ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ — ΙΩΑΝ. Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

αλγεβρα

τριγωνομετρια

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ ΑΘΗΝΑ 1980

Λ. Αδαμόπουλος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

Τά κεφάλαια καί οἱ παράγραφοι πού ἔχουν ἀστερίσκο (★) δέ θά διδαχτοῦν.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΚΟΡΜΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1980

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ι. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

§ 1. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας. – Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε ὅτι: *κάθε συνάρτηση* $\alpha\colon \mathbf{N} \to E\colon \nu \xrightarrow{\alpha} \alpha(\nu) \in E$ *μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο* $\mathbf{N}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί τιμές σ᾽ ἕνα μή κενό σύνολο* E, δηλαδή *ἡ ἀπεικόνιση, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀντιστοιχία:*

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & \nu, & \ldots\ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ \alpha(1), & \alpha(2), & \alpha(3), & \ldots\ldots, & \alpha(\nu), & \ldots \end{array} \qquad (1)$$

λέγεται **ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου E.**

Στήν παραπάνω ἀντιστοιχία τά πρότυπα (ἀρχέτυπα), δηλ. οἱ φυσικοί ἀριθμοί, λέγονται καί *δεῖκτες*, ἐνῶ οἱ εἰκόνες τους, δηλ. οἱ τιμές τῆς ἀκολουθίας $\alpha\colon \mathbf{N} \ni \nu \to \alpha(\nu) \in E$, λέγονται καί *ὅροι* τῆς ἀκολουθίας. Ἡ ἔκφραση $\alpha(\nu)$ συμβολίζεται συνήθως μέ α_ν καί λέγεται **ὁ νιοστός** ἤ **ὁ γενικός ὅρος** τῆς ἀκολουθίας. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{\alpha_\nu \underset{\text{ορσ}}{=} \alpha(\nu) \quad , \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}}$$

Στήν ἀντιστοιχία (1) συνήθως παραλείπεται ἡ πρώτη γραμμή καί γράφονται μόνο οἱ εἰκόνες. Γράφουμε δηλαδή: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ (2)

Εἰδικά ὁ α_1 λέγεται π ρ ῶ τ ο ς ὅ ρ ο ς τῆς ἀκολουθίας (2), ὁ α_2 δ ε ύ τ ε ρ ο ς ὅ ρ ο ς κ.ο.κ.

Συντομότερα τήν ἀκολουθία (2) θά τή συμβολίζουμε ὡς ἑξῆς: α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$, ἤ α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἀκόμη μέ: (α_ν), $\nu \in \mathbf{N}$ καί ἀκόμη πιό σύντομα μέ: (α_ν).

Στήν εἰδική περίπτωση πού τό $E \subset \mathbf{R}$, ἡ ἀκολουθία $\alpha\colon \mathbf{N} \to E$ λέγεται *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν*. Ὥστε:

Ὁρισμός. *Ὀνομάζουμε* **ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν** *κάθε* (μονοσήμαντη) *ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου* $\mathbf{N}$ *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν στό σύνολο* $\mathbf{R}$ *τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι στό ἑξῆς μέ τόν ὅρο: *«ἀκολουθία»* θά ἐννοοῦμε: *«ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν»*, δηλαδή: $\alpha: \mathbf{N} \to \mathbf{R}: \nu \to \alpha_\nu \in \mathbf{R}$.

Παραδείγματα: **1.** Ἡ *ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν*, δηλ. ἡ ἀκολουθία: $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ τῆς ὁποίας ὁ γενικός (νιοστός) ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός ν, δηλ. $\alpha_\nu = \nu$.

2. Ἡ ἀκολουθία: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$.

3. Ἡ ἀκολουθία: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^\nu \frac{1}{\nu} \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$.

4. Ἄν ἀπεικονίσουμε τούς περιττούς φυσικούς ἀριθμούς στόν ἀριθμό 0 καί τούς ἄρτιους φυσικούς στόν ἀριθμό 1, θά πάρουμε τήν ἀκολουθία: $0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$

Ἡ ἀκολουθία αὐτή συνήθως συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{N} \ni \nu \to \alpha_\nu = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } \nu \text{ περιττός} \\ 1, & \text{ἄν } \nu \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

5. Ἡ ἀκολουθία μέ γενικό ὅρο $\alpha_\nu = 1 + (-1)^\nu$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$0, 2, 0, 2, \ldots, 0, 2, \ldots$$

Αὐτή ἡ ἀκολουθία μέ ἀκριβέστερη διατύπωση γράφεται:

$$\alpha_\nu = \begin{cases} 2, & \text{ἄν } \nu = 2k \quad (k \text{ φυσικός}) \\ 0, & \text{ἄν } \nu = 2k+1 \quad (k \text{ ἀκέραιος } \geqq 0). \end{cases}$$

6. Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{2\nu}{\nu+3}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ὁρίζεται ἔτσι μία ἀπεικόνιση:

$$\alpha: \mathbf{N} \to \mathbf{R}: \quad \nu \to \alpha_\nu \in \mathbf{R}.$$

Δίνοντας στό ν διαδοχικά τίς θετικές ἀκέραιες τιμές, παίρνουμε τούς ὅρους της. Πιό ἀναλυτικά ἡ παραπάνω ἀκολουθία συμβολίζεται μέ τίς διαδοχικές τιμές της:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{2\nu}{\nu+3}, \ldots$$

Παρατηρήσεις. **1)** Ἀπό τά προηγούμενα παραδείγματα βλέπουμε ὅτι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι *τελείως ὁρισμένη*, ὅταν ἔχουμε μία συνάρτηση $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, πού ἐκφράζει ρητά τό γενικό ὅρο α_ν τῆς ἀκολουθίας, δηλ. ὅταν διαθέτουμε τόν τύπο: $\alpha_\nu = f(\nu)$, ὅπου f ἡ γνωστή συνάρτηση τοῦ ν.

2) Μία ἀκολουθία εἶναι ἐπίσης γνωστή, ὅταν δίνονται *ἐπαρκεῖς* πρῶτοι ὅροι τῆς ἀκολουθίας καί ἕνας **ἀναγωγικός τύπος (ἀναδρομική σχέση)** πού ἐπιτρέπει νά βρίσκουμε τόν ἑπόμενο ὅρο $\alpha_{\nu+1}$ κάθε ὅρου α_ν ἀπό τόν προηγούμενό του ἤ γενικότερα ἀπό ὁρισμένους ἀπό τούς προηγούμενούς του. Ἔτσι ἔχουμε ἀκολουθίες τῆς μορφῆς $\alpha_1 = \alpha$ καί $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu)$. ἤ γενικότερα τῆς μορφῆς: $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$ καί $\alpha_{\nu+1} = f(\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1})$.

Ἀξίζει ὅμως ἐδῶ νά τονίσουμε τά ἑξῆς: *Γιά νά ὁρίσουμε πλήρως μία ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μέ μία ἀναδρομική σχέση δέν ἀρκεῖ μόνο ὁ ἀναγωγικός τύπος, ἀλλά εἶναι ἀπαραίτητο νά ξέρουμε καί ἱκανό ἀριθμό πρώτων ὅρων της.* Γιατί ἄν οἱ τιμές αὐτῶν τῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας ἀλλάξουν, τότε ἀλλάζει καί ἡ ἀκολουθία, ἔν καί ὁ ἀναγωγικός της τύπος παραμένει ὁ ἴδιος. Ἐπίσης πολλές φορές δέν εἶναι ἀρκετό νά ὁρίσουμε ἁπλῶς ἱκανό ἀριθμό ἀπό πρώτους ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας. Εἶναι ἀναγκαῖο νά θέσουμε καί τίς συνθῆκες ἐκεῖνες πού θά μᾶς ἐπιτρέπουν νά βρίσκουμε, μέ τήν ἀναδρομική σχέση καί τίς «ἀρχικές» συνθῆκες, ὅσους ὅρους τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ θέλουμε (βλ. σχετικά καί ἄσκηση 2).

3) Μερικές φορές τό δείκτη ν τοῦ α_ν τόν παίρνουμε ἔτσι, ὥστε νά δέχεται τίς τιμές: $0, 1, 2, \ldots$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \ldots$ Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ νιοστός ὅρος τῆς ἀκολουθίας εἶναι ὁ $\alpha_{\nu-1}$.

4) Τό πλῆθος τῶν ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ δέν εἶναι πεπερασμένο, ἐνῶ **τό σύνολο τῶν ὅρων** της εἶναι δυνατό νά εἶναι πεπερασμένο. Τό σύνολο αὐτό τό συμβολίζουμε μέ $\alpha(\mathbf{N})$ καί τό *ὁρίζουμε ὡς τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι μέ κάποιο ὅρο τῆς ἀκολουθίας*, δηλαδή $\alpha(\mathbf{N}) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{x \in \mathbf{R} : \text{ὑπάρχει } \nu \in \mathbf{N} \text{ μέ } \alpha_\nu = x\}$.

Στό παράδειγμα 4 τῆς § 1, π.χ., τό σύνολο τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας εἶναι $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 1\}$, ἐνῶ τό πλῆθος τῶν ὅρων της εἶναι ἄπειρο.

Ἐπίσης στό παράδειγμα 5 εἶναι $\alpha(\mathbf{N}) = \{0, 2\}$, ἐνῶ τό πλῆθος τῶν ὅρων της εἶναι ἄπειρο.

Σημαντική παρατήρηση. Ὅπως ξέρουμε ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις, τό σύνολο τῶν ρητῶν (σύμμετρων) καί ἄρρητων (ἀσύμμετρων) ἀριθμῶν λέγεται **σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν**. Τό σύνολο αὐτό λέγεται καί **εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν,** ἄν θέλουμε νά ἐκφραστοῦμε μέ τή *«γλώσσα»* τῆς Γεωμετρίας· οἱ πραγμ. ἀριθμοί θεωροῦνται τότε ὡς σημεῖα τῆς εὐθείας, γι' αὐτό γιά τά σημεῖα χρησιμοποιοῦμε τά ἴδια σύμβολα μέ αὐτά πού χρησιμοποιοῦμε γιά νά παραστήσουμε τούς πραγμ. ἀριθμούς. Αὐτή ἡ ταυτοποίηση τῶν πραγμ. ἀριθμῶν μέ τά σημεῖα ἑνός ἄξονα βασίζεται σ' ἕνα ἀξίωμα, σύμφωνα μέ τό ὁποῖο: *μεταξύ τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καί τῶν σημείων ἑνός ἄξονα ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία.* Δηλαδή σέ κάθε πραγματικό ἀριθμό ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο σημεῖο τοῦ ἄξονα καί ἀντιστρόφως. Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη αὐτή ἀντιστοιχία τοῦ **R** μέ τά σημεῖα ἑνός ἄξονα, μᾶς ἐπιτρέπει νά θεωροῦμε τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας ὡς τετμημένες τῶν σημείων ἑνός ἄξονα (βλ. ἔναντι σχῆμα) καί νά ἀντιμετωπίζουμε ἔτσι τίς ἀκολουθίες πραγμ. ἀριθμῶν ὡς ἀκολουθίες σημείων τοῦ ἄξονα. Ἡ γεωμετρική αὐτή ἐποπτεία θά μᾶς διευκολύνει πολύ παρακάτω γιά νά κατανοήσουμε μερικές καινούργιες ἔννοιες καί ἀποδείξεις ὁρισμένων προτάσεων πού θά διατυπώσουμε.

§ 2. Πράξεις μεταξύ ἀκολουθιῶν.

—Ἔστω $\mathscr{A}$ τό σύνολο ὅλων τῶν ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ *βασική ἰσότητα* στό $\mathscr{A}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\forall\ (\alpha_\nu), (\beta_\nu) \in \mathscr{A},\ (\alpha_\nu) = (\beta_\nu) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}.$$

Μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathscr{A}$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό *ἄθροισμα*, τή *διαφορά*, τό *γινόμενο* καί τό *πηλίκο*, ὡς μία ἐπίσης ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν, δηλ. ὡς ἕνα στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{A}$. Ἔτσι ἄν (α_ν) καί (β_ν) εἶναι δύο ἀκολουθίες, τότε:

Ὀνομάζουμε **ἄθροισμα** τῶν (α_ν) καί (β_ν) τήν ἀκολουθία $(\alpha_\nu + \beta_\nu)$,

δηλαδή τήν: $\quad \alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_\nu + \beta_\nu, \ldots$

Ὥστε: $\quad (\alpha_\nu) + (\beta_\nu) = (\alpha_\nu + \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}.$

Ὀνομάζουμε **διαφορά** τῆς (α_ν) μεῖον τή (β_ν) τήν ἀκολουθία $(\alpha_\nu - \beta_\nu)$,

δηλαδή τήν: $\quad \alpha_1 - \beta_1,\ \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_\nu - \beta_\nu,$

Ὥστε: $\quad (\alpha_\nu) - (\beta_\nu) = (\alpha_\nu - \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}.$

Ὀνομάζουμε **γινόμενο** ἑνός πραγμ. ἀριθμοῦ λ ἐπί τήν (α_ν) τήν ἀκολουθία

$(\lambda\alpha_\nu)$, δηλ. τήν: $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_\nu, \ldots$

Ὥστε: $\lambda(\alpha_\nu) = (\lambda\alpha_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ὀνομάζουμε **γινόμενο** τῶν (α_ν) καί (β_ν) τήν ἀκολουθία $(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu)$, δηλαδή τήν: $\alpha_1\beta_1,\ \alpha_2\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu\beta_\nu, \ldots$

Ὥστε: $(\alpha_\nu)\cdot(\beta_\nu) = (\alpha_\nu \cdot \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ὀνομάζουμε **πηλίκο** τῆς (α_ν) διά τῆς (β_ν) μέ $\beta_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τήν ἀκολ. $\left(\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$, δηλ. τήν: $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}, \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}, \ldots$

Ὥστε: $(\alpha_\nu) : (\beta_\nu) = (\alpha_\nu : \beta_\nu),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ὀνομάζουμε **ἀπόλυτη τιμή** τῆς (α_ν) τήν ἀκολουθία $(|\alpha_\nu|)$, δηλαδή τήν: $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\nu|, \ldots$

Ὥστε: $|(\alpha_\nu)| = (|\alpha_\nu|),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ὀνομάζουμε **τετραγωνική ρίζα** μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν) μέ $\alpha_\nu \geqq 0\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τήν ἀκολ. $(\sqrt{\alpha_\nu})$, δηλ. τήν:

$$\sqrt{\alpha_1}, \sqrt{\alpha_2}, \ldots, \sqrt{\alpha_\nu}, \ldots$$

Ὥστε: $\sqrt{(\alpha_\nu)} = (\sqrt{\alpha_\nu}),\ \nu \in \mathbf{N}$.

Ἀνάλογα ορίζουμε τή ρίζα k-τάξεως $(k > 2)$ μιᾶς ἀκολουθίας. Ἔτσι ἔχουμε: $\sqrt[k]{(\alpha_\nu)} = (\sqrt[k]{\alpha_\nu}),\ \nu \in \mathbf{N}\quad (k > 2)$.

Παρατήρηση. Οἱ παραπάνω ὁρισμοί μποροῦν νά γενικευθοῦν καί γιά τίς περιπτώσεις, καί μόνο γι' αὐτές, πού ἔχουμε πεπερασμένο πλῆθος ἀκολουθιῶν.

§ 3. Ἡ ἔννοια τῆς φραγμένης ἀκολουθίας.— Ἔστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* **ἄνω φραγμένη**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός* s *τέτοιος, ὥστε:* $\alpha_\nu \leqq s$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathbf{N}$.

Ὁ ἀριθμός s, καθώς καί κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τό s, λέγεται τότε **ἕνα ἄνω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$.

Ὁρισμός 2. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* **κάτω φραγμένη**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός* σ *τέτοιος, ὥστε :* $\sigma \leqq \alpha_\nu$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathbf{N}$.

Ὁ ἀριθμός σ, καθώς καί κάθε ἄλλος πραγμ. ἀριθμός πού εἶναι μικρότερος ἀπό τό σ, λέγεται τότε **ἕνα κάτω φράγμα** τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$.

Ὁρισμός 3. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* **φραγμένη**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι ἄνω καί κάτω φραγμένη*, δηλαδή *ἄν ὑπάρχουν πραγμ. ἀριθμοί* σ, s $(\sigma \leqq s)$ *τέτοιοι, ὥστε:* $\sigma \leqq \alpha_\nu \leqq s$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathbf{N}$.

Δηλ. μία ἀκολουθία $\alpha_\nu, \nu \in \mathbf{N}$ εἶναι φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει κλειστό διάστημα [σ, s] στό ὁποῖο ἀνήκουν ὅλοι οἱ ὅροι της. Ἔτσι, π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή ἰσχύει:

$$0 \leqq \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqq 1 \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}$$

δηλαδή ὅλοι οἱ ὅροι της ἀνήκουν στό κλειστό διάστημα [0, 1].

Ὁρισμός 4. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ *εἶναι* ***ἀπολύτως φραγμένη,*** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει (θετικός) πραγματικός ἀριθμός θ τέτοιος, ὥστε:*

$$|\alpha_\nu| \leqq \theta \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}.$$

Τό θ λέγεται τότε **ἕνα ἀπόλυτο φράγμα** τῆς α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν θ εἶναι ἕνα ἀπόλυτο φράγμα, τότε καί κάθε ἄλλος θετικός ἀριθμός $\varphi > \theta$ εἶναι ἐπίσης ἕνα ἀπόλυτο φράγμα τῆς α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$.

Συνοψίζοντας τά παραπάνω ἔχουμε:

1. (α_ν) ἄνω φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\, s \in \mathbf{R},\ \forall\, \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_\nu \leqq s)$
2. (α_ν) κάτω φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\, \sigma \in \mathbf{R},\ \forall\, \nu \in \mathbf{N},\ \sigma \leqq \alpha_\nu)$
3. (α_ν) φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\, \sigma \in \mathbf{R},\ \exists\, s \in \mathbf{R},\ \forall\, \nu \in \mathbf{N},\ \sigma \leqq \alpha_\nu \leqq s)$
4. (α_ν) ἀπολ. φραγμένη $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$ $(\exists\, \theta \in \mathbf{R}^+,\ \forall\, \nu \in \mathbf{N},\ |\alpha_\nu| \leqq \theta)$.

Ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἰσοδυναμία:

(α_ν) φραγμένη $\Longleftrightarrow$ (α_ν) ἀπολύτως φραγμένη.

Πράγματι, ἀρκεῖ νά λάβουμε: $\theta = \max(|\sigma|, |s|)$.

Παρατήρηση: Ἐξαιτίας τῆς πιό πάνω ἰσοδυναμίας στά ἑπόμενα οἱ ὅροι **φραγμένη** καί **ἀπολύτως φραγμένη** θά χρησιμοποιοῦνται μέ τήν ἴδια σημασία, χωρίς διάκριση.

Παραδείγματα: **1.** Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\eta\mu\nu}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή:

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{\eta\mu\nu}{\nu}\right| \leqq \frac{1}{\nu} \leqq 1 \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}.$$

2. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu^2}$, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή $|\alpha_\nu| = \frac{1}{\nu^2} \leqq 1 \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}$.

3. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu\sigma\upsilon\nu\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2 \cdots$ εἶναι φραγμένη, ἐπειδή:

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\nu\sigma\upsilon\nu\nu|}{|\nu+1|} \leqq \frac{\nu}{\nu+1} \leqq 1 \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}.$$

4. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu^2\sigma\upsilon\nu(3\nu) + \sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu}{5\nu^2+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη.

Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἀπολύτως φραγμένη. Πράγματι, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu| = \frac{|\nu^2\sigma\upsilon\nu(3\nu) + \sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu|}{5\nu^2+1} \leqq \frac{|\nu^2\sigma\upsilon\nu(3\nu)| + |\sqrt{\nu}\cdot\eta\mu\nu|}{5\nu^2+1} \leqq \frac{\nu^2+\sqrt{\nu}}{5\nu^2+1} \leqq \frac{\nu^2+\nu^2}{5\nu^2+1} < \frac{2\nu^2}{5\nu^2} = \frac{2}{5}$$

δηλαδή : $|\alpha_\nu| < \frac{2}{5} \quad \forall\, \nu \in \mathbf{N}$.

§ 4. Ἡ ἔννοια τῆς μονότονης ἀκολουθίας.— Ἔστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δίνουμε τούς ἑπόμενους ὁρισμούς:

Ὁρισμός 1. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι* **αὔξουσα**, συμβολ. $(\alpha_\nu)\uparrow$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει: $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.*

Ὁρισμός 2. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι* **γνησίως αὔξουσα**, συμβολ. $(\alpha_\nu)\underline{\uparrow}$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει: $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.*

Ὁρισμός 3. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι* **φθίνουσα**, συμβολ. $(\alpha_\nu)\downarrow$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει: $\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.*

Ὁρισμός 4. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι* **γνησίως φθίνουσα**, συμβολ. $(\alpha_\nu)\overline{\downarrow}$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει: $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.*

Ὁρισμός 5. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι* **σταθερή**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.*

Μία ἀκολουθία α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ πού ἀνήκει σέ μία ἀπό τίς παραπάνω κατηγορίες λέγεται **μονότονη ἀκολουθία.** Εἰδικότερα, ἄν ἡ ἀκολουθία εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα, τότε λέγεται **γνησίως μονότονη ἀκολουθία.**

Παρατηρήσεις. **1.** Κάθε γνησίως μονότονη ἀκολουθία εἶναι καί μονότονη, δέν ἰσχύει ὅμως καί τό ἀντίστροφο (γιατί;).

2. Ἄν $(\alpha_\nu)\uparrow$, τότε $\alpha_\nu \geqq \alpha_1$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, δηλ. τότε ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι κάτω φραγμένη μέ ἕνα κάτω φράγμα τόν πρῶτο ὅρο της. Ὅμοια, ἄν $(\alpha_\nu)\downarrow$, τότε $\alpha_\nu \leqq \alpha_1$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, δηλ. τότε ἡ (α_ν) εἶναι ἄνω φραγμένη μέ ἕνα ἄνω φράγμα τόν πρῶτο ὅρο της.

3. Γιά νά καθορίσουμε τό εἶδος μονοτονίας μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν), τίς πιό πολλές φορές, ἐργαζόμαστε μέ μία ἀπό τίς ἑπόμενες μεθόδους:

(α) Ἐξετάζουμε τό πρόσημο τῆς διαφορᾶς: $\Delta_\nu = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$.

(β) Ἄν οἱ ὅροι τῆς (α_ν) διατηροῦν πρόσημο, τότε, συνήθως, συγκρίνουμε τό λόγο $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ μέ τή μονάδα. Ἀπό τή σύγκριση αὐτή ἐξάγουμε συμπεράσματα γιά τή μονοτονία τῆς ἀκολουθίας.

(γ) Βρίσκουμε μεταξύ δύο ἤ τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας τή σχέση, ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε μιά ἔνδειξη μονοτονίας καί ἔπειτα, μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἀποδεικνύουμε τήν ἀνισοτική σχέση, ἡ ὁποία θά καθορίσει τελικά τό εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς (α_ν).

Παραδείγματα: **1.** Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἐπειδή:

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} = \alpha_\nu \quad \forall \ \nu \in \mathbf{N}.$$

2. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή:

$$\alpha_{\nu+1} = (\nu+1)^2 > \nu^2 = \alpha_\nu, \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}.$$

3. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή ἄν σχηματίσουμε τή διαφορά $\Delta_\nu = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ ἔχουμε:

$$\Delta_\nu = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu+2} - \frac{\nu}{\nu+1} = \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} > 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N},$$

δηλαδή:

$$\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}.$$

★ 4. Νά ἐξετάσετε ὡς πρός τή μονοτονία τήν ἀκολουθία πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση: $\quad \alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2 \quad$ **καί** $\quad \alpha_1 = \alpha > 0.$

Λύση: Πρῶτα—πρῶτα με ἐπαγωγή ἀποδεικνύουμε ὅτι: $\alpha_\nu > 0 \;\forall\; \nu \in \mathbf{N}$. Ἐξάλλου ἀμέσως βλέπουμε ὅτι: $\alpha_1 = \alpha < \alpha + \alpha_1^2$, δηλ. $\alpha_1 < \alpha_2$. Ἄρα, ἄν ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μονότονη, θά πρέπει νά εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, τότε $\alpha_k^2 < \alpha_{k+1}^2$, ὁπότε $\alpha + \alpha_k^2 < \alpha + \alpha_{k+1}^2$, δηλαδή $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$. Ἄρα $(\alpha_\nu) \uparrow$

Γιά τίς μονότονες ἀκολουθίες φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ ἑξῆς χρήσιμη πρόταση:

★ Πρόταση. Ἄν k_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε ἰσχύει : $k_\nu \geqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἀπόδειξη. *(Μέ ἐπαγωγή)*. Γιά $\nu = 1$ ἰσχύει, ἐπειδή $k_1 \in \mathbf{N}$, ἄρα $k_1 \geqq 1$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει γιά $\nu = \mu$ $(\mu \in \mathbf{N})$, δηλ. ὅτι: $k_\mu \geqq \mu$. Τότε $k_{\mu+1} > k_\mu \geqq \mu$, ἄρα $k_{\mu+1} > \mu$. Ἀπό τήν τελευταία ἀνισότητα, ἐπειδή οἱ $k_{\mu+1}$ καί μ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἕπεται ὅτι: $k_{\mu+1} \geqq \mu + 1$.

Ὥστε: $k_\mu \geqq \mu \implies k_{\mu+1} \geqq \mu + 1$. Ἄρα $k_\nu \geqq \nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

★ § 5. Ἡ ἔννοια τῆς ὑπακολουθίας.

— Ἔστω α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ μία ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν. Ἔστω ἀκόμη μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν (k_ν), δηλαδή:

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_\nu < k_{\nu+1} < \cdots$$

Τότε ὁρίζεται μία ἀκολουθία (β_ν) μέ τύπο: $\beta_\nu = \alpha_{k_\nu} \;\forall\; \nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_{k_1},\ \alpha_{k_2},\ \ldots,\ \alpha_{k_\nu}, \ldots \qquad (1)$$

Ἡ ἀκολουθία (1) λέγεται **ὑπακολουθία** τῆς (α_ν).

Παραδείγματα: Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί ἡ γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία τῶν ἄρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν $k_\nu = 2\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Τότε ὁρίζεται ἡ ἀκολουθία $\alpha_{k_\nu} = \alpha_{2\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλ. ἡ ἀκολουθία: $\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots, \alpha_{2\nu}, \ldots$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό ἐκείνους τούς ὅρους τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ πού ἔχουν ἄρτιο δείκτη. Ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι μία ὑπακολουθία τῆς (α_ν) καί λέγεται **ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων δεικτῶν**. Ὅμοια ὁρίζεται καί ἡ **ὑπακολουθία τῶν περιττῶν δεικτῶν** τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_{2\nu-1}, \ldots$$

Ἔτσι, π.χ. ἄν $\alpha_\nu = (-1)^\nu \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἡ ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων δεικτῶν εἶναι ἡ:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \ldots,\ \frac{1}{2\nu},\ \ldots$$

καί τῶν περιττῶν δεικτῶν εἶναι ἡ: $-1, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{5}, \ldots, -\dfrac{1}{2\nu-1}, \ldots$

Ἐπίσης μία ἄλλη ὑπακολουθία τῆς $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἡ ἀκολουθία:

$\alpha_{k_\nu} = \alpha_{2^\nu} = \dfrac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δηλ. ἡ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \ldots, \dfrac{1}{2^\nu}, \ldots$

Προφανῶς μία ἀκολουθία ἔχει, γενικά, ἄπειρες ὑπακολουθίες.

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Ἐπειδή, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, ἰσχύει: $k_\nu \geqq \nu \;\forall\; \nu \in \mathbf{N}$ θά ἔχουμε: $\nu > \nu_0 \implies k_\nu > \nu_0$.

★ § 6. Ἡ ἔννοια: ἀκέραιο μέρος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

— Ἔστω x ἕνας πραγματικός ἀριθμός. Δίνουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Ορισμός. *Ὀνομάζουμε* **ἀκέραιο μέρος τοῦ x** *καί τό συμβολίζουμε μέ [x], τόν πιό μεγάλο ἀκέραιο ἀριθμό πού δέν ὑπερβαίνει τό x.*

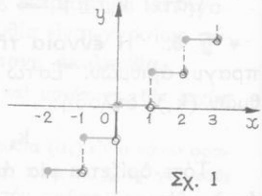
Ἔτσι ἔχουμε:

$$[3{,}95]=3,\ \ [-2]=-2,\ \ [0{,}14]=0,\ \ [-3{,}2]=-4,\ \ [\sqrt{3}]=1,\ \left[\frac{5}{2}\right]=2\cdot$$

Τό ἀκέραιο μέρος ἑνός πραγμ. ἀριθμοῦ x ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι μοναδικό. Ἀκριβέστερα ἀποδεικνύεται στά Μαθηματικά ἡ ἑξῆς:

Πρόταση. *(Θεώρημα τοῦ ἀκέραιου μέρους).*—**Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας καί μόνο ἕνας ἀκέραιος α μέ: $\alpha \leqq x < \alpha + 1$.**

Ἡ παραπάνω πρόταση μᾶς λέγει ὅτι: *γιά κάθε x ἀπό τό* **R** *ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς [α, α + 1) μέ α ἀκέραιο ἀριθμό, στό ὁποῖο ἀνήκει ὁ x.*



Ὁρίζεται συνεπῶς ἡ ἀπεικόνιση:

$$[\ ]:\ \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{Z}:\ x \xrightarrow{[\ ]} [x]=\begin{cases} \nu, \text{ ἄν } \ \nu \leqq x < \nu+1 \\ -\nu, \text{ ἄν } -\nu \leqq x < -\nu+1, \end{cases}$$

ὅπου ν φυσικός ἀριθμός ἤ τό μηδέν (βλ. σχ. 1).

Σχ. 1

Ἀπό τά προηγούμενα ἔχουμε, λοιπόν, ὅτι:

$$\boxed{\forall\ x\in\mathbf{R},\quad [x]\leqq x<[x]+1} \qquad (1)$$

Ἄμεσες συνέπειες τῆς (1) εἶναι οἱ ἑξῆς ἰδιότητες τοῦ ἀκέραιου μέρους:

α) $x=[x]+\theta,\ \forall x\in\mathbf{R}$ καί $0\leqq\theta<1$. **β)** $[x+k]=[x]+k,\ \forall x\in\mathbf{R},\ \forall k\in\mathbf{Z}$.

Πράγματι, ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $0\leqq x-[x]<1$ καί ἄν θέσουμε $x-[x]=\theta$, τότε εἶναι: $x=[x]+\theta$ μέ $0\leqq\theta<1$. Γιά νά ἀποδείξουμε τή β) παρατηροῦμε ὅτι: ἐπειδή $x=[x]+\theta,\ 0\leqq\theta<1$ ἔχουμε: $x+k=[x]+k+\theta,\ 0\leqq\theta<1$ καί συνεπῶς $[x+k]=[([x]+k)+\theta]=[x]+k$, ἀφοῦ τό $([x]+k)\in\mathbf{Z}$.

Σημείωση. Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $\forall\ x\in\mathbf{R},\ x-1<[x]\leqq x$.

§ 7. Ἡ ἔννοια: ἡ συνθήκη p(ν), ν∈N ἰσχύει τελικά γιά κάθε ν∈N.—

Ἔστω p(ν) μία συνθήκη στό **N** Συμφωνοῦμε νά λέμε στά ἑπόμενα ὅτι:

Ἡ συνθήκη p(ν), ν ∈ N **ἰσχύει τελικά** *γιά* **κάθε ν ∈ N**, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει δείκτης $\nu_0\in\mathbf{N}$, δηλ. ἄν ὑπάρχει ἕνας φυσικός ἀριθμός ν_0 τέτοιος, ὥστε ἡ συνθήκη p(ν) εἶναι μία ταυτότητα στό σύνολο:* $\mathbf{N}_{\nu_0}=\{\nu\in\mathbf{N}:\ \nu\geqq\nu_0\}$. Πιό σύντομα: *ἄν γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0$ ἡ συνθήκη p(ν) εἶναι μία ἀληθής πρόταση.*

Εἰδικότερα θά λέμε ὅτι ἡ συνθήκη ἤ ἡ ἰδιότητα p πού ἀναφέρεται σέ μία ἀκολουθία (α_ν). ἰσχύει *τελικά γιά ὅλους τούς δεῖκτες,* ἰσοδύναμα: *τελικά ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (α_ν) πληροῦν τή συνθήκη p,* τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἕνας φυσικός ἀριθμός ν_0 τέτοιος, ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha_{\nu_0+\nu},\ \nu=0,1,2,\cdots,$

δηλαδή ἡ: $\alpha_{\nu_0}, \alpha_{\nu_0+1}, \cdots, \alpha_{\nu_0+\nu}, \cdots$ νά ἔχει τήν ἰδιότητα p. Ἔτσι, ἄν π.χ. $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$ εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί $p(\nu)$ ἡ συνθήκη: $\alpha_\nu < \dfrac{2}{10^3}$, τότε διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι ἡ συνθήκη $p(\nu)$ ἰσχύει *τελικά γιά ὅλους τούς δεῖκτες*, δηλαδή *τελικά ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}, \nu=1, 2, \cdots$ *πληροῦν τή συνθήκη:* $\alpha_\nu < \dfrac{2}{10^3}$. Πράγματι, ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς $\nu_0 = 501$ (γιατί;), ὁπότε ἔχουμε: γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μέ $\nu \geqq \nu_0 = 501$: $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu} \leqq \dfrac{1}{\nu_0} = \dfrac{1}{501} < \dfrac{1}{500} = \dfrac{2}{1000} = \dfrac{2}{10^3}$. Ἡ ἀκολουθία λοιπόν $\alpha_{501+\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ ἔχει τήν ἰδιότητα: ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι ἀπό τό $\dfrac{2}{10^3}$. Συνεπῶς ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$ ἔχει *τελικά* ὅλους τούς ὅρους της μικρότερους ἀπό τό $\dfrac{2}{10^3}$. Αὐτό μέ ἁπλά λόγια σημαίνει ὅτι: *ἄν ἐξαιρέσουμε ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ὅρων τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \cdots$ *ἀπό τήν ἀρχή, δηλαδή τούς:* $a_1, a_2, \ldots, a_{500}$ **ἀπό ἐκεῖ καί πέρα** *ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι ἀπό τό* $\dfrac{2}{10^3}$.

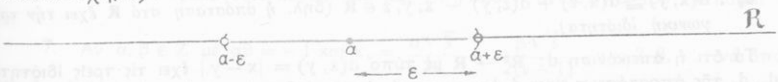
Ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις. **1)** Ἄν μία συνθήκη $p(\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχει ἕνα π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο σύνολο δεικτῶν, στό ὁποῖο ἡ $p(\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ **δέν** ἰσχύει. Ἔτσι στό προηγούμενο παράδειγμα, ἄν $\nu \in \{1, 2, 3, \ldots, 500\}$, τότε ἡ:

$p(\nu)$: $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu} < \dfrac{2}{10^3}$ **δέν** ἰσχύει.

2) Ἄν μία συνθήκη $p(\nu)$, $\nu \in \mathbf{N}$ εἶναι ταυτότητα στό $\mathbf{N}$, δηλ. ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, τότε, προφανῶς, ἰσχύει καί τελικά γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$· τό ἀντίστροφο ὅμως δέν εἶναι ἀληθές.

§ 8. Ἡ ἔννοια τῆς περιοχῆς ἤ γειτονιᾶς σημείου τοῦ R.

— Ἔστω ἕνας πραγματικός ἀριθμός α ($\alpha \in \mathbf{R}$) καί ἕνας θετικός ἀριθμός ε ($\varepsilon > 0$)· τότε ὁρίζεται τό ἀνοικτό διάστημα τῆς μορφῆς : $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, τό ὁποῖο λέγεται **περιοχή** ἤ **γειτονιά τοῦ σημείου α** μέ **κέντρο** τό **α** καί **ἀκτίνα ε** (βλ. ἀμέσως παρακάτω σχῆμα):



Γενικότερα: **περιοχή ἤ γειτονιά ἑνός σημείου α** *ὀνομάζεται κάθε ἀνοικτό διά-*

στημα (γ, δ), *τό ὁποῖο περιέχει τό σημεῖο* α, δηλαδή $\alpha \in (\gamma, \delta)$. Ἔτσι π.χ. τό διάστημα $(1, 2)$ εἶναι περιοχή τοῦ $\sqrt{2}$, ἐπειδή $\sqrt{2} \in (1, 2)$.

Ἡ περιοχή μέ κέντρο τό σημεῖο α καί μέ ἀκτίνα ε θά συμβολίζεται μέ $\pi(\alpha, \varepsilon)$.

Ὥστε: $\pi(\alpha, \varepsilon) \equiv (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}: \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon\}$.

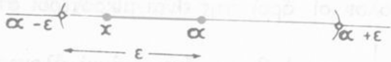
Ἄν $\alpha = 0$, τότε $\pi(0, \varepsilon) \equiv (-\varepsilon, +\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}: -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ καί λέγεται **περιοχή** ἤ **γειτονιά τοῦ μηδενός.**

Μία πολύ χρήσιμη πρόταση εἶναι ἡ ἑξῆς: $(\forall x)\ x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \Longleftrightarrow |x - \alpha| < \varepsilon$.

Πράγματι·

$(\forall x)\ x \in \pi(\alpha, \varepsilon) \Longleftrightarrow x \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \Longleftrightarrow \alpha - \varepsilon < x < \alpha + \varepsilon \Longleftrightarrow |x - \alpha| < \varepsilon$.

Σημ. Κάνετε ἀπολύτως κτῆμα σας τίς παραπάνω ἰσοδυναμίες. Θά τίς χρησιμοποιοῦμε πολύ συχνά ἀπό ἐδῶ καί πέρα. Γιά νά βεβαιωθεῖτε προσέξτε καί τήν ἑπόμενη παράσταση:



Εἰδικά γιά $\alpha = 0$ ἔχουμε: $(\forall x)\ x \in \pi(0, \varepsilon) \Longleftrightarrow x \in (-\varepsilon, +\varepsilon) \Longleftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Longleftrightarrow |x| < \varepsilon$.

Σημαντική παρατήρηση. Ἔχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν προηγούμενη παράγραφο, θά λέμε ὅτι: **τελικά ὅλοι οἱ ὅροι** *μιᾶς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \cdots$ *βρίσκονται στήν περιοχή* $\pi(\alpha, \varepsilon)$ *ἑνός σημείου* α, *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει δείκτης* $\nu_0 \in \mathbf{N}$ *τέτοιος, ὥστε: γιά κάθε* $\nu \geqq \nu_0$ *ἰσχύει:* $\alpha_\nu \in \pi(\alpha, \varepsilon)$, *δηλ.* $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$. Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 7, εἶναι πάλι ἰσοδύναμο μέ: «*ὑπάρχει ἕνα πεπερασμένο πλῆθος* ὅρων τῆς *ἀκολουθίας* $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \cdots$ *πού βρίσκονται* **ἐκτός** *τῆς περιοχῆς* $\pi(\alpha, \varepsilon)$, δηλ. ἐκτός τοῦ διαστήματος $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$».

* **Σημείωση.** Ὅπως μάθαμε καί στήν προηγούμενη τάξη, ἄν $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, τότε ἡ $|x - y|$ παριστάνει **τήν ἀπόσταση** d τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἀπό τόν πραγμ. ἀριθμό y. Ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη ἀπεικόνιση:

$$d: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}: (x, y) \xrightarrow{d} d(x, y) \underset{\text{ορσ}}{=\!=} |x - y|$$

μέ τίς παρακάτω ἰδιότητες:

d_1 : $d(x, y) \geqq 0 \ \forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$ καί $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (δηλ. *ἡ ἀπόσταση στό* $\mathbf{R}$ *εἶναι μή ἀρνητική).*

d_2 : $d(x, y) = d(y, x) \ \forall\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$ (δηλ. *ἡ ἀπόσταση στό* $\mathbf{R}$ *εἶναι συμμετρική).*

d_3 : $d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y) \ \forall\ x, y, z \in \mathbf{R}$ (δηλ. *ἡ ἀπόσταση στό* $\mathbf{R}$ *ἔχει τήν τριγωνική ἰδιότητα).*

Τό ὅτι ἡ ἀπεικόνιση $d: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ μέ τύπο $d(x, y) = |x - y|$ ἔχει τίς τρεῖς ἰδιότητες d_1, d_2, d_3 τῆς ἀποστάσεως εἶναι ἀμέσως φανερό, ἀρκεῖ νά ξαναθυμηθοῦμε τίς γνωστές ἰδιότητες τῆς ἀπόλυτης τιμῆς. Ἔτσι, π.χ., γιά τήν d_3 ἔχουμε:

$d(x, y) = |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leqq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τήν παραπάνω σημείωση καί τήν προηγούμενη παρατήρηση διατυπώνουμε τήν ἑξῆς χρήσιμη πρόταση:

Πρόταση. $\alpha_\nu \in \pi(\alpha, \varepsilon) \Longleftrightarrow d(\alpha_\nu, \alpha) < \varepsilon$ **γιά κάθε** $\nu \in \mathbf{N}$ **μέ** $\nu \geqq \nu_0$.

Ἡ παραπάνω πρόταση μέ λόγια διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: *τελικά ὅλοι οἱ ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας* α_ν, $\nu \in \mathbf{N}$ *βρίσκονται στήν περιοχή* $\pi(\alpha, \varepsilon)$ *ἑνός σημείου* α, *τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ὅροι της πού ἔχουν δείκτη* $\nu \geqq \nu_0$ *ἀπέχουν ἀπό τό κέντρο* α *ἀπόσταση μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα* ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 1. Νά γράψετε τούς πέντε πρώτους ὅρους τῶν ἀκολουθιῶν:

α) $1 + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, β) $\dfrac{2\nu+1}{\nu^2}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, γ) $\dfrac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$,

δ) $\alpha + (\nu-1)\omega$, $\nu=1, 2, \ldots$, ε) $\alpha \cdot \omega^{\nu-1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, στ) $\dfrac{(-1)^\nu}{\nu} + \dfrac{\nu}{2\nu+1}$, $\nu=1,2,\ldots$

ζ) $(-1)^\nu \cdot \dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, η) $\dfrac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu-1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

2. Νά γράψετε τούς δέκα πρώτους ὅρους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9, \alpha_{10}$ ἄν ἔχουμε τήν ἀνα- δρομική σχέση:
$$\alpha_{\nu+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_\nu} \quad \text{καί} \quad \alpha_1 = -\frac{13}{21}.$$
Τί παρατηρεῖτε;

3. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους, εἶναι μονότονες καί φραγμένες:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu^2}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu}{\nu^2+1}$, 4) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu-1}{\nu+1}$.

* **Ὁμάδα Β΄. 4.** Ποιές ἀπό τίς ἑπόμενες ἀκολουθίες α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους, εἶναι φραγμένες καί ποιές δέν εἶναι:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu \cdot \eta\mu 3\nu}{\nu^2+1}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}\eta\mu\dfrac{\pi\nu}{2}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2+1}{2\nu}$, 4) $\alpha_\nu = \nu . 3^{-\nu}$,

5) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu+5}{3^\nu}$, 6) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2}{\nu + \sigma\upsilon\nu^2\nu}$, 7) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3 5\nu}{\nu^3 \cdot \sqrt{\nu}}$.

5. Στήν προηγούμενη ἄσκηση ποιές ἀπό τίς ἀκολουθίες 1) — 4) εἶναι μονότονες καί ποιές δέν εἶναι. Γιά τίς μονότονες νά καθορίσετε τό εἶδος τῆς μονοτονίας τους.

6. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐνῶ ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu = \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Ὑπόδειξη. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει $\alpha_\nu > \alpha_{\nu-1}$ (ἀντίστοιχα: $\beta_{\nu-1} > \beta_\nu$) γιά κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$, ἀφοῦ ἐφαρμόσετε κατάλληλα καί τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli

7. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ μέ $\alpha\beta = -1$ καί $x_\nu = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2\nu} + \dfrac{\beta\sqrt{3}}{2(\nu-1)}$, $\nu = 2, 3, \ldots$ νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:
$$|x_\nu| \leqq \frac{\sqrt{3}}{40} \quad \text{γιά κάθε } \nu \geqq 5,$$
δηλαδή ἡ ἀκολουθία x_ν, $\nu = 2, 3, \cdots$ εἶναι **τελικά** φραγμένη.

§ 9. Ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου ἀκολουθίας.—Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, δηλαδή τήν ἀκολουθία:

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots, \frac{\nu+1}{\nu}, \ldots \tag{1}$$

Γιά τήν ἀκολουθία αὐτή παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει τό ἑξῆς:

Ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας *θετικός ἀριθμός*, π.χ. ὁ $0{,}2\left(=\dfrac{2}{10}\right)$ καί θεωρήσουμε τήν ἀπόσταση τοῦ α_ν ἀπό τό 1, δηλ. τήν $|\alpha_\nu - 1| = \left|\dfrac{\nu+1}{\nu} - 1\right| = \dfrac{1}{\nu}$, τότε ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu - 1| < 0{,}2 \iff \frac{1}{\nu} < \frac{2}{10} \iff \nu > 5,$$

δηλαδή: ἡ ἀπόσταση $d(\alpha_\nu, 1) \equiv |\alpha_\nu - 1| < 0{,}2$ γιά κάθε $\nu = 6, 7, 8, \ldots$

ἤ ἀλλιῶς: $\alpha_\nu \in \left(1 - \dfrac{2}{10},\ 1 + \dfrac{2}{10}\right)$ γιά κάθε $\nu \geqq 6$,

εἴτε ἀκόμη: $1 - \dfrac{2}{10} < \alpha_\nu < 1 + \dfrac{2}{10}$ γιά κάθε $\nu \geqq 6$.

Ἄν τώρα μᾶς δοθεῖ ἕνας ἄλλος θετικός ἀριθμός, π.χ. ὁ $0{,}05\left(=\dfrac{5}{100}\right)$ καί θεωρήσουμε καί πάλι τήν ἀπόσταση τοῦ α_ν ἀπό τό 1, θά ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu - 1| < 0{,}05 \iff \frac{1}{\nu} < \frac{5}{100} \iff \nu > 20$$

δηλαδή: $1 - \dfrac{5}{100} < \alpha_\nu < 1 + \dfrac{5}{100}$ γιά κάθε $\nu \geqq 21$.

Σέ ἀνάλογο συμπέρασμα θά καταλήξουμε ἄν λάβουμε, π.χ. 0,75, ἤ 2,25 καί γενικά ἕναν ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό. Ἀκριβέστερα: ἄν ἀντί τοῦ 0,2 ἤ τοῦ 0,05 κτλ. πάρουμε *ἕναν ὁποιοδήποτε ἀριθμό* $\varepsilon > 0$, τότε θά καταλήξουμε σέ ἀνάλογο συμπέρασμα, δηλ. ἰσχύει τό ἑξῆς: *«ὑπάρχει δείκτης* ν_0 *τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:* $|\alpha_\nu - 1| < \varepsilon$ *γιά κάθε* $\nu \geqq \nu_0$*»*.

Πράγματι, ἔχουμε: $|\alpha_\nu - 1| = \dfrac{1}{\nu} < \varepsilon \iff \nu > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Ἀρκεῖ λοιπόν ὡς ν_0 νά λάβουμε ἕναν ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν $\dfrac{1}{\varepsilon}$ (τέτοιοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν,

π.χ. ὁ $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]^* + 1$, $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 2$, $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 3$, κτλ.).

* Ὑπενθυμίζουμε ὅτι $[x]$ παριστάνει τό **ἀκέραιο μέρος** τοῦ x. Ἰσχύει: $[x] \leqq x < [x] + 1$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι σέ κάθε ἐκλογή τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁ δείκτης ν_0, ἀπό τόν ὁποῖο καί μετά οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) πληροῦν τήν $|\alpha_\nu - 1| < \varepsilon$ ἤ ἰσοδύναμα τήν: $1 - \varepsilon < \alpha_\nu < 1 + \varepsilon$, ἐξαρτᾶται γενικά ἀπό τό ε, γι' αὐτό στά ἑπόμενα συχνά θά γράφουμε $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$. Ἔτσι, γιά $\varepsilon = 0{,}2$ ἔχουμε, ὅπως εἴδαμε παραπάνω $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 6$, ἐνῶ γιά $\varepsilon = 0{,}05$ ἔχουμε: $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 21$.

Ἀπό τά προηγούμενα βλέπουμε πώς ἡ ἀκολουθία (1) ἔχει τήν ἰδιότητα: Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (δηλ. πού ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ε) τέτοιος, ὥστε: ἡ ἀπόσταση $|\alpha_\nu - 1|$ τοῦ ὅρου α_ν ἀπό τόν ἀριθμό 1 εἶναι μικρότερη ἀπό τό ε γιά κάθε δείκτη $\nu \geqq \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, δηλαδή τ ε λ ι κ ά *ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *βρίσκονται σέ* **κάθε** *περιοχή τοῦ 1.*

Τήν ἀκολουθία (1) πού ἔχει τήν παραπάνω ἰδιότητα τή λέμε **συγκλίνουσα ἀκολουθία** καί τόν ἀριθμό 1 στόν ὁποῖο αὐτή συγκλίνει τό λέμε **ὅριο** ἤ **ὁριακή τιμή** τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Ἀπό τά προηγούμενα ὁδηγούμαστε τώρα στό νά δώσουμε τόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Θά λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ **συγκλίνει** *στόν πραγματικό ἀριθμό α* ἤ *ὅτι* **τείνει** *στόν πραγμ. ἀριθμό α* ἤ *ὅτι* **τό ὅριο** *τῆς ἀκολουθίας* (α_ν) *εἶναι ὁ πραγμ. ἀριθμός α* καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\alpha_\nu \to \alpha$ ἤ $\lim\alpha_\nu = \alpha$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχει δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (πού ἐξαρτᾶται, γενικά, ἀπό τό ε) *τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει*:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \quad \text{γιά κάθε } \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Συμβολικά ὁ παραπάνω ὁρισμός διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_\nu \to \alpha \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon\ \ \forall\ \nu \geqq \nu_0}} \qquad (1)$$

Ὁ ἀριθμός α, ὅπως εἴπαμε καί παραπάνω, λέγεται **ὅριο** ἤ **ὁριακή τιμή** τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Σημειώνουμε: $\mathbf{o\rho\alpha_\nu = \alpha}$ ἤ πιό συχνά: $\mathbf{lim^*\alpha_\nu = \alpha}$ ἤ ἁπλούστερα $\alpha_\nu \to \alpha$ καί διαβάζουμε ἀντίστοιχα: *ὅριο* α_ν ἴσο μέ α ἤ α_ν *τείνει (συγκλίνει)* στό α.

Στήν εἰδική περίπτωση πού εἶναι $\boldsymbol{\alpha = 0}$, δηλ. $\mathbf{lim}\boldsymbol{\alpha_\nu = 0}$, ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὀνομάζεται **μηδενική.** Τότε ὁ παραπάνω ὁρισμός διατυπώνεται σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \ \forall\ \nu \geqq \nu_0}} \qquad (2)$$

Ἔτσι, π.χ. *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}, \nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική*, γιατί ἄν ε

* Τό σύμβολο «lim» εἶναι συντομογραφία τῆς Λατινικῆς λέξεως: limes (= ὅριο) καί χρησιμοποιεῖται διεθνῶς στά Μαθηματικά.

εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ἀριθμός, τότε ἄν συμβολίσουμε μέ ν_0 τό μικρότερο ἀπό τούς φυσικούς (θετικούς ἀκεραίους) ἀριθμούς πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τό $\frac{1}{\varepsilon}$, δηλ. ἄν $\nu_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \equiv \nu_0(\varepsilon)$ ἔχουμε:

γιά κάθε $\quad \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow \frac{1}{\nu} < \varepsilon$, δηλ. $|\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{\nu}\right| < \varepsilon$.

Ἄρα: $$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Σημ. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ θυμίζει τίς ἀναπηδήσεις πού κάνει μία ἐλαστική σφαίρα (τόπι) πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο. Τό ὕψος στό ὁποῖο φθάνει ἡ σφαίρα κάθε φορά πού ἀναπηδᾶ εἶναι μικρότερο ἀπό τά προηγούμενα καί **τελικά** ἡ σφαίρα ἰσορροπεῖ πάνω στό ἐπίπεδο *(ὕψος ἀναπηδήσεως μηδέν)*.

Ὁμοίως *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική.*

Πράγματι: $|\alpha_\nu| = \left|(-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon}$.

Ἄρα:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \forall\, \nu \geq \nu_0(\varepsilon).$$

Συνεπῶς: $$\alpha_\nu \to 0.$$

Σημ. Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἀναλυτικά ἡ: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ θυμίζει τίς αἰωρήσεις ἑνός ἐκκρεμοῦς, τῶν ὁποίων τό πλάτος συνεχῶς ἐλαττώνεται μέχρι νά μηδενισθεῖ.

Ἐπίσης *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική.*

Πράγματι: $|\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Ἄρα: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 : \forall\, \nu \geq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ἰσχύει:

$$|\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon.$$

Ὥστε: $$\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$, τότε ἀπό τή σύγκριση τῶν ὁρισμῶν (1) καί (2) προκύπτει ὅτι: *ἡ ἀκολουθία* $\delta_\nu = (\alpha_\nu - \alpha)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική καί ἀντιστρόφως.* Ὥστε:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = \alpha \Longleftrightarrow \lim(\alpha_\nu - \alpha) = 0} \qquad (3)$$

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε: $\lim \dfrac{3\nu+1}{\nu}=3$, ἐπειδή $\lim\left(\dfrac{3\nu+1}{\nu}-3\right)=\lim\dfrac{1}{\nu}=0$.

Ἀπό τήν (3) ἕπεται ὅτι ὁ γενικός ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν), ἡ ὁποία συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό α μπορεῖ πάντοτε νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς: $\alpha_\nu=\alpha+\delta_\nu$, ὅπου δ_ν ὁ γενικός ὅρος μιᾶς μηδενικῆς ἀκολουθίας.

Παρατηρήσεις. **α)**. Ἄν γιά μία ἀκολουθία (α_ν) ἰσχύει: $\alpha_\nu=\alpha$, γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 \in \mathbf{N}$, δηλ. ἡ (α_ν) εἶναι **τελικά σταθερή**, τότε ἡ (α_ν) συγκλίνει καί ἔχει ὅριο τόν α. Προφανῶς, ἄν $\alpha_\nu=\alpha$, $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$, τότε: $\lim\alpha_\nu=\alpha$.

Εἰδικότερα ἡ σταθερή ἀκολουθία $\alpha_\nu=0\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία.

Προσέξτε! Ἄν (α_ν) εἶναι μηδενική ἀκολουθία, δέ σημαίνει ὅτι οἱ ὅροι της εἶναι ἴσοι μέ μηδέν. Μάλιστα πολλές φορές συμβαίνει: $\alpha_\nu\to 0$ καί ὅμως $\alpha_\nu\neq 0\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$. Π.χ., ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\dfrac{1}{\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$

β). Ξεκινώντας ἀπό τίς ἰσοδυναμίες:

$$|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon \iff \alpha-\varepsilon<\alpha_\nu<\alpha+\varepsilon \iff \alpha_\nu\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\equiv\pi(\alpha,\varepsilon)$$

καί ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση τῆς § 8 συμπεραίνουμε ἀπό τήν (1) ὅτι: *σέ* ***κάθε*** *περιοχή τοῦ ὁρίου α μιᾶς συγκλίνουσας ἀκολουθίας (α_ν) βρίσκονται τελικά ὅλοι οἱ ὅροι της, ἐνῶ πεπερασμένου πλήθους ὅροι της,* ἐνδεχομένως καί κανένας, *βρίσκονται ἐκτός τῆς περιοχῆς $\pi(\alpha,\varepsilon)$.* Ἐπομένως: *ἄν ἡ ἀκολουθία (α_ν) συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό $\alpha\neq 0$, τότε ἀπό κάποιο δείκτη καί πέρα ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (α_ν) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός* (γιατί;).

γ). Ὅπως εἴπαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου κατά τή θεώρηση μιᾶς ἀκολουθίας πολλές φορές ἐπικαλούμαστε τή γεωμετρική ἐποπτεία. Ἔτσι μέχρι τώρα πολλές φορές θεωρούσαμε τούς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας ὡς τετμημένες τῶν σημείων ἑνός ἄξονα καί μέ αὐτό τόν τρόπο ἀντιμετωπίζαμε τίς ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν ὡς ἀκολουθίες σημείων τοῦ ἄξονα. Ἐπειδή ὅμως ἕνας πραγμ. ἀριθμός ἐνδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες ἀπό μία φορές ὡς ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας, ἕπεται ὅτι ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα ἐνδέχεται νά παρουσιάζεται περισσότερες ἀπό μία φορές. Γι' αὐτό τό λόγο, πολλές φορές παρακάτω γιά τή γεωμετρική παράσταση τῆς ἀκολουθίας (α_ν), χρησιμοποιοῦμε ἕναν ἄλλο τρόπο ἀπεικονίσεως: *ἀπεικονίζουμε, στό καρτεσιανό ἐπίπεδο* $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, *τόν ὅρο της α_ν στό σημεῖο $M_\nu(\nu,\alpha_\nu)$.*

Ἡ γεωμετρική παράσταση τῆς ἀκολουθίας εἶναι τότε ἕνα σύνολο ἀπό *«μεμονωμένα»* σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 2).

δ). Ἔστω μία μηδενική ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ Π.χ. ἡ ἀκολουθία πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀπεικόνιση:

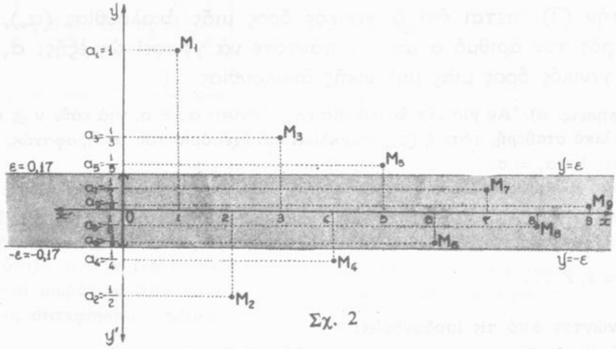
$$\alpha:\ \mathbf{N}\to\mathbf{R}:\ \nu\to\alpha_\nu=(-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha(\mathbf{N})=\left\{1,-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4},\ldots,(-1)^{\nu-1}\dfrac{1}{\nu},\ldots\right\}$.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη τήν προηγούμενη παρατήρηση ἡ γεωμετρική παράσταση αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας ἀποτελεῖται ἀπό *«μεμονωμένα»* σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὅπως φαίνεται στό σχῆμα 2 τῆς ἑπομένης σελίδας.

Ὁ ὁρισμός (2) πού δώσαμε γιά τή μηδενική ἀκολουθία ἐπιδέχεται τώρα τήν ἑξῆς γεωμετρική ἑρμηνεία: Ἄς πάρουμε ἕνα **θετικό ἀριθμό ε**, π.χ. τόν $\varepsilon=0{,}17$ καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y=\varepsilon=0{,}17$ καί $y=-\varepsilon=-0{,}17$ πού εἶναι παράλληλες μέ τόν ἄξονα τῶν x καί ὁρίζουν στό ἐπίπεδο μία *«ταινία»* (βλ. Σχ. 2).

Παρατηροῦμε στό παρακάτω σχῆμα ὅτι τά σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 καί M_5 βρίσκονται ἔξω ἀπό τήν ταινία, ἐνῶ τά σημεῖα πού ἔχουν δείκτη $\nu \geqq \nu_0 = 6$, δηλ. τά σημεῖα M_6, M_7, M_8, M_9, ... βρίσκονται ὅλα μέσα στήν ταινία τῶν δύο παραλλήλων. Αὐτό σημαίνει πώς



Σχ. 2

οἱ τεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν, δηλ. οἱ ὅροι: $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας πού πήραμε βρίσκονται στό ἀνοικτό διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, δηλ. σέ μιά περιοχή τοῦ μηδενός. Ὥστε:

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \iff |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqq \nu_0 = 6 \qquad (\varepsilon = 0{,}17).$$

Ἄν τώρα πάρουμε ἕναν ἄλλο θετικό ἀριθμό ε πιό μικρό ἀπό τόν προηγούμενο π.χ. τόν $\varepsilon = 0{,}09$ καί ἐπαναλάβουμε τά παραπάνω, τότε βλέπουμε πώς τά σημεῖα M_{12}, M_{13}, ..., M_ν, ... βρίσκονται μέσα στήν ταινία πού ὁρίζουν οἱ εὐθεῖες $y = \varepsilon = 0{,}09$ καί $y = -\varepsilon = -0{,}09$ καί αὐτό σημαίνει πάλι ὅτι οἱ τεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν, δηλαδή οἱ ὅροι $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας πού πήραμε βρίσκονται **ὅλοι** στό διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Ἄρα ἰσχύει:

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \iff |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \ \nu \geqq \nu_0 = 12 \qquad (\varepsilon = 0{,}09).$$

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καί ἄν πάρουμε ὡς ε ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό, μόνο πού γιά κάθε ε ἀλλάζει ὁ δείκτης ν_0 (παραπάνω εἴδαμε ὅτι γιά $\varepsilon = 0{,}17$ ἔχουμε ὡς ν_0 τό 6, ἐνῶ γιά $\varepsilon = 0{,}09$, τό 12).

Ὥστε: σέ κάθε ἐκλογή τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὑπάρχει ἕνας δείκτης ν_0, *ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ε, δηλαδή* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$.

Στό παραπάνω σχῆμα 2, παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι: καθώς τό ν *«αὐξάνει ἀπεριόριστα»* τό διάγραμμα τῶν σημείων $M_1(1, 1)$, $M_2\left(2, -\frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(3, \frac{1}{3}\right)$, ... ὅλο καί περισσότερο *«πλησιάζει»* καί τελικά *«τείνει νά πέσει πάνω στόν ἄξονα Ox»*. Γι' αὐτό τήν ἀκολουθία αὐτή α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu}$ πού ἱκανοποιεῖ τά παραπάνω, τή χαρακτηρίζουμε ὡς *μηδενική ἀκολουθία.*

Ἄ σ κ η σ η. Νά δώσετε ἀντίστοιχη γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ὁρισμοῦ (1) γιά τή συγκλίνουσα ἀκολουθία: $\alpha_\nu = \frac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ **ἔχει ὅριο τή μονάδα.**

Λύση. Πράγματι, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu - 1| = \left|\frac{\nu}{\nu+1} - 1\right| = \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu} < \varepsilon \iff \nu > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ἄρα:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1:\ \forall\ \nu\geqq\nu_0>\frac{1}{\varepsilon}\Longrightarrow|\alpha_\nu-1|<\varepsilon,\ \text{συνεπῶς}\ \alpha_\nu\to 1.$$

2ο. Ἔστω $\alpha_\nu=\dfrac{2\nu-1}{3\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim\alpha_\nu=\dfrac{2}{3}$.

Λύση. Πράγματι:

$$\left|\alpha_\nu-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{2\nu-1}{3\nu}-\frac{2}{3}\right|=\left|-\frac{1}{3\nu}\right|=\frac{1}{3\nu}<\varepsilon\iff\nu>\frac{1}{3\varepsilon}.$$

Ἄρα:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1:\left|\alpha_\nu-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon\ \forall\ \nu\geqq\nu_0(\varepsilon),\ \text{συνεπῶς}\ \lim\alpha_\nu=\frac{2}{3}.$$

3ο. Ἔστω $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^2-\nu}{\nu^2+1}$, $\nu=1,2,\ldots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim\alpha_\nu=1$.

Λύση. Πράγματι: $|\alpha_\nu-1|=\left|\dfrac{\nu^2-\nu}{\nu^2+1}-1\right|=\dfrac{\nu+1}{\nu^2+1}<\dfrac{2\nu}{\nu^2}=\dfrac{2}{\nu}<\varepsilon\iff\nu>\dfrac{2}{\varepsilon}$.

Δηλαδή γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$ (ἀρκεῖ ὡς ν_0 νά λάβουμε ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τό $\dfrac{2}{\varepsilon}$ καί τέτοιοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν, π.χ., ὁ $\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+1$, $\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+2$, $\left[\dfrac{2}{\varepsilon}\right]+3$, κτλ.) τέτοιος, ὥστε γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0(\varepsilon)>\dfrac{2}{\varepsilon}$ ἰσχύει: $|\alpha_\nu-1|<\varepsilon$, συνεπῶς $\lim\alpha_\nu=1$.

4ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

Λύση. Πράγματι:

$$|\alpha_\nu-0|=|\alpha_\nu|=|\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}|=\frac{(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu})}{(\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu})}=$$

$$=\frac{(\nu+1)-\nu}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}=\frac{1}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}<\frac{1}{\sqrt{\nu}}<\varepsilon\iff\nu>\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Ἄρα:

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1:\ |\alpha_\nu|<\varepsilon\ \forall\ \nu\geqq\nu_0>\frac{1}{\varepsilon^2}.\ \text{Ὥστε}\ \alpha_\nu\to 0.$$

Θά δώσουμε τώρα καί ἕνα παράδειγμα ἀκολουθίας πού δέ συγκλίνει στό **R**.

5ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=(-1)^\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ δέ συγκλίνει στό R.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε (ἄτοπος ἀπαγωγή) ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό x. Δηλαδή ἔστω ὅτι: $\lim\alpha_\nu=x$ $(x\in\mathbf{R})$. Τότε γιά κάθε $\varepsilon>0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon=1/2$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0\in\mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|(-1)^\nu-x|<\frac{1}{2}\ \forall\ \nu\geqq\nu_0.$$

Εἰδικά:

$$|(-1)^{\nu_0}-x|<\frac{1}{2}\quad\text{καί}\quad|(-1)^{\nu_0+1}-x|<\frac{1}{2},$$

ἐπειδή $\nu_0\geqq\nu_0$ καί $\nu_0+1\geqq\nu_0$. Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$|(-1)^{\nu_0}-(-1)^{\nu_0+1}|=|(-1)^{\nu_0}-x+x-(-1)^{\nu_0+1}|\leqq|(-1)^{\nu_0}-x|+|x-(-1)^{\nu_0+1}|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Δηλαδή: $\quad|(-1)^{\nu_0}-(-1)^{\nu_0+1}|<1 \qquad (1)$

Ἀλλά: $\quad|(-1)^{\nu_0}-(-1)^{\nu_0+1}|=2 \qquad (2)$

Ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε ὅτι $2 < 1$, πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Ὥστε ἡ ὑπόθεση πού κάναμε γιά τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὅτι συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό ὁδηγεῖ σέ ἄτοπο. Ἄρα ἡ ἀκολουθία $(-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει στό $\mathbf{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α **8.** Γιά $\varepsilon > 0$ νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι: $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, ὅπου α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{2}{\nu^2+\nu}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{3}{4\nu^2 - 2\nu}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3\nu}{\sqrt{\nu}}$, 4) $\alpha_\nu = \dfrac{3}{\sqrt{\nu^2+2}}$.

9. Ἔστω $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu - 5}{4\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \alpha_\nu = \dfrac{3}{4}$.

10. Γιά $\varepsilon > 0$ νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι:

$$\left|\frac{\nu^2+1}{\nu^2-1} - 1\right| < \varepsilon.$$

11. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία: $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+2} - \sqrt{\nu^2+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική.

* Ὁμάδα Β΄ **12.** Γιά $\varepsilon > 0$, νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι: $|\alpha_\nu| < \varepsilon$,
ὅπου α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι:

1) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2\nu+1}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu - 1}{\nu^2+1}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + 2\sigma\upsilon\nu 5\nu}{\sqrt{\nu}}$, 4) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+\nu+1} - \sqrt{\nu^2+\nu+2}$

Ἐφαρμογή γιά $\varepsilon = 10^{-6}$.

13. Γιά $\varepsilon > 0$ νά προσδιορίσετε δείκτη $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε γιά $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$ νά εἶναι:

$$\left|\alpha_\nu - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon,$$

ὅπου $$\alpha_\nu = \sqrt{\nu}\,(\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}\,),\ \nu = 1, 2, \ldots$$

14. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική, τότε θά εἶναι μηδενική καί ἡ ἀκολουθία: $\beta_\nu \underset{\text{ορσ}}{=} \sqrt{|\alpha_\nu|}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

III. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Σέ ὅλες τίς παρακάτω ἰδιότητες οἱ ἀκολουθίες θεωροῦνται πραγματικές καί τά ὅριά τους ἀριθμοί πραγματικοί, κι ὅταν ἀκόμη δέν τό τονίζουμε ἰδιαίτερα.

§ 10. Ἰδιότητα Ι.(*Τό μονοσήμαντο τοῦ ὁρίου*).**—Τό ὅριο συγκλίνουσας ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μονοσημάντως ὁρισμένο.**

Δηλαδή :
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha\\ \alpha_\nu \to \alpha'\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \alpha'}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω (ἀπαγωγή σέ ἄτοπο) ὅτι $\alpha_\nu \to \alpha$ καί $\alpha_\nu \to \alpha'$, ὅπου α καί α' ἀριθμοί πραγματικοί μέ $\alpha \neq \alpha'$. Τότε $\dfrac{|\alpha - \alpha'|}{2} > 0$. Ἄρα γιά $\varepsilon = \dfrac{|\alpha - \alpha'|}{2} > 0$ ὑπάρχουν δεῖκτες ν_0', ν_0'' τέτοιοι, ὥστε:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0' \qquad (1)$$

$$|\alpha_\nu - \alpha'| < \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0'' \qquad (2)$$

Τότε ὅμως γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \max\{\nu_0', \nu_0''\}$ ἰσχύουν συγχρόνως οἱ (1), (2) καί συνεπῶς, προσθέτοντας κατά μέλη, λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha_\nu - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Ὥστε γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἔχουμε:

$$|\alpha - \alpha'| = |(\alpha_\nu - \alpha) - (\alpha_\nu - \alpha')| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha_\nu - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|.$$

Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ἐπειδή δέν μπορεῖ νά εἶναι $|\alpha - \alpha'| < |\alpha - \alpha'|$.

*** § 11. Ἰδιότητα ΙΙ.— Κάθε ὑπακολουθία συγκλίνουσας ἀκολουθίας ἔχει τό ἴδιο μ' αὐτή ὅριο.**

Δηλαδή : $\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \implies \alpha_{k_\nu} \to \alpha}$

Ἀπόδειξη. Ἔστω μία ἀκολουθία (α_ν) πού συγκλίνει στόν πραγματικό ἀριθμό α καί (α_{k_ν}) μία ὑπακολουθία της. Τότε ἔχουμε: γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \ \forall\ \nu \geqq \nu_0$ (1)

Ἔστω τώρα ἕνας φυσικός ἀριθμός $\nu \geqq \nu_0$, τότε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση τῆς § 4, ἔχουμε $k_\nu \geqq \nu$, ὅπου $k_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μία γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν καί συνεπῶς $k_\nu \geqq \nu_0$ (βλ. καί παρατήρ. τῆς § 5).

Τότε ὅμως ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $|\alpha_{k_\nu} - \alpha| < \varepsilon, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0$. Ὥστε ἰσχύει: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): |\alpha_{k_\nu} - \alpha| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0$ καί γιά κάθε ἀκολουθία $(k_\nu)\uparrow$ φυσικῶν ἀριθμῶν. Συνεπῶς $\alpha_{k_\nu} \to \alpha$.

Παρατηρήσεις. **α)** Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει πάντοτε, δηλ. ἄν $\alpha_{k_\nu} \to \alpha$, δέν ἕπεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καί $\alpha_\nu \to \alpha$, ὅπως ἐξάλλου φαίνεται στό παράδειγμα: $\alpha_\nu = (-1)^\nu, \nu = 1, 2, \ldots, \alpha_{2\nu} = (-1)^{2\nu} = 1 \to 1$ καί ὅμως ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει (βλ. παρδ. 5, σελ. 23).

β) Ἄν μία ὑπακολουθία μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει, τότε καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει (γιατί;).

γ) Ἄν ὑπάρχουν δυό ὑπακολουθίες μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ πού συγκλίνουν, ἀλλά σέ διαφορετικά ὅρια, τότε ἡ (α_ν) δέ συγκλίνει (γιατί;). Ἔτσι, π.χ., ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει, γιατί ἡ ὑπακολουθία τῶν ὅρων της μέ ἄρτιο δείκτη εἶναι: $\alpha_{2\nu} = 1 \to 1$ καί ἡ ὑπακολουθία τῶν ὅρων της μέ περιττό δείκτη εἶναι: $\alpha_{2\nu+1} = -1 \to -1$.

*** § 12. Ἰδιότητα ΙΙΙ.— Ἄν $\rho \in \mathbf{N}$ καί $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε ἰσχύει :**

$$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \iff \alpha_{\nu+\rho} \to \alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀκολουθία $(\alpha_{\nu+\rho})$ εἶναι ὑπακολουθία τῆς (α_ν). Ἄρα

$$\alpha_\nu \to \alpha \implies \alpha_{\nu+\rho} \to \alpha.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι: ἄν $\alpha_{\nu+\rho} \to \alpha$, τότε $\alpha_\nu \to \alpha$.

Πράγματι, ἀφοῦ $\alpha_{\nu+\rho} \to \alpha$ γιά $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης ν_1: $|\alpha_{\nu+\rho} - \alpha| < \varepsilon$, $\forall\ \nu \geqq \nu_1$ (1). Θέτουμε: $\nu_0 = \rho + \nu_1$. Τότε γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \geqq \nu_0 = \rho + \nu_1$ ἔχουμε: $\nu - \rho \geqq \nu_1$ καί συνεπῶς ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $|\alpha_{(\nu-\rho)+\rho} - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$ γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$. Ἄρα: $\alpha_\nu \to \alpha$.

Σημείωση. Ἡ ἰδιότητα III διατυπώνεται μέ λόγια πιό γενικά ὡς ἑξῆς: **Ἡ «διαγραφή» ἤ ἡ «προσθήκη» ὅρων πού ἀντιστοιχοῦν σέ πεπερασμένο πλῆθος δεικτῶν δέν ἐπηρεάζει τή σύγκλιση μιᾶς ἀκολουθίας.** Αὐτό συμβαίνει, γιατί ἡ ἰδιότητα τῆς συγκλίσεως μιᾶς ἀκολουθίας ἀνήκει στίς ἰδιότητες πού ἰσχύουν «τελικά». Εὔκολα κανείς μπορεῖ νά διαπιστώσει ὅτι ἀπό μιά τάξη καί μετά, γιά τήν πρώτη ἀκολουθία, οἱ ὅροι τῶν ἀκολουθιῶν (α_ν) καί $(\alpha_{\nu+\rho})$ θά συμπίπτουν.

§ 13. Ἰδιότητα IV.—Κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.

Δηλαδή: $\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \implies \alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ φραγμένη}}$

Ἀπόδειξη. Ἔστω μία ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_\nu \to \alpha$ καί ἕνας $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$. Τότε ἰσχύει: $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon_0$ γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \nu_0(\varepsilon_0)$ καί συνεπῶς:

$$|\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \alpha + \alpha| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha| < \varepsilon_0 + |\alpha|, \ \forall\ \nu \geqq \nu_0 \quad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

(i) Ἄν εἶναι $\nu_0 = 1$, τότε $|\alpha_\nu| < |\alpha| + \varepsilon_0 \equiv \varphi$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί συνεπῶς ἡ (α_ν) εἶναι ἀπολύτως φραγμένη, ἄρα καί φραγμένη.

(ii) Ἄν $\nu_0 > 1$, τότε θεωροῦμε τούς ὅρους: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu_0 - 1}$ καί θέτουμε:

$$\varphi \equiv \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_{\nu_0-1}|, \varepsilon_0 + |\alpha|\} \quad (2)$$

Τότε ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu| \leqq \varphi, \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἄρα ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι πάλι φραγμένη.

Σχόλιο. Μιά πιό ἁπλή καί σύντομη ἀπόδειξη εἶναι καί ἡ ἑξῆς: Ἀφοῦ $\alpha_\nu \to \alpha$, ἕπεται ὅτι: γιά $\varepsilon = 1 > 0$ ὑπάρχει $\nu_0 = \nu_0(1)$: $|\alpha_\nu - \alpha| < 1$, $\forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ὁπότε: $|\alpha_\nu| = |\alpha_\nu - \alpha + \alpha| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|$, $\forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ἔστω: $\theta = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_{\nu_0 - 1}| + (1 + |\alpha|)$.

Τότε: $|\alpha_\nu| \leqq \theta$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Ἄρα α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη.

Παρατήρηση. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει πάντοτε, δηλαδή ὑπάρχουν φραγμένες ἀκολουθίες πού δέ συγκλίνουν. Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἄν καί εἶναι φραγμένη, ἀφοῦ $|\alpha_\nu| = |(-1)^\nu| = 1 \leqq 1$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, δέ συγκλίνει (βλ. πρδ. 5, § 9).

Εἶναι ἐπίσης φανερό ὅτι: Ἄν μία ἀκολουθία (α_ν) δέν εἶναι φραγμένη, τότε ἡ (α_ν) δέ συγκλίνει (γιατί;).

§ 14. Ἰδιότητα V.— Τό γινόμενο μηδενικῆς ἀκολουθίας ἐπί φραγμένη εἶναι μηδενική ἀκολουθία.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0 \\ (\beta_\nu) \text{ φραγμένη}\end{array}\right\} \implies \alpha_\nu \beta_\nu \to 0}$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ (β_ν) εἶναι φραγμένη, ἕπεται ὅτι εἶναι καί ἀπολύτως φραγμένη καί συνεπῶς ὑπάρχει $\theta > 0$: $|\beta_\nu| \leq \theta, \ \forall \ \nu \in N$. (1)

Ἐξάλλου, ἀφοῦ ἡ $\alpha_\nu \to 0$, ἔπεται ὅτι γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\frac{\varepsilon}{\theta} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0 \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\theta}, \ \forall \ \nu \geq \nu_0. \qquad (2)$$

Τότε ὅμως, γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$ ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu\beta_\nu| = |\alpha_\nu||\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{\theta}\cdot\theta = \varepsilon.$$

Ἄρα: $\alpha_\nu\beta_\nu \to 0.$

Πόρισμα 1ο: $\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ k \in R \end{array}\right\} \Rightarrow k\alpha_\nu \to 0$

Πόρισμα 2ο: $\left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to \alpha \\ k \in R \end{array}\right\} \Rightarrow k\alpha_\nu \to k\alpha$

Τό πρῶτο πόρισμα εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἄν θεωρήσουμε ὡς (β_ν) τή σταθερή ἀκολουθία $\beta_\nu = k, \ \forall \ \nu \in N$.

Τό πόρισμα 2 εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πορίσματος 1, ἀφοῦ $(\alpha_\nu - \alpha) \to 0$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τό πόρισμα 2 γιά $k=-1$ ἔχουμε: $\alpha_\nu \to \alpha \Rightarrow -\alpha_\nu \to -\alpha$.
2) Ἀπό τό συμπέρασμα τοῦ πορίσματος 2 συνάγεται ὅτι: $\lim(k\alpha_\nu) = k\cdot\lim\alpha_\nu, \ \forall k \in R$

§ 15. **Ἰδιότητα VI.—Ἄν ἡ (β_ν) εἶναι μηδενική ἀκολουθία καί ἡ (α_ν) ἀκολουθία τέτοια, ὥστε: γιά κάθε $\nu \geq \nu_1 \in N$ νά ἰσχύει:**

$$|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu|, \quad (k > 0)$$

τότε ἡ (α_ν) εἶναι ἐπίσης μηδενική ἀκολουθία.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l} |\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu|, \ \forall \ \nu \geq \nu_1 \\ k > 0, \ \beta_\nu \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to 0}$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\beta_\nu \to 0$ ἔπεται: γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\frac{\varepsilon}{k} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_2 = \nu_2\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{k}$ γιά κάθε $\nu \geq \nu_2$.

Τότε ὅμως γιά κάθε $\nu \geq \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ θά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ:

$$|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu| \quad \text{καί} \quad |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{k}$$

καί συνεπῶς:

$$|\alpha_\nu| \leq k\cdot|\beta_\nu| < k\cdot\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0.$$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to 0.$

Πόρισμα.— $\left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu| \leqq |\beta_\nu|,\ \forall\ \nu\in\mathbb{N}\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to 0.$

Ἐφαρμογή. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu 3\nu}{\nu^2+\nu+1} \to 0.$

Λύση. Ἔχουμε:

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{\eta\mu 3\nu}{\nu^2+\nu+1}\right| \leqq \frac{1}{\nu^2+\nu+1} < \frac{1}{\nu^2+\nu} < \frac{1}{\nu} \to 0. \text{ Ἄρα } \alpha_\nu \to 0.$$

§ 16. Ἰδιότητα VII. (*Ἰδιότητα τῶν ἰσοσυγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν*).—Ἰσχύει:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \gamma_\nu,\ \forall\ \nu \geqq \nu_1\\ \beta_\nu \to \alpha \text{ καί } \gamma_\nu \to \alpha\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to \alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\beta_\nu \to \alpha$ ἕπεται: γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\beta_\nu - \alpha| < \varepsilon \Longleftrightarrow \alpha - \varepsilon < \beta_\nu < \alpha + \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_2(\varepsilon) \tag{1}$$

Ἐπίσης, ἀφοῦ $\gamma_\nu \to \alpha$ ἕπεται ὅτι ὑπάρχει δείκτης $\nu_3 = \nu_3(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε:

$$|\gamma_\nu - \alpha| < \varepsilon \Longleftrightarrow \alpha - \varepsilon < \gamma_\nu < \alpha + \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_3(\varepsilon) \tag{2}$$

Ἔτσι, γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}$ θά ἔχουμε:

$$\alpha - \varepsilon < \beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \gamma_\nu < \alpha + \varepsilon$$

δηλαδή: $\alpha - \varepsilon < \alpha_\nu < \alpha + \varepsilon \Longleftrightarrow |\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_0.$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to \alpha.$

Παρατήρηση. Μία ειδική περίπτωση τῆς παραπάνω ἰδιότητας πού τή συναντοῦμε συχνά εἶναι ἡ ἑξῆς:
ἄν $\beta_\nu \to 0$ καί $|\alpha_\nu| \leqq \beta_\nu$, τότε $\alpha_\nu \to 0$ (βλ. καί Πορισμα, § 15).

Πράγματι· $|\alpha_\nu| \leqq \beta_\nu \Longleftrightarrow -\beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \beta_\nu$ καί ἀφοῦ $\beta_\nu \to 0 \Longrightarrow -\beta_\nu \to 0.$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to 0.$

§ 17. Ἰδιότητα VIII.— Ἄν δύο ἀκολουθίες (α_ν) καί (β_ν) συγκλίνουν καί ἰσχύει $\alpha_\nu < \beta_\nu,\ \forall\ \nu\in\mathbb{N}$, τότε θά ἔχουμε: $\lim \alpha_\nu \leqq \lim \beta_\nu$.

Δηλαδή: $\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha,\ \beta_\nu \to \beta\\ \alpha_\nu < \beta_\nu,\ \forall\ \nu\in\mathbb{N}\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \leqq \beta}$

Ἀπόδειξη. Τήν ἰδιότητα αὐτή τή δείχνουμε μέ τή μέθοδο τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο. Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha > \beta$. Τότε $\dfrac{\alpha-\beta}{2} > 0$ καί ἐπειδή $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta$ ὑπάρχουν $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ μέ:

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\alpha-\beta}{2},\ \forall\ \nu \geqq \nu_1 \quad \text{καί} \tag{1}$$

$$|\beta_\nu-\beta|<\frac{\alpha-\beta}{2}, \ \forall \ \nu\geqq\nu_2 \qquad (2)$$

Ἄρα, γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0=\max\{\nu_1,\nu_2\}$ θά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ (1) καί (2) καί συνεπῶς προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$|\alpha_\nu-\alpha|+|\beta_\nu-\beta|<\alpha-\beta \qquad (3)$$

Ἀλλά: $\beta_\nu-\beta-\alpha_\nu+\alpha\leqq|\beta_\nu-\beta-\alpha_\nu+\alpha|\leqq|\beta_\nu-\beta|+|\alpha_\nu-\alpha| \qquad (4)$

Ἔτσι, γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0$ ἀπό τίς (3) καί (4) παίρνουμε:

$$\beta_\nu-\beta-\alpha_\nu+\alpha<\alpha-\beta, \quad \text{δηλαδή:} \quad \beta_\nu<\alpha_\nu, \ \forall \ \nu\geqq\nu_0.$$

Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\beta_\nu>\alpha_\nu$, $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$.

Ἄρα: $\alpha\leqq\beta$.

Πόρισμα 1ο: $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu\to\alpha\\ \alpha_\nu<s, \ \forall\ \nu\in\mathbf{N}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\leqq s$

Πόρισμα 2ο: $\left.\begin{array}{l}\beta_\nu\to\beta\\ \sigma<\beta_\nu, \ \forall\ \nu\in\mathbf{N}\end{array}\right\}\Rightarrow \sigma\leqq\beta$

Ἀπόδειξη. Ἄμεσες συνέπειες τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἀρκεῖ νά πάρουμε τή σταθερή ἀκολουθία (β_ν) μέ $\beta_\nu=s$, ἀντίστοιχα τή σταθερή ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_\nu=\sigma$.

Σημείωση. Προσέξτε ἰδιαίτερα τίς περιπτώσεις $s=0$ καί $\sigma=0$.

* § 18. Ἰδιότητα IX.—Γιά κάθε ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν (α_ν) ἰσχύει:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_{2\nu}\to\alpha\\ \alpha_{2\nu-1}\to\alpha\end{array}\right\}\Longleftrightarrow \alpha_\nu\to\alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $\alpha_{2\nu}\to\alpha$ καί $\alpha_{2\nu-1}\to\alpha$. Τότε $\forall\ \varepsilon>0$ ὑπάρχουν δεῖκτες $\nu_1,\nu_2\in\mathbf{N}$ μέ:

$$|\alpha_{2\nu}-\alpha|<\varepsilon, \ \forall\ \nu\geqq\nu_1 \text{ καί } |\alpha_{2\nu-1}-\alpha|<\varepsilon, \ \forall\ \nu\geqq\nu_2.$$

Θέτουμε: $\nu_0=\max\{2\nu_1, 2\nu_2-1\}$ καί παρατηροῦμε ὅτι: κάθε φυσικός ἀριθμός ν θά εἶναι $\nu=2k$ (ἄρτιος) ἤ $\nu=2k-1$ (περιττός). Ὁπότε:

(i) ἄν ν εἶναι ἄρτιος $(\nu=2k)$, τότε γιά $\nu\geqq\nu_0$ ἔχουμε: $2k\geqq2\nu_1\Longrightarrow k\geqq\nu_1\Longrightarrow|\alpha_{2k}-\alpha|<\varepsilon$, δηλαδή: $|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon$

(ii) ἄν ν εἶναι περιττός $(\nu=2k-1)$, τότε γιά $\nu\geqq\nu_0$ ἔχουμε: $2k-1\geqq2\nu_2-1\Longrightarrow k\geqq\nu_2$ $\Longrightarrow|\alpha_{2k-1}-\alpha|<\varepsilon$, δηλαδή: $|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon$.

Ὥστε: $\forall\ \nu\geqq\nu_0$ ἕπεται ὅτι: $|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon$ καί συνεπῶς $\alpha_\nu\to\alpha$.

Τό ἀντίστροφο εἶναι ἀμέσως φανερό ἀπό τήν ἰδιότητα II τῆς § 11.

IV. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Ἄν (α_ν) καί (β_ν) εἶναι ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε, ὅπως μάθαμε καί στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου, τό ἄθροισμα, ἡ διαφορά, τό γινόμενο καί τό πηλίκο τους εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀκολουθίες:

$$(\alpha_\nu + \beta_\nu),\quad (\alpha_\nu - \beta_\nu),\quad (\alpha_\nu\beta_\nu)\quad \text{καί}\quad \left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$$

ὅπου στήν τελευταία περίπτωση ὑποτίθεται ὅτι: $\beta_\nu \neq 0,\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$.

Ἡ σύγκλιση τῶν τελευταίων ἀκολουθιῶν καί τά ὅριά τους ἐξαρτῶνται ἀπό τή σύγκλιση καί τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν (α_ν) καί (β_ν).

Ἀκριβέστερα ἰσχύουν οἱ ἑπόμενες προτάσεις:

§ 19. Ἰδιότητα X. *(ὅριο ἀθροίσματος)*.—**Ἄν $\lim\alpha_\nu=\alpha$ καί $\lim\beta_\nu=\beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha+\beta$.**

Δηλαδή: $$\boxed{\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu) = \lim\alpha_\nu + \lim\beta_\nu}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\lim\alpha_\nu=\alpha$ ἕπεται ὅτι: γιά κάθε $\varepsilon>0$, ἄρα καί γιά $\frac{\varepsilon}{2}>0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_1=\nu_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\equiv\nu_1(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\alpha_\nu-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\ \nu\geqq\nu_1 \tag{1}$$

Ἐπίσης, ἀφοῦ $\lim\beta_\nu=\beta$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_2=\nu_2(\varepsilon)$ ὥστε νά ἰσχύει:

$$|\beta_\nu-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ \nu\geqq\nu_2 \tag{2}$$

Τότε ὅμως, γιά κάθε $\nu\geqq\nu_0=\max\{\nu_1,\nu_2\}$ θά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ (1) καί (2) καί συνεπῶς θά ἔχουμε:

$$\forall\ \varepsilon>0 \text{ καί } \forall\ \nu\geqq\nu_0 \Longrightarrow |(\alpha_\nu+\beta_\nu)-(\alpha+\beta)| = |(\alpha_\nu-\alpha)+(\beta_\nu-\beta)| \leqq$$
$$\leqq |\alpha_\nu-\alpha|+|\beta_\nu-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

δηλαδή: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon): |(\alpha_\nu+\beta_\nu)-(\alpha+\beta)|<\varepsilon,\ \forall\ \nu\geqq\nu_0$.

Αὐτό σημαίνει ὅτι ὑπάρχει τό $\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)$ καί ὅτι ἰσχύει:

$$\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu)=\alpha+\beta=\lim\alpha_\nu+\lim\beta_\nu.$$

Σημείωση. Μποροῦμε νά διατυπώσουμε καί μέ λόγια τήν παραπάνω ἰδιότητα ὡς ἑξῆς: **Τό ὅριο τοῦ ἀθροίσματος δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁρίων τους.**

Παρατηρήσεις. **1)** Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἐπεκτείνεται καί στήν περίπτωση ἑνός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν. Δηλαδή τότε ἰσχύει:

$$\lim(\alpha_\nu+\beta_\nu+\cdots+x_\nu)=\lim\alpha_\nu+\lim\beta_\nu+\cdots+\lim x_\nu \tag{1}$$

2) Προσέξτε! ἡ (1) δέν ἰσχύει ἄν τό πλῆθος τῶν προσθετέων δέν εἶναι πεπερασμένο. Αὐτό φαίνεται καί ἀπό τό ἀκόλουθο ἀντιπαράδειγμα*: Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα AB μέ μῆκος ἴσο μέ τή μονάδα, τό ὁποῖο διαιροῦμε σέ ν ἴσα μέρη ($\nu\in\mathbf{N}$). Τότε ἔχουμε:

$$\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}=1 \tag{2}$$

Ἄν ἀλήθευε ἡ (1) γιά ὁποιοδήποτε πλῆθος προσθετέων θά παίρναμε ἀπό τή (2):

$$1=\lim\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}\right)=\lim\frac{1}{\nu}+\lim\frac{1}{\nu}+\cdots+\lim\frac{1}{\nu}=0 \ \textit{(ψευδές)}.$$

---

* Ἕνα παράδειγμα μέ τό ὁποῖο ἀποδεικνύεται ὅτι μία πρόταση p εἶναι ψευδής, ὀνομάζεται **ἀντιπαράδειγμα** τῆς p.

3) Τό ἀντίστροφο τῆς ἰδιότητας X δέν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδή ἄν τό ἄθροισμα δυό ἀκολουθιῶν εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία, αὐτό δέ συνεπάγεται κατ' ἀνάγκη ὅτι καθεμιά ἀπ' αὐτές εἶναι συγκλίνουσα ἀκολουθία. Εἶναι δυνατό μάλιστα νά μή συγκλίνει οὔτε ἡ μία οὔτε ἡ ἄλλη. Π.χ. γιά τίς ἀκολουθίες: $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί $\beta_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύει:

$\alpha_\nu + \beta_\nu = (-1)^\nu + (-1)^{\nu+1} = (-1)^\nu[1 + (-1)] = 0 \to 0$ καί ὅμως καμία δέ συγκλίνει.

Ἔχοντας τώρα ὑπόψη καί τήν παρατήρηση 1 τῆς § 14 ἰσχύει:

§ 20. Ἰδιότητα XI. (*ὅριο διαφορᾶς*).—**Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καί $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim(\alpha_\nu - \beta_\nu)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha - \beta$.**

Δηλαδή: $$\boxed{\lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu - \lim \beta_\nu}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha\\ \beta_\nu \to \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha\\ -\beta_\nu \to -\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + (-\beta_\nu) \to \alpha + (-\beta), \text{ δηλ. } \alpha_\nu - \beta_\nu \to \alpha - \beta.$$

§ 21. Πόρισμα.—Γιά κάθε $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha\\ \beta_\nu \to \beta\end{array}\right\} \Rightarrow (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) \to \xi\alpha + \eta\beta.}$$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητας X καί τοῦ πορίσματος 2 τῆς § 14. Εἰδικά γιά $\xi = 1$ καί $\eta = -1$ παίρνουμε τήν ἰδιότητα XI.

§ 22. Ἰδιότητα XII. (*ὅριο γινομένου*).—**Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καί $\lim \beta_\nu = \beta$, τότε ὑπάρχει τό $\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu)$ καί ἰσοῦται μέ $\alpha\beta$.**

Δηλαδή: $$\boxed{\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = (\lim \alpha_\nu) \cdot (\lim \beta_\nu).}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta = \alpha_\nu\beta_\nu - \alpha_\nu\beta + \alpha_\nu\beta - \alpha\beta = \alpha_\nu(\beta_\nu - \beta) + \beta(\alpha_\nu - \alpha). \quad (1)$$

Οἱ ἀκολουθίες $(\beta_\nu - \beta)$ καί $(\alpha_\nu - \alpha)$ εἶναι μηδενικές καί ἡ (α_ν) εἶναι φραγμένη (γιατί εἶναι συγκλίνουσα). Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$(\S\ 14, \text{ Ἰδ. V}): \quad \left.\begin{array}{l}\beta_\nu - \beta \to 0\\ (\alpha_\nu) \text{ φραγμένη}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu(\beta_\nu - \beta) \to 0$$

$$(\S\ 14, \text{ Πόρ. } 1): \quad \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu - \alpha \to 0\\ \beta \in \mathbf{R}\end{array}\right\} \Rightarrow \beta \cdot (\alpha_\nu - \alpha) \to 0.$$

Ἄρα, ἀπό τήν ἰδιότητα X: $\alpha_\nu(\beta_\nu - \beta) + \beta(\alpha_\nu - \alpha) \to 0$. Δηλ. $\alpha_\nu\beta_\nu - \alpha\beta \to 0$ καί συνεπῶς: $\alpha_\nu\beta_\nu \to \alpha\beta$.

Ὥστε: $\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = \alpha \cdot \beta = (\lim \alpha_\nu) \cdot (\lim \beta_\nu)$.

Σημείωση: Μέ λόγια ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: **Τό ὅριο τοῦ γινομένου δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν ὁρίων τους.**

Παρατηρήσεις. 1) Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἐπεκτείνεται καί στήν περίπτωση ἑνός πεπερασμένου πλήθους συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν. Δηλαδή τότε ἰσχύει:

$$\lim(\alpha_\nu\cdot\beta_\nu\cdot\gamma_\nu\ldots x_\nu)=\lim\alpha_\nu\cdot\lim\beta_\nu\cdot\lim\gamma_\nu\ldots\lim x_\nu \quad (1)$$

Εἰδικότερα, ἄν k ἀκολουθίες εἶναι ἴσες, τότε ἰσχύει:

$$\alpha_\nu \to \alpha \Longrightarrow \lim(\alpha_\nu)^k=(\lim\alpha_\nu)^k=\alpha^k \quad (k\in\mathbf{N}). \quad (2)$$

2) **Προσέξτε!** ἡ (1) δέν ἰσχύει ἄν τό πλῆθος τῶν παραγόντων δέν εἶναι πεπερασμένο. Ἐπίσης τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω ἰδιότητας γενικά δέν ἰσχύει (παράδειγμα;).

§ 23. Ἰδιότητα XIII *(ὅριο πηλίκου)*.—**Ἄν $\lim\alpha_\nu=\alpha$ καί $\lim\beta_\nu=\beta\neq 0$ καί ἀκόμη ἄν $\beta_\nu\neq 0,\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$, τότε ὑπάρχει τό $\lim\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ καί ἰσοῦται μέ $\frac{\alpha}{\beta}$.**

Δηλαδή: $$\boxed{\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\lim\alpha_\nu}{\lim\beta_\nu}}$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι $0\neq\beta_\nu\to\beta\neq 0$. Παρατηροῦμε πρῶτα-πρῶτα ὅτι: $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\alpha_\nu\cdot\frac{1}{\beta_\nu}$. Ἄρα ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι: $\frac{1}{\beta_\nu}\to\frac{1}{\beta}$, δηλαδή ὅτι:

$$\frac{1}{\beta_\nu}-\frac{1}{\beta}\to 0.$$

Πράγματι, γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\left|\frac{1}{\beta_\nu}-\frac{1}{\beta}\right|=\frac{|\beta-\beta_\nu|}{|\beta_\nu|\cdot|\beta|}=\frac{|\beta_\nu-\beta|}{|\beta_\nu|\,|\beta|}=\frac{1}{|\beta_\nu|\,|\beta|}\cdot|\beta_\nu-\beta| \quad (1)$$

Ἐξάλλου, ἀφοῦ $\beta_\nu\to\beta\neq 0\Rightarrow\forall\ \varepsilon>0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon=\frac{|\beta|}{2}>0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει: $|\beta_\nu-\beta|<\frac{|\beta|}{2},\ \forall\ \nu\geqq\nu_0$.

Ἀλλά: $$|\beta|-|\beta_\nu|\leqq|\beta-\beta_\nu|=|\beta_\nu-\beta|$$

ὁπότε: $|\beta|-|\beta_\nu|<\frac{|\beta|}{2}$, δηλαδή: $|\beta_\nu|>|\beta|-\frac{|\beta|}{2}=\frac{|\beta|}{2},\ \forall\ \nu\geqq\nu_0$

καί συνεπῶς: $$\frac{1}{|\beta_\nu|}<\frac{2}{|\beta|},\ \forall\ \nu\geqq\nu_0$$

Ἄρα: $$\frac{1}{|\beta_\nu|\,|\beta|}<\frac{2}{|\beta|^2}=\frac{2}{\beta^2},\ \forall\ \nu\geqq\nu_0 \quad (2)$$

Ἑπομένως, ἀπό τίς (1) καί (2), τελικά εἶναι:

$$\left|\frac{1}{\beta_\nu}-\frac{1}{\beta}\right|<\frac{2}{\beta^2}\cdot|\beta_\nu-\beta|,\ \forall\ \nu\geqq\nu_0 \quad (3)$$

Ἀλλά $\beta_\nu-\beta\to 0$ (γιατί $\beta_\nu\to\beta$) καί $\frac{2}{\beta^2}\equiv k>0$. Συνεπῶς (βλ. § 15)

$$\frac{1}{\beta_\nu}-\frac{1}{\beta}\to 0\Rightarrow\frac{1}{\beta_\nu}\to\frac{1}{\beta},\ \text{δηλ.}\ \lim\frac{1}{\beta_\nu}=\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\lim\beta_\nu}.$$

Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim\left(\alpha_\nu \cdot \frac{1}{\beta_\nu}\right) = (\lim\alpha_\nu)\cdot\left(\lim\frac{1}{\beta_\nu}\right) = (\lim\alpha_\nu)\cdot\frac{1}{\lim\beta_\nu} = \frac{\lim\alpha_\nu}{\lim\beta_\nu}.$$

Παρατηρήσεις. 1) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως γενικά δέν ἀληθεύει. Δηλαδή ἡ ὕπαρξη τοῦ $\lim\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right)$ δέ συνεπάγεται πάντοτε τήν ὕπαρξη καθενός ἀπό τά $\lim\alpha_\nu$, $\lim\beta_\nu$. **Παράδειγμα**: Ἄς πάρουμε ὡς $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί $\beta_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu=1, 2, \ldots$, τότε $\lim\left(\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right) = -1$, ἐνῶ καμία ἀπ' αὐτές τίς ἀκολουθίες δέ συγκλίνει.

2) Προσέξτε! στίς ἐφαρμογές γιά νά κάνουμε χρήση τῆς παραπάνω ἰδιότητας πρέπει προηγουμένως νά ἔχουμε ἐξασφαλίσει τήν ὕπαρξη τῶν ὁρίων τῶν ἀκολουθιῶν τοῦ ἀριθμητῆ καί παρονομαστῆ καί ἀκόμη ὅτι τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας τοῦ παρονομαστῆ εἶναι διάφορο ἀπό τό μηδέν (βλ. πρῶτο παράδειγμα στή σελίδα 34).

3) Γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό k ἰσχύει:

$$0 \neq \beta_\nu \to \beta \neq 0 \Rightarrow \lim(\beta_\nu)^k = (\lim\beta_\nu)^k = \beta^k \qquad (k \in \mathbf{Z})$$

Ἡ παραπάνω υνεπαγωγή ἀποτελεῖ γενίκευση τῆς (2) πού διατυπώνουμε στήν πρώτη παρατήρηση τῆς § 22.

§ 24. Ἰδιότητα XIV.— Ἄν $\lim \alpha_\nu = \alpha$, τότε ὑπάρχει τό $\lim|\alpha_\nu|$ καί ἰσοῦται μέ $|\alpha|$.

Δηλαδή:
$$\boxed{\alpha_\nu \to \alpha \Rightarrow |\alpha_\nu| \to |\alpha|}$$

Ἀπόδειξη. Ξέρουμε ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ὅτι: $\forall\, x, y \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$, ὁπότε ἔχουμε:

$\big||\alpha_\nu| - |\alpha|\big| \leq |\alpha_\nu - \alpha|$, $\forall\, \nu \in \mathbf{N}$ καί $(\alpha_\nu - \alpha) \to 0$, ἀφοῦ $\alpha_\nu \to \alpha$.

Ἄρα (§ 15, Πόρισμα): $(|\alpha_\nu| - |\alpha|) \to 0$ καί συνεπῶς $|\alpha_\nu| \to |\alpha|$.

Ὥστε: $\lim|\alpha_\nu| = |\alpha| = |\lim\alpha_\nu|$.

Σημείωση. Μέ λόγια ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς: **Τό ὅριο τῆς ἀπόλυτης τιμῆς μιᾶς συγκλίνουσας ἀκολουθίας εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ὁρίου της.**

Παρατηρήσεις. 1) Τό ἀντίστροφο τῆς παραπάνω προτάσεως δέν ἰσχύει, ἐκτός ἄν $\alpha = 0$, δηλαδή ἄν $\lim|\alpha_\nu| = |\alpha| \neq 0$, δέν ἕπεται καί $\lim\alpha_\nu = \alpha$, καί αὐτό γιατί εἶναι δυνατό μία ἀκολουθία νά συγκλίνει ἀπολύτως, χωρίς ὅμως ἡ ἴδια νά συγκλίνει, ὅπως ἀμέσως φαίνεται ἀπό τό ἀκόλουθο ἀντιπαράδειγμα: Ἔστω $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ἔχουμε:

$|\alpha_\nu| = |(-1)^\nu| = 1 \to 1$ καί ὅμως ἡ $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει.

2) Εἰδικά γιά $\alpha = 0$ ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \Longleftrightarrow -\alpha_\nu \to 0 \Longleftrightarrow |\alpha_\nu| \to 0.}$$

Ἡ ἀπόδειξή της εἶναι ἀμέσως φανερή ἀρκεῖ νά θυμηθοῦμε ὅτι: $|\alpha_\nu| = |-\alpha_\nu| = \big||\alpha_\nu|\big|$.

§ 25. Ἰδιότητα XV (*ὅριο ρίζας*).— Ἄν $\lim\alpha_\nu = \alpha$, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\lim\sqrt{|\alpha_\nu|} = \sqrt{|\alpha|} = \sqrt{\lim\alpha_\nu}}$$

Ἀπόδειξη. (i) Ἄν $\alpha = 0$, ζητᾶμε νά δείξουμε ὅτι $\sqrt{|\alpha_\nu|} \to 0$. Πράγματι, ἀφοῦ $\alpha_\nu \to 0$ ἕπεται ὅτι: $\forall\, \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $\varepsilon^2 > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$: $|\alpha_\nu| < \varepsilon^2$

$\forall\ \nu \geqq \nu_0$. Ἀπό τήν: $|\alpha_\nu| < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{|\alpha_\nu|} < \varepsilon,\ \forall\ \nu \geqq \nu_0$. Ἄρα $\sqrt{|\alpha_\nu|} \to 0$.

(ii) Ἔστω τώρα $\alpha \neq 0$. Ἀφοῦ $\alpha_\nu \to \alpha$ ἔχουμε: $|\alpha_\nu| \to |\alpha|$, ὁπότε:

$$|\alpha_\nu| - |\alpha| \to 0.$$

Ἐξάλλου ἰσχύει:

$$\left|\sqrt{|\alpha_\nu|} - \sqrt{|\alpha|}\right| = \frac{\left||\alpha_\nu| - |\alpha|\right|}{\sqrt{|\alpha_\nu|} + \sqrt{|\alpha|}} < \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \cdot \left(\left||\alpha_\nu| - |\alpha|\right|\right) \to 0 \ (\S\ 14)$$

Τότε ὅμως (§ 15) εἶναι: $\sqrt{|\alpha_\nu|} - \sqrt{|\alpha|} \to 0$ καί συνεπῶς $\sqrt{|\alpha_\nu|} \to \sqrt{|\alpha|}$.

Παρατηρήσεις. 1) Ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: **τά σύμβολα lim καί $\sqrt{\ }$ ἐπιτρέπεται νά ἐναλλάσσονται ἀριστερά ἀπό τήν ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$**

2) Πιό γενικά ἰσχύει: ἄν $\alpha_\nu \geqq 0$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί $\lim\alpha_\nu = \alpha$, τότε:

$$\lim \sqrt[k]{\alpha_\nu} = \sqrt[k]{\lim \alpha_\nu} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

● Οἱ ἰδιότητες πού ἀποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους μᾶς ἐπιτρέπουν νά βρίσκουμε τίς ὁριακές τιμές ὁρισμένων ἀκολουθιῶν ὄχι βάσει τοῦ ὁρισμοῦ, ἀλλά ὑπολογιστικά ἀναλύοντας τό γενικό τους ὅρο, ὅπως φαίνεται στά ἑπόμενα παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \dfrac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \dfrac{2}{3}$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \frac{\nu^2\left(2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}\right)}{\nu^2\left(3 + \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}}.$$

Οἱ ἀκολουθίες ὅμως $\dfrac{4}{\nu} = 4 \cdot \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\dfrac{1}{\nu^2} = \dfrac{1}{\nu} \cdot \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί $\dfrac{7}{\nu^2} = 7 \cdot \dfrac{1}{\nu^2}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ὅλες μηδενικές ἀκολουθίες. Συνεπῶς ἔχουμε:

$$\lim\left(2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}\right) = 2 + 0 - 0 = 2 \text{ καί } \lim\left(3 + \frac{1}{\nu^2}\right) = 3 + 0 = 3 \neq 0.$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα XIII τῆς § 23, ἔχουμε:

$$\lim \frac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \lim \frac{2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}}{3 + \frac{1}{\nu^2}} = \frac{\lim\left(2 + \frac{4}{\nu} - \frac{7}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3 + \frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Τί παρατηρεῖτε;

Παράδειγμα 2ο. Νά ἀποδείξτε ὅτι: $\lim \dfrac{\nu^3 - \nu^2 + 1}{\nu^5 + 2\nu^4 - 3} = 0$.

Λύση. Ἔχουμε:

$$\frac{\nu^3 - \nu^2 + 1}{\nu^5 + 2\nu^4 - 3} = \frac{\nu^3\left(1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^3}\right)}{\nu^5\left(1 + \frac{2}{\nu} - \frac{3}{\nu^5}\right)} = \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu^3}}{1 + \frac{2}{\nu} - \frac{3}{\nu^5}}$$

Ἀλλά: $\lim \frac{1}{\nu^2} = 0$ καί $\lim \dfrac{1-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^3}}{1+\frac{2}{\nu}-\frac{3}{\nu^5}} = \frac{1-0+0}{1+0-0} = \frac{1}{1} = 1.$

Ἄρα: $\lim \dfrac{\nu^3-\nu+1}{\nu^5+2\nu^4-3} = \lim \frac{1}{\nu^2} \cdot \lim \dfrac{1-\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu^5}}{1+\frac{2}{\nu}-\frac{3}{\nu^5}} = 0\cdot 1 = 0.$

Σημείωση. Ἀπό τά δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηροῦμε κάτι πού ἰσχύει γενικά στίς συγκλίνουσες ἀκολουθίες: *Ὅταν ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι ἴσος μέ τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ, τότε τό κλάσμα ἔχει ὅριο ἕναν ἀριθμό πού εἶναι ὁ λόγος τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβάθμιων ὅρων ἀριθμητῆ καί παρονομαστῆ, ἐνῶ ὅταν ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητῆ εἶναι μικρότερος ἀπό τό βαθμό τοῦ παρονομαστῆ, τότε τό κλάσμα ἔχει ὅριο τό μηδέν.*

§ 26. **Μερικές ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές.**—Σ' αὐτή τήν παράγραφο μελετᾶμε μερικές ἀκολουθίες πού θά μᾶς εἶναι πολύ χρήσιμες στά ἑπόμενα, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά δώσει ἰδιαίτερη προσοχή.

1η. **Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὅπου ω ἀριθμός πραγματικός μέ $|\omega| < 1$, εἶναι μηδενική.**

Δηλαδή: $$\boxed{|\omega| < 1 \Rightarrow \alpha_\nu \equiv \omega^\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξη. α) Ἄν $\omega = 0$, τότε $\alpha_\nu = \omega^\nu = 0$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί συνεπῶς $\alpha_\nu \to 0$.

β) Ἄν $\omega \neq 0$, τότε $0 < |\omega| < 1$, ὁπότε $\frac{1}{|\omega|} > 1$, δηλαδή $\frac{1}{|\omega|} - 1 > 0$. Θέτουμε: $\frac{1}{|\omega|} - 1 = \theta$, ὅπου $\theta > 0$. Τότε, ἀπό τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ Bernoulli, ἔχουμε:

$$\frac{1}{|\omega|} = 1+\theta \Rightarrow \frac{1}{|\omega|^\nu} = (1+\theta)^\nu \geqq 1+\nu\theta > \nu\theta \Rightarrow |\omega|^\nu = |\omega^\nu| < \frac{1}{\theta\nu} = \frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{\nu}$$

Ὥστε: $$|\alpha_\nu| = |\omega^\nu| < \frac{1}{\theta}\cdot\frac{1}{\nu}, \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἄρα, ἐπειδή $\frac{1}{\nu} \to 0$, ἀπό τήν ἰδιότητα VI προκύπτει ὅτι καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ $(0 < |\omega| < 1)$ εἶναι μηδενική.

Ὥστε: $\forall\ \omega \in \mathbf{R}$ μέ $-1 < \omega < 1$ ἰσχύει: $\lim \omega^\nu = 0$.

✱ 2η. **Ἔστω μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_\nu \neq 0$ $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι:**

$$\boxed{\lim \left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = k < 1 \Rightarrow \alpha_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| \to k$, $(0 \leqq k < 1)$ ἕπεται ὅτι: $\forall \varepsilon > 0$, ἄρα καί γιά $0 < \varepsilon < 1-k$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$: $\left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Ἔτσι γιά κάθε $\nu \geqq \nu_0$ ἔχουμε:

$$\frac{|\alpha_{\nu+1}|}{|\alpha_\nu|} = \left|\frac{|\alpha_{\nu+1}|}{|\alpha_\nu|} - k + k\right| \leqq \left|\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| - k\right| + k < \varepsilon + k \equiv \omega, \text{ ὅπου } 0 < \omega < 1$$

Ἄρα: $$|\alpha_{\nu+1}| \leqq \omega\cdot|\alpha_\nu|, \quad \forall\ \nu \geqq \nu_0 \quad (0 < \omega < 1).$$

Ἂν τώρα στήν τελευταία σχέση θέσουμε $\nu = \nu_0, \nu_0+1, \ldots, \nu_0+\rho-1$, $\rho \in N$ καί πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς σχέσεις πού θά προκύψουν, βρίσκουμε, ὕστερα ἀπό τίς σχετικές ἀπλοποιήσεις, ὅτι:

$$|\alpha_{\nu_0+\rho}| \leqq \omega^\rho \cdot |\alpha_{\nu_0}| \qquad (\rho \in N)$$

Ἐπειδή $0 < \omega < 1$, εἶναι $\omega^\rho \to 0$ (σύμφωνα μέ τήν ἐφαρμογή **1)** καί συνεπῶς: $\lim \omega^\rho |\alpha_{\nu_0}| = 0$. Τότε ὅμως θά εἶναι καί $\alpha_{\nu_0+\rho} \to 0 \Longrightarrow \alpha_\nu \to 0$ (βλ. § 12).

*** 3η. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\omega \in R$ καί $|\omega| < 1$, τότε: $\alpha_\nu = \nu^k \cdot \omega^\nu \to 0$, $(k \in Z)$.**

Ἀπόδειξη. Ἂν $\omega = 0$, τότε $\nu^k . \omega^\nu = 0 \to 0$. Ἔστω ὅτι $\omega \neq 0$, τότε $\alpha_\nu \neq 0 \ \forall \ \nu \in N$. Ἐφαρμόζοντας τώρα τή **2** ἔχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \left|\frac{(\nu+1)^k \cdot \omega^{\nu+1}}{\nu^k \cdot \omega^\nu}\right| = \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^k \cdot |\omega| = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^k \cdot |\omega| \to 1 \cdot |\omega| = |\omega| < 1.$$

Ἄρα $\alpha_\nu \to 0$, δηλαδή: $\nu^k \cdot \omega^\nu \to 0$.

Σημείωση Γιά $\mathbf{k = 0}$ ἔχουμε: $\alpha_\nu = \omega^\nu \to 0$ (βλ. Ἐφαρμογή 1).

*** 4η. Γιά κάθε $x \in R$ νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \dfrac{x^\nu}{\nu!} = 0$.**

Σημείωση. Τό σύμβολο $\nu!$ διαβάζεται *ν παραγοντικό* καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$1! = 1$ καί $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$ (γιά $\nu > 1$). Προφανῶς $(\nu+1)! = \nu!(\nu+1)$.

Ἀπόδειξη. Ἂν $x=0$, τότε $\dfrac{x^\nu}{\nu!} = 0 \to 0$. Ἔστω ὅτι $x \neq 0$. Θέτουμε $\alpha_\nu = \dfrac{x^\nu}{\nu!}$ καί ἔχουμε:

$$\left|\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}\right| = \frac{|x|^{\nu+1}}{(\nu+1)!} : \frac{|x|^\nu}{\nu!} = \frac{|x|^{\nu+1} \cdot \nu!}{|x|^\nu \cdot (\nu+1)!} = \frac{|x|}{\nu+1} \to 0 < 1.$$

Ἄρα: $\alpha_\nu \to 0$, δηλαδή $\dfrac{x^\nu}{\nu!} \to 0$.

*** 5η. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\alpha \in R^+$, τότε $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$.**

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις: **(i)** $\alpha = 1$, **(ii)** $\alpha > 1$ καί **(iii)** $0 < \alpha < 1$

(i) $\alpha = 1$, τότε $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{1} = 1 \to 1$.

(ii) $\alpha > 1$, τότε $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} > 1$, $\forall \ \nu \in N$. Θέτουμε $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \delta_\nu$, ὅπου $\delta_\nu > 0$, $\forall \ \nu \in N$.

Ἀρκεῖ λοιπόν νά ἀποδείξουμε ὅτι: $\delta_\nu \to 0$, ὁπότε $\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1$.

Πράγματι, ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \delta_\nu \Longrightarrow \alpha = (1+\delta_\nu)^\nu \geqq 1 + \nu \cdot \delta_\nu > \nu \cdot \delta_\nu \Longrightarrow \delta_\nu < \alpha \cdot \frac{1}{\nu}, \ \forall \ \nu \in N.$$

Ὥστε: $0 < \delta_\nu < \alpha \dfrac{1}{\nu}$, $\forall \ \nu \in N$ καί ἐπειδή $\alpha \cdot \dfrac{1}{\nu} \to 0$, ἕπεται: $\delta_\nu \to 0$.

(iii) $0 < \alpha < 1$, τότε $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ καί σύμφωνα μέ τήν **(ii)** ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\frac{1}{\alpha}} \to 1, \text{ δηλαδή } \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}} \to 1, \text{ ὁπότε καί } \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1.$$

Ὥστε:

$$\boxed{\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} \to 1, \ \forall \ \alpha > 0}$$

★ **6η. Νά ἀποδείξετε ὅτι:** $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ἔχουμε: $\nu \geqq 1 \Rightarrow \sqrt[2\nu]{\nu} \geqq 1$, ἄρα $\sqrt[2\nu]{\nu} - 1 \geqq 0$.

Θέτουμε: $\delta_\nu = \sqrt[2\nu]{\nu} - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὁπότε $\delta_\nu \geqq 0$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ καί

$$\sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu \Rightarrow \sqrt{\nu} = (1 + \delta_\nu)^\nu \geqq 1 + \nu \cdot \delta_\nu > \nu \cdot \delta_\nu \Rightarrow \delta_\nu < \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}},\ \forall\ \nu \in \mathbb{N}.$$

Ὥστε: $0 \leqq \delta_\nu < \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\forall\ \nu \in \mathbb{N}$ καί ἐπειδή $\frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0$, ἕπεται: $\delta_\nu \to 0$.

Ἔχουμε ὅμως: $\sqrt[2\nu]{\nu} = 1 + \delta_\nu \Rightarrow \sqrt[\nu]{\nu} = (1 + \delta_\nu)^2$.

Ἄρα: $\sqrt[\nu]{\nu} = (1 + \delta_\nu)^2 \to (1 + 0)^2 = 1$.

Ὥστε:
$$\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 15. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἑπόμενες ἀκολουθίες εἶναι μηδενικές:

1) $\frac{\nu}{\nu^3 + \nu + 1}$, 2) $\frac{(-1)^\nu}{(\nu + 1)^2}$, 3) $\frac{1 + \sqrt{\nu}}{\nu^3}$, 4) $\sqrt{\nu^2 + 3} - \sqrt{\nu^2 + 1}$.

16. Νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχουν, τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ γενικό ὅρο:

1) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 + 3}{2\nu^2 - 5\nu + 7}$, 2) $\alpha_\nu = \sqrt{1 + \frac{4}{\nu}}$, 3) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{\nu^2 + 3}$,

4) $\alpha_\nu = \left(2 + \frac{1}{\nu}\right)^2$, 5) $\alpha_\nu = \frac{2\nu^3 - 3\nu + 2}{5\nu^3 + 7}$, 6) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\frac{8\nu^2 + 5}{64\nu^2 + \nu + 1}}$.

17. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $\lim \sqrt{\frac{9\nu^2}{\nu^2 + 3}} = 3$, 2) $\lim \sqrt[3]{\frac{\nu^2 + \nu - 1}{27\nu^2 - 4}} = \frac{1}{3}$, 3) $\lim \sqrt{\frac{3\nu^2 + 2}{4\nu^2 + \nu + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, τότε καί ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu = \frac{1}{\nu} \cdot \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη καί ἰσχύει:

$$\lim \beta_\nu \equiv \lim \left(\frac{1}{\nu} \cdot \alpha_\nu\right) = 0.$$

19. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \frac{\nu^4 - 4\nu^3 + \nu + 6}{2\nu^4 + 7\nu^2 + 2\nu - 1} = \frac{1}{2}$.

20. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες μέ γενικούς ὅρους:

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu^2 - 1}{3\nu^2 + 2}, \quad \beta_\nu = \frac{2\nu + 3}{3\nu - 2}, \quad \gamma_\nu = \sqrt{\frac{4\nu - 3}{9\nu + 5}},$$

ἔχουν τό ἴδιο ὅριο, τό ὁποῖο καί θά βρεῖτε.

21. Νά βρεῖτε ποῦ μεταβάλλεται ὁ πραγματικός ἀριθμός x, ἄν:

$$\left| \lim \frac{\nu^2 + 3}{2\nu^2 - 1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

22. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim(\sqrt{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)}-\nu)=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

23. Ἄν $x \in \mathbf{R}$, $x \neq -1$ νά μελετήσετε ὡς πρός τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{x^\nu - 1}{x^\nu + 1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καί κατόπιν νά κάνετε τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως f μέ τύπο :

$$f(x)=\lim\alpha_\nu \equiv \lim\frac{x^\nu-1}{x^\nu+1}$$

Ὑπόδειξη. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **(i)** $|x|<1$, **(ii)** $x=1$ καί **(iii)** $|x|>1$.

★ **Ὁμάδα Β΄. 24.** Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες, μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους, εἶναι μηδενικές:

1) $\dfrac{\eta\mu\nu+\sigma\upsilon\nu^5\nu}{\sqrt{\nu}}$, 2) $\nu^{3/2}.(\sqrt{\nu^4+4}-\nu^2)$, 3) $\sqrt[3]{\nu+1}-\sqrt[3]{\nu}$, 4) $\nu\cdot(\sqrt{\nu^4+4}-\nu^2)$.

25. Νά ὑπολογίσετε τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{1+2+\cdots+\nu}{\nu^2}$, 2) $\beta_\nu=\dfrac{1^2+2^2+\cdots+\nu^2}{\nu^3}$, 3) $\gamma_\nu=\dfrac{1^3+2^3+\cdots+\nu^3}{\nu^4}$.

Ὑπόδειξη. Ὑπενθυμίζουμε τούς τύπους: $1+2+\cdots+\nu=\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$,

$$1^2+2^2+\cdots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6},\quad 1^3+2^3+\cdots+\nu^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}.$$

26. Νά ὑπολογίσετε τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{2\nu^2+3\nu-1}{5\nu^3-\nu+7}$, 2) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu^4+2}{\nu^2-4}-\dfrac{2\nu^5-3\nu^3}{2\nu^3+1}$, 3) $\alpha_\nu=\sqrt{(\nu+2)(\nu+3)}-\nu$

4) $\alpha_\nu=(\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}).\sqrt{\nu+\dfrac{1}{2}}$, 5) $\alpha_\nu=\sqrt{\nu+\sqrt{\nu}}-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}$.

Ὑπόδειξη. Στίς 3, 4 καί 5 πολλαπλασιάζουμε καί διαιροῦμε καθένα ἀπ' αὐτούς τούς γενικούς ὅρους μέ κατάλληλη παράσταση.

27. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}}\right]=1.$$

Ὑπόδειξη. Νά προσθέσετε κατά μέλη τίς προφανεῖς ἀνισότητες:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}}\leqq\frac{1}{\sqrt{\nu^2+k}}\leqq\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}},\qquad k=1,2,\ldots,\nu$$

καί νά ἐφαρμόσετε τήν ἰδιότητα VII, § 16.

28. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες, μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους, εἶναι μηδενικές:

1) $\alpha_\nu=\dfrac{2^\nu}{\nu!}$, 2) $\alpha_\nu=\dfrac{\nu!}{\nu^\nu}$, 3) $\alpha_\nu=\dfrac{2^\nu.\nu!}{(3\nu)^\nu}$,

ὅπου τό σύμβολο $\nu!$ (ν παραγοντικό) παριστάνει τό γινόμενο: $1\cdot2\cdot3\cdots\nu\equiv\nu!$

Ὑπόδειξη. Μπορεῖτε νά στηριχτεῖτε καί στή 2η ἐφαρμογή τῆς § 26.

29. Ἄν θεωρηθεῖ γνωστό ὅτι $\lim\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu=e$, νά ὑπολογίσετε τά ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μέ τούς ἑπόμενους γενικούς ὅρους:

1) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{2\nu}\right)^\nu$, 2) $\alpha_\nu = \left(1+\frac{2}{\nu}\right)^\nu$, 3) $\alpha_\nu = \left(1-\frac{1}{\nu}\right)^\nu$, 4) $\alpha_\nu = \left(\frac{2\nu+1}{2\nu-1}\right)^\nu$

30. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lim \sqrt[\nu]{\nu^2 + \nu} = 1.$

Ὑπόδειξη. Βλ. § 26, 5η καί 6η ἐφαρμογή καί ἐπιπλέον μπορεῖ νά χρησιμεύσει καί ἡ ἰδιότητα VII τῆς § 16.

31. Ἄν γιά μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύει $\lim\alpha_\nu = \alpha$, τότε νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lim\beta_\nu = \alpha, \quad \text{ὅπου} \quad \beta_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu}, \ \nu = 1, 2, \ldots$$

Ἰσχύει τό ἀντίστροφο;

Ὑπόδειξη. Ἔχουμε $\alpha_\nu \to \alpha \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$: $|\alpha_\nu - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall\ \nu \geqq \nu_0$.

Κατόπιν νά σχηματίσετε τή διαφορά: $\beta_\nu - \alpha$ καί νά ἀποδείξετε ὅτι τελικά ἰσχύει:

$|\beta_\nu - \alpha| < \frac{A}{\nu} + \frac{\nu-\nu_0+1}{\nu} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$, ὅπου $A \equiv |(\alpha_1-\alpha)+(\alpha_2-\alpha)+\cdots+(\alpha_{\nu_0-1}-\alpha)|$. Ἄρα...

Γιά νά ἐξετάσετε ἄν ἰσχύει τό ἀντίστροφο νά πάρετε ὡς $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$

32. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\lim(\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}) = \alpha$, τότε $\lim \frac{\alpha_\nu}{\nu} = \alpha$.

Ὑπόδειξη. Νά ἐφαρμόσετε τό συμπέρασμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως.

V. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΕΝΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

§ 27. Τό μονότονο καί ἡ σύγκλιση ἀκολουθίας.—Στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ Κεφαλαίου (§ 4) ὁρίσαμε τήν ἔννοια τῆς μονότονης ἀκολουθίας. Ἐπαναλαμβάνοντας μέ συντομία τά ὅσα ἀναπτύξαμε στήν § 4 γιά τίς μονότονες ἀκολουθίες ἔχουμε:

1. $(\alpha_\nu)\uparrow$ **(αὔξουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall\ \nu\in\mathbf{N},\ \alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1})$
$\Longleftrightarrow (\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1} \leqq \cdots)$
2. $(\alpha_\nu)\uparrow$ **(γνησίως αὔξουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall\ \nu\in\mathbf{N},\ \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1})$
$\Longleftrightarrow (\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} < \cdots)$
3. $(\alpha_\nu)\downarrow$ **(φθίνουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall\ \nu\in\mathbf{N},\ \alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1})$
$\Longleftrightarrow (\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1} \geqq \ldots)$
4. $(\alpha_\nu)\downarrow$ **(γνησίως φθίνουσα)** $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall\ \nu\in\mathbf{N},\ \alpha_\nu > \alpha_{\nu+1})$
$\Longleftrightarrow (\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_\nu > \alpha_{\nu+1} > \ldots)$.

Ὑπενθυμίζουμε (βλ. παρατήρηση 2 τῆς § 4) ὅτι γιά μιά αὔξουσα ἤ γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία οἱ ἐκφράσεις: «*ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη*» καί «*ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη ἄνω*» εἶναι ἰσοδύναμες· γιατί βέβαια, ἀφοῦ εἶναι αὔξουσα ἤ γνησίως αὔξουσα εἶναι κάτω φραγμένη. Ἕνα κάτω φράγμα της εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος της. Ἀνάλογα ἔχουμε ὅτι γιά μιά φθίνουσα ἤ γνησίως φθίνουσα ἀκολουθία οἱ ἐκφράσεις: «*ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη*» καί «*ἡ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη κάτω*» εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἔστω τώρα ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\nu^2$, $\nu=1,2,\ldots$, δηλαδή ἡ: $1,4,9,\ldots,$ $\nu^2,\ldots$ Ἐπίσης ἔστω ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu=\dfrac{\nu}{\nu+1}$, $\nu=1,2,\ldots$, δηλαδή ἡ : $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\ldots,\dfrac{\nu}{\nu+1},\ldots$ Παρατηροῦμε ὅτι καί οἱ δύο εἶναι αὔξουσες καί μάλιστα γνησίως αὔξουσες ἀκολουθίες. Ἀπ' αὐτές ἡ πρώτη δέν εἶναι φραγμένη οὔτε καί συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό (βλ. παρατήρ. τῆς § 13). Ἀντίθετα ἡ δεύτερη εἶναι φραγμένη, ἀφοῦ $|\beta_\nu|=\left|\dfrac{\nu}{\nu+1}\right|=\dfrac{\nu}{\nu+1}\leqq 1$ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu=1,2,\ldots$ συγκλίνει καί μάλιστα εἶναι $\lim\beta_\nu=\lim\dfrac{\nu}{\nu+1}=1$.

Τό γεγονός ὅτι ἡ αὔξουσα καί φραγμένη ἀκολουθία $\beta_\nu=\dfrac{\nu}{\nu+1}$, $\nu\in\mathbf{N}$ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό τό δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει γενικότερα γιά κάθε αὔξουσα καί φραγμένη ἀκολουθία.

Ἀκριβέστερα δεχόμαστε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα:

§ 28. Ἀξίωμα.—Κάθε μονότονη καί φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν συγκλίνει σέ κάποιο πραγματικό ἀριθμό.

Σημείωση. Τό παραπάνω ἀξίωμα τό συναντᾶμε στά Ἀνώτερα Μαθηματικά ὡς θεώρημα. Ἡ ἀπόδειξή του ὅμως ἐκεῖ στηρίζεται σέ κάποιο ἄλλο ἀξίωμα.

Σχόλια: α). Τό παραπάνω ἀξίωμα, ἄν καί ἀφορᾶ μόνο τίς μονότονες ἀκολουθίες, δίνει μία **ἱκανή** συνθήκη *«ὑπάρξεως»* ὁρίου ἀκολουθίας. Φυσικά, πληροφορίες γιά τή σύγκλιση ἀκολουθίας καί γιά τό ὅριό της, ἄν ὑπάρχει, μᾶς δίνουν πολλές ἀπό τίς προτάσεις πού ἀποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους καί κυρίως οἱ προτάσεις πού ἀναφέρονται στήν ἑνότητα: *Ἄλγεβρα τῶν ὁρίων*. Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀξίωμα αὐτό ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη στό $\mathbf{R}$ τοῦ ὁρίου μιᾶς ἀκολουθίας μέ ὁρισμένες ὑποθέσεις, ἀλλά δέ μᾶς δίνει καμιά ἔνδειξη γιά τό πῶς βρίσκουμε τό ὅριο· ὁπωσδήποτε ὅμως εἶναι σημαντικό νά ξέρουμε ὅτι μία ἀκολουθία συγκλίνει στό $\mathbf{R}$, γιατί τότε δέν ἀποκλείεται ἡ *«ὕπαρξη»* τῆς ὁριακῆς της τιμῆς νά ὁδηγήσει καί στήν *«εὕρεσή»* της. Αὐτό φαίνεται καλύτερα στίς ἐφαρμογές πού διαπραγματευόμαστε στήν ἑπόμενη παράγραφο.

β). Ἔχοντας ὑπόψη τό παραπάνω ἀξίωμα καί τίς προτάσεις πού ἀποδείξαμε στίς προηγούμενες παραγράφους, συμπεραίνουμε ἀμέσως ὅτι:

Ἄν $M=\{(a_\nu):\ (a_\nu)$ *μονότονη ἀκολουθία*$\}$, $\Phi=\{(a_\nu):\ (a_\nu)$ *φραγμένη ἀκολουθία*$\}$ $\Sigma=\{(a_\nu):\ (a_\nu)$ *συγκλίνουσα ἀκολουθία*$\}$ *καί* $\Sigma_0=\{(a_\nu):\ (a_\nu)$ *μηδενική ἀκολουθία*$\}$, *τότε ἰσχύουν οἱ ἑξῆς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ:*

i) $\Sigma_0\subset\Sigma\subset\Phi$, **ii)** $M\cap\Phi\subset\Sigma$.

● Ἄμεσες τώρα συνέπειες τοῦ παραπάνω ἀξιώματος καί τῶν πορισμάτων 1 καί 2 τῆς § 17 εἶναι οἱ ἑπόμενες δύο προτάσεις:

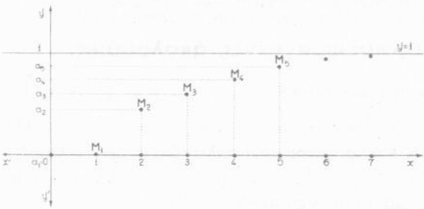
α). *Ἄν μία ἀκολουθία* a_ν, $\nu=1,2,\ldots$ *εἶναι αὔξουσα καί ἔχει ὡς ἕνα ἄνω φράγμα τόν ἀριθμό* s, *τότε εἶναι συγκλίνουσα καί ἰσχύει* : $\lim a_\nu\leqq s$.

Δηλαδή: $\left.\begin{matrix}(\alpha_\nu)\uparrow \\ \alpha_\nu < s\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to \alpha \leq s$

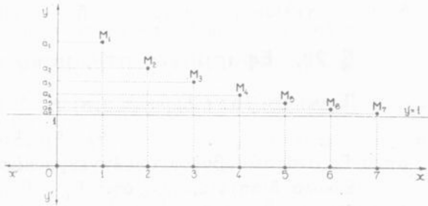
β). *Ἄν μία ἀκολουθία α_ν $\nu=1,2\ldots$ εἶναι φθίνουσα καί ἔχει ὡς ἕνα κάτω φράγμα τόν ἀριθμό σ, τότε εἶναι συγκλίνουσα καί ἰσχύει : $\sigma \leq \lim \alpha_\nu$.*

Δηλαδή: $\left.\begin{matrix}(\alpha_\nu)\downarrow \\ \alpha_\nu > \sigma\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to \alpha \geq \sigma$

Ἔτσι, π.χ., ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἡ ὁποία, ὅπως εὔκολα διαπιστώνουμε, εἶναι αὔξουσα καί ἔχει ὡς ἕνα ἄνω φράγμα τόν ἀριθμό 1 $\left(\text{γιατί: } \alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu} = 1 - \dfrac{1}{\nu} < 1, \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}\right)$ συγκλίνει σ' ἕναν ἀριθμό πού εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος μέ τό 1. Στό παρακάτω σχῆμα δίνουμε τούς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$



Σχ. 3



Σχ. 4

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία: $1 + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἡ ὁποία εἶναι φθίνουσα καί φραγμένη μέ ἕνα κάτω φράγμα τόν ἀριθμό 1 $\left(\text{γιατί: } 1 < 1 + \dfrac{1}{\nu}, \ \forall \nu \in \mathbf{N}\right)$ συγκλίνει σ' ἕναν ἀριθμό πού εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ τό 1. Στό σχῆμα 4 δίνουμε τούς ἑφτά πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = 1 + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Σημαντική παρατήρηση. Ξέρουμε (βλ. παρατήρηση τῆς § 13) ὅτι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ πού δέν εἶναι φραγμένη, δέ συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό, γιατί ἀλλιῶς, δηλαδή ἄν αὐτή συνέκλινε σέ πραγματικό ἀριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα IV τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, θά ἦταν φραγμένη, πράγμα πού εἶναι ἄτοπο. Στήν περίπτωση, ὅπου ἡ μή φραγμένη ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι καί αὔξουσα, ὅπως π.χ. ἡ ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots$ λέμε ὅτι αὐτή *«ἀπειρίζεται θετικά»* ἤ ἀλλιῶς *«συγκλίνει στό $+\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει στό $+\infty$»* (τό σύμβολο $+\infty$ τό διαβάζουμε *«σύν ἄπειρο»*). Γράφουμε συμβολικά: $\lim \alpha_\nu = +\infty$ ἤ πιό ἁπλά $\alpha_\nu \to +\infty$ καί διαβάζουμε: ὅριο α_ν ἴσο μέ $+\infty$ ἤ α_ν τείνει στό $+\infty$.

Στήν περίπτωση, ὅπου ἡ μή φραγμένη ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι καί φθίνουσα, ὅπως π.χ. ἡ ἀκολουθία: $-\nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ λέμε ὅτι αὐτή *«ἀπειρίζεται ἀρνητικά»* ἤ ἀλλιῶς *«συγκλίνει στό $-\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει στό $-\infty$»* καί γράφουμε συμβολικά: $\lim \alpha_\nu = -\infty$ ἤ πιό ἁπλά $\alpha_\nu \to -\infty$ (τό σύμβολο $-\infty$ τό διαβάζουμε *«πλὴν ἄπειρο»*).

Ἀξίζει νά παρατηρήσουμε ἐδῶ ὅτι ἡ ἀντίθετη ἀκολουθία τῆς $\alpha_\nu = -\nu^2$, $\nu=1, 2, \ldots$ δηλαδή ἡ: $-(-\nu^2) = \nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀπειρίζεται θετικά. Αὐτό ὅμως ἰσχύει γιά κάθε ἀκολουθία πού ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά. Ἀκριβέστερα ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = -\infty \iff \lim(-\alpha_\nu) = +\infty}$$

Σημείωση. Ὅταν μία ἀκολουθία ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά δέ λέγεται συγκλίνουσα. **Προσέξτε!** μόνο ὅταν τό ὅριό της εἶναι ἀριθμός πραγματικός, τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται συγκλίνουσα.

Στήν ἄλλη τάξη θά μάθουμε πώς καί ἄλλες ἀκολουθίες, ἐκτός ἀπό τίς μονότονες καί μή φραγμένες, ἀπειρίζονται θετικά ἀντιστοίχως ἀρνητικά καί ἐκεῖ θά δώσουμε ἕνα γενικό ὁρισμό συγκλίσεως πρός τό $+\infty$ ἤ $-\infty$ μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 29. Ἐφαρμογές στίς μονότονες καί φραγμένες ἀκολουθίες.

Ἐφαρμογή 1η: (*Ἐμβαδόν κύκλου*). Ἔστω ἡ ἀκολουθία:

$$E_3,\ E_4,\ E_5,\ \ldots,\ E_\nu,\ \ldots \tag{1}$$

ὅπου E_ν εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο κανονικοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές.

Εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι: $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots < E_\nu < E_{\nu+1} < \cdots$, δηλαδή ὅτι ἡ ἀκολουθία E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$ εἶναι αὔξουσα (καί μάλιστα γνησίως).

Ἐξάλλου ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι καί πρός τά ἄνω φραγμένη. Ἕνα ἄνω φράγμα της εἶναι ὁ ἀριθμός πού παριστάνει τό ἐμβαδόν ἑνός ὁποιουδήποτε περιγεγραμμένου στόν κύκλο κυρτοῦ πολυγώνου. Ἡ ἀκολουθία λοιπόν E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$ εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί φραγμένη, ἑπομένως (§ 28) ἡ ἀκολουθία (1) συγκλίνει σ' ἕναν πραγματικό ἀριθμό. Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τή Γεωμετρία αὐτόν τόν πραγματικό ἀριθμό –δηλαδή τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$– τό λέμε **ἐμβαδόν τοῦ κύκλου**.

Ἐφαρμογή 2η: Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ γιά τήν ὁποία ἔχουμε:

$$\alpha_1 = \sqrt{2} \quad \textbf{καί} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} \ \textbf{γιά κάθε}\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι μονότονη καί φραγμένη καί ὅτι $\lim \alpha_\nu = 2$.

Ἀπόδειξη. Πρῶτα-πρῶτα γεννᾶται τό ἐρώτημα, ἄν ἡ ἀκολουθία πού μᾶς δόθηκε ὁρίστηκε καλά, δηλαδή ἄν γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $2 + \alpha_\nu \geqq 0$. Αὐτό ὅμως συμβαίνει, γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή, ἰσχύει: $\boldsymbol{\alpha_\nu > 0}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Πράγματι· $\alpha_1 = \sqrt{2} > 0$ καί ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $\alpha_\nu > 0$, τότε καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} > \sqrt{2} > 0$.

Ἐξετάζουμε τώρα τήν (α_ν) ὡς πρός τό μονότονο. Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_1 < \alpha_2$. Ἄρα, ἄν ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μονότονη, θά πρέπει νά εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, τότε $2+\alpha_k < 2+\alpha_{k+1}$, ὁπότε $\sqrt{2+\alpha_k} < \sqrt{2+\alpha_{k+1}}$, δηλαδή $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$.

Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, θά ἔχουμε: $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι αὔξουσα καί μάλιστα γνησίως.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι φραγμένη. Ἀρκεῖ βεβαίως νά δείξουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι φραγμένη ἄνω, μιά καί ὅπως δείξαμε παραπάνω ἡ (α_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα. Γιά νά προσδιορίσουμε ἕνα ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας (α_ν) κάνουμε τήν ἑξῆς σκέψη: Δέν ξέρουμε ἀπό τήν ἀρχή ἄν ἡ (α_ν) εἶναι συγκλίνουσα, ἄν ὅμως εἶναι καί καλέσουμε α τό ὅριό της, τότε ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu}$, μέ ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁρίων, παίρνουμε: $\lim\alpha_{\nu+1} = \lim\sqrt{2+\alpha_\nu} = \sqrt{2+\lim\alpha_\nu}$. Ἀλλά $\lim\alpha_{\nu+1} = \lim\alpha_\nu = \alpha$ (§ 12). Ἄρα: $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$ καί συνεπῶς $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ ἤ $(\alpha-2)(\alpha+1) = 0$. Ἐπειδή ὅμως ὅλα τά $\alpha_\nu > 0$, ἀποκλείεται νά εἶναι ἀρνητικό τό α. Ἄρα $\alpha = 2$. Τότε ὅμως τό 2, ὅπως καί κάθε ἀριθμός μεγαλύτερός του, θά εἶναι ἕνα **πιθανό** ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας (α_ν). Ἐλέγχουμε τώρα ἄν ἰσχύει $\alpha_\nu < 2$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Αὐτό ὅμως συμβαίνει, γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή, ἔχουμε: $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$ καί ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $\alpha_\nu < 2$, τότε καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2+\alpha_\nu} < \sqrt{4} = 2$.

Ἡ ἀκολουθία λοιπόν (α_ν) εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί ἄνω φραγμένη. Ἄρα εἶναι συγκλίνουσα καί ὅπως εἴδαμε παραπάνω εἶναι: $\lim \alpha_\nu = 2$.

Ἐφαρμογή 3η: Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_1 = 0$ καί

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{2\alpha_\nu + 4}{3} \quad \text{γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρεῖτε τό ὅριό της.

Ἀπόδειξη. Ἐξετάζουμε μήπως ἡ (α_ν) εἶναι μονότονη. Παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_1 < \alpha_2$ $\left(\text{γιατί: } \alpha_1 = 0 < \frac{2\alpha_1+4}{3} = \frac{4}{3} = \alpha_2\right)$. Ἄρα, ἄν ἡ (α_ν) εἶναι μονότονη, θά πρέπει νά εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἔστω λοιπόν ὅτι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, δηλαδή $\alpha_{k+1} - \alpha_k > 0$, τότε εἶναι καί $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$, γιατί ἄν σχηματίσουμε τή διαφορά $\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}$ ἔχουμε:

$$\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_{k+1} + 4}{3} - \frac{2\alpha_k + 4}{3} = \frac{2(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{3} > 0.$$

Ἄρα $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι αὔξουσα καί μάλιστα γνησίως.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι ἄνω φραγμένη. Ἕνα **πιθανό** ἄνω φράγμα τῆς (α_ν) εἶναι κάθε ἀριθμός μεγαλύτερος ἤ ἴσος μέ τό 4 (τό 4 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $x = \frac{2x+4}{3}$ στήν ὁποία καταλήξαμε κάνοντας συλλογισμό ἀνάλογο μέ αὐτόν πού κάναμε στήν προηγούμενη ἐφαρμογή), π.χ. ὁ 5. Ἐλέγχουμε τώρα ἄν ἰσχύει: $|\alpha_\nu| < 5$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Αὐτό ὅμως συμβαίνει, γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή, ἔχουμε: $|\alpha_1| = 0 < 5$ καί ἄν γιά κάποιο φυσικό ἀριθμό ν εἶναι $|\alpha_\nu| < 5$, τότε:

$$|\alpha_{\nu+1}| = \left|\frac{2\alpha_\nu + 4}{3}\right| \leqq \frac{2|\alpha_\nu| + 4}{3} < \frac{2\cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} < 5.$$

Ἡ ἀκολουθία λοιπόν (α_ν) εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί ἄνω φραγμένη. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς § 28, ἡ ἀκολουθία (α_ν) συγκλίνει σέ ἕναν πραγματικό ἀριθμό, ἔστω α. Θά ἰσχύει ἑπομένως $\alpha_\nu \to \alpha$ καί $\alpha_{\nu+1} \to \alpha$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα $\alpha_{\nu+1} = \frac{2\alpha_\nu + 4}{3}$ προκύπτει, ἄν μεταβοῦμε στό ὅριο, $\alpha = \frac{2\alpha+4}{3}$ ἤ $3\alpha = 2\alpha + 4$, δηλαδή $\alpha = 4$.

Ἄρα: $$\lim \alpha_\nu = 4.$$

Παρατήρηση. Σ' αὐτή τήν ἐφαρμογή μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς: Δέν ξέρουμε ἄν ἡ (α_ν) συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό, ἄν ὅμως αὐτό συμβαίνει καί καλέσουμε α τό ὅριό της, τότε ἀπό τήν ἰσότητα: $\alpha_{\nu+1} = \frac{2\alpha_\nu + 4}{3}$ προκύπτει. ἄν μεταβοῦμε στό ὅριο, $\alpha = \frac{2\alpha+4}{3}$, δηλαδή $\alpha = 4$.

Σχηματίζουμε τώρα τή διαφορά:

$$\alpha_{\nu+1} - 4 = \frac{2\alpha_\nu + 4}{3} - 4 = \frac{2\alpha_\nu - 8}{3} = \frac{2}{3}(\alpha_\nu - 4) \qquad (1)$$

Ἄν στήν (1) θέσουμε $\nu = 1, 2, \ldots, \nu$ καί πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τίς ἰσότητες πού θά προκύψουν, βρίσκουμε, ὕστερα ἀπό τίς σχετικές ἁπλοποιήσεις, ὅτι:

$$\alpha_{\nu+1} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^\nu \cdot (\alpha_1 - 4) = -4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^\nu.$$

Ἀλλά $\left(\frac{2}{3}\right)^\nu \to 0$ (βλ. § 26, 1η ἐφαρμογή). Ἄρα $\alpha_{\nu+1} \to 4$ καί συνεπῶς $\alpha_\nu \to 4$.

Σημείωση. Ἀπό τή σχέση: $\alpha_{\nu+1} - 4 = -4\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$ λαμβάνουμε:

$$\alpha_{\nu+1} = 4 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = 4\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^\nu\right] \text{ καί συνεπῶς } \alpha_\nu = 4\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\nu-1}\right] \text{ γιά } \nu = 2, 3, \ldots$$

(ἰσχύει καί γιά $\nu = 1$). Παρατηροῦμε ὅτι στήν τελευταία σχέση ἔχουμε τήν ἔκφραση τοῦ γενικοῦ ὅρου τῆς ἀκολουθίας πού μᾶς δόθηκε συναρτήσει τοῦ ν.

Ἐφαρμογή 4η: Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{3}{\theta}\right), \text{ ὅπου } \theta > 0, \text{ καί}$$

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{3}{\alpha_\nu}\right) \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}.$$

Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Λύση: Πρῶτα–πρῶτα πρέπει νά βεβαιωθοῦμε ὅτι γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν εἶναι $\alpha_\nu \neq 0$. Πράγματι, αὐτό συμβαίνει γιατί, ὅπως πολύ εὔκολα προκύπτει μέ τέλεια ἐπαγωγή εἶναι: $\alpha_\nu > 0$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἐξάλλου, σύμφωνα μέ τή γνωστή ἀνισότητα: $\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$, ὅπου $x, y > 0$, ἔχουμε:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu-1} + \frac{3}{\alpha_{\nu-1}}\right) \geqq \sqrt{\alpha_{\nu-1}\frac{3}{\alpha_{\nu-1}}} = \sqrt{3}, \text{ δηλαδή } \alpha_\nu \geqq \sqrt{3}, \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἐξετάζουμε τώρα μήπως ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μονότονη. Ἔχουμε γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{3}{\alpha_\nu}\right) - \alpha_\nu = \frac{3 - \alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu} \leqq 0 \quad (\text{γιατί: } \alpha_\nu^2 \geqq 3 \iff 3 - \alpha_\nu^2 \leqq 0).$$

Ἄρα: $\alpha_{\nu+1} \leqq \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι φθίνουσα καί ἐπειδή $\alpha_\nu \geqq \sqrt{3}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, ἡ ἀκολουθία (α_ν) φράσσεται κάτω καί τό $\sqrt{3}$ εἶναι ἕνα κάτω φράγμα της.

Ὥστε ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι φθίνουσα καί φραγμένη κάτω. Ἄρα εἶναι συγκλίνουσα. Ἔστω x τό ὅριό της. Τότε $\alpha_\nu \to x$ καί $\alpha_{\nu+1} \to x$ (βλ. § 12, ἰδ. III). Θά εἶναι $x \neq 0$, γιατί ὅλα τά α_ν εἶναι $\geqq \sqrt{3}$, ἐπομένως $x \geqq \sqrt{3} > 0$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα:

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{3}{\alpha_\nu}\right) \text{ συνάγεται ὅτι:}$$

$$x = \lim\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\lim\alpha_\nu + \frac{3}{\lim\alpha_\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

δηλαδή: $x^2 = 3$. Ἐπειδή ὅμως ὅλα τά $\alpha_\nu > 0$, ἀποκλείεται νά εἶναι ἀρνητικό τό ὅριο. Ἄρα $x = \sqrt{3}$. Συνεπῶς: $\lim \alpha_\nu = \sqrt{3}$.

Ἐφαρμογή 5η: Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει:

$$\lim x^\nu = \begin{cases} 0, & \text{ἄν } |x|<1 \\ +\infty, & \text{ἄν } x>1 \\ 1, & \text{ἄν } x=1 \\ \nexists, & \text{ἄν } x \leqq -1. \end{cases}$$

Ἀπόδειξη. α). Ἄν $|\mathbf{x}| < \mathbf{1}$, τότε $\lim x^\nu = 0$ (βλ. § 26, ἐφαρμογή 1η). Ἐδῶ μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή $|x| < 1$ ἔχουμε: $|x|^{\nu+1} = |x|.|x|^\nu \leqq |x|^\nu$, δηλ. ἡ ἀκολουθία $(|x|^\nu)$ εἶναι φθίνουσα καί προφανῶς φραγμένη. Ἄρα εἶναι συγκλίνουσα. Ἔστω α τό ὅριό της. Τότε ἔχουμε: $\lim |x|^{\nu+1} = |x| \cdot \lim |x|^\nu$, δηλ. $\alpha = |x|.\alpha$ ἤ $\alpha(1-|x|) = 0$ καί ἐπειδή $1 - |x| \neq 0$ εἶναι: $\alpha = 0$.

Ὥστε: $\lim |x|^\nu = 0$, ὁπότε καί $\lim x^\nu = 0$ (βλ. § 24, παρατήρηση 2).

β). Ἄν $\mathbf{x} > \mathbf{1}$, τότε $x^{\nu+1} > x^\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία (x^ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἐάν ἦταν καί φραγμένη, τότε θά ὑπῆρχε τό $\lim x^\nu$, ἔστω α ($\alpha \geqq 1$). Τότε ὅμως θά εἴχαμε: $\lim x^{\nu+1} = x \cdot \lim x^\nu$, δηλ. $\alpha = x \cdot \alpha$ ἤ $\alpha(1-x) = 0$, ὁπότε $\alpha = 0$ (γιατί: $x > 1$). Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί $\alpha \geqq 1$. Ἄρα ἡ ἀκολουθία (x^ν) εἶναι (γνησίως) αὔξουσα καί μή φραγμένη, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς προηγούμενης παραγράφου, ἰσχύει:

$$\lim x^\nu = +\infty.$$

γ). Ἄν $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, τότε $x^\nu = 1 \to 1$.

δ). Γιά $\mathbf{x} = \mathbf{-1}$, ἔχουμε τήν ἀκολουθία: $x^\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἡ ὁποία, ὅπως ξέρουμε (βλ. παραδ. 5, σελ. 23) δέ συγκλίνει.

ε). Ἄν $\mathbf{x} < \mathbf{-1}$ πάλι ἡ ἀκολουθία x^ν, $\nu \in \mathbf{N}$ δέ συγκλίνει. Πράγματι, ἀφοῦ $x < -1$ ἔχουμε $|x| > 1$ καί $x = -|x|$. Θέτουμε $\alpha_\nu = x^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἔχουμε:

$\alpha_\nu = x^\nu = (-1)^\nu.|x|^\nu$. Ἐπειδή $|x| > 1$, σύμφωνα μέ τήν περίπτωση (β), ἰσχύει: $|x|^\nu \to +\infty$ καί συνεπῶς: $|x|^{2\nu} \to +\infty$ καί $|x|^{2\nu-1} \to +\infty$. Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

$$\alpha_{2\nu} = (-1)^{2\nu}.|x|^{2\nu} = |x|^{2\nu} \to +\infty \quad \text{καί} \quad \alpha_{2\nu-1} = (-1)^{2\nu-1}.|x|^{2\nu-1} = -|x|^{2\nu-1} \to -\infty.$$

Συνεπῶς ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = x^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δέ συγκλίνει.

Ὥστε: ἄν $x \leqq -1$, τότε τό $\lim x^\nu$ **δέν** ὑπάρχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 33. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ:

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{καί} \quad \alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu} \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα, φραγμένη καί ὅτι: $\lim \alpha_\nu = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

34. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = 1$ καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2\alpha_\nu}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ὅμοια ἐργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐφαρμογή 2 τῆς § 29.

35. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = 5$ καί $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4\alpha_\nu+3}$. Ὕστερα νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ἐργαζόμαστε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. Ἴσως παρουσιαστεῖ ἡ ἀνάγκη νά διαπιστώσουμε ὅτι: $\alpha_\nu > \sqrt{3}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

36. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_1 = 0$ καί

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{3\alpha_\nu + 1}{4} \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathbf{N}$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρεῖτε τό ὅριό της. Στή συνέχεια νά ἐκφράσετε τό νιοστό ὅρο της α_ν συναρτήσει τοῦ ν.

Ὑπόδειξη. Ὅμοια ἐργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐφαρμογή 3 τῆς § 29.

Ὁμάδα Β΄. 37. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $\alpha_1 = \theta > 0$ καί

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{\lambda^2}{\alpha_\nu}\right), \ \forall\, \nu \in \mathbf{N}, \text{ ὅπου } 0 < \lambda < \theta.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι συγκλίνουσα καί νά βρεῖτε τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ὅμοια ἐργασία μ' αὐτή πού ἀκολουθήσαμε στήν ἐφαρμογή 4 τῆς § 29.

38. Νά μελετήσετε ὡς πρός τό μονότονο καί τή σύγκλιση τήν ἀκολουθία (α_ν) γιά τήν ὁποία εἶναι: $\alpha_1 = -3$ καί $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu - 4}{5}$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Στή συνέχεια νά βρεῖτε, ἄν ὑπάρχει, τό ὅριό της.

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ πρῶτα δείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι αὔξουσα, ὕστερα νά βρεῖτε τό ὅριο πού θά ἔχει, ἄν συμβαίνει νά εἶναι συγκλίνουσα καί στή συνέχεια νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ἀριθμός πού βρέθηκε σάν πιθανό ὅριό της εἶναι ἄνω φράγμα της. Ἄρα ... κτλ.

39. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ γενικό ὅρο:

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu}\,\left(\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}\right).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι γνησίως αὔξουσα, φραγμένη καί ὅτι: $\lim \alpha_\nu = \dfrac{1}{2}$.

Ὑπόδειξη. Πρῶτα ἀπ' ὅλα νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\nu}}+1}$.

40. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2 \quad \text{καί} \quad \alpha_1 = \alpha, \text{ ὅπου } 0 < \alpha \leqq \frac{1}{4},$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα καί ὅτι συγκλίνει στή μικρότερη ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $t^2 - t + \alpha = 0$.

Ὑπόδειξη. Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στήν ἄσκηση 38 μόνο πού γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ (α_ν) εἶναι ἄνω φραγμένη, θά παρουσιαστεῖ ἴσως ἡ ἀνάγκη νά διαπιστώσουμε, μέ ἐπαγωγή, ὅτι ὅλα τά α_ν εἶναι $\leqq \dfrac{1}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 30. Εἰσαγωγή.— Στό προηγούμενο κεφάλαιο ὁρίσαμε τήν ἔννοια τῆς ἀκολουθίας καί ἀποδείξαμε τίς κυριότερες ἰδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν. Σ' αὐτό τό κεφάλαιο θά μελετήσουμε τρεῖς εἰδικές κατηγορίες ἀκολουθιῶν πού παρουσιάζουν ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον στά Μαθηματικά. Σέ καθεμιά ἀπό τίς κατηγορίες αὐτές ἀνήκουν ἀκολουθίες πού δύο διαδοχικοί τους ὅροι συνδέονται μεταξύ τους μέ μία ἀναδρομική σχέση, ἡ ὁποία περιγράφει τή χαρακτηριστική ἰδιότητα πού ἔχουν οἱ ὅροι τους. Ἀνάλογα μέ τή χαρακτηριστική αὐτή ἰδιότητα διακρίνουμε τίς ἀκολουθίες πού ἀνήκουν στίς κατηγορίες αὐτές σέ: *ἀριθμητικές, ἁρμονικές καί γεωμετρικές* **προόδους**.

Ι. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 31. Ὁρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ 19,\ \ldots$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὅρος της, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ἕνα σταθερό ἀριθμό, πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός 4.

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \ldots$$

παρατηροῦμε πάλι πώς κάθε ὅρος της —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρῶτο— προκύπτει ἄν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του τόν ἀριθμό: -3.

Βλέπουμε λοιπόν πώς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ἰδιότητα: Κάθε ὅρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν προσθέσουμε στόν προηγούμενό του ἕνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε **λόγο** καί τόν συμβολίζουμε συνήθως μέ τό γράμμα ω. Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **ἀριθμητικές προόδους.** Πιό γενικά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι: *Μία ἀκολουθία:*

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \alpha_{\nu+1},\ \ldots \tag{1}$$

θά λέμε ὅτι εἶναι μία **ἀριθμητική πρόοδος,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:*

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega, \quad \text{γιά κάθε } \nu = 1, 2, \ldots} \tag{2}$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καί ὁ α_ν λέγεται *νιοστός ὅρος* ἤ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου.

Μία ἀριθμητική πρόοδος λέγεται ἐπίσης καί **πρόοδος κατά διαφορά**, γιατί ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3 = \cdots = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \cdots = \omega \text{ (σταθερό)} \qquad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τήν ἀριθμητική πρόοδο καί τόν ἑξῆς ἰσοδύναμο ὁρισμό:

Ἀριθμητική πρόοδος (ἤ πρόοδος κατά διαφορά) *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, πού δυό ὁποιοιδήποτε διαδοχικοί της ὅροι διαφέρουν κατά τόν ἴδιο ἀριθμό ω, ὁ ὁποῖος λέγεται* **λόγος** *τῆς ἀριθμ. προόδου.*

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνουμε τώρα τά ἑξῆς:

α). Ἄν $\omega > 0$, τότε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0$, δηλ. $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Συνεπῶς, ἄν $\omega > 0$ ἡ ἀριθμ. πρόοδος (1) εἶναι **γνησίως αὔξουσα** (ἄρα καί αὔξουσα).

β). Ἄν $\omega < 0$, τότε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu < 0$, δηλ. $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ καί συνεπῶς ἡ (1) εἶναι **γνησίως φθίνουσα** (ἄρα καί φθίνουσα).

γ). Ἄν $\omega = 0$, τότε $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, δηλαδή ἡ ἀριθμητική πρόοδος εἶναι μία σταθερή ἀκολουθία καί συνεπῶς ἡ (1) εἶναι τότε **συγχρόνως καί αὔξουσα καί φθίνουσα.**

Ἔτσι, π.χ., ἡ πρόοδος: 3, 7, 11, 15, 19, ... εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή $\omega = 4 > 0$, ἐνῶ ἡ πρόοδος: 10, 7, 4, 1, –2, –5, ... εἶναι γνησίως φθίνουσα, γιατί ἐδῶ εἶναι: $\omega = -3 < 0$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 32. **Ἰδιότητα Ι.—Ὁ νιοστός ὅρος α_ν σέ μία ἀριθμητική πρόοδο, πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο ω, βρίσκεται ἄν στόν πρῶτο της ὅρο προσθέσουμε τό γινόμενο τοῦ λόγου ἐπί τόν ἀριθμό, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν προηγουμένων του ὅρων.**

Δηλαδή:

$$\boxed{\forall\ \nu \in \mathbf{N}, \quad \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ἀναδρομική σχέση (2) γιά $\nu = 2, 3, \ldots, (\nu - 1)$ λαμβάνουμε: $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$, $\alpha_4 = \alpha_3 + \omega, \ldots, \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \omega$.

Ἄν τώρα τίς σχέσεις αὐτές τίς προσθέσουμε κατά μέλη καί διαγράψουμε τούς κοινούς ὅρους πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη προκύπτει ἡ (1).

Σημείωση. Μία πιό αὐστηρή ἀπόδειξη γίνεται μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ὡς ἑξῆς: Γιά $\nu = 1$ ἡ (1) προφανῶς ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) γιά $\nu = k$, δηλ. ἔστω ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\cdot\omega$$

Προσθέτουμε καί στά δύο μέλη τῆς τελευταίας σχέσεως τό ω καί ἔχουμε:

$$\alpha_k + \omega = \alpha_1 + (k-1)\omega + \omega$$

Ἀλλά: $\alpha_k + \omega = \alpha_{k+1}$,

ὁπότε ἔχουμε: $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + k\omega = \alpha_1 + [(k+1) - 1]\omega$

δηλ. ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k + 1$. Ἄρα, σύμφωνα μέ **τή μέθοδο** τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἐφαρμογή. **Νά βρεῖτε τό 15ο ὅρο τῆς ἀριθμ. προόδου: 7, 15, 23, 31, ...**

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = 7,\ \omega = 15 - 7 = 23 - 15 = 31 - 23 = 8,\ \nu = 15,\ \alpha_{15} = ;$

Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) βρίσκουμε:

$$\alpha_{15} = 7 + (15 - 1)\cdot 8 = 7 + 14\cdot 8 = 119.$$

Παρατηρήσεις. **1)** Ἀπό τήν ἰδιότητα I συμπεραίνουμε ὅτι: μία ἀριθμ. πρόοδος εἶναι τελείως ὁρισμένη, ὅταν δίνονται ὁ πρῶτος ὅρος της $\alpha_1 = \alpha$ καί ὁ λόγος της ω, γιατί τότε οἱ ὅροι της θά εἶναι:

1ος ὅρος,	2ος ὅρος,	3ος ὅρος,	4ος ὅρος,	5ος ὅρος,	...
α	$\alpha + \omega$	$\alpha + 2\omega$	$\alpha + 3\omega$	$\alpha + 4\omega$,	...

2) Ἀπό τόν τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ συνάγεται ὅτι: ἄν γνωρίζουμε τούς τρεῖς ἀπό τούς ἀριθμούς $\alpha_\nu, \alpha_1, \nu$ καί ω μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τόν τέταρτο, ἀρκεῖ νά ἐπιλύσουμε μίαν ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ. Ἔτσι ἔχουμε τόν παρακάτω πίνακα:

α_1, ν, ω	α_ν, ν, ω	$\alpha_\nu, \alpha_1, \nu$	$\alpha_\nu, \alpha_1, \omega$
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$	$\alpha_1 = \alpha_\nu - (\nu - 1)\omega$	$\omega = \dfrac{\alpha_\nu - \alpha_1}{\nu - 1}$	$\nu = \dfrac{\alpha_\nu - \alpha_1 + \omega}{\omega}$

3) Ἄν γιά μία ἀκολουθία $\alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega,\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ἡ (α_ν) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος. Πράγματι, τότε θά ἔχουμε:

$$\forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \Longrightarrow \begin{Bmatrix} \forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_1 + \nu\omega \\ \forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_\nu + \omega = \alpha_1 + \nu\omega \end{Bmatrix} \Longrightarrow \forall\ \nu \in \mathbf{N},\ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega.$$

4) Ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση 3, ἡ ἰδιότητα I διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω μία ἀκολουθία $\alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$, εἶναι ἡ:* $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega,\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}}$.

* § 33. **Πόρισμα.— Ἄν μία ἀκολουθία $\alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω, τότε γιά κάθε $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύουν:**

$$\text{i)}\quad \alpha_{1+\mu} = \alpha_1 + \mu\omega$$

$$\text{ii)}\quad \alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} + \mu\omega$$

$$\text{iii)}\quad \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_\nu - \mu\omega.$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (i) προκύπτει ἀμέσως ἀπό τή σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, ἀρκεῖ νά θέσουμε $\nu = 1 + \mu$. Γιά νά ἀποδείξουμε τίς (ii) καί (iii) παρατηροῦμε ὅτι: $\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 + (\nu - \mu - 1)\omega = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega - \mu\omega = \alpha_\nu - \mu\omega$, δηλαδή ἡ (iii), καί συνεπῶς: $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} + \mu\omega$, δηλαδή ἡ (ii).

§ 34. **Ἰδιότητα II.— Ἄν μία ἀκολουθία $\alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω, τότε γιά κάθε $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύει:**

$$\boxed{\alpha_{1+\mu} + \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 + \alpha_\nu}$$

Ἀπόδειξη: Ἄμεση συνέπεια τῶν (i) καί (iii) τοῦ παραπάνω πορίσματος.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται συχνά ὡς ἑξῆς: *Σέ πεπερασμένο πλῆθος διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τό ἄθροισμα δύο ὅρων πού «ἰσαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» ὅρους εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν «ἄκρων» ὅρων.*

Πραγματικά, ἄν πάρουμε τούς ν πρώτους ὅρους: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_x, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου (α_ν) πού ἔχει λόγο ω, τότε οἱ ὅροι α_1 καί α_ν εἶναι οἱ «ἄκροι» ὅροι, ἐνῶ οἱ ὅροι $\alpha_{1+\mu} \equiv \alpha_{\mu+1}$ καί $\alpha_{\nu-\mu}$, γιά κάθε $\mu = 1, 2, \ldots, \nu-2$ εἶναι αὐτοί πού «ἰσαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» ὅρους. Αὐτό συμβαίνει, γιατί ἄν ὀνομάσουμε $\alpha_{1+\mu}$ καί α_x τούς ὅρους τῆς προόδου (α_ν) πού «ἰσαπέχουν» ἀπό τούς «ἄκρους» ὅρους α_1 καί α_ν ἀντιστοίχως, τότε τό πλῆθος τῶν ὅρων πού εἶναι μετά ἀπό τόν ὅρο α_x εἶναι: $\nu - x$, ἐνῶ τό πλῆθος τῶν ὅρων πού προηγεῖται ἀπό τόν ὅρο $\alpha_{1+\mu}$ εἶναι: μ. Ἄρα θά πρέπει: $\nu - x = \mu$ καί συνεπῶς $x = \nu - \mu$. Ὥστε οἱ ὅροι πού ἰσαπέχουν ἀπό τούς ἄκρους ὅρους α_1 καί α_ν εἶναι ἀντιστοίχως οἱ: $\alpha_{1+\mu}$ καί $\alpha_{\nu-\mu}$. Ἔτσι, π.χ. οἱ ὅροι α_2 καί $\alpha_{\nu-1}$ ἰσαπέχουν ἀπό τούς α_1 καί α_ν ἀντιστοίχως. Ἐπίσης οἱ: α_3 καί $\alpha_{\nu-2}$, α_4 καί $\alpha_{\nu-3}$ κ.ο.κ. Ἰσχύει λοιπόν:

$$\alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = \alpha_4 + \alpha_{\nu-3} = \cdots = \alpha_1 + \alpha_\nu.$$

Προσέξτε! Τό ἀντίστροφο τῆς ἰδιότητας ΙΙ δέν ἰσχύει πάντοτε. Ἔτσι, ἐνῶ γιά τή διαδοχή 2, 7, 5, 10 ἰσχύει: $7 + 5 = 2 + 10$, ὅμως οἱ ἀριθμοί: 2, 7, 5, 10 δέν εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Σημείωση. Ἄν τό πλῆθος τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι περιττό, τότε ὑπάρχει **«μεσαῖος ὅρος»**, δηλαδή ὅρος ἀπό τόν ὁποῖο προηγεῖται καί ἕπεται τό ἴδιο πλῆθος ὅρων. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τοῦ μεσαίου ὅρου. Ἔτσι, ἄν θεωρήσουμε τούς πέντε ὅρους 3, 5, 7, 9, 11 μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἔχουμε: $3 + 11 = 5 + 9 = 2 \cdot 7$.

§ 35. Ἰδιότητα ΙΙΙ.—Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀριθμητική πρόοδος εἶναι ἡ:

$$\boxed{2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος μέ λόγο ω, τότε ,σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε στήν § 31, γιά κάθε $\nu \geqq 2$ θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu &= \omega \\ \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} &= \omega \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} \Rightarrow 2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1} \qquad (1)$$

Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1), θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος. Πράγματι, ἀπό τήν (1) ἔχουμε:

$$\alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \text{ γιά κάθε } \nu = 2, 3, \ldots$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τό δεύτερο ὁρισμό πού δώσαμε γιά τήν ἀριθμητική πρόοδο, ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι ἀριθμητική πρόοδος.

Ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα:

§ 36. Πόρισμα.—Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἡ:

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma} \qquad (1)$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$ λέγεται **ἀριθμητικός μέσος** τῶν α καί γ.

Πιό γενικά: *ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$ *ὀνομάζουμε* **ἀριθμητικό μέσο** *τῶν ν αὐτῶν ἀριθμῶν, καί τόν παριστάνουμε μέ* M_A, *τόν πραγματικό ἀριθμό :*

$$\boxed{M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu}} \quad (2)$$

Ἐφαρμογή. **Νά προσδιορίσετε τόν ἀριθμό k, ὥστε οἱ τρεῖς ἀριθμοί :**

$$3k - 7,\ k + 2,\ 12 - 2k$$

νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Λύση. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω πόρισμα πρέπει νά ἰσχύει:

$2(k + 2) = (3k - 7) + (12 - 2k)$ ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε: $k = 1$.

Γιά $k = 1$ βρίσκουμε ὅτι τρεῖς ὅροι τῆς προόδου εἶναι: $-4, 3, 10$.

§ 37. **Ἰδιότητα IV.—Τό ἄθροισμα $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :**

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}} \quad (1)$$

Ἀπόδειξη. Γιά νά ἀποδείξουμε τήν ἰδιότητα αὐτή, θά στηριχτοῦμε στήν ἰδιότητα II (§ 34, παρατήρηση).

Γράφουμε πρῶτα: $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$

καί ἔπειτα: $\Sigma_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \cdots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1$.

Προσθέτοντας τίς δύο αὐτές ἰσότητες κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_2 + \alpha_{\nu-1}) + \cdots + (\alpha_{\nu-1} + \alpha_2) + (\alpha_\nu + \alpha_1)$$

ἤ ἐπειδή $\alpha_1 + \alpha_\nu = \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_{\nu-1} + \alpha_2 = \alpha_\nu + \alpha_1$ (σύμφωνα μέ τήν ἰδιότ. II) καί οἱ παρενθέσεις εἶναι ν, θά ἔχουμε:

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu \Longrightarrow \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}.$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τόν παραπάνω τύπο (1) μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Πόρισμα.— Τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha_1 = \alpha$, τοῦ λόγου ω καί τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων, μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha + (\nu - 1)\omega]\cdot \nu}{2}} \quad (2)$$

Παρατήρηση. Οἱ δύο τύποι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \quad \text{καί} \quad \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τούς: $\alpha_1, \alpha_\nu, \omega, \nu, \Sigma_\nu$.

Ἄν, λοιπόν, μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς, τότε οἱ δύο παραπάνω τύποι ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους. Λύνοντας αὐτό τό σύστημα βρίσκουμε τούς ἄλλους δύο ἀριθμούς.

Ἐφαρμογή. **Ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 2 καί ὁ ἑνδέκατος 92. Νά βρεθεῖ ἡ πρόοδος αὐτή καί τό ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων ὅρων της.**

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{11} = 92$, $\omega = ;$, $\Sigma_{20} = ;$

Ἀπό τόν τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ἔχουμε γιά $\nu = 11$, $92 = 2 + 10 \cdot \omega$, ἀπό τό ὁποῖο: $\omega = 9$.

Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι: $2, 11, 20, 29, 38, \ldots$

Ἐξάλλου ἀπό τόν τύπο: $\Sigma_\nu = \dfrac{[2\alpha + (\nu - 1)\omega] \cdot \nu}{2}$ γιά $\nu = 20$ λαμβάνουμε:

$$\Sigma_{20} = \frac{(4 + 19 \cdot 9) \cdot 20}{2} = 1750.$$

§ 38. Παρεμβολή ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων. — α) Ὁρισμοί.

Δίνονται δύο ἀριθμοί α καί β. *Οἱ μ ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ λέγονται* **ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι** *τῶν α καί β, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ἀριθμοί:*

$$\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$$

εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

Παρεμβολή μ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζουμε τήν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τέτοιων, ὥστε οἱ: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου.

β) Τό πρόβλημα τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς. *Νά παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β.*

Ἐπίλυση. Γιά νά βροῦμε τούς μ ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους εἶναι φανερό ὅτι ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τό λόγο ω′ τῆς ἀριθμ. προόδου, στήν ὁποία ἀνήκουν οἱ ἀριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$.

Ὁ β κατέχει τήν τάξη $\nu = \mu + 2$ καί συνεπῶς (§ 32) θά ἔχουμε:

$$\beta = \alpha + (\mu + 2 - 1)\omega' = \alpha + (\mu + 1)\omega' \Rightarrow \boxed{\omega' = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) ὀνομάζεται **τύπος παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων** ἤ πιό σύντομα **τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς.**

Ἀφοῦ, ἀπό τόν τύπο (1), ὁρίσαμε τό *«λόγο παρεμβολῆς»* ω′, οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι:

$$x_1 = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}, \quad x_2 = \alpha + 2\,\frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}, \ldots, x_\nu = \alpha + \mu\,\frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}.$$

Ἐφαρμογή. **Νά παρεμβάλετε 7 ἀριθμητικούς ἐνδιαμέσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 9 καί 41.**

Λύση. Ὁ τύπος (1) τῆς § 38 μέ $\beta = 41$, $\alpha = 9$, $\mu = 7$ δίνει:

$$\omega' = \frac{41 - 9}{7 + 1} = 4$$

καί ἔτσι οἱ ἀριθμοί: 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41 εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

§ 39. Συμμετρική παράσταση ἑνός πεπερασμένου πλήθους ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

—Γιά νά περιορίσουμε τούς ἀγνώστους πού ἐμφανίζονται σέ διάφορα προβλήματα ἀριθμητικῶν προόδων, ἰδιαίτερα ὅταν μᾶς δίνεται τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν πού εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, εἶναι σκόπιμο νά ἔχουμε ὑπόψη τίς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1η: Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι περιττό.

Ὅταν ζητεῖται νά βροῦμε ἕνα περιττό πλῆθος ἀριθμῶν, ἔστω $2\nu+1$, $(\nu \in \mathbf{N})$ πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τότε συμφέρει νά τούς συμβολίσουμε ὡς ἑξῆς:

$$x-\nu\omega, \ldots, x-2\omega, x-\omega, x, x+\omega, x+2\omega, \ldots, x+\nu\omega,$$

ὅπου x εἶναι ὁ «μεσαῖος» καί ω ὁ λόγος τῆς ἀριθμ. προόδου.

Περίπτωση 2η: Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι ἄρτιο.

Ὅταν ζητεῖται νά βροῦμε ἕνα ἄρτιο πλῆθος ἀριθμῶν, ἔστω 2ν, $(\nu \in \mathbf{N})$ πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τότε, ἐπειδή ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὅροι τούς ὁποίους παριστάνουμε μέ: $x-\lambda$ καί $x+\lambda$, ὁπότε ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι: $\omega = (x+\lambda)-(x-\lambda) = 2\lambda$, συμβολίζουμε τούς ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$x-(2\nu-1)\lambda, \ldots, x-3\lambda, x-\lambda, x+\lambda, x+3\lambda, \ldots, x+(2\nu-1)\lambda.$$

Προσέξτε! Σ' αὐτή τήν περίπτωση **ὁ x δέν εἶναι ὅρος** τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἐφαρμογή: **Νά βρεῖτε τρεῖς ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ἄν τό ἄθροισμά τους εἶναι 33 καί τό γινόμενό τους εἶναι 1287.**

Λύση. Ἄν παραστήσουμε μέ x τό μεσαῖο ἀριθμό καί μέ ω τό λόγο τῆς προόδου, τότε οἱ τρεῖς ἀριθμοί θά εἶναι: $x-\omega, x, x+\omega$. Συνεπῶς θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(x-\omega)+x+(x+\omega)&=33\\(x-\omega)\cdot x\cdot(x+\omega)&=1287\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned}3x&=33 &&(1)\\x(x^2-\omega^2)&=1287 &&(2)\end{aligned}\right.$$

Ἡ (1) δίνει ἀμέσως $x=11$. Τότε, λύνοντας τή (2) ὡς πρός ω, ἔχουμε: $\omega=\pm 2$.
Ἄρα οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι: **9, 11, 13** ἤ **13, 11, 9**.

§ 40. Μερικά ἀξιοσημείωτα καί χρήσιμα ἀθροίσματα.

— Σ' αὐτή τήν παράγραφο ὑπολογίζουμε μερικά ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα καί συγκεκριμένα τό ἄθροισμα τῶν k δυνάμεων (k∈N) τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν. Τά ἀθροίσματα αὐτά θά μᾶς εἶναι πολύ χρήσιμα στά ἑπόμενα, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά δώσει ἰδιαίτερη προσοχή.

Θέτουμε:

$$\boxed{\Sigma_k \underset{\text{ορσ}}{=} 1^k+2^k+3^k+\cdots+\nu^k} \qquad (k\in\mathbf{N}).$$

Νά ὑπολογισθοῦν τά $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

α). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_1. Εἶναι: $\Sigma_1 = 1+2+3+\cdots+\nu$. Παρατηροῦμε ἀμέσως ὅτι τό Σ_1 εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀριθμ. προόδου μέ $\alpha_1=1$, $\omega=1$ καί $\alpha_\nu=\nu$.

Ἄρα: $\Sigma_1 = \dfrac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\nu}{2} = \dfrac{(1+\nu)\nu}{2} = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}$.

Ὥστε:
$$\boxed{\Sigma_1 = 1+2+3+\cdots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad (1)$$

β). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_2. Εἶναι: $\Sigma_2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2$. Θεωροῦμε τήν ταυτότητα: $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$, ἀπό τήν ὁποία γιά $x=1, 2, 3, \cdots, \nu$ παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned}2^3&=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1\\3^3&=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1\\4^3&=3^3+3\cdot3^2+3\cdot3+1\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\nu+1)^3&=\nu^3+3\cdot\nu^2+3\cdot\nu+1\end{aligned}\right\}$$

Ἄν προσθέσουμε τίς ἰσότητες αὐτές κατά μέλη καί διαγράψουμε τούς κοινούς ὅρους πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη, βρίσκουμε: $(\nu+1)^3 = 3(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)+3(1+2+\cdots+\nu)+(\nu+1)$, ὁπότε: $(\nu+1)^3-(\nu+1) = 3\cdot\Sigma_2+3\cdot\Sigma_1$.

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τήν (1), βρίσκουμε ὅτι:

$$\boxed{\Sigma_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}} \qquad (2)$$

γ). Ὑπολογισμός τοῦ Σ_3. Εἶναι: $\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3$. Θεωροῦμε τήν ταυτότητα: $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$, ἀπό τήν ὁποία γιά $x = 1, 2, \ldots, \nu$ παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 2^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1 \\ 3^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\nu+1)^4 = \nu^4 + 4\cdot \nu^3 + 6\cdot \nu^2 + 4\cdot \nu + 1 \end{array}\right\}$$

Ἄν προσθέσουμε τίς ἰσότητες αὐτές κατά μέλη βρίσκουμε:

$(\nu+1)^4 = 1 + 4\Sigma_3 + 6\Sigma_2 + 4\Sigma_1 + \nu$, ὁπότε:

$(\nu+1)^4 - (\nu+1) = 4\Sigma_3 + 6\Sigma_2 + 4\Sigma_1$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν λάβουμε ὑπόψη τίς (1) καί (2), βρίσκουμε ὅτι:

$$\boxed{\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3 = \left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2 = \Sigma_1^2} \qquad (3)$$

Ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί προηγουμένως μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τό Σ_4, ὕστερα τό Σ_5 κ.ο.κ.

Σημείωση. Οἱ τύποι (1), (2) καί (3), μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

Ἐφαρμογή. **Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα:**

$$\Sigma = \alpha^2 + (\alpha+\omega)^2 + (\alpha+2\omega)^2 + \cdots + [\alpha + (\nu-1)\omega]^2$$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\Sigma = \nu\alpha^2 + 2\alpha\omega[1 + 2 + \cdots + (\nu-1)] + \omega^2[1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2] \qquad (*)$$

Ἀλλά: $1 + 2 + \cdots + (\nu-1) = \frac{1}{2}\nu(\nu-1)$

$1^2 + 2^2 + \cdots + (\nu-1)^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu-1)(2\nu-1)$ (γιατί;)

καί συνεπῶς ἡ (*) γίνεται:

$$\Sigma = \nu\alpha^2 + \nu(\nu-1)\alpha\omega + \frac{1}{6}\nu(\nu-1)(2\nu-1)\omega^2 \qquad (4)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **41.** Νά γράψετε τούς ὀκτώ πρώτους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος καί ὁ λόγος εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

42. Νά βρεῖτε τό λόγο ω τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἄν $\alpha_1 = 3$ καί $\alpha_{12} = 80$.

43. Στήν ἀριθμητική πρόοδο: 3, 7, 11, ..., α_ν, ... εἶναι $\alpha_\nu = 79$. Νά βρεῖτε τό ν καί κατόπιν νά ὑπολογίσετε τά Σ_{20} καί Σ_{30}.

44. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ πλήθους τους.

45. Νά βρεῖτε τούς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἄν ξέρουμε ὅτι:

$$\alpha_9 = 15 \text{ καί } \Sigma_{12} = 165.$$

46. Νά προσδιορίσετε τό k ὥστε οἱ ἑπόμενοι ἀριθμοί νά ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου: **(i)** $3k, k+4, k-1$, **(ii)** $4-k, 3+2k, 6+7k$.

47. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε καί οἱ ἀριθμοί: $x = \alpha^2 - \beta\gamma$, $y = \beta^2 - \alpha\gamma$, $z = \gamma^2 - \alpha\beta$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Τί λόγο ἔχουν οἱ λόγοι τῶν δύο προόδων;

48. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν οἱ ἀριθμοί $\frac{1}{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{\beta+\gamma}$, $\frac{1}{\gamma+\alpha}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τούς ἀριθμούς: $\beta^2, \alpha^2, \gamma^2$.

49. Ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 9 καί 34 νά παρεμβάλετε ἄλλους ἀριθμούς ὥστε νά προκύψουν 11 διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

50. Σέ μία ἀριθμητική πρόοδο (α_ν) ὁ 2ος καί ὁ 8ος ὅρος της διαφέρουν κατά 24, ἐνῶ τό ἄθροισμα τοῦ 4ου καί τοῦ 12ου ὅρου της εἶναι 70. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο (α_ν), ἄν: **(i)** (α_ν) - αὔξουσα, **(ii)** (α_ν) - φθίνουσα. Ὕστερα νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ὅρων της πού βρίσκονται ἀνάμεσα στόν ὄγδοο καί εἰκοστό πέμπτο ὅρο της.

51. Ἄν ὁ ὅρος πού κατέχει τήν k τάξη σέ μία ἀριθμ. πρόοδο εἶναι α, αὐτός πού κατέχει τή λ τάξη εἶναι β καί αὐτός πού κατέχει τή μ τάξη εἶναι γ, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha(\lambda-\mu)+\beta(\mu-k)+\gamma(k-\lambda)=0.$$

52. Σέ μία ἀριθμ. πρόοδο τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της εἶναι Α, τῶν 2ν πρώτων ὅρων της εἶναι Β καί τῶν 3ν πρώτων ὅρων της εἶναι Γ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$3A-3B+\Gamma=0.$$

53. Τά ψηφία ἑνός τετραψήφιου ἀριθμοῦ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ἄν το τελευταῖο ψηφίο εἶναι τετραπλάσιο τοῦ πρώτου, νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός.

54. Νά βρεθοῦν τέσσερις ἀριθμοί πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καί συγχρόνως τό ἄθροισμά τους νά εἶναι 26 καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους νά εἶναι 214.

55. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμ. πρόοδος τῆς ὁποίας ὁ τέταρτος καί ὁ ὄγδοος ὅρος ἔχουν ἄθροισμα 18, ἐνῶ οἱ κύβοι τους ἔχουν ἄθροισμα 3402.

56. Νά βρεῖτε πέντε ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καί συγχρόνως τό ἄθροισμά τους νά εἶναι 30 καί τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τους νά εἶναι $\frac{137}{120}$.

57. Πόσους ἀριθμ. ἐνδιαμέσους πρέπει νά παρεμβάλουμε ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 1 καί 19, ὥστε ὁ λόγος τοῦ δεύτερου ἐνδιάμεσου πρός τόν τελευταῖο ἐνδιάμεσο νά εἶναι ἴσος μέ $\frac{1}{6}$.

58. Νά ὑπολογίσετε τό παρακάτω ἄθροισμα:

$$\Sigma=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+\nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Ὑπόδειξη. Νά παρατηρήσετε ὅτι: $\nu(\nu+1)(\nu+2)=\nu^3+3\nu^2+2\nu$ κ.τ.λ.

* **Ὁμάδα Β'. 59.** Γιά ποιές τιμές τῶν α καί β οἱ ἀριθμοί: $\alpha\beta-\frac{1}{\alpha\beta}$, $\beta-\frac{1}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}$ ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου; Ποιός ὁ λόγος τῆς προόδου σέ κάθε περίπτωση;

60. Τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀκολουθίας (α_ν) εἶναι: $3\nu^2+\nu$. Νά βρεῖτε τό νιοστό ὅρο της καί νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι ἀριθμητική πρόοδος. Ὕστερα νά βρεῖτε τήν τάξη τοῦ ὅρου, πού εἶναι ἴσος μέ 100.

61. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε ἀριθμ. πρόοδο ἰσχύει: $\Sigma_\mu=\Sigma_\nu \Longrightarrow \Sigma_{\mu+\nu}=0$, $(\mu\neq\nu)$.

62. Ἔστω μία ἀριθμ. πρόοδος με πρῶτο ὅρο τό α καί λόγο τό ω. Ἄν τό ἄθροισμα Σ_p τῶν p πρώτων ὅρων της ἰσοῦται μέ q καί τό ἄθροισμα Σ_q τῶν q πρώτων ὅρων της ἰσοῦται μέ p, νά ἀποδείξετε ὅτι:

(i) $\Sigma_{p+q}=-(p+q)$ **(ii)** $\Sigma_{p-q}=(p-q)\left(1+\frac{2q}{p}\right)$

63. Νά ἀποδείξετε ὅτι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ γιά νά εἶναι ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (χωρίς ἀπαραίτητα νά εἶναι καί διαδοχικοί), πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{\beta-\alpha}{x+1}=\frac{\gamma-\beta}{y+1}$$

νά ἔχει ἀκέραιη καί θετική λύση ὡς πρός x, y, ὅπου x εἶναι τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, οἱ ὁποῖοι βρίσκονται ἀνάμεσα στά α καί β, καί y εἶναι τό πλῆθος τῶν ὅρων πού βρίσκονται ἀνάμεσα στά β καί γ.

64. Νά ἐξετάσετε ἄν οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ἀποτελοῦν ὅρους ὁποιασδήποτε τάξεως μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

65. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν μ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων πού παρεμβάλλονται ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 1 καί μ^2.

Ἄν οἱ ὅροι πού κατέχουν τίς τάξεις p, q, r σέ μία ἀριθμητική πρόοδο εἶναι ἀντιστοίχως ἴσοι μέ r, p, q, νά ἀποδείξετε ὅτι: $p^3+q^3+r^3=3pqr$.

67. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τά μήκη τῶν πλευρῶν ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου, τότε ὁ λόγος τῆς προόδου ἰσοῦται μέ τήν ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

68. Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $x^2-\alpha x+\beta=0$ μέ ρίζες ρ_1, ρ_2 καί ἡ: $x^2-(5\alpha-4)x+\beta=0$ μέ ρίζες ρ_3, ρ_4. Νά προσδιορίσετε τά α καί β ἔτσι, ὥστε οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, μ' αὐτή τή σειρά, νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμ. προόδου.

69. Τήν ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τή χωρίζουμε σέ ὁμάδες ὡς ἑξῆς:

$$(1), (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8, \ldots, 12), (13, 14, \ldots, 22), (23, 24, \ldots), \ldots$$

Νά βρεῖτε τόν πρῶτο ὅρο τῆς νιοστῆς ὁμάδας καί νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν πού περιλαμβάνονται στή νιοστή ὁμάδα εἶναι:

$$(3\nu-2)\cdot\left[(\nu-1)^2+\frac{\nu^2+1}{2}\right].$$

70. Χωρίζουμε 4200 ἀντικείμενα σέ $(\nu+1)$ ὁμάδες ἔτσι, ὥστε ἡ πρώτη ὁμάδα νά περιλαμβάνει 5 ἀντικείμενα, ἡ δεύτερη 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νά βρεῖτε τό μέγιστο πλῆθος τῶν ὁμάδων πού μποροῦμε νά σχηματίσουμε καί τό πλῆθος τῶν ἀντικειμένων πού ἴσως θά θέλαμε γιά νά σχηματίσουμε μία ἀκόμη ὁμάδα.

71. Ἄν S εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μέ λόγο ω καί Σ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ὅρων της, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\Sigma=\frac{S^2}{\nu}+\frac{1}{12}\,\nu(\nu^2-1)\omega^2.$$

II. ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 41. Ὁρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{2\nu+1}, \ldots$$

Γι' αὐτή τήν ἀκολουθία παρατηροῦμε τό ἑξῆς: ἄν πάρουμε, μέ τήν ἴδια τάξη, τούς ἀντίστροφους τῶν ὅρων της, θά ἔχουμε τήν ἀκολουθία:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots, (2\nu+1), \ldots$$

ἡ ὁποία εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος (μέ λόγο $\omega=2$).

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία: 6, 3, 2, ... παρατηροῦμε πάλι πώς ἡ ἀκολουθία: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$ εἶναι μία ἀριθμητική πρόοδος $\left(\text{μέ } \omega = \frac{1}{6}\right)$.

Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὑπάρχουν ἀκολουθίες ἀριθμῶν μέ τήν ἰδιότητα: Ἄν πάρουμε τούς ἀντίστροφους τῶν ὅρων τους, μέ τήν ἴδια βέβαια τάξη, προκύπτει μία νέα ἀκολουθία, ἡ ὁποία εἶναι ἀριθμητική πρόοδος. Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **ἁρμονικές προόδους.** Πιό αὐστηρά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι : *Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν :*

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_\nu, \ \ldots \tag{1}$$

θά λέμε ὅτι εἶναι μία **ἁρμονική πρόοδος,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει: $\alpha_\nu \neq 0 \ \forall \ \nu \in \mathbf{N}$ καί ἡ ἀκολουθία:*

$$\frac{1}{\alpha_1}, \ \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}, \ldots \tag{2}$$

εἶναι ἀριθμητική πρόοδος, δηλαδή *ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:*

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_{\nu+1}} = \frac{1}{\alpha_\nu} + \omega, \text{ γιά κάθε } \nu = 1, 2, \ldots} \tag{3}$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς ἁρμονικῆς προόδου καί ὁ α_ν λέγεται *νιοστός ὅρος* ἤ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου. Ἡ ἀκολουθία (2) λέγεται *ἡ ἀντίστοιχη ἀριθμητική πρόοδος* τῆς ἁρμονικῆς προόδου (1).

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τῆς ἁρμονικῆς προόδου συμπεραίνουμε ὅτι ζητήματα πού ἀφοροῦν μία ἁρμονική πρόοδο ἀνάγονται σέ ἐπίλυση ζητημάτων πού ἀφοροῦν τήν ἀντίστοιχη ἀριθμητική πρόοδο. Γιά τό λόγο αὐτό θά μελετήσουμε στά ἑπόμενα τίς κυριότερες ἰδιότητες τῶν ἁρμονικῶν προόδων ὡς ἐφαρμογές τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

§ 42. Εὕρεση τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου.— Ἔστω ἡ ἁρμονική πρόοδος: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$. Ἄν ω εἶναι ὁ λόγος τῆς ἀντίστοιχης ἀριθμητικῆς προόδου: $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}, \ldots$ τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τῆς § 70, θά ἔχουμε:

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu-1)\omega \implies \boxed{\alpha_\nu = \frac{\alpha_1}{1 + (\nu - 1)\omega\, \alpha_1}} \tag{1}$$

Σημείωση. Ἄν δύο πρῶτοι ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι γνωστοί, τότε ὁ λόγος $\omega = \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}$ καί συνεπῶς ὁ νιοστός ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι ὁ:

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(\nu - 1) - \alpha_2(\nu - 2)}} \tag{1'}$$

Σχόλιο. Δέν ὑπάρχει τύπος πού νά δίνει τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων ἁρμονικῆς προόδου.

§ 43. Συνθήκη γιά νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου οἱ ἀριθμοί α, β, γ.— Ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι, μέ τή σειρά πού δίνονται, διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, οἱ ἀντίστροφοί τους: $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καί συνεπῶς (§ 36):

$$2 \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \beta = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}} \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (1), τότε $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ καί συνεπῶς $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$, δηλαδή οἱ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, ὁπότε οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

Ὥστε: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α,β,γ (≠0) διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου εἶναι ἡ ἰσότητα (1).*

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ἀριθμός β λέγεται **ἁρμονικός μέσος** τῶν α καί γ.

Γενικότερα: *ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, διάφορους τοῦ μηδενός, ὀνομάζουμε* **ἁρμονικό μέσο** *αὐτῶν, καί τόν συμβολίζουμε μέ M_H, τόν ἀριθμό:*

$$\boxed{M_H = \frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_\nu}}} \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις. α) Ἡ (1) γράφεται : $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} \Longleftrightarrow \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}$

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} = \frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma} \Longleftrightarrow \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}} \qquad (3)$$

Ἡ ἰσότητα (3) λέγεται **ἁρμονική ἀναλογία.**

Ἀπό τήν (3) συμπεραίνουμε ὅτι : *Γιά νά εἶναι οἱ διάφοροι μεταξύ τους ἀριθμοί α,β,γ μέ τή σειρά πού δίνονται, διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἀριθμοί αὐτοί νά εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός καί νά βρίσκονται σέ ἁρμονική ἀναλογία.*

β) Ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰδιότητα III (§ 35) τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ἡ προηγούμενη συνθήκη (1) διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς : *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$* ($\alpha_\nu \neq 0$, $\forall\, \nu \in \mathbf{N}$) *ἁρμονική πρόοδος εἶναι ἡ:*

$$\boxed{\frac{2}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_{\nu-1}} + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}}} \quad (\nu = 2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

Νά συγκρίνετε τήν παραπάνω σχέση (4) μέ τή γνωστή ἀπό τή Γεωμετρία σχέση τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ : $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{A\Gamma}} + \frac{1}{\overline{A\Delta}}$.

★ **§ 44. Παρεμβολή ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων.—α) Ὁρισμοί.** Δίνονται δύο ἀριθμοί α καί β (α, β $\neq 0$). *Οἱ μ ἀριθμοί* $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ *λέγονται* **ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι** *τῶν α καί β, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ἀριθμοί:* $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ *εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.*

Παρεμβολή μ ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζουμε τήν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ τέτοιων, ὥστε: οἱ $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

β) Τό πρόβλημα τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς. *Νά παρεμβληθοῦν μ ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β.*

Ἐπίλυση. Ἀρκεῖ νά παρεμβάλουμε μ ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{\alpha}$ καί $\frac{1}{\beta}$, ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί τους θά εἶναι οἱ μ ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι τῶν α καί β. Ἀπό τόν τύπο τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς (§ 76) ἔχουμε:

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta(\mu + 1)}, \text{ δηλαδή } \quad \boxed{\omega' = \frac{\alpha - \beta}{(\mu + 1)\alpha\beta}} \quad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λέγεται **τύπος τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς.**

Ἐφαρμογή. **Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καί $\frac{5}{11}$ νά παρεμβάλετε 5 ἁρμονικούς ἐνδιάμεσους.**

Λύση. Ἀρκεῖ νά παρεμβάλουμε 5 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$ καί $\frac{11}{5}$. Ὁ τύπος (1) γιά $\beta = \frac{5}{11}$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $\mu = 5$ δίνει: $\omega' = \frac{3}{10}$. Τότε οἱ 5 ἀριθμητικοί ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{2}{5}$ καί $\frac{11}{5}$ εἶναι οἱ: $\frac{7}{10}$, 1, $\frac{13}{10}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{19}{10}$, ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί τους θά εἶναι οἱ 5 ἁρμονικοί ἐνδιάμεσοι τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καί $\frac{5}{11}$ πού ζητᾶμε. Ἔτσι ἔχουμε: $\quad x_1 = \frac{10}{7}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{10}{13}, \quad x_4 = \frac{5}{8}, \quad x_5 = \frac{10}{19}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **72.** Νά βρεῖτε τόν 31ο ὅρο τῆς ἁρμονικῆς προόδου: $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \ldots$ καί τόν ὄγδοο ὅρο τῆς προόδου: $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \ldots$

73. Νά βρεῖτε τό 12ο ὅρο μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τρίτος ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{4}$ καί ὁ ὄγδοος ὅρος της εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{3}{8}$.

74. Νά προσδιορίσετε τόν ἀριθμό k, ὥστε οἱ ἀριθμοί: $1 + k$, $3 + k$, $9 + k$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

75. Δίνονται τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ. Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός x, ὥστε οἱ ἀριθμοί $\alpha + x$,

$\beta + x$, $\gamma + x$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου. Τί συμβαίνει ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου;

76. Νά προσδιορίσετε τούς ἀριθμούς α καί β, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι οἱ ἀριθμοί: α, 12, 3, $1\frac{5}{7}$, β εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

77. Ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:
i) $\dfrac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} + \dfrac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma} = 2$, **(ii)** $\dfrac{2}{\beta} = \dfrac{1}{\beta-\alpha} + \dfrac{1}{\beta-\gamma}$.

78. Τό ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι $\frac{33}{40}$, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τους εἶναι 15. Νά βρεῖτε αὐτούς τούς ὅρους.

79. Νά ἀποδείξετε ὅτι : ἄν οἱ ἀριθμοί: $\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$, β, $\dfrac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε οἱ ἀριθμοί : α, $\frac{1}{\beta}$, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

80. Μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 0,25 καί 0,025 νά παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοί ἔτσι, ὥστε μαζί μέ τούς ἀριθμούς 0,25 καί 0,025 νά ἀποτελοῦν διαδοχικούς ὅρους ἁρμονικῆς προόδου.

81. Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου τάξεων λ, μ, ν ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$(\mu-\nu)\beta\gamma + (\nu-\lambda)\gamma\alpha + (\lambda-\mu)\alpha\beta = 0.$$

★ **Ὁμάδα Β΄. 82.** Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τούς ἀριθμούς:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}, \quad \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}, \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}.$$

83. Ἄν οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha-\beta} + \dfrac{\gamma+\beta}{2\gamma-\beta} > 4$, **(ii)** $\beta^2(\alpha-\gamma)^2 = 2[\gamma^2(\beta-\alpha)^2 + \alpha^2(\gamma-\beta)^2]$.

84. Ἄν οἱ διάφοροι μεταξύ τους ἀνά δύο ἀριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μέ $\nu \geqq 2$ ἰσχύει:

$$(\nu-1)\alpha_1\alpha_\nu = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu.$$

85. Ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς 2 καί 3 νά παρεμβάλετε 19 ἀριθμητικούς ἐνδιάμεσους καί 19 ἁρμονικούς ἐνδιάμεσους. Ἄν ξ εἶναι ἕνας ἀριθμ. ἐνδιάμεσος καί η ὁ ἀντίστοιχος ἁρμονικός, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\xi + \dfrac{6}{\eta} = 5$.

86. Νά βρεῖτε δυό ἀριθμούς x καί y, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι διαφέρουν κατά 3 καί ὅτι : $M_A - M_H = \frac{3}{14}$.

87. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{5\alpha-3\beta}{\alpha\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}.$$

88. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τά μήκη α, β, γ τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, τότε οἱ ἀκτῖνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 τῶν ἀντίστοιχων παρεγγεγραμμένων στό τρίγωνο κύκλων εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

89. Νά βρεῖτε τή συνθήκη γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, ὄχι ἀπαραίτητα διαδοχικοί. Κατόπιν μέ βάση τή συνθήκη πού βρήκατε νά ἐξετάσετε ἄν οἱ ἀριθμοί : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{32}$ εἶναι ὅροι ἁρμονικῆς προόδου καί ποιᾶς ;

§ 45. Ὁρισμοί.— Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ὅρος της, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ ἕνα σταθερό ἀριθμό, πού στήν προκειμένη περίπτωση εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{2}$.

Ἐπίσης, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία: $2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots$, βλέπουμε πάλι πώς κάθε ὅρος της —ἐκτός φυσικά ἀπό τόν πρῶτο— προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν προηγούμενό του μέ τό -2.

Παρατηροῦμε λοιπόν πώς ὑπάρχουν ἀκολουθίες μέ τήν ἰδιότητα: κάθε ὅρος τους, ἀπό τό δεύτερο καί μετά, προκύπτει ἄν πολλαπλασιάζουμε τόν προηγούμενό του ἐπί ἕνα σταθερό ἀριθμό πού τόν λέμε **λόγο** καί τόν συμβολίζουμε συνήθως καί ἐδῶ μέ τό γράμμα ω. Τίς ἀκολουθίες μέ αὐτή τήν ἰδιότητα τίς ὀνομάζουμε **γεωμετρικές προόδους.** Πιό γενικά μποροῦμε νά ποῦμε τώρα ὅτι:

Μία ἀκολουθία ἀριθμῶν: $\quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \quad$ (1)

θά λέμε ὅτι εἶναι μία **γεωμετρική πρόοδος,** *τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἀριθμός ω τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:*

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \omega, \quad \text{γιά κάθε } \nu = 1, 2, \ldots} \tag{2}$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) λέγονται *διαδοχικοί ὅροι* τῆς γεωμετρικῆς προόδου καί ὁ α_ν λέγεται *νιοστός ὅρος* ἤ *ὅρος ν-τάξεως* τῆς προόδου.

Μία γεωμετρική πρόοδος μέ ὅρους διαφορετικούς ἀπό τό μηδέν λέγεται ἐπίσης καί **πρόοδος κατά πηλίκο,** γιατί ἀπό τή (2) ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \cdots = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \cdots = \omega \text{ (σταθ.)} \tag{3}$$

Ἡ (3) μᾶς ὁδηγεῖ νά δώσουμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Γεωμετρική πρόοδος (ἤ **πρόοδος κατά πηλίκο**) *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός, τῆς ὁποίας τό πηλίκο* $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ *δύο ὁποιωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της εἶναι σταθερό.* Τό σταθερό αὐτό πηλίκο εἶναι ὁ **λόγος** τῆς γεωμετρικῆς προόδου.

Δίνουμε τώρα καί τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Μία γεωμετρική πρόοδος καί γενικότερα μία ἀκολουθία $\alpha_\nu, \nu = 1, 2, \ldots$ λέγεται **ἀπολύτως αὔξουσα,** ἄν ἡ ἀκολουθία $|\alpha_\nu|, \nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι αὔξουσα, δηλ. ἄν ἰσχύει: $\quad |\alpha_{\nu+1}| > |\alpha_\nu|, \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$

καί **ἀπολύτως φθίνουσα,** ἄν ἰσχύει: $\quad |\alpha_{\nu+1}| < |\alpha_\nu| \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

'Από τόν παραπάνω όρισμό καί τήν (3) έχουμε ότι:

α). Άν $|\omega| > 1$, τότε ή γεωμ. πρόοδος (1) είναι **ἀπολύτως αὔξουσα**.

β). Άν $0 < |\omega| < 1$, τότε ή γεωμ. πρόοδος (1) είναι **ἀπολύτως φθίνουσα**.

Έτσι, π.χ. ή πρόοδος: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ είναι ἀπολύτως φθίνουσα, ἐπειδή $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$, ἐνῶ ή γεωμ. πρόοδος: $2, -4, 8, -16, \ldots$ είναι ἀπολύτως αὔξουσα, ἐπειδή: $|\omega| = |-2| = 2 > 1$.

Παρατήρηση. Άν $|\omega| = 1$, δηλαδή $\omega = \pm 1$ έχουμε:

(i). Γιά $\omega = 1$ ή γεωμ. πρόοδος είναι μία σταθερή ἀκολουθία, ἐπειδή τότε θά έχουμε: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu$ γιά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ Ώς σταθερή ἀκολουθία ή γεωμ. πρόοδος (1) είναι τότε συγχρόνως καί αὔξουσα καί φθίνουσα.

(ii). Γιά $\omega = -1$ ή γεωμ. πρόοδος είναι ἀπολύτως σταθερή, ἐπειδή τότε θά έχουμε: $|\alpha_{\nu+1}| = |\alpha_\nu \cdot \omega| = |\alpha_\nu| \cdot |\omega| = |\alpha_\nu| \cdot |-1| = |\alpha_\nu| = |\alpha_1|$, γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, δηλ. ἄν $\omega = -1$, ή γεωμ. πρόοδος είναι συγχρόνως καί ἀπολύτως αὔξουσα καί ἀπολύτως φθίνουσα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 46. Ἰδιότητα Ι.— Ὁ νιοστός ὅρος α_ν σέ μία γεωμετρική πρόοδο πού ἔχει πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο τό $\omega \neq 0$, βρίσκεται ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν πρῶτο της ὅρο (α_1) μέ δύναμη τοῦ λόγου ω, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτη τόν ἀριθμό πού φανερώνει τό πλῆθος τῶν ὅρων πού προηγοῦνται τοῦ α_ν.

Δηλαδή: $$\boxed{\forall\ \nu \in \mathbf{N}, \quad \alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. 'Από τήν ἀναδρομική σχέση (2) τῆς § 45 γιά $\nu = 1, 2, \ldots, \nu-1$, λαμβάνουμε: $\alpha_2 = \alpha_1\omega, \ \alpha_3 = \alpha_2\omega, \ \alpha_4 = \alpha_3\omega, \ \ldots, \ \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1}\omega$.

Άν τώρα τίς σχέσεις αὐτές τίς πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη καί ἁπλοποιήσουμε μέ τούς κοινούς παράγοντες πού ἐμφανίζονται στά δύο μέλη προκύπτει ή (1).

Σημείωση. Μία πιό αὐστηρή ἀπόδειξη γίνεται μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς ὡς ἑξῆς:

Γιά $\nu = 1$ ή (1) προφανῶς ἰσχύει.

Έστω ότι ἰσχύει ή (1) γιά $\nu = k$ ($k \in \mathbf{N}$), δηλ. ἔστω ὅτι ἰσχύει: $\alpha_k = \alpha_1\omega^{k-1}$

'Από τήν τελευταία προκύπτει: $\alpha_k \cdot \omega = \alpha_1 \cdot \omega^{k-1} \cdot \omega = \alpha_1\omega^k$. Ἀλλά $\alpha_k \cdot \omega = \alpha_{k+1}$, ὁπότε ἔχουμε: $\alpha_{k+1} = \alpha_1 \cdot \omega^k = \alpha_1 \cdot \omega^{(k+1)-1}$

δηλ. ή (1) ἰσχύει καί γιά $\nu = k+1$. Συνεπῶς, σύμφωνα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ή (1) ἰσχύει γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἐφαρμογές. 1η: Νά βρεῖτε τόν 7ο ὅρο τῆς γεωμ. προόδου: $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$

Λύση. Έχουμε: $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\omega = 2$, $\nu = 7$, $\alpha_7 = ;$

'Εφαρμόζοντας τόν τύπο (1) γι' αὐτές τίς τιμές τῶν α_1, ω καί ν βρίσκουμε:

$$\alpha_7 = \alpha_1 . \omega^6 = \frac{1}{2} . 2^6 = 2^5 = 32.$$

2η: **Σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι $\alpha_1 = 6$, $\omega = 2$ καί $\alpha_\nu = 3072$. Νά βρεῖτε τό ν.**

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha_1 = 6$, $\omega = 2$, $\alpha_\nu = 3072$, $\nu = ;$

Ἐφαρμόζοντας τόν τύπο (1) γι' αὐτές τίς τιμές τῶν α_1, ω καί α_ν βρίσκουμε:

$$3072 = 6 . 2^{\nu-1}, \text{ δηλαδή: } 2^{\nu-1} = 512.$$

Ἀλλά $512 = 2^9$, ὁπότε ἡ τελευταία σχέση γράφεται:

$$2^{\nu-1} = 2^9. \text{ Ἄρα } \nu - 1 = 9 \text{ καί συνεπῶς } \nu = 10.$$

Παρατηρησεις. **1)** Ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: μία γεωμ. πρόοδος εἶναι τελείως ὁρισμένη, ὅταν δίνονται ὁ πρῶτος της ὅρος $\alpha_1 = \alpha$ καί ὁ λόγος της ω. Τότε οἱ ὅροι τῆς προόδου θά εἶναι:

1ος ὅρος,	2ος ὅρος,	3ος ὅρος,	4ος ὅρος,	5ος ὅρος,	...
α	$\alpha\omega$	$\alpha\omega^2$	$\alpha\omega^3$	$\alpha\omega^4$	...

2) Ἀπό τόν τύπο: $\alpha_\nu = \alpha_1 . \omega^{\nu-1}$ συνάγεται ὅτι: ἄν ξέρουμε τούς τρεῖς ἀπό τούς ἀριθμούς α_ν, α_1, ω καί ν μποροῦμε νά προσδιορίσουμε καί τόν τέταρτο.

3) Ἄν γιά μιά ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 . \omega^{\nu-1}$, $\forall \ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος. Πράγματι, τότε θά ἔχουμε:

$$\forall \ \nu \in \mathbf{N}, \ \alpha_\nu = \alpha_1 \omega^{\nu-1} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \forall \ \nu \in \mathbf{N}, \ \alpha_{\nu+1} = \alpha_1 \omega^\nu \\ \forall \ \nu \in \mathbf{N}, \ \alpha_\nu \cdot \omega = \alpha_1 \omega^\nu \end{Bmatrix} \Rightarrow \forall \ \nu \in \mathbf{N}, \ \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \omega.$$

4) Ἔχοντας ὑπόψη τήν παρατήρηση 3 ἡ ἰδιότητα I διατυπώνεται πιό γενικά ὡς ἑξῆς: *Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο ω μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἡ:* $\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha_1 . \omega^{\nu-1}}$, $\forall \ \nu \in \mathbf{N}$.

* § 47. **Πόρισμα.—Ἄν μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega (\neq 0)$, τότε γιά κάθε $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύουν:**

$$\text{i)} \quad \alpha_{1+\mu} = \alpha_1 . \omega^\mu$$

$$\text{ii)} \quad \alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} . \omega^\mu$$

$$\text{iii)} \quad \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_\nu . \omega^{-\mu}.$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (i) προκύπτει ἀμέσως ἀπό τή σχέση $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}$, ἀρκεῖ νά θέσουμε $\nu = 1 + \mu$. Γιά νά ἀποδείξουμε τίς (ii) καί (iii) παρατηροῦμε ὅτι:

$$\alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-\mu-1} = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1} \cdot \omega^{-\mu} = \alpha_\nu \cdot \omega^{-\mu},$$

δηλαδή ἡ (iii), καί συνεπῶς:

$$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} \cdot \omega^\mu, \text{ δηλαδή ἡ (ii).}$$

* § 48. **Ἰδιότητα II.—Ἄν μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega \neq 0$, τότε γιά κάθε $\nu, \mu \in \mathbf{N}$ μέ $\mu < \nu$ ἰσχύει:**

$$\boxed{\alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 \cdot \alpha_\nu} \qquad (2)$$

Ἡ ἀπόδειξη τῆς (2) εἶναι ἄμεση συνέπεια τῶν (i) καί (iii) τοῦ προηγούμενου πορίσματος.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα διατυπώνεται συχνά ὡς ἑξῆς: *Σέ πεπερασμένο* *πλῆθος διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, τό γινόμενο δύο ὅρων πού* **«ἰσαπέχουν»** *ἀπό τούς* **«ἄκρους»** *ὅρους εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν «ἄκρων» ὅρων.* Ἔτσι ἔχουμε:

$$\alpha_2 . \alpha_{\nu-1} = (\alpha_1 . \omega)\left(\frac{\alpha_\nu}{\omega}\right) = \alpha_1\alpha_\nu$$

$$\alpha_3 . \alpha_{\nu-2} = (\alpha_1\omega^2)\left(\frac{\alpha_\nu}{\omega^2}\right) = \alpha_1\alpha_\nu \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Εἰδικότερα στήν περίπτωση πού τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττό, ὁπότε ὑπάρχει **«μεσαῖος» ὅρος**, τότε *ὁ ὅρος αὐτός εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων* (γιατί;).

Ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητας II εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα:

§ 49. Πόρισμα.— Τό γινόμενο $\Pi_\nu = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μᾶς τό δίνει ὁ τύπος :

$$\boxed{\Pi_\nu^2 = (\alpha_1 \cdot \alpha_\nu)^\nu} \tag{1}$$

Σημείωση. Τόν τύπο (1) μποροῦμε νά τόν γράψουμε καί ὡς ἑξῆς:

$$\Pi_\nu = \alpha_1^\nu . \omega^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \text{ ὅπου } \omega \text{ εἶναι ὁ λόγος τῆς προόδου (γιατί;).} \tag{2}$$

§ 50. Ἰδιότητα III.— Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι μία ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_\nu \neq 0$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$ γεωμετρική πρόοδος εἶναι ἡ :

$$\boxed{\alpha_\nu^2 = \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_{\nu+1}} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος μέ λόγο $\omega \neq 0$, τότε, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε στήν § 45, γιά κάθε $\nu \geqq 2$ θά ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \omega = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}}, \text{ ὁπότε: } \alpha_\nu^2 = \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_{\nu+1} \tag{1}$$

Ἀντίστροφα, ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (1) καί ὅτι $\alpha_\nu \neq 0$, $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$. Τότε θά ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu-1}} = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \text{ γιά κάθε } \nu = 2, 3, \ldots$$

καί σύμφωνα μέ τό δεύτερο ὁρισμό πού δώσαμε γιά τή γεωμετρική πρόοδο, ἡ ἀκολουθία (α_ν) εἶναι γεωμετρική πρόοδος.

Ἄμεση συνέπεια τῆς παραπάνω προτάσεως εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα

§ 51. Πόρισμα.—Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι τρεῖς ἀριθμοί α, β, γ, διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι :

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma} \tag{1}$$

Σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ β λέγεται **γεωμετρικός μέσος** ἤ **μέσος ἀνάλογος** τῶν α καί γ.

Πιό γενικά: *Ἄν ἔχουμε ν ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ὀνομάζουμε* **γεωμετρικό μέσο** *αὐτῶν τῶν ν ἀριθμῶν, καί τόν συμβολίζουμε μέ M_Γ, τόν ἀριθμό:*

$$\boxed{M_\Gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu}} \qquad (2)$$

§ 52. **Ἰδιότητα IV.— Τό ἄθροισμα $\Sigma_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο $\omega \neq 1$ μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:**

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας:

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \qquad (2)$$

ἐπί τό λόγο ω, ὁπότε ἔχουμε:

$$\omega\Sigma_\nu = \alpha_1\omega + \alpha_2\omega + \ldots + \alpha_\nu\omega \qquad (3)$$

Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε κατά μέλη ἀπό τήν (3) τή (2) καί λάβουμε ὑπόψη ὅτι: $\alpha_1\omega = \alpha_2$, $\alpha_2\omega = \alpha_3$, ..., $\alpha_{\nu-1}\omega = \alpha_\nu$, μετά τήν ἀναγωγή τῶν ὅμοιων ὅρων βρίσκουμε:

$$\omega\Sigma_\nu - \Sigma_\nu = \alpha_\nu\omega - \alpha_1 \Rightarrow (\omega-1)\Sigma_\nu = \alpha_\nu\omega - \alpha_1 \Rightarrow \Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}, \ (\omega \neq 1).$$

Ἄσκηση. Νά ἀποδείξετε τόν τύπο (1) καί μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς.

§ 53. **Πόρισμα.—Τό ἄθροισμα $\Sigma_\nu \equiv \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο $\omega \neq 1$ δίνεται, συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου α_1, τοῦ λόγου ω καί τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων του, ἀπό τόν τύπο:**

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) δίνει τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς γεωμ. προόδου, χωρίς νά εἶναι ἀνάγκη νά βροῦμε τό νιοστό της ὅρο.

Ἐφαρμογή. **Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ὀκτώ πρώτων ὅρων τῆς προόδου:**

2, 6, 18, 54, ...

Λύση. Στόν τύπο (1) (§ 53) θέτοντας $\alpha_1 = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 8$ ἔχουμε:

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6561 - 1)}{2} = 6560.$$

Παρατηρήσεις: **α΄).** Ἄν σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι $\omega = 1$, οἱ τύποι (1) τῶν § 52 καί 53 γιά τό Σ_ν δέν μποροῦν νά ἐφαρμοστοῦν (γιατί;). Σ' αὐτή τήν εἰδική περίπτωση, δηλ. ἄν $\omega = 1$, ἡ πρόοδος ἔχει ὅλους τούς ὅρους ἴσους μέ τόν πρῶτο ὅρο της καί συνεπῶς τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της ἰσοῦται μέ:

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_1 = \nu . \alpha_1, \text{ δηλαδή } \mathbf{\Sigma_\nu = \nu\alpha_1}.$$

β΄). Οἱ δύο τύποι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1} \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους (ἀριθμούς), τούς: α_1, α_ν, ω, ν, Σ_ν. Ἄν, λοιπόν, μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἀπ' αὐτούς τούς ἀριθμούς, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τούς ὑπόλοιπους δύο ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2). Ἡ ἐπίλυση αὐτοῦ τοῦ συστήματος δέν εἶναι πάντοτε δυνατή. Μερικά ἀπό τά προβλήματα πού παρουσιάζονται ἐπιλύονται μέ τή βοήθεια τῶν λογαρίθμων, γιά τούς ὁποίους θά κάνουμε λόγο σ' ἕνα ἀπό τά ἑπόμενα κεφάλαια.

Ἐφαρμογές: 1η. **Ὁ ὄγδοος ὅρος μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μέ 384 καί ὁ λόγος της μέ 2. Νά βρεῖτε τόν πρῶτο ὅρο της καί τό ἄθροισμα τῶν ὀκτώ πρώτων ὅρων της.**

Λύση. Ἔστω ὅτι εἶναι α_1 ὁ πρῶτος ὅρος, ω ὁ λόγος καί α_ν ὁ νιοστός ὅρος τῆς γεωμ. προόδου. Ἀπό τούς τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ καί $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ γιά $\omega = 2$, $\nu = 8$, $\alpha_\nu = 384$ ἔχουμε:

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - \alpha_1}{2 - 1} \quad (2)$$

Ἀπό τήν (1) βρίσκουμε $\alpha_1 = 3$.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε στή (2) τό α_1 μέ τό ἴσο του βρίσκουμε: $\Sigma_8 = \dfrac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765.$

2η. **Σέ μία γεωμετρική πρόοδο μέ πρῶτο ὅρο τό 5 ὁ ἕβδομος ὅρος της ἰσοῦται μέ 3645. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο καί νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν ἑπτά πρώτων ὅρων της.**

Λύση. Ἀπό τούς τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ καί $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}$, μέ $\alpha_1 = 5$, $\nu = 7$ καί $\alpha_7 = 3645$ λαμβάνουμε ἀντιστοίχως:

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \qquad \text{καί} \qquad \Sigma_7 = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ἀπό τήν (1) ἔχουμε: $\omega^6 = 729$, ἀπ' ὅπου γιά $\omega \in \mathbf{R}$ βρίσκουμε: $\omega = \pm 3$.

Γιά $\omega = 3$ ἡ πρόοδος εἶναι: 5, 15, 45, 135, ... (3)

Γιά $\omega = -3$ ἡ πρόοδος εἶναι: 5, –15, 45, –135, ... (4)

Ἡ πρώτη εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐνῶ ἡ δεύτερη δέν εἶναι οὔτε αὔξουσα οὔτε φθίνουσα, εἶναι ὅμως ἀπολύτως αὔξουσα καί μάλιστα γνησίως.

Ἀπό τή (2) μέ ἀντικατάσταση τοῦ ω μέ τίς τιμές του +3 καί –3 βρίσκουμε ἀντιστοίχως:

$$\Sigma_7 = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465, \quad \Sigma'_7 = \frac{3645(-3) - 5}{-3 - 1} = 2735.$$

Τό πρῶτο ἄθροισμα ἀναφέρεται στήν πρόοδο (3) καί τό δεύτερο στήν πρόοδο (4).

§ 54. Παρεμβολή γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων. — α). Ὁρισμοί. Δίνονται δύο ἀριθμοί α καί β (α, β ≠ 0). *Οἱ διαφορετικοί τοῦ μηδενός ἀριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ λέγονται* **γεωμετρικοί ἐνδιάμεσοι** *τῶν α καί β, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ ἀριθμοί:*

$$\alpha, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_\mu, \; \beta$$

εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

Παρεμβολή μ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζουμε τήν εὕρεση μ ἀριθμῶν: $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$, διαφορετικῶν ἀπό τό μηδέν, τέτοιων, ὥστε οἱ: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

β). Τό πρόβλημα τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς. *Νά παρεμβληθοῦν μ γεωμετρικοί ἐνδιάμεσοι μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β.*

Ἐπίλυση. Γιά νά βροῦμε τούς μ γεωμετρικούς ἐνδιάμεσους εἶναι φανερό ὅτι ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τό λόγο ω τῆς γεωμ. προόδου, στήν ὁποία ἀνήκουν οἱ ἀριθμοί: $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \beta$. Ὁ β κατέχει τήν τάξη $\nu = \mu + 2$ καί συνεπῶς (§46) θά ἔχουμε:

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}, \text{ δηλαδή: } \quad \boldsymbol{\alpha \cdot \omega^{\mu+1} - \beta = 0} \tag{1}$$

Ὥστε γιά νά προσδιορίσουμε τό *«λόγο παρεμβολῆς»* ω ἀρκεῖ νά ἐπιλύσουμε τή διώνυμη ἐξίσωση (1). Ἡ ἐπίλυση τῆς (1) γίνεται μέ τή βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\}$ καί ζητᾶμε μόνο τίς πραγματικές λύσεις τῆς (1), δηλαδή $\omega \in \mathbf{R}$, τότε:

i). Ἄν **μ ἄρτιος** φυσικός ἀριθμός (ὁπότε $\mu + 1$ περιττός), ἡ (1) δέχεται μία μόνο πραγματική λύση, τήν:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{2}$$

καί εἶναι: $\omega > 0$, ἄν $\alpha\beta > 0$ καί $\omega < 0$, ἄν $\alpha\beta < 0$.

ii). Ἄν **μ περιττός** φυσικός ἀριθμός (ὁπότε $\mu + 1$ ἄρτιος) καί $\boldsymbol{\alpha\beta > 0}$, ἡ (1) δέχεται δύο πραγματικές λύσεις, τίς:

$$\omega = \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \quad \text{καί} \quad \omega = -\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3}$$

iii). Ἄν **μ περιττός** καί $\boldsymbol{\alpha\beta < 0}$, δέν ὁρίζονται ἀπό τήν (1) $\omega \in \mathbf{R}$.

Οἱ παραπάνω τύποι (2) καί (3) συνοψίζονται στόν ἑπόμενο τύπο:

$$\boxed{\omega = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}} \tag{4}$$

ὅπου $\varepsilon = 1$, ὅταν μ ἄρτιος καί $\varepsilon = \pm 1$, ὅταν μ περιττός, γιά $\omega \in \mathbf{R}$.

Ὁ τύπος (4) ὀνομάζεται **τύπος παρεμβολῆς γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** ἤ ἀλλιῶς **τύπος τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς.**

Ἀφοῦ ἀπό τόν τύπο (4) ὁρίσαμε τό λόγο ω, οἱ ἀριθμοί πού ζητούσαμε εἶναι: $\quad x_1 = \alpha\omega, \quad x_2 = \alpha\omega^2, \quad \ldots, \quad x_\mu = \alpha\omega^\mu$.

Ἐφαρμογή. **Νά παρεμβάλετε τρεῖς πραγματικούς γεωμ. ἐνδιάμεσους μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3 καί 48.**

Λύση. Ἀπό τόν τύπο (4) γιά $\alpha = 3$, $\beta = 48$ καί $\mu = 3$ λαμβάνουμε:

$$\omega = \pm\sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \pm\sqrt[4]{16}, \text{ δηλαδή: } \omega = \pm 2.$$

Ἄρα: $\quad x_1 = 6, x_2 = 12, x_3 = 24$ καί $x'_1 = -6, x'_2 = 12, x'_3 = -24$.

§ 55. Συμμετρική παράσταση ἑνός πεπερασμένου πλήθους ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

—Γιά νά περιορίσουμε τούς ἀγνώστους πού ἐμφανίζονται σέ διάφορα προβλήματα γεωμετρικῶν προόδων, ἰδιαίτερα ὅταν ξέρουμε τό γινόμενο ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, εἶναι σκόπιμο νά παραστήσουμε τούς ἀριθμούς αὐτούς ὡς ἑξῆς:

Περίπτωση 1η: Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι περιττό.

Ἄν τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι περιττό, ἔστω $2k+1$, $k \in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχει *«μεσαῖος»* ὅρος, τόν ὁποῖο «συμφέρει» νά τόν συμβολίσουμε μέ x, ὁπότε, ἄν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι $\omega \neq 0$, γράφουμε τούς ὅρους πού ζητᾶμε ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x}{\omega^k}, \ldots, \frac{x}{\omega^2}, \frac{x}{\omega}, x, x\omega, x\omega^2, \ldots, x\omega^k \qquad (1)$$

Περίπτωση 2η: Τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι ἄρτιο.

Ἄν τό πλῆθος τῶν ἄγνωστων ὅρων εἶναι ἄρτιο, ἔστω $2k$, $k \in \mathbf{N}$, τότε ὑπάρχουν δύο *«μεσαῖοι»* ὅροι καί τό γινόμενό τους εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων. Στήν περίπτωση αὐτή γιά νά παραστήσουμε τούς ὅρους πού ζητᾶμε διακρίνουμε τίς ἑξῆς δύο ὑποπεριπτώσεις:

2α). *Ἀναζητᾶμε ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο* **θετικό,** στίς ὁποῖες ἀνήκουν οἱ $2k$ τό πλῆθος ἀριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» ὅρους μέ: $\frac{x}{\lambda}$ καί $x\lambda$, ὁπότε ὁ λόγος ω τῆς γεωμ. προόδου εἶναι: $\omega = x\lambda : \frac{x}{\lambda} = \lambda^2$ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$\ldots, \frac{x}{\lambda^5}, \frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3, x\lambda^5, \ldots \qquad (2\alpha)$$

2β). *Ἀναζητᾶμε ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο* **ἀρνητικό,** στίς ὁποῖες ἀνήκουν οἱ $2k$ τό πλῆθος ἀριθμοί. Τότε «συμφέρει» νά συμβολίσουμε τούς δύο «μεσαίους» ὅρους μέ: $\frac{x}{\lambda}$ καί $-x\lambda$, ὁπότε ὁ λόγος ω τῆς γεωμ. προόδου εἶναι: $\omega = (-x\lambda) : \frac{x}{\lambda} = -\lambda^2$ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$\ldots, \frac{x}{\lambda^5}, -\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, -x\lambda, x\lambda^3, -x\lambda^5, \ldots \qquad (2\beta).$$

Σχόλιο. Ὅταν παριστάνουμε τούς ὅρους μιᾶς γεωμ. προόδου μέ τούς συμβολισμούς (1), (2α) καί (2β) εἶναι φανερό ὅτι σιωπηρά ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι διάφορος ἀπό τό μηδέν. Ἄν τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἔχει καί λύση μέ $\omega = 0$, τότε εἶναι φανερό ὅτι τή λύση αὐτή θά πρέπει νά τήν ἀναζητήσουμε ἰδιαιτέρως, καθόσον ἡ γεωμ. πρόοδος τότε εἶναι: $\alpha, 0, 0, \ldots$

Ἐφαρμογές. 1η: Νά βρεῖτε τέσσερις πραγματικούς ἀριθμούς πού νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι: τό γινόμενό τους ἰσοῦται μέ 729 καί ὁ τέταρτος ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν δύο μεσαίων.

Λύση. Πρῶτα ἀπ' ὅλα παρατηροῦμε ὅτι δέν ὑπάρχει λύση μέ λόγο τῆς προόδου τό μηδέν. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

i). Ἀναζητᾶμε ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο $\omega > 0$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2α), παριστάνουμε τούς τέσσερις ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$\frac{x}{\lambda^3}, \frac{x}{\lambda}, x\lambda, x\lambda^3 \qquad (x, \lambda \in \mathbf{R}).$$

Ἔχουμε τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x^4 &= 729 \\ x\lambda^3 &= x^2 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x^2 &= 27 \\ \lambda^3 &= x \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 &= x \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 &= \pm 3\sqrt{3} \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \begin{aligned} x &= \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda &= \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

Γιά $x = 3\sqrt{3}$ καί $\lambda = \sqrt{3}$ οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι: 1, 3, 9, 27.

Γιά $x = -3\sqrt{3}$ καί $\lambda = -\sqrt{3}$ βρίσκουμε πάλι τούς ἴδιους ἀριθμούς.

ii). Ἀναζητᾶμε τώρα ἄν ὑπάρχουν γεωμ. πρόοδοι μέ λόγο $\omega < 0$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν (2β), παριστάνουμε τούς τέσσερις ἀριθμούς ὡς ἑξῆς:

$$-\frac{x}{\lambda^3}, \quad \frac{x}{\lambda}, \quad -x\lambda, \quad x\lambda^3 \qquad (x, \lambda \in \mathbf{R})$$

Ἔχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x^4 = 729 \\ x\lambda^3 = -x^2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = 27 \\ \lambda^3 = -x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = -x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \pm 3\sqrt{3} \\ \lambda^3 = \mp 3\sqrt{3} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = \pm\sqrt{3} \\ \lambda = \mp\sqrt{3} \end{array}$$

Γιά $x = 3\sqrt{3}$ καί $\lambda = -\sqrt{3}$ οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι: 1, –3, 9, –27.

Γιά $x = -3\sqrt{3}$ καί $\lambda = \sqrt{3}$ βρίσκουμε πάλι τούς ἀριθμούς: 1, –3, 9, –27.

Ἄρα οἱ ἀριθμοί πού ζητᾶμε εἶναι οἱ: **1, 3, 9, 27** καί **1, –3, 9, –27.**

2η. **Νά βρεῖτε γεωμετρική πρόοδο πού νά ἔχει τήν ἰδιότητα: τό ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων της νά ἰσοῦται μέ 1 καί τό διπλάσιο τοῦ δεύτερου ὅρου της σύν ἕνα νά ἰσοῦται μέ τόν πρῶτο ὅρο της.**

Λύση. Σύμφωνα μέ τήν πρώτη περίπτωση παριστάνουμε τούς τρεῖς πρώτους ὅρους τῆς γεωμ. προόδου ὡς ἑξῆς: $\frac{x}{\omega}$, x, xω,ὅπου ὑποθέτουμε ὅτι $\omega \neq 0$.

Ἔχουμε τότε τό σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{x}{\omega} + x + x\omega = 1 \\ 2x + 1 = \frac{x}{\omega} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{3}{7} \\ \omega = -3. \end{array}$$

Ἄρα μία λύση τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ γεωμετρική πρόοδος:

$$\frac{1}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \ldots, \frac{1}{7}(-3)^{\nu-1}, \ldots$$

Ἐξετάζουμε τώρα μήπως τό πρόβλημα ἔχει καί λύση μέ $\omega = 0$. Τότε μιά τέτοια γεωμ. πρόοδος θά ἦταν τῆς μορφῆς: α, 0, 0, ..., ὅπου α ὁ πρῶτος ὅρος της. Ἀμέσως βρίσκουμε ὅτι μία τέτοια πρόοδος εἶναι ἡ: **1, 0, 0, ...**, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μία δεύτερη λύση τοῦ προβλήματος. Ἄλλη λύση δέν ὑπάρχει (γιατί;).

§ 56. Τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου.— Ἔστω ἡ γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_\nu = \alpha\omega^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

μέ πρῶτο ὅρο τόν $\alpha \neq 0$ καί λόγο ω μέ: $\mathbf{0 < |\omega| < 1}$.

Ὅπως εἴδαμε καί στήν § 45 ἡ (1) εἶναι τότε μία **ἀπολύτως φθίνουσα** γεωμετρική πρόοδος, καθόσον εἶναι: $|\alpha_{\nu+1}| < |\alpha_\nu|$ γιά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, ὅταν: $0 < |\omega| < 1$.

Ἄς συμβολίσουμε μέ Σ_ν τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1), τό ὁποῖο, ὅπως εἶναι γνωστό, μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) γράφεται: $\Sigma_\nu = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega} \cdot \omega^\nu$.

Ἐπειδή $|\omega| < 1$ ἕπεται ὅτι: $\lim \omega^\nu = 0$ (βλ. § 26, ἐφαρμ. 1) καί συνεπῶς:

$$\lim \Sigma_\nu = \lim \left[\frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega}\cdot\omega^\nu\right] = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega}\cdot\lim\,\omega^\nu = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

Ὥστε:
$$\lim \Sigma_\nu = \frac{\alpha}{1-\omega} \tag{3}$$

Τό παραπάνω ὅριο, δηλαδή *τόν πραγματικό ἀριθμό* $\frac{\alpha}{1-\omega}$ *στόν ὁποῖο συγκλίνει τό ἄθροισμα* Σ_ν *τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου* (α_ν), δηλαδή γεωμετρικῆς προόδου μέ λόγο ω: $0 < |\omega| < 1$, *τό ὀνομάζουμε :* **«ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων τῆς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμετρικῆς προόδου (1)».**

Τό ἄθροισμα αὐτό τό συμβολίζουμε μέ Σ_∞ ἤ πιό ἁπλά μέ Σ. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\Sigma_\infty \equiv \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} + \cdots \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \lim \Sigma_\nu = \frac{\alpha}{1-\omega} \tag{4}$$

Ὥστε: **τό ἄθροισμα Σ τῶν ἄπειρων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου μέ πρῶτο ὅρο τόν α καί λόγο ω τέτοιο, ὥστε $0 < |\omega| < 1$ ἰσοῦται μέ:** $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

Σημ. Ἄν $\alpha = 1$, τότε: $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{\nu-1} + \cdots = \frac{1}{1-\omega}$.

Π.χ.
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Παρατήρηση. Ὁ τύπος (4) ἰσχύει καί γιά $\omega = 0$, γιατί τότε τό ἄθροισμα Σ θά εἶναι ἴσο μέ α καί ὅταν $\nu \to +\infty$. Ἐπίσης ὁ τύπος (4) ἰσχύει καί γιά $\alpha = 0$.

Ἐφαρμογή: 1η: Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα: $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{3^\nu} + \cdots$

Λύση: Οἱ ἄπειροι προσθετέοι: $4, \frac{4}{3}, \frac{4}{3^2}, \ldots, \frac{4}{3^\nu}, \ldots$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου πού ἔχει πρῶτο ὅρο $\alpha=4$ καί λόγο $\omega = \frac{1}{3}$. Ἑπομένως τό ἄθροισμα πού ζητᾶμε μᾶς τό δίνει ὁ τύπος (4), δηλαδή:

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{3^\nu} + \cdots = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6.$$

Ἐφαρμογή 2η. Νά βρεῖτε τό κοινό κλάσμα, ἀπό τό ὁποῖο παράγεται τό δεκαδικό περιοδικό κλάσμα: 4,513513...

Λύση. Τό δεκαδικό περιοδικό κλάσμα 4,513513... γράφεται:

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \cdots$$

Ἀλλά:
$$\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \cdots = \frac{\frac{513}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$$

Ἄρα: $$4{,}513513\ldots = 4 + \frac{513}{999} = \frac{4509}{999}.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ὁ δεκαδικός ἀριθμός 4,513513..., ὅταν τό πλῆθος τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων αὐξάνει ἀπεριόριστα, τείνει στό ρητό ἀριθμό $\frac{4509}{999}$.

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν καί γεωμετρικῶν προόδων πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἑπόμενο πίνακα:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ἔστω μία ἀριθμητική πρόοδος:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \quad (1)$$

μέ πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο ω. **Τότε:**

1. Ὁ νιοστός ὅρος α_ν τῆς (1) δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega}$$

2. Ἄν εἶναι $\omega \neq 0$, τότε τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1) δίνεται ἀπό τούς τύπους:

(i): $$\Sigma_\nu = \frac{(\alpha_\nu + \alpha_1)\nu}{2}$$

(ii) $$\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$$

Σημ. Ἄν εἶναι $\omega = 0$, τότε: $\Sigma_\nu = \nu\alpha_1$.

3. Ἰσχύει:

$$\alpha_1 + \alpha_\nu = \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = \ldots = \alpha_{1+\mu} + \alpha_{\nu-\mu}, \quad (\mu < \nu)$$

Εἰδικά: $\alpha_1 + \alpha_3 = 2\alpha_2$, $\alpha_2 + \alpha_4 = 2\alpha_3$,

$\alpha_3 + \alpha_5 = 2\alpha_4, \ldots, \alpha_\nu + \alpha_{\nu+2} = 2\alpha_{\nu+1}$

Συνέπεια: ἄν α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma}$$

4. Μέσος ἀριθμητικός:

$$M_A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu}{\nu}$$

5. Τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς:

$$\omega' = \frac{\beta - \alpha}{\mu + 1}$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

Ἔστω, μία γεωμετρική πρόοδος:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots \quad (1')$$

μέ πρῶτο ὅρο τό α_1 καί λόγο ω. **Τότε:**

1΄. Ὁ νιοστός ὅρος α_ν τῆς (1΄) δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}}$$

2΄. Ἄν εἶναι $\omega \neq 1$, τότε τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1΄) δίνεται ἀπό τούς τύπους:

(i) $$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

(ii) $$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}, \quad (\omega \neq 1)$$

Σημ. Ἄν εἶναι $\omega = 1$, τότε: $\Sigma_\nu = \nu\alpha_1$.

3΄. Ἰσχύει:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_\nu = \alpha_2 \cdot \alpha_{\nu-1} = \alpha_3 \cdot \alpha_{\nu-2} = \ldots = \alpha_{1+\mu} \cdot \alpha_{\nu-\mu}, \quad (\mu < \nu)$$

Εἰδικά: $\alpha_1\alpha_3 = \alpha_2^2$, $\alpha_2\alpha_4 = \alpha_3^2$

$\alpha_3 \cdot \alpha_5 = \alpha_4^2, \ldots, \alpha_\nu\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}^2$

Συνέπεια: ἄν α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\beta^2 = \alpha \cdot \gamma}$$

4΄. Μέσος γεωμετρικός:

$$M_\Gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu}$$

5΄. Τύπος τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς:

$$\omega' = \varepsilon \cdot \sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 90. Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι μονότονες οἱ ἑπόμενες γεωμετρικές πρόοδοι καί νά καθορίσετε τό εἶδος μονοτονίας γιά τίς μονότονες ἀπ' αὐτές:

α) $12, 6, 3, \ldots$, β) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$, γ) $3, -6, 12, \ldots$, δ) $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

91. Δίνεται ἡ γεωμ. πρόοδος: $1, 3, 9, 27, 81, \ldots$ Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διαφορές τῶν διαδοχικῶν ὅρων της σχηματίζουν μία νέα γεωμ. πρόοδο. Μήπως αὐτή ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γενικά γιά κάθε γεωμ. πρόοδο;

92. Νά προσδιορίσετε τόν πραγματικό ἀριθμό x, ὅταν εἶναι γνωστό ὅτι οἱ παρακάτω ἀριθμοί εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου:

α) $x-2, 2x, 7x+4$, **β)** $2x-2, 3x+6, 12x+6$.

93. Νά προσδιορίσετε τόν πραγματικό ἀριθμό x, ὥστε οἱ ἀριθμοί: $\alpha+x, \beta+x, \gamma+x$ νά εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου. Τί συμβαίνει ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου;

94. Νά βρεῖτε τό πλῆθος ν τῶν ὅρων πού πρέπει νά πάρουμε ἀπό μία γεωμ. πρόοδο, ἄν ξέρουμε ὅτι:

α) $\alpha_1 = 4, \omega = 4, \Sigma_\nu = 5460$, β) $\alpha_4 = 13, \alpha_6 = 117, \alpha_\nu = 9477$,

γ) $\alpha_1 = 4, \alpha_\nu = 972, \Sigma_\nu = 1456$, δ) $\alpha_\nu = 81, \omega = \frac{3}{4}, \Sigma_\nu = 781$.

95. Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}\right)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3.$$

96. Ἄν α, β, γ, δ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $(\alpha+\delta)\cdot(\beta+\gamma)-(\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\delta)=(\beta-\gamma)^2$

2) $(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\delta-\beta)^2=(\alpha-\delta)^2$.

97. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καί M_A, M_Γ, M_H εἶναι ἀντιστοίχως ὁ μέσος ἀριθμητικός, μέσος γεωμετρικός καί μέσος ἁρμονικός τῶν α καί β, νά ἀποδείξετε ὅτι:

1) $M_\Gamma^2 = M_A \cdot M_H$ καί **2)** $M_A \geqq M_\Gamma \geqq M_H$.

98. Νά σχηματίσετε μία γεωμ. πρόοδο, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρῶτο ὅρο της τή μικρότερη ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $x^3-2x^2-25x+50=0$ καί ὡς λόγο τή μεγαλύτερη ρίζα. Ὕστερα νά βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της, ἄν ὡς ν πάρουμε τό τριπλάσιο τῆς τρίτης ρίζας τῆς παραπάνω ἐξισώσεως.

99. Νά βρεῖτε τόν πρῶτο ὅρο καί τό λόγο μιᾶς γεωμ. προόδου ἄν εἶναι γνωστό ὅτι: τό ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὅρων της εἶναι 40, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν 8 πρώτων ὅρων της εἶναι 3280.

100. Νά βρεῖτε τίς διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἄν εἶναι γνωστό ὅτι αὐτές εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμ. προόδου καί ὅτι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν του εἶναι 168 καί ὁ ὄγκος του εἶναι: 512.

101. Τρεῖς ἀριθμοί x, y, z ἔχουν ἄθροισμα 147. Ἄν οἱ x, y, z εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμ. προόδου καί οἱ x, z, y γεωμ. προόδου, νά βρεῖτε αὐτούς τούς ἀριθμούς.

102. Ἄν οἱ διάφοροι τοῦ μηδενός ἀριθμοί α, β, γ εἶναι ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου τάξεως λ, μ καί ν ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$\alpha^{\mu-\nu}\cdot\beta^{\nu-\lambda}\cdot\gamma^{\lambda-\mu}=1.$$

103. Ἀνάμεσα στίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως: $2x^2-5x-3=0$ νά παρεμβάλετε 4 γεωμετρικούς ἐνδιάμεσους.

104. Σέ μία ἀπολύτως φθίνουσα γεωμ. πρόοδο ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι τό μισό τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄπειρων ὅρων, ἐνῶ τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι 20. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο.

105. Τό ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου εἶναι 65 καί τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων της εἶναι 81. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο.

106. Νά ὑπολογίσετε τά παρακάτω «ἀθροίσματα»:

$$\alpha)\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\cdots, \qquad \beta)\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$$

$$\gamma)\ \alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\cdots\ (\alpha>\beta>0).$$

107. Ἄν $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ εἶναι ἀντιστοίχως τά ἀθροίσματα τῶν ἄπειρων ὅρων τῶν γεωμ. πρόοδων, καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες ἔχει ὡς πρῶτο ὅρο ἀντιστοίχως τόν: $1, 2, 3, \ldots, \nu$ καί λόγο ἀντιστοίχως τόν: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{\nu+1}$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_\nu=\frac{\nu(\nu+3)}{2}.$$

* Ὁμάδα Β΄. **108.** Ἄν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ καί M_A, M_Γ, M_H εἶναι ἀντιστοίχως ὁ ἀριθμητικός, γεωμετρικός καί ἁρμονικός μέσος τους, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:

$$M_A \geqq M_\Gamma \geqq M_H \quad (\text{ἀνισότητα του Cauchy})$$

109. Ἄν $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y \geqq x^{1/3}\cdot y^{2/3}$$

Πότε ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει μέ τό ἴσον;

110. Ἄν οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου καί ἰσχύει ἡ σχέση:

$$\alpha^\rho=\beta^\sigma=\gamma^\tau,$$

νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοί ρ, σ, τ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου.

111. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμ. προόδου μέ λόγο ω, τότε ἰσχύει: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\omega<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

112. Ἄν $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$ καί $\alpha^3+\beta^3=\gamma^3$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοί: $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

113. Νά βρεῖτε τό νιοστό ὅρο καί τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας: 2, 3, 5, 9, 17, ...

Ὑπόδειξη. Νά πάρετε τίς διαφορές: $3-2, 5-3, 9-5, 17-9, \ldots$ Τί παρατηρεῖτε;

114. Ἄν οἱ α, β, γ, x, y, z εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ὁ α εἶναι μέσος ἀριθμητικός τῶν β καί γ, ἐνῶ ὁ x εἶναι μέσος ἁρμονικός τῶν y καί z, νά ἀποδείξετε ὅτι: ὁ αx εἶναι μέσος γεωμετρικός τῶν βy καί γz, τότε καί μόνο τότε, ἄν: $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}$.

115. Νά ἐξετάσετε ἄν οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ εἶναι ὅροι (ὄχι ἀναγκαστικά διαδοχικοί) μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

116. Τό ἄθροισμα τῶν ἄπειρων ὅρων μιᾶς ἀπολύτως φθίνουσας γεωμ. προόδου εἶναι 12 καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἄπειρων ὅρων της εἶναι 48. Νά βρεῖτε τήν πρόοδο.

117. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ μέ $|\alpha|<1$ καί $|\beta|<1$ καί ὀνομάσουμε:

$$A=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^\nu+\cdots \text{ καί } B=1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^\nu+\cdots,$$

νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\Sigma=1+\alpha\beta+\alpha^2\beta^2+\cdots+\alpha^\nu\beta^\nu+\cdots=\frac{AB}{A+B-1}.$$

118. Δίνεται ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α. Συνδέουμε τά μέσα τῶν πλευρῶν του A_1, B_1, Γ_1 καί σχηματίζουμε ἕνα νέο ἰσόπλευρο τρίγωνο. Τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $A_1B_1\Gamma_1$ τά συνδέουμε καί παίρνουμε ἕνα νέο ἰσόπλευρο τρίγωνο. Ἐπαναλαμβάνουμε ἐπ' ἄπειρο τήν ἐργασία αὐτή. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν περιμέτρων καί τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἄπειρων ἰσοπλεύρων τριγώνων πού σχηματίζονται.

119. Ἔστω ἡ ἀκολουθία (α_ν) μέ $\alpha_1 = \frac{3}{2}$ καί $\alpha_{\nu+1} = \frac{3\alpha_\nu + 4}{5}$ $\forall$ $\nu \in N$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία (β_ν) μέ γενικό ὅρο: $\beta_\nu = \alpha_\nu - 2$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μέ λόγο $\omega = \frac{3}{5}$. Ὕστερα νά βρεῖτε τούς νιοστούς ὅρους β_ν καί α_ν τῶν ἀκολουθιῶν (β_ν) καί (α_ν) ἀντιστοίχως συναρτήσει τοῦ ν, καθώς καί τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας (α_ν).

120. Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}(\alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}) \text{ καί } \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = \beta.$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ γενικό ὅρο: $\beta_\nu = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1}$ εἶναι μία γεωμ. πρόοδος μέ λόγο $\omega = -\frac{1}{2}$. Στή συνέχεια νά ἐκφράσετε τό α_ν συναρτήσει τῶν α, β καί ν. Ποιό εἶναι τό $\lim\alpha_\nu$;

121. Ἔστω ἡ ἀκολουθία: α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ γιά τήν ὁποία εἶναι:

$$\alpha_{\nu+2} = \xi\alpha_{\nu+1} + \eta\alpha_\nu \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}\ (\xi, \eta \in \mathbf{R}).$$

Νά ἀποδείξετε ὅτι:

Ἄν ὁ λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία α_ν εἶναι μία γεωμετρική πρόοδος.

122. Ἄν S_ν εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\alpha = -5$ καί ὁ λόγος $\omega = -3/4$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(\forall\ \varepsilon > 0 \text{ καί } \forall\ \nu \in \mathbf{N} \text{ μέ } \nu > 3\left(\frac{20}{7\varepsilon} - 1\right)\right) \Rightarrow \left|-\frac{20}{7} - S_\nu\right| < \varepsilon.$$

Ποιό εἶναι τό $\lim S_\nu$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

*§ 57. **Εἰσαγωγικές ἔννοιες.**— Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε γιά τίς δυναμεις μέ βάση ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό καί ἐκθέτη ρητό ἀριθμό καί ἀποδείξαμε τίς κυριότερες ἰδιότητές τους.

Ὑπενθυμίζουμε ἐδῶ μέ συντομία τίς ἰδιότητες αὐτές:

Γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καί $x, y \in \mathbf{Q}$ ($\mathbf{Q}$: τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν) ἰσχύουν:

1). $\alpha^x \alpha^y = \alpha^{x+y}$ **2).** $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$

3). $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$ **4).** $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$

5). $\alpha^x = 1 \iff x = 0 \ (\alpha \neq 1)$ **6).** $\alpha^x = \alpha^y \iff x = y \ (\alpha \neq 1)$

7). $\alpha > \beta \Longrightarrow \begin{cases} \alpha^x > \beta^x, & \text{ἄν } x > 0 \\ \alpha^x < \beta^x, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$, **8).** $x > y \iff \begin{cases} \alpha^x > \alpha^y, & \text{ἄν } \alpha > 1 \\ \alpha^x < \alpha^y, & \text{ἄν } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$

Εἰδικά γιά $\alpha = 1$ ἰσχύει: $\alpha = 1 \wedge x \neq y \Longrightarrow \alpha^x = \alpha^y = 1$.

Ὥστε: γιά $\alpha > 0$ ἡ δύναμη α^x εἶναι τελείως ὁρισμένη στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης x εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ρητός ἀριθμός.

Γεννιέται ὅμως τό ἐρώτημα: τί ἐννοοῦμε ὅταν γράφουμε $\alpha^{\sqrt{2}}$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$ καί πιό γενικά α^x, στήν περίπτωση πού ὁ ἐκθέτης x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός; Δηλαδή πῶς ὁρίζεται γενικά ἡ ἔννοια: *«δύναμη μέ βάση (ὁποιοδήποτε) θετικό ἀριθμό α καί ἐκθέτη (ὁποιοδήποτε) πραγματικό ἀριθμό x»*; Θά ὁρίσουμε ἀκριβῶς τώρα τήν ἔννοια αὐτή.

Ἀποδεικνύεται * στά Μαθηματικά ἡ ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.—Γιά κάθε $\alpha > 0$ καί κάθε ἀκολουθία ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\rho_\nu \to x$ **, $x \in \mathbf{R}$, ἡ ἀκολουθία α^{ρ_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει σ' ἕνα θετικό ἀριθμό, ὁ ὁποῖος δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκολουθία (ρ_ν) (ἀρκεῖ μόνο $\rho_\nu \to x$).

Δίνεται τώρα ὁ ἑπόμενος ὁρισμός:

Ὁρισμός. *Ὁ πραγματικός ἀριθμός, ἀκριβέστερα ὁ θετικός ἀριθμός, πού ὁρί-*

---

* Ἡ ἀπόδειξη θά δοθεῖ στήν ἄλλη τάξη.

** Ὑπάρχει τέτοια ἀκολουθία, γιατί ἀποδεικνύεται ὅτι: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha < \beta\ \exists\ \rho \in \mathbf{Q}$: $\alpha < \rho < \beta$.

ζεται μονοσήμαντα, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, *καί πού εἶναι ἡ ὁριακή τιμή τῆς ἀκολουθίας* (α^{ρ_ν}), *ὅπου* (ϱ_ν) *ὁποιαδήποτε ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ* $\varrho_\nu \to x$, *ὀνομάζεται:* **δύναμη μέ βάση τό θετικό ἀριθμό α καί ἐκθέτη τόν πραγματικό ἀριθμό x** *καί συμβολίζεται μέ:* $\boldsymbol{\alpha^x}$.

Ὥστε:

$$\boxed{\alpha^x \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \lim \alpha^{\rho_\nu}}$$

Εἶναι φανερό πώς ὁ πιό πάνω ὁρισμός περικλείει τό γνωστό σέ μᾶς ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ὁρισμό τῆς δυνάμεως μέ ρητό ἐκθέτη. Ἔτσι ἐξάλλου δικαιολογεῖται καί ὁ συμβολισμός τοῦ $\lim \alpha^{\rho_\nu}$ μέ τό α^x, ἐπειδή ἄν $x \in \mathbf{Q}$, τότε μία ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνουσα στό x εἶναι ἡ σταθερή ἀκολουθία $r_\nu = x$, γιά κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ὅμως ἔχουμε:

$$\alpha^{r_\nu} = \alpha^x \to \alpha^x.$$

Σύμφωνα ὅμως μέ τήν προηγούμενη πρόταση γιά κάθε ἀκολουθία ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\rho_\nu \to x$ ἡ ἀκολουθία α^{ρ_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει σ' ἕνα θετικό ἀριθμό πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκολουθία (ρ_ν) καί ἑπομένως πάλι θά ἰσχύει:

$$\alpha^{\rho_\nu} \to \alpha^x.$$

Συνοψίζοντας λοιπόν τά προηγούμενα συμφωνοῦμε ὅτι:

$$\alpha^x = \lim \alpha^{\rho_\nu}$$

ὅπου ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν μέ $\rho_\nu \to x$, ἀνεξάρτητα ἄν ὁ x εἶναι ρητός ἤ ἄρρητος ἀριθμός, δηλαδή γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Οἱ γνωστές ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ ρητούς ἐκθέτες, τίς ὁποῖες ἀναφέραμε στήν ἀρχή αὐτῆς τῆς παραγράφου, ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύουν καί στήν περίπτωση δυνάμεων μέ ἐκθέτες ἄρρητους ἀριθμούς καί συνεπῶς μέ ἐκθέτες (ὁποιουσδήποτε) πραγματικούς ἀριθμούς.

Σημείωση. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως α^x μέ $\alpha > 0$ καί $x \in \mathbf{R}$ προκύπτει ὅτι ὁρίζεται μία συνάρτηση $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ μέ τύπο: $\mathbf{f(x) = \alpha^x}$.

Ἡ συνάρτηση αὐτή ὀνομάζεται **ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τό α**.

Εἰδικά τήν ἐκθετική συνάρτηση πού ἔχει βάση τόν ἀριθμό $e \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \lim\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = 2{,}7182\ldots$,

δηλ. τή συνάρτηση f μέ τύπο: $\mathbf{f(x) = e^x}$, τή λέμε ἁπλῶς **ἐκθετική συνάρτηση.**

§ 58. Ἡ ἔννοια τοῦ λογαρίθμου θετικοῦ ἀριθμοῦ.— Εἴδαμε στήν προηγούμενη παράγραφο ὅτι: ἄν $\alpha > 0$, τότε $\alpha^x > 0$ γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$. Δηλαδή ἡ δύναμη α^x ἰσοῦται μέ θετικό ἀριθμό, ὅταν $\alpha > 0$, ἀνεξάρτητα ἀπό τό ἄν ὁ ἐκθέτης x εἶναι θετικός, ἀρνητικός ἤ μηδέν. Εἰδικά γιά $\alpha = 1$ οἱ δυνάμεις 1^x εἶναι ἴσες μέ 1 γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Οἱ δυνάμεις ὅμως α^x, ὅπου $0 < \alpha \neq 1$ καί $x \in \mathbf{R}$ ὄχι μόνο εἶναι θετικές γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$, ἀλλά ὅταν τό x μεταβάλλεται στό διάστημα : $-\infty < x < +\infty$, τότε ἡ συνάρτηση f μέ τύπο $f(x) = \alpha^x$ παίρνει ὡς τιμές ὅλους τούς θετικούς ἀριθμούς. Ἀκριβέστερα, ἀποδεικνύεται στά Μαθηματικά ἡ ἑξῆς πρόταση:

Πρόταση.— Γιά κάθε θετικό πραγματικό ἀριθμό α διάφορο τῆς μονάδας, δηλ. γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μέ $0 < \alpha \neq 1$, **καί κάθε πραγματικό ἀριθμό $\theta > 0$ ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας πραγματικός ἀριθμός x** (ρητός ἤ ἄρρητος) **μέ τήν ἰδιότητα:**

$$\alpha^x = \theta \tag{1}$$

Ἀπό τήν παραπάνω πρόταση ὁδηγούμαστε τώρα στό νά δώσουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Ὁρισμός. *Τό μοναδικό,* σύμφωνα μέ τήν παραπάνω πρόταση, *πραγματικό ἀριθμό x, γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση:*

$$\alpha^x = \theta \ , \ \text{ὅπου } \alpha > 0, \ \alpha \neq 1 \text{ καί } \theta > 0$$

τόν ὀνομάζουμε **λογάριθμο τοῦ θ ὡς πρός βάση α** *καί τόν παριστάνουμε μέ* **$\lambda o\gamma_\alpha \theta$.**

Ὥστε:

$$x = \lambda o\gamma_\alpha \theta \tag{2}$$

Εἰδικά γιά $\alpha = 10$ γράφουμε: $\lambda o\gamma \theta$ ἀντί $\lambda o\gamma_{10}\theta$ καί τόν ὀνομάζουμε **δεκαδικό λογάριθμο.**

Ἄμεση συνέπεια τοῦ πιό πάνω ὁρισμοῦ εἶναι ἡ (λογική) ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta} \tag{3}$$

Ἀπό τήν (3) συνάγεται τώρα ὁ ἑξῆς κανόνας:

Ἄν ξέρουμε τό λογάριθμο ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ, τότε ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ἴσος μέ δύναμη πού ἔχει ὡς βάση τή βάση α τῶν λογαρίθμων καί ἐκθέτη τό λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Ἐπειδή $x = \lambda o\gamma_\alpha \theta$, ἡ σχέση (1) γράφεται: $\boxed{\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} = \theta}$ καί λέγεται **βασική λογαριθμική ταυτότητα.**

Ἔτσι ἔχουμε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta \iff \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} = \theta} \quad \begin{matrix} (0 < \alpha \neq 1) \\ (\theta > 0). \end{matrix}$$

Παραδείγματα:

1) $\lambda o\gamma_{10} 100 = 2$, ἐπειδή $10^2 = 100$	5) $\lambda o\gamma_{10} 0{,}001 = -3$, ἐπειδή $10^{-3} = 0{,}001$
2) $\lambda o\gamma_2 8 = 3$, » $2^3 = 8$	6) $\lambda o\gamma_{1/2}\left(\frac{1}{16}\right) = 4$, » $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
3) $\lambda o\gamma_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$ » $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$	7) $\lambda o\gamma_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$, » $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$
4) $\lambda o\gamma_{1/3} 9 = -2$, » $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	8) $\lambda o\gamma_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, » $(3)^{1/2} = \sqrt{3}$.

Γενική παρατήρηση. Παντοῦ, στά ἑπόμενα, θά ὑπολογίζουμε **μόνο** λογαρίθμους θετικῶν ἀριθμῶν. Λογαρίθμους ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἀκριβέστερα μή θετικῶν ἀριθμῶν οὔτε ὁρίζουμε οὔτε μεταχειριζόμαστε. Ὕστερα ἀπό αὐτά ὁ $\lambda o\gamma_\alpha x$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, τότε καί μόνο τότε, ἄν:

$$x > 0 \quad \text{καί} \quad 0 < \alpha \neq 1$$

Ἔτσι, π.χ., ὁ $λογ_x(3x-2)$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ἄν: $3x-2>0$ καί $0<x\neq 1$. Δηλαδή ἄν : $x\in\left(\frac{2}{3}, 1\right)\cup(1,+\infty)$.

§ 59. Βάση λογαρίθμων – Λογαριθμικά συστήματα.— Ὁ πραγματικός ἀριθμός α, πού εἶναι θετικός καί διάφορος τῆς μονάδας, δηλ. $0<α\neq 1$, λέγεται **βάση** τῶν λογαρίθμων. Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ λογαρίθμου θετικοῦ ἀριθμοῦ προκύπτει ὅτι μποροῦμε νά σχηματίσουμε ἄπειρα συστήματα λογαρίθμων, ἀφοῦ ὡς βάση μποροῦμε νά λάβουμε τόν ὁποιοδήποτε θετικό πραγματικό ἀριθμό πού εἶναι διάφορος τῆς μονάδας. Στά Μαθηματικά κυρίως χρησιμοποιοῦμε τά ἑξῆς δύο λογαριθμικά συστήματα:

1ο: Τό δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα. Σ' αὐτό παίρνουμε ὡς βάση α τόν ἀριθμό 10. Ὁ λογάριθμος ἑνός (θετικοῦ) ἀριθμοῦ θ στό σύστημα αὐτό ὀνομάζεται, ὅπως εἴπαμε καί πιό πάνω, **δεκαδικός λογάριθμος** καί συμβολίζεται ἁπλῶς μέ: λογθ ἀντί $λογ_{10}θ$. Ἔτσι ἔχουμε: $\mathbf{λογθ = x \iff 10^x = θ}$.

Οἱ δεκαδικοί λογάριθμοι λέγονται καί *«κοινοί λογάριθμοι»* καί χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα στά στοιχειώδη μαθηματικά γιά πρακτικούς κυρίως σκοπούς.

2ο: Τό Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα. Σ' αὐτό τό σύστημα παίρνουμε ὡς βάση τόν ἀριθμό $e = 2{,}7182\ldots$, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ὡς τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας $\left(1+\frac{1}{ν}\right)^ν$, $ν = 1, 2, \ldots$ Ἡ ἀκολουθία αὐτή ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι αὔξουσα (βλ. ἄσκ. 6) καί ἄνω φραγμένη, ἑπομένως (§ 28) συγκλίνει στό **R**. Ὀνομάζουμε $e = \lim\left(1+\frac{1}{ν}\right)^ν$. Ὁ ἀριθμός e παίζει σπουδαῖο ρόλο στήν Ἀνάλυση καί γενικά στά Μαθηματικά, ἀνήκει στό διάστημα: (2, 3), δηλ. $2<e<3$, δέν εἶναι λοιπόν ὁ ἀριθμός e ἀκέραιος, δέν εἶναι ὅμως οὔτε καί ρητός, ἀκόμη οὔτε ἀλγεβρικός ἀριθμός· εἶναι ἕνας ὑπερβατικός ἀριθμός. Μία προσέγγιση τοῦ ἀριθμοῦ e μέ 20 δεκαδικά ψηφία εἶναι: $e \simeq 2{,}71828182845904523536$. Ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ θ στό σύστημα αὐτό λέγεται **νεπέρειος λογάριθμος*** τοῦ θ καί συμβολίζεται μέ log θ ἤ lnθ (ἀντί: $λογ_eθ$). Ἔτσι ἔχουμε:

$$\log θ = x \iff e^x = θ. \quad (\ln θ = x \iff e^x = θ).$$

Οἱ νεπέρειοι λογάριθμοι λέγονται καί *«φυσικοί λογάριθμοι»* καί συναντῶνται κυρίως στά Ἀνώτερα Μαθηματικά.

* Ἀξιοσημείωτες παρατηρήσεις. **1)** Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ $λογ_αx$ πού ὁρίζεται γιά κάθε $x>0$ προκύπτει ὅτι γιά κάθε $0<α\neq 1$ ὁρίζεται μία συνάρτηση $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ μέ τύπο: $f(x) = λογ_α(x) \equiv λογ_αx$. Δηλαδή ὁρίζεται ἡ συνάρτηση:

$$f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}: x \to f(x) = λογ_αx \qquad (0<α\neq 1)$$

* Πρός τιμή τοῦ Ἄγγλου Μαθηματικοῦ John Napier (1550 - 1617) πρώτου ἐπινοητῆ τῶν λογαρίθμων. Πρῶτος ὁ Napier ἔλαβε ὡς βάση τόν ἀριθμό $e = 2{,}7182\ldots$ Ὁ συμβολισμός «ln» προέρχεται ἀπό τό ἀρχικό γράμμα (l) τῆς λέξεως: logarithm καί τό μικρό γράμμα (n) τοῦ ἀρχικοῦ τῆς λέξεως Napier.

Αὐτή ἡ συνάρτηση ὀνομάζεται **λογαριθμική συνάρτηση μέ βάση α.**

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτῆς τῆς συναρτήσεως προκύπτει ἀμέσως ὅτι:

$$y = \lambda o\gamma_\alpha x \iff \alpha^y = x \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

καί συνεπῶς:

$$y = \log x \iff e^y = x \qquad (x \in \mathbf{R}^+)$$

2) Σύμφωνα μέ τή βασική λογαριθμική ταυτότητα ἰσχύει:

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha x} = x \qquad \forall\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

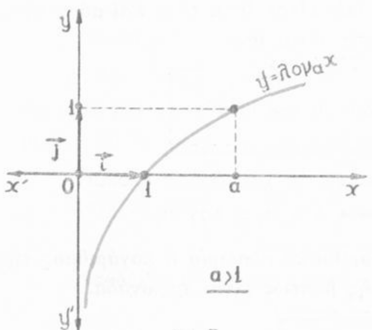
καί εἰδικά γιά $\alpha = e$ ἰσχύει:

$$e^{\log x} = x$$

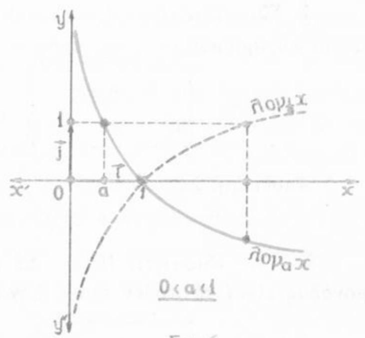
ὁπότε συνάγουμε ὅτι: $\alpha^x = (e^{\log \alpha})^x = e^{x \log \alpha}$, δηλαδή $\boxed{\alpha^x = e^{x \log \alpha}}$

3) Ἡ λογαριθμική συνάρτηση, πού ὅπως εἴδαμε πιό πάνω ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $(0, +\infty)$ καί πεδίο τιμῶν τό $\mathbf{R}$, εἶναι, ὅπως θά μάθουμε στήν ἄλλη τάξη, *«ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $x = \alpha^y$»*.

Σ' ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων ἡ γραφική παράσταση τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως: $y = \lambda o\gamma_\alpha x$ δίνεται, μέ πρόχειρη σχεδίαση, ἀπό τά ἀμέσως ἑπόμενα σχήματα:



Σχ. 5



Σχ. 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. **123.** Νά προσδιορίσετε τόν x ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

1) $\lambda o\gamma_4 x = 3$, 2) $\lambda o\gamma\, x = -3$, 3) $\lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$, 4) $\lambda o\gamma_{\sqrt{3}}(9\sqrt{3}) = x$,

5) $\lambda o\gamma_{1/9} \frac{27}{8} = x$, 6) $\lambda o\gamma_8 x = -\frac{7}{3}$, 7) $\lambda o\gamma_{2\alpha} \sqrt{2\alpha} = x$, 8) $\lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) = x$.

124. Νά βρεῖτε τήν ἄγνωστη βάση $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 1$, ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

1) $\lambda o\gamma_x 25 = 2$, 2) $\lambda o\gamma_x 16 = \frac{2}{3}$, 3) $\lambda o\gamma_x 5 = \frac{1}{3}$, 4) $\lambda o\gamma_x\left(\frac{81}{16}\right) = 4$.

125. Νά ὑπολογίσετε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν:

$$81, \quad 64, \quad \frac{1}{32}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{1}{125}, \quad 27, \quad 4\sqrt{2}, \quad 1000$$

μέ βάση ἀντιστοίχως τούς ἀριθμούς:

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 0{,}01.$$

126. Γιά ποιές τιμές τοῦ $x \in \mathbf{R}$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καθεμιά ἀπό τίς ἑπόμενες ἐκφράσεις:

1) $\lambda o \gamma(1-|x|)$, 2) $\lambda o \gamma_x(3-2x)$, 3) $\lambda o \gamma_{2x}(x^2-x+1)$.

★ Ὁμάδα Β΄. **127.** Ἂν $\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \neq 1$ καί ὀνομάσουμε: $x = \lambda o \gamma_{\sqrt{\alpha}} \alpha$, $y = \lambda o \gamma_\alpha \alpha^2$, $z = \lambda o \gamma_{\alpha^2} \alpha^4$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει: $xyz = x + y + z + 2$.

128. Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καί $x, y \in \mathbf{R}$ ἰσχύει:

1) $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$, **2)** $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$, **3)** $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$

Ὑπόδειξη. Ἔστω ὅτι εἶναι (ρ_ν), (r_ν) δύο ὁποιεσδήποτε ἀκολουθίες μέ ρητούς ὅρους τέτοιες, ὥστε: $\rho_\nu \to x$, $r_\nu \to y$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν πρόταση τῆς § 57, θά ἔχουμε: $\alpha^{\rho_\nu} \to \alpha^x$ καί $\alpha^{r_\nu} \to \alpha^y$, ὁπότε κτλ.

129. Ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί ὀνομάσουμε: $x = \lambda o \gamma_\alpha(\beta\gamma)$, $y = \lambda o \gamma_\beta(\gamma\alpha)$, $z = \lambda o \gamma_\gamma(\alpha\beta)$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $x + y + z + 2 = xyz$ καί $\alpha^{x-2} \cdot \beta^{y-2} \cdot \gamma^{z-2} = 1$.

130. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ λογ3 εἶναι ἄρρητος (= ἀσύμμετρος) ἀριθμός.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ *

§ 60. Ἰδιότητα Ι.— **Δύο θετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, τότε καί μόνο τότε, ἄν οἱ λογάριθμοί τους, ὡς πρός τήν ἴδια βάση, εἶναι ἴσοι.**

Δηλαδή:

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\lambda o \gamma_\alpha \theta_1 = \lambda o \gamma_\alpha \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τή βασική λογαριθμική ταυτότητα ἔχουμε:

$$\theta_1 = \theta_2 \iff \alpha^{\lambda o \gamma_\alpha \theta_1} = \alpha^{\lambda o \gamma_\alpha \theta_2} \iff \lambda o \gamma_\alpha \theta_1 = \lambda o \gamma_\alpha \theta_2.$$

§ 61. Ἰδιότητα ΙΙ. — **Σέ κάθε λογαριθμικό σύστημα ὁ λογάριθμος τῆς μονάδας εἶναι τό μηδέν καί ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάδα.**

Δηλαδή: $\boxed{\lambda o \gamma_\alpha 1 = 0}$ καί $\boxed{\lambda o \gamma_\alpha \alpha = 1}$ $\forall\ \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$.

Ἀπόδειξη. Ὅπως εἴδαμε παραπάνω (§ 58) ἰσχύει: $\lambda o \gamma_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ὁπότε:} & \lambda o \gamma_\alpha 1 = x \iff \alpha^x = 1 \iff x = 0 \\ \text{καί} & \lambda o \gamma_\alpha \alpha = y \iff \alpha^y = \alpha \iff y = 1 \end{array}\right\} \ \forall\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

§ 62. Ἰδιότητα ΙΙΙ. — **Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ὡς πρός βάση α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν** (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α).

Δηλαδή:

$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\lambda o \gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o \gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o \gamma_\alpha \theta_2$

Ἀπόδειξη. Ἂς ὀνομάσουμε $x = \lambda o \gamma_\alpha \theta_1$ καί $y = \lambda o \gamma_\alpha \theta_2$. Τότε $\alpha^x = \theta_1$ καί $\alpha^y = \theta_2$,

---

* ἀκριβέστερα ἰδιότητες τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως $\lambda o \gamma_\alpha$ $(0 < \alpha \neq 1)$.

ὁπότε: $\alpha^{x+y} = \alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \Longleftrightarrow \lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$.

Σημείωση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἀποδεικνύεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1\theta_2)} = \theta_1 \cdot \theta_2 = \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta_1} \cdot \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta_2} = \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha\theta_2} \Rightarrow \lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha\theta_2.$$

Παρατήρηση. Ἄν x, y εἶναι **ὁμόσημοι** πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha(xy) = \lambda o\gamma_\alpha |x| + \lambda o\gamma_\alpha |y| \qquad \forall\ \alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

Πράγματι, τότε ἔχουμε: $xy > 0 \Rightarrow xy = |xy| = |x| \cdot |y|$. Ἄρα ...

Πόρισμα.—Ἄν $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_\nu$ ($\nu \geq 2$) εἶναι θετικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_\nu) = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 + \cdots + \lambda o\gamma_\alpha\theta_\nu}$$

Γιά συντομία γράφουμε:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \left(\prod_{k=1}^{\nu} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda o\gamma_\alpha\theta_k}$$

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται εὔκολα μέ τή μέθοδο τῆς τέλειας ἐπαγωγῆς, ἀφοῦ εἶναι γνωστό ὅτι γιά $\nu = 2$ ἰσχύει, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα.

Ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

§ 63. Ἰδιότητα IV.—**Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ὡς πρός βάση α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται μέ τό λογάριθμο τοῦ διαιρετέου μεῖον τό λογάριθμο τοῦ διαιρέτη** (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α).

Δηλαδή:	$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in R^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\lambda o\gamma_\alpha \left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 = \lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \cdot \theta_2\right) = \lambda o\gamma_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} + \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$$

καί συνεπῶς:

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta_2.$$

Παρατήρηση. Ἄν x, y εἶναι **ὁμόσημοι** πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{x}{y} = \lambda o\gamma_\alpha |x| - \lambda o\gamma_\alpha |y| \qquad \text{(γιατί;)}$$

Πόρισμα.—Οἱ ἀντίστροφοι θετικοί ἀριθμοί ἔχουν ἀντίθετους λογαρίθμους.

Πράγματι· ἀπό τίς ἰδιότητες IV καί II ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{1}{\theta}\right) = \lambda o\gamma_\alpha 1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta = 0 - \lambda o\gamma_\alpha\theta = -\lambda o\gamma_\alpha\theta.$$

Ἀξιόλογη παρατήρηση. Πρέπει νά ἔχουμε πάντοτε ὑπόψη μας ὅτι:

$$\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$$

$$\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1-\theta_2)\neq\lambda o\gamma_\alpha\theta_1-\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$$
$$\lambda o\gamma_\alpha\theta_1\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta_2\neq\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1+\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$$
$$\lambda o\gamma_\alpha\theta_1:\lambda o\gamma_\alpha\theta_2\neq\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1-\lambda o\gamma_\alpha\theta_2.$$

§ 64. Ἰδιότητα V.—**Ὁ λογάριθμος ὁποιασδήποτε δυνάμεως ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρός βάση α ($0<\alpha\neq1$) ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τοῦ ἐκθέτη τῆς δυνάμεως ἐπί τό λογάριθμο τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως** (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α).

Δηλαδή:

$\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+,\ \beta\in\mathbf{R}$ $0<\alpha\neq1$	$\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta$

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε $x=\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta$ ($\beta\in\mathbf{R}$) καί $y=\lambda o\gamma_\alpha\theta$. Τότε ἔχουμε: $\alpha^x=\theta^\beta$ (1) καί $\alpha^y=\theta$ (2). Ἡ (1), μέ βάση τή (2), γράφεται: $\alpha^x=(\alpha^y)^\beta$ καί ἐπειδή, ὅπως εἴπαμε στήν ἀρχή αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου, οἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ πραγματικούς ἐκθέτες εἶναι ἀνάλογες τῶν ἀντίστοιχων ἰδιοτήτων μέ ἐκθέτες ρητούς ἀριθμούς, θά ἔχουμε: $\alpha^x=\alpha^{\beta y}$. Ἡ τελευταία ἰσότητα, ἐπειδή $0<\alpha\neq1$, ἰσοδυναμεῖ μέ τήν: $x=\beta y$, δηλαδή:

$$\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta\quad\forall\quad\beta\in\mathbf{R}.$$

Σημείωση. Ἡ παραπάνω ἰδιότητα ἀποδεικνύεται πιό σύντομα ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta}=\theta^\beta=\left[\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta}\right]^\beta=\alpha^{\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta}\implies\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta,\qquad(0<\alpha\neq1)$$

Παρατήρηση. Ἄν x εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός ($x\neq0$) καί k ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, τότε ἰσχύει:

$$\lambda o\gamma_\alpha x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma_\alpha|x|\qquad(\text{γιατί;})$$

Προσέξτε! θά εἶναι **σφάλμα** νά γράψουμε: $\lambda o\gamma_\alpha x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma_\alpha x$, πρῶτα γιατί γιά $x<0$ ὁ λογάριθμος τοῦ β' μέρους αὐτῆς τῆς ἰσότητας δέν ὁρίζεται καί ἔπειτα γιατί κατά τή λύση *«λογαριθμικῶν»* ἐξισώσεων, γιά τίς ὁποῖες κάνουμε λόγο παρακάτω, βρίσκουμε ἐλλιπεῖς λύσεις, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τό ἑπόμενο παράδειγμα:

Νά βρεῖτε τά $x\in\mathbf{R}-\{0\}$ ὥστε: $\lambda o\gamma x^2=2$ **(1)**

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ: $2\cdot\lambda o\gamma|x|=2\Longleftrightarrow\lambda o\gamma|x|=1\Longleftrightarrow|x|=10\Longleftrightarrow x=\pm10$.
Ἄν ὅμως γράψουμε (ἐσφαλμένα βέβαια) τήν (1) ὡς: $2\lambda o\gamma x=2\Longleftrightarrow\lambda o\gamma x=1\Longleftrightarrow x=10$, τότε χάνουμε τή ρίζα $x=-10$.

Εἰδικές περιπτώσεις τῆς ἰδιότητας V εἶναι τά ἑπόμενα πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.— Ὁ λογάριθμος ὁποιασδήποτε ρίζας μέ θετικό ὑπόρριζο βρίσκεται ἄν διαιρέσουμε τό λογάριθμο τοῦ ὑπορρίζου μέ τό δείκτη τῆς ρίζας (οἱ λογάριθμοι λαμβάνονται ὡς πρός τήν ἴδια βάση α, $0<\alpha\neq1$).

Δηλαδή:

$\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+,\ \nu\in\mathbf{N}$ $0<\alpha\neq1$	$\lambda o\gamma_\alpha\sqrt[\nu]{\theta}=\frac{1}{\nu}\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta$

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας, ἀρκεῖ νά παρατηρήσουμε ὅτι: $λογ_α \sqrt[ν]{θ} = λογ_α θ^{\frac{1}{ν}} = \frac{1}{ν} \cdot λογ_α θ \left(δηλαδή: β = \frac{1}{ν}, ν \in N\right)$

Πόρισμα 2ο.—Γιά κάθε $α \in R^+ - \{1\}$ καί $x \in R$ ἰσχύει: $λογ_α α^x = x$.

Πράγματι, ἔχουμε: $λογ_α α^x = x \cdot λογ_α α = x \cdot 1 = x$.

Ἄμεση συνέπεια τῆς προηγούμενης ἰδιότητας εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

§ 65. **Ἰδιότητα VI.** *(ἀλλαγή βάσεως λογαρίθμων)*.—**Ἄν οἱ ἀριθμοί α, β, θ εἶναι θετικοί καί οἱ α καί β εἶναι διάφοροι τοῦ 1, τότε ἰσχύει:**

$$\boxed{λογ_β θ = \frac{λογ_α θ}{λογ_α β}} \quad \textit{(τύπος ἀλλαγῆς βάσεως)} \qquad (τ)$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή βασική λογαριθμική ταυτότητα ἔχουμε: $β^{λογ_β θ} = θ$ (1)
Ἄν τώρα πάρουμε τούς λογαρίθμους ὡς πρός βάση α καί τῶν δύο μελῶν τῆς (1), σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα I, θά ἔχουμε: $λογ_α(β^{λογ_β θ}) = λογ_α θ$ καί ἄν λάβουμε ὑπόψη καί τήν προηγούμενη ἰδιότητα βρίσκουμε:

$$λογ_β θ \cdot λογ_α β = λογ_α θ, \text{ ὁπότε: } λογ_β θ = \frac{λογ_α θ}{λογ_α β} \quad (\text{ἀφοῦ } λογ_α β \neq 0).$$

Εἰδικές περιπτώσεις τῆς παραπάνω ἰδιότητας εἶναι τά πορίσματα:

Πόρισμα 1ο.—Γιά κάθε $α, β \in R^+ - \{1\}$ ἰσχύει: $\boxed{λογ_α β \times λογ_β α = 1}$

Πράγματι, ἀπό τόν τύπο ἀλλαγῆς βάσεως γιά $θ = α$ βρίσκουμε:

$$\boxed{λογ_β α = \frac{λαγ_α α}{λογ_α β} = \frac{1}{λογ_α β}} \quad (1) \quad \text{καί συνεπῶς: } λογ_α β \cdot λογ_β α = 1.$$

Παρατήρηση. Ἔχοντας ὑπόψη τή σχέση (1) τοῦ παραπάνω πορίσματος, ὁ τύπος (τ) γράφεται:

$$\boxed{λογ_β θ = λογ_β α \cdot λογ_α θ} \qquad (τ')$$

Ὁ ἀριθμός $M = λογ_β α$ ἐπί τόν ὁποῖο ἄν πολλαπλασιαστεῖ ὁ $λογ_α θ$ μᾶς δίνει τό λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρός τή *«νέα»* βάση β ὀνομάζεται: **σταθερά τῆς ἀλλαγῆς βάσεως** ἤ **πολλαπλασιαστής** τοῦ συστήματος βάσεως α ὡς πρός τό σύστημα βάσεως β.

Ὁ τύπος (τ') γιά $β = 10$ καί $α = e$ (e: βάση τῶν νεπέρειων λογαρίθμων) γράφεται:

$λογ_{10} θ = λογ_{10} e \cdot λογ_e θ$, ἤ ἀκριβέστερα: $\boxed{λογθ = λογe \cdot \log θ}$ (1)

Ἡ τελευταία ἰσότητα μᾶς δίνει τή **σχέση μεταξύ δεκαδικῶν καί νεπέρειων λογαρίθμων.** Ἔτσι ἔχουμε, σύμφωνα καί μέ τό προηγούμενο πόρισμα:

$$λογθ = \frac{1}{\log 10} \cdot \log θ \quad \text{καί} \quad \log θ = \frac{1}{λογe} \cdot λογθ \qquad (2)$$

Ἡ σταθερά τῆς ἀλλαγῆς βάσεως εἶναι: $M = λογe = λογ2{,}7182\cdots = 0{,}43429\cdots$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη ἰσότητα τῆς (2) ἔχουμε:

$$\log θ = \frac{1}{M} \cdot λογθ \simeq \frac{1}{0{,}43429} \cdot λογθ \simeq 2{,}30258 \cdot λογθ$$

Ὥστε: γιά κάθε $\theta > 0$ ἰσχύει:

$\boxed{\log\theta \simeq 2{,}30258 \cdot \lambda o\gamma\theta}$ καί $\boxed{\lambda o\gamma\theta \simeq 0{,}43429 \cdot \log\theta}$

Ἀπό τόν πρῶτο τύπο βρίσκουμε τό νεπέρειο λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ $\theta > 0$, ἄν ξέρουμε τό δεκαδικό του λογάριθμο καί ἀπό τό δεύτερο τύπο βρίσκουμε τό δεκαδικό λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ, ἄν ξέρουμε τό νεπέρειο λογάριθμο αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐφαρμογή: Ἄν $\lambda o\gamma 3 = 0{,}47712$, τότε $\log 3 \simeq 2{,}30258 \cdot 0{,}47712 = 1{,}09861$.

Πόρισμα. 2ο.— Γιά κάθε $\alpha, \beta \in R^+$, $\alpha \neq 1$ καί $\rho \in R-\{0\}$ ἰσχύει:

$$\boxed{\lambda o\gamma_{\alpha^\rho}\beta = \frac{1}{\rho}\lambda o\gamma_\alpha\beta}$$

Πράγματι, ἀπό τόν τύπο ἀλλαγῆς βάσεως γιά $\theta=\beta$ καί $\beta = \alpha^\rho$ ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_{\alpha^\rho}\beta = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\beta}{\lambda o\gamma_\alpha\alpha^\rho} = \frac{\lambda o\gamma_\alpha\beta}{\rho \cdot \lambda o\gamma_\alpha\alpha} = \frac{1}{\rho}\cdot\lambda o\gamma_\alpha\beta.$$

Σημείωση. Γιά $\rho = -1$ ἔχουμε: $\lambda o\gamma_{1/\alpha}\beta = -\lambda o\gamma_\alpha\beta$, δηλαδή: $\lambda o\gamma_{\alpha^{-1}} = -\lambda o\gamma_\alpha$ (βλ. καί Σχ. 6).

Ἐφαρμογή. **Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν $\alpha, x \in R^+$ καί $\alpha \neq 1$, τότε ἰσχύει:**

$$\lambda o\gamma_\alpha x \cdot \lambda o\gamma_{\alpha^2} x = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma_\alpha x)^2.$$

Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τό παραπάνω πόρισμα ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha x \cdot \lambda o\gamma_{\alpha^2} x = \lambda o\gamma_\alpha x \cdot \frac{1}{2}\lambda o\gamma_\alpha x = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma_\alpha x)^2.$$

● Θά συμπληρώσουμε τά συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων. μέ μερικές ἀκόμη ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἰδιότητες πού ἔχουν οἱ λογάριθμοι.

Ἄς θεωρήσουμε τήν ἀνισότητα: $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$, ὅπου θ_1, θ_2 ἀριθμοί θετικοί καί $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Ἄς ὀνομάσουμε $x = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1$ καί $y = \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$. Τότε $\alpha^x = \theta_1$ καί $\alpha^y = \theta_2$. Συγκρίνοντας τώρα τίς δυνάμεις α^x καί α^y καί ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰδιότητα 8 τῆς § 57, ἡ ὁποία ἰσχύει καί γιά $x, y \in \mathbf{R}$, παρατηροῦμε ὅτι: γιά $\alpha > 1$ εἶναι $\alpha^x > \alpha^y$ (ἐπειδή $x > y$) καί γιά $0 < \alpha < 1$ εἶναι $\alpha^x < \alpha^y$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι ἡ ἀνισότητα $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2$ συνεπάγεται τήν $\theta_1 > \theta_2$ γιά $\alpha > 1$ καί τήν $\theta_1 < \theta_2$ γιά $0 < \alpha < 1$ καί ἀντιστρόφως.

Ἀπό τά παραπάνω ὁδηγούμαστε τώρα στό νά διατυπώσουμε τήν ἑξῆς ἰδιότητα:

§ 66. Ἰδιότητα VII.— Ἄν $\alpha, \theta_1, \theta_2 \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$, τότε ἰσχύει:

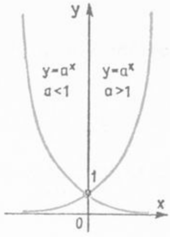
(i) Γιά $\alpha > 1$ εἶναι: $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1 > \theta_2$

(ii) Γιά $\alpha < 1$ εἶναι: $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1 < \theta_2$.

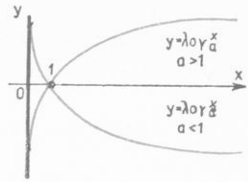
Σχόλιο. Ὅπως μάθαμε καί στήν Α' τάξη μία συνάρτηση $f: A \to \mathbf{R}$ μέ $A \subseteq \mathbf{R}$ πού διατηρεῖ τή φυσική διάταξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή γιά τήν ὁποία ἰσχύει: $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ τήν ὀνομάζουμε **γνησίως αὔξουσα**, ἐνῶ ἄν συμβαίνει:

$$(\forall\ x_1, x_2 \in A): \quad x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

τήν ὀνομάζουμε **γνησίως φθίνουσα**. Ἔτσι π.χ. **ἡ ἐκθετική συνάρτηση $y=\alpha^x$, $x \in R$ εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha > 1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0 < \alpha < 1$** (βλ. Σχ. 7).



Σχ. 7



Σχ. 8

Ἐπίσης ἔχοντας ὑπόψη τοὺς παραπάνω ὁρισμούς καί τήν προηγούμενη ἰδιότητα συμπεραίνουμε ὅτι: **ἡ λογαριθμική συνάρτηση $y = \lambda o\gamma_\alpha x$, $x \in R^+$ εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha > 1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0 < \alpha < 1$** (βλ. Σχ. 8).

Εἰδικά, ἐπειδή $e > 1$, ἡ συνάρτηση f μέ τύπο $f(x) = \log x$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Μία ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητας VII εἶναι τό ἑπόμενο πόρισμα:

Πόρισμα.—Ἄν $\alpha, \theta \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$, τότε ἰσχύει :

$$\text{(i) Γιά } \alpha > 1 \text{ εἶναι : } \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0, & \text{ἄν } \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0, & \text{ἄν } \theta < 1 \end{cases}$$

$$\text{(ii) Γιά } \alpha < 1 \text{ εἶναι : } \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0, & \text{ἄν } \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0, & \text{ἄν } \theta < 1. \end{cases}$$

Ἐφαρμογές στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

1η. **Ἄν $\lambda o\gamma 2 = 0{,}301$ καί $\lambda o\gamma 5 = 0{,}698$, νά βρεῖτε τό $\lambda o\gamma 250$ καί τό $\lambda o\gamma_2 250$.**

Λύση. α) $\lambda o\gamma 250 = \lambda o\gamma(2 \cdot 5^3) = \lambda o\gamma 2 + 3\lambda o\gamma 5 = 0{,}301 + 3 \cdot 0{,}698 = 0{,}301 + 2{,}094 =$
$= 2{,}395.$

$$\beta)\ \lambda o\gamma_2 250 = \frac{\lambda o\gamma 250}{\lambda o\gamma 2} = \frac{2{,}395}{0{,}301} = 7{,}956.$$

2η. **Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, νά ἐκφράσετε μέ μορφή ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος λογαρίθμων τό :**

$$\lambda o\gamma_3 \left(\frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right)$$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_3 \left(\frac{3\alpha^2}{5\beta \sqrt[4]{\gamma}} \right) = \lambda o\gamma_3(3\alpha^2) - \lambda o\gamma_3 (5\beta \cdot \sqrt[4]{\gamma}) = \lambda o\gamma_3 3 + \lambda o\gamma_3 \alpha^2 - (\lambda o\gamma_3 5 + \lambda o\gamma_3 \beta +$$

$$+ \lambda o\gamma_3 \sqrt[4]{\gamma}) = 1 + 2\lambda o\gamma_3 \alpha - \lambda o\gamma_3 5 - \lambda o\gamma_3 \beta - \frac{1}{4}\lambda o\gamma_3 \gamma.$$

3η. **Νά ἐφαρμόσετε ὅλες τίς δυνατές ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων στό :**

$$\lambda o\gamma \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}}, \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \in R^+$$

Λύση. Ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma \frac{3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}}{5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}} = \lambda o\gamma(3\alpha^3 \cdot \sqrt[4]{\beta^2 \cdot \gamma}) - \lambda o\gamma(5\beta^2 \cdot \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \beta \cdot \gamma^2}) =$$

$$= \left[\lambda o\gamma 3 + 3\lambda o\gamma\alpha + \frac{1}{4}(2\lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\gamma)\right] - \left[\lambda o\gamma 5 + 2\lambda o\gamma\beta + \frac{1}{3}(2\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta + \right.$$

$$\left. + 2\lambda o\gamma\gamma)\right] = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5 + \frac{7}{3}\lambda o\gamma\alpha - \frac{11}{6}\lambda o\gamma\beta - \frac{5}{12}\lambda o\gamma\gamma.$$

4η. **Ἄν $\lambda o\gamma_e i = -\frac{Rt}{L} + \lambda o\gamma_e I$, τότε $i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$.**

Λύση. Ἡ σχέση πού μᾶς δόθηκε γράφεται:

$$\lambda o\gamma_e i - \lambda o\gamma_e I = -\frac{Rt}{L} \quad ἤ \quad \lambda o\gamma_e \frac{i}{I} = -\frac{Rt}{L}.$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ λογαρίθμου ἔχουμε ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα:

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{I} \text{ καί συνεπῶς : } i = I \cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

5η. **Ἄν $\alpha > \beta > 0$ καί $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι:**

$$\lambda o\gamma \frac{\alpha - \beta}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta).$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta \Longrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \Longrightarrow \left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right)^2 = \alpha\beta \Longrightarrow \frac{\alpha-\beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta},$$

ἐπειδή $\alpha - \beta > 0$.

Τότε ὅμως θά ἔχουμε καί:

$$\lambda o\gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right) = \lambda o\gamma\sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta).$$

6η. **Νά ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:**

$$k = \frac{(\lambda o\gamma_2 5 + \lambda o\gamma_3 5) \cdot \lambda o\gamma_6 5}{\lambda o\gamma_2 5 \; \lambda o\gamma_3 5}.$$

Λύση. Σύμφωνα μέ τό πόρισμα 1 τῆς § 65 ἔχουμε:

$$k = \frac{\left(\frac{1}{\lambda o\gamma_5 2} + \frac{1}{\lambda o\gamma_5 3}\right) \cdot \frac{1}{\lambda o\gamma_5 6}}{\frac{1}{\lambda o\gamma_5 2 \cdot \lambda o\gamma_5 3}} = \frac{\lambda o\gamma_5 2 + \lambda o\gamma_5 3}{\lambda o\gamma_5 6} = \frac{\lambda o\gamma_5(2 \cdot 3)}{\lambda o\gamma_5 6} = 1.$$

7η. **Ἄν $\alpha, \beta \in R$, $\alpha\beta > 0$ καί $\alpha^3 + \beta^3 = 6\alpha\beta(\alpha + \beta)$, νά ἀποδείξετε ὅτι:**

$$\lambda o\gamma \frac{|\alpha + \beta|}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma|\alpha| + \lambda o\gamma|\beta|).$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή: $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ ἔχουμε:

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6\alpha\beta(\alpha + \beta) \Longrightarrow (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta.$$

Τότε ὅμως, σύμφωνα καί μέ τίς παρατηρήσεις τῶν παραγράφων 64 καί 62, θά ἔχουμε:

$2 \cdot \lambda o\gamma|\alpha + \beta| = \lambda o\gamma(9\alpha\beta) = \lambda o\gamma 9 + \lambda o\gamma(\alpha\beta) = \lambda o\gamma 3^2 + \lambda o\gamma|\alpha| + \lambda o\gamma|\beta|$, ὁπότε:

$$2\lambda o\gamma|\alpha + \beta| - 2\lambda o\gamma 3 = \lambda o\gamma|\alpha| + \lambda o\gamma|\beta| \Longrightarrow \lambda o\gamma|\alpha + \beta| - \lambda o\gamma 3 = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma|\alpha| + \lambda o\gamma|\beta|)$$

καί συνεπῶς:

$$\lambda o\gamma \frac{|\alpha+\beta|}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma|\alpha| + \lambda o\gamma|\beta|).$$

8η. **Νά ἀποδείξετε τήν ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:**

$$\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3+2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}-1).$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι: $3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2$.

Ἄρα: $\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3+2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16}\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1)^2 - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) =$

$$= \frac{7}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = -\frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) \qquad (1)$$

Ἀλλά, σύμφωνα μέ τό πόρισμα τῆς § 63, ἔχουμε:

$$-\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \lambda o\gamma\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right) = \lambda o\gamma(\sqrt{2}-1) \qquad (2)$$

Ἡ (1), λόγω τῆς (2), γίνεται:

$$\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3+2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}-1).$$

★§ 67. **Συλλογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ.—Συλλογάριθμο** *ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρός βάση α* (συμβολισμός: $\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\,\theta$), *ὀνομάζουμε τό λογάριθμο τοῦ ἀντίστροφου τοῦ θ*, δηλ. τοῦ $\frac{1}{\theta}$, *ὡς πρός τήν ἴδια βάση.*

Ὥστε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\,\theta \underset{\text{ορσ}}{=} \lambda o\gamma_\alpha \frac{1}{\theta}} \qquad (1)$$

Ἀλλά: $\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{1}{\theta}\right) = \lambda o\gamma_\alpha 1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta = 0 - \lambda o\gamma_\alpha\theta = -\lambda o\gamma_\alpha\theta.$

Ἄρα:

$$\boxed{\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\theta = \lambda o\gamma_\alpha \frac{1}{\theta} = -\lambda o\gamma_\alpha\,\theta} \qquad (2)$$

Ἡ εἰσαγωγή τῶν συλλογαρίθμων μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀντικαθιστοῦμε μία διαφορά λογαρίθμων μέ τό ἄθροισμά τους. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha\theta_2 = \lambda o\gamma_\alpha\theta_1 + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\theta_2.$$

Ἀπό τή (2) ἔχουμε ὅτι:

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha\theta + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma_\alpha\theta = 0} \qquad (3)$$

★ § 68. **Μερικές ἀξιοσημείωτες καί χρήσιμες ἐφαρμογές.** — Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά συμπληρώσουμε τά συμπεράσματα τῶν προηγούμενων παραγράφων μέ τίς παρακάτω ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες τῆς ἐκθετικῆς καί λογαριθμικῆς συναρτήσεως:

1η. **Ἄν θεωρηθεῖ γνωστό ὅτι:** $\lim\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^\nu = e^\alpha$ **γιά κάθε** $\alpha \in R$, **νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσχύει:**

(i). $e^{\alpha} \geqq 1+\alpha$ γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$

(ii). $1-\dfrac{1}{\alpha} \leqq \log\alpha \leqq \alpha-1$ γιά κάθε $\alpha>0$.

Ἀπόδειξη. (i) Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ ἰσχύει: $\dfrac{\alpha}{\nu} \rightarrow 0$, ὁπότε γιά $\varepsilon=1$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τέτοιος, ὥστε: $\left|\dfrac{\alpha}{\nu}\right|<1$, δηλαδή: $-1<\dfrac{\alpha}{\nu}<1$ γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$.

Ὥστε γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ **τελικά** ἰσχύει: $1+\dfrac{\alpha}{\nu}>0$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli ἔχουμε:

$$\left(1+\frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu} \geq 1+\nu \frac{\alpha}{\nu}=1+\alpha$$

καί συνεπῶς (πόρισμα 2ο, § 17): $\lim \left(1+\dfrac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu}=e^{\alpha} \geq 1+\alpha, \quad \forall \ \alpha \in \mathbf{R}$.

(ii) Ἔστω $\alpha>0$, τότε ὁρίζεται ὁ νεπέρειος λογάριθμος $\log\alpha$ καί ὅπως ξέρουμε (βλ. παρατήρηση 2, § 59) ἰσχύει: $e^{\log\alpha}=\alpha$. Ἡ ἀνισότητα $e^{\alpha} \geq 1+\alpha$ πού ἀποδείξαμε προηγουμένως ἰσχύει γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$, ἄρα θά ἰσχύει καί ἄν στή θέση τοῦ α θέσουμε τόν πραγματικό ἀριθμό $\log\alpha$, ὁπότε θά ἔχουμε: $e^{\log\alpha}=\alpha \geq 1+\log\alpha$. Ἄρα: $\log\alpha \leqq \alpha-1$ (1)

Ἀπό τήν (1), ἐπειδή γιά $\alpha>0$ εἶναι καί $\dfrac{1}{\alpha}>0$, λαμβάνουμε:

$$\log\frac{1}{\alpha} \leqq \frac{1}{\alpha}-1 \Longleftrightarrow -\log\alpha \leqq \frac{1}{\alpha}-1 \Longleftrightarrow \log\alpha \geq 1-\frac{1}{\alpha} \qquad (2)$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) τελικά ἔχουμε ὅτι:

$$\boxed{\forall\ \alpha>0} \ \boxed{1-\frac{1}{\alpha} \leqq \log\alpha \leqq \alpha-1} \qquad (3)$$

2η. **Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε ἀκολουθία (α_ν) θετικῶν ὅρων μέ $\alpha_\nu \rightarrow \alpha$, ὅπου $\alpha>0$, ἰσχύει:**

$$\log\alpha_\nu \rightarrow \log\alpha.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ἀνισότητα (3) τῆς προηγούμενης ἐφαρμογῆς ἔχουμε:

$$1-\frac{\alpha}{\alpha_\nu} \leqq \log\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \leqq \frac{\alpha_\nu}{\alpha}-1$$

Ἀλλά $\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha} \rightarrow 1$, $\dfrac{\alpha}{\alpha_\nu} \rightarrow 1$, ὁπότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα τῶν ἰσοσυγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν (§ 16), θά ἔχουμε: $\log\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha} \rightarrow 0$.

Ἀλλά: $\log\dfrac{\alpha_\nu}{\alpha}=\log\alpha_\nu-\log\alpha$. Ἄρα:

$$\log\frac{\alpha_\nu}{\alpha} \rightarrow 0 \Longleftrightarrow \log\alpha_\nu-\log\alpha \rightarrow 0 \Longleftrightarrow \log\alpha_\nu \rightarrow \log\alpha.$$

Ἀνακεφαλαίωση. Οἱ ὁρισμοί καί οἱ κυριότερες ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων πού ἀπορρέουν ἀπό τίς προηγούμενες παραγράφους συνοψίζονται στόν ἑπόμενο πίνακα:

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΒΑΣΗ $\alpha\ (0<\alpha\neq 1)$	ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ
α) ὁρισμός $\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:	**α΄) Ὁρισμός**: $\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:
$\lambda o\gamma_\alpha\theta = x \Longleftrightarrow \alpha^x=\theta$	$\lambda o\gamma\theta = x \Longleftrightarrow 10^x=\theta$
ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη συνάρτηση:	ὁρίζεται ἔτσι ἡ ἀκόλουθη συνάρτηση:
$\lambda o\gamma_\alpha : (0,+\infty)\to\mathbf{R}: x\to\lambda o\gamma_\alpha x$	$\lambda o\gamma : (0,+\infty)\to\mathbf{R}: x\to\lambda o\gamma x$.
ἡ ὁποία εἶναι γνησίως αὔξουσα γιά $\alpha>1$ καί γνησίως φθίνουσα γιά $0<\alpha<1$.	ἡ ὁποία εἶναι **πάντοτε** γνησίως αὔξουσα.
β) Ἰδιότητες: $\forall\ \theta, \theta_1, \theta_2\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:	**β΄) Ἰδιότητες**: $\forall\ \theta, \theta_1, \theta_2\in\mathbf{R}^+$ ἰσχύει:
1. $\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha\theta}=\theta$	1΄. $10^{\lambda o\gamma\theta}=\theta$
2. $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1=\lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1=\theta_2$	2΄. $\lambda o\gamma\theta_1=\lambda o\gamma\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1=\theta_2$
3. $\lambda o\gamma_\alpha 1=0,\quad \lambda o\gamma_\alpha\alpha=1$	3΄. $\lambda o\gamma 1=0,\quad \lambda o\gamma 10=1$
4. $\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1+\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$	4΄. $\lambda o\gamma(\theta_1\cdot\theta_2)=\lambda o\gamma\theta_1+\lambda o\gamma\theta_2$
5. $\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\lambda o\gamma_\alpha\theta_1-\lambda o\gamma_\alpha\theta_2$	5΄. $\lambda o\gamma\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\lambda o\gamma\theta_1-\lambda o\gamma\theta_2$
6. $\lambda o\gamma_\alpha\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma_\alpha\theta \qquad (\beta\in\mathbf{R})$	6΄. $\lambda o\gamma\theta^\beta=\beta\cdot\lambda o\gamma\theta \qquad (\beta\in\mathbf{R})$
7. $\lambda o\gamma_\alpha\sqrt[\nu]{\theta}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma_\alpha\theta \qquad (\nu\in\mathbf{N})$	7΄. $\lambda o\gamma\sqrt[\nu]{\theta}=\frac{1}{\nu}\lambda o\gamma\theta \qquad (\nu\in\mathbf{N})$
8. $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1>\lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1>\theta_2$ γιά $\alpha>1$ $\lambda o\gamma_\alpha\theta_1>\lambda o\gamma_\alpha\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1<\theta_2,\ 0<\alpha<1$	8΄. **Προσέξτε!** ἐπειδή $\alpha=10>1$ ἰσχύει: $\lambda o\gamma\theta_1>\lambda o\gamma\theta_2 \Longleftrightarrow \theta_1>\theta_2$
γ) Τύπος ἀλλαγῆς βάσεως:	**γ΄) Τύπος ἀλλαγῆς βάσεως**:
$\lambda o\gamma_\beta\theta=\frac{\lambda o\gamma_\alpha\theta}{\lambda o\gamma_\alpha\beta}$	$\lambda o\gamma_\beta\theta=\frac{\lambda o\gamma\theta}{\lambda o\gamma\beta}$
δ) Συνέπειες τῶν ἰδιοτήτων 4, 5, 6: Ἄν $xy>0$, τότε:	**δ΄) Συνέπειες τῶν ἰδιοτήτων 4΄, 5΄, 6΄**: Ἄν $xy>0$, τότε:
1. $\lambda o\gamma_\alpha(xy)=\lambda o\gamma_\alpha\lvert x\rvert+\lambda o\gamma_\alpha\lvert y\rvert$	1΄. $\lambda o\gamma(xy)=\lambda o\gamma\lvert x\rvert+\lambda o\gamma\lvert y\rvert$
2. $\lambda o\gamma_\alpha(x:y)=\lambda o\gamma_\alpha\lvert x\rvert-\lambda o\gamma_\alpha\lvert y\rvert$	2΄. $\lambda o\gamma(x:y)=\lambda o\gamma\lvert x\rvert-\lambda o\gamma\lvert y\rvert$
3. $\lambda o\gamma_\alpha x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma_\alpha\lvert x\rvert, \qquad (k\in\mathbf{Z})$	3΄. $\lambda o\gamma x^{2k}=2k\cdot\lambda o\gamma\lvert x\rvert \qquad (k\in\mathbf{Z})$.

Σημείωση. Εἰδικά γιά $\alpha=e=2,718\cdots>1$, ἡ πρώτη στήλη τοῦ παραπάνω πίνακα μᾶς δίνει τίς ἰδιότητες τῶν νεπέρειων λογαρίθμων. Ὁ νεπέρειος λογάριθμος τοῦ θ ($\theta>0$) συνδέεται μέ τό δεκαδικό λογάριθμο τοῦ θ μέ τή σχέση:

$$\log\theta \simeq 2{,}30258\cdot\lambda o\gamma\theta.$$

Ἐπίσης γιά τό νεπέρειο λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ $\theta>0$ ἰσχύει καί ὁ τύπος:

$$\boxed{1-\frac{1}{\theta}\leqq\log\theta\leqq\theta-1<\theta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ἀληθεῖς οἱ παρακάτω ἰσότητες:

α) $\lambda o\gamma 21 = \lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 7$, β) $\lambda o\gamma 2\frac{1}{3} = \lambda o\gamma 7 - \lambda o\gamma 3$, γ) $\lambda o\gamma 81 = 4\cdot\lambda o\gamma 3$,

δ) $\lambda o\gamma 3 + 2\cdot\lambda o\gamma 4 - \lambda o\gamma 12 = 2\lambda o\gamma 2$, ε) $3\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma 5 - \lambda o\gamma 4 = 1$,

στ) $\frac{1}{2}\lambda o\gamma 25 + \frac{1}{3}\lambda o\gamma 8 + \frac{1}{5}\lambda o\gamma 32 = 1 + \lambda o\gamma 2$.

132. Ἄν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ νά ἐφαρμόσετε ὅλες τίς δυνατές ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων στούς:

1) $\lambda o\gamma_3 3x\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}$, 2) $\lambda o\gamma\frac{x^3\sqrt{y}}{4\sqrt{x}\cdot y^3}$, 3) $\lambda o\gamma\frac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}$, 4) $\lambda o\gamma\frac{5x^3\sqrt[4]{y^2z}}{7y^2\cdot\sqrt{x^2yz^2}}$.

133. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha^{\lambda o\gamma\beta} = \beta^{\lambda o\gamma\alpha}$

134. Σέ ποιό λογαριθμικό σύστημα μέ βάση μεγαλύτερη ἀπό τό 1 ἰσχύει:

α) $2(\lambda o\gamma_x 8)^2 + \lambda o\gamma_x 64 + \lambda o\gamma_x 8 = 9$, β) $\lambda o\gamma_x\sqrt[3]{625} - \lambda o\gamma_x\sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0$.

135. Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ ἰσχύει: $\lambda o\gamma_\alpha\beta.\lambda o\gamma_\beta\gamma.\lambda o\gamma_\gamma\alpha = 1$.

136. Ἄν $\alpha > 1$, $\beta > 1$ καί $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\frac{\alpha+\beta}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta) \geq \sqrt{\lambda o\gamma\alpha\cdot\lambda o\gamma\beta}.$$

137. Ἄν $\lambda o\gamma(x^2y^3) = \alpha$ καί $\lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = \beta$ νά ἐκφράσετε τό $\lambda o\gamma x$ καί $\lambda o\gamma y$ συναρτήσει τῶν α καί β.

138. Ἄν $\lambda o\gamma 2\cdot\lambda o\gamma 5 = \theta$, νά ἐκφράσετε τό λογ2 καί τό λογ5 συναρτήσει τοῦ θ. Γιά ποιές τιμές τοῦ θ τό πρόβλημα ἔχει λύση;

139. Ἄν $\alpha > 1$, $\beta > 1$ νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$y = \lambda o\gamma(\alpha^2 - 1) + \lambda o\gamma(\beta^2 - 1) - \lambda o\gamma[(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha + \beta)^2].$$

140. Ἄν $\lambda o\gamma 2 = 0{,}30103$, νά ὑπολογίσετε τήν τιμή τῆς παραστάσεως:

$$y = \frac{1}{2}\lambda o\gamma 2 + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})$$

141. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$ μέ $\beta \neq 1$ καί $\alpha\beta \neq 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lambda o\gamma_{\alpha\beta}\gamma = \frac{\lambda o\gamma_\beta\gamma}{1 + \lambda o\gamma_\beta\alpha}$.

142. Νά ἀποδείξετε ὅτι: $\lambda o\gamma_2 3\cdot\lambda o\gamma_3 4\cdot\lambda o\gamma_4 5 \cdots \lambda o\gamma_7 8 = 3$.

143. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί οἱ α, β, γ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀριθμοί: $\lambda o\gamma_\alpha\theta$, $\lambda o\gamma_\beta\theta$, $\lambda o\gamma_\gamma\theta$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

144. Ἄν γιά τούς διαφορετικούς μεταξύ τους θετικούς ἀριθμούς α, β, γ ἰσχύει:

$\frac{\lambda o\gamma\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\lambda o\gamma\beta}{\gamma-\alpha} = \frac{\lambda o\gamma\gamma}{\alpha-\beta}$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma = 1$.

145. Ἄν $\varphi(x) = \log\frac{1-x}{1+x}$, τότε ἰσχύει: $\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) = \varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}\right)$

146. Ἄν $0 < \alpha \neq 1$ καί $\beta = \frac{1}{2}(\alpha^x - \alpha^{-x})$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $x = \lambda o\gamma_\alpha(\beta + \sqrt{\beta^2+1})$.

147. Ἂν $\alpha, \beta, x \in \mathbf{R}^+$ μέ $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$ καί $\alpha\beta \neq 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\lambda o\gamma_\alpha x + \lambda o\gamma_\beta x = \lambda o\gamma_\alpha \beta \cdot (1 + \lambda o\gamma_\beta \alpha)^2 \cdot \lambda o\gamma_{\alpha\beta} x.$$

148. Νά ἀποδείξετε ὅτι: τό ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μέ πρῶτο ὅρο τό λογα καί δεύτερο ὅρο τό λογβ εἶναι:

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{2} \cdot \lambda o\gamma \frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}.$$

149. Ἂν οἱ διαφορετικοί μεταξύ τους θετικοί ἀριθμοί α, β, γ κατέχουν ἀντιστοίχως τίς τάξεις μ, ν, ρ σέ μία γεωμετρική καί σέ μία ἁρμονική πρόοδο, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\alpha(\beta-\gamma)\lambda o\gamma\alpha + \beta(\gamma-\alpha)\lambda o\gamma\beta + \gamma(\alpha-\beta)\lambda o\gamma\gamma = 0.$$

150. Ἔστω ἡ συνάρτηση f μέ τύπο: $f(x) = \lambda o\gamma\,|\lambda o\gamma x|$.

Νά βρεῖτε: **(i)** Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἡ συνάρτηση εἶναι ὁρισμένη.

(ii) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἡ συνάρτηση μηδενίζεται.

151. Ἂν $x, y \in \mathbf{R}^+$, $0 < \alpha \neq 1$, $0 < \beta \neq 1$ καί $\alpha^x = \beta^y$, $x^\beta = y^\alpha$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(\frac{x}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}\right)^\alpha = \left(\frac{y}{\lambda o\gamma_\beta \alpha}\right)^\beta$$

152. Ἂν $\alpha, \beta, x \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καί ἰσχύει: $\lambda o\gamma_\rho \alpha \cdot \lambda o\gamma_\lambda \beta = \frac{1}{4}$, ὅπου $\rho = \beta^2$, $\lambda = x^2$, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ x δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό β.

Ὑπόδειξη. Νά λάβετε ὑπόψη τό πόρισμα 2ο τῆς § 65.

153. Ἂν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ καί εἶναι διάφοροι ἀπό τόν α, ὅπου $0 < \alpha \neq 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\left(y = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha x}} \wedge z = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha y}}\right) \Rightarrow x = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha z}}.$$

154. Ἂν $\alpha, x, y \in \mathbf{R}^+$ καί $y < x$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\frac{1}{x}\log(1+\alpha^x) < \frac{1}{y}\log(1+\alpha^y)$.

Ὑπόδειξη. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **(i)** $\alpha = 1$, **(ii)** $0 < \alpha < 1$, **(iii)** $\alpha > 1$.

155. Νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά κάθε $\alpha > 0$ ἡ ἀκολουθία (γ_ν) μέ γενικό ὅρο:

$$\gamma_\nu = (1+\alpha)(1+\alpha^2)\cdots(1+\alpha^\nu)$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα καί ἱκανοποιεῖ τή σχέση: $0 < \gamma_\nu < e^{\alpha\frac{1-\alpha^\nu}{1-\alpha}}$ $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

Εἰδικά γιά $0 < \alpha < 1$, νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχουν ἀριθμοί Μ πού ἐξαρτῶνται ἀπό τό α, ὥστε νά ἰσχύει: $\gamma_\nu < M\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Τέλος, νά ἀποδείξετε ὅτι: γιά $0 < \alpha < 1$ ἰσχύει:

$$\frac{1}{1-\alpha} \leqq \lim\gamma_\nu \leqq e^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Ὑπόδειξη. Γιά κάθε $x > 0$ ἰσχύει $e^x > 1 + x$ (βλ. 1η ἐφαρμογή, § 68). Ἐπίσης ἰσχύει ὅτι: $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$, $1 + \sigma_\nu \leqq \gamma_\nu$, ὅπου $\sigma_\nu = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^\nu$.

II. ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

§ 69. Ὁρισμοί – Ἰδιότητες.— Ὅπως μάθαμε καί στήν § 58 οἱ λογάριθμοι ὡς πρός βάση 10 ὀνομάζονται **δεκαδικοί λογάριθμοι** καί παριστάνονται μέ λογ ἀντί $\lambda o\gamma_{10}$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\boxed{\lambda o\gamma\theta = x \iff 10^x = \theta} \qquad (1)$$

Ἀπό τήν παραπάνω ἰσοδυναμία συμπεραίνουμε ὅτι:

Δεκαδικός λογάριθμος *ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ πραγματικός ἀριθμός x στόν ὁποῖο πρέπει νά ὑψωθεῖ ἡ βάση 10 γιά νά δώσει τόν ἀριθμό θ.*

Ἔτσι, π.χ., ἔχουμε:

$\lambda o\gamma\, 100 = 2$, ἐπειδή $10^2 = 100$	$\lambda o\gamma\, 1000 = 3$, ἐπειδή $10^3 = 1000$
$\lambda o\gamma\, 0{,}01 = -2$, ἐπειδή $10^{-2} = 0{,}01$	$\lambda o\gamma \sqrt[5]{10^3} = \frac{3}{5}$, ἐπειδή $10^{3/5} = \sqrt[5]{10^3}$.

Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε **μόνο** μέ δεκαδικούς λογαρίθμους. Ἔτσι στό ἑξῆς μέ τόν ὅρο: *«λογάριθμο»* θά ἐννοοῦμε: *«δεκαδικό λογάριθμο»*.

Οἱ ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων ἔχουν καταγραφεῖ στή δεύτερη στήλη τοῦ πίνακα τῆς σελίδας 89. Ἐπιπλέον, σύμφωνα καί μέ τό πόρισμα τῆς § 66, ἔχουμε:

$$\boldsymbol{\theta > 1 \Longleftrightarrow \lambda o\gamma\theta > 0} \quad \text{καί} \quad \boldsymbol{0 < \theta < 1 \Longleftrightarrow \lambda o\gamma\theta < 0.}$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$\lambda o\gamma\, \theta \equiv \lambda o\gamma_{10}\theta = \frac{\log\theta}{\log 10} = \mathrm{M}\cdot\log\theta, \text{ ὅπου } \mathrm{M} = \frac{1}{\log 10} = \frac{\log e}{\log 10} = \lambda o\gamma e = 0{,}43429\ldots$$

Εἰδικότερα γιά τούς δεκαδικούς λογαρίθμους ἰσχύουν:

α) *Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως τοῦ 10 μέ ἐκθέτη ρητό ἀριθμό εἶναι ἴσος μέ τό ρητό ἐκθέτη.*

Δηλαδή: ἄν $\rho \in \mathbf{Q}$, τότε $\lambda o\gamma\, 10^{\rho} = \rho$.

Στήν εἰδική περίπτωση πού $\rho \in \mathbf{Z}$, ὁ λογάριθμος τοῦ 10^{ρ} εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός ρ. Ἔτσι π.χ. $\lambda o\gamma\, 100 = \lambda o\gamma\, 10^2 = 2$, $\lambda o\gamma\, 0{,}01 = \lambda o\gamma\, 10^{-2} = -2$.

Εἶναι χρήσιμο νά ξέρουμε ἀπό μνήμης τούς λογαρίθμους μερικῶν ἀριθμῶν:

x	...	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	...
λογ x	...	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	...

β) *Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν πού δέν εἶναι δυνάμεις τοῦ 10 μέ ἐκθέτη ρητό ἀριθμό εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί.*

Πράγματι, ἄς θεωρήσουμε ἕναν (θετικό) ἀριθμό θ μέ $\theta \neq 10^{\rho}$, ὅπου $\rho \in \mathbf{Q}$, καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\lambda o\gamma\theta = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου $\mu \in \mathbf{Z}$ καί $\nu \in \mathbf{N}$. Τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰσοδυναμία (1), θά ἔχουμε: $\theta = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \equiv 10^{\rho}$, ὅπου $\rho \in \mathbf{Q}$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, λόγω τῆς ὑποθέσεως πού κάναμε γιά τό θ.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι: *Οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, ἐκτός ἀπό τίς δυνάμεις τοῦ 10 μέ ρητό ἐκθέτη, εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί καί κατά συνέπεια δέν ὑπολογίζονται ἀκριβῶς, ἀλλά κατά προσέγγιση μιᾶς δεκαδικῆς μονάδας* (συνήθως ὑπολογίζονται κατά προσέγγιση 0,00001).

γ) *Ἄν οἱ θετικοί ἀριθμοί θ_1 καί θ_2 ἔχουν πηλίκο ἀκέραιη δύναμη τοῦ 10, τότε ὁ $(\lambda o\gamma\theta_1 - \lambda o\gamma\theta_2)$ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.*

Πράγματι, ἐπειδή $\theta_1 = 10^k \cdot \theta_2$, μέ $k \in \mathbf{Z}$, ἔχουμε: $\lambda o \gamma\, \theta_1 = \lambda o \gamma\, 10^k + \lambda o \gamma\, \theta_2 = k + \lambda o \gamma\, \theta_2$. Ἄρα: $\lambda o \gamma\, \theta_1 - \lambda o \gamma\, \theta_2 = k \quad (k \in \mathbf{Z})$.

§ 70. Χαρακτηριστικό καί δεκαδικό μέρος ἑνός λογαρίθμου.—

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό λογ 557.

Ἐπειδή $10^2 < 557 < 10^3$, λογαριθμίζοντας καί τά τρία μέλη θά ἔχουμε:

$$2 < \lambda o \gamma\, 557 < 3.$$

Ἄρα: $$\lambda o \gamma\, 557 = 2, \ldots.$$

Ἑπομένως: $\lambda o \gamma\, 557 = 2 + d$, ὅπου d εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός μικρότερος ἀπό τή μονάδα.

Τό ἀκέραιο μέρος τοῦ λογαρίθμου (στό παραπάνω παράδειγμα ὁ ἀριθμός 2) λέγεται **«χαρακτηριστικό»** τοῦ λογαρίθμου καί ὁ θετικός καί μικρότερος ἀπό τή μονάδα δεκαδικός ἀριθμός d λέγεται **«δεκαδικό μέρος»** τοῦ λογαρίθμου. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ θ, $(\theta > 0)$ τό παριστάνουμε μέ $[\lambda o \gamma \theta]$.

Ἀπό τό παραπάνω παράδειγμα καί τόν ὁρισμό τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑνός λογαρίθμου παρατηροῦμε ὅτι ὡς χαρακτηριστικό ἑνός λογαρίθμου ὁρίζουμε *τό μικρότερο ἀπό δύο διαδοχικούς ἀκεραίους μεταξύ τῶν ὁποίων βρίσκεται ὁ λογάριθμος αὐτός*. Ἔτσι ἔχουμε:

Ἄν $\lambda o \gamma\, \alpha = 5{,}03426$, τότε $[\lambda o \gamma\, \alpha] = 5$ καί $d = 0{,}03426$.

Ἄν $\lambda o \gamma\, \gamma = -2{,}32715$, τότε $[\lambda o \gamma\, \gamma] = -3$, ἐπειδή $-3 < -2{,}32715 < -2$.

Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου εἶναι μηδέν μόνο γιά τίς ἀκέραιες δυνάμεις τοῦ 10 καί θετικό σέ κάθε ἄλλη περίπτωση.

Ὥστε: **Τό δεκαδικό μέρος ἑνός λογαρίθμου εἶναι μή ἀρνητικός ἀριθμός.**

Ἄν d εἶναι τό δεκαδικό μέρος τοῦ $\lambda o \gamma\, \theta$ καί $[\lambda o \gamma\, \theta]$ τό χαρακτηριστικό του, τότε ἀπό τή σχέση: $\lambda o \gamma\, \theta = [\lambda o \gamma\, \theta] + d$ προκύπτει: $\boxed{d = \lambda o \gamma\, \theta - [\lambda o \gamma\, \theta]}$

Ἔτσι ἔχουμε: ἄν $\lambda o \gamma\, \theta = -3{,}45217$, τότε $[\lambda o \gamma\, \theta] = -4$ καί $d = -3{,}45217 - (-4) = 0{,}54783$.

* **Παρατηρήσεις: α)** Πιό γενικά: *ὡς* **χαρακτηριστικό** *τοῦ $\lambda o \gamma_\alpha \theta$ μέ $\alpha, \theta \in \mathbf{R}^+$ καί $\alpha \neq 1$ ὀνομάζουμε τό ἀκέραιο μέρος* (§ 6) *τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\lambda o \gamma_\alpha \theta$*, δηλαδή *τό μεγαλύτερο ἀκέραιο ἀριθμό k γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει:*

$$k \leqq \lambda o \gamma_\alpha \theta < k + 1 \qquad (1)$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό συμπεραίνουμε ὅτι τό χαρακτηριστικό τοῦ $\lambda o \gamma_\alpha \theta$ εἶναι πάντοτε ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός (θετικός, ἀρνητικός ἤ τό μηδέν). Ἐξάλλου, ἐπειδή $\lambda o \gamma_\alpha \alpha = 1$, ἡ (1) γράφεται:

$$k \cdot \lambda o \gamma_\alpha \alpha \leqq \lambda o \gamma_\alpha \theta < (k+1) \lambda o \gamma_\alpha \alpha \Longrightarrow \lambda o \gamma_\alpha (\alpha^k) \leqq \lambda o \gamma_\alpha \theta < \lambda o \gamma_\alpha \alpha^{k+1} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

(i) Ἄν $\alpha > 1$, τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε: $$\alpha^k \leqq \theta < \alpha^{k+1} \qquad (3)$$

δηλαδή οἱ ἀριθμοί θ πού ἀνήκουν στό διάστημα $[\alpha^k, \alpha^{k+1})$, καί μόνο αὐτοί, ἔχουν λογαρίθμους ὡς πρός βάση α μέ χαρακτηριστικό τόν ἀκέραιο ἀριθμό k.

Στήν είδική περίπτωση πού είναι $\alpha = 10$, ή (3) γράφεται: $10^k \leqq \theta < 10^{k+1}$ (4)

'Από τήν (4) συμπεραίνουμε τώρα ὅτι : *οἱ θετικοί ἀριθμοί θ πού ἔχουν δεκαδικούς λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό k εἶναι αὐτοί πού ἔχουν k + 1 ἀκέραια ψηφία* $(k \in N_0)$. 'Επίσης ἀπό τήν (4) συμπεραίνουμε ὅτι : *τό χαρακτηριστικό τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλύτερης ἀκέραιης δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία δέν ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό αὐτό.*

(ii) "Αν $0 < \alpha < 1$, τότε ἀπό τή (2) ἔχουμε: $\alpha^k \geqq \theta > \alpha^{k+1}$ (5)

δηλαδή οἱ ἀριθμοί πού ἀνήκουν στό διάστημα $(\alpha^{k+1}, \alpha^k]$ ἔχουν λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό k.

β). Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι: ἄν $[\lambda o\gamma\theta] = k$, $k \in \mathbf{Z}$, τότε ἰσχύει:

$$10^k \leqq \theta < 10^{k+1} \tag{6}$$

'Αντιστρόφως, ἄν ἰσχύει ἡ (6), τότε $[\lambda o\gamma\theta] = k$. Πράγματι, ἀπό τήν (6) ἔχουμε : $\lambda o\gamma 10^k \leqq \lambda o\gamma\theta < \lambda o\gamma 10^{k+1}$, δηλ. $k \leqq \lambda o\gamma\theta < k + 1$. "Αρα $[\lambda o\gamma\theta] = k$, ἐπειδή ὁ k εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος πού δέν ὑπερβαίνει τό λογθ.

γ) "Οπως ξέρουμε (§ 6, α) γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$ ἰσχύει : $x = [x] + d$, ὅπου $0 \leqq d < 1$. "Αρα: $\lambda o\gamma\theta = [\lambda o\gamma\theta] + d$ μέ $0 \leqq d < 1$. Αὐτόν τό μή ἀρνητικό ἀριθμό d τόν ὀνομάζουμε **δεκαδικό μέρος** τοῦ λογθ.

§ 71. Τροπή ἀρνητικοῦ λογαρίθμου σέ ἡμιαρνητικό.

—Εἴπαμε παραπάνω ὅτι τό δεκαδικό μέρος ἑνός λογαρίθμου εἶναι μή ἀρνητικός ἀριθμός· ἐπειδή ὅμως οἱ λογάριθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν πού εἶναι μικρότεροι ἀπό τή μονάδα εἶναι ἀρνητικοί, καί τέτοιοι λογάριθμοι δέν εἶναι εὔκολοι στή χρήση γι' αὐτό τούς ἀρνητικούς λογαρίθμους τούς μετατρέπουμε σέ **«ἡμιαρνητικούς»**, δηλαδή σέ λογαρίθμους πού ἔχουν **μόνο** τό ἀκέραιο μέρος τους (χαρακτηριστικό) ἀρνητικό, ἐνῶ τό δεκαδικό τους μέρος εἶναι θετικό.

'Η μετατροπή αὐτή γίνεται ὡς ἑξῆς:

"Εστω $-2{,}54327$ ἤ $-2 -0{,}54327$ ὁ λογάριθμος κάποιου ἀριθμοῦ· ἄν σ' αὐτό προσθέσουμε τό -1 καί $+1$ (καί ἔτσι ὁ ἀριθμός δέν ἀλλάζει) λαμβάνουμε:

$$-2 - 1 + 1 - 0{,}54327 = -3 + (1 - 0{,}54327) = -3 + 0{,}45673.$$

"Ωστε εἶναι: $$-2{,}54327 = -3 + 0{,}45673.$$

Συμφωνοῦμε νά γράφουμε τόν ἀριθμό $-3 + 0{,}45673$ ὡς ἑξῆς: $\overline{3}{,}45673$· δηλαδή γράφουμε τό — πάνω ἀπό τό ἀκέραιο μέρος γιά νά δείξουμε ὅτι **μόνο** αὐτό εἶναι ἀρνητικό. "Ετσι φαίνεται, ὅτι τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι τό ἀκέραιο μέρος -3, ἐπειδή $-3 < -2{,}54327 < -2$, καί δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου εἶναι τό δεκαδικό μέρος πού εἶναι γραμμένο, ἐπειδή αὐτό εἶναι ἡ διαφορά πού προκύπτει ἄν ἀπό τό λογάριθμο $-3 + 0{,}45673$ ἀφαιρέσουμε τό χαρακτηριστικό του -3.

'Από τά παραπάνω ἔχουμε τόν ἑξῆς πρακτικό κανόνα:

Κανόνας: *Γιά νά μετατρέψουμε ἕναν ἀρνητικό λογάριθμο σέ ἡμιαρνητικό, αὐξάνουμε τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἀκεραίου κατά 1, στόν ἀριθμό πού προκύπτει γράφουμε ἀπό πάνω τό —, καί δεξιά ἀπ' αὐτόν γράφουμε ὡς δεκαδικά ψηφία τούς ἀριθμούς πού βρίσκουμε, ἄν ἀφαιρέσουμε κάθε ψηφίο τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου πού μᾶς δόθηκε ἀπό τό 9 καί τοῦ τελευταίου ἀπό τό 10.*

"Ετσι, π.χ.: "Αν $\lambda o\gamma\theta = -3{,}85732$, θά ἔχουμε: $\lambda o\gamma\,\theta = \overline{4}{,}14268$.

"Αν $\lambda o\gamma\,\theta = -2{,}35724$, θά ἔχουμε: $\lambda o\gamma\,\theta = \overline{3}{,}64276$.

§ 72. **Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.— α) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ θ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλύτερης ἀκέραιης δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία δέν ὑπερβαίνει τόν ἀριθμό αὐτό.**

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα. Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό χαρακτηριστικό τοῦ: λογ 257.

Ἐπειδή: $$10^2 = 100 < 257 < 1000 = 10^3 \qquad (1)$$

ἄν λάβουμε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν πού βρίσκονται στά τρία μέλη τῆς (1), θά ἔχουμε: $2 < \text{λογ}\,257 < 3.$

Δηλαδή: $\text{λογ}\,257 = 2 + d$, ὅπου $0 < d < 1$, καί συνεπῶς $[\text{λογ}\,257] = 2.$

Ἔστω τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό $[\text{λογ}\theta]$. Ἄν 10^k εἶναι ἡ μεγαλύτερη ἀκέραιη δύναμη τοῦ 10 πού δέν ὑπερβαίνει τό (θετικό) ἀριθμό θ, τότε θά ἔχουμε:

$$10^k \leq \theta < 10^{k+1}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

ὁπότε: $$k \leq \text{λογ}\,\theta < k+1.$$

Τότε ὅμως ὁ λογθ θά εἶναι ἴσος ἤ μέ k ἤ μέ $k + d$, ὅπου $0 < d < 1$.

Ἄρα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ εἶναι ἴσο μέ k.

β) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ $\theta > 1$ εἶναι μικρότερο κατά μία μονάδα ἀπό τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ θ.

Δηλαδή: *ἄν k εἶναι τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ θ, τότε τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ θά εἶναι $(k-1)$.*

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε πάλι ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα. Ἔστω $\theta = 23{,}5$.

Ἐπειδή $10 < 23{,}5 < 100$, δηλ. $10^1 < 23{,}5 < 10^2$,

δηλ. $$10^{2-1} < 23{,}5 < 10^2,$$

θά ἔχουμε: $$(2-1) < \text{λογ}\,23{,}5 < 2.$$

Ἄρα: $$[\text{λογ}\,23{,}5] = 1 = 2 - 1.$$

Ἔστω τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό $[\text{λογ}\theta]$, ὅπου $\theta > 1$. Ἄν τό ἀκέραιο μέρος τοῦ θ ἔχει k ψηφία, τότε ὁ θ θά περιέχεται μεταξύ τῶν 10^{k-1} καί 10^k, δηλ. θά ἔχουμε:

$$10^{k-1} \leq \theta < 10^k \Rightarrow (k-1) \leq \text{λογ}\,\theta < k.$$

Ἄρα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ εἶναι ἴσο μέ $(k-1)$.

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε: $\text{λογ}\,5378{,}4 = 3, \ldots,\ \text{λογ}\,3{,}748 = 0, \ldots$

γ) Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ $\theta < 1$, ὁ ὁποῖος εἶναι γραμμένος μέ δεκαδική μορφή, ἔχει τόσες ἀρνητικές μονάδες ὅση εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του μετά τήν ὑποδιαστολή.

Ἀπόδειξη. Ἔστω, π.χ. ὅτι $\theta = 0{,}025$, τότε: $10^{-2} < \theta = 0{,}025 < 10^{-1}$

(γιατί: $\dfrac{1}{100} < \dfrac{25}{1000} < \dfrac{1}{10} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{100} < \dfrac{1}{40} < \dfrac{1}{10} \Longleftrightarrow 10 < 40 < 100$)

ὁπότε: $$\text{λογ}\,10^{-2} < \text{λογ}\,0{,}025 < \text{λογ}\,10^{-1}$$

ἤ $$-2 < \text{λογ}\,0{,}025 < -1,$$

ἄρα: $$[\text{λογ}\,0{,}025] = -2.$$

Ἔστω τώρα ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό [λογθ], ὅπου $0 < \theta < 1$. Ἄν k εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετά τήν ὑποδιαστολή στή δεκαδική μορφή τοῦ θ, θά εἶναι:

$$10^{-k} \leqq \theta < 10^{-k+1},$$

ὁπότε: $$\lambda o\gamma\, 10^{-k} \leqq \lambda o\gamma\, \theta < \lambda o\gamma\, 10^{-k+1},$$

δηλ. $$-k \leqq \lambda o\gamma\, \theta < -k+1.$$

Ἄρα: $$[\lambda o\gamma\, \theta] = -k.$$

Ἔτσι, π.χ. ἔχουμε: $\lambda o\gamma\, 0{,}00729 = \overline{3}, \ldots$, $\lambda o\gamma\, 0{,}27508 = \overline{1}, \ldots$

Παρατήρηση. Ἐφαρμόζοντας τίς παραπάνω ἰδιότητες μποροῦμε νά βρίσκουμε ἀπό μνήμης τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ.

Ἀντιστρόφως: ἀπό τίς ἰδιότητες β καί γ ἔχουμε:

δ) Ἄν τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ (θετικοῦ) x εἶναι ἀριθμός θετικός ἤ μηδέν, τότε ὁ ἀριθμός x ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία, ὅσες μονάδες ἔχει τό χαρακτηριστικό καί ἕνα ἀκόμη. Ἄν ὁ λογάριθμος τοῦ x εἶναι ἡμιαρνητικός, τότε τό ἀκέραιο μέρος τοῦ x εἶναι τό μηδέν, καί τό πρῶτο σημαντικό ψηφίο τοῦ x μετά τήν ὑποδιαστολή κατέχει τάξη ἴση μέ τό πλῆθος τῶν μονάδων τῆς ἀπόλυτης τιμῆς τοῦ χαρακτηριστικοῦ.

Ἔτσι, ἄν τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι 3, τό ἀκέραιο μέρος αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσερα ψηφία· ἄν τό χαρακτηριστικό εἶναι 0, τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἕνα ψηφίο· ἄν τό χαρακτηριστικό εἶναι $\overline{2}$, ὁ ἀριθμός εἶναι δεκαδικός τῆς μορφῆς $0,0y_1y_2y_3y_4\ldots$, ὅπου $1 \leqq y_i \leqq 9$.

ε) Ἄν πολλαπλασιάσουμε (ἤ διαιρέσουμε) ἕναν ἀριθμό μέ 10^ν, $\nu \in \mathbf{N}$, τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου δέ μεταβάλλεται, τό χαρακτηριστικό ὅμως αὐξάνεται (ἤ ἐλαττώνεται) κατά ν μονάδες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὁ θετικός ἀριθμός θ μέ $\lambda o\gamma\, \theta = y_0, y_1y_2y_3\ldots$

Πολλαπλασιάζοντας τόν ἀριθμό θ μέ 10^ν, $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\,(10^\nu \cdot \theta) = \lambda o\gamma\, 10^\nu + \lambda o\gamma\, \theta = \nu + \lambda o\gamma\, \theta = \nu + y_0, y_1y_2y_3\ldots =$$
$$= (y_0 + \nu), y_1y_2y_3\ldots \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἄν διαιρέσουμε τό θ μέ 10^ν, $\nu \in \mathbf{N}$ ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma \left(\frac{\theta}{10^\nu}\right) = \lambda o\gamma\, \theta - \lambda o\gamma\, 10^\nu = -\nu + \lambda o\gamma\, \theta = -\nu + y_0, y_1y_2y_3\ldots =$$
$$= (y_0 - \nu), y_1y_2y_3\ldots \qquad (2)$$

Οἱ ἰσότητες (1) καί (2) δείχνουν ὅτι ἐνῶ τό δεκαδικό μέρος τοῦ $\lambda o\gamma(\theta \cdot 10^k)$, $k \in \mathbf{Z}$, εἶναι τό ἴδιο μέ τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογθ, τό χαρακτηριστικό ὅμως τοῦ $\lambda o\gamma\,(\theta \cdot 10^k)$ αὐξάνεται σέ σχέση μέ τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ κατά k ἀκέραιες μονάδες, ἄν k εἶναι μή ἀρνητικός ἀκέραιος ἤ ἐλαττώνεται κατά k ἀκέραιες μονάδες, ἄν k εἶναι ἀρνητικός ἀκέραιος ἀριθμός.

Σύμφωνα μέ τήν πιό πάνω ἰδιότητα οἱ ἀριθμοί, π.χ., 5, 50, 500, 5000, ... ἔχουν τό ἴδιο δεκαδικό μέρος στό λογάριθμό τους. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοί: 0,5, 0,05, 0,005, 0,0005, ...

Πόρισμα.— Ἂν δύο ἀριθμοί γραμμένοι σέ δεκαδική μορφή ἔχουν τά ἴδια ψηφία καί μέ τήν ἴδια τάξη διαφέρουν ὅμως ὡς πρός τή θέση τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί τους θά διαφέρουν μόνο ὡς πρός τό χαρακτηριστικό τους.

Ἂν εἶναι, π.χ., λογ 312,865 = 2,49536, τότε θά εἶναι:

λογ 31,2865 = 1,49536 λογ 31286,5 = 4,49536

λογ 0,312865 = $\overline{1}$,49536 λογ 3,12865 = 0,49536.

§ 73. Πράξεις στούς δεκαδικούς λογαρίθμους.

—Οἱ πράξεις στούς δεκαδικούς λογαρίθμους γίνονται ὅπως καί στούς δεκαδικούς ἀριθμούς, μέ μερικές παραλλαγές, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικό χαρακτηριστικό. Ἔχουμε τίς ἑξῆς πράξεις:

α΄) Πρόσθεση λογαρίθμων. Γιά νά προσθέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους προσθέτουμε τά δεκαδικά μέρη (πού εἶναι ὅλα θετικά) καί τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀθροίσματός τους τό προσθέτουμε ἀλγεβρικά στό (ἀλγεβρικό) ἄθροισμα τῶν ἀκέραιων μερῶν τῶν λογαρίθμων.

Π.χ. **Νά γίνει ἡ πρόσθεση: $\overline{2}$,85643 + 2,24482 + $\overline{3}$,42105 + $\overline{1}$,24207.** Ἔχουμε:

$\overline{2}$,85643
2,24482
$\overline{3}$,42105 Ἐδῶ τό ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν ἔχει μία ἀκέραιη μονάδα
$\overline{1}$,24207 καί συνεπῶς τό ἀκέραιο μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι:
$\overline{3}$,76437 $1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \overline{3}$.

β΄) Ἀφαίρεση λογαρίθμων. Γιά νά ἀφαιρέσουμε δεκαδικούς λογαρίθμους ἀφαιροῦμε τά δεκαδικά μέρη· ἄν ἀπό αὐτή τήν ἀφαίρεση προκύψει τελικά κρατούμενο (αὐτό εἶναι θετικό), τό προσθέτουμε (ἀλγεβρικά) στό χαρακτηριστικό τοῦ ἀφαιρετέου καί τό ἄθροισμα πού προκύπτει τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό χαρακτηριστικό τοῦ μειωτέου.

Π.χ. **1) Νά γίνει ἡ ἀφαίρεση: $\overline{2}$,83754 — $\overline{5}$,32452.** Ἔχουμε:

$\overline{2}$,83754
$\overline{5}$,32452 Ἐδῶ δέν ὑπάρχει κρατούμενο καί τό χαρακτηριστικό ἰσοῦται μέ:
3,51302 $-2-(-5) = 3$.

2) Νά γίνει ἡ ἀφαίρεση: $\overline{3}$,48765 — $\overline{2}$,75603. Ἔχουμε:

$\overline{3}$,48765
$\overline{2}$,75603 Ἐδῶ τό τελικό κρατούμενο εἶναι 1 καί τό χαρακτηριστικό ἰσοῦται
$\overline{2}$,73162 μέ: $-3-(-2+1) = -3-(-1) = -2 = \overline{2}$.

Παρατήρηση: Εἶναι γνωστό (§ 67) ὅτι: λογα − λογβ = λογα + συλλογβ, δηλαδή ἡ ἀφαίρεση ἑνός λογαρίθμου ἀνάγεται στήν πρόσθεση τοῦ συλλογαρίθμου του.

Γιά νά ὑπολογίσουμε τό συλλογάριθμο ἑνός (θετικοῦ) ἀριθμοῦ, ὅταν εἶναι γνωστός ὁ λογάριθμός του, προσθέτουμε στό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τό + 1 καί ἀλλάζουμε τό σημεῖο στό ἄθροισμα, καί στή συνέχεια τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τό ἀφαιροῦμε ἀπό τή μονάδα.

Π.χ. 1) Ἂν λογβ = 2,54675. Τότε θά ἔχουμε: συλλογβ = −λογβ = −2,54675 (1)
Ἐπειδή (§ 71) −2,54675 = $\overline{3}$,45325, ἡ (1) γίνεται: συλλογβ = $\overline{3}$,45325.

2) Ἄν $\log\alpha = \overline{1},37260$, τότε $\text{συλλογ}\,\alpha = 0,62740$.

3) Ἄν $\log 0,06543 = \overline{2},81578$, τότε $\text{συλλογ}\,0,06543 = 1,18422$.

γ΄) Πολλαπλασιασμός ἑνός λογαρίθμου μέ ἀκέραιο ἀριθμό.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Ἄν ὁ ἀκέραιος εἶναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζουμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐπί τό θετικό ἀκέραιο καί γράφουμε μόνο τά δεκαδικά ψηφία τοῦ γινομένου· τό ἀκέραιο μέρος αὐτοῦ τοῦ γινομένου τό προσθέτουμε ἀλγεβρικά στό γινόμενο: τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐπί τό θετικό ἀριθμό.

Π.χ. **Νά γίνει ὁ πολλαπλασιασμός: $\overline{2},65843 \times 4$. Ἔχουμε:**

$$\begin{array}{r} \overline{2},65843 \\ 4 \\ \hline \overline{6},63372 \end{array}$$

Ἐδῶ τό τελικό κρατούμενο εἶναι 2 καί τό χαρακτηριστικό τοῦ γινομένου ἰσοῦται μέ:

$(-2)\cdot 4 + 2 = -6 = \overline{6}$.

ii) Ἄν ὁ ἀκέραιος εἶναι ἀρνητικός, τότε πολλαπλασιάζουμε τό συλλογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ ἐπί τόν ἀντίθετο τοῦ ἀκεραίου. Ἀλλά τότε ἀναγόμαστε στήν πρώτη περίπτωση.

Π.χ. **Νά γίνει ὁ πολλαπλασιασμός: $\overline{3},67942 \times (-4)$.**

Ἔστω $\log x = \overline{3},67942$, τότε $\text{συλλογ}\,x = 2,32058$

καί συνεπῶς: $\overline{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232$.

δ΄) Διαίρεση ἑνός λογαρίθμου μέ ἀκέραιο ἀριθμό.

1) Γιά νά διαιρέσουμε τό λογθ μέ θετικό ἀκέραιο (φυσικό) ἀριθμό k, ἐφόσον λογθ > 0 ἐργαζόμαστε ὅπως καί στούς δεκαδικούς ἀριθμούς· ἄν ὅμως ὁ λογθ εἶναι ἡμιαρνητικός, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1α) Ἄν ὁ k διαιρεῖ (ἀκριβῶς) τό χαρακτηριστικό τοῦ λογθ, τότε διαιροῦμε χωριστά τό δεκαδικό μέρος καί χωριστά τό χαρακτηριστικό καί προσθέτουμε τά πηλίκα.

1β) Ἄν ὁ k δέ διαιρεῖ τό χαρακτηριστικό, τότε σ' αὐτό τό χαρακτηριστικό προσθέτουμε τό μικρότερο ἀρνητικό ἀκέραιο $-\mu$ ἔτσι, ὥστε: ὁ ἀριθμός πού θά προκύψει νά εἶναι διαιρετός διά τοῦ k. Μετά προσθέτουμε τό $+\mu$ στό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου καί βρίσκουμε, χωριστά, τά πηλίκα τῶν δύο αὐτῶν μερῶν (διά τοῦ k) καί τελικά τά προσθέτουμε.

Π.χ. **Νά γίνουν οἱ διαιρέσεις: 1) $(\overline{6},54782):3$ καί 2) $(\overline{5},62891):3$**

1)		2)	
$\overline{6},54782$	3	$\overline{5},62891$	3
$\overline{6}$	$\overline{2} + 0,18260 =$	$\overline{5} + \overline{1} + 1 + 0,62891$	$\overline{2} + 0,54297 =$
$0 + 0,54782$	$= \overline{2},18260$	$\overline{6} + 1,62891$	$= \overline{2},54297$
24		$\overline{6}$	
07		$0 + 1,62891$	
18		12	
02		08	
		29	
		21	
		0	

2) Γιά νά διαιρέσουμε τό λογθ διά τοῦ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου k, διαιροῦμε τό συλλογθ διά τοῦ $-k > 0$.

Π.χ. **Νά γίνει ἡ διαίρεση : (5,92158) : (—2).** Ἔχουμε:

Ἄν $\lambda o\gamma x = 5{,}92158$, τότε $\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma x = \overline{6}{,}07842$, ὁπότε:

$$(5{,}92158) : (-2) = (\overline{6}{,}07842) : 2 = \overline{3}{,}03921.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **156.** Νά γίνουν ἡμιαρνητικοί οἱ λογάριθμοι:

1) $-2{,}32254$ 2) $-0{,}69834$ 3) $-1{,}27218$ 4) $-3{,}54642$
5) $-0{,}41203$ 6) $-5{,}78952$ 7) $-0{,}00208$ 8) $-2{,}05024$.

157. Νά γράψετε τό χαρακτηριστικό τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν:

1) 135 2) 2050 3) 9,5 4) 0,003 5) 382,27
6) 47,5 7) $\frac{17}{3}$ 8) 12,25 9) 0,56 10) 3041,7.

158. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικό: 3, 5, 0, 1, 7, 4, 2;

159. Ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ ἔχει χαρακτηριστικό: $-1, -2, -3, -4, -5, -7$. Ποιά εἶναι ἡ τάξη τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τοῦ ἀριθμοῦ μετά τήν ὑποδιαστολή;

160. Ἄν $\lambda o\gamma\alpha = \overline{1}{,}63819$ καί $\lambda o\gamma 4347 = 3{,}63819$, τότε νά ὑπολογίσετε τό α.

161. Ἄν εἶναι $\lambda o\gamma 7283 = 3{,}86231$, νά ὑπολογίσετε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν:

0,7283, 7,283, 0,007283, 728300, 728,3.

162. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

$\lambda o\gamma 724 - \lambda o\gamma 7{,}24$, $\lambda o\gamma 0{,}65 - \lambda o\gamma 6{,}5$, $\lambda o\gamma 17{,}62 - \lambda o\gamma 1{,}762$.

163. Ἄν $\lambda o\gamma\alpha = \overline{2}{,}29814$ καί $\lambda o\gamma\beta = \overline{2}{,}84212$, νά ὑπολογίσετε τά:

1. $\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta$, 2. $\lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\beta$, 3. $3\lambda o\gamma\alpha + 5\lambda o\gamma\beta$,
4. $2\lambda o\gamma\beta - \frac{3}{4}\lambda o\gamma\alpha$, 5. $\frac{7}{5}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta) - \frac{3}{4}(\lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\beta)$.

164. Νά ὑπολογίσετε τά ἀθροίσματα:

1. $\overline{5}{,}27124 + 3{,}4751 + \overline{1}{,}81523 + 0{,}47214$
2. $4{,}67471 + \overline{2}{,}14523 + 0{,}67215 + \overline{3}{,}04703$.

165. Νά ἐκτελέσετε τίς πράξεις:

1. $\overline{3}{,}24518 + 1{,}41307 - \overline{2}{,}47503$
2. $0{,}03182 - \overline{4}{,}27513 + \overline{3}{,}82504 - \overline{1}{,}08507$.

166. Νά ὑπολογίσετε τά γινόμενα:

1. $\overline{3}{,}82307 \times 5$, 2. $0{,}24507 \times (-2)$, 3. $\overline{1}{,}24513 \times 4$.

167. Νά ἐκτελέσετε τίς διαιρέσεις:

1. $\overline{4}{,}89524:3$, 2. $\overline{5}{,}60106:(-3)$, 3. $\overline{4}{,}57424 : \left(-\frac{3}{7}\right)$,
4. $\overline{1}{,}42118:4$, 5. $\overline{6}{,}27508:(-2)$, 6. $\overline{8}{,}32403:4$.

★Ὁμάδα Β΄. **168.** Νά βρεῖτε ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν γιά τούς ὁποίους ὁ $\lambda o\gamma_3\left(\frac{1}{\nu}\right)$ ἔχει χαρακτηριστικό: -2.

169. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν ξέρουμε τούς λογαρίθμους ὡς πρός βάση α, $\alpha > 1$, ὅλων τῶν ἀριθμῶν πού περιέχονται μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ α, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τό λογάριθμο τοῦ ὁποιουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρός βάση α.

170. Ἂν K εἶναι τό πλῆθος τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν πού οἱ λογάριθμοί τους ἔχουν χαρακτηριστικό k καί ἄν Λ εἶναι τό πλῆθος τῶν ἀκεραίων πού οἱ ἀντίστροφοί τους ἔχουν λογαρίθμους μέ χαρακτηριστικό $-\lambda$ $(\lambda > 0)$, νά ἀποδείξετε ὅτι: $\text{λογ}K - \text{λογ}\Lambda = k - \lambda + 1$.

Λογαριθμικοί Πίνακες

Ὅπως εἴδαμε, ἐκτός ἀπό τίς ρητές δυνάμεις τοῦ 10, ὅλοι οἱ ἄλλοι (θετικοί) ἀριθμοί ἔχουν λογαρίθμους ἄρρητους ἀριθμούς (γι' αὐτό ἔχουν ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά). Γι' αὐτό, τούς λογαρίθμους αὐτούς τούς βρίσκουμε κατά προσέγγιση (συνήθως 0,00001).

Ἐξάλλου, ἐπειδή $\text{λογ}\dfrac{1}{\alpha} = -\text{λογ}\alpha$, ὅταν ξέρουμε τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τῶν >1, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τούς λογαρίθμους τῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν πού εἶναι <1.

Ἐπίσης εἴδαμε, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη: ἀπό τό **χαρακτηριστικό** του καί ἀπό τό **δεκαδικό** του μέρος.

Στήν § 71 δείξαμε πώς τό χαρακτηριστικό του ὑπολογίζεται ἀπό μνήμης.

Τό δεκαδικό του μέρος ὑπολογίζεται κατά προσέγγιση μέ μεθόδους πού ἀναπτύσσονται στά Ἀνώτερα Μαθηματικά. Μέ τίς μεθόδους αὐτές ὑπολογίστηκε τό δεκαδικό μέρος (μέ 5 ἤ 7 ἤ 11 ἤ 15 δεκαδικά ψηφία) ὅλων τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἀπό τό 1 μέχρι τό 10.000 καί εἶναι γραμμένο σέ πίνακες πού λέγονται **λογαριθμικοί πίνακες** ἤ **«πίνακες τοῦ δεκαδικοῦ μέρους»**. Συνήθως γιά τίς ἐφαρμογές χρησιμοποιοῦμε τόν 5-ψήφιο πίνακα κατά τό σύστημα Dupuis, γιά τόν ὁποῖο ὑπάρχουν καί ἐκδόσεις ἑλληνικές· στά ἑπόμενα θά περιγράψουμε μέ συντομία τόν πίνακα αὐτό καί θά ἐκθέσουμε τόν τρόπο χρήσεώς του.

§ 74. Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis.

— Οἱ λογαριθμικοί πίνακες Dupuis περιέχουν τό δεκαδικό μέρος τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκέραιων ἀριθμῶν ἀπό 1 μέχρι 10.000. Ὁ παρακάτω «πίνακας» εἶναι ἕνα τμῆμα ἀπό τούς λογαριθμικούς πίνακες τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	236
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
...	......	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	......	...	...	...	...	...	...	...	...	...
549	73957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Στήν ἀριστερή στήλη —ὅπου στήν κορυφή ὑπάρχει τό γράμμα N (Nombres = ἀριθμοί), στίς Ἑλληνικές ἐκδόσεις τό γράμμα A (ἀριθμοί)— εἶναι γραμμένες κατακόρυφα οἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν καί στήν ἴδια ὁριζόντια γραμμή μέ τό N, οἱ μονάδες τους. Στίς ἄλλες στή-λες εἶναι γραμμένα τά δεκαδικά μέρη τῶν λογαρίθμων. Τά δύο πρῶτα ψηφία πού ἐξέχουν στή δεύτερη στήλη, ἐννοεῖται ὅτι ἐπαναλαμβάνονται τά ἴδια μέχρι ν' ἀλλάξουν· καί τοῦτο, γιατί πολλοί ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν ἴδια τά δύο πρῶτα ψηφία.

Ὁ λογάριθμος κάθε ἀριθμοῦ βρίσκεται ἐκεῖ πού διασταυρώνεται ἡ κατακόρυφη στήλη τῶν μονάδων μέ τήν ὁριζόντια στήλη τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀστερίσκος (*) πού τόν βλέπουμε μπροστά στά τρία τελευταῖα δεκαδικά ψηφία μερικῶν λογαρίθμων δείχνει ὅτι τά δύο πρῶτα ψηφία πού παραλείπονται ἄλλαξαν καί πρέπει νά πάρουμε τά ἀμέσως ἑπόμενα.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω καί μέ βάση τόν «πίνακα» τῆς σελίδας 231 ἔχουμε ὅτι:

$$\text{λογ}\,500 = 2{,}69897, \qquad \text{λογ}\,5047 = 3{,}70303, \qquad \text{λογ}\,5084 = 3{,}70621$$
$$\text{λογ}\,503 = 2{,}70157, \qquad \text{λογ}\,5128 = 3{,}70995, \qquad \text{λογ}\,5017 = 3{,}70044.$$

§ 75. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.— Τούς λογαριθμικούς πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε:

1) γιά νά βρίσκουμε τό λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ,

καί *2) γιά νά βρίσκουμε τόν ἀριθμό, ὅταν ξέρουμε τό λογάριθμό του.*

§ 76. Πρόβλημα Ι.— Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ.

Γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα ὑποθέτουμε ὅτι ὁ ἀριθμός πού μᾶς δόθηκε εἶναι πάντοτε γραμμένος μέ δεκαδική μορφή καί ὅτι χρησιμοποιοῦμε πενταψήφιους πίνακες. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ θά τό βροῦμε ἀπό μνήμης (§ 72), ἐνῶ τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες· γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη ὅτι:

Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τήν ἀκολουθία τῶν σημαντικῶν του ψηφίων πού προκύπτει ἄν παραλείψουμε τήν ὑποδιαστολή καί τά μηδενικά πού τυχόν μπορεῖ νά ὑπάρχουν στήν ἀρχή ἤ στό τέλος τοῦ ἀριθμοῦ. Αὐτό, ὅπως εἴδαμε (§ 72, ε) δέ μεταβάλλει τό ζητούμενο δεκαδικό μέρος. Π.χ. οἱ ἀριθμοί:

50,87   0,05087   508,70   5087000   5,0870

ἔχουν τό ἴδιο δεκαδικό μέρος μέ τόν ἀριθμό 5087.

Γιά νά λύσουμε τό πρόβλημα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση α΄.— *Ὁ ἀριθμός ἔχει ὡς 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή περιέχεται στούς πίνακες).*

Σ' αὐτή τήν περίπτωση βρίσκουμε πρῶτα τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου (ἀπό μνήμης) καί μετά τό δεκαδικό του μέρος ἀπό τούς πίνακες, ὅπως εἴπαμε σέ προηγούμενη παράγραφο (§ 74).

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 1, καί τό δεκαδικό του μέρος τό ἴδιο (§ 72, ε) μέ τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 5682 πού εἶναι (ἀπό τούς πίνακες) 75450.

Ἄρα: $\text{λογ}\,56{,}82 = 1{,}75450.$

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι: $\text{λογ}\,568{,}2 = 2{,}75450, \quad \text{λογ}\,0{,}8703 = \overline{1}{,}93967.$

Περίπτωση β΄.— *Ὁ ἀριθμός ἔχει περισσότερα ἀπό 4 σημαντικά ψηφία (δηλαδή* **δέν** *περιέχεται στούς πίνακες).*

Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου τό βρίσκουμε ὅπως καί στήν πρώτη περίπτωση. Γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό του μέρος, χωρίζουμε τά 4 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή, καί ἔτσι ὅπως εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμός βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων μέ 4 ψηφία. Γιά νά βροῦμε τώρα τό δεκαδικό του μέρος, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τήν ἰδιότητα:

$$α < β < γ \iff λογ\, α < λογ\, β < λογ\, γ, \text{ γιά κάθε } α, β, γ \in \mathbf{R}^+$$

καί νά δεχτοῦμε ὅτι:

Γιά μικρές μεταβολές τῶν ἀριθμῶν, οἱ μεταβολές τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τῶν λογαρίθμων τους εἶναι, κατά προσέγγιση, ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὅταν οἱ μεταβολές τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα καί ἀντιστρόφως.

Ἡ παραπάνω παραδοχή δέν εἶναι «τελείως» ἀληθής, δηλαδή οἱ μεταβολές τῶν λογαρίθμων δέν εἶναι ἀνάλογες μέ τίς μεταβολές τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, ἄς θεωρήσουμε δύο διαδοχικούς ἀκεραίους α καί $α + 1$, $α > 0$ καί ἄς ὀνομάσουμε δ τή διαφορά: $λογ(α + 1) - λογα$, δηλαδή:

$$δ = λογ(α + 1) - λογ\, α \Rightarrow δ = λογ\, \frac{α + 1}{α} \Rightarrow δ = λογ\left(1 + \frac{1}{α}\right)$$

Παρατηροῦμε ὅτι : γιά $α \to +\infty$, ὁπότε $\frac{1}{α} \to 0$, ἔχουμε:

$$λογ\left(1 + \frac{1}{α}\right) \to 0, \text{ δηλαδή } δ \to 0.$$

Ὥστε ἡ διαφορά τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων δέ μένει πάντοτε ἡ ἴδια, ἀλλά ἐλαττώνεται καθόσον οἱ ἀριθμοί αὐξάνουν καί συνεπῶς δέν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὔξηση τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδή ὅμως ἡ διαφορά αὐτή μένει γιά πολλούς ἀριθμούς ἀμετάβλητη, μποροῦμε, κατά προσέγγιση, νά θεωρήσουμε τήν αὔξηση τῶν λογαρίθμων ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν.

Ὕστερα ἀπό αὐτά, γιά νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου, ἐργαζόμαστε ὅπως (φαίνεται) στά παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο : **Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ 17424.**

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου εἶναι 4. Χωρίζουμε τά 4 πρῶτα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ μέ ὑποδιαστολή καί ἔτσι ἔχουμε τόν ἀριθμό 1742,4, τοῦ ὁποίου ἀρκεῖ νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

Ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἐπειδή $1742 < 1742{,}4 < 1743$,

ἕπεται ὅτι: $λογ\, 1742 < λογ\, 1742{,}4 < λογ\, 1743$.

Ἀπό τούς πίνακες εἶναι: $λογ\, 1742 = 3{,}24105$ καί $λογ\, 1743 = 3{,}24130$.

Ἄρα: $3{,}24105 < λογ\, 1742{,}4 < 3{,}24130$,

πού σημαίνει ὅτι ὁ λογάριθμος πού ζητᾶμε βρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καί 3,24130, πού διαφέρουν κατά 25 μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ.).

Ἀπό τούς πίνακες βλέπουμε ἐπίσης ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμός αὐξάνεται κατά 2, 3, 4, 5, ... ἀκέραιες μονάδες, τότε ὁ λογάριθμός του αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατά 50, 75, 99, 125, ... μ.ε'.δ.τ. Ὑπολογίζουμε τώρα πόσο πρέπει νά αὐξηθεῖ ὁ $λογ1742 = 3{,}24105$ γιά νά προκύψει ὁ λογ 1742,4 καί ἀπό αὐτόν ὁ λογ 17424. Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Σέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατά 1 ἀντιστοιχεῖ αὔξ. τοῦ λογ. κατά 25 μ.ε΄.δ.τ.

» » » » 0,4 » » » » » x; »

Ἄρα: $x = 25 \cdot 0{,}4 = 10$ μ.ε΄.δ.τ.

Τότε ἔχουμε: λογ $1742{,}4 = 3{,}24105 + 0{,}00010 = 3{,}24115$

καί συνεπῶς: λογ $17424 = 4{,}24115$.

Οἱ παραπάνω πράξεις διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

λογ 1742 = 3,24105	Αὔξηση ἀριθμῶν 1 αὔξηση λογαρίθμων 25 μ.ε΄.δ.τ.
λογ 1743 = 3,24130	» » 0,4 » » x; »
Δ = 25	x = 25 · 0,4 = 10 μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα: λογ $17424 = 4{,}24105 + 0{,}00010 = 4{,}24115$.

Ἀφοῦ λογ $17424 = 4{,}24115$ ἔχουμε:

λογ $17{,}424 = 1{,}24115$, λογ $0{,}0017424 = \bar{3}{,}24115$,

λογ $1{,}7424 = 0{,}24115$, λογ $174{,}24 = 2{,}24115$.

Παράδειγμα 2ο: Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 24,3527.

Λύση. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου πού ζητᾶμε εἶναι 1. Ἄν πολλαπλασιάσουμε τόν ἀριθμό ἐπί 100, τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου δέν ἀλλάζει. Ἀρκεῖ λοιπόν νά βροῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 2435,27.

Ἐργαζόμαστε ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα:

λογ 2435 = 3,38650	Αὔξηση ἀριθμῶν 1 αὔξηση λογαριθμῶν 18 μ.ε΄.δ.τ.
λογ 2436 = 3,38668	» » 0,27 » » x; »
Δ = 18	x = 18 · 0,27 = 4,86 ≃ 5 μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα: λογ $24{,}3527 = 1{,}38650 + 0{,}00005 = 1{,}38655$.

Σημείωση. Στούς λογαριθμικούς πίνακες καί ἔξω ἀπό τά πλαίσια ὑπάρχουν πινακίδια μέ ἐπικεφαλίδα τή διαφορά τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Τά πινακίδια αὐτά ἔχουν δύο στῆλες: ἡ πρώτη στήλη ἔχει τούς φυσικούς ἀριθμούς 1, 2, ..., 9, πού δείχνουν δέκατα τῆς ἀκέραιης μονάδας καί ἡ ἄλλη στήλη ἔχει τίς αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων σέ μονάδες τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως.

Ἄν ὀνομάσουμε Δ τίς διαφορές τῶν ἀριθμῶν, τότε τά πινακίδια δίνουν τίς τιμές:

$$\frac{\Delta \times 1}{10}, \frac{\Delta \times 2}{10}, \ldots, \frac{\Delta \times 9}{10}.$$

Ἔτσι ὁ ὑπολογισμός τοῦ λογαρίθμου τοῦ παραδείγματος 2 γίνεται μέ τή βοήθεια τοῦ πινακιδίου, πού ἔχει ἐπικεφαλίδα τή διαφορά Δ = 18.

Στό πινακίδιο αὐτό ἀπέναντι ἀπό τό 2 (στήλη α΄) εἶναι 3,6 καί ἀπέναντι ἀπό τό 7 εἶναι 12,6· ἀλλά ἐπειδή τό ψηφίο 7 παριστάνει ἑκατοστά στόν ἀριθμό 2435,27, δηλ. μονάδες 10 φορές μικρότερες, πρέπει νά πάρουμε 1,26. Ὥστε σέ αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατά 0,27 μονάδες ἀντιστοιχεῖ αὔξηση τοῦ λογαρίθμου κατά $3{,}6 + 1{,}26 = 4{,}86 \simeq 5$ μ.ε΄.δ.τ.

18	
1	1,8
2	3,6
3	5,4
4	7,2
5	9,0
6	10,8
7	12,6
8	14,4
9	16,2

Διάταξη τῶν πράξεων.

	λογ 2435	= 3,38650	Δ = 18
Σέ αὔξηση	0,2 αὔξηση λογ	3,6	
» »	0,07 » »	1,26	
ἄρα	λογ 2435,27	= 3,3865486	

καί ἐπειδή τό 6ο ψηφίο τοῦ δεκ. μέρους εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό 5, αὐξάνουμε κατά μία μονάδα τό 5ο ψηφίο. Ἄρα θά εἶναι λογ2435,27=3,38655 καί συνεπῶς λογ24,3527 =1,38655.

§ 77. Πρόβλημα ΙΙ.(*ἀντίστροφο*).—**Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμός πού ἀντιστοιχεῖ σέ ὁρισμένο λογάριθμο.**

Γιά νά λύσουμε αὐτό τό πρόβλημα ἀναζητοῦμε τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου πού μᾶς δόθηκε στούς λογαριθμικούς πίνακες. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις καθόσον τό δεκαδικό αὐτό μέρος γράφεται ἤ ὄχι στούς λογαριθμικούς πίνακες. Τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου μᾶς ἐπιτρέπει νά καθορίσουμε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα δ τῆς § 72, τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκέραιου μέρους τοῦ ζητούμενου ἀριθμοῦ.

Ἀκριβέστερα ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Περίπτωση α'.— *Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου βρίσκεται στούς πίνακες.*

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό θετικό ἀριθμό x, γιά τόν ὁποῖο εἶναι:

$$\lambda o\gamma x = 2{,}62716.$$

Λύση. Χωρίς νά λάβουμε ὑπόψη μας τό χαρακτηριστικό 2, ἀναζητᾶμε στή στήλη 0 τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τόν ἀριθμό 62, πού ἀποτελοῦν τά δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου καί κατόπιν ἀναζητᾶμε στόν πίνακα τά ἄλλα τρία ψηφία 716 τοῦ δεκαδικοῦ μέρους. Βλέπουμε ὅτι αὐτά ἀνήκουν στήν 423η ὁριζόντια γραμμή καί στήν 8η στήλη· ὁ ζητούμενος ἀριθμός ἔχει, στή σειρά, τά σημαντικά ψηφία 4, 2, 3, 8, δηλαδή ἔχει 423 δεκάδες καί 8 μονάδες. Ἐπειδή ὁ λογάριθμός του ἔχει χαρακτηριστικό 2, ὁ ἀριθμός θά ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία, καί θά εἶναι:

$$\mathbf{x = 423{,}8.}$$

Σημείωση. Ἄν θέλουμε νά βροῦμε τόν ἀριθμό x γιά τόν ὁποῖο εἶναι $\lambda o\gamma x = 2{,}63022$· ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παρατηροῦμε ὅτι στίς σειρές τοῦ 63 δέν ὑπάρχει τό 022, ἀλλά τό ἀναζητοῦμε καί τό βρίσκουμε στίς σειρές τοῦ 62 μέ ἕναν ἀστερίσκο (*) μπροστά του. Αὐτό συμβαίνει, γιατί τό 022 μέ ἀστερίσκο (*) βρίσκεται στήν τελευταία σειρά τοῦ 62. Συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ὁ 426,8.

Περίπτωση β'.— *Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου* **δέ** *βρίσκεται στούς πίνακες.*

1ο: Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό θετικό ἀριθμό x, γιά τόν ὁποῖο εἶναι:

$$\lambda o\gamma x = 1{,}25357.$$

Λύση. Παρατηροῦμε ὅτι τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου βρίσκεται στούς πίνακες μεταξύ τῶν 0,25334 καί 0,25358, στούς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοί 1792 καί 1793 ἀντιστοίχως. Δηλαδή ἔχουμε: $1{,}25334 < 1{,}25357 < 1{,}25358$

καί συνεπῶς: $17{,}92 < x < 17{,}93.$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

$$\Delta = 1{,}25358 - 1{,}25334 = 24 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$
$$\delta = 1{,}25357 - 1{,}25334 = 23 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

Ἔχοντας ὑπόψη τήν παραδοχή πού κάναμε στήν § 76, σύμφωνα μέ τήν ὁποία ἡ αὔξηση (μεταβολή) τῶν λογαρίθμων εἶναι, κατά προσέγγιση, ἀνάλογη πρός τήν αὔξηση τῶν ἀριθμῶν, καταρτίζουμε τήν ἀκόλουθη διάταξη:

Αὔξηση λογαρίθμου κατά 24 μ.ε'.δ.τ. φέρνει αὔξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατά 1

» » » 23 » » » » » » y;

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0{,}958.$$

Προσθέτοντας τώρα τό 0,958 στόν ἀριθμό 1792 βρίσκουμε 1792,958. Ὁ ἀριθμός ὅμως αὐτός ἔχει προφανῶς τά ἴδια ψηφία μέ τόν x καί μέ τήν ἴδια σειρά, πλήν ὅμως ἡ θέση τῆς ὑποδιαστολῆς στό x κανονίζεται ἀπό τό χαρακτηριστικό τοῦ λογx, πού ἐδῶ εἶναι 1.

Θά εἶναι λοιπόν: $x = 17,92958$.

Σημείωση. Ἡ διαφορά Δ τῶν ἀκραίων λογαρίθμων, ἀνάμεσα στούς ὁποίους περιέχεται ὁ λογx, ὀνομάζεται **«μεγάλη» διαφορά,** ἐνῶ ἡ διαφορά δ τοῦ μικρότερου λογαρίθμου ἀπό τό λογx ὀνομάζεται **«μικρή» διαφορά.**

2ο: **Νά βρεῖτε τό x, ἄν λογx = $\overline{3}$,47647.**

Λύση. Ἀπό τούς λογαριθμικούς πίνακες ἔχουμε:

$$\overline{3},47640 < \overline{3},47647 < \overline{3},47654$$

καί ἄρα

$$0,002995 < x < 0,002996.$$

Ἄν ἐργαστοῦμε, ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, ἔχουμε τήν ἀκόλουθη σύντομη διάταξη:

	$\overline{3},47647$	$\overline{3},47654$	ἀντιστοιχεῖ ὁ:	2996
	$\overline{3},47640$	$\overline{3},47640$	»	: 2995
Διαφορές:	δ = 7	Δ = 14		1

14	1
7	y;

$$y = 1 \times \frac{7}{14} = 0,5.$$

Ἔτσι τά σημαντικά ψηφία τοῦ x κατά σειρά εἶναι: 2, 9, 9, 5, 5. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμός x εἶναι ὁ 0,0029955, γιατί τό χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου του εἶναι $\overline{3}$.

Ἐφαρμογές τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων

§ 78. Ἐφαρμόζοντας τίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων καί χρησιμοποιώντας τούς λογαριθμικούς πίνακες μποροῦμε νά ἁπλουστεύσουμε πολλούς ἀριθμητικούς ὑπολογισμούς καί νά κάνουμε ἄλλους ὑπολογισμούς πού θά ἦταν πάρα πολύ δύσκολοι χωρίς τούς λογαρίθμους. Τά παρακάτω παραδείγματα καί ἰδιαίτερα τό δεύτερο, θά μᾶς πείσουν γιά τή σημασία τῶν λογαρίθμων στίς πρακτικές ἐφαρμογές.

Παράδειγμα 1ο: **Νά βρεῖτε τό x, ἄν εἶναι:** $$x = \frac{7,56 \times 4667 \times 567}{899,1 \times 0,00337 \times 23435} \quad (1)$$

Λύση. Λογαριθμίζοντας τήν (1) ἔχουμε:

$$\text{λογ}\, x = \text{λογ}\, 7,56 + \text{λογ}\, 4667 + \text{λογ}\, 567 - (\text{λογ}\, 899,1 + \text{λογ}\, 0,00337 + \text{λογ}\, 23435).$$

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε:

λογ 7,56 = 0,87852	λογ 899,1 = 2,95381
λογ 4667 = 3,66904	λογ 0,00337 = $\overline{3}$,52763
λογ 567 = 2,75358	λογ 23435 = 4,36986
7,30114	4,85130.

Μετά τήν ἀφαίρεση προκύπτει:

$$\text{λογ}\, x = 2,44984$$

Ἄρα: $$x = 281,73.$$

Παράδειγμα 2ο: **Νά ὑπολογίσετε, κατά προσέγγιση, τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:**

$$x = \frac{27,32 \times (1,04)^{20} \times \sqrt[5]{0,003}}{\sqrt[4]{0,0042} \times (345,6)^2} \quad (2)$$

Λύση. Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους τῶν μελῶν τῆς (2) ἔχουμε:

$$\text{λογ}x = (\text{λογ}\,27{,}32 + 20\cdot\text{λογ}\,1{,}04 + \frac{1}{5}\text{λογ}\,0{,}003) - \left(\frac{1}{4}\cdot\text{λογ}\,0{,}0042 + 2\,\text{λογ}\,345{,}6\right)$$

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε τούς λογαρίθμους καί ἐκτελοῦμε τίς πράξεις σύμφωνα μέ τήν ἑπόμενη διάταξη:

Βοηθητικές πράξεις

$$\text{λογ}\,(1{,}04) = 0{,}01703$$
$$\times 20$$
$$0{,}34060$$

. . . .

$$\text{λογ}\,0{,}003 = \overline{3}{,}47712$$

$$\frac{1}{5}\,\text{λογ}\,0{,}003 = \frac{\overline{3}{,}47712}{5} = \frac{\overline{5}+2{,}47712}{5} =$$
$$= \overline{1} + 0{,}49542 = \overline{1}{,}49542$$

. . . .

$$\text{λογ}\,0{,}0042 = \overline{3}{,}62325$$

$$\frac{1}{4}\text{λογ}\,0{,}0042 = \frac{\overline{3}{,}62325}{4} = \frac{\overline{4}+1{,}62325}{4} =$$
$$= \overline{1} + 0{,}40581 = \overline{1}{,}40581$$

. . . .

$$\text{λογ}\,345{,}6 = 2{,}53857$$
$$\times 2$$
$$5{,}07714$$

Τελικές πράξεις

$$\text{λογ}\,27{,}32 = 1{,}43648$$
$$20\cdot\text{λογ}\,(1{,}04) = 0{,}34060$$
$$\frac{1}{5}\cdot\text{λογ}\,(0{,}003) = \overline{1}{,}49542$$
$$\text{Ἄθροισμα} = 1{,}27250$$

. . . .

$$\frac{1}{4}\,\text{λογ}(0{,}0042) = \overline{1}{,}40581$$
$$2\cdot\text{λογ}\,345{,}6 = 5{,}07714$$
$$\text{Ἄθροισμα} = 4{,}48295$$

Ὥστε εἶναι:

$$\text{λογ}\,x = 1{,}27250 - 4{,}48295 =$$
$$= -3{,}21045 = \overline{4}{,}78955.$$

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε: $x = 0{,}000615957.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. 171. Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν:

1. 0,2507	5. 6,8372	9. 85,007
2. 45,72	6. 5278,37	10. 0,0004124
3. 0,003817	7. 63,347	11. 326,537
4. 107,3	8. 25234	12. 14,1606

172. Νά βρεθεῖ ὁ θετικός ἀριθμός x, ἄν:

1. $\text{λογ}\,x = 2{,}48001$	5. $\text{λογ}\,x = 4{,}87622$	9. $\text{λογ}\,x = 0{,}70020$
2. $\text{λογ}\,x = \overline{1}{,}96895$	6. $\text{λογ}\,x = 2{,}99348$	10. $\text{λογ}\,x = 1{,}66325$
3. $\text{λογ}\,x = 4{,}97534$	7. $\text{λογ}\,x = \overline{1}{,}79100$	11. $\text{λογ}\,x = \overline{4}{,}15050$
4. $\text{λογ}\,x = \overline{3}{,}69636$	8. $\text{λογ}\,x = \overline{2}{,}78000$	12. $\text{λογ}\,x = 5{,}25865.$

173. Νά βρεῖτε τό y, ἄν: $y = \frac{1}{2}\,\text{λογ}(4+\sqrt{7}) + \frac{1}{2}\,\text{λογ}(4-\sqrt{7}).$

174. Χρησιμοποιώντας τόν τύπο:

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν Ε ἑνός τριγώνου πού ἔχει πλευρές:

$$\alpha = 202{,}5\text{ m},\quad \beta = 180{,}2\text{ m}\quad \text{καί}\quad \gamma = 75{,}3\text{ m}\quad \left(\tau = \frac{1}{2}\ \text{περιμέτρου}\right).$$

175. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ x πού ὁρίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},$$

όπου $\alpha = 0{,}27355, \quad \beta = 29{,}534, \quad \gamma = 44{,}340.$

176. Νά προσδιορίσετε τό y, ἄν ξέρουμε ὅτι:

$$\log y = \log(7 + 5\sqrt{2}) + 8\log(\sqrt{2}+1) + 7\log(\sqrt{2}-1) + 2\log(3 - 2\sqrt{2}).$$

177. Τρεῖς ἀριθμοί α, x, y συνδέονται μέ τή σχέση:

$$\alpha x y^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ο) Νά ὑπολογίσετε τό y, ἄν εἶναι $\alpha = 0{,}3$ καί $x = 1{,}8215$.

2ο) Νά ὑπολογίσετε τό x, ἄν εἶναι $\alpha = 10$ καί $y = 0{,}5242$.

178. Σέ μία γεωμετρική πρόοδο εἶναι: $\alpha_1 = 3$, $\omega = 8$ καί $\nu = 13$. Νά βρεθεῖ ὁ 13ος ὅρος καί τό ἄθροισμα τῶν 13 πρώτων ὅρων της.

179. Νά ἐπαληθεύσετε τίς ἰσότητες (χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς πίνακες):

1. $\sqrt{\dfrac{577{,}8 \times 69}{0{,}75 \times 3{,}107}} = 6{,}431,$ 2. $\sqrt{8{,}5273 \times \sqrt[3]{51{,}3388}} = 5{,}62962$

3. $\sqrt[3]{\dfrac{4{,}632 \times (2{,}96)^2}{81{,}3 \times 32{,}41}} = 0{,}225855,$ 4. $\dfrac{312{,}415 \times \sqrt[3]{3{,}5781^2}}{17{,}1826^2 \times \sqrt[10]{0{,}002987^3}} = 14{,}1606.$

III. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 79. **Ὁρισμοί.—Ἐκθετική ἐξίσωση** *ὀνομάζουμε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:*

$$E(x) = F(x) \tag{1}$$

ὅπου $E(x)$, $F(x)$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x, ὅταν σ' ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά μέλη της ἐμφανίζεται ὁ ἄγνωστος x εἴτε κάποια συνάρτηση τοῦ ἀγνώστου σέ ἐκθέτη δυνάμεως μέ βάση **θετικό** *ἀριθμό.*

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$3^x = 81, \quad 5^{x^2-3x} = 625, \quad 7^{2-3|x|} = 1, \quad x^{x^2-7x+12} = 1 \ (x > 0)$$

$$x^x - x^{-x} = 3 + 3x^{-x} \ (x > 0), \quad (3x+1)^{2x-3} = 1 \text{ μέ: } x > -\frac{1}{3}$$

εἶναι ἐκθετικές.

Ἐπίλυση *τῆς ἐκθετικῆς ἐξισώσεως (1) λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτῆς, δηλαδή τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου της πού τήν ἱκανοποιοῦν.*

Οἱ πιό συνηθισμένες ἐκθετικές ἐξισώσεις ἔχουν ἤ μποροῦν νά πάρουν μία ἀπό τίς ἑπόμενες μορφές:

α΄) **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:**

$$\boxed{\alpha^x = \beta} \tag{α}$$

ὅπου $\alpha, \beta \in R^+$ καί $\alpha \neq 1$.

Γιά νά ἐπιλύσουμε αὐτή τήν ἐκθετική ἐξίσωση διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση I— *Ὁ β εἶναι δύναμη τοῦ α ἤ μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ δύναμη τοῦ α.*

Τότε, ἄν $\beta = \alpha^k$ θά ἔχουμε: $\alpha^x = \alpha^k$ καί συνεπῶς $x = k$.

Παράδειγμα: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3^x = 729$.**

Λύση. Ἐπειδή $729 = 3^6$, ἡ ἐξίσωση γράφεται: $3^x = 3^6$ καί δίνει $x = 6$.

Περίπτωση ΙΙ.— *Ὁ β δέν μπορεῖ νά μετατραπεῖ σέ δύναμη τοῦ α.*

Σ' αὐτή τήν περίπτωση λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς (α) ἔχουμε:

$$x \cdot \log\alpha = \log\beta \text{ καί συνεπῶς θά εἶναι } x = \frac{\log\beta}{\log\alpha}.$$

Παράδειγμα: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $2^x = \frac{5}{6}$.**

Λύση. Λαμβάνουμε τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως καί ἔχουμε:

$$x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 6 \text{ ἤ } x = \frac{\log 5 - \log 6}{\log 2} = \frac{-0{,}07918}{0{,}30103} = -0{,}26303.$$

β') **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:**

$$\boxed{\alpha^{f(x)} = \beta} \qquad (\beta)$$

ὅπου f(x) εἶναι πραγμ. συνάρτηση τοῦ ἀγνώστου καί $\alpha, \beta \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$.

Προφανῶς γιά $f(x) = x$ ἔχουμε ἐκθετική ἐξίσωση τῆς προηγούμενης μορφῆς.

Γιά νά ἐπιλύσουμε ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (β) διακρίνουμε καί πάλι δύο περιπτώσεις, ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί α καί β μπορεῖ νά εἶναι ἤ νά μήν εἶναι δυνάμεις τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ.

Παράδειγμα 1ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3^{x^2-5x+11} = 243$.** (1)

Λύση. Ἐπειδή $243 = 3^5$, ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 11 = 5 \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Οἱ ρίζες τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, οἱ ὁποῖες εἶναι καί ρίζες τῆς ἐξισώσεως (1)

Παράδειγμα 2ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $7^{2-|3x|} = 1$.**

Λύση. Ἔχουμε:

$$7^{2-|3x|} = 1 = 7^0 \Longleftrightarrow 2 - |3x| = 0 \Longleftrightarrow |x| = \frac{2}{3} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{2}{3}.$$

Παράδειγμα 3ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $5^{3x-2} = 437$.** (1)

Λύση. Παίρνοντας τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχουμε:

$$(3x-2) \cdot \log 5 = \log 437 \text{ ἤ } 3x - 2 = \frac{\log 437}{\log 5} \text{ ἤ } 3x - 2 = \frac{2{,}64048}{0{,}69897}$$

ἤ $$3x - 2 = 3{,}77767 \text{ καί ἀπό αὐτή: } \mathbf{x = 1{,}92589}.$$

Παράδειγμα 4ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\alpha^{\beta^x} = \gamma$,** (1)

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$ καί $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$.

Λύση. Λαμβάνοντας τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς (1) ἔχουμε:

$$\beta^x \cdot \log\alpha = \log\gamma \text{ ἤ } \beta^x = \left(\frac{\log\gamma}{\log\alpha}\right) \qquad (2)$$

Ἀπό τή (2) λογαριθμίζοντας βρίσκουμε:

$$x \cdot \lambda o\gamma\, \beta = \lambda o\gamma \left(\frac{\lambda o\gamma\, \gamma}{\lambda o\gamma\, \alpha}\right)$$

ἤ

$$x = \frac{1}{\lambda o\gamma \beta} \cdot \lambda o\gamma \left(\frac{\lambda o\gamma\, \gamma}{\lambda o\gamma\, \alpha}\right) \qquad (3)$$

Γιά νά ἔχει νόημα τό δεύτερο μέλος τῆς (3) πρέπει νά εἶναι $\frac{\lambda o\gamma\, \gamma}{\lambda o\gamma\, \alpha} > 0$. Αὐτό ὅμως ἰσχύει ὅταν οἱ λογγ καί λογα εἶναι **ὁμόσημοι**, δηλ. ὅταν οἱ ἀριθμοί α καί γ εἶναι >1 ἤ ὅταν καί οἱ δυό τους εἶναι <1.

γ΄) **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:**

$$\boxed{\alpha^{f(x)} = \alpha^{g(x)}} \qquad (\gamma)$$

ὅπου f(x), g(x) εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x καί $\alpha \in R^+$ μέ $\alpha \neq 1$.

Ἡ ἐκθετική ἐξίσωση (γ) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $f(x) = g(x)$. Πράγματι, ἄν x_0 εἶναι μία ρίζα τῆς (γ), τότε, γιά $0 < \alpha \neq 1$, ἔχουμε:

$$\alpha^{f(x_0)} = \alpha^{g(x_0)} \Longleftrightarrow f(x_0) \cdot \lambda o\gamma\, \alpha = g(x_0) \cdot \lambda o\gamma\, \alpha \Longleftrightarrow f(x_0) = g(x_0).$$

Παράδειγμα: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $100 \cdot 10^x = 100^{\frac{5}{x}}$** **(1)**

Λύση. Ἐπειδή $100 = 10^2$ ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $10^{2+x} = 10^{\frac{10}{x}}$. Ἡ τελευταία ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $2 + x = \frac{10}{x} \Longleftrightarrow x^2 + 2x - 10 = 0$. Οἱ ρίζες τῆς τελευταίας ἐξισώσεως εἶναι: $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, οἱ ὁποῖες εἶναι καί ρίζες τῆς (1).

δ΄) **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:**

$$\boxed{\alpha^{f(x)} = \beta^{g(x)}} \qquad (\delta)$$

ὅπου f(x), g(x) εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x καί $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι γιά $g(x) = 1$ ἔχουμε ἐκθετική ἐξίσωση τῆς μορφῆς (β), ἐνῶ ἄν ὁ β εἶναι ἀκέραιη δύναμη τοῦ α, τότε ἔχουμε ἐκθετική ἐξίσωση τῆς προηγούμενης μορφῆς. Ἔστω, λοιπόν, τώρα ὅτι ὁ β δέν εἶναι ἀκέραιη δύναμη τοῦ α, τότε ἡ ἐκθετική ἐξίσωση (δ) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $\mathbf{f(x) = g(x) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta}$.

Πράγματι, ἄν x_0 εἶναι μία ρίζα τῆς (δ), τότε γιά $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$ ἔχουμε:

$$\alpha^{f(x_0)} = \beta^{g(x_0)} \Longleftrightarrow f(x_0) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \alpha = g(x_0) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta \Longleftrightarrow f(x_0) = g(x_0) \cdot \lambda o\gamma_\alpha \beta.$$

Παράδειγμα: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $2^{x^2-5} = 3^{2x}$** **(1)**

Λύση. Παίρνοντας τούς λογαρίθμους ὡς πρός βάση 2 καί τῶν δύο μελῶν τῆς (1) ἔχουμε·

$$\lambda o\gamma_2(2^{x^2-5}) = \lambda o\gamma_2(3^{2x}) \Longrightarrow x^2 - 5 = 2x\lambda o\gamma_2 3 \Longrightarrow x^2 - (2\lambda o\gamma_2 3)x - 5 = 0 \text{ καί συνεπῶς:}$$

$$x_{1,2} = \lambda o\gamma_2 3 \pm \sqrt{(\lambda o\gamma_2 3)^2 + 5}.$$

ε΄) **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:**

$$\boxed{f(\alpha^x) = g(\alpha^x)} \qquad (\varepsilon)$$

ὅπου $\alpha \in R^+ - \{1\}$.

Εἰδικά θά μελετήσουμε παρακάτω ἐξισώσεις τῶν μορφῶν:

$$\varepsilon_1: \quad A\alpha^{2x} + B\alpha^x + \Gamma = 0,$$

$$\varepsilon_2: \quad A_1\alpha^{\mu_1 x + \nu_1} + A_2\alpha^{\mu_2 x + \nu_2} + \cdots + A_k\alpha^{\mu_k x + \nu_k} = 0,$$

ὅπου $\mu_i, \nu_i \in Z$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἀνάγονται στή μορφή (α) μέ τήν ἀντικατάσταση:

$$\boxed{\alpha^x = y}$$

Παράδειγμα 1ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$.** (1)

Λύση. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ καί ἄν τεθεῖ: $2^x = y$, ἔχουμε:

$$y^2 - 7y - 8 = 0$$

Οἱ ρίζες αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $y_1 = 8$ καί $y_2 = -1$.

Ἄρα θά εἶναι:

$$2^x = 8 \quad (2) \qquad \text{καί} \qquad 2^x = -1 \quad (3).$$

Ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται $2^x = 2^3$ καί δίνει: $x = 3$.

Ἡ ἐξίσωση (3) εἶναι ἀδύνατη, ἐπειδή $2^x > 0$ γιά κάθε $x \in R$.

Ἡ (1) λοιπόν ἔχει μία μοναδική λύση, τή: $x = 3$.

Παράδειγμα 2ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128$.** (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται: $3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + \dfrac{3^x}{3} - \dfrac{3^x}{9} = 128$.

Θέτουμε $3^x = y$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128 \Longrightarrow 128y = 1152 \Longrightarrow y = 9.$$

Τότε ἔχουμε: $\qquad 3^x = 9 = 3^2 \Longrightarrow x = 2$.

Παράδειγμα 3ο: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$.** (1)

Λύση. Ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3 \cdot 5^x \cdot 5 - 80 = 0$$

ἤ

$$(5^x)^2 + 75 \cdot 5^x - 400 = 0. \qquad (2)$$

Θέτουμε $5^x = y$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$y^2 + 75 \cdot y - 400 = 0 \Longrightarrow y_1 = 5, \ y_2 = -80.$$

Ἄρα ἡ (2) διασπᾶται στίς ἐξισώσεις:

$$5^x = 5 \quad , \quad 5^x = -80.$$

Ἡ πρώτη δίνει: $x = 1$.

Ἡ δεύτερη εἶναι ἀδύνατη, ἐπειδή $5^x > 0$ γιά κάθε $x \in R$.

ζ) Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\boxed{f(\alpha^x) = g(\beta^x)} \qquad (\zeta)$$

ὅπου $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$ καί $\alpha \neq \beta$.

Συνήθεις περιπτώσεις τῆς παραπάνω μορφῆς εἶναι οἱ ἑξῆς:

$$\zeta_1: \quad A \cdot \alpha^x = B \cdot \beta^x \qquad (A \neq 0)$$

$$\zeta_2: \quad A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0. \qquad (A \neq 0)$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἀνάγονται στή μορφή (α) μέ τήν ἀντικατάσταση:

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y} \qquad (1)$$

Πράγματι, ἡ ζ_1 μέ τήν παραπάνω ἀντικατάσταση ἀνάγεται στήν ἐξίσωση: $y = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{B}{A}$, ἐνῶ ἡ ζ_2, ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη της μέ τό β^{2x}, γίνεται

$$\zeta'_2: \quad A\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

καί μέ τήν ἀντικατάσταση $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$ ἀνάγεται στήν ἐξίσωση: $Ay^2 + By + \Gamma = 0$.

Ἄν τώρα $B^2 - 4A\Gamma \geqq 0$, ἡ τελευταία ἐξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες y_1, y_2. Γιά τίς τιμές $y = y_1$, $y = y_2$ ἡ (1) δίνει τίς ἐκθετικές ἐξισώσεις: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2$, οἱ ὁποῖες λύνονται κατά τά γνωστά.

Παράδειγμα 1ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$3\cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6\cdot 5^{x-3} \qquad (1)$$

Λύση. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$3\cdot\frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6\cdot\frac{5^x}{5^3}$$

ἤ

$$2^x\cdot\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x\cdot\left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

ἤ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

ἤ

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

Ἄρα εἶναι: $\quad x = 4.$

Παράδειγμα 2ο: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $3\cdot 9^x - 5\cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$. (1)

Λύση. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $2\cdot 2^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 3^{2x} = 0$.

Διαιρώντας καί τά δύο μέλη διά 3^{2x}, λαμβάνουμε τήν ἰσοδύναμη ἐξίσωση:

$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0 \qquad (2)$$

Ἄν τώρα θέσουμε: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, τότε ἡ (2) γράφεται: $2y^2 - 5y + 3 = 0$ (3)

Ἡ (3) ἔχει ρίζες: $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 1$. Ἄρα ἡ (2), συνεπῶς καί ἡ (1), διασπᾶται στίς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (α):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

Ὥστε τό σύνολο τῶν ριζῶν τῆς (1) εἶναι: $\{-1, 0\}$.

* η') **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :**

$$\boxed{A\cdot\alpha^x + B\cdot\beta^x = \Gamma} \qquad (\eta)$$

ὅπου $\alpha, \beta \in R^+ - \{1\}$ μέ $\alpha\beta = 1$.

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές μέ τήν ἀντικατάσταση: $\alpha^x = y$ ἀνάγονται στή μορφή (α). Πράγματι, ἐπειδή $\alpha\beta = 1$ ἔχουμε: $\alpha^x\beta^x = 1$ καί συνεπῶς $\beta^x = \frac{1}{\alpha^x} = \frac{1}{y}$, ὁπότε ἡ (η) γράφεται:

$$Ay + \frac{B}{y} = \Gamma \Rightarrow Ay^2 - \Gamma y + B = 0 \qquad (\eta')$$

Ἄν τώρα $\Gamma^2 - 4AB \geq 0$ ἡ τελευταία ἐξίσωση δίνει δύο πραγματικές ρίζες y_1, y_2, ὁπότε ἡ (η') διασπᾶται στίς ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (α):

$$\alpha^x = y_1, \qquad \alpha^x = y_2.$$

Παράδειγμα: **Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:** $3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2\left(\frac{2}{3}\right)^x = 5.$ **(1)**

Λύση. Θέτουμε $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ καί ἡ (1) γράφεται: $3y + \frac{2}{y} = 5$ (2)

Ἡ (2) ἔχει ρίζες: $y_1 = \frac{2}{3}$, $y_2 = 1$ καί συνεπῶς ἔχουμε:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^0$$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι : $\{-1, 0\}$.

Σημείωση. Μία πιό γενική μορφή τῆς (η) εἶναι ἡ ἐκθετική ἐξίσωση τῆς μορφῆς: $A\cdot\alpha^x + B\cdot\beta^x = \Gamma\cdot\gamma^x$ μέ $\alpha\beta = \gamma^2$ καί $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$, ἀλλά $\alpha, \beta \neq 1$.

Γιά $\gamma = 1$ παίρνουμε τήν ἐκθετική ἐξίσωση (η). Γιά $\gamma \neq 1$ ἡ ἐξίσωση $A\cdot\alpha^x + B\cdot\beta^x = \Gamma\cdot\gamma^x$ γράφεται: $A\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^x + B\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^x = \Gamma$ καί λύνεται κατά τά γνωστά.

* θ') **Ἐκθετικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :**

$$\boxed{\{f(x)\}^{g(x)} = 1} \qquad (\theta)$$

ὅπου f(x), g(x) εἶναι συναρτήσεις τοῦ x μέ τόν περιορισμό: $f(x) > 0$.

Οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς ἔχουν προφανῶς λύσεις τίς λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

(i) $f(x) = 1$

(ii) $g(x) = 0 \wedge f(x) \neq 0$ (ἀκριβέστερα $f(x) > 0$).

Παράδειγμα: **Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $(x^2 - 3x + 2)^{x^2-2x} = 1$.** **(1)**

Λύση. Ἐδῶ ἔχουμε $f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)\cdot(x-2)$ καί τό σύνολο λύσεων τῆς $f(x) > 0$ εἶναι : $\{x \in R: -\infty < x < 1, \quad 2 < x < +\infty\}$.

Ὕστερα ἀπό αὐτό ἔχουμε:

(i) Οἱ ρίζες τῆς $x^2 - 3x + 2 = 1 \Longleftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ εἶναι προφανῶς λύσεις τῆς (1).

(ii) Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{array}{r} x^2-2x=0 \\ x^2-3x+2>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x(x-2)=0 \\ (x-1)(x-2)>0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=0$$

εἶναι ἐπίσης λύση τῆς (1).

Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι: $\left\{0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Σχόλιο. Περιπτώσεις σάν τήν: $x^2-3x+2=-1 \wedge x^2-2x=2k$, $k\in\mathbf{Z}$ δέν ἐξετάζουμε ἐδῶ (βλ. σχετικῶς ὁρισμό ἐκθετικῆς ἐξισώσεως § 79).

Παρατήρηση. Ἡ ἐξίσωση $\{f(x)\}^{f(x)}=\beta$, ὅπου $f(x)$ εἶναι γνωστή συνάρτηση τοῦ x μέ $f(x)>0$ λύνεται ἄν τό β ἔχει ἤ μπορεῖ νά πάρει τή μορφή: $\beta=\alpha^{\alpha}$, $(\alpha>0)$. Τότε θά ἔχουμε: $\{f(x)\}^{f(x)}=\alpha^{\alpha}$ καί συνεπῶς θά εἶναι $f(x)=\alpha$.

Παραδείγματα: **Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:**

$$\alpha)\quad x^x=4 \quad , \quad \beta)\quad (x^2-7x+15)^{x^2-7x+15}=27.$$

Λύση. α) Ἔχουμε: $x^x=4=2^2$ καί συνεπῶς $x=2$.

β) Ἔχουμε:

$$(x^2-7x+15)^{x^2-7x+15}=27=3^3 \Longleftrightarrow x^2-7x+15=3 \Longleftrightarrow x^2-7x+12=0 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=4.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **180.** Νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις:

1. $5^{\sqrt{x}}=625$, **2.** $3^{x^2-9x+11}=27$, **3.** $2^{x^2-2x}=8^{x-2}$

4. $3^x=81^{2-|x|}$, **5.** $27^{\frac{x+1}{x-2}}=3^{2x-4}$, **6.** $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{7x-3}$

181. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες ἐκθετικές ἐξισώσεις:

1. $2\cdot9^x-7\cdot3^x+3=0$, **2.** $3^x-4\sqrt{3^x}+3=0$, **3.** $2^x+\dfrac{6}{2^x}=5$,

4. $2\cdot4^x+3\cdot9^x=5\cdot6^x$, **5.** $9^x+6^x=4^x$, **6.** $x^x=x$.

182. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τίς ἐξισώσεις:

1. $3^{x+1}-2^x=3^{x-1}+2^{x+3}$, **2.** $7^{3x+2}+4^{x+2}=7^{3x+4}+4^{x+3}$, **3.** $2^{2x}=3^{x+1}$,

4. $5^{x-2}-3\cdot2^{x-3}=12\cdot5^{x-3}-2^x$, **5.** $(x^2-5x+6)^{x^2-2x}=1$, **6.** $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$

★Ὁμάδα Β΄. **183.** Νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις:

1. $2^{3^x}=512$, **2.** $18^{8-4x}=(54\sqrt{2})^{3x-2}$, **3.** $(x^2-1)e^{\log(x-2)}=\log e^{x+1}$,

4. $5^{x^2-3x}=625$ **5.** $e^x-e^{-x}=\dfrac{8}{3}$, **6.** $3^{x+2}+9^{x-1}=1458$.

184. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες ἐκθετικές ἐξισώσεις:

1. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$, **2.** $7^{x+\frac{4}{3}}-5^{3x}=2\left(7^{x+\frac{1}{3}}+5^{3x-1}\right)$

3. $e^{2x}-3e^x+2=0$, **4.** $2^{2x-1}+3^x+4^{x+\frac{1}{2}}-9^{\frac{x}{2}+1}=0$.

185. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τίς ἐξισώσεις:

1. $x^x-x^{-x}=3(1+x^{-x})$, **2.** $3^{x-1}-\dfrac{15}{3^{x+1}}+3^x-\dfrac{21}{3^{x+1}}=0$,

3. $\sqrt{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}$, 4. $x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$.

Ὑπόδειξη. Στήν (4) νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις: **(i)** $x \geqq 3$, **(ii)** $x < 3$.

186. Ἄν α, β, γ εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($A = 90^0$), νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐκθετική ἐξίσωση:

$$\beta^x + \gamma^x = \alpha^x$$

ἔχει ἀκριβῶς μία λύση στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογή: $\beta = 3, \quad \gamma = 4, \quad \alpha = 5.$

Ὑπόδειξη. Ἀφοῦ βρεῖτε τήν (προφανή) λύση $x_0(= ;)$ νά συνεχίσετε μέ τή μέθοδο τῆς *«εἰς ἄτοπον»* ἀπαγωγῆς παίρνοντας τίς περιπτώσεις: **(i)** $x > x_0$, καί **(ii)** $x < x_0$.

187. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ τέτοιοι, ὥστε $(\alpha - \beta)(\alpha - 1)(2\alpha - 1) \neq 0$ καί ὁ β εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $x^2 - \alpha x - \alpha\beta = 0$, νά προσδιορίσετε τά α, β καί x ἄν ξέρουμε ὅτι ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις:

$$\alpha^{x^2-\alpha x-\alpha\beta} = \beta^{x^2+\beta x+\alpha^2}, \quad x + \beta + 2\alpha = 0.$$

IV. ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 80 **Ὁρισμοί.**—*Ὀνομάζουμε* **σύστημα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων** *μέ δύο ἤ περισσότερους ἀγνώστους, κάθε σύστημα ἐξισώσεων, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία τουλάχιστο εἶναι ἐκθετική.*

Οἱ τιμές τῶν ἀγνώστων, γιά τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, λέμε ὅτι ἀποτελοῦν τή **λύση** τοῦ συστήματος.

Ἡ ἐπίλυση τῶν ἐκθετικῶν συστημάτων στηρίζεται στίς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων καί στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

Παραδείγματα: 1ο. **Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:**

$$4^x \cdot 2^{y-2} = 32 \qquad (1)$$
$$3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27. \qquad (2)$$

Λύση. Οἱ (1) καί (2) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} 2^{2x} \cdot 2^{y-2} &= 2^5 \\ 3^{x+2} \cdot 3^{y-4} &= 3^3 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 2^{2x+y-2} &= 2^5 \\ 3^{x+y-2} &= 3^3 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 2x + y &= 7 \\ x + y &= 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (x, y) = (2, 3).$$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων: (x, y) τοῦ συστήματος εἶναι τό μονοσύνολο: $\{(\mathbf{2}, \mathbf{3})\}$.

2ο. **Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:**

$$3^x \cdot 4^y = 3981312 \qquad (1)$$
$$2^y \cdot 5^x = 400000. \qquad (2)$$

Λύση. Λογαριθμίζοντας καί τά δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) βρίσκουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$x \cdot \lambda o\gamma\, 3 + y \cdot \lambda o\gamma\, 4 = \lambda o\gamma\, 3981312 \qquad (1')$$
$$y \cdot \lambda o\gamma\, 2 + x \cdot \lambda o\gamma\, 5 = \lambda o\gamma\, 4000000 \qquad (2')$$

Θέτοντας $\lambda o\gamma\, 4 = \lambda o\gamma\, 2^2 = 2\lambda o\gamma\, 2$ καί πολλαπλασιάζοντας τά μέλη τῆς (2′) ἐπί 2, βρίσκουμε:

$$x\, \lambda o\gamma\, 3 + 2y \cdot \lambda o\gamma\, 2 = \lambda o\gamma\, 3981312 \qquad (1'')$$
$$2x\, \lambda o\gamma\, 5 + 2y \cdot \lambda o\gamma\, 2 = 2\lambda o\gamma\, 400000 \qquad (2'')$$

Λύνοντας τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1″) καί (2″) βρίσκουμε:

$$x = \frac{2\lambda o\gamma\, 400000 - \lambda o\gamma\, 3981312}{2\lambda o\gamma\, 5 - \lambda o\gamma\, 3} = \frac{2 \cdot \lambda o\gamma(2^2 \cdot 10^5) - \lambda o\gamma(2^{14} \cdot 3^5)}{2\lambda o\gamma\, 5 - \lambda o\gamma\, 3} =$$

$$= \frac{10 - 10\lambda o\gamma\, 2 - 5\lambda o\gamma\, 3}{2 - 2\lambda o\gamma\, 2 - \lambda o\gamma\, 3} = 5.$$

Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή αὐτή τοῦ x στή (2) βρίσκουμε:

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^5}{5^5} = 2^7,$$

ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε: $y = 7$.

Ἄρα τό σύνολο λύσεων: (x, y) τοῦ συστήματος πού μᾶς δόθηκε εἶναι τό: $\{(5, 7)\}$.

3ο. **Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:**

$$x^y = y^x \quad (1)$$
$$x^3 = y^2 \quad (2)$$

Λύση. Μία προφανής λύση τοῦ συστήματος εἶναι τό ζεῦγος: $(x, y) = (1, 1)$. Ὑποθέτοντας τώρα ὅτι: $x > 0$, $y > 0$ μέ $x \neq 1$ καί $y \neq 1$ καί λογαριθμίζοντας * καί τά δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) βρίσκουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$y \cdot \text{λογ}\, x = x \cdot \text{λογ}\, y \quad (1')$$
$$3 \cdot \text{λογ}\, x = 2 \cdot \text{λογ}\, y. \quad (2')$$

Διαιρώντας κατά μέλη τίς (1΄) καί (2΄) ἔχουμε: $\frac{y}{3} = \frac{x}{2} \Longrightarrow y = \frac{3x}{2}$ (3)

Θέτοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ y στή (2) ἔχουμε:

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \text{ἤ} \quad x^3 = \frac{9}{4}x^2$$

ἤ $x^2\left[x - \frac{9}{4}\right] = 0$, καί ἐπειδή ὑποθέσαμε $x > 0$ ἔπεται: $x = \frac{9}{4}$.

Θέτοντας τήν τιμή αὐτή τοῦ x στήν (3) λαμβάνουμε:

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Ἑπομένως οἱ ρίζες τοῦ συστήματος εἶναι τά ζεύγη:

$$(\mathbf{x = 1, y = 1}), \quad \left(\mathbf{x = \frac{9}{4}, y = \frac{27}{8}}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **188.** Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$

189. Νά προσδιορίσετε τά $x, y \in \mathbf{R}^+$ γιά τά ὁποῖα ἰσχύουν:

1. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54 \\ 3^x \cdot 2^y = 24 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3^{x^y - y^x} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^y = y^x \\ y = \alpha x, \ (0 < \alpha \neq 1) \end{cases}$

★Ὁμάδα Β΄. **190.** Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} 3^{\frac{x-y}{2}} - 3^{\frac{x-y}{4}} = 6 \\ 2^{\frac{x+y}{3}} - 2^{\frac{x+y}{6}} = 2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^{\nu} \\ y^{x+y} = x^{2\nu} \cdot y^{\nu} \end{cases}$, $\nu \in \mathbf{N}$,

---

* Ἡ λογαρίθμιση ἐπιτρέπεται, ἐπειδή $x \neq 1$ καί $y \neq 1$, γιατί ἀλλιῶς τό σύστημα πού θά προκύψει δέν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ἀρχικό.

191. Νά ἐπιλύσετε καί νά διερευνήσετε τά παρακάτω συστήματα:

1. $\begin{matrix} \alpha^x = \beta^y \\ x^y = y^x \end{matrix}$ 2. $\begin{matrix} \alpha^x = \beta^y \\ x^\alpha = y^\beta \end{matrix}$ 3. $\begin{matrix} x^\alpha = y^\beta \\ x^y = y^x \end{matrix}$

192. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες καί θετικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left\{x^y = y^x \ \wedge \ x^x = y^{x+2y}\right\}.$$

193. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικές λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\left\{z^x = y^{2x} \ \wedge \ 2^{z-1} = 4^x \ \wedge \ x + y + z = 16\right\}.$$

V. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 81. Ὁρισμοί.—α') Λογαριθμική ἐξίσωση *ὀνομάζουμε κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς:*

$$E(x) = F(x) \qquad (1)$$

ὅπου $E(x)$, $F(x)$ εἶναι (πραγματικές) συναρτήσεις τοῦ x, ὅταν σ' ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά μέλη της ἐμφανίζεται ὁ λογάριθμος τοῦ ἀγνώστου εἴτε ὁ λογάριθμος συναρτήσεων τοῦ ἀγνώστου.

Ἔτσι, π.χ. οἱ ἐξισώσεις:

$$3\lambda o\gamma x - \frac{1}{2}\lambda o\gamma(2x+1) = \lambda o\gamma\sqrt{2x-1} + 2, \quad x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}} = 100, \quad \lambda o\gamma_3 x \cdot \lambda o\gamma_9 x = 2,$$

εἶναι λογαριθμικές.

Ἐπίλυση *μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτῆς,* δηλαδή *τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου της, οἱ ὁποῖες τήν ἱκανοποιοῦν.*

Ἡ ἐπίλυση τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων, γι' αὐτό συνιστοῦμε στόν ἀναγνώστη νά ἀνατρέξει γιά μιά ἀκόμη φορά στόν πίνακα τῆς σελίδας 89.

Στίς περισσότερες φορές ἡ ἐπίλυση μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται σέ ἐπίλυση ἐξισώσεων πού ἔχουν τίς ἀκόλουθες μορφές:

(i) $\lambda o\gamma x = \gamma$, (ii) $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, \alpha$, (iii) $\lambda o\gamma\, f(x) = \lambda o\gamma\, \alpha$,
(iv) $\lambda o\gamma_\beta\, f(x) = \lambda o\gamma_\beta g(x)$,

ὅπου α εἶναι γνωστός θετικός ἀριθμός, $f(x)$ καί $g(x)$ γνωστές συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου μέ τόν περιορισμό $f(x), g(x) > 0$ καί β εἶναι ἡ βάση τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος ($0 < \beta \neq 1$).

Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ λογάριθμου καί ἀπό τήν πρώτη ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων προκύπτει τώρα ὅτι:

(i) Ἡ ἐξίσωση $\lambda o\gamma\, x = \gamma$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $x = 10^\gamma$
(ii) Ἡ » $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, \alpha$ » μέ τό σύστημα: $x = \alpha, \alpha > 0$
(iii) Ἡ » $\lambda o\gamma\, f(x) = \lambda o\gamma\, \alpha$ » » » » : $f(x) = \alpha, \alpha > 0$
(iv) Ἡ » $\lambda o\gamma_\beta f(x) = \lambda o\gamma_\beta g(x)$ » » » : $f(x) = g(x), g(x) > 0$.

Σημείωση. Ἄν σέ μία λογαριθμική ἐξίσωση οἱ λογάριθμοι εἶναι μέ διαφορετικές βάσεις, πρέπει νά τούς μετατρέπουμε, ὥστε ὅλοι νά εἶναι μέ τήν ἴδια βάση.

Παραδείγματα: **1ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ λογαριθμική ἐξίσωση:**

$$\lambda o\gamma(4x-1)=2\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma(x^2-1) \quad (1)$$

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{4x-1>0 \ \wedge \ x^2-1>0 \ \wedge \ \lambda o\gamma(4x-1)=\lambda o\gamma 4(x^2-1)\right\} \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν:

$$4x-1=4(x^2-1) \Longleftrightarrow 4x^2-4x-3=0 \Longrightarrow x_1=\frac{3}{2}, \quad x_2=-\frac{1}{2}$$

Ἀπ' αὐτές μόνο ἡ πρώτη ἱκανοποιεῖ καί τίς δύο ἀνισώσεις τοῦ συστήματος (2).

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μία μόνο ρίζα, τήν: $\mathbf{x=\frac{3}{2}}$.

2ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ λογαριθμική ἐξίσωση:

$$\frac{1}{2}\lambda o\gamma(x+2)+\lambda o\gamma\sqrt{x-3}=1+\lambda o\gamma\sqrt{3} \quad (1)$$

Λύση. Ἐπειδή $\frac{1}{2}\lambda o\gamma(x+2)=\lambda o\gamma\sqrt{x+2}$ καί $1=\lambda o\gamma 10$ ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{x+2>0 \wedge x-3>0 \wedge \lambda o\gamma(\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-3})=\lambda o\gamma(10\cdot\sqrt{3})\right\} \quad (2)$$

Οἱ δύο πρῶτες σχέσεις τοῦ (2) συναληθεύουν γιά: $x>3$ (3)

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν:

$$\sqrt{(x+2)\cdot(x-3)}=10\cdot\sqrt{3} \Longleftrightarrow (x+2)(x-3)=300 \Longleftrightarrow x^2-x-306=0.$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση βρίσκουμε: $x_1=18$, $x_2=-17$.

Ἀπ' αὐτές μόνο ἡ πρώτη ἱκανοποιεῖ τήν (3).

Συνεπῶς ἡ (1) ἔχει ὡς (μοναδική) λύση τήν: $\mathbf{x=18}$.

3ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\sqrt{x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}}}=10.$ (1)

Λύση. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{x>0 \ \wedge \ x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}}=100\right\} \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν:

$$\lambda o\gamma\sqrt{x}\cdot\lambda o\gamma x=\lambda o\gamma 100 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(\lambda o\gamma x)^2=2 \Longleftrightarrow (\lambda o\gamma x)^2=4.$$

Ἄρα τό σύστημα (2) διασπᾶται στά συστήματα:

$$\left\{x>0 \wedge \lambda o\gamma x=2\right\} \text{ καί } \left\{x>0 \wedge \lambda o\gamma x=-2\right\}.$$

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\lambda o\gamma x=2$ ἔχουμε: $\lambda o\gamma x=2=\lambda o\gamma 100$, ἄρα $x=100$.

Ἀπό τήν ἐξίσωση $\lambda o\gamma x=-2$ ἔχουμε: $\lambda o\gamma x=-2=\lambda o\gamma 0{,}01$, ἄρα $x=0{,}01$.

Ὥστε τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι: $\left\{\mathbf{10^{-2}, 10^{2}}\right\}$.

4ο. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\lambda o\gamma_3 x\cdot\lambda o\gamma_9 x=2$ (1)

Λύση. Ἐπειδή $\lambda o\gamma_9 x=\lambda o\gamma_{3^2} x=\frac{1}{2}\lambda o\gamma_3 x$, ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left\{x>0 \ \wedge \ \frac{1}{2}(\lambda o\gamma_3 x)^2=2\right\} \quad (2)$$

Ἡ ἐξίσωση τοῦ συστήματος (2) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν: $(\lambda o\gamma_3 x)^2=4$.

Ἄρα τό σύστημα (2) διασπᾶται στά συστήματα:

$$\{x > 0 \wedge \log_3 x = 2\} \quad \text{καί} \quad \{x > 0 \wedge \log_3 x = -2\}.$$

Ἐπιλύνοντας τά παραπάνω συστήματα, ὅπως καί στό προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ὅτι τό σύνολο λύσεων τῆς (1) εἶναι: $\{3^{-2}, 3^2\}$.

* **β΄) Λογαριθμικό σύστημα** *ὀνομάζουμε κάθε σύστημα τοῦ ὁποίου μία τουλάχιστο ἀπό τίς ἐξισώσεις του εἶναι λογαριθμική.*

Ἔτσι, π.χ. τά συστήματα:

$$\left.\begin{aligned} \log x + \log y &= \log 14 \\ 3x - y &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} \log_y x + \log_x y &= 2 \\ x^2 + y &= 12 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x^{\log y + 1} &= y^{\log x + 2} \\ y^{\sqrt{x+2}} &= x^{y-2} \end{aligned}\right\}$$

εἶναι λογαριθμικά.

Ἐπίλυση *ἑνός λογαριθμικοῦ συστήματος λέγεται ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων αὐτοῦ,* δηλαδή *τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων του, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν ὅλες τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.*

Ἡ ἐπίλυση τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων στηρίζεται στίς ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων καί στή θεωρία ἐπιλύσεως λογαριθμικῶν ἐξισώσεων πού ἐκθέσαμε παραπάνω.

Παραδείγματα: 1ο. **Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:**

$$\{\log x + \log y = \log 14, \quad 3x - y = 1\} \tag{1}$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί. Ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται: $\log(x \cdot y) = \log 14 \iff x \cdot y = 14$, ὁπότε τό (1) ἰσοδυναμεῖ μέ τό σύστημα:

$$\{3x - y = 1 \wedge xy = 14\} \tag{2}$$

Λύνουμε τό σύστημα (2) καί, ἐπειδή πρέπει $x > 0$, $y > 0$, βρίσκουμε: $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, 6\right)$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων (x, y) τοῦ (1) εἶναι τό μονοσύνολο:

$$\left\{\left(\frac{7}{3}, 6\right)\right\}.$$

2ο. **Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:**

$$\{\log_y x + \log_x y = 2 \wedge x^2 + y = 12\}. \tag{1}$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί καί διάφοροι ἀπό τό 1. Ὥστε: $0 < x, y \neq 1$.

Ἐπειδή $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$ (βλ. Πόρισμα 1, § 65), ἡ πρώτη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται:

$$\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 2 \iff \log^2_y x - 2\log_y x + 1 = 0 \iff (\log_y x - 1)^2 = 0$$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση ἔχουμε: $\log_y x = 1$, ὁπότε: $x = y$ (2)

Ἔτσι ἔχουμε τώρα νά ἐπιλύσουμε τό ἰσοδύναμο σύστημα:

$$\{x^2 + y = 12 \wedge x = y\} \tag{3}$$

Λύνουμε τό σύστημα (3) καί ἐπειδή πρέπει $x > 0$, $y > 0$, βρίσκουμε: $(x, y) = (3, 3)$.

Ἄρα τό (1) ἔχει, ὡς (μοναδική) λύση, τήν: $(x, y) = (3, 3)$.

3ο. **Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:**

$$x^{\lambda o \gamma y+1} = y^{\lambda o \gamma x+2} \qquad (1)$$

$$y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2} \qquad (2)$$

Λύση. Πρῶτα-πρῶτα οἱ x καί y ὀφείλουν νά εἶναι θετικοί (γιατί;). Μία προφανής λύση τοῦ συστήματος εἶναι ἡ: $(x, y) = (1, 1)$. Ἔστω λοιπόν ὅτι $x \neq 1$ καί $y \neq 1$.

Ἀπό τήν (1) λογαριθμίζοντας λαμβάνουμε:

$$(\lambda o \gamma\, y + 1) \cdot \lambda o \gamma\, x = (\lambda o \gamma\, x + 2) \cdot \lambda o \gamma\, y$$

ἤ

$$\lambda o \gamma\, x\, \lambda o \gamma\, y + \lambda o \gamma\, x = \lambda o \gamma\, x\, \lambda o \gamma\, y + 2\, \lambda o \gamma\, y$$

ἤ

$$\lambda o \gamma\, x = \lambda o \gamma\, y^2$$

καί συνεπῶς:

$$x = y^2. \qquad (3)$$

Ἐξαιτίας τῆς (3) ἡ δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος γράφεται: $y^{\sqrt{y^2+2}} = y^{2(y-2)}$

Ἀπό τήν τελευταία ἐξίσωση, ἐπειδή $y \neq 1$, παίρνουμε: $\sqrt{y^2 + 2} = 2(y - 2)$.

Λύνουμε τήν τελευταία ἐξίσωση καί, ἐπειδή πρέπει $y > 2$, βρίσκουμε: $y = \dfrac{8 + \sqrt{22}}{3}$,

ὁπότε ἡ (3) δίνει: $x = \dfrac{86 + 16\sqrt{22}}{9}$.

Ἔτσι τό σύστημα πού μᾶς δόθηκε ἔχει τίς λύσεις:

$$(x = 1, y = 1), \qquad \left(x = \frac{86 + 16\sqrt{22}}{9},\ \ y = \frac{8 + \sqrt{22}}{3}\right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **194.** Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1. $\lambda o \gamma(x - 2) + \lambda o \gamma(x - 1) = \lambda o \gamma(2x + 8)$, 2. $\lambda o \gamma(x + 1) + 2 \cdot \lambda o \gamma \sqrt{5x} = 2$,

3. $\frac{1}{2} \lambda o \gamma(3x - 1) + \frac{1}{2} \lambda o \gamma(8x - 2) = \lambda o \gamma(4x - 1)$, 4. $\frac{1}{3} \lambda o \gamma(x - 1) = \lambda o \gamma x - \lambda o \gamma 2$

5. $\lambda o \gamma(2x - 5) + \lambda o \gamma(3x + 7) = 4 \cdot \lambda o \gamma 2$, 6. $2 \cdot \lambda o \gamma x = \lambda o \gamma\left(x + \frac{11}{10}\right) + 1$.

195. Νά ἐπιλύσετε τίς ἀκόλουθες λογαριθμικές ἐξισώσεις:

1. $\lambda o \gamma[\lambda o \gamma(2x^2 + x - 11)] = 0$, 2. $\lambda o \gamma(x + 1) - \lambda o \gamma 3 = \lambda o \gamma(2x - 3) + \lambda o \gamma 7$,

3. $2^{\lambda o \gamma x} + 2^{5 - \lambda o \gamma x} = 12$, 4. $\lambda o \gamma \frac{2x}{3} + \lambda o \gamma\left(\frac{5x}{4} + 2\right) = 2 \lambda o \gamma(x - 1)$,

5. $(4x)^{\lambda o \gamma 2 + \lambda o \gamma \sqrt{x}} = 100$, 6. $2\lambda o \gamma(2x - 1) - \lambda o \gamma(3x - 2x^2) = \lambda o \gamma(4x - 3) - \lambda o \gamma x$

196. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τίς ἐξισώσεις:

1. $\lambda o \gamma(3^x + 2) = 2x \lambda o \gamma 3$, 2. $\lambda o \gamma(2^x + 2 \cdot 3^x) + \lambda o \gamma 81 = x \cdot \lambda o \gamma 3 + \lambda o \gamma 178$,

3. $x^{\lambda o \gamma x} = \frac{1}{10} \cdot x^2 \sqrt{x}$, 4. $\lambda o \gamma_{\sqrt{2}} x \cdot \lambda o \gamma_2 x \cdot \lambda o \gamma_{2\sqrt{2}} x \cdot \lambda o \gamma_4 x = 54$,

5. $\varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$, ὅπου $\varphi(x) = \dfrac{2\lambda o \gamma\, x + 1}{2\lambda o \gamma\, x - 1}$.

197. Γιά ποιές τιμές τοῦ θ ἡ ἐξίσωση: $x^2 - x\lambda o \gamma \theta + 3\lambda o \gamma \theta - 8 = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἴσες; Κατόπιν νά προσδιορίσετε τήν τιμή τῆς παραμέτρου θ, ὥστε ἡ παραπάνω ἐξίσωση νά ἔχει μία διπλή ρίζα στό διάστημα (0, 4).

198. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα λογαριθμικά συστήματα:

1. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = \frac{3}{2} \\ \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = \frac{1}{2} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma y = 2. \end{cases}$

199. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} \lambda o\gamma^2 x + \lambda o\gamma^2 y = 10 \\ \lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma x} = 20 \\ \lambda o\gamma\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ \lambda o\gamma(2x+2) - \lambda o\gamma(3+y) = 0. \end{cases}$

200. Τό ἴδιο νά κάνετε γιά τά συστήματα:

1. $\begin{cases} 4(\lambda o\gamma_x y + \lambda o\gamma_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} (3x)^{\lambda o\gamma 3} = (5y)^{\lambda o\gamma 5} \\ 5^{\lambda o\gamma x} = 3^{\lambda o\gamma y} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} xy = \alpha^2 \\ \lambda o\gamma^2 x + \lambda o\gamma^2 y = \frac{5}{2}\lambda o\gamma^2\alpha \end{cases}$ $(\alpha \in \mathbf{R}^+)$

★Ὁμάδα Β΄. **201.** Νά ἐπιλύσετε τίς ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma_x 10 + 6\cdot\lambda o\gamma_{10x} 10 - 8{,}4\cdot\lambda o\gamma_{100x} 10 = 0,$ 2. $x^{\lambda o\gamma\frac{3x}{10}} = 9\cdot(3x)^{\lambda o\gamma 9x^2},$

3. $\lambda o\gamma_{\sqrt{2}}(2\cdot\lambda o\gamma_4 x\cdot\lambda o\gamma_2 x + \lambda o\gamma_{\sqrt{2}} x) = 6\,,$ 4. $\lambda o\gamma_2(\lambda o\gamma_2 x) = \lambda o\gamma_4(\lambda o\gamma_4 x),$

5. $\left[\lambda o\gamma_x(16x - 5 - x^2) + \lambda o\gamma_x 2\right]\cdot\lambda o\gamma_{x+5} x\cdot\lambda o\gamma_x x = 2.$

202. Ἔστω τό πολυώνυμο: $f(x) = x^2 - 2(1 + \lambda o\gamma_\alpha\lambda)x + 5 - \lambda o\gamma_\alpha^2\lambda$, ὅπου λ εἶναι μία (πραγματική) θετική παράμετρος καί $0 < \alpha < 1$.

(i) Νά βρεῖτε γιά ποιές (πραγματικές) τιμές τῆς παραμέτρου λ:

α) ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἄνισες,

β) τό $f(x)$ εἶναι θετικό γιά κάθε $x \in \mathbf{R}$,

γ) ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει μία διπλή ρίζα στό διάστημα $(-2, 2)$.

(ii) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$, νά σχηματίσετε ἐξίσωση β΄ βαθμοῦ, τῆς ὁποίας ρίζες εἶναι οἱ: $\rho_1 = x_1 + 3x_2$, $\rho_2 = 3x_1 + x_2$.

(iii) Νά βρεῖτε τή μέγιστη καί τήν ἐλάχιστη δυνατή τιμή καθεμιᾶς ἀπό τίς παραστάσεις:

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2, \quad y_2 = x_1^2 + x_2^2,$$

ὅταν μεταβάλλεται τό λ καί $x_1, x_2 \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$.

203. Νά προσδιορίσετε τά $x, y \in (0, +\infty)$ γιά τά ὁποῖα ἰσχύουν:

1. $\begin{cases} y^x(1 + y^x) = 10100 \\ \lambda o\gamma\sqrt{xy} - \lambda o\gamma\sqrt{\frac{x}{y}} = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma x} = 200 \\ \left\{(\lambda o\gamma x)^y\cdot(\lambda o\gamma y)^y\right\}^{\frac{1}{x}} = 1024 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} (2x)^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma(2x)} = 8x^2 \\ y = 4x^2\cdot y^{\lambda o\gamma(2x)}\,. \end{cases}$

204. Νά ἐπιλύσετε τά ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} \lambda o\gamma_9 x - \lambda o\gamma_3(x + y) = -1 \\ \lambda o\gamma_3 x - \lambda o\gamma_9(y - x) = 0, \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha x\cdot\lambda o\gamma_\beta y = \lambda o\gamma_\alpha\beta \\ \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha 2y} = \sqrt{x} \end{cases}$ $(0 < \alpha,\ \beta \neq 1).$

205. Γιά ποιές τιμές τοῦ θ, $\theta \in \mathbf{R}^+$, οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως:

$$\lambda o\gamma[\lambda o\gamma(x^2 + x\lambda o\gamma\theta + 110)] = 0$$

ἀποτελοῦν λύση τοῦ συστήματος:

$$\left\{ y^{\lambda o\gamma z} + z^{\lambda o\gamma y} = 20 \ \wedge\ \lambda o\gamma\sqrt{yz} = 1 \right\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ–ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ–ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

Ι. ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ

§ 82. Εἰσαγωγικές ἔννοιες-Ὁρισμοί.— Γνωρίζουμε ἀπό τήν ἀριθμητική ὅτι **τόκος** (τίκτω) εἶναι τό ἐπιπλέον ποσό πού παίρνουμε ἀπό κάποιον, ὅταν τοῦ δανείζουμε χρήματα γιά ἕνα χρονικό διάστημα. Τό ποσό πού δανείζουμε λέγεται **κεφάλαιο.** Στά οἰκονομικά μαθηματικά καί γενικότερα στήν οἰκονομία, *ὀνομάζουμε* **κεφάλαιο** *κάθε ποσό πού ἔχει παραγωγική ἱκανότητα. Τό ἀποτέλεσμα τῆς παραγωγικότητας τοῦ κεφαλαίου τό λέμε* **τόκο** *καί τή διάρκεια τῆς παραγωγικότητας τοῦ κεφαλαίου τή λέμε* **χρόνο.** Ὡς χρονική μονάδα λαμβάνουμε συνήθως τό ἔτος, τό ἑξάμηνο, τό τρίμηνο, τό μήνα, τήν ἡμέρα.

Ἄν τό κεφάλαιο μένει σταθερό σ' ὅλη τή διάρκεια τοῦ δανεισμοῦ, τότε ὁ τόκος λέγεται **ἁπλός.** Ἄν ὅμως στό τέλος κάθε χρονικῆς μονάδας ὁ τόκος ἐνσωματώνεται στό κεφάλαιο καί ἀποτελεῖ ἔτσι τό νέο κεφάλαιο γιά τήν ἑπόμενη χρονική μονάδα, τότε ὁ τόκος λέγεται **σύνθετος.** Αὐτή ἡ ἐνσωμάτωση τοῦ τόκου στό κεφάλαιο, δηλαδή *ἡ κεφαλαιοποίηση τοῦ τόκου,* λέγεται **ἀνατοκισμός.**

Στήν περίπτωση τοῦ ἁπλοῦ τόκου, ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν σέ μιά χρονική μονάδα (συνήθως ἕνα ἔτος ἤ ἕνα ἑξάμηνο) λέγεται **ἐπιτόκιο (ε)** καί γράφεται: ε%. Στόν ἀνατοκισμό *«ἐπιτόκιο»* εἶναι ὁ τόκος τῆς 1 δραχμῆς σέ μιά χρονική μονάδα. Συνεπῶς τό ἐπιτόκιο στόν ἀνατοκισμό εἶναι ἴσο μέ τό 1/100 τοῦ ἐπιτοκίου πού ἔχουμε στόν ἁπλό τόκο. Αὐτό τό παριστάνουμε μέ τό τ, ὁπότε ἔχουμε: $\tau = \varepsilon/100 = 0{,}01\varepsilon$.

Στόν ἀνατοκισμό διακρίνουμε τό **ἀρχικό** ἀπό τό **τελικό** (ἤ *σύνθετο*) **κεφάλαιο.**

Τελικό *λέμε τό ἀρχικό κεφάλαιο μαζί μέ τούς τόκους ὥς τό τέλος τοῦ χρόνου, γιά τόν ὁποῖο τοκίζεται τό ἀρχικό κεφάλαιο.*

Τά προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ τά λύνουμε μέ τύπους, τούς ὁποίους βρίσκουμε ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ ἑπόμενου γενικοῦ προβλήματος.

§ 83. Πρόβλημα.—Ἀρχικό κεφάλαιο k_0 δραχμές ἀνατοκίζεται γιά ν ἔτη μέ ἐπιτόκιο τ. Νά βρεθεῖ τό τελικό κεφάλαιο k_ν.

Λύση. Γιά τή λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος παρατηροῦμε ὅτι: ἀφοῦ ἡ

1 δραχμή στό τέλος τοῦ ἔτους φέρνει τόκο τ, οἱ k_0 δραχμές θά φέρουν, στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους, τόκο $k_0 \cdot \tau$ δρχ. Ἔτσι στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους τό κεφάλαιο μέ τούς τόκους θά εἶναι: $k_0 + k_0\tau = k_0(1 + \tau)$.

Δηλαδή: *τό ἀρχικό κεφάλαιο k_0 πολλαπλασιάζεται μέ τό (σταθερό) συντελεστή $(1 + \tau)$ γιά νά δώσει τό (τελικό) κεφάλαιο στό τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς περιόδου.*

Στήν ἀρχή τῆς δεύτερης χρονικῆς περιόδου τό ἀρχικό κεφάλαιο εἶναι τώρα τό: $k_0(1+\tau)$, τό ὁποῖο πάλι μετά ἀπό ἕνα ἔτος, δηλ. στό τέλος τῆς δεύτερης χρονικῆς περιόδου, θά γίνει μέ τούς τόκους του:

$$[k_0(1 + \tau)]\,(1 + \tau) = k_0(1 + \tau)^2$$

Ὅμοια, στό τέλος τῆς τρίτης χρονικῆς περιόδου θά γίνει: $k_0(1 + \tau)^3$.

Τελικά, συνεχίζοντας μέ τόν ἴδιο συλλογισμό, βρίσκουμε ὅτι οἱ k_0 δρχ. στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους θά γίνουν: $k_0(1 + \tau)^\nu$.

Ὥστε τό τελικό κεφάλαιο k_ν μᾶς τό δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{k_\nu = k_0 \cdot (1 + \tau)^\nu} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) λέγεται **τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ** καί συνδέει τούς τέσσερις ἀριθμούς: k_0, τ, ν, k_ν. Ἄν μᾶς δώσουν τούς τρεῖς ἀπ' αὐτούς, ἀπαραίτητα ὅμως τό ν, μποροῦμε νά προσδιορίσουμε, μέ τή βοήθεια τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἤ κατά προσέγγιση), καί τόν τέταρτο. Ἄν ὅμως μᾶς δώσουν τά: k_0, k_ν καί τ καί ζητεῖται ἡ χρονική διάρκεια ν κατά τήν ὁποία τό κεφάλαιο k_0 ἀνατοκιζόμενο γίνεται k_ν, τότε ἀντί γιά τόν τύπο (1) ἐφαρμόζουμε τόν τύπο (2) πού θά βροῦμε παρακάτω.

Ἔστω ὅτι ὁ ἀνατοκισμός γίνεται γιά ν ἔτη καί η ἡμέρες ($\eta < 360$). Τότε γιά νά ὑπολογίσουμε τό τελικό κεφάλαιο k σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ὕστερα ἀπό ν ἔτη οἱ k_0 δραχμές θά γίνουν: $k_0(1 + \tau)^\nu$. Τό ποσό αὐτό ἔμεινε ἀκόμη η ἡμέρες, ἄρα πρέπει σ' αὐτό νά προστεθοῦν καί οἱ τόκοι γιά η ἡμέρες. Ἐπειδή στόν ἁπλό τόκο τό ἐπιτόκιο εἶναι $\varepsilon = 100\tau$, ἕπεται ὅτι οἱ $k_0(1 + \tau)^\nu$ δραχμές σέ η ἡμέρες θά φέρουν τόκο:

$$\frac{k_0(1 + \tau)^\nu \cdot 100\tau \cdot \eta}{36000} = \frac{k_0(1 + \tau)^\nu \cdot \tau \cdot \eta}{360}.$$

Ἑπομένως τό τελικό κεφάλαιο μετά ἀπό ν ἔτη καί η ἡμέρες θά γίνει:

$$k = k_0(1 + \tau)^\nu + \frac{k_0(1 + \tau)^\nu \cdot \tau\eta}{360}.$$

Ὥστε:

$$\boxed{k = k_0\,(1 + \tau)^\nu \cdot \left(1 + \frac{\tau\eta}{360}\right)} \qquad (\eta < 360) \qquad (2)$$

Σημ. Στήν πράξη ἀντί γιά τόν τύπο (2) χρησιμοποιοῦμε (συνήθως) τόν τύπο:

$$k = k_0(1 + \tau)^{\nu + \frac{\eta}{360}} \qquad (2')$$

Ὁ τύπος (2') δίνει σχεδόν τό ἴδιο ἐξαγόμενο μέ τόν τύπο (2) καί εἶναι πιό εὔκολος στούς ὑπολογισμούς.

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, γιά νά ὑπολογίσουμε ἀπό τούς πιό πάνω τύπους (1) καί (2) τά ποσά k_0, τ, k_ν καί ν, εἶναι ἀπαραίτητη πρῶτα ἡ λογαρίθμηση τῶν μελῶν τῶν (1) καί (2) καί ἔπειτα ἡ χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων. Στήν πράξη ὅμως ὑπάρχουν εἰδικοί πίνακες ,οἱ ὁποῖοι δίνουν τίς τιμές τῶν διαφόρων παραστάσεων, ὅπως π.χ. τῶν $(1+\tau)^\nu$, $(1+\tau)^{\frac{\eta}{360}}$ κ.τ.λ., γιά διάφορες τιμές ἐπιτοκίου καί χρόνου.

* **§ 84. Ἰσοδύναμα ἐπιτόκια.**— Δύο ἐπιτόκια λέμε ὅτι εἶναι **ἰσοδύναμα** ἄν ἀντιστοιχοῦν σέ διαφορετικές χρονικές περιόδους καί ἄν μέ αὐτά ἕνα ἀρχικό κεφάλαιο k_0 ἀνατοκιζόμενο στόν ἴδιο συνολικά χρόνο λαμβάνει τήν ἴδια τελική ἀξία. Ἔτσι, ἄν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται κάθε ἑξάμηνο ἤ τρίμηνο, τό ἰσοδύναμο τοῦ τ ἑξαμηνιαῖο ἤ τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο **δέν** εἶναι τό μισό ἤ τό τέταρτο ἀντιστοίχως τοῦ τ, ἀλλά διαφορετικό, πού ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν τ_1 εἶναι τό ἰσοδύναμο ἑξαμηνιαῖο ἐπιτόκιο, τότε ἡ 1 δραχμή στό τέλος τοῦ πρώτου ἑξαμήνου θά γίνει $(1+\tau_1)$ καί στό τέλος τοῦ δεύτερου ἑξαμήνου θά γίνει $(1+\tau_1)^2$. Ἐπίσης ἡ μία δραχμή στό τέλος τοῦ ἔτους, ἀνατοκιζόμενη μέ ἐπιτόκιο τ, θά γίνει $(1+\tau)$. Ἐπειδή ἡ μία δραχμή, ὅπως καί νά τοκιστεῖ, πρέπει νά δίνει στό τέλος τοῦ ἔτους τό ἴδιο ποσό, ἔχουμε:

$(1+\tau_1)^2 = (1+\tau)$ καί συνεπῶς εἶναι:

$$\boxed{\tau_1 = \sqrt{1+\tau} - 1} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) συνδέει **τό ἑξαμηνιαῖο** καί **τό ἐτήσιο** ἐπιτόκιο.

Ἐπίσης, ἄν τ_2 εἶναι τό ἰσοδύναμο τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο τοῦ τ, ἐπειδή τό ἔτος ἔχει 4 ριμηνίες, μέ ἀνάλογο συλλογισμό καταλήγουμε στή σχέση:

$(1+\tau_2)^4 = 1 + \tau$ καί συνεπῶς θά εἶναι:

$$\boxed{\tau_2 = \sqrt[4]{1+\tau} - 1} \qquad (4)$$

Ὁ τύπος (4) συνδέει **τό τριμηνιαῖο** καί **τό ἐτήσιο** ἐπιτόκιο.

Σημ. Στήν πράξη πολλές φορές ἐφαρμόζεται ἀναλογία μεταξύ περιόδων καί ἐπιτοκίων, δηλαδή ἄν τό ἐτήσιο ἐπιτόκιο εἶναι 8%, τό ἑξαμηνιαῖο εἶναι 4% καί τό τριμηνιαῖο εἶναι 2%. Τά ἐπιτόκια αὐτά λέγονται τότε **ἀνάλογα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η: **Δανείζουμε 5.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 6% ἐτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ὕστερα ἀπό 8 ἔτη;**

Λύση. Ἔχουμε: $k_0 = 5000$, $\tau = 0{,}06$, $\nu = 8$, $1 + \tau = 1{,}06$.

Ὁπότε ὁ τύπος (1) τῆς § 83 μᾶς δίνει: $k_8 = 5000 \cdot (1{,}06)^8$.

Ἄν λογαριθμίσουμε τήν τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \text{λογ}\, k_8 &= \text{λογ}\, 5000 + 8 \cdot \text{λογ}\,(1{,}06) \\ &= 3{,}69897 + 8 \cdot 0{,}02531 = 3{,}90145. \end{aligned}$$

Ὁπότε: $k_8 = 7969{,}83$.

Σημείωση. Ἀπό τούς πίνακες τῶν δυνάμεων τοῦ 1,06 βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι:

$$(1{,}06)^8 = 1{,}593848, \text{ ὁπότε: } k_8 = 5000 \cdot 1{,}593848 = 7969{,}24.$$

Ἡ μικρή διαφορά τῶν δύο ἀποτελεσμάτων ὀφείλεται στόν ὑπολογισμό τῶν λογαρίθμων κατά προσέγγιση.

Παρατήρηση. Ἄν ὁ ἀνατοκισμός γινόταν γιά 8 ἔτη καί μερικές ἡμέρες, π.χ. γιά 8 ἔτη καί 72 ἡμέρες, τότε στόν τύπο (2), τό μέν $k_0(1+\tau)^\nu$ εἶναι 7969,83, τό δέ $1 + \dfrac{\tau\eta}{360}$ εἶναι:

$$1 + \frac{72 \times 0{,}06}{360} = 1{,}012 \text{ καί συνεπῶς: } k = 7969{,}83 \times 1{,}012 = 8065{,}46.$$

2η : **Πόσες δραχμές πρέπει νά καταθέσει ἕνας πατέρας τήν ἡμέρα τῆς γεννήσεως τῆς κόρης του, μέ ἀνατοκισμό πρός 6% ἐτησίως γιά νά μπορέσει νά τῆς ἀγοράσει ἕνα αὐτοκίνητο ἀξίας 300.000 δρχ., ὅταν αὐτή θά συμπληρώσει τό 20ο ἔτος τῆς ἡλικίας της;**

Λύση. Ἔχουμε $\nu = 20$, $k_\nu = 300.000$, $\tau = 0{,}06$, $1 + \tau = 1{,}06$.

Ἀπό τόν τύπο (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἔχουμε:

$$k_0 = \frac{k_\nu}{(1+\tau)^\nu} \qquad (\alpha)$$

Λογαριθμίζοντας τήν (α) ἔχουμε: $\lambda o\gamma\, k_0 = \lambda o\gamma\, k_\nu - \nu \cdot \lambda o\gamma\,(1+\tau)$

$$= \lambda o\gamma\, 300000 - 20 \cdot \lambda o\gamma\,(1{,}06)$$

$$= 5{,}47712 - 20 \cdot 0{,}02531 = 4{,}97092$$

Ἀπό αὐτό βρίσκουμε: $k_0 = 93524.$

3η : **Ἀνατοκίζει κάποιος 80.000 δραχμές πρός 6% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει ὕστερα ἀπό 9 ἔτη, ἄν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται κάθε ἑξαμηνία;**

Λύση. Τό ἰσοδύναμο ἑξαμηνιαῖο ἐπιτόκιο τ_1 δίνεται ἀπό τόν τύπο (3) καί εἶναι:

$$\tau_1 = \sqrt{1+\tau} - 1 = \sqrt{1{,}06} - 1 = 0{,}0295$$

Ἐξάλλου ἔχουμε: $k_0 = 80.000$, $\nu = 9 \times 2 = 18$,
ὁπότε ὁ τύπος (1) μᾶς δίνει: $k_{18} = 80000\,(1{,}0295)^{18}$.

Ἀπό τήν τελευταία σχέση, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν πρώτη ἐφαρμογή, ἔχουμε:

$$k_{18} = 135140{,}6.$$

Στά προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ὑπάγονται καί τά προβλήματα πού ἔχουν σχέση μέ τήν αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως ἤ χώρας, ὅπως π.χ. τό πιό κάτω:

4η : **Πρόβλημα. Ὁ πληθυσμός μιᾶς πόλεως εἶναι Π κάτοικοι καί αὐξάνει κάθε χρόνο κατά τό $\dfrac{1}{\mu}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Πόσος θά εἶναι ὁ πληθυσμός της μετά ν ἔτη;**

Λύση. Στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ὁ πληθυσμός θά εἶναι:

$$\Pi + \Pi \cdot \frac{1}{\mu} \text{ ἤ } \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Μετά ἀπό ἕνα ἀκόμη ἔτος, δηλ. στό τέλος τοῦ δεύτερου ἔτους θά εἶναι:

$$\Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right) + \Pi\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} \text{ δηλ. } \Pi \cdot \left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2$$

καί στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θά εἶναι:

$$\boxed{\Pi_\nu = \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\nu}$$

Σημείωση: Αν ὁ πληθυσμός Π **ἐλαττώνεται** κατά τό 1/μ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους, τότε ὕστερα ἀπό ν ἔτη θά γίνει:

$$\Pi_\nu = \Pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^\nu$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **206.** Δανείζουμε 150.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 4% ἐτησίως. Πόσες δραχμές θά πάρουμε ὕστερα ἀπό 6 ἔτη;

207. Τί ποσό πρέπει νά τοκίσουμε μέ ἀνατοκισμό πρός 4% τήν ἑξαμηνία, ὥστε νά γίνει μετά 18 ἔτη 200.000 δρχ.

208. Μέ ποιό ἐτήσιο ἐπιτόκιο οἱ 24850 δρχ. μετά 12 ἔτη καί μέ ἀνατοκισμό γίνονται 50.000 δρχ.;

209. Νά ἐξετάσετε τί συμφέρει σέ κάποιον: νά τοκίσει μέ ἀνατοκισμό 60.000 δρχ. πρός 5% γιά 10 χρόνια ἤ νά τά δώσει μέ ἁπλό τόκο πρός 7% γιά τό ἴδιο χρονικό διάστημα;

210. Νά βρεῖτε τό ἰσοδύναμο τριμηνιαῖο ἐπιτόκιο, ἄν τό ἀντίστοιχο ἐτήσιο εἶναι 8%.

211. Νά βρεῖτε τό ἰσοδύναμο ἐτήσιο ἐπιτόκιο, ἄν τό ἀντίστοιχο ἑξαμηνιαῖο εἶναι 2%.

212. Μετά πόσο χρόνο οἱ 12589 δρχ., ἄν ἀνατοκιστοῦν πρός 5% ἐτησίως θά γίνουν 45818 δρχ;

213. Ὁ πληθυσμός ἑνός κράτους αὐξάνει κάθε χρόνο κατά τό $\frac{1}{80}$ τοῦ πληθυσμοῦ τοῦ προηγούμενου ἔτους. Μετά πόσα ἔτη θά διπλασιαστεῖ ἤ θά τριπλασιαστεῖ;

Ὁμάδα Β΄. **214.** Κάποιος καταθέτει στό Ταχ. Ταμιευτήριο 7200 δρχ. μέ ἀνατοκισμό κάθε ἑξαμηνία πρός 4,5% ἐτησίως. Πόσα χρήματα θά πάρει μετά 15 ἔτη;

215. Κάποιος κατέθεσε στό Ταχ. Ταμιευτήριο κάποιο ποσό πού, ἀνατοκιζόμενο κάθε ἑξαμηνία πρός 6% τό χρόνο, μετά 5 ἔτη ἔγινε 26.000 δρχ. Τί ποσό κατέθεσε;

216. Ἕνα κεφάλαιο ἀνατοκιζόμενο γίνεται μετά 3 ἔτη 5625 δρχ. καί μετά ἄλλα δύο ἔτη 6084 δρχ. Μέ ποιό ἐπιτόκιο ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

217. Ἕνα κεφάλαιο, πού ἀνατοκίζεται κάθε ἑξαμηνία πρός 6% ἐτησίως, μετά πόσο χρόνο θά τριπλασιαστεῖ;

218. Ἕνα κεφάλαιο 5.000 δρχ. ἀνατοκίζεται πρός 5% ἐτησίως καί ἄλλο 8.000 δρχ. πρός 3% ἐτησίως. Μετά πόσο χρόνο τά δύο σύνθετα κεφάλαια θά ἐξισωθοῦν;

219. Μία πόλη πού ἔχει πληθυσμό 8.000 κατοίκους ἐλαττώθηκε στόν πρῶτο χρόνο κατά 160 ἄτομα. Ἄν ἐξακολουθήσει ἡ ἐλάττωση μέ τήν ἴδια ἀναλογία, μετά πόσα ἔτη ἡ πόλη θά ἔχει 5.000 κατοίκους;

220. Σέ μιά πόλη ἡ θνησιμότητα τῶν κατοίκων εἶναι τό $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ καί ἡ γεννητικότητα εἶναι τό $\frac{1}{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἄν δεχτοῦμε ὅτι ἡ πιό πάνω ἀναλογία θά παραμείνει ἡ ἴδια καί γιά τά ἑπόμενα ἔτη, μετά ἀπό πόσο χρόνο ὁ πληθυσμός τῆς πόλεως θά διπλασιαστεῖ;

ΙΙ. ΙΣΕΣ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ

Συχνά οἱ ἄνθρωποι ἀπό τίς οἰκονομίες τους καταθέτουν ἕνα ὁρισμένο χρηματικό ποσό εἴτε στήν ἀρχή κάθε ἔτους (ἤ μιᾶς ὁρισμένης χρονικῆς μονάδας) μέ σκοπό νά σχηματίσουν ἕνα κεφάλαιο, εἴτε στό τέλος κάθε ἔτους (ἤ μιᾶς χρονικῆς μονάδας πού ἔχουν συμφωνήσει) μέ σκοπό νά ἐξοφλήσουν κάποιο χρέος τους. Τό χρηματικό αὐτό ποσό τό λέμε **κατάθεση.**

Οἱ ἴσες καταθέσεις γίνονται, συνήθως, κάθε ἔτος, ἑξάμηνο, ἤ καί τρίμηνο καί γιά ἕναν ὁρισμένο χρόνο.

Στά ζητήματα ἴσων καταθέσεων διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α΄) *οἱ καταθέσεις γίνονται στήν* **ἀρχή** *κάθε ἔτους*, καί

β΄) *οἱ καταθέσεις γίνονται στό* **τέλος** *κάθε ἔτους.*

Οἱ καταθέσεις τῆς β΄ περιπτώσεως, ἐπειδή ὅπως εἴπαμε γίνονται γιά νά ἐξοφλήσουμε κάποιο χρέος, λέγονται καί **χρεωλυτικές καταθέσεις.**

Στίς ἴσες, λοιπόν, καταθέσεις ἔχουμε τά ἑπόμενα δύο προβλήματα:

§ 85. Πρόβλημα Ι.—Καταθέτουμε στήν ἀρχή κάθε ἔτους α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ γιά κάθε δραχμή. Τί ποσό θά πάρουμε μετά ν ἔτη;

Λύση. Ἡ πρώτη κατάθεση θά μείνει ν ἔτη στόν ἀνατοκισμό καί ἑπομένως θά γίνει ἴση μέ: $\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἡ δεύτερη κατάθεση θά μείνει $(\nu-1)$ ἔτη στόν ἀνατοκισμό καί συνεπῶς θά γίνει : $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ τρίτη θά γίνει: $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ. Ἡ τελευταία κατάθεση θα μείνει μόνο ἕνα χρόνο στόν ἀνατοκισμό, ἄρα θά γίνει ἴση μέ: $\alpha(1+\tau)$.

Εἶναι φανερό τώρα ὅτι τό κεφάλαιο Σ πού θά σχηματιστεῖ ἀπ' αὐτές τίς καταθέσεις εἶναι ἴσο μέ: $\alpha(1+\tau)^{\nu}+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}+\cdots+\alpha(1+\tau)$. Ὥστε :

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\cdots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}+\alpha(1+\tau)^{\nu}.$$

Ἀλλά τό δεύτερο μέλος τῆς πιό πάνω ἰσότητας εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου, ἡ ὁποία ἔχει πρῶτο ὅρο τό $\alpha(1+\tau)$ καί λόγο $(1+\tau)$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τόν τύπο (1) τῆς § 53, θά ἔχουμε:

$$\boxed{\Sigma=\alpha\cdot(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}} \qquad (1)$$

Ἡ σχέση (1) λέγεται καί **τύπος τῶν ἴσων καταθέσεων.**

Σημ. Οἱ δυνάμεις $(1+\tau)^{\nu}$ γιά $\tau=0.03, 0.04, 0.045, \ldots, 0.06$ καί γιά $\nu=1, 2, \ldots, 50$ δίνονται ἀπό εἰδικούς πίνακες καί ἔτσι βρίσκουμε εὔκολα τό Σ ἀπό τόν τύπο (1).

Παράδειγμα. **Στήν ἀρχή κάθε χρόνου καταθέτει κάποιος στήν τράπεζα μέ ἀνατοκισμό 2.500 δρχ. καί μέ ἐτήσιο ἐπιτόκιο 5%. Πόσα χρήματα θά λάβει μετά 10 ἔτη;**

Λύση. Ἔχουμε: $\alpha=2500$, $\tau=0,05$, $\nu=10$, ὁπότε ἀπό τόν τύπο (1) λαμβάνουμε:

$$\Sigma=2500\times 1,05\times\frac{(1,05)^{10}-1}{0,05}.$$

Ἀπό τούς πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1,05)^{10}=1,628$.

Ἄρα $(1,05)^{10}-1=0,628$ καί ἑπομένως:

$$\Sigma=2500\times 1,05\times\frac{0,628}{0,05}=32.970 \text{ δρχ.}$$

§ 86. Πρόβλημα ΙΙ.—Καταθέτουμε στό τέλος κάθε χρόνου α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ γιά κάθε δραχμή. Τί ποσό θά ἔχουμε σχηματίσει στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δηλαδή μέ τή νιοστή κατάθεση;

Λύση. Οἱ α δρχ. πού καταθέτουμε στό τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θά μείνουν στόν ἀνατοκισμό $\nu-1$ ἔτη καί συνεπῶς θά γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$. Οἱ α δρχ. πού καταθέτουμε στό τέλος τοῦ δεύτερου ἔτους θά μείνουν στόν ἀνατοκισμό $\nu-2$ ἔτη καί συνεπῶς θά γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$, κ.ο.κ. Ἡ προτελευταία κατάθεση θά μείνει μόνο ἕνα ἔτος καί ἑπομένως θά γίνει: $\alpha(1+\tau)$. Ἡ τελευταία κατάθεση, ἀφοῦ γίνεται στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δέ μένει καθόλου γιά τόκο **(δέν τοκίζεται)** καί ἑπομένως θά εἶναι μόνο α.

Ἔτσι στό τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, δηλαδή μέ τή νιοστή κατάθεση, θά ἔχουμε σχηματίσει τό ποσό:

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \alpha(1+\tau)^{\nu-2} + \cdots + \alpha(1+\tau) + \alpha$$

ἤ (§ 53, τύπος 1):

$$\boxed{\Sigma = \alpha \cdot \frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) ὀνομάζεται **τύπος τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων** καί συνδέει τά τέσσερα ποσά Σ, α, τ, ν.

Παράδειγμα. **Ἕνας καπνιστής ξοδεύει γιά τσιγάρα 18 δρχ. τήν ἡμέρα κατά μέσο ὅρο. Ἄν ἄρχισε νά καπνίζει ἀπό τά 20 του χρόνια, νά ὑπολογίσετε πόσα χρήματα θά ἔπαιρνε ὅταν γινόταν 60 ἐτῶν, ἄν τά χρήματα πού ξοδεύει γιά τσιγάρα, τά κατέθετε στό τέλος κάθε ἔτους, σέ μιά Τράπεζα μέ ἀνατοκισμό πρός 6% ἐτησίως.**

Λύση. Ὁ καπνιστής ξοδεύει γιά τσιγάρα τό χρόνο: $365 \cdot 18 = 6570$ δρχ.

Ἄρα ἔχουμε: $\alpha = 6570, \quad \tau = 0{,}06, \quad \nu = 40.$

Τότε ὁ τύπος (2) γράφεται:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{(1{,}06)^{40}-1}{0{,}06}$$

Ἀπό τούς πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1{,}06)^{40} = 10{,}2895$.

Ἄρα: $(1{,}06)^{40} - 1 = 9{,}2895$ καί συνεπῶς:

$$\Sigma = 6570 \cdot \frac{9{,}2895}{0{,}06} = 1.017.200{,}25.$$

Ὥστε ὁ καπνιστής θά ἔπαιρνε: **1.017.200,25 δραχμές (!).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α΄. **221.** Ἕνας καταθέτει μέ ἀνατοκισμό 8.050 δραχμές πρός 4,5 % στήν ἀρχή κάθε ἔτους. Πόσα χρήματα θά πάρει ὕστερα ἀπό 18 ἔτη;

222. Ποιό ποσό πρέπει νά καταθέτει κάποιος μέ ἀνατοκισμό πρός 6% στήν ἀρχή κάθε ἔτους σέ μιά Τράπεζα, ὥστε αὐτό ὕστερα ἀπό 20 ἔτη νά γίνει 250.000 δραχμές;

223. Κάποιος καταθέτει στήν ἀρχή κάθε ἔτους 10.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 5%. Μετά πόσα ἔτη θά πάρει 150.000 δραχμές;

224. Ἕνας πατέρας καταθέτει σέ κάθε γενέθλια τῆς κόρης του στό Ταχ. Ταμιευτήριο 5.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 7,5%. Τί ποσό θά σχηματιστεῖ, ὅταν ἡ κόρη του γιορτάσει τήν 21η ἐπέτειο τῶν γενεθλίων της;

Ὁμάδα Β΄. **225.** Κάποιος καταθέτει μέ ἀνατοκισμό στήν ἀρχή κάθε ἔτους 2050 δρχ. πρός 4,5%. Ὕστερα ἀπό 15 χρόνια ἔπαψε νά καταθέτει, ἀλλά τό ποσό πού σχηματίστηκε τό ἄφησε μέ ἀνατοκισμό πρός 5%. Τί κεφάλαιο θά ἔχει σχηματίσει 24 χρόνια μετά τήν πρώτη κατάθεση;

226. Νά ἀποδείξετε ὅτι: ἄν τίς ἴσες καταθέσεις πού γίνονται στό τέλος κάθε ἔτους, τίς ἀνατοκίσουμε γιά ἕνα ἀκόμη ἔτος, τότε βρίσκουμε τίς ἴσες καταθέσεις πού γίνονται στήν ἀρχή κάθε ἔτους.

227. Ἀσφαλίζει κάποιος τή ζωή του γιά διάστημα 35 ἐτῶν πρός 6% καί πληρώνει ἀσφάλιστρα στήν ἀρχή κάθε ἔτους 8.400 δραχμές. Πόσα χρήματα πρέπει νά τοῦ δώσει ἡ ἀσφαλιστική ἑταιρεία ὕστερα ἀπό 35 ἔτη;

III. ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

§ 87. Ὁρισμοί.— Χρεωλυσία λέμε τήν ἀπόσβεση ἑνός χρέους μέ ἴσες δόσεις, οἱ ὁποῖες καταβάλλονται σέ ἴσα χρονικά διαστήματα, π.χ. στό τέλος τοῦ ἔτους ἤ τοῦ ἑξαμήνου κ.τ.λ. Τό ποσό καθεμιᾶς ἀπό τίς ἴσες δόσεις πού καταβάλλεται στό τέλος τοῦ χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιο** καί χρησιμεύει ἕνα μέρος του γιά τήν πληρωμή τῶν τόκων τοῦ χρέους καί τό ὑπόλοιπο γιά τή βαθμιαία ἀπόσβεση τοῦ χρέους.

Εἶναι φανερό ὅτι ἕνα χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τό ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μαζί μέ τούς σύνθετους τόκους τους γίνει ἴσο μέ τήν τελική ἀξία τοῦ ἀνατοκιζόμενου ἀρχικοῦ κεφαλαίου **(χρέους)**.

Στή χρεωλυσία ἔχουμε, συνεπῶς, νά λύσουμε τό παρακάτω πρόβλημα:

§ 88. Πρόβλημα.— Ἕνας δανείστηκε α δραχμές μέ ἀνατοκισμό μέ τήν ὑποχρέωση νά τίς ἐξοφλήσει μέ ν ἴσες δόσεις, τίς ὁποῖες θά πληρώνει στό τέλος κάθε ἔτους. Νά βρεθεῖ τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο), ἄν ὁ ἐτήσιος τόκος γιά κάθε δραχμή εἶναι τ.

Λύση. Ὁ ὀφειλέτης πρέπει μετά ἀπό ν ἔτη νά πληρώσει τό ποσό: $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, γιατί οἱ α δραχμές πού δανείστηκε ἀνατοκίστηκαν γιά ν ἔτη.

Ἔστω x δρχ. τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο) πού πληρώνει στό τέλος κάθε ἔτους, τότε ὁ ὀφειλέτης θά καταβάλει στό δανειστή του συνολικά ν δόσεις ἴσες μέ x δραχμές ἡ καθεμιά. Ἡ συνολική ἀξία αὐτῶν τῶν δόσεων (μέ τούς τόκους των) θά εἶναι, σύμφωνα μέ τόν τύπο τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων, ἴση πρός: $x\cdot\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$.

Τότε ὅμως, σύμφωνα μέ τά πιό πάνω, θά ἔχουμε:

$$\boxed{x\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}} \qquad (1)$$

Ἡ (1) λέγεται **ἐξίσωση τῆς χρεωλυσίας**. Ἀπό τήν (1) βρίσκουμε τό ζητούμενο χρεωλύσιο. Ἄν λύσουμε τήν (1) ὡς πρός x ἤ α παίρνουμε ἀντίστοιχα τούς τύπους:

$$\boxed{x=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}}{(1+\tau)^{\nu}-1}} \quad (1') \quad \text{καί} \quad \boxed{\alpha=\frac{x\cdot[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau(1+\tau)^{\nu}}} \quad (1'')$$

Στούς πρακτικούς ὑπολογισμούς οἱ ἐκφράσεις $(1+\tau)^\nu$ καί $[(1+\tau)^\nu-1]:\tau$ δίνονται ἀπό εἰδικούς πίνακες καί ἔτσι βρίσκουμε εὔκολα τά ποσά x καί α ἀπό τούς τύπους (1') καί (1'').

Σημ. Μερικές φορές ἡ καταβολή τῆς πρώτης δόσεως (χρεωλυσίου) γίνεται μετά μ ἔτη ἀπό τότε πού συμφωνήθηκε τό δάνειο. Τότε ἡ **ἐξίσωση τῆς χρεωλυσίας** εἶναι:

$$\boxed{x\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu-\mu+1}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^\nu}\qquad \text{(γιατί ;)}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η : **Μία κοινότητα δανείστηκε 300.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό 5% καί θέλει νά ἐξοφλήσει τό χρέος μέ ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις σέ 50 χρόνια. Νά βρεθεῖ τό ποσό κάθε δόσεως (χρεωλύσιο).**

Λύση. Ὁ τύπος (1') δίνει:

$$x=\frac{300000\cdot(0,05)\cdot(1,05)^{50}}{(1,05)^{50}-1}.$$

Ἀπό τούς πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $(1,05)^{50}=11,4674$.

Ἄρα: $(1,05)^{50}-1=10,4674$ καί συνεπῶς:

$$x=\frac{300000\times0,05\times11,4674}{10,4674}=16.433,02 \text{ δρχ.}$$

2η : **Ἕνας ὑπάλληλος μπορεῖ νά διαθέσει γιά ἐτήσιο χρεωλύσιο 5.000 δρχ. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 4%, ὥστε νά τό ἐξοφλήσει σέ 20 ἐτήσιες δόσεις;**

Λύση. Ἔχουμε: $x=5000$, $\tau=0,04$, $\nu=20$ καί ἡ (1'') γίνεται:

$$\alpha=\frac{5000[(1,04)^{20}-1]}{0,04\cdot(1,04)^{20}}.$$

Ἀπό τήν πιό πάνω σχέση μέ πίνακες ἤ μέ λογαρίθμους βρίσκουμε: $\alpha=67953$ δραχμές.

3η. **Ἕνας δανείζεται 120.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 8%. Πόσες ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 15.000 δρχ. πρέπει νά πληρώσει γιά νά ἐξοφλήσει τό χρέος;**

Λύση. Ἀπό τήν ἐξίσωση (1) ἔχουμε:

$$x(1+\tau)^\nu-x=\alpha\tau(1+\tau)^\nu,$$

ὁπότε:

$$(1+\tau)^\nu=\frac{x}{x-\alpha\tau}. \tag{2}$$

Τότε ὅμως εἶναι: $\nu\cdot\lambda o\gamma(1+\tau)=\lambda o\gamma\, x-\lambda o\gamma\,(x-\alpha\tau)$

Ἄρα:

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\, x-\lambda o\gamma\,(x-\alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)} \tag{3}$$

Ἐπειδή εἶναι $x=15000$, $\alpha=120000$, $\tau=0,08$ καί συνεπῶς $x-\alpha\tau=5400$, ὁ τύπος (3) δίνει:

$$\nu=\frac{\lambda o\gamma\, 15000-\lambda o\gamma\, 5400}{\lambda o\gamma\, 1,08}.$$

Ἀπό τήν τελευταία, ἐπειδή $\lambda o\gamma 15000=4,17609$, $\lambda o\gamma 5400=3,73239$ καί $\lambda o\gamma 1,08=$ $=0,03342$, λαμβάνουμε: $\nu=\dfrac{0,44370}{0,03342}=13,276481$ ἔτη, δηλαδή $13<\nu<14$.

Τό ἐξαγόμενο σημαίνει πώς πρέπει νά πληρωθοῦν 13 ἐτήσιες δόσεις τῶν 15000 δρχ.

καί μία μικρότερη δόση: $0{,}276481 \times 15000 = 4.147{,}215$ δρχ. σέ (συντομότερο) διάστημα. $0{,}276481 \times 360 = 99{,}53316 \simeq 100$ ἡμερῶν μετά τή 13η δόση.

Σημ. Γιά νά βροῦμε τή 14η δόση πού εἶναι μικρότερη τῶν 15.000 δρχ. μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς: Βρίσκουμε πόσο γίνεται τό χρέος τῶν 120.000 δρχ. σέ 14 ἔτη, δηλαδή τό: $K = 120.000\,(1{,}08)^{14}$. Κατόπιν βρίσκουμε ὅτι οἱ δόσεις τῶν 15.000 δρχ. ἡ καθεμία στό τέλος τοῦ 14ου ἔτους γίνονται:

$$\Sigma = \frac{15000[(1{,}08)^{13} - 1]}{0{,}08} \cdot 1{,}08$$

Ἡ διαφορά $K - \Sigma$ δίνει τήν τελευταία δόση.

Σχόλιο. Σύμφωνα μέ τήν ἐξίσωση (2) τῆς τελευταίας ἐφαρμογῆς γιά νά ἔχει τό πρόβλημα λύση πρέπει νά εἶναι $x > \alpha\tau$, δηλαδή πρέπει τό χρεωλύσιο νά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τόν ἐτήσιο τόκο τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, γιατί διαφορετικά ποτέ δέν πρόκειται νά ἐξοφληθεῖ τό χρέος. Ἄν εἶναι $x = \alpha\tau$, τότε ἡ ἐξίσωση (2) δέν ἔχει λύση, γιατί ὁ παρονομαστής μηδενίζεται, πού σημαίνει πώς τό ν τείνει στό ἄπειρο. Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε πώς τό δάνειο γίνεται **πάγιο**, γιατί ποτέ δέν ἐξοφλεῖται καί τό καταβαλλόμενο ποσό x χρησιμεύει γιά νά πληρώνονται μόνο οἱ ἐτήσιοι τόκοι τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα Α'. **228.** Μία κοινότητα δανείστηκε 120.000 δρχ. μέ ἀνατοκισμό πρός 6% καί θέλει νά ἐξοφλήσει τό χρέος μέ ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις σέ 25 χρόνια. Νά βρεῖτε τό χρεωλύσιο πού θά πληρώνει.

229. Ἕνας ἔμπορος ὑπολογίζει πώς μπορεῖ νά πληρώνει ἐτήσιο χρεωλύσιο 8.650 δρχ. γιά 20 χρόνια. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 6% ἐτησίως;

230. Μέ πόσες ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις τῶν 3.000 δρχ. μποροῦμε νά ἐξοφλήσουμε δάνειο 25.000 δρχ., ὅταν τό ἐπιτόκιο εἶναι 6% ἐτησίως;

231. Μία ἑταιρεία μπορεῖ νά διαθέτει ἀπό τά κέρδη της 100.000 δρχ. γιά ἐτήσιο χρεωλύσιο. Τί ποσό μπορεῖ νά δανειστεῖ μέ ἐπιτόκιο 5%, ὥστε νά τό ἐξοφλήσει σέ 20 ἐτήσιες δόσεις;

Ὁμάδα Β'. **232.** Κάποιος δανείστηκε 250.000 δρχ. πρός 7 % μέ τήν ὑποχρέωση νά τό ἐξοφλήσει μέ 8 ἐτήσιες χρεωλυτικές δόσεις. Τρεῖς ὅμως μῆνες μετά τήν κατάθεση τῆς 5ης δόσεως θέλει νά ἐξοφλήσει ὅλο τό ποσό. Πόσα πρέπει νά καταβάλει;

233. Κάποιος δανείζεται α δρχ. μέ ἀνατοκισμό καί μέ ἐτήσιο τόκο τ τῆς μιᾶς δραχμῆς. Νά βρεῖτε τό ἐτήσιο χερωλύσιο πού πρέπει νά πληρώνει, ὥστε μετά ν ἔτη τό χρέος νά μείνει τό μισό.

(Ἐφαρμογή: $\alpha = 40000$, $\tau = 0{,}05$, $\nu = 12$).

234. Μέ πόσες ἑξαμηνιαῖες χρεωλυτικές δόσεις μιά ἑταιρεία θά ἐξοφλήσει δάνειο 2.000.000 δρχ., ἄν ὁ ἀνατοκισμός γίνεται πρός 3% κάθε ἑξαμηνία καί τό χρεωλύσιο εἶναι 130.000 δραχμές;

235. Ἡ ἐξόφληση ἑνός χρέους πρέπει νά γίνει σέ 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Κάθε ἐτήσια δόση εἶναι 46.130 δρχ. καί ἀρχίζει ἡ καταβολή μετά τό 5ο ἔτος τοῦ δανείου. Ἄν τό ἐπιτόκιο εἶναι 4,5%, νά βρεῖτε πόσο εἶναι τό ἀρχικό ποσό;

236. Κάποιος συμφωνεῖ νά πληρώσει σέ ἕναν ἀσφαλιστικό Ὀργανισμό ν ἐτήσιες δόσεις τῶν α δρχ. τήν καθεμιά, μέ τήν ὑποχρέωση ὁ Ὀργανισμός νά τοῦ ἐξασφαλίσει γιά τά ἑπόμενα 2ν ἔτη, ἐτήσιο εἰσόδημα πού νά ἀνέρχεται σέ β δραχμές. Ὁ Ὀργανισμός θά καταβάλει γιά πρώτη φορά τό ποσό τῶν β δρχ., μετά ἀπό τήν τελευταία κατάθεση τοῦ ἀσφαλισμένου. Οἱ τόκοι εἶναι σύνθετοι καί τό ἐτήσιο ἐπιτόκιο τῆς μιᾶς δραχμῆς εἶναι τ. 1) Νά ὑπολογίσετε τό λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ καί 2) νά βρεῖτε τήν τιμή τοῦ ν, ἄν εἶναι $\beta = 2\alpha$ καί $\tau = 0{,}05$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΚΟΡΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

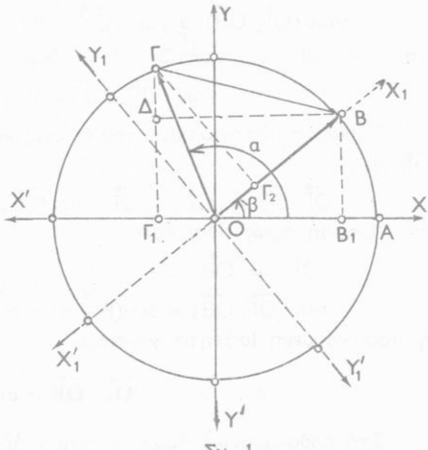
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

● 1. *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν προσανατολισμένων τόξων α καί β νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων α — β καί α + β.*



Σχ. 1

Α) Ὑπολογισμός τοῦ συν(α — β). Ἔχουμε τόν τριγωνομετρικό κύκλο (Ο) καί τούς πρωτεύοντες ἄξονες Χ'ΟΧ καί Υ'ΟΥ τῶν συνημιτόνων καί ἡμιτόνων, ἀντιστοίχως.

Ἄς πάρουμε $\widehat{A\Gamma}$ καί $\widehat{AB}$ δύο τόξα ἴσα πρός τά α καί β, ὅπου Α ἡ κοινή ἀρχή τους. Οἱ συντεταγμένες τῶν Γ καί Β ὡς πρός τούς ἄξονες Χ'Χ καί Υ'Υ εἶναι, ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{O\Gamma_1} = \text{συν}\,\alpha \\ y &= \overline{\Gamma_1\Gamma} = \text{ημ}\,\alpha \end{aligned}\right\}$$

καί

$$\left.\begin{aligned} x' &= \overline{OB_1} = \text{συν}\,\beta \\ y' &= \overline{B_1B} = \text{ημ}\,\beta \end{aligned}\right\}$$

Φέρνουμε τή ΒΔ κάθετη πρός τή $\Gamma_1\Gamma$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΔΓ ἔχουμε:

$$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

ἤ

$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= (\text{συν}\,\alpha - \text{συν}\,\beta)^2 + (\text{ημ}\,\alpha - \text{ημ}\,\beta)^2 \\ &= \text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta - 2\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta + \text{ημ}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta - 2\text{ημ}\,\alpha\,\text{ημ}\,\beta \\ &= 2 - 2\,(\text{συν}\,\alpha\,\text{συν}\,\beta + \text{ημ}\,\alpha\,\text{ημ}\,\beta) \qquad (\alpha') \end{aligned}$$

Ἡ τιμή τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι: $\alpha - \beta + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Φέρνουμε τήν εὐθεία X'_1OBX_1 καί, ἐπάνω σ' αὐτή, τήν κάθετο Y'_1OY_1, τίς ὁποῖες θεωροῦμε ὡς πρωτεύοντες ἄξονες γιά τό τόξο $(\widehat{B\Gamma}) = \alpha - \beta$. Ἀπό τό Γ φέρνουμε τήν κάθετη $\Gamma\Gamma_2$ πρός τή X'_1X καί τότε οἱ συντεταγμένες τῶν Β καί Γ θά εἶναι, ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \overline{OB} = 1 \\ y'_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{καί} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \overline{O\Gamma_2} = \text{συν}(\alpha - \beta) \\ y_1 &= \overline{\Gamma_2\Gamma} = \text{ημ}(\alpha - \beta) \end{aligned}\right\}$$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΒΓ_2Γ$ θά ἔχουμε:

$$ΒΓ^2 = ΒΓ_2^2 + Γ_2Γ^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 0)^2$$
$$= [συν(α-β) - 1]^2 + ημ^2(α-β)$$
$$= συν^2(α-β) + 1 - 2\,συν(α-β) + ημ^2(α-β)$$
$$= 2 - 2συν(α-β) \qquad (α'')$$

Ἀπό τίς σχέσεις (α'') καί (α'), τώρα, ἔχουμε:

$$2 - 2συν\,(α-β) = 2 - 2\,(συνα\,συνβ + ημα\,ημβ).$$ Ἄρα:

$$\forall α, β \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\mathbf{συν(α-β) \equiv συνα\,συνβ + ημα\,ημβ}} \qquad (1)$$

★ **Δεύτερος τρόπος.** Κατά τό θεώρημα τοῦ Chasles εἶναι:

$$\overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ}) = \overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟΧ}, \overrightarrow{ΟΒ}) - \overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟΧ}, \overrightarrow{ΟΓ}) + k\cdot 2\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ὅπου οἱ τιμές τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἐκφράζονται σέ ἀκτίνια. Ἄρα:

$$\overline{γων}\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ}) = β - α + k\cdot 2\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{ΟΓ}$ καί $\overrightarrow{ΟΒ}$ εἶναι:

$$\overrightarrow{ΟΓ}\cdot\overrightarrow{ΟΒ} = |\overrightarrow{ΟΓ}| \cdot |\overrightarrow{ΟΒ}|\,συν\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ})$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι καί

$$\left.\begin{array}{l} |\overline{ΟΓ}| = |\overrightarrow{ΟΒ}| = 1 \\ συν\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ}) = συν(β-α) = συν(α-β) \end{array}\right\}$$

ἡ προηγούμενη ἰσότητα γίνεται:

$$\overrightarrow{\mathbf{ΟΓ}}\cdot\overrightarrow{\mathbf{ΟΒ}} = \mathbf{συν(α-β).} \qquad (α_1)$$

Στό ὀρθοκανονικό ὅμως σύστημα ἀξόνων εἶναι:

$$\overrightarrow{ΟΓ}\cdot\overrightarrow{ΟΒ} = xx' + yy' = συνα\,συνβ + ημα\,ημβ \qquad (α_2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις $(α_1)$ καί $(α_2)$ συμπεραίνουμε ὅτι:

$$\forall α, β \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\mathbf{συν(α-β) \equiv συνα\,συνβ + ημα\,ημβ.}}$$

δηλαδή προκύπτει πάλι ὁ τύπος (1).

Β) Ὑπολογισμός τοῦ συν(α + β). Ἐπειδή ὁ τύπος (1) ἰσχύει γιά κάθε τόξο α καί β, θά ἰσχύει καί ὅταν στή θέση τοῦ β βάλουμε τό −β. Δηλαδή:

$$συν(α+β) \equiv συνα\,συν(-β) + ημα\,ημ(-β)$$
$$\equiv συνα\,συνβ - ημα\,ημβ,$$

γιατί $συν(-β) = συνβ$ καί $ημ(-β) = -ημβ$. Ἄρα:

$$\forall α, β \in \mathbb{R}: \quad \boxed{\mathbf{συν(α+β) \equiv συνα\,συνβ - ημα\,ημβ}} \qquad (2)$$

Γ) Ὑπολογισμός τοῦ ημ(α + β). Ἄν στόν τύπο (1), ὅπου α βάλουμε $\frac{\pi}{2} - \alpha$, θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] \equiv \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\upsilon\nu\,\beta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\eta\mu\,\beta \qquad (1)$$

$$\text{Ἀλλά} \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \equiv \sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \eta\mu(\alpha + \beta) \\ \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv \eta\mu\alpha \text{ καί } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \equiv \sigma\upsilon\nu\,\alpha. \end{cases}$$

ὁπότε ἡ ἰσότητα (1) γίνεται:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \qquad \boxed{\eta\mu(\alpha + \beta) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (3)$$

Δ) Ὑπολογισμός τοῦ ημ(α — β). Ἄν στόν τύπο (3), ὅπου β βάλουμε —β, θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu(\alpha - \beta) &\equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu(-\beta) + \eta\mu(-\beta)\,\sigma\upsilon\nu\alpha \\ &\equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha. \end{aligned}$$

Ἄρα:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \qquad \boxed{\eta\mu(\alpha - \beta) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (4)$$

Ε) Ὑπολογισμός τῆς εφ(α + β). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι: $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, θά ἔχουμε

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu\,(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta)} = \frac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta} \qquad (1)$$

Ἄν $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$, πού ἰσχύει γιά:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \quad \text{καί} \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

τότε ἡ ἰσότητα (1) γράφεται διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta} = \frac{\dfrac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta} + \dfrac{\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta} - \dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}}{1 - \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}.$$

Ἄρα: $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}} \tag{5}$$

Στ) Ὑπολογισμός τῆς εφ(α — β). Ἄν στόν τύπο (5) βάλουμε ὅπου β τό $-\beta$ καί ὑποθέσουμε ὅτι $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, τότε:

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(-\beta)}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi(-\beta)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$$

γιατί $\varepsilon\varphi(-\beta)=-\varepsilon\varphi\beta$.

Ἄρα: $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}} \tag{6}$$

Ζ) Ὑπολογισμός τῆς σφ(α + β). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι:

$\eta\mu(\alpha+\beta)\neq 0$, πού ἰσχύει γιά $\alpha+\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

καί $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\neq 0$, πού ἰσχύει γιά $\alpha\neq k_1\pi$ καί $\beta\neq k_2\pi$, $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}-\dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}+\dfrac{\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$$

Ἄρα: $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}} \tag{7}$$

Η) Ὑπολογισμός τῆς σφ (α — β). Ἄν στόν τύπο (7) βάλουμε ὅπου β τό $-\beta$, θά ἔχουμε:

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi(-\beta)-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi(-\beta)}=\frac{-\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta}=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

Ἄρα: $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}} \tag{8}$$

ἄν $\alpha-\beta\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ καί $\alpha\neq k_1\pi$ καί $\beta\neq k_2\pi$, $k_1, k_2\in\mathbb{Z}$.

Μερικές περιπτώσεις. Ἄν $\beta = \frac{\pi}{4}$, τότε $\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$ καί γιά

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ &\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \qquad k, k_1 \in \mathbb{Z}$$

καί γιά

$$\left.\begin{aligned} &\alpha \neq -\frac{\pi}{4} + k_2\pi \\ &\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_3\pi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}, \quad k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Ὥστε:

$$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \qquad \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}} \qquad (9)$$

μέ τούς παραπάνω περιορισμούς.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

● *1. Ἄν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ καί $\eta\mu\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\,\beta = \frac{9}{41}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:*

$$\eta\mu(\alpha - \beta),\ \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta),\ \varepsilon\varphi(\alpha - \beta),\ \sigma\varphi(\alpha + \beta).$$

Λύση. Ἐπειδή εἶναι $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ καί $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{9}{41}\right)^2} = -\frac{40}{41},$$

ὁπότε θά εἶναι:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4},\ \varepsilon\varphi\beta = \frac{9}{41} : \left(-\frac{40}{41}\right) = -\frac{9}{40},\ \sigma\varphi\alpha = \frac{4}{3},\ \sigma\varphi\beta = -\frac{40}{9}$$

καί, ἑπομένως:

$$\eta\mu\,(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{40}{41}\right) - \frac{9}{41}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{156}{205},$$

$$\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{40}{41}\right)-\frac{3}{5}\cdot\frac{9}{41}=-\frac{187}{205},$$

$$\text{εφ}(\alpha-\beta)=\frac{\text{εφ}\alpha-\text{εφ}\beta}{1+\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}=\frac{\frac{3}{4}-\left(-\frac{9}{40}\right)}{1+\frac{3}{4}\left(-\frac{9}{40}\right)}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{9}{40}}{1-\frac{27}{160}}=\frac{156}{133},$$

$$\text{σφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{σφ}\alpha\cdot\text{σφ}\beta-1}{\text{σφ}\alpha+\text{σφ}\beta}=\frac{\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{40}{9}\right)-1}{\frac{4}{3}+\left(-\frac{40}{9}\right)}=\frac{187}{84}.$$

● **2.** *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων 15° καί 75°.*

Λύση. Ἐπειδή $15°+75°=90°$, θά ἔχουμε:

$$\text{ημ}15°=\text{συν}75°=\text{συν}(45°+30°)=\text{συν}45°\,\text{συν}30°-\text{ημ}45°\,\text{ημ}30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{συν}15°=\text{ημ}75°=\text{ημ}(45°+30°)=\text{ημ}45°\,\text{συν}30°+\text{ημ}30°\,\text{συν}45°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{εφ}\,15°=\text{σφ}75°=\frac{\text{συν}\,75°}{\text{ημ}75°}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2}=2-\sqrt{3}.$$

$$\text{σφ}\,15°=\text{εφ}\,75°=\frac{\text{ημ}\,75°}{\text{συν}\,75°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2}=2+\sqrt{3}.$$

Ἀνακεφαλαίωση.

$\text{ημ}\ 15°=\text{συν}\ 75°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\text{εφ}\ 15°=\text{σφ}\ 75°=2-\sqrt{3}$
$\text{συν}\ 15°=\text{ημ}\ 75°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\text{σφ}\ 15°=\text{εφ}\ 75°=2+\sqrt{3}$

(10)

● **3.** *Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$: $\quad \text{ημ}(\alpha+\beta)\text{ημ}(\alpha-\beta)\equiv\text{ημ}^2\alpha-\text{ημ}^2\beta\equiv\text{συν}^2\beta-\text{συν}^2\alpha.$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu(\alpha-\beta) &\equiv (\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\beta) - \eta\mu^2\beta(1-\eta\mu^2\alpha)\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta - \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta\\ &\equiv 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1-\sigma\upsilon\nu^2\beta) \equiv \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha.\end{aligned}$$

● **4.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$$\Sigma \equiv \alpha\eta\mu(B-\Gamma) + \beta\eta\mu(\Gamma - A) + \gamma\eta\mu(A-B) = 0.$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $\alpha = 2R\eta\mu A = 2R\eta\mu(B+\Gamma)$, θά ἔχουμε:

$$\alpha\eta\mu(B-\Gamma) = 2R\eta\mu(B+\Gamma)\eta\mu(B-\Gamma) = 2R(\eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma)$$

καί μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων α, β, γ καί Α, Β, Γ θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma &\equiv 2R(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma) + 2R(\eta\mu^2\Gamma - \eta\mu^2A) + 2R(\eta\mu^2A - \eta\mu^2B) =\\ &= 2R(\eta\mu^2B - \eta\mu^2\Gamma + \eta\mu^2\Gamma - \eta\mu^2A + \eta\mu^2A - \eta\mu^2B) = 2R\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

● **5.** *Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, καί $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ ἤ $\beta \neq k_1\pi + \frac{\pi}{2}$ ἤ $\gamma \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2}$, νά ἀποδειχθεῖ ἡ σχέση:*

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση $\alpha+\beta+\gamma = \pi \Rightarrow \alpha+\beta = \pi - \gamma$ καί ἐπομένως:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \varepsilon\varphi(\pi-\gamma) = -\varepsilon\varphi\gamma \Rightarrow \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta} = -\varepsilon\varphi\gamma \Rightarrow$$

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma.$$

Ἀντιστρόφως:

● **6.** *Ἄν οἱ γωνίες α, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:*

(1) $$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma = \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma \qquad \textbf{(12)}$$

μέ ποιά σχέση συνδέονται αὐτές οἱ γωνίες;

Λύση. Ἀπό τή σχέση (1) ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = -\varepsilon\varphi\gamma(1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta) \qquad (2)$$

Ἄν εἶναι $1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta = 1$, τότε ἀπό τή (2) ⇒

$$\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = -\varepsilon\varphi\beta,$$

ἡ ὁποία ἰσότητα δέ συμβιβάζεται μέ τήν $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta = 1$. Ἄρα:

$$1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta \neq 0,$$

ὁπότε ἀπό τή σχέση (2) ἔχουμε:

$$\frac{εφα + εφβ}{1 - εφα\, εφβ} = -εφγ \Leftrightarrow εφ(α+β) = -εφγ = εφ(π-γ) \Leftrightarrow$$

$$α + β = (π - γ) + νπ \Leftrightarrow α + β + γ = π + νπ = (ν+1)π = kπ \text{ μέ } ν,\ k \in \mathbb{Z}$$

Ἀπό τά παραπάνω βλέπουμε ὅτι οἱ γωνίες α, β, γ συνδέονται μέ τή σχέση $α + β + γ = kπ$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$.

● **7.** *Ἄν οἱ γωνίες $α, β, γ$ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα $α + β + γ = π$, τότε:*

$$\mathbf{συν^2α + συν^2β + συν^2γ + 2συνα\, συνβ\, συνγ = 1} \tag{13}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε $α + β + γ = π \Leftrightarrow α + β = π - γ$ καί ἑπομένως:

$$συν(α + β) = συν(π - γ) = -συνγ \Leftrightarrow συνα\, συνβ - ημα\, ημβ = -συνγ \Leftrightarrow$$

$$συνα\, συνβ + συνγ = ημα\, ημβ$$

Ὑψώνοντας καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητας στό τετράγωνο, ἔχουμε:

$$συν^2α\, συν^2β + συν^2γ + 2συνα\, συνβ\, συνγ = ημ^2α\, ημ^2β =$$
$$= (1 - συν^2α)(1 - συν^2β) = 1 - συν^2α - συν^2β + συν^2α\, συν^2β \Leftrightarrow$$
$$συν^2α + συν^2β + συν^2γ + 2συνα\, συνβ\, συνγ = 1.$$

Ἀντιστρόφως:

★ ● **8.** *Ἄν ἰσχύει ὁ τύπος (13), πῶς συνδέονται οἱ γωνίες $α, β, γ$;*

Λύση: Ὁ τύπος (13) γράφεται:

$$συν^2γ + 2συνα\, συνβ\, συνγ + συν^2α + συν^2β - 1 = 0 \tag{1}$$

καί μπορεῖ νά θεωρηθεῖ τό πρῶτο μέλος ὡς δευτεροβάθμιο τριώνυμο ὡς πρός συνγ. Ἄν Δ εἶναι ἡ διακρίνουσά του, θά ἔχουμε:

$$\frac{Δ}{4} = συν^2α\, συν^2β - συν^2α - συν^2β + 1 = (1 - συν^2α)(1 - συν^2β) = ημ^2α\, ημ^2β,$$

καί ἑπομένως οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου θά εἶναι:

$$συνγ = -συνα\, συνβ \pm ημα\, ημβ = -συν(α \pm β),$$

ὁπότε θά ἔχουμε:

$$α \pm β = \pm(π - γ) + k \cdot 2π \Leftrightarrow \mathbf{α \pm β \pm γ = (2k+1)π}, \text{ μέ } k \in \mathbb{Z}.$$

ΣΗΜ. Τά διπλά σημεῖα εἶναι ἀνεξάρτητα τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο.

Μέ ὅμοια ἐργασία βρίσκουμε ὅτι:

★ *Ἄν οἱ γωνίες $α, β, γ$ ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα:*

$$\mathbf{συν^2α + συν^2β + συν^2γ - 2συνα\, συνβ\, συνγ = 1} \tag{14}$$

τότε οἱ γωνίες $α, β, γ$ συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\mathbf{α \pm β \pm γ = k . 2π}, \text{ ὅπου } k \in \mathbb{Z}$$

● 9. *Ἂν μεταξύ τῶν κυρίων στοιχείων ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχει ἡ σχέση:*

$$\alpha = 2\beta \text{ συν } \Gamma, \tag{1}$$

τότε τό τρίγωνο αὐτό θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξη. Ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$2R\text{ημ}A = 2 \cdot 2R\text{ημ}B \text{ συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{ημ}A = 2\text{ημ}B \text{ συν}\Gamma \tag{2}$$

καί ἐπειδή $A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow \text{ημ}A = \text{ημ}(B + \Gamma)$ καί ἡ (2) γίνεται:

$$\text{ημ}(B + \Gamma) = 2\text{ημ}B \text{ συν}\Gamma \Leftrightarrow \text{ημ}B \text{ συν}\Gamma + \text{ημ}\Gamma \text{ συν}B = 2\text{ημ}B \text{ συν}\Gamma \Leftrightarrow$$
$$\text{ημ}B \text{ συν}\Gamma - \text{ημ}\Gamma \text{ συν}B = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}(B - \Gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$B - \Gamma = k \cdot \pi, \quad \text{ὅπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Ἐπειδή ὅμως B καί Γ εἶναι γωνίες τριγώνου, πρέπει $k = 0$.

Ἄρα $B - \Gamma = 0$, ὁπότε $B = \Gamma$. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

1. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 105°.

2. Ἂν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ καί ημ $\alpha = \frac{3}{5}$, συν $\beta \frac{9}{41}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\text{ημ}(\alpha - \beta),\ \text{συν}(\alpha + \beta),\ \text{εφ}(\alpha - \beta),\ \text{σφ}(\alpha + \beta).$$

3. Ἂν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ καί ημ $\alpha = \frac{15}{17}$, συν $\beta = \frac{12}{13}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\text{ημ}(\alpha + \beta),\ \text{συν}(\alpha - \beta),\ \text{εφ}(\alpha + \beta),\ \text{σφ}(\alpha - \beta).$$

4. Ἂν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ καί συν $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, συν $\beta = -\frac{3}{5}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\text{ημ}(\alpha + \beta),\ \text{συν}(\alpha - \beta),\ \text{εφ}(\alpha - \beta),\ \text{σφ}(\alpha + \beta).$$

5. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ταυτότητες:

1. $\text{ημ}(\alpha - \beta)\text{συν}\beta + \text{ημ}\beta\,\text{συν}(\alpha - \beta) \equiv \text{ημ}\alpha.$
2. $\text{συν}(\alpha - \beta)\,\text{συν}(\alpha + \beta) - \text{ημ}(\alpha - \beta)\,\text{ημ}(\alpha + \beta) \equiv \text{συν}2\alpha.$
3. $\text{ημ}(60^\circ - \alpha)\,\text{συν}(30^\circ + \alpha) + \text{ημ}(30^\circ + \alpha)\,\text{συν}(60^\circ - \alpha) \equiv 1.$
4. $\text{συν}(\alpha + \beta)\,\text{συν}(\alpha - \beta) \equiv \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\beta \equiv \text{συν}^2\beta - \text{ημ}^2\alpha.$
5. $\text{εφ}(\beta - \gamma) + \text{εφ}(\gamma - \alpha) + \text{εφ}\ (\alpha - \beta) = \text{εφ}(\beta - \gamma)\,\text{εφ}(\gamma - \alpha)\,\text{εφ}(\alpha - \beta).$

Γιά ποιές τιμές τῶν α, β, γ δέν ἔχουν ἔννοια τά μέλη τῆς 5;

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\dfrac{\text{ημ}(\alpha - \beta)}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta} + \dfrac{\text{ημ}(\beta - \gamma)}{\text{συν}\beta\,\text{συν}\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma - \alpha)}{\text{συν}\gamma\,\text{συν}\alpha} = 0.$
2. $\dfrac{\text{ημ}(\beta - \gamma)}{\text{ημ}\beta\,\text{ημ}\gamma} + \dfrac{\text{ημ}(\gamma - \alpha)}{\text{ημ}\gamma\,\text{ημ}\alpha} + \dfrac{\text{ημ}(\alpha - \beta)}{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta} = 0.$
3. $\dfrac{2\text{ημ}(\alpha + \beta)}{\text{συν}(\alpha + \beta) + \text{συν}(\alpha - \beta)} = \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta.$
4. $\dfrac{\text{εφ}^2 2\alpha - \text{εφ}^2\alpha}{1 - \text{εφ}^2 2\alpha\text{εφ}^2\alpha} = \text{εφ}3\alpha\,\text{εφ}\alpha.$

7. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $συν^2x + συν^2(120° + x) + συν^2(120° - x) \equiv \frac{3}{2}$.

2. Ἄν $α + β = 45°$, τότε: $(1 + εφα)(1 + εφβ) = 2$.

3. $συν^2α + συν^2(60° + α) + συν^2(60° - α) \equiv \frac{3}{2}$.

★ Δεύτερη ὁμάδα

8. Ἄν $α + β + γ = π$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $σφ\frac{α}{2} + σφ\frac{β}{2} + σφ\frac{γ}{2} = σφ\frac{α}{2}\,σφ\frac{β}{2}\,σφ\frac{γ}{2}$.

2. $σφα\,σφβ + σφβ\,σφγ + σφγ\,σφα = 1$.

3. $\frac{συνα}{ημβ\,ημγ} + \frac{συνβ}{ημγ\,ημα} + \frac{συνγ}{ημα\,ημβ} = 2$.

4. $ημ^2α + ημ^2β + ημ^2γ - 2συνα\,συνβ\,συνγ = 2$.

5. $εφ2α + εφ2β + εφ2γ = εφ2α\,εφ2β\,εφ2γ$.

9. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\frac{α^2ημ(Β-Γ)}{ημΒ + ημΓ} + \frac{β^2ημ(Γ-Α)}{ημΓ + ημΑ} + \frac{γ^2ημ(Α-Β)}{ημΑ + ημΒ} = 0$.

2. $\frac{α^2ημ(Β-Γ)}{ημΑ} + \frac{β^2ημ(Γ-Α)}{ημΒ} + \frac{γ^2ημ(Α-Β)}{ημΓ} = 0$.

3. $(β + γ)συνΑ + (γ + α)συνΒ + (α + β)συνΓ = α + β + γ$.

4. $ημΑ\,ημ(Β-Γ) + ημΒ\,ημ(Γ-Α) + ημΓ\,ημ(Α-Β) = 0$.

10. Ἄν $α + β + γ = π$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $σφ^2α + σφ^2β + σφ^2γ \geqq 1$.

2. $εφ^2\frac{α}{2} + εφ^2\frac{β}{2} + εφ^2\frac{γ}{2} \geqq 1$.

3. Ἄν $α + β + γ = \frac{π}{2}$, τότε: $εφ^2α + εφ^2β + εφ^2γ \geqq 1$.

4. Ἄν $\frac{εφ(α-β)}{εφα} + \frac{ημ^2γ}{ημ^2α} = 1$, τότε: $εφ^2γ = εφα\,εφβ$.

★ ● **10.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν προσανατολισμένων τόξων α, β, γ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ ἀθροίσματος $α + β + γ$.*

Α) Ὑπολογισμός τοῦ ημ(α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} ημ(α + β + γ) &\equiv ημ[(α + β) + γ] \equiv ημ(α + β)συνγ + ημγ\,συν(α + β) \equiv \\ &\equiv (ημα\,συνβ + ημβ\,συνα)συνγ + ημγ(συνα\,συνβ - ημα\,ημβ) \\ &\equiv ημα\,συνβ\,συνγ + ημβ\,συνα\,συνγ + ημγ\,συνα\,συνβ - ημα\,ημβ\,ημγ \end{aligned}$$

Ὥστε, $\forall\, α, β, γ \in \mathbb{R}$, εἶναι:

$$\mathbf{ημ(α + β + γ) \equiv ημα\,συνβ\,συνγ + ημβ\,συνγ\,συνα + ημγ\,συνα\,συνβ - ημα\,ημβ\,ημγ}$$

καί πιό σύντομα:

$$\boxed{ημ(α + β + γ) \equiv Σημα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,ημγ} \qquad (15)$$

Β) Ὑπολογισμός τοῦ συν(α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}συν(α+β+γ) &\equiv συν[(α+β)+γ] \equiv συν(α+β)συνγ - ημ(α+β)ημγ \equiv \\ &\equiv (συνα\,συνβ - ημα\,ημβ)συνγ - (ημα\,συνβ + ημβ\,συνα)ημγ \\ &\equiv συνασυνβσυνγ - ημαημβσυνγ - ημαημγσυνβ - ημβημγσυνα.\end{aligned}$$

Ὥστε, $\forall\, α, β, γ \in \mathbb{R}$, εἶναι:

$$\mathbf{συν(α+β+γ) \equiv συνα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,συνγ - ημβ\,ημγ\,συνα - ημγ\,ημα\,συνβ}$$

καί συντομότερα:

$$\boxed{\mathbf{συν(α+β+γ) \equiv συνα\,συνβ\,συνγ - Σημα\,ημβ\,συνγ}} \qquad \mathbf{(16)}$$

Γ) Ὑπολογισμός τῆς εφ(α + β + γ). Ἔχουμε διαδοχικά:

$$εφ(α+β+γ) = \frac{ημ(α+β+γ)}{συν(α+β+γ)} = \frac{Σ\,ημα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,ημγ}{συνα\,συνβ\,συνγ - Σ\,ημα\,ημβ\,συνγ}, \qquad (1)$$

ὅταν εἶναι $συν(α+β+γ) \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $α+β+γ \neq \frac{π}{2} + kπ$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ἄν ὅμως εἶναι καί $συνα\,συνβ\,συνγ \neq 0$, πού ἰσχύει γιά:

$α \neq \frac{π}{2} + k_1π$, $β \neq \frac{π}{2} + k_2π$, $γ \neq \frac{π}{2} + k_3π$ σύγχρονα $\qquad (k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z})$

διαιρώντας καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος (1) τοῦ δεύτερου μέλους μέ συνα συνβ συνγ, ἔχουμε:

$$\boxed{\mathbf{εφ(α+β+γ) = \frac{Σ\,εφα - εφα\,εφβ\,εφγ}{1 - Σ\,εφα\,εφβ}}} \qquad \mathbf{(17)}$$

ἤ

$$\mathbf{εφ(α+β+γ) = \frac{εφα + εφβ + εφγ - εφα\,εφβ\,εφγ}{1 - εφα\,εφβ - εφβ\,εφγ - εφγ\,εφα}}$$

Δ) Ὑπολογισμός τῆς σφ(α + β + γ). Ἄν $ημ(α+β+γ) \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $α+β+γ \neq kπ$, ὅπου $k \in \mathbb{Z}$, ἔχουμε διαδοχικά:

$$σφ(α+β+γ) = \frac{συν(α+β+γ)}{ημ(α+β+γ)} = \frac{συνα\,συνβ\,συνγ - Σημα\,ημβ\,συνγ}{Σημα\,συνβ\,συνγ - ημα\,ημβ\,ημγ} \qquad (1)$$

Ἄν ὅμως εἶναι καί $ημα\,ημβ\,ημγ \neq 0$, πού ἰσχύει γιά $α \neq k_1π$ καί $β \neq k_2π$ καί $γ \neq k_3π$, ὅπου $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$, διαιρώντας τούς ὅρους τοῦ κλάσματος (1) μέ ημα ημβ ημγ, βρίσκουμε τόν τύπο:

$$\mathbf{σφ(α+β+γ) = \frac{σφα\,σφβ\,σφγ - Σσφα}{Σσφβ\,σφγ - 1}} \qquad 18$$

$$\boxed{\mathbf{σφ(α+β+γ) = \frac{σφα\,σφβ\,σφγ - σφα - σφβ - σφγ}{σφβ\,σφγ + σφγ\,σφα + σφα\,σφβ - 1}}}$$

Παράδειγμα. *Ἄν* $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{12}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{2}{5}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{1}{3}$, *νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Ἀπόδειξη. Στόν τύπο (17) ἀντικαθιστώντας τίς δεδομένες τιμές, βρίσκουμε μετά τήν ἐκτέλεση τῶν σχετικῶν πράξεων:

$$\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma) = 1 = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}. \text{ Ἄρα: } \alpha + \beta + \gamma = \pi/4 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

11. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu(\beta + \gamma - \alpha)$, $\eta\mu(\gamma + \alpha - \beta)$, $\eta\mu(\alpha + \beta - \gamma)$.
2. $\sigma\upsilon\nu(\beta + \gamma - \alpha)$, $\sigma\upsilon\nu(\gamma + \alpha - \beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta - \gamma)$.
3. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta - \gamma)$, $\sigma\upsilon\nu(\beta - \alpha - \gamma)$, $\sigma\upsilon\nu(\gamma - \alpha - \beta)$.

12. 1. Ἄν $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ καί $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{4}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{8}{15}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{5}{12}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν ἀθροισμάτων $\alpha \pm \beta \pm \gamma$.

2. Ἄν $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$ καί $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = \frac{12}{13}$, $\eta\mu\gamma = \frac{7}{25}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$, $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma)$, $\sigma\varphi(\alpha + \beta - \gamma)$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΤΟΞΩΝ

● **11.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων:*

$$2\alpha, 3\alpha, \ldots, \nu\alpha \qquad \nu \in \mathbb{Z}$$

Α) Ὑπολογισμός τοῦ ημ2α. Ἄν στό γνωστό τύπο:

$$\eta\mu(\alpha + \beta) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

βάλουμε ἀντί β τό α, θά ἔχουμε:

$$\eta\mu(\alpha + \alpha) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἤ

$$\boxed{\eta\mu\, 2\alpha \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (19)$$

Β) Ὑπολογισμός τοῦ συν 2α. Ἄν στό γνωστό τύπο:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta,$$

βάλουμε ὅπου β τό α, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha$$

καί $$\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1.$$

Ὥστε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv 1 - 2\eta\mu^2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \qquad (20)$$

Γ) Ὑπολογισμός τῆς εφ 2α. Ἀπό τό γνωστό τύπο:

$\varepsilon\varphi\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$, ἄν βάλουμε ὅπου β τό α, ἔχουμε:

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha + \alpha) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\varepsilon\varphi\, 2\alpha = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}} \qquad (21)$$

Ὁ τύπος (21) ἰσχύει γιά:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \pi, \text{ ὅπου } k, k_1, \in \mathbb{Z}.$$

Δ) Ὑπολογισμός τῆς σφ 2α. Ἀπό τό γνωστό τύπο:

$\sigma\varphi\,(\alpha + \beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}$, ὅταν $\beta = \alpha$, ἔχουμε:

$$\sigma\varphi\,(\alpha + \alpha) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\alpha - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}} \qquad (22)$$

Ὁ τύπος (22) ἰσχύει γιά $\alpha \neq k\pi$ καί $\alpha \neq \pi/2 + k_1 \cdot \pi$, ὅπου $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

● **12.** *Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 3α.* Ἔχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\eta\mu 3\alpha &= \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \\
&= 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha(1 - 2\eta\mu^2\alpha) = \\
&= 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \\
&= 2\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = \\
&= 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha.
\end{aligned}$$

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 2\alpha\,\eta\mu\alpha =$$
$$= (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha =$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

$$\varepsilon\varphi 3\alpha = \varepsilon\varphi\,(2\alpha + \alpha) = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha}, \qquad \sigma\varphi 3\alpha = \sigma\varphi(2\alpha + \alpha) = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}$$

Ὥστε, τελικά, θά ἔχουμε:

$$\boxed{\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha} \quad \boxed{\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad (23)$$

καὶ

$$\boxed{\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha}} \quad \boxed{\sigma\varphi 3\alpha = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}} \quad (24)$$

ΣΗΜ. Οἱ τύποι (23) καί (24) προκύπτουν ἀπό τούς τύπους 15 - 18, ἄν ἐκεῖ βάλουμε ὅπου $\beta = \gamma = \alpha$ καί ἐκτελέσουμε τίς πράξεις.

Ὁ πρῶτος ἀπό τούς τύπους (24) ἔχει ἔννοια, ὅταν

$$3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{\pi}{3} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{6} + k_1\pi, \text{ ὅπου } \ k, k_1 \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ δεύτερος ἀπό τούς τύπους (24) ἔχει ἔννοια, ὅταν:

$$3\alpha \neq k_2\pi \Rightarrow \alpha \neq k_2\cdot\frac{\pi}{3} \text{ καί } \alpha \neq \pm\frac{\pi}{3} + k_3\pi, \text{ ὅπου } \ k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

★ ● **13.** *Τύποι τοῦ Simpson.* Προφανῶς εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu(\alpha+\beta) + \eta\mu(\alpha-\beta) \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \equiv 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta \end{array}\right\}.$$

Ἑπομένως:

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu(\alpha+\beta) \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu(\alpha-\beta) \\ \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \equiv 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \end{array}\right\}.$$

καί ἄν βάλουμε ὅπου α τό μα καί ὅπου β τό α, βρίσκουμε τούς τύπους:

$$\boxed{\eta\mu(\mu+1)\alpha \equiv 2\eta\mu(\mu\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu(\mu-1)\alpha} \quad (25)$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu(\mu+1)\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu(\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu(\mu-1)\alpha} \quad (26)$$

Ἀπό τούς τύπους (25), (26) γιά $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ βρίσκουμε ἀντιστοίχως τούς τύπους:

$\eta\mu\, 2\alpha \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu\, 2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
$\eta\mu\, 3\alpha \equiv 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 3\alpha \equiv 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\,\alpha$
$\eta\mu\, 4\alpha \equiv (4\eta\mu\alpha - 8\eta\mu^3\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 4\alpha \equiv 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$
$\eta\mu 5\alpha \equiv 5\eta\mu\alpha - 20\eta\mu^3\alpha + 16\eta\mu^5\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 5\alpha \equiv 16\sigma\upsilon\nu^5\alpha - 20\sigma\upsilon\nu^3\alpha + 5\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\eta\mu 6\alpha \equiv (6\eta\mu\alpha - 32\eta\mu^3\alpha + 32\eta\mu^5\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 6\alpha \equiv 32\sigma\upsilon\nu^6\alpha - 48\sigma\upsilon\nu^4\alpha + 18\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
. . . .	. . . .

● **14.** *ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν* **18°, 36°, 54°, 72°.**

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά: $36° + 54° = 90° \Leftrightarrow 36° = 90° - 54° \Leftrightarrow$
$ημ36° \equiv ημ(90° - 54°) \equiv συν54° \Leftrightarrow ημ(2 \cdot 18°) \equiv συν(3 \cdot 18°) \Leftrightarrow$

$$2ημ18°\, συν18° \equiv 4συν^3 18° - 3συν18° \Leftrightarrow$$

$$2ημ18° \equiv 4συν^2 18° - 3 \Leftrightarrow 4ημ^2 18° + 2ημ18° \equiv 1 \Leftrightarrow$$

$$4ημ^2 18° + 2ημ18° + \frac{1}{4} \equiv \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(2ημ18° + \frac{1}{2}\right)^2 \equiv \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left|2ημ18° + \frac{1}{2}\right| \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2ημ18° + \frac{1}{2} \equiv \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow ημ18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \approx 0{,}3090$$

Ἄρα $\qquad συν^2 18° = 1 - ημ^2 18° = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \dfrac{10 + 2\sqrt{5}}{16} \Rightarrow$

$$συν18° = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

ὁπότε $\qquad εφ18° = \dfrac{ημ18°}{συν18°} = \dfrac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{5}.$

Ἀπό τόν τύπο $συν2α = 1 - 2ημ^2 α$, γιά $α = 18°$, ἔχουμε:

$$συν36° = 1 - 2ημ^2 18° = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

καί $ημ^2 36° = 1 - συν^2 36° = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \dfrac{10 - 2\sqrt{5}}{16}$ ἤ $ημ36 = \dfrac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

καί ἄρα: $\qquad εφ36° = \dfrac{ημ36°}{συν36} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\cdot$

Καί ἐπειδή $18° + 72° = 90°$ καί $36° + 54° = 90°$, συμπεραίνουμε:

$$\begin{aligned} ημ72° &= συν18° \\ συν72° &= ημ18° \\ εφ72° &= σφ18° \\ σφ72° &= εφ18° \end{aligned} \qquad \text{καί} \qquad \begin{aligned} ημ54° &= συν36° \\ συν54° &= ημ36° \\ εφ54° &= σφ36° \\ σφ54° &= εφ36° \end{aligned}$$

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$\mathbf{ημ18° = συν72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$	$\mathbf{ημ36° = συν54° = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$
$\mathbf{συν18° = ημ72° = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\mathbf{συν36° = ημ54° = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}}$
$\mathbf{εφ18° = σφ72° = \dfrac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}}$	$\mathbf{εφ36° = σφ54° = \sqrt{5-2\sqrt{5}}}$
$\mathbf{σφ18° = εφ72° = \sqrt{5+2\sqrt{5}}}$	$\mathbf{σφ36° = εφ54° = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}}$

(28)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

13. Ἄν $ημα = 0{,}4$ καί $90° < α < 180°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί:

$$ημ2α,\ συν2α,\ εφ2α,\ σφ2α$$

14. Ἄν $ημα = \frac{1}{3}$, $ημβ = \frac{1}{2}$ καί $0 < α, β < \frac{π}{2}$, νά ὑπολογισθεῖ τό $ημ(2α + β)$.

15. Ἄν $4ημ^2x - 2(1 + \sqrt{3})\, ημx + \sqrt{3} = 0$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί:

$$ημ2x,\ συν2x,\ εφ2x.$$

16. Ἄν $συνα = \frac{1}{3}$, νά ὑπολογισθεῖ τό $συν3α$.

17. Ἄν $ημα = \frac{3}{5}$, νά ὑπολογισθεῖ τό $ημ3α$.

18. Ἄν $εφα = 3$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $εφ3α$.

19. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\dfrac{ημ2α}{1+συν2α} = εφα,$
2. $\dfrac{ημ2α}{1 - συν2α} = σφα,$
3. $συν^4α - ημ^4α \equiv συν2α,$
4. $σφα - εφα = 2σφ2α.$
5. $\dfrac{1+σφ^2α}{2σφα} = στεμ2α,$
6. $\dfrac{σφ^2α + 1}{σφ^2α - 1} = τεμ2α,$
7. $εφ(45° - α) = \dfrac{συν2α}{1 + ημ2α}.$

Πότε ἔχουν ἔννοια τά μέλη τῶν παραπάνω ἀσκήσεων;

20. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $συν^2\left(\frac{π}{4} - α\right) - ημ^2\left(\frac{π}{4} - α\right) \equiv ημ2α.$
2. $εφ(45° + α) - εφ(45° - α) = 2εφ2α.$
3. $\dfrac{συνα + ημα}{συνα - ημα} - \dfrac{συνα - ημα}{συνα + ημα} = 2εφ2α.$
4. $\dfrac{1 - συν2α + ημ2α}{1 + συν2α + ημ2α} = εφα.$

★ Δεύτερη ὁμάδα

21. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\dfrac{ημ3α}{ημα} - \dfrac{συν3α}{συνα} = 2.$
2. $\dfrac{3\,συνα + συν3α}{3\,ημα - ημ\,3α} = σφ^3α,$
3. $\dfrac{ημ3α + ημ^3α}{συν^3α - συν3α} = σφα.$
4. $\dfrac{συν^3α - συν3α}{συνα} + \dfrac{ημ^3α + ημ3α}{ημα} = 3.$
5. $4ημ^3α\, συν3α + 4συν^3α\, ημ3α \equiv 3ημ4α.$
6. $4ημα\, ημ(60° + α)\, ημ(60° - α) \equiv ημ3α.$
7. $εφ3α - εφ2α - εφα = εφ3α\, εφ2α\, εφα.$
8. $\dfrac{σφα}{σφα - σφ3α} + \dfrac{εφα}{εφα - εφ3α} = 1.$

● **15.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τήν εφα ἑνός τόξου α νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 2α.*

Λύση. Ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\text{συν}^2\alpha = \frac{1}{1+\text{εφ}^2\alpha} \quad \text{καί} \quad \text{ημ}^2\alpha = \frac{\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}, \quad \text{ἄν } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

ἔχουμε διαδοχικά:

$$\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha = 2\text{εφ}\alpha\cdot\text{συν}^2\alpha = 2\text{εφ}\alpha\cdot\frac{1}{1+\text{εφ}^2\alpha} = \frac{2\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha},$$

$$\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha = \frac{1}{1+\text{εφ}^2\alpha} - \frac{\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha} = \frac{1-\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha},$$

$$\text{εφ}2\alpha = \frac{\text{ημ}2\alpha}{\text{συν}2\alpha} = \frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}, \quad \text{ἄν } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k_1\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k_2\pi$$

$$\text{σφ}2\alpha = \frac{1-\text{εφ}^2\alpha}{2\text{εφ}\alpha}, \quad \text{ἄν } \alpha \neq (2k_3+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{καί} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_4\pi,$$

ὅπου οἱ $k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$.

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

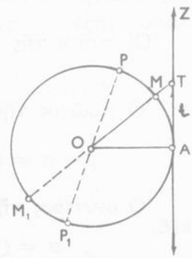
$\text{ημ}2\alpha = \dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}$	$\text{εφ}2\alpha = \dfrac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha}$
$\text{συν}2\alpha = \dfrac{1-\text{εφ}^2\alpha}{1+\text{εφ}^2\alpha}$	$\text{σφ}2\alpha = \dfrac{1-\text{εφ}^2\alpha}{2\text{εφ}\alpha}$

(29)

Στούς τύπους (29) παρατηροῦμε ὅτι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α εἶναι ρητές συναρτήσεις τῆς εφα.

✱● **16. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν τύπων (29).** Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι Ο εἶναι τό κέντρο τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, Α ἡ ἀρχή τῶν τόξων καί ΑΖ ὁ ἄξονας τῶν ἐφαπτομένων.

Ἄν $t = \text{εφ}\alpha = \overline{AT}$ εἶναι ἡ τιμή τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στά δύο ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Μ καί M_1 τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (Ο), τότε τά τόξα, τά ὁποῖα ἔχουν ἐφαπτομένη $t = \overline{AT}$, περατώνονται στό σημεῖο Μ ἤ τό M_1.



Σχ. 2

Ἄρα οἱ τιμές τους θά εἶναι :

$$x = \alpha + k\cdot\pi, \quad \text{ὅπου } k \in \mathbb{Z}.$$

Τά διπλάσια τόξα θά ἔχουν τιμές:

$$2x = 2(\alpha + k\cdot\pi) = 2\alpha + k\cdot 2\pi$$

καί θά περατώνονται στό σημεῖο P ἤ P_1. Ἄν, λοιπόν, γνωρίζουμε τό σημεῖο T, εἶναι ἀμέσως γνωστό καί τό σημεῖο P. Ἄρα οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου $\widehat{AP}$ εἶναι τελείως ὁρισμένοι.

Ἀντιστρόφως, ἄν εἶναι γνωστό τό σημεῖο P, εἶναι ἀμέσως γνωστό καί τό σημεῖο T, ὁπότε εἶναι γνωστή καί ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\widehat{AM}$. Δηλαδή ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου $2α$ εἶναι γνωστή ἡ εφα.

Ἔτσι εἶναι:

$$\frac{1-συν2α}{ημ2α}=\frac{2ημ^2α}{2ημα\,συνα}=εφα=\frac{ημ2α}{1+συν2α}.$$

● **17.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τήν εφ $\frac{α}{2}$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α.*

Λύση. Ἄν στούς γνωστούς τύπους (29) ἀντικαταστήσουμε τή γωνία α μέ τή γωνία $\frac{α}{2}$, θά βροῦμε τούς ἀκόλουθους τύπους:

$ημα=\dfrac{2\,εφ\dfrac{α}{2}}{1+εφ^2\dfrac{α}{2}}$	$εφα=\dfrac{2\,εφ\dfrac{α}{2}}{1-εφ^2\dfrac{α}{2}}$	
$συνα=\dfrac{1-εφ^2\dfrac{α}{2}}{1+εφ^2\dfrac{α}{2}}$	$σφα=\dfrac{1-εφ^2\dfrac{α}{2}}{2\,εφ\dfrac{α}{2}}$	**(30)**

Στούς τύπους (30) παρατηροῦμε ὅτι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α ἐκφράζονται ὡς ρητές συναρτήσεις τῆς εφ $\frac{α}{2}$.

Οἱ τύποι τῆς πρώτης στήλης ἔχουν ἔννοια, ἄν

$$α \neq \pm π + 2kπ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ πρῶτος τῆς δεύτερης στήλης ἔχει ἔννοια, ἄν

$$α \neq (2k_1+1)\frac{π}{2} \quad καί \quad α \neq \pm\frac{π}{2}+2k_2π, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Ὁ δεύτερος τῆς δεύτερης στήλης ἔχει ἔννοια, ἄν

$$α \neq (k_3+1)π \quad καί \quad α \neq π+2k_4π, \quad k_4, k_3 \in \mathbb{Z}.$$

● **18.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τό συν2α νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α.*

Λύση. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$$συν2α = 1 - 2ημ^2α \text{ καί } συν2α = 2συν^2α - 1,$$

ἔχουμε ἀντιστοίχως:

$$ημ^2α = \frac{1-συν2α}{2} \Leftrightarrow |\,ημα\,| = \sqrt{\frac{1-συν2α}{2}}$$

καί
$$συν^2α = \frac{1+συν2α}{2} \Leftrightarrow |\,συνα\,| = \sqrt{\frac{1+συν2α}{2}}$$

Δηλαδή, ἀντιστοίχως:

$$ημα = \pm\sqrt{\frac{1-συν2α}{2}} \quad \text{καί} \quad συνα = \pm\sqrt{\frac{1+συν2α}{2}}$$

Θά εἶναι ἀκόμα:

$$εφ^2α = \frac{1-συν2α}{1+συν2α} \Leftrightarrow |\,εφα\,| = \sqrt{\frac{1-συν2α}{1+συν2α}}, \text{ μέ } α \neq \pm\frac{π}{2} + kπ$$

καί
$$σφ^2α = \frac{1+συν2α}{1-συν2α} \Leftrightarrow |\,σφα\,| = \sqrt{\frac{1+συν2α}{1-συν2α}}, \text{ μέ } α \neq k_1 π$$

καί $α \neq 2k_2π$, ὅπου $k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$\boldsymbol{ημα = \pm\sqrt{\frac{1-συν2α}{2}}}$	$\boldsymbol{εφα = \pm\sqrt{\frac{1-συν2α}{1+συν2α}}}$
$\boldsymbol{συνα = \pm\sqrt{\frac{1+συν2α}{2}}}$	$\boldsymbol{σφα = \pm\sqrt{\frac{1+συν2α}{1-συν2α}}}$

(31)

Ἀπό τούς τύπους (31) φαίνεται ὅτι τό πρόβλημα ἔχει τίς ἑξῆς λύσεις:

1. $\begin{cases} ημα = +\sqrt{\dfrac{1-συν2α}{2}} \\ συνα = +\sqrt{\dfrac{1+συν2α}{2}} \end{cases}$

2. $\begin{cases} ημα = +\sqrt{\dfrac{1-συν2α}{2}} \\ συνα = -\sqrt{\dfrac{1+συν2α}{2}} \end{cases}$

3. $\begin{cases} ημα = -\sqrt{\dfrac{1-συν2α}{2}} \\ συνα = -\sqrt{\dfrac{1+συν2α}{2}} \end{cases}$

4. $\begin{cases} ημα = -\sqrt{\dfrac{1-συν2α}{2}} \\ συνα = +\sqrt{\dfrac{1+συν2α}{2}} \end{cases}$

(31α)

● 19. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν λύσεων αὐτῶν. Τό διπλό πρόσημο τῶν παραπάνω τύπων ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἄς δεχθοῦμε ὅτι: $συν2α = μ = \overline{OP}$ (σχ. 3) καί $\widehat{AM} = θ$ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο, τοῦ ὁποίου τό συνημίτονο εἶναι μ.

Ἄν M_1 εἶναι τό συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός τόν ἄξονα A΄OA, τότε καί τό τόξο $\widehat{AA'M_1}$ ἔχει τό ἴδιο συνημίτονο $μ = \overline{OP}$. Ἡ τιμή κάθε ἄλλου τόξου, τό ὁποῖο ἔχει ἀρχή τό A καί τέλος τό σημεῖο M ἤ M_1, θά εἶναι:

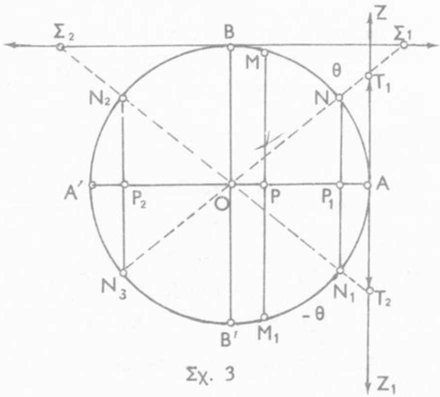
$$2α = \pm θ + k \cdot 2π, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ἄρα: $$α = \pm \frac{θ}{2} + k \cdot π \qquad (1)$$

Ἄν $\mathbf{k = 2ν}$, $\quad ν \in \mathbb{Z}$, τότε

$$α = \pm \frac{θ}{2} + 2ν \cdot π$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα περατώνονται στά σημεῖα N καί N_1, ὅπου N καί N_1 τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{AM}$ καί $\widehat{AN_1M_1}$.



Σχ. 3

Ἄν $\mathbf{k = 2ν + 1}$, $ν \in \mathbb{Z}$, τότε ἡ σχέση (1) γίνεται:

$$α = \pm \frac{θ}{2} + (2ν+1)π = \pm \frac{θ}{2} + π + 2νπ \qquad (2)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα περατώνονται στά σημεῖα N_3 καί N_2, ἀντιδιαμετρικά τῶν N καί N_1 ἀντιστοίχως. Τά ἡμίτονα τῶν τόξων $\widehat{AN}$, $\widehat{AN_2}$, $\widehat{AN_3}$, $\widehat{AN_1}$ ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τά συνημίτονά τους.

Τά τόξα $\widehat{AN}$, $\widehat{AN_2}$ καθώς καί τά $\widehat{AN_3}$, $\widehat{AN_1}$ ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καί ἀντίθετα συνημίτονα.

Τά τόξα $\widehat{AN}$ καί $\widehat{AN_3}$ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη $\overline{AT_1}$ καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη $\overline{BΣ_1}$, ἐνῶ τά τόξα $\widehat{AN_2}$ καί $\widehat{AN_1}$ ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη $\overline{AT_2}$ (ἀρνητική) καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη $\overline{BΣ_2}$ (ἀρνητική).

Τά διανύσματα $\overrightarrow{AT_1}$ καί $\overrightarrow{AT_2}$ εἶναι ἀντίρροπα, καθώς καί τά $\overrightarrow{BΣ_1}$ καί $\overrightarrow{BΣ_2}$ μέ ἀλγεβρικές τιμές ἀντίθετες ἀντιστοίχως.

● 20. *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τό συνα νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας* $\frac{α}{2}$.

Λύση. Ἄν στούς τύπους (31) βάλουμε ἀντί γιά τή γωνία α τή γωνία $\frac{α}{2}$, ἔχουμε τούς τύπους:

$\eta\mu \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}}$
$\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\sigma\varphi \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}}$

(32)

Ἀπό τούς τύπους αὐτούς φαίνεται πάλι ὅτι τό πρόβλημα ἔχει τέσσερις λύσεις, τίς ἑξῆς:

$$1. \begin{cases} \eta\mu\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 3. \begin{cases} \eta\mu\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \eta\mu\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 4. \begin{cases} \eta\mu\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases}$$

Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν διπλῶν σημείων τῶν τύπων αὐτῶν γίνεται μέ τόν τρόπο πού ἔγινε καί στή προηγούμενη παράγραφο καί μέ τό ἴδιο σχῆμα.

Παράδειγμα Ι. *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 22°,5.*

Λύση. Ἐπειδή $0° < 22°,5 < 90°$, συμπεραίνουμε ὅτι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 22°,5 εἶναι θετικοί. Ἄρα:

$$\eta\mu 22°,5 = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-(\sqrt{2}:2)}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$\sigma\upsilon\nu 22°,5 = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+(\sqrt{2}:2)}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\varepsilon\varphi 22°,5 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{2}-1, \quad \text{καί}$$

$$\sigma\varphi 22°,5 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$

✶ Παράδειγμα ΙΙ. *Νά ὑπολογισθεῖ ἡ εφ 7° 30′.*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$\text{εφ}\,\frac{\alpha}{2}=\frac{\text{ημα}}{1+\text{συνα}}=\frac{1-\text{συνα}}{\text{ημα}},\ (\alpha\neq k\pi)\ \mathbf{k}\in\mathbb{Z}$$

θά ἔχουμε:

$$\text{εφ}7°\,30'=\frac{1-\text{συν}15°}{\text{ημ}15°} \qquad (1)$$

Ἀλλά $\text{συν}15°=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ καί $\text{ημ}15°=\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

καὶ ἡ σχέση (1) γίνεται:

$$\text{εφ}7°\,30'=\frac{1-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\frac{(4-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+4\sqrt{2}-4\sqrt{3}-8}{4}=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

Ὥστε:

$$\text{εφ}7°\,30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$$

Νά βρεῖτε μόνοι σας τώρα τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας 7° 30′.

✶ Παράδειγμα ΙΙΙ. *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 165°.*

Λύση. Ἐπειδή $270° < 330° < 360°$, συμπεραίνουμε ὅτι $135° < 165° < 180°$ καί ἄρα τό τόξο 165° ἔχει τό τέλος του στό δεύτερο τεταρτημόριο. Θά ἔχει ἀκόμη θετικό ἡμίτονο καί ἀρνητικό συνημίτονο.

Ἔτσι θά ἔχουμε:

$$\text{ημ}165°=+\sqrt{\frac{1-\text{συν}330°}{2}}=+\sqrt{\frac{1-(\sqrt{3}:2)}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$\text{συν}165°=-\sqrt{\frac{1+\text{συν}330°}{2}}=-\sqrt{\frac{1+(\sqrt{3}:2)}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\text{εφ}165°=\frac{\text{ημ}165°}{\text{συν}165°}=\sqrt{3}-2\ \text{καί}\ \text{σφ}165°=-(2+\sqrt{3}).$$

Σημείωση. Ἐπειδή $165° + 15° = 180°$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu 165° = \eta\mu 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 165° = -\sigma\upsilon\nu 15° = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon\varphi\, 165° = -\varepsilon\varphi 15° = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$$

καί $\sigma\varphi 165° = -\sigma\varphi 15° = -(2+\sqrt{3})$

✶ **Παράδειγμα IV.** *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$A \equiv \eta\mu^4 \frac{\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}\,. \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή $\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \pi$ καί $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$,

προκύπτει ὅτι:

$$\eta\mu\frac{7\pi}{8} = \eta\mu\frac{\pi}{8} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\frac{5\pi}{8} = \eta\mu\frac{3\pi}{8}$$

ὁπότε ἡ (1) μᾶς δίνει διαδοχικά:

$$A \equiv 2\eta\mu^2\frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4\frac{3\pi}{8} = 2\left\{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{2}\right\}^2 + 2\left\{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{2}\right\}^2 =$$

$$= 2.\left\{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right\}^2 + 2\left\{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right\}^2 = 2.\frac{(2-\sqrt{2})^2}{16} + 2.\frac{(2+\sqrt{2})^2}{16} =$$

$$= \frac{4-4\sqrt{2}+2}{8} + \frac{4+4\sqrt{2}+2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

✶ **Παράδειγμα V.** *Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση:*

$$B \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+120°) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha-120°)\,. \qquad (1)$$

εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό τόξο α.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$B \equiv \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\alpha+240°)}{2} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\alpha-240°)}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu(2\alpha+240°) + \sigma\upsilon\nu(2\alpha-240°)\right] =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 240°\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha(-\sigma\upsilon\nu 60°)\right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 2\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{3}{2}$$

● **21.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας* $\frac{\alpha}{2}$ *νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας α.*

Λύση. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$$\text{ημ}2\alpha \equiv 2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha,$$
$$\text{συν}2\alpha \equiv \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha \equiv 1 - 2\text{ημ}^2\alpha \equiv 2\text{συν}^2\alpha - 1,$$
$$\text{εφ}2\alpha = \frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} \quad \text{καί} \quad \text{σφ}2\alpha = \frac{1-\text{εφ}^2\alpha}{2\text{εφ}\alpha},$$

ἂν ὅπου α βάλουμε τό $\frac{\alpha}{2}$, θά ἔχουμε τούς τύπους:

$\text{ημ}\alpha \equiv 2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\text{συν}\frac{\alpha}{2}$	$\text{εφ}\alpha = \dfrac{2\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}{1-\text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}$
$\text{συν}\alpha \equiv \text{συν}^2\frac{\alpha}{2} - \text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}$ $\equiv 1 - 2\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2}$ $\equiv 2\text{συν}^2\frac{\alpha}{2} - 1$	$\text{σφ}\alpha = \dfrac{1-\text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}{2\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}$

(33)

Πότε τά μέλη τῶν τύπων τῆς δεύτερης στήλης δέν ἔχουν ἔννοια;

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$A \equiv \frac{1+\text{ημ}\theta - \text{συν}\theta}{1+\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta} = \text{εφ}\frac{\theta}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv \frac{1+2\text{ημ}\frac{\theta}{2}\text{συν}\frac{\theta}{2} - \left(1-2\text{ημ}^2\frac{\theta}{2}\right)}{1+2\text{ημ}\frac{\theta}{2}\text{συν}\frac{\theta}{2} + \left(2\text{συν}^2\frac{\theta}{2}-1\right)} = \frac{2\text{ημ}\frac{\theta}{2}\text{συν}\frac{\theta}{2} + 2\text{ημ}^2\frac{\theta}{2}}{2\text{ημ}\frac{\theta}{2}\text{συν}\frac{\theta}{2} + 2\text{συν}^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\text{ημ}\frac{\theta}{2}\left(\text{συν}\frac{\theta}{2}+\text{ημ}\frac{\theta}{2}\right)}{\text{συν}\frac{\theta}{2}\left(\text{ημ}\frac{\theta}{2}+\text{συν}\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\text{ημ}\frac{\theta}{2}}{\text{συν}\frac{\theta}{2}} = \text{εφ}\frac{\theta}{2}$$

ἂν ἰσχύουν: $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ καί $\theta \neq 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}$, γιατί; $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

2. *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}, \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\left(\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\,\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\left(1+\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\left(1+\dfrac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)^2}{\left(1-\dfrac{\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}-\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta}{2}+2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta}{2}-2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

22. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $\dfrac{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}+1}{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}-1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}$ 2. $\tau\varepsilon\mu\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$,

3. $\varepsilon\varphi\alpha+\tau\varepsilon\mu\alpha=\sigma\varphi\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$, 4. $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}$.

5. $\dfrac{\eta\mu\,2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\,2\alpha}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$, 6. $\dfrac{\eta\mu\,2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\,2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$.

7. $\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=2\sigma\varphi\alpha$, 8. $\varepsilon\varphi\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}}$,

23. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

1. $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2\equiv 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha+\beta}{2}$,

2. $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2\equiv 4\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$,

3. $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2\equiv 4\eta\mu^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

4. $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\equiv\frac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha$.

✱ Δεύτερη ὁμάδα

24. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $συν^4 \frac{π}{8} + συν^4 \frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$, 2. $ημ^4 \frac{π}{8} + ημ^4 \frac{3π}{8} = \frac{3}{4}$.

3. $συν^4 \frac{π}{8} + συν^4 \frac{3π}{8} + συν^4 \frac{5π}{8} + συν^4 \frac{7π}{8} = \frac{3}{2}$

4. $\left(1 + συν\frac{π}{8}\right)\left(1 + συν\frac{3π}{8}\right)\left(1 + συν\frac{5π}{8}\right)\left(1 + συν\frac{7π}{8}\right) = \frac{1}{8}$.

5. Ἄν $συνx = \frac{α}{β+γ}$, $συνy = \frac{β}{γ+α}$, $συνω = \frac{γ}{α+β}$, τότε:

$$εφ^2\frac{x}{2} + εφ^2\frac{y}{2} + εφ^2\frac{ω}{2} = 1.$$

25. Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $εφ\left(α-β+\frac{π}{3}\right) + εφ\left(β-γ+\frac{π}{3}\right) + εφ\left(γ-α+\frac{π}{3}\right) =$

$= εφ\left(α-β+\frac{π}{3}\right) εφ\left(β-γ+\frac{π}{3}\right) εφ\left(γ-α+\frac{π}{3}\right)$.

2. $Σσφ(γ+α-β)\,σφ(α+β-γ) = 1$, ἄν $α+β+γ=0$.

3. $Σσφ(2α+β-3γ)\,σφ(2β+γ-3α) = 1$.

4. $Σx(1-y^2)(1-ω^2) = 4xyω$, ἄν $xy + yω + ωx = 1$.

5. $ημ(α+β+γ) < ημα + ημβ + ημγ$, ἄν $0 < α, β, γ < \frac{π}{2}$

6. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$1 + ημ^2α + ημ^2β > ημα + ημβ + ημα\,ημβ$.

★ ● 22. *ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ἀπό τήν εφ α νά ὑπολογισθεῖ ἡ εφ $\frac{α}{2}$*

Λύση. Ἀπό τή γνωστή ἰσότητα:

$$εφα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1-εφ^2\frac{α}{2}} \quad \text{ἔχουμε τήν:} \quad εφα\,εφ^2\frac{α}{2} + 2εφ\frac{α}{2} - εφα = 0 \qquad (α)$$

ἀπό τήν ὁποία βρίσκουμε:

$$\boxed{εφ\frac{α}{2} = \frac{-1 \pm\sqrt{1+εφ^2α}}{εφα}} \qquad (34)$$

Διερεύνηση. Ἀπό τόν τύπο (34) φαίνεται ὅτι τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις. Σέ μιά τιμή τῆς εφα, πού ἀντιστοιχεῖ στό διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$, πού ἔχει μῆκος $\overline{AT}$, ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα $\widehat{AM}$ καί $\widehat{A'M_1}$, συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρο O τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (σχ. 4), τῶν ὁποίων οἱ τιμές εἶναι:

$$\alpha = \theta + k\pi \qquad (1) \quad k \in \mathbb{Z}$$

ὅπου $\widehat{AM} = \theta$ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο. Ἄρα

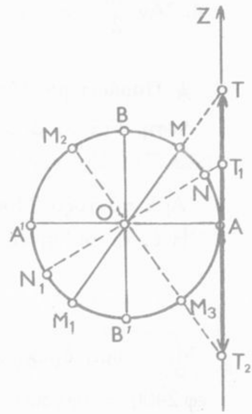
$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

A) Ἄν $\mathbf{k = 2\nu}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ἡ (2) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \nu\pi \qquad (3)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν τό τέλος τους στά σημεῖα N καί N_1 καί ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη, πού παριστάνεται ἀπό τό τμῆμα AT_1.



Σχ. 4

B) Ἄν $\mathbf{k = 2\nu + 1}$, $\nu \in \mathbb{Z}$, ἡ (2) γράφεται:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} + \nu\pi \qquad (4)$$

καί τά ἀντίστοιχα τόξα ἔχουν τό τέλος τους στά σημεῖα M_2 καί M_3 καί ἔχουν ἐφαπτομένη τό μῆκος $\overline{AT_2}$.

Ἐπειδή τό τρίγωνο T_1OT_2 εἶναι ὀρθογώνιο στό O, θά ἔχουμε:

$$\overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2} = -OA^2 = -OB^2 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\overline{AT}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{AT_2}}{\overline{OB}} = -1 \qquad (5)$$

Τό γινόμενο τῶν ριζῶν x′, x″ τῆς ἐξισώσεως (α) εἶναι:

$$x'x'' = -\frac{\text{εφ}\alpha}{\text{εφ}\alpha} = -1$$

καί ἀπό ἐδῶ φαίνεται ὅτι ἀληθεύει ἡ (5).

Ἄν, ἀντί γιά τήν εφα, δοθεῖ τό τόξο α, τότε ἡ παράσταση $\sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}$ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή μονάδα, ὅταν εφα $\neq 0$. Ἄρα:

1. Ἄν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \text{εφ}\alpha > 0 \\ \text{εφ}\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{εφ}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}}{\text{εφ}\alpha}$

2. Ἄν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \text{εφ}\alpha < 0 \\ \text{εφ}\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{εφ}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}}{\text{εφ}\alpha}$

3. Ἄν $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \text{εφ}\alpha > 0 \\ \text{εφ}\frac{\alpha}{2} < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{εφ}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}}{\text{εφ}\alpha}$

4. Ἄν $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, τότε: $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha < 0 \\ \varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2} < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$

★ **Παράδειγμα.** Ἀπό τήν $\varepsilon\varphi 4800^\circ = -\sqrt{3}$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $\varepsilon\varphi 2400^\circ$.

Λύση. Γιά νά βροῦμε τό τέλος τοῦ τόξου 2400°, γράφουμε:

$$2400^\circ = 360^\circ.6 + 240^\circ.$$

Ἄρα τό τόξο 2400° ἔχει τό τέλος του στό τρίτο τεταρτημόριο. Ἡ ἐφαπτομένη του εἶναι θετική. Δηλαδή:

$$\varepsilon\varphi\,2400^\circ = \frac{-1-\sqrt{1+3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-1-2}{-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Μποροῦμε, ὅμως, νά ἐργαστοῦμε καί ὡς ἑξῆς:

$$\varepsilon\varphi\,2400^\circ = \varepsilon\varphi\,(360^\circ\cdot 6 + 240^\circ) = \varepsilon\varphi\,240^\circ = \varepsilon\varphi\,(180^\circ + 60^\circ) = \varepsilon\varphi\,60^\circ = \sqrt{3}$$

καί ἑπομένως:

$$\sigma\upsilon\nu\,2400^\circ = \frac{1}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2400^\circ}} = \frac{1}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2},$$

$$\eta\mu\,2400^\circ = \frac{\varepsilon\varphi 2400^\circ}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2400^\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

● **23.** *Μετασχηματισμός ἀθροίσματος ἤ διαφορᾶς δύο ὁμώνυμων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων σέ γινόμενο ἤ πηλίκο.*

α) Ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\begin{array}{l|l} ημ(α+β) \equiv ημα\,συνβ + ημβ\,συνα, & συν(α+β) \equiv συνα\,συνβ - ημα\,ημβ, \\ ημ(α-β) \equiv ημα\,συνβ - ημβ\,συνα, & συν(α-β) \equiv συνα\,συνβ + ημα\,ημβ, \end{array}$$

προσθέτοντας καί ἀφαιρώντας κατά μέλη, βρίσκουμε:

$$ημ(α+β) + ημ(α-β) \equiv 2ημα\,συνβ, \qquad (1)$$
$$ημ(α+β) - ημ(α-β) \equiv 2ημβ\,συνα, \qquad (2)$$
$$συν(α+β) + συν(α-β) \equiv 2συνα\,συνβ, \qquad (3)$$
$$συν(α+β) - συν(α-β) \equiv 2ημα\,ημβ = 2ημα\,ημ(-β) \qquad (4)$$

καί ἄν βάλουμε:

$$\left.\begin{array}{l} α+β=A \\ α-β=B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2α=A+B \\ 2β=A-B \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} α=\dfrac{A+B}{2} \\ β=\dfrac{A-B}{2} \end{array} \quad καί\ -β=\frac{B-A}{2}$$

οἱ (1), (2), (3), (4) γίνονται:

$$\boxed{ημ\,A + ημ\,B = 2\,ημ\frac{A+B}{2}\,συν\frac{A-B}{2}} \qquad (35)$$
$$\boxed{ημ\,A - ημ\,B \equiv 2\,ημ\frac{A-B}{2}\,συν\frac{A+B}{2}} \qquad (36)$$
$$\boxed{συν\,A + συν\,B \equiv 2\,συν\frac{A+B}{2}\,συν\frac{A-B}{2}} \qquad (37)$$
$$\boxed{συν\,A - συν\,B \equiv 2ημ\frac{A+B}{2}\,ημ\frac{B-A}{2}} \qquad (38)$$

β) Ἔχουμε διαδοχικά:

$$εφA + εφB = \frac{ημA}{συνA} + \frac{ημB}{συνB} = \frac{ημA\,συνB + ημB\,συνA}{συνA\,συνB} = \frac{ημ(A+B)}{συνA\,συνB},$$

ἀφοῦ θά εἶναι $A \neq \frac{π}{2} + kπ$ καί $B \neq \frac{π}{2} + k_1 π$ μέ $k, k_1 \in \mathbb{Z}$.

$$\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} - \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}$$

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A + \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\,\eta\mu B} = \frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}$$

ἀφοῦ θά εἶναι $A \neq (k_2+1)\pi$ καί $B \neq (k_3+1)\pi$, μέ $k_2, k_3 \in \mathbb{Z}$,

καί $\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} - \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B\sigma\upsilon\nu A - \eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\,\eta\mu B} = \frac{\eta\mu(B-A)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}$

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

(39) $$\boxed{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}}$$ $$\boxed{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\eta\mu A\,\eta\mu B}}$$ (41)

(40) $$\boxed{\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}}$$ $$\boxed{\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\eta\mu(B-A)}{\eta\mu A\eta\mu B}}$$ (42)

● **24. Εἰδικές περιπτώσεις.** Ἔχουμε διαδοχικά:

α) $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A + \eta\mu(90^\circ - A) \equiv 2\eta\mu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu(A - 45^\circ)$ (1)

καί ἐπειδή $2\eta\mu 45^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ καί:

$\sigma\upsilon\nu(A - 45^\circ) \equiv \sigma\upsilon\nu(45^\circ - A) \equiv \eta\mu(45^\circ + A)$, ἡ (1) γίνεται:

$$\boxed{\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ - A) \equiv \sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ + A)} \quad (43)$$

β) $\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A - \eta\mu(90^\circ - A) \equiv 2\eta\mu(A - 45^\circ)\sigma\upsilon\nu 45^\circ \equiv$

$\equiv \sqrt{2}\,\eta\mu(A - 45^\circ) \equiv -\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - A) \equiv -\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)$.

Ὥστε θά εἶναι:

$$\boxed{\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv -\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - A) \equiv -\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ + A)} \quad (44)$$

γ) $1 + \eta\mu A \equiv \eta\mu 90^\circ + \eta\mu A \equiv 2\eta\mu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$

καί ἐπειδή εἶναι:

$\eta\mu\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv \sigma\upsilon\nu\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$, θά ἔχουμε:

$$\boxed{1 + \eta\mu A \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ + \frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)} \quad (45)$$

δ) Ἐπίσης θά εἶναι καί:

$$1-\eta\mu A \equiv \eta\mu 90^\circ - \eta\mu A \equiv 2\eta\mu\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right) \equiv$$

$$\equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$$

δηλαδή:

$$\boxed{\mathbf{1-\eta\mu A \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)}} \qquad (46)$$

ε) Ἐπίσης εἶναι:

$$1+\sigma\upsilon\nu A \equiv \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{0^\circ+A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{0^\circ-A}{2} \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$$

$$1-\sigma\upsilon\nu A \equiv \sigma\upsilon\nu 0^\circ - \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu\frac{0^\circ+A}{2}\,\eta\mu\frac{A-0^\circ}{2} \equiv 2\eta\mu^2\frac{A}{2}$$

Ἄρα:

$$\boxed{\mathbf{1+\sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}}} \qquad \boxed{\mathbf{1-\sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu^2\frac{A}{2}}} \qquad (47)$$

στ) Ἄν $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, μέ $k \in \mathbb{Z}'$, θά ἔχουμε:

$$1+\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu(45^\circ+A)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu A} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ+A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ-A)}{\sigma\upsilon\nu A},$$

καί

$$1-\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu(45^\circ-A)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu A} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ-A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ+A)}{\sigma\upsilon\nu A}$$

Ἀνακεφαλαιώνοντας ἔχουμε:

$$\boxed{\mathbf{1+\varepsilon\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ+A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ-A)}{\sigma\upsilon\nu A}}} \qquad (48)$$

$$\boxed{\mathbf{1-\varepsilon\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ-A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ+A)}{\sigma\upsilon\nu A}}} \qquad (49)$$

ζ) Ἄν $A \neq (k+1)\pi$, μέ $k \in \mathbb{Z}$ καί μέ ὅμοια ἐργασία βρίσκουμε:

$$\boxed{\mathbf{1+\sigma\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ+A)}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ-A)}{\eta\mu A}}} \qquad (50)$$

$$\boxed{\mathbf{1-\sigma\varphi A = -\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ-A)}{\eta\mu A} = -\frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ+A)}{\eta\mu A}}} \qquad (51)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) *Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση:*

$$A \equiv \frac{(\text{συν}\alpha - \text{συν}3\alpha)(\text{ημ}8\alpha + \text{ημ}2\alpha)}{(\text{ημ}5\alpha - \text{ημ}\alpha)(\text{συν}4\alpha - \text{συν}6\alpha)}.$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv \frac{2\text{ημ}\frac{\alpha+3\alpha}{2}\,\text{ημ}\frac{3\alpha-\alpha}{2}\cdot 2\text{ημ}\frac{8\alpha+2\alpha}{2}\,\text{συν}\frac{8\alpha-2\alpha}{2}}{2\text{ημ}\frac{5\alpha-\alpha}{2}\,\text{συν}\frac{5\alpha+\alpha}{2}\cdot 2\,\text{ημ}\frac{4\alpha+6\alpha}{2}\,\text{ημ}\frac{6\alpha-4\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\text{ημ}\,2\alpha\cdot\text{ημ}\alpha\cdot 2\text{ημ}5\alpha\,\text{συν}\,3\alpha}{2\text{ημ}2\alpha.\text{συν}3\alpha\cdot 2\text{ημ}5\alpha\cdot\text{ημ}\alpha} = 1, \text{ ἄν ἰσχύουν:}$$

$\alpha \neq k\pi,\ \alpha \neq k_1\cdot\frac{\pi}{5},\ \alpha \neq k_2\cdot\frac{\pi}{2},\ \alpha \neq (2k_3+1)\frac{\pi}{2},\ k, k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}.$

β) *Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα:*

$$B \equiv \frac{\text{ημ}\alpha - \text{ημ}5\alpha + \text{ημ}9\alpha - \text{ημ}13\alpha}{\text{συν}\alpha - \text{συν}5\alpha - \text{συν}9\alpha + \text{συν}13\alpha}.$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$B \equiv \frac{(\text{ημ}\,9\alpha + \text{ημ}\alpha) - (\text{ημ}13\alpha + \text{ημ}5\alpha)}{(\text{συν}\alpha - \text{συν}5\alpha) - (\text{συν}9\alpha - \text{συν}13\alpha)} = \frac{2\text{ημ}5\alpha\,\text{συν}4\alpha - 2\text{ημ}9\alpha\,\text{συν}4\alpha}{2\text{ημ}\,3\alpha\,\text{ημ}2\alpha - 2\text{ημ}\,11\alpha\,\text{ημ}2\alpha} =$$

$$= \frac{\text{συν}4\alpha(\text{ημ}5\alpha - \text{ημ}9\alpha)}{\text{ημ}2\alpha(\text{ημ}3\alpha - \text{ημ}11\alpha)} = \frac{\text{συν}4\alpha\cdot 2\text{ημ}\,2\alpha\,\text{συν}7\alpha}{\text{ημ}2\alpha\cdot 2\text{ημ}4\alpha\cdot\text{συν}7\alpha} = \text{σφ}4\alpha,$$

ἄν ὑπάρχουν οἱ σχέσεις:

$$\text{ημ}2\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 2\alpha \neq k\pi \Leftrightarrow \alpha \neq k\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ μέ } k \in \mathbb{Z},$$

$$\text{ημ}4\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 4\alpha \neq k_1\pi \Leftrightarrow \alpha \neq k_1\cdot\frac{\pi}{4}, \text{ μέ } k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$\text{συν}7\alpha \neq 0 \Leftrightarrow 7\alpha \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha \neq k_2\cdot\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{14} \text{ μέ } k_2 \in \mathbb{Z}.$$

γ) *Νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:*

$$A \equiv \text{ημ}x + \text{ημ}y + \text{ημ}\omega - \text{ημ}(x + y + \omega).$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv 2\text{ημ}\frac{x+y}{2}\,\text{συν}\frac{x-y}{2} + 2\text{ημ}\frac{\omega - x - y - \omega}{2}\,\text{συν}\frac{\omega + x + y + \omega}{2} =$$

$$\equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}-2\eta\mu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\omega+x+y}{2}$$

$$\equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{2\omega+x+y}{2}\right]$$

$$\equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{x-y+2\omega+x+y}{4}\,\eta\mu\frac{2\omega+x+y-x+y}{4}$$

$$\equiv 4\eta\mu\frac{x+y}{2}\cdot\eta\mu\frac{x+\omega}{2}\cdot\eta\mu\frac{\omega+y}{2}.$$ Ἄρα :

$$\boxed{\eta\mu x+\eta\mu y+\eta\mu\omega-\eta\mu(x+y+\omega)\equiv 4\eta\mu\frac{x+y}{2}\,\eta\mu\frac{y+\omega}{2}\,\eta\mu\frac{\omega+x}{2}} \quad (52)$$

Σημείωση. Ἄν οἱ γωνίες x, y, ω εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ γωνίες Α, Β, Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε θά ἔχουμε ἀπό τόν τύπο (52):

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu(A+B+\Gamma)\equiv\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu 180^\circ\equiv$$

$$\equiv\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\equiv 4\eta\mu\frac{A+B}{2}\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2}\equiv$$

$$\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2},$$

γιατί $\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0$, ἄρα $\eta\mu\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}, \ldots$ Ἄρα:

Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$\boxed{\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma\equiv 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} \quad (52\alpha)$$

δ) Νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση:

$$\mathbf{B\equiv\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu\omega+\sigma\upsilon\nu(x+y+\omega).}$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$B\equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}+2\sigma\upsilon\nu\frac{\omega+x+y+\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega-x-y-\omega}{2}$$

$$\equiv 2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2}+2\sigma\upsilon\nu\frac{x+y}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{x+y+2\omega}{2}$$

$$\equiv 2συν\frac{x+y}{2}\left[συν\frac{x-y}{2}+συν\frac{x+y+2ω}{2}\right]$$

$$\equiv 2συν\frac{x+y}{2}\cdot 2συν\frac{x-y+x+y+2ω}{4}συν\frac{x-y-x-y-2ω}{4}$$

$$\equiv 4συν\frac{x+y}{2}συν\frac{y+ω}{2}συν\frac{ω+x}{2}.$$

Ἄρα :

$$\boxed{\mathbf{συνx+συνy+συνω+συν(x+y+ω)\equiv 4συν\frac{x+y}{2}συν\frac{y+ω}{2}συν\frac{ω+x}{2}}} \qquad \mathbf{(53)}$$

Σημείωση. Ἄν οἱ γωνίες x, y, ω εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ γωνίες Α, Β, Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε:

$$συν(x+y+ω)=συν(Α+Β+Γ)=συν180°=-1$$

καί $συν\dfrac{x+y}{2}=συν\dfrac{Α+Β}{2}=ημ\dfrac{Γ}{2},\dots$ καί ὁ τύπος (53) γίνεται γιά κάθε τρίγωνο ΑΒΓ:

$$\boxed{\mathbf{συνΑ+συνΒ+συνΓ=1+4ημ\frac{Α}{2}ημ\frac{Β}{2}ημ\frac{Γ}{2}}} \qquad \mathbf{(53α)}$$

✱ ε) *Νά γίνει γινόμενο παραγόντων ἡ παράσταση:*

$$\mathbf{Γ\equiv συν^2α+συν^2β+συν^2γ+συν^2(α+β+γ)-2.}$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$συν^2α+συν^2β\equiv\frac{1+συν2α}{2}+\frac{1+συν2β}{2}\equiv 1+\frac{1}{2}\left[συν2α+συν2β\right]\equiv$$

$$\equiv 1+\frac{1}{2}\cdot 2συν(α+β)\,συν(α-β)\equiv 1+συν(α+β)\,συν(α-β).$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$συν^2γ+συν^2(α+β+γ)\equiv\frac{1+συν2γ}{2}+\frac{1+συν2(α+β+γ)}{2}\equiv$$

$$\equiv 1+\frac{1}{2}\left[συν2γ+συν2(α+β+γ)\right]\equiv 1+συν(α+β)\,συν(α+β+2γ).$$

Ἄρα θά εἶναι:

$$\begin{aligned}Γ&\equiv συν(α+β)\,συν(α-β)+συν(α+β)\,συν(α+β+2γ)\equiv\\&\equiv συν(α+β)\left[συν(α-β)+συν(α+β+2γ)\right]\equiv\\&\equiv συν(α+β)\cdot 2συν(α+γ)\,συν(β+γ)\equiv\\&\equiv 2συν(α+β)\,συν(β+γ)\,συν(γ+α).\end{aligned}$$

Ὥστε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+\beta+\gamma)-2\equiv 2\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha)} \quad (54)$$

Σημείωση. Ἂν οἱ γωνίες α, β, γ, ἀντιστοίχως, εἶναι οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τότε ὁ τύπος (54) γίνεται:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1-2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} \quad (54\alpha)$$

Ὁ τύπος (54α) γράφεται συντομότερα καί ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\Sigma\sigma\upsilon\nu^2 A = 1-2\Pi\sigma\upsilon\nu A} \quad \mu\grave{\epsilon} \quad \boxed{A+B+\Gamma=180^0}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

26. Νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu 4\alpha+\eta\mu\alpha$, 2. $\eta\mu 7\alpha-\eta\mu 5\alpha$,
3. $\sigma\upsilon\nu 5\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha$, 4. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu 5\alpha$.

27. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

1. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu 5\alpha-\eta\mu 3\alpha}=\varepsilon\varphi 4\alpha$, 3. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$,
2. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha-\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha$, 4. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha-\eta\mu 4\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{5\alpha}{2}$.

28. Νά γίνουν γινόμενα παραγόντων οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu\alpha-\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 3\alpha$, 4. $\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha+\sigma\upsilon\nu 15\alpha$,
2. $\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 7\alpha+\eta\mu 10\alpha$, 5. $\eta\mu 7\alpha-\eta\mu 5\alpha-\eta\mu 3\alpha+\eta\mu\alpha$,
3. $\sigma\upsilon\nu 7\alpha-\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha$, 6. $\sigma\upsilon\nu\alpha+2\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha$.

29. Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

1. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 5\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi 2\alpha$,
2. $\dfrac{\eta\mu\alpha+\eta\mu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}=\varepsilon\varphi 4\alpha$.
3. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu 7\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha-\sigma\upsilon\nu 5\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 7\alpha-\eta\mu 3\alpha-\eta\mu 5\alpha+\eta\mu\alpha}=\sigma\varphi 2\alpha$.
4. $\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\dfrac{A-B}{2}$.

Πότε δέν ἔχουν ἔννοια τά μέλη τῶν παραπάνω ἰσοτήτων;

✶ Δεύτερη ὁμάδα

30. Νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

1. $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)+\eta\mu(\alpha-\beta-\gamma)+\eta\mu(\alpha+\beta-\gamma)+\eta\mu(\alpha-\beta+\gamma)$,
2. $\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma-\alpha)-\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta-\gamma)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$.
3. $\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 2\beta+\eta\mu 2\gamma-\eta\mu 2(\alpha+\beta+\gamma)$,
4. $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta-\eta\mu(\alpha+\beta)=4\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\,\eta\mu\dfrac{\beta}{2}\,\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,
5. $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2 2\theta+\sigma\upsilon\nu^2 3\theta+\sigma\upsilon\nu^2 4\theta-2$.

• 25. Μετασχηματισμός γινομένων σέ ἀθροίσματα ἤ διαφορές.

Ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu(A+B),$$

καί
$$\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu(A-B),$$

μέ πρόσθεση καί ἀφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε, ἀντιστοίχως:

$$\boxed{2\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B \equiv \eta\mu(A+B) + \eta\mu(A-B)} \qquad (54)$$

καί
$$\boxed{2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu(A+B) - \eta\mu(A-B)} \qquad (55)$$

Ἐπίσης ἀπό τίς γνωστές ταυτότητες:

$$\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A\,\eta\mu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A+B),$$

καί
$$\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A\,\eta\mu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A-B),$$

μέ πρόσθεση καί ἀφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε, ἀντιστοίχως:

$$\boxed{2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A+B) + \sigma\upsilon\nu(A-B)} \qquad (56)$$

καί
$$\boxed{2\eta\mu A\,\eta\mu B \equiv \sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)} \qquad (57)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) *Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα:*

$$A \equiv \frac{\eta\mu 8\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 6\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 3\alpha\,\eta\mu 4\alpha}$$

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$A \equiv \frac{2\eta\mu 8\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu 6\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu 3\alpha\,\eta\mu 4\alpha} = \frac{(\eta\mu 9\alpha + \eta\mu 7\alpha) - (\eta\mu 9\alpha + \eta\mu 3\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) - (\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 7\alpha)} =$$

$$= \frac{\eta\mu 7\alpha - \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \frac{2\eta\mu\,2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 5\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\,5\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi 2\alpha,$$

ἄν $\alpha \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{10}$ καί $\alpha \neq (2k_1+1)\dfrac{\pi}{4}$, $k, k_1 \in \mathbb{Z}$. Γιατί;

β) *Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$$A \equiv \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{15}\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τό γνωστό τύπο:

$$\eta\mu 2x = 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x, \text{ ἔχουμε: } \sigma\upsilon\nu x = \frac{\eta\mu 2x}{2\eta\mu x}$$

καί ἑπομένως:

$$A \equiv \frac{\eta\mu\frac{2\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{\pi}{15}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{4\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{2\pi}{15}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{6\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{3\pi}{15}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{8\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{4\pi}{15}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{10\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{5\pi}{15}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{12\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{6\pi}{15}}\cdot\frac{\eta\mu\frac{14\pi}{15}}{2\eta\mu\frac{7\pi}{15}} = \frac{1}{2^7},$$

γιατί εἶναι: $\eta\mu\frac{\pi}{15} = \eta\mu\frac{14\pi}{15}$, $\eta\mu\frac{3\pi}{15} = \eta\mu\frac{12\pi}{15}$, $\eta\mu\frac{10\pi}{15} = \eta\mu\frac{5\pi}{15}$

★ γ) *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$\mathbf{A \equiv \eta\mu 20^\circ.\eta\mu 40^\circ.\eta\mu 60^\circ.\eta\mu 80^\circ = \frac{3}{16}.} \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἰσότητα (1) γράφεται:

$$2\cdot 2\eta\mu 20^\circ\,\eta\mu 40^\circ\cdot 2\sigma\upsilon\nu 30^\circ\,\sigma\upsilon\nu 10^\circ = \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Ἄν ὀνομάσουμε B τό πρῶτο μέλος τῆς (2), θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned} B &\equiv 2(\sigma\upsilon\nu 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ)(\sigma\upsilon\nu 20^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ) = \\ &= 2(\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - \sigma\upsilon\nu 20^\circ\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ\,\sigma\upsilon\nu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 40^\circ\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ) = \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2 20^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ + 2\sigma\upsilon\nu 20^\circ\,\sigma\upsilon\nu 40^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 40^\circ\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \\ &= 1 + \sigma\upsilon\nu 40^\circ - (\sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 40^\circ) + (\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ) - (\sigma\upsilon\nu 100^\circ + \sigma\upsilon\nu 20^\circ) = \\ &= 1 - (\sigma\upsilon\nu 80^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ) + \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \\ &= 1 - 2\sigma\upsilon\nu 90^\circ\,\sigma\upsilon\nu 10^\circ + \frac{1}{2} = 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

καί ἄρα $A = \frac{3}{16}$.

★ ● **26.** *Νά μετασχηματισθεῖ σέ γινόμενο τό ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων ν τόξων, πού ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἄθροισμα:

$$S = \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha+\omega) + \eta\mu(\alpha+2\omega) + \ldots + \eta\mu[\alpha+(\nu-1)\omega] \tag{1}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ $2\eta\mu\frac{\omega}{2}$, ἔχουμε:

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = 2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\frac{\omega}{2} + 2\eta\mu(\alpha+\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} + \ldots + 2\eta\mu[\alpha+(\nu-1)\omega]\eta\mu\frac{\omega}{2}$$

Ἀλλά:

$$2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha - \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right),$$

$$2\eta\mu(\alpha+\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha + \frac{3\omega}{2}\right),$$

$$2\eta\mu(\alpha+2\omega)\eta\mu\frac{\omega}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{5\omega}{2}\right),$$

. . . .

$$2\eta\mu\left[\alpha+(\nu-1)\omega\right]\eta\mu\frac{\omega}{2}=\sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\frac{2\nu-3}{2}\omega\right]-\sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\frac{2\nu-1}{2}\omega\right]$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἰσότητες αὐτές ἔχουμε:

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2}=\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\frac{2\nu-1}{2}\omega\right]=2\eta\mu\left[\alpha+\frac{\nu-1}{2}\omega\right]\eta\mu\frac{\nu\omega}{2},$$

ἀπ' ὅπου, τελικά, βρίσκουμε:

$$\boxed{S=\frac{\eta\mu\left[\alpha+\dfrac{\nu-1}{2}\omega\right]\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}} \qquad \textbf{(58)}$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἐργαζόμενοι βρίσκουμε ὅτι τό ἄθροισμα:

$$S'=\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\omega)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+2\omega)+\ldots+\sigma\upsilon\nu[\alpha+(\nu-1)\omega]$$

εἶναι:

$$\boxed{S'=\frac{\sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\dfrac{\nu-1}{2}\omega\right]\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}} \qquad \textbf{(59)}$$

Τό ἀποτέλεσμα αὐτό βγαίνει ἀπό τόν τύπο (58), ἄν ἀντικαταστήσουμε τό α μέ $\frac{\pi}{2}-\alpha$ καί τό ω μέ $-\omega$.

Ἄν $\omega=\alpha$, οἱ τύποι (58) καί (59) γίνονται:

$$S_1=\eta\mu\alpha+\eta\mu2\alpha+\eta\mu3\alpha+\ldots+\eta\mu(\nu\alpha)=\frac{\eta\mu\dfrac{(\nu+1)}{2}\alpha\cdot\eta\mu\dfrac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \textbf{(60)}$$

καί $$S_2=\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu3\alpha+\ldots+\sigma\upsilon\nu(\nu\alpha)=\frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{(\nu+1)}{2}\alpha\cdot\eta\mu\dfrac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \textbf{(61)}$$

Ἄν ὅμως βάλουμε $\omega=2\alpha$, ἔχουμε τούς τύπους:

$$S_3=\eta\mu\alpha+\eta\mu3\alpha+\eta\mu5\alpha+\ldots+\eta\mu(2\nu-1)\alpha=\frac{\eta\mu^2(\nu\alpha)}{\eta\mu\alpha} \qquad \textbf{(62)}$$

καί $\quad S_4 = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha + \ldots + \sigma\upsilon\nu(2\nu - 1)\alpha = \dfrac{\eta\mu 2(\nu\alpha)}{2\eta\mu\alpha}$ (63)

★ **Παράδειγμα.** *Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:*

$$S = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{17} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{17} + \ldots + \sigma\upsilon\nu\frac{15\pi}{17} = \frac{1}{2}.$$

'Απόδειξη. Τά τόξα $\dfrac{\pi}{17}, \dfrac{3\pi}{17}, \ldots, \dfrac{15\pi}{17}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο μέ λόγο $\dfrac{2\pi}{17}$. Τό πλῆθος τῶν ὅρων της προκύπτει ἀπό τόν τύπο:

$$\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega \Rightarrow \nu = \frac{\tau - \alpha}{\omega} + 1 = 8.$$

Μέ τή βοήθεια τώρα τοῦ τύπου (59), βρίσκουμε:

$$S = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{17} + \dfrac{8-1}{2}\cdot\dfrac{2\pi}{17}\right)\eta\mu\dfrac{8\pi}{17}}{\eta\mu\dfrac{\pi}{17}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\dfrac{8\pi}{17}\cdot\eta\mu\dfrac{8\pi}{17}}{\eta\mu\dfrac{\pi}{17}} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\dfrac{8\pi}{17}\sigma\upsilon\nu\dfrac{8\pi}{17}}{2\eta\mu\dfrac{\pi}{17}} = \frac{\eta\mu\dfrac{16\pi}{17}}{2\eta\mu\dfrac{\pi}{17}} = \frac{1}{2},$$

γιατί $\quad \eta\mu\dfrac{16\pi}{17} = \eta\mu\dfrac{\pi}{17}$, ἀφοῦ $\dfrac{\pi}{17} + \dfrac{16\pi}{17} = \pi$.

Μέ ἀνάλογο τρόπο βρίσκουμε ὅτι:

$$S = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{23} + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{23} + \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{23} + \ldots + \sigma\upsilon\nu\frac{21\pi}{23} = \frac{1}{2}.$$

✶ ● **27.** *Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα :*

$$S_\alpha = \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2(\alpha + \omega) + \eta\mu^2(\alpha + 2\omega) + \ldots + \eta\mu^2[\alpha + (\nu - 1)\omega]$$

Λύση. Ἄν στή γνωστή μας ταυτότητα

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1}{2}\,(1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha)$$

ἀντικαταστήσουμε τό α μέ τό α + ω, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{1}{2}\,(1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha),$$

$$\eta\mu^2(\alpha + \omega) = \frac{1}{2}\left[1 - \sigma\upsilon\nu 2(\alpha + \omega)\right],$$

$$\eta\mu^2(\alpha+2\omega)=\frac{1}{2}\Big[1-\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+2\omega)\Big],$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\eta\mu^2\Big[\alpha+(\nu-1)\omega\Big]=\frac{1}{2}\Big[1-\sigma\upsilon\nu 2[\alpha+(\nu-1)\omega]\Big]$$

καί μέ πρόσθεση κατά μέλη:

$$S_\alpha=\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}\Big[\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+\omega)+\sigma\upsilon\nu 2(\alpha+2\omega)+\dots+\sigma\upsilon\nu 2\Big[\alpha+(\nu-1)\omega\Big]=$$

$$=\frac{\nu}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu[2\alpha+(\nu-1)\omega]\eta\mu(\nu\omega)}{2\eta\mu\omega}$$

Ὥστε :

$$\mathbf{S_\alpha=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2(\alpha+\omega)+\eta\mu^2(\alpha+2\omega)+\dots+\eta\mu^2[\alpha+(\nu-1)\omega]=}$$

$$\mathbf{=\frac{\nu}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu[2\alpha+(\nu-1)\omega]\eta\mu(\nu\omega)}{2\eta\mu\omega}} \tag{64}$$

Ἄν στόν τύπο (64) βάλουμε $\omega=\alpha$, ἔχουμε:

$$\mathbf{S'_\alpha=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2 2\alpha+\eta\mu^2 3\alpha+\dots+\eta\mu^2(\nu\alpha)=\frac{\nu}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\alpha.\eta\mu(\nu\alpha)}{2\eta\mu\alpha}} \tag{65}$$

Καί ἄν βάλουμε $\omega=2\alpha$, βρίσκουμε ὅτι:

$$\mathbf{S''_\alpha=\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2 3\alpha+\eta\mu^2 5\alpha+\eta\mu^2(2\nu-1)\alpha=\frac{\nu}{2}-\frac{\sigma\upsilon\nu 2(\nu\alpha)\eta\mu 2(\nu\alpha)}{2\eta\mu 2\alpha}} \tag{66}$$

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε καί ὅταν ἀντί γιά ἡμίτονο ἔχουμε συνημίτονο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

31. Νά μετασχηματισθοῦν σέ ἄθροισμα ἤ διαφορά οἱ παραστάσεις:

1. $2\eta\mu 2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha$,
2. $2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu 4\alpha$,
3. $2\eta\mu 4\alpha\ \sigma\upsilon\nu 8\alpha$,
4. $2\eta\mu\alpha\ \eta\mu 3\alpha$,
5. $2\sigma\upsilon\nu 5\alpha\ \sigma\upsilon\nu 7\alpha$,
6. $2\eta\mu 3\alpha\ \eta\mu 5\alpha$.

32. Νά βρεθεῖ ἡ ἀριθμητική τιμή τῶν παραστάσεων:

1. $2\sigma\upsilon\nu 60^\circ\ \eta\mu 30^\circ$,
2. $\eta\mu 45^\circ\ \sigma\upsilon\nu 75^\circ$,
3. $2\sigma\upsilon\nu 150^\circ\ \sigma\upsilon\nu 30^\circ$,
4. $2\eta\mu 36^\circ\ \sigma\upsilon\nu 54^\circ$.

33. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu 4\alpha\ \eta\mu\alpha=\sigma\upsilon\nu 3\alpha\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha$,
2. $\sigma\upsilon\nu 5\alpha\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu 4\alpha\ \sigma\upsilon\nu 3\alpha=-\eta\mu 2\alpha\ \eta\mu\alpha$,
3. $\eta\mu 4\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu 3\alpha\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha=\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

34. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu(36^\circ - \alpha)\,\sigma\upsilon\nu(36^\circ + \alpha) + \sigma\upsilon\nu(54^\circ + \alpha)\,\sigma\upsilon\nu(54^\circ - \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$,
2. $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu(\beta - \gamma) + \sigma\upsilon\nu\beta\,\eta\mu(\gamma - \alpha) + \sigma\upsilon\nu\gamma\,\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$,
3. $\eta\mu\alpha\,\eta\mu(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta\,\eta\mu(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma\,\eta\mu(\alpha - \beta) = 0$,
4. $\dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\,\eta\mu 6\alpha + \eta\mu 4\alpha\,\eta\mu 13\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu 6\alpha + \eta\mu 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu 13\alpha} = \varepsilon\varphi 9\alpha$.

Δεύτερη ὁμάδα

35. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu 20^\circ\,\sigma\upsilon\nu 40^\circ\,\sigma\upsilon\nu 60^\circ\,\sigma\upsilon\nu 80^\circ = \dfrac{1}{16}$,
2. $\varepsilon\varphi 20^\circ\,\varepsilon\varphi 40^\circ\,\varepsilon\varphi 60^\circ\,\varepsilon\varphi 80^\circ = 3$,
3. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$,
4. $\eta\mu^4\dfrac{\pi}{16} + \eta\mu^4\dfrac{3\pi}{16} + \eta\mu^4\dfrac{5\pi}{16} + \eta\mu^4\dfrac{7\pi}{16} = \dfrac{3}{2}$.

36. Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα, πού τό καθένα τους ἔχει ν προσθετέους:

1. $\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 4\alpha + \eta\mu 6\alpha + \dots$
2. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 6\alpha + \dots$
3. $\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha - \dots$
4. $\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha - \dots$

37. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{19} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{19} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{19} + \dots + \sigma\upsilon\nu\dfrac{17\pi}{19} = \dfrac{1}{2}$,
2. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{21} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{4\pi}{21} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{6\pi}{21} + \dots + \sigma\upsilon\nu\dfrac{20\pi}{21} = -\dfrac{1}{2}$,
3. $\eta\mu\dfrac{\pi}{9} + \eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu} + \eta\mu\dfrac{3\pi}{\nu} + \dots = \sigma\varphi\dfrac{\pi}{2\nu}$, ὅπου τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $\nu - 1$.
4. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{\nu} + \dots = -\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{\nu}$, ὅπου τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $2\nu - 1$.

✶ ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

● **28.** *Τριγωνομετρικές σχέσεις ἀνάμεσα στίς γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ.*

Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι:

$$Α + Β + Γ = π \text{ καί ἄρα } \frac{Α}{2} + \frac{Β}{2} + \frac{Γ}{2} = \frac{π}{2}.$$

Ἄρα θά ἔχουμε τίς ἀκόλουθες σχέσεις:

$ημ(Α+Β)=ημΓ$ $ημ\frac{Α+Β}{2}=συν\frac{Γ}{2}$	$ημ(Β+Γ)=ημΑ$ $ημ\frac{Β+Γ}{2}=συν\frac{Α}{2}$	$ημ(Γ+Α)=ημΒ$ $ημ\frac{Γ+Α}{2}=συν\frac{Β}{2}$
$συν(Α+Β)=-συνΓ$ $συν\frac{Α+Β}{2}=ημ\frac{Γ}{2}$	$συν(Β+Γ)=-συνΑ$ $συν\frac{Β+Γ}{2}=ημ\frac{Α}{2}$	$συν(Γ+Α)=συνΒ$ $συν\frac{Γ+Α}{2}=ημ\frac{Β}{2}$

Μέ τή βοήθεια τῶν ταυτοτήτων αὐτῶν καί μέ τή χρήση τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν ἀποδεικνύονται διάφορες χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις ἀνάμεσα στίς γωνίες Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί στά μισά αὐτῶν τῶν γωνιῶν. Οἱ κυριότερες εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

● **29.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:*

$$\mathbf{ημΑ + ημΒ + ημΓ = 4συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}}$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$ημΑ + ημΒ + ημΓ = 2ημ\frac{Α+Β}{2}συν\frac{Α-Β}{2} + 2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2} =$$

$$= 2συν\frac{Γ}{2}συν\frac{Α-Β}{2} + 2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2} = 2συν\frac{Γ}{2}\left[συν\frac{Α-Β}{2} + ημ\frac{Γ}{2}\right] =$$

$$= 2συν\frac{Γ}{2}\left[συν\frac{Α-Β}{2} + συν\frac{Α+Β}{2}\right] = 2συν\frac{Γ}{2}\cdot 2συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2} =$$

$$= 4συν\frac{Α}{2}συν\frac{Β}{2}συν\frac{Γ}{2}.$$ Ἄρα:

$A + B + \Gamma = \pi \;\Rightarrow$	$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$	(67)

Ὁ τύπος (67) βρέθηκε καί στήν παράγραφο (γ) σελίδα 37 μέ ἄλλο τρόπο.

Παρατήρηση. *Ἄν* $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi$, *μέ* $\nu \in \mathbb{Z}^+$, *τότε* :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}.4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma}{2}$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \;\Rightarrow\; \frac{\gamma}{2} = \nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \nu\pi - \frac{\gamma}{2}.$$

Ἀλλά: $$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (1)$$

καί : $$\eta\mu\gamma = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (2)$$

Ἐπειδή ὁ ν μπορεῖ νά εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός, θά ἔχουμε:

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \pm\,\eta\mu\frac{\gamma}{2} \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ἄρα σέ ὅλες τίς περιπτώσεις θά εἶναι:

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = (-1)^{\nu-1}\eta\mu\frac{\gamma}{2} \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -(-1)^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ἄρα οἱ ἰσότητες (1) καί (2) γίνονται:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = (-1)^{\nu-1}2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\left[-2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right],$$

καί μέ πρόσθεση αὐτῶν τῶν ἰσοτήτων κατά μέλη βρίσκουμε:

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right] =$$

$$= (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2} = (-1)^{\nu-1}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$$

Ὥστε :

$\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \;\Rightarrow$	$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}$	(67α)

Ἄν ὅμως εἶναι:

$\alpha+\beta+\gamma=(2\nu-1)\pi \Rightarrow$	$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma=(-1)^{\nu}.4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$	(67β)

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου (67β) γίνεται μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἔγινε καί ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου (67α).

● **30.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι :*

$$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}\Gamma = 1 + 4\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά :

$$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}\Gamma = 2\text{συν}\frac{A+B}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2} + 1 - 2\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2} =$$

$$= 2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2} - 2\text{ημ}^2\frac{\Gamma}{2} + 1 = 2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\left[\text{συν}\frac{A-B}{2} - \text{ημ}\frac{A}{2}\right] + 1 =$$

$$= 1 + 2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\left[\text{συν}\frac{A-B}{2} - \text{συν}\frac{A+B}{2}\right] = 1 + 2\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}\cdot 2\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{ημ}\frac{B}{2} =$$

$$= 1 + 4\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἄρα θά ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$A + B + \Gamma = \pi \Rightarrow$	$\text{συν}A + \text{συν}B + \text{συν}\Gamma = 1 + 4\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{ημ}\frac{B}{2}\,\text{ημ}\frac{\Gamma}{2}$	**(68)**

Ὁ τύπος (68) βρέθηκε καί μέ ἄλλο τρόπο στήν παράγραφο (δ) σελίδα 38.

Παρατήρηση. *Ἄν ἀληθεύει ἡ ἰσότητα :*

$$\text{συν}\alpha + \text{συν}\beta + \text{συν}\gamma = 1 + 4\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\,\text{ημ}\frac{\beta}{2}\,\text{ημ}\frac{\gamma}{2}$$

νά βρεῖτε πῶς συνδέονται οἱ γωνίες α, β καί γ.

Λύση. Ἡ δεδομένη ἰσότητα γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$1 - 2\text{ημ}^2\frac{\alpha}{2} + 2\text{συν}\frac{\beta+\gamma}{2}\text{συν}\frac{\beta-\gamma}{2} = 1 + 2\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\left[\text{συν}\frac{\beta-\gamma}{2} - \text{συν}\frac{\beta+\gamma}{2}\right] -$$

$$-\text{ημ}\frac{\alpha}{2}\left[\text{ημ}\frac{\alpha}{2} + \text{συν}\frac{\beta-\gamma}{2}\right] = -\text{συν}\frac{\beta+\gamma}{2}\left[\text{ημ}\frac{\alpha}{2} + \text{συν}\frac{\beta+\gamma}{2}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\text{ημ}\frac{\alpha}{2} - \text{συν}\frac{\beta-\gamma}{2}\right]\left[\text{ημ}\frac{\alpha}{2} + \text{συν}\frac{\beta-\gamma}{2}\right] = 0.$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή ἐπαληθεύεται:

1ο : Μέ $\text{ημ}\frac{\alpha}{2} = \text{συν}\frac{\beta+\gamma}{2} = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2} & (1) \\ \frac{\alpha}{2} = (2k_1+1)\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2} & (2) \end{cases}$

2ο : Μέ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}=-\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}=\eta\mu\left(\frac{\beta-\gamma}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{\alpha}{2}=2k_2\pi-\frac{\pi}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2} & (3)\\ \frac{\alpha}{2}=(2k_3+1)\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2} & (4)\end{cases}$

Ἀπό τίς (1), (2), (3), (4) βρίσκουμε εὔκολα τίς σχέσεις:

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha\pm\beta\pm\gamma=(4\lambda+1)\pi\\ \alpha\pm\beta\pm\gamma=(4\lambda-1)\pi\end{array}},\quad \text{ὅπου } k, k_1, k_2, k_3, \lambda\in\mathbb{Z}.$$

Ἄν ὅμως εἶναι:

$\alpha+\beta+\gamma=2\nu\pi\ \Rightarrow$	$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=-1+(-1)^\nu.4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}$	(68α)

Ἡ ἀπόδειξη γίνεται ὅπως καί στήν παράγραφο (29).
Ἄν, τέλος, εἶναι:

$\alpha+\beta+\gamma=(2\nu+1)\pi\Rightarrow$	$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=1+(-1)^\nu.4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}$	(68β)

● **31.** *Σέ κάθε μή ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἰσότητα:*

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε: $A+B+\Gamma=\pi$, ὁπότε:

$$A+B=\pi-\Gamma \text{ καί } \varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)=-\varepsilon\varphi\Gamma\Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma\Leftrightarrow\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma.$$

Ὥστε, μέ $A\neq\frac{\pi}{2}$ ἤ $B\neq\frac{\pi}{2}$ ἤ $\Gamma\neq\frac{\pi}{2}$, καί $A+B+\Gamma=\pi$, ἰσχύει:

$$\boxed{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma}\qquad(69)$$

Ἀντιστρόφως: Ἄν τρεῖς γωνίες Α, Β, Γ διαφορετικές ἀπό τό $\frac{\pi}{2}$, ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα (69), τότε θά εἶναι:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma-\varepsilon\varphi\Gamma=-\varepsilon\varphi\Gamma(1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B)\Leftrightarrow$$

$$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)\Leftrightarrow\varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)\Leftrightarrow$$

$$A+B=\nu\pi+\pi-\Gamma\Leftrightarrow\quad \mathbf{A+B+\Gamma=(\nu+1)\pi}\quad,\quad\nu\in\mathbb{Z}$$

● **32.** *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἰσότητα:*

$$\text{σφ}A\,\text{σφ}B + \text{σφ}B\,\text{σφ}\Gamma + \text{σφ}\Gamma\,\text{σφ}A = 1.$$

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση $A + B + \Gamma = \pi$ ἔχουμε:

$$A + B = \pi - \Gamma \Rightarrow \text{σφ}(A + B) = \text{σφ}(\pi - \Gamma) = -\text{σφ}\Gamma \Rightarrow$$

$\dfrac{\text{σφ}A\text{σφ}B-1}{\text{σφ}A + \text{σφ}B} = -\text{σφ}\Gamma$. Ἀπό ἐδῶ προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{\text{σφ}A\text{σφ}B+\text{σφ}B\text{σφ}\Gamma+\text{σφ}\Gamma\text{σφ}A = 1} \qquad (70)$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν τρεῖς γωνίες Α, Β, Γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα (70), τότε θά ἔχουμε:

$$\text{σφ}A\,\text{σφ}B - 1 = -\text{σφ}\Gamma(\text{σφ}A + \text{σφ}B) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\text{σφ}A\,\text{σφ}B-1}{\text{σφ}A + \text{σφ}B} = -\text{σφ}\Gamma \Leftrightarrow \text{σφ}(A + B) = -\text{σφ}\Gamma = \text{σφ}(\pi - \Gamma) \Leftrightarrow$$

$A + B = \nu\pi + (\pi - \Gamma)$, μέ $\nu \in \mathbb{Z}$. Ἄρα: $\quad \mathbf{A + B + \Gamma = (\nu + 1)\pi}$

● **33.** *Ἄν οἱ γωνίες ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο καί συγχρόνως ἰσχύει ἡ ἰσότητα:*

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 2, \qquad (1)$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ πλευρές αὐτοῦ τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογες μέ τούς ἀριθμούς **2, $\sqrt{3}$** *καί* **1.**

Ἀπόδειξη. Ἡ δεδομένη σχέση (1) γράφεται:

$$1 - \text{συν}^2 A + 1 - \text{συν}^2 B + 1 - \text{συν}^2\Gamma = 2 \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}^2 A + \text{συν}^2 B + \text{συν}^2\Gamma = 1 \qquad (2)$$

Ἀφοῦ εἶναι $A + B + \Gamma = \pi$, κατά τόν τύπο (13), θά ἔχουμε:

$$\text{συν}^2 A + \text{συν}^2 B + \text{συν}^2\Gamma + 2\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma = 1 \qquad (3)$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) βρίσκουμε τή σχέση:

$$\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{συν}A = 0 \Rightarrow A = \dfrac{\pi}{2}, \\ \text{ἤ } \text{συν}B = 0 \Rightarrow B = \dfrac{\pi}{2}, \\ \text{ἤ } \text{συν}\Gamma = 0 \Rightarrow \Gamma = \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι:

$$A = \frac{\pi}{2}, \text{ ὁπότε } B + \Gamma = \frac{\pi}{2} \qquad (4)$$

Ἐπειδή ἀπό τήν ὑπόθεση οἱ γωνίες Α, Β, Γ ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο, θά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$2B = \Gamma + A = \Gamma + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2B - \Gamma = \frac{\pi}{2} \qquad (5)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (4) καί (5) βρίσκουμε:

$$B + \Gamma = 2B - \Gamma \Leftrightarrow B = 2\Gamma \text{ καί ἡ (4) γίνεται:}$$

$$2\Gamma + \Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3\Gamma = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \Gamma = \frac{\pi}{6} \text{ καί ἄρα } B = \frac{\pi}{3}.$$

Ὥστε εἶναι: $A = \frac{\pi}{2},\ B = \frac{\pi}{3},\ \Gamma = \frac{\pi}{6}.$

Ἄν α, β, γ εἶναι, ἀντιστοίχως, ἡ ὑποτείνουσα καί οἱ κάθετες πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε, ἐπειδή:

$$\Gamma = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \gamma = \frac{\alpha}{2} \text{ καί ἄρα } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{2}. \text{ Ἄρα: } \boxed{\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{\sqrt{3}} = \frac{\gamma}{1}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

38. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰσότητες:

1. $\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 4\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$,
2. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = -1 + 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,
3. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$,
4. $\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1 - 4\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
5. $\varepsilon\varphi 2A + 2\varepsilon\varphi 2B + \varepsilon\varphi 2\Gamma = \varepsilon\varphi 2A\,\varepsilon\varphi 2B\,\varepsilon\varphi 2\Gamma$,
6. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = 1$.

39. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

1. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 2 + 2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
2. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma = 2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
3. $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1 - 2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
4. $\eta\mu(B + \Gamma - A) + \eta\mu(\Gamma + A - B) + \eta\mu(A + B - \Gamma) = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

40. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = -4\eta\mu 2A\,\eta\mu 2B\,\eta\mu 2\Gamma$,
2. $\sigma\upsilon\nu 4A + \sigma\upsilon\nu 4B + \sigma\upsilon\nu 4\Gamma = -1 + 4\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$,
3. $\eta\mu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,
4. $\dfrac{\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma}{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = 8\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,

5. $\dfrac{\text{εφ}A+\text{εφ}B+\text{εφ}\Gamma}{(\text{ημ}A+\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma)^2}=\dfrac{\text{εφ}\dfrac{A}{2}\,\text{εφ}\dfrac{B}{2}\,\text{εφ}\dfrac{\Gamma}{2}}{2\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma}$

41. Ἄν $A+B+\Gamma=180^\circ$, νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

1. $\text{ημ}3A+\text{ημ}3B+\text{ημ}3\Gamma$,
2. $\text{ημ}6A+\text{ημ}6B+\text{ημ}6\Gamma$,
3. $\text{εφ}(kA)+\text{εφ}(kB)+\text{εφ}(k\Gamma)$, ἄν $k\in\mathbb{N}$.

42. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια καθεμιᾶς ἀπό τίς παρακάτω ἰσότητες:

1. $\text{ημ}\dfrac{A}{2}+\text{ημ}\dfrac{B}{2}+\text{ημ}\dfrac{\Gamma}{2}=1+4\text{ημ}\dfrac{\pi-A}{4}\,\text{ημ}\dfrac{\pi-B}{4}\,\text{ημ}\dfrac{\pi-\Gamma}{4}$,

2. $\text{συν}\dfrac{A}{2}+\text{συν}\dfrac{B}{2}+\text{συν}\dfrac{\Gamma}{2}=4\text{συν}\dfrac{B+\Gamma}{4}\,\text{συν}\dfrac{\Gamma+A}{4}\,\text{συν}\dfrac{A+B}{4}$,

3. $\text{ημ}^2\dfrac{A}{4}+\text{ημ}^2\dfrac{B}{4}+\text{ημ}^2\dfrac{\Gamma}{4}=\dfrac{3}{2}-2\text{συν}\dfrac{\pi-A}{4}\,\text{συν}\dfrac{\pi-B}{4}\,\text{συν}\dfrac{\pi-\Gamma}{4}$,

4. $\text{συν}^2\dfrac{A}{4}+\text{συν}^2\dfrac{B}{4}+\text{συν}^2\dfrac{\Gamma}{4}=\dfrac{3}{2}+2\text{συν}\dfrac{\pi-A}{4}\,\text{συν}\dfrac{\pi-B}{4}\,\text{συν}\dfrac{\pi-\Gamma}{4}$.

✶ Δεύτερη ὁμάδα

43. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\Sigma\text{ημ}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma=\text{ημ}A\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma$,
2. $\Sigma\text{συν}A\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma=1+\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma$,
3. $\Sigma\text{ημ}A\,\text{συν}(B-\Gamma)=4\text{ημ}A\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma$,
4. $\Sigma\text{συν}A\,\text{συν}(B-\Gamma)=1+4\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma$,
5. $\Sigma\text{ημ}^3A\,\text{ημ}(B-\Gamma)=0$,
6. $\Sigma\text{ημ}^3A\,\text{συν}(B-\Gamma)-3\text{ημ}A\,\text{ημ}B\,\text{ημ}\Gamma=0$,
7. $\Sigma\text{ημ}3A\,\text{συν}(B-\Gamma)=0$,
8. $\Sigma\text{ημ}3A\,\text{ημ}^3(B-\Gamma)=0$.

44. Σέ κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\text{ημ}A+\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma+\text{ημ}\Delta=4\text{ημ}\dfrac{A+B}{2}\,\text{ημ}\dfrac{B+\Gamma}{2}\,\text{ημ}\dfrac{\Gamma+A}{2}$,

2. $\text{συν}A+\text{συν}B+\text{συν}\Gamma+\text{συν}\Delta=4\text{συν}\dfrac{A+B}{2}\,\text{συν}\dfrac{B+\Gamma}{2}\,\text{συν}\dfrac{\Gamma+A}{2}$.

45. Ἄν σέ κάποιο τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει καθεμιά ἀπό τίς ἰσότητες:

1. $\text{σφ}\dfrac{B}{2}=\dfrac{\text{ημ}A+\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}B}$, 2. $\text{ημ}A=\dfrac{\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}{\text{συν}B+\text{συν}\Gamma}$

3. $\text{ημ}\Gamma=\text{συν}A+\text{συν}B$,

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο καί ἀντιστρόφως.

46. Ἄν σέ κάποιο τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει καθεμιά ἀπό τίς ἰσότητες:

1. $\Sigma\text{εφ}\dfrac{A}{2}+\text{εφ}\dfrac{A}{2}\,\text{εφ}\dfrac{B}{2}\,\text{εφ}\dfrac{\Gamma}{2}=2$, 2. $\Sigma\text{συν}^2A=1$,

3. $\text{ημ}2A+\text{ημ}2\Gamma=\text{ημ}2B$, 4. $\Sigma\text{ημ}4A=0$,

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο καί ἀντιστρόφως.

47. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\text{ημ}3A+\text{ημ}3B+\text{ημ}3\Gamma=0,$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι μία γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι $60°$.

48. Ἄν $\eta\mu \frac{A}{2} \sigma\upsilon\nu^3 \frac{B}{2} = \eta\mu \frac{B}{2} \sigma\upsilon\nu^3 \frac{A}{2}$, τότε τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐπίσης, ἄν $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \eta\mu B\, \eta\mu \Gamma$.

49. Ἄν $\sigma\upsilon\nu 3A + \sigma\upsilon\nu 3B + \sigma\upsilon\nu 3\Gamma = 1$, τότε μία γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $120°$.

50. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$1 + \Sigma \frac{\eta\mu\Gamma\, \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\, \eta\mu^2 B} = (\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma)^2.$$

51. Ἄν $x + y + \omega = xy\omega$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\Sigma \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2\omega}{1-\omega^2}$.
2. $\Sigma \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \cdot \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \cdot \frac{3\omega-\omega^3}{1-3\omega^2}$.
3. $\Sigma x(1-y^2)(1-\omega^2) = 4xy\omega$.

52. Ἄν $A + B + \Gamma = 180°$ καί $\nu \in \mathbb{Z}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$\eta\mu(2\nu A) + \eta\mu(2\nu B) + \eta\mu(2\nu\Gamma) = 4(-1)^{\nu-1}\eta\mu(\nu A)\, \eta\mu(\nu B)\, \eta\mu(\nu\Gamma)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

● **34.** *ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLLWEIDE. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις:*

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2},$$

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\beta>\gamma$, θά ἔχουμε διαδοχικά:

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{2R\eta\mu B-2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu A}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\tag{1}$$

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{2R\eta\mu B+2R\eta\mu\Gamma}{2R\eta\mu A}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}\cdot\eta\mu\frac{A}{2}=\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\tag{2}$$

Μὲ διαίρεση τώρα κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), βρίσκουμε:

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\tag{3}$$

καί μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν α, β, γ, ($\alpha>\beta>\gamma$) καί Α, Β, Γ βρίσκουμε τούς τύπους τοῦ Mollweide.

(71)			(72)
	$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=\eta\mu\frac{A-B}{2}$	$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}$	
	$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$	$\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\eta\mu\frac{B}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma-A}{2}$	
	$\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=\eta\mu\frac{A-\Gamma}{2}$	$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$	

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\,\sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{A-B}{2}\quad \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{B-\Gamma}{2}\\ \frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma-A}{2}\end{gathered}} \qquad (73)$$

● **35.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν μισῶν γωνιῶν του.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι α, β, γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί 2τ ἡ περίμετρός του. Τότε θά ἔχουμε:

$$\alpha+\beta+\gamma=2\tau \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\beta+\gamma-\alpha&=2\tau-2\alpha=2(\tau-\alpha),\\ \gamma+\alpha-\beta&=2\tau-2\beta=2(\tau-\beta),\\ \alpha+\beta-\gamma&=2\tau-2\gamma=2(\tau-\gamma).\end{aligned}\right.$$

Ἀπό τό νόμο τῶν συνημιτόνων ἔχουμε τόν τύπο:

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως καί

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=1+\sigma\upsilon\nu A \quad (2) \qquad \text{καί} \qquad 2\eta\mu^2\frac{A}{2}=1-\sigma\upsilon\nu A \qquad (3)$$

Ἑπομένως μέ τή βοήθεια τῶν (1) καί (2) θά ἔχουμε:

$$2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=1+\sigma\upsilon\nu A=1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma-\alpha^2}{2\beta\gamma}=$$

$$=\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau\cdot 2(\tau-\alpha)}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$$

Ἐπειδή ὅμως $\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}>0$ καί θά ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀπό τίς (1) καί (3) βρίσκουμε: $\eta\mu\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$

Τέλος, μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν α, β, γ καί Α, Β, Γ βρίσκουμε:

$\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$		$\eta\mu\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$	
$\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$,	(74)	$\eta\mu\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}$	(75)
$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$		$\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$	

Διαιρώντας ἔπειτα κατά μέλη, ἀντιστοίχως, τούς τύπους (75) μέ τούς τύπους (74) βρίσκουμε τούς τύπους:

$$(76)\quad \begin{array}{|l|}\hline \text{εφ}\,\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} \\ \hline \text{εφ}\,\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}} \\ \hline \text{εφ}\,\dfrac{\Gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|l|}\hline \text{σφ}\,\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \\ \text{σφ}\,\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}} \\ \text{σφ}\,\dfrac{\Gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}} \\ \hline \end{array}\quad (77)$$

★ **Διερεύνηση:** Γιά νά ὑπάρχουν οἱ γωνίες Α, Β, Γ, πρέπει:

$$\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)} > 0 \text{ ἤ } (\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) > 0, \text{ ἀφοῦ } \tau > 0$$

Γιά νά εἶναι ὅμως $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma) > 0$, πρέπει ἤ ὅλοι οἱ παράγοντες νά εἶναι θετικοί ἤ ἕνας θετικός καί οἱ ἄλλοι δύο ἀρνητικοί. Ἄν δύο παράγοντες εἶναι ἀρνητικοί, π.χ. οἱ

$$\left.\begin{array}{l}\tau-\beta<0\\ \tau-\gamma<0\end{array}\right\} \Rightarrow 2\tau-\beta-\gamma<0 \Leftrightarrow \alpha<0, \text{ πράγμα πού εἶναι ἄτοπο.}$$

Ἄρα: $\tau-\alpha>0 \Leftrightarrow \tau>\alpha \Leftrightarrow 2\tau>2\alpha \Leftrightarrow 2\alpha<2\tau \Leftrightarrow \alpha<\beta+\gamma$. Ὁμοίως (1)

$\tau-\beta>0 \Leftrightarrow \beta<\gamma+\alpha$ (2) καί $\tau-\gamma>0 \Rightarrow \gamma<\alpha+\beta$ (3)

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) βρίσκουμε:

$$\left.\begin{array}{l}-\alpha<\gamma-\beta\\ \gamma-\beta<\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow -\alpha<\gamma-\beta<\alpha \Leftrightarrow |\gamma-\beta|<\alpha<\beta+\gamma$$

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε: $|\alpha-\gamma|<\beta<\alpha+\gamma$ καί $|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta$

Ἄν ὅμως α εἶναι ἡ μεγαλύτερη πλευρά, τότε ἀρκεῖ $\alpha<\beta+\gamma$.

Παρατήρηση. Ἄν ἐργαστοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο στούς τύπους (74) ἤ (75), θά ἔχουμε:

$$0<\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}<1, \text{ δηλαδή } 0<\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \text{ καί } \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}<1$$

ἤ $\tau(\tau-\alpha)>0$ καί $\tau(\tau-\alpha)<\beta\gamma$,

ἤ $\tau-\alpha>0$ » $(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)<4\beta\gamma$,

ἤ $\tau>\alpha$ » $(\beta-\gamma)^2-\alpha^2<0$,

ἤ $\alpha<\beta+\gamma$ » $(\beta-\gamma+\alpha)(\beta-\gamma-\alpha)<0$ (4)

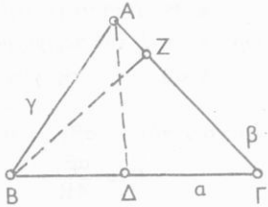
Τό πρῶτο μέλος τῆς (4) εἶναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ὡς πρός β. Γιά νά εἶναι τό τριώνυμο αὐτό ἀρνητικό, δηλαδή νά ἔχει σημεῖο ἀντίθετο ἀπό τό σημεῖο τοῦ συντελεστοῦ τοῦ β^2, πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ β νά βρίσκεται ἀνάμεσα στίς ρίζες τοῦ τριωνύμου. Δηλαδή πρέπει:

$$\gamma-\alpha<\beta<\gamma+\alpha, \text{ ἀπ' ὅπου: } \gamma<\alpha+\beta \text{ καί } \beta<\alpha+\gamma.$$

Ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha<\beta+\gamma,\\ \beta<\gamma+\alpha,\\ \gamma<\alpha+\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma,\\ |\gamma-\alpha|<\beta<\gamma+\alpha,\\ |\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta.\end{array}$$

● **36. Ἐμβαδό τριγώνου.** Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι α, β, γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί Ε τό ἐμβαδό του. Φέρνουμε τά ὕψη του ΑΔ καί ΒΖ.



Σχ. 5

Ἀπό τό σχῆμα 5 ἔχουμε:

ΑΔ = βημΓ, ΑΔ = γημΒ καί ΒΖ = γημΑ.

Τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι:

$$E=\frac{1}{2}\beta\cdot BZ=\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot A\Delta=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\alpha\gamma\,\eta\mu B.$$

Ὥστε :

$$\boxed{E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu B=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma} \qquad (78)$$

Οἱ σχέσεις (78) δείχνουν ὅτι : *Τό ἐμβαδό κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπί τό ἡμίτονο τῆς γωνίας, ἡ ὁποία περιέχεται σ' αὐτές τίς πλευρές.*

Συνέπεια : Ἐπειδή εἶναι $\eta\mu\Gamma=\frac{\gamma}{2R}$, θά ἔχουμε:

$$E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{\gamma}{2R}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R} \Leftrightarrow \boxed{\alpha\beta\gamma=4ER} \qquad (79)$$

● **37.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό του.*

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A=\frac{1}{2}\beta\gamma\cdot 2\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\beta\gamma\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=$$

$$=\beta\gamma\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Ὥστε:

$$\boxed{E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (80)$$

Ὁ τύπος αὐτός καλεῖται τύπος τοῦ **Ἥρωνος.**

● **38.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τίς πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

Λύση. Ἀπό τούς γνωστούς τύπους:

$$\alpha\beta\gamma = 4ER \text{ καί } E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

μέ ἀπαλοιφή τοῦ Ε βρίσκουμε:

$$\boxed{R = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}} \qquad (81)$$

● **39.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἀπό τά ἡμίτονα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί τήν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νά ὑπολογισθεῖ τό ἐμβαδό τοῦ τριγώνου.*

Λύση. Ἀπό τίς γνωστές σχέσεις:

$$\alpha = 2R\eta\mu A,\ \beta = 2R\eta\mu B,\ \gamma = 2R\eta\mu\Gamma$$

καί τόν τύπο: $\alpha\beta\gamma = 4ER$, ἔχουμε διαδοχικά:

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{2R\eta\mu A\cdot 2R\eta\mu B\cdot 2R\eta\mu\Gamma}{4R} = 2R^2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$$

Ὥστε:

$$\boxed{E = 2R^2\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma} \qquad (82)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

α) *Νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες Β καί Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἀπό τά γνωστά στοιχεῖα του:*

$$A = 60^0 \text{ καὶ } \alpha = (\beta-\gamma)\sqrt{3},$$

Λύση. Ἀπό τό δεύτερο τύπο τοῦ Mollweide ἔχουμε:

$$\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \frac{\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\frac{60^\circ}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\,30^\circ =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ.$$

Ἄρα θά εἶναι: $\frac{B-\Gamma}{2} = 30^\circ \Rightarrow B-\Gamma = 60^\circ$ (1)

Ἐπειδή ὅμως: $B+\Gamma = 180^\circ - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (2)

ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει: $B = 90^\circ$ καί $\Gamma = 30^\circ$.

Συμπέρασμα: Τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει: $A = 60^\circ$, $B = 90^\circ$, $\Gamma = 30^\circ$, δηλαδή εἶναι ὀρθογώνιο στήν κορυφή Β.

β) *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ σχέση:*

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 4E$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 2\beta^2\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma^2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu B =$$

$$= 2\beta^2\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma\cdot\beta\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B = 2\beta\eta\mu\Gamma(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B) =$$

$$= 2\beta\eta\mu\Gamma\cdot\alpha = 2\alpha\beta\eta\mu\Gamma = 4E,$$

ἀφοῦ ξέρουμε ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ὅτι εἶναι:

$$\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B,\ \gamma\eta\mu B = \beta\eta\mu\Gamma,\ \alpha\eta\mu\Gamma = \gamma\eta\mu A.$$

γ) *Ἂν οἱ πλευρές α, β, γ καί ἡ γωνία Β ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:*

$$\alpha+\gamma=\beta\,\sigma\varphi\frac{B}{2} \qquad (1)$$

νά βρεθεῖ τό εἶδος τοῦ τριγώνου.

Λύση. Ἡ ἰσότητα (1) γράφεται:

$$2R\eta\mu A+2R\eta\mu\Gamma=2R\eta\mu B\sigma\varphi\frac{B}{2}\Leftrightarrow\eta\mu A+\eta\mu\Gamma=\eta\mu B\,\sigma\varphi\frac{B}{2}\Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu\frac{A+\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=2\eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\eta\mu\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{A-\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} \qquad (2)$$

Ἄρα θά εἶναι: $\frac{B}{2}=\frac{A-\Gamma}{2}\Leftrightarrow B+\Gamma=A\Leftrightarrow A=90^\circ$

ἤ $\frac{B}{2}=\frac{\Gamma-A}{2}\Leftrightarrow B+A=\Gamma\Leftrightarrow\Gamma=90^\circ$.

Ἄρα τό τρίγωνο ΑΒΓ θά εἶναι ὀρθογώνιο ἤ στήν κορυφή Α ἤ στήν κορυφή Γ.

Ἀπό τή σχέση (2) θά μποροῦσε νά προκύψει ὅτι ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$\frac{B}{2}=\frac{\Gamma-A}{2}+k\cdot360^\circ \quad ἤ \quad \frac{B}{2}=\frac{A-\Gamma}{2}+k\cdot360^\circ,\quad k\in\mathbb{Z},$$

οἱ ὁποῖες ὅμως ἀπορρίπτονται, γιατί:

$$\frac{B}{2}<90^\circ \quad καί \quad \frac{|A-\Gamma|}{2}<90^\circ. \quad Ἄρα \quad k=0.$$

δ) *Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ σχέση:*

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\right)=2\gamma\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\right)=2R(\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma)\cdot\frac{\eta\mu\frac{A+B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}=$$

$$=2R\cdot4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}=8R\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}=$$

$$= 8R\cdot ημ\frac{Γ}{2}\cdot\frac{συν^2\frac{Γ}{2}}{ημ\frac{Γ}{2}} = 8Rημ\frac{Γ}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2}\cdot\frac{συν\frac{Γ}{2}}{ημ\frac{Γ}{2}} =$$

$$= 2R\cdot 2\cdot 2ημ\frac{Γ}{2}συν\frac{Γ}{2}\cdot σφ\frac{Γ}{2} = 2\cdot 2RημΓ\, σφ\frac{Γ}{2} = 2γσφ\frac{Γ}{2}.$$

ε) *Ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:*

$$\boldsymbol{α + γ = 2β}, \quad \textit{τότε} \quad \boldsymbol{σφ\frac{A}{2} + σφ\frac{Γ}{2} = 2σφ\frac{B}{2}}$$

καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τή σχέση:

$$α + γ = 2β \Leftrightarrow 2τ - (α + γ) = 2τ - 2β \Leftrightarrow (τ - α) + (τ - γ) = 2(τ - β)$$

διαιρώντας τά μέλη της μέ τήν παράσταση

$$\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ}}$$

βρίσκουμε τή σχέση:

$$\sqrt{\frac{τ(τ-α)}{(τ-β)(τ-γ)}} + \sqrt{\frac{τ(τ-γ)}{(τ-α)(τ-β)}} = 2\cdot\sqrt{\frac{τ(τ-β)}{(τ-γ)(τ-α)}}$$

ἀπό τήν ὁποία, μέ βάση τούς τύπους (77), βρίσκουμε:

$$σφ\frac{A}{2} + σφ\frac{Γ}{2} = 2σφ\frac{B}{2}.$$

Ἡ ἀντίστροφη πρόταση ἀποδεικνύεται εὔκολα, ἀφοῦ ὅλες οἱ προηγούμενες πράξεις εἶναι ἀντιστρεπτές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

53. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $Γ = 120°$ καί $2α = β(\sqrt{3} - 1)$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

54. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $3α = (β + γ)\sqrt{3}$ καί $A = 60°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

55. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $β = 2γ$ καί $A = 60°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

56. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $β = α(\sqrt{3} - 1)$ καί $Γ = 30°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

57. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $α = 2$, $γ = \sqrt{2}$, $B = 15°$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλες γωνίες αὐτοῦ τοῦ τριγώνου.

58. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰσότητες:

1. $α(βσυνΓ - γσυνB) = β^2 - γ^2$,
2. $α(συνB + συνΓ) = 2(β + γ)\,ημ^2\frac{A}{2}$.

3. $(\beta + \gamma - \alpha)\left(\sigma\varphi \frac{B}{2} + \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2}\right) = 2\alpha\sigma\varphi \frac{A}{2}$,

4. $\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \eta\mu 2A + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2} \eta\mu 2B + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2} \eta\mu 2\Gamma = 0$.

✶ Δεύτερη ὁμάδα

59. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

1. $\frac{\alpha\eta\mu(B - \Gamma)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta\eta\mu(\Gamma - A)}{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\gamma\eta\mu(A - B)}{\alpha^2 - \beta^2}$,

2. $\Sigma(\beta - \gamma)\,\sigma\varphi \frac{A}{2} = 0$, 3. $\Sigma(\beta^2 - \gamma^2)\,\sigma\varphi A = 0$,

4. $\Sigma(\alpha + \beta)\,\varepsilon\varphi \frac{A + B}{2} = 0$, 5. $\Sigma \frac{\beta}{\alpha\eta\mu\Gamma} = 2\,\sigma\varphi A$,

6. $\Sigma\alpha\,\sigma\upsilon\nu A = \frac{2E}{R}$, 7. $\Sigma \frac{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\beta} = \frac{1}{4R^2}$,

8. $\Sigma(\alpha - \beta)\,\varepsilon\varphi \frac{A + B}{2} = 0$, 9. $\Sigma\alpha\,\eta\mu \frac{B - \Gamma}{2}\,\sigma\tau\varepsilon\mu \frac{A}{2} = 0$.

60. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\,\sigma\varphi A$, 2. $2E(\sigma\varphi B - \sigma\varphi A) = \alpha^2 - \beta^2$,

3. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4\,E.\Sigma\,\sigma\varphi A$, 4. $1 - \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \frac{\gamma}{\tau}$.

61. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

1. $\alpha = 2\beta\,\eta\mu \frac{A}{2}$, 2. $\eta\mu A = 2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,

3. $\alpha = 2\beta\,\sigma\upsilon\nu\,\Gamma$, 4. $(\tau - \beta)\,\sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \tau\,\varepsilon\varphi \frac{B}{2}$,

5. $2\upsilon_\alpha = \alpha\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$, 6. $4E = \alpha^2\,\sigma\varphi \frac{A}{2}$,

7. $\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2E} = \sigma\varphi \frac{A}{2} + 3\varepsilon\varphi \frac{A}{2}$, 8. $\alpha\,\varepsilon\varphi\,A + B\,\varepsilon\varphi\,\beta = (\alpha + \beta)\,\varepsilon\varphi \frac{A+B}{2}$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

62. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι:

$$\eta\mu\Gamma(\sigma\upsilon\nu A + 2\sigma\upsilon\nu\Gamma) = \eta\mu B(\sigma\upsilon\nu A + 2\sigma\upsilon\nu B),$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσοσκελές ἤ ὀρθογώνιο.

63. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι: $(1 - \sigma\varphi\Gamma)\,[1 + \sigma\varphi(45^\circ - B)] = 2$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

64. Ἄν σέ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $A = 90^\circ$ καί $4E = \alpha^2$, τό τρίγωνο αὐτό θά εἶναι ἰσοσκελές.

65. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι:

$$\beta^3 + \gamma^3 - \alpha^3 = \alpha^2(\beta + \gamma - \alpha) \text{ καί } 4\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma = 3,$$

τό τρίγωνο αὐτό εἶναι ἰσόπλευρο.

66. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $A = 120^\circ$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\gamma(\alpha^2 - \gamma^2) = \beta(\alpha^2 - \beta^2).$$

67. Ἄν οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά ἡμίτονα τῶν γωνιῶν πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς πλευρές αὐτές ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.

68. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi\Gamma = 2\sigma\varphi B$$

καί ἀντιστρόφως.

69. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha+\gamma=2\beta$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\upsilon\nu\Gamma\,\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\varphi\frac{B}{2}$,

2. $\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2}+\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\frac{3\beta}{2}$,

3. $\sigma\varphi\frac{A}{2}+\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=2\sigma\varphi\frac{B}{2}$,

4. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}=\frac{1}{3}$.

Ἰσχύουν τά ἀντίστροφά των;

70. Ἄν οἱ πλευρές α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι καί οἱ ἀριθμοί

$$\eta\mu^2\frac{A}{2},\qquad \eta\mu^2\frac{B}{2},\qquad \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$$

ἀποτελοῦν ἁρμονική πρόοδο.

71. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha+\gamma=2\beta$ καί $A-\Gamma=90^\circ$. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{7}+1}=\frac{\beta}{7}=\frac{\gamma}{\sqrt{7}-1}$$

72. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\Gamma=60^\circ$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha+\gamma}+\frac{1}{\beta+\gamma}=\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}$$

καί ἀντιστρόφως.

73. Ἄν $\sigma\upsilon\nu A=\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta$, $\sigma\upsilon\nu B=\sigma\upsilon\nu\beta\,\eta\mu\gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\sigma\upsilon\nu\gamma\,\eta\mu\alpha$ καί $A+B+\Gamma=\pi$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma=1.$$

74. Ἄν $\sigma\upsilon\nu A=\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma$, $\sigma\upsilon\nu B=\varepsilon\varphi\gamma\,\varepsilon\varphi\alpha$, $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta$ καί $A+B+\Gamma=\pi$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha+\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\gamma=1.$$

75. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma\geq\sqrt{3}.$$

76. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἀληθεύει ἡ ἰσότητα:

$$\eta\mu\,4A+\eta\mu\,4B+\eta\mu\,4\Gamma=0,$$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

77. Ἀφοῦ ἀποδειχθεῖ ἡ ταυτότητα:

$$\varepsilon\varphi x=\sigma\varphi x-2\sigma\varphi\,2x,$$

νά ἀποδειχθεῖ ἀκολούθως ὅτι:

$$S_\nu=\frac{1}{2}\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}\varepsilon\varphi\frac{x}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^\nu}\varepsilon\varphi\frac{x}{2^\nu}=\frac{1}{2^\nu}\sigma\varphi\frac{x}{2^\nu}-\sigma\varphi\,x,$$

ὅπου $0<x<\frac{\pi}{2}$

78. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί x καί y, τέτοιοι ὥστε:

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\,\alpha=x\,\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}+y\,\sigma\varphi\,\alpha,$$

ὁποιοδήποτε καί ἄν εἶναι τό α. Ἀκολούθως δεῖξτε ὅτι:

$$S_\nu=\sigma\tau\varepsilon\mu\,\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu\,2\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu\,4\alpha+\ldots+\sigma\tau\varepsilon\mu\,2^\nu\alpha=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}-\varepsilon\varphi\,2^\nu\,\alpha.$$

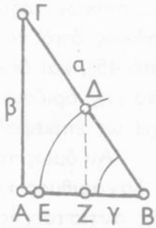
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

● **40. Ἀνάγκη τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων.** Οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἐκπλήρωση τοῦ σκοποῦ τῆς Τριγωνομετρίας. Γιά νά γίνει αὐτό ἀντιληπτό ἀπό τώρα, λύνουμε τό ἀκόλουθο πρόβλημα.

● **41.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ἔχει $\alpha = 20\,m$ καί $\beta = 12\,m$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ γωνία του B.*

Λύση. Μέ κέντρο τό Β καί ἀκτίνα $B\Delta = 1$ γράφουμε κύκλο, πού κόβει τήν ὑποτείνουσα ΒΓ στό Δ καί τήν κάθετη πλευρά ΑΒ στό Ε. Φέρνουμε τή ΔΖ κάθετη στήν ΑΒ. Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΒΖΔ καί ΒΑΓ ἔχουμε:



Σχ. 6

$$\frac{\beta}{Z\Delta} = \frac{\alpha}{B\Delta} = \frac{\alpha}{1} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{1} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \qquad (1)$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή φαίνεται ὅτι γνωρίζουμε τό ημΒ, ὄχι ὅμως καί τή γωνία Β.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῆς γωνίας Β ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Παίρνουμε τούς λογαρίθμους καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητας (1) καί ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu B = \lambda o\gamma\ 0{,}6 = \overline{1}{,}77815.$$

Ἄν, λοιπόν, ἔχουμε πίνακα, πού νά περιέχει τούς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν, μποροῦμε νά βροῦμε τή γωνία Β, τῆς ὁποίας τό ἡμίτονο ἔχει λογάριθμο τόν ἀριθμό $\overline{1}{,}77815$. Τέτοιοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν.

Ἕνας περιέχει τούς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καί συνεφαπτομένης μέ 7 δεκαδικά ψηφία, ἄλλος μέ 11 δεκαδικά ψηφία, ἄλλος μέ 20 δεκαδικά ψηφία καί ἄλλος μέ 5 δεκαδικά ψηφία.

Γιά τίς συνηθισμένες ὅμως ἐφαρμογές ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίνακας, τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν καί ἑλληνικές ἐκδόσεις κατά τό σύστημα Dupuis.

Ἕναν τέτοιο πίνακα θά περιγράψουμε μέ συντομία καί θά ἐκθέσουμε καί τόν τρόπο τῆς χρήσεώς του.

● 42. Περιγραφή τῶν λογαριθμικῶν πινάκων Dupuis.

Οἱ πίνακες τοῦ Dupuis περιέχουν τούς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης, τῆς συνεφαπτομένης καί τοῦ συνημιτόνου τῶν τόξων ἀπό 0° μέχρις 90°, τά ὁποῖα αὐξάνουν κατά 1′.

Ὁ ἀριθμός τῶν μοιρῶν ἀναγράφεται ἔξω ἀπό τό πλαίσιο τοῦ πίνακα. Γιά τά τόξα πού ἔχουν λιγότερες ἀπό 45°, ὁ ἀριθμός τῶν μοιρῶν γράφεται στό ἐπάνω μέρος τῆς σελίδας. Γιά τά ἄλλα τόξα ὁ ἀριθμός τῶν μοιρῶν γράφεται στό κάτω μέρος τῆς σελίδας.

Οἱ ἀριθμοί τῶν πρώτων λεπτῶν στά τόξα τά μικρότερα ἀπό 45° ἀναγράφονται στήν πρώτη στήλη ἀριστερά, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα μιά ὀξεία (′), ἐνῶ στά ἄλλα τόξα γράφεται στήν πρώτη στήλη ἀπό τά δεξιά.

Στήν ἀριστερή στήλη τά πρῶτα λεπτά αὐξάνονται ἀπό πάνω πρός τά κάτω, ἐνῶ στή δεξιά αὐξάνονται ἀπό κάτω πρός τά πάνω.

Μέ τήν παραπάνω διάταξη οἱ ἀριθμοί τῶν πρώτων λεπτῶν δύο συμπληρωματικῶν τόξων βρίσκονται στήν ἴδια ὁριζόντια γραμμή. Οἱ λογάριθμοι τοῦ καθενός ἀπό τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου, πού εἶναι μικρότερο ἀπό 45°, καί δέν περιέχει δεύτερα λεπτά, βρίσκεται στή διασταύρωση τῆς ἀντίστοιχης ὁριζόντιας γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα τόν τριγωνομετρικό ἀριθμό.

Ἄν ὅμως τό τόξο περιέχεται μεταξύ 45° καί 90° καί δέν ἔχει δεύτερα λεπτά, ὁ λογάριθμος καθενός τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ βρίσκεται στή διασταύρωση τῆς ἀντίστοιχης γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης, ἡ ὁποία στό **κάτω** μέρος της ἔχει τήν ὀνομασία τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

λογ ημ $(18^\circ 25') = \bar{1},49958$ λογ ημ $(39^\circ 56') = \bar{1},80746$	λογ ημ $(67^\circ 16') = \bar{1},96488$ λογ ημ $(78^\circ 33') = \bar{1},99127$
λογ συν $(24^\circ 12') = \bar{1},96005$ λογ συν $(43^\circ 52') = \bar{1},85791$	λογ συν $(62^\circ 10') = \bar{1},66922$ λογ συν $(56^\circ 53') = \bar{1},73747$
λογ εφ $(30^\circ 14') = \bar{1},76551$ λογ εφ $(39^\circ 27') = \bar{1},91533$	λογ εφ $(61^\circ 58') = 0,27372$ λογ εφ $(48^\circ 19') = 0,05039$
λογ σφ $(29^\circ 39') = 0,24471$ λογ σφ $(44^\circ 51') = 0,00227$	λογ σφ $(52^\circ 11') = 1,88994$ λογ σφ $(77^\circ 38') = 1,34095$

Ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν κοινά τά δύο πρῶτα ψηφία τους, αὐτά γράφονται μόνο στόν πρῶτο καί στόν τελευταῖο λογάριθμο. Γιά τούς ἐνδιάμεσους λογαρίθμους τά δύο αὐτά ψηφία δέ γράφονται, ἀλλά ἐννοοῦνται.

Ἄν οἱ λογάριθμοι αὐτοί βρίσκονται σέ περισσότερες σελίδες, τά δύο ὅμοια ψηφία ἀναγράφονται καί στήν ἀρχή καί στό τέλος αὐτῶν τῶν σελίδων.

Ἄν στό μεταξύ μεταβληθεῖ τό ἕνα ἀπό τά δύο πρῶτα ψηφία, ὁ λογάριθμος ἀναγράφεται ὁλόκληρος, ὅπως καί ὁ προηγούμενός του.

Μετά ἀπό τίς στῆλες τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καί τῶν συνημιτόνων, ὑπάρχουν στῆλες μὲ ἐπικεφαλίδα τό γράμμα Δ (διαφορά). Στά ἀντίστοιχα τετραγωνίδια ἀναγράφονται σέ μονάδες πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ) οἱ διαφορές τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων δύο διαδοχικῶν τόξων.

Ἐπίσης ὅμοια στήλη ὑπάρχει καί ἀνάμεσα στίς στῆλες Εφ καί Σφ πού περιέχουν τίς κοινές διαφορές τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καί συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶν τόξων.

Ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\sigma\varphi\alpha} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{\sigma\varphi\beta}$$

ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = -\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ \alpha \quad \text{καί} \quad \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \beta = -\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ \beta$$

καί ἑπομένως:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \beta = \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ \beta - \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ \alpha$$

Στά δεξιά τῶν συνημιτόνων δέν ὑπάρχει στήλη διαφορῶν γιά τα τοξα πού εἶναι μικρότερα ἀπό 18° ἤ μεγαλύτερα ἀπό 71°, γιατί οἱ διαφορές αὐτές εἶναι μικρότερες ἀπό τό 5 καί βρίσκονται εὔκολα ἀπό μνήμης.

Στίς σελίδες τῶν τόξων ἀπό 6° ἕως 83° καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιο, ὑπάρχουν μερικά πινακίδια. Καθένα ἀπό τά πινακίδια αὐτά ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα μιά ἀπό τίς διαφορές πού εἴπαμε πιό πάνω καί διαιρεῖται σέ δύο στῆλες. Ἡ πρώτη στήλη περιέχει τούς μονοψήφιους ἀριθμούς (1 - 9), οἱ ὁποῖοι φανερώνουν δεύτερα λεπτά, καί ἡ ἄλλη τίς ἀντίστοιχες μεταβολές τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν. Τό πινακίδιο π.χ. μέ ἐπικεφαλίδα 23 δείχνει ὅτι, ἄν ἡ διαφορά τῶν λογαρίθμων τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δύο διαδοχικῶν τόξων εἶναι 23 μ.ε'.δ.τ., σέ αὔξηση τοῦ τόξου κατά

$$1'' \ \text{ἤ} \ 2'' \ \text{ἤ} \ 3'' \ \text{ἤ} \ \ldots \ \text{ἤ} \ 9''$$

ἀντιστοιχεῖ αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἴδιου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ κατά:

$$0{,}38 \ \text{ἤ} \ 0{,}77 \ \text{ἤ} \ 1{,}15 \ \text{ἤ} \ \ldots \ \text{ἤ} \ 3{,}45 \ \text{μ.ε'.δ.τ.}$$

31	
1″	0,52
2	1,03
3	1,55
4	2,07
5	2,58
6	3,10
7	3,62
8	4,13
9	4,65
30	
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5
24	
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6
23	
1	0,38
2	0,77
3	1,15
4	1,53
5	1,92
6	2,30
7	2,68
8	3,07
9	3,45

′	Ημ	Δ	Εφ	Δ	Σφ	Συν	Δ	′
0	$\bar{1}$,67161	24	$\bar{1}$,72567	31	0,27433	$\bar{1}$,94593	6	60
1	7185	23	2598	30	7402	4587	7	59
2	7208	24	2628	31	7372	4580	7	58
3	7232	24	2659	30	7341	4573	6	57
4	7256		2689		7311	4567		56
—	——	24	——	31	——	——	7	—
5	7280	23	2720	30	7280	4560	7	55
6	7303	24	2750	30	7250	4553	7	54
7	7327	23	2780	31	7220	4546	6	53
8	7350	24	2811	30	7189	4540	7	52
9	7374		2841		7159	4533		51
—	——	24	——	31	——	——	7	—
10	7398	23	2872	30	7128	4526	7	50
11	7421	24	2902	30	7098	4519	6	49
12	7445	23	2932	31	7068	4513	7	48
13	7468	24	2963	30	7037	4506	7	47
14	7492		2993		7007	4499		46
—	——	23	——	30	——	——	7	—
15	7515	24	3023	31	6977	4492	7	45
16	7539	23	3054	30	6946	4485	6	44
17	7562	24	3084	30	6916	4479	7	43
18	7586	23	3114	30	6886	4472	7	42
19	7609		3144		6856	4465		41
—	——	24	——	31	——	——	7	—
20	7633	23	3175	30	6825	4458	7	40
21	7656	24	3205	30	6795	4451	6	39
22	7680	23	3235	30	6765	4445	7	38
23	7703	23	3265	30	6735	4438	7	37
24	7726		3295		6705	4431		36
—	——	24	——	31	——	——	7	—
25	7750	23	3326	30	6674	4424	7	35
26	7773	23	3356	30	6644	4417	7	34
27	7796	24	3386	30	6614	4410	6	33
28	7820	23	3416	30	6584	4404	7	32
29	7843		3446		6554	4397		31
—	——	23	——	30	——	——	7	—
30	$\bar{1}$,67866		$\bar{1}$,73476		0,26524	$\bar{1}$,94390		30
′	Συν		Σφ		Εφ	Ημ		′

′	Ημ	Δ	Εφ	Δ	Σφ	Συν	Δ	′
30	$\overline{1}$,67866	24	$\overline{1}$,73476	31	0,26524	$\overline{1}$,94390	7	30
31	7890	23	3507	30	6493	4383	7	29
32	7913	23	3537	30	6463	4376	7	28
33	7936	23	3567	30	6433	4369	7	27
34	7959		3597		6403	4362		26
—	——	23	——	30	——	——	7	—
35	7982	24	3627	30	6373	4355	6	25
36	8006	23	3657	30	6343	4349	7	24
37	8029	23	3687	30	6313	4342	7	23
38	8052	23	3717	30	6283	4335	7	22
39	8075		3747		6253	4328		21
—	——	23	——	30	——	——	7	—
40	8098	23	3777	30	6223	4321	7	20
41	8121	23	3807	30	6193	4314	7	19
42	8144	23	3837	30	6163	4307	7	18
43	8167	23	3867	30	6133	4300	7	17
44	8190		3897		6103	4293		16
—	——	23	——	30	——	——	7	—
45	8213	24	3927	30	6073	4286	7	15
46	8237	23	3957	30	6043	4279	6	14
47	8260	23	3987	30	6013	4273	7	13
48	8283	22	4017	30	5983	4266	7	12
49	8305		4047		5953	4259		11
—	——	23	——	30	——	——	7	—
50	8328	23	4077	30	5923	4252	7	10
51	8351	23	4107	30	5893	4245	7	9
52	8374	23	4137	29	5863	4238	7	8
53	8397	23	4166	30	5834	4231	7	7
54	8420		4196		5804	4224		6
—	——	23	——	30	——	——	7	—
55	8443	23	4226	30	5774	4217	7	5
56	8466	23	4256	30	5744	4210	7	4
57	8489	23	4286	30	5714	4203	7	3
58	8512	22	4316	29	5684	4196	7	2
59	8534		4345		5655	4189		1
—	——	23	——	30	——	——	7	—
60	$\overline{1}$,68557		$\overline{1}$,74375		0,25625	$\overline{1}$,94182		0
′	Συν		Σφ		Εφ	Ημ		′

	30
1″	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5
	29
1	0,48
2	0,97
3	1,45
4	1,93
5	2,42
6	2,90
7	3,38
8	3,87
9	4,35
	23
1	0,38
2	0,77
3	1,15
4	1,53
5	1,92
6	2,30
7	2,68
8	3,07
9	3,45
	22
1	0,39
2	0,73
3	1,10
4	1,47
6	2,20
7	2,57
8	2,93
9	3,30

● **43. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων.** Τούς λογαριθμικούς τριγωνομετρικούς πίνακες τούς χρησιμοποιοῦμε γιά τήν ἐπίλυση τῶν ἀκόλουθων προβλημάτων.

● **44.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι. Νά βρεθεῖ ὁ λογάριθμος ὁρισμένου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ ἑνός δεδομένου τόξου.*

Λύση. α) Ἄν τό δεδομένο τόξο δέν ἔχει δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος βρίσκεται στή σελίδα τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καί στή διασταύρωση τῆς ὁριζόντιας γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καί τῆς στήλης πού ἔχει τήν ὀνομασία τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔτσι βρίσκουμε:

$\text{λογ ημ}\,(19^\circ\,38') = 1{,}52634$ | $\text{λογ συν}\,(65^\circ\,51') = \bar{1}{,}61186$

$\text{λογ εφ}\,(26^\circ\,17') = \bar{1}{,}69361$ | $\text{λογ σφ}\,(56^\circ\,23') = \bar{1}{,}82270$ κλπ.

β) Ἄν τό τόξο περιέχει καί δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς (γιατι οἱ πίνακες δέν περιέχουν δεύτερα λεπτά):

1ο. Ὁ λογ ημ (29° 15′ 18″) δέν ὑπάρχει στούς πίνακες. Γιά νά τόν βροῦμε παρατηροῦμε ὅτι:

$$29^\circ\,15' < 29^\circ\,15'\,18'' < 29^\circ\,16'$$

καί ἄρα: $$\text{ημ}\,(29^\circ\,15') < \text{ημ}(29^\circ\,15'\,18'') < \text{ημ}\,(29^\circ\,16')$$

καί $$\text{λογ ημ}\,(29^\circ\,15') < \text{λογ}\,(29^\circ\,15'\,18'') < \text{λογ}\,(29^\circ\,16'),$$

ἤ $$\bar{1}{,}68897 < \text{λογ}\,(29^\circ\,15'\,18'') < \bar{1}{,}68920.$$

Δηλαδή ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\bar{1}{,}68897$ καί $\bar{1}{,}68920$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατά 23 μ.ε′.δ.τ.

Ἀπό τόν πίνακα βλέπουμε πώς σέ αὔξηση τοῦ τόξου κατά 1′ ἀντιστοιχεῖ ἡ ἴδια αὔξηση τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου του, ἀρκεῖ τό τόξο νά μή διαφέρει πολύ ἀπό τό (29° 15′). Μποροῦμε, λοιπόν, νά θεωρήσουμε τήν αὔξηση περίπου ἀνάλογη μέ τήν αὔξηση τῶν τόξων καί νά ὑπολογίσουμε πόσο πρέπει νά αὐξηθεῖ ὁ λογ ημ (29° 15) = $\bar{1}{,}68897$, γιά νά προκύψει ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

Ὁ ὑπολογισμός γίνεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν αὐξηθεῖ τό τόξο κατά 1′= 60″, θά ἔχουμε αὔξηση τοῦ λογ. κατά 23 μ.ε′.δ.τ.

» » » » 18″, » » » » » x ;

Ἄρα $x = 23 \cdot \dfrac{18}{60} = \dfrac{414}{60} = 6{,}9$ ἤ 7 μ.ε′.δ.τ. μέ ὑπεροχή.

Ἑπομένως:

$$\text{λογ ημ}\,(29^\circ\,15'\,18'') = \bar{1}{,}68897 + 0{,}00007 = \bar{1}{,}68904.$$

Οἱ παραπάνω πραξεις γράφονται καί ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rcl|l}
\text{λογ ημ}\,(29^\circ\, 16') & = & \bar{1},68920 & 60'' \quad 23 \text{ μ.ε΄.δ.τ.} \\
\text{λογ ημ}\,(29^\circ\, 15') & = & \bar{1},68897 & 18'' \quad x\ ; \\
\hline
\Delta & = & 23 & x = 23 \cdot \frac{18}{60} = 6,9 \text{ ή } 7 \text{ μ.ε΄.δ.τ}
\end{array}$$

Ἄρα: $\quad$ $\text{λογ ημ}\,(29^\circ\, 15'\, 18'') = \bar{1},68897 + 0,00007 = \bar{1},68904.$

2ο. Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε γιά νά βροῦμε καί τό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης δεδομένου τόξου. Ἔτσι, γιά τήν εὕρεση τοῦ λογ εφ $(60^\circ\, 45'\, 23'')$ γράφουμε:

$$\begin{array}{rcl|l}
\text{λογ εφ}\,(60^\circ\, 46') & = & 0,25209 & 60'' \quad 30 \text{ μ.ε΄.δ.τ.} \\
\text{λογ εφ}\,(60^\circ\, 45') & = & 0,25179 & 23'' \quad x\ ; \\
\hline
\Delta & = & 30 & x = 30 \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{2} = 11,5 \text{ ή } 12 \text{ μ.ε΄.δ.τ,}
\end{array}$$

Ἄρα: $\quad$ $\text{λογ εφ}\,(60^\circ\, 45'\, 23'') = 0,25179 + 0,00012 = 0,25191.$

3ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό λογ συν $(60^\circ\, 48'\, 28'')$.

Γνωρίζουμε ὅτι, ὅταν αὐξάνεται τό τόξο ἀπό 0 ἕως 90°, τό συνημίτονο καί ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττώνονται. Ἔτσι σέ αὔξηση τοῦ τόξου ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωση τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Στήν περίπτωσή μας:

Ἐπειδή $\quad 60^\circ\, 48' < 60^\circ\, 48'\, 28'' < 60^\circ\, 49'$

θά εἶναι $\quad \text{συν}(60^\circ\, 48') > \text{συν}\,(60^\circ\, 48'\, 28'') > \text{συν}\,(60^\circ\, 49')$

ἄρα καί $\quad \text{λογ συν}\,(60^\circ\, 48') > \text{λογ συν}\,(60^\circ\, 48'\, 28'') > \text{λογ συν}\,(60^\circ\, 49')$

ἤ $\quad \bar{1},68829 > \text{λογ συν}\,(60^\circ\, 48'\, 28'') > \bar{1},68807.$

Παρατηροῦμε, λοιπόν, ὅτι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται ἀνάμεσα στούς ἀριθμούς $\bar{1},68829$ καί $\bar{1},68807$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατά 22 μ.ε΄.δ.τ.

Γράφουμε τήν πράξη ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rcl|l}
\text{λογ συν}\,(60^\circ\, 48') & = & \bar{1},68829 & 60'' \quad 22 \text{ μ.ε΄.δ.τ.} \\
\text{λογ συν}\,(60^\circ\, 49') & = & \bar{1},68807 & 28'' \quad x\ ; \\
\hline
\Delta & = & 22 & x = 22 \cdot \frac{28}{60} = 10,26 \text{ ή } 10 \text{ μ.ε΄.δ.τ}
\end{array}$$

Ἄρα: $\quad$ $\text{λογ συν}\,(60^\circ\, 48'\, 28'') = \bar{1},68829 - 0,00010 = \bar{1},68819.$

4ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό λογ σφ $(36^\circ\, 54'\, 38'')$

Γράφουμε τήν πράξη ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rcl|l}
\text{λογ σφ}\,(36^\circ\, 54') & = & 0,12446 & 60'' \quad 26 \text{ μ.ε΄.δ.τ.} \\
\text{λογ σφ}\,(36^\circ\, 55') & = & 0,12420 & 38'' \quad x\ ; \\
\hline
\Delta & = & 26 & x = 26 \cdot \frac{38}{60} = 16,46 \text{ ή } 16 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}
\end{array}$$

Ἄρα: $\quad$ $\text{λογ σφ}\,(36^\circ\, 54'\, 38'') = 0,12446 - 0,00016 = 0,12430.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79. Νά βρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀκόλουθων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

1. ημ $(15° 27')$,
2. συν $(36° 12')$,
3. συν $(58° 10')$,
4. ημ $(65° 25')$,
5. εφ $(20° 16')$,
6. εφ $(53° 6')$,
7. σφ $(14° 36')$,
8. σφ $(70° 14')$,
9. ημ $(25° 10' 18'')$,
10. ημ $(55° 26' 39'')$,
11. συν $(33° 17' 25'')$,
12. συν $(66° 14' 52'')$,
13. εφ $(18° 56' 10'')$,
14. εφ $(48° 10' 50'')$,
15. σφ $(29° 33' 48'')$,
16. σφ $(24° 19' 10'')$,
17. σφ $(70° 34' 15'')$,
18. ημ $(123° 56' 10'')$.

80. Ἐπίσης τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν:

1. ημ $\frac{3\pi}{7}$,
2. συν $\frac{\pi}{17}$,
3. εφ $\frac{3\pi}{11}$,
4. σφ $\frac{5\pi}{17}$.

● **45.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο, ἄν δοθεῖ ὁ λογάριθμος ἑνός τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ του.*

1ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:

$$\text{λογ ημ } x = \bar{1},73940.$$

Λύση. Βρίσκουμε πρῶτα στόν πίνακα ὅτι:

$$\text{λογ ημ } 45° = \bar{1},84949.$$

Καί ἐπειδή: $\bar{1},73940 < \bar{1},84949$, θά ἔχουμε:

$$\text{ημ } x < \text{ημ} 45° \text{ καί ἄρα } x < 45°.$$

Πρέπει, λοιπόν, νά ἀναζητήσουμε τόν ἀριθμό $\bar{1},73940$ στίς στῆλες, τῶν ἡμιτόνων. Τόν βρίσκουμε στή σελίδα τῶν 33° καί στήν ὁριζόντια γραμμή τῶν 17'. Εἶναι, λοιπόν:

$$\text{λογ ημ } x = \bar{1},73940° = \text{λογ ημ } (33° 17')$$

καί ἄρα:

$$x = 33' 17'.$$

Ἄν ὅμως εἶναι: λογ ημ $x = \bar{1},68129$, παρατηροῦμε ὅτι:

$$\bar{1},68121 < \bar{1},68129 < \bar{1},68144$$

καί ἐπομένως:

$$28° 41' < x < 28° 42'$$

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι:

$$\Delta = \bar{1},68144 - \bar{1},68121 = 23 \text{ μ.ε'.δ.τ.},$$

$$\delta = \bar{1},68129 - \bar{1},68121 = 8 \text{ μ.ε'.δ.τ.}$$

καί καταρτίζουμε τή διάταξη ὡς ἑξῆς:

Αὔξηση λογαρίθμου κατά 23 φέρνει αὔξηση τοῦ τόξου κατά 60''
» » » 8 » » » » y;

Ἑπομένως:

$$y = 60'' \cdot \frac{8}{23} = \frac{480''}{23} = 20'', 88.$$

Θά εἶναι λοιπόν: $x = 28° 41' 20'',88$.

Συντομότερα ἡ πράξη γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{lccc||cc} & \bar{1},68129 & \bar{1},68144 & 28° 42' & 23 & 60'' \\ & \bar{1},68121 & \bar{1},68121 & 28° 41' & 8 & y; \\ \hline \text{Διαφορές:} & 8 & 23 & 1' = 60' & \multicolumn{2}{c}{y = 60''\cdot\dfrac{8}{23} = 20'',88.} \end{array}$$

Ἄρα: $x = 28° 41' 20'',88$.

2ο. Ἄν $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, x = \bar{1},85360$, νά ὑπολογισθεῖ ὁ x.

Διάταξη τῶν πράξεων:

$$\begin{array}{lccc||cc} & \bar{1},85360 & \bar{1},85380 & 35° 32' & 26 & 60'' \\ & \bar{1},85354 & \bar{1},85354 & 35° 41' & 6 & y; \\ \hline \text{Διαφορές:} & 6 & 26 & 1' = 60'' & \multicolumn{2}{c}{y = 60''\cdot\dfrac{6}{26} = 13'',84.} \end{array}$$

Ἄρα: $x = 35° 31' 13'',84$.

3ο. Ἄν $\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, x = \bar{1},85842$, νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x.

Στούς πίνακες παρατηροῦμε ὅτι:

$$\bar{1},85851 > \bar{1},85842 > \bar{1},85839$$

καί ἄρα $$43° 47' < x < 43° 48'.$$

Ἑπομένως, γιά νά βροῦμε τό τόξο x κάνουμε τήν ἀκόλουθη διάταξη:

$$\begin{array}{lccc||cc} & \bar{1},85842 & \bar{1},85851 & 43° 47' & 12 & 60'' \\ & \bar{1},85839 & \bar{1},85839 & 43° 48' & 3 & y; \\ \hline \text{Διαφορές:} & 3 & 12 & 1' = 60'' & \multicolumn{2}{c}{y = 60''\cdot\dfrac{3}{12} = 15''.} \end{array}$$

Ἐπειδή ὅμως, ὅταν αὐξάνεται τό τόξο ἐλαττώνεται τό συνημίτονο, θά βροῦμε τό τόξο x ὡς ἑξῆς:

$$x = (43° 48') - 15'' = (43° 47' 60'') - 15'' = 43° 47' 45''.$$

Κατά τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε καί ὅταν δοθεῖ ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης ἑνός τόξου x.

★**Σημείωση.** Οἱ λογάριθμοι στούς πενταψήφιους πίνακες ἔχουν γραφεῖ μέ προσέγγιση 0,00005. Ἑπομένως τά τόξα πού ὑπολογίζονται μέ αὐτούς τούς πίνακες δέν εἶναι μαθηματικά ἀκριβή. Χρειάζεται, λοιπόν, νά ξέρουμε σέ ποιά περίπτωση βρίσκουμε τήν ἀκριβέστερη τιμή τοῦ τόξου.

Γιά τοῦτο σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς: Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό μέτρο ἑνός ἀπό τά τόξα πού εἶναι γραμμένα στούς πίνακες εἶναι α. Τότε τό μέτρο τοῦ ἀμέσως μεγαλύτερού του εἶναι $\alpha + 1' = \alpha + 60''$.

Ἀπό τίς σχέσεις:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+60'') = \frac{\eta\mu(\alpha+60'')}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+60'')} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

προκύπτουν οἱ σχέσεις:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha+60'') = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha+60'')$$

καί

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \alpha - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha.$$

Γι' αὐτό καί:

$$\begin{aligned}\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = {} & [\lambda o\gamma\ \eta\mu\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \alpha] + \\ & + [\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha+60'')]\end{aligned} \qquad (1)$$

Ἄν παραστήσουμε:

$$\left.\begin{aligned}\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha &= \delta \\ \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \eta\mu\ \alpha &= \delta_1 \\ \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha - \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (\alpha+60'') &= \delta_2\end{aligned}\right\}$$

ἡ (1) γίνεται: $\delta = \delta_1 + \delta_2$

καί ἑπομένως $\delta > \delta_1$ (2) καί $\delta > \delta_2$ (3)

Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἀριθμοί δ, δ_1 καί δ_2, ἀφοῦ ἀναφέρονται σέ πενταψήφιους λογαρίθμους, παριστάνουν ἑκατοντάκις χιλιοστά (ἑ.χ.).

Ἔτσι, σύμφωνα μέ τά προηγούμενα, ἄν πάρουμε ἀντί γιά τό λογ εφ $(\alpha + 60'')$ τό λογ εφ α, κάνουμε λάθος ἴσο μέ:

$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (\alpha+60'') - \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ \alpha = \delta \quad \text{ἑ.χ.}$$

Ἀλλά τότε ἀντί γιά τό τόξο $\alpha + 60''$, θά πάρουμε τό α. Ἔτσι τό ἀντίστοιχο λάθος στό τόξο θά εἶναι ἴσο μέ $60''$.

Δηλαδή, λάθος δ ἑ.χ. πού συμβαίνει στό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης, προκαλεῖ στό τόξο λάθος $60''$.

Ἀπό αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι λάθος k ἑ.χ. στό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης, θά προκαλέσει στό τόξο λάθος $60'' \cdot \dfrac{k}{\delta}$. Ὅμοια σκεπτόμενοι βρίσκουμε ὅτι λάθος k ἑ.χ. στό λογάριθμο τοῦ ἡμιτόνου ἤ τοῦ συνημιτόνου ἑνός τόξου, προκαλεῖ στό τόξο ἀντίστοιχο λάθος

$$60'' \cdot \frac{k}{\delta_1} \quad \text{ἤ} \quad 60'' \cdot \frac{k}{\delta_2}$$

Ἔχοντας ὅμως ὑπόψη μας καί τίς (2), (3) συνάγουμε ὅτι:

$$60'' \cdot \frac{k}{\delta_1} > 60'' \cdot \frac{k}{\delta} \quad \text{καί} \quad 60'' \cdot \frac{k}{\delta_2} > 60'' \cdot \frac{k}{\delta}$$

Ἀπό αὐτό προκύπτει ὅτι κάποιο τόξο προσδιορίζεται ἀκριβέστερα ἀπό τό λογάριθμο τῆς ἐφαπτομένης παρά ἀπό τό λογάριθμο τοῦ ἡμιτόνου του ἤ τοῦ συνημιτόνου του.

81. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ μεταξύ 0^0 καί 90° τιμές τοῦ τόξου x, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τίς ἐξισώσεις:

1. $\lambda o\gamma\ \eta\mu\ x = \overline{1},84439$,
2. $\lambda o\gamma \sigma\upsilon\nu\ x = \overline{1},65190$,
3. $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ x = \overline{1},26035$,
4. $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ x = \overline{1},59183$,
5. $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ x = 0,21251$,
6. $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ x = \overline{1},18954$,
7. $\lambda o\gamma\ \tau\varepsilon\mu\ x = 0,02830$.

● **46.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x ἀπό ἐκεῖνα πού ἔχουν δεδομένο τριγωνομετρικό ἀριθμό.*

Λύση. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, πού ἱκανοποιεῖ μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις:

$$\eta\mu\ x = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu\ x = \beta, \quad \varepsilon\varphi\ x = \gamma$$

ὅπου $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Θά εἶναι:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ x = \lambda o\gamma\ \alpha, \quad \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ x = \lambda o\gamma\ \beta, \quad \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ x = \lambda o\gamma\ \gamma.$$

Ἀπό τήν Ἄλγεβρα γνωρίζουμε ὅτι, ἄν δύο θετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, τότε καί οἱ λογάριθμοί τους θά εἶναι ἴσοι.

Ἄν ὅμως ἕνας ἀπό τούς α, β, γ εἶναι ἀρνητικός, τότε αὐτός δέν ἔχει λογάριθμο. Στήν παρίπτωση αὐτή ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α') Ἄν $\alpha < 0$, τότε ἀπό τήν $\eta\mu\ x = \alpha$, παίρνουμε:

$$\eta\mu(x - 180^\circ) = -\alpha > 0.$$

Ἀπό αὐτή τώρα ὁρίζεται τό τόξο $x - 180^\circ$, ἄρα καί τό x.

Παράδειγμα 1ο. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι: $\eta\mu x = -\dfrac{3}{5}$.

Λύση. Τό ἐλάχιστο θετικό τόξο πού λήγει στό γ' τεταρτημόριο ὑπερβαίνει τό θετικό ἡμικύκλιο κατά κάποιο τόξο y, δηλαδή θά εἶναι:

$$x = 180^\circ + y. \text{ Ἄρα: } \eta\mu\ y = -\eta\mu\ x = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ y = \lambda o\gamma\ \frac{3}{5} = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5 = 0,47712 - 0,69897 = \overline{1},77815,$$

ἀπ' ὅπου κατά τά γνωστά:

$$y = 36^\circ\ 52'\ 10'',58 \text{ καί ἄρα } x = 180^\circ + y = 216^\circ\ 52'\ 10'',58.$$

β') Ἄν $\gamma < 0$, τότε ἀπό τήν

$$\varepsilon\varphi x = \gamma < 0 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x = -\gamma > 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(180^\circ - x) = -\gamma > 0.$$

Παράδειγμα 2ο. Ἄς δεχθοῦμε ὅτι $\varepsilon\varphi\ x = -3$.

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$\varepsilon\varphi x = -3 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi x = 3 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi(180^\circ - x) = 3 \Rightarrow$$
$$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ (180^\circ - x) = \lambda o\gamma 3 = 0{,}47712$$

καί κατά τά γνωστά:

$$180^\circ - x = 71^\circ\ 31'\ 54'' \Leftrightarrow x = 108^\circ\ 26'\ 6''.$$

γ) Ἄν $\beta < 0$, τότε ἀπό τή:

$$\sigma\upsilon\nu\ x = \beta < 0 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu\ x = -\beta > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = -\beta > 0.$$

Παράδειγμα 3ο. Ἄς δεχθοῦμε ὅτι: *συν x = —0,6.*

Λύση. Ἔχουμε διαδοχικά:

$$-\sigma\upsilon\nu\ x = 0{,}6 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow$$

$$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) = \lambda o\gamma\ 3 - \lambda o\gamma\ 5 = 0{,}47712 - 0{,}69897 = \bar{1}{,}77815,$$

καί κατά τά γνωστά βρίσκουμε ἀπό ἐδῶ ὅτι:

$$180^\circ - x = 53^\circ\ 7'\ 49'',42 \Leftrightarrow x = 126^\circ\ 52'\ 10'',58.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

82. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ μεταξύ 0° καί 90° ρίζες τῶν παρακάτω ἐξισώσεων:

1. $\eta\mu\ x = -\frac{3}{5}$
2. $\sigma\upsilon\nu\ x = -0{,}7$,
3. $\varepsilon\varphi\ x = -3$,
4. $\sigma\varphi\ x = \sigma\upsilon\nu\ 42^\circ$,
5. $\tau\varepsilon\mu\ x = -1{,}8$,
6. $\sigma\tau\varepsilon\mu\ x = -\frac{4}{3}$
7. $\sigma\upsilon\nu\ \frac{x}{2} = \varepsilon\varphi\ 150^\circ$,
8. $\eta\mu\ 2x = 0{,}58$,
9. $\varepsilon\varphi\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = -\frac{17}{9}$

✶ ● 47. Χρήση τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων γιά τόξα μικρότερα ἀπό 4° καί μεγαλύτερα ἀπό 85°.

Παράδειγμα 1ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ ημ (12' 40'').*

Λύση. Στούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ 12' = \bar{3}{,}54291.$$

Ἐξετάζοντες τίς διαφορές στήν οἰκεία στήλη, βλέπουμε ὅτι σέ κάθε αὔξηση ἤ ἐλάττωση τοῦ τόξου κατά 1' δέν ἔχουμε πάντοτε καί τήν ἴδια αὔξηση ἤ τήν ἴδια μείωση τοῦ ἀντίστοιχου λογαρίθμου· οἱ διαφορές εἶναι δυσανάλογες.

Δέν ὑπάρχει λοιπόν οὔτε κατά προσέγγιση ἀναλογία ἀνάμεσα στήν αὔξηση τῶν τόξων καί στήν αὔξηση τοῦ λογαρίθμου. Αὐτό συμβαίνει γιά τούς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς συνεφαπτομένης τῶν τόξων ἐκείνων πού εἶναι μικρότερα ἀπό 4° καί γιά τούς λογαρίθμους τοῦ συνημιτόνου, τῆς ἐφαπτομένης καί τῆς συνεφαπτομένης τῶν τόξων ἐκείνων πού εἶναι μεγαλύτερα ἀπό 85°. Γι' αὐτό τό λόγο δέν μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε στίς περιπτώσεις αὐτές τήν ἀναλογική μέθοδο, τήν ὁποία ἐφαρμόσαμε στά προηγούμενα προβλήματα.

Στίς περιπτώσεις αὐτές ἡ λύση τῶν σχετικῶν προβλημάτων γίνεται μέ τήν ἀκόλουθη εἰδική μέθοδο.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$\eta\mu\, x = x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \quad \text{καί} \quad \varepsilon\varphi\, x = x \cdot \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{x}$$

καί ἑπομένως:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu x = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma \frac{\eta\mu x}{x} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi x = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \qquad (2)$$

Ἄν x παριστάνει δεύτερα λεπτά, ὁ λογ x βρίσκεται ἀπό τούς πίνακες τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν. Ἐξάλλου ὁ λογάριθμος τῶν λόγων $\frac{\eta\mu\, x}{x}$ καί $\frac{\varepsilon\varphi\, x}{x}$ ἀναγράφεται στό πάνω μέρος τῆς α' σελίδας καί στό κάτω καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιο καθεμιᾶς ἀπό τίς ἄλλες σελίδες τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν καί ἔξω ἀπό τό πλαίσιό τους. Γιά διάκριση, ὁ λογ $\frac{\eta\mu\, x}{x}$ σημειώνεται μέ τό S, ἐνῶ ὁ λογ $\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ σημειώνεται μέ τό T. Δηλαδή:

$$\lambda o\gamma \frac{\eta\mu x}{x} = S \quad \text{καί} \quad \lambda o\gamma \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = T.$$

Ἄν λοιπόν ἐφαρμόσουμε τήν ἰσότητα (1) στό τόξο $12'\,40'' = 760''$ βρίσκουμε ὅτι:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu(12'\,40'') = \lambda o\gamma\, 760 + S = 2{,}88081 + 6{,}68557 = 3{,}56638.$$

Παράδειγμα 2ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ εφ ($1°\ 5'\ 32''$).*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι $1°\ 5'\ 32'' = 3932''$, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (2) θά ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(1°\ 5'\ 32'') = \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(3932'') =$$

$$= \lambda o\gamma\, 3932 + T = 3{,}5941 + \overline{6}{,}68563 = \overline{2}{,}28024.$$

Παράδειγμα 3ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ σφ ($15'\ 20''$).*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$\sigma\varphi(15'\ 20'') = \frac{1}{\varepsilon\varphi(15'\ 20'')} \Leftrightarrow \lambda o\gamma\, \sigma\varphi(15'\ 20'') = -\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(15'\ 20'').$$

Ἀλλά:

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (15'\ 20'') = \lambda o\gamma\, 920 + T = 2{,}96379 + \overline{6}{,}68558 = \overline{3}{,}64937.$$

Ἄρα $\lambda o\gamma\, \sigma\varphi(15'\ 20'') = -(\overline{3}{,}64937) = -\overline{3}{,}64937 = 2{,}35063.$

Παράδειγμα 4ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ συν ($88°\ 40'\ 25''$).*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$90^\circ - (88^\circ\, 40'\, 25'') = 1^\circ\, 19'\, 35'' = 4775'',$$

θά ἔχουμε:

$$\text{λογ συν}\, (88^\circ\, 40'\, 25'') = \text{λογ ημ}\, (4775'') = \overline{2},36451.$$

Παράδειγμα 5ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ εφ (89° 3′ 40″).*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι: $90^\circ - (89^\circ\, 3'\, 40'') = 56'\, 20''$, θά εἶναι καί:

$$\text{εφ}(89^\circ\, 3'\, 40'') = \text{σφ}(56'\, 20'') = \frac{1}{\text{εφ}(56'\, 20'')}$$

καί ἄρα: $\text{λογ εφ}(89^\circ\, 3'\, 40'') = -\text{λογ εφ}(56'\, 20'') = -(\overline{2},21453) = 1,78547.$

Παράδειγμα 6ο. *Νά βρεθεῖ ὁ λογ σφ (88° 50′ 25″).*

Λύση. Ἐπειδή εἶναι:

$$90^\circ - (88^\circ\, 50'\, 25'') = 1^\circ\, 9'\, 35''$$

θά εἶναι καί:

$$\text{λογ σφ}(88^\circ\, 50'\, 25'') = \text{λογ εφ}(1^\circ\, 9'\, 35'') = \overline{2},30629.$$

Παράδειγμα 7ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τοξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$$\textbf{λογ ημ x} = \overline{3},72960.$$

Λύση. Ἄν ἀναζητήσουμε τό δεδομένο λογάριθμο στήν ἀντίστοιχη στήλη τῶν λογαριθμικῶν πινάκων, παρατηροῦμε ὅτι αὐτός περιέχεται μεταξύ τῶν $\overline{3},71900$ καί $\overline{3},74248$. Εἶναι δηλαδή:

$$\overline{3},71900 < \overline{3},72960 < \overline{3},74248$$

ἤ

$$\text{λογ ημ}(18') < \text{λογ ημ x} < \text{λογ ημ}(19')$$

ἤ

$$18' < x < 19' \Leftrightarrow 1080'' < x < 1140'',$$

καί ἑπομένως $S = \overline{6},68557$. Γι' αὐτό ἀπό τήν (1) θά ἔχουμε:

$$\overline{3},72960 = \text{λογ}\, x + \overline{6},68557 \Leftrightarrow$$
$$\text{λογ}\, x = 3,04403 = \text{λογ}(1106'', 69) \Leftrightarrow$$
$$x = 1106'',69 = 18'\, 28'',69.$$

Παράδειγμα 8ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$$\textbf{λογ εφ x} = \overline{2},45777.$$

Λύση. Ἀπό τούς πίνακες ἔχουμε:

$$\overline{2},45507 < \overline{2},45777 < \overline{2},45958 \Leftrightarrow$$
$$1^\circ\, 38' < x < 1^\circ\, 39' \Leftrightarrow$$
$$5880'' < x < 5940''$$

καί ἑπομένως: $T = \overline{6},68569$ καί ἄρα ἀπό τή (2):

$$\overline{2},45777 = \text{λογ}\, x + \overline{6},68569 \Leftrightarrow$$
$$\text{λογ}\, x = 3,77208 = \text{λογ}\, (5916'',7) \Leftrightarrow x = 1^\circ\, 38'\, 36'',7.$$

Παράδειγμα 9ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*

$$\textbf{λογ συν x} = \overline{2},16833.$$

Λύση. Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε:

$$\bar{2},17128 > \bar{2},16833 > \bar{2},16268 \Leftrightarrow$$
$$89^\circ\, 9' < x < 89^\circ\, 10' \Leftrightarrow$$
$$90^\circ - (89^\circ\, 9') > 90^\circ - x > 90^\circ - (89^\circ\, 10') \Leftrightarrow$$
$$51' > 90^\circ - x > 50' \Leftrightarrow$$
$$3060'' > 90^\circ - x > 3000''$$

Ἄρα, γιά τό τόξο $90^\circ - x$ εἶναι: $S = \bar{6},68556$ καί
$$\text{λογ ημ}(90^\circ - x) = \text{λογ συν } x = \bar{2},16833.$$

Ἔτσι ἡ (1) γίνεται:

$$\bar{2},16833 = \text{λογ ημ}(90^\circ - x) + \bar{6},68556 \Leftrightarrow$$
$$\text{λογ ημ}(90^\circ - x) = 3,48277 = \text{λογ ημ}(3039'',29) \Leftrightarrow$$
$$90^\circ - x = 3039'',29 = 50'\, 39'',29 \Leftrightarrow$$
$$x = 89^\circ\, 9'\, 20'',7.$$

Παράδειγμα 10ο. *Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:*
$$\textbf{λογ σφ } x = \bar{3},92888.$$

Λύση. Ἀπό τούς πίνακες παρατηροῦμε ὅτι:

$$\bar{3},94086 > \bar{3},92888 > \bar{3},92619 \Leftrightarrow$$
$$89^\circ\, 30' < x < 89^\circ\, 31' \Leftrightarrow$$
$$30' > 90^\circ - x > 29' \Leftrightarrow$$
$$1800'' < 90^\circ - x < 1740'' \text{ καί ἄρα } T = \bar{6},68558.$$

Ἐξάλλου: $\quad \text{λογ εφ }(90^\circ - x) = \text{λογ σφ } x = \bar{3},92888,$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$\bar{3},92888 = \text{λογ}(90^\circ - x)'' + \bar{6},68558 \Leftrightarrow$$
$$(90^\circ - x)'' = 1751'' = 29'\, 11' \Leftrightarrow$$
$$x = 89^\circ\, 30'\, 49''.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:

1. $\text{λογ ημ } x = \bar{3},72835$,
2. $\text{λογ εφ } x = \bar{2},77213$,
3. $\text{λογ σφ } x = 1,53421$,
4. $\text{λογ συν } x = \bar{2},69231$,
5. $\text{λογ εφ } x = 2,48739$,
6. $\text{λογ σφ } x = \bar{2},53298$.

84. Νά βρεθεῖ τό ἐλάχιστο θετικό τόξο x, γιά τό ὁποῖο εἶναι:

$$\text{σφ } x = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\,.\,\text{συν}A}{\text{ημ } 5A\,.\,\text{εφ } B},$$

ὅπου $\alpha = -0,08562$, $A = 131^\circ\, 49'\, 25''$, $B = 36^\circ\, 43'\, 26''$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

● 48. Χρησιμότητα μετατροπῆς παραστάσεων σέ ἄλλες λογαριθμίσιμες.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τήν τιμή τῆς παραστάσεως

$$y = \frac{1 + συν\,x}{1 - συν\,x}, \quad ἄν \quad x = 24°\,36'.$$

θά ἔχουμε:

$$y = \frac{1 + συν(24°\,36')}{1 - συν\,(24°\,36')} \tag{1}$$

Παρατηροῦμε ὅτι γιά νά βροῦμε τόν y πρέπει νά βροῦμε τό συν(24° 36') καί νά ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στό δεύτερο μέλος τῆς (1).

Ἀπό τούς πίνακες βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

$$λογ\,συν\,(24°\,36') = \overline{1},95868. \quad Ἄρα \quad συν\,(24°\,36') = 0,90922$$

καί ἐπομένως:

$$y = \frac{1 + 0,90922}{1 - 0,90922} = \frac{1,90922}{0,09078} = 21,031.$$

Ἐπειδή ὅμως $\frac{1 + συνx}{1 - συνx} = σφ^2\frac{x}{2}$, θά ἔχουμε $y = σφ^2\frac{x}{2}$ καί ἄρα:

$$y = σφ^2(12°\,18') \Leftrightarrow λογ\,y = 2λογ\,σφ(12°\,18') = 2 \cdot 0,66147 = 1,32394$$

ἀπό ὅπου ἔχουμε: $y = 21,031.$

Ἀπό τά παραπάνω διαπιστώνουμε ὅτι μέ τό δεύτερο τρόπο τό ζητούμενο βρέθηκε εὐκολότερα καί μέ λιγότερες πράξεις. Αὐτό ὀφείλεται στό ὅτι ἡ δεδομένη παράσταση ἀντικαταστάθηκε μέ τήν ἰσοδύναμή της σφ²(12° 18'), τῆς ὁποίας τό λογάριθμο βρίσκουμε ἄν ἐφαρμόσουμε τή γνωστή ἰδιότητα τοῦ λογαρίθμου μιᾶς δυνάμεως. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ τελευταία αὐτή παράσταση ὀνομάζεται λογαριθμίσιμη.

Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό καί ἀπό ἄλλα ὅμοια βλέπουμε ὅτι εἶναι πολύ χρήσιμο νά ξέρουμε πῶς νά μετατρέπουμε τριγωνομετρικές παραστάσεις σέ ἄλλες ἰσοδύναμες καί λογαριθμίσιμες.

Στά προηγούμενα κεφάλαια εἴδαμε ὅτι μερικές παραστάσεις μετατρέπονται σέ ἄλλες ἰσοδύναμες μέ μορφή γινομένου ἤ πηλίκου. Ἔτσι εἴδαμε ὅτι οἱ παραστάσεις:

$$\left.\begin{array}{l} ημα\,συνβ \pm ημβ\,συνα \\ συνα\,συνβ \pm ημα\,ημβ \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} ημA \pm ημB \\ συνA \pm συνB \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} εφA \pm εφB \\ σφA \pm σφB \end{array}\right\} \text{ κλπ.}$$

μετατρέπονται σέ μονώνυμα.

Ἐπαναλαμβάνουμε μερικές γνωστές παραστάσεις πού εἶναι ἀπαραίτητο νά τίς ξέρουμε.

$1+\sigma\upsilon\nu\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2}$	(1)	$1+\eta\mu\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	(2)
$1-\sigma\upsilon\nu\alpha \equiv 2\eta\mu^2\dfrac{A}{2}$	(3)	$1-\eta\mu\alpha \equiv 2\eta\mu^2\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$	(4)
$1\pm\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ\pm\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$	(5)	$1\pm\sigma\varphi\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\eta\mu(\alpha\pm45^\circ)}{\eta\mu\alpha}$	(6)
$1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha \equiv \eta\mu^2\alpha$	(7)	$1-\eta\mu^2\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha$	(8)
$\dfrac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} = \varepsilon\varphi(45^\circ+\alpha)$	(9)	$\dfrac{1-\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi\alpha} = \varepsilon\varphi(45^\circ-\alpha)$	(10)
$1+\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$	(11)	$1+\sigma\varphi^2\alpha = \dfrac{1}{\eta\mu^2\alpha}$	(12)
$\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha} = \sigma\varphi^2\dfrac{\alpha}{2}$	(13)	$\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi^2\dfrac{\alpha}{2}$	(14)

● **49. Χρήση βοηθητικῆς γωνίας.** Πολλές φορές διευκολυνόμαστε στή μετατροπή μιᾶς παραστάσεως σέ ἄλλη λογιστή μέ τούς λογαρίθμους, ἄν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλη βοηθητική γωνία. Ἔτσι:

α) Ἄν $k \in \mathbb{R}^+$, τότε ὑπάρχει γωνία ὀξεία φ, τέτοια ὥστε:

$$\varepsilon\varphi\varphi = k \ \text{ἤ}\ \sigma\varphi^2\varphi = k \ \text{ἤ}\ \varepsilon\varphi^2\varphi = k \ \text{ἤ}\ \sigma\varphi\varphi = k.$$

Ἄν $0 < k < 1$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \eta\mu\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\varphi\varphi \ \text{ἤ}\ k = \eta\mu^2\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\upsilon\nu^2\varphi.$$

β) Ἄν $k \in \mathbb{R}$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \varepsilon\varphi\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\varphi\varphi.$$

Ἄν $|k| < 1$, τότε μποροῦμε νά βάλουμε:

$$k = \eta\mu\varphi \ \text{ἤ}\ k = \sigma\upsilon\nu\varphi.$$

γ) Διαλέγουμε πάντοτε ὡς τιμή τῆς γωνίας φ τήν ἐλάχιστη θετική τῆς ἐξισώσεως πού δόθηκε ὡς πρός φ. Ἄν $k > 0$, τότε ἡ γωνία φ εἶναι ὀξεία.

Οἱ συνηθέστερες προτάσεις στίς ὁποῖες γίνεται χρήση τῆς μεθόδου (βοηθητικῆς γωνίας) αὐτῆς ἔχουν τίς ἀκόλουθες μορφές.

● **50.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:*

$$y_1 = \alpha + \beta \quad \textit{καί} \quad y_2 = \alpha - \beta$$

Λύση. Ἐδῶ ὑποτίθεται ὅτι $\alpha > 0$, $\beta > 0$ καί οἱ λογάριθμοί τους εἶναι γνωστοί.

1ο. Ἂς δεχθοῦμε ὅτι λογ α > λογ β. Ἄρα α > β. Ἔτσι γράφουμε:

$$\alpha \pm \beta = \alpha\left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

α΄) Ἐπειδὴ $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, μποροῦμε νά βάλουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi^2\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi,$$

ὁπότε θά ἔχουμε ἀντιστοίχως:

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) = 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2},$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \varepsilon\varphi^2\varphi) = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi},$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha(1 + \varepsilon\varphi\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^\circ + \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

β΄) Ἂν βάλουμε:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu^2\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi$$

καί ὑποθέσουμε ὅτι $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ καί $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, τότε θά ἔχουμε, ἀντιστοίχως:

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = 2\alpha\,\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 - \eta\mu^2\varphi) = \alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi,$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 + \varepsilon\varphi\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\eta\mu(45^\circ - \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

2ο. Ἂν λογ α < λογ β, τότε α < β. Ἔτσι γράφουμε:

$$\alpha + \beta = \alpha\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad \text{καί} \quad \alpha - \beta = \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

καί ἐργαζόμαστε ὅπως παραπάνω.

Παρατήρηση. Γιά νά κάνουμε λογαρίθμισιμη τήν παράσταση:

$$x = \alpha - \beta + \gamma - \delta,$$

βάζουμε $\alpha - \beta = A$, $B = A + \gamma$ καί $\Gamma = B - \delta$, καί ἐργαζόμαστε ὅπως καί προηγουμένως.

● **51.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νά γίνει λογαριθμίσιμη ἡ παράσταση:*

$$\mathbf{x} = \frac{\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}}. \tag{1}$$

Λύση. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι $\alpha > \beta$. Ἂν βάλουμε ὅπου $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi$, τότε θά ἔχουμε :

$$x = \frac{\alpha - \alpha\,\varepsilon\varphi\,\varphi}{\alpha + \alpha\,\varepsilon\varphi\,\varphi} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\varphi}{1 + \varepsilon\varphi\varphi} = \varepsilon\varphi(45^\circ - \varphi),$$

καί ἄν $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, μποροῦμε νά βάλουμε ὅπου $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\varphi$, ὁπότε:

$$x = \frac{\alpha - \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi}{\alpha + \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\varphi}{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi} = \varepsilon\varphi^2\,\frac{\varphi}{2}.$$

Ἂν $\alpha < \beta$, τότε ὑπολογίζουμε τήν παράσταση $y = \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}$

★ ● **52.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:*

$$\mathbf{x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \textit{καὶ} \quad \mathbf{y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}\,.$$

Λύση. Ἡ δεύτερη παράσταση, προφανῶς, ἔχει ἔννοια, ὅταν $\alpha > \beta$.

α′) Ἂν βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi$, ἡ πρώτη παράσταση γίνεται:

$$x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \alpha\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

β′) Ἂν βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\varphi$, τότε ἡ δεύτερη παράσταση γίνεται:

$$y = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha\sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \alpha\sqrt{1 - \eta\mu^2\varphi} = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi.$$

● **53.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV. Νά γίνει λογαριθμίσιμη ἡ παράσταση:*

$$\mathbf{y = \alpha\,\sigma\upsilon\nu x \pm \beta\,\eta\mu x.} \qquad (1)$$

Λύση. Ἐδῶ ὑποτίθεται ὅτι $\alpha\beta \neq 0$ καί $x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}$, $\mathbf{k \in \mathbb{Z}}$.

Ἂν $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$, ἡ παράσταση (1) γράφεται:

$$y = \alpha\left(\sigma\upsilon\nu x \pm \frac{\beta}{\alpha}\,\eta\mu x\right) = \alpha\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\,\eta\mu x\right) = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu(x \mp \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Ὥστε :

$$\mathbf{y = \frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,(x \mp \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}},$$

ἡ ὁποία εἶναι λογαριθμίσιμη.

Παρατήρηση. Θά μπορούσαμε νά βάλουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\varphi\varphi$ ἤ ἄν βγεῖ κοινός παράγοντας ὁ β, νά βάλουμε :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \varepsilon\varphi\varphi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \sigma\varphi\varphi.$$

Παράδειγμα 1ο *Ἡ παράσταση* $\mathbf{y = 3συνx + 4ημx}$ *νά γραφεῖ μέ τή μορφή:*

$$\mathbf{y = Aσυν(x - φ).}$$

Λύση. Ἡ δεδομένη παράσταση γράφεται:

$$y = 5\left(\frac{3}{5}συνx + \frac{4}{5}ημx\right) \qquad (1)$$

Ἄν ὅμως $0 < φ < \frac{π}{2}$, τότε $συνφ = \frac{3}{5}$, $ημφ = \frac{4}{5}$. Ἄρα $εφφ = \frac{4}{3}$

καί ἑπομένως:

$$y = 5(συνφ\,συνx + ημφ\,ημx) = 5συν(x - φ) \qquad (2)$$

Ἡ παράσταση (2) εἶναι τῆς ζητούμενης μορφῆς μέ

$$A = 5 \quad καί \quad φ = 53°\,7'\,48'',4,$$

γιατί ἀπό τήν $εφφ = \frac{4}{3}$ παίρνουμε:

$$λογ\,εφφ = λογ\,4 - λογ\,3 = 0{,}60206 - 0{,}47712 = 0{,}12494 = λογ\,εφ(53°\,7'\,48'',4).$$

★ **Παράδειγμα 2ο.** *Νά γίνει λογαριθμίσιμη ἡ παράσταση:*

$$\mathbf{y = \sqrt{β^2 + γ^2 - 2βγ\,συνA}} \qquad (1)$$

Λύση. Θεωροῦμε τούς ἀριθμούς β καί γ θετικούς μέ $β > γ$ καί ὅτι:

$$0° < A < 180°.$$

Τό ὑπόρριζο γράφεται διαδοχικά:

$$β^2 + γ^2 - 2βγ\,συνA = (β^2 + γ^2)\left(συν^2\frac{A}{2} + ημ^2\frac{A}{2}\right) - 2βγ\left(συν^2\frac{A}{2} - ημ^2\frac{A}{2}\right) =$$

$$= (β^2+γ^2)ημ^2\frac{A}{2} + (β-γ)^2συν^2\frac{A}{2} = (β^2 + γ^2)ημ^2\frac{A}{2}\left[1 + \left(\frac{β-γ}{β+γ}\right)^2σφ^2\frac{A}{2}\right] \Rightarrow$$

$$y = (β + γ)ημ\frac{A}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{β-γ}{β+γ}\right)^2σφ^2\frac{A}{2}} \qquad (2)$$

Ἄν γράψουμε $\frac{β-γ}{β+γ}σφ\frac{A}{2} = εφφ$, ἡ (2) γίνεται:

$$y = (β + γ)\,ημ\frac{A}{2}\sqrt{1 + εφ^2φ} = \frac{β+γ}{συνφ}ημ\frac{A}{2}$$

Ὥστε:

$$\mathbf{y = \frac{β+γ}{συνφ}ημ\frac{A}{2}}$$

★● **54.** *ΠΡΟΒΛΗΜΑ V. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως:*

$$\mathbf{αx^2 + βx + γ = 0.}$$

Λύση. Ἡ κανονική μορφή μιᾶς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως εἶναι ἡ:

$$αx^2 + βx + γ = 0 \qquad (1)$$

Ἄν $\beta = 0$ ἤ $\gamma = 0$, οἱ μή μηδενικές ρίζες τῆς ἐξισώσεως —ἄν αὐτή ἐπιδέχεται τέτοιες— εἶναι λογαριθμίσιμες.

Ἄν ἐπίσης $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, πάλι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως εἶναι λογαριθμίσιμες.

Παραλείποντας τίς περιπτώσεις αὐτές, μένει νά ἐξετάσουμε τήν περίπτωση πού ἡ ἐξίσωση εἶναι πλήρης καί ἐπιδέχεται ρίζες πραγματικές καί διαφορετικές ἀπό τό μηδέν.

Ὑποτίθεται πάντα $\alpha > 0$. Ἄρα ἡ (1) μπορεῖ νά ἔχει τίς ἀκόλουθες μορφές:

$$\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0 \quad (2) \qquad\qquad \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0 \quad (4)$$

$$\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0 \quad (3) \qquad\qquad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (5)$$

Προφανῶς, οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων (4) καί (5) εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετες μέ τίς ρίζες τῶν ἐξισώσεων (2) καί (3).

Ἀρκεῖ, λοιπόν, νά θεωρήσουμε μόνο τίς ἐξισώσεις (2) καί (3).

α΄) Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$. Στήν ἐξίσωση αὐτή εἶναι $\alpha\gamma < 0$ καί ἐπομένως οἱ ρίζες της εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἄν βάλουμε $\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2\varphi$, ἡ παράσταση $\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} = \beta\sqrt{1 + \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Ἄρα: $$x_1 = \frac{1}{2\alpha}\left(\beta - \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right) = \frac{\beta}{2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi}(\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (6)$$

καί $$x_2 = \frac{1}{2\alpha}\left(\beta + \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right) = \frac{\beta}{2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi}(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \quad (7)$$

Ἀπό τήν $\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2\varphi \Leftrightarrow \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\varepsilon\varphi\varphi}$, ὁπότε οἱ (6) καί (7) γίνονται:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2} \quad \text{καί} \quad x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\sigma\varphi\frac{\varphi}{2}$$

δηλαδή παραστάσεις λογαριθμίσιμες.

β΄) Ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$. Ἄν εἶναι:

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 > 4\alpha\gamma,$$

τότε καί ἡ ἐξίσωση ἐπιδέχεται ρίζες θετικές, ἐπειδή τό γινόμενό τους εἶναι θετικό, ὅπως καί τό ἄθροισμά τους εἶναι θετικό. Αὐτές εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καί} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἐπειδὴ $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, θὰ εἶναι $0 < \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} < 1$ καὶ μποροῦμε νὰ βάλουμε:

$$\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \eta\mu^2\varphi \Leftrightarrow \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$$

Ἄρα ἡ παράσταση $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \beta\sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta\sqrt{1 - \eta\mu^2\varphi} = \beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi$$

καὶ ἑπομένως:

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha}(\beta - \beta\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \qquad (8)$$

καὶ
$$x_2 = \frac{1}{2\alpha}(\beta + \beta\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \qquad (9)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$, οἱ (8) καὶ (9) γίνονται:

$$\mathbf{x_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2}} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\sigma\varphi\,\frac{\varphi}{2}}$$

δηλαδὴ παραστάσεις λογαριθμίσιμες.

Ἐφαρμογή. *Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ῥίζες τῆς ἐξισώσεως:*

$$\mathbf{4x^2 - 25{,}7x + 35{,}549 = 0.}$$

Λύση. Ἡ ἐξίσωση αὐτὴ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$.

Ἂν γράψουμε $\eta\mu^2\varphi = \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}$, θὰ ἔχουμε διαδοχικά:

$$\lambda o\gamma\,\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma 4 + \lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\,\gamma) + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\beta =$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}60206 + 0{,}60206 + 1{,}55083) + \bar{2}{,}59007 = \bar{1}{,}96755,$$

ὁπότε $\varphi = 68^\circ\,7'\,36''$ καὶ $\frac{\varphi}{2} = 34^\circ\,3'\,48''$

Οἱ ῥίζες τῆς ἐξισώσεως προκύπτουν ἀπὸ τὶς σχέσεις (8), (9), δηλαδή:

$$x_1 = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda o\gamma\,x_1 = \lambda o\gamma\,\beta + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\alpha + 2\lambda o\gamma\,\eta\mu\,(34^\circ\,3'\,48'') =$$
$$= 1{,}40993 + \bar{1}{,}39794 + \bar{1}{,}49654 = 0{,}30441 \Rightarrow$$

$$\mathbf{x_1 = 2{,}0156,}$$

καὶ
$$x_2 = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda o\gamma\, x_2 = \lambda o\gamma\,\beta + \sigma \upsilon \lambda o\gamma\,\alpha + 2\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\,(34^\circ\, 3'\, 48'') =$$
$$= 1{,}40993 + \overline{1}{,}39794 + \overline{1}{,}83650 = 0{,}64437 \quad \Rightarrow$$
$$\mathbf{x_2 = 4{,}4093.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρώτη ὁμάδα

85. Μέ τή χρήση κατάλληλης βοηθητικῆς γωνίας, νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ ἀκόλουθες παραστάσεις:

1. $x = \sqrt{2} - 1$,
2. $x = 2 + \sqrt{2}$,
3. $x = 2 + \sqrt{3}$,
4. $x = 1 - \sqrt{3}$,
5. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$,
6. $x = 3 - \sqrt{3}$,
7. $x = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$,
8. $x = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$
9. $x = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$.

86. Νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:

1. $x = 1 + 2\eta\mu\alpha$,
2. $x = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\alpha$,
3. $x = 1 + \sqrt{2}\,\eta\mu\alpha$,
4. $x = 2\sigma\upsilon\nu\alpha - \sqrt{3}$,
5. $x = 1 - \sqrt{3}\,\sigma\varphi\alpha$,
6. $x = \eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha$,
7. $x = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sqrt{3}\,\eta\mu\alpha$,
8. $x = \dfrac{\sqrt{3} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\alpha}$.

★ Δεύτερη ὁμάδα

87. Ἄν εἶναι γνωστοί οἱ λογα καί λογβ μέ λογα > λογβ, νά γίνουν λογαριθμίσιμες οἱ παραστάσεις:

1. $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$,
2. $x = \sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha - \beta}$,
3. $x = \sqrt{\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}} + \sqrt{\dfrac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}}$,
4. $x = \dfrac{4(\alpha - \beta)\sqrt{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)^2}$,
5. $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}$,

ἄν γιά ὅλες εἶναι: $\alpha = 1375$, $\beta = 8602$, $\gamma = 1215$.

88. Ἄν $\alpha = 108{,}7$, $\beta = 73{,}45$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

89. Ἄν $\alpha = 71{,}29$, $\beta = 32{,}57$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

90. Ἄν $\alpha = 4258$, $\beta = 3672$ καί $\beta\, \varepsilon\varphi\, 3x = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, νά ὑπολογισθεῖ ὁ x ἔτσι, ὥστε $0^\circ < x < 180^\circ$.

91. Ἄν $\alpha = 4625{,}5$, $\beta = 3944{,}6$, $\theta = 51^\circ\, 57'\, 44''$, $\theta_1 = 63^\circ\, 18'\, 27''$ καί

$$\varepsilon\varphi\, 2x = \frac{\alpha\, \eta\mu\theta_1 - \beta\, \eta\mu\theta}{\alpha\, \eta\mu\theta_1 + \beta\, \eta\mu\theta},$$

νά ὑπολογισθεῖ ὁ x, γιά νά εἶναι: $0^\circ < x < 180^\circ$.

92. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$8x^2 - 36{,}75x - 25{,}628 = 0.$$

93. Ἐπίσης οἱ ἐξισώσεις:

1. $x^2 - 148{,}7x + 1385 = 0$,
2. $x^2 - 245{,}7x - 1247{,}6 = 0$,
3. $x^2 + 16{,}75x - 64{,}53 = 0$,
4. $x^2 + 75{,}23x - 433{,}7 = 0$.

93. Ἐπίλυσις οἱ ἐξισώσεις:

1. $x^2 - 146{,}7x + 1303 = 0$,
2. $x^2 - 245{,}7x - 1247{,}6 = 0$,
3. $x^2 + 16{,}75x - 64{,}53 = 0$,
4. $x^2 + 75{,}23x - 433{,}7 = 0$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ
ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

024000019840
ΕΚΔΟΣΗ ΙΑ΄ — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 110.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ: 3417/14-5-80
ΕΚΤΥΠ. ΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: "KABANAS HELLAS" ΑΘΗΝΑ

ΟΕ
ΔΒ