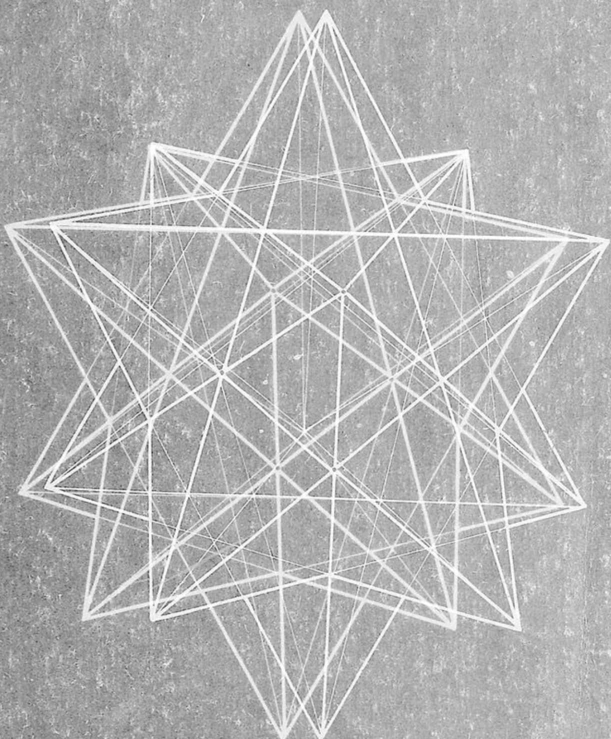
ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ε΄-ΣΤ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Π. Δ. ΛΑΔΟΠΟΥΛΟΥ



ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1968

Λ. Αδαμόπουλος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

Τὸ παρὸν διδακτικὸν βιβλίον προορίζεται διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Ε' καὶ ΣΤ' Τάξεως τοῦ Γυμνασίου. Ἡ συγγραφὴ τούτου ἀνετέθη, διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 57338/24-6-1968 Ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, εἰς τὸν καθηγητὴν τοῦ Ἐθν. Μ. Πολυτεχνείου κ. Παναγιώτην Δ. Λαδόπουλον.

Συνετάγη βάσει τοῦ ἐγκριθέντος, διὰ τῆς ὑπ' ἀριθμ. 126711/19-9-68 Ὑπουργικῆς ἀποφάσεως, νέου Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος, καταρτισθέντος ὑπὸ τῆς, ἐκ τοῦ Καθηγητοῦ τοῦ Ἐθν. Μ. Πολυτεχνείου κ. Παναγ. Λαδοπούλου καὶ τῶν κ.κ. Δημ. Κάππου Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν, Ἀρισ. Πάλλα Καθηγητοῦ τῆς Σχολῆς Ναυτ. Δοκίμων, Νικ. Μπάρκα Προέδρου τοῦ Α.Ε.Σ. καὶ Δ. Φιλαρέτου Συμβούλου τοῦ Α.Ε.Σ., ἐπὶ τούτῳ συσταθείσης Ἐπιτροπῆς.

Ἡ Ἐπιτροπὴ κρίσεως ἀπετελέσθη ἐκ τῶν Καθηγητῶν κ.κ. Π. Λαδοπούλου, Δ. Κάππου καὶ Α. Πάλλα, ἐκ τῶν μελῶν τοῦ Α.Ε.Σ. κ.κ. Ν. Μπάρκα καὶ Δ. Φιλαρέτου καὶ ἐκ τῶν Γενικῶν Ἐπιθεωρητῶν κ.κ. Δ. Κάρτσωνα, Φ. Σπηλιώτη καὶ ἀπαρτιζομένης Ἐπιτροπῆς.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ε΄- ΣΤ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Π. Δ. ΛΑΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὡς οὐσιώδης σκοπὸς τῆς διδαχῆς τῆς Γεωμετρίας πρέπει νὰ τίθεται ἡ καλλιέργεια τοῦ νοῦ καὶ ἡ προαγωγὴ αὐτοῦ εἰς ἱκανότητα πρὸς εἴσδυσιν, κατανόησιν καὶ συνειδητοποίησιν τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν τοῦ *«γεωμετρικοῦ χώρου»*, τὴν κατανόησιν δηλαδὴ καὶ τὴν συνειδητοποίησιν τῶν μορφῶν καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων τοῦ *«γεωμετρικοῦ χώρου»*, καθ' ἑαυτὰ καὶ ἐν συνθέσει πρὸς ἄλληλα θεωρουμένων, καθὼς καὶ τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν αἱ ὁποῖαι ἐγκλείονται εἰς τὰ σχήματα ταῦτα.

Πρὸς ἐπίτευξιν τῆς οὐσιώδους καὶ δημιουργικῆς ταύτης ἀποστολῆς τῆς Γεωμετρίας, ἀπαιτεῖται εἴσδυσις εἰς τὸν *γεωμετρικὸν χῶρον*, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν προϋπόθεσιν διὰ τὴν προαγωγὴν τῆς *«γεωμετρικῆς φαντασίας»* καὶ τῆς *«γεωμετρικῆς συνειδήσεως»*, βασικῶν συντελεστῶν διὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς πρὸς σύνθεσιν ἱκανότητος τοῦ νοῦ, τῆς ἱκανότητος, δηλαδή, αὐτοῦ πρὸς δημιουργίαν καὶ δέουσαν ἱκανοποίησιν τῆς πρὸς τὸ *«δομεῖν»* ὑπὸ τὴν εὐρυτάτην ἔννοιαν τοῦ ὅρου παρόρμησιν τοῦ ἀνθρώπου.

Τὴν ἱκανότητα δὲ ταύτην πρὸς εἴσδυσιν εἰς τὸν *γεωμετρικὸν χῶρον* δύναται νὰ παράσχῃ ἡ ὑπὸ τοῦ *G. Monge* ἐπινοηθεῖσα μέθοδος, ὅταν αὕτη νοηθῇ ὡς κλάδος τῆς Γεωμετρίας, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν τὴν μορφὴν καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων τοῦ *«γεωμετρικοῦ χώρου»*, καθὼς καὶ τῶν *«γεωμετρικοποιουμένων»* σχημάτων τοῦ *«αἰσθητοῦ χώρου»*, ἐκ τῆς μελέτης τῆς μορφῆς καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς *«παραστάσεως»* τῶν σχημάτων τούτων, ἐπὶ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐπιπέδων.

Ἡ εἴσδυσις δὲ εἰς τὸν *γεωμετρικὸν χῶρον* ἔχει βασικὴν σημασίαν, διότι μόνον διὰ τῆς κατανοήσεως τῶν σχημάτων τοῦ χώρου τούτου καθίσταται δυνατὴ ἡ προαγωγὴ τοῦ νοῦ εἰς δημιουργικὴν ἱκανότητα, εἰς ἱκανότητα δηλαδὴ πρὸς ὀρθὴν ἐπιλογήν, σύνθεσιν καὶ ἐκμετάλλευσιν τῶν ἐκ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν ἐνδεικνυομένων κατὰ περίπτωσιν σχημάτων, διὰ τὴν ἱκανοποίησιν τοῦ ἑκάστοτε ἐπιδιωκομένου σκοποῦ. Διὰ τῆς τοιαύτης δὲ καὶ μόνον καλλιεργείας καὶ προαγωγῆς τοῦ νοῦ δύναται νὰ καταστῇ προσπελάσιμος ὁ *γεωμετρικὸς χῶρος*, ὁ ὁποῖος ἄλλως θὰ παραμένῃ περιοχὴ *«ἄδυτος»* διὰ τὸν μὴ φύσει προικισμένον μὲ *γεωμετρικὴν φαντασίαν* καὶ *γεωμετρικὴν συνείδησιν*.

Ὁ ἐνστερνισμὸς κατὰ ταῦτα τῆς σημασίας καὶ τῆς ὠφελιμότητος τῆς ἀρετῆς ταύτης, ὀφείλει νὰ κατανοηθῇ ὡς καθοριστικὸς τοῦ πνεύματος διδαχῆς τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας.

Ἡ δημιουργικὴ ἀξία τῆς, ὑπὸ τὸ ἀνωτέρω πνεῦμα διδαχῆς, παρεχομένης δυνατότητος πρὸς εἴσδυσιν εἰς τὸν *γεωμετρικὸν χῶρον*, κατανοεῖται πλήρως, ὅταν ληφθῇ ὑπ' ὄψει ὅτι ἡ πραγματικὴ ἀποστολὴ τῆς Γεωμετρίας, δὲν περιορίζεται εἰς μόνην τὴν καθ' αὑτὸ μαθηματικὴν περιοχήν, ἀλλ' ἐκτείνεται, κυρίως δὲ τοῦτο καὶ εἰς ὅλας τὰς Εἰκαστικὰς Τέχνας, εἰς τὴν δέουσαν πραγματοποίησιν τῆς ἀποστολῆς καὶ τὴν προαγωγὴν τῶν ὁποίων ἀσκεῖ οὐσιώδη ἐπιρροήν, συμβάλλει δὲ πέρα τούτου καὶ εἰς τὴν σύλληψιν καὶ ὑλοποίησιν τῶν ἐπιτευγμάτων τῶν Τεχνικῶν Ἐπιστημῶν.

Ἐκ τῆς κρατούσης ὅμως διδαχῆς προδίδεται, ὅτι ἡ ὑπ' ὄψει μέθοδος ἐκλαμβάνεται ἐν τῇ οὐσίᾳ οὐχὶ ὡς κλάδος τῆς Γεωμετρίας, ἀλλ' ὡς «τεχνική» ἀφορῶσα περιορισμένως καὶ μόνον εἰς τὴν ἐπὶ τῆς διδιαστάτου ἐπιφανείας, εἰκόνισιν δεδομένων τριδιαστάτων σχημάτων, διὰ τὴν ὑποβοήθησιν πρὸς χάραξιν σχεδίων καταλλήλων καὶ ἀπαραιτήτων, διὰ τὴν ὑπὸ τῶν κατασκευαστῶν κατανόησιν καὶ ὑλοποίησιν σχημάτων ἀφορόντων εἰς τεχνικὰ κυρίως ἔργα.

Ἡ περιοριστικὴ τοῦ ρόλου τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας ἀντίληψις αὕτη, ὀφειλομένη εἰς ἀδυναμίαν κατανοήσεως τῆς οὐσιωδεστάτης ἀρετῆς τοῦ κλάδου τούτου τῆς Γεωμετρίας, τῆς ὑπ' αὐτοῦ δηλαδὴ κατ' ἐξοχὴν παρεχομένης δυνατότητος πρὸς εἴσδυσιν εἰς τὸν *γεωμετρικὸν χῶρον* καὶ συνειδητοποίησιν τῆς μορφῆς καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων αὐτοῦ, ἤγαγεν εἰς διδαχὴν ἐξυπηρετικὴν μὲν τῆς κατασκευῆς, ἀνασχετικὴν ὅμως τῆς γεωμετρικῆς προαγωγῆς καὶ τῆς ἐκτάσεως τῆς συμβολῆς αὐτῆς εἰς τὴν δημιουργίαν καθόλου.

Τοῦτο καθιστᾷ σαφῆ τὴν ἐπιτακτικὴν ἀνάγκην ἐγκαταλείψεως τῆς ὑπὸ τὸ κρατοῦν πνεῦμα διδαχῆς, ἡ ὁποία ὡς ἐρειδομένη ἐπὶ πορισμάτων ἀπορρεόντων ἐκ τῆς ἐρεύνης τοῦ *αἰσθητοῦ χώρου*, ἐκτρέπει ἀπὸ τὴν δέουσαν καλλιέργειαν τοῦ νοῦ καὶ περιορίζει τὴν προαγωγὴν εἰς *γεωμετρικὴν φαντασίαν* καὶ *γεωμετρικὴν συνείδησιν* βασικῆς σημασίας συντελεστὰς διὰ τὰς Εἰκαστικὰς Τέχνας.

Πρέπει νὰ κατανοηθῇ ὅτι τὰ ἔργα τῶν Εἰκαστικῶν Τεχνῶν ἀποτελοῦν, ἐν τελευταίᾳ ἀναλύσει, ὑλοποιήσεις συνθέσεων σχημάτων τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*. Εἶναι δηλαδὴ αἱ εἰκόνες καὶ τὰ εἴδωλα σχημάτων τοῦ χώρου τούτου.

Ἀκολουθεῖται δὲ διὰ τὴν πραγματοποίησιν τῶν ἔργων τῶν Εἰκαστικῶν Τεχνῶν, ὁδὸς ἀντίστροφος ἐκείνης διὰ τῆς ὁποίας ἀγόμεθα ἐκ τοῦ *αἰσθητοῦ χώρου* εἰς τὸν *γεωμετρικόν*, καθ' ἣν τὰ σχήματα αὐτοῦ θεωροῦνται ἀπαλλασσόμενα τῆς συνιστώσης ταῦτα ὕλης, δι' ἀφαιρετικῆς διεργασίας ἀμιγῶς νοητικῆς.

Ὅτι προϋπόθεσις καὶ βασικὸς συντελεστὴς διὰ τὴν δέουσαν πραγματοποίησιν τῆς ἀποστολῆς καὶ προαγωγῆς τῶν Εἰκαστικῶν Τεχνῶν εἶναι, ὡς προηγουμένως ἀνέφερα, ἡ καθ' ὅλου γεωμετρικὴ προαγωγή, ἡ προαγωγὴ δηλαδὴ τῆς *γεωμετρικῆς φαντασίας* καὶ τῆς *γεωμετρικῆς συνειδήσεως*, ἀποδεικνύεται πλήρως ἐκ τῶν ἐπιτευγμάτων τῆς Ἑλληνικῆς Τέχνης.

Οὐσιαστικῶς δυνάμεθα νὰ ὁμιλῶμεν περὶ συμβολῆς τῆς Γεωμετρίας, ὑπὸ τὴν ἐν τοῖς πρόσθεν ἐκτιθεμένην ἔννοιαν, μόνον ἀφ' ἧς διὰ τῆς δημιουργίας Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου κατέστη δυνατὴ ἡ σύλληψις τῆς ἐννοίας τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου* καὶ ἐντεῦθεν ἡ πραγματικὴ διερεύνησις καὶ κατανόησις τῶν ὄντως γεωμετρικῶν σχημάτων, ὡς μορφῶν, ἰδιοτήτων καὶ ἐννοιῶν γεωμετρικῶν καὶ παραλλήλως ἡ καθιέρωσις τῆς γεωμετρικῆς ἀγωγῆς τῶν Ἑλλήνων.

Ἡ ἀγωγὴ αὕτη προήγαγε τοὺς Ἕλληνας εἰς ἱκανόνητα πραγματοποιήσεως συνθέσεων, τὰς ὁποίας χαρακτηρίζει ἡ πλήρης ἐναρμόνισις γεωμετρικῶν ἐννοιῶν, λαμπροτάτην ἔκφρασιν τῶν ὁποίων ἀποτελοῦν τὰ θαυμασίας τέχνης Ἑλληνικὰ κεραμεικά.

Ὁ διάκοσμος τῶν κεραμεικῶν τούτων καταδεικνύει ὅτι οἱ πραγματοποιήσαντες αὐτὸν τεχνῖται διείποντο ὑπὸ γνησίως γεωμετρικοῦ πνεύματος, χάρις εἰς τὸ ὁποῖον κατενόησαν καὶ συνειδητοποίησαν πλήρως τὴν ἔννοιαν τῆς *καμπυλότητος* τῶν ἀγγείων καὶ ἐπέτυχον τὴν διὰ τοῦ διακόσμου τούτου *ἔξαρσιν τῆς εἰς τὴν καμπυλότητα ταύτην ὀφειλομένης πλαστικότητος.*

Τονίζω τὴν ἐναρμόνισιν τῶν ἐννοιῶν, ἐπειδὴ αὕτη ἀποτελεῖ τὸ γενικόν, ἰδιάζον καὶ ἀσύλληπτον χαρακτηριστικὸν τῆς ὅλης ἑλληνικῆς δημιουργίας.

Ἡ τοιαύτη ἐναρμόνισις ἀπότοκος γεωμετρικῆς ἐντελεχείας, ἀποτελεῖ ἀρετὴν χαρακτηριστικὴν τῶν ἑλληνικῶν δημιουργημάτων καὶ ἓν τῶν βασικωτέρων συστατικῶν τοῦ ἀνυπερβλήτου κάλλους των.

Ἐξαίρετον παράδειγμα, τὸ ὁποῖον καθιστᾶ σαφῆ τὴν δημιουργικὴν ἱκανότητα εἰς τὴν ὁποίαν προάγει ἡ γεωμετρικὴ ἐντελέχεια, εἶναι ὁ Ναὸς τῆς τοῦ Θεοῦ Σοφίας, ἔργον τῶν Γεώμετρῶν – Ἀρχιτεκτόνων Ἀνθεμίου καὶ Ἰσιδώρου.

Ἡ ἐκ τῆς θεάσεως τοῦ ἀριστουργήματος τούτου προκαλουμένη αἰσθητικὴ ἱκανοποίησις ὀφείλεται εἰς τὴν κατάλληλον ἐπιλογὴν καὶ σύνθεσιν σχημάτων, πρὸς ἔλλογον ἱκανοποίησιν τόσον μορφολογικῶν ὅσον καὶ λειτουργικῶν ἀρχιτεκτονικῶν ἐπιδιώξεων. Καθίσταται ὅμως ἐκ τῆς θεωρήσεως ταύτης προφανές, ὅτι ἡ διὰ τὴν τοιαύτην σύλληψιν ἀπαιτουμένη *γεωμετρικὴ συνείδησις* καὶ *γεωμετρικὴ φαντασία* συνιστᾷ προνομίαν ἰδιάζουσαν μόνον εἰς τοὺς μεγάλους δημιουργούς.

Ἀνέφερα τὰ ἀνωτέρω διὰ νὰ καταστήσω σαφές, ὅτι προϋπόθεσις διὰ τὴν προαγωγὴν τῆς Γεωμετρίας καθ' ἑαυτήν, καθὼς καὶ τὴν δι' αὐτῆς δέουσαν ἐπιτέλεσιν τῆς ἀποστολῆς τῶν Εἰκαστικῶν Τεχνῶν καὶ τὴν ἀνάπτυξιν αὐτῶν, εἶναι ἡ διὰ γνησίας γεωμετρικῆς ἀγωγῆς προαγωγὴ τῆς *γεωμετρικῆς συνειδήσεως* καὶ τῆς *γεωμετρικῆς φαντασίας*, εἰς τοῦτο δὲ καὶ σκοπεῖ ἡ ὑπὸ τὸ ἐν ἀρχῇ καθορισθὲν πνεῦμα διδαχὴ τῆς μεθόδου τοῦ *G. Monge.*

***

Παραδίδω εἰς τὴν σπουδάζουσαν Ἑλληνικὴν νεολαίαν καὶ τὸ Σύγγραμμα τοῦτο, μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι θὰ συντελέσω καὶ δι' αὐτοῦ εἰς τὴν καθιέρωσιν γεωμετρικῆς ἀγωγῆς, μόνης ἱκανῆς νὰ ἀφυπνίσῃ τὴν ἰδιάζουσαν εἰς τοὺς Ἕλληνας φυσικὴν προδιάθεσιν πρὸς τὴν Γεωμετρίαν, νὰ καταστήσῃ δυνατὴν τὴν ἀνασύνδεσιν μὲ τὰς πνευματικὰς ρίζας τοῦ Ἑλληνισμοῦ καὶ νὰ ὁδηγήσῃ καὶ πάλιν εἰς τὴν φωτεινὴν ὁδὸν τὴν ὁποίαν ἐχάραξαν Ἐκεῖνοι καὶ ἡ ὁποία τοὺς ὡδήγησεν εἰς τὴν θεμελίωσιν τῶν Ἐπιστημῶν καὶ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἀνεπαναλήπτου Ἑλληνικοῦ θαύματος.

***

Θεωρῶ καθῆκον μου νὰ εὐχαριστήσω τοὺς Ἐπιμελητὰς μου κ.κ. Ι. Ἀρμᾶον καὶ Κ. Μάρθαν Ἀρχιτέκτονας καὶ Π. Ξαγοράρην Μαθηματικόν, εἰς τὴν εὐσυνεί-

δητον προσπάθειαν καὶ ἐπιμέλειαν τῶν ὁποίων ὀφείλεται ἡ σχεδιαστικὴ ἀρτιότης τῶν ἐν τῷ Συγγράματι τούτο ἐγχρώμων σχεδίων, σκοπὸς τῶν ὁποίων εἶναι ἡ ὑποβοήθησις πρὸς εἴσδυσιν εἰς τὸν γεωμετρικὸν χῶρον καὶ συνειδητοποίησιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων αὐτοῦ.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Β. Μετρικὰ προβλήματα

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ὁ *«γεωμετρικὸς χῶρος»*, προβλήματα τοῦ ὁποίου ἐρευνᾷ καὶ ἐπιλύει ἡ Γεωμετρία, εἶναι ἐντελῶς διάφορος τοῦ *«αἰσθητοῦ χώρου»* καὶ ἀποτελεῖ ἰδιάζον νοητικὸν κατασκεύασμα. Περιλαμβάνει δὲ ὁ χῶρος οὗτος στοιχεῖα *πραγματικὰ* καὶ *φανταστικὰ* (*). Εἰς τὰ *πραγματικὰ στοιχεῖα* τοῦ χώρου τούτου δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν ἐξ ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ αἰσθητοῦ χώρου, δι' ἀφαιρετικῆς διεργασίας ἀμιγῶς νοητικῆς.

Τὰ στοιχεῖα τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*, κατασκευάσματα ἐντελῶς νοητικά, καλοῦνται καὶ σχήματα αὐτοῦ. Διὰ τῆς ἐκφράσεως δὲ *ἰδιότητες τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου*, ἐννοοῦμεν τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων αὐτοῦ.

Ὅταν πρόκειται νὰ μελετήσωμεν τὰς ἰδιότητας ἑνὸς ἐπιπέδου γεωμετρικοῦ σχήματος $[F]$, αἰσθανόμεθα τὴν ἀνάγκην *«ὑλοποιήσεώς του»*. Τοῦτο δὲ διότι ἡ *«ὑλοποιημένη ἔκφρασις»* τῶν ἀφηρημένων ἐννοιῶν, διευκολύνει τὴν ἐπ' αὐτῶν νοητικὴν διεργασίαν.

Πρὸς ἐπίτευξιν τούτου, δεχόμεθα ὅτι ὑφίσταται μία ἀντιστοιχία ἱκανὴ νὰ ὁδηγήσῃ ἐκ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος $[F]$ τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*, εἰς τὴν ἐπιδιωκομένην *«ὑλοποιημένην ἔκφρασιν»* (F) αὐτοῦ, κατὰ τὴνὁποίαν αἱ γραφικαὶ καὶ αἱ μετρικαὶ γεωμετρικαὶ ἰδιότητες τοῦ σχήματος $[F]$ διατηροῦνται καὶ εἰς τὴν *«ὑλοποιημένην ἔκφρασίν»* του (F).

Τὴν τοιαύτην *«ὑλοποιημένην ἔκφρασιν»* (F) καλοῦσιν ἐπίσης *σχῆμα*. Τὴν ὀνομασίαν αὐτὴν θὰ διατηρήσωμεν καὶ ἡμεῖς.

Ἡ ἀντιστοιχία $\mathcal{Cl}$ παρέχει τὸ δικαίωμα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (F) εἶναι *«ὅμοιον»* πρὸς τὸ σχῆμα $[F]$, ἐκ τοῦ γεγονότος καὶ μόνον ὅτι διατηροῦνται αἱ γραφικαὶ καὶ μετρικαὶ ἰδιότητες τοῦ σχήματος $[F]$, εἰς τὸ σχῆμα (F). Οὐδεμίαν ἄλλην σχέσιν δύναται νὰ ἔχῃ τὸ ὑλικὸν σχῆμα (F) πρὸς τὸ νοητικὸν σχῆμα $[F]$.

Ἡ ὑλοποίησις τοῦ ἐπιπέδου σχήματος $[F]$, γίνεται συνήθως ἐπὶ ἐπιφανείας χάρτου ἢ ἄλλου ὑλικοῦ, τὴν ὁποίαν δεχόμεθα ὡς *«ὑλοποιημένην ἔκφρασιν»* τοῦ γεωμετρικοῦ εὐκλειδείου ἐπιπέδου, διατηροῦσαν τὰς ἰδιότητας αὐτοῦ, σχῆμα δηλαδή, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅμοιον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Κατὰ ταῦτα, διὰ νὰ ὑποβοηθήσωμεν τὴν γεωμετρικὴν φαντασίαν μας, εἰς τὸ νὰ ἀνεύρῃ τὴν ὁδὸν τὴν ὁποίαν ὀφείλουν νὰ ἀκολουθήσουν οἱ συλλογισμοὶ

(*) Ἡ εἰς τὰ *φανταστικὰ στοιχεῖα* τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου προσέγγισις, ἐκ στοιχείων τοῦ αἰσθητοῦ χώρου, εἶναι ἀνέφικτος.

μας, εἰς τὸ σχῆμα [F] τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*, διὰ τὴν ἀπόδειξιν τεθείσης δι' αὐτό, γεωμετρικῆς προτάσεως, εἴτε ἡ πρότασις αὕτη ἀναφέρεται εἰς τὴν μορφὴν εἴτε εἰς τὰς ἰδιότητας τοῦ σχήματος [F], κατασκευάζομεν τὸ σχῆμα (F), βάσει τῆς ἀντιστοιχίας $\mathcal{A}$

Τὸ σχῆμα (F), εἰς τὸ ὁποῖον ὡς ἄνω καταφεύγομεν πρὸς διευκόλυνσιν τῆς φαντασίας μας καὶ πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν ἀπαιτουμένων γεωμετρικῶν πράξεων καὶ συλλογισμῶν, καλοῦμεν « *παράστασιν* » ἢ « *εἰκόνα* » τοῦ σχήματος [F].

Ἡ ἀνάγκη τῆς παραστάσεως καθίσταται ἀκόμη ἐντονωτέρα ὅταν πρόκειται νὰ μελετήσωμεν τὴν μορφὴν καὶ τὰς ἰδιότητας σχήματος [S] τριῶν διαστάσεων τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*.

Ἡ λέξις ὅμως « *παράστασις* » εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τριδιαστάτου σχήματος, ἡ ὁποία εἴθισται νὰ λαμβάνεται ὡς ἔννοια γνωστή, χρήζει διερευνήσεως καὶ καθορισμοῦ, ὡς τοῦτο γίνεται κατωτέρω. Ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχει ἐπίσης μία ἀντιστοιχία $\mathcal{A}$ βάσει τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ σχήματος [S] εἰς μίαν « *ὑλοποιημένην ἔκφρασίν* » του (S), ἐν τῇ ὁποίᾳ διατηροῦνται αἱ γραφικαὶ καὶ αἱ μετρικαὶ ἰδιότητες τοῦ σχήματος [S]. Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ προηγουμένως, περὶ ἐπιπέδων σχημάτων λεχθέντα, θὰ ἠδύναμεθα νὰ καλέσωμεν τὴν ὑλοποιημένην ἔκφρασιν (S) παράστασιν τοῦ σχήματος [S], καθ' ὅσον εἶναι « *ὁμοία* » πρὸς τὸ σχῆμα [S]. Δὲν δυνάμεθα ὅμως νὰ κατασκευάσωμεν μὲ ἕναν ἁπλοῦν τρόπον τὴν παράστασιν (S) τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος [S], ὅπως γίνεται τοῦτο διὰ τὰ ἐπίπεδα σχήματα τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου. Ἑπομένως, ἐφ' ὅσον δὲν δυνάμεθα μὲ ἁπλοῦν τρόπον νὰ πραγματοποιήσωμεν τὴν παράστασιν (S), δὲν ἱκανοποιοῦμεν τὴν ἀπαίτησιν τῆς νοήσεώς μας, ὅπως ἔχωμεν μίαν ὑλοποιημένην ἔκφρασιν τοῦ σχήματος [S]. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καταφεύγομεν εἰς μετασχηματισμόν $\mathcal{B}$, τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ σχήματος [S] τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*, εἰς ἓν ἐπίπεδον σχῆμα [F] τοῦ χώρου τούτου, ἐν συνεχείᾳ δὲ κατασκευάζομεν τὴν παράστασιν (F) τοῦ ἐπιπέδου τούτου σχήματος, τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀντιστοιχίας $\mathcal{A}$.

Ἡ παράστασις αὕτη (F) τοῦ ἐπιπέδου σχήματος [F] δύναται, κατ' ἐπέκτασιν, νὰ ὀνομασθῇ καὶ παράστασις τοῦ χωρικοῦ σχήματος [S]. Προκύπτει συνεπῶς ὅτι δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ χωρικοῦ σχήματος [S] εἰς τὴν παράστασιν (F), διὰ τοῦ γινομένου $\mathcal{A}.\mathcal{B}$, τοῦ μετασχηματισμοῦ $\mathcal{B}$ ἐπὶ τὴν ἀντιστοιχίαν $\mathcal{A}$. Τὸ γινόμενον τοῦτο $\mathcal{A}.\mathcal{B}$ καλοῦμεν καὶ *μέθοδον παραστάσεως*.

Καλῶ, δηλαδή, μέθοδον παραστάσεως ἑνὸς σχήματος [S] *τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου, τὸ σύνολον τῶν γεωμετρικῶν παραδοχῶν καὶ πράξεων, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται μία μονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ σχήματος* [S] *τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος* (F) *τοῦ αἰσθητοῦ χώρου.*

Ἡ παράστασις (F) καλεῖται ἐπίσης καὶ εἰκὼν ἢ προβολὴ τοῦ σχήματος [S], ἡ δὲ ἐπιφάνεια ἐφ' ἧς τοῦτο πραγματοποιεῖται, καλεῖται *ἐπιφάνεια προβολῆς ἢ πίναξ*.

Ἡ ἐκλογὴ τοῦ μετασχηματισμοῦ $\mathcal{B}$ δὲν γίνεται αὐθαιρέτως, ἀλλὰ κατὰ τρόπου ὥστε ἡ παράστασις (F) τοῦ σχήματος [S], νὰ ἱκανοποιῇ τοὺς κάτωθι ὅρους :

α) Νὰ ἀναπλάσσῃ (ὑπενθυμίζῃ) εἰς τὸν παρατηροῦντα αὐτήν, μίαν ὀπτικὴν εἰκόνα τῆς ὑλοποιημένης ἐκφράσεως (S) τοῦ σχήματος [S], τὴν ὁποίαν δύναται οὗτος νὰ ἀντιληφθῇ, ὅταν τοποθετηθῇ εἰς κατάλληλον θέσιν ἐνώπιον τῆς (S).

β) Νὰ ἔχῃ ἁπλότητα ἀντιστοιχίας πρὸς τὸ σχῆμα [S] καὶ συνθέσεως καθ' ἑαυτήν.

γ) Νὰ παρέχῃ τὴν δυνατότητα ἐπανακατασκευῆς τῆς παραστάσεως (S) τοῦ σχήματος [S].

Ὑπάρχουν πλείονες μέθοδοι καθιστῶσαι δυνατὴν τὴν παράστασιν (F) τοῦ χωρικοῦ σχήματος [S].

Ἐκ τούτων μᾶλλον ἐν χρήσει εἶναι :

α) Ἡ κεντρικὴ προβολὴ

β) Ἡ ὀρθὴ καὶ ἡ πλαγία προβολὴ

γ) Ἡ διὰ δύο ἐπιπέδων προβολῆς *(Monge)*

δ) Ἡ δι' ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς μετὰ τῶν ὑψομέτρων

ε) Ἡ ἀξονομετρικὴ ὀρθὴ καὶ πλαγία προβολή.

Ἐκ τῶν μεθόδων τούτων. Ἡ α' δύναται (*) νὰ ἱκανοποιήσῃ εἰς πολὺ μεγάλον βαθμὸν τὸν πρῶτον, ἐκ τῶν ὡς ἄνω, ὅρων, εἰς μικρότερον βαθμὸν τὸν δεύτερον καὶ οὐδόλως τὸν τρίτον. Ἡ *β'* δύναται νὰ ἱκανοποιήσῃ εἰς μεγάλον βαθμὸν τὸν πρῶτον καὶ δεύτερον ὅρον καὶ οὐδόλως τὸν τρίτον. Ἡ *γ'* καὶ ἡ *δ'* ἱκανοποιοῦν ἀπολύτως μὲν τὸν δεύτερον καὶ τρίτον ὅρον, μερικῶς δὲ τὸν πρῶτον. Τέλος δὲ ἡ *ε'* δύναται νὰ ἱκανοποιήσῃ εἰς μεγάλον βαθμὸν καὶ τοὺς τρεῖς ὅρους.

Πέραν ὅμως τῶν σχημάτων τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*, παρίσταται ἐπίσης ἀνάγκη παραστάσεως ἀντικειμένων τοῦ *αἰσθητοῦ χώρου*, πρὸς διερεύνησιν καὶ ἐπίλυσιν προβλημάτων συναφῶν πρὸς τὰς μορφὰς καὶ τὴν σύνθεσιν αὐτῶν. Πρὸς τοῦτο, τὰ ὑπ' ὄψει αἰσθητὰ ἀντικείμενα *«γεωμετρικοποιοῦνται»*, τὰ ἀπαλλάσωμεν δηλαδὴ δι' ἀφαιρετικῆς διεργασίας καθαρῶς νοητικῆς, τῆς συνιστώσης ταῦτα ὕλης καὶ δίδομεν εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῶν γεωμετρικοὺς καθορισμούς, καθιστῶντες οὕτω ταῦτα οἱονεὶ σχήματα τοῦ *γεωμετρικοῦ χώρου*. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν δὲ αὐτήν, εἰς τά, ὑπὸ *«γεωμετρικοποιημένην»* μορφήν, αἰσθητὰ ἀντικείμενα, πρὸς ἀντιμετώπισιν τῶν εἰς αὐτὰ ἀφορώντων συναφῶν προβλημάτων, δύνανται νὰ ἔχουν πλήρη ἐφαρμογὴν αἱ προαναφερθεῖσαι μέθοδοι παραστάσεως.

Καθώρισα τὰς ἐννοίας *«παράστασις»* καὶ *«μέθοδος παραστάσεως»*, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὡς ἀπαραιτήτους πρὸς κατανόησιν καὶ συνειδητοποίησιν τῆς βάσει αὐτῶν ἱδρυομένης Παραστατικῆς Γεωμετρίας, ἀφ' ἑτέρου δὲ διότι εἰς ὅλα τὰ σχε-

(*) Τὸ «δύναται» τίθεται ὑπὸ τὴν ἔννοιαν, ὅτι δι' ἕκαστον σχῆμα [S] ὑπάρχουν κεντρικαὶ προβολαί, ἱκανοποιοῦσαι εἰς πολὺ μεγάλον βαθμὸν τὸν πρῶτον ὅρον. Παράδειγμα περὶ τοῦ ἀντιθέτου προμηθεύει ἡ Προοπτικὴ παραμόρφωσις *(Anamorphose)*.

τικὰ συγγράμματα καὶ ἐννοῶ τὰ ξένα, αἱ ἔννοιαι αὗται οὐδόλως καθορίζονται, θεωρούμεναι, κατὰ παράδοξον ἀντίληψιν, ὡς γνωσταί.

Σκοπὸς τοῦ κλάδου τῆς Γεωμετρίας, εἰς τὸν ὁποῖον ἀφορᾶ τὸ παρὸν σύγγραμμα, εἶναι *ἡ παροχὴ μεθόδων πρὸς μελέτην τῆς μορφῆς καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν σχημάτων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου, καθὼς καὶ τῶν « γεωμετρικοποιουμένων » σχημάτων τοῦ αἰσθητοῦ χώρου.*

Ὡς καὶ ἐν τῷ Προλόγῳ ἀνέφερα, ἡ Παραστατικὴ πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάδος τῆς Γεωμετρίας ἐν τῷ ὁποίῳ ἀναπτύσσονται αἱ μεθόδοι *τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν τὴν μορφὴν καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου ἢ τῶν « γεωμετρικοποιουμένων » σχημάτων τοῦ αἰσθητοῦ χώρου, ἐκ τῆς μελέτης τῆς μορφῆς καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς παραστάσεως τῶν σχημάτων τούτων, ἐπὶ ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ἐπιπέδων.*

Ἡ μέθοδος τοῦ *G. Monge* πέρα τῆς δυνατότητος ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων εἰς ἃ καθ' αὐτὸ ἀφορᾶ, παρέχει ἐπίσης, ἐφ' ὅσον κατανοηθῇ καὶ συνειδητοποιηθῇ, τὴν δυνατότητα εἰσδύσεως εἰς τὰ προβλήματα τοῦ χώρου καὶ συνειδητοποιήσεως τῶν σχημάτων αὐτοῦ καὶ τῶν συνθέσεών των, ὡς ἐν τῷ Προλόγῳ λεπτομερῶς ἀναπτύσσεται. Πρὸς τούτοις δὲ παρέχει προσθέτως καὶ τὴν δυνατότητα κατανοήσεως καὶ ὑλοποιήσεως, ὑπὸ τῶν κατασκευαστῶν, τῶν συλλήψεων τῶν δημιουργῶν.

Θεωρῶ ἐπιβεβλημένον νὰ τονίσω, ὅτι ἡ κρατοῦσα παρά τισιν ἐν τῇ ἀλλοδαπῇ καὶ κατὰ μίμησιν καὶ ἐν Ἑλλάδι, περὶ τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς διδαχῆς αὐτῆς ἀντίληψις, ἀποκλείουσα τὴν οὐσιώδη συμβολὴν τῆς Ἐπιστήμης ταύτης, εἰς τὴν προαγωγὴν τῆς δημιουργικῆς ἱκανότητος τοῦ νοῦ καὶ περιορίζουσα τὸν ρόλον της εἰς μόνην τὴν δι' αὐτῆς παρεχομένην δυνατότητα πρακτικῆς ἐκμεταλλεύσεως διὰ τῆς τεχνικῆς τῆς σχεδιάσεως, τὴν παροχὴν δηλαδὴ συνταγῶν καὶ σχεδίων διὰ τὴν διεκόλυνσιν τῆς κατασκευῆς, ἀποτελεῖ ὄχι μόνον ὑποτίμησιν καὶ ἐπιζημίαν παρανόησιν τῆς μεθόδου τοῦ *G. Monge*, ἀλλὰ καὶ κυρίως ἀνεπίτρεπτον παραίτησιν ἀπὸ τῶν οὐσιωδεστάτων ὠφελιμοτήτων, τὰς ὁποίας ἐγκλείει ἡ δημιουργία αὕτη.

Ὅτι ἡ κρατοῦσα ἀντίληψις ἀντιτίθεται πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ *G. Monge* ἀποδεικνύεται, ἐκτὸς τῶν ἄλλων, καὶ ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι, ἐνῶ οὗτος ἐσκέφθη νὰ ἐκδώσῃ ἀνεξάρτητον βιβλίον, ὡς ἀποδεικνύεται τοῦτο ἐκ σχετικοῦ ἀνεκδότου κειμένου τοῦ ἰδίου, τοῦ 1793, οὐδέποτε ἐξέδωκε τὸ βιβλίον, παρ' ὅ,τι ἐπέζησεν τοῦ κειμένου τούτου εἴκοσι πέντε ἔτη, ἀποδείξας οὕτως ὅτι αἱ πρακτικαὶ ἐφαρμογαὶ δὲν ἦσαν ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν τῆς δημιουργίας του.

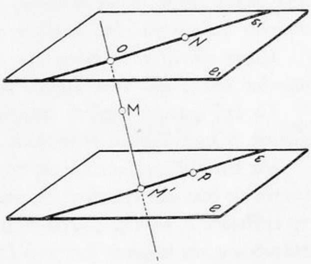
***

Ἡ ἐκλογὴ τῆς κατὰ περίπτωσιν προκριθησομένης μεθόδου παραστάσεως, ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τοῦ πρὸς λύσιν τεθειμένου προβλήματος.

Εἰς τὸ παρὸν σύγγραμα θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὴν διερεύνησιν καὶ τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων σχετιζομένων μὲ τὸ σημεῖον, τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον. Πρὸς τοῦτο θὰ ἐργασθῶμεν τῇ βοηθείᾳ τῶν ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας ἔχουν, ὡς πρὸς δύο ἐπίπεδα προβολῆς ἢ ὡς πρὸς ἓν ἐπίπεδον προβολῆς, αἱ παραστάσεις τῶν εἰσερχομένων εἰς τὸ ἐξεταζόμενον πρόβλημα γεωμετρικῶν τούτων στοιχείων. Καθίσταται ἑπομένως ἀναγκαῖον νὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἰδιότητας τῶν παραστάσεων τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου, εἰς δύο ἐπίπεδα προβολῆς καὶ εἰς ἓν ἐπίπεδον προβολῆς. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ δύο αὗται μέθοδοι παραστάσεως ἀποτελοῦν, ὡς θὰ ἴδωμεν, εἰδικὰς περιπτώσεις τῆς κεντρικῆς προβολῆς, ἐξετάζομεν πρώτην τὴν μέθοδον ταύτην.

Ἡ μέθοδος τῆς κεντρικῆς προβολῆς

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΣΤΟΙΧΕΙΑ. Θεωρήσωμεν σημεῖον O τοῦ χώρου καὶ ἐπίπεδον e, μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου O. Τὸ σημεῖον O καλεῖται *κέντρον προβολῆς*, τὸ ἐπίπεδον e *ἐπίπεδον προβολῆς* (*) καὶ αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ διερχόμεναι διὰ τοῦ κέντρου O, *ἀκτῖνες προβολῆς*.



Σχ. α

Ἔστω e_1, τὸ ἐκ τοῦ σημείου O παράλληλον πρὸς τὸ e ἐπίπεδον. Εἰς ἕκαστον σημεῖον M τοῦ χώρου, μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸ σημεῖον M', τομὴν τῆς ἀκτῖνος OM μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e. Τὸ σημεῖον M' καλεῖται κεντρικὴ προβολὴ τοῦ σημείου M (Σχ. α).

Ἔστω ε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e διερχομένη διὰ τοῦ M'. Τὸ σημεῖον O καὶ ἡ εὐθεῖα ε ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον p, τέμνον τὸ ἐπίπεδον e_1 κατὰ τὴν εὐθεῖαν ε_1. Αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε_1 εἶναι παράλληλοι.

Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου p, ἐκτὸς τῶν σημείων τῆς εὐθείας ε_1 ἔχει, ὡς κεντρικὴν προβολὴν ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε_1, ὅπως

* Εἴθισται κατ' ἐξαίρεσιν παρ' ἡμῖν, νὰ χρησιμοποιοῦν κατὰ τὴν διδαχὴν τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας τὸν ὅρον «προβολικὰ ἐπίπεδα», διὰ νὰ δηλώσουν τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ὁ χῶρος. Ὁ χῶρος ὅμως τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας, καθὼς καὶ τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται οὗτος εἶναι εὐκλείδεια. «Προβολικὸν ἐπίπεδον» καλεῖται τὸ ἐπίπεδον τῆς Προβολικῆς Γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐντελῶς διάφορον τοῦ «εὐκλειδείου ἐπιπέδου».

Διὰ νὰ καταστήσωμεν σαφῆ τὴν οὐσιώδη διαφορὰν μεταξὺ τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων, ἀναφέρομεν δύο ἐκ τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν. Οὕτω, τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον εἶναι μονόπλευρος ἐπιφάνεια κλειστή, ἐνῷ τὸ εὐκλείδειον δίπλευρος ἐπιφάνεια ἀνοικτή· τὸ πρῶτον ὑπὸ μιᾶς μὲν εὐθείας του δὲν χωρίζεται, ὑπὸ δύο δὲ εὐθειῶν του χωρίζεται εἰς δύο περιοχάς, ἐνῶ τὸ δεύτερον ὑπὸ μιᾶς μὲν εὐθείας του χωρίζεται εἰς δύο περιοχάς, ὑπὸ δύο δὲ εὐθειῶν του εἰς τέσσαρας.

Ἐν τῇ παρούσῃ συγγραφῇ, πρὸς ἀποκλεισμὸν τῆς ἀνεπιτρέπτου ταύτης συγχύσεως περὶ τὰς ἐννοίας, γίνεται χρῆσις τοῦ ὀρθοῦ ὅρου «ἐπίπεδον προβολῆς».

π. χ. τὸ N, δὲν ἔχουν κεντρικὴν προβολήν, διότι ἡ εὐθεῖα ON δὲν τέμνει, ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν, τὴν εὐθεῖαν ε. Διὰ νὰ ἀρθῇ ἡ ἐξαίρεσις αὕτη δεχόμεθα ὅτι ἡ ἀκτὶς ON τέμνει τὴν εὐθεῖαν ε εἰς σημεῖον N', κεντρικὴν προβολὴν τοῦ σημείου N. Τὸ σημεῖον τοῦτο N', τομὴν τῶν εὐθειῶν ε καὶ ε_1, καλοῦμεν *ἐπ' ἄπειρον σημεῖον* εἰς εὐθείας ε.

Ἐὰν λάβωμεν τὸ σημεῖον M' ὡς κέντρον προβολῆς καὶ τὸ ἐπίπεδον e_1 ὡς ἐπίπεδον προβολῆς, τότε τὸ σημεῖον O τοῦ Σχ. α θὰ εἶναι ἡ κεντρικὴ προβολὴ τοῦ σημείου M. Τὰ ἐπίπεδα e καὶ e_1 θὰ ἀλλάξουν τοὺς ρόλους των, ἐὰν δὲ P εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ε, ἡ προβολὴ τοῦ P ἀπὸ τοῦ M' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν ε καὶ ε_1, εἶναι δηλαδὴ τὸ σημεῖον N', τὸ ὁποῖον ὠνομάσθη ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ παραλληλία μεταξὺ τῶν εὐθειῶν ε καὶ ε_1 εἶναι ἰδιότης συμμετρική, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ σημεῖον N' εἶναι ἐξ ἴσου ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς ε_1.

Κατὰ ταῦτα, *δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον καλούμενον ἐπ' ἄπειρον σημεῖον, δι' ἑκατέραν ἐξ αὐτῶν.*

Διὰ συλλογισμῶν ἀναλόγων καθίσταται ἀναγκαῖον νὰ δεχθῶμεν ὅτι :
Μία δέσμη παραλλήλων εὐθειῶν, κειμένων ἢ μὴ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὁρίζει ἓν σημεῖον καλούμενον ἐπ' ἄπειρον σημεῖον αὐτῶν.

Πᾶσα εὐθεῖα τοῦ χώρου ἔχει ἓν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον· εἶναι δὲ τοῦτο τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τῶν παραλλήλων πρὸς ταύτην εὐθειῶν.

Τὸ ἐπ' ἄπειρον τοῦτο σημεῖον ὑποδηλοῦμεν ὅταν λέγωμεν διεύθυνσιν μιᾶς εὐθείας ἢ μιᾶς δέσμης παραλλήλων εὐθειῶν.

Ἂς ἐπανέλθωμεν πάλιν εἰς τὸ Σχ. α. Αἱ διὰ τοῦ O εὐθεῖαι τοῦ χώρου χωρίζονται εἰς δύο κατηγορίας. Εἰς τὴν πρώτην ἀνήκουν ὅλαι αἱ ἀκτῖνες αἱ τέμνουσαι τὸ ἐπίπεδον e, εἰς τὴν δευτέραν ἀνήκουν ὅλαι αἱ ἀκτῖνες αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον e, αἱ κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, αἵτινες δὲν τέμνουν, ὑπὸ τὴν εὐκλείδειον ἔννοιαν, τὸ ἐπίπεδον e.

Διὰ νὰ μὴν ὑπάρχῃ διάκρισις δύο κατηγοριῶν ἀκτίνων προβολῆς, δεχόμεθα ὅτι καὶ αἱ ἀκτῖνες τῆς δευτέρας κατηγορίας, αἱ κείμεναι, ὡς εἴπομεν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τέμνουν τὸ ἐπίπεδον e. Γίνεται μόνον διάκρισις εἰς τὴν ὀνομασίαν τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Οὕτω, τὰ σημεῖα κατὰ τὰ ὁποῖα αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον e ἀκτῖνες προβολῆς, τέμνουν τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, καλοῦνται *ἐπ' ἄπειρον σημεῖα* τοῦ ἐπιπέδου e.

Τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου e, ὡς ἀνήκοντα εἰς τὰς ἀκτῖνας τὰς κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, ἀνήκουν καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον e_1, εἶναι δηλαδὴ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων e καὶ e_1. Ἐπειδὴ δὲ δύο ἐπίπεδα μὴ παράλληλα τέμνονται εἰς μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν δεχόμεθα, διὰ νὰ ἀποφύγωμεν τὴν ἐξαίρεσιν, ὅτι καὶ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα e καὶ e_1 τέμνονται εἰς μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν, διὰ τῆς ὁποίας διέρχεται καὶ πᾶν ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον e. Ἡ εὐθεῖα αὕτη καλεῖται ἐπ' *ἄπειρον εὐθεῖα* τοῦ ἐπιπέδου e, κεῖνται δὲ ἀπ' αὐτῆς τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἐπειδὴ δὲ ἡ παραλληλία μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων e καὶ e_1 εἶναι ἰδιότης συμμετρική, τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ πᾶν παράλληλον πρὸς τὸ e ἐπίπεδον, ἡ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e εἶναι καὶ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e_1 ὡς καὶ παντὸς παραλλήλου πρὸς τὸ e ἐπιπέδου, ἑπομένως :

Τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου e, ὡς καὶ παντὸς πρὸς αὐτὸ παραλλήλου ἐπιπέδου, κεῖνται ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας αὐτῶν.

Κατὰ ταῦτα,, *πᾶν ἐπίπεδον τοῦ χώρου ἔχει μίαν ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖαν, ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ δι' ὅλα τὰ πρὸς αὐτὸ παράλληλα ἐπίπεδα.*

Δεχόμεθα περαιτέρω, ὅτι *αἱ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖαι ὅλων τῶν ἐπιπέδων τοῦ χώρου κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καλουμένου ἐπ' ἄπειρον ἐπιπέδου τοῦ χώρου.*

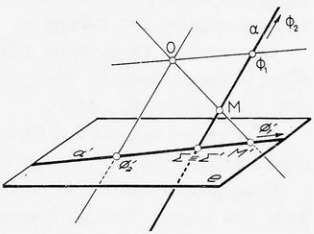
Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπ' ἄπειρον σημείου μιᾶς εὐθείας, εἰσήχθη εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὑπὸ τοῦ *G. Desargues* (1639), ἐνῷ τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπ' ἄπειρον ἐπιπέδου τοῦ χώρου, εἰσήχθη βραδύτερον ὑπὸ τοῦ *J.V. Poncelet*.

Ἡ εἰσαγωγὴ εἰς τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν τῶν ἐπ' ἄπειρον στοιχείων, παρέσχε τὴν δυνατότητα ἁπλουστέρας διατυπώσεως τῶν προτάσεων αὐτῆς καὶ ἀποφυγῆς τῆς « περιπτωσιολογίας».

Ὅταν εἰς τὸν εὐκλείδειον χῶρον προσαρτήσωμεν τὰ ἐπ' ἄπειρον στοιχεῖα, ὁ χῶρος οὗτος ἐπεκτείνεται, καλεῖται δὲ *ἐπεκτεταμένος ἢ ντεζαργκιανὸς χῶρος* (L' espace arguesien).

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Ἔστω Ο τὸ κέντρον προβολῆς καὶ e τὸ ἐπίπεδον προβολῆς (Σχ. β). Ἡ κεντρικὴ προβολὴ σημείου $M \neq O$ τοῦ χώρου, εἶναι τὸ σημεῖον M' τοῦ ἐπιπέδου e, ἐπ' ἄπειρον ἢ μή. Ἀντιστρόφως, σημεῖον M δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κεντρικὴ προβολὴ οἱουδήποτε σημείου τῆς εὐθείας OM (ἐκτὸς τοῦ O).



Σχ. β

Ἔστω τώρα καμπύλη (C) τοῦ χώρου, δυναμένη νὰ ὁρισθῇ γεωμετρικῶς. Θεωροῦντες τὴν καμπύλην (C), ὡς σύνολον τῶν σημείων της $\{M, \ldots\}$, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς κεντρικὴν προβολὴν τῆς (C), τὴν καμπύλην (C'), σύνολον τῶν προβολῶν $\{M', \ldots\}$, τῶν σημείων τῆς καμπύλης (C).

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ καμπύλη (C) εἶναι ἡ εὐθεῖα a, μὴ διερχομένη διὰ τοῦ O (Σχ. β). Ἡ προβολὴ a' τῆς εὐθείας a, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν τῆς δέσμης, τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ σημείου O καὶ τῶν σημείων τῆς εὐθείας α. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι τῆς δέσμης κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς εὐθείας a καὶ τοῦ σημείου O, αἱ προβολαὶ τῶν σημείων τῆς a, θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας a', τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τῆς δέσμης μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e, ὅθεν :

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθείας α, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς

O, εἶναι ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου (O, α) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς.

Ἐὰν Σ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας α μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e, ἡ προβολή του $\Sigma' \equiv \Sigma$. Τὸ σημεῖον Σ καλεῖται *ἴχνος* τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, ὅθεν :

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς, διέρχεται διὰ τοῦ ἴχνους της.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, χωρὶς νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, τὸ ἴχνος της καθίσταται ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, ἐπειδὴ δὲ διὰ τοῦ ἴχνους αὐτῆς θὰ διέλθῃ καὶ ἡ προβολή της, ἕπεται :

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς καὶ μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς O, ἡ κεντρικὴ προβολὴ παντὸς σημείου της, ἐκτὸς τοῦ O, συμπίπτει μὲ τὸ ἴχνος της, ὅθεν :

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς, εἶναι τὸ ἴχνος της.

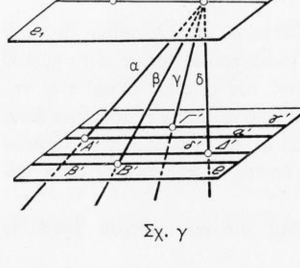
Ἐπανέλθωμεν πάλιν εἰς τὸ Σχ. β. Ἔστωσαν Φ_1 καὶ Φ_2' τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐκ τοῦ κέντρου O παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας α καὶ α', μετὰ τῶν εὐθειῶν α' καὶ α ἀντιστοίχως.

Τὸ σημεῖον Φ_1 τῆς εὐθείας α ἔχει ὡς κεντρικὴν προβολὴν τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον Φ_1' τῆς εὐθείας α', ἐνῷ τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον Φ_2 τῆς εὐθείας α, ἔχει ὡς κεντρικὴν προβολὴν τὸ σημεῖον Φ_2', τῆς εὐθείας α'. Τὸ σημεῖον Φ_2' καλεῖται *σημεῖον φυγῆς* τῆς εὐθείας α, εἶναι δὲ τὸ σημεῖον φυγῆς, ἡ κεντρικὴ προβολὴ τοῦ ἐπ' ἄπειρον σημείου τῆς εὐθείας α.

Θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν α εὐθειῶν. Αἱ εὐθεῖαι αὗται θὰ ἔχουν κοινὸν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τὸ Φ_2, τοῦ ὁποίου ἡ κεντρικὴ προβολὴ εἶναι τὸ σημεῖον Φ_2', ὅθεν :

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ ἐπὶ ἐπιπέδου e, παραλλήλων πρὸς εὐθεῖαν α εὐθειῶν, εἶναι εὐθεῖαι διερχόμεναι διὰ τοῦ σημείου φυγῆς τῆς εὐθείας α.

Θεωρήσωμεν σημεῖον $M \not\equiv O$ καὶ τὸ σύνολον, τῶν δι' αὐτοῦ διερχομένων εὐθειῶν τοῦ χώρου. Ἐὰν M' ἡ κεντρικὴ προβολὴ τοῦ σημείου $\boldsymbol{M}$, ἡ κεντρικὴ προβολὴ τῶν διὰ τοῦ M εὐθειῶν τοῦ χώρου, θὰ εἶναι αἱ διὰ τοῦ M' εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου e. Ἐὰν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ διὰ τοῦ κέντρου O παραλλήλου πρὸς τὸ e ἐπιπέδου, ἡ προβολὴ $\boldsymbol{M}'$ τοῦ σημείου M, θὰ εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου e καὶ ἑπομένως αἱ προβολαὶ τῶν διὰ τοῦ M εὐθειῶν θὰ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν OM (Σχ. γ), ὅθεν :

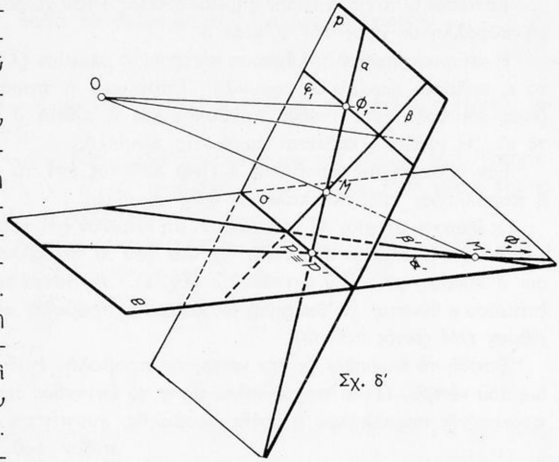


Σχ. γ

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ εὐθειῶν τοῦ χώρου διερχομένων διὰ σημείου M, διαφόρου τοῦ κέντρου προβολῆς O, εἶναι εὐθεῖαι παράλ-

ληλοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΜ, τότε καὶ μόνον ὅταν ἡ εὐθεῖα ΟΜ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἔστω τώρα ἐπίπεδον p, μὴ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς O, τέμνον τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e κατὰ τὴν εὐθεῖαν σ (Σχ. δ). Διὰ τοῦ κέντρου O φέρομεν ἐπίπεδον e_1 παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e καὶ ἔστω φ_1 ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν ἐπιπέδων e_1 καὶ p. Ἡ εὐθεῖα φ_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν σ. Ἡ κεντρικὴ προβολὴ σημείου M τοῦ ἐπιπέδου p, μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς φ_1 εἶναι τὸ σημεῖον M' τοῦ ἐπιπέδου e (Σχ. δ). Τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας φ_1, ὡς π.χ. τὸ Φ_1, ἔχουν ὡς κεντρικὴν προβολὴν τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου e, τὰ σημεῖα δηλαδὴ τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας αὐτοῦ. Ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι ἡ κεντρικὴ προβολὴ τῆς εὐθείας φ_1 εἶναι ἡ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e. Ἡ εὐθεῖα φ_1 καλεῖται *εὐθεῖα φυγῆς* τοῦ ἐπιπέδου p.



Σχ. δ΄

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ πάσης ἄλλης εὐθείας π.χ. τῆς α, τοῦ ἐπιπέδου p, εἶναι μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e, προκύπτουσα ὡς τομὴ τοῦ ἐπιπέδου (Ο, α) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e.

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ σημείου P τῆς εὐθείας σ, εἶναι τὸ σημεῖον $P' \equiv P$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἴχνος πάσης εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p, κεῖται ἐπὶ τῆς σ, ἕπεται ὅτι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου p καὶ ἡ προβολή της, τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας σ. Ἡ εὐθεῖα φυγῆς καὶ πᾶσα παράλληλος πρὸς αὐτὴν εὐθεῖα, τέμνονται μετὰ τῆς προβολῆς των, εἰς τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας σ.

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος $[\Pi]$ π.χ. ἑνὸς πολυγώνου κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, θὰ εἶναι ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα $[\Pi']$ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e.

Διὰ τῆς κεντρικῆς προβολῆς, τὰ δύο σχήματα $[\Pi]$ καὶ $[\Pi']$ εἶναι συσχετισμένα μεταξύ των, εἰς τρόπον ὥστε :

α) Εἰς ἕκαστον σημεῖον M τοῦ σχήματος $[\Pi]$, ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M' τοῦ σχήματος $[\Pi']$, κείμενον μετὰ τοῦ M ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ σημείου O.

β) Εἰς ἑκάστην πλευρὰν α τοῦ σχήματος $[\Pi]$, ἀντιστοιχεῖ μία πλευρὰ α' τοῦ σχήματος $[\Pi']$, τέμνουσα τὴν α εἰς σημεῖον τῆς εὐθείας σ.

Τὰ δύο σχήματα $[\Pi]$ καὶ $[\Pi']$ καλοῦνται *προοπτικά*.

Ἡ μέθοδος τῆς παραλλήλου καὶ τῆς ὀρθῆς προβολῆς

Η ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΚΑΙ Η ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

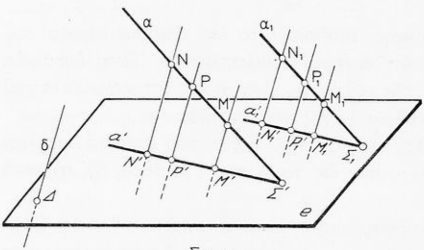
Ἔστωσαν Ο τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον εὐθείας δ τοῦ χώρου καὶ ἐπίπεδον e αὐτοῦ, μὴ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν δ.

Ἡ κεντρικὴ προβολὴ ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ σημεῖον O καὶ ἐπίπεδον προβολῆς τὸ e, καλεῖται *παράλληλος προβολή*. Ἑπομένως ἡ παράλληλος προβολὴ ὁρίζεται, ἐὰν δοθῇ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς καὶ ἡ εὐθεῖα δ (μὴ παράλληλος πρὸς τὸ e). Ἡ εὐθεῖα δ καλεῖται *διεύθυνσις προβολῆς*.

Ἐὰν ἡ διεύθυνσις προβολῆς δ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e, ἡ παράλληλος προβολὴ καλεῖται *ὀρθὴ προβολή*.

Εἰς ἕκαστον σημεῖον M τοῦ χώρου, μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπ' ἄπειρον ἐπιπέδου, ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M', τομὴ τῆς διὰ τοῦ M παραλλήλου πρὸς τὴν διεύθυνσιν δ εὐθείας, μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e (Σχ. ε). Ἀντιστρόφως, τὸ σημεῖον M' τοῦ ἐπιπέδου e δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κεντρικὴ προβολὴ οἱουδήποτε σημείου τῆς εὐθείας OM (ἐκτὸς τοῦ O).

Ἐπειδὴ τὸ θεωρηθὲν εἰς τὴν κεντρικὴν προβολὴν ἐπίπεδον e_1, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου O καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e, εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς παραλλήλου ἢ ὀρθῆς προβολῆς, συμπίπτει μὲ τὸ ἐπ' ἄπειρον ἐπίπεδον τοῦ χώρου, ἕπεται ὅτι ἡ παράλληλος προβολὴ σημείου τοῦ ἐπ' ἄπειρον ἐπιπέδου, ἐξαιρέσει τοῦ ἐπ' ἄπειρον σημείου τῆς διευθύνσεως δ, εἶναι σημεῖον τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου e. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι :



Σχ. ε

Ἡ παράλληλος προβολὴ δοθείσης εὐθείας α, μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν διεύθυνσιν προβολῆς δ, εἶναι ἡ εὐθεῖα α', κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ διὰ τῆς α παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν δ ἐπίπεδον τέμνει τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e.

Ἐὰν $\Sigma \equiv \Sigma'$ εἶναι τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, ἡ παράλληλος προβολὴ α' τῆς εὐθείας α, θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Σ.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν προβολῆς, ἡ παράλληλος προβολή της εἶναι τὸ ἴχνος της.

Ἔστωσαν α, β παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ χώρου καὶ α', β' αἱ προβολαί των. Τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, παράλληλα πρὸς τὴν διεύθυνσιν προβολῆς δ, τέμνουν τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, κατὰ εὐθείας παραλλήλους, ἑπομένως :

Ἡ παράλληλος ἢ ἡ ὀρθὴ προβολή, παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει. Διότι, δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α' καὶ β' τοῦ ἐπιπέδου e, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς προβολαὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν α καὶ

β, κειμένων ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν διὰ τῶν α' καὶ β' παραλλήλων πρὸς τὴν διεύθυνσιν δ ἐπιπέδων.

Ἔστωσαν M, N, P τυχόντα σημεῖα εὐθείας α καὶ M', N', P' αἱ προβολαὶ αὐτῶν, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν δ. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι MM', NN' καὶ PP' εἶναι παράλληλοι, κατὰ τὰ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overline{M'P'}}{\overline{P'N'}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{PN}}, \text{ δηλαδὴ } (M'N'P') = (MNP), \text{ ἑπομένως :}$$

Κατὰ τὴν παράλληλον ἢ τὴν ὀρθὴν προβολὴν εὐθείας διατηρεῖται ὁ μερικὸς λόγος τριῶν σημείων αὐτῆς.

Ἔστωσαν τώρα α καὶ α_1 δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ χώρου, M,N,P τυχόντα σημεῖα τῆς α καὶ M', N', P' αἱ προβολαὶ αὐτῶν, M_1,N_1,P_1 τυχόντα σημεῖα τῆς α_1 καὶ M_1', N_1', P_1' αἱ προβολαὶ αὐτῶν.

Ἐὰν Σ καὶ Σ_1 τὰ ἴχνη τῶν εὐθειῶν α καὶ α_1, τὰ τρίγωνα $\Sigma MM'$, $\Sigma NN'$, $\Sigma PP'$, $\Sigma_1 M_1 M_1'$, $\Sigma_1 N_1 N_1'$ καὶ $\Sigma_1 P_1 P_1'$ εἶναι ὅμοια (Σχ. ε.). Ἑπομένως

$$\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = \frac{\Sigma P'}{\Sigma P} = \frac{\Sigma N'}{\Sigma N} = \frac{\Sigma_1 M'_1}{\Sigma_1 M_1} = \frac{\Sigma_1 P'_1}{\Sigma_1 P_1} = \frac{\Sigma_1 N'_1}{\Sigma_1 N_1},$$

ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει :

$$\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = \frac{M'P'}{MP} = \frac{P'N'}{PN} = \frac{\Sigma_1 M_1'}{\Sigma_1 M_1} = \frac{M_1'P_1'}{M_1P_1} = \frac{P_1N_1'}{P_1N_1} = \ldots, \text{ ἤτοι :}$$

Εἰς παράλληλον ἢ ὀρθὴν προβολήν, ὁ λόγος τῶν προβολῶν τῶν ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ἢ ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν κειμένων τμημάτων, πρὸς τὰ προβαλλόμενα τμήματα εἶναι σταθερός.

Εἰς τὴν παράλληλον ἢ τὴν ὀρθὴν προβολὴν τὰ σημεῖα φυγῆς τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου, εἶναι τὰ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα αὐτῶν.

Διὰ τὴν παράλληλον ἢ τὴν ὀρθὴν προβολὴν ἐπιπέδου καὶ τῶν ἐπ' αὐτοῦ σχημάτων, ἰσχύουν ὅσα εἰς τὴν κεντρικὴν προβολὴν ἐγράφησαν, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ εὐθεῖα φυγῆς τοῦ ἐπιπέδου, συμπίπτει μετὰ τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας αὐτοῦ.

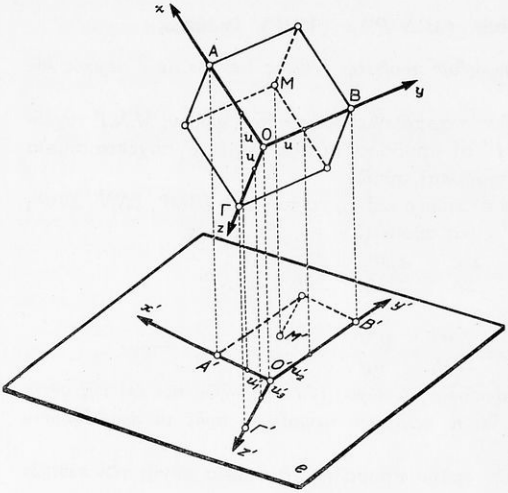
Ἡ μέθοδος τῆς ἀξονομετρικῆς προβολῆς

Ὅπως εἰς τὴν παράγραφον περὶ παραλλήλου καὶ ὀρθῆς προβολῆς ἀνεπτύχθη, ἡ προβολὴ [F] ἑνὸς σχήματος τοῦ χώρου [S] δὲν καθορίζει τὸ σχῆμα τοῦτο, οὔτε τὴν θέσιν του εἰς τὸν χῶρον. Διὰ νὰ καθορίζεται τὸ σχῆμα τοῦ χώρου [S] ἐκ τῆς προβολῆς του, διὰ νὰ ὑπάρχῃ δηλαδὴ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ χωρικοῦ σχήματος [S] καὶ τῆς προβολῆς του [F] ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e, εἰσάγεται ἓν σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφέρομεν τὸ σχῆμα [S] καὶ ἡ προβολή του $O'x'y'z'$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e. Τὸ εἰσαγόμενον σύστημα $Oxyz$ λαμβάνεται τρισορθογώνιον καὶ θεωρεῖται ἡ αὐτὴ μονὰς μετρήσεως u, τῶν μηκῶν καὶ ἐπὶ τῶν τριῶν ἀξόνων.

Ἔστωσαν u_1', u_2', u_3' αἱ προβολαὶ τῆς u ἐπὶ τῶν ἀξόνων $O'x'$, $O'y'$ $O'z'$ παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν προβολῆς δ. Ἐὰν x, y, z αἱ συντεταγμέναι τυχόντος σημείου τοῦ σχήματος [S], ὡς πρὸς τὸ σύστημα ἀναφορᾶς $Oxyz$

καὶ x', y', z', αἱ προβολαὶ τῶν συντεταγμένων τούτων παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν δ, θὰ εἶναι (Σχ. στ)·

$$\frac{OA}{u}=x,\quad \frac{OB}{u}=y,\quad \frac{O\Gamma}{u}=z \quad \text{καὶ} \quad \frac{O'A'}{u'_1}=x',\quad \frac{O'B'}{u'_2}=y',\quad \frac{O'\Gamma'}{u'_3}=z'$$



Σχ. στ΄

Ἐπειδή, ὅμως κατὰ τὴν παράλληλον προβολήν, διατηρεῖται ὁ λόγος δύο τμημάτων εὐθείας καὶ εἰς τὴν προβολήν των, ἕπεται :

$$\frac{OA}{u}=\frac{O'A'}{u'_1},\quad \frac{OB}{u}=\frac{O'B'}{u'_2},\quad \frac{O\Gamma}{u}=\frac{O'\Gamma'}{u'_3},$$ ὅθεν :

$$x=x',\quad y=y',\quad z=z'$$

Ἑπομένως :

Ἐὰν δοθῇ ἡ παραλλήλως πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ προβολὴ $O'x'y'z'$ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e, τοῦ συστήματος συντεταγμένων $Oxyz$, ἐπὶ τῶν ἀξόνων τῆς ὁποίας ἔχουν σημειωθῇ αἱ προβολαὶ u'_1, u'_2, u'_3 τῆς μονάδος μετρήσεως u τῶν συντεταγμένων x, y, z, δυνάμεθα ἐκ τῶν συντεταγμένων τῶν διαφόρων σημείων τοῦ σχήματος [S], νὰ κατασκευάσωμεν τὴν προβολὴν αὐτοῦ [F]. Καὶ ἀντιστρόφως, δοθείσης τῆς προβολῆς [F] σχήματος [S], ἀναφερομένης ὡς πρὸς σύστημα $O'x'y'z'$, θεωρούμενον ὡς προβολῆς συστήματος $Oxyz$, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἔχουν σημειωθῇ αἱ μονάδες u'_1, u'_2, u'_3, ὡς προβολαὶ μονάδος μετρήσεως u, ἐπὶ τῶν ἀξόνων τοῦ $Oxyz$, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ σχῆμα [S], ὡς πρὸς τὸ σύστημα $Oxyz$.

Ἡ παράλληλος προβολὴ [F] ἀναφερομένη εἰς τὸ σύστημα $O'x'y'z'$, προβολῆς τοῦ συστήματος $Oxyz$ τοῦ σχήματος [S], καλεῖται ἀξονομετρικὴ προβολὴ τοῦ σχήματος [S].

Διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ μέθοδος τῆς ἀξονομετρικῆς προβολῆς, ἀπαιτεῖται ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος :

Τρία οἱαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα $O'A'$, $O'B'$, $O'\Gamma'$ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, ἐφ' ὅσον ἐκ τούτων δύο τουλάχιστον εἶναι διάφορα τοῦ μηδενὸς καὶ δύο τουλάχιστον δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς πλαγία προβολὴ τριῶν ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων OA, OB, $O\Gamma$ τοῦ χώρου, ἀνὰ δύο καθέτων ἐπ' ἄλληλα.

Τὸ θεμελιῶδες τοῦτο θεώρημα καθορίζει τὰς προϋποθέσεις ὑπάρξεως τῆς ἀξονομετρικῆς προβολῆς, διετυπώθη δὲ τὸ πρῶτον (1853) ὑπὸ τοῦ *Pohlke* ἀποδειχθὲν πλήρως ὑπὸ τοῦ *H. Schwarz* (1863).

Ἡ ἀξονομετρικὴ προβολὴ εἶναι μία μέθοδος παραστάσεως, ἡ ὁποία δύναται νὰ χρησιμεύσῃ διὰ τὸν καθορισμὸν καὶ τὴν κατασκευὴν τῶν δι' αὐτῆς εἰκονιζομένων σχημάτων. Χρησιμοποιεῖται εἰς μεγάλην κλίμακα ὑπὸ τῶν Ἀρχιτεκτόνων καὶ τῶν Μηχανικῶν, διὰ τὴν παράστασιν τῶν διαφόρων τεχνικῶν ἔργων τὰ ὁποῖα μελετοῦν καὶ κατασκευάζουν.

Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης καθορίζεται μὲν ἐκ τῆς προβολῆς τὸ σχῆμα καθ' ἑαυτὸ ἢ πρὸς ἄλλα σχήματα, τῶν ὁποίων ὅμως δίδεται ἐπίσης ἡ ἀξομομετρικὴ προβολή, ὅπως π.χ. πρὸς τὸ σύστημα ἀναφορᾶς, ἀλλὰ δὲν καθορίζεται ἡ θέσις τοῦ σχήματος ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ι

Παράστασις
τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων
διὰ δύο προβολῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

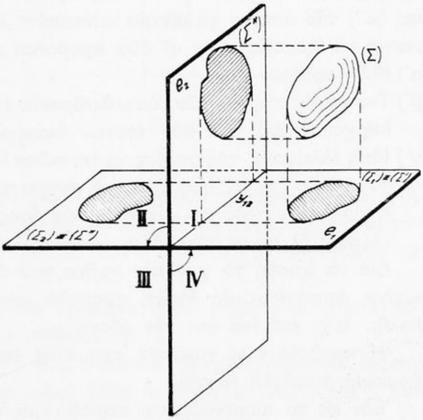
Παράστασις καὶ ἀμοιβαῖαι θέσεις τῶν θεμελιωδῶν γεωμετρικῶν στοιχείων

1. ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Ἔστωσαν e_1 καὶ e_2 δύο ἐπίπεδα τοῦ χώρου κάθετα ἐπ' ἄλληλα καὶ y_{12} ἡ εὐθεῖα τομῆς αὐτῶν.

Ἓν σχῆμα (Σ) τοῦ χώρου θὰ ἔχῃ μίαν ὀρθὴν προβολὴν (Σ_1) ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ μίαν ὀρθὴν προβολὴν (Σ_2) ἐπὶ τοῦ e_2. Τὰ ἐπίπεδα e_1 καὶ e_2 καλοῦνται *ἐπίπεδα προβολῆς*, ἡ δὲ εὐθεῖα τομῆς των, *ἄξων* y_{12}. (Σχ. Ι καὶ Σχ. 1).

Ἡ Παραστατικὴ Γεωμετρία ἔχει ὡς εἴπομεν δύο προγόνους, τὴν Προοπτικὴν καὶ τὸ Ἀρχιτεκτονικὸν Σχέδιον, εἶναι φυσικὸν εἰς τὴν ὀνοματολογίαν τὴν ὁποίαν χρησιμοποιεῖ, νὰ ἀκολουθῇ συχνὰ τὴν παράδοσιν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ Ἀρχιτεκτονικὸν Σχέδιον ἀπετελεῖτο (ὅπως ἐξ ἄλλου καὶ σήμερον) ἐκ δύο σχεδίων, τῆς κατόψεως (τῆς ἰχνογραφίας) καὶ τῆς προσόψεως (τῆς ὀρθογραφίας), τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἐπιπέδων προβολῆς π.χ. τὸ e_1 θεωρεῖται ὁριζόντιον, ὁπότε τὸ e_2 θὰ εἶναι κατακόρυφον.



Σχ. 1

Τὴν προβολὴν (Σ_1) καλοῦμεν *ὁριζοντίαν* ἢ *α' προβολήν*, τὴν δὲ (Σ_2) *κατακόρυφον* ἢ *β' προβολὴν* τοῦ σχήματος (Σ).

Τὰ ἐπίπεδα e_1 καὶ e_2 ὁρίζουν τέσσαρας περιοχὰς τοῦ χώρου, τὰς ὁποίας συμβολίζομεν διὰ τῶν *I*, *II*, *III*, *IV*, ἔνθα αἱ μὲν περιοχαὶ *I* καὶ *II* θεωροῦνται ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου e_1, αἱ δὲ περιοχαὶ *II* καὶ *III* θεωροῦνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου e_2.

Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον e_2 στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα y_{12}, ἐντὸς τῶν περιοχῶν *II* καὶ *IV*, μέχρις ὅτου συμπέσῃ μετὰ τοῦ e_1.

Θὰ ἔχωμεν τότε ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ τοῦ λοιποῦ θὰ καλεῖται *πίναξ σχεδιάσεως* ἢ ἁπλῶς *πίναξ* καὶ θὰ θεωρῆται διπλοῦν (καὶ ὡς e_1 δηλαδὴ καὶ ὡς e_2), τὰς δύο προβολὰς τοῦ σχήματος (Σ), τὰς ὁποίας θὰ συμβολίζωμεν διὰ τῶν (Σ') καὶ (Σ''). Ἡ (Σ') συμπίπτει μετὰ τῆς (Σ_1), ἐνῷ ἡ (Σ'') εἶναι ἴση μὲ τὴν (Σ_2), προκύπτουσα ἐκ ταύτης διὰ περιστροφῆς τοῦ ἐπιπέδου της περὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

Διευκρινίζεται, ὅτι, ὅταν κατωτέρω θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σχῆμα (Σ) τοῦ χώρου, ἔχει ὡς ὁριζοντίαν ἢ πρώτην προβολὴν τὸ σχῆμα (Σ') καὶ ὡς κατακόρυφον ἢ δευτέραν προβολὴν τὸ σχῆμα (Σ'') τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι ἐγένετο ἡ προβολὴ τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων προβολῆς e_1, καὶ e_2, ὅτε ταῦτα ἦσαν κάθετα ἐπ' ἄλληλα καὶ ἐν συνεχείᾳ ὅτι τὸ e_2 κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ e_1, κατὰ τὰ ἀνωτέρω. Ἀντιστρόφως, ὅταν ἀναφερόμενοι εἰς τὸν πίνακα σχεδιάσεως, λέγωμεν ὅτι τὰ σχήματα (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι ἀντιστοίχως ἡ ὁριζοντία (πρώτη) καὶ ἡ κατακόρυφος (δευτέρα) προβολὴ σχήματος (Σ) τοῦ χώρου, θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι ἔχει ἤδη περιστραφῆ τὸ ἐπίπεδον e_2 περὶ τὸν ἄξονα y_{12}, καὶ καταστῆ κάθετον ἐπὶ τὸ e_1, τὸ ὁποῖον παρέμεινεν ἀμετάθετον.

Ἡ ὁριζοντία καὶ ἡ κατακόρυφος προβολὴ ἑνὸς σχήματος (Σ), ἀρκοῦν, ἐν γένει, διὰ νὰ ὁρισθῇ τὸ σχῆμα τοῦτο εἰς τὸν χῶρον. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὸ σχῆμα (Σ) δὲν ὁρίζεται διὰ τῶν δύο προβολῶν του καὶ διὰ νὰ ὁρισθῇ, εἶναι ἀναγκαία μία ἀκόμη προβολή. Οὕτω π.χ. δύο ἴσοι κύκλοι $(\varkappa')$ καὶ $(\varkappa'')$ τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς αἱ δύο προβολαί :

α') Μιᾶς σφαίρας

β') Τοῦ κοινοῦ στερεοῦ τῶν δύο κυλινδρικῶν ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν δύο τούτων ἴσων κύκλων.

γ') Μιᾶς ἐλλείψεως, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον ἰσοκλίνει πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, τὸ κέντρον ἔχει ὡς προβολὰς τὰ κέντρα τῶν δύο κύκλων, ὁ μικρὸς ἄξων εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἴσος πρὸς τὴν διάμετρον τῶν ἴσων κύκλων, ὁ δὲ λόγος τῶν ἀξόνων ἰσοῦται πρὸς τὴν $\sqrt{2}$.

Διὰ νὰ ὁρισθῇ τὸ χωρικὸν σχῆμα, τοῦ ὁποίου προβολαὶ εἶναι οἱ δύο ἴσοι κύκλοι, ἀπαιτεῖται μία ἀκόμη προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ ἑνὸς τρίτου ἐπιπέδου προβολῆς, π.χ. καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

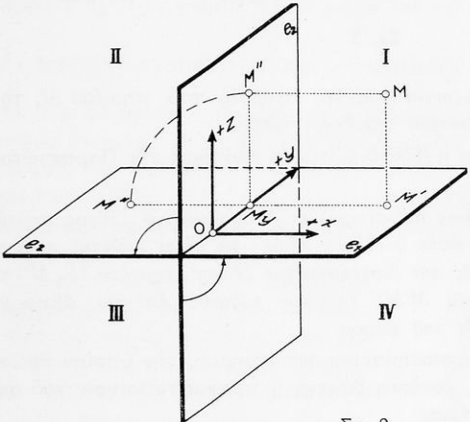
Ἡ προβολὴ ἑνὸς χωρικοῦ σχήματος ἐπὶ ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, καλεῖται *ἐγκαρσία* προβολὴ αὐτοῦ.

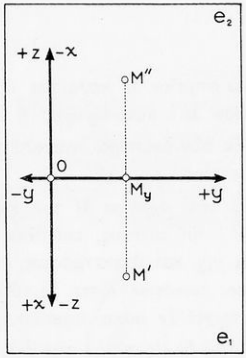
Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα καὶ ἡ ἐγκαρσία προβολὴ τοῦ σχήματος (Σ) εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τοὺς κύκλους τῶν δύο ἄλλων προβολῶν, τὸ σχῆμα (Σ) θὰ εἶναι σφαῖρα.

2. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΑΥΤΟΥ.

Θεωρήσωμεν ἓν δεξιόστροφον ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀναφορᾶς $Oxyz$, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων Oy νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα y_{12}, οἱ δὲ θετικοὶ ἡμιάξονες Ox καὶ Oz, κείμενοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων e_1 καὶ e_2, νὰ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε τὰ σημεῖα τοῦ χώρου μὲ θετικὰς τετμημένας καὶ κατηγμένας, ὡς πρὸς τὸ σύστημα $Oxyz$, νὰ ἀνήκουν εἰς τὴν περιοχὴν I.

Εἰς τὸ Σχ. II καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 2 ἀριστερὰ ἐμφανίζονται τὰ δύο ἐπίπεδα e_1 καὶ e_2 πρὸ τῆς κατακλίσεως τοῦ δευτέρου ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀναφορᾶς $Oxyz$. Εἰς τὸ Σχ. 1 δεξιὰ ἐμφανίζονται τὰ δύο ἐπίπεδα e_1 καὶ e_2 καθὼς καὶ οἱ ἄξονες τοῦ συστήματος $Oxyz$, μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ e_2 ἐπὶ τοῦ e_1.





Σχ. 2

Τὸ τυχὸν σημεῖον $M(x, y, z)$ τοῦ χώρου θὰ ἔχῃ δύο προβολὰς $M'(x, y, 0)$ καὶ $M''(0, y, z)$ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα προβολῆς e_1 καὶ e_2. Εἶναι προφανές, ὅτι αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων M' καὶ M'' ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, συναντῶνται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον M_y αὐτοῦ.

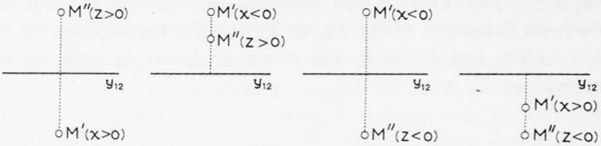
Τὴν κατηγμένην $M'M = z$ καλοῦμεν *ὑψόμετρον* τοῦ σημείου M, τὴν δὲ τετμημένην $M''M = x$ *ἀπόστασιν* τοῦ σημείου M.

Τὰ πρόσημα τῶν συντεταγμένων x καὶ z σημείου M, μεταβάλλονται, ἐφόσον τοῦτο ἀλλάσσει περιοχήν. Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰ πρόσημα τῶν x καὶ z, τῶν σημείων τῶν τεσσάρων περιοχῶν.

Περιοχὴ	*Ὑψόμετρον* (z)	*Ἀπόστασις* (x)
I	+	+
II	+	−
III	−	−
IV	−	+

Αἱ προβολαὶ M' καὶ M'' ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως σημείου M τοῦ χώρου, θὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἄξονος y_{12} ἢ ἑκατέρωθεν αὐτοῦ, ἀναλόγως τῆς περιοχῆς τοῦ χώρου, εἰς τὴν ὁποίαν κεῖται τὸ σημεῖον M.

Τὰ κατωτέρω τέσσαρα σχήματα παριστοῦν τέσσαρα σημεῖα τοῦ χώρου, κείμενα κατὰ σειρὰν εἰς τὴν I, II, III καὶ IV περιοχήν.



Σχ. 3

Τὸ σημεῖον M' καλεῖται *ὁριζοντία ἢ πρώτη προβολὴ* τοῦ σημείου M, τὸ δὲ σημεῖον M'' *κατακόρυφος ἢ δευτέρα* προβολὴ αὐτοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ἡ ἑξῆς, θεμελιώδης πρότασις τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας :

Εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν διατεταγμένον ζεῦγος σημείων M', M'' τοῦ πίνακος, τοιούτων ὥστε ἡ εὐθεῖα $M'M''$ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, καὶ ἀντιστρόφως, *εἰς πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος σημείων M', M'' τοῦ πίνακος τοιούτων ὥστε ἡ εὐθεῖα $M'M''$ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον σημεῖον M τοῦ χώρου.*

Χάρις δὲ εἰς αὐτὴν τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν, τὴν ὁποίαν πρῶτος σαφῶς καθώρισεν ὁ *G. Monge*, κατέστη δυνατὴ ἡ πραγματοποίησις τοῦ σκοποῦ τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας.

3. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ σημείου M τοῦ χώρου καὶ τῶν δύο προβολῶν του M' καὶ M'', ἐπιτρέπει τὸν καθορισμὸν τῶν σημείων τοῦ χώρου διὰ τῶν δύο προβολῶν των.

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς ἀπαιτεῖται ἐνίοτε νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις σημείων τοῦ χώρου δι' ἀριθμῶν. Πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν λαμβάνοντες αὐθαίρετον σημεῖον O τοῦ ἄξονος y_{12}, ὡς ἀρχὴν συντεταγμένων, προσαρτῶμεν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐπιπέδων προβολῆς e_1 καὶ e_2 ἓν δεξιόστροφον ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀναφορᾶς $Oxyz$, ὁριζόμενον ὡς ἐν ἀρχῇ τῆς § 2 ἐγένετο.

Ἕκαστον σημεῖον $M\,(M', M'')$ τοῦ χώρου θὰ ἔχῃ τρεῖς συντεταγμένας x, y, z, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι ἡ ἀπόστασις $x = \overline{M_y M'}$ (Σχ. 2), ἡ δευτέρα εἶναι ἡ τεταγμένη $y = \overline{OM_y}$ καὶ ἡ τρίτη εἶναι τὸ ὑψόμετρον $z = \overline{M_y M''}$.

Κατωτέρω ἓν σημεῖον M τοῦ χώρου θὰ ὁρίζεται εἴτε μὲ τὰς δύο προβολάς του, ὁπότε θὰ σημειοῦται $M\,(M', M'')$, εἴτε μὲ τρεῖς διατεταγμένους ἀριθμούς, ὁπότε θὰ σημειοῦται $M\,(x, y, z)$.

Τὰ σημεῖα $M(x, y, 0)$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου e_1 ἔχει συντεταγμένας $M(x, y, 0)$.

Τὰ σημεῖα $M(0, y, z)$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2 καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου e_2 ἔχει συντεταγμένας $M(0, y, z)$.

Ἐκ τῶν δύο τούτων προτάσεων προκύπτουν :

Διὰ νὰ κεῖται ἓν σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ δευτέρα προβολή του νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

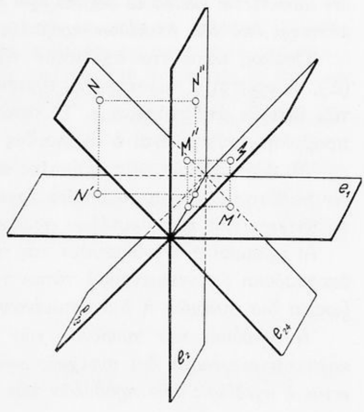
Διὰ νὰ κεῖται ἓν σημεῖον M ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ πρώτη προβολή του νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

4. ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΤΩΣΕΩΣ.

Ἐκ τῶν ἐπιπέδων τοῦ χώρου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, διακρίνομεν δύο ἐπίπεδα. Τὸ ἕν, ὅπερ συμβολίζεται διὰ τοῦ e_{13}, εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὰς διέδρους κατὰ κορυφὴν γωνίας, τὰς περιλαμβανούσας τὰς περιοχὰς I καὶ III (Σχ. III), τὸ ἕτερον, ὅπερ συμβολίζεται διὰ τοῦ e_{24}, εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν τὰς διέδρους κατὰ κορυφὴν γωνίας, τὰς περιλαμβανούσας τὰς περιοχὰς II καὶ IV (Σχ. IV).

Τὸ ὑψόμετρον (z) καὶ ἡ ἀπόστασις (x) τυχόντος σημείου M τοῦ ἐπιπέδου e_{13}, εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον (z) ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν (x), κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{13}. (Σχ. 4).

Μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου e_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, αἱ δύο προβολαὶ M' καὶ M'' τοῦ σημείου M, θὰ εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τὸ ἐπίπεδον e_{13} καλεῖται *ἐπίπεδον συμμετρίας*.



Σχ. 4.

Τὸ ὑψόμετρον (z) καὶ ἡ ἀπόστασις (x) τυχόντος σημείου N τοῦ ἐπιπέδου e_{24}, εἶναι ἀντίθετα καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον N τοῦ χώρου τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον (z) εἶναι ἀντίθετον τῆς ἀποστάσεως (x), κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24}. (Σχ. 4).

Μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου e_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, αἱ δύο προβολαὶ N' καὶ N'' τοῦ σημείου N, θὰ ταυτίζωνται. Ἕνεκα τῆς ἰδιότητος ταύτης τὸ ἐπίπεδον e_{24} καλεῖται *ἐπίπεδον συμπτώσεως*.

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

Αἱ δύο προβολαὶ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας, εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} *καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ δύο προβολαὶ σημείου τοῦ χώρου εἶναι συμμετρικαὶ πρός τὸν ἄξονα* y_{12}, *τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας.*

Αἱ δύο προβολαὶ τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως, συμπίπτουν καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ δύο προβολαὶ σημείου τοῦ χώρου συμπτίπτουν, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως.

5. ΣΗΜΑΝΣΙΣ ΤΩΝ ΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΚΑΛΥΠΤΟΜΕΝΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ ΕΝΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Τὰ παριστώμενα διὰ τῶν δύο προβολῶν των σχήματα (Σ), καθὼς καὶ τὰ ἐπίπεδα προβολῆς e_1 καὶ e_2, θεωροῦνται συνήθως ὡς ἀδιαφανῆ.

Αἱ προβολαὶ (Σ') καὶ (Σ'') τοῦ σχήματος (Σ) σχεδιάζονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ διαφοροποιοῦνται αἱ γραμμαὶ τοῦ σχήματος αἱ ὁποῖαι καλύπτονται, ἀπὸ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι δὲν καλύπτονται διὰ *παρατηρητὴν* εὑρισκόμενον εἰς ὡρισμένας συμβατικὰς θέσεις πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς.

Οὕτω, κατὰ τὴν σχεδίασιν τῆς πρώτης προβολῆς (Σ') τοῦ σχήματος (Σ), θεωρεῖται *ὁ παρατηρητὴς* εὑρισκόμενος εἰς τὸ ἄπειρον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν θετικῶν ὑψομέτρων z. Ὁ κανὼν συνεπῶς, ὁ ὁποῖος ἐφαρμόζεται διὰ τὴν προβολὴν ταύτην, εἶναι ὁ ἀκόλουθος :

Ἐκ δύο σημείων ἑνὸς σχήματος εὑρισκομένων ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ e_1, δὲν καλύπτεται ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μεγαλύτερον ὑψόμετρον z, ἐφόσον δὲν καλύπτεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς.

Ὁμοίως, κατὰ τὴν σχεδίασιν τῆς δευτέρας προβολῆς (Σ'') τοῦ σχήματος (Σ), θεωρεῖται *ὁ παρατηρητὴς* εὑρισκόμενος εἰς τὸ ἄπειρον κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῶν θετικῶν ἀποστάσεων x. Ὁ κανὼν συνεπῶς, ὁ ὁποῖος ἐφαρμόζεται διὰ τὴν προβολὴν ταύτην εἶναι ὁ ἀκόλουθος :

Ἐκ δύο σημείων ἑνὸς σχήματος εὑρισκομένων ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸ e_2, δὲν καλύπτεται ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀπόστασιν x, ἐφόσον δὲν καλύπτεται ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς.

Αἱ γραμμαὶ αἱ συνθέτουσαι τὰς προβολὰς (Σ') καὶ (Σ'') τοῦ σχήματος (Σ), θεωρούμεναι ὡς γεωμετρικοὶ τόποι τῶν προβολῶν σημείων τοῦ (Σ), θὰ σχεδιάζωνται διὰ συνεχῶν ἢ διακεκομμένων γραμμῶν, τηρουμένου τοῦ κανόνος :

Ἡ σχεδίασις τῶν προβολῶν τῶν γραμμῶν τοῦ σχήματος (Σ), αἱ ὁποῖαι δὲν καλύπτονται γίνεται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, ἐνῷ διὰ διακεκομμένης γραμμῆς γίνεται ἡ σχεδίασις τῶν προβολῶν τῶν γραμμῶν τοῦ σχήματος Σ, αἱ ὁποῖαι καλύπτονται.

6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σημείωσις. Αἱ ἀσκήσεις αἱ περιλαμβανόμεναι εἰς παράγραφόν τινα τοῦ συγγράμματος τούτου, δέον νὰ ἐπιλύωνται ἀποκλειστικῶς τῇ βοηθείᾳ τῶν προηγουμένων τῆς παραγράφου ταύτης προτάσεων.

Οἱ εἰς τὰς ἀσκήσεις τοῦ συγγράμματος τούτου ἀναγραφόμενοι ἀριθμοὶ ἀναφέρονται εἰς χιλιοστὰ τοῦ μέτρου.

1. Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ σημεῖα : A (15, 32, 40), B (22, 15, 30), Γ (20, 25, − 30), Δ (− 12, − 10, 25), E (− 15, 20, − 20), Z (− 15, − 20, − 30).

2. Εἰς ποίας περιοχὰς τοῦ χώρου εὑρίσκονται τὰ σημεῖα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

3. Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος, τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A, Γ, E τῆς ἀσκήσεως 1, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων B, Δ, Z, ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

4. Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A, Γ, E, τῆς ἀσκήσεως 1, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων B, Δ, Z, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

5. Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A, Γ, E, τῆς ἀσκήσεως 1, ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

6. Ἔστωσαν M_1 τὸ συμμετρικὸν σημείου M ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον, προβολῆς, M_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_1 ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς, N_1 τὸ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ N_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ N_1 ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον N_2 συμπίπτει μετὰ τοῦ M_2.

7. Ἔστωσαν M_1 τὸ συμμετρικὸν σημείου M ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, M_2 τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου M_1 ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ M_3 τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_2 ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα M καὶ M_3 εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

8. Ἔστωσαν My ἡ προβολὴ ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} σημείου $M(\alpha, \beta, \gamma)$ εὑρισκομένου εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου. Ἐπὶ τοῦ εἰς My καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐπιπέδου, θεωροῦμεν σημεῖον N τῆς περιοχῆς II, τοιοῦτον ὥστε γων. $MMy\ N = 1$ ὀρθή. Παραστήσατε ἐπὶ τοῦ πίνακος τὸ σημεῖον N.

9. Δείξατε ὅτι διὰ νὰ συμπίπτουν ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως αἱ δύο προβολαὶ σημείου $M(x, y, z)$ τοῦ χώρου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $x + z = 0$.

10. Ἔστωσαν M_1 καὶ M_2 τὰ συμμετρικὰ σημείου M, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ M_1 καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ M_2 εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἐνῷ ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ M_1 καὶ ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ M_2 συμπίπτουν.

11. Δίδεται τὸ σημεῖον A (50, 20, 10). Παραστήσατε τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὸ σημεῖον B (10, $-$10, 0).

12. Ἡ προβολὴ σημείου $M(x, y, z)$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως μὲν εἶναι τὸ σημεῖον $N_1\left(\frac{x-z}{2}, y, \frac{z-x}{2}\right)$, ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας δὲ εἶναι τὸ σημεῖον $N_2\left(\frac{x+z}{2}, y, \frac{x+z}{2}\right)$.

13. Παραστήσατε τὰς ὀρθὰς προβολὰς δοθέντος σημείου $M(M', M'')$, ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

7. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

Θεωρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν α τοῦ χώρου μὴ κάθετον οὔτε ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον, οὔτε ἐπὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἡ εὐθεῖα αὐτη θὰ ἔχῃ :

α') Ὡς ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, μίαν εὐθεῖαν α', γεωμετρικὸν τόπον τῶν πρώτων προβολῶν τῶν σημείων της.

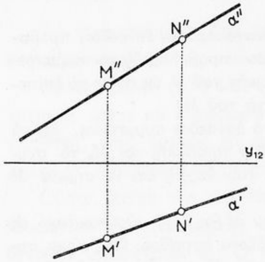
β') Ὡς ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, μίαν εὐθεῖαν α'', γεωμετρικὸν τόπον τῶν δευτέρων προβολῶν τῶν σημείων της.

Ὅθεν *πᾶσα εὐθεῖα α τοῦ χώρου, ἡ ὁποία δὲν εἶναι κάθετος οὔτε ἐπὶ τὸ* e_1 *οὔτε ἐπὶ τὸ* e_2, *ἔχει ὡς πρώτην προβολὴν μίαν εὐθεῖαν* α' *καὶ ὡς δευτέραν προβολὴν μίαν εὐθεῖαν* α'' (Σχ. 5).

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ e_1, ἡ πρώτη προβολὴ α' αὐτῆς καθίσταται σημεῖον. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ e_2, ἡ δευτέρα προβολὴ α'' αὐτῆς καθίσταται σημεῖον.

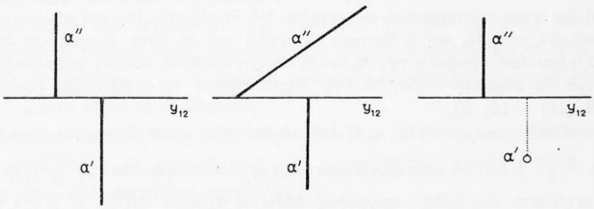
Ἐὰν τέλος ἡ εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς α' καὶ α'' συμπίπτουν.

Ἀντιστρόφως, *δύο εὐθεῖαι α' καὶ α'', ἐκ τῶν ὁποίων οὔτε ἡ μία, οὔτε ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, ὁρίζουν μίαν καὶ μόνην εὐθεῖαν α, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρώτην προβολὴν τὴν α' καὶ ὡς δευτέραν προβολὴν τὴν α''.*



Σχ. 5

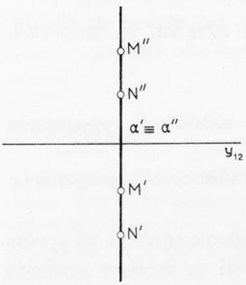
Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῶν α' καὶ α'' ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα M', N' καὶ M'', N'', τοιαῦτα ὥστε αἱ εὐθεῖαι $M'M''$ καὶ $N'N''$ νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 5), θὰ ὑπάρχουν δύο σημεῖα τοῦ χώρου M καὶ N, ἔχοντα ὡς πρώτας προβολὰς τὰ σημεῖα M' καὶ N' καὶ ὡς δευτέρας τὰ σημεῖα M'' καὶ N''. Τὰ σημεῖα ταῦτα M καὶ N ὁρίζουν μίαν μόνην εὐθεῖαν α, τῆς ὁποίας πρώτη προβολὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα α', ὡς ἔχουσα μετ' αὐτῆς δύο σημεῖα M' καὶ N' κοινὰ καὶ δευτέρα προ-



Σχ. 6

βολὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα α'', ὡς ἔχουσα μετ' αὐτῆς δύο σημεῖα M'' καὶ N'' κοινά.

Ἐὰν μία τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν α', α'' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς νὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς ἄλλης, *δὲν ὑπάρχει εὐθεῖα τοῦ χώρου*, τῆς ὁποίας προβολαὶ εἶναι αἱ εὐθεῖαι α', α'' (Σχ. 6).



Σχ. 7

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α', α'' συμπίπτουν ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι, ἔχουσαι ὡς πρώτην καὶ δευτέραν προβολὴν ἀντιστοίχως τὰς α' καὶ α''. Πράγματι, εἶναι προφανές, ὅτι ὁριζομένου τοῦ M' (Σχ. 7), ὡς πρώτης προβολῆς σημείου M τῆς ζητουμένης νὰ ὁρισθῇ εὐθείας, ἡ δευτέρα προβολὴ M'' τοῦ σημείου M δὲν ὁρίζεται μονοσημάντως, καθόσον δύναται νὰ ληφθῇ ὡς M'' τυχὸν σημεῖον τῆς $a'' \equiv a'$.

Δύνανται συνεπῶς νὰ ληφθοῦν κατ' ἀπείρους τρόπους δύο ζεύγη σημείων (M', M'') καὶ (N', N''), ὡς προβολαὶ δύο σημείων M καὶ N τοῦ χώρου, ἅτινα ὁρίζουν μίαν διπλῆν ἀπειρίαν εὐθειῶν MN.

Ὅλαι αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται προφανῶς ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, *ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἓν ζεῦγος εὐθειῶν a' καὶ a'', ἐφόσον οὔτε ἡ μία οὔτε ἀμφότεραι εἶναι κάθετοι, ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, ὡς παράστασιν μιᾶς εὐθείας a.*

8. ΣΥΝΘΗΚΗ ΔΙΑ ΝΑ ΚΕΙΤΑΙ ΔΟΘΕΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΕΠΙ ΔΟΘΕΙΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Διὰ νὰ κεῖται ἓν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς εὐθείας, μὴ κειμένης ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν τῆς εὐθείας.

Ἔστω $a\,(a', a'')$ ἡ εὐθεῖα καὶ $M\,(M', M'')$ τὸ σημεῖον.

Ἐπειδὴ ἡ πρώτη ἢ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας a εἶναι ἀντιστοίχως ὁ γεωμετρικὸς τόπος, τῶν πρώτων ἢ τῶν δευτέρων προβολῶν τῶν σημείων της (§ 7), ἕπεται ὅτι :

Ἐὰν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας a, αἱ προβολαὶ αὐτοῦ M' καὶ M'' κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν προβολῶν a' καὶ a'' τῆς a.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ προβολαὶ M' καὶ M'' τοῦ σημείου M κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν a' καὶ a'', τὸ σημεῖον M θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας a.

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν ἓν σημεῖον N τῆς εὐθείας a ἔχον ὡς πρώτην προβολὴν $N' \equiv M'$, ἡ δευτέρα προβολὴ N'' αὐτοῦ θὰ κεῖται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς a'', ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ N' καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, δηλαδὴ τὸ $N'' \equiv \equiv M''$ καὶ ἑπομένως τὸ σημεῖον $M \equiv N$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας a.

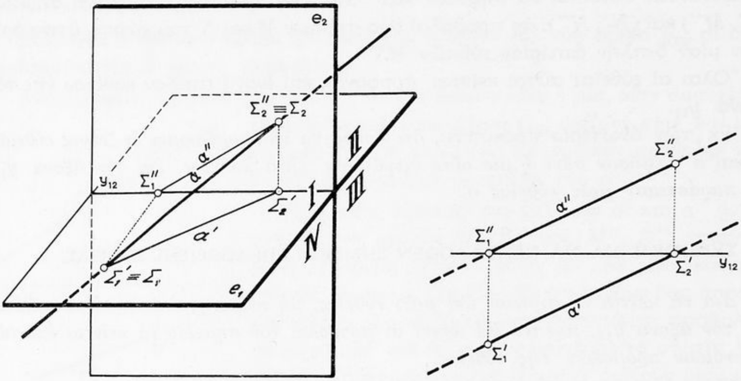
Τῇ βοηθείᾳ τῆς προτάσεως ταύτης λύονται εὐκόλως τὰ προβλήματα:

Εὕρετε ἐπὶ δοθείσης εὐθείας τὰς προβολὰς σημείου ἔχοντος δοθὲν ὑψόμετρον ἢ δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

9. ΙΧΝΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Τὰ σημεῖα τομῆς $\Sigma_1\,(\Sigma'_1, \Sigma''_1)$ καὶ $\Sigma_2\,(\Sigma'_2, \Sigma''_2)$ εὐθείας τινὸς $a\,(a', a'')$ μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς e_1 καὶ e_2 ἀντιστοίχως, καλοῦνται *πρῶτον* καὶ *δεύτερον ἴχνος* τῆς εὐθείας a. (Σχ. IV).

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον $\Sigma'_1 \equiv \Sigma_1$, κεῖται δηλαδὴ ἐπὶ τοῦ e_1, ἕπεται ὅτι ἡ δευτέρα προβολὴ Σ''_1 τοῦ ἴχνους Σ_1 θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} (§ 3). Ἀφ' ἑτέρου τὸ Σ_1, ὡς σημεῖον τῆς a, θὰ ἔχῃ δευτέραν προβολὴν Σ''_1 ἐπὶ τῆς a'', δευτέρας προβολῆς τῆς a (§ 8). Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι Σ''_1 εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς δευτέρας προβολῆς α'' τῆς εὐθείας α, μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} (Σχ. 8).

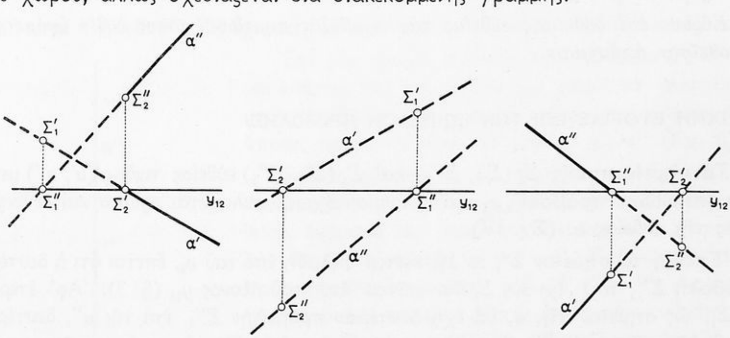


Σχ. 8

Δι' ἀναλόγων συλλογισμῶν προκύπτει, ὅτι τὸ σημεῖον Σ'_2 θὰ κεῖται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῆς α', δηλαδὴ τὸ Σ'_2 εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς πρώτης προβολῆς α' τῆς εὐθείας α, μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} (Σχ.8). Εἰς τὸ Σχ. 8 φαίνεται ἡ κατασκευὴ τῶν ἰχνῶν Σ_1 (Σ'_1, Σ''_1) καὶ Σ_2 (Σ'_2, Σ''_2) εὐθείας α, τῆς ὁποίας δίδονται αἱ δύο προβολαὶ α' καὶ α''.

Ἀντιστρόφως, ἂν δοθοῦν τὰ ἴχνη Σ_1 (Σ'_1, Σ''_1) καὶ Σ_2 (Σ'_2, Σ''_2) εὐθείας α, αἱ προβολαὶ αὐτῆς εἶναι : $\alpha' \equiv \Sigma'_1\Sigma'_2$ καὶ $\alpha'' \equiv \Sigma_1''\Sigma''_2$.

Τὰ ἴχνη Σ_1 καὶ Σ_2 εὐθείας α χωρίζουν αὐτὴν εἰς τρία, ἐν γένει, μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν μόνον, τὸ $\Sigma_1\Sigma_2$ εἶναι πεπερασμένον. Τὸ τμῆμα τοῦτο σχεδιάζεται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς, μόνον ἐφόσον τὰ σημεῖα του ἀνήκουν εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου, ἄλλως σχεδιάζεται διὰ διακεκομμένης γραμμῆς.



Σχ. 9

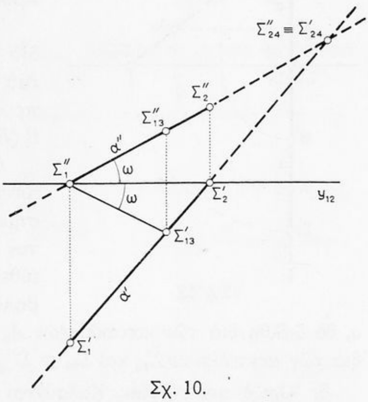
Οὕτως εἰς τὸ Σχ. 8 τὸ τμῆμα $\Sigma_1\Sigma_2$ ἀνήκει εἰς τὴν περιοχὴν I, ἐνῷ αἱ ἡμιευθεῖαι εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$, πέραν τοῦ Σ_2 καὶ πέραν τοῦ Σ_1, κεῖνται ἀντιστοίχως εἰς τὰς περιοχὰς II καὶ IV (§ 2).

Εἰς τὸ Σχ. 9 εἶναι σχεδιασμέναι αἱ προβολαὶ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ὁποίων τὰ τμήματα $\Sigma_1\Sigma_2$ κεῖνται κατὰ σειρὰν εἰς τὰς περιοχὰς II, III, IV τοῦ χώρου.

10. ΙΧΝΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΥΜΠΤΩΣΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ.

Ἔστω Σ_{24} τὸ σημεῖον τομῆς εὐθείας a (a', a'') μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως e_{24}. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Σ_{24} κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{24}, αἱ προβολαὶ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως θὰ συμπίπτουν, ἑπομένως αἱ προβολαὶ τοῦ Σ_{24} θὰ συμπίπτουν μετὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο προβολῶν a' καὶ a'' τῆς εὐθείας a (Σχ. 10).

Ἔστω τώρα Σ_{13} τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας a (a', a'') μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας e_{13}. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Σ_{13} κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_{13}, αἱ προβολαὶ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως θὰ εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.



Σχ. 10.

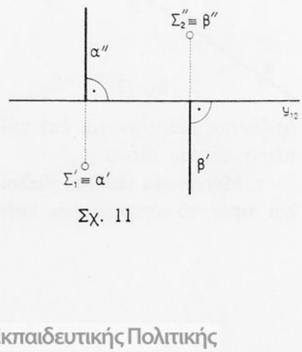
Διὰ τὴν κατασκευὴν ἑπομένως τῆς πρώτης προβολῆς Σ'_{13} αὐτοῦ, φέρομεν διὰ τοῦ Σ''_1 εὐθεῖαν συμμετρικὴν πρὸς τὴν a'' (Σχ. 10) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τομὴν ταύτης μετὰ τῆς a'. Κατ' ἀναλογίαν κατασκευάζεται ἡ δευτέρα προβολὴ Σ_{13}'' τοῦ σημείου Σ_{13}.

11. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Τὰς εὐθείας τοῦ χώρου διακρίνομεν, ἐν σχέσει πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, εἰς τὰς κάτωθι κατηγορίας :

α) **Κατακόρυφοι εὐθεῖαι**: Καλοῦνται οὕτως αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἡ πρώτη προβολὴ μιᾶς κατακορύφου εὐθείας a (a', a'') εἶναι ἓν σημεῖον, συμπῖπτον μετὰ τοῦ πρώτου ἴχνους αὐτῆς, $\Sigma'_1 \equiv a'$, ἐνῷ ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς εἶναι μία εὐθεῖα a'' κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 11 ἀριστερά).

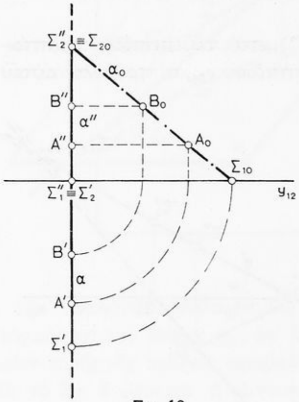


Σχ. 11

β) **Πρόσθιαι εὐθεῖαι.** Καλοῦνται οὕτως αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἡ δευτέρα προβολὴ μιᾶς προσθίας εὐθείας β (β', β'') εἶναι ἓν σημεῖον, συμπῖπτον μετὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους αὐτῆς, $\Sigma''_2 \equiv \beta''$, ἐνῷ ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς εἶναι μία εὐθεῖα β' κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 11 δεξιά).

γ) **Ἐγκάρσιαι εὐθεῖαι.** Καλοῦνται οὕτως αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ κείμεναι ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ e_1 ἢ ἐπὶ τὸ e_2.



Σχ. 12

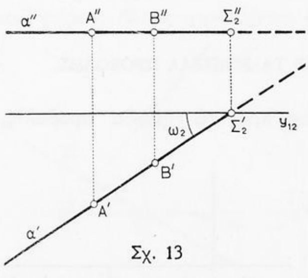
Ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ μιᾶς ἐγκαρσίας εὐθείας εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τούτου (Σχ. VI καὶ Σχ. 12).

Εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ κατακόρυφοι καὶ αἱ πρόσθιοι εὐθεῖαι εἶναι ἐγκάρσιαι.

Ὡς ἔχομεν ἀποδείξει εἰς τὴν § 7, δὲν ὁρίζεται διὰ τῶν προβολῶν της μία ἐγκαρσία εὐθεῖα. Διὰ τὸν ὁρισμόν της πρέπει νὰ δοθοῦν αἱ προβολαὶ δύο σημείων της A (A', A'') καὶ B (B', B'').

Διὰ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἴχνη μιᾶς ἐγκαρσίας εὐθείας AB ὁριζομένης διὰ τῶν προβολῶν δύο σημείων της, κατακλίνεται τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας, ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς. Ἡ κατάκλισις α_0 τῆς ἐγκαρσίας εὐθείας α, θὰ διέλθῃ διὰ τῶν κατακλίσεων A_0 καὶ B_0, τῶν σημείων A καὶ B αὐτῆς καὶ διὰ τῶν κατακλίσεων Σ_{10} καὶ $\Sigma_{20} \equiv \Sigma''_2$ τῶν ἰχνῶν αὐτῆς Σ_1 καὶ Σ_2 (Σχ. 12).

δ. **Ὁριζόντιοι εὐθεῖαι.** Καλοῦνται οὕτως αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς.



Σχ. 13

Ἡ δευτέρα προβολὴ μιᾶς ὁριζοντίου εὐθείας α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἐνῷ ἡ πρώτη σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα γωνίαν ω_2, ἴσην μὲ τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς εὐθείας α πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς (Σχ. 13).

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα A (A', A'') καὶ B (B', B'') τῆς ὁριζοντίου εὐθείας α, τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος AB ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα $A'B'$ (Σχ. VII καὶ Σχ. 13).

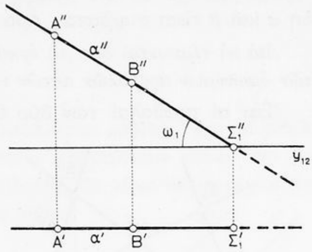
Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν μία ὁριζόντιος εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα y_{12}.

ε. **Μετωπικαὶ εὐθεῖαι.** Καλοῦνται οὕτως αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

Ἡ πρώτη προβολὴ μιᾶς μετωπικῆς εὐθείας α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἐνῷ ἡ δευτέρα σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα γωνία ω_1, ἴσην μὲ τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς εὐθείας, α πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς (Σχ. VIII καὶ Σχ. 14).

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα $A\,(A', A'')$ καὶ $B\,(B', B'')$ τῆς μετωπικῆς εὐθείας α, τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος AB ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα $A''B''$ (Σχ. X καὶ Σχ. 14).

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν μία μετωπικὴ εὐθεῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, ἡ πρώτη προβολὴ αὐτῆς θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα y_{12}.

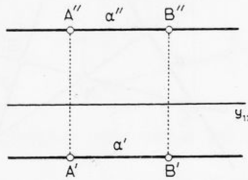


Σχ. 14

στ. **Εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα** y_{12}. Καλοῦνται οὕτως αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ μιᾶς τοιαύτης εὐθείας εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 15).

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα $A\,(A', A'')$ καὶ $B\,(B', B'')$ μιᾶς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα εὐθείας, τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος AB ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα $A'B' = A''B''$.



Σχ. 15

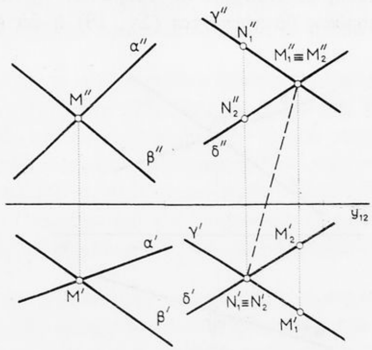
12. ΕΥΘΕΙΑΙ ΣΥΜΒΑΤΑΙ ΚΑΙ ΑΣΥΜΒΑΤΟΙ.

Ἔστωσαν δύο μὴ ἐγκάρσιαι εὐθεῖαι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$ τεμνόμεναι εἰς σημεῖον $M\,(M', M'')$. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας α, ἡ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ M' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς α', ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ M'' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς α'' (§ 8).

Ὁμοίως, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας β, ἡ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ M' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς β', ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ M'' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς β'' (§ 8).

Ἑπομένως τὸ σημεῖον τομῆς τῶν πρώτων προβολῶν καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δευτέρων προβολῶν τῶν εὐθειῶν α καὶ β, κεῖνται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. IX καὶ Σχ. 16 ἀριστερά).

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ δύο εὐθειῶν α καὶ β τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα M' καὶ M'', κεί-

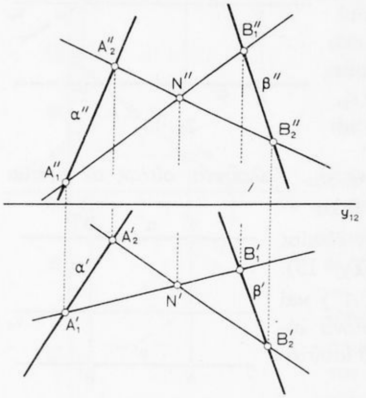


Σχ. 16

μενα ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, χωρὶς καμμία ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἐγκαρσία, ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων διέρχεται διὰ τοῦ M, αἱ εὐθεῖαι δηλαδὴ α καὶ β εἶναι συμβαταί, ἄρα :

Διὰ νὰ τέμνωνται δύο μὴ ἐγκάρσιαι εὐθεῖαι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὁμωνύμων προβολῶν αὐτῶν νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

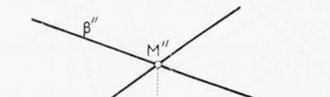
Ἐὰν αἱ προβολαὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν α καὶ β τέμνωνται ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως, διὰ νὰ ἐλέγξωμεν ἂν αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνωνται, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν δύο σημεῖα A_1 (A_1', A_1'') καὶ A_2 (A_2', A_2'') ἐπὶ τῆς εὐθείας α καὶ δύο σημεῖα B_1 (B_1', B_1'') καὶ B_2 (B_2', B_2'') ἐπὶ τῆς εὐθείας β (Σχ. 17) καὶ νὰ ἐλέγξωμεν ἐὰν ὑπακούουν εἰς τὸ προηγούμενον κριτήριον, αἱ εὐθεῖαι A_1B_1 καὶ A_2B_2 ἢ αἱ εὐθεῖαι A_1B_2 καὶ A_2B_1 (καθόσον ἓν τουλάχιστον τῶν ὡς ἄνω δύο ζευγῶν θὰ τέμνεται ἐντὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως). Τοῦτο, δὲ διότι, ἂν π.χ. αἱ A_1B_1 καὶ A_2B_2 τέμνωνται, ὁπότε θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου p, θὰ τέμνωνται καὶ αἱ A_1A_2 καὶ B_1B_2, ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



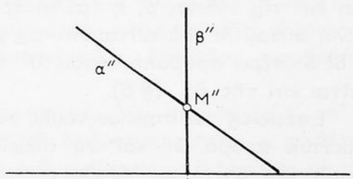
Σχ. 17

Ἐὰν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ὁμωνύμων προβολῶν, δύο μὴ ἐγκαρσίων εὐθειῶν, δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, αἱ δύο εὐθεῖαι θὰ εἶναι *ἀσύμβατοι* (Σχ. Χ καὶ Σχ. 16 δεξιά).

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ὁριζόντιαι ἢ αἱ κατακόρυφοι προβολαὶ δύο εὐθειῶν α καὶ β συμπίπτουν, αἱ εὐθεῖαι θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, καθέτου ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἢ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ ἑπομένως θὰ τέμνωνται (Σχ. 18) ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 18

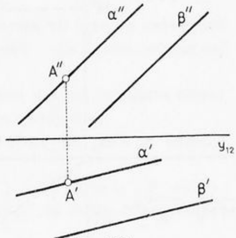


Σχ. 19

Ἐὰν τέλος ἡ μία τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι κατακόρυφος ἢ προσθία, ἡ δὲ ὁριζοντία ἢ κατακόρυφος προβολὴ τῆς ἄλλης, διέρχεται διὰ τοῦ ἴχνους τῆς πρώτης, αἱ εὐθεῖαι θὰ τέμνωνται (Σχ. 19).

13. ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ.

Ἔστωσαν $\alpha\ (\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\ (\beta', \beta'')$ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν εἶναι ἐγκάρσιαι, τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα προβάλλουν αὐτὰς ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἢ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλα καὶ ἑπομένως αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ τῶν α καὶ β θὰ εἶναι παράλληλοι (Σχ. 20).



Σχ. 20

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ δύο εὐθειῶν α καὶ β εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι (ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι οὐδεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐγκαρσία). Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ ἔκ τινος σημείου $A\ (A', A'')$ τῆς εὐθείας α ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα α_1 παράλληλος πρὸς τὴν β, αἱ προβολαὶ αὐτῆς α_1' καὶ α_1'' διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων A' καὶ A'' ἀντιστοίχως, ὀφείλουν νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς β' καὶ β'', ἑπομένως θὰ συμπίπτουν πρὸς τὰς α' καὶ α'', ἄρα :

Διὰ νὰ εἶναι δύο μὴ ἐγκάρσιαι εὐθεῖαι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ὁμώνυμοι προβολαὶ αὐτῶν νὰ εἶναι παράλληλοι.

14. ΚΑΤΑΚΛΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΕΩΣ.

Ἐὰν ἓν γεωμετρικὸν σχῆμα (Σ) κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου (κατακορύφου) ἐπιπέδου, ἡ μὲν πρώτη (δευτέρα) προβολή του συμπίπτει μετὰ τοῦ σχήματος καὶ λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου (κατακορύφου) ἐπιπέδου προβολῆς, τὸ *ἀληθὲς σχῆμα* (Σ), ἐνῷ ἡ δευτέρα (πρώτη) προβολή του εἶναι ἓν τμῆμα τοῦ ἄξονος y_{12}.

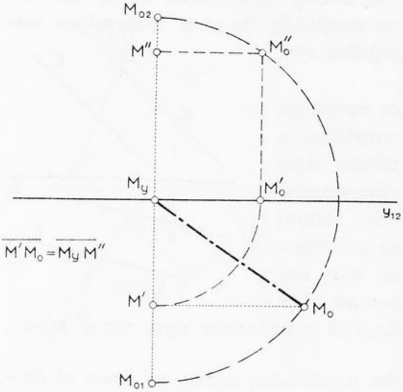
Καθὼς θὰ γνωρίσωμεν κατωτέρω εἰς τὸ περὶ Μεθόδων Κεφάλαιον, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ ἀληθὲς σχῆμα, ἐπιπέδου σχήματος (Σ), ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς προβολάς του, κατακλίνοντες τὸ ἐπίπεδόν του ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου (ἢ τοῦ κατακορύφου) ἐπιπέδου προβολῆς ἢ γενικώτερον ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ὁριζόντιον (ἢ κατακόρυφον) ἐπίπεδον προβολῆς, διὰ περιστροφῆς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος περὶ μίαν εὐθεῖαν του, κειμένην ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου (ἢ κατακορύφου) ἐπιπέδου ἢ παράλληλον πρὸς τὸ ὁριζόντιον (ἢ κατακόρυφον) ἐπίπεδον προβολῆς.

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἁπλουστέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον p τοῦ σχήματος (Σ) διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος y_{12}. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀληθοῦς σχήματος (Σ) κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, διὰ περιστροφῆς του περὶ τὸν ἄξονα y_{12}.

Κατὰ τρόπον ἀνάλογον ἠργάσθημεν καὶ εἰς τὴν § 1 κατακλίναντες τὸ ἐπίπεδον e_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1. Ἡ κατάκλισις τοῦ σχήματος (Σ) θὰ προκύψῃ ὡς σύνολον τῶν κατακλίσεων τῶν σημείων του.

Ἔστω $M\,(M', M'')$ τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματός (Σ).

Κατὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος, τὸ σημεῖον M θὰ γράψῃ τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, τὸ κέντρον εἶναι τὸ σημεῖον My τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ ἡ ἀκτὶς ἡ ἀπόστασις $My\,M$ τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἄξονος.



Σχ. 21

Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἡ ἀπόστασις καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M.

Εἰς τὸ Σχ. 21 δεικνύεται ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $M_0M'My$, τὸ ὁποῖον εἶναι κατάκλισις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $MM'My$.

Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον p δύναται νὰ κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα y_{12} κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς, ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου M θὰ εἶναι τὸ σημεῖον M_{01} ἢ τὸ σημεῖον M_{02}.

Εἰς τὰ σχέδια τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας προτιμᾶται, συνήθως, ἡ ἑξῆς κατασκευή:

Μὲ κέντρον My καὶ ἀκτῖνα MyM' γράφομεν κύκλον, ἔστω δὲ $M_0{}'$ ἡ τομή του μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}. Εἰς τὸ σημεῖον $M_0{}'$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἐκ τοῦ M'' παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον $M_0{}''$. Ἡ ἀπόστασις $My\,M_{01}$, εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου M, ἀπὸ τοῦ My. Δικαιολογήσατε τὴν κατασκευήν.

15. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

14. Ἐπὶ δοθείσης διὰ τῶν προβολῶν της εὐθείας, παραστήσατε σημεῖον δοθέντος ὑψομέτρου ἢ δοθείσης ἀποστάσεως.

15. Ἐπὶ δοθείσης διὰ τῶν προβολῶν της εὐθείας, παραστήσατε σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον καὶ ἡ ἀπόστασις, ἔχουν δοθέντα λόγον.

16. Γνωστῆς οὔσης τῆς πρώτης προβολῆς σημείου δοθείσης ἐγκαρσίας εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτῆς.

17. Παραστήσατε τὰ σημεῖα τομῆς κατακορύφου εὐθείας α, μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

18. Δίδεται εὐθεῖα α (α', α''). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ συμμετρικαὶ αὐτῆς ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς καὶ τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

19. Νὰ κατασκευασθῇ κατακόρυφος (ἢ προσθία) εὐθεῖα, τέμνουσα δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας.

20. Διὰ σημείου M (M', M'') νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία (ἢ μετωπική), εὐθεῖα συναντῶσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν α (α', α'').

21. Διὰ δοθέντος σημείου M (M', M'') νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον ἴχνος νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ δοθέντος σημείου N (N', N'') τοῦ δευτέρου ἐπιπέδου προβολῆς, δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

22. Διὰ δοθέντος σημείου M (M', M'') νὰ ἀχθῇ ἐγκαρσία εὐθεῖα τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη ἀπέχουν ἀπὸ τὸν ἄξονα y_{12}, ἀποστάσεις ἐχούσας δοθέντα λόγον.

23. Διὰ δοθέντος σημείου M (M', M'') νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, τῆς ὁποίας τὰ ἴχνη νὰ ἰσαπέχουν τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ τοιαύτη ὥστε ἡ ὁριζοντία προβολὴ τοῦ μεταξὺ τῶν ἰχνῶν τμήματος αὐτῆς, νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος. Διερεύνησις.

24. Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι μία μὴ ἐγκαρσία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας (ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως).

25. Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας (ἢ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως).

26. Ποία ἡ σχετικὴ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν εὐθειῶν α (α', α'') καὶ β $(\beta' \equiv \alpha'', \beta'' \equiv \alpha')$.

27. Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, διὰ νὰ κεῖται μία εὐθεῖα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας (ἢ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως).

28. Δίδεται σημεῖον A (A', A'') καὶ εὐθεῖα α (α', α'') μὴ ἐγκαρσία. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον B ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, τοιοῦτον ὥστε ἡ εὐθεῖα AB νὰ τέμνῃ τὴν α, τὸ δὲ σημεῖον τομῆς νὰ εἶναι μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB.

29. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραλλήλως πρὸς τὴν β προβολὴ τῆς α, ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου καὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς.

30. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι α καὶ β. Νὰ ἀχθῇ ὁριζοντία εὐθεῖα ε, συναντῶσα τὰς α καὶ β εἰς τὰ σημεῖα A καὶ Β, οὕτως ὥστε τὸ τμῆμα AB νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

31. Δίδεται εὐθεῖα ε κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας καὶ σημεῖον M (M', M'') τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς ἐκ τοῦ M καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

32. Δίδεται εὐθεῖα ε κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως καὶ σημεῖον M (M', M'') τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς, ἐκ τοῦ M, καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

33. Δίδεται εὐθεῖα ε συναντῶσα τὸν ἄξονα y_{12} καὶ σημεῖον M (M', M'') τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς, ἐκ τοῦ M, καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

34. Δίδονται δύο σημεῖα A (A', A'') καὶ B (B', B''). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}, τοιοῦτον ὥστε ἡ γωνία AMB νὰ εἶναι ὀρθή.

35. Δίδεται σημεῖον M (M', M'') καὶ γωνία ω. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ M καὶ σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ω μὲ τὰ ἐπίπεδα προβολῆς.

16. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ. ΙΧΝΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου εἶναι γνωστόν, ὅτι ἓν ἐπίπεδον ὁρίζεται ἂν δοθοῦν :

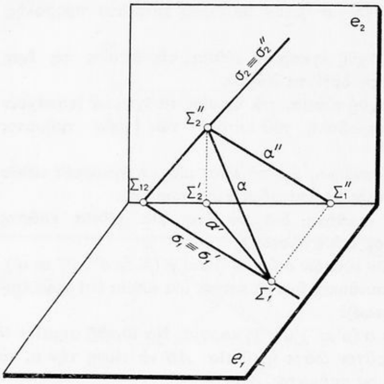
α') Τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας,

β') Μία εὐθεῖα καὶ ἓν σημεῖον, μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς καὶ

γ') Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἢ παράλληλοι.

Εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν τὸ ἐπίπεδον παρίσταται συνήθως διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν. Ὡς τοιαῦται εὐθεῖαι λαμβάνονται συνήθως αἱ εὐθεῖαι κατὰ τὰς ὁποίας, τὸ πρὸς ὁρισμὸν ἐπίπεδον, τέμνει τὰ ἐπίπεδα προβολῆς. Αἱ εὐθεῖαι αὗται καλοῦνται *ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου.*

Εἰς τὸ Σχ. XI καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 22 αἱ εὐθεῖαι $\sigma_1 \equiv \sigma_1{}'$ καὶ $\sigma_2 \equiv \sigma_2{}''$ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ *ὁριζόντιον ἢ πρῶτον ἴχνος* καὶ τὸ *κατακόρυφον ἢ δεύτερον ἴχνος* τοῦ ἐπιπέδου p. Τὸ ἐπίπεδον p ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἰχνῶν του συμβολίζεται οὕτω : $p\,(\sigma_1{}',\ \sigma_2{}'')$.



Σχ. 22

Τὸ ὁριζόντιον ἴχνος $\sigma_1 \equiv \sigma_1{}'$ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου p, τῶν ὁποίων τὰ ὑψόμετρα εἶναι μηδέν, ὅθεν :

Ἡ δευτέρα προβολὴ $\sigma_1{}''$ τοῦ πρώτου ἴχνους σ_1, ἐπιπέδου p, συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα y_{12}.

Τὸ κατακόρυφον ἴχνος $\sigma_2 \equiv \sigma''_2$ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου p, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις εἶναι μηδέν, ὅθεν :

Ἡ πρώτη προβολὴ $\sigma_2{}'$ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2 ἐπιπέδου p, συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἀμφότερα τὰ ἴχνη του εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, ἀμφότερα τὰ ἴχνη του συμπίπτουν μὲ τὸν ἄξονα y_{12}.

17. ΣΥΝΘΗΚΗ ΔΙΑ ΝΑ ΚΕΙΤΑΙ ΔΟΘΕΙΣΑ ΕΥΘΕΙΑ Ἢ ΔΟΘΕΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΕΠΙ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἔστωσαν $p\,(\sigma_1{}',\sigma_2{}'')$ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, $\alpha\,(\alpha',\alpha'')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ $M\,(M',\ M'')$ τὸ δοθὲν σημεῖον.

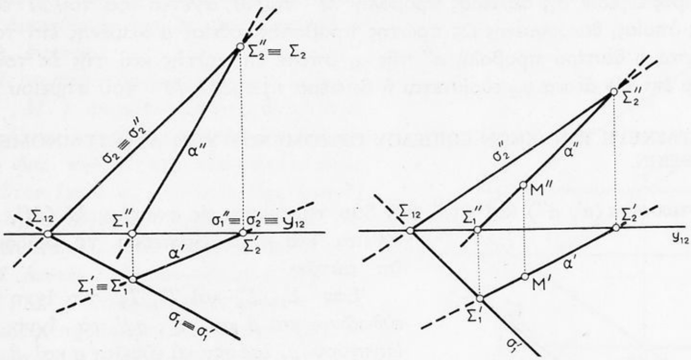
Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, τὸ μὲν πρῶτον ἴχνος $\Sigma_1 \equiv \Sigma'_1$ αὐτῆς, ὡς ἀνῆκον εἰς τὸ p καὶ ἔχον ὑψόμετρον μηδέν, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους σ'_1 τοῦ ἐπιπέδου p (§ 16), τὸ δὲ δεύτερον ἴχνος $\Sigma_2 \equiv \Sigma_2{}''$ αὐτῆς, ὡς ἀνῆκον ἐπίσης εἰς τὸ p καὶ ἔχον ἀπόστασιν μηδέν, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους $\sigma_2{}''$ τοῦ ἐπιπέδου p (§ 16).

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ πρῶτον ἴχνος $\Sigma_1 \equiv \Sigma_1{}'$ τῆς εὐθείας α κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους $\sigma_1{}'$ τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τὸ δεύτερον ἴχνος $\Sigma_2 \equiv \Sigma_2{}''$ τῆς εὐθείας α κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους $\sigma_2{}''$ τοῦ ἐπιπέδου p, ἡ εὐθεῖα α, ὡς ἔχουσα δύο σημεῖα Σ_1 καὶ Σ_2 κοινὰ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, θὰ κεῖται ἐπ᾽ αὐτοῦ, ὅθεν:

Διὰ νὰ κεῖται μία εὐθεῖα ἐπὶ ἐπιπέδου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ ἴχνη αὐτῆς νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Θεωρήσωμεν τώρα τὸ σημεῖον $M\,(M', M'')$ καὶ τὸ ἐπίπεδον $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$. Ἐὰν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία τουλάχιστον εὐθεῖα τοῦ p διερχομένη διὰ τοῦ M. Ἀντιστρόφως, διὰ νὰ κεῖται τὸ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ μία εὐθεῖα διερχομένη δι' αὐτοῦ καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, ὅθεν :

Διὰ νὰ κεῖται ἓν σημεῖον ἐπὶ ἐπιπέδου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων προβολῶν μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 23

Εἰς τὸ Σχ. XI καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 23 ἀριστερά, σημειοῦται εὐθεῖα $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ κειμένη ἐπὶ ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$. Τὸ πρῶτον καὶ δεύτερον ἴχνος Σ_1' καὶ Σ_2'' τῆς εὐθείας α, κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ δευτέρου ἴχνους σ_1' καὶ σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p.

Εἰς τὸ Σχ. XI καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 23 δεξιὰ σημειοῦται σημεῖον $M\,(M', M'')$ κείμενον ἐπὶ ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$. Ἡ πρώτη καὶ δευτέρα προβολὴ M' καὶ M'' τοῦ σημείου M, κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῆς πρώτης καὶ δευτέρας προβολῆς α', καὶ α'', μιᾶς εὐθείας α κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω δύο κριτηρίων λύονται εὐκόλως τὰ προβλήματα :

α') *Δίδεται ἐπίπεδον διὰ τῶν ἰχνῶν του καὶ μία τῶν προβολῶν εὐθείας κειμένης ἐπ' αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἄλλη προβολὴ αὐτῆς.*

Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ α' τῆς εὐθείας α τοῦ ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$ καὶ ἔστωσαν Σ_1' καὶ Σ_2' τὰ σημεῖα τομῆς τῆς α' μετὰ τοῦ πρώτου ἴχνους σ_1' τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τοῦ ἄξονος y_{12}. Ἐφόσον τὸ ἴχνος σ_1' εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου p τῶν ἐχόντων ὑψόμετρον μηδέν, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον $\Sigma_1' \equiv \Sigma_1$ θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας α, τὸ ἔχον ὑψόμετρον μηδέν, δηλαδή τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτῆς. Ἡ δευτέρα προβολὴ Σ_1'' τοῦ πρώτου τούτου ἴχνους Σ_1, θὰ εὑρίσκεται συνεπῶς ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} (Σχ. 23, ἀριστερά). Τὸ σημεῖον Σ_2', ἐξ ἄλλου, εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου Σ_2 τῆς εὐθείας a, τοῦ ἔχοντος ἀπόστασιν μηδέν, τοῦ δευτέρου δηλαδὴ ἴχνους τῆς εὐθείας a. Ἡ δευτέρα προβολὴ Σ_2'' τοῦ δευτέρου ἴχνους, θὰ κεῖται συνεπῶς ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p.

Ἑπομένως ἡ δευτέρα προβολὴ a'' τῆς εὐθείας a, θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $\Sigma_1''\ \Sigma_2''$.

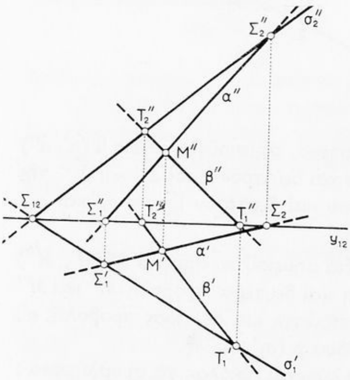
β') Δίδεται ἐπίπεδον διὰ τῶν ἰχνῶν του καὶ μία τῶν προβολῶν σημείου κειμένου ἐπ' αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἄλλη προβολὴ τοῦ σημείου.

Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ M' τοῦ σημείου M τοῦ ἐπιπέδου p (σ'_1, σ''_2). Πρὸς εὕρεσιν τῆς δευτέρας προβολῆς M'' τοῦ M, ἄγεται διὰ τοῦ M' εὐθεῖα a', τῆς ὁποίας, θεωρουμένης ὡς πρώτης προβολῆς εὐθείας a κειμένης ἐπὶ τοῦ p, εὑρίσκεται ἡ δευτέρα προβολὴ a'' τῆς a, ὁπότε ἐπ' αὐτῆς καὶ τῆς ἐκ τοῦ M' καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} εὑρίσκεται ἡ δευτέρα προβολὴ M'' τοῦ σημείου M.

18. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΥΠΟ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Ἔστωσαν a (a', a'') καὶ β (β', β'') δύο τεμνόμεναι εἰς σημεῖον M (M', M'') εὐθεῖαι καὶ p τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπ' αὐτῶν.

Ἐὰν Σ_1, Σ_2 καὶ T_1, T_2 τὰ ἴχνη τῶν εὐθειῶν a καὶ β καὶ σ_1', σ_2'' τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p, ἐφόσον αἱ εὐθεῖαι a καὶ β κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, πρέπει τὰ ἴχνη αὐτῶν νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ p (§ 17).



Σχ. 24

Ἑπομένως ἡ κατασκευὴ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p εἶναι προφανής, καθόσον $\sigma_1' \equiv \Sigma_1'\ T_1'$ καὶ $\sigma_2'' \equiv \Sigma_2''\ T_2''$ (Σχ. XII καὶ Σχ. 24).

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p ὁρίζεται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας a (a', a'') καὶ ἑνὸς σημείου A (A', A'') μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς a, λαμβάνεται ἐπὶ τῆς a τυχὸν σημεῖον M (M', M'') καὶ ἄγεται ἡ εὐθεῖα β ($\beta' \equiv A'\,M'$, $\beta'' \equiv A''M''$) καὶ κατασκευάζονται ἐν συνεχείᾳ τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p, τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν a, β.

19. ΠΛΕΓΜΑΤΑ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ. ΙΧΝΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ, ΙΧΝΟΚΑΘΕΤΟΙ.

Ἐπὶ ἐπιπέδου p δύο δέσμαι παραλλήλων εὐθειῶν, διαφόρων διευθύνσεων, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν *πλέγμα* εὐθειῶν.

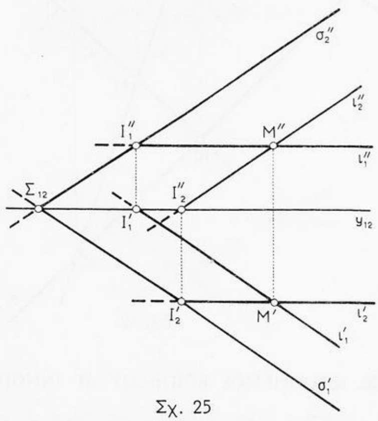
Θεωρήσωμεν τώρα ἓν ἐπίπεδον p ὁριζόμενον διὰ τῶν ἰχνῶν του σ_1 καὶ σ_2. Διακρίνομεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ p, δύο χαρακτηριστικὰ πλέγματα εὐθειῶν, τὸ πλέγμα τῶν *ἰχνοπαραλλήλων* καὶ τὸ πλέγμα τῶν *ἰχνοκαθέτων*.

Τὸ πλέγμα τῶν ἰχνοπαραλλήλων τοῦ ἐπιπέδου p, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς εὐθείας τὰς παραλλήλους πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ p, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *πρῶται ἰχνοπαράλληλοι* καὶ ἀπὸ τὰς εὐθείας τὰς παραλλήλους πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ p, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *δεύτεραι ἰχνοπαράλληλοι*.

Ἐκ τῶν ὡς ἄνω ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι, αἱ μὲν πρῶται ἰχνοπαράλληλοι εἶναι ὁριζόντιοι εὐθεῖαι, αἱ δὲ δεύτεραι ἰχνοπαράλληλοι εἶναι μετωπικαὶ εὐθεῖαι. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἴχνη ἑκάστης τῶν ἰχνοπαραλλήλων πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ὁμωνύμων ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου (§ 17), ἕπεται :

Ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος σημείου $M(M', M'')$ *ἐπιπέδου* $p(\sigma'_1, \sigma_2'')$ *ἔχει ὡς πρώτην προβολὴν εὐθεῖαν* i_1' *διερχομένην διὰ τοῦ* M' *καὶ παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος* σ_1' *τοῦ* p, *ὡς δευτέραν δὲ προβολὴν εὐθεῖαν* i_1'' *διερχομένην διὰ τοῦ* M'' *καὶ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα* y_{12}.

Ἡ δευτέρα ἰχνοπαράλληλος σημείου $M(M', M'')$ *ἐπιπέδου* $p(\sigma_1', \sigma_2'')$, *ἔχει ὡς πρώτην προβολὴν εὐθεῖαν* i'_2 *διερχομένην διὰ τοῦ* M' *καὶ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα* y_{12} *ὡς δευτέραν δὲ προβολὴν εὐθεῖαν* i_2'' *διερχομένην διὰ τοῦ* M'' *καὶ παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος* σ_2'' *τοῦ* p.



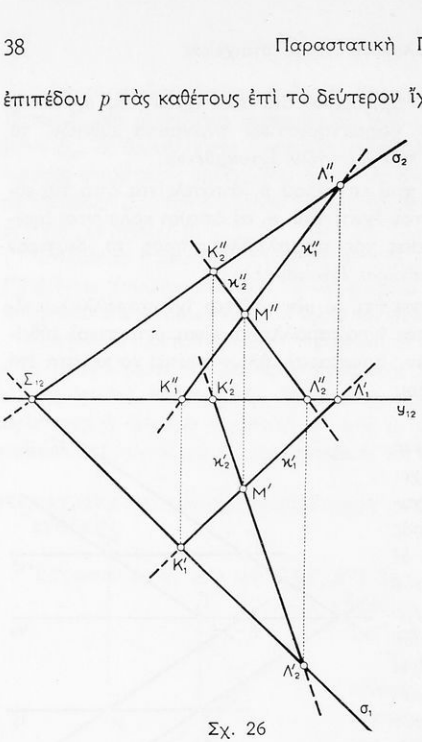
Σχ. 25

Εἰς τὸ Σχ. XIII σημειοῦται ἓν ἐπίπεδον p, τυχὸν σημεῖον M αὐτοῦ καὶ ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος i_1 ἡ διερχομένη δι' αὐτοῦ, μετὰ τῶν δύο προβολῶν της i_1' καὶ i_1''.

Εἰς τὸ Σχ. XIV σημειοῦται ἓν ἐπίπεδον p, τυχὸν σημεῖον M αὐτοῦ καὶ ἡ δευτέρα ἰχνοπαράλληλος i_2 ἡ διερχομένη δι' αὐτοῦ, μετὰ τῶν δύο προβολῶν της i_2' καὶ i_2''.

Εἰς τὸ Σχ. 25 σημειοῦται τὸ ἐπίπεδον p, ἓν σημεῖον M αὐτοῦ καὶ αἱ προβολαὶ τῶν δύο ἰχνοπαραλλήλων τῶν διερχομένων δι'αὐτοῦ. Τὸ πρῶτον ἴχνος I_2' τῆς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου i_2, κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους σ'_1 τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τὸ δεύτερον ἴχνος I_1'' τῆς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου i_1, κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p.

Ἐξετάσωμεν τώρα τὸ πλέγμα τῶν ἰχνοκαθέτων τοῦ ἐπιπέδου p. Τὸ πλέγμα τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ, οἱ ὁποῖαι καλοῦνται *πρῶται ἰχνοκάθετοι* καὶ ἀπὸ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται *δεύτεραι ἰχνοκάθετοι.*



Σχ. 26

Ἐπειδὴ δέ, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ πρώτη προβολὴ μιᾶς πρώτης ἰχνοκαθέτου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p (συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων), ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ δευτέρα προβολὴ μιᾶς δευτέρας ἰχνοκαθέτου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p, ἕπεται ὅτι :

Ἡ πρώτη προβολὴ τῆς πρώτης ἰχνοκαθέτου σημείου M (M', M'') ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2''), εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ M' καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' τοῦ p.

Ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς δευτέρας ἰχνοκαθέτου σημείου M (M', M'') ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2''), εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ M'' καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος σ''_2 τοῦ p (Σχ. 26)

20. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙ' ΙΧΝΟΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ Ἢ ΙΧΝΟΚΑΘΕΤΩΝ.

Ἐὰν δοθοῦν αἱ δύο προβολαὶ μιᾶς ἰχνοπαραλλήλου ἐπιπέδου p, τὸ ἐπίπεδον δὲν ὁρίζεται, ἀπαιτεῖται νὰ δοθοῦν αἱ προβολαὶ καὶ μιᾶς ἑτέρας ἰχνοπαραλλήλου τοῦ p, ὁμωνύμου ἢ ἑτερωνύμου. Ἀντιθέτως, ἐὰν δοθοῦν αἱ δύο προβολαὶ μιᾶς ἰχνοκαθέτου, τὸ ἐπίπεδον ὁρίζεται.

Πράγματι, ἐὰν δοθοῦν αἱ προβολαὶ ($\varkappa_1'$, $\varkappa_1''$) μιᾶς πρώτης ἰχνοκαθέτου $\varkappa_1$ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐπειδὴ τὰ ἴχνη αὐτῆς K_1 (K_1', K_1'') καὶ Λ_1 (Λ_1', Λ_1'') (Σχ. 26), κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους τοῦ p, ὁρίζονται τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τὸ μὲν πρῶτον ἴχνος σ'_1 εἶναι ἡ ἐκ τοῦ K'_1 κάθετος ἐπὶ τὴν $\varkappa_1'$, τὸ δὲ δεύτερον ἴχνος σ_2'' διέρχεται διὰ τοῦ Λ_1'' καὶ διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν σ_1' καὶ y_{12}.

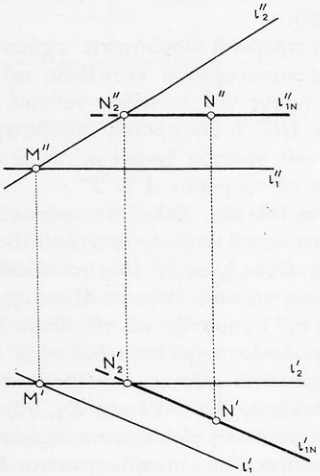
Συνηθέστερον τὸ ἐπίπεδον ὁρίζεται διὰ μιᾶς πρώτης καὶ μιᾶς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου.

Τὰ βασικὰ προβλήματα, καθ' ἅ: δοθείσης τῆς μιᾶς προβολῆς σημείου N ἢ εὐθείας α, ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ ἑτέρα, λύονται ὡς ἀκολούθως :

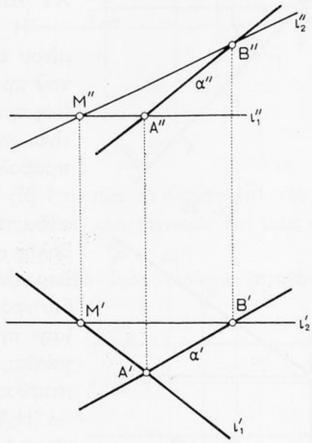
Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον p δίδεται διὰ τῶν ἰχνοπαραλλήλων i_1 (i_1', i_1'') καὶ

$i_2\,(i_2', i_2'')$ σημείου τινὸς $M\,(M', M'')$ αὐτοῦ καὶ ζητεῖται ἡ δευτέρα προβολὴ N'' σημείου N τοῦ ἐπιπέδου p, ὅταν δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ N'. Ἡ διεύθυνσις τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι γνωστή, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $M'M''$.

Ἐκ τοῦ N' ἄγεται ἡ εὐθεῖα i'_{1N} παράλληλος πρὸς τὴν i_1', ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου i_{1N} τοῦ ἐπιπέδου p, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου N (Σχ. 27). Ἡ τομὴ N_2' τῶν εὐθειῶν i'_{1N} καὶ i'_2, θὰ εἶναι



Σχ. 27



Σχ. 28

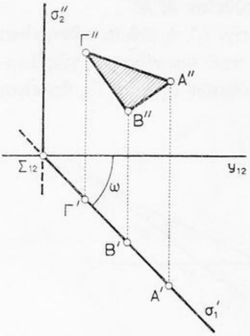
ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ σημείου τομῆς N_2 τῶν ἰχνοπαραλλήλων i_{1N} καὶ i_2, ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ N_2'' θὰ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας i''_2 καὶ τῆς ἐκ τοῦ N'_2 καθέτου ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y_{12}. Διὰ τοῦ σημείου τούτου N''_2 θὰ διέλθῃ ἡ δευτέρα προβολὴ i''_{1N} τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_{1N}, ἐπὶ τῆς ὁποίας καὶ εὑρίσκεται ἡ δευτέρα προβολὴ N'' τοῦ σημείου N.

Εἰς τὸ δεύτερον πρόβλημα δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ α' εὐθείας α τοῦ ἐπιπέδου $p\ (i_1, i_2)$ καὶ ζητεῖται ἡ δευτέρα προβολὴ α'' αὐτῆς. Ἀφοῦ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τομῆς A' καὶ B' τῆς εὐθείας α' μὲ τὰς i_1' καὶ i_2' ἀντιστοίχως, κατασκευάζεται ἡ εὐθεῖα α'', ὡς διερχομένη διὰ τῶν σημείων A'' καὶ B'', δευτέρων προβολῶν τῶν σημείων A καὶ B τῶν ἰχνοπαραλλήλων i_1 καὶ i_2, τῶν ὁποίων εἶναι γνωσταὶ αἱ πρῶται προβολαὶ A' καὶ B' (Σχ. 28).

21. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ, ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Τὰ ἐπίπεδα τοῦ χώρου διακρίνομεν, ἐν σχέσει πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, εἰς τὰς ἑξῆς κατηγορίας:

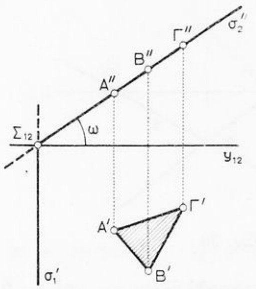
α) **Κατακόρυφα ἐπίπεδα**. Καλοῦνται οὕτω τὰ ἐπίπεδα τὰ κάθετα ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς e_1. Τὸ δεύτερον ἴχνος σ''_2 ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, τὸ δὲ πρῶτον ἴχνος σ_1' σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα γωνίαν, ἴσην πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς διέδρου γωνίας τοῦ κατακορύφου τούτου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_2 (Σχ. XV καὶ Σχ. 29).



Σχ. 29

Ἡ πρώτη προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος κειμένου ἐπὶ ἑνὸς κατακορύφου ἐπιπέδου, κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Οὕτως, ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἡ μὲν πρώτη προβολὴ $A'B'\Gamma'$ εἶναι τμῆμα τοῦ πρώτου ἴχνους σ_1', ἡ δὲ δευτέρα προβολὴ εἶναι τὸ τρίγωνον $A''B''\Gamma''$.

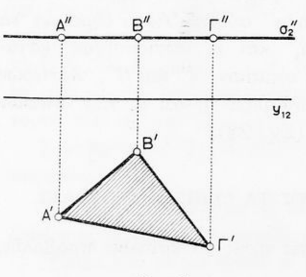
β') **Πρόσθια ἐπίπεδα**. Καλοῦνται οὕτω τὰ ἐπίπεδα τὰ κάθετα εἰς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς e_2. Τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1' ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, τὸ δὲ δεύτερον ἴχνος σ_2'' σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα γωνίαν, ἴσην πρὸς τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον τῆς διέδρου γωνίας, τοῦ προσθίου τούτου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1 (Σχ. XVI καὶ Σχ. 30).



Σχ. 30

Ἡ δευτέρα προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος κειμένου ἐπὶ ἑνὸς προσθίου ἐπιπέδου, κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Οὕτως, ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἡ μὲν δευτέρα προβολὴ $A''B''\Gamma''$ εἶναι τμῆμα τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2'', ἡ δὲ πρώτη προβολὴ εἶναι τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$.

γ) **Ὁριζόντια ἐπίπεδα.** Καλοῦνται οὕτω τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς e_1. Τὸ δεύτερον ἴχνος ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 31).

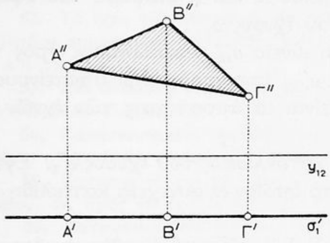


Σχ. 31

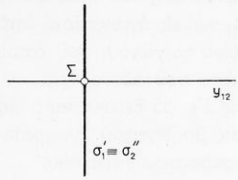
Ἡ πρώτη προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος κειμένου ἐπὶ ἑνὸς ὁριζοντίου ἐπιπέδου εἶναι σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ προβαλλόμενον, ἐνῷ ἡ δευτέρα προβολὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

δ') **Μετωπικὰ ἐπίπεδα**. Καλοῦνται οὕτω τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς e_2. Τὸ πρῶτον ἴχνος ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 32).

Ἡ δευτέρα προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος κειμένου ἐπὶ ἑνὸς μετωπικοῦ ἐπιπέδου εἶναι σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ προβαλλόμενον, ἐνῷ ἡ πρώτη προβολὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Σχ. 32

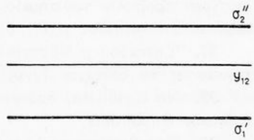


Σχ. 33

ε') **Ἐγκάρσια ἐπίπεδα.** Καλοῦνται οὕτω τὰ ἐπίπεδα τὰ κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}. Ἀμφότερα τὰ ἴχνη ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου συμπίπτουν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 33).

Ἀμφότεραι αἱ προβολαὶ ἑνὸς σχήματος κειμένου ἐπὶ ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, κεῖνται ἐπὶ τῶν ἰχνῶν $\sigma_1' \equiv \sigma_2''$.

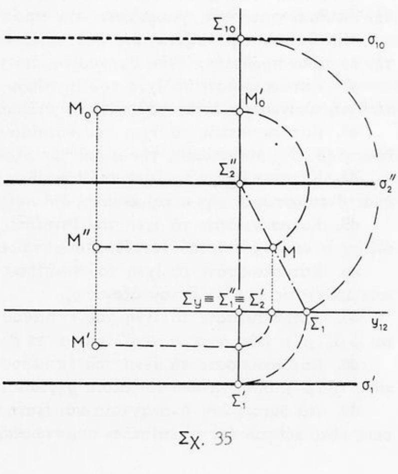
στ') **Ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα** y_{12}. Καλοῦνται οὕτω τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι παράλληλα πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς. Ἀμφότερα τὰ ἴχνη ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (Σχ. 34).



Σχ. 34

22. ΚΑΤΑΚΛΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ y_{12}.

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τούτου θὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα (§ 21). Ἂς ζητήσωμεν τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς π.χ. τοῦ κατακορύφου. Ἡ κατάκλισις θὰ γίνῃ διὰ περιστροφῆς τοῦ ἐπιπέδου p περὶ τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2''. Κατ' αὐτὴν ἕκαστον σημεῖον M (x, y, z) τοῦ ἐπιπέδου p θὰ γράψῃ τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἴχνος



Σχ. 35

σ_2'', τὸ κέντρον εἶναι σημεῖον τοῦ ἴχνους σ''_2 καὶ ἡ ἀκτὶς ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἴχνους τούτου.

Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι ἡ ἀπόστασις x τοῦ σημείου M καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ ὑψομέτρου z τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ὑψομέτρου τοῦ ἴχνους σ_2''.

Ἡ κατάκλισις τοῦ πρώτου ἴχνους σ'_1 εἶναι εὐθεῖα σ_{10}, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ ἴχνους σ''_2, ἴσην πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν ἰχνῶν σ'_1 καὶ σ''_2 ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{12}.

Εἰς τὸ Σχ. 35 δεικνύεται ἡ κατασκευὴ τῆς κατακλίσεως τοῦ ἴχνους σ'_1. Ἐγένετο χρῆσις βοηθητικοῦ ἐγκαρσίου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἐν συνεχείᾳ κατεκλίθη ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου.

Ἡ ὑποτείνουσα $\Sigma_1 \Sigma''_2$ τοῦ τριγώνου $\Sigma y \Sigma_1 \Sigma_2''$, εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως τοῦ ἴχνους σ'_1 ἀπὸ τοῦ ἴχνους σ_2''.

23. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. Δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ σημείου M κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου p (σ'_1, σ''_2). Εὕρετε τὴν δευτέραν προβολὴν τοῦ σημείου M. Ἐφαρμογή : Δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ πολυγώνου (Π) κειμένου ἐπὶ ἐπιπέδου p (σ'_1, σ''_2). Εὕρετε τὴν δευτέραν προβολὴν τοῦ πολυγώνου (Π).

37. Ἐπιπέδου p δίδονται τὸ πρῶτον ἴχνος καὶ αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου του. Κατασκευάσατε τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτοῦ.

38. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου p (σ_1', σ''_2) σημεῖον M, ἔχον δοθὲν ὑψόμετρον καὶ δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

39. Προσδιορίσατε τὰ σημεῖα τομῆς μιᾶς κατακορύφου, μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

40. Εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου p (σ_1', σ''_2) καὶ συναντᾷ τὸν ἄξονα y_{12}. Κατασκευάσατε τὴν δευτέραν προβολήν, γνωρίζοντες τὴν πρώτην προβολὴν τῆς εὐθείας α.

41. Ἐπίπεδον p ὁρίζεται διὰ δύο τεμνομένων εἰς M (M', M'') εὐθειῶν. Κατασκευάσατε τὴν δευτέραν προβολὴν εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ M, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ πρώτη προβολή.

42. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἴχνη εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

43. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ εὐθείας α (α', α'') καὶ εὐθείας β (β', β'') συναντώσης τὴν α καὶ τὸν ἄξονα y_{12}

44. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ εὐθείας α (α', α'') καὶ εὐθείας β συναντώσης τὴν α καὶ κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως.

45. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ σημείου M (M', M'') καὶ εὐθείας α κειμένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμπτώσεως.

46. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν α καὶ β συναντωμένων εἰς σημεῖον Σ τοῦ ἄξονος y_{12}

47. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν α (α', α'') καὶ β (β', β''), ἔνθα ὅμως $\alpha' \equiv \beta''$ καὶ $\alpha'' \equiv \beta'$.

48. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο εὐθειῶν α (α', α'') καὶ β (β', β''), συναντωσῶν τὸν ἄξονα y_{12} καὶ τοιούτων ὥστε $\alpha' \equiv \beta''$ καὶ $\alpha'' \equiv \beta'$.

49. Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἐπίπεδον p (σ'_1, σ''_2), μὴ ἐγκάρσιον, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

50. Νὰ διατυπωθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$, εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

51. Τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ σημείου $M\,(x, y, z)$ καὶ καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως, διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων $N_1\,(x - z, y, 0)$ καὶ $N_2\,(0, y, z - x)$.

52. Τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ σημείου $M\,(x, y, z)$ καὶ καθέτων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας, διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων $N_1\,(x + z, y, 0)$ καὶ $N_2(\,0, y, x + z)$.

53. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

54. Κατασκευάσατε τὰς δύο προβολὰς τῆς εὐθείας, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$ τέμνει τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

55. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ συμμετρικοῦ πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἢ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

56. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ συμμετρικοῦ πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

57. Κατασκευάσατε τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἐγκαρσία, ἐνῷ τῆς ἄλλης αἱ δύο προβολαὶ συμπίπτουν.

58. Ἐπιπέδου p δίδεται τὸ ἓν ἴχνος π.χ. τὸ σ'_1. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἕτερον ἴχνος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἐπίπεδον p μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι δοθεῖσα γωνία ω.

59. Δίδεται τὸ ἓν τῶν ἰχνῶν ἐπιπέδου $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$, π.χ. τὸ σ'_1. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄλλο ἴχνος αὐτοῦ, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον p ἀπέχει δοθεῖσαν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τοῦ ἄξονος y_{12}.

60. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον $M\,(M', M'')$ τοῦ χώρου. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς ἐκ τοῦ M καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε.

61. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ γωνία ω. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ε καὶ σχηματίζοντος γωνίαν ω μὲ τὸ ὁριζόντιον (κατακόρυφον) ἐπίπεδον προβολῆς.

62. Δίδεται ἓν σημεῖον $A\,(A', A'')$ ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου A καὶ σχηματιζούσης δοθεῖσαν γωνίαν ω, μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς.

63. Κατασκευάσατε τὰς δύο προβολὰς εὐθείας κειμένης ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma''_2)$, διερχομένης διὰ σημείου Α (Α', Α'') αὐτοῦ καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως ἢ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας.

64. Ἐπίπεδον δίδεται διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$. Κατασκευάσατε τὰς προβολὰς ὁριζοντίου εὐθυγράμμου τμήματος, δοθέντος μήκους, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β.

65. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$, τῶν ὁποίων αἱ πρῶται προβολαὶ α' καὶ β' εἶναι παράλληλοι. Δείξατε ὅτι αἱ ὁριζόντιοι εὐθεῖαι τοῦ χώρου, αἱ συναντῶσαι τὰς εὐθείας α καὶ β, συναντοῦν καὶ μίαν κατακόρυφον εὐθεῖαν γ. Κατασκευάσατε ταύτην.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Προβλήματα ἐπὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων.

24. ΓΕΝΙΚΑ.

Ὅπως αἱ προτάσεις οὕτω καὶ τὰ προβλήματα τῆς Γεωμετρίας διαιρίνονται εἰς *γραφικὰ* καὶ *μετρικά*. Μία γεωμετρικὴ πρότασις καλεῖται *γραφική*, ἐφόσον δύναται νὰ προκύψῃ διὰ λογικῆς ἀπαγωγῆς ἐκ τῶν ἀξιωμάτων θέσεως καὶ διατάξεως. Αἱ μὴ γραφικαὶ προτάσεις τῆς Γεωμετρίας καλοῦνται *μετρικαί*.

Εἰς τὰς γεωμετρικὰς κατασκευὰς τίθεται, ὡς γνωστόν, ὡς προϋπόθεσις ἡ χρῆσις μόνον τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἡ χρῆσις δηλαδὴ μόνον εὐθειῶν καὶ κύκλων. Ἐπειδὴ δὲ πᾶσα, διὰ τοῦ κανόνος μόνον, κατασκευή, στηρίζεται εἰς τὰ ἀξιώματα θέσεως καὶ διατάξεως, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς γραφικὰ προβλήματα, ἐκεῖνα τῶν ὁποίων ἡ λύσις δύναται νὰ προκύψῃ διὰ τῆς χρήσεως μόνον τοῦ κανόνος. Τὰ μὴ γραφικὰ προβλήματα καλοῦνται μετρικά.

Πολλοὶ ξένοι συγγραφεῖς, ἐν τούτοις, διακρίνουν μίαν τρίτην κατηγορίαν προβλημάτων καὶ προτάσεων τὰς ὁποίας καλοῦν *ὁμοπαραλληλικὰς* ἢ *γραμμικὰς (Affines ou Lineaires)*. Ἡ κατηγορία αὕτη περιλαμβάνει ὅλας τὰς γραφικὰς ἰδιότητας καὶ μέρος τῶν μετρικῶν. Διὰ τοῦ ὅρου *γραμμικαὶ* ἐννοοῦν τὰς προτάσεις ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν διὰ λογικῆς ἀπαγωγῆς, ὄχι μόνον ἐκ τῶν ἀξιωμάτων θέσεως καὶ διατάξεως, ἀλλὰ καὶ παραλληλίας.

Εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν θὰ διακρίνωμεν τὰ προβλήματα εἰς *γραμμικὰ καὶ μετρικά*.

Α. Γραμμικὰ προβλήματα

25. ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Ἔστωσαν p_1 καὶ p_2 δύο δοθέντα μὴ παράλληλα ἐπίπεδα. Ἡ εὕρεσις τῆς εὐθείας a τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων, ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς ἑξῆς γενικῆς μεθόδου.

Χρησιμοποιοῦμεν δύο βοηθητικὰ ἐπίπεδα p_3 καὶ p_4, τὰ ὁποῖα ἐκλέγομεν καταλλήλως εἰς τρόπον ὥστε νὰ δυνάμεθα εὐχερῶς νὰ κατασκευάσωμεν τὰ σημεῖα τομῆς Σ_{123} καὶ Σ_{124}, τῶν δύο τριάδων ἐπιπέδων p_1, p_2, p_3 καὶ p_1, p_2, p_4 ἀντιστοίχως.

Τὸ σημεῖον Σ_{123} ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων p_1, p_2, p_3, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας a. Ὁμοίως τὸ σημεῖον Σ_{124}, ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων p_1, p_2, p_4

θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας α. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα α ὁρίζεται διὰ τῶν σημείων Σ_{123} καὶ Σ_{124}.

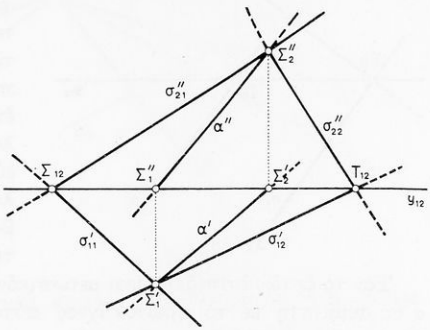
Ἡ ἐκλογὴ τῶν βοηθητικῶν ἐπιπέδων ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος.

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς τῶν προβολῶν τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων, ὅταν ἕκαστον τούτων δίδεται διὰ τῶν ἰχνῶν του ἢ διὰ ζεύγους τεμνομένων εὐθειῶν.

26. ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ ΤΩΝ.

α) Γενικὴ περίπτωσις.

Ἔστωσαν p_1 (σ_{11}', σ_{21}'') καὶ p_2 (σ_{12}', σ_{22}'') δύο δοθέντα ἐπίπεδα καὶ α ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τομῆς των. Ἐκλέγομεν ὡς βοηθητικὰ ἐπίπεδα p_3 καὶ p_4 τὰ ἐπίπεδα προβολῆς e_1 καὶ e_2 ἀντιστοίχως. Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων p_1, p_2, e_1 εἶναι τὸ σημεῖον Σ_{121}, τὸ σημεῖον τομῆς δηλαδὴ τῶν δύο ἰχνῶν $\sigma_{11}' \equiv p_1, e_1$, καὶ $\sigma'_{12} \equiv p_2, e_1$.



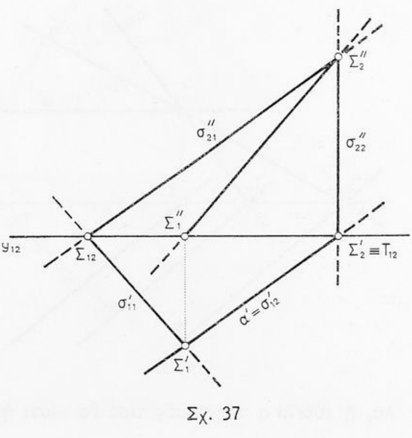
Σχ. 36

Τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων p_1, p_2, e_2 εἶναι τὸ σημεῖον T_{122}, τὸ σημεῖον τομῆς δηλαδὴ τῶν δύο ἰχνῶν $\sigma''_{21} \equiv p_1, e_2$ καὶ $\sigma''_{22} \equiv p_2, e_2$. Τὸ σημεῖον Σ_{121} κεῖται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς εὐθείας α καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς e_1, εἶναι συνεπῶς τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας α. Ὁμοίως τὸ σημεῖον T_{122}, ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας α καὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, εἶναι τὸ δεύτερον ἴχνος τῆς εὐθείας α. Ἡ εὐθεῖα α ἑπομένως ὁρίζεται διὰ τῶν ἰχνῶν της (§ 10).

Εἰς τὸ Σχ. $XVII$ καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 36 τὰ σημεῖα Σ_{121} καὶ T_{122} σημειοῦνται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων Σ_{12} καὶ T_{12}.

β'. Τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων εἶναι κατακόρυφον ἢ πρόσθιον.

Ἔστω ὅτι, κατακόρυφον εἶναι τὸ

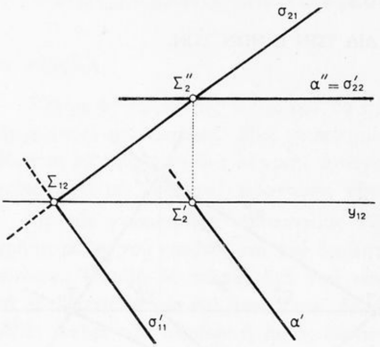


Σχ. 37

p_2. Ἐπειδὴ πᾶν σχῆμα εὑρισκόμενον ἐπὶ κατακορύφου ἐπιπέδου προβάλλεται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἴχνους αὐτοῦ (§ 21), ἕπεται ὅτι ἡ πρώτη προβολὴ α' τῆς εὐθείας α συμπίπτει μὲ τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_{12} τοῦ ἐπιπέδου p_2.

Ἡ δευτέρα προβολὴ α'' τῆς εὐθείας α κατασκευάζεται ἐκ τῆς πρώτης (§ 17) (Σχ. 37). Ἐὰν τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων εἶναι πρόσθιον, ἡ δευτέρα προβολὴ α'' τῆς εὐθείας α θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ προσθίου ἐπιπέδου.

γ') Τὸ ἕνα τῶν ἐπιπέδων εἶναι ὁριζόντιον ἢ μετωπικόν.



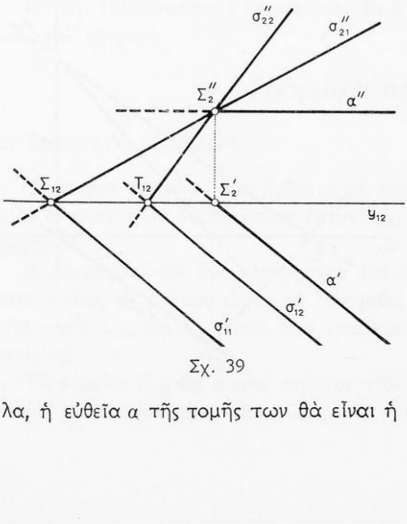
Σχ. 38

Ἔστω ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ p_2. Ἐπειδὴ πᾶν σχῆμα εὑρισκόμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβάλλεται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους αὐτοῦ (§ 21), ἕπεται ὅτι ἡ δευτέρα προβολὴ α'' τῆς τομῆς α τῶν δύο ἐπιπέδων, συμπίπτει μὲ τὸ δεύτερον ἴχνος σ''_{22} τοῦ ἐπιπέδου p_2, εἶναι δηλαδὴ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα εἶναι μία πρώτη ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου p_1, τῆς πρώτης προβολῆς της α' εὑρισκομένης ἐκ τῆς δευτέρας κατὰ τὰ γνωστὰ (§19) (Σχ. 38).

Ἐὰν τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων εἶναι μετωπικόν, ἡ πρώτη προβολὴ α' τῆς εὐθείας α θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ πρῶτον ἴχνος αὐτοῦ, ἑπομένως ἡ εὐθεῖα α εἶναι μία δευτέρα ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου p_1.

δ') Τὰ πρῶτα ἢ τὰ δεύτερα ἴχνη τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα.

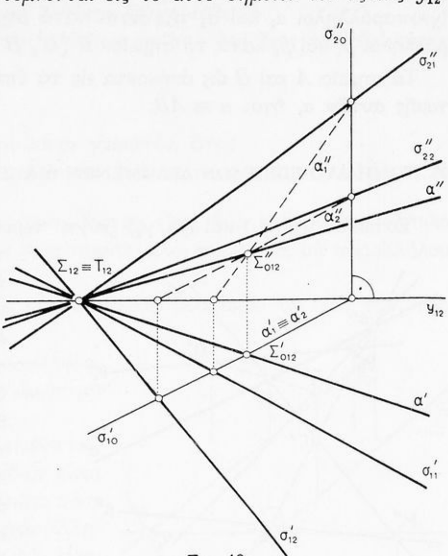
Ἔστω ὅτι τὰ πρῶτα ἴχνη σ'_{11} καὶ σ'_{12} τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 εἶναι παράλληλα. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα, ὡς διερχόμενα διὰ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν σ'_{11} καὶ σ'_{12}, θὰ τέμνωνται κατὰ εὐθεῖαν α παράλληλον πρὸς αὐτάς, θὰ εἶναι δηλαδὴ ἡ εὐθεῖα α κοινὴ πρώτη ἰχνοπαράλληλος ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων. Ἡ δευτέρα προβολὴ α' τῆς ἰχνοπαραλλήλου α, θὰ διέλθῃ συνεπῶς διὰ τῆς τομῆς τῶν δευτέρων ἰχνῶν τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2. Εἰς τὸ Σχ. 39 φαίνεται ἡ κατασκευὴ τῆς ἰχνοπαραλλήλου α. Ἐὰν τὰ δεύτερα ἴχνη σ''_{21} καὶ σ''_{22} τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 εἶναι παράλληλα, ἡ εὐθεῖα α τῆς τομῆς των θὰ εἶναι ἡ κοινὴ δευτέρα ἰχνοπαράλληλος αὐτῶν.



Σχ. 39

ε΄) Τὰ ἴχνη τῶν δύο ἐπιπέδων τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος y_{12}.

Τῆς εὐθείας α τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2 ἔχομεν ἓν σημεῖον, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων τούτων μετὰ τοῦ ἄξονος. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν δεύτερον σημεῖον της ἀρκεῖ νὰ χρησιμοποιήσωμεν ἓν βοηθητικὸν ἐπίπεδον καὶ ὡς τοιοῦτον δυνάμεθα, νὰ ἐκλέξωμεν ἓν ἐγκάρσιον, ἓν κατακόρυφον, ἓν πρόσθιον, ἓν ὁριζόντιον ἢ ἓν μετωπικόν. Εἰς τὸ Σχ. 40 χρησιμοποιήσαμεν, ὡς βοηθητικόν, ἕνα κατακόρυφον ἐπίπεδον p_0.

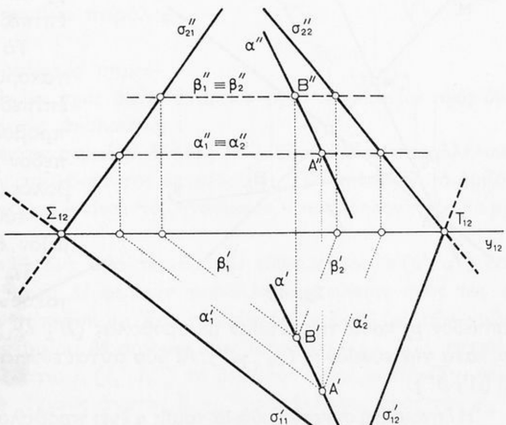


Σχ. 40

Τὸ κατακόρυφον τοῦτο ἐπίπεδον τέμνει τὰ p_1 καὶ p_2 κατὰ τὰς εὐθείας α_1 καὶ α_2. Τὸ σημεῖον τομῆς Σ_{012} τῶν εὐθειῶν α_1 καὶ α_2 εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τριῶν ἐπιπέδων p_0, p_1, p_2. Ἐπομένως ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ_{012}. Αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας α εἶναι αἱ δύο εὐθεῖαι $\alpha' \equiv \Sigma_{12}\Sigma'_{012}$ καὶ $\alpha'' \equiv \Sigma_{12}\Sigma''_{012}$, ἔνθα Σ_{12} τὸ κοινὸν ἴχνος ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} τῶν δύο ἐπιπέδων p_1 καὶ p_2.

στ΄) Τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τῶν δύο ἐπιπέδων τέμνονται ἐκτὸς τοῦ χάρτου σχεδιάσεως.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς εὐθείας α τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων, δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ὡς βοηθητικὰ ἐπίπεδα δύο ὁριζόντια ἢ δύο μετωπικά.



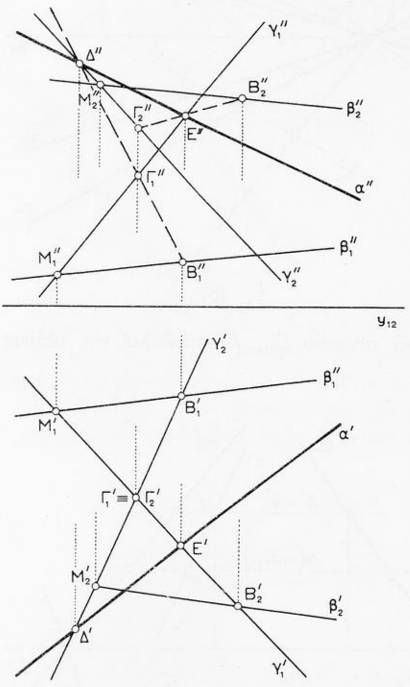
Σχ. 41

Εἰς τὸ Σχ. 41 χρησιμοποιήσαμεν, ὡς βοηθητικὰ δύο ὁριζόντια ἐπίπεδα, a καὶ b, τέμνοντα τὰ δοθέντα κατὰ τὰς πρώτας ἰχνοπαραλλήλους a_1, a_2 καὶ β_1, β_2 ἀντιστοίχως. Αἱ ἰχνοπαράλληλοι a_1 καὶ a_2 τέμνονται κατὰ σημεῖον A (A', A''), ἐνῶ αἱ ἰχνοπαράλληλοι β_1 καὶ β_2 κατὰ τὸ σημεῖον B (B', B'').

Τὰ σημεῖα A καὶ B ὡς ἀνήκοντα εἰς τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2 θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς τομῆς αὐτῶν a, ἤτοι $a \equiv AB$.

27. ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΔΙΑ ΖΕΥΓΟΥΣ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Ἔστωσαν (β_1, γ_1) καὶ (β_2, γ_2) ζεύγη τεμνομένων εὐθειῶν ὁρίζοντα τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2, ἀντιστοίχως καὶ a ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τομῆς των. Δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν ὡς βοηθητικὰ ἐπίπεδα δύο μεταξὺ τῶν ὀκτὼ κατακορύφων καὶ προσθίων ἐπιπέδων τὰ ὁποῖα προβάλλουν τὰς εὐθείας β_1, γ_1, β_2, γ_2, ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα προβολῆς. Ἐκλέγομεν συνήθως ἐκεῖνα ἐν σχέσει πρὸς τὰ ὁποῖα, αἱ ἀπαιτούμεναι διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς a γεωμετρικαὶ κατασκευαί, περιλαμβάνονται ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.



Σχ. 42

Εἰς τὸ Σχ. 42 χρησιμοποιοῦμεν ὡς βοηθητικά, τὰ διὰ τῶν εὐθειῶν γ_1 καὶ γ_2 διερχόμενα κατακόρυφα ἐπίπεδα.

Τὸ διὰ τῆς γ_1 διερχόμενον κατακόρυφον ἐπίπεδον τέμνει, τὸ μὲν ἐπίπεδον p_1 κατὰ τὴν εὐθεῖαν μὲ προβολὰς γ_1 (γ'_1, γ_1'') τὸ δὲ ἐπίπεδον p_2 κατὰ τὴν εὐθεῖαν μὲ προβολὰς ($B_2'\Gamma_2'$, $B_2''\,\Gamma_2''$). Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται κατὰ τὸ σημεῖον E (E', E'').

Τὸ διὰ τῆς γ_2 διερχόμενον κατακόρυφον ἐπίπεδον τέμνει, τὸ μὲν ἐπίπεδον p_1 κατὰ τὴν εὐθεῖαν μὲ προβολὰς ($B'_1\,\Gamma'_1$, $B_1''\,\Gamma_1''$), τὸ δὲ ἐπίπεδον p_2 κατὰ τὴν εὐθεῖαν γ_2 (γ_2', γ_2''). Αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνονται κατὰ τὸ σημεῖον Δ (Δ', Δ'').

Ἡ ζητουμένη συνεπῶς εὐθεῖα τομῆς a ἔχει προβολὰς $a' \equiv \Delta'E'$ καὶ $a'' \equiv \Delta''E''$.

Ἄλλη μέθοδος εἶναι ἡ ἑξῆς :

Ἐκλέγομεν ὡς βοηθητικὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2, δύο ὁριζόντια ἢ δύο μετωπικὰ τοιαῦτα καὶ τέμνομεν δι' αὐτῶν τὰ δοθέντα ζεύγη εὐθειῶν.

Ἐφαρμόσατε πρὸς ἄσκησιν τὴν μέθοδον ταύτην ἐπὶ ἑνὸς παραδείγματος.

28. ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ Χώρου εἶναι γνωστόν, ὅτι :

α) Δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ὑπὸ τρίτου κατὰ παραλλήλους εὐθείας καὶ

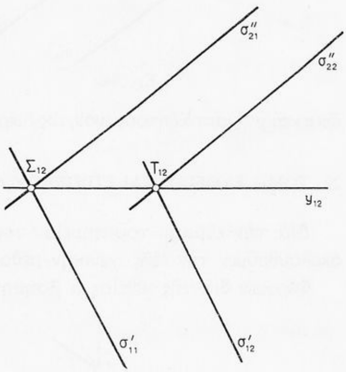
β) Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ εἶναι δύο ἐπίπεδα παράλληλα, εἶναι νὰ ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι τοῦ ἑνὸς παράλληλοι πρὸς δύο, μὴ παραλλήλους μεταξύ των, εὐθείας τοῦ ἄλλου.

Ἑπομένως, ἐὰν ὡς εὐθείας τῶν δύο ἐπιπέδων ἐκλέξωμεν τὰ ἴχνη των, προκύπτει τὸ κριτήριον :

Διὰ νὰ εἶναι δύο ἐπίπεδα παράλληλα, πρέπει, ἐν γένει δὲ καὶ ἀρκεῖ, τὰ ὁμώνυμα ἴχνη αὐτῶν νὰ εἶναι παράλληλα.

Τὸ *ἐν γένει* ἀναφέρεται εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ ἴχνη τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, διότι τότε τὰ ἴχνη ἑκάστου ἐπιπέδου εἶναι παράλληλα μεταξύ των καὶ ἑπομένως διὰ νὰ εἶναι δύο τοιαῦτα ἐπίπεδα παράλληλα, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μία εὐθεῖα τοῦ ἑνός, μὴ παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} ἡ ὁποία νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν τοῦ ἄλλου.

Εἰς τὸ Σχ. 43 παρίστανται δύο παράλληλα μεταξύ των ἐπίπεδα.



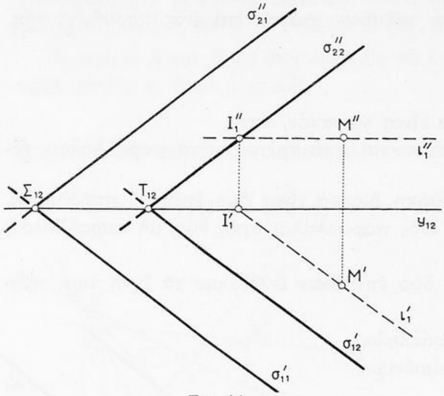
Σχ. 43

Τὰ προβλήματα : *Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπιπεδον παράλληλον πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον p_1 ἢ παράλληλον πρὸς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας,* λύονται ὡς ἀκολούθως :

α) Φέρομεν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου $M\,(M', M'')$ δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς δύο τεμνομένας εὐθείας τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου p_1. Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι τὸ ζητούμενον, παράλληλον πρὸς τὸ p_1, ἐπίπεδον p_2.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p_1 δοθῇ διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν του $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$, τότε διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὰς α καὶ β ὁρίζοντες δι' αὐτῶν τὸ ἐπίπεδον p_2. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p_1 δοθῇ διὰ τῶν ἰχνῶν του σ_{11}', σ_{21}'', τότε διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν μίαν εὐθεῖαν $i_1\,(i_1', i_1'')$, παράλληλον πρὸς τὸ ἴχνος σ_{11}' καὶ ἔστω $I_1\,(I_1', I_1'')$ τὸ δεύτερον ἴχνος αὐτῆς (Σχ. 44). Διὰ τοῦ δευτέρου τούτου ἴχνους ἄγεται ἡ σ_{22}'' παράλληλος πρὸς τὴν σ_{21}'', τέμνουσα εἰς T_{12} τὸν ἄξονα y_{12}. Διὰ τοῦ σημείου T_{12} φέρομεν τὸ πρῶτον ἴχνος σ_{12}' τοῦ p_2 παράλληλον πρὸς τὸ σ'_{11} τοῦ p_1.

β) Ἔστωσαν $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$ αἱ δύο ἀσύμβαται εὐθεῖαι. Διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν τὰς παραλλήλους α_1 καὶ β_1 πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας α καὶ β. Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν α_1 καὶ β_1 εἶναι παράλληλον πρὸς ἑκατέραν τῶν εὐθειῶν α καὶ β.



Σχ. 44

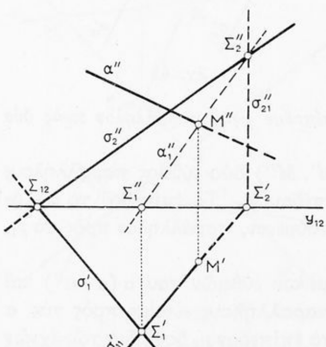
Τὸ πρόβλημα τέλος : *Διὰ δοθείσης εὐθείας* $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ *νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν* $\beta\,(\beta', \beta'')$, λύεται ὡς ἀκολούθως :

Διὰ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας α φέρομεν εὐθεῖαν $\gamma\,(\gamma', \gamma'')$ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθείαν $\beta(\beta', \beta'')$. Τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν α καὶ γ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς διερχόμενον διὰ τῆς α καὶ παράλληλον πρὸς τὴν β.

29. ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ ΤΟΥ.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου τομῆς εὐθείας $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ ἐπιπέδου $p\,(\sigma_1', \sigma''_2)$ ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς γενικὴν μέθοδον :

Φέρομεν διὰ τῆς εὐθείας α βοηθητικὸν ἐπίπεδον p_1 καὶ εὑρίσκομεν τὴν εὐθεῖαν α_1, τομὴν τῶν ἐπιπέδων p καὶ p_1. Αἱ εὐθεῖαι α καὶ α_1 ὡς κείμεναι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p_1, τέμνονται εἴς τι σημεῖον $M(M', M'')$. Τὸ σημεῖον τοῦτο M εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τῆς εὐθείας α.



Σχ. 45

Ἡ ἐκλογὴ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος. Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν τὸ διὰ τῆς εὐθείας διερχόμενον κατακόρυφον ἢ πρόσθιον ἐπίπεδον ἢ ἀκόμη τὸ διὰ τῆς εὐθείας διερχόμενον ἐπίπεδον, τὸ παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον ἴχνος τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις :

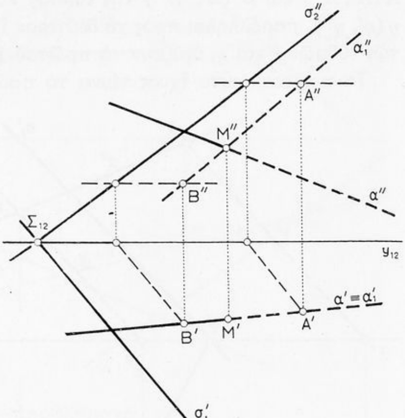
α) Ὡς ἐπίπεδον p_1 *ἐκλέγεται κατακόρυφον ἢ πρόσθιον.*

Εἰς τὸ *Σ*χ. XVIII καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 45 ἔχει ἀχθῆ διὰ τῆς εὐθείας $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$

κατακόρυφον βοηθητικὸν ἐπίπεδον p_1 ($\sigma_{11}' \equiv \alpha'$, σ_{21}''). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ ἐπίπεδον p κατὰ τὴν εὐθεῖαν α_1 (α_1', α_1''), τῆς ὁποίας ἡ μὲν πρώτη προβολὴ συμπίπτει μετὰ τῆς α', ἡ δὲ δευτέρα εὑρίσκεται ἐκ τῆς πρώτης κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 17). Τὸ σημεῖον M (M', M'') τομὴ τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ α_1 εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τομῆς, τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τῆς εὐθείας α.

Ἐὰν τὰ ἴχνη τῆς α_1 δὲν εὑρίσκωνται ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, ἡ κατασκευὴ τῆς δευτέρας προβολῆς της α_1'' γίνεται ὡς ἑξῆς :

Ἐπειδὴ ἡ α_1 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐὰν λάβωμεν τὰς πρώτας προβολὰς A′ καὶ B', δύο τυχόντων σημείων A καὶ B αὐτῆς, δυνάμεθα διὰ τῶν πρώτων ἰχνοπαραλλήλων τῶν σημείων τούτων νὰ εὕρωμεν τὰς δευτέρας προβολὰς αὐτῶν A'' καὶ B'' (§ 17) (Σχ. 46). Ἡ δευτέρα προβολὴ ἑπομένως τῆς α_1 εἶναι ἡ εὐθεῖα $\alpha''_1 \equiv A''B''$.



Σχ. 46

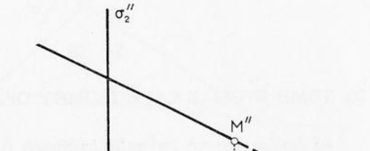
Τὸ σημεῖον M'' καθορίζεται ὡς ἡ τομὴ τῶν α''_1 καὶ α'' καὶ ἐκ τούτου ὁρίζεται τὸ M'.

Ἀνάλογοι πρὸς τὰς προηγουμένας εἶναι αἱ κατασκευαὶ ὅταν χρησιμοποιήσωμεν πρόσθιον βοηθητικὸν ἐπίπεδον.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κατακόρυφον τὸ σημεῖον τομῆς αὐτοῦ καὶ τῆς εὐθείας α, θὰ ἔχῃ ὡς πρώτην προβολὴν M', τὴν τομὴν τοῦ πρώτου ἴχνους σ'_1 μετὰ τῆς πρώτης προβολῆς α' τῆς εὐθείας α (Σχ. 47). Ἐκ τῆς πρώτης προβολῆς M' τοῦ σημείου M εὑρίσκεται ἡ δευτέρα M''. Ἀνάλογος κατασκευὴ γίνεται ὅταν τὸ δοθὲν ἐπίπεδον p εἶναι πρόσθιον.

β′) Ὡς ἐπίπεδον p_1 ἐκλέγεται τὸ διὰ τῆς εὐθείας παράλληλον πρὸς τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον ἴχνος.

Ἐνίοτε καὶ διὰ λόγους τοὺς ὁποίους θὰ ἀναπτύξωμεν κατωτέρω εἰς τὸ πρόβλημα τῆς τομῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου τομῆς ἐπιπέδου καὶ εὐθείας χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον :

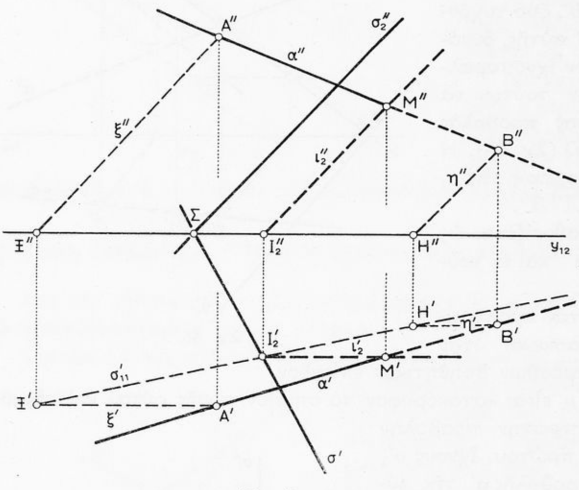


Σχ. 47

Φέρομεν διὰ τῆς εὐθείας α βοηθητικὸν ἐπίπεδον p_1 παράλληλον πρὸς τὸ ἓν τῶν δύο ἰχνῶν π.χ. πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος, τέμνον τὸ ἐπίπεδον p κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι δευτέρα ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου p.

Εἰς τὸ $\Sigma\chi$. 48 λύεται τὸ πρόβλημα τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, διὰ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ἴχνους σ'_{11} τοῦ βοηθητικοῦ τούτου ἐπιπέδου p_1, ἐλήφθησαν δύο σημεῖα $A\,(A', A'')$ καὶ $B\ (B',\ B'')$ τῆς εὐθείας καὶ ἤχθησαν αἱ εὐθεῖαι $\xi\ (\xi', \xi'')$ καὶ $\eta\,(\eta', \eta'')$, παράλληλοι πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2 (σ_2', σ''_2). Τὰ ἴχνη Ξ' καὶ H' τῶν εὐθειῶν ξ καὶ η, ὁρίζουν τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_{11} τοῦ ἐπιπέδου p_1.

Τὸ πρῶτον τοῦτο ἴχνος τέμνει τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_1, τοῦ ἐπιπέδου p εἰς σημεῖον I'_2, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου i_2, κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ βοηθητικὸν ἐπίπεδον p_1 τέμνει τὸ δοθὲν ἐπίπεδον p. Γνωρίζοντες τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_2, ὁρίζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν δευτέραν ταύτην ἰχνοπαράλληλον καὶ συνεπῶς τὸ σημεῖον $M\,(M', M'')$ τομὴν ταύτης καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας $\alpha\ (\alpha', \alpha'')$.



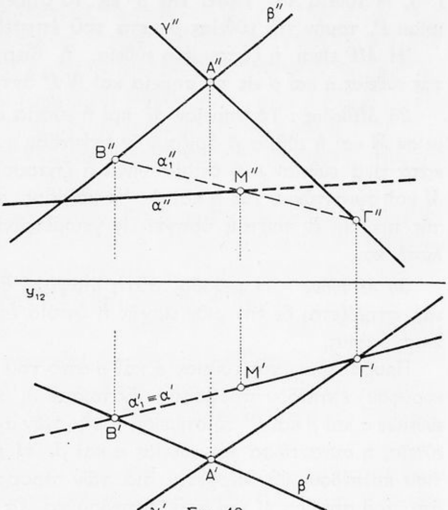
Σχ. 48

30. ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ ΤΟΥ.

Αἱ ὁρίζουσαι τὸ ἐπίπεδον εὐθεῖαι ἢ τέμνονται ἢ εἶναι παράλληλοι. Ἔστωσαν $\beta\,(\beta', \beta'')$ καὶ $\gamma\,(\gamma', \gamma'')$ αἱ ὁρίζουσαι τὸ ἐπίπεδον p εὐθεῖαι, τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον $A\,(A', A'')$ καὶ $\alpha\,(\alpha', \beta'')$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Ἐκλέγομεν ὡς βοηθητικὸν τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον p_1 τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας α (Σχ. XXII καὶ Σχ. 49). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὰς εὐθείας β καὶ γ εἰς τὰ $B\ (B', B'')$ καὶ $\Gamma\,(\Gamma', \Gamma'')$ καὶ συνεπῶς τὸ ἐπίπεδόν των κατὰ τὴν εὐθεῖαν $\alpha_1 \equiv B\Gamma$. Αἱ εὐθεῖαι α καὶ α_1 κείμεναι ἐπὶ τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου p_1 τέμνονται εἴς τι σημεῖον $M\,(M', M'')$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τῶν εὐθειῶν β, γ μετὰ τῆς εὐθείας α.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα ὅταν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι β καὶ γ εἶναι παράλληλοι.

Παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ σημείου M δὲν ἐγένετο χρῆσις τοῦ ἄξονος y_{12}. Εἰς πολλὰ προβλήματα τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας δὲν παρεμβαίνει ὁ ἄξων y_{12}. Τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἅς, εἰς τὸ θεωρούμενον πρόβλημα, δὲν λαμβάνουν μέρος αἱ ἀποστάσεις καὶ τὰ ὑψόμετρα τῶν σημείων τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὰ σχήματα τοῦ ὑπ' ὄψει προβλήματος.



Σχ. 49

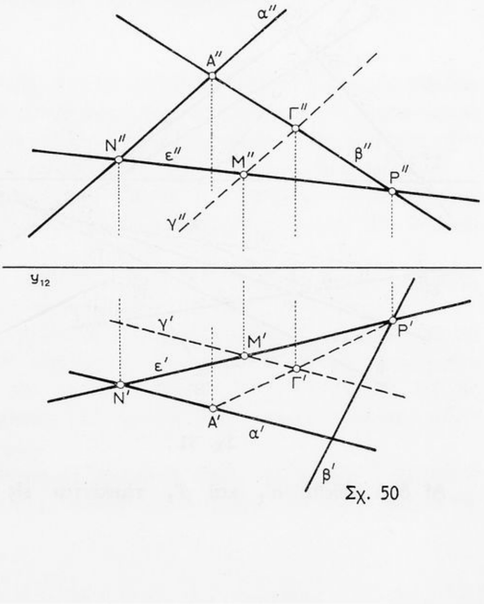
Τὰ εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους ἐξετασθέντα δύο προβλήματα, ἤτοι τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων καὶ τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, ἀποτελοῦν θεμελιώδη προβλήματα τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας, τῇ βοηθείᾳ δὲ αὐτῶν ἐπιλύεται πλῆθος προβλημάτων αὐτῆς.

Κατωτέρω ἐξετάζομεν δύο τοιαῦτα προβλήματα.

31. ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΑΝΤΩΣΑ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΟΥΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.

α') Δίδεται σημεῖον M (M', M'') καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α (α', α''), β (β', β''). Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ M εὐθεῖα συναντῶσα τὰς α καὶ β.

1η Μέθοδος : Τὸ σημεῖον M καὶ μία τῶν εὐθειῶν π.χ. ἡ α, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον p, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν εὐθεῖαν β εἴς τι σημεῖον P. Ἡ εὐθεῖα MP εἶναι ἡ ζητουμένη. Εἰς τὸ Σχ. 50 τὸ ἐπίπεδον p ὡρίσθη διὰ τῆς α καὶ τῆς διὰ τοῦ M παραλλήλου πρὸς αὐτήν, εὐθείας γ. Ἐν συνεχείᾳ ἤχθη τὸ πρόσθιον ἐπίπεδον τὸ διερ-



Σχ. 50

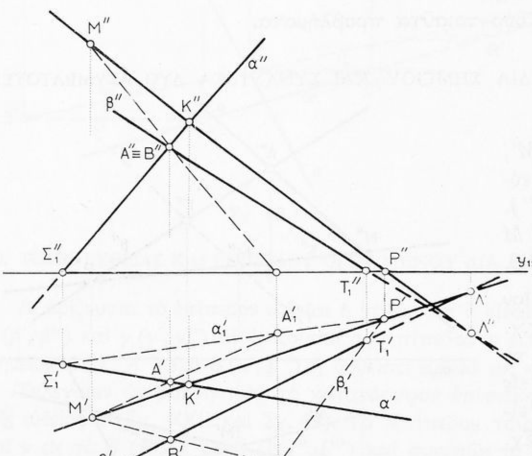
χόμενον διὰ τῆς β, τέμνον τὰς εὐθείας α καὶ γ εἰς τὰ σημεῖα A (A', A'') καὶ $\Gamma (\Gamma', \Gamma'')$. Ἡ εὐθεῖα $A'\Gamma'$ τέμνει τὴν β' εἰς τὸ σημεῖον P', πρώτην προβολὴν τοῦ σημείου P, τομὴν τῆς εὐθείας β μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $p \equiv (\alpha, \gamma)$.

Ἡ MP εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ M καὶ συναντῶσα τὰς εὐθείας α καὶ β εἰς τὰ σημεῖα καὶ N P ἀντιστοίχως.

2α Μέθοδος : Τὸ σημεῖον M καὶ ἡ εὐθεῖα α ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον p. Τὸ σημεῖον M καὶ ἡ εὐθεῖα β ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον q. Τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν μ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ M καὶ συναντῶσα τὰς α καὶ β. Ἡ μέθοδος αὕτη ἐμφανίζεται ὡς ἁπλουστέρα τῆς πρώτης ἐν τούτοις ὁδηγεῖ εἰς γεωμετρικὴν κατασκευήν, περισσότερον πολύπλοκον.

3η Μέθοδος : Ἡ μέθοδος αὕτη διαφέρει βασικῶς ἀπὸ τὰς δύο προηγουμένας, στηρίζεται δὲ ἐπὶ μιᾶς ἀρχῆς ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται εἰς τὰ προβλήματα τῆς Σκιαγραφίας.

Προβάλλομεν τὰς εὐθείας α καὶ β ἀπὸ τοῦ M ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου (ἢ τοῦ κατακορύφου) ἐπιπέδου προβολῆς. Ἔστωσαν α_1' καὶ β_1' αἱ ὁριζόντιοι προβολαὶ τῶν εὐθειῶν α καὶ β καὶ P' τὸ σημεῖον τομῆς τῶν α_1' καὶ β_1'. Ἡ MP' εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα, ἡ συναντῶσα τὰς εὐθείας α καὶ β. Ἡ προβολὴ α'_1 τῆς α ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, θὰ διέρχεται διὰ τῶν προβολῶν δύο τυχόντων σημείων της, ἀπὸ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1. Ὡς ἓν τῶν σημείων δύναται νὰ ληφθῇ τὸ πρῶτον ἴχνος τῆς εὐθείας α. Εἰς τὸ Σχ. 51 ἡ εὐθεῖα α'_1 διέρχεται διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους τῆς α καὶ διὰ τοῦ σημείου A_1', προβολῆς τοῦ τυχόντος σημείου A αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τοῦ πρώτου ἴχνους δηλαδὴ τῆς εὐθείας AM.



Σχ. 51

Ἡ εὐθεῖα β_1' διέρχεται διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους τῆς β καὶ διὰ τοῦ σημείου B_1', προβολῆς τοῦ τυχόντος σημείου B αὐτῆς, ἀπὸ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τοῦ πρώτου ἴχνους δηλαδὴ τῆς εὐθείας BM.

Αἱ δύο εὐθεῖαι α'_1 καὶ β'_1 τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον P'. Ἡ εὐθεῖα

MP ($M'P'$, $M''P''$), ἔνθα P'' ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ P, εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα. Ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὰς δοθείσας εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα K (K', K'') καὶ Λ (Λ', Λ'').

Ἐὰν εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα τὸ σημεῖον M εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τοῦ χώρου, ὁριζόμενον ὑπὸ μιᾶς διευθύνσεως φ, τὸ πρόβλημα τότε διατυποῦται ὡς ἑξῆς :

β) Δίδεται διεύθυνσις φ *καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι* α (α', α''), β (β', β''). *Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν* φ, *συναντῶσα τὰς* α *καὶ* β.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου ἐπιτυγχάνεται καθ' ὃν τρόπον καὶ τοῦ προηγουμένου.

1η Μέθοδος: Διὰ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας α ἄγεται εὐθεῖα γ, παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν φ. Αἱ εὐθεῖαι α καὶ γ ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον p, τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ τομὴ P μετὰ τῆς εὐθείας β. Ἡ εὐθεῖα MP εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ καὶ συναντᾶ τὰς εὐθείας α καὶ β.

2α Μέθοδος : Διὰ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας α ἄγεται εὐθεῖα γ_1 παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ. Διὰ τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας β ἄγεται εὐθεῖα γ_2 παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ. Ἡ εὐθεῖα μ κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ δύο ἐπίπεδα $p_1 \equiv (\alpha, \gamma_1)$ καὶ $p_2\ (\equiv \alpha, \gamma_2)$, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ καὶ συναντᾶ τὰς εὐθείας α καὶ β.

3η Μέθοδος : Προβάλλομεν τὰς εὐθείας α καὶ β, παραλλήλως πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ, ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἢ τοῦ κακακορύφου ἐπιπέδου καὶ ἔστω Σ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο τούτων προβολῶν. Ἡ ἐκ τοῦ σημείου Σ παράλληλος πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ, εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Β΄. Μετρικὰ προβλήματα

32. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ.

Ἔστωσαν A (A', A'') καὶ B (B', B'') τὰ δοθέντα σημεῖα. *Ἀπόστασιν* τῶν δύο τούτων σημείων καλοῦμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ μήκους AB, μετρουμένου διὰ τῆς μονάδος μετρήσεως μηκῶν. Ἐὰν δὲν ἀποβλέπωμεν εἰς τὴν μέτρησιν, τότε ἀπόστασιν τῶν σημείων A καὶ B καλοῦμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, π.χ. πρὸς τὸ ὁριζόντιον, ἡ προβολὴ $A'B'$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB, ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, ἡ κατασκευὴ τοῦ τμήματος AB ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς :

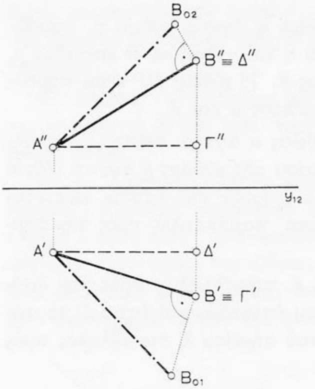
Θεωροῦμεν τὴν πρώτην προβολὴν $A'B'$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν AB, $A'B'$ φέρομεν ἐκ τοῦ σημείου A εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $A'B'$, τέμνουσαν τὴν BB' εἴς τι σημεῖον Γ (Γ', Γ''). Ἡ εὐθεῖα $A\Gamma$, ὡς ὁριζοντία, θὰ ἔχῃ πρώτην προβολὴν $A'\Gamma' \equiv A'B'$ καὶ δευτέραν προβολὴν $A''\Gamma''$ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Σχηματίζεται οὕτω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν πλευρὰ $A\Gamma$, ὡς παράλληλος πρὸς τὸ e_1, ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα $A'\Gamma'$, ἡ δὲ πλευρὰ $B\Gamma$

ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς διαφορᾶς τῶν ὑψομέτρων τῶν σημείων A καὶ B, μὲ τὸ τμῆμα δηλαδὴ $B''\Gamma''$. Εἰς τὸ Σχ. 52 κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον τοῦτο κατακεκλιμμένον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου. Ἐλήφθη $\Gamma'B_{01}=\Gamma''B''$. Ἡ ὑποτείνουσα $A'B_{01}$ τοῦ ὀρθογωνίου $A'\Gamma'B_{01}$, ἰσοῦται μὲ τὸ τμῆμα AB.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν μεταχειριζόμενοι τὴν δευτέραν ἀντὶ τῆς πρώτης προβολῆς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB.

Οὕτως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν προβολὴν $A''B''$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AB, $A''B''$, φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου A εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $A''B''$ τέμνουσαν τὴν BB'' εἴς τι σημεῖον Δ (Δ', Δ''), σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Delta$.



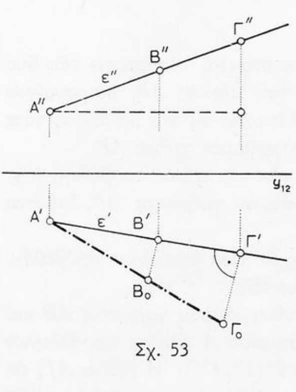
Σχ. 52

Εἰς τὸ Σχ. 52 τὸ τρίγωνον τοῦτο κατεσκευάσθη, εἶναι δὲ τὸ ὀρθογώνιον $A''\Delta''B_{02}$, ἔνθα ἐλήφθη $\overline{\Delta''B_{02}}=\overline{\Delta'B'}$ (διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων A καὶ B).

Ὅταν κατασκευάζωμεν τὸ τμῆμα $A'B_{01}$ ἢ τὸ ἴσον του $A''B_{02}$, λέγομεν ὅτι κατασκευάζομεν ἢ εὑρίσκομεν τὸ *ἀληθὲς μέγεθος* τοῦ τμήματος AB, τοῦ ὁποίου προβολαὶ εἶναι τὰ τμήματα $A'B'$ καὶ $A''B''$.

Τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα :

Δίδεται ἓν σημεῖον A (A', A'') καὶ μία ἡμιευθεῖα ε (ε', ε'') διερχομένη δι' αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον B (B', B'') αὐτῆς, τοιοῦτον ὥστε τὸ τμῆμα AB νὰ εἶναι δοθέν, λύεται ὡς ἑξῆς :



Σχ. 53

Λαμβάνεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας σημεῖον Γ (Γ', Γ'') καὶ κατασκευάζεται τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $A\Gamma$, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ $A'\Gamma_0$ (Σχ. 53). Ἐπὶ τῆς $A'\Gamma_0$ λαμβάνομεν σημεῖον B_0 τοιοῦτον ὥστε, τὸ τμῆμα AB_0 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δοθὲν τμῆμα AB. Ἐκ τοῦ B_0 φέρομεν τὴν κάθετον B_0B' ἐπὶ τὴν $A'\Gamma'$ καὶ ἐκ τοῦ B' εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον B''. Τὸ σημεῖον B (B', B'') εἶναι τὸ ζητούμενον.

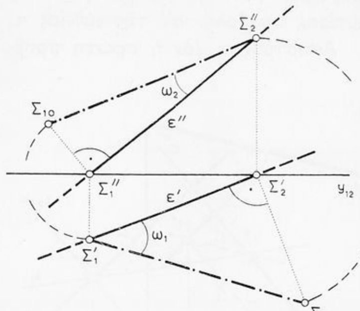
33. ΓΩΝΙΑΙ ΚΛΙΣΕΩΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου γνωρίζομεν ὅτι *γωνία* μιᾶς εὐθείας μὲ ἓν ἐπίπεδον καλεῖται ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Τὴν γωνίαν εὐθείας μὲ ἐπίπεδον ὀνομάζομεν καὶ *γωνίαν κλίσεως* τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Ἔστωσαν ε (ε', ε'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ω_1, ω_2 αἱ γωνίαι κλίσεως αὐτῆς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς.

Ἐὰν Σ_1 (Σ_1', Σ_1'') καὶ Σ_2 (Σ_2', Σ_2'') τὰ ἴχνη αὐτῆς, ἡ γωνία κλίσεως ω_1 θὰ εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ $\Sigma_1\Sigma_2$ μετὰ τῆς $\Sigma_1'\Sigma_2'$ πρώτης προβολῆς τῆς ε, δηλαδὴ ἡ ὀξεῖα γωνία τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Sigma_1\Sigma_2'\Sigma_2$. Τοῦ τριγώνου τούτου γνωρίζομεν τὰς καθέτους πλευρὰς $\Sigma_1\Sigma'_2 \equiv \Sigma_1'\Sigma_2'$ καὶ $\Sigma_2'\Sigma_2 \equiv \Sigma_2'\Sigma_2''$ καὶ ἑπομένως δυνάμεθα νὰ τὸ κατασκευάσωμεν.



Σχ. 54

Εἰς τὸ Σχ. 54 κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον τοῦτο, κατακεκλιμένον ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ἐλήφθη $\Sigma_2'\Sigma_{20} = \Sigma_2'\Sigma_2''$. Ἡ γωνία $\omega_1 \equiv \Sigma_2'\Sigma_1'\Sigma_{20}$ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς.

Εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα κατεσκευάσθη τὸ τρίγωνον $\Sigma_2\Sigma_1''\Sigma_1$ κατακεκλιμμένον ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου. Ἐλήφθη $\Sigma_1''\Sigma_{10} = \Sigma_1''\Sigma_1'$. Ἡ γωνία $\omega_2 \equiv \equiv \Sigma_1''\Sigma_2''\Sigma_{10}$ εἶναι ἡ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς.

34. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου γνωρίζομεν τὰ κάτωθι θεωρήματα:

α) Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας κειμένας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἢ παραλλήλους πρὸς αὐτό.

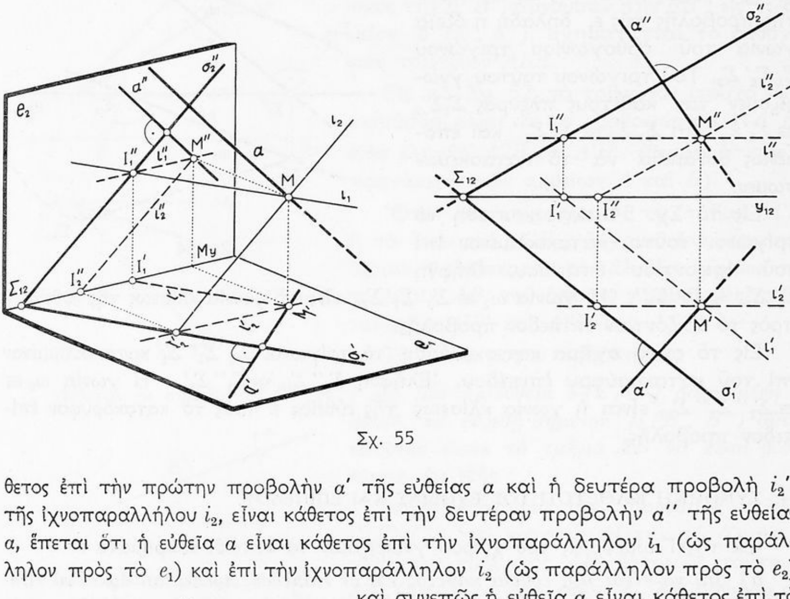
β) Διὰ νὰ εἶναι κάθετοι αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ ἐπιπέδου e, δύο καθέτων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν (συμβατῶν ἢ ἀσυμβάτων), πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία τουλάχιστον τούτων νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e.

Ἐκ τῶν δύο τούτων κριτηρίων προκύπτει διὰ τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν τὸ κριτήριον:

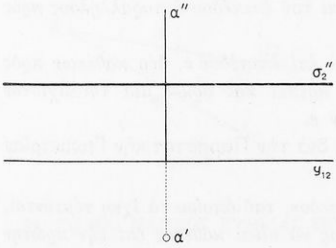
Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου τὰ ἴχνη τέμνονται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ πρώτη προβολὴ τῆς εὐθείας νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν μιᾶς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς εὐθείας νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν δευτέραν προβολὴν μιᾶς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστω $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$ τὸ ἐπίπεδον, $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ ἡ κάθετος ἐπὶ τοῦτο εὐθεῖα καὶ $M\,(M', M'')$ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν τὰς δύο ἰχνοπαραλλήλους τοῦ ἐπιπέδου p, τὰς i_1 καὶ i_2. Ἡ εὐθεῖα α εἶναι κάθετος πρὸς τὰς ἰχνοπαραλλήλους i_1 καὶ i_2. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ i_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1 καὶ ἡ i_2 παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2, ἕπεται ὅτι ἡ πρώτη προβολὴ i_1' τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_1, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν α' τῆς εὐθείας α καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ i_2'' τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_2 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν δευτέραν προβολὴν α'' τῆς εὐθείας α.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ πρώτη προβολὴ i_1' τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_1, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν α' τῆς εὐθείας α καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ i_2'' τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_2, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν δευτέραν προβολὴν α'' τῆς εὐθείας α, ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἰχνοπαράλληλον i_1 (ὡς παράλληλον πρὸς τὸ e_1) καὶ ἐπὶ τὴν ἰχνοπαράλληλον i_2 (ὡς παράλληλον πρὸς τὸ e_2) καὶ συνεπῶς ἡ εὐθεῖα α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $p\,(i_1, i_2)$. (Σχ. XIX καὶ Σχ. 55).



Σχ. 55



Σχ. 56

Πόρισμα.

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου τὰ ἴχνη τέμνονται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ὁμώνυμα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου.

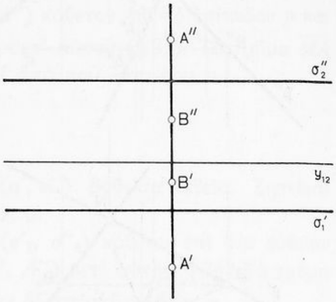
Ἐξαιρετέαι περιπτώσεις.

α') Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p εἶναι ὁριζόντιον ἢ μετωπικόν, ἡ συνθήκη καθετότητος εἶναι μόνον ἱκανή.

Πράγματι, ἂν τὸ ἐπίπεδον p εἶναι ὁριζόντιον, ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὸ εὐθεῖα $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ θὰ εἶναι κατακόρυφος, ὁπότε ἡ δευτέρα προβολὴ α'' αὐτῆς θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p, ἐνῷ ἡ πρώτη προβολὴ α' αὐτῆς θὰ εἶναι σημεῖον (Σχ. 56).

Ἀντίστοιχα ἰσχύουν ὅταν τὸ ἐπίπεδον p εἶναι μετωπικόν.

β') Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} ἡ συνθήκη καθετότητος εἶναι μόνον ἀναγκαία. Πράγματι, ἂν αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p, ἡ εὐθεῖα α εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν θὰ εἶναι ἐγκαρσία (ἐφόσον $\alpha' \equiv \alpha''$) καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὰς παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p (Σχ. 57). Ὅθεν, ἡ εὐθεῖα α δὲν εἶναι ἀναγκαίως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p, ἡ συνθήκη δηλαδὴ καθετότητος δὲν εἶναι ἱκανή.



Σχ. 57

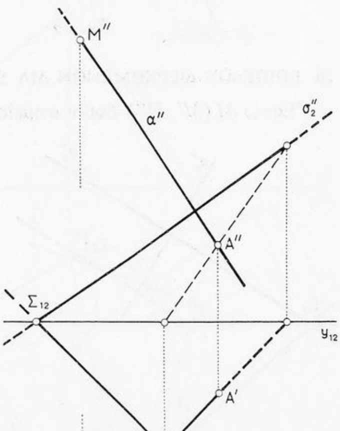
Εἶναι δηλαδὴ δυνατὸν αἱ προβολαὶ εὐθείας τινος α νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰ ἴχνη, ἑνὸς τοιούτου ἐπιπέδου, χωρὶς ἡ εὐθεῖα νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

35. ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

Ἔστω $M\,(M', M'')$ δοθὲν σημεῖον καὶ p δοθὲν ἐπίπεδον. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου M εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ἐπίπεδον p δίδεται διὰ τῶν ἰχνῶν του σ'_1 καὶ σ''_2, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ ἐπίπεδον p δίδεται διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν του $\beta(\beta', \beta'')$ καὶ $\gamma(\gamma', \gamma'')$.

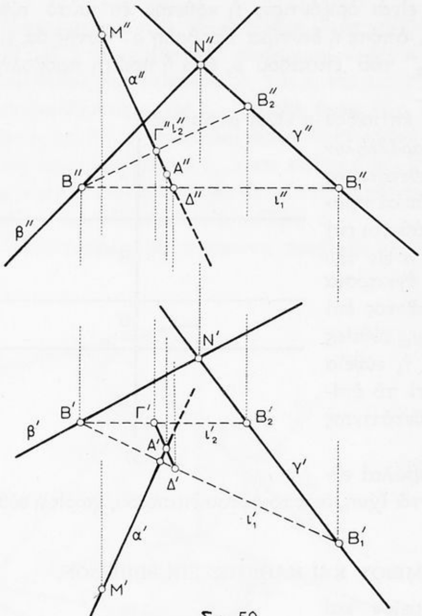
Α. Περίπτωσις : Ἐκ τῶν προβολῶν M' καὶ M'' τοῦ σημείου M φέρομεν δύο εὐθείας α' καὶ α'', καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰ ἴχνη σ'_1 καὶ σ''_2 τοῦ ἐπιπέδου p (Σχ. ΧΧ καὶ Σχ. 58). Ἡ εὐθεῖα $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p. Τὸ σημεῖον τομῆς $A\,(A', A'')$ τῆς εὐθείας α μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 29, α).

Β'. Περίπτωσις: Διά τινος σημείου $B(B', B'')$ τῆς εὐθείας β φέρομεν μίαν πρώτην καὶ μίαν δευτέραν ἰχνοπαράλληλον



Σχ. 58

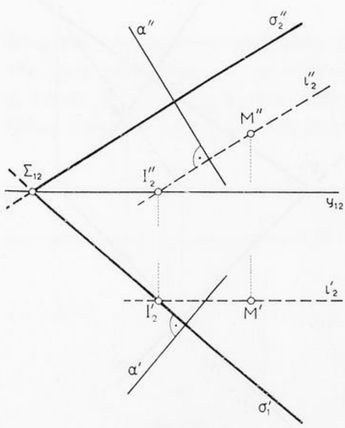
i_1 (i_1', i_1'') καὶ i_2 (i_2', i_2'') (Σχ. 59). Ἐκ τῶν προβολῶν M' καὶ M'' τοῦ σημείου M φέρομεν δύο εὐθείας α' καὶ α'', καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς i_1' καὶ i_2''. Ἡ εὐθεῖα α (α', α'') εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p. Τὸ σημεῖον τομῆς $A(A', A'')$ τῆς εὐθείας α μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, εὑρίσκεται κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 30).



Σχ. 59

36. ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΝ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΝ ΕΠΙ ΕΥΘΕΙΑΝ.

Ἔστω M (M', M'') δοθὲν σημεῖον καὶ α (α', α'') δοθεῖσα εὐθεῖα. Διὰ τοῦ σημείου M φέρομεν μίαν δευτέραν (πρώτην) ἰχνοπαράλληλον, τῆς ὁποίας ἡ δευτέρα (πρώτη) προβολὴ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν δευτέραν (πρώτην) προβολὴν α'' (α') τῆς εὐθείας α (Σχ. 60). Ἐκ τοῦ πρώτου ἴχνους I_2' (δευτέρου ἴχνους I_1'') τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης, φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην (δευτέραν) προβολὴν τῆς εὐθείας α, ἥτις εἶναι τὸ πρῶτον (δεύτερον) ἴχνος σ_1' (σ_2'') τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς Σ_{12} τοῦ πρώτου (δευτέρου) τούτου ἴχνους μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, φέρομεν τὸ δεύτερον (πρῶτον) ἴχνος σ_2'' (σ_1'), κάθετον ἐπὶ τὴν δευτέραν (πρώτην) προβολὴν α'' (α') τῆς εὐθείας α.



Σχ. 60

37. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἔστω $M\,(M', M'')$ δοθὲν σημεῖον καὶ p δοθὲν ἐπίπεδον. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p.

Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν εὐθεῖαν $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τομῆς της $A\,(A', A'')$ μετ᾽ αὐτοῦ (§ 35). Τὸ τμῆμα $\overline{MA}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p.

38. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Ἔστω $M\,(M', M'')$ δοθὲν σημεῖον καὶ $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ δοθεῖσα εὐθεῖα. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς εὐθείας α.

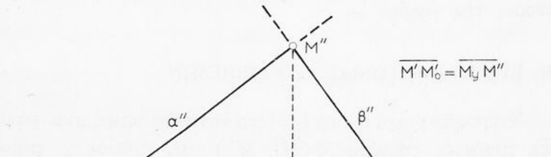
Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α καὶ εὑρίσκεται τὸ σημεῖον τομῆς του $A\,(A', A'')$ μετ᾽ αὐτῆς (§ 36). Τὸ τμῆμα $\overline{MA}$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς εὐθείας α.

39. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΤΕΜΝΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ.

Ἔστωσαν α (α', α'') καὶ β (β', β'') δύο τεμνόμεναι εἰς M (M', M'') εὐθεῖαι καὶ θ μία τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν.

Ἐὰν Σ_1 καὶ T_1 τὰ πρῶτα ἴχνη τῶν εὐθειῶν α καὶ β, πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνίας θ ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον $M\Sigma_1T_1$.

Ἐὰν ἐκ τοῦ M φέρωμεν τὴν MN κάθετον ἐπὶ τὴν Σ_1T_1, ἐπειδὴ ἡ MM' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς, (ἐπὶ τοῦ ὁποίου καὶ κεῖται ἡ Σ_1T_1), κατὰ τὸ θεώ-



Σχ. 61

ρημα τῶν τριῶν καθέτων, ἡ εὐθεῖα $M'N$ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\Sigma'_1\,T'_1 \equiv \equiv \Sigma_1\,T_1$. Τὸ τμῆμα ἑπομένως MN εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ $\overline{MM'} \equiv \overline{M_y M''}$ καὶ $\overline{M'N}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τμῆμα $\overline{M'N}$ εἶναι γνωστόν, εἶναι γνωστὴ καὶ ἡ ὑποτείνουσα $\overline{MN}$, ἡ ὁποία εἶναι συγχρόνως ὕψος τοῦ τριγώνου $M\Sigma_1T_1$. Τὸ τρίγωνον, συνεπῶς τοῦτο εἶναι κατασκευάσιμον, ἐφόσον γνωρίζομεν τὴν βάσιν του $\overline{\Sigma_1T_1}$, τὸν πόδα N τοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς M ὕψους καὶ τὸ ὕψος $\overline{MN}$. Εἰς τὸ Σχ. 61 ἤχθη ἐκ τοῦ M' κάθετος ἐπὶ τὴν $\Sigma_1'T_1'$, τέμνουσα ταύτην εἰς τὸ σημεῖον N, κατεσκευάσθη τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $M'NM_0'$, μὲ καθέτους πλευρὰς $\overline{M'N}$ καὶ $\overline{M'M_0'} = \overline{M_yM''}$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $\overline{M'N}$ λαμβάνεται σημεῖον M_0 τοιοῦτον ὥστε $\overline{NM_0} = \overline{NM_0'}$. Τὸ τρίγωνον $M_0\Sigma_1'T_1'$ ἰσοῦται μὲ τὸ ζητούμενον τρίγωνον $M\Sigma_1T_1$, ὅθεν ἡ γωνία $\Sigma'_1M_0T'_1$ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία θ.

40. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἔστω $a\,(a', a'')$ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ p δοθὲν ἐπίπεδον. Ἐὰν ἐκ τυχόντος σημείου M τῆς εὐθείας a ἀχθῇ εὐθεῖα $u\;(u',\; u'')$ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ γωνία θ τῶν εὐθειῶν a καὶ u εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ω τῆς a μὲ τὸ ἐπίπεδον p. Κατασκευάζοντες λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 39) τὴν γωνίαν θὰ εὑρίσκομεν τὴν γωνίαν ω.

41. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Ἔστωσαν p_1 καὶ p_2 τὰ δοθέντα ἐπίπεδα τεμνόμενα κατὰ τὴν εὐθεῖαν $\gamma(\gamma',\gamma'')$. Ἐκ τυχόντος σημείου $M\,(M',\; M'')$ τῆς εὐθείας γ φέρομεν καθέτους $\alpha(\alpha',\; \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2 ἀντιστοίχως. Ἡ γωνία ω τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας θ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, ἥτις κατασκευάζεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω (§ 39).

42. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

66. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον (πρόβλημα ἀόριστον).

67. Δώσατε τὸ κριτήριον διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.

68. Διὰ δοθέντος σημείου $M\,(M',\; M'')$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$, συναντῶσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν $a\,(a', a'')$.

69. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων $p_0\;(\sigma_{10}',\; \sigma_{20}'')$, $p\;(\sigma_1' \equiv \sigma_{20}'',\; \sigma_2'' \equiv \equiv \sigma_{10}')$.

70. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ συμπτώσεως.

71. Δίδεται σημεῖον $M\,(M',\; M'')$ καὶ εὐθεῖα $a\,(a',\; a'')$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῆς εὐθείας a μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου M καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας ἢ συμπτώσεως.

72. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα συναντῶσα τρεῖς δοθείσας εὐθείας α, β, γ ἀνὰ δύο ἀσυμβάτους, εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, οὕτως ὥστε $AB = \lambda \cdot B\Gamma$, ἔνθα λ δοθεὶς ἀριθμός.

73. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον.

74. Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν ἰχνῶν τῆς μιᾶς ἐπὶ τὰς ὁμωνύμους προβολὰς τῆς ἄλλης, νὰ συναντῶνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12}.

75. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι α καὶ β. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς α καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν β.

76. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον τοῦ ἄξονος y_{12} δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

77. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις μεταξὺ τοῦ ἄξονος y_{12} καὶ δοθείσης εὐθείας α (α', α'').

78. Εὑρεῖν τὴν ἀπόστασιν δύο δοθέντων παραλλήλων ἐπιπέδων.

79. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι κλίσεως δοθέντος διὰ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου.

80. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ δεύτερον (πρῶτον) ἴχνος ἐπιπέδου, ὅταν δοθῇ τὸ πρῶτον (δεύτερον) καὶ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ e_1 ἢ πρὸς τὸ e_2.

81. Μία ὁριζοντία εὐθεῖα σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y_{12} γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ ὁμοίως μία μετωπικὴ εὐθεῖα σχηματίζει μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος y_{12} γωνίαν $\frac{\pi}{4}$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τῶν δύο τούτων εὐθειῶν.

82. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει μία εὐθεῖα μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, εἶναι μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

83. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας κλίσεως. Διερεύνησις.

84. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς γωνίας τῶν ἰχνῶν ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

85. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει δοθὲν ἐπίπεδον p (σ'_1, σ''_2) μὲ τὸν ἄξονα y_{12}

86. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, ἴσας γωνίας κλίσεως.

87. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς γωνίας κλίσεως ἴσας πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν.

88. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει ἓν ἐπίπεδον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, περιλαμβάνεται μεταξὺ μιᾶς καὶ δύο ὀρθῶν.

89. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς δοθείσας γωνίας κλίσεως. Διερεύνησις.

90. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς δοθεῖσαν γωνίαν κλίσεως.

91. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς ἰσοῦται μὲ δοθὲν τμῆμα.

92. Δίδεται ἐπίπεδον p καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐκτὸς αὐτοῦ κείμενα. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p τοιοῦτον ὥστε, ἡ τεθλασμένη γραμμὴ AMB νὰ ἔχῃ ἐλάχιστον μῆκος.

93. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι κλίσεως δοθείσης εὐθείας πρὸς τὰ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ συμπτώσεως.

94. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως δοθείσας γωνίας. Διερεύνησις.

95. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τῶν ἐπιπέδων συμμετρίας καὶ συμπτώσεως δοθείσας γωνίας. Διερεύνησις.

96. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον σχηματίζον μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας δοθεῖσαν γωνίαν.

97. Δίδεται κύκλος (K) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας, ὁριζόμενος διὰ τῶν συντεταγμένων τοῦ κέντρου του καὶ τῆς ἀκτῖνος του, καὶ σημεῖον O (O', O'') τοῦ χώρου μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου O εὐθεῖα συναντῶσα τὸν κύκλον (K) καὶ σχηματίζουσα δοθεῖσαν γωνίαν μετὰ τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Συστηματικαὶ μέθοδοι διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων

43. ΓΕΝΙΚΑ

Τὰ προβλήματα τὰ ὁποῖα ἐξετάζονται εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν εἶναι, ὅπως εἴπομεν, δύο εἰδῶν : προβλήματα *γραμμικὰ* καὶ προβλήματα *μετρικά*. Ἡ ἐπίλυσις τόσον τῶν γραμμικῶν ὅσον καὶ ἰδιαιτέρως τῶν μετρικῶν προβλημάτων εἶναι ἁπλουστέρα, ὁσάκις τὰ γεωμετρικὰ σχήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται, ἔχουν ἰδιάζουσαν θέσιν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς. Οὕτως, ἐπὶ παραδείγματι, ἡ ἀπόστασις δύο σημείων ἰσοῦται πρὸς τὴν προβολήν της, ὅταν ἡ ἑνοῦσα τὰ σημεῖα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς, ὁμοίως ἡ γωνία δύο εὐθειῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν προβολήν της, ὅταν τὸ ἐπίπεδόν της εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς καὶ γενικῶς ἓν ἐπίπεδον σχῆμα ἰσοῦται πρὸς τὴν προβολήν του, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς προβολῆς.

Διὰ ν' ἁπλουστεύσωμεν λοιπὸν τὴν λύσιν ἑνὸς τιθεμένου δι' ἓν σχῆμα προβλήματος, ὅπως ἐπίσης διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν μεγαλυτέραν ἐκφραστικότητα εἰς τὴν παράστασιν ἑνὸς σχήματος, ἐὰν τὸ σχῆμα τοῦτο ἔχῃ τυχοῦσαν θέσιν ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, εἶναι ἐνδεδειγμένον νὰ καταφύγωμεν εἰς ἕνα ἐκ τῶν ἀκολούθων τρόπων, ἵνα φέρωμεν τὸ σχῆμα εἰς ἰδιάζουσαν θέσιν, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς του.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται κατὰ δύο μεθόδους :

α) Διὰ τῆς μεθόδου τῆς *ἀλλαγῆς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς*, κατὰ τὴν ὁποίαν τηροῦμεν τὸ σχῆμα ἀκίνητον καὶ ἀλλάσσομεν τὰ ἐπίπεδα προβολῆς.

β) Διὰ τῆς μεθόδου τῆς *περιστροφῆς*, κατὰ τὴν ὁποίαν τηροῦμεν τὰ ἐπίπεδα προβολῆς καὶ περιστρέφομεν τὸ σχῆμα.

Ἡ μέθοδος τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς ἀναφέρεται ὑπὸ τοῦ *A. Bosse*, εἰς τὸ ὑπ' αὐτοῦ ἐκδοθὲν ἐν ἔτει 1643 σύγγραμμα «*La Pratique du trait à preuves de M. Desargues...*». Ἀντιστοιχεῖ δὲ αὕτη εἰς τὴν ἐν τῇ Ἀναλυτικῇ Γεωμετρίᾳ μέθοδον τῆς ἀλλαγῆς τοῦ συστήματος τῶν συντεταγμένων. Τὴν μέθοδον ταύτην τοῦ *G. Desargues* ἀναφέρει ἐπίσης χωρὶς καὶ νὰ τὴν δέχεται, ὁ *Frezier*. Ἡ πλήρης ὅμως ἀνάπτυξις καὶ ἡ συστηματικὴ ἐπεξεργασία αὐτῆς, ὀφείλεται εἰς τὸν *Th. Olivier*, μαθητὴν τοῦ *G. Monge*.

Ὁ *Th. Olivier* εἰσήγαγεν καὶ ἀνέπτυξεν ἐπίσης καὶ τὴν μέθοδον τῆς περιστροφῆς. Τὴν μέθοδον τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, δὲν ἀπεδέχθησαν, ὡς γενικὴν μέθοδον διὰ τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν, πολλοὶ συγγραφεῖς ἐξ ἄλλων χωρῶν, ἀλλὰ καὶ Γάλλοι, ὅπως ὁ *Leroy*, ὁ *I. de la Gournerie* κ.ἄ., ἀκόμη δὲ καὶ ὁ *G. Monge*, ὁ ὁποῖος εἶχεν ἀσφαλῶς ὑπ' ὄψει του τὰ ἔργα τῶν *Desargues* καὶ *Frezier*. Οἱ συγγραφεῖς οὗτοι ἰσχυρίζονται ὅτι δὲν εἶναι παραδεκτὸν νὰ ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος αὕτη εἰς πᾶν, ἐκ τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν πρᾶξιν, πρόβλημα τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας. Καὶ τοῦτο διότι, ἐὰν ἐπὶ παραδείγματι πρόκειται νὰ ἐπιλύσωμεν ἓν πρόβλημα ἀναφερόμενον εἰς τὴν κλίμακα μιᾶς οἰκοδομῆς, δὲν εἶναι νοητὸν νὰ δεχθῶμεν ἀλλαγὴν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς, καθόσον εἶναι ἀδιανόητον νὰ συλλογιζόμεθα ἐπὶ σχεδίου μιᾶς κλίμακος, τῆς ὁποίας οἱ βαθμῖδες εἶναι κεκλιμέναι ὡς πρὸς τὸν ὁρίζοντα.

Διὰ προβλήματα ἀφορῶντα εἰς τὴν πρᾶξιν, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν μέθοδον ταύτην, μόνον ἐφόσον αἱ δύο νέαι προβολαὶ τοῦ σχήματος δὲν ἀλλοιώνουν τὸν πραγματικὸν χαρακτῆρα αὐτοῦ. Οὕτως, ἐὰν τὸ πρόβλημα ἀφορᾷ εἰς ἕνα οἰκίσκον, δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς καὶ ὄχι τὸ ὁριζόντιον.

Ὅταν ὅμως πρόκειται δι' ἓν πρόβλημα, τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ εἰς ἀφῃρημένα σχήματα, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόζωμεν τὴν μέθοδον ἀδιαφοροῦντες ὡς πρὸς τὴν ὀνομασίαν ὁριζόντιον ἢ κατακόρυφον, διὰ τὰ εἰσαγόμενα νέα ἐπίπεδα προβολῆς. Ἂν καὶ εἶναι γενικῶς παραδεδεγμένον ὅτι τόσον ἡ μέθοδος τῆς ἀλλαγῆς, ὅσον καὶ ἐκείνη τῆς περιστροφῆς, καταλλήλως ἐφαρμοζόμεναι εἰς τὸ ἐξεταζόμενον σχῆμα, ἁπλοποιοῦν τὸ ἀφορῶν εἰς αὐτὸ πρόβλημα, ἐν τούτοις πολλάκις εἶναι τοσαῦται αἱ δευτερεύουσαι κατασκευαὶ αἱ ἀπαιτούμεναι διὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἐν λόγῳ μεθόδων, ὥστε νὰ μὴ ἐνδείκνυται ἡ χρησιμοποίησίς των.

Ἐξαρτᾶται συνεπῶς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος καὶ τοῦ σχήματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀφορᾷ, ἡ ἐκλογὴ μιᾶς ἐκ τῶν δύο γενικῶν τούτων μεθόδων ἢ μιᾶς ἄλλης προσιδιαζούσης πρὸς τὸ ὑπ' ὄψει πρόβλημα.

Ὑπάρχει ἀκόμη καὶ ἡ καλουμένη μέθοδος τῆς κατακλίσεως, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται ὁσάκις θέλωμεν νὰ ἔχωμεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος ἑνὸς ἐπιπέδου γεωμετρικοῦ σχήματος (F), ὁριζομένου διὰ τῶν δύο προβολῶν του (F') καὶ (F''). Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται ἐπίσης καὶ ἐπὶ σχημάτων (Σ) τοῦ χώρου, ὁσάκις τὰ σχήματα ταῦτα ἔχουν μίαν ἐπίπεδον ἕδραν (F) καὶ συμβαίνει ὥστε ἂν κατακλίνωμεν τὴν ἕδραν (F) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἢ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, τὸ σχῆμα (Σ) νὰ λαμβάνῃ, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, ἰδιάζουσαν τινὰ θέσιν διευκολύνουσαν τὴν διερεύνησιν ἢ τὴν διαπίστωσιν τῶν ἐν τῷ σχήματι ἢ μετὰ τοῦ σχήματος (Σ), ὑφισταμένων γεωμετρικῶν ἰδιοτήτων ἢ ἁπλοποιοῦσαν τὴν ἐπίλυσιν προτεινομένων προβλημάτων.

Ἀναπτύσσω κατωτέρω κάπως ἐκτενέστερον τὰς τρεῖς ταύτας μεθόδους, διότι θεωρῶ ἐν γένει ἰδιαιτέρως ὠφέλιμον καὶ ἀπαραίτητον, τὴν ἐξοικείωσιν τοῦ μαθητοῦ πρὸς τὰς γενικὰς μεθόδους ἑκάστης Ἐπιστήμης, ὡς μόνας ἱκανὰς νὰ προαγάγουν τὸν νοῦν του εἰς βαθυτέραν κατανόησιν τῆς οὐσίας τῆς Ἐπιστήμης καὶ εἰς εὐχερεστέραν λύσιν πληθύος προβλημάτων, ἐνῶ ἀντιθέτως αἱ εἰδικαὶ κατὰ περίπτωσιν μέθοδοι, ὁδηγοῦν εἰς ἕνα φόρτον ἀπομνημονευομένων γνώσεων, ἀνασχετικῶν τῆς διαυγείας τοῦ νοῦ καὶ τῆς δημιουργικῆς ἀποδόσεως.

Α. Ἡ μέθοδος τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς

44. ΑΛΛΑΓΗ ΤΟΥ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΥ Ἢ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Τὸ τιθέμενον πρόβλημα δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο προβολαὶ γεωμετρικοῦ σχήματος (Σ),νὰ εὑρεθοῦν αἱ νέαι προβολαὶ αὐτοῦ, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ἐπιπέδων προβολῆς, διὰ τρίτου καθέτου ἐπὶ τὸ ἄλλο.

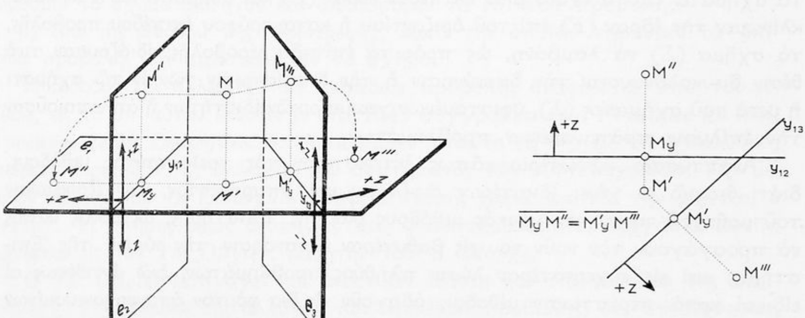
Ἔστωσαν (F_1) καὶ (F_2) αἱ προβολαὶ σχήματος (Σ) ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς e_1 καὶ e_2 καὶ (F_3) ἡ προβολὴ τοῦ (Σ) ἐπὶ ἑνὸς τρίτου ἐπιπέδου e_3 καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_1.

Τὸ σχῆμα (Σ) δύναται νὰ ὁρισθῇ εἴτε διὰ τοῦ ζεύγους (F_1), (F_2) εἴτε διὰ τοῦ ζεύγους (F_1), (F_3). Ἐὰν πρὸς καθορισμὸν τοῦ σχήματος (Σ) ληφθῇ τὸ ζεῦγος (F_1), (F_3) ἀντὶ τοῦ ζεύγους (F_1), (F_2), λέγομεν ὅτι ἐγένετο ἀλλαγὴ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_2. Τὸ σχῆμα (Σ) θὰ ἀναφέρεται τώρα εἰς τὸ σύστημα ἐπιπέδων προβολῆς (e_1, e_3).

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 εἰσαγάγωμεν ἐπίπεδον e_4 κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_2 καὶ εἶναι (F_4) ἡ προβολὴ τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τοῦ νέου τούτου ἐπιπέδου, πρὸς καθορισμὸν τοῦ (Σ) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ ζεῦγος (F_2), (F_4) ὁπότε τὸ σχῆμα (Σ) θὰ ἀναφέρεται εἰς τὸ σύστημα (e_2, e_4).

Ἀρκεῖ νὰ μελετήσωμεν τὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι διατηροῦνται κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐπιπέδων προβολῆς (e_1, e_2) εἰς τὸ σύστημα (e_1, e_3), διὰ νὰ ἔχωμεν τὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι διατηροῦνται κατὰ τὴν μετάβασιν ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐπιπέδων προβολῆς (e_1, e_2) εἰς τὸ σύστημα (e_2, e_4), ἀλλάσσοντες τὰ ὀνόματα τῶν ἐπιπέδων προβολῆς. Θὰ περιορισθῶμεν συνεπῶς εἰς τὸ νὰ μελετήσωμεν τὴν ἀλλαγὴν τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς καὶ μάλιστα εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ σχῆμα (Σ) εἶναι σημεῖον, εὐθεῖα ἢ ἐπίπεδον.

α') **Σημεῖον.** Ἔστω $M\,(M', M'')$ τὸ σημεῖον, y_{13} ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν ἐπιπέδων e_1 καὶ e_3 καὶ M''' ἡ τρίτη προβολὴ τοῦ σημείου M.



Σχ. 62

Ἐπειδὴ ὁ ἄξων τῶν z εἰς τὸ νέον σύστημα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν z τοῦ παλαιοῦ, δυνάμεθα νὰ τὸν προσανατολίσωμεν κατὰ τὴν αὐτὴν μὲ ἐκεῖνον ἔννοιαν. Εἶναι προφανές, ἐξ ἄλλου, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ M''' ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{13} εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ M'' ἀπὸ τοῦ ἄξονος y_{12}, τὸ ὑψόμετρον δηλαδὴ τοῦ M (Σχ. 62).

Ἐκ τούτου προκύπτει ὁ κανών :

Πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου ἔχει εἰς ἀμφότερα τὰ συστήματα τὴν αὐτὴν πρώτην προβολὴν καὶ τὸ αὐτὸ ὑψόμετρον.

Ἡ κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου e_2, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 διὰ περιστροφῆς του περὶ τὸν ἄξονα y_{13} δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο ἔννοιας, ἐκλέγομεν συνήθως ἐκείνην ἥτις ἐφαρμοζομένη θὰ δώσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος σχῆμα (F'''), μὴ ἔχον κοινὰ τμήματα μετὰ τοῦ σχήματος (F').

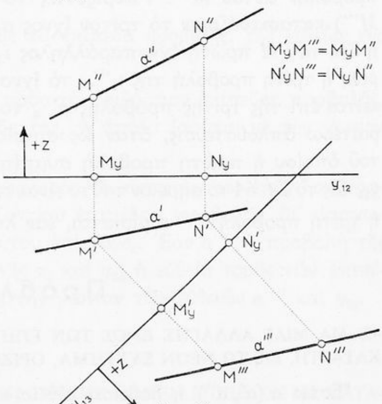
Οὕτως, εἰς τὸ Σχ. 62 δεξιὰ ἐλήφθη τὸ $+z$ τοῦ νέου συστήματος, τοιοῦτον ὥστε τὸ M''' νὰ μὴ κεῖται μετὰ τοῦ M', ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἡμιεπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ ἄξονος y_{13}.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ σημείου M''' ἐπιτυγχάνεται, ἂν ἀχθῇ ἐκ τοῦ σημείου M' κάθετος ἐπὶ τὸν νέον ἄξονα y_{12} καὶ ληφθῇ $\overline{M'_y M'''} = \overline{M_y M''}$.

Τὸ σημεῖον $M\,(M', M'')$ θὰ ἔχῃ προβολὰς εἰς τὸ νέον σύστημα $(e_1,\ e_3)$ τὰς M', M'''.

β') **Εὐθεῖα.** Ἔστω $a\,(a', a'')$ ἡ εὐθεῖα καὶ y_{13} ὁ ἄξων τοῦ νέου συστήματος ἐπιπέδων προβολῆς (Σχ. 63). Λαμβάνομεν δύο σημεῖα αὐτῆς π.χ. τὰ $M\,(M', M'')$ καὶ $N\,(N', N'')$ καὶ εὑρίσκομεν τὰς τρίτας προβολὰς αὐτῶν M''' καὶ N'''.

Ἡ εὐθεῖα $a''' \equiv M'''N'''$ εἶναι ἡ τρίτη προβολὴ τῆς εὐθείας a.

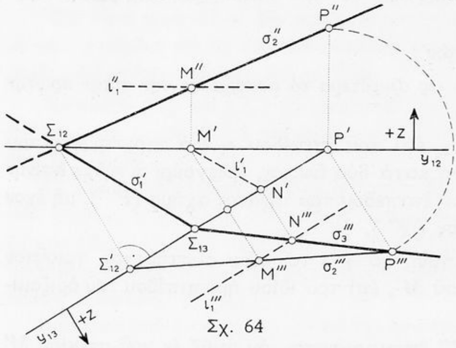


Σχ. 63

γ') **Ἐπίπεδον**. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p δίδεται διὰ δύο εὐθειῶν του a (a', a'') καὶ β (β', β''), εὑρίσκομεν τὰς τρίτας προβολὰς αὐτῶν a''' καὶ β''', ὁπότε τὸ ἐπίπεδον p εἰς τὸ σύστημα προβολῆς $(e_1,\ e_3)$, ὁρίζεται διὰ τῶν εὐθειῶν a (a', a''') καὶ β (β', β''').

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον δίδεται διὰ τῶν ἰχνῶν του σ_1 $(\sigma_1', \sigma_1'' \equiv y_{12})$ καὶ σ_2 $(\sigma_2' \equiv y_{12}, \sigma_2'')$, ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Ἐν προκειμένῳ ὅμως ἡ τρίτη προβολὴ σ_1''' τοῦ ἴχνους σ_1 συμπίπτει μετὰ τοῦ ἄξονος y_{13}, ὁρίζεται ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον εἰς τὸ σύστημα προβολῆς $(e_1,\ e_3)$ διὰ τῶν δύο εὐθειῶν σ_1 $(\sigma_1', \sigma_1''' \equiv y_{13})$ καὶ $\sigma_2(\sigma_2' \equiv y_{12}, \sigma_2''')$

(Σχ. 64). Ἐκ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν, ἡ σ_1 εἶναι ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1 (ἀφοῦ ἡ τρίτη προβολὴ τῆς σ_1 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{13}), ἐνῶ ἡ σ_2 δὲν εἶναι ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p (ἀφοῦ ἡ πρώτη προβολὴ $\sigma_2' \equiv y_{12}$ τῆς σ_2, δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{13}). Τοῦ οὕτω πως ὁριζομένου ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰ ἴχνη εἰς τὸ νέον σύστημα e_1, e_3.



Σχ. 64

Ἐὰν καλέσωμεν σ_3 ($\sigma_3' \equiv y_{13}$, σ_3''') τὸ τρίτον ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p, προκύπτει τὸ συμπέρασμα:

Ἡ τρίτη προβολὴ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2 ἐπιπέδου p δὲν συμπίπτει, ἐν γένει, μετὰ τῆς τρίτης προβολῆς τοῦ τρίτου ἴχνους σ_3 αὐτοῦ. Ἡ σύμπτωσις πραγματοποιεῖται ὅταν ἡ προβολὴ σ'_1 τοῦ πρώτου ἴχνους εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{13}.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ ἴχνους σ_3 τοῦ ἐπιπέδου p, γίνεται ὡς ἑξῆς:

Θεωροῦμεν ἓν σημεῖον M (M', M'') τοῦ ἐπιπέδου e, χάριν ἁπλότητος τὸ M λαμβάνεται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2 ($\sigma'_2 \equiv y_{12}$, σ_2'') καὶ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην προβολὴν αὐτοῦ M'''. Γνωρίζοντες τὸ ἴχνος σ_1 (σ'_1, y_{13}) καὶ ἓν σημεῖον M (M', M''') κατασκευάζομεν τὸ τρίτον ἴχνος σ_3''' τοῦ ἐπιπέδου p. Εἰς τὸ σχῆμα ἤχθη ἡ διὰ τοῦ M πρώτη ἰχνοπαράλληλος ι_1 (ι'_1, ι''_1) εἰς τὸ σύστημα (e_1, e_2) καὶ εὑρέθη ἡ τρίτη προβολή της ι_1''', τὸ ἴχνος τῆς ὁποίας N''', ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_3, κεῖται ἐπὶ τῆς τρίτης προβολῆς σ'''_3 τοῦ τρίτου ἴχνους σ_3. Ἐπιτυγχάνεται περαιτέρω ἁπλούστευσις, ὅταν ὡς σημεῖον M ληφθῇ τὸ σημεῖον τοῦ ἴχνους σ_2, τοῦ ὁποίου ἡ πρώτη προβολὴ συμπίπτει μετὰ τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων y_{12} καὶ y_{13}. Εἰς τὸ Σχ. 64 τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ σημεῖον P (P', P''). Τοῦ σημείου τούτου ἡ τρίτη προβολὴ P''' εὑρίσκεται, ἐὰν ληφθῇ $\overline{P'P'''} = \overline{P'P''}$.

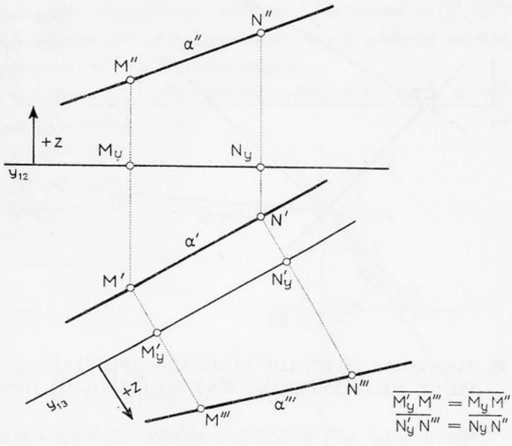
Προβλήματα

45. ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΕΝΟΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ, ΔΟΘΕΙΣΑ ΕΥΘΕΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ, ΕΙΣ ΤΟ ΝΕΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ, ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ Ἢ ΜΕΤΩΠΙΚΗ.

Ἔστω α (α', α'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα κατέχουσα τυχοῦσαν θέσιν, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς. Εἰσάγομεν ἓν ἐπίπεδον e_3 κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 καὶ παράλληλον (ἢ διερχόμενον) πρὸς τὴν εὐθεῖαν α. Ὁ νέος ἄξων y_{13} θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν α' (Σχ. 65). Εὑρίσκομεν τὴν τρίτην προβολὴν α''' τῆς εὐθείας α, ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα (e_1, e_3). Ἡ εὐθεῖα α (α', α''') εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_3 καὶ εἶναι συνεπῶς μία μετωπικὴ εὐθεῖα, ἐφόσον τὸ e_1 ἐξακολουθῇ νὰ θεωρῆται ὁριζόντιον.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον e_3 ληφθῇ κάθετον ἐπὶ τὸ e_2 καὶ παράλληλον (ἢ διερχόμενον) πρὸς τὴν a καὶ θεωρηθῇ ὡς ὁριζόντιον, τότε ἡ εὐθεῖα a εἰς τὸ νέον σύστημα προβολῆς (e_2, e_3) θὰ εἶναι ὁριζοντία.

Ἐφαρμογαί : Α) Εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων. Ἐὰν M (M', M'') καὶ N (N', N'') εἶναι δύο σημεῖα, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν, εἰσάγομεν ἓν τρίτον ἐπίπεδον προβολῆς κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 (e_2) καὶ παράλληλον ἢ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας $a \equiv MN$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν τρίτην προβολὴν αὐτῆς $a''' \equiv M'''N'''$. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $M'''N'''$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τῶν δύο σημείων M καὶ N (Σχ. 65).



Σχ. 65

Β) Εὕρεσις τῶν γωνιῶν κλίσεως πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, τῆς εὐθείας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ δύο σημείων M καὶ N.

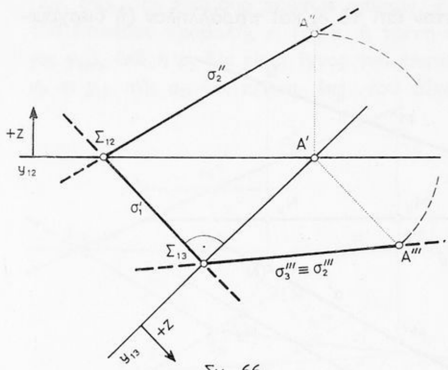
Ἡ γωνία κλίσεως ω_1 εὐθείας a ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον προβολῆς, εἶναι ἡ γωνία τῆς a μετὰ τῆς προβολῆς της, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν τῆς a''' μετὰ τοῦ ἄξονος y_{13} (Σχ. 65).

Ἡ γωνία κλίσεως ω_2 τῆς εὐθείας α ὡς πρὸς τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς, εὑρίσκεται δι' ἀλλαγῆς τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς, δι' εἰσαγωγῆς δηλαδὴ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἔστω e_4 καθέτου ἐπὶ τὸ e_2. Ἐὰν a'''' ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας a ἐπὶ τοῦ νέου ἐπιπέδου προβολῆς e_4 καὶ y_{24} ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν ἐπιπέδων e_2, e_4, ἡ γωνία ω_2 θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν a'''' καὶ y_{24}.

46. ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ, ΔΟΘΕΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ, ΕΙΣ ΤΟ ΝΕΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ, ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΝ Ἢ ΠΡΟΣΘΙΟΝ.

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Εἰσάγομεν ἓν ἐπίπεδον e_2 κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 καὶ ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_1. Ὁ νέος ἄξων y_{13} θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν σ'_1 (Σχ. 66). Εὑρίσκομεν τὸ τρίτον ἴχνος σ_3''' τοῦ ἐπιπέδου p, ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα (e_1, e_3). Τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_3''') εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e_3 τοῦ συστήματος (e_1, e_3) καὶ εἶναι συνεπῶς ἓν πρόσθιον ἐπίπεδον, ἐφόσον τὸ e_1 ἐξακολουθῇ νὰ θεωρῆται ὁριζόντιον.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον e_3 ληφθῇ κάθετον ἐπὶ τὸ e_2 καὶ ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_2 καὶ θεωρηθῇ ὡς ὁριζόντιον, τότε τὸ ἐπίπεδον p εἰς τὸ νέον σύστημα προβολῆς (e_2, e_3) θὰ εἶναι κατακόρυφον.

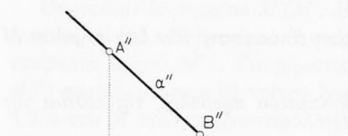


Σχ. 66

47. ΔΙΑ ΔΥΟ ΑΛΛΑΓΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ, ΔΟΘΕΙΣΑ ΕΥΘΕΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ ΕΙΣ ΤΟ ΝΕΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ, ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΣ Ἢ ΠΡΟΣΘΙΑ.

Ἔστω a (a', a'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Διὰ νὰ καταστῇ ἡ εὐθεῖα αὕτη κάθετος ἐπὶ ἓν νέον ἐπίπεδον προβολῆς, καθίσταται ἐν πρώτοις παράλληλος διὰ μιᾶς πρώτης ἀλλαγῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ κάθετος διὰ μιᾶς δευτέρας ἀλλαγῆς. Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν ἓν ἐπίπεδον e_3 κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 καὶ παράλληλον πρὸς τὴν a (Σχ. 67). Ὁ ἄξων y_{13} θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν a' καὶ ἔστω a''' ἡ τρίτη προβολὴ τῆς a.

Ἔχομεν ἑπομένως τὴν εὐθεῖαν a (a', a''') παράλληλον πρὸς τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, εἰς τὸ σύστημα προβολῆς (e_1, e_3). Ἐν συνεχείᾳ εἰσάγομεν ἓν νέον ἐπίπεδον e_4 κάθετον ἐπὶ τὸ e_3 καὶ ἐπὶ τὴν a'''. Ὁ νέος ἄξων y_{34} ὀφείλει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν a'''. Εὑρίσκομεν τὴν τετάρτην προβολὴν a'''' τῆς εὐθείας a, ὡς πρὸς τὸ σύστημα προβολῆς (e_3, e_4). Τὸ ἐπίπεδον e_4 θὰ εἶναι ὁριζόντιον, ἐφόσον τὸ ἐπίπεδον e_1 ἐξακολουθῇ νὰ θεωρῆται ὁριζόντιον καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα a (a''', a'''') εἶναι μία κατακόρυφος εὐθεῖα.



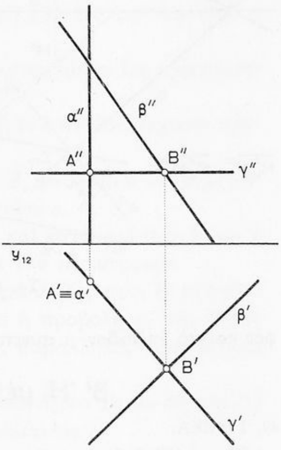
Σχ. 67

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον e_3 ληφθῇ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_2 καὶ παράλληλον (ἢ διερχόμενον) πρὸς τὴν α καὶ θεωρηθῇ ὡς ὁριζόντιον, τότε τὸ ἐπίπεδον e_4 θὰ εἶναι κατακόρυφον καὶ ἡ εὐθεῖα a (a''', a'''') συνεπῶς, εἰς τὸ νέον σύστημα προβολῆς (e_3, e_4), θὰ εἶναι μία προσθία εὐθεῖα.

Ἐφαρμογή. *Κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.* Ἔστωσαν a (a', a'') καὶ β (β', β'') δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καὶ γ ἡ ζητουμένη κοινὴ κάθετος αὐτῶν, τέμνουσα τὰς a καὶ β εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ μία ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς π.χ. τὸ e_1. Ἡ εὐθεῖα γ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν a, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1, ἑπομένως ἡ μὲν δευτέρα προβολή της εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, ἡ δὲ πρώτη προβολή της κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην προβολὴν τῆς εὐθείας β (ἀφοῦ ἡ μία ἐκ τῶν δύο καθέτων πρὸς ἀλλήλας εὐθειῶν β καὶ γ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ e_1, § 34).

Πρὸς κατασκευὴν ἑπομένως τῆς εὐθείας γ (γ', γ''), φέρομεν ἐκ τοῦ $A' \equiv a'$ κάθετον ἐπὶ τὴν προβολὴν β' τῆς εὐθείας β, τέμνουσαν ταύτην εἰς τὸ σημεῖον B', ὁπότε ἡ $\gamma' \equiv A'B'$. Ἡ δευτέρα προβολὴ γ'' τῆς εὐθείας γ εἶναι ἡ ἐκ τῆς δευτέρας προβολῆς B'' τοῦ σημείου B παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}, τέμνουσα τὴν a'' εἰς τὸ σημεῖον A'' (Σχ. 68). Τὸ τμῆμα $A'B'$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.



Σχ. 68

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οὐδεμία τῶν εὐθειῶν a καὶ β εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον προβολῆς, διὰ δύο ἀλλαγῶν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, μεταβαίνομεν εἰς νέον σύστημα προβολῆς (e_3, e_4), καθιστῶντες τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e_4.

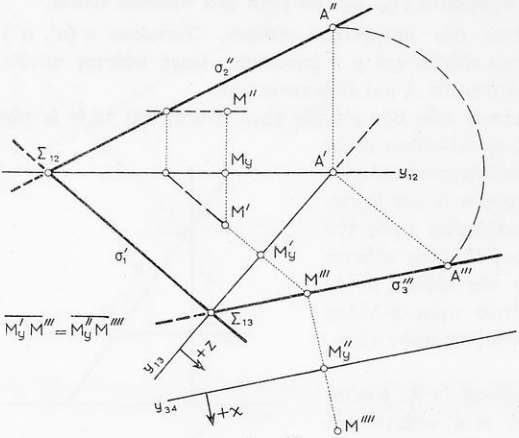
48. ΔΙΑ ΔΥΟ ΑΛΛΑΓΩΝ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ, ΔΟΘΕΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ, ΕΙΣ ΤΟ ΝΕΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ, ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΝ Ἢ ΜΕΤΩΠΙΚΟΝ.

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Διὰ νὰ καταστῇ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο παράλληλον πρὸς ἓν νέον ἐπίπεδον προβολῆς, καθίσταται ἐν πρώτοις κάθετον διὰ μιᾶς πρώτης ἀλλαγῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ παράλληλον διὰ μιᾶς δευτέρας ἀλλαγῆς.

Πρὸς τοῦτο εἰσάγομεν ἓν ἐπίπεδον e_3 κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 καὶ ἐπὶ τὸ ἴχνος σ_1 τοῦ ἐπιπέδου p. Ὁ νέος ἄξων y_{13} θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος σ'_1. Εὑρίσκομεν τὸ τρίτον ἴχνος σ_3''' τοῦ ἐπιπέδου p, εἰς τὸ νέον σύστημα (e_1, e_3) (Σχ. 69).

Ἐν συνεχείᾳ εἰσάγομεν ἓν νέον ἐπίπεδον e_4 κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_3 καὶ παράλληλον πρὸς τὸ τρίτον ἴχνος σ_3'''

Τὸ τέταρτον ἴχνος σ_4'''' τοῦ ἐπιπέδου p, ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα ἐπιπέδων προβολῆς (e_3, e_4), θὰ εἶναι ἡ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e_4.



Σχ. 69

Τὸ ἐπίπεδον e_4 θὰ εἶναι ὁριζόντιον, ἐφόσον τὸ ἐπίπεδον e_1 ἐξακολουθῇ νὰ θεωρῆται ὁριζόντιον καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον p εἶναι ἓν ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον e_3 ληφθῇ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_2 καὶ κάθετον πρὸς τὸ ἴχνος σ_2 καὶ θεωρηθῇ ὡς ὁριζόντιον, τότε τὸ ἐπίπεδον e_4 θὰ εἶναι κατακόρυφον καὶ τὸ ἐπίπεδον p συνεπῶς, θὰ εἶναι ἓν μετωπικὸν ἐπίπεδον.

Β' Ἡ μέθοδος τῆς περιστροφῆς

49. ΓΕΝΙΚΑ.

Ἔστω (Σ) δοθὲν γεωμετρικὸν σχῆμα μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ ἀποδειχθῇ μία ἰδιότης ἢ διὰ τὸ ὁποῖον ἔχει τεθῆ ὡρισμένον πρόβλημα. Διὰ τῆς μεθόδου τῆς περιστροφῆς τὰ μὲν ἐπίπεδα προβολῆς e_1 καὶ e_2 τηροῦνται σταθερά, τὸ δὲ σχῆμα (Σ) περιστρέφεται περί τινα ἄξονα Z, μέχρις ὅτου ἀχθῇ εἰς *ἰδιάζουσαν* θέσιν, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, διευκολύνουσαν τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος ἢ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ὁ ἄξων Z δύναται νὰ ληφθῇ, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, ἔχων μίαν τῶν ἑξῆς διευθύνσεων :

α) Κατακόρυφος

β) Πρόσθιος

γ) Ὁριζόντιος

δ) Μετωπικὸς

ε) Τυχών.

Ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι ὁριζόντιος, δύναται νὰ καταστῇ πρόσθιος διὰ μιᾶς ἀλλαγῆς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς. Ἐὰν ὁ ἄξων εἶναι μετωπικός, δύναται νὰ καταστῇ κατακόρυφος διὰ μιᾶς ἀλλαγῆς τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς. Ἐὰν τέλος ὁ ἄξων ἔχῃ τυχοῦσαν διεύθυνσιν, ὡς πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, δύναται νὰ καταστῇ κατακόρυφος ἢ πρόσθιος διὰ δύο ἀλλαγῶν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου ὑπενθυμίζομεν τὰς κάτωθι ἰδιότητας :

Ἔστω (Σ) γεωμετρικόν τι σχῆμα στρεφόμενον περὶ ἄξονα Z κατὰ γωνίαν ω καὶ e ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα :

α΄) Ἕκαστον σημεῖον M τοῦ σχήματος (Σ) γράφει τόξον κύκλου ἐπικέντρου γωνίας ω, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦτον. Ἐξαιροῦνται τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος (Σ), τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὰ ὁποῖα παραμένουν ἀκίνητα.

β΄) Ἡ ἀπόστασις ἑκάστου σημείου τοῦ σχήματος (Σ), ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου e, δὲν μεταβάλλεται.

γ΄) Ἡ προβολὴ τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e παραμένει ἴση πρὸς ἑαυτὴν κατὰ τὴν περιστροφήν.

Ἐὰν εἰδικώτερον τὸ σχῆμα (Σ) εἶναι μία εὐθεῖα ἢ ἓν ἐπίπεδον, ἰσχύουν προσθέτως καὶ αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες :

α΄) Ἐὰν εὐθεῖα a_0 δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα Z, δὲν δύναται διὰ περιστροφῆς περὶ αὐτὸν νὰ καταστῇ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e.

Διότι, ἡ γωνία τῆς εὐθείας a_0 μετὰ τοῦ ἄξονος Z, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ γωνία αὐτῆς μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e, δὲν μεταβάλλεται κατὰ τὴν περιστροφήν.

Ἐν τούτοις ἡ εὐθεῖα a_0 δύναται νὰ καταστῇ παράλληλος πρὸς ἓν ἐπίπεδον e', παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Z. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ ἡ προβολὴ a_0' τῆς εὐθείας a_0 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e, νὰ καταστῇ διὰ περιστροφῆς παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου e' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e.

β΄) Ἐὰν ἐπίπεδον p_0 δὲν εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Z, δὲν δύναται διὰ περιστροφῆς περὶ αὐτόν, νὰ καταστῇ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e.

Διότι, ἡ γωνία τοῦ ἐπιπέδου p_0 μετὰ τοῦ ἄξονος Z, καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ γωνία αὐτοῦ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e, δὲν μεταβάλλεται κατὰ τὴν περιστροφήν. Ἐν τούτοις τὸ ἐπίπεδον p_0 δύναται νὰ καταστῇ κάθετον πρὸς ἓν ἐπίπεδον e', παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Z. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου p_0, παράλληλος πρὸς τὸ e (ἢ τὸ ἴχνος τοῦ p ἐπὶ τοῦ e), νὰ καταστῇ διὰ περιστροφῆς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e'.

Τὸ τιθέμενον πρόβλημα εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν, δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς :

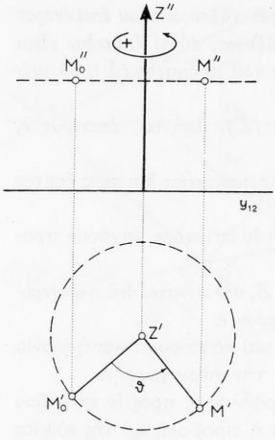
Ἐὰν εἶναι γνωσταὶ αἱ δύο προβολαὶ γεωμετρικοῦ σχήματος (Σ_0), νὰ εὑρεθοῦν αἱ νέαι προβολαὶ αὐτοῦ, μετὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ σχήματος (Σ_0) περὶ δοθέντα ἄξονα καὶ κατὰ δοθεῖσαν γωνίαν.

Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ὁ ἄξων εἶναι κατακόρυφος ἢ πρόσθιος τὸ δὲ σχῆμα (Σ_0), εὐθεῖα ἢ ἐπίπεδον.

Θεωροῦμεν γενικῶς τὴν θετικὴν φορὰν τυχόντος κατακορύφου ἄξονος Z, συμπίπτουσαν μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος Oz τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς (§ 2). Ὡς θετικὴ φορὰ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα Z λαμβάνεται ἡ θετικὴ φορὰ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα Oz. Ἀντιστοίχως, ὡς θετικὴ φορὰ προσθίου ἄξονος Z, λαμβάνεται ἡ θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονος Ox καὶ ὡς θετικὴ φορὰ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα Z, ἡ θετικὴ φορὰ περιστροφῆς περὶ τὸν ἄξονα Ox.

50. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΕΡΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΝ ΑΞΟΝΑ.

α'. **Σημείου.** Δίδεται ὁ ἄξων Z (Z', Z''), ἡ θετικὴ φορὰ περιστροφῆς, ἡ γωνία θ καὶ σημεῖον M_0 (M_0', M_0'') καὶ ζητεῖται ἡ νέα θέσις M τοῦ σημείου M_0, μετὰ τὴν περιστροφήν.



Σχ. 70

Ἡ ὁριζοντία προβολὴ M_0' τοῦ σημείου M_0 θὰ γράψῃ τόξον κύκλου ἀκτῖνος $Z'M_0'$ καὶ ἐπικέντρου γωνίας θ.

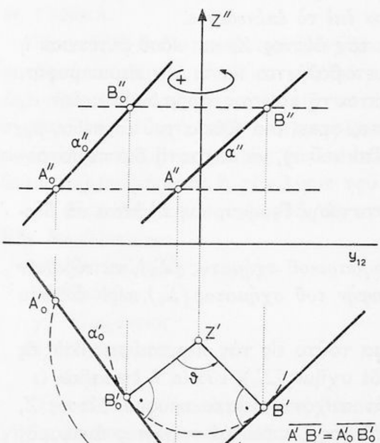
Ἡ νέα θέσις συνεπῶς τοῦ σημείου M_0', θὰ εἶναι ἡ M' (Σχ. 70).

Ἡ κατακόρυφος προβολὴ M_0'' τοῦ σημείου M_0 θὰ γράψῃ εὐθεῖαν M_0'' M'' παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}.

Ἐπομένως μετὰ τὴν περιστροφήν, τὸ σημεῖον M_0 θὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ σημείου M (M', M'').

β') **Εὐθείας.** Δίδεται ὁ ἄξων Z (Z', Z''), ἡ θετικὴ φορὰ περιστροφῆς, ἡ γωνία θ καὶ εὐθεῖα α_0 (α_0', α_0'') καὶ ζητεῖται ἡ νέα θέσις τῆς εὐθείας α_0, μετὰ τὴν περιστροφήν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν νέαν θέσιν δύο σημείων A_0 καὶ B_0 τῆς εὐθείας α_0.

Εἰς τὸ Σχ. 71 φαίνεται ἡ κατασκευὴ τῶν νέων θέσεων A καὶ B, τῶν σημείων A_0 καὶ B_0. Μετὰ τὴν περιστροφὴν ἡ εὐθεῖα α_0 συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν $\alpha \equiv AB$. Ὡς σημεῖον B_0 ἐλήφθη εἰς τὸ σχῆμα ὁ ποῦς τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Z ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α_0'.



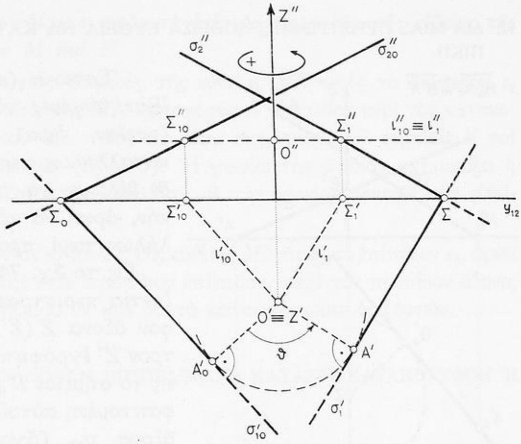
Σχ. 71

γ') **Ἐπίπεδον.** Δίδεται ὁ ἄξων Z (Z', Z''), ἡ θετικὴ φορὰ περιστροφῆς, ἡ γωνία θ καὶ ἐπίπεδον p_0 (σ_{10}', σ_{20}'') καὶ ζητεῖται ἡ νέα θέσις τοῦ ἐπιπέδου p_0, μετὰ τὴν περιστροφήν.

Κατὰ τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου p_0 περὶ τὸν ἄξονα Z, τὸ σημεῖον τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τοῦ ἄξονος, παραμένει ἀκίνητον.

Ἀρκεῖ, συνεπῶς, πρὸς εὕρεσιν τῆς νέας θέσεως τοῦ ἐπιπέδου p_0 νὰ εὑρεθῇ ἡ νέα θέσις μιᾶς εὐθείας του μὴ συναντώσης τὸν ἄξονα Z. Ὡς τοιαύτη λαμβάνεται συνήθως τὸ πρῶτον ἴχνος σ_1 (σ_1', y_{12}) τοῦ ἐπιπέδου (ἐφόσον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Z'). (Σχ. 71).

Εἰς τὸ Σχ. 72 εὑρέθη τὸ σημεῖον O (O', O'') τομὴ τοῦ ἐπιπέδου p_0 μετὰ τοῦ ἄξονος Z, ὡς σημεῖον τῆς ἰχνοπαραλλήλου του i_{10}, τῆς ὁποίας ἡ πρώτη προβολὴ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Z'. Τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_{10} στραφὲν κατὰ γωνίαν θ κατέλαβεν τὴν θέσιν σ'_1. Ἡ πρώτη ἰχνοπαράλληλος i_{10}, διατηροῦσα τὸ ὑψόμετρόν της, θὰ ἔλθῃ εἰς τὴν θέσιν i_1 (i_1', i_1''), τῆς ὁποίας ἡ πρώτη προβολὴ i'_1 διέρχεται διὰ τοῦ Z' καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἴχνος σ'_1.

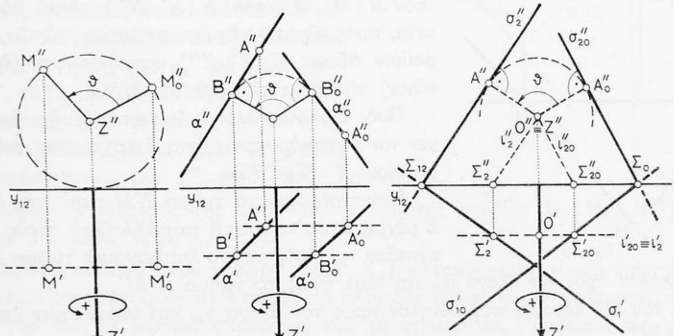


Σχ. 72

Τὸ δεύτερον, συνεπῶς, ἴχνος σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p_0 μετὰ τὴν περιστροφὴν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ δευτέρου ἴχνους Σ''_1 τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_1. Τὸ ἐπίπεδον p_0 μετὰ τὴν περιστροφὴν συμπίπτει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p (σ'_1, σ''_2).

51. ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ ΣΗΜΕΙΟΥ, ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΕΡΙ ΠΡΟΣΘΙΟΝ ΑΞΟΝΑ.

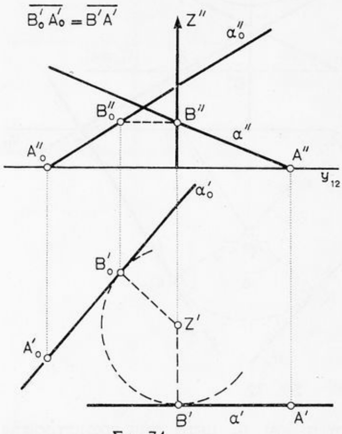
Αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς περιστροφῆς σημείου, εὐθείας καὶ ἐπιπέδου περὶ πρόσθιον ἄξονα, εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογοι ἐκείνων τὰς ὁποίας ἀναφέραμεν ἤδη, προκειμένου περὶ περιστροφῆς σημείου, εὐθείας καὶ ἐπιπέδου περὶ κατακόρυφον ἄξονα. Εἰς τὰ ἑπόμενα σχήματα δίδονται αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ κατὰ σειρὰν διὰ σημεῖον, εὐθεῖαν καὶ ἐπίπεδον.



Σχ. 73

Προβλήματα

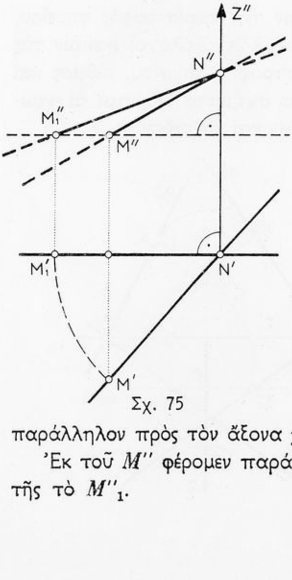
52. ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ, ΔΟΘΕΙΣΑ ΕΥΘΕΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ Ἢ ΜΕΤΩΠΙΚΗ.



Σχ. 74

Ἔστω $\alpha_0(\alpha'_0, \alpha''_0)$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τὴν καταστήσωμεν ὁριζοντίαν, ἀρκεῖ νὰ τὴν περιστρέψωμεν καταλλήλως περὶ κατακόρυφον ἄξονα, ἂν δὲ θέλωμεν νὰ τὴν καταστήσωμεν μετωπικήν, ἀρκεῖ νὰ τὴν περιστρέψωμεν καταλλήλως περὶ πρόσθιον ἄξονα.

Εἰς τὸ Σχ. 74 ἡ εὐθεῖα α_0 κατέστη ὁριζοντία περιστραφεῖσα περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα $Z\,(Z', Z'')$. Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον Z' ἐγράφη κύκλος ἐφαπτόμενος τῆς σ'_0 εἰς τὸ σημεῖον B'_0 καὶ ἤχθη ἡ εὐθεῖα α' ἐφαπτομένη αὐτοῦ, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} (ἄγονται δύο). Τὸ σημεῖον $B\,(B', B'')$ εἶναι ἡ νέα θέσις τοῦ σημείου $B_0\,(B'_0, B''_0)$. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς εὐθείας α ἀπαιτεῖται ἓν ἀκόμη σημεῖον καὶ ὡς τοιοῦτον ἐλήφθη τὸ πρῶτον ἴχνος A_0' τῆς εὐθείας α_0. Ἡ νέα θέσις τοῦ σημείου A'_0 μετὰ τὴν περιστροφήν, εἶναι τὸ σημεῖον A' τῆς α', τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως $\overline{B'A'} = \overline{B'_0A'_0}$. Ἑπομένως ἡ α_0 μετὰ τὴν περιστροφὴν συμπίπτει μετὰ τῆς εὐθείας α (α', α''). Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὴν κατασκευὴν λαμβάνομεν τὸν ἄξονα Z τέμνοντα τὴν εὐθεῖαν α_0.



Σχ. 75

Ἐφαρμογαί : *Α) Εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων,*

Ἐὰν $M\,(M', M'')$ καὶ $N\,(N', N'')$ εἶναι δύο σημεῖα, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν, θεωροῦμεν ἄξονα $Z\,(Z', Z'')$ κατακόρυφον (ἢ πρόσθιον) τέμνοντα τὴν εὐθεῖαν MN.

Πρὸς ἁπλούστευσιν τῆς κατασκευῆς θεωροῦμεν τὸν κατακόρυφον ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου N' (Σχ. 75).

Περιστρέφομεν τὸ τμῆμα NM περὶ τὸν ἄξονα Z μέχρις ὅτου καταστῇ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τμῆμα $N'M_1'$ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἴσον πρὸς τὸ τμῆμα $N'M'$.

Ἐκ τοῦ M'' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ εὑρίσκομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ M''_1.

Τὸ τμῆμα $M_1'' \; N''$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως τῶν σημείων M καὶ N.

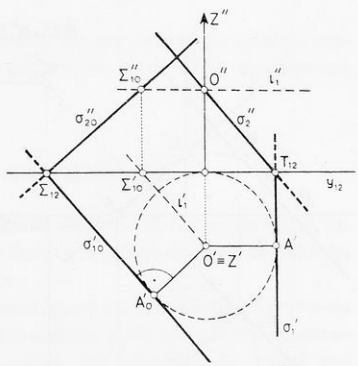
B) Εὕρεσις τῶν γωνιῶν κλίσεων πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς, τῆς εὐθείας τῆς ὁριζομένης ὑπὸ δύο σημείων M καὶ N.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας κλίσεως τῆς εὐθείας MN πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1 ἀρκεῖ νὰ περιστρέψωμεν τὸ διὰ τῆς MN κατακόρυφον ἐπίπεδον περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα τὸν διερχόμενον διά τινος σημείου της, π.χ. τοῦ σημείου N καὶ νὰ τὸ καταστήσωμεν μετωπικὸν (Σχ. 75). Ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα $N''M_1''$, μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς εὐθείας MN πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας κλίσεως τῆς εὐθείας MN πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2, ἀρκεῖ νὰ περιστρέψωμεν τὸ διὰ τῆς MN πρόσθιον ἐπίπεδον, περὶ τὸν πρόσθιον ἄξονα, τὸν διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου N καὶ νὰ τὸ καταστήσωμεν ὁριζόντιον.

53. ΔΙΑ ΜΙΑΣ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ, ΔΟΘΕΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΝ Ἤ ΠΡΟΣΘΙΟΝ.

Ἔστω p_0 $(\sigma'_{10}, \sigma'_{20})$ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Διὰ νὰ καταστῇ τοῦτο κατακόρυφον μέν, πρέπει νὰ περιστραφῇ περὶ πρόσθιον ἄξονα, μέχρις ὅτου τὸ δεύτερον ἴχνος του καταστῇ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12}, πρόσθιον δέ, πρέπει νὰ περιστραφῇ περὶ κατακόρυφον ἄξονα, μέχρις ὅτου τὸ πρῶτον ἴχνος του καταστῇ κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} (§ 9).

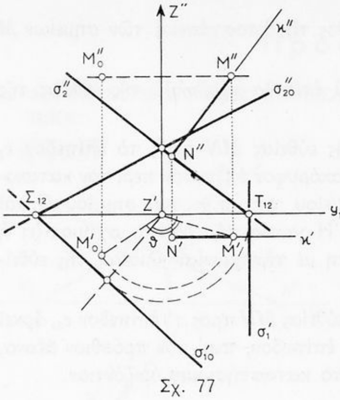


Σχ. 76

Εἰς τὸ Σχ. 76 τὸ δοθὲν ἐπίπεδον p_0 κατέστη πρόσθιον, διὰ περιστροφῆς του περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα Z (Z', Z''). Τὸ σημεῖον O (O', O'') τομὴ τοῦ ἐπιπέδου p_0 μετὰ τοῦ ἄξονος Z, παραμένει σταθερόν, ἑπομένως ὅταν τὸ ἐπίπεδον μετὰ τὴν περιστροφὴν καταστῇ πρόσθιον, τὸ δεύτερον ἴχνος του σ_2'' θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ O'', τὸ δὲ πρῶτον ἴχνος του σ'_1 θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} καὶ θὰ ἀπέχῃ τοῦ σημείου Z' ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ Z' ἀπὸ τοῦ ἴχνους σ'_{10}.

Ἐφαρμογή. Εὕρεσις τῆς ἀποστάσεως δοθέντος σημείου M_0 (M_0', M_0'') ἀπὸ δοθέντος ἐπιπέδου p_0 $(\sigma'_{10}, \sigma''_{20})$.

Θεωροῦμεν ἄξονα περιστροφῆς Z (Z', Z'') κατακόρυφον, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2. Περιστρέφομεν περὶ αὐτὸν τὸ ἐπίπεδον p_0 καὶ τὸ καθιστῶμεν πρόσθιον. Κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν στρέφομεν καὶ τὸ σημεῖον M_0. Ἔστωσαν p (σ'_1, σ_2'')



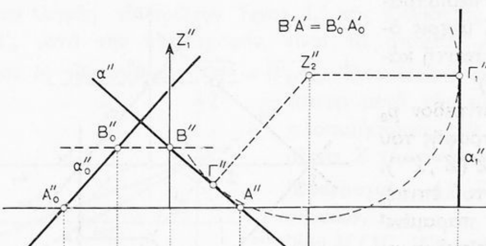
Σχ. 77

καὶ M (M', M'') αἱ νέαι θέσεις τοῦ ἐπιπέδου καὶ τοῦ σημείου, μετὰ τὴν περιστροφήν. Ἐκ τοῦ σημείου M φέρομεν εὐθεῖαν $\varkappa$ ($\varkappa'$, $\varkappa''$) κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ ἔστω N (N', N'') ὁ ποῦς τῆς καθέτου ταύτης. (Σχ. 77).

Ἡ εὐθεῖα $\varkappa$ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸν πρόσθιον ἐπίπεδον p, εἶναι μετωπική, ἑπομένως τὸ τμῆμα $\overline{M''N''}$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p ἑπομένως καὶ τοῦ σημείου M_0 ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p_0.

54. ΔΙΑ ΔΥΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΩΝ, ΔΟΘΕΙΣΑ ΕΥΘΕΙΑ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟΣ Ἤ ΠΡΟΣΘΙΑ.

Ἔστω a_0 (a_0', a_0'') ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, ἔχουσα τυχοῦσαν θέσιν πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς. Διὰ νὰ καταστῇ κατακόρυφος, πρέπει διὰ μιᾶς πρώτης περιστροφῆς περὶ κατακόρυφον ἄξονα Z_1, νὰ καταστῇ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2 καὶ διὰ μιᾶς δευτέρας περιστροφῆς περὶ πρόσθιον ἄξονα Z_2, νὰ καταστῇ κατακόρυφος.



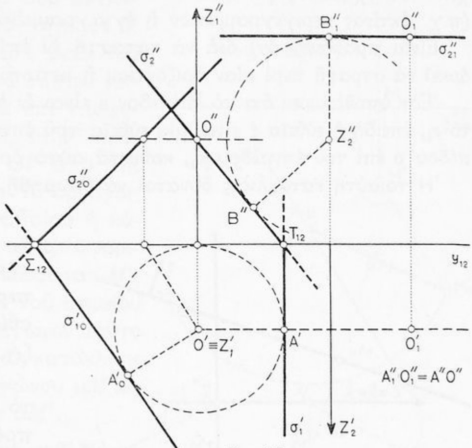
Σχ. 78

Εἰς τὸ Σχ. 78 ἡ εὐθεῖα a_0 ἐστράφη περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα Z_1 (Z_1', Z_1'') καὶ κατέστη μετωπική, καταλαβοῦσα τὴν θέσιν a (a', a''). Ἐν συνεχείᾳ ἡ εὐθεῖα a ἐστράφη περὶ τὸν πρόσθιον ἄξονα Z_2 (Z'_2, Z''_2) καὶ κατέστη κατακόρυφος καταλαβοῦσα τὴν θέσιν a_1 (a_1', a_1'').

Ἐὰν ἐπρόκειτο ἡ εὐθεῖα a νὰ καταστῇ προσθία, θὰ ἐστρέφετο περὶ ἄξονα πρόσθιον καθισταμένη ὁριζοντία καὶ κατόπιν περὶ ἄξονα κατακόρυφον, καθισταμένη προσθία.

55. ΔΙΑ ΔΥΟ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΩΝ, ΔΟΘΕΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΝΑ ΚΑΤΑΣΤΗ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΝ Ἢ ΜΕΤΩΠΙΚΟΝ.

Ἔστω p_0 (σ_{10}', σ_{20}'') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον, ἔχον τυχοῦσαν θέσιν πρὸς τὰ ἐπίπεδα προβολῆς. Διὰ νὰ καταστῇ ὁριζόντιον, πρέπει διὰ μιᾶς πρώτης περιστροφῆς περὶ κατακόρυφον ἄξονα Z_1, νὰ καταστῇ πρόσθιον καὶ διὰ μιᾶς δευτέρας περιστροφῆς περὶ ὁριζόντιον ἄξονα Z_2 νὰ καταστῇ ὁριζόντιον. Εἰς τὸ Σχ. 79 τὸ ἐπίπεδον p_0 ἐστράφη περὶ τὸν κατακόρυφον ἄξονα $Z_1(Z_1', Z_1'')$ καὶ κατέστη πρόσθιον, καταλαβὸν τὴν θέσιν p_0 (σ'_1, σ_2''). Ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐπίπεδον p ἐστράφη περὶ τὸν πρόσθιον ἄξονα Z_2 (Z_2', Z_2'') καὶ κατέστη ὁριζόντιον, καταλαβὸν τὴν θέσιν p (σ'_{11}, σ''_{21}).



Σχ. 79

Ἐὰν ἐπρόκειτο τὸ ἐπίπεδον p_0 νὰ καταστῇ μετωπικόν, θὰ ἐστρέφετο περὶ ἄξονα πρόσθιον καθιστάμενον κατακόρυφον καὶ κατόπιν περὶ ἄξονα κατακόρυφον καθιστάμενον μετωπικόν.

Γ. Ἡ μέθοδος τῆς κατακλίσεως

56. ΓΕΝΙΚΑ. Ἡ μέθοδος τῆς κατακλίσεως δὲν εἶναι ἐν τῇ οὐσίᾳ μία τρίτη μέθοδος, καθόσον δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς θὰ ἴδωμεν, ὡς τὸ γινόμενον μιᾶς ἀλλαγῆς ἐπιπέδου προβολῆς ἐπὶ μίαν περιστροφήν.

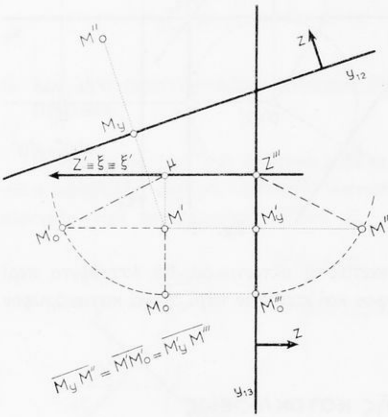
Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα p καὶ e, τεμνόμενα κατά τινα εὐθεῖαν ξ. Κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e περὶ τὴν εὐθεῖαν ξ, θεωροῦμεν τὴν σύμπτωσιν τοῦ ἐπιπέδου p μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e, μετὰ τὴν περιστροφὴν αὐτοῦ περὶ τὴν κοινὴν εὐθεῖαν ξ. Κατὰ τὴν περιστροφὴν ταύτην, πᾶν σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου p θὰ γράψῃ τόξον κύκλου, τοῦ ὁποίου κέντρον μὲν εἶναι ὁ ποὺς τῆς ἐκ τοῦ σημείου M καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ξ, ἀκτὶς δὲ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς εὐθείας ξ. Ἡ τοιαύτη περιστροφὴ δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Ἑπομένως, ἂν (F) εἶναι ἓν σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου p, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο κατακλίσεις αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e. Αἱ δύο αὗται κατακλίσεις εἶναι σχήματα ὀρθῶς συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ.

Σκοπὸς τῆς μεθόδου εἶναι νὰ καταστῇ ἓν ἐπίπεδον σχῆμα (F) τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον δίδεται διὰ τῶν προβολῶν του, ὁριζόντιον ἢ μετωπικόν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἀνεύρωμεν τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν πλευρῶν, τῶν γωνιῶν ἢ ἄλλων μετρικῶν στοιχείων τοῦ σχήματος (F) ἢ καὶ νὰ προσδιορίσωμεν ὡρισμένα στοιχεῖα τοῦ σχήματος (F), ἐκ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς κατακλίσεώς του (π.χ. ἀκτίνας περιγεγραμμένων ἢ ἐγγεγραμμένων κύκλων κλπ).

Εἶναι προφανές, ὅτι διὰ νὰ καταστῇ ἓν ἐπίπεδον ὁριζόντιον ἢ μετωπικόν, ἀρκεῖ νὰ στραφῇ περὶ μίαν ὁριζοντίαν ἢ μετωπικὴν εὐθεῖαν αὐτοῦ.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον e εἶναι ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς π.χ. τὸ e_1, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ξ εἶναι μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου e_1, ἡ κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, καθιστᾶ αὐτὸ ὁριζόντιον.

Ἡ τοιαύτη κατάκλισις δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς τὸ γινόμενον τῆς ἀλλαγῆς τοῦ ἐπιπέδου e_2, δι' ἑνὸς ἐπιπέδου e_3 κατακορύφου καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν $\xi' \equiv \xi$, ἐπὶ τὴν περιστροφὴν περὶ τὴν καταστᾶσαν ἤδη προσθίαν, ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα (e_1, e_3), εὐθεῖαν ξ.



Σχ. 80

Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον p ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πρῶτον ἴχνος του $\xi \equiv \xi'$ καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον του $M\,(M', M'')$. Ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου M εἶναι τὸ σημεῖον M_0 (Σχ. 80), κατασκευαζόμενον ὡς ἐν § 57 ἐκτίθεται.

Ἡ κατάκλισις αὕτη δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον μιᾶς ἀλλαγῆς ἐκ τῶν ἐπιπέδων προβολῆς (e_1, e_2) εἰς τὰ ἐπίπεδα (e_1, ε_3), ἔνθα τὸ ἐπίπεδον e_3 ἐλήφθη κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ξ', ἐπὶ μίαν περιστροφὴν μὲ ἄξονα $(Z' \equiv \xi', Z''')$.

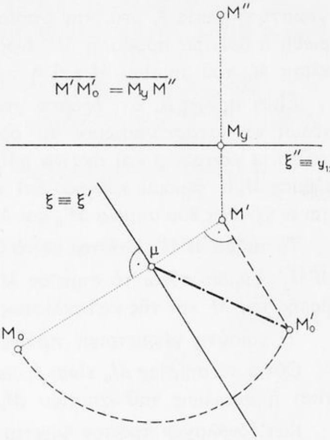
Κατὰ τὴν ἀλλαγὴν τὸ σημεῖον M εἰς τὸ σύστημα ἐπιπέδων προβολῆς e_1, e_3, ἔχει ὡς προβολὰς τὰ σημεῖα M', M''' (§ 44, α). Κατὰ τὴν περιστροφὴν δὲ τὸ σημεῖον $M\,(M', M''')$ λαμβάνει τὴν θέσιν M_0 (M_0, M_0''') (§ 51).

Ὅταν λέγωμεν κατωτέρω κατάκλισις σημείου M ἐπὶ ἐπιπέδου e, περὶ μίαν εὐθεῖαν του ξ, ἐννοοῦμεν τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου (M, ξ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e, στρεφομένου περὶ τὴν εὐθεῖαν ξ αὐτοῦ.

57. ΚΑΤΑΚΛΙΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΕΡΙ ΜΙΑΝ ΕΥΘΕΙΑΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ e_1 (e_2) ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ e_1 (e_2)

Ἔστω $M\,(M', M'')$ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ξ $(\xi', \xi'' \equiv y_{12})$ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (ξ, M) καὶ τὸ περιστρέφομεν περὶ τὴν εὐθεῖαν ξ, μέχρις ὅτου συμπέσει μετὰ τοῦ ἐπιπέδου e_1 ἢ ὅπως ἄλλως λέγωμεν, κατακλιθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1.

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ τοιαύτη περιστροφὴ δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Εἰς τὸ Σχ. 81 τὸ σημεῖον M μετὰ τὴν περιστροφὴν συνέπεσε μετὰ τοῦ σημείου M_0 τοῦ ἐπιπέδου e_1 τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ M' καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ξ' καὶ εἰς ἀπόστασιν μM_0 ἴσην πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς εὐθείας $\xi \equiv \xi'$. Κατεσκευάσθη τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\mu M'M'_0$, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος πλευρὰ $M'M'_0$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M. Ἡ ὑποτείνουσα $\mu M'_0$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς εὐθείας ξ. Τὸ τρίγωνον τοῦτο $\mu M'M'_0$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κατάκλισις ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 τοῦ τριγώνου $\mu M'M$, στρεφομένου περὶ τὴν εὐθεῖαν $\mu M'$.

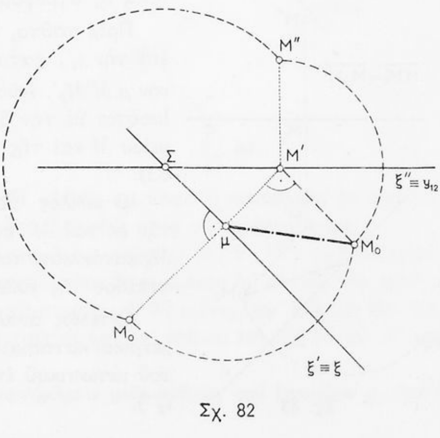


Σχ. 81

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, ἡ κατασκευὴ γίνεται ὡς ἑξῆς: Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Σ τομῆς τοῦ ἄξονος y_{12} μετὰ τῆς εὐθείας ξ', καὶ ἀκτῖνα $\Sigma M''$ γράφομεν κύκλον, ὅστις τέμνει τὴν ἐκ τοῦ M' κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ξ', εἴς τι σημεῖον M_0. Τὸ σημεῖον M_0 εἶναι ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου M (Σχ. 82). Ἡ ταυτότης τῶν ἀποτελεσμάτων τῆς κατασκευῆς ταύτης καὶ τῆς διὰ τοῦ γενικοῦ τρόπου τοιαύτης, ἀποδεικνύεται ἐκ τῶν κατωτέρω σχέσεων μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $\Sigma M'\,M''$, $\Sigma\mu M'$, $\mu M'M'_0$ καὶ $\Sigma\mu M_0$:

$$\overline{\Sigma M''^2} = \overline{\Sigma M'^2} + \overline{M'M''^2} =$$
$$\overline{\Sigma\mu^2} + \overline{\mu M'^2} + \overline{M'M_0'^2} =$$
$$\overline{\Sigma\mu^2} + \overline{\mu M'_0{}^2} = \overline{\Sigma\mu^2} + \overline{\mu M_0{}^2} =$$
$$= \overline{\Sigma M_0{}^2}$$

Ἐντελῶς ἀνάλογοι εἶναι αἱ ἀπαιτούμεναι γεωμετρικαὶ κατασκευαί, διὰ τὴν κατάκλισιν σημείου M τοῦ ἐπιπέδου e_1 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2, περὶ μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου τούτου.



Σχ. 82

58. ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Ἐπίπεδον p ἔχει κατακλιθῆ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς καὶ εἶναι γνωστὴ ἡ εὐθεῖα ξ, περὶ τὴν ὁποίαν ἐγένετο ἡ κατάκλισις. Ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ M'' ἑνὸς σημείου του M, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ κατάκλισις M_0 τοῦ σημείου M καὶ ἡ πρώτη προβολὴ M' αὐτοῦ.

Εἶναι προφανές, ὅτι ἐφόσον γνωρίζομεν τὰ σημεῖα M_0 καὶ M', δυνάμεθα εὐκόλως νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον μ $M'M'_0$ (Σχ. 81). Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον μ καὶ ἀκτῖνα μM_0 γράφομεν κύκλον καὶ εἰς τὸ σημεῖον M' τῆς εὐθείας M_0M' φέρομεν κάθετον ἐπὶ ταύτην. Ὁ κύκλος οὗτος καὶ ἡ εὐθεῖα τέμνονται ἐν γένει εἰς δύο σημεῖα M'_0 καὶ M'_{01} (συμμετρικὸν τοῦ M'_0 ὡς πρὸς τὴν M_0M').

Τὸ τμῆμα $M'M'_0$ ἰσοῦται μὲ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M, ἑπομένως $\overline{M_yM''} = \overline{M'M_0}'$. Εὑρέθη οὕτω τὸ σημεῖον M'', δηλαδὴ ὡρίσθη τὸ σημεῖον M ἐκ τῆς προβολῆς του M' καὶ τῆς κατακλίσεως του M_0, περὶ τὴν εὐθεῖαν $\xi' \equiv \xi$.

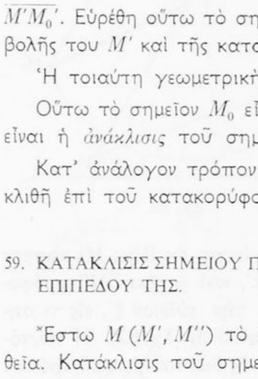
Ἡ τοιαύτη γεωμετρικὴ πρᾶξις ὀνομάζεται *ἀνάκλισις*.

Οὕτω τὸ σημεῖον M_0 εἶναι ἡ *κατάκλισις* τοῦ σημείου M, ἐνῶ τὸ σημεῖον M εἶναι ἡ *ἀνάκλισις* τοῦ σημείου M_0.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται ἡ ἀνάκλισις ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει κατακλιθῆ ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς.

59. ΚΑΤΑΚΛΙΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΕΡΙ ΜΙΑΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΝ ΕΥΘΕΙΑΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΗΣ.

Ἔστω $M(M', M'')$ τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ i_1 (i'_1, i_1'') ἡ δοθεῖσα ὁριζοντία εὐθεῖα. Κατάκλισις τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῆς εὐθείας i_1, σημαίνει κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου (M, i_1) ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῆς εὐθείας i_1, στρεφομένου περὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.



Σχ. 83

Πρὸς τοῦτο, ἐὰν μ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου M' ἐπὶ τὴν i_1', κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\mu\, M'M_0'$, ἔνθα $\overline{M'M_0}' = \overline{M_yM''}$. Τὸ τμῆμα $\overline{M_yM''}$ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὑψομέτρων τοῦ σημείου M καὶ τῆς ὁριζοντίας εὐθείας i_1 (i'_1, i_1''), (Σχ. 83).

Ὁ κύκλος μὲ κέντρον μ καὶ ἀκτῖνα $\mu M''_0$ τέμνει τὴν ἐκ τοῦ M' κάθετον ἐπὶ τὴν i'_1, εἰς τὸ σημεῖον M_0 κατάκλισιν τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῆς εὐθείας i_1.

Ἐντελῶς ἀνάλογοι εἶναι αἱ ἀπαιτούμεναι γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ διὰ τὴν κατάκλισιν σημείου M, τοῦ μετωπικοῦ ἐπιπέδου, μετωπικῆς εὐθείας i_2 (i'_2, i_2'').

60. ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

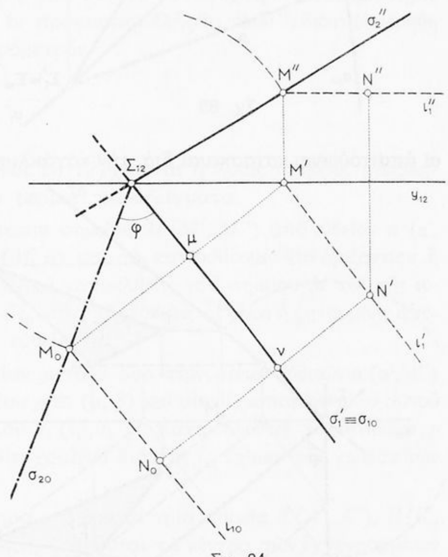
Ἐπίπεδον p ἔχει κατακλιθῆ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὁριζοντίας εὐθείας i_1 (i'_1, i''_1) καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῆ ἡ δευτέρα προβολὴ M'' ἑνὸς σημείου του M, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ πρώτη προβολὴ M' τοῦ σημείου M καὶ ἡ κατάκλισις M_0 αὐτοῦ.

Καὶ ἐδῶ ὅπως καὶ ἐν § 58, κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\mu M' M_0'$ (Σχ. 83) καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον M'', τοιοῦτον ὥστε $\overline{M_y M''} = \overline{M' M_0'}$.

61. ΚΑΤΑΚΛΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΕΔΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΤΩΝ ΙΧΝΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ e_1.

Ἔστω p (σ_1', σ_2'') τὸ δοθὲν ἐπίπεδον. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_1 εἶναι, ἐν προκειμένῳ, ἡ εὐθεῖα περιστροφῆς. Πᾶν σημεῖον τοῦ ἴχνους σ'_1 θὰ παραμένῃ ἀκίνητον κατὰ τὴν κατάκλισιν.

Θὰ κατασκευάσωμεν κατ' ἀρχὴν τὴν κατάκλισιν τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2''. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν κατάκλισιν τυχόντος σημείου του π.χ. τοῦ M (M', M''). Εἰς τὸ Σχ. 84 εὑρέθη ἡ κατάκλισις M_0 τοῦ σημείου M (§ 57) καὶ ἑπομένως ἡ κατάκλισις σ_{20}, τοῦ δευτέρου ἴχνους $\sigma_2' \equiv \sigma_2$.

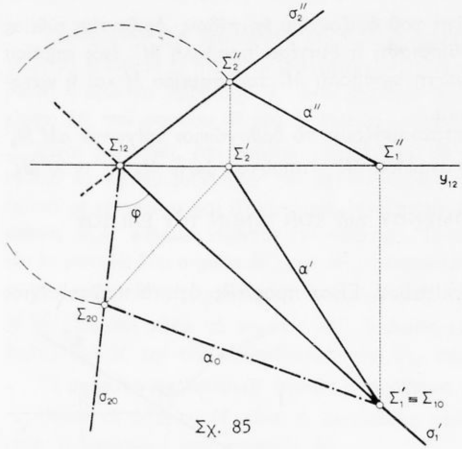


Σχ. 84

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κατάκλισιν μιᾶς πρώτης ἰχνοπαραλλήλου π.χ. τῆς i_1 (i'_1, i''_1), εὑρίσκομεν τὴν κατάκλισιν M_0 τοῦ σημείου M (M', M'') κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνει αὕτη τὸ δεύτερον ἴχνος καὶ ἐκ τοῦ σημείου M_0 φέρομεν τὴν παράλληλον i_{10} πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_1. Ἡ εὐθεῖα i_{10} εἶναι ἡ κατάκλισις τῆ πρώτης ἰχνοπαραλλήλου i_1 (τῆς παραλλήλου δηλαδὴ πρὸς τὸ πρῶτον ἴχνος).

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κατάκλισιν σημείου N (N', N'') τοῦ ἐπιπέδου p, θεωροῦμεν μίαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον διερχομένην δι' αὐτοῦ, τὴν ὁποίαν καὶ κατακλίνομεν. Ἡ κατάκλισις τοῦ σημείου N θὰ κεῖται, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τῆς κατακλίσεως τῆς ἰχνοπαραλλήλου ταύτης καὶ ἀφ' ἑτέρου ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ N' καθέτου ἐπὶ τὸ ἴχνος σ'_1.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κατάκλισιν μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου p, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὰς κατακλίσεις δύο σημείων της. Συνήθως ἐκλέγομεν τὰ ἴχνη της, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p.

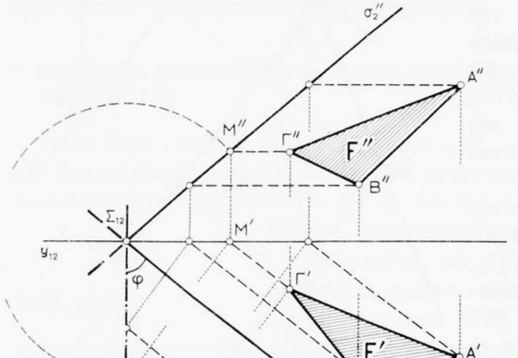


Σχ. 85

Εἰς τὸ Σχ. 85, εὑρέθη ἡ κατάκλισις Σ_{20} τοῦ δευτέρου ἴχνους της $\Sigma_2\,(\Sigma_2', \Sigma_2'')$ (§ 57).

Ἡ κατάκλισις Σ_{10} τοῦ πρώτου ἴχνους της συμπίπτει μὲ τὸ πρῶτον ἴχνος της Σ'_1. Ἐπομένως ἡ κατάκλισις τῆς εὐθείας α, εἶναι ἡ εὐθεῖα $\alpha_0 \equiv \Sigma_{10}\Sigma_{20}$.

Ἐὰν πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τὴν κατάκλισιν ἑνὸς ἐπιπέδου εὐθυγράμμου σχήματος (F), κατασκευάζομεν τὰς κατακλίσεις τῶν πλευρῶν καὶ τῶν λοιπῶν στοιχείων τοῦ σχήματος. Εἰς τὸ Σχ. 86 σημειοῦνται αἱ ἀπαιτούμεναι κατασκευαὶ διὰ τὴν κατάκλισιν δοθέντος τριγώνου. Διὰ τῆς κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου προκύπτει ἡ γωνία φ τῶν δύο ἰχνῶν σ_1 καὶ σ_2.



Σχ. 86

Κατ' ἀνάλογον τρόπον γίνεται καὶ ἡ κατάκλισις δοθέντος διὰ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς.

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κατακόρυφον ἢ πρόσθιον, τὰ ἴχνη αὐτοῦ σ_1 καὶ σ_2, σχηματίζουν γωνίαν $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ἐπομένως μετὰ τὴν κατάκλισιν τοῦ ἐπιπέδου p, τὸ κατακλινόμενον ἴχνος θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἄλλο. Διὰ τὴν κατάκλισιν σημείου, ἰχνοπαραλλήλου, εὐθείας καὶ γενικῶς σχήματος (F) τοῦ ἐπιπέδου p, ἐφαρμόζονται αἱ ἐν τῇ παραγράφῳ ταύτῃ, ἀναφερόμεναι κατασκευαὶ προσαρμοζόμεναι καταλλήλως.

62. ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν κατάκλισιν ἑνὸς τῶν ἰχνῶν ἐπιπέδου p καὶ τὸ ἄλλο ἴχνος, ἡ ἀνάκλισις τοῦ ἐπιπέδου τούτου γίνεται ὡς ἀκολούθως :

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_1 καὶ ἡ κατάκλισις σ_{20} τοῦ δευτέρου ἴχνους. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Σ_{12} τομῆς τῶν ἰχνῶν μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12} (Σχ. 86) γράφομεν κύκλον τέμνοντα τὴν κατάκλισιν σ_{20} εἴς τι σημεῖον M_0. Ἐὰν M' ἡ τομὴ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ M_0 ἐπὶ τὸ πρῶτον ἴχνος σ'_1 μετὰ τοῦ ἄξονος y_{12}, ἡ ἐκ τοῦ M κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα y_{12} τέμνει τὸν κύκλον $(\Sigma, \Sigma M_0)$ εἰς δύο σημεῖα. Ἐκ τῶν δύο τούτων σημείων δεχόμεθα ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὸ ὑψόμετρον εἶναι ὁμόσημον μὲ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M_0, ἐν προκειμένῳ ἐλήφθη τὸ M'', διότι ἐθεωρήθη ὅτι τὸ σημεῖον M_0 ἔχει θετικὸν ὑψόμετρον.

63. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.

Διὰ τῆς μεθόδου τῆς κατακλίσεως ἐπιτυγχάνεται ἡ λύσις πλήθους προβλημάτων (§ 56). Δίδομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα.

α') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν σημείου $M\,(M', M'')$ ἀπὸ εὐθεῖαν $a\,(a', a'')$, θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον $p \equiv (M, a)$ καὶ τὸ κατακλίνομεν ἐπὶ ὁριζοντίου ἢ μετωπικοῦ ἐπιπέδου. Ἐὰν M_0 καὶ a_0 αἱ κατακλίσεις τοῦ σημείου M καὶ τῆς εὐθείας a, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M_0 ἀπὸ τῆς εὐθείας a_0 εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τῆς εὐθείας a.

β') Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν μεταξὺ δύο τεμνομένων εὐθειῶν $a\,(a', a'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$, θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον $p \equiv (a, \beta)$ καὶ μίαν ἰχνοπαράλληλον αὐτοῦ π.χ. μίαν πρώτην ἰχνοπαράλληλον $i_1\,(i_1', i_1'')$. Κατακλίνοντες τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς i_1, ἔχομεν τὴν γωνίαν τῶν εὐθειῶν a, β.

γ') Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα : Δίδονται τρία σημεῖα $A\,(A', A'')$, $B\,(B', B'')$, $\Gamma\,(\Gamma', \Gamma'')$ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ζητοῦνται τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων καὶ αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν. Κατακλίνομεν τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐπὶ ὁριζοντίου ἢ μετωπικοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔστω $A_0B_0\Gamma_0$ ἡ κατάκλισις αὐτοῦ. Εὑρίσκομεν τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον $A_0B_0\Gamma_0$ κύκλων καὶ τὰς ἀκτίνας αὐτῶν. Δι' ἀνακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου $A_0B_0\Gamma_0$ εἰς τὴν πρὸ τῆς κατακλίσεως θέσιν $AB\Gamma$, προσδιορίζομεν τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$.

64. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

97. Δι' ἀλλαγῆς τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς, εὕρετε τὴν γωνίαν δύο ἐπιπέδων τῶν ὁποίων τὰ πρῶτα ἴχνη εἶναι παράλληλα.

98. Δίδεται τὸ ἐπίπεδον $p\,(\sigma_1', \sigma_2'')$. Ἀντικαταστήσατε τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, οὕτως ὥστε τὰ νέα ἴχνη τοῦ ἐπιπέδου p νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

99. Δίδονται τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἀντικαταστήσατε τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, οὕτως ὥστε αἱ νέαι προβολαὶ τῶν σημείων νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

100. Δι' ἀλλαγῆς ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, τυχοῦσα εὐθεῖα νὰ καταστῇ ἐγκαρσία.

101. Δι' ἀλλαγῆς ἑνὸς τῶν ἐπιπέδων προβολῆς, τυχοῦσα εὐθεῖα νὰ καταστῇ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ νέου συστήματος ἐπιπέδων προβολῆς.

102. Νὰ ἀχθῇ διὰ σημείου $M\,(M', M'')$ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν ἐγκαρσίαν εὐθεῖαν.

103. Νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον προβολῆς, οὕτως ὥστε δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κατακόρυφον προβολήν.

104. Δίδεται ἡ πρώτη προβολὴ ὀρθῆς γωνίας καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ μιᾶς τῶν πλευρῶν της, νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα προβολὴ τῆς ἄλλης.

105. Τετραγώνου γνωρίζομεν τὰς δύο προβολὰς τοῦ κέντρου του καὶ τὰς δύο προβολὰς μιᾶς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται μία πλευρὰ αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραγώνου.

106. Δίδονται δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$. Διὰ μιᾶς ἀλλαγῆς ἐπιπέδου προβολῆς νὰ καταστοῦν αἱ τρίται προβολαὶ αὐτῶν παράλληλοι.

107. Δίδεται ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma_2'')$. Νὰ περιστραφῇ τὸ p περὶ κατακόρυφον ἄξονα, εἰς τρόπον ὥστε τὰ νέα του ἴχνη νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

108. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$ καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄξων περιστροφῆς περὶ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ στραφῇ ἡ εὐθεῖα α, διὰ νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν εὐθεῖαν β καὶ τὸ σημεῖον A νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ σημεῖον B.

109. Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, δοθεῖσαν ἀπόστασιν. Διερεύνησις.

110. Ἐπιπέδου p τὰ ἴχνη εἶναι παράλληλα πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ συμπίπτοντα ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως. Σημείου M αἱ δύο προβολαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἰχνῶν τοῦ ἐπιπέδου p. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου p.

111. Δίδονται τὰ ἐπίπεδα $p_1\,(\sigma'_{11}, \sigma''_{21})$ καὶ $p_2\,(\sigma'_{12}, \sigma''_{22})$ τεμνόμενα κατὰ ἐγκαρσίαν εὐθεῖαν. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου γωνίας p_1, p_2 καὶ τὰ διχοτομοῦντα αὐτὴν ἐπίπεδα.

112. Δίδονται τὰ ἐπίπεδα $p_1\,(\sigma'_{11}, \sigma''_{21})$ καὶ $p_2\,(\sigma'_{12}, \sigma''_{22})$. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου γωνίας p_1, p_2 καὶ τὰ διχοτομοῦντα αὐτὴν ἐπίπεδα.

113. Δίδεται σημεῖον $M\,(M', M'')$ καὶ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου $p \equiv (\alpha, \beta)$.

114. Δίδεται ἐπίπεδον $p\,(\sigma'_1, \sigma''_2)$, σημεῖον $M\,(M', M'')$ αὐτοῦ καὶ σημεῖον $N\,(N', N'')$ μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ τῆς εὐθείας $\varepsilon\,(\varepsilon', \varepsilon'')$ τοῦ ἐπιπέδου p, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου M καὶ ἀπεχούσης τοῦ σημείου N δοθεῖσαν ἀπόστασιν.

115. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ἀσύμβατοι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ $\beta\,(\beta', \beta'')$. Νὰ ἀχθῇ ὁριζόντιος εὐθεῖα ε τέμνουσα τὰς α καὶ β εἰς δύο σημεῖα A καὶ B, εἰς τρόπον ὥστε τὸ τμῆμα $\overline{AB}$ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

116. Δίδεται εὐθεῖα $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$ καὶ κατακόρυφος εὐθεῖα $z\,(z', z'')$. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας α καὶ σχηματίζον μετὰ τῆς εὐθείας z γωνίαν δοθεῖσαν.

117. Δίδονται τὰ σημεῖα Α (50, 35, 0), Β (0, 0, 65), Γ (– 40, 70, 0), Δ (75, 0, 40). Διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ διὰ τῆς εὐθείας ΓΔ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον συμπτώσεως.

Ζητοῦνται : α) Αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων. β) Τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας, μιᾶς τῶν διέδρων.

118. Δίδεται εὐθεῖα a (a', a'') καὶ σημεῖον M τοῦ ἄξονος y_{12}. Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας a ἐπίπεδον ἀπέχον τοῦ σημείου M ἀπόστασιν δοθεῖσαν.

119. Δίδεται εὐθεῖα a (a', a''). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἄξονος y_{12}, τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς εὐθείας a, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν τμῆμα.

120. Δίδεται σημεῖον M (M', M'') καὶ εὐθεῖα ε (ε', ε''). Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς εὐθείας ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2''), ἀπέχον τοῦ σημείου M ἀπόστασιν δοθεῖσαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Πολύεδρα

65. ΓΕΝΙΚΑ. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.

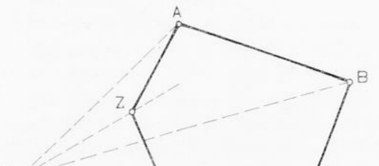
Ἓν πεπερασμένον σύνολον ἐπιπέδων κλειστῶν πολυγώνων, τοιούτων ὥστε ἕκαστον νὰ ἔχῃ μὲ ἓν ἄλλο κοινὴν πλευρὰν ἢ τμῆμα ἐσωτερικὸν πλευρᾶς, ἑκάστη δὲ κοινὴ πλευρὰ ἢ κοινὸν τμῆμα ἐσωτερικοῦ πλευρᾶς νὰ ἀνήκῃ εἰς δύο μόνον πολύγωνα τοῦ συνόλου, λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ *πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν.*

Τὰ πολύγωνα καλοῦνται ἕδραι, αἱ δὲ πλευραὶ ἀκμαὶ τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας. Ὅταν λέγωμεν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν, δὲν θεωροῦμεν τὰς προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν αὐτῆς, ἀλλὰ μόνον τὰ τμήματα τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν τὰ περιοριζόμενα ὑπὸ τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων, τῶν ἀπαρτιζόντων τὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν. Ὅταν, συνεπῶς, λέγωμεν ἐπίπεδον τομὴν μιᾶς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, νοοῦμεν τὴν τομὴν τῶν ἑδρῶν αὐτῆς ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ὄχι τῶν προεκτάσεων τῶν ἑδρῶν. Ἐπίπεδον p θὰ λέγωμεν ὅτι τέμνει ἢ δὲν τέμνει μίαν ἕδραν (E) τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, ἐφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου p, μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας (E), ἔχῃ ἢ δὲν ἔχῃ τμῆμα της, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πολυγώνου τῆς ἕδρας (E).

Πολύεδρον καλεῖται ἡ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ εἶναι κλειστὸν πολύγωνον ἢ κλειστὰ πολύγωνα. Εἰδικῶς, τὸ πολύεδρον καλεῖται κυρτόν, ὅταν πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ αὐτοῦ εἶναι κυρτὸν πολύγωνον.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἐξετάσωμεν μόνον κυρτὰ πολύεδρα.

Ἓν σημεῖον M καλεῖται *ἐσωτερικὸν* τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου (Π), ἐφόσον κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων, κατὰ τὰ ὁποῖα ἡ τυχοῦσα διὰ τοῦ σημείου τούτου εὐθεῖα τέμνει τὸ πολύεδρον (Π). Ἐὰν σημεῖον O δὲν εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου (Π), οὔτε κεῖται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, καλεῖται *ἐξωτερικόν.*



Σχ. 87

Θεωρήσωμεν τὸ κυρτὸν πολύεδρον (Π) καὶ τὸ ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ O. Φέρομεν διὰ τοῦ σημείου O τυχὸν ἐπίπεδον p, τέμνον τὸ πολύεδρον καὶ ἔστω $AB\Gamma\Delta EZ$ τὸ κυρτὸν πολύγωνον τῆς τομῆς (Σχ. 87). Αἱ εὐθεῖαι OA, OB, . . . OZ, ἀποτελοῦν μίαν ἐπίπεδον δέσμην ἡμιευθειῶν, ἡ ὁποία, ἀφοῦ τὸ σημεῖον O εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (Π), θὰ ἔχῃ δύο ἀκραίας ἀκτίνας, ἐν προκειμένῳ τὰς OA καὶ $O\Delta$. Αἱ ἀκτῖνες OA καὶ $O\Delta$ καλοῦνται *ὁρικαί*, τὸ δὲ σημεῖον O, κέντρον προβολῆς. Εἶναι ἐνδεχόμενον δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZ$ νὰ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς ὁρικῆς ἀκτῖνος, ὁπότε ὁλόκληρος ἡ πλευρά, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖνται αἱ κορυφαί, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὁρικῆς ταύτης ἀκτῖνος.

Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς O, τῶν ἐχόντων τοὐλάχιστον ἓν σημεῖον κοινὸν μὲ τὸ πολύεδρον (Π). Ἕκαστον τούτων θὰ τέμνῃ τὸ πολύεδρον κατὰ κυρτὸν πολύγωνον (τὸ ὁποῖον ἐνδεχομένως νὰ ἐκφυλίζεται εἰς σημεῖον), θὰ κεῖται δὲ ἐπ' αὐτοῦ μία ἐπίπεδος δέσμη ἀκτίνων κέντρου O, ὡς ἀνωτέρω, καθὼς καὶ αἱ ὁρικαὶ ἀκτῖνες τῆς δέσμης ταύτης. Τὸ σύνολον τῶν ὁρικῶν τούτων ἀκτίνων καλεῖται *πυραμὶς τοῦ περιγράμματος*, ἐνῶ ὁ τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν ὁρικῶν ἀκτίνων καὶ τοῦ πολυέδρου (Π), καλεῖται περίγραμμα τοῦ (Π), ὡς πρὸς τὸ κέντρον προβολῆς O. Τὰ ἐπίπεδα τοῦ συνόλου $(\sigma\pi)$ τὰ διερχόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ τοῦ (Π), καλοῦνται προβάλλοντα τὰς ἀκμὰς $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ἀπὸ τοῦ κέντρου O.

Τέμνομεν τώρα τὴν πυραμίδα τοῦ περιγράμματος δι' ἐπιπέδου p μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου προβολῆς O. Θὰ προκύψῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p ἓν πολύγωνον, ὅπερ καλεῖται *ἐρριμμένον περίγραμμα τοῦ πολυέδρου (Π), ἀπὸ τοῦ κέντρου προβολῆς O, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p*.

Ἂς ἀναφέρωμεν τὸ πολύεδρον (Π) εἰς τὸ σύστημα ἐπιπέδων προβολῆς e_1, e_2 καὶ ἂς θεωρήσωμεν ὡς κέντρον προβολῆς O, τὸ κοινὸν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῶν κατακορύφων εὐθειῶν, τῶν εὐθειῶν δηλαδὴ τῶν καθέτων ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον e_1, ὡς ἐπίπεδον δὲ p τὸ ἐπίπεδον e_1.

Ἡ πυραμὶς τοῦ περιγράμματος τοῦ πολυέδρου (Π) κορυφῆς O, καθίσταται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πρῖσμα, τὸ δὲ ἐρριμμένον περίγραμμα τοῦ πολυέδρου (Π) ἀπὸ τοῦ O, ἐπὶ τοῦ e_1 καλεῖται *ὁριζόντιον περίγραμμα τοῦ πολυέδρου Π*. Τὰ προβάλλοντα τὰς ἀκμὰς τοῦ πολυέδρου (Π) ἐπίπεδα, ἀπὸ τοῦ κέντρου O, καθίστανται κατακόρυφα, προβάλλοντα οὕτω καθέτως τὰς ἀκμὰς τοῦ πολυέδρου ἐπὶ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον e_1. Τὸ σύνολον τῶν ὁριζοντίων προβολῶν τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, καλεῖται *ὁριζοντία προβολὴ τοῦ πολυέδρου (Π)*. Δεδομένου ὅτι τὸ πολύεδρον (Π) ἐθεωρήθη κυρτόν, αἱ ὁριζόντιοι προβολαὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου (Π) ἢ οἱουδήποτε σημείου αὐτοῦ, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου περιγράμματος τοῦ πολυέδρου (Π) ἢ ἐντὸς αὐτοῦ.

Ἀντιστοίχως, ἐὰν ὡς κέντρον O ληφθῇ τὸ κοινὸν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῶν προσθίων εὐθειῶν, ὡς ἐπίπεδον δὲ p τὸ ἐπίπεδον e_2, τὸ ἐρριμμένον περίγραμμα τοῦ πολυέδρου (Π) ἀπὸ τοῦ κέντρου O ἐπὶ τοῦ e_2, καλεῖται *κατακόρυφον περίγραμμα τοῦ πολυέδρου (Π)*. Τὸ σύνολον δὲ τῶν κατακορύφων προβολῶν τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, καλεῖται *κατακόρυφος προβολὴ* τοῦ πολυέδρου (Π).

Κατὰ τὴν σχεδίασιν τῶν δύο προβολῶν τοῦ πολυέδρου (Π), γίνεται διάκρισις μεταξὺ τῶν καλυπτομένων καὶ μὴ ἀκμῶν αὐτοῦ, συμφώνως πρὸς τοὺς εἰς τὴν § 5 ἀναπτυχθέντας κανόνας. Ἐπὶ πλέον τῶν κανόνων ἐκείνων ἰσχύουν διὰ πᾶν κυρτὸν πολύεδρον καὶ οἱ ἑξῆς :

α΄) Τὸ ὁριζόντιον καὶ κατακόρυφον περίγραμμα κυρτοῦ πολυέδρου (Π) σχεδιάζεται διὰ συνεχοῦς γραμμῆς.

β΄) Ἐὰν μία γραμμὴ (Γ) κεῖται ἐπὶ κυρτοῦ πολυέδρου (Π), ἡ ὁριζόντιος ἢ ἡ κατακόρυφος προβολή της, δὲν θὰ ἀλλάξῃ τρόπον σημάνσεως, παρὰ ἐνδεχομένως μετὰ τὴν συνάντησίν της μετὰ τοῦ ὁριζοντίου ἢ κατακορύφου περιγράμματος τοῦ πολυέδρου (Π).

γ΄) Αἱ προβολαὶ τῶν ἀκμῶν τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου (Π), τῶν συνερχομένων εἰς κορυφὴν μὴ ἀνήκουσαν εἰς τὸ ἀντίστοιχον περίγραμμα, σχεδιάζονται μὲ συνεχῆ ἢ μὲ διακεκομμένην γραμμήν, ἐφόσον ἡ ἐν λόγῳ κορυφὴ δὲν καλύπτεται ἢ καλύπτεται, εἰς τὴν ἀντίστοιχον προβολήν.

66. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ.

Διὰ τὴν παράστασιν τῆς πυραμίδος ἢ τοῦ πρίσματος ἰσχύουν ὅσα διὰ τὴν παράστασιν τῶν πολυέδρων, ἐν § 61, ἀνεφέρθησαν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς πυραμίδος, ἑκάστη τῶν προβολῶν θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν πολύγωνον (προβολὴν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος), τὸ ὁποῖον, ὅταν τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, ἐκφυλίζεται εἰς διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα κείμενα ἐπ᾽ εὐθείας καὶ ἀπὸ τὰ τρίγωνα τὰ ἔχοντα κοινὴν κορυφὴν μέν, τὴν προβολὴν τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τῆς προβολῆς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

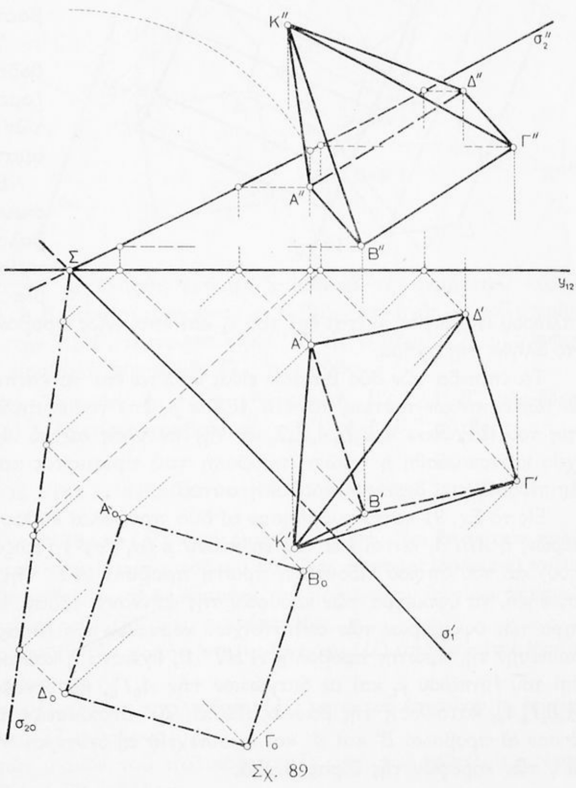
Σχ. 88

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πρίσματος, ἑκάστη τῶν προβολῶν θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα πολύγωνα μὲ πλευρὰς παραλλήλους (προβολὰς τῶν πολυγώνων τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος), τὰ ὁποῖα, ὅταν τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸν ἐπίπεδον προβολῆς, ἐκφυλίζονται εἰς δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ἀποτελούμενα ἀπὸ ἰσοπληθῆ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα ἀνὰ δύο ἴσα καὶ ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων πλευρῶν τῶν δύο, ὡς ἄνω ἴσων πολυγώνων.

Διὰ νὰ παρασταθῇ μία πυραμίς, διὰ νὰ κατασκευασθοῦν δηλαδὴ αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς, πρέπει νὰ δοθοῦν *ἐπαρκῆ γεωμετρικὰ στοιχεῖα καὶ συνθῆκαι*, βάσει τῶν ὁποίων νὰ εἶναι δυνατὸν νὰ καθορισθῇ γεωμετρικῶς ἡ πυραμίς. Συνήθως δίδεται τὸ ἐπίπεδον p τῆς βάσεως (ταυτιζόμενον ἢ μὴ πρὸς ἓν τῶν ἐπιπέδων προβολῆς) καὶ ἐπαρκῆ γεωμετρικὰ στοιχεῖα καὶ συνθῆκαι, ὥστε νὰ καθορίζεται ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐπὶ πλέον δὲ αἱ δύο προβολαὶ τῆς κορυφῆς K τῆς πυραμίδος ἢ γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἢ συνθῆκαι καθορίζουσαι τὴν κορυφὴν ταύτην.

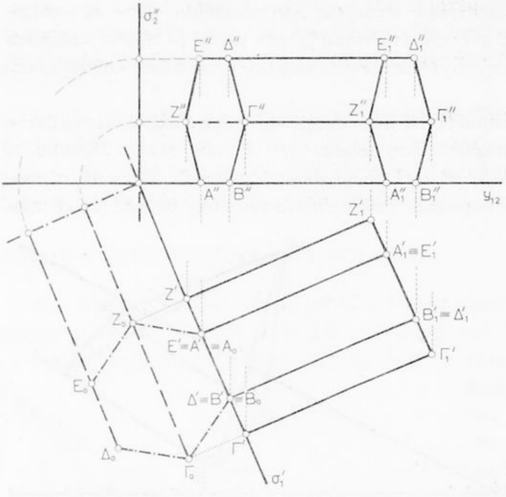
Εἰς τὸ σχ. 88 κατεσκευάσθησαν αἱ δύο προβολαὶ πυραμίδος, ἐχούσης βάσιν ἐπὶ τοῦ e_1 τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ κορυφαὶ A (15, 15, 0) καὶ B (5, 38, 0), τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς $B\Gamma = 40$, ἡ συνθήκη ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι θετικαὶ καὶ αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς K (35, 0, 40) τῆς πυραμίδος. Οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεδομένων ἐθεωρήθη ὅτι ἐκφράζουν χιλιοστὰ τοῦ μέτρου.

Εἰς τὸ σχ. 89 κατεσκευάσθησαν αἱ δύο προβολαὶ πυραμίδος ἐχούσης βάσιν ἐπὶ τοῦ p (σ'_1, σ_2'') (ὁριζομένου διὰ τῶν ἰχνῶν του), τῆς ὁποίας δίδονται αἱ πρῶται προβολαὶ A' (12, 38, 0) καὶ B' (40, 46, 0) δύο κορυφῶν, (τοῦ ἴχνους Σ τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἄξονος y_{12} λαμβανομένου ὡς ἀρχῆς συντεταγμένων), ἡ συνθήκη τοῦ νὰ ἔχουν, αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ θετικὰ ὑψόμετρα καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον K (45,35,40).



Σχ. 89

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς πρώτης προβολῆς τῆς βάσεως, ἐγένετο ἡ κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 καὶ κατεσκευάσθησαν κατὰ τὰ γνωστὰ αἱ κατακλίσεις A_0, B_0 τῶν σημείων A, B. Μὲ πλευρὰν τὴν A_0B_0 κατεσκευάσθη τὸ τετράγωνον $A_0B_0\Gamma_0\Delta_0$, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Γ_0 καὶ Δ_0 ἔχουν θετικὰ ὑψόμετρα, κεῖνται δηλαδή, ὡς πρὸς τὴν σ'_1, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κατακεκλιμένου ἐπιπέδου p, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται καὶ τὰ σημεῖα A_0 καὶ B_0.



Σχ. 90

Δι' ἀνακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p εὑρέθησαν αἱ πρῶται προβολαὶ Γ' καὶ Δ' καὶ ἐν συνεχείᾳ αἱ δεύτεραι προβολαὶ A'', B'', Γ'', Δ'' τῶν κορυφῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

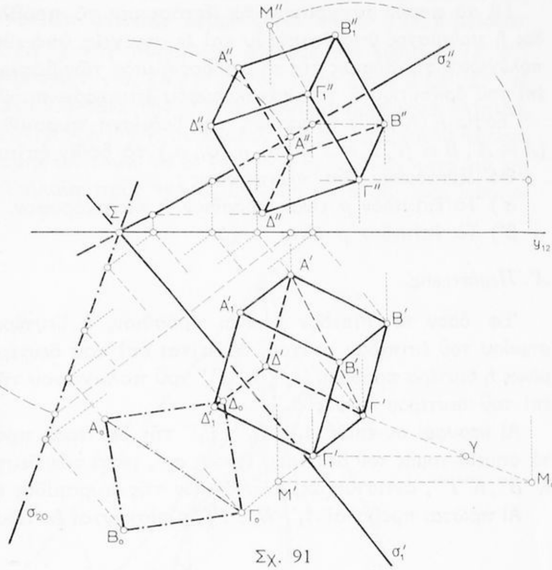
Ἀνάλογος εἶναι ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν προβολῶν ἑνὸς πρίσματος.

Εἰς τὸ Σχ. 90 κατεσκευάσθησαν αἱ δύο προβολαὶ ὀρθοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου μία τῶν ἑδρῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, κεῖται ἐπὶ τοῦ e_1 καὶ ἑπομένως προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ ὑπὸ τὸ ἀληθὲς της σχῆμα.

Τὰ ἐπίπεδα τῶν δύο βάσεων εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_1. Κατεκλίθη τὸ ἓν τῶν ἐπιπέδων τούτων, τὸ $AB\Gamma\Delta EZ \equiv p$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, κατασκευασθέντος τοῦ ἑξαγώνου $A_0B_0\Gamma_0\Delta_0E_0Z_0$ ἐκ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ $A_0B_0 \equiv A'B'$. Ἐν συνεχείᾳ κατεσκευάσθη ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ πρίσματος καὶ δι' ἀνακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p, ἡ δευτέρα προβολὴ αὐτοῦ.

Εἰς τὸ Σχ. 91 κατεσκευάσθησαν αἱ δύο προβολαὶ κύβου, τοῦ ὁποίου μία τῶν ἑδρῶν, ἡ $AB\Gamma\Delta$, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p (σ_1', σ_2'') (ὁριζομένου διὰ τῶν ἰχνῶν του) καὶ τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ πρώτη προβολὴ $A'\Gamma'$ τῆς διαγωνίου $A\Gamma$ καὶ ἡ συνθήκη, τὰ ὑψόμετρα τῶν κορυφῶν τῆς ἀπέναντι ἕδρας $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι μεγαλύτερα τῶν ὑψομέτρων τῶν ἀντιστοίχων κορυφῶν τῆς ἕδρας $AB\Gamma\Delta$. Διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς πρώτης προβολῆς $A'B'\Gamma'\Delta'$, ἐγένετο ἡ κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 καὶ μὲ διαγώνιον τὴν $A_0\Gamma_0$, κατεσκευάσθη τὸ τετράγωνον $A_0B_0\Gamma_0\Delta_0$, κατάκλισις τῆς βάσεως $AB\Gamma\Delta$. Δι' ἀνακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p, εὑρέθησαν αἱ προβολαὶ B' καὶ Δ' καὶ ἐν συνεχείᾳ αἱ δεύτεραι προβολαὶ A'', B'', Γ'', Δ'', τῶν κορυφῶν τῆς ἕδρας $AB\Gamma\Delta$.

Διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν προβολῶν τῆς ἀπέναντι ἕδρας $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ μιᾶς τῶν κορυφῶν αὐτῆς, ἔστω τῆς Γ_1. Πρὸς τοῦτο διὰ τοῦ σημείου $\Gamma(\Gamma', \Gamma'')$ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p (§ 35) καὶ ἐλήφθη ἐπ' αὐτῆς σημεῖον $M(M', M'')$. Περιεστράφη τὸ τμῆμα ΓM περὶ τὴν προσθίαν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ Γ, μέχρις ὅτου τοῦτο καταστῇ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_1, ὁπότε εἰς τὴν νέαν αὐτὴν θέσιν, ἡ πρώτη προβολὴ αὐτοῦ $\Gamma'M_0$, θὰ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος ΓM. Ἐπὶ τῆς $\Gamma'M_0$ ἐλήφθη τμῆμα $\Gamma'\gamma$ ἴσον μὲ τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου, τὴν πλευρὰν δηλαδὴ A_0B_0 τοῦ τετραγώνου $A_0B_0\Gamma_0\Delta_0$ καὶ ἤχθη ἐκ τοῦ σημείου γ παράλληλος πρὸς τὴν M_0M', τέμνουσα τὴν $\Gamma'M'$ εἴς τι σημεῖον Γ_1'. Τὸ τμῆμα $\Gamma'\Gamma'_1$ εἶναι ἡ πρώτη προβολὴ τῆς ἀκμῆς $\Gamma\Gamma_1$ τοῦ κύβου.



Σχ. 91

Ἐν συνεχείᾳ, συνεπληρώθη ἡ πρώτη προβολὴ $\Gamma'_1\Delta'_1A'_1B'_1$ τῆς ἕδρας $\Gamma_1\Delta_1A_1B_1$, καθὼς καὶ ἡ δευτέρα προβολὴ Γ_1'', Δ_1'', A_1'', B_1'' αὐτῆς.

67. ΤΟΜΗ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ ΥΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ. ΑΛΗΘΕΣ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΤΟΜΗΣ.

Ἡ τομὴ κυρτοῦ πολυέδρου (Π) ὑπὸ ἐπιπέδου p θὰ εἶναι ἓν κυρτὸν πολύγωνον. Αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τούτου θὰ εἶναι αἱ τομαὶ ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, αἱ δὲ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p.

Διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν τομὴν ἑνὸς πολυέδρου (Π) ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου p, δυνάμεθα νὰ ἀναζητήσωμεν :

α΄) τὴν τομὴν τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐφαρμόζοντες τὰς ἐν § 26 καὶ 27 μεθόδους.

β΄) τὴν τομὴν τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου (Π) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐφαρμόζοντες τὰς ἐν § 29 καὶ 30 μεθόδους.

Ἐνίοτε ὅμως χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὰς δύο ταύτας μεθόδους, ἐπιτυγχάνοντες ταχυτέραν λύσιν τοῦ τιθεμένου προβλήματος.

Εἰς τὸ παρὸν σύγγραμμα θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόβλημα τῆς τομῆς πυραμίδος ἢ πρίσματος ὑπὸ ἐπιπέδου καὶ ἐν συνεχείᾳ ὑπὸ εὐθείας, θεωροῦντες ὅτι τὸ πολύγωνον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ἢ μιᾶς τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος, κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἢ τοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου προβολῆς.

Ἔστω $K(K', K'')$ ἡ κορυφὴ τῆς δοθείσης πυραμίδος, $AB\Gamma$ ἡ βάσις αὐτῆς ($A \equiv A'$, $B \equiv B'$, $\Gamma \equiv \Gamma'$) καὶ p (σ_1, σ_2) τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Θὰ ἐξετάσωμεν δύο περιπτώσεις :

α') Τὸ ἐπίπεδον p εἶναι πρόσθιον ἢ κατακόρυφον.

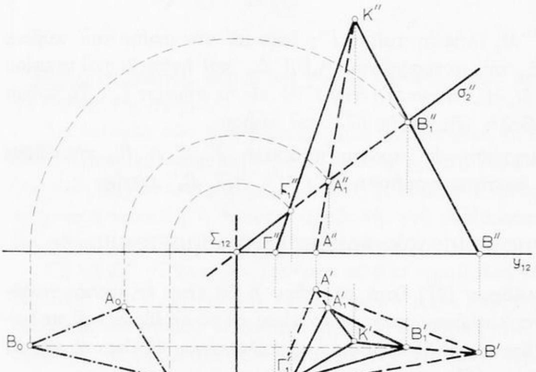
β') Τὸ ἐπίπεδον p εἶναι τυχόν.

Α'. Περίπτωσις.

Ἐφ' ὅσον τὸ ἐπίπεδον p εἶναι πρόσθιον, ἡ δευτέρα προβολὴ οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους του καὶ ἑπομένως ἡ δευτέρα προβολὴ $A_1'' B_1'' \Gamma_1''$ τοῦ πολυγώνου τῆς τομῆς $A_1 B_1 \Gamma_1$, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2''.

Αἱ κορυφαὶ συνεπῶς A_1'', B_1'', Γ_1'' τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς τομῆς, εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2'', μετὰ τῶν δευτέρων προβολῶν $K'' A''$, $K''B''$, $K''\Gamma''$, ἀντιστοίχως, τῶν ἀκμῶν τῆς πυραμίδος (Σχ. 92).

Αἱ πρῶται προβολαὶ A_1', B_1', Γ_1', εὑρίσκονται ἐκ τῶν δευτέρων ὡς ἄνω προβολῶν καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν $K'A'$, $K'B'$, $K'\Gamma'$.



Σχ. 92

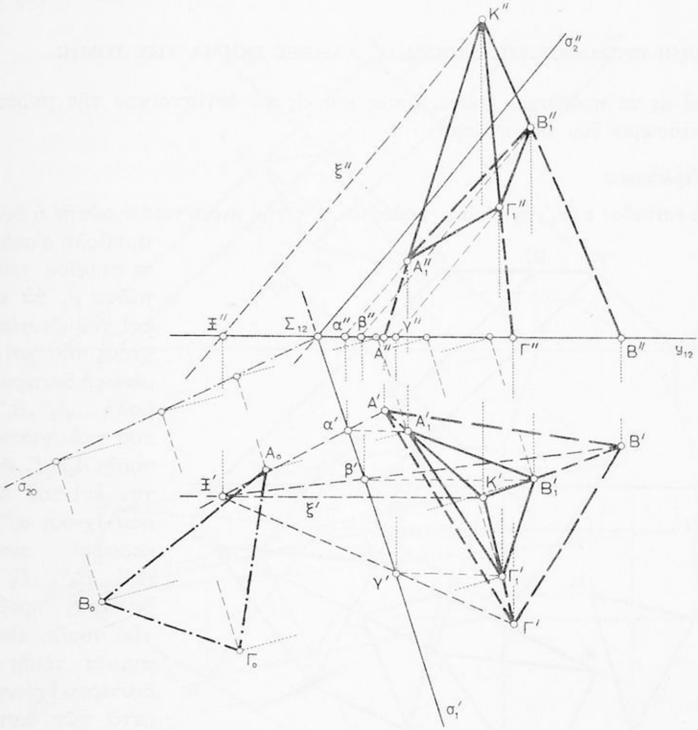
Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς, κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1. Εἰς τὸ Σχ. 92 φαίνεται ἡ κατασκευὴ τῆς κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τῆς τομῆς $AB\Gamma$.

Ἀνάλογοι εἶναι αἱ κατασκευαὶ ἂν τὸ ἐπίπεδον p εἶναι κατακόρυφον.

Β'. Περίπτωσις

Τὸ ἐπίπεδον p εἶναι τυχόν, ἔστωσαν δὲ σ'_1 καὶ σ_2'' τὰ ἴχνη αὐτοῦ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀκμῶν KA, KB, $K\Gamma$ τῆς πυραμίδος μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν μίαν τῶν ἐκτεθεισῶν ἐν § 29 μεθόδων. Διὰ λόγους ὅμως οἰκονομίας γραμμῶν καὶ ἁπλότητος, ἐφαρμόζομεν τὴν ἐν § 29, β μέθοδον.

Διὰ τῆς κορυφῆς $K(K', K'')$ τῆς πυραμίδος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\xi\,(\xi', \xi'')$ παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2 ($\sigma'_1 \equiv y_{12}$, σ_2'') καὶ ἔστω $\Xi\,(\Xi', \Xi'')$ τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας ταύτης (Σχ. 93). Διὰ τῆς εὐθείας ξ ἄγομεν βοηθητικὰ ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τῶν ἀκμῶν $KA, KB, K\Gamma$ τῆς πυραμίδος. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα τέμνουν τὸ μὲν ἐπίπεδον e_1 κατὰ δέσμην ἀκτίνων, τὸ δὲ ἐπίπεδον p, ὡς διερχόμενα διὰ τῆς $\xi \parallel \sigma_2$, κατὰ εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν σ_2, δηλαδὴ κατὰ δευτέρας ἰχνοπαραλλήλους.



Σχ. 93

Αἱ τομαὶ τῶν ἰχνοπαραλλήλων τούτων μετὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν τῆς πυραμίδος, ὁρίζουν τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τῆς ζητουμένης τομῆς.

Εἰς τὸ Σχ. 93 διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς κορυφῆς A_1 (A_1', A_1''), ἤχθη ἡ $\Xi'A'$ τέμνουσα τὴν σ'_1 εἰς τὸ σημεῖον α', ἴχνος τῆς δευτέρας ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ζητουμένου σημείου A_1. Ἀρκεῖ συνεπῶς διὰ τοῦ σημείου α' νὰ ἀχθῇ ἡ δευτέρα ἰχνοπαράλληλος τοῦ σημείου A_1, νὰ ἀχθῇ δηλαδὴ ἡ πρώτη προβολή της, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y_{12} καὶ ἡ ὁποία θὰ καθορίσῃ ἐπὶ τῆς $K'A'$ τὸ σημεῖον A'_1 καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ δευτέρα προβολή της, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2'' καὶ ἡ ὁποία θὰ καθορίσῃ ἐπὶ τῆς $K''A''$ τὸ σημεῖον A_1''. Ἀνάλογος εἶναι ἡ κατασκευὴ καὶ τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν τῆς τομῆς B_1 (B_1', B_1'') καὶ Γ_1 (Γ_1', Γ_1'').

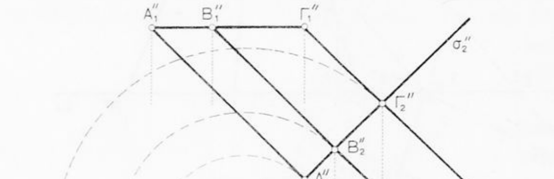
Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς τομῆς, κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1. Εἰς τὸ σχ. 93 φαίνεται ἡ κατασκευὴ τῆς κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τῆς τομῆς $AB\Gamma$.

68. ΤΟΜΗ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ. ΑΛΗΘΕΣ ΣΧΗΜΑ ΤΗΣ ΤΟΜΗΣ.

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὅπως καὶ εἰς τὸ ἀντίστοιχον τῆς πυραμίδος, θὰ ἐξετάσωμεν δύο περιπτώσεις.

Α'. Περίπτωσις

Τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') εἶναι πρόσθιον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δευτέρα προβολὴ οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἐπιπέδου p, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους του καὶ ἐπομένως ἡ δευτέρα προβολὴ A_2'' B_2'' Γ_2'' τοῦ πολυγώνου τῆς τομῆς $A_2B_2\Gamma_2$, θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2''. Αἱ κορυφαὶ συνεπῶς A_2'', B_2'', Γ_2'' τῆς δευτέρας προβολῆς τῆς τομῆς, εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ δευτέρου ἴχνους σ_2'', μετὰ τῶν δευτέρων προβολῶν $A''A_1''$, $B''B_1''$, $\Gamma''\Gamma_1''$ τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν (Σχ. 94).



Σχ. 94

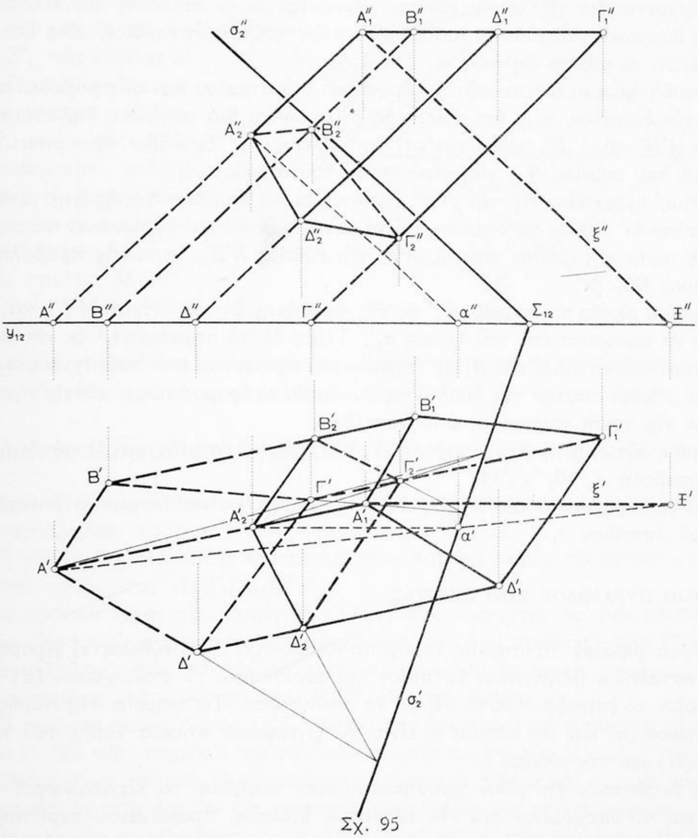
Αἱ πρῶται προβολαὶ $A'_2\ B'_2\ \Gamma'_2$ εὑρίσκονται ἐκ τῶν δευτέρων ὡς ἄνω προβολῶν καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν $A'A'_1$, $B'B_1'$, $\Gamma'\Gamma_1'$.

Τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς εὑρίσκεται διὰ κατακλίσεως τοῦ προσθίου ἐπιπέδου.

B'. Περίπτωσις

Τὸ ἐπίπεδον p (σ_1', σ_2'') εἶναι τυχόν. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀκμῶν τοῦ πρίσματος μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐφαρμόζομεν τὴν ἐν § 29, β μέθοδον.

Διά τινος κορυφῆς τῆς ἄνω βάσεως τοῦ πρίσματος π.χ. τῆς A (A', A''), φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ξ (ξ', ξ'') παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2 ($\sigma_2' \equiv y_{12}$, σ_2'') τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ἔστω Ξ (Ξ', Ξ'') τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας ταύτης (Σχ. 95).



Σχ. 95

Τὸ ἐπίπεδον (ξ, AA_1), ὡς παράλληλον πρὸς τὸ δεύτερον ἴχνος σ_2'' τοῦ ἐπιπέδου p, τέμνει τὸ ἐπίπεδον τοῦτο κατὰ μίαν δευτέραν ἰχνοπαράλληλον, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον ἴχνος a', εἶναι ἡ τομὴ τοῦ πρώτου ἴχνους σ_1' τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τοῦ πρώτου ἴχνους $A'\Xi'$ τοῦ ἐπιπέδου (ξ, AA_1). Ἡ διὰ τοῦ σημείου a' δευτέρα ἰχνοπαράλληλος τοῦ ἐπιπέδου p, ὁρίζει ἐπὶ τῆς ἀκμῆς AA_1 τὸ ζητούμενον σημεῖον A_2, τομῆς τῆς ἀκμῆς ταύτης μετὰ τοῦ ἐπιπέδου.

Τὴν μέθοδον ταύτην δυνάμεθα νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ διὰ τὰς ὑπολοίπους ἀκμὰς τοῦ πρίσματος.

Εἰς τὸ σχ. 95 ἐφηρμόσθη ἄλλη μέθοδος, ἡ καλουμένη τῆς *ὁμολογίας*, στηριζομένη ἐπὶ τῆς ἑξῆς ἀρχῆς :

Ἔστω $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$ τὸ τετράπλευρον κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸ πρῖσμα. Θεωροῦμεν τὰ τρία ἐπίπεδα e_1, p, ABA_1B_1. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, ἐφ' ὅσον δὲν διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, διὰ τοῦ ὁποίου καὶ θὰ διέρχωνται αἱ εὐθεῖαι τομῆς τῶν τριῶν τούτων ἐπιπέδων, ἀνὰ δύο λαμβανομένων, αἱ εὐθεῖαι δηλαδὴ σ_1, AB, A_2B_2.

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ εὐθεῖαι αὗται διέρχονται διὰ σημείου καὶ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον, π.χ. ἐπὶ τοῦ e_1 θὰ διέρχωνται διὰ σημείου, δηλαδὴ αἱ δύο εὐθεῖαι $A'B'$ καὶ $A'_1B'_1$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ'_1. Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ κατασκευὴ τοῦ σημείου B_1', γνωστοῦ ὄντος τοῦ σημείου A_1'.

Οὕτω, προεκτείνοντες τὴν $A'B'$ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τομῆς της μετὰ τῆς σ'_1, ἑνοῦμεν δι' εὐθείας τὸ σημεῖον τοῦτο μετὰ τοῦ A'_2 καὶ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον B'_2, ὡς τομὴν τῆς εὐθείας ταύτης μετὰ τῆς εὐθείας $B'B'_1$, πρώτης προβολῆς τῆς γενετείρας BB_1.

Ὁμοίως εὑρέθη τὸ σημεῖον Γ_2' ἐκ τῆς συνθήκης ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A'\Gamma'$ καὶ $A_2'\Gamma_2'$ πρέπει νὰ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ_1'. Τέλος δὲ τὸ σημεῖον Δ_2' ἐκ τῆς συνθήκης ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A'\Delta'$ καὶ $A_2'\Delta_2'$ πρέπει νὰ τέμνωνται ἐπὶ τοῦ ἴχνους σ_1'.

Τὴν μέθοδον ταύτην τῆς ὁμολογίας δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς τομῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου.

Εὑρέθη οὕτως ἡ πρώτη προβολὴ $A'_2B'_2\Gamma'_2\Delta'_2$ τῆς τομῆς καὶ ἐξ αὐτῆς ἡ δευτέρα προβολὴ $A_2''\, B_2''\, \Gamma_2''\Delta_2''$.

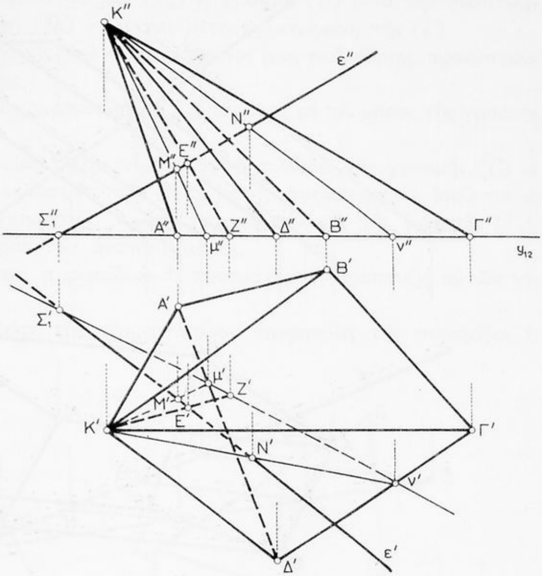
Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀληθὲς μέγεθος τῆς τομῆς, κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1.

69. ΤΟΜΗ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ ΥΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τομῆς πολυέδρου (Π) καὶ εὐθείας ε, φέρομεν διὰ τῆς ε κατάλληλον βοηθητικὸν ἐπίπεδον καὶ εὑρίσκομεν τὸ πολύγωνον (π) κατὰ τὸ ὁποῖον τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ πολύεδρον. Τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ πολυγώνου (π) καὶ τῆς εὐθείας ε, εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα τομῆς τοῦ πολυέδρου (Π) καὶ τῆς εὐθείας ε.

Ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον χρησιμοποιοῦμεν συνήθως τὸ κατακόρυφον ἢ τὸ πρόσθιον, τό διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ε. Εἰδικῶς, προκειμένου περὶ πυραμίδος ἢ περὶ πρίσματος, χρησιμοποιοῦμεν, ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον, τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ε καὶ διὰ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἢ παράλληλον πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

Εἰς τὸ Σχ. 96 εὑρέθη τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου $p \equiv (K, \varepsilon)$, ὁρισθὲν ὑπὸ τοῦ πρώτου ἴχνους Σ'_1 τῆς εὐθείας ε καὶ τοῦ πρώτου ἴχνους Z' τυχούσης εὐθείας αὐτοῦ, π.χ. τῆς KE. Τὸ βοηθητικὸν τοῦτο ἐπίπεδον τέμνει τὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τρίγωνον $(\pi) \equiv \mu K \nu$.



Σχ. 96

Τὰ σημεῖα $M\,(M', M'')$ καὶ $N\,(N', N'')$ τῆς τομῆς τοῦ τριγώνου $\mu K \nu$ καὶ τῆς εὐθείας ε, εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα τομῆς τῆς δοθείσης πυραμίδος καὶ τῆς εὐθείας ε.

70. ΤΟΜΗ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ.

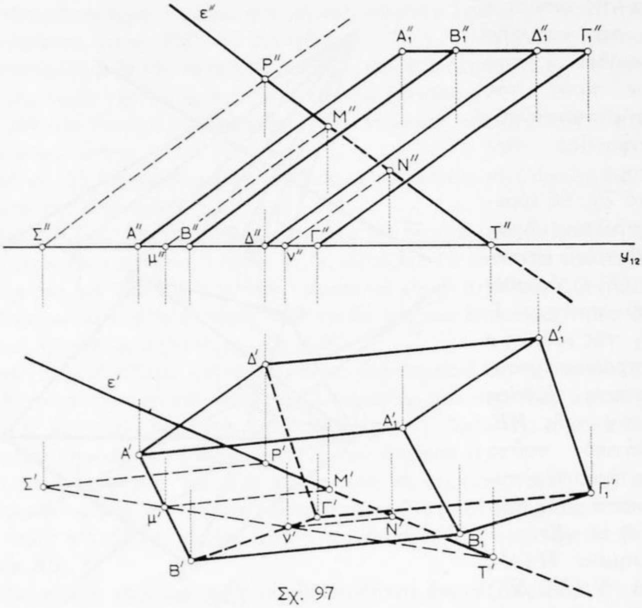
Ὡς βοηθητικὸν ἐπίπεδον χρησιμοποιοῦμεν τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ε καὶ παράλληλον πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ πρίσματος.

Εἰς τὸ Σχ. 97 δίδεται ἡ κατασκευὴ τῶν σημείων τομῆς τῆς εὐθείας $\varepsilon\,(\varepsilon', \varepsilon'')$ καὶ τοῦ πρίσματος $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$.

Τὸ πρῶτον ἴχνος τοῦ βοηθητικοῦ ἐπιπέδου διέρχεται ἀφ' ἑνὸς μὲν διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους Σ_1' τῆς εὐθείας ε καὶ ἀφ' ἑτέρου διὰ τοῦ πρώτου ἴχνους T'_1 εὐθείας δ, παραλλήλου πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος καὶ διερχομένης διά τινος σημείου $P\,(P', P'')$ τῆς εὐθείας ε.

Τὸ πρῶτον τοῦτο ἴχνος $\Sigma_1'T_1'$ τέμνει τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος εἰς τὰ σημεῖα μ' καὶ ν'. Ἐκ τῶν σημείων τούτων εὑρίσκονται τὰ σημεῖα M' καὶ N', ὡς τομαὶ τῆς εὐθείας ε', μὲ τὰς παραλλήλους τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν μ' καὶ ν', πρὸς τὰς πρώτας προβολὰς τῶν ἀκμῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

Ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῶν δευτέρων προβολῶν μ'' καὶ ν'' τῶν σημείων μ καὶ ν, εὑρίσκονται τὰ σημεῖα M'' καὶ N'', ὡς τομαὶ τῆς εὐθείας ε'' μὲ τὰς παραλλήλους τὰς



Σχ. 97

ἀγομένας ἐκ τῶν μ'' καὶ ν'', πρὸς τὰς δευτέρας προβολὰς τῶν ἀκμῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

71. ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ ΚΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ.

Ἔστωσαν $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots \pi_\nu$ αἱ ἕδραι κυρτοῦ πολυέδρου (Π). Ἡ ἀρίθμησις τῶν ἑδρῶν ἔχει γίνῃ κατὰ τοιοῦτον τρόπον ὥστε, ἡ τυχοῦσα μεταξὺ αὐτῶν ἕδρα π_i, νὰ ἔχῃ κοινήν τινα ἀκμὴν μὲ τὴν ἕδραν π_{i-1}, καθὼς καὶ μὲ τὴν ἕδραν π_{i+1}.

Κατακλίνομεν τὴν ἕδραν π_1 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας π_2, στρέφοντες αὐτὴν περὶ τὴν κοινὴν ἀκμήν των. Ἐν συνεχείᾳ κατακλίνομεν τὸ ζεῦγος ἑδρῶν π_1, π_2 ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας π_3, στρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν ἑδρῶν π_2, π_3 κ.ο.κ. μέχρις ὅτου κατακλιθοῦν ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου (Π) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας π_ν.

Προκύπτει οὕτως ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου, ἓν σύνολον πολυγώνων, ἀνὰ ἓν ἴσων πρὸς τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου (Π). Τὸ σύνολον τοῦτο καλεῖται *ἀνάπτυγμα* τοῦ πολυέδρου (Π), ἡ δὲ πρᾶξις τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ πολυέδρου εἰς τὸ ἀνάπτυγμα, καλεῖται *ἀνάπτυξις*.

Ἔστω πολυγωνική τις γραμμὴ ($Γ$) κειμένη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου, πρὸ τῆς ἀναπτύξεως αὐτοῦ καὶ ($Γ_0$) ἡ γραμμὴ ($Γ$) μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ πολυέδρου. Ἡ γραμμὴ ($Γ_0$) καλεῖται *μετεσχηματισμένη* τῆς ($Γ$).

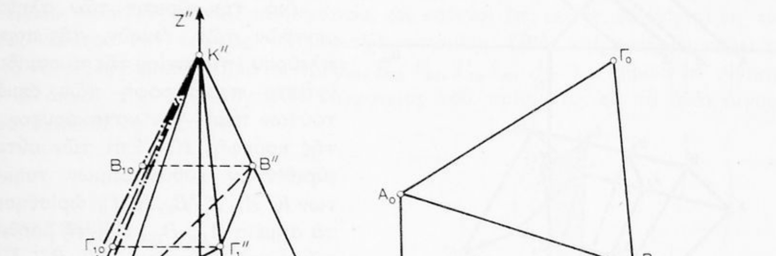
Ἐκ τοῦ τρόπου κατασκευῆς τοῦ ἀναπτύγματος ἑνὸς πολυέδρου, προκύπτουν αἱ ἑξῆς προφανεῖς ἰδιότητες :

α') Τὸ μῆκος τῆς μετεσχηματισμένης ($Γ_0$) ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς ($Γ$).

β') Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει ἑκάστη πλευρὰ τῆς γραμμῆς ($Γ$) μὲ τὰς ἀκμὰς τοῦ ($Π$), τὰς κειμένας ἐπὶ τῆς ἕδρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, ἰσοῦνται μὲ τὰς γωνίας τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἀντίστοιχος πλευρὰ τῆς γραμμῆς ($Γ_0$), μὲ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ ἀναπτύγματος.

Εἰδικῶς προκειμένου περὶ πυραμίδων ἢ πρισμάτων ἡ ἀνάπτυξις αὐτῶν γίνεται ὡς ἑξῆς :

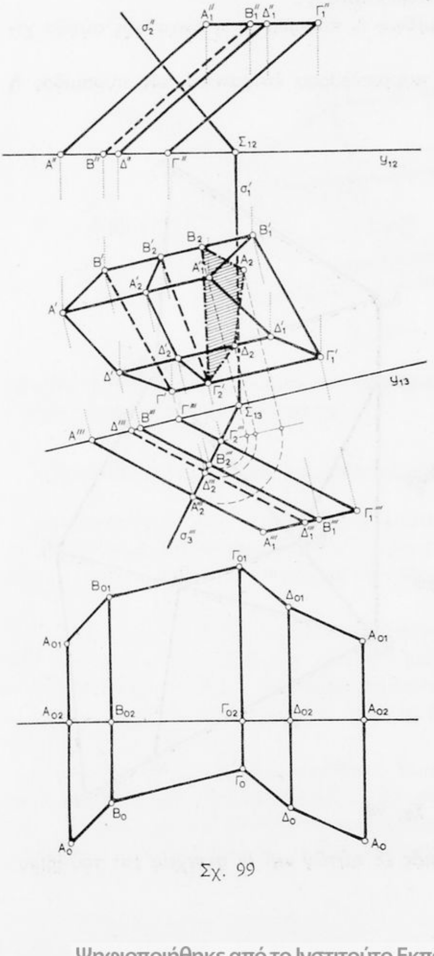
Ἀναπτύσσονται αἱ ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἢ



Σχ. 98

τοῦ πρίσματος, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς ἐξ αὐτῶν καὶ ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου, ἀναπτύσσονται ἡ βάσις τῆς πυραμίδος ἢ αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς τῆς ἀναπτύξεως ἑνὸς πολυέδρου, ἀνάγεται εἰς τὴν κατασκευὴν τῶν ἀληθῶν σχημάτων τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Ἐὰν τὸ δοθὲν πολύεδρον εἶναι πυραμίς, εὑρίσκομεν τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν ἀκμῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς, ἐφαρμόζοντες μίαν τῶν συστηματικῶν μεθόδων, κατὰ προτίμησιν τὴν μέδοθον τῆς περιστροφῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀληθῶν τούτων μεγεθῶν κατασκευάζομεν τὰς τριγωνικὰς ἕδρας τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος καὶ τὴν βάσιν αὐτῆς (ἀφοῦ εὕρωμεν προηγουμένως τὰς διαγωνίους τῆς βάσεως, ἐὰν αὕτη εἶναι πολύγωνον). Εἰς τὸ Σχ. 98 εὑρίσκεται τὸ ἀνάπτυγμα καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος τοῦ Σχ. 93.



Σχ. 99

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀληθῶν μεγεθῶν τῶν ἀκμῶν, τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος, ἐγένετο περιστροφὴ τῶν ἀκμῶν τούτων περὶ τὴν κατακόρυφον Z τῆς κορυφῆς K. Ἐπὶ τῶν οὕτως εὑρεθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων $K''A_0, K''B_0, K''\Gamma_0$ ὡρίσθησαν τὰ σημεῖα $A_{10}, B_{10}, \Gamma_{10}$, τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐκ τῶν σημείων A_1'', B_1'', Γ_1'', ἀχθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὸν ἄξονα y_{12}. Τὰ τμήματα $K''A_{10}, K''B_{10}, K''\Gamma_{10}$, εἶναι τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν τμημάτων $KA_1, KB_1, K\Gamma_1$.

Ἐν συνεχείᾳ κατεσκευάσθησαν τὰ διαδοχικὰ τρίγωνα $K_0A_0B_0$, $K_0B_0\Gamma_0$, $K_0\Gamma_0A_0$, καὶ $A_0B_0\Gamma_0$, ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν, κατεσκευάσθη δηλαδή, τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πυραμίδος. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν δὲ K_0A_0, K_0B_0, $K_0\Gamma_0$ ἐλήφθησαν τὰ τμήματα K_0A_{10}, K_0B_{10}, $K_0\Gamma_{10}$, ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ τμήματα $K''A_{10}$, $K''B_{10}$, $K''\Gamma_{10}$. Ἤχθη, τέλος, ἡ τεθλασμένη $A_{10}B_{10}\Gamma_{10}A_{10}$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, μετὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς πυραμίδος.

Ἐὰν τὸ δοθὲν πολύεδρον εἶναι πρῖσμα, τέμνομεν τοῦτο δι' ἐπιπέδου p καθέτου ἐπὶ τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ καὶ διὰ κατακλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p, ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς ἔχομεν τὰ ἀληθῆ μεγέθη τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς καθέτου ταύτης τομῆς (Σχ. 99). Ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ εὐθείας ε λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τμήματα, ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου τῆς καθέτου τομῆς καὶ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε, εἰς τὰ ἄκρα τῶν ὡς ἄνω τμημάτων. Ἐπὶ τῶν τμημάτων τούτων λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῶν ἀκμῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, τὰ κείμενα μεταξὺ τῆς καθέτου τομῆς καὶ τῶν δύο βάσεων τοῦ πρίσματος.

Ἡ κατασκευὴ αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἀναφερθείσης ἀνωτέρω ἰδιότητος, καθ' ἣν, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τῆς τομῆς μετὰ τῶν ἀκμῶν τοῦ πρίσματος, διατηροῦνται εἰς τὸ ἀνάπτυγμα. Ἐν προκειμένῳ ἡ τομὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ ἑπομένως, αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου τῆς τομῆς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ταύτας. Εἰς τὸ ἀνάπτυγμα αἱ ἀκμαὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι παράλληλοι, ἑπομένως αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, ὡς κάθετοι ἐπ' αὐτάς, θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου ἐπὶ ταύτας. Ἡ μετεσχηματισμένη, ὅθεν, τῆς τομῆς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $A_{02}B_{02}$, $B_{02}\Gamma_{02}$, $\Gamma_{02}\Delta_{02}$, $\Delta_{02}A_{02}$ κείμενα ἐπ' εὐθείας, αἱ δὲ ἀκμαὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος εἰς τὸ ἀνάπτυγμα, εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν.

72. ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

121. Κανονικοῦ τετραέδρου δίδονται αἱ κορυφαὶ A (15, 0, 0) καὶ Β (38, 25, 0). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ αὐτοῦ, ἂν ἡ μὲν κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ τοῦ e_1, ἔχουσα ἀπόστασιν μεγαλυτέραν ἐκείνης τῆς κορυφῆς B, ἡ δὲ κορυφὴ Δ ἔχει θετικὸν ὑψόμετρον.

122. Νὰ εὑρεθῇ ἡ δίεδρος γωνία κανονικοῦ τετραέδρου.

123. Κανονικοῦ ὀκταέδρου, εὑρισκομένου εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου καὶ ἔχοντος τὴν διαγώνιον EZ κατακόρυφον, δίδονται αἱ ὁριζόντιοι προβολαὶ A' (25, 0) καὶ B' (35, 18) τῶν κορυφῶν A καὶ B αὐτοῦ, τῆς ἀκμῆς AB οὔσης παραλλήλου πρὸς τὸ e_1. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ ὀκταέδρου, ἂν ἡ μὲν κορυφὴ E κεῖται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου e_1, αἱ δὲ κορυφαὶ Γ καὶ Δ ἔχουν μικροτέρας ἀποστάσεις ἢ αἱ κορυφαὶ A καὶ B.

124. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζει μία τῶν διαγωνίων κανονικοῦ ὀκταέδρου, μεθ' ἑκάστης τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, καθὼς καὶ μεθ' ἑκάστης τῶν ἑδρῶν.

125. Ἰσοσκελοῦς πυραμίδος ἐχούσης ὡς βάσιν κανονικὸν πεντάγωνον καὶ εὑρισκομένης εἰς τὴν περιοχὴν I τοῦ χώρου, δίδονται ἡ κορυφὴ K (0, 10, 0) καὶ ἡ κορυφὴ A (18, 50, 0) τῆς βάσεως. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ αὐτῆς, δεδομένου ὅτι ἡ πλευρὰ AB τῆς βάσεως μήκου 25 χιλ. κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1.

126. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $\alpha\,(\alpha', \alpha'')$, $\beta\,(\beta', \beta'')$, $\gamma\,(\gamma', \gamma'')$. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν α, β, γ.

127. Ἡ κορυφὴ A κύβου $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ἀκμῆς 30 χιλιοστῶν ἔχει συντεταγμένας (60, 0, 60), ἡ διαγώνιος $A\Gamma_1$ αὐτοῦ εἶναι κατακόρυφος, ἡ δὲ ἀκμὴ AA_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον e_2. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κύβου.

128. Ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς δίδεται ἡ ἕδρα $B\Gamma\Delta$, τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς A εἶναι τρισορθογώνιος. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραέδρου τούτου.

129. Τετράεδρον $ΑΒΓΔ$, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς A εἶναι τρισορθογώνιος, ἑδράζεται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου προβολῆς διὰ τῆς ἕδρας $ΒΓΔ$. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ τετραέδρου, ἂν δίδωνται αἱ πρῶται προβολαὶ τῶν ἡμιευθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ ἀκμαὶ $ΑΒ$, $ΑΓ$, $ΑΔ$.

130. Κύβου ἀκμῆς 30 χιλιοστῶν, ἡ κορυφὴ A ἔχει συντεταγμένας (50, 0, 0), αἱ δὲ ὁριζόντιοι προβολαὶ τῶν ἀκμῶν τῶν διερχομένων διὰ τῆς κορυφῆς A, ἔχουν δοθείσας διευθύνσεις. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κύβου.

131. Πυραμὶς ἔχουσα βάσιν τετράγωνον $ΑΒΓΔ$, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιοχῆς I τοῦ χώρου. Δίδονται αἱ κορυφαὶ A (10, 0, 0), B (20, 20, 0) καὶ K (25, 10, 30) καὶ ζητοῦνται: α) αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓΔ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου p, τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκμῆς ΚΔ καὶ καθέτου ἐπὶ ταύτην, β) τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς ταύτης, γ) τὸ ἀνάπτυγμα τῆς πυραμίδος καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς.

132. Δίδεται κύβος διὰ τῶν δύο προβολῶν του, ἑδραζόμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 διὰ μιᾶς ἕδρας του. Διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύβου ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν διαγωνίων του. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα αὐτῆς.

133. Δίδεται κύβος διὰ τῶν δύο προβολῶν του, ἑδραζόμενος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 διὰ μιᾶς ἕδρας του. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τοῦ κύβου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν μέσων, τριῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου, ἀνὰ δύο ἀσυμβάτων.

134. Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα τετραεδρικὴ πυραμίς, τῆς ὁποίας ἡ βάσις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, δι' ἐπιπέδου, εἰς τρόπον ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

135. Δίδεται τετράεδρον $ΑΒΓΔ$, τοῦ ὁποίου ἡ ἕδρα $ΒΓΔ$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 καὶ σημεῖον M, μὴ κείμενον ἐπὶ ἕδρας τοῦ τετραέδρου. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου M ἐπίπεδον, τέμνον τὸ τετράεδρον κατὰ παραλληλόγραμμον.

136. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς $ΑΒ$ τετραέδρου $ΑΒΓΔ$ δίδονται δύο σημεῖα M καὶ N. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐλαχίστου μήκους, τῆς ἐχούσης ἀκραίας κορυφὰς τὰ σημεῖα M καὶ N, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου (εἰδικὴ περίπτωσις $M \equiv N$). Διερεύνησις.

137. Δίδεται τετράεδρον $ΑΒΓΔ$, ἔνθα A (– 40, 90, 0), B (0, 20, 0), $Γ$ (80, 100, 0) καὶ $Δ$ (10, 65, 80). Ἔστωσαν M τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς $ΓΔ$, $Σ$ τὸ μέσον τῆς ἀκμῆς $ΒΔ$ καὶ P σημεῖον τῆς ἀκμῆς $ΑΓ$ τοιοῦτον ὥστε $\overline{ΓP} : \overline{PA} = 2$. Νὰ κατασκευασθοῦν α΄) αἱ δύο προβολαὶ τῆς τομῆς τοῦ τετραέδρου $ΑΒΓΔ$ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου $ΜΣΡ$, β) τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς, γ) αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κέντρου 0 τῆς εἰς τὸ τρίγωνον $ΜΣΡ$ ἐγγεγραμμένης περιφερείας καὶ δ) τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τετραέδρου καὶ ἡ μετεσχηματισμένη τῆς τομῆς.

138. Κύβου $ΑΒΓΔA_1B_1Γ_1Δ_1$ δίδονται αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ A (0, 80, 40) καὶ $Γ_1$ (60, 0, 0). Ἡ κορυφὴ Β ἔχουσα θετικὸν ὑψόμετρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_2. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ δύο προβολαὶ τοῦ κύβου.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΙΙ

Παράστασις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων διὰ μίας προβολῆς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

73. ΓΕΝΙΚΑ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΓΡΑΦΙΚΗ ΚΛΙΜΑΞ ΣΧΕΔΙΟΥ.

Διὰ τὴν παράστασιν σχήματος (Σ) τοῦ χώρου τῇ βοηθείᾳ ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς e_1, γίνεται χρῆσις, ἀφ' ἑνὸς μὲν τῆς ὀρθῆς προβολῆς (Σ') τοῦ σχήματος (Σ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, ἀφ' ἑτέρου δὲ τῶν ἀποστάσεων (ὑψομέτρων) τῶν διαφόρων σημείων τοῦ (Σ) ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου e_1.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο χωρίζει τὸν χῶρον εἰς δύο περιοχάς. Τὰ ὑψόμετρα τῶν σημείων τῆς μιᾶς περιοχῆς θεωροῦμεν θετικά, ὁπότε τὰ ὑψόμετρα τῶν σημείων τῆς ἄλλης θὰ εἶναι ἀρνητικά. Εἰς τὴν πρᾶξιν, προκειμένου περὶ παραστάσεως φυσικῶν ἢ τεχνιτῶν ἀντικειμένων, τὸ ἐπίπεδον e_1 λαμβάνεται ὁριζόντιον, κάθετον δηλαδὴ ἐπὶ τὴν διεύθυνσιν τῆς βαρύτητος, θεωρουμένης ὡς περιοχῆς μὲ θετικὰ ὑψόμετρα τῆς εὑρισκομένης ἄνωθεν τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου e_1. Τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου e_1 ἔχουν ὑψόμετρον $v = 0$.

Τὰ ὑψόμετρα τῶν διαφόρων σημείων ἑνὸς σχήματος ὁρίζονται, κατὰ κανόνα, δι' ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς μετρήσεως, τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων τούτων, διά τινος προεκλεγείσης μονάδος u, καλουμένης μονάδος μετρήσεως τῶν ὑψομέτρων.

Ἐὰν πρόκειται νὰ παραστήσωμεν φυσικὰ ἢ τεχνιτὰ ἀντικείμενα, μὲ μεγάλας διαστάσεις, ἐν σχέσει πρὸς τὸν πίνακα σχεδιάσεως, ἀντὶ τῆς προβολῆς (Σ') τοῦ χωρικοῦ σχήματος (Σ), σχεδιάζομεν ἓν σχῆμα (S') ὅμοιον πρὸς τὸ (Σ'), μὲ ἐκ τῶν προτέρων καὶ ἀναλόγως τῶν ἀναγκῶν, καθωρισμένον *λόγον ὁμοιότητος*.

Ὁ λόγος οὗτος ὁμοιότητος καλεῖται *ἀριθμητικὴ κλίμαξ τοῦ σχεδίου* καὶ ἐκφράζεται συνήθως ὑπὸ μορφὴν κλάσματος, οὕτω πως : (1 : 10), (1 : 20), (1 :50), (1 : 100) κ.λ.π.

Ἐὰν ὁρισθῇ ἡ μονὰς μετρήσεως u_1 τῶν διαστάσεων τοῦ σχήματος (Σ), (ἡ ὁποία συνήθως λαμβάνεται ἴση πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως u τῶν ὑψομέτρων), παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e_1, θὰ προκύψῃ ἡ ἀντίστοιχος μονὰς μετρήσεως τῶν διαστάσεων τοῦ σχήματος (S'), διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν ἀριθμητικὴν κλίμακα τοῦ σχεδίου.

Εἰς τὴν πρᾶξιν μονὰς μετρήσεως τῶν διαστάσεων τῶν σχημάτων τοῦ χώρου, λαμβάνεται τὸ γαλλικὸν μέτρον καὶ ἑπομένως ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν ἀντιστοίχων σχημάτων τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, θὰ εἶναι τὸ δέκατον, τὸ ἑκατοστόν, τὸ χιλιοστὸν κλπ. τοῦ μέτρου, ἐφόσον ἡ ἀριθμητικὴ κλίμαξ εἶναι ἀντιστοίχως (1 : 10), (1 : 100), (1 : 1000) κ.λ.π

Βάσει τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν προβολῶν τῶν σχημάτων τοῦ χώρου εἰς τὸν πίνακα σχεδιάσεως, χαράσσεται ἐπὶ τοῦ πίνακος τούτου εὐθύγραμμον τμήμα AB, διῃρημένον εἰς ἴσα πρὸς τὴν μονάδα ταύτην τμήματα, φέρον εἰς τὰ σημεῖα ὑποδιαιρέσεως κατὰ σειράν, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 0, 1, 2,... (Σχ. 100) καὶ καλούμενον *γραφικὴ κλίμαξ τοῦ σχεδίου.*

Σχ. 100

74. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ.

Τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ χώρου παρίσταται μὲ τὴν ὀρθὴν προβολήν του M', ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 καὶ μὲ τὸ προσημασμένον ὑψόμετρον αὐτοῦ υ. Τοῦτο συμβολίζεται οὕτω : $M'(\upsilon)$. Ἀντιστρόφως, ἐὰν δοθῇ τὸ σημεῖον M', ὡς ὀρθὴ προβολὴ σημείου M τοῦ χώρου καὶ τὸ προσημασμένον ὑψόμετρον υ, τὸ σημεῖον M εἶναι ὡρισμένον.

Ἐκ τούτων προκύπτει ὅτι :

Εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον $M'(\upsilon)$ τοῦ ἐπιπέδου e_1, ἔνθα M' ἡ προβολὴ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1 καὶ υ ἡ προσημασμένη ἀπόστασις τοῦ σημείου M ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου e_1, καὶ ἀντιστρόφως, εἰς πᾶν σημεῖον $M'(\upsilon)$ τοῦ ἐπιπέδου e_1 ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M τοῦ χώρου, εὑρισκόμενον ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_1 εἰς τὸ σημεῖον M' καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ προσημασμένον μέγεθος υ.

Προκύπτει οὕτω μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων M τοῦ χώρου καὶ τῶν σημείων $M'(\upsilon)$ τοῦ ἐπιπέδου e_1, τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν πᾶν γεωμετρικὸν σχῆμα τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1.

Θεωρήσωμεν τώρα ἐπίπεδον e_2 κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 καὶ ἔστω M'' ἡ προβολὴ τοῦ σημείου M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_2.

Τὸ ζεῦγος τῶν ἐπιπέδων e_1, e_2, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύστημα ἐπιπέδων προβολῆς, ὁπότε τὸ σημεῖον M θὰ ἔχῃ δύο παραστάσεις :

α') Ὡς πρὸς τὸ σύστημα τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς e_1, τὸ σημεῖον M ὁρίζεται διὰ τοῦ συμβόλου : $M'(\upsilon)$.

β') Ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν δύο ἐπιπέδων προβολῆς e_1, e_2, τὸ σημεῖον M ὁρίζεται διὰ τοῦ συμβόλου : $M(M', M'')$.

Ἡ παράστασις τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, ἡ ἀναζήτησις ἰδιοτήτων καὶ ὁ τρόπος ἐπιλύσεως τῶν διαφόρων προβλημάτων τῶν ἀφορώντων εἰς τὰ γεωμετρικὰ σχήματα, ὅταν τὰ σχήματα ταῦτα ἀναφέρονται εἰς σύστημα ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς καὶ ὑψομέτρων, δύνανται νὰ προκύψουν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων παραστάσεων, ἰδιοτήτων καὶ προβλημάτων, τῶν ἀφορώντων εἰς τὰ αὐτὰ σχήματα, ὅταν ταῦτα ἀναφέρονται εἰς σύστημα δύο ἐπιπέδων προβολῆς.

Πᾶν πρόβλημα λοιπὸν ἀφορῶν εἰς τὴν παράστασιν ἢ τὰς ἰδιότητας γεωμετρικοῦ τινὸς σχήματος, ὅταν τὸ σχῆμα τοῦτο ἀναφέρεται εἰς ἓν ἐπίπεδον προβολῆς e_1, θὰ ἠδύνατο νὰ ἐπιλυθῇ εἰς ἓν σύστημα δύο ἐπιπέδων προβολῆς e_1, e_2, ἡ δὲ λύσις του νὰ συμμορφωθῇ πρὸς τὸ σύστημα ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς e_1 καὶ τῶν ὑψομέτρων.

Θὰ μελετήσωμεν ἐν τούτοις κατωτέρω, ἀναφερόμενοι εἰς ἓν ἐπίπεδον προβολῆς, μερικὰ ἐκ τῶν ἐξετασθέντων ἤδη εἰς τὸ πρῶτον βιβλίον προβλημάτων, ἐπὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἐπιπέδων.

75. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Θεωρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν α τοῦ χώρου μὴ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον e_1. Ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ ἔχῃ ὡς ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου e_1, μίαν εὐθεῖαν α', γεωμετρικὸν τόπον τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων της. Ὅθεν:

Πᾶσα εὐθεῖα α τοῦ χώρου, ἡ ὁποία δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, ἔχει ὡς ὀρθὴν προβολὴν μίαν εὐθεῖαν α'.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτῆς καθίσταται σημεῖον.

Ἀντιστρόφως, μία εὐθεῖα α' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ προβολῆς δὲν ὁρίζει μίαν μόνην εὐθεῖαν τοῦ χώρου. Οἱαδήποτε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς, τοῦ διερχομένου διὰ τῆς εὐθείας α', δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἔχει ὡς προβολὴν τὴν εὐθεῖαν α'.

Διὰ νὰ ὁρισθῇ λοιπὸν ἡ εὐθεῖα α, δὲν ἀρκεῖ ἡ εὐθεῖα α'. Διὰ τὸν ὁρισμόν της ἀπαιτεῖται νὰ δοθοῦν τὰ ὑψόμετρα δύο σημείων της.

Ὅθεν :

Διὰ νὰ ὁρισθῇ ἡ εὐθεῖα α τοῦ χώρου, ἀρκεῖ νὰ δοθοῦν τὰ ὑψόμετρα δύο σημείων της.

Ἐὰν τὰ ὑψόμετρα υ_1 καὶ υ_2 τῶν δύο σημείων τῆς εὐθείας α εἶναι ἴσα, ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ e_1.

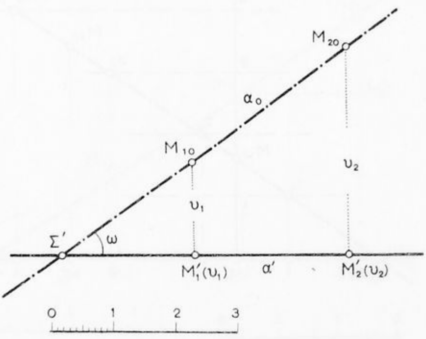
76. ΙΧΝΟΣ ΓΩΝΙΑ ΚΛΙΣΕΩΣ ΚΑΙ ΒΑΘΜΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Ἔστω α' ἡ προβολὴ εὐθείας α καὶ $M_1'(\upsilon_1)$, $M_2'(\upsilon_2)$ δύο σημεῖα αὐτῆς.

Κατακλίνομεν τὸ διὰ τῶν α καὶ α' ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς (Σχ. 101). Ἔστωσαν δὲ M_{10} καὶ M_{20} αἱ κατακλίσεις τῶν σημείων M_1 καὶ M_2 καὶ Σ' τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν $\alpha_0 \equiv M_{10}M_{20}$ καὶ α'.

Τὸ τμῆμα $\overline{M_{10}M_{20}}$ εἶναι τὸ ἀληθὲς μέγεθος τοῦ τμήματος $\overline{M_1M_2}$. Τὸ σημεῖον Σ' εἶναι τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς.

Καλοῦμεν *γωνίαν κλίσεως* τῆς εὐθείας α, τὴν ἐλαχίστην γωνίαν τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα α, μὲ τὰς διὰ τοῦ ἴχνους της Σ' διερχομένας εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου e_1.



Σχ. 101

Εἰς τὸ Σχ. 101 ἡ γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας a εἶναι ἡ γωνία $\omega = M_1'\Sigma' M_{10}$.

Τὴν τριγωνομετρικὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας κλίσεως καλοῦμεν *κλίσιν* τῆς εὐθείας a, τὴν δὲ τριγωνομετρικὴν συνεφαπτομένην *βαθμίδα*.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων προκύπτει :

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{v_2 - v_1}{\overline{M_1'M_2'}}, \qquad \beta = \sigma\varphi\omega = \frac{\overline{M_1'M_2'}}{v_2 - v_1}$$

77. ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΗ ΚΛΙΜΑΞ ΕΥΘΕΙΑΣ.

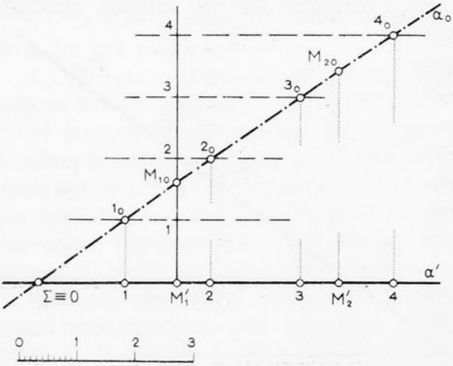
Ἐὰν ἐπὶ τῆς προβολῆς a', εὐθείας τινὸς a, ἔχουν σημειωθῆ αἱ προβολαὶ σημείων της, τῶν ὁποίων τὰ ὑψόμετρα εἶναι διαδοχικοὶ ἀκέραιοι (τῆς Ἀλγέβρας) ἀριθμοί, λέγομεν ὅτι ἔχομεν τὴν *ὑψομετρικὴν κλίμακα* τῆς εὐθείας a. Τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα εὐθείας a συμβολίζομεν διὰ τοῦ $[\,a'\,]$.

Ἔστωσαν $[\,a'\,]$ καὶ $[\,\beta'\,]$ αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες δύο εὐθειῶν a καὶ β. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι a' καὶ β' εἶναι παράλληλοι, τὰ ἐπ' αὐτῶν ἀναγραφόμενα ὑψόμετρα αὐξάνουν ὁμορρόπως καὶ αἱ βαθμίδες τῶν εὐθειῶν a καὶ β εἶναι ἴσαι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο κλίμακες καλοῦνται *ἰσοδύναμοι*, γράφομεν δὲ συμβολικῶς :

$$[\,a'\,] = [\beta'\,]$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι, δύο ὑψομετρικαὶ κλίμακες ἰσοδύναμοι συμπίπτουν, διὰ τῆς μεταφορᾶς τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τοῦ διανύσματος μὲ ἀρχὴν ἓν σημεῖον τῆς πρώτης, ὑψομέτρου v καὶ πέρας τὸ σημεῖον τῆς δευτέρας ὑψομέτρου v.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι, ἂν δύο ὑψομετρικαὶ κλίμακες $[\,a'\,]$ καὶ $[\,\beta'\,]$ εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν ἓν σημεῖον M' τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου κοινόν, αἱ εὐθεῖαι a καὶ β θὰ συμπίπτουν. Τοῦτο δὲ διότι, ἂν ληφθῆ ὡς διάνυσμα μεταφορᾶς τὸ μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{M'M'}$, αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες συμπίπτουν.



Σχ. 102

Ἡ κατασκευὴ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος εὐθείας ὁριζομένης διὰ τῶν σημείων M_1' (v_1) καὶ M_2' (v_2), γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

α') Ἐκ τῶν ὑψομέτρων v_1 καὶ v_2 ὑπολογίζομεν τὴν βαθμίδα β καὶ ὁρίζομεν τῇ βοηθείᾳ ταύτης καὶ ἑνὸς τῶν δοθέντων σημείων, ἓν σημεῖον M' ἀκεραίου ὑψομέτρου. Ἐν συνεχείᾳ χαράσσομεν τὴν κλίμακα ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ M'. Ἐὰν v τὸ ἀκέραιον ὑψόμετρον τοῦ σημείου M', ἡ ἀπόστασις $\overline{M'_1M'} = \beta(v - v_1)$

β') Κατακλίνομεν τὴν α καὶ ἐπὶ τῆς τυχούσης καθέτου ἐπὶ τὴν α' π.χ. τῆς $M_1'M_{10}$, λαμβάνομεν ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν πόδα M'_1 καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν θετικῶν ὑψομέτρων τὰ σημεῖα 1, 2, 3, . . . , ἔνθα $M_1'\,1 = u$, $M_1'\,2 = 2u$, $M_1'3 = 3u$,..., u οὔσης τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν ὑψομέτρων (Σχ. 102).

Ἐκ τῶν σημείων τούτων φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν α' τεμνούσας τὴν α_0, εἰς τὰ σημεῖα 0, 1_0, 2_0, 3_0, . . .

Ἐὰν τώρα ἐκ τῶν σημείων 0, 1_0, 2_0, 3_0,... φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α', λαμβάνομεν τὰ σημεῖα 1, 2, 3, . . . τῆς ζητουμένης ὑψομετρικῆς κλίμακος. Τὴν κλίμακα ταύτην δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν καὶ πέραν τοῦ σημείου $\Sigma \equiv 0$, διὰ τῶν σημείων ἀρνητικῶν ὑψομέτρων.

Ἡ λύσις τῶν προβλημάτων τῆς Παραστικῆς Γεωμετρίας, τῶν ἀφορώντων εἰς εὐθείας καὶ ἀναφερομένων εἰς ἓν ἐπίπεδον προβολῆς, διευκολύνεται σημαντικῶς διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ὑψομετρικῶν κλιμάκων τῶν εὐθειῶν.

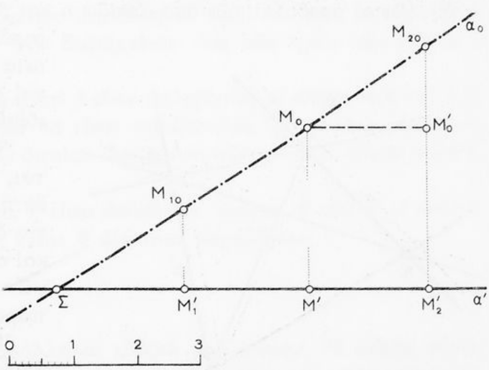
78. ΘΕΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ.

Ἐὰν σημεῖον M κεῖται ἐπὶ εὐθείας α, ἡ προβολὴ αὐτοῦ M' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς προβολῆς α' τῆς εὐθείας α. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ προβολὴ M' σημείου M κεῖται ἐπὶ τῆς προβολῆς α' εὐθείας α, δὲν ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας α. Διὰ νὰ κεῖται πρέπει ἐπὶ πλέον τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου A τῆς εὐθείας α, ἔνθα ἡ προβολὴ A' τοῦ σημείου A συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον M'.

Τὸ πρόβλημα, δοθείσης τῆς προβολῆς M' σημείου M εὐθείας α, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M καὶ ἀντιστρόφως, νὰ σημειωθῇ ἡ προβολὴ M' σημείου M δοθέντος ὑψομέτρου, κειμένου ἐπὶ εὐθείας α, λύεται ὡς ἑξῆς :

Κατακλίνομεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1 τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς α καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ e_1 (Σχ. 103).

Ἐκ τοῦ σημείου M' φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν α', ἥτις τέμνει τὴν κατάκλισιν α_0 τῆς εὐθείας α, εἰς τὸ σημεῖον M_0. Τὸ τμῆμα $M'M_0$ εἶναι τὸ ζητούμενον ὑψόμετρον τοῦ σημείου M.



Σχ. 103

Ἀντιστρόφως, διὰ νὰ σημειώσωμεν ἐπὶ τῆς προβολῆς α' τῆς εὐθείας α, τὸ σημεῖον M', προβολὴν σημείου M τῆς α, δοθέντος ὑψομέτρου, λαμβάνομεν ἐπὶ καθέτου τινὸς $M_2'M_{20}$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α', τμῆμα $\overline{M_2'M'_0}$ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὑψόμετρον καὶ ἐκ τοῦ σημείου M_0 φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν α'. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν εὐθεῖαν α_0 εἰς τὸ σημεῖον M_0, ἐξ οὗ προκύπτει τὸ σημεῖον M'.

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν v ἀπ' αὐτοῦ, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν ἢ ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἐφόσον τὸ δοθὲν ὑψόμετρον εἶναι διάφορον τοῦ v ἢ ἴσον πρὸς αὐτό.

79. ΕΥΘΕΙΑΙ ΣΥΜΒΑΤΑΙ ΚΑΙ ΑΣΥΜΒΑΤΟΙ.

Ἔστωσαν α καὶ β δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι εἰς σημεῖον M. Ἐφόσον τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν εὐθειῶν, ἡ προβολὴ αὐτοῦ M' θὰ πρέπει νὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν προβολῶν α' καὶ β' τῶν δύο εὐθειῶν, τὸ δὲ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M', λογιζόμενον τόσον ἐπὶ τῆς α', ὅσον καὶ ἐπὶ τῆς β', νὰ εἶναι τὸ αὐτό. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ προβολαὶ α' καὶ β' τῶν εὐθειῶν α καὶ β τέμνωνται εἰς σημεῖον M' καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M', λογιζόμενον τόσον ἐπὶ τῆς εὐθείας α', ὅσον καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας β', εἶναι τὸ αὐτό, αἱ εὐθεῖαι α καὶ β διέρχονται διὰ τοῦ σημείου M ἄρα :

Διὰ νὰ τέμνωνται δύο εὐθεῖαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἀφ' ἑνὸς μὲν αἱ προβολαὶ των νὰ τέμνωνται, ἀφ' ἑτέρου δὲ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν προβολῶν, λογιζόμενον ἐπὶ ἑκατέρας τούτων, νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὑψόμετρον.

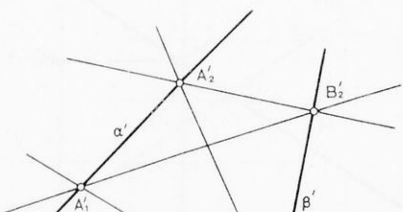
Ἐὰν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι α καὶ β διὰ τῶν προβολῶν καὶ τῶν ὑψομέτρων δύο σημείων των, ὁ ἔλεγχος τοῦ ἐὰν αὗται τέμνωνται ἢ εἶναι ἀσύμβατοι, γίνεται ὡς ἑξῆς:

α') Ἐὰν αἱ προβολαὶ τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β τέμνωνται ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως εἴς τι σημεῖον M', ἀρκεῖ διὰ κατακλίσεως τῶν προβαλλόντων τὰς εὐθείας ἐπιπέδων, νὰ εὕρωμεν γραφικῶς τὰ ὑψόμετρα τοῦ σημείου M' διὰ τὴν εὐθεῖαν α καὶ τὴν εὐθεῖαν β. Αἱ εὐθεῖαι α καὶ β θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι ἀσύμβατοι, ἐφόσον τὰ ὑψόμετρα τοῦ M' εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα.

β') Ἐὰν αἱ προβολαὶ τῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β τέμνωνται ἐκτὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, θεωροῦμεν δύο σημεῖα A'_1, A'_2 ἐπὶ τῆς εὐθείας α' καὶ δύο σημεῖα B'_1, B'_2 ἐπὶ τῆς εὐθείας β'.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται, θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἑπομένως θὰ τέμνωνται ὁμοίως αἱ A_1B_1 καὶ A_2B_2, ὡς καὶ αἱ A_1B_2 καὶ A_2B_1 ἢ ἓν τῶν ζευγῶν τούτων θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ παραλλήλους εὐθείας.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ἀσύμβατοι, θὰ εἶναι ἀσύμβατοι ὁμοίως καὶ αἱ A_1B_1 καὶ A_2B_2, ὡς καὶ αἱ A_1B_2 καὶ A_2B_1.

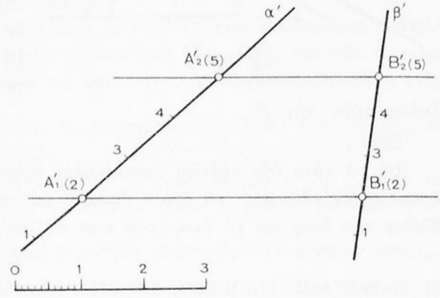


Σχ. 104

Τὰ τέσσαρα σημεῖα A'_1, A'_2, B'_1, B'_2 (Σχ. 104), ὁρίζουν τὰ ζεύγη εὐθειῶν ($A_1'B_1'$, A'_2B_2') καὶ ($A_1'B'_2$, $A_2'B_1'$), ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζει ἓν σημεῖον. Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν A_1A_2 καὶ B_1B_2 κεῖται ἐκτὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, ἓν τουλάχιστον ἐκ τῶν σημείων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν δύο, ὡς ἄνω, ζευγῶν εὐθειῶν, θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως. Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, ὁπότε ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσωμεν τὰς εὐθείας τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τοῦ εὑρισκομένου ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως.

Ἐὰν τὰ ὑψόμετρα τῶν τεσσάρων σημείων, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τὰς δύο εὐθείας α καὶ β, ἐκφράζονται δι' ἀριθμῶν, τὰ δύο ὑψόμετρα τοῦ σημείου τομῆς τῶν προβολῶν των, εἴτε τοῦτο εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ πίνακος σχεδιάσεως εἴτε ἐκτὸς αὐτοῦ, δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν λογιστικῶς καὶ νὰ διαπιστωθῇ ἂν ταῦτα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ ἑπομένως, ἂν αἱ δύο εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται ἢ εἶναι ἀσύμβατοι.

Ἐάν, τέλος, αἱ εὐθεῖαι δίδωνται διὰ τῶν ὑψομετρικῶν κλιμάκων των, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A_1' καὶ A'_2 τῆς εὐθείας α' καὶ τὰ ἴσων πρὸς αὐτὰ ὑψομέτρων ἀντιστοίχως σημεῖα B'_1 καὶ B'_2 τῆς εὐθείας β' (Σχ. 105) καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας $A'_1B'_1$ αἱ $A'_2B'_2$. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται, θὰ ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον p, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ κεῖνται αἱ εὐθεῖαι A_1B_1 καὶ A_2B_2. Αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὡς ἑνοῦσαι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου, εἶναι ὁριζόντιοι καὶ ἑπομένως παράλληλοι πρὸς τὸ ἴχνος τοῦ ἐπιπέδου p, πρὸς τὴν εὐθεῖαν δηλαδὴ τὴν διερχομένην διὰ τῶν ἰχνῶν τῶν εὐθειῶν α καὶ β.



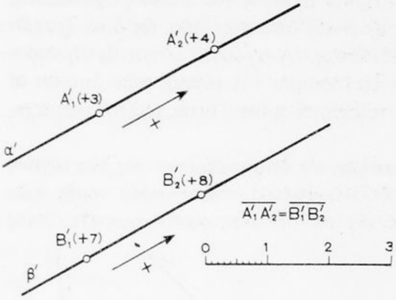
Σχ. 105

Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ἀσύμβατοι, αἱ εὐθεῖαι A_1B_1 καὶ A_2B_2 θὰ εἶναι μὲν ὁριζόντιοι, ἀλλὰ δὲν θὰ εἶναι παράλληλοι, διότι ἄλλως θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου ὤφειλον νὰ κεῖνται καὶ αἱ εὐθεῖαι α καὶ β. Ἑπομένως :

Αἱ εὐθεῖαι α καὶ β τέμνονται ἢ εἶναι ἀσύμβατοι, ἐφόσον αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι σημεῖα ἴσων ὑψομέτρων αὐτῶν, εἶναι ἢ δὲν εἶναι παράλληλοι.

80. ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ.

Ἔστωσαν α καὶ β δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τοῦ χώρου. Αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὡς παράλληλοι, θὰ σχηματίζουν τὴν αὐτὴν γωνίαν κλίσεως ω, μετὰ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς καὶ θὰ ἔχουν συνεπῶς ἴσας βαθμίδας. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ὑψόμετρά των θὰ αὐξάνουν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ προβολαὶ αὐτῶν α' καὶ β' θὰ εἶναι παράλληλοι, αἱ βαθμίδες των θὰ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ὑψόμετρά των θὰ αὐξάνουν ὁμορρόπως (Σχ. 106), ἄρα $[\alpha'] \equiv [\beta']$.



Σχ. 106

Ἀντιστρόφως, ἂν $[\alpha'] = [\beta']$ αἱ δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι. Πράγματι, ἐὰν ἔκ τινος σημείου A_1 τῆς εὐθείας α, ἀχθῆ ἡ παράλληλος εὐθεῖα α_1, πρὸς τὴν εὐθεῖαν β καὶ ἂν παρασταθῆ διὰ τοῦ $[\alpha'_1]$ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ αὐτῆς, θὰ εἶναι $[\alpha'_1] = [\beta']$. Ἐκ αὐτῆς καὶ τῆς προηγουμένης σχέσεως προκύπτει : $[\alpha'_1] = [\alpha']$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι α_1 καὶ α ἔχουν τὸ σημεῖον A κοινόν, θὰ συμπίπτουν (§ 73). Καὶ ἑπομένως ἡ α, ὡς συμπίπτουσα μετὰ τῆς α_1, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν β.

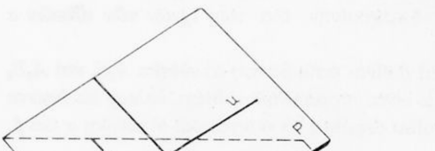
Ὅθεν :

Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἰσοδυνάμους ὑψομετρικὰς κλίμακας, νὰ ἔχουν δηλαδὴ τὰς προβολὰς των παραλλήλους, τὰς βαθμίδας των ἴσας καὶ τὰ ὑψόμετρά των αὐξανόμενα ὁμορρόπως.

81. ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ. ΙΧΝΟΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΚΑΙ ΙΧΝΟΚΑΘΕΤΟΙ. ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΗ ΚΛΙΜΑΞ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ὡς καὶ ἐν § 16 ἀνεφέρθη, εἰς τὴν Παραστατικὴν Γεωμετρίαν τὸ ἐπίπεδον παρίσταται συνήθως διὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν.

Ἡ μελέτη τῶν προβλημάτων τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, τῇ βοηθείᾳ τῆς παραστάσεως αὐτῶν δι' ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς, διευκολύνεται σημαντικῶς, ἐὰν τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὸ πρόβλημα ἐπίπεδα ὁρισθοῦν διὰ δύο εὐθειῶν, ἐξ ὧν ἡ μὲν εἶναι παράλληλος, ἡ δὲ κάθετος ἐπὶ τὰ ἴχνη τῶν ἐπιπέδων.



Σχ. 107

Ἔστωσαν p ἐπίπεδον ἀναφερόμενον εἰς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς e_1 καὶ σ τὸ ἴχνος αὐτοῦ (Σχ. 107). Αἱ παράλληλοι πρὸς τὸ ἴχνος εὐθεῖαι καλοῦνται *ἰχνοπαράλληλοι* τοῦ ἐπιπέδου p, ἑκάστη τούτων συμβολίζεται διὰ τοῦ i_v καὶ χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ ὑψομέτρου v τῶν σημείων της. Τὸ ἴχνος, εἶναι ἡ ἰχνοπαράλληλος ὑψομέτρου μηδέν, ἤτοι $\sigma \equiv i_0$.

Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἴχνος εὐθεῖαι καλοῦνται *ἰχνοκάθετοι ἢ γραμμαὶ κλίσεως*, συμβολίζονται δὲ διὰ τοῦ γράμματος u. Εἶναι προφανὲς ὅτι δὲν δύναται νὰ γίνῃ διάκρισις μεταξὺ αὐτῶν, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἰχνοπαραλλήλους.

Γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p καλεῖται ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν ἐπιπέδων p καὶ $\dot{e}_1$, ἰσοῦται δὲ προφανῶς μὲ τὴν γωνίαν κλίσεως τυχούσης ἰχνοκαθέτου αὐτοῦ.

Ἐὰν δοθῇ μία ἰχνοκάθετος ἐπιπέδου, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὁρίζεται, ὡς διερχόμενον δι᾽ αὐτῆς καὶ διὰ τῆς, διὰ τοῦ ἴχνους της καθέτου ἐπὶ ταύτην, εὐθείας τοῦ e_1. Ἐπειδὴ δὲ μία εὐθεῖα ὁρίζεται διὰ τῆς ὑψομετρικῆς της κλίμακος, ἕπεται :

Ἐὰν δοθῇ ἡ ὑψομετρικὴ κλίμαξ τυχούσης ἰχνοκαθέτου ἐπιπέδου p, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ὁρίζεται.

Δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἐπίπεδον p διὰ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος (u') τυχούσης ἰχνοκαθέτου αὐτοῦ καὶ διὰ τοῦτο τὴν κλίμακα ταύτην καλοῦμεν *ὑψομετρικὴν κλίμακα τοῦ ἐπιπέδου p*.

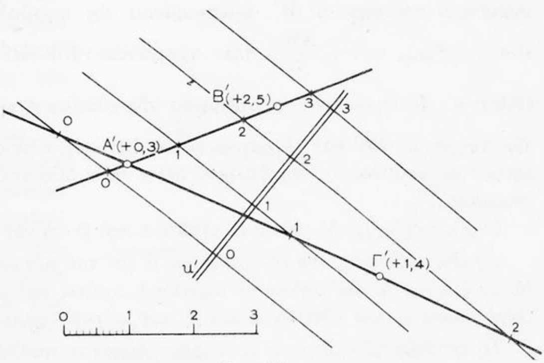
Τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα τοῦ ἐπιπέδου p, παριστῶμεν διὰ ζεύγους παραλλήλων εὐθειῶν, εἰς μικρὰν ἀπ᾽ ἀλλήλων ἀπόστασιν (Σχ. 108), ἐπὶ τῶν ὁποίων ἔχουν σημειωθῆ αἱ προβολαὶ σημείων μὲ ὑψόμετρα διαδοχικοὺς ἀκεραίους (τῆς Ἀλγέβρας) ἀριθμούς.

Ὁσάκις θέλομεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἓν ἐπίπεδον p ὁρίζεται διὰ τῆς ὑψομεμετρικῆς κλίμακός του, γράφομεν $p\,[u']$.

Ἔστω M' ἡ προβολὴ τυχόντος σημείου M ἰχνοκαθέτου u καὶ $\Sigma' \equiv \Sigma$ τὸ ἴχνος τῆς u, τὸ τρίγωνον $\Sigma M M'$ καλεῖται *κλισιμετρικὸν τρίγωνον* τοῦ σημείου M. (Σχ. XXVII).

Ἐὰν πρὸς καθορισμὸν τοῦ ἐπιπέδου p δοθοῦν αἱ προβολαὶ καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὑψόμετρα τριῶν σημείων του, ἡ κατασκευὴ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος αὐτοῦ γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν $A'(+0{,}3)$, $B'(+2{,}5)$ καὶ $\Gamma'(+1{,}4)$ τὰ δοθέντα σημεῖα. Κατασκευάζομεν κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 73) τὰς ὑψομετρικὰς κλίμακας δύο ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν, τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων. Εἰς τὸ Σχ. 108 κατεσκευάσθησαν αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες τῶν εὐθειῶν AB καὶ $A\Gamma$. Αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι σημεῖα τῶν δύο τούτων ὑψομετρικῶν κλιμάκων τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου, εἶναι ἰχνοπαράλληλοι τοῦ ἐπιπέδου $p \equiv AB\Gamma$. Εἰς τὸ Σχ. XXVIII καθὼς καὶ τὸ Σχ. 108 ἔχουν σχεδιασθῆ αἱ προβολαὶ τῶν ἰχνοπαραλλήλων ὑψομέτρου 0, 1, 2, 3. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουν τὴν προβολὴν τυχούσης ἰχνοκαθέτου u, ὁρίζουσαι ἐπ᾽ αὐτῆς τὴν ὑψομετρικὴν κλί- μακα τοῦ ἐπιπέδου p.



Σχ. 108

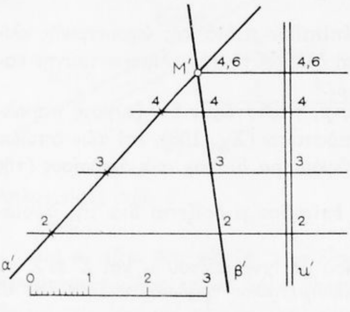
82. ΑΜΟΙΒΑΙΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ, ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ. ΣΧΕΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων προκύπτουν αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις :

α΄) Διὰ νὰ κεῖται σημεῖον M' ($υ$) ἐπὶ ἐπιπέδου p, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ὑψόμετρον $υ$ τοῦ σημείου M, νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου p, τοῦ ἔχοντος προβολὴν τὸ M'.

Ἐπειδὴ δὲ μία εὐθεῖα ὁρίζεται διὰ δύο σημείων της,

β΄) Διὰ νὰ κεῖται εὐθεῖα $ε$ ἐπὶ ἐπιπέδου p, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ κεῖνται ἐπ᾿ αὐτοῦ δύο σημεῖα της.



Σχ. 109

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι $α$ καὶ $β$ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον M, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ὑψόμετρον καὶ ἑπομένως ἐπὶ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος ἑκατέρας, θὰ φέρῃ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (Σχ. 109). Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι $α$ καὶ $β$ ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι σημεῖα τῶν δύο εὐθειῶν τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου, θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἀντιστρόφως, ἐὰν αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι σημεῖα, τῶν προβολῶν δύο εὐθειῶν $α$ καὶ $β$, τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου εἶναι παράλληλοι, αἱ εὐθεῖαι $α$ καὶ $β$ τέμνονται. Πράγματι, τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M', θεωρουμένου ὡς προβολῆς σημείου τῆς εὐθείας $α$, εἶναι : $(υ_{M'})_α = 4 + \frac{\overline{4M}}{\overline{34}}$, τῶν τμημάτων $\overline{4M}$ καὶ $\overline{34}$ μετρουμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας $α'$. Τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου τῆς εὐθείας $β$ εἶναι : $(υ_{M'})_β = 4 + \frac{\overline{4M}}{\overline{34}}$, τῶν τμημάτων $\overline{4M}$ καὶ $\overline{34}$ μετρουμένων ἐπὶ τῆς εὐθείας $β'$. Ἀλλ᾿ ἕνεκα τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ, τὰ δεύτερα μέλη τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων εἶναι ἴσα, ἑπομένως :

$(υ_{M'})_α = (υ_{M'})_β$. Αἱ εὐθεῖαι δηλαδὴ α καὶ β τέμνονται, ὅθεν :

γ΄) Διὰ νὰ κεῖνται δύο εὐθεῖαι $α$ καὶ $β$ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, διὰ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου), πρέπει καὶ ἀρκεῖ, αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι ζεύγη σημείων, τῶν εὐθειῶν $α$ καὶ $β$, τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου, νὰ εἶναι παράλληλοι.

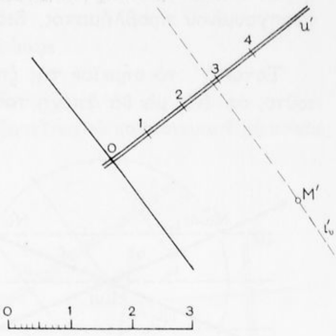
Τῇ βοηθείᾳ τῶν ὡς ἄνω κριτηρίων λύονται πολλὰ προβλήματα, ἀφορόντα εἰς τὴν σχετικὴν πρὸς ἄλληλα θέσιν τῶν τριῶν θεμελειωδῶν στοιχείων, τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Κατωτέρω δίδομεν μερικὰ παραδείγματα.

1) Δίδεται ἐπίπεδον p διὰ τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακός του [$κ$] καὶ ἡ προβολὴ M' σημείου M αὐτοῦ, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M.

Ἐφ᾿ ὅσον τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p, τὸ ὑψόμετρόν του εἶναι τὸ ὑψόμετρον τῆς ἰχνοπαραλλήλου τῆς διερχομένης δι᾿ αὐτοῦ. Ἀρκεῖ λοιπὸν διὰ τοῦ M' νὰ φέρωμεν τὴν ἰχνοπαράλληλον $i'_υ$, τὴν κάθετον δηλαδὴ ἐπὶ τὴν ὑψομετρικὴν κλίμακα. Τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου M εἶναι τὸ ὑψόμετρον v τῆς ἰχνοπαραλλήλου i_v (Σχ. 110).

2) Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον

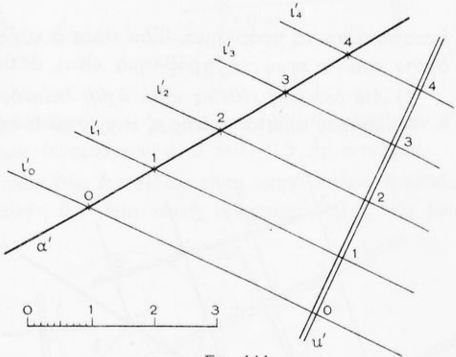
Ἐπειδὴ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα α καὶ τυχοῦσα ἰχνοκάθετος u τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου κεῖνται ἐπ' αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου, τῶν ὑψομετρικῶν κλιμάκων τῶν εὐθειῶν α καὶ u θὰ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 110

Ἑπομένως διὰ τῶν σημείων ὑψομέτρων 0, 1,2 . . . τῆς εὐθείας α', φέρομεν δέσμην παραλλήλων εὐθειῶν, τὰς $i'_0, i'_1, i'_2, \ldots$ (Σχ. 111). Ἡ τυχοῦσα κάθετος ἐπ' αὐτὰς εὐθεῖα u, θὲ τέμνεται ὑπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα ὑψομέτρων 0, 1,2, 3. . . καὶ ἑπομένως ἡ εὐθεῖα u' (0, 1, 2, 3. . .) $\equiv$ [u'], δύναται νὰ ληφθῇ ὡς ὑψομετρικὴ κλίμαξ τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου.

Τὸ τεθὲν πρόβλημα ἐπιδέχεται ἀπειρίαν λύσεων, ὑπάρχει δηλαδὴ ἀπειρία ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς α. Ἐὰν καλέσωμεν p ἓν τῶν ἐπιπέδων τούτων, ἡ βαθμὶς τῆς ὑψομετρικῆς του κλίμακος ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν παραλλήλων τῶν ἀγομένων ἐκ δύο σημείων τῆς εὐθείας α', μὲ ὑψόμετρα δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς. Ἡ βαθμὶς τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου p εἶναι μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν βαθμίδα τῆς εὐθείας α, ἐὰν λοιπὸν καλέσωμεν ω τὴν γωνίαν κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p καὶ ω' τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς εὐθείας α θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 111

$$\sigma\varphi\omega \leqslant \sigma\varphi\omega'$$

καὶ ἐπειδὴ πρόκειται περὶ ὀξειῶν γωνιῶν

$$\omega \geqslant \omega'$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι :

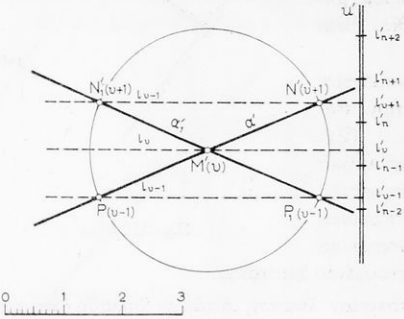
Δὲν δύναται νὰ ἀχθῇ διὰ δοθείσης εὐθείας ἐπίπεδον, ἔχον γωνίαν κλίσεως μικροτέραν τῆς γωνίας κλίσεως τῆς εὐθείας.

3) Διὰ δοθέντος σημείου ἐπιπέδου p, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κειμένη ἐπ' αὐτοῦ, ἔχουσα δοθεῖσαν κλίσιν.

Ἔστω $M'(v)$ τὸ δοθὲν σημεῖον, ω ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου καὶ ω' ἡ γωνία κλίσεως τῆς ζητουμένης εὐθείας α. Κατὰ τὸ τελικὸν συμπέρασμα τοῦ προηγουμένου προβλήματος, διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει :

$$\varepsilon\varphi\omega' \leqslant \varepsilon\varphi\omega$$

Ἔστω N' τὸ σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας ὑψομέτρου $v+1$. Τὸ σημεῖον τοῦτο, ἀφ' ἑνὸς μὲν θὰ ἀπέχῃ τοῦ σημείου M' ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν βαθμίδα $\beta = \sigma\varphi\omega'$ τῆς ζητουμένης εὐθείας α, ἀφ' ἑτέρου δὲ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἰχνοπαραλλήλου τοῦ ἐπιπέδου p ὑψομέτρου $v+1$, θὰ κεῖται συνεπῶς εἰς τὴν τομὴν τοῦ κύκλου (M', β) καὶ τῆς ἰχνοπαραλλήλου i'_{v+1} (Σχ. 112).



Σχ. 112

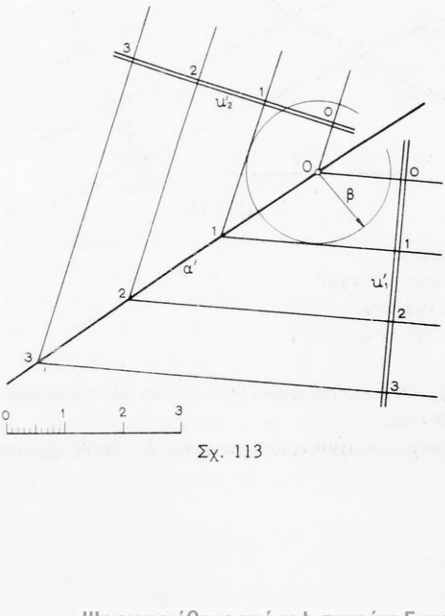
Ἐὰν ὁ κύκλος τέμνῃ τὴν ἰχνοπαράλληλον, ὁπότε $\varepsilon\varphi\omega' <$ εφω, ὑπάρχουν δύο εὐθεῖαι ἱκανοποιοῦσαι τὸ πρόβλημα αἱ α καὶ α_1 (Σχ. 112). Ἐὰν ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῆς ἰχνοπαραλλήλου, ὁπότε $\varepsilon\varphi\omega' = \varepsilon\varphi\omega$, ὑπάρχει μία μόνη εὐθεῖα ἱκανοποιοῦσα τὰ πρόβλημα. Ἐὰν τέλος ὁ κύκλος δὲν τέμνει τὴν ἰχνοπαράλληλον, ὁπότε $\varepsilon\varphi\omega' > \varepsilon\varphi\omega$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

4) Διὰ δοθείσης εὐθείας α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἔχον δοθεῖσαν κλίσιν.

Μὲ κέντρον σημεῖον τι τῆς α' π.χ. σημεῖον ὑψομέτρου 0 καὶ ἀκτῖνα $B = \sigma\varphi\omega$, ἔνθα ω ἡ γωνία κλίσεως τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου, γράφομεν κύκλον. Ἐκ τοῦ σημείου τῆς α' ὑψομέτρου 1, φέρομεν ἐφαπτομένην πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον (Σχ. 113). Αἱ παράλληλοι πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ταύτην εὐθεῖαι, αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν σημείων ὑψομέτρων 1, 2, 3, . . ., εἶναι αἱ ἰχνοπαράλληλοι τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου. Διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις εἰς τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ δύναται ἐκ τοῦ σημείου τῆς α' ὑψομέτρου 1 νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, δηλαδὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ

$$B \leqslant \beta,$$

ἔνθα β ἡ βαθμὶς τῆς εὐθείας α.



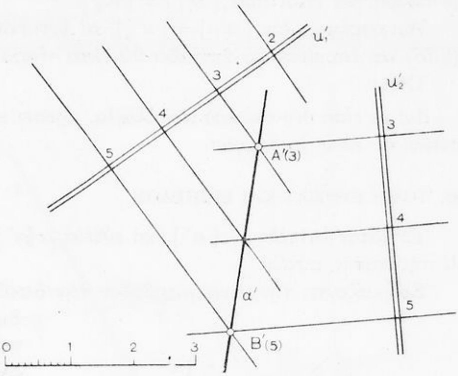
Σχ. 113

Τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις ἂν $B < \beta$, μίαν λύσιν ἂν $B = \beta$ καὶ εἶναι ἀδύνατον ἂν $B > \beta$.

83. ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ.

Ἔστωσαν $p_1 [u'_1]$ καὶ $p_2 [u_2']$ δύο ἐπίπεδα, ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα a κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται. Ἐφαρμόζοντες τὴν γενικὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν ὑπεδείξαμεν ἐν § 25, τέμνομεν ταῦτα διὰ δύο ὁριζοντίων βοηθητικῶν ἐπιπέδων.

Ἑκάτερον τῶν ἐπιπέδων τούτων θὰ τμήσῃ τὰ δοθέντα κατὰ ἰχνοπαραλλήλους τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου. Τὰ ζεύγη τῶν ἰχνοπαραλλήλων τούτων (τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου) τέμνονται εἰς σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας a.

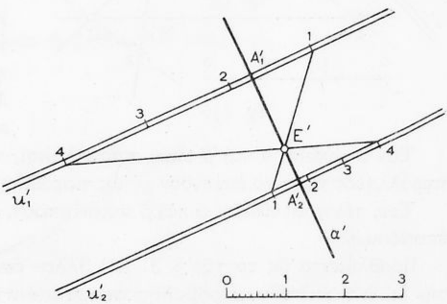


Σχ. 114

Εἰς τὸ Σχ. XXIX καθὼς καὶ εἰς τὸ Σχ. 114 ἡ προβολὴ a' τῆς εὐθείας καθ' ἣν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα p_1 καὶ p_2, διέρχεται διὰ τῶν σημείων A' καὶ B', τομῆς τῶν ἰχνοπαραλλήλων ὑψομέτρων $+3$ καὶ $+5$ ἀντιστοίχως.

Ἐὰν αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι παράλληλοι, ἡ εὐθεῖα a θὰ εἶναι ὁριζοντία καὶ ὡς τοιαύτη θὰ εἶναι κοινὴ ἰχνοπαράλληλος τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἑπομένως κάθετος πρὸς τὰς δύο κλίμακας.

Αἱ δύο ὑψομετρικαὶ κλίμακες $[u'_1]$ καὶ $[u'_2]$, ὡς παράλληλοι, εἶναι ὁμοιόθετοι, ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι ε' αἱ ἑνοῦσαι σημεῖα τῶν κλιμάκων τούτων, τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου διέρχονται διὰ σημείου E' (Σχ. 115).



Σχ. 115

Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα a', ὡς κοινὴ ἰχνοπαράλληλος, ἑνώνει σημεῖα τῶν δύο κλιμάκων τοῦ αὐτοῦ ὑψομέτρου, ἕπεται ὅτι θὰ διέρχεται καὶ αὕτη διὰ τοῦ σημείου Ε'.

Εἰς τὸ Σχ. 115 εὑρέθη τὸ σημεῖον Ε', ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν 11 καὶ 44 καὶ ἐξ αὐτοῦ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὰς κλίμακας.

84. ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα p_1 [u'_1] καὶ p_2 [u'_2] εἶναι παράλληλα, τὰ ἴχνη των θὰ εἶναι παράλληλα, συνεπῶς καὶ αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἡ προβολὴ α΄ τῆς εὐθείας τομῆς των, θὰ συμπίπτῃ μετὰ τῆς ἐπ' ἄπειρον εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, ἐπ' αὐτῆς θὰ κεῖται ἑπομένως καὶ τὸ σημεῖον Ε΄ (§ 79).

Ἡ ὁμοιοθεσία συνεπῶς, μεταξὺ τῶν δύο ὑψομετρικῶν κλιμάκων, εἶναι μία μεταφορά, θὰ εἶναι ἄρα [u'_1] = [u'_2].

Ἀντιστρόφως, ἐὰν [u'_1] = [u'_2], αἱ ἰχνοκάθετοι u_1 καὶ u_2 εἶναι παράλληλοι (§ 76) καὶ ἑπομένως τὰ ἐπίπεδα θὰ εἶναι παράλληλα.

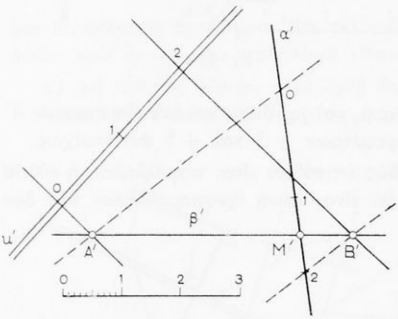
Ὅθεν :

Διὰ νὰ εἶναι δύο ἐπίπεδα παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες αὐτῶν νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

85. ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἔστωσαν ἐπίπεδον p [u'] καὶ εὐθεῖα α [α'], ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον M τῆς τομῆς αὐτῶν.

Ἐφαρμόζοντες τὴν γενικὴν μέθοδον τὴν ὁποίαν ὑπεδείξαμεν ἐν § 29, φέρομεν διὰ τῆς εὐθείας α βοηθητικὸν ἐπίπεδον q καὶ κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν β, κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ δύο ἐπίπεδα p καὶ q.



Σχ. 116

Εἰς τὸ Σχ. 116 τὸ βοηθητικὸν ἐπίπεδον q ὁρίζεται διὰ δύο ἰχνοπαραλλήλων του, ἀγομένων ἐκ τῶν σημείων τῆς α ὑψομέτρων 0 καὶ 2. Ἡ εὐθεῖα β διέρχεται διὰ τῶν σημείων τομῆς τῶν ἀντιστοίχων ἰχνοπαραλλήλων τῶν ἐπιπέδων p καὶ q ὑψομέτρων 0 καὶ 2. Ἡ προβολὴ M' τοῦ ζητουμένου σημείου, εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν α' καὶ β'.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τότε ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα α, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p, ὡς παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν του, τὴν β.

Ἐάν, τέλος, αἱ εὐθεῖαι α καὶ β συμπίπτουν, ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου p.

Προβλήματα ὡς τὸ τῆς § 31 καὶ ἄλλα ἀνάλογα, ἀντιμετωπίζονται καὶ εἰς τὴν δι' ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς παράστασιν τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων κατ' ἀνάλογον τρόπον.

Ὅπως καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς § 30 ἀναφέρομεν, τὰ προβλήματα τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων καὶ τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου, εἶναι θεμελιώδη, βάσει δὲ αὐτῶν ἐπιλύεται πλῆθος προβλημάτων τῆς Παραστατικῆς Γεωμετρίας.

Ἐπιλύομεν κατωτέρω ἓν ἐκ τῶν ἐξετασθέντων ἤδη ἐν § 31 προβλημάτων, διὰ νὰ ὑποδείξωμεν τὸν τρόπον ἀντιμετωπίσεώς του, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τὰ εἰσερχόμενα εἰς τὸ πρόβλημα ἀναφέρονται εἰς ἓν ἐπίπεδον προβολῆς.

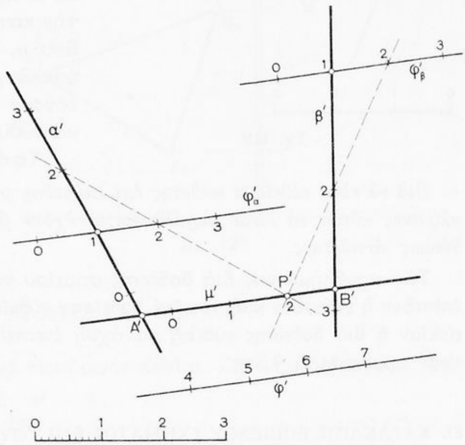
Δίδεται διεύθυνσις φ καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α [α'] καὶ β [β']. Ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν φ, συναντῶσα τὰς α καὶ β.

Ἐκ τῶν τριῶν μεθόδων τῶν ἀναφερομένων ἐν § 31, εἶναι σκοπιμώτερον νὰ ἐφαρμόσωμεν, ἐν προκειμένῳ, τὴν δευτέραν.

Διὰ τῶν εὐθειῶν α καὶ β φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴν διεύθυνσιν φ. Ἡ εὐθεῖα μ κατὰ τὴν ὁποίαν τέμνονται τὰ δύο ταῦτα ἐπίπεδα, εἶναι ἡ ζητουμένη.

Εἰς τὸ σχ. 117 διὰ τοῦ σημείου ὑψομέτρου 1 τῆς α, ἤχθη ἡ εὐθεῖα φ_α παράλληλος πρὸς τὴν φ, ὁμοίως ἐκ τοῦ σημείου ὑψομέτρου 1 τῆς β, ἤχθη ἡ εὐθεῖα φ_β παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν φ.

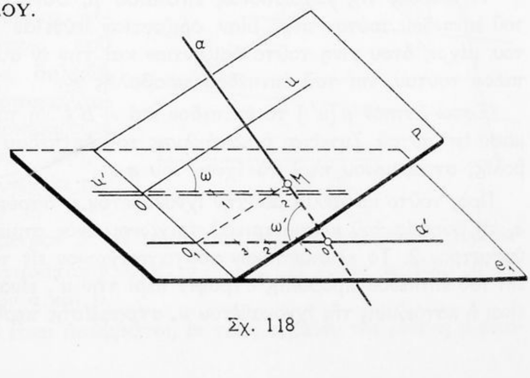
Φέρομεν τὴν ἰχνοπαράλληλον ὑψομέτρου 2, τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ φ_α καὶ τὴν ἰχνοπαράλληλον ὑψομέτρου 2, τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν β καὶ φ_β. Ἡ διὰ τοῦ σημείου P τομῆς τῶν δύο τούτων ἰχνοπαραλλήλων, παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν φ, εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα μ.



Σχ. 117

86. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

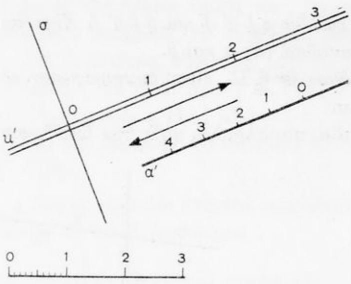
Ἔστωσαν ἐπίπεδον $p\,[\,u'\,]$ καὶ εὐθεῖα $\alpha\,[\,\alpha'\,]$ κάθετα ἐπ' ἄλληλα. Ἐὰν ω καὶ ω' αἱ γωνίαι κλίσεως καὶ β' καὶ β αἱ βαθμίδες, τοῦ ἐπιπέδου p καὶ τῆς εὐθείας α ἀντιστοίχως, λόγῳ τῆς καθετότητος τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι :



Σχ. 118

$$\omega + \omega' = \frac{\pi}{2}, \text{ ἑπομένως } \beta \cdot \beta' = 1.$$

Ἐξ ἄλλου ἡ εὐθεῖα α, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἴχνος αὐτοῦ σ, ἑπομένως ἡ προβολή της θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἴχνος σ, δηλαδὴ παράλληλος πρὸς τὴν προβολὴν u' ἰχνοκαθέτου τοῦ ἐπιπέδου p (Σχ. XXX καθὼς καὶ Σχ. 118 καὶ 119). Τὰ ὑψόμετρα τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος τῆς εὐθείας α αὐξάνουν ἀπὸ τὸ ἴχνος της, πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἴχνους σ τοῦ ἐπιπέδου p, ἐνῷ ἀντιθέτως τὰ ὑψόμετρα τῆς ὑψομετρικῆς κλίμακος τοῦ ἐπιπέδου αὐξάνουν ἐκ τοῦ ἴχνους του σ, πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἴχνους τῆς εὐθείας α.



Σχ. 119

Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές, ὅθεν :

Διὰ νὰ εἶναι εὐθεῖα α κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον p, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες αὐτῶν νὰ εἶναι παράλληλοι, νὰ ἔχουν βαθμίδας ἀντιστρόφους καὶ κατευθύνσεις ἀντιθέτους.

Τῶν προβλημάτων, διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον ἢ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον, εἶναι προφανὴς ἡ λύσις.

87. ΚΑΤΑΚΛΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΡΟΒΟΛΗΣ.

Ἐκ τῶν τριῶν συστηματικῶν μεθόδων τὰς ὁποίας ἐξετάσαμεν εἰς τὸ Κεφάλαιον III, ἡ μέθοδος τῆς κατακλίσεως κυρίως, ἐφαρμόζεται εἰς προβλήματα ἀφορόντα εἰς γεωμετρικὰ σχήματα, παριστώμενα ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου προβολῆς.

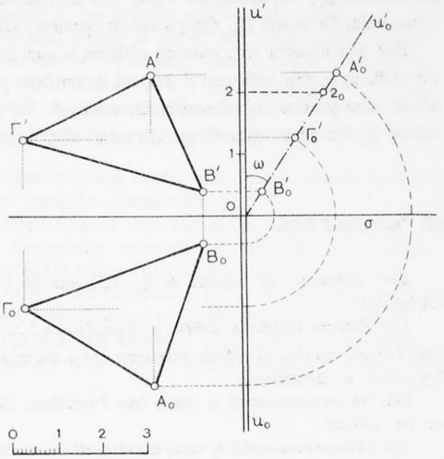
Ἡ μέθοδος τῆς κατακλίσεως ἐπιπέδου p, συνίσταται εἰς τὴν περιστροφὴν τοῦ ἐπιπέδου τούτου περὶ μίαν ὁριζοντίαν εὐθεῖαν αὐτοῦ, συνήθως τὸ ἴχνος του, μέχρις ὅτου γίνῃ τοῦτο ὁριζόντιον καὶ τὴν ἐν συνεχείᾳ προβολὴν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_1.

Ἔστω λοιπὸν $p\,[u']$ τὸ ἐπίπεδον καὶ $A'B'\Gamma'$ ἡ προβολὴ ἑνὸς τριγώνου κειμένου ἐπ' αὐτοῦ. Ζητεῖται ἡ κατάκλισις τοῦ ἐπιπέδου p, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, στρεφομένου περὶ τὸ ἴχνος του σ.

Πρὸς τοῦτο κατακλίνομεν τὴν ἰχνοκάθετον u στρέφοντες αὐτὴν περὶ τὸ ἴχνος σ, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κλισιμετρικοῦ τριγώνου ἑνὸς σημείου της π.χ. τοῦ ἔχοντος ὑψόμετρον 2. Τὸ κλισιμετρικὸν τοῦτο τρίγωνον εἰς τὸ Σχ. 120 ἔχει κατακλιθῆ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς στραφὲν περὶ τὴν u', εἶναι δὲ τὸ 022_0. Ἡ εὐθεῖα u'_0 εἶναι ἡ κατάκλισις τῆς ἰχνοκαθέτου u, στραφείσης περὶ τὴν εὐθεῖαν u'.

Διὰ νὰ εὑρεθῇ τώρα ἡ κατάκλισις τυχόντος σημείου τοῦ ἐπιπέδου p, ἔστω τοῦ σημείου A, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Φέρομεν τὴν ἰχνοπαράλληλον τοῦ σημείου A. Ἡ προβολή της τέμνει τὴν $u_0{}'$ εἴς τι σημεῖον $A_0{}'$. Τὸ τμῆμα $\overline{OA_0{}'}$, εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου A ἀπὸ τοῦ ἴχνους σ. Ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ A' καθέτου ἐπὶ τὸ ἴχνος σ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον A_0, ἀπέχον τοῦ ἴχνους σ ἀπόστασιν $\overline{OA'}_0$. Τὸ σημεῖον A_0 εἶναι ἡ ζητουμένη κατάκλισις τοῦ σημείου A. Εἰς τὸ Σχ. 120 συνεπληρώθη ἡ κατάκλισις $A_0B_0\Gamma_0$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.



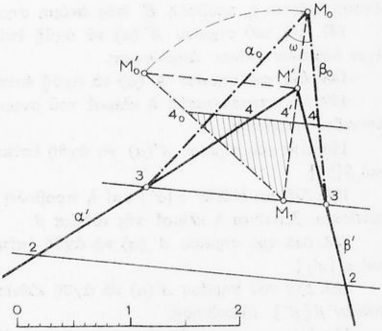
Σχ. 120

88. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ. ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Ἔστωσαν α [α'] καὶ β [β'] δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι. Ζητεῖται ἡ γωνία αὐτῶν.

Κατακλίνομεν τὸ ἐπίπεδον p τῶν εὐθειῶν α καὶ β, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, στρέφοντες αὐτὸ περὶ τὴν ἰχνοπαράλληλον ὑψομέτρου 3 (Σχ. 121).

Πρὸς τοῦτο ἐκ τῆς προβολῆς M' τοῦ σημείου M, κατὰ τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι, φέρομεν τὴν γραμμὴν κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου p, τὴν κάθετον δηλαδὴ ἐκ τοῦ M' ἐπὶ τὴν ἰχνοπαράλληλον ὑψομέτρου 3. Κατασκευάζομεν τὸ κλισιμετρικὸν τρίγωνον M_14_04' τοῦ σημείου 4, καὶ ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου M ἀπὸ



Σχ. 121

τῆς ἰχνοπαραλλήλου ὑψομέτρου 3. Ἡ κατάκλισις M_0 τοῦ σημείου M, εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς $M'M_1$ καὶ εἰς ἀπόστασιν $\overline{M_1M_0} = \overline{M_1M'}_0$. Ἡ γωνία ω εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία τῶν εὐθειῶν α καὶ p.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι ἀσύμβατοι, ἐκ τινος σημείου τῆς εὐθείας α φέρομεν εὐθεῖαν β_1, παράλληλον πρὸς τὴν β. Κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν τῶν τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β_1, ἥτις εἶναι ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν α καὶ β.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς γωνίας εὐθείας α καὶ ἐπιπέδου p, φέρομεν ἐκ τινος σημείου τῆς εὐθείας α τὴν κάθετον β ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ κατασκευάζομεν, ὡς προηγουμένως, τὴν γωνίαν ω_1 τῶν εὐθειῶν α καὶ β. Ἡ γωνία ω τῆς εὐθείας α καὶ τοῦ ἐπιπέδου p, θὰ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας ω_1.

89. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

139. Δίδονται τὰ σημεῖα Α′ (+ 1,5) καὶ Β′ (+ 2,8). Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας AB.

140. Δίδεται ὁριζοντία εὐθεῖα ε ὑψομέτρου 3,5 καὶ σημεῖον M' (+ 4) ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ σημείου M εὐθεῖα τέμνουσα τὴν ε εἰς σημεῖον N, τοιοῦτον ὥστε τὸ τμῆμα $\overline{MN}$ νὰ ἔχῃ μῆκος α. Διερεύνησις.

141. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων, τῶν ὁποίων αἱ ὑψομετρικαὶ κλίμακες κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

142. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ δύο ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι ὁριζόντιον καὶ τὸ ἄλλο τυχόν.

143. Ἔστωσαν A' (+3), B' (+2,5), Γ' (+1) τρία σημεῖα καὶ Δ' ἡ προβολὴ ἑνὸς τετάρτου σημείου Δ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑψόμετρον τοῦ σημείου Δ, ἐὰν τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $AB\Gamma$.

144. Διὰ τοῦ σημείου A' (α) νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα α κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν β [β'].

145. Διὰ τοῦ σημείου A' (α) νὰ ἀχθῇ, εὐθεῖα δοθείσης κλίσεως, συναντῶσα τὴν εὐθεῖαν [α']. Διερεύνησις.

146. Διὰ τοῦ σημείου $A'(\alpha)$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον p [u′] τῆς ὁποίας δίδεται ἡ προβολὴ B' ἑνὸς ἀκόμη σημείου της.

147. Διὰ τοῦ σημείου A' (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν α, ἔχον δοθεῖσαν κλίσιν. Διερεύνησις.

148. Διὰ τοῦ σημείου A' (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς ἐπίπεδον p [u′].

149. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κλίμαξ τοῦ συμμετρικοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον p [u′], ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς.

150. Διὰ τοῦ σημείου $A'(\alpha)$ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς ἀσυμβάτους α [α'] καὶ β [β'].

151. Δίδεται εὐθεῖα α [α'] καὶ ἡ προβολὴ β' εὐθείας β τεμνούσης κατ' ὀρθὴν γωνίαν τὴν εὐθεῖαν α. Ζητεῖται ἡ κλίμαξ τῆς εὐθείας β.

152. Διὰ τοῦ σημείου A' (α) νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δύο δοθέντα ἐπίπεδα p_1 [u'_1] καὶ p_2 [u'_2].

153. Διὰ τοῦ σημείου $A'(\alpha)$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα δοθείσης κλίσεως, ὀρθογώνιος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν β [β']. Διερεύνησις.

154. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γωνία δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

155. Δίδεται ἐπίπεδον p [u'], εὐθεῖα α [α'] καὶ σημεῖον M' (μ). Διὰ τοῦ σημείου M νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον p καὶ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν α.

156. Τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας δίδονται τὰ ἴχνη A', B', Γ' τῶν ἀκμῶν της. Νὰ εὑρεθῇ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς της καὶ τὸ ὑψόμετρον αὐτῆς. Διερεύνησις.

157. Δίδονται τὰ σημεῖα A' (α), B' (β), Γ' (γ). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν διχοτόμων καὶ τῶν ὕψων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ προβολὴ καὶ τὸ ὑψόμετρον τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ κύκλου.

158. Δίδονται τὰ σημεῖα A' (α), B' (β), Γ' (γ). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς, ἀπέχον ἴσας ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἢ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

159. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $p\,[u']$ δίδονται δύο σημεῖα A καὶ K. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ σημεῖον K καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον A.

160. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $p\,[u']$ τὰ σημεῖα A καὶ K. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν ἐκ τοῦ A ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ K καὶ ἀκτῖνα δοθεῖσαν.

161. Δίδονται δύο μὴ παράλληλα ἐπίπεδα $p_1'\,[u_1]$ καὶ $p_2\,[u_2']$. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ γωνίαι τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων

162. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ κύβου δοθείσης ἀκμῆς, τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ ἴχνη τριῶν ἀκμῶν συνερχομένων εἰς τὴν αὐτὴν κορυφήν. Διερεύνησις.

163. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ κύβου ἔχοντος μίαν διαγώνιον κατακόρυφον.

164. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ ἰσοσκελοῦς πυραμῖδος $K, AB\Gamma\Delta E$ ἐχούσης βάσιν κανονικὸν πεντάγωνον, τῆς ὁποίας ἡ ἕδρα KAB κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς e_2.

165. Δίδεται τριγωνικὴ πυραμὶς $K, AB\Gamma$ καὶ ἐπίπεδον $p\,[u']$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς.

166. Δίδεται τριγωνικὸν πρῖσμα $AB\Gamma A_1B_1\Gamma_1$ καὶ ἐπίπεδον $p\,[u']$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ τῆς τομῆς τοῦ πρίσματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ ἀληθὲς σχῆμα τῆς τομῆς.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

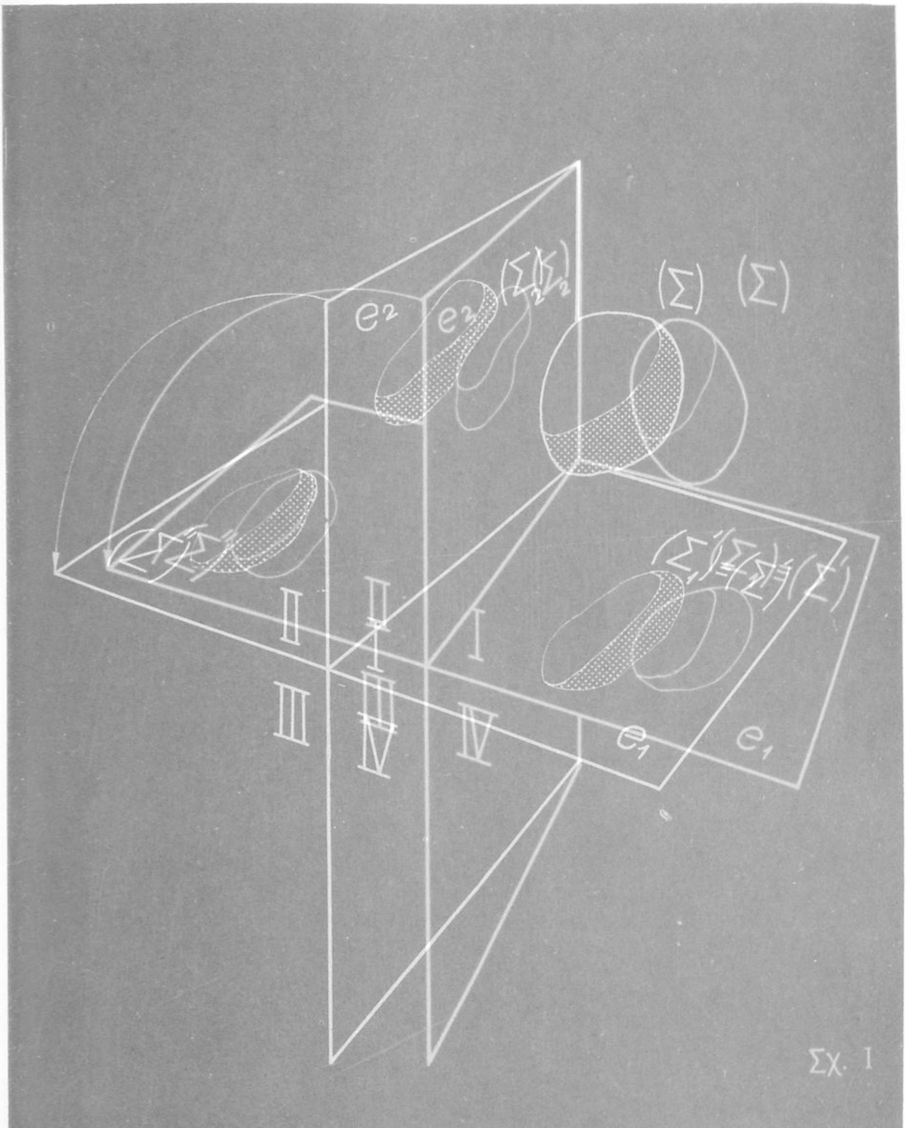
Σελ. 1 στῖχος 14 μετὰ τὴν λέξιν ἀντιστοιχία, νά προστεθῇ τὸ σύμβολον $\mathcal{A}$

Σελ. 4 στῖχος 32 μετὰ τὴν λέξιν βιβλίον, νὰ προστεθῇ : πρὸς χρῆσιν τῶν τεχνιτῶν καὶ τῶν κατασκευαστῶν.

'Επιμελητὴς 'Εκδόσεως : 'Ηλίας Ντζιώρας ('Απ. Δ.Σ. 1560/1-3-69).

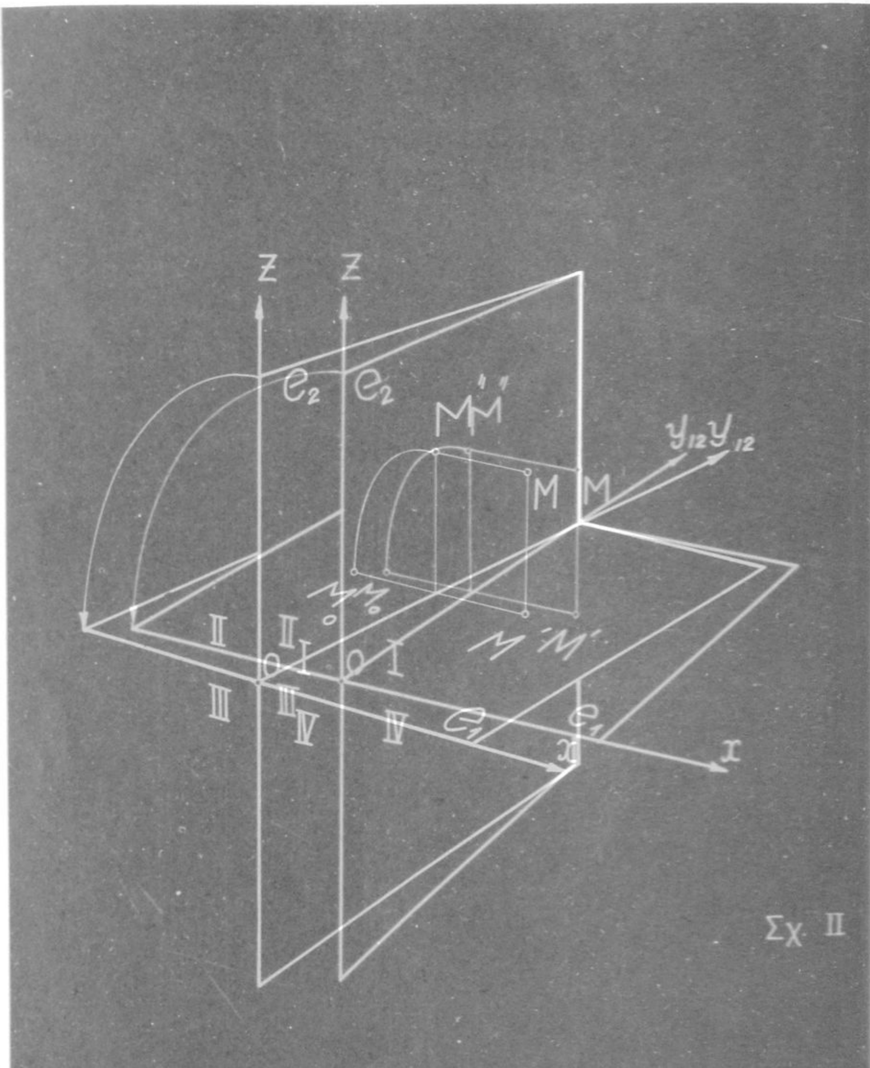
ΕΚΔΟΣΙΣ Α' 1969 (IV) - ΑΝΤ. 60.000 - ΣΥΜΒ. 1799/6-3-69 — 1800/6-3-69

Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : Ἰω. Καμπανᾶς Ο.Ε. Φιλαδελφείας 4 ΑΘΗΝΑΙ

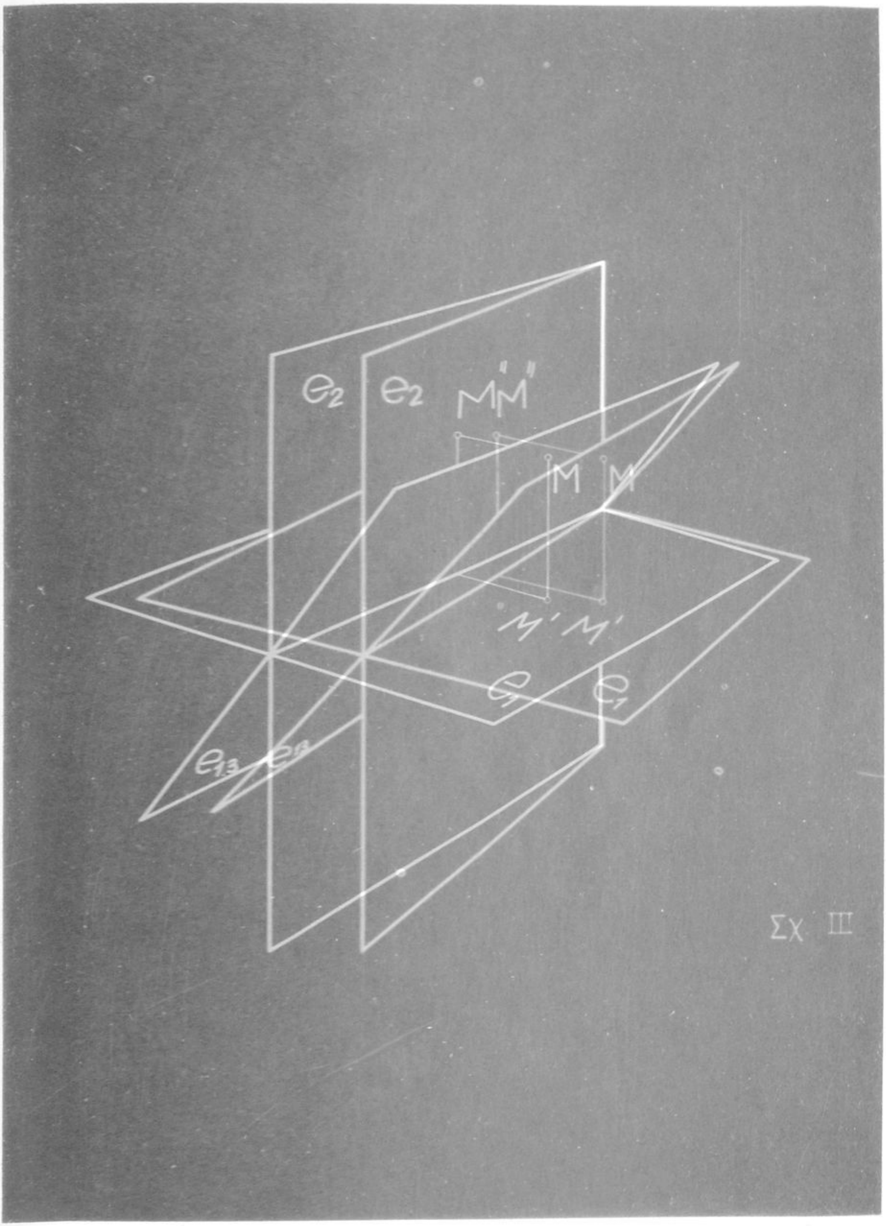


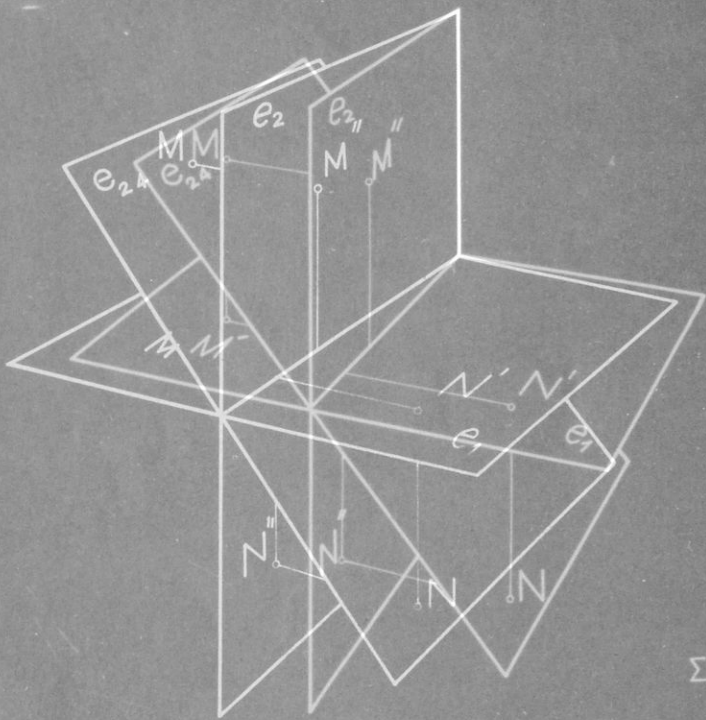
e^2
e_2
$(\Sigma_2)(\Sigma_2')$
(Σ) (Σ)
$(\Sigma_1')\equiv(\Sigma_2')\equiv(\Sigma')$
e_1
e_1
II
II
I
I
III
III
IV
IV

Σχ. 1

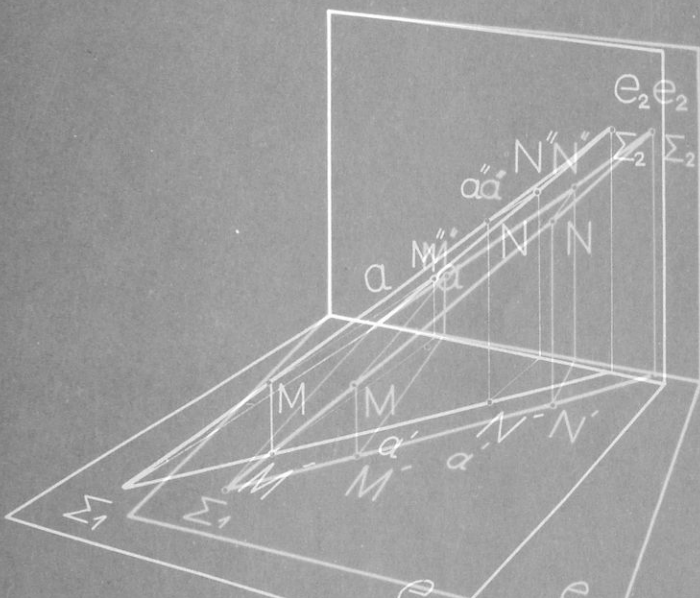


Σχ. II

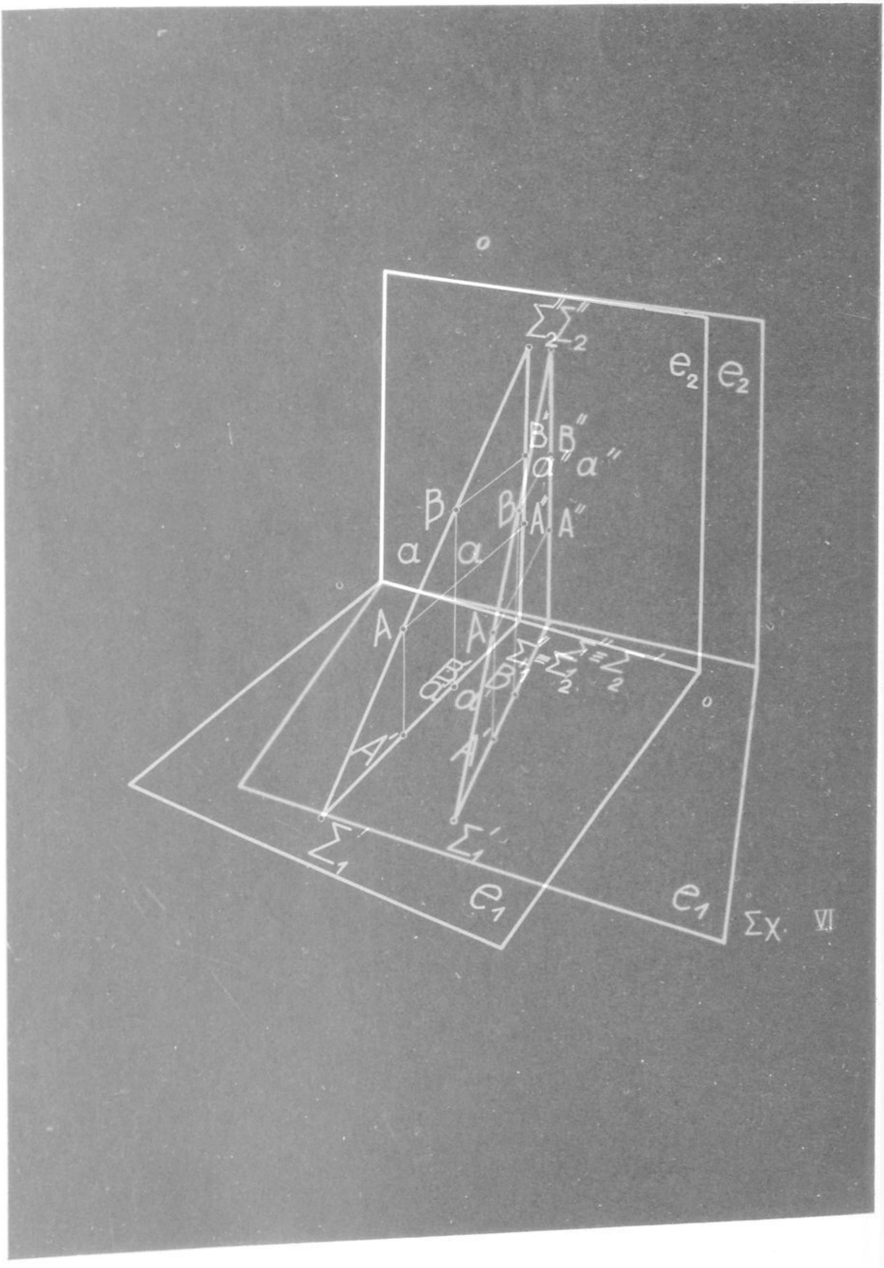

e2 e2
M'' M''
M M
M' M'
e1 e1
e13 e13
Σχ III

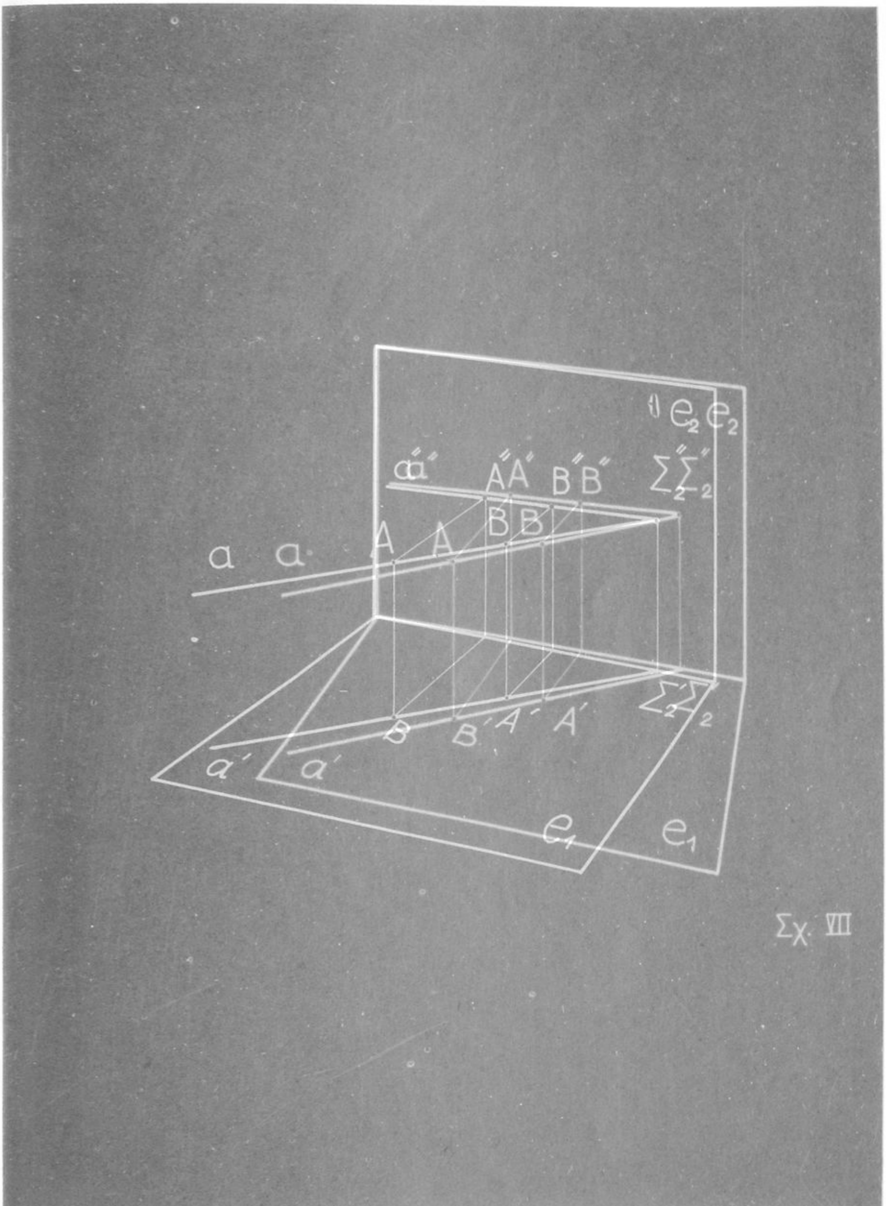


Σχ. IV

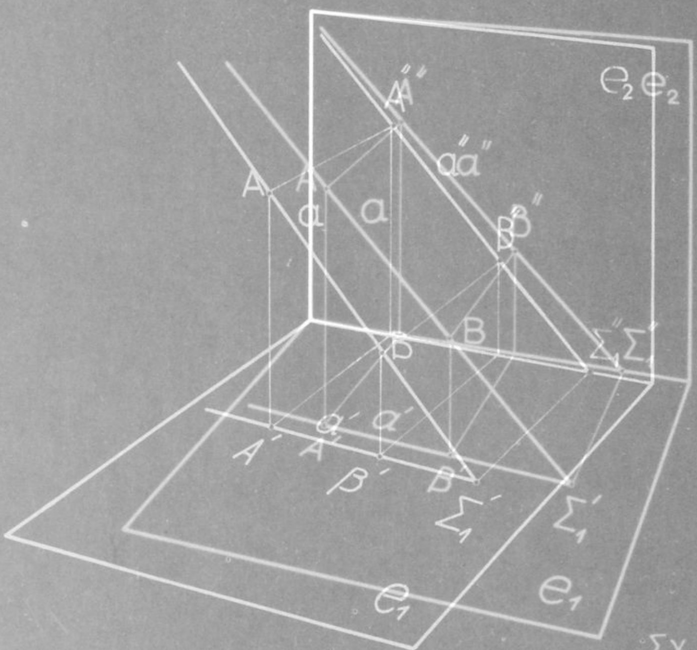


Σχ. V

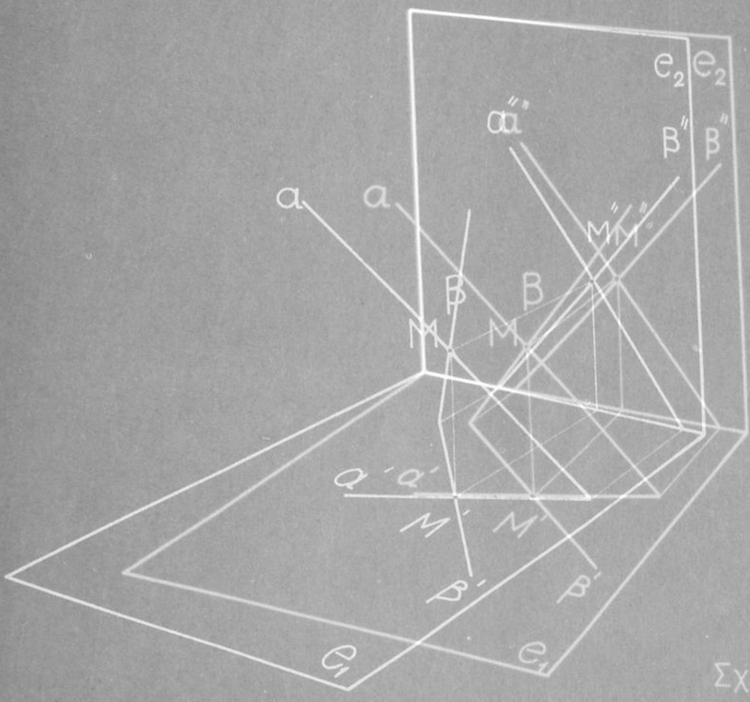

Σ₂'' Σ₂''
e₂ e₂
B' B''
α'' α''
B B A' A''
α α
A A
Σ₁'' ≡ Σ₂'' ≡ Σ₂''
B' B'
α' α'
A' A'
Σ₁' Σ₁''
e₁ e₁
Σχ. VI



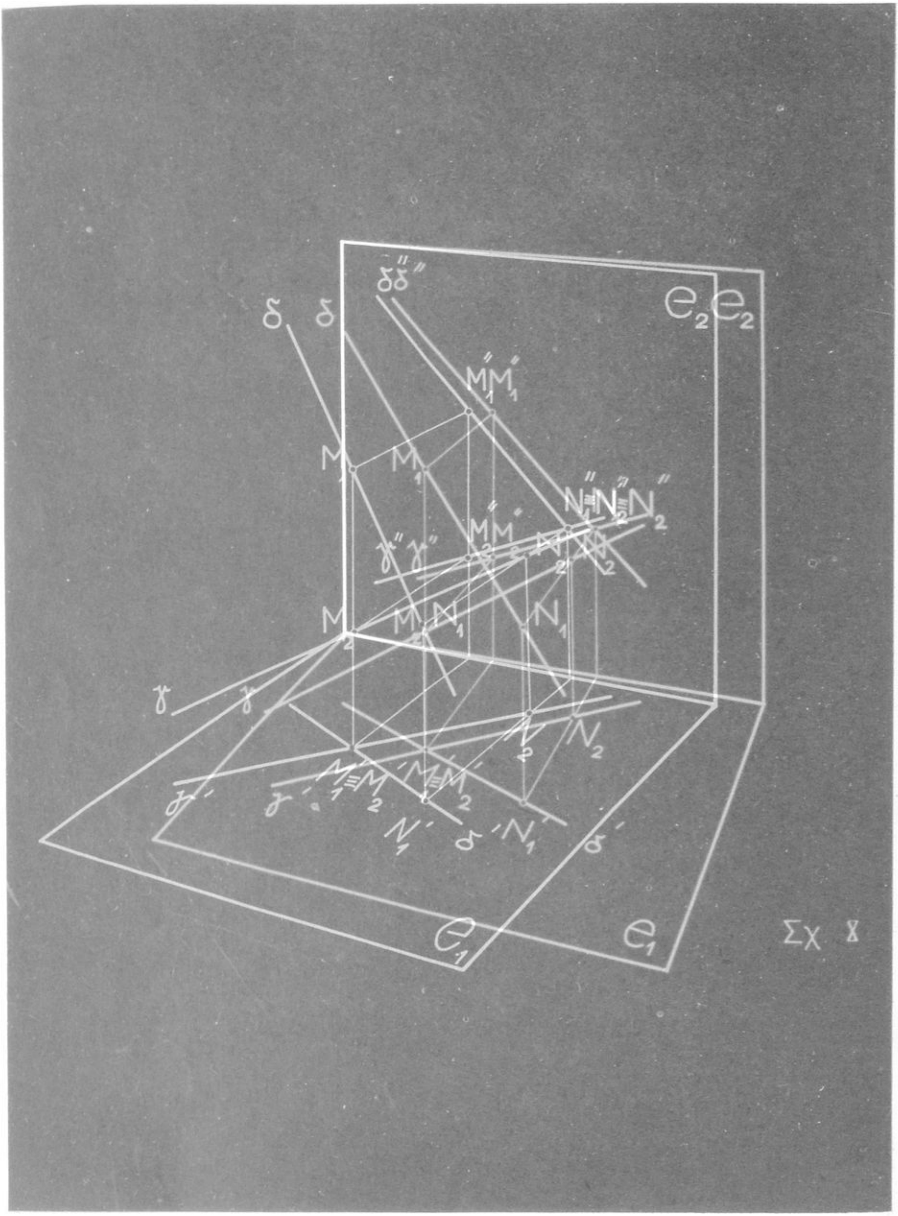
Σχ. VII

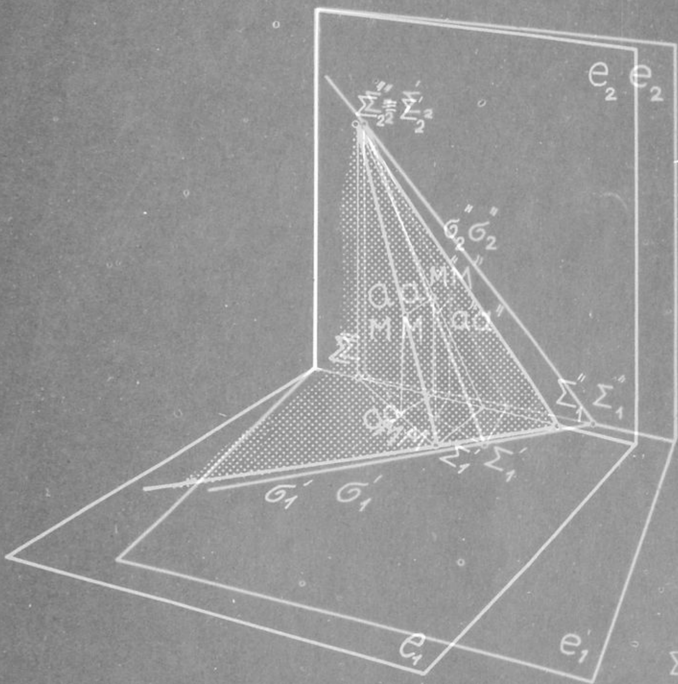

e_2 e_2
A'' A''
a'' a''
A A
a a
B'' B''
B B
Σ_1'' Σ_1''
a' a'
A' A'
B' B'
Σ_1' Σ_1'
e_1 e_1

Σχ. VIII

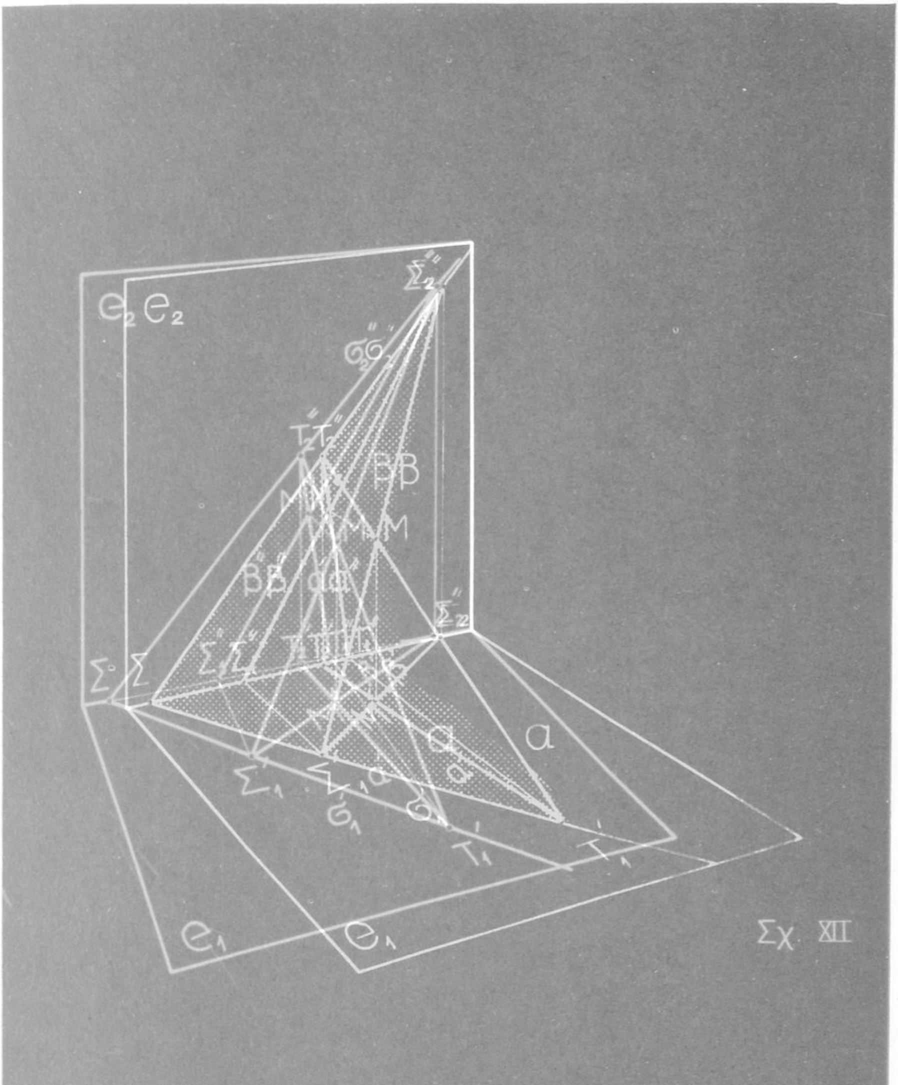


Σχ. IX

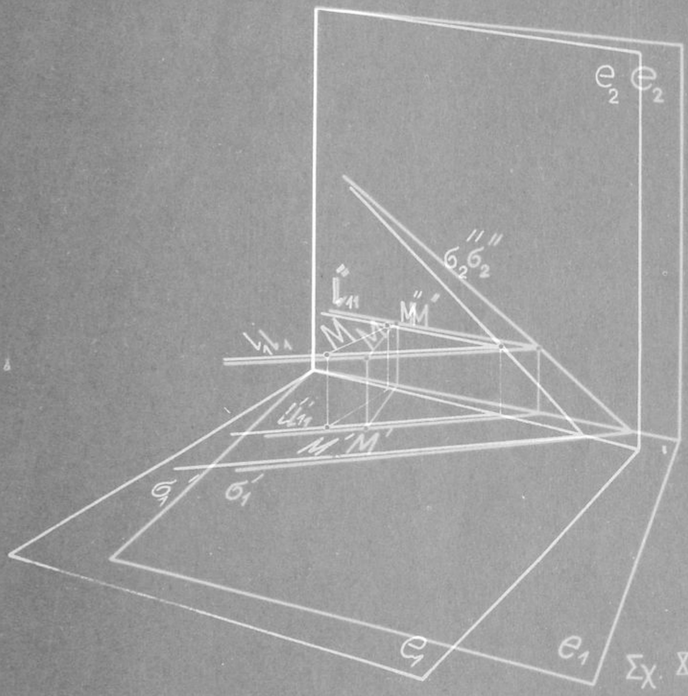

Σχ X



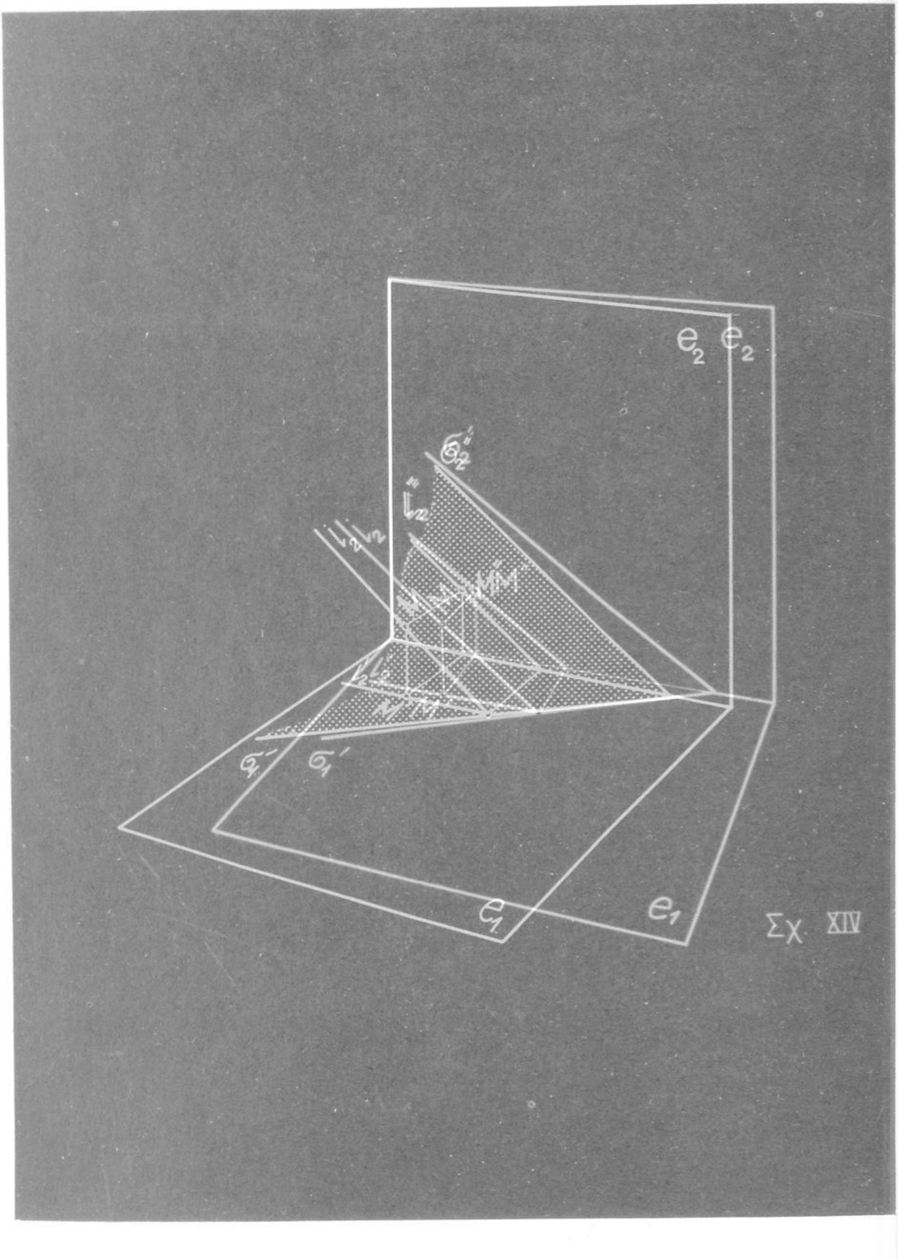
Σχ. XI



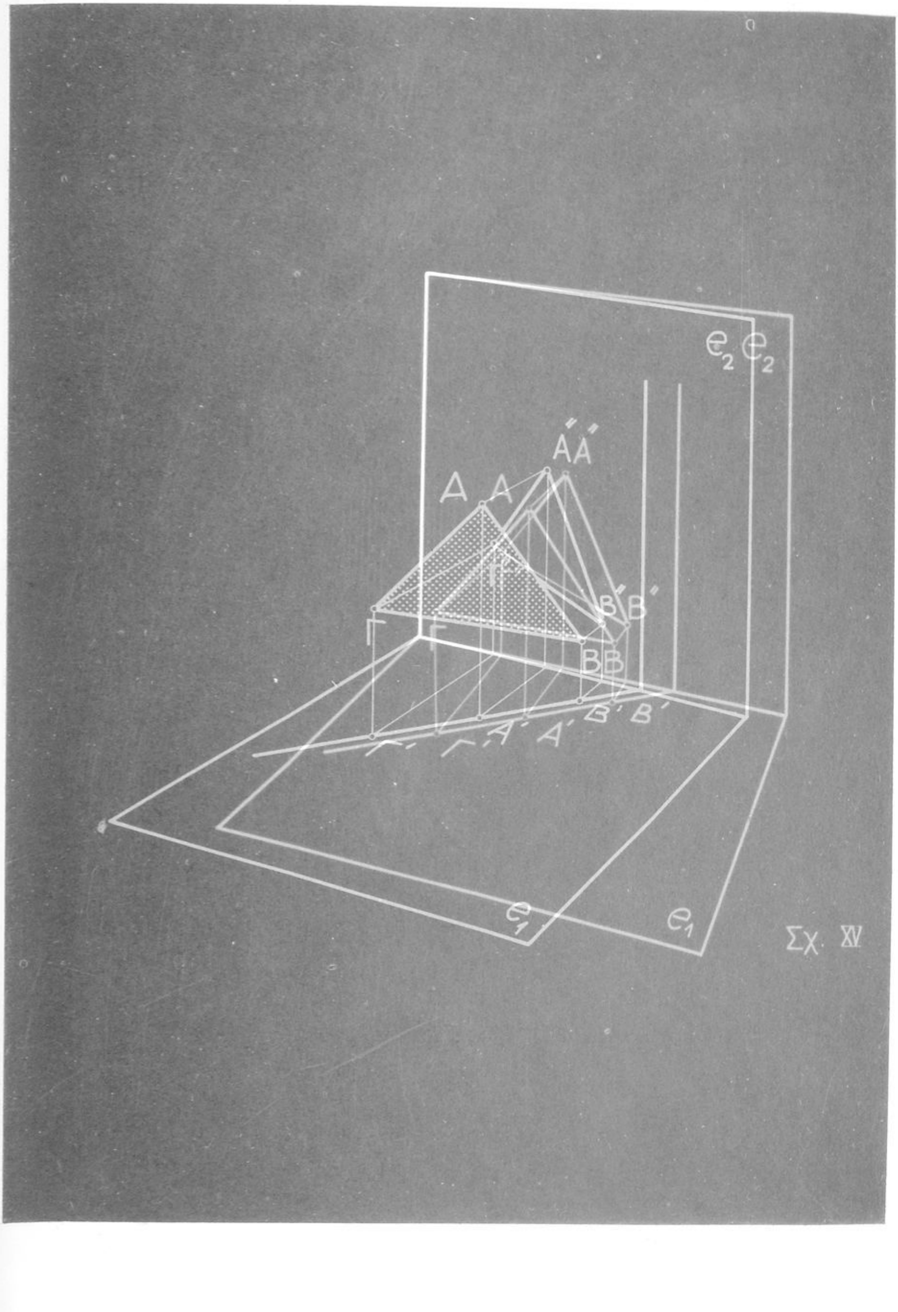
Σχ. XII



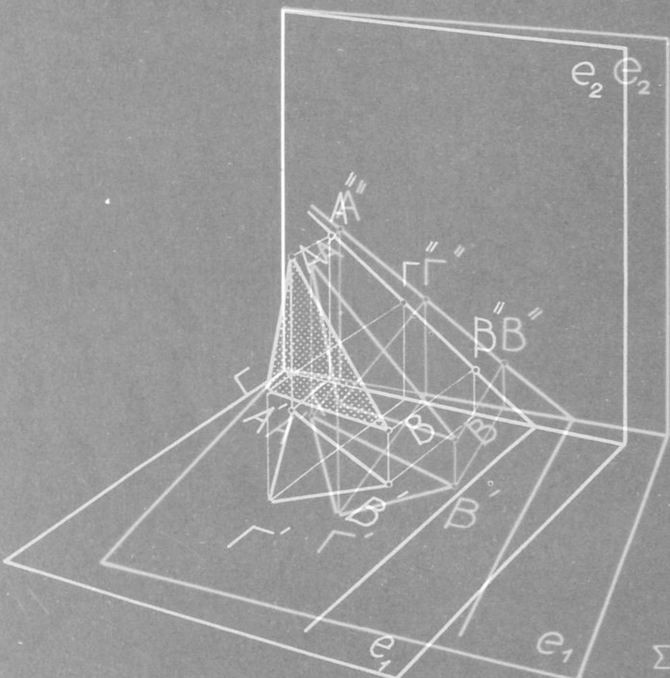
Σχ. XIII



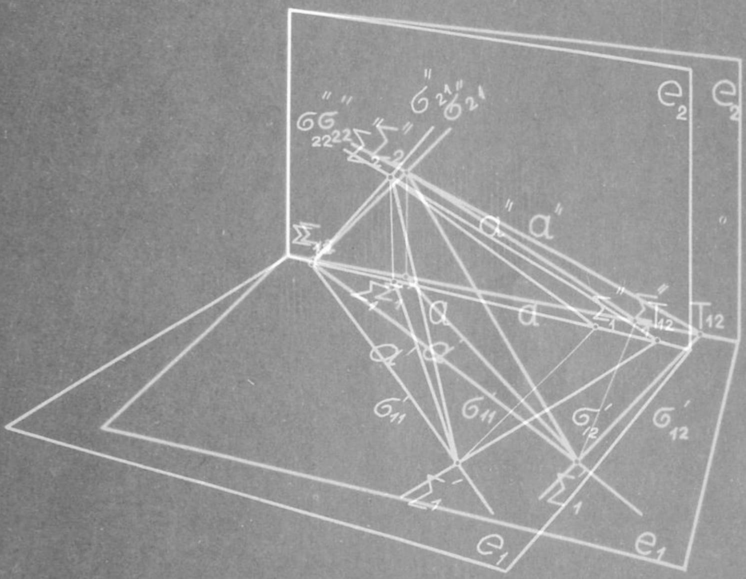
Σχ. XIV



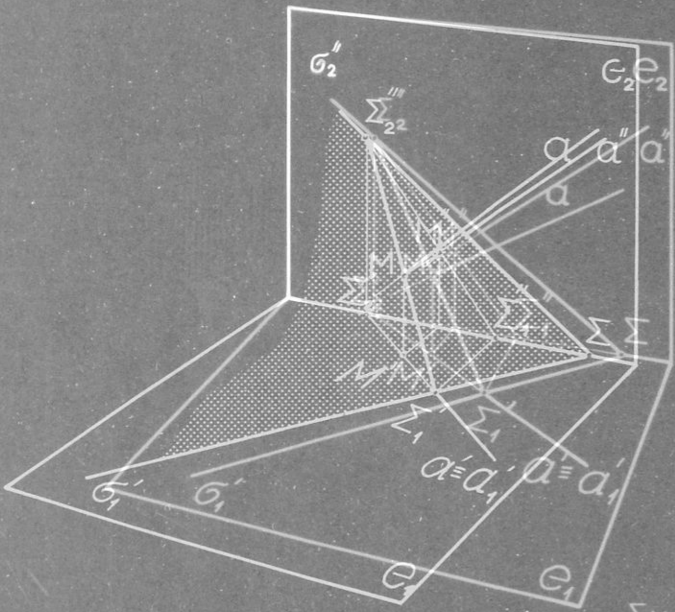
Σχ. XV



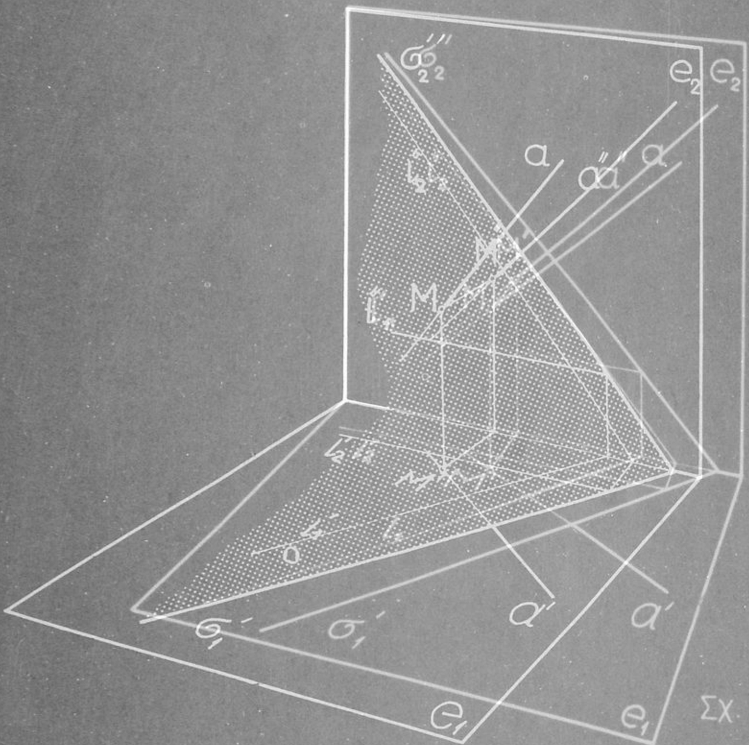
Σχ. XVI



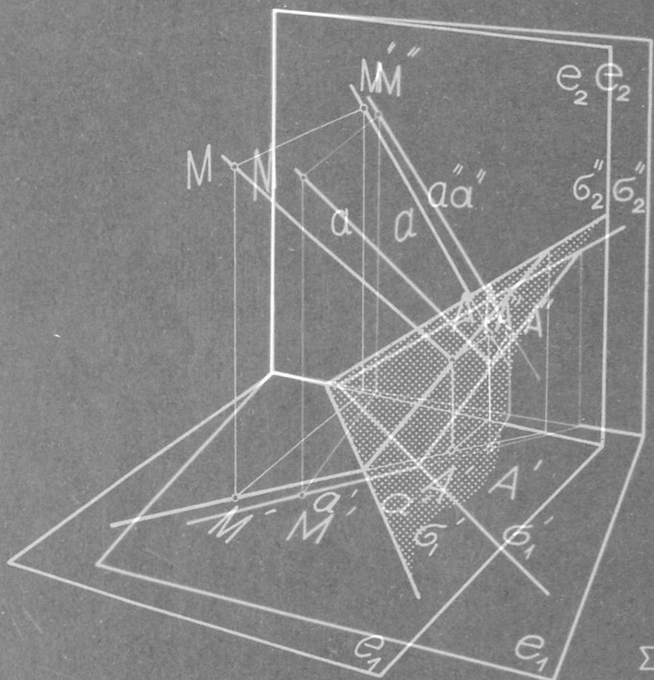
Σχ. XVII



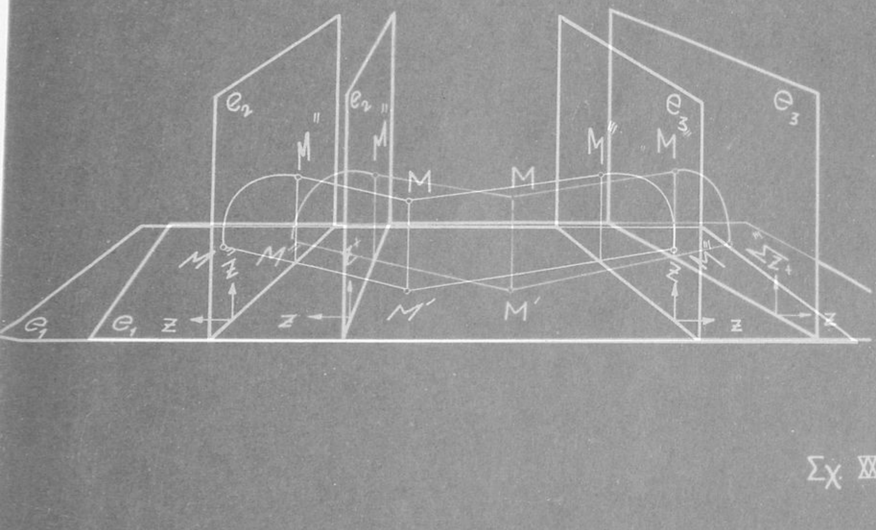
Σχ. XVIII



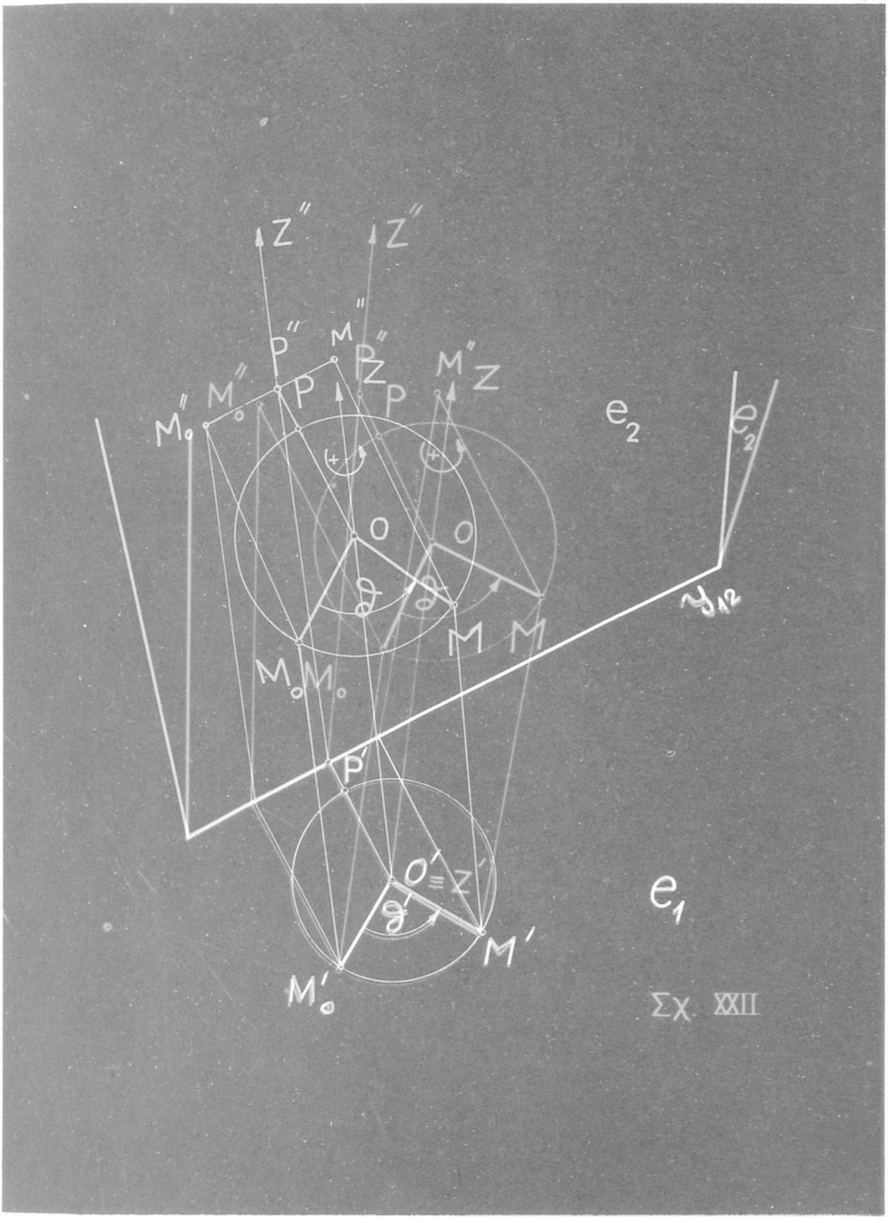
Σχ. XIX



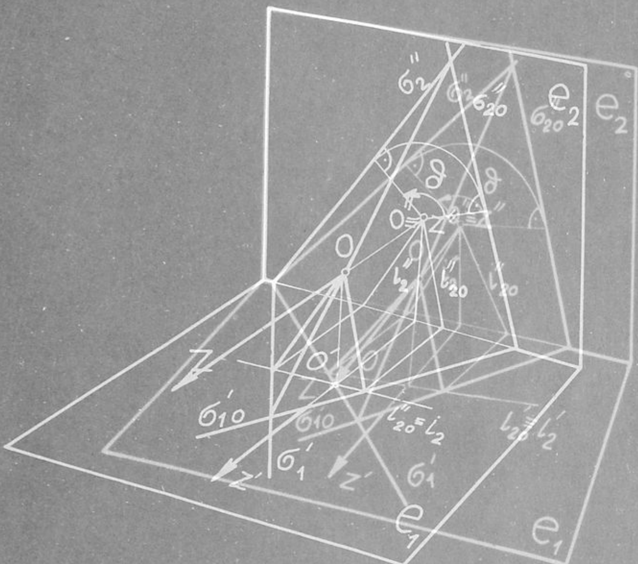
Σχ. XX



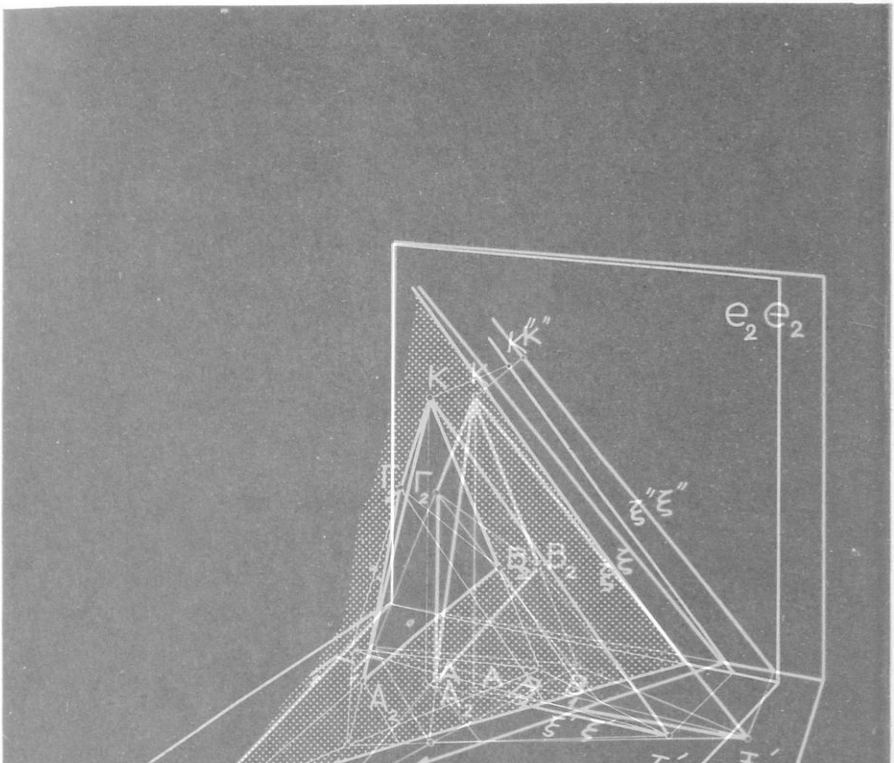
Σχ. XXI



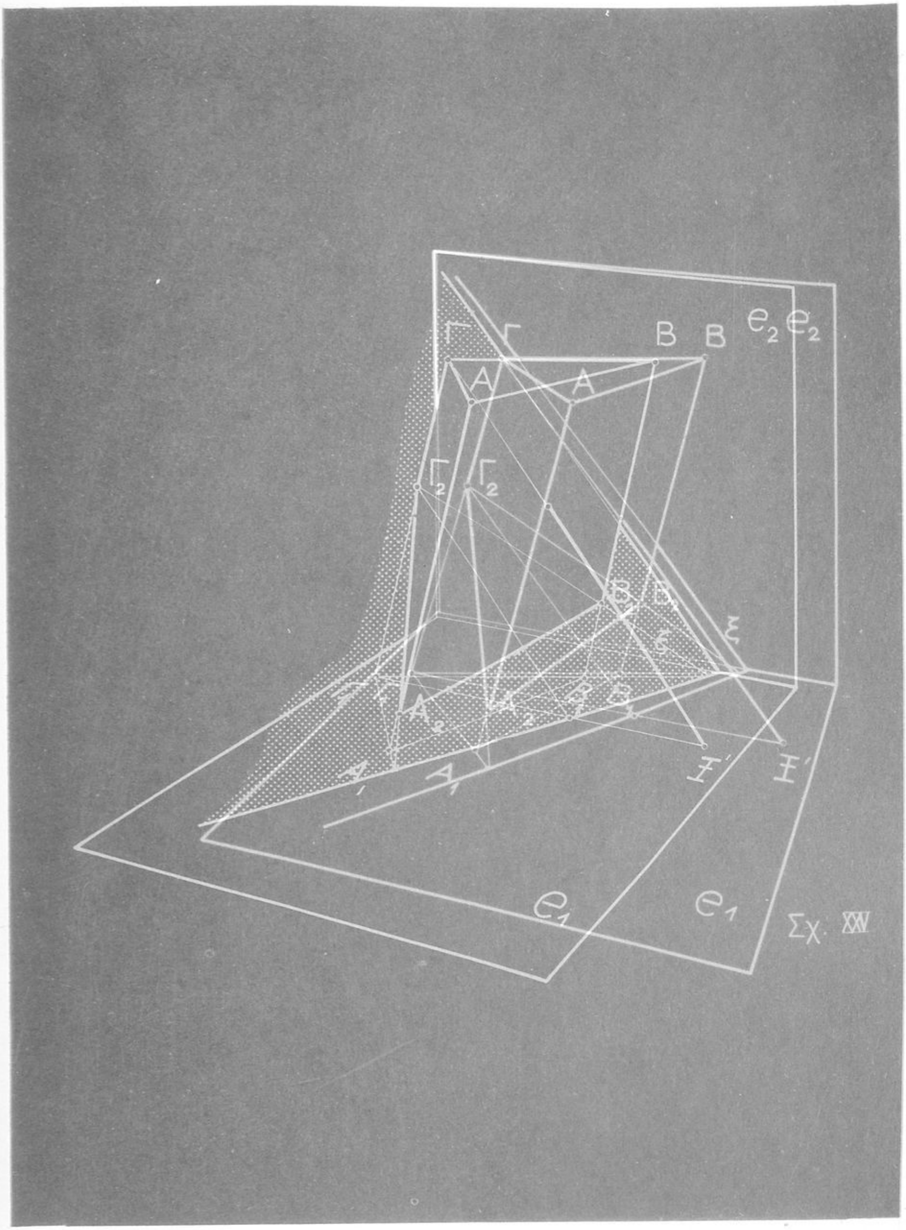
Σχ. XXII


e_2
e_2
e_1
e_1
Z'
Z'
σ_1'
σ_1'
σ_{10}'
σ_{10}'
σ_2''
σ_{20}''
$i_{20}''=i_2'$
ϑ
ϑ

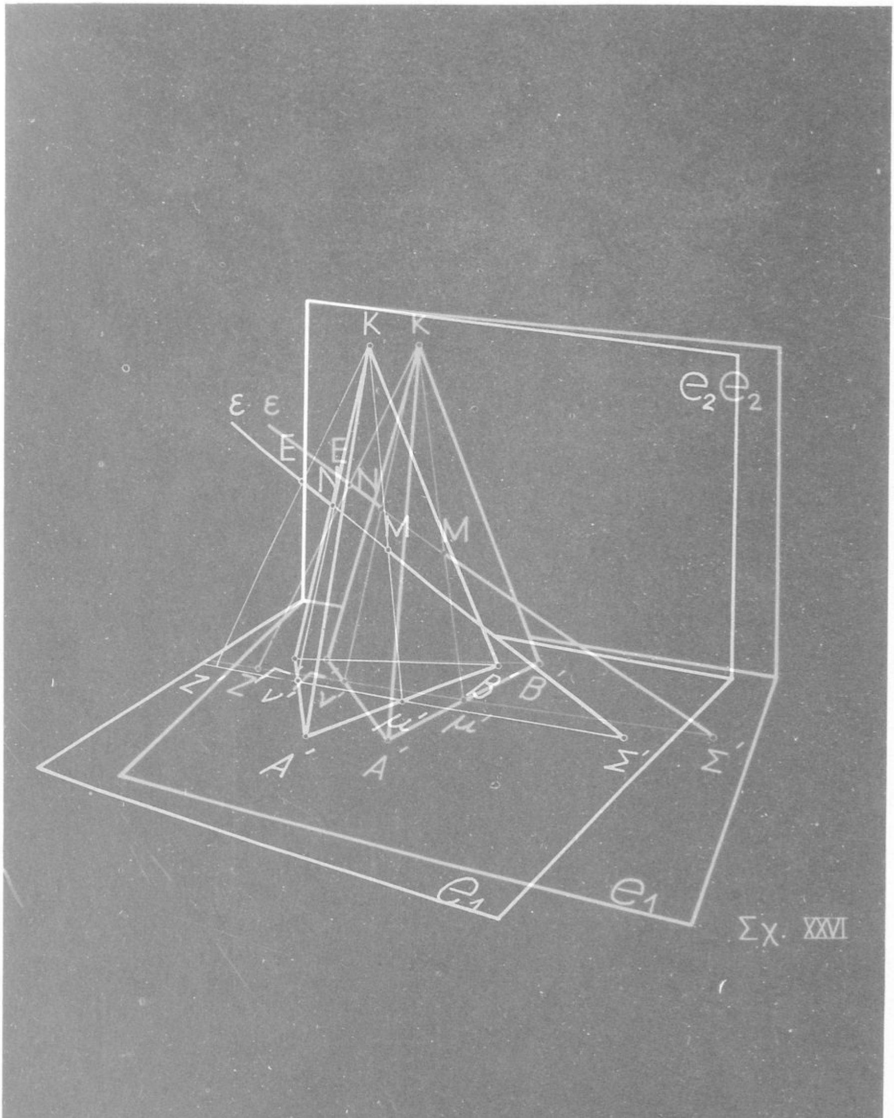
Σχ. XXIII



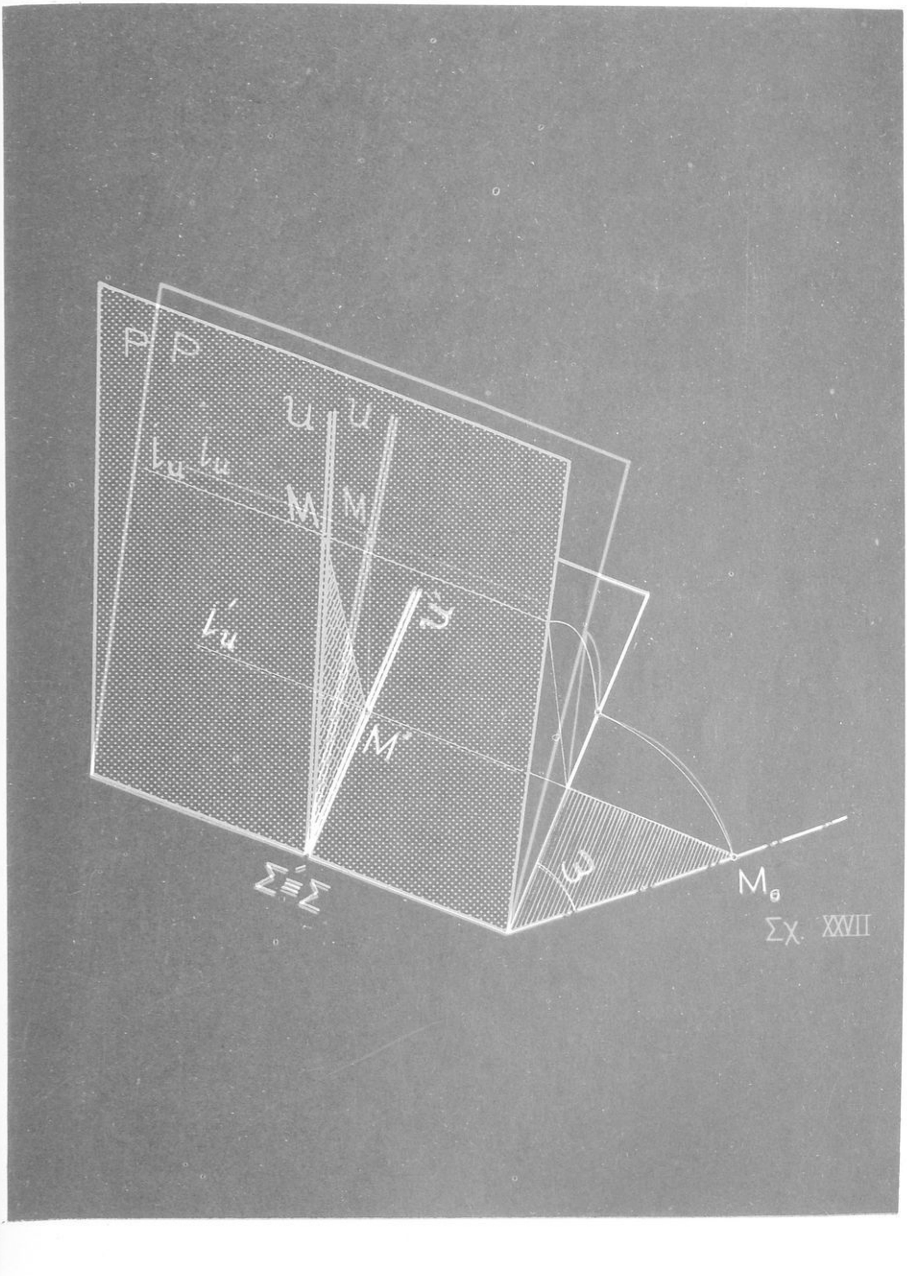
Σχ. XXIV



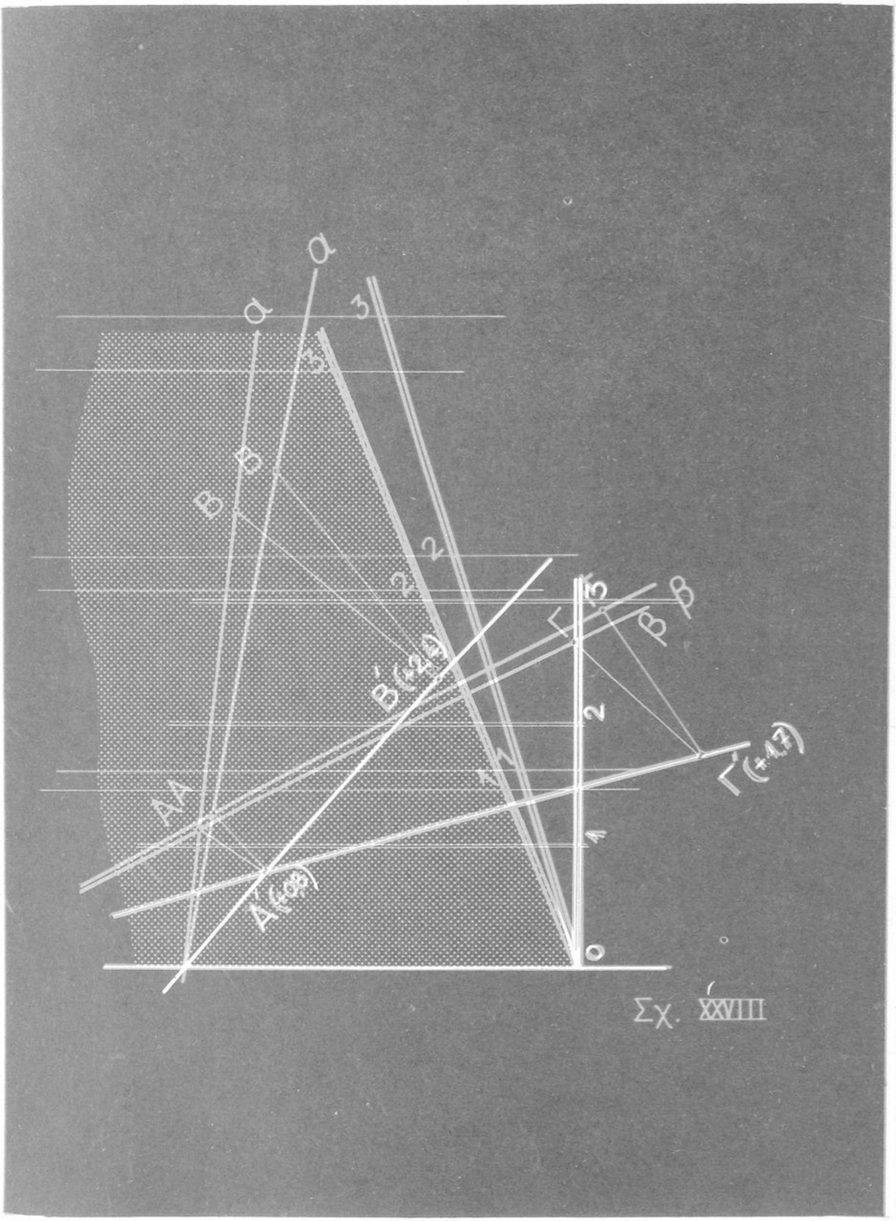
Σχ. XXV



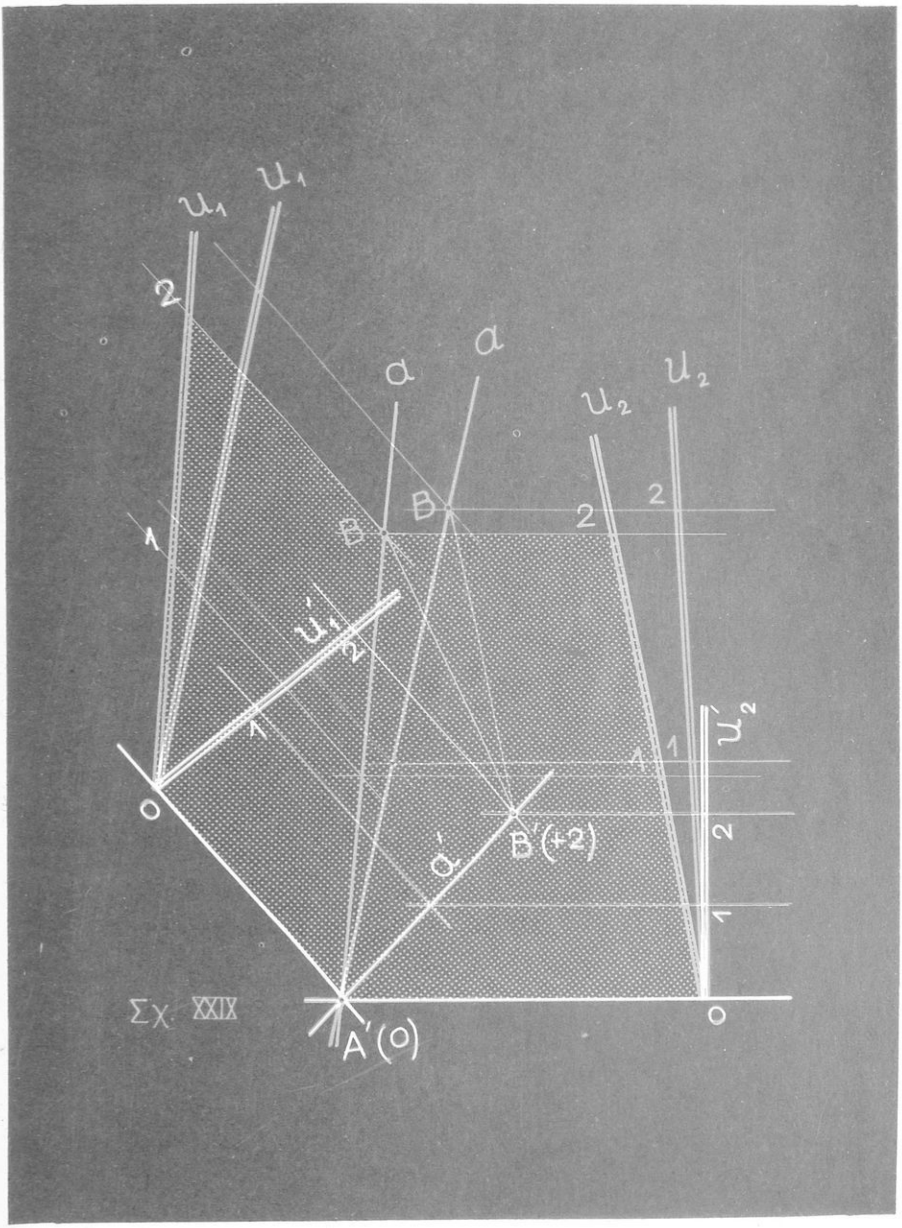
Σχ. XXVI

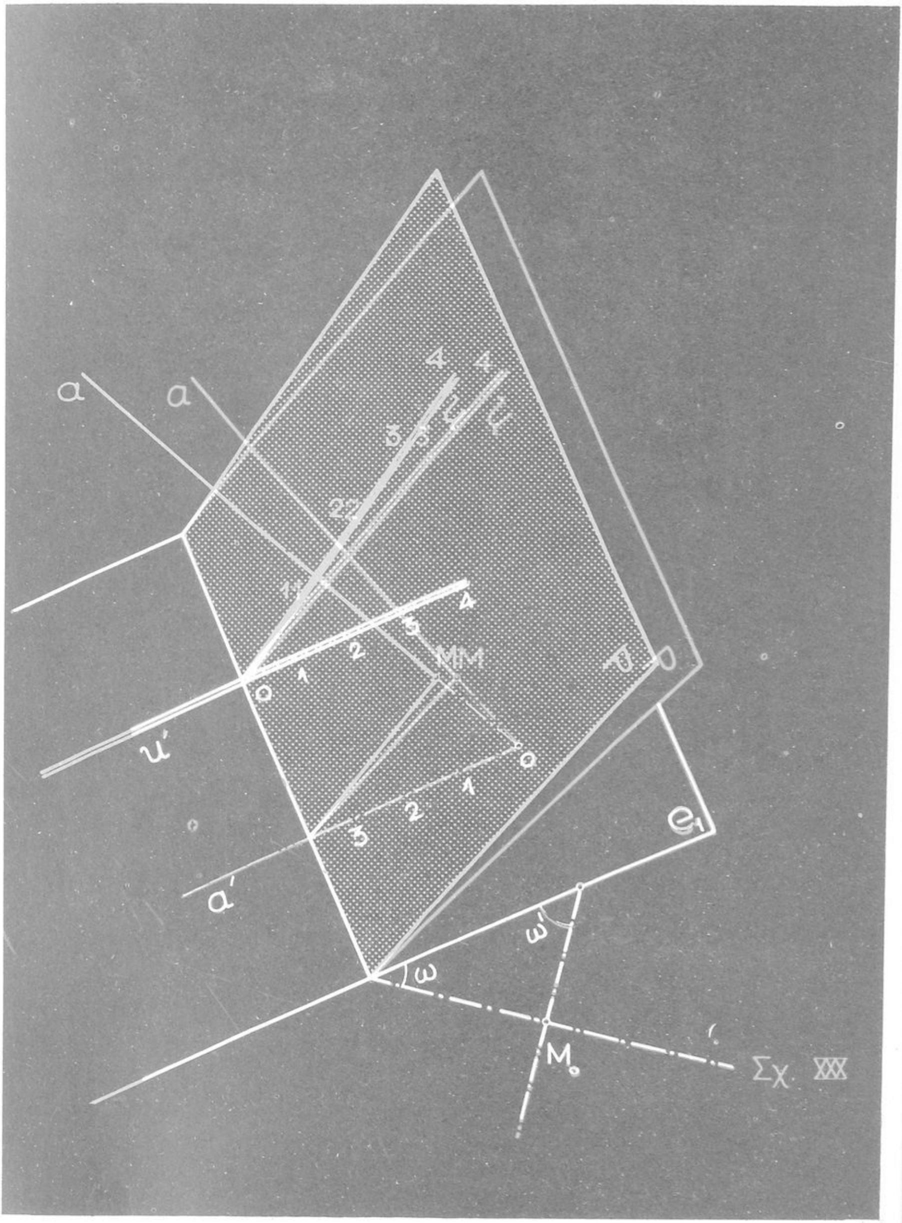


Σχ. XXVII



Σχ. XXVIII


u₁
u₁
2
a
a
u₂
u₂
B
B
2
2
1
u'₁
2
1
u'₂
1
1
O
B'(+2)
α'
2
1
Σχ. XXIX
A'(O)
O



α
α
υ'
α'
ω
ω'
M
Σχ XXX

024000019843