ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θ. ΒΑΒΑΛΕΤΣΚΟΥ — Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

Λ. Αδριανόπουλοι

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεων Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Θ. ΒΑΒΑΛΕΤΣΚΟΥ — Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

Τό βιβλίο γράφτηκε ἀπό τούς :
Θ. Βαβαλέτσκο (Κεφάλαια IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV)
καί Γ. Μποῦσγο (Κεφάλαια I, II, III καί XVI).

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

1. ΠΡΟΤΑΣΗ

Οἱ ἄνθρωποι συνεννοοῦνται μεταξύ τους μέ προφορικό ἤ μέ γραπτό λόγο. Στή Γραμματική καί στό Συντακτικό «ἕνας σύντομος λόγος μέ ἐντελῶς ἁπλό περιεχόμενο» λέγεται **πρόταση.**

Στή Μαθηματική Λογική καί γενικά στά Μαθηματικά θεωροῦμε τίς λεγόμενες **λογικές προτάσεις**, δηλαδή ἐκφράσεις μέ νόημα σύμφωνα μέ τήν ἔννοια πού τούς δίνει τό συντακτικό, ἀλλά πού τό περιεχόμενό τους νά μπορεῖ νά χαρακτηρισθεῖ ἤ **μόνο ὡς ἀληθές** ἤ **μόνο ὡς ψευδές.** Ἔτσι, π.χ., ἡ πρόταση:

«ὁ ἀριθμός 4 εἶναι ἄρτιος» (1)

εἶναι μιά λογική πρόταση, ἐπειδή ἐκεῖνο, πού ἐκφράζει, εἶναι ἀληθές.

Ἡ πρόταση:

«ὁ ἀριθμός 5 εἶναι ἀρνητικός» (2)

εἶναι μιά λογική πρόταση, ἐπειδή ἐκεῖνο, πού ἐκφράζει, εἶναι ψευδές.

Οἱ παραπάνω προτάσεις (1) καί (2) θεωροῦνται ὡς **ἁπλές** προτάσεις, ἐπειδή δέν μποροῦν νά χωρισθοῦν σέ δύο ἤ περισσότερες ἄλλες προτάσεις. Ἀντίθετα ἡ πρόταση:

«οἱ ἀριθμοί 2 καί 11 εἶναι πρῶτοι» (3)

ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ὡς ἀληθής (εἶναι δηλ. λογική πρόταση), χωρίζεται σέ δύο ἄλλες: «ὁ ἀριθμός 2 εἶναι πρῶτος» καί «ὁ ἀριθμός 11 εἶναι πρῶτος». Γι' αὐτό ἡ πρόταση (3) λέγεται **σύνθετη** πρόταση.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω στή Μαθηματική Λογική δεχόμαστε ὅτι:

i) Ὑπάρχει ἕνα σύνολο ἁπλῶν λογικῶν προτάσεων. Τό σύνολο αὐτό τό συμβολίζουμε μέ L.

ii) Κάθε πρόταση ἀπό τό L, ἀνάλογα μέ τό περιεχόμενό της, ἐπιδέχεται τόν ἕναν καί μόνο τόν ἕναν ἀπό τούς χαρακτηρισμούς: **ἀληθής** ἤ **ψευδής.**

Παραδείγματα προτάσεων τοῦ συνόλου L:

1. «Τό ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι ἴσο μέ μιά εὐθεία γωνία» (ἀληθής).

2. «$4+2=7$» (ψευδής).

Παραδείγματα προτάσεων, πού δέν ἀνήκουν στὸ L:

1. «Τά Μαθηματικά εἶναι πράσινα» (παραλογισμός).

2. «Ἕνα τρίγωνο ἀποτελεῖται ἀπό τρεῖς γραμμές» (ἀσαφής).

3. «$x+10=0$» (δέν μποροῦμε ν' ἀποφανθοῦμε ἄν εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής).

Ὅταν τό περιεχόμενο μιᾶς ἁπλῆς προτάσεως εἶναι ἀληθές, τότε λέμε ὅτι ἡ πρόταση ἔχει **λογική τιμή Α** ἤ **τιμή ἀλήθειας Α.**

Ὅταν τό περιεχόμενο μιᾶς ἁπλῆς προτάσεως εἶναι ψευδές, τότε λέμε ὅτι ἡ πρόταση ἔχει **λογική τιμή Ψ** ἤ **τιμή ἀλήθειας Ψ.**

Παραδείγματα :

1. Ἡ τιμή ἀλήθειας τῆς προτάσεως «ὁ 5 εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός» εἶναι Ψ.

2. Ἡ τιμή ἀλήθειας τῆς προτάσεως «ὁ 3 εἶναι θετικός ἀριθμός» εἶναι Α.

Τίς προτάσεις τοῦ συνόλου L παρασταίνουμε συνήθως μέ τά γράμματα p, q, r κτλ. Γράφουμε π.χ.

p: «ὁ ἀριθμός 135 λήγει σέ 5».

q: «ὁ ἀριθμός 125 εἶναι διαιρετός διά 5».

2. ΣΤΑΘΕΡΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Οἱ ἄνθρωποι συνεννοοῦνται μέ τούς συνανθρώπους τους μέ τή βοήθεια διάφορων σημάτων, π.χ. γραμμάτων, λέξεων, φράσεων, προτάσεων, σημείων στίξεως, διάφορων συμβατικῶν σημάτων (π.χ. ΙΚΑ, ΟΤΕ), εἰκόνων, διαγραμμάτων κτλ. Κάθε τέτοιο σῆμα (γραπτό ἤ προφορικό) τό ὀνομάζουμε **σύμβολο.** Ἕνα γράμμα, π.χ. τό x, εἶναι σύμβολο. Σύμβολα εἶναι ἐπίσης, π.χ. ἡ λέξη «πέντε», τό «+», ὁ ἀριθμός 15, τό ἐρωτηματικό κτλ.

Μπορεῖ ἕνα σύμβολο ν' ἀποτελεῖται ἀπό περισσότερα σήματα, καθένα ἀπό τά ὁποῖα εἶναι ἐπίσης σύμβολο. Π.χ. x^2+5, $\alpha^2-\alpha\beta$. Συνήθως σέ τέτοιες περιπτώσεις τό σύμβολο τό ὀνομάζουμε **ἔκφραση.**

Μέσα στίς προτάσεις καί γενικότερα στίς ἐκφράσεις, στά Μαθηματικά ἰδίως, βρίσκουμε ὅρους ἤ σύμβολα, ὅπως π.χ. «ἄθροισμα», «τρίγωνο», «–8», «+12», «0» καί ἄλλα παρόμοια, πού ἔχουν μιά **καθορισμένη καί μόνιμη σημασία στό θέμα, τό ὁποῖο ἐξετάζουμε.** Τέτοιοι ὅροι καί τέτοια σύμβολα ὀνομάζονται **σταθερές.** Μπορεῖ ὅμως σέ μιά ἔκφραση νά ὑπάρχει σύμβολο, τό ὁποῖο δέν ἔχει μόνιμη καί καθορισμένη σημασία σ' αὐτή τήν ἔκφραση. Π.χ. στήν ἔκφραση «ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 5» τό σύμβολο x δέν ἔχει μόνιμη καί καθορισμένη σημασία. Δέν εἶναι δηλ. τό «x» ὄνομα ἑνός ὁρισμένου ἀριθμοῦ. Ἁπλῶς εἶναι ὑποχρεωμένο νά σημαίνει ἕναν ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό. Ἄν ὅμως στή θέση τοῦ x τοποθετήσουμε κάποιο φυσικό ἀριθμό, τότε θά προκύψει πρόταση (ἀληθής ἤ ψευδής). Τό ἴδιο συμβαίνει στήν ἔκφραση $2x=4$

καί στήν ἔκφραση $x > y$. Σύμβολα, ὅπως τά x καί y τῶν προηγούμενων παραδειγμάτων ὀνομάζονται **μεταβλητές**.

3. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ (Ἢ ΑΝΟΙΚΤΗ ΠΡΟΤΑΣΗ)

Α) Ἄς ἐξετάσουμε πάλι τήν ἔκφραση:

«ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 5».

Ἡ ἔκφραση αὐτή δέν εἶναι πρόταση, ἀφοῦ δέν μποροῦμε ν' ἀποφανθοῦμε ἄν εἶναι ἤ μόνο ἀληθής ἤ μόνο ψευδής.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι ἡ ἔκφραση αὐτή γίνεται πρόταση, ἄν στή θέση τῆς μεταβλητῆς x τοποθετήσουμε ἕναν ὁποιοδήποτε φυσικό ἀριθμό. Ἄν π.χ. ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό 2, θά προκύψει ἡ πρόταση «ὁ φυσικός ἀριθμός 2 εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 5», πού εἶναι ἀληθής. Ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τόν 7, θά προκύψει πάλι πρόταση: «ὁ φυσικός ἀριθμός 7 εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 5», ἡ ὁποία εἶναι ψευδής.

Ἄς ἐξετάσουμε ἀκόμα τήν ἔκφραση:

$$2x = 4$$

Ἡ ἔκφραση αὐτή γίνεται πρόταση, ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ ἕναν πραγματικό ἀριθμό, π.χ. τόν 3. Τότε γίνεται $2 \cdot 3 = 4$, γίνεται δηλ. πρόταση ψευδής. Ἡ ἴδια ἔκφραση γίνεται πρόταση ἀληθής, ἄν τή μεταβλητή x τήν ἀντικαταστήσουμε μέ τό 2.

Οἱ ἐκφράσεις «ὁ φυσικός ἀριθμός x εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 5», $2x = 4$ κτλ. ὀνομάζονται **προτασιακοί τύποι** ἤ **ἀνοικτές προτάσεις**.

Γενικά: **Προτασιακός τύπος (ἤ ἀνοικτή πρόταση) μιᾶς μεταβλητῆς λέγεται κάθε ἔκφραση, πού περιέχει μιά μόνο μεταβλητή καί μετατρέπεται σέ πρόταση, ὅταν ἡ μεταβλητή ἀντικατασταθεῖ ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε στοιχεῖο ἑνός καθορισμένου συνόλου.**

Τό στοιχεῖο, πού μπαίνει στή θέση τῆς μεταβλητῆς, γιά νά προκύψει πρόταση, λέγεται **τιμή** τῆς μεταβλητῆς. Τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς λέγεται **σύνολο ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου καί συμβολίζεται συνήθως μέ U. Π.χ. στόν προτασιακό τύπο $2x > 3$ μποροῦμε νά πάρουμε γιά σύνολο ἀναφορᾶς τό σύνολο R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε, ἄν ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς x εἶναι ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τόν $1\frac{1}{2}$, θά προκύψει πρόταση ἀληθής, ἐνῶ ἄν εἶναι ἴσος ἤ μικρότερος ἀπό τόν $1\frac{1}{2}$, θά προκύψει πρόταση ψευδής.

Τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, γιά τίς ὁποῖες ἕνας προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση ἀληθής, λέγεται **σύνολο ἀλήθειας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Στόν προτασιακό τύπο, π.χ., $2x = 4$, ἄν θεωρήσουμε ὡς σύνολο ἀναφορᾶς τό R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τό σύνολο ἀλήθειας του εἶναι τό $\{2\}$.

Σημ. Εἴπαμε ὅτι συνήθως ἡ μεταβλητή x εἶναι στοιχεῖο ἑνός καθορισμένου συνόλου, ἔστω U, πού τό ὀνομάσαμε σύνολο ἀναφορᾶς. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ προτασιακός τύπος λέγεται καί **συνθήκη στό U** καί λέμε ὅτι ἡ **μεταβλητή x διατρέχει τό U.**

Γιά συντομία τούς προτασιακούς τύπους μέ μιά μεταβλητή, π.χ., x τούς συμβολίζουμε μέ $p(x)$, $q(x)$, $s(x)$ κτλ. καί τά σύνολα ἀλήθειας τους μέ P, Q, S κτλ.

Ἄν, π.χ., παραστήσουμε μέ $p(x)$ τόν προτασιακό τύπο $1 < x < 5$ καί πάρουμε γιά σύνολο ἀναφορᾶς τό N, τότε ἡ πρόταση $p(2)$ εἶναι ἀληθής, ἐνῶ ἡ $p(8)$ εἶναι ψευδής. Τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ $p(x)$ εἶναι $P = \{2, 3, 4\}$.

Ἐπίσης στόν προτασιακό τύπο $q(x): 4x = 20$ ἔχουμε ὅτι: $q(5) = 4 \cdot 5 = 20$, δηλ. ἀληθής πρόταση, ἐνῶ $q(2) = 4 \cdot 2 = 8$, δηλ. ψευδής πρόταση. Σύνολο ἀλήθειας του εἶναι τό $Q = \{5\}$.

B) Ἄς θεωρήσουμε τώρα τήν ἔκφραση $x > y$.

Ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ 6 καί τό y μέ 4, προκύπτει ἡ πρόταση $6 > 4$, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Ἄν βάλουμε $x = 3$ καί $y = 6$ προκύπτει ἡ ψευδής πρόταση $3 > 5$.

Ἡ ἔκφραση $x > y$ λέγεται προτασιακός τύπος μέ δύο μεταβλητές. Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι ὑπάρχουν ζεύγη τιμῶν τῶν μεταβλητῶν ἀπό τό σύνολο R, γιά τίς ὁποῖες ὁ προτασιακός τύπος γίνεται ἀληθής πρόταση, καί ἄλλα ζεύγη τιμῶν, γιά τίς ὁποῖες γίνεται ψευδής πρόταση.

Ἄς θεωρήσουμε ἀκόμα τήν ἔκφραση:

«ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους y».

Ἄν ἀντί x βάλουμε «Ἀθῆναι» καί ἀντί y «Ἑλλάδα», προκύπτει πρόταση ἀληθής: «Ἡ πόλη Ἀθῆναι εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους Ἑλλάδα». Ἄν ἀντί x βάλουμε «Μιλάνο» καί ἀντί y «Ἑλλάδα», προκύπτει πρόταση ψευδής. Οἱ ἐκφράσεις $x > y$, «ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους y», λέγονται **προτασιακοί τύποι** μέ δύο μεταβλητές.

Γενικά: **Προτασιακός τύπος ἤ ἀνοικτή πρόταση μέ δυό μεταβλητές λέγεται μιά ἔκφραση, πού περιέχει δυό μεταβλητές καί πού μετατρέπεται σέ πρόταση, ὅταν οἱ μεταβλητές ἀντικατασταθοῦν ἀπό στοιχεῖα δύο καθορισμένων συνόλων. Τά σύνολα ἀναφορᾶς τῶν μεταβλητῶν μπορεῖ καί νά ταυτίζονται.**

Στό α' παράδειγμά μας, $x > y$, καί οἱ δυό μεταβλητές ἀναφέρονται στό σύνολο R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Στ β' παράδειγμα ἡ μεταβλητή x ἀναφέρεται στό σύνολο τῶν πόλεων καί ἡ μεταβλητή y στό σύνολο τῶν κρατῶν τοῦ κόσμου.

Γιά συντομία συμβολίζουμε τούς προτασιακούς τύπους μέ δύο μεταβλητές, μέ τά $p(x, y)$, $q(x, y)$, $s(x, y)$ κτλ.

Ἄν $p(x, y)$ συμβολίζει τόν προτασιακό τύπο τοῦ α' παραδείγματος, τότε $p(7, 5)$ εἶναι πρόταση ἀληθής, ἐνῶ ἡ $p(5, 7)$ εἶναι πρόταση ψευδής.

Ἐπίσης ἄν $q(x, y)$: «ἡ πόλη x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους y», τότε q(Λονδίνο, Ἀγγλία) εἶναι ἀληθής πρόταση, ἐνῶ q(Ρώμη, Βέλγιο) εἶναι ψευδής.

Παρατηροῦμε ὅτι τό σύνολο ἀλήθειας ἑνός προτασιακοῦ τύπου μέ δύο μεταβλητές εἶναι γενικά ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νά ἐξετάσετε πῶς μποροῦν νά ὀνομασθοῦν οἱ ἐκφράσεις: « — », «παραλληλόγραμμο», «ὀρθή γωνία», «17».

2) Νά ἐξετάσετε πῶς μποροῦν νά ὀνομασθοῦν οἱ ἐκφράσεις:

α) Ὁ 10 εἶναι ἀριθμός σύνθετος. β) $2 = 4$.

γ) $5 = 3 + 2$. δ) Ὁ Εὐκλείδης ἦταν φιλόλογος.

ε) Ὁ x εἶναι πρῶτος ἀριθμός. στ) $2x + 3 = 23$.

ζ) $x + y = 5$.

3) Γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχει μία μόνο τιμή τοῦ x γιά τήν ὁποία $2x = 6$. Σημαίνει αὐτό ὅτι τό x εἶναι σταθερό στήν ἔκφραση $2x = 6$;

4) Σταθερές, οἱ ὁποῖες εἶναι ὀνόματα τοῦ ἴδιου πράγματος, λέμε ὅτι ἔχουν τήν ἴδια τιμή. Π.χ. «0» καί «2 — 2». Νά γράψετε πέντε σταθερές, οἱ ὁποῖες νά ἔχουν τήν τιμή 6.

5) Ὑπάρχουν ἄραγε προτασιακοί τύποι, οἱ ὁποῖοι δέ γίνονται ἀληθεῖς προτάσεις γιά καμία τιμή τῆς μεταβλητῆς τους; Ἐξετάστε τόν $\frac{x}{x} = 2$. Δῶστε ἕνα δικό σας παράδειγμα (Πάρτε ὡς σύνολο ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς τό N).

6) Ὑπάρχουν προτασιακοί τύποι μιᾶς μεταβλητῆς, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀληθεῖς προτάσεις γιά ὅλες τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς τους. Προφανές παράδειγμα: $x + x = 2x$, ὅπου $x \in R$.

Νά βρεῖτε ἕνα δικό σας παράδειγμα. Πῶς ὀνομάζονται οἱ ἰσότητες, ὅπως ἡ $x + x = 2x$;

7) Δίνεται ὁ προτασιακός τύπος $p(x)$: $2x = 10$ καί σύνολο ἀναφορᾶς τό R. Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας P τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

8) Δίνεται ὁ προτασιακός τύπος $x + y = 5$ καί σύνολο ἀναφορᾶς τῶν μεταβλητῶν τό $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

9) Δίνεται ὁ προτασιακός τύπος $q(x)$: $y = x + 1$, ὅπου x, y εἶναι στοιχεῖα τοῦ R. Νά βρεῖτε δύο ζεύγη, γιά τά ὁποῖα $q(x, y)$ γίνεται πρόταση ἀληθής, καί δύο γιά τά ὁποῖα γίνεται ψευδής.

10) Δίνεται ὁ προτασιακός τύπος $p(x)$: $x^2 - 25 = 0$.

Νά ὁρίσετε σύνολο ἀναφορᾶς του καί τό ἀντίστοιχο σύνολο ἀλήθειας του.

11) Δίνεται ὁ προτασιακός τύπος «ἡ πόλη x βρίσκεται στό νομό y». Σύνολα ἀναφορᾶς: τῆς μεταβλητῆς x τό σύνολο τῶν πόλεων τῆς Ἑλλάδας, τῆς μεταβλητῆς y τό σύνολο τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδας. Νά βρεῖτε τρία ζεύγη τοῦ συνόλου ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

4. ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ

Α) Γνωρίζουμε ἀπό τήν Ἄλγεβρα ὅτι

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \quad \text{ὅπου } x \in R$$

Γνωρίζουμε ἐπίσης ὅτι ὁ προτασιακός αὐτός τύπος μιᾶς μεταβλητῆς γίνεται ἀληθής πρόταση γιά κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς x, τήν ὁποία (τιμή) παίρνουμε ἀπό τό σύνολο R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μέ ἄλλα λόγια τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου ταυτίζεται μέ τό σύνολο ἀναφορᾶς του.

Συμβολικά γράφουμε τότε:

$$\forall x (x \in R) : (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

καί διαβάζουμε:

«Γιά κάθε x, τό ὁποῖο ἀνήκει στό R, ἀληθεύει ὅτι

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Τό σύμβολο $\forall$ διαβάζεται «γιά κάθε...» ἤ «γιά ὅλα τά...» καί λέγεται **καθολικός ἤ γενικός ποσοδείκτης.**

Ἐπίσης $\forall x\ (x \in R) : x - x = 0$.

Μποροῦμε λοιπόν, ὅταν ἔχουμε προτασιακούς τύπους, πού τό σύνολο ἀλήθειας τους ταυτίζεται μέ τό σύνολο ἀναφορᾶς τους, νά προτάσσουμε τό γενικό ποσοδείκτη.

B) Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τόν προτασιακό τύπο:

$$p(x) : x + 3 = 8 \quad (x \in R)$$

Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι $p(x)$ δέ γίνεται ἀληθής πρόταση γιά κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς, ἀπό τό R, ἀφοῦ, π.χ., $p(1) = 4$, δηλ. πρόταση ψευδής. Ἀλλά τό σύνολο ἀλήθειας τοῦ προτασιακοῦ τύπου $x + 3 = 8$ δέν εἶναι τό κενό. Πραγματικά $p(5) = 8$, δηλ. ἀληθής πρόταση.

Γράφουμε συμβολικά στήν περίπτωση αὐτή:

$$\exists x\ (x \in R) : x + 3 = 8$$

καί διαβάζουμε:

«Ὑπάρχει τουλάχιστο ἕνα x, τό ὁποῖο ἀνήκει στό R, τέτοιο ὥστε νά ἀληθεύει $x + 3 = 8$».

Τό σύμβολο $\exists$ λέγεται **ὑπαρξιακός ποσοδείκτης** καί διαβάζεται «ὑπάρχει τουλάχιστο ἕνα...» ἤ «γιά μερικά...».

Μποροῦμε ἐπίσης νά γράψουμε:

α) $\exists\, x\ (x \in R) : x + 1 > 5$

β) $\exists\, x\ (x \in R) : x = -x$

γ) Ἄν T ὀνομάσουμε τό σύνολο τῶν τριγώνων, τότε:

$$\exists\, x\ (x \in T) : x \text{ ἰσόπλευρο}$$

Ὥστε: Ὅταν σ' ἕναν προτασιακό τύπο τό σύνολο ἀλήθειας του εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τότε μποροῦμε νά προτάσσουμε τόν ὑπαρξιακό ποσοδείκτη.

Γενικότερα πρέπει νά γνωρίζουμε τά ἑξῆς:

Συχνά, γιά νά διατυπώσουμε προτάσεις, οἱ ὁποῖες χρησιμοποιοῦνται στά Μαθηματικά, κάνουμε χρήση τῶν ποσοδεικτῶν. Οἱ ποσοδεῖκτες προτάσσονται στούς προτασιακούς τύπους καί τότε αὐτοί γίνονται προτάσεις ἤ μόνο ἀληθεῖς ἤ μόνο ψευδεῖς.

Ἔτσι, π.χ., ἡ πρόταση $\forall x\ (x \in U) : p(x)$ εἶναι μιά λογική πρόταση, ἐπειδή παίρνει τιμή ἀλήθειας Α ἄν, καί μόνο ἄν, τό σύνολο ἀλήθειας της P ταυτίζεται μέ τό σύνολο ἀναφορᾶς U (ὁπότε τό $P^c = \varnothing$) καί τιμή ἀλήθειας ψ, ἄν, καί μόνο ἄν, τό P εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ U (ὁπότε τό $P^c \neq \varnothing$).

Ἐπίσης ἡ πρόταση $\exists\, x\ (x \in U) : p(x)$ εἶναι μία λογική πρόταση, ἐπειδή ἔχει τιμή ἀλήθειας Α, ἄν, καί μόνο ἄν, τό σύνολο ἀλήθειας της P δέν εἶναι τό κενό, καί τιμή ἀλήθειας Ψ, ἄν, καί μόνο ἄν, τό σύνολο P εἶναι τό $\varnothing$ (ὁπότε $P^c = U$).

Παραδείγματα :

1. Ἄν $p(x): x+1>3$ καί $U=N$, τότε
 α) $\forall x\,(x \in N): x+1>3$ λαμβάνει τιμή ἀλήθειας Ψ, ἀφοῦ $P=\{3,4,5,6,\ldots\} \subset U$.
 β) $\exists x\,(x \in N): x+1>3$ λαμβάνει τιμή ἀλήθειας Α, ἀφοῦ $P=\{3,4,5,6,\ldots\} \neq \varnothing$.
2. Ἄν $p(x): x^2+1<0$ καί $U=R$, τότε:
 α) $\forall x\,(x \in R): x^2+1<0$ λαμβάνει τιμή ἀλήθειας ψ, ἀφοῦ $P=\varnothing$.
 β) $\exists x\,(x \in R): x^2+1<0$ λαμβάνει τιμή ἀλήθειας ψ, ἀφοῦ $P=\varnothing$.
3. Ἄν $p(x): x^2+2x+1=(x+1)^2$, τότε
 α) $\forall x\,(x \in R): x^2+2x+1=(x+1)^2$ ἔχει τιμή ἀληθείας Α, ἀφοῦ $P=R$.
 β) $\exists x\,(x \in R): x^2+2x+1=(x+1)^2$ ἔχει τιμή ἀλήθειας Α, ἀφοῦ $P \neq \varnothing$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12) Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι ἀληθές ἤ ψευδές ὅτι:

α) $\forall x(x \in N)$: $\frac{x}{x}=1$, β) $\forall x(x \in R)$: $(x+1)^2=x^2+1$,
γ) $\exists x(x \in R)$: $x=x+2$, δ) $\exists x(x \in R)$: $x^2 \neq 0$,
ε) $\exists x(x \in R)$: $(x+1)^2=x^2+2x+1$, στ) $\forall x(x \in R)$: $x=-x$.

13) Νά χρησιμοποιήσετε κατάλληλο ποσοδείκτη στούς παρακάτω προτασιακούς τύπους:

α) $x \neq x+1$, β) $x^2=x$,
γ) $|x|=x$, δ) $x-1<2$.

ὅπου σύνολο ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς εἶναι τό R.

5. ΣΥΝΘΕΤΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στήν καθημερινή συζήτηση καί στά Μαθηματικά δέ χρησιμοποιοῦμε μόνο ἁπλές προτάσεις. Συνήθως τίς ἁπλές προτάσεις τίς συνδέουμε μεταξύ τους μέ διάφορα συνδετικά, π.χ. «καί», «εἴτε», «ἤ», «ὄχι», «ἐάν. . ., τότε. . .» κτλ. καί σχηματίζουμε μ' αὐτόν τόν τρόπο νέες προτάσεις. Αὐτές τίς προτάσεις τίς ὀνομάζουμε **σύνθετες προτάσεις.**

6. Η ΣΥΖΕΥΞΗ ΔΥΟ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Ὁ ἁπλούστερος τρόπος συνδέσεως δύο προτάσεων εἶναι ἡ σύζευξη, στήν ὁποία ἐκφωνοῦμε ἤ γράφουμε τή μιά μετά τήν ἄλλη μέ ἕνα **καί** μεταξύ τους. Π.χ. ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις: «Ὁ Γιάννης εἶναι μαθητής», «ὁ Κώστας εἶναι κηπουρός» προκύπτει μέ τή σύζευξή τους ἡ σύνθετη πρόταση:

«ὁ Γιάννης εἶναι μαθητής καί ὁ Κώστας εἶναι κηπουρός».

Ἡ σύζευξη δύο προτάσεων ἀποτελεῖ πρόταση καί ἑπομένως θά εἶναι ἤ μόνο ἀληθής ἤ μόνο ψευδής.

Δεχόμαστε ὅτι ἡ σύζευξη εἶναι ἀληθής, μόνο ὅταν καί οἱ δύο ἁπλές προτάσεις εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς, ἀλλιῶς ἡ σύζευξη εἶναι ψευδής.

Ἡ σύζευξη, π.χ., «ὁ Σωκράτης ἦταν ἀστρονόμος καί $2+3=5$ εἶναι ψευδής, ἐνῶ ἡ σύζευξη «$2+3=5$ καί $2>0$» εἶναι ἀληθής.

Ἡ σύζευξη δύο προτάσεων p καί q συμβολίζεται: $p \wedge q$.

Τό σύμβολο $\wedge$ διαβάζεται «**καί**» καί λέγεται **σύμβολο τῆς συζεύξεως.**

Προσέξτε: τό σύμβολο $\wedge$ χρησιμοποιεῖται μόνο γιά νά συνδέει προτάσεις. Δέν ἐπιτρέπεται, π.χ., νά γράψουμε «$3 \wedge 2$» ἤ «ὁ Κώστας $\wedge$ ἡ Ἑλένη».

7. ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

Α) Στή Μαθηματική λογική ἡ μέθοδος πού χρησιμοποιεῖται περισσότερο γιά τήν εὕρεση τῶν (λογικῶν) τιμῶν τῶν σύνθετων προτάσεων εἶναι ἐκείνη, κατά τήν ὁποία ἀναγράφουμε σέ μορφή πίνακα ὅλες τίς δυνατότητες ἀληθοῦς ἤ ψευδοῦς τῶν ἁπλῶν προτάσεων καί τῆς σύνθετης προτάσεως πού προκύπτει ἀπ' αὐτές. Ἕνας τέτοιος πίνακας λέγεται συνήθως **πίνακας (λογικῶν) τιμῶν ἤ πίνακας ἀλήθειας.**

Ἀπό ἕναν πίνακα ἀλήθειας μποροῦμε νά διαπιστώσουμε μέ ἕνα βλέμμα ἄν μιά σύνθετη πρόταση εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής, ὅταν γνωρίζουμε, ὅτι οἱ προτάσεις, πού τήν ἀποτελοῦν, εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς.

Παρακάτω βλέπετε τόν πίνακα ἀλήθειας γιά τήν πράξη * τῆς συζεύξεως δύο προτάσεων p καί q. Στήν πρώτη γραμμή τοῦ πίνακα βλέπουμε ὅτι ἡ σύζευξη $p \wedge q$ εἶναι ἀληθής, μόνο ὅταν καί οἱ δύο ἁπλές προτάσεις p, q εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς. Σ' ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις ἡ σύζευξη $p \wedge q$ εἶναι ψευδής. Αὐτό τό δεχθήκαμε ὡς ἀληθές, ἐπειδή συμφωνεῖ καί μέ τήν ἐνόρασή μας.

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Β) Μέ τρόπο ἀνάλογο πρός τή σύζευξη δύο προτάσεων μποροῦμε νά ἐξετάσουμε τή σύζευξη δύο ἀνοικτῶν προτάσεων, $p(x)$ καί $q(x)$, τήν ὁποία θά συμβολίζουμε μέ $p(x) \wedge q(x)$.

Ἄς πάρουμε ἕνα παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι $p(x)$ εἶναι: $x^2 - 5x + 6 = 0$ καί $q(x) : x - 2 = 0$.

Τότε $p(x) \wedge q(x)$ εἶναι:

$$(x^2 - 5x + 6 = 0) \wedge (x - 2 = 0), \ U = R.$$

Ὅταν $x = 5$, ἡ παραπάνω σύζευξη μετατρέπεται στήν ἑξῆς σύνθετη πρόταση:

$$(5^2 - 5 \cdot 5 + 6 = 0) \wedge (5 + 3 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ψευδής, ἐπειδή καθεμιά ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις πού τήν ἀποτελοῦν εἶναι ψευδής.

Ἄν στήν παραπάνω σύζευξη $p(x) \wedge q(x)$ θέσουμε $x = 2$, τότε προκύπτει ἡ πρόταση:

(*) Οἱ διάφοροι τρόποι μέ τούς ὁποίους συνδέονται οἱ ἁπλές προτάσεις γιά νά σχηματισθοῦν σύνθετες προτάσεις ἀποτελοῦν τίς **λογικές πράξεις** (§ 5), ὅπως τίς λέμε.

$$(2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0) \wedge (2 - 2 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, ἐπειδή καθεμιά ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις πού τήν ἀποτελοῦν εἶναι ἀληθής.

Ἀπ' αὐτό τό παράδειγμα γίνεται φανερό ὅτι τό σύνολο ἀλήθειας τῆς τῆς συζεύξεως δύο ἀνοικτῶν προτάσεων $p(x)$, $q(x)$, τό ὁποῖο συμβολίζουμε $\{ x \mid p(x) \wedge q(x) \}$, ἀποτελεῖται ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα $x \in U$ (τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς), τά ὁποῖα ἀνήκουν συγχρόνως στό σύνολο P [σύνολο ἀλήθειας τῆς $p(x)$] καί στό σύνολο Q [σύνολο ἀλήθειας τῆς $q(x)$], δηλ. ἀπό τά στοιχεῖα πού ἀνήκουν στήν τομή $P \cap Q$.

Ὥστε: $\{ x \mid p(x) \wedge q(x) \} = P \cap Q$.

Πραγματικά στό προηγούμενο παράδειγμα ἔχουμε:

$$\{ x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \wedge x - 2 = 0 \} = \{ 2, 3 \} \cap \{ 2 \} = \{ 2 \}$$

8. ΔΙΑΖΕΥΞΗ ΔΥΟ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Α) Ὅταν παραθέσουμε δύο προτάσεις στή συνέχεια μέ τό συνδετικό «ἤ» ἤ τό «εἴτε» μεταξύ τους, λέμε ὅτι σχηματίσαμε **τή διάζευξη** τῶν δύο αὐτῶν προτάσεων.

Προσέξετε π.χ. τίς παρακάτω τρεῖς σύνθετες προτάσεις.

1) Ἡ Ἐθνική Τράπεζα προσλαμβάνει ἀπολυτηριούχους τοῦ Γυμνασίου, πού γνωρίζουν Γαλλικά **εἴτε** Ἀγγλικά.

2) Θά ἀριστεύσω στά Μαθηματικά **εἴτε** στά Φυσικά.

3) Θά πάω στόν κινηματογράφο **ἤ** θά μείνω στό σπίτι.

Στήν πρώτη πρόταση εἶναι φανερό ὅτι ἡ Τράπεζα δέν ἀποκλείεται νά προσλάβει ἀπολυτηριοῦχο τοῦ Γυμνασίου, ὁ ὁποῖος νά γνωρίζει Γαλλικά καί Ἀγγλικά. Ἐπίσης στή δεύτερη πρόταση ὁ μαθητής δέν ἀποκλείει ὅτι ἐνδέχεται νά ἀριστεύσει καί στά Μαθηματικά καί στά Φυσικά.

Στήν τρίτη πρόταση εἶναι φανερό ὅτι αὐτός, πού μιλάει θά κάνει ἕνα ἀπό τά δύο: ἤ θά πάει στόν κινηματογράφο ἤ θά μείνει στό σπίτι. Ἑπομένως, ὅταν λέμε «p ἤ q», θά ἐννοοῦμε ἤ μόνο p εἶναι ἀληθής ἤ μόνο q εἶναι ἀληθής.

Στήν πρώτη καί δεύτερη περίπτωση ἡ **μία τουλάχιστο καί ἐνδεχομένως οἱ δύο προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς.** Λέμε τότε ὅτι ἔχουμε **ἐγκλειστική διάζευξη** ἤ, ἁπλῶς, **διάζευξη** καί κάνουμε χρήση τοῦ **«εἴτε»** ὡς συνδετικοῦ. Σύμβολο τῆς ἐγκλειστικῆς διαζεύξεως εἶναι τό $\vee$ τό ὁποῖο διαβάζεται **«εἴτε»**.

Στήν περίπτωση τοῦ τρίτου παραδείγματος **τό συνδετικό «ἤ» χρησιμοποιεῖται μέ τήν ἔννοια ὅτι ἡ μία μ ό ν ο ἀπό τίς προτάσεις εἶναι ἀληθής καί ἡ ἄλλη εἶναι ψευδής.** Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ διάζευξη εἶναι **ἀποκλειστική.** Σύμβολο τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως εἶναι τό $\underline{\vee}$, τό ὁποῖο διαβάζεται **ἤ.**

Σημ. Στήν καθημερινή ὁμιλία χρησιμοποιοῦμε, βέβαια, τή λέξη **ἤ** μέ διπλή σημασία. Ἄλλοτε, ὅταν λέμε **«p ἤ q»**, ἐννοοῦμε ὅτι **μία, καί μόνο μία,** ἀπό τίς προτάσεις εἶναι ἀληθής καί ἄλλοτε ὅτι **μία τουλάχιστο** πρόταση εἶναι ἀληθής καί **πιθανῶς νά εἶναι καί οἱ δύο.**

Στά Μαθηματικά ὅμως δέν μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε τό «ἤ» μέ διπλή σημασία. Πρέπει νά γνωρίζουμε ἀκριβῶς τίς ἐννοοῦμε, ὅταν λέμε «p ἤ q».

Παραδείγματα (ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως: $p \vee q$ (p εἴτε q)

1) ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι ρητός εἴτε ὁ -2 εἶναι θετικός.

2) ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5 εἴτε ὁ 3 εἶναι φυσικός.

3) ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 8 εἴτε ὁ -3 εἶναι ἀρνητικός.

Οἱ παραπάνω διαζεύξεις εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις.

4) Ἡ διάζευξη: «ὁ 3 εἶναι ἀρνητικός εἴτε ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀκέραιος» εἶναι ψευδής, ἐπειδή καί οἱ δυό ἁπλές προτάσεις πού τήν ἀποτελοῦν εἶναι ψευδεῖς.

Πίνακας (λογικῶν) τιμῶν τῆς (ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως: $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
A	A	A
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Δηλαδή ἡ διάζευξη $p \vee q$ εἶναι ψευδής, μόνο ὅταν καί οἱ δύο ἁπλές προτάσεις της εἶναι ψευδεῖς. Σέ ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις εἶναι ἀληθής.

Παραδείγματα ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως: $p \veebar q$ (p ἤ q)

1) ὁ -3 εἶναι φυσικός ἤ ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι θετικός,

2) ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἀκέραιος ἤ ὁ -3 εἶναι ἀρνητικός,

3) ὁ 2 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5 ἤ ὁ -2 εἶναι θετικός,

4) ὁ 5 εἶναι φυσικός ἤ ὁ -5 εἶναι ἀρνητικός.

Οἱ δύο πρῶτες ἀποκλειστικές διαζεύξεις εἶναι ἀληθεῖς, ἐνῶ οἱ δύο τελευταῖες εἶναι ψευδεῖς.

Πίνακας (λογικῶν) τιμῶν τῆς (ἀποκλειστικῆς) διαζεύξεως: $p \veebar q$

p	q	$p \veebar q$
A	A	Ψ
A	Ψ	A
Ψ	A	A
Ψ	Ψ	Ψ

Δηλαδή ἡ διάζευξη $p \veebar q$ εἶναι ἀληθής τότε, καί μόνο τότε, ὅταν ἡ μία μόνο ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις της εἶναι ἀληθής.

Β) Μέ τρόπο ἀνάλογο πρός τή διάζευξη δύο προτάσεων μποροῦμε νά ἐξετάσουμε τή διάζευξη δύο ἀνοικτῶν προτάσεων $p(x)$, $q(x)$, τήν ὁποία θά συμβολίζουμε $p(x) \vee q(x)$.

Ἄς πάρουμε ἕνα παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι $p(x)$ εἶναι: $x^2 - 5x + 6 = 0$ καί $q(x) : x + 5 = 0$. Τότε $p(x) \vee q(x)$ εἶναι:

$$(x^2 - 5x + 6 = 0) \vee (x + 5 = 0), \quad U = R.$$

Ὅταν $x = 5$, ἡ παραπάνω διάζευξη μετατρέπεται στήν ἑξῆς σύνθετη πρόταση:

$$(5^2 - 5 \cdot 5 + 6 = 0) \vee (5 + 5 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ψευδής, ἐπειδή καθεμιά ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις πού τήν ἀποτελοῦν εἶναι ψευδής.

Ἄν $x = -5$, ἡ παραπάνω διάζευξη ἀνοικτῶν προτάσεων γίνεται:

$$[(-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 6 = 0] \vee (-5 + 5 = 0),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, ἐπειδή ἡ δεύτερη πρόταση εἶναι ἀληθής. Ἐπίσης, ἄν $x = 3$, τότε ἡ διάζευξη γίνεται:

$$(3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0) \vee (3 + 5 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, ἐπειδή ἡ πρώτη ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις της εἶναι ἀληθής.

Καταλήγουμε λοιπόν στό ἑξῆς συμπέρασμα: τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀλήθειας τῆς σύνθετης ἀνοικτῆς προτάσεως $p(x) \vee q(x)$ εἶναι ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τά ὁποῖα ἀνήκουν στό σύνολο ἀλήθειας P τῆς $p(x)$ ἤ στό σύνολο ἀλήθειας Q τῆς $q(x)$ ἤ ἀνήκουν καί στά δύο σύνολα P καί Q. Μέ ἄλλες λέξεις τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $p(x) \vee q(x)$ εἶναι τό $P \cup Q$.

Συμβολικά διατυπώνουμε τό συμπέρασμα αὐτό ὡς ἑξῆς:

$$\{\, x \mid p(x) \vee q(x) \,\} = P \cup Q.$$

Γ) Κατ' ἀναλογία πρός τήν ἀποκλειστική διάζευξη δύο προτάσεων μποροῦμε νά ἐξετάσουμε τήν ἀποκλειστική διάζευξη δύο προτασιακῶν τύπων $p(x)$, $q(x)$, τήν ὁποία θά συμβολίζουμε μέ $p(x) \underline{\vee}\, p(x)$.

Εἶναι φανερό ὅτι τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $p(x) \underline{\vee}\, q(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τά ὁποῖα κάνουν τήν $p(x)$ ἀληθή καί τήν $q(x)$ ψευδή πρόταση, καί ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τά ὁποῖα κάνουν τήν $p(x)$ ψευδή καί τήν $q(x)$ ἀληθή, δηλ. εἶναι τό σύνολο $P \cup Q - P \cap Q$, πού ταυτίζεται μέ τό σύνολο $(P - Q) \cup (Q - P)$.

Συμβολικά τό συμπέρασμα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$\{\, x \mid p(x) \vee q(x) \,\} = P \cup Q - P \cap Q \text{ ἤ } (P - Q) \cup (Q - P)$$

Παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τό $\{\, x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \,\underline{\vee}\, x^2 - 6x + 8 = 0 \,\}$, ὅπου σύνολο ἀναφορᾶς εἶναι τό R.

Ἔχουμε $P = \{2, 3\}$, $Q = \{2, 4\}$. Ἑπομένως: $P \cup Q = \{2, 3, 4\}$ καί $P \cap Q = \{2\}$. Ὥστε: $P \cup Q - P \cap Q = \{3, 4\}$ καί

$$\{\, x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \,\underline{\vee}\, x^2 - 6x + 8 = 0 \,\} = \{3, 4\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (*)

14) Νά δείξετε ὅτι οἱ συζεύξεις $p \wedge q$ καί $q \wedge p$ ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας.

15) Νά δείξετε ὅτι οἱ διαζεύξεις $p \vee q$ καί $q \vee p$ ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας.

16) Νά διατυπώσετε μέ λόγια τή σύζευξη καί τή διάζευξη τῶν ἑξῆς προτάσεων:

(*) Ἀπό τίς προτεινόμενες ἀσκήσεις στό Κεφάλαιο Ι θά δίνονται ὅσες, κατά τήν κρίση τοῦ καθηγητῆ πού διδάσκει, ἀπαιτοῦνται γιά τήν ἐμπέδωση κάθε ἑνότητας.

α) Ὁ Γιῶργος εἶναι ἀγρότης. Ἡ Ἀγγελική εἶναι οἰκοκυρά.

β) Οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι παράλληλες. Οἱ εὐθεῖες αὐτές τέμνονται.

17) Νά σχηματίσετε τή σύζευξη καί διάζευξη τῶν παρακάτω προτάσεων. Ἔπειτα νά ἀποφανθεῖτε γιά τό ἀληθές ἤ ψευδές τῶν σύνθετων προτάσεων, πού θά προκύψουν.

α) Ὁ Σεπτέμβριος ἔχει 30 ἡμέρες. Ἡ ἑβδομάδα ἔχει 8 μέρες.

β) Τό 3 εἶναι μικρότερο τοῦ 4. Τό 4 εἶναι μικρότερο τοῦ 3.

γ) $5+1=6, \quad 21=3\cdot 7.$

δ) $5+1=5, \quad 8+1=10.$

18) Νά σχηματίσετε τή σύζευξη καί διάζευξη τῶν παρακάτω ἀνοικτῶν προτάσεων. Νά βρεῖτε κατόπιν τά σύνολα ἀλήθειας τῶν σύνθετων ἀνοικτῶν προτάσεων, πού θά προκύψουν. (Σύνολο ἀναφορᾶς τό $\mathbb{R}$).

α) $x+2=0, \quad x^2-4=0$

β) $x^2=0, \quad x=2$

γ) $x^2-8x+12=0, \quad x^2-5x+6=0$

δ) $x>3, \quad x>5$

ε) $x-8=0, \quad x>5$

στ) $x^2-4=(x+2)(x-2), \quad x^2-1=(x+1)(x-1).$

Στήν ἄσκηση γ) νά βρεῖτε καί τό σύνολο ἀλήθειας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως.

19) Ἄν α, β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἡ πρόταση $\alpha\cdot\beta=0$ διατυπώνεται μέ μιά διάζευξη. Ποιά εἶναι αὐτή ἡ διάζευξη;

20) Ἄν α καί β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἡ πρόταση $\alpha^2+\beta^2=0$ διατυπώνεται μέ μιά σύζευξη. Ποιά εἶναι αὐτή ἡ σύζευξη;

9. ΑΡΝΗΣΗ

Α) Ἡ ἄρνηση διαφέρει ἀπό τίς προηγούμενες πράξεις τῆς διαζεύξεως καί συζεύξεως κατά τό ὅτι εἶναι **μονομελής** πράξη. Ἄν p εἶναι μιά πρόταση, ἡ ἄρνηση τῆς p εἶναι μιά νέα (σύνθετη) πρόταση, πού ἔχει ἀντίθετη τιμή ἀλήθειας. Ἄν, π.χ., ἡ p εἶναι ἀληθής, ἡ ἄρνηση τῆς p εἶναι ψευδής, καί ἄν ἡ p εἶναι ψευδής, ἡ ἄρνηση τῆς p εἶναι ἀληθής.

Ἡ ἄρνηση μιᾶς προτάσεως p συμβολίζεται μέ $\sim p$ καί διαβάζεται: **ὄχι** p.

Παραδείγματα:

1ο) p: ὁ 5 εἶναι φυσικός ἀριθμός.

$\sim$ p: ὄχι ὁ 5 εἶναι φυσικός ἀριθμός = ὁ 5 δέν εἶναι φυσικός ἀριθμός.

2ο) p: ὁ 2 εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

$\sim$ p: ὄχι ὁ 2 εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός = ὁ 2 δέν εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

3ο) p: $2+3=5$

$\sim$ p: $2+3\neq 5$

4ο) Τό ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι 180°.

$\sim$ p: τό ἄθροισμα τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου δέν εἶναι 180°.

Πίνακας ἀλήθειας τῆς ἀρνήσεως $\sim p$

p	$\sim p$
Α	Ψ
Ψ	Α

Σημ. Φραστικῶς οἱ ἀρνήσεις τῶν ἁπλῶν προτάσεων σχηματίζονται συνήθως μέ τήν παρεμβολή ἑνός **ὄχι** (ἤ **δέν**) στήν κατάλληλη θέση.

Παραδείγματα :

1ο) p: ὁ 8 εἶναι τέλειο τετράγωνο.

$\sim$ p: ὁ 8 δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

2ο) p: κάθε τετράγωνο εἶναι ὀρθογώνιο.

$\sim$ p: κάθε τετράγωνο δέν εἶναι ὀρθογώνιο.

Τό πιό συνηθισμένο σφάλμα πού γίνεται κατά τό σχηματισμό τῆς ἀρνήσεως μιᾶς προτάσεως ὅπως, π. χ., ἡ **«Ὅλοι οἱ μαθητές αὐτῆς τῆς τάξεως ἀγαποῦν τή Γεωμετρία»**, εἶναι νά ποῦμε **«κανείς μαθητής σ' αὐτή τήν τάξη δέν ἀγαπᾶ τή Γεωμετρία»**. Οἱ παραπάνω προτάσεις βέβαια δέ συμφωνοῦν, ἀλλά δέν εἶναι ἡ μιά ἄρνηση τῆς ἄλλης, ἐπειδή μπορεῖ νά εἶναι καί οἱ δύο ψευδεῖς. Γι' αὐτό εἶναι προτιμότερο σέ τέτοιες περιπτώσεις νά σχηματίζουμε τήν ἄρνηση λεκτικῶς μέ τό: ὄχι. Στό παραπάνω παράδειγμα λοιπόν θά ποῦμε: ὄχι ὅλοι οἱ μαθητές αὐτῆς τῆς τάξεως ἀγαποῦν τή Γεωμετρία.

Β) Ἄν $p(x)$ εἶναι μιά ἀνοικτή πρόταση, τότε ἡ ἄρνησή της συμβολίζεται μέ $\sim p(x)$.

Ἄν ἀπό τήν ἀντικατάσταση τοῦ x μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς U στήν $p(x)$ προκύπτει πρόταση ἀληθής, ἀπό τήν ἀντικατάσταση τοῦ x μέ τό ἴδιο στοιχεῖο στήν $\sim p(x)$ προκύπτει πρόταση ψευδής. Ἄν ἀπό τήν ἀντικατάσταση τοῦ x στήν $p(x)$ μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς προκύπτει πρόταση ψευδής, ἀπό τήν ἀντικατάσταση τοῦ x στήν $\sim p(x)$ μέ τό ἴδιο στοιχεῖο προκύπτει πρόταση ἀληθής. Ὥστε τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $\sim p(x)$ ἀποτελεῖται ἀπό ἐκεῖνα τά στοιχεῖα τοῦ U, τά ὁποῖα δέν ἀνήκουν στό σύνολο ἀλήθειας P, τῆς $p(x)$, ἑπομένως θά ἀνήκουν στό συμπληρωματικό τοῦ P ὡς πρός U, δηλ. τό P^c.

Συμβολικά διατυπώνουμε τά παραπάνω ὡς ἑξῆς:

$$\{ x \mid \sim p(x) \} = P^c$$

Ἔστω γιά παράδειγμα ἡ ἀνοικτή πρόταση $p(x)$: $x^2 - 4 = 0$ καί σύνολο ἀναφορᾶς τό R. Τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $p(x)$ εἶναι τό $P = \{2, -2\}$. Τό συμπληρωματικό τοῦ **P** ὡς πρός R εἶναι τό $P^c = \{x \mid x \neq 2 \wedge x \neq -2\}$. Ὥστε:

$$\{ x \mid \sim p(x) \} = \{ x \mid x \neq -2 \text{ καί } x \neq 2 \}.$$

10. Η ΑΡΝΗΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΖΕΥΞΕΩΣ

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά σχηματίσουμε τήν ἄρνηση τῆς συζεύξεως: «ὁ Α εἶναι γιατρός καί ὁ Β εἶναι δάσκαλος».

Ὅπως μάθαμε (§ 7), γιά νά ποῦμε ὅτι ἡ σύνθετη αὐτή πρόταση εἶναι ψευδής, πρέπει ἡ μία τουλάχιστο ἀπό τίς ἁπλές προτάσεις νά εἶναι ψευδής.

Θά ποῦμε λοιπόν:

«Ὁ Α δέν εἶναι γιατρός εἴτε ὁ Β δέν εἶναι δάσκαλος».

Ἄς πάρουμε ἕνα ἄλλο παράδειγμα:

«Θά κερδίσουμε στόν ἀγώνα τῆς πετόσφαιρας μέ τήν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Α καί θά κερδίσουμε στόν ἀγώνα μέ τήν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Β».

Γιά νά σχηματίσουμε τήν ἄρνηση αὐτῆς τῆς συζεύξεως εἶναι φανερό ὅτι πρέπει νά ποῦμε: «Δέ θά κερδίσουμε στόν ἀγώνα πετόσφαιρας μέ τήν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Α εἴτε δέ θά κερδίσουμε στόν ἀγώνα μέ τήν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Β».

Νά καί ἕνα τρίτο παράδειγμα ἀπό τά Μαθηματικά: Ἄν α καί β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἡ πρόταση $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ διατυπώνεται μέ τή σύζευξη $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$. Ἡ ἄρνηση τῆς $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ καί διατυπώνεται μέ τή διάζευξη $\alpha \neq 0$ εἴτε $\beta \neq 0$. Δηλαδή:

$$\sim(\alpha = 0 \wedge \beta = 0) \text{ εἶναι } (\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0)$$

Εἶναι λοιπόν φανερό ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \wedge q$ εἶναι $\sim p \vee \sim q$. Τό πράγμα γίνεται σαφέστερο ἀπό τόν ἑπόμενο πίνακα ἀλήθειας:

p	q	~p	~q	p ∧ q	~(p ∧ q)	~p V ~q
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Ἀπό τίς δύο τελευταῖες στῆλες τοῦ πίνακα φαίνεται ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \wedge q$ καί ἡ διάζευξη $\sim p \vee \sim q$ ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας. Ἐπίσης σαφέστερα φαίνεται ἀπό τίς στῆλες 5η καί 7η ὅτι, ὅταν ἡ $p \wedge q$ εἶναι ἀληθής, ἡ $(\sim p \vee \sim q)$ εἶναι ψευδής, καί ὅταν ἡ $p \wedge q$ εἶναι ψευδής, ἡ $\sim p \vee \sim q$ εἶναι ἀληθής. Ἑπομένως ἡ μιά εἶναι ἄρνηση τῆς ἄλλης.

Συμπέρασμα: $\sim(p \wedge q)$ εἶναι: $\sim p \vee \sim q$.

11. Η ΑΡΝΗΣΗ ΜΙΑΣ ΔΙΑΖΕΥΞΕΩΣ

Ἄς πάρουμε τίς προτάσεις:

p: ὁ Α εἶναι γιατρός,

q: ὁ Β εἶναι δάσκαλος.

Ἡ διάζευξή τους εἶναι:

$p \vee q$: ὁ Α εἶναι γιατρός εἴτε ὁ Β εἶναι δάσκαλος.

Εἶναι εὔκολο νά ἐννοήσουμε ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \vee q$ εἶναι: ὁ Α δέν εἶναι γιατρός καί ὁ Β δέν εἶναι δάσκαλος.

Ὥστε $\sim(p \vee q)$ εἶναι: $\sim p \wedge \sim q$.

Νά ἕνα παράδειγμα ἀπό τά Μαθηματικά:

Ἄν α καί β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ἡ πρόταση $\alpha \cdot \beta = 0$ διατυπώνεται μέ τή διάζευξη: $\alpha = 0 \vee \beta = 0$. Ἡ ἄρνηση τῆς $\alpha \cdot \beta = 0$ εἶναι $\alpha \cdot \beta \neq 0$ καί διατυπώνεται μέ τή σύζευξη $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$. Δηλαδή:

$$\sim(\alpha = 0 \vee \beta = 0) \text{ εἶναι } (\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0)$$

Ἰσχύει λοιπόν ὅτι: $\sim(p \vee q)$ εἶναι $\sim p \wedge \sim q$.

Τό ἴδιο βρίσκουμε, πέρα ἀπό κάθε ἀμφιβολία, ἄν σχηματίσουμε ἕναν πίνακα ἀλήθειας γιά τίς $p \vee q$ καί $\sim p \wedge \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Ἀπό τίς δύο τελευταῖες στῆλες τοῦ πίνακα φαίνεται ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \vee q$ καί σύζευξη $\sim p \wedge \sim q$ ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας. Σαφέστερα βλέπουμε ἀπό τίς στῆλες 5η καί 7η ὅτι, ὅταν ἡ $p \vee q$ εἶναι ἀληθής, ἡ $\sim p \wedge \sim q$ εἶναι ψευδής, καί ὅταν ἡ $p \vee q$ εἶναι ψευδής, ἡ $\sim p \wedge \sim q$ εἶναι ἀληθής. Ἑπομένως ἡ μιά εἶναι ἄρνηση τῆς ἄλλης.

Συμπέρασμα: $\sim(p \vee q)$ εἶναι: $\sim p \wedge \sim q$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21) Νά διατυπώσετε τίς ἀρνήσεις τῶν ἑξῆς προτάσεων:

α) Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἐνδιαφέρουσα.

β) Ὅλοι οἱ μαθητές τῆς τάξεως ἀγαποῦν τήν Ἄλγεβρα.

γ) Κάθε τρίγωνο ἔχει τέσσερις πλευρές.

δ) $5 + 2 = 7$ ε) ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

στ) $3 + 1 = 5$ ζ) ὁ 4 δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

η) Μερικοί ἀριθμοί δέν εἶναι ἀρνητικοί.

22) Νά ὑπολογίσετε τό $P^c = \{ x \mid \sim p(x) \}$ γιά τίς ἑξῆς ἀνοικτές προτάσεις $p(x)$, ὅπου σύνολο ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς x εἶναι τό R:

α) $x = 2$ β) $x = -2$

γ) $x + 7 = 15$ δ) $x^2 = 9$

ε) $x^2 + 1 = 0$ στ) $x^2 \geq 16$.

23) Νά σχηματίσετε τίς ἀρνήσεις τῶν παρακάτω σύνθετων προτάσεων:

α) Σήμερα εἶναι Τετάρτη καί ὁ καιρός εἶναι βροχερός.

β) $x = 2$ καί $y = 5$

γ) $2 \cdot 3 = 6$ καί $3 + 2 = 5$

δ) Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές καί τό ΑΒΕ εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο.

ε) Θά μείνω στό σπίτι ἤ θά πάω στόν κινηματογράφο (*).

στ) $2 + 3 = 6$ εἴτε $3 + 4 = 5$

ζ) $5 \cdot 7 = 35$ εἴτε $4 \cdot 5 = 20$

12. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Στήν καθημερινή ζωή, ὅταν θέλουμε νά πείσουμε ἕνα πρόσωπο ὅτι κάτι, γιά τό ὁποῖο συζητοῦμε, εἶναι ἀληθές, συνήθως λέμε: «**Αὐτό** εἶναι ἀληθές, ἐπειδή **ἐκεῖνο** εἶναι ἀληθές». Γιά νά εἶναι πειστική μιά τέτοια πρόταση, πρέπει οἱ συζητητές νά συμφωνοῦν ὅτι τό **ἐκεῖνο** εἶναι ἀληθές καί ὅτι **αὐτό** εἶναι ἀναγκαία συνέπεια **ἐκείνου**. Μέ ἄλλες λέξεις πρέπει νά ὑπάρχει συμφωνία ὡς πρός τίς πληροφορίες, μέ τίς ὁποῖες ἀρχίζουμε, καί ὡς πρός τό πῶς ἐξάγουμε συμπεράσματα ἀπό αὐτές τίς πληροφορίες. **Ἡ λογική ἀσχολεῖται μέ τή μελέτη τῶν κανόνων γιά σχηματισμό ὀρθῶν προτάσεων.** Ἡ **ἀπόδειξη,** καθώς λέγεται,

(*) Μέ πίνακα ἀλήθειας θά δείξουμε προηγουμένως ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \underline{\vee} q$ εἶναι $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$.

συνίσταται στό σχηματισμό προτάσεων τοῦ τύπου: Ἄν αὐτό εἶναι ἀληθές, τότε καί ἐκεῖνο πρέπει νά εἶναι ἀληθές. Π.χ. «ἄν βρέξει, τότε ὁ κῆπος μου θά ποτιστεῖ». Ὁ καθένας θά συμφωνήσει μ' αὐτή τήν πρόταση, ἐπειδή ὅλοι ἀπό πείρα ξέρουμε ὅτι μέ τή βροχή ὁ κῆπος θά ποτιστεῖ.

Νά δύο ἄλλα παραδείγματα ἀπό τήν Ἄλγεβρα:

1) Ἄν $3x = 5$, τότε $x = \frac{5}{3}$.

2) Ἄν $\alpha = 4$ καί $\beta = 2$, τότε $\alpha^2 + 2\beta = 20$.

Ὅλες οἱ μαθηματικές ἀποδείξεις χρησιμοποιοῦν προτάσεις αὐτοῦ τοῦ τύπου.

Συντομότερα διατυπώνουμε τίς προτάσεις αὐτές λέγοντας «p συνεπάγεται q», ἤ συμβολικά: $p \Rightarrow q$.

Π.χ. $3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$(\alpha = 4$ καί $\beta = 2) \Rightarrow \alpha^2 + 2\beta = 20$

Μιά σύνθετη πρόταση τῆς μορφῆς $p \Rightarrow q$ λέγεται, ὅπως μᾶς εἶναι γνωστό, **συνεπαγωγή.** Ἡ ἐργασία μέ ἀληθεῖς προτάσεις τοῦ τύπου $p \Rightarrow q$ λέγεται **παραγωγικός συλλογισμός,** ἤ, ἁπλά, **συλλογισμός.** Ἡ πρόταση p λέγεται **ὑπόθεση** καί ἡ πρόταση q λέγεται **συμπέρασμα.** Καί λέμε ὅτι $p \Rightarrow q$ εἶναι ἕνα **θεώρημα.** Ὅταν ἡ πρόταση p εἶναι ἀληθής, ἡ πρόταση q μπορεῖ νά εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής. Ἐπίσης ὅταν ἡ πρόταση p εἶναι ψευδής, ἡ πρόταση q μπορεῖ νά εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

Πρέπει λοιπόν νά γνωρίζουμε τίς τιμές ἀλήθειας μιᾶς συνεπαγωγῆς, ὅταν εἶναι γνωστές οἱ τιμές ἀλήθειας τῶν ἁπλῶν προτάσεων, ἀπό τίς ὁποῖες ἀποτελεῖται.

Μολονότι ἡ μέθοδος, πού ἀκολουθεῖται γιά τό σκοπό αὐτό εἶναι συνέπεια μιᾶς παραδοχῆς, ὡστόσο αὐτή στηρίζεται στίς ἐνορατικές βάσεις τοῦ ὀρθοῦ συλλογισμοῦ. Θά ἐξετάσουμε παρακάτω ὅλες τίς δυνατές περιπτώσεις.

13. ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ

1) Ἄν μιά ἀληθής ὑπόθεση p ὁδηγεῖ σέ ἕνα ἀληθές συμπέρασμα q, πιστεύουμε ὅτι κάναμε ὀρθό συλλογισμό καί θεωροῦμε τή συνεπαγωγή ἀληθή.

2) Ἄν μιά ἀληθής ὑπόθεση p ὁδηγεῖ σέ ἕνα ψευδές συμπέρασμα, τότε εἶναι βέβαιο ὅτι ἔχουμε κάνει λάθος στό συλλογισμό καί θεωροῦμε τή συνεπαγωγή ψευδή.

3) Ἄν ἡ ὑπόθεση p εἶναι ψευδής, τότε ἕνας ὀρθός συλλογισμός μπορεῖ νά μᾶς ὁδηγήσει σέ ἀληθές συμπέρασμα καί συμφωνοῦμε νά ὀνομάζουμε ἀληθή αὐτή τή συνεπαγωγή.

4) Ἄν ἡ ὑπόθεση εἶναι ψευδής, τότε ἕνας ὀρθός συλλογισμός μπορεῖ ἐξίσου νά μᾶς ὁδηγήσει σέ ψευδές συμπέρασμα καί τότε συμφωνοῦμε νά ὀνομάζουμε τή συνεπαγωγή αὐτή ἀληθή.

Ὅλα αὐτά τά συγκεντρώνουμε στόν παρακάτω πίνακα ἀλήθειας:

Πίνακας ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς : $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Ὅπως φαίνεται στόν πίνακα, **ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ εἶναι ψευδής, τότε καί μόνο, ὅταν ἡ πρώτη πρόταση εἶναι ἀληθής καὶ ἡ δεύτερη ψευδής. Σ' ὅλες τίς ἄλλες περιπτώσεις εἶναι ἀληθής.**

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοῦ πίνακα:

1) $2 \in N \Rightarrow \frac{1}{2} \in Q$, ἀληθής,

2) $3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \in N$, ψευδής,

3) $\sqrt{2} \in N \Rightarrow \frac{2}{3} \in Q$, ἀληθής,

4) $\frac{1}{2} \in N \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$, ἀληθής.

Ἔστω ἡ ἀληθής συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$, ὅπου ἡ p εἶναι ἀληθής. Ἡ συνεπαγωγή αὐτή διαβάζεται καί μέ ἄλλους τρόπους. Ἀναφέρουμε μερικούς ἀπ' αὐτούς:

1) ἄν p, τότε q,
2) p εἶναι ἱκανή συνθήκη γιά q,
3) q εἶναι ἀναγκαία συνθήκη γιά p,
4) γιά q ἀρκεῖ p.

14. ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Ἔστω ὅτι ἔχουμε τή συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Σύνολο ἀναφορᾶς τό U, σύνολο ἀλήθειας τῆς $p(x)$ τό P, σύνολο ἀλήθειας τῆς $q(x)$, τό Q. Θέλουμε νά προσδιορίσουμε τό σύνολο ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Παρατηρώντας τόν πίνακα ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς βλέπουμε ὅτι μποροῦμε νά καταστήσουμε τή συνεπαγωγή $p(x) \Rightarrow q(x)$ ἀληθή,

ἄν καταστήσουμε: $\left\{ \begin{array}{l} \text{τήν } p(x) \text{ ἀληθή καί τήν } q(x) \text{ ἀληθή,} \\ \text{τήν } p(x) \text{ ψευδή καί τήν } q(x) \text{ ἀληθή,} \\ \text{τήν } p(x) \text{ ψευδή καί τήν } q(x) \text{ ψευδή.} \end{array} \right.$

Ἀπό αὐτά ἔπεται ὅτι:

$$\{ x \mid p(x) \Rightarrow q(x) \} = P^c \cup Q \ (*)$$

Παραδείγματα :

1) Νά βρεθεῖ τό σύνολο ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς, $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ (σύνολο ἀναφορᾶς τό R).

(*) Ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλες οἱ περιπτώσεις καλύπτονται ἀπό αὐτό τόν τύπο.

Βρίσκουμε πρῶτα ὅτι $P = \{1, -1\}$, ἄρα $P^c = \{x \mid x \neq 1$ εἴτε $-1\}$. Βρίσκουμε ἔπειτα ὅτι $Q = \{1\}$. Ἑπομένως $P^c \cup Q = \{x \mid x \neq -1\}$.

2) Νά βρεθεῖ τό σύνολο ἀλήθειας τῆς συνεπαγωγῆς: $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. Ἔχουμε $P = \{1\}$, ἄρα $P^c = \{x \mid x \neq 1\}$. $Q = \{1, -1\}$. Ἑπομένως $P^c \cup Q =$ $=$ τό σύνολο ἀναφορᾶς R.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24) Νά βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω συνεπαγωγές εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ψευδεῖς:

α) $3 = 4 \Rightarrow 3 + 1 = 4$

β) $2 > 0 \Rightarrow 6 = 2 \cdot 3$

γ) $5 = 2 + 3 \Rightarrow 2 > 8$

δ) $2 = 5 + 6 \Rightarrow 8 > 10$

ε) $3 = 2 \Rightarrow 2 > 5$.

25) Νά σχηματίσετε τόν πίνακα ἀλήθειας τῶν:

α) $p \Rightarrow \sim q$ β) $\sim p \Rightarrow q$ γ) $\sim p \Rightarrow \sim q$

26) Νά σχηματίσετε τόν πίνακα ἀλήθειας τῶν:

$p \Rightarrow q$ καί $\sim p \vee q$

Τί παρατηρεῖτε;

27) Γιά νά εἶναι $x = -2$, εἶναι ἀναγκαία συνθήκη ἡ $x^2 = 4$. Νά τό διατυπώσετε αὐτό συμβολικά μέ μιά συνεπαγωγή.

28) Νά σχηματίσετε τόν πίνακα ἀλήθειας τῆς: $p \Rightarrow (p \vee q)$

29) Νά σχηματίσετε δύο συνεπαγωγές ἀπό κάθε ζεῦγος ἀπό τίς ἑξῆς προτάσεις καί νά βρεῖτε τίς τιμές ἀλήθειας τους:

α) $3 + 4 = 7, \; 5 + 3 = 8$ β) $5 + 1 = 6, \; 3 + 2 = 6$

γ) $6 - 3 = 2, \; 4^2 = 25$ δ) $0 = 1, \; 2 \cdot 5 = 10$.

30) Στίς παρακάτω συνεπαγωγές ἀνοικτῶν προτάσεων νά βρεῖτε τά σύνολα ἀλήθειας τους:

(Τό σύνολο ἀναφορᾶς U εἶναι τό R).

α) Ἄν $x^2 = 4$, τότε $x = 2$ εἴτε -2.

β) Ἄν $x = 4$, τότε $x^2 = 16$.

γ) Ἄν $x^2 = 25$, τότε $x = -5$.

δ) Ἄν $x = 3$, τότε $x \neq 5$.

ε) Ἄν $x^2 \geq 0$, τότε $x^2 < 0$.

στ) Ἄν $x^2 - 5x + 6 = 0$, τότε $x = 3$ εἴτε 2.

31) «$\alpha = 3$, $\beta = 2$». Εἶναι ἡ πρόταση αὐτή ἱκανή ἤ ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά ἔχουμε $\alpha + \beta = 5$;

32) Ἔστω ἕνα σύνολο 3 προτάσεων: p, q, r, γιά τίς ὁποῖες σχηματίζουμε ἕναν πίνακα τιμῶν ἀλήθειας. Πόσες γραμμές θά περιέχει ὁ πίνακας; Πόσες, ἄν οἱ προτάσεις εἶναι ν;

33) Ἔστω p ἡ πρόταση «βρέχει» καί q ἡ πρόταση «κάνει κρύο». Νά ἀποδόσετε μέ λόγια τίς προτάσεις:

$$p \wedge q, \; p \wedge \sim q, \; \sim p \wedge \sim q, \; p \vee \sim q, \; \sim(p \wedge q), \; p \Rightarrow q$$
$$p \Rightarrow \sim q, \; \sim p \Rightarrow q, \; q \Rightarrow p, \; \sim p \Rightarrow \sim q.$$

15. Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΘΕΤΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ

Α) Ἔστω ἡ συνεπαγωγή:

«ἄν ἕνας ἀριθμός λήγει σέ 0 ἤ 5, τότε εἶναι διαιρετός διά 5», τήν ὁποία σημειώνουμε $p \Rightarrow q$.

Θεωροῦμε τώρα τή συνεπαγωγή:

«ἄν ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 5, τότε λήγει σέ 0 ἤ 5».

Τή συνεπαγωγή αὐτή θά τή σημειώσουμε μέ $q \Rightarrow p$, ἐπειδή ὑπόθεση στή δεύτερη αὐτή συνεπαγωγή εἶναι τό συμπέρασμα τῆς πρώτης καί τό συμπέρασμα τῆς δεύτερης συνεπαγωγῆς εἶναι ὑπόθεση τῆς πρώτης.

Οἱ συνεπαγωγές $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$ λέγονται **ἀντίστροφες** ἡ μιά τῆς ἄλλης.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$ τοῦ παραπάνω παραδείγματος εἶναι καί οἱ δύο ἀληθεῖς. Δέ συμβαίνει ὅμως αὐτό πάντοτε. Ἡ ἀντίστροφη μιᾶς ἀληθοῦς συνεπαγωγῆς ἐνδέχεται νά εἶναι ψευδής. Π.χ. $p \Rightarrow q$: ἄν δυό γωνίες εἶναι ὀρθές, τότε εἶναι ἴσες (ἀληθής), ἐνῶ $q \Rightarrow p$: ἄν δυό γωνίες εἶναι ἴσες, τότε εἶναι ὀρθές (ψευδής ἐνγένει).

Β) Ἔστω ἡ ἀληθής συνεπαγωγή:

$p \Rightarrow q$: ἄν ἕνας ἀριθμός λήγει σέ 0 ἤ 5, τότε εἶναι διαιρετός διά 5. Ἡ συνεπαγωγή $\sim p \Rightarrow \sim q$ λέγεται ἀντίθετη τῆς $p \Rightarrow q$.

Στό παράδειγμά μας μέ λόγια θά ποῦμε:

$\sim p \Rightarrow \sim q$: ἄν ἕνας ἀριθμός δέ λήγει σέ 0 ἤ 5, τότε δέν εἶναι διαιρετός διά 5, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής πρόταση. Δέ συμβαίνει ὅμως πάντοτε ἡ ἀντίθετη μιᾶς ἀληθοῦς συνεπαγωγῆς νά εἶναι ἐπίσης ἀληθής. Νά ἕνα παράδειγμα:

$p \Rightarrow q$: ἄν δυό γωνίες εἶναι ὀρθές, τότε εἶναι ἴσες (ἀληθής).

$\sim p \Rightarrow \sim q$: ἄν δυό γωνίες δέν εἶναι ὀρθές, τότε δέν εἶναι ἴσες (ψευδής).

16. Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΔΥΟ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Α) Δυό προτάσεις p καί q λέμε ὅτι εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους, ἄν ἡ σύζευξη $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$ εἶναι ἀληθής. Συμβολίζουμε τό γεγονός αὐτό μέ $p \Leftrightarrow q$ καί διαβάζουμε: p ἰσοδυναμεῖ (λογικά) μέ q. Ἔτσι, π.χ., οἱ προτάσεις p: ἕνας ἀριθμός λήγει σέ 0 ἤ 5 καί q: ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 5, εἶναι ἰσοδύναμες, ἐπειδή ἰσχύει $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$. Γράφουμε λοιπόν $p \Leftrightarrow q$.

Γιά νά σχηματίσουμε τόν πίνακα ἀλήθειας τῆς ἰσοδυναμίας, ἀρκεῖ νά σχηματίσουμε τόν πίνακα ἀλήθειας τῆς συζεύξεως $(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p)$. Ἔχουμε:

p	q	p ⇒ q	q ⇒ p	(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Δηλαδή ἔχουμε τόν παρακάτω πίνακα τιμῶν ἀλήθειας τῆς ἰσοδυναμίας:

p	q	p⇔q
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Ὥστε: ἡ ἰσοδυναμία δύο προτάσεων εἶναι ἀληθής, μόνον ὅταν καί οἱ δύο προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς ταυτόχρονα.

Μέ ἄλλες λέξεις δύο προτάσεις p καί q λέμε ὅτι εἶναι ἰσοδύναμες, ὅταν ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας συγχρόνως.

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοῦ πίνακα:

1) ὁ 5 εἶναι ἀκέραιος $\Leftrightarrow$ ὁ -3 εἶναι ἀρνητικός (ἀληθής),

2) ὁ $\frac{5}{6}$ εἶναι ἀκέραιος $\Leftrightarrow$ ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι φυσικός (ἀληθής),

3) ὁ 2 εἶναι φυσικός $\Leftrightarrow$ ὁ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἀκέραιος (ψευδής),

4) ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἄρρητος $\Leftrightarrow$ ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι ἄρρητος (ψευδής),

5) ἡ εὐθεία $\varepsilon // \varepsilon'$ $\Leftrightarrow$ ἡ εὐθεία $\varepsilon' // \varepsilon$ (ἀληθής),

6) τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο $\Leftrightarrow$ τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιο.

Β) Ἡ ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ διατυπώνεται λεκτικά καί μέ ἄλλους τρόπους.

Προσέξτε τίς δύο προτάσεις «p ἄν q» καί «p μόνο ἄν q». Ἡ «p ἄν q» σημαίνει $q \Rightarrow p$ καί ἡ «p μόνο ἄν q» σημαίνει $p \Rightarrow q$. Ἐπομένως ἄν καί οἱ δύο αὐτές προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς, ἡ σύζευξή τους θά εἶναι ἀληθής. Ὥστε:

«p ἄν καί μόνο ἄν q» σημαίνει $p \Rightarrow q$ καί $q \Rightarrow p$, δηλαδή $p \Leftrightarrow q$.

Ὥστε, ἀντί νά λέμε «p ἰσοδυναμεῖ μέ q», μποροῦμε νά λέμε «p ἄν, καί μόνο ἄν q».

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τίς ἑξῆς δύο προτάσεις:

p: δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου δέν τέμνονται,

q: οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι παράλληλες.

$p \Rightarrow q$: ἄν δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου δέν τέμνονται, τότε εἶναι παράλληλες (ἀληθής).

$q \Rightarrow p$: ἄν δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου εἶναι παράλληλες, τότε δέν τέμνονται (ἀληθής).

Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε:

«Δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου εἶναι παράλληλες **ἄν, καί μόνο ἄν,** δέν τέμνονται».

Τήν ἰσοδυναμία δύο προτάσεων τή διατυπώνουμε καί μέ ἄλλο τρόπο.

Ἄν πάρουμε τό ἴδιο παράδειγμα, μποροῦμε νά ποῦμε: **«ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη,** γιά νά εἶναι παράλληλες δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου, εἶναι νά μήν τέμνονται».

Ἕνας ἄλλος τρόπος διατυπώσεως τῆς ἰσοδυναμίας τῶν δύο προηγούμενων προτάσεων p καί q εἶναι: «Γιά νά εἶναι παράλληλες δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου, **πρέπει καί ἀρκεῖ** νά μήν τέμνονται».

Ἄς πάρουμε ἕνα ἄλλο παράδειγμα:

Ὑπενθυμίζουμε τά δύο θεωρήματα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ἄν τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, τότε οἱ διαγώνιοί του ΑΓ καί ΒΔ διχοτομοῦνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ἄν οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομοῦνται, τότε τό τετράπλευρο αὐτό εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἄς ὀνομάσουμε p τήν πρόταση: «ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο», καί q τήν πρόταση «ΑΓ καί ΒΔ διχοτομοῦνται».

Τό θεώρημα 1 ἐκφράζεται μέ τή συνεπαγωγή: $p \Rightarrow q$.

Τό θεώρημα 2 ἐκφράζεται μέ τήν $q \Rightarrow p$.

Καί τά δύο θεωρήματα μαζί ἐκφράζονται μέ τήν ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$.

Καθεμιά ἀπό τίς προτάσεις p καί q εἶναι **ἱκανή συνθήκη** γιά τήν ἄλλη καί ἐπίσης καθεμιά εἶναι **ἀναγκαία συνθήκη** γιά τήν ἄλλη.

Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε:

«Γιά νά εἶναι παραλληλόγραμμο ἕνα τετράπλευρο **ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη** εἶναι νά διχοτομοῦνται οἱ διαγώνιοί του». Ἤ ἀκόμα:

«Γιά νά εἶναι παραλληλόγραμμο ἕνα τετράπλευρο **πρέπει καί ἀρκεῖ** οἱ διαγώνιοί του νά διχοτομοῦνται».

Ἐπίσης, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, μποροῦμε νά ποῦμε:

«Ἕνα τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο **ἄν, καί μόνο ἄν,** οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται».

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσοδυναμίας ἐννοοῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $p \Leftrightarrow p$

β) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

γ) $(p \Leftrightarrow q \land q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

17. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

Ὅπως καί στή συνεπαγωγή, ἔτσι καί στήν ἰσοδυναμία μποροῦμε νά ἐπεκτείνουμε τήν ἔννοια καί γιά ἀνοικτές προτάσεις. Ἄς ζητήσουμε λοιπόν τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

Ἄν θέσουμε στήν $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, ὅπου x ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς U, τό ὁποῖο ἀνήκει στήν τομή $P \cap Q$, λαμβάνουμε μιά ἀληθή σύνθετη πρόταση, ἐπειδή καί τά δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι τώρα ἀληθεῖς προτάσεις. Ἄν στήν $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, θέσουμε ὅπου x ἕνα στοιχεῖο, τό ὁποῖο ἀνήκει στήν $P^c \cap Q^c$, λαμβάνουμε πάλι μιά ἀληθή σύνθετη πρόταση, ἐπειδή τώρα καί τά δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι ψευδεῖς προτάσεις. Ἄν ἀντί γιά τό x θέσουμε ὁποιοδήποτε ἄλλο στοιχεῖο τοῦ U, προκύπτει ψευδής σύνθετη πρόταση, ἐπειδή τό ἕνα μέλος τῆς ἰσοδυναμίας θά εἶναι ἀληθής πρόταση καί τό ἄλλο ψευδής. Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι:

$$\{\, x \mid p(x) \Leftrightarrow q(x) \,\} = (P \cap Q) \cup (P^c \cap Q^c)$$

Παράδειγμα:

Ζητεῖται τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2)$. Ἔχουμε ὅτι $p(x)$: $x^2 = 4$ καί $q(x)$: $x = 2$. Ἑπομένως $P = \{2, -2\}$ καί $Q = \{2\}$. Ἄρα θά εἶναι $P^c = \{\, x \mid x \neq 2$ εἴτε $-2 \,\}$ καί $Q^c = \{\, x \mid x \neq 2 \,\}$.

Συνεπῶς $P \cap Q = \{ 2 \}$ καί $P^c \cap Q^c = \{ x \mid x \neq 2$ εἴτε $-2\}$. Τελικά λοιπόν ἔχουμε:

$$\{ x \mid p(x)) \Leftrightarrow (q(x) \} = (P \cap Q) \cup (P^c \cap Q^c) = \{ x \mid x \neq -2 \}$$

Σημ. 1. Τό σύνολο ἀλήθειας τῆς $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2)$ εἶναι φανερό ὅτι εἶναι τό $\{x \mid x \neq -2 \}$, ἐπειδή τό -2 εἶναι ἡ μόνη τιμή τοῦ x (ἀπό τό σύνολο ἀναφορᾶς R), γιά τήν ὁποία δέ λαμβάνουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας καί τά δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας.

Σημ. 2. Οἱ προτάσεις

$$p \vee q,\ p \wedge q,\ p \Rightarrow q,\ p \Leftrightarrow q,\ \sim p$$

λέγονται **σύνθετες προτάσεις πρώτης βαθμίδας,** γιά κάθε ζεῦγος ἁπλῶν προτάσεων p καί q ἀπό τό L.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34) Νά διατυπώσετε τίς ἀντίστροφες τῶν παρακάτω συνεπαγωγῶν καί νά ἀποφανθεῖτε ἄν αὐτές εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς.

α) Ἄν κάποιος γεννήθηκε στήν Πάτρα, τότε ἔχει ἑλληνική ἰθαγένεια.
β) Ἄν $x - y = 3$, τότε $x > y$.
γ) Ἄν δύο ὀρθογώνια ἔχουν ἴσες βάσεις καί ἴσα ὕψη, τότε ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.
δ) Ἄν $x^2 = 25$, τότε $x = 5$ εἴτε $x = -5$.
ε) Ἄν ἕνα σημεῖο βρίσκεται στή μεσοκάθετο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, τότε ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος.
στ) Ἄν $2 + 4 = 5$, τότε $4 + 6 = 8$.

35) Νά ἀποφανθεῖτε ἄν οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους:

α) $p : 2x = 10$ $(x \in R)$,
$q : x = 5$.
β) p : Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο,
q : Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιο.
γ) $p : x > y$ $(x, y \in R)$,
$q : y < x$.
δ) p : ἡ εὐθεία ε εἶναι παράλληλη πρός τήν ε′,
q : ἡ εὐθεία ε′ εἶναι παράλληλη πρός τήν ε.
ε) $p : x = 4$ εἴτε $x = -4$,
$q : x^2 = 16$.

36) Νά διατυπώσετε προτάσεις ἰσοδύναμες πρός τίς παρακάτω:

α) Οἱ εὐθεῖες ε καί ε′ τοῦ ἐπιπέδου (Π) δέν τέμνονται.
β) Τό σημεῖο Μ ἀνήκει στήν εὐθεία ε καί στήν εὐθεία ε′.
γ) Τά σημεῖα Α καί Β εἶναι στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρός τήν εὐθεία ε.
δ) Τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει τίς διαγωνίους του ΑΓ καί ΒΔ ἴσες.
ε) Τό σημεῖο Μ βρίσκεται στή διχοτόμο τῆς γωνίας θ.
στ) $x^2 = 1$.
ζ) $x = 2$ καί $y = -2$.

37) Νά βρεῖτε τό σύνολο ἀλήθειας σέ καθεμιά ἀπό τίς παρακάτω ἰσοδυναμίες ἀνοικτῶν προτάσεων (σύνολο ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς τό R).

α) $(x = 1) \Leftrightarrow (x = -1)$
β) $(x^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$
γ) $(3x = 6) \Leftrightarrow (x = 2)$
δ) $(x \neq 1) \Leftrightarrow (x^2 \neq 1)$
ε) $(x = 5) \Leftrightarrow (x \neq 5)$
στ) $(3x = 6) \Leftrightarrow (3x + 2 = 8)$.

18. Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΑΝΤΙΘΕΤΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ

Α) Στά προηγούμενα, ἀπό τή συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ σχηματίσαμε τήν ἀντίστροφή της $q \Rightarrow p$ καί τήν ἀντίθετή της $\sim p \Rightarrow \sim q$. Μιά ἄλλη συνεπαγωγή, πού σχετίζεται μέ τήν $p \Rightarrow q$, εἶναι ἡ $\sim q \Rightarrow \sim p$, ἡ ὁποία λέγεται **ἀντιστροφοαντίθετη** τῆς $p \Rightarrow q$.

Παραδείγματα :

1ο) $p \Rightarrow q$: $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

$\sim q \Rightarrow \sim q$: $x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$

2ο) $p \Rightarrow q$: ἄν δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου τέμνονται, τότε οἱ εὐθεῖες αὐτές δέν εἶναι παράλληλες.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: ἄν δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου εἶναι παράλληλες, τότε δέν τέμνονται.

3ο) $p \Rightarrow q$: ἄν πάρω βαθμό 17 στά Μαθηματικά, τότε θά ἔχω 16 στό ἐνδεικτικό μου (ἐννοεῖται: μέ τήν τωρινή βαθμολογία στά ἄλλα μαθήματα).

$\sim q \Rightarrow \sim p$: ἄν δέν ἔχω 16 στό ἐνδεικτικό μου, τότε δέ θά ἔχω πάρει 17 στά Μαθηματικά.

4ο) $p \Rightarrow q$: ἄν ΑΓ = ΒΔ, τότε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιο.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: ἄν τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δέν εἶναι ὀρθογώνιο, τότε ΑΓ $\neq$ ΒΔ.

Β) Ἡ πιό σημαντική ἰδιότητα τῆς ἀντιστροφαντίθετης μιᾶς συνεπαγωγῆς εἶναι ὅτι εἶναι ἰσοδύναμη (ἔχει τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας) μέ τήν ἀρχική συνεπαγωγή. Δηλαδή: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Ἄς κατασκευάσουμε τόν πίνακα ἀλήθειας γιά τίς $p \Rightarrow q$ καί $\sim q \Rightarrow \sim p$:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Ἀπό τίς στῆλες 5η καί 6η τοῦ πίνακα βλέπουμε ὅτι οἱ σύνθετες προτάσεις:

$$p \Rightarrow q \text{ καί } \sim q \Rightarrow \sim p$$

ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας, εἶναι λοιπόν ἰσοδύναμες προτάσεις. Ἡ ἰδιότητα αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει προκειμένου νά ἀποδείξουμε ὡς ἀληθή μιά συνεπαγωγή, νά ἀποδείξουμε ἀντί γι' αὐτή τήν ἀντιστροφοαντίθετή της.

Ἔτσι, π.χ., στό σύνολο τῶν παραλληλογράμμων ἰσχύει ἡ πρόταση: «ἄν τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει ἴσες τίς διαγωνίους του, τότε ἔχει τίς γωνίες του ὀρθές». Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν πρόταση: «ἄν τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δέν ἔχει ὀρθές τίς γωνίες του, τότε δέν ἔχει τίς διαγωνίους του ἴσες.

Νά ἕνα ἄλλο παράδειγμα:

Γιά ν' ἀποδείξουμε στή Γεωμετρία ὅτι: «ὁ γεωμετρικός τόπος (τό σύνολο) τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τά ἄκρα ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ», ἀποδεικνύουμε. α) Ἄν ἕνα σημεῖο Μ ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά Α καί Β, τότε ἀνήκει στή μεσοκάθετο, καί β) Ἄν τό Μ ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ, τότε ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά Α καί Β.

Μποροῦμε ὅμως νά ἐργασθοῦμε ὡς ἑξῆς: Νά ἀποδείξουμε τήν α) καί κατόπιν ἀντί γιά τή β) νά ἀποδείξουμε τήν ἀντιστροφοαντίθετη τῆς β), ὅτι δηλ. ἄν τό Μ δέν ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά Α καί Β, τότε δέν ἀνήκει στή μεσοκάθετο.

Γ) Μιά ἄλλη ἰδιότητα τῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι ὅτι εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\sim p \vee q$.
Δηλ.
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

Πραγματικά ἄν κάνουμε τόν πίνακα ἀλήθειας,

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

βλέπουμε ἀπό τίς στῆλες 4η καί 5η ὅτι $p \Rightarrow q$ καί $\sim p \vee q$ ἔχουν τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας, δηλ. εἶναι ἰσοδύναμες προτάσεις καί μποροῦμε, ὅταν χρειασθεῖ, νά ἀντικαταστήσουμε τή μιά μέ τήν ἄλλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

38) Νά διατυπώσετε τίς ἀντιστροφοαντίθετες τῶν παρακάτω συνεπαγωγῶν:

α) Ἄν τηρεῖς τίς διατάξεις τοῦ κώδικα ὁδικῆς κυκλοφορίας, τότε δέ θά πάρεις κλήση ἀπό τόν τροχονόμο.

β) Ἄν στόν Ἄρη δέν ὑπάρχει ἀτμόσφαιρα μέ ὀξυγόνο, τότε δέν ὑπάρχει ζωή ἐκεῖ.

γ) Ἄν τό σημεῖο Μ ἀνήκει στήν εὐθεία ε, τότε δέν ἀνήκει στήν ε'.

δ) Ἄν μπορέσεις νά διατρέξεις τρία χιλιόμετρα σέ 1 λεπτό, τότε θά φάω τό καπέλλο μου.

ε) Ἄν $2x = 10$, τότε $x = 5$.

στ) Ἄν ἕνα σημεῖο Μ ἀνήκει στή διχοτόμο μιᾶς γωνίας θ, τότε τό Μ ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας.

39) Νά ἀποδείξετε μέ τήν κατασκευή ἑνός πίνακα ἀλήθειας ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι $p \wedge \sim q$.

40) Κατασκευάζοντας ἕναν πίνακα τιμῶν ἀλήθειας νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ συνεπαγωγή εἶναι μεταβατική. Δηλ. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

41) Ἄν p : ε_1 εἶναι κάθετη πρός τήν ε_3
q : ε_2 εἶναι κάθετη πρός τήν ε_3
r : ε_1 εἶναι παράλληλη πρός τήν ε_2,

νά γράψετε μέ συμβολική μορφή τίς ἑξῆς προτάσεις:

α) ἄν ε_1 εἶναι κάθετη πρός ε_3 καί ε_2 κάθετη πρός τήν ε_3, τότε ἡ ε_1 εἶναι παράλληλη πρός τήν ε_2.

β) ἄν ε_1 εἶναι κάθετη πρός τήν ε_3 καί ε_2 δέν εἶναι κάθετη πρός τήν ε_3, τότε ἡ ε_1 δέν εἶναι παράλληλη πρός τήν ε_2.

42) Νά δείξετε ὅτι οἱ προτάσεις $p \Rightarrow (q \vee r)$ καί $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ εἶναι ἰσοδύναμες, ἔχουν δηλαδή τίς ἴδιες τιμές ἀλήθειας.

43) Νά ἀποδείξετε μέ κατασκευή πίνακα ἀλήθειας ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς $p \Leftrightarrow q$ εἶναι $\sim p \Leftrightarrow q$ ἤ $p \Leftrightarrow \sim q$.

Ἔπειτα νά συμπληρώσετε τόν ἑξῆς πίνακα:

	τύπος	ἄρνηση
Σύζευξη	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
Διάζευξη	$p \vee q$	——
Συνεπαγωγή	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
Ἰσοδυναμία	$p \Leftrightarrow q$	——

19. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

Α) Στήν § 12 εἴπαμε ὅτι Λογική εἶναι ἡ μελέτη τῶν κανόνων γιά κατασκευή ὀρθῶν συλλογισμῶν.

Ὁ μεγάλος Ἕλληνας φιλόσοφος Ἀριστοτέλης ὑπῆρξε ὁ πρῶτος διδάσκαλος καί θεμελιωτής τῆς Λογικῆς. Ἡ λογική, τήν ὁποία συνέγραψε, δέν ἔχει σχεδόν προαχθεῖ μέχρι σήμερα καί στήν πραγματικότητα ὅλα σχεδόν, ὅσα μελετᾶμε σήμερα, ἀνήκουν σέ ὅ,τι ὀνομάζουμε «Λογική τοῦ Ἀριστοτέλη», ἡ ὁποία ἔχει ἡλικία πάνω ἀπό 2000 χρόνια. Ἡ μαθηματικοποίηση τῆς Λογικῆς εἶναι βέβαια ἔργο τῶν μεταγενέστερων καί ἰδίως τοῦ Georges Boole (1815 - 1864) καί ἄλλων θεωρητικῶν τῆς Λογικῆς.

Στά Μαθηματικά, ἰδίως στή Γεωμετρία, ἡ ἐργασία μας συνίσταται στήν ἀπόδειξη θεωρημάτων, δηλαδή προτάσεων. Γιά νά ἀποδείξουμε ἕνα θεώρημα, πρέπει νά δείξουμε ὅτι αὐτό ἐπακολουθεῖ λογικά ἀπό τίς ὑποθέσεις μας. Γιά νά τό κάνουμε αὐτό, χρησιμοποιοῦμε τίς ἀρχές τῆς λογικῆς, δηλαδή λογικούς κανόνες.

Ἄν, π.χ., γνωρίζουμε ὅτι ἡ πρόταση $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής καί ὅτι ἡ p εἶναι ἀληθής, τότε μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι q εἶναι ἀληθής. Δηλαδή, μέ σύμβολα:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Πραγματικά ἄν σχηματίσουμε πίνακας ἀλήθειας,

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

βλέπουμε ὅτι ἡ σύνθετη πρόταση $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ **εἶναι πάντοτε ἀληθής,** ἀνεξάρτητα ἀπό τίς τιμές ἀλήθειας, τίς ὁποῖες λαμβάνουν οἱ προτάσεις, πού τήν ἀποτελοῦν. Μιά τέτοια πρόταση λέγεται **ταυτολογία** καί μέ τίς ταυτολογίες θά ἀσχοληθοῦμε εἰδικότερα στά ἑπόμενα μαθήματα.

Ἡ σύνθετη πρόταση $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$, εἶναι πάντοτε, ὅπως εἴπαμε, ἕνας ὀρθός συλλογισμός. Μερικοί γράφουν τό συλλογισμό αὐτό ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & \text{(ἀληθής)} \\ p & \text{(ἀληθής)} \end{array}\right\} \text{(ὑπόθεση τοῦ συλλογισμοῦ)}$$

$$\text{ἄρα } q \qquad \text{(συμπέρασμα τοῦ συλλογισμοῦ)}$$

Θά δώσουμε τώρα παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ λογικοῦ κανόνα:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$$

Παράδειγμα :

Ἐλάβαμε μιά πρόσκληση γιά τίς γυμναστικές ἐπιδείξεις τοῦ Γυμνασίου Α, ἡ ὁποία ἔγραφε: «ἄν βρέχει τήν ἡμέρα τῶν ἐπιδείξεων, ἡ γιορτή θά γίνει στό κλειστό γυμναστήριο» ($p \Rightarrow q$). Σήμερα εἶναι ἡ μέρα τῆς γιορτῆς καί βρέχει (p εἶναι ἀληθής). Ἀφοῦ λοιπόν οἱ προτάσεις $p \Rightarrow q$ καί p εἶναι καί οἱ δύο ἀληθεῖς, γνωρίζουμε ὅτι q εἶναι ἀληθής, δηλ. ἡ γιορτή θά γίνει στό κλειστό γυμναστήριο. Μποροῦμε τώρα νά ποῦμε ὅτι ἀποδείξαμε τό θεώρημα: «Ἡ γιορτή τῶν γυμναστικῶν ἐπιδείξεων θά γίνει στό κλειστό Γυμναστήριο».

Β) Μιά ἄλλη τεχνική πού χρησιμοποιεῖται στίς ἀποδείξεις εἶναι ἡ ἑξῆς: Ἄν γνωρίζουμε ὅτι $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής καί ἄν γνωρίζουμε ὅτι q εἶναι ψευδής, τότε μποροῦμε νά συμπεράνουμε ὅτι p εἶναι ψευδής. Συμβολικά:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$$

Πραγματικά, ἄν κατασκευάσουμε πίνακα ἀλήθειας,

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

βλέπουμε ὅτι ἡ σύνθετη πρόταση $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ εἶναι πάντοτε ἀληθής, ἀνεξάρτητα ἀπό τίς τιμές ἀλήθειας, πού παίρνουν οἱ προτάσεις ἀπό τίς ὁποῖες ἀποτελεῖται. Εἶναι δηλαδή ταυτολογία καί μποροῦμε νά τή χρησιμοποιοῦμε ὡς λογικό κανόνα.

Νά ἕνα παράδειγμα ἐφαρμογῆς αὐτοῦ τοῦ κανόνα:

Παράδειγμα :

Ὁ μαθητής Γεωργίου λέει ὅτι ὁ -5 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+6=0$. Ἄν -5 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+6=0$, τότε $(-5)^2-5\cdot(-5)+6=0$ ($p \Rightarrow q$). Ἀλλά $(-5)^2-5\cdot(-5)+6=25+25+6 \neq 0$ (q ψευδής). Ἀλλ' ἀφοῦ τώρα γνωρίζουμε ὅτι $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθής καί ὅτι q ψευδής, εἴμαστε βέβαιοι ὅτι p εἶναι ψευδής καί ὁ Γεωργίου ἔκαμε λάθος. Ὁ -5 δέν εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+6=0$.

Στό παράδειγμα αὐτό μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἀποδείξαμε τό θεώρημα: «ὁ -5 δέν εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2-5x+6=0$».

Αὐτή ἡ ἀπόδειξη μπορεῖ νά γραφτεῖ ὡς ἑξῆς:

Προτάσεις	Δικαιολογίες
1) -5 εἶναι ρίζα τῆς $x^2-5x+6=0$ $\Rightarrow [(-5)^2-5\cdot(-5)+6=0]$	1) Ὁρισμός ρίζας μιᾶς ἐξισώσεως.
2) $(-5)^2-5\cdot(-5)+6\neq 0$	2) Ἀριθμητική.
3) -5 δέν εἶναι ρίζα τῆς $x^2-5x+6=0$	3) Προτάσεις 1 καί 2 καί κανόνες τῆς λογικῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σέ καθεμιά ἀπό τίς παρακάτω ἀσκήσεις 44 - 52 (*) δίνονται ὁρισμένες προτάσεις, τίς ὁποῖες ὀνομάζουμε ἀληθεῖς, καί διατυπώνεται ἕνα θεώρημα. Σέ μερικές περιπτώσεις τό θεώρημα μπορεῖ νά εἶναι ψευδές καί σέ ἄλλες νά μή δίνονται ἀρκετές πληροφορίες, γιά νά ἀποφανθοῦμε ἄν τό θεώρημα εἶναι ἀληθές ἤ ψευδές. Ζητεῖται νά διατυπώσετε τίς ἀποδείξεις (οἱ δεδομένες ἀληθεῖς προτάσεις λέγονται: ὑποθέσεις).

44) **Ὑπόθεση.** Ὁ θεῖος Κώστας θά μᾶς συνοδεύσει στό θέατρο. ἄν ἡ μητέρα τό ἐπιτρέψει. Ἡ μητέρα τό ἐπέτρεψε.

Θεώρημα. Ὁ θεῖος Κώστας θά μᾶς συνοδεύσει στό θέατρο.

45) **Ὑπόθεση.** Ἄν δέν ὑπάρχει ὀξυγόνο στή Σελήνη, τότε δέν ὑπάρχει ζωή ἐκεῖ. Ἀποδείχθηκε τελειωτικά ὅτι δέν ὑπάρχει ὀξυγόνο στή Σελήνη.

Θεώρημα. Δέν ὑπάρχει ζωή στή Σελήνη.

46) **Ὑπόθεση** $x+y=20,\ x-y=4$.

Θεώρημα. $x\neq 1$.

47) **Ὑπόθεση** $2x-3y=7,\ x+2y=3$.

Θεώρημα. $3x-y=10$.

48) **Ὑπόθεση.** Τό γινόμενο δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός. Ὁ ἀριθμός α εἶναι θετικός. Τό γινόμενο $\alpha\,.\,\beta$ δέν εἶναι θετικός.

Θεώρημα. Ὁ ἀριθμός β εἶναι ἀρνητικός.

49) **Ὑπόθεση.** Ἄν $\alpha\in Z$, τότε $1\,.\,\alpha=\alpha$. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma\in Z$, τότε $\beta\,.\,\alpha+\gamma\,.\,\alpha=(\beta+\gamma)\,.\,\alpha$, $1+1=2$.

Θεώρημα. Γιά κάθε $\alpha\in Z$, ἰσχύει $\alpha+\alpha=2\alpha$.

50) **Ὑπόθεση.** $6+(-6)=0,8=2+6$. Γιά κάθε τριάδα ἀριθμῶν α, β, γ, ἀπό τό Z, ἰσχύει ὅτι $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$. Ἐπίσης γιά κάθε $x\in Z$ ἰσχύει ὅτι $x+0=x$.

Θεώρημα. $8+(-6)=2$.

51) Νά κατασκευάσετε ἕναν πίνακα ἀλήθειας γιά τή σύνθετη πρόταση $(p\wedge q)\vee r$.

52) Ποιά εἶναι ἡ ἄρνηση τῆς $\sim p$, δηλαδή μέ ποιά πρόταση ἰσοδυναμεῖ ἡ $\sim(\sim p)$;

53) Ἄν α, β εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, νά δείξετε ὅτι $\alpha=\beta\Rightarrow\alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

54) Νά ἀποδείξετε τό θεώρημα:

$$\text{ἄν } x=5,\ \text{τότε } 3x+6=21$$

55) Νά ἀποδείξετε τό ἀντίστροφο τοῦ θεωρήματος τῆς ἀσκήσεως 54.

56) Ἄν $\alpha,\beta\in R$, $\alpha\neq 0$ καί $\alpha(3\beta-8)=\alpha$, τί μπορεῖτε νά συμπεράνετε:

57) Ἄν $\alpha,\beta\in R$, $\beta\neq 4$ καί $(3\alpha+12)(2\beta-8)=0$, τί μπορεῖτε νά συμπεράνετε;

20. ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ

Μιά σύνθετη πρόταση, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό ἄλλες προτάσεις p, q, r κτλ., σέ πεπερασμένο πλῆθος, πού συνδέονται μέ τά σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\Rightarrow$,

---

(*) Ἀπό τίς ἀσκήσεις αὐτές νά δοθοῦν στούς μαθητές, ὅσες κατά τήν κρίση τοῦ καθηγητῆ πού διδάσκει ἀπαιτοῦνται γιά τήν ἐμπέδωση τῆς ἔννοιας «ἀπόδειξη».

$\Leftrightarrow$, $\sim$, θά ὀνομάζεται **λογικός τύπος**. Οἱ p, q, r κ.τ.λ., οἱ ὁποῖες μπορεῖ νά πάρουν τιμές Α ἤ Ψ, λέγονται **μεταβλητές** τοῦ λογικοῦ τύπου.

Οἱ τύποι, πού συναντήσαμε στά προηγούμενα: $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $\sim p$, $p \Leftrightarrow q$, ὀνομάζονται **ἁπλοί τύποι**. Σύμφωνα μ' αὐτούς τούς ὁρισμούς ἡ ἔκφραση $\sim p \wedge \sim q$ εἶναι ἕνας λογικός τύπος, ὅπως ἐπίσης καί οἱ ἐκφράσεις $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ καί $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, τίς ὁποῖες συναντήσαμε στά προηγούμενα.

Ἀπό ὅσα ἐκθέσαμε στά προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι, γιά νά βροῦμε τίς τιμές ἀλήθειας ἑνός λογικοῦ τύπου, θά σχηματίσουμε ἕναν πίνακα, πού οἱ πρῶτες στῆλες του θά ἔχουν ἐπικεφαλίδες τίς ἁπλές προτάσεις p, q, r κ.τ.λ., ἀπό τίς ὁποῖες ἀποτελεῖται ὁ τύπος. Ἄν οἱ ἁπλές προτάσεις εἶναι δύο, τότε οἱ γραμμές τοῦ πίνακα θά εἶναι $2^2 = 4$. Ἄν οἱ ἁπλές προτάσεις εἶναι τρεῖς, τότε οἱ γραμμές τοῦ πίνακα θά εἶναι $2^3 = 8$. Ἄν οἱ προτάσεις εἶναι τέσσερες, οἱ γραμμές θά εἶναι $2^4 = 16$ κ.ο.κ. Ἔπειτα θά σχηματίσουμε παραπλεύρως στῆλες μέ ἐπικεφαλίδες τούς ἁπλούς τύπους, στούς ὁποίους ἀναλύεται ὁ λογικός τύπος πού ἐξετάζουμε. Στήν τελευταία στήλη ἐπικεφαλίδα θά εἶναι ὁ σύνθετος τύπος πού ἐξετάζουμε. Ἄν στήν τελευταία στήλη οἱ τιμές εἶναι σ' ὅλες τίς γραμμές της Α, τότε αὐτός ὁ τύπος εἶναι ἀληθής, γιά ὅλες τίς τιμές τῶν ἁπλῶν του προτάσεων καί λέγεται **ταυτολογία**. Ὥστε: **ταυτολογία λέγεται κάθε λογικός τύπος, πού ἀληθεύει γιά κάθε τιμή (ἀληθή ἤ ψευδή) τῶν ἁπλῶν προτάσεών του.**(*)

Δύο σπουδαῖες ταυτολογίες συναντήσαμε στά προηγούμενα καί εἴδαμε ὅτι στά Μαθηματικά γίνεται μεγάλη χρήση τους. Εἶναι οἱ ταυτολογίες:

1) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

2) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

Δίνουμε μερικά ἀκόμα παραδείγματα ταυτολογιῶν:

1) Ἡ συνεπαγωγή $p \Rightarrow p$ εἶναι ταυτολογία.

p	$p \Rightarrow p$
Α	Α
Ψ	Α

2) Ἡ ἰσοδυναμία $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ εἶναι ταυτολογία.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α

(*) Ὁρισμένες ταυτολογίες ὀνομάζονται **ἀρχές ἤ νόμοι.** Οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλη εἶναι οἱ ἑξῆς τέσσερις:

α) Ὁ νόμος τῆς ταυτότητας: $p \Rightarrow p$

β) Ὁ νόμος τῆς διπλῆς ἀρνήσεως: $p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$

γ) Ὁ νόμος τῆς ἀποκλείσεως τοῦ τρίτου: $p \veebar \sim p$

δ) Ὁ νόμος τῆς ἀντιφάσεως: $\sim(p \wedge \sim p)$ (§ 21).

3) Ἡ σύνθετη πρόταση $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ εἶναι ταυτολογία:

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge q$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

4) Ἡ σύνθετη πρόταση $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)]$ εἶναι ταυτολογία:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \vee \sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)]$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α

5) Ἡ σύνθετη πρόταση $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ εἶναι ταυτολογία:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$p \underline{\vee} q$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$	$(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)]$
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

Ἀπό τούς πίνακες τῶν τριῶν τελευταίων παραδειγμάτων βλέπουμε ὅτι:

1) $p \Rightarrow q$ εἶναι ἰσοδύναμη πρός τήν $\sim p \vee q$
2) $p \Leftrightarrow q$ εἶναι ἰσοδύναμη πρός τήν $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
3) $p \underline{\vee} q$ εἶναι ἰσοδύναμη πρός τήν $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ὅτι μέ τίς πράξεις τῆς ἀρνήσεως, τῆς συζεύξεως καί διαζεύξεως μποροῦμε νά ἐκφράσουμε τίς ἄλλες πράξεις τῆς συνεπαγωγῆς ($\Rightarrow$), τῆς ἰσοδυναμίας ($\Leftrightarrow$) καί τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως ($\underline{\vee}$) καί ἑπομένως ὁποιοσδήποτε λογικός τύπος μπορεῖ νά διατυπωθεῖ μέ χρήση τῶν τριῶν μόνο συμβόλων: $\wedge$, $\vee$ καί $\sim$.

21. ΑΝΤΙΦΑΣΗ

Μιά σύνθετη πρόταση λέγεται ἀντίφαση, ἄν, καί μόνο ἄν, εἶναι ψευδής γιά ὁποιαδήποτε τιμή (Α ἤ Ψ) τῶν ἁπλῶν προτάσεών της.

Κλασικό παράδειγμα ἀντιφάσεως εἶναι ἡ σύνθετη πρόταση $p \wedge \sim p$.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ

Ἀπό τόν παρακάτω πίνακα βλέπουμε ὅτι ἡ ἄρνηση μιᾶς ταυτολογίας ἀποτελεῖ ἀντίφαση, καί ἡ ἄρνηση μιᾶς ἀντιφάσεως ἀποτελεῖ ταυτολογία.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \vee \sim p)$	$\sim(p \wedge \sim p)$
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

58) Νά ἀποδείξετε, χρησιμοποιώντας πίνακες ἀλήθειας, ὅτι οἱ παρακάτω τύποι ἀποτελοῦν ταυτολογίες:

α) $[\sim(p \wedge q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

β) $[\sim(p \vee q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

γ) $[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

59) Ὅμοιο ζήτημα γιά τούς τύπους:

α) $[\sim(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

β) $[\sim(p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)$

60) Νά ἀποδείξετε ἐπίσης ὅτι ἀποτελοῦν ταυτολογίες οἱ παρακάτω τύποι:

α) $(p \wedge q) \Rightarrow q$

β) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

γ) $p \Rightarrow (p \vee q)$

61) Ὅμοιο ζήτημα γιά τούς τύπους:

α) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

β) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

62) Ἐπίσης:

α) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

β) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

γ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

63) Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν α εἶναι μιά ἀληθής πρόταση, τότε $(p \wedge \alpha) \Leftrightarrow p$.

64) Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ψ εἶναι μιά ψευδής πρόταση, τότε $(p \vee \psi) \Leftrightarrow p$.

65) Νά ἀποδείξετε ὅτι $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ καί $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$.

22. ΤΥΠΟΙ ΑΛΗΘΕΙΣ ΚΑΤΑ ΣΥΓΚΥΡΙΑ (Ή ΣΧΕΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ)

Ἕνας λογικός τύπος, πού δέν εἶναι οὔτε ταυτολογία οὔτε ἀντίφαση, ἀλλ' ὁ ὁποῖος γιά μερικές τιμές τῶν μεταβλητῶν του (ἁπλῶν προτάσεών του) δίνει ἀληθές ἀποτέλεσμα καί γιά ἄλλες ψευδές, λέγεται **τύπος ἀληθής κατά συγκυρία (ἤ σχετικός τύπος).**

Παράδειγμα. Ὁ τύπος $\sim p \vee q$ εἶναι ἀληθής κατά συγκυρία.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Οἱ πίνακες ἀλήθειας ἀποτελοῦν ἕναν ἀσφαλή τρόπο, γιά νά διαπιστώνουμε ἄν ἕνας τύπος εἶναι ταυτολογία ἤ ἀντίφαση ἤ ἀληθής κατά συγκυρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

66) Ἕνας μαθητής ἔκανε τόν ἑξῆς συλλογισμό:

$p \Rightarrow q$	(ἀληθής)
q	(ἀληθής)
ἄρα p	(ἀληθής)

Νά ἐξετάσετε ἄν αὐτός ὁ συλλογισμός εἶναι πάντοτε ἀληθής. (Θά κάμετε πίνακα ἀλήθειας γιά $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$.

67) Νά δώσετε ἕνα συγκεκριμένο παράδειγμα ἀπό τήν Ἀριθμητική, ἀπό τό ὁποῖο νά φαίνεται ὅτι ὁ συλλογισμός τῆς ἀσκήσεως 66 εἶναι ἀληθής κατά συγκυρία (π.χ. $p : 1 = 3$, $q : 2 = 2$).

68) Ἕνας μαθητής ἔκανε τόν ἑξῆς συλλογισμό:

Ἄν $x = 0$ καί $y = z$, τότε $y > 1$.

Ἀλλά $y \not> 1$. Ἄρα $y \neq z$.

Νά ἐλέγξετε τό συλλογισμό αὐτό.

(Νά παραστήσετε μέ $p : x = 0$, $q : y = z$, $r : y > 1$ κτλ.)

69) Νά ἐλέγξετε τούς ἑξῆς συλλογισμούς:

α) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

β) $x < 5 \Rightarrow x \neq y$, $x \neq y \wedge x < 5$.

Ἄρα $x \not< 5 \wedge x = y$

γ) $x = 2 \vee x < 2$, $x = 3 x \neq 2$, $x = 3 \Rightarrow x \not< 2$.

Ἄρα $x \neq 3$

δ) $x = y$, $y \neq 1$, $(x = y \wedge y \neq 1)$. Ἄρα $y \neq 1$.

70) Νά δείξετε ὅτι:

α) ὁ τύπος $[\sim(p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ εἶναι μιά ταυτολογία.

β) ὁ τύπος $(p \wedge q) \wedge \sim q$ ἀποτελεῖ ἀντίφαση.

γ) ὁ τύπος $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$ εἶναι σχετικός τύπος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΣΥΝΟΛΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

23. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.

Μάθαμε στό Γυμνάσιο ὅτι τή λέξη **σύνολο** τή χρησιμοποιοῦμε ὅταν θέλουμε ν' ἀναφερθοῦμε σέ ἀντικείμενα ὁρισμένα καί σαφῶς ξεχωρισμένα, πού τά θεωροῦμε ὡς μιά ὁλότητα.

Ἔτσι, π.χ., μιλοῦμε γιά τό σύνολο τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεώς μας, τό σύνολο τῶν ἀγροτῶν τῆς χώρας μας, τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου, τό σύνολο τῶν σημείων ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος, τό σύνολο τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου κ.τ.λ.

Τά ἀντικείμενα πού συναποτελοῦν ἕνα σύνολο λέγονται **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου.

Ὀνομάζουμε τά σύνολα γενικῶς μέ κεφαλαια γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου μας καί τά στοιχεῖα τους μέ μικρά.

Ὅταν ἕνα στοιχεῖο x ἀνήκει σ' ἕνα σύνολο A, γράφουμε συμβολικά $x \in A$.

Ὅταν ἕνα στοιχεῖο x δέν ἀνήκει στό σύνολο A, γράφουμε $x \notin A$.

Γιά ἕνα σύνολο A καί ἕνα στοιχεῖο x ἀληθεύει ἤ $x \in A$ ἤ $x \notin A$.

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεμένη μέ τήν ἔννοια τῆς βασικῆς ἰσότητας, ἡ ὁποία συμβολίζεται μέ « $=$ » καί μέ βάση αὐτή θεωροῦμε ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου ξεχωρίζουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο. Λέμε ὅτι δύο στοιχεῖα α καί β εἶναι **ἴσα** καί γράφουμε $\alpha = \beta$, ἄν, καί μόνο ἄν, τά α καί β εἶναι ὀνόματα τοῦ ἴδιου στοιχείου. Ἔτσι, π.χ., στό σύνολο Q εἶναι $2 = \frac{10}{5}$.

Ὅταν δέν εἶναι $\alpha = \beta$, τότε λέμε ὅτι α εἶναι διαφορετικό ἀπό τό β καί γράφουμε συμβολικά $\alpha \neq \beta$. Γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα x καί y θά ἰσχύει:

$$\text{ἤ } x = y \quad \text{ἤ } x \neq y.$$

Ὅπως μᾶς εἶναι γνωστό, ἕνα σύνολο συμβολίζεται:

1) μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του μέσα σέ ἄγκιστρο,
2) μέ περιγραφή μιᾶς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῶν στοιχείων του μέ τή βοήθεια μεταβλητῆς καί ἀγκίστρου.

Π.χ. $N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

$Z = \{ x \mid x$ ἀκέραιος τῆς Ἄλγεβρας $\}$

Γιά εὐκολία στή διατύπωση γενικῶν προτάσεων εἰσάγεται στά μαθηματικά ἕνα σύνολο, πού λέγεται **κενὸ σύνολο** καί συμβολίζεται μέ $\varnothing$. Στό σύνολο αὐτό δέν ἀνήκει κανένα στοιχεῖο.

24. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

Λέμε ὅτι ἕνα σύνολο Α εἶναι **ὑποσύνολο** ἑνός συνόλου Β, καί συμβολίζουμε $A \subseteq B$, ἄν, καί μόνο ἄν, κάθε στοιχεῖο τοῦ Α εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ Β. Συμβολικά ὁ ὁρισμός αὐτός διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Ἔτσι, π.χ., τό σύνολο N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν: $N \subseteq R$.

Δεχόμαστε ὅτι τό κενό σύνολο $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολο ὁποιουδήποτε ἄλλου συνόλου, δηλ. $\varnothing \subseteq A$, γιά κάθε σύνολο Α. Τό κενό σύνολο ἔχει ὑποσύνολο μόνο τόν ἑαυτό του, δηλ. $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1) $A \subseteq A$ (ἀνακλαστική ἤ αὐτοπαθής).
2) $(A \subseteq B \land B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική).

Ἕνα σύνολο Α λέγεται **γνήσιο** ὑποσύνολο ἑνός ἄλλου συνόλου Β, ἄν, καί μόνο ἄν, τό Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Β καί ὑπάρχει στοιχεῖο $x \in B$ μέ $x \notin A$. Συμβολικά γράφουμε τότε $A \subset B$. Δηλαδή:

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \land (\exists \psi \in B : \psi \notin A)$$

Ἄν ἕνα σύνολο Α δέν εἶναι ὑποσύνολο συνόλου Β θά γράφουμε: $A \nsubseteq B$.

Ἡ ἔννοια **γνήσιο ὑποσύνολο** ἔχει μόνο τή μεταβατική ἰδιότητα:

$$(A \subset B \land B \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma.$$

Τό σύνολο Β, τοῦ ὁποίου θεωροῦμε διάφορα ὑποσύνολα Α, Δ, Ε κ.τ.λ., λέγεται **σύνολο ἀναφορᾶς** ἤ **ὑπερσύνολο** τῶν Α, Δ, Ε κ.τ.λ.

25. ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

Δύο σύνολα Α καί Β λέμε ὅτι εἶναι **ἴσα**, καί συμβολίζουμε $A = B$, ἄν, καί μόνο ἄν, κάθε στοιχεῖο τοῦ Α εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ Β καί ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι καί στοιχεῖο τοῦ Α. Δηλαδή, συμβολικά:

$$(A = B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \land (\forall \psi : \psi \in B \Rightarrow \psi \in A)$$

Ἔτσι, π.χ., ἄν $A = \{ 1, 2, 3 \}$ καί $B = \left\{ \frac{5}{5}, 3, 2 \right\}$ τότε ἔχουμε $A = B$.

Ἄν δύο σύνολα Α καί Β δέν εἶναι ἴσα, τότε λέμε ὅτι τό Α εἶναι **διαφορετικὸ** ἀπό τό Β καί συμβολίζουμε $A \neq B$.

Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῆς ἰσότητας τῶν συνόλων:

1) $A = A$ (ἀνακλαστική ἤ αὐτοπαθής).
2) $A = B \Rightarrow B = A$ (συμμετρική).
3) $(A = B \land B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$ (μεταβατική).

Ἰσχύει ἐπίσης ἡ ἑξῆς ἰδιότητα:
$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$ (ἀντισυμμετρική).

Πραγματικά:

$$\left.\begin{array}{l}(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \\ (B \subseteq A) \Leftrightarrow (\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A)\end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

26. ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ ΣΥΝΟΛΟΥ

Ὅταν ἔχουμε ἕνα σύνολο U καί θεωρήσουμε ὅλα τά ὑποσύνολά του ὡς ἀντικείμενα, δηλ. ὡς στοιχεῖα ἑνός νέου συνόλου, τότε ὁρίζεται ἕνα νέο σύνολο, πού λέγεται **δυναμοσύνολο** τοῦ U. Τό **δυναμοσύνολο** αὐτό συμβολίζεται μέ $\mathscr{P}(U)$ καί σ' αὐτό ἀνήκουν καί τό κενό σύνολο καί τό ἴδιο τό U.

Ὅπως μάθαμε σέ προηγούμενες τάξεις, κάθε σύνολο διαφορετικό ἀπό τό κενό ἔχει τό λιγότερο δύο ὑποσύνολα: τό κενό σύνολο καί τόν ἑαυτό του. Ἕνα σύνολο μέ δύο στοιχεῖα ἔχει $2^2=4$ ὑποσύνολα. Ἕνα σύνολο μέ τρία στοιχεῖα ἔχει $2^3 = 8$ ὑποσύνολα, ἕνα μέ πέντε στοιχεῖα ἔχει 2^5 ὑποσύνολα καί γενικά ἕνα σύνολο μέ ν στοιχεῖα ἔχει 2^ν ὑποσύνολα. Ἔτσι, π.χ., ἄν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Παρατηροῦμε ὅτι τό σύνολο A μέ τρία στοιχεῖα ἔχει $2^3 = 8$ ὑποσύνολα.

27. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΟΥ VENN

Σέ πολλές περιπτώσεις διαυκολυνόμαστε στή μελέτη ἑνός ζητήματος, πού ἀναφέρεται σέ σύνολα, ἄν χρησιμοποιήσουμε γραφικές παραστάσεις τους, δηλ. τά γνωστά μας ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις διαγράμματα τοῦ Venn. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι σ' ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου παρασταίνονται μέ σημεῖα ἀνεξάρτητα ἀπό τή φύση τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71) Ἄν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, νά ἐλέγξετε ἄν εἶναι ἀληθεῖς καί ποιές ἀπό τίς ἀκόλουθες προτάσεις:

$$\beta \in A, \ \varepsilon \notin A, \ \zeta \in A, \ 8 \in A, \ \gamma \in A$$

72) Νά δώσετε μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων τους τά σύνολα:
α) $\{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, β) $\{x \in N \mid x < 2\}$.

73) Νά βρεῖτε χαρακτηριστική ἰδιότητα γιά τήν περιγραφή τῶν ἑξῆς συνόλων:
α) $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$
β) $\{1, 4, 9, \ldots\}$
γ) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

74) Νά ἀναγράψετε δύο σύνολα πού τά στοιχεῖα τους νά εἶναι σύνολα.

75) Ἄν $A \subseteq B$ καί $A \neq B$, τί συμπεραίνετε γιά τό σύνολο A;

76) Νά καθορίσετε μέ ἀναγραφή τῶν στοιχείων του τό σύνολο $\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$.

77) Νά ἀποδείξετε ὅτι $(A \subset B \wedge B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$.

78) σχηματίσετε τό δυναμοσύνολο τοῦ $\{\varnothing, \alpha, \beta\}$

79) Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν $A \subseteq \varnothing$, τότε $A = \varnothing$.

80) Ποιό εἶναι τό δυναμοσύνολο τοῦ κενοῦ συνόλου;

81) Νά ἐξετάσετε ἄν τό κενό σύνολο εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο ἑνός ὁποιουδήποτε συνόλου A.

82) Νά ἀναγράψετε τό σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$(x + 1)(2x + 1)(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0,$$

α) ὅταν σύνολο ἀναφορᾶς εἶναι τό R,

β) ὅταν σύνολο ἀναφορᾶς εἶναι τό Q,

γ) ὅταν σύνολο ἀναφορᾶς εἶναι τό N.

28. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σύνολο ἀναφορᾶς U μή κενό καί τελείως ὁρισμένο καί τά ὑποσύνολά του ἄς τά συμβολίσουμε μέ A, B, Γ, . . ., X, Ψ, . . .

Ὅπως ξέρουμε δύο ὑποσύνολα τοῦ U, ἔστω τά A, B, λέγονται ἴσα, ἄν, καί μόνο ἄν, γιά κάθε $x \in A \Rightarrow x \in B$ καί γιά κάθε $y \in B \Rightarrow y \in A$. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητας αὐτῆς μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς βασική ἰσότητα στό σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ U, πού ὅπως εἶναι γνωστό, τό συμβολίζουμε μέ $\mathscr{P}(U)$. Μέ βάση τήν ἰσότητα αὐτή τά ὑποσύνολα τοῦ U ξεχωρίζουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο. Στό σύνολο αὐτό, τῶν ὑποσυνόλων τοῦ U, ὁρίζονται πράξεις ὡς ἑξῆς:

A) Ἕνωση συνόλων

Ὡς ἕνωση δύο συνόλων A καί B, ἡ ὁποία συμβολίζεται μέ $A \cup B$, ὁρίζεται τό σύνολο ὅλων τῶν στοιχείων, πού ἀνήκουν στό A εἴτε στό B.

Συμβολικά γράφουμε:

$$A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \}$$

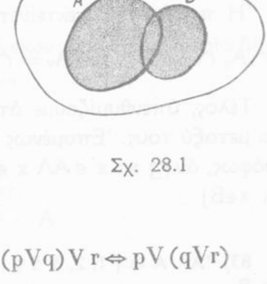
Ἄν τά σύνολα A καί B ὁρίζονται μέ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῶν στοιχείων τους, δηλ. ἄν, π.χ., εἶναι:

$$A = \{ x \in U \mid p(x) \} \quad \text{καί} \quad B = \{ x \in U \mid q(x) \},$$

τότε ἔχουμε, ὅπως γνωρίζουμε ἀπό τή Λογική, ὅτι:

$$A \cup B = \{ x \in U \mid p(x) \vee q(x) \}$$

Ἡ γραφική παράσταση τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων A καί B φαίνεται στό παραπλεύρως διάγραμμα. Εἶναι τό σκιασμένο μέρος τοῦ σχήματος.



Σχ. 28.1

Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1) $A \cup B = B \cup A$ (ἀντιμεταθετική).

Πραγματικά: $A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \} = \{ x \in U \mid x \in B \vee x \in A \}$ (ἐπειδή $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$) $= B \cup A$.

2) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ (προσεταιριστική).

Πραγματικά:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup \Gamma &= \{ x \in U \mid x \in (A \cup B) \vee x \in \Gamma \} \\ &= \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in \Gamma \} \\ &= \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in (B \cup \Gamma) \}, \text{ ἐπειδή } (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ &= A \cup (B \cup \Gamma).\end{aligned}$$

'Επειδή ἰσχύει ἡ ἰδιότητα (2), συμφωνοῦμε νά γράφουμε:

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$$

Ἡ πράξη $\cup$ ἐπεκτείνεται γιά περισσότερα σύνολα:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_\nu = \bigcup_{\kappa=1}^{\nu} A_\kappa = \{x \in U \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_\nu\}.$$

B) Τομή συνόλων

Ὡς τομή δύο συνόλων A καί B ὁρίζεται τό σύνολο τῶν στοιχείων, πού ἀνήκουν στό A καί στό B συγχρόνως καί συμβολίζεται μέ $A \cap B$.

Συμβολικά γράφουμε τόν ὁρισμό ὡς ἑξῆς:

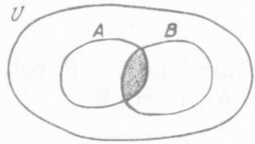
$$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

Ἄν τά σύνολα A καί B δίνονται μέ χαρακτηριστική ἰδιότητα τῶν στοιχείων τους, π.χ., ἄν εἶναι:

$$A = \{ x \in U \mid p(x) \} \quad \text{καί} \quad B = \{ x \in U \mid q(x) \},$$

τότε θά ἔχουμε:

$$A \cap B = \{ x \in U \mid p(x) \wedge q(x) \}$$



Σχ. 28.2

Ἡ γραφική παράσταση τῆς τομῆς δύο συνόλων A καί B φαίνεται στό παραπλεύρως διάγραμμα. Εἶναι τό σκιασμένο μέρος τοῦ σχήματος.

Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1) $A \cap B = B \cap A$ (ἀντιμεταθετική).

Πραγματικά:

$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \} = \{ x \in U \mid x \in B \wedge x \in A \}$, (ἐπειδή $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$) $= B \cap A$

2) $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ (προσεταιριστική).

Πραγματικά:

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cap \Gamma &= \{ x \in U \mid x \in (A \cap B) \wedge x \in \Gamma \} \\ &= \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in \Gamma \} \\ &= \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in (B \cap \Gamma) \}, \text{ ἐπειδή } (p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \\ &= A \cap (B \cap \Gamma).\end{aligned}$$

'Επειδή ἰσχύει ἡ ἰδιότητα 2), συμφωνοῦμε νά γράφουμε:

$$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$$

Ἡ πράξη $\cap$ ἐπεκτείνεται γιά περισσότερα σύνολα:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_\nu = \bigcap_{\kappa=1}^{\nu} A_\kappa = \{x \in U \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_\nu\}$$

Τέλος, ὑπενθυμίζουμε ὅτι, ἄν $A \cap B = \varnothing$, τότε τά σύνολα A, B λέγονται ξένα μεταξύ τους. Ἑπομένως ἄν $A \cap B \neq \varnothing$, τότε $[\exists x : x \in A \wedge x \in B]$ καί ἀντιστρόφως, ἄν $[\exists x : x \in A \wedge x \in B]$, τότε $A \cap B \neq \varnothing$ ἤ καί $A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow [\exists x : x \in A \wedge x \in B]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83) Ἄν $A = \{ 1, 2, 3, 5 \}$ καί $B = \{ -1, 3, 7 \}$, νά σχηματίσετε τά σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$.

84) Ἄν $A = \{ x \in R \mid x > 0 \}$, $B = \{x \in R \mid 0 < x < 8\}$ καί $\Gamma = \{x \in R \mid 2 < x < 6\}$ νά συμβολίσετε μέ χρήση μεταβλητῆς τά σύνολα $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \Gamma$, $A \cup \Gamma$, $B \cup \Gamma$, $B \cap \Gamma$. $A \cap B \cap \Gamma$, $A \cup B \cup \Gamma$.

85) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $A \cup A = A$ β) $A \cup \varnothing = A$

86) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $A \cap A = A$ β) $A \cap \varnothing = \varnothing$

87) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $A \cap B \subseteq A$ β) $A \cap B \subseteq B$

88) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $A \subseteq A \cup B$ β) $B \subseteq A \cup B$

89) Νά ἀποδείξετε ὅτι $(A \cup B = \varnothing) \Rightarrow (A = \varnothing \wedge B = \varnothing)$

90) Ὁμοίως ὅτι, ἄν $A \subseteq B$, τότε: α) $B = A \cup B$ β) $A = A \cap B$

91) Νά ἀποδείξετε ὅτι $(A \cap B) \cap \Gamma \subseteq A \cap (B \cap \Gamma)$ καί ἐπίσης ὅτι $A \cap (B \cap \Gamma) \subseteq$ $\subseteq (A \cap B) \cap \Gamma$. Τί συμπεραίνετε ἀπό αὐτά;

92) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

β) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ (ἐπιμεριστικές ἰδιότητες)

Νά δείξετε καί μέ διάγραμμα τοῦ Venn ὅτι αὐτές οἱ ἰδιότητες ἀληθεύουν.

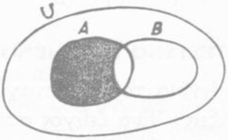
Γ) Διαφορά συνόλων

Ὡς διαφορά συνόλου B ἀπό σύνολο A, πού συμβολίζεται μέ $A - B$, ὁρίζεται τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ A, τά ὁποῖα δέν ἀνήκουν στό B. Ἄν τά A καί B εἶναι ξένα, τότε δεχόμαστε ὅτι $A - B = A$. Τέλος, ἄν $A = B$, τότε $A - B = A - A = \varnothing$.

Συμβολικά ὁ ὁρισμός αὐτός γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$A - B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

Ἡ γραφική παράσταση τῆς διαφορᾶς $A - B$ φαίνεται στό παραπλεύρως διάγραμμα. Εἶναι τό σκιασμένο μέρος τοῦ σχήματος.



Σχ. 28.3

Ἀπό τό ἴδιο σχῆμα βλέπουμε ἀμέσως ὅτι:

$$(A - B) \cup B = A \cup B.$$

Δ) Συμπλήρωμα συνόλου

Ὀνομάζουμε συμπλήρωμα τοῦ συνόλου A ὡς πρός τό U, καί τό συμβολίζουμε μέ A^c εἴτε μέ $\underset{U}{C}A$, τό σύνολο $U - A$, δηλ. τό σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ U, τά ὁποῖα δέν ἀνήκουν στό A.

Συμβολικά ὁ ὁρισμός αὐτός γράφεται:

$$A^c = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

Εἶναι φανερό ἀπό τούς παραπάνω ὁρισμούς ὅτι:

1) $A \cap A^c = \varnothing$, 2) $A \cup A^c = U$ καί 3) $(A^c)^c = A$

Ἐπίσης ὅτι $\underset{U}{C}U = \varnothing$ καί $\underset{U}{C}\varnothing = U$

Ἀκόμα ἀπό τό σχῆμα 28.3 ἔχουμε ὅτι:

$$A - B = A \cap B^c$$

Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες, οἱ ὁποῖες λέγονται νόμοι τοῦ De Morgan:

1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ἀποδείχνουμε ἐδῶ τήν ἰσότητα 2):

Γιά κάθε $x \in U$, $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow \sim(x \in A \vee x \in B)$ * $\Rightarrow$ $\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in (A^c \cap B^c)$.

Ὥστε: $(A \cup B)^c \subseteq (A^c \cap B^c)$ (α)

Ἀντιστρόφως:

Γιά κάθε $x \in U$, $x \in (A^c \cap B^c) \Rightarrow (x \in A^c \wedge x \in B^c) \Rightarrow \sim(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow$ $(x \notin A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$.

Ὥστε εἶναι: $(A^c \cap B^c) \subseteq (A \cup B)^c$ (β)

Ἀπό τίς (α) καί (β) ἕπεται ἡ παραπάνω ἰσότητα (2).

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀποδείχνεται ἡ (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

93) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$(A = B^c) \Leftrightarrow (A^c = B)$$

94) Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σύνολα A καί B – A εἶναι ξένα μεταξύ τους.

95) Νά ἀποδείξετε ὅτι $A - \varnothing = A$.

96) Νά ἀποδείξετε καί μέ συλλογισμό ὅτι

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

(Θά ἀντικαταστήσετε τό A – B μέ τό ἴσο του $A \cap B^c$ καί θά ἐφαρμόσετε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα τῆς ἑνώσεως ὡς πρός τήν τομή).

97) Νά ἁπλοποιήσετε τίς ἑξῆς παραστάσεις:

α) $B \cap (A \cup A^c)$ β) $A \cup (\Gamma \cup \Gamma^c)$

γ) $(B \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c)$ δ) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

29. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΟ Β

Ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τίς προηγούμενες τάξεις: Ἕνα ζεῦγος στοιχείων λέγεται διατεταγμένο ζεῦγος, ἄν, καί μόνο ἄν, ἔχει ὁρισθεῖ ποιό στοιχεῖο εἶναι πρῶτο καί ποιό δεύτερο. Ἔτσι, π.χ., ἄν γιά τά στοιχεῖα α, β ὁρίσουμε ὡς πρῶτο τό α καί ὡς δεύτερο τό β ἔχουμε καθορίσει τή διάταξη στό ζεῦγος. Αὐτό τό συμβολίζουμε μέ τό (α, β). Ἐνῶ, ἄν ὁρίσουμε ὡς πρῶτο τό β καί ὡς δεύτερο τό α, θά γράψουμε (β, α).

Σ' ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος (α, β) τό α λέγεται: **τό πρῶτο μέλος** τοῦ ζεύγους καί τό β: **τό δεύτερο μέλος** τοῦ ζεύγους.

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τοῦ διατεταγμένου ζεύγους ἕπεται ὅτι (α, β) ≠ (β, α). Εἶναι ὅμως δυνατό νά ἔχουμε ζεῦγος μέ τό ἴδιο πρῶτο καί δεύτερο μέλος, ὅπως, π.χ., τά (α, α), (β, β), (γ, γ) κ.τ.λ.

Δύο διατεταγμένα ζεύγη (α, β) καί (α', β') ὁρίζονται ὡς ἴσα, ἄν, καί μόνο

(*) ἐπειδή: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$.

ἄν, εἶναι $\alpha = \alpha'$ καί $\beta = \beta'$.

Ἄν A καί B εἶναι δύο μή κενά σύνολα, τό σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) μέ $\alpha \in A$ καί $\beta \in B$, λέγεται: καρτεσιανό γινόμενο τοῦ συνόλου A ἐπί τό σύνολο B καί συμβολίζεται μέ A x B.

Συμβολικά ὁ ὁρισμός αὐτός γράφεται:

$$A \times B = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B \}$$

Ἄν $A = \varnothing$ ἤ $B = \varnothing$, τότε $A \times B = \varnothing$ ἀπό ὁρισμό. Εἶναι δηλ. $A \times \varnothing = \varnothing$ καί $\varnothing \times B = \varnothing$.

Ἄν $A = B$, τότε $A \times A = A^2 = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \wedge \beta \in A \}$

Παραδείγματα: 1ο) Ἄν $A = \{ 1, 2 \}$ καί $B = \{ \alpha, \beta \}$, τότε $A \times B = \{ (1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta) \}$, ἐνῶ $B \times A = \{ (\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2) \}$. Ὥστε: $A \times B \neq B \times A$

2ο) Ἄν $A = N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$, τότε:

$$N \times N = N^2 = \left\{ \begin{array}{llll} (1,1), & (1,2), & (1,3), & \ldots \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & \ldots \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{array} \right\}$$

Ὑπενθυμίζουμε τά ἑξῆς:

1) Ἡ ἀντιμεταθετική ἰδιότητα δέν ἰσχύει στό καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων. Δηλ. εἶναι $A \times B \neq B \times A$ ἐκτός ἄν εἶναι $A = B$ ἤ ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι τό κενό σύνολο.

2) Ἄν τό σύνολο A ἔχει μ στοιχεῖα καί τό B ἔχει ν στοιχεῖα, τότε τό $A \times B$ ἔχει $\mu \cdot \nu$ (τό πλῆθος) στοιχεῖα. Ἄν τό A ἤ τό B ἔχει ἄπειρο πλῆθος στοιχείων, τότε τό καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ ἔχει ἐπίσης ἄπειρο πλῆθος στοιχείων.

3) Μποροῦμε νά παραστήσουμε ἕνα καρτεσιανό γινόμενο μέ πίνακα διπλῆς εἰσόδου, ὅπως μάθαμε στή Γ' τάξη τοῦ Γυμνασίου.

5) Ἄν θεωρήσουμε τά μέλη ἑνός διατεταγμένου ζεύγους ὡς συντεταγμένες σημείου στό ἐπίπεδο δύο ἀξόνων $x'Ox$, $y'Oy$, τότε κάθε διατεταγμένο ζεῦγος παρασταίνει ἕνα σημεῖο σ' αὐτό τό ἐπίπεδο. Ἑπομένως ἕνα καρτεσιανό γινόμενο μέ δύο παράγοντες, π.χ. τό $A \times B$, θά παρασταίνει τότε ἕνα σύνολο σημείων στό ἐπίπεδο αὐτό. Ἔχουμε τότε τή **γεωμετρική (ἤ γραφική) παράσταση** τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

98) Ἄν τά διατεταγμένα ζεύγη $(x + y, 1)$ καί $(5, x - y)$ εἶναι ἴσα, νά βρεῖτε τά x καί y.

99) Ἄν $A = \{ 1, 2, 3 \}$ καί $B = \{ 0, 1, -2 \}$, νά σχηματίσετε τό $A \times B$. Ἔπειτα νά κάνετε τή γεωμετρική του παράσταση.

100) Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

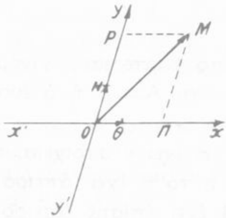
β) Ἄν $A \subseteq B$, τότε $A \times A \subseteq B \times B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

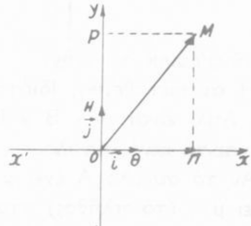
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

30. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Α) Σ' ἕνα ἐπίπεδο (Ε) χαράζουμε δύο τεμνόμενους ἄξονες x'Ox καί y'Oy, πού ἔχουν κοινή ἀρχή τό σημεῖο Ο τῆς τομῆς τους, καί μοναδιαῖα διανύσματα $\overrightarrow{O\Theta} = \overrightarrow{i}$ καί $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{j}$ ἀντιστοίχως (σχ. 30.1 καί 30.2).



Σχ. 30.1



ΣΧ. 30.2

Οἱ δύο αὐτοί ἄξονες ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς ἤ, ὅπως συνήθως λέμε, **ἕνα σύστημα ἀξόνων** στό ἐπίπεδο (Ε).

Ἔστω τώρα ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου (Ε). Ἀπό τό Μ φέρνουμε εὐθεῖες παράλληλες στούς ἄξονες. Ὁρίζονται ἔτσι ἕνα σημεῖο Π στόν ἄξονα x'Ox καί ἕνα σημεῖο P στόν ἄξονα y'Oy. Ὁρίζονται ἐπίσης τά διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{O\Pi}$, $\overrightarrow{OP}$.

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **διανυσματική ἀκτίνα** τοῦ σημείου Μ.
» » $\overrightarrow{O\Pi}$ » **τετμημένη προβολή** τοῦ $\overrightarrow{OM}$.
» » $\overrightarrow{OP}$ » **τεταγμένη προβολή** τοῦ $\overrightarrow{OM}$.
Ἡ ἀλγεβρ. τιμή $\overline{O\Pi}$, τοῦ $\overrightarrow{O\Pi}$, λέγεται **τετμημένη** τοῦ σημείου Μ.
» » » $\overline{OP}$, » $\overrightarrow{OP}$, » **τεταγμένη** τοῦ σημείου Μ.

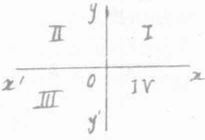
Ἡ τετμημένη ἑνός σημείου Μ συμβολίζεται μέ x_M καί ἡ τεταγμένη του μέ y_M. Οἱ ἀριθμοί x_M, y_M λέγονται **συντεταγμένες** τοῦ σημείου Μ.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι: 1) μὲ τόν τρόπο, τόν ὁποῖο εἴδαμε προηγουμένως, σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καί μόνο ἕνα, διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ πρῶτο μέλος του τήν τετμημένη x_M, τοῦ Μ, καί δεύτερο μέλος του τήν τεταγμένη y_M, τοῦ Μ, δηλαδή τό διατεταγμένο ζεῦγος (x_M, y_M). 2) Ἀντιστρόφως: σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (x, y) ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, τό $M(x, y)$, τό ὁποῖο ὁρίζεται, ἄν πάρουμε πάνω στούς $x'x$ καί $y'y$ διανύσματα $\overrightarrow{O\Pi}$ καί $\overrightarrow{OP}$ τέτοια, ὥστε $\overline{O\Pi} = x$ καί $\overline{OP} = y$, καί φέρουμε ἀπό τό Π παράλληλη πρός τόν ἄξονα $y'y$ καί ἀπό τό Ρ παράλληλη πρός τόν $x'x$. Ἡ τομή αὐτῶν τῶν δύο εὐθειῶν ὁρίζει τό Μ.

Ὑπάρχει λοιπόν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τοῦ συνόλου R x R καί τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Ε).

Γιά νά ἐκφράσουμε ὅτι ἕνα σημεῖο Μ ἔχει τετμημένη x καί τεταγμένη y, γράφουμε $M = (x, y)$ ἤ $M(x, y)$.

Οἱ δυό ἄξονες σχηματίζουν τέσσερις γωνίες, οἱ ὁποῖες λέγονται **πρώτη, δεύτερη, τρίτη καί τέταρτη γωνία τῶν ἀξόνων,** ὅπως σημειώνονται μέ τή σειρά I, II, III, IV στό σχ. 30.3.



Σχ. 30.3

Κάθε σημεῖο ἐσωτερικό τῆς γωνίας I ἔχει συντεταγμένες θετικές.

Κάθε σημεῖο ἐσωτερικό τῆς γωνίας III ἔχει συντεταγμένες ἀρνητικές.

Κάθε σημεῖο ἐσωτερικό τῆς γωνίας II ἔχει τετμημένη ἀρνητική καί τεταγμένη θετική.

Κάθε σημεῖο ἐσωτερικό τῆς γωνίας IV ἔχει τετμημένη θετική καί τεταγμένη ἀρνητική.

Ὁ ἄξονας $x'Ox$ λέγεται **ἄξονας τῶν x ἤ ἄξονας τῶν τετμημένων** καί ὁ $y'Oy$ λέγεται **ἄξονας τῶν ψ** ἤ **ἄξονας τῶν τεταγμένων.** Ἡ τομή τῶν ἀξόνων Ο λέγεται **ἀρχή** τῶν ἀξόνων. Ἡ ἀρχή Ο ἔχει καί τίς δύο τίς συντεταγμένες μηδέν, δηλ. $O(0, 0)$.

Οἱ ἄξονες λέγονται **ὀρθογώνιοι ἄξονες** συντεταγμένων, ὅταν εἶναι κάθετοι μεταξύ τους, ἀλλιῶς λέγονται **πλαγιογώνιοι** (σχ. 30.1).

Ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι καί ἐπιπλέον τά μοναδιαῖα διανύσματα $\overrightarrow{O\Theta}$ καί $\overrightarrow{OH}$ ἔχουν ἴσα μήκη, τότε λέμε ὅτι ἔχουμε ἕνα **ὀρθοκανονικό** σύστημα ἀξόνων.

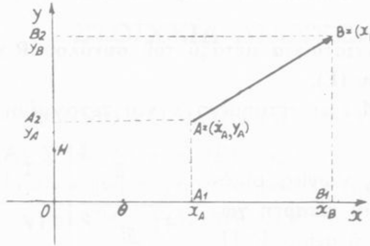
Ἔτσι μέ τίς συντεταγμένες καθορίζεται ἡ θέση ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο.

31. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΕΩΣ ΕΦΑΡ. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

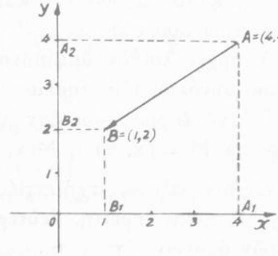
Ἔστω (σχ. 31.1) ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο (Ε) ἐφοδιασμένο μέ τό σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων xOy καί ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ πάνω στό (Ε). Φέρνουμε ἀπό τά Α, Β τίς παράλληλες πρός τούς ἄξονες. Ὁρίζουμε ἔτσι τά ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}$ πάνω στόν ἄξονα $x'Ox$ καί $\overrightarrow{A_2B_2}$ πάνω στόν ἄξονα y΄Oy. Τό $\overrightarrow{A_1B_1}$ ὀνομάζεται: **τετμημένη προβολή** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καί τό $\overrightarrow{A_2B_2}$ **τεταγμένη προβολή** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

Ἄν ὁ φορέας τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (τό ὁποῖο ὑποτίθεται ὄχι μηδενικό) εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα Oy, τότε ἡ τετμημένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τό μηδενικό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_1}$ (Σχ. 31.3).

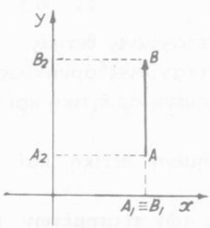
Ἄν ὁ φορέας τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα Ox, τότε ἡ τεταγμένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τό μηδενικό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{A_2A_2}$ (Σχ. 31.4).



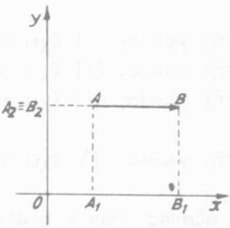
Σχ. 31.1



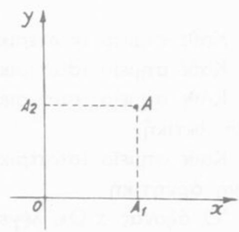
Σχ. 31.2



Σχ. 31.3



Σχ. 31.4



Σχ. 31.5

Ἄν τό $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μηδενικό διάνυσμα, π.χ. τό $\overrightarrow{AA}$, τότε καί οἱ δύο προβολές του εἶναι μηδενικά διανύσματα (Σχ. 31.5).

Ἔστω τώρα ὅτι εἶναι: $A = (x_A, y_A)$, δηλ. ἡ τετμημένη τοῦ σημείου A εἶναι x_A καί ἡ τεταγμένη του εἶναι y_A. Ἔστω ἐπίσης ὅτι εἶναι $B = (x_B, y_B)$ Ὁ ἀριθμός $x_B - x_A$ (τετμημένη τοῦ πέρατος μεῖον τετμημένη τῆς ἀρχῆς τοῦ $\overrightarrow{AB}$) ὀνομάζεται: **ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$** καί συγχρόνως: **ἡ ἀλγ. τιμή τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ πάνω στόν ἄξονα x΄Ox,** καί συμβολίζεται μέ $\overline{A_1B_1}$ (Σχ. 31.1).

Ὁ ἀριθμός $y_B - y_A$ (τεταγμένη τοῦ πέρατος μεῖον τεταγμένη τῆς ἀρχῆς τοῦ διανύσματος) ὀνομάζεται: **ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$** καί συγχρόνως : **ἡ ἀλγ. τιμή τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ πάνω στόν ἄξονα y΄Oy,** καί συμβολίζεται μέ $\overline{A_2B_2}$.

Ἔτσι, π.χ., στό Σχ. 31.2 ἡ τετμημένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τό $\overrightarrow{A_1B_1}$. Ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $1 - 4 = -3 =$ ἀλγ. τιμή τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ πάνω στόν x΄Ox.

Ἡ τεταγμένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τό $\overrightarrow{A_2B_2}$. Ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $2-4=-2=$ ἀλγ. τιμή τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ πάνω στόν y'Oy.

Ἐπίσης ἡ τετμημένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι τό $\overrightarrow{B_1A_1}$, ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι $4-1=3=$ ἀλγ. τιμή τοῦ $\overrightarrow{B_1A_1}$ πάνω στόν x'Ox.

Ἡ τεταγμένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι τό $\overrightarrow{B_2A_2}$, ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι $4-2=2=$ἀλγ. τιμή τοῦ $\overrightarrow{B_2A_2}$ πάνω στόν y'Oy.

Ἐπίσης εἶναι (Σχ. 31.2):

ἡ τετμημένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AA}$ τό $\overrightarrow{A_1A_1}$, ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AA}$: $4-4=0$,

ἡ τεταγμένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AA}$ τό $\overrightarrow{A_2A_2}$, ἡ τεταγμένη $\overrightarrow{AA}$: $4-4=0$.

Ἡ τετμημένη καί τεταγμένη ἑνός διανύσματος λέγονται **συντεταγμένες** τοῦ διανύσματος. Γιά νά συμβολίσουμε ὅτι ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένη α καί τεταγμένη β, γράφουμε $\overrightarrow{AB}(\alpha,\beta)$ ἤ $\overrightarrow{AB}=(\alpha,\beta)$.

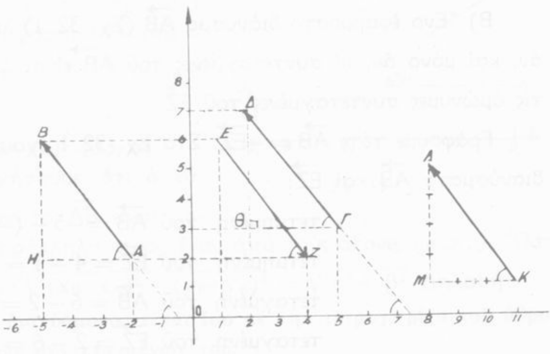
Ἀπό τά παραπάνω ἐννοοῦμε ὅτι ἡ θέση ἑνός ἐφαρμοστοῦ διανύσματος καθορίζεται, ἄν γνωρίζουμε τίς συντεταγμένες τῶν ἄκρων του ἤ τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος καί τίς συντεταγμένες ἑνός ἄκρου του (ἀρχῆς ἤ πέρατος). Οἱ τύποι, πού χρησιμοποιοῦμε, εἶναι οἱ $\alpha = x_B - x_A$, $\beta = y_B - y_A$.

32. ΙΣΑ (Ἠ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ) ΕΦΑΡΜΟΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Α) Ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **ἴσο** ἤ **ἰσοδύναμο** μέ ἄλλο $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἄν, καί μόνο ἄν, οἱ συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσες ἀντιστοίχως μέ τίς ὁμώνυμές τους συντεταγμένες τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Γράφουμε τότε συμβολικά: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Ἔτσι, π. χ., στό Σχ. 32.1 ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $-5-(-2)=-3$ ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $6-2=4$, ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι $2-5=-3$, ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι $7-3=4$.



Σχ. 32.1

Ἐπομένως σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, πού δώσαμε, εἶναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Γενικά, ἄν $\overrightarrow{AB}(\alpha,\beta)$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}(\alpha',\beta')$, γιά νά ἐκφράσουμε ὅτι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, μποροῦμε νά γράφουμε συμβολικά $(\alpha,\beta)=(\alpha',\beta')$. Μ' αὐτό θά ἐννοοῦμε ὅτι $\alpha=\alpha'$ καί $\beta=\beta'$.

Ἡ ἔννοια ἰσότητας ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, πού ὁρίσαμε ἐδῶ, ἔχει τίς γνωστές ἰδιότητες:

α) Ἀνακλαστική : $\vec{AB} = \vec{AB}$

β) Συμμετρική : $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \Rightarrow \vec{\Gamma\Delta} = \vec{AB}$

γ) Μεταβατική : $\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}\\ \vec{\Gamma\Delta} = \vec{K\Lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{K\Lambda}$

Παρατηρήσεις: 1) Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν ἔχουμε ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα, π.χ. τό $\vec{AB}$, ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστά διανύσματα, πού τό καθένα εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{AB}$. Εἶναι τά διανύσματα πού ἔχουν τίς συντεταγμένες τους ἴσες μέ τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ $\vec{AB}$.

2) Ἡ παραπάνω δεύτερη ἰδιότητα τῆς ἔννοιας τῆς ἰσότητας μᾶς ἐπιτρέπει νά λέμε ὅτι: $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

3) Ἄν $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα (μεταξύ τους) καί ὄχι μηδενικά, τότε ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση (οἱ φορεῖς τους εἶναι παράλληλοι) καί τήν ἴδια φορά (εἶναι ὁμόρροπα). (Ἐπειδή τρίγ. ΑΒΗ = τρίγ. ΓΔΘ καί $\vec{AH}$, $\vec{\Gamma\Theta}$ παράλληλα καί ὁμόρροπα, ὅπως ἐπίσης καί τά $\vec{HB}$ καί $\vec{\Theta\Delta}$ κ.τ.λ.)

4) Κάθε μηδενικό ἐφαρμοστό διάνυσμα εἶναι ἴσο μέ κάθε ἄλλο μηδενικό ἐφαρμοστό διάνυσμα (γιατί;).

Β) Ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\vec{AB}$ (Σχ. 32.1) λέγεται **«ἀντίθετο»** ἄλλου $\vec{EZ}$, ἄν, καί μόνο ἄν, οἱ συντεταγμένες τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι ἀντίθετες ἀντιστοίχως πρός τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τοῦ $\vec{EZ}$.

Γράφουμε τότε $\vec{AB} = -\vec{EZ}$. Στό Σχ. 32.1 ἔχουμε, π.χ., γιά τά ἐφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{EZ}$:

τετμημένη τοῦ $\vec{AB} = -5-(-2) = -3$

τετμημένη τοῦ $\vec{EZ} = 4-1 = 3$,

τεταγμένη τοῦ $\vec{AB} = 6-2 = 4$,

τεταγμένη τοῦ $\vec{EZ} = 2-6 = -4$.

Ὥστε τό $\vec{AB}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα ἀντίθετο τοῦ $\vec{EZ}$, δηλ. $\vec{AB} = -\vec{EZ}$. Εἶναι φανερό ὅτι κάθε διάνυσμα ἴσο μέ τό $\vec{AB}$ εἶναι ἀντίθετο πρός τό $\vec{EZ}$ καί πρός κάθε ἴσο του. Προφανῶς ἀντίθετο τοῦ διανύσματος $\vec{AB}$ εἶναι καί τό $\vec{BA}$, δηλ. $\vec{AB} = -\vec{BA}$.

Παρατηρήσεις: 1) Ἄν εἶναι $\vec{AB}$ ἀντίθετο τοῦ $\vec{\Gamma\Delta}$, τότε θά εἶναι καί τό $\vec{\Gamma\Delta}$

ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (γιατί;). Γι' αὐτό ἐπιτρέπεται νά λέμε: τά $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα (μεταξύ τους).

2) Ἄν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα (μεταξύ τους), τότε ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση (οἱ φορεῖς τους εἶναι παράλληλοι) καί ἀντίθετες φορές.

3) Κάθε μηδενικό ἐφαρμοστό διάνυσμα εἶναι ἀντίθετο πρός κάθε ἄλλο μηδενικό διάνυσμα (γιατί;)

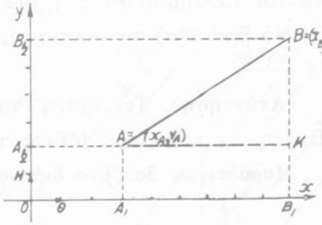
33. ΜΗΚΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ (ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ)

Ἔστω ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Ὀνομάζεται **μῆκος** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἴτε **ἀπόλυτη τιμή** τοῦ $\overrightarrow{AB}$, καί συμβολίζεται μέ $|\overrightarrow{AB}|$, τό μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος μέ ἄκρα τά A, B. Ἔτσι, π.χ., γιά τό μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ ἔχουμε: μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AA} = |\overrightarrow{AA}| =$ μῆκος τοῦ εὐθύγρ. τμήματος $AA = 0$. Γενικά: τό μῆκος κάθε μή μηδενικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἕνας ἀπόλυτος πραγματικός ἀριθμός.

Ἄς πάρουμε σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων xOy (Σχ. 33.1) καί μοναδιαῖα διανύσματα τά $\overrightarrow{O\Theta} \equiv \vec{i}$, $\overrightarrow{OH} \equiv \vec{j}$ μέ $|\overrightarrow{O\Theta}| = |\overrightarrow{OH}|$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ καί ὅτι α) τό $\overrightarrow{AB}$ δέν εἶναι μηδενικό καί β) τό $\overrightarrow{AB}$ δέν εἶναι παράλληλο πρός ἕναν ἀπό τούς ἄξονες.

Τότε ὁρίζεται ἕνα τρίγωνο AKB, ὀρθογώνιο στό K, ὅπως φαίνεται στό σχ. 33.1 καί μέ ἐφαρμογή τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος βρίσκουμε ὅτι τό μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (33, \alpha)$$



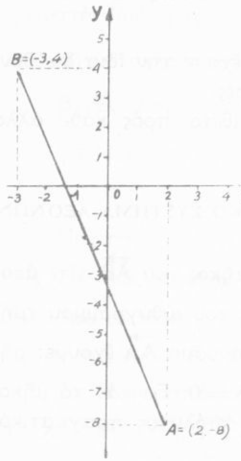
Σχ. 33.1

Εἶναι εὔκολο νά ἐξηγήσουμε ὅτι ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει καί ὅταν τό $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μηδενικό διάνυσμα ἤ εἶναι παράλληλο πρός ἕναν ἀπό τούς ἄξονες (πῶς;). Ὥστε ἰσχύει γενικά ὅτι: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Δηλαδή:

Τό μῆκος ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἴσο μέ τήν τετραγ. ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων του.

Ἑπομένως: Ἄν δύο ὁποιαδήποτε ἐφαρμοστά διανύσματα εἶναι ἴσα μεταξύ τους, τότε θά ἔχουν τό ἴδιο μῆκος (γιατί;). Ἄρα **κάθε δύο μή μηδενικά ἴσα ἐφαρμοστά διανύσματα ἔχουν τό ἴδιο μῆκος, τήν ἴδια διεύθυνση καί τήν ἴδια φορά.** Ἐπίσης τό ἴδιο μῆκος καί τήν ἴδια διεύθυνση ἔχουν καί κάθε δύο μή μηδενικά ἀντίθετα μεταξύ τους ἐφαρμοστά διανύσματα.

Τό σύνολο ὅλων τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου (μαζί καί μέ τά μηδενικά ἐφαρμοστά διανύσματά του) θά τό συμβολίζουμε, ὅπου μᾶς χρειασθεῖ, στά ἑπόμενα μέ $\mathcal{D}$.



Σχ. 33.2

Παράδειγμα 1ο. Σ' ἕνα ἐπίπεδο (Ε) (σχ. 33.2) ἐφοδιασμένο μέ ἄξονες συντεταγμένων xOy δίνονται τά σημεῖα Α(2, –8) καί Β(–3,4).

Νά βρεῖτε α) τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, β) τίς συντεταγμένες ἑνός διανύσματος ἀντίθετου τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καί γ) τό μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (δηλ. τήν ἀπόσταση μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β).

Ἀπάντηση: α) τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = x_B - x_A = -3 - 2 = -5$, τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = y_B - y_A = 4 - (-8) = 5 + 8 = 12$.

β) Ἕνα διάνυσμα ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$ θά ἔχει συντεταγμένες ἀντίθετες τῶν συντεταγμένων τοῦ $\overrightarrow{AB}$, δηλ. θά ἔχει τετμημένη: 5 καί τεταγμένη –12.

γ) Σύμφωνα μέ τόν τύπο (33, α) εἶναι:

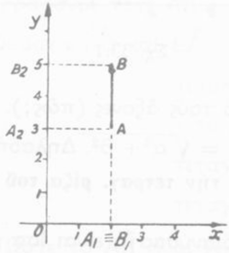
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ μονάδες.}$$

Παράδειγμα 2ο. Σ' ἕνα ἐπίπεδο ἐφοδιασμένο μέ ἄξονες συντεταγμένων xOy δίνονται τά σημεῖα Α(2, 3), Β(2, 5).

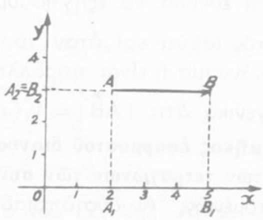
Νά βρεῖτε α) τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί β) τό μῆκος του (σχ. 33.3).

Ἀπάντηση: Τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = x_B - x_A = 2 - 2 = 0$, τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = y_B - y_A = 5 - 3 = 2$. Μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$ μονάδες.

Παράδειγμα 3ο. Ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένη 3, τεταγμένη 0 καί ἀρχή



Σχ. 33.3



Σχ. 33.4

τό σημεῖο Α(2, 3). Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τοῦ πέρατός του Β (σχ. 33.4).

Ἀπάντηση: Ἔστω $B = (x_B, y_B)$, τότε: $x_B - 2 = 3 \Leftrightarrow x_B = 3 + 2 = 5$ καί $y_B - 3 = 0 \Leftrightarrow y_B = 3$. Ἄρα $B = (5, 3)$.

101) Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καί τό μῆκος του, ἄν σ' ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι $A = (-2, -3)$ καί $B = (2, 1)$.

102) Νά δείξετε ὅτι τό τρίγωνο, πού ἔχει κορυφές τά σημεῖα $A = (-2, 8)$, $B = (-1, 1)$ καί $\Gamma = (3, 3)$ εἶναι ἰσοσκελές. (Νά συγκρίνετε τά μήκη τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$.)

103) Σ' ἕνα ἐπίπεδο ἐφοδιασμένο μέ ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων τρία σημεῖα, Α, Β, Γ ἔχουν ἀντιστοίχως συντεταγμένες (3, 1), (3, 5), (−1, 1). Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες ἑνός σημείου Δ τοῦ ἐπιπέδου, ἄν γνωρίζετε ὅτι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Λύση: θά πρέπει νά ἔχουμε: $x_B - x_A = x_\Delta - x_\Gamma$ καί $y_B - y_A = y_\Delta - y_\Gamma$ καί νά λύσουμε τίς δύο ἐξισώσεις μέ ἀγνώστους τό x_Δ καί y_Δ).

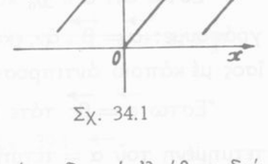
104) Ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένη 3 καί τεταγμένη 4 καί πέρας τό σημεῖο Β(4, 2). Νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τῆς ἀρχῆς του Α καί τό μῆκος τοῦ διανύσματος.

34. ΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ἔστω ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ $\mathscr{D}$, δηλ. ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. (Τό $\overrightarrow{AB}$ δέν ἀποκλείεται νά εἶναι ἕνα μηδενικό ἐφαρμοστό διάνυσμα.) Γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα διανύσματα ἴσα (ἰσοδύναμα) πρός τό $\overrightarrow{AB}$.

Τό σύνολο ὅλων τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι ἴσα μέ τό $\overrightarrow{AB}$, ὀνομάζεται: **«ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα»** τοῦ ἐπιπέδου καί τό $\overrightarrow{AB}$ (καθώς καί κάθε ἴσο μέ τό $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστό διάνυσμα ἀπό τό $\mathscr{D}$) ὀνομάζεται: **ἕνας ἀντιπρόσωπος** τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος.

Ὅπως ἀπό τό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὁρίσαμε ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα, ἔτσι μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἀπό κάθε ἐφαρμοστό διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$ ἀνά ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Ἄν γίνει αὐτό, τότε τό $\mathscr{D}$ θά ἔχει διαμερισθεῖ σέ κλάσεις (ὑποσύνολα) ξένες μεταξύ τους ἀνά δύο, καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες εἶναι (ἀπό ὁρισμό) **ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα.**



Σχ. 34.1

Ἕνα ὁποιοδήποτε ἐφαρμοστό διάνυσμα ἀπό τό $\mathscr{D}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλεύθερου διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου. Συνήθως ὡς ἀντιπρόσωπο ἑνός ἐλεύθερου διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου xOy (σχ. 34.1) παίρνουμε τό ἐφαρμοστό διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$, πού ἔχει ὡς ἀρχή του τό Ο.

Ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι καί τό μηδενικό ἐλεύθερο διάνυσμα, δηλ. τό σύνολο ὅλων τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου. Αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\overrightarrow{O}$.

Κάθε ἐλεύθερο διάνυσμα θά συμβολίζεται μέ ἕναν ὁποιοδήποτε ἀντιπρόσωπό του εἴτε μέ τόν ἀντιπρόσωπό του μέ ἀρχή τό Ο εἴτε μέ ἕνα μικρό γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μαζί μέ ἕνα μικρό βέλος ἀποπάνω. Ἔτσι μποροῦμε νά μιλᾶμε γιά τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ ἤ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γιά τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\beta}$ κ.τ.λ. (σχ.

34.1). Γιά νά δηλώσουμε ὅτι ἕνα ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντιπρόσωπος τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{u}$ γράφουμε $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Τό σύνολο ὅλων τῶν ἐλεύθερων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου θά τό συμβολίζουμε μέ $\mathscr{D}_0$.

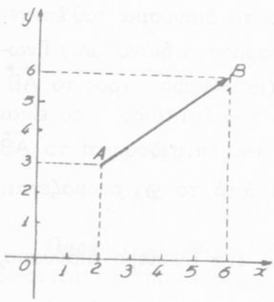
35. ΜΗΚΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Μῆκος ἑνός διανύσματος ἀπό $\mathscr{D}_0$, δηλ. ἑνός ἐλεύθερου διανύσματος, ἔστω $\vec{\alpha}$, λέγεται τό μῆκος ἑνός ἀντιπροσώπου του καί συμβολίζεται μέ $|\vec{\alpha}|$.

Ἔτσι, γιά τό μηδενικό ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{O}$, ἔχουμε:

$$|\vec{O}| = |\overrightarrow{OO}| = 0$$

36. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ



Σχ. 36.1

Ἔστω $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$. Ὀνομάζεται: τετμημένη τοῦ $\vec{\alpha}$ ἡ τετμημένη ἑνός ὁποιουδήποτε ἀντιπροσώπου του καί τεταγμένη τοῦ $\vec{\alpha}$ ἡ τεταγμένη τοῦ ἴδιου ἤ ὁποιουδήποτε ἄλλου ἀντιπροσώπου του.

Ἔτσι, π.χ., γιά τό $\vec{O}$ εἶναι: τετμημένη του τό 0 καί τεταγμένη του τό 0. Ἐπίσης γιά τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, πού ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 36.1), εἶναι: τετμημένη του ὁ 4 καί τεταγμένη του ὁ 3. Συμβολικά γράφουμε $\vec{\alpha} = (4, 3)$ ἤ $\vec{\alpha}$ (4, 3). Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν δοθοῦν οἱ συντεταγμένες ἑνός ἐλεύθερου διανύσματος, μποροῦμε νά ὁρίσουμε γραφικῶς ἕναν ἀντιπρόσωπό του στό ἐπίπεδο xOy (πῶς;).

37. Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ $\mathscr{D}_0$

Ἔστω ὅτι $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ καί $\vec{\beta} \in \mathscr{D}_0$. Θά λέμε ὅτι: τό $\vec{\alpha}$ εἶναι ἴσο μέ τό $\vec{\beta}$ καί θά γράφουμε: $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, ἄν, καί μόνο ἄν, ὑπάρχει κάποιος ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$ ἴσος μέ κάποιο ἀντιπρόσωπο τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἔστω $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$: τότε (καί μόνο τότε) εἶναι:

τετμημένη τοῦ $\vec{\alpha}$ = τετμημένη τοῦ $\vec{\beta}$ καί τεταγμένη τοῦ $\vec{\alpha}$ = τεταγμένη τοῦ $\vec{\beta}$.

Εἶναι φανερό ὅτι καί γιά τήν ἔννοια ἰσότητας πού ὁρίσαμε ἐδῶ ἰσχύουν οἱ τρεῖς γνωστές ἰδιότητες τῆς ἰσότητας διανυσμάτων, δηλ. ἡ ἀνακλαστική, ἡ συμμετρική καί ἡ μεταβατική.

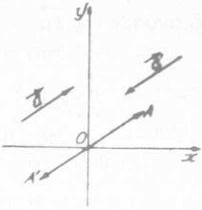
38. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ $\mathscr{D}_0$

Ἔστω $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ καί $\overrightarrow{OA}$ ἀντιπρόσωπός του (σχ. 38.1). Ἔστω $\overrightarrow{OA'}$ ἕνα ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἐφαρμοστό διάνυσμα. Τό $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ εἶναι ἀντιπρόσωπος ἑνός ἐλεύθερου διανύσματος, ἔστω $\vec{\alpha'}$. Αὐτό τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha'}$ λέγεται **ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha}$** καί συμβολίζεται μέ $-\vec{\alpha}$.

Εἶναι φανερό ἀπό τούς ὁρισμούς, πού δώσαμε, ὅτι:

1) Γιά κάθε $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}_0$ ὑπάρχει ἕνα μόνο ἀντίθετό του διάνυσμα τοῦ $\mathcal{D}_0$.

2) Ἄν $\vec{\alpha'}$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha}$, τότε καί τό $\vec{\alpha}$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha'}$ καί 3) οἱ συντεταγμένες τοῦ $\vec{\alpha'}$ εἶναι ἀντίθετες τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων τοῦ $\vec{\alpha}$.



Σχ. 38 1

39. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathcal{D}_0$, ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

A) Ἄς πάρουμε τά ἐφαρμοστά διανύσματα $\vec{AB}$ καί $\vec{B\Gamma}$, τά ὁποῖα βλέπετε στό σχ. 39.1. Ὅπως γνωρίζουμε ἀπό ὅσα μάθαμε στή Γ' τάξη τοῦ Γυμνασίου, τό διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ἐφαρμοστῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\vec{AB}$ καί $\vec{B\Gamma}$. Συμβολικά γράφουμε $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι οἱ συντεταγμένες τοῦ ἀθροίσματος $\vec{A\Gamma}$ εἶναι ἴσες ἀντιστοίχως μέ τό ἄθροισμα τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων τῶν προσθετέων διανυσμάτων. Πραγματικά εἶναι:

τετμημένη τοῦ $\vec{AB} = 3$,

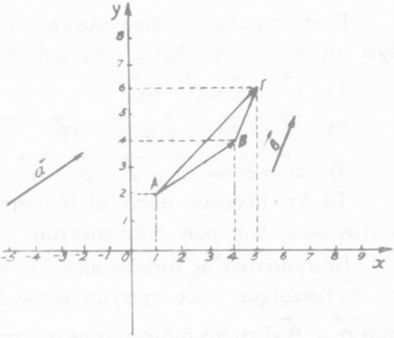
τεταγμένη τοῦ $\vec{AB} = 2$,

τετμημένη τοῦ $\vec{B\Gamma} = 1$,

τεταγμένη τοῦ $\vec{B\Gamma} = 2$

τετμημένη τοῦ $\vec{A\Gamma} = 4 = 3 + 1$,

τεταγμένη τοῦ $\vec{A\Gamma} = 4 = 2 + 2$



Σχ. 39.1

B) **Ἔστω τώρα ὅτι** $\vec{\alpha} \in \mathcal{D}_0$ καί $\vec{\beta} \in \mathcal{D}_0$ καί $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 39.1) ἀντιστοίχως ἀντιπρόσωποί τους, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικά διανύσματα. Ὁρίζουμε τό ἄθροισμα $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$, δηλ. τό $\vec{A\Gamma}$. Αὐτό, τό $\vec{A\Gamma}$, εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλεύθερου διανύσματος, ἔστω $\vec{\gamma}$. Τό $\vec{\gamma}$ ὀνομάζεται **ἄθροισμα $\vec{\alpha}$ σύν $\vec{\beta}$** καί συμβολίζεται μέ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, δηλ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Εἶναι προφανές ὅτι τό $\vec{\gamma}$ ἔχει ὡς τετμημένη τό ἄθροισμα τῆς τετμημένης τοῦ $\vec{\alpha}$ σύν τήν τετμημένη τοῦ $\vec{\beta}$ καί τεταγμένη τό ἄθροισμα τῆς τεταγμένης τοῦ $\vec{\alpha}$ σύν τήν τεταγμένη τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἔτσι, π.χ., ἄν $\vec{u}(\alpha, \beta)$ καί $\vec{v}(\gamma, \delta)$, τότε τό $(\vec{u}+\vec{v})$ θά ἔχει συντεταγμένες $(\alpha+\gamma,\ \beta+\delta)$ καί μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕναν ἀντιπρόσωπο τοῦ διανύσματος $(\vec{u}+\vec{v})$, ἀφοῦ γνωρίζουμε τίς συντεταγμένες του.

Ὕστερ' ἀπό τά παραπάνω **ορίζουμε** ὡς ἄθροισμα δύο ἐλεύθερων διανυσμάτων $\vec{u}(\alpha_1, \beta_1)$ καί $\vec{v}(\alpha_2, \beta_2)$ καί τό συμβολίζουμε μέ $\vec{u}+\vec{v}$, τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{z}$, τὸ ὁποῖο ἔχει τεμημένη $\alpha_1+\alpha_2$ καί τεταγμένη $\beta_1+\beta_2$.

Συνήθως γράφουμε $(\alpha_1, \beta_1)+(\alpha_2, \beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2)$.

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό $\vec{z}$ ἀπό τά $\vec{u}$ καί $\vec{v}$, λέγεται **πρόσθεση** ἤ σύνθεση μέσα στό σύνολο $\mathscr{D}_0$.

Ἄν τό ἕνα ἀπό τά προσθετέα διανύσματα εἶναι τό μηδενικό ἐλεύθερο διάνυσμα, τότε θά ἔχουμε $\vec{u}+\vec{O}=\vec{u}$, ἐπειδή τό $\vec{O}$ ἔχει τετμημένη 0 καί τεταγμένη 0 καί ἑπομένως εἶναι $(\alpha_1, \beta_1)+(0, 0)=(\alpha_1+0,\ \beta_1+0)=(\alpha_1, \beta_1)$.

Δηλαδή τό μηδενικό ἐλεύθερο διάνυσμα εἶναι τό **οὐδέτερο** στοιχεῖο στήν πρόσθεση μέσα στό σύνολο $\mathscr{D}_0$.

Ἄν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ εἶναι τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου (Ε), τότε ορίζουμε ὡς ἄθροισμα $\vec{\alpha}$ σύν $\vec{\beta}$ σύν $\vec{\gamma}$, καί τό συμβολίζουμε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, τό ἄθροισμα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$.

Ἀναλόγως ὁρίζεται τό ἄθροισμα μέ τέσσερα, πέντε κ.τ.λ. προσθετέα διανύσματα.

Εἶναι εὔκολο νά δικαιολογήσουμε ὅτι ἡ πρόσθεση πού ὁρίσαμε στό $\mathscr{D}_0$ ἔχει τίς ἰδιότητες: ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική καί τῆς διαγραφῆς. Δηλ.

1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$

2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

3) $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

Τό ὅτι ἰσχύουν αὐτές οἱ ἰδιότητες εἶναι φανερό ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας δύο ἐλεύθερων διανυσμάτων.

Πραγματικά ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά διανύσματα $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ ἔχουν συντεταγμένες ἀντιστοίχως τούς πραγματικούς ἀριθμούς α_1, β_1 καί α_2, β_2. Τότε τό ἄθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ εἶναι τό διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2)$. Τό ἄθροισμα $\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ εἶναι τό ἐλεύθερο διάνυσμα μέ συντεταγμένες $(\alpha_2+\alpha_1,\ \beta_2+\beta_1)$. Ἀλλ' ἐπειδή $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1$ καί $\beta_1+\beta_2=\beta_2+\beta_1$, συμπεραίνουμε ὅτι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=$ $=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

Ἡ ἀπόδειξη τῶν ἰδιοτήτων 2) καί 3) εἶναι πολύ εὔκολη.

Γ) Ἀφαίρεση στό $\mathscr{D}_0$. Γνωρίζουμε ἀπό τήν Γ' τάξη τοῦ Γυμνασίου ὅτι, ἄν $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$ εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου καί $\vec{\beta'}$ εἶναι τό ἐλεύθερο διάνυσμα τό ἀντίθετο τοῦ $\vec{\beta}$, τότε ὁρίζεται ὡς **διαφορά $\vec{\alpha}$ πλήν $\vec{\beta}$,** καί συμβολίζεται μέ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}'$, δηλ. τό $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$. Ἔτσι γιά νά βροῦμε τή διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε στό $\vec{\alpha}$ τό ἀντίθετο διάνυσμα τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἡ πράξη γιά τήν εὕρεση τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ λέγεται **ἀφαίρεση** στό $\mathscr{D}_0$.

Ἐπειδή τά ἀντίθετα διανύσματα ἔχουν ἀντίθετες τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τους καί ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε, ἡ διαφορά $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ εἶναι ἴση μέ $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$, γι' αὐτό, ἄν εἶναι $\vec{\alpha}(\alpha_1, \beta_1)$ καί $\vec{\beta}(\alpha_2, \beta_2)$, τότε εἶναι $-\vec{\beta}(-\alpha_2, -\beta_2)$ καί ἑπομένως τό διάνυσμα $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ ἔχει συντεταγμένες $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$. Συμβολικά γράφουμε $(\alpha_1, \beta_1) - (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2)$.

Ἑπομένως, ὅταν δοθοῦν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}(\alpha_1, \beta_1)$ καί $\vec{\beta}(\alpha_2, \beta_2)$, **ὁρίζουμε** ὡς διαφορά τους τό διάνυσμα, ἔστω $\vec{\gamma}$, πού ἔχει συντεταγμένες $\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_1 - \beta_2$, δηλ. τό $\vec{\gamma}(\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2)$. Εἶναι φανερό ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$$

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ ἰδιότητα:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = (\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) - (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

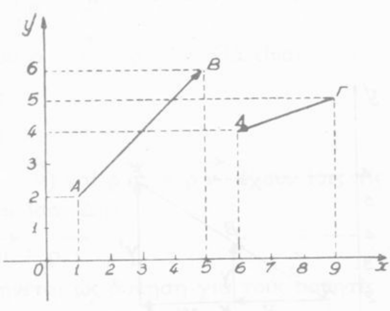
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

105) Ἄν $\vec{u}(2, -5)$ καί $\vec{v}(3, 1)$ εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα, νά ὁρίσετε μέ τίς συντεταγμένες του τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{u} + \vec{v}$ καί νά σχεδιάσετε στό ἐπίπεδο xOy ἕναν ἀντιπρόσωπό του.

106) Ἄν $\vec{u}(3, 1)$ καί $\vec{v}(2, 5)$ νά βρεῖτε τίς συντεταγμένες τοῦ $\vec{u} + \vec{v}$ καί τό μῆκος του. Ἔπειτα νά βρεῖτε μέ τίς συντεταγμένες της τή διαφορά $\vec{u} - \vec{v}$ καί νά ὑπολογίσετε τό μῆκος τοῦ διανύσματος $\vec{u} - \vec{v}$.

107) Τό διάνυσμα $\vec{\alpha}(-3, 8)$ εἶναι τό ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}(-1, -2)$ καί ἑνός ἄλλου ἄγνωστου διανύσματος. Νά βρεῖτε τό τελευταῖο αὐτό διάνυσμα.

108) Στό σχ. 39.2 βλέπετε δύο ἐφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τά ὁποῖα εἶναι ἀντιπρόσωποι δύο ἐλεύθερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$. Ζητεῖται νά βρεῖτε ἀπό τό σχῆμα τίς συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καί $\vec{\beta}$. Ἔπειτα νά βρεῖτε τό διάνυσμα τό ἴσο μέ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ μέ δύο τρόπους. (Ὁ ἕνας τρόπος θά εἶναι μέ τίς συντεταγμένες.) Νά βρεῖτε ὁμοίως τό διάνυσμα τό ἴσο μέ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.



Σχ. 39.2

40. ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Α) Σέ ἄλλη τάξη μάθαμε ὅτι: ἄν $\vec{u}$ εἶναι ἕνα μή μηδενικό διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καί $\rho \neq 0$ πραγματικός ἀριθμός, τότε ὡς $\rho \cdot \vec{u}$ ὁρίζεται διάνυσμα $\vec{v}$, τό ὁποῖο ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ τό $\vec{u}$, φορά τήν ἴδια, ἄν $\rho > 0$, ἤ τήν ἀντίθετη, ἄν $\rho < 0$, καί μῆκος ἴσο μέ $|\rho| \cdot |\vec{u}|$.

Γράφουμε: $\vec{v} = \rho \vec{u}$. Ἡ ἴδια ἰσότητα γράφεται ἰσοδύναμα καί ἔτσι: $\dfrac{\vec{v}}{\vec{u}} = \rho$ καί τότε ὁ ρ λέγεται λόγος τοῦ $\vec{v}$ πρός τό $\vec{u}$.

Ἔστω τώρα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{u}$ μέ ἀντιπρόσωπό του τό $\overrightarrow{AB}$ καί ἔστω ὅτι $\vec{v} = \rho \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AE}$ (σχ. 40.1 καί 40.2).

Παρατηροῦμε ὅτι: ἄν τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένη X καί τεταγμένη Y καί τό $\overrightarrow{AE} = \rho \cdot \overrightarrow{AB}$ (στό σχ. 40.1 τό $\rho = 2$, στό σχ. 40.2 εἶναι $\rho = -3$) ἔχει συντεταγμένες X′ καί Y′ ἀντιστοίχως, τότε ἀπό τό γνωστό μας θεώρημα τῶν προβολῶν θά ἔχουμε:

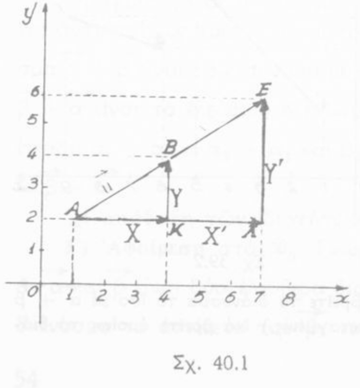
$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \rho$$

ἀπό τίς ὁποῖες ἔχουμε $X' = \rho X$ καί $Y' = \rho Y$.

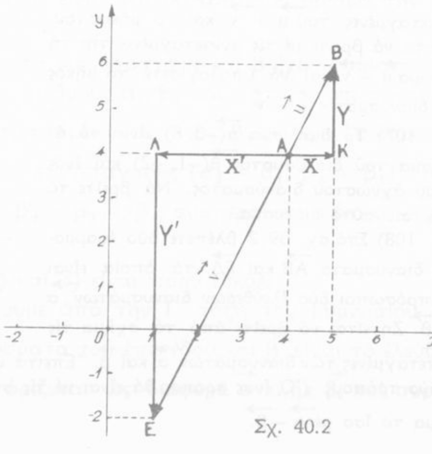
Γι᾽ αὐτό μποροῦμε νά ὁρίσουμε ὡς $\rho \vec{u}$ τό διάνυσμα πού ἔχει συντεταγμένες ρX, ρY. Ὥστε: $\rho \cdot (X, Y) = (\rho X, \rho Y)$.

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι ἰσχύει:

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{(\rho X)^2 + (\rho Y)^2} = |\rho| \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} = |\rho| \cdot |\overrightarrow{AB}| = |\rho| \cdot |\vec{u}|$$

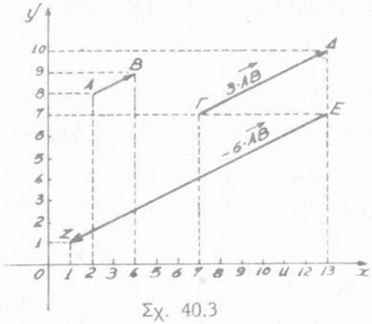


Σχ. 40.1



Σχ. 40.2

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό $\vec{v} = \rho\,\vec{u}$ ἀπό τόν ρ καί τό $\vec{u}$, λέγεται **πολλαπλασιασμός** τοῦ $\vec{u}$ ἐπί τόν ρ.



Σχ. 40.3

B) Εὔκολα ἀποδείχνονται οἱ ἰδιότητες:

1) $(-2)\cdot(3\vec{AB}) = -6\vec{AB} = (-2\cdot 3)\vec{AB} = \vec{EZ}$ (Σχ. 40.3) καί γενικά:
$\lambda(\rho\vec{u}) = (\lambda\cdot\rho)\,\vec{u}$, ὅπου λ, ρ πραγματικοί ἀριθμοί (προσεταιριστική ἰδιότητα).

2) $(\lambda + \mu)\cdot\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$,
ὅπου $\lambda \in R$, $\mu \in R$ καί $\vec{u}$ ἕνα ὁποιοδήποτε ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου (ἐπιμεριστική ἰδιότητα).

3) $\rho\,(\vec{u} + \vec{v}) = \rho\,\vec{u} + \rho\,\vec{v}$, ὅπου ρ ἕνας πραγματικός ἀριθμός καί $\vec{u}$, $\vec{v}$ ἐλεύθερα διανύσματα (ἐπιμεριστική ἰδιότητα).

Γενικά, μέ βάση τούς ὁρισμούς πού δώσαμε, ἡ ἰδιότητα 3) ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω: τετμημένη τοῦ $\vec{u} = \alpha$, τεταγμένη τοῦ $\vec{u} = \beta$

» » $\vec{v} = \alpha'$, » » $\vec{v} = \beta'$

Τότε εἶναι:

τετμημένη τοῦ $\vec{u} + \vec{v} = \alpha + \alpha'$

τεταγμένη τοῦ $\vec{u} + \vec{v} = \beta + \beta'$

Ἄρα τετμημένη τοῦ $\rho\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(\alpha + \alpha') = \rho\alpha + \rho\alpha'$ καί

τεταγμένη τοῦ $\rho\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = \rho(\beta + \beta') = \rho\beta + \rho\beta'$

Ἄς βροῦμε τώρα τίς συντεταγμένες τοῦ $\rho\cdot\vec{u} + \rho\cdot\vec{v}$. Θά εἶναι:

τετμημένη τοῦ $\rho\cdot\vec{u} + \rho\cdot\vec{v} = \rho\alpha + \rho\alpha'$

τεταγμένη τοῦ $\rho\cdot\vec{u} + \rho\cdot\vec{v} = \rho\beta + \rho\beta'$

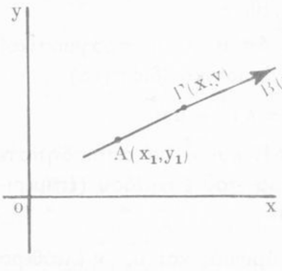
Ἐπειδή λοιπόν τά διανύσματα $\rho(\vec{u} + \vec{v})$ καί $\rho\vec{u} + \rho\vec{v}$ ἔχουν ἴσες τίς ὁμώνυμες συντεταγμένες τους (§ 32, A) εἶναι ἴσα. Δηλ.

$$\rho\,(\vec{u} + \vec{v}) = \rho\,\vec{u} + \rho\,\vec{v}$$

Ἡ ἐξήγηση τῶν ἰδιοτήτων 1 καί 2 ἀφήνεται ὡς ἄσκηση γιά τούς μαθητές.

Ἐφαρμογή. Δίνονται τά σημεῖα $A(x_1, y_1)$ καί $B(x_2, y_2)$ διαφορετικά $(B \equiv A)$ μεταξύ τους καί ζητεῖται νά βρεθεῖ πάνω στήν εὐθεία AB ἕνα σημεῖο Γ τέτοιο, ὥστε $\dfrac{\vec{A\Gamma}}{\vec{\Gamma B}} = \lambda$, ὅπου $\lambda \in R$.

Ἄς ὀνομάσουμε x καί y τίς συντεταγμένες τοῦ σημείου Γ (σχ. 40.4). Θέλουμε νά ἰσχύει $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}}{\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}} = \lambda$, πού ἰσοδύναμα γράφεται $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}}$. Θά εἶναι λοιπόν διαδοχικά:



Σχ. 40.4

$$(x - x_1,\ y - y_1) = \lambda(x_2 - x,\ y_2 - y) \Leftrightarrow$$

$$(x - x_1,\ y - y_1) = (\lambda x_2 - \lambda x,\ \lambda y_2 - \lambda y) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \\ y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2 \\ y + \lambda y = y_1 + \lambda y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 + \lambda)x = x_1 + \lambda x_2 \\ (1 + \lambda)y = y_1 + \lambda y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \\[2ex] y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \end{cases} \quad (40,\alpha)$$

Προφανῶς πρέπει νά εἶναι $\lambda \neq -1$. Πράγματι ἀποκλείεται νά εἶναι $\lambda = -1$, ἐπειδή τότε θά ἦταν $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = (-1) \cdot \overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = -\overrightarrow{\mathrm{\Gamma B}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$, πού σημαίνει ὅτι $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ (τό Α ταυτίζεται μέ τό Β), πράγμα ἀδύνατο, ἐπειδή ὑποθέσαμε ὅτι τά Α καί Β εἶναι δύο διαφορετικά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Ὅταν $\lambda = 1$, οἱ τύποι (40, α) δίνουν τίς συντεταγμένες τοῦ μέσου τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

109) Ἄν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0 . \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, τί συμπεραίνετε γιά τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

110) Ἄν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \rho . \overrightarrow{\mathrm{AA}}$, τί συμπεραίνετε γιά τό $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

111) Δίνεται τό διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ τοῦ σχ. 36.1 καί ζητεῖται νά κατασκευασθοῦν διανύσματα ἴσα μέ τά:

α) $3\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, β) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, γ) $-2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, δ) $\dfrac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(Νά ἐργασθεῖτε μέ δύο τρόπους. Ὁ ἕνας τρόπος θά εἶναι μέ συντεταγμένες.)

41. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ. ΒΑΣΕΙΣ.

Α) Ἔπειτα ἀπό ὅσα μάθαμε στά προηγούμενα (§ § 30, 31, 39, 40) μποροῦμε νά ἐκφράσουμε ἕνα διάνυσμα μέ τά μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ καί τίς συντεταγμένες του.

Πραγματικά ἔχουμε (σχ. 30.1 καί 30.2):

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{O\Pi}} + \overrightarrow{\mathrm{\Pi M}}$$

Ἀλλ' ἐπειδή $\overrightarrow{\mathrm{O\Pi}} = \overline{\mathrm{O\Pi}} \cdot \vec{i}$ καί $\overrightarrow{\mathrm{\Pi M}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OP}} \cdot \vec{j}$, ἡ παραπάνω διανυσματική ἰσότητα γίνεται:

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{O\Pi}} \cdot \vec{i} + \overline{\mathrm{OP}} \cdot \vec{j}$$

ή, ἄν ὀνομάσουμε X τήν τετμημένη καί Y τήν τεταγμένη τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, τότε:

$$\overrightarrow{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

Ὁμοίως γιά τό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ σχήματος 33.1, ἄν ὀνομάσουμε $x_B - x_A = X$ καί $y_B - y_A = Y$, θά εἶναι:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}, \text{ δηλ. } \overrightarrow{AB} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$

B) Ἔστω ὅτι ἔχουμε στό ἐπίπεδο δύο διανύσματα $\vec{V}(X, Y)$ καί $\vec{V}'(X', Y')$, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $\vec{V}' = k\vec{V}$. Γνωρίζουμε (§ 40) ὅτι τά διανύσματα αὐτά ἔχουν τήν ἴδια δεύθυνση (εἶναι παράλληλα). Ἐπειδή $\vec{V}' = k\vec{V}$, δηλ. $(X', Y') = (kX, KY)$, θά ἔχουμε (§ 37):

$$X' = kX \quad \text{καί} \quad Y' = kY$$

ἐπομένως θά εἶναι:

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἰσχύει $\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$ καί ὀνομάσουμε k τήν τιμή τῶν λόγων, θά εἶναι:

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow X' = kX \text{ καί } Y' = kY$$

καί ἐπομένως:

$$\vec{V}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} = kX\vec{i} + kY\vec{j} = k\,(X\vec{i} + Y\vec{j}) = k\vec{V},$$

δηλ. τά διανύσματα $\vec{V}'$ καί $\vec{V}$ ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση.

Ὥστε: **ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι παράλληλα δύο διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου, εἶναι οἱ ὁμώνυμες συντεταγμένες τους νά εἶναι ἀνάλογες.**

Συμβολικά: $\boxed{\vec{V} \parallel \vec{V}' \Leftrightarrow \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}}$

Παρατήρηση:

Ἀποδείξαμε καί ὅτι: $\boxed{\vec{V}' = k\vec{V} \Leftrightarrow X' = kX,\ Y' = kY}$

Στήν εἰδική περίπτωση, πού τά διανύσματα εἶναι ἴσα, ὅταν δηλ. $k = 1$, τότε:

$$\vec{V}' = \vec{V} \Leftrightarrow X' = X,\ Y' = Y.$$

Δηλαδή: **γιά νά εἶναι ἴσα δύο διανύσματα, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ὁμώνυμες συντεταγμένες τους νά εἶναι ἴσες** (βλέπε καί § 37).

Γ) Ἔστω ὀρθοκανονικό σύστημα ἀναφορᾶς xOy καί δύο διανύσματα $\vec{u}(\alpha_1, \beta_1)$ καί $\vec{v}(\alpha_2, \beta_2)$. Ζητοῦμε νά βροῦμε τήν ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά εἶναι τά διανύσματα αὐτά κάθετα μεταξύ τους (σχ. 41.1). Ἄν $\overrightarrow{OM}$ καί $\overrightarrow{OM'}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν $\vec{u}$ καί $\vec{v}$ μέ ἀρχή τό O, πρέπει καί ἀρκεῖ τό τρίγωνο ΟΜΜ′ νά εἶναι ὀρθογώνιο στό Ο. Πρέπει καί ἀρκεῖ λοιπόν νά ἔχουμε:

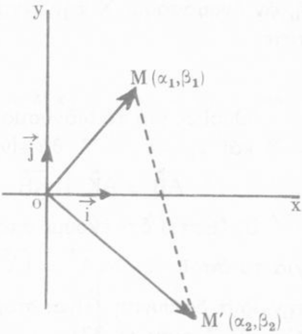
$$|\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{OM'}|^2 = |\overrightarrow{MM'}|^2.$$

Ἀλλά (§ 33) $|\overrightarrow{OM}|^2 = \alpha^2{}_1 + \beta^2{}_1$, $|\overrightarrow{OM'}|^2 = \alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2$ καὶ $|\overrightarrow{MM'}|^2 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2$ καί ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$\alpha^2{}_1 + \beta^2{}_1 + \alpha^2{}_2 + \beta^2{}_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2$$

καί μετά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων καί τίς ἀναγωγές:

$$\boxed{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0}$$



Σχ. 41.1

Ὥστε, σέ ὀρθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, γιά νά εἶναι κάθετα δύο διανύσματα $\vec{u}$ καί $\vec{v}$, πρέπει καί ἀρκεῖ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁμώνυμων συντεταγμένων τους νά εἶναι ἴσο μέ μηδέν.

Συμβολικά γράφουμε: $\vec{u}(\alpha_1, \beta_1) \perp \vec{v}(\alpha_2, \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0.$

Ἡ παράσταση $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$ λέγεται **ἐσωτερικό γινόμενο** τῶν διανυσμάτων $\vec{u}(\alpha_1, \beta_1)$ καί $\vec{v}(\alpha_2, \beta_2)$, συμβολίζεται μέ $\vec{u}\cdot\vec{v}$ καί διαβάζεται: $\vec{u}$ ἐπί ἐσωτερικό $\vec{v}$. Εἶναι λοιπόν $\vec{u}\cdot\vec{v} = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$ καί ἡ συνθήκη καθετότητας τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$ καί $\vec{v}$ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς ἑξῆς

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0.$$

Παράδειγμα: Νά ἐξετασθεῖ ἡ σχετική θέση μεταξύ τῶν διανυσμάτων:

α) $\vec{u}(9, -7)$ καί $\vec{v}(3, -\frac{7}{3})$

β) $\vec{u}(2, -3)$ καί $\vec{v}(4, \frac{8}{3})$

γ) $\vec{u}(-2, -3)$ καί $\vec{v}(-4, -2)$

Ἀπάντηση: α) Ἐπειδή $\frac{9}{3} = \frac{-7}{\frac{-7}{3}}$, εἶναι $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.

β) Ἐπειδή $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\cdot 4 + (-3)\cdot\frac{8}{3} = 0$, εἶναι $\vec{u} \perp \vec{v}$.

γ) Ἐπειδή $\frac{-2}{-4} \neq \frac{-3}{-2}$ καί $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-2)\cdot(-4) + (-3)\cdot(-2) \neq 0$ τά $\vec{u}$ καί $\vec{v}$ οὔτε παράλληλα εἶναι οὔτε κάθετα.

Ἄσκηση. Νά ἐξετάσετε ποιά ἀπό τά παρακάτω ζεύγη διανυσμάτων εἶναι: α) παράλληλα, β) κάθετα καί γ) οὔτε παράλληλα οὔτε κάθετα (ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων).

1) $\vec{u}(2, 3)$ καί $\vec{v}(4, 6)$, 2) $\vec{u}(2, -3)$ καί $\vec{v}\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

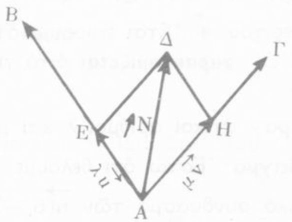
3) $\vec{u}(2, -3)$ καί $\vec{v}(12, 8)$, 4) $\vec{u}(\alpha, 0)$ καί $\vec{v}(0, \beta)$,

5) $\vec{u}(3, 4)$ καί $\vec{v}(5, -6)$, 6) $\vec{u}(1, -2)$ καί $\vec{v}(-4, -2)$.

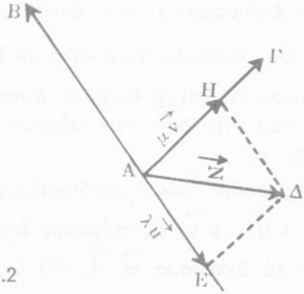
Δ) Ὀνομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** δύο μή μηδενικῶν διανυσμάτων $\vec{u}$ καί $\vec{v}$, ἕνα διάνυσμα $\vec{z}$ τῆς μορφῆς $\vec{z} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, ὅπου $\lambda, \mu \in R$ καί $\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}$ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου μέ τά $\vec{u}, \vec{v}$, μή παράλληλα μεταξύ τους.

Ἄν δοθοῦν δύο μή μηδενικά καί μή παράλληλα διανύσματα, π.χ. τά $\vec{u}$ καί $\vec{v}$, τότε κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου, π.χ. τό $\vec{z}$, εἶναι δυνατό νά τό ἐκφράσουμε ὡς γραμμικό συνδυασμό τῶν δύο αὐτῶν δοσμένων διανυσμάτων:

Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου παίρνουμε τό $\vec{AB}$ ὡς ἀντιπρόσωπο τοῦ $\vec{u}$, τό $\vec{A\Gamma}$ ὡς ἀντιπρόσωπο τοῦ $\vec{v}$ καί τό $\vec{A\Delta}$ ὡς ἀντιπρόσωπο τοῦ $\vec{z}$. Ἀπό τό σημεῖο Δ φέρνουμε παράλληλες πρός τούς φορεῖς τῶν $\vec{AB}$ καί $\vec{A\Gamma}$. Τότε σχηματίζεται τό παραλληλόγραμμο ΑΕΔΗ, ὅπως φαίνεται στά σχήματα 41.2.



Σχ. 41.2



Προφανῶς τά $\vec{AB}$ καί $\vec{AE}$ εἶναι συγγραμμικά διανύσματα καί ἑπομένως ὑπάρχει κάποιος $\lambda \in R$, ὥστε νά εἶναι $\vec{AE} = \lambda\vec{AB}$, δηλ. $\vec{AE} = \lambda\vec{u}$.

Ἐπίσης ἰσχύει $\vec{AH} = \mu\vec{A\Gamma}$, δηλ. $\vec{AH} = \mu\,\vec{v}$, ὅπου $\mu \in R$.

Ἀπό τό παραλληλόγραμμο ΑΕΔΗ ἔχουμε τώρα:

$$\vec{A\Delta} = \vec{AE} + \vec{AH}, \text{ δηλ. } \vec{z} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}.$$

Κάθε ζεῦγος διανυσμάτων ὅπως τά $\vec{u}$ καί $\vec{v}$, πού μέ γραμμικό συνδυασμό τους μποροῦμε νά ἐκφράσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου, λέγεται **βάση.**

Ἑπομένως **κάθε ζεῦγος μή μηδενικῶν καί μή παράλληλων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μία βάση.**

Ἔτσι, π.χ., τά διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, ὅπου $\vec{i}\ (1, 0)$ καί $\vec{j}\ (0, 1)$, μέ κοινή ἀρχή τό Ο τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων, ἀποτελοῦν βάση (σχ. 30.2). Πραγματικά: $\vec{OM} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$ (§41, Α).

Ἀντί νά λέμε ὅτι ἐκφράσαμε ἕνα διάνυσμα, π.χ. $\vec{z}$, ὡς γραμμικό συνδυασμό, π.χ. τῶν $\vec{i}$ καί $\vec{j}$, συνηθίζεται νά λέμε ὅτι ἀναλύσαμε τό διάνυσμα $\vec{z}$ σέ δύο διανύσματα κατά τίς διευθύνσεις τῶν $\vec{i}$ καί $\vec{j}$.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ ἀνάλυση $\vec{z} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ εἶναι **μοναδική**: Ἔστω ὅτι εἶναι $\vec{z} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ καί $\vec{z} = t \vec{u} + \rho \vec{v}$, ὅπου $\lambda, \mu, t, \rho \in R$. Τότε θά ἔχουμε διαδοχικά: $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = t \vec{u} + \rho \vec{v} \Rightarrow \lambda \vec{u} - t \vec{u} = \rho \vec{v} - \mu \vec{v} \Rightarrow (\lambda - t) \vec{u} = (\rho - \mu) \vec{v} \Rightarrow$ (ἄν $\lambda \neq t$) $\vec{u} = \frac{\rho - \mu}{\lambda - t} \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = k \vec{v}$ (θέσαμε $\frac{\rho - \mu}{\lambda - t} = k$), πού σημαίνει ὅτι $\vec{u} // \vec{v}$, πράγμα πού εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεση ὅτι τά $\vec{u}$ καί $\vec{v}$ δέν εἶναι παράλληλα. Ὥστε δέν εἶναι $\lambda \neq t$, ἀλλά $\lambda = t$ καί ἀπό τήν ἰσότητα $(\lambda - t) \vec{u} = (\rho - \mu) \vec{v}$ βρίσκουμε ὅτι τότε καί $\mu = \rho$. Ἡ ἀνάλυση λοιπόν εἶναι μία καί μόνη.

Στή βάση $\{\vec{i}, O, \vec{j}\}$, ὅπου $\vec{i}(1, 0)$ καί $\vec{j}(0, 1)$, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως, κάθε διάνυσμα $\vec{z}$ τοῦ ἐπιπέδου, ἀναλύεται κατά ἕνα μόνο τρόπο σέ ἄθροισμα δύο διανυσμάτων κατά τίς διευθύνσεις τῶν $\vec{i}$ καί $\vec{j}$, π.χ. $\vec{z} = X\vec{i} + Y\vec{j}$, ὅπου X καί Y εἶναι οἱ συντεταγμένες τοῦ $\vec{z}$. Ἔτσι ἐννοοῦμε ὅτι κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων x'Ox, y'Oy **χαρακτηρίζεται** ἀπό τίς συντεταγμένες του.

Γιά νά δοῦμε πῶς προσδιορίζονται οἱ πραγματικοί ἀριθμοί λ καί μ στόν τύπο $\vec{z} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, ἄς πάρουμε ἕνα παράδειγμα: Ἔστω ὅτι θέλουμε νά ἐκφράσουμε τό διάνυσμα $\vec{z}(-4, -5)$ ὡς γραμμικό συνδυασμό τῶν $\vec{u}(6, -3)$ καί $\vec{v}(-3, -2)$. Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι $\frac{6}{-3} \neq \frac{-3}{-2}$ καί ἑπομένως τά $\vec{u}$ καί $\vec{v}$ δέν εἶναι παράλληλα.

Θά ἔχουμε λοιπόν διαδοχικά: $\vec{z} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \Leftrightarrow$

$$(-4, -5) = \lambda(6, -3) + \mu(-3, -2) \Leftrightarrow$$
$$(-4, -5) = (6\lambda, -3\lambda) + (-3\mu, -2\mu) \Leftrightarrow$$
$$(-4, -5) = (6\lambda - 3\mu, -3\lambda - 2\mu) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 6\lambda - 3\mu = -4 \\ -3\lambda - 2\mu = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\lambda - 3\mu = -4 \\ -6\lambda - 4\mu = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7\mu = -14 \\ 6\lambda - 3\mu = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mu = 2 \\ 6\lambda - 6 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ὥστε $\vec{z} = 2\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$

Ἄσκηση. Νά ἐκφρασθεῖ τό διάνυσμα $\vec{z}(8, 8)$ ὡς γραμμικός συνδυασμός τῶν $\vec{u}(2, -5)$ καί $\vec{v}(-3, 4)$.

42. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ CHASLES (ΣΑΛ)

Ἂν $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, $\Delta(x_\Delta, y_\Delta)$ εἶναι τυχόντα σημεῖα ἐπιπέδου xOy, θά ἔχουμε:

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$, $\overrightarrow{B\Gamma}(x_\Gamma - x_B,\ y_\Gamma - y_B)$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}(x_\Delta - x_\Gamma,\ y_\Delta - y_\Gamma)$ καί $\overrightarrow{\Delta A}(x_A - x_\Delta,\ y_A - y_\Delta)$. Τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A}$ θά ἔχει τετμημένη $x_B - x_A + x_\Gamma - x_B + x_\Delta - x_\Gamma + x_A - x_\Delta = 0$ καί τεταγμένη $y_B - y_A + y_\Gamma - y_B + y_\Delta - y_\Gamma + y_A - y_\Delta = 0$, εἶναι δηλ. μηδενικό διάνυσμα. Ἰσχύει λοιπόν ἡ ἑξῆς ἰσότητα:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{O_A},$$

ἡ ὁποία λέγεται **διανυσματική ἰσότητα τοῦ Chasles.**

43. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ἔστω $A(x_A, y_A)$ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο καί $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου xOy (σχ. 43.1).

Θεωροῦμε τό σύνολο τῶν σημείων $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{u}$, ὅπου $\lambda \in R$. Τό σύνολο τῶν σημείων αὐτῶν λέγεται: **εὐθεία** (ε). Ἡ εὐθεία αὐτή ὁρίσθηκε ἀπό τό σημεῖο A καί τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{u}$.

Ἂν στά μέλη τῆς ἐξισώσεως

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}\ (\lambda \in R)$$

προσθέσουμε τό ἴδιο διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ θά ἔχουμε:

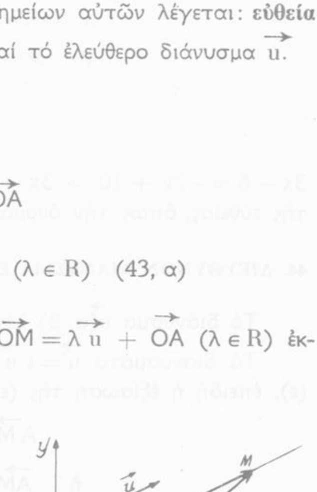
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{OA}$$

δηλαδή $$\boxed{\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{OA}} \quad (\lambda \in R) \quad (43, \alpha)$$

Ἡ ἐξίσωση $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}\ (\lambda \in R)$ καθώς καί ἡ $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{OA}\ (\lambda \in R)$ ἐκφράζουν ἡ καθεμιά τήν ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἀνήκει τό σημεῖο M στήν εὐθεία (ε). Ὁ πραγματικός ἀριθμός λ εἶναι ἡ **παράμετρος** αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων.

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τῆς εὐθείας (ε) ἐννοοῦμε ὅτι ἡ (ε) ὁρίζεται μονότροπα ἀπό τό σημεῖο A καί τό διάνυσμα $\overrightarrow{u}$.

Δύο σημεῖα A καί B (διαφορετικά μεταξύ τους) ὁρίζουν μία, καί μόνο μία, εὐθεία. Πραγματικά μποροῦμε νά πάρουμε τήν εὐθεία, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τό A καί τό $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. Ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας θά εἶναι:



Σχ. 43.1

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \ (\lambda \in R)$$

$$\text{ἤ} \quad \overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \ (\lambda \in R)$$

γιά $\lambda = 0$ ἔχουμε $M \equiv A$, γιά $\lambda = 1$ ἔχουμε $M \equiv B$.

Παράδειγμα. Δίνονται σημεῖο $A(2, 5)$ καί διάνυσμα $\overrightarrow{u}(-2, 3)$ στό ἐπίπεδο xOy καί ζητεῖται ἡ διανυσματική ἐξίσωση τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία περνάει ἀπό τό A καί εἶναι παράλληλη πρός τό $\overrightarrow{u}$.

Ἀπάντηση. Σύμφωνα πρός τήν (43, α), ἄν $M(x, y)$ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς εὐθείας πού ζητοῦμε, τότε θά εἶναι $\overrightarrow{OM}(x, y)$, καί θά ἔχουμε:

$$(x, y) = \lambda \cdot (-2, 3) + (2, 5),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἡ διανυσματική ἐξίσωση πού ζητούσαμε.

Ἀπ' αὐτή βρίσκουμε διαδοχικά:

$$(x, y) = (-2\lambda, 3\lambda) + (2, 5) \Rightarrow$$
$$(x, y) = (-2\lambda + 2, 3\lambda + 5) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\lambda + 2 \\ y &= 3\lambda + 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x-2}{-2} &= \lambda \\ \frac{y-5}{3} &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-5}{3} \Rightarrow$$

$3x - 6 = -2y + 10 \Rightarrow 3x + 2y - 16 = 0$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ **ἀναλυτική ἐξίσωση** τῆς εὐθείας, ὅπως τήν ὀνομάζουμε.

44. ΔΙΕΥΘΥΝΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΥΘΕΙΑΣ

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta)$ λέγεται **διευθύνον διάνυσμα** τῆς εὐθείας (ε).

Τά διανύσματα $\overrightarrow{u'} = t\,\overrightarrow{u}$ $(t \in R)$ εἶναι ἐπίσης διευθύνοντα διανύσματα τῆς (ε), ἐπειδή ἡ ἐξίσωση τῆς (ε) μπορεῖ νά γραφτεῖ:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{t} \cdot t\,\overrightarrow{u}$$

$$\text{ἤ} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{t}\,\overrightarrow{u'} \quad (\lambda \in R,\ t \in R \text{ καί } t \neq 0)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

112) Δίνεται τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{u}(-3, 5)$ καί ζητεῖται νά ὁρίσετε μέ τίς συντεταγμένες του τό διάνυσμα $-2\overrightarrow{u}$. Ἔπειτα νά λάβετε σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων καί νά σχεδιάσετε ἕναν ἀντιπρόσωπο τοῦ $-2\overrightarrow{u}$.

113) Νά ἐξετάσετε ἄν εἶναι παράλληλα ἤ ὄχι τά διανύσματα $\overrightarrow{u}\,(3, 4)$ καί $\overrightarrow{v}\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

114) Θεωροῦμε τά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$:

$A(-3, 2)$, $B(1, 3)$, $\Gamma(1, 2)$, $\Delta(5, 3)$

Νά ἐξετάσετε ἄν τά παραπάνω διανύσματα εἶναι παράλληλα καί ἄν ἔχουν τήν ἴδια φορά.

115) Δίνεται τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{u}(2, 1)$ καί τό σημεῖο $A(2, -1)$. Νά καθορίσετε τήν εὐθεία, ἡ ὁποία περνάει ἀπό τό A καί ἔχει διευθύνον διάνυσμα τό $\overrightarrow{u}$.

116) Δίνεται τό ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{u}(-1, 2)$ καί τά σημεῖα $A(2, 2)$ καί $M(x, y)$. Ζητεῖται νά ἐκφράσετε ὅτι τά διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ καί $\overrightarrow{u}$ εἶναι παράλληλα.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Ἡ ἀνάλυση πολυωνύμου σέ γινόμενο παραγόντων εἶναι ἕνα ἀπό τά σπουδαιότερα κεφάλαια τῆς Ἄλγεβρας, γιατί σέ πολλά ἀλγεβρικά θέματα, ὅπως θά δοῦμε, χρειάζεται νά τεθοῦν τά πολυώνυμα σέ μορφή γινομένου παραγόντων. Π.χ. στήν ἐπίλυση ἐξισώσεων ὁ μετασχηματισμός τῶν πολυωνύμων σέ γινόμενο παραγόντων, ἄν εἶναι δυνατός, δέν εἶναι πάντοτε εὔκολος, οὔτε μπορεῖ νά γίνει μέ ὁρισμένους κανόνες. Πρέπει λοιπόν νά ἀσχοληθοῦμε, ὅσο γίνεται περισσότερο, μέ τό θέμα αὐτό.

46. Εἶναι γνωστή ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ἡ ἀνάλυση σέ γινόμενο παραγόντων τῶν παρακάτω παραστάσεων, γι' αὐτό καί τίς ἐπαναλαμβάνουμε σύντομα:

1. Παραστάσεις, πού οἱ ὅροι τους ἔχουν κοινό παράγοντα.

Πολυώνυμο = (κοινός παράγοντας) (πηλίκο πολυωνύμου διά κοινοῦ παράγοντα)

Παραδείγματα : α) $4x^3y - 10x^2y^2 + 12xy^3 - 8y^4x = 2xy \cdot (2x^2 - 5xy + 6y^2 - 4y^3)$,

β) $45y^{\nu+1}x - 25y^{\nu+2}x^2 + 15y^{\nu+3}x^3 = 5y^{\nu+1}x\,(9 - 5yx + 3y^2x^2)$,

γ) $15\alpha(\beta-3)^3 - 3\alpha^2(\beta-3)^2 + 6\alpha^3(\beta-3) = 3\alpha(\beta-3)\,[5(\beta-3)^2 - \alpha(\beta-3) + 2\alpha^2]$.

2. Παραστάσεις, πού μποροῦν νά χωριστοῦν σέ ὁμάδες.

Παραδείγματα : α) $\alpha^2\mu + \beta\nu^2 + \nu^2\alpha^2 + \beta\mu = (\alpha^2\mu + \beta\mu) + (\alpha^2\nu^2 + \beta\nu^2) = \mu(\alpha^2 + \beta) + \nu^2(\alpha^2 + \beta) = (\alpha^2 + \beta)\cdot(\mu + \nu^2)$

β) $\alpha x^\nu + \alpha y^\mu - \alpha\beta x^\nu - \alpha\beta y^\mu + \beta x^\nu + \beta y^\mu = (\alpha x^\nu + \alpha y^\mu) - (\alpha\beta x^\nu + \alpha\beta y^\mu) + (\beta x^\nu + \beta y^\mu) = \alpha(x^\nu + y^\mu) - \alpha\beta(x^\nu + y^\mu) + \beta(x^\nu + y^\mu) = (x^\nu + y^\mu)\,(\alpha - \alpha\beta + \beta)$.

Χωρίστε τήν ἴδια παράσταση σέ δύο ὁμάδες καί ἔπειτα ἀναλύστε την σέ γινόμενο παραγόντων.

γ) $xy(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(x^2+y^2)=\alpha^2xy+\beta^2xy+\alpha\beta x^2+\alpha\beta y^2=(\alpha^2xy+\alpha\beta x^2)$ $+(\beta^2xy+\alpha\beta y^2)=\alpha x(\alpha y+\beta x)+\beta y(\beta x+\alpha y)=(\alpha y+\beta x)\cdot(\alpha x+\beta y)$.

3. Παραστάσεις μέ μορφή A^2-B^2 (A καί B ἀλγεβρ. παραστάσεις).

$$\boxed{A^2-B^2=(A+B)\cdot(A-B)}$$

Παραδείγματα : α) $25x^2-81y^4=(5x)^2-(9y^2)^2=(5x-9y^2)(5x+9y^2)$

β) $\mu^{16}-\nu^8=(\mu^8+\nu^4)\cdot(\mu^8-\nu^4)=(\mu^8+\nu^4)\cdot(\mu^4+\nu^2)\cdot(\mu^4-\nu^2)=$
$=(\mu^8+\nu^4)\cdot(\mu^4+\nu^2)\cdot(\mu^2+\nu)\cdot(\mu^2-\nu)$.

γ) $\alpha^{2\nu}-\beta^{2\mu}=(\alpha^\nu)^2-(\beta^\mu)^2=(\alpha^\nu+\beta^\mu)\cdot(\alpha^\nu-\beta^\mu)$, $(\nu,\mu\in N)$

δ) $(8x-3y^2)^2-(5y^2+2x)^2=(8x-3y^2+5y^2+2x)\cdot(8x-3y^2-5y^2-2x)=$
$=(2y^2+10x)(6x-8y^2)=4(y^2+5x)\cdot(3x-4y^2)$.

4. Παραστάσεις μέ μορφή $A^2+2AB+B^2$ (A, B παραστάσεις).

$$\boxed{A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2}$$

Παραδείγματα : α) $9x^2\pm 12x+4=(3x)^2\pm 2\cdot 3x\cdot 2+2^2=(3x\pm 2)^2$

β) $16y^2+49x^2y^4-56xy^3=(4y)^2+(7xy^2)^2-2\cdot 4y\cdot 7xy^2=(4y-7xy^2)^2$

γ) $\alpha^{2\nu}\pm 2\alpha^\nu\beta^\mu+\beta^{2\mu}=(\alpha^\nu)^2\pm 2\alpha^\nu\beta^\mu+(\beta^\mu)^2=(\alpha^\nu\pm\beta^\mu)^2$

δ) $(x^2+y^2)^2+4x^2y^2+4(x^2+y^2)xy=[(x^2+y^2)+2xy]^2=[(x+y)^2]^2=$
$=(x+y)^4$.

5. Παραστάσεις μὲ μορφὴ $\varphi(x)=x^2+px+q$ $(p,q,x\in R)$

$\Delta=p^2-4q$: Ἄν

$\Delta=0$ τότε $\varphi(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

$\Delta>0$ τότε $\varphi(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2=$
$=\left(x+\frac{p+\sqrt{\Delta}}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{p-\sqrt{\Delta}}{2}\right)$

$\Delta<0$ τότε $\varphi(x)=x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2$.

Στήν περίπτωση πού εἶναι $\Delta<0$, παρατηροῦμε ὅτι ἡ παράσταση $\varphi(x)\equiv$ $\equiv x^2+px+q$ δέ μετασχηματίζεται στό σύνολο R σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, ἀλλά σέ ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Πολύ σύντομα θά μάθουμε τρόπο μετασχηματισμοῦ ἑνός πολυωνύμου σέ γινόμενο παραγόντων μέ τή βοήθεια ἄλλου συστήματος ἀριθμῶν.

Παραδείγματα : α) $\varphi(x)=x^2+8x+16$. $\Delta=8^2-4\cdot 16=0$.

Ὥστε ἔχουμε: $\varphi(x) = x^2 + 8x + 16 = \left(x + \frac{8}{2}\right)^2 = (x+4)^2$

β) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 15.$ $\qquad \Delta = 2^2 - 4(-15) = 4 + 60 = 64 > 0.$

Ὥστε: $\varphi(x) = x^2 + 2x - 15 = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{64}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{2+8}{2}\right)\left(x + \frac{2-8}{2}\right) =$
$= (x+5)\cdot(x-3).$

γ) $\varphi(x) = x^2 - 4x + 1.$ $\qquad \Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1 = 16 - 4 = 12 > 0.$

Ἔτσι ἔχουμε: $\varphi(x) = x^2 - 4x + 1 = \left(x + \frac{-4+\sqrt{12}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{-4-\sqrt{12}}{2}\right) =$

$$= \left(x + \frac{-4+2\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{-4-2\sqrt{3}}{2}\right) = (x - 2 + \sqrt{3})\,(x - 2 - \sqrt{3})$$

δ) $\varphi(x) = x^2 - 3x + 13.$ $\qquad \Delta = (-3)'^2 - 4\cdot 13 = 9 - 52 = -43 < 0$

Ὥστε ἔχουμε: $\varphi(x) = x^2 - 3x + 13 = \left(x + \frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(-43)}}{2}\right)^2 =$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{43}}{2}\right)^2 \text{ ἄθροισμα δύο τετραγώνων}$$

6. Παραστάσεις μέ μορφή $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $(\alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma \in R)$.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma: \quad \text{Ἄν} \begin{cases} \Delta = 0 \text{ τότε } \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \\ = \alpha(x^2 + px + q) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2, \text{ ὅπου } p = \frac{\beta}{\alpha},\ q = \frac{\gamma}{\alpha} \\ \Delta > 0 \text{ τότε } \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\cdot\left(x + \frac{\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \\ \Delta < 0 \text{ τότε } \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] \end{cases}$$

Καί ἐδῶ ὅταν $\Delta < 0$, μετασχηματίζεται σέ ἄθροισμα δύο τετραγώνων καί ὄχι σέ γινόμενο δύο παραγόντων στό σύνολο R.

Παραδείγματα: α) $\varphi(x) = 9x^2 + 6x + 1.$ $\qquad \Delta = 6^2 - 4\cdot 9\cdot 1 = 36 - 36 = 0$

Ἔτσι ἔχουμε: $\varphi(x) = 9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x + \frac{6}{2.9}\right)^2 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (3x+1)^2$

β) $\varphi(x) = 2x^2 - x - 1.$ $\qquad \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2(-1) = (1 + 8) = 9 > 0.$

Ὥστε: $\varphi(x) = 2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{-1+\sqrt{9}}{2.2}\right)\left(x + \frac{-1-\sqrt{9}}{2.2}\right) =$

$$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x+1)(x-1)$$

γ) $\varphi(x) = 3x^2 - x + 2.$ $\qquad \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

Ὥστε :

$$\varphi(x) = 3x^2 - x + 2 = 3\left[\left(x + \frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(-23)}}{6}\right)^2\right] = 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2\right].$$

δ) $\varphi(x) = 25x^2 - 20x + 1.$ $\qquad \Delta = 20^2 - 4\cdot 25 = 400 - 100 = 300 > 0.$

Ὥστε:

$$\varphi(x)=25x^2-20x+1=25\left(x+\frac{-20+\sqrt{300}}{50}\right)\left(x+\frac{-20-\sqrt{300}}{50}\right)=$$

$$=25\left(x+\frac{-2+\sqrt{3}}{5}\right)\left(x+\frac{-2-\sqrt{3}}{5}\right)=(5x-2+\sqrt{3})(5x-2-\sqrt{3})$$

Δίνουμε τώρα καί ἄλλες περιπτώσεις μετασχηματισμοῦ πολυωνύμων σέ γινόμενο παραγόντων πολύ χρήσιμες, πού δέ διδάχθηκαν στήν προηγούμενη τάξη.

7. Παραστάσεις πού μποροῦν νά γραφοῦν σάν διαφορά τετραγώνων παραστάσεων.

α) Συνδυασμός τῶν περιπτώσεων 3 καί 4:

$$A^2+2AB+B^2-\Gamma^2=(A+B)^2-\Gamma^2=(A+B+\Gamma)(A+B-\Gamma)$$

$$A^2+2AB+B^2-\Gamma^2+2\Gamma\Delta-\Delta^2=(A^2+2AB+B^2)-(\Gamma^2-2\Gamma\Delta+\Delta^2)=$$
$$=(A+B)^2-(\Gamma-\Delta)^2=(A+B+\Gamma-\Delta)(A+B-\Gamma+\Delta),$$

ὅπου Α, Β, Γ, Δ ἀλγεβρικές παραστάσεις.

β) Παραστάσεις μέ μορφή $x^{2^\nu}+x^{2^{\nu-1}}y^{2^{\nu-1}}+y^{2^\nu}$, $\nu\in N$ καί $\nu\geq 2$

$$x^{2^\nu}+x^{2^{\nu-1}}y^{2^{\nu-1}}+y^{2^\nu}=x^{2^\nu}+2x^{2^{\nu-1}}y^{2^{\nu-1}}+y^{2^\nu}-x^{2^{\nu-1}}y^{2^{\nu-1}}=$$
$$=(x^{2^{\nu-1}}+y^{2^{\nu-1}})^2-(x^{2^{\nu-2}}y^{2^{\nu-2}})^2=(x^{2^{\nu-1}}+y^{2^{\nu-1}}+x^{2^{\nu-2}}y^{2^{\nu-2}})\cdot(x^{2^{\nu-1}}+$$
$$+y^{2^{\nu-1}}-x^{2^{\nu-2}}y^{2^{\nu-2}}).$$

γ) Παραστάσεις μέ μορφή $x^{2^\nu}+4y^{2^\nu}$, $\nu\in N$ καί $\nu\geq 2$

$$x^{2^\nu}+4y^{2^\nu}=(x^{2^{\nu-1}})^2+(2y^{2^{\nu-1}})^2+4x^{2^{\nu-1}}y^{2^{\nu-1}}-4x^{2^{\nu-1}}y^{2^{\nu-1}}=$$
$$=(x^{2^{\nu-1}}+2y^{2^{\nu-1}})^2-(2x^{2^{\nu-2}}y^{2^{\nu-2}})^2=$$
$$=(x^{2^{\nu-1}}+2y^{2^{\nu-1}}+2x^{2^{\nu-2}}y^{2^{\nu-2}})\cdot(x^{2^{\nu-1}}+2x^{2^{\nu-1}}-2x^{2^{\nu-2}}y^{2^{\nu-2}}).$$

Στίς περιπτώσεις β καί γ προσπαθοῦμε νά συμπληρώσουμε τήν παράσταση μέ προσθαφαίρεση τοῦ ἴδιου μονωνύμου, ὥστε αὐτή νά γίνει διαφορά δύο τετραγώνων.

Παραδείγματα : α) $9x^2+6yx+y^2-\omega^2=(3x+y)^2-\omega^2=$
$$=(3x+y+\omega)(3x+y-\omega)$$

β) $36\alpha^2+12\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2-4\gamma\delta-4\delta^2=(36\alpha^2+12\alpha\beta+\beta^2)-(\gamma^2+4\gamma\delta+$
$$+4\delta^2)=(6\alpha+\beta)^2-(\gamma+2\delta)^2=(6\alpha+\beta+\gamma+2\delta)(6\alpha+\beta-\gamma-2\delta)$$

γ) $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=$
$$=(x^2+y^2+yx)(x^2+y^2-xy)$$

δ) $x^8+x^4\psi^4+\psi^8=x^8+2x^4\omega^4+\psi^8-x^4\psi^4=(x^4+\psi^4)^2-(x^2\psi^2)^2=$
$$=(x^4+\psi^4+x^2\psi^2)\cdot(x^4+\psi^4-x^2\psi^2)=$$
$$=(x^2+\psi^2+x\psi)(x^2+\psi^2-x\psi)(x^4+\psi^4-x^2\psi^2)$$

ε) $x^4+4\psi^4=(x^2)^2+(2\psi^2)^2+4x^2\psi^2-4x^2\psi^2=(x^2+2\psi^2)^2-(2x\psi)^2=$
$$=(x^2+2\psi^2+2x\psi)(x^2+2\psi^2-2x\psi).$$

8. Παραστάσεις, πού ἕνας ἤ περισσότεροι ὅροι τους πρέπει νά ἀναλυθοῦν σέ ἄθροισμα ἄλλων.

Πολλές φορές σέ μιά παράσταση χρειάζεται νά ἀναλυθεῖ ἕνας ἤ περισσότεροι ὅροι σέ ἀλγεβρικό ἄθροισμα ἄλλων καί ἔπειτα νά τήν ἀναλύσουμε σέ γινόμενο παραγόντων. Τοῦτο χρειάζεται συχνά, ὅταν τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς παραστάσεως εἶναι περιττό καί θέλουμε νά τό κάνουμε ἄρτιο.

Ἡ μέθοδος αὐτή χρησιμοποιεῖται σέ πολλές περιπτώσεις.

Παραδείγματα : α) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων ἡ παράσταση: $A = x^2\psi + x^2\omega + \psi^2 x + \psi^2\omega + \omega^2 x + \omega^2\psi + 2x\psi\omega$

Ἔχουμε: $A = x^2\psi + x^2\omega + \psi^2 x + \psi^2\omega + \omega^2 x + \omega^2\psi + x\psi\omega + x\psi\omega =$
$= (x^2\psi + x^2\omega) + (\psi^2 x + x\psi\omega) + (\psi^2\omega + \omega^2\psi) + (\omega^2 x + x\psi\omega) =$
$= x^2(\psi + \omega) + x\psi(\psi + \omega) + \omega\psi(\psi + \omega) + \omega x(\omega + \psi) =$
$= (\psi + \omega)(x^2 + x\psi + \omega\psi + \omega x) = (\psi + \omega)[x(x + \psi) + \omega(x + \psi)] =$
$= (\psi + \omega)(x + \psi)(x + \omega)$.

β) Νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2$

Ἔχουμε: $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$
$= x(x + 1)(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2) =$
$= (x - 1)(x^2 + 2x - x - 2) = (x - 1)[(x + 2)x - (x + 2)] =$
$= (x - 1)^2(x + 2)$.

9. Παραστάσεις μέ μορφή $x^\nu \pm \psi^\nu$, $\nu \in N$.

Τίς παραστάσεις αὐτές τίς ἀναλύουμε σέ γινόμενο παραγόντων σύμφωνα μέ τή θεωρία τῶν ἀξιοσημείωτων πηλίκων καί τῆς ταυτότητας τῆς τέλειας διαιρέσεως.

α) Οἱ παραστάσεις μέ μορφή $\alpha^3 \pm \beta^3$, ἄν διαιρεθοῦν μέ $\alpha \pm \beta$ ἀντίστοιχα, δίνουν ὑπόλοιπο 0 καί πηλίκο $\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2$.

Ὥστε ἔχουμε: $\boxed{\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)\cdot(\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2).}$

β) Οἱ παραστάσεις μέ μορφή $x^\nu - \psi^\nu$, ὅπου $\nu \in N$, ὅταν διαιρεθοῦν μέ $x - \psi$, δίνουν ὑπόλοιπο 0 καί πηλίκο $x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\psi + x^{\nu-3}\psi^2 + \ldots + x\psi^{\nu-2} + \psi^{\nu-1}$

Ὥστε: $\boxed{x^\nu - \psi^\nu = (x - \psi)\cdot(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\psi + \ldots + x\psi^{\nu-2} + \psi^{\nu-1}}$

Ἄν εἶναι $\nu = 2k$, $k \in N$, τότε θά ἔχουμε:
$$x^\nu - \psi^\nu = x^{2k} - \psi^{2k} = (x^k + \psi^k)\cdot(x^k - \psi^k)$$

Παραδείγματα : 1) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
ἤ $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$
2) $\alpha^5 - \beta^5 = (\alpha - \beta)(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4)$
3) $\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^3 - \beta^3) = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
ἤ $\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha^2)^3 - (\beta^2)^3 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4) =$
$= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ (βλ. περίπτ. 7 β')
ἤ $\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha - \beta)(\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5) = (\alpha - \beta)[\alpha^4(\alpha + \beta) +$
$+ \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + \beta^4(\alpha + \beta)] = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4)$ κλπ.

γ) Γιά τίς παραστάσεις μέ μορφή $x^\nu + \psi^\nu$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) Ἄν $\nu = 2k + 1$ (περιττός), τότε τό διώνυμο διαιρεῖται μέ $x + \psi$, ὁπότε ἔχουμε:

$$\forall \nu = 2k+1,\ k \in N: \quad \boxed{x^\nu + \psi^\nu = (x+\psi)(x^{\nu-1} - x^{\nu-2}\psi + x^{\nu-3}\psi^2 - \ldots - x^{\nu-2}\psi + \psi^{\nu-1})}$$

2) Ἄν $\nu = 2k$ (ἄρτιος), τότε τό διώνυμο, ὅταν διαιρεθεῖ μέ $x + \psi$ ἤ μέ $x - \psi$, δίνει ὑπόλοιπο $2\psi^\nu$ καί ἔτσι δέν μποροῦμε νά τό ἀναλύσουμε σέ γινόμενο παραγόντων, σύμφωνα μέ τή θεωρία τῶν ἀξιοσημείωτων πηλίκων.

Σέ μερικές ὅμως περιπτώσεις, ὅπου ὁ ν εἶναι ἄρτιο πολλαπλάσιο περιττοῦ ἀριθμοῦ, μποροῦμε νά ἐργαστοῦμε ὡς ἑξῆς:

$(6 = 2\cdot 3)$ $x^6 + \psi^6 = (x^2)^3 + (\psi^2)^3 = (x^2 + \psi^2)(x^4 - x^2\psi^2 + \psi^4)$

$(12 = 4\cdot 3)$ $x^{12} + \psi^{12} = (x^4)^3 + (\psi^4)^3 = (x^4 + \psi^4)(x^8 - x^4\psi^4 + \psi^8)$

$(10 = 2.5)$ $x^{10} + \psi^{10} = (x^2)^5 + (\psi^2)^5 = (x^2 + \psi^2)(x^8 - x^6\psi^2 + x^4\psi^4 - x^2\psi^6 + \psi^8)$

Παραδείγματα :

1) $\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha + \beta)(\alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4)$

2) $\alpha^7 + \beta^7 = (\alpha + \beta)(\alpha^6 - \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 - \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 - \alpha\beta^5 + \beta^6)$

3) $\alpha^{15} + \beta^{15} = (\alpha^3)^5 + (\beta^3)^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^{12} - \alpha^9\beta^3 + \alpha^6\beta^6 - \alpha^3\beta^9 + \beta^{12}) =$
$= (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^{12} - \alpha^9\beta^3 + \alpha^6\beta^6 - \alpha^3\beta^9 + \beta^{12})$

10. Παραστάσεις : Τέλειο τετράγωνο ἤ κύβος πολυωνύμου.

α) Ὅταν ἕνα πολυώνυμο περιέχει τά τετράγωνα μερικῶν μονωνύμων καί τά διπλάσια γινόμενά τους ἀνά δύο μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους μέ τό κατάλληλο σημεῖο, τότε τό πολυώνυμο εἶναι τέλειο τετράγωνο, ὁπότε ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο ἴσων παραγόντων. Μερική περίπτωση εἶναι ἡ περίπτωση 4, πού ἐξετάσθηκε.

Παραδείγματα : 1) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma = (\alpha + \beta + \gamma)^2 =$
$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma)$

2) $x^2 + 4\psi^2 + 9\omega^2 + 4x\psi - 6x\omega - 12\omega\psi = x^2 + (2\psi)^2 + (3\omega)^2 + 2\cdot 2x\psi -$
$-2x\cdot 3\omega - 2\cdot 2\psi\cdot 3\omega = (x + 2\psi - 3\omega)^2 = (x + 2\psi - 3\omega)(x + 2\psi - 3\omega).$

β) Ἄν τό πολυώνυμο ἔχει τή μορφή $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3$, τότε εἶναι ὁ κύβος τοῦ διωνύμου $A \pm B$, ὁπότε ἀναλύεται σέ γινόμενο τριῶν ἴσων παραγόντων.

Ἔτσι: $A^3 \pm 3A^2B + 3AB^2 \pm B^3 = (A \pm B)^3 = (A \pm B)(A \pm B)(A \pm B)$

Παραδείγματα :

1) $27x^3 + 27x^2\psi + 9x\psi^2 + \psi^3 = (3x)^3 + 3\cdot(3x)^2\psi + 3\cdot(3x)\psi^2 + \psi^3 =$
$= (3x + \psi)^3 = (3x + \psi)(3x + \psi)(3x + \psi)$

2) $8x^6\alpha^3 - 36x^5\alpha^2 + 54x^4\alpha - 27x^3 = (2x^2\alpha)^3 - 3\cdot(2x^2\alpha)^2(3x) + 3(2x^2\alpha)(3x)^2 -$
$-(3x)^3 = (2x^2\alpha - 3x)^3 = (2x^2\alpha - 3x)(2x^2\alpha - 3x)(2x^2\alpha - 3x)$

11. Παραστάσεις: Πολυώνυμα βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό τόν πρῶτο.

Γνωρίζουμε ὅτι, ἄν ἀκέραιο πολυώνυμο $\varphi(x)$ βαθμοῦ ≥ 1 μηδενίζεται γιά $x=\alpha$ ἤ $x=\frac{\beta}{\alpha}$, ὅπου $\alpha, \beta \in R$, τότε διαιρεῖται μέ $x-\alpha$ ἤ $\alpha x-\beta$ καί ἀντιστρόφως.

Σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα αὐτή ἀναλύουμε πολυώνυμα βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό τόν πρῶτο σέ γινόμενο παραγόντων, ὡς ἑξῆς:

Παραδείγματα: 1) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο τό πολυώνυμο

$$\varphi(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$$

Βρίσκουμε τούς διαιρέτες τοῦ γνωστοῦ ὅρου -2. Αὐτοί εἶναι: ± 1, ± 2. Παρατηροῦμε ὅτι γιά $x=1$ ἔχουμε $\varphi(1)=1^4+1^3-1^2+1-2=0$. Ὥστε τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται μέ $x-1$ καί δίνει πηλίκο $\Pi_1(x)=x^3+2x^2+x+2$, ὁπότε θά ἔχουμε: $\varphi(x)=(x-1)\cdot(x^3+2x^2+x+2)$ (1)

Ἐπίσης γιά $x=-2$ ἔχουμε: $\Pi_1(-2)=0$. Ὥστε τό $\Pi_1(x)$ διαιρεῖται μέ $x+2$ καί δίνει πηλίκο $\Pi_2(x)=x^2+1$, ὁπότε $\Pi_1(x)=(x+2)\cdot(x^2+1)$. Ἔτσι ἡ (1) γράφεται: $\varphi(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$

2) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο τό $\varphi(x)=2x^3+3x^2+8x+12$. Οἱ διαιρέτες τοῦ 12 εἶναι: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. Οἱ διαιρέτες τοῦ συντελεστῆ τοῦ ὅρου $2x^3$ εἶναι: $\pm 1, \pm 2$. Σχηματίζουμε ὅλα τά κλάσματα, πού ἔχουν ἀριθμητή διαιρέτη τοῦ 12 καί παρονομαστή διαιρέτη τοῦ 2. Αὐτά εἶναι: $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$. Τό κλάσμα $-\frac{3}{2}$ δίνει $\varphi\left(-\frac{3}{2}\right)=2\left(-\frac{3}{2}\right)^3+3\left(-\frac{3}{2}\right)^2+8\left(-\frac{3}{2}\right)+12=0$.

Ὥστε τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται μέ $2x+3$ καί δίνει πηλίκο $\Pi(x)=x^2+4$, ὁπότε ἔχουμε: $\varphi(x)=(2x+3)(x^2+4)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

117. Νά τραποῦν σέ γινόμενο παραγόντων οἱ παραστάσεις:

1) $x^\mu\psi^\mu+x^{\mu-1}\psi^{\mu+1}-x^{\mu+1}\psi^{\mu-1}$, $\mu\in N$, 2) $\alpha x^2+\beta x^2+\alpha+\beta+\alpha x+\beta x$,
3) $x^2\psi^2(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(x^4+\psi^4)$, 4) $(\mu^2x+\nu^2\psi)^2+(\nu^2x-\mu^2\psi)^2$,
5) $144x^2\psi^2-121\alpha^2\beta^2$, 6) $x^2-(\alpha-\beta)^2$, 7) $(\alpha x+\beta\psi)^2-1$,
8) $(x^2+x\psi+\psi^2)^2-(x^2-x\psi+\psi^2)^2$, 9) $64x^2\psi^4-160x^2\psi^2+100x^2$,
10) $169x^2y^2z^2-286xy^2z^2+121y^2z^2$, 11) $4y^2\omega^2\beta^2+361x^2y^2\omega^2\alpha^2\pm 76\alpha\beta xy^2\omega^2$
12) $\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2$, 13) $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-4\gamma^2+12\gamma\delta-9\delta^2$

118) Νά μετασχηματισθοῦν σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τά ἀκόλουθα πολυώνυμα:

1) $x^2+4x-21$, 2) $x^2\pm 7\alpha x+12\alpha^2$, 3) $\omega^2-(\nu-2)x-2\nu$
4) $2\omega^2+4\omega-70$, 5) $5x^2-4x+1$, 6) $9x^2-6\alpha x+\alpha^2-\beta^2$

119) Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενο παραγόντων οἱ παραστάσεις:

1) $9\alpha^2\beta^2-36\alpha\beta+36-25\alpha^2$, 2) $x^4-16\omega^4+9y^4-6x^2y^2$
3) $2(x^2y-3\omega)-9+x^2y^2-\omega^2+x^2$, 4) $4\alpha^4+16\alpha^2\beta^2+25\beta^4$

5) $36x^4y^4 + 49\alpha^4 - 100\alpha^2x^2y^2$, 6) $9x^8 + 1 - 15x^4$, 7) $64\alpha^4x^8 + y^4$,
8) $\lambda^{4\nu} + 4\nu^{4\lambda}$, $(\nu, \lambda \in N)$, 9) $\alpha x^2 - (\alpha + 1)x + 1$, 10) $\mu x^2 + (\mu - 5\nu)x - 5\nu$
11) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ (ὑπόδ. $-5x = -3x - 2x$),
12) $x^3 + x^2 - 2$ (ὑπόδ. $x^2 = 2x^2 - x^2$)
13) $64\alpha^3 \pm 27\beta^3$, $\alpha^3\beta^3 \pm \gamma^3$, $(\alpha + \beta)^3 \pm (\alpha - \beta)^3$, $(\alpha - \beta)^3 - \beta^3$
14) $\alpha^4x^8 - y^8$, $x^6 \pm 64\alpha^6y^6$, $\alpha^{12} \pm 1$, $\alpha^6 \pm \beta^3$
15) $32x^5 \pm 1$, $x^7 \pm y^7$, $x^9 \pm y^9$, $243\alpha^5 \pm \beta^5$
16) $81x^2 + y^2 + 4\omega^2 + 18xy - 36x\omega - 4y\omega$
17) $9\alpha^2x^4 + y^2\beta^4 + 1 - 6\alpha\beta^2x^2y - 6\alpha x^2 + 2\beta^2y$
18) $8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$, 19) $\alpha^3x^3 - 6\alpha^2x^2y + 12\alpha xy^2 - 8y^3$
20) $27x^3y^3 - 8\alpha^3 - 54\alpha x^2y^2 + 36\alpha^3xy$
21) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$, 22) $3x^3 + x^2 - 6x + 8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

120) Νά τραποῦν σέ γινόμενο παραγόντων οἱ παραστάσεις:
1) $\alpha^{16} - \beta^{16}$, 2) $x^{4\mu} - y^{4\nu}$, $(\mu, \nu \in N)$, 3) $x^3y^{4\nu+5} - y^5x^{4\mu+3}$, $(\mu, \nu \in N)$,
4) $\beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \alpha\gamma^2$, 5) $(x - \alpha)^2 + 12\alpha^2(x - \alpha) + 36\alpha^4$
6) $x^2 - \psi^2 - \omega^2 + 2\psi\omega + x + \psi - \omega$, 7) $(x + \psi)^2 - 1 - (x + \psi + 1)x\psi$
8) $\alpha^2\beta^{2\nu} + 2\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu+1} + \alpha^{2\mu}\beta^2$, $(\nu, \mu \in N)$
9) $16\alpha^{2\mu-2}\beta^{8\nu} - 24\alpha\beta^2 + 9\alpha^{4-2\mu}\beta^{4-8\nu}$, $(\mu, \nu \in N)$
10) $\alpha^{2\nu} + \beta^{2\mu} \pm 2\alpha^{\nu}\beta^{\mu} - \gamma^{2\lambda}$, $(\mu, \nu, \lambda \in N)$
11) $x^{4\nu} + 4x^{2\nu}\psi^{2\mu} + 4\psi^{4\mu} - \alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta - 1$, $(\mu, \nu \in N)$
12) $x^{4\nu} + x^{2\nu}y^{2\mu} + y^{4\mu}$, $(\mu, \nu \in N)$, 13) $\alpha^4x^{4\nu}y^{4\mu} + 64\beta^4$, $(\mu, \nu \in N)$
14) $\alpha^6 - \beta^9$, 15) $\alpha^9 - 27\alpha^6 - \alpha^3 + 17$, 16) $x^6 - (\alpha^3 - 1)x^3 - \alpha^3$
17) $x^{3\nu} + y^{3\mu} + 3x^{\nu}y^{\mu}(x^{\nu} + y^{\mu})$, $(\mu, \nu \in N)$
18) $125x^{3\nu+3} - 75x^{2\nu+2} + 15x^{\nu+1} - 1$, 19) $\frac{x^3}{27} - \frac{x^2}{3} + x - 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

47. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ταυτότητα λέγεται ἡ ἰσότητα μεταξύ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής γιά ὅλες τίς τιμές τῶν γραμμάτων, πού περιέχουν οἱ παραστάσεις αὐτές·*

Τά δύο μέλη τῆς ταυτότητας λέγονται **ἰσοδύναμες ἀλγεβρικές παραστάσεις.**

Σέ μιά τέτοια ἰσότητα (ταυτότητα) τό σύμβολο (=) τό ἀντικαθιστοῦμε, χωρίς αὐτό νά εἶναι ἀπαραίτητο, μέ τό σύμβολο ($\equiv$) πού τό διαβάζουμε: «ἐκ ταυτότητος ἴσον μέ».

Ἔτσι γράφουμε: $\varphi(x, \psi, \omega, \ldots) \equiv f(x, \psi, \omega, \ldots)$.

Ἄν ἡ ἰσότητα αὐτή ἰσχύει μόνο γιά ὁρισμένες τιμές τῶν $x, \psi, \omega, \ldots$ καί δέν ἰσχύει γιά κάθε τιμή αὐτῶν τῶν μεταβλητῶν, τότε δέν εἶναι ταυτότητα.

Ἡ χρησιμότητα τῶν ταυτοτήτων εἶναι πολύ μεγάλη. Μέ τίς ταυτότητες διευκολύνεται πολύ ὁ ἀλγεβρικός λογισμός· δηλαδή ὁ μετασχηματισμός τῶν παραστάσεων σέ ἁπλούστερες, περισσότερο εὔχρηστες.

48. ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΜΙΑΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ

Γιά νά ἐπαληθεύσουμε μιά ταυτότητα, κάνουμε διαδοχικούς κατάλληλους μετασχηματισμούς στό ἕνα μέλος της, γιά νά καταλήξουμε στό ἄλλο. Κατάλληλοι μετασχηματισμοί εἶναι: 1) Ἐκτέλεση τῶν πράξεων, 2) ἀντικατάσταση παραστάσεων μέ ἄλλες ἰσοδύναμες, 3) ἀνάλυση ὅρων σέ ἄθροισμα ἄλλων, 4) πρόσθεση καί ἀφαίρεση γνωστῶν ταυτοτήτων κατά μέλη, 5) προσθαφαίρεση ὅρων ἤ παραστάσεων κλπ.

Πολλές φορές ὑποθέτουμε τήν ταυτότητα ἀληθή καί, ἀφοῦ κάνουμε ὁρισμένες ἁπλοποιήσεις, καταλήγουμε σέ ἰσότητα ἀληθή. Ἔπειτα ἀκολουθοῦμε ἀντίστροφους μετασχηματισμούς, γιά νά καταλήξουμε στήν ταυτότητα, πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε. Καλύτερα ὅμως εἶναι νά τό ἀποφεύγουμε αὐτό, γιατί χρειάζεται μεγάλη προσοχή στή χρησιμοποίηση τῶν μετασχηματισμῶν, πού πρέπει νά εἶναι ὅλοι ἀντιστρεπτοί.

Ἄν ἔχουμε νά ἐπαληθεύσουμε ταυτότητα μέ περιορισμούς, ἀκολουθοῦμε τήν ἴδια διαδικασία, μέ τή διαφορά ὅτι κατά τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων πρέπει νά ἔχουμε πάντοτε ὑπόψη μας τούς περιορισμούς.

Σ' αὐτό τό κεφάλαιο θά γνωρίσουμε ταυτότητες, ἐκτός ἀπό τίς γνωστές τῆς προηγούμενης τάξεως, καί ἄλλες, πού πρέπει νά ἀπομνημονευθοῦν.

49. ΑΞΙΟΜΝΗΜΟΝΕΥΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Α) Γνωστές ἀπό τήν προηγούμενη τάξη.

$(\alpha \pm \beta)^2 \equiv \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \equiv (\alpha \pm \beta)^2 \mp 2\alpha\beta$

$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \equiv \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \equiv (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

$(\alpha \pm \beta)^3 \equiv \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3 \equiv \alpha^3 \pm \beta^3 \pm 3\alpha\beta(\alpha \pm \beta) \Leftrightarrow$

$\alpha^3 + \beta^3 \equiv (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \equiv (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

$\alpha^3 - \beta^3 \equiv (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \equiv (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \equiv (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$(x + \alpha)(x + \beta) \equiv x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) \equiv x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$

$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \equiv x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$

Ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$\Delta(x) \equiv \delta(x) \cdot \Pi(x) + U(x) \Leftrightarrow \frac{\Delta(x)}{\delta(\chi)} \equiv \Pi(x) + \frac{U(x)}{\delta(x)} \qquad \delta(x) \neq 0,$$

ὅπου $\Delta(x)$, $\delta(x)$, $\Pi(x)$, $U(x)$ ἀντιστοίχως διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο καί ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως.

Β) Ἄλλες ἀξιοσημείωτες ταυτότητες.

1) Τό τετράγωνο πολυωνύμου

Νά βρεθεῖ τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$

Ἔχουμε: $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 \equiv (\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$\equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta$

$\equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$

Γενικά $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)^2 \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) \equiv$
$\equiv \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) + \ldots + \alpha_\nu(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$
$+ \alpha_\nu) \equiv \alpha^2{}_1 + \alpha^2{}_2 + \ldots + \alpha^2{}_\nu + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_\nu) + 2(\alpha_2\alpha_3 +$
$+ \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_\nu) \ldots + 2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu \equiv \alpha^2{}_1 + \alpha^2{}_2 + \ldots + \alpha_\nu{}^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 +$
$\ldots + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_\nu + \ldots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)$

Ἔτσι: $\begin{matrix} \forall\alpha,\ i = 1, 2, 3, \ldots, \nu \\ i \neq j,\ j = 2, 3, \ldots, \nu \end{matrix} : \boxed{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_\nu)^2 \equiv \Sigma\alpha_i{}^2 + 2\Sigma\alpha_i\alpha_j}$

Δηλαδή: Τό τετράγωνο πολυωνύμου μέ ν ὅρους ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του αὐξημένο κατά τό διπλάσιο τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ὅρων του, πού τούς παίρνουμε ἀνά δύο μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Παραδείγματα :

α) $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2+(-\gamma)^2+(-\delta)^2+2\alpha\beta+2\alpha(-\gamma)+2\alpha(-\delta)+$
$+2\beta(-\gamma)+2\beta(-\delta)+2(-\gamma)(-\delta) \equiv \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2(\alpha\beta-\alpha\gamma-$
$-\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta+\gamma\delta)$

β) $(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)^2 \equiv \alpha^2x^6+\beta^2x^4+\gamma^2x^2+\delta^2+2(\alpha\beta x^5+\alpha\gamma x^4+\alpha\delta x^3+$
$+\beta\gamma x^3+\beta\delta x^2+\gamma\delta x)$.

2) Ὁ κύβος τριωνύμου

Νά βρεθεῖ τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha+\beta+\gamma)^3$.

Ἔχουμε: $(\alpha+\beta+\gamma)^3 \equiv (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)$
$\equiv (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$
$\equiv \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\gamma+3\alpha^2\beta+3\beta^2\alpha+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma$
$\equiv \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha^2\gamma+\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma)$
(βλ. περ. 8α ἀναλύσεως) $\equiv \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

Δηλαδή: Ὁ κύβος τριωνύμου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων του αὐξημένο κατά τό 3πλάσιο τοῦ γινομένου τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων τῶν ὅρων του πού τούς παίρνουμε ἀνά δύο μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Παραδείγματα: Νά βρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα:

α) $(1+x+x^2)^3 \equiv 1^3+x^3+x^6+3(1+x)(x+x^2)(1+x^2) \equiv 1+x^3+x^6+$
$+3x+3x^2+3x^2+3x^4+3x^4+3x^5+6x^3 \equiv x^6+3x^5+6x^4+$
$+7x^3+6x^2+3x+1$

β) $(2x-3\psi+5)^3 \equiv 8x^3-27\psi^3+125+3(2x-3\psi)(2x+5)(5-3\psi) \equiv$
$\equiv 8x^3-27\psi^3+125-36x^2\psi+60x^2+54x\psi^2+135\psi^2+150x-225\psi$

3) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητας

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)}$$

Ἔχουμε: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv$
$\equiv (\alpha+\beta)^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \equiv$
$\equiv (\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \equiv$
$\equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

Ἐπειδή ὅμως $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha \equiv \frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-$
$-2\beta\gamma-2\gamma\alpha) \equiv \frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$,

θά ἔχουμε

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2].$$

Παραδείγματα: α) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων ἡ παράσταση

$$\alpha^3 + 8\beta^3 + 27\gamma^3 - 18\alpha\beta\gamma.$$

Λύση: Ἔχουμε $\alpha^3 + (2\beta)^2 + (3\gamma)^3 - 3\cdot\alpha\cdot 2\beta\cdot 3\gamma \equiv (\alpha + 2\beta + 3\gamma)(\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 - 2\alpha\beta - 6\beta\gamma - 3\alpha\gamma)$.

β) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $1 - \alpha^3 + (\alpha + 1)^3 + 3\alpha(\alpha + 1) \equiv 2(3\alpha^2 + 3\alpha + 1)$

Λύση: Ἔχουμε $1 - \alpha^3 + (\alpha + 1)^3 + 3\alpha(\alpha + 1) \equiv 1^3 + (-\alpha)^3 + (\alpha + 1)^3 - 3\cdot 1(-\alpha)(\alpha + 1) \equiv (1 - \alpha + \alpha + 1)[1 + \alpha^2 + (\alpha + 1)^2 - 1\cdot(-\alpha) - 1\cdot(\alpha + 1) - (-\alpha)(\alpha + 1)] \equiv 2(1 + \alpha^2 + \alpha^2 + 1 + 2\alpha + \alpha - \alpha - 1 + \alpha^2 + \alpha) \equiv$
$\equiv 2(3\alpha^2 + 3\alpha + 1)$.

4) Ταυτότητες τοῦ Lagrange

α) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $(\alpha^2_1 + \alpha^2_2)(\beta_1^2 + \beta^2_2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 \equiv (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$.

Λύση: Ἔχουμε: $(\alpha^2_1 + \alpha^2_2)(\beta^2_1 + \beta^2_2) - (\alpha_1\beta_1 + \beta_2\alpha_2)^2 \equiv \alpha^2_1\beta^2_1 + \alpha^2_1\beta^2_2 + \alpha^2_2\beta^2_1 + \alpha^2_2\beta^2_2 - \alpha^2_1\beta^2_1 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 - \alpha^2_2\beta^2_2 \equiv \alpha^2_1\beta^2_2 + \alpha^2_2\beta^2_1 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \equiv (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \equiv \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2$. Τό σύμβολο $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$, γνωστό ἀπό τήν προηγούμενη τάξη, λέγεται ὁρίζουσα δεύτερης τάξεως.

β) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$(\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \alpha^2_3)(\beta^2_1 + \beta^2_2 + \beta^2_3) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 \equiv$$
$$\equiv \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2$$

Ἡ ἀπόδειξη νά γίνει ἀπό τούς μαθητές.

Σημείωση. Γιά νά σχηματίσουμε τίς ὁρίζουσες τοῦ β' μέλους παίρνουμε τίς τριάδες $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ καί $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ σέ δύο στῆλες, ὅπως δείχνει ὁ πίνακας.

$$\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\\ \alpha_3\beta_3\end{vmatrix}$$

γ) Στήν περίπτωση πού ἔχουμε τίς νιάδες τῶν ἀριθμῶν $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu)$ καί $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_\nu)$ ἡ προηγούμενη ταυτότητα μέ τή βοήθεια τοῦ πίνακα γίνεται:

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \alpha_\nu & \beta_\nu\end{vmatrix}$$

$(\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \ldots + \alpha^2_\nu)(\beta_1^2 + \beta^2_2 + \ldots + \beta^2_\nu) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu)^2 \equiv$

$$\equiv \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_\nu & \beta_\nu\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2 + \ldots + \begin{vmatrix}\alpha_{\nu-1} & \beta_{\nu-1}\\ \alpha_\nu & \beta_\nu\end{vmatrix}^2$$

Ἡ ταυτότητα αὐτή λέγεται ταυτότητα Lagrange καί ἡ χρησιμότητά της στόν ἀλγεβρικό λογισμό εἶναι μεγάλη. Οἱ μαθητές μποροῦν νά κάνουν τίς παρατηρήσεις τους σχετικά μέ τόν τρόπο σχηματισμοῦ της.

Παραδείγματα: α) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha^2 + 1)(x^2 + 1) - (\alpha x + 1)^2 = (\alpha - x)^2$

Λύση: Ἔχουμε: $(\alpha^2 + 1^2)(x^2 + 1^2) - (\alpha x + 1)^2 = \begin{vmatrix}\alpha & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2 = (\alpha - x)^2$

β) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $(\alpha^2+1)(x^2+\psi^2+1)-(\alpha x+1)^2=\alpha^2\psi^2+(\alpha-x)^2+\psi^2$

Λύση: Ἔχουμε: $(\alpha^2+1)(x^2+\psi^2+1)-(\alpha x+1)^2=(\alpha^2+0^2+1^2)$.

$$(x^2+\psi^2+1)-(\alpha x+0\psi+1)^2=\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ x & \psi\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ x & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & 1\\ \psi & 1\end{vmatrix}^2=$$

$$=(\alpha\psi-0x)^2+(\alpha-x)^2+(01-\psi\cdot 1)^2=\alpha^2\psi^2+(\alpha-x)^2+\psi^2.$$

Σημ. Τούς ὅρους πού λείπουν τούς συμπληρώνουμε μέ μηδενικούς.

5) Ταυτότητα τοῦ Newton - Διώνυμο τοῦ Newton

α) Στίς γνωστές ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ταυτότητες συμπεριλάβαμε καί τίς ἀκόλουθες:

$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)\equiv x^2\pm(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2$

$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)(x\pm\alpha_3)\equiv x^3\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)x\pm\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

Ἐπίσης εὔκολα μποροῦμε νά ἐπαληθεύσουμε ὅτι:

$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)(x\pm\alpha_3)(x\pm\alpha_4)\equiv x^4\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+$
$+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)x^2\pm(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$

Ἄν συνεχίσουμε ἔτσι, μποροῦμε νά πάρουμε τή γενική ἔκφραση τῆς ταυτότητας τοῦ Newton, πού ἡ πλήρης ἀπόδειξή της θά γίνει σέ ἀνώτερη τάξη. Ἔτσι: $(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)(x\pm\alpha_3)\ldots(x\pm\alpha_\nu)\equiv x^\nu\pm(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu)x^{\nu-1}+$
$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\ldots\alpha_2\alpha_\nu+\ldots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2}\pm(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+$
$+\ldots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\nu+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\ldots+\alpha_1\alpha_3\alpha_\nu+\ldots+\alpha_1\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\ldots+$
$+\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-3}+\ldots+(-1)^{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{\nu-1}+\ldots)x+(-1)^\nu\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu$

Ἄν θέσουμε Σ_1 τό ἄθροισμα τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καί $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_k$ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, ὅταν τούς πάρουμε ἀνά δύο, ἀνά τρεῖς, ..., ἀνά k ἀντιστοίχως μέ ὅλους τούς δυνατούς τρόπους, τότε θά ἔχουμε:

$$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)\ldots(x\pm\alpha_\nu)\equiv x^\nu\pm\Sigma_1x^{\nu-1}+\Sigma_2x^{\nu-2}\pm\ldots+(-1)^{\nu-1}\Sigma_{\nu-1}x+(-1)^\nu\Sigma_\nu$$

β) Ἄν στίς προηγούμενες ταυτότητες ἔχουμε $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_\nu\neq 0$, τότε: $(x\pm\alpha)^2\equiv x^2\pm 2\alpha x+\alpha^2$

$(x\pm\alpha)^3\equiv x^3\pm 3x^2\alpha+3x\alpha^2\pm\alpha^3$

$(x\pm\alpha)^4\equiv x^4\pm 4x^3\alpha+6x^2\alpha^2\pm 4x\alpha^3+\alpha^4$

$(x\pm\alpha)^5\equiv x^5\pm 5x^4\alpha+10x^3\alpha^2\pm 10x^2\alpha^3+5x\alpha^4\pm\alpha^5$ κ.λ.π.

Ἡ γενική ἔκφραση τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(x\pm\alpha)^\nu$, $\nu\in N$, πού λέγεται διώνυμο τοῦ Newton, θὰ δοθεῖ σέ ἀνώτερη τάξη.

Ἐδῶ περιοριζόμαστε στίς ἀκόλουθες παρατηρήσεις γιά τό σχηματισμό τοῦ ἀναπτύγματος.

Παρατηρήσεις:

α) Τό ἀνάπτυγμα εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο, ὡς πρός x καί α, βαθμοῦ ν, μέ πλῆθος ὅρων ἴσο μέ $\nu+1$.

β) Οἱ ἐκθέτες τοῦ x εἶναι κατά μέγεθος ἐλαττούμενο καί τοῦ α κατά μέγεθος αὐξανόμενο. Δηλαδή τό ἀνάπτυγμα εἶναι «διατεταγμένο κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x καί τίς ἀνιοῦσες τοῦ α».

γ) Ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος $(x+\alpha)^\nu$ ἔχουν πρόσημο θετικό, ἐνῶ τοῦ $(x-\alpha)^\nu$ ἐναλλάξ θετικό καί ἀρνητικό.

δ) Κάθε συντελεστής ἑνός ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος προκύπτει, ἄν πολλαπλασιάσουμε τό συντελεστή καί τόν ἐκθέτη τοῦ x τοῦ προηγούμενου ὅρου καί διαιρέσουμε τό γινόμενο μέ τόν ἀριθμό πού φανερώνει τήν τάξη τοῦ προηγούμενου ὅρου. Οἱ συντελεστές, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τούς ἀκραίους ὅρους, εἶναι ἴσοι.

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^9$.

Ἔχουμε: $(x+\alpha)^9 = x^9 + 9x^8\alpha + 36x^7\alpha^2 + 84x^6\alpha^3 + 126x^5\alpha^4 + 126x^4\alpha^5 + 84x^3\alpha^6 + 36x^2\alpha^7 + 9x\alpha^8 + \alpha^9$

Παρατηροῦμε ὅτι τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^9$

α) εἶναι ὁμογενές πολυώνυμο 9ου βαθμοῦ ὡς πρός x καί α,

β) ἔχει πλῆθος ὅρων $9+1=10$,

γ) εἶναι «διατεταγμένο κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x καί τίς ἀνιοῦσες τοῦ α, καί

δ) ὁ συντελεστής, π.χ., τοῦ 5ου ὅρου εἶναι $(84\cdot 6):4=126$.

50. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΣΥΝΘΗΚΕΣ (Περιορισμοί στούς ὁποίους ὑπόκεινται τά γράμματα)

I. $\forall \alpha,\beta,\gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$

Ἀπόδειξη: Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε ἀπό τήν ταυτότητα
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ παίρνουμε
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$
Ἄν δέ $\alpha=\beta=\gamma$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha^3+\alpha^3+\alpha^3=3\alpha^3=3\alpha\alpha\alpha=3\alpha\beta\gamma$

Ἀντίστροφα. Ἄν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0 \Leftrightarrow$
$1/2(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0$ (βλ. ταυτότητα 3).

Ἀπό αὐτή ἔχουμε: $\alpha+\beta+\gamma=0 \vee (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$.

Κάθε ὅρος τῆς παραστάσεως $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$ εἶναι μή ἀρνητικός. Ὥστε, ἄν $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2=0, (\beta-\gamma)^2=0, (\gamma-\alpha)^2=0 \Rightarrow \alpha-\beta=0, \beta-\gamma=0, \gamma-\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma$.

Ἄν ἔχουμε $\alpha+\beta+\gamma=0 \wedge (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$,
τότε $\alpha=\beta=\gamma=0$

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha,\beta,\gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma}$

Ἡ χρησιμότητα τῆς ταυτότητας αὐτῆς φαίνεται ἀπό τά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν.

Παραδείγματα: α) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο ἡ παράσταση
$(3\alpha-\beta)^3+(3\beta-\gamma)^3+(3\gamma-\alpha)^3$, ἄν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Λύση: Ἐπειδή $(3\alpha-\beta)+(3\beta-\gamma)+(3\gamma-\alpha)=2(\alpha+\beta+\gamma)=2\cdot 0=0$, ἕπεται ὅτι $(3\alpha-\beta)^3+(3\beta-\gamma)^3+(3\gamma-\alpha)^3=3(3\alpha-\beta)(3\beta-\gamma)(3\gamma-\alpha)$

β) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση

$$(2\tau-3\alpha)^3+(2\tau-3\beta)^3+(2\tau-3\gamma)^3.$$

Λύση: Ἐπειδή $(2\tau-3\alpha)+(2\tau-3\beta)+(2\tau-3\gamma)=6\tau-3(\alpha+\beta+\gamma)=$ $=6\tau-3\cdot 2\tau=6\tau-6\tau=0$, ἕπεται ὅτι

$(2\tau-3\alpha)^3+(2\tau-3\beta)^3+(2\tau-3\gamma)^3=3(2\tau-3\alpha)(2\tau-3\beta)(2\tau-3\gamma)$.

II. $\forall\alpha,\beta,\gamma: \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

Οἱ μαθητές ἀφοῦ χρησιμοποιήσουν τήν ταυτότητα

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\equiv\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma),$$

νά κάνουν τήν ἀπόδειξη.

III. $\forall\alpha,\beta,\gamma: \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha+\beta=\gamma \vee \beta+\gamma=\alpha \vee \gamma+\alpha=\beta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2)$.

Οἱ μαθητές ἀφοῦ ἐπαληθεύσουν τήν ταυτότητα τοῦ de Moivre
$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2\equiv(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$ $(\alpha-\beta-\gamma)$, νά κάνουν τήν ἀπόδειξη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

121) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν παρακάτω ταυτοτήτων:

1) $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2\equiv\alpha\beta$

2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\equiv\frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

3) $(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2+(\mu+\nu)(\mu-\nu)=\mu(2\nu+\mu)+\nu(2\mu-\nu)$

4) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3\equiv2\beta(\beta^2+3\alpha^2)$

5) $(\alpha-x)(\beta+x)(\gamma-x)\equiv(x-\alpha)(x+\beta)(x-\gamma)$

122) Νά βρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα:

1) $(4x^3-3x^2-2x+1)^2$, 2) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+2\right)^2$

3) $(\alpha x+\beta y+xy+1)^2$, 4) $(\alpha^3-\alpha^2x+\alpha x^2-x^3)^2$

123) Νά γίνουν οἱ πράξεις: $(2x+3\psi-\omega)^2-(x-3\psi+2\omega)^2-(x-3\psi-2\omega)^2$

124) Νά βρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα:

1) $(\alpha^2-\alpha x+x^2)^3$, 2) $(\alpha^{2\nu}+\alpha^\nu+1)^3$

125) Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο:

$$(x+\psi+\omega)^3-(x-\psi+\omega)^3-(x+\psi-\omega)^3-(\psi+\omega-x)^3$$

126) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων: $8x^3-27\psi^3-64\omega^3-72x\psi\omega$.

127) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$(\alpha-\beta)^3-\alpha^3+(\alpha+\beta)^3+3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\equiv\alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$$

128) Νά ἐπαληθευθοῦν οἱ παρακάτω ταυτότητες μέ τή βοήθεια τῆς ταυτότητας Lagrange:

1) $(\alpha^2+x^2+\psi^2)(x^2+\alpha^2+1)-(2\alpha x+\psi)^2\equiv(\alpha^2-x^2)^2+(\alpha-x\psi)^2+(x-\alpha\psi)^2$

2) $(x^2+\psi^2+z^2)^2-(x\psi+\psi z+xz)^2\equiv(x^2-\psi z)^2+(\psi^2-xz)^2+(z^2-x\psi)^2$

3) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2+\omega^2+1)-(\alpha x+\beta\omega)^2\equiv\alpha^2\psi^2+\beta^2\psi^2+\alpha^2+\beta^2+(\alpha\omega-\beta x)^2$

129) Νά βρεθοῦν τά ἀκόλουθα ἀναπτύγματα:

$(2x\pm\psi)^4$, $(x\pm3)^6$, $(\alpha x^2+1)^5$, $(\alpha\beta\gamma+2x)^7$, $(\alpha^2-x^2)^7$

130) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις: 1) $(x-\psi)^6+(x+\psi)^6-(x^3+\psi^3)(x^3-\psi^3)$

2) $(2x^2-1)^4-(3x+2)^3$, 3) $3(x-3\psi)^4-5(x^2-5\psi^2)^2$.

131) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ταυτοτήτων:

1) $(\alpha + \beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3 \equiv 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$(\alpha + \beta)^5 - \alpha^5 - \beta^5 \equiv 5\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ Ταυτότητες τοῦ Gauchy

$(\alpha + \beta)^7 - \alpha^7 - \beta^7 \equiv 7\alpha\beta(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)^2$

2) $(x + \psi)^4 + x^4 + \psi^4 \equiv 2(x^2 + x\psi + \psi^2)^2$

3) $(2x + \beta)^5 - 32x^5 - \beta^5 \equiv 10\beta x(2x + \beta)(4x^2 + 2x\beta + \beta^2)$

4) $(3\alpha - 2\beta)^5 - 243\alpha^5 + 32\beta^5 \equiv 30\alpha\beta(2\beta - 3\alpha)(9\alpha^2 - 6\alpha\beta + 4\beta^2)$

132) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ταυτότητα τοῦ De Moivre

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\alpha^2\gamma^2 \equiv$$
$$\equiv (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)$$

133) Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ νά γίνει γινόμενο ἡ παράσταση

$$(\alpha + \beta)^3 + (\beta + \gamma)^3 + (\gamma + \alpha)^3$$

134) Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο ἡ παρ. $(\alpha - \beta)^3 + (\beta - \gamma)^3 + (\gamma - \alpha)^3$

135) Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = \kappa + \lambda + \mu$ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο ἡ παράσταση

$$(\alpha - k)^3 + (\beta - \lambda)^3 + (\gamma - \mu)^3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

136) Ἄν $\alpha = 7x + 3\psi + 6\omega$, $\beta = 6x + 2\psi + 6\omega$, $\gamma = 3x + 3\psi + 2\omega$ καί $x^2 = \psi^2 + \omega^2$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

137) Νά βρεθοῦν τά ἀναπτύγματα τῶν:

1) $(\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu)^2 - (\alpha^\nu - \beta^\nu - \gamma^\nu)^2 + (-\alpha^\nu + \beta^\nu + \gamma^\nu)^2$

2) $(\alpha x^\nu + \beta\psi^\mu)^2 + (\alpha x^\nu - \beta\psi^\mu + 1)^2 - (\alpha\psi^\mu - \beta x^\nu)^2$

138) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^3 - 3(\alpha\delta + \beta\delta + \gamma\delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - - \delta^3 \equiv (\alpha + \beta + \gamma)^3$

139) Νά βρεθεῖ τό ἐξαγόμενο τῆς παραστάσεως

$(\alpha - \beta + \gamma)^3 - \alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3$ μέ μορφή γινομένου

140) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι εἶναι: $\alpha^9 + \alpha^3 + 1 - 3\alpha^4 \equiv (\alpha - 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)\cdot$

$\cdot(\alpha^5 + \alpha^4 - \alpha^2 - 1) \equiv (\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha - 1)^2(\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 + \alpha + 1)$

141) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀλγ. παράσταση $(x^2 + \psi^2 + \omega^2)(\alpha^2 + x^2) - (\alpha x + x\psi)^2$ εἶναι μή ἀρνητική (δηλ. παίρνει $\forall\ \alpha, x, \psi, \omega, \in \mathrm{R}$ μόνο θετικές ἤ μηδενικές τιμές).

142) Ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{R} \wedge \beta_1 \cdot \beta_2 \neq 0$ καί $(\alpha^2{}_1 + \alpha^2{}_2)(\beta^2{}_1 + \beta^2{}_2) = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$

143) Ἄν $\alpha i, \beta i \in \mathrm{R}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \ldots + \beta_\nu^2) \geq (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

(Αὐτή λέγεται ἀνισότητα τοῦ Schwarz). Μέ ποιές συνθῆκες εἶναι μόνο ἰσότητα;

144) Νά ἐπαληθευθοῦν οἱ ταυτότητες

α) $(x + \psi)^3 + (\psi + \omega)^3 + (\omega + x)^3 - 3(x + \psi)(\psi + \omega)(\omega + x) \equiv$

$\equiv 2(x^3 + \psi^3 + \omega^3 - 3x\psi\omega)$

β) $(x^2 - \psi\omega)^3 + (\psi^2 - \omega x)^3 + (\omega^2 - x\psi)^3 - 3(x^2 - \psi\omega)(\psi^2 - \omega x)(\omega^2 - x\psi) \equiv$

$\equiv (x^3 + \psi^3 + \omega^3 - 3x\psi\omega)^2$

145) Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο ἡ παράσταση

$$A = (\alpha\kappa + \beta\lambda)^3 + (\beta\kappa + \gamma\lambda)^3 + (\gamma\kappa + \alpha\lambda)^3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΡΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

51. Τήν ἔννοια τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος καί τίς πράξεις τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων τά μάθαμε στήν προηγούμενη τάξη, γι' αὐτό θά τά ἐπαναλάβουμε ἐδῶ μόνο περιληπτικά.

Κάθε συνάρτηση $\psi = \frac{A}{B} \in R$, ὅπου A καί B ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς ἤ περισσότερων μεταβλητῶν καί $B \neq 0$, λέγεται **ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα.**

Ἕνα ρητό ἀλγεβρ. κλάσμα εἶναι ἡ ἁπλούστερη μορφή μιᾶς ρητῆς κλασματικῆς παραστάσεως. Ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος μπορεῖ νά εἶναι σταθερά, ὁπότε τό κλάσμα εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο. Ἄρα ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα.

Οἱ συναρτήσεις $\frac{4x\psi}{x+\psi}, \frac{x^2+1}{x^2-1}, \frac{x^2+2x\psi+\psi^2}{x^2+x\psi}, \frac{x^3+\psi^3+\omega^3-3x\psi\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2}$ εἶναι ρητά ἀλγεβρικά κλάσματα.

Γιά νά ἔχει ἔννοια ἡ συνάρτηση $\psi = \frac{A}{B}$, πρέπει $B \neq 0$. Ἄρα εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο R, ἀπό τό ὁποῖο ἐξαιροῦνται οἱ τιμές, πού μηδενίζουν τόν παρονομαστή.

Π.χ. τό σύνολο ὁρισμοῦ τῆς συναρτ. $f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, ὅπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα, εἶναι τό σύνολο $\Sigma = R - \{ x/x \in R$ καί $\varphi_2(x) = 0\}$.

Συμβολίζουμε: $f \mid x \in \Sigma \rightarrow f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \in R$.

Ἐπίσης τό σύνολο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $f(x, y) = \frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi_2(x,y)}$, $x,y \in R$ καί $\varphi_1(x,y), \varphi_2(x, y)$ ἀκέραια πολυώνυμα, εἶναι τό σύνολο $\Sigma = R^2 - \{(x,y) | (x,y) \in R^2$ καί $\varphi_2(x, y) = 0\}$.

Συμβολίζουμε: $f \mid (x, y) \in \Sigma \rightarrow f(x, y) = \frac{\varphi_1(x,y)}{\varphi_2(x,y)} \in R$.

Σημείωση: $R^2 = R \times R$ (Καρτεσιανό γινόμενο)
$\Lambda =$ καί (σύμβολο λογικῆς συζεύξεως)

Παραδείγματα: α) τῆς συναρτήσεως $\left(x,\ y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}\right)$, $x \in R$, σύνολο ὁρισμοῦ εἶναι τό σύνολο $\Sigma = R - \{2, -2\}$.

β) τῆς συναρτήσεως $\left(x, y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x \in R \wedge \gamma \neq 0$ σύνολο ὁρι-σμοῦ εἶναι τό σύνολο

$$\Sigma = R - \{x/x \in R \wedge \gamma x + \delta = 0\} = R - \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}$$

52. ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

$$y = \frac{\varphi_1}{\varphi_2},\ \varphi_1, \varphi_2 \text{ ἀκερ. πολυώνυμα.}$$

α) Τό κλάσμα αὐτό δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ,

ὅταν $\varphi_1 \in R \wedge \varphi_1 \neq 0 \wedge \varphi_2 = 0$, γιατί $\varphi_2 \cdot y = 0 \cdot y = 0 \neq \varphi_1$

β) Ἄν $\varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 \neq 0$ τό κλάσμα $y = 0$ γιά κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο $\varphi_2 \neq 0$

γ) Ἄν $\varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0$ τό κλάσμα y εἶναι ἀπροσδιόριστο ἤ ἀόριστο.

53. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

Ὁρισμός. Δύο ἤ περισσότερα ἀκέραια πολυώνυμα ὀνομάζονται πρῶτα μεταξύ τους, ἄν ὁ Μ.Κ.Δ. τους εἶναι μία σταθερά $C \neq 0$. Ἄρα τά πηλίκα τῆς διαιρέσεως ἀκεραίων πολυωνύμων μέ τό Μ.Κ.Δ. τους εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα πρῶτα μεταξύ τους καί ἀντιστρόφως.

Ἁπλοποίηση ρητοῦ κλάσματος

Ἄν πολ/σουμε τούς ὅρους ἑνός ρητοῦ κλάσματος $\psi = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ μέ τό ἴδιο ἀκέραιο πολυώνυμο φ(x), παίρνουμε ἕνα ρητό κλάσμα $\frac{\varphi_1 \cdot \varphi}{\varphi_2 \cdot \varphi}$ ἰσοδύναμο μέ τό $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, $\forall\ x \in \Sigma = R - \{x/x \in R \wedge \varphi = 0 \wedge \varphi_2 = 0\}$

Ἀντιστρόφως τό κλάσμα $\frac{\varphi_1\varphi}{\varphi_2\varphi}$ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, $\forall\ x \in \Sigma$, ὁπότε λέμε ὅτι τό κλάσμα $\frac{\varphi_1\varphi}{\varphi_2\varphi}$ ἁπλοποιήθηκε στό $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$

Ἡ ἁπλοποίηση λοιπόν εἶναι δυνατή, ἄν οἱ ὅροι τοῦ ρητοῦ κλάσματος ἔχουν κοινό παράγοντα ἀλγεβρική παράσταση. Ἀπό τά παραπάνω ἕπεται ὅτι, γιά νά ἁπλοποιήσουμε ἕνα ρητό ἀλγεβρ. κλάσμα, ἀναλύουμε τούς ὅρους του σέ γινόμενο παραγόντων καί τούς διαιροῦμε μέ τούς κοινούς παράγοντές τους, ὅταν τούς ὑποθέσουμε διάφορους τοῦ μηδενός. Ἄν ἡ διαίρεση γίνει μέ τό Μ.Κ.Δ. τῶν ὅρων του, τότε προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμο μέ τό ἀρχικό καί μέ ὅρους πρώτους μεταξύ τους.

Παραδείγματα: α) Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα $A = \frac{x^3 - \psi^3}{x^2 - \psi^2}$ $x, \psi \in R$

Λύση: Ἔχουμε $A = \frac{x^3-\psi^3}{x^2-\psi^2} = \frac{(x-\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)}{(x+\psi)(x-\psi)}$

Ἄν $x-\psi \neq 0$ διαιροῦμε τούς ὅρους τοῦ Α μέ $x-\psi$ καί ἔχουμε $B = \frac{x^2+x\psi+\psi^2}{x+\psi}$

Τά κλάσματα Α καί Β εἶναι ἰσοδύναμα γιά κάθε $(x, \psi) \in R^2$, ἐκτός ἀπό τά ζεύγη (x, ψ) πού μηδενίζουν τήν παράσταση $x - \psi$.

Σημ. 1) Τά κλάσματα Α καί Β μέ $x + \psi = 0$ δέν ἔχουν ἔννοια. 2) Ὁ παράγοντας $x - \psi$ λέγεται παράγοντας ἀπροσδιοριστίας τοῦ κλάσματος.

β) Νά ἁπλοποιηθεῖ τό ρητό κλάσμα $A = \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$, $x \in R$.

Λύση: Ἔχουμε $A = \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$, $x - 3 \neq 0$.

Τό κλάσμα δέν ἔχει ἔννοια μέ $x = 2$. Ὁ παράγοντας $x - 3$ εἶναι ὁ παράγοντας ἀπροσδιοριστίας τοῦ κλάσματος.

Πράξεις ρητῶν ἀλγ. κλασμάτων.

Οἱ πράξεις πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολ/σμός καί διαίρεση μέ ρητὰ ἀλγεβρικά κλάσματα γίνονται ὅπως καὶ μέ τά γνωστά μέχρι τώρα κλάσματα. Ἔτσι ἔχουμε:

$\forall\ x \in \Sigma = R - \{x/x \in R \wedge \varphi = 0\}$, $\qquad \frac{p_1}{\varphi} \pm \frac{p_2}{\varphi} = \frac{p_1 \pm p_2}{\varphi}$

$\forall\ x \in \Sigma = R - \{x/x \in R \wedge \varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0\}$ $\qquad \frac{p_1}{\varphi_1} \pm \frac{p_2}{\varphi_2} = \frac{p_1\varphi_2 \pm p_2\varphi_1}{\varphi_1\varphi_2}$

$\forall\ x \in \Sigma = R - \{x/x \in R \wedge \varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0\}$ $\qquad \frac{p_1}{\varphi_1} \cdot \frac{p_2}{\varphi_2} = \frac{p_1 p_2}{\varphi_1\varphi_2}$

$\forall\ x \in \Sigma = R - \{x/x \in R \wedge \varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0 \wedge p_2 = 0\}$ $\qquad \frac{p_1}{\varphi_1} : \frac{p_2}{\varphi_2} = \frac{p_1\varphi_2}{\varphi_1 p_2}$

Σημ.: Ὅλα τά πολυώνυμα εἶναι ἀκέρ. πολυώνυμα τοῦ x.

Παραδείγματα: α) Νά γίνει ρητό κλάσμα ἡ παράσταση:

$$A = \frac{2x-1}{2x} + \frac{2x}{1-2x} - \frac{1}{2x(1-2x)}, \ x \in R$$

Λύση: Τό κλάσμα $\frac{2x-1}{2x}$ ἔχει ἔννοια ὅταν $x \neq 0$, τό $\frac{2x}{1-2x}$ ὅταν $x \neq \frac{1}{2}$ καί τό $\frac{1}{2x(1-2x)}$ ὅταν $x \neq 0$ καί $x \neq \frac{1}{2}$. Ἄρα γιά νά κάνουμε τίς πράξεις πρέπει νά ὑποθέσουμε $x \neq 0$ καί $x \neq \frac{1}{2}$. Τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $2x(1 - 2x)$. Μετά τήν ἀναγωγή τῶν κλασμάτων στόν ἴδιο παρονομαστή ἔχουμε:

$$A = \frac{(2x-1)(1-2x)+2x.2x-1}{2x(1-2x)} = \frac{4x-2}{2x((1-2x)} = \frac{-2(1-2x)}{2x(1-2x)} = -\frac{1}{x}$$

β) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση

$$A = \frac{x+2}{x-2} \cdot \frac{x^2-4}{4x}, \ (x \neq 2, x \neq 0)$$

Λύση: $A = \frac{(x+2)(x^2-4)}{(x-2)4x} = \frac{(x+2)(x+2)(x-2)}{(x-2)4x} = \frac{(x+2)^2}{4x}$

γ) Νά γίνουν οἱ πράξεις

$$A = \frac{x^4-1}{x^2-2x+1} : \frac{x^2+x}{x-1}, \ (x \neq 1, x \neq -1, x \neq 0)$$

Λύση : $A = \frac{x^4-1}{x^2-2x+1} : \frac{x^2+x}{x-1} = \frac{x^4-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)x} =$

$$= \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)x} = \frac{x^2+1}{x}$$

54. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ἕνα ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα, ἄν περιέχει σέ ἕναν τουλάχιστο ἀπό τούς ὅρους του ρητό κλάσμα, λέγεται **σύνθετο κλάσμα.** Ἀντίθετα, ἐκεῖνα, πού ἔχουν ὅρους ἀκέραιες ρητές παραστάσεις λέγονται **ἁπλά κλάσματα.** Ἕνα σύνθετο κλάσμα τρέπεται σέ ἰσοδύναμο ἁπλό, ἄν πρῶτα μετατρέψουμε τούς ὅρους του σέ ρητά κλάσματα καί ἔπειτα διαιρέσουμε τά κλάσματα αὐτά.

Παραδείγματα :

α) Νά τραπεῖ σέ ἁπλό τό σύνθετο κλάσμα $A = \dfrac{\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+1}{\dfrac{x+\psi}{x-\psi}-1}$

Λύση : Ὁ ἀριθμητής: $\frac{x+\psi}{x-\psi} + 1 = \frac{x+\psi}{x-\psi} + \frac{x-\psi}{x-\psi} = \frac{2x}{x-\psi}, \ (x \neq \psi)$

Ὁ παρονομαστής : $\frac{x+\psi}{x-\psi} - 1 = \frac{x+\psi}{x-\psi} - \frac{x-\psi}{x-\psi} = \frac{2\psi}{x-\psi}, \ (x \neq \psi)$

Τό σύνθετο κλάσμα: $A = \dfrac{\dfrac{2x}{x-\psi}}{\dfrac{2\psi}{x-\psi}} = \frac{2x}{x-\psi} : \frac{2\psi}{x-\psi} = \frac{x}{\psi}, \ (x \neq \psi, \ \psi \neq 0)$

β) Νά τραπεῖ σέ ἁπλό τό σύνθετο κλάσμα $A = \dfrac{4x^2+2x}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}, \ x \neq 0$

Λύση : Ἀρχίζοντας ἀπό τόν παρονομαστή ἔχουμε: $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

καί ἄρα τό κλάσμα $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$, ὁπότε ὁ παρονομαστής τοῦ σύνθετου γίνεται $1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$

Ὥστε: $A = \dfrac{4x^2+2x}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{2x(2x+1)(x+1)}{2x+1} = 2x(x+1), \ \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

146) Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ἀκόλουθα ρητά κλάσματα:

1) $\dfrac{39\beta^2\gamma\delta^4}{65\beta\gamma^3\delta^2}$, 2) $\dfrac{165\mu^3\nu^2x^\nu}{132\mu^4\nu^2x^{\nu-1}}$, 3) $\dfrac{147x^{\nu+2}y^\nu}{49x^{\nu+1}y^{\nu-1}}$, 4) $\dfrac{1-x^2}{(1+\alpha x)^2-(\alpha+x)^2}$

5) $\dfrac{10\alpha^2-7\alpha^3+10-7\alpha}{\alpha^2-2\alpha^3+1-2\alpha}$, 6) $\dfrac{x^2-(\alpha-\beta)x-\alpha\beta}{x^3+\beta x^2+\alpha x+\alpha\beta}$, 7) $\dfrac{15x^3+35x^2+3x+7}{27x^4+63x^3-12x^2-28x}$,

8) $\dfrac{(\alpha+\beta)^5-\alpha^5-\beta^5}{(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3}$, 9) $\dfrac{xy(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(x^2+y^2)}{xy(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(x^2-y^2)}$, 10) $\dfrac{x^4-\alpha^2x^2-5x^3+5\alpha^2x}{(x-\alpha)^2(x-5)}$,

11) $\dfrac{(x^2-2y\omega-\omega^2-y^2)(\alpha+\beta-\gamma)}{(x+y+\omega)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-2\alpha\gamma)}$

147) Νά μετατραπεῖ καθεμιά ἀπό τίς παρακάτω παραστάσεις σέ ρητό ἀλγεβρικό κλάσμα.

1) $\dfrac{5}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{x+2}$, 2) $\dfrac{\alpha}{(x-\beta)(x-\gamma)}+\dfrac{\beta}{(x-\gamma)(x-\alpha)}+$

$+\dfrac{\gamma}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, 3) $\dfrac{\alpha+\beta}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}+\dfrac{\beta+\gamma}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}+\dfrac{\gamma+\alpha}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}$,

4) $\dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}-\dfrac{x-y}{x^2-y^2}-\dfrac{x+y}{2(x^2+y^2)}$, 5) $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x-\alpha)}+\dfrac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(x-\beta)}+$

$+\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(x-\gamma)}$, 6) $\dfrac{\alpha^2-\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^2+\alpha\gamma}{(\beta+\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^2+\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma+\beta)}$,

7) $\dfrac{x^4-\alpha^2x^2-5x^3+5\alpha^2x}{(x-\alpha)^2(x-5)}-\dfrac{x^3-\alpha^2x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2}-\dfrac{4\alpha^3x-4\alpha^4}{x^3-\alpha^2x-\alpha x^2+\alpha^3}$, 8) $\dfrac{8\gamma^4-27\gamma\delta^3}{4\gamma^2-9\delta^2}\cdot$

$\cdot\dfrac{2(2\gamma+3\delta)}{4\gamma^2+6\gamma\delta+9\delta^2}$, 9) $\dfrac{11x-2\psi}{6x-\psi}:\dfrac{121x^2-4\psi^2}{36x^2-\psi^2}$, 10) $\dfrac{x^2-25}{x+2}:\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-4}$,

11) $\dfrac{\alpha^2-x^2}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha x+x^2}\cdot\left(\alpha+\dfrac{\alpha x}{\alpha-x}\right)$, 12) $\dfrac{\mu^2-\mu\nu+\nu^2}{\mu^3-3\mu\nu(\mu-\nu)-\nu^3}\cdot\dfrac{\mu^2-\nu^2}{\mu^3+\nu^3}$,

13) $\left(\dfrac{x^2}{\psi^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{\psi^2}-\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{x}\right)$, 14) $\left(\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4x+3}\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+8}\right):\dfrac{(x-2)^2}{x-1}$,

15) $\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\right):\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

148) Νά τραπεῖ σέ ἁπλό καθένα ἀπό τά ἀκόλουθα σύνθετα κλάσματα.

1) $\dfrac{\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}}{1-\alpha\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}}$, 2) $\dfrac{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}}$, 3) $\dfrac{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}+\beta}{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}-\beta}$,

4) $\dfrac{\left(1-\dfrac{3\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right)}{1+\dfrac{3\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2}}$, 5) $\dfrac{\left(\alpha-\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\alpha-\dfrac{2\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)}{\alpha\beta+\dfrac{\alpha\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}$,

6) $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}}$

149) Νά τραπεῖ σέ ἁπλό κλάσμα καθεμιά ἀπό τίς παραστάσεις

1) $$\frac{\frac{2\psi\omega}{\psi+\omega}-\psi}{\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\psi-2\omega}}+\frac{\frac{2\psi\omega}{\psi+\omega}-\omega}{\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega-2\psi}},\quad 2)\ \frac{\frac{x^3-\psi^3}{x^2+\psi^2}\cdot\frac{x^2-\psi^2}{x^3+\psi^3}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\psi^2}\right)}{\frac{(x+\psi)^2-x\psi}{(x-\psi)^2+x\psi}\cdot\left(\frac{1}{\psi}-\frac{1}{x}\right)^2}$$

3) $$\frac{\frac{x}{\psi}+\frac{\psi}{x}-1}{\frac{x^2}{\psi^2}+\frac{x}{\psi}+1}\cdot\frac{1+\frac{\psi}{x}}{x-\psi}:\frac{1+\frac{\psi^3}{x^3}}{\frac{x^2}{\psi}-\frac{\psi^2}{x}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

150) Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

1) $$\frac{x^6+2x^3y^3+y^6}{x^6-y^6},\quad 2)\ \frac{\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta\gamma-\alpha\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma^2},$$

3) $$\frac{(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.$$

151) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση

$$\frac{(x+y)^3-\omega^3}{x+y-\omega}+\frac{(y+\omega)^3-x^3}{y+\omega-x}+\frac{(x+\omega)^3-y^3}{x+\omega-y}$$

152) Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{2\beta^2+\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{2\gamma^2+\alpha\beta}=1.$$

153) Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0$$

154) Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

1) $$\frac{x^2-(\mu+\nu)x+\mu\nu}{x^2-(\mu+\kappa)x+\mu\kappa}\cdot\frac{x^2-\kappa^2}{x^2-\nu^2},\quad 2)\ \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^3+\beta^3}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}:\left(\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)^2,$$

3) $$\left(\frac{x^2-1}{x^4-2x^3+x^2}:\frac{x^2+2x+1}{x^3-1}\right):\frac{(x+1)^2-x}{x^2}$$

155) Ἄν $x=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ καί $y=\dfrac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$

νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση $\dfrac{x+y}{1-xy}$ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τά α, β, γ.

156) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύνθετο κλάσμα $$\frac{\frac{x-\alpha}{1+\alpha x}-\frac{x-\beta}{1+\beta x}}{1+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}}$$

εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό x.

157) Ἄν $\frac{x}{y+\omega}=\alpha$, $\frac{y}{\omega+x}=\beta$, $\frac{\omega}{x+y}=\gamma$ νά δειχθεῖ :

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)=2.$$

158) Ἄν $\nu \in N$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό κλάσμα $A=\frac{\alpha^{3\nu}-1}{\alpha^2+\alpha+1}$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ α.

159) Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα $A=\frac{(x^2-x\psi+\psi^2)^3+(x^2+x\psi+\psi^2)^3}{2(x^2+\psi^2)}$

160) Ἐπίσης τό κλάσμα $A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}$

161) Ἐπίσης τό κλάσμα $A=\frac{(x+\psi)^5-x^5-\psi^5}{(x^2+x\psi+\psi^2)5x^2\psi^2}$

162) Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=\beta=\gamma$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος $\frac{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}$

163) Ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ $A=\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ α΄ ΒΑΘΜΟΥ (Γραμμικά) (Συμπλήρωση)

55. Ἀπό τό Γυμνάσιο μᾶς εἶναι γνωστά τά ἀκόλουθα:

1. Ὁ ὁρισμός καί οἱ ἰδιότητες τῶν συστημάτων.
2. Οἱ βασικές μέθοδοι ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους καί ἡ διερεύνησή του.
3. Ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος μέ περισσότερες ἀπό δύο ἐξισώσεις καί ἰσάριθμους ἀγνώστους.

Στά ἑπόμενα, ἀφοῦ δοθεῖ ἡ λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος μέ τή βοήθεια τῶν ὁριζουσῶν, θά συμπληρωθεῖ ἡ διερεύνησή του καί θά μελετηθοῦν ὁρισμένες εἰδικές περιπτώσεις γραμμικῶν συστημάτων.

56. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ - ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΟΥ GRAMER

α) Ἐπίλυση συστήματος α΄ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

Στή Γ΄ τάξη δόθηκε ὁ ὁρισμός τῆς ὁρίζουσας β΄ τάξεως.

Ἔτσι: $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$: $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$

Ἄς θεωρήσουμε τό σύστημα:

$$\Sigma: \left| \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2 \end{array} \right. \quad \text{ὅπου} \quad \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, x, \psi \in R \wedge \\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0 \wedge |\alpha_2| + |\beta_2| > 0 \end{array}$$

Γνωρίζουμε ὅτι, ἄν $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1 \neq 0$, ἡ λύση τοῦ συστήματος Σ εἶναι:

$$(x, \psi) = \left(\frac{\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_2}, \frac{\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right)$$

πού μέ τή βοήθεια τῶν ὁριζουσῶν γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$(x, \psi) = \left(\frac{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}}\right) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_\psi}{\Delta}\right)$$

ὅπου $\Delta = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$, $\Delta_x = \begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix}$, $\Delta_\psi = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$

Εἶναι λοιπόν $\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ \psi = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}}$ (1)

ὁπότε $\frac{x}{\Delta_x} = \frac{1}{\Delta}$, $\frac{\psi}{\Delta_\psi} = \frac{1}{\Delta}$ καί ἄρα $\frac{x}{\Delta_x} = \frac{\psi}{\Delta_\psi} = \frac{1}{\Delta}$

Οἱ τύποι (1) (τύποι τοῦ Gramer) φανερώνουν ὅτι κάθε ἄγνωστος εἶναι πηλίκο δύο ὁριζουσῶν μέ παρονομαστή (κοινό) τήν ὁρίζουσα Δ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καί ἀριθμητή πού προκύπτει, ἄν στήν ὁρίζουσα τοῦ παρονομαστῆ ἀντικαταστήσουμε τή στήλη τῶν συντελεστῶν τοῦ ὑπολογιζόμενου ἀγνώστου μέ τή στήλη τῶν γνωστῶν ὅρων, πού πρέπει νά βρίσκονται ὁπωσδήποτε στό δεύτερο μέλος τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος.

Ἡ τυποποιημένη αὐτή μέθοδος ἐπιλύσεως συστήματος γραμμικοῦ μέ δύο ἀγνώστους ὀνομάζεται **κανόνας τοῦ Gramer.**

Παραδείγματα : 1. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα: $\left|\begin{array}{l} 3x + 2\psi = 12 \\ 5x - 3\psi = 1 \end{array}\right.$, $(x, y) \in R^2$

Λύση : Σύμφωνα μέ τόν κανόνα τοῦ Gramer ἔχουμε:

$$x = \frac{\begin{vmatrix}12 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix}3 & 12\\ 5 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix}}$$

ἤ $x = \frac{-36-2}{-9-10} = \frac{38}{19} = 2$, $\psi = \frac{3-60}{-9-10} = \frac{57}{19} = 3$

2. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα: $\left|\begin{array}{l} x + \alpha^2\psi = 2 \\ x + \psi = 2\alpha \end{array}\right.$, ὅπου $\alpha, x, \psi \in R$

Λύση : Ἔχουμε :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2 & \alpha^2\\ 2\alpha & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & \alpha^2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2-2\alpha^3}{1-\alpha^2}=\frac{2(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha+1)}{(1-\alpha)(1+\alpha)}=\frac{2(\alpha^2+\alpha+1)}{1+\alpha}=,\ (\alpha\neq\pm1),$$

$$\psi=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\alpha\end{vmatrix}}{1-\alpha^2}=\frac{2\alpha-2}{1-\alpha^2}=\frac{2(\alpha-1)}{(1+\alpha)(1-\alpha)}=-\frac{2}{1+\alpha}$$

Ἡ **διερεύνηση** τοῦ συστήματος $\Sigma:\left|\begin{array}{l}\alpha_1x+\beta_1\psi=\gamma_1\\ \alpha_2x+\beta_2\psi=\gamma_2\end{array}\right.$ συνοψίζεται στόν ἀκόλουθο πίνακα:

<table>
<tr><td colspan="3">Διερεύνηση τοῦ συστήματος $\Sigma:\ \alpha_1x+\beta_1\psi=\gamma_1\wedge\alpha_2x+\beta_2\psi=\gamma_2$
ὅπου $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2\ \in R$
καὶ $\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix},\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}\gamma_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \beta_2\end{vmatrix},\quad \Delta_\psi=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \gamma_2\end{vmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ἄν $\Delta\neq0$, τότε τό σύστημα Σ ἔχει μία μόνο λύση,
τήν : $(x,\psi)=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \frac{\Delta_\psi}{\Delta}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ἄν $\Delta=0$ καί</td><td colspan="2">$\Delta_x\neq0$ ἤ $\Delta_\psi\neq0$, τότε τό σύστημα Σ δέν ἔχει καμμιὰ λύση</td></tr>
<tr><td>$\Delta_x=0$
ἤ
$\Delta_\psi=0$</td><td>Τότε τό σύστημα Σ :
α) Ἔχει ἄπειρες σὲ πλῆθος λύσεις, ἄν τά α_1, α_2, β_1, β_2 δέν εἶναι ὅλα μηδέν.
(Ἀνάγεται σέ μιά ἐξίσ. μέ δυό ἀγνώστους)
β) Εἶναι ἀδύνατο, ἄν $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0$ καί $\gamma_1\neq0$ ἤ $\gamma_2\neq0$
γ) Εἶναι ταυτοτικό ὡς πρός x καί ψ, ἄν $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=0$</td></tr>
</table>

β) Ἐπίλυση συστήματος α΄ βαθμοῦ μέ τρεῖς ἀγνώστους.

Ὁρίζουσες τρίτης τάξεως.

Τό σύμβολο $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}$ πού ἀποτελεῖται ἀπό 9 στοιχεῖα σέ τρεῖς γραμμές καί τρεῖς στῆλες λέγεται ὁρίζουσα τρίτης τάξεως καί ὁρίζουμε :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Τό β' μέλος τῆς ἰσότητας λέγεται **ἀνάπτυγμα ἤ τιμή τῆς Δ** καί οἱ ὁρίζουσες

$$+\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

λέγονται **ἐλάσσονες ὁρίζουσες τῆς Δ** ὡς πρός τά στοιχεῖα τῆς α' στήλης.

Δηλαδή, τό ἀνάπτυγμα τῆς Δ προκύπτει, ἄν πολ/σουμε τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἤ στήλης ἀντιστοίχως τό καθένα μέ τήν ἐλάσσονα ὁρίζουσα, ἡ ὁποία προκύπτει ἄν διαγράψουμε τή γραμμή καί τή στήλη τοῦ στοιχείου αὐτοῦ.

Τό ἀνάπτυγμα αὐτό βρίσκεται πιό εὔκολα μέ τόν κανόνα τοῦ **Sarrus.** Σύμφωνα μέ αὐτό τόν κανόνα ἐπαναλαμβάνουμε κάτω ἀπό τήν τρίτη γραμμή τίς δύο πρῶτες γραμμές ἤ δεξιά τῆς τρίτης στήλης τίς δύο πρῶτες στῆλες καί ἔτσι προκύπτουν, ἀντίστοιχα, δύο πίνακες. Ὁ ἕνας (Ι) μέ πέντε γραμμές καί τρεῖς στῆλες καί ὁ ἄλλος (ΙΙ) μέ τρεῖς γραμμές καί πέντε στῆλες. Δηλαδή:

$$\text{Πίνακας I} \quad \begin{array}{r|ccc|l} + & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & - \\ + & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & - \\ + & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & - \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array} \qquad \text{Πίνακας II} \quad \left|\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ - & - & - & & \end{array}\right|$$

Ἔπειτα σχηματίζουμε τά τρία γινόμενα διαγώνια ἀπό πάνω ἀριστερά πρός τά κάτω δεξιά μέ πρόσημο τό (+) καί τά ἄλλα τρία γινόμενα ἐπίσης διαγώνια ἀπό κάτω ἀριστερά πρός τά πάνω δεξιά μέ πρόσημο τό (–).

Ἔτσι ἔχουμε: $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3$

Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν.

1. Τό ἀνάπτυγμα ὁρίζουσας δέ μεταβάλλεται, ἄν οἱ γραμμές γίνουν στῆλες καί οἱ στῆλες γραμμές.

2. Τό ἀνάπτυγμα ὁρίζουσας ἀλλάζει πρόσημο, ἄν ἀντιμεταθέσουμε δύο γραμμές ἤ δύο στῆλες.

3. Ἄν σέ μιά ὁρίζουσα δύο γραμμές ἤ δύο στῆλες εἶναι οἱ ἴδιες, τότε αὐτή ἰσοῦται μέ μηδέν.

4. Ἄν σέ μιά ὁρίζουσα τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἤ στήλης πολλαπλασιασθοῦν ἐπί $\lambda \in \mathrm{R}$, τότε καί τό ἀνάπτυγμά της πολλαπλασιάζεται ἐπί λ.

5. Τό ἀνάπτυγμα μιᾶς ὁρίζουσας δέ μεταβάλλεται, ἄν στά στοιχεῖα μιᾶς στήλης προσθέσουμε τά στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης στήλης, ἀφοῦ τά πολ/σουμε ἐπί

$\lambda \neq 0$. Τήν ἀπόδειξη τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν καθώς καί τήν ἀναζήτηση καί διατύπωση καί ἄλλων ἰδιοτήτων τήν ἀφήνουμε στούς μαθητές γιά ἄσκηση.

Παραδείγματα: Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν ὁριζουσῶν:

α) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ β) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ \alpha & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -\alpha \end{vmatrix}$ γ) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$

Λύση:

α) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} : \Delta_1 = 4 + 54 + 10 - 60 - 6 - 6 = -4$

β) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 & 1 & \alpha \\ \alpha & -1 & 3 & \alpha & -1 \\ 2 & 1 & -\alpha & 2 & 1 \end{vmatrix} : \Delta_2 = \alpha + 6\alpha - 2\alpha - 4 - 3 + \alpha^3 = \alpha^3 + 5\alpha - 7$

γ) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & \beta^2 & 1 & \beta \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & 1 & \gamma \end{vmatrix} : \Delta_3 = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \alpha\gamma^2 = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

Λύση καί διερεύνηση τοῦ συστήματος Σ: $\begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 \psi + \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{vmatrix}$ (1)

Λύση: Λαμβάνουμε τίς ἐλάσσονες ὁρίζουσες ἀπό τήν ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος (1)

$$A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = -\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

καί σχηματίζουμε τό γραμμικό συνδυασμό.

$A_1(\alpha_1 x + \beta_1\psi + \gamma_1\omega) + A_2(\alpha_2 x + \beta_2\psi + \gamma_2\omega) + A_3(\alpha_3 x + \beta_3\psi + \gamma_3\omega) =$ $= A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + A_3\delta_3 \Leftrightarrow (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)x + (\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3)\psi +$ $+ (\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3)\omega = A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + A_3\delta_3$. Ἀλλά εἶναι: $\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 +$ $+ \beta_3 A_3 = \beta_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \beta_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \beta_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0$

Ἐπίσης εἶναι: $\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = \gamma_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \gamma_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) +$ $+ \gamma_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0$. Ἄρα $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)x = \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3$

$$\text{ἤ} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{ἤ} \quad \Delta \cdot x = \Delta_x \qquad (2)$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο λαμβάνουμε:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \psi = \begin{vmatrix} \alpha_1 \delta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \delta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \delta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{ἤ} \quad \Delta \cdot \psi = \Delta_\psi \qquad (3)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \delta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \delta_3 \end{vmatrix} \quad \text{ἤ} \quad \Delta \cdot \omega = \Delta_\omega \qquad (4)$$

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ἄν εἶναι $\Delta \neq 0$, τότε ἀπό τίς (2), (3), (4) προκύπτει ὅτι τό σύστημα Σ

θά ἔχει μία λύση τήν $\quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad \psi = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}, \quad \omega = \frac{\Delta_\omega}{\Delta} \qquad (5)$

Παρατηροῦμε καί ἐδῶ, ὅτι γιά τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος Σ μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ ὁ κανόνας Gramer.

β) Ἄν εἶναι $\Delta = 0$ καί ἕνας, τό λιγότερο, ἀπό τούς Δ_χ, Δ_ψ, Δ_ω εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τότε ἀπό τίς (2), (3), (4) συμπεραίνουμε ὅτι τό σύστημα (1) εἶναι ἀδύνατο.

γ) Ἄν εἶναι $\Delta = \Delta_\chi = \Delta_\psi = \Delta_\omega = 0$, τότε τό σύστημα ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις. Εἶναι ἀόριστο.

δ) Ἄν $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, τότε τό σύστημα εἶναι ταυτοτικό (x, ψ, ω αὐθαίρετοι).

Παρατηρήσεις: 1) Στήν πρώτη περίπτωση, ἄν εἶναι $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ (σύστημα ὁμογενές), ὁπότε $\Delta_\chi = \Delta_\psi = \Delta_\omega = 0$, τό σύστημα (1) θά ἔχει μία μόνο λύση, τή μηδενική.

2) Ἄν Δ_χ, Δ_ψ, Δ_ω, Δ εἶναι ὅλα διάφορα τοῦ μηδενός, τότε ἀπό τούς (5) λαμβάνουμε:

$$\frac{\chi}{\Delta_\chi} = \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{\psi}{\Delta_\psi} = \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{\omega}{\Delta_\omega} = \frac{1}{\Delta} \quad \text{καί ἑπομένως} \quad \frac{\chi}{\Delta_\chi} = \frac{\psi}{\Delta_\psi} = \frac{\omega}{\Delta_\omega} = \frac{1}{\Delta}$$

Σημείωση: Διάφορες ἄλλες ὑποπεριπτώσεις νά ἀναζητηθοῦν καί νά ἐξεταστοῦν ἀπό τούς μαθητές.

Παραδείγματα: 1) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα: x, ψ, z ∈ R

$$\left| \begin{array}{l} 2x + \psi - z = 1 \\ -x + 2\psi + z = 6 \\ x + \psi + 2z = 9 \end{array} \right.$$

Λύση: Σύμφωνα μέ τόν κανόνα τοῦ Gramer λαμβάνουμε:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\6&2&1\\9&1&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}}=1,\quad \psi=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&6&1\\1&9&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}}=2,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\-1&2&6\\1&1&9\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-1\\-1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}}=3$$

Ἔτσι ἔχουμε τή λύση: $(x, \psi, z) = (1, 2, 3)$

2) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα: $x + 3\psi + \alpha z = -4\alpha \land -x + \alpha\psi + \alpha z = -2\alpha^2 \land 2x + \psi - z = -1$, $x, \psi, z, \alpha \in R$.

Λύση: Μέ τόν κανόνα τοῦ Gramer λαμβάνουμε:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-4\alpha&3&\alpha\\-2\alpha^2&\alpha&\alpha\\-1&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&\alpha\\-1&\alpha&\alpha\\2&1&-1\end{vmatrix}}=\alpha,\quad \psi=\frac{\begin{vmatrix}1&-4\alpha&\alpha\\-1&-2\alpha^2&\alpha\\2&-1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&\alpha\\-1&\alpha&\alpha\\2&1&-1\end{vmatrix}}=-2\alpha,\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&3&-4\alpha\\-1&\alpha&-2\alpha^2\\2&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3&\alpha\\-1&\alpha&\alpha\\2&1&-1\end{vmatrix}}=1$$

Ἔτσι ἔχουμε τή λύση: $(x, \psi, z) = (\alpha, -2\alpha, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α':

164) Νά ἐπιλυθοῦν μέ τόν κανόνα τοῦ Cramer τά συστήματα:

1) $9(2x-3)-10(\psi+3)=19$, $6(4x-9)-25(\psi+4)=-6$

2) $\frac{x}{4}-\frac{\psi}{3}=1$, $\frac{x}{6}+\frac{\psi}{2}=5$

3) $x+\alpha^2\psi=2$, $x+\psi=2\alpha$

4) $kx+(k+2)\psi=2$, $x+k\psi=1$

165) Μέ ποιές τιμές τῶν λ καί μ τό σύστημα $\left|\begin{array}{l}(\lambda+1)x+2\mu\psi=2\\(3-\lambda)x+(3\mu-1)\psi=-3\end{array}\right.$

ὅπου $x, \psi, \lambda, \mu \in R$, ἔχει ἄπειρες λύσεις.

166) Μέ ποιές καί τίς αὐτές τιμές τῶν λ καί μ τά δύο συστήματα

$\Sigma_1: \left|\begin{array}{l}\mu x+\lambda\psi=1\\2x-\psi=3\end{array}\right.$ καί $\Sigma_2: \left|\begin{array}{l}-\mu x+(\lambda+1)\psi=2\\x+2\psi=5\end{array}\right.$ εἶναι ἀδύνατα;

167) Νά εὑρεθεῖ ἡ τιμή τῶν ὁριζουσῶν:

1) $\begin{vmatrix}1&3&6\\1&4&10\\1&5&15\end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix}5&3&1\\10&6&1\\15&9&1\end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix}1&1&1\\\alpha&\beta&\gamma\\\alpha^2&\beta^2&\gamma^2\end{vmatrix}$

168) Νά ἐπιλυθοῦν μέ τόν κανόνα Cramer τά συστήματα :

1) $\begin{vmatrix} x+\psi-2z=-15 \\ x-\psi+z=10 \\ -2x+\psi+z=15 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 3x-\psi+3z=1 \\ -x+2\psi-z=-7 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{\psi}{4}+\dfrac{z}{3}=-\dfrac{5}{3} \end{vmatrix}$

Ὁμάδα β' :

169) Νά ἐπιλυθοῦν μὲ τὸν κανόνα Gramer τὰ συστήματα:

1) $x+\mu\psi=1$
$(\mu+1)x-\psi=2$

2) $(\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)\psi=2(\alpha^2+\beta^2)$
$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)\psi=2(\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2)$

170) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\Sigma: \begin{matrix} \alpha_1x+\beta_1\psi=\gamma_1 \\ \alpha_2x+\beta_2\psi=\gamma_2 \end{matrix}$ $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\, \gamma_1, \gamma_2 \in R$

1) ἄν $\gamma_1=\gamma_1=0 \wedge \alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2 \neq 0$
2) ἄν $\alpha_1 \neq 0 \vee \beta_1 \neq 0 \wedge \alpha_2=\beta_2=0 \wedge \gamma_2 \neq 0$
3) ἄν $\beta_1=\beta_1=0 \wedge \alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1 \neq 0$
4) ἄν $\alpha_1=\beta_1=0 \wedge \gamma_1 \neq 0 \wedge (\alpha_2 \neq 0 \vee \beta_2 \neq 0)$
5) ἄν $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_2=0 \wedge (\gamma_1 \neq 0 \vee \gamma_2 \neq 0)$
6) ἄν $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0$
7) ἄν $\alpha_2=\beta_2=\gamma_2=0 \wedge (\alpha_1 \neq 0 \vee \beta_1 \neq 0)$

171) Νά εὑρεθεῖ ἡ τιμὴ τῶν ὁριζουσῶν:

1) $\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix}$

172) Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ταυτότητες : $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R$

1) $\begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & 1+\gamma^2 \end{vmatrix} \equiv \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} \equiv (\alpha+\beta+\gamma)^2$

173) Νά ἐπιλυθοῦν μὲ τὸν κανόνα Gramer τὰ συστήματα :

1) $\begin{vmatrix} x+\psi+z=1 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z=\delta \\ \alpha^2x+\beta^2\psi+\gamma^2z=\delta^2 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} \alpha x+\psi+\omega=1 \\ x+\alpha\psi+\omega=\alpha \\ x+\psi+\alpha\omega=\alpha^2 \end{vmatrix}$

57. ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Α' ΘΑΒΜΟΥ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ (τεχνάσματα)

Ἡ ἐπίλυση ὁρισμένων συστημάτων α' βαθμοῦ εἰδικῆς μορφῆς γίνεται μέ εἰδικές μεθόδους (τεχνάσματα) πιό σύντομα καί ἁπλούστερα ἀπό τίς γνωστές μεθόδους ἐπιλύσεως.

Ἀναφέρουμε παρακάτω μερικές εἰδικές μεθόδους ἐπιλύσεως συστημάτων, οἱ ὁποῖες παρουσιάζονται πιό συχνά.

α) Ἡ μέθοδος τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων κατά μέλη.

Μέ τή μέθοδο αὐτή ἐπιλύονται συστήματα μέ μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{\nu-1} = \alpha_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_\nu = \alpha_2 \\ x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_1 = \alpha_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_\nu + x_1 + x_2 + \ldots + x_{\nu-2} = \alpha_\nu \end{array}\right| \quad (1) \qquad \text{ὅπου } x_1, x_2, \ldots, x_\nu \text{ ἄγνωστοι, } \nu \in N \text{ καί } \nu \geq 3$$

Ἄν προσθεσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος λαμβάνουμε:

$$(\nu-1)(x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1} \qquad (2)$$

Ἔπειτα συνδυάζουμε κάθε ἐξίσωση τοῦ συστήματος (1) μέ τή (2), ὁπότε λαμβάνουμε ἀντιστοίχως:

$$\alpha_1 + x_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1} \Leftrightarrow x_\nu = \frac{\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu - (\nu-2)\alpha_1}{\nu-1}$$

$$x_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu-1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\alpha_1 - (\nu-2)\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{\nu-1} + \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu-1} \Leftrightarrow x_{\nu-1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} - (\nu-2)\alpha_\nu}{\nu-1}$$

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$x + \psi + z = 1, \; \psi + z + \omega = 3, \; z + \omega + x = 2, \; \omega + x + \psi = 6$$

Ἐπίλυση: Ἄν προσθέσουμε κατά μέλη τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἔχουμε $3(x + \psi + z + \omega) = 12 \Leftrightarrow x + \psi + z + \omega = 4 \quad (3)$

Ἀφαιροῦμε κατά μέλη κάθε ἐξίσωση τοῦ συστήματος ἀπό τήν (3), ὁπότε ἔχουμε ἀντιστοίχως:

$$\omega = 3, \quad x = 1, \quad \psi = 2, \quad z = -2$$

β) Ἡ μέθοδος τῆς χρησιμοποιήσεως βοηθητικῶν ἀγνώστων.

Μέ τή μέθοδο αὐτή ἐπιλύονται τά παρακάτω συστήματα:

1. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

ὅπου $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἄγνωστοι
$\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu \neq 0$
$\nu \in N$ καί $\nu \geqslant 3$

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \beta_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_\nu) = \gamma_1 \\ \alpha_2 x_2 + \beta_2(x_3 + \ldots + x_\nu + x_1) = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu(x_1 + x_2 + \ldots + x_{\nu-1}) = \gamma_\nu \end{array}\right.$$

Ἐπίλυση:

Ἄν θέσουμε ὅπου $x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = K$, τότε κάθε ἐξίσωση τοῦ συστήματος (1) γράφεται, ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \beta_1(K - x_1) = \gamma_1 \\ \alpha_2 x_2 + \beta_2(K - x_2) = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu(K - x_\nu) = \gamma_\nu \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = (\gamma_1 - \beta_1 K) / (\alpha_1 - \beta_1) \\ x_2 = (\gamma_2 - \beta_2 K) / (\alpha_2 - \beta_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_\nu = (\gamma_\nu - \beta_\nu K) / (\alpha_\nu - \beta_\nu) \end{array}\right\} \; (2) \; \begin{array}{l} \text{Ὅπου} \\ \alpha_1 \neq \beta_1 \\ \alpha_2 \neq \beta_2 \\ \ldots \\ \alpha_\nu \neq \beta_\nu \end{array}$$

Προσθέτουμε τὶς (2) κατά μέλη, ὁπότε λαμβάνουμε :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \frac{\gamma_1 - \beta_1 K}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\gamma_2 - \beta_2 K}{\alpha_2 - \beta_2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu - \beta_\nu K}{\alpha_\nu - \beta_\nu} = K \quad (3)$$

Ἡ ἐξίσωση (3) εἶναι πρωτοβάθμια ὡς πρός K, ὁπότε ἡ λύση της εἶναι:

$$K = \left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1-\beta_1} + \frac{\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2} + \ldots + \frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu-\beta_\nu}\right) / \left(1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1-\beta_1} + \ldots + \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu-\beta_\nu}\right)$$

Ἔστω $K = C$. Τήν τιμή $K = C$ θέτουμε στίς ἐξισώσεις (2) καί ἔχουμε τίς τιμές τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Παράδειγμα : Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$3x + 2(\psi + z) = 8,\ 4\psi + 3(z + x) = 6,\ z - 4(x + \psi) = 8$$

Ἐπίλυση : Θέτουμε ὅπου $x + \psi + z = K$, ὁπότε οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος γράφονται: $3x + 2(K - x) = 8,\ 4\psi + 3(K - \psi) = 6,\ z - 4(K - z) = 8, \Leftrightarrow$ $x = 8 - 2K,\ \psi = 6 - 3K,\ z = (8 + 4K) / 5$. Προσθέτουμε κατά μέλη, ὁπότε $x + \psi + z = \dfrac{78-21K}{5}$ καί ἄρα $K = \dfrac{78-21K}{5}$, $K = 3$·

Τέλος μέ ἀντικατάσταση τῆς τιμῆς $K = 3$ ἔχουμε:

$$x = 8 - 2 \cdot 3 = 2,\ \psi = 6 - 3 \cdot 3 = -3,\ z = (8 + 4 \cdot 3) : 5 = 4$$

2. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα :

$x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἄγνωστοι	$\dfrac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = \dfrac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = \ldots = \dfrac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu}$
$\alpha_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu, \varepsilon \neq 0$	
$\nu \in N$ καί $\nu \geq 2$	$\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_\nu x_\nu = \varepsilon \quad (1)$

Ἐπίλυση :

1ος τρόπος. Μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τῶν ἴσων λόγων ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = \ldots = \frac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{x_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\gamma_1}{\alpha_1}} = \frac{x_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}}{\frac{\gamma_2}{\alpha_2}} = \ldots = \frac{x_\nu + \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} =$$

$$= \frac{\delta_1 x_1 + \frac{\delta_1\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1}} = \frac{\delta_2 x_2 + \frac{\delta_2\beta_2}{\alpha_2}}{\frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2}} = \ldots = \frac{\delta_\nu x_\nu + \frac{\delta_\nu\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} =$$

$$\frac{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_\nu x_\nu + \frac{\delta_1\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\beta_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} = \frac{\varepsilon + \frac{\delta_1\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\beta_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} = K,$$

ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \neq 0$ καί $\dfrac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \dfrac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \dfrac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \neq 0$. Ἄρα $\dfrac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = K$, $\dfrac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = K, \ldots, \dfrac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu} = K$, ὁπότε ἔχουμε τίς τιμές τῶν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$.

2ος τρόπος. Ἄν κάθε λόγος ἔχει τιμή Κ, τότε θά ἔχουμε :

$$\frac{\alpha_1x_1+\beta_1}{\gamma_1}=K,\ \frac{\alpha_2x_2+\beta_2}{\gamma_2}=K,\ \ldots,\ \frac{\alpha_\nu x_\nu+\beta_\nu}{\gamma_\nu}=K \Leftrightarrow x_1=\frac{K\gamma_1-\beta_1}{\alpha_1},\ x_2=\frac{K\gamma_2-\beta_2}{\alpha_2},\ \ldots,$$

$x_\nu=\dfrac{K\gamma_\nu-\beta_\nu}{\alpha_\nu}$ (2). Τίς τιμές (2) ἀντικαθιστοῦμε στή δεύτερη ἐξίσωση τοῦ συστήματος, ὁπότε $\delta_1\dfrac{K\gamma_1-\beta_1}{\alpha_1}+\delta_2\dfrac{K\gamma_2-\beta_2}{\alpha_2}+\ldots+\delta_\nu\dfrac{K\gamma_\nu-\beta_\nu}{\alpha_\nu}=\varepsilon$.

Αὐτή εἶναι πρωτοβάθμια ὡς πρός Κ καί ἡ λύση της εἶναι :

$$K=\left(\varepsilon+\frac{\beta_1\delta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2\delta_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{\beta_\nu\delta_\nu}{\alpha_\nu}\right)/\left(\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1}+\frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2}+\ldots+\frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\right)=C.$$

Τήν τιμή $K=C$ θέτουμε στίς ἐξισώσεις (2), ὁπότε ἔχουμε τίς τιμές τῶν ἀγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Παράδειγμα. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα :

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{x}{3}=\dfrac{\psi+1}{9}=\dfrac{\omega-2}{5}\\ x-\psi+3\omega=-2\end{array}\right.$$

Ἐπίλυση : Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι Κ ἡ τιμή τῶν ἴσων λόγων. Τότε θά ἔχουμε $x=3K$, $\psi=9K-1$, $\omega=5K+2$. Τίς τιμές αὐτές θέτουμε στήν ἐξισ. $x-\psi+3\omega=-2$, ὁπότε: $3K-(9K-1)+3(5K+2)=-2 \Leftrightarrow K=-1$. Τέλος, μέ ἀντικατάσταση τῆς τιμῆς $K=-1$ ἔχουμε $x=-3$, $\psi=-10$, $\omega=-3$.

3. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα :

$x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἄγνωστοι $\neq 0$
$\nu\in N$ καί $\nu\geq 3$

$$(1)\quad\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_{\nu-1}}=\alpha_1\\ \dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}+\ldots+\dfrac{1}{x_\nu}=\alpha_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{1}{x_\nu}+\dfrac{1}{x_1}+\ldots+\dfrac{1}{x_{\nu-2}}=\alpha_\nu\end{array}\right.$$

Ἐπίλυση : Ἄν θέσουμε ὅπου $\dfrac{1}{x_1}=x'_1$, $\dfrac{1}{x_2}=x'_2$, $\dfrac{1}{x_3}=x'_3, \ldots, \dfrac{1}{x_\nu}=x'_\nu$ στό σύστημα ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}x'_1+x'_2+\ldots+x'_{\nu-1}=\alpha_1\\ x'_2+x'_3+\ldots+x'_\nu=\alpha_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x'_\nu+x'_1+\ldots+x'_{\nu-2}=\alpha_\nu\end{array}\right|\ (2)$$

Τό σύστημα (2) ἐπιλύεται μέ τή μέθοδο τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων κατά μέλη, ὁπότε μέ ἀντιστροφή τῶν τιμῶν $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\nu$ ἔχουμε τίς τιμές $x_1, x_2, \ldots x_\nu$

Παραδείγματα : 1) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}=\frac{5}{6},\quad \frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=\frac{7}{12},\quad \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4}$$

Ἐπίλυση: Πρέπει νά εἶναι $x\psi\omega \neq 0$.

Θέτουμε $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{\psi} = \psi'$, $\frac{1}{\omega} = \omega'$, ὁπότε λαμβάνουμε:

$$\left.\begin{aligned} x' + \psi' &= \frac{5}{6} \\ \psi' + \omega' &= \frac{7}{12} \\ \omega' + x' &= \frac{3}{4} \end{aligned}\right| (1)$$

Μέ πρόσθεση κατά μέλη τῶν (1) ἔχουμε:

$$2(x' + \psi' + \omega') = \frac{13}{6}, \Leftrightarrow x' + \psi' + \omega' = \frac{13}{12} \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦμε ἀπό τήν ἐξίσωση (2) καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) κατά μέλη, ὁπότε ἔχουμε ἀντιστοίχως: $\omega' = \frac{1}{4}$, $x' = \frac{1}{2}$, $\psi' = \frac{1}{3}$ καί ἄρα

$$x = 2, \ \psi = 3, \ \omega = 4.$$

2) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα: $\frac{x\psi}{\alpha x + \beta\psi} = \gamma$, $\frac{\psi\omega}{\gamma\psi + \alpha\omega} = \beta$, $\frac{\omega x}{\beta\omega + \gamma x} = \alpha$.

Ἐπίλυση: Ὑποθέτουμε $\alpha\beta\gamma \neq 0$ καί $x\psi\omega \neq 0$, ὁπότε τό σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\alpha x + \beta\psi}{x\psi} &= \frac{1}{\gamma} \\ \frac{\gamma\psi + \alpha\omega}{\psi\omega} &= \frac{1}{\beta} \\ \frac{\beta\omega + \gamma x}{\omega x} &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\alpha}{\psi} + \frac{\beta}{x} &= \frac{1}{\gamma} \\ \frac{\gamma}{\omega} + \frac{\alpha}{\psi} &= \frac{1}{\beta} \\ \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{\omega} &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}\right\}$$

Θέτουμε ὅπου $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{\psi} = \psi'$, $\frac{1}{\omega} = \omega'$ ὁπότε λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \alpha\psi' + \beta x' &= 1/\gamma \\ \gamma\omega' + \alpha\psi' &= 1/\beta \\ \beta x' + \gamma\omega' &= 1/\alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

Μέ πρόσθεση τῶν (1) κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$2(\alpha\psi' + \beta x' + \gamma\omega') = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow \alpha\psi' + \beta x' + \gamma\omega' = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma}{2\alpha\beta\gamma}$$

Ἀφαιροῦμε ἀπό αὐτή καθεμιά ἀπό τίς ἐξισώσεις (1) κατά μέλη καί ἔχουμε:

$$\gamma\omega' = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta}{2\alpha\beta\gamma}, \ \beta x' = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma}{2\alpha\beta\gamma}, \ \alpha\psi' = \frac{\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma}{2\alpha\beta\gamma} \Leftrightarrow$$

$\omega' = (\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta) : 2\alpha\beta\gamma^2$, $x' = (\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma) : 2\alpha\beta^2\gamma$, $\psi' = (\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma) : 2\alpha^2\beta\gamma$ καί ἄρα $\omega = \frac{2\alpha\beta\gamma^2}{\alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta}$, $x = \frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma - \alpha\gamma}$, $\psi = \frac{2\alpha^2\beta\gamma}{\alpha\gamma + \alpha\beta - \beta\gamma}$

Σημείωση. Τό θέμα τῆς ἐπιλύσεως συστημάτων μέ εἰδικές μεθόδους δέν ἐξαντλεῖται ἐδῶ. Ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τοῦ συστήματος καί ἀπό τή δεξιοτεχνία καί εὐχέρεια τοῦ μελετητῆ.

Ὁμάδα α'

174) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\left|\begin{array}{l} x+\psi=-1 \\ \psi+\omega=-19 \\ \omega+x=2 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x+\psi+\omega=4 \\ \psi+\omega+z=-2 \\ \omega+z+x=1 \\ z+x+\psi=-3 \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{r} 3x+\psi+\omega=2 \\ x+3\psi+\omega=6 \\ x+\psi+3\omega=-8 \end{array}\right.$

4) $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\psi+\omega=1 \\ x+\alpha\psi+\omega=\alpha \\ x+\psi+\alpha\omega=\alpha^2 \end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l} x+\psi-\omega=\alpha \\ \psi+\omega-x=\beta \\ \omega+x-\psi=\gamma \end{array}\right.$ 6) $\left|\begin{array}{r} \mu x+\nu\psi+z=1 \\ x+\mu\nu\psi+z=1 \\ x+\nu\psi+\mu z=1 \end{array}\right.$

175) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\left|\begin{array}{l} x+3(\psi+\omega+z)=15 \\ 6\psi+5(x+\omega+z)=36 \\ 3\omega+(x+\psi+z)=11 \\ 5z+2(x+\psi+\omega)=17 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta(\psi+z+\omega)=\gamma \\ \alpha\psi+\beta_1(x+z+\omega)=\gamma_1 \\ \alpha z+\beta_2(x+\psi+\omega)=\gamma_2 \\ \alpha\omega+\beta_3(x+\psi+z)=\gamma_3 \end{array}\right.$

3) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{5}=\dfrac{\psi}{6}=\dfrac{\omega}{15} \\ 2x+\psi-\omega=2 \end{array}\right.$ 4) $\left|\begin{array}{c} \dfrac{x+\alpha}{\mu}=\dfrac{\psi+\beta}{\nu}=\dfrac{\omega+\gamma}{\lambda} \\ x+\psi+\omega=\kappa \end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{c} \alpha x=\beta\psi=\gamma\omega \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\delta} \end{array}\right.$

6) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=1 \\ \dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{11}{6} \end{array}\right.$ 7) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x\psi\omega}{x\psi+x\omega-\psi\omega}=\alpha \\ \dfrac{x\psi\omega}{\psi\omega+\psi x-\omega x}=\beta \\ \dfrac{x\psi\omega}{\omega x+\omega\psi-x\psi}=\gamma \end{array}\right.$ 8) $\left|\begin{array}{l} x\psi\omega=\alpha(\psi\omega-\omega x-x\psi) \\ x\psi\omega=\beta(\omega x-\psi\omega-x\psi) \\ x\psi\omega=\gamma(x\psi-\psi\omega-\omega x) \end{array}\right.$

Ὁμάδα β'

176) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\left|\begin{array}{l} x+\psi=3 \\ \psi+\omega=5 \\ \omega+\varphi=7 \\ \varphi+z=9 \\ z+x=6 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} \nu x+\psi+z+\omega=\nu^3 \\ x+\nu\psi+z+\omega=\nu^2 \\ x+\psi+\nu z+\omega=\nu \\ x+\psi+z+\nu\omega=1 \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l} 2(x+z)+\omega=-5 \\ x+2(\psi+\omega)=6 \\ 2(\psi+\omega)+z=0 \\ 2(z+x)+\psi=-1 \end{array}\right.$

58. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΕΣ

Ἔστω τό σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους. $\Sigma: \left|\begin{array}{l} x-2\psi=-4 \\ 3x+\psi=9 \\ x+5\psi=17 \end{array}\right. \quad x,\psi\in R$

Ἄν ἐπιλύσουμε τό σύστημα τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων, βρίσκουμε ὅτι

$$(x, y) = (2, 3)$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ λύση $(x, \psi) = (2, 3)$ εἶναι λύση καί τῆς τρίτης ἐξισ. $x + 5\psi = 17$. Δηλαδή οἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Σ ἔχουν κοινή λύση.

Τίς ἐξισώσεις αὐτές τίς λέμε **συμβιβαστές** καί τό σύστημα **συμβιβαστό.**

Γενικά, ὅταν τό πλῆθος μ τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό πλῆθος ν τῶν ἀγνώστων, τότε ἐκλέγουμε ν ἐξισώσεις, τίς ἁπλούστερες, καί ἐπιλύουμε τό σύστημα αὐτῶν τῶν ν ἐξισώσεων, ἄν βέβαια ἔχει λύση. Ἄν ἡ λύση του εἶναι λύση καί τῶν ὑπόλοιπων ἐξισώσεων, τότε οἱ μ ἐξισώσεις εἶναι **συμβιβαστές** καί τό σύστημά τους **συμβιβαστό,** ἄν ὄχι, τότε οἱ ἐξισώσεις εἶναι **ἀσυμβίβαστες** καί τό σύστημα **ἀδύνατο**.

Παραδείγματα : 1) Νά βρεθεῖ σχέση μεταξύ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{R}$ τῶν ἐξισώσεων $\alpha_1 x + \beta_1 = 0$ καί $\alpha_2 x + \beta_2 = 0$, ὅπου $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, ὥστε οἱ ἐξισώσεις αὐτές νά εἶναι συμβιβαστές

Λύση : Ἔχουμε τίς λύσεις: $\{x / x \in \mathbf{R} \wedge \alpha_1 x + \beta_1 = 0\} = \left\{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right\}$

$$\{x / x \in \mathbf{R} \wedge \alpha_2 x + \beta_2 = 0\} = \left\{-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right\}$$

Πρέπει νά εἶναι:

$$-\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{\beta_2}{\alpha_2} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

Αὐτή εἶναι ἡ σχέση πού ζητοῦμε. Τό ἀντίστροφο εἶναι φανερό.

2) Νά βρεθεῖ σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν $\alpha_{1,2,3}, \beta_{1,2,3}, \gamma_{1,2,3} \in \mathrm{R}$ τῶν ἐξισώσεων $\alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1$ (1), $\alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2$ (2), $\alpha_3 x + \beta_3 \psi = \gamma_3$ (3), ὅπου $|\alpha_1| + |\beta_1| > 0$, $|\alpha_2| + |\beta_2| > 0$, $|\alpha_3| + |\beta_3| > 0$, ὥστε οἱ ἐξισώσεις αὐτές νά εἶναι συμβιβαστές.

Λύση : Ἡ κοινή λύση τῶν (1) καί (2) εἶναι $x = \frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$

$\psi = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}$, ὅπου $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Αὐτή ἡ λύση πρέπει νά εἶναι λύση καί τῆς (3).

Δηλαδή: $\alpha_3 \cdot \frac{\Delta_x}{\Delta} + \beta_3 \cdot \frac{\Delta_\psi}{\Delta} = \gamma_3 \Leftrightarrow \alpha_3\Delta_x + \beta_3\Delta_\psi = \gamma_3\Delta \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$

Αὐτή εἶναι ἡ σχέση πού ζητοῦμε.

59. ΑΠΑΛΕΙΦΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στά παραπάνω δύο παραδείγματα συμβιβαστῶν ἐξισώσεων οἱ σχέσεις πού βρήκαμε εἶναι τό ἐξαγόμενο τῆς **ἀπαλοιφῆς** τῶν ἀγνώστων μεταξύ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν. Οἱ σχέσεις αὐτές λέγονται **ἀπαλείφουσες**.

Ἡ ἀπαλείφουσα ἑνός συστήματος εἶναι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά εἶναι τό σύστημα συμβιβαστό.

Παραδείγματα: 1) Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος $x + \psi = 3$, $2x - 3\psi = -14$, $\lambda x + \mu\psi = \nu$, $\lambda, \mu, \nu, x, \psi \in \mathbf{R}$.

Λύση: Κατά τό παράδειγμα (2) τῆς προηγούμενης παραγράφου ἔχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -14 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda + \nu = 4\mu$$

Ἡ σχέση $\lambda + \nu = 4\mu$ εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος.

2) Μέ ποιά τιμή τοῦ $\lambda \in \mathbf{R}$ τό σύστημα εἶναι συμβιβαστό

$2\lambda x + \psi = \lambda$, $x + \psi = 3$, $\chi - 2\psi = 2$ στὸ $\mathbf{R}$.

Λύση: Γιά νά εἶναι συμβιβαστό τό σύστημα πρέπει ἡ ὁρίζουσά της νά εἶναι 0.

Δηλαδή: $$\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(2+6) - (2+2\lambda) + (3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{13}.$$

Ὥστε, γιά $\lambda = -\frac{1}{13}$ τό σύστημα εἶναι συμβιβαστό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ά δ α α'

177) Νά ἐξεταστεῖ ἄν οἱ ἐξισώσεις στά ἀκόλουθα συστήματα εἶναι συμβιβαστές ἤ ὄχι.

1) $x - 5\psi = 0$, $x = \psi + 4$, $3x - 7\psi = 8$

2) $2x - \frac{\psi}{\beta} = 2\alpha - 1$, $2\alpha x + \beta\psi = \beta^2 + 2\alpha^2$, $\frac{x}{\alpha} + \frac{2\psi}{\beta} = 3$.

178) Ποιά σχέση συνδέει τά α, β γιά νά εἶναι τά ἀκόλουθα συστήματα συμβιβαστά;

1) $\alpha x = \beta - 1$, $\beta x = 2\alpha + 1$,

2) $\beta x + \alpha\psi = 13$, $\psi + 2x = 2$, $2\beta x + 3\beta\psi = 1$

179) Ἄν οἱ τρεῖς ἐξισώσεις: $\alpha x + \beta\psi = 1$, $\alpha\psi + \beta x = \alpha\beta$, $x + \psi = \alpha + \beta$ εἶναι συμβιβαστές νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha\beta + 1$.

Ὁ μ ά δ α β'

180) Νά προσδιοριστεῖ ἡ τιμή τοῦ $\mu \in R$, γιά νά εἶναι τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων $(\mu - 7)x = 5$ καί $(3\mu - 1)x = -1$ συμβιβαστό. Ἔπειτα νά λυθεῖ τό σύστημα.

181) Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος $\left| \begin{array}{l} (\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 + \beta^3 = 0 \\ x + \alpha + \beta = 0 \end{array} \right.$

182) Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τῶν συστημάτων:

1) $x+\lambda\psi=-\lambda^3$
$x+\mu\psi=-\mu^3$
$x+\nu\psi=-\nu^3$

2) $\alpha x+\gamma\psi+\beta=0$
$\gamma x+\beta\psi+\alpha=0$
$\beta x+\alpha\psi+\gamma=0$

3) $\alpha x+\beta\psi=\gamma$
$\alpha^2x+\beta^2\psi=\gamma^2$
$\alpha^3x+\beta^3\psi=\gamma^3$

60. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ὁρισμός: *Μία γραμμική ἐξίσωση καλεῖται ὁμογενής, ἄν ὁ γνωστός ὅρος αὐτῆς εἶναι μηδενικός π. χ.* Οἱ ἐξισώσεις $\alpha x+\beta\psi=0$, $\alpha x+\beta\psi+\gamma\omega=0$, $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3+\ldots+\alpha_\nu x_\nu=0$, ὅπου x_i μεταβλητές, εἶναι γραμμικές ὁμογενεῖς.

Συνεπῶς ἕνα σύστημα γραμμικῶν ὁμογενῶν ἐξισώσεων εἶναι **ὁμογενὲς γραμμικὸ σύστημα.**

Τά συστήματα:

$$\begin{aligned}\alpha_1x+\beta_1\psi&=0\\ \alpha_2x+\beta_2\psi&=0\end{aligned}\quad\Bigg|\quad\begin{aligned}\alpha_1x+\beta_1\psi+\gamma_1\omega&=0\\ \alpha_2x+\beta_2\psi+\gamma_2\omega&=0\\ \alpha_3x+\beta_3\psi+\gamma_3\omega&=0\end{aligned}\quad\Bigg|\quad\begin{aligned}\alpha_1x+\beta_1\psi+\gamma_1z&=0\\ \alpha_2x+\beta_2\psi+\gamma_2z&=0\end{aligned}$$

εἶναι γραμμικά ὁμογενή συστήματα.

Σημείωση. Ἕνας τό λιγότερο ἀπό τούς συντελεστές πρέπει νά εἶναι μή μηδενικός. Φανερή λύση ἑνός ὁμογενοῦς συστήματος εἶναι ἡ μηδενική (ὅλοι οἱ ἄγνωστοι 0). Ἄρα τό σύστημα ἔχει πάντοτε μία λύση. Γεννᾶται τό ἐρώτημα, ἄν ἐκτός ἀπό τή μηδενική λύση ἔχει καί ἄλλες λύσεις.

Θέτουμε λοιπόν ὡς σκοπό τήν ἀναζήτηση τῶν μή μηδενικῶν λύσεων τῶν ὁμογενῶν γραμμικῶν συστημάτων.

61. ΙΚΑΝΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΓΙΑ ΝΑ ΕΧΕΙ ΤΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΠΕΙΡΕΣ ΣΕ ΠΛΗΘΟΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ

Ι. Ἔστω τό σύστημα Σ_1 : $\left|\begin{aligned}\alpha_1x+\beta_1\psi&=0\\ \alpha_2x+\beta_2\psi&=0,\end{aligned}\right|$ $\alpha_{1,2},\beta_{1,2},x,\psi\in R$

Εἴδαμε ὅτι, ἄν $\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \alpha_2&\beta_2\end{vmatrix}\neq0$, τότε τό σύστημα ἔχει μία καί μόνο λύση καί ἐδῶ τή μηδενική (0, 0). Ἄν $\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \alpha_2&\beta_2\end{vmatrix}=0$, τότε τό σύστημα εἶναι ἀόριστο, δηλαδή ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις, γιατί ἀποκλείεται νά εἶναι ἀδύνατο, ἐφόσον ἔχει μία λύση, τήν (0, 0). Τίς ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις βρίσκουμε ἀπό μιά ἐξίσωση τοῦ Σ_1, ὅταν ὁ ἕνας ἄγνωστος ἐκλεγεῖ αὐθαίρετα.

Ἀντιστρόφως. Ἄν τό Σ_1 ἔχει ἐκτός ἀπό τή λύση (0, 0) καί τήν (x_1,ψ_1), τότε ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν δέν μπορεῖ νά εἶναι $\neq0$. Ἄρα θά εἶναι $\begin{vmatrix}\alpha_1\beta_1\\ \alpha_2\beta_2\end{vmatrix}=0$

Ὥστε ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά ἔχει τό σύστημα Σ_1 ἐκτός ἀπό τή λύση (0, 0) καί ἄλλες ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις, εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νά εἶναι 0.

Δηλαδή $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$

II. Ἔστω τό σύστημα $\Sigma_2: \left| \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega = 0 \end{array} \right.$

ὁμογενές γραμμικό δύο ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους. Τό σύστημα Σ_2 ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις. Φανερή λύση του εἶναι ἡ $(x, \psi, \omega) = (0, 0, 0)$.

Ὑποθέτουμε $x\psi\omega \neq 0$, τότε τό σύστημα Σ_2 μπορεῖ νά γραφεῖ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \dfrac{x}{\omega} + \beta_1 \dfrac{\psi}{\omega} = -\gamma_1 \\ \alpha_2 \dfrac{x}{\omega} + \beta_2 \dfrac{\psi}{\omega} = -\gamma_2 \end{array}\right\}$$ Ἄν λύσουμε ὡς πρός $\dfrac{x}{\omega}$ καί $\dfrac{\psi}{\omega}$ λαμβάνουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{\omega} = \dfrac{\begin{vmatrix} -\gamma_1 & \beta_1 \\ -\gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \\ \dfrac{\psi}{\omega} = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 & -\gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \dfrac{\psi}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\psi}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

Οἱ λόγοι αὐτοί ἔχουν ἔννοια, ὅταν οἱ ὁρίζουσες τῶν παρονομαστῶν εἶναι διάφορες τοῦ μηδενός.

Ἀντιστρόφως : Ἄν

$$\dfrac{x}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\psi}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \lambda, \ \lambda \in R \text{ καί}$$

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ τότε οἱ τιμές}$$

$$x = \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \psi = \lambda \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \omega = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος Σ_2. Τοῦτο διαπιστώνεται εὔκολα, ἄν ἀντικαταστήσουμε τίς τιμές αὐτές στίς ἐξισώσεις τοῦ Σ_2.

Ὥστε, ἄν $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq0$, $\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1\neq0$, $\gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1\neq0$, τό σύστημα Σ_2 ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις πού δίνονται ἀπό τούς τύπους:

$$x=\lambda\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix},\quad \psi=\lambda\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix},\quad \omega=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix},\ \text{ὅπου } \lambda\in R$$

Ἄν $\lambda=0$, τότε ἡ λύση εἶναι ἡ $(x,\psi,\omega)=(0,0,0)$.

III. Ἔστω τό σύστημα Σ_3:
$$\left|\begin{array}{ll}\alpha_1x+\beta_1\psi+\gamma_1\omega=0 & (1)\\ \alpha_2x+\beta_2\psi+\gamma_2\omega=0 & (2)\\ \alpha_3x+\beta_3\psi+\gamma_3\omega=0 & (3)\end{array}\right.$$

Φανερή λύση τοῦ συστήματος Σ_3 εἶναι $(x,\psi,\omega)=(0,0,0)$.

Ἀπό τίς (1) καί (2) λαμβάνουμε: $x=\lambda\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix},\quad \psi=\lambda\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix},\omega=\lambda\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$ (4),

ὁπότε ἡ (3) γίνεται:

$$\lambda[\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)+\beta_3(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)+\gamma_3(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)]=0,$$

πού γράφεται καί ἔτσι: $\lambda\cdot\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=0$ ἤ $\lambda\cdot\Delta=0$

Ἄν $\Delta\neq0$, τότε $\lambda=0$, ὁπότε $x=0$, $\psi=0$, $\omega=0$.

Ἄν $\Delta=0$, τότε γιά $\lambda\in R$ ἀπό τίς (4) θά ἔχουμε ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις, γιατί ὁ λ ἐκλέγεται αὐθαίρετα.

Ἀντιστρόφως: Ἄν μιά λύση τοῦ συστήματος Σ_3 εἶναι ἡ $(x_1,\psi_1,\omega_1)\neq(0,0,0)$, τότε $\lambda\neq0$, ὁπότε ἀπό τήν $\lambda\cdot\Delta=0$ προκύπτει $\Delta=0$.

Ὥστε ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά ἔχει τό σύστημα Σ_3 ἐκτός ἀπό τή λύση (0, 0, 0) καί ἄλλες ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις, εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νά εἶναι 0 καί οἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσές της κατά τά στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς νά εἶναι $\neq 0$.

Δηλαδή: $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_2\end{vmatrix}=0$ μέ $\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}\neq0,\ \begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}\neq0,\ \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\neq0$

Παραδείγματα:

1) Μέ ποιά τιμή τοῦ $\lambda\in R$ τό σύστημα
$$\begin{array}{l}3x+2\lambda\psi=0\\ 4x-(\lambda+1)\psi=0\end{array}$$
ἔχει καί ἄλλες λύσεις ἐκτός ἀπό τή μηδενική;

Λύση: Πρέπει νά ἔχουμε $\begin{vmatrix}3 & 2\lambda\\ 4 & -(\lambda+1)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\lambda=-\frac{3}{11}$

Πράγματι· γιατί τότε
$$\left.\begin{array}{r} 3x+2\left(-\frac{3}{11}\right)\psi=0 \\ 4x-\left(-\frac{3}{11}+1\right)\psi=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 33x-6\psi=0 \\ 44x-8\psi=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 11x-2\psi=0 \\ 11x-2\psi=0 \end{array}$$

καί ἄρα τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἰσοῦται μέ τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς δεύτερης.

2) Νά βρεθεῖ ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη μεταξύ τῶν α, β, γ, ὥστε τό σύστημα $\sum$: $\left| \begin{array}{l} \alpha x+\psi+\omega=0 \\ x+\beta\psi+\omega=0 \\ x+\psi+\gamma\omega=0 \end{array}\right.$ νά ἔχει καί ἄλλες λύσεις ἐκτός ἀπό τή μηδενική $(x, \psi, \omega)=(0, 0, 0)$

Λύση:

Πρέπει νά ἔχουμε : $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma=2.$

Αὐτή εἶναι ἡ συνθήκη πού ζητοῦμε.

3) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $6x-\psi-\omega=0,\ 3x+4\psi-2\omega=0$

Λύση: Φανερή εἶναι ἡ λύση $(x, \psi, \omega)=(0, 0, 0)$. Γιά νά βροῦμε τίς ἄλλες λύσεις, ἐφόσον ἔχουμε:

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=24+3\neq 0,\ \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=2+4\neq 0,\ \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-3+12\neq 0,$$

λαμβάνουμε $x=\lambda\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=6\lambda,\quad \psi=\lambda\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=9\lambda,\quad \omega=\lambda\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=27\lambda$

Ὥστε οἱ λύσεις εἶναι:

$$(x, \psi, \omega)=(6\lambda, 9\lambda, 27\lambda),\ \forall\ \lambda\in R$$

π.χ. γιά $\lambda=-1$ λαμβάνουμε $(x, \psi, \omega)=(-6, -9, -27)$.
Αὐτή εἶναι μία λύση τοῦ συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

183) Μέ ποιά τιμή τοῦ $\lambda\in R$ τό σύστημα $\left| \begin{array}{l} 5x+(2\lambda-1)\psi=0, \\ -2x+(6\lambda+1)\psi=0 \end{array}\right.$ ἔχει ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις;

184) Ἄν τό σύστημα $\alpha x+\beta\psi=0,\ \beta^2x+\alpha^2\psi=0$ ἔχει καί ἄλλες λύσεις ἐκτός ἀπό τή μηδενική, ποιά εἶναι ἡ σχέση τῶν α καί β;

185) Ποιά ἀπό τά ἀκόλουθα συστήματα ἔχουν μιά μόνο λύση καί ποιά ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις;

1) $\begin{array}{l} x+\psi-\omega=0 \\ 2x-\psi+4\omega=0 \\ x-3\psi+\omega=0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} -5x+4\psi+3\omega=0 \\ x-2\psi+\omega=0 \\ -10x+8\psi+6\omega=0 \end{array}$

186) Νά ἐπιλυθοῦν τά συστήματα (χρησιμοποιῆστε τίς δύο ὁμογενεῖς ἐξισώσεις)

1) $\left| \begin{array}{l} x+2\psi-z=0 \\ 2x-\psi+3z=0 \\ x+\psi+z=2 \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} \alpha x+\beta\psi+\gamma\omega=0 \\ \alpha^2x+\beta^2\psi+\gamma^2\omega=0 \\ x+\psi+\omega=\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma} \end{array} \right.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

187) Μέ ποιές τιμές τῶν x καί ψ οἱ ὁρίζουσες

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 4+\psi & 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ καί } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2x \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1-\psi \end{vmatrix}$$

λαμβάνουν συγχρόνως τήν τιμή 0;

188) Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\begin{array}{l} x+(3\lambda-1)\psi=0 \\ x+2\psi=\lambda-4 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}=\alpha \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\psi}=\beta \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} \alpha^2+\alpha x+\psi=0 \\ \beta^2+\beta x+\psi=0 \end{array}$

189) Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ταυτότητες:

1) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -\lambda^3 \\ 1 & \mu & -\mu^3 \\ 1 & \nu & -\nu^3 \end{vmatrix} = (\lambda-\mu)(\nu-\mu)(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+\mu)$ 2) $\begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 0 & x^2 & -1 \\ 1 & x & x+1 \end{vmatrix} = \dfrac{x^5-x}{x-1}$ $(x\neq 1)$

3) $\begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha\beta & \beta\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ 4) $\begin{vmatrix} \beta^2+\gamma^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \alpha^2+\gamma^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} = 4\alpha^2\beta^2\gamma^2$

190) Νά ἐπιλυθοῦν μέ τόν κανόνα τοῦ Cramer τά συστήματα:

1) $\begin{array}{l} \alpha x+\beta\psi+z=1 \\ x+\alpha\beta\psi+z=\beta \\ x+\beta\psi+\alpha z=1 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} x+\psi+z=0 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma z=0 \\ \beta\gamma x+\alpha\gamma\psi+\alpha\beta z=1 \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} x+\alpha\psi+z=2\alpha \\ x+\psi+\alpha z=0 \\ (\alpha+1)x+\alpha\psi+z=\alpha \end{array}$

191) Νά ἐπιλυθεῖ καί διερευνηθεῖ τό σύστημα, γιά $\lambda\in R$

1) $x+\psi+\lambda\omega=1 \quad x+\lambda\psi+\omega=\lambda \quad x-\psi+\omega=3$

192) Ποιά ἡ σχέση μεταξύ τῶν συντελεστῶν α καί β, ὥστε οἱ ἐξισώσεις $\beta x+2\alpha\psi=\alpha\beta$, $\alpha x-\beta\psi=\alpha\beta$, $x+\psi=2\alpha-\beta$ νά ἐπαληθεύονται μέ τίς ἴδιες τιμές τῶν $x, \psi\in R$;

193) Νά προσδιορισθεῖ ἡ τιμή τοῦ $\mu\in R$, ὥστε τό σύστημα

$$x+(\mu+1)\psi=10,\ 2x-(4\mu+1)\psi=5,\ x-\psi=6$$

νά ἔχει μιά μόνο λύση στό R.

194) Νά βρεθεῖ ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκημεταξύ τῶν α, β, γ, ὥστε τό σύστημα νά ἔχει καί ἄλλες λύσεις ἐκτός ἀπό τή φανερή.

$\left| \begin{array}{l} \alpha x+\beta\psi+\gamma\omega=0 \\ \beta x+\gamma\psi+\alpha\omega=0 \\ x+\psi+\omega=0 \end{array} \right.$

195) Νά βρεθεῖ ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη μεταξύ τῶν α, β, γ, ὥστε τό σύστημα νά ἔχει καί ἄλλες λύσεις ἐκτός ἀπό τή μηδενική.

$$\left|\begin{array}{l} \alpha^2 x+\beta^2 \psi+\gamma^2 \omega=0 \\ \alpha x+\beta \psi+\gamma \omega=0 \\ x+\psi+\omega=0 \end{array}\right.$$

196) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύστημα εἶναι συμβιβαστό $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ ἐκτός $\alpha=1$ καί $\alpha=-1$

$$\left|\begin{array}{l} \alpha x+\psi+\omega=\alpha \\ \alpha x+\alpha\psi+\omega=1 \\ x+\alpha\psi+\alpha\omega=1 \\ x+\psi+\alpha\omega=\alpha \end{array}\right.$$

197) Νά ἐπιλυθεῖ καί διερευνηθεῖ τό σύστημα (οἱ δύο πρῶτες ἐξισώσεις ἀποτελοῦνόμογενές σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους)

$$\begin{array}{l} \dfrac{x}{\beta+\gamma}+\dfrac{\psi}{\gamma-\alpha}-\dfrac{z}{\alpha-\beta}=0 \\ \dfrac{x}{\beta-\gamma}-\dfrac{\psi}{\gamma-\alpha}+\dfrac{z}{\alpha+\beta}=0 \\ \dfrac{x}{\beta+\gamma}+\dfrac{\psi}{\gamma-\alpha}+\dfrac{z}{\alpha+\beta}=2\alpha \end{array}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ — ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

(Συμπλήρωση αὐτῶν πού διδάχθηκαν στήν Γ' τάξη Γυμνασίου)

Α'. ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

62. Στό Γυμνάσιο μάθαμε ὅτι στό σύνολο τῶνρητῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει ἀδυναμία λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2 = 0$, ἤ γενικά τῆς $x^2 = \theta$, ὅπου $\theta > 0$ καί μή τετράγωνος ἀριθμός, γιατί δέν ὑπάρχει ρητός, πού τό τετράγωνό του νά εἶναι ἀντιστοίχως 2, ἤ θ. Ἔτσι δημιουργήθηκε ἡ ἀνάγκη νά κατασκευασθεῖ ἕνα νέο σύνολο ἀριθμῶν, πού ὀνομάσθηκαν **ἄρρητοι ἤ ἀσύμετροι**. Οἱ νέοι αὐτοί ἀριθμοί κατασκευάστηκαν ἔτσι, ὥστε νά θεραπεύονται οἱ ἀδυναμίες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Π.χ. νά γίνεται δυνατή ἡ λύση τῶν παραπάνω ἐξισώσεων. Γνωρίσαμε στή Γ' τάξη τοῦ Γυμνασίου τίς ἀκόλουθες ἔννοιες:

Ὁρισμός. Ἀπό τόν ἀριθμό $\alpha \in N_0$ καί τήν ἀπέραντη (χωρίς τέλος) ἀκολουθία ψηφίων (μονοψήφιων ἀκεραίων) $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots$, ὅπου $\nu \in N$, σχηματίζουμε τήν ἀπέραντη ἀκολουθία:

$$(1) \quad \alpha \quad \alpha,\psi_1 \quad \alpha,\psi_1\psi_2 \quad \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3 \quad \cdots \quad \alpha,\psi_1\psi_2\cdots\psi_\nu \cdots$$

Τήν ἀκολουθία αὐτή συμβολίζουμε: $\alpha, \psi_1\psi_2\psi_3 \ldots \psi_\nu \ldots$ Τό σύμβολο αὐτό εἶναι μιά ἀπειροψήφια δεκαδική παράσταση καί τήν ὀνομάζουμε **ἄρρητο** ἤ **ἀσύμμετρο ἀριθμό**, ἄν δέν εἶναι περιοδική (ρητός ἀριθμός), δηλαδή ἄν μετά τήν ὑποδιαστολή ἤ μετά ἀπό κάποιο ψ καί πέρα, δέν ἐμφανίζεται «τμῆμα ψηφίων» πού νά ἐπαναλαμβάνεται διαρκῶς χωρίς νά ἐμφανίζονται ἄλλα ψηφία.

Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (1) εἶναι ἕνας ρητός **προσεγγιστικός ἀντιπρόσωπος** τοῦ $\alpha, \psi_1\psi_2\psi_3 \ldots \psi_\nu \ldots$

Σχετικός ἄρρητος ἀριθμός λέγεται κάθε ἄρρητος, πού προσημαίνεται μέ τό (+) ἤ τό (−).

Π.χ. οἱ ὅροι τῶν ἀκολουθιῶν:

(α)	1	1,4	1,41	1,414	1,4142..
(β)	2	1,5	1,42	1,415	1,4143...

εἶναι ρητοί προσεγγιστικοί ἀντιπρόσωποι τοῦ ἄρρητου 1,4142... μέ ἔλλειψη ἤ μέ ὑπεροχή ἀντιστοίχως καί ἐκφράζουν τιμές τῆς $\sqrt{2}$ μέ προσέγγιση 1 0,1 0,01 0,001 0,0001...

Ἔτσι ἔχουμε $\quad 1<1{,}4<1{,}41<1{,}414<\ldots<\sqrt{2}<\ldots<1{,}415<1{,}42<1{,}5<2$

ὁπότε λέμε ὅτι οἱ ἀκολουθίες (α) καί (β) διαχωρίζονται ἀπό τόν ἀσύμμετρο ἀριθμό $\sqrt{2}$, πού γιά τό λόγο αὐτό ἀντιπροσωπεύει τόν ἀσύμμετρο 1,4142.... Μά ἀνάλογο τρόπο μποροῦμε νά κατασκευάσουμε καί ἄλλους ἄρρητους ἀριθμούς μέ μορφή $\sqrt{\theta}$, ὅπου $\theta>0$ καί μή τετράγωνος.

Οἱ πράξεις πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση καί οἱ ἔννοιες τῆς ἰσότητας καί ἀνισότητας μέ ἀσύμμετρους ἀριθμούς ὁρίζονται ὅπως καί μέ τούς ρητούς καί ἔχουν τίς ἴδιες θεμελιώδεις ἰδιότητες, πού ἔχουν καί οἱ πράξεις μέ ρητούς. Ἐπίσης καί ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως ἄρρητου ἀριθμοῦ ὁρίζεται ὅπως καί στούς ρητούς.

Οἱ πράξεις αὐτές μέ ἀσύμμετρους ἀριθμούς στή στοιχειώδη Ἄλγεβρα γίνονται μέ προσέγγιση. Δηλαδή ἀντί γιά ἀσύμμετρους ἀριθμούς παίρνουμε προσεγγιστικούς ἀντιπροσώπους αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν (ρητούς) μέ ὁποιαδήποτε προσέγγιση θέλουμε. Ἔτσι ὁ ὑπολογισμός ἀριθμητικῶν παραστάσεων μέ ἀσύμμετρους ἀριθμούς γίνεται μέ κάθε ἐπιθυμητή προσέγγιση, ἡ ὁποία αὐξάνει μέ τό πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τῶν ρητῶν ἀντιπροσώπων. Π.χ. γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἀθροίσματος $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, παίρνουμε μέ προσέγγιση 0,01 τούς ρητούς ἀντιπροσώπους, ὁπότε ἔχουμε $1{,}73+1{,}41=3{,}14$. Ὁ 3,14 εἶναι ὁ προσεγγιστικός ρητός ἀντιπρόσωπος τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Τό ἄθροισμα, τό γινόμενο, τό πηλίκο καί ἡ διαφορά ἄρρητων ἀριθμῶν μπορεῖ νά εἶναι ρητός ἀριθμός.

Π.χ. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$. Ἐπίσης $\sqrt{18}:\sqrt{2}=\sqrt{18:2}=\sqrt{9}=3$.

Σχετικά μέ τίς πράξεις μέ ἀσύμμετρους ἀριθμούς συμπεραίνουμε ἀπό τά παραπάνω, ὅτι μποροῦμε νά κάνουμε πράξεις μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων χωρίς νά μᾶς ἐνδιαφέρει ἄν οἱ ἀριθμοί εἶναι ρητοί ἤ ἄρρητοι.

63. Παρακάτω ἐξετάζουμε μερικές χρήσιμες προτάσεις:

1. Ἄν α ἄρρητος καὶ $\rho_1\rho_2$ ρητοί, τότε ἰσχύει :

$$\alpha\cdot\rho_1=\rho_2 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2=0$$

Ἀπόδειξη: Ἄν $\rho_1\neq 0$, τότε $\alpha\cdot\rho_1=\rho_2 \Leftrightarrow \alpha=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$

Αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί ὁ ἀριθμός $\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ εἶναι ρητός. Ἄρα $\rho_1=0$, ὁπότε καί $\rho_2=0$.

Τό ἀντίστροφο εἶναι φανερό.

2. Ἄν α ἄρρητος καί ρ ρητός, τότε οἱ ἀριθμοί $\alpha + \rho$ καί $\alpha \cdot \rho$, μέ $\rho \neq 0$, εἶναι ἄρρητοι.

Ἀπόδειξη: Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι ρητοί, τότε:

$$\alpha + \rho = \rho' = \text{ρητός} \Leftrightarrow \alpha = \rho' - \rho = \text{ρητός· ἄτοπο.}$$

$$\alpha\rho = \rho'' = \text{ρητός} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\rho''}{\rho} = \text{ρητός· ἄτοπο.}$$

3. Ἄν α ἄρρητος καὶ ρ ρητός, τότε ἰσχύει:

$$\alpha + \rho = 0 \Leftrightarrow \alpha = \rho = 0$$

Ἀπόδειξη: Ἄν $\rho \neq 0$, ἔχουμε: $\alpha + \rho = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\rho$. Αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί ὁ $-\rho$ εἶναι ρητός. Ἄρα $\rho = 0$, ὁπότε καί $\alpha = 0$. Τό ἀντίστροφο εἶναι φανερό.

4. Ἄν $\theta \in N$ καί δέν εἶναι δύναμη μὲ ἐκθέτη πολλαπλάσιο τοῦ $\nu \in N$, τότε ὁ ἀριθμός $\sqrt[\nu]{\theta}$ εἶναι ἄρρητος.

Ἀπόδειξη: Τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\theta}$, γνωστό ἀπό τήν Γ' τάξη, ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσοδυναμία: $x = \sqrt[\nu]{\theta} \Leftrightarrow x^\nu = \theta \ (\forall\, \theta > 0)$.

Ἔστω ὅτι $\sqrt[\nu]{\theta} = \kappa \in Z^+$ καί ὅτι $\kappa = \kappa_1^{\lambda 1} \cdot \kappa_2^{\lambda 2} \ldots \kappa_\mu^{\lambda \mu}$, ὅπου $\kappa_{1,\,2,\,\ldots,\,\mu}$ καί $\lambda_{1,\,2,\,\ldots,\,\mu}$ φυσικοί ἀριθμοί, τότε: $\theta = \kappa^\nu = \kappa_1^{\nu\lambda 1} \cdot \kappa_2^{\nu\lambda 2} \ldots \kappa_\mu^{\nu\lambda\mu}$. Τοῦτο εἶναι ἄτοπο, γιατί ὁ θ δέν εἶναι δύναμη μέ ἐκθέτη πολ/σιο τοῦ ν.

Ἐπίσης, ἄν εἶναι $\sqrt[\nu]{\theta} = \frac{\kappa}{\lambda}$, ὅπου $\kappa, \lambda \in Z^+$ καί πρῶτοι μεταξύ τους, τότε: $\theta = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^\nu = \frac{\kappa^\nu}{\lambda^\nu}$. Αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί οἱ κ^ν, λ^ν εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους.

Ὥστε ὁ $\sqrt[\nu]{\theta}$ εἶναι ἄρρητος.

5. Κάθε ἀκέραιη δύναμη τῆς παραστάσεως $\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma}$, ὅπου α, β, γ ρητοί καί $\sqrt{\gamma}$ ἄρρητος, εἶναι παράσταση μὲ μορφή $\kappa \pm \lambda\sqrt{\gamma}$, ὅπου κ, λ ρητοί.

Ἀπόδειξη: α) $(\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma})^2 = \alpha^2 + \beta^2\gamma \pm 2\alpha\beta\sqrt{\gamma} = \kappa_1 \pm \lambda_1\sqrt{\gamma}$

ὅπου $\alpha^2 + \beta^2\gamma = \kappa_1$ καί $2\alpha\beta = \lambda_1$

β) $(\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma})^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta\sqrt{\gamma} + 3\alpha\beta^2\gamma \pm \beta^3\gamma\sqrt{\gamma} =$

$$= (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2\gamma) \pm (3\alpha^2\beta + \beta^3\gamma)\sqrt{\gamma} = \kappa_2 \pm \lambda_2\sqrt{\gamma}$$

ὅπου $\alpha^3 + 3\alpha\beta^2\gamma = \kappa_2$ καί $3\alpha^2\beta + \beta^3\gamma = \lambda_2$

6. Ἄν α, β, γ, δ ρητοί καί $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\delta}$ ἄρρητοι, τότε γιά νά εἶναι $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\alpha = \gamma$ καί $\beta = \delta$.

Ἀπόδειξη: Ἄν $\alpha = \gamma$, τότε $\sqrt{\beta} = \sqrt{\delta} \Rightarrow \beta = \delta$. Ἐξάλλου ἔχουμε: $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta} \Leftrightarrow \alpha - \gamma + \sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$, καί μέ ὕψωση στό τετράγωνο ἔχουμε: $(\alpha-\gamma)^2 + \beta + 2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta} = \delta \Rightarrow 2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta} = \delta - \beta - (\alpha-\gamma)^2$. Ἄν $\alpha \neq \gamma$, τότε $\sqrt{\beta} = \frac{\delta - \beta - (\alpha-\gamma)^2}{2(\alpha-\gamma)}$ = ρητός· εἶναι ἄτοπο γιατί $\sqrt{\beta}$ ἄρρητος. Ἄρα $\alpha = \gamma$, ὁπότε καί $\beta = \delta$. Τό ἀντίστροφο εἶναι φανερό.

Παράδειγμα: Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν σύμμετρων λ καί μ, ὥστε ἡ παράσταση $(\lambda+\mu)\sqrt{5} + 2\lambda - \mu$ νά ἰσοῦται μέ $\sqrt{5} + 1$.

Λύση: Ἔχουμε $(\lambda+\mu)\sqrt{5} + 2\lambda - \mu = \sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow (\lambda + \mu - 1)\sqrt{5} = 1 + \mu - 2\lambda$, ὁπότε κατά τήν πρόταση 1, θά πρέπει $\lambda + \mu - 1 = 0$ καί $1 + \mu - 2\lambda = 0$. Ἄρα ἔχουμε τή λύση $(\lambda, \mu) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Ἱστορική σημείωση:

Τήν ὕπαρξη ἀσύμμετρων ἀριθμῶν διαπίστωσαν πρῶτοι οἱ Πυθαγόρειοι καί ὁ Εὔδοξος συνέβαλε πολύ στή μελέτη τους. Νεώτεροι θεωρητικοί, ὅπως οἱ Weierstrass (1815 - 1897), Meray (1835 - 1911), Cantor (1843 - 1918), Dedekind (1831 - 1916) ἀνέλυσαν περισσότερο τήν ἔννοια τῶν ἀσύμμετρων ἀριθμῶν μέ τίς περίφημες **«τομές Dedekind»**.

Β. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

64. Ὅπως εἶναι γνωστό, τέσσερα εἶναι τά κύρια στάδια τῆς ἐξελίξεως τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν. Τό πρῶτο εἶναι ἡ δημιουργία τῶν **ἀπόλυτων ἀκεραίων ἤ φυσικῶν ἀριθμῶν (N)**, τό δεύτερο εἶναι ἡ ἐπέκτασή τους στό σύστημα **τῶν σχετικῶν ἀκεραίων (Z)**, τό τρίτο ἡ εἰσαγωγή τῶν ρητῶν κλασμάτων πού δημιούργησε τό σύστημα **τῶν ρητῶν ἤ σύμμετρων ἀριθμῶν (Q)**. Τέλος ἡ ἔννοια **τοῦ ἄρρητου ἤ ἀσύμμετρου ἀριθμοῦ** ὁδήγησε στήν ἰδέα ἐπεκτάσεως τοῦ συστήματος τῶν ρητῶν σέ ἕνα σύστημα, πού νά περιέχει τό σύνολο τῶν ρητῶν καί τό σύνολο τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν. Τό σύστημα τοῦτο ὀνομάσθηκε σύστημα τῶν **πραγματικῶν ἀριθμῶν.** Ἀργότερα, σέ ἄλλη τάξη, θά μάθουμε καί μιά ἄλλη ἐπέκταση σέ ἕνα εὐρύτερο σύστημα ἀριθμῶν.

Ὥστε, **τό σύνολο τῶν ρητῶν καί ἄρρητων ἀριθμῶν τῆς Ἄλγεβρας λέγεται σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (Real) καί συμβολίζεται μέ τό R.**

Τά σύνολα Q τῶν ρητῶν καί A τῶν ἄρρητων εἶναι ξένα μεταξύ τους, γιατί κανένας ρητός ἀριθμός δέν εἶναι ἄρρητος, καί ἀντιστρόφως. Δηλαδή τά σύνολα Q καί A διαμερίζουν τό σύνολο R.

Ἔτσι ἔχουμε: $Q \cap A = \varnothing$, $Q \cup A = R$, $Q \subset R$, $A \subset R$.

Ἐπίσης ἔχουμε: $N_0 \subset Z \subset Q \subset R$, $N_0 \cap A = \varnothing$, $Z \cap A = \varnothing$, ὅπου N_0 τό σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέ τό 0.

Κάθε πραγματικός ἀριθμός, ἀφοῦ εἶναι ἤ ρητός ἤ ἄρρητος, συμβολίζεται μέ τόν ἀριθμό $\alpha, \psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$, πού εἶναι τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας:

$$\alpha \quad \alpha, \psi_1 \quad \alpha, \psi_1\psi_2 \quad \alpha, \psi_1\psi_2\psi_3 \quad \ldots \quad \alpha, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu \quad \ldots,$$

ὅπου $\alpha \in N_0$ καί $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu$ μονοψήφιοι ἀκέραιοι.

Τό δεκαδικό ἀνάπτυγμα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$ εἶναι ἤ περιοδικό, ὁπότε ὁ ἀριθμός εἶναι ρητός, ἤ μή περιοδικό, ὁπότε ὁ ἀριθμός εἶναι ἄρρητος. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὅλοι οἱ ρητοί ἀριθμοί συμβολίζονται μέ ἀπειροψήφιο περιοδικό δεκαδικό ἀριθμό.

65. Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ R

Δύο πραγματικοί ἀριθμοί $\alpha, x_1x_2\ldots x_\nu\ldots$ καί $\beta, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$ ὁρίζονται ἴσοι, τότε καί μόνο τότε, ἄν εἶναι:

$$\alpha = \beta, \; x_1 = \psi_1, \; x_2 = \psi_2, \; \ldots, \; x_\nu = \psi_\nu, \; \ldots$$

Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητας καί ὅτι ἡ σχέση τῆς ἰσότητας εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

66. ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ R

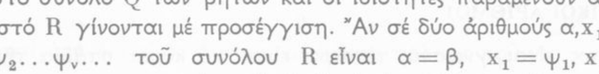
Εἴδαμε ὅτι οἱ πράξεις στό σύνολο A τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν ὁρίζονται ὅπως καί στό σύνολο Q τῶν ρητῶν καί οἱ ἰδιότητες παραμένουν ἀναλλοίωτες· οἱ πράξεις στό R γίνονται μέ προσέγγιση. Ἄν σέ δύο ἀριθμούς $\alpha, x_1x_2\ldots x_\nu\ldots$ καί $\beta, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$ τοῦ συνόλου R εἶναι $\alpha = \beta$, $x_1 = \psi_1$, $x_2 = \psi_2, \ldots,$ $x_{\nu-1} = \psi_{\nu-1}$, $x_\nu > \psi_\nu, \ldots$, τότε οἱ ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι μέ μεγαλύτερο τόν πρῶτο.

Ἡ σύγκριση μεταξὺ πραγματικῶν ἀριθμῶν γίτεται στὶς ἐφορμογές μέ βάση τήν προσεγγιστική ἐκπροσώπηση τῶν ἀσύμμετρων. Ἔτσι, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ἀπό τίς σχέσεις $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$ μία μόνο μπορεῖ νά εἶναι ἀληθής.

Ἐπίσης $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ ἰσχύει : $\alpha \leqslant \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$

67. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΚΟΝΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ R

Θεωροῦμε τό γνωστό ἀπό τήν προηγούμενη τάξη ἄξονα $(x'Ox, \vec{\theta})$, ὅπου $\vec{\theta} = \vec{OA}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα.



Ἄν M εἶναι σημεῖο τοῦ ἄξονα τούτου, τότε ὁ λόγος $\dfrac{\vec{OM}}{\vec{OA}}$, πού εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων $\left(\text{δηλαδή } \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overline{OM}}{1} = \overline{OM}\right)$

εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός ρητός ἤ ἄρρητος καί μόνο ἕνας. Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο M τοῦ ἄξονα ἀντιστοιχεῖ ἕνας καί μόνο ἕνας πραγμ. ἀριθμός.

Καί ἀντιστρόφως, σέ κάθε πραγμ. ἀριθμό ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο M τοῦ ἄξονα, πού εἶναι τό πέρας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ καί πού ὁ λόγος $\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OA}} = \overline{OM} = \overline{OM}$ ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμό αὐτό.

Ἄρα μεταξύ τοῦ συνόλου R καί τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἄξονα x′Ox ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, γι᾽ αὐτό ὁ ἄξονας x′Ox λέγεται **ἄξονας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** καί εἶναι ἡ γεωμετρική εἰκόνα τοῦ συνόλου R.

68. ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Στό Γυμνάσιο εἴδαμε ὅτι **ἀπόλυτη τιμή** ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ἀπό αὐτόν, ὅταν παραλειφθεῖ τό πρόσημό του. Δηλαδή ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ $\frac{+4}{5}$ εἶναι ὁ $\frac{4}{5}$ καί τοῦ $\frac{-4}{5}$ εἶναι πάλι ὁ $\frac{4}{5}$.

Συμβολίζεται $\left|\frac{+4}{5}\right| = \frac{4}{5}$ καί $\left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5}$

καί διαβάζεται : «ἀπόλυτη τιμή τοῦ $\frac{+4}{5}$ ἤ τοῦ $\frac{-4}{5}$».*

Τώρα μποροῦμε νά δώσουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

Ἀπόλυτη τιμή ἑνός πραγμ. ἀριθμοῦ (ἤ μιᾶς πραγματικῆς παραστάσεως) α λέγεται ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός α ἄν εἶναι θετικός ἤ μηδέν, καί ὁ ἀντίθετός του — α ἄν εἶναι ἀρνητικός.

Ἔτσι ἔχουμε : $\boxed{\begin{array}{l} \forall \alpha \in R_0^+ \ \Leftrightarrow \ |\alpha| = \alpha > 0 \\ \forall \ \alpha \in R^- \ \Leftrightarrow \ |\alpha| = -\alpha > \alpha \end{array}}$

Δηλαδή ἡ παράσταση $|\alpha|$ εἶναι ἕνας **μή ἀρνητικός ἀριθμός.**

69. ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ

1. Ἄν $\alpha \in R$, τότε $|\alpha| = |-\alpha|$.

---

* Τό σύμβολο | | καί ἡ ὀνομασία του ὀφείλονται στό Γερμανό μαθηματικό Weierstrass (1815 – 1897).

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha \in R^+$ τότε $-\alpha \in R^-$. Ἄρα θά ἔχουμε $|\alpha| = \alpha$ καί $|-\alpha| = -(-\alpha) = \alpha$. Ὁπότε $|\alpha| = |-\alpha|$

Ἄν $\alpha \in R^-$ τότε $-\alpha \in R^+$. Ἄρα θά ἔχουμε $|\alpha| = -\alpha$ καί $|-\alpha| = -\alpha$. Ὁπότε $|\alpha| = |-\alpha|$

Ἄν $\alpha = 0$, τότε $-\alpha = 0$, ὁπότε $|\alpha| = |-\alpha|$

Ὥστε : $\boxed{\forall \alpha \in R : |\alpha| = |-\alpha|}$

2. Ἄν $\alpha \in R$, τότε εἶναι $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$.

Ἀπόδειξη : Ἄν $\alpha \in R_o^+$ τότε $|\alpha| = \alpha$ καί ἐπειδή $|\alpha| \geq -|\alpha|$, θὰ ἔχουμε $-|\alpha| \leqslant \alpha = |\alpha|$ (1). Ἄν $\alpha \in R^-$ τότε $|\alpha| = -\alpha$ ἤ $-|\alpha| = \alpha$, θά ἔχουμε $-|\alpha| = \alpha \leqslant |\alpha|$ (2). Οἱ σχέσεις (1) καί (2) δίνουν $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha \in R : -|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|}$

3. Ἄν $\alpha \in R$ καί $\nu \in N$, τότε εἶναι $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha \in R_o^+$ τότε $|\alpha| = \alpha$ καί ἄρα $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$.
Ἄν $\alpha \in R^-$ τότε $|\alpha| = -\alpha$ καί ἄρα $|\alpha|^{2\nu} = (-\alpha)^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$.

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha \in R, \ \nu \in N : |\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}}$

4. Ἄν $\alpha \in R_o^+$ καί $\nu \in N$, τότε εἶναι $|\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1}$

Ἀπόδειξη : Ἄν $\alpha \in R_o^+$ τότε $|\alpha| = \alpha$ καί ἄρα $|\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1}$

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha \in R_o^+, \ \nu \in N : |\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1}}$

5. Ἄν $\alpha, x \in R$ καί $|x| \leq \alpha$, τότε $-\alpha \leq x \leq \alpha$ καί ἀντιστρόφως:

Ἀπόδειξη. Ἄν $x \in R_o^+$ τότε $|x| = x$ καί ἐπειδή $|x| \leq \alpha$, ἕπεται $x \leq \alpha$ καί ἄρα $-\alpha \leq x \leq \alpha$, γιατί $|x| \leq \alpha \Rightarrow \alpha \geq 0$. Ἄν $x \in R^-$ τότε $|x| = -x$ καί ἐπειδή $|x| \leq \alpha$, ἕπεται $-x \leq \alpha$ ἤ $x \geq -\alpha$ καί ἄρα $-\alpha \leq x \leq \alpha$, γιατί $\alpha \geq 0$.

Ἀντιστρόφως : Ἄν $x \in R_o^+$ τότε $|x| = x$ καί ἐπειδή $-\alpha \leq x \leq \alpha$, ἕπεται $|x| \leq \alpha$. Ἄν $x \in R^-$ τότε $|x| = -x$ ἤ $-|x| = x$ καί ἐπειδή $-\alpha \leq x \leq \alpha$, ἕπεται $-\alpha \leq -|x|$ ἤ $\alpha \geq |x|$ ἤ $|x| \leq \alpha$

Ὥστε: $\boxed{\forall \alpha, x \in R : |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha}$

Σημ. Ἐκτός ἀπό τίς βασικές αὐτές ἰδιότητες σέ ἄλλη τάξη θά μάθουμε καί ἄλλες πολύ χρήσιμες.

Παραδείγματα : α) Ἄν $x \in R$, τότε $|x-7| \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 10$

Πράγματι: $|x-7| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-7 \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 10$

β) Ἄν εἶναι $6 < x < 10$, νά βρεθεῖ τό σύνολο τιμῶν τῆς παραστάσεως $A = -|x-1| - 2|x-11|$.

Λύση : Ἀπό τήν $6 < x < 10$ ἔχουμε $5 < x-1 < 9$, ὁπότε $|x-1| = x-1$, ἐπίσης $-5 < x-11 < -1$, ὁπότε $|x-11| = -(x-11) = 11-x$.

Ἄρα $A = -(x-1) - 2(11-x) = x - 21$ ἤ $A + 21 = x$ ὁπότε $6 < A + 21 < 10$ ἤ $-15 < A < -11$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

198) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοί $3+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{3}$ εἶναι ἀσύμμετροι καί ὁ $3+\sqrt{5}$ νά κατασκευασθεῖ μέ προσέγγιση 0,01.

199) Ἄν α ἄρρητος καί ρ ρητός, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\rho}$, $\frac{\rho}{\alpha}$ εἶναι ἄρρητοι.

200) Νά ἀποδειχθεῖ μέ παραδείγματα ὅτι τό ἄθροισμα, τό γινόμενο καί τό πηλίκο δύο ἄρρητων, μπορεῖ νά εἶναι ρητός ἀριθμός.

201) Ἄν $(\alpha, \beta, \gamma) \in Q$ καί $\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma\sqrt{3}$, τότε $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

202) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν σύμμετρων λ καί μ, ἄν ὁ ἀριθμός $(\lambda - \mu)\sqrt{2} - (2\mu - 1)$ εἶναι ἴσος μέ τόν $\sqrt{2}$.

203) Στὸν ἄξονα τῶν πράγματικῶν ἀριθμῶν X'OX νά βρεθοῦν σημεῖα, πού νὰ ἔχουν γεωμετρικές εἰκόνες τούς ἀριθμούς $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots$ (χρησιμοποιῆστε τό πυθαγόρειο θεώρημα).

204) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\forall\, \alpha, \beta \in R$ θά ἔχουμε $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$

205) Ἄν $|x-10| \leqslant 5$, τότε $5 \leqslant x \leqslant 15$ καί ἀντιστρόφως.

206) Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα $(|x| + 8x^2) / (8|x| + 1)$

207) Ἄν $x = \sqrt{2} + 1$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$A = -2|2x-1| - 3|\sqrt{2} - x| - 7|3x - (\sqrt{2} + 3)| - 3|x|$$

Ὁμάδα β'

208) Ἄν x ἀσύμμετρος καί α, β, γ, δ σύμμετροι, μέ ποιά συνθήκη ἡ παράσταση $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ εἶναι ἀριθμός σύμμετρος;

209) Ἄν $\alpha \in R$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι δέν εἶναι ποτέ $-|\alpha| < \alpha < |\alpha|$

210) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\forall\, \alpha \in R^-$ καί $\nu \in N$ θά ἔχουμε $|\alpha|^{2\nu+1} = -\alpha^{2\nu+1}$

211) Ἄν $\alpha, \beta \in R$ καί $|\alpha| + |\beta| < 0$, τί συμπεραίνετε γιά τούς α, β;

212) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἰσοδυναμία: $|x - \alpha| \leqslant \theta \Leftrightarrow \begin{cases} \theta \geqslant 0 \\ \alpha - \theta \leqslant x \leqslant \alpha + \theta \end{cases}$

213) Ἄν $x \in R^+$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἀπό τή σχέση $|x| > \alpha \geqslant 0$ ἔπεται ἡ $0 \leqslant \alpha < x < +\infty$ καί ἄν $x \in R^-$ ἡ $-\infty < x < -\alpha \leqslant 0$

214) Ἂν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 2|\alpha| \cdot |\beta|$

215) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$7|\alpha-\beta| - 3|\beta-\alpha| + 2|\alpha+\beta| - |2\alpha-\beta|, \text{ ἄν } \alpha > \beta > 0$$

216) Ἂν $-5 < x < 12$, νά βρεθεῖ τό σύνολο τιμῶν τῆς παραστάσεως

$$A = -3|x-6| + |x+13| - 2|2x-11| - |12-x|$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

70. ΟΡΙΣΜΟΙ

Στήν προηγούμενη τάξη εἴδαμε ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων μιᾶς γραμμικῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta\psi = \gamma$, ὅπου $\alpha, \beta \in Q$, εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου $R \times R$, μέ ἄπειρα στοιχεῖα τῆς μορφῆς $\left(x, \psi = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}\right)$.

Πολλές φορές ὅμως μᾶς ἐνδιαφέρουν μόνο οἱ ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta\psi = \gamma$, δηλαδή οἱ λύσεις τῆς μορφῆς $(x, \psi) \in Z \times Z$.

Τούς συντελεστές $\alpha, \beta, \gamma \in Q$ μποροῦμε πάντοτε νά τούς θεωροῦμε ἀκέραιους. Γιατί;

Ἔργο τῆς **ἀπροσδιόριστης ἀναλύσεως α΄ βαθμοῦ**, καθώς λέγεται, εἶναι ἡ ἔρευνα γιά τήν ὕπαρξη καί ἡ εὕρεση τῶν ἀκέραιων λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μέ ἀκέραιους συντελεστές καί ἀγνώστους (μεταβλητές) ὁσουσδήποτε μέ πλῆθος πεπερασμένο ἤ καί συστήματος α΄ βαθμοῦ μέ πλῆθος ἐξισώσεων μικρότερο ἀπό τό πλῆθος τῶν ἀγνώστων.

71.* ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣ. $\alpha x + \beta\psi = \gamma$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in Z$

α) Προτάσεις γιά τήν ἀναζήτηση ἀκέραιων λύσεων τῆς $\alpha x + \beta\psi = \gamma$ (1)

1. Ἄν οἱ α, β, γ ἔχουν Μ.Κ.Δ. $\delta \neq 1$, τότε ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἰσοδύναμη τῆς ἐξίσ. $\dfrac{\alpha}{\delta}x + \dfrac{\beta}{\delta}\psi = \dfrac{\gamma}{\delta}$

Ἀπόδειξη: Ἡ πρόταση εἶναι φανερή, γιατί διαιροῦμε τά μέλη τῆς (1) μέ τό δ. Ἔτσι μποροῦμε νά ὑποθέτουμε πάντοτε τούς α, β, γ πρώτους μεταξύ τους.

(*) Ὁ Ἕλληνας Μαθηματικός Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς (360 μ.Χ.) ἐρεύνησε καί βρῆκε τίς ἀκέραιες λύσεις τέτοιων ἐξισώσεων μέχρι 4ου βαθμοῦ, γι' αὐτό καί ὀνομάζονται **διοφαντικές ἐξισώσεις** καί ἡ ἀπροσδιόριστη ἀνάλυση **διοφαντική ἀνάλυση**.

2. Ἄν α, β, γ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους καί α, β ἔχουν κοινό διαιρέτη $\delta \neq 1$, ἡ ἐξίσωση (1) δέν ἔχει ἀκέραιη λύση.

Ἀπόδειξη: Ὁ δ δέ διαιρεῖ τόν γ, διαιρεῖ ὅμως τούς ὅρους αx καί $\beta\psi$ καί ἄρα τό ἄθροισμα $\alpha x + \beta\psi$, γιατί $x, \psi \in Z$. Ἑπομένως, ἄν $x, \psi \in Z$, τά μέλη τῆς ἐξισ. (1), ποτέ δέ γίνονται ἴσα καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη. Δηλαδή δέν ἔχει ἀκέραιη λύση.

3. Ἄν α, β πρῶτοι μεταξύ τους, ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει ἀκέραιη λύση.

Ἀπόδειξη: Μποροῦμε πάντοτε νά ὑποθέτουμε $\alpha > 0$. Ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται : $x = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ (2).

Ἄν στήν (2) ἀντί γιά τό ψ θέσουμε τίς διαδοχικές ἀκέραιες τιμές $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha - 1$ (πλήθους α), παίρνουμε τίς λύσεις:

$$(3) \quad \left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right), \left(\frac{\gamma - \beta}{\alpha}, 1\right), \left(\frac{\gamma - 2\beta}{\alpha}, 2\right), \ldots, \left(\frac{\gamma - \beta(\alpha - 1)}{\alpha}, \alpha - 1\right)$$

Ἔστω τώρα $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\alpha-1}$ τά ἀκέραια πηλίκα καί $\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\alpha-1}$ ἀντιστοίχως, τά μή ἀρνητικά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων

$$\frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma - \beta}{\alpha}, \ldots, \frac{\gamma - \beta(\alpha - 1)}{\alpha} \quad (4).$$

Ἄν ὑπάρχουν ἀρνητικά ὑπόλοιπα, τά κάνουμε θετικά, ὅταν αὐξήσουμε τήν ἀπόλυτη τιμή τοῦ πηλίκου κατά μιά μονάδα. Π.χ. ἡ διαίρεση $\frac{-17}{5}$ ἔχει πηλίκο -3 καί ὑπόλοιπο -2. Παίρνουμε ὡς πηλίκο τό -4, ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι $+3$.

Τά ὑπόλοιπα αὐτά, α στό πλῆθος, εἶναι μικρότερα ἀπό τόν α καί διαφορετικά μεταξύ τους. Γιατί ἄν εἶναι $\upsilon_\kappa = \upsilon_\lambda$, $(\kappa < \lambda < \alpha)$, τότε θά ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \gamma - \beta \cdot \kappa = \alpha\pi_\kappa + \upsilon_\kappa \\ \gamma - \beta \cdot \lambda = \alpha\pi_\lambda + \upsilon_\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(\lambda - \kappa) = \alpha(\pi_\kappa - \pi_\lambda) \Rightarrow \frac{\beta(\lambda - \kappa)}{\alpha} = \pi_\kappa - \pi_\lambda = \text{ἀκέραιος}.$$

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί α, β πρῶτοι μεταξύ τους καί $0 < \lambda - \kappa < \alpha$. Δηλαδή ὁ α δέ διαιρεῖ τόν β οὔτε τόν $\lambda - \kappa$.

Ὥστε ὅλα τά ὑπόλοιπα εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους καί ἐπειδή εἶναι σέ πλῆθος α καί μικρότερα ἀπό τόν α, ἕνα ἀπό αὐτά πρέπει νά εἶναι 0. Τότε ὅμως ἕνας ἀπό τούς ρητούς ἀριθμούς (4) εἶναι ἀριθμός ἀκέραιος καί ἄρα μία ἀπό τίς λύσεις (3) εἶναι ἀκέραιη λύση τῆς ἐξισώσεως (1).

4. Ἄν ἡ ἐξίσωση $\alpha x + \beta\psi = \gamma$ (1), μέ $\alpha, \beta, \gamma \in Z$, ἔχει μία ἀκέραιη λύση, τήν (x_0, ψ_0), θά ἔχει καί ἄλλες ἄπειρες σέ πλῆθος λύσεις τῆς μορφῆς $(x_0 - \beta.\lambda, \psi_0 + \alpha \cdot \lambda)$ καί μόνο αὐτές, ὅπου $\lambda \in Z$.

Ἀπόδειξη: Ἄν α, β πρῶτοι μεταξύ τους, κατά τήν πρόταση (3), ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μία ἀκέραιη λύση, ἔστω τήν (x_0, ψ_0). Ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει καί ἄλλη ἀκέραια λύση, τήν (x_κ, ψ_κ).

Τότε θά ἔχουμε :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x_0+\beta\psi_0=\gamma\\ \alpha x_\kappa+\beta\psi_\kappa=\gamma\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha(x_\kappa-x_0)+\beta(\psi_\kappa-\psi_0)=0 \Rightarrow x_\kappa-x_0=-\frac{\beta}{\alpha}(\psi_\kappa-\psi_0).$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή εἶναι ἀληθής, μόνο ἄν ὁ α διαιρεῖ τήν $\psi_\kappa-\psi_0$ ὅπου $k \in Z$.

Ἔστω $\frac{\psi_\kappa-\psi_0}{\alpha}=\lambda\in Z$, τότε $\psi_\kappa=\psi_0+\alpha\lambda$, $x_\kappa=x_0-\beta\lambda$.

Ἀντιστρόφως : Κάθε ζεῦγος τῆς μορφῆς $(x_0-\beta\lambda,\ \psi_0+\alpha\lambda)$ εἶναι λύση ἀκέραιη τῆς (1).

Πράγματι :

$$\alpha(x_0-\beta\lambda)+\beta(\psi_0+\alpha\lambda)=\alpha x_0-\alpha\beta\lambda+\beta\psi_0+\alpha\beta\lambda=\alpha x_0+\beta\psi_0=\gamma.$$

Ὥστε, ἄν ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει μία ἀκέραιη λύση, τήν (x_0, ψ_0), τότε θά ἔχει καί ἄλλες ἄπειρες σέ πλῆθος ἀκέραιες λύσεις, πού λαμβάνονται ἀπό τούς τύπους:

$$(5)\qquad \boxed{\begin{array}{lcll} x=x_0-\beta\lambda & \text{ἤ} & x=x_0+\beta\lambda & \text{ὅπου } \lambda\in Z\\ \psi=\psi_0+\alpha\lambda & & \psi=\psi_0-\alpha\lambda, & \end{array}}$$

β) Πῶς θά βροῦμε μιά ἀκέραιη λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta\psi=\gamma$ (1)

Γιά νά ἐφαρμόσουμε τούς τύπους (5), πρέπει νά βροῦμε μόνο μία ἀπό τίς ἀκέραιες λύσεις τῆς (1), τήν (x_0, ψ_0). Γιά τό σκοπό αὐτό λύνουμε τήν ἐξίσωση (1) ὡς πρός τόν ἄγνωστο ἐκεῖνο, πού ἔχει τό μικρότερο συντελεστή.

Π.χ., ἄν $\alpha<\beta$, τότε $x=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$. Ἔπειτα, κατά τήν πρόταση (3), θέτουμε ὅπου $\psi=0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$, ὥσπου νά βροῦμε x ἀκέραιο.

Ἄν οἱ συντελεστές α καί β εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί, ὁ προηγούμενος τρόπος εἶναι ἐπίπονος, γιά τοῦτο ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Λύνουμε τήν ἐξίσωση ὡς πρός τόν ἄγνωστο ἐκεῖνο, πού ἔχει τό μικρότερο συντελεστή. Π.χ., ἄν $\alpha<\beta$, τότε:

$$x=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\psi=\pi_1+\frac{\upsilon_1}{\alpha}-\left(\pi_2+\frac{\upsilon_2}{\alpha}\right)\psi=\pi_1-\pi_2\psi+\frac{\upsilon_1-\upsilon_2\psi}{\alpha},$$

ὅπου π_1, π_2 πηλίκα καί υ_1, υ_2 ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $\gamma:\alpha$ καί $\beta:\alpha$. Γιά νά εἶναι ὁ x ἀκέραιος πρέπει τό κλάσμα $\frac{\upsilon_1-\upsilon_2\psi}{\alpha}$ νά εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός ω.

Δηλαδή $\frac{\upsilon_1-\upsilon_2\psi}{\alpha}=\omega \Leftrightarrow \alpha\omega+\upsilon_2\psi=\upsilon_1$.

Αὐτή ἔχει ἀκέραιες λύσεις, γιατί οἱ α καί υ_2 εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. (Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσουμε τό μεγαλύτερο ἀριθμό μέ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του διά τοῦ ἄλλου.) Ἐπειδή $\upsilon_2<\alpha$, γι' αὐτό ἡ ἐξίσωση $\alpha\omega + \upsilon_2\psi = \upsilon_1$ εἶναι πιό ἁπλή ἀπό τήν $\alpha x + \beta\psi = \gamma$, ὁπότε βρίσκουμε μιά ἀκέραιη λύση της, τήν (ψ_0, ω_0). Ἔτσι ἡ ἐξίσωση :

$$x = \pi_1 - \pi_2\psi + \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2\psi}{\alpha} \text{ γράφεται : } x_0 = \pi_1 - \pi_2\psi_0 + \omega_0.$$

Τό (x_0, ψ_0) εἶναι μία ἀκέραιη λύση τῆς ἐξισώσεως (1).

Σημ. Ἄν καί ἡ ἐξίσωση $\alpha\omega + \upsilon_2\psi = \upsilon_1$ ἔχει τούς συντελεστές α καί υ_2 μεγάλους, τότε συνεχίζουμε ὥσπου νά βροῦμε μικρούς συντελεστές.

Παραδείγματα : 1) Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x + 5\psi = 11$.

Ἐπίλυση : Ἔχουμε $x = \dfrac{11 - 5\psi}{3}$. Θέτοῦμε $\psi = 0, 1, 2$. Μέ $\psi = 0$ ἔχουμε $x = \dfrac{11}{3}$, ἐνῶ μέ $\psi = 1$ ἔχουμε $x = \dfrac{11 - 5}{5} = 2$. Τό ζεῦγος λοιπόν (2, 1) εἶναι μιά ἀκέραιη λύση τῆς ἐξισώσεως. Ἄν ἐφαρμόσουμε τούς τύπους (5) μέ $(x_0, \psi_0) = (2, 1)$, ἔχουμε τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς $3x + 5\psi = 11$.

$$\text{Δηλαδή: } \left.\begin{array}{lll} x = 2 - 5\kappa & \text{ἤ} & x = 2 + 5\kappa \\ \psi = 1 + 3\kappa & & \psi = 1 - 3\kappa \end{array}\right\} \text{ ὅπου } \kappa \in Z$$

Σημείωση. Γιά νά βροῦμε τίς θετικές μόνο ἀκέραιες λύσεις, βρίσκουμε τίς τιμές τοῦ κ, μέ τίς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις $2 - 5\kappa > 0$ καί $1 + 3\kappa > 0$.

Ἔτσι ἔχουμε: $-\dfrac{1}{3} < \kappa < \dfrac{2}{5} \Rightarrow \kappa = 0$. Ἄρα μέ $\kappa = 0$ ἔχουμε $(x, \psi) = (2, 1)$.

2) Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα 176/221 σέ ἄθροισμα ἤ διαφορά δύο ἄλλων ρητῶν κλασμάτων μέ παρονομαστές 13 καί 17.

Ἐπίλυση. Ἄν τά κλάσματα πού ζητοῦμε εἶναι $\dfrac{x}{13}$ καί $\dfrac{\psi}{17}$, τότε θά ἔχουμε

$$\frac{x}{13} + \frac{\psi}{17} = \frac{176}{221} \Leftrightarrow 17x + 13\psi = 176. \qquad (1)$$

Βρίσκουμε τίς ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

$$\text{Ἔχουμε } \psi = \frac{176 - 17x}{13} = \frac{176}{13} - \frac{17}{13}x = 13 - x + \frac{7 - 4x}{13} = 13 - x + \omega.$$

Τῆς ἐξισώσεως $\omega = \dfrac{7 - 4x}{13}$ ἤ $13\omega + 4x = 7$ ἤ $x = \dfrac{7 - 13\omega}{4}$ μιά ἀκέραιη λύση εἶναι $(x, \omega) = (-8, 3)$ καί ἑπομένως $\psi = 13 - (-8) + 3 = 24$.

Ἔτσι, μιά ἀκέραιη λύση τῆς (1) εἶναι ἡ $(x_0, \psi_0) = (-8, 24)$ καί τό σύνολο τῶν λύσεών της δίνεται ἀπό τούς τύπους:

$$\left.\begin{array}{lll} x = -8 - 13\kappa & \text{ἤ} & x = -8 + 13\kappa \\ \psi = 24 + 17\kappa & & \psi = 24 - 17\kappa \end{array}\right\} \text{ ὅπου } \kappa \in Z$$

Μέ $\kappa = 0$ ἔχουμε $(x_0, \psi_0) = (-8, 24)$ καί ἄρα $-\dfrac{8}{13} + \dfrac{24}{17} = \dfrac{176}{221}$

» $\kappa = 1$ » $(x_1 \psi_1) = (-21, 41)$ » » $-\dfrac{21}{13} + \dfrac{41}{21} = \dfrac{176}{221}$

72. ΑΚΕΡΑΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Ἔστω τό σύστημα
$$\begin{array}{l|l} (1) & \alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ (2) & \alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega = \delta_2 \end{array} \left\} \begin{array}{l} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \in Z \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \in Z \end{array} \right.$$

Τούς συντελεστές $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ καθώς καί τούς $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ μποροῦμε νά τούς ὑποθέσουμε πρώτους μεταξύ τους, γιατί ἄν δέν εἶναι, διαιροῦμε τά μέλη τῶν (1) καί (2) μέ τό Μ.Κ.Δ. τους.

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι τό σύστημα δέν ἔχει ἀκέραιη λύση ἄν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους καί $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ἔχουν Μ.Κ.Δ. $\delta' \neq 1$. Ἐπίσης ἄν $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους καί $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ἔχουν Μ.Κ.Δ. $\delta'' \neq 1$ (πρόταση § 72/2).

Ὑποθέτουμε, λοιπόν, ὅτι $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ καί $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους καί ἀπαλείφουμε τόν ἕναν ἄγνωστο μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2), ἔστω τόν ω.

Ἔτσι ἔχουμε: $(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)x + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\psi = \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1$ (3). Ἄν ἡ (3) ἔχει ἀκέραιες λύσεις, τότε τό σύνολο τῶν λύσεων αὐτῶν θά δίνεται ἀπό τούς τύπους :

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\kappa \\ \psi = \psi_0 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)\kappa \end{array} \right\} \quad (4)$$

Τίς τιμές (4) τῶν x καί ψ θέτουμε σέ μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, ἔστω στήν (1), ὁπότε λαμβάνουμε μετά τίς πράξεις

$$\kappa\gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + \gamma_1\omega = \delta_1 - \alpha_1 x - \beta_1 \psi \qquad (5)$$

Ἄν ἡ (5) ἔχει ἀκέραιες λύσεις, τότε τό σύνολο τῶν λύσεων της θά δίνεται ἀπό τούς τύπους :

$$\left. \begin{array}{l} \kappa = \kappa_0 - \gamma_1 \lambda \\ \omega = \omega_0 + \gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\lambda \end{array} \right\} \lambda \in Z \qquad (6)$$

Τήν τιμή τοῦ κ θέτουμε στούς τύπους (4), ὁπότε λαμβάνουμε:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(\kappa_0 - \gamma_1\lambda) \\ \psi = \psi_0 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)(\kappa_0 - \gamma_1\lambda) \\ \omega = \omega_0 + \gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\lambda \end{array}}$$

Οἱ τύποι αὐτοί δίνουν τίς ἀκέραιες λύσεις τοῦ συστήματος.

Σημείωση: Κατά τήν ἀπαλοιφή τοῦ ἑνός ἀγνώστου μεταξύ τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2), προτιμοῦμε τόν ἄγνωστο ἐκεῖνο, πού οἱ συντελεστές του εἶναι πρῶτοι μεταξύ τους. Γιατί;

Παράδειγμα: Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τοῦ συστήματος:

$$(1)\quad 4x + 3\psi + \omega = 4 \quad \text{καί} \quad 5x - 6\psi - 3\omega = 7 \quad (2)$$

Ἐπίλυση: Ἀπαλείφουμε τόν ἄγνωστο ω, ὁπότε λαμβάνουμε: $16x + 3\psi = 22$ (3). Βρίσκουμε τίς ἀκέραιες λύσεις τῆς (3).

Ἔχουμε: $\psi = \dfrac{22-16x}{3}$. Μιά ἀκέραιη λύση της εἶναι $(x_0, \psi_0) = (1, 2)$ καί τό σύνολο τῶν λύσεων δίνεται ἀπό τούς τύπους:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 3\kappa \\ \psi = 2 + 16\kappa \end{array}\right\} (4), \quad \text{ὅπου } \kappa \in Z.$$

Ἡ ἐξίσωση (1) μέ τούς (4) γίνεται:

$$4(1 - 3\kappa) + 3(2 + 16\kappa) + \omega = 5 \Leftrightarrow 36\kappa + \omega = -5 \text{ ἤ } \omega = -5 - 36\kappa.$$

Μιά ἀκέραιη λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $(\kappa_0, \omega_0) = (0, -5)$ καί τό σύνολο τῶν λύσεών της δίνεται ἀπό τούς τύπους:

$$\left.\begin{array}{l} \kappa = 0 - \lambda \\ \omega = -5 + 36\lambda \end{array}\right\} (5), \text{ ὅπου } \lambda \in Z.$$

Τήν τιμή $\kappa = -\lambda$ θέτουμε στούς τύπους (4), ὁπότε λαμβάνουμε τούς τύπους:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ \psi = 2 - 16\lambda \\ \omega = -5 + 36\lambda \end{array}\right\} (6).$$

Γιά $\lambda \in Z$ δίνουν τίς ἀκέραιες λύσεις τοῦ συστήματος.

Μέ $\lambda = 0$ ἔχουμε $(x_0, \psi_0, \omega_0) = (1, 2, -5)$

» $\lambda = 1$ » $(x_1, \psi_1, \omega_1) = (4, -14, 31)$ κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

217) Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

1) $3x + 5\psi = -12$, 2) $-x + 4\psi = 1$, 3) $7x - 9\psi = -28$,
4) $13x + 21\psi = 91$, 5) $53x + 29\psi = 108$, 6) $40x + 51\psi = 121$

218) Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες καί θετικές τιμές τοῦ x, πού κάνουν ἀκέραιες καί θετικές τίς ἀκόλουθες παραστάσεις:

1) $\dfrac{7x - 15}{3}$, 2) $\dfrac{133 - 2x}{3}$, 3) $\dfrac{1053 - 31x}{14}$

219) Νά ἀναλυθεῖ τό κλάσμα $\frac{1}{15}$ σέ ἄθροισμα δύο ρητῶν κλασμάτων, μέ παρονομαστές 3 καί 5 ἀντιστοίχως.

220) Ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 50 δρχ. μέ πόσους τρόπους μπορεῖ νά ἀλλαχθεῖ μέ κέρματα τῶν 2 καί 5 δραχμῶν;

221) Νά βρεθεῖ ἀριθμός, πού ἄν διαιρεθεῖ μέ 5 νά δίνει ὑπόλοιπο 3, καί ἄν διαιρεθεῖ μέ 7, νά δίνει ὑπόλοιπο 2.

222) Νά βρεθεῖ διψήφιος ἀριθμός τέτοιος, ὥστε τό ἕνα τρίτο τῆς διαφορᾶς τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπό τόν ἀριθμό, νά ἰσοῦται μέ τό διπλάσιο τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, ὅταν αὐξηθεῖ κατά 5.

223) Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τῶν συστημάτων:

1) $\left|\begin{array}{l} x + 2\psi - \omega = -4 \\ 3x - 4\psi + 2\omega = 17 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} 7x + 5\psi + 6\omega = 18 \\ 4x + 2\psi + 3\omega = 9 \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l} 6x - 4\psi + 3z = 30 \\ 3x + 6\psi - 2z = 25 \end{array}\right.$

4) $\left|\begin{array}{l} 3x + 6\psi - 5\psi = 11 \\ -x + 7\psi - 2\omega = -16 \end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l} 7x - 5\psi = 4 \\ 11x + 13\omega = 103 \end{array}\right.$

224) Νά βρεθεῖ τριψήφιος ἀριθμός, πού τά ψηφία του νά ἔχουν ἄθροισμα 7, καί ἄν ἀλλάξουν θέση τά ψηφία ἑκατοντάδων καί μονάδων του, τότε ὁ ἀριθμός δέν ἀλλάζει.

225) Νά βρεθοῦν δύο ἀκέραιοι καί θετικοί ἀριθμοί, πού νά ἔχουν ἄθροισμα 100, καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑνός διά τοῦ 7 νά εἶναι 1, ἐνῶ τοῦ ἄλλου διά τοῦ 9 νά εἶναι 7.

226) Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἔχουν μαζί 111 ζῶα. Ὁ ἀριθμός τῶν ζώων τοῦ α′ κτηνοτρόφου εἶναι διαιρετός διά 2, τοῦ β′ διαιρετός διά 5 καί τοῦ γ′ διά 7. Πόσα ζῶα ἔχει κάθε κτηνοτρόφος, ἄν τό τριπλάσιο τῶν ζώων τοῦ α′, τό διπλάσιο τῶν ζώων τοῦ β′ καί τό πενταπλάσιο τῶν ζώων τοῦ γ′ ἔχουν ἄθροισμα 400;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ X

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ

τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἤ παραστάσεων

73. Στό Γυμνάσιο εἴδαμε ὅτι κάθε ἀριθμός $\alpha \in R_0^+$ εἶναι τετράγωνο ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x, πού ὀνομάσθηκε τετραγωνική ρίζα (ἤ ρίζα β΄ τάξεως) τοῦ α, καί ἐξετάσαμε τίς ἰδιότητες καί τίς πράξεις αὐτῶν τῶν ριζῶν.

Τώρα θά γενικεύσουμε τήν ἔννοια τῆς ρίζας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμός. Ἔστω ἀριθμός $\alpha \in R$ καί $\nu \in N$ καί $\nu > 1$. Ἄν ὑπάρχει ἄλλος ἀριθμός $x \in R$, πού ὅταν ὑψωθεῖ στή νυοστή δύναμη νά γίνεται ἴσος μέ τόν α, τότε λέμε ὅτι ὁ x εἶναι μιά νυοστή ρίζα τοῦ α (ἤ ρίζα νυοστῆς τάξεως τοῦ α).

Δηλαδή, ἄν $\nu = 2$, ὁ x εἶναι μιά τετραγωνική ρίζα τοῦ α,
ἄν $\nu = 3$, ὁ x εἶναι τρίτη (κυβική) ρίζα τοῦ α.

Π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 25 μιά τετραγωνική ρίζα εἶναι ὁ +5, γιατί $(+5)^2 = 25$
τοῦ ἀριθμοῦ 25 μιά τετραγωνική ρίζα εἶναι ὁ –5, γιατί $(-5)^2 = 25$
τοῦ ἀριθμοῦ 8 μιά τρίτη ρίζα (κυβική) εἶναι ὁ +2, γιατί $(+2)^3 = 8$
τοῦ ἀριθμοῦ –27 μιά κυβική ρίζα εἶναι ὁ –3, γιατί $(-3)^3 = -27$
τοῦ ἀριθμοῦ –9 δέν ὑπάρχει τετραγωνική πραγματική ρίζα ἤ ρίζα ἄρτιας τάξεως, γιατί δὲν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός, πού ὅταν ὑψωθεῖ σέ ἄρτια δύναμη, γίνεται ἴσος μέ τόν –9.

Ἐδῶ παρατηροῦμε ὅτι ἕνας πραγμ. ἀριθμός μπορεῖ νά ἔχει περισσότερες ἀπό μιά πραγματικές ρίζες, ὅπως ἐπίσης μπορεῖ νά μήν ἔχει πραγματική ρίζα ἄρτιας τάξεως.

Γενικά διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις :

1) Ἄν $\alpha > 0$ καί $\nu \in N$, τότε ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει ἕνας καί μόνο ἕνας θετικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε: $x^\nu = \alpha$. (Ἡ ἀπόδειξη σὲ ἄλλη τάξη). Ἄς δοῦμε ἄν ὑπάρχει ἀρνητικός ἀριθμὸς x τέτοιος, ὥστε: $x^\nu = \alpha$.

Ἂν $\nu=2\kappa+1$, ὅπου $\kappa \in N$, καὶ $x<0$, τότε $x^\nu<0$, ὁπότε $x^\nu \neq \alpha$, γιατί $\alpha>0$. Δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει ὁ x. Ἂν $\nu=2\kappa$, ὅπου $\kappa \in N$, τότε ἄν $x_0>0$ εἶναι ἡ μοναδικὴ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισ. $x^\nu=\alpha$, δηλαδὴ $x_0{}^\nu=\alpha$, θὰ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισ. $x^\nu=\alpha$ καί ὁ ἀριθμός $-x_0<0$, διότι $(-x_0)^\nu=x_0{}^\nu=\alpha$.

2) Ἂν $\alpha<0$ καί $\nu=2k+1$, ὅπου $k \in N$, τότε ὑπάρχει ἕνας καί μόνο ἕνας ἀρνητικός ἀριθμός x τέτοιος, ὥστε: $x^\nu=\alpha<0$.

Ἂν $\nu=2k$, τότε δένὑπάρχει πραγμ. ἀριθμός x, γιατί $x^\nu>0$, ὁπότε $x^\nu \neq \alpha$.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Κάθε ἀριθμός $\alpha \in R$ ἔχει: 1) μία καί μόνο μία πραγμ. ρίζα x περιττῆς τάξεως ($\nu=2k+1$) θετική ἤ ἀρνητική, ἄν ὁ α εἶναι θετικός ἤ ἀρνητικός ἀντιστοίχως, πού λέγεται πρωτεύουσα νιοστή ρίζα τοῦ α, 2) δύο πραγματικές ρίζες x καί $-x$ ἄρτιας τάξεως ($\nu=2k$), ἄν ὁ $\alpha>0$, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ θετική λέγεται πρωτεύουσα νιοστή ρίζα τοῦ α καί 3) καμιά πραγματική ρίζα ἄρτιας τάξεως, ἄν $\alpha<0$.

Τήν πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ α συμβολίζουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Τό σύμβολο $\sqrt{\ }$ καλεῖται **ριζικό**, ὁ ν **δείκτης** τῆς ρίζας καί τό α **ὑπόρριζο.** Ἂν $\nu=2$, τότε γράφουμε $\sqrt{\alpha}$, πού ἐκφράζει τήν πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα τοῦ α.

Τά παραπάνω δικαιολογοῦν τή λογική ἰσοδυναμία

$$\boxed{x=\sqrt[\nu]{\alpha} \Leftrightarrow x^\nu=\alpha}$$

καί συνέπεια αὐτῆς τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu=\alpha$.

Ὥστε, τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1) Ἂν $\alpha>0$ καί $\nu \in N$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}>0$, ρητός ἤ ἄρρητος.

2) Ἂν $\alpha<0$ καί $\nu=2\kappa+1$, $\kappa \in N$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}<0$, ρητός ἤ ἄρρητος.

3) Ἂν $\alpha<0$ καί $\nu=2\kappa$, τότε τό σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

4) Ἂν $\alpha \in R$ καί $\nu=2\kappa$, ἀπό τά παραπάνω συνάγεται ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ καί ἄν $\nu=2\kappa+1$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=\alpha=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu$.

5) Σέ κάθε περίπτωση ὁρίζουμε: $\sqrt[\nu]{0}=0$.

Παράδειγματα: Νά βρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες ρίζες τῶν ἀριθμῶν:

$$\sqrt[3]{27},\ \sqrt[3]{-27},\ \sqrt[4]{16},\ \sqrt[4]{-16},\ \sqrt[5]{3}.$$

Λύση: Ἡ πρωτεύουσα κυβική ρίζα τοῦ 27 εἶναι ὁ ἀριθμός 3, γιατί $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$. Ἐπίσης ἔχουμε $\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$.

Ἐπίσης $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4}$ ἤ $\sqrt[4]{(-2)^4} = |2| = 2$.

Ἡ $\sqrt[4]{-16}$ δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ πρωτεύουσα πέμπτη ρίζα τοῦ 3 εἶναι $\sqrt[5]{3} > 0$, ἄρρητος ἀριθμός.

74. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

Βοηθητική πρόταση (Λῆμμα). Ἄν οἱ μυοστές δυνάμεις δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί, τότε καί οἱ ἀριθμοί θά εἶναι ἴσοι.

Ἀπόδειξη : Ἄν $\alpha, \beta \in R^+$ καί $\alpha^\mu = \beta^\mu$, ὅπου $\mu \in N$, τότε εἶναι $\alpha^\mu - \beta^\mu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2}\beta + \ldots + \beta^{\mu-1}) = 0$, ὁπότε $\alpha - \beta = 0$ ἤ $\alpha = \beta$, γιατί ὁ παράγοντας $\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2}\beta + \ldots + \beta^{\mu-1}$ εἶναι θετικός, ἐπειδή εἶναι ἄθροισμα θετικῶν προσθετέων.

Ἰδιότητα 1η. Ἄν $\alpha > 0$ καί $\nu = 2\kappa + 1$, $(\kappa \in N)$, τότε $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Τά μέλη τῆς ἰσότητας αὐτῆς εἶναι ἀρνητικά. Ἄν ὅμως γραφεῖ $-\sqrt[\nu]{-\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha}$ γίνονται θετικά. Ὑψώνουμε τά μέλη της στή νυοστή δύναμη καί ἔχουμε:

$$(-\sqrt[\nu]{-\alpha})^\nu = -(\sqrt[\nu]{-\alpha})^\nu = -(-\alpha) = \alpha \quad \text{καί} \quad (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha,$$

ἄρα $-\sqrt[\nu]{-\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ἤ $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Ἡ ἰδιότητα αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά ὑποθέτουμε τά ὑπόρριζα θετικά, γιατί σύμφωνα μέ αὐτή τό πρόσημο (–) βγαίνει ἔξω ἀπό τό ριζικό γιά ριζικά περιττῆς τάξεως.

Στίς ἀκόλουθες ἰδιότητες τά ὑπόρριζα τά ὑποθέτουμε θετικά.

Ἰδιότητα 2η. Οἱ ρίζες τῆς ἴδιας τάξεως πολλαπλασιάζονται ἤ διαιροῦνται, ἄν πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν ἀντιστοίχως οἱ ὑπόρριζες ποσότητές τους καί τό ἐξαγόμενο τεθεῖ ὡς ὑπόρριζο ριζικοῦ τῆς ἴδιας τάξεως.

Ἀπόδειξη : Ἄν $\sqrt[\nu]{\alpha}$ καί $\sqrt[\nu]{\beta}$, ὅπου $\alpha, \beta \in R^+$, εἶναι πρωτεύουσες ρίζες, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > 0$ καί $\sqrt[\nu]{\beta} > 0$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta} \ (1) \quad \text{καί} \quad \sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha : \beta}. \qquad (2)$$

Ὑψώνουμε τά μέλη τῶν ἰσοτήτων στή νυοστή δύναμη. Ἔχουμε:

1) $(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta})^\nu = (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha \cdot \beta$ καί $(\sqrt[\nu]{\alpha\beta})^\nu = \alpha\beta$,

ἄρα κατά τή βοηθητική πρόταση ἔχουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

$$2)\ \left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu}=\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}}=\frac{\alpha}{\beta}\ \text{καί}\ \left(\sqrt[\nu]{\alpha:\beta}\right)^{\nu}=\alpha:\beta=\frac{\alpha}{\beta}$$

ἄρα κατά τή βοηθητική πρόταση ἔχουμε $\sqrt[\nu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha:\beta}$

Παρατήρηση: Οἱ ἰσότητες (1) καί (2) γράφονται καί ἔτσι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\ \text{καί}\ \sqrt[\nu]{\alpha:\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}$$

Ἰδιότητα 3η. Ἕνας θετικός παράγοντας ἤ διαιρέτης ριζικοῦ μπορεῖ νά τεθεῖ μέσα στό ριζικό, σάν παράγοντας ἤ διαιρέτης τοῦ ὑπορρίζου, ἀφοῦ ὑψωθεῖ σέ δύναμη ἴση μέ τό δείκτη τοῦ ριζικοῦ, καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη: Ἄν $\alpha>0$ καί $\sqrt[\nu]{\beta}$ πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ $\beta>0$,

τότε θά ἀποδείξουμε ὅτι: $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\beta}$ (1) καί $\dfrac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha}=\sqrt[\nu]{\dfrac{\beta}{\alpha^{\nu}}}$ (2)

Ἔχουμε: 1) $\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}\cdot\beta}$

$$2)\ \frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha}=\frac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}}=\sqrt[\nu]{\frac{\beta}{\alpha^{\nu}}},\ \text{γιατί}\ \alpha=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$$

Οἱ ἰσότητες (1) καί (2) ἰσχύουν καί ἀντίστροφα. Γιατί;

Ἰδιότητα 4η. Γιά νά βγάλουμε τή ρίζα ἄλλης ρίζας ἀριθμοῦ $\alpha\in R^{+}$, ἀρκεῖ νά βγάλουμε τή ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ α μέ δείκτη τό γινόμενο τῶν δεικτῶν.

Ἀπόδειξη. Θά ἀποδείξουμε ὅτι: $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$ (1)

Ὑψώνουμε τά μέλη τῆς ἰσότητας στή δύναμη μν.

$$\text{Ἔχουμε:}\ \left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu}=\left[\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu}\right]^{\mu}=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}=\alpha\ \text{καί}\ \left(\sqrt[\nu\mu]{\alpha}\right)^{\mu\nu}=\alpha$$

Ὥστε, κατά τή βοηθητική πρόταση, τά μέλη τῆς (1) εἶναι ἴσα.

Ἰδιότητα 5η. Μιά ρίζα ὑψώνεται σέ δύναμη, ὅταν ὑψωθεῖ στή δύναμη αὐτή τό ὑπόρριζο καί τό ἐξαγόμενο τεθεῖ ὡς ὑπόρριζο ριζικοῦ τῆς ἴδιας τάξεως.

Ἀπόδειξη: Θά ἀποδείξουμε ὅτι: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Ἔχουμε: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu} = \underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} \ldots \sqrt[\nu]{\alpha}}_{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ \ldots \ \alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Οἱ μαθητές νά κάνουν τήν ἀπόδειξη καί μέ ἄλλο τρόπο.

Ἰδιότητα 6η. Ἄν τό δείκτη μιᾶς ρίζας καί τόν ἐκθέτη τοῦ ὑπόρριζού της τούς πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε (ἄν διαιροῦνται) μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό, ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς ρίζας δέ μεταβάλλεται.

Ἀπόδειξη: Θά ἀποδείξουμε ὅτι: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ (1) καί $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu:\rho]{\alpha^{\mu:\rho}}$ (2), ὅπου $\rho \in N$ καί διαιρέτης τῶν ν καί μ.

Ἔχουμε μετά ἀπό ὕψωση τῶν μελῶν τῆς (1) στή δύναμη $\nu\rho$,

1) $\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\,\right)^{\nu\rho} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\,\right)^{\nu}\right]^{\rho} = (\alpha^{\mu})^{\rho} = \alpha^{\mu\rho}$ καί $\left(\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}\right)^{\nu\rho} = \alpha^{\mu\rho}$

2) Θέτουμε $\nu : \rho = \kappa \in N$, ὁπότε $\nu = \kappa\rho$. Ἡ (2) γράφεται $\sqrt[\kappa\rho]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\kappa]{\alpha^{\mu:\rho}}$.

Ὑψώνουμε τά μέλη της στή δύναμη $\rho\kappa$.

Ἔχουμε $\left(\sqrt[\kappa\rho]{\alpha^{\mu}}\right)^{\kappa\rho} = \alpha^{\mu}$ καί $\left(\sqrt[\kappa]{\alpha^{\mu:\rho}}\right)^{\kappa\rho} = \left[\left(\sqrt[\kappa]{\alpha^{\mu:\rho}}\right)^{\kappa}\right]^{\rho} = (\alpha^{\mu:\rho})^{\rho} = \alpha^{\mu}$

Ὥστε, κατά τή βοηθητική πρόταση, τά μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἶναι ἴσα.

Ἀξειοσημείωτη παρατήρηση: Ἡ ἐξέταση τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων ἔγινε μέ τήν ὑπόθεση ὅτι τά ὑπόρριζα εἶναι θετικά. Ἄν ὅμως δέ γνωρίζουμε τό σημεῖο τῶν ὑπορρίζων, τότε χρειάζεται ἰδιαίτερη προσοχή στήν ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, ὅπως φαίνεται στά ἀκόλουθα παραδείγματα.

Παραδείγματα: 1) Δέν μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$, ἄν $\alpha > 0$ καί $\beta < 0$ ἤ ἄν $\alpha < 0$ καί $\beta < 0$, οὔτε $\sqrt{\alpha} / \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha/\beta}$.

Ἐνῶ, ἄν $\alpha < 0$ καί $\beta < 0$, μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta}$ καί $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{-\alpha} / \sqrt{-\beta}$, γιατί $-\alpha > 0$ καί $-\beta > 0$.

2) Δέν μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha}} = \sqrt[6]{\alpha}$ ἄν $\alpha < 0$.

3) Δέν μποροῦμε νά γράψουμε $\alpha\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha^2\beta}$ ἄν $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Τό σωστό εἶναι $\alpha\sqrt{\beta} = -|\alpha|\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha^2\beta}$.

4) Δέν μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt[3]{\alpha^5} = \sqrt[6]{\alpha^{10}}$ ἄν $\alpha < 0$, γιατί τά μέλη τῆς ἰσότητας εἶναι ἑτερόσημα καί συνεπῶς διαφορετικά.

Τό σωστό εἶναι $\sqrt[3]{\alpha^5} = \sqrt[3]{-(-\alpha^5)} = -\sqrt[3]{(-\alpha)^5} = -\sqrt[6]{(-\alpha)^{10}} = -\sqrt[6]{\alpha^{10}}$

5) Δέν μποροῦμε νά γράψουμε $\sqrt[6]{\alpha^2}=\sqrt[3]{\alpha}$ ἄν $\alpha<0$, γιατί οἱ ἀριθμοί $\sqrt[6]{\alpha^2}$ καί $\sqrt[3]{\alpha}$ εἶναι ἑτερόσημοι. Τό σωστό εἶναι: $\sqrt[6]{\alpha^2}=\sqrt[6]{(-\alpha)^2}=\sqrt[3]{-\alpha}>0$.

75. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΡΡΗΤΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Λέγεται ἄρρητη παράσταση κάθε ἀριθμητική ἤ ἐγγράμματη παράσταση, πού περιέχει τουλάχιστον ἕνα ριζικό.

Οἱ παραστάσεις $\alpha+\beta\sqrt{2}$, $\frac{\alpha}{3+\sqrt{\beta}}$, $\sqrt{x+\psi}$ εἶναι ἄρρητες.

1) Πρόσθεση καί ἀφαίρεση.

Ὁρισμός. Τά ριζικά πού ἔχουν τόν ἴδιο δείκτη καί τό ἴδιο ὑπόρριζο ὀνομάζονται **ὅμοια** καί ὁ παράγοντας πού βρίσκεται μπροστά ἀπό κάθε ριζικό λέγεται **συντελεστής** τοῦ ριζικοῦ.

Γιά νά βροῦμε τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα ἄρρητων μονωνύμων, ὅμοιων ὡς πρός τό ριζικό πού περιέχουν, σχηματίζουμε ἕνα ἄρρητο μονώνυμο ὅμοιο μέ αὐτά καί μέ συντελεστή το ἀλγ. ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων.

Παραδείγματα: α) Τό ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $-3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $-2\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$ ἰσοῦται μέ $\left(-3+1+\frac{1}{2}-2\right)\sqrt[3]{\alpha^2\beta}=-\frac{7}{2}\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$

β) Νά βρεθεί τό ἄθροισμα $\sqrt[3]{3\alpha^4x}-2\sqrt[3]{3\alpha x}+\sqrt[3]{24\alpha^4x}$

Ἔχουμε $\sqrt[3]{3\alpha^4x}-2\sqrt[3]{3\alpha x}+\sqrt[3]{24\alpha^4x}=\alpha\sqrt[3]{3\alpha x}-2\sqrt[3]{3\alpha x}+2\alpha\sqrt[3]{3\alpha x}=$

$$=(\alpha-2+2\alpha)\sqrt[3]{3\alpha x}=(3\alpha-2)\sqrt[3]{3\alpha x}$$

2) Πολλαπλασιασμός καί διαίρεση ριζικῶν μέ διαφορετικό δείκτη.

Ριζικά μέ διαφορετικούς δεῖκτες τρέπονται σέ ἰσοδύναμα ριζικά τοῦ ἴδιου δείκτη, ἄν δείκτης καί ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου στό καθένα ἀπό αὐτά πολ/σθοῦν μέ τό πηλίκο πού δίνει ἡ διαίρεση τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν δεικτῶν μέ τό δείκτη τοῦ ριζικοῦ. Ἔπειτα γιά νά βροῦμε τό γινόμενο καί τό πηλίκο τῶν ριζικῶν ἐφαρμόζουμε τό γνωστό κανόνα.

Παραδείγματα: α) $3\sqrt[3]{\alpha^2\gamma}\cdot\sqrt[3]{\alpha\gamma}\cdot\sqrt[3]{\gamma^4}=3\sqrt[3]{(\alpha^2\gamma)(\alpha\gamma)\gamma^4}=3\sqrt[3]{\alpha^3\gamma^6}=3\alpha\gamma^2$

β) Νά βρεθεῖ τό γινόμενο $A=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[3]{\beta}\cdot\sqrt[4]{\gamma}$.

ΕΚΠ δεικτῶν τό 12.

Ἔχουμε: $A=\sqrt[12]{\alpha^6}\cdot\sqrt[12]{\beta^4}\cdot\sqrt[12]{\gamma^3}=\sqrt[12]{\alpha^6\beta^4\gamma^3}$

γ) Τό πηλίκο: $\dfrac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\dfrac{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}}{\sqrt[\mu\nu]{\beta^\mu}}=\sqrt[\mu\nu]{\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\mu}}$ $(\alpha,\beta\in R^+)$

δ) Νά γίνουν οἱ πράξεις $\left(\sqrt{\dfrac{x\psi^2}{\alpha^3}}+\sqrt{\dfrac{x^2}{\psi}}\right)\cdot(\sqrt{x\alpha}+\sqrt{\psi^3})$

Ἔχουμε :

$$A=\sqrt{\frac{x\psi^2}{\alpha^3}\cdot\alpha x}+\sqrt{\frac{x\psi^2}{\alpha^3}\cdot\psi^3}+\sqrt{\frac{x^2}{\psi}\cdot\alpha x}+\sqrt{\frac{x^2}{\psi}\cdot\psi^3}=\sqrt{\frac{x^2\psi^2}{\alpha^2}}+\sqrt{\frac{x\psi^5}{\alpha^3}}+\sqrt{\frac{\alpha x^3}{\psi}}+$$

$$+\sqrt{x^2\psi^2}=\frac{x\psi}{\alpha}+\frac{\psi^2}{\alpha}\sqrt{\frac{x\psi}{\alpha}}+x\sqrt{\frac{x\alpha}{\psi}}+x\psi$$

3) Ἁπλοποίηση ἄρρητων παραστάσεων.

Μέ τή βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν εἶναι δυνατό πολλές φορές ριζικά ἤ ἄρρητες παραστάσεις νά ἁπλουστευθοῦν ἤ, ὅπως λέμε, νά ἁπλοποιηθοῦν.

Παραδείγματα : α) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}x\sqrt{\dfrac{x}{3}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{x^2}{9}\cdot\dfrac{x}{3}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{x^3}{27}}}=\sqrt[6]{\left(\dfrac{x}{3}\right)^3}=\sqrt{\dfrac{x}{3}}$,

β) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{\alpha^2}\cdot\sqrt[3]{\alpha^2}}\cdot\sqrt[12]{\alpha^5}=\sqrt[12]{\alpha^2}\cdot\sqrt[12]{\alpha^2}\cdot\sqrt[12]{\alpha^5}=\sqrt[12]{\alpha^9}=\sqrt[4]{\alpha^3}$ $(\alpha>0)$

76. ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ ΣΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟ ΜΕ ΡΗΤΟ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ

Πολλές φορές εἶναι σκόπιμο νά τρέπουμε κλάσματα μέ ἄρρητο παρονομαστή σέ ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή, γιατί ἔτσι διευκολύνονται οἱ πράξεις.

Πιό συνηθισμένες μορφές τέτοιων κλασμάτων εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

1. Κλάσματα μέ μορφή $A=\dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta^\mu}}$, $\beta>0$, $\nu,\mu\in N$ καί $\nu>\mu$

Πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος μέ $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}$

Ἔτσι: $A=\dfrac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^\mu}\cdot\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}=\dfrac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^\mu\beta^{\nu-\mu}}}=\dfrac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^\nu}}=\dfrac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\beta}$

π.χ. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{25}}{5}$

2. Κλάσματα μέ μορφή $A = \dfrac{\alpha}{\beta \pm \sqrt{\gamma}}$ ἤ $B = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}}$, $\beta,\ \gamma \in R^+$

Ὁρισμός. Ἄρρητες παραστάσεις, πού διαφέρουν μόνο ὡς πρός τό πρόσημο ἑνός ριζικοῦ, ὀνομάζονται **συζυγεῖς**.

α) Τό κλάσμα Α τρέπεται σέ ἰσοδύναμο μέ ρητό παρονομαστή, ἄν οἱ ὅροι του πολ/σθοῦν μέ τή συζυγή παράσταση τοῦ παρονομαστῆ του, πού εἶναι ἀντιστοίχως, $\beta \mp \sqrt{\gamma}$.

Ἔτσι: $A_1 = \dfrac{\alpha}{\beta + \sqrt{\gamma}} = \dfrac{\alpha(\beta - \sqrt{\gamma})}{(\beta + \sqrt{\gamma})(\beta - \sqrt{\gamma})} = \dfrac{\alpha(\beta - \sqrt{\gamma})}{\beta^2 - \gamma}$

καί $A_2 = \dfrac{\alpha}{\beta - \sqrt{\gamma}} = \dfrac{\alpha(\beta + \sqrt{\gamma})}{(\beta - \sqrt{\gamma})(\beta + \sqrt{\gamma})} = \dfrac{\alpha(\beta + \sqrt{\gamma})}{\beta^2 - \gamma}$

β) Πολ/ζουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος Β μέ τή συζυγή παράσταση τοῦ παρονομαστῆ του, πού εἶναι $\sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma}$

Ἔτσι: $B_1 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}} = \dfrac{\alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})} = \dfrac{\alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})}{\beta - \gamma}$

Ἐπίσης $B_2 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}} = \dfrac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})}{\beta - \gamma}$

π.χ. $\dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - 3} = 2 + \sqrt{3}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

3. Κλάσματα μέ μορφή $A = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma} \pm \sqrt{\delta}}$, $\beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbf{R}^+$

Γιά νά τρέψουμε ἕνα ἀπό αὐτά σέ ἰσοδύναμο μέ ρητό παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε τούς ὅρους του μέ μιά συζυγή παράσταση τοῦ παρονομαστῆ του.

Ἔτσι: $A = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta}} = \dfrac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta})(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})} =$

$$= \frac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})^2 - \delta} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})}{(\beta + \gamma - \delta) + 2\sqrt{\beta\gamma}}$$

Αὐτό ἔχει τή μορφή 2 καί τρέπεται σέ ἰσοδύναμο μέ ρητό παρονομαστή, ὅπως καί προηγουμένως.

Π.χ. $\dfrac{A}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\dfrac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-5}=$

$=\dfrac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3-5-2\sqrt{6}}=\dfrac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2\sqrt{6}}=\dfrac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{-12}$ κλπ.

Γενικά : Κλάσματα μέ μορφή :

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha_1}\pm\sqrt{\alpha_2}\pm\sqrt{\alpha_3}\pm\cdots\pm\sqrt{\alpha_\nu}}$$

τρέπονται σέ ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή, ἄν συνέχεια πολλαπλασιάζουμε μέ μιά συζυγή παράσταση τοῦ κάθε φορά παρονομαστῆ, ὥσπου ὁ παρονομαστής νά γίνει ρητός.

4. Κλάσματα μέ μορφή $A=\dfrac{K}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$, $B=\dfrac{\Lambda}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}$, $\alpha, \beta\in R^+$

1) Γιά τό κλάσμα Α διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Ἄν $\nu=2\kappa+1$, $\kappa\in N$, τότε τό κλάσμα Α γράφεται:

$$A=\frac{K}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha+\beta}\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu+\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{K}{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2}-\cdots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

β) Ἄν $\nu=2\kappa$, $\kappa\in N$, τότε ἐπίσης ἔχουμε:

$$A=\frac{K}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{K}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\cdot\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2}-\cdots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

π.χ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{2+3}\cdot\dfrac{2+3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=$

$$=\frac{1}{5}\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)$$

2) Τό κλάσμα Β γράφεται:

$$B=\frac{\Lambda}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\Lambda}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\Lambda}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$= \frac{\Lambda}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}} + \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta} + \ldots + \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

π.χ. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}} = \dfrac{1}{2-3}\cdot\dfrac{2-3}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}} = -1\cdot\dfrac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-\left(\sqrt[4]{3}\right)^4}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}} =$

$$= -\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{27}\right)$$

Σημείωση: Ἄν τό κλάσμα ἔχει τή μορφή $\Gamma = \dfrac{M}{\sqrt[\nu]{\alpha} \pm \sqrt[\mu]{\beta}}$, ὅπου α, $\beta \in \mathbb{R}^+$ καί ν, $\mu \in N$ τότε τρέπουμε τόν παρονομαστή σέ ἄλλο παρονομαστή μέ ριζικά τοῦ ἴδιου δείκτη καί ἔπειτα προχωροῦμε ὅπως προηγουμένως.

Π. χ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} = \dfrac{1}{4-27}\cdot\dfrac{4-27}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} = -\dfrac{1}{23}\cdot$

$$\cdot\frac{\left(\sqrt[6]{4}\right)^6-\left(\sqrt[6]{27}\right)^6}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} = -\frac{1}{23}\left(\sqrt[6]{4^5}-\sqrt[6]{4^4\cdot 27}+\sqrt[6]{4^3\cdot 27^2}-\sqrt[6]{4^2\cdot 27^3}+\sqrt[6]{4\cdot 27^4}-\sqrt[6]{27^5}\right)$$

77. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Εἴδαμε ὅτι σύμφωνα μέ τήν 6η ἰδιότητα τῶν ριζῶν μποροῦμε νά διαιρέσουμε τό δείκτη τοῦ ριζικοῦ καί τόν ἐκθέτη τοῦ ὑπορρίζου του μέ τόν ἴδιο φυσικό ἀριθμό.

Ἔτσι, ἄν $\alpha > 0$, μ, $\nu \in N$ καί $\mu = \nu\kappa$, ὅπου $\kappa \in N$, τότε γιά τήν πρωτεύουσα ρίζα $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ θά ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\kappa}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}\right)^\nu = \alpha^\kappa = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

Δηλαδή βλέπουμε, ὅτι τό σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει τήν ἔννοια τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ὅταν βέβαια τό $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι φυσικός. Ἄν ὅμως τό $\frac{\mu}{\nu}$ δέν εἶναι φυσικός, τότε τό σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δέν ἔχει καμιά ἔννοια, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς δυνάμεως. Σκόπιμο εἶναι νά γενικεύσουμε τήν ἔννοια τοῦ συμβόλου $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ καί γιά τήν περίπτωση, πού τό $\frac{\mu}{\nu}$ δέν εἶναι φυσικός, ἀλλά γενικά ρητός.

Θά ὀνομάζουμε τό σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δύναμη τοῦ α μέ ἐκθέτη τόν ρητό $\frac{\mu}{\nu}$ καί,

θά ὁρίζουμε νά εἶναι ἡ νιοστή πρωτεύουσα ρίζα τῆς μυοστῆς δυνάμεως τοῦ α, δηλαδή ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, **ἄν** $\frac{\mu}{\nu} > 0$ **καί** $\alpha > 0$ **καί ἡ ἀντίστροφή της** $\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$, **ἄν** $\frac{\mu}{\nu} < 0$ **καί** $\alpha > 0$.

Ἔτσι γράφουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καί $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$ ὅπου $\mu, \nu \in N$ καί $\alpha > 0$.

Π.χ. $\alpha^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^4}$, $\alpha^{1,2} = \alpha^{\frac{12}{10}} = \alpha^{\frac{6}{5}} = \sqrt[5]{\alpha^6}$, $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Σημείωση. Πρέπει νά ἀποφεύγουμε νά ἐφαρμόζουμε τό συμβολισμό $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὅταν $\alpha < 0$, γιατί μπορεῖ νά μήν ἔχει ἔννοια.

Π.χ. $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$, ἀλλά $(-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[3]{8} = +2$.

Εἶναι φανερό ὅτι $(-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{\frac{2}{6}}$

Ὥστε, μέ βάση τούς ὁρισμούς πού θέσαμε, **κάθε ρίζα μπορεῖ νά γραφεῖ σά δύναμη μέ ἐκθέτη ρητό.**

Οἱ νέες αὐτές δυνάμεις μέ ἐκθέτη ρητό ὑπακούουν στίς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ ἐκθέτες σχετικούς ἀκέραιους.

78. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΕΚΘΕΤΕΣ.

1) **Τό γινόμενο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ** $\alpha > 0$:

Ἔχουμε :

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \cdot \sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} \cdot \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda+\kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda+\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}}$$

2) **Ὕψωση δυνάμεως σέ δύναμη:**

Ἔχουμε:

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^\kappa} = \sqrt[\lambda]{\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\right)^\kappa} = \sqrt[\lambda]{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\kappa}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\kappa}} = \alpha^{\frac{\mu\kappa}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}}$$

3) **Ὕψωση γινομένου σέ δύναμη :**

Ἔχουμε :

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu\cdot\beta^\mu\cdot\gamma^\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\cdot\sqrt[\nu]{\beta^\mu}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma^\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$$

4) **Τό πηλίκο δύο δυνάμεων τοῦ** $\alpha > 0$:

Ἔχουμε :

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} : \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} : \sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} : \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda} : \alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda-\kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda-\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}} \left(\frac{\mu}{\nu} > \frac{\kappa}{\lambda}\right)$$

5) **Ύψωση κλάσματος σέ δύναμη :**

Έχουμε :

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

Γιά ὅλες τίς περιπτώσεις εἶναι $\alpha, \beta \in R^{+}$ καί $\mu, \nu, \kappa, \lambda \in N$.

Σημείωση. Ἐπειδὴ $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$ ἕπεται ὅτι οἱ παραπάνω ἰδιότητες ἰσχύουν καὶ γιὰ δυνάμεις μὲ ἐκθέτες ρητοὺς ἀρνητικούς

Οἱ μαθητές μποροῦν να διατυπώσουν τούς κανόνες τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων μέ ἐκθέτες ρητούς ἀριθμούς.

Παρατήρηση : Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι ὁ λογισμός μέ ριζικά εἶναι πιό εὔκολος, ὅταν ἀντικαταστήσουμε τά ριζικά αὐτά μέ δυνάμεις πού νά ἔχουν ἐκθέτες ρητούς.

Ἐφαρμογή :

$$\left(\sqrt[3]{\alpha^2}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}\cdot\sqrt{\alpha}\right) : \sqrt[6]{\alpha^9} = \left(\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{\frac{3}{5}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}\right) : \alpha^{\frac{9}{6}} = \alpha^{\frac{53}{30}} : \alpha^{\frac{9}{6}} = \alpha^{\frac{4}{15}} = \sqrt[15]{\alpha^4}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ά δ α α΄

227) Νά βρεθοῦν οἱ πρωτεύουσες ρίζες τῶν ἀριθμῶν:

$\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{-243}$, $\sqrt{\frac{1}{16}}$, $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$, $\sqrt{0{,}0256}$

228) Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ πραγματικές ρίζες τέταρτης τάξεως τῶν ἀριθμῶν:

$16, \ -16, \ 49^2, \ -10^2, \ 81, \ 0{,}0081$

229) Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ ἀκόλουθες παραστάσεις:

$\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[6]{49}$, $\sqrt[5]{9^{10}}$, $\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[9]{-512}$, $\sqrt[15]{-243}$, $\sqrt[3]{-27\alpha^6\beta^3}$, $\sqrt[10]{-\alpha^2\beta^6\gamma^{10}}$, $\sqrt[18]{64\alpha^{12}\psi^{30}}$

230) Νά βγοῦν ἔξω ἀπό κάθε ρίζα οἱ κατάλληλοι παράγοντες:

$\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{-24}$, $\sqrt[5]{320}$, $\sqrt[5]{-96}$, $\sqrt[4]{0{,}1250}$, $\sqrt[3]{54x^3\psi^4}$, $\sqrt[4]{32x^8\psi\omega^5}$, $\sqrt[\nu]{x^{\nu+1}}$, $\sqrt[\nu]{x^{\nu+1}\psi^{\nu+2}}$, $\sqrt{16x^{2\nu}\psi^{4\nu}}$

231) Οἱ παράγοντες ἔξω ἀπό τίς ρίζες νά εἰσαχθοῦν στά ὑπόρριζα.

$3\sqrt[3]{2}$, $-2\sqrt[3]{-7}$, $\alpha\sqrt[4]{3\alpha}$, $\alpha^2\beta\sqrt[4]{-\alpha\beta}$, $-2\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt[5]{-\alpha\beta\gamma}$, $(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha-\beta}$, $\frac{3x^2\psi}{\omega}\sqrt[3]{\frac{\omega^2}{9x^2\psi^2}}$, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$.

232) Νά βρεθοῦν τά ἀκόλουθα γινόμενα καί πηλίκα:

1) $5\sqrt{18}\cdot 3\sqrt{8}$, 2) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{150}$, 3) $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{48}$

4) $\sqrt[3]{75\alpha\beta\gamma}\cdot 2\sqrt[3]{6\alpha^2\beta\gamma^2}\cdot\sqrt[3]{60\alpha^3\beta\gamma^3}$, 5) $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}\cdot\sqrt[10]{\alpha^4}$, 6) $5\sqrt[4]{18} : \sqrt[4]{8}$

233) Νά βρεθοῦν τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

1) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$, 2) $4\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-3}+\sqrt[3]{-81}$, 3) $\sqrt[6]{16}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[3]{-4}$,

4) $9\sqrt[3]{2\alpha^6x}-3\sqrt[3]{16\alpha^3x}+\sqrt[3]{2x}$

234) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις:

1) $(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{24}-4\sqrt[3]{375})\cdot\sqrt[3]{-3}$, 2) $(x\sqrt{x}-\psi\sqrt{\psi}) : (\sqrt{x}-\sqrt{\psi})$

235) Τά παρακάτω κλάσματα νά τραποῦν σέ ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή.

1) $\dfrac{\alpha}{\beta\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{\alpha^3}{\sqrt[3]{\alpha}}$, $\dfrac{\mu\nu}{\sqrt[3]{\mu^2\nu^2}}$, $\dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}}$, 2) $\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{\alpha}}$, $\dfrac{7}{\sqrt{x}+\sqrt{\psi}}$, $\dfrac{\alpha+\sqrt{\beta}}{\alpha-\sqrt{\beta}}$

236) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις:

1) $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right)$, 2) $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)^2$, 3) $\left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}-1\right)^2$

4) $\left(\gamma^3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\gamma^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\gamma^{\frac{4}{5}}}$, 5) $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}+\beta^{-\frac{1}{2}}\right)$

Ὁ μ ά δ α β'

237) Νά βρεθοῦν τά ἀκόλουθα γινόμενα καί πηλίκα:

1) $\sqrt[\nu]{x^2\omega^{\nu-2}}\cdot\sqrt[\nu]{\psi^{\nu-3}\omega^2}\cdot\sqrt[\nu]{x^{\nu-2}\psi^3}$, 2) $3\sqrt[4]{\alpha}\cdot 7\sqrt[6]{\alpha^5\beta}\cdot\sqrt[12]{\alpha^3\beta^{10}}$,

3) $4\sqrt[3]{-12} : 2\sqrt{2}$, 4) $(\sqrt[3]{\alpha^5\beta^4}\cdot\alpha\sqrt[3]{\beta^2}):\sqrt[3]{\alpha^2\beta^{12}}$

238) Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ ἀκόλουθες παραστάσεις:

$\sqrt[5]{\sqrt[3]{-\alpha^5}}$, $\sqrt[3]{\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}}$, $\left(\sqrt[7]{-\alpha\sqrt{3\alpha}}\right)^{14}$, $\left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{-8\alpha^3}}\right)^7$, $\sqrt[\nu-1]{\dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\alpha}}}$,

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$, $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt[3]{\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}\sqrt[4]{\dfrac{\beta^3}{\alpha^3}}}}$, $\sqrt[3]{9\alpha^2\sqrt{\dfrac{2\beta}{3\alpha}}}\cdot\sqrt[3]{4\beta^2\sqrt{\dfrac{3\alpha}{2\beta}}}$

239) Νά βρεθοῦν τά ἀλγεβρικά ἀθροίσματα :

1) $\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}-\sqrt[6]{2916}+\sqrt[8]{256}$, 2) $\sqrt{4\alpha^2+4}-5\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{x^2+\alpha^2x^2}+\sqrt{9\alpha^2+9}$,

3) $5\sqrt{\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{x^3-x^2}}-\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4\alpha^2+4\alpha^3}{x-1}}-\dfrac{3\alpha}{x}\sqrt{\dfrac{\alpha+1}{x-1}}$

240) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις:

1) $(x-\alpha+\sqrt{\beta+\alpha^2})(x-\alpha-\sqrt{\beta+\alpha^2})$, 2) $(\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})$,

3) $(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\psi})(x+\psi+\sqrt[3]{x\psi^2}+\sqrt[3]{x^2\psi})$, 4) $(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{\psi^3}):(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x\psi}+\sqrt{\psi})$,

5) $(3\alpha\sqrt{\alpha}+\alpha+\sqrt{\alpha}-2):(3\sqrt{\alpha}-2)$

241) Τά παρακάτω κλάσματα νά τραποῦν σέ ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομαστή.

1) $\dfrac{\sqrt{x+\psi}+\sqrt{x-\psi}}{\sqrt{x+\psi}-\sqrt{x-\psi}}$, $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{\psi}}{1-\sqrt{x}+\sqrt{\psi}}$, $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$, $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$,

2) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$, $\dfrac{5}{1-\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$, $\dfrac{11}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{3}}$

242) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις:

1) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$, 2) $\dfrac{\sqrt{2x+\psi}+\sqrt{2x-\psi}}{\sqrt{2x+\psi}-\sqrt{2x-\psi}}+\dfrac{\sqrt{2x+\psi}-\sqrt{2x-\psi}}{\sqrt{2x+\psi}+\sqrt{2x-\psi}}$,

3) $\dfrac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\dfrac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-\alpha^4}}$, 4) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha}+1}$

243) Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις:

1) $\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}+\alpha^{-\frac{1}{3}}\beta+\beta^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\alpha^{-\frac{1}{3}}-\beta^{-\frac{1}{3}}\right)$, 2) $\left(\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}\right):\left(\alpha^{-\frac{1}{3}}-\beta^{-\frac{1}{3}}\right)$

244) Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

1) $\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^{\frac{3}{4}}+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{4}}+\alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}}$, 2) $\dfrac{\alpha^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{4}}+1}{\alpha^{\frac{1}{4}}-2\alpha^{\frac{1}{8}}+1}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (1)

79. ΑΝΑΓΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΝΕΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Στό Γυμνάσιο εἴδαμε ὅτι τό τριώνυμο

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

μέ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ δέν μπορεῖ να μετασχηματιστεῖ σέ διαφορά δύο τετραγώνων, γιατί ὁ ὅρος $\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ δέν εἶναι τετράγωνο πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ἀφοῦ εἶναι ἀρνητικός.

Ἐπίσης γιά ὁρισμένες ἐξισώσεις, ὅπως οἱ $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4 = 0$, ἡ λύση εἶναι ἀδύνατη στό R.

Γενικά ἡ ἰσότητα $x^{2\nu} = \beta$, $\forall x \in R$, $\beta \in R^-$, $\nu \in N_0$, εἶναι ἀδύνατη, γιατί δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x, πού ἡ ἄρτια δύναμή του νά εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

Ἀκόμα εἴδαμε ὅτι $\forall\ \alpha \in R^-$, $\nu \in N$ τό σύμβολο $\sqrt[2\nu]{\alpha}$ δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Τά παραπάνω ἀλγεβρικά θέματα καί ἄλλα παρόμοιά τους ἔμεναν ἄλυτα, ὥσπου ἡ προσπάθεια τῶν μαθηματικῶν νά δώσουν λύση σ' αὐτά ὁδήγησε στήν ἐπινόηση ἑνός νέου συστήματος ἀριθμῶν μέ τούς ὁποίους μποροῦμε νά τά λύσουμε. Ἔτσι ἐπινοήθηκε ἕνα νέο σύστημα ἀριθμῶν, πού ὀνομάσθηκε **σύστημα φανταστικῶν ἀριθμῶν**..

Ἕνα τέτοιο σύστημα ἀριθμῶν, γιά νά γίνει δεκτό. πρέπει νά ὑπακούει στούς γνωστούς μέχρι τώρα νόμους, πού ἰσχύουν γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς. Δεχόμαστε ὅτι τό νέο σύστημα τῶν **φανταστικῶν ἀριθμῶν** ὑπακούει στούς νόμους αὐτούς.

---

(1) Τή θεωρία τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν θεμελίωσαν οἱ D' Alembert, Euler, Gauss.

80. ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ - ΟΡΙΣΜΟΙ.

Κάθε σύστημα ἀριθμῶν ἔχει μιά μονάδα.

Γιά τό σύστημα **τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν** συμβολίζουμε τή μονάδα μέ τό γράμμα **(i)** (ἀρχικό τῆς γαλλικῆς λέξεως imagineure), τήν ὀνομάζουμε **φανταστική μονάδα** καί ὁρίζουμε νά ἔχει τήν ἰδιότητα: **Τό τετράγωνό της καθώς καί τό τετράγωνο τοῦ ἀντίθετού της (—i) νά ἰσοῦται μέ τήν ἀρνητική πραγματική μονάδα.**

Ἔτσι ὁρίζουμε: $\boxed{i^2 = -1, \ (-i)^2 = -1}$ (1)

Μέ τίς ἰσότητες (1) ἡ λύση τῆς ἐξισ. $x^2 + 1 = 0$ εἶναι δυνατή στούς φανταστικούς ἀριθμούς, γιατί:

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = (\pm i)^2 \Rightarrow x = \pm i$$

Ἐπιπλέον οἱ ἰσότητες (1) φανερώνουν ὅτι: $\boxed{\sqrt{-1} = \pm i}$ * (2)

Φανταστικός ἀριθμός λέγεται κάθε ἀριθμός, πού γίνεται μέ τήν ἐπανάληψη τῆς φανταστικῆς μονάδας i, ἤ καί τῆς ἀντίθετης –i, καί τῶν μερῶν της.

Ἔτσι, οἱ ἀριθμοί $2i, -3i, \frac{1}{2}i, -\frac{3}{5}i, 0{,}25i$ εἶναι φανταστικοί.

Ἡ γενική μορφή ἑνός φανταστικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι: βi, ὅπου $\beta \neq 0$ καί $\beta \in R$.

Μέ βάση τούς ὁρισμούς πού θέσαμε **ἡ τετραγωνική ρίζα κάθε ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμός φανταστικός.**

Πράγματι: $\forall \alpha \in R^-: \sqrt{\alpha} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|\alpha|} \wedge \sqrt{-1} = \pm i \Rightarrow \boxed{\sqrt{\alpha} = \pm i\sqrt{|\alpha|}}$

Ἀπό τίς δύο τετραγωνικές ρίζες τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ α συμφωνοῦμε μέ τό σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ νά συμβολίζουμε τήν $i\sqrt{|\alpha|}$, τήν ὁποία ὀνομάζουμε **πρωτεύουσα** τετραγωνική ρίζα τοῦ α.

Π.χ. $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} = i\sqrt{16} \cdot i\sqrt{9} = i^2\sqrt{16 \cdot 9} = (-1) \cdot 12 = -12$

Ὄχι σωστή πράξη: $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-16) \cdot (-9)} = \sqrt{144} = 12$

Οἱ ἀκέραιες δυνάμεις τῆς φανταστικῆς μονάδας.

Ἔχουμε: 1)

$$\left.\begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1, (-i)^2 = -1 \end{array}\right\} \text{ἀπό τόν ὁρισμό}$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 i = 1i = i$$

(*) Τό συμβολισμό αὐτό χρησιμοποίησε πρῶτος ὁ Gauss, ἀλλά ὁ Euler (1777) τόν καθιέρωσε.

2) Γενικά:

$$\forall\, \nu \in N: \left| \begin{array}{l} i^{4\nu} \;\; = (i^4)^\nu = 1^\nu = 1 \\ i^{4\nu+1} = i^{4\nu} \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^{4\nu+2} = i^{4\nu}\, i^2 = 1\,(-1) = -1 \\ i^{4\nu+3} = i^{4\nu}\, i^3 = 1\,(-i) = -i \\ i^{-\nu} = \frac{1}{i^\nu} \;\; (\text{Δυνατές τιμές: } 1, i, -1, -i) \end{array} \right.$$

Ἡ δύναμη i^κ, μέ $\kappa \in N$ καί $\kappa > 4$, γράφεται $i^{4\pi+\upsilon}$, ὅπου π καί υ τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως κ : 4. Οἱ δυνατές τιμές τοῦ υ εἶναι: 0, 1, 2, 3. Ἄρα ἔχουμε: $i^\kappa = i^{4\pi+\upsilon} = i^{4\pi} \cdot i^\upsilon = 1 \cdot i^\upsilon = i^\upsilon$

Π.χ. $i^{66} = i^{4\cdot16+2} = i^2 = -1$.

Παρατηρήσεις:

1) Οἱ δυνατές τιμές τῶν δυνάμεων τοῦ i εἶναι $i, -1, -i, 1$ καί ἐναλλάσσονται περιοδικά.

2) Οἱ ἄρτιες δυνάμεις τῆς i εἶναι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί $+1, -1$.

3) Οἱ περιττές δυνάμεις τῆς i εἶναι οἱ φανταστικοί ἀριθμοί $i, -i$.

Παραδείγματα: 1) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = 0$

Λύση: $i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = i^7(1 + i + i^2 + i^3) = i^7\,(1 + i - 1 - i) = i^7 \cdot 0 = 0$.

2) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $A = i^{2\nu} + \frac{1}{i^3} + 2i^4 + 3i^2$

Λύση: $A = (i^2)^\nu + \frac{1}{-i} + 2 \cdot 1 + 3\,(-1) = (-1)^\nu + i + 2 - 3 = (-1)^\nu - 1 + i$.

Ἔτσι: $\forall\, \nu = 2\kappa,\ \kappa \in N_0 : A = 1 - 1 + i = i$

$\forall\, \nu = 2\kappa + 1 : \ A = -1 - 1 + i = -2 + i$

3) Νά βρεθοῦν οἱ δυνατές τιμές τῆς παραστ.: $A = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^\nu$

Λύση: α) Ἄν $\nu = 4\kappa$, ὅπου $\kappa \in N$ ἔχουμε: $A_1 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 = 1$

β) Ἄν $\nu = 4\kappa + 1$ ἔχουμε: $A_2 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i = 1 + i$

γ) Ἄν $\nu = 4\kappa + 2$ ἔχουμε: $A_3 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i - 1 = i$

δ) Ἄν $\nu = 4\kappa + 3$ ἔχουμε: $A_4 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i - 1 - i = 0$

81. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (COMPLEXES) – ΟΡΙΣΜΟΙ *.

Ἄν $\alpha, \beta \in R$, θά ὀνομάζουμε μιγαδικό ἀριθμό τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα μέ μορφή $\alpha + \beta i$, ὅπου ὁ α ἀποτελεῖ τό πραγματικό μέρος καί βi τό φανταστικό μέρος του.

Ἐπειδή μέ $\beta = 0$ εἶναι $\alpha = \alpha + 0i$ καί μέ $\alpha = 0 \wedge \beta \neq 0$ εἶναι $\beta i = 0 + \beta i$, ἕπεται ὅτι κάθε ἀριθμός πραγματικός ἤ φανταστικός μπορεῖ νά τεθεῖ σέ μορφή μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.

(*) Εἶναι ἀδύνατο, ὅπως ἀπέδειξε ὁ Weterstrass, νά γίνει σύστημα πιό γενικό ἀπό τό μιγαδικό, στό ὁποῖο νά ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων.

Ἄρα τό σύστημα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν περιέχει τά συστήματα τῶν πραγματικῶν καί τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

Ἔτσι ἄν εἶναι: I τό σύνολο τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν βi, R τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί C τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν α + βi, τότε ἔχουμε:

$$R \subset C,\ I \subset C,\ R \cap I = \varnothing,\ (R \cup I) \subset C$$

Στό μιγαδικό ἀριθμό $Z = \alpha + \beta i$ παρατηροῦμε ὅτι μεταξύ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ὑπάρχει μιά διμελής σχέση. Ἑπομένως μποροῦμε νά θεωρήσουμε ὅτι τά α καί β ἀποτελοῦν διατεταγμένο ζεῦγος (α, β) καί ἔτσι νά συμβολίσουμε τό μιγαδικό ἀριθμό μέ διατεταγμένο ζεύγος πού νά ἔχει πρῶτο στοιχεῖο τό πραγματικό μέρος καί δεύτερο τό φανταστικό μέρος.

Ἔτσι ἔχουμε: $\boxed{Z = \alpha + \beta i = (\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in R}$

Ἄμεση συνέπεια τοῦ νέου συμβολισμοῦ εἶναι ὅτι:

1) Κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι τῆς μορφῆς (α, 0), α ∈ R.

2) Κάθε φανταστικός ἀριθμός εἶναι τῆς μορφῆς (0, β), β ∈ R.

Γιά νά ξεχωρίσουμε τούς μιγαδικούς ἀριθμούς τῆς μορφῆς (α, β) μέ $\beta \neq 0$ ἀπό τούς μιγαδικούς τῆς μορφῆς (α, β) $\forall \alpha, \beta \in R$, συμφωνοῦμε τούς πρώτους νά τούς λέμε **καθαρούς μιγ. ἀριθμούς.**

82. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ.

Ὁρισμοί: Τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i = (\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in R$ ὀνομάζουμε:

1) **συζυγή** τό μιγ. ἀριθμό $\bar{Z} = \alpha - \beta i = (\alpha, -\beta)$,

2) **ἀντισυζυγή** τό μιγ. ἀριθμό $Z_1 = -\alpha + \beta i = (-\alpha, \beta)$,

3) **ἀντίθετο** τό μιγ. ἀριθμό $-Z = -\alpha - \beta i = (-\alpha, -\beta)$,

4) **μέτρο ἤ ἀπόλυτη τιμή** τό μή ἀρνητικό ἀριθμό $+\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

καί συμβολίζουμε:

$$\boxed{\rho = |Z| = |(\alpha, \beta)| = |\alpha + \beta i| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Οἱ πράξεις μέ μιγαδικούς ἀριθμούς γίνονται ὅπως καί μέ τά διώνυμα $\alpha + \beta x$ καί $\gamma + \delta x$, ἄν ὅπου x εἶναι ἡ φανταστική μονάδα, γιατί δεχθήκαμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ὥς τώρα γνωστοί νόμοι τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί μηδενικός καί μοναδιαῖος.

Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $0 + 0i = (0, 0)$ λέγεται **μηδενικός** καί συμφωνοῦμε νά ταυτίζεται μέ τό 0 τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1 + 0i = (1, 0)$ λέγεται **μοναδιαῖος** καί συμφωνοῦμε νά ταυτίζεται μέ τόν πραγματικό 1.

Ἰσότητα μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Δύο μιγαδικοί ἀριθμοί $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ καί $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ εἶναι ἴσοι, ὅταν καὶ μόνο ὅταν εἶναι $\alpha_1 = \alpha_2$ καί $\beta_1 = \beta_2$.

Δηλαδή: $\alpha_1 + \beta_1 i = \alpha_2 + \beta_2 i \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \wedge \beta_1 = \beta_2$

Σημείωση : Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι **σχέση ἰσοδυναμίας,** γιατί ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

1) αὐτοπαθής· δηλαδή $\alpha + \beta i = \alpha + \beta i$,
2) συμμετρική· δηλαδή $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \gamma + \delta i = \alpha + \beta i$,
3) μεταβατική· δηλαδή $\left.\begin{array}{r}\alpha + \beta i = \gamma + \delta i\\ \gamma + \delta i = \varepsilon + \zeta i\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta i = \varepsilon + \zeta i$

Πράξεις μέ μιγαδικούς ἀριθμούς.

1) Πρόσθεση - ἀφαίρεση.

Ἄθροισμα δύο μιγαδ. ἀριθμῶν $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i = (\alpha_1, \beta_1)$ καί $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i = (\alpha_2, \beta_2)$ λέγεται ὁ μιγαδ. ἀριθμός $Z_1 + Z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$.

Διαφορά δύο μιγαδ. ἀριθμῶν $Z_1 = (\alpha_1 + \beta_1 i = (\alpha_1. \beta_1)$ μεῖον $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i = (\alpha_2, \beta_2)$ λέγεται ὁ μιγαδ. ἀριθμός $Z_1 - Z_2 = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)i$, πού, ὅταν προστεθεῖ στόν Z_2, δίνει ἄθροισμα τόν Z_1.

Τό ἄθροισμα περισσότερων ἀπό δύο μιγ. ἀριθμῶν ἀνάγεται στό ἄθροισμα δύο μιγαδ. ἀριθμῶν.

Δηλαδή ἰσχύει :

$$(\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) + \ldots + (\alpha_\nu + \beta_\nu i) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) + (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu)i$$

2) Πολλαπλασιασμός - διαίρεση.

Γινόμενο δύο μιγαδ. ἀριθμῶν $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i = (\alpha_1, \beta_1)$ καί $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i = (\alpha_2, \beta_2)$ λέγεται ὁ μιγ. ἀριθμός $Z_1 \cdot Z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i$.

Τό γινόμενο περισσότερων ἀπό δύο μιγ. ἀριθμῶν, βρίσκεται ἄν πολ/σουμε τούς δύο πρώτους, τό ἐξαγόμενο τό πολ/σουμε μέ τόν τρίτο κ.ο.κ., ὥσπου νά τελειώσουν ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου.

Ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i \neq 0$ λέγεται ὁ ἀριθμός Z^{-1} καί εἶναι τέτοιος, ὥστε $Z \cdot Z^{-1} = 1 + 0i$. Ὁ Z^{-1} ὑπάρχει καί εἶναι ἕνας καί μόνο ἕνας, ὁ $Z^{-1} = (\alpha + \beta i)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$

Πράγματι, ἄν $Z=\alpha+\beta i$ καί $Z^{-1}=x+\psi i$, τότε πρέπει

$(\alpha+\beta i)\cdot(x+\psi i)=1=1+0i \Rightarrow (\alpha x-\beta\psi)+(\alpha\psi+\beta x)i=1+0i \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\alpha x-\beta\psi&=1\\ \alpha\psi+\beta x&=0\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}x&=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\\ \psi&=\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}\end{aligned}$$

Πηλίκο δύο μιγαδ. ἀριθμῶν $Z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ διά $Z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ λέγεται ὁ μιγαδ. ἀριθμός $Z_1:Z_2$, πού, ὅταν πολ/σθεῖ μέ τόν Z_2, δίνει γινόμενο τόν Z_1. Ὅπου $Z_2\neq 0$. Τό πηλίκο αὐτό ὑπάρχει καί εἶναι ἕνα καί μόνο ἕνα.

Πράγματι· ἄν $Z=x+\psi i$ εἶναι τό πηλίκο $Z_1:Z_2$, τότε πρέπει:

$(\alpha_2+\beta_2 i)\cdot(x+\psi i)=\alpha_1+\beta_1 i \Leftrightarrow (\alpha_2 x-\beta_2\psi)+(\alpha_2\psi+\beta_2 x)i=\alpha_1+\beta_1 i \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 x-\beta_2\psi&=\alpha_1\\ \alpha_2\psi+\beta_2 x&=\beta_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned}x&=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\\ \psi&=\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\end{aligned}$$

Ἔτσι ἔχουμε : $Z_1:Z_2=x+\psi i=\dfrac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\dfrac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\,i$

Γιά νά βροῦμε τό **πηλίκο δύο μιγάδων** $Z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $Z_2=\alpha_2+\beta_2 i\neq(0,0)$ ἐργαζόμαστε καί ὡς ἑξῆς :

$$Z_1:Z_2=Z\cdot Z_2^{\;-1}=(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2+\beta_2 i)^{-1}=$$

$$=(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{-\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\,i\right)=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\,i$$

Ἐπίσης ἡ πράξη τῆς διαιρέσεως γίνεται ἀμέσως, ἄν πολ/σουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τό συζυγή μιγαδικό τοῦ παρονομαστῆ.

Δηλαδή :

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{\alpha_1+\beta_1 i}{\alpha_2+\beta_2 i}=\frac{(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2-\beta_2 i)}{(\alpha_2+\beta_2 i)\,(\alpha_2-\beta_2 i)}=\frac{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}+\frac{\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2+\beta_2^2}\,i$$

3) Ἡ ὕψωση μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ σέ δύναμη.

Ἔχουμε: $Z^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2+2\alpha\beta i+\beta^2 i^2=(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta i$

$Z^3=(\alpha+\beta i)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta i+3\alpha\beta^2 i^2+\beta^3 i^3=$

$=(\alpha^3-3\alpha\beta^2)-(\beta^3-3\alpha^2\beta)i$

4) Οἱ νόμοι τῶν πράξεων.

Μέ βάση τούς ὁρισμούς πού θέσαμε οἱ μαθητές μποροῦν νά ἀποδείξουν ὅτι γιά τίς πράξεις μέ μιγαδικούς ἀριθμούς ἰσχύουν οἱ τρεῖς θεμελιώδεις νόμοι : **ἀντιμεταθέσεως, προσεταιριστικός, ἐπιμεριστικός.**

83. ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ.

1) Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$, $-\alpha+\beta i$, $-\alpha-\beta i$ ἔχουν τό ἴδιο μέτρο.

Ἔτσι: $|\alpha+\beta i| = |\alpha-\beta i| = |-\alpha+\beta i| = |-\alpha-\beta i| = +\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

2) Οἱ πραγματικοί μιγαδικοί ἀριθμοί $(\alpha, 0) = \alpha = \alpha + 0i$ ἔχουν μέτρο τόν $|\alpha|$. Δηλαδή: $|(\alpha, 0)| = |\alpha + 0i| = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

3) Οἱ φανταστικοί ἀριθμοί $(0, \alpha) = \alpha i = 0 + \alpha i$ ἔχουν μέτρο $|\alpha|$.
Δηλαδή: $|(0, \alpha)| = |0 + \alpha i| = +\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

4) Τό τετράγωνο τοῦ μέτρου ἑνός μιγαδ. ἀριθμοῦ $Z = (\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἐπί τό συζυγή του.
Δηλαδή :

$$\forall \alpha,\beta \in \mathrm{R} : |Z|^2 = Z\cdot\bar{Z} \Rightarrow (\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^2 = (\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i) = \alpha^2+\beta^2$$

5) Τό μέτρο τοῦ γινομένου δύο μιγαδ. ἀριθμῶν $Z_1 = (\alpha_1 + \beta_1 i)$ καί $Z_2 = (\alpha_2 + \beta_2 i)$ ἰσοῦται μέ τό γινόμενο τῶν μέτρων τους.

Δηλαδή :

$$|Z_1\cdot Z_2| = |(\alpha_1+\beta_1 i)\cdot(\alpha_2+\beta_2 i)| = \sqrt{(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)^2+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2)\cdot(\alpha^2{}_2+\beta_2{}^2)} = \sqrt{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2}\cdot\sqrt{\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2} = |Z_1|\cdot|Z_2|$$

Γενικά ἔχουμε: $|Z_1\cdot Z_2 \dots Z_\nu| = |Z_1|\cdot|Z_2| \dots |Z_\nu|$

Οἱ μαθητές νά ἀποδείξουν τήν ἰδιότητα αὐτή γιά τρεῖς καί τέσσερις ἀριθμούς.

6) Τό μέτρο τοῦ ἀντίστροφου Z^{-1} τοῦ μιγαδ. ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i$ ἰσοῦται μέ τό ἀντίστροφο τοῦ μέτρου τοῦ Z, $(Z \neq 0)$.

Δηλαδή :

$$|Z^{-1}| = |(\alpha+\beta i)^{-1}| = \left|\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\, i\right| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha^2+\alpha^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{1}{|Z|}$$

7) Τό μέτρο τοῦ πηλίκου δύο μιγαδ. ἀριθμῶν Z_1 καί $Z_2 \neq 0$ ἰσοῦται μέ τό πηλίκο τῶν μέτρων τους.

Δηλαδή :

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = |Z_1\cdot Z_2{}^{-1}| = |Z_1|\cdot|Z_2{}^{-1}| = |Z_1|\cdot\frac{1}{|Z_2|} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

8) Τό μέτρο τοῦ πηλίκου δύο συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ πραγματική μονάδα.

Πράγματι :

$$\left|\frac{Z}{\bar{Z}}\right| = \frac{|Z|}{|\bar{Z}|} = 1, \text{ γιατί } |Z| = |\bar{Z}|$$

9) Τό μέτρο ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i$ εἶναι μηδέν, ὅταν $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$.

Πράγματι ἔχουμε :

$$|\alpha + \beta i| = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ καί } \beta = 0.$$

Ἀντιστρόφως :

$$Z = \alpha + \beta i = 0 + 0i \Leftrightarrow |Z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0.$$

10) Ἡ ἰδιότητα $\forall Z \in R \Rightarrow |Z|^2 = Z^2$ δέν ἰσχύει, ὅταν εἶναι $Z \in (C - R)$.

Πράγματι, ἄν :

$$Z = \alpha + \beta i \ (\beta \neq 0), \quad \text{τότε } |\alpha + \beta i|^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Εἶναι ὅμως $(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$.

Ἄρα τό $|\alpha + \beta i|^2$ δέν ἰσοῦται μέ τό $(\alpha + \beta i)^2$.

Σημαντική σημείωση. Μερικές ἰδιότητες τῶν ἀπόλυτων τιμῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δέν ἰσχύουν γιά τούς καθαρούς μιγαδικούς ἀριθμούς (ἰδιότητα 10).

84. ΓΡΑΦΙΚΗ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ) ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜΩΝ.

Γνωρίζουμε ὅτι τά διατεταγμένα ζεύγη (x, ψ) τοῦ συνόλου τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου R^2 ἀπεικονίζονται ἀμφιμονοσήμαντα στά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μέ τή βοήθεια τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων (καρτεσιανό ἐπίπεδο).

Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί, σάν διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν, μποροῦν κι αὐτοί νά παρασταθοῦν μέ τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογ. ἀξόνων.

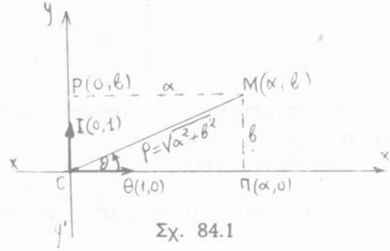
Πράγματι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$, ὅπου $\alpha, \beta \in R$, ἀπεικονίζεται σέ ἕνα μόνο σημεῖο $M(\alpha, \beta)$ τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχει τετμημένη α καί τεταγμένη β. Ἀντιστρόφως τό σημεῖο $M(\alpha, \beta)$ μέ συντεταγμένες (α, β) ἀντιστοιχεῖ σέ ἕναν καί μόνο ὁρισμένο μιγαδικό ἀριθμό $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$.

Δηλαδή :

Ἀρχέτυπο		Εἰκόνα
$\forall \alpha, \beta \in R : (\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$	$\longleftrightarrow$	$M(\alpha, \beta)$

Ἔτσι ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου $C = \{(x, \psi)/(x, \psi) \text{ μιγαδικός ἀριθμός}\}$ καί τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Στό ἐπίπεδο αὐτό οἱ ἄξονες τῶν τετμημένων καί τεταγμένων ὀνομάζονται ἀντιστοίχως ἄξονας τῶν πραγματικῶν καί ἄξονας τῶν φανταστικῶν. Τό ἐπίπεδο λέγεται **μιγαδικό** ἤ **πολικό ἐπίπεδο** ἤ τοῦ Argand (σχ. 84.1).

Ἐπίσης μποροῦμε νά ἔχουμε μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν μιγαδ. ἀριθμῶν (α, β) καί τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων $\overrightarrow{OM}$ τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 84.1

Ἔτσι: $\boxed{\forall(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^2: (\alpha,\beta)=(\alpha+\beta i) \leftrightarrow \overrightarrow{OM}.}$

Ἐπειδή $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καί $|\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, τό μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ εἶναι τό μέτρο τοῦ μιγ. ἀριθμοῦ α + βi. Ἡ προσημασμένη γωνία $\theta = (\widehat{OX, OM})$ λέγεται **ὅρισμα** τοῦ α + βi.

Εἶναι $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha}{(OM)} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καί $\eta\mu\theta = \dfrac{\beta}{(OM)} = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Ἔτσι, $\forall(\alpha,\beta)\in\mathrm{C}$: $\alpha+\beta i = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + i\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$,

ὅπου ρ τό μέτρο καί θ τό ὅρισμα.

Τό μέτρο ρ καί τό ὅρισμα θ ἑνός μιγ. ἀριθμοῦ α + βi, μέ εἰκόνα τό σημεῖο Μ(α, β) λέγονται **πολικές συντεταγμένες** τοῦ σημείου Μ.

Ὥστε, κάθε μιγαδικός ἀριθμός μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τίς μορφές α + βi καί ρ(συν θ + iημ θ). Ἡ πρώτη λέγεται **καρτεσιανή μορφή** καί ἡ δεύτερη **τριγωνομετρική μορφή.**

Παράδειγμα: Νά γραφεῖ μέ τριγωνομετρική μορφή ὁ $Z = 1 + i\sqrt{3}$.

Ἔχουμε:

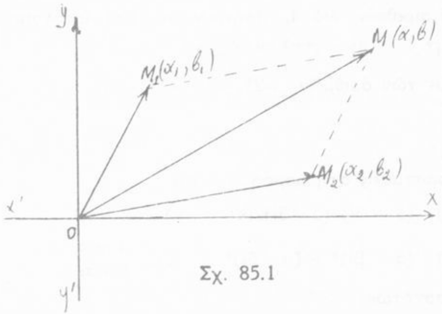
$|Z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{2}$ καί $\eta\mu\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ὁπότε ρ=2 καί θ = 60⁰.

Ἄρα μποροῦμε νά γράψουμε:

$$Z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\sigma\upsilon\nu\, 60^0 + i\eta\mu\, 60^0)$$

85. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

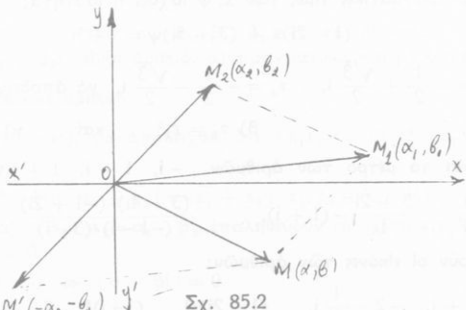
1) **Πρόσθεση.** Ἄν $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ καί $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ καί οἱ εἰκόνες τους τά διανύσματα $\overrightarrow{OM}_1$ καί $\overrightarrow{OM}_2$ ἀντιστοίχως, τότε τό ἄθροισμα $Z_1 + Z_2 = Z$ ἔχει εἰκόνα τό ἄθροισμα $\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}$. Γνωρίζουμε ὅτι τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ἔχει ἀρχή τό σημεῖο O καί πέρας τό ἄλλο ἄκρο τῆς διαγωνίου τοῦ παραλληλογράμμου OM_1MM_2 (κανόνας τοῦ παραλληλογράμμου).



Σχ. 85.1

Ἡ ἀπόδειξη μπορεῖ νά γίνει ἀπό τούς μαθητές εὔκολα, ἀρκεῖ νά παρατηρήσουν ὅτι $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ καί $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. (Σχῆμα 85.1)

2) **Ἀφαίρεση.** Ἄν οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ καί $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ εἶναι τά διανύσματα $\overrightarrow{OM}_1$ καί $\overrightarrow{OM}_2$ ἀντιστοίχως, τότε ἡ εἰκόνα τῆς διαφορᾶς



Σχ. 85.2

$Z_1 - Z_2 = Z$ εἶναι τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (Σχῆμα 85.2). Γιατί $Z = Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2)$

Ἡ εἰκόνα τοῦ $-Z_2$ εἶναι τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}'_2$, συμμετρικό τοῦ $\overrightarrow{OM}_2$ ὡς πρός τό O.

Ἔτσι: $$\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{M_2O} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}'_2 = \overrightarrow{OM}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ά δ α α'

Οἱ φανταστικοί ἀριθμοί

245) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$i^{42} = i^{-14} = -1$, $i^{4\nu+2} = -i^{4\nu} = \frac{1}{i^2}$, $\frac{1}{i^{4\nu+1}} = i^{4\nu+3} = -i$, $i^{4\mu+1} : i^{4\nu-1} = -1$, ὅπου $\nu, \mu \in N_0$

246) Νά γίνουν οἱ πράξεις

$$-5i^3(-i^7), \quad i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4, \quad -5i^2+i\cdot(2i-i^4), \quad \frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$$

247) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\forall\ \nu\in N_0$ ἔχουμε $i^\nu+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=0$

248) Οἱ ἀριθμοί $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in N$, ἄν διαιρεθοῦν διά 4, ἀφήνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι α) $i^\kappa=i^\lambda=i^\mu=i^\nu$, β) $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu}=1$

249) Νά βρεθοῦν οἱ τετραγωνικές ρίζες τῶν ἀριθμῶν $-25, -36, -23, -27$.

Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί

250) Νά ἀναχθοῦν οἱ παρακάτω παραστάσεις στή μορφή $\alpha+\beta i$:

α) $-2i(-1+i)-(-3+2i)$, β) $(5+3i)\cdot(5-3i)\cdot i^2$, γ) $(1+i)^3$,

δ) $(2+1)^3+(2-i)^3$, ε) $(\alpha+\beta i)^2+(\alpha-\beta i)^2$, ζ) $\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}$

251) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

α) $(-2+7i)\cdot(-2-7i)=53$, β) $(-7+i)\cdot(7+i)=-50$

γ) $(2+3i)\cdot(3+2i)=13i$, δ) $(x-\alpha+\beta i)\cdot(x-\alpha-\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2$

ε) $\dfrac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i}=i$

252) Γιά ποιές πραγματικές τιμές τῶν x, ψ ἰσχύει ἡ ἰσότητα;

$$(1-2i)x+(3+5i)\psi=1+3i$$

253) Ἄν $z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $z_1=z_2^2$, β) $z_2=z_1^2$ καί γ) $z_1^3=z_2^3=1$

254) Ποιό εἶναι τό μέτρο τῶν ἀριθμῶν $-i$, $1+i$, $1+i\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}+i$,

$$\frac{1+2i}{1-2i}, \quad \frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}, \quad \frac{3+2i}{i}-(1+i), \quad \frac{(3+4i)\cdot(-1+2i)}{(-1-i)\cdot(3-i)}, \quad \frac{i\cdot(2-\sqrt{3}+i)^2}{(-1+i)^3}$$

255) Νά βρεθοῦν οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν:

$$1+i,\ 1-2i,\ -3+i,\ -2-\frac{1}{2}i,\quad (1-2i)^{-1},\quad (1+i)^2,\quad 1,\ -1,\ -i,\quad \frac{1}{i},\ -\frac{1}{i}$$

Ὁμάδα β'

Οἱ φανταστικοί ἀριθμοί

256) Ποιές τιμές μπορεῖ νά πάρει ἡ παράσταση

$$A=1^0-i^1+i^2-\dots(-1)^\nu i^\nu, \quad \text{ὅπου } \nu\in N^0$$

257) Ἄν $A=i^0+i^1+i^2+\dots+i^\nu$, $B=i^0-i^1+i^2-\dots(-1)^\nu i^\nu$, $\nu\in N$, ποιές τιμές μπορεῖ νά πάρει ἡ παράσταση $A+B$;

258) Νά συγκριθοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων:

$$A=i^\lambda+i^{\lambda+1}+i^{\lambda+2}+i^{\lambda+3}, \qquad B=\frac{1}{i^\lambda}+\frac{1}{i^{\lambda+1}}+\frac{1}{i^{\lambda+2}}+\frac{1}{i^{\lambda+3}}, \quad \lambda\in N$$

259) Νά ἀναχθοῦν οἱ παρακάτω παραστάσεις στή μορφή $\alpha + \beta i$:

α) $(1 + 2i)^4 - (1 - 2i)^4$, β) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$,

γ) $\dfrac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} + \dfrac{\alpha - \beta i}{\gamma - \delta i}$, δ) $\dfrac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} + \dfrac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i}$

260) Νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

α) $(1 - i)^4 = -4$, β) $\dfrac{3}{6 - 5i} = \dfrac{18}{61} + \dfrac{15}{61} i$, γ) $\dfrac{\alpha + \beta\nu - (\alpha\nu - \beta)i}{1 - \nu i} = \alpha + \beta i$,

ι) $\dfrac{\alpha + \beta i}{\alpha - \beta i} + \dfrac{\alpha - \beta i}{\alpha + \beta i} = \dfrac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2}$, κ) $(1 + i)^3 (1 + i^3) = 4i$

261) Ἄν $z_1 = (2 + i)$, $z_2 = (1 - 2i)$, νά ὑπολογισθεῖ ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = z_1 + z_2 + z_1 z_2 + \dfrac{z_1}{z_2} + (z_1 - z_2)^2$.

262) Ἄν $z = \alpha + \beta i$ καί $\overline{z} = \alpha - \beta i$, νά ἀποδειχθοῦν οἱ σχέσεις:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$\overline{(-z)} = -\overline{z}, \quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad (z \neq 0)$$

263) Μέ ποιά συνθήκη τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τῶν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ εἶναι ἀριθμός α) πραγματικός καί β) φανταστικός καθαρός;

Τό μέτρο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

264) Ἄν $z_1, z_2 \in (C - R)$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$ (ἐφαρμόστε τόν τύπο $|z|^2 = z\overline{z}$).

265) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $|z_1 + \overline{z_2}| = |\overline{z_1} + z_2|$ $z_1, z_2 \in (C - R)$

266) Ἄν οἱ $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ ἐπαληθεύουν τή σχέση $z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1 + z_2|^2$ δεῖξτε ὅτι $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$.

267) Ἄν $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow |\alpha + \beta i| = 0$.

Γραφική παράσταση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

268) Νά παραστήσετε γραφικά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, $-\alpha + \beta i$, $-\alpha - \beta i$ $(\alpha, \beta \in R^+)$. Τί παρατηρεῖτε;

269) Νά βρεθοῦν οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{3} + i$ καί νά γραφεῖ μέ τριγωνομετρική μορφή.

270) Οἱ πολικές συντεταγμένες ἑνός μιγαδ. ἀριθμοῦ εἶναι $\rho = 5$ καί $\theta = 45^0$. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός αὐτός;

271) Νά παρασταθεῖ γραφικά τό ἄθροισμα τριῶν καί ἔπειτα τεσσάρων μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

272) Νά παραστήσετε γεωμετρικά τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν:

1) $z_1 = -2i$, $z_2 = -3 + 2i$ καί 2) $z_1 = 3i$, $z_2 = -2 + 0i$, $z_3 = 1 + i$

273) Ἄν $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = +1 + 2i$, ποιές εἶναι οἱ εἰκόνες στό μιγαδικό ἐπίπεδο τῶν διαφορῶν $z_1 - z_2$ καί $z_2 - z_1$. Τί παρατηρεῖτε;

274) Ἄν $z_1, z_2 \in (C - R)$, νά βρεθεῖ σχέση μεταξύ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$, ὅπου $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, γιά νά ἔχουμε: α) $z_1 z_2 \in R$. β) $z_1 z_2 \in I$ (R σύνολο πραγματικῶν, I σύνολο φανταστικῶν).

275) Μέ ποιά συνθήκη τῶν πραγματικῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ τό πηλίκο $\dfrac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i}$ εἶναι: α) πραγματικός ἀριθμός, καί β) φανταστικός;

276) Ἄν $z_1 z_2 \in (C - R)$ καί $z_1 = -\overline{z}_2$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἄθροισμα $z_1 + z_2$ εἶναι καθαρός φανταστικός ἀριθμός καί τό γινόμενο $z_1 z_2 \in R$.

277) Ἄν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, μέ ποιά συνθήκη τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ θά εἶναι α) $(z_1 \cdot z_2) = 0$ καί β) $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$;

278) Ἄν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ καί $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_2 - z_1|^2$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$.

279) Ἄν $z_1, z_2 \in (C - R)$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$$

280) Ἄν $z = \alpha + \beta i$ καί $\overline{z} = \alpha - \beta i$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ z εἶναι ἤ πραγματικός ἤ φανταστικός, ἄν ἰσχύει ἡ σχέση $z^2 = \overline{z}^2$.

281) Ἄν $z = \alpha + \beta i$ καί $z = \alpha - \beta i$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ παραστάσεις $\dfrac{2z}{1 + z\overline{z}}$, $\dfrac{2\overline{z}}{1 + z\overline{z}}$ εἶναι μιγαδικοί συζυγεῖς ἀριθμοί.

282) Ἄν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$ καί $|2z - 1| = |z - 2|$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ

86. ΟΡΙΣΜΟΙ, ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (περιληπτική ὑπόμνηση).

ΟΡΙΣΜΟΙ: *Κάθε ἰσότητα μεταξύ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, πού εἶναι ἀληθής γιά ὁρισμένες τιμές τῶν γραμμάτων (ἀγνώστων) τῶν παραστάσεων αὐτῶν, λέγεται ἐξίσωση.*

Ἄν ἡ ἰσότητα εἶναι ἀληθής γιά κάθε τιμή τῶν γραμμάτων της (ἀγνώστων), τότε ἡ ἐξίσωση λέγεται **ταυτότητα.** Π. χ. ἡ ἐξίσωση $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$ εἶναι ἀληθής γιά κάθε $x \in R$, γι' αὐτό εἶναι ταυτότητα.

Ἡ ἐργασία πού κάνουμε, γιά νά βροῦμε σέ μιά ἐξίσωση ὅλες τίς τιμές τῶν γραμμάτων, δηλαδή τῶν **ἀγνώστων**, μέ τίς ὁποῖες ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀληθής, λέγεται **ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως**.

Οἱ τιμές, πού βρίσκουμε μέ τήν ἐπίλυση μιᾶς ἐξισώσεως, λέγονται **λύσεις ἤ ρίζες** τῆς ἐξισώσεως.

Δύο ἤ περισσότερες ἐξισώσεις, ἄν ἔχουν τίς ἴδιες ἀκριβῶς λύσεις (ὄχι κοινές λύσεις), **λέγονται ἰσοδύναμες.**

Ἰδιότητες: 1) Ἡ ἐξίσωση $f(x) = \varphi(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση $f(x) + \sigma(x) = \varphi(x) + \sigma(x)$, ἄν στό σύνολο πού ἀναφερόμαστε ἡ συνάρτηση $\sigma(x)$ ἔχει νόημα. Ἔτσι: $f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) + \sigma(x) = \varphi(x) + \sigma(x)$.

2) Ἡ ἐξίσωση $f(x) = \varphi(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση $\lambda f(x) = \lambda\varphi(x)$, ὅπου $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ καί ἀνεξάρτητο ἀπό τόν x.

Ἔτσι συμβολίζουμε: $\lambda \in R,\ \lambda \neq 0 : f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \lambda f(x) = \lambda\varphi(x)$.

3) Ἡ ἐξίσωση $f(x) = \varphi(x)$ δέν εἶναι γενικά ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση $f(x) \cdot \sigma(x) = \varphi(x) \cdot \sigma(x)$, ὅπου $\sigma(x)$ συνάρτηση τοῦ x.

Πράγματι, γιατί $f(x) \cdot \sigma(x) = \varphi(x) \cdot \sigma(x) \Leftrightarrow \sigma(x)[f(x) - \varphi(x)] = 0$, ὁπότε ἔχουμε $\sigma(x) = 0 \vee f(x) = \varphi(x)$.

4) Ἄν $\varphi(x) = 0$ καί $\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_\nu(x)$, τότε τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς $\varphi(x) = 0$ ἰσοῦται μέ τήν ἕνωση τῶν συνόλων τῶν λύσεων τῶν

ἐξισώσεων $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0, \ldots, \varphi_\nu(x) = 0$. Πράγματι, γιατί, γιά νά ἀληθεύει ἡ $\varphi(x) = 0$, πρέπει καί ἀρκεῖ ἕνα τουλάχιστον ἀπό τά $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$ νά εἶναι ἴσο μέ μηδέν. Ἄρα οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0, \ldots$, $\varphi_\nu(x) = 0$ εἶναι καί ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) = 0$.

5) Ἡ ἐξίσωση $f(x) = \varphi(x)$ δέν εἶναι γενικά ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση $[\varphi(x)]^2 = [f(x)]^2$.

Γιατί: $[\varphi(x)]^2 - [f(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow [\varphi(x) + f(x)]\,[\varphi(x) - f(x)] = 0$, ὁπότε εἶναι $\varphi(x) = -f(x) \vee \varphi(x) = f(x)$.

Ἀπό τήν περιληπτική αὐτή ὑπόμνηση, χωρίς ἀπόδειξη, τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων συμπεραίνουμε ὅτι κατά τήν ἐπίλυση τῶν ἐξισώσεων πρέπει νά ἔχουμε σοβαρά ὑπόψη αὐτές τίς ἰδιότητες γιά νά μήν κάνουμε σφάλματα.

87. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣ. Β΄ ΒΑΘΜΟΥ.(1)

Ὁρισμός. Λέγεται ἐξίσωση β΄ βαθμοῦ ὡς πρός x κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καί α, β, γ πραγματικοί ἤ καί μιγαδικοί.

Ἐδῶ θά θεωροῦνται οἱ α, β, γ, πού λέγονται **συντελεστές**, πραγματικοί ἀριθμοί ἤ ἀλγεβρικές παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπό τόν x. Ἔτσι γιά τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ οἱ συντελεστές ἔχουν τίς ἀκόλουθες τιμές:

$3x^2 - 2x = 0$	$\alpha = 3$,	$\beta = -2$,	$\gamma = 0$
$-5x^2 + 7 = 0$	$\alpha = -5$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 7$
$-\frac{1}{2}x^2 = 0$	$\alpha = -\frac{1}{2}$	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$
$x^2 - 3x + 1 = 0$	$\alpha = 1$,	$\beta = -3$,	$\gamma = 1$
$\alpha x^2 - (\alpha + 1)x - 3\alpha = 0$	$\alpha' = \alpha$,	$\beta' = -(\alpha + 1)$,	$\gamma' = -3\alpha$
$(\lambda - 1)x^2 - 4\lambda x + (\lambda^2 - 9) = 0$	$\alpha = \lambda - 1$,	$\beta = -4\lambda$,	$\gamma = \lambda^2 - 9$

Οἱ τρεῖς πρῶτες ἐξισώσεις δέν περιέχουν ὅλους τούς ὅρους τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, γι' αὐτό λέγονται **ἐλλιπεῖς**. Οἱ ἄλλες τρεῖς εἶναι **πλήρεις** μορφές.

$$\begin{array}{lll} \text{Ἔτσι, ἄν } \beta = \gamma = 0 & \text{λαμβάνουμε} & \left.\begin{array}{r} \alpha x^2 = 0 \\ \alpha x^2 + \gamma = 0 \\ \alpha x^2 + \beta x = 0 \end{array}\right\} \text{ἐλλιπεῖς μορφές} \\ \text{» } \beta = 0 \wedge \gamma \neq 0 & \text{»} & \\ \text{» } \beta \neq 0 \wedge \gamma = 0 & \text{»} & \\ \text{» } \beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0 & \text{»} & \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{πλήρης μορφή} \end{array}$$

Τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $(\alpha \neq 0, \beta, \gamma) \in R$, θά ὀνομάζουμε **λύση** ἤ **ρίζα** τήν τιμή $x = x_0 \in C$, ἄν ἔχουμε $\varphi(x_0) = \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = 0$. ($C = \{x/x$ μιγαδικός ἀριθμ.$\}$*).

(1) Τίς ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ μέ ἕναν ἄγνωστο πραγματεύθηκε πρῶτος ὁ Ἕλληνας μαθηματικός Διόφαντος (3ος αἰ. μ. Χ.).

(*) Τό σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν περιέχει τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (κεφάλαιο περί μιγαδικῶν).

Όπως θά δοῦμε παρακάτω, τό σύνολο τῶν λύσεων (ριζῶν) τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως εἶναι διμελές.

Ἄν λοιπόν x_1 καί x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ στό σύνολο C, τότε οἱ $f(x_1) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0$ καί $f(x_2) = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0$ εἶναι ἀληθεῖς ἰσότητες.

Συμβολίζουμε:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\alpha \neq 0, \beta, \gamma \in R \\ f(x_1) = 0,\ f(x_2) = 0\end{array}\right\} : \Sigma = \{x / x \in C \wedge f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\} = \{x_1, x_2\}}$$

Ἐπίλυση τῆς ἐξισ. β΄ βαθμοῦ.

1) Ἡ ἐλλιπής μορφή $\alpha x^2 = 0$, $\alpha \neq 0$.

Ἐπειδή $\alpha \neq 0$, ἔχουμε $\alpha x^2 = 0$ $x^2 = 0$ ἤ $x \cdot x = 0$, ὁπότε $x_1 = x_2 = 0$.

2) Ἡ ἐλλιπής μορφή $\alpha x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Ἔχουμε: $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \gamma/\alpha = 0$, ὁπότε:

α) Ἄν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, δηλαδή οἱ α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι, τότε $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί ἡ ἐξίσωση γράφεται:

$$x^2 - \left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right) = 0.$$

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος

$$x + \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = 0,\ x - \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = 0, \text{ ὁπότε } x_1 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}},\ x_2 = +\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

β) Ἄν $\frac{\gamma}{\alpha} > \alpha$, δηλαδή οἱ α καί γ εἶναι ὁμόσημοι, τότε ἡ ἐξίσωση

$x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ δέν ἔχει λύση στό R, γιατί $x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} > 0 \ \forall\ x \in R$, ἔχει ὅμως λύση στό σύνολο τῶν φανταστικῶν I.

Ἔτσι λαμβάνουμε τίς λύσεις :

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = -i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}},\ x_2 = +\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$$

3) Ἡ ἐλλιπής μορφή $\alpha x^2 + \beta x = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$.

Ἔχουμε: $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0$.

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x = 0$, $\alpha x + \beta = 0$, ὁπότε λαμβάνουμε $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

4) Ἡ πλήρης μορφή $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$.

Σύμφωνα μέ τίς ἰδιότητες ἰσοδυναμίας τῶν ἐξισώσεων λαμβάνουμε διαδοχικά:

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (πολ/ζουμε ἐπί 4α)

$\Leftrightarrow 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0$ (προσθέτουμε τό β^2)

$\Leftrightarrow 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0$

$\Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 0$ (θέτουμε ὅπου $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta$)

ἤ $(2\alpha x + \beta)^2 - \Delta = 0$

ἤ $(2\alpha x + \beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2 = 0.$

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων

$$2\alpha x + \beta + (\sqrt{\Delta}) = 0, \; 2\alpha x + \beta - \sqrt{\Delta} = 0,$$

ὁπότε λαμβάνουμε

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζες πού δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$\boxed{x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad (1)$$

Ἡ παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶναι πραγματική καί λέγεται **διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως.**

Σχετικά μέ **τό σημεῖο τῆς διακρίνουσας $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \in \mathbf{R}$** παρατηροῦμε ὅτι:

α) Ἄν $\Delta > 0$, τότε οἱ ρίζες x_1, x_2, πού δίνει ὁ τύπος (1), εἶναι πραγματικές καί ἄνισες.

β) Ἄν $\Delta = 0$, τότε οἱ ρίζες x_1, x_2 εἶναι πραγματικές καί ἴσες, ὁπότε λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει μιά διπλή ρίζα $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

γ) Ἄν $\Delta < 0$, τότε ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἤ ἡ ἰσοδύναμή της $(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$ δέν ἔχει λύση στό σύνολο R, γιατί $\forall\, x \in R \Rightarrow (2\alpha x + \beta)^2 > \Delta$, ἔχει ὅμως λύση στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν τῆς μορφῆς (α, β) μέ $\beta \neq 0$ καί λέμε ὅτι οἱ ρίζες x_1, x_2 εἶναι καθαρές μιγαδικές.

Εἰδική περίπτωση. Ὁ τύπος (1) μπορεῖ νά ἁπλουστευθεῖ, ἄν ὁ συντελεστής β τοῦ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2.

Ἔτσι, ἄν $\beta = 2\beta'$, τότε $\Delta = (2\beta')^2 - 4\alpha\gamma = 4\beta'^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta'^2 - \alpha\gamma)$,

ὁπότε $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta' \pm 2\sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$

Ἄν $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0 \Leftrightarrow 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) \geqslant 0 \Leftrightarrow \beta'^2 - \alpha\gamma \geq 0$

Ἐπίσης ἄν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) < 0 \Leftrightarrow \beta'^2 - \alpha\gamma < 0$

Σημείωση. Μέ τόν τύπο (1) μποροῦν νά ἐπιλυθοῦν καί οἱ ἐλλιπεῖς μορφές τῶν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

Παραδείγματα: 1) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $9x^2-16=0$, β) $4x^2+3x=0$, γ) $6x^2-5=0$, δ) $5x^2+3=0$

Ἐπίλυση. α) Ἔχουμε $9x^2-16=0 \Leftrightarrow (3x+4)(3x-4)=0$ ἰσοδύναμη μέ

τό ζεῦγος $\begin{cases} 3x+4=0 \\ 3x-4=0, \end{cases}$ ὁπότε: $\begin{cases} x_1=-\frac{4}{3} \\ x_2=\frac{4}{3} \end{cases}$

Ἔτσι: $\Sigma=\{x/x \in R \land 9x^2-16=0\}=\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$.

β) Ἔχουμε $4x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(4x+3)=0$ ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν

ἐξισώσεων $\begin{cases} x=0 \\ 4x+3=0 \end{cases}$, ὁπότε: $\begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=-\frac{3}{4} \end{matrix}$

Ἔτσι: $\Sigma=\{x/x \in R \land 4x^2+3x=0\}=\left\{0,-\frac{3}{4}\right\}$.

γ) Ἔχουμε $6x^2-5=0 \Leftrightarrow (x\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2=0 \Leftrightarrow (x\sqrt{6}+\sqrt{5})(x\sqrt{6}-$ $-\sqrt{5})=0$ ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x\sqrt{6}+\sqrt{5}=0$, $x\sqrt{6}-$ $-\sqrt{5}=0$, ὁπότε ἔχουμε τίς λύσεις $x_1=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{30}}{6}$, $x_2=\frac{\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{30}}{6}$

Ὥστε: $\Sigma=\{x/x \in R \land 6x^2-5=0\}=\left\{-\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right\}$.

δ) Ἔχουμε $5x^2+3=0 \Leftrightarrow (x\sqrt{5})^2-(\sqrt{-3})^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\sqrt{5}+\sqrt{-3})\cdot(x\sqrt{5}-\sqrt{-3})=0$ ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x\sqrt{5}+\sqrt{-3}=0$, $x\sqrt{5}-\sqrt{-3}=0$, ἄρα $x_1=-i\sqrt{3}/\sqrt{5}$, $x_2=i\sqrt{3}/\sqrt{5}$.

Ὥστε: $\Sigma=\{x/x \in I \land 5x^2+3=0\}=\{-i\sqrt{3}/\sqrt{5}, i\sqrt{3}/\sqrt{5}\}$.

2) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

α) $x^2+2x-3=0$, β) $x^2-6x+13=0$, γ) $3x^2-5x+1=0$.

Ἐπίλυση: α) Ἐπειδή εἶναι $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$,

ἄρα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$.

Μέ τόν τύπο (1) ἔχουμε:

$x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm4}{2}$, ὁπότε: $x_1=\frac{-2+4}{2}=1$, $x_2=\frac{-2-4}{2}=-3$

Ἔτσι: $\Sigma=\{x/x \in R \land x^2+2x-3=0\}=\{1,-3\}$.

β) Ἐπειδή εἶναι $\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=13$

ἄρα $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16$.

Μέ τόν τύπο (1) ἔχουμε:

$x=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4i}{2}$, ὁπότε: $x_1=3+2i$, $x_2=3-2i$

Έτσι: $\Sigma = \{x / x \in C \wedge x^2 - 6x + 13 = 0\} = \{3 + 2i, 3 - 2i\}$.

γ) Ἐπειδή $\alpha = 3$, $\beta = -5$, $\gamma = 1$

ἄρα $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 25 - 12 = 13$.

Μέ τόν τύπο (1) ἔχουμε:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}, \text{ ὁπότε : } x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}, \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$$

Έτσι : $\Sigma = \{ x \mid x \in \mathbf{R} \wedge 3x^2 - 5x + 1 = 0 \} = \left\{\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right\}$.

3) Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$x^2 + 2\beta x - (\alpha^2 + 2\alpha\beta) = 0$$

Ἐπίλυση: Ἐπειδή ὁ συντελεστής τοῦ x εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2, ἄν ἐφαρμόσουμε τόν τύπο $x = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$, παίρνουμε

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta}}{1} = \frac{-\beta \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2}}{1} = \frac{-\beta \pm |\alpha + \beta|}{1} = -\beta \pm |\alpha + \beta|,$$

ὁπότε: $x_1 = -\beta + \alpha + \beta = \alpha$, $x_2 = -\beta - \alpha - \beta = -(\alpha + 2\beta)$

Έτσι: $\Sigma = \{x \mid x \in R \wedge x^2 + 2\beta x - (\alpha^2 + 2\alpha\beta) = 0 \wedge \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} =$
$= \{\alpha, -(\alpha + 2\beta)\}$.

4) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\frac{1}{x - 4} + \frac{8}{x - 1} = \frac{15}{x + 9}$.

Ἐπίλυση: Τά κλάσματα ἔχουν ἔννοια, ὅταν $x \neq 4$, $x \neq 1$, $x \neq -9$. Κάνουμε τίς πράξεις καί ἔχουμε: : $2x^2 - 41x + 119 = 0$.

Μέ τόν τύπο (1) ἔχουμε τίς λύσεις

$$x_1 = \frac{41 + 27}{4} = 17, \quad x_2 = \frac{41 - 27}{4} = \frac{7}{2}$$

5) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2} = 0$.

Ἐπίλυση:

Τό κλάσμα μέ $x = 2$ εἶναι ἀόριστο, γιατί οἱ ὅροι του μηδενίζονται. Δηλαδή ὁ παρονομαστής $x - 2$ εἶναι παράγοντας ἀπροσδιοριστίας τοῦ κλάσματος. Ἄν ὑποθέσουμε $x \neq 2$, παίρνουμε μετά τήν ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως $(2x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = (2x - 1)$. Ἄρα $2x - 1 = 0$, ὁπότε $x = +\frac{1}{2}$, πού εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως.

88. ΕΙΔΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσ. $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἐξαρτᾶται ἀπό τή διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \in R$.

Ἔτσι διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

1) Ἄν $\Delta > 0$, τότε $\sqrt{\Delta} \in R$, ὁπότε $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \in R$.

Δηλαδή οἱ ρίζες x_1, x_2 εἶναι **πραγματικές καί ἄνισες.**

Καί ἄν εἶναι $\Delta = \kappa^2$ καί $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in Q$, τότε οἱ ρίζες x_1, x_2 εἶναι ρητές. Δηλαδή $x_1, x_2 \in Q$. Ἄν $\Delta \neq \kappa^2$ οἱ ρίζες εἶναι ἄρρητες (ἀσύμμετρες) συζυγεῖς. Δηλαδή, ὅταν ἡ ἐξίσωση $f(x) = 0$ ἔχει ρίζα τόν ἀσύμετρο $x_1 = A + \sqrt{B}$, $B \neq \mu^2$, θά ἔχει ρίζα καί τήν $x_2 = A - \sqrt{B}$ (παραδ. 2γ').

2) Ἄν $\Delta = 0$, τότε $\sqrt{\Delta} = 0$, ὁπότε $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} \in R$.

Δηλαδή οἱ ρίζες $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι **πραγματικές καί ἴσες.**

3) Ἄν $\Delta < 0$, τότε $\sqrt{\Delta} \in I$, ὁπότε $x = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \in (C - R)$.

Δηλαδή $x_1 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ **καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.**

Ἐδῶ ἰσχύουν καί οἱ ἀντίστροφες προτάσεις.

Οἱ μαθητές μποροῦν εὔκολα νά κάνουν τήν ἀπόδειξη.

Παρακάτω δίνουμε συνοπτικά τά προηγούμενα συμπεράσματα:

Πίνακας Ι

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in R$	
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$	Δύο ρίζες πραγματικές καί ἄνισες: $x_2 < x_1$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$	Δύο ρίζες πραγματικές καί ἴσες: $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$	Δύο ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.

Πίνακας ΙΙ

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in Q$		
$\Delta > 0$	$\Delta = k^2$, $k \in Q$	Δύο ρίζες πραγματικές, ἄνισες καί σύμμετρες.
	$\Delta \neq k^2$	Δύο ρίζες πραγματικές, ἄνισες καί ἀσύμμετρες.
$\Delta = 0$		Δύο ρίζες πραγματικές, ἴσες καί σύμμετρες.
$\Delta < 0$		Δύο ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.

Σημαντική παρατήρηση. Ἄν οἱ συντελεστές α καί γ εἶναι ἑτερόσημοι, τότε ἡ ἐξίσ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζες πραγματικές ἄνισες.

Γιατί τότε: $\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ ἤ $\Delta > 0$.

89. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Ἔχουμε $\Delta \geq 0$ καί $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Σχηματίζουμε τή διαφορά $x_1 - x_2$:

$$x_1 - x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}.$$

Τό σημεῖο τῆς διαφορᾶς $x_1 - x_2$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό πρόσημο τοῦ α, γιατί $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \geq 0$.

Ἔτσι: Ἄν $\alpha > 0$, τότε $x_1 - x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$

Ἄν $\alpha < 0$, τότε $x_1 - x_2 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2$

Σημαντική σημείωση. Σκόπιμο εἶναι νά ἔχουμε στίς δύο περιπτώσεις μία μόνο διάταξη τῶν πραγματικῶν ριζῶν x_1, x_2. Γι᾽ αὐτό συμφωνοῦμε στά ἑπόμενα νά χρησιμοποιοῦμε τή διάταξη $x_2 \leq x_1$, ὁπότε,

ἄν $\alpha > 0$, τότε $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ καί $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, καί

ἄν $\alpha < 0$, τότε $x_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ καί $x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

90. ΕΙΔΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Λέγονται ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x)$ οἱ τιμές τοῦ x, πού μηδενίζουν τό τριώνυμο. Ἄρα οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x)$ εἶναι καί ρίζες τῆς ἐξισώσεως $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἔτσι τά συμπεράσματα, πού βγῆκαν ἀπό τήν ἐξέταση τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, μποροῦν να χρησιμοποιηθοῦν καί γιά τό τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. (Βλ. πίνακες I καί II).

Παραδείγματα. 1) Νά προσδιορισθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων

α) $x^2 - 5x + 4 = 0$, β) $x^2 + 2x + 1 = 0$, γ) $5x^2 + 13x + 9 = 0$

Λύση: α) Ἔχουμε: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$.

Δηλαδή ἡ διακρίνουσα Δ τῆς ἐξισώσεως εἶναι τέλειο τετράγωνο πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καί ἑπομένως ἡ ἐξίσωση ἔχει δύο ρίζες πραγματικές, σύμμετρες καί ἄνισες.

β) Ἔχουμε $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$.

Ἄρα ἔχει δύο ρίζες ἴσες πραγματικές: $x_1 = x_2 = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1$.

γ) Ἔχουμε $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 169 - 180 = -11 < 0$.

Ἄρα ἔχει δύο ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.

2) Νά προσδιορισθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων.

α) $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$, β) $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, $\alpha,\beta \in R$.

Λύση : α) Εἶναι: $\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0$.

Ἄρα ἔχει δύο ρίζες πραγματικές σύμμετρες ὡς πρός α, β ἄνισες ἤ ἴσες, ἄν θά ἔχουμε $\alpha\neq\beta$ ἤ $\alpha=\beta$ ἀντιστοίχως.

β) Εἶναι: $\Delta=4\alpha^2-4(\alpha^2+\beta^2)=-4\beta^2=-(2\beta)^2<0$.

Ἄρα ἔχει δύο ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς, ἄν $\beta\neq 0$.

3) Νά προσδιορισθοῦν οἱ τιμές τοῦ $\lambda\in R$, γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση ρίζες α) ἴσες, β) πραγματικές ἄνισες καί γ) καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς

$$f(x)=3x^2+2x-(3\lambda+1)=0.$$

Λύση : α) Ἔχουμε $\Delta=2^2+4\cdot3\cdot(3\lambda+1)=0\Leftrightarrow 9\lambda+4=0\Leftrightarrow\lambda=-\dfrac{4}{9}$.

Ὥστε μέ $\lambda=-\dfrac{4}{9}$ ἡ $f(x)=0$ ἔχει μιά ρίζα διπλή.

Αὐτή εἶναι $x_1=x_2=-\dfrac{2}{2\cdot3}=-\dfrac{1}{3}$.

β) Ἔχουμε $\Delta=2^2+4\cdot3(3\lambda+1)>0\Leftrightarrow 9\lambda+4>0\Leftrightarrow\lambda>-\dfrac{4}{9}$

Ὥστε μέ $\lambda>-4/9$ ἡ $f(x)=0$ ἔχει δυό ρίζες πραγμ. ἄνισες.

γ) Ἔχουμε $\Delta=2^2+4\cdot3(3\lambda+1)<0\Leftrightarrow\lambda<-\dfrac{4}{9}$

Ὥστε μέ $\lambda<-\dfrac{4}{9}$ ἔχει δύο ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.

Συνοπτικός πίνακας

Τιμές τοῦ λ	$-\infty$		$-\dfrac{4}{9}$		$+\infty$
Σημεῖο τῆς Δ		$-$	0	$+$	
Εἶδος ριζῶν τῆς $f(x)=0$		Δύο καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς	$-\dfrac{1}{3}$	Δύο πραγματικές ἄνισες	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ά δ α α΄

283) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1) $6x^2 + 5x = 0$, $-55x^2 + 75x = 0$

2) $2x^2 - 18 = 0$, $7x^2 + 1 = 0$, $121x^2 - 196 = 0$

3) $x^2 - 2x - 80 = 0$, $x^2 - 9x + 14 = 0$, $x^2 + 25x + 156 = 0$

4) $4x^2 + 7x - 2 = 0$, $2x^2 - 2x - 2 = 0$, $5x^2 - 7x + 1 = 0$

5) $2x^2 + 2x + 5 = 0$, $9x^2 - 6x + 4 = 0$,

6) $5x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$, $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} + 1 = 0$

7) $(x + 1)^2 - (x - 1)(x + 2) = -2x(x - 3)$,

$$(x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right) - (3x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 1 - 2x$$

284) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1) $(4x - 1)^2 + 3(4x - 1) = 0$,

2) $(4x + 1)^2 + 3(16x^2 - 1) = 0$,

3) $(3x + 2)(5x - 1) + (3x + 7)(1 - 5x) = (1 - 5x)(2 + 15x)$

285) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1) $15x^2 + 26\mu x + 7\mu^2 = 0$

2) $x^2 - (\alpha^2 - \beta^2)x - \alpha^2\beta^2 = 0$, $x^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)x + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0$

286) Νά προσδιορισθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων χωρίς νά βρεθοῦν οἱ ρίζες.

1) $x^2 - 11x + 28 = 0$, $x^2 - 24x + 143 = 0$, $x^2 - 16x + 64 = 0$

2) $x^2 - 17x + 11 = 0$, $3x^2 + 7x + 5 = 0$, $8x^2 - 4x + 5 = 0$

287) Μέ ποιές τιμές τοῦ λ ἡ ἐξίσωση $x^2 - 2(\lambda + 2)x + 2\lambda^2 - 17 = 0$ ἔχει μιά ρίζα διπλή; Ἄν $x_1 = 11$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ x_2.

288) Μέ ποιές τιμές τοῦ ν ἡ ἐξίσωση $(\nu + 3)x^2 - (2\nu + 1)x + \nu + 2 = 0$ ἔχει: α) ρίζες ἴσες, β) πραγματικές ἄνισες, γ) καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.

289) Ἄν ἡ ἐξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ἔχει ρίζα τόν ἀριθμό $2 + 3i$, νά προσδιορισθοῦν τά α καί β.

Ὁ μ ά δ α β΄

290) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1) $\frac{3x + 1}{3 - x} - \frac{3 - x}{x + 1} - \frac{5}{3} = 0$, $\frac{25}{12} - \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{x - 3}{2x + 1}$

2) $\frac{1}{x - 8} + \frac{1}{x - 6} + \frac{1}{x + 6} + \frac{1}{x + 8} = 0$ 3) $\frac{x + 1}{x - 1} + \frac{x + 2}{x - 2} + \frac{x + 3}{x - 3} = 3$

291) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

1) $4x^2 - 4\alpha x + (\alpha^2 - \beta^2) = 0$, $\kappa x^2 + (\lambda + \mu)x - \kappa + \lambda + \mu = 0$

2) $\frac{x + \alpha}{x - \alpha} + \frac{x + \beta}{x - \beta} + \frac{x + \gamma}{x - \gamma} = 3$, $\frac{\alpha + \beta}{x + \beta} + \frac{\alpha + \gamma}{x + \gamma} = 2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{x + \beta + \gamma}$

292) Ἄν $\alpha, \beta \in Q$, προσδιορίστε τό εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων:

1) $3\alpha x^2 + (3\alpha - \beta)x - \beta = 0$

2) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta = 0, \quad 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha x + \beta^2 + 1 = 0$

293) Ἄν ἡ ἐξισ. $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζες $x_1 \neq x_2 \in R$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύει τό ἴδιο καί γιά τήν ἐξισ. $x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma).x + 2\beta(\alpha + \gamma) + 3\alpha\gamma = 0$.

294) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων $f_1(x) = \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ καί $f_2(x) = \alpha x^2 + 2\beta k x + k^2\gamma = 0$ εἶναι τό ἴδιο καί γιά τίς δυό.

295) Ἄν οἱ ρίζες τῆς ἐξισ. $x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ εἶναι καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι καί οἱ ρίζες τῆς $x^2 + 2x + \gamma + 2\beta(x + 1) + 1 = 0$ εἶναι ἐπίσης καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς.

296) Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in Q$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $(\alpha + 2\beta - \gamma)x^2 - 2\alpha x + \alpha + \gamma - 2\beta = 0$ εἶναι ρητές ἐκφράσεις τῶν α, β, γ.

297) Νά προσδιορισθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς παραστάσεως

$(\alpha_1 x + \beta_1)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2)^2$, ἄν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R \wedge \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$. Τί συμβαίνει, ἄν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$;

91. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ΚΑΙ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΜΕ ΤΑ $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Ὁρισμός. Μιά παράσταση $\varphi(x_1, x_2)$, πού περιέχει τίς ρίζες x_1, x_2 τῆς ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, λέγεται **συμμετρική** ὡς πρός τίς ρίζες x_1, x_2, ἄν δέ μεταβάλλεται μέ ἐναλλαγή τῶν x_1, x_2.
Δηλαδή: $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_2, x_1)$.

Ἔτσι οἱ παραστάσεις:

$$x_1 + x_2,\ x_1 \cdot x_2,\ x_1^3 + x_2^3,\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2},\quad (2x_1 + 3)(2x_2 + 3) + 5x_1x_2$$

εἶναι συμμετρικές παραστάσεις τῶν ριζῶν x_1, x_2.

Οἱ συμμετρικές παραστάσεις τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μποροῦν, ὅπως θά δοῦμε, νά ἐκφρασθοῦν μέ τά $\alpha, \beta, \gamma \in R$, χωρίς νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση.

Ἄθροισμα, γινόμενο καί ἀπόλυτη τιμή διαφορᾶς τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in R$.

Ἀπό τίς ἐκφράσεις τῶν ριζῶν τῆς $f(x) = 0$

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

παίρνουμε : $x_1 + x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \cdot \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}$$

Ἔτσι ἔχουμε:

Θεμελιώδεις σχέσεις συντελεστῶν καί ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, $P_1 = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}$, $\lvert x_1 - x_2 \rvert = \frac{\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{\lvert\alpha\rvert}$

Παρατήρηση: Τό ἄθροισμα S_1 καί τό γινόμενο P_1 τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $f(x) = 0$ εἶναι πάντοτε ἀριθμός πραγματικός.

Ἀντίστροφα: Ἄν x_1, x_2 εἶναι δύο ἀριθμοί πού ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ καί $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$, αὐτοί θά εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Πράγματι, ἀπό τήν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ καί τίς $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ παίρνουμε:
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$.
Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος $x - x_1 = 0$, $x - x_2 = 0$, ὁπότε: $x = x_1$, $x = x_2$.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Οἱ ἀριθμοί x_1, x_2 γιά νά εἶναι ρίζες τῆς ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ καί $x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ἀπό τό γινόμενο καί τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β΄ βαθμοῦ, πού νά ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς αὐτούς.

Ἄν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι ἡ ἐξίσωση πού ζητοῦμε καί x_1, x_2 οἱ ρίζες της, τότε $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ καί $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Ἐπειδή ὅμως: $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = S \text{ γνωστός ἀριθμός} \\ x_1 \cdot x_2 = P \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -\frac{\beta}{\alpha} = S \\ \frac{\gamma}{\alpha} = P \end{array}$

Ἄρα ἔχουμε:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ ἤ $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$

Ὥστε γιά τό σχηματισμό μιᾶς ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ ἀπό τό ἄθροισμα S καί τό γινόμενο P τῶν ριζῶν της, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη τόν τύπο $x^2 - Sx + P = 0$.

Σημαντική παρατήρηση: Γιά νά βροῦμε τούς ἀριθμούς x_1, x_2 ὅταν γνωρίζουμε τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο τους, ἀρκεῖ νά λύσουμε τήν ἐξίσωση

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Παράδειγμα. Νά βρεθοῦν δύο ἀριθμοί, πού ἔχουν ἄθροισμα 9 καί γινόμενο 14.

Λύση: Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ἀριθμοί αὐτοί, τότε εἶναι $x_1 + x_2 = 9$, $x_1x_2 = 14$, καί ἡ ἐξίσωση, πού ἔχει αὐτούς ὡς ρίζες, εἶναι $x^2 - 9x + 14 = 0$. Οἱ ρίζες της εἶναι $x = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2}$ ἤ $x_1 = 7$, $x_2 = 2$.

2. Νά σχηματισθεῖ μιά ἐξίσωση β΄ βαθμοῦ, ὅταν δίνονται οἱ ρίζες της.

Λύση: Ἄν $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως πού ζητοῦμε, τότε ἔχουμε:

$$\left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = \alpha + \beta \\ x_1 \cdot x_2 = \alpha\beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{matrix}\right.,$$ ὁπότε ἀπό τόν τύπο $x^2 - Sx + P = 0$ παίρνουμε $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$.

Παράδειγμα: Νά σχηματισθεῖ μιά ἐξίσωση β΄ βαθμοῦ μέ ρίζες τούς ἀριθμούς $\frac{1}{2}$, 4.

Λύση: Ἔχουμε $x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$, $x_1x_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$.

Ἄρα ἡ ἐξίσωση εἶναι:

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0.$$

92. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

1. Ὑπολογισμός τοῦ $S_2 = x_1^2 + x_2^2$ καί $S_3 = x_1^3 + x_2^3$

Ἔχουμε $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$

Ἐπίσης $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3 \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$

Ἔτσι: $\boxed{S_2 = x_1^2 + x_2^2 = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}, \quad S_3 = x_1^3 + x_2^3 = \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}}$

2. Ὑπολογισμός τοῦ $S_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu$, $\nu \in N$.

Ἐπειδή x_1, x_2 εἶναι ρίζες τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,

ἄρα: $\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0$ | Πολλαπλασιάζουμε τά μέλη τῆς πρώτης ἐπί
$\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0$ | $x_1^{\nu-2}$ καί τά μέλη τῆς δεύτερης ἐπί $x_2^{\nu-2}$,

ὁπότε: $\alpha x_1^\nu + \beta x_1^{\nu-1} + \gamma x_1^{\nu-2} = 0$ | προσθέτουμε κατά μέλη καί
$\alpha x_2^\nu + \beta x_2^{\nu-1} + \gamma x_2^{\nu-2} = 0$ |

ἔχουμε:

$$\alpha(x_1^\nu + x_2^\nu) + \beta(x_1^{\nu-1} + x_2^{\nu-1}) + \gamma(x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu-2}) = 0$$

$$\text{ἤ } \alpha S_\nu + \beta S_{\nu-1} + \gamma S_{\nu-2} = 0$$

Ἔτσι:
$$\boxed{S_\nu = -\frac{\beta}{\alpha} S_{\nu-1} - \frac{\gamma}{\alpha} S_{\nu-2} = S_1 S_{\nu-1} - P_1 S_{\nu-2}.}$$

Μέ τόν τύπο αὐτό μποροῦμε νά βροῦμε τό $S_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu$, ὅταν γνωρίζουμε τά ἀθροίσματα $S_{\nu-1} = x_1^{\nu-1} + x_2^{\nu-1}$, $S_{\nu-2} = x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu-2}$

Παράδειγμα: Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν τέταρτων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Εἶναι: $S_4 = S_1 S_3 - P_1 S_2$.

Ἐπειδή $S_1 = 3$, $P_1 = 2$,

ἔχουμε $S_2 = \dfrac{(-3)^2 - 2\cdot 1\cdot 2}{1^2} = 9 - 4 = 5$ καί $S_3 = \dfrac{-(-3)^3 + 3\cdot 1\cdot(-3)\cdot 2}{1^3} = 27 - 18 = 9$.

Ἄρα $S_4 = 3\cdot 9 - 2\cdot 5 = 27 - 10 = 17$.

Παρατήρηση: Ὁ ὑπολογισμός τοῦ ἀθροίσματος $\dfrac{1}{x_1^\nu} + \dfrac{1}{x_2^\nu}$, $\nu \in N$, ἀνάγεται στήν προηγούμενη περίπτωση.

Ἔτσι: $\dfrac{1}{x_1^\nu} + \dfrac{1}{x_2^\nu} = \dfrac{x_1^\nu + x_2^\nu}{x_1^\nu \cdot x_2^\nu} = \dfrac{S_\nu}{P_1^\nu}$

3. Ὑπολογισμός ρητῆς συμμετρικῆς παραστάσεως $\varphi(x_1, x_2)$ τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,

Μιά ρητή συμμετρική παράσταση τῶν ριζῶν $\varphi(x_1, x_2)$ μποροῦμε πάντοτε νά τήν ἐκφράσουμε μέ τό ἄθροισμα $x_1 + x_2 = S$ καί τό γινόμενο $x_1 x_2 = P$ καί ἑπομένως μέ τούς συντελεστές α, β, γ ∈ R. Καί αὐτό, γιατί ἡ παράσταση θά ἔχει ὅρους τῆς μορφῆς Ax_1x_2, $Bx_1^2x_2^2$, ..., $\Sigma x_1^\nu x_2^\nu$, πού ἐκφράζονται μέ τό $P = x_1x_2$ καί διωνυμικές παραστάσεις τῆς μορφῆς $\top x_1^\kappa x_2^\lambda + \top x_1^\lambda x_2^\kappa = \top x_1^\lambda x_2^\lambda (x_1^{\kappa-\lambda} + x_2^{\kappa-\lambda})$ πού ἐκφράζονται μέ τό P καί τό S. Ἄν ὑπάρχει στήν παράσταση ὅρος τῆς μορφῆς Γx_1^ν, θά ὑπάρχει καί ὁ ἀντίστοιχός του Γx_2^ν, ὁπότε πάλι θά ἔχουμε $\Gamma x_1^\nu + \Gamma x_2^\nu = \Gamma(x_1^\nu + x_2^\nu) = \Gamma S_\nu$.

Ὥστε κάθε ρητή συμμετρική παράσταση τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι ρητή ἔκφραση τῶν α, β, γ ∈ R.

Παράδειγμα: Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:
$\varphi(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^2 + \rho_2^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 3\rho_1^2\rho_2 + 3\rho_1\rho_2^2$, ἄν ρ_1, ρ_2, εἶναι ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, χωρίς νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση.

Λύση: Ἡ $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τίς ρίζες ρ_1, ρ_2.

Ἔχουμε: $\varphi(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 + 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2) =$

$$= 2(\rho_1^2 + \rho_2^2) - 2\rho_1\rho_2 + 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2) =$$
$$= 2(\rho_1 + \rho_2)^2 - 6\rho_1\rho_2 + 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2) =$$
$$= 2(-\alpha)^2 - 6\beta + 3\beta(-\alpha) = 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 6\beta$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

298) Νά ὑπολογισθεῖ τό S καί P τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων χωρίς νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις.

1) $x^2 - 12x - 7 = 0$, $\quad x^2 + x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$

2) $-x^2 + 3x - 1 = 0$, $\quad x^2\sqrt{2} + x\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = 0$

3) $(\alpha + \beta)x^2 - (\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 + \beta^3 = 0$, $\quad \alpha\beta\gamma^2x^2 + (\alpha^2\beta - \alpha\beta^2)x - \alpha^2\beta^2\gamma = 0$

299) Ἀπό τό ἄθροισμα S καί τό γινόμενο P δύο ἀριθμῶν νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1) $S = 15$, $P = 14$ $\qquad$ 2) $S = -19$, $P = 84$ $\qquad$ 3) $S = 2\alpha$, $P = \alpha^2 - \beta^2$

300) Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β' βαθμοῦ μέ ρίζες:

1) 7 καί -5, $\qquad$ 2) -10 καί $-\frac{1}{2}$, $\qquad$ 3) $5 + \sqrt{3}$ καί $5 - \sqrt{3}$

4) $-2 + 3i$ καί $-2 - 3i$, $\qquad$ 5) $\alpha + \beta$ καί $\alpha - \beta$, $\qquad$ 6) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ καί $\frac{\alpha + \beta}{\beta}$

301) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ μιά ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ὅταν γνωρίζουμε τήν ἄλλη ρίζα της.

302) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τοῦ λ, ὥστε τό τριώνυμο $x^2 - 5\lambda x + \lambda^2$ νά ἔχει ρίζα τόν ἀριθμό $\frac{1}{2}$.

303) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς $x^2 - (m + 1)x + m = 0$, νά βρεθεῖ

1) μέ ποιά τιμή τοῦ m ἔχει ρίζες ἀντίθετες,

2) μέ ποιά τιμή τοῦ m ἰσχύει ἡ σχέση $3x_1 + 2x_2 = 7$,

3) μέ ποιά τιμή τοῦ m ἔχει ρίζες ἀντίστροφες.

304) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 2x + 6 = 0$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $\quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, $\quad x_1^{-3} + x_2^{-3}$

2) $(x_1 - x_2)^2$, $\quad \frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3}$, $\quad (3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$, $\quad \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x_2}{x_1^2}$

305) Μέ ποιές τιμές τοῦ $\lambda \in \mathbb{R}$ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $2\lambda x(x - 1) - x(x - 2) + 3\lambda = 0$ ἰσοῦται μέ 4;

Ὁ μ ά δ α β'

306) Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη μεταξύ τῶν α, β, γ τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ὥστε οἱ ρίζες αὐτῆς x_1, x_2 νά ἐπαληθεύουν τή σχέση $\kappa x_1 + \lambda x_2 = \mu$.

307) Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β' βαθμοῦ μέ ρίζες 1) τά ἀντίστροφα τῶν ριζῶν, 2) τά ἀντίστροφα τῶν τετραγώνων καί 3) τούς κύβους τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - \alpha x + \beta = 0$·

308) Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 3x + \kappa = 0$, νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τοῦ κ, ὥστε: $5\rho_1^3\rho_2 - 4\rho_1^2\rho_2 = 2\kappa + 3 + 4\rho_1\rho_2^2 - 5\rho_1\rho_2^3$.

309) Μέ ποιές τιμές τῶν μ καί ν οἱ ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισ. $2x^2 + \mu x - 3\nu = 0$ ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις $3\rho_1 + 3\rho_2 = 2\rho_1\rho_2$ καί $1 - \rho_1\rho_2 = 5(\rho_1 + \rho_2 - 2)$;

310) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις: $(\alpha x_1 + \beta)^{-2} + (\alpha x_2 + \beta)^{-2}$, $(\alpha x_1 + \beta)^{-3} + (\alpha x_2 + \beta)^{-3}$

311) Νά λυθεῖ τό σύστημα :

$$\left| \begin{array}{l} -3\rho_1\rho_2 x + 5(\rho_1 + \rho_2)\psi = 4(\rho_1 + \rho_2) \\ (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1\rho_2\psi = 7\rho_1\rho_2 \end{array} \right.$$

ὅπου ρ_1, ρ_2 ρίζες τῆς $x^2 - 3x + 1 = 0$

312) Νά κατασκευασθεῖ ἐξίσωση β' βαθμοῦ, πού οἱ ρίζες της x_1, x_2 νά ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις $x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) = -5$ καί $x_1x_2 - \mu(x_1 + x_2) = -1$ καί ἔπειτα νά προσδιορισθεῖ ὁ μ, ὥστε νά ἔχει ἡ ἐξίσωση ρίζες ἴσες.

93. ΣΗΜΕΙΟ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΟΥ $\Phi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

Εἴδαμε ὅτι τό εἶδος τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$ ἐξαρτᾶται ἀπό τή διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ καί ὅτι αὐτές μπορεῖ νά εἶναι πραγματικές ἄνισες ($\Delta > 0$), πραγματικές ἴσες ($\Delta = 0$) καί καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς ($\Delta < 0$).

Τώρα θά ἐξετάσουμε τό σημεῖο τῶν ριζῶν στήν περίπτωση πού οἱ ρίζες εἶναι πραγματικές, γιατί τούς μιγαδικούς ἀριθμούς δέν τούς διακρίνουμε σέ θετικούς καί ἀρνητικούς.

Τό σημεῖο τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό γινόμενο τους $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ καί τό ἄθροισμά τους $S = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις :

I. $\Delta > 0$. Οἱ ρίζες εἶναι πραγματικές ἄνισες.

α) $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$. Οἱ ρίζες εἶναι ὁμόσημες, ὁπότε, ἄν ἔχουμε:

1) $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$, τότε εἶναι θετικές ($x_1, x_2 \in R^+$),

2) $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$, τότε εἶναι ἀρνητικές ($x_1, x_2 \in R^-$)

Ἡ περίπτωση $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow \beta = 0$ μέ $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί $\Delta > 0$ εἶναι ἀδύνατη.

β) $P = \frac{\gamma}{\alpha} < 0$. Οἱ ρίζες εἶναι ἑτερόσημες, ὁπότε ἄν ἔχουμε:

1) $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἀπόλυτα μεγαλύτερη εἶναι ἡ θετική

($x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$, ἤ $x_2 < 0 < x_1$ καί $|x_2| < |x_1|$),

2) $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἀπόλυτα μεγαλύτερη εἶναι ἡ ἀρνητική

($x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ ἤ $x_2 < 0 < x_1$ καί $|x_1| < |x_2|$),

3) $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0$ οἱ ρίζες εἶναι ἀντίθετες ($x_2 < 0 < x_1$ καί $|x_1| = |x_2|$)

γ) $P = \frac{\gamma}{\alpha} = 0$. Ἡ μιά ρίζα εἶναι 0 καί ἡ ἄλλη διάφορη τοῦ μηδενός (ἀποκλείεται $x_1 = x_2 = 0$, γιατί $\Delta > 0$), ὁπότε, ἄν ἔχουμε:

1) $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἡ $x_2 = 0$ καί ἡ $x_1 > 0$ $\left(x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$,

2) $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἡ $x_1 = 0$ καί ἡ $x_2 < 0$ $\left(x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$,

ΙΙ. $\Delta = 0$. Οἱ ρίζες εἶναι πραγματικές ἴσες $\left(x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$

καί ἄρα $P = \frac{\gamma}{\alpha} \geq 0$, ὁπότε ἄν ἔχουμε:

α) $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ οἱ ρίζες εἶναι θετικές ($x_1 = x_2 \in R^+$),

β) $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ οἱ ρίζες εἶναι ἀρνητικές ($x_1 = x_2 \in R^-$)

γ) $P = \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ οἱ ρίζες εἶναι 0 ($x_1 = x_2 = 0$).

ΙΙΙ. $\Delta < 0$. Οἱ ρίζες εἶναι καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς ($|x_1| = |x_2|$).

Τά παραπάνω συνοψίζονται στόν ἀκόλουθο πίνακα:

Σημεῖο ριζῶν τοῦ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$			
Δ	P	S	Εἶδος ριζῶν καί σημεῖο τους
+	+	+	$x_1 \in R^+, x_2 \in R^+ \Leftrightarrow 0 < x_2 < x_1$
		−	$x_1 \in R^-, x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < x_1 < 0$
		0	περίπτωση ἀδύνατη
	−	+	$x_1 \in R^+, x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < 0 < x_1$ καί $\lvert x_2\rvert < \lvert x_1\rvert$
		−	$x_1 \in R^+, x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < 0 < x_1$ καί $\lvert x_1\rvert < \lvert x_2\rvert$
		0	$x_1 \in R^+, x_2 \in R^- \land x_1 = -x_2 \Rightarrow \lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert$
	0	+	$x_1 \in R^+,\ x_2 = 0$ $\left(x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$
		−	$x_1 = 0,\ x_2 \in R^-$ $\left(x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$
		0	περίπτωση ἀδύνατη, γιατί $\Delta \neq 0$
0	+	+	$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R^+$
		−	$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R^-$
	0	0	$x_1 = x_2 = 0$
−			$x_1 \in (C - R), x_2 \in (C - R)$ καί $x_1 = \bar{x}_2 \Rightarrow \lvert x_1\rvert = \lvert x_2\rvert$

Παραδείγματα : α) Νά βρεθεῖ τό σημεῖο τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων:

1) $x^2-2x-5=0$, 2) $x^2+5x+4=0$, 3) $3x^2-x+1=0$

Λύσεις : 1) Ἔχουμε :

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot(-5)=24>0,\ P=-\frac{5}{1}<0 \text{ καί } S=-\frac{-2}{1}=2>0.$$

Ἄρα $x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ καί $|x_2|<|x_1|$.

2) Ἔχουμε :

$$\Delta=5^2-4\cdot4=9>0,\quad P=4>0 \quad \text{καί} \quad S=-5<0.$$

Ἄρα $x_1 \in R^-$, $x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2<x_1<0$.

3) Ἔχουμε $\Delta=(-1)^2-4\cdot3\cdot1=-11<0$.

Ἄρα $x_1 \in (C-R)$, $x_2 \in (C-R)$ καί $x_1=\overline{x_2} \Rightarrow |x_1|=|x_2|$.

β) Μέ ποιές τιμές τοῦ λ οἱ ρίζες x_1, x_2 τῆς ἐξισ. $x^2-8x+\lambda=0$ εἶναι ἑτερόσημες μέ ἀπόλυτα μεγαλύτερη τή θετική:

Λύση : Πρέπει νά ἰσχύουν οἱ συνθῆκες $P<0$ καί $S>0$

(Δέν παίρνουμε $\Delta>0$, γιατί $P<0 \Rightarrow \Delta>0$).

Ἄρα $P=\lambda<0$ καί $S=-(-8)=8>0$.

Ὥστε : μέ $\lambda<0$ ἔχουμε $x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ καί $|x_2|<|x_1|$

γ) Νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωση $3x^2-6x+5(2\mu-1)=0$, $\mu \in R$.

Λύση : Ἐξετάζουμε τίς ποσότητες Δ, P, S:

$$\Delta=36-60(2\mu-1)=12(3-10\mu+5)=24(4-5\mu)$$

Τό σημεῖο τῆς Δ εἶναι:

μ	$-\infty$		4/5		$+\infty$
Δ		+	0	−	

$$P=\frac{5(2\mu-1)}{3}=\frac{5}{3}(2\mu-1)$$

Τό σημεῖο τοῦ P εἶναι:

μ	$-\infty$		1/2		$+\infty$
P		−	0	+	

$$S=-\frac{-6}{3}=2>0.$$

Ἔπειτα συμπληρώνουμε τόν πίνακα:

μ	Δ	P	S	Εἶδος ριζῶν τῆς $3x^2-6x+5(2\mu-1)=0$
$-\infty$	+	−	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ καί $\lvert x_2\rvert<\lvert x_1\rvert$
$\frac{1}{2}$		0		$x_1 \in R^+$, $x_2=0$, $x_1=2$
	+	+	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^+$
$\frac{4}{5}$	0			$x_1=x_2=+1$
$+\infty$	−	+	+	$x_1 \in (C-R)$, $x_2 \in (C-R)$ καί $x_1=\overline{x_2} \Rightarrow \lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ά δ α α΄

313) Νά βρεθεῖ τό σημεῖο τῶν ριζῶν τῶν παρακάτω ἐξισώσεων:

1) $x^2 - 6x + 9 = 0$, $\quad 7x^2 + 14x - 1 = 0$

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $\quad -3x^2 - 9x + 2 = 0$

314) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ $\lambda \in R$ γιά νά εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισ. $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$: 1) θετικές, 2) ἑτερόσημες μέ ἀπόλυτα μεγαλύτερη τή θετική, 3) μιά διπλή θετική, 4) καθαρές μιγαδικές.

Ὁ μ ά δ α β΄

315) Νά διερευνηθεῖ γιά πραγματικές τιμές τοῦ λ καθεμιά ἀπό τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις καί νά γίνει πινακογράφηση τῶν συμπερασμάτων τῆς διερευνήσεως.

1) $x^2 - 4x - 3(2 - 5\lambda) = 0$, $\quad$ 2) $-2x^2 + 5x - 7(1 - \lambda) = 0$

316) Νά βρεθεῖ τό εἶδος καί τό σημεῖο τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $2x(x - \alpha) = \alpha^2$, ὅταν α πραγματικός καί $\alpha \neq 0$.

94. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ καί $\alpha \neq 0$ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ x ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε ἔχουμε: $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ καί $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Ἔτσι τὸ τριώνυμο γράφεται :

$$f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \equiv \alpha[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \equiv$$
$$\equiv \alpha[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] \equiv \alpha[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] \equiv$$
$$\equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

Ὥστε : Γιά νά μετασχηματίσουμε τό τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων ὡς πρός x, βρίσκουμε τίς ρίζες του καί ἔπειτα σχηματίζουμε τό γινόμενο $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$.

Παράδειγμα : Νά τραποῦν σέ γινόμενο παραγόντων τά τριώνυμα

1) $x^2 - 7x + 10$, $\quad$ 2) $3x^2 + x - 2$, $\quad$ 3) $x^2 - 4x + 5$

Λύσεις : 1) Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου εἶναι $x_1 = 5$, $x_2 = 2$

Ἄρα ἔχουμε: $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$

2) Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου εἶναι $x_1 = \dfrac{2}{3}$, $\quad x_2 = -1$.

Ἄρα ἔχουμε: $3x^2 + x - 2 = 3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)(x + 1) = (3x - 2)(x + 1)$

3) Οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου εἶναι $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i$. Ἄρα ἔχουμε: $x^2 - 4x + 5 = (x - (2 + i))(x - (2 - i)) = (x - 2 - i)(x - 2 + i)$.

Δηλαδή ἡ ἀνάλυση τοῦ τριωνύμου $x^2 - 4x + 5$ μέ ρίζες καθαρές μιγαδικές δέν εἶναι δυνατή (βλ. 5η περίπτωση ἀναλύσεως) στό σύνολο τῶν πραγματικῶν, εἶναι ὅμως δυνατή στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν.

95. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΤΗΣ.

Ἄν εἶναι γνωστές οἱ ρίζες x_1, x_2 τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως, μποροῦμε νά σχηματίσουμε τήν ἐξίσωση κάνοντας χρήση τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2).$$

Παράδειγμα: Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β′ βαθμοῦ μέ ρίζες τούς ἀριθμούς α) $3, -2$, β) $2 \pm \sqrt{3}$, γ) $-3 \pm 2i$.

Λύση: α) Ἔχουμε $\alpha(x-3)(x+2) = \alpha(x^2 - x - 6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$.

β) Ἔχουμε $\alpha[x - (2+\sqrt{3})] \cdot [x - (2-\sqrt{3})] = \alpha[(x-2)^2 - 3] = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$.

γ) Ἔχουμε $\alpha[x - (-3+2i)][x - (-3-2i)] = \alpha[(x+3)^2 - (2i)^2] = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 13 = 0$.

Σημείωση: Ὁ παράγοντας α τοῦ γινομένου μπορεῖ να παραλείπεται ἤ καί νά εἶναι ὁποιοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

317) Νά τραποῦν σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων τοῦ x τά τριώνυμα:

1) $x^2 + 7x - 8$, $\quad x^2 - 11x - 26$

2) $2x^2 + 11x + 5$ $\quad x^2 + x\psi - 72\psi^2$, $\quad \nu^2x^2 - 6\nu x - 91$

3) $x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 - \beta^2)$ $\quad x^2 - 2\mu x + \mu^2 - \nu$, $\quad x^2 - 2\alpha x - 3\alpha^2 - 4\beta(\beta - 2\alpha)$.

318) Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β′ βαθμοῦ μέ ρίζες:

1) $-\frac{3}{4}$ καί $-\frac{1}{2}$, $\quad$ 2) $5 \pm 2\sqrt{3}$, $\quad$ 3) $\frac{1}{2} \pm \frac{3i}{2}$,

4) $\alpha \pm \sqrt{2\beta}$, $\quad$ 5) $\lambda \pm 3\mu i$, $\quad$ 6) $\alpha^2 + \beta^2$ καί $\alpha - \beta$

319) Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

1) $\frac{x^2 - 15x}{x^2 - 14x - 15}$, $\quad \frac{3x^2 + 19x - 14}{6x^2 - x - 2}$.

2) $\frac{3x^2 - 7x\psi + 2\psi^2}{6x^2 - 5x\psi + \psi^2}$, $\quad \frac{x^2 - x(2\alpha + 3\beta + 1) + (2\alpha + 3\beta)}{2x^2 - x(4\alpha + 6\beta + 1) + (2\alpha + 3\beta)}$

96. ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ΣΤΟ R.

Ἄν x_1, x_2 οἱ ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε

$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $\quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Καί τό τριώνυμο γράφεται:

$$f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2) \equiv \alpha\left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$
$$\left(x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$$

Διακρίνουμε τώρα τίς περιπτώσεις:

1) Ἄν $\Delta > 0$, τότε $f(x) \equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$

Ὥστε τό τριώνυμο $f(x)$ $\forall$ $x \in R$ μετασχηματίζεται σέ διαφορά δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων ἐπί τό $\alpha \neq 0$.

2) Ἄν $\Delta = 0$, τότε $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

Ὥστε τό $f(x)$ $\forall$ $x \in R$ μετασχηματίζεται σέ τέλειο τετράγωνο πραγματικῆς παραστάσεως ἐπί τό $\alpha \neq 0$.

3) Ἄν $\Delta < 0$, τότε $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] \equiv$

$$\equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$$

Ὥστε τό $f(x)$ $\forall$ $x \in R$ μετασχηματίζεται σέ ἄθροισμα δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων ἐπί τό $\alpha \neq 0$.

Σημείωση: Αὐτές οἱ μορφές εἶναι πολύ χρήσιμες γιά τά ἑπόμενα κεφάλαια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

320) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ $\lambda \in R$, ὥστε νά εἶναι τά τριώνυμα α) τέλεια τετράγωνα, β) ἴσα μέ τή διαφορά δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων, γ) ἴσα μέ τό ἄθροισμα δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων:

1) $5(2\lambda - 1)x^2 + x - 1$, 2) $-7x^2 + 5x - 3(2 - 3\lambda)$

321) Νά βρεθεῖ ποιά ἀπό τά παρακάτω τριώνυμα μετασχηματίζονται σέ διαφορά καί ποιά σέ ἄθροισμα δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων:

1) $4x^2 + 20\alpha x + 21\alpha^2$, 2) $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta$
3) $\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 + 1$, 4) $9\alpha^4x^2 - 8\alpha^2\beta(3x - 2\beta) + 16\beta^2$

97. ΣΗΜΕΙΟ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ΤΟΥ x.

Ἔστω ἡ συνάρτηση $[x, \varphi(x) \equiv x^2 - 5x + 6] \in R^2$. Αὐτή εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἄς βροῦμε μερικές τιμές της, π.χ. τούς:

$$\varphi(-4),\ \varphi(2),\ \varphi\left(\frac{5}{2}\right),\ \varphi(3),\ \varphi(10).$$

Ἔτσι ἔχουμε:

φ: $x = -4 \rightarrow \varphi(-4) = 42 > 0$ $\quad$ φ: $x = \frac{5}{2} \rightarrow \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$

φ: $x = 2 \rightarrow \varphi(2) = 0$ $\quad$ φ: $x = 3 \rightarrow \varphi(3) = 0$.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ τιμές της ἄλλοτε εἶναι θετικές, ἄλλοτε ἀρνητικές καί μόνο μέ $x_1 = 2$ καί $x_2 = 3$ (οἱ ρίζες τῆς $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$) εἶναι ἴσες μέ 0.

Πολλές φορές στά ἑπόμενα μαθήματα θά βρεθοῦμε στήν ἀνάγκη νά γνωρίζουμε τό σημεῖο τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$, γιά τήν τιμή $x = \xi \in R$, χωρίς νά βροῦμε τήν τιμή $\varphi(\xi) \in R$.

Εἴδαμε ὅτι τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μετασχηματίζεται στή μορφή $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha \left\{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right\}$. Τό σημεῖο τῆς τιμῆς του $\varphi(\xi)$, μέ $x = \xi$ ἐξαρτᾶται ἀπό τή Δ καί τόν ἀριθμό α.

Ἔτσι διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

1) Ἄν $\Delta > 0$, τότε $x_1 \neq x_2 \in R$ καί ἔστω $x_2 < x_1$.

Οἱ ρίζες x_1, x_2 διαμερίζουν τό σύνολο R σέ τρία διαστήματα, ὅπως φαίνεται στή γεωμετρική παράσταση.

Ἄς θεωρήσουμε μιά τιμή $x = \xi \in R$. Γιά τήν τιμή αὐτή διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

α) Ἄν $\xi < x_2 < x_1$ τότε $\xi - x_1 < 0$ καί $\xi - x_2 < 0$, ὁπότε $(\xi - x_1)(\xi - x_2) > 0$.

Ἀπό τό $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ παίρνουμε $\varphi(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2) = \alpha \cdot$(θετικός ἀριθμ.).

Ἄρα ἡ τιμή $\varphi(\xi)$ ἔχει τό σημεῖο τοῦ α.

Ὥστε $\alpha\varphi(\xi) > 0$.

β) Ἄν $x_2 < \xi < x_1$, τότε $\xi - x_1 < 0$ καί $\xi - x_2 > 0$, ὁπότε $(\xi - x_1)(\xi - x_2) < 0$

καί ἄρα

$\varphi(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2) = \alpha \cdot$ (ἀρνητικός ἀριθμός).

Ἄρα ἡ τιμή $\varphi(\xi)$ ἔχει τό σημεῖο τοῦ $-\alpha$.

Ὥστε, $\alpha\varphi(\xi) < 0$.

γ) Ἄν $x_2 < x_1 < \xi$, τότε $\xi - x_1 > 0$ καί $\xi - x_2 > 0$, ὁπότε $(\xi - x_1)(\xi - x_2) > 0$ καί $\varphi(\xi) = \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2) = \alpha \cdot$ (θετικός ἀριθμός)

Ἄρα ἡ τιμή $\varphi(\xi)$ ἔχει τό σημεῖο τοῦ α.

Ὥστε, $\alpha\varphi(\xi) > 0$.

2) Ἄν $\Delta = 0$, τότε $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R$ καί τό τριώνυμο μετασχηματίζεται σέ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha \cdot \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$,

ὁπότε, ἄν $x = \xi \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$, ἔχουμε $\varphi(\xi) = \alpha \cdot \left(\xi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \alpha \cdot$ (θετικός ἀριθμ.)

Ἄρα ἡ τιμή $\varphi(\xi)$ γιά κάθε $\xi \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἔχει τό σημεῖο τοῦ α.

3) Ἄν $\Delta < 0$, τότε $x_1 x_2 \in (C - R)$ καί τό τριώνυμο μετασχηματίζεται σέ

$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha \left\{\left(x + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right\}$$

ὁπότε ἔχουμε $\varphi(\xi) = \alpha \left[\left(\xi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] = \alpha \cdot$ (θετικός ἀριθμός).

Ἄρα ἡ τιμή $\varphi(\xi)$ γιά κάθε $\xi \in R$ ἔχει τό σημεῖο τοῦ α.

Τά παραπάνω συνοψίζονται στόν ἀκόλουθο πίνακα:

$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Σημεῖο τῆς Δ	Ρίζες τοῦ $\varphi(x)$	Σημεῖο τοῦ $\varphi(x)$ (γιά $x = \xi \in R$)	
$\Delta > 0$	$x_1, x_2 \in R$ $x_2 < x_1$	$x < x_2 < x_1$ ἤ $x_2 < x_1 < x$	σημεῖο τοῦ α $\alpha\varphi(\xi) > 0$
		$x_2 < x < x_1$	σημεῖο τοῦ $-\alpha$ $\alpha\varphi(\xi) < 0$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R$	$\forall\, x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}$	σημεῖο τοῦ α $\alpha\varphi(\xi) > 0$
$\Delta < 0$	$x_1, x_2 \in (C - R)$	$\forall\, x \in R$	σημεῖο τοῦ α $\alpha\varphi(\xi) > 0$

Ὥστε: Τό τριώνυμο $\varphi(x)$ παίρνει τιμή ὁμόσημη τοῦ α

α) γιά $x < x_2 < x_1$ ἤ $x_2 < x_1 < x$, ἄν $x_1, x_2 \in R$, β) γιά $\forall\, x \neq -\frac{\beta}{2\alpha} \in R$ ἄν $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ καί γ) γιά $\forall\, x \in R$, ἄν $x_1, x_2 \in (C - R)$,

καί τιμή ὁμόσημη τοῦ $-\alpha$ γιά $x_2 < x < x_1$ ἄν $x_1, x_2 \in R$.

Παραδείγματα: Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικές τιμές τοῦ x, ὥστε τά τριώνυμα νά ἔχουν τιμές θετικές ἤ ἀρνητικές:

1) $x^2 - 6x + 8$, 2) $x^2 - 6x + 9$ 3) $3x^2 - x + 1$

Λύση:

1) Ἐπειδή $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ καί $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, ἕπεται ὁ ἀκόλουθος πίνακας

Τιμές τοῦ x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
σημεῖο τοῦ τριωνύμου		+	0	−	0	+	

2) Ἐπειδή $\Delta = 36 - 36 = 0$ καί $x_1 = x_2 = 3$, ἕπεται ὅτι τό τριώνυμο $\forall\, x \neq 3$ γίνεται θετικό. Ποτέ δέ γίνεται ἀρνητικό.

3) Ἐπειδή $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$, ἕπεται ὅτι τό τριώνυμο $\forall\, x \in R$ γίνεται θετικό. Ποτέ δέ γίνεται ἄρνητικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

'Ο μ ά δ α α'

322) Μέ ποιές τιμές τοῦ $x \in R$ τά τριώνυμα γίνονται θετικά ἤ ἀρνητικά;

1) $3x^2 - x - 4$, 2) $4x^2 - 20x + 25$, 3) $x^2 + x + 1$

4) $-x^2 + x - 1$ 5) $-2x^2 + 16x - 40$, 6) $-3x^2 + 2x - 5$

323) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv 5x^2 + \mu x + 2\mu^2$ $(\mu \in R)$ εἶναι θετικό $\forall\, x \in R$.

'Ο μ ά δ α β'

324) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν τό $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γίνεται ὁμόσημο τοῦ α 1) $\forall\, x \in R$, τότε ἔχει ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς, 2) $\forall\, x \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha} \in R$, τότε $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha} \in R$.

325) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ρίζες πραγματικές ἄνισες, ἄν ὑπάρχει ἀριθμός $\xi \in R$ τέτοιος, ὥστε νά εἶναι $\alpha\varphi(\xi) < 0$.

326) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^2 - 2\lambda x + (\lambda - 1) = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές $\forall\, \lambda \in R$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

98. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (περιληπτική ὑπόμνηση).

Ὁρισμοί: *Ὀνομάζεται ἀνίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο, τόν x, κάθε σχέση τῆς μορφῆς $\varphi(x) > f(x)$ ἤ $f(x) < \varphi(x)$, πού εἶναι ἀληθής μέ εἰδικές τιμές τοῦ ἀγνώστου x, ὅπου $\varphi(x), f(x)$ πραγματικές συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x, μέ τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ. Ἄν εἶναι ἀληθής γιά κάθε τιμή τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς της, τότε λέγεται* **μόνιμη ἀνίσωση.**

Ἐπίλυση ἀνισώσεως σέ ἕνα σύνολο S λέγεται ἡ ἀναζήτηση τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου x στό σύνολο S, οἱ ὁποῖες ἐπαληθεύουν τήν ἀνίσωση. Οἱ τιμές αὐτές τοῦ x λέγονται **λύσεις** τῆς ἀνισώσεως.

Δύο ἤ περισσότερες ἀνισώσεις λέγονται **ἰσοδύναμες** σέ ἕνα σύνολο S, ἐάν καί μόνο ἐάν, ἔχουν τό ἴδιο σύνολο λύσεων στό S.

Ἰδιότητες: 1) Ἡ ἀνίσωση $\varphi(x) > f(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνίσωση $\varphi(x) + \tau(x) > f(x) + \tau(x)$, ὅταν ἡ συνάρτηση $\tau(x)$ εἶναι ὁρισμένη στό σύνολο ἀναφορᾶς S.

2) Ἡ ἀνίσωση $\varphi(x) > f(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν $\varphi(x) - f(x) > 0$

3) Ἡ ἀνίσωση $\varphi(x) > 0$, στό S, εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνίσωση $\varphi(x)\cdot\sigma(x) > 0$, ἄν ἡ ἀνίσωση $\sigma(x) > 0$, στό S, εἶναι μόνιμη.

4) Ἄν οἱ ἀνισώσεις, στό S, $\varphi(x) > 0$ καί $f(x) > 0$ εἶναι ἰσοδύναμες, τότε καί ἡ $\varphi(x) + f(x) > 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ αὐτές.

Ἀπό τή σύντομη αὐτή ὑπόμνηση, χωρίς ἀπόδειξη, τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισώσεων συμπεραίνουμε ὅτι κατά τήν ἐπίλυση τῶν ἀνισώσεων πρέπει νά προσέχουμε στήν ἐφαρμογή αὐτῶν τῶν ἰδιοτήτων, γιά νά μήν κάνουμε σφάλματα.

99. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ.

Ὁρισμός: *Λέγεται ἀνίσωση β΄ βαθμοῦ μὲ ἕναν ἄγνωστο, τὸν x, κάθε ἀνίσωση τῆς μορφῆς* $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ *ἤ* < 0 *μὲ* $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \gamma \in \mathbf{R}$.
(Οἱ α, β, γ μπορεῖ νά εἶναι καί πραγμ. παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπό τόν x).

Τό τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι ὁρισμένο στό R. Γιά τήν ἐπίλυση τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ἤ <0, στό σύνολο R, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τά συμπεράσματα ἀπό τήν ἐξέταση τοῦ σημείου τῆς ἀριθμ. τιμῆς τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γιά πραγμ. τιμές τοῦ x.

Ἐπίλυση τῆς ἀνισ. $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ἤ < 0, $(\alpha = 0)$.

Γνωρίζουμε ὅτι τό σημεῖο τῆς ἀριθμ. τιμῆς τοῦ $\varphi(x)$ ἐξαρτᾶται ἀπό τή διακρίνουσα Δ καί τόν α.

Ἔτσι μποροῦμε εὔκολα νά δικαιολογήσουμε τή συμπλήρωση τοῦ παρακάτω πίνακα.

Δ	α	Σύνολο λύσεων τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$	Σύνολο λύσεων τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$
+	+	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid -\infty < x < x_2,\ x_1 < x < +\infty\}$	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid x_2 < x < x_1\}$
	−	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid x_2 < x < x_1\}$	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid -\infty < x < x_2,\ x_1 < x < +\infty\}$
0	+	$\left\{x \in R \mid x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$	$\{\ \} = \varnothing$
	−	$\{\ \} = \varnothing$	$\left\{x \in R \mid x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$
−	+	$\{x \mid x \in R\}$	$\{\ \} = \varnothing$
	−	$\{\ \} = \varnothing$	$\{x \mid x \in R\}$

Σημείωση. Τά σύμβολα $-\infty$ καί $+\infty$ δέν ἀντιπροσωπεύουν ὁρισμένους πραγματικούς ἀριθμούς.

Παραδείγματα: Νά ἐπιλυθοῦν στό R οἱ ἀνισώσεις:

1) $3x^2 - x - 2 > 0$, 2) $-3x^2 + x + 4 > 0$, 3) $x^2 + 6x + 9 < 0$, 4) $x^2 + x + 1 > 0$

Ἐπίλυση: 1) $\alpha = 3 > 0$, $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει μέ $x > 1$ καί μέ $x < -\frac{2}{3}$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων εἶναι: $\{x \in R \mid -\infty < x < -\frac{2}{3}\ \ 1 < x < +\infty\}$

2) $\alpha = -3$, $\Delta = 1 - 4(-3)4 = 49 > 0$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -1$.

Ἡ ἀνίσωση ἀληθεύει μέ $-1 < x < \frac{4}{3}$

Σύνολο λύσεων: $\left\{x \in R \mid -1 < x < \frac{4}{3}\right\}$

3) $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 36 - 16 = 0$, $x_1 = x_2 = -3$.

Ἡ ἀνίσωση δέν ἔχει λύση στό σύνολο R.

Σύνολο λύσεων: $\{x \in R \,|\, x^2 + 6x + 9 < 0\} = \varnothing$

4) $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, $x_1 x_2 \in (C - R)$

Ἡ ἀνίσωση εἶναι ἀληθής γιά κάθε πραγμ. τιμή τοῦ x. Εἶναι μιά μόνιμη ἀνίσωση. Σύνολο λύσεων: $\{x \,|\, x \in R\}$.

100. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ.

Μιά ἀνίσωση βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό β' ὡς πρός x γιά νά ἐπιλυθεῖ, πρέπει νά πάρει τή μορφή $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_\nu(x) > 0$ ἤ <0, ὅπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_\nu(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x πρώτου ἤ δεύτερου βαθμοῦ μέ τό ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ.

Οἱ παράγοντες β' βαθμοῦ, ἄν ἔχουν ρίζες πραγματικές, μποροῦν νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων, ἄν ὅμως ἔχουν ρίζες καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς, παραλείπονται, γιατί εἶναι μόνιμα θετικοί, (γιατί πάντοτε μποροῦμε νά ὑποθέτουμε τόν α θετικό). Ἄρα ἡ ἀνίσωση πάντοτε μπορεῖ νά πάρει τή μορφή $(x - \rho_1)(x - \rho_2) \ldots (x - \rho_\nu) > 0$ ἤ < 0 $(\mu \in N)$. Ἡ ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς εἶναι γνωστή ἀπό τήν προηγούμενη τάξη.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἀνίσωση:

$$f(x) \equiv (x-3)(x^2 - x + 2)(-2x^2 + 7x - 3)(-x^2 + 5x) < 0$$

Ἐπίλυση: Ἐξετάζουμε τούς δευτεροβάθμιους παράγοντες.

Ἔτσι ἔχουμε γιά τό:

$x^2 + 1$, $\Delta = -4 < 0$ ὁπότε $x^2 + 1 > 0 \; \forall \; x \in R$

$x^2 - x + 2$, $\Delta = -7 < 0$ ὁπότε $x^2 - x + 2 > 0 \; \forall \; x \in R$

$-2x^2 + 7x - 3$, $\Delta = 25 > 0$ ὁπότε $-2x^2 + 7x - 3 = -2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$-x^2 + 5x$, $\Delta = 25 > 0$ ὁπότε $-x^2 + 5x = -x(x-5)$

Ἄρα ἡ ἀνίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀνίσωση:

$$(x-3)(-2)(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(-x)(x-5) < 0$$

καί αὐτή ἰσοδύναμη μέ τήν

$$(x-3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-5)x < 0.$$

Ὁ παράγοντας $(x-3)^2$ εἶναι μή ἀρνητικός $\forall \; x \in R$,

ἄρα γιά $x \neq 3$, ἡ ἀνίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-5)x < 0.$$

Οἱ ρίζες τοῦ πρώτου μέλους της εἶναι 0, $\frac{1}{2}$, 5.

Ἔτσι ἔχουμε :

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		3		5	$+\infty$
Σημεῖο τοῦ $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)x$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Σημεῖο τοῦ $(x-3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

Ἄρα τό σύνολο λύσεων τῆς $f(x)<0$ εἶναι:

$$\{x\in R \mid -\infty<x<0, \frac{1}{2}<x<5,\ x\neq 3\}$$

101. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ.

Μιά ἀνίσωση λέγεται κλασματική, ἄν μπορεῖ νά πάρει τή μορφή $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}>0$ ἤ <0. Ὅπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ πραγματικές ρητές συναρτήσεις τοῦ x μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό πεδίο ὁρισμοῦ τοῦ ρητοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$

Ἐπειδή τό πηλίκο δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημο τοῦ γινομένου τους, ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}>0 \Leftrightarrow \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)>0 \text{ (στό S)}$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}<0 \Leftrightarrow \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)<0 \text{ (στό S)}$$

S τὸ σύνολο ὁρισμοῦ τοῦ $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$

Ἄρα ἡ ἐπίλυση τῆς ἀνισώσεως $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}>0$ ἤ <0 ἀνάγεται στήν ἐπίλυση ἀνισώσεως τῆς μορφῆς $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)\ 0>$ ἤ <0.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ στό R, ἡ ἀνίσωση:

$$\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-1}<\frac{5}{x+3}$$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε : $\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x+3}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+24x-37}{(x-2)(x-1)(x+3)}<0$

Τό πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι $S=R-\{2, 1, -3\}$

Ἐπιλύουμε τήν ἰσοδύναμή της $(x^2+24x-37)(x-2)(x-1)(x+3)<0$ ὅπως προηγουμένως, ὁπότε λαμβάνουμε τό σύνολο λύσεων:

$$\{x\in R \mid -\infty<x<-12-\sqrt{181},\ -3<x<1,\ -12+\sqrt{181}<x<2\}$$

102. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ.

Ἄν δύο ἤ περισσότερες ἀνισώσεις, μέ τόν ἴδιο ἄγνωστο, εἶναι ἀληθεῖς μέ τίς ἴδιες τιμές τοῦ ἀγνώστου, στό σύνολο S, τότε λέμε ὅτι ἀποτελοῦν **σύστημα ἀνισώσεων.**

Ἐπίλυση τοῦ συστήματος ἀνισώσεων ὀνομάζουμε τήν ἀναζήτηση τῶν κοινῶν λύσεων τῶν ἀνισώσεών του. Τό σύνολο τῶν κοινῶν αὐτῶν λύσεων εἶναι ἡ τομή τῶν συνόλων τῶν λύσεων τῶν ἀνισώσεων καί βρίσκεται μέ τό γνωστό πίνακα, πού καθορίζει τά κοινά διαστήματα λύσεων τῶν ἀνισώσεων.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ, στό R, τό σύστημα τῶν ἀνισώσεων:

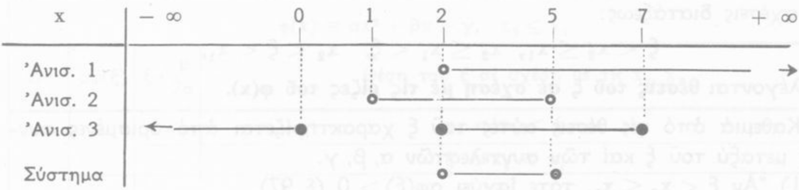
1) $3x > 6$, 2) $x^2 - 6x + 5 < 0$, 3) $x^3 - 9x^2 + 14x \leq 0$

Ἐπίλυση. Τό σύνολο λύσεων τῆς πρώτης εἶναι: $\Sigma_1 = \{x \in R \mid x > 2\}$. Τό σύνολο λύσεων τῆς δεύτερης εἶναι: $\Sigma_2 = \{x \in R \mid 1 < x < 5\}$. Ἡ τρίτη γράφεται $x(x-7)(x-2) \leq 0$, καί εἶναι ἀληθής γιά $-\infty < x < 0$ καί $2 < x < 7$.

x	$-\infty$	0		2		7	$+\infty$
$x^3 - 9x^2 + 14x$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Τό σύνολο λύσεων τῆς τρίτης: $\Sigma_3 = \{x \in R \mid -\infty < x \leq 0,\ 2 \leq x \leq 7\}$

Τό σύνολο τοῦ συστήματος δίνεται ἀπό τήν παρακάτω παράσταση



Σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος εἶναι:

$\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \{x \in R \mid 2 < x < 5\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α΄

327) Νά ἐπιλυθοῦν στό R, οἱ ἀκόλουθες ἀνισώσεις:

1) $x^2 - 2x + 3 > 0$, $3x^2 - 13x + 10 < 0$, $-x^2 + 2x + 3 > 0$

2) $-6x^2 + 11x - 4 < 0$, $16x^2 - 8x + 1 > 0$, $x^2 + \sqrt{3}x - 1 < 0$

3) $(x^2 - 9x + 14)(x - 4) < 0$, $x^3 + 1 > x^2 + x$, $x^4 - 1 > x^3 - x$

4) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 1} > 0$, $\dfrac{x^2}{x + 1} > 2$,

5) $\dfrac{2}{3x+1} > \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

328) Νά ἐπιλυθοῦν, στό σύνολο R, τά συστήματα:

1) $\begin{cases} 4x^2-4x-3<0 \\ -x^2+2x>0, \end{cases}$ 2) $\left\{ -1 < \dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)} < 1 \right.$

329) Μέ ποιές τιμές τοῦ $\lambda \in R$ ἡ ἐξίσ. $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-3)x-\lambda+3=0$ ἔχει ρίζες α) πραγματικές καί β) καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς;

Ὁ μ ά δ α β'

230) Νά ἐπιλυθοῦν, στό R, οἱ ἀνισώσεις:

1) $(x^2-2x+1)(3x^2+1)(2x-1)>0,$ $(2x^2-5x-7)(x^2-1)(3x^2+7)<0$

4) $\dfrac{x^2(x+2)(x-3)^3}{(x+4)^2(x-5)^5} \leqslant 0,$ $\dfrac{3x^3-7x^2+4x}{x^3-6x^2+12x-8} \geqslant 0$

331) Νά ἐπιλυθοῦν, στό σύνολο R, τά συστήματα:

1) $\begin{cases} x^2-7x+12>0 \\ -3x^2+16x-5<0 \\ -x^2+2x+48>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3-5x^2+6x \leq 0 \\ -x^2+2x+3>0 \\ 2x^2-5x-7>0 \end{cases}$

332) Μέ ποιές πραγματικές τιμές τοῦ μ τό τριώνυμο $\varphi(x)=(\mu-2)x^2-2(\mu+3)x+$ $+2\mu-18$ ἔχει ρίζες α) θετικές καί β) ἀρνητικές;

103. ΘΕΣΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΙΣ ΠΡΑΓΜ. ΡΙΖΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ πραγμ. ρίζες, ὅπου $x_2 \leq x_1$, καί ξ πραγματικός ἀριθμός, τότε οἱ τρεῖς πραγματικοί ἀριθμοί x_1, x_2, ξ μποροῦν νά παρουσιάσουν τίς ἑξῆς σχέσεις διατάξεως:

$$\xi < x_2 \leq x_1, \quad x_2 \leq x_1 < \xi, \quad x_2 < \xi < x_1,$$

πού λέγονται **θέσεις τοῦ ξ σέ σχέση μέ τίς ρίζες τοῦ φ(x).**

Καθεμιά ἀπό τίς θέσεις αὐτές τοῦ ξ χαρακτηρίζεται ἀπό ὁρισμένες συνθῆκες μεταξύ τοῦ ξ καί τῶν συντελεστῶν α, β, γ.

1) Ἄν $\xi < x_2 \leq x_1$, τότε ἰσχύει $\alpha\varphi(\xi)>0$ (§ 97).

Ἐπίσης ἔχουμε $\xi<x_2\leq x_1 \Leftrightarrow \xi<x_2$ καί $\xi<x_1$ ὁπότε $2\xi<x_1+x_2$ ἤ $\xi<\dfrac{x_1+x_2}{2}$ ἤ $\xi<-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἤ $\xi+\dfrac{\beta}{2\alpha}<0$. Ἄρα οἱ συνθῆκες εἶναι: $\Delta\geq 0$, $\alpha\varphi(\xi)>0$ καί $\xi+\dfrac{\beta}{2\alpha}<0$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω $\Delta\geq 0$, $\alpha\varphi(\xi)>0$ καί $\xi+\dfrac{\beta}{2\alpha}<0$. Ἀπό τή $\Delta\geq 0$ ἔπεται $x_2\leq x_1 \in R$. Ἀπό τήν $\alpha\varphi(\xi)>0$ ἔπεται ὅτι ὁ ξ δέν μπορεῖ νά βρίσκεται μεταξύ τῶν ριζῶν. Τέλος, ἀπό τήν $\xi+\dfrac{\beta}{2\alpha}<0$ ἔπεται ὅτι ὁ ξ εἶναι μικρότερος καί ἀπό τή μικρότερη ρίζα x_2, γιατί, ἄν $x_2\leq x_1<\xi$, τότε $x_1<\xi$ καί $x_2<\xi$ ὁπότε $x_1+x_2<2\xi$ ἤ $\dfrac{x_1+x_2}{2}<\xi$ ἤ $\xi+\dfrac{\beta}{2\alpha}>0$. Αὐτό εἶναι ἄτοπο.

2) Ἄν $x_2 \leq x_1<\xi$, τότε ἔχουμε πάλι $\alpha\varphi(\xi)>0$ καί, ἐπειδή ἀπό τήν

$$x_2 \leq x_1<\xi, \text{ ἔπεται } \xi+\frac{\beta}{2\alpha}>0,$$

ἄρα οἱ συνθῆκες εἶναι $\Delta \geq 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$, καί $\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Ἀντιστρόφως. Ἄν $\Delta \geq 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$ καί $\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha} > 0$, τότε ἔχουμε ρίζες πραγματικές $(x_2 \leq x_1)$, ὁ ξ δέν μπορεῖ νά εἶναι μεταξύ τῶν ριζῶν καί ἄρα βρίσκεται ἔξω ἀπό τίς ρίζες καί εἶναι μεγαλύτερος καί ἀπό τή μεγαλύτερη x_1, γιατί, ἄν $\xi < x_2 \leq x_1$, τότε θά ἔχουμε $\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha} < 0$. Αὐτό εἶναι ἄτοπο.

3) Ἄν $x_2 < \xi < x_1$, τότε ἔχουμε $\alpha\varphi(\xi) < 0$ (§ 97).

Ἀντιστρόφως. Ἄν $\alpha\varphi(\xi) < 0$, τότε ἔχουμε ρίζες πραγματικές, καί $x_2 < \xi < x_1$, γιατί, ἄν $\Delta \leq 0$, εἶναι $\alpha\varphi(\xi) > 0$. Καί, ἄν ὁ ξ ἦταν ἔξω ἀπό τίς ρίζες, θά εἴχαμε $\alpha\varphi(\xi) > 0$. Αὐτό εἶναι ἄτοπο.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι:

Οἱ ἱκανές καί ἀναγκαῖες συνθῆκες, ὥστε ὁ $\xi \in R$ νά εἶναι 1) μικρότερος τῶν $x_2 \leq x_1$, εἶναι $\Delta \geq 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$, $\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha} < 0$ καί 2) μεγαλύτερος τῶν $x_2 \leq x_1$, εἶναι $\Delta \geq 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$, $\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ὥστε ὁ $\xi \in R$ νά βρίσκεται μεταξύ τῶν $x_1, x_2 \in R$, εἶναι $\alpha\varphi(\xi) < 0$.

Παρατήρηση: Τή συνθήκη $\alpha\varphi(\xi) < 0$ τή χρησιμοποιοῦμε πολλές φορές ὡς κριτήριο πραγματικότητας τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$.

Τά παραπάνω, ὅπως καί μερικότερες περιπτώσεις, συνοψίζονται στόν πίνακα.

$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad x_2 \leq x_1$			
Δ	$\alpha\varphi(\xi)$	$\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha}$	Θέση τοῦ ξ σέ σχέση μέ τίς x_2, x_1
+	+	+	$x_2 < x_1 < \xi$
		−	$\xi < x_2 < x_1$
	−	+	$x_2 < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < \xi < x_1$
		−	$x_2 < \xi < \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_1$
		0	$x_2 < \xi = \dfrac{x_1 + x_2}{2} < x_1$
	0	+	$x_2 < x_1 = \xi$
		−	$\xi = x_2 < x_1$
0	+	+	$x_1 = x_2 < \xi$
		−	$\xi < x_1 = x_2$
	0	0	$x_1 = x_2 = \xi$

Παραδείγματα: α) Ποιά εἶναι ἡ θέση τῶν ἀριθμῶν -3, 0, 9, 10 σέ σχέση μέ τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) \equiv x^2 - 8x - 8 = 0$;

Λύση: Ἔχουμε $\Delta = 64 + 36 = 100 > 0$, $x_2 < x_1$ καί $\alpha = 1$. Ἐπειδή $\alpha\varphi(-3) = 9 + 24 - 9 = 24 > 0$ καί $-3 + \frac{\beta}{2\alpha} = -3 - 4 = -7 < 0$, ἔπεται ὅτι

$$-3 < x_2 < x_1.$$

Ἐπίσης: $\alpha\varphi(0) = -9 < 0$, ἄρα $x_2 < 0 < x_1$ καί

$\alpha\varphi(9) = 81 - 72 - 9 = 0$ ὁπότε $x_2 < x_1 = 9$ ἤ $x_2 < x_1 = 9 < 10$

Ἔτσι ἔχουμε τή διάταξη: $-3 < x_2 < 0 < x_1 = 9 < 10$

β) Μέ ποιές τιμές τοῦ λ οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x) \equiv 4x^2 - x + 2(\lambda - 1)$ εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα;

Λύση: Πρέπει νά ἔχουμε $x_2 \leq x_1 < 1$.

Ὁπότε ἀρκεῖ νά εἶναι $\Delta \geq 0$, $\alpha\varphi(1) > 0$, $1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Ἔτσι ἔχουμε: $\Delta = 1 - 32(\lambda - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{33}{32}$,

$\alpha\varphi(1) = 4(4 - 1 + 2\lambda - 2) = 4(1 + 2\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{2}$,

$1 + \frac{\beta}{2\alpha} = 1 + \frac{-1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} > 0$ $(\forall\, \lambda \in R)$.

Οἱ $\lambda \leq \frac{33}{32}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$ συναληθεύουν γιά $-\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{33}{32}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ά δ α β΄

333) Νά βρεθεῖ ἡ θέση τῶν ἀριθμῶν $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 2$ σέ σχέση μέ τίς ρίζες τῶν τριωνύμων $\varphi_1(x) \equiv 3x^2 - x - 4$, $\varphi_2(x) \equiv 4x^2 + 4x - 3$.

334) Μέ ποιές τιμές τοῦ $\lambda \in R$ οἱ ρίζες x_1, x_2 τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv -7x^2 + 2x - (3\lambda - 2)$ βρίσκονται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν -1, 1.

335) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ παρακάτω ἐξισώσεις ἔχουν ρίζες πραγματικές καί ἄνισες, χωρίς τή χρήση τῆς διακρίνουσας:

1) $(x-5)(x-3) - 5 = 0$, 2) $(x - \alpha)(x - \beta) = \kappa^2$ $(\alpha, \beta, \kappa \neq 0 \in R)$

336) Ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ πραγματικές ρίζες τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καί $0 < \gamma < \beta < \alpha$, νά ἀποδειχθεῖ, ὅτι οἱ ρίζες x_1, x_2 βρίσκονται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν -1 καί 1.

337) Ποιά εἶναι ἡ διάταξη τοῦ ἀριθμοῦ 2 καί τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv 2x^2 - 3x + 5(1 - 2\lambda)$ κατά τίς διάφορες τιμές τοῦ $\lambda \in R$.

338) Ἄν $\xi_1, \xi_2 \in R$ καί $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό $\varphi(x)$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἄνισες, ἄν εἶναι $\varphi(\xi_1) \cdot \varphi(\xi_2) < 0$, πού ἡ μιά βρίσκεται μεταξύ τῶν $\xi_1 < \xi_2$. Ἔπειτα, σύμφωνα μέ τήν πρόταση αὐτή, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) \equiv (x - 2)(x + 3) + (x + 2)(x - 3) - (2 - x)(3 - x) = 0$ εἶναι πραγματικές ἄνισες καί ἡ μιά ρίζα βρίσκεται μεταξύ 2 καί 3.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β' ΒΑΘΜΟΥ

104. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Β' ΒΑΘΜΟΥ.

Εἴδαμε στά προηγούμενα ὅτι οἱ συντελεστές α, β, γ τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ πολλές φορές εἶναι συναρτήσεις ἑνός γράμματος $\lambda \in R$, πού χωρίς νά δίνεται ἀριθμητικά θεωρεῖται γνωστή ποσότητα ἀνεξάρτητη ἀπό τόν x, καί ἀπό τίς διάφορες τιμές πού παίρνει ἐξαρτῶνται οἱ ρίζες καί τό σημεῖο τοῦ τριωνύμου.

Τό γράμμα λ λέγεται **παράμετρος** καί οἱ ἐξισώσεις ἤ ἀνισώσεις, πού τό περιέχουν, λέγονται **παραμετρικές.**

Γιά νά διερευνήσουμε μιά ἐξίσωση β' βαθμοῦ παραμετρική κατά τίς διάφορες τιμές τῆς παραμέτρου λ, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη τό γνωστό πίνακα (§ 93), πού ἐξετάζει το εἶδος καί τό σημεῖο τῶν ριζῶν της.

Παράδειγμα: Νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσωσ. $\varphi(x) \equiv (2\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 3\lambda = 0$, ὅταν $\lambda \in R$.

Λύση: Ἐξετάζουμε τό σημεῖο τῶν Δ(λ), P(λ) καί S(λ) κατά τίς διάφορες τιμές τοῦ λ.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\Delta(\lambda) = 4(\lambda-2)^2 - 12\lambda(2\lambda-1) = -4(5\lambda^2 + \lambda - 4) = -20(\lambda + 1)\left(\lambda - \frac{4}{5}\right)$$

Τό σημεῖο τῆς Δ(λ) δίνεται ἀπό τό γραφικό πίνακα:

λ	$-\infty$		-1		$4/5$		$+\infty$
Δ(λ)		$-$	0	$+$	0	$-$	

$P(\lambda) = \frac{3\lambda}{2\lambda-1}$. Τό κλάσμα $\frac{3\lambda}{2\lambda-1}$ εἶναι ὁμόσημο τοῦ $3\lambda(2\lambda-1)$, πού τό σημεῖο του δίνεται ἀπότε ὁ γραφικό πίνακα:

λ	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
3λ(2λ−1)		$+$	0	$-$	0	$+$	
P(λ)		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$S(\lambda) = \frac{2(\lambda-2)}{2\lambda-1}$. Τό κλάσμα $\frac{2(\lambda-2)}{2\lambda-1}$ εἶναι ὁμόσημο τοῦ $2(\lambda-2)(2\lambda-1)$, πού τό σημεῖο του δίνεται ἀπό τό γραφικό πίνακα:

λ	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
2(λ−2)(2λ−1)		$+$	0	$-$	0	$+$	
S(λ)		$+$	‖	$-$	0	$+$	

Τά παραπάνω βοηθοῦν στή συμπλήρωση τοῦ πίνακα διερευνήσεως:

Διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) \equiv (2\lambda-1)x^2 - 2(\lambda-2)x + 3\lambda = 0$				
λ	$\Delta(\lambda)$	$P(\lambda)$	$S(\lambda)$	Εἶδος ριζῶν καί σημεῖο τους
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in (C-R)$ καί $x_1 = \overline{x_2} \Rightarrow \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$
-1	0			$x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 1$
	$+$	$+$	$+$	$x_1 \in R^+,\ x_1 \in R^+ \Leftrightarrow 0 < x_2 < x_1$
0		0		$x_1 \in R^+,\ x_2 = 0 \left(x_1 = -\dfrac{\beta}{\alpha} = 4\right)$
	$+$	$-$	$+$	$x_1 \in R^+,\ x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < 0 < x_1$ καί $\lvert x_2 \rvert < \lvert x_1 \rvert$
$\dfrac{1}{2}$		$\parallel$	$\parallel$	Ἐξίσωση πρωτοβάθμια
	$+$	$+$	$-$	$x_1 \in R^-,\ x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < x_1 < 0$
$\dfrac{4}{5}$	0			$x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -2$
	$-$	$+$	$-$	$x_1, x_2 \in (C-R)$ καί $x_1 = \overline{x_2} \Rightarrow \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$
2			0	$x_1 \in I,\ x_2 \in I$ καί $x_1 = -x_2$
	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2 \in (C-R)$ καί $x_1 = \overline{x_2} \Rightarrow \lvert x_1 \rvert = \lvert x_2 \rvert$
$+\infty$				

Σημ. C σύνολο μιγαδικῶν, I σύνολο καθαρῶν φανταστικῶν.

105. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ

Γιά νά διερευνήσουμε μιά ἀνίσωση β΄ βαθμοῦ παραμετρική, δηλ. νά βροῦμε τά σύνολα λύσεών της κατά τίς διάφορες τιμές τῆς παραμέτρου λ, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη τό γνωστό πίνακα (§ 99).

Παράδειγμα: Νά διερευνηθεῖ ἡ ἀνίσωση

$$\varphi(x) \equiv (3\lambda-2)x^2 - (\lambda-1)x + 2(\lambda-1) < 0, \text{ ὅταν } \lambda \in R.$$

Λύση: Ἐξετάζουμε τό σημεῖο τῶν Δ(λ) καί α(λ) κατά τίς διάφορες τιμές τοῦ λ. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-1)^2 - 8(\lambda-1)(3\lambda-2) = (\lambda-1)(-23\lambda+15)$$

Τό σημεῖο τῆς Δ(λ) δίνεται ἀπό τόν πίνακα :

λ	$-\infty$		$\frac{15}{23}$		1		$+\infty$
$\Delta(\lambda)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\alpha(\lambda) = 3\lambda - 2$. Ἔχει σημεῖο θετικό γιά $\lambda > \frac{2}{3}$, ἀρνητικό γιά $\lambda < \frac{2}{3}$ καί μηδενίζεται γιά $\lambda = \frac{2}{3}$. Τά παραπάνω βοηθοῦν στή σύνταξη τοῦ πίνακα :

Διερεύνηση τῆς ἀνισ. $\varphi(x) \equiv (3\lambda-2)x^2-(\lambda-1)x+2(\lambda-1)<0$			
λ	$\Delta(\lambda)$	$\alpha(\lambda)$	Σύνολο λύσεων τῆς $\varphi(x) < 0$
$-\infty$			
	$-$	$-$	$\{x/x \in R\}$
$\frac{15}{23}$	0		$\left\{x \in R/x \neq -\frac{\beta}{2\alpha} = 4\right\}$
	$+$	$-$	$x_2 < x_1$, $\{x \in R/-\infty < x < x_2,\ x_1 < x < +\infty\}$
$\frac{2}{3}$		0	ἀνίσωση πρωτοβάθμια, $\{x \in R/-\infty < x < 2\}$
	$+$	$+$	$x_2 < x_1$, $\{x \in R/x_2 < x < x_1\}$
1	0		$\{\ \} = \varnothing$
	$-$	$+$	$\{\ \} = \varnothing$
$+\infty$			

Σημείωση. Τά x_1, x_2 εἶναι ἐκφράσεις τοῦ λ καί μεταβάλλονται μαζί μέ τό λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

339) Νά διερευνηθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις καί ἀνισώσεις, ὅταν $\lambda \in R$:

1) $(2\lambda-3)x^2+2(6\lambda-5)x+18\lambda+25=0$

2) $(\lambda-5)x^2-4\lambda x+\lambda-2=0$, 3) $(\lambda+1)x^2-3\lambda x+4\lambda>0$

4) $x^2+2(2\lambda-1)x+3\lambda^2-5>0$, 5) $(\lambda+2)x^2+12x+10-6\lambda\leq 0$

340) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό κλάσμα $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$ παίρνει κάθε πραγματική τιμή, ὅταν $R \in x$.

341) Ἄν x πραγματικός ἀριθμός, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό κλάσμα $(x^2+2x-11)/2(x-3)$ δέν μπορεῖ νά πάρει τιμές τοῦ διαστήματος $(2, 6)$.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΔΥΟ Β'ΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ, ΩΣΤΕ ΟΙ ΡΙΖΕΣ ΤΟΥΣ ΝΑ ΕΠΑΛΗΘΕΥΟΥΝ ΟΡΙΣΜΕΝΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

106. Δίνονται δύο ἐξισώσεις $\varphi_1(x)\equiv\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0$ καί $\varphi_2(x)\equiv\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2=0$ $(\alpha_1\neq 0,\ \alpha_2\neq 0)$ μέ πραγματικούς συντελεστές καί ρίζες ἀντίστοιχα (x_1, x_2) καί (ρ_1, ρ_2). Ζητοῦνται οἱ σχέσεις μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων, ὥστε νά ἔχουν ρίζες :

1. Ἀνάλογες μέ λόγο λ.

Ἔχουμε: $\frac{x_1}{\rho_1} = \frac{x_2}{\rho_2} = \lambda \Leftrightarrow x_1 = \lambda\rho_1$ καί $x_2 = \lambda\rho_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \lambda(\rho_1 + \rho_2)$

καί $x_1x_2 = \rho_1\rho_2\lambda^2$ ἤ $-\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \lambda\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)$ καί $\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\lambda^2$ ἤ

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\lambda\beta_2} \quad \text{καί} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2\lambda^2} \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2\lambda} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2\lambda^2}} \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη (1), τότε οἱ ἐξισώσεις ἔχουν ρίζες ἀνάλογες μέ λόγο λ. Πράγματι, ἄν θέσουμε τούς λόγους (1) ἴσον μέ κ, ἔχουμε: $\alpha_1 = \kappa\alpha_2$, $\beta_1 = \kappa\beta_2\lambda$, $\gamma_1 = \kappa\gamma_2\lambda^2$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση $\varphi_1(x) = 0$ γίνεται

$$\varphi_1(x) \equiv \kappa\alpha_2x^2 + \kappa\beta_2\lambda x + \kappa\gamma_2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2x^2 + \beta_2\lambda x + \gamma_2\lambda^2 = 0.$$

Αὐτή ἔχει ρίζες $x_1 = \lambda\frac{-\beta_2+\sqrt{\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$ ἤ $x_1 = \lambda\rho_1 \Rightarrow \frac{x_1}{\rho_1} = \lambda$

$$x_2 = \lambda\frac{-\beta_2-\sqrt{\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2} \quad \text{ἤ} \quad x_2 = \lambda\rho_2 \Rightarrow \frac{x_2}{\rho_2} = \lambda.$$

Ἄρα $\frac{x_1}{\rho_1} = \frac{x_2}{\rho_2} = \lambda$.

Ὥστε ἡ συνθήκη (1) εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία.

2. Ἀντίθετες. Ἔχουμε: $x_1 = -\rho_1$ καί $x_2 = -\rho_2 \Leftarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -(\rho_1 + \rho_2) \\ x_1x_2 = \rho_1\rho_2 \end{array}\right| \text{ ἤ } \left.\begin{array}{l} -\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \qquad (2)$$

Ἀντιστρόφως. Ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη (2), τότε οἱ ἐξισώσεις ἔχουν ρίζες ἀντίθετες. Πράγματι, ἄν θέσουμε τούς λόγους (2) ἴσον μέ κ, ἔχουμε:

$$\alpha_1 = \kappa\alpha_2, \ \beta_1 = -\kappa\beta_2, \ \gamma_1 = \kappa\gamma_2,$$

ὁπότε $\varphi_1(x) \equiv \kappa\alpha_2 x^2 - \kappa\beta_2x + \kappa\gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2x^2 - \beta_2x + \gamma_2 = 0$.

Αὐτή ἔχει ρίζες $x_1 = \frac{\beta_2+\sqrt{\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$, $x_2 = \frac{\beta_2-\sqrt{\beta_2^2-4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$

Αὐτές οἱ ρίζες εἶναι ἀντίθετες πρός τίς ρίζες ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισ. $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2x^2 + \beta_2x + \gamma_2 = 0$.

Ὥστε ἡ συνθήκη (2) εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία.

Ἡ πρόταση αὐτή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ σάν πόρισμα τῆς περιπτώσεως πού οἱ ρίζες εἶναι ἀνάλογες μέ λόγο $\lambda = -1$.

3. Ἀντίστροφες. Ἔχουμε : $x_1 = \frac{1}{\rho_1}$ καί $x_2 = \frac{1}{\rho_2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \\ x_1x_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \end{array}\right\} \text{ ἤ } \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2} \\ x_1x_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \end{array}\right\} \text{ ἤ } \left.\begin{array}{l} \frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{\beta_2}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \end{array}\right\} \text{ ἤ } \left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \\ \frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}}$ (3). Ἡ σχέση (3) εἶναι αὐτή πού ζητοῦμε.

Ἀντιστρόφως. Ἄν ἰσχύει ἡ συνθήκη (3), τότε οἱ ἐξισώσεις ἔχουν ρίζες ἀντίστροφες. Πράγματι, ἄν θέσουμε τούς λόγους (3) ἴσον μέ κ, ἔχουμε:

$$\alpha_1 = \kappa\gamma_2, \beta_1 = \kappa\beta_2, \ \gamma_1 = \kappa\alpha_2,$$

ὁπότε $\varphi_1(x) \equiv \kappa\gamma_2 x^2 + \kappa\beta_2 x + \kappa\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma_2 x^2 + \beta_2 x + \alpha_2 = 0.$

Αὐτή ἔχει ρίζες $x_1 = \dfrac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\gamma_2}$, $x_2 = \dfrac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\gamma_2}$

Οἱ ρίζες τῆς $\varphi_2(x) = 0$ εἶναι $\rho_1 = \dfrac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$, $\rho_2 = \dfrac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$

Ἔτσι ἔχουμε

$$x_1\rho_1 = \frac{\beta_2^2 - (\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2)}{4\alpha_2\gamma_2} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\rho_1}. \text{ Ἐπίσης } x_2 = \frac{1}{\rho_2}.$$

Ἄρα: **Οἱ ἱκανές καί ἀναγκαῖες συνθῆκες, ὥστε οἱ ἐξισώσεις $\varphi_1(x) = 0$ καί $\varphi_2(x) = 0$, νά ἔχουν ρίζες 1) ἀνάλογες μέ λόγο λ, 2) ἀντίθετες, καί 3) ἀντίστροφες, εἶναι ἀντίστοιχα οἱ (1), (2), (3).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

342) Μέ ποιές τιμές τῶν λ καί μ οἱ ἐξισώσεις $\varphi_1(x) \equiv (\lambda + 2)x^2 - (\mu + 1)x - 3 = 0$ καί $\varphi_2(x) \equiv (\mu - 1)x^2 + 4\lambda x + 2 = 0$ ἔχουν ρίζες α) ἀνάλογες μέ λόγο 2, β) ἀντίθετες καί γ) ἀντίστροφες;

343) Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β' βαθμοῦ μέ ρίζες τά τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^2 + \lambda x + \mu = 0$. Ἔπειτα νά βρεθοῦν οἱ πραγματικές τιμές τῶν λ καί μ, ὥστε οἱ δύο ἐξισώσεις νά ἔχουν ρίζες α) ἀνάλογες μέ λόγο 2, β) ἀντίθετες καί γ) ἀντίστροφες.

344) Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση μέ ρίζες $x_1 + \dfrac{1}{x_1}$ καί $x_2 + \dfrac{1}{x_2}$, ὅπου x_1, x_2 ρίζες τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἔπειτα νά βρεθεῖ ἡ συνθήκη, ὥστε οἱ δύο ἐξισώσεις νά ἔχουν ρίζες ἀνάλογες μέ λόγο κ.

107. ΑΠΑΛΕΙΦΟΥΣΑ ΔΥΟ ΤΡΙΩΝΥΜΩΝ Β' ΒΑΘΜΟΥ.

Ἄν δοθοῦν δύο τριώνυμα $\varphi_1(x) \equiv \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$ καί $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2$ μέ πραγματικούς συντελεστές, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, καί ρίζες ἀντίστοιχα (x_1, x_2) καί (ρ_1, ρ_2), τότε θά ὀνομάζουμε τήν πραγματική παράσταση

$$R = (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$

ἀπαλείφουσα τῶν δύο τριωνύμων.

Ἡ ἐξέταση τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀπαλείφουσας R δύο τριωνύμων β' βαθμοῦ βοηθᾶ στήν ἐπίλυση πολλῶν σπουδαίων προβλημάτων.

α) Μορφές τῆς ἀπαλείφουσας R

Ἄν δοθοῦν τά παραπάνω τριώνυμα, ἡ ἀπαλείφουσα μπορεῖ νά πάρει τίς ἀκόλουθες μορφές:

1η $\quad R = \alpha_1^2\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) = \alpha_2^2\varphi_1(\rho_1)\varphi_1(\rho_2)$

Πράγματι. Σχηματίζουμε τό γινόμενο

$$\varphi_2(x_1)\,\varphi_2(x_2) = (\alpha_2 x_1^2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2)(\alpha_2 x_2^2 + \beta_2 x_2 + \gamma_2) =$$
$$= \alpha_2^2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_2\beta_2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \alpha_2\gamma_2(x_1^2 + x_2^2) + \beta_2^2 x_1 x_2 +$$
$$+ \beta_2\gamma_2(x_1 + x_2) + \gamma_2^2 =$$
$$= \frac{1}{\alpha_1^2}\,[(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)] = \frac{1}{\alpha_1^2}\cdot \mathrm{R}$$

Ἄρα $\mathrm{R} = \alpha_1^2\varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2)$, ἐπίσης $\mathrm{R} = \alpha_2^2\varphi_1(\rho_1)\varphi_1(\rho_2)$

2α $\quad \mathrm{R} = \alpha_1^2\alpha_2^2(x_1 - \rho_1)(x_2 - \rho_1)(x_1 - \rho_2)(x_2 - \rho_2)$

3η $\quad \mathrm{R} = \frac{1}{4}\,[(2\alpha_1\gamma_2 + 2\alpha_2\gamma_1 - \beta_1\beta_2)^2 - \Delta_1\Delta_2]$,

ὅπου $\quad \Delta_1 = \beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1,\ \Delta_2 = \beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2$

Οἱ μαθητές μποροῦν εὔκολα νά ἐπαληθεύσουν τίς μορφές τῆς R 2η καί 3η.

β) Ἰδιότητες τῆς ἀπαλείφουσας R

1. Ἄν ἡ ἀπαλείφουσα $\mathrm{R} = 0$, τότε ἀπό τήν $\mathrm{R} = \alpha_2^2\varphi_1(\rho_1)\,\varphi_1(\rho_2)$ ἔχουμε $\alpha_2^2\varphi_1(\rho_1)\varphi_1(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(\rho_1) = 0 \vee \varphi_1(\rho_2) = 0$, ὁπότε, ἄν $\varphi_1(\rho_1) = 0$ καί ἐπειδή $\varphi_2(\rho_1) = 0$ [ρ_1 εἶναι ρίζα τοῦ $\varphi_2(x)$], ἕπεται ὅτι ἡ ρ_1 εἶναι κοινή ρίζα τῶν $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$. Ἄν $\varphi_1(\rho_1) = 0$ καί $\varphi_1(\rho_2) = 0$, τότε τά $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ ἔχουν καί τίς δύο ρίζες κοινές. Στήν περίπτωση αὐτή θά ἔχουμε:

$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, γιατί $x_1 + x_2 = \rho_1 + \rho_2$ καί $x_1x_2 = \rho_1\rho_2 \Rightarrow -\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ καί $\frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\alpha_2} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Ἀντίστροφα. Ἄν τά τριώνυμα ἔχουν κοινή ἤ κοινές ρίζες, τότε εἶναι φανερό ὅτι $\mathrm{R} = 0$.

Ὥστε: **Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά ἔχουν τά τριώνυμα $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ μία τό λιγότερο κοινή ρίζα, εἶναι νά ἰσοῦται ἡ ἀπαλείφουσα τους μέ 0.**

2. Ἄν ἡ ἀπαλείφουσα $\mathrm{R} = 0$ καί $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, τότε εἴδαμε ὅτι τά τριώνυμα $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ ἔχουν μιά τό λιγότερο κοινή ρίζα, δέν μποροῦν ὅμως νά ἔχουν καί τίς δυό ρίζες κοινές, γιατί τότε θά ἦταν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \Rightarrow \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$. Αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί εἶναι $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.

Ἀντίστροφα. Ἄν τά τριώνυμα ἔχουν μιά μόνο κοινή ρίζα, τήν x_0, τότε:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1x_0^2+\beta_1x_0+\gamma_1=0\\ \alpha_2x_0^2+\beta_2x+\gamma_2=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} \text{ καί } x_0 = \frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1},$$

ὁπότε ἔχουμε $\frac{\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1} = \left(\frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right)^2$ καί $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$ καί συνεπῶς $(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2)^2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2) = 0$ καί $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Ἡ κοινή αὐτή ρίζα x_0 εἶναι πραγματική, γιατί, ἄν ἦταν μιγαδική τῆς μορφῆς κ + λi, τότε τά τριώνυμα θά εἶχαν κοινή ρίζα καί τή συζυγή $\kappa - \lambda i$ καί συνεπῶς θά εἶχαν δύο κοινές ρίζες, ἀλλ' αὐτό εἶναι ἄτοπο.

Ὥστε : **Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά ἔχουν τά τριώνυμα $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ μιά καί μόνη πραγματική κοινή ρίζα, τήν $x_0 = \frac{\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}$, εἶναι ἡ ἀπαλείφουσά τους $R = 0$ καί $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.**

Σημείωση. Ἄλλες ἰδιότητες τῆς ἀπαλείφουσας R, πολύ χρήσιμες, θά ἐξετασθοῦν σέ ἄλλη τάξη.

Παράδειγμα : Μέ ποιές τιμές τοῦ λ οἱ ἐξισώσεις
$\varphi_1(x) \equiv 2x^2 - x - 3 = 0$ καί $\varphi_2(x) = x^2 - (2\lambda - 3)x + 4\lambda = 0$ ἔχουν μιά καί μόνη πραγματική κοινή ρίζα; Νά βρεθεῖ ἡ ρίζα αὐτή.

Λύση : Πρέπει $R = 0$ καί $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 \neq 0$

Ἔχουμε: $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -2(2\lambda - 3) - 1(-1) = -4\lambda + 7 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{7}{4}$

$$\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = -1 \cdot 4\lambda + (2\lambda - 3)(-3) = -10\lambda + 9$$

$$\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = 2 \cdot 4\lambda - 1 \cdot (-3) = 8\lambda + 3$$

Ἄρα $R = (8\lambda + 3)^2 - (-4\lambda + 7)(-10\lambda + 9) = 0 \Leftrightarrow 12\lambda^2 + 77\lambda - 27 = 0$, ὁπότε

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}, \ \lambda_2 = -\frac{27}{4}$$

Ἡ κοινή ρίζα μέ $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ εἶναι $x_0 = \frac{-(8\lambda + 3)}{-4\lambda + 7} = -1$

καί μέ $\lambda_2 = -\frac{27}{4}$ εἶναι: $x_0 = \frac{3}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

345) Ποιά εἶναι ἡ συνθήκη μεταξύ τῶν α καί β, ὥστε τά τριώνυμα $\varphi_1(x) \equiv \alpha x^2 + x + \beta$ καί $\varphi_2(x) \equiv x^2 + \alpha x + \beta$ νά ἔχουν μιά μόνο κοινή ρίζα; Νά βρεθεῖ αὐτή.

346) Ἄν οἱ ἐξισώσεις $x^2 + \rho x + \kappa = 0$ καί $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ ἔχουν μιά μόνο κοινή ρίζα, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $(\kappa - \lambda)^2 = (\rho\lambda - \kappa^2)(\kappa - \rho)$.

347) Μέ ποιές τιμές τῶν μ καί ν τά τριώνυμα $\varphi_1(x) = \mu x^2 - (\mu - 1)x - 5$ καί $(\nu - 2)x^2 - 3\nu x + 1$ ἔχουν τίς ἴδιες ρίζες;

348) Ἄν x_0 εἶναι ἡ κοινή ρίζα τῶν δύο τριωνύμων $\varphi_1(x) \equiv \alpha_1x^2 + \beta_1x + \gamma_1$ καί $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2x^2 + \beta_2x + \gamma_2$ καί R ἡ ἀπαλείφουσά τους, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$R = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}{\alpha_1} \cdot \varphi_1(x_0) = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}{\alpha_2} \cdot \varphi_2(x_0)$$

349) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τά τριώνυμα $\varphi_1(x) \equiv \lambda x^2 - (\lambda\mu + 1)x + \mu$ καί $\varphi_2(x) \equiv \lambda\mu x^2 + (\lambda^2 - \mu)x - \lambda = 0$ ἔχουν κοινή ρίζα καί νά βρεθεῖ αὐτή.

350) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἐξισώσεις $x^2 + \alpha x - 3 = 0$ καί $x^2 - 2\alpha x + 3 = 0$ δέν μπορεῖ νά ἔχουν καί τίς δυό ρίζες κοινές. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ α, ὥστε αὐτές νά ἔχουν κοινή ρίζα.

ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟ $\varphi(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ΩΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ Χ ΣΤΟ R

108. I) ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΤΟ R (μέ ἁπλό τρόπο δοσμένες)

1) Μεταβλητές πού τείνουν στό 0 ἤ ∞ ἤ σέ σταθερό ἀριθμό $\alpha \in R$.

Μιά μεταβλητή x τοῦ συνόλου R λέμε: α) ὅτι τείνει στό 0, καί συμβολίζουμε $x \to 0$, ὅταν μπορεῖ νά γίνει καί νά μείνει ἀπολύτως μικρότερη ἀπό κάθε ἀριθμό $\varepsilon > 0$, ὅσο θέλουμε μικρό, β) ὅτι τείνει στό ∞ (ἄπειρο θετικό ἤ ἀρνητικό), καί συμβολίζουμε $\chi \to \infty$, ὅταν μπορεῖ νά γίνει καί νά μείνει ἀπολύτως μεγαλύτερη ἀπό κάθε ἀριθμό $M > 0$, ὅσο θέλουμε μεγάλο καί γ) ὅτι τείνει στό σταθερό ἀριθμό $\alpha \in R$, καί συμβολίζουμε $x \to \alpha$, ὅταν μπορεῖ ἡ διαφορά $x - \alpha$ νά γίνει καί νά μείνει ἀπολύτως μικρότερη ἀπό κάθε ἀριθμό $\varepsilon > 0$, ὅσο θέλουμε μικρό.

2) Μεταβολές μιᾶς συναρτήσεως στό R.

Ἔστω μιά συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$, μέ σύνολο ὁρισμοῦ τό $\Sigma \subseteq R$, καί x_1, x_2 δύο ὁποιεσδήποτε ἄνισες τιμές τῆς μεταβλητῆς x τοῦ συνόλου Σ (ἤ ὑποσυνόλου του). Θά λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$ εἶναι:

α) γνησίως αὔξουσα στό Σ, ὅταν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$,

β) γνησίως φθίνουσα στό Σ, ὅταν: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$,

γ) σταθερή στό Σ, ὅταν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Εἶναι φανερό, ὅτι τή φορά μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $\psi = \varphi(x)$ τήν καθορίζει τό σημεῖο τοῦ λόγου $\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = k$. Ἄν δηλαδή ὁ λόγος k εἶναι θετικός, ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἄν ὁ k εἶναι ἀρνητικός, ἡ συνάρτηση εἶναι γνησίως φθίνουσα, καί ἄν $k = 0$, ἡ συνάρτηση εἶναι σταθερή.

Σημείωση. Ἄν στήν (α) περίπτωση εἶναι:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \leq \varphi(x_2)$, τότε ἡ $\varphi(x)$ λέγεται **αὔξουσα.**

Ἐπίσης, ἄν στή (β) περίπτωση εἶναι:

$x_1 < x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$, τότε ἡ $\varphi(x)$ λέγεται **φθίνουσα**.

Ἄν στό σύνολο Σ (ἤ σέ κάποιο ὑποσύνολο τοῦ Σ) ἡ συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα, λέγεται **γνησίως μονότονη.** Ἄν ἡ συνάρτηση εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα λέγεται **μονότονη.**

3) Ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας μιᾶς συναρτήσεως στό R.

Ἡ λέξη **συνέχεια** χρησιμοποιεῖται πολύ συχνά στόν καθημερινό λόγο καί σημαίνει ὅτι κάτι συμβαίνει ἤ ὑπάρχει ἐξακολουθητικά καί χωρίς διακοπή. Ἡ μαθηματικοποίησή της ὅμως (καί ἀπ' αὐτή ἡ λέξη ἀσυνέχεια) ἔγινε χωρίς νά δένεται στενά μέ τήν οὐσία της. Τό ἴδιο, ἄλλωστε, ἔγινε καί μέ τίς λέξεις **σύνολο** καί **συνάρτηση.** Τό περιεχόμενο τῶν λέξεων **συνέχεια - ἀσυνέχεια,**, στά μαθηματικά, δίνεται σέ συνδυασμό μέ τήν ἔννοια τῆς συναρτήσεως καί τῶν μεταβολῶν της στό R.

Ὁρισμοί: 1) Ἡ συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$, ὁρισμένη σ' ἕνα σύνολο $\Sigma \subseteq R$, λέγεται **συνεχής** σημεῖο $x_0 \in \Sigma$, ὅταν τείνει στήν τιμή $\varphi(x_0)$, καθώς ἡ μεταβλητή x τείνει στήν τιμή x_0.

$$\text{Δηλαδή: } \left.\begin{array}{r} x \to x_0 \\ x_0 \in \Sigma \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) \to \varphi(x_0)$$

2) Ἄν ἡ συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο $x_0 \in \Sigma$, τότε λέμε ὅτι ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **συνεχής στό σύνολο Σ** ἤ πιό ἁπλά ἡ **$\varphi(x)$ εἶναι συνεχής.**

3) Μιά συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$, ὁρισμένη σ' ἕνα σύνολο $\Sigma \subseteq R$, λέγεται **ἀσυνεχής σέ κάποιο σημεῖο** $x_0 \in \Sigma$, τότε, καί μόνο τότε, ὅταν δέν εἶναι συνεχής στό x_0.

Ἰδιότητες. Παρακάτω δίνονται μερικές βασικές ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων, χωρίς ἀπόδειξη. Ἔστω $\psi = \varphi(x)$ καί $\psi = f(x)$ συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα $\Sigma \subseteq R$. Ἄν οἱ συναρτήσεις φ καί f εἶναι συνεχεῖς στό Σ, τότε: 1) τό ἄθροισμα $\varphi + f$ καί τό γινόμενο $\varphi \cdot f$ εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς στό Σ καί 2) τό πηλίκο $\frac{\varphi}{f}$, ὅπου $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \Sigma$, εἶναι συνάρτηση συνεχής στό Σ.

109. II) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ΣΤΟ R.

Α) Ἡ συνάρτηση $\varphi(x)$ εἶναι συνεχής στό R.

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\varphi(x)$ εἶναι τό σύνολο R. Ἔστω $x_0 \in R$ μιά τιμή τῆς μεταβλητῆς x καί $\varphi(x_0) = \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma$ ἡ ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως. Παίρνουμε καί τήν τιμή $x_0 + \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$ καί ὅσο θέλουμε μικρός. Τότε ἡ ἀντίστοιχη τιμή τῆς συναρτήσεως εἶναι:

$$\varphi(x_0+\varepsilon) = \alpha(x_0 + \varepsilon)^2 + \beta(x_0+\varepsilon) + \gamma$$

Σχηματίζουμε τή διαφορά

$$\varphi(x_0+\varepsilon) - \varphi(x_0) = \alpha(x_0 + \varepsilon)^2 + \beta(x_0 + \varepsilon) + \gamma - (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma) =$$
$$= 2\alpha x_0\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon$$

Κάθε ὅρος τοῦ β' μέλους ἔχει ἀπόλυτη τιμή ὅσο θέλουμε μικρή, γιατί ε εἶναι ἀριθμός ὅσο θέλουμε μικρός. Ἄρα ἡ διαφορά $\varphi(x_0+\varepsilon) - \varphi(x_0)$ μπορεῖ νά γίνει καί νά μείνει ἀπολύτως μικρότερη ἀπό κάθε ἀριθμό $\varepsilon' > 0$ ὅσο θέλουμε μικρό, ὁπότε: $\varphi(x_0 + \varepsilon) \to \varphi(x_0)$. Καί ἐπειδή $x_0+\varepsilon \to x_0$, γιατί $\varepsilon > 0$ καί ὅσο θέλουμε μικρός, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχής στήν τιμή x_0. Ἡ τιμή x_0 εἶναι ὁποιαδήποτε ἀπό τό σύνολο R καί ἑπομένως ἡ συνάρτηση $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχής στό R.

Β) Μεταβολές τῆς $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ στό R

Ἔστω $x_1, x_2 \in R$ $(x_1 < x_2)$ δύο τιμές τῆς μεταβλητῆς x καί $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως. Σχηματίζουμε τό λόγο $k = \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2} =$

$$= \frac{\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma - \alpha x_2^2 - \beta x_2 - \gamma}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1^2 - x_2^2) + \beta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1 + x_2) + \beta =$$
$$= \alpha\left(x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Ἡ τιμή $-\frac{\beta}{2\alpha}$ διαμερίζει τό σύνολο R στά ὑποσύνολα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

Ἐλέγχοντας τό σημεῖο τοῦ λόγου k διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

α) Ἄν $x \in \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$, δηλαδή $x_1 < x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 < -\frac{\beta}{2\alpha} \\ x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha} < 0, \text{ ὁπότε}$$

μέ $\alpha > 0$ ἔχουμε $k < 0$ καί ἄρα ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **γνησίως φθίνουσα**

καί μέ $\alpha < 0$ ἔχουμε $k > 0$ καί ἄρα ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **γνησίως αὔξουσα.**

β) Ἄν $x \in \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$, δηλαδή $-\frac{\beta}{2\alpha} \leq x_1 < x_2$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \geq -\frac{\beta}{2\alpha} \\ x_2 > -\frac{\beta}{2\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 > -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha} > 0, \text{ ὁπότε}$$

μέ $\alpha > 0$ ἔχουμε $k > 0$ καί ἄρα ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **γνησίως αὔξουσα**
καί μέ $\alpha < 0$ ἔχουμε $k < 0$ καί ἄρα ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **γνησίως φθίνουσα.**

Ὥστε **ἡ συνάρτηση $\varphi(x)$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R : 1) ἄν $\alpha > 0$, εἶναι γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.** Δηλαδή ἀλλάζει φορά μεταβολῆς καί ἐπειδή ἀπό φθίνουσα γίνεται αὔξουσα, διέρχεται ἀπό μιά ἐλάχιστη τιμή πού λέγεται **ἐλάχιστο (minimum)** τῆς **συναρτήσεως** καὶ **2) ἄν $\alpha < 0$, εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.** Δηλαδή ἀλλάζει φορά μεταβολῆς καί, ἐπειδή ἀπό αὔξουσα γίνεται φθίνουσα, διέρχεται ἀπό μιά μέγιστη τιμή πού λέγεται **μέγιστο (maximum)** τῆς **συναρτήσεως.**

Γ) Μέγιστο ἤ ἐλάχιστο τῆς $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ στό R.

Τό μέγιστο ἤ τό ἐλάχιστο τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$ εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή

$$\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Δηλαδή: **1) ἄν $\alpha > 0$, ἡ τιμή $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ εἶναι τό ἐλάχιστο τῆς $\varphi(x)$ καί**

2) ἄν $\alpha < 0$, ἡ τιμή $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ εἶναι τό μέγιστο τῆς $\varphi(x)$.

Σημείωση: Τήν ἐξέταση τῆς μεταβολῆς τῆς $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μποροῦμε νά τήν κάνουμε καί ἀπό τή μορφή $\varphi(x) \equiv \alpha\left\{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right\}$.

Ἔτσι ἔχουμε:

1) Ἄν $\alpha > 0$, τότε, ὅταν $x \rightarrow \pm\infty \Rightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \rightarrow +\infty \Rightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 +$
$+ \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \rightarrow +\infty \Rightarrow \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] \rightarrow +\infty$. Ἐπειδή ἡ συνάρτηση εἶναι συνεχής, ὅταν ὁ x αὐξάνει ἀπό $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$ τό $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἐλαττώνεται συνεχῶς ἀπό τό $+\infty$ (μέ θετικές τιμές) καί γιά $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται 0, ὁπότε $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Ἔπειτα, ὅταν ὁ x αὐξάνει ἀπό $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι $+\infty$, τό $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ αὐξάνει συνεχῶς ἀπό τό 0 (μέ θετικές τιμές) καί τείνει στό $+\infty$, ὁπότε καί ἡ τιμή τῆς $\varphi(x)$ αὐξάνει συνεχῶς ἀπό τήν τιμή $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τείνοντας στό $+\infty$.

2) Ἄν $\alpha < 0$, ἀποδεικνύουμε ὁμοίως ὅτι, ὅταν ὁ x αὐξάνει ἀπό $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ τιμή τῆς $\varphi(x)$ αὐξάνει συνεχῶς ἀπό $-\infty$ μέχρι τήν τιμή $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καί ὅταν ὁ x αὐξάνει ἀπό $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι $+\infty$, ἡ τιμή τῆς $\varphi(x)$ ἐλαττώνεται συνεχῶς ἀπό τήν τιμή $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τείνοντας στό $-\infty$.

Τά παραπάνω συνοψίζονται στόν ἀκόλουθο πίνακα:

Πίνακας μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

	x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha > 0$	$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(4\alpha\gamma - \beta^2) / 4\alpha$ ἐλάχιστο	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha < 0$	$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$(4\alpha\gamma - \beta^2) / 4\alpha$ μέγιστο	$\searrow$	$-\infty$

Παραδείγματα: α) Τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv 3x^2 - 2x + 3$ ἔχει ἕνα ἐλάχιστο γιά $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$, γιατί $\alpha = 3 > 0$, πού εἶναι

$$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{4\cdot 3\cdot 3 - (-2)^2}{4\cdot 3} = \frac{8}{3}$$

β) Τό τριώνυμο $f(x) \equiv -x^2 - 2x + 2$ ἔχει ἕνα μέγιστο γιά

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2(-1)} = -1, \text{ γιατί } \alpha = -1 < 0.$$

Αὐτό εἶναι $\varphi_{(-1)} = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

351) Νά βρεθεῖ τό μέγιστο ἤ ἐλάχιστο τῶν συναρτήσεων:

1) $\varphi_1(x) \equiv 3x^2 - 2x + 4, \quad \varphi_2(x) \equiv x^2 - 7x - 1, \quad \varphi_3(x) \equiv x^2 - 7x, \quad \varphi_4(x) \equiv 5x^2 - 4$

2) $\sigma_1(x) \equiv -x^2 - 3x + 1, \quad \sigma_2(x) \equiv 2 - (x-1)^2, \quad \sigma_3(x) \equiv -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}(x+2)^2$

352) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ λ, ὥστε τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv (\lambda - 1)x^2 - \lambda x + \lambda$ νά ἔχει μέγιστο τόν ἀριθμό -1.

353) Νά βρεθεῖ ἡ σχέση μεταξύ τῶν α καί β, ὥστε τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv -x^2 + (\alpha + \beta)x - (\alpha - \beta)$ νά ἔχει μέγιστο τόν ἀριθμό $\alpha + \beta$.

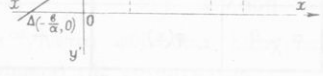
354) Μέ ποιά τιμή τοῦ x τό γινόμενο $(2\alpha - x)(2\beta + x)$ γίνεται μέγιστο καί ποιό εἶναι τό μέγιστο αὐτό ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
$\psi = \alpha x + \beta$ καὶ $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

110. Ὁρισμός : *Γραφική παράσταση ἤ γεωμετρική ἤ παραστατική καμπύλη μιᾶς συναρτήσεως $\psi = \varphi(x)$ λέγεται ἡ γραμμή, πού τά σημεῖα της ἔχουν τετμημένες τίς τιμές τοῦ συνόλου ὁρισμοῦ τῆς $\varphi(x)$ καί τεταγμένες τίς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ συνόλου τιμῶν τῆς συναρτήσεως.*

1. Γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$, ὅταν $(x, \psi) \in \mathbb{R}^2$.

Ἄν x_1 καί x_2 εἶναι δύο αὐθαίρετες τιμές τοῦ x, τότε οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς συναρτήσεως εἶναι $\psi_1 = \alpha x_1 + \beta$ καί $\psi_2 = \alpha x_2 + \beta$. Κατασκευάζουμε τά σημεῖα $A(x_1, \psi_1)$ καί $B(x_2, \psi_2)$, στό ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων $x'Ox$, $\psi'O\psi$. Ἄς θεωρήσουμε καί ἕνα τρίτο σημεῖο $M(x_0, \psi_0 = \alpha x_0 + \beta)$.



Σχ. 110.1

Ἀπό τίς

$$\psi_0 = \alpha x_0 + \beta$$
$$\psi_1 = \alpha x_1 + \beta$$
$$\psi_2 = \alpha x_2 + \beta$$

μέ ἀφαίρεση κατά μέλη ἔχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0 - \psi_1 &= \alpha(x_0 - x_1) \\ \psi_0 - \psi_2 &= \alpha(x_0 - x_2) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \frac{\psi_0 - \psi_1}{x_0 - x_1} = \frac{\psi_0 - \psi_2}{x_0 - x_2} = \alpha$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας αὐτῆς εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}(x_0 - x_1, \psi_0 - \psi_1)$ καί $\overrightarrow{MB}(x_0 - x_2, \psi_0 - \psi_2)$ καί οἱ λόγοι $\frac{\psi_0 - \psi_1}{x_0 - x_1}, \frac{\psi_0 - \psi_2}{x_0 - x_2}$ εἶναι οἱ συντελεστές διευθύνσεώς τους ἀντιστοίχως.

Ἄρα τά διανύσματα ἔχουν συντελεστές διευθύνσεως ἴσους καί ἑπομένως εἶναι συγγραμμικά. Δηλαδή τό $M(x_0, \psi_0)$ εἶναι σημεῖο τῆς εὐθείας AB καί ἐπειδή πάρθηκε τυχαῖα, ἕπεται ὅτι κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας AB εἶναι σημεῖο τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$.

Ὥστε ἡ γραφική παράσταση τῆς $\psi = \alpha x + \beta$ εἶναι εὐθεία γραμμή μέ συν-

τελεστή διευθύνσεως τό συντελεστή διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, πού εἶναι ὁ α, γι' αὐτό καί λέγεται ἡ ψ = αx + β γραμμική συνάρτηση.

Ἡ συνάρτηση μέ $x = 0$ δίνει $\psi = \beta$ καί μέ $\psi = 0$ δίνει $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ ὁπότε τά σημεῖα Γ(0, β) καί $\Delta\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ εἶναι τά σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας $\psi = \alpha x + \beta$ μέ τούς ἄξονες ψ'Οψ καί x'Οx ἀντιστοίχως. Ἡ τεταγμένη β τοῦ σημείου Γ καί ἡ τετμημένη $-\frac{\beta}{\alpha}$ τοῦ Δ λέγονται, ἀντιστοίχως, **τεταγμένη ἐπί τήν ἀρχή** καί **τετμημένη ἐπί τήν ἀρχή** καί **συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή**, ὅταν τίς θεωροῦμε μαζί.

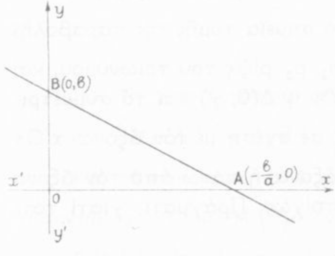
Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x + \beta$ μέ $\beta = 0$, δηλαδή τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x$, εἶναι εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή ο τῶν ἀξόνων, γιατί μέ $x = 0$ εἶναι καί $\psi = 0$.

Ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x + \beta$, ὅταν $\alpha = 0$, δηλαδή τῆς σταθερῆς συναρτ. $\psi = \beta$, εἶναι εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα x'Οx, γιατί γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$ ἡ τιμή τῆς ψ εἶναι πάντοτε β.

Κατασκευή τῆς εὐθείας ψ = αx + β

Μιά εὐθεία ὁρίζεται μέ δυό μόνο σημεῖα. Τά χαρακτηριστικότερα γιά τήν κατασκευή τῆς εὐθείας $\psi = \alpha x + \beta$ εἶναι τά σημεῖα τῆς τομῆς της μέ τούς ἄξονες. Ἀρκεῖ λοιπόν νά βροῦμε τίς συντεταγμένες ἐπί τήν ἀρχή. Ἔτσι τά σημεῖα $A\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ καί Β(0, β) ἀρκοῦν γιά νά ὁρίσουν τήν εὐθεία ΑΒ, πού εἶναι ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτησ. $\psi = \alpha x + \beta$.

Σημ. Ἄν ἡ εὐθεία διέρχεται ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων ($\psi = \alpha x$), τότε γιά τήν κατασκευή της ἀρκεῖ ἕνα μόνο σημεῖο.



Σχ. 110.2

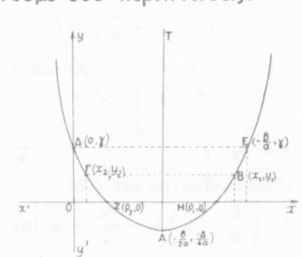
2. Γραφική παράσταση τῆς συναρτ. ψ = αx² + βx + γ

Γιά νά παραστήσουμε γραφικά τή συνάρτηση $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \,|\, \mathbb{R}$ στό ὀρθογώνιο σύστημα τῶν ἀξόνων x'Οψ, ψ'Οψ, πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τόν πίνακα μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Ἔτσι διακρίνουμε δυό περιπτώσεις:

α) **Ἔστω α > 0**. Ἡ συνάρτηση γιά $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ παίρνει τήν ἐλάχιστη τιμή της

$$\psi = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{-\Delta}{4\alpha}$$

Ὅταν $-\infty < x < -\frac{\beta}{2\alpha}$, ἔχει πεδίο τιμῶν τό $\left(+\infty, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καί ὅταν $-\frac{\beta}{2\alpha} < x < +\infty$, ἔχει πεδίο τιμῶν τό $\left(\frac{-\Delta}{2\alpha}, +\infty\right)$



Σχ. 110.3

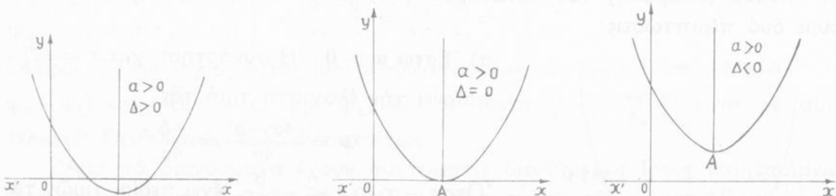
Κατασκευάζουμε λοιπόν τό σημεῖο Α $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$. Ἔπειτα παίρνουμε δυό τιμές $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} + \xi$ καί $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} - \xi$ συμμετρικές ὡς πρός τήν τιμή $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καί τίς ἀντίστοιχες τιμές ψ_1 καί ψ_2 τῆς συναρτήσεως. Εὔκολα ἀποδεικνύουμε ὅτι $\psi_1 = \psi_2$. Ἄρα τά σημεῖα $B(x_1, \psi_1)$ καί $\Gamma(x_2, \psi_2)$ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεία ΑΤ, πού λέγεται ἄξονας συμμετρίας τῆς γραμμῆς $\psi = \varphi(x)$, καί συνεπῶς ἡ γραφική παράσταση τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο τμήματα ΔΓΖΑ καί ΑΗΒΕ συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας ΑΤ. Γιά τήν κατασκευή λοιπόν μέ προσέγγιση τῆς γραμμῆς $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἀρκεῖ νά βροῦμε ὅσο μποροῦμε περισσότερα σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας, γιατί ἡ γραμμή εἶναι καμπύλη καί κανένα τμῆμα της δέν εἶναι εὐθύγραμμο. Τοῦτο συνάγεται ἀπό τό ὅτι ἡ εὐθεία $\psi = Ax + B$ τέμνει τή γραμμή $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ σέ δυό τό πολύ σημεῖα, γιατί τό σύστημα πού ἀποτελοῦν ἔχει τό πολύ δυό λύσεις.

Τήν καμπύλη αὐτή τήν ὀνομάζουμε **παραβολή**, τό σημεῖο Α **κορυφή** της καί τόν ἄξονα ΑΤ **ἄξονα τῆς παραβολῆς**.

Παρατηρήσεις: 1) Τά χαρακτηριστικότερα σημεῖα τῆς καμπύλης $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι: ἡ κορυφή της Α $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ τά σημεῖα τομῆς τῆς παραβολῆς μέ τόν ἄξονα τῶν x $Z(\rho_2, 0)$ καί $H(\rho_1, 0)$, ὅπου ρ_1, ρ_2 ρίζες τοῦ τριωνύμου, καί τό σημεῖο τομῆς τῆς παραβολῆς μέ τόν ἄξονα τῶν ψ $\Delta(0, \gamma)$ καί τό συμμετρικό του $E\left(-\frac{\beta}{\alpha}, \gamma\right)$. 2) Τό σημεῖο $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ σέ σχέση μέ τόν ἄξονα x'Ox βρίσκεται ἤ κάτω ἀπό τόν ἄξονα, ἤ πάνω στόν ἄξονα, ἤ πάνω ἀπό τόν ἄξονα αὐτό, ἄν εἶναι $\Delta > 0$, ἤ $\Delta = 0$, ἤ $\Delta < 0$ ἀντιστοίχως. Πράγματι, γιατί τότε θά εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} < 0, \quad \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} = 0, \quad \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} > 0.$$

Αὐτό δείχνεται μέ τά παρακάτω σχήματα.



Σχ. 110.4

β) Ἔστω $\alpha < 0$. Τή γραφική παράσταση τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μποροῦμε νά τήν κατασκευάσουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο.

Ἡ ἐργασία αὐτή νά γίνει ἀπό τούς μαθητές.

Παράδειγμα: Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῆς $\psi = x^2 - 5x + 6$.

Κατασκευή: Ἐπειδή $\alpha = 1 > 0$, ἡ συνάρτηση ἔχει ἐλάχιστο. Βρίσκουμε τίς συντεταγμένες τῶν χαρακτηριστικῶν σημείων τῆς καμπύλης.

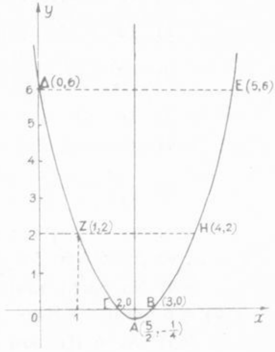
Κορυφή: $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Σημεῖα τομῆς μέ τόν $x'Ox$: $\Gamma(2, 0)$ καί $B(3, 0)$.

Σημεῖο τομῆς μέ τόν $\psi'O\psi$: $\Delta(0, 6)$ καί τό συμμετρικό του $E(5, 6)$.

Δύο ἄλλα συμμετρικά σημεῖα: $Z(1, 2)$ καί $H(4, 2)$.

Μέ τά σημεῖα αὐτά μποροῦμε νά κατασκευάσουμε τήν καμπύλη μέ προσέγγιση. Τήν κατασκευή αὐτή δείχνει τό σχῆμα (110.5).



Σχ. 110.5

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

355) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

$$\psi = \frac{2}{3}x - 2, \quad \psi = -2 - \frac{1}{2}x, \quad x = \pm\psi, \quad \psi = \alpha x + 2, \quad \psi = \pm x + \beta$$

356) Μέ ποιές τιμές τῶν λ καί μ οἱ εὐθεῖες $\psi = (\lambda - 1)x + 2\mu$ καί $\psi = -(2 + \lambda)x + 5$ τέμνονται στό σημεῖο $M\left(\frac{3}{7}, \frac{20}{7}\right)$;

357) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν εὐθειῶν $\psi = 2x + 1$, $\psi = -x + 3$, $\psi = x + \frac{5}{3}$. Τί παρατηρεῖτε; Δικαιολογῆστε τήν παρατήρησή σας.

358) Νά γίνει ἡ γραφική παράσταση τῶν συναρτήσεων:

$$\psi = -\frac{x^2}{3} + 2x - 2, \qquad \psi = -\frac{x^2}{2} + 4, \qquad \psi = x^2 + x + 1$$

$$\psi = 2x^2 + x, \qquad \psi = x^2 - x - 6, \qquad \psi = -x^2 + x - 2$$

359) Γιά ποιά τιμή τοῦ α τό μέγιστο τῆς συναρτήσεως $\psi = -\frac{x^2}{3} + 2x - 2\alpha$ εἶναι ὁ ἀριθμός 1; Ἔπειτα νά παραστήσετε γραφικά τή συνάρτηση.

360) Νά ἐπιλυθοῦν γραφικά τά συστήματα καί νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικές λύσεις τους:

$$\begin{cases} \psi = -2x - 1 \\ \psi = x^2 - 2x - 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi = x^2 - x + 1 \\ \psi = x^2 + x \end{cases}$$

361) Νά κατασκευασθοῦν οἱ γραφικές παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $\psi = -x^2 + 2x + 3$ καί $\psi = \frac{x^2}{2} - 4\left(x - \frac{3}{4}\right)$. Ἔπειτα νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες τιμές τοῦ α, ὥστε ἡ εὐθεία $\psi = \alpha$ νά τέμνει τίς καμπύλες.

362) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+3=0,\qquad \alpha,\beta,\gamma\in R$

2) $\dfrac{(\alpha-x)^3-(\beta-x)^3}{(x-\alpha)^2+(\beta-x)^2}=\alpha-\beta,\qquad \alpha,\beta\in R$

3) $(\kappa-x)^3+(x-\lambda)^3=(\kappa-\lambda)^3\qquad \kappa,\lambda\in R$

4) $(x-\alpha+2\beta)^3-(x-2\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^3,\qquad \alpha,\beta\in R$

5) $\dfrac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}-\dfrac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1\qquad \alpha\neq\beta\neq\gamma\in R$

363) Ἄν $\alpha,\beta,\gamma\in R$ καί ἡ ἐξίσωση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει ρίζα τό μιγαδικό $\mu+\nu i$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα τῆς $f(x)=0$ εἶναι ὁ μιγαδικός $\mu-\nu i$.

364) Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως, $3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=0\quad \alpha,\beta,\gamma\in R$.

365) Ἄν ἡ ἐξίσωση $f(x)=x^2+\alpha x+\beta=0$ ἔχει ρίζες πραγματικές καί ἄνισες, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τίς ρίζες τῆς $f(x)+\lambda(2x+\alpha)=0\ \forall\ \lambda\in R$.

366) Νά προσδιορισθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\beta^2x^2+(\gamma^2+\beta^2-\alpha^2)x+\gamma^2=0$, ἄν α,β,γ εἶναι μήκη τῶν πλευρῶν τυχαίου τριγώνου.

367) Ἄν x_1, x_2 εἶναι ρίζες τῆς $x^2+\alpha x+\beta=0$ νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β' βαθμοῦ, μέ ρίζες τίς x_1^2, x_2^2 καί ἔπειτα νά βρεθεῖ σχέση μεταξύ τῶν α καί β, ὥστε ἡ νέα ἐξίσωση νά ἔχει διπλή ρίζα.

368) Ἄν x_1, x_2 εἶναι ρίζες τοῦ τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καί $\dfrac{S}{2}=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $f\left(\dfrac{S}{2}+k\right)=f\left(\dfrac{S}{2}-k\right)$, ὅπου k τυχαῖος πραγματικός ἀριθμός.

369) Νά προσδιορισθοῦν οἱ k καί λ, ὥστε οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $x^2+kx+\lambda=0$ νά εἶναι οἱ ἀριθμοί k καί λ.

370) Ἄν x_1, x_2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξισ. $\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1+\lambda(\alpha_2x^2+\beta_2x+\gamma_2)=0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει σχέση μεταξύ τῶν ριζῶν x_1, x_2 ἀνεξάρτητη ἀπό τό λ καί νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ λ, ὥστε ἡ ἐξίσωση νά ἔχει διπλή ρίζα.

371) Δίνεται ἡ ἐξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μέ ρίζες x_1, x_2. Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση μέ ρίζες $x_1+\lambda$, $x_2+\lambda$ καί ἔπειτα νά προσδιορισθεῖ ὁ λ, ὥστε αὐτή ἡ ἐξίσωση νά πάρει τίς μορφές 1) $Ax^2+\Gamma=0$ καί 2) $Ax^2+Bx=0$.

372) Νά ὁρισθοῦν τά κ καί λ ὥστε, ἄν x_1, x_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισ. $x^2+\kappa x+\lambda=0$, τότε οἱ ἀριθμοί x_1+1, x_2+1 νά εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐξισ. $x^2-\kappa^2x+\kappa\lambda=0$.

373) Ἄν $\alpha,\beta,\gamma\in Q$ καί ἡ ἐξίσωση $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει ρίζα τόν ἀσύμμετρο $\kappa+\sqrt{\lambda}$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα τῆς $f(x)=0$ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος $\kappa-\sqrt{\lambda}$, ὅπου $\kappa,\lambda\in Q$ καί λ μή τέλειο τετράγωνο ρητοῦ.

374) Ἄν οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων $x^2+2\alpha x+\beta=0$ καί $x^2+2Ax+B=0$ εἶναι ἀντίστοιχα (x_1, x_2) καί (x_1+k, x_2+k), νά δειχθεῖ ὅτι: $A^2-B=\alpha^2-\beta$.

375) Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη μεταξύ τῶν $\alpha,\beta,\gamma\in R$, ὥστε τό τριώνυμο $\varphi(x)=\alpha^2x^2+(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)x+\gamma^2$ νά εἶναι τέλειο τετράγωνο.

376) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση $(\alpha+\beta)^2x^2+2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha-\beta)^2$, $\alpha,\beta\in R$ καί $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ μπορεῖ νά μετασχηματισθεῖ σέ διαφορά δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων καί ἔπειτα νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων.

377) Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ μ, μέ τίς ὁποῖες ἡ παράσταση $x^2 + (\mu\psi + 2)x + (2\psi + 3)(\psi - 1)$ μπορεῖ ν' ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο δύο ρητῶν πραγματικῶν παραγόντων πρωτοβαθμίων ὡς πρός x καί ψ.

378) Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ὥστε ἡ παράσταση $(\alpha x + \beta)^2 + (\gamma x + \delta)^2$ νά εἶναι τέλειο τετράγωνο. Ἔπειτα νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν οἱ παραστάσεις $(\alpha_1 x + \beta_1)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2)^2$ καί $(\alpha_2 x + \beta_2)^2 + (\alpha_3 x + \beta_3)^2$ εἶναι τέλεια τετράγωνα, τότε καί ἡ παράσταση $(\alpha_1 x + \beta_1)^2 + (\alpha_3 x + \beta_3)^2$ εἶναι τέλειο τετράγωνο. Τούς ἀριθμούς $\alpha_{1,2,3}$, $\beta_{1,2,3}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τούς ὑποθέτουμε πραγματικούς.

379) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό $f(x) \equiv 2x^2 - \lambda(10x - 7) - 1$ ἔχει ρίζες πραγματικές ἄνισες $\forall \lambda \in R$.

380) Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση $\varphi(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + (x - \alpha_2)(x - \alpha_3) + (x - \alpha_3)(x - \alpha_1) = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές ἄνισες, ἄν $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$.

381) Τό ἴδιο γιά τήν $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{x - \alpha_3} + \dfrac{\alpha_2 + \alpha_3}{x - \alpha_1} + \dfrac{\alpha_3 + \alpha_1}{x - \alpha_2} = 0$, ἄν $\alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \alpha_3^2$.

382) Νά σχηματισθεῖ ἐξίσωση β' βαθμοῦ μέ διπλή ρίζα τήν κοινή ρίζα τῶν δύο τριωνύμων $x^2 - \alpha x + \beta$ καί $x^2 - 8x + \alpha$.

383) Μέ ποιά συνθήκη τά τριώνυμα $x^2 + \alpha x\psi + \beta\psi^2$ καί $x^2 + \gamma x\psi + \delta\psi^2$ ἔχουν ἕναν κοινό παράγοντα πρώτου βαθμοῦ;

384) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ Δ τῆς ἐξισ. $\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 + \lambda(\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2) = 0$ εἶναι τέλειο τετράγωνο, ἄν οἱ ἐξισ. $\alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma = 0$ καί $\alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2 = 0$ ἔχουν μιά κοινή ρίζα.

385) Νά ἐπιλυθοῦν στό R οἱ ἀνισώσεις:

1) $x^2 - (3\alpha + \beta)x + 2\alpha(\alpha + \beta) < 0$,

2) $\dfrac{(x + \alpha)^2}{(x + \beta)^2} < \dfrac{\alpha^2 + x^2}{\beta^2 + x^2}$, ἄν $\alpha > \beta > 0$.

386) Μέ ποιές τιμές τοῦ λ ἡ παράσταση $(\lambda - 2)x^2 + 4x + \lambda + 1$ διατηρεῖ ὁμόσημες τιμές γιά κάθε πραγματική τιμή τοῦ x;

387) Νά βρεθεῖ τό σύνολο ὁρισμοῦ τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως $\psi = 5\sqrt{x^2 - 4x + 3 - 2\sqrt{-x^2 + 6x + 8}}$.

388) Νά βρεθεῖ μέ ποιές τιμές τοῦ $x \in R$ ἀληθεύει ἡ ἀνίσωση $x^2 - 2\alpha x + (\beta + \gamma)^2 > 0$, ἄν α, β, γ εἶναι μήκη πλευρῶν τριγώνου;

389) Τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γιά $x = 5$ ἔχει ἀλάχιστο τόν -3 καί ἡ μιά του ρίζα εἶναι ὁ ἀριθμός 2. Νά βρεῖτε τά α, β, γ.

390) Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ὥστε οἱ εὐθεῖες $\psi = \alpha_1 x + \beta_1$, $\psi = \alpha_2 x + \beta_2$, $\psi = \alpha_3 x + \beta_3$ νά διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β'ΒΑΘΜΟΥ

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

111. Ὁρισμός. *Ὀνομάζεται διτετράγωνη ἐξίσωση, μέ ἕναν ἄγνωστο, κάθε ἐξίσωση 4ου βαθμοῦ, πού ἔχει μόνο ἄρτιες δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου.*

Δηλαδή εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, ὅπου $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in R$.

Τό πρῶτο μέλος της $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ λέγεται **διτετράγωνο τριώνυμο.**

112. ΕΠΙΛΥΣΗ.

Ἡ ἐπίλυση τῆς ἐξισ. $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ γίνεται μέ τό μετασχηματισμό $x^2 = \psi$, ὁπότε προκύπτει ἡ ἐξίσωση $\alpha\psi^2 + \beta\psi + \gamma = 0$, πού λέγεται **ἐπιλύουσα** τῆς διετατράγωνης ἐξισώσεως.

Ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωση ἔχει γενικά δύο λύσεις ψ_1 καί ψ_2 πραγματικές ἤ καθαρές μιγαδικές συζυγεῖς, ὁπότε, ἄν ἐπανέλθουμε στό μετασχηματισμό $x^2 = \psi$, παίρνουμε $x^2 = \psi_1$ καί $x^2 = \psi_2$. Ἐπειδή κάθε ἀριθμός πραγματικός ἤ μιγαδικός ἔχει δύο μόνο τετραγωνικές ρίζες ἀντίθετες, γι' αὐτό ἀπό τίς ἐξισώσεις $x^2 = \psi_1$, $x^2 = \psi_2$ παίρνουμε $x = \pm\sqrt{\psi_1}$, $x = \pm\sqrt{\psi_2}$.

Ἔτσι ἔχουμε τίς λύσεις τῆς διτετράγωνης ἐξισώσεως:

$$x_1 = \sqrt{\psi_1},\ x_2 = -\sqrt{\psi_1},\ x_3 = \sqrt{\psi_2},\ x_4 = -\sqrt{\psi_2}.$$

Δηλαδή: **Οἱ ρίζες τῆς διτετράγωνης ἐξισώσεως εἶναι οἱ τετραγωνικές ρίζες τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλύουσας καί εἶναι ἀνά δύο ἀντίθετες.**

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$

Τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς διτετράγωνης ἐξισώσεως ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος καί τό σημεῖο τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλύουσάς της.

Ἔτσι ἄν χρησιμοποιήσουμε τά συμπεράσματα τοῦ πίνακα τῆς (§ 93), μποροῦμε νά συμπληρώσουμε τόν πίνακα διερευνήσεως τῆς διτετράγωνης ἐξισώσεως ὡς ἑξῆς:

Διερεύνηση τῆς ἐξισ. $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$				
Δ	P	S	Ρίζες ἐπιλύουσας	Εἶδος ριζῶν διτετράγωνης
+	+	+	$\psi_1, \psi_2 \in R^+$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$, $x_1 = -x_2$, $x_3 = -x_4$
		−	$\psi_1, \psi_2 \in R^-$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$
	−	+	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 \in R^-$	$x_1, x_2 \in R$, $x_3, x_4 \in I$
		−	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 \in R^-$	$x_1, x_2 \in R$, $x_3, x_4 \in I$
		0	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 \in R^-, \psi_1 = -\psi_2$	$x_1, x_2 \in R$, $x_3, x_4 \in I$
	0	+	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 = 0$	$x_1, x_2, x_3 = x_4 = 0 \in R$
		−	$\psi_2 \in R^-, \psi_1 = 0$	$x_3, x_4 \in I$, $x_1 = x_2 = 0$
0	+	+	$\psi_1 = \psi_2 \in R^+$	$x_1 = x_3 \in R$, $x_2 = x_4 \in R$
		−	$\psi_1 = \psi_2 \in R^-$	$x_1 = x_3 \in I$, $x_2 = x_4 \in I$
		0	$\psi_1 = \psi_2 = 0$	$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$
−			$\psi_1, \psi_2 \in (C - R)$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \in (C - R)$

Σημ. I σύνολο τῶν φανταστικῶν, C σύνολο τῶν μιγαδικῶν.

113. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΤΟΥ ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\varphi(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Ἄν ψ_1, ψ_2 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ἐπιλύουσας $\alpha\psi^2 + \beta\psi + \gamma$, τότε $\alpha\psi^2 + \beta\psi + \gamma \equiv \alpha(\psi - \psi_1)(\psi - \psi_2)$. Καί ἀπό τήν $x^2 = \psi \Leftrightarrow \psi = x^2$ προκύπτει: $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma \equiv \alpha(x^2 - \psi_1)(x^2 - \psi_2) \equiv$

$$\equiv \alpha(x + \sqrt{\psi_1})(x - \sqrt{\psi_1})(x + \sqrt{\psi_2})(x - \sqrt{\psi_2}) \equiv$$

$$\equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Ἀπό τό μετασχηματισμό αὐτό ἕπεται ὅτι μποροῦμε νά βροῦμε τό διτετράγωνο τριώνυμο, ὅταν γνωρίζουμε τίς ρίζες του.

Ἐπίσης μποροῦμε νά πάρουμε ἄλλες μορφές τοῦ διτετράγωνου τριωνύμου, οἱ ὁποῖες ἐξετάζονται στίς ἀσκήσεις.

Παραδείγματα : 1) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $36x^4 + 11x^2 - 5 = 0$.

Ἐπίλυση : Ὁ μετασχηματισμός $x^2 = \psi$ δίνει τήν ἐπιλύουσα $36\psi^2 + 11\psi - 5 = 0$. Αὐτή ἔχει ρίζες $\psi_1 = \frac{1}{4}$, $\psi_2 = -\frac{5}{9}$

Οἱ ρίζες τῆς διτετράγωνης βρίσκονται ἀπό τίς ἐξισώσεις: $x^2 = \frac{1}{4}$ ὁπότε $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ καί $x^2 = -\frac{5}{9}$, ὁπότε $x_3 = i\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x_4 = -i\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$.

Λύση: Ἔχουμε γιά $x^2 = \psi$ τήν ἐπιλύουσα $2\psi^2 - 5\psi - 3 = 0$, πού δίνει:

$$\Delta = 25 + 24 = 49 > 0,\ P = -\frac{3}{2} < 0,\ S = \frac{5}{2} > 0$$

Ἄρα ἡ ἐπιλύουσα ἔχει ρίζες πραγματικές, ἑτερόσημες μέ ἀπόλυτα μεγαλύτερη τή θετική. Καί συνεπῶς ἡ διτετράγωνη ἔχει (ἀπό τή θετική) δύο ρίζες πραγματικές ἀντίθετες καί (ἀπό τήν ἀρνητική) δύο ρίζες φανταστικές ἀντίθετες.

3) Νά μετασχηματισθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων τό τριώνυμο

$$\varphi(x) \equiv x^4 - \alpha x^2(\alpha - 1) - \alpha^3,\ \alpha > 0$$

Λύση: Παίρνουμε τήν ἐπιλύουσα $\psi^2 - \alpha\psi(\alpha - 1) - \alpha^3$, πού ἔχει ρίζες $\psi_1 = \alpha^2$, $\psi_2 = -\alpha$.

Ἄρα οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι: $x^2 = \alpha^2$, ὁπότε $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$

καί $x^2 = -\alpha$, ὁπότε $x_3 = i\sqrt{\alpha}$, $x_4 = -i\sqrt{\alpha}$.

Ἄρα ἔχουμε:

$$\varphi(x) \equiv x^4 - \alpha x^2(\alpha - 1) - \alpha^3 \equiv (x - \alpha)(x + \alpha)(x - i\sqrt{\alpha})(x + i\sqrt{\alpha})$$
$$\equiv (x - \alpha)(x + \alpha)(x^2 + \alpha)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

391) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$, $\quad 9x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2 + 2} = \dfrac{x}{2}$, $\quad \dfrac{2(x^2 + 2)}{5} = \dfrac{(x^2 - 1)(x^2 - 2) + 6}{x^2 + 1}$

392) Νά βρεθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων:

1) $2x^4 - 5x^2 - 7 = 0$, 2) $11x^4 + 13x^2 + 2 = 0$, 3) $2x^4 + 19x^2 + 9 = 0$

393) Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενο παραγόντων τά τριώνυμα:

1) $\varphi_1(x) \equiv x^4 + 13x^2 - 48$, 2) $\varphi_2(x) \equiv 36x^4 - 13x^2 + 1$,

3) $\varphi_3(x) \equiv \alpha^2\beta^2\gamma^2x^4 + x^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - 1$

394) Νά σχηματισθεῖ διτετράγωνη ἐξίσωση μέ ρίζες

1) $\pm 3, \pm\dfrac{1}{2}$, 2) $\pm\sqrt{3}, \pm i$, 3) $\pm\dfrac{i}{2}, \pm 2i\sqrt{2}$, 4) $\pm\dfrac{\alpha}{2}, \pm\dfrac{\alpha + \beta}{2}$

Ὁμάδα β'

395) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$x^2(\alpha x^2 - 1) = \alpha\beta^2(\alpha x^2 - 1)$, $\quad \dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{\alpha}{\beta}(x^2 - 1)$

396) Νά διερευνηθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $(\lambda - 1)x^4 - 4x^2 + \lambda + 2 = 0$, 2) $(\mu + 1)x^4 - 2(\mu - 1)x^2 + 3(\mu - 1) = 0$

397) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, μετασχηματίζεται σέ γινόμενο δύο δευτεροβάθμιων παραγόντων τοῦ x.

398) Ἄν $\dfrac{\gamma}{\alpha} < 0$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ μετασχηματίζεται σέ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων καί ἑνός δευτεροβάθμιου παράγοντα ὡς πρός x.

114. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΠΛΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΣΕ ΑΠΛΑ.

Οἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, ὅπου $A, B \in Q^+$, B μή τέλειο τετράγωνο ρητοῦ καί $A > \sqrt{B} \Rightarrow A^2 - B > 0$, λέγονται διπλά τετραγωνικά ριζικά. Τά A καί B μπορεῖ νά εἶναι καί ρητές παραστάσεις.

Τέτοιες παραστάσεις συναντοῦμε στίς λύσεις τῆς διτετράγωνης ἐξισώσεως, ὅταν ἡ διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ τῆς ἐπιλύουσάς της δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο ρητῆς παραστάσεως τῶν συντελεστῶν α, β, γ, ἄν τούς ὑποθέσουμε ρητούς. Πράγματι, στίς λύσεις τῆς διτετράγωνης ἐξισώσεως

$x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$, ἄν θέσουμε $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = A$ καί $\dfrac{2}{4\alpha^2} = B$,

ἔχουμε $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

Οἱ δυσκολίες πού δημιουργοῦν τά διπλά ριζικά, ἐξαλείφονται σέ ὁρισμένες περιπτώσεις μέ τό μετασχηματισμό τῶν ριζικῶν σέ ἁπλά.

Ἔτσι, ζητοῦμε δύο ρητούς θετικούς ἀριθμούς x καί ψ τέτοιους ὥστε: $\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{x}\pm\sqrt{\psi}$, ἀπό τούς ὁποίους ἕνας τουλάχιστον νά εἶναι μή τέλειο τετράγωνο ρητοῦ.

Γιά τόν ὑπολογισμό τῶν x καί ψ ἐργαζόμσατε ὡς ἑξῆς:

Ἀπό τήν $\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x}+\sqrt{\psi}$, μέ ὕψωση στό τετράγωνο, $A+\sqrt{B} = x+\psi+$ $+\,2\sqrt{x\psi}$.

Ἐπειδή $\sqrt{B}$ καί $\sqrt{x\psi}$ ἄρρητοι καί A καί $x+\psi$ ρητοί, ἕπεται (§ 63):

$$\left.\begin{matrix} A = x+\psi \\ \sqrt{B} = 2\sqrt{x\psi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A-\sqrt{B} = x+\psi-2\sqrt{x\psi} \Rightarrow A-\sqrt{B} = (\sqrt{x}-\sqrt{\psi})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{A-\sqrt{B}} = |\sqrt{x}-\sqrt{\psi}|$$

Ὥστε ἔχουμε γιά τίς δυό περιπτώσεις $x+\psi = A$, $\sqrt{B} = 2\sqrt{x\psi}$,

$$\text{ἤ}\quad x+\psi = A,\quad 4x\psi = B \quad\text{ἤ}\quad x+\psi = A,\quad x\psi = \frac{B}{4}$$

Σχηματίζουμε τήν ἐξίσωση $\omega^2 - A\omega + \dfrac{B}{4} = 0$ μέ ρίζες τούς ἀριθμούς x καί ψ.

Οἱ λύσεις αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$x = \frac{A+\sqrt{A^2-\beta}}{2},\quad \psi = \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$$

Γιά νά εἶναι οἱ x καί ψ ρητοί, πρέπει $A^2 - B = \Gamma^2$, $(\Gamma \in Q)$,

ἄρα $x = \dfrac{A+|\Gamma|}{2}$, $\psi = \dfrac{A-|\Gamma|}{2}$

Ἀντιστρόφως. Ἄν x, $\psi \in Q^+$ καὶ $x = \dfrac{A+|\Gamma|}{2}$, $\psi = \dfrac{A-|\Gamma|}{2}$, τότε:

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{\psi})^2 = x+\psi\pm2\sqrt{x\psi} = \frac{A+|\Gamma|}{2}+\frac{A-|\Gamma|}{2}\pm2\sqrt{\frac{A^2-\Gamma^2}{4}} = A\pm\sqrt{B}.$$

Ἄρα $|\sqrt{x}\pm\sqrt{\psi}| = \sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

Ὥστε : Γιά νά ὑπάρχουν ρητοί θετικοί ἀριθμοί x καί ψ, μέ τόν ἕνα τουλάχιστο μή τέλειο τετράγωνο ρητοῦ, καί τέτοιοι, ὥστε $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{\psi}$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $A, B \in Q^+$, $A^2 - B = \Gamma^2$, $(\Gamma \in Q)$.

Ὁ μετασχηματισμός τότε τοῦ διπλοῦ ριζικοῦ μπορεῖ νά γίνει σύμφωνα μέ τόν τύπο :

$$\boxed{\pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \pm\left(\sqrt{\frac{A+|\Gamma|}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-|\Gamma|}{2}}\right)}$$

Παραδείγματα: Νά μετασχηματισθεῖ καθένα ἀπό τά διπλά ριζικά σέ ἁπλά:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.$$

Λύση: α) Ἐπειδή: $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{8}}$ καί $3^2 - 8 = 1 = 1^2$, ἔχουμε:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} + 1$$

β) Ἔχουμε $\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} = \sqrt{2\alpha+\sqrt{4(\alpha^2-\beta^2)}}$ καί ἐπειδή $A = 2\alpha$, $B = 4(\alpha^2 - \beta^2)$, ἕπεται $A^2 - B = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - \beta^2) = 4\beta^2 = \Gamma^2$.

Ἄρα $\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} = \sqrt{\frac{2\alpha+2\beta}{2}} + \sqrt{\frac{2\alpha-2\beta}{2}} = \sqrt{\alpha+\beta} + \sqrt{\alpha-\beta}.$

Ὑποθέσαμε $\alpha \geq \beta > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α′

399) Νά μετασχηματισθοῦν σέ ἁπλά ριζικά οἱ παραστάσεις:

1) $\sqrt{7+\sqrt{13}}$, $\sqrt{8-\sqrt{15}}$, $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, $\sqrt{14-2\sqrt{13}}$,

2) $\sqrt{11-2\sqrt{30}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}}$, $\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + \sqrt{3+8\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$

Ὁμάδα β′

400) Νά μετασχηματισθοῦν σέ ἁπλά ριζικά οἱ παραστάσεις:

1) $\sqrt{\alpha+2\sqrt{\alpha-1}}$, $\sqrt{\alpha^2+3-2\alpha\sqrt{3}}$, $\sqrt{\alpha+\beta-\gamma-2\sqrt{(\beta-\gamma)\alpha}}$

401) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τοῦ λ, ὥστε ἡ παράσταση, $\forall\, x > 4$, $\psi = \sqrt{x+\lambda\sqrt{x-4}}$ νά μπορεῖ νά τραπεῖ σέ ἁπλά ριζικά.

402) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση $\psi = \sqrt{x+3\sqrt{2x-9}} - \sqrt{x-3\sqrt{2x-9}}$ ἰσοῦται μέ $\sqrt{2(2x-9)}$, ἄν $4{,}5 \leq x \leq 9$ καί εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό x, ἄν $x > 9$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (1)

§ 115. **Ὁρισμός.** *Ὅταν μιά ἐξίσωση $\varphi(x) = 0$ μέ ρίζα τόν ἀριθμό $\rho \neq \pm 1$, ἔχει ρίζα καί τόν ἀριθμό $\frac{1}{\rho}$, ὅπου $\rho \neq 0$, τότε λέγεται* **ἀντίστροφη.**

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, μιά ἀντίστροφη ἐξίσωση δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀντί γιά x τεθεῖ τό $\frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$.

Π.χ. ἡ ἐξίσωση $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ εἶναι ἀντίστροφη 3ου βαθμοῦ, γιατί ἄν ἀντί γιά x τεθεῖ σ' αὐτή $\frac{1}{x}$, βρίσκουμε:

$\alpha \cdot \frac{1}{x^3} + \beta \cdot \frac{1}{x^2} + \beta \cdot \frac{1}{x} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta x + \beta x^2 + \alpha x^3 = 0$, πού εἶναι ἡ ἴδια μέ τήν $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι μιά ἐξίσωση $\varphi(x) = 0$ ἀντίστροφη, εἶναι οἱ συντελεστές τῶν ὅρων, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τούς ἀκραίους ὅρους, νά εἶναι ἴσοι ἤ ἀντίθετοι.

Εἰδικότερα, ἄν ἡ ἀντίστροφη ἐξίσωση εἶναι πλήρης ἄρτιου βαθμοῦ, ὁπότε δέν ἔχει ρίζες τούς ἀριθμούς ± 1, τότε οἱ συντελεστές τῶν ὅρων, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τούς ἀκραίους ὅρους, εἶναι ἴσοι.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω οἱ ἀντίστροφες ἐξισώσεις β' μέχρι καί ε' βαθμοῦ εἶναι :

$\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$	$\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$
$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$	$\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$
$\alpha x^4 + \beta x^3 + \beta x + \alpha = 0$	$\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$
$\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$	$\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0$

Ἡ λύση τῶν ἀντίστροφων ἐξισώσεων 3ου, 4ου καί 5ου βαθμοῦ μπορεῖ γενικά νά ἀναχθεῖ στή λύση δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως.

116. ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

1. Ἐπίλυση ἀντίστροφων ἐξισώσεων 3ου καί 4ου βαθμοῦ χωρίς τό μεσαῖο ὅρο.

Τό πρῶτο μέλος τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν μετασχηματίζεται εὔκολα σέ γινόμενο παραγόντων.

α) Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $(\alpha, \beta \in R)$

Ἔχουμε: $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(x^3 + 1) + \beta x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x + 1)[\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha] = 0$. Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x + 1 = 0$ καί $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$, ὁπότε ἔχουμε $x = -1$ καί ἄλλες δύο ρίζες ἀντίστροφες ἀπό τήν ἀντίστροφη ἐξίσωση $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$.

---

(1) Ἡ ἔννοια τῆς ἀντίστροφης ἐξισώσεως ὀφείλεται στόν De Moivre (1667–1754).

β) Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$ $(\alpha, \beta \in R)$.

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἔχουμε $(x-1)[\alpha x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha] = 0$, ὁπότε παίρνουμε $x = 1$ καί ἄλλες δύο ρίζες ἀντίστροφες ἀπό τή δευτεροβάθμια.

γ) Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ $(\alpha, \beta \in R)$.

Ἔχουμε: $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(x^4-1) + \beta x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x^2-1)[\alpha x^2 + \beta x + \alpha] = 0$. Αὐτή ἰσοδυναμεῖ μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x^2 - 1 = 0$ καί $\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$, ὁπότε ἔχουμε $x = \pm 1$ καί δύο ἄλλες ρίζες ἀντίστροφες.

Σημ. Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^4 + \beta x^3 + \beta x + \alpha = 0$ ἐπιλύεται, ὅπως ἡ πλήρης 4ου βαθμοῦ $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ παρακάτω.

2. Ἐπίλυση ἀντίστροφων ἐξισ. 4ου καί 5ου βαθμοῦ.

α) Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$.

Διαιροῦμε τά δύο μέλη μέ x^2, $(x \neq 0)$, ὁπότε ἔχουμε $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \beta\left(x + \frac{1}{x}\right)$ $+ \gamma = 0$. Ἐκτελοῦμε τό μετασχηματισμό $x + \frac{1}{x} = \omega$, ὁπότε $x^2 + \frac{1}{x^2} =$ $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \omega^2 - 2$. Ἔτσι ἔχουμε $\alpha(\omega^2 - 2) + \beta\omega + \gamma = 0 \Leftrightarrow$ $\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma - 2\alpha = 0$. Αὐτή λέγεται **ἐπιλύουσα** τῆς ἀντίστροφης ἐξισώσεως καί ἔχει γενικά δύο ρίζες ω_1, ω_2. Ἄν ἐπανέλθουμε στό μετασχηματισμό $x + \frac{1}{x} = \omega$, παίρνουμε τίς ἐξισώσεις: $x + \frac{1}{x} = \omega_1$ καί $x + \frac{1}{x} = \omega_2$ ἤ $x^2 - \omega_1 x + 1 = 0$ καί $x^2 - \omega_2 x + 1 = 0$, πού δίνουν ἀπό δύο ρίζες ἡ καθεμιά, καί συνεπῶς ἡ ἀντίστροφη 4ου βαθμοῦ ἔχει γενικά 4 ρίζες.

Τό εἶδος τῶν 4 αὐτῶν ριζῶν ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τῶν ριζῶν ω_1, ω_2 τῆς ἐπιλύουσας καί ἀπό τίς διακρίνουσες $\Delta_1 = \omega_1^2 - 4$ καί $\Delta_2 = \omega_2^2 - 4$ τῶν ἐξισώσεων $x^2 - \omega_1 x + 1 = 0$ καί $x^2 - \omega_2 x + 1 = 0$ ἀντίστοιχα.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$.

Ἐπίλυση: Διαιροῦμε διά x^2 καί λαμβάνουμε διαδοχικά:

$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$

Αὐτή γιά $x + \frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \omega^2 - 2$ γίνεται: $6\omega^2 - 35\omega + 50 = 0$, ὁπότε

$\omega_1 = \frac{10}{3}$ καί $\omega_1 = \frac{5}{2}$

Ἔτσι ἔχουμε τίς ἐξισώσεις:

$$\left|\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \text{ καί ἄρα } x_1 = 3 \text{ καί } x_2 = \dfrac{1}{3} \\ 2x^2 - \ 5x + 2 = 0 \text{ καί ἄρα } x_3 = 2 \text{ καί } x_4 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

β) Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma \in R$).

Ἔχουμε: $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \Leftrightarrow$

$$\alpha(x^5 + 1) + \beta x(x^3 + 1) + \gamma x^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x + 1)\ [\alpha(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \beta x(x^2 - x + 1) + \gamma x^2] = 0.$$

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος

$$x + 1 = 0, \quad \alpha x^4 + (\beta - \alpha)x^3 + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0.$$

Ἡ πρώτη δίνει $x = -1$. Ἡ δεύτερη εἶναι ἀντίστροφη 4ου βαθμοῦ καί ἐπιλύεται κατά τά γνωστά.

γ) Ἡ ἀντίστροφη $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma \in R$).

Μά ἀνάλογο τρόπο ἔχουμε τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων:

$$\left|\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ \alpha x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0. \end{array}\right.$$

Αὐτή πάλι εἶναι ἀντίστροφη 4ου βαθμοῦ.

Γενικές παρατηρήσεις: 1) Οἱ ἀντίστροφες ἐξισώσεις βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό 5ο δέν μποροῦν γενικά νά ἐπιλυθοῦν μέ ἀναγωγή σέ δευτεροβάθμιες ἐξισώσεις.

2) Ὁ μετασχηματισμός $x + \dfrac{1}{x} = \omega$ ὑποβιβάζει γενικά τό βαθμό μιᾶς ἀντίστροφης ἐξισώσεως ἄρτιου βαθμοῦ στό μισό τοῦ βαθμοῦ της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

403) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$, $\quad x^3 - \dfrac{37}{12}x^2 + \dfrac{37}{12}x - 1 = 0$

2) $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$, $\quad x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

3) $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = 0$,

4) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$, $\quad 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

Ὁμάδα β'

404) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{(x - 1)^2}, \quad \frac{(1 + x)^4}{1 + x^4} = 2, \quad \frac{(x^2 - x + 1)^2}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = \frac{9}{13}$$

405) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις (μή ἀντίστροφες):

1) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$, $\quad$ 2) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

3) $5x^4 - 16x^3 + 2x^2 + 16x + 5 = 0$, $\quad$ 4) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$

406) Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ $x^3 + \lambda x^2 + \lambda x + 1 = 0$ ($\lambda \in R$).

117. ΔΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Ὁρισμός. *Λέγεται διώνυμη ἐξίσωση μὲ ἄγνωστο τὸν x, κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} = 0$, ὅπου A καὶ B πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ πραγματικὲς παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὸν x καὶ $\kappa, \lambda \in N$.*

Οἱ ἐξισώσεις: $x^3 + 8 = 0$, $x^4 - 81 = 0$, $27x^4 - 64x = 0$,

$2x^3 - 3x^2 = 0$ εἶναι διώνυμες.

Ἐπίλυση τῆς ἐξισ. $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} = 0$ ($A \neq 0$ καί $\kappa > \lambda \in N$).

Ἔχουμε: $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow Ax^{\lambda}\left(x^{\kappa-\lambda} + \frac{B}{A}\right) = 0 \Leftrightarrow x^{\lambda}\left(x^{\kappa-\lambda} + \frac{B}{A}\right) = 0$.

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x^{\lambda} = 0$, $x^{\kappa-\lambda} + \frac{B}{A} = 0$.

Ἀπό τήν πρώτη $x^{\lambda} = 0$ ἔχουμε λ ρίζες ἴσες μέ 0, $(x_1 = x_2 = \ldots = x_{\lambda} = 0)$. Δηλαδή τό 0 εἶναι ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας λ.

Ἡ δεύτερη ἐξίσωση, ἄν θέσουμε $\kappa - \lambda = \nu \in N$ καί $-\frac{B}{A} = \alpha$, γράφεται: $x^{\nu} = \alpha$. Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

α) Ἄν ν ἄρτιος, τότε ἔχει δύο ρίζες πραγματικές ἀντίθετες ὅταν $\alpha > 0$ καί καμιά πραγματική ὅταν $\alpha < 0$.

β) Ἄν ν περιττός, τότε ἔχει πάντοτε μία μόνη πραγματική ρίζα, πού εἶναι θετική ὅταν $\alpha > 0$, καί ἀρνητική ὅταν $\alpha < 0$.

Οἱ ὑπόλοιπες ρίζες εἶναι καθαρές μιγαδικές, πού τήν ἀναζήτησή τους θά ἐξετάσουμε σέ ἄλλη τάξη. Ἐμεῖς μποροῦμε νά βροῦμε τίς καθαρές μιγαδικές ρίζες, ὅταν ὁ ν πάρει μικρές τιμές.

Παραδείγματα: Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $x^3 + 1 = 0$, 2) $x^4 + 16 = 0$, 3) $x^6 - 1 = 0$, 4) $x^5 - 5x^2 = 0$.

Ἐπίλυση: 1) Ἔχουμε: $x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$.

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος $x + 1 = 0$ καί $x^2 - x + 1 = 0$,

ὁπότε ἔχουμε $x_1 = -1$ καί $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Ἔχουμε: $x^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 16 + 8x^2 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$(x^2 + 4)^2 - (2\sqrt{2}\,x)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4) = 0$.

Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος $x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4 = 0$

καί $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4 = 0$,

ὁπότε ἔχουμε τίς ρίζες x_1, x_2, x_3, x_4.

3) Τήν ἐξίσωση $x^6 - 1 = 0$ μπορoῦμε νά τήν ἐπιλύσουμε, ἄν ἐπιλύσουμε μία ἀπό τίς ἰσοδύναμές της:

α) $(x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$. Αὐτή δίνει: $x^3 + 1 = 0$, $x^3 - 1 = 0$

β) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$. Αὐτή δίνει: $x^2 - 1 = 0$, $x^4 + x^2 + 1 = 0$

γ) $(x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$. Αὐτή δίνει τίς ἐξισώσεις $x - 1 = 0$, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (ἀντίστροφη).

4) Ἔχουμε: $x^5 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 5) = 0$. Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος $x^2 = 0$ καί $x^3 - 5 = 0$. Ἀπό τήν $x^2 = 0$ ἔχουμε $x_1 = x_2 = 0$. Ἡ δεύτερη γράφεται $x^3 - (\sqrt[3]{5})^3 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt[3]{5})(x^2 + \sqrt[3]{5}\,x + \sqrt[3]{25}) = 0$. Αὐτή ἰσοδυναμεῖ μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσ. $x - \sqrt[3]{5} = 0$, $x^2 + \sqrt[3]{5}x + \sqrt[3]{25} = 0$, ὁπότε ἔχουμε $x_1 = \sqrt[3]{5}$, $x_2 = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $x_3 = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

118. ΤΡΙΩΝΥΜΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Ὁρισμός: *Λέγεται τριώνυμη ἐξίσωση, μέ ἕναν ἄγνωστο, κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} + \Gamma x^{\mu} = 0$, ὅπου A, B, Γ πραγματικοί ἀριθμοί ἤ πραγματικές παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπό τόν ἄγνωστο x καί $\kappa, \lambda, \mu \in N$.*

Ἐδῶ μᾶς ἐνδιαφέρει μόνο ἡ περίπτωση πού ἔχουμε $\kappa - \lambda = \lambda - \mu$, μέ $\kappa > \lambda > \mu$, γιατί τότε ἡ ἐπίλυση τῆς $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} + \Gamma x^{\mu} = 0$ ἀνάγεται στήν ἐπίλυση τῆς ἐξισώσεως $Ax^{2\nu} + Bx^{\nu} + \Gamma = 0$, $\nu \in N$.

Ἐπίλυση: Ἄν $\kappa - \lambda = \lambda - \mu = \nu \Rightarrow \lambda = \mu + \nu$, $\kappa = \mu + 2\nu$, ὁπότε: $Ax^{\mu+2\nu} + Bx^{\mu+\nu} + \Gamma x^{\mu} = 0 \Leftrightarrow x^{\mu}(Ax^{2\nu} + Bx^{\nu} + \Gamma) = 0$. Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος $x^{\mu} = 0$, $Ax^{2\nu} + Bx^{\nu} + \Gamma = 0$. Ἡ $x^{\mu} = 0$ δίνει $x_1 = x_2 = \ldots = x_{\mu} = 0$. Δηλαδή ἔχει τό μηδέν ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητας μ.

Στήν $Ax^{2\nu} + Bx^{\nu} + \Gamma = 0$, ἄν ἐκτελέσουμε τό μετασχηματισμό $x^{\nu} = \psi$, παίρνουμε $A\psi^2 + B\psi + \Gamma = 0$. Αὐτή λέγεται **ἐπιλύουσα** τῆς ἐξισώσεως καί ἔχει γενικά δύο λύσεις ψ_1 καί ψ_2. Ἄν ἐπανέλθουμε στό μετασχηματισμό $x^{\nu} = \psi$, παίρνουμε τίς διώνυμες ἐξισώσεις $x^{\nu} = \psi_1$ καί $x^{\nu} = \psi_2$.

Τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσ. $Ax^{2\nu} + Bx^{\nu} + \Gamma = 0$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλύουσάς της.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^{10} - 26x^7 - 27x^4 = 0$.

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $10 - 7 = 7 - 4$, ἄρα ἡ ἐξίσωση γράφεται: $x^4(x^6 - 26x^3 - 27) = 0$. Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν $x^4 = 0$, $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$, $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$ καί γιά $x^3 = \psi$ δίνει τήν ἐπιλύουσα $\psi^2 - 26\psi - 27 = 0$. πού οἱ ρίζες της εἶναι $\psi_1 = 27$, $\psi_2 = -1$.

Συνεπῶς ἔχουμε γιά ἐπίλυση τίς διώνυμες ἐξισώσεις:

$x^3 = 27 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9) = 0.$ Ρίζες $x_5 = 3,\ x_{6,7} = -\frac{3}{2} \pm \frac{3i\sqrt{3}}{2}$

$x^3 = -1 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+1) = 0.$ Ρίζες $x_8 = -1,\ x_{9,10} = \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

407) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $x^3 - 8 = 0$, $8x^3 + 27 = 0$, $64x^6 - x^3 = 0$, $x^5 - 81x - 0$

2) $x^5 - 32 = 0$, $x^8 - 256 = 0$, $x^6 \pm 729 = 0$, $x^{12} - 1 = 0$

3) $x^{10} \pm 1 = 0$, $x^8 \pm 1 = 0$, $3x^7 - 2x^4 = 0$, $x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0$

Ὁμάδα β'

408) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

1) $x^6 - 5x^3 - 24 = 0$, $x^8 - 80x^4 - 81 = 0$, $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

2) $x^{12} - 33x^7 + 32x^2 = 0$, $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$, $2x^3 + \frac{3}{x^3} = 5$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ (ἄρρητες ἐξισώσεις)

119. *Ἐξίσωση μέ ριζικά ἤ ἄρρητη ἐξίσωση, μέ ἕναν ἄγνωστο, λέγεται κάθε ἐξίσωση πού τό ἕνα τουλάχιστο μέλος της εἶναι ἄρρητη ἀλγεβρική παράσταση τοῦ ἀγνώστου.*

Ἡ ἐπίλυση μιᾶς ἄρρητης ἐξισώσεως γίνεται στό σύνολο ὁρισμοῦ τῶν ἄρρητων παραστάσεών της. Ὡς σύνολο ὁρισμοῦ θά θεωρεῖται ἐκεῖνο πού κάνει πραγματικές τίς παραστάσεις τῆς ἐξισώσεως. Αὐτό εἶναι γενικά ὑποσύνολο τοῦ συνόλου R.

Κατά τήν ἐπίλυση μιᾶς ἄρρητης ἐξισώσεως ἐπιδιώκουμε τήν ἀναγωγή της σέ ρητή ἐξίσωση, ἡ ὁποία δέν εἶναι γενικά ἰσοδύναμη μέ τήν ἄρρητη ἐξίσωση. Γιά τό σκοπό αὐτό πρέπει νά ἔχουμε ὑπόψη μας τίς παρακάτω προτάσεις:

1) Ἄν τά μέλη μιᾶς ἐξισ. $\varphi(x) = f(x)$ τά ὑψώσουμε σέ ἄρτια δύναμη, ἡ ἐξίσωση πού προκύπτει ἔχει ρίζες τίς πραγματικές ρίζες τῆς ἀρχικῆς καί τίς πραγματικές ρίζες τῆς $\varphi(x) = -f(x)$.

2) Ἄν τά μέλη μιᾶς ἐξισ. $\varphi(x) = f(x)$ τά ὑψώσουμε σέ περιττή δύναμη, ἡ ἐξίσωση πού προκύπτει ἔχει ρίζες μόνο τίς πραγματικές ρίζες τῆς ἀρχικῆς. Δηλαδή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἀρχική στό R.

Οἱ προτάσεις αὐτές μᾶς ὑποχρεώνουν, ὅταν βροῦμε τίς ρίζες τῆς ρητῆς ἐξισώσεως (στήν ὁποία καταλήγουμε μετά ἀπό διαδοχικές ὑψώσεις σέ δύναμη γιά τήν ἐξάλειψη τῶν ριζικῶν), νά ἐλέγχουμε ἄν οἱ ρίζες ἱκανοποιοῦν τούς περιορισμούς πού θέσαμε. Οἱ περιορισμοί, πού ἀπαραίτητα πρέπει νά θέτουμε, ἐξασφαλίζουν ὁμόσημα καί πραγματικά μέλη στήν ἐξίσωση.

120. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΑ ΡΙΖΙΚΑ.

α) Τῆς μορφῆς $\sqrt{\varphi(x)} = f(x)$ στό R, ὅπου $\varphi(x), f(x) \in Q$.

Πρέπει νά εἶναι $\varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\varphi(x)} \geq 0$, ὁπότε καί $f(x) \geq 0$. Ὅταν ὑψώσουμε στό τετράγωνο τά μέλη τῆς ἐξισώσεως, παίρνουμε $\varphi(x) = [f(x)]^2$. Αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισ. $\sqrt{\varphi(x)} = f(x)$ καί $\sqrt{\varphi(x)} = -f(x)$. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ λύσεις τῆς $\sqrt{\varphi(x)} = -f(x)$ δέν εἶναι λύσεις τῆς $\sqrt{\varphi(x)} = f(x)$.

Ἀπό τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $\sqrt{\varphi(x)} = f(x)$ καί τό σύστημα τῶν $\varphi(x) \geq 0$, $f(x) \geq 0$, $\varphi(x) = [f(x)]^2$ ἔχουν τίς ἴδιες λύσεις.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσ. $2x - 3 = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$ στό R.

Ἐπίλυση: Ἔχουμε: $2x - 3 = \sqrt{x^2 - 2x + 6} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x^2-2x+6 \geq 0 \\ 2x-3 \geq 0 \\ (2x-3)^2 = x^2-2x+6 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in R \text{ (γιατί;)} \\ x \geq \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \geq \frac{3}{2} \\ x_1 = 3,\ x_2 = \frac{1}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow x = 3$$

Ἄρα ἡ $x = 3$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

Σημείωση: Τήν ἐξίσωση μποροῦμε νά τήν λύσουμε καί ὡς ἑξῆς:

$$2x - 3 = \sqrt{x^2-2x+6} \Rightarrow (2x-3)^2 = x^2 - 2x + 6 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

ὁπότε $x_1 = 3$ καί $x_2 = \frac{1}{3}$

Ἡ τιμή $x_1 = 3$ ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση, γιατί $2 \cdot 3 - 3 = \sqrt{3^2 - 2.3 + 6} \Leftrightarrow 3 = \sqrt{9}$, ὁπότε εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως, ἐνῶ ἡ τιμή $x_2 = \frac{1}{3}$ δέν ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωση, γιατί $2 \cdot \frac{1}{3} - 3 = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2.\frac{1}{3} + 6} \Rightarrow -\frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}} \Rightarrow -\frac{7}{3} = \frac{7}{3}$ ὁπότε ἀπορρίπτεται.

β) Τῆς μορφῆς (1) $\sqrt{f(x)} + \sqrt{\varphi(x)} = \sigma(x)$ στό R, ὅπου $f(x)$, $\varphi(x)$ καί $\sigma(x)$ ρητές συναρτήσεις τοῦ x.

Πρέπει νά εἶναι $f(x) \geq 0$, $\varphi(x) \geq 0$, $\sigma(x) \geq 0$.

Ἄν ὑψώσουμε τά μέλη στό τετράγωνο, παίρνουμε:

$$f(x) + \varphi(x) + 2\sqrt{f(x).\varphi(x)} = [\sigma(x)]^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{f(x)\cdot\varphi(x)} = [\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x).$$

'Επίσης πρέπει $[\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x) \geq 0$.

'Υψώνουμε πάλι στό τετράγωνο, ὁπότε παίρνουμε:

$$4f(x) \cdot \varphi(x) = \left[[\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x)\right]^2 \quad (2)$$

῎Ετσι συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} f(x) \geq 0,\ \varphi(x) \geq 0,\ \sigma(x) \geq 0 \\ [\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x) \geq 0 \\ 4f(x) \cdot \varphi(x) = \left[[\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x)\right]^2 \end{array}\right.$$

Τό σύστημα αὐτό εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} \sigma(x) \geq 0,\ [\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x) \geq 0 \\ 4f(x) \cdot \varphi(x) = \left[[\sigma(x)]^2 - f(x) - \varphi(x)\right]^2 \end{array}\right.$$

Γιατί : 'Από τήν

$4f \cdot \varphi = (\sigma^2 - f - \varphi)^2 \Leftrightarrow 4f \cdot \varphi = \sigma^4 - 2 \cdot \sigma^2(f+\varphi) + (f+\varphi)^2 \Leftrightarrow \sigma^4 + (f-\varphi)^2 = 2 \cdot \sigma^2(f+\varphi)$, ὁπότε πρέπει $f + \varphi \geq 0$. 'Επίσης ἀπό τήν (2) προκύπτει $f \cdot \varphi \geq 0$.

῎Αρα πρέπει $f \geq 0$ καί $\varphi \geq 0$.

Παράδειγμα : Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσ. $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} = 3$.

'Επίλυση :

῎Εχουμε : $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} = 3 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x - 8 > 0 \\ x - 5 > 0 \\ x - 8 + x - 5 + 2\sqrt{(x-8)(x-5)} = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x > 8 \\ \sqrt{(x-8)(x-5)} = 11 - x \\ \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x > 8 \\ x < 11 \\ (x-8) \cdot (x-5) = (11-x)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 8 < x < 11 \\ \quad x = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x = 9$

῎Αρα ἡ $x = 9$ εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως (1).

γ) Τῆς μορφῆς (1) $\sqrt{f(x)} + \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{\sigma(x)}$ στό R, ὅπου $f(x), \varphi(x), \sigma(x) \in Q$.

Πρέπει $f \geq 0$, $\varphi \geq 0$, $\sigma \geq 0$. ῎Ετσι ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} f \geq 0,\ \ \varphi \geq 0,\ \ 6 \geq 0 \\ f + \varphi + 2\sqrt{f \cdot \varphi} = \sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} f \geq 0,\ \ \varphi \geq 0,\ \ \sigma \geq 0 \\ 2\sqrt{f \cdot \varphi} = \sigma - (f + \varphi) \end{array}\right. \quad (2)$$

'Επίσης πρέπει $\sigma - (f + \varphi) \geq 0$

῎Αρα τό σύστημα (2) καί συνεπῶς ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} f \geq 0,\ \ \varphi \geq 0,\ \ \sigma \geq 0,\ \ \sigma - (f + \varphi) \geq 0 \\ 4f \cdot \varphi = [\sigma - (f + \varphi)]^2 \end{array}\right. \quad (\Sigma_1)$$

'Αξιόλογη σημείωση: "Αν ὑποθέσουμε $f<0$, $\varphi<0$, $\sigma<0$, τότε $-f>0$, $-\varphi>0$, $-\sigma>0$, ὁπότε ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται:

$$i\sqrt{-f(x)}+i\sqrt{-\varphi(x)}=i\sqrt{-\sigma(x)} \Leftrightarrow \sqrt{-f(x)}+\sqrt{-\varphi(x)}=\sqrt{-\sigma(x)} \qquad (3)$$

'Η ἐξίσωση(3) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τό σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} f<0,\ \varphi<0,\ \sigma<0 \\ -f-\varphi+2\sqrt{f\varphi}=-\sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} f<0,\ \varphi<0,\ \sigma<0 \\ 2\sqrt{f\varphi}=f+\varphi-\sigma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} f<0,\ \varphi<0,\ \sigma<0 \\ f+\varphi-\sigma>0 \\ 4f\varphi=[(f+\varphi)-\sigma]^2 \end{array}\right. \qquad (\Sigma_2)$$

'Από τά παραπάνω συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει στό σύνολο R τίς λύσεις τοῦ συστήματος (Σ_1) καί τίς λύσεις τοῦ συστήματος (Σ_2) καί μόνο αὐτές, γιατί ἄλλες περιπτώσεις γιά τίς ρητές παραστάσεις $f(x)$, $\varphi(x)$, $\sigma(x)$ εἶναι ἀδύνατες.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσ. $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-5}=\sqrt{3x-21}$.

'Επίλυση: Οἱ λύσεις παρέχονται ἀπό τά παρακάτω συστήματα.

"Εχουμε:

$$(\Sigma_1)\left|\begin{array}{l} x\geq 8,\ x\geq 5,\ x\geq 7 \\ x-8+x-5+2\sqrt{(x-8)(x-5)}=3x-21 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq 8 \\ 2\sqrt{(x-8)(x-5)}=x-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq 8 \\ 4(x-8)(x-5)=(x-8)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\geq 8 \\ x_1=8,\ x_2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=8$$

$$(\Sigma_2)\left|\begin{array}{l} x<8,\ x<5,\ x<7 \\ 4(x-8)(x-5)=(x-8)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x<5 \\ x_1=8,\ x_2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x=4$$

"Ωστε οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$x=8 \quad \text{καί} \quad x=4.$$

δ) Περίπτωση γενική.

"Αν ἡ ἐξίσωση ἔχει περισσότερα ἀπό δύο τετραγωνικά ριζικά, τότε, μέ βάση τούς περιορισμούς πού θά θέτουμε κάθε φορά, καί μέ ἀλλεπάλληλες ὑψώσεις στό τετράγωνο, παίρνουμε ρητή ἐξίσωση πού θά περιέχει ὅλες τίς λύσεις τῆς ἀρχικῆς καί ἄλλες ἀκόμη, ἴσως, πού δέ θά ἐπαληθεύουν τήν ἀρχική.

121. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

Οἱ ἐξισώσεις μέ ριζικά 3ης τάξεως καί πάνω παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία στίς μορφές. Γι' αὐτό δέν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος ἐπιλύσεως. Συνήθως ἀκολουθεῖται ἡ μέθοδος νά ὑψώνουμε τά μέλη τῆς ἄρρητης ἐξισώσεως σέ κατάλληλη δύναμη, γιά νά προκύψει ἐξίσωση μέ λιγότερα ριζικά.

Παραδείγματα :

α) Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσ. $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = 3 + x$ (1).

Ἐπίλυση : Ὑψώνουμε τά μέλη τῆς (1) στόν κύβο, ὁπότε:

$$x^3 + 9x^2 = (3 + x)^3 \Leftrightarrow x = -1.$$

Ὥστε ἡ λύση $x = -1$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1).

β) Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσ. $\sqrt[4]{8x^2 - 1} = 2x$ (2).

Ἐπίλυση : Ἔχουμε:

$$\sqrt[4]{8x^2-1} = 2x \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 8x^2-1 \geq 0, x \geq 0 \\ 8x^2-1 = (2x)^4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{8}} \\ 16x^4-8x^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{\sqrt{8}} \\ x_1 = x_3 = \dfrac{1}{2}, x_2 = x_4 = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$

γ) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\Gamma} = 0$, ὅπου Α, Β, Γ ρητές συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου.

Ἐπίλυση : Στό κεφάλαιο γιά τίς ταυτότητες μάθαμε ὅτι:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in R: \alpha + \beta + \gamma = 0 \vee \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

Ἄρα ἀπό τήν ἐξίσωση ἕπεται ἡ

$$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\;}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\Gamma}\right)^3 = 3\sqrt[3]{AB\Gamma} \Leftrightarrow A + B + \Gamma = 3\sqrt[3]{AB\Gamma}$$

καί μέ ὕψωση στόν κύβο ἡ $(A + B + \Gamma)^3 = 27AB\Gamma$. Ἄρα ἔχουμε :

$$\boxed{\text{Ἄν } x \in R: \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\Gamma} = 0 \Rightarrow (A + B + \Gamma)^3 = 27AB\Gamma}$$

Ἔτσι ἡ ἐξίσωση $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-4} = 0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν
$(x - 2 + x - 3 + x - 4)^3 = 27(x-2)(x-3)(x-4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (3x-9)^3 = 27(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) \Leftrightarrow (x-3)^3 = x^3 - 9x^2 + 26x - 24 \Leftrightarrow$
$x = 3$, πού εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

409) Νά ἐπιλυθοῦν στό R οἱ ἐξισώσεις:

1) $5\sqrt{x-3} = \sqrt{x+9}$, $\quad \sqrt{x} + \sqrt{x+32} = 16$
2) $2x = 3 + \sqrt{x^2 - 2x + 6}$, $\quad \sqrt{2 + \sqrt{x-5}} = \sqrt{13-x}$,
3) $\sqrt{5(x+2)} - \sqrt{x+1} = \sqrt{x+6}$, $\quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{2x+9}$

4) $\sqrt{x-15}-\sqrt{x-10}=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+17}$, $(x+3)\sqrt{x+2}=(x+2)\sqrt{x+5}$

5) $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$, $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$, $2\sqrt{x}-\dfrac{x-8}{\sqrt{x}}=6$

Ὁ μ ά δ α β'

410) Νά ἐπιλυθοῦν στό R οἱ ἐξισώσεις:

1) $\sqrt[3]{x+49}-\sqrt[3]{x-49}=2$, $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1$

2) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{3x+2}=0$, $\sqrt[3]{5x}-\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=0$

3) $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$, $\left(\dfrac{10x-1}{10x+1}\right)\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-2x}}=1$, $4\sqrt[3]{x}-\dfrac{20}{\sqrt[3]{x}}=11$.

411) Νά ἐπιλυθεῖ στό R ἡ ἐξίσωση $\sqrt{\alpha+\sqrt{x}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

ΑΠΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΒΑΘΜΟ ΑΝΩΤΕΡΟ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΡΩΤΟ

122. Ὁρισμός. *Ἄν μιά τουλάχιστον ἀπό τίς ἐξισώσεις ἑνός συστήματος δύο ἤ περισσότερων ἐξισώσεων εἶναι δεύτερου βαθμοῦ καί πάνω, τότε τό σύστημα λέγεται σύστημα μέ βαθμό ἀνώτερο ἀπό τόν πρῶτο.*

Αὐτά τά συστήματα παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία στίς μορφές, γι' αὐτό δέν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος ἐπιλύσεως. Ἐδῶ ἀναφέρονται μερικές ἁπλές μορφές πού παρουσιάζονται συχνά, καί στίς ὁποῖες ἀνάγονται δυσκολότερες μορφές συστημάτων.

Γιά τήν ἐπίλυση ἑνός τέτοιου συστήματος χρησιμοποιοῦμε, ἐκτός ἀπό τούς γνωστούς τρόπους ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος, καί ἄλλους εἰδικούς τρόπους (τεχνάσματα), πού δέν ὑπάγονται σέ ὁρισμένους κανόνες, μέ σκοπό τήν ἀναζήτηση πιό ἁπλῶν ἐξισώσεων.

123. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) Τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta\psi=\gamma$, $Ax^2+Bx\psi+\Gamma\psi^2+\Delta x+E\psi+Z=0$.

Ἡ ἐπίλυσή του εἶναι εὔκολη. Μέ τή μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως καταλήγουμε σέ δευτεροβάθμια ἐξίσωση. Ἔτσι τό σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ A\left(\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}\right)^2+B\psi\cdot\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}+\Gamma\psi^2+\Delta\cdot\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}+E\psi+Z=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ (A\beta^2-\alpha B\beta+\beta^2\Gamma)\psi^2+(\alpha B\gamma-2A\beta\gamma-\alpha\beta\Delta+\alpha^2E)\psi+(A\gamma^2+ \\ +\alpha\gamma\Delta+\alpha^2 Z)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \\ K\psi^2 + \Lambda\psi + M = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \\ \psi_1 = \rho_1,\ \psi_2 = \rho_2 \ (\text{ρίζες}), \end{array} \right.$$

ὅπου K, Λ, M οἱ συντελεστές τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως. Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι γενικά δύο, οἱ:

$$(x_1,\ \psi_1) = \left(\frac{\gamma-\beta\rho_1}{\alpha},\ \rho_1\right) \text{ καί } (x_2,\ \psi_2) = \left(\frac{\gamma-\beta\rho_2}{\alpha},\ \rho_2\right)$$

Παραδείγματα: 1) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα:

$$\alpha x + \beta\psi = \gamma,\ \ x\psi = \delta \ (\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R).$$

Ἐπίλυση:

Ἔχουμε: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ x\psi = \delta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \\ \psi \cdot \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} = \delta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \\ \beta\psi^2 - \gamma\psi + \alpha\delta = 0 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} \\ \psi_1 = \rho_1,\ \psi_2 = \rho_2, \end{array} \right.$, ὁπότε οἱ λύσεις εἶναι:

$$(x_1, \psi_1) = \left(\frac{\gamma-\beta\rho_1}{\alpha}, \rho_1\right) \text{ καί } (x_2, \psi_2) = \left(\frac{\gamma-\beta\rho_2}{\alpha}, \rho_2\right)$$

2) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $x + \psi = \alpha,\ x^2 + \psi^2 = \beta^2$.

Ἐπίλυση: 1ος τρόπος. Ἔχουμε

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \psi = \alpha \\ x^2 + \psi^2 = \beta^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha - \psi \\ (\alpha - \psi)^2 + \psi^2 = \beta^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha - \psi \\ 2\psi^2 - 2\alpha\psi + \alpha^2 - \beta^2 = 0. \end{array} \right.$$

Αὐτό ἐπιλύεται ὅπως πρίν.

2ος τρόπος:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + \psi = \alpha \\ x^2 + \psi^2 = \beta^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \psi = \alpha \\ (x + \psi)^2 - 2x\psi = \beta^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \psi = \alpha \\ \alpha^2 - 2x\psi = \beta^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + \psi = \alpha \\ x\psi = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{2} \end{array} \right.$$

Αὐτό εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ παραδ. (1).

3) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left\{ \begin{array}{r} 3x^2 - 4x\psi + \psi^2 - 2x + \psi + 1 = 0 \\ x + 3\psi = 7 \end{array} \right.$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(7 - 3\psi)^2 - 4(7 - 3\psi)\psi + \psi^2 - 2(7 - 3\psi) + \psi + 1 = 0 \\ x = 7 - 3\psi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 40\psi^2 - 147\psi + 134 = 0 \\ x = 7 - 3\psi \end{array} \right.$$

Αὐτό εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ζεῦγος τῶν λύσεων

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = 2 \\ x = 1 \end{array} \right. \text{ καί } \left\{ \begin{array}{l} \psi = 67/40 \\ x = 79/40 \end{array} \right.$$

β) Τῆς μορφῆς $\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \beta_1 x\psi + \gamma_1 \psi^2 + \delta_1 x + \varepsilon_1 \psi + \zeta_1 = 0 \\ \alpha_2 x^2 + \beta_2 x\psi + \gamma_2 \psi^2 + \delta_2 x + \varepsilon_2 \psi + \zeta_2 = 0 \end{cases}$

Ἡ ἐπίλυση τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἐξαρτᾶται γενικά ἀπό τήν ἐπίλυση μιᾶς ἐξισώσεως βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό δεύτερο, πού δέν μποροῦμε πάντοτε νά τήν ἐπιτύχουμε. Σέ εἰδικές ὅμως περιπτώσεις μποροῦμε νά ἐπιλύσουμε τό σύστημα, ὅπως φαίνεται ἀπό τά παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγματα: 1) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα : $\begin{cases} x^2 + 4\psi^2 = 52 \\ x\psi = 12 \end{cases}$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε :

$$\begin{cases} x^2 + 4\psi^2 = 52 \\ x\psi = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2\psi)^2 = 52 \\ 4x\psi = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} (x + 2\psi)^2 = 100 \\ x\psi = 12 \end{matrix} \begin{cases} x + 2\psi = \pm 10 \\ x\psi = 12 \end{cases}$$

Αὐτό εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ζεῦγος τῶν συστημάτων

$$\begin{cases} x + 2\psi = 10 \\ x\psi = 12 \end{cases} (1), \quad \begin{cases} x + 2\psi = -10 \\ x\psi = 12 \end{cases} (2).$$

Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι $(x, \psi) = (4, 3)$ ἤ $(x, \psi) = (6, 2)$ καί τοῦ συστήματος (2) εἶναι $(x, \psi) = (-4, -3)$ ἤ $(x, \psi) = (-6, -2)$

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι :

x	-4	4	-6	6
ψ	-3	3	-2	2

2) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα: $\begin{matrix} 3x^2 + 3\psi^2 - 11x - 7\psi + 10 = 0 \\ x^2 + \psi^2 - 4x - 3\psi + 5 = 0 \end{matrix}$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε :

$$\begin{cases} 3x^2 + 3\psi^2 - 11x - 7\psi + 10 = 0 \\ x^2 + \psi^2 - 4x - 3\psi + 5 = 0 \end{cases}\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3\psi^2 - 11x - 7\psi + 10 = 0 \\ -3x^2 - 3\psi^2 + 12x + 9\psi - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\psi - 5 = 0 \\ x^2 + \psi^2 - 4x - 3\psi + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ (5-2\psi)^2 + \psi^2 - 4(5-2\psi) - 3\psi + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ 5\psi^2 - 15\psi + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ \psi^2 - 3\psi + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ \psi = 2 \end{cases} \text{καί} \begin{matrix} x = 5 - 2\psi \\ \psi = 1 \end{matrix}$$

ὁπότε ἔχουμε τίς λύσεις $(x,\psi) = (1,2)$ καί $(x,\psi) = (3,1)$

γ) Τῆς μορφῆς $\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \beta_1 x\psi + \gamma_1 \psi^2 = \delta_1 & (\delta_1 \neq 0) \\ \alpha_2 x^2 + \beta_2 x\psi + \gamma_2 \psi^2 = \delta_2 & (\delta_2 \neq 0) \end{cases}$

Τά πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι πολυώνυμα ὁμογενή β' βαθμοῦ καί τά δεύτερα μέλη εἶναι σταθεροί ἀριθμοί διάφοροι τοῦ μηδενός. Αὐτά ὀνομάζονται **ὁμογενή συστήματα.**

Γιά τήν ἐπίλυσή τους ἐκτελοῦμε τό μετασχηματισμό $x = \lambda\psi$ $(\psi \neq 0)$.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda^2\psi^2 + \beta_1\lambda\psi^2 + \gamma_1\psi^2 = \delta_1 \\ \alpha_2\lambda^2\psi^2 + \beta_2\lambda\psi^2 + \gamma_2\psi^2 = \delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2(\alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1) = \delta_1 \\ \psi^2(\alpha_2\lambda^2 + \beta_2\lambda + \gamma_2) = \delta_2 \end{cases}$$

Διαιροῦμε τίς ἐξισώσεις κατά μέλη, ὁπότε ἔχουμε:

$$\frac{\alpha_1\lambda^2+\beta_1\lambda+\gamma_1}{\alpha_2\lambda^2+\beta_2\lambda+\gamma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Leftrightarrow (\alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1)\lambda^2 + (\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1)\lambda + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1) = 0$$

Αὐτή δίνει $\lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2$. Ἄν ἐπανέλθουμε στό μετασχηματισμό, ἔχουμε γιά ἐπίλυση τά συστήματα :

$$\begin{cases} x = \lambda_1\psi \\ \alpha_1x^2 + \beta_1x\psi + \gamma_1\psi^2 = \delta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \lambda_2\psi \\ \alpha_1x^2 + \beta_1x\psi + \gamma_1\psi^2 = \delta_1, \end{cases}$$

πού ἡ ἐπίλυσή τους εἶναι γνωστή.

Παράδειγμα : Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\begin{cases} x^2 - 3x\psi + 2\psi^2 = 2 \\ 2x^2 + x\psi - \psi^2 = 20 \end{cases}$

Θέτουμε $x = \lambda\psi$ καί ἔχουμε:

$$\begin{cases} \lambda^2\psi^2 - 3\lambda\psi^2 + 2\psi^2 = 2 \\ 2\lambda^2\psi^2 + \lambda\psi^2 - \psi^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 2 \\ \psi^2(2\lambda^2 + \lambda - 1) = 20 \end{cases}$$

Διαιροῦμε τίς ἐξισώσεις κατά μέλη, ὁπότε ἔχουμε

$$\frac{\lambda^2-3\lambda+2}{2\lambda^2+\lambda-1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 31\lambda + 21 = 0. \text{ Ἄρα } \lambda_1 = 3,\ \lambda^2 = \frac{7}{8}$$

Ἔτσι ἔχουμε γιά ἐπίλυση τά συστήματα:

$$\begin{cases} x = 3\psi \\ x^2 - 3x\psi + 2\psi^2 = 2 \end{cases} \quad (1), \qquad \left| \begin{array}{l} x = \frac{7}{8}\psi \\ x^2 - 3x\psi + 2\psi^2 = 2 \end{array} \right. \quad (2)$$

Οἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι $(x, \psi) = (3, 1)$, $(x, \psi) = (-3, -1)$ καί τοῦ συστήματος (2) εἶναι

$$(x, \psi) = \left(\frac{7\sqrt{2}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right), (x, \psi) = \left(-\frac{7\sqrt{2}}{3}, -\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$$

δ) Συστήματα συμμετρικά.

Ἕνα σύστημα λέγεται συμμετρικό ὡς πρός τούς ἀγνώστους του, ὅταν ὅλες οἱ ἐξισώσεις του εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τούς ἀγνώστους.

Π. χ. εἶναι συμμετρικά τά συστήματα

$$\left| \begin{array}{l} x + \psi = \alpha \\ x\psi = \beta \end{array} \right| \begin{array}{l} x^2 + \psi^2 = \alpha \\ x\psi = \beta \end{array} \left| \begin{array}{l} x^2 + \psi^2 + x + \psi = \alpha \\ x + \psi + x\psi = \beta \end{array} \right.$$

Γιά τήν ἐπίλυση αὐτῶν τῶν συστημάτων δέν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος.

Ἐπειδή οἱ ἐξισώσεις εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τούς ἀγνώστους, μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν μέ τό ἄθροισμα $x+y$ καί τό γινόμενο xy. Ἄρα, ἄν θέσουμε ὅπου $x+y=\varphi$ καί $xy=\omega$, τό συμμετρικό σύστημα γίνεται πιό ἁπλό ὡς πρός τούς ἀγνώστους φ, ω. Ἔτσι, ὅταν βροῦμε τίς τιμές τῶν φ καί ω, ἀναγόμαστε στήν ἐπίλυση συστήματος τῆς μορφῆς $x+y=\varphi$, $xy=\omega$.

Παράδειγμα: 1) Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2+x+\psi=\alpha \\ x+\psi+x\psi=\beta \end{array}\right.$

Ἐπίλυση: Θέτουμε ὅπου $x+\psi=\varphi$ καί $x\psi=\omega$, ὁπότε τό σύστημα (1) γράφεται: $\begin{array}{l} \varphi^2-2\omega+\varphi=\alpha \\ \varphi+\omega=\beta \end{array}$

Αὐτό ἐπιλύεται ὅπως τά συστήματα τῆς μορφῆς (α) καί δίνει τίς λύσεις

$$\begin{array}{l} \varphi=\kappa_1 \\ \omega=\lambda_1 \end{array} \quad \text{καί} \quad \begin{array}{l} \varphi=\kappa_2. \\ \omega=\lambda_2 \end{array}$$

Ἄρα προκύπτουν γιά ἐπίλυση τά συστήματα

$$\begin{array}{l} x+\psi=\kappa_1 \\ x\psi=\lambda_1 \end{array} \quad \text{καί} \quad \begin{array}{l} x+\psi=\kappa_2 \\ x\psi=\lambda_2, \end{array}$$

πού ἡ λύση τους εἶναι γνωστή.

124. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

α) Ὅταν ἡ μία μόνο ἐξίσωση εἶναι δευτεροβάθμια καί ὅλες οἱ ἄλλες πρωτοβάθμιες.

Στήν περίπτωση αὐτή ἐπιλύουμε τό σύστημα τῶν πρωτοβάθμιων ἐξισώσεων, ἄν πάρουμε ἕναν ἄγνωστο ὡς γνωστό καί ἔπειτα ἀντικαταστήσουμε στή δευτεροβάθμια ἐξίσωση, τήν ὁποία ἐπιλύουμε.

Παράδειγμα: Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα Σ: $\left\{\begin{array}{l} 2x^2+\psi^2-4x\omega-2\psi\omega+3x-4\psi-13=0 \\ 5x-\psi-\omega=2 \\ 7x-3\psi+\omega=-6 \end{array}\right.$

Ἐπίλυση: Θεωροῦμε τών ω ὡς γνωστό καί ἐπιλύουμε τό σύστημα τῆς δεύτερης καί τρίτης ἐξισώσεως. Ἔτσι ἔχουμε τή λύση $(x, \psi)=\left(\frac{3+\omega}{2}, \frac{11+3\omega}{\omega}\right)$.

Τίς τιμές τῶν x καί ψ τίς ἀντικαθιστοῦμε στήν πρώτη ἐξίσωση καί ἔχουμε:

$$2\left(\frac{3+\omega}{2}\right)^2+\left(\frac{11+3\omega}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3+\omega}{2}\omega-2\cdot\frac{11+3\omega}{2}\omega+3\cdot\frac{3+\omega}{2}-4\cdot\frac{11+3\omega}{2}-13=0$$

$\Leftrightarrow 9\omega^2+8\omega-17=0$, ὁπότε $\omega_1=1$, $\omega_2=-\frac{17}{9}$

Συνεπῶς: Γιά $\omega = 1$ ἔχουμε $(x, \psi) = (2, 7)$ καί

Γιά $\omega = -\frac{17}{9}$ ἔχουμε $(x, \psi)\left(\frac{5}{9}, \frac{8}{3}\right)$.

Ἄρα οἱ λύσεις τοῦ συστήματος Σ εἶναι : $\left\{\begin{array}{l}(x, \psi, \omega) = (2, 7, 1) \\ (x, \psi, \omega) = \left(\frac{5}{9}, \frac{8}{3}, -\frac{17}{9}\right)\end{array}\right.$

β) Ὅταν περισσότερες ἀπό μιά ἐξισώσεις εἶναι δευτεροβάθμιες (ἤ καί ὅλες) καί οἱ ἄλλες πρωτοβάθμιες.

Στή περίπτωση αὐτή δέν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος ἐπιλύσεως.

Παραδείγματα 1) **Νά λυθεῖ τό σύστημα :** $\left\{\begin{array}{ll}x + \psi + \omega = \alpha & (1) \\ x^2 + \psi^2 + \omega^2 = \beta^2 & (2) \\ x\psi = \gamma^2 & (3)\end{array}\right.$

Λύση : Τό σύστημα γράφεται :

$$\left\{\begin{array}{l}x + \psi = \alpha - \omega \\ (x + \psi)^2 - 2x\psi + \omega^2 = \beta^2 \\ x\psi = \gamma^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x + \psi = \alpha - \omega \\ (\alpha - \omega)^2 - 2\gamma^2 + \omega^2 = \beta^2 \\ x\psi = \gamma^2\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x + \psi = \alpha - \omega \\ 2\omega^2 - 2\alpha\omega + (\alpha^2 - \beta^2 - 2\gamma^2) = 0 \\ x\psi = \gamma^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x + \psi = \alpha - \omega \\ \omega_1 = \rho_1,\ \omega_2 = \rho_2 \\ x\psi = \gamma^2\end{array}\right.$$

Ἄρα προκύπτουν γιά ἐπίλυση τά συστήματα:

$$(\Sigma_1)\left|\begin{array}{l}x + \psi = \alpha - \rho_1 \\ x\psi = \gamma^2 \\ \omega = \rho_1\end{array}\right. \quad \text{καί } (\Sigma_2)\left|\begin{array}{l}x + \psi = \alpha - \rho_2 \\ x\psi = \gamma^2 \\ \omega = \rho_2\end{array}\right.$$

Τά (Σ_1) καί (Σ_2) ἐπιλύονται κατά τά γνωστά.

2) Νά λυθεῖ τό σύστημα $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$

$$\begin{array}{l}(1) \\ (2) \\ (3)\end{array}\left\{\begin{array}{l}x(x + \psi + \omega) + \psi\omega = \alpha^2 \\ \psi(x + \psi + \omega) + \omega x = \beta^2 \\ \omega(x + \psi + \omega) + x\psi = \gamma^2\end{array}\right.$$

Λύση : Τό σύστημα γράφεται:

$$(x + \psi)(x + \omega) = \alpha^2,\ (\psi + \omega)(\psi + x) = \beta^2,\ (\omega + x)(\omega + \psi) = \gamma^2 \quad (4).$$

Πολ/ζουμε κατά μέλη καί ἔχουμε

$$(x + \psi)^2(\omega + \psi)^2(\omega + x)^2 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \Rightarrow (x + \psi)(\omega + \psi)(\omega + x) = \pm\alpha\beta\gamma.$$

Διαιροῦμε τήν ἐξίσωση αὐτή διαδοχικά μέ τίς (4) καί ἔχουμε :

$$x + \psi = \pm\frac{\alpha\beta}{\gamma},\ \omega + \psi = \pm\frac{\beta\gamma}{\alpha},\ \omega + x = \pm\frac{\alpha\gamma}{\beta}.$$

Έτσι έχουμε γιά ἐπίλυση τά συστήματα:

$$(\Sigma_1)\quad \begin{cases} x+\psi = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \\ \psi+\omega = \dfrac{\beta\gamma}{\alpha} \\ \omega+x = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \end{cases} \quad \text{καί } \Sigma_2 \quad \begin{cases} x+\psi = -\dfrac{\alpha\beta}{\gamma} \\ \psi+\omega = -\dfrac{\beta\gamma}{\alpha} \\ \omega+x = -\dfrac{\alpha\gamma}{\beta} \end{cases}$$

Ἐπίλυση τοῦ (Σ_1). Προσθέτουμε κατά μέλη, ὁπότε ἔχουμε

$$x+\psi+\omega = \frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

Ἀφαιροῦμε ἀπό τήν ἐξίσωση αὐτή (κατά μέλη) κάθε ἐξίσωση τοῦ Σ_1 καί ἔχουμε τίς λύσεις:

$$\omega = \frac{\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2}{2\alpha\beta\gamma}, \quad \psi = \frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2-\alpha^2\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}, \quad x = \frac{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ἐπιλύεται τό Σ_2.

Σημείωση. Τά παραδείγματα πού ἐξετάσαμε παρέχουν μόνο μία ἁπλή ἰδέα τῶν εἰδικῶν μεθόδων πού χρησιμοποιοῦνται γιά τήν ἐπίλυση συστημάτων ἀνώτερου ἀπό τόν πρῶτο βαθμό καί συνεπῶς οἱ μαθητές πρέπει νά ἐξασκηθοῦν πολύ σέ μεγάλο ἀριθμό ἀσκήσεων, γιά νά μπορέσουν νά ἀποκτήσουν κάποια εὐχέρεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάδα α'

412) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+\psi=2 \\ 4x\psi=3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+2x\psi-\psi^2+4x-6\psi+7=0 \\ 2x+\psi=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x/5+\psi/5=1 \\ 7x^2+5x\psi-3\psi^2-2x-27=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+\psi^2=157 \\ x\psi=66 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2-x\psi=14 \\ x\psi-\psi^2=10 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+\psi^2+x+\psi=62 \\ (x-\psi)(x+\psi+1)=50 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 3x^2+3\psi^2-11x-7\psi+10=0 \\ x^2+\psi^2-4x-3\psi+5=0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x+\psi)^2-3(x+\psi)=10 \\ 9x^2-5x-7\psi=25 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x^2+2x\psi-\psi^2=1 \\ 3x^2-3x\psi+5\psi^2=17 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+x\psi-\psi^2=-4 \\ (8x-\psi)(x+2\psi)=-36 \end{cases}$

Ὁμάδα β'

413) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\begin{cases} x+\psi-2\omega=6 \\ 2x-\psi=-1 \\ 2x^2+x\psi+\omega^2-4\omega=10 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+\psi+\omega=6 \\ x^2+\psi^2=2\omega^2-13 \\ x\psi=2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+z^2=46+\psi^2 \\ x+\psi-z=14 \\ x^2=9 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+\psi^2+\omega^2=84 \\ x+\psi+\omega=14 \\ x\omega=\psi^2 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x(x+\psi+\omega)+\psi\omega=21 \\ \psi(x+\psi+\omega)+\omega x=18 \\ \omega(x+\omega+\psi)+x\psi=42 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x(x+\psi+\omega)=\alpha^2 \\ \psi(x+\psi+\omega)=\beta^2 \\ \omega(x+\psi+\omega)=\gamma^2 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x(\psi+\omega)=\alpha^2 \\ \psi(x+\omega)=\beta^2 \\ \omega(x+\psi)=\gamma^2 \end{cases}$

414) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

1) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{\psi}=11 \\ x+\psi=65 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3+\psi^3=19 \\ x+\psi=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-\psi^3=37 \\ x^2+x\psi+\psi^2=37 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+\psi-2\sqrt{x\psi}=\sqrt{x}-\sqrt{\psi} \\ \sqrt{x}+\sqrt{\psi}=5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x\psi=\alpha^2 \\ \psi\omega=\beta^2 \\ \omega x=\gamma^2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x\psi z=6 & z\omega x=12 \\ \psi z\omega=8 & \omega x\psi=24 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} (x+\psi)(x^3+\psi^3)=432 \\ x^2+\psi^2=20 \end{cases}$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Βου ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΡΩΤΟ ΒΑΘΜΟ

125. Ὅπως μάθαμε στό Γυμνάσιο, γιά νά λύσουμε ἕνα πρόβλημα ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

α) Ἐκλέγουμε τόν ἄγνωστο ἤ τούς ἀγνώστους τοῦ προβλήματος.

β) Καταστρώνουμε τήν ἐξίσωση ἤ τίς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος.

γ) Θέτουμε στούς ἀγνώστους περιορισμούς, πού πηγάζουν ἀπό τή φύση τοῦ προβλήματος.

δ) Ἐπιλύουμε τήν ἐξίσωση ἤ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

ε) Ἐκτελοῦμε τή διερεύνηση τοῦ προβλήματος.

Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μέ προβλήματα πού ἡ λύση τους ἀπαιτεῖ τή χρήση ἐξισώσεων ἤ συστημάτων βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό τό πρῶτο βαθμό.

126. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ.

α) **Πρόβλημα:** Νά βρεθεῖ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, πού τό τετράγωνό του ἄν αὐξηθεῖ κατά τό 5/πλάσιό του ὁ ἀριθμός αὐτός γίνεται 50.

Λύση: Ἄν x εἶναι ὁ ἀριθμός, τότε τό τετράγωνό του εἶναι x^2 καί τό 5/πλάσιο τοῦ ἀριθμοῦ $5x$.

Ἔτσι ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x^2+5x=50$.

Περιορισμός: Ὁ x πρέπει νά εἶναι ἀκέραιος ($x \in Z$).

Ἐπίλυση τῆς $x^2+5x-50=0$. Ἔχουμε $x_1=5$, $x_2=-10$.

Διερεύνηση: Οἱ τιμές $x_1=5$, $x_2=-10$ ὑπακούουν στό περιορισμό καί συνεπῶς τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

β) **Πρόβλημα**: Νά μερισθεῖ ὁ ἀριθμός 15 σέ δύο μέρη τέτοια, ὥστε τό τετράγωνο τοῦ πρώτου ἄν ἐλαττωθεῖ κατά 41 νά γίνει ἴσο μέ τό 5/πλάσιο τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου.

Λύση: Ἄν x εἶναι τό ἕνα μέρος, τό ἄλλο θά εἶναι $15-x$.

Ἑπομένως ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x^2-41=5(15-x)^2$.

Περιορισμός: Πρέπει νά εἶναι $0<x<15$.

Ἐπίλυση τῆς $x^2 - 41 = 5(15 - x)^2$.

Ἡ ἰσοδύναμή της εἶναι $4x^2 - 150x + 1166 = 0$, ἄρα $x_1 = \frac{53}{2}$, $x_2 = 11$.

Διερεύνηση: Ἡ ρίζα $x_1 = \frac{53}{2}$ ἀπορρίπτεται, γιατί $\frac{53}{2} > 15$. Τά μέρη λοιπόν πού ζητοῦμε εἶναι 11 καί 4.

γ) **Πρόβλημα:** Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ ἐλιές πρός 22 δραχ. τό χιλιόγραμμο καί κερδίζει στίς 100 τό μισό τοῦ κόστους κάθε χιλιόγραμμου. Πόσο κοστίζει τό χιλιόγραμμο;

Λύση: Ἄν τό χιλιόγραμμο κοστίζει x δραχ., θά κερδίζει $\frac{x}{2}\%$ καί συνεπῶς ἀπό x δραχ. θά κερδίζει $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{100} = \frac{x^2}{200}$.

Συνεπῶς, ἔχουμε τήν ἐξίσωση $x + \frac{x^2}{200} = 22$.

Περιορισμός: Πρέπει νά εἶναι $0 < x < 22$.

Ἐπίλυση: $x + \frac{x^2}{200} = 22 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 4400 = 0$.

Ἄρα ἔχουμε $x_1 = 20$, $x_2 = -220$.

Διερεύνηση: Ἡ $x_2 = -220$ ἀπορρίπτεται.

Ὥστε τό χιλιόγραμμο κοστίζει 20 δραχ.

δ) **Πρόβλημα:** Ἄν οἱ πλευρές ἑνός τετραγώνου αὐξηθοῦν κατά μ μονάδες μήκους, τό ἐμβαδόν του θά γίνει μ − 3 φορές μεγαλύτερο. Νά βρεθεῖ τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

Λύση: Ἄν τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου εἶναι x, τότε ἡ πλευρά τοῦ νέου τετραγώνου θά εἶναι x + μ μονάδες μήκους καί τά ἐμβαδά τους ἀντιστοίχως x^2 καί $(x + \mu)^2$. Ἑπομένως ἔχουμε τήν ἐξίσωση $(x + \mu)^2 = (\mu - 3)x^2$.

Περιορισμός: Πρέπει $x > 0$ καί $x + \mu > 0$.

Ἐπίλυση: $(x + \mu)^2 = (\mu - 3)x^2 \rightarrow (4 - \mu)x^2 + 2x\mu + \mu^2 = 0$.

Αὐτή δίνει δυό ρίζες:

$$x_1 = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2(\mu - 3}}{4 - \mu}, \quad x_2 = \frac{-\mu - \sqrt{\mu^2(\mu - 3)}}{4 - \mu}$$

Διερεύνηση: Τό εἶδος τῶν ριζῶν καί τό σημεῖο τους, ὅπως ξέρουμε, ἐξαρτᾶται ἀπό τό σημεῖο τῶν Δ, P, S.

Σχηματίζοντας τόν πίνακα διερευνήσεως διαπιστώνουμε ὅτι γιά $\mu > 4$ ἔχουμε λύση στό πρόβλημα.

Ἔτσι γιά $\mu = 7$ ἔχουμε $x_1 = -\frac{7}{3}$, πού ἀπορρίπτεται, καί $x_2 = 7$, πού εἶναι δεκτή.

127. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΛΥΝΟΝΤΑΙ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΑΠΟ ΤΟ ΠΡΩΤΟ.

α) **Πρόβλημα:** Τά ψηφία ἑνός διψήφιου ἀριθμοῦ ἔχουν γινόμενο 35. Ἄν γίνει ἀντιμετάθεση τῶν ψηφίων, προκύπτει ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό τό γινόμενο τῶν ψηφίων κατά 40. Ποιός εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύση: Ἄν ὁ ἀριθμός ἔχει ψηφία δεκάδων ψ καί μονάδων x, τότε θά ἔχουμε: $x\psi = 35$ καί $10\psi + x = x\psi + 40$.

Περιορισμός: Πρέπει νά εἶναι $0 < x < 10$, $0 < \psi < 10$ καί $x, \psi \in Z$.

Ἐπίλυση: $\begin{cases} x\psi = 35 \\ x + 10\psi = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (75 - 10\psi)\psi = 35 \\ x = 75 - 10\psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\psi^2 - 15\psi + 7 = 0 \\ x = 75 - 10\psi \end{cases}$

Αὐτό εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό ζεῦγος τῶν συστημάτων

$$\begin{cases} \psi = 7 \\ x = 75 - 10\psi \end{cases} \quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2} \\ x = 75 - 10\psi \end{cases}$$

Ἄρα ἔχουμε τίς λύσεις $(x, \psi) = (5, 7)$, $(x, \psi) = \left(70, \frac{1}{2}\right)$

Διερεύνηση: Τό ζεῦγος $(x, \psi) = \left(70, \frac{1}{2}\right)$ ἀπορρίπτεται.

Ὥστε ὁ ἀριθμός εἶναι ὁ 57.

β) **Πρόβλημα:** Ἡ περίμετρος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι 60 cm καί τό ὕψος στήν ὑποτείνουσα 12 cm. Ποιά εἶναι τά μήκη τῶν πλευρῶν του;

Λύση: Ἄν x, ψ, z εἶναι τά μήκη τῶν κάθετων πλευρῶν καί τῆς ὑποτείνουσας, τότε θά εἶναι $x^2 + \psi^2 = z^2$ καί $x + \psi + z = 60$.

Τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου εἶναι $E = \frac{x\psi}{2} = \frac{12z}{2} \Rightarrow x\psi = 12z$.

Τό σύστημα λοιπόν εἶναι:

$$x^2 + \psi^2 = z^2,\ x + \psi + z = 60,\ x\psi = 12z$$

Περιορισμός: Πρέπει $x > 0$, $\psi > 0$, $z > 0$ καί μικρότεροι ἀπό τόν 60. Ὅταν ἐπιλύσουμε τό σύστημα, ἔχουμε $x = 20$, $\psi = 15$, $z = 25$.

γ) **Πρόβλημα:** Δύο ἐργάτες τελειώνουν ἕνα ἔργο σέ λ ὧρες. Ὁ πρῶτος μόνος του τό κάνει σέ α ὧρες λιγότερο ἀπό τό δεύτερο. Σέ πόσες ὧρες ὁ καθένας τελειώνει μόνος του τό ἔργο; (Ὅπου $\alpha, \lambda \in R^+$).

Λύση: Ἄν ὁ α' χρειάζεται x ὧρες καί ὁ β' ψ ὧρες, τότε θά εἶναι $x + \alpha = \psi$.

Ὁ πρῶτος σέ 1 ὥρα κάνει τό $\frac{1}{x}$ ἀπό τό ἔργο, ὁ β' τό $\frac{1}{\psi}$ καί οἱ δυό μαζί τό $\frac{1}{\psi} + \frac{1}{x}$. Σέ λ ὧρες κάνουν ὅλο τό ἔργο.

Ὥστε θά ἔχουμε: $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}\right)\lambda=1.$

Περιορισμός: Πρέπει νά εἶναι: $x>0,\ \psi>0,\ x>\lambda,\ \psi>\lambda.$

Ἐπίλυση : $\begin{cases}\psi=\alpha+x\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}\right)\lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=\alpha+x\\ \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha+x}\right)\lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\psi=\alpha+x\\ x^2-(2\lambda-\alpha)x-\alpha\lambda=0\end{cases}$

Αὐτό δίνει :

$$(x,\psi)=\left(\frac{2\lambda-\alpha+\sqrt{4\lambda^2+\alpha^2}}{2},\ \frac{2\lambda+\alpha+\sqrt{4\lambda^2+\alpha^2}}{2}\right)\ \text{πού εἶναι δεκτή.}$$

Ἡ ἄλλη λύση ἀπορρίπτεται, ἐπειδή $x<0$, $\psi<0$, ὅπως φαίνεται ἀπό τό γινόμενο τῶν ριζῶν $x_1x_2=-\alpha\lambda<0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁ μ ά δ α α'

415) Ἄν τό τετράγωνο τῆς ἡλικίας ἑνός παιδιοῦ ἐλαττωθεῖ κατά τό διπλάσιό της, τότε γίνεται ἴσο μέ τό διπλάσιο τῆς ἡλικίας. Νά βρεθεῖ ἡ ἡλικία τοῦ παιδιοῦ.

416) Νά βρεθεῖ ἀκέραιος ἀριθμός, πού ἄν διαιρεθεῖ μέ 25 γίνεται ἴσος μέ τόν ἀντίστροφο τοῦ πηλίκου.

417) Νά βρεθεῖ ἀριθμός, πού ἄν αὐξηθεῖ κατά τό 7/πλάσιο τῆς τετραγωνικῆς ρίζας του γίνεται 44.

418) Νά βρεθοῦν δύο ἀκέραιοι διαδοχικοί περιττοί ἀριθμοί τέτοιοι, ὥστε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τους νά εἶναι 74.

419) Ἕνας πουλάει τό ἐμπόρευμά του 39 δρχ. καί κερδίζει τόσο στίς ἑκατό, ὅσο τό ἀγόρασε. Πόσο τό ἀγόρασε;

420) Ἕνας πατέρας εἶναι 40 χρόνων καί ὁ γιός του 3 χρόνων. Μετά ἀπό πόσα χρόνια ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θά εἶναι κατά 5 χρόνια μικρότερη ἀπό τό τετράγωνο τῆς ἡλικίας τοῦ γιοῦ;

421) Μιά ποσότητα ἀπό 630 κιλά τρόφιμα ἔπρεπε νά διανεμηθεῖ σέ ὁρισμένες φτωχές οἰκογένειες. Ἐπειδή 15 ἀπό τίς οἰκογένειες δέν πῆγαν στή διανομή, καθεμιά ἀπό τίς ὑπόλοιπες πῆρε 1 κιλό τρόφιμα περισσότερο. Πόσες ἦταν οἱ οἰκογένειες;

422) Οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι 3 cm, 6 cm, 8 cm. Κατά ποιό τμῆμα πρέπει νά αὐξηθοῦν οἱ πλευρές ὥστε νά μπορεῖ νά κατασκευασθεῖ ἀπό αὐτές ὀρθογώνιο τρίγωνο;

Ὁ μ ά δ α β'

423) Νά βρεθεῖ διψήφιος ἀριθμός τέτοιος, ὥστε τό ψηφίο τῶν δεκάδων νά εἶναι κατά 1 μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιο τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων. Ὁ ἀριθμός, ἄν διαιρεθεῖ μέ τό γινόμενο τῶν ψηφίων του, δίνει πηλίκο 3 καί ὑπόλοιπο 10.

424) Ἕνα κεφάλαιο ἀπό 27.000 δραχ, χωρίστηκε σέ δύο μέρη καί τοκίστηκε μέ 6%. Τό α' μέρος τοκίστηκε 5 μῆνες περισσότερο ἀπό τό β' μέρος καί ἔδωσε τόκο 1500 δραχ. Τό β' ἔδωσε τόκο 900 δραχ. Νά βρεθοῦν τά δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου.

425) Νά βρεθοῦν οἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, πού ἔχει διαγώνιο 20 cm καί ἐμβαδό 192 cm².

426) Δύο ποδηλάτες ἀναχωροῦν μαζί ἀπό ἕναν τόπο, γιά νά διανύσουν ἀπόσταση 90 km. Τό μισό τῆς ταχύτητας τοῦ πρώτου καί τό ἕνα τρίτο τῆς ταχύτητας τοῦ β' ἔχουν ἄθροισμα 16 km. Νά βρεθοῦν οἱ ταχύτητες, ἄν ὁ α' τερμάτισε μισή ὥρα ἐνωρίτερα ἀπό τό β'.

427) Τρεῖς ἀριθμοί εἶναι ἀνάλογοι μέ τούς ἀριθμούς 2, 3, 4. Τό τετράγωνο τοῦ μεγαλύτερου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό διπλάσιο γινόμενο τῶν ἄλλων κατά 36. Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμοί αὐτοί.

428) Ὁ ἀριθμός 3 καί τρεῖς ἄλλοι βρίσκονται σέ ἀναλογία, πού οἱ ἡγούμενοί της ἔχουν ἄθροισμα 9, οἱ ἑπόμενοι 12 καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων εἶναι 125. Ποιά εἶναι ἡ ἀναλογία;

429) Νά ὑπολογισθοῦν οἱ πλευρές ἑνός ὀρθογ. τριγώνου, ἄν οἱ κάθετες πλευρές του διαφέρουν κατά 5 m καί ἡ ὑποτείνουσα μέ τό ὕψος σ' αὐτή δίνει ἄθροισμα 37 m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

430) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^4 - 2(\alpha + \beta)x^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0$, $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, καί νά ἐκφρασθοῦν οἱ ρίζες της μέ τή μορφή ἁπλῶν ριζικῶν.

431) Γιά ποιές τιμές τῶν α καί β ἡ ἐξίσωση $(\alpha + \beta)x^4 + (2\alpha - \beta - 10)x^3 + 2x^2 - (\alpha - \beta - 7)x + 6 - \alpha = 0$ εἶναι διτετράγωνη καί γιά ποιές δευτεροβάθμια; Καί στίς δυό περιπτώσεις νά βρεθεῖ τό εἶδος τῶν ριζῶν.

432) Μέ ποιά συνθήκη τό τριώνυμο $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Q}$ ἔχει ρίζες τῆς μορφῆς $\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\mu}$, ὅπου $\lambda, \mu \in \mathrm{Q}^+$.

433) Νά μετασχηματισθοῦν σέ ἁπλά ριζικά οἱ ἀκόλουθες παραστάσεις:

$$1)\ \sqrt{x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\ (x \in \mathrm{R}), \qquad 2)\ \sqrt{\frac{5x}{\psi} + \frac{2x}{z}\sqrt{\frac{5x}{\psi} - \frac{x^2}{z^2}}}$$

434) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση $\forall\ \alpha, \beta \in \mathrm{R}^+$

$A = \sqrt{\alpha + 2\beta\sqrt{\alpha - \beta^2}} + \sqrt{\alpha - 2\beta\sqrt{\alpha - \beta^2}}$ ἰσοῦται μέ 2β, ἄν $\beta^2 \leq \alpha \leq 2\beta^2$ καί μέ $2\sqrt{\alpha - \beta^2}$, ἄν $\alpha > 2\beta^2$.

435) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

$$1)\ x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right), \qquad 2)\ x^3 + x^3 + x^2 + kx + k^2 = 0\ (k \in \mathrm{R})$$

436) Νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες μέ τίς ὁποῖες ἡ ἐπιλύουσα τῆς ἐξισ. $x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1 = 0$ εἶναι ἀντίστροφη ἐξίσωση.

437) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 8 = 0$

438) Νά ἐπιλυθοῦν στό R οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις

$$1)\ 5x\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{x^3} = 296, \qquad 2)\ \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[6]{x^2 - 1}.$$

439) Νά ἐπιλυθεῖ καί νά διερευνηθεῖ ἡ ἐξίσ. $\sqrt{x^2 - 4x} = x - \lambda$ γιά πραγματικές τιμές τοῦ λ καί x.

440) Νά ἐπιλυθοῦν τά ἀκόλουθα συστήματα:

$$1)\ \begin{cases} x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 21\alpha^2 \\ \psi\omega + \omega x - x\psi = 6\alpha^2 \\ 3x + \psi - 2\omega = 3\alpha \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} z^2 + x^2 = 1 \\ \psi^2 + \omega^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\psi + z\omega = 0 \\ (2x + \psi)(2z + \omega) = 2 \end{cases}$$

441) Νά βρεθεῖ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος.

$$x^2 + \psi^2 + \omega^2 = \alpha^2, \quad x\psi = \beta^2, \quad \psi\omega = \gamma^2, \quad \omega x = \delta^2$$

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(Βασικές ἔννοιες διδάχτηκαν στήν Γ' τάξη Γυμν.)

128. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ.

Ἡ στατιστική στήν ἐποχή μας, μέ τήν ἐντελῶς ἰδιαίτερη σπουδαιότητα πού ἀπέκτησε γιά τήν ἀνθρωπότητα, ἀναπτύχθηκε σέ μιά ἐκτεταμένη ἐπιστήμη μέ πολλούς κλάδους.

Στό Γυμνάσιο μάθαμε ὁρισμένες βασικές ἔννοιες τῆς στατιστικῆς, τούς τρόπους συγκεντρώσεως καί ἐπεξεργασίας τῶν στατιστικῶν στοιχείων καί παρουσιάσεώς τους μέ τούς ἀριθμητικούς πίνακες καί τά διαγράμματα.

Παρακάτω ἐπαναλαμβάνουμε αὐτούς τούς τρόπους, ἐπειδή ἔχουν ἰδιαίτερη σημασία.

129. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ - ΠΙΝΑΚΕΣ.

Τά στατιστικά στοιχεῖα, πού προκύπτουν ἀπό τή διαλογή καί ἐπεξεργασία, παρουσιάζονται ἔτσι ,ὥστε νά εἶναι εὔκολη ἡ μελέτη τους καί ἡ συναγωγή συμπερασμάτων. Ἡ παρουσίαση αὐτή γίνεται συνήθως μέ δύο τρόπους:
α) Μέ μορφή ἀριθμητικοῦ πίνακα.
β) Μέ μορφή γραφικοῦ διαγράμματος.

Ι. Ἀριθμητικοί πίνακες

Αὐτοί μποροῦν νά ἔχουν τή μορφή ἑνός κειμένου, στό ὁποῖο νά δίνονται οἱ πληροφορίες μέ κάθε λεπτομέρεια. Συνήθως ὅμως εἶναι **συγκεντρωτικοί**, ἁπλοί στήν ἀνάγνωση καί στή σύγκριση τῶν στοιχείων μεταξύ τους.

Συχνότητα – πίνακας συχνοτήτων

Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ τιμές μιᾶς μεταβλητῆς x σέ μιά στατιστική ἔρευνα ἀπό N παρατηρήσεις εἶναι: $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ καί ὅτι ἀπό αὐτές τίς τιμές, οἱ ν_1 εἶναι ἴσες μέ τήν τιμή x_1, οἱ ν_2 ἴσες μέ $x_2, \ldots$, οἱ ν_μ ἴσες μέ x_μ.

Ἔτσι σχηματίζουμε τόν πίνακα :

x_1	x_2	x_3	...	x_μ
ν_1	ν_2	ν_3	...	ν_μ

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Καθένας ἀπό τούς ἀριθμούς $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\mu$ λέγεται **ἀπόλυτη συχνότητα** (ἤ, ἁπλά, **συχνότητα**) τῆς ἀντίστοιχης τιμῆς x καί συμβολίζεται μέ τό γράμμα f. Εἶναι φανερό ὅτι $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu = N$. Ὁ N εἶναι τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ «πληθυσμοῦ» (συνόλου παρατηρήσεων), καί λέγεται **ὁλική συχνότητα** καί συμβολίζεται καί μέ Σf.

Οἱ λόγοι $\frac{\nu_1}{N}, \frac{\nu_2}{N}, \ldots, \frac{\nu_\mu}{N}$ λέγονται **σχετικές συχνότητες** τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ἀντιστοίχως, καί τό γινόμενό τους ἐπί 100 ἐκφράζει τήν **ἑκατοστιαία (%) σχετική συχνότητα.** Τά ἀθροίσματα $\Sigma_1 = \nu_1$, $\Sigma_2 = \nu_1 + \nu_2$, $\Sigma_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \ldots, \Sigma_\mu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu$ ἤ τά ἀθροίσματα $\Sigma_1 = f_1$, $\Sigma_2 = f_1 + f_2, \ldots, \Sigma_\mu = f_1 + f_2 + \ldots + f_\mu$ καλοῦνται **ἀθροιστικές συχνότητες.**

Τό ἄθροισμα ὅλων τῶν σχετικῶν συχνοτήτων μιᾶς στατιστικῆς ἔρευνας ἰσοῦται μέ τή μονάδα.

Πράγματι ἔχουμε: $\frac{\nu_1}{N} + \frac{\nu_2}{N} + \ldots + \frac{\nu_\mu}{N} = 1$ ἤ $\frac{f_1}{\Sigma f} + \frac{f_2}{\Sigma f} + \ldots + \frac{f_\mu}{\Sigma f} = 1$

Ὁ πίνακας (1), πού μπορεῖ νά γραφεῖ καί σέ δύο στῆλες, ἀποτελεῖ τόν **πίνακα συχνοτήτων** ἤ τὴν **κατανομή συχνοτήτων.**

Παραδείγματα συγκεντρωτικῶν ἀριθμητικῶν πινάκων.

1) Σ' ἕνα Γυμνάσιο κατά τό σχολ. ἔτος 1973-74 γράφτηκαν 764 μαθητές, πού τά στοιχεῖα τους καταγράφτηκαν σ' ἕνα βιβλίο, τό μαθητολόγιο. Τό βιβλίο αὐτό ἀποτελεῖ ἕνα γενικό πίνακα λεπτομερή, χωρίς ταξινόμηση, ἀπό ὅπου μποροῦμε νά ἔχουμε στατιστικές πληροφορίες σχετικές μέ τόν «πληθυσμό» τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου. Ἡ συμπλήρωση τοῦ παρακάτω συγκεντρωτικοῦ πίνακα ἔγινε μέ βάση τήν ποιοτική ἰδιότητα: «τάξη ἐγγραφῆς».

Κατανομή τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου κατά τάξεις

Τάξεις ἐγγραφῆς	Ἀριθμός μαθητῶν Ἀπόλυτη συχνότητα f	Ἀθροιστική συχνότητα	Ἑκατοστιαία σχετική συχνότητα $100\frac{f}{\Sigma f}$	Ἀθροιστική ἑκατοστιαία σχετική συχνότητα
Α'	$f_1 = 245$	$\Sigma_1 = 245$	32,1	32
Β'	$f_2 = 160$	$\Sigma_2 = 405$	21	53
Γ'	$f_3 = 134$	$\Sigma_3 = 539$	17,5	70,5
Δ'	$f_4 = 90$	$\Sigma_4 = 629$	11,8	82,3
Ε'	$f_5 = 70$	$\Sigma_5 = 699$	9,1	91,5
ΣΤ'	$f_6 = 65$	$\Sigma_6 = 764$	8,5	100
	$\Sigma f = 764$		100,0	

Ἡ συμπλήρωση τῆς β' στήλης εἶναι φανερή. Ἡ τρίτη στήλη «ἀθροιστική συχνότητα» συμπληρώθηκε ὡς ἑξῆς: Γιά κάθε τάξη ἀντιστοιχίζεται τό ἄθροισμα τῆς ἀπόλυτης συχνότητας τῆς τάξεως καί ὅλων τῶν προηγουμένων της. Ἡ συμπλήρωση τῆς δ' στήλης ἔγινε μέ βάση τόν τύπο $100 \cdot f/\Sigma f$ καί ἡ συμπλήρωση τῆς ε' στήλης ἔγινε ὅπως καί τῆς γ' στήλης ἀπό τή δ' στήλη.

Ὁ πίνακας αὐτός εἶναι ἁπλός. καί τά συμπεράσματα ἀπό τή μελέτη του εἶναι φανερά.

2) Σέ μιά ἔρευνα γιά τό ὕψος τῶν 764 μαθητῶν τοῦ παραπάνω γυμνασίου καταγράφτηκαν σέ πρόχειρες καταστάσεις τά ὕψη τῶν μαθητῶν, τά ὁποῖα παρουσίασαν τιμές μεταξύ 135 cm καί 185 cm.

Ἡ ποσοτική ἰδιότητα «ὕψος μαθητοῦ» εἶναι μιά μεταβλητή μέ τιμές στό διάστημα [135 cm, 185 cm]. Τό **εὖρος** τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς, δηλαδή ἡ διαφορά τῶν δύο **ἀκραίων** τιμῶν, εἶναι 185 cm − 135 cm = 50cm. Τό σύνολο τῶν τιμῶν αὐτῆς τῆς μεταβλητῆς χωρίζεται σέ 5 τάξεις (ὁμάδες) πού ἔχουν τό ἴδιο εὖρος $\frac{50}{5}=10$ cm. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται **ὁμαδοποίηση τῶν παρατηρήσεων.**

Ὁ παρακάτω συγκεντρωτικός πίνακας ἔγινε μέ βάση τήν ποσοτική ἰδιότητα «ὕψος μαθητοῦ».

Κατανομή 764 μαθητῶν τοῦ γυμνασίου κατά ὕψη

Τάξεις ὕψους	Μέση τιμή	Ἀριθμός μαθητῶν Ἀπόλ. συχνότητα f	Ἀθροιστική συχνότητα	Σχετική συχνότητα $_0/^0$	Ἀθροιστική σχετική συχνότητα
1η 135-145	140	94	94	12,3	12,3
2η 145-155	150	176	270	23	35,3
3η 155-165	160	278	548	36,4	71,7
4η 165-175	170	180	728	23,6	95,3
5η 175-185	180	36	764	4,7	100
		$\Sigma f = 764$		100,0	

Στήν α' στήλη οἱ τάξεις εἶναι διαστήματα τῆς μεταβλητῆς x τοῦ ὕψους κλειστά ἀριστερά καί ἀνοικτά δεξιά, ἐκτός ἀπό τήν 5η τάξη, πού εἶναι διάστημα κλειστό δεξιά καί ἀριστερά.

Τό ἡμιάθροισμα τῶν ἀκραίων τιμῶν κάθε τάξεως λέγεται **μέση τιμή** τῆς τάξεως καί μέ τίς μέσες τιμές συμπληρώνεται ἡ β' στήλη.

Ἡ συπλήρωση τῶν ὑπόλοιπων στηλῶν ἔγινε ὅπως καί προηγουμένως.

Καί ὁ πίνακας αὐτός εἶναι ἁπλός καί ἡ ἀνάγνωσή του εὔκολη. Π.χ. ἀπό τήν γ' στήλη φαίνεται, ὅτι 36 μαθητές ἔχουν μέσο ὕψος 180 cm, ἐνῶ ἀπό τήν δ' στήλη φαίνεται, ὅτι 548 μαθητές ἔχουν ἀνάστημα κάτω ἀπό 165 cm. Ἀπό τήν ε' στήλη συμπεραίνουμε ὅτι τό 12,3% τῶν μαθητῶν ἔχουν ἀνάστημα κάτω ἀπό 145 cm, ἐνῶ ἀπό τήν τελευταία στήλη ὅτι τό 71,7% ἔχει ὕψος κάτω ἀπό 165 cm.

Σημείωση : Σέ κάθε πίνακα πρέπει νά ὑπάρχει στό πάνω μέρος ἕνας **τίτλος** ἴσως καί ἕνας **ὑπότιτλος**. Ἀκόμα δέν ἀποκλείεται νά γραφοῦν καί ὑποσημειώσεις. Ὅλα αὐτά ἔχουν σκοπό νά πληροφοροῦν σύντομα καί μέ σαφήνεια τί περιέχει ὁ πίνακας, μὲ ποιά κατάταξη συντάχθηκε καὶ σέ ποιά χρονική περίοδο ἤ καί σέ ποιό τόπο ἀναφέρεται.

II. Διαγράμματα (Γραφικοί πίνακες)

Ἡ παρουσίαση τῶν στατιστικῶν στοιχείων μέ συγκεντρωτικούς ἀριθμητικούς πίνακες παρουσιάζει μερικές δυσκολίες στήν ἑρμηνεία καί χρειάζεται μεγάλη προσπάθεια γιά νά γίνει κατανοητή ἡ ἀκριβής σημασία τους ἀπό τούς περισσότερους ἀνθρώπους.

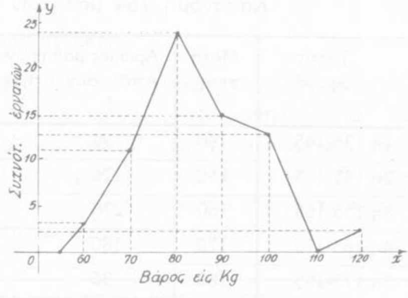
Ἐντελῶς ὅμως διαφορετική εἶναι ἡ ἐντύπωση πού δοκιμάζουμε, ὅταν τά στατιστικά στοιχεῖα παρουσιάζονται μέ μορφή γεωμετρικοῦ σχήματος, γραφικῆς παραστάσεως ἤ, ὅπως λέγεται, **διαγράμματος**. Ἡ ἐντύπωση αὐτή εἶναι ζωηρότερη καί διαρκεῖ περισσότερο.

Οἱ γραφικές παραστάσεις ἤ διαγράμματα εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν καί παρέχουν ἀμέσως καί συνοπτικά διάφορες χρήσιμες πληροφορίες. Παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία καί χρησιμοποιοῦνται πολύ στή Στατιστική.

Θά ἀναφέρουμε ἐδῶ τίς δύο κυριότερες κατηγορίες: (α) τίς γραμμικές παραστάσεις ἤ γραμμικά διαγράμματα καί (β) γραφικές παραστάσεις μέ ἐπιφάνειες.

1) Πολύγωνο συχνότητας.

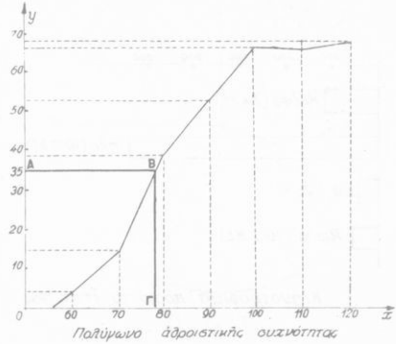
Ὅταν ἡ μεταβλητή x σέ μιά στατιστική ἔρευνα εἶναι συνεχής, τότε τά ζεύγη (x, f), ὅταν ἀπεικονισθοῦν στό σύστημα τῶν ὀρθογ. ἀξόνων xOψ, δίνουν συνεχή τεθλασμένη γραμμή, πού λέγεται **πολύγωνο συσχνότητας**. Στό σχῆμα ἡ γραμμική παράσταση δίνει τή γεωμετρική εἰκόνα τῆς παρακάτω κατανομῆς 68 ἐργατῶν ἑνός ἐργοστασίου κατά βάρη.



Σχ. 129.1

Κατανομή 68 ἐργατῶν κατά βάρη σέ kg					
Τάξεις	Μέση τιμή	f	100f/Σf	Ἀθροιστική συχνότητα	Ἀθρ. σχετική συχνότητα %
55-65	60	3	4,4	3	4,4
65-75	70	11	16,2	14	20,6
75-85	80	24	35,3	38	55,9
85-95	90	15	22,1	53	78
95-105	100	13	19,1	66	97,1
105-115	110	0	0,0	66	97,1
115-125	120	2	2,9	68	100
		Σf = 68	100		

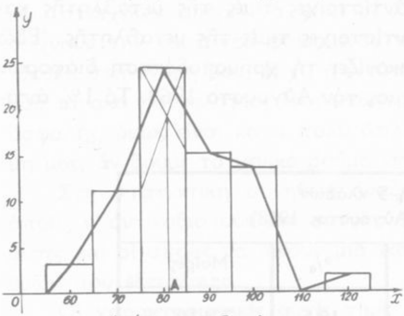
Πολλές φορές στή στατιστική εἶναι χρήσιμη ἡ γραφική παράσταση τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας, ὁπότε τό πολύγωνο πού παίρνουμε λέγεται **πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας**. Στό σχῆμα ἡ γραμμική παράσταση εἶναι τό πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας τῆς κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν κατά βάρη. Ἄν ἀπό τό σημεῖο Α φέρουμε ΑΒ ⊥ Οψ καί ἔπειτα ΒΓ ⊥ Οx, συμπεραίνουμε ὅτι 35 ἐργάτες ἔχουν βάρος λιγότερο ἀπό 78 kg (τό 78 εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Γ).



Σχ. 129.2

2) Ἱστόγραμμα συχνότητας

Τό ἱστόγραμμα συχνότητας εἶναι ὁ συνηθέστερος τρόπος παρουσιάσεως στατιστικῶν στοιχείων. Γιά τήν κατασκευή του κατασκευάζουμε ὀρθογώνια μέ βάσεις τά ἴσα τμήματα τοῦ ἄξονα Οx, στά ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ τό εὖρος κάθε τάξεως τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς, καί μέ ὕψη τίς ἀντίστοιχες συχνότητες αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

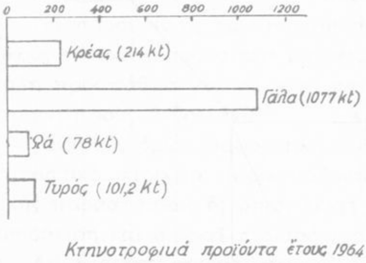


Σχ. 129.3

Τό ἐμβαδό κάθε ὀρθογωνίου ἀπεικονίζει τήν ἀντίστοιχη πρός τήν βάση του συχνότητα. Τό ἱστόγραμμα συχνότητας τοῦ σχήματός μας δίνει τή γεωμετρική εἰκόνα τῆς κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν κατά βάρη καί ἡ τεθλασμένη γραμμή εἶναι τό πολύγωνο συχνότητας.

3) Τό ραβδόγραμμα.

Αὐτό ἀποτελεῖται ἀπό μιά σειρά ὀρθογωνίων, πού οἱ βάσεις τους εἶναι ἴσες καί στηρίζονται στόν ἴδιο ἄξονα (ἤ τόν Οx ἤ τόν Οψ). Τά μήκη τους εἶναι ἀνάλογα πρός τίς ἀντίστοιχες τιμές πού παριστάνουν. Στά δύο σχήματα δίνουμε δύο ραβδογράμματα. Τό πρῶτο ἀναφέρεται στήν παραγωγή τῶν κυριότερων κτηνοτροφικῶν προϊόντων τῆς Ἑλλάδας κατά τό 1964 καί τό δεύτερο στίς ἐξαγωγές τῶν βιομηχανικῶν προϊόντων τῆς χώρας μας κατά τή τετραετία 1964-1967. Τό β' ραβδόγραμμα λέγεται καί **χρονοδιάγραμμα**.



Σχ. 129.4

Σχ. 129.5

4) Τό κυκλικό διάγραμμα,

Αὐτό εἶναι κύκλος μέ αὐθαίρετη ἀκτίνα διαμερισμένος σέ κυκλικούς τομεῖς, πού ἔχουν ἐμβαδά ἀνάλογα πρός τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς μεταβλητῆς καί τόξα μέ μέτρα ἀνάλογα πρός τίς ἴδιες ἀντίστοιχες τιμές τῆς μεταβλητῆς. Ἐδῶ δίνουμε ἕνα τέτοιο διάγραμμα πού ἀπεικονίζει τή χρηματοδότηση διάφορων κλάδων τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς τῆς χώρας μας τόν Αὔγουστο 1968. Τό 1% ἀντι-

Χρηματοδότηση 5 κλάδων σέ ἑκατομ. δραχμές (Αὔγουστος 1968)

Κλάδοι	Ποσό	%	Μοῖρες
1. Τουρισμός Ξενοδοχεῖα	3.900	19,5	70° 10'
2. Ἠλεκτρική ἐνέργεια	3.300	16,5	59° 24'
3. Μεταφορές ἐπικοινωνίες	5.000	25	90°
4. Ἔργα κοινῆς ὠφέλειας	6.600	33	118° 50'
5. Ἄλλοι σκοποί	1.200	6	21° 36'
Ἄθροισμα	20.000	100	360°

στοιχίζεται σέ τόξο $\frac{360^0}{100} = 3{,}6^0 = 3^0\ 36'$, ἐπομένως τά 16,5% σέ τόξο $3{,}6^0 \times 16{,}5 = 59^0\ 24'$.

Ἐκτός ἀπό τίς παραπάνω γραφικές παραστάσεις τῶν στατιστικῶν στοιχείων ὑπάρχουν ἀκόμα τά **χαρτογράμματα**, πού εἶναι γεωγραφικοί χάρτες μέ ποικιλία χρωμάτων. Ἐπίσης ὑπάρχουν τά **εἰδογράμματα** ἤ **εἰδογραφήματα** πού εἶναι πίνακες σχεδίων καί εἰκόνων προσώπων ἤ πραγμάτων καί τά ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται μέ ποικίλες μορφές στίς διαφημίσεις.

Σχ. 129.6

130. ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ.

Στά προηγούμενα εἴδαμε τρόπους παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν στοιχείων μέ ἀριθμητικούς πίνακες καί γραφικές παραστάσεις. Ἡ φάση αὐτή τῆς παρουσιάσεως ἀποτελεῖ ἕναν οὐσιώδη τομέα τῆς περιγραφικῆς στατιστικῆς, γιατί μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπό τόν κόπο νά παρατηροῦμε μεγάλο πλῆθος ἀριθμῶν.

Γεννᾶται ὅμως τό ἐρώτημα: Μήπως ἡ περιγραφή μιᾶς σειρᾶς στατιστικῶν στοιχείων μπορεῖ νά γίνει μέ λίγες μόνο χαρακτηριστικές τιμές, πού νά δείχνουν τήν τάση τοῦ φαινομενου πού ἐξετάζουμε καί νά τίς διατηροῦμε πιό εὔκολα στή μνήμη μας; Π.χ., ἡ ἐντύπωση, πού δημιουργεῖται ἀπό τήν ἐξέταση τοῦ πίνακα βαθμολογίας ἑνός μαθητῆ σέ κάθε μάθημα ξεχωριστά, εἶναι βέβαια ἀσφαλής, ὅμως εἶναι κατά πολύ ἁπλούστερη, πιό σαφής καί διαρκεῖ στή μνήμη μας, ἄν δοῦμε τό γενικό βαθμό ἐπιδόσεως, δηλαδή τό μέσο ὅρο, ὅπως λέμε.

Στή στατιστική συνήθως ἀναζητοῦμε μερικές χαρακτηριστικές τιμές, οἱ ὁποῖες ν' ἀντικαθιστοῦν ἕνα σύνολο ἀριθμῶν πού συγκεντρώνονται γύρω ἀπό αὐτές καί οἱ ὁποῖες νά δίνουν μιά ἱκανοποιητική ἰδέα γιά τό σύνολο τῶν ἀριθμῶν πού ἐξετάζουμε.

Οἱ χαρακτηριστικές αὐτές τιμές λέγονται **κεντρικές τιμές** ἤ **μέσοι** καί διακρίνονται συνήθως σέ **μέσους κεντρικῆς τάσεως** καί σέ **μέσους θέσεως**. Οἱ μέσοι **κεντρικῆς τάσεως** εἶναι ὁ **ἀριθμητικός**, ὁ **γεωμετρικός** καί ὁ **ἁρμονικός μέσος** καί οἱ **μέσοι θέσεως** εἶναι: ἡ **διάμεσος** καί ἡ **ἐπικρατοῦσα τιμή**. Ἀπό τούς πρώτους θά γίνει ἡ ἐξέταση μόνο τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

I. Ἀριθμητικός μέσος (ἤ μέση τιμή)

α) Ἀριθμητικός μέσος σέ ἀταξινόμητα στοιχεῖα.

Ἄν $x_1, x_2, \ldots, x_N$ εἶναι οἱ τιμές τῶν στοιχείων, τότε τό πηλίκο τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν τιμῶν μέ τό πλῆθος τους N δίνει τόν ἀριθμητικό μέσο, πού συμβολίζεται μέ τό $\bar{x}$.

Δηλαδή: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$ ἤ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$ (1)

β) Ἀριθμητικός μέσος σέ ταξινομημένα στοιχεῖα.

(1)

x_1	x_2	...	x_μ
f_1	f_2	...	f_μ

Ἄν εἶναι $x_1, x_2, \ldots, x_N$ οἱ τιμές τῶν στοιχείων καί ταξινομηθοῦν σέ πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων, τότε ὁ ἀριθμητικός μέσος $\overline{x}$ θά εἶναι:

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_\mu x_\mu}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \quad (1)$$

Παράδειγμα: 1) Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμητικός μέσος τοῦ ἀναστήματος 12 μαθητῶν. Τά ἀναστήματά τους ἀταξινόμητα εἶναι:

151, 152, 152, 156, 156, 156, 162, 162, 162, 162, 168, 168 cm

Μέσο ἀνάστημα:

$$\overline{x} = \frac{151+152+152+156+156+156+162+162+162+162+168+168}{12} = \frac{1907}{12} = 158{,}9\text{cm}$$

Ὁ πίνακας κατανομῆς συχνοτήτων εἶναι:
καί συνεπῶς κατά τόν τύπο (2)

151	152	156	162	168
1	2	3	4	2

ἔχουμε: $\overline{x} = \dfrac{1.151+2.152+3.156+4.162+2.168}{12} = 158{,}9$ cm

2) Νά βρεθεῖ τό μέσο βάρος τῶν 68 ἐργατῶν ἀπό τόν πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων τοῦ παραδείγματος τῆς σελ. 232.

Ὁ ὑπολογισμός ἐδῶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου γίνεται μέ προσέγγιση, γιατί θεωροῦμε ὡς τιμές τῆς x τίς μέσες τιμές τῆς β' στήλης.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\overline{x} = \frac{3.60+11.70+24.80+15.90+13.100+0.110+2.120}{68} = 84{,}7$$

Ἄρα τό μέσο βάρος τῶν 68 ἐργατῶν εἶναι 84,7 Kg.

Ἰδιότητες τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου

1) Ἔστω $x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \ldots, x_N$ οἱ τιμές τῶν στοιχείων καί $\overline{x}$ ὁ ἀριθμ. μέσος τους. Ἄν ὀνομάσουμε τή διαφορά $x_\mu - \overline{x}$ **ἀπόκλιση** τῆς τυχαίας τιμῆς x_μ ἀπό τό μέσο $\overline{x}$, τότε τό ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων τοῦ συνόλου τῶν στοιχείων ἀπό τό $\overline{x}$ εἶναι μηδέν.

Πράγματι, $(x_1-\overline{x}) + (x_2-\overline{x}) + \ldots + (x_N-\overline{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_N - N\overline{x} = N\overline{x} - N\overline{x} = 0$.

2) Ὁ μέσος x ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ἐπί τίς σχετικές συχνότητες αὐτῶν.

Σημείωση. Ἀπό τίς τιμές $x_1, x_2, \ldots x_N$, οἱ f_1 εἶναι ἴσες μέ x_1, οἱ f_2 ἴσες μέ $x_2, \ldots$, οἱ f_μ ἴσες μέ x_μ καί συνεπῶς ἔχουμε $x_1 + x_2 + \cdots + x_N = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_\mu x_\mu$.

Πράγματι, ἀπό τόν τύπο (2) ἔχουμε:

$$\overline{x} = \frac{f_1}{\Sigma f} x_1 + \frac{f_2}{\Sigma f} x_2 + \ldots + \frac{f_\mu}{\Sigma f} \cdot x_\mu = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \ldots + F_\mu x_\mu = \Sigma F x,$$ ὅπου

$F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ εἶναι οἱ σχετικές συχνότητες.

II. Διάμεσος (x_δ)

Ἄν $x_1, x_2, \ldots, x_N$ εἶναι οἱ N τιμές, τίς ὁποῖες παρατηρήσαμε καί τίς γράψουμε κατά τάξη μεγέθους πού αὐξάνει, τότε, ἄν ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος τῆς σειρᾶς, αὐτός εἶναι ἡ **διάμεσος** τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Ἄν ὅμως δέν ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος, τότε παίρνουμε ὡς **διάμεσο** τό ἡμιάθροισμα τῶν δύο μεσαίων ὅρων.

Καί στίς δύο περιπτώσεις ἡ διάμεσος εἶναι ἀριθμός, πού χωρίζει τό σύνολο τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_N$ σέ δυό τάξεις μέ τόν ἴδιο πληθάριθμο. Ὁ τύπος $\frac{N+1}{2}$ δίνει τήν τάξη τῆς διαμέσου στή σειρά τῶν ἀριθμῶν.

Π.χ. ἡ διάμεσος τῶν ἀριθμῶν 3, 10, 13, 19, 20, 30, 32 εἶναι ὁ ἀριθμός 19, πού κατέχει τήν τάξη $\frac{7+1}{2} = 4$ος. Ἐνῶ τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 15, 15, 19, 40, 40, 41 ἡ διάμεσος εἶναι ἀριθμός $\frac{15+19}{2} = 17$. Καί ἐπειδή εἶναι $\frac{8+1}{2} = 4{,}5$, ἄρα κατέχει τήν 5η τάξη καί συνεπῶς βρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 15 καί 19.

Ὁ ὑπολογισμός τῆς διαμέσου σέ παρατηρήσεις πού ἔχουν ὁμαδοποιηθεῖ παρουσιάζει δυσκολίες καί ἴσως στήν τιμή πού βρίσκουμε παρατηρηθεῖ κάποια ἀοριστία, ἐπειδή δέ γνωρίζουμε τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς μέ ἀκρίβεια. Ἔτσι, γιά τόν ὑπολογισμό τῆς διαμέσου τῶν τιμῶν τοῦ πίνακα κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν τῆς σελ. 232 σκεπτόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔχουμε $N = 68$ καί $\frac{N+1}{2} = \frac{68+1}{2} = 34{,}5$. Ἄρα ἡ διάμεσος βρίσκεται μεταξύ τῆς 34ης καί 35ης τιμῆς καί συνεπῶς ἀνήκει στήν τάξη 75-85, ὅπως φαίνεται ἀπό τή στήλη «ἀθροιστική συχνότητα».

Πρίν ἀπό τή διάμεσο ὑπάρχουν 34 τιμές, ἀπό τίς ὁποῖες οἱ 14 ἀνήκουν στήν τάξη 55 - 75 καί οἱ ὑπόλοιπες 20 ἀνήκουν στήν τάξη 75 - 85.

Ὥστε ἡ τάξη 75 - 85, μέ εὖρος 10 μονάδων, περιλαμβάνει στίς 24 τιμές της τή **διάμεσο** καί 20 τιμές πρίν ἀπό αὐτή. Καί ἐπειδή 24 τιμές καλύπτουν εὖρος 10 μονάδων, οἱ 20 τιμές θά καλύπτουν εὖρος $10 \cdot \frac{20}{24}$ μονάδων.

Ἑπομένως ἡ **διάμεσος** μέ προσέγγιση εἶναι:

$$x_\delta = 75 + 10 \cdot \frac{20}{24} = 75 + 8{,}3 = 83{,}3 \text{ kg}.$$

Σημείωση:

Ὁ ἀριθμ. μέσος στό παράδειγμά μας ὑπολογίσθηκε προηγουμένως καί βρέθηκε ὅτι εἶναι $\overline{x} = 84{,}7$. Ἡ τιμή αὐτή λίγο διαφέρει ἀπό τή διάμεσο $x_\delta = 83{,}3$.

Γενικά, ἄν x_λ εἶναι ἡ ἀρχική τιμή τῆς τάξεως, στήν ὁποία ἀνήκει ἡ διάμεσος x_δ, Σf ἡ ὁλική συχνότητα, f_δ ἡ συχνότητα τῆς τάξεως στήν ὁποία ἀνήκει ἡ x_δ, F ἡ ἀθροιστική συχνότητα ὅλων τῶν τάξεων πρίν ἀπό τήν τάξη τῆς x_δ καί ε τό εὖρος τῆς τάξεως τῆς x_δ, τότε, ἄν σκεφθοῦμε κατά τόν ἴδιο τρόπο, βρίσκουμε τόν τύπο:

$$x_\delta = x_\lambda + \varepsilon \quad \frac{\frac{1}{2}\Sigma f - F}{f_\delta}$$

Γραφικός προσδιορισμός τῆς διαμέσου

Αὐτός εἶναι εὔκολος, ἀλλά δέν παρέχει μεγάλη ἀκρίβεια.

Κατασκευάζουμε τό πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας καί φέρνουμε κάθετη εὐθεία στόν ἄξονα Οψ στό σημεῖο, πού χωρίζει τήν ὁλική συχνότητα σέ δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδες. Ἀπό τό σημεῖο πού ἡ εὐθεία αὐτή τέμνει τό πολύγωνο φέρνουμε κάθετη εὐθεία στόν ἄξονα Οx καί ὁρίζουμε ἕνα σημεῖο, πού ἡ τετμημένη του εἶναι ἡ τιμή τῆς διαμέσου.

Ἡ κατασκευή πού περιγράψαμε φαίνεται στό πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας τῆς σελ. 233, στό ὁποῖο ἡ διάμεσος δίνεται ἀπό τήν τετμημένη τοῦ σημείου Γ.

III. Ἐπικρατοῦσα τιμή (X_ε)

Ὁ **μέσος** αὐτός εἶναι ἡ τιμή τῆς μεταβλητῆς, πού παρουσιάζεται πιό συχνά, δηλαδή ἀντιστοιχεῖ στήν **μέγιστη συχνότητα** καί συνεπῶς ἔχει ἔννοια, ὅταν τά στοιχεῖα ἐμφανίζονται σέ κατανομή συχνοτήτων. Π.χ. Ἄν ἀπό τούς ἐργάτες ἑνός ἐργοστασίου αὐτοί πού παίρνουν ἡμερομίσθιο 200 δραχ. εἶναι οἱ πολυαριθμότεροι, τότε λέμε ὅτι τό ἐπικρατέστερο ἡμερομίσθιο **(ἐπικρατοῦσα τιμή)** στό ἐργοστάσιο εἶναι 200 δραχ.

Ὁ προσδιορισμός μέ ἀκρίβεια τῆς **ἐπικρατούσας τιμῆς** x_ε προϋποθέτει τή γνώση ὅλων τῶν στοιχείων τῆς κατανομῆς καί ἑπομένως, εἶναι δύσκολος ὅταν τά στοιχεῖα αὐτά εἶναι πολυπληθῆ καί ἀκανόνιστα.

Στήν κανονική κατανομή συχνοτήτων ὁ προσδιορισμός τῆς **ἐπικρατούσας τιμῆς** μέ προσέγγιση στηρίζεται στόν ἐμπειρικό τύπο:

$$x_\varepsilon - x_\delta = 2(x_\delta - \bar{x})$$

Σημείωση: Μετά ἀπό παρατηρήσεις βγῆκε τό συμπέρασμα ὅτι, ἄν ἡ κατανομή συχνοτήτων εἶναι κάπως κανονική, ἡ διάμεσος x_δ περιέχεται μεταξύ τῆς ἐπικρατούσας τιμῆς x_ε καί τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\bar{x}$. Ἄν ἡ κατανομή εἶναι συμμετρική (ἱστόγραμμα συχνότητας συμμετρικό), τότε εἶναι $x_\varepsilon = x_\delta = \bar{x}$.

Γραφικά μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τήν ἐπικρατοῦσα τιμή ἀπό τό ἱστόγραμμα συχνότητας ὡς ἑξῆς: Συνδέουμε μέ εὐθύγραμμα τμήματα τίς πάνω κορυφές τοῦ ὀρθογωνίου τῆς μεγαλύτερης συχνότητας μέ τίς κορυφές τῶν δύο δεξιά καί ἀριστερά ὀρθογωνίων καί ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν τμημάτων αὐτῶν φέρουμε κάθετο στόν ἄξονα Ox, ἡ ὁποία ὁρίζει τήν ἐπικρατοῦσα τιμή. Π.χ. Στό ἱστόγραμμα τῆς σελ. 233 ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Α.

Ἄν ἐφαρμόσουμε τόν τύπο τῆς ἐπικρατούσας τιμῆς στήν κατανομή τῶν 68 ἐργατῶν τῆς σελ. 232 παίρνουμε:

$$x_\varepsilon - 83{,}3 = 2(83{,}3 - 84{,}7) \Rightarrow 80{,}5 \text{ kg}.$$

IV. Παρατηρήσεις γιά τίς κεντρικές τιμές

Ὁ **ἀριθμητικός μέσος** ὑπολογίζεται εὔκολα καί ἔχει καθορισμένη τιμή. Ἐπειδή ὅμως ἐπηρεάζεται ἀπό τίς ἀκραῖες τιμές, μπορεῖ νά εἶναι, μέ προσέγγιση, ἡ ἀντιπροσωπευτική κεντρική τιμή. Πάντως εἶναι ὁ πιό εὔχρηστος, ὁ πιό κατανοητός καί ὁ πιό γνωστός **μέσος** στή στατιστική πράξη.

Ἡ **διάμεσος** ὑπολογίζεται σχετικά εὔκολα καί ἡ τιμή της ἐπηρεάζεται μόνο ἀπό τό πλῆθος τῶν δεδομένων τιμῶν (δέν ἐπηρεάζεται ἀπό τίς ἀκραῖες τιμές), γι' αὐτό εἶναι περισσότερο κεντρική τιμή καί συνεπῶς μᾶς πληροφορεῖ πληρέστερα ἀπό τόν ἀριθμητικό μέσο.

Ἡ **ἐπικρατοῦσα τιμή**, τέλος, ὑπολογίζεται μόνο μέ προσέγγιση σχετικά εὔκολα. Ἡ ἀναζήτηση τῆς ἀληθοῦς τιμῆς εἶναι δύσκολη καί δέν ἐπηρεάζεται ἀπό τίς ἀκραῖες τιμές.

Τά πλεονεκτήματα καί μειονεκτήματα τῶν κεντρικῶν τιμῶν ἐμφανίζονται ἀνάλογα μέ τήν περίπτωση καί συνεπῶς στίς στατιστικές ἐφαρμογές ἡ προτίμησή τους γίνεται ἀνάλογα πάλι μέ τήν περίπτωση.

131. ΔΙΑΣΠΟΡΑ — ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ — ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ.

Εἴδαμε στά προηγούμενα ὅτι οἱ τρεῖς κεντρικές τιμές (ἀριθμητ. μέσος, διάμεσος, ἐπικρατοῦσα τιμή) παρέχουν πολλές φορές μόνο ἐνδείξεις γιά τήν τάση τῶν στοιχείων μιᾶς κατανομῆς. Εἶναι εὐνόητο λοιπόν ὅτι εἶναι ἀνεπαρκεῖς νά περιγράψουν μέ ἀκρίβεια τή φυσιογνωμία τῆς κατανομῆς.

Π.χ. Σέ ἕναν ἔρανο οἱ 12 ὑπάλληλοι μιᾶς ὑπηρεσίας πρόσφεραν τά ἑξῆς ποσά: 10, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 25, 30, 30, 45, 50 (1). Οἱ κεντρικές τιμές τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι: $\overline{x} = 25$, $x_\delta = 20$, $x_\varepsilon = 20$. Ἄν ἀπό τούς ἴδιους ὑπαλλήλους ἡ σειρά τῶν εἰσφορῶν ἦταν

$$5, 10, 10, 10, 20, 20, 20, 20, 20, 30, 35, 100 \qquad (2)$$

τότε οἱ κεντρικές τιμές πάλι εἶναι: $\overline{x} = 25$, $x_\delta = 20$, $x_\varepsilon = 20$. Οἱ σειρές (1) καί (2) μολονότι ἔχουν τίς ἴδιες κεντρικές τιμές, ὅμως διαφέρουν μεταξύ τους πάρα πολύ. Στή σειρά (1) οἱ τιμές **διασπείρονται** ἀπό 10 μέχρι 50 καί τό εὖρος τῆς κατανομῆς εἶναι 50 - 10 = 40, ἐνῶ στή (2) ἀπό 5 μέχρι 100 μέ εὖρος 100 - 5 = 95, γι' αὐτό λέμε ὅτι ἡ κατανομή τῆς σειρᾶς (2) ἔχει μεγαλύτερη **διασπορά** ἀπό τήν κεντρική τιμή.

Ἡ στατιστική ἔρευνα λοιπόν εἶναι ὑποχρεωμένη νά ἐξετάσει καί ἄλλες τιμές τῆς μεταβολῆς τῶν στατιστικῶν στοιχείων.

Τή συγκέντρωση ἤ ἀπομάκρυνση τῶν στατιστικῶν στοιχείων γύρω ἀπό μιά κεντρική τιμή ὀνομάζουμε διασπορά.

Τό εὖρος τῆς κατανομῆς δέν εἶναι κατάλληλο γιά τήν περιγραφή τῆς διασπορᾶς τῶν στοιχείων, γιατί ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τίς ἀκραῖες τιμές. Θά μπορούσαμε νά ὑπολογίσουμε τή διασπορά ἀναζητώντας τό μέσο ὅρο τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν ἀπό τό μέσο τους $\overline{x}$, ἀλλά τό ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων αὐτῶν εἶναι μηδέν (σελ. 236, 1η ἰδιότητα τοῦ ἀριθμ. μέσου). Τά τετράγωνα ὅμως τῶν ἀποκλίσεων, δηλαδή τά $(x_\lambda-\overline{x})^2$, εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί συνεπῶς ὁ ἀριθμητικός μέσος τους $\frac{\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2}{N}$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Τήν ποσότητα αὐτή τή συμβολίζουμε μέ τό σ^2 καί τήν ὀνομάζουμε **μέση τετραγωνική ἀπόκλιση** ἤ **διακύμανση τῆς κατανομῆς** καί τή θετική τετραγωνική ρίζα της σ **τυπική ἀπόκλιση**.

Ὥστε ἔχουμε :
$\lambda = 1, 2, \ldots, N$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2}{N} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2}{N}} \quad (2)}$$

Ἄν ἀναπτύξουμε τό ἄθροισμα $\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2$, παίρνουμε:

$$\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2 = (x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_N-\overline{x})^2 =$$
$$=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2)-2\overline{x}(x_1+x_2+\ldots+x_N)+(N\overline{x}^2 =$$
$$=(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2)-2\overline{x}\cdot N\overline{x}+N\overline{x}^2=\Sigma x_\lambda^2-N\overline{x}^2.$$

Ἄρα οἱ τύποι
(1) καί (2) γράφονται:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma x_\lambda^2}{N} - \overline{x}^2 \quad (1') \quad \text{καί} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_\lambda^2}{N} - \overline{x}^2} \quad (2')}$$

Παραδείγματα: 1) Οἱ διακυμάνσεις στό παράδειγμα τοῦ ἐράνου τῶν 12 ὑπαλλήλων εἶναι στίς δύο περιπτώσεις:

$$\sigma_1^2=\frac{1}{12}[(10-25)^2+(15-25)^2+\ldots+(50-25)^2]=\frac{1}{2}(15^2+10^2+\ldots+25^2)=\frac{400}{3}$$

$$\sigma_2^2=\frac{1}{12}[(5-25)^2+(10-25)^2+\ldots+(100-25)^2]=\frac{1}{12}(20^2+15^2+\ldots+75^2)=\frac{3475}{6}$$

Καί οἱ τυπικές ἀποκλίσεις εἶναι :

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{3475}{6}}$$

2) Νά ὑπολογισθεῖ ἡ διακύμανση τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 11, 12.

Ἔχουμε $\overline{x} = \frac{37}{4} = 9{,}25$. Ἄν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο (1), ἔχουμε:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}[(6-9{,}25)^2 + \ldots + (12-9{,}25)^2] = \frac{1}{4}(3{,}25^2 + 1{,}25^2 + 1{,}75^2 + 2{,}75^2) \simeq 5{,}7$$

Ἄν χρησιμοποιήσουμε τόν τύπο (1'), ἔχουμε:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}(6^2 + 8^2 + 11^2 + 12^2) - \left(\frac{37}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}(36 + 64 + 121 + 144) - \frac{1369}{16} \simeq 5{,}7.$$

Ὁ τύπος (1') ἐδῶ μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπό πολύπλοκους πολλαπλασιασμούς.

Ἄν οἱ τιμές τῆς μεταβλητῆς ἔχουν ταξινομηθεῖ σέ ἕναν πίνακα κατανομῆς

x_1	x_1	...	x_λ
f_1	f_2	...	f_λ

$f_1 + f_2 + \ldots + f_\lambda = N = \Sigma f$,

τότε τά τετράγωνα τῶν ἀποκλίσεων, ὅταν πολλαπλασιασθοῦν μέ τίς ἀντίστοιχες συχνότητες, δίνουν **μέση τετραγωνική ἀπόκλιση** $\sigma^2 = \frac{\Sigma f_\lambda (x_\lambda - \bar{x})^2}{\Sigma f}$ (3) **καί τυπική ἀπόκλιση** $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_\lambda (x_\lambda - \bar{x})^2}{\Sigma f}}$ (4)

Καί ἄν σκεφθοῦμε ὅπως καί προηγουμένως, τότε οἱ τύποι (3) καί (4) γράφονται:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_\lambda x_\lambda^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2 \quad (3') \quad \text{καί} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_\lambda x_\lambda^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2} \quad (4')$$

Στήν περίπτωση τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς οἱ ἀποκλίσεις ὑπολογίζονται μέ τίς μέσες τιμές τῶν τάξεων.

Σημείωση. Ἡ τυπική ἀπόκλιση σ εἶναι τό μέτρο τῆς διασπορᾶς καί ἐκφράζεται μέ τίς ἀρχικές μονάδες μετρήσεως τῶν στοιχείων.

Παραδείγμα. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τυπική ἀπόκλιση τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν, πού ἀναφέρονται στή σελίδα 232.

Σχηματίζουμε τόν πίνακα: Ἀριθμητικός μέσος $\bar{x} = 84{,}7$ kg

Μέση τιμή	f_λ	x_λ^2	$f_\lambda x_\lambda^2$	$x_\lambda - \bar{x}$	$(x_\lambda - \bar{x})^2$	$f_\lambda(x_\lambda - \bar{x})^2$
60	3	3600	10800	–24,7	610,09	1830,27
70	11	4900	53900	–14,7	216,09	2376,99
80	24	6400	153600	— 4,7	22,09	530,16
90	15	8100	121500	5,3	28,09	421,35
100	13	10000	130000	15,3	234,09	3043,17
110	0	12100	—	25,3	640,09	—
120	2	14400	28800	35,3	1246,09	2492,18
Ἄθροισμα	68		498600			10694,12

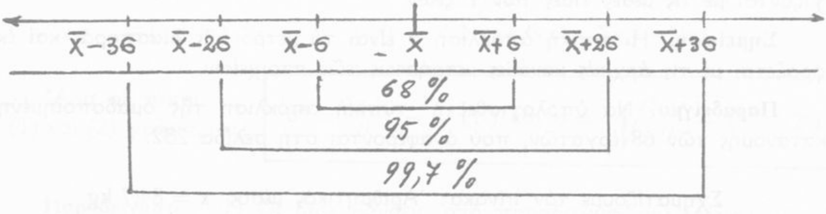
Ἄρα, σύμφωνα μέ τόν τύπο (4') ἔχουμε : $\sigma = \sqrt{\dfrac{498600}{68} - 84{,}7^2} \simeq 12{,}6\,\text{kg}$

καί σύμφωνα μέ τόν τύπο (4) ἔχουμε : $\sigma = \sqrt{\dfrac{10694{,}12}{68}} \simeq 12{,}6\,\text{kg}$

Σημασία τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως

Ἡ γνώση τῆς μέσης τιμῆς $\overline{x}$ καί τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ συμβάλλει πάρα πολύ στό νά προσδιορισθεῖ ἡ μορφή τῆς κατανομῆς συχνοτήτων κατά τρόπο ἱκανοποιητικό, στήν περίπτωση πού τά στοιχεῖα **διασπείρονται** κανονικά καί συμμετρικά γύρω ἀπό τό μέσο $\overline{x}$. Ὅταν ἡ τυπική ἀπόκλιση εἶναι μικρή, τά στοιχεῖα τείνουν νά **συσσωρευθοῦν** γύρω ἀπό τό μέσο, καί ὅταν εἶναι μεγάλη, τείνουν νά **διασπαροῦν.** Οἱ στατιστικές μελέτες δείχνουν ὅτι σέ μιά κανονική καί συμμετρική κατανομή τά διαστήματα δεξιά καί ἀριστερά τοῦ μέσου $\overline{x}$, σέ ἀπόσταση ἴση μέ σ, 2σ, 3σ, περιλαμβάνουν ἀντίστοιχα τά 68%, 95%, 99,7% περίπου τῆς ὁλικῆς συχνότητας τῶν στοιχείων.

Ὁ παρακάτω πίνακας δίνει συνοπτικά τή διασπορά τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς δεξιά καί ἀριστερά τῆς μέσης τιμῆς $\overline{x}$ σέ ἑκατοστιαῖα ποσοστά τῆς ὁλικῆς συχνότητας. Ὁ σκοπός τοῦ πίνακα εἶναι νά θέσει κατώτερα ὅρια ἀσφάλειας καί νά βοηθήσει ἔτσι στή διαπίστωση λαθῶν, πού ἴσως ἔγιναν στούς ὑπολογισμούς.



Σχ. 131.1

Στό προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε $\sigma = 12{,}6$ kg καί $\overline{x} = 84{,}7$ kg. Ἄρα στό διάστημα ἀπό $\overline{x} - \sigma = 84{,}7 - 12{,}6 = 72{,}1$ ἕως $\overline{x} + \sigma = 84{,}7 + 12{,}6 = 97{,}3$ διαπιστώνουμε, μετά ἀπό ἐξέταση τοῦ πολυγώνου ἀθροιστικῆς συχνότητας, ὅτι ἀνήκουν οἱ 46 ἀπό τίς 68 τιμές, δηλαδή τό 67,6%. Πράγματι, ἡ τιμή 72, 1 ἀντιστοιχεῖ περίπου στήν ἀθροιστική συχνότητα 19 καί ἡ τιμή 97,3 ἀντιστοιχεῖ στό 65 καί συνεπῶς $65 - 19 = 46$.

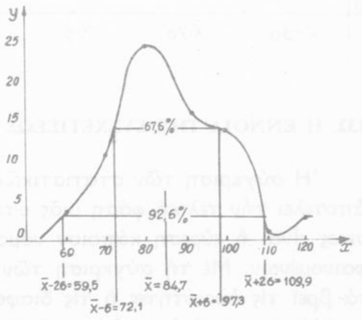
Ἐπίσης, στό διάστημα ἀπό $\overline{x} - 2\sigma = 84{,}7 - 2 \cdot 12{,}6 = 59{,}5$ ἕως $\overline{x} + 2\sigma = 109{,}9$ ἀνήκουν 63 ἀπό τίς 68 τιμές, δηλαδή τό 92,6%. Πράγματι, ἡ τιμή 59,5 ἀντιστοιχεῖ περίπου στήν ἀθροιστική συχνότητα 3 καί ἡ τιμή 109,9 στήν 66 καί συνεπῶς $66 - 3 = 63$.

Τό διάγραμμα τῆς διασπορᾶς

Εἴδαμε ὅτι κάθε κατανομή συχνοτήτων μπορεῖ νά παρασταθεῖ γραφικά μέ ἕνα ἱστόγραμμα ἤ πολύγωνο συχνότητας. Ἡ εἰκόνα αὐτή εἶναι τυπική γιά τόν πληθυσμό πού ἐξετάζουμε. Ἄν ὅμως ὑποθέσουμε ὅτι ὁ πληθυσμός μεταβάλλεται συνεχῶς καί ταυτόχρονα τό εὖρος τῶν τάξεων μικραίνει, τότε τό ἱστόγραμμα ἤ τό πολύγωνο θά ταυτισθεῖ ὁριακά μέ μιά καμπύλη **(τό διάγραμμα διασπορᾶς)**, πού καθορίζεται ἀπό τό μέσο $\overline{x}$ καί τήν τυπική ἀπόκλιση σ. Ὁ μέσος $\overline{x}$ ἀποτελεῖ τό μέτρο θέσεως στόν ἄξονα Ox καί ἡ τυπική ἀπόκλιση τό μέτρο διασπορᾶς. Ἄν ἡ τιμή σ εἶναι μικρή, τότε ἡ καμπύλη παρουσιάζει κυρτότητα, καί ἄν εἶναι μεγάλη, τότε ἡ καμπύλη εἶναι ἁπλωμένη.

Παρακάτω δίνουμε τό **διάγραμμα διασπορᾶς** τῆς κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν ἀπό τό ἱστόγραμμα συχνότητας τῆς σελ. 233.

Ἔχουμε $\overline{x} = 84{,}7$ καί $\sigma = 12{,}6$. Στό διάστημα $(\overline{x} - \sigma, \overline{x} + \sigma)$ ἀνήκουν 46 ἀπό τίς 68 τιμές, δηλαδή τό 67,6+%. Στό διάστημα $(\overline{x} - 2\sigma, \overline{x} + 2\sigma)$ ἀνήκουν 63 ἀπό τίς 68 τιμές, δηλαδή τό 92,6%. Ἡ διασπορά λοιπόν δέν εἶναι μεγάλη.



Σχ. 131.2

Δύο ἤ καί περισσότεροι πληθυσμοί μποροῦν:

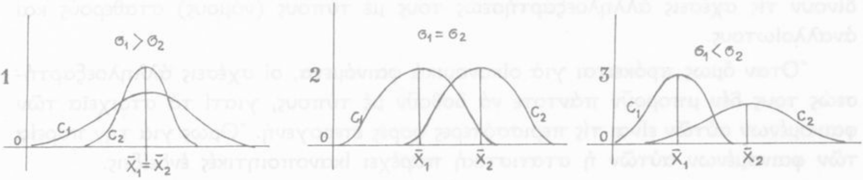
1 νά ἔχουν τόν ἴδιο μέσο καί νά διαφέρουν ὡς πρός τή διασπορά,

2) νά ἔχουν τήν ἴδια διασπορά καί διαφορετικό μέσο, καί

3) νά διαφέρουν ὡς πρός τή διασπορά καί τό μέσο.

Τά ἀκόλουθα διαγράμματα διασπορᾶς ἀναφέρονται στίς περιπτώσεις αὐτές.

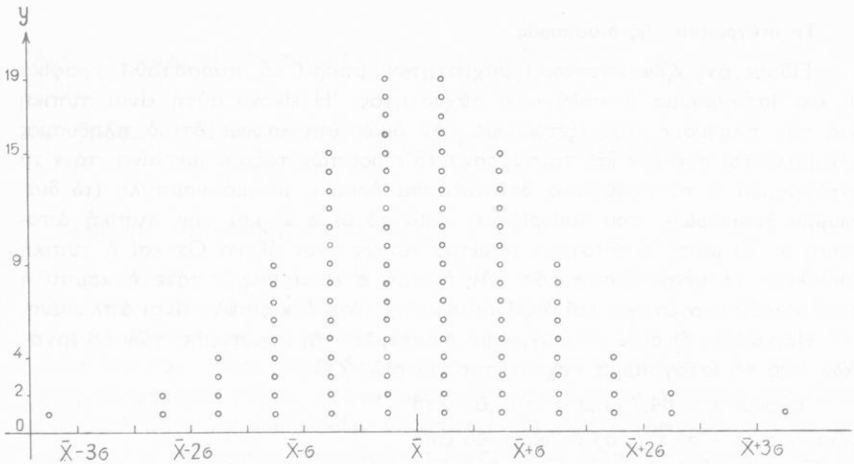
Ὁ πίνακας τοῦ σχήμ. 131.1 δίνει τή διασπορά σέ ἑκατοστιαῖα ποσοστά,



Σχ. 131.3

ὅταν ἡ κατανομή συχνοτήτων εἶναι κανονική καί συμμετρική ὡς πρός τό μέσο $\overline{x}$.

Μέ τό ἀκόλουθο **στικτό διάγραμμα** δίνουμε τήν εἰκόνα μιᾶς κανονικῆς καί συμμετρικῆς κατανομῆς συχνοτήτων ὡς πρός τό μέσο $\overline{x}$.



Σχ. 131.4

132. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΩΣ

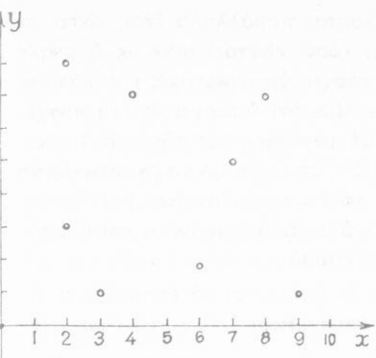
Ἡ σύγκριση τῶν στατιστικῶν στοιχείων δύο ἤ περισσότερων φαινομένων ἀποτελεῖ τήν τελική φάση μιᾶς στατιστικῆς ἔρευνας. Σκοπός αὐτῆς τῆς συγκρίσεως εἶναι ἡ εὕρεση κάποιου νόμου πού νά καθορίζει τίς σχέσεις αὐτῶν τῶν φαινομένων. Μέ τή σύγκριση τῶν στατιστικῶν στοιχείων μπορεῖ ὁ ἐρευνητής νά βρεῖ τίς ὁμοιότητες ἤ τίς διαφορές πού χαρακτηρίζουν δύο ἤ περισσότερα φαινόμενα καί νά ἀνακαλύψει, ἔτσι, τούς δεσμούς ἤ τίς σχέσεις ἐξαρτήσεώς τους.

Μιά τέτοια σύγκριση παρουσιάζει δυσκολίες, γιατί ἡ σχέση ἀλληλοεξαρτήσεως τῶν διαφόρων φαινομένων (φυσικῶν ἤ οἰκονομικῶν) εἶναι πολυσύνθετη, ἰδίως ὅταν πρόκειται γιά φαινόμενα οἰκονομικά.

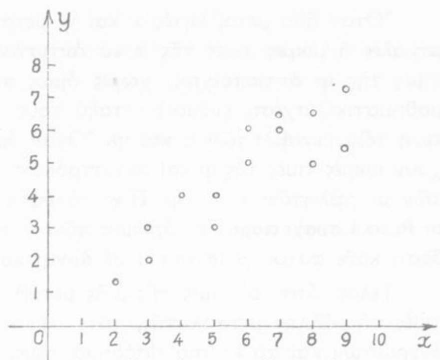
Οἱ Φυσικές ἐπιστῆμες, τά μαθηματικά, ἡ ἀστρονομία, ἡ βιολογία μᾶς παρέχουν πάρα πολλά παραδείγματα συγκρίσεως διαφόρων ποσῶν καί μᾶς δίνουν τίς σχέσεις ἀλληλοεξαρτήσεώς τους μέ τύπους (νόμους) σταθερούς καί ἀναλλοίωτους.

Ὅταν ὅμως πρόκειται γιά οἰκονομικά φαινόμενα, οἱ σχέσεις ἀλληλοεξαρτήσεώς τους δέν μποροῦν πάντοτε νά δοθοῦν μέ τύπους, γιατί τά στοιχεῖα τῶν φαινομένων αὐτῶν εἶναι τίς περισσότερες φορές ἑτερογενή. Ὅμως γιά τήν πορεία τῶν φαινομένων αὐτῶν ἡ στατιστική παρέχει ἱκανοποιητικές ἐνδείξεις.

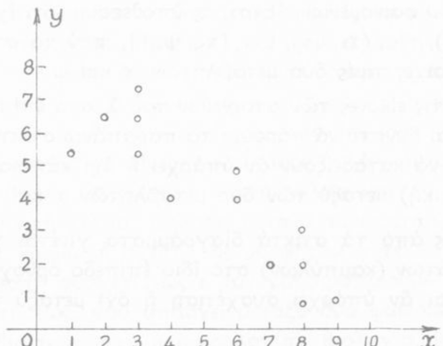
Συχνά συμβαίνει οἱ μεταβολές σέ μιά μεταβλητή x νά συνοδεύονται ἀπό παράλληλες μεταβολές σέ μιά ἄλλη μεταβλητή ψ καί νά ὑπάρχει μεταξύ τους κάποια σχέση. Οἱ μεταβλητές αὐτές λέμε ὅτι εἶναι **συσχετισμένες**. Π.χ. τό ὕψος καί τό βάρος ἀνθρώπων, τό ὕψος καί ἡ ἡλικία ἀνθρώπων, ἡ θερμοκρασία καί ἡ διαστολή μετάλλων κλπ.



Συσχέτιση ἀνύπαρκτη



Συσχέτιση θετική



Συσχέτιση ἀρνητική

Συσχέτιση θετική τέλεια

Συσχέτιση ἀρνητική τέλεια

Ὅταν δύο μεταβλητές x καί ψ μεταβάλλονται παράλληλα ἔτσι, ὥστε σέ μεγάλες ἤ μικρές τιμές τῆς x νά ἀντιστοιχοῦν (ὅσο γίνεται) μεγάλες ἤ μικρές τιμές τῆς ψ ἀντιστοίχως, χωρίς ὅμως νά ὑπάρχει ὑποχρεωτικά καί κάποια μαθηματική σχέση (νόμος) μεταξύ τους, τότε λέμε ὅτι ὑπάρχει **θετική συσχέτιση** τῶν μεταβλητῶν x καί ψ. Ὅταν ὅμως σέ μεγάλες τιμές τῆς x ἀντιστοιχοῦν μικρές τιμές τῆς ψ καί ἀντιστρόφως, λέμε ὅτι ὑπάρχει **ἀρνητική συσχέτιση** τῶν μεταβλητῶν x καί ψ. Π.χ. τό ὕψος καί τό βάρος ἀνθρώπων βρίσκονται σέ **θετικό συσχετισμό.** Ὁ ἀριθμός τῶν φυτῶν ἀνά μονάδα ἐπιφάνειας καί ἡ ἀπόδοση κάθε φυτοῦ βρίσκονται σέ **ἀρνητικό συσχετισμό**.

Τέλος, ὅταν οἱ τιμές τῆς μιᾶς μεταβλητῆς δέ φαίνονται νά ἐπηρεάζουν τίς τιμές τῆς ἄλλης μεταβλητῆς, τότε λέγονται **ἀσυσχέτιστες.** Π.χ. τό ὕψος τῶν ἀνθρώπων καί τό ἐτήσιο εἰσόδημά τους.

Ἡ γραφική παράσταση βοηθεῖ στήν προσπάθεια νά βροῦμε μιά σχέση ἐξαρτήσεως μεταξύ δύο φαινομένων. Ἔτσι, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε τό σύνολο $\Sigma = \{ (x_1, \psi_1), (x_2, \psi_2), \ldots, (x_\lambda, \psi_\lambda), \ldots, (x_N, \psi_N) \}$, πού τά στοιχεῖα του παριστάνουν τίς ἀντίστοιχες τιμές δύο μεταβλητῶν x καί ψ.

Κατασκευάζουμε τίς εἰκόνες τῶν στοιχείων τοῦ Σ στό ἐπίπεδο τῶν ὀρθογ. ἀξόνων xOψ. Τότε εἶναι δυνατό νά πάρουμε τά παραπάνω στικτά διαγράμματα, τά ὁποῖα εἶναι ἱκανά νά καταδείξουν ἄν ὑπάρχει ἤ ὄχι κάποια σχέση ἐξαρτήσεως (θετική ἤ ἀρνητική) μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν x καί ψ.

Σημείωση. Ἐκτός ἀπό τά στικτά διαγράμματα γίνεται χρήση καί τῶν γραμμικῶν διαγραμμάτων (καμπύλων) στό ἴδιο ἐπίπεδο ὀρθογ. ἀξόνων, ὥστε νά μπορεῖ νά φαίνεται ἄν ὑπάρχει συσχέτιση ἤ ὄχι μεταξύ τῶν δύο μεταβλητῶν.

Τά παραπάνω διαγράμματα εἶναι βέβαια ἀναγκαῖα σάν προπαρασκευαστική ἐργασία, δέν εἶναι ὅμως καί ἐπαρκή. Γιά νά ἐπιτύχουμε πιό σαφεῖς ἐνδείξεις καί νά ἑρμηνεύσουμε τίς ὁμοιότητες ἤ διαφορές, ἄν ὑπάρχουν, μεταξύ δύο φαινομένων, εἶναι ἀνάγκη νά κάνουμε καί ἀριθμητικές συγκρίσεις.

Ἀποδείχτηκε ὅτι:

Ἄν $\overline{x}$ καί $\overline{\psi}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ μέσοι τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί ψ τοῦ πίνακα: $\left\{ \begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_N \\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda, \ldots, \psi_N, \end{array} \right.$ τότε ἕνα πρῶτο κριτήριο, γιά νά δοῦμε ἄν εἶναι **συσχετισμένες** ἤ ὄχι οἱ μεταβλητές x καί ψ, μᾶς παρέχει τό ἄθροισμα :

$$(x_1 - \overline{x})(\psi_1 - \overline{\psi}) + (x_2 - \overline{x})(\psi_2 - \overline{\psi}) + \ldots + (x_N - \overline{x})(\psi_N - \overline{\psi}) \qquad (1)$$

Τό ἄθροισμα (1) ἄν εἶναι θετικό, φανερώνει ὅτι ἡ συσχέτιση εἶναι θετική, γιατί τότε τά περισσότερα γινόμενα $(x_\lambda - \overline{x})(\psi_\lambda - \overline{\psi})$ εἶναι θετικά, πράγμα πού σημαίνει ὅτι τά περισσότερα ζεύγη $(x_\lambda, \psi_\lambda)$ δίνουν ὁμόσημες ἀποκλίσεις ἀπό τούς μέσους $\overline{x}$ καί $\overline{\psi}$.

Ἄν τό ἄθροισμα (1) εἶναι ἀρνητικό, φανερώνει ὅτι ἡ συσχέτιση εἶναι ἀρνητική. Ἄν, τέλος, εἶναι κοντά στό μηδέν, τότε δείχνει ὅτι οἱ μεταβλητές x καί ψ εἶναι ἀσυσχέτιστες.

Ὁ βαθμός τῆς συσχετίσεως μεταξύ δύο μεταβλητῶν μετριέται μέ τό **συντελεστή συσχετίσεως** r.

Ὁ συντελεστής συσχετίσεως r βρίσκεται ἄν διαιρέσουμε τό μέσο ὅρο τῶν γινομένων τοῦ ἀθροίσματος (1) μέ τό γινόμενο τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων σ_x καί σ_ψ τῶν μεταβλητῶν x καί ψ.

Δηλαδή ἔχουμε:
$$r = \frac{\frac{1}{N}\Sigma(x_\lambda-\overline{x})(\psi_\lambda-\overline{\psi})}{\sqrt{\frac{\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2}{N}}\sqrt{\frac{\Sigma(\psi_\lambda-\overline{\psi})^2}{N}}} = \frac{\Sigma(x_\lambda-\overline{x})(\psi_\lambda-\overline{\psi})}{\sqrt{\Sigma(x_\lambda-\overline{x})^2.\Sigma(\psi_\lambda-\overline{\psi})^2}} \qquad (2)$$

Ὁ συντελεστής r εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τίς μονάδες μετρήσεως καί (ἀποδεικνύεται ὅτι) περιέχεται μεταξύ -1 καί $+1$. Δηλαδή $-1 \leq r \leq +1$.

Ἄν εἶναι $r > 0$, τότε ἡ συσχέτιση εἶναι θετική καί ὅσο ὁ r πλησιάζει πρός τό $+1$ γίνεται πιό ἰσχυρή. Ἄν εἶναι $r < 0$, τότε ἡ συσχέτιση εἶναι ἀρνητική καί ὅσο πλησιάζει πρός τό -1 γίνεται πιό ἰσχυρή. Ὅταν ὁ r εἶναι κοντά στό 0, τότε ἡ συσχέτιση εἶναι πολύ ἀσθενής ἤ καί ἀνύπαρκτη. Τέλος, ἄν $r = +1$, τότε ἔχουμε συσχέτιση θετική τέλεια καί ἄν $r = -1$, τότε ἔχουμε συσχέτιση ἀρνητική τέλεια. Δηλαδή μεταξύ τῶν μεταβλητῶν x καί ψ ὑπάρχει μαθηματική γραμμική σχέση τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x + \beta$.

Τό συντελεστή συσχετίσεως r τόν χρησιμοποιοῦμε γιά νά ἐξακριβώσουμε τό δεσμό ἐξαρτήσεως, πού ὑπάρχει μεταξύ δύο φαινομένων, σέ πάρα πολλές περιπτώσεις, ἰδιαίτερα στή μετεωρολογία, βιολογία, ἰατρική ,στή γεωργική ἔρευνα καί στήν οἰκονομία.

Στήν πράξη ὅμως πρέπει ὁ ἐρευνητής νά προχωρεῖ μέ πολλή προσοχή, γιατί πολλές φορές βρίσκουμε ἰσχυρό συντελεστή συσχετίσεως γιά φαινόμενα, τά ὁποῖα στή λογική φαίνεται ὅτι δέν ἔχουν κανένα δεσμό ἐξαρτήσεως. Τό σωστό εἶναι πρῶτα νά ἐξετάζουμε τό πρόβλημα λογικά καί ἔπειτα νά βρίσκουμε καί νά διερευνοῦμε τό ἀποτέλεσμα.

Ὁ διάσημος στατιστικολόγος Tschuprow ἀναφέρει ὅτι σέ μιά στατιστική ἔρευνα γιά τό μέγεθος τῶν ζημιῶν ἀπό πυρκαϊές σέ συσχετισμό μέ τήν παρουσία ἤ ὄχι τῶν πυροσβεστικῶν ἀντλιῶν, ὁ συντελεστής συσχετίσεως ἀπέδειξε ὅτι οἱ πιό βαριές ζημιές συμπίπτει νά γίνονται ὅπου παρουσιάζονται ἀντλίες. Πρέπει λοιπόν νά καταστρέψουμε τίς ἀντλίες (!).

Παράδειγμα: Οἱ βαθμοί 12 μαθητῶν στά ἑλληνικά, μαθηματικά, φυσική εἶναι:

Ἑλληνικά	x	1	2	4	5	6	7	10	12	13	15	16	19	$9{,}2 = \overline{x}$
Μαθηματικά	ψ	2	10	4	12	12	16	16	18	18	16	18	19	$13{,}4 = \overline{\psi}$
Φυσική	z	1	9	4	10	16	12	14	16	14	16	18	18	$12{,}3 = z$

Νά ὑπολογιστεῖ ὁ συντελεστής συσχετίσεως τῶν ἐπιδόσεων τῶν μαθητῶν στά: 1) ἑλληνικά καί μαθηματικά, 2) μαθηματικά καί φυσική.

Βρίσκουμε τίς ἀποκλίσεις καί ἐφαρμόζουμε τόν τύπο 2.

Ἔχουμε:													
	$x_\lambda-\bar{x}$	- 8,2	-7,2	-5,2	-4,2	-3,2	-2,2	0,8	2,8	3,8	5,8	6,8	9,8
	$\psi_\lambda-\bar{\psi}$	-11,4	-3,4	-9,4	-1,4	-1,4	2,6	2,6	4,6	4,6	2,6	4,6	5,6
	$Z_\lambda-\bar{Z}$	-11,3	-3,3	-8,3	-2,3	3,7	-0,3	1,7	3,7	1,7	3,7	5,8	5,8

$$\Sigma(x_\lambda-\bar{x})(\psi-\bar{\psi})=(-8,2)(-11,4)+(-7,2)(-3,4)+\ldots+(9,8)(5,6)=305,16$$
$$\Sigma(\psi_\lambda-\bar{\psi})(z-\bar{z})=(-11,4)(-11,3)+(-3,4)(-3,3)+\ldots+(5,6)(5,8)=313,36$$
$$\Sigma(x_\lambda-\bar{x})^2=(-8,2)^2+(-7,2)^2+\ldots+(6,8)^2+(9,8)^2=377,68$$
$$\Sigma(\psi_\lambda-\bar{\psi})^2=(-11,4)^2+(-3,4)^2+\ldots+(4,6)^2+(5,6)^2=348,92$$
$$\Sigma(z_\lambda-\bar{z})^2=(-11,3)^2+(-3,3)^2+\ldots+(5,8)^2+(5,8)^2=326,98$$

Ἄρα ἔχουμε : 1) $r_1=\dfrac{305,16}{\sqrt{377,68.348,92}}=\dfrac{305,16}{363,01}\simeq 0,84$

2) $r_2=\dfrac{313,36}{\sqrt{348,92.326,98}}=\dfrac{313,36}{337,77}\simeq 0,93$

Ἀπό τούς συντελεστές συσχετίσεως πού βρήκαμε συμπεραίνουμε:

1) ὅτι καί οἱ δύο συσχετίσεις εἶναι θετικές καί πολύ ἰσχυρές,

2) ὅτι ἡ συσχέτιση τῶν ἐπιδόσεων τῶν μαθητῶν στά μαθηματικά - φυσική εἶναι ἰσχυρότερη ἀπό τή συσχέτιση στά ἑλληνικά - μαθηματικά.

Οἱ μαθητές μποροῦν νά κατασκευάσουν τό μικρό διάγραμμα καί στίς δύο συσχετίσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

442) Ἀπό τίς παρακάτω ἰδιότητες ποιές εἶναι ποιοτικές καί ποιές ποσοτικές; Ἐπίσης ἀπό τίς μεταβλητές ποιές εἶναι συνεχεῖς καί ποιές ἀσυνεχεῖς; Ἀνάστημα - ἡλικία - ἐπάγγελμα - εἰσόδημα - θρησκεία - γλώσσα - οἰκογενειακή κατάσταση - ἀριθμός ἀγάμων - γεωργικός κλῆρος - θερμοκρασία τοῦ ἀέρα - θεραπευτήρια κατά γεωγρ. διαμερίσματα - βάρος - ἐξαγωγή σταφίδας σέ τόνους - ἀπουσίες μαθητῶν.

443) Σέ ἕνα πρόχειρο διαγωνισμό οἱ 42 τῆς τάξεώς μας πῆραν τούς ἀκόλουθους βαθμούς:

12, 8, 15, 17, 10, 11, 6, 10, 12, 14, 11, 19, 16, 12
16, 10, 20, 7, 12, 11, 10, 13, 15, 9, 17, 18, 14, 2
13, 17, 18, 10, 14, 6, 11, 12, 14, 10, 13, 15, 13, 12

Νά σχηματισθεῖ πίνακας κατανομῆς συχνοτήτων μέ στῆλες ἀπόλυτης, σχετικῆς καί ἀθροιστικῆς συχνότητας.

444) Τό ἔτος 1965 οἱ μετανάστες ἀπό τήν Ἑλλάδα ἔφθασαν τίς 117 χιλιάδες περίπου, ἀπό τούς ὁποίους 65 χιλ. ἄνδρες καί 52 χιλ. γυναῖκες ἡλικίας ἀπό 0 - 75 ἐτῶν, ὅπως δείχνει ὁ ἀκόλουθος πίνακας (Πηγή: Στατιστική Ἐπετηρίδα, 1966):

Ἡλικία	0–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55	56–60	61–65	66–70	71–75	Σύνολον
Ἄνδρες	1,8	1,6	1,3	5,3	10,2	17	11,9	8,6	3,8	1,5	0,9	0,5	0,3	0,2	0,1	65
Γυναῖκες	1,8	1,6	1,4	8	11	10,3	7,1	4,7	2	1	1,1	0,8	0,6	0,4	0,2	52

Νά σχηματισθεῖ πίνακας κατανομῆς μέ στῆλες ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

445) Οἱ ἀφίξεις στήν Ἑλλάδα περιηγητῶν ἀπό τό ἐξωτερικό τά ἔτη 1959-1965 εἶναι οἱ ἀκόλουθες (Στατιστική Ἐπετηρίδα, 1966):

Ἔτος	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	
Ἀφίξεις	340,0	399,4	494,2	597,9	741,2	757,5	976,1	Σέ χιλιάδες

Νά σχηματισθεῖ πίνακας κατανομῆς μέ στῆλες ὅπως στήν προηγ. ἄσκηση.

446) Νά κατασκευασθεῖ τό πολύγωνο συχνότητας τῶν ἀσκήσεων 443, 444 καί 445 καθώς καί τό πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας.

447) Νά κατασκευασθεῖ τό ἱστόγραμμα συχνότητας καί ἀθροιστικῆς συχνότητας τῶν ἀσκήσεων 443 καί 444.

448) Νά κατασκευασθεῖ ραβδόγραμμα γιά τά στοιχεῖα τῆς ἀσκ. 445.

449) Τά γενικά ἔξοδα μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι:

Μισθοί δραχμές 300.000, ἐνοίκια δραχ. 200.000, ἀσφάλειες καί φόροι δραχ. 100.000, διαφήμιση 150.000, διάφορα δρχ. 50.000. Νά κατασκευασθεῖ κυκλικό διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

450) Τό ἔτος 1966 ἡ ἔκταση τῆς Ἑλλάδας παρουσίασε τήν ἑξῆς κατανομή: Γεωργική ἔκταση 30 %, Δασική ἔκταση 20,3 %, Ἔκταση βοσκῆς 38,2 %, Οἰκοδομημένη ἔκταση 3,5 %, ἀμμώδης ἔκταση 4,8 %, ἔκταση πού καλύπτεται ἀπό νερά 3,2 %. Νά κατασκευασθεῖ κυκλικό διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

451) Νά εὑρεθεῖ ὁ ἀριθμ. μέσος καί ἡ διάμεσος στά δεδομένα τῶν ἀσκήσεων 443, 444 καί 445.

452) Νά βρεθεῖ ἡ ἐπικρατούσα τιμή στά δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 444 ξεχωριστά γιά τούς ἄνδρες καί γυναῖκες καί ἔπειτα γιά τό σύνολο τῶν μεταναστῶν.

453) Τό προσωπικό μιᾶς ἐπιχειρήσεως κατανέμεται ἀνάλογα μέ τά ἔτη ὑπηρεσίας ὡς ἑξῆς:

Ἔτη ὑπηρεσίας	1-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
Ἀριθμός ὑπαλλήλων	108	70	39	20	11	5	5	3	2

Νά γίνει ὁ πίνακας κατανομῆς συχνοτήτων ἀπόλυτης, σχετικῆς καί ἀθροιστικῆς καί ἀν βρεθοῦν οἱ κεντρικές τιμές $\overline{x}$, x_δ, x_ε.

454) Ὁ ἀριθμ. μέσος τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, $\nu \in N$, εἶναι $\overline{x}$.

Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμ. μέσος τῶν ἀριθμῶν α) $x_1+\kappa, x_2+\kappa, \ldots, x_\nu+\kappa$, β) $x_1-\kappa, x_2-\kappa, \ldots, x_\nu-\kappa$, γ) $\kappa x_1, \kappa x_2, \ldots, \kappa x_\nu$, δ) $\frac{x_1}{\kappa}, \frac{x_2}{\kappa}, \ldots, \frac{x_\nu}{\kappa}$, $\kappa \neq 0$, καί ε) $\kappa x_1+\lambda, \kappa x_2+\lambda, \ldots, \kappa x_\nu+\lambda$.

455) Δίνονται τά ἑξῆς βάρη σέ kg: 3, 6, 6, 12, 9, 12, 10, 9, 12, 14, 17. Νά ὑπολογισθεῖ ὁ ἀριθμ. μέσος καί ἡ τυπική ἀπόκλιση.

456) Τά ἡμερομίσθια 500 ἐργατῶν ἑνός ἐργοστασίου κατανέμονται ὡς ἑξῆς:

Τάξεις ἡμερομισθ.	..-55	55-65	65-75	75-85	85-95	95-105	105-...
Ἀριθμός ἐργατῶν	40	190	120	70	50	20	10

Νά βρεθεῖ ὁ ἀριθμ. μέσος, ἡ τυπική ἀπόκλιση καί ὁ ἀριθμός τῶν ἐργατῶν, πού ἔχουν ἡμερομίσθιο α) ἀπό $\overline{x} - \sigma$ ἕως $\overline{x} + \sigma$ καί β) ἀπό $\overline{x} - 2\sigma$ ἕως $\overline{x} + 2\sigma$. Νά γίνει καί τό διάγραμμα διασπορᾶς.

457) Τά ἀναστήματα καί τά βάρη 346 ἀτόμων κατανέμονται ὡς ἑξῆς:

Βάρος σέ kg	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80	80-85	85-90	90-95	95-100
Ἀριθμός ἀτόμων	2	3	12	38	88	70	55	39	26	13

Ἀνάστημα cm	150-155	155-160	160-165	165-170	170-175	175-180	180-185	185-190
Ἀριθμός ἀτόμων	1	2	9	48	131	102	40	13

Νά βρεθοῦν οἱ μέσοι, οἱ διακυμάνσεις, οἱ τυπικές ἀποκλίσεις σέ κάθε σειρά καί νά ἐξετασθεῖ σέ ποιά σειρά εἶναι μεγαλύτερη ἡ διασπορά.

458) Δύο τυχαῖες μεταβλητές ἐμφανίσθηκαν σέ ζεύγη ἀντίστοιχων τιμῶν ὡς ἑξῆς:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ψ	4	5	10	12	5	5	4	5	4	3

Νά ὑπολογισθεῖ ὁ συντελεστής συσχετίσεως καί νά γίνει τό στικτό διάγραμμα τῶν παραπάνω 10 ζευγῶν.

459) Τά κεφάλαια πού χρησιμοποιήθηκαν ἀπό μιά ἑταιρεία γιά 10 διαδοχικά ἔτη καί τά ἀντίστοιχα κέρδη δίνονται στόν παρακάτω πίνακα:

Κεφάλαιο σέ ἑκατομ. δρχ.	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Κέρδος σέ ἑκατομ. δρχ.	2	4	8	5	10	15	14	20	22	30

Νά βρεθεῖ ὁ συντελεστής συσχετίσεως καί νά γίνει τό στικτό διάγραμμα.

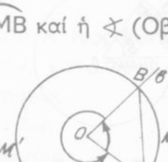
ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

133. ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΤΟΞΟ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ Η ΓΩΝΙΑ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ.

Σ' ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο (Σχ. 133.1) ἄς θεωρήσουμε δύο σημεῖα Α καί Β. Τά σημεῖα Α καί Β χωρίζουν τήν περιφέρεια σέ δύο τόξα, τό $\overset{\frown}{AMB}$ καί τό $\overset{\frown}{BM'A}$. Οἱ ἡμιευθεῖες Οα καί Οβ ὁρίζουν δύο ἐπίκεντρες γωνίες, τίς $\measuredangle$ (Οα, Οβ) καί $\measuredangle$ (Οβ, Οα). Ἡ $\measuredangle$ (Οα, Οβ) ἀντιστοιχεῖ στό τόξο $\overset{\frown}{AMB}$ καί ἡ $\measuredangle$ (Οβ, Οα) στό τόξο $\overset{\frown}{BM'A}$. Ἄν φανταστοῦμε ὅτι τό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου στρέφεται γύρω ἀπό τό Ο κατά τή θετική φορά περιστροφῆς, ὅταν τό σημεῖο Α στήν κίνησή του διαγράψει τό τόξο $\overset{\frown}{AMB}$, ἡ ἀκτίνα Οα, πάνω στήν ὁποία εἶναι τό σημεῖο Α, θά διαγράψει τό ἐσωτερικό τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας (Οα, Οβ).



Σχ. 133.1

Ἡ **ἀπόλυτη τιμή** ἑνός τόξου (ἤ μιᾶς γωνίας) εἶναι ὁ λόγος τοῦ τόξου (ἤ τῆς γωνίας) πρός τή μονάδα τῶν τόξων (ἤ τῶν γωνιῶν).

Ἡ γεωμετρία διδάσκει ὅτι λόγος δύο τόξων τῆς ἴδιας ἀκτίνας εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων ἐπίκεντρων γωνιῶν καί ἑπομένως: **ἕνα τόξο ἔχει τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή μέ τήν ἀντίστοιχή του ἐπίκεντρη γωνία, ἄν βέβαια ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων παίρνουμε τό τόξο, πού ἀντιστοιχεῖ στή μονάδα τῶν γωνιῶν.**

Συνέπεια αὐτοῦ εἶναι ὅτι τά τόξα πού ἀνήκουν σέ κύκλους μέ διαφορετικές ἀκτίνες ἔχουν τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή ἤ, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, ἐκφράζονται μέ τόν ἴδιο ἀπόλυτο ἀριθμό, ὅταν ἀντιστοιχοῦν στήν ἴδια ἤ σέ ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες.

Τό μέγεθος ἑνός τόξου ἐκφράζεται μέ δύο τρόπους:

1) μέ τό μῆκος του, ὅταν εἶναι γνωστή ἡ ἀκτίνα του, καί

2) μέ τήν ἀπόλυτη τιμή του, (μέ τή βοήθεια μιᾶς ὁρισμένης μονάδας τόξων), ἡ ὁποία ἀπόλυτη τιμή δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Βασική μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν εἶναι ἡ ὀρθή γωνία. Ἡ ἀντίστοιχη μονάδα τόξων εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τοῦ κύκλου. Ἡ ὀρθή γωνία ὑποδιαιρεῖται σέ 90 ἴσες γωνίες, ἡ καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες λέγεται **μία μοίρα,** συμβολικά 1°. Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας ὑποδιαιρεῖται σέ 60 ἴσες γωνίες καθεμιά ἀπό τίς ὁποῖες λέγεται **ἕνα λεπτό,** συμβολικά 1′. Ἡ γωνία τοῦ 1′ ὑποδιαιρεῖται σέ 60 ἴσα μέρη, πού τό καθένα λέγεται **ἕνα δεύτερο λεπτό,** συμβολικά 1″.

Ἀντίστοιχα: τό 1/4 τοῦ κύκλου ὑποδιαιρεῖται σέ 90 ἴσα τόξα, πού τό καθένα λέγεται μία μοίρα κύκλου καί συμβολίζεται ὁμοίως 1°. Τό τόξο μιᾶς μοίρας ὑποδιαιρεῖται σέ 60 ἴσα μέρη, πού τό καθένα λέγεται ἕνα λεπτό (1′) κύκλου κ.τ.λ.

Ἡ θεωρητική μονάδα τόξων ἤ γωνιῶν εἶναι τό ἀκτίνιο (rad). **Τό ἀκτίνιο** εἶναι τόξο, πού τό μῆκος του εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου στόν ὁποῖο ἀνήκει. Ἐπίσης **γωνία ἑνός ἀκτινίου** λέγεται ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία τοῦ τόξου ἑνός ἀκτινίου (Σχ. 133.2).

Σχ. 132.2

Ἡ ἀπόλυτη τιμή ἑπομένως ἑνός τόξου σέ ἀκτίνια εἶναι ὁ λόγος τοῦ μήκους αὐτοῦ τοῦ τόξου πρός τήν ἀκτίνα. Τό μῆκος s ἑνός τόξου κύκλου μέ ἀκτίνα ρ συνδέεται μέ τήν ἀπόλυτη τιμή α τοῦ τόξου αὐτοῦ σέ ἀκτίνια μέ τήν ἰσότητα :

$$\boxed{\alpha = \frac{s}{\rho} \Leftrightarrow s = \alpha\rho}$$

Ἄν ὡς μονάδα μετρήσεως τοῦ μήκους πάρουμε τήν ἀκτίνα ρ, τότε τό μῆκος τοῦ τόξου ἐκφράζεται μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, μέ τόν ὁποῖο ἐκφράζεται καί ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ τόξου αὐτοῦ σέ ἀκτίνια.

Ἑπομένως ἡ ἀπόλυτη τιμή ὁλόκληρου τοῦ κύκλου σέ ἀκτίνια εἶναι $\frac{2\pi\rho}{\pi} = 2\pi$. Ὁ ἀριθμός αὐτός 2π ἐκφράζει ἐπίσης τό μῆκος κύκλου, πού ἔχει ἀκτίνα ἴση μέ τή μονάδα. Ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ ἡμίκυκλου εἶναι π καί τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ κύκλου εἶναι $\frac{\pi}{2}$.

Ἀναφέρουμε ἐδῶ καί μιά μονάδα, τήν ὁποία χρησιμοποιοῦν στίς στρατιωτικές ἐφαρμογές, τό mil *, πού εἶναι ἴσο μέ τό $\frac{1}{6400}$ τοῦ κύκλου. Τό mil μέ μεγάλη προσέγγιση εἶναι ἴσο μέ $\frac{1}{1000}$ rad.

Ἄν μέ τά α καί μ παραστήσουμε τίς ἀπόλυτες τιμές τοῦ ἴδιου τόξου μέ

(*) «χιλιοστό» κατά τήν ἑλληνική στρατιωτική ὁρολογία.

μονάδες ἀντιστοίχως τό ἀκτίνιο καί τή μοίρα, ἄν τό τόξο αὐτό δέν εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τόν κύκλο, θά ἰσχύει ἡ ἰσότητα:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \quad (133, \alpha)}$$

Πραγματικά δύο τόξα ἑνός κύκλου ἄς μετρηθοῦν διαδοχικά μέ μονάδες τό ἀκτίνιο καί τή μοίρα. Ἄς εἶναι α καί μ οἱ ἀπόλυτες τιμές τοῦ πρώτου τόξου σέ ἀκτίνια καί μοῖρες καί α' καί μ' τοῦ δεύτερου τόξου ἀντιστοίχως σέ ἀκτίνια καί μοίρες. Ἡ γεωμετρία διδάσκει ὅτι ὁ λόγος δύο τόξων δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή μονάδα μετρήσεώς τους καί ὅτι ἰσχύει: $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\mu}{\mu'}$.

Ἄν ὡς δεύτερο τόξο πάρουμε τόν ἡμίκυκλο, τότε ἡ ἰσότητα $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\mu}{\mu'}$ γίνεται $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$.

Ἡ ἰσότητα λοιπόν (133, α) μᾶς ἐπιτρέπει νά βρίσκουμε τήν ἀπόλυτη τιμή ἑνός τόξου στή μιά ἀπό τίς μονάδες, ὅταν γνωρίζουμε τήν ἀπόλυτη τιμή του στήν ἄλλη.

134. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟ ΤΟΞΟ.

Ἄν ἕνα κινητό σημεῖο ἀναχωρήσει ἀπό ἕνα σημεῖο Α ἑνός κύκλου (Σχ. 134), μπορεῖ νά τόν διαγράψει, ἄν κινηθεῖ πάνω σ' αὐτόν, κατά δύο φορές. Ἀπό τίς φορές αὐτές ἡ ἀντίθετη πρός τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ ὁρίζεται ὡς **θετική φορά** καί ἐκείνη, πού συμφωνεῖ μέ τή φορά τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ, ὡς **ἀρνητική φορά.** Ὅταν σ' ἕναν κύκλο ἔχει ὁρισθεῖ ἡ θετική, ἑπομένως καί ἡ ἀρνητική φορά, ὁ κύκλος λέγεται **προσανατολισμένος.** Τή θετική φορά τή συμβολίζουμε στό σχῆμα μέ ἕνα βέλος, πού συνοδεύεται μέ τό σύμβολο +.

Σχ. 134

Ἄν τώρα πάνω σ' ἕναν προσανατολισμένο κύκλο ἔχουμε δύο σημεῖα Α καί Β, τότε στόν κύκλο αὐτό ὁρίζονται τέσσερα τόξα προσανατολισμένα, πού τό μῆκος τοῦ καθενός εἶναι μικρότερο ἀπό τοῦ κύκλου, ἐπειδή ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι δυνατό νά διαγραφεῖ ἀπό κινητό σημεῖο εἴτε ἀπό τό Α πρός τό Β εἴτε ἀπό τό Β πρός τό Α. Ὁρίζονται λοιπόν δύο τόξα ΑΒ: ἕνα λεγόμενο **θετικό τόξο ΑΒ,** πού συμβολίζεται μέ $\overset{\frown}{AB}{}^{+}$, καί ἕνα **ἀρνητικό τόξο ΑΒ,** πού συμβολίζεται μέ $\overset{\frown}{AB}{}^{-}$, ἐπειδή τό ἕνα ἔχει τή θετική φορά τοῦ προσανατολισμένου κύκλου καί τό ἄλλο τήν ἀρνητική. Γενικά ἕνα προσανατολισμένο τόξο συμβολίζεται μέ $\overset{\frown}{AB}$.

Ὁρίζονται ἐπίσης δύο τόξα $\overset{\frown}{BA}$, τό ἕνα θετικό $\overset{\frown}{BA}{}^{+}$ καί τό ἄλλο ἀρνητικό $\overset{\frown}{BA}{}^{-}$. Γιά νά μή γίνεται σύγχυση, μποροῦμε νά διατηρήσουμε τό ὄνομα **γεωμετρικό τόξο ΑΒ,** συμβολικά $\overset{\frown}{AB}$, γιά τό μικρότερο θετικό τόξο $\overset{\frown}{AB}{}^{+}$.

Τοῦ προσανατολισμένου τόξου $\overset{\frown}{AB}$ τό σημεῖο Α λέγεται: **ἡ ἀρχή** τοῦ $\overset{\frown}{AB}$ καί τό Β: **τό πέρας** τοῦ $\overset{\frown}{AB}$.

Τά τόξα, πού ὁρίσαμε μέ τόν παραπάνω, τρόπο εἶναι μερικές περιπτώσεις γενικότερων προσανατολισμένων τόξων, πού τό μῆκος τους μπορεῖ νά εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό μῆκος τοῦ κύκλου.

Πραγματικά, ἄν φαντασθοῦμε ἕνα κινητό σημεῖο πάνω στόν κύκλο (Σχ. 134), αὐτό μπορεῖ ξεκινώντας ἀπό τό Α νά ἐκτελέσει μιά ἤ περισσότερες περιστροφές διατρέχοντας τόν κύκλο καί νά σταματήσει στό Β. Τό κινητό αὐτό σημεῖο μπορεῖ μάλιστα νά κινηθεῖ κατά τή θετική ἤ τήν ἀρνητική φορά πάνω στόν κύκλο.

Τά τόξα, πού ὁρίζονται ἔτσι, λέγονται τριγωνομετρικά τόξα, καί συμβολίζονται ἐπίσης μέ τό σύμβολο $\overset{\frown}{AB}$.

Γιά νά εἶναι ὅμως ἕνα τριγωνομετρικό τόξο τέλεια ὁρισμένο, πρέπει νά γνωρίζουμε: 1) τήν ἀρχή του, 2) τό πέρας του, 3) τή φορά του, καί 4) τόν ἀριθμό τῶν ὁλόκληρων περιστροφῶν, πού τό κινητό σημεῖο διέγραψε, ὥσπου νά σταματήσει στό πέρας τοῦ τόξου. Ὥστε:

Τριγωνομετρικό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ λέγονται ὅλα τά τόξα, τά ὁποῖα διαγράφονται ἀπό κινητό σημεῖο, τό ὁποῖο ἀναχωρεῖ ἀπό τό Α καί, ἀφοῦ κινηθεῖ πάντοτε κατά τήν ἴδια φορά, θετική ἤ ἀρνητική, σταματᾶ στό Β, προτοῦ διατρέξει ὁλόκληρο τόν κύκλο, ἤ ἀφοῦ διατρέξει προηγουμένως ἕναν ἀκέραιό ἀριθμό κύκλων.

Ἔτσι ἐννοοῦμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα τριγωνομετρικά τόξα, πού ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή καί τό ἴδιο πέρας, θετικά καί ἀρνητικά.

135. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ.

Ἕνα τριγωνομετρικό τόξο, ὅπως ἕνα γεωμετρικό τόξο, μπορεῖ νά μετρηθεῖ μέ μιά ἀπό τίς μονάδες τόξων. Ὁ ἀριθμός, πού θά προκύψει μ' αὐτό τόν τρόπο, εἶναι ἡ ἀπόλυτη τιμή, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τό μέγεθος, ἀλλά ὄχι καί τή φορά τοῦ τόξου. Ἄν τώρα στήν ἀπόλυτη τιμή προτάξουμε τό $+$, ἄν τό τόξο εἶναι θετικό, ἤ τό $-$, ἄν εἶναι ἀρνητικό, ἔχουμε τή λεγόμενη **ἀλγεβρική τιμή** τοῦ προσανατολισμένου τόξου.

Δύο προσανατολισμένα τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τήν ἴδια ἀλγεβρική τιμή. Εἶναι **ἀντίθετα,** ἄν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους εἶναι ἀριθμοί ἀντίθετοι.

Τό προσανατολισμένο τόξο, τό ὁποῖο ἔχει ἀρχή καί πέρας πού ταυτίζονται πρίν γίνει περιστροφή, εἶναι ἕνα συμβατικό τόξο, πού λέγεται **μηδενικό τόξο.** Ἀλγεβρική τιμή του εἶναι ὁ ἀριθμός 0.

Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι τό προσανατολισμένο τόξο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς μιά μεταβλητή, πού μπορεῖ νά πάρει ὅλες τίς πραγματικές τιμές, δηλ. πού διατρέχει τό σύνολο **R**, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀλγεβρική τιμή κάθε τόξου ὡς ἕνα ἄλλο σύμβολο γιά τό τόξο.

136. ΤΟΞΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΚΟΙΝΗ ΑΡΧΗ ΚΑΙ ΚΟΙΝΟ ΠΕΡΑΣ.

Ἔστω προσανατολισμένος κύκλος μέ κέντρο Ο (Σχ. 136), Α ἡ ἀρχή τῶν τόξων καί Μ ἕνα σημεῖο τοῦ κύκλου. Ἔστω τ ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ πρώτου μή ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Ἄν c εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ θετικοῦ κύκλου (ἡ ἀπόλυτη τιμή τῶν τόξων βρίσκεται πάντοτε στήν ἴδια μονάδα: σέ μοῖρες ἤ σέ ἀκτίνια), τότε τό δεύτερο θετικό τόξο $\overset{\frown}{AM}$ θά ἔχει ἀλγεβρική τιμή $c + τ$, τό τρίτο $2c + τ$, τό τέταρτο $3c + τ$ καί γενικά ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ τυχόντος θετικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$, θά δίνεται ἀπό τόν τύπο $κc + τ$, ὅπου κ εἶναι θετικός ἀκέραιος ἤ ὁ 0.

Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ πρώτου ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ θά εἶναι $-c + τ$, τοῦ δεύτερου ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ θά εἶναι $-2c + τ$, τοῦ τρίτου $-3c + τ$, τοῦ τέταρτου $-4c + τ$ καί γενικά ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ τυχόντος ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ θά δίνεται ἀπό τόν τύπο $κc + τ$, ὅπου κ κάποιος ἀρνητικός ἀκέραιος.

Σχ. 136

Ἄν λοιπόν μέ x παραστήσουμε τήν ἀλγεβρική τιμή τοῦ τυχόντος τόξου $\overset{\frown}{AM}$ (θετικοῦ ἤ ἀρνητικοῦ), αὐτή θά δίνεται ἀπό τόν τύπο:

$$x = κc + τ, \quad κ \in Z$$

Ἄν ἔχουμε πάρει ὡς μονάδα τό ἀκτίνιο, ὁ τύπος γίνεται:

$$x = 2κπ + τ, \qquad κ \in Z \qquad (α)$$

Ἄν ἔχουμε πάρει ὡς μονάδα τή μοίρα, ὁ τύπος γίνεται:

$$x^\circ = 360^\circ κ + τ^\circ, \qquad κ \in Z \qquad (α')$$

Ἀντιστρόφως κάθε τόξο μέ ἀρχή τό σημεῖο Α καί ἀλγεβρική τιμή $x = κc + τ$, $κ \in Z$, ἔχει πέρας τό σημεῖο Μ. Γιά νά τό ἀποδείξουμε αὐτό, ἀρκεῖ ν' ἀντιστρέψουμε τήν προηγούμενη πορεία, θεωρώντας τίς περιπτώσεις $κ = 0$, $κ > 0$, $κ < 0$.

Ἡ ἰσότητα (α), καθώς καί ἡ (α'), δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀντί τῆς τ πάρουμε τήν ἀλγεβρική τιμή ἑνός ὁποιουδήποτε ἄλλου ἀλλά ὁρισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Πραγματικά, ἄν στόν παραπάνω τύπο (α) ἀντικαταστήσουμε τό κ μέ κάποιον ἀριθμό τοῦ συνόλου Z, π.χ. τόν $κ_1$, θά βροῦμε τήν ἀλγεβρική τιμή $τ_1$

ἑνός ἀπό τά τόξα $\overset{\frown}{AM}$. Θά εἶναι λοιπόν:

$$x = 2\kappa\pi + \tau$$
$$\tau_1 = 2\kappa_1\pi + \tau$$

καί ἀπ' αὐτές μέ ἀφαίρεση κατά μέλη:

$$x - \tau_1 = 2(\kappa - \kappa_1)\pi, \quad \text{δηλ.}\ x = 2\lambda\pi + \tau_1$$

ὅπου $\lambda \in Z$ καί τ_1 εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός ὁποιουδήποτε ἀλλά ὁρισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$.

Ὁ τύπος λοιπόν (α) μᾶς δίνει τήν ἀλγεβρική τιμή τοῦ τυχόντος προσανατολισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$, ὅταν γνωρίζουμε τήν ἀλγεβρική τιμή ἑνός ὁποιουδήποτε ἀλλά ὁρισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$.

Ὁ ἴδιος τύπος (α) γράφεται:

$$x - \tau = 2\kappa\pi \ \text{ἤ}\ x^\circ - \tau^\circ = 360^\circ\kappa, \quad \kappa \in Z$$

Δηλαδή: **Δύο τριγωνομετρικά τόξα, πού ἔχουν τήν ἴδια ἀρχή καί τό ἴδιο πέρας, διαφέρουν κατά ἀκέραιο ἀριθμό κύκλων.**

Ἀντιστρόφως: ἄς θεωρήσουμε ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AM}$ μέ ἀλγεβρική τιμή

$$\tau_1 = 2\kappa\pi + \tau$$

καί ἕνα ἄλλο τόξο μέ τήν ἴδια ἀρχή Α καί ἀλγεβρική τιμή τ_2 πού διαφέρει ἀπό τήν τ_1, κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς ὁλόκληρου κύκλου, ἔστω κατά $\kappa_2 2\pi$. Τότε, σύμφωνα μέ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, θά εἶναι:

$$\tau_2 = \tau_1 + \kappa_2 2\pi = 2\kappa\pi + \tau + 2\kappa_2\pi = 2(\kappa + \kappa_2)\pi + \tau$$

καί ἐπειδή $\kappa_1 \in Z$, $\kappa \in Z$, θά εἶναι καί $(\kappa_1 + \kappa) \in Z$ καί ἑπομένως

$$\tau_2 = 2\lambda\pi + \tau, \ \lambda \in Z$$

Ἀπό τήν τελευταία αὐτή ἰσότητα συνάγουμε ὅτι τό τόξο μέ ἀλγεβρική τιμή τ_2 θά ἔχει πέρας τό σημεῖο Μ.

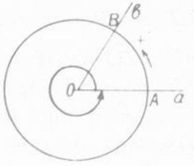
Ὥστε: **Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά ἔχουν καί κοινό πέρας δύο προσανατολισμένα τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου, πού ἔχουν κοινή ἀρχή, εἶναι οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους νά διαφέρουν κατά 2κπ (360^0κ), ὅπου $\kappa \in Z$.**

137. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΗΣ.

Ἡ ἔννοια τῆς προσανατολισμένης γωνίας καί τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς της μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τό Γυμνάσιο.

Ἡ ἀντιστοιχία, πού ὑπάρχει μεταξύ τόξου καί ἐπίκεντρης γωνίας του, μᾶς ἐπιτρέπει νά συνδέσουμε τήν ἔννοια τοῦ προσανατολισμένου τόξου μέ τήν ἔννοια τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Σχ. 137).

Πραγματικά, ὅταν τό κινητό σημεῖο ἀναχωρεῖ ἀπό τό Α καί διαγράφει τό τόξο $\widehat{AB}$, τότε ἡ ἡμιευθεία Οα διαγράφει τό ἐσωτερικό τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Οα, Οβ), τήν ὁποία συμβολίζουμε μέ $\measuredangle$ (Οα, Οβ), ἄν εἶναι θετική ἤ μέ $\measuredangle$ (Οα, Οβ), ἄν εἶναι ἀρνητική. Ἡ τελική πλευρά Οβ τῆς προσανατολισμένης γωνίας, πρίν πάρει τήν τελική θέση της Οβ, μπορεῖ νά ἐκτελέσει μιά ἤ περισσότερες περιστροφές γύρω ἀπό τό Ο καί νά διαγράψει ἔτσι ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό θετικῶν ἤ ἀρνητικῶν πλήρων γωνιῶν. Ὑπάρχουν ἑπομένως ἀπειράριθμες προσανατολισμένες γωνίες, πού ἔχουν τήν ἴδια ἀρχική καί τήν ἴδια τελική πλευρά. Καθεμιά ἀπό τίς γωνίες αὐτές λέγεται: **τριγωνομετρική** γωνία. Ἑπομένως ὑπάρχει μία



Σχ. 137

ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καί τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν (Οα, Οβ).

Ἡ μικρότερη θετική γωνία $\measuredangle$ (Οα, Οβ), ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό τόξο $\widehat{AB}^{+}$, μπορεῖ νά ὀνομασθεῖ **γεωμετρική** γωνία· αὐτή συμβολίζεται $\measuredangle$ (Οα, Οβ).

Ἡ ἀλγεβρική τιμή x μιᾶς τριγωνομετρικῆς γωνίας μέ ἀρχική πλευρά Οα καί τελική πλευρά Οβ δίνεται προφανῶς ἀπό τόν τύπο: $x^\circ = 360^\circ\kappa + \tau^\circ$ ἤ $x = 2\kappa\pi + \tau$, ὅπου $\kappa \in Z$ καί τ εἶναι ἡ ἀλγεβρική τιμή σέ μοῖρες ἤ ἀκτίνια μιᾶς ὁποιασδήποτε ἀπό τίς γωνίες αὐτές, ἀλλά ὁρισμένης.

Μποροῦμε τώρα νά διατυπώσουμε τήν ἑξῆς πρόταση:

Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά δυό τριγωνομετρικές γωνίες, πού ἔχουν κοινή ἀρχική πλευρά, γιά νά ἔχουν καί κοινή τελική πλευρά, εἶναι οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους νά διαφέρουν κατά 2κπ ($360^0\kappa$), ὅπου $\kappa \in Z$.

Μποροῦμε ἑπομένως νά μεταβαίνουμε ἀδιάφορα ἀπό τά τόξα στίς ἀντίστοιχες γωνίες καί ἀντιστρόφως καί νά ἐφαρμόζουμε σέ καθένα ἀπό τά μεγέθη αὐτά τίς μετρικές ἰδιότητες τοῦ ἄλλου, ἐπειδή ἕνα προσανατολισμένο τόξο καί ἡ ἀντίστοιχη προσανατολισμένη γωνία ἔχουν πάντοτε τήν ἴδια φορά.

Δύο τριγωνομετρικές γωνίες λέγονται ἴσες, ὅταν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους εἶναι ἀριθμοί ἴσοι.

Δύο τριγωνομετρικές γωνίες λέγονται ἀντίθετες, ὅταν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τους εἶναι ἀριθμοί ἀντίθετοι.

138. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΟ Ἡ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΩΝ ΤΟΞΩΝ.

Ἄθροισμα προσανατολισμένων τόξων ἑνός κύκλου ὀνομάζουμε τό προσανατολισμένο τόξο, τό ὁποῖο ἔχει ὡς ἀλγεβρική τιμή τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοσμένων τόξων.

Ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό γίνεται φανερό ὅτι γιά τό ἄθροισμα τῶν προσανατολισμένων τόξων ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1) Μποροῦμε σ' ἕνα ἄθροισμα προσανατολισμένων τόξων νά ἀλλάξουμε τή σειρά τῶν προσθετέων.

2) Μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε ὁσουσδήποτε προσθετέους μέ ἕναν, τό ἄθροισμά τους.

Γιά νά βροῦμε τό ἄθροισμα προσανατολισμένων τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$, ... ἑνός κύκλου, τά κάνουμε διαδοχικά. Παίρνουμε, π.χ., ἀπό τό σημεῖο Β ἕνα τόξο $\overset{\frown}{BZ}$ ἀλγεβρικῆς τιμῆς ἴσης μέ τήν ἀλγ. τιμή τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καί ἀπό τό σημεῖο Ζ ἕνα τόξο $\overset{\frown}{Z\Theta}$ ἀλγεβρικῆς τιμῆς ἴσης μέ τήν ἀλγ. τιμή τοῦ $\overset{\frown}{\Delta E}$ κ.ο.κ. Τό τόξο, πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου Α καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου, θά ἔχει ἀλγεβρική τιμή ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοσμένων τόξων, δηλ. θά εἶναι τό ἄθροισμά τους.

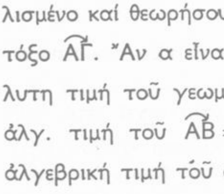
Ἔτσι, π.χ., ἄν Α, Β, Γ (Σχ. 134) εἶναι τρία σημεῖα σέ κύκλο προσανατολισμένο καί θεωρήσουμε τά τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{B\Gamma}$, τότε τό ἄθροισμά τους εἶναι τό τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Ἄν α εἶναι ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$, β ἡ ἀπόλυτη τιμή τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$, τότε θά ἔχουμε:

ἀλγ. τιμή τοῦ $\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2\kappa\pi$, ἀλγ. τιμή τοῦ $\overset{\frown}{B\Gamma} = \beta + 2\kappa'\pi$, ἑπομένως ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ ἀθροίσματος $\overset{\frown}{A\Gamma} = \alpha + \beta + 2\lambda\pi$, ὅπου $\lambda \in Z$.

Τά παραπάνω ἐπεκτείνονται εὔκολα καί στίς προσανατολισμένες γωνίες.

139. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΘΕΣΗ.

Λέμε ὅτι μιά προσανατολισμένη γωνία βρίσκεται σέ **κανονική θέση** ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων $x'Ox$, $\psi'O\psi$, ἄν ἡ κορυφή τῆς γωνίας βρίσκεται στήν ἀρχή Ο τῶν ἀξόνων καί ἡ ἀρχική πλευρά της ταυτίζεται μέ τό θετικό ἡμιάξονα Ox, ὅταν ἡ γωνία τοποθετηθεῖ πάνω στό ἐπίπεδο τῶν ἀξόνων.



Σχ. 139

Γιά νά τοποθετήσουμε, π.χ., γωνία 240° σέ κανονική θέση φανταζόμαστε ὅτι ἡ ἡμιευθεία Ox στρέφεται κατά τή θετική φορά κατά 240° (Σχ. 139), ὁπότε ὁρίζεται ἡ τελική πλευρά τῆς γωνίας. Ἔτσι ἡ γωνία β ἔχει ἀλγεβρική τιμή 240°. Αὐτό τό συμβολίζουμε γράφοντας $\beta = 240°$. Ἐπίσης στό ἴδιο σχῆμα εἶναι $\alpha = -60°$ καί $\theta = 30°$.

Ἄν μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἀκτίνα τή μονάδα τοῦ μήκους γράψουμε κύκλο (Σχ. 139), τότε σέ καθεμιά ἀπό τίς προσανατολισμένες γωνίες, π.χ. θ, β, α ἀντιστοιχεῖ ἕνα προσανατολισμένο τόξο, τό ὁποῖο, ὅπως ξέρουμε, ἔχει τήν ἴδια ἀλγεβρική τιμή μέ τήν ἀντίστοιχή του γωνία. **Γι' αὐτό μποροῦμε ἀδιάφορα νά μιλᾶμε γιά γωνία α ἤ γιά τόξο $\overset{\frown}{AP}$, τό ὁποῖο ὀνομάζουμε ἐπίσης τόξο α.** Ἐπίσης ἔχουμε τή γωνία θ ἤ τό τόξο θ ($\equiv \overset{\frown}{AP^{+}}$).

Ὁ παραπάνω κύκλος, πού γράφεται μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ἀκτίνα τή μονάδα, λέγεται **τριγωνομετρικός κύκλος.** Τό σημεῖο Α (1, 0) λέγεται **ἀρχή τῶν τόξων** τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Εἶναι τό σημεῖο, στό ὁποῖο ὁ τριγωνομετρικός κύκλος τέμνει τόν ἡμιάξονα Οx. Τό $\overrightarrow{OA}$ εἶναι ἐπομένως τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ ἄξονα x'Οx καί κάθε ἄλλου παράλληλου μ' αὐτόν. Ὁ ἴδιος ἄξονας x'Οx τέμνει τόν τριγωνομετρικό κύκλο καί στό σημεῖο Α'(—1, 0). Ὁ ἄλλος ἄξονας y'Οy τέμνει τόν τριγωνομετρικό κύκλο στά σημεῖα Β(0, 1) καί Β'(0, —1). Τό διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ εἶναι τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ ἄξονα y'Οy καί κάθε ἄλλου παράλληλου μ' αὐτόν.

Ἡ ἀκτίνα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἡ ὁποία καταλήγει στό πέρας ἑνός τόξου τοῦ κύκλου, λέγεται **τελική ἀκτίνα** τοῦ τόξου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

460) Νά τρέψετε ἕνα ἀκτίνιο σέ μοῖρες.

461) Νά τρέψετε μία μοίρα σέ ἀκτίνια.

462) Νά τρέψετε 45^0 σέ ἀκτίνια.

463) Νά τρέψετε $\frac{\pi}{16}$ ἀκτίνια σέ μοῖρες.

464) Μέ τή βοήθεια μοιρογνωμόνιου νά κατασκευάσετε σέ κανονική θέση γωνίες, πού νά ἔχουν ἀλγεβρικές τιμές:

α) 75°	β) 125°	γ) 210°	δ) —150°	ε) 330°
στ) —330°	ζ) 385°	η) —370°	θ) 930°	ι) —955°

465) Νά ἀναφέρετε πέντε γωνίες, οἱ ὁποῖες σέ κανονική θέση ἔχουν τήν ἴδια τελική πλευρά μέ τή $\theta = 100°$.

466) Οἱ γωνίες $\theta = 125°$ καί $\varphi = -955°$ σέ κανονική θέση ἔχουν τήν ἴδια τελική πλευρά. Νά ἐξηγήσετε τό γιατί.

467) Νά ἐξετάσετε ἄν οἱ γωνίες $\kappa = 930°$ καί $\lambda = -870°$ ἔχουν, σέ κανονική θέση, τήν ἴδια τελική πλευρά.

140. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ.

Ἔστω θ μιά μεταβλητή, ἡ ὁποία παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν τριγωνομετρικῶν γωνιῶν. Τά στοιχεῖα λοιπόν τοῦ συνόλου Γ εἶναι γωνίες, ὄχι ἀριθμοί.

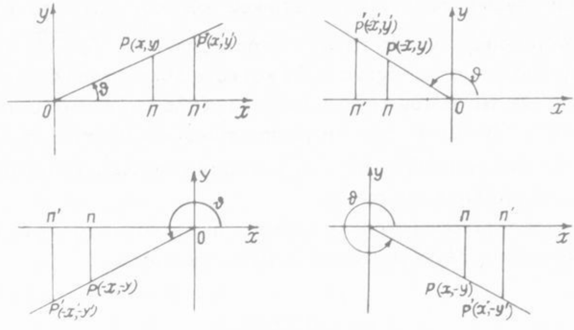
Γιά κάθε γωνία θ τοῦ συνόλου Γ φανταζόμαστε ὅτι τοποθετεῖται σέ κανονική θέση ὡς πρός ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων (Σχ. 140.1).

Ἔστω Ρ(x, ψ) ἕνα σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ διαφορετικό ἀπό τήν ἀρχή Ο.

1) Ὀνομάζουμε **ἡμίτονο** τῆς γωνίας θ, συμβολικά ημθ, τό λόγο τῆς τεταγμένης τοῦ σημείου Ρ πρός τό μῆκος ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OP}$. Ὥστε εἶναι:

$$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho}$$

Ἄς πάρουμε κάποιο ἄλλο σημεῖο Ρ'(x', ψ') τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γω-



Σχ. 140.1

νίας θ, διαφορετικό ἀπό τήν ἀρχή. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό πού δώσαμε, θά εἶναι ημθ $= \frac{\psi'}{\rho'}$, ὅπου ρ' τό μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας τοῦ σημείου P'.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι $\overrightarrow{OP'} = \lambda\overrightarrow{OP}$ καί ἑπομένως θά ἔχουμε $x' = \lambda x$ καί $\psi' = \lambda\psi$ ἀπό τίς ὁποῖες ἔχουμε ὅτι $\frac{x}{x'} = \frac{\psi}{\psi'} = \frac{\sqrt{x^2+\psi^2}}{\sqrt{x'^2+\psi'^2}} = \frac{\rho}{\rho'}$. Ὥστε $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi'}{\rho'}$, $\frac{x}{\rho} = \frac{x'}{\rho'}$, $\frac{\psi}{x} = \frac{\psi'}{x'}$ κτλ.

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι ἰσχύει $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi'}{\rho'}$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τοῦ σημείου P πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας, ἀλλά μόνο ἀπό τή θέση αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδή ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Ὥστε: σέ κάθε γωνία θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ ἕνας καί μόνο πραγματικός ἀριθμός: ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$.

Ὁρίζεται λοιπόν ἐδῶ μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καί πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτηση $\theta \rightarrow$ ημθ.

2) Ὀνομάζουμε **συνημίτονο** τῆς γωνίας θ, συμβολικά συνθ, τό λόγο τῆς τετμημένης ἑνός σημείου P τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας πρός τό μῆκος ρ, τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας τοῦ P. Ὥστε εἶναι:

$$\text{συν}\theta = \frac{x}{\rho}.$$

Ἄς πάρουμε κάποιο ἄλλο σημεῖο P' (x' ψ') πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας θ, διαφορετικό ἀπό τήν ἀρχή. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, πού δώσαμε, εἶναι συν θ $= \frac{x'}{\rho'}$. Παρατηροῦμε ὅμως πάλι ὅτι ἰσχύει $\frac{x}{\rho} = \frac{x'}{\rho'}$, πού σημαίνει ὅτι ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{x}{\rho}$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τοῦ σημείου Ρ πάνω στήν τελική πλευρά, ἀλλά ἀπό τή θέση αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδή ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Ὥστε: σέ κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ ἕνας καί μόνο πραγματικός ἀριθμός: ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{x}{\rho}$.

Ὁρίζεται λοιπόν μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καί πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτηση $\theta \to$ συν θ.

3) Ὀνομάζουμε **ἐφαπτομένη** μιᾶς γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικά εφ θ, τό λόγο τῆς τεταγμένης ἑνός σημείου Ρ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας πρός τήν τετμημένη αὐτοῦ τοῦ σημείου. Ὥστε εἶναι:

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{\psi}{x} \qquad x \neq 0.$$

Ἄν πάρουμε κάποιο ἄλλο σημεῖο Ρ′ (x′, ψ′) πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας θ, διαφορετικό ἀπό τήν ἀρχή, θά εἶναι σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, πού δώσαμε, $\text{εφ}\theta = \frac{\psi'}{x'}$. Ἀλλά, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἰσχύει $\frac{\psi}{x} = \frac{\psi'}{x'}$ πού σημαίνει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας, δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τοῦ Ρ πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας, ἀλλά ἀπό τή θέση αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδή ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Σημ. Ὅταν $x = 0$, ὁ λόγος ψ/x δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καί ἐπομένως δέν ὁρίζεται τότε ἐφαπτομενη τῆς γωνίας θ. Αὐτό συμβαίνει, π.χ., γιά τίς γωνίες, πού ἔχουν ἀλγεβρϊκή τιμή $90^0, -90^0, 270^0, -270^0, 450^0$ κτλ., ὅπως θά δοῦμε παρακάτω.

Ὥστε: σέ κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς θ ἀντιστοιχεῖ ἕνας καί μόνο πραγματικός ἀριθμός, ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$.

Ὁρίζεται λοιπόν καί ἐδῶ μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καί πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτηση $\theta \to$ εφ θ.

4) Ὀνομάζουμε **συνεφαπτομένη** μιᾶς γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικά σφ θ, τό λόγο τῆς τετμημένης ἑνός σημείου Ρ, τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, πρός τήν τεταγμένη αὐτοῦ τοῦ σημείου. Ὥστε εἶναι:

$$\text{σφ}\theta = \frac{x}{\psi} \qquad \psi \neq 0.$$

Σημείωση. Παρατηροῦμε καί πάλι ὅτι δέν ὁρίζεται συνεφαπτομένη γιά γωνίες, πού τά σημεῖα τῆς τελικῆς πλευρᾶς τους ἔχουν τεταγμένη 0. Τέτοιες γωνίες εἶναι, π.χ., ὅσες ἔχουν ἀλγεβρική τιμή : $0^0, 180^0, -180^0, 360^0$ κτλ., ὅπως θά δοῦμε παρακάτω.

Εὔκολα βλέπουμε καί ἐδῶ ὅτι ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς γωνίας δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τοῦ σημείου Ρ πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας, ἀλλά ἀπό τό μέγεθος τῆς γωνίας.

Ὥστε: σέ κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{x}{\psi}$, καί ὁρίζεται ἔτσι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ της τό σύνολο Γ, καί πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτηση $\theta \rightarrow$ σφ θ.

5) Ὀνομάζουμε **τέμνουσα** μιᾶς γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικά τεμ θ, τό λόγο τοῦ μήκους ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας ἑνός σημείου $P(x, \psi)$ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, πρός τήν τετμημένη αὐτοῦ τοῦ σημείου.

Δηλ. εἶναι: $\quad \text{τεμ}\theta = \frac{\rho}{x}, \; x \neq 0.$

Παρατηροῦμε καί ἐδῶ ὅτι δέν ὁρίζεται τέμνουσα γιά γωνίες, πού τά σημεῖα τῆς τελικῆς πλευρᾶς τους ἔχουν τετμημένη 0. Τέτοιες γωνίες εἶναι, π.χ., οἱ γωνίες πού ἔχουν ἀλγεβρική τιμή 90°, –90°, 270°, –270°, κ.τ.λ., ὅπως θά δοῦμε στά ἑπόμενα.

Καί πάλι ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι ἡ τέμνουσα μιᾶς γωνίας θ δέ μεταβάλλεται, ἄν πάρουμε ἄλλο, διαφορετικό ἀπό τήν ἀρχή, σημεῖο πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας. Ὥστε: σέ κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ἡ τιμή τοῦ λόγου ρ/x, καί ὁρίζεται ἔτσι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καί πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτηση $\theta \rightarrow$ τεμ θ.

6) Ὀνομάζουμε **συντέμνουσα** μιᾶς γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικά στεμ θ, τό λόγο τοῦ μήκους ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας ἑνός σημείου $P(x, \psi)$, τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, πρός τήν τεταγμένη τοῦ σημείου P. Δηλ. εἶναι:

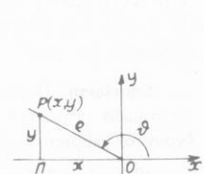
$$\text{στεμ}\theta = \frac{\rho}{\psi} \qquad \psi \neq 0.$$

Κάνουμε καί γιά τό λόγο ρ/ψ ἀνάλογες παρατηρήσεις μέ ἐκεῖνες, πού κάναμε γιά τούς λόγους, πού ὁρίσαμε παραπάνω.

Ὁρίζεται καί πάλι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καί πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτηση $\theta \rightarrow$ στεμ θ.

Ἀνακεφαλαιώνοντας τούς ὁρισμούς, πού δώσαμε παραπάνω, ἔχουμε ὅτι γιά μιά ὁποιαδήποτε τριγωνομετρική γωνία θ σέ κανονική θέση ὡς πρός ἕνα σύστημα ὀρθοκανονικό καί γιά $P(x, \psi)$ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο πάνω στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας, τοῦ ὁποίου τό μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OP}$ εἶναι ρ, ἔχουμε (Σχ. 140.2).

$$\left.\begin{aligned} \text{ημ}\theta &= \frac{\psi}{\rho} \\ \text{συν}\theta &= \frac{x}{\rho} \\ \text{εφ}\theta &= \frac{\psi}{x} \\ \text{σφ}\theta &= \frac{x}{\psi} \\ \text{τεμ}\theta &= \frac{\rho}{x} \\ \text{στεμ}\theta &= \frac{\rho}{\psi} \end{aligned}\right| \quad (\tau)$$



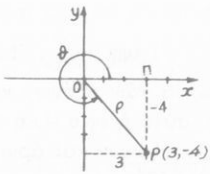
Σχ. 140.2

Οἱ ἕξι συναρτήσεις πού ὁρίσαμε παραπάνω, $\theta \to$ ημ θ, $\theta \to$ συν θ, $\theta \to$ εφ θ, $\theta \to$ σφ θ, $\theta \to$ τεμ θ, $\theta \to$ στεμ θ, λέγονται **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** τῆς γωνίας θ.

Γιά μιά δεδομένη τριγωνομετρική γωνία ὁρίζονται μέ τόν τρόπο, πού ἐκθέσαμε παραπάνω, οἱ ἕξι ὁρισμένοι λόγοι (τ), οἱ ὁποῖοι λέγονται **τριγωνομετρικοί ἀριθμοί** τῆς δεδομένης γωνίας.

Εἶναι φανερό ὅτι **τριγωνομετρικές γωνίες σέ κανονική θέση, πού ἔχουν κοινή τελική πλευρά, ἔχουν ἴσους τούς ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς των.** Ἔτσι, π.χ., ἐπειδή οἱ γωνίες μέ ἀλγεβρικές τιμές 30° καί –330° ἔχουν τήν ἴδια τελική πλευρά, θά ἔχουν τούς ἴδιους ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς.

Παράδειγμα: Νά βρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς γωνίας θ, ἄν ἡ τελική της πλευρά, σέ κανονική θέση, περνάει ἀπό τό σημεῖο Ρ (3, –4).



Σχ. 140.3

Λύση: Μιά τέτοια γωνία θ βλέπετε στό παραπλεύρως σχῆμα. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΠΡ ἔχουμε $\rho^2 = x^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + \psi^2}$.

Ἑπομένως $\rho = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Τότε, σύμφωνα μέ τούς ὁρισμούς (τ), εἶναι:

$$\begin{aligned}
\text{ημ}\theta &= \frac{\psi}{\rho} = -\frac{4}{5}\\
\text{συν}\theta &= \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5}\\
\text{εφ}\theta &= \frac{\psi}{x} = -\frac{4}{3}\\
\text{σφ}\theta &= \frac{x}{\psi} = -\frac{3}{4}\\
\text{τεμ}\theta &= \frac{\rho}{x} = \frac{5}{3}\\
\text{στεμ}\theta &= \frac{\rho}{\psi} = -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1η. Ἀπό τούς ὁρισμούς (τ) βλέπουμε ἀμέσως ὅτι ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰσότητες, πού εἶναι ταυτότητες (ἐπειδή εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις γιά κάθε τιμή τῆς γωνίας θ, γιά τήν ὁποία ὁρίζονται οἱ συναρτήσεις στά δύο μέλη κάθε ἰσότητας):

$$\begin{aligned}
\text{ημ}\theta &= \frac{1}{\text{στεμ}\theta} \Leftrightarrow \text{στεμ}\theta = \frac{1}{\text{ημ}\theta}\\
\text{συν}\theta &= \frac{1}{\text{τεμ}\theta} \Leftrightarrow \text{τεμ}\theta = \frac{1}{\text{συν}\theta}\\
\text{εφ}\theta &= \frac{1}{\text{σφ}\theta} \Leftrightarrow \text{σφ}\theta = \frac{1}{\text{εφ}\theta}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 2η. Ἀπό τούς παραπάνω ὁρισμούς (τ) βλέπουμε ἐπίσης ὅτι εὔκολα βρίσκουμε τά πρόσημα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας, ὅταν γνωρίζουμε σέ ποιά γωνία τῶν ἀξόνων βρίσκεται ἡ τελική πλευρά τῆς δοσμένης γωνίας.

α) $ημθ = \frac{ψ}{ρ}$. Ἐπειδή ψ εἶναι θετικός ἀριθμός στήν I καί II καί ἀρνητικός στήν III καί IV γωνία τῶν ἀξόνων καί τό ρ πάντοτε θετικός ἀριθμός, γι' αὐτό τό ημ θ εἶναι θετικό γιά γωνίες μέ τελική πλευρά στήν I καί II γωνία τῶν ἀξόνων καί ἀρνητικό γιά γωνίες μέ τελική πλευρά στήν III καί IV γωνία τῶν ἀξόνων.

β) $συνθ = \frac{x}{ρ}$. Ἐπειδή x εἶναι θετικός στήν I καί IV γωνία τῶν ἀξόνων καί ἀρνητικός στήν II καί III, γι' αὐτό τό συν θ εἶναι θετικό γιά γωνίες μέ τελική πλευρά στήν I καί IV γωνία τῶν ἀξόνων καί ἀρνητικό γιά τίς γωνίες μέ τελική πλευρά στή II καί III γωνία τῶν ἀξόνων.

γ) $εφθ = \frac{ψ}{x}$. Ἐπειδή x καί ψ ἔχουν τά ἴδια πρόσημα στήν I καί III γωνία τῶν ἀξόνων καί ἀντίθετα πρόσημα στή II καί IV γωνία τῶν ἀξόνων, γι' αὐτό ἡ εφ θ εἶναι θετική γιά γωνίες μέ τελική πλευρά στήν I καί III γωνία τῶν ἀξόνων καί ἀρνητική γιά γωνίες μέ τελική πλευρά στή II καί IV γωνία τῶν ἀξόνων.

Ἀνάλογες παρατηρήσεις μποροῦμε νά κάνουμε καί γιά τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας θ.

Παρατήρηση 3η. Ἀπό τούς τύπους (τ) ἔχουμε $x = ρ\,συν\,θ$, $ψ = ρ\,ημ\,θ$. Οἱ τύποι αὐτοί συνδέουν τίς συντεταγμένες ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου P τοῦ ἐπιπέδου (ὀρθοκανονικό σύστημα) μέ τό μῆκος ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OP}$, τοῦ σημείου P, καί μέ τήν ἀλγεβρική τιμή τῆς γωνίας θ, πού σχηματίζει ἡ $\overrightarrow{OP}$ μέ τόν ἄξονα Ox (σχ. 140.2). Ὁ πρῶτος τύπος $x = ρ\,συν\,θ$ λέει ὅτι: ἡ ἀλγεβρική τιμή τῆς προβολῆς ἑνός διανύσματος σ' ἕναν ἄξονα εἶναι ἴση μέ τό μῆκος τοῦ διανύσματος ἐπί τό συνημίτονο τῆς γωνίας, τήν ὁποία σχηματίζει τό διάνυσμα μέ τόν ἄξονα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

468) Νά βρεῖτε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς μικρότερης θετικῆς γωνίας θ σέ κανονική θέση, ἄν P εἶναι σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ καί οἱ συντεταγμένες τοῦ P εἶναι: α) P (3, 4), β) P(−5, 12), γ) P(−1, −3).

469) Σέ ποιά γωνία τῶν ἀξόνων βρίσκεται ἡ τελική πλευρά μιᾶς γωνίας θ, πού εἶναι σέ κανονική θέση, ἄν:

α) ημθ καί συνθ εἶναι καί τά δύο ἀρνητικά,
β) ημθ καί εφθ εἶναι καί τά δύο θετικά,
γ) ημθ εἶναι θετικό καί τεμθ εἶναι ἀρνητική,
δ) τεμθ εἶναι ἀρνητική καί εφθ εἶναι ἀρνητική,
ε) εφθ εἶναι θετική καί τεμθ εἶναι ἀρνητική,
στ) ημθ εἶναι θετικό καί συνθ εἶναι ἀρνητικό.

470) Σέ ποιά γωνία τῶν ἀξόνων βρίσκεται ἡ τελική πλευρά γωνίας θ, σέ κανονική θέση, ἄν:

α) $ημθ > 0$ β) $συνθ < 0$ γ) $εφθ < 0$ δ) $τεμθ > 0$

471) Ἄν ξέρουμε ὅτι $ημθ = \frac{8}{17}$ καί ὅτι ἡ τελική πλευρά τῆς θ, σέ κανονική θέση βρίσκεται στήν I γωνία τῶν ἀξόνων, νά βρεθοῦν τά συνθ καί εφθ.

472) Ἄν $συνθ = \frac{5}{6}$, νά βρεῖτε τά ημθ καί εφθ.

473) Ἄν $εφθ = -\frac{3}{4}$, νά βρεῖτε τά ημθ καί συνθ.

(Ὑπόδειξη: ἐπειδή $εφθ = \frac{ψ}{x}$ εἶναι ἀρνητική, ἡ θ εἶναι γωνία μέ τελική πλευρά στή II γωνία τῶν ἀξόνων, ἄν πάρουμε $x = -4$, $ψ = 3$, ἤ γωνία μέ τελική πλευρά στήν IV γωνία τῶν ἀξόνων, ἄν πάρουμε $x = 4$, $ψ = -3$. Καί στίς δύο περιπτώσεις $ρ = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$).

474) Νά βρεῖτε τό ημθ, ἄν δοθεῖ ὅτι $συνθ = -\frac{4}{5}$ καί ὅτι $εφθ > 0$.

475) Νά βρεῖτε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς μιᾶς γωνίας θ, γιά τήν ὁποία γνωρίζουμε ὅτι $ημθ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ καί $συνθ = \frac{1}{2}$

476) Σέ ποιά γωνία τῶν ἀξόνων βρίσκονται οἱ τελικές πλευρές καί ποιά εἶναι τά πρόσημα τοῦ ἡμιτόνου, τοῦ συνημιτόνου καί τῆς ἐφαπτομένης καθεμιᾶς ἀπό τίς γωνίες μέ ἀλγεβρική τιμή:

α) $125°$ β) $75°$ γ) $-320°$ δ) $210°$ ε) $460°$ στ) $-250°$ ζ) $-1000°$

477) Νά βρεῖτε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς γωνίας θ, ἄν γνωρίζετε ὅτι:

α) $ημθ = \frac{7}{25}$ β) $εφθ = \frac{3}{5}$ καί $180° < θ < 270°$.

141. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Α) Πρῶτα-πρῶτα συμφωνοῦμε τό ἑξῆς: θά γράφουμε, π.χ., ημ 18° καί θά ἐννοοῦμε τό ἡμίτονο γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει ἀλγεβρική τιμή 18°. Ἐπίσης στούς συμβολισμούς ημ θ, συν θ, εφ θ κτλ. τό θ θά τό ἐννοοῦμε ὡς ἀλγεβρική τιμή γωνίας. Τό κάνουμε αὐτό, ἐπειδή ἡ τριγωνομετρική γωνία προσδιορίζεται μέ ἀκρίβεια, ὅταν γνωρίζουμε τήν ἀλγεβρική τιμή της.

Ἔπειτα ἀπό τή συμφωνία αὐτή ἡ θ μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι εἶναι μία μεταβλητή, πού μπορεῖ νά διατρέχει τό σύνολο **R**, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀλγεβρικές τιμές γωνιῶν, πού ἔχουν μετρηθεῖ μέ μονάδα τή μοίρα.

Β) Θά ζητήσουμε τώρα νά βροῦμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν γωνιῶν 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Ἔστω P ἕνα σημεῖο (ὄχι ἡ ἀρχή) στήν τελική πλευρά τῆς γωνίας θ:

α) Ὅταν $\theta = 0^\circ$, τότε $x = \rho$, $\psi = 0$ καί ἑπομένως:

$$\eta\mu\, 0^\circ = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0,$$

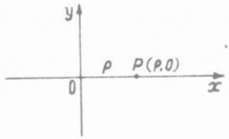
$$\sigma\upsilon\nu\, 0^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

$$\varepsilon\varphi\, 0^\circ = \frac{\psi}{x} = \frac{0}{\rho} = 0,$$

$$\sigma\varphi\, 0^\circ = \frac{x}{\psi} = \frac{\rho}{0} \text{ (δέν ὁρίζεται)*}$$

$$\tau\varepsilon\mu\, 0^\circ = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\, 0^\circ = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{0} \text{ (δέν ὁρίζεται)}$$



Σχ. 141.1

β) Ὅταν $\theta = 90^\circ$, τότε $x = 0$, $\psi = \rho$ καί ἑπομένως:

$$\eta\mu\, 90^\circ = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

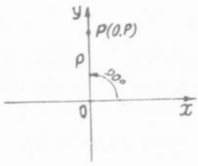
$$\sigma\upsilon\nu\, 90^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0,$$

$$\varepsilon\varphi\, 90^\circ = \frac{\psi}{x} = \frac{\rho}{0} \text{ (δέν ὁρίζεται),}$$

$$\sigma\varphi\, 90^\circ = \frac{x}{\psi} = \frac{0}{\rho} = 0,$$

$$\tau\varepsilon\mu\, 90^\circ = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{0} \text{ (δέν ὁρίζεται),}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\, 90^\circ = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{\rho} = 1,$$



Σχ. 141.2

γ) Ὅταν $\theta = 180^\circ$, τότε $x = -\rho$, $\psi = 0$ καί ἑπομένως:

$$\eta\mu\, 180^\circ = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0,$$

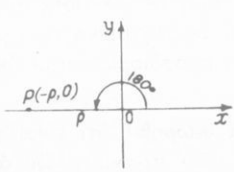
$$\sigma\upsilon\nu\, 180^\circ = \frac{x}{\rho} = \frac{-\rho}{\rho} = -1,$$

$$\varepsilon\varphi\, 180^\circ = \frac{\psi}{x} = \frac{0}{-\rho} = 0,$$

$$\sigma\varphi\, 180^\circ = \frac{x}{\psi} = \frac{-\rho}{0} \text{ (δέν ὁρίζεται),}$$

$$\tau\varepsilon\mu\, 180^\circ = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{-\rho} = -1.$$

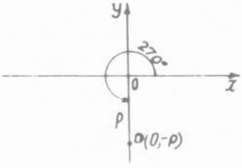
$$\sigma\tau\varepsilon\mu\, 180^\circ = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{0} \text{ (δέν ὁρίζεται),}$$



Σχ. 141.3

(*) δηλ. δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

δ) Όταν $\theta = 270°$, τότε $x = 0$, $\psi = -\rho$ καί επομένως:



$$\eta\mu\, 270° = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-\rho}{\rho} = -1\,,$$

$$\sigma\upsilon\nu\, 270° = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0,$$

$$\varepsilon\varphi\, 270° = \frac{\psi}{x} = \frac{-\rho}{0}\ (\text{δέν ορίζεται}),$$

$$\sigma\varphi\, 270° = \frac{x}{\psi} = \frac{0}{-\rho} = 0,$$

$$\tau\varepsilon\mu\, 270° = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{0}\ (\text{δέν ορίζεται}),$$

Σχ. 141.4

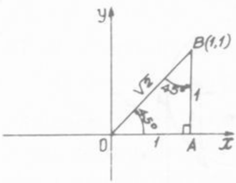
$$\sigma\tau\varepsilon\mu 270° = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{-\rho} = -1\,.$$

ε) Όταν $\theta = 360°$, τότε ή τελική πλευρά τῆς θ ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα Ox καί οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας 360^0 εἶναι ἴσοι μέ τούς ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας 0°.

142. ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ $45^0, 60^0, 30^0$.

α) Όπως μάθαμε στό Γυμνάσιο, εἶναι:

$$\eta\mu\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sigma\upsilon\nu\, 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varepsilon\varphi\, 45° = 1.$$



Σχ. 142.1

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι εἶναι:

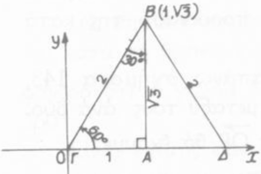
$$\tau\varepsilon\mu\, 45° = \frac{\rho}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\, 45° = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\sigma\varphi\, 45° = \frac{x}{\psi} = \frac{1}{1} = 1$$

β) Μάθαμε στό Γυμνάσιο ὅτι:

$$\eta\mu\, 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sigma\upsilon\nu\, 60° = \frac{1}{2},\ \varepsilon\varphi\, 60° = \sqrt{3}$$



Σχ. 142.2

Εὔκολα βρίσκουμε τώρα ὅτι:

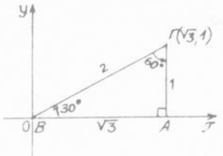
$$\sigma\varphi\, 60° = \frac{x}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\tau\varepsilon\mu 60° = \frac{\rho}{x} = \frac{2}{1} = 2,$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu 60° = \frac{\rho}{\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,.$$

γ) Ξέρουμε ἀπό τό Γυμνάσιο ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\, 30° = \frac{1}{2},\ \sigma\upsilon\nu\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon\varphi 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Σχ. 142.3

Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι :

$$\sigma\varphi\, 30° = \frac{x}{\psi} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

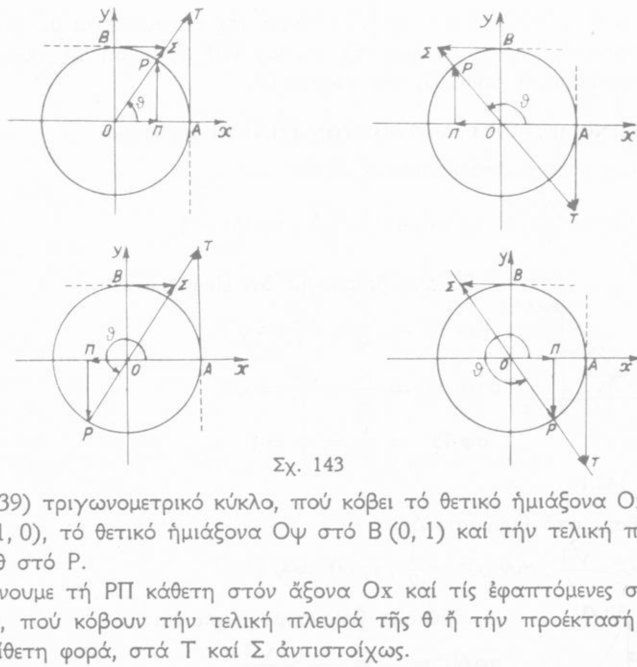
$$\tau\varepsilon\mu\, 30° = \frac{\rho}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\, 30° = \frac{\rho}{\psi} = \frac{2}{1} = 2$$

143. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Ἔστω θ μιά γωνία σέ κανονική θέση (Σχ. 143).

Μέ κέντρο τήν ἀρχή καί ἀκτίνα τή μονάδα χαράζουμε κύκλο, τό γνωστό



Σχ. 143

μας (§ 139) τριγωνομετρικό κύκλο, πού κόβει τό θετικό ἡμιάξονα Οx στό σημεῖο Α (1, 0), τό θετικό ἡμιάξονα Οψ στό Β (0, 1) καί τήν τελική πλευρά τῆς γωνίας θ στό Ρ.

Φέρνουμε τή ΡΠ κάθετη στόν ἄξονα Οx καί τίς ἐφαπτόμενες στά σημεῖα Α καί Β, πού κόβουν τήν τελική πλευρά τῆς θ ἤ τήν προέκτασή της κατά τήν ἀντίθετη φορά, στά Τ καί Σ ἀντιστοίχως.

Ὅπως εἶναι εὔκολο νά παρατηρήσουμε στά παραπάνω σχήματα 143, τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΡ, ΟΑΤ καί ΟΒΣ εἶναι ὅμοια μεταξύ τους ἀνά δύο. Ἄν στόν ἄξονα ΟΡ ὁρίσουμε ὡς μοναδιαῖο τό διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ θά ἔχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{\overline{\Pi P}}{\overline{OP}} = \overline{\Pi P} \qquad \sigma\varphi\,\theta = \frac{\overline{O\Pi}}{\overline{\Pi P}} = \frac{\overline{B\Sigma}}{\overline{OB}} = \overline{B\Sigma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\overline{O\Pi}}{\overline{OP}} = \overline{O\Pi} \qquad \tau\varepsilon\mu\,\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{O\Pi}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} = \overline{OT}$$

$$\varepsilon\varphi\,\theta = \frac{\overline{\Pi P}}{\overline{O\Pi}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT} \qquad \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{\Pi P}} = \frac{\overline{O\Sigma}}{\overline{OB}} = \overline{O\Sigma}$$

Τά διανύσματα $\overrightarrow{\Pi P}$, $\overrightarrow{O\Pi}$, $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{B\Sigma}$, $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{O\Sigma}$ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ **γεωμετρικές παραστάσεις** τῶν συναρτήσεων ημ θ, συν θ, σφ θ, τεμ θ, στεμ θ, τῆς γωνίας θ (τοῦ τόξου θ) καί οἱ **ἀλγεβρικές τιμές τῶν διανυσμάτων εἶναι οἱ τιμές τῶν ἀντίστοιχων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων τῆς θ.** Γιά τά $\overrightarrow{O\Sigma}$ καί $\overrightarrow{OT}$ παρατηροῦμε ὅτι ἡ φορά τους εἶναι θετική, ὅταν αὐτή συμφωνεῖ μέ τή φορά τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἀλλιῶς ἡ φορά τους εἶναι ἀρνητική.

Ἀπό τά παραπάνω ἐννοοῦμε ὅτι μποροῦμε, ὅταν αὐτό μᾶς ἐξυπηρετεῖ, ὡς ἕνα σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς τριγωνομετρικῆς γωνίας νά παίρνουμε ἐκεῖνο τό σημεῖο, στό ὁποῖο ὁ τριγωνομετρικός κύκλος κόβει τήν τελική πλευρά. Τότε ἐπειδή $\rho = 1$, θά εἶναι (Σχ. 143):

1) ἡμίτονο τοῦ τόξου θ $(\overset{\frown}{AP} \equiv \theta) = \overline{\Pi P}$, δηλαδή ἡ τεταγμένη τοῦ πέρατος Ρ τοῦ τόξου θ. Ὁ ἄξονας Οy τῶν τεταγμένων λέγεται **ἄξονας τῶν ἡμιτόνων** τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

2) συνημίτονο τοῦ τόξου $\theta = \overline{O\Pi}$, δηλαδή ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος Ρ τοῦ τόξου θ. Ὁ ἄξονας Οx τῶν τετμημένων λέγεται **ἄξονας τῶν συνημιτόνων.**

3) ἐφαπτομένη τοῦ τόξου $\theta = \overline{AT}$, δηλαδή ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$, τό ὁποῖο ὁρίζεται πάνω στήν ἐφαπτομένη στήν ἀρχή Α τῶν τόξων ἀπό τό Α καί τό σημεῖο Τ, στό ὁποῖο ἡ προέκταση τῆς τελικῆς ἀκτίνας τοῦ τόξου θ τέμνει στό Α τήν ἐφαπτομένη τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Ὁ ἄξονας ΑΤ μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\overrightarrow{OB}$, λέγεται **ἄξονας τῶν ἐφαπτομένων.**

4) συνεφαπτομένη τοῦ τόξου $\theta = \overline{B\Sigma}$, δηλαδή ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{B\Sigma}$, τό ὁποῖο ὁρίζεται, πάνω στήν ἐφαπτομένη στό Β (0, 1) ἀπό τό Β καί τό σημεῖο Σ, στό ὁποῖο ἡ προέκταση τῆς τελικῆς ἀκτίνας τοῦ τόξου θ τέμνει τήν ἐφαπτομένη Β στό Β τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Ὁ ἄξονας ΒΣ μέ μοναδιαῖο διάνυσμα τό $\overrightarrow{OA}$ λέγεται **ἄξονας τῶν συνεφαπτομένων.**

Ἀνάλογα ὁρίζεται ἡ τέμνουσα καί ἡ συντέμνουσα τοῦ τόξου θ *.

144. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό σημεῖο Ρ (Σχ. 143) ἀναχωρεῖ ἀπό τό Α καί κινεῖται κατά τή θετική φορά διαγράφοντας τόν τριγωνομετρικό κύκλο. Τότε εἶναι φανερό ὅτι ἡ γωνία θ (τό τόξο $\theta \equiv \overset{\frown}{AP}{}^{+}$) μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπό 0° ὥς 360°.

Εἶναι ἐπίσης φανερό ὅτι ἔχουμε γιά τίς τριγωνομετρικές συναρτήσεις τόν παρακάτω πίνακα, πού δείχνει τίς μεταβολές τῶν τιμῶν τους, γιά τίς ἀντίστοιχες μεταβολές τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς θ.

(Στόν πίνακα τό ↗ = αὐξάνει καί τό ↘ =ἐλαττώνεται).

(*) Οἱ ὁρισμοί νά δοθοῦν ἀπό τούς μαθητές μέ τή βοήθεια τοῦ καθηγητῆ.

Πίνακας μεταβολῶν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων

θ αὐξάνει ἀπό	0 ὥς $\frac{\pi}{2}$ (0° ὥς 90°)	$\frac{\pi}{2}$ ὥς π (90° ὥς 180°)	π ὥς $\frac{3\pi}{2}$ (180° ὥς 270°)	$\frac{3\pi}{2}$ ὥς 2π (270° ὥς 360°)
ημθ	↗ ἀπό 0 ὥς 1	↘ ἀπό 1 ὥς 0	↘ ἀπό 0 ὥς −1	↗ ἀπό −1 ὥς 0
συν θ	↘ ἀπό 1 ὥς 0	↘ ἀπό 0 ὥς −1	↗ ἀπό −1 ὥς 0	↗ ἀπό 0 ὥς 1
εφ θ	↗ ἀπό 0 ἀπεριόριστα παίρνοντας ὁσοδήποτε μεγάλες θετικές τιμές, ὅσο τό θ πλησιάζει τίς 90° (0 ὥς $+\infty$)	↗ ἀπό ἀρνητικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες κατ' ἀπόλυτη τιμή ὥς τό 0. ($-\infty$ ὥς 0)	↗ ἀπό 0 ἀπεριόριστα παίρνοντας ὁσοδήποτε μεγάλες θετικές τιμές, ὅσο πλησιάζει τό θ τίς 270° (0 ὥς $+\infty$)	↗ ἀπό ἀρνητικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες κατ' ἀπόλυτη τιμή ὥς τό 0. ($-\infty$ ὥς 0)
σφ θ	↘ ἀπό θετικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες ὥς 0 ($+\infty$ ὥς 0)	↘ ἀπό 0 ἀπεριόριστα παίρνοντας ἀρνητικές τιμές κατ' ἀπόλυτη τιμή ὁσοδήποτε, μεγάλες ὅσο τό θ πλησιάζει τίς 180° (0 ὥς $-\infty$)	↘ ἀπό θετικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες ὥς 0. ($+\infty$ ὥς 0)	↘ ἀπό 0 ἀπεριόριστα παίρνοντας τιμές ἀρνητικές κατ' ἀπόλυτη τιμή ὁσοδήποτε μεγάλες ὅσο τό θ πλησιάζει τίς 360° (0 ὥς $-\infty$)
τεμ θ (*)	↗ ἀπό 1 ἀπεριόριστα παίρνοντας τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες, ὅσο τό θ πλησιάζει τίς 90° (1 ὥς $+\infty$)	↗ ἀπό ἀρνητικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες κατ' ἀπόλυτη τιμή ὥς −1 ($-\infty$ ὥς −1)	↘ ἀπό −1 ἀπεριόριστα παίρνοντας ἀρνητικές τιμές κατ' ἀπόλυτη τιμή ὁσοδήποτε μεγάλες, ὅσο τό θ πλησιάζεις τίς 270° (−1 ὥς $-\infty$)	↘ ἀπό θετικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες ὥς 1. ($+\infty$ ὥς 1)
στεμ θ	↘ ἀπό μεγάλες θετικές τιμές ὥς 1 ($+\infty$ ὥς 1)	↗ ἀπό 1 ὥς θετικές τιμές ὁσοδήποτε μεγάλες (1 ὥς $+\infty$)	↗ ἀπό ἀρνητικές τιμές μεγάλες κατ'ἀπόλυτη τιμή ὥς −1. ($-\infty$ ὥς −1)	↘ ἀπό −1 ἀπεριόριστα. (−1 ὥς $-\infty$)

Σημ. Στήν § 141 μάθαμε γιά ποιές τιμές τῆς θ δέν ὁρίζονται οἱ συναρτήσεις θ ⟶ εφθ, θ ⟶ σφθ, θ ⟶ τεμθ καί θ ⟶ στεμθ.

(*) Ἡ μεταβολή τῆς τεμθ καί στεμθ μπορεῖ νά διδαχθεῖ ἤ νά παραλειφθεῖ κατά τήν κρίση τοῦ καθηγητῆ πού διδάσκει.

145. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Α) Θεωρήσαμε ὥς τώρα τίς τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς θ, ἡ ὁποία παίρνει τιμές ἀπό τό σύνολο Γ, ὅλων τῶν τριγωνομετρικῶν γωνιῶν. Εἴδαμε ἀκόμα ὅτι μποροῦμε νά πάρουμε, ἀντί γιά τίς γωνίες θ, τίς ἀλγεβρικές τους τιμές σέ μοῖρες, ὁπότε ἡ μεταβλητή θ διατρέχει τό σύνολο **R**, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἄν οἱ γωνίες τοῦ συνόλου Γ μετρηθοῦν μέ μονάδα τό ἀκτίνιο, τότε μποροῦμε νά θεωροῦμε τήν τιμή μιᾶς γωνίας x σέ ἀκτίνια ὡς ἕνα ἄλλο σύμβολο γιά τή γωνία καί νά ἀναφερόμαστε στή μεταβλητή x ὅπως σέ μιά μεταβλητή, πού διατρέχει τό **R**.

Τότε σέ κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς $x \in \mathbf{R}$, ἀντιστοιχεῖ ἀπό μιά τιμή γιά καθεμιά ἀπό τίς τριγωνομετρικές συναρτήσεις πού ἀνήκει σ' ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅταν, ἐννοεῖται, ἡ συνάρτηση ὁρίζεται γιά τήν τιμή αὐτή τῆς μεταβλητῆς x. Στήν περίπτωση αὐτή οἱ συναρτήσεις πού ὁρίσαμε πιό πάνω, λέγονται: **πραγματικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.** Ἔτσι οἱ συναρτήσεις, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τίς $\psi = ημ\, x$, $\psi = συν\, x$, $\psi = εφ\, x$, $\psi = σφ\, x$ κτλ., στίς ὁποῖες ἡ μεταβλητή x νοεῖται ὅτι διατρέχει τό σύνολο **R** καί ἡ ψ ὁρισμένα σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι τριγωνομετρικές συναρτήσεις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Κάθε τριγωνομετρική συνάρτηση ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ της τό σύνολο **R**, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐκτός ἀπό τίς τιμές, οἱ ὁποῖες φαίνονται στόν παρακάτω πίνακα *

συνάρτηση	Πεδίο ὁρισμοῦ	Πεδίο τιμῶν
$\psi = ημx$	R	$\{\psi \in R \mid -1 \leq \psi \leq 1\}$
$\psi = συνx$	R	$\{\psi \in R \mid -1 \leq \psi \leq 1\}$
$\psi = εφx$	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + κ\pi\right\}$, $κ \in Z$	R
$\psi = σφx$	$R - \{κ\pi\}$, $κ \in Z$	R
$\psi = τεμx$	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + κ\pi\right\}$, $κ \in Z$	$\{\psi \in R \mid \psi \leq -1\}, \{\psi \in R \mid \psi \geq 1\}$
$\psi = στεμx$	$R - \{κ\pi\}$, $κ \in Z$	$\{\psi \in R \mid \psi \leq -1\}, \{\psi \in R \mid \psi \geq 1\}$

Β) Οἱ τιμές τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δίνονται σέ πίνακες. Οἱ τιμές αὐτές βρίσκονται μέ μεθόδους, τίς ὁποῖες χρησιμοποιοῦν τά ἀνώτερα μαθηματικά. (Βλέπε πίνακες στίς τελευταῖες σελίδες τοῦ βιβλίου).

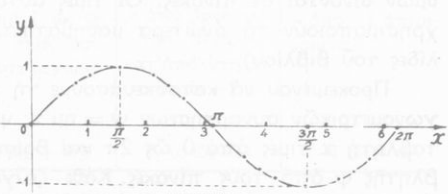
Προκειμένου νά κατασκευάσουμε τή γραφική παράσταση, π.χ., τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων $\psi = ημ\, x$, $\psi = συν\, x$, $\psi = εφ\, x$, δίνουμε στή μεταβλητή x τιμές ἀπό 0 ὥς 2π καί βρίσκουμε τίς ἀντίστοιχες τιμές τῆς μεταβλητῆς ψ ἀπό τούς πίνακες. Κάθε ζεῦγος ἀντίστοιχων τιμῶν ἀπεικονίζεται μέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, στό ὁποῖο ἔχουμε πάρει ἕνα σύστημα ἀξόνων ὀρθο-

(*) Δέν εἶναι ἀπαραίτητο οἱ μαθητές νά ἀπομνημονεύσουν τόν πίνακα. Μποροῦν νά τόν συμβουλεύονται κάθε φορά πού τόν χρειάζονται.

κανονικό. Ἔτσι, π.χ., βρίσκουμε γιά τίς πιό πάνω συναρτήσεις τίς ἀντίστοιχες τιμές, οἱ ὁποῖες φαίνονται στόν παρακάτω πίνακα:

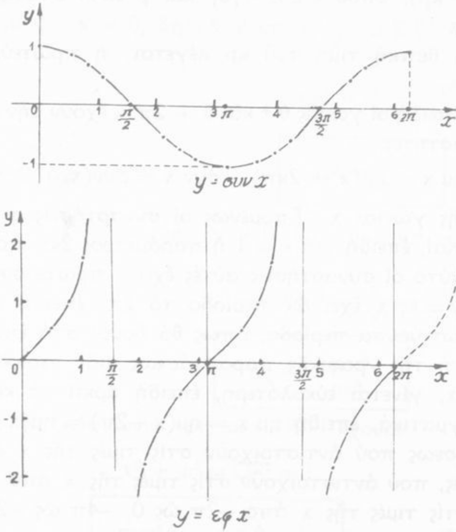
x	ψ = ημ x	ψ = συν x	ψ = εφ x
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6} \simeq 0{,}52$	0,50	0,87	0,58
$\frac{\pi}{4} \simeq 0{,}79$	0,71	0,71	1
$\frac{\pi}{3} \simeq 1{,}05$	0,87	0,50	1,73
$\frac{\pi}{2} \simeq 1{,}57$	1	0	δέν ὁρίζεται (*)
$\frac{2\pi}{3} \simeq 2{,}09$	0,87	–0,50	–1,73
$\frac{3\pi}{4} \simeq 2{,}36$	0,71	–0,71	–1
$\frac{5\pi}{6} \simeq 2{,}62$	0,50	–0,87	–0,58
$\pi \simeq 3{,}14$	0	–1	0
$\frac{7\pi}{6} \simeq 3{,}66$	–0,50	–0,87	0,58
$\frac{5\pi}{4} \simeq 3{,}92$	–0,71	–0,71	1
$\frac{4\pi}{3} \simeq 4{,}19$	–0,87	–0,50	1,73
$\frac{3\pi}{2} \simeq 4{,}71$	–1	0	δέν ὁρίζεται
$\frac{5\pi}{3} \simeq 5{,}23$	–0,87	0,50	–1,73
$\frac{7\pi}{4} \simeq 5{,}49$	–0,71	0,71	–1
$\frac{11\pi}{6} \simeq 5{,}76$	–0,5	0,87	–0,58
$2\pi \simeq 6{,}28$	0	1	0

Βρίσκουμε τά ἀντίστοιχα σημεῖα στό ἐπίπεδο xOψ καί τά ἑνώνουμε μέ μιά ὁμαλή καμπύλη. Προκύπτουν τότε οἱ παρακάτω γραφικές παραστάσεις, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ πρώτη λέγεται **ἡμιτονοειδής καμπύλη** καί ἡ δεύτερη **συνημιτονοειδής καμπύλη.**



Σχ. 145

(*) δηλ. δέν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.



Σχ. 145

146. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ.

Ἔστω f μιά συνάρτηση μιᾶς μεταβλητῆς x μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο Σ, πραγματικῶν ἀριθμῶν, καί ἔστω ὅτι ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός p, διάφορος ἀπό τό 0, τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$f(x + p) = f(x) \qquad (\alpha)$$

γιά κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς, γιά τήν ὁποία ἡ f ὁρίζεται. Λέμε στήν περίπτωση αὐτή ὅτι ὁ p εἶναι **μιά περίοδος** τῆς συναρτήσεως f καί ἡ f λέγεται περιοδική συνάρτηση. Σύμφωνα μέ αὐτά θά εἶναι:

$$f[(x + p) + p] = f(x + p) = f(x)$$

δηλ. $f(x + 2p) = f(x)$, πού σημαίνει ὅτι 2p εἶναι ἐπίσης μιά περίοδος τῆς f. Ἐπίσης 3p, 4p, . . ., κp, ὅπου $\kappa \in \mathbf{N}$, εἶναι περίοδος τῆς f. Ἄν ἡ f εἶναι περιοδική, ὁ μικρότερος θετικός ἀριθμός p, ὁ ὁποῖος εἶναι περίοδος τῆς f, λέγεται: **πρωτεύουσα περίοδος** τῆς f.

Ἄν θέσουμε στήν πιό πάνω ἰσότητα (α) ὅπου x τό x − p, θά ἔχουμε $f[(x - p) + p] = f(x - p)$. Δηλαδή:

$$\forall\, x \in \Sigma\colon\ f(x) = f(x - p)$$

ὥστε καί ὁ −p εἶναι μιά περίοδος τῆς f καί ἐπομένως καί ὁ −2p, −3p, . . . Γενικά λοιπόν μιά συνάρτηση f θά λέγεται **περιοδική,** ἄν γιά κάθε τιμή τῆς μεταβλητῆς ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ της, ἰσχύει:

$f(x) = f(x + \kappa p)$, ὅπου $\kappa \in Z - \{0\}$ καί p εἶναι σταθερός ὁρισμένος πραγματικός ἀριθμός.

Ἡ ἐλάχιστη **θετική** τιμή τοῦ κp λέγεται: ἡ πρωτεύουσα **περίοδος** τῆς συναρτήσεως f.

Ἔτσι, π.χ., ἐπειδή οἱ γωνίες θ * καί $\theta + 2\pi \cdot \kappa$ ἔχουν τήν ἴδια τελική πλευρά, θά ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$$\eta\mu\, x = \eta\mu(x + 2\kappa\pi), \quad \sigma\upsilon\nu\, x = \sigma\upsilon\nu(x + 2\kappa\pi)$$

γιά κάθε τιμή τῆς γωνίας x. Ἑπομένως οἱ συναρτήσεις $\psi = \eta\mu\, x$, $\psi = \sigma\upsilon\nu\, x$ εἶναι περιοδικές. Καί, ἐπειδή γιά $\kappa = 1$ ἡ παράμετρος $2\kappa\pi$ παίρνει τήν ἐλάχιστη θετική τιμή, γι' αὐτό οἱ συναρτήσεις αὐτές ἔχουν πρωτεύουσα περίοδο τό 2π. Ἡ συνάρτηση $\psi = \varepsilon\varphi\, x$ ἔχει ὡς περίοδο τό 2π, ἐπειδή $\varepsilon\varphi(x + 2\pi) = \varepsilon\varphi\, x$, ἀλλά ὄχι ὡς πρωτεύουσα περίοδο, ὅπως θά δοῦμε στά ἑπόμενα.

Ἡ κατασκευή τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς περιοδικῆς συναρτήσεως, ὅπως ἡ $\psi = \eta\mu\, x$, γίνεται εὐκολότερη, ἐπειδή ἀρκεῖ νά κατασκευάσουμε ἕνα τμῆμα της. Πράγματικά, ἐπειδή $\eta\mu\, x = \eta\mu(x+2\pi) = \eta\mu(x+4\pi)$ κ.τ.λ., οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές τῆς x ἀπό 0 ὥς 2π συμπίπτουν μέ ἐκεῖνες, πού ἀντιστοιχοῦν στίς τιμές τῆς x ἀπό 2π ὥς 4π, ἀπό 4π ὥς 6π κ.τ.λ. ἤ στίς τιμές τῆς x ἀπό -2π ὥς 0, -4π ὥς -2π κ.τ.λ. Ἄν κατασκευάσουμε λοιπόν ἕνα τμῆμα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $\psi = \eta\mu\, x$, π.χ. τό τμῆμα, πού ἀντιστοιχεῖ στίς τιμές τῆς x ἀπό 0 ὥς 2π, ἀρκεῖ ἔπειτα μιά παράλληλη μετάθεση πρός τόν ἄξονα Ox κατά διάνυσμα ἀλγεβρικῆς τιμῆς 2π ἤ -2π, γιά νά ἔχουμε τό ἀμέσως ἑπόμενο ἤ τό ἀμέσως προηγούμενο τμῆμα τῆς παραστατικῆς καμπύλης, πού ἀντιστοιχεῖ στίς τιμές τῆς x ἀπό 2π ὥς 4π ἤ ἀπό -2π ὥς 0.

Ἡ συνάρτηση $\psi = \varepsilon\varphi\, x$ ἔχει πρωτεύουσα περίοδο τό π, ὅπως θά δοῦμε στά ἑπόμενα.

147. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ ΤΟΞΟΥ).

Μάθαμε στά προηγούμενα (§ 140, παρατήρηση 1η) ὅτι μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς ἴδιας γωνίας θ ἰσχύουν οἱ ταυτότητες:

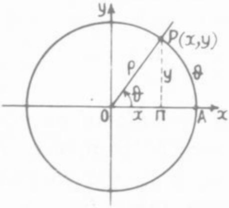
$$\tau\varepsilon\theta\mu = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} \qquad (\alpha)$$

Ἔστω τώρα μιά γωνία θ, σέ κανονική θέση, καί $P(x, \psi)$ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ τελική πλευρά της τέμνει τόν τριγωνομετρικό κύκλο κέντρου O (Σχ. 147). Τότε θά εἶναι (§ 143):

$$\sigma\upsilon\nu\, \theta = \overline{O\Pi} = x \quad \text{καί} \quad \eta\mu\, \theta = \overline{\Pi P} = y$$

(*) Ἐννοοῦμε γωνία μέ ἀλγεβρική τιμή θ, τῆς ὁποίας ἡ ἀπόλυτη τιμή ἔχει βρεθεῖ σέ ἀκτίνια.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $x \neq 0$, δηλ. $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$ θά ἔχουμε:



Σχ. 147

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\psi}{x} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \text{δηλ.}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} \quad (\beta)$$

Ἄν $\psi \neq 0$, δηλ. $\theta \neq \kappa\pi$, $\kappa \in Z$, ἔχουμε:

$$\sigma\varphi\,\theta = \frac{x}{\psi} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\mu\theta}, \quad \text{δηλ.}$$

$$\boxed{\sigma\varphi\,\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}} \quad (\gamma)$$

Ἐξάλλου, ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΠΡ, ἔχουμε:

$$x^2 + \psi^2 = OP^2 = 1,$$

δηλ.

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1} \quad (\delta)$$

Διαιρώντας τά μέλη τῆς (δ) μέ $\sigma\upsilon\nu^2\theta$ (ὑποθέτουμε $\sigma\upsilon\nu\,\theta \neq 0$, δηλ. $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$) βρίσκουμε:

$$\boxed{1 + \varepsilon\varphi^2\theta = \tau\varepsilon\mu^2\theta} \quad (\varepsilon) \;,$$

Διαιρώντας τά μέλη τῆς (δ) μέ $\eta\mu^2\theta$ ($\eta\mu\,\theta \neq 0$, ἄρα $\theta \neq \kappa\pi$, $\kappa \in Z$) βρίσκουμε:

$$\boxed{1 + \sigma\varphi^2\theta = \sigma\tau\varepsilon\mu^2\theta} \quad (\zeta)$$

Οἱ ταυτότητες (α), (β), (γ), (δ), (ε), (ζ) εἶναι οἱ θεμελιώδεις ταυτότητες μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς ἴδιας γωνίας (τοῦ ἴδιου τόξου).

148. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) Νά ἐκφρασθεῖ ἡ καθεμιά ἀπό τίς τριγωνομετρικές συναρτήσεις τῆς γωνίας θ μέ τό ημ θ.

Λύση: Ἀπό τόν τύπο $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ ἔχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu\,\theta| = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}$$

$$\text{ἄρα} \quad \sigma\upsilon\nu\,\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu\,\theta = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}$$

Συμβολικά αὐτούς τούς δύο τύπους τούς γράφουμε:

$$\text{συν}\,\theta = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta},$$

$$\text{εφ}\,\theta = \frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta} = \frac{\text{ημ}\,\theta}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}},\quad \text{σφ}\,\theta = \frac{1}{\text{εφ}\,\theta} = \frac{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}}{\text{ημ}\,\theta},$$

$$\text{τεμ}\,\theta = \frac{1}{\text{συν}\,\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}},\quad \text{στεμ}\,\theta = \frac{1}{\text{ημ}\,\theta},$$

Τό πρόσημο τῆς τετραγ. ρίζας καθορίζεται, ἄν γνωρίζουμε σέ ποιά γωνία τῶν ἀξόνων βρίσκεται ἡ τελική πλευρά τῆς γωνίας θ. Ἔτσι, π.χ., ἄν βρίσκεται στή δεύτερη γωνία τῶν ἀξόνων, θά πάρουμε, π.χ., γιά νά βροῦμε τό συν θ, τόν τύπο $\text{συν}\,\theta = -\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}$, ἐπειδή μιά τέτοια γωνία ἔχει ὡς συνημίτονο ἀρνητικό ἀριθμό.

2) Νά ἐκφρασθοῦν οἱ τριγωνομετρικές συναρτήσεις τῆς γωνίας θ μέ τήν εφ θ.

Λύση : Ὁ τύπος (ζ) τῆς προηγούμενης § 147 δίνει:

$$\text{τεμ}^2\theta = 1 + \text{εφ}^2\theta \Leftrightarrow \frac{1}{\text{συν}^2\theta} = 1 + \text{εφ}^2\theta \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}^2\theta = \frac{1}{1+\text{εφ}^2\theta} \Leftrightarrow \boxed{\text{συν}^2\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}} \qquad (\alpha)$$

Ἀπό τόν τύπο $\frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta} = \text{εφ}\,\theta$ βρίσκουμε:

$$\frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta} = \text{εφ}\,\theta \Leftrightarrow \text{ημ}\,\theta = \text{συν}\,\theta\,\text{εφ}\,\theta \Leftrightarrow$$

$$\text{ημ}\,\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}\,\text{εφ}\,\theta \Leftrightarrow \boxed{\text{ημ}\,\theta = \frac{\text{εφ}\,\theta}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}} \qquad (\beta)$$

Τέλος, εἶναι $\text{σφ}\,\theta = \frac{1}{\text{εφ}\,\theta}$ καί $\text{στεμ}\theta = \frac{1}{\text{ημ}\,\theta} = \frac{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\theta}}{\text{εφ}\,\theta}$

Καί ἐδῶ τό πρόσημο τῆς τετραγ. ρίζας καθορίζεται, ὅταν γνωρίζουμε σέ ποιά γωνία τῶν ἀξόνων βρίσκεται ἡ τελική πλευρά τῆς γωνίας θ.

3) Χρησιμοποιώντας τίς θεμελιώδεις ταυτότητες μποροῦμε νά βροῦμε τίς τιμές τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, ὅταν δοθεῖ ἡ τιμή μιᾶς ἀπ' αὐτές:

Ἔστω, π.χ., ὅτι εἶναι $\text{ημ}\,\theta = \frac{3}{5}$ καί $-360° < \theta < -270°$.

Ἀπό τόν τύπο $\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1$ βρίσκουμε $\text{συν}^2\theta = 1 - \text{ημ}^2\theta$, ἄρα

$\text{συν}\,\theta = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. Ἐπειδή ἡ τελική πλευρά τῆς γωνίας θ βρίσκεται στήν I γωνία τῶν ἀξόνων, θά πάρουμε τό πρόσημο +, γιατί μιά τέτοια γωνία ἔχει συνημίτονο θετικό. Ἐπίσης βρίσκουμε ὅτι: $\varepsilon\varphi\,\theta=\frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\,\theta=\frac{4}{3}$, $\tau\varepsilon\mu\,\theta=\frac{5}{4}$, $\sigma\tau\varepsilon\mu\,\theta=\frac{5}{3}$

Ὡς δεύτερο παράδειγμα ἔστω $\varepsilon\varphi\,\theta=-\frac{5}{12}$. Ἐπειδή ἡ εφ θ εἶναι ἀρνητική, ἡ θ θά εἶναι γωνία μέ τελική πλευρά ἤ στήν II ἤ IV γωνία τῶν ἀξόνων.

Βρίσκουμε :

$$\sigma\varphi\theta=\frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}=-\frac{12}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{25}{144}}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{169}{144}}}=\pm\frac{12}{13}$$

$$\tau\varepsilon\mu\theta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\pm\frac{13}{12}$$

$$\eta\mu\theta=\frac{\varepsilon\varphi\theta}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}}=\frac{-\frac{5}{12}}{\pm\frac{13}{12}}=\pm\frac{5}{13}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta=\frac{1}{\eta\mu\theta}=\pm\frac{13}{5}$$

Ἄν ἡ θ ἔχει τελική πλευρά στή II γωνία τῶν ἀξόνων.	Ἄν ἡ θ ἔχει τελική πλευρά στήν IV γωνία τῶν ἀξόνων
$\varepsilon\varphi\theta=-\frac{5}{12}$	$\varepsilon\varphi\,\theta=-\frac{5}{12}$
$\sigma\varphi\theta=-\frac{12}{5}$	$\sigma\varphi\,\theta=-\frac{12}{5}$
$\tau\varepsilon\mu\,\theta=-\frac{13}{12}$	$\tau\varepsilon\mu\,\theta=\frac{13}{12}$
$\sigma\upsilon\nu\,\theta=-\frac{12}{13}$	$\sigma\upsilon\nu\,\theta=\frac{12}{13}$
$\sigma\tau\varepsilon\mu\,\theta=\frac{13}{5}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu\,\theta=-\frac{13}{5}$
$\eta\mu\,\theta=\frac{5}{13}$	$\eta\mu\theta=-\frac{5}{13}$

4) Μέ βάση τίς θεμελιώδεις τριγωνομετρικές ταυτότητες μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ἄλλες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Παράδειγμα 1ο : Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\eta\mu^3\,\theta+\eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta=\eta\mu\,\theta$$

Λύση : $\eta\mu^3\,\theta+\eta\mu\,\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\,\theta=\eta\mu\,\theta\,(\eta\mu^2\,\theta+\sigma\upsilon\nu^2\,\theta)=\eta\mu\,\theta\cdot 1=\eta\mu\,\theta$

Παράδειγμα 2ο : Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\,x+\sigma\varphi\,x=\frac{\sigma\tau\varepsilon\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

Λύση : $\text{εφ}\, x + \text{σφ}\, x = \dfrac{\text{ημ}\, x}{\text{συν}\, x} + \dfrac{\text{συν}\, x}{\text{ημ}\, x} = \dfrac{\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x}{\text{συν}x\, \text{ημ}x} = \dfrac{1}{\text{συν}x\, \text{ημ}x} =$

$$= \frac{1}{\text{συν}\, x} \cdot \frac{1}{\text{ημ}\, x} = \frac{1}{\text{συν}\, x}\, \text{στεμ}\, x = \frac{\text{στεμ}\, x}{\text{συν}\, x}$$

Παράδειγμα 3ο : Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$\frac{1 + \text{συν}\, x}{\text{ημ}\, x} = \frac{\text{ημ}\, x}{1 - \text{συν}\, x}$$

Λύση : Πρῶτα πρέπει: $\text{ημ}\, x \neq 0$ καί $1 - \text{συν}\, x \neq 0$. Τότε ἔχουμε:

$$\frac{1 + \text{συν}\, x}{\text{ημ}\, x} = \frac{(1 + \text{συν}x)(1 - \text{συν}\, x)}{\text{ημ}\, x\, (1 - \text{συν}\, x)} = \frac{1 - \text{συν}^2 x}{\text{ημ}x\, (1 - \text{συν}x)} = \frac{\text{ημ}^2 x}{\text{ημ}\, x\, (1 - \text{συν}x)} = \frac{\text{ημ}\, x}{1 - \text{συν}\, x}$$

Παράδειγμα 4ο : Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$2\, \text{στεμ}\, x = \frac{\text{ημ}\, x}{1 + \text{συν}\, x} + \frac{1 + \text{συν}\, x}{\text{ημ}\, x} \quad (\text{ημ}\, x \neq 0,\ \text{συν}\, x \neq -1)$$

Λύση : $\dfrac{\text{ημ}\, x}{1 + \text{συν}\, x} + \dfrac{1 + \text{συν}\, x}{\text{ημ}\, x} = \dfrac{\text{ημ}^2 x + (1 + \text{συν}x)^2}{\text{ημ}\, x\, (1 + \text{συν}\, x)} =$

$$= \frac{\text{ημ}^2 x + 1 + 2\text{συν}x + \text{συν}^2 x}{\text{ημ}x(1 + \text{συν}x)} = \frac{(\text{ημ}^2 x + \text{συν}^2 x) + 1 + 2\text{συν}x}{\text{ημ}x(1 + \text{συν}x)} =$$

$$= \frac{1 + 1 + 2\text{συν}x}{\text{ημ}x(1 + \text{συν}x)} = \frac{2 + 2\text{συν}x}{\text{ημ}x(1 + \text{συν}x)} = \frac{2(1 + \text{συν}x)}{\text{ημ}x(1 + \text{συν}x)} =$$

$$= \frac{2}{\text{ημ}x} = 2 \cdot \frac{1}{\text{ημ}x} = 2\text{στεμ}x.$$

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα γίνεται φανερό ὅτι, γιά νά ἀποδείξουμε πώς μιά ἰσότητα, πού περιέχει τριγωνομετρικές συναρτήσεις, εἶναι ταυτότητα, πρέπει καί ἀρκεῖ νά πάρουμε τό ἕνα μέλος της (τό πρῶτο ἤ τό δεύτερο) καί μέ κατάλληλους μετασχηματισμούς νά καταλήξουμε στό ἄλλο μέλος. Σέ σπάνιες περιπτώσεις μετασχηματίζουμε καί τά δύο μέλη, γιά νά μπορέσουμε νά δοῦμε ἄν πρόκειται γιά ταυτότητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

478) Ἄν $\text{ημ}\theta = \dfrac{2}{3}$ καί $0° < \theta < 90°$, νά βρεῖτε τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς θ.

479) Ἄν $\text{συν}\theta = -\dfrac{5}{6}$ καί $90° < \theta < 180°$, νά βρεῖτε τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας θ.

480) Ἄν $\text{εφ}\theta = -\dfrac{5}{4}$ καί $90° < \theta < 180°$, νά βρεῖτε τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας θ.

481) Ἄν $\text{εφ}\theta = -\dfrac{4}{3}$ καί $270° < \theta < 360°$, νά βρεῖτε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ κλάσματος $\dfrac{\text{ημ}\theta + \text{συν}\theta - \text{εφ}\theta}{\text{τεμ}\theta + \text{στεμ}\theta - \text{σφ}\theta}$

482) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\text{ημ}\theta\, \text{σφ}\theta\, \text{τεμ}\theta = 1$ β) $\text{τεμ}\theta - \text{τεμ}\theta\, \text{ημ}^2\theta = \text{συν}\, \theta$

483) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\eta\mu^2\theta\,(1+\sigma\varphi^2\theta)=1$ β) $\eta\mu^2\theta\,\tau\varepsilon\mu^2\theta-\tau\varepsilon\mu^2\theta=-1$

484) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2+(\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta)^2=2$

485) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi^2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\varphi^2\theta\,\eta\mu^2\theta=1$$

486) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi\theta+\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}=\tau\varepsilon\mu\theta$$

487) Ἐπίσης ὅτι:

α) $\dfrac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}$ β) $\eta\mu^4\theta-\sigma\upsilon\nu^4\theta=2\eta\mu^2\theta-1.$

488) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\varepsilon\varphi x-\eta\mu x}{\eta\mu^3 x}=\frac{\tau\varepsilon\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

489) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\varphi x-\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x}{\sigma\tau\varepsilon\mu x-\tau\varepsilon\mu x}=1+\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$$

490) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x\,\sigma\tau\varepsilon\mu x-\tau\varepsilon\mu x\,\sigma\varphi x}=\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x$$

491) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}=1-2\eta\mu^2 x$ β) $1-\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu x}=\eta\mu x$

492) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu x-\sigma\varphi x}-\frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu x+\sigma\varphi x}=\frac{2}{\varepsilon\varphi x}$$

493) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha(1+\sigma\varphi^2\alpha)+\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)=2$$

494) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$(\tau\varepsilon\mu\alpha+\varepsilon\varphi\alpha-1)\,(\tau\varepsilon\mu\alpha-\varepsilon\varphi\alpha+1)=2\varepsilon\varphi\alpha$$

495) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$(1-\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2=2(1-\eta\mu\alpha)\,(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

496) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$$

497) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta=\eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta\,.$$

498) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\beta)^2+(\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta)^2=1\,.$$

499) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση:

$$ημ^6α + συν^6α - \frac{3}{2}\ (ημ^4α + συν^4α)$$

ἔχει μιά σταθερή τιμή ἀνεξάρτητη ἀπό τό α.

500) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση

$$ημ^8α + συν^8α - 2\,(1 - ημ^2α\,συν^2α)^2$$

ἔχει μιά σταθερή τιμή ἀνεξάρτητη ἀπό τό α.

501) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση

$$ημ^4α(3 - 2ημ^2α) + συν^4α(3 - 2\,συν^2α)$$

ἔχει τιμή σταθερή ἀνεξάρτητη ἀπό τό α.

502) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$2συν^8x - 2ημ^8x + 3ημ^6x - 5συν^6x + 3συν^4x = ημ^2x$$

503) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ παράσταση

$$ημ^6x + 3ημ^2x\,συν^2x + συν^6x$$

ἔχει τιμή σταθερή ἀνεξάρτητη ἀπό τό x.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΟΞΕΙΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

149. ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΚΟΙΝΗ ΤΕΛΙΚΗ ΠΛΕΥΡΑ

Μάθαμε στήν § 140 ὅτι γωνίες μέ κοινή τελική πλευρά ἔχουν τούς ἴδιους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς καί στήν § 137 ὅτι, ὅταν δυό γωνίες (ἐννοεῖται πάντοτε: σέ κανονική θέση) διαφέρουν κατά 2κπ (360°κ), τότε ἔχουν κοινή τελική πλευρά.

Ἑπομένως ἔχουμε τίς ἑξῆς ταυτότητες, ὅπου $κ \in Z$.

$ημ\,(θ° + 360°κ) = ημ\,θ°$ $\quad$ $σφ\,(θ° + 360°κ) = σφ\,θ°$

$συν\,(θ° + 360°κ) = συν\,θ°$ $\quad$ $τεμ\,(θ° + 360°κ) = τεμ\,θ°$

$εφ\,(θ° + 360°κ) = εφ\,θ°$ $\quad$ $στεμ\,(θ° + 360°κ) = στεμ\,θ°$

Ἔτσι, π.χ., εἶναι:

$ημ\,410° = ημ\,(50° + 360°) = ημ\,50°$

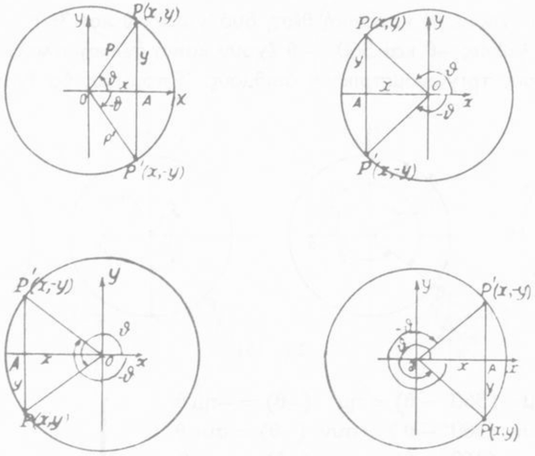
$συν\,870° = συν\,(150° + 2 \cdot 360°) = συν\,150°$

$εφ\,(-1000°) = εφ\,(80° - 3 \cdot 360°) = εφ\,80°$

150. ΓΩΝΙΕΣ ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ (ΤΟΞΑ ΑΝΤΙΘΕΤΑ)

Ἔστω ὅτι ἔχουμε σέ κανονική θέση τίς ἀντίθετες γωνίες θ καί −θ καί P(x, ψ), P′(x′, ψ′) εἶναι ἀντιστοίχως τά σημεῖα στά ὁποῖα ὁ τριγωνομετρικός κύκλος τέμνει τίς τελικές πλευρές τους. Ἐπειδή τό τρίγωνο OPP′ εἶναι ἰσοσκελές καί ἡ Ox εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του θά εἶναι συγχρόνως ὕψος καί διάμεσός του.

Ἄρα θά εἶναι $x' = x$ καί $\psi' = -\psi$ (Σχ. 150).



Σχ. 150

Ἑπομένως θά ἔχουμε:

$$\eta\mu(-\theta) = \psi' = -\psi = -\eta\mu\,\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu(-\theta) = x' = x = \sigma\upsilon\nu\,\theta$$

$$\varepsilon\varphi(-\theta) = \frac{\eta\mu\,(-\theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)} = \frac{-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = -\varepsilon\varphi\,\theta$$

$$\sigma\varphi(-\theta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(-\theta)}{\eta\mu(-\theta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{-\eta\mu\theta} = -\sigma\varphi\,\theta$$

$$\tau\varepsilon\mu(-\theta) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \tau\varepsilon\mu\,\theta$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu(-\theta) = \frac{1}{\eta\mu(-\theta)} = \frac{1}{-\eta\mu\theta} = -\sigma\tau\varepsilon\mu\theta$$

Ὥστε : ἄν δύο γωνίες εἶναι ἀντίθετες, τότε ἔχουν τό ἴδιο συνημίτονο καί τήν ἴδια τέμνουσα, ἀλλά ἀντίθετους ὅλους τούς ἄλλους ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς τους ἀριθμούς.

Ἔτσι, π.χ., $\eta\mu(-20°) = -\eta\mu\,20°$

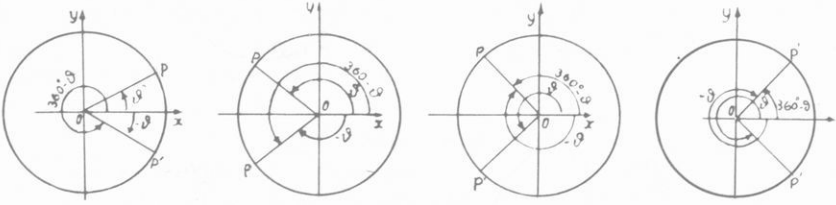
$\sigma\upsilon\nu(-20°) = \sigma\upsilon\nu\,20°$

$\varepsilon\varphi(-20°) = -\varepsilon\varphi\,20°$ κ.τ.λ., κ.τ.λ.

$\sigma\upsilon\nu(-30°) = \sigma\upsilon\nu\,30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

151. ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΙΑ ΓΩΝΙΑ ΠΛΗΡΗ (ΤΟΞΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΙΑ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ).

Ἔστω ὅτι ἔχουμε σέ κανονική θέση δυό γωνίες θ καί 360° − θ. Γνωρίζουμε (§ 137) ὅτι οἱ γωνίες −θ καί 360° − θ ἔχουν κοινή τελική πλευρά καί ἑπομένως ἔχουν τούς ἴδιους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς. Ἑπομένως θά ἔχουμε:



Σχ. 151

$$\left.\begin{aligned} \text{ημ}\ (360° - \theta) &= \text{ημ}\ (-\theta) = -\text{ημ}\,\theta \\ \text{συν}\ (360° - \theta) &= \text{συν}\ (-\theta) = \text{συν}\,\theta \\ \text{εφ}\ (360° - \theta) &= \text{εφ}\ (-\theta) = -\text{εφ}\,\theta \\ \text{σφ}\ (360° - \theta) &= \text{σφ}\ (-\theta) = -\text{σφ}\,\theta \\ \text{τεμ}\ (360° - \theta) &= \text{τεμ}\ (-\theta) = \text{τεμ}\,\theta \\ \text{στεμ}\ (360° - \theta) &= \text{στεμ}\ (-\theta) = -\text{στεμ}\,\theta \end{aligned}\right\} \quad (151, \alpha)$$

Ὥστε: ἄν δυό γωνίες ἔχουν ἄθροισμα μιά πλήρη γωνία (360°), τότε ἔχουν τό ἴδιο συνημίτονο καί τήν ἴδια τέμνουσα, ἀλλά ἀντίθετους ὅλους τούς ἄλλους ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τους.

Ἔτσι, π.χ., εἶναι:

$$\text{ημ}\,330° = -\text{ημ}\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

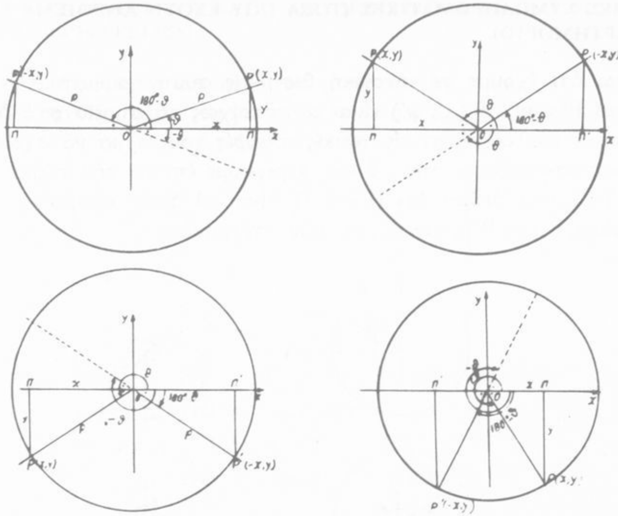
$$\text{εφ}\,300° = -\text{εφ}\,60° = -\sqrt{3}$$

$$\text{συν}\,315° = \text{συν}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

152. ΓΩΝΙΕΣ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ (ΤΟΞΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΙΑ ΗΜΙΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ.

Ἔστω ὅτι ἔχουμε σέ κανονική θέση τίς παραπληρωματικές γωνίες θ καί 180°− θ, καί P(x, ψ), P′(x′, ψ′) εἶναι ἀντιστοίχως τά σημεῖα στά ὁποῖα ὁ τριγωνομετρικός κύκλος τέμνει τίς τελικές πλευρές τους. (Γιά νά σχεδιάσουμε τήν 180°− θ κατασκευάζουμε τήν −θ καί προεκτείνουμε ἔπειτα τήν τελική της πλευρά κατ' ἀντίθετη φορά, δηλ. στρέφουμε τήν τελική πλευρά της κατά 180°). Ἔστω ἀκόμη ὅτι Π καί Π′ εἶναι οἱ ὀρθές προβολές ἀντιστοίχως τῶν σημείων P καί P′ στόν ἄξονα Ox. Τότε, ἀπό τά ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΡ καί ΟΠ′Ρ′ ἔχουμε:

$$x' = \overline{O\Pi'} = -\overline{O\Pi} = -x \quad \text{καί} \quad \psi' = \overline{\Pi'P'} = \overline{\Pi P} = \psi \qquad (\Sigma\chi.\ 152)$$



Σχ. 152

Ἄρα θά ἔχουμε:

$$ημ(180^0 - θ) = ψ' = ψ = ημ\,θ$$

$$συν(180^0 - θ) = x' = -x = -συν\,θ$$

$$εφ\,(180^0 - θ) = \frac{ημ(180^0 - θ)}{συν(180^0 - θ)} = \frac{ημθ}{-συνθ} = -\,εφ\,θ$$

$$σφ\,(180^0 - θ) = \frac{συν(180^0 - θ)}{ημ(180^0 - θ]} = \frac{-συνθ}{ημθ} = -σφ\,θ$$

$$τεμ\,(180^0 - θ) = \frac{1}{συν(180^0 - θ)} = -\frac{1}{-συνθ} = -τεμ\,θ$$

$$στεμ\,(180^0 - θ) = \frac{1}{ημ(180^0 - θ)} = \frac{1}{ημθ} = στεμ\,θ$$

Ὥστε: **Ἄν δυό γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, τότε ἔχουν τό ἴδιο ἡμίτονο καί τήν ἴδια συντέμνουσα, ἀλλά ἀντίθετους τούς ἄλλους ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τους.**

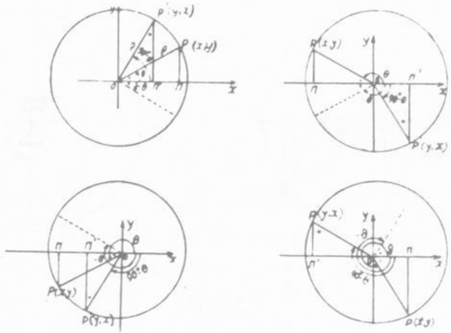
Ἔτσι, π.χ., ἐπειδή $150° + 30° = 180°$ θά εἶναι:

$$ημ\,150° = ημ\,30° = \frac{1}{2}$$

$$συν\,150° = -συν\,30° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad κ.τ.λ.$$

153. ΓΩΝΙΕΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ (ΤΟΞΑ ΠΟΥ ΕΧΟΥΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΝΑ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ).

Ἔστω ὅτι ἔχουμε σέ κανονική θέση τίς συμπληρωματικές γωνίες θ καί $90° - \theta$ καί $P(x, \psi)$, $P'(x', \psi')$ εἶναι ἀντιστοίχως τά σημεῖα στά ὁποῖα ὁ τριγωνομετρικός κύκλος τέμνει τίς τελικές πλευρές τους. (Γιά νά σχεδιάσουμε τήν $90° - \theta$, κατασκευάζουμε τήν $-\theta$ καί στρέφουμε ἔπειτα τήν τελική πλευρά της κατά 90°). Ἔστω ἀκόμη ὅτι Π καί Π' εἶναι οἱ ὀρθές προβολές ἀντιστοίχως τῶν σημείων P καί P' στόν ἄξονα τῶν τετμημένων.



Σχ. 153

Τότε ἀπό τά ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΡ καί ΟΠ'Ρ' ἔχουμε:

$$x' = \overline{O\Pi'} = \overline{\Pi P} = \psi \quad \text{καί} \quad \psi' = \overline{\Pi' P'} = \overline{OP} = x \qquad (\Sigma\chi.\ 153)$$

Ἄρα :

$$\eta\mu\,(90° - \theta) = \psi' = x = \sigma\upsilon\nu\,\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\,(90^0 - \theta) = x' = \psi = \eta\mu\,\theta$$

$$\varepsilon\varphi(90° - \theta) = \frac{\eta\mu(90° - \theta)}{\sigma\upsilon\nu(90^0 - \theta)} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta} = \sigma\varphi\,\theta$$

$$\sigma\varphi(90° - \theta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(90° - \theta)}{\eta\mu(90° - \theta)} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\,\theta$$

$$\tau\varepsilon\mu\,(90° - \theta) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu(90° - \theta)} = \frac{1}{\eta\mu\theta} = \sigma\tau\varepsilon\mu\,\theta$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu(90° - \theta) = \frac{1}{\eta\mu(90° - \theta)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \tau\varepsilon\mu\,\theta$$

Ὥστε : ἄν δυό γωνίες εἶναι συμπληρωματικές, τότε τό ἡμίτονο τῆς καθεμιᾶς ἀπ' αὐτές εἶναι ἴσο μέ τό συνημίτονο τῆς ἄλλης, ἡ ἐφαπτομένη μέ τή συνεφαπτομένη καί ἡ τέμνουσα μέ τή συντέμνουσα.

Ἔτσι, π.χ., ἐπειδή $20° + 70° = 90°$, θά ἔχουμε:

$\eta\mu\ 70° = \sigma\upsilon\nu\ 20°$ $\quad$ $\sigma\upsilon\nu\ 70° = \eta\mu\ 20°$ $\quad$ $\varepsilon\varphi\ 70° = \sigma\varphi\ 20°$ $\quad$ κ.τ.λ.

154. ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΜΙΑ ΟΡΘΗ (ΤΟΞΑ ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΤΕΤΑΡΤΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ)

Ἔστω ὅτι ἔχουμε σέ κανονική θέση τίς γωνίες θ καί $90° + θ$. Θέλουμε νά δοῦμε πῶς σχετίζονται οἱ τριγωνομετρικοί τους ἀριθμοί. Ἐπειδή $(90+θ°)+$ $+(90°-θ)=180°$, γι' αὐτό θά ἔχουμε (§ 152 καί § 153):

$$\left.\begin{array}{l} ημ\ (90°+θ) = ημ\ (90°-θ) = συν\,θ \\ συν\ (90°+θ) = -συν\ (90°-θ) = -ημ\,θ \\ εφ\ (90°+θ) = -εφ\ (90°-θ) = -σφ\,θ \\ σφ\ (90°+θ) = -σφ\ (90°-θ) = -εφ\,θ \\ τεμ\ (90°+θ) = -τεμ\ (90°-θ) = -στεμ\,θ \\ στεμ\ (90°+θ) = στεμ\ (90°-θ) = τεμ\,θ \end{array}\right\} \quad (154,\ α)$$

Ἔτσι, π.χ., ἐπειδή $110° = 90° + 20°$, γι' αὐτό θά εἶναι:

$$\begin{array}{l} ημ\ 110° = συν\,20° \\ συν\ 110° = -ημ\,20° \\ εφ\ 110° = -σφ\,20° \quad κ.τ.λ. \end{array}$$

155. ΓΩΝΙΕΣ ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΕΥΘΕΙΑ ΓΩΝΙΑ (ΤΟΞΑ ΠΟΥ ΔΙΑΦΕΡΟΥΝ ΚΑΤΑ ΗΜΙΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ).

Ἔστω ὅτι ἔχουμε τίς γωνίες θ καί $180°+θ$, οἱ ὁποῖες διαφέρουν κατά $180°$. Ἐπειδή $180° + θ = 90° + (90° + θ)$, γι' αὐτό θά ἔχουμε:

$$\begin{array}{l} ημ\ (180°+θ) = ημ\ [90°+(90°+θ)] = συν(90°+θ) = -ημ\,θ \\ συν\ (180°+θ) = συν\ [90°+(90°+θ)] = -ημ\,(90°+θ) = -συν\,θ \\ εφ\ (180°+θ) = εφ\ [90°+(90°+θ)] = -σφ\,(90°+θ) = εφ\,θ \\ σφ\ (180°+θ) = σφ\ [90°+(90°+θ)] = -εφ\,(90°+θ) = σφ\,θ \\ τεμ\ (180°+θ) = τεμ\ [90°+(90°+θ)] = -στεμ(90°+θ) = -τεμ\,θ \\ στεμ\,(180°+θ) = στεμ\,[90°+(90°+θ)] = τεμ\,(90°+θ) = -στεμ\,θ \end{array}$$

Μποροῦμε νά ἐργασθοῦμε καί ὡς ἑξῆς: ἐπειδή $(180°+θ) + (180°-θ) =$ $= 360°$, γι' αὐτό (§ 151) θά εἶναι:

$$\begin{array}{l} ημ\ (180°+θ) = -ημ\ (180°-θ) = -ημ\,θ \\ συν\ (180°+θ) = συν\ (180°-θ) = -συν\,θ \\ εφ\ (180°+θ) = -εφ\ (180°-θ) = εφ\,θ \\ σφ\ (180°+θ) = -σφ\ (180°-θ) = σφ\,θ \\ τεμ\ (180°+θ) = τεμ\ (180°-θ) = -τεμ\,θ \\ στεμ\,(180°+θ) = -στεμ\,(180°-θ) = -στεμ\,θ \end{array}$$

Ὥστε: ἄν δυό γωνίες διαφέρουν κατά 180^0, τότε ἔχουν τήν ἴδια ἐφαπτομένη καί τήν ἴδια συνεφαπτομένη, ἀλλά ἀντίθετους τούς ἄλλους ὁμώνυμους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τους.

Ἔτσι, π.χ., ἐπειδή $225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$, γι' αὐτό θά εἶναι:

$$\text{ημ}\ 225^\circ = -\text{ημ}\,45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{εφ}\ 225^\circ = \text{εφ}\,45^\circ = 1$$

$$\text{συν}\,225^\circ = -\text{συν}\,45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{κ.τ.λ.}$$

Σημείωση. Παρατηροῦμε ὅτι $\text{εφ}(\pi + \theta) = \text{εφ}\,\theta$ καί $\text{σφ}(\pi + \theta) = \text{σφ}\,\theta$. Ἐπίσης $\text{εφ}(2\pi + \theta) = \text{εφ}\,\theta$ καί $\text{σφ}(2\pi + \theta) = \text{σφ}\,\theta$, ὅπως γνωρίζουμε. Ἀκόμα εἶναι $\text{εφ}(3\pi + \theta) = \text{εφ}[2\pi + (\pi + \theta)] = \text{εφ}(\pi + \theta) = \text{εφ}\,\theta$ κτλ. Δηλ. οἱ συναρτήσεις $\psi = \text{εφ}\,x$ καί $\psi = \text{σφ}x$ ἔχουν περίοδο τόν π.

156. ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΕΝΟΣ ΤΟΞΟΥ) ΣΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ) ΜΙΚΡΟΤΕΡΗΣ ΤΩΝ 45.

Ἐφαρμόζοντας τούς τύπους, πού μάθαμε στίς παραγράφους 149 ὥς 155, μποροῦμε νά ἀναγάγουμε τήν εὕρεση ἑνός τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ μιᾶς γωνίας θ (θετικῆς ἤ ἀρνητικῆς) στήν εὕρεση τριγωνομετρικοῦ ἀριθμσῦ γωνίας μή ἀρνητικῆς καί μικρότερης ἀπό 45°.

Ἔστω, π.χ., ὅτι ζητεῖται ἡ $\text{εφ}\,(-1250)^\circ$. Πρῶτα-πρῶτα ἔχουμε ὅτι: $\text{εφ}\,(-1250^\circ) = -\text{εφ}\,1250^\circ$ (§ 150).

Διαιροῦμε τώρα τόν 1250 μέ 360 καί βρίσκουμε πηλίκο 3 καί ὑπόλοιπο 170, ἄρα εἶναι $1250^\circ = 170^\circ + 3 \cdot 360^\circ$. Ἔχουμε ἑπομένως:

$$\begin{aligned} \text{εφ}\,(-1250^\circ) &= -\text{εφ}\,1250^\circ = -\text{εφ}\,(170^\circ + 3 \cdot 360^\circ) \\ &= -\text{εφ}\,170^\circ && (\S\ 149) \\ &= \ \ \text{εφ}\,10^\circ && (\S\ 152) \end{aligned}$$

Ὁμοίως βρίσκουμε ὅτι:

$$\begin{aligned} \text{ημ}\,(-1385^\circ) &= -\text{ημ}\,1385^\circ && (\S\ 150) \\ &= -\text{ημ}\,(305^\circ + 3 \cdot 360^\circ) \\ &= -\text{ημ}\,305^\circ && (\S\ 149) \\ &= \ \ \text{ημ}\,55^\circ && (\S\ 151) \\ &= \ \ \text{συν}\,35^\circ && (\S\ 153) \end{aligned}$$

Γενικά μποροῦμε νά ἀκολουθοῦμε τόν ἑξῆς κανόνα: Ἀναγόμαστε πρῶτα σέ γωνία θετική καί μικρότερη ἀπό 360°. Ἔπειτα, ἄν ἡ γωνία αὐτή εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 270°, τή συνδυάζουμε μέ τήν 360°. Ἄν εἶναι μεταξύ 180° καί 270°, βρίσκουμε πόσο διαφέρει ἀπό 180° καί τή συνδυάζουμε μέ τή διαφορά αὐτή. Ἄν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 90° καί μικρότερη ἀπό 180°, τή συνδυάζουμε μέ τήν παραπληρωματική της καί, τέλος, ἄν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 45° καί μικρότερη ἀπό 90°, τή συνδυάζουμε μέ τή συμπληρωματική της.

Παραδείγματα :

$$ημ\ 290° = -ημ\ 70° = -συν\ 20°$$

$$συν\ 260° = -συν\ 80° = -ημ\ 10°$$

$$εφ\ 140° = -εφ\ 40°$$

$$σφ\ 85° = εφ\ 5°.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

504) Νά ἀναχθοῦν σέ τριγωνομετρικούς ἀριθμούς μή ἀρνητικῆς γωνίας μικρότερης ἀπό 45° οἱ ἑξῆς τριγωνομετρικοί ἀριθμοί:

α) ημ 135° β) συν 315° γ) εφ 200° δ) σφ 400° ε) τεμ 325°
στ) συν(−760°) ζ) εφ(−1385°) η) ημ 2880° θ) στεμ 825° ι) στεμ 610°

505) Νά βρεῖτε τίς τιμές (ἀκριβῶς) τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων: ημ, συν, εφ, σφ τῶν γωνιῶν:

α) 150° β) 225° γ) −330° δ) −120° ε) −210° στ) −315°

506) Νά ἐκφρασθοῦν οἱ παρακάτω τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μέ τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας θ.

α) $συν(θ-90°)$, β) $εφ(270°-θ)$, γ) $συν(θ+540°)$
δ) $ημ(θ-270°)$ ε) $ημ(θ-180°)$ στ) $συν(270°+θ)$
ζ) $ημ(θ-720°)$ η) $εφ(-540°+θ)$ θ) $συν(θ-180°)$

507) Ἄν $εφ\ 25° = α$, νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῶν κλασμάτων:

α) $\dfrac{εφ\ 155° - εφ\ 115°}{1 + εφ\ 155°\ εφ\ 115°}$ β) $\dfrac{εφ\ 205° - εφ\ 115°}{εφ\ 245° + εφ\ 335°}$

508) Ἄν $Α + Β + Γ = 180°$, νά δειχθεῖ ὅτι $ημ(Β + Γ) = ημ\ Α$ καί $συν\dfrac{Β+Γ}{2} = ημ\dfrac{Α}{2}$.

509) Ἄν θ εἶναι γωνία μέ τήν τελική της πλευρά στή δεύτερη γωνία τῶν ἀξόνων (δηλ. $90° < θ < 180°$) γιά τήν ὁποία εἶναι: $εφ\ θ = -2/3$, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τότε:

α) $\dfrac{ημ(90°-θ) - συν(180°-θ)}{εφ\ (270°+θ) + σφ\ (360°-θ)} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ καί

β) $\dfrac{εφ\ (90°+θ) + συν(180°+θ)}{ημ\ (270°-θ) - σφ(-θ)} = \dfrac{2+\sqrt{13}}{2-\sqrt{13}}$

510) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

α) $συν\ 0°\ ημ^2\ 270° - 2\ συν\ 180°\ εφ\ 45° = 3$

β) $3\ ημ\ 0°\ τεμ\ 180° + 2\ στεμ\ 90° - συν\ 360° = 1$

γ) $2\ τεμπ\ συν\ 0 + 3\ ημ^3\ \dfrac{3π}{2} - στεμ\ \dfrac{π}{2} = -6$

δ) $εφπ\ συν\ \dfrac{3π}{2} + τεμ\ 2π - στεμ\ \dfrac{3π}{2} = 2$

511) Νά ἁπλοποιηθοῦν τά ἑξῆς κλάσματα:

α) $\dfrac{συν(90°+α)τεμ(-α)εφ(180°-α)}{τεμ(360°+α)ημ(180°+α)σφ(270°-α)}$

β) $\dfrac{ημ(180°-α)σφ(270°-α)συν(α-360°)}{εφ(180°+α)εφ(90°+α)συν(270°+α)}$

512) Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

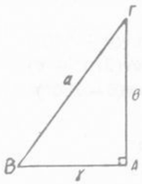
$$\alpha)\quad \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\tau\varepsilon\mu\,(-\alpha)\,\varepsilon\varphi\,(\pi-\alpha)}{\tau\varepsilon\mu(2\pi+\alpha)\eta\mu(\pi+\alpha)\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$\beta)\quad \frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\varepsilon\varphi\,(\pi-\beta)}{\varepsilon\varphi(\pi-\beta)\sigma\upsilon\nu(\pi-\alpha)}+\frac{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\eta\mu\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\,(\pi-\gamma)\,\varepsilon\varphi\,(-\alpha)}$$

$$\gamma)\quad \frac{\varepsilon\varphi\,(\pi-\theta)\,\sigma\varphi\,(\pi+\theta)\,\varepsilon\varphi\,(-\theta)\,\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\varepsilon\varphi(\pi+\theta)\sigma\varphi(\pi-\theta)\sigma\varphi\theta\varepsilon\varphi(2\pi-\theta)}$$

157. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ.

Α) Στό Γυμνάσιο μάθαμε πῶς σχετίζονται μεταξύ τους τά κύρια στοιχεῖα ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου. Ὑπενθυμίζουμε ἐδῶ τούς σχετικούς τύπους:



Σχ. 157.1

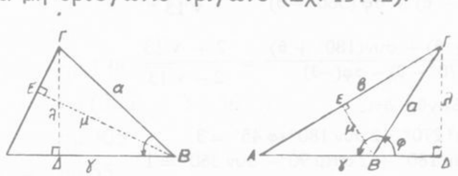
$$\left.\begin{aligned}\beta&=\alpha\,\eta\mu\,B=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\Gamma\\ \gamma&=\alpha\,\eta\mu\,\Gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,B\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\beta&=\gamma\,\varepsilon\varphi\,B=\gamma\,\sigma\varphi\,\Gamma\\ \gamma&=\beta\,\varepsilon\varphi\,\Gamma=\beta\,\sigma\varphi\,B\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

Β) Θά ζητήσουμε τώρα νά βροῦμε τύπους πού νά συνδέουν τά στοιχεῖα ἑνός ὁποιουδήποτε μή ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἔστω ΑΒΓ ἕνα μή ὀρθογώνιο τρίγωνο (Σχ. 157.2).



Σχ. 157.2

Στό σχ. 157.2 (α) ἔχουμε ἕνα ὀξυγώνιο τρίγωνο. Στό σχ. 157.2 (β) ἔχουμε ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο. Φέρνουμε τή ΓΔ κάθετη στήν ΑΒ καί ὀνομάζουμε (ΓΔ) $=\lambda$. Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ καί γιά τά δύο τά σχήματα ἔχουμε $\lambda=\beta\,\eta\mu\,A$ (1)

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΓΔΒ τοῦ σχ. (α) ἔχουμε $\lambda=\alpha\,\eta\mu\,B$ (2)

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΓΒΔ τοῦ σχ. (β) ἔχουμε: $\lambda=\alpha\,\eta\mu\,\varphi=\alpha\,\eta\mu\,B$

(ἐπειδή $B+\varphi=180°$), δηλ. ἔχουμε πάλι τή (2). Ἑπομένως ἀπό τίς (1) καί (2) ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\beta\,\eta\mu A\\ \lambda=\alpha\,\eta\mu B\end{array}\right\} \Rightarrow \beta\,\eta\mu A=\alpha\,\eta\mu B \Rightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B} \qquad (3)$$

Φέρνουμε τώρα τήν κάθετη ἀπό τό Β στήν ΑΓ καί θέτουμε $(BE)=\mu$. Καί γιά τά δύο τά σχήματα ἔχουμε:

$$\mu=\alpha\,\eta\mu\Gamma \quad \text{καί} \quad \mu=\gamma\,\eta\mu A.$$

Ἑπομένως ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\mu=\alpha\,\eta\mu\Gamma\\ \mu=\gamma\,\eta\mu A\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\,\eta\mu\Gamma=\gamma\,\eta\mu A \Rightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \qquad (4)$$

Ἀπό τίς (3) καί (4) συμπεραίνουμε ὅτι:

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}} \qquad (157,\alpha)$$

Ὥστε: **σέ κάθε τρίγωνο τά μήκη τῶν πλευρῶν εἶναι ἀνάλογα πρός τά ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.**

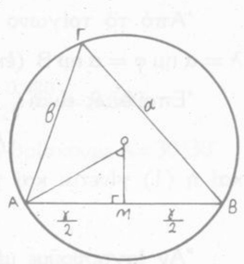
Οἱ ἀναλογίες (157, α) ἀποτελοῦν τό λεγόμενο **νόμο τῶν ἡμιτόνων**.

Γ) Ἔστω Ο τό κέντρο τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο ΑΒΓ, **R** ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου καί Μ τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΒ (Σχ. 157.3).

Τό τρίγωνο ΑΟΜ εἶναι ὀρθογώνιο καί ἡ γωνία στό Ο τοῦ τριγώνου ΑΟΜ εἶναι ἴση μέ τή γωνία Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἔχουμε λοιπόν ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΟΜ:

$$AM=\frac{\gamma}{2}=\mathbf{R}\,\eta\mu\widehat{O}=R\,\eta\mu\Gamma$$



Σχ. 157.3

ἀπό τήν $\frac{\gamma}{2}=\mathbf{R}\,\eta\mu\Gamma$ ἔχουμε $\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$

καί μέ κυκλική τροπή: $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=2R,\ \frac{\beta}{\eta\mu B}=2R$

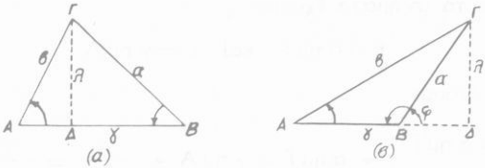
Ὥστε: $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R$

Ξαναβρίσκουμε δηλαδή τό νόμο τῶν ἡμιτόνων.

158. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ.

Ἄς πάρουμε πάλι ἕνα μή ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Σχ. 158). Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ καί γιά τά δύο τά σχήματα ἔχουμε:

$$\beta^2 = \lambda^2 + (\text{Α}\Delta)^2 \quad (1)$$



Σχ. 158

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ τοῦ σχ. (α) ἔχουμε:

$$\lambda = \alpha\ \text{ημ}\ \text{Β} \qquad \text{καί} \qquad (\Delta\text{Β}) = \alpha\ \text{συν}\ \text{Β}.$$

Ἑπομένως εἶναι:

$$(\text{Α}\Delta) = (\text{ΑΒ}) - (\Delta\text{Β}) = \gamma - \alpha\ \text{συν}\ \text{Β}$$

καί ἡ (1) γίνεται:

$$\beta^2 = \lambda^2 + (\text{Α}\Delta)^2 = \alpha^2\ \text{ημ}^2\ \text{Β} + \gamma^2 - 2\gamma\alpha\ \text{συν}\ \text{Β} + \alpha^2\ \text{συν}^2\ \text{Β} =$$
$$= \alpha^2(\text{ημ}^2\ \text{Β} + \text{συν}^2\ \text{Β}) + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \text{συν}\ \text{Β} =$$
$$= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \text{συν}\ \text{Β}.$$

Ἀπό τό τρίγωνο ΒΓΔ τοῦ σχ. (β) ἔχουμε:

$\lambda = \alpha\ \text{ημ}\ \varphi = \alpha\ \text{ημ}\ \text{Β}$ (ἐπειδή $\text{Β} + \varphi = 180°$) καί $(\text{Β}\Delta) = \alpha\ \text{συν}\ \varphi = -\alpha\ \text{συν}\ \text{Β}$

Ἑπομένως εἶναι:

$$(\text{Α}\Delta) = (\text{ΑΒ}) + (\text{Β}\Delta) = \gamma - \alpha\ \text{συν}\ \text{Β}$$

καί ἡ (1) γίνεται καί γιά τό τρίγωνο αὐτό:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\ \text{συν}\ \text{Β}$$

Ἄν ἐργασθοῦμε μέ ὅμοιο τρόπο φέρνοντας τίς κάθετες ἀπό τίς κορυφές Γ καί Α στίς ἀντίστοιχες πλευρές, βρίσκουμε ἀκόμα δύο ὅμοιους τύπους:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \text{συν}\ \text{Α}$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\ \text{συν}\ \Gamma$$

Ὥστε ἔχουμε τούς τύπους:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\ \text{συν}\ \text{Α} \\ \beta^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\ \text{συν}\ \text{Β} \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\ \text{συν}\ \Gamma \end{aligned}} \qquad (158, \alpha)$$

Οἱ τύποι * (158, α) ἀποτελοῦν τό λεγόμενο **νόμο τῶν συνημιτόνων**, ὁ ὁποῖος μέ λόγια διατυπώνεται ὡς ἑξῆς:

Τό τετράγωνο τοῦ μήκους μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν μεῖον τό διπλάσιο γινόμενο τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπί τό συνημίτονο τῆς γωνίας, πού οἱ πλευρές αὐτές σχηματίζουν.

159. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

1) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\gamma = 25$ cm, $A = 35°$ καί $B = 68°$. Ζητεῖται νά βρεθοῦν τά α, β, Γ.

Λύση: Ἐπειδή $A + B + \Gamma = 180°$, θά εἶναι $\Gamma = 180° - (A + B) = 77°$. Ἀπό τό νόμο τῶν ἡμιτόνων ἔχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma\eta\mu A}{\eta\mu\Gamma} = \frac{25 . \eta\mu 35^{o}}{\eta\mu\, 77^{o}} = \frac{25 . 0{,}574}{0{,}974} \simeq 15 \text{ cm}$$

Ἀπό τό νόμο τῶν ἡμιτόνων ἔχουμε ἐπίσης:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \beta = \frac{\gamma\eta\mu B}{\eta\gamma\Gamma} = \frac{25 . \eta\mu 68^{o}}{\eta\mu 77^{o}} = \frac{25 . 0{,}927}{0{,}974} \simeq 24 \text{ cm}$$

2) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 132$ m, $\beta = 124$ m, $\Gamma = 28°\,40'$. Ζητεῖται νά βρεθοῦν ἡ πλευρά γ καί οἱ γωνίες Α καί Β.

Λύση: Ἀπό τό νόμο τῶν συνημιτόνων ἔχουμε:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\, \sigma\upsilon\nu\, \Gamma = 132^2 + 124^2 - 2 \cdot 132 \cdot 224\, \sigma\upsilon\nu\, 28°\,40' = 15714,$$

ἄρα $\gamma = \sqrt{15714} \simeq 125$ m

Γιά τήν Α:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \Rightarrow \eta\mu\, A = \frac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\gamma} = \frac{132\eta\mu 28^{o}40'}{125} = \frac{132 . 0{,}480}{125} = 0{,}507$$

καί ἀπό τούς πίνακες τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν βρίσκουμε $A = 30°30'$.

Ἄν ἐργασθοῦμε μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε, ἀπό τήν

$$\eta\mu\, B = \frac{\beta\, \eta\mu\, \Gamma}{\gamma}, \text{ ὅτι } B = 120°\,40'.$$

Μποροῦμε, βέβαια, νά ὑπολογίσουμε τή Β ἀπό τόν τύπο $A + B + \Gamma = 180°$.

Στή Γ' τάξη θά μάθουμε νά ὑπολογίζουμε, τά στοιχεῖα ἑνός ὁποιουδήποτε τριγώνου, ὅταν ξέρουμε ἀρκετά γι' αὐτό τό σκοπό στοιχεῖα του καί θά δοῦμε πότε καί πῶς γίνεται ἡ ἐργασία αὐτή, πού τήν ὀνομάζουμε ἐπίλυση τοῦ τριγώνου.

(*) Οἱ τύποι προκύπτουν ὁ ἕνας ἀπό τόν ἄλλο μέ κυκλική τροπή τῶν α, β, γ καί Α, Β, Γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

513) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 384$ mm, $\beta = 593$ mm, $\gamma = 276$ mm. Ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν οἱ γωνίες του.

514) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\beta = 300$ mm, $A = 36°$, $B = 65°$. Ζητεῖται νά ὑπολογισθοῦν οἱ πλευρές α καί γ.

515) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$\beta^2 - \gamma^2 = \alpha(\beta \,\sigma\upsilon\nu\, \Gamma - \gamma \,\sigma\upsilon\nu\, B)$$

516) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$\alpha = \beta \,\sigma\upsilon\nu\, \Gamma + \gamma \,\sigma\upsilon\nu\, B \quad (\text{νόμος τῶν προβολῶν})$$

(Νά βρεῖτε μέ κυκλική τροπή τῶν γραμμάτων τίς ἄλλες ταυτότητες γιά τίς β καί γ).

517) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύει:

$$\frac{\varepsilon\varphi\, A}{\varepsilon\varphi\, B} = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

518) Ἄν $\tau\varepsilon\mu\, \alpha = -\frac{13}{5}$, νά βρεθοῦν τά συν α, ημ α, ε φα, ὅπου τό τόξο α τό ὑποθέτουμε θετικό καί μικρότερο ἀπό 180°.

519) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι: $\sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha\, \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

520) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $2\eta\mu^4\alpha - 2\eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^4\alpha + \eta\mu^4\alpha - 1$.

521) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε γωνία θ, γιά τήν ὁποία εἶναι $\sigma\upsilon\nu\, \theta \neq 0$, ἰσχύει ὅτι $(3\,\sigma\upsilon\nu\theta + \tau\varepsilon\mu\, \theta)^2 \geq 12$.

522) Νά ἐξετάσετε ἄν ἡ συνάρτηση, πού ὁρίζεται ἀπό τήν $\psi = \eta\mu 2x$, εἶναι περιοδική. Ὅμοιο ζήτημα καί γιά τή συνάρτηση, πού ὁρίζεται ἀπό τήν $\psi = \varepsilon\varphi\, \frac{x}{4}$.

523) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἄν οἱ γωνίες Β καί Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἱκανοποιοῦν τή συνθήκη $\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2 \Gamma} = \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi \Gamma}$, τότε τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο ἤ ἰσοσκελές.

524) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἰσχύει:

$$\varepsilon\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\beta + \varepsilon\varphi^2\gamma \geq \varepsilon\varphi\alpha\, \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha\, \varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\beta\, \varepsilon\varphi\gamma.$$

525) Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$\left(\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2}\right)\left(\eta\mu x - \frac{1}{2}\right) . \left(\varepsilon\varphi x - \sqrt{3}\right) = 0$$

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

῾Ημίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0 935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,988	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα όξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0,957	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

Ἐφαπτόμενες ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0,344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0.499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3.271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171.9	343,8

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Γωνία είς : ἀκτίνια	Γωνία είς : μοίρας	ημ	συν	εφ	σφ
0,00	0,0	0,00	1,00	0,00	*
0,09	5,0	0,087	0,996	0,087	11,4
0,10	5,7	0,10	0,995	0,10	10,0
0,17	10,0	0,17	0,98	0,18	5,7
0,20	11,5	0,20	0,98	0,20	4,9
0,26	15,0	0,26	0,97	0,27	3,7
0,30	17,2	0,30	0,96	0,31	3,2
0,35	20,0	0,34	0,94	0,36	2,7
0,40	22,9	0,39	0,92	0,42	2,4
0,44	25,0	0,42	0,91	0,47	2,1
0,50	28,6	0,48	0,88	0,55	1,8
0,52 ($\pi/6$)	30,0	0,50	0,87	0,58	1,7
0,60	34,4	0,56	0,83	0,68	1,5
0,61	35,0	0,57	0,82	0,70	1,4
0,70	40,1	0,64	0,76	0,84	1,2
0,78 ($\pi/4$)	45,0	0,71	0,71	1,00	1,00
0,80	45,8	0,72	0,70	1,0	0,97
0,87	50,0	0,77	0,64	1,2	0,84
0,90	51,6	0,78	0,62	1,3	0,79
0,96	55,0	0,82	0,57	1,4	0,70
1,00	57,3	0,84	0,54	1,6	0,64
1,08 ($\pi/3$)	60,0	0,87	0,50	1,7	0,58
1,10	63,0	0,89	0,45	2,0	0,51
1,13	65,0	0,91	0,42	2,1	0,47
1,20	68,7	0,93	0,36	2,6	0,39
1,22	70,0	0,94	0,34	2,8	0,37
1,30	74,5	0,96	0,27	3,6	0,28
1,40	80,2	0,985	0,17	5,8	0,17
1,48	85,0	0,996	0,09	11,4	0,09
1,50	85,9	0,998	0,07	14,1	0,07
1,57 ($\pi/2$)	90,0	1,00	0,00	*	0,00

* δὲν ὁρίζεται

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΣΥΝΟΛΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΡΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ α' ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ – ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ α' ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ X

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ β' ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIV

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β' ΒΑΘΜΟΥ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XVI

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΚΔΟΣΗ Ι΄ 1978 (IV)- ΑΝΤΙΤΥΠΑ 100.000 – ΣΥΜΒΑΣΗ: 3033/14-3-78

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ:
ΚΟΙΝΟΠΡΑΞΙΑ: ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΤΕΧΝΑΙ Μ. ΣΠΥΡΟΥ – Δ. ΒΑΣΙΛΑΚΟΥ Ο.Ε.

ΟΕ
ΔΒ