kgr/m^3. g = 10 m/sec^2.

93. Σέ ἕναν ὑδροστρόβιλο τό κάθε πτερύγιό του ἀποτελεῖται ἀπό δύο σκαφίδια. Πάνω στόν ὑδροστρόβιλο πέφτει μιά παροχή νεροῦ $Π = 0{,}0981$ m^3/sec μέ ἀπόλυτη ταχύτητα $υ_1 = 30$ m/sec. Τό πτερύγιο κινεῖται κατά τή φορά πού ἔχει καί τό νερό, πού πέφτει πάνω στό σκαφίδιο. Τό πτερύγιο ἔχει ἀπόλυτη ταχύτητα υ = 10 m/sec. Τό νερό φεύγει ἀπό τό πτερύγιο μέ ἀπόλυτη ταχύτητα $υ_2$ πού ἔχει ἀντίθετη φορά μέ τή $υ_1$. Θεωροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχουν τριβές. Νά βρεθεῖ: 1) ἡ τιμή τῆς ταχύτητας $υ_2$· β) ἡ δύναμη F, μέ τήν ὁποία τό νερό σπρώχνει τό πτερύγιο· γ) ἡ ἰσχύς σέ kW τοῦ νεροῦ πού πέφτει πάνω στό πτερύγιο· δ) ἡ ἰσχύς σέ kW τῆς δυνάμεως F, πού κινεῖ τό πτερύγιο· καί ε) πόση θά ἔπρεπε νά εἶναι ἡ ταχύτητα υ τοῦ πτερυγίου, γιά νά μεταδοθεῖ στό πτερύγιο ὅλη ἡ ἰσχύς, τήν ὁποία ἔχει τό νερό πού πέφτει πάνω στό πτερύγιο. g = 10 m/sec^2.

024000019879

ΕΚΔΟΣΗ Α΄ – ΤΕΥΧΟΣ Α΄ 1978 – ΑΝΤΙΤΥΠΑ 73.000

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Π. ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ - Κ. ΚΟΥΚΙΑΣ Ο.Ε.