ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΙΩΑΝ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

Λ. Αδαμόπουλος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΤΡΙΤΟΣ

ΙΩΑΝ. ΠΑΝΑΚΗ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

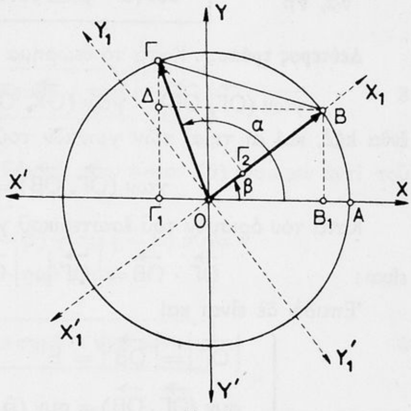
ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν προσανατολισμένων τόξων α καὶ β νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων $\alpha - \beta$ καὶ $\alpha + \beta$.

Α) Ὑπολογισμὸς τοῦ συν(α − β). Θεωροῦμεν τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον (Ο) καὶ τοὺς πρωτεύοντας ἄξονας Χ'ΟΧ καὶ Υ'ΟΥ τῶν συνημιτόνων καὶ τῶν ἡμιτόνων ἀντιστοίχως.



Σχ. 1

Ἔστωσαν $\widehat{A\Gamma}$ καὶ $\widehat{AB}$ δύο τόξα ἴσα πρὸς τὰ α καὶ β, ἔνθα Α ἡ κοινὴ ἀρχὴ αὐτῶν. Αἱ συντεταγμέναι τῶν Γ καὶ Β ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας Χ'Χ καὶ Υ'Υ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{O\Gamma_1} = \text{συν}\alpha \\ y &= \overline{\Gamma_1\Gamma} = \text{ημ}\alpha \end{aligned}\right\}$$

καὶ
$$\left.\begin{aligned} x' &= \overline{OB_1} = \text{συν}\beta \\ y' &= \overline{B_1B} = \text{ημ}\beta \end{aligned}\right\}$$

Ἄγομεν τὴν ΒΔ κάθετον πρὸς τὴν $\Gamma_1\Gamma$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΔΓ ἔχομεν :

$$B\Gamma^2 = B\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

ἢ
$$\begin{aligned} B\Gamma^2 &= (\text{συν}\alpha - \text{συν}\beta)^2 + (\text{ημ}\alpha - \text{ημ}\beta)^2 \\ &= \text{συν}^2\alpha + \text{συν}^2\beta - 2\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta - 2\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta \\ &= 2 - 2(\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta) \qquad (\alpha') \end{aligned}$$

Ἡ τιμὴ τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι $\alpha - \beta + 2k\pi$ $(k \in Z)$

Ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν $X_1'OBX_1$ καὶ τὴν ἐπ' αὐτὴν κάθετον $Y_1'OY_1$, τὰς ὁποίας θεωροῦμεν ὡς πρωτεύοντας ἄξονας διὰ τὸ τόξον $(\widehat{B\Gamma}) = \alpha - \beta$. Ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν τὴν κάθετον $\Gamma\Gamma_2$ πρὸς τὴν $X_1'X_1$, ὁπότε αἱ συντεταγμέναι τῶν Β καὶ Γ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \overline{OB} = 1 \\ y_1' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{καὶ} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \overline{O\Gamma_2} = \text{συν}(\alpha - \beta) \\ y_1 &= \overline{\Gamma_2\Gamma} = \text{ημ}(\alpha - \beta) \end{aligned}\right\}$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $B\Gamma_2\Gamma$ θὰ ἔχωμεν :

$$B\Gamma^2 = B\Gamma_2^2 + \Gamma_2\Gamma^2 = (x_1 - 1)^2 + (y_1 - 0)^2 = [\, \sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) - 1\,]^2 + \eta\mu^2\,(\alpha - \beta) =$$
$$= \sigma\upsilon\nu^2\,(\alpha - \beta) + 1 - 2\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) + \eta\mu^2\,(\alpha - \beta)$$
$$= 2 - 2\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta). \qquad (\alpha'')$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (α'') καὶ (α') λαμβάνομεν :

$$2 - 2\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) = 2 - 2\,(\sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta),$$

ἐξ οὗ :

$$\forall\alpha,\ \forall\beta \qquad \boxed{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta} \qquad \mathbf{1}$$

Δεύτερος τρόπος : Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Chasles εἶναι :

$$\overline{\gamma\omega\nu}\,(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = \overline{\gamma\omega\nu}\,(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OB}) - \overline{\gamma\omega\nu}\,(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\Gamma}) + k.2\pi$$

ἔνθα $k \in Z$, καὶ αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν τούτων ἐκφράζονται εἰς ἀκτίνια. Ἄρα:

$$\overline{\gamma\omega\nu}\,(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = \beta - \alpha + k.2\pi.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου δύο διανυσμάτων $\overrightarrow{O\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$, εἶναι:

$$\overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{O\Gamma}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \sigma\upsilon\nu\,(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{O\Gamma}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = 1 \\ \sigma\upsilon\nu\,(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = \sigma\upsilon\nu\,(\beta - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta), \end{cases}$$

ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται :

$$\overrightarrow{\mathbf{O\Gamma}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta)}. \qquad (\alpha_1)$$

Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν ὅμως σύστημα ἀξόνων εἶναι :

$$\overrightarrow{O\Gamma} \cdot \overrightarrow{OB} = xx' + yy' = \sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta. \qquad (\alpha_2)$$

Ἐκ τῶν (α_1) καὶ (α_2) συνάγομεν ὅτι :

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \beta) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta}$$

Δηλαδὴ προκύπτει πάλιν ὁ τύπος (1).

Β) Ὑπολογισμὸς τοῦ συν(α + β).—Ἐπειδὴ ὁ τύπος (1) ἰσχύει διὰ κάθε τόξον α καὶ β, ἕπεται ὅτι θὰ ἰσχύῃ καὶ ὅταν τεθῇ ἀντὶ β τὸ $-\beta$. Δηλαδή :

$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\,(-\beta) + \eta\mu\alpha\;\eta\mu\,(-\beta)$$
$$= \sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta,$$

καθόσον $\sigma\upsilon\nu\,(-\beta) = \sigma\upsilon\nu\beta$ καὶ $\eta\mu\,(-\beta) = -\eta\mu\beta$.

Ἄρα :

$$\forall\alpha,\ \forall\beta \qquad \boxed{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\;\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\;\eta\mu\beta} \qquad \mathbf{2}$$

Γ) **Ὑπολογισμὸς τοῦ ημ (α + β).**—Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ α τὸ $\frac{\pi}{2}-\alpha$, λαμβάνομεν :

$$\text{συν}\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{συν}\beta+\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\text{ημ}\beta \qquad (1)$$

$$\text{Ἀλλὰ}\quad \left\{\begin{array}{l} \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\text{συν}\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\text{ημ}\,(\alpha+\beta) \\ \text{συν}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{ημ}\alpha \ \text{καὶ}\ \text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\text{συν}\alpha, \end{array}\right.$$

ὁπότε ἡ ἰσότης (1) γίνεται :

$$\forall\alpha,\ \forall\beta \qquad \boxed{\text{ημ}\,(\alpha+\beta)\equiv\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha} \qquad \mathbf{3}$$

Δ) **Ὑπολογισμὸς τοῦ ημ (α — β).**—Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (3) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ β τὸ − β, λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned}\text{ημ}\,(\alpha-\beta)&=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\,(-\beta)+\text{ημ}\,(-\beta)\,\text{συν}\alpha\\&=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha\end{aligned}$$

Ἄρα :

$$\forall\alpha,\ \forall\beta \qquad \boxed{\text{ημ}\,(\alpha-\beta)\equiv\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha} \qquad \mathbf{4}$$

Ε) **Ὑπολογισμὸς τῆς εφ (α + β).** — Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι : συν $(\alpha+\beta)\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διὰ $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in Z)$ θὰ ἔχωμεν :

$$\text{εφ}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{ημ}\,(\alpha+\beta)}{\text{συν}\,(\alpha+\beta)}=\frac{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta} \qquad (1)$$

Ἐὰν συνα συνβ $\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διά :

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi\ \ \text{καὶ}\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi, \qquad (k_1,\ k_2\in Z)$$

τότε ἡ (1) γράφεται διαδοχικῶς :

$$\text{εφ}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta+\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}=\frac{\frac{\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}+\frac{\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}}{\frac{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}-\frac{\text{ημ}\alpha\,\text{ημ}\beta}{\text{συν}\alpha\,\text{συν}\beta}}=$$

$$=\frac{\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}+\frac{\text{ημ}\beta}{\text{συν}\beta}}{1-\frac{\text{ημ}\alpha}{\text{συν}\alpha}\cdot\frac{\text{ημ}\beta}{\text{συν}\beta}}=\frac{\text{εφ}\alpha+\text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta}.$$

Ἄρα : $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}}$$ 5

Στ) Ὑπολογισμὸς τῆς εφ (α— β).—Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (5) θέσωμεν ὅπου β τὸ $-\beta$, θὰ ἔχωμεν, ἂν $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in Z)$

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi(-\beta)}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi(-\beta)}=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta},$$

καθόσον εἶναι $\varepsilon\varphi(-\beta)=-\varepsilon\varphi\beta$.

Ἄρα : $$\boxed{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}}$$ 6

Ζ) Ὑπολογισμὸς τῆς σφ (α + β).—Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι :

$\eta\mu(\alpha+\beta)\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διά : $\alpha+\beta\neq k\pi$, $(k\in Z)$

καὶ $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διά : $\alpha\neq k_1\pi$ καὶ $\beta\neq k_2\pi$, $(k_1, k_2\in Z)$

θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha+\beta)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}-\dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}+\dfrac{\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}}=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$$

Ἄρα : $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}}$$ 7

Η) Ὑπολογισμὸς τῆς σφ (α — β).— Εἰς τὸν τύπον (7) θέτομεν ἀντὶ β τὸ $-\beta$ καὶ ἔχομεν :

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi(-\beta)-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi(-\beta)}=\frac{-\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta}=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

Ἄρα : $$\boxed{\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}}$$ 8

ἂν $\alpha-\beta\neq k\pi$, $k\in Z$

Μερικαὶ περιπτώσεις : Ἐὰν $\beta = \dfrac{\pi}{4}$, τότε $\varepsilon\varphi\,\dfrac{\pi}{4} = 1$ καὶ διὰ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k_1\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{4} + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{4}\,\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}, \quad (k, k_1 \in Z)$$

καὶ διὰ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \neq -\dfrac{\pi}{4} + k_2\pi \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k_3\pi \end{array}\right\} \Longrightarrow \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{4} - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\,\frac{\pi}{4}\,\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}, \quad (k_2, k_3 \in Z)$$

Ὥστε :

$\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \dfrac{1 + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha}$	$\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \dfrac{1 - \varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi\alpha}$

9

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 15⁰ καὶ 75⁰.

Λύσις : Ἐπειδὴ $15^0 + 75^0 = 90^0$, ἔπεται ὅτι :

$$\eta\mu\, 15^0 = \sigma\upsilon\nu\, 75^0 = \sigma\upsilon\nu\,(45^0 + 30^0) = \sigma\upsilon\nu\, 45^0\, \sigma\upsilon\nu\, 30^0 - \eta\mu\, 45^0\, \eta\mu\, 30^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\sigma\upsilon\nu\, 15^0 = \eta\mu\, 75^0 = \eta\mu\,(45^0 + 30^0) = \eta\mu\, 45^0\, \sigma\upsilon\nu\, 30^0 + \eta\mu\, 30^0\, \sigma\upsilon\nu\, 45^0 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\varepsilon\varphi\, 15^0 = \sigma\varphi\, 75^0 = \frac{\sigma\upsilon\nu\, 75^0}{\eta\mu\, 75^0} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{6 - 2} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$\sigma\varphi\, 15^0 = \varepsilon\varphi\, 75^0 = \frac{\eta\mu\, 75^0}{\sigma\upsilon\nu\, 75^0} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{6 - 2} = 2 + \sqrt{3}.$$

Ὥστε θὰ εἶναι :

$\eta\mu\, 15^0 = \sigma\upsilon\nu\, 75^0 = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	$\varepsilon\varphi\, 15^0 = \sigma\varphi\, 75^0 = 2 - \sqrt{3}$
$\sigma\upsilon\nu\, 15^0 = \eta\mu\, 75^0 = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	$\sigma\varphi\, 15^0 = \varepsilon\varphi\, 75^0 = 2 + \sqrt{3}$

10

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\forall\alpha,\ \forall\beta \qquad \eta\mu\,(\alpha+\beta)\,\eta\mu\,(\alpha-\beta)\equiv \eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta\equiv \sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha. \qquad \mathbf{11}$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned}\eta\mu\,(\alpha+\beta)\,\eta\mu\,(\alpha-\beta) &\equiv (\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\,(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta-\eta\mu^2\beta\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha\,(1-\eta\mu^2\beta)-\eta\mu^2\beta\,(1-\eta\mu^2\alpha)\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta-\eta\mu^2\beta+\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta\\ &\equiv \eta\mu^2\alpha-\eta\mu^2\beta\\ &\equiv 1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)\equiv\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha.\end{aligned}$$

3. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\equiv \alpha\eta\mu\,(B-\Gamma)+\beta\eta\mu\,(\Gamma-A)+\gamma\eta\mu\,(A-B)=0.$$

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ $\alpha=2R\eta\mu A=2R\eta\mu\,(B+\Gamma)$, ἕπεται ὅτι :

$$\alpha\eta\mu\,(B-\Gamma)=2R\eta\mu\,(B+\Gamma)\,\eta\mu\,(B-\Gamma)=2R\,(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma).$$

Διὰ κυκλικῆς δὲ τροπῆς τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ Α, Β, Γ λαμβάνομεν :

$$\Sigma=2R\,(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma)+2R\,(\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2A)+2R\,(\eta\mu^2A-\eta\mu^2B)=$$
$$=2R\,(\eta\mu^2B-\eta\mu^2\Gamma+\eta\mu^2\Gamma-\eta\mu^2A+\eta\mu^2A-\eta\mu^2B)=2R\cdot 0=0.$$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΑΣ

4. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma. \qquad \mathbf{12}$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν : $\alpha+\beta=\pi-\gamma$. Ἐξισοῦντες δὲ τὰς ἐφαπτομένας ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς, ἔχομεν :

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha+\beta)=\varepsilon\varphi\,(\pi-\gamma)=-\varepsilon\varphi\gamma \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}=-\varepsilon\varphi\gamma,$$

ἐξ οὗ :

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma.$$

Παρατήρησις : Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (12) **δὲν ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ,** ὅταν μία τῶν γωνιῶν α ἢ β ἢ γ εἶναι $\frac{\pi}{2}$.

5. Ἐὰν αἱ γωνίαι α, β, γ ἱκανοποιοῦν τὴν ἰσότητα :

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma, \qquad (1)$$

ποία σχέσις συνδέει τὰς γωνίας ταύτας ;

Λύσις : Ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν :

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=-\varepsilon\varphi\gamma\,(1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta). \qquad (2)$$

Ἐὰν εἶναι $1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta=0$ ἢ $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta=1$, τότε

$$\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=0,\ \text{ἐξ οὗ :}\ \varepsilon\varphi\alpha=-\varepsilon\varphi\beta,$$

ἡ ὁποία ἰσότης δὲν συμβιβάζεται μὲ τὴν $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta=1$. Ἄρα :

$$1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\neq 0$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν :

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}=-\,\varepsilon\varphi\gamma \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon\varphi\,(\alpha+\beta)=-\,\varepsilon\varphi\gamma=\varepsilon\varphi\,(\pi-\gamma).$$

Ἄρα : $\alpha+\beta=(\pi-\gamma)+\nu\pi$ ἢ $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\nu\pi=(\nu+1)\pi=k\pi,\quad (\nu, k\in Z)$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι, ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, ἡ σχέσις (1) εἶναι ἀληθής.

6. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma=1} \qquad \textbf{13}$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, καὶ $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\,(\pi-\gamma)=-\,\sigma\upsilon\nu\gamma$

ἢ $$\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta=-\,\sigma\upsilon\nu\gamma$$

ἢ $$\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta.$$

Ὑψοῦντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τεράγωνον, ἔχομεν :

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma=\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta=$$
$$=(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\,(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)=1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta,$$

ἐξ οὗ : $$\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma=1.$$

Παρατήρησις : Ἐὰν ἰσχύῃ ὁ τύπος (13), πῶς συνδέονται αἱ γωνίαι α, β, γ ;

Ὁ τύπος (13) γράφεται :

$$\sigma\upsilon\nu^2\gamma+2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta-1=0, \qquad (1)$$

καὶ δύναται νὰ θεωρηθῇ τὸ πρῶτον μέλος ὡς τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς συνγ.

Ἡ διακρίνουσα Δ τοῦ τριωνύμου τούτου εἶναι :

$$\frac{\Delta}{4}=\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta-\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\beta+1=(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\,(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta)=\eta\mu^2\alpha\,\eta\mu^2\beta.$$

Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τούτου εἶναι :

$$-\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\pm\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta,$$

δηλαδὴ $$-\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \quad \text{καὶ} \quad -\,\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta).$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται :

$$[\sigma\upsilon\nu\,\gamma+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)]\,[\sigma\upsilon\nu\,\gamma+\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)]=0.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=-\,\sigma\upsilon\nu\gamma \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha\pm\beta)=\sigma\upsilon\nu(\pi-\gamma),$$

ἐξ οὗ : $$\alpha\pm\beta=\pm\,(\pi-\gamma)+2\,k\pi \qquad (k\in Z)$$

ἢ $$\boxed{\alpha\pm\beta\pm\gamma=(\,2k+1\,)\,\pi}$$

Τὰ διπλᾶ σημεῖα εἶναι ἀνεξάρτητα τὸ ἓν τοῦ ἄλλου.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι :

Ἐὰν αἱ γωνίαι α, β, γ ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα :

$$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\beta+\sigma\upsilon\nu^2\gamma-2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma=1,} \qquad \textbf{14}$$

τότε αἱ γωνίαι α, β, γ συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων : $\boldsymbol{\alpha\pm\beta\pm\gamma=2k\pi,}$ $(k\in Z)$.

7. Ἐὰν μεταξὺ τῶν κυρίων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\boldsymbol{\alpha=2\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma,}$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

᾿Απόδειξις : Ἡ δοθεῖσα σχέσις γράφεται :

$$2R\,\text{ημ}A = 2 \cdot 2R\,\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \text{ημ}A = 2\,\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma$$

ἢ $\quad \text{ημ}(B+\Gamma) = 2\,\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma$

ἢ $\quad \text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma + \text{ημ}\Gamma\,\text{συν}B = 2\,\text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma$

ἢ $\quad \text{ημ}B\,\text{συν}\Gamma - \text{ημ}\Gamma\,\text{συν}\,B = 0$

ἢ $\quad \text{ημ}(B-\Gamma) = 0$, ἐξ οὗ : $B - \Gamma = k \cdot 180^0$, ἔνθα $k \in Z$

᾿Επειδὴ B καὶ Γ εἶναι γωνίαι τριγώνου, ἕπεται ὅτι $k=0$. Ἄρα $B-\Gamma=0$, ἐξ οὗ **B = Γ**. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 105^0.

2. ᾿Εὰν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ καὶ $\text{ημ}\alpha = \frac{3}{5}$, $\text{συν}\beta = \frac{9}{41}$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις :

$$\text{ημ}(\alpha-\beta), \quad \text{συν}(\alpha+\beta), \quad \text{εφ}(\alpha-\beta), \quad \text{σφ}(\alpha+\beta).$$

3. ᾿Εὰν $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$ καὶ $\text{ημ}\alpha = \frac{15}{17}$, $\text{συν}\beta = \frac{12}{13}$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις :

$$\text{ημ}(\alpha+\beta), \quad \text{συν}(\alpha-\beta), \quad \text{εφ}(\alpha+\beta), \quad \text{σφ}(\alpha-\beta).$$

4. ᾿Εὰν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$ καὶ $\text{συν}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{συν}\beta = -\frac{3}{5}$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις :

1. $\text{ημ}(\alpha+\beta), \quad \text{συν}(\alpha-\beta), \quad \text{εφ}(\alpha-\beta), \quad \text{σφ}(\alpha+\beta).$

καὶ 2. ᾿Εὰν $\text{εφ}x = \frac{\beta}{\alpha}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\alpha\,\text{συν}2x + \beta\,\text{ημ}2x = \alpha$.

5. ᾿Εὰν $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ καὶ $\text{εφ}\alpha = \frac{8}{15}$, $\text{συν}\beta = \frac{4}{5}$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις :

$$\text{ημ}(\alpha-\beta), \quad \text{συν}(\alpha+\beta), \quad \text{εφ}(\alpha+\beta), \quad \text{σφ}(\alpha-\beta).$$

6. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ταυτότητες :

1. $\text{ημ}(\alpha-\beta)\,\text{συν}\beta + \text{ημ}\beta\,\text{συν}(\alpha-\beta) \equiv \text{ημ}\alpha$
2. $\text{συν}(\alpha-\beta)\,\text{συν}(\alpha+\beta) - \text{ημ}(\alpha-\beta)\,\text{ημ}(\alpha+\beta) \equiv \text{συν}2\alpha$,
3. $\text{ημ}(60^0-\alpha)\,\text{συν}(30^0+\alpha) + \text{ημ}(30^0+\alpha)\,\text{συν}(60^0-\alpha) \equiv 1$,
4. $\text{συν}(45^0-\alpha)\,\text{συν}(45^0-\beta) - \text{ημ}(45^0-\alpha)\,\text{ημ}(45^0-\beta) \equiv \text{ημ}(\alpha+\beta)$,
5. $\text{ημ}(45^0+\alpha)\,\text{συν}(45^0-\beta) + \text{συν}(45^0+\alpha)\,\text{ημ}(45^0-\beta) \equiv \text{συν}(\alpha-\beta)$,
6. $\text{συν}(36^0-\alpha)\,\text{συν}(36^0+\alpha) + \text{συν}(54^0+\alpha)\,\text{συν}(54^0-\alpha) \equiv \text{συν}2\alpha$,
7. $\text{συν}(30^0+\alpha)\,\text{συν}(30^0-\alpha) - \text{ημ}(30^0+\alpha)\,\text{ημ}(30^0-\alpha) \equiv \frac{1}{2}$
8. $\text{ημ}(\nu+1)A\,\text{ημ}(\nu-1)A + \text{συν}(\nu+1)A\,\text{συν}(\nu-1)A \equiv \text{συν}2A$,
9. $\text{ημ}(\nu+1)A\,\text{ημ}(\nu+2)A + \text{συν}(\nu+1)A\,\text{συν}(\nu+2)A \equiv \text{συν}\,A$,
10. $\text{εφ}(\beta-\gamma) + \text{εφ}(\gamma-\alpha) + \text{εφ}(\alpha-\beta) = \text{εφ}(\beta-\gamma)\,\text{εφ}(\gamma-\alpha)\,\text{εφ}(\alpha-\beta)$.

Πότε ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ ἡ ἰσότης 10 ;

7. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{συν}(\alpha+\beta)\,\text{συν}(\alpha-\beta) \equiv \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\beta \equiv \text{συν}^2\beta - \text{ημ}^2\alpha.$$

8. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $$\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta}+\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha}=0,$$

2. $$\frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}+\frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha}+\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}=0.$$

9. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

1. $$\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\beta}=\varepsilon\varphi^2\alpha-\varepsilon\varphi^2\beta,$$

2. $$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu(\alpha-\beta)},$$

3. $$\frac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}=\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta,$$

4. $$\frac{\varepsilon\varphi^2 2\alpha-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 2\alpha\,\varepsilon\varphi^2\alpha}=\varepsilon\varphi 3\alpha\,\varepsilon\varphi\alpha,$$

5. $$\frac{\sigma\varphi 4\alpha\,\sigma\varphi 3\alpha+1}{\sigma\varphi 3\alpha-\sigma\varphi 4\alpha}=\sigma\varphi\alpha,$$

6. $$(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\eta\mu 2\alpha)=\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu 3\alpha,$$

7. $$\frac{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)\varepsilon\varphi\beta}=\varepsilon\varphi\alpha.$$

Πότε αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ ;

10. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2(120^0+x)+\sigma\upsilon\nu^2(120^0-x)\equiv\frac{3}{2}.$$

11. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παραστάσεις :

1. $A=\sigma\upsilon\nu^2 x-2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+x)+\sigma\upsilon\nu^2(\alpha+x)$,

2. $B=\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu(\alpha+x)+\eta\mu^2(\alpha+x)$

εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x. Ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων παραστάσεων ;

12. Ἐὰν $\alpha+\beta=45^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta)=2$,

καὶ 2. Ἐὰν $\eta\mu x-\eta\mu y=\alpha$, $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y=\beta$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\sigma\upsilon\nu(x+y)$. Διερεύνησις.

13. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $A+\Gamma=135^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(1+\sigma\varphi A)(1+\sigma\varphi\Gamma)=2.$$

14. Ἐὰν $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ καὶ $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ καὶ $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\varepsilon\varphi\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\alpha-\beta=45^0$.

15. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}+\sigma\varphi\frac{\beta}{2}+\sigma\varphi\frac{\gamma}{2}=\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}\,\sigma\varphi\frac{\beta}{2}\,\sigma\varphi\frac{\gamma}{2},$$

2. $$\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\gamma\,\sigma\varphi\alpha=1,$$

3. $$(\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta)(\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma)(\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\alpha)=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\,\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\,\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma,$$

4. $$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}+\frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\gamma}{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta}=2,$$

5. $$\frac{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}+\frac{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma}+\frac{\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\alpha}=1,$$

6. $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma - 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma = 2,$

7. $\varepsilon\varphi 2\alpha + \varepsilon\varphi 2\beta + \varepsilon\varphi 2\gamma = \varepsilon\varphi 2\alpha\,\varepsilon\varphi 2\beta\,\varepsilon\varphi 2\gamma,$

8. $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2 2\beta + \sigma\upsilon\nu^2 2\gamma = 1 + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\beta\,\sigma\upsilon\nu 2\gamma,$

9. $\eta\mu^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\beta + \eta\mu^2 2\gamma + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\beta\,\sigma\upsilon\nu 2\gamma = 2,$

10. $\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} + \eta\mu^2\frac{\beta}{2} + \eta\mu^2\frac{\gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\eta\mu\frac{\beta}{2}\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$

16. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2(60^0 + \alpha) + \sigma\upsilon\nu^2(60^0 - \alpha) \equiv \frac{3}{2},$

2. $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2(120^0 + \alpha) + \eta\mu^2(120^0 - \alpha) \equiv \frac{3}{2}.$

17. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu^2(\beta-\gamma) + \sigma\upsilon\nu^2(\gamma-\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha-\beta) - 2\sigma\upsilon\nu(\beta-\gamma)\,\sigma\upsilon\nu(\gamma-\alpha)\,\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \equiv 1$$

18. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\frac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma} + \frac{\beta^2\eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu\Gamma + \eta\mu A} + \frac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu A + \eta\mu B} = 0,$

2. $\frac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu A} + \frac{\beta^2\eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu B} + \frac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu\Gamma} = 0.$

19. Ἐὰν $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\delta}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma + \sigma\varphi\delta} = \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta\,\varepsilon\varphi\gamma\,\varepsilon\varphi\delta.$$

20. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\frac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2},$ 2. $\frac{\gamma\,\eta\mu(A-B)}{\beta\,\eta\mu(\Gamma-A)} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2-\alpha^2},$

3. $(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu A + (\gamma+\alpha)\sigma\upsilon\nu B + (\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha+\beta+\gamma,$

4. $\frac{\alpha - 2\gamma\,\sigma\upsilon\nu B}{\gamma\,\eta\mu B} + \frac{\beta - 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\alpha\,\eta\mu\Gamma} + \frac{\gamma - 2\beta\,\sigma\upsilon\nu A}{\beta\,\eta\mu A} = 0.$

Πότε ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ ἡ 2 ;

21. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma.$$

22. Ἐὰν $x > 0,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2},\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2},$ καί :

$$\left.\begin{aligned} \sigma\varphi\alpha &= \sqrt{x^3 + x^2 + x} \\ \sigma\varphi\beta &= \sqrt{x + x^{-1} + 1} \\ \sigma\varphi\gamma &= (\sqrt{x^{-3} + x^{-2} + x^{-1}})^{-1} \end{aligned}\right\}$$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\alpha + \beta = \gamma.$

23. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu A\,\eta\mu(B-\Gamma) + \eta\mu B\,\eta\mu(\Gamma-A) + \eta\mu\Gamma\,\eta\mu(A-B) = 0$$

24. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2\beta + \eta\mu^2\gamma + 2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma = 1,$

2. Πῶς συνδέονται τὰ α, β, γ, ἂν ἰσχύῃ ἡ προηγουμένη ἰσότης ;

25. Ἐὰν $A + B = 225^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\sigma\varphi A}{1+\sigma\varphi A}\cdot\frac{\sigma\varphi B}{1+\sigma\varphi B} = \frac{1}{2}$$

26. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi^2\alpha+\varepsilon\varphi^2\beta+\varepsilon\varphi^2\gamma \geqslant 1$.

27. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. $\sigma\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\beta+\sigma\varphi^2\gamma \geqslant 1$,
2. $\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{\beta}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1$.

28. Ἐὰν $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\eta\mu(x+y)<\eta\mu x+\eta\mu y$.

29. Ἐὰν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα:

$$\eta\mu^2 A+\eta\mu^2 B+\eta\mu^2 \Gamma=2,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

30. Ἐὰν $\frac{\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha}=1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi^2\gamma=\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta$.

31. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. $\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$,
2. $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=\sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

9. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν προσανατολισμένων τόξων α, β, γ νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ ἀθροίσματος α + β + γ.

Α) Ὑπολογισμὸς τοῦ ημ (α + β + γ).—Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) &\equiv \eta\mu\,[(\alpha+\beta)+\gamma] \equiv \eta\mu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \equiv \\ &\equiv (\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\gamma\,(\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta) \\ &\equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma.\end{aligned}$$

Ὥστε:

$$\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma$$

ἢ

$$\boxed{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \Sigma\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma} \qquad 15$$

Β) Ὑπολογισμὸς τοῦ συν (α + β + γ).—Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) &\equiv \sigma\upsilon\nu\,[(\alpha+\beta)+\gamma] \equiv \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu(\alpha+\beta)\,\eta\mu\gamma \equiv \\ &\equiv (\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta)\,\sigma\upsilon\nu\gamma-(\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha)\,\eta\mu\gamma \\ &\equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha.\end{aligned}$$

Ὥστε:

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\,\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\gamma\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta$$

ἢ

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma) \equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\Sigma\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma} \qquad 16$$

Γ) Ὑπολογισμὸς τῆς $\mathbf{\epsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)}$.—Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\epsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\Sigma\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\Sigma\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma},\quad(1)$$

ὅταν εἶναι $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διὰ $\alpha+\beta+\gamma\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Ἐὰν δὲ εἶναι καὶ $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διά :

$$\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \text{καὶ}\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi,\ \text{καὶ}\ \gamma\neq\frac{\pi}{2}+k_3\pi,\quad(k_1,k_2,k_3\in Z)$$

διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) διὰ $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma$, λαμβάνομεν :

$$\boxed{\epsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\Sigma\,\epsilon\varphi\alpha-\epsilon\varphi\alpha\,\epsilon\varphi\beta\,\epsilon\varphi\gamma}{1-\Sigma\,\epsilon\varphi\alpha\,\epsilon\varphi\beta}}\qquad \mathbf{17}$$

ἢ
$$\epsilon\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\epsilon\varphi\alpha+\epsilon\varphi\beta+\epsilon\varphi\gamma-\epsilon\varphi\alpha\,\epsilon\varphi\beta\,\epsilon\varphi\gamma}{1-\epsilon\varphi\alpha\,\epsilon\varphi\beta-\epsilon\varphi\beta\,\epsilon\varphi\gamma-\epsilon\varphi\gamma\,\epsilon\varphi\alpha}.$$

Δ) Ὑπολογισμὸς τῆς $\mathbf{\sigma\varphi(\alpha+\beta+\gamma)}$.—Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)}{\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\Sigma\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma}{\Sigma\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma},\quad(1)$$

ὅταν εἶναι $\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διὰ : $\alpha+\beta+\gamma\neq k\pi$.

Ἐὰν δὲ εἶναι καὶ $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma\neq 0$, ὅπερ ἰσχύει διὰ: $\alpha\neq k_1\pi$ καὶ $\beta\neq k_2\pi$ καὶ $\gamma\neq k_3\pi$, $(k_1, k_2, k_3\in Z)$ διαιροῦντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) διὰ $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta\,\eta\mu\gamma$, λαμβάνομεν :

$$\boxed{\sigma\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma-\Sigma\,\sigma\varphi\alpha}{\Sigma\,\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma-1}}\qquad \mathbf{18}$$

ἢ
$$\sigma\varphi(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma-\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\gamma}{\sigma\varphi\beta\,\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\gamma\,\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta-1}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32. Ἐκ τῶν τύπων 15 — 16 — 17 καὶ 18, οἱ ὁποῖοι δίδουν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ τόξου $\alpha+\beta+\gamma$, νὰ ἐξαχθοῦν οἱ ἀκόλουθοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί :

1. $\eta\mu(\beta+\gamma-\alpha)$, $\eta\mu(\gamma+\alpha-\beta)$, $\eta\mu(\alpha+\beta-\gamma)$,
2. $\eta\mu(\alpha-\beta-\gamma)$, $\eta\mu(\beta-\alpha-\gamma)$, $\eta\mu(\gamma-\alpha-\beta)$,
3. $\sigma\upsilon\nu(\beta+\gamma-\alpha)$, $\sigma\upsilon\nu(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta-\gamma)$,
4. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta-\gamma)$, $\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha-\gamma)$, $\sigma\upsilon\nu(\gamma-\alpha-\beta)$,
5. $\epsilon\varphi(\beta+\gamma-\alpha)$, $\epsilon\varphi(\gamma+\alpha-\beta)$, $\epsilon\varphi(\alpha+\beta-\gamma)$,
6. $\epsilon\varphi(\alpha-\beta-\gamma)$, $\epsilon\varphi(\beta-\gamma-\alpha)$, $\epsilon\varphi(\gamma-\alpha-\beta)$,
7. $\sigma\varphi(\beta+\gamma-\alpha)$ $\sigma\varphi(\gamma+\alpha-\beta)$, $\sigma\varphi(\alpha+\beta-\gamma)$,
8. $\sigma\varphi(\alpha-\beta-\gamma)$, $\sigma\varphi(\beta-\gamma-\alpha)$, $\sigma\varphi(\ \ -\alpha-\beta)$.

33. Ἐάν $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{4}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{8}{15}$, $\varepsilon\varphi\gamma = \frac{5}{12}$ καὶ $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἀθροισμάτων $\alpha \pm \beta \pm \gamma$.

34. Ἐάν $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = \frac{12}{13}$, $\eta\mu\gamma = \frac{7}{25}$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ $\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)$, $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta + \gamma)$, δεδομένου ὅτι $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΩΝ ΤΟΞΩΝ

10. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνὸς τόξου α νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν τόξων 2α, 3α, . . ., να, (ν∈Z)

Α) Ὑπολογισμὸς τοῦ ημ 2α.— Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\eta\mu\,(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

Ἂν δὲ τεθῇ ἀντὶ β τὸ α, λαμβάνομεν :

$$\eta\mu\,(\alpha + \alpha) = \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$$

ἢ $$\boxed{\eta\mu\,2\alpha \equiv 2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad \mathbf{19}$$

Β) Ὑπολογισμὸς τοῦ συν 2α.— Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta.$$

Ἂν δὲ τεθῇ ἀντὶ τοῦ β τὸ α, λαμβάνομεν :

$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\,\eta\mu\alpha$$

ἢ $$\boxed{\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha \qquad (2)$$

καὶ $$\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \qquad (3)$$

Ὥστε :

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\,2\alpha \equiv 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha \equiv 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \qquad \mathbf{20}$$

Γ) Ὑπολογισμὸς τῆς εφ 2α.— Ἐκ τοῦ τύπου :

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta},$$ διὰ $\beta = \alpha$, λαμβάνομεν :

$$\varepsilon\varphi\,(\alpha + \alpha) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha},$$ ἤτοι : $$\boxed{\varepsilon\varphi\,2\alpha = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}} \qquad \mathbf{21}$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει διά :

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq \pm \frac{\pi}{4} + k_1\pi, \quad \text{ἔνθα} \quad (k, k_1 \in Z)$$

Δ) Ὑπολογισμὸς τῆς σφ 2α.— Ἐκ τοῦ τύπου :

$$\sigma\varphi\,(\alpha+\beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}, \text{ διὰ } \beta = \alpha, \text{ λαμβάνομεν :}$$

$$\sigma\varphi\,(\alpha+\alpha) = \frac{\sigma\varphi\alpha\,\sigma\varphi\alpha - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\,\sigma\varphi\alpha}, \text{ ἤτοι : } \boxed{\sigma\varphi\, 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\,\sigma\varphi\alpha}} \qquad 22$$

Ὁ τύπος οὗτος ἰσχύει διά : $\alpha \neq k\pi$ καὶ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi$ ἔνθα $(k, k_1 \in Z)$

11. Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 3α. — Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους 15 – 16 17 – 18, οἱ ὁποῖοι δίδουν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma$, ἀντικαταστήσωμεν τὰ β καὶ γ διὰ τοῦ α, εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^3\alpha = 3\eta\mu\alpha\,(1 - \eta\mu^2\alpha) - \eta\mu^3\alpha =$$
$$= 3\eta\mu\alpha - 3\eta\mu^3\alpha - \eta\mu^3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha.$$

$$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha\,(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) =$$
$$= \sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha + 3\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha.$$

$$\varepsilon\varphi 3\alpha = \frac{3\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\,\varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi 3\alpha = \frac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\sigma\varphi\alpha}{3\sigma\varphi^2\alpha - 1}.$$

Ὥστε :

$$23 \quad \boxed{\begin{array}{l} \eta\mu\, 3\alpha \equiv 3\,\eta\mu\alpha - 4\,\eta\mu^3\alpha \\ \hline \sigma\upsilon\nu\, 3\alpha \equiv 4\,\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\,\sigma\upsilon\nu\alpha \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\, 3\alpha = \dfrac{3\,\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\,\varepsilon\varphi^2\alpha} \\ \hline \sigma\varphi\, 3\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^3\alpha - 3\,\sigma\varphi\alpha}{3\,\sigma\varphi^2\alpha - 1} \end{array}} \quad 24$$

Ὁ πρῶτος τῶν τύπων 24 ἔχει ἔννοιαν διά :

$$3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ ἐξ οὗ: } \alpha \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \text{ καὶ } \alpha \neq \pm \frac{\pi}{6} + k_1\pi \quad (k, k_1 \in Z)$$

Ὁ δεύτερος τῶν τύπων 24 ἔχει ἔννοιαν διά :

$$3\alpha \neq k_2\pi, \text{ ἐξ οὗ: } \alpha \neq k_2\frac{\pi}{3}, \text{ καὶ } \alpha \neq \pm \frac{\pi}{3} + k_3\pi \quad (k_2, k_3 \in Z)$$

12. Τύποι τοῦ Simpson.— Προφανῶς εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l} \eta\mu\,(\alpha+\beta) + \eta\mu\,(\alpha-\beta) = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta \\ \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) + \sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta \end{array}\right\},$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι :

$$\left.\begin{array}{ll} & \eta\mu\,(\alpha+\beta) = 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\,(\alpha-\beta) \\ \text{καὶ} & \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta) = 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta - \sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta) \end{array}\right\}$$

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου α τὸ μα καὶ ὅπου β τὸ α, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\boxed{\eta\mu\,(\mu+1)\,\alpha \equiv 2\,\eta\mu\,(\mu\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\,(\mu-1)\,\alpha} \qquad 25$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\,(\mu+1)\,\alpha \equiv 2\,\sigma\upsilon\nu\,(\mu\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu\,(\mu-1)\,\alpha} \qquad 26$$

Ἐκ τῶν τύπων τούτων διὰ $\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ συνάγομεν ἀντιστοίχως:

$\eta\mu 2\alpha \equiv 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 2\alpha \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$	
$\eta\mu 3\alpha \equiv 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 3\alpha \equiv 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$	
$\eta\mu 4\alpha \equiv (4\eta\mu\alpha - 8\eta\mu^3\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 4\alpha \equiv 8\sigma\upsilon\nu^4\alpha - 8\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$	27
$\eta\mu 5\alpha \equiv 5\eta\mu\alpha - 20\eta\mu^3\alpha + 16\eta\mu^5\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 5\alpha \equiv 16\sigma\upsilon\nu^5\alpha - 20\sigma\upsilon\nu^3\alpha + 5\sigma\upsilon\nu\alpha$	
$\eta\mu 6\alpha \equiv (6\eta\mu\alpha - 32\eta\mu^3\alpha + 32\eta\mu^5\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu 6\alpha \equiv 32\sigma\upsilon\nu^6\alpha - 48\sigma\upsilon\nu^4\alpha + 18\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$	
....	....	

13. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.— Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν 18^0, 36^0, 54^0, 72^0.

Λύσις : Ἔστω $\alpha = 18^0$, ὁπότε $5\alpha = 90^0$ ἢ $3\alpha + 2\alpha = 90^0$ καὶ $3\alpha = 90^0 - 2\alpha$.

Ἄρα: $\quad \eta\mu 3\alpha = \eta\mu\,(90^0 - 2\alpha) = \sigma\upsilon\nu\,2\alpha \quad$ ἢ $\quad 3\,\eta\mu\alpha - 4\,\eta\mu^3\alpha = 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha$

ἢ $\quad 4\,\eta\mu^3\alpha - 2\,\eta\mu^2\alpha - 3\,\eta\mu\alpha + 1 = 0 \quad$ ἢ $\quad (\eta\mu\alpha - 1)\,(4\,\eta\mu^2\alpha + 2\,\eta\mu\alpha - 1) = 0$.

Ἄρα, ἢ $\eta\mu\alpha - 1 = 0$, ἐξ οὗ $\eta\mu\alpha = 1 = \eta\mu\,90^0$, ὅτε $\alpha = 90^0$, τὸ ὁποῖον ἀπορρίπτεται, καθόσον ἐτέθη $\alpha = 18^0$, ἢ $4\,\eta\mu^2\alpha + 2\,\eta\mu\alpha - 1 = 0$,

ἐξ οὗ: $\eta\mu 18^0 = \eta\mu\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, τῆς ἀρνητικῆς ρίζης ἀπορριπτομένης.

Ἄρα: $$\sigma\upsilon\nu^2 18^0 = 1 - \eta\mu^2 18^0 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{5}}{16},$$

καὶ $$\sigma\upsilon\nu\,18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,,$$

ὁπότε: $$\varepsilon\varphi\,18^0 = \frac{\eta\mu\,18^0}{\sigma\upsilon\nu\,18^0} = \frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

Ἐκ τοῦ τύπου $\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha$, διὰ $\alpha = 18^0$, ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\,36^0 = 1 - 2\,\eta\mu^2 18^0 = 1 - 2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

καὶ $$\eta\mu^2\,36^0 = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\,36^0 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

ἐξ οὗ: $$\eta\mu\,36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,,$$

καὶ ἄρα: $$\varepsilon\varphi\,36^0 = \frac{\eta\mu\,36^0}{\sigma\upsilon\nu\,36^0} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Ἐπειδὴ δὲ $18^0 + 72^0 = 90^0$ καὶ $36^0 + 54^0 = 90^0$, ἕπεται ὅτι :

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\, 72^0 &= \sigma\upsilon\nu\, 18^0 \\ \sigma\upsilon\nu\, 72^0 &= \eta\mu\, 18^0 \\ \varepsilon\varphi\, 72^0 &= \sigma\varphi\, 18^0 \\ \sigma\varphi\, 72^0 &= \varepsilon\varphi\, 18^0 \end{aligned}\right\} \quad \text{καὶ} \quad \left.\begin{aligned} \eta\mu\, 54^0 &= \sigma\upsilon\nu\, 36^0 \\ \sigma\upsilon\nu\, 54^0 &= \eta\mu\, 36^0 \\ \varepsilon\varphi\, 54^0 &= \sigma\varphi\, 36^0 \\ \sigma\varphi\, 54^0 &= \varepsilon\varphi\, 36^0 \end{aligned}\right\}$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες, ἔχομεν :

$\eta\mu\, 18^0 = \sigma\upsilon\nu\, 72^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\eta\mu\, 36^0 = \sigma\upsilon\nu\, 54^0 = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$
$\sigma\upsilon\nu\, 18^0 = \eta\mu\, 72^0 = \dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\sigma\upsilon\nu\, 36^0 = \eta\mu\, 54^0 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$
$\varepsilon\varphi\, 18^0 = \sigma\varphi\, 72^0 = \dfrac{1}{5}\sqrt{25-10\sqrt{5}}$	$\varepsilon\varphi\, 36^0 = \sigma\varphi\, 54^0 = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$
$\sigma\varphi\, 18^0 = \varepsilon\varphi\, 72^0 = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sigma\varphi\, 36^0 = \varepsilon\varphi\, 54^0 = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Ἐὰν ημα $= 0{,}4$ καὶ $90^0 < \alpha < 180^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί :

ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α.

36. Ἐὰν συνα $= \dfrac{1}{3}$ καὶ $0^0 < \alpha < 90^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί :

ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α.

37. Ἐὰν ημχ − συνχ $= 0{,}2$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ2χ.

38. Ἐὰν ημα $= \dfrac{1}{3}$, ημβ $= \dfrac{1}{2}$ καὶ $0 < \alpha, \beta < \dfrac{\pi}{2}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ(2α + β).

39. Ἐὰν $4\eta\mu^2 x - 2(1+\sqrt{3})\,\eta\mu x + \sqrt{3} = 0$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοί :

ημ2x, συν2x, εφ2x

40. Ἐὰν συνα $= \dfrac{1}{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συν3α.

41. Ἐὰν ημα $= \dfrac{3}{5}$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ3α.

42. Ἐὰν εφα $= 3$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ3α.

43. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

1. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$,
2. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$,
3. $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu 2\alpha$,
4. $\sigma\varphi\,\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha$,
5. $\dfrac{\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$,
6. $\dfrac{1+\sigma\varphi^2\alpha}{2\sigma\varphi\alpha} = \sigma\tau\varepsilon\mu 2\alpha$,
7. $\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha+1}{\sigma\varphi^2\alpha-1} = \tau\varepsilon\mu 2\alpha$,
8. $\varepsilon\varphi(45^0-\alpha) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$,
9. $\sigma\varphi(45^0+\alpha) = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}$.

Πότε ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ τὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων ;

44. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

1. $\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\equiv\eta\mu 2\alpha,$
2. $\varepsilon\varphi(45^0+\alpha)-\varepsilon\varphi(45^0-\alpha)=2\varepsilon\varphi 2\alpha,$
3. $\varepsilon\varphi(45^0+\alpha)+\varepsilon\varphi(45^0-\alpha)=2\tau\varepsilon\mu 2\alpha,$
4. $1-2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\equiv\eta\mu\alpha,$
5. $\frac{1-\varepsilon\varphi^2(45^0-\alpha)}{1+\varepsilon\varphi^2(45^0-\alpha)}=\eta\mu\, 2\alpha,$
6. $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}=2\varepsilon\varphi 2\alpha,$
7. $\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha,$
8. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$
9. $\varepsilon\varphi\,(\alpha+30^0)\,\varepsilon\varphi\,(\alpha-30^0)=\frac{1-2\sigma\upsilon\nu\, 2\alpha}{1+2\sigma\upsilon\nu\, 2\alpha}.$

Πότε ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ τὰ μέλη τῶν 5, 6, 7, 8, 9 ;

45. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

1. $\frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha}-\frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=2,$
2. $\frac{3\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{3\eta\mu\alpha-\eta\mu 3\alpha}=\sigma\varphi^3\alpha.$
3. $\frac{\eta\mu 3\alpha+\eta\mu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}=\sigma\varphi\alpha.$
4. $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha-\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^3\alpha+\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha}=3.$
5. $4\eta\mu^3\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha+4\sigma\upsilon\nu^3\alpha\,\eta\mu 3\alpha\equiv 3\eta\mu 4\alpha.$
6. $\sigma\upsilon\nu^3\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\eta\mu^3\alpha\,\eta\mu 3\alpha\equiv\sigma\upsilon\nu^3 2\alpha.$
7. $4\eta\mu\alpha\,\eta\mu\,(60^0+\alpha)\,\eta\mu\,(60^0-\alpha)\equiv\eta\mu 3\alpha.$
8. $4\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,(60^0+\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\,(60^0-\alpha)\equiv\sigma\upsilon\nu 3\alpha.$
9. $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\,(60^0+\alpha)\,\varepsilon\varphi\,(60^0-\alpha)=\varepsilon\varphi 3\alpha.$
10. $\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\,(60^0+\alpha)-\sigma\varphi\,(60^0-\alpha)=3\sigma\varphi 3\alpha.$
11. $\varepsilon\varphi 3\alpha-\varepsilon\varphi 2\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi 3\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha\,\varepsilon\varphi\alpha.$

Πότε ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ τὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων;

46. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ταυτότητες :

1. $\frac{\varepsilon\varphi^2 2x}{2+\varepsilon\varphi^2 2x}=\frac{2\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^4 x}$
2. $\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x=\frac{2(3+\sigma\upsilon\nu 4x)}{1-\sigma\upsilon\nu 4x}$
3. $\frac{1}{\varepsilon\varphi 3\alpha-\varepsilon\varphi\alpha}-\frac{1}{\sigma\varphi 3\alpha-\sigma\varphi\alpha}=\sigma\varphi 2\alpha$
4. $\frac{\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha-\sigma\varphi 3\alpha}+\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi 3\alpha}=1$
5. $\frac{1}{\varepsilon\varphi 3\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}-\frac{1}{\sigma\varphi 3\alpha+\sigma\varphi\alpha}=\sigma\varphi 4\alpha$
6. $4\,(\sigma\upsilon\nu^6\alpha+\eta\mu^6\alpha)\equiv 1+3\,\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha.$

Πότε ἔχουν ἔννοιαν άριθμου τὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων;

47. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu^2 72^0-\eta\mu^2 60^0=\frac{\sqrt{5}-1}{8}$
2. $\eta\mu\frac{\pi}{10}+\eta\mu\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{2}$
3. $\eta\mu\frac{\pi}{10}\,\eta\mu\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{4}$
4. $\eta\mu\frac{\pi}{5}\,\eta\mu\frac{2\pi}{5}\,\eta\mu\frac{3\pi}{5}\,\eta\mu\frac{4\pi}{5}=+\frac{5}{16}$

48. Ἐὰν $\alpha = 18^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 4\alpha + 3\sigma\upsilon\nu 6\alpha + 4\,\sigma\upsilon\nu 8\alpha = -\dfrac{4\sqrt{5}+2}{4}$,

2. $\dot{\eta}\mu^2\alpha + 2\eta\mu^2 2\alpha + 3\eta\mu^2 3\alpha + 4\eta\mu^2 4\alpha = \dfrac{21+2\sqrt{5}}{4}$,

3. $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{16}$,

4. $\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi 2\alpha\,\varepsilon\varphi 3\alpha\,\varepsilon\varphi 5\alpha = 1$

49. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις :

1. $E = 3 - 4\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 4\alpha$, 2. $\dfrac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$,

3. $4(\sigma\upsilon\nu^6\alpha + \eta\mu^6\alpha) - 3\,(\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha)^2$.

14. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Συναρτήσει τῆς εφα νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 2α.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu^2\alpha = \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k\in Z)$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\eta\mu\,2\alpha = 2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\,\varepsilon\varphi\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2\,\varepsilon\varphi\alpha\cdot\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha},$$

$$\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} - \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha},$$

$$\varepsilon\varphi\,2\alpha = \frac{\eta\mu\,2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,2\alpha} = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k_2\pi$$

$$\sigma\varphi\,2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\,\varepsilon\varphi\alpha}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \neq (2\,k_3+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k_4\pi, \; (k_1,k_2,k_3,k_4\in Z)$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες ἔχομεν :

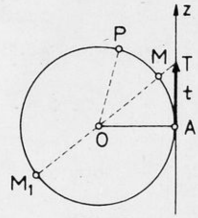
$\boldsymbol{\eta\mu\,2\alpha = \dfrac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi\,2\alpha = \dfrac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}}$
$\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\,2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi\,2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\,\varepsilon\varphi\alpha}}$

29

Οἱ τύποι οὗτοι εἶναι **ρηταὶ ἐκφράσεις** τῶν ημ 2α, . . . συναρτήσει τῆς εφα.

15. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν τύπων 29. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων καὶ ΑΖ ὁ ἄξων τῶν ἐφαπτομένων. Ἐὰν $t = \varepsilon\varphi\alpha = \overline{AT}$ εἶναι μία τιμὴ τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα M καὶ M_1 τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (O), τότε τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐφαπτομένην $t = \overline{AT}$ περατοῦνται εἰς τὸ σημεῖον M ἢ M_1. Ἄρα αἱ τιμαὶ αὐτῶν θὰ εἶναι $\alpha + k\pi$, ὅπου $k \in Z$.

Τὰ διπλάσια τόξα θὰ ἔχουν τιμὰς $2(\alpha + k\pi) = 2\alpha + 2k\pi$ καὶ θὰ περατοῦνται **ἅπαντα** εἰς τὸ σημεῖον P.



Σχ. 2

Ἐὰν λοιπὸν γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον T, εἶναι ἀμέσως γνωστὸν καὶ τὸ σημεῖον P. Ἄρα οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου AP εἶναι τελείως ὡρισμένοι.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν εἶναι γνωστὸν τὸ σημεῖον P, εἶναι γνωστὸν ἀμέσως καὶ τὸ σημεῖον T, ἄρα καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου AM ἢ τοῦ τόξου AM_1. Δηλαδὴ ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου 2α εἶναι γνωστὴ ἡ εφα.

Οὕτως, εἶναι : $\dfrac{1 - \text{συν}\,2\alpha}{\text{ημ}\,2\alpha} = \dfrac{2\,\text{ημ}^2\alpha}{2\,\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha} = \text{εφ}\alpha = \dfrac{\text{ημ}\,2\alpha}{1 + \text{συν}\,2\alpha}$.

16. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Συναρτήσει τῆς εφ $\frac{\alpha}{2}$ νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας α.

Λύσις : Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους 29 ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν α διὰ τῆς γωνίας $\frac{\alpha}{2}$, λαμβάνομεν τοὺς τύπους.

$\text{ημ}\alpha = \dfrac{2\,\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\text{εφ}\alpha = \dfrac{2\,\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}{1 - \text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}$
$\text{συν}\alpha = \dfrac{1 - \text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}$	$\text{σφ}\alpha = \dfrac{1 - \text{εφ}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\text{εφ}\frac{\alpha}{2}}$

30

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας α ἐκφράζονται **ρητῶς** διὰ τῆς εφ $\frac{\alpha}{2}$.

Οἱ τύποι τῆς πρώτης στήλης ἔχουν ἔννοιαν διά : $\alpha \neq \pm\pi + 2k\pi$.

Ὁ πρῶτος τῆς δευτέρας στήλης ἔχει ἔννοιαν διά :

$$\alpha \neq (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + 2k_2\pi.$$

Ὁ δεύτερος τῆς δευτέρας στήλης ἔχει ἔννοιαν διά :

$$\alpha \neq (k_3 + 1)\pi \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq \pi + 2k_4\pi,$$

ἔνθα $(k, k_1, k_2, k_3, k_4 \in Z)$.

17. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. — Συναρτήσει τοῦ συν 2α νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας α.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\text{συν}\,2\alpha = 1 - 2\,\text{ημ}^2\alpha \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\,2\alpha = 2\,\text{συν}^2\alpha - 1$$

Ἐκ τούτων λαμβάνομεν :

$$\text{ημ}^2\alpha = \frac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \text{ημ}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}}$$

καὶ

$$\text{συν}^2\alpha = \frac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \text{συν}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}}$$

Θὰ εἶναι δὲ καί :

$$\text{εφ}^2\alpha = \frac{1-\text{συν}\,2\alpha}{1+\text{συν}\,2\alpha}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \neq \pm\frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in Z)$$

καὶ

$$\text{σφ}^2\alpha = \frac{1+\text{συν}\,2\alpha}{1-\text{συν}\,2\alpha}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \neq k_1\pi \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq 2\,k_2\pi, \qquad (k_1, k_2 \in Z).$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες ἔχομεν :

$\boldsymbol{\text{ημ}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}}}$	$\boldsymbol{\text{εφ}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\text{συν}\,2\alpha}{1+\text{συν}\,2\alpha}}}$
$\boldsymbol{\text{συν}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}}}$	$\boldsymbol{\text{σφ}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\text{συν}\,2\alpha}{1-\text{συν}\,2\alpha}}}$

31

Ἐκ τῶν ἀνωτέρων φαίνεται ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσαρας λύσεις, τάς :

$$1.\ \begin{cases} \text{ημ}\alpha = +\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}} \\ \text{συν}\alpha = +\sqrt{\dfrac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} \text{ημ}\alpha = -\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}} \\ \text{συν}\alpha = -\sqrt{\dfrac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}} \end{cases}$$

31α

$$2.\ \begin{cases} \text{ημ}\alpha = +\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}} \\ \text{συν}\alpha = -\sqrt{\dfrac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} \text{ημ}\alpha = -\sqrt{\dfrac{1-\text{συν}\,2\alpha}{2}} \\ \text{συν}\alpha = +\sqrt{\dfrac{1+\text{συν}\,2\alpha}{2}} \end{cases}$$

18. Γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν λύσεων τούτων. Τὸ διπλοῦν πρόσημον τῶν ἀνωτέρω τύπων ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς :

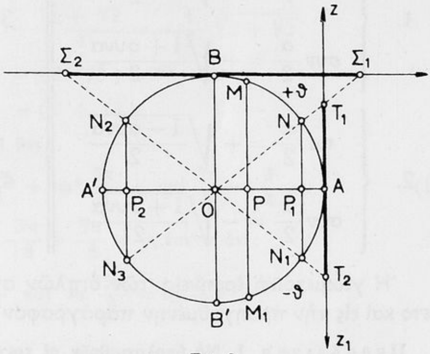
Ἔστω ὅτι εἶναι : $\text{συν}\,2\alpha = \mu = \overline{OP}$, καὶ $\widehat{AM} = \theta$ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον, τοῦ ὁποίου τὸ συνημίτονον εἶναι μ.

Ἐαν M_1 εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸν ἄξονα A'OA, τότε καὶ τὸ τόξον $AA'M_1$ ἔχει τὸ αὐτὸ συνημίτονον $\mu = \overline{OP}$.

Ἡ τιμὴ παντὸς ἄλλου τόξου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὸ A καὶ πέρας τὸ σημεῖον M ἢ M_1, θὰ εἶναι :

$$2\alpha = \pm\,\theta + 2\,k\pi.$$

Ἄρα : $\quad \alpha = \pm\,\dfrac{\theta}{2} + k\pi. \qquad (1)$



Σχ. 3

Ἐὰν $\mathbf{k = 2\nu}$, τότε $\alpha = \pm\,\dfrac{\theta}{2} + 2\nu\pi$,

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα περατοῦνται εἰς τὰ σημεῖα N καὶ N_1, ἔνθα N καὶ N_1 τὰ μέσα τῶν τόξων AM καὶ AN_1M_1.

Ἐὰν $\mathbf{k = 2\nu + 1}$, τότε ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$\alpha = \pm\,\frac{\theta}{2} + (2\nu + 1)\,\pi = \pm\,\frac{\theta}{2} + \pi + 2\nu\pi, \qquad (2)$$

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα περατοῦνται εἰς τὰ σημεῖα N_3 καὶ N_2, ἀντιδιαμετρικὰ τῶν N καὶ N_1 ἀντιστοίχως.

Τὰ ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν τόξων AN, AN_2, AN_3, AN_1 εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Τὰ τόξα AN, AN_2 καὶ AN_3, AN_1 ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, ἀλλὰ τὰ συνημίτονά των εἶναι ἀντίθετα.

Τὰ τόξα AN καὶ AN_3 ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην $\overline{AT_1}$ καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην $\overline{B\Sigma_1}$, ἐνῷ τὰ τόξα AN_2 καὶ AN_1 ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην $\overline{AT_2}$ (ἀρνητικὴν) καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην $\overline{B\Sigma_2}$ (ἀρνητικήν).

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AT_1}$ καὶ $\overrightarrow{AT_2}$, εἶναι ἀντίρροπα, καθὼς καὶ τὰ $\overrightarrow{B\Sigma_1}$ καὶ $\overrightarrow{B\Sigma_2}$, μὲ ἀλγεβρικὰς τιμὰς ἀντιστοίχως ἀντιθέτους.

19. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Συναρτήσει τοῦ συνα νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας $\dfrac{\alpha}{2}$.

Λύσις : Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους 31 θέσωμεν ἀντὶ τῆς γωνίας α τὴν γωνίαν $\dfrac{\alpha}{2}$ λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$\eta\mu\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\varepsilon\varphi\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}}$
$\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{2}}$	$\sigma\varphi\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}}$

32

Ἐκ τούτων φαίνεται πάλιν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει τέσσαρας λύσεις, τάς :

$$1.\ \begin{cases} \eta\mu\dfrac{\alpha}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}=+\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 3.\ \begin{cases} \eta\mu\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases}$$

$$2.\ \begin{cases} \eta\mu\dfrac{\alpha}{2}=+\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} \eta\mu\dfrac{\alpha}{2}=-\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \\ \sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}=+\sqrt{\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \end{cases}$$

Ἡ γεωμετρικὴ ἑρμηνεία τῶν διπλῶν σημείων γίνεται καθ' ὃν τρόπον ἐγένετο καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος.

Παράδειγμα I. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 22°,5.

Λύσις : Ἐπειδὴ $0^\circ < 22^\circ,5 < 90^\circ$, ἕπεται ὅτι ὅλοι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου $22^\circ,5$ εἶναι θετικοί. Ἄρα :

$$\eta\mu 22^\circ,5 = \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 22^\circ,5 = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\, 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon\varphi 22^\circ,5 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4-2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\,(2-\sqrt{2})}{4-2} = \sqrt{2}-1$$

$$\sigma\varphi 22^\circ,5 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

Παράδειγμα II. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τοῦ τόξου 165°.

Λύσις : Ἐπειδὴ $270^\circ < 330^\circ < 360^\circ$, ἕπεται ὅτι : $135^\circ < 165^\circ < 180^\circ$ καὶ ἄρα τὸ τόξον 165° περατοῦται εἰς τὸ δεύτερον τεταρτημόριον. Θὰ ἔχῃ δὲ θετικὸν ἡμίτονον καὶ ἀρνητικὸν συνημίτονον. Οὕτω θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu 165^\circ = +\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu 330^\circ}{2}} = +\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

καὶ $$\sigma\upsilon\nu 165^\circ = -\sqrt{\frac{1+330^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

καὶ $$\varepsilon\varphi 165^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{4-3}}{(2+\sqrt{3})} = -\frac{1}{2+\sqrt{3}} = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$$

καὶ $$\sigma\varphi 165^\circ = -\frac{1}{2-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3})$$

Σημείωσις : Ἐπειδὴ $165^{0}+15^{0}=180^{0}$, ἕπεται ὅτι :

$$\eta\mu 165^{0} = \eta\mu 15^{0} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$\sigma\upsilon\nu 165^{0} = -\sigma\upsilon\nu 15^{0} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon\varphi 165^{0} = -\varepsilon\varphi 15^{0} = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$$

καὶ

$$\sigma\varphi 165^{0} = -\sigma\varphi 15^{0} = -(2+\sqrt{3})$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α III. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$A \equiv \eta\mu^4\frac{\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{3\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{5\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Λύσις : Ἐπειδὴ $\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{8}=\pi$, καὶ $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$, ἕπεται ὅτι :

$$\eta\mu\frac{7\pi}{8} = \eta\mu\frac{\pi}{8} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\frac{5\pi}{8} = \eta\mu\frac{3\pi}{8}$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$A \equiv 2\eta\mu^4\frac{\pi}{8} + 2\eta\mu^4\frac{3\pi}{8} = 2\cdot\left[\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}}{2}\right]^2 + 2\cdot\left[\frac{1-\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{2}\right]^2 =$$

$$= 2\cdot\left[\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right]^2 + 2\cdot\left[\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right]^2 = 2\cdot\frac{(2-\sqrt{2})^2}{16} + 2\cdot\frac{(2+\sqrt{2})^2}{16} =$$

$$= \frac{4-2\sqrt{2}+2}{8} + \frac{4+2\sqrt{2}+2}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α IV. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$B \equiv \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha+120^{0}) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha-120^{0}) = \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$B \equiv \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\alpha+240^{0})}{2} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\alpha-240^{0})}{2} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu(2\alpha+240^{0}) + \sigma\upsilon\nu(2\alpha-240^{0})\right] =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 240^{0}\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha(-\sigma\upsilon\nu 60^{0})\right] =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu 2\alpha - 2\cdot\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(0) = \frac{3}{2}.$$

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς γωνίας $\frac{\alpha}{2}$ νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας α.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\eta\mu 2\alpha = 2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha,$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha = 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1,$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\,\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}, \quad \text{καὶ} \quad \sigma\varphi 2\alpha = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{2\,\varepsilon\varphi\alpha}.$$

Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους τούτους ἀντικαταστήσωμεν ὅπου α τὸ $\dfrac{\alpha}{2}$, λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$\eta\mu\alpha \equiv 2\,\eta\mu\dfrac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha}{2}$	$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{2\,\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\dfrac{\alpha}{2}}$
$\sigma\upsilon\nu\alpha \equiv \sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2}-\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$ $\equiv 1-2\,\eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$ $\equiv 2\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha}{2}-1$	$\sigma\varphi\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}}$

Πότε ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ οἱ δύο τελευταῖοι τύποι ;

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

I. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$A \equiv \frac{1+\eta\mu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta} = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$A \equiv \frac{1+2\,\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}-\left(1-2\,\eta\mu^2\dfrac{\theta}{2}\right)}{1+2\,\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}+2\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta}{2}-1} = \frac{2\,\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}+2\,\eta\mu^2\dfrac{\theta}{2}}{2\,\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}+2\,\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}+\eta\mu\dfrac{\theta}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}\left(\eta\mu\dfrac{\theta}{2}+\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}\right)} = \frac{\eta\mu\dfrac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}, \qquad \text{ἂν } \theta \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ καὶ } \theta \neq 2k_1\pi+\frac{\pi}{2}$$

II. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\quad \varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta} \qquad (1)$

Ἀπόδειξις : Εἶναι :

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\left(\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}+\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\varphi\dfrac{\pi}{4}\,\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\left(1+\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1-\varepsilon\varphi\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\left(1+\dfrac{\eta\mu\dfrac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}}\right)^2}{\left(1-\dfrac{\eta\mu\dfrac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta}{2}}\right)^2} =$$

$$=\frac{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}+\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}-\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)^2}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta}{2}+2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2}+\eta\mu^2\frac{\theta}{2}-2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}$$

Πότε ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ ὁ τύπος (1) ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

50. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἰσότητες :

1. $\dfrac{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}+1}{\sigma\varphi\frac{\theta}{2}-1}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta}$, 2. $\tau\varepsilon\mu\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$,

3. $\varepsilon\varphi\alpha+\tau\varepsilon\mu\alpha=\sigma\varphi\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$, 4. $\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}}{\eta\mu\alpha+\eta\mu\frac{\alpha}{2}}=\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}$,

5. $\dfrac{\eta\mu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}\cdot\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$, 6. $\dfrac{\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$

7. $\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2}-\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}=2\sigma\varphi\alpha$, 8. $\varepsilon\varphi\left(45^0+\dfrac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1+\eta\mu\alpha}{1-\eta\mu\alpha}}$.

Πότε τὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ ;

51. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2\equiv4\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

2. $(\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta)^2\equiv4\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

3. $(\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta)^2+(\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta)^2\equiv4\eta\mu^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

4. $\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{2}\right)-\eta\mu^2\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\equiv\dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta\mu\alpha$.

52. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι : $\sigma\upsilon\nu315^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\eta\mu(157^0\,30')$ κα $\sigma\upsilon\nu(157^0\,30')$.

53. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, 2. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$,

3. $\eta\mu\dfrac{\pi}{32}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, 4. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{32}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$,

. . . .

54. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu\dfrac{\pi}{24}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, 2. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{24}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

3. $\eta\mu\dfrac{\pi}{48}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$, 4. $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{48}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

. . . .

55. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu 9^{0} = \sigma\upsilon\nu 81^{0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right),$

2. $\sigma\upsilon\nu 9^{0} = \eta\mu 81^{0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right).$

56. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu 27^{0} = \sigma\upsilon\nu 63^{0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right),$

2. $\sigma\upsilon\nu 27^{0} = \eta\mu 63^{0} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right).$

57. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι : $48^0 = 18^0 + 30^0$ καὶ $3^0 = 48^0 - 45^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu 48^{0} = \sigma\upsilon\nu 42^{0} = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{8}(-1+\sqrt{5}),$

2. $\eta\mu 24^{0} = \sigma\upsilon\nu 66^{0} = \frac{\sqrt{3}}{8}(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$

3. $\eta\mu 12^{0} = \sigma\upsilon\nu 78^{0} = \frac{1}{8}\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{8}(-1+\sqrt{5}),$

4. $\eta\mu 6^{0} = \sigma\upsilon\nu 84^{0} = \frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{10-2\sqrt{5}} - \frac{1}{8}(1+\sqrt{5}).$

58. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4},$ 2. $\eta\mu^4\frac{\pi}{8} + \eta\mu^4\frac{3\pi}{8} = \frac{3}{4},$

3. $\sigma\upsilon\nu^4\frac{\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{3\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{5\pi}{8} + \sigma\upsilon\nu^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2},$

4. $\sigma\upsilon\nu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) + \sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) + \sigma\upsilon\nu^4\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = \frac{3}{2},$

5. $\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{1}{8}$

59. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu y = \frac{\beta}{\gamma+\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2} + \varepsilon\varphi^2\frac{y}{2} + \varepsilon\varphi^2\frac{\omega}{2} = 1.$$

60. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 0$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος :

$$K \equiv \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\beta + \sigma\upsilon\nu 3\gamma}.$$

61. Ἐὰν $\eta\mu x + \eta\mu y + \eta\mu\omega = 0$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος :

$$\Lambda \equiv \frac{\eta\mu x\,\eta\mu y\,\eta\mu\omega}{\eta\mu 3x + \eta\mu 3y + \eta\mu 3\omega}.$$

62. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\varepsilon\varphi\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon\varphi\left(\beta-\gamma+\frac{\pi}{3}\right) + \varepsilon\varphi\left(\gamma-\alpha+\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \varepsilon\varphi\left(\alpha-\beta+\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\left(\beta-\gamma+\frac{\pi}{3}\right)\varepsilon\varphi\left(\gamma-\alpha+\frac{\pi}{3}\right).$$

63. Ἐὰν συν (α − β) ημ (γ − δ) = συν (α + β) ημ (γ + δ), τότε :

$$σφδ = σφα\, σφβ\, σφγ.$$

64. Ἐὰν αημω ημφ ± βσυνω συνφ = 0, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$K \equiv \frac{1}{αημ^2ω + βσυν^2ω} + \frac{1}{αημ^2φ + βσυν^2φ}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν ω καὶ φ, ἂν $αβ \neq 0$ καὶ $α \neq β$.

65. Ἐὰν $0 < α, β, γ < \frac{π}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$ημ(α + β + γ) < ημα + ημβ + ημγ.$$

66. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$α^2εφ^2θ + β^2σφ^2θ > 2αβ,$$

ἐκτὸς ἐὰν $αεφ^2θ = β$.

67. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1 + ημ^2α + ημ^2β > ημα + ημβ + ημα\, ημβ.$$

68. Ἐὰν α + β + γ = 0, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\, σφ(γ + α − β)\, σφ(α + β − γ) = 1$$

69. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\, σφ(2α + β − 3γ)\, σφ(2β + γ − 3α) = 1.$$

70. Ἐὰν xy + yω + ωx = 1, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma\, x(1 − y^2)(1 − ω^2) = 4xyω.$$

71. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(2συνθ − 1)(2συν2θ − 1)(2συν4θ − 1)\dots(2συν2^{ν-1}θ − 1) = \frac{2συν2^ν θ + 1}{2συνθ + 1}.$$

21. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.*— Συναρτήσει τῆς εφα νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $εφ\frac{α}{2}$.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι :

$$εφα = \frac{2\,εφ\frac{α}{2}}{1 − εφ^2\frac{α}{2}}. \qquad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $εφ\frac{α}{2} = x$, ἡ (1) γίνεται :

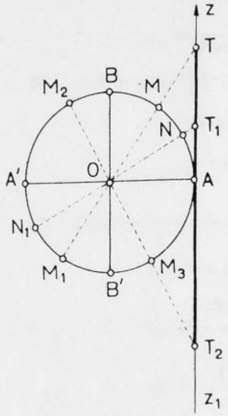
$$εφα = \frac{2x}{1 − x^2}, \quad ἐξ\ οὗ : \quad x^2 εφα + 2x − εφα = 0 \qquad (2)$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\boxed{x = εφ\frac{α}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}} \qquad (3) \qquad \mathbf{34}$$

Διερεύνησις : Ἐκ τοῦ τύπου (34) φαίνεται ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

Εἰς μίαν τιμὴν τῆς εφα, ἀντιστοιχούσης εἰς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$, ἔχον μῆκος $\overline{AT}$, ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα $\widehat{AM}$ καὶ $\widehat{A'M_1}$, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον O, τῶν ὁποίων αἱ τιμαὶ εἶναι :



Σχ. 4

$$\alpha = \theta + k\pi \tag{4}$$

ὅπου $\widehat{AM} = \theta$ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον. Ἄρα :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{2} \tag{5}$$

Ἐὰν $\mathbf{k = 2\nu}$, ἡ (5) γράφεται :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \nu\pi \tag{6}$$

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα περατοῦνται εἰς τὰ σημεῖα N καὶ N_1 καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, τὴν παριστανομένην ὑπὸ τοῦ τμήματος AT_1.

Ἐὰν $\mathbf{k = 2\nu + 1}$, ἡ (5) γίνεται :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} + \nu\pi \tag{7}$$

καὶ τὰ ἀντίστοιχα τόξα περατοῦνται εἰς τὰ σημεῖα M_2 καὶ M_3 καὶ ἔχουν ἐφαπτομένην τὸ μῆκος $\overline{AT_2}$.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον T_1OT_2 εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ O, θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{AT_1} \cdot \overline{AT_2} = -\overline{OA}^2 = -\overline{OB}^2$$

ἤ

$$\frac{\overline{AT_1}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{AT_2}}{\overline{OB}} = -1 \tag{8}$$

Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν x', x'' τῆς (2) εἶναι :

$$x'\,x'' = -\frac{\text{εφ}\alpha}{\text{εφ}\alpha} = -1$$

καὶ ἑπομένως ἀληθεύει ἡ (8).

Ἐάν, ἀντὶ τῆς εφα, δοθῇ τὸ τόξον α, τότε ἡ παράστασις $\sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, διὰ εφα $\neq 0$. Ἄρα :

1. Ἐὰν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, τότε : $\left\{\begin{array}{l} \text{εφ}\alpha > 0 \\ \text{εφ}\,\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \text{εφ}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}}{\text{εφ}\alpha}$

2. Ἐὰν $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, τότε : $\left\{\begin{array}{l} \text{εφ}\alpha < 0 \\ \text{εφ}\,\frac{\alpha}{2} > 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \text{εφ}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 - \sqrt{1 + \text{εφ}^2\alpha}}{\text{εφ}\alpha}$

3. Ἐὰν $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, τότε : $\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha > 0 \\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} < 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}$

4. Ἐὰν $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, τότε : $\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\varphi\alpha < 0 \\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} < 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha}.$

Παράδειγμα: Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\varepsilon\varphi 4800^0 = -\sqrt{3}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\varepsilon\varphi 2400^0$.

Λύσις: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πέρας τοῦ τόξου 2400^0, γράφομεν :

$$2400^0 = 360^0 \cdot 6 + 240^0.$$

Ἄρα τὸ τόξον 2400^0 περατοῦται εἰς τὸ τρίτον τεταρτημόριον.

Τὸ ἡμίτονόν του εἶναι ἀρνητικὸν καθὼς καὶ τὸ συνημίτονόν του. Ἡ ἐφαπτομένη του εἶναι θετικὴ κατ' ἀκολουθίαν

$$\varepsilon\varphi\, 2400^0 = \frac{-1-\sqrt{1+3}}{-\sqrt{3}} = \frac{-1-2}{-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Κατ' ἄλλον τρόπον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$\varepsilon\varphi 2400^0 = \varepsilon\varphi(360^0 \cdot 6 + 240^0) = \varepsilon\varphi 240^0 = \varepsilon\varphi(180^0 + 60^0) = \varepsilon\varphi 60^0 = \sqrt{3}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\sigma\upsilon\nu 2400^0 = \frac{1}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2400^0}} = \frac{1}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\eta\mu 2400^0 = \frac{\varepsilon\varphi 2400^0}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 2400^0}} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{1+3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

22. Μετασχηματισμὸς ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς δύο ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων εἰς γινόμενον ἢ πηλίκον.

α) Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\eta\mu\,(\alpha+\beta)\equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha, \qquad \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)\equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta,$$
$$\eta\mu\,(\alpha-\beta)\equiv \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha, \qquad \sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)\equiv \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta.$$

Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\eta\mu\,(\alpha+\beta)+\eta\mu\,(\alpha-\beta)\equiv 2\,\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta, \tag{1}$$
$$\eta\mu\,(\alpha+\beta)-\eta\mu\,(\alpha-\beta)\equiv 2\,\eta\mu\beta\,\sigma\upsilon\nu\alpha, \tag{2}$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)\equiv 2\,\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta, \tag{3}$$
$$\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta)-\sigma\upsilon\nu\,(\alpha-\beta)\equiv -2\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta=2\,\eta\mu\alpha\,\eta\mu\,(-\beta). \tag{4}$$

Ἐὰν θέσωμεν :

$$\left.\begin{matrix}\alpha+\beta=A\\ \alpha-\beta=B\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix}2\alpha=A+B\\ 2\beta=A-B\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix}\alpha=\dfrac{A+B}{2}\\ \beta=\dfrac{A-B}{2}\end{matrix}\right\} \text{ καὶ } -\beta=\frac{B-A}{2},$$

ὁπότε αἱ (1), (2), (3), (4) γίνονται :

$\eta\mu A+\eta\mu B\equiv 2\,\eta\mu\,\dfrac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A-B}{2}$	**35**
$\eta\mu A-\eta\mu B\equiv 2\,\eta\mu\,\dfrac{A-B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A+B}{2}$	**36**
$\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B\equiv 2\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{A-B}{2}$	**37**
$\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B\equiv 2\,\eta\mu\,\dfrac{A+B}{2}\,\eta\mu\,\dfrac{B-A}{2}$	**38**

β) Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=\frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}+\frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\eta\mu\,(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B},$$

καθόσον θὰ εἶναι $A \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ καὶ $B \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi$, $(k, k_1 \in Z)$

$$\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} - \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu A\, \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu B\, \sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu\,(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B}.$$

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B\, \sigma\upsilon\nu A + \eta\mu A\, \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\, \eta\mu B} = \frac{\eta\mu\,(A+B)}{\eta\mu A\, \eta\mu B}.$$

καθόσον θὰ εἶναι $A \neq (k_2+1)\,\pi$ καὶ $B \neq (k_3+1)\,\pi$, $(k_2, k_3 \in Z)$

$$\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} - \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu B\, \sigma\upsilon\nu A - \eta\mu A\, \sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\, \eta\mu B} = \frac{\eta\mu\,(B-A)}{\eta\mu A\, \eta\mu B}.$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες ἔχομεν :

39	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \dfrac{\eta\mu\,(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \dfrac{\eta\mu\,(A+B)}{\eta\mu A\, \eta\mu B}}$	41
40	$\boldsymbol{\varepsilon\varphi A - \varepsilon\varphi B = \dfrac{\eta\mu\,(A-B)}{\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B}}$	$\boldsymbol{\sigma\varphi A - \sigma\varphi B = \dfrac{\eta\mu\,(B-A)}{\eta\mu A\, \eta\mu B}}$	42

23. Εἰδικαὶ περιπτώσεις.

α) $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A + \eta\mu\,(90^0 - A) \equiv 2\,\eta\mu\, 45^0\, \sigma\upsilon\nu\,(A - 45^0)$. (1)

Ἐπειδή : $2\,\eta\mu\, 45^0 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\,(A - 45^0) \equiv \sigma\upsilon\nu\,(45^0 - A) \equiv \eta\mu\,(45^0 + A)$, ἡ (1) γίνεται :

$$\boxed{\boldsymbol{\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \equiv \sqrt{2}\, \sigma\upsilon\nu\,(45^0 - A) \equiv \sqrt{2}\, \eta\mu\,(45^0 + A)}} \quad 43$$

β) $\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv \eta\mu A - \eta\mu\,(90^0 - A) \equiv 2\,\eta\mu\,(A - 45^0)\,\sigma\upsilon\nu\, 45^0 \equiv$

$\equiv \sqrt{2}\,\eta\mu\,(A - 45^0) \equiv -\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^0 - A) \equiv -\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\,(45^0 + A)$.

Ὥστε θὰ εἶναι :

$$\boxed{\boldsymbol{\eta\mu A - \sigma\upsilon\nu A \equiv -\sqrt{2}\, \eta\mu\,(45^0 - A) \equiv -\sqrt{2}\, \sigma\upsilon\nu\,(45^0 + A)}} \quad 44$$

γ) $1 + \eta\mu A \equiv \eta\mu\, 90^0 + \eta\mu A \equiv 2\,\eta\mu\left(45^0 + \frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι :

$\eta\mu\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) \equiv \sigma\upsilon\nu\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)$, θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\boldsymbol{1 + \eta\mu A \equiv 2\,\eta\mu^2\left(45^0 + \frac{A}{2}\right) \equiv 2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(45^0 - \frac{A}{2}\right)}} \quad 45$$

δ) Ὁμοίως θὰ εἶναι καί :

$$1-\eta\mu A \equiv \eta\mu 90^0 - \eta\mu A \equiv 2\eta\mu\left(45^0-\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(45^0+\frac{A}{2}\right)$$

$$\equiv 2\eta\mu^2\left(45^0-\frac{A}{2}\right) \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\left(45^0+\frac{A}{2}\right)$$

Δηλαδή :

$$\boxed{1-\eta\mu A \equiv 2\,\eta\mu^2\left(45^0-\frac{A}{2}\right) \equiv 2\,\sigma\upsilon\nu^2\left(45^0+\frac{A}{2}\right)} \qquad \textbf{46}$$

ε) Ἐπίσης εἶναι :

$$1+\sigma\upsilon\nu A \equiv \sigma\upsilon\nu 0^0 + \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{0^0+A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{0^0-A}{2} \equiv 2\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{A}{2}$$

καὶ $$1-\sigma\upsilon\nu A \equiv \sigma\upsilon\nu 0^0 - \sigma\upsilon\nu A \equiv 2\eta\mu\,\frac{0^0+A}{2}\,\eta\mu\,\frac{A-0^0}{2} \equiv 2\eta\mu^2\,\frac{A}{2}$$

Ἄρα :

$$\boxed{1+\sigma\upsilon\nu A \equiv 2\,\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{A}{2}} \quad \boxed{1-\sigma\upsilon\nu A \equiv 2\,\eta\mu^2\,\frac{A}{2}} \qquad \textbf{47}$$

στ) Ἐὰν $A \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in Z$ θὰ ἔχωμεν :

$$1+\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 45^0 + \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu(45^0+A)}{\sigma\upsilon\nu 45^0\ \sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\ \eta\mu(45^0+A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^0-A)}{\sigma\upsilon\nu A}$$

καὶ $$1-\varepsilon\varphi A = \varepsilon\varphi 45^0 - \varepsilon\varphi A = \frac{\eta\mu(45^0-A)}{\sigma\upsilon\nu 45^0\ \sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\ \eta\mu(45^0-A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45+A)}{\sigma\upsilon\nu A}$$

Ὥστε :

$$\boxed{1+\varepsilon\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^0+A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\,(45^0-A)}{\sigma\upsilon\nu A}} \qquad \textbf{48}$$

$$\boxed{1-\varepsilon\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^0-A)}{\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\,(45^0+A)}{\sigma\upsilon\nu A}} \qquad \textbf{49}$$

ζ) Ἐὰν $A \neq (k+1)\,\pi,\ k\in Z$, ἐργαζόμενοι ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\boxed{1+\sigma\varphi A = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^0+A)}{\eta\mu A} = \frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\,(45^0-A)}{\eta\mu A}} \qquad \textbf{50}$$

$$\boxed{1-\sigma\varphi A = -\frac{\sqrt{2}\,\eta\mu\,(45^0-A)}{\eta\mu A} = -\frac{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\,(45+A)}{\eta\mu A}} \qquad \textbf{51}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

α) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\mathbf{A \equiv \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 3\alpha)(\eta\mu 8\alpha + \eta\mu 2\alpha)}{\eta\mu 5\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu 4\alpha - \sigma\upsilon\nu 6\alpha)}}.$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$A \equiv \frac{2\eta\mu\dfrac{\alpha+3\alpha}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{3\alpha-\alpha}{2}\cdot 2\eta\mu\dfrac{8\alpha+2\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{8\alpha-2\alpha}{2}}{2\eta\mu\dfrac{5\alpha-\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\alpha+\alpha}{2}\cdot 2\eta\mu\dfrac{4\alpha+6\alpha}{2}\,\eta\mu\dfrac{6\alpha-4\alpha}{2}}$$

$$= \frac{2\eta\mu 2\alpha\,\eta\mu\alpha\cdot 2\eta\mu 5\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{2\eta\mu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha\cdot 2\eta\mu 5\alpha\,\eta\mu\alpha} = 1, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \neq k\pi, \quad \alpha \neq k_1\cdot\frac{\pi}{5}, \quad \alpha \neq k_2\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha \neq (2k_3+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{ἔνθα} \quad (k, k_1, k_2, k_3 \in Z).$$

β) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα :

$$\mathbf{B \equiv \frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 5\alpha + \eta\mu 9\alpha - \eta\mu 13\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha - \sigma\upsilon\nu 9\alpha + \sigma\upsilon\nu 13\alpha}}.$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$B \equiv \frac{(\eta\mu 9\alpha + \eta\mu\alpha) - \eta\mu 13\alpha + \eta\mu 5\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 5\alpha) - (\sigma\upsilon\nu 9\alpha - \sigma\upsilon\nu 13\alpha)} = \frac{2\eta\mu 5\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha - 2\eta\mu 9\alpha\,\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{2\eta\mu 3\alpha\,\eta\mu 2\alpha - 2\eta\mu 11\alpha\,\eta\mu 2\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha\,(\eta\mu 5\alpha - \eta\mu 9\alpha)}{\eta\mu 2\alpha\,(\eta\mu 3\alpha - \eta\mu 11\alpha)} = \frac{\sigma\upsilon\nu 4\alpha\cdot 2\eta\mu 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{\eta\mu 2\alpha\cdot 2\eta\mu 4\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu 7\alpha} = \sigma\varphi 4\alpha,$$

ἂν $\quad \eta\mu 2\alpha \neq 0, \quad \eta\mu 4\alpha \neq 0, \quad \sigma\upsilon\nu 7\alpha \neq 0$

ἢ
$$\left.\begin{aligned} &2\alpha \neq k\pi \\ &4\alpha \neq k_1\pi \\ &7\alpha \neq k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} &\alpha \neq k\,\frac{\pi}{2} \\ &\alpha \neq k_1\,\frac{\pi}{4} \\ &\alpha \neq (2k_2+1)\frac{\pi}{14} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &k \in Z \\ &k_1 \in Z \\ &k_2 \in Z \end{aligned}$$

γ) Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις :

$$\mathbf{A \equiv \eta\mu x + \eta\mu y + \eta\mu\omega - \eta\mu(x+y+\omega).}$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$A \equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} + 2\eta\mu\frac{\omega - x - y - \omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega + x + y + \omega}{2}$$

$$\equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} - 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\omega+x+y}{2}$$

$$\equiv 2\eta\mu\frac{x+y}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{x-y}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{2\omega+x+y}{2}\right] \equiv$$

$$\equiv 2ημ\,\frac{x+y}{2}\cdot 2ημ\,\frac{x-y+2ω+x+y}{4}\,ημ\,\frac{2ω+x+y-x+y}{4}$$

$$\equiv 4ημ\,\frac{x+y}{2}\,ημ\,\frac{x+ω}{2}\,ημ\,\frac{ω+y}{2}$$

Ἄρα :

$$\boxed{\mathbf{ημx+ημy+ημω-ημ(x+y+ω)\equiv 4\,ημ\,\frac{x+y}{2}\,ημ\,\frac{y+ω}{2}\,ημ\,\frac{ω+x}{2}}} \qquad \mathbf{52}$$

δ) Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις :

$$\mathbf{B\equiv συνx+συνy+συνω+συν\,(x+y+ω).}$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$B\equiv 2συν\,\frac{x+y}{2}\,συν\,\frac{x-y}{2}+2συν\,\frac{ω+x+y+ω}{2}\,συν\,\frac{ω-x-y-ω}{2}$$

$$\equiv 2\,συν\,\frac{x+y}{2}\,συν\,\frac{x-y}{2}+2συν\,\frac{x+y+2ω}{2}\,συν\,\frac{x+y}{2}$$

$$\equiv 2\,συν\,\frac{x+y}{2}\left[συν\,\frac{x-y}{2}+συν\,\frac{x+y+2ω}{2}\right]$$

$$\equiv 2\,συν\,\frac{x+y}{2}\cdot 2συν\,\frac{x-y+x+y+2ω}{4}\,συν\,\frac{x-y-x-y-2ω}{4}$$

$$\equiv 4\,συν\,\frac{x+y}{2}\,συν\,\frac{x+ω}{2}\,συν\,\frac{y+ω}{2}$$

Ἄρα:

$$\boxed{\mathbf{συνx+συνy+συνω+συν(x+y+ω)\equiv 4συν\,\frac{x+y}{2}\,συν\,\frac{y+ω}{2}\,συν\,\frac{ω+x}{2}}} \qquad \mathbf{53}$$

ε) Νὰ γίνῃ γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις :

$$\mathbf{A\equiv συν^2α+συν^2β+συν^2γ+συν^2\,(α+β+γ)-2.}$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$συν^2α+συν^2β=\frac{1+συν\,2α}{2}+\frac{1+συν\,2β}{2}=1+\frac{1}{2}\,[συν\,2α+συν\,2β]=$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot 2\,συν\,(α+β)\,συν\,(α-β)=1+συν\,(α+β)\,συν\,(α-β).$$

Ὁμοίως εἶναι :

$$συν^2γ+συν^2\,(α+β+γ)=\frac{1+συν\,2γ}{2}+\frac{1+συν2\,(α+β+γ)}{2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}\,[συν\,2γ+συν\,2\,(α+β+γ)]=1+συν\,(α+β)\,συν\,(α+β+2γ).$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{συν}\,(\alpha+\beta)\,\text{συν}\,(\alpha-\beta)+\text{συν}\,(\alpha+\beta)\,\text{συν}\,(\alpha+\beta+2\gamma) \\ &\equiv \text{συν}\,(\alpha+\beta)\,[\text{συν}\,(\alpha-\beta)+\text{συν}\,(\alpha+\beta+2\gamma)] \\ &\equiv \text{συν}\,(\alpha+\beta)\cdot 2\text{συν}\,(\alpha+\gamma)\,\text{συν}\,(\beta+\gamma) \\ &\equiv 2\text{συν}\,(\alpha+\beta)\,\text{συν}\,(\beta+\gamma)\,\text{συν}\,(\gamma+\alpha). \end{aligned}$$

Ὥστε :

$$\boxed{\text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\beta+\text{συν}^2\gamma+\text{συν}^2(\alpha+\beta+\gamma)-2\equiv 2\,\text{συν}(\alpha+\beta)\,\text{συν}(\beta+\gamma)\,\text{συν}(\gamma+\alpha)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72. Νὰ γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις :

1. $\text{ημ}4\alpha+\text{ημ}\alpha$, 5. $\text{ημ}2\alpha-\text{ημ}4\alpha$,
2. $\text{ημ}7\alpha-\text{ημ}5\alpha$, 6. $\text{συν}5\alpha-\text{συν}\alpha$,
3. $\text{ημ}70^\circ+\text{ημ}50^\circ$, 7. $\text{συν}3\alpha-\text{συν}5\alpha$,
4. $\text{συν}3\alpha+\text{συν}7\alpha$, 8. $\text{συν}10^\circ-\text{συν}50^\circ$.

73. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\dfrac{\text{συν}3\alpha-\text{συν}5\alpha}{\text{ημ}5\alpha-\text{ημ}3\alpha}=\text{εφ}4\alpha$, 3. $\dfrac{\text{ημ}2\alpha+\text{ημ}3\alpha}{\text{συν}2\alpha-\text{συν}3\alpha}=\text{σφ}\dfrac{\alpha}{2}$,

2. $\dfrac{\text{συν}2\alpha-\text{συν}4\alpha}{\text{ημ}4\alpha-\text{ημ}2\alpha}=\text{εφ}3\alpha$, 4. $\dfrac{\text{συν}4\alpha-\text{συν}\alpha}{\text{ημ}\alpha-\text{ημ}4\alpha}=\text{εφ}\dfrac{5\alpha}{2}$.

Πότε ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες ;

74. Νὰ γίνουν γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις :

1. $\text{ημ}\alpha-\text{ημ}2\alpha+\text{ημ}3\alpha$, 3. $\text{ημ}\alpha+2\text{ημ}2\alpha+\text{ημ}3\alpha$,
2. $\text{ημ}3\alpha+\text{ημ}7\alpha+\text{ημ}10\alpha$, 4. $\text{συν}\alpha+2\text{συν}2\alpha+\text{συν}3\alpha$,
5. $\text{συν}7\alpha-\text{συν}5\alpha+\text{συν}3\alpha-\text{συν}\alpha$, 6. $\text{ημ}7\alpha-\text{ημ}5\alpha-\text{ημ}3\alpha+\text{ημ}\alpha$,
7. $\text{συν}3\alpha+\text{συν}5\alpha+\text{συν}7\alpha+\text{συν}15\alpha$, 8. $\text{ημ}^2 5\alpha-\text{ημ}^2 3\alpha$.

75. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\dfrac{\text{ημ}2\alpha+\text{ημ}5\alpha-\text{ημ}\alpha}{\text{συν}2\alpha+\text{συν}5\alpha+\text{συν}\alpha}=\text{εφ}2\alpha$,

2. $\dfrac{\text{ημ}\alpha+\mu\cdot\text{ημ}3\alpha+\text{ημ}5\alpha}{\text{ημ}3\alpha+\mu\cdot\text{ημ}5\alpha+\text{ημ}7\alpha}=\dfrac{\text{ημ}3\alpha}{\text{ημ}5\alpha}$,

3. $\dfrac{\text{συν}6\alpha+6\text{συν}4\alpha+15\text{συν}2\alpha+10}{\text{συν}5\alpha+5\text{συν}3\alpha+10\text{συν}\alpha}=2\text{συν}\alpha$,

4. $\dfrac{\text{ημ}\alpha+\text{ημ}3\alpha+\text{ημ}5\alpha+\text{ημ}7\alpha}{\text{συν}\alpha+\text{συν}3\alpha+\text{συν}5\alpha+\text{συν}7\alpha}=\text{εφ}4\alpha$,

5. $\dfrac{\text{ημ}\,(\alpha-\gamma)+2\text{ημ}\alpha+\text{ημ}\,(\alpha+\gamma)}{\text{ημ}\,(\beta-\gamma)+2\text{ημ}\beta+\text{ημ}\,(\beta+\gamma)}=\dfrac{\text{ημ}\alpha}{\text{ημ}\beta}$,

6. $\dfrac{\text{ημ}\alpha+\text{ημ}2\alpha+\text{ημ}4\alpha+\text{ημ}5\alpha}{\text{συν}\alpha+\text{συν}2\alpha+\text{συν}4\alpha+\text{συν}5\alpha}=\text{εφ}3\alpha$,

7. $\dfrac{\text{συν}7\alpha+\text{συν}3\alpha-\text{συν}5\alpha-\text{συν}\alpha}{\text{ημ}7\alpha-\text{ημ}3\alpha-\text{ημ}5\alpha+\text{ημ}\alpha}=\text{σφ}2\alpha$.

Πότε ἔχουν ἔννοιαν ἀριθμοῦ αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες ;

76. Νὰ γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις :

1. $\eta\mu\,(\alpha+\beta+\gamma)+\eta\mu\,(\alpha-\beta-\gamma)+\eta\mu\,(\alpha+\beta-\gamma)+\eta\mu\,(\alpha-\beta+\gamma)$,
2. $\sigma\upsilon\nu\,(\beta+\gamma-\alpha)-\sigma\upsilon\nu\,(\gamma+\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta-\gamma)-\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta+\gamma)$,
3. $\eta\mu\,(\alpha+\beta-\gamma)+\eta\mu\,(\beta+\gamma-\alpha)+\eta\mu\,(\gamma+\alpha-\beta)-\eta\mu\,(\alpha+\beta+\gamma)$,
4. $\eta\mu 2\alpha+\eta\mu 2\beta+\eta\mu 2\gamma-\eta\mu 2\,(\alpha+\beta+\gamma)$,
5. $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\,(\alpha+\beta)=4\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\beta}{2}\,\eta\mu\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,
6. $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta-\eta\mu\,(\alpha+\beta)=4\eta\mu\,\dfrac{\alpha}{2}\,\eta\mu\,\dfrac{\beta}{2}\,\eta\mu\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

77. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

1. $\dfrac{\eta\mu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\eta\mu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\eta\mu 7\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}{\sigma\upsilon\nu 3\alpha+\sigma\upsilon\nu 5\alpha+\sigma\upsilon\nu 7\alpha}$,
2. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta+\gamma)+\sigma\upsilon\nu\,(\beta+\gamma-\alpha)+\sigma\upsilon\nu\,(\gamma+\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\beta-\gamma)}{\eta\mu\,(\alpha+\beta+\gamma)+\eta\mu\,(\beta+\gamma-\alpha)-\eta\mu\,(\gamma+\alpha-\beta)+\eta\mu\,(\alpha+\beta-\gamma)}$.

78. Νὰ γίνουν γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις :

1. $\eta\mu^2 x+\eta\mu^2 y-\eta\mu^2\,(x-y)$,
2. $\sigma\upsilon\nu^2\,(x+y)+\sigma\upsilon\nu^2\,(x-y)-1$,
3. $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2 2\theta+\sigma\upsilon\nu^2 3\theta+\sigma\upsilon\nu^2 4\theta-2$,
4. $\eta\mu^2\theta+\eta\mu^2 2\theta+\eta\mu^2 3\theta+\eta\mu^2 4\theta-2$,
5. $\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2 2\theta+\sigma\upsilon\nu^2 3\theta+\sigma\upsilon\nu^2 4\theta+\sigma\upsilon\nu^2 5\theta+\sigma\upsilon\nu^2 6\theta-3$,
6. $\eta\mu^2\theta+\eta\mu^2 2\theta+\eta\mu^2 3\theta+\eta\mu^2 4\theta+\eta\mu^2 5\theta+\eta\mu^2 6\theta-3$.

79. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις : $E=1+\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha$, εἶναι τέλειον τετράγωνον.

80. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\dfrac{\eta\mu A-\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}=\varepsilon\varphi\,\dfrac{A-B}{2}$,

2. $\dfrac{\eta\mu A+\eta\mu B}{\eta\mu A-\eta\mu B}=\dfrac{\varepsilon\varphi\,\dfrac{A+B}{2}}{\varepsilon\varphi\,\dfrac{A-B}{2}}$,

3. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}=\dfrac{\varepsilon\varphi\,\dfrac{B+A}{2}}{\sigma\varphi\,\dfrac{B-A}{2}}$,

4. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu B-\sigma\upsilon\nu A}=\dfrac{\sigma\varphi\,\dfrac{A+B}{2}}{\varepsilon\varphi\,\dfrac{A-B}{2}}$.

Πότε ἔχουν ἔννοιαν αἱ 1—4 ;

24. Μετασχηματισμὸς γινομένων εἰς ἀθροίσματα ἢ διαφοράς.

Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A\equiv\eta\mu\,(A+B), \quad (1)$$

καὶ

$$\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A\equiv\eta\mu\,(A-B). \quad (2)$$

Διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν :

$$\boxed{2\,\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B\equiv\eta\mu\,(A+B)+\eta\mu\,(A-B)} \qquad \mathbf{54}$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\boxed{2\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A\equiv\eta\mu\,(A+B)-\eta\mu\,(A-B)} \qquad \mathbf{55}$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι :

$$\text{συν}A\ \text{συν}B - \text{ημ}A\ \text{ημ}B \equiv \text{συν}\,(A+B) \qquad (3)$$

καὶ

$$\text{συν}A\ \text{συν}B + \text{ημ}A\ \text{ημ}B \equiv \text{συν}\,(A-B) \qquad (4)$$

Διὰ προσθέσεως τούτων λαμβάνομεν :

$$\boxed{\mathbf{2\,\text{συν}A\ \text{συν}B \equiv \text{συν}\,(A+B) + \text{συν}\,(A-B)}} \qquad \mathbf{56}$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν (4) τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$\boxed{\mathbf{2\,\text{ημ}A\ \text{ημ}B \equiv \text{συν}\,(A-B) - \text{συν}\,(A+B)}} \qquad \mathbf{57}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

α) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα :

$$A \equiv \frac{\text{ημ}8\alpha\ \text{συν}\alpha - \text{ημ}6\alpha\ \text{συν}3\alpha}{\text{συν}2\alpha\ \text{συν}\alpha - \text{ημ}3\alpha\ \text{ημ}4\alpha}$$

Λύσις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$A \equiv \frac{2\text{ημ}8\alpha\ \text{συν}\alpha - 2\text{ημ}6\alpha\ \text{συν}3\alpha}{2\text{συν}2\alpha\ \text{συν}\alpha - 2\text{ημ}3\alpha\ \text{ημ}4\alpha} = \frac{(\text{ημ}9\alpha + \text{ημ}7\alpha) - (\text{ημ}9\alpha + \text{ημ}3\alpha)}{(\text{συν}3\alpha + \text{συν}\alpha) - (\text{συν}\alpha - \text{συν}7\alpha)} =$$

$$= \frac{\text{ημ}7\alpha - \text{ημ}3\alpha}{\text{συν}3\alpha + \text{συν}7\alpha} = \frac{2\text{ημ}2\alpha\ \text{συν}5\alpha}{2\text{συν}5\alpha\ \text{συν}2\alpha} = \text{εφ}2\alpha,$$

ἂν $\alpha \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{10}$, $\qquad \alpha \neq (2k_1+1)\dfrac{\pi}{4}$, $\quad (k, k_1 \in Z)$

β) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathbf{A \equiv \text{συν}\frac{\pi}{15}\,\text{συν}\frac{2\pi}{15}\,\text{συν}\frac{3\pi}{15}\,\text{συν}\frac{4\pi}{15}\,\text{συν}\frac{5\pi}{15}\,\text{συν}\frac{6\pi}{15}\,\text{συν}\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2^7}}.$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν :

$$\text{συν}\frac{\pi}{15}\,\text{συν}\frac{4\pi}{15} = \frac{1}{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + \text{συν}\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{συν}\frac{2\pi}{15}\,\text{συν}\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + \text{συν}\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

$$\text{συν}\frac{3\pi}{15}\,\text{συν}\frac{6\pi}{15} = \frac{1}{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{5} + \text{συν}\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

καὶ $\text{συν}\dfrac{5\pi}{15} = \text{συν}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$A = \frac{3+\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9-5}{8^2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{4}{8^2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2^6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}.$$

γ) **Να ἀποδειχθῇ ὅτι :** $\eta\mu 20^0\,\eta\mu 40^0\,\eta\mu 60^0\,\eta\mu 80^0 = \frac{3}{16}$. (1)

Ἀπόδειξις : Ἡ (1) γράφεται :

$$4\eta\mu 20^0\,\eta\mu 40^0 \cdot 2\sigma\upsilon\nu 30^0\,\sigma\upsilon\nu 10^0 = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) γράφεται διαδοχικῶς :

$$B \equiv 2\,(\sigma\upsilon\nu 20^0 - \sigma\upsilon\nu 60^0)\cdot(\sigma\upsilon\nu 20^0 + \sigma\upsilon\nu 40^0) =$$
$$= 2\,(\sigma\upsilon\nu^2 20^0 - \sigma\upsilon\nu 20^0\,\sigma\upsilon\nu 60^0 + \sigma\upsilon\nu 20^0\,\sigma\upsilon\nu 40^0 - \sigma\upsilon\nu 40^0\,\sigma\upsilon\nu 60^0)$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu^2 20^0 - 2\sigma\upsilon\nu 20^0\,\sigma\upsilon\nu 60^0 + 2\sigma\upsilon\nu 20^0\,\sigma\upsilon\nu 40^0 - 2\sigma\upsilon\nu 40^0\,\sigma\upsilon\nu 60^0$$
$$= 1 + \sigma\upsilon\nu 40^0 - (\sigma\upsilon\nu 80^0 + \sigma\upsilon\nu 40^0) + (\sigma\upsilon\nu 60^0 + \sigma\upsilon\nu 20^0) - (\sigma\upsilon\nu 100^0 + \sigma\upsilon\nu 20^0)$$
$$= 1 - (\sigma\upsilon\nu 80^0 + \sigma\upsilon\nu 100^0) + \sigma\upsilon\nu 60^0$$
$$= 1 - 2\sigma\upsilon\nu 90^0\,\sigma\upsilon\nu 10^0 + \frac{1}{2} = 1 - 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

25*. Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον τὸ ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων ν τόξων, ἀποτελούντων ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Λύσις : Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα :

$$S = \eta\mu\alpha + \eta\mu(\alpha+\omega) + \eta\mu(\alpha+2\omega) + \ldots + \eta\mu[\alpha+(\nu-1)\omega]. \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ $2\eta\mu\frac{\omega}{2}$, λαμβάνομεν:

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = 2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\frac{\omega}{2} + 2\eta\mu(\alpha+\omega)\,\eta\mu\frac{\omega}{2} + \ldots + 2\eta\mu[\alpha+(\nu-1)\omega]\,\eta\mu\frac{\omega}{2}.$$

Ἀλλά : $2\eta\mu\alpha\,\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right)$,

$$2\eta\mu(\alpha+\omega)\,\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right),$$

$$2\eta\mu(\alpha+2\omega)\,\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{3\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\alpha+\frac{5\omega}{2}\right),$$

. . . .

$$2\eta\mu[\alpha+(\nu-1)\omega]\,\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\frac{(2\nu-3)\omega}{2}\right] - \sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\frac{(2\nu-1)\omega}{2}\right].$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, ἔχομεν :

$$2S\eta\mu\frac{\omega}{2} = \sigma\upsilon\nu\left(\alpha-\frac{\omega}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left[\alpha+\frac{(2\nu-1)\omega}{2}\right] = 2\eta\mu\left[\alpha+\frac{(\nu-1\,\omega)}{2}\right]\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\boxed{S = \frac{\eta\mu\left[\alpha+\dfrac{(\nu-1)\omega}{2}\right]\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\dfrac{\omega}{2}}} \qquad \mathbf{58}$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα :

$$S' = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+\omega) + \sigma\upsilon\nu\,(\alpha+2\omega) + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,[\,\alpha + (\nu-1)\,\omega\,]$$

εἶναι :

$$\boxed{S' = \frac{\sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \dfrac{(\nu-1)\,\omega}{2}\right]\eta\mu\,\dfrac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\,\dfrac{\omega}{2}}} \qquad 59$$

Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ 58, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ α τὸ $\frac{\pi}{2} - \alpha$ καὶ ἀντὶ ω τὸ $-\omega$.

Ἐὰν $\omega = \alpha$, οἱ τύποι 58 καὶ 59 γίνονται :

$$S_1 = \eta\mu\alpha + \eta\mu\,2\alpha + \eta\mu\,3\alpha + \ldots + \eta\mu\,(\nu\alpha) = \frac{\eta\mu\,\dfrac{(\nu+1)\,\alpha}{2}\,\eta\mu\,\dfrac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\,\dfrac{\alpha}{2}} \qquad 60$$

$$S_2 = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\,2\alpha + \sigma\upsilon\nu\,3\alpha + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,(\nu\alpha) = \frac{\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{(\nu+1)\,\alpha}{2}\,\eta\mu\,\dfrac{\nu\alpha}{2}}{\eta\mu\,\dfrac{\alpha}{2}} \qquad 61$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\omega = 2\alpha$, λαμβάνομεν :

$$S_3 = \eta\mu\alpha + \eta\mu\,3\alpha + \eta\mu\,5\alpha + \ldots + \eta\mu\,(2\nu-1)\,\alpha = \frac{\eta\mu^2\,(\nu\alpha)}{\eta\mu\alpha} \qquad 62$$

$$S_4 = \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\,3\alpha + \sigma\upsilon\nu\,5\alpha + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,(2\nu-1)\,\alpha = \frac{\eta\mu 2\,(\nu\alpha)}{2\eta\mu\alpha} \qquad 63$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$S = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{17} + \sigma\upsilon\nu\,\frac{3\pi}{17} + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,\frac{15\pi}{17} = \frac{1}{2}.$$

Ἀπόδειξις : Τὰ τόξα $\frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \ldots, \frac{15\pi}{17}$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\frac{2\pi}{17}$. Τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὅρων ν προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου :

$$\tau = \alpha + (\nu-1)\,\omega \implies \nu = \frac{\tau-\alpha}{\omega} + 1 = 8.$$

Κατ' ἀκολουθίαν, βάσει τοῦ τύπου 59, θὰ ἔχωμεν :

$$S=\frac{\text{συν}\left(\frac{\pi}{17}+\frac{8-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{17}\right)\text{ημ}\frac{8\pi}{17}}{\text{ημ}\frac{\pi}{17}}=\frac{\text{συν}\frac{8\pi}{17}\cdot\text{ημ}\frac{8\pi}{17}}{\text{ημ}\frac{\pi}{17}}=$$

$$=\frac{2\,\text{ημ}\frac{8\pi}{17}\cdot\text{συν}\frac{8\pi}{17}}{2\,\text{ημ}\frac{\pi}{17}}=\frac{\text{ημ}\frac{16\pi}{17}}{2\,\text{ημ}\frac{\pi}{17}}=\frac{1}{2},$$

καθόσον $\quad \text{ημ}\frac{16\pi}{17}=\text{ημ}\frac{\pi}{17}$, διότι $\frac{\pi}{17}+\frac{16\pi}{17}=\pi$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$S=\text{συν}\frac{\pi}{23}+\text{συν}\frac{3\pi}{23}+\text{συν}\frac{5\pi}{23}+\ldots+\text{συν}\frac{21\pi}{23}=\frac{1}{2}.$$

26*. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\mathbf{S''=\text{ημ}^2\alpha+\text{ημ}^2(\alpha+\omega)+\text{ημ}^2(\alpha+2\omega)+\ldots+\text{ημ}^2[\alpha+(\nu-1)\omega].}$$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν εἰς τὴν γνωστὴν ταυτότητα :

$$\text{ημ}^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\text{συν}\,2\alpha)$$

θέσωμεν ἀντὶ α τὸ $\alpha+\omega$, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$\text{ημ}^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\text{συν}\,2\alpha),$$

$$\text{ημ}^2(\alpha+\omega)=\frac{1}{2}[1-\text{συν}2(\alpha+\omega)],$$

$$\text{ημ}^2(\alpha+2\omega)=\frac{1}{2}[1-\text{συν}2(\alpha+2\omega)],$$

....

$$\text{ημ}^2[\alpha+(\nu-1)\omega]=\frac{1}{2}[1-\text{συν}2[\alpha+(\nu-1)\omega]$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν, διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη :

$$S''=\frac{\nu}{2}-\frac{1}{2}[\text{συν}\,2\alpha+\text{συν}\,2(\alpha+\omega)+\text{συν}\,2(\alpha+2\omega)+\cdots+\text{συν}2[\alpha+(\nu-1)\omega]$$

$$=\frac{\nu}{2}-\frac{\text{συν}\,[2\alpha+(\nu-1)\omega]\,\text{ημ}\,(\nu\omega)}{2\,\text{ημ}\omega}.$$

Ὥστε :

$$\mathbf{S''=\text{ημ}^2\alpha+\text{ημ}^2(\alpha+\omega)+\text{ημ}^2(\alpha+2\omega)+\ldots+\text{ημ}^2[\alpha+(\nu-1)\omega]=}$$

$$\mathbf{=\frac{\nu}{2}-\frac{\text{συν}\,[2\alpha+(\nu-1)\omega]\,\text{ημ}\,(\nu\omega)}{2\,\text{ημ}\omega}.} \qquad \mathbf{64}$$

Ἐὰν θέσωμεν $\omega = \alpha$, τότε :

$$S_1'' = \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha + \eta\mu^2 3\alpha + \ldots + \eta\mu^2(\nu\alpha) = \frac{\nu}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu\,(\nu+1)\,\alpha \cdot \eta\mu\,(\nu\alpha)}{2\,\eta\mu\alpha}. \quad 65$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν $\omega = 2\alpha$, τότε :

$$S_2'' = \eta\mu^2\alpha + \eta\mu^2 3\alpha + \eta\mu^2 5\alpha + \ldots + \eta\mu^2(2\nu-1)\,\alpha = \frac{\nu}{2} - \frac{\sigma\upsilon\nu\,(2\nu\alpha)\,\eta\mu\,(2\nu\alpha)}{2\eta\mu 2\alpha}. \quad 66$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ὅταν ἔχωμεν ἀντὶ τοῦ ἡμιτόνου τὸ συνημίτονον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

81. Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν αἱ παραστάσεις :

1. $2\eta\mu\, 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$,
2. $2\sigma\upsilon\nu\, 2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\alpha$,
3. $2\eta\mu\alpha\, \sigma\upsilon\nu 4\alpha$,
4. $2\eta\mu\alpha\, \eta\mu 3\alpha$,
5. $2\eta\mu 4\alpha\, \sigma\upsilon\nu 8\alpha$,
6. $2\sigma\upsilon\nu 5\alpha\, \sigma\upsilon\nu 7\alpha$,
7. $2\eta\mu 5\alpha\, \eta\mu 3\alpha$,
8. $2\eta\mu 3\alpha\, \eta\mu 5\alpha$.

82. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων :

1. $2\sigma\upsilon\nu 60^0\, \eta\mu 30^0$,
2. $2\sigma\upsilon\nu 45^0\, \sigma\upsilon\nu 63^0$,
3. $\eta\mu 45^0\, \sigma\upsilon\nu 75^0$,
4. $2\sigma\upsilon\nu 150^0\, \sigma\upsilon\nu 30^0$,
5. $\eta\mu 30^0\, \eta\mu 75^0$,
6. $2\eta\mu 60^0\, \sigma\upsilon\nu 45^0$,
7. $\sigma\upsilon\nu 42^0\, \sigma\upsilon\nu\, 54^0$,
8. $2\eta\mu 36^0\, \sigma\upsilon\nu 54^0$.

ἀφοῦ προηγουμένως τὰ γινόμενα μετασχηματισθοῦν εἰς ἄθροισμα ἢ διαφοράν.

83. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 4\alpha\, \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu 3\alpha\, \sigma\upsilon\nu 2\alpha$,
2. $\sigma\upsilon\nu 5\alpha\, \sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha\, \sigma\upsilon\nu 3\alpha = -\, \eta\mu 2\alpha\, \eta\mu\alpha$,
3. $\eta\mu 4\alpha\, \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 3\alpha\, \sigma\upsilon\nu 2\alpha = \eta\mu\alpha\, \sigma\upsilon\nu 2\alpha$,
4. $\eta\mu\,\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\,\frac{7\alpha}{2} + \eta\mu\,\frac{3\alpha}{2}\,\eta\mu\,\frac{11\alpha}{2} = \eta\mu 2\alpha\, \eta\mu 5\alpha$,
5. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha\, \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} - \sigma\upsilon\nu 3\alpha\, \sigma\upsilon\nu\,\frac{9\alpha}{2} = \eta\mu 5\alpha\, \eta\mu\,\frac{5\alpha}{2}$.

84. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu\,(36^0 - \alpha)\,\sigma\upsilon\nu\,(36^0 + \alpha) + \sigma\upsilon\nu\,(54^0 + \alpha)\,\sigma\upsilon\nu\,(54^0 - \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$.
2. $\sigma\upsilon\nu\alpha\;\eta\mu\,(\beta - \gamma) + \sigma\upsilon\nu\beta\,.\,\eta\mu\,(\gamma - \alpha) + \sigma\upsilon\nu\gamma\,.\,\eta\mu\,(\alpha - \beta) = 0$.
3. $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\,(\alpha + 2\beta) - \eta\mu\beta\,\eta\mu\,(\beta + 2\alpha) = \eta\mu\,(\alpha - \beta)\,\eta\mu(\alpha + \beta)$.
4. $(\eta\mu 3\alpha + \eta\mu\alpha)\,\eta\mu\alpha + (\sigma\upsilon\nu 3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)\,\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$.
5. $\eta\mu\alpha\,\eta\mu\,(\beta - \gamma) + \eta\mu\beta\,\eta\mu\,(\gamma - \alpha) + \eta\mu\gamma\,\eta\mu\,(\alpha - \beta) = 0$.
6. $\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\,(\beta - \gamma) + \sigma\upsilon\nu\beta\,\eta\mu\,(\gamma - \alpha) + \sigma\upsilon\nu\gamma\,\eta\mu\,(\alpha - \beta) = 0$
7. $\eta\mu\,(\beta - \gamma)\,\sigma\upsilon\nu\,(\alpha - \delta) + \eta\mu\,(\gamma - \alpha)\,\sigma\upsilon\nu\,(\beta - \delta) + \eta\mu\,(\alpha - \beta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\gamma - \delta) = 0$.
8. $\sigma\upsilon\nu\,(\alpha + \beta)\,\eta\mu\,(\alpha - \beta) + \sigma\upsilon\nu\,(\beta + \gamma)\,\eta\mu\,(\beta - \gamma) + \sigma\upsilon\nu(\gamma + \delta)\,\eta\mu\,(\gamma - \delta) +$
$+\, \sigma\upsilon\nu\,(\delta + \alpha)\,\eta\mu\,(\delta - \alpha) = 0$.
9. $\dfrac{\eta\mu\alpha\,\eta\mu\, 2\alpha + \eta\mu\, 3\alpha\,\eta\mu\, 6\alpha + \eta\mu\, 4\alpha\,\eta\mu\, 13\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\, 2\alpha + \eta\mu\, 3\alpha\,\sigma\upsilon\nu\, 6\alpha + \eta\mu\, 4\alpha\,\sigma\upsilon\nu\, 13\alpha} = \varepsilon\varphi\, 9\alpha$.

85. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma\upsilon\nu\, 20^0\;\sigma\upsilon\nu\, 40^0\;\sigma\upsilon\nu\, 60^0\;\sigma\upsilon\nu\, 80^0 = \frac{1}{16}$,
2. $\varepsilon\varphi\, 20^0\;\varepsilon\varphi\, 40^0\;\varepsilon\varphi\, 60^0\;\varepsilon\varphi\, 80^0 = 3$,
3. $\sigma\varphi\, 20^0\;\sigma\varphi\, 40^0\;\sigma\varphi\, 60^0\;\sigma\varphi\, 80^0 = \frac{1}{3}$,

καὶ γενικῶς, ἂν $\nu \in Z^+$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

4. $ημ\dfrac{\pi}{2\nu+1}\, ημ\dfrac{2\pi}{2\nu+1}\, ημ\dfrac{3\pi}{2\nu+1} \dots ημ\dfrac{\nu\pi}{2\nu+1} = \dfrac{\sqrt{2\nu+1}}{2^\nu}$,

5. $συν\dfrac{\pi}{2\nu+1}\, συν\dfrac{2\pi}{2\nu+1}\, συν\dfrac{3\pi}{2\nu+1} \dots συν\dfrac{\nu\pi}{2\nu+1} = \dfrac{1}{2^\nu}$,

6. $εφ\dfrac{\pi}{2\nu+1}\, εφ\dfrac{2\pi}{2\nu+1}\, εφ\dfrac{3\pi}{2\nu+1} \dots εφ\dfrac{\nu\pi}{2\nu+1} = \sqrt{2\nu+1}$,

86. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $εφ\,6^0\, εφ\,42^0\, εφ\,66^0\, εφ\,78^0 = 1$,
2. $συν\dfrac{2\pi}{7} + συν\dfrac{4\pi}{7} + συν\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$,
3. $2\,συν\dfrac{\pi}{13}\, συν\dfrac{9\pi}{13} + συν\dfrac{3\pi}{13} + συν\dfrac{5\pi}{13} = 0$,
4. $ημ\dfrac{\pi}{24}\, ημ\dfrac{5\pi}{24}\, ημ\dfrac{7\pi}{24}\, ημ\dfrac{11\pi}{24} = \dfrac{1}{16}$,
5. $εφ\,9^0 - εφ\,27^0 - εφ\,63^0 + εφ\,81^0 = 4$,
6. $εφ\,36^0\, εφ\,72^0\, εφ\,108^0\, εφ\,144^0 = 5$,
7. $ημ^4\dfrac{\pi}{16} + ημ^4\dfrac{3\pi}{16} + ημ^4\dfrac{5\pi}{16} + ημ^4\dfrac{7\pi}{16} = \dfrac{3}{2}$.

87. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀκόλουθα ἀθροίσματα ἐκ ν ὅρων.

1. $ημ\,2α + ημ\,4α + ημ\,6α + \dots$
2. $συν\,2α + συν\,4α + συν\,6α +$
3. $ημα - ημ\,2α + ημ\,3α - \dots$
4. $συνα - συν\,2α + συν\,3α - \dots$

88. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $συν\dfrac{\pi}{19} + συν\dfrac{3\pi}{19} + συν\dfrac{5\pi}{19} + \dots + συν\dfrac{17\pi}{19} = \dfrac{1}{2}$,
2. $συν\dfrac{2\pi}{21} + συν\dfrac{4\pi}{21} + συν\dfrac{6\pi}{21} + \dots + συν\dfrac{20\pi}{21} = -\dfrac{1}{2}$,
3. $ημ\dfrac{\pi}{\nu} + ημ\dfrac{2\pi}{\nu} + ημ\dfrac{3\pi}{\nu} + \dots = σφ\dfrac{\pi}{2\nu}$, ἐκ $\nu - 1$ ὅρων,
4. $συν\dfrac{\pi}{\nu} + συν\dfrac{3\pi}{\nu} + συν\dfrac{5\pi}{\nu} + \dots = -συν\dfrac{\pi}{\nu}$, ($2\nu - 1$ ὅροι).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΑΦΟΡΩΣΑΙ ΕΙΣ ΤΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ - ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟΥ Ή ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΑΣ

27. Τριγωνομετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν γωνιῶν τριγώνου.

Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι :

$$A+B+\Gamma=\pi \quad \text{καὶ ἄρα} \quad \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$$

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν :

$\eta\mu\,(A+B)=\eta\mu\,\Gamma$	$\eta\mu\,(B+\Gamma)=\eta\mu\,A$	$\eta\mu\,(\Gamma+A)=\eta\mu\,B$
$\eta\mu\,\frac{A+B}{2}=\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}$	$\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}=\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}$	$\eta\mu\,\frac{\Gamma+A}{2}=\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}$
$\sigma\upsilon\nu\,(A+B)=-\sigma\upsilon\nu\,\Gamma$	$\sigma\upsilon\nu\,(B+\Gamma)=-\sigma\upsilon\nu\,A$	$\sigma\upsilon\nu\,(\Gamma+A)=-\sigma\upsilon\nu\,B$
$\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}=\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\,\frac{B+\Gamma}{2}=\eta\mu\,\frac{A}{2}$	$\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma+A}{2}=\eta\mu\,\frac{B}{2}.$

Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ταυτοτήτων τούτων καὶ μὲ τὴν χρῆσιν τῶν τριγωνομετρικῶν μετασχηματισμῶν ἀποδεικνύονται διάφοροι χρήσιμοι τριγωνομετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τριγώνου καὶ τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τούτων. Αἱ κυριώτεραι εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

28. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}.$$

'Απόδειξις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=2\,\eta\mu\,\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}+2\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}+2\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}=2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}+\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\right]=$$

$$=2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2}+\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\right]=2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}\cdot 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}=$$

$$=4\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma}{2}.$$

Ὥστε : $$\boxed{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = 4\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}} \qquad 67$$

Σημ. : Ὁ τύπος 67 προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ τύπου 52, ἂν τεθῇ $x = A$, $y = B$, $\omega = \Gamma$ καὶ $x + y + \omega = A + B + \Gamma = \pi$.

Παρατήρησις: Ἐὰν $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi$ καὶ $\nu \in Z^{+}$, τότε :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\; 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$$

Πράγματι, ἐκ τῆς $\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi$, συνάγομεν ὅτι :

$$\frac{\gamma}{2} = \nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = \nu\pi - \frac{\gamma}{2}.$$

Ἀλλά: $$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (1)$$

καί : $$\eta\mu\gamma = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2} = 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \qquad (2)$$

Ἀλλά, καθόσον ὁ ν θὰ εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός, θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = \pm\,\eta\mu\frac{\gamma}{2} \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \pm\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ἄρα, εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, θὰ εἶναι :

$$\eta\mu\left(\nu\pi - \frac{\gamma}{2}\right) = (-1)^{\nu-1}\,\eta\mu\frac{\gamma}{2}, \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\nu\pi - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = -(-1)^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν αἱ (1) καὶ (2) γίνονται :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{καὶ} \quad \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot\left[-2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

καὶ ἑπομένως διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη :

$$\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\beta}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$= (-1)^{\nu-1}\cdot 2\eta\mu\frac{\gamma}{2}\cdot 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\beta}{2} = (-1)^{\nu-1}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma}{2}.$$

Ὥστε :

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 2\nu\pi \implies \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu-1}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma}{2}} \qquad 67\alpha$$

Ἐὰν δὲ $\alpha + \beta + \gamma = (2\nu-1)\,\pi$, τότε :

$$\boxed{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = (-1)^{\nu}\cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}} \qquad 67\beta$$

29. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\,\eta\mu\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}.$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2} + 1 - 2\,\eta\mu^2\,\frac{\Gamma}{2} =$$

$$= 2\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2} - 2\,\eta\mu^2\,\frac{\Gamma}{2} + 1 = 2\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2} - \eta\mu\,\frac{A}{2}\right] + 1 =$$

$$= 1 + 2\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\right] = 1 + 2\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}\cdot 2\,\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\eta\mu\,\frac{B}{2} =$$

$$= 1 + 4\,\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\eta\mu\,\frac{B}{2}\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}.$$

Ὥστε :

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\,\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\eta\mu\,\frac{B}{2}\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}} \qquad 68$$

Σημ.: Ὁ τύπος 68 συνάγεται ἐκ τοῦ 53, διὰ $x = A$, $y = B$, $\omega = \Gamma$ καὶ $x + y + \omega = A + B + \Gamma = \pi$.

Παρατήρησις Ι. Ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἰσότης :

$$\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = 1 + 4\,\eta\mu\,\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\,\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\,\frac{\gamma}{2},$$

πῶς συνδέονται αἱ γωνίαι α, β καὶ γ ;

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$1 - 2\,\eta\mu^2\,\frac{\alpha}{2} + 2\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta+\gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2} = 1 + 2\,\eta\mu\,\frac{\alpha}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta+\gamma}{2}\right]$$

ἢ
$$-\eta\mu\,\frac{\alpha}{2}\left[\eta\mu\,\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2}\right] = -\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta+\gamma}{2}\left[\eta\mu\,\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2}\right]$$

ἢ
$$\left(\eta\mu\,\frac{\alpha}{2} - \sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\left(\eta\mu\,\frac{\alpha}{2} + \sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = 0.$$

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐπαληθεύεται :

1ον : Διὰ $\eta\mu\,\frac{\alpha}{2} = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta+\gamma}{2} = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}\right)$ ἐξ οὗ: $\frac{\alpha}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta+\gamma}{2}$ (1)

καὶ $\frac{\alpha}{2} = (2k_1+1)\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta+\gamma}{2}$ (2)

2ον : Διὰ $\eta\mu\,\frac{\alpha}{2} = -\sigma\upsilon\nu\,\frac{\beta-\gamma}{2} = \eta\mu\left(\frac{\beta-\gamma}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ ἐξ οὗ: $\frac{\alpha}{2} = 2k_2\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\beta-\gamma}{2}$ (3)

καὶ $\frac{\alpha}{2} = (2k_3+1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\beta-\gamma}{2}$ (4)

Ἐκ τῶν (1), (2), (3), (4) λαμβάνομεν εὐκόλως τὰς σχέσεις :

$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha \pm \beta \pm \gamma = (4\lambda + 1)\pi \\ \alpha \pm \beta \pm \gamma = (4\lambda - 1)\pi\end{array}} \qquad (\lambda \in Z^+)$$

Παρατήρησις ΙΙ. — Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\nu\pi$, τότε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=(-1)^{\nu}\cdot 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\gamma}{2}-1} \qquad \textbf{68α}$$

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὴν (§ 28).

Ἐὰν δὲ $\alpha+\beta+\gamma=(2\nu+1)\pi$, τότε:

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\gamma=1+(-1)^{\nu}\cdot 4\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\eta\mu\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\gamma}{2}} \qquad \textbf{68β}$$

30. Εἰς πᾶν μὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi \Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi \Gamma.$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν: $A+B+\Gamma=180^0$, ὁπότε:

$$A+B=180^0-\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\,(A+B)=\varepsilon\varphi\,(180^0-\Gamma)=-\varepsilon\varphi\Gamma$$

ἢ $\dfrac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma$, ἐξ οὗ: $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma.$

Ὥστε: $$\boxed{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi \Gamma=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi \Gamma} \qquad \textbf{69}$$

Ἡ ἰσότης (69) **δὲν ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ,** ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν τρεῖς γωνίαι Α, Β, Γ, διάφοροι τῶν 90^0, ἱκανοποιοῦν τὴν (69), τότε θὰ εἶναι:

$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B\,\varepsilon\varphi\Gamma-\varepsilon\varphi\Gamma=-\varepsilon\varphi\Gamma\,(1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B)$$

καὶ ἄρα: $$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi\Gamma=\varepsilon\varphi\,(\pi-\Gamma)$$

ἢ $$\varepsilon\varphi\,(A+B)=\varepsilon\varphi\,(\pi-\Gamma)$$

ἐξ οὗ: $A+B=\nu\pi+\pi-\Gamma$ ἢ $\boxed{A+B+\Gamma=\nu\pi+\pi}$

31. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\varphi A\,\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\,\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\,\sigma\varphi A=1.$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τῆς σχέσεως $A+B+\Gamma=180^0$, ἔχομεν:

$$A+B=180^0-\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \sigma\varphi\,(A+B)=\sigma\varphi\,(180^0-\Gamma)=-\sigma\varphi\,\Gamma$$

ἢ $\dfrac{\sigma\varphi A\,\sigma\varphi B-1}{\sigma\varphi A+\sigma\varphi B}=-\sigma\varphi\Gamma$, ἐξ οὗ:

$$\boxed{\sigma\varphi A\,\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\,\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\,\sigma\varphi A=1} \qquad \textbf{70}$$

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν τρεῖς γωνίαι Α, Β, Γ ἱκανοποιοῦν τὴν (70), τότε:

$$\sigma\varphi A\, \sigma\varphi B - 1 = -\sigma\varphi \Gamma\, (\sigma\varphi A + \sigma\varphi B)$$

ἢ $$\frac{\sigma\varphi A\, \sigma\varphi B - 1}{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B} = -\sigma\varphi\Gamma \text{ ἢ } \sigma\varphi\,(A+B) = -\sigma\varphi\Gamma = \sigma\varphi\,(\pi - \Gamma)$$

Ἄρα : $A + B = \nu\pi + (\pi - \Gamma)$, ἐξ οὗ : $\boxed{\mathbf{A + B + \Gamma = \nu\pi + \pi}}$

32. Ἐὰν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον καὶ συγχρόνως ἰσχύει ἡ ἰσότης : $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$ (1), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τούτου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, $\sqrt{3}$ καὶ 1.

Ἀπόδειξις : Ἡ σχέσις : $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma = 2$ γράφεται :

$$1 - \sigma\upsilon\nu^2 A + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 B + 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 2,$$

ἐξ οὗ : $$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma = 1. \qquad (2)$$

Ἀλλά, ἐὰν $A + B + \Gamma = 180^0$, τότε, κατὰ τὸν τύπον (13), εἶναι :

$$\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\,\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B\, \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἕπεται ὅτι :

$$\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B\, \sigma\upsilon\nu\Gamma = 0$$

Ἄρα ἢ $\sigma\upsilon\nu A = 0 = \sigma\upsilon\nu\, 90^0$, ἐξ οὗ : $A = 90^0$

ἢ $\sigma\upsilon\nu B = 0 = \sigma\upsilon\nu\, 90^0$, » $B = 90^0$

ἢ $\sigma\upsilon\nu \Gamma = 0 = \sigma\upsilon\nu\, 90^0$, » $\Gamma = 90^0$.

Ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὁπωσδήποτε ὀρθογώνιον.

Ἔστω ὅτι $A = 90^0$, ὁπότε $B + \Gamma = 90^0$. (4)

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως αἱ γωνίαι Γ, Β, Α ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Συνεπῶς :

$$2B = \Gamma + A = \Gamma + 90^0 \text{ ἢ } 2B - \Gamma = 90^0. \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (4) καὶ (5) ἕπεται ὅτι $B + \Gamma = 2B - \Gamma$ ἢ $B = 2\Gamma$, καὶ ἡ (4) γίνεται:

$$2\Gamma + \Gamma = 90^0 \text{ ἢ } 3\Gamma = 90^0 \text{ ἢ } \Gamma = 30^0, \text{ ὁπότε } B = 60^0.$$

Ἄρα : $$A = 90^0,\quad B = 60^0,\quad \Gamma = 30^0.$$

Ἐὰν α, β, γ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα καὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε, ἐπειδή :

$$\Gamma = 30^0, \text{ ἕπεται } \gamma = \frac{\alpha}{2} \text{ καὶ } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ : $\beta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ἢ $\dfrac{\beta}{\sqrt{3}} = \dfrac{\alpha}{2}$. Ἄρα : $\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\beta}{\sqrt{3}} = \dfrac{\gamma}{1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

89. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma = 4\eta\mu\dfrac{A}{2}\,\eta\mu\dfrac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\Gamma}{2}$,

2. $\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = -1 + 4\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B}{2}\,\eta\mu\,\frac{\Gamma}{2}$,

3. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$,

4. $\eta\mu 2A + \eta\mu 2B - \eta\mu 2\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\eta\mu\Gamma$,

5. $\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1 - 4\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,

6. $\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B - \sigma\upsilon\nu 2\Gamma = 1 - 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,

7. $\varepsilon\varphi 2A + \varepsilon\varphi 2B + \varepsilon\varphi 2\Gamma = \varepsilon\varphi 2A\,\varepsilon\varphi 2B\,\varepsilon\varphi 2\Gamma$,

8. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{B}{2} + \varepsilon\varphi\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} + \varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}\,\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = 1$.

Τί συμβαίνει διὰ τὸ ἀντίστροφον ;

9. $\sigma\varphi\,\frac{A}{2} + \sigma\varphi\,\frac{B}{2} + \sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2} = \sigma\varphi\,\frac{A}{2}\,\sigma\varphi\,\frac{B}{2}\,\sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2}$.

Τί συμβαίνει διὰ τὸ ἀντίστροφον ;

90. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 2 + 2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
2. $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma = 2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
3. $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1 - 2\,\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
4. $\eta\mu^2 2A + \eta\mu^2 2B + \eta\mu^2 2\Gamma = 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$,
5. $\sigma\upsilon\nu^2 2A + \sigma\upsilon\nu^2 2B + \sigma\upsilon\nu^2 2\Gamma = 1 + 2\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$,
6. $\eta\mu\,(B + \Gamma - A) + \eta\mu\,(\Gamma + A - B) + \eta\mu\,(A + B - \Gamma) = 4\eta\mu A\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma$.

91. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B + \eta\mu 4\Gamma = -4\eta\mu 2A\,\eta\mu 2B\,\eta\mu 2\Gamma$,
2. $\eta\mu 4A + \eta\mu 4B - \eta\mu 4\Gamma = -4\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\eta\mu 2\Gamma$,
3. $\sigma\upsilon\nu 4A + \sigma\upsilon\nu 4B + \sigma\upsilon\nu 4\Gamma = -1 + 4\,\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$,
4. $\sigma\upsilon\nu 4A + \sigma\upsilon\nu 4B - \sigma\upsilon\nu 4\Gamma = 1 + 4\eta\mu 2A\,\eta\mu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma$.

92. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu^2\,\frac{A}{2} + \eta\mu^2\,\frac{B}{2} + \eta\mu^2\,\frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\eta\mu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,

2. $\eta\mu^2\,\frac{A}{2} + \eta\mu^2\,\frac{B}{2} - \eta\mu^2\,\frac{\Gamma}{2} = 1 - 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,

3. $\dfrac{\eta\mu A + \eta\mu B - \eta\mu\Gamma}{\eta\mu A - \eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = \varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}\,\sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2}$,

4. $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma - 1}{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma + 1} = \varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}$,

5. $\dfrac{\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma}{\eta\mu 2A + \eta\mu 2B - \eta\mu 2\Gamma} = \varepsilon\varphi A\,\varepsilon\varphi B$,

6. $\dfrac{\eta\mu 2A + \eta\mu 2B + \eta\mu 2\Gamma}{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = 8\,\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\eta\mu\,\frac{B}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$,

7. $\dfrac{\sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma}{\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma} + \dfrac{\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi A}{\varepsilon\varphi\Gamma + \varepsilon\varphi A} + \dfrac{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B}{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B} = 1$,

8. $\dfrac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma}{(\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu\Gamma)^2} = \dfrac{\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}}{2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}$.

93. Ἐὰν $A + B + \Gamma = 180^0$, νὰ γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις :

1. $\eta\mu 3A + \eta\mu 3B + \eta\mu 3\Gamma$, 2. $\eta\mu 6A + \eta\mu 6B + \eta\mu 6\Gamma$,

3. $\varepsilon\varphi\,(kA) + \varepsilon\varphi\,(kB) + \varepsilon\varphi\,(k\Gamma)$, ἂν $k \in N$

4. $\sigma\varphi\,(kA)\,\sigma\varphi\,(kB) + \sigma\varphi\,(kB)\,\sigma\varphi\,(k\Gamma) + \sigma\varphi\,(k\Gamma)\,\sigma\varphi\,(kA) = 1$.

94. Είς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu \frac{A}{2} + \eta\mu \frac{B}{2} + \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = 1 + 4\eta\mu \frac{\pi - A}{4} \eta\mu \frac{\pi - B}{4} \eta\mu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

2. $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = 4\sigma\upsilon\nu \frac{B + \Gamma}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma + A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{A + B}{4}$,

3. $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} - \sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = 4\sigma\upsilon\nu \frac{\pi + A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi + \Gamma}{4}$,

4. $\eta\mu \frac{A}{2} + \eta\mu \frac{B}{2} - \eta\mu \frac{\Gamma}{2} = -1 + 4\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - B}{4} \eta\mu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

5. $\eta\mu^2 \frac{A}{4} + \eta\mu^2 \frac{B}{4} + \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{3}{2} - 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

6. $\eta\mu^2 \frac{A}{4} + \eta\mu^2 \frac{B}{4} - \eta\mu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{1}{2} - 2\eta\mu \frac{\pi - A}{4} \eta\mu \frac{\pi - B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

7. $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{3}{2} + 2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi - A}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - \Gamma}{4}$,

8. $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{4} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B}{4} - \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{4} = \frac{1}{2} + 2\eta\mu \frac{\pi - A}{4} \eta\mu \frac{\pi - B}{4} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi - \Gamma}{4}$.

95. Είς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\Sigma\, \eta\mu A\, \sigma\upsilon\nu B\, \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu A\, \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma$,
2. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu A\, \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma = 1 + \sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B\, \sigma\upsilon\nu\Gamma$,
3. $\Sigma\, \eta\mu A\, \sigma\upsilon\nu\, (B - \Gamma) = 4\eta\mu A\, \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma$,
4. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu\, (B - \Gamma) = 1 + 4\sigma\upsilon\nu A\, \sigma\upsilon\nu B\, \sigma\upsilon\nu\Gamma$.

96. Είς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu^3 A\, \eta\mu\, (B - \Gamma) + \eta\mu^3 B\, \eta\mu\, (\Gamma - A) + \eta\mu^3\Gamma\, \eta\mu\, (A - B) = 0$,
2. $\Sigma\, \eta\mu^3 A\, \sigma\upsilon\nu\, (B - \Gamma) - 3\eta\mu A\, \eta\mu B\, \eta\mu\Gamma = 0$,
3. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu^3 A\, \eta\mu\, (B - \Gamma) + \Pi\, \eta\mu\, (A - B) = 0$,
4. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu^3 A\, \sigma\upsilon\nu\, (B - \Gamma) + \Pi\, \sigma\upsilon\nu\, (A - B) - 3\Pi\sigma\upsilon\nu A - 1 = 0$.
5. $\Sigma\, \eta\mu 3A\, \sigma\upsilon\nu\, (B - \Gamma) = 0$.

97. Είς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu 3A\, \eta\mu\, (B - \Gamma) + \eta\mu 3B\, \eta\mu\, (\Gamma - A) + \eta\mu 3\Gamma\, \eta\mu\, (A - B) = 0$,
2. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu 3A\, \eta\mu\, (B - \Gamma) + 4\Pi\, \eta\mu\, (A - B) = 0$,
3. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu 3A\, \sigma\upsilon\nu\, (B - \Gamma) + 4\Pi\, \sigma\upsilon\nu\, (A - B) - 1 = 0$,
4. $\Sigma\, \eta\mu 3A\, \eta\mu^3\, (B - \Gamma) = 0$,
5. $\Sigma\, \eta\mu 3A\, \sigma\upsilon\nu^3\, (B - \Gamma) - \Pi\eta\mu 3A = 0$,
6. $\Sigma\, \sigma\upsilon\nu 3A\, \eta\mu^3\, (B - \Gamma) + 3\Pi\, \eta\mu\, (A - B) = 0$,
7. $\Sigma\, \eta\mu A\, \eta\mu^3\, (B - \Gamma) - 4\Pi\, \eta\mu A\, \eta\mu\, (B - \Gamma) = 0$,
8. $\Sigma\, \eta\mu^3 A\, \eta\mu^3\, (B - \Gamma) - 3\Pi\, \eta\mu A\, \eta\mu\, (B - \Gamma) = 0$,
9. $\Sigma\, \eta\mu A\, \eta\mu 3\, (B - \Gamma) + 16\Pi\, \eta\mu A\, \eta\mu (B - \Gamma) = 0$.

98. Είς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $$\Sigma\, \eta\mu\, (kA) = \begin{bmatrix} -4\eta\mu \frac{kA}{2} \eta\mu \frac{kB}{2} \eta\mu \frac{k\Gamma}{2}, & k = 4\mu \\ 4\sigma\upsilon\nu \frac{kA}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{kB}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{k\Gamma}{2}, & k = 4\mu + 1 \\ 4\eta\mu \frac{kA}{2} \eta\mu \frac{kB}{2} \eta\mu \frac{k\Gamma}{2}, & k = 4\mu + 2 \\ -4\sigma\upsilon\nu \frac{kA}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{kB}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{k\Gamma}{2}, & k = 4\mu + 3 \end{bmatrix} \quad \mu \in N$$

$$2.\quad \Sigma\,\sigma\upsilon\nu\,(kA) = \left[\begin{array}{ll} -1+4\sigma\upsilon\nu\,\frac{kA}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{kB}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{k\Gamma}{2}, & k=4\mu \\ 1+4\eta\mu\,\frac{kA}{2}\,\eta\mu\,\frac{kB}{2}\,\eta\mu\,\frac{k\Gamma}{2}, & k=4\mu+1 \\ -1-4\sigma\upsilon\nu\,\frac{kA}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{kB}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{k\Gamma}{2}, & k=4\mu+2 \\ 1-4\eta\mu\,\frac{kA}{2}\,\eta\mu\,\frac{kB}{2}\,\eta\mu\,\frac{k\Gamma}{2}, & k=4\mu+3 \end{array}\right] \quad \mu\in N$$

3. $\eta\mu^2(kA)+\eta\mu^2(kB)+\eta\mu^2(k\Gamma)=2-2\,(-1)^k\,\sigma\upsilon\nu(kA)\,\sigma\upsilon\nu(kB)\,\sigma\upsilon\nu(k\Gamma), \quad k\in N$

4. $\sigma\upsilon\nu^2(kA)+\sigma\upsilon\nu^2(\kappa B)+\sigma\upsilon\nu^2(k\Gamma)=1+2(-1)^k\,\sigma\upsilon\nu(kA)\,\sigma\upsilon\nu(kB)\,\sigma\upsilon\nu(k\Gamma), \quad k\in N$

99. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu(B+2\Gamma)+\eta\mu(\Gamma+2A)+\eta\mu(A+2B)=4\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma-A}{2}\,\eta\mu\frac{A-B}{2},$

2. $\Sigma\,\eta\mu^4A=\frac{3}{2}+2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma+\frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma,$

3. $\Sigma\sigma\upsilon\nu^4A=\frac{1}{2}-2\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu\,B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\frac{1}{2}\,\sigma\upsilon\nu 2A\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma,$

4. $\Sigma\,\varepsilon\varphi(kA)\,\varepsilon\varphi(kB)=1-(-1)^k\,\tau\varepsilon\mu(kA)\,\tau\varepsilon\mu(\kappa B)\,\tau\varepsilon\mu(k\Gamma).$

100. Εἰς πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma+\eta\mu\Delta=4\eta\mu\,\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\Gamma+A}{2},$

2. $\eta\mu A-\eta\mu B+\eta\mu\Gamma-\eta\mu\Delta=4\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\,\eta\mu\,\frac{\Gamma+A}{2}.$

3. $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma+\sigma\upsilon\nu\Delta=4\sigma\upsilon\nu\,\frac{A+B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma+A}{2},$

4. $\sigma\upsilon\nu A-\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma-\sigma\upsilon\nu\Delta=4\eta\mu\,\frac{A+B}{2}\,\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\Gamma+A}{2}.$

101. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύουν αἱ ἰσότητες :

1. $\sigma\varphi\,\frac{B}{2}=\frac{\eta\mu A+\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B},\quad$ 2. $\eta\mu A=\frac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma},\quad$ 3. $\eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B,$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

102. Ἐὰν αἱ γωνίαι τριγώνου ΑΒΓ ἐπαληθεύουν τὰς ἰσότητας :

1. $\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}+\varepsilon\varphi\,\frac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\,\frac{B}{2}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\Gamma}{2}=2,$

2. $\sigma\upsilon\nu^2A+\sigma\upsilon\nu^2B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma=1,\quad$ 3. $\eta\mu 2A+\eta\mu 2\Gamma=\eta\mu 2B,$

4. $\eta\mu 4A+\eta\mu 4B+\eta\mu 4\Gamma=0,$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἀντιστρόφως.

103. Ἐὰν $\eta\mu 3A+\eta\mu 3B+\eta\mu 3\Gamma=0$, τότε ἡ μία τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 60°.

104. Ἐὰν $\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\,\frac{B}{2}=\eta\mu\,\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu^3\,\frac{A}{2}$, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνάι ἰσοσκελές.

Ὁμοίως ἂν $\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{A}{2}=\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma.$

105. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu 3A+\sigma\upsilon\nu 3B+\sigma\upsilon\nu 3\Gamma=1$, τότε μία γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 120°.

106. Ἐὰν $x + y + \omega = xy\omega$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $$\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-\psi^2} + \frac{2\omega}{1-\omega^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2\omega}{1-\omega^2}$$

2. $$\frac{3x-x^3}{1-3x^2} + \frac{3y-y^3}{1-3y^2} + \frac{3\omega-\omega^3}{1-3\omega^2} = \frac{3x-x^3}{1-3x^2} \cdot \frac{3y-y^3}{1-3y^2} \cdot \frac{3\omega-\omega^3}{1-3\omega^2},$$

3. $$x(1-y^2)(1-\omega^2) + y(1-\omega^2)(1-y^2) + \omega(1-x^2)(1-y^2) = 4xy\omega.$$

107. Ἐὰν $\alpha = \beta + \gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) + \eta\mu(\alpha+\beta-\gamma) + \eta\mu(\alpha-\beta+\gamma) = 4\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta\,\sigma\upsilon\nu\gamma.$$

108. Ἐὰν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu2\alpha + \eta\mu2\beta + \eta\mu2\gamma = 2(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma)(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma).$$

109 Ἐὰν $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = \eta\mu(\alpha+\beta)$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha = 2k\pi, \quad \beta = 2k_1\pi, \quad \alpha+\beta = 2k_2\pi, \quad (k, k_1, k_2 \in Z)$$

110. Ἐὰν $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = \eta\mu(\alpha+\beta+\gamma)$, τότε :

$$\alpha+\beta = 2k\pi, \quad \beta+\gamma = 2k_1\pi, \quad \gamma+\alpha = 2k^2\pi, \quad (k, k_1, k_2 \in Z)$$

111. Ἐὰν $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$, τότε :

$$\text{ἢ} \quad \alpha-\beta = k\pi \quad \text{ἢ} \quad \alpha+\beta = 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}. \quad (k, k_4 \in Z)$$

112. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1 + \frac{\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu A\,\eta\mu^2 B} + \frac{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu B\,\eta\mu^2\Gamma} + \frac{\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\Gamma\,\eta\mu^2 A} = (\sigma\varphi A + \sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma)^2.$$

113. Ἐὰν $\nu \in Z$ καὶ $A + B + \Gamma = 180^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu(2\nu A) + \eta\mu(2\nu B) + \eta\mu(2\nu\Gamma) = 4\,(-1)^{\nu-1}\,\eta\mu(\nu A)\,\eta\mu(\nu B)\,\eta\mu(\nu\Gamma).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

33. ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ MOLLWEIDE.— Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\frac{A}{2}=\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\text{ημ}\frac{A}{2}=\text{συν}\,\frac{B-\Gamma}{2},\quad \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\text{σφ}\,\frac{A}{2}=\text{εφ}\,\frac{B-\Gamma}{2}.$$

᾿Απόδειξις : Ἔχομεν διαδοχικῶς, ἂν $\beta>\gamma$:

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\frac{A}{2}=\frac{2R\,\text{ημ}B-2R\,\text{ημ}\Gamma}{2R\,\text{ημ}A}\,\text{συν}\frac{A}{2}=\frac{\text{ημ}B-\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}A}\,\text{συν}\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\,\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}\,\text{συν}\frac{B+\Gamma}{2}}{2\,\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{συν}\frac{A}{2}}\,\text{συν}\frac{A}{2}=\frac{\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}\,\text{συν}\frac{B+\Gamma}{2}}{\text{ημ}\frac{A}{2}}=\text{ημ}\frac{B-\Gamma}{2}. \quad (1)$$

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}=\frac{2R\,\text{ημ}B+2R\,\text{ημ}\Gamma}{2R\,\text{ημ}A}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}=\frac{\text{ημ}B+\text{ημ}\Gamma}{\text{ημ}A}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{2\,\text{ημ}\frac{B+\Gamma}{2}\,\text{συν}\,\frac{B-\Gamma}{2}}{2\,\text{ημ}\frac{A}{2}\,\text{συν}\frac{A}{2}}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}=\text{συν}\,\frac{B-\Gamma}{2}. \quad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι :

$$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\text{σφ}\,\frac{A}{2}=\text{εφ}\,\frac{B-\Gamma}{2}.$$

Διὰ κυκλικῆς δὲ ἐναλλαγῆς τῶν α, β, γ καὶ Α, Β, Γ ἔχομεν τοὺς τύπους τοῦ Mollweide, ἂν $\alpha>\beta>\gamma$.

71	$\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\,\text{συν}\,\frac{\Gamma}{2}=\text{ημ}\,\frac{A-B}{2}$
	$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\text{συν}\,\frac{A}{2}=\text{ημ}\,\frac{B-\Gamma}{2}$
	$\frac{\alpha-\gamma}{\beta}\,\text{συν}\,\frac{B}{2}=\text{ημ}\,\frac{A-\Gamma}{2}$

$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}=\text{συν}\,\frac{B-\Gamma}{2}$	72
$\frac{\gamma+\alpha}{\beta}\,\text{ημ}\,\frac{B}{2}=\text{συν}\,\frac{\Gamma-A}{2}$	
$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\,\text{ημ}\,\frac{\Gamma}{2}=\text{συν}\,\frac{A-B}{2}$	

$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}=\varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}$	$\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}$	$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+\alpha}\sigma\varphi\frac{A}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-A}{2}$	73

34. — Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ 2τ ἡ περίμετρος αὐτοῦ. Θὰ εἶναι :

$$\alpha+\beta+\gamma=2\tau \left.\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\beta+\gamma-\alpha=2\tau-2\alpha=2\,(\tau-\alpha),\\ \gamma+\alpha-\beta=2\tau-2\beta=2\,(\tau-\beta),\\ \alpha+\beta-\gamma=2\tau-2\gamma=2\,(\tau-\gamma).\end{array}$$

Ἐκ τῶν τύπων 81 καὶ 82 ἔχομεν :

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}, \text{ καὶ } \frac{\beta-\gamma}{\alpha}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων καὶ εἶτα προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς προκυπτούσας ἰσότητας, λαμβάνομεν :

$$\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha^2}\eta\mu^2\frac{A}{2}+\frac{(\beta-\gamma)^2}{\alpha^2}\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=1 \qquad (1)$$

ἢ $$\frac{(\beta+\gamma)^2}{\alpha}\eta\mu^2\frac{A}{2}+\frac{(\beta-\gamma)^2}{\alpha^2}\left(1-\eta\mu^2\frac{A}{2}\right)=1$$

ἢ $$[(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2]\,\eta\mu^2\frac{A}{2}=\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)$$

ἢ $$4\beta\gamma\,\eta\mu^2\frac{A}{2}=2\,(\tau-\gamma)\cdot 2\,(\tau-\beta)=4\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma),$$

ἐξ οὗ : $$\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$$

Ἡ ἀρνητικὴ τιμὴ ἀπορρίπτεται, καθόσον $\frac{A}{2}<90^0$

Διὰ κυκλικῆς δὲ ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων α, β, γ καὶ Α, Β, Γ λαμβάνομεν τοὺς τύπους :

$\eta\mu\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$	$\eta\mu\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}}$	$\eta\mu\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$	74

Ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(\beta+\gamma)^2\,\eta\mu^2\frac{A}{2}+(\beta-\gamma)^2\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}=\alpha^2$$

ἢ $$(\beta+\gamma)^2\left(1-\text{συν}^2\frac{A}{2}\right)+(\beta-\gamma)^2\,\text{συν}^2\,\frac{A}{2}=\alpha^2$$

ἢ $$[(\beta+\gamma)^2-(\beta-\gamma)^2]\,\text{συν}^2\,\frac{A}{2}=(\beta+\gamma)^2-\alpha^2=(\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)$$

ἢ $$4\beta\gamma\,\text{συν}^2\,\frac{A}{2}=2\tau\cdot 2\,(\tau-\alpha)=4\tau\,(\tau-\alpha).$$

ἐξ οὗ: $$\text{συν}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}.$$

Διὰ κυκλικῆς δὲ ἐναλλαγῆς τῶν α, β, γ, καὶ Α, Β, Γ, λαμβάνομεν :

$\text{συν}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$	$\text{συν}\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}}$	$\text{συν}\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$	**75**

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν 84 καὶ 85 ἀντιστοίχως, λαμβάνομεν τὰς ἐφαπτομένας τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

$\text{εφ}\,\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}}$	$\text{εφ}\,\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\gamma)\,(\tau-\alpha)}{\tau\,(\tau-\beta)}}$	$\text{εφ}\,\frac{\Gamma}{2}=\sqrt{\frac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)}{\tau\,(\tau-\gamma)}}$	**76**

Διερεύνησις : Διὰ νὰ ὑπάρχουν αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, πρέπει :

$$\frac{(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau\,(\tau-\alpha)}>0 \quad ἢ \quad (\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)>0, \quad \text{καθόσον} \quad \tau>0.$$

Διὰ νὰ εἶναι $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)>0$, πρέπει ἢ ὅλοι οἱ παράγοντες νὰ εἶναι θετικοὶ ἢ ἕνας θετικὸς καὶ οἱ ἄλλοι δύο ἀρνητικοί.

Ἐὰν δύο εἶναι ἀρνητικοί, ἔστω :

$$\left.\begin{array}{l}\tau-\beta<0\\ \tau-\gamma<0\end{array}\right\}\Longrightarrow 2\tau-\beta-\gamma<0 \Longrightarrow \alpha<0, \text{ ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι : $\gamma<0$ καὶ $\beta<0$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἄτοπα. Κατ' ἀκολουθίαν : $\tau-\alpha>0$ ἢ $2\tau>2\alpha$ ἢ $\alpha<\beta+\gamma$ (1). Ὁμοίως $\beta<\gamma+\alpha$ (2) καὶ $\gamma<\alpha+\beta$ (3).

Ἐκ τῶν (3) καὶ (2) συνάγομεν ἀντιστοίχως :

$-\alpha<\beta-\gamma$ καὶ $\beta-\gamma<\alpha$, ἐξ ὧν : $-\alpha<\beta-\gamma<\alpha \Longrightarrow$ $|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|\,\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$.

Ὁμοίως : $|\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}|<\boldsymbol{\beta}<\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}$ καὶ $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|<\boldsymbol{\gamma}<\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

Ἐὰν ὅμως α εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρά, τότε ἀρκεῖ : $\boldsymbol{\alpha}<\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}$

Παρατήρησις : Ἐὰν θελήσωμεν νὰ διερευνήσωμεν τοὺς τύπους 74 ἢ 75, θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν:

$$0<\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}<1 \quad \text{ἤτοι} \quad 0<\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}<1$$

ἢ $\tau\,(\tau-\alpha)>0$ καὶ $\tau\,(\tau-\alpha)<\beta\gamma$

ἢ $\tau-\alpha>0$ καὶ $(\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)<4\beta\gamma$

ἢ $\tau>\alpha$ καὶ $(\beta-\gamma)^2-\alpha^2<0$

ἢ $\alpha<\beta+\gamma$ καὶ $(\beta-\gamma+\alpha)\,(\beta-\gamma-\alpha)<0$ (6)

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (6) εἶναι δευτεροβάθμιος συνάρτησις ὡς πρὸς β. Διὰ νὰ εἶναι ἀρνητική, δηλαδὴ ἀντίθετος πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ β^2, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν.

Δηλαδή : $\gamma-\alpha<\beta<\gamma+\alpha,$

ἐξ ὧν συνάγομεν τὰς σχέσεις : $\gamma<\alpha+\beta$ καὶ $\beta<\alpha+\gamma,$

$$\text{῞Οθεν :}\quad \left.\begin{array}{l}\alpha<\beta+\gamma\\ \beta<\gamma+\alpha\\ \gamma<\alpha+\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow |\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma,$$

....

....

35. — Ἐμβαδὸν τριγώνου. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ α, β, γ αἱ πλευραί του, Ε τὸ ἐμβαδόν του. Ἄγομεν τὰ ὕψη ΑΔ, ΒΖ.

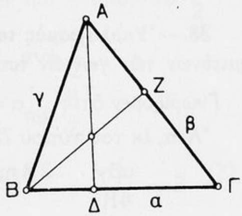
Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν :

$$\mathrm{A\Delta}=\beta\,\eta\mu\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{A\Delta}=\gamma\,\eta\mu\mathrm{B} \quad \text{καὶ} \quad \mathrm{BZ}=\gamma\,\eta\mu\mathrm{A}.$$

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου εἶναι :

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\cdot\mathrm{BZ}=\frac{1}{2}\alpha\cdot\mathrm{A\Delta}=\frac{1}{2}\beta\cdot\gamma\,\eta\mu\mathrm{A}=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha\cdot\beta\,\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\alpha\cdot\gamma\,\eta\mu\mathrm{B}$$



Σχ. 5

῞Ωστε : $$\boxed{\mathbf{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu\mathbf{A}=\frac{1}{2}\gamma\alpha\,\eta\mu\mathbf{B}=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma}$$ **77**

Αἱ σχέσεις αὗται ἐκφράζουν ὅτι : **Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.**

Συνέπεια : Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\eta\mu\Gamma=\dfrac{\gamma}{2\mathrm{R}}$, λαμβάνομεν :

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\alpha\beta\cdot\frac{\gamma}{2\mathrm{R}}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4\mathrm{R}}.$$

῞Οθεν : $$\boxed{\alpha\beta\gamma=4\mathbf{E}\cdot\mathbf{R}}$$ **78**

36. — Ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.

Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\mathrm{E}=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu\mathrm{A}=\frac{1}{2}\beta\gamma\cdot2\,\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}=\beta\gamma\,\eta\mu\frac{\mathrm{A}}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\mathrm{A}}{2}=$$

$$=\beta\gamma\cdot\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}\cdot\sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

῞Ωστε : $$\boxed{\mathbf{E}=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$ **79**

Ὁ τύπος οὗτος καλεῖται τύπος τοῦ **Ἥρωνος.**

37. — Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον ΑΒΓ, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\alpha\beta\gamma = 4ER \quad \text{καὶ} \quad E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ E μεταξὺ τῶν δύο τούτων σχέσεων εὑρίσκομεν :

$$\boxed{R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}} \qquad 80$$

38. — Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῆς R καὶ τῶν ἡμιτόνων τῶν γωνιῶν του.

Γνωρίζομεν ὅτι : $\alpha = 2R\,\eta\mu A, \quad \beta = 2R\,\eta\mu B \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 2R\,\eta\mu \Gamma$

Ἄρα, ἐκ τοῦ τύπου 78, ἔχομεν :

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = \frac{2R\,\eta\mu A \cdot 2R\,\eta\mu B \cdot 2R\,\eta\mu\Gamma}{4R} = 2R^2\eta\mu A\;\eta\mu B\;\eta\mu\Gamma.$$

Ὥστε : $$\boxed{E = 2R^2\;\eta\mu A\;\eta\mu B\;\eta\mu\Gamma} \qquad 81$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

α) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$$\mathbf{A = 60^0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = (\beta-\gamma)\sqrt{3}.}$$

Λύσις : Ἐκ τοῦ δευτέρου τύπου τοῦ Mollweide ἔχομεν :

$$\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta-\gamma}{(\beta-\gamma)\sqrt{3}}\,\sigma\upsilon\nu\frac{60^0}{2} = \eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}$$

ἢ $$\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sigma\upsilon\nu\,30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} = \eta\mu\,30^0.$$

Κατ' ἀκολουθίαν : $\frac{B-\Gamma}{2} = 30^0$ ἢ $B-\Gamma = 60^0.$ (1)

Ἀλλὰ καὶ $B+\Gamma = 180^0 - A = 180^0 - 60^0 = 120^0.$ (2)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι : $B = 90^0$ καὶ $\Gamma = 30^0.$

β) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\boldsymbol{\beta^2\,\eta\mu\,2\Gamma + \gamma^2\,\eta\mu\,2B = 2\beta\gamma\;\eta\mu A.}$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\beta^2\eta\mu\,2\Gamma + \gamma^2\eta\mu\,2B = 2\beta^2\eta\mu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma + 2\gamma^2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu B =$$
$$= 2\beta\,\eta\mu\Gamma\,(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B) = 2\beta\,\eta\mu\Gamma\cdot\alpha = 2\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma = 2\beta\gamma\,\eta\mu A,$$

καθόσον εἶναι :

$$\alpha = \beta \text{ συν}\Gamma + \gamma \text{ συν}B \quad \text{καὶ} \quad \gamma \text{ ημ}B = \beta \text{ ημ}\Gamma, \quad \alpha \text{ ημ}\Gamma = \gamma \text{ ημ}A.$$

γ) Ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις :

$$\boldsymbol{\alpha + \gamma = \beta \,\sigma\varphi \frac{B}{2}}, \tag{1}$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις : Ἡ (1) γράφεται :

$$2R \text{ ημ}A + 2R \text{ ημ}\Gamma = 2R \text{ ημ}B \cdot \text{σφ} \frac{B}{2} \quad \text{ἢ} \quad \text{ημ}A + \text{ημ}\Gamma = \text{ημ}B \cdot \text{σφ} \frac{B}{2}$$

$$\text{ἢ} \qquad 2 \text{ ημ} \frac{A+\Gamma}{2} \text{ συν} \frac{A-\Gamma}{2} = 2 \text{ ημ} \frac{B}{2} \text{ συν} \frac{B}{2} \cdot \frac{\text{συν} \frac{B}{2}}{\text{ημ} \frac{B}{2}}$$

$$\text{ἢ} \qquad \text{συν} \frac{A-\Gamma}{2} = \text{συν} \frac{B}{2}. \tag{2}$$

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι :

$$\text{ἢ} \quad \frac{B}{2} = \frac{A-\Gamma}{2}, \text{ ἐξ οὗ: } B+\Gamma = A \text{ ἢ } A+B+\Gamma = 2A \text{ ἢ } 180^0 = 2A \text{ ἢ } A = 90^0$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{B}{2} = \frac{\Gamma-A}{2}, \text{ ἐξ οὗ: } B+A = \Gamma \text{ ἢ } \Gamma+B+A = 2\Gamma \text{ ἢ } 180^0 = 2\Gamma \text{ ἢ } \Gamma = 90^0.$$

Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον ἢ εἰς τὸ Α ἢ εἰς τὸ Β.

Τέλος ἐκ τῆς (2) δυνατὸν νὰ εἶναι :

$$\frac{B}{2} = \frac{\Gamma-A}{2} + k \cdot 360^0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{B}{2} = \frac{A-\Gamma}{2} + k \cdot 360^0,$$

αἵτινες ἀπορρίπτονται, καθόσον $\frac{B}{2} < 90^0$ καὶ $\frac{|A-\Gamma|}{2} < 90^0$.

δ) Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\boldsymbol{(\alpha + \beta + \gamma)\left(\text{εφ} \frac{A}{2} + \text{εφ} \frac{B}{2}\right) = 2\gamma \,\text{σφ} \frac{\Gamma}{2}} \tag{1}$$

Ἀπόδειξις : Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) γράφεται διαδοχικῶς :

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\text{εφ} \frac{A}{2} + \text{εφ} \frac{B}{2}\right) = 2R\,(\text{ημ}A + \text{ημ}B + \text{ημ}\Gamma) \cdot \frac{\text{ημ}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}} =$$

$$= 2R \cdot 4\text{συν} \frac{A}{2} \text{συν} \frac{B}{2} \text{συν} \frac{\Gamma}{2} \cdot \frac{\text{συν} \frac{\Gamma}{2}}{\text{συν}\frac{A}{2}\text{συν}\frac{B}{2}} = 8R\,\text{συν}^2 \frac{\Gamma}{2} =$$

$$= 8R \cdot ημ\frac{Γ}{2} \cdot \frac{συν^2 \frac{Γ}{2}}{ημ\frac{Γ}{2}} = 8R \cdot ημ\frac{Γ}{2} \cdot συν\frac{Γ}{2} \cdot \frac{συν\frac{Γ}{2}}{ημ\frac{Γ}{2}} =$$

$$= 2R \cdot 2 \cdot ημ\frac{Γ}{2} συν\frac{Γ}{2} \cdot σφ\frac{Γ}{2} = 2 \cdot 2R\, ημΓ \cdot σφ\frac{Γ}{2} = 2γ\, σφ\frac{Γ}{2}.$$

ε) Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ, καθ' ἣν τάξιν ἐδόθησαν, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$σφ\frac{Α}{2} + σφ\frac{Γ}{2} = 2\, σφ\frac{Β}{2}. \tag{1}$$

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ εἶναι :

$$α + γ = 2β \quad ἢ \quad 2τ - (α+γ) = 2τ - 2β \quad ἢ \quad (τ-α) + (τ-γ) = 2\,(τ-β)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης, διὰ τῆς παραστάσεως

$$\sqrt{\frac{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}{τ}},\ \text{λαμβάνομεν :}$$

$$\sqrt{\frac{τ(τ-α)}{(τ-β)(τ-γ)}} + \sqrt{\frac{τ(τ-γ)}{(τ-α)(τ-β)}} = 2\sqrt{\frac{τ(τ-β)}{(τ-γ)(τ-α)}},$$

ἥτις, βάσει τῶν τύπων 76, γράφεται :

$$σφ\frac{Α}{2} + σφ\frac{Γ}{2} = 2σφ\frac{Β}{2}.$$

Ἐργασθῆτε ἀντιστρόφως, ἀρχίζοντες ἐκ τῆς (1), καὶ ἀποδείξατε ὅτι :

$$α + γ = 2β.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

114. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $Γ = 120^0$ καὶ $2α = β\left(\sqrt{3} - 1\right)$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

115. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $3α = (β + γ)\sqrt{3}$ καὶ $Α = 60^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

116. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $β = 2γ$ καὶ $Α = 60^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

117. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $β = α\left(\sqrt{3} - 1\right)$ καὶ $Γ = 30^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

118. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $α = 2$, $γ = \sqrt{2}$ καὶ $Β = 15^0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

119. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $Α = 45^0$ καὶ $\frac{β}{γ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου.

120. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $B = 135^0$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου τούτου, ἂν ὑπάρχουν.

121. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\alpha\,(\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma\,\sigma\upsilon\nu B) = \beta^2 - \gamma^2$,
2. $\alpha\,(\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2\,(\beta + \gamma)\,\eta\mu^2\frac{A}{2}$,
3. $\alpha\,(\sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu B) = 2\,(\beta - \gamma)\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}$,
4. $\alpha\,\eta\mu\left(\frac{A}{2} + B\right) = (\beta + \gamma)\,\eta\mu\,\frac{A}{2}$,
5. $\beta\,\sigma\upsilon\nu B + \gamma\,\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha\,\sigma\upsilon\nu\,(B - \Gamma)$,
6. $(\beta + \gamma - \alpha)\left(\sigma\varphi\,\frac{B}{2} + \sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2}\right) = 2\alpha\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}$
7. $\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}\,\eta\mu\,2A + \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{\beta^2}\,\eta\mu\,2B + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2}\,\eta\mu\,2\Gamma = 0$.

122. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\frac{\alpha\,\eta\mu\,(B - \Gamma)}{\beta^2 - \gamma^2} = \frac{\beta\,\eta\mu\,(\Gamma - A)}{\gamma^2 - \alpha^2} = \frac{\gamma\,\eta\mu\,(A - B)}{\alpha^2 - \beta^2}$,
2. $\Sigma\,\alpha\eta\mu\,\frac{B - \Gamma}{2}\,\eta\mu\,\frac{A}{2} = 0$,
3. $\Sigma\,\alpha^2\eta\mu\,(B - \Gamma)\,\sigma\tau\epsilon\mu A = 0$,
4. $\Sigma\,(\beta - \gamma)\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2} = 0$,
5. $\Sigma\,(\alpha - \beta)\,\epsilon\varphi\,\frac{A + B}{2} = 0$,
6. $\Sigma\,(\alpha + \beta)\,\epsilon\varphi\,\frac{A - B}{2} = 0$,
7. $\Sigma\,\frac{\alpha^2\eta\mu\,(B - \Gamma)}{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma} = 0$,
8. $\Sigma\,\alpha^2\,(\sigma\upsilon\nu^2 B - \sigma\upsilon\nu^2\Gamma) = 0$,
9. $\Sigma\,(\beta^2 - \gamma^2)\,\sigma\varphi A = 0$,
10. $\Sigma\,\alpha\,\eta\mu\,\frac{B - \Gamma}{2}\,\sigma\tau\epsilon\mu\,\frac{A}{2} = 0$,,
11. $\Sigma\,\alpha\,\eta\mu\,\frac{B - \Gamma}{2}\,\tau\epsilon\mu\,\frac{A}{2} = 0$,
12. $\Sigma\,\frac{\beta}{\alpha\,\eta\mu\,\Gamma} = 2\,\sigma\varphi\,A$,
13. $\Sigma\,\frac{\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\beta} = \frac{1}{4R^2}$,
14. $\Sigma\,\frac{1}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{A}{2} = \frac{\tau^2}{\alpha\beta\gamma}$,
15. $\Sigma\,\frac{1}{\alpha}\,\eta\mu^2\,\frac{A}{2} = \frac{2\,\Sigma\,\alpha\beta - \Sigma\,\alpha^2}{4\,\alpha\beta\gamma}$,
16. $\Sigma\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2} = \frac{\tau}{\tau - \alpha}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}$,
17. $\Sigma\,\alpha\,\sigma\upsilon\nu A = \frac{2E}{R}$,
18. $\frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \frac{\Sigma\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}}{\Sigma\,\sigma\varphi A}$
19. $\Sigma\,\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\,\frac{A}{2} = \tau^2$.

123. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\,\sigma\varphi\,A$,
2. $2E\,(\sigma\varphi B - \sigma\varphi A) = \alpha^2 - \beta^2$,
3. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4E \cdot \Sigma\,\sigma\varphi A$,
4. $1 - \epsilon\varphi\,\frac{A}{2}\,\epsilon\varphi\,\frac{B}{2} = \frac{\gamma}{\tau}$.

124. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

1. $\alpha = 2\beta\,\eta\mu\,\frac{A}{2}$,
2. $\eta\mu A = 2\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
3. $\alpha = 2\beta\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$,
4. $(\tau - \beta)\,\sigma\varphi\,\frac{\Gamma}{2} = \tau\,\epsilon\varphi\,\frac{B}{2}$,
5. $2\upsilon_\alpha = \alpha\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}$,
6. $4E = \alpha^2\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}$,

7. $\dfrac{\Sigma\,\alpha^2}{2E} = \sigma\varphi\,\dfrac{A}{2} + 3\,\varepsilon\varphi\,\dfrac{A}{2}$, 8. $\alpha\,\varepsilon\varphi A + \beta\,\varepsilon\varphi B = (\alpha + \beta)\,\varepsilon\varphi\,\dfrac{A+B}{2}$,

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

125. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\eta\mu\Gamma\,(\sigma\upsilon\nu A + 2\,\sigma\upsilon\nu\Gamma) = \eta\mu B\,(\sigma\upsilon\nu A + 2\,\sigma\upsilon\nu B)$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς ἢ ὀρθογώνιον.

126. Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι: $(1 - \sigma\varphi\Gamma)\,[1 + \sigma\varphi\,(45^0 - B)] = 2$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

127. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $A = 90^0$ καὶ $4E = \alpha^2$, τὸ τρίγωνον τοῦτο θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

128. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι:

$$\beta^3 + \gamma^3 - \alpha^3 = \alpha^2\,(\beta + \gamma - \alpha) \quad \text{καὶ} \quad 4\,\eta\mu B\,\eta\mu\Gamma = 3,$$

τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ἰσόπλευρον.

129. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $A = 120^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\gamma\,(\alpha^2 - \gamma^2) = \beta\,(\alpha^2 - \beta^2).$$

130. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι τῶν πλευρῶν τούτων γωνιῶν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

131. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\varphi A + \sigma\varphi\Gamma = 2\,\sigma\varphi B.$$

καὶ ἀντιστρόφως.

132. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha + \gamma = 2\beta$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. $\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\varphi\,\dfrac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu\Gamma\,\sigma\varphi\,\dfrac{\Gamma}{2} = 2\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\varphi\,\dfrac{B}{2}$,

2. $\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\,\dfrac{\Gamma}{2} + \gamma\,\sigma\upsilon\nu^2\,\dfrac{A}{2} = \dfrac{3\beta}{2}$,

3. $\sigma\varphi\,\dfrac{A}{2} + \sigma\varphi\,\dfrac{\Gamma}{2} = 2\,\sigma\varphi\,\dfrac{B}{2}$,

4. $\varepsilon\varphi\,\dfrac{A}{2}\,\varepsilon\varphi\,\dfrac{\Gamma}{2} = \dfrac{1}{3}$.

Ἰσχύουν τὰ ἀντίστροφα τούτων;

133. Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$\eta\mu^2\,\frac{A}{2}, \qquad \eta\mu^2\,\frac{B}{2}, \qquad \eta\mu^2\,\frac{\Gamma}{2}$$

ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

134. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha + \gamma = 2\beta$ καὶ $A - \Gamma = 90^0$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{7}+1} = \frac{\beta}{7} = \frac{\gamma}{\sqrt{7}-1}$$

135. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\Gamma = 60^0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha+\gamma} + \frac{1}{\beta+\gamma} = \frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}$$

καὶ ἀντιστρόφως.

136. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. $\alpha^3\,\sigma\upsilon\nu\,(B - \Gamma) + \beta^3\,\sigma\upsilon\nu\,(\Gamma - A) + \gamma^3\,\sigma\upsilon\nu\,(A - B) = 3\,\alpha\beta\gamma$,
2. $\beta^2\,\sigma\upsilon\nu\,2B + \gamma^2\,\sigma\upsilon\nu\,2\Gamma + 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,(B - \Gamma) = \alpha^2\,\sigma\upsilon\nu 2\,(B - \Gamma)$,
3. $\alpha^2\,\sigma\upsilon\nu^2 A + \beta^2\,\sigma\upsilon\nu^2 B + \gamma^2\,\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,2A\,\sigma\upsilon\nu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma +$
   $+ 2\gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu 2B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu A + 2\alpha\beta\,\sigma\upsilon\nu 2\Gamma\,\sigma\upsilon\nu A\,\sigma\upsilon\nu B = 0$.

4. $\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 2\,\Sigma\,\beta^3\gamma^3\,\text{συν}A = \alpha^2\beta^2\gamma^2\,(1 - 8\,\text{συν}A\,\text{συν}B\,\text{συν}\Gamma)$,

5. $\Sigma\,\text{ημ}^4A + 4\Pi\,\text{ημ}^2A = 2\,\Sigma\,\text{ημ}^2B\,\text{ημ}^2\Gamma$.

137. Ἐὰν $\text{συν}A = \text{συν}\alpha\,\text{ημ}\beta$, $\text{συν}B = \text{συν}\beta\,\text{ημ}\gamma$, $\text{συν}\Gamma = \text{συν}\gamma\,\text{ημ}\alpha$ καὶ $A + B + \Gamma = \pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma = 1.$$

138. Ἐὰν $\text{συν}A = \text{εφ}\beta\,\text{εφ}\gamma$, $\text{συν}B = \text{εφ}\gamma\,\text{εφ}\alpha$, $\text{συν}\Gamma = \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}\beta$ καὶ $A + B + \Gamma = \pi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{ημ}^2\alpha + \text{ημ}^2\beta + \text{ημ}^2\gamma = 1.$$

139. Ἐὰν $\text{ημ}^2x\,\text{ημ}^2y + \text{ημ}^2(x + y) = (\text{ημ}x + \text{ημ}y)^2$, τότε ἓν τῶν τόξων x καὶ y εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ π.

140. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{σφ}A + \text{σφ}B + \text{σφ}\Gamma \geqslant \sqrt{3}.$$

141. Ἐὰν $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ καὶ $0 \leqq \beta < \dfrac{\pi}{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{εφ}\,\frac{\alpha + \beta}{2} < \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{2}$$

142. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$\frac{\text{ημ}^2 B}{\text{ημ}^2 \Gamma} - \frac{\text{συν}^2 B}{\text{συν}^2 \Gamma} = \frac{\beta^4 - \gamma^4}{\beta^2\gamma^2}$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἢ $B = \Gamma$ ἢ $A = 90^0$ ἢ $|B - \Gamma| = \dfrac{\pi}{2}$

143. Παρατηροῦντες ὅτι αἱ γωνίαι $\dfrac{\pi}{7}$, $\dfrac{2\pi}{7}$, $\dfrac{4\pi}{7}$ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς γωνίαι τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{συν}\,\frac{\pi}{7}\,\text{συν}\,\frac{2\pi}{7}\,\text{συν}\,\frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

144. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης :

$$\text{ημ}\,4A + \text{ημ}\,4B + \text{ημ}\,4\Gamma = 0,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

145. Ἀφοῦ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης :

$$\text{εφ}x = \text{σφ}x - 2\text{σφ}\,2x,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ἀκολούθως ὅτι :

$$S_\nu = \frac{1}{2}\,\text{εφ}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\,\text{εφ}\,\frac{x}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^\nu}\,\text{εφ}\,\frac{x}{2^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\,\text{σφ}\,\frac{x}{2^\nu} - \text{σφ}\,x$$

ἔνθα $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

146. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑφίστανται δύο ἀριθμοὶ x καὶ y, τοιοῦτοι ὥστε :

$$\text{στεμ}\,\alpha = x\,\text{εφ}\,\frac{\alpha}{2} + y\,\text{σφ}\,\alpha,$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι :

$$S_\nu = \text{στεμ}\,\alpha + \text{στεμ}\,2\alpha + \text{στεμ}\,4\alpha + \ldots + \text{στεμ}\,2^\nu\,\alpha = \text{σφ}\,\frac{\alpha}{2} - \text{εφ}\,2^\nu\,\alpha$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

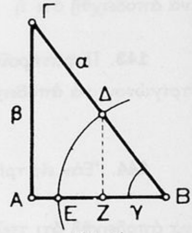
39. Ἀνάγκη τῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων. Οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἐκπλήρωσιν τοῦ σκοποῦ τῆς Τριγωνομετρίας. Ἵνα δὲ τοῦτο γίνῃ ἀντιληπτὸν ἀπὸ τοῦδε, λύομεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

40. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. — Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει $\alpha = 20\,\text{m}$ καὶ $\beta = 12\,\text{m}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία Β αὐτοῦ.

Λύσις : Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα $ΒΔ = 1$ γράφομεν κύκλον, ὅστις τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἄγομεν τὴν ΔΖ κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΖΔ καὶ ΒΑΓ ἔχομεν :

$$\frac{\beta}{ΖΔ} = \frac{\alpha}{ΒΔ} = \frac{\alpha}{1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{1},$$

ἐξ οὗ :
$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10} = 0{,}6. \qquad (1)$$



Σχ. 6

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης φαίνεται ὅτι γνωρίζομεν τὸ ημΒ, ὄχι ὅμως καὶ τὴν γωνίαν Β.

Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας Β ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) καὶ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu B = \lambda o\gamma\, 0{,}6 = \overline{1}{,}77815$$

Ἄν, λοιπόν, ἔχωμεν πίνακα, ὅστις νὰ περιέχῃ τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν Β, τῆς ὁποίας τὸ ἡμίτονον ἔχει λογάριθμον τὸν ἀριθμὸν $\overline{1}{,}77815$.

Τοιοῦτοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν. Εἷς περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 11 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 20 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἄλλος μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία. Διὰ τὰς συνήθεις ὅμως ἐφαρμογὰς ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίναξ, τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν καὶ Ἑλληνικαὶ ἐκδόσεις κατὰ τὸ σύστημα Dupuis.

Τοῦτον θὰ περιγράψωμεν συντόμως εἰς τὰ ἑπόμενα καὶ θὰ ἐκθέσωμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς χρήσεως αὐτῶν.

41. Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων Dupuis.

Οἱ πίνακες τοῦ Dupuis περιλαμβάνουν τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, ἐφαπτομένης, συνεφαπτομένης καὶ συνημιτόνου τῶν τόξων ἀπὸ 0⁰ μέχρις 90⁰, τὰ ὁποῖα προχωροῦν κατὰ 1'. Ὁ ἀριθμὸς τῶν μοιρῶν ἀναγράφεται ἐκτὸς τοῦ πλαισίου καὶ διὰ μὲν τὰ μικρότερα 45⁰ τόξα εἰς τὸ ἄνω μέρος ἑκάστης σελίδος, διὰ δὲ τὰ ὑπόλοιπα εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς σελίδος.

Οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν διὰ μὲν τὰ μικρότερα τῶν 45⁰ τόξα ἀναγράφονται εἰς τὴν πρώτην ἐξ ἀριστερῶν στήλην, ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἐπικεφαλίδα ὀξὺν τόνον ('), διὰ δὲ τὰ λοιπὰ εἰς τὴν α' ἐκ δεξιῶν στήλην.

Τὰ πρῶτα λεπτὰ τῆς μὲν πρώτης στήλης βαίνουν αὐξανόμενα ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, τῆς δὲ ἄλλης βαίνουν ἀντιστρόφως, ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Διὰ τῆς ὡς ἄνω διατάξεως οἱ ἀριθμοὶ τῶν πρώτων λεπτῶν δύο συμπληρωματικῶν τόξων κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁριζοντίου γραμμῆς.

Ὁ λογάριθμος ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παντὸς τόξου μικροτέρου τῶν 45⁰ καὶ μὴ περιέχοντος δεύτερα λεπτὰ εἶναι ἀναγεγραμμένος εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν αὐτοῦ καὶ τῆς στήλης, ἡ ὁποία φέρει ἄνω συγκεκριμμένον τὸ ὄνομα τοῦ τριγωνομετρικοῦ τούτου ἀριθμοῦ.

Ἂν δὲ τὸ τόξον περιέχηται μεταξὺ 45⁰ καὶ 90⁰ καὶ δὲν περιέχῃ δεύτερα λεπτά, ὁ λογάριθμος ἑκάστου τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὁμοίως εἰς τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ εἰς τὴν στήλην, ἡ ὁποία φέρει **κάτω** τὸ ὄνομα τοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω :

λογ ημ $(18^0\ 25') = \bar{1},49958$ λογ ημ $(39^0\ 56') = \bar{1},80746$	λογ ημ $(67^0\ 16') = \bar{1},96488$ λογ ημ $(78^0\ 33') = \bar{1},99127$
λογ συν $(24^0\ 12') = \bar{1},96005$ λογ συν $(43^0\ 52') = \bar{1},85791$	λογ συν $(62^0\ 10') = \bar{1},66922$ λογ συν $(56^0\ 53') = \bar{1},73747$
λογ εφ $(30^0\ 14') = \bar{1},76551$ λογ εφ $(39^0\ 27') = \bar{1},91533$	λογ εφ $(61^0\ 58') = 0,27372$ λογ εφ $(48^0\ 19') = 0,05039$
λογ σφ $(29^0\ 39') = 0,24471$ λογ σφ $(44^0\ 51') = 0,00227$	λογ σφ $(52^0\ 11') = \bar{1},88994$ λογ σφ $(77^0\ 38') = \bar{1},34095$

Ὅταν δὲ πλείονες λογάριθμοι ἔχουν κοινὰ τὰ δύο πρῶτα ψηφία αὐτῶν, ταῦτα γράφονται μόνον εἰς τὸν πρῶτον καὶ τελευταῖον τῶν λογαρίθμων τούτων, νοοῦνται δὲ καὶ διὰ τοὺς ἐνδιαμέσους λογαρίθμους.

Ἐὰν δὲ οὗτοι εὑρίσκωνται εἰς περισσοτέρας σελίδας τῆς μιᾶς, ταῦτα ἀναγράφονται καὶ εἰς τὴν ἀρχὴν καὶ τὸ τέλος ἑκάστης τῶν σελίδων τούτων.

Ἐὰν ἐν τῷ μεταξὺ μεταβληθῇ τὸ ἕτερον τῶν δύο πρώτων ψηφίων ἀναγράφεται πλήρης ὁ λογάριθμος ὡς καὶ ὁ προηγούμενος αὐτοῦ.

Μετὰ τὰς στήλας τῶν λογαρίθμων τῶν ἡμιτόνων καὶ τῶν συνημιτόνων ὑπάρχουν στῆλαι μὲ ἐπικεφαλίδα τὸ γράμμα Δ (διαφορά). Εἰς ταύτας ἀναγράφονται εἰς μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε΄.δ.τ.) αἱ διαφοραὶ τῶν λογαρίθμων τῶν ἐν λόγῳ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων.

Ἐπίσης ὁμοία στήλη ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν στηλῶν Εφ καὶ Σφ περιέχουσα τὰς κοινὰς διαφορὰς τῶν λογαρίθμων τῶν ἐφαπτομένων καὶ συνεφαπτομένων δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων. Διότι :

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\sigma\varphi\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{\sigma\varphi\beta},$$

ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\alpha = -\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\alpha \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\beta = -\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\beta$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\boxed{\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\alpha - \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\beta = \lambda o\gamma\, \sigma\varphi\beta - \lambda o\gamma\, \sigma\varphi\alpha}$$

Ἡ δεξιὰ τῶν συνημιτόνων στήλη διαφορῶν δὲν ὑπάρχει διὰ τὰ μικρότερα τῶν 18^0 τόξα καὶ μεγαλύτερα τῶν 71^0 τόξα, καθόσον αἱ διαφοραὶ αὗται εἶναι μικρότεραι τοῦ ἀριθμοῦ 5 καὶ εὑρίσκονται εὐκόλως ἀπὸ μνήμης.

Εἰς τὰς σελίδας τῶν ἀπὸ 6^0 ἕως 83^0 τόξων ὑπάρχουν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ἕκαστον τῶν ὁποίων φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν καὶ διαιρεῖται εἰς δύο στήλας.

Τούτων ἡ πρώτη περιέχει τοὺς μονοψηφίους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι φανερώνουν δεύτερα λεπτά, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μεταβολάς. Τὸ παραπλεύρως πινακίδιον φανερώνει ὅτι, ἂν ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δύο διαδοχικῶς ἀναγεγραμμένων τόξων εἶναι 23 μ.ε΄.δ.τ, εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ

$$1'', 2'', 3'', \ldots, 9''$$

ἀντιστοιχεῖ αὔξησις ἢ ἐλάττωσις τοῦ λογαρίθμου τοῦ αὐτοῦ τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ κατὰ :

$$0{,}38,\ 0{,}77,\ 1{,}15,\ \ldots,\ 3{,}45 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}$$

	23
1΄΄	0,38
2	0,77
3	1,15
4	1,53
5	1,92
6	2,30
7	2,68
8	3,07
9	3,45

42. Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν τριγ. πινάκων. Τοὺς λογαριθμικοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας χρησιμοποιοῦμεν πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἀκολούθων προβλημάτων.

43. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος ὡρισμένου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ δοθέντος τόξου.

Λύσις : α) Ἂν τὸ δοθὲν τόξον δὲν ἔχῃ δεύτερα λεπτά, ὁ ζητούμενος λογάριθμος εὑρίσκεται εἰς τὴν σελίδα τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καὶ εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς τῶν πρώτων λεπτῶν καὶ τῆς ὁμωνύμου πρὸς τὸν τριγωνομετρικὸν ἀριθμὸν στήλης. Οὕτως εὑρίσκομεν :

λογ ημ $(19^0\ 38') = \overline{1},52634$	λογ συν $(65^0\ 51') = \overline{1},61186$
λογ εφ $(26^0\ 17') = \overline{1},69361$	λογ σφ $(56^0\ 23') = \overline{1},82270$ κ.λ.π.

β) Ἂν τὸ τόξον περιέχῃ καὶ δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως, διότι οἱ πίνακες δὲν περιέχουν δεύτερα λεπτά.

1ον : Ὁ λογ ημ $(29^0\ 15'\ 18'')$ δὲν ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας.

Εὑρίσκομεν δὲ τοῦτον ὡς ἑξῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$29^0\ 15' < 29^0\ 15'\ 18'' < 29^0\ 16'$$

καὶ ἄρα : ημ $(29^0\ 15') <$ ημ $(29^0\ 15'\ 18'') <$ ημ $(29^0\ 16')$

καί : λογ ημ $(29^0\ 15') <$ λογ ημ $(29^0\ 15'\ 18'') <$ λογ ημ $(29^0\ 16')$.

ἢ $\overline{1},68897 <$ λογ ημ $(29^0\ 15'\ 18'') < \overline{1},68920$.

Ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\overline{1},68897$ καὶ $\overline{1},68920$, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ 23 μ.ε΄.δ.τ.

Ἀπὸ τὸν πίνακα βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1΄ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου αὐτοῦ, ἀρκεῖ τὸ τόξον νὰ μὴ διαφέρῃ πολὺ τοῦ $(29^0\ 15')$. Δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν τόξων καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ λογ ημ $(29^0\ 15') = \overline{1},68897$, διὰ νὰ προκύψῃ ὁ ζητούμενος λογάριθμος.

Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς :

Εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ $1' = 60''$ ἀντιστοιχεῖ αὔξ. τοῦ λογ. κατὰ 23 μ.ε΄δ.τ.

» » » $18''$ » » » **x** ;

Ἄρα : $x = 23 \cdot \frac{18}{60} = \frac{414}{60} = 6{,}9$ ἢ 7 μ.ε΄.δ.τ. καθ' ὑπεροχήν.

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\text{λογ ημ } (29^0\ 15'\ 18'') = \overline{1},68897 + 0{,}00007 = \overline{1},68904.$$

Αἱ ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται καὶ ὡς ἑξῆς :

λογ ημ $(29^0\ 16') = \overline{1},68920$	$60''$ 23 μ.ε΄.δ.τ.
λογ ημ $(29^0\ 15') = \overline{1},68897$	$18''$ x ;
$\Delta = 23$	$x = 23 \cdot \frac{18}{60} = 6{,}9$ ἢ 7 μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα : λογ ημ $(29^0\ 15'\ 18'') = \overline{1},68897 + 0{,}00007 = \overline{1},68904$.

2ον : Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ λογαρίθμου ἐφαπτομένης δοθέντος τόξου. Οὕτω, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ λογ εφ (60⁰ 45′ 23″) γράφομεν :

λογ εφ (60⁰ 46′) = 0,25209 λογ εφ (60⁰ 45′) = 0,25179 Δ = 30	60″ — 30 μ.ε′.δ.τ. 23″ — x $x = 30 \cdot \frac{23}{60} = \frac{23}{2} = 11{,}5 = 12$ μ.ε′.δ.τ.

Ἄρα : λογ εφ (60⁰ 45′ 23″) = 0,25179 + 0,00012 = 0,25191.

3ον : Ἔστω ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ συν (60⁰ 48′ 28″).

Γνωρίζομεν ὅτι αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπὸ 0⁰ ἕως 90⁰, τὸ συνημίτονον καὶ ἡ συνεφαπτομένη ἐλαττοῦνται. Οὕτως, εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου, ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τῶν λογαρίθμων τῶν τριγωνομετρικῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.

Ἐν προκειμένῳ :

Ἐπειδὴ 60⁰ 48′ < 60⁰ 48′ 28″ < 60⁰ 49′, ἕπεται :

συν (60⁰ 48′) > συν (60⁰ 48′ 28″) > συν (60⁰ 49′)

ἄρα καί : λογ συν (60⁰ 48′) > λογ συν (60⁰ 48′ 28″) > λογ συν (60⁰ 49′)

ἢ $\overline{1}$,68829 > λογ συν (60⁰ 48′ 28″) > $\overline{1}$,68807.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\overline{1}$,68829 καὶ $\overline{1}$,68807, οἵτινες διαφέρουν κατὰ 22 μ.ε′.δ.τ.

Διάταξις τῆς πράξεως :

λογ συν (60⁰ 48′) = $\overline{1}$,68829 λογ συν (60⁰ 49′) = $\overline{1}$,68807 Δ = 22	60″ — 22 μ.ε′.δ.τ. 28″ — x ; $x = 22 \cdot \frac{28}{60} = 10{,}26$ ἢ 10 μ.ε′.δ.τ.

Ἄρα : λογ συν (60⁰ 48′ 28″) = $\overline{1}$,68829 − 0,00010 = $\overline{1}$,68819.

4ον : Ἔστω ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ σφ (36⁰ 54′ 38″).

Διατάσσομεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἀκολούθως :

λογ σφ (36⁰ 54′) = 0,12446 λογ σφ (36⁰ 55′) = 0,12420 Δ = 26	60″ — 26 μ.ε′.δ.τ. 38″ — x ; $x = 26 \cdot \frac{38}{60} = 16{,}46$ ἢ 16 μ.ε′.δ.τ.

Ἄρα : λογ σφ (36⁰ 54′ 38″) = 0,12446 − 0,00016 = 0,12430.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

147. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν :

1. ημ (15⁰ 27′),
2. συν (36⁰ 12′),
3. συν (65⁰ 25′),
4. ημ (58⁰ 10′),
5. εφ (20⁰ 16′),
6. εφ (53⁰ 6′),
7. σφ (14⁰ 36′),
8. σφ (70⁰ 14′),
9. ημ (25⁰ 10′ 18″),
10. ημ (55⁰ 26′ 39″),
11. συν (33⁰ 17′ 25″),
12. συν (66⁰ 14′ 52″),
13. εφ (18⁰ 56′ 10″),
14. εφ (48⁰ 10′ 50″),
15. σφ. (29⁰ 33′ 48″),
16. σφ (24⁰ 19′ 10″),
17. σφ (70⁰ 34′ 15″),
18. ημ (123⁰ 56′ 10″).

148. Ὁμοίως τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν :

1. $\eta\mu\,\dfrac{3\pi}{7}$, 3. $\varepsilon\varphi\,\dfrac{3\pi}{11}$,

2. $\sigma\upsilon\nu\,\dfrac{\pi}{17}$, 4. $\sigma\varphi\,\dfrac{5\pi}{17}$.

44. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. – Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον, ἂν δοθῇ ὁ λογάριθμος ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

1ον : Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\, x = \overline{1},73940.$$

Λύσις : Εὑρίσκομεν πρῶτον εἰς τὸν πίνακα ὅτι :

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\ 45^0 = \overline{1},84949.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\overline{1},73940 < \overline{1},84949$, ἕπεται ὅτι :

$$\eta\mu\, x < \eta\mu\, 45^0 \quad \text{καὶ ἄρα} \quad x < 45^0.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\overline{1},73940$ εἰς τὰς στήλας, αἱ ὁποῖαι φέρουν ἄνω τὴν λέξιν ἡμίτονον (Ημ).

Εὑρίσκομεν δὲ αὐτὸν εἰς τὴν σελίδα τῶν 33^0 καὶ τὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν τῶν 17′. Εἶναι λοιπόν :

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu\, x = \overline{1},73940 = \lambda o\gamma\ \eta\mu\ (33^0\ 17')$$

καὶ ἄρα : $$x = 33^0\ 17'$$

Ἂν ὅμως δοθῇ ὅτι $\lambda o\gamma\ \eta\mu x = \overline{1},68129$, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\overline{1},68121 < \overline{1},68129 < \overline{1},68144$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν : $$28^0\ 41' < x < 28^0\ 42'$$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\Delta = \overline{1},68144 - \overline{1},68121 = 23 \ \ \text{μ.ε' δ.τ.}$$

καὶ $$\delta = \overline{1},68129 - \overline{1},68121 = 8 \ \ \text{μ.ε'.δ.τ.}$$

καὶ καταρτίζομεν τὴν διάταξιν :

Αὔξησις λογαρίθμου κατὰ 23 φέρει αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 60″

» » » 8 » » » » y ;

Ἐπομένως :

$$y = 60'' \cdot \frac{8}{23} = \frac{480''}{23} = 20'',88$$

Θὰ εἶναι λοιπόν : $$x = 28^0\ 41'\ 20'',88.$$

Συντομώτερον ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

	$\bar{1},68129$	$\bar{1},68144$	$28^0\ 42'$	
	$\bar{1},68121$	$\bar{1},68121$	$28^0\ 41'$	
Διαφοραί :	8	23	$1' = 60''$	

$$\begin{array}{cc} 23 & 60'' \\ 8 & y\ ; \end{array}$$

$$y = 60'' \cdot \frac{8}{23} = 20'',88$$

Ἄρα : $x = 28^0\ 41'\ 20'',88.$

2ον : Δίδεται ὅτι : $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\ x = \bar{1},85360.$

Διάταξις τῶν πράξεων :

	$\bar{1},85360$	$\bar{1},85380$	$35^0\ 32'$
	$\bar{1},85354$	$\bar{1},85354$	$35^0\ 31'$
Διαφοραί :	6	26	$1' = 60''$

$$\begin{array}{cc} 26 & 60'' \\ 6 & y \end{array}$$

$$y = 60'' \cdot \frac{6}{26} = 13'',84$$

Ἄρα : $x = 35^0\ 31'\ 13'',84.$

3ον : Ἔστω ὅτι $\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ x = \bar{1},85842$, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x.

Ἐκ τῶν πινάκων παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\bar{1},85851 > \bar{1},85842 > \bar{1},85839$$

καὶ ἄρα $$43^0\ 47' < x < 43^0\ 48'$$

Ἤδη, πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόξου x, κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν :

	$\bar{1},85842$	$\bar{1},85851$	$43^0\ 47'$
	$\bar{1},85839$	$\bar{1},85839$	$43^0\ 48'$
Διαφοραί :	3	12	$1' = 60''$

$$\begin{array}{cc} 12 & 60'' \\ 3 & y \end{array}$$

$$y = 60'' \cdot \frac{3}{12} = 15''.$$

Ἐπειδὴ δὲ αὐξανομένου τοῦ τόξου ἐλαττοῦται τὸ συνημίτονον, ἔπεται ὅτι :

$$x = (43^0\ 48') - 15'' = (43^0\ 47'\ 60'') - 15'' = 43^0\ 47'\ 45''.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ ὅταν δοθῇ ὁ λογάριθμος τῆς συνεφαπτομένης ἑνὸς τόξου x.

Σημείωσις : Οἱ λογάριθμοι εἰς τοὺς πενταψηφίους πίνακας ἀνεγράφησαν κατὰ προσέγγισιν 0,000005. Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν τὰ δι' αὐτῶν ὑπολογιζόμενα τόξα δὲν εἶναι μαθηματικῶς ἀκριβῆ. Εἶναι, ἑπομένως, συμφέρον νὰ γνωρίζωμεν εἰς ποίαν περίπτωσιν εὑρίσκομεν ἀκριβεστέραν τιμὴν τοῦ τόξου.

Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἔστω ὅτι τὸ μέτρον ἑνὸς ἐκ τῶν εἰς τοὺς πίνακας ἀναγεγραμμένων τόξων εἶναι α. Τότε τὸ μέτρον τοῦ ἀμέσως μεγαλυτέρου του εἶναι $\alpha + 1' = \alpha + 60''$.

Ἐκ τῶν σχέσεων :

$$\text{εφ}\,(\alpha + 60'') = \frac{\text{ημ}\,(\alpha + 60'')}{\text{συν}\,(\alpha + 60'')} \quad \text{καὶ} \quad \text{εφα} = \frac{\text{ημα}}{\text{συνα}},$$

προκύπτουν αἱ σχέσεις :

$$\text{λογ εφ}\,(\alpha + 60'') = \text{λογ ημ}\,(\alpha + 60'') - \text{λογ συν}\,(\alpha + 60'')$$

καὶ

$$\text{λογ εφα} = \text{λογ ημα} - \text{λογ συνα}$$

Ὅθεν καί :

$$\text{λογ εφ}\,(\alpha + 60'') - \text{λογ εφα} = [\,\text{λογ ημ}\,(\alpha + 60'') - \text{λογ ημα}\,] + $$
$$+ [\text{λογ συνα} - \text{λογ συν}\,(\alpha + 60'')] \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ :

$$\left.\begin{aligned} &\text{λογ εφ}\,(\alpha + 60'') - \text{λογ εφα} = \delta \\ &\text{λογ ημ}\,(\alpha + 60'') - \text{λογ ημα} = \delta_1 \\ &\text{λογ συνα} - \text{λογ συν}\,(\alpha + 60'') = \delta_2 \end{aligned}\right\}$$

ἡ (1) γίνεται : $\delta = \delta_1 + \delta_2$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν : $\delta > \delta_1$ (2) καὶ $\delta > \delta_2$ (3)

Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ δ, δ_1 καὶ δ_2, ἐφ' ὅσον ἀναφέρονται εἰς πενταψηφίους λογαρίθμους, παριστοῦν ἑκατοντάκις χιλιοστὰ (ἑ.χ.).

Ἤδη, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, παρατηροῦμεν ὅτι, λαμβάνοντες κατὰ λάθος, ἀντὶ τοῦ λογ.εφ $(\alpha + 60'')$, τὸν λογ εφ α, κάμνομεν λάθος ἴσον πρός :

$$\text{λογ εφ}\,(\alpha + 60'') - \text{λογ εφα} = \delta \ \text{ἑ.χ.}$$

Ἀλλὰ τότε ἀντὶ τοῦ τόξου $\alpha + 60''$, θὰ λάβωμεν τὸ α. Ἑπομένως τὸ ἀντίστοιχον λάθος εἰς τὸ τόξον θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 60''. Δηλαδὴ λάθος δ ἑ.χ. συμβὰν εἰς τὸν λογάριθμον τῆς ἐφαπτομένης, προκαλεῖ εἰς τὸ τόξον λάθος 60''.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι λάθος k ἑ.χ. εἰς τὸν λογάριθμον τῆς ἐφαπτομένης, θὰ προκαλέσῃ εἰς τὸ τόξον λάθος $60''\left(\frac{k}{\delta}\right)$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι λάθος k ἑ.χ. εἰς τὸν λογάριθμον τοῦ ἡμιτόνου ἢ τοῦ συνημιτόνου ἑνὸς τόξου, προκαλεῖ εἰς τὸ τόξον ἀντίστοιχον λάθος :

$$60'' \cdot \left(\frac{k}{\delta_1}\right) \quad \text{ἢ} \quad 60'' \cdot \left(\frac{k}{\delta_2}\right)$$

Ἔχοντες ὅμως ὑπ' ὄψιν καὶ τὰς (2), (3), συνάγομεν ὅτι :

$$60''\left(\frac{k}{\delta_1}\right) > 60''\left(\frac{k}{\delta}\right) \quad \text{καὶ} \quad 60''\left(\frac{k}{\delta_2}\right) > 60''\left(\frac{k}{\delta}\right)$$

Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι τόξον τι προσδιορίζεται ἀκριβέστερον ἐκ τοῦ λογαρίθμου τῆς ἐφαπτομένης του παρὰ ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἡμιτόνου του ἢ τοῦ συνημιτόνου του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

149. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0 τιμαὶ τοῦ τόξου x, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὰς ἐξισώσεις :

1. $\lambda o\gamma\ \eta\mu\, x = \bar{1},84439$,
2. $\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\, x = \bar{1},65190$,
3. $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\, x = \bar{1},26035$,
4. $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\, x = \bar{1},59183$,
5. $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\, x = 0,21251$,
6. $\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\, x = \bar{1},18954$,
7. $\lambda o\gamma\ \tau\varepsilon\mu\, x = 0,02830$.

45. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ.– Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον ἐκ τῶν ἐχόντων δοθέντα τριγωνομετρικὸν ἀριθμόν.

Λύσις : Προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον ἀπὸ μίαν τῶν ἐξισώσεων :

$$\eta\mu x = \alpha, \quad \sigma\upsilon\nu x = \beta, \quad \varepsilon\varphi x = \gamma,$$

τότε, ἐὰν $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, θὰ εἶναι καὶ

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu x = \lambda o\gamma \alpha, \quad \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu x = \lambda o\gamma\beta, \quad \lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi x = \lambda o\gamma\gamma,$$

δεδομένου ὅτι, ὅπως εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας, ἐὰν δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσοι.

Ἐὰν ὅμως εἷς τῶν α, β, γ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε οὗτος δὲν ἔχει λογάριθμον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α) Ἐὰν $\alpha < 0$, τότε ἐκ τῆς $\eta\mu x = \alpha$, λαμβάνομεν τὴν

$$\eta\mu\, (x - 180^0) = -\alpha > 0.$$

Ἐκ ταύτης ὁρίζεται τὸ τόξον $x - 180^0$, ἄρα καὶ τὸ x.

Παράδειγμα Ι.– Ἔστω ὅτι $\eta\mu\, x = -\dfrac{3}{5}$.

Λύσις : Τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον λῆγον εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον ὑπερβαίνει τὸ θετικὸν ἡμικύκλιον κατὰ τόξον τι y ἤτοι, θὰ εἶναι : $x = 180^0 + y$.

Κατ' ἀκολουθίαν $\eta\mu y = -\eta\mu\, x = \dfrac{3}{5}$. Ὅθεν καὶ

$$\lambda o\gamma\ \eta\mu y = \lambda o\gamma \frac{3}{5} = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5 = 0,47712 - 0,69897 = \bar{1},77815$$

ἐξ οὗ, κατὰ τὰ γνωστά : $y = 36^0\ 52'\ 10'',58$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν

$$x = 180^0 + y = 216^0\ 52'\ 10'',58.$$

β) Ἐὰν $\gamma < 0$, τότε ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi x = \gamma < 0$, ἕπεται $-\varepsilon\varphi x = -\gamma > 0$

ἢ $$\varepsilon\varphi\, (180^0 - x) = -\gamma > 0$$

Παράδειγμα ΙΙ.– Ἔστω ὅτι : $\varepsilon\varphi x = -3$.

Λύσις : Εἶναι $-\varepsilon\varphi x = 3$ ἢ $\varepsilon\varphi\, (180^0 - x) = 3$

καὶ $$\lambda o\gamma\ \varepsilon\varphi\, (180^0 - x) = \lambda o\gamma\ 3 = 0,47712.$$

Ἄρα, κατὰ τὰ γνωστά:

$$180^0 - x = 71^0\,33'\,54'' \quad \text{καὶ} \quad x = 108^0\,26'\,6''.$$

γ) Ἐὰν $\beta < 0$, τότε ἐκ τῆς $\sigma\upsilon\nu x = \beta < 0$ ἕπεται

$$-\sigma\upsilon\nu x = -\beta > 0 \quad \text{ἢ} \quad \sigma\upsilon\nu\,(180^0 - x) = -\beta > 0.$$

Παράδειγμα III.– Ἔστω $\sigma\upsilon\nu\, x = -0{,}6$.

Λύσις: Ἔχομεν $-\sigma\upsilon\nu x = 0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\,(180^0 - x) = \frac{3}{5}$

ἢ $\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\,(180^0 - x) = \lambda o\gamma\, 3 - \lambda o\gamma 5 = 0{,}47712 - 0{,}69897 = \bar{1}{,}77815$

ἐξ οὗ, κατὰ τὰ γνωστά,

$$180^0 - x = 53^0\,7'\,49'',42, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x = 126^0\,52'\,10'',58.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

150. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταξὺ 0^0 καὶ 90^0 ρίζαι τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

1. $\eta\mu\, x = -\frac{3}{5}$,
2. $\sigma\upsilon\nu\, x = -0{,}7$,
3. $\varepsilon\varphi\, x = -3$,
4. $\sigma\varphi\, x = \sigma\upsilon\nu\, 42^0$,
5. $\tau\varepsilon\mu\, x = -1{,}8$,
6. $\sigma\tau\varepsilon\mu\, x = -\frac{4}{3}$,
7. $\sigma\upsilon\nu\, \frac{x}{2} = \varepsilon\varphi 150^0$,
8. $\eta\mu\, 2x = 0{,}58$,
9. $\varepsilon\varphi\left(45^0 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{17}{9}$.

46. Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν τριγωνομετρικῶν πινάκων διὰ τόξα μικρότερα τῶν 4^0 καὶ μεγαλύτερα τῶν 85^0.

Παράδειγμα 1ον: Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογημ (12΄ 40΄΄).

Λύσις: Εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, 12' = \bar{3}{,}54291$$

Ἐξετάζοντες τὰς εἰς τὴν παρακειμένην στήλην διαφορὰς βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατὰ 1΄ δὲν ἀντιστοιχεῖ ἡ αὐτὴ διαφορά, ἔστω καὶ εἰς τὰ περὶ τὰ 10΄ τόξα.

Δὲν ὑφίσταται λοιπὸν οὐδὲ κατὰ προσέγγισιν ἀναλογία μεταξὺ τῆς αὐξήσεως τῶν τόξων καὶ τῆς αὐξήσεως τῶν λογαρίθμων. Τοῦτο συμβαίνει διὰ τοὺς λογαρίθμους τοῦ ἡμιτόνου, ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξων μικροτέρων τῶν 4^0 καὶ διὰ τοὺς λογαρίθμους τοῦ συνημιτόνου ἐφαπτομένης καὶ συνεφαπτομένης τόξων μεγαλυτέρων τῶν 85^0. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον δὲν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας τὴν ἀναλογικὴν μέθοδον, τὴν ὁποίαν ἐφηρμόσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα.

Εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ἡ λύσις τῶν σχετικῶν προβλημάτων γίνεται διὰ τῆς ἀκολούθου εἰδικῆς μεθόδου.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\eta\mu\, x = x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon\varphi x = x \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x}$$

καὶ ἑπομένως :

$$\lambda o\gamma \eta\mu x = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma \frac{\eta\mu x}{x} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma \varepsilon\varphi x = \lambda o\gamma x + \lambda o\gamma \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \quad (2)$$

Ἐὰν δὲ x παριστᾶ δεύτερα λεπτά, ὁ λογx εὑρίσκεται ἐκ τῶν πινάκων τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν. Ὁ δὲ λογάριθμος τῶν λόγων $\frac{\eta\mu x}{x}$ καὶ $\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ ἀναγράφεται εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς α' σελίδος καὶ εἰς τὸ κάτω καὶ ἐκτὸς τοῦ πλαισίου ἑκάστης τῶν ἄλλων σελίδων τῶν λογ. πινάκων τῶν ἀριθμῶν. Πρὸς διάκρισιν δὲ ὁ μὲν λογ$\frac{\eta\mu x}{x}$ σημειοῦται διὰ τοῦ S, ὁ δὲ λογ$\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ σημειοῦται διὰ τοῦ T.

Ἐὰν λοιπὸν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἰσότητα (1) εἰς τὸ τόξον 12' 40'' ἢ 760'', εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\lambda o\gamma\, \eta\mu\, (12'\, 40'') = \lambda o\gamma\, 760 + S = 2{,}88081 + \overline{6}{,}68557 = \overline{3}{,}56638.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογεφ (1⁰ 5' 32'').

Λύσις : Ἐπειδὴ εἶναι : $1^0\, 5'\, 32'' = 3932''$, κατὰ τὴν ἰδιότητα (2) θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (1^0\, 5'\, 32'') &= \lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (3932'') \\ &= \lambda o\gamma\, 3932 + T = 3{,}59461 + \overline{6}{,}68563 = \overline{2}{,}28024 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ σφ (15' 20'').

Λύσις : Ἐπειδὴ εἶναι :

$$\sigma\varphi(15'\, 20'') = \frac{1}{\varepsilon\varphi(15'\, 20'')} \iff \lambda o\gamma\, \sigma\varphi(15'\, 20'') = -\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (15'\, 20'').$$

Ἀλλὰ $\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (15'\, 20'') = \lambda o\gamma\, 920 + T$

$$= 2{,}96379 + \overline{6}{,}68558 = \overline{3}{,}64937$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\lambda o\gamma\, \sigma\varphi\, (15'\, 20'') = -(\overline{3}{,}64937) = -\overline{3}{,}64937 = 2{,}35063.$$

Παράδειγμα 4ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ συν (88⁰ 40' 25'').

Λύσις : Ἐπειδὴ εἶναι :

$$90^0 - (88^0\, 40'\, 25'') = 1^0\, 19'\, 35'' = 4775'',$$

ἕπεται ὅτι :

$$\lambda o\gamma\, \sigma\upsilon\nu\, (88^0\, 40'\, 25'') = \lambda o\gamma\, \eta\mu\, (4775'') = \overline{2}{,}36451$$

Παράδειγμα 5ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ εφ (89⁰ 3' 40'').

Λύσις : Ἐπειδὴ $90^0 - (89^0\, 3'\, 40'') = 56'\, 20''$, ἕπεται ὅτι :

$$\varepsilon\varphi(89^0\, 3'\, 40'') = \sigma\varphi\, (56'\, 20'') = \frac{1}{\varepsilon\varphi(56'\, 20'')}$$

καὶ ἄρα :

$$\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi(89^0\, 3'\, 40'') = -\lambda o\gamma\, \varepsilon\varphi\, (56'\, 20'') = -(\overline{2}{,}21453) = 1{,}78547.$$

Παράδειγμα 6ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ σφ (88⁰ 50′ 25″).

Λύσις : Ἐπειδὴ εἶναι $90^0 - (88^0\ 50'\ 25'') = 1^0\ 9'\ 35''$, ἕπεται ὅτι :

$$\text{λογ σφ } (88^0\ 50'\ 25'') = \text{λογ εφ } (1^0\ 9'\ 35'') = \overline{2},30629.$$

Παράδειγμα 7ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\textbf{λογ ημx} = \overline{3},72960.$$

Λύσις : Ἐὰν ἀναζητήσωμεν τὸν δοθέντα λογάριθμον εἰς τὴν ἀντίστοιχον στήλην τῶν λογαριθμηκῶν πινάκων, παρατηροῦμεν ὅτι οὗτος περιέχεται μεταξὺ τῶν $\overline{3},71900$ καὶ $\overline{3},74248$. Εἶναι δηλαδή :

$$\overline{3},71900 < \overline{3},72960 < \overline{3},74248$$

ἢ $$\text{λογ ημ } (18') < \text{λογ ημx} < \text{λογ ημ } (19')$$

ἢ $$18' < x < 19'$$

ἢ $$1080'' < x < 1140''$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν $S = \overline{6},68557$. Ἕνεκα τούτου ἐκ τῆς (1) θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{3},72960 = \text{λογ}x + \overline{6},68557$$

ἐξ οὗ : $$\text{λογ } x = 3,04403 = \text{λογ } 1106'', 69$$

ἢ $$x = 1106'',69 = 18'\ 28'', 69.$$

Παράδειγμα 8ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\textbf{λογ εφx} = \overline{2},45777$$

Λύσις : Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν ὅτι :

$$\overline{2},45507 < \overline{2},45777 < \overline{2},45948$$

ἢ $$1^0\ 38' < x < 1^0\ 39'$$

ἢ $$5880'' < x < 5940''$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν $T = \overline{6},68569$, καὶ ἐκ τῆς (2) ὅτι :

$$\overline{2},45777 = \text{λογ}x + \overline{6},68569$$

ἐξ οὗ : $$\text{λογ } x = 3,77208 = \text{λογ } (5916'', 7)$$

καί : $$x = 1^0\ 38'\ 36'', 7.$$

Παράδειγμα 9ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\textbf{λογ συνx} = \overline{2},16833.$$

Λύσις : Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν :

$$\overline{2},17128 > \overline{2},16833 > \overline{2},16268$$

ἢ $$89^0\ 9' < x < 89^0\ 10'$$

ἢ $$90^0 - (89^0\ 9') > 90^0 - x > 90^0 - (89^0\ 10')$$

ἢ $$51' > 90^0 - x > 50'$$

ἢ $$3060'' > 90^0 - x > 3000''$$

Ἄρα, διὰ τὸ τόξον $90^0 - x$ εἶναι $S = \overline{6},68556$

καὶ $\log \eta\mu\,(90^0 - x) = \log \sigma\upsilon\nu\, x = \overline{2},16833$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται :

$$\overline{2},16833 = \log \eta\mu\,(90^0 - x)'' + \overline{6},68556$$

ἐξ οὗ : $\log \eta\mu\,(90^0 - x)'' = 3,48277 = \log \eta\mu\,(3039'', 29)$

ἢ $(90^0 - x)'' = 3039'', 29 = 50'\,39'', 29$

ἐξ οὗ : $x = 89^0\,9'\,20'', 71.$

Παράδειγμα 10ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\log \sigma\varphi x = \overline{3},92888.$$

Λύσις : Ἐκ τῶν πινάκων παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\overline{3},94086 > \overline{3},92888 > \overline{3},92619$$

ἢ $$89^0\,30' < x < 89^0\,31'$$

ἢ $$30' > 90^0 - x > 29'$$

ἢ $$1800'' > 90^0 - x > 1740'' \text{ καὶ ἄρα } T = \overline{6},68558$$

Ἐξ ἄλλου : $\log \varepsilon\varphi\,(90^0 - x) = \log \sigma\varphi\, x = \overline{3},92888$, ὁπότε ἡ (2) γίνεται :

$$\overline{3},92888 = \log\,(90^0 - x)'' + \overline{6},68558$$

ἐξ οὗ : $(90^0 - x)'' = 1751'' = 29'\,11''$,

ὁπότε $x = 89^0\,30'\,49''$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

151. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

1. $\log \eta\mu\, x = \overline{3},72835$,
2. $\log \varepsilon\varphi\, x = \overline{2},77213$,
3. $\log \sigma\varphi\, x = 1,53421$,
4. $\log \sigma\upsilon\nu\, x = \overline{2},69231$,
5. $\log \varepsilon\varphi\, x = 2,48739$,
6. $\log \sigma\varphi\, x = \overline{2},53298$.

152. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον θετικὸν τόξον x, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :

$$\sigma\varphi\, x = \frac{\sqrt[3]{\alpha}\cdot \sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu 5A\ \varepsilon\varphi B},$$

ἔνθα $\alpha = -0,08562$, $A = 131^0\,49'\,25''$, $B = 36^0\,43'\,26''$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΣΙΜΟΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

47. Χρησιμότης μετατροπῆς παραστάσεων εἰς ἄλλας λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως :

$$y = \frac{1 + \text{συν}\, x}{1 - \text{συν}\, x} \quad \text{ἂν } x = 24^0\ 36'.$$

Θὰ ἔχωμεν :
$$y = \frac{1 + \text{συν}\,(24^0\ 36')}{1 - \text{συν}\,(24^0\ 36')} \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν y, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ συν (24⁰ 36′) καὶ νὰ ἐκτελέσωμεν τὰς σημειωμένας πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

$$\text{λογ συν}\,(24^0\ 36') = \overline{1},95868. \quad \text{Ἄρα} \quad \text{συν}\,(24^0\ 36') = 0,90922,$$

καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν :

$$y = \frac{1 + 0,90922}{1 - 0,90922} = \frac{1,90922}{0,09078} = 21,031$$

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{1 + \text{συν}x}{1 - \text{συν}x} = \text{σφ}^2\dfrac{x}{2}$, ἕπεται ὅτι : $y = \text{σφ}^2\dfrac{x}{2}$

καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν :

$$y = \text{σφ}^2\,(12^0\ 18') \quad \text{ἢ} \quad \text{λογ}\, y = 2\, \text{λογ σφ}\,(12^0\ 18') = 2 \cdot 0,66147 = 1,32394$$

ἐξ οὗ :
$$y = 21,031$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων βλέπομεν ὅτι κατὰ τὸν δεύτερον τρόπον εὑρέθη τὸ ζητούμενον εὐκολώτερον καὶ μὲ ὀλιγωτέρας πράξεις. Ἐγένετο δὲ τοῦτο, διότι ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀντικατεστάθη διὰ τῆς ἰσοδυνάμου της $\text{σφ}^2(12^0\ 18')$, τῆς ὁποίας ὁ λογάριθμος εὑρίσκεται δι᾿ ἀμέσου ἐφαρμογῆς τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τοῦ λογαρίθμου δυνάμεως. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ τελευταία αὕτη παράστασις καλεῖται **λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων.**

Ἐκ τοῦ παραδείγματος τούτου καὶ ἐξ ἄλλων ὁμοίων, βλέπομεν ὅτι εἶναι πολὺ χρήσιμον νὰ γνωρίζωμεν νὰ τρέπωμεν παραστάσεις εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους καὶ λογιστὰς διὰ τῶν λογαρίθμων.

Εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια εἴδομεν πῶς παραστάσεις τινὲς μετατρέπονται εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους ὑπὸ μορφὴν γινομένου ἢ πηλίκου. Οὕτως εἴδομεν πῶς αἱ παραστάσεις :

$$\left.\begin{matrix}\text{ημα συνβ} \pm \text{ημβ συνα}\\ \text{συνα συνβ} \pm \text{ημα ημβ}\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\text{ημΑ} \pm \text{ημΒ}\\ \text{συνΑ} \pm \text{συνΒ}\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\text{εφΑ} \pm \text{εφΒ}\\ \text{σφΑ} \pm \text{σφΒ}\end{matrix}\right\} \text{κλπ.}$$

μετατρέπονται εἰς μονώνυμα.

Ἐπαναλαμβάνομεν μερικὰς γνωστὰς παραστάσεις, αἵτινες εἶναι ἀπαραίτητον νὰ τὰς γνωρίζωμεν :

$1+\text{συν}\alpha = 2\,\text{συν}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (1)	$1+\text{ημ}\alpha = 2\,\text{συν}^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ (2)
$1-\text{συν}\alpha = 2\,\text{ημ}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (3)	$1-\text{ημ}\alpha = 2\,\text{ημ}^2\left(45^0-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ (4)
$1\pm\text{εφ}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\text{ημ}\,(45^0\pm\alpha)}{\text{συν}\alpha}$ (5)	$1\pm\text{σφ}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,\text{ημ}\,(\alpha\pm 45^0)}{\text{ημ}\alpha}$ (6)
$1-\text{συν}^2\alpha = \text{ημ}^2\alpha$ (7)	$1-\text{ημ}^2\alpha = \text{συν}^2\alpha$ (8)
$\dfrac{1+\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}\alpha} = \text{εφ}\,(45^0+\alpha)$ (9)	$\dfrac{1-\text{εφ}\alpha}{1+\text{εφ}\alpha} = \text{εφ}\,(45^0-\alpha)$ (10)
$1+\text{εφ}^2\alpha = \dfrac{1}{\text{συν}^2\alpha}$ (11)	$1+\text{σφ}^2\alpha = \dfrac{1}{\text{ημ}^2\alpha}$ (12)
$\dfrac{1+\text{συν}\alpha}{1-\text{συν}\alpha} = \text{σφ}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (13)	$\dfrac{1-\text{συν}\alpha}{1+\text{συν}\alpha} = \text{εφ}^2\dfrac{\alpha}{2}$ (14)

48. Χρῆσις βοηθητικῆς γωνίας. Πολλάκις εὐκολυνόμεθα εἰς τὴν μετατροπὴν παραστάσεως εἰς ἄλλην λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων, ἂν χρησιμοποιήσωμεν κατάλληλον βοηθητικὴν γωνίαν. Οὕτως :

I. Ἐὰν $\mathbf{k}\in\mathbf{R}^+$ ὑπάρχει ὀξεῖα γωνία φ, τοιαύτη ὥστε :

$$\text{εφ}\,\varphi = k \quad \text{ἢ} \quad \text{σφ}^2\,\varphi = k \quad \text{ἢ} \quad \text{εφ}^2\,\varphi = k \quad \text{ἢ} \quad \text{σφ}\,\varphi = k.$$

Ἐὰν $\mathbf{0<k<1}$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$k = \text{ημ}\,\varphi \quad \text{ἢ} \quad k = \text{σφ}\,\varphi \quad \text{ἢ} \quad k = \text{ημ}^2\varphi \quad \text{ἢ} \quad k = \text{συν}^2\varphi.$$

II. Ἐὰν $\mathbf{k}\in\mathbf{R}$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

$$k = \text{εφ}\,\varphi \qquad \text{ἢ} \qquad k = \text{σφ}\,\varphi.$$

Ἐὰν $|k|<1$, τότε δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$k = \text{ημ}\,\varphi \qquad \text{ἢ} \qquad k = \text{συν}\,\varphi.$$

III. Ἐκλέγομεν πάντοτε ὡς τιμὴν τῆς γωνίας φ τὴν ἐλαχίστην θετικὴν τῆς ὡς πρὸς φ δοθείσης ἐξισώσεως. Ἐὰν $k>0$, τότε ἡ γωνία φ εἶναι ὀξεῖα.

Αἱ συνηθέστεραι προτάσεις, εἰς τὰς ὁποίας γίνεται χρῆσις τῆς μεθόδου (βοηθητικῆς γωνίας) ταύτης, ἔχουν τὰς ἀκολούθους μορφάς.

49. ΠΡΟΒΛΗΜΑ I.— Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

$$y_1 = \alpha+\beta \qquad \textbf{καὶ} \qquad y_2 = \alpha-\beta$$

Λύσις : Ἐνταῦθα ὑποτίθεται ὅτι $\alpha>0$, $\beta>0$ καὶ ὅτι εἶναι γνωστοὶ οἱ λογάριθμοι αὐτῶν.

I. Ἔστω λογα $>$ λογβ. Ἄρα $\alpha > \beta$. Γράφομεν δὲ

$$\alpha \pm \beta = \alpha\left(1 \pm \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

1ον: Ἐπειδὴ $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$, ἕπεται ὅτι, ἐὰν θέσωμεν:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\varphi \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi^2\varphi \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\,\varphi$$

θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha\,(1 + \sigma\upsilon\nu\,\varphi) = 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha\,(1 + \varepsilon\varphi^2\varphi) = \frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

$$y_1 = \alpha + \beta = \alpha\,(1 + \varepsilon\varphi\,\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\eta\mu(45^0 + \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}$$

2ον: Ἐὰν θέσωμεν:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\varphi \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu^2\varphi \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\,\varphi$$

θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως, ἂν $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ καὶ $0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$, ὅτι:

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha\,(1 - \sigma\upsilon\nu\,\varphi) = 2\alpha\,\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha\,(1 - \eta\mu^2\varphi) = \alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\varphi$$

$$y_2 = \alpha - \beta = \alpha(1 + \varepsilon\varphi\,\varphi) = \frac{\alpha\sqrt{2}\,\eta\mu(45^0 - \varphi)}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}$$

II. Ἐὰν λογα $<$ λογβ, τότε $\alpha < \beta$ καὶ γράφομεν:

$$\alpha + \beta = \beta\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \text{καὶ} \quad \alpha - \beta = -\beta\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.

Παρατήρησις: Διὰ νὰ καταστήσωμεν λογιστὴν διὰ τῶν λογαρίθμων τὴν παράστασιν:

$$x = \alpha - \beta + \gamma - \delta$$

θέτομεν $\quad A = \alpha - \beta, \quad B = A + \gamma, \quad \Gamma = B - \delta$

καὶ ἐργαζόμεθα ὅπως προηγουμένως.

50. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. — Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις:

$$x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \qquad (1)$$

Λύσις: Ἔστω $\alpha > \beta$. Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\,\varphi$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\varphi$, τότε ἡ (1) γράφεται ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς :

$$x=\frac{\alpha-\alpha\,\varepsilon\varphi\,\varphi}{\alpha+\alpha\,\varepsilon\varphi\,\varphi}=\frac{1-\varepsilon\varphi\,\varphi}{1+\varepsilon\varphi\,\varphi}=\varepsilon\varphi\,(45^0-\varphi)$$

$$x=\frac{\alpha-\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\alpha+\alpha\sigma\upsilon\nu\,\varphi}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{1+\sigma\upsilon\nu\,\varphi}=\varepsilon\varphi^2\frac{\varphi}{2},\ \text{ἂν}\ \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1\implies\alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha>\beta\cdot$$

Ἐὰν $\alpha<\beta$, τότε ὑπολογίζομεν τὴν παράστασιν $y=\dfrac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$.

51. ΠΡΟΒΛΗΜΑ III.—Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

$$x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\qquad\text{καὶ}\qquad y=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}.$$

Λύσις : Ἡ δευτέρα παράστασις, προφανῶς, ἔχει ἔννοιαν, ὅταν $\alpha>\beta$.

1ον : Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\beta}{\alpha}=\varepsilon\varphi\,\varphi$, τότε :

$$x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=\alpha\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}=\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}.$$

2ον : Ἐὰν θέσωμεν $\dfrac{\beta}{\alpha}=\eta\mu\,\varphi$, τότε :

$$y=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}=\alpha\sqrt{1-\eta\mu^2\varphi}=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,\varphi.$$

52. ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV.— Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις :

$$\mathbf{y=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,x\pm\beta\,\eta\mu\,x}\qquad(1)$$

Λύσις : Ἐνταῦθα ὑποτίθεται ὅτι $\alpha\beta\neq0$ καὶ $x\neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Ἡ παράστασις (1) γράφεται ὡς ἑξῆς, ἂν θέσωμεν $\dfrac{\beta}{\alpha}=\varepsilon\varphi\,\varphi$.

$$y=\alpha\left(\sigma\upsilon\nu x\pm\frac{\beta}{\alpha}\eta\mu x\right)=\alpha\left(\sigma\upsilon\nu x\pm\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu x\right)=\frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu(x\mp\varphi)}{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}.$$

Ὥστε :

$$\mathbf{y=\frac{\alpha\,\sigma\upsilon\nu\,(x\mp\varphi)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}}.$$

Παρατήρησις : Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ θέσωμεν $\dfrac{\beta}{\alpha}=\sigma\varphi\,\varphi$ ἤ, ἐὰν ἐξαχθῇ κοινὸς παράγων ὁ β, νὰ θέσωμεν :

$$\frac{\alpha}{\beta}=\varepsilon\varphi\,\varphi\quad\text{ἢ}\quad\frac{\alpha}{\beta}=\sigma\varphi\,\varphi.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ I. Ἡ παράστασις $\mathbf{y=3\sigma\upsilon\nu x+4\eta\mu x}$, νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\mathbf{y=A\,\sigma\upsilon\nu\,(x-\varphi)}$.

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται :

$$y=5\left(\frac{3}{5}\sigma\upsilon\nu x+\frac{4}{5}\eta\mu x\right)\qquad(1)$$

Ἐὰν $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, τότε :

$$\text{συν}\,\varphi = \frac{3}{5}, \qquad \text{ημ}\,\varphi = \frac{4}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{εφ}\,\varphi = \frac{4}{3}$$

καί : $$y = 5\,(\text{συν}\,\varphi\;\text{συν}\,x + \text{ημ}\,\varphi\;\text{ημ}x) = 5\;\text{συν}\,(x - \varphi)$$

Ἡ παράστασις αὕτη εἶναι τῆς ζητουμένης μορφῆς μὲ

$$A = 5 \quad \text{καὶ} \quad \varphi = 53^0\;7'\;48'',4$$

καθόσον ἐκ τῆς $\text{εφ}\,\varphi = \frac{4}{3}$, ἕπεται :

$$\text{λογεφ}\varphi = \text{λογ}\,4 - \text{λογ}\,3 = 0{,}60206 - 0{,}47712 = 0{,}12494 = \text{λογε}\,\varphi(53^0\;7'\;48',4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ II.— Νὰ γίνῃ λογιστὴ διὰ τῶν λογαρίθμων ἡ παράστασις :

$$x = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\;\text{συν}A}. \tag{1}$$

Λύσις : Οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ ὑποτίθενται θετικοὶ καὶ

$$0^0 < A < 180^0, \quad (\beta > \gamma).$$

Τὸ ὑπόρριζον γράφεται διαδοχικῶς :

$$\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\;\text{συν}A = (\beta^2 + \gamma^2)\left(\text{συν}^2\frac{A}{2} + \text{ημ}^2\frac{A}{2}\right) - 2\beta\gamma\left(\text{συν}^2\frac{A}{2} - \text{ημ}^2\frac{A}{2}\right)$$

$$= (\beta + \gamma)^2\,\text{ημ}^2\frac{A}{2} + (\beta - \gamma)^2\,\text{συν}^2\frac{A}{2}$$

$$= (\beta + \gamma)^2\,\text{ημ}^2\frac{A}{2}\left[1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2 \text{σφ}^2\frac{A}{2}\right]$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$x = (\beta + \gamma)\,\text{ημ}\frac{A}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\right)^2 \text{σφ}^2\frac{A}{2}} \tag{2}$$

Ἐὰν τεθῇ $\frac{\beta - \gamma}{\beta + \gamma}\,\text{σφ}\,\frac{A}{2} = \text{εφ}\,\varphi$, ἡ (2) γίνεται :

$$x = (\beta + \gamma)\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}\sqrt{1 + \text{εφ}^2\varphi} = \frac{\beta + \gamma}{\text{συν}\,\varphi}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}$$

Ὥστε : $$x = \frac{\beta + \gamma}{\text{συν}\varphi}\,\text{ημ}\,\frac{A}{2}. \tag{3}$$

53*. ΠΡΟΒΛΗΜΑ VI.— Νὰ καταστοῦν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἡ κανονικὴ μορφὴ μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0.$$

Ἐὰν $\beta = 0$ ἢ $\gamma = 0$, αἱ μὴ μηδενικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως — ἐὰν αὕτη ἐπιδέχεται τοιαύτας — εἶναι λογαριθμίσιμοι.

Ἐὰν ἐπίσης $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, πάλιν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι λογαριθμίσιμοι.

Ἐξαιροῦντες τὰς περιπτώσεις ταύτας, μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐξίσωσις εἶναι πλήρης καὶ ἐπιδέχεται ρίζας πραγματικὰς καὶ διαφόρους τοῦ μηδενός.

Ὑποτίθεται πάντοτε $\alpha > 0$. Ἄρα ἡ (1) δύναται νὰ ἔχῃ τὰς ἑξῆς μορφάς:

$\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$	(1)	$\alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$	(3)
$\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$	(2)	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	(4)

Προφανῶς, αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετοι τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν μόνον τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

I. **Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 - \beta x - \gamma = 0$.**— Εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἶναι $\alpha\gamma < 0$ καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι της εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἡ παράστασις $\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικῶς, ἂν τεθῇ $\dfrac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2\varphi$,

$$\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma} = \beta\sqrt{1 + \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\varphi} = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha}\left(\beta - \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right) = \frac{\beta}{2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi}(\sigma\upsilon\nu\varphi - 1) = -\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (5)$$

καὶ
$$x_2 = \frac{1}{2\alpha}\left(\beta + \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\right) = \frac{\beta}{2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\varphi}(\sigma\upsilon\nu\varphi + 1) = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} \qquad (6)$$

Ἐκ τῆς $\dfrac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \varepsilon\varphi^2\varphi$ λαμβάνομεν $\beta = \dfrac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\varepsilon\varphi\,\varphi}$, ὁπότε αἱ (5) καὶ (6) γίνονται:

$$\boxed{x_1 = -\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\varepsilon\varphi\frac{\varphi}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\sigma\varphi\frac{\varphi}{2}}$$

II. **Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$.**— Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ ἢ $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, ἡ ἐξίσωσις ἐπιδέχεται ρίζας θετικάς, διότι τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικὸν καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμά των. Αὗται εἶναι:

$$x_1 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Ἐπειδὴ $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, ἕπεται $0 < \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} < 1$, καὶ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν:

$$\frac{4\alpha\gamma}{\beta^2} = \eta\mu^2\varphi, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}.$$

Ἄρα ἡ παράστασις $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ γράφεται διαδοχικῶς:

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \beta\sqrt{1 - \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}} = \beta\sqrt{1 - \eta\mu^2\varphi} = \beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi,$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$x_1 = \frac{1}{2\alpha}(\beta - \beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2} \tag{7}$$

καὶ
$$x_2 = \frac{1}{2\alpha}(\beta + \beta\,\sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{2\alpha}(1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2} \tag{8}$$

Θέτοντες δὲ $\beta = \frac{2\sqrt{\alpha\gamma}}{\eta\mu\varphi}$, εὑρίσκομεν:

$$\boxed{x_1 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\varepsilon\varphi\,\frac{\varphi}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{x_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\,\sigma\varphi\,\frac{\varphi}{2}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ.— Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$\mathbf{4x^2 - 25{,}7\,x + 35{,}549 = 0}$$

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2 - \beta x + \gamma = 0$.

Ἐὰν θέσωμεν: $\eta\mu^2\varphi = \frac{4\alpha\gamma}{\beta^2}$, θὰ ἔχωμεν:

$$\lambda o\gamma\,\eta\mu\varphi = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\,4 + \lambda o\gamma\,\alpha + \lambda o\gamma\,\gamma) + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\beta$$

$$= \frac{1}{2}(0{,}60206 + 0{,}60206 + 1{,}55083) + \bar{2}{,}59007 = \bar{1}{,}96755$$

ἐξ οὗ: $\varphi = 68^0\,7'\,36''$ καὶ $\frac{\varphi}{2} = 34^0\,3'\,48''$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων (7) καὶ (8), ἤτοι:

$x_1 = \frac{\beta}{\alpha}\eta\mu^2\frac{\varphi}{2}$ ἢ $\lambda o\gamma\,x_1 = \lambda o\gamma\,\beta + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\alpha + 2\,\lambda o\gamma\,\eta\mu\,34^0\,3'\,48''$

$$= 1{,}40993 + \bar{1}{,}39794 + \bar{1}{,}49654 = 0{,}30441$$

ἐξ οὗ: $\mathbf{x_1 = 2{,}0156}$

καὶ $\mathbf{x_2} = \frac{\beta}{\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\frac{\varphi}{2}$ ἢ $\lambda o\gamma\,x_2 = \lambda o\gamma\,\beta + \sigma\upsilon\lambda o\gamma\,\alpha + 2\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\,34^0\,3'\,48''$

$$= 1{,}40993 + \bar{1}.39794 + \bar{1}{,}83650 = 0{,}64437,$$

ἐξ οὗ: $\mathbf{x_2 = 4{,}4093}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

153. Διὰ τῆς χρήσεως καταλλήλου βοηθητικῆς γωνίας, νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

1. $x = \sqrt{2} - 1$, 4. $x = 1 - \sqrt{3}$,
2. $x = 2 + \sqrt{2}$, 5. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$,
3. $x = 2 + \sqrt{3}$, 6. $x = 3 - \sqrt{3}$,

7. $x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, 8. $x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$, 9. $x = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

154. Νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις :

1. $x = 1 + 2\,ημα$, 4. $x = 2\,συνα - \sqrt{3}$,
2. $x = 1 - 2\,συνα$, 5. $x = 1 - \sqrt{3}\,σφα$,
3. $x = 1 + \sqrt{2}\,ημα$, 6. $x = ημα + ημ2α + ημ3α$,
7. $x = συνα + \sqrt{3}\,ημα$, 8. $x = \dfrac{\sqrt{3} + εφα}{1 - \sqrt{3}\,εφα}$.

155. Ἐὰν εἶναι γνωστοὶ οἱ λογα καὶ λογβ μὲ λογα $>$ λογβ, νὰ γίνουν λογισταὶ διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις :

1. $x = \sqrt{α^2 - β^2}$, 3. $x = \sqrt{\dfrac{α-β}{α+β}} + \sqrt{\dfrac{α+β}{α-β}}$,
2. $x = \sqrt{α+β} + \sqrt{α-β}$, 4. $x = \dfrac{4(α-β)\sqrt{αβ}}{(α+β)^2}$,
5. $x = \sqrt{α^2 + β^2 - γ^2}$, ἂν $α = 1375$, $β = 8602$, $γ = 1215$.

156. Ἐὰν $\left.\begin{matrix} α = 108{,}7 \\ β = 73{,}45 \end{matrix}\right\}$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $x = \sqrt{α^2 + β^2}$.

157. Ἐὰν $\left.\begin{matrix} α = 71{,}29 \\ β = 32{,}57 \end{matrix}\right\}$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $x = \sqrt{α^2 - β^2}$.

158. Ἐὰν $α = 4258$, $β = 3672$ καὶ $β\,εφ3x = α + \sqrt{α^2 + β^2}$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, εἰς τρόπον ὥστε $0^0 < x < 180^0$.

159. Ἐὰν $α = 4625{,}5$, $β = 3944{,}6$, $θ = 51^0\,57'\,44''$ $θ_1 = 63^0\,18'\,27''$, καὶ

$$εφ2x = \frac{α\,ημ\,θ_1 - β\,ημθ}{αημθ_1 + β\,ημ\,θ},$$

νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ἵνα $0^0 < x < 180^0$.

160. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $8x^2 - 36{,}75x - 25{,}628 = 0$.

161. Ὁμοίως αἱ ἐξισώσεις :

1. $x^2 - 148{,}7x + 1385 = 0$, 3. $x^2 + 16{,}75x - 64{,}53 = 0$,
2. $x^2 - 245{,}7x - 1247{,}6 = 0$, 4. $x^2 + 75{,}23x - 433{,}7 = 0$.

162. Ἐὰν $2ημx = ημα + ημ(α + ω) + ημ(α + 2ω)$ καὶ $α = 18^0\,25'\,37''$, $ω = 7^0\,17'\,26''$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x.

163. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, οὕτως ὥστε :

$$x^3 = α^3ημθ + β^3συνθ$$
$$α = 18928, \quad β = 20842, \quad θ = 115^0\,45'\,27''.$$

164. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ μεταξὺ 0^0 καὶ 180^0 τιμαὶ τοῦ x, αἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν :

$$εφ3x = \frac{α + \sqrt{α^2 + β^2}}{β},$$

ἂν $α = 4167$ καὶ $β = 3582{,}4$.

('Απ. $23^0\,13'\,8'',2 - 83^0\,13'\,8'',2 - 143^0\,13'\,8'',2$)

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄ 1972 — (VI) ΑΝΤ. 43.000 — ΣΥΜΒ. 2260/18 - 4 - 72

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ — Κ. Α. ΜΟΥΖΑΚΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Β. ΧΡΟΝΟΠΟΥΛΟΣ — Α. ΠΑΛΟΥΜΠΗ & ΣΙΑ

ΟΕ
ΔΒ