ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δ'-Ε'-ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΙΩΑΝ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

Λ. Αδαμόπουλος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ

ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

Τὸ παρὸν βιβλίον δέον νὰ διαφυλαχθῇ καὶ διὰ τὰς Ε΄, ΣΤ΄ τάξεις εἰς τὰς ὁποίας ἐπίσης θὰ χρησιμοποιηθῇ.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δ′-Ε′-ΣΤ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

ΙΩΑΝ. ΠΑΝΑΚΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1972

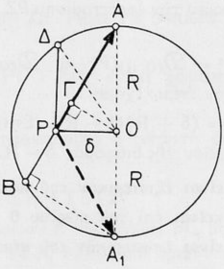
ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

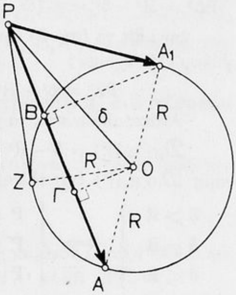
ΕΚ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἐὰν μία μεταβλητὴ τέμνουσα ἀγομένη ἐξ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου P τέμνῃ δοθέντα κύκλον (O, R) εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B, τὸ γινόμενον $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ εἶναι ὡρισμένον, καλεῖται δὲ δύναμις τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον.



Σχ. 1



Σχ. 2

Ἔστω P τὸ σταθερὸν σημεῖον, κείμενον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O, R) ἢ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ (σχ. 1 - 2) ἀντιστοίχως.

Ἐὰν Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB καὶ τεθῇ $\overline{OP} = \delta$ (1), θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = (\overrightarrow{P\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A})(\overrightarrow{P\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}) = (\overrightarrow{P\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A})(\overrightarrow{P\Gamma}-\overrightarrow{\Gamma A}) = P\Gamma^2 - \Gamma A^2. \quad (1)$$

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΓΡ καὶ ΟΓΑ ἔχομεν :

$$P\Gamma^2 = \delta^2 - O\Gamma^2 \quad \text{καὶ} \quad \Gamma A^2 = R^2 - O\Gamma^2,$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \delta^2 - O\Gamma^2 - (R^2 - O\Gamma^2) = \delta^2 - R^2 \quad \text{ὡρισμένον.}$$

Ἡ ὡρισμένη αὐτὴ τιμὴ τοῦ γινομένου $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\mathcal{D}_{(O,R)}(P)$. Δηλαδή :

$$\boxed{\mathcal{D}_{(O,R)}(P) = \delta^2 - R^2}$$

καὶ εἶναι, προφανῶς, **ἀνεξάρτητος** τῆς θέσεως τῆς τεμνούσης.

2. Ἰδιότητες τῆς δυνάμεως.— Ἔστω A_1 τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ A ἐπὶ τοῦ

(1) **Ὑποσημείωσις :** Ὅπου ἐν τοῖς ἑπομένοις ἀντικαθίσταται τὸ εὐθ. τμῆμα μὲ πεζὸν γράμμα, νοεῖται ὅτι τοῦτο παριστᾷ τὴν **ἀπόλυτον τιμὴν** τοῦ μήκους τοῦ τμήματος τούτου.

κύκλου (O). Ἡ γωνία $AB A_1$ εἶναι ὀρθή. Ἄρα τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον (**βαθμωτὸν** ἢ **κλιμακωτόν**, Γαλλιστὶ **scalaire**),

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA_1} = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA_1}) = (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = \delta^2 - R^2.$$

Ἀλλά : $$\overrightarrow{\mathbf{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{PA_1}} = \overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}} \qquad (1)$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν : $$\overrightarrow{\mathbf{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{PA_1}} = \mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}). \qquad (2)$$

Ὥστε : **Ἡ δύναμις τοῦ σημείου P ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O) εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸ P μὲ δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (O).**

Ἡ (2) φανερώνει ὅτι ἡ δύναμις $\mathcal{D}_{(O,R)}(P)$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου (O).

Παρατηρήσεις. – 1ον : Εἰς τὸ (σχ. 1) ἄγομεν τὴν PΔ κάθετον πρὸς τὴν PO. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OPΔ θὰ ἔχωμεν :

$$P\Delta^2 = R^2 - \delta^2 = -(\delta^2 - R^2) = -\mathcal{D}_{(O,R)}(P), \text{ ἐξ οὗ : } \mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) = -\mathbf{P\Delta^2} = \text{ἀρνητική}. \quad (3)$$

2ον : Εἰς τὸ (σχ. 2) ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην PZ τοῦ κύκλου (O). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OZP ἔχομεν :

$$PZ^2 = \delta^2 - R^2 = \mathcal{D}_{(O,R)}(P) \quad \text{ἢ} \quad \mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) = \mathbf{PZ^2} = \text{θετική} \qquad (4)$$

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$\mathcal{D}_{(O,R)}(P) = \delta^2 - R^2 = (\delta + R)(\delta - R)$. Ἐπειδὴ δὲ $\delta > 0$, $R > 0$, ἕπεται ὅτι ἡ δύναμις $\mathcal{D}_{(O,R)}(P)$ ἔχει τὸ σημεῖον τῆς διαφορᾶς $\delta - R$. Ἄρα :

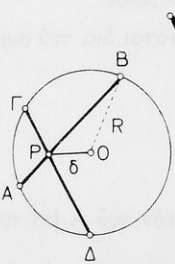
$$\left.\begin{array}{l} \delta > R \\ \delta = R \\ \delta < R \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{P εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου 0} \\ \text{P κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου 0} \\ \text{P εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου 0} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) > 0 \\ \mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) = 0 \\ \mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) < 0 \end{array}\right\}$$

Ἐὰν τὸ P συμπίπτῃ μὲ τὸ κέντρον O, τότε $\delta = 0$ καὶ : $\mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) = -\mathbf{R^2}$ καὶ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τῆς δυνάμεως.

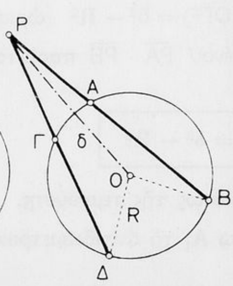
Ἐὰν $R = 0$, ὁ κύκλος (O) ἐκφυλίζεται εἰς σημεῖον, ὅτε : $\mathcal{D}_{(\mathbf{O},\mathbf{R})}(\mathbf{P}) = \mathbf{\delta^2}$.

3. ΘΕΩΡΗΜΑ I. – *Ἐὰν τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι ὁμοκύκλια, καὶ ἐὰν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς σημεῖον P ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου, θὰ ἔχωμεν :*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta}.$$



Σχ. 3



Σχ. 4

Ἔστωσαν A, B, Γ, Δ τέσσαρα σημεῖα ἐπὶ τοῦ κύκλου (O). Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι AB, ΓΔ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ κύκλου (O) (σχ. 3) ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 4), θὰ εἶναι :

$$\mathcal{D}_{(O,R)}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \delta^2 - R^2 \quad (1)$$

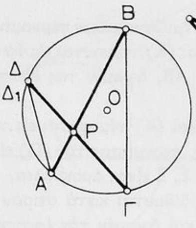
καὶ

$$\mathcal{D}_{(O,R)}(P) = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta} = \delta^2 - R^2 \quad (2)$$

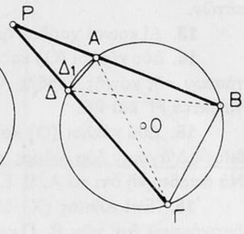
Ἄρα : $$\overline{\mathbf{PA}} \cdot \overline{\mathbf{PB}} = \overline{\mathbf{P\Gamma}} \cdot \overline{\mathbf{P\Delta}} \quad (3)$$

4. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.— *Ἐὰν αἱ πλευραὶ* ΑΒ *καὶ* ΓΔ *τετραπλεύρου* ΑΒΓΔ *τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον* Ρ, *εἰς τρόπον ὥστε* : $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta}$, *τὸ τετράπλευρον* ΑΒΓΔ *εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.*

Πράγματι, ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ὁ κύκλος ΑΒΓ κέντρου Ο (σχ. 5 καὶ 6) τέμνει τὴν εὐθεῖαν ΡΓ, ἔστω εἰς τὸ Δ_1.



Σχ. 5



Σχ. 6

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta_1} \qquad (1)$$

καὶ

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta}, \text{ ἐξ ὑποθέσεως}, (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι : $\overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta_1} = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta}$, ἐξ οὗ : $\overline{P\Delta_1} = \overline{P\Delta}$, ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὸ $\Delta_1 \equiv \Delta$. Ἄρα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ὁμοκύκλια.

Ἡ σχέσις, λοιπόν, $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{P\Gamma} \cdot \overline{P\Delta}$, εἶναι **χαρακτηριστικὴ διὰ τέσσαρα ὁμοκύκλια σημεῖα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : Πρόβλημα.— Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος x τριῶν δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων α, β, γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείου Ρ τῆς εὐθείας ΒΓ, μὴ κειμένου μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, ἵνα ὁ κύκλος ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς ΡΑ εἰς τὸ Α, πρέπει καὶ ἀρκεῖ : $PA^2 = \overline{PB} \cdot \overline{P\Gamma}$.

2. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος x δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.

3. Ἐὰν $k \in \mathbf{R}$ καὶ $\mathcal{D}_{(O,R)}(P) = k$, ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Ρ εἶναι κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος καὶ ἀκτῖνος $\delta = \sqrt{k + R^2}$, ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (Ο). (διερεύνησις).

4. Δίδεται κύκλος (Ο, R = 24) καὶ σημεῖον Ρ, εἰς τρόπον ὥστε ΟΡ = 72. Χορδὴ ΑΒ τοῦ κύκλου διέρχεται διὰ τοῦ Ρ καὶ εἶναι ΡΑ = 96. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\mathcal{D}_{(O,R)}(P)$ καὶ τὸ τμῆμα ΡΒ.

5. Δίδεται κύκλος κέντρου Ο καὶ σημεῖον Ρ, εἰς τρόπον ὥστε ΟΡ = 24. Ἄγεται τέμνουσα ΡΑΒ τοῦ κύκλου. Ἐὰν ΡΑ = 56, ΡΒ = 38, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ ΑΒ.

6. Δίδεται κύκλος (Ο, R = 10) καὶ σημεῖον Ρ, εἰς τρόπον ὥστε ΟΡ = 26. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης ΡΓ τοῦ κύκλου τούτου.

√ **7.** Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὸ ὕψος AH_1. Ἵνα τὸ τρίγωνον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

1) $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$, 2) $\overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Gamma H_1} = \Gamma A^2$, 3) $\overline{B\Gamma} \cdot \overline{BH_1} = \overline{BA}^2$, 4) $\overline{H_1B} \cdot \overline{H_1\Gamma} = -H_1A^2$.

√ **8.** Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $|B - \Gamma| = 90^0$. Ἄγομεν τὸ ὕψος AH_1 καὶ ἔστω R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1) \quad AH_1^2 = \overline{H_1B} \cdot \overline{H_1\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad 2) \quad AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2.$$

√ **9.** Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὰ ὕψη AH_1, BH_2 καὶ ΓH_3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $\overline{H_1A} \cdot \overline{H_1H} = -\overline{H_1B} \cdot \overline{H_1\Gamma}$, 2) $\overline{AB} \cdot \overline{AH_3} = \overline{A\Gamma} \cdot \overline{AH_2}$, 3) $\overline{HA} \cdot \overline{HH_1} = \overline{HB} \cdot \overline{HH_2} = \overline{H\Gamma} \cdot \overline{HH_3}$, ἂν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τούτου.

10. Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ Ρ. Ἐὰν ΡΑ = 8, ΡΒ = 18, ΡΓ = 15, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ΓΔ καὶ ἡ ἐφαπτομένη ΡΜ τοῦ κύκλου.

√ 11. Αἱ διαγώνιοι κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Ἂν τοῦτο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τότε :

$$ΡΒ \cdot (ΑΔ \cdot ΔΓ) = ΡΔ \cdot (ΑΒ \cdot ΒΓ)$$

√ 12. Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο τεμνομένων κύκλων διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

√ 13. Αἱ κοιναὶ χορδαὶ τριῶν κύκλων τεμνομένων ἀνὰ δύο διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

14. Δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Κ) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β. Ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τῶν προεκτάσεων τῆς κοινῆς χορδῆς ΑΒ, ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΡΓ καὶ ΡΕ αὐτῶν. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΡΓ καὶ ΡΕ.

15. Δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Κ) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ, Δ. Διὰ τυχόντος σημείου Ρ τῆς εὐθείας ΓΔ ἄγομεν δύο εὐθείας, τεμνούσας τὸν (Ο) εἰς τὰ σημεῖα Α, Β καὶ τὸν (Κ) εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ Α, Β, Ε, Ζ εἶναι ὁμοκύκλια.

16. Ἐπὶ εὐθείας (Χ) δίδονται κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Γράφομεν τυχόντα κύκλον, διερχόμενον διὰ τῶν Β, Γ καὶ ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΕ καὶ ΑΖ. 1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΕΖ διέρχεται δι' ὡρισμένου σημείου τῆς (Χ) καὶ 2) ὁ κύκλος ΑΕΖ διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον.

17. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ εὐθεῖα (Χ) ἐκτὸς αὐτοῦ. Διὰ μεταβλητοῦ σημείου Ρ τῆς (Χ) ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΡΑ, ΡΒ τοῦ κύκλου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

18. Ἔστω $ΑΔ_1$ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Οἱ κύκλοι $ΑΓΔ_1$ καὶ $ΑΒΔ_1$ τέμνουν τὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΒΕ καὶ ΓΖ.

19. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν τὴν διάμεσον $ΑΟ_1$ καὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον $ΑΔ_1$. Γράφομεν τὸν κύκλον $ΑΔ_1Ο_1$, ὅστις τέμνει τὰς ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα ΒΕ καὶ ΓΖ.

20. Αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΓΔ ἑνὸς κύκλου (Ο, R) τέμνονται καθέτως εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1)\ \ ΡΑ^2 + ΡΒ^2 + ΡΓ^2 + ΡΔ^2 = ct \quad καὶ \quad 2)\ \ ΑΓ^2 + ΓΒ^2 + ΒΔ^2 + ΔΑ^2 = ct.$$

21. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ τὰ σημεῖα Α, Β ἐντὸς αὐτοῦ καὶ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο· Ἐὰν ΜΝ εἶναι τυχοῦσα χορδὴ τοῦ κύκλου, διερχομένη διὰ τοῦ Β, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$ΑΜ^2 + ΑΝ^2 + ΜΝ^2 = ct.$$

22. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α σταθερὸν ἐκτὸς αὐτοῦ. Θεωροῦμεν διάμετρον ΒΟΓ μεταβλητήν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 1) Ὁ κύκλος ΑΒΓ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. 2) Αἱ ΑΒ, ΑΓ τέμνουν τὸν κύκλον εἰς τὰ Δ, Ε καὶ ἡ ΔΕ τέμνει τὸν ΟΑ εἰς τὸ Κ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Β, Δ, Ρ, Κ εἶναι ὁμοκύκλια. 3) τὸ Κ εἶναι ὡρισμένον σημεῖον καὶ 4) ὁ κύκλος ΔΑΕ διέρχεται ἀπὸ ὡρισμένον σημεῖον.

23. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του :

1) α, R καὶ $\beta(\beta+\gamma) = k^2$	3) α, R καὶ $\beta(\beta-\gamma) = \lambda^2$	5) α, R καὶ $\gamma(\beta-\gamma) = k^2$
2) α, A καὶ $\gamma(\beta+\gamma) = k^2$	4) α, A καὶ $\beta(\gamma-\beta) = \mu^2$	6) α, R καὶ $\gamma(\gamma-\beta) = \nu^2$,

καὶ νὰ γίνῃ ἡ σχετικὴ διερεύνησις.

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

5. ΘΕΩΡΗΜΑ. — Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς δύο δοθέντας κύκλους (Ο, R) καὶ (O_1, R_1) εἶναι μία ὡρισμένη εὐθεῖα (x), κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον OO_1 (ὑποτίθεται $R > R_1$).

Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, τοιοῦτον ὥστε :

$$\mathcal{D}_{(O,R)}(M) = \mathcal{D}_{(O,R_1)}(M) \quad ἢ \quad \delta^2 - R^2 = \delta_1^2 - R_1^2 \quad ἢ \quad \delta^2 - \delta_1^2 = R^2 - R_1^2 \qquad (1)$$

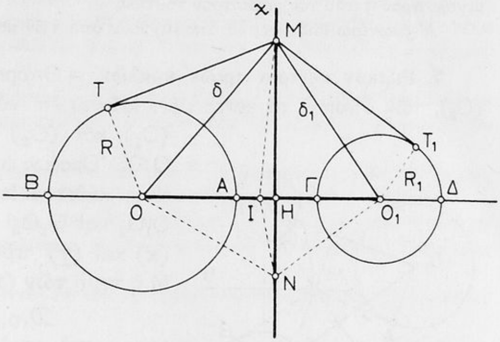
Ἐὰν I εἶναι τὸ μέσον τῆς διακέντρου OO_1 καὶ ἀχθῇ ἡ κάθετος MH ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν OO_1, κατὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τῶν διαμέσων, θὰ εἶναι :

$$\delta^2 - \delta_1^2 = 2 \cdot \overline{OO_1} \cdot \overline{IH},$$

καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$2 \cdot \overline{OO_1} \cdot \overline{IH} = R^2 - R_1^2,$$

ἐξ οὗ : $\overline{\mathbf{IH}} = \dfrac{\mathbf{R^2 - R_1^2}}{\mathbf{2 \cdot \overline{OO_1}}}$ (2)



Σχ. 7

Ἡ σχέσις (2) φανερώνει ὅτι τὸ H εἶναι σταθερὸν ἐπὶ τῆς διακέντρου OO_1.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (x) καθέτου ἐπὶ τὴν διάκεντρον OO_1 καὶ εἰς ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς H, δεξιὰ τοῦ I κείμενον.

Ἀντιστρόφως : Ἂν N εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (x), θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$NO^2 - NO_1^2 = 2 \cdot \overline{OO_1} \cdot \overline{IH} = 2 \cdot \overline{OO_1} \cdot \frac{R^2 - R_1^2}{2 \cdot \overline{OO_1}} = R^2 - R_1^2$$

ἢ $$NO^2 - R^2 = NO_1^2 - R_1^2 \quad \text{ἢ} \quad \mathcal{D}_{(O,R)}(N) = \mathcal{D}_{(O_1,R_1)}(N).$$

Ἡ εὐθεῖα (x), τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (O, R) καὶ (O_1, R_1), λέγεται **ριζικὸς ἄξων** τῶν δύο τούτων κύκλων.

Παρατηρήσεις. — 1ον : Ἐὰν $R = R_1$, ἡ (2) γίνεται $\overline{IH} = 0$ καὶ τὸ H συμπίπτει μὲ τὸ I.

Ἄρα : **Ὁ ριζικὸς ἄξων (x) δύο ἴσων κύκλων συμπίπτει μὲ τὴν μεσοκάθετον τῆς διακέντρου τούτων $\mathbf{OO_1}$.**

2ον : Ἐὰν $R_1 = 0$, ἡ εὐθεῖα (x) θὰ εἶναι εἰς ἀπόστασιν $\overline{\mathbf{IH}} = \dfrac{\mathbf{R^2}}{\mathbf{2 \cdot \overline{OO_1}}}$ ἀπὸ τὸ μέσον I τοῦ τμήματος OO_1. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ κύκλος (O_1,R_1=0) καλεῖται **μηδενικὸς κύκλος.**

3ον : Ἐὰν τὸ O_1 ἔχῃ τὴν θέσιν τοῦ O καὶ $R_1 \neq R$, ἡ (1) δίδει :

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R_1^2}{2 \cdot \overline{OO_1}} = \frac{R^2 - R_1^2}{0} = \infty$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν : **Ὁ ριζικὸς ἄξων (x) τῶν ὁμοκέντρων κύκλων ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.**

6. Ἰδιότητες τοῦ ριζικοῦ ἄξονος. — 1ον : Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς τοὺς κύκλους τούτους.

2ον : Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων (O, R) καὶ (O_1, R_1) διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς καὶ ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

3ον : Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B, ὁ ριζικὸς ἄξων τούτων εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ AB.

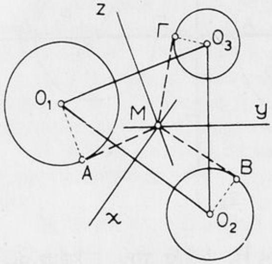
4ον : Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B, μόνον ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν προεκτάσεων τοῦ τμήματος AB ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς τοὺς κύκλους τούτους.

5ον : Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον.

6ον : Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο ἀνίσων κύκλων κεῖται ἐκτὸς αὐτῶν καὶ ἀπέχει ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸν μεγαλύτερον ἢ ἀπὸ τὸν μικρότερον τούτων.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες νὰ ἀποδειχθοῦν ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

7. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων. — Θεωροῦμεν τρεῖς κύκλους (O_1), (O_2), (O_3), τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὁ ριζικὸς ἄξων (x) τῶν (O_1) καὶ (O_2) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν O_1O_2. Ὁμοίως ὁ ριζικὸς ἄξων (y) τῶν (O_2),(O_3) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν O_2O_3. Αἱ εὐθεῖαι O_1O_2 καὶ O_2O_3 τέμνονται. Ἄρα καὶ αἱ κάθετοι (x) καὶ (y) πρὸς αὐτὰς θὰ τέμνωνται. Ἔστω Μ ἡ τομὴ τῶν (x) καὶ (y). Θὰ εἶναι :



Σχ. 8

$$\mathcal{D}_{(O_1,R_1)}(M) = \Delta_{(O_2,R_2)}(M)$$

καὶ $$\mathcal{D}_{(O_2,R_2)}(M) = \Delta_{(O_3,R_3)}(M)$$

Ἄρα : $$\mathcal{D}_{(O_1,R_1)}(M) = \Delta_{(O_3,R_3)}(M).$$

Ἡ τελευταία ἰσότης δηλοῖ ὅτι τὸ Μ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (Z) τῶν κύκλων (O_1) καὶ (O_3). Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι :

Οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν κύκλων (ὧν τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας) **διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ.**

Τὸ κοινὸν τοῦτο σημεῖον τῶν τριῶν ριζικῶν ἀξόνων καλεῖται **ριζικὸν κέντρον** τῶν τριῶν κύκλων καὶ εἶναι τὸ μοναδικὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἴσας δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς δοθέντας κύκλους. Διατί ;

8. Κατασκευὴ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος.— 1ον : Ἐὰν οἱ κύκλοι (O) καὶ (O_1) ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν εἰς τὸ Α τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν.

2ον : Ἐὰν οἱ κύκλοι (O) καὶ (O_1) τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα ΑΒ.

3ον : Ἐὰν οἱ κύκλοι (O) καὶ (O_1) κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ ἐντὸς ἀλλήλων, εὑρίσκομεν τὸ μέσον Ι τῆς διακέντρου OO_1 (σχ. 7) καὶ ἐπ' αὐτῆς, ἐκ τοῦ Ι, λαμβάνομεν τμῆμα :

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R_1^2}{2\overline{OO_1}}, \quad \text{ἂν} \quad (R > R_1),$$

καὶ εἰς τὸ σημεῖον Η, μεταξὺ Ι καὶ O_1, ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν OO_1. Αὕτη θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος ριζικὸς ἄξων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἄγωνται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς τρεῖς δοθέντας κύκλους.

25. Ἐὰν τὰ κέντρα O_1, O_2, O_3 τῶν δοθέντων κύκλων (O_1), (O_2), (O_3) κεῖνται ἐπ' εὐθείας, οἱ ριζικοὶ ἄξονες αὐτῶν θὰ εἶναι παράλληλοι ἢ θὰ συμπίπτουν.

26. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα δύο κύκλων, κειμένων ἐκτὸς ἀλλήλων, ἀρκεῖ νὰ ἑνώσωμεν τὰ μέσα τῶν δύο κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν ἢ τὰ μέσα τῶν δύο ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων ἢ τὰ μέσα μιᾶς ἐξωτερικῆς καὶ μιᾶς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης τούτων, διὰ μιᾶς εὐθείας.

27. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα δύο κύκλων κειμένων ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ ἐντὸς ἀλλήλων, γράφομεν τυχόντα κύκλον τέμνοντα τοὺς δοθέντας. Αἱ κοιναὶ χορδαὶ τούτων τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Ρ. Ἐκ τοῦ Ρ ἄγομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν δύο δοθέντων κύκλων. Διατί ;

28. Ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων σημείου ὡς πρὸς δύο κύκλους ἰσοῦται (**κατ' ἀπόλυτον τιμὴν**) πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου των ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν.

29. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ὧν ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς δύο κύκλους εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς k, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν δύο κύκλων.

30. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον ἑνὸς τῶν κύκλων (Ο) καὶ (O_1), ἡ δύναμις τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸν ἄλλον κύκλον ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου τῶν κύκλων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν.

31. Ἵνα τρία σημεῖα α_1, α_2, α_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας, πρέπει ἕκαστον τούτων νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς δύο κύκλους.

32. Ἐὰν δύο σημεῖα α_1 καὶ α_2 ἔχουν ἕκαστον τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (O_1), (O_2), (O_3), οἱ κύκλοι οὗτοι θὰ ἔχουν ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $\alpha_1\alpha_2$. Ποία ἡ θέσις τῶν κέντρων τῶν κύκλων τούτων ;

33. Βάσει τῆς ἀσκήσεως 28, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων (Ο) καὶ (O_1) ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρία ὑποσύνολα. Δηλαδή :

	1ον :	Τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα :	$\mathcal{D}_O(M) > \mathcal{D}_{O_1}(M)$,
	2ον :	» » » » :	$\mathcal{D}_O(M) < \mathcal{D}_{O_1}(M)$,
καὶ	3ον :	» » » » :	$\mathcal{D}_O(M) = \mathcal{D}_{O_1}(M)$.

34. Βάσει τῆς ἀσκήσεως 28, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων, δηλαδή :

$$OI^2 = R^2 - 2R\rho, \quad OI'^2 = R^2 + 2R\rho_1, \quad OI''^2 = R^2 + 2R\rho_2, \quad OI'''^2 = R^2 + 2R\rho_3.$$

35. Τὰ σημεῖα Α, Β εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον Ο ἑνὸς κύκλου (Ο). Διὰ τῶν Α καὶ Β ἄγομεν δύο εὐθύγραμμα τμήματα παράλληλα καὶ ὁμόρροπα, περατούμενα εἰς τὸν κύκλον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\overline{AM} \cdot \overline{BN} = ct.$

36. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α, Β σταθερά. Διὰ τοῦ Α ἄγεται μεταβλητὴ τέμνουσα AMM_1 τοῦ κύκλου (Ο). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων BMM_1.

37. Δίδονται τὰ σημεῖα Α,Β καὶ κύκλος (Ο,R). Μεταβλητὸς κύκλος (Κ) διέρχεται διὰ τῶν Α, Β καὶ τέμνει τὸν (Ο) εἰς τὰ Μ, Ν. 1ον) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ι τῆς ΑΒ. 2ον) Νὰ κατασκευασθῇ ὁ κύκλος (Κ), ἂν ΜΝ= λ (δοθὲν τμῆμα).

38. Δίδονται δύο σημεῖα Α, Β καὶ εὐθεῖα (Χ). Μεταβλητὸς κύκλος (Ο) διέρχεται διὰ τῶν Α, Β καὶ τέμνει τὴν (Χ) εἰς τὰ Μ, Ν. Ἡ ΑΒ τέμνει τὴν (Χ) εἰς τὸ σημεῖον Ι. 1ον) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον $\overline{IM} \cdot \overline{IN} = ct.$ 2ον) Νὰ κατασκευασθῇ ὁ (Ο), ἂν ΜΝ = λ (δοθὲν τμῆμα).

39. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του α, Α, δ_1.

40. Ἐὰν δύο σημεῖα Μ, Ν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (O_1), (O_2),..., (O_ν), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα τῶν κύκλων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν ΜΝ.

41. Τὰ ὕψη AH_1, BH_2, ΓH_3 τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. 1ον) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ Α εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν κύκλων διαμέτρων ΒΓ, ΗΒ καὶ ΗΓ. 2ον) Ὅτι τὸ Η εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν κύκλων διαμέτρων ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. 3ον) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\overline{AH} \cdot \overline{AH_1}$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

42. Ἂν κύκλος κεῖται ἐντὸς ἄλλου τοιούτου, ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν θὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν κύκλων τούτων.

$MH = \frac{R^2-\rho^2}{2ΚΛ} > R$

43. Ἐὰν δ εἶναι ἡ διάκεντρος δύο κύκλων (O, R) καὶ (O_1, ρ), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις y τοῦ κέντρου τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου ἀπὸ τὸν ριζικὸν ἄξονα αὐτῶν εἶναι :

$$y = \frac{\delta^2 + R^2 - \rho^2}{2\delta}.$$

44. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἄγομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τέμνουσαν τὰς ΑΒ, ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα B_1, $Γ_1$ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων διαμέτρων $ΒΓ_1$, $ΓΒ_1$ εἶναι τὸ ὕψος $ΑΗ_1$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

45. Τρεῖς κύκλοι (Κ, α), (Λ, β) καὶ (Ο, γ) ἔχουν κοινὴν χορδὴν ΑΒ, τὸ δὲ Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΚΛ. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν κέντρων εἶναι :

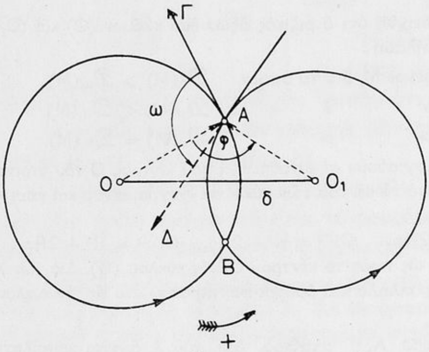
$$\mathcal{D}_{(K,\alpha)}(M) + \mathcal{D}_{(\Lambda,\beta)}(M) = 2 \cdot \mathcal{D}_{(O,\gamma)}(M).$$

46. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον πλευρὰς α, β, γ. Γράφομεν τοὺς κύκλους (Α, α), (Β, β) καὶ (Γ, γ). Ποῖον εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τούτων ;

47. Ἵνα δύο κύκλοι τέμνωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν, ὅπερ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν ἀρνητικὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς δύο κύκλους.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

9. Γωνία δύο κύκλων.— Θεωροῦμεν τοὺς δύο προσανατολισμένους κύκλους (O, R) καὶ (O_1, R_1), τεμνομένους εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β (σχ. 9). Ἄγομεν τὰς προσανατολισμένας ἐφαπτομένας αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Α.



Σχ. 9

Σχηματίζονται αἱ προσανατολισμέναι γωνίαι ω καὶ φ.

Θὰ εἶναι, προφανῶς, ω = φ. Ἡ γωνία ω καλεῖται **γωνία τῶν κύκλων** (Ο) καὶ (O_1).

Ὥστε : **Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων καλεῖται ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων.**

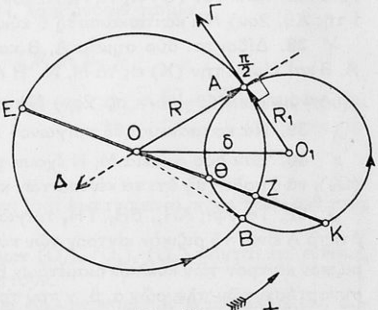
10. Ὀρθογώνιοι κύκλοι.— Ἐὰν $\omega = \frac{\pi}{2}$, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (O_1) τέμνονται **ὀρθογωνίως**.

Ὥστε : **Δύο κύκλοι καλοῦνται ὀρθογώνιοι, ὅταν ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων αὐτῶν εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα εἶναι ὀρθή.**

Προφανῶς αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ καὶ ΑΔ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ κέντρα O_1 καὶ Ο.

Ἄρα, ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς.

Δύο τεμνόμενοι κύκλοι θὰ λέγωνται ὀρθογώνιοι, ὅταν αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν αἱ ἀπολήγουσαι εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων εἶναι κάθετοι.



Σχ. 10

11. Χαρακτηριστικαὶ ἰδιότητες δύο ὀρθογωνίων κύκλων.

1ον : Ἡ συνθήκη $(OA, O_1A) = \frac{\pi}{2}$ ἐπαληθεύεται ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, τὸ κέντρον O_1 κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΓ. Ὅθεν :

Ἵνα δύο κύκλοι, τεμνόμενοι εἰς τὸ Α, εἶναι ὀρθογώνιοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ ἑνὸς εἰς τὸ Α νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἄλλου.

Ἄρα τὸ κέντρον τοῦ ἑνὸς κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἄλλου κύκλου.

2ον : Ἡ σχέσις $(OA, O_1A) = \frac{\pi}{2}$ ἐπαληθεύεται ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, τὸ τρίγωνον AOO_1 εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Ἄρα :

Δύο κύκλοι κέντρων Ο καὶ O_1 καὶ ἀκτίνων R καὶ R_1 εἶναι ὀρθογώνιοι ὅταν, καὶ μόνον ὅταν : $OO_1^2 = R^2 + R_1^2$. Διατί ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48. Δύο κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἑνὸς ἰσοῦται πρὸς τὴν δύναμιν τοῦ κέντρου του ὡς πρὸς τὸν ἄλλον κύκλον.

49. Δύο κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, μία διάμετρος τοῦ ἑνὸς κύκλου διαιρῆται ἁρμονικῶς ὑπὸ τοῦ ἄλλου κύκλου.

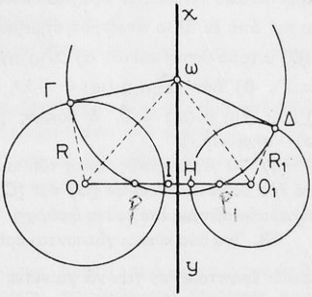
50. Δύο τεμνόμενοι κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, μία τέμνουσα ΓΔ διερχομένη διὰ τοῦ ἑνὸς τῶν σημείων Α ἢ Β φαίνεται ἀπὸ τὸ ἄλλο σημεῖον ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

51. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ὀρθογώνιος πρὸς δοθέντα κύκλον (O, R).

12. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (ω), ὁ ὁποῖος νὰ τέμνῃ ὀρθογωνίως δύο δοθέντας κύκλους (Ο, R) καὶ (O_1, R_1), ἔνθα $R > R_1$.

Ἀνάλυσις : Ἔστωσαν (O, R) καὶ (O_1, R_1) οἱ δοθέντες κύκλοι. Ἐὰν ω εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κύκλου, ὅστις τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς (O) καὶ (O_1) κατὰ τὰ Γ καὶ Δ, θὰ εἶναι : $\omega\Gamma \perp O\Gamma$, $\omega\Delta \perp O_1\Delta$, $\omega\Gamma = \omega\Delta$.
Ἄρα : $\omega\Gamma^2 = \omega\Delta^2$ ἢ $\mathcal{D}_{(O,R)}(\omega) = \mathcal{D}_{(O_1,R_1)}(\omega)$.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ω κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος xy τῶν (O) καὶ (O_1).



Σχ. 11

Κατασκευή : Κατὰ τὰ εἰς τὴν (§ 5) λεχθέντα, κατασκευάζομεν τὸ τμῆμα $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R_1^2}{2\overline{OO_1}}$ καὶ εἰς τὸ Η ὑψοῦμεν τὴν καθετον xy ἐπὶ τὴν OO_1. Ἐκ τοῦ ω ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ωΓ, ωΔ τῶν δύο κύκλων (Ο) καὶ (O_1). Θὰ εἶναι :

$\omega\Gamma^2 = \omega O^2 - R^2$ καὶ $\omega\Delta^2 = \omega O_1^2 - R^2$. Ἄρα: $\omega\Gamma^2 - \omega\Delta^2 = \omega O^2 - \omega O_1^2 - (R^2 - R_1^2)$ (1)

Ἀλλὰ $\omega O^2 - \omega O_1^2 = 2\overline{OO_1} \cdot \overline{IH}$ καὶ $R^2 - R_1^2 = 2\overline{OO_1} \cdot \overline{IH}$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$\omega\Gamma^2 - \omega\Delta^2 = 2\overline{OO_1} \cdot \overline{IH} - 2\overline{OO_1} \cdot \overline{IH} = 0, \text{ ἐξ οὗ : } \boldsymbol{\omega\Gamma = \omega\Delta}.$$

Γράφομεν ἀκολούθως τὸν κύκλον $(\omega, \omega\Gamma = \omega\Delta)$, ὅστις εἶναι ὁ ζητούμενος.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\omega\Gamma = \omega\Delta$, τὰ Γ καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\omega\Gamma \perp O\Gamma$ καὶ $\omega\Delta \perp O_1\Delta$, ὁ κύκλος (ω) τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς (O) καὶ (O_1).

Παρατήρησις: Ἐπειδὴ τὸ ω εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος xy, ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν ἄπειροι κύκλοι, οἱ ὁποῖοι τέμνουν τοὺς (O) καὶ (O_1) ὀρθογωνίως. Ὅθεν:

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων ω τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν ὀρθογωνίως δύο δοθέντας κύκλους, εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων τούτων, καί:

1ον: Ἐὰν οἱ κύκλοι (O) καὶ (O_1) δὲν ἔχουν κοινὰ σημεῖα ἢ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὁλόκληρος ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων ω.

2ον: Ἐὰν οἱ κύκλοι τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τότε μόνον αἱ προεκτάσεις τῆς κοινῆς χορδῆς ΑΒ πληροῦν τὸ πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

52. Ἐὰν δύο κύκλοι (O) καὶ (O_1) τέμνωνται, οἱ κύκλοι οἱ ὁποῖοι τέμνουν αὐτοὺς ὀρθογωνίως, δὲν τέμνουν τὴν διάκεντρον αὐτῶν OO_1.

53. Ἐὰν δύο κύκλοι (O) καὶ (O_1) δὲν ἔχουν κοινὸν ἢ κοινὰ σημεῖα, οἱ κύκλοι οἱ ὁποῖοι τέμνουν αὐτοὺς ὀρθογωνίως διέρχονται ἀπὸ δύο ὡρισμένα σημεῖα P καὶ P_1 τῆς διακέντρου OO_1 (ὁρικὰ σημεῖα ἢ σημεῖα τοῦ Poncelet).

54. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ὀρθογώνιος πρὸς τρεῖς δοθέντας κύκλους (Διερεύνησις).

55. Ἵνα κύκλος (ω, ρ) τέμνεται κατὰ διάμετρον ὑπὸ ἄλλου κύκλου (O, R), πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος του νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀντίθετον δύναμιν τοῦ κέντρου του ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O). Δηλαδὴ $\rho^2 = -\mathcal{D}_{(O,R)}(\omega)$.

Σημ. Ὁ κύκλος (O) καλεῖται **ψευδοορθογώνιος** τοῦ (ω), δηλαδὴ ὁ κύκλος (O) τέμνει τὸν (ω) εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀντιδιαμετρικά.

56. Εἰς τὴν ἄσκησιν 55, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 1) ὁ ριζικὸς ἄξων ΑΒ τῶν κύκλων (ω) καὶ (O) διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ω, 2) ἐὰν ὁ κύκλος (O) διέρχεται ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον Μ, θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ ἓν ἄλλο σταθερὸν σημεῖον Ν τῆς ωΜ, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{\omega M} \cdot \overline{\omega N} = -\rho^2$, 3) ἐὰν ὁ (O) μεταβάλλεται καὶ ἐὰν α) $\mathcal{D}_{(O,R)}(\omega) = k \in \mathbf{R}$, τότε ὁ (O) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον (ω, k), β) Ἐὰν $\mathcal{D}_{(O,R)}(\omega) = -k^2$, ὁ κύκλος (O) εἶναι ψευδοορθογώνιος πρὸς τὸν (ω, k) καὶ γ) ἐὰν $\mathcal{D}_{(O,R)}(\omega) = 0$, ὁ κύκλος (O) εἶναι ὀρθογώνιος (ἢ ψευδοορθογώνιος πρὸς τὸν (ω) – σημεῖον ω).

57. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων ω τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνονται κατὰ διάμετρον ὑπὸ δύο δοθέντων κύκλων (O) καὶ (O_1) εἶναι τὸ τμῆμα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν (O) καὶ (O_1), ἐσωτερικὸν αὐτῶν, ἐὰν τοῦτο ὑπάρχῃ.

58. Ἵνα δύο κύκλοι τέμνωνται ὀρθογωνίως εἰς τὰ σημεῖα Α,Β, πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων των νὰ φαίνεται ἀπὸ τὸ ἓν τῶν σημείων Α ἢ Β ὑπὸ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$ καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο Β ἢ Α ὑπὸ γωνίαν $\frac{3\pi}{4}$.

59. Ἵνα δύο κύκλοι τέμνωνται ὀρθογωνίως εἰς τὰ σημεῖα Α,Β, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἐκ σημείου Μ τοῦ ἑνὸς ἀγόμεναι χορδαὶ ΜΑ, ΜΒ νὰ ἐπανατέμνουν τὸν ἄλλον κύκλον εἰς σημεῖα Γ, Δ ἀντιδιαμετρικά.

60. Ἵνα δύο κύκλοι (O) καὶ (O_1) τέμνωνται ὀρθογωνίως, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου OO_1 νὰ ἔχῃ ἀντιθέτους δυνάμεις ὡς πρὸς τοὺς κύκλους (O) καὶ (O_1).

61. Ἵνα δύο κύκλοι (O) καὶ (O_1) τέμνωνται ὀρθογωνίως εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἄγωνται ἐκ τοῦ Α ἢ Β τέμνουσαι MM_1 καὶ NN_1 κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

62. Ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης BA ὀρθογωνίου τριγώνου OAB θεωροῦμεν μεταβλητὸν σημεῖον M. 1ον) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι OAM, OBM εἶναι ὀρθογώνιοι. 2ον) Οἱ κύκλοι κέντρων ω καὶ ω_1, οἱ διερχόμενοι διὰ τοῦ M καὶ ἐφαπτόμενοι εἰς τὰ A, B τῶν OA, OB ἀντιστοίχως, τέμνονται ὀρθογωνίως.

63. Πᾶς κύκλος κέντρου ω, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου M καὶ τέμνων ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (O,R), διέρχεται καὶ διὰ δευτέρου σταθεροῦ σημείου N ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB τῆς διερχομένης διὰ τοῦ M. Ποῖος ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου ω ;

64. Ποῖον εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων (O_1), (O_2), (O_3), ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς ἄλλους δύο ;

65. Μὲ ἀκτῖνας τὰ ὡρισμένα τμήματα α, β, γ νὰ γραφοῦν τρεῖς κύκλοι, τεμνόμενοι ὀρθογωνίως.

66. Νὰ γραφῇ κύκλος (ω, ρ), διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου A καὶ ὀρθογώνιος πρὸς δοθέντα κύκλον (O,R).

67. Μὲ κέντρα τὰ ὡρισμένα σημεῖα A,B,Γ νὰ γραφοῦν τρεῖς κύκλοι, τεμνόμενοι ὀρθογωνίως.

68. Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων A, B καὶ ὀρθογώνιος πρὸς δοθέντα κύκλον (O,R).

69. Νὰ γραφῇ κύκλος (ω, ρ), ὀρθογώνιος πρὸς δοθέντα κύκλον (O,R) καὶ ἔχων τὸ κέντρον του ω ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (X) ἢ ἐπὶ δοθέντος κύκλου (K, R_1).

70. Δίδεται τρίγωνον ABΓ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (K), εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐκ τῶν A, B, Γ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς α, β, γ τοῦ τριγώνου τούτου.

71. Νὰ γραφῇ κύκλος ψευδοορθογώνιος πρὸς τοὺς κύκλους (O_1), (O_2), (O_3).

72. Νὰ γραφῇ κύκλος ψευδοορθογωνίως τεμνόμενος ὑπὸ τῶν κύκλων (O_1), (O_2), (O_3).

73. Νὰ γραφῇ κύκλος ψευδοορθογώνιος πρὸς δοθέντα κύκλον (O, R) καὶ ὀρθογώνιος πρὸς τοὺς κύκλους (K, R_1) καὶ $(Λ, R_2)$.

74. Νὰ γραφῇ κύκλος, ὀρθογώνιος πρὸς δοθέντα κύκλον (O,R) καὶ ψευδοορθογώνιος πρὸς δύο ἄλλους δεδομένους κύκλους (K, R_1) καὶ $(Λ, R_2)$.

75. Νὰ γραφῇ κύκλος ψευδοορθογώνιος πρὸς δύο δεδομένους κύκλους (O, R), (O_1, R_1) καὶ τεμνόμενος ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τρίτου δεδομένου κύκλου (O_3, R_3).

76. Νὰ γραφῇ κύκλος ἀκτῖνος R, ἐφαπτόμενος δεδομένου κύκλου (K, ρ) καὶ ψευδοορθογώνιος πρὸς ἄλλον δεδομένον κύκλον $(Λ, ρ_1)$.

77. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M, διὰ τὰ ὁποῖα τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς δύο κύκλους (O, R) καὶ (O_1, R_1) νὰ εἶναι k^2 (k δεδομένον εὐθ. τμῆμα).

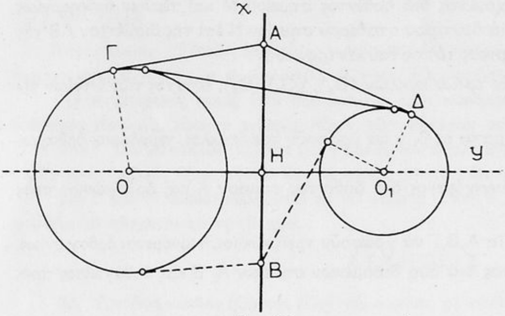
78. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων ω τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (O_1) καὶ ψευδοορθογωνίως ἄλλον δοθέντα κύκλον (O_2).

79. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων ω τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν ψευδοορθογωνίως δύο δοθέντας κύκλους (K) καὶ (Λ).

80. Ἵνα δύο κύκλοι (O) καὶ (O_1) τέμνωνται ὀρθογωνίως, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ὡς διαμέτρους ἀντιστοίχως δύο ἀπέναντι πλευρὰς ὀρθοκεντρικοῦ τετραπλεύρου (τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρικὴν τετράδα, ἂν ἕκαστον εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα).

81. Δίδονται δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O_1, R_1) καὶ μεταβλητὸς κύκλος (ω, ρ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου ω, 1ον) ἂν ὁ κύκλος (ω) εἶναι ψευδοορθογώνιος πρὸς τοὺς (O) καὶ (O_1). 2ον) ἂν ὁ (ω) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (O) καὶ ψευδοορθογώνιος πρὸς τὸν (O_1). 3ον) ἂν ὁ (ω) εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸ (O) καὶ τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τοῦ (O_1) καὶ 4ον) ἂν ὁ (ω) τέμνῃ ψευδοορθογωνίως τὸν (O) καὶ τέμνεται ψευδοορθογωνίως ὑπὸ τοῦ (O_1).

13. ΟΡΙΣΜΟΣ.— Ὀνομάζομεν γραμμικὴν δέσμην ν κύκλων τὸ Σύνολον τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι, ἀνὰ δύο τυχόντες, ἔχουν τὸν αὐτὸν δοθέντα ριζικὸν ἄξονα.



Σχ. 12

Ἐὰν κύκλος (O_1) ἀνήκῃ εἰς μίαν δέσμην, ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ κύκλου (O) καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (x), γνωρίζομεν ὅτι ὁ (x) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον OO_1. Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι τὰ κέντρα ὅλων τῶν κύκλων τῆς δέσμης κεῖνται ἐπὶ εὐθείας y, καθέτου ἐπὶ τὸν ριζικὸν ἄξονα. Ἡ εὐθεῖα y καλεῖται **εὐθεῖα τῶν κέντρων** (Σχ. 12).

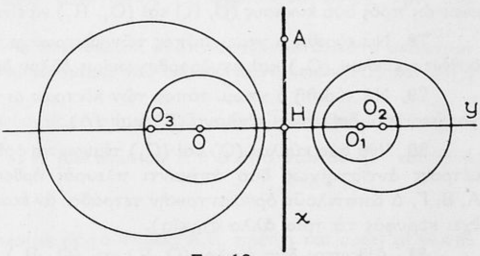
14. ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.— ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Ἵνα κύκλοι ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἕκαστον τούτων.

Ἀρκεῖ: Πράγματι, ἐὰν ὑπάρχουν δύο σημεῖα A καὶ B (σχ. 12), τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς δοθέντας κύκλους, οἱ κύκλοι οὗτοι ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην. Διότι ἡ εὐθεῖα AB θὰ εἶναι τότε ὁ ριζικὸς ἄξων ἑνὸς ἐξ αὐτῶν μετά τινος ἄλλου ἐξ αὐτῶν.

Πρέπει: Πράγματι, ἐὰν δοθέντες κύκλοι ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην, δύο τυχόντα σημεῖα τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (x) ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν κύκλων τούτων.

15. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Ἵνα δοθέντες κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἕκαστον τούτων.

Ἀρκεῖ: Πράγματι, ἐὰν δοθέντες κύκλοι ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ μιᾶς εὐθείας y, καὶ ἐὰν ὑπάρχῃ σημεῖον A, ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους τούτους, ἡ κάθετος ἐκ τοῦ A πρὸς τὴν εὐθεῖαν y εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων τούτων, λαμβανομένων ἀνὰ δύο. Ἄρα οἱ κύκλοι οὗτοι ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην.



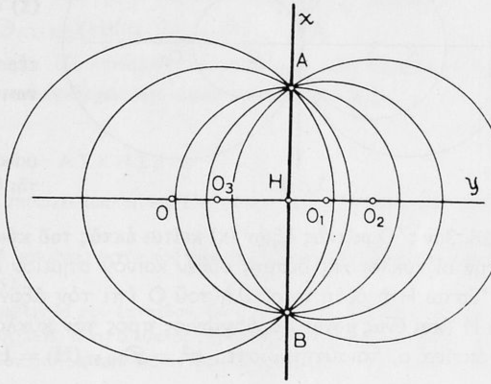
Σχ. 13

Πρέπει: Πράγματι, ἐὰν δοθέντες κύκλοι ἀνήκουν εἰς μίαν δέσμην, τὰ κέντρα των θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας y καὶ ἓν τυχὸν σημεῖον A τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν θὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς ἕκαστον τούτων.

16. 1ον : Ὁ ριζικὸς ἄξων (x) τέμνει τὸν κύκλον Ο εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ σημεῖα Α καὶ Β θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν 0 ὡς πρὸς ὅλους τοὺς κύκλους, τοὺς διερχομένους διὰ τῶν Α καὶ Β. Τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου y τοῦ τμήματος ΑΒ.

Ἀντιστρόφως : Πᾶς κύκλος διερχόμενος ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀνήκει εἰς τὴν δέσμην, διότι ἔχει, μετὰ τοῦ κύκλου Ο, ὡς ριζικὸν ἄξονα τὴν εὐθεῖαν x.

Ἡ δέσμη ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τῆς εὐθείας x εἶναι τό : **Σύνολον τῶν κύκλων τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.**



Σχ. 14

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β καλοῦνται **βασικὰ** σημεῖα τῆς δέσμης καὶ ἡ δέσμη καλεῖται **δέσμη τῶν βασικῶν σημείων** ἢ **δέσμη τεμνομένων κύκλων**, ἢ δέσμη τοῦ **πρώτου εἴδους.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην : **Πᾶν σημεῖον O_2 τῆς εὐθείας y τῶν κέντρων εἶναι κέντρον ἑνὸς κύκλου τῆς δέσμης, καὶ ἑνὸς μόνον, ἔχοντος ἀκτῖνα O_2A.**

Ἐὰν δίδεται ἡ ἀκτὶς R_2, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸν κύκλον O_2 τῆς δέσμης. Τὸ κέντρον O_2 εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας y τῶν κέντρων καὶ τοῦ κύκλου $(A,\ R_2)$.

Ὑπάρχουν δύο κύκλοι τῆς δέσμης ἀκτῖνος R_2, ἐάν : $R_2 > \frac{1}{2}AB$.

Εἷς δὲ μόνον κύκλος O_2 τῆς δέσμης, ἐάν : $R_2 = \frac{1}{2}AB$.

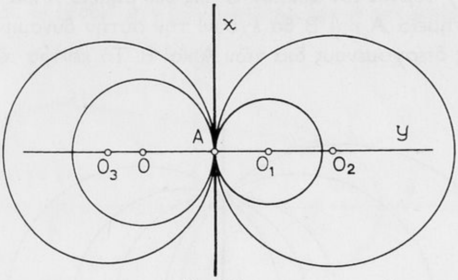
Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν ὁ κύκλος O_2 συμπίπτει μὲ τὸν κύκλον διαμέτρου ΑΒ καὶ καλεῖται **βασικὸς κύκλος** τῆς δέσμης.

17. 2ον : Ὁ ριζικὸς ἄξων (x) ἐφάπτεται τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ Α. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ εὐθεῖα ΟΑ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ριζικὸν ἄξονα (x). Ἄρα ἡ ΟΑ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα (y) τῶν κέντρων.

Τὸ Α ἀνήκει εἰς ἕκαστον τῶν κύκλων $O,\ O_1,\ O_2,\ O_3, \ldots$ τῆς δέσμης, διότι ἡ : $\mathcal{D}_{(O,R)}(A) = \mathcal{D}_{(O_1,R_1)}(A) = \mathcal{D}_{(O_2,R_2)}(A) \ldots = 0.$

Ἄρα ὅλοι οἱ κύκλοι τῆς δέσμης ἐφάπτονται εἰς τὸ Α τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (x).

'Αντιστρόφως : Πᾶς κύκλος (O_3) ἐφαπτόμενος τῆς (x) εἰς τὸ A, ἔχει μετὰ τοῦ κύκλου O τὴν εὐθεῖαν (x) ὡς ριζικὸν ἄξονα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ δέσμη ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ κύκλου (O) καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (x) εἶναι τό : **Σύνολον τῶν κύκλων τῶν ἐφαπτομένων τῆς (x) εἰς τὸ A.**



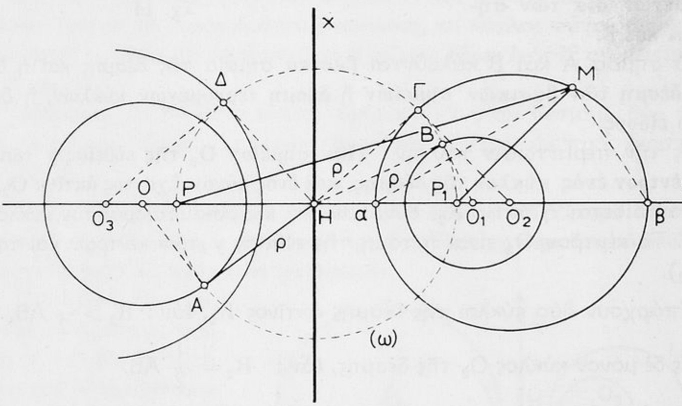
Σχ. 15

Καλεῖται δὲ δέσμη τοῦ **δευτέρου εἴδους** ἢ **δέσμη ἐφαπτομένων κύκλων.**

Παρατήρησις : Τὸ σημεῖον A **(κύκλος μηδενικὸς)** ἀποτελεῖ μέρος τῆς δέσμης (O, x).

18. 3ον : Ὁ ριζικὸς ἄξων (x) κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου O. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην οἱ κύκλοι τῆς δέσμης οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουν μετὰ τοῦ ἄξονος (x).

Ἔστω H ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ O ἐπὶ τὸν ἄξονα (x). Ὑπάρχει κύκλος κέντρου H (**καὶ ἕνας μόνον**) ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον (O). Ὁ κύκλος οὗτος (ω) ἔχει ἀκτῖνα ρ, τοιαύτην ὥστε : $\rho^2 = \mathcal{D}_{(O,R)}(H) = HA^2$, ὅπου HA ἡ ἐφαπτομένη



Σχ. 16

τοῦ (O), ἀγομένη ἐκ τοῦ H. Ὁ κύκλος οὗτος (ω) εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνιος πρὸς πάντα κύκλον (O_1) τῆς δέσμης, διότι : $\mathcal{D}_{(O_1,R_1)}(H) = \rho^2$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι τὰ κέντρα τῶν κύκλων τῆς δέσμης εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (ω). Δηλαδὴ σημεῖα τῶν προεκτάσεων τοῦ τμήματος PP_1 τῆς εὐθείας τῶν κέντρων, ἔνθα τὰ P καὶ P_1 εἶναι αἱ τομαὶ τοῦ κύκλου (H, ρ) καὶ τῆς εὐθείας (y) τῶν κέντρων τῆς δέσμης.

Τὰ σημεῖα ταῦτα δύναται νὰ θεωρηθοῦν ὡς κύκλοι **μηδενικῆς ἀκτῖνος,** ἀνήκοντες εἰς τὴν δέσμην, καλοῦνται δὲ σημεῖα τοῦ **Poncelet** ἢ **ὁρικὰ σημεῖα** τῆς δέσμης.

Ἡ δέσμη αὕτη ὀνομάζεται δέσμη τοῦ **τρίτου εἴδους.**

Ἀντιστρόφως : Πᾶν σημεῖον O_1 τῆς εὐθείας (y) τῶν κέντρων, κείμενον ἐκτὸς τοῦ τμήματος PP_1, εἶναι κέντρον ἑνὸς κύκλου (καὶ ἑνὸς μόνον) ὀρθογωνίου πρὸς τὸν κύκλον (ω), ἔχοντος μετὰ τοῦ (Ο) ριζικὸν ἄξονα (x). Διότι :

$$\mathcal{D}_{(O_1, R_1)}(H) = \mathcal{D}_{(O, R)}(H).$$

Ἡ δέσμη εἶναι ὡσαύτως : **Τὸ σύνολον τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΗ, καὶ ὀρθογωνίων πρὸς τὸν κύκλον (ω).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

82. Εἰς μίαν δέσμην κύκλων ὑπάρχει κύκλος, καὶ ἕνας μόνον, ὅστις διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου.

83. Διὰ δοθέντος σημείου Μ κειμένου ἐκτὸς τοῦ ἄξονος (Χ) διέρχεται ἕνας, καὶ μόνον ἕνας κύκλος τῆς δέσμης (3 περιπτώσεις).

84. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, ὧν ὁ λόγος τῶν δυνάμεων ὡς πρὸς δύο κύκλους (O_1) καὶ (O_2) ἰσοῦται πρὸς $k \in \mathbf{R}$, εἶναι ὁ κύκλος τῆς δέσμης τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῶν (O_1) καὶ (O_2), καὶ τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον διαιρεῖ τὴν διάκεντρον O_1O_2 εἰς τὸν δοθέντα λόγον k. (Διερεύνησις).

85. Ὑπάρχει ἀπειρία ὀρθογωνίων κύκλων πρὸς ἕκαστον τῶν κύκλων μιᾶς δέσμης (Δ_1). Οἱ κύκλοι οὗτοι, ὁρίζουν μίαν δευτέραν δέσμην (Δ_2), καὶ αἱ δύο δέσμαι (Δ_1) καὶ (Δ_2) ὀνομάζονται **ὀρθογώνιοι δέσμαι** ἢ **συζυγεῖς.**

86. Τὸ σύνολον τῶν ὀρθογωνίων κύκλων πρὸς τοὺς κύκλους μιᾶς δέσμης κύκλων ἐφαπτομένων εἰς τὸ σημεῖον Α, εἶναι μία ἄλλη δέσμη κύκλων ἐφαπτομένων εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α.

87. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ $(A = 90^0)$ σταθεροῦ ὕψους AH_1. Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι μεταβληταί. Ἐκ τοῦ H_1 ἄγομεν τὰς καθέτους H_1E καὶ H_1Z πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΒΕΖ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι εἰς τὰ τετράπλευρα ταῦτα ἀποτελοῦν δέσμην.

88. Τὰ κέντρα τριῶν κύκλων κεῖνται ἐπ' εὐθείας (Χ). Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν ἀκτίνων των καὶ τῶν ἀποστάσεων τῶν κέντρων των, ἵνα οὗτοι ἀποτελοῦν δέσμην ;

89. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ὁ λόγος τῶν δυνάμεών των ὡς πρὸς δύο κύκλους (O_1, R_1) καὶ (O_2, R_2) εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$.

90. Δύο ὀρθογώνιοι κύκλοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α, Β. Ἄγομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν ΓΔ καὶ ἔστω $\Gamma_1 \Delta_1$ ἡ προβολὴ τοῦ τμήματος ΓΔ ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν δύο κύκλων. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $AB = \Gamma_1\Delta_1$.

91. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος κέντρου Ο (δοθέντος) καὶ ἀνήκων εἰς τὴν δέσμην, τὴν ὁριζομένην α) Διὰ δύο βασικῶν σημείων Α, Β. β) Διὰ τῶν ὁρικῶν σημείων Ρ καὶ P_1, γ) διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (Χ), δ) Δι' ἑνὸς κύκλου (O_1) τῆς δέσμης καὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος (Χ) κειμένου ἐκτὸς τοῦ κύκλου (O_1).

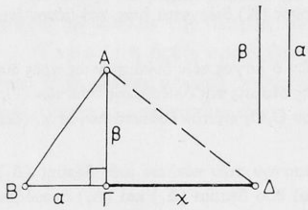
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

19. ΠΡΟΒΛΗΜΑ I. – Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθ. τμήματα x, y, τοιαῦτα ὥστε :

$$\alpha x = \beta^2 \quad (1) \qquad \text{ἢ} \qquad \beta y = \alpha^2 \quad (2)$$

Λύσις : Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ μὲ καθέτους πλευρὰς $ΒΓ = α$ καὶ $ΓΑ = β$. Εἰς τὸ Α ἄγομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ.



Σχ. 17

Θὰ εἶναι : $\beta^2 = \alpha \cdot ΓΔ$.

Ἀλλά : $\beta^2 = \alpha x$. Ἄρα $\alpha \cdot ΓΔ = \alpha \cdot x$,

ἐξ οὗ : $\boxed{ΓΔ = x}$

Ὁμοίως κατασκευάζεται τὸ ἄλλο τμῆμα y ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2).

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ II.– Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καὶ β καὶ ζητεῖται, νὰ κατασκευασθοῦν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα x, y, ω, τοιαῦτα ὥστε :

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad (1) \qquad y = \sqrt{\alpha\beta} \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{2}{\omega} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}. \qquad (3)$$

Λύσις : Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν δύο ὁμόρροπα τμήματα $ΑΒ = α$ καὶ $ΑΓ = β$. Μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα ΒΓ γράφομεν κύκλον κέντρου Δ. Ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΖ καὶ τὴν κάθετον ΖΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ. Τέλος ἄγομεν καὶ τὸ τμῆμα ΖΔ.

α'). Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

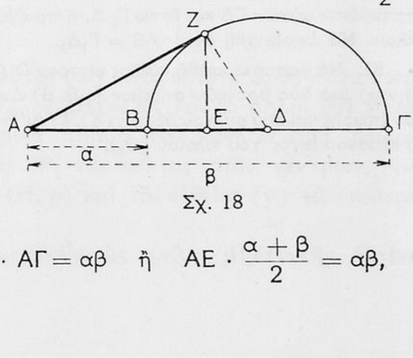
$$\alpha+\beta = ΑΒ + ΑΓ = (ΑΔ - ΔΒ) + (ΑΔ + ΔΓ) = 2 \cdot ΑΔ, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad ΑΔ = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Ἀλλὰ $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Ἄρα : $\boxed{ΑΔ = x}$

β'). Εἶναι : $\alpha\beta = ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΖ^2$,

ἐξ οὗ : $ΑΖ = \sqrt{\alpha\beta}$.

Ἀλλὰ $y = \sqrt{\alpha\beta}$. Ἄρα : $\boxed{ΑΖ = y}$



Σχ. 18

γ'). Εἶναι : $ΑΕ \cdot ΑΔ = ΑΖ^2 = ΑΒ \cdot ΑΓ = \alpha\beta$ ἢ $ΑΕ \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha\beta$, ἐξ οὗ : $AE = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ἢ $\frac{2}{AE} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. Ἀλλὰ $\frac{2}{\omega} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$.

Ἄρα $\frac{2}{AE} = \frac{2}{\omega}$, ἐξ οὗ : $\boxed{AE = \omega}$

Παρατήρησις : Ἐκ τοῦ σχήματος (18) ἔχομεν :

$$A\Delta > AZ > AE \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} > \sqrt{\alpha\beta} > \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Δηλαδή : **Ὁ μέσος ἀριθμητικὸς δύο ἀνίσων μεγεθῶν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ αὐτῶν καὶ οὗτος μεγαλύτερος τοῦ μέσου ἁρμονικοῦ αὐτῶν.**

21. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ.– Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον ἢ πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον ἢ πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

Λύσις : Ἐὰν x εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, β καὶ υ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου ἢ τοῦ παραλληλογράμμου ἢ τοῦ τριγώνου, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως τὰς σχέσεις :

$x^2 = \beta\upsilon$ διὰ τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὸ παραλληλόγραμμον

καὶ $y^2 = \frac{\beta}{2} \cdot \upsilon$ διὰ τὸ τρίγωνον.

Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην κατασκευὴν (2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

92. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα α καὶ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς k. Ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα x, τοιοῦτον ὥστε $x = \alpha\sqrt{k}$.

93. Δίδονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα α, β, γ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα x, τοιοῦτον ὥστε

1) $x = \sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}$, 2) $x = \sqrt[4]{\alpha^4-\beta^4}$, 3) $x = \sqrt[4]{\alpha^4+\beta^4}$, 4) $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

5) $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$, 6) $x = \sqrt{\alpha^2 \pm \sqrt{\beta^4-\gamma^4}}$, 7) $x = \sqrt{\alpha^2 \pm \sqrt{\beta^4+\gamma^4}}$.

94. Δίδονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθ. τμῆμα x, τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_\nu^2}.$$

95. Δίδονται τὰ εὐθ. τμήματα $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1}$ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν τὰ εὐθ. τμήματα x, y, ω, φ, ὥστε :

1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_1}$, 2) $\frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$,

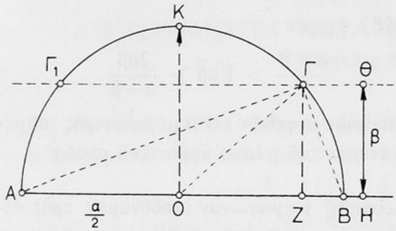
3) $\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}}$, 4) $\frac{1}{\varphi} = \left| \frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\alpha_1} \pm \frac{1}{\alpha_2} \pm \cdots \pm \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} \right|$

ἔνθα οὐδὲν μερικὸν ἄθροισμα εἶναι μηδέν.

22. ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV.— Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς β, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν ἄθροισμα δοθὲν εὐθ. τμῆμα α.

Λύσις : Ἂν x, y εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \alpha \\ xy &= \beta^2 \end{aligned}\right| \qquad (\text{I})$$



Σχ. 19

Μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα ΑΒ = α γράφομεν ἡμικύκλιον.

Ἄγομεν παράλληλον $\Theta\Gamma\Gamma_1$ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτῆς. Αὕτη τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Γ, Γ_1.

Ἄγομεν τὴν ΓΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Τὸ τμῆμα ΑΖ = x καὶ τὸ ΖΒ = y. Πράγματι, ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν :

$$\left.\begin{aligned} x + y &= AZ + ZB = AB = \alpha, \\ \text{καὶ} \quad xy &= AZ \cdot ZB = \Gamma Z^2 = H\Theta^2 = \beta^2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \mathbf{AZ} &= \mathbf{x} \\ \mathbf{ZB} &= \mathbf{y} \end{aligned}\right\}$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ἂν $OK \geqslant H\Theta$ ἢ $\frac{\alpha}{2} \geqslant \beta$ ἢ $\boldsymbol{\alpha \geqslant 2\beta}$.

Ὑπολογισμὸς τῶν x, y : Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΖΓ ἔχομεν :

$$O Z^2 = O\Gamma^2 - \Gamma Z^2 = \frac{\alpha^2}{4} - \beta^2 = \frac{\alpha^2 - 4\beta^2}{4}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \qquad \mathbf{OZ} = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}.$$

Ἄρα :

$$\left.\begin{aligned} x &= AZ = AO + OZ = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} \\ y &= ZB = OB - OZ = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} \\ y &= \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} \end{aligned}} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ὑπάρχουν τὰ x καὶ y, πρέπει $\alpha^2 - 4\beta^2 \geqslant 0$, ἐξ οὗ : $\boldsymbol{\alpha \geqslant 2\beta}$.

Σημείωσις : Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ y ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (I) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$x^2 - \alpha x + \beta^2 = 0.$$

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι αἱ πλευραὶ x, y τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

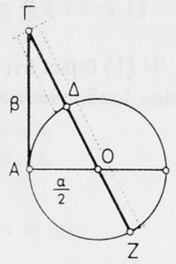
Ἐ φ α ρ μ ο γ ή : Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων :

$$\left.\begin{aligned} &1\text{ον}: \; x^2 - 8x + 15 = 0, \\ &2\text{ον}: \; x^2 - 10x + 24 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} &3\text{ον}: \; x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})\,x + \sqrt{6} = 0, \\ &4\text{ον}: \; x^2 - (2 + \sqrt{3})x + 2\sqrt{3} = 0. \end{aligned}\right\}$$

23. ΠΡΟΒΛΗΜΑ V. — Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς β, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα α.

Λύσις : Ἂν $x, y (x > y)$ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου, αὗται θὰ εἶναι ρίζαι τοῦ συστήματος.

$$\left.\begin{aligned} x - y &= \alpha \\ xy &= \beta^2 \end{aligned}\right\} \quad (\text{II})$$



Σχ. 20

Μὲ διάμετρον τὸ τμῆμα $AB = \alpha$ γράφομεν κύκλον. Εἰς τὸ Α ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην $A\Gamma = \beta$ τοῦ κύκλου τούτου. Ἄγομεν τέλος τὴν ΓΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ζ. Θὰ εἶναι :

$$x - y = \Gamma Z - \Gamma\Delta = \Delta Z = AB = \alpha.$$

καὶ $$\beta^2 = \Gamma A^2 = \Gamma Z \cdot \Gamma\Delta = xy.$$

Ἄρα : $$\mathbf{\Gamma Z = x} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{\Gamma\Delta = y}.$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν :

Ὑπολογισμὸς τῶν x, y. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΓ ἔχομεν

$$O\Gamma^2 = OA^2 + A\Gamma^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \beta^2 = \frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{4}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{O\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\left.\begin{aligned} x &= \Gamma Z = \Gamma O + OZ = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2} + \frac{\alpha}{2} \\ y &= \Gamma\Delta = \Gamma O - O\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2} - \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2} \\ y &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}}{2} \end{aligned}} \quad (1)$$

Σημείωσις : Ἂν γίνῃ ἀπαλοιφὴ τοῦ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (ΙΙ), προκύπτει ἡ ἐξίσωσις :

$$\mathbf{x^2 - \alpha x - \beta^2 = 0},$$

τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων :

1ον : $x^2 - 6x - 40 = 0,$ 2ον : $x^2 - 7x - 14 = 0,$

3ον : $x^2 - (2 - \sqrt{5})x - 2\sqrt{5} = 0,$ 4ον : $x^2 - (4 - \sqrt{2})x - 4\sqrt{2} = 0.$

24. ΠΡΟΒΛΗΜΑ VI (Χρυσῆς τομῆς (1)).—**Δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ = α νὰ διαιρεθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ δοθέντος τμήματος καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.**

Λύσις : Ἔστω $AB = \alpha$ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ Γ τὸ σημεῖον τῆς διαιρέσεως.

---

(1) Ὁ ὅρος **«Χρυσῆ τομή»** ἐνεφανίσθη τὸ πρῶτον τὸ ἔτος 1835 καθὼς ἀναφέρει ὁ Μ. Ohm εἰς σχετικὸν ἔργον του. Ἀπὸ τὸ ἔτος 1871 γίνεται χρῆσις καὶ τοῦ ὅρου «συνεχὴς διαίρεσις».

Ἡ γεωμετρικὴ κατασκευὴ τῆς διαιρέσεως εὐθ. τμήματος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου.

Ὁ ὅρος «εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον» ἀναφέρεται καὶ ὑπὸ τοῦ Gremona (1114-1187) εἰς τὴν ὑπ' αὐτοῦ μετάφρασιν τῶν «Στοιχείων τοῦ Εὐκλείδου».

Ὁ Novara θεωρεῖ τὴν διαίρεσιν ταύτην ὡς ἀξιοθαύμαστον γεωμετρικὴν κατασκευὴν καὶ ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν κανονικῶν πολυέδρων.

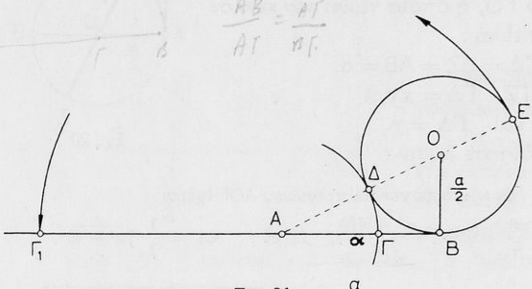
Ὁ Luca Pacioli ὠνόμασεν αὐτὴν **θεϊκὴν ἀναλογίαν.**

Πολλοὶ πιστεύουν ἢ ἔχουν τὴν ὑπόνοιαν ὅτι ἡ **«Χρυσῆ τομή»** συναντᾶται εἰς τὸ σῶμα τοῦ ἀνθρώπου καὶ τῶν ζώων, εἰς τοὺς κλάδους καὶ τὰ φύλλα τῶν δένδρων, ἄλλοι δὲ θεωροῦν ταύτην ὡς **«βασικὸν δόγμα ὡραιότητος».**

῎Αν τεθῇ ΑΓ $= x$, τότε θὰ εἶναι ΓΒ $= \alpha - x$. Θὰ πρέπῃ : $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{\Gamma B}$ ἢ

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{x}{\alpha - x}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{x(\alpha + x) = \alpha^2} \qquad (1).$$

Ἡ (1) δηλοῖ ὅτι τὸ ἄγνωστον τμῆμα x εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον πλευρᾶς α, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ διαφέρουν κατὰ α.



Σχ. 21

Πρὸς τοῦτο εἰς τὸ ἄκρον Β τοῦ τμήματος ΑΒ ὑψοῦμεν κάθετον τμῆμα ΒΟ $= \dfrac{\alpha}{2}$ καὶ ἀκολούθως γράφομεν τὸν κύκλον $\left(O, \dfrac{\alpha}{2}\right)$. ῎Αγομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Γράφομεν τέλος τοὺς κύκλους (Α,ΑΔ) καὶ (Α,ΑΕ), οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ΑΒ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ_1 ἀντιστοίχως.

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ_1 εἶναι τὰ ζητούμενα. Πράγματι, ἐκ τοῦ (σχ. 21) ἔχομεν :

$AB^2 = AE \cdot A\Delta = (A\Delta + \Delta E) \cdot A\Delta =$	$AB^2 = A\Delta \cdot AE = (AE - \Delta E) \cdot AE =$
$= (A\Gamma + AB) \cdot A\Gamma = A\Gamma^2 + AB \cdot A\Gamma$	$= (A\Gamma_1 - AB)A\Gamma_1 = A\Gamma_1^2 - AB \cdot A\Gamma_1$
ἢ $A\Gamma^2 = AB^2 - AB \cdot A\Gamma = AB(AB - A\Gamma) =$	ἢ $A\Gamma_1^2 = AB \cdot A\Gamma_1 + AB^2 =$
$= AB \cdot \Gamma B$	$= AB(A\Gamma_1 + AB) = AB \cdot \Gamma_1 B$
ἢ $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{A\Gamma}{\Gamma B}.$	ἢ $\dfrac{AB}{\Gamma_1 A} = \dfrac{\Gamma_1 A}{\Gamma_1 B}.$
Τὸ ΑΓ εἶναι **τὸ μικρότερον** τμῆμα.	Τὸ Γ_1Α εἶναι **τὸ μεγαλύτερον** τμῆμα.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν δύο σημεῖα Γ καὶ Γ_1 ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ, τὰ ὁποῖα διαιροῦν αὐτὸ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ὑπολογισμὸς τῶν ΑΓ καὶ $\mathbf{A\Gamma_1}$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΟ ἔχομεν :

$$AO^2 = AB^2 + BO^2 = \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{AO = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{῎Αρα: } A\Gamma = A\Delta = AO - O\Delta = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ &\text{καὶ } \Gamma_1 A = AE = AO + OE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} + 1) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbf{A\Gamma} &= \mathbf{\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1)} \\ \mathbf{\Gamma_1 A} &= \mathbf{\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} + 1)} \end{aligned}}$$

Σημείωσις : Αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι :

$$\mathbf{x_1 = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1)} \qquad \text{καὶ} \qquad \mathbf{x_2 = -\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} + 1)}$$

Ἂν τὰ $A\Gamma$ καὶ $A\Gamma_1$ θεωρηθοῦν ὡς προσανατολισμένα τμήματα, τότε :

$$\overline{A\Gamma} = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1) = x_1 \quad \text{καὶ} \quad \overline{A\Gamma_1} = -\overline{\Gamma_1 A} = -(-x_2) = x_2 = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}+1)$$

καὶ τότε μόνον τὸ Γ ἁρμόζει εἰς τὴν λύσιν :

25. ΠΡΟΒΛΗΜΑ VII.— Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἐπίλυσις τῶν ἐξισώσεων :

1. $x^4 - \alpha^2 x^2 + \beta^4 = 0,$	**3.** $x^4 + \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0,$
2. $x^4 - \alpha^2 x^2 - \beta^4 = 0,$	**4.** $x^4 + \alpha^2 x^2 + \beta^4 = 0.$

ἔνθα α καὶ β δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα.

Λύσις : Διὰ $x^2 = \beta y$, αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις μετασχηματίζονται εἰς τάς :

1. $y^2 - \frac{\alpha^2}{\beta} y + \beta^2 = 0,$	**3.** $y^2 + \frac{\alpha^2}{\beta} y - \beta^2 = 0,$
2. $y^2 - \frac{\alpha^2}{\beta} y - \beta^2 = 0,$	**4.** $y^2 + \frac{\alpha^2}{\beta} y + \beta^2 = 0.$

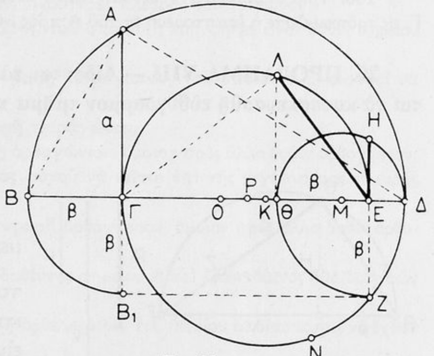
Ἐκ τούτων ἡ (4) ἔχει ῥίζας μιγαδικάς.

Ἐπιλύομεν γραφικῶς τὰς ὑπολοίπους τρεῖς. Ἔστω τὴν

$$y^2 - \frac{\alpha^2}{\beta} y + \beta^2 = 0. \qquad (1')$$

Ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ μὲ καθέτους πλευρὰς $A\Gamma = \alpha$ καὶ $\Gamma B = \beta$. Εἰς τὸ Α ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Θὰ εἶναι :

$$\alpha^2 = \beta \cdot \Gamma\Delta \iff \boxed{\Gamma\Delta = \frac{\alpha^2}{\beta}}$$



Σχ. 22

Μὲ διάμετρον ΓΔ γράφομεν ἡμίκυκλον ΓΝΔ. Εἰς ἀπόστασιν β ἀπὸ τὴν ΒΔ ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἥτις τέμνει τὸν ἡμίκυκλον εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐκ τοῦ Ζ ἄγομεν τὴν κάθετον ΖΕ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Τὰ τμήματα ΓΕ καὶ ΕΔ εἶναι ῥίζαι τῆς (1′).

Διότι : $\Gamma E \cdot E\Delta = EZ^2 = \beta^2$

καὶ $\Gamma E + \Delta E = \Gamma\Delta = \frac{\alpha^2}{\beta}$.

Ἐπὶ τῆς ΔΓ λαμβάνομεν τμῆμα $E\Theta = EZ = \beta$. Μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΕΓ καὶ ΔΘ γράφομεν ἡμικύκλους. Εἰς τὸ Θ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἥτις τέμνει τὸν ἡμίκυκλον εἰς τὸ Λ. Ἡ ΕΖ τέμνει τὸν δεύτερον ἡμίκυκλον εἰς τὸ Η. Θὰ εἶναι τώρα :

$$EH^2 = E\Delta \cdot E\Theta = E\Delta \cdot \beta = x^2, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{x = \pm EH}$$

καὶ $$E\Lambda^2 = E\Theta \cdot E\Gamma = \beta \cdot E\Gamma = \beta y = x^2, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{x = \pm E\Lambda}$$

Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον γίνεται καὶ ἡ κατασκευὴ τῶν ῥιζῶν τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων (2) καὶ (3).

96. Ἐὰν α, β, λ, μ εἶναι δεδομένα εὐθ. τμήματα, νὰ κατασκευασθοῦν τὰ εὐθ. τμήματα x, y, τοιαῦτα ὥστε :

$$1)\ \left.\begin{array}{r} x^2+y^2=\alpha^2 \\ xy=\beta^2 \end{array}\right\} \quad \text{καὶ} \quad 2)\ \left.\begin{array}{r} \alpha x+\beta y=\lambda^2 \\ xy=\mu^2 \end{array}\right\}$$

97. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις νὰ διαφέρουν κατὰ δ.

98. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του β καὶ $\gamma=\sqrt{\alpha\beta}$.

99. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τοιοῦτον, ἔχον κοινὴν τὴν γωνίαν Α καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

100. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἰσοδύναμον ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΓ.

101. Διὰ σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, διαιροῦσα αὐτὸ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

102. Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη, δι᾽ εὐθείας καθέτου πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ αὐτοῦ.

103. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, διαιροῦσα τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

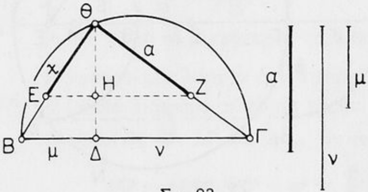
104. Δίδεται γωνία xAy καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ΟΒΓ τέμνουσα πρῶτον τὴν Αx εἰς τὸ Β καὶ τὴν Αy εἰς τὸ Δ, εἰς τρόπον ὥστε $ΟΒ^2 = ΟΓ \cdot ΒΓ$.

105. Ἐὰν εὐθεῖα διαιρῇ μίαν πλευρὰν τριγώνου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, εἶναι δὲ παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ, τότε θὰ διαιρῇ καὶ τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

106. Τρία σημεῖα Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας. Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ τῶν Β, Γ, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐφαπτομένη ἐκ τοῦ Α πρὸς αὐτὸν νὰ ἔχῃ μῆκος λ.

26. ΠΡΟΒΛΗΜΑ VIII.— Δίδονται τὰ εὐθύγραμμα τμήματα α, μ, ν καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ εὐθύγραμμον τμῆμα x, εἰς τρόπον ὥστε :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu} \qquad (1)$$



Σχ. 23

Ἀνάλυσις : Ἐὰν ΘΕ εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα, τότε $\frac{ΘΕ^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}$ (1). Κατασκευάζοντες ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς ΘΕ καὶ ΘΖ = α, θὰ εἶναι :

$$\frac{ΘΕ^2}{\alpha^2}=\frac{ΕΗ}{ΗΖ}, \quad \text{ἂν} \quad ΘΗ \perp ΕΖ.$$

Ἔκ τινος σημείου Δ τῆς ΘΗ ἄγομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΕΖ, ἥτις τέμνει τὰς ΘΕ καὶ ΘΖ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Θὰ εἶναι :

$$\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΕΗ}{ΗΖ}=\frac{ΘΕ^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐκ τούτων ὁδηγούμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον λύσιν.

Σύνθεσις: Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ καὶ ὁμόρροπα τμήματα ΒΔ = μ καὶ ΔΓ = ν. Μὲ διάμετρον ΒΓ γράφομεν ἡμίκυκλον καὶ ἐκ τοῦ Δ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τέμνουσαν τὸν ἡμίκυκλον εἰς τὸ σημεῖον Θ. Ἄγομεν τὰς ΘΒ, ΘΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΓ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα $ΘΖ = α$.

Ἐκ τοῦ Ζ ἄγομεν τὴν παράλληλον ΖΕ πρὸς τὴν ΒΓ, τέμνουσαν τὰς ΘΒ καὶ ΘΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Η ἀντιστοίχως. Τὸ ΘΕ εἶναι τὸ ζητούμενον τμῆμα x.

Ἀπόδειξις : Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΘΕΖ ἔχομεν :

$$\frac{ΘΕ^2}{ΘΖ^2} = \frac{ΕΗ}{ΗΖ} \quad ἤ \quad \frac{ΘΕ^2}{α^2} = \frac{ΕΗ}{ΗΖ}. \qquad (3)$$

Ἀλλὰ $\dfrac{ΕΗ}{ΗΖ} = \dfrac{ΒΔ}{ΔΓ} = \dfrac{μ}{ν}$. Ἄρα $\dfrac{ΘΕ^2}{α^2} = \dfrac{μ}{ν} = \dfrac{x^2}{α^2}$, ἐξ οὗ : $\mathbf{ΘΕ = x}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον Ρ καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν πολύγωνον $Ρ_1$.

108. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον, εἰς τρόπον ὥστε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθ. τμημάτων μ καὶ ν.

109. Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δύο ἄλλα ὅμοια πολύγωνα καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν δοθέντων.

110. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

111. Εἰς δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν του συναρτήσει τοῦ α.

112. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ μέγιστον τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἐγγράφεται εἰς δοθὲν τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μικροτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

113. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ρόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφὴ νὰ εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

114. Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου δύο κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τομέως.

115. Εἰς δοθὲν κυκλικὸν τμῆμα νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

116. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ὅμοιον πρὸς ἄλλο δοθὲν ὀρθογώνιον, οὕτως ὥστε μία ἀπὸ τὰς μεγαλυτέρας πλευρὰς αὐτοῦ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

117. Εἰς δοθέντα ἡμίκυκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ὅμοιον πρὸς ἄλλο δοθὲν ὀρθογώνιον.

118. Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (x) καὶ (y).

119. Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν λ.

120. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν λ, μ, ν, διὰ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ.

121. Ὁμοίως εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις.

122. Νὰ διαιρεθῇ τραπέζιον εἰς δύο ὅμοια τραπέζια, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.

123. Τρίγωνον ΑΒΓ νὰ διαιρεθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.

124. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν του καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΥ [1]

125.— Τὸ γενικὸν πρόβλημα τοῦ Ἀπολλωνίου εἶναι :

Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τριῶν δοθέντων κύκλων.

Ἡ ἐπαφὴ δύναται νὰ εἶναι ἐσωτερικὴ ἢ ἐξωτερική. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν παριστῶμεν τοὺς κύκλους διὰ τῶν (Α), (Β), (Γ) καὶ εἰς τὴν δευτέραν διὰ τῶν (α), (β), (γ).

Δύναται δέ τις νὰ θεωρήσῃ τὰς ἑπομένας ὀκτὼ μορφὰς λύσεων, τάς :

$$1)\ (A),\ (B),\ (\Gamma),\qquad 2)\left\{\begin{array}{l}(A),\ (B),\ (\gamma)\\ (A),\ (\beta),\ (\Gamma)\\ (\alpha),\ (B),\ (\Gamma)\end{array}\right\},\quad 3)\left\{\begin{array}{l}(A),\ (\beta),\ (\gamma)\\ (\alpha),\ (B),\ (\gamma)\\ (\alpha),\ (\beta),\ (\Gamma)\end{array}\right\}\ \text{καὶ}\quad 4)\ (\alpha),\ (\beta),\ (\gamma).$$

Πράγματι, ὅμως, ὑπάρχουν τέσσαρες μόνον διάφοροι κατασκευαί· ἐπειδὴ ἡ (1) ὁμὰς ἀντιστοιχεῖ εἰς τρεῖς ἐξωτερικὰς ἐπαφάς, ἕκαστον μέλος τῶν (2) καὶ (3) εἰς δύο ἐξωτερικὰς καὶ μίαν ἐσωτερικὴν ἢ δύο ἐσωτερικὰς καὶ μίαν ἐξωτερικὴν καὶ ἡ (4) ὁμὰς εἰς τρεῖς ἐσωτερικὰς ἐπαφάς.

Σημ.: Αἱ ὀκτὼ λύσεις ἀντιστοιχοῦν ἀνὰ δύο ὡς ἑξῆς :

$$\left\{\begin{array}{l}(A),\ (B),\ (\Gamma)\\ (\alpha),\ (\beta),\ (\gamma)\end{array}\right\},\quad \left\{\begin{array}{l}(A),\ (B),\ (\gamma)\\ (\alpha),\ (\beta),\ (\Gamma)\end{array}\right\},\quad \left\{\begin{array}{l}(A),\ (\beta),\ (\Gamma)\\ (\alpha),\ (B),\ (\gamma)\end{array}\right\},\quad \left\{\begin{array}{l}(\alpha),\ (B),\ (\Gamma)\\ (A),\ (\beta),\ (\gamma)\end{array}\right\}.$$

Εἰδικαὶ περιπτώσεις : Εἷς ἢ περισσότεροι κύκλοι δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ σημείων, ἀφοῦ ἓν σημεῖον δύναται νὰ θεωρηθῇ κύκλος μὲ ἀκτῖνα μηδενικήν. Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

1) Δύο κύκλους καὶ ἓν σημεῖον, 2) Ἕνα κύκλον καὶ δύο σημεῖα, 3) Τρία σημεῖα.

Εἷς ἢ περισσότεροι κύκλοι δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν δι' εὐθειῶν, καθόσον μία εὐθεῖα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κύκλος μὲ ἀκτῖνα ἀπείρως μεγάλην. Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν : 4) Δύο κύκλους καὶ μίαν εὐθεῖαν, 5) ἕνα κύκλον καὶ δύο εὐθείας, 6) τρεῖς εὐθείας.

Δυνάμεθα τέλος νὰ θεωρήσωμεν καὶ τοὺς ἀκολούθους συνδυασμούς : 7) Ἕνα κύκλον, ἓν σημεῖον καὶ μία εὐθεῖαν, 8) Δύο σημεῖα καὶ μίαν εὐθεῖαν. 9) Ἓν σημεῖον καὶ δύο εὐθείας.

Ἡ γενικὴ περίπτωσις τῶν τριῶν κύκλων καὶ ἑκάστη τῶν εἰδικῶν δύνανται νὰ παρουσιάσουν διαφόρους ποικιλίας, ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν δεδομένων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.— Νὰ γραφῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ διέρχεται ἀπὸ τρία δεδομένα σημεῖα Α, Β καὶ Γ.

Ἡ λύσις τούτου εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν προηγουμένην τάξιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ ἐφάπτεται τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν (x), (y) καὶ (z).

Καὶ τούτου ἡ λύσις εἶναι γνωστή. Ἁπλῶς ἀναφέρομεν ὅτι ὑπάρχουν **τέσσαρες λύσεις,** ὅταν αἱ εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνὰ δύο, **δύο λύσεις,** ὅταν αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ τέμνωνται ὑπὸ τῆς τρίτης καὶ **οὐδεμία** λύσις, ὅταν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

---

(1) **Ἀπολλώνιος.** Εἶναι ὁ τρίτος ἐκ τῶν μεγάλων Μαθηματικῶν τῆς Ἀλεξανδρινῆς ἐποχῆς. Ἐγεννήθη εἰς Πέργην τῆς Παμφυλίας, δι' ὃ καὶ Περγαῖος ἐκλήθη. Ὁ σχολιαστὴς Εὐτόκιος ἀναφέρει ὅτι ἔζησεν ἐπὶ τῆς ἐποχῆς τοῦ βασιλέως Πτολεμαίου τοῦ Εὐεργέτου (247 - 222 π.Χ.). Τὸ μεγαλύτερον μέρος τῶν συγγραμμάτων του ἀπωλέσθη. Ἀναφέρονται ὡς συγγραφέντα ὑπ' αὐτοῦ τὰ κάτωθι ἔργα.

1) «Λόγου ἀποτομή», 2) «Χωρίου ἀποτομή», 3) «Διωρισμένη τομή», 4) «Ἐπαφαί», 5) «Νεύσεις», 6) «Ἐπίπεδοι τόποι», 7) «Περὶ κοχλίου», 8) «Περι συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου καὶ εἰκοσαέδρου», 9) «Περὶ ἀτάκτων λόγων», 10) «Ὠκυτόκιον», δηλ. μέθοδος συντομεύσεως λογιστικῶν πράξεων, 11) «Ἡ καθόλου πραγματεία», θεμελίωσις τῆς Γεωμετρικῆς ἐπιστήμης, 12) «Περὶ τοῦ πυρίου», παραβολικὰ κάτοπτρα δυνάμενα νὰ ἐπιφέρουν ἀνάφλεξιν, 13) Σύγγραμμα ἀστρονομικὸν μὴ διασωθέν, 14) «Κωνικά», εἰς 8 βιβλία. Εἶναι τὸ κύριον ἔργον τοῦ Ἀπολλωνίου, τὸ ὁποῖον τοῦ προσεπόρισεν ἀθάνατον δόξαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ III.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας (x).

Ὑπόδειξις : Εὕρετε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β, τὸ B_1, ὡς πρὸς τὴν (x). Ἡ ΑΒ τέμνει τὴν (x) εἰς τὸ Γ. Ἂν Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, τότε $\sphericalangle A\Delta B_1 = 180^0 - \sphericalangle A\Gamma\Delta$ κλπ. Τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο λύσεις** ἢ **μίαν** ἢ **οὐδεμίαν,** ἀναλόγως τῆς θέσεως τῶν σημείων Α, Β ὡς πρὸς τὴν (x).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ὁ ὁποῖος νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (x) καὶ (y).

Ὑπόδειξις : Ἂν αἱ (x) καὶ (y) τέμνωνται, τότε εὕρετε τὸ συμμετρικὸν A_1 τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον t τῆς γωνίας τῶν (x) καὶ (y). Ἀναγόμεθα εἰς τὸ πρόβλημα III. **Δύο λύσεις.** Ἂν αἱ (x) καὶ (y) εἶναι παράλληλοι, τότε ἔχομεν πάλιν **δύο λύσεις.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ V.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, διερχόμενος ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο, R).

Ὑπόδειξις : Γράψατε τυχόντα κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν Α, Β, τέμνοντα τὸν (Ο) εἰς τὰ Γ, Δ. Αἱ ΓΔ, ΑΒ τέμνονται εἰς τὸ Ι. Φέρατε τὰς ἐφαπτομένας ΙΜ, IM_1 τοῦ (Ο). Τότε :

$$IM^2 = IM_1^2 = \overline{I\Gamma} \cdot \overline{I\Delta} = \overline{IA} \cdot \overline{IB}, \text{ κλπ.}$$

Τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο** ἢ **μίαν** λύσιν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VI.— Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο, R) καὶ δοθείσης εὐθείας (x).

Ὑπόδειξις : Ἔστω (ω) ὁ ζητούμενος κύκλος, ἐφαπτόμενος τοῦ (Ο) εἰς τὸ Γ καὶ τῆς (Χ) εἰς τὸ Β. Ἡ ΒΓ τέμνει τὸν (Ο) εἰς τὸ Δ. Ἡ ΔΟ τέμνει καθέτως τὴν (Χ) εἰς τὸ Ζ. Ἂν Ε τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Δ, τὸ τετράπλευρον ΖΕΓΒ εἶναι ἐγγράψιμον. Ἄρα :

$$\overline{\Delta\Theta} \cdot \overline{\Delta A} = \overline{\Delta\Gamma} \cdot \overline{\Delta B} = \overline{\Delta E} \cdot \overline{\Delta Z} = ct, \implies \Delta\Theta = \text{ὡρισμένον}$$

ἔνθα Θ ἡ τομὴ τοῦ (ω) καὶ τῆς εὐθείας ΔΑ κλπ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει **τέσσαρας** λύσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VII.— Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθέντων κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ), ἔνθα R > ρ.

Ὑπόδειξις : Ἂν Β, Γ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, ἡ ΒΓ τέμνει τὴν ΚΛ εἰς ἓν ὡρισμένον σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον διέρχεται ἡ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΔΕ τῶν (Κ) καὶ (Λ). Τὸ τετράπλευρον ΒΔΕΓ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὅτε :

$$\overline{\Sigma A} \cdot \overline{\Sigma A_1} = \overline{\Sigma B} \cdot \overline{\Sigma\Gamma} = \overline{\Sigma\Delta} \cdot \overline{\Sigma E}, \implies \Sigma A_1 = \text{ὡρισμένον,}$$

ἔνθα A_1 ἡ τομὴ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τῆς εὐθείας ΣΑ κλπ.

Τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ πρόβλημα V καὶ ἔχει **τέσσαρας ἐν γένει λύσεις.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ VIII.— Νὰ γραφῇ κύκλος, ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν (x) καὶ (y) καὶ δοθέντος κύκλου (Κ, R).

Ὑπόδειξις : Εὕρετε τὸ συμμετρικὸν K_1 τοῦ κέντρου Κ ὡς πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν (Χ) καὶ (Υ), καὶ ἀναχθῆτε εἰς τὸ πρόβλημα V. Τὸ πρόβλημα ἔχει, ἐν γένει, **ὀκτὼ λύσεις.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ IX.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας (Χ) καὶ δύο δοθέντων κύκλων (Κ, R) καὶ (Λ, ρ).

Ὑπόδειξις : Ἐὰν $R > \rho$, ὁ κύκλος $(O, x+\rho)$ διέρχεται ἀπὸ τὸ Λ καὶ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου $(K, K\Delta = R - \rho)$ καὶ τῆς (X_1), παραλλήλου τῆς (Χ) εἰς ἀπόστασιν ρ, κλπ. Τὸ πρόβλημα ἔχει, ἐν γένει, **ὀκτὼ λύσεις.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑ X.— Νὰ γραφῇ κύκλος, ἐφαπτόμενος τριῶν δοθέντων κύκλων (K, R_1), (Λ, R_2) καὶ (M, R_3).

Ὑπόδειξις : Ἐὰν $R_1 < R_2 < R_3$, τότε ὁ κύκλος $(O, x+R_1)$ θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Κ καὶ θὰ ἐφάπτεται τῶν κύκλων $(\Lambda, \Lambda H = R_2 - R_1)$, $(M, M\Theta = R_3 - R_1)$ κλπ.

Διὰ τρεῖς κύκλους ἐξωτερικῶς ἀλλήλων καὶ μὲ κέντρα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχουν **ὀκτὼ διάφοροι** λύσεις τοῦ προβλήματος.

Διὰ τρεῖς κύκλους ἐξωτερικῶς ἀλλήλων καὶ μὲ κέντρα κείμενα ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχουν **ὀκτὼ λύσεις,** συμμετρικαὶ ἀνὰ δύο πρὸς τὴν διάκεντρον.

Διὰ τρεῖς κύκλους, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο (Κ), (Λ) τέμνονται καὶ ὁ τρίτος Μ εἶναι ἐξωτερικὸς αὐτῶν, ὑπάρχουν **τέσσαρες λύσεις** μόνον.

Διὰ τοὺς (Κ), (Λ) ἐξωτερικῶς ἀλλήλων, ἀλλ' ἐσωτερικοὺς τοῦ (Μ), αἱ λύσεις εἶναι **τέσσαρες,** μὲ ἐσωτερικὴν ἐπαφὴν τῆς Μ πάντοτε μετὰ τῆς ζητουμένης.

Διὰ τοὺς (Κ), (Λ) τεμνομένους καὶ ἐσωτερικοὺς τῆς (Μ), ὑπάρχουν **δύο λύσεις.**

Τὰ ἀνωτέρω ὑποδειχθέντα εἶναι ἐπαρκῆ πρὸς διαπίστωσιν τῆς μεγάλης ποικιλίας τῶν ὄψεων ἑνὸς δεδομένου προβλήματος. Θὰ ἠδύνατο δέ τις ν' ἀχθῇ καὶ εἰς πολλὰς ἄλλας ἰδιομορφίας, ἐὰν ἐπεθύμει νὰ τὸ ἐξετάσῃ διὰ πᾶσαν διάταξιν τῶν δεδομένων αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

126. Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος ἐσωτερικῶς τριῶν ἴσων κύκλων. Ὁμοίως ἐφαπτόμενος ἐξωτερικῶς τριῶν ἴσων κύκλων.

127. Νὰ γραφῇ κύκλος, ἐφαπτόμενος ἐξωτερικῶς τριῶν δοθέντων κύκλων, ὧν οἱ δύο εἶναι ἴσοι.

128. Νὰ γραφῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α, ἔχων τὸ κέντρον του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (Χ) καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας (Υ) ἢ δοθέντος κύκλου (Ο, R).

129. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του α, $\beta \pm \gamma = \lambda$ καὶ τῆς γωνίας (α, μ_1).

130. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν α, υ_1, $\mu_2 + \mu_3 = \lambda$.

131. Νὰ γραφῇ κύκλος ἔχων τὸ κέντρον του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (Χ) καὶ ἐφαπτόμενος δύο κύκλων (Κ, R), (Λ, ρ).

132. Νὰ γραφῇ κύκλος, ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας (Χ) καὶ δοθέντος κύκλου (Α, α), ἔχων δὲ τὸ κέντρον του ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (Υ)

133. Νὰ γραφῇ κύκλος ἀποκόπτων ἀπὸ τρεῖς δοθέντας κύκλους χορδὰς ἴσας πρὸς τρία δεδομένα εὐθ. τμήματα λ, μ, ν.

134. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν α, υ_1, $\beta \pm \gamma = \lambda$.

135. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Α ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (Χ), οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐξ αὐτοῦ πρὸς δύο κύκλους (Ο, R) καὶ (O_1, R_1) νὰ εἶναι λ.

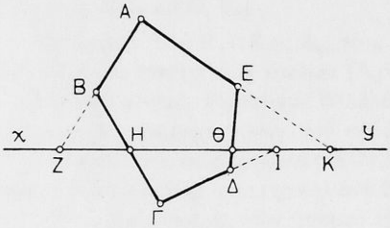
136. Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (Χ) νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ, τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα (διαφορὰ) τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Α, Β νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

137. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του 1) $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$, Γ καὶ 2) α, υ_2, $\gamma : \beta = \mu : \nu$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΔΙΑΤΕΜΝΟΥΣΑΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

27. Ὁρισμοί. – Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς ἑνὸς πολυγώνου ἢ καὶ τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἢ μερικὰς μόνον τούτων καὶ τὰς προεκτάσεις τῶν ἄλλων. Οὕτως ἡ εὐθεῖα xy (σχ. 24) τέμνει τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΕΔ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ τὰς προεκτάσεις τῶν ἄλλων. Ἡ εὐθεῖα **xy** καλεῖται **διατέμνουσα** τοῦ πολυγώνου τούτου.



Σχ. 24

Τὸ κοινὸν σημεῖον διατεμνούσης καὶ πλευρᾶς τινος αὐτοῦ ὁρίζει δύο ἀντιστρόφους λόγους τομῆς πρὸς τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς ταύτης.

Ἐὰν ἓν σημεῖον τομῆς πλευρᾶς ΒΓ (σχ. 24) εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς πλευρᾶς ταύτης, οἱ λόγοι :

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{H\Gamma}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overline{H\Gamma}}{\overline{HB}} \quad \text{εἶναι } \textbf{ἀρνητικοί.}$$

Διὰ τὸ σημεῖον Ζ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΑΒ οἱ λόγοι :

$$\frac{\overline{ZB}}{\overline{ZA}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} \quad \text{εἶναι } \textbf{θετικοί.}$$

Ὁρίζομεν ὡς θετικὴν φορὰν διαγραφῆς τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς τὴν ΑΒΓΔΕ...

Διαδοχικοὶ λόγοι.— Δύο ἢ περισσότεροι λόγοι τομῆς ὁριζόμενοι ὑπὸ τῶν κοινῶν σημείων διατεμνούσης καὶ τῶν πλευρῶν πολυγώνου λέγονται διαδοχικοί, ἂν ὁ ἑπόμενος ὅρος ἑκάστου λόγου (πλὴν τελευταίου) **περατοῦται εἰς τὴν κορυφήν, εἰς τὴν ὁποίαν περατοῦται ὁ ἡγούμενος τοῦ ἀμέσως ἑπομένου λόγου.**

28. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΜΕΝΕΛΑΟΥ [1]**.—Ἐὰν εὐθεῖα x τέμνῃ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ κατὰ τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :**

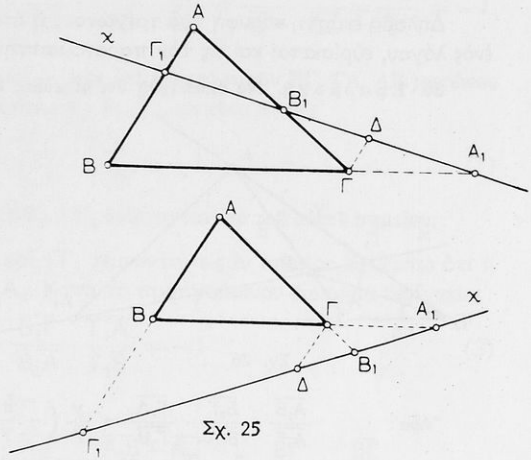
$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = 1.$$

---

(1) Μενέλαος (80 μ.Χ.). Ἕλλην Μαθηματικὸς ζήσας ἐν Ἀλεξανδρείᾳ. Ἀνεκάλυψε πλείστας ἰδιότητας τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ ἔδωσεν ὡς λῆμμα τὸ θεμελιῶδες θεώρημα τῆς θεωρίας τῶν διατεμνουσῶν.

'Απόδειξις : 'Εκ τοῦ Γ ἄγομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν x εἰς τὸ σημεῖον Δ.

'Εκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $A_1B\Gamma_1$, $A_1\Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma B_1\Delta$, $AB_1\Gamma_1$ θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :



Σχ. 25

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}=\frac{\overline{B\Gamma_1}}{\overline{\Gamma\Delta}} \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{A\Gamma_1}} \qquad (2)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2), ἔχομεν :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{B\Gamma_1}}{\overline{\Gamma\Delta}}\cdot\frac{\overline{\Gamma\Delta}}{\overline{A\Gamma_1}}=$$

$$=\frac{\overline{B\Gamma_1}}{\overline{A\Gamma_1}}=\frac{\overline{\Gamma_1B}}{\overline{\Gamma_1A}}, \text{ ἐξ οὗ :}$$

$$\frac{\overline{\mathbf{A_1B}}}{\overline{\mathbf{A_1\Gamma}}}\cdot\frac{\overline{\mathbf{B_1\Gamma}}}{\overline{\mathbf{B_1A}}}\cdot\frac{\overline{\mathbf{\Gamma_1A}}}{\overline{\mathbf{\Gamma_1B}}}=\mathbf{1} \qquad (3)$$

Σημ. : Τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ διατέμνουσα x εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

29. ΘΕΩΡΗΜΑ (ἀντίστροφον).—'Εὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, τοιαῦτα ὥστε νὰ πληροῦται ἡ ἰσότης :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=1, \qquad (1)$$

τότε τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

'Απόδειξις : Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦ Pasch, τὸ ἓν τῶν σημείων A_1, B_1, Γ_1 θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς ἢ καὶ τὰ τρία. Ἡ εὐθεῖα A_1B_1 τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ_2. Ἄρα κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_2A}}{\overline{\Gamma_2B}}=1 \qquad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_2A}}{\overline{\Gamma_2B}}$$

ἐξ οὗ : $\dfrac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=\dfrac{\overline{\Gamma_2A}}{\overline{\Gamma_2B}}$ ἢ $\dfrac{\overline{\Gamma_1A}-\overline{\Gamma_1B}}{\overline{\Gamma_1B}}=\dfrac{\overline{\Gamma_2A}-\overline{\Gamma_2B}}{\overline{\Gamma_2B}}$ ἢ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma_1B}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma_2B}}$

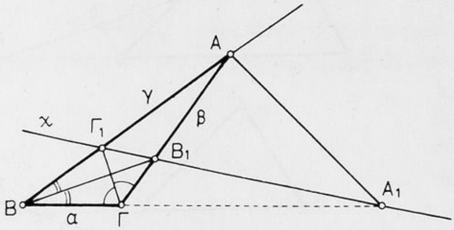
ἢ $\overline{\Gamma_1B}=\overline{\Gamma_2B}$. Ἄρα $\Gamma_1\equiv\Gamma_2$ καὶ τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Παρατήρησις : Ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\frac{\overline{A_1\Gamma}}{\overline{A_1B}} \cdot \frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1\Gamma}} \cdot \frac{\overline{\Gamma_1B}}{\overline{\Gamma_1A}} = 1.$$

Δηλαδὴ ἑκάστη κορυφὴ τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς λόγου, εὑρίσκεται καὶ εἰς τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ἄλλου λόγου.

30. Ἐφαρμογή. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ πόδες δύο ἐσωτερικῶν διχοτόμων τριγώνου καὶ ὁ πούς τῆς τρίτης ἐξωτερικῆς διχοτόμου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 26

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} = +\frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} = -\frac{\alpha}{\gamma},$$

$$\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

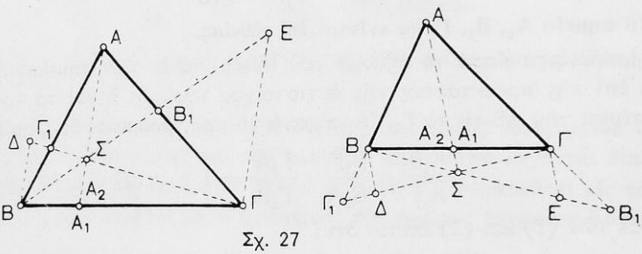
Ἄρα : $$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = \frac{\gamma}{\beta}\left(-\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\gamma\alpha\beta}{\beta\gamma\alpha} = 1.$$

Κατ' ἀκολουθίαν τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

Σημείωσις : Ἐὰν β = γ, τότε ἡ Γ_1B_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὸ A_1 ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον.

31. ΘΕΩΡΗΜΑ τοῦ Ceva*.—Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν ἓν σημεῖον Σ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΣ, ΒΣ, ΓΣ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = -1. \quad (1)$$



Σχ. 27

Ἀπόδειξις : Ἐκ τῶν Β καὶ Γ ἄγομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν AA_1, αἵτινες τέμνουν τὰς $\Gamma\Gamma_1$ καὶ BB_1 ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε.

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} = \frac{\overline{\Sigma B}}{\overline{\Sigma E}}, \quad \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} = \frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{A\Sigma}}, \quad \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = \frac{\overline{A\Sigma}}{\overline{B\Delta}}$$

* Ἰταλὸς Μαθηματικός.

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=\frac{\overline{\Sigma B}}{\overline{\Sigma E}}\cdot\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{A\Sigma}}\cdot\frac{\overline{A\Sigma}}{\overline{B\Delta}}=\frac{\overline{\Sigma B}}{\overline{\Sigma E}}\cdot\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{B\Delta}}=\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{E\Gamma}}\cdot\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{B\Delta}}=\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{E\Gamma}}=-1.$$

32. ΘΕΩΡΗΜΑ (ἀντίστροφον).—Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, τοιαῦτα ὥστε :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=-1, \qquad (1)$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις : Αἱ εὐθεῖαι BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$ τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Σ. Ἔστω ὅτι ἡ ΑΣ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τό σημεῖον A_2. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=-1 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

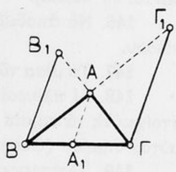
$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}=\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2\Gamma}} \quad ἢ \quad \frac{\overline{A_1B}-\overline{A_1\Gamma}}{\overline{A_1\Gamma}}=\frac{\overline{A_2B}-\overline{A_2\Gamma}}{\overline{A_2\Gamma}} \quad ἢ \quad \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{A_1\Gamma}}=\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{A_2\Gamma}},$$

ἐξ οὗ : $\overline{A_1\Gamma}=\overline{A_2\Gamma}$. Ἄρα $A_2\equiv A_1$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ εὐθεῖαι AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ.

Παρατήρησις : Τὸ θεώρημα τοῦ Ceva εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν αἱ εὐθεῖαι AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις : Ἐκ τοῦ παραπλεύρως σχήματος ἔχομεν :

$$\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}=\frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{BA_1}} \quad καὶ \quad \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=\frac{\overline{\Gamma A_1}}{\overline{\Gamma B}}$$



Σχ. 28

ὅθεν : $$\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=-\frac{\overline{\Gamma A_1}}{\overline{B_1A}}=-\frac{\overline{A_1\Gamma}}{\overline{A_1B}}$$

ἐξ οὗ : $$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=-1. \qquad (3)$$

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι AA_1 καὶ BB_1 εἶναι παράλληλοι, τότε ἐκ τοῦ Γ ἄγομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν AA_1, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΑ εἰς τὸ σημεῖον Γ_2. Θὰ ἔχωμεν :

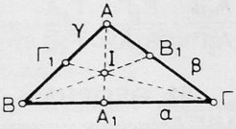
$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma_2A}}{\overline{\Gamma_2B}}=-1,$$

ἡ ὁποία συγκρινομένη πρὸς τὴν (3) δίδει : $\frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}=\frac{\overline{\Gamma_2A}}{\overline{\Gamma_2B}}$ καὶ ἡ ὁποία δηλοῖ ὅτι τὸ $\Gamma_1\equiv\Gamma_2$. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ εἶναι παράλληλοι.

33. Ἐφαρμογή.—Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} = -\frac{\gamma}{\beta}, \qquad \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = -\frac{\beta}{\alpha}$$



Σχ. 29

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1\Gamma}} \cdot \frac{\overline{B_1\Gamma}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}} = -\frac{\gamma\alpha\beta}{\beta\gamma\alpha} = -1.$$

Ἄρα αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου I.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

138. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διάμεσος τραπεζίου διχοτομεῖ ἑκατέραν διαγώνιον αὐτοῦ.

139. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ πόδες τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

140. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

141. Δύο ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τριγώνου καὶ ἡ τρίτη ἐσωτερικὴ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

142. Τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

143. Αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ εἰς τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας. 'Ακολούθως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐν λόγῳ εὐθεῖαν.

144. Εὐθεῖα Χ τέμνει τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως. 'Εὰν A_2, B_2, Γ_2 εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν A_1, B_1, Γ_1 ὡς πρὸς τὸ μέσον τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα A_2, B_2, Γ_2 κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

145. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

146. Νὰ ἀποδείξητε τὸ θεώρημα τοῦ Simson μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου.

147. Τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἑνὸς πλήρους τετραπλεύρου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

148. Αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτονται τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (Gergonne).

149. 'Ο παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὴν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα I_1', I_2', I_3'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι AI_1', BI_2', $\Gamma I_3'$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (Gergonne).

150. Οἱ παρεγγεγραμμένοι κύκλοι εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα I_1', I_2'', I_3'''. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι AI_1', BI_2'', $\Gamma I_3'''$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ν (Nägel).

151. 'Εντὸς τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Ρ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΡ, ΒΡ, ΓΡ. τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1 ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{B_1A}}{\overline{B_1\Gamma}} + \frac{\overline{\Gamma_1A}}{\overline{\Gamma_1B}}.$$

152. Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ τῆς σχέσεως ταύτης, ὅταν τὸ Ρ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἢ τὸ ὀρθόκεντρον Η ἢ τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

153. Εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Β', Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΓ' καὶ ΓΒ' τέμνονται ἐπὶ τῆς διαμέσου $ΑΟ_1$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

154. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον Σ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα :

$$Ρ \equiv ΒΓ \cap Β'Γ', \quad Κ \equiv ΓΑ \cap Γ'Α', \quad Λ \equiv ΑΒ \cap Α'Β'$$

κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἀντιστρόφως. (Θεώρημα τοῦ Desargues).

155. Ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς αὐτοῦ τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΣΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΒΣ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους $ΑΗ_1$.

156. Δοθέντος πολυγώνου, π.χ. ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ καὶ μιᾶς εὐθείας Χ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, ε, ζ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

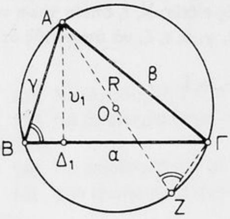
$$\frac{\overline{αΑ}}{\overline{αΒ}} \cdot \frac{\overline{βΒ}}{\overline{βΓ}} \cdot \frac{\overline{γΓ}}{\overline{γΔ}} \cdot \frac{\overline{δΔ}}{\overline{δΕ}} \cdot \frac{\overline{εΕ}}{\overline{εΖ}} \cdot \frac{\overline{ζΖ}}{\overline{ζΑ}} = 1.$$

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

34. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ.



Σχ. 30

Ἀπόδειξις : Ἔστω ΑΒΓ τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο. Ἄγομεν τὸ ὕψος $ΑΔ_1$, τὴν διάμετρον ΑΖ καὶ τὴν χορδὴν ΖΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $ΑΔ_1Β$ καὶ ΑΓΖ ἔχουν τὰς ἐγγεγραμμένας γωνίας Β καὶ Ζ ἴσας.

Ἄρα: $\frac{ΑΓ}{ΑΔ_1} = \frac{ΑΖ}{ΑΒ}$ ἢ $\frac{β}{υ_1} = \frac{2R}{γ}$, ἐξ οὗ : $\quad βγ = 2R \cdot υ_1 \quad (1)$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν : $\quad γα = 2R \cdot υ_2 \quad (2)$

$αβ = 2R \cdot υ_3 \quad (3)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

157. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσοδυναμίαι :

1ον : $\quad Α = 90^0 \Longleftrightarrow βγ = αυ_1,$

2ον : $\quad α > β > γ \Longleftrightarrow υ_1 < υ_2 < υ_3.$

158. Τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Διὰ τοῦ Α ἄγομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΕ καὶ θεωροῦμεν τὴν συμμετρικὴν εὐθεῖαν τῆς ΑΕ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον Αx τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$βγ = ΑΕ \cdot ΑΘ.$$

159. Ἐὰν Ι, Ι', Ι'', Ι''' εἶναι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

1ον : $\quad βγ = ΑΙ \cdot ΑΙ', \quad γα = ΒΙ \cdot ΒΙ'', \quad αβ = ΓΙ \cdot ΓΙ'''.$

2ον : $\quad βγ = ΑΙ'' \cdot ΑΙ''', \quad γα = ΒΙ''' \cdot ΒΙ', \quad αβ = ΓΙ' \cdot ΓΙ''.$

35. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Αἱ διχοτόμοι $ΑΑ_1 = δ_1$ (ἐσωτερική) **καὶ $ΑΑ_2 = d_1$** (ἐξωτερική) **τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ** (σκαληνοῦ) **τέμνουν τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα $Α_1$ καὶ $Α_2$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :**

$$βγ = δ_1^2 + Α_1Β \cdot Α_1Γ$$

καὶ

$$βγ = Α_2Β \cdot Α_2Γ - d_1^2.$$

α) Ἡ διχοτόμος AA_1 τέμνει τὸν περιγεγραμμένον κύκλον εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ ἡ ἐξωτερικὴ AA_2 τὸν τέμνει εἰς τὸ Θ. Ἄγομεν τὰς χορδὰς ΕΓ καὶ ΓΘ.

Τὰ τρίγωνα ABA_1 καὶ ΑΕΓ ἔχουν τὰς γωνίας εἰς τὸ Α ἴσας καὶ τὰς ἐγγεγραμμένας Β καὶ Ε ἴσας. Ἄρα :

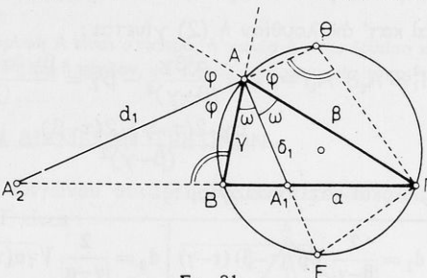
$$\frac{AB}{AE}=\frac{AA_1}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{AE}=\frac{\delta_1}{\beta}$$

ἢ $\beta\gamma = AE \cdot \delta_1 = (\delta_1 + A_1E)\,\delta_1 =$

$= \delta_1^2 + A_1E \cdot \delta_1 = \delta_1^2 + A_1B \cdot A_1\Gamma$

ἤτοι :

$$\boxed{\beta\gamma = \delta_1^2 + A_1B \cdot A_1\Gamma} \qquad (1)$$



Σχ. 31

β) Τὰ τρίγωνα ABA_2 καὶ ΑΘΓ ἔχουν τὰς γωνίας εἰς τὸ Α ἴσας καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Θ ἴσας. Ἄρα :

$$\frac{AB}{A\Theta}=\frac{AA_2}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{A\Theta}=\frac{d_1}{\beta}$$

ἢ $\qquad \beta\gamma = A\Theta \cdot d_1 = (A_2\Theta - d_1)\,d_1 = A_2\Theta d_1 - d_1^2 = A_2B \cdot A_2\Gamma$

ἤτοι : $$\boxed{\beta\gamma = A_2B \cdot A_2\Gamma - d_1^2} \qquad (2)$$

36. Ὑπολογισμὸς τῆς δ_1. Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\frac{A_1B}{\gamma}=\frac{A_1\Gamma}{\beta}=\frac{A_1B+A_1\Gamma}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha}{\beta+\gamma}, \text{ ἐξ οὗ : } \mathbf{A_1B}=\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} \text{ καὶ } \mathbf{A_1\Gamma}=\frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$$

Ἕνεκα τούτων ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$\delta_1^2=\beta\gamma - A_1B \cdot A_1\Gamma = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\beta\gamma\,[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2]}{(\beta+\gamma)^2}=$$

$$=\frac{\beta\gamma\,(\beta+\gamma+\alpha)\,(\beta+\gamma-\alpha)}{(\beta+\gamma)^2}.$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, θὰ ἔχωμεν :

$\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha), \quad \gamma+\alpha-\beta=2(\tau-\beta), \quad \alpha+\beta-\gamma=2(\tau-\gamma)$, ὁπότε :

$$\delta_1^2=\frac{\beta\gamma\cdot 2\tau\cdot 2(\tau-\alpha)}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{4\beta\gamma\,\tau(\tau-\alpha)}{(\beta+\gamma)^2}, \quad \text{ἢ} \quad \delta_1=\frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}.$$

Ἐὰν δ_1, δ_2, δ_3 κληθοῦν τὰ μήκη τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τριγώνου, θὰ ἔχωμεν :

$\delta_1=\dfrac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}$	$\delta_2=\dfrac{2}{\gamma+\alpha}\sqrt{\gamma\alpha\tau(\tau-\beta)}$	$\delta_3=\dfrac{2}{\alpha+\beta}\sqrt{\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}$

37. Ὑπολογισμὸς τῆς d_1. Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\frac{A_2\Gamma}{\beta}=\frac{A_2B}{\gamma}=\frac{|A_2\Gamma-A_2B|}{|\beta-\gamma|}=\frac{\alpha}{|\beta-\gamma|}, \text{ ἐξ οὗ: } A_2\Gamma=\frac{\alpha\beta}{|\beta-\gamma|} \text{ καὶ } A_2B=\frac{\alpha\gamma}{|\beta-\gamma|}$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ (2) γίνεται :

$$d_1^2=A_2B\cdot A_2\Gamma-\beta\gamma=\frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta-\gamma)^2}-\beta\gamma=\frac{\beta\gamma[\alpha^2-(\beta-\gamma)^2]}{(\beta-\gamma)^2}=\frac{\beta\gamma(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}=$$

$$=\frac{\beta\gamma\cdot 2(\tau-\gamma)\cdot 2(\tau-\beta)}{(\beta-\gamma)^2}=\frac{4\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2},$$

ἐξ οὗ καὶ κατ' ἀναλογίαν :

$d_1=\frac{2}{\lvert\beta-\gamma\rvert}\sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$	$d_2=\frac{2}{\lvert\gamma-\alpha\rvert}\sqrt{\gamma\alpha(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}$	$d_3=\frac{2}{\lvert\alpha-\beta\rvert}\sqrt{\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

160. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι : $\alpha = 25$, $\beta = 40$, $\gamma = 45$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν διχοτόμων αὐτοῦ.

161. Ὁμοίως ἂν εἶναι : $\alpha = 12$, $\beta = 16$, $\gamma = 20$.

162. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α.

163. Τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι : $\alpha = 300$, $\beta = 288$ καὶ $\gamma = 84$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δ_2 καὶ d_2 τούτων.

164. Πῶς συνδέονται αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι : $\delta_1 = \dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$;

165. Ἐὰν δ_1 εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος AA_1 τριγώνου ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα : $AA_1^2 = 4A_1B\cdot A_1\Gamma$.

166. Ἂν AA_2 εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$AA_2 = BA_2 \iff \alpha^2 = \beta(\beta-\gamma), \quad \text{ἂν } \beta > \gamma.$$

167. Ἂν AA_1 εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$AA_1 = A_1B \iff \alpha^2 = \beta(\beta+\gamma).$$

168. Συναρτήσει τῶν καθέτων πλευρῶν β, γ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διχοτόμοι δ_1 καὶ d_1 τῆς γωνίας Α.

169. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ λογιστικῶς ὅτι :

$$\alpha=\beta=\gamma \iff \delta_1=\delta_2=\delta_3.$$

170. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἑκατέρωθεν ἡ ἰσοδυναμία :

$$\beta=\gamma \iff d_2=d_3\,;$$

171. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$4\beta^2\gamma^2=(\beta+\gamma)^2\delta_1^2+(\beta-\gamma)^2\cdot d_1^2.$$

172. Ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν δύο σημεῖα Δ, Ζ, τοιαῦτα ὥστε : $A\Delta^2 = AZ^2 = \beta\cdot\gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΖΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

173. Πῶς συνδέονται αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι : $\delta_1 = d_1$;

174. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν α, Α καὶ $AA_1^2 = BA_1\,.\,A_1\Gamma$.

175. Ὁμοίως ἐκ τῶν $υ_1$, $δ_1$, $βγ = k^2$.

176. Ὁμοίως ἐκ τῶν $υ_1$, $Β - Γ = ω$ καὶ $βγ = k^2$.

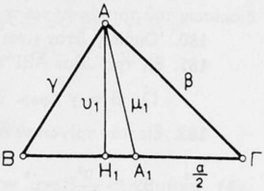
177. Ὁμοίως ἐκ τῶν Α, α καὶ $βγ = k^2$.

178. Μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ κορυφὴ Α εἶναι σταθερά, ἡ γωνία $Α = ω$ δοθεῖσα καὶ $βγ = k^2$. Ἐὰν ἡ κορυφὴ Β γράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ κύκλον, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Γ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

38. Ὑπολογισμὸς τῶν διαμέσων τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Γνωρίζομεν ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι :

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_1^2 + \frac{\alpha^2}{2}$$
$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2\mu_2^2 + \frac{\beta^2}{2} \qquad (1)$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_3^2 + \frac{\gamma^2}{2}$$


Σχ. 32

Δηλαδή : **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς περιεχομένης διαμέσου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.**

Ἐπίσης εἶναι γνωστὸν ὅτι :

$$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot A_1H. \qquad \beta > \gamma \qquad (2)$$

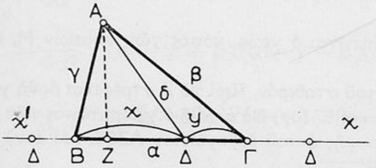
Δηλαδή : **Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς τρίτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου ἐπὶ ταύτην.**

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) λαμβάνομεν :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\beta^2+\gamma^2)-\alpha^2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\gamma^2+\alpha^2)-\beta^2}, \quad \mu_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)-\gamma^2}$$

Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος τῶν διαμέσων : Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Ἄγομεν τὴν $ΑΖ \perp ΒΓ$ καὶ θέτομεν $ΔΒ = x$, $ΔΓ = y$, $ΑΔ = δ$. Ἐκ τοῦ (σχ. 32α) ἔχομεν :

$$\beta^2 = \delta^2 + y^2 + 2y \cdot ΔZ$$
ἢ
$$\beta^2 x = x\delta^2 + xy^2 + 2xy \cdot ΔZ \qquad (1)$$
Ἐπίσης :
$$\gamma^2 = \delta^2 + x^2 - 2x \cdot ΔZ$$
ἢ
$$y\gamma^2 = y\delta^2 + x^2y - 2xy \cdot ΔZ \qquad (2)$$


Σχ. 32α

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\beta^2 x + \gamma^2 y = x\delta^2 + y\delta^2 + xy^2 + x^2y =$$
$$= (x+y)\delta^2 + (x+y)xy = \alpha\delta^2 + \alpha xy$$

ἤτοι :
$$\beta^2 x + \gamma^2 y = \alpha\delta^2 + \alpha xy \qquad (1)$$

Ἐὰν τὸ Δ κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Β ἢ δεξιὰ τοῦ Γ, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως :

$$-\beta^2 x + \gamma^2 y = \alpha\delta^2 - \alpha xy \qquad (2)$$
$$\beta^2 x - \gamma^2 y = \alpha\delta^2 - \alpha xy \qquad (3)$$

Ἐὰν ἡ x'x εἶναι προσανατολισμένη εὐθεῖα, τότε αἱ (1), (2), (3) συγχωνεύονται εἰς τὴν σχέσιν :

$$\Delta A^2 \cdot \overline{B\Gamma} + \Delta B^2 \cdot \overline{\Gamma A} + \Delta\Gamma^2 \cdot \overline{AB} + \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} \cdot \overline{AB} = 0$$

καὶ ὀνομάζεται σχέσις τοῦ **Stewart.**

Βάσει τῆς σχέσεως τοῦ Stewart ὑπολογίσατε τὰς διαμέσους, τὰ ὕψη, τὰς διχοτόμους τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

179. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 8$, $\beta = 10$, $\gamma = 12$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου τούτου.

180. Ὁμοίως, ὅταν εἶναι : $\alpha = 10$, $\beta = 8$, $\gamma = 6$.

181. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν λογιστικῶς αἱ ἰσοδυναμίαι :

1) $\beta = \gamma \iff \mu_2 = \mu_3$ καὶ 2) $\alpha = \beta = \gamma \iff \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

182. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $\mu_1^2 + \beta\gamma > \dfrac{\alpha^2}{4} > \mu_1^2 - \beta\gamma$

2) $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = \dfrac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

3) $\mu_1^4 + \mu_2^4 + \mu_3^4 = \dfrac{9}{16}(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)$

4) $(\beta^2 - \gamma^2)\mu_1^2 + (\gamma^2 - \alpha^2)\mu_2^2 + (\alpha^2 - \beta^2)\mu_3^2 = 0.$

183. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν λογιστικῶς αἱ ἰσοδυναμίαι :

1) $A = 90^0 \iff 2\mu_1 = \alpha$ καὶ 2) $A = 90^0 \iff \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8\mu_1^2$.

184. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \geqslant 4(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + \upsilon_3^2)$

2) $4\Sigma \mu_1^2 \mu_2^2 = 3\Sigma \alpha^2\beta^2$.

185. Δίδεται εὐθ. τμῆμα $AB = \alpha$ σταθερὸν θέσει καὶ μεγέθει καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα :

1) $MA^2 + MB^2 = k^2$ καὶ 2) $|MA^2 - MB^2| = \lambda^2$,

ἔνθα k, λ δεδομένα εὐθύγραμμα τμήματα ἢ ἀριθμοὶ πραγματικοί.

186. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα : $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = \lambda^2$.

187. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης : $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = \lambda^2$.

188. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα : $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = k^2$.

189. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90^0$) καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα : $MB^2 + M\Gamma^2 = 2 \cdot MA^2$.

190. Δίδεται κύκλος καὶ ἓν σημεῖον Ζ ἐντὸς αὐτοῦ σταθερόν. Περὶ τὸ Ζ στρέφεται ὀρθὴ γωνία, ἧς αἱ πλευραὶ τέμνουν τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΑΒ. 2ον) Ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς Δ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΖΒΔ καὶ 3ον) Ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ.

191. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου του, διὰ τὰ ὁποῖα : $MB^2 + M\Gamma^2 = 2MA^2$.

192. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ σημεῖον Α σταθερόν. Ἓν σημεῖον Β διαγράφει τὸν κύκλον (Ο). Εἰς τὸ Β ἄγεται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο), τεμνομένη ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

193. Δίδονται δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O_1, R_1) καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Μ. Ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ, ΜΒ τῶν κύκλων καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα: $MA^2 - MB^2 = \lambda^2$.

194. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ σημεῖον Α σταθερόν. Περὶ τὸ Ο στρέφεται διάμετρος ΒΟΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ΑΒΓ.

195. Τριγώνου ΑΒΓ ἡ πλευρὰ $ΒΓ = \alpha$ παραμένει σταθερά, ἡ δὲ διαφορὰ $ΑΒ - ΑΓ = \delta$ σταθερὰ μεγέθη. Ἡ κάθετος εἰς τὸ Β ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ Μ.

196. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων του.

1) α, Α, $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$
2) α, μ_1, $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$
3) α, υ_1, $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$
4) α, Α, $\beta^2 - \gamma^2 = \mu^2$
5) α, μ_1, $\beta^2 - \gamma^2 = \mu^2$
6) α, υ_1, $\beta^2 - \gamma^2 = \mu^2$
7) α, $\beta^2 + \gamma^2 = \lambda^2$, $\beta^2 - \gamma^2 = \mu^2$
8) α, $Β = \omega$, $\beta^2 - \gamma^2 = \mu^2$.

ΥΨΗ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

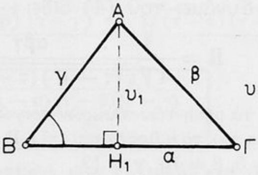
39. Ὑπολογισμὸς τῶν ὑψῶν τριγώνου. Ἔστωσαν α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ, $AH_1 = \upsilon_1$ ἓν τῶν ὑψῶν του καὶ ἔστω ἐπίσης $B < 90^0$ ἢ $B > 90^0$. Θὰ εἶναι:

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot BH_1$$

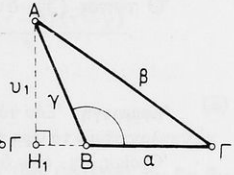
εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, καὶ

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot BH_1$$

εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν.



Σχ. 33



Σχ. 34

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων λαμβάνομεν:

$$\mathbf{BH_1} = \pm \frac{\boldsymbol{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}}{\mathbf{2\alpha}}. \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AH_1B ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\upsilon_1^2 = \gamma^2 - BH_1^2 = \gamma^2 - \frac{(\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha^2\gamma^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)^2}{4\alpha^2} =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2} \cdot (2\alpha\gamma + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2)(2\alpha\gamma - \alpha^2 - \gamma^2 + \beta^2) = \frac{1}{4\alpha^2}[(\alpha + \gamma)^2 - \beta^2][\beta^2 - (\alpha - \gamma)^2] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2} \cdot (\alpha + \gamma + \beta)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \alpha - \gamma)(\beta - \alpha + \gamma) =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2} \cdot 2\tau \cdot 2(\tau - \beta) \cdot 2(\tau - \gamma) \cdot 2(\tau - \alpha) = \frac{4}{\alpha^2}\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma),$$

ἐξ οὗ:

$$\upsilon_1 = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}.$$

Ὁ τύπος οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸν Ἕλληνα Μαθηματικὸν καὶ Φυσικὸν Ἥρωνα (τῆς Ἀλεξανδρινῆς ἐποχῆς).

Διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν α, β, γ εὑρίσκομεν :

$$\boxed{\begin{aligned} \upsilon_1 &= \frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \\ \upsilon_2 &= \frac{2}{\beta}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \\ \upsilon_3 &= \frac{2}{\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \end{aligned}} \qquad (2)$$

Ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔχομεν :

$$E = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_1 = \frac{1}{2}\alpha\cdot\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}, \quad \text{ἐξ οὗ :}$$

$$\boxed{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (4)$$

Ὁ τύπος (4) ὀφείλεται εἰς τὸν Ἥρωνα.

Γινόμενον τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ. Ἔχομεν :

$$\beta\gamma = 2R\cdot\upsilon_1 = 2R\cdot\frac{2E}{\alpha} = \frac{4RE}{\alpha}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{\alpha\beta\gamma = 4E\cdot R} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3), δυνάμει τοῦ (4) δίδει :

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}} \qquad (5)$$

Ἐφαρμογή : Ἐὰν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι : $\alpha = 20$, $\beta = 16$, $\gamma = 12$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη του, τὸ ἐμβαδὸν του καὶ ἡ R.

Ὁμοίως, ἂν $\alpha = 8$, $\beta = 10$, $\gamma = 12$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

197. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν λογιστικῶς αἱ ἰσοδυναμίαι :

1ον : $\beta = \gamma \iff \upsilon_2 = \upsilon_3$ καὶ 2ον : $\alpha = \beta = \gamma \iff \upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3$

198. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1ον : $$(\upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3)\left(\frac{1}{\upsilon_1} + \frac{1}{\upsilon_2} + \frac{1}{\upsilon_3}\right) = (\alpha + \beta + \gamma)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right),$$

2ον : $$4E = \sqrt{2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}.$$

199. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του α, β, γ, δ.

200. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν διαμέσων του μ_1, μ_2, μ_3.

201. Ὁμοίως συναρτήσει τῶν ὑψῶν του.

202. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία :

$$A = B = \Gamma \iff \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 3E\sqrt{3}.$$

203. Ἐὰν Z_0 εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ καὶ R_α, R_β, R_γ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων Z_0ΒΓ, Z_0ΓΑ, Z_0ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\mu_1\cdot R_\alpha}{\alpha} = \frac{\mu_2\cdot R_\beta}{\beta} = \frac{\mu_3\cdot R_\gamma}{\gamma}.$$

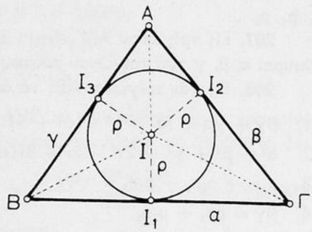
204. Ἐὰν ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, $Γ_1$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα AA_1, BB_1, $ΓΓ_1$ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Τὸ αὐτό, ἂν τὰ A_1, B_1, $Γ_1$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. (Ὑπόδειξις : Κάμετε χρῆσιν τῆς σχέσεως τοῦ Stewart).

40. Ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἐὰν Ι εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἀχθοῦν αἱ ΙΑ, ΙΒ, ΙΓ, θὰ ἔχωμεν :

$$E = (IBΓ) + (IΓA) + (IAB)$$
$$= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho$$
$$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\rho = \frac{1}{2}\cdot 2\tau\cdot\rho = \tau\rho$$



Σχ. 35

Ὥστε : $$\boxed{\mathbf{E = \tau\rho}} \qquad (1)$$

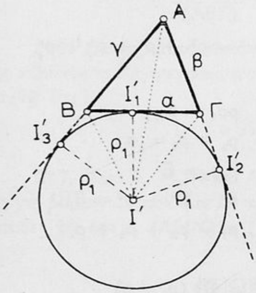
Δηλαδή : **Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.**

Ὑπολογισμὸς τῆς ρ. Ἐκ τοῦ τύπου (1) λαμβάνομεν :

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}} \qquad (2)$$

41. Ἐμβαδὸν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ἀκτίνων ρ_1, ρ_2, ρ_3.



Σχ. 36

Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ Ι'Α, Ι'Β, Ι'Γ, θὰ ἔχωμεν :

$$E = (I'ΓA) + (I'AB) - (I'BΓ)$$
$$= \frac{1}{2}\beta\rho_1 + \frac{1}{2}\gamma\rho_1 - \frac{1}{2}\alpha\rho_1$$
$$= \frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\rho_1 = \frac{1}{2}\cdot 2(\tau-\alpha)\rho_1$$
$$= (\tau-\alpha)\rho_1$$

καὶ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς, θὰ εἶναι :

$$\boxed{\mathbf{E = (\tau-\alpha)\rho_1 = (\tau-\beta)\rho_2 = (\tau-\gamma)\rho_3}} \qquad (1)$$

Ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ τοῦ τύπου Ε = τρ, λαμβάνομεν :

$$E^4 = \tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\rho\rho_1\rho_2\rho_3 = E^2\rho\rho_1\rho_2\rho_3,$$

ἐξ οὗ : $$\boxed{\mathbf{E = \sqrt{\rho\rho_1\rho_2\rho_3}}} \qquad (2)$$

'Υπολογισμός τῶν ρ_1, ρ_2, ρ_3. 'Εκ τῶν τύπων (1) εὐκόλως εὑρίσκομεν τοὺς τύπους :

$\rho_1 = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$	$\rho_2 = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau-\beta}}$	$\rho_3 = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}}$	(3)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

205. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι : $\alpha = 13$, $\beta = 14$, $\gamma = 15$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ρ.

206. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι : $\alpha = 17$, $\beta = 10$, $\gamma = 21$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες ρ_1, ρ_2, ρ_3.

207. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι : $E = 96$, $\rho_1 = 8$, $\rho_2 = 12$, $\rho_3 = 24$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ α, β, γ τοῦ τριγώνου τούτου.

208. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \tau^2 + \rho^2 + 4R\rho$
2. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\tau^2 - 2\rho^2 - 8R\rho$
3. $\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 = \tau^2$
4. $\beta\gamma = \rho\rho_1 + \rho_2\rho_3$
5. $\gamma\alpha = \dots$
6. $\alpha\beta = \dots$
7. $(\rho_1 + \rho_2)(\rho_2 + \rho_3)(\rho_3 + \rho_1) = 4R\tau^2$
8. $(\rho_1 - \rho)(\rho_2 - \rho)(\rho_3 - \rho) = 4R\rho^2$
9. $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 4R + \rho$
10. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = 16R^2 - \rho^2$
11. $\alpha(\rho\rho_1 + \rho_2\rho_3) = \beta(\rho\rho_2 + \rho_3\rho_1) = \gamma(\rho\rho_3 + \rho_1\rho_2)$
12. $\dfrac{\alpha}{\rho_1(\rho_2+\rho_3)} = \dfrac{\beta}{\rho_2(\rho_3+\rho_1)} = \dfrac{\gamma}{\rho_3(\rho_1+\rho_2)}$
13. $\dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_2} + \dfrac{1}{\rho_3} = \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{\upsilon_1} + \dfrac{1}{\upsilon_2} + \dfrac{1}{\upsilon_3}$
14. $\dfrac{1}{\rho_1} = \dfrac{1}{\upsilon_2} + \dfrac{1}{\upsilon_3} - \dfrac{1}{\upsilon_1}$, $\dfrac{1}{\rho_2} = \dots$, $\dfrac{1}{\rho_3} = \dots$
15. $\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{1}{\rho_1^2} + \dfrac{1}{\rho_2^2} + \dfrac{1}{\rho_3^2} = 4\left(\dfrac{1}{\upsilon_1^2} + \dfrac{1}{\upsilon_2^2} + \dfrac{1}{\upsilon_3^2}\right)$
16. $\upsilon_1 = \dfrac{2\rho_2\rho_3}{\rho_2 + \rho_3}$, $\upsilon_2 = \dots$, $\upsilon_3 = \dots$
17. $\upsilon_1 = \dfrac{2\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$, $\upsilon_2 = \dots$, $\upsilon_3 = \dots$
18. $\dfrac{\upsilon_2 + \upsilon_3}{\rho_1} + \dfrac{\upsilon_3 + \upsilon_1}{\rho_2} + \dfrac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{\rho_3} = 6$
19. $\dfrac{\beta - \gamma}{\rho_1} + \dfrac{\gamma - \alpha}{\rho_2} + \dfrac{\alpha - \beta}{\rho_3} = 0$
20. $\left(\dfrac{\alpha}{\rho_1} + \dfrac{\beta}{\rho_2} + \dfrac{\gamma}{\rho_3}\right)\left(\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}\right) = 4.$

209. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\alpha + \beta + \gamma = \rho + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$,
2. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2$

210. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσοδυναμίαι :

$$A < 90^\circ \iff \begin{cases} \rho\rho_1 < \rho_2\rho_3 \\ \alpha < \rho_2 + \rho_3 \end{cases}$$

$$A > 90^\circ \iff \begin{cases} \rho\rho_1 > \rho_2\rho_3 \\ \alpha > \rho_2 + \rho_3 \end{cases}$$

$$A = 90^\circ \iff \begin{cases} \rho\rho_1 = \rho_2\rho_3 \\ \rho_2 + \rho_3 = \alpha \\ \rho_2\rho_3 = E \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2 \\ \rho_1 = \rho_2 + \rho_3 + \rho \end{cases}$$

211. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 + \gamma\rho_3 = 2\tau(2R - \rho)$
2. $\alpha^2\rho_1 + \beta^2\rho_2 + \gamma^2\rho_3 = 4\tau^2(R - \rho)$
3. $\alpha^2 + (\rho_1 - \rho)^2 = 4R(\rho_1 - \rho)$
4. $\alpha \geqslant 2\sqrt{\rho\rho_1}$, $\beta \geqslant 2\sqrt{\rho\rho_2}$, $\gamma \geqslant 2\sqrt{\rho\rho_3}$
5. $E = \dfrac{\alpha\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho} = \dfrac{(\beta+\gamma)\rho\rho_1}{\rho_1 + \rho} = \dfrac{\alpha\rho_2\rho_3}{\rho_3 + \rho_2} = \dfrac{\rho\rho_1(\rho_2 - \rho_3)}{\beta - \gamma}$
6. $E = \dfrac{\rho\rho_1(\rho_2 + \rho_3)}{\alpha} = \rho\rho_2\sqrt{\dfrac{\rho_1 + \rho_3}{\rho_2 - \rho}} = \rho\rho_1\sqrt{\dfrac{4R - \rho_1 + \rho}{\rho_1 - \rho}}$

212. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσοδυναμίαι :

1. $\beta = \gamma \Longleftrightarrow \alpha^2 = 4\rho\rho_1$, 2. $\alpha = \beta = \gamma \Longleftrightarrow \alpha^2 = 4\rho\rho_1$

213. Ἐὰν Ι, Ι', Ι'', Ι''' εἶναι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων εἰς τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $AI^2 = \dfrac{\tau-\alpha}{\tau}\beta\gamma$,
2. $AI'^2 = \dfrac{\tau}{\tau-\alpha}\beta\gamma$,
3. $II'^2 = \dfrac{\alpha^2\beta\gamma}{\tau(\tau-\alpha)}$,
4. $AI^2 = \beta\gamma - 4R\rho$,
5. $\alpha \cdot AI^2 + \beta \cdot BI^2 + \gamma \cdot \Gamma I^2 = \alpha\beta\gamma$,
6. $IA \cdot IB \cdot I\Gamma = 4R\rho^2$,
7. $I'A \cdot I'B \cdot I'\Gamma = 4R\rho^2_1$,
8. $II' \cdot II'' \cdot II''' = 16R^2\rho$,
9. $II'^2 = 4R(\rho_1 - \rho)$,
10. $I''I'''^2 = 4R(\rho_2 + \rho_3)$.

214. Ἐὰν Η, Ο, Κ, Μ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου ΑΒΓ, τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρον βάρους καὶ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $HA^2 = \dfrac{\alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{4E}$, ἂν $A < 90^0$ καὶ $HA = \dfrac{\alpha(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}{4E}$, ἂν $A > 90^0$
2. $HA + \rho_1 = HB + \rho_2 = H\Gamma + \rho_3$, ἂν ΑΒΓ ὀξυγώνιον
3. $HA^2 + HB^2 + H\Gamma^2 = 12R^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$,
4. $OH^2 = 9R^2 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$,
5. $OK^2 = R^2 - \dfrac{1}{9}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$,
6. $HK^2 = 4R^2 - 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$,
7. $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = 3MK^2 + \dfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$,
8. $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = 3MK^2 + KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2$,
9. $KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2 = \dfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

215. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{(\Delta EZ)}{(AB\Gamma)} = \frac{(AZ)\cdot(B\Delta)\cdot(\Gamma E) + (AE)\cdot(\Gamma\Delta)(BZ)}{\alpha\beta\gamma}.$$

216. Ἐὰν σ καὶ σ_α εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1. $\sigma = \dfrac{\rho}{2R}\cdot E$ καὶ 2. $\sigma_\alpha = \dfrac{\rho_1}{2R}\cdot E$.

217. Ἐὰν Λ, Μ, Ν καὶ Λ_1, M_2, N_3 εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τρίγωνον ΑΒΓ μετὰ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $(\Lambda MN) = (\Lambda_1 M_2 N_3)$.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

42. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.– Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ=α σταθερὸν θέσει καὶ μεγέθει, καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ σχέσις :

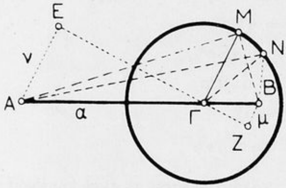
$$\mu \cdot MA^2 + \nu \cdot MB^2 = k^2 \qquad (1)$$

ἔνθα μ, ν, δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ k δοθὲν εὐθ. τμῆμα, μ, ν ∈ N

Ἀνάλυσις : Ἔστω ΑΒ $= \alpha$ τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ Μ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοιοῦτον ὥστε :

$$\mu \cdot MA^2 + \nu \cdot MB^2 = k^2. \qquad (2)$$

Ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΒ ὁρίζομεν σημεῖον Γ, εἰς τρόπον ὥστε :



Σχ. 37

$$\frac{\Gamma A}{\nu} = \frac{\Gamma B}{\mu} = \frac{\Gamma A + \Gamma B}{\mu + \nu} = \frac{\alpha}{\mu + \nu},$$

ἐξ ὧν : $\Gamma A = \dfrac{\alpha\nu}{\mu+\nu}$ καὶ $\Gamma B = \dfrac{\alpha\mu}{\mu+\nu}$

Ἄγομεν τὴν ΓΜ, καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Stewart (§ 38), θὰ ἔχωμεν :

$$MA^2 \cdot \Gamma B + MB^2 \cdot \Gamma A = \alpha \cdot \Gamma M^2 + \alpha \cdot \Gamma A \cdot \Gamma B$$

ἢ $$MA^2 \cdot \frac{\alpha\mu}{\mu+\nu} + MB^2 \cdot \frac{\alpha\nu}{\mu+\nu} = \alpha \cdot \Gamma M^2 + \alpha \cdot \frac{\alpha\nu}{\mu+\nu} \cdot \frac{\alpha\mu}{\mu+\nu}$$

ἐξ οὗ : $$\mathbf{\Gamma M = \frac{1}{\mu+\nu}\sqrt{k^2(\mu+\nu) - \alpha^2\mu\nu}.} \qquad (3)$$

Αὕτη δηλοῖ ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ κύκλου κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος ΓΜ. (Πῶς θὰ κατασκευάσωμεν τὸ τμῆμα ΓΜ;).

Ἐὰν $k^2(\mu+\nu) - \alpha^2\mu\nu \geqslant 0$ ἢ $\dfrac{k^2}{\alpha^2} \geqslant \dfrac{\mu\nu}{\mu+\nu}$, ὑπάρχει ὁ κύκλος (Γ,ΓΜ).

Ἀντιστρόφως : Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Γ, ΓΜ). Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Stewart θὰ εἶναι :

$$\mu \cdot NA^2 + \nu \cdot NB^2 = (\mu+\nu) \cdot N\Gamma^2 + (\mu+\nu) \cdot \Gamma A \cdot \Gamma B =$$

$$= (\mu+\nu)\,\Gamma M^2 + \frac{\alpha^2\mu\nu}{(\mu+\nu)} = (\mu+\nu) \cdot \frac{k^2(\mu+\nu) - \alpha^2\mu\nu}{(\mu+\nu)^2} + \frac{\alpha^2\mu\nu}{\mu+\nu} = k^2.$$

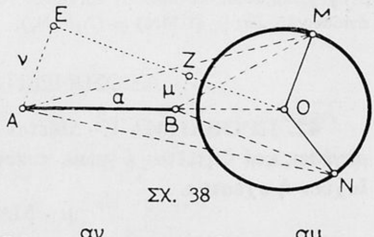
Ὥστε : **Ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ὁ κύκλος (Γ, ΓΜ).**

Σημ.: Διὰ $\mu = \nu$, ἀναγόμεθα εἰς γνωστὸν τόπον (ἄσκ. 185 — 1).

43. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ.— Δίδεται εὐθ. τμῆμα ΑΒ=α σταθερὸν θέσει καὶ μεγέθει, καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$\mu \cdot MA^2 - \nu \cdot MB^2 = k^2, \qquad (1)$$

ἔνθα μ, ν δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ k δεδομένον εὐθ. τμῆμα , μ, ν ∈ N.



ΣΧ. 38

Ἀνάλυσις : Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος ΑΒ $= \alpha$, ὁρίζομεν σημεῖον Ο, ὥστε :

$$\frac{OA}{\nu} = \frac{OB}{\mu} = \frac{OA - OB}{\nu - \mu} = \frac{\alpha}{\nu - \mu}, \quad \text{ἐξ οὗ : } OA = \frac{\alpha\nu}{\nu-\mu} \quad \text{καὶ} \quad OB = \frac{\alpha\mu}{\nu-\mu}.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΜΟΑ, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Stewart, θὰ ἔχωμεν:

$$OM^2 \cdot \alpha + MA^2 \cdot OB = OA \cdot MB^2 + OA \cdot \alpha \cdot OB$$

ἢ $$OM^2 \cdot \alpha + MA^2 \cdot \frac{\alpha\mu}{\nu-\mu} = \frac{\alpha\nu}{\nu-\mu} \cdot MB^2 + \frac{\alpha\nu}{\nu-\mu} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\mu}{\nu-\mu}$$

ἢ $$OM^2 = \frac{\mu \cdot MA^2 - \nu \cdot MB^2}{\mu-\nu} + \frac{\alpha^2\mu\nu}{(\mu-\nu)^2} = \frac{k^2}{\mu-\nu} + \frac{\alpha^2\mu\nu}{(\mu-\nu)^2}$$

ἐξ οὗ: $$\mathbf{OM} = \frac{1}{|\mu-\nu|}\sqrt{(\mu-\nu)k^2+\alpha^2\mu\nu}, \qquad (2)$$

ἡ ὁποία δηλοῖ ὅτι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο, ΟΜ).

Ἐὰν $(\mu-\nu)k^2+\alpha^2\mu\nu \geqslant 0$ ἢ $\frac{\alpha^2}{k^2} \geqslant \frac{\nu-\mu}{\mu\nu}$, ὁ τόπος ὑπάρχει.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο, ΟΜ). Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Stewart θὰ ἔχωμεν:

$$ON^2 \cdot \alpha + NA^2 \cdot OB = OA \cdot NB^2 + OA \cdot \alpha \cdot OB$$

ἢ $$OM^2 \cdot \alpha + NA^2 \cdot \frac{\alpha\mu}{\nu-\mu} = \frac{\alpha\nu}{\nu-\mu} \cdot NB^2 + \frac{\alpha\nu}{\nu-\mu} \cdot \alpha \cdot \frac{\alpha\mu}{\nu-\mu}$$

ἐξ οὗ: $$\mu \cdot NA^2 - \nu \cdot NB^2 = k^2.$$

Ὥστε: **Ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ὁ κύκλος (Ο, ΟΜ).**

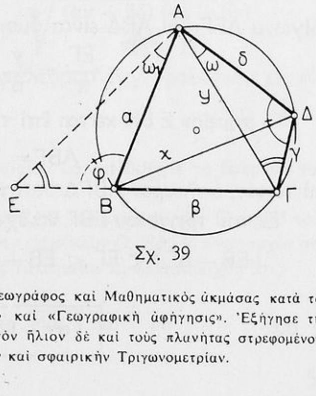
ΑΣΚΗΣΙΣ

218. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΟΒ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, εἰς τρόπον ὥστε, ἐὰν αἱ ΜΑ καὶ ΜΒ τέμνουν τὸν κύκλον (Ο) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, νὰ ἔχωμεν πάντοτε:

$$\frac{MA}{M\Gamma} \pm \frac{MB}{M\Delta} = k \qquad (k \in R, \text{ διάφορος τοῦ μηδενός})$$

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

44. Α΄ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ (1).—**Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.**



Σχ. 39

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$, $B\Delta = x$, $A\Gamma = y$ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν καὶ τῶν διαγωνίων τοῦ κυρτοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ Α κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\omega_1 = \omega$ ἐκτὸς

(1) Πτολεμαῖος (Κλαύδιος). Διάσημος Ἕλλην ἀστρονόμος, γεωγράφος καὶ Μαθηματικὸς ἀκμάσας κατὰ τὸν β΄ μ.Χ. αἰῶνα. Συνέγραψε μεταξὺ ἄλλων: «Μαθηματικὴ Σύνταξις» καὶ «Γεωγραφικὴ ἀφήγησις». Ἐξήγησε τὴν κίνησιν τῶν πλανητῶν δεχθεὶς τὴν Γῆν ἀκίνητον καὶ σφαιρικήν, τὸν ἥλιον δὲ καὶ τοὺς πλανήτας στρεφομένους περὶ αὐτὴν κατὰ ἐκκέντρους κύκλους. Συνέγραψεν ἐπίσης ἐπίπεδον καὶ σφαιρικὴν Τριγωνομετρίαν.

τοῦ τετραπλεύρου κειμένην. Ἡ ἑτέρα πλευρὰ αὐτῆς τέμνει τὴν ΓΒ εἰς τὸ Ε, διότι ἄλλως θὰ ἦτο $\omega_1 = \sphericalangle ΑΒΓ = \omega$, ὅπερ ἄτοπον. Θὰ εἶναι $\varphi = \sphericalangle ΑΔΓ$. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ θὰ εἶναι ὅμοια, καί :

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{ΕΒ}{\gamma}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boldsymbol{\alpha\gamma = \delta \cdot ΕΒ} \qquad (1)$$

Τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς ἐγγεγραμμένας γωνίας ΑΓΕ καὶ ΑΔΒ ἴσας καὶ τὰς γωνίας ΕΑΓ, ΒΑΔ ἴσας, διότι :

$$\sphericalangle ΕΑΓ = \omega_1 + ΒΑΓ = \omega + ΒΑΓ = ΒΑΔ.$$

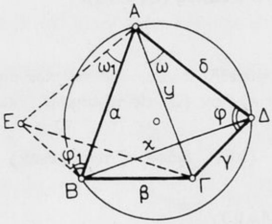
Ἄρα :
$$\frac{ΕΓ}{x} = \frac{y}{\delta}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{xy = \boldsymbol{\delta} \cdot ΕΓ.} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (1) λαμβάνομεν :

$$xy - \alpha\gamma = \delta \cdot ΕΓ - \delta \cdot ΕΒ = \delta \cdot (ΕΓ - ΕΒ) = \delta \cdot \beta$$

Ὅθεν :
$$\boxed{\mathbf{xy = \boldsymbol{\alpha\gamma + \beta\delta}}} \qquad (3)$$

45. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον δὲν εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοὺ καὶ μεγαλύτερον τῆς διαφορᾶς τῶν γινομένων τούτων.



Σχ. 40

Ἀπόδειξις : Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν κυρτὸν τετράπλευρον μὴ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΕ, ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου κείμενον, οὕτως ὥστε: $\omega_1 = \omega$ καὶ $\varphi_1 = \varphi$. Ἄρα $\sphericalangle ΑΕΒ = \sphericalangle ΑΓΔ$.

Ἄγομεν τὴν ΕΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{ΕΒ}{\gamma} = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{ΕΑ}{y}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{ΕΒ} = \frac{\boldsymbol{\alpha\gamma}}{\boldsymbol{\delta}} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sphericalangle ΕΑΓ = \omega_1 + ΒΑΓ = \omega + ΒΑΓ = \sphericalangle ΒΑΔ$ καὶ $\dfrac{ΕΑ}{\alpha} = \dfrac{y}{\delta}$ τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΑΒΔ εἶναι ὅμοια. Ἄρα

$$\frac{ΕΓ}{x} = \frac{y}{\delta}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{ΕΓ} = \frac{\mathbf{xy}}{\boldsymbol{\delta}}. \qquad (2)$$

Τὸ σημεῖον Ε δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΒ. Διότι, ἐὰν ἔκειτο ἐπὶ τῆς ΓΒ, θὰ εἴχομεν :

$$\varphi_1 + Α\hat{Β}Γ = 180^0 \quad \text{ἢ} \quad \varphi + Α\hat{Β}Γ = 180^0$$

καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ θὰ ἦτο ἐγγράψιμον, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΕΒΓ θὰ ἔχωμεν :

$$|ΕΒ - ΒΓ| < ΕΓ < ΕΒ + ΒΓ \quad \text{ἢ} \quad \left|\frac{\alpha\gamma}{\delta} - \beta\right| < \frac{xy}{\delta} < \frac{\alpha\gamma}{\delta} + \beta,$$

ἐξ οὗ :
$$\boxed{|\boldsymbol{\alpha\gamma - \beta\delta}| < \mathbf{xy} < \boldsymbol{\alpha\gamma + \beta\delta}} \qquad (3)$$

46. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ.—Ἐὰν κυρτοῦ τετραπλεύρου τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του, τοῦτο εἶναι ἐγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἐὰν τὸ τετράπλευρον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον, θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$|\alpha\gamma - \beta\delta| < xy < \alpha\gamma + \beta\delta,$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $xy = \alpha\gamma + \beta\delta$.

47. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ ΤΟΥ 45.— Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου περιέχεται μεταξὺ τῆς διαφορᾶς τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος των, τοῦτο δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις. Διότι, ἐὰν ἦτο ἐγγράψιμον θὰ εἴχομεν $xy = \alpha\gamma + \beta\delta$, ὅπερ ἄτοπον, διότι : $|\alpha\gamma - \beta\delta| < xy < \alpha\gamma + \beta\delta$ ἐξ ὑποθέσεως.

48. Β΄ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ.—Ἐὰν κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ὁ λόγος τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀθροισμάτων τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα των.

Ἀπόδειξις : Ἐκ τοῦ σχήματος 41 ἔχομεν :

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{AB\Gamma\Delta})$$

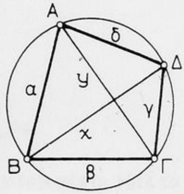
ἢ $$(\mathrm{AB\Delta}) + (\mathrm{B\Gamma\Delta}) = (\mathrm{A\Gamma\Delta}) + (\mathrm{AB\Gamma})$$

ἢ $$4R(\mathrm{AB\Delta}) + 4R(\mathrm{B\Gamma\Delta}) = 4R(\mathrm{A\Gamma\Delta}) + 4R(\mathrm{AB\Gamma})$$

ἢ $$\alpha\delta x + \beta\gamma x = \alpha\beta y + \gamma\delta y$$

ἢ $$(\alpha\delta + \beta\gamma)\, x = (\alpha\beta + \gamma\delta)\, y,$$

ἐξ οὗ : $$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}} \qquad (4)$$



Σχ. 41

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ (4), τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον.

Σημείωσις : Ἐκ τῶν σχέσεων τοῦ Πτολεμαίου, διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ μέλη ἢ διαιρέσεως κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν τὰς διαγωνίους.

$$x = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma}} \quad \text{καὶ} \quad y = \sqrt{\frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}},$$

συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ, δ τοῦ τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

219. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ θεωρήματος τοῦ Πτολεμαίου νὰ ἀποδείξητε τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου.

220. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ἰσοσκελοῦς τραπεζίου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.

221. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ μικροτέρου τόξου ΒΓ, ἡ δὲ ΜΑ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1\text{ον}: \ \mathrm{MA} = \mathrm{MB} + \mathrm{M\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad 2\text{ον}: \ \frac{1}{\mathrm{M\Delta}} = \frac{1}{\mathrm{MB}} + \frac{1}{\mathrm{M\Gamma}}.$$

222. Ἐπὶ δοθέντος κύκλου (O, R) δίδονται τὰ σημεῖα A, B, Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς ΒΓ συναρτήσει τῶν χορδῶν $AB = \alpha$, $A\Gamma = \beta$ καὶ τῆς ἀκτῖνος R (δύο περιπτώσεις) **(Πρόβλημα τῶν τριῶν χορδῶν).**

223. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ συναρτήσει τῶν πλευρῶν του α, β, γ, δ.

224. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.

225. Κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι σύγχρόνως ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.

226. Τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ A, ἔχει καθέτους πλευρὰς β καὶ γ. Ἐπὶ τῆς ΒΓ κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον κορυφῆς O. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΟΑ συναρτήσει τῶν β καὶ γ.

227. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου του, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν αἱ ἰσότητες :

1) $MA = MB + M\Gamma$, 2) $MB = MA + M\Gamma$, 3) $M\Gamma = MA + MB$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

49. Ὁρισμός.— Κανονικὸν πολύγωνον λέγεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον.

Οὕτω τὰ τετράγωνα καὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

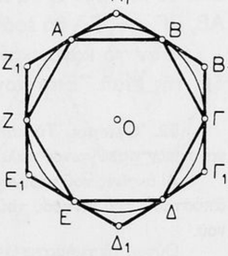
Μία τεθλασμένη γραμμὴ θὰ καλῆται κανονική, ἂν πᾶσαι αἱ πλευραί της εἶναι ἴσαι καὶ πᾶσαι αἱ γωνίαι της ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἐργαζόμεθα εἶναι προσανατολισμένον, δύο διαδοχικαὶ γωνίαι ταύτης κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν κοινὴν πλευρὰν τῶν γωνιῶν τούτων. Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, τότε ἡ τιμὴ ἑκάστης γωνίας αὐτοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{A = 2 - \frac{4}{\nu} \quad \text{ὀρθαί}}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

50. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Ἐὰν κύκλος εἶναι διῃρημένος εἰς ν ἴσα μέρη, τότε τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὰ τμήματα τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως εἶναι πλευραὶ ἑνὸς ἄλλου κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον.



Σχ. 42

1ον : Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος (Ο) εἶναι διῃρημένος εἰς ἓξ ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων. Δηλαδὴ θὰ εἶναι καί :

$$ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{Γ} = \widehat{Δ} = \widehat{E} = \widehat{Z}$, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, βαίνουσαι εἰς $6 - 2 = 4$ ἴσα τόξα, ἕπεται ὅτι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ ΕΖ εἶναι κανονικόν.

2ον : Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Α, Β, . . . , Ζ τοῦ κύκλου (Ο) ὁρίζουν τὰ σημεῖα A_1, B_1, $Γ_1$, $Δ_1$, E_1, Z_1, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ἄλλου πολυγώνου $A_1B_1Γ_1Δ_1E_1Z_1$. Τὰ τρίγωνα A_1AB, $B_1BΓ_1$, . . . , Z_1AZ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς βάσεις των ΑΒ, ΒΓ, . . . ;

ΖΑ ἴσας καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὰς γωνίας ἴσας, καθόσον τὸ μέτρον ἑκάστης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου ἑκάστου τῶν ἴσων τόξων ΑΒ, ΒΓ, . . ., ΖΑ. Κατ' ἀκολουθίαν :

$$A_1B_1 = B_1\Gamma_1 = \Gamma_1\Delta_1 = \Delta_1E_1 = E_1Z_1 = Z_1A_1,$$

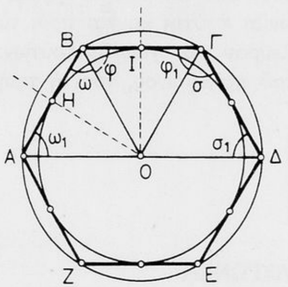
ὡς ἀθροίσματα ἴσων τμημάτων. Ἄρα τὸ πολύγωνον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$ εἶναι κανονικόν. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα, ὅταν ὁ κύκλος διαιρεθῇ εἰς ν ἴσα μέρη.

Σημείωσις : Τὰ ἀνωτέρω πολύγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$ καλοῦνται **ἀντίστοιχα** καὶ τὸ μὲν πρῶτον καλεῖται **ἐγγεγραμμένον** εἰς τὸν κύκλον (Ο), τὸ δὲ δεύτερον **περιγεγραμμένον** εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

51. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

1ον : Ἔστω ΑΒΓΔΕΖ τὸ κανονικὸν πολύγωνον καὶ Ο ἡ τομὴ τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ αὐτοῦ. Τότε θὰ εἶναι

$$OA = OB = O\Gamma.$$



Σχ. 43

Ἄρα ὁ κύκλος (Ο, ΟΑ) θὰ διέρχηται καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Ἄρα $\omega_1 = \omega = \varphi = \varphi_1$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ἔπεται ὅτι $\omega = \sigma$. Τὰ τρίγωνα ΟΓΔ, ΟΑΒ ἔχουν τὰς πλευρὰς ΟΓ = ΟΒ, ΓΔ = ΒΑ καὶ $\omega = \sigma$. Ἄρα εἶναι ἴσα, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ ΟΔ = ΟΑ. Συνεπῶς ὁ κύκλος (Ο, ΟΑ) διέρχεται καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ κύκλος οὗτος διέρχεται καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς Ε καὶ Ζ. Εἶναι ἄρα τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον : Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ ΑΒ, ΒΓ, . . ., ΖΑ εἶναι ἴσαι, αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τὸ κέντρον Ο θὰ εἶναι ἴσαι. Δηλαδή : ΟΗ = ΟΙ = . . . Ἑπομένως αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ, . . ., ΖΑ θὰ ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου (Ο, ΟΗ).

Ἐὰν τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ ν πλευράς, ἡ ἀπόδειξις γίνεται εὐκόλως διὰ τῆς Μαθ. Ἐπαγωγῆς.

52. Ὁρισμοί. Τὸ κοινὸν κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ κανονικὸν πολύγωνον καλεῖται **κέντρον** τοῦ πολυγώνου τούτου.

Αἱ ἀκτῖνες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καλοῦνται **ἀκτῖνες** τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (Ο) ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΑΒ καλεῖται **ἀπόστημα** τοῦ πολυγώνου.

Οὕτω, τὰ τμήματα ΟΑ, ΟΒ, . . ., ΟΖ εἶναι αἱ ἀκτῖνες καὶ τὸ τμῆμα ΟΗ εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ (κανονικοῦ).

Ἡ γωνία ΑΟΒ καλεῖται **κεντρικὴ** γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖ.

Ἂν τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ ν πλευράς, τὸ μέτρον τῆς κεντρικῆς γωνίας **u** αὐτοῦ εἶναι :

$$\mathbf{u}_\nu = \frac{4}{\nu} \text{ ὀρθῆς γωνίας.}$$

Οὕτως, ἡ γωνία A_8 τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι :

$$A_8 = 2 - \frac{4}{\nu} = 2 - \frac{4}{8} = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2} \text{ ὀρθῆς} = 135^\circ.$$

καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία u_8 αὐτοῦ εἶναι $u_8 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς $= 45^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

228. Νὰ καταρτίσητε πίνακα ἐμφαίνοντα τὸ μέτρον ἑκάστης γωνίας καὶ τὸ μέτρον τῆς κεντρικῆς γωνίας ἑκάστου τῶν ἀκολούθων κανονικῶν πολυγώνων : ἰσοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δεκαγώνου, δωδεκαγώνου καὶ δεκαπενταγώνου.

229. Ποῖον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι $\frac{12}{7}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας ;

230. Ποῖον εἶναι τὸ κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι 165° ;

231. Ἐὰν κανονικὸν πολύγωνον ἔχῃ πλείονας τῶν τεσσάρων πλευρῶν, ἑκάστη γωνία αὐτοῦ εἶναι ἀμβλεῖα.

232. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκτῖνες κανονικοῦ πολυγώνου διχοτομοῦν τὰς γωνίας αὐτοῦ ἀντιστοίχως.

233. Τὸ πάτωμα ἑνὸς δωματίου ἐστρώθη διὰ πλακῶν ἐχουσῶν σχήματα κανονικῶν πολυγώνων, ἀριθμοῦ πλευρῶν ἀντιστοίχως λ, μ, ν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}.$$

53. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ.— Ἐὰν δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια (μὲ τυχοῦσαν ἀντιστοιχίαν κορυφῶν). **Ὁ δὲ λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των καὶ πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων αὐτῶν.**

1ον : Ἔστω ὅτι τὰ κανονικὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕΖ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, π.χ. ἓξ πλευράς. Θὰ εἶναι :

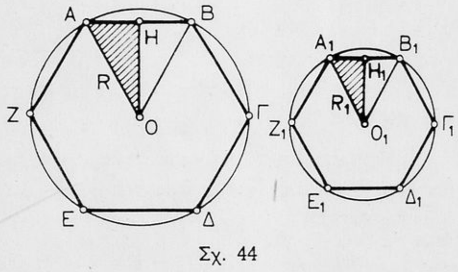
$$A = B = \ldots = Z = 2 - \frac{4}{6} = \frac{8}{6} \text{ ὀρθ.}$$

καὶ

$$A_1 = B_1 = \ldots = Z_1 = 2 - \frac{4}{6} = \frac{8}{6} \text{ ὀρθ.}$$

Ἄρα

$$\widehat{A} = \widehat{A_1},\ \ \widehat{B} = \widehat{B_1}, \ldots,\ \ \widehat{Z} = \widehat{Z_1}.$$



Σχ. 44

Ἐπειδὴ δὲ $AB = B\Gamma = \ldots = ZA$ καὶ $A_1B_1 = B_1\Gamma_1 = \ldots = Z_1A_1$, ἕπεται :

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1} = \ldots = \frac{ZA}{Z_1A_1}.$$

Ἄρα τὰ κανονικὰ ταῦτα πολύγωνα εἶναι ὅμοια.

Ἂν ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, καὶ O_1A_1, O_1B_1 καθὼς καὶ τὰ ἀποστήματα

ΟΗ, O_1H_1, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΒ, $O_1A_1B_1$ ἀφ' ἑνός, καὶ ΟΗΑ, $O_1H_1A_1$ ἀφ' ἑτέρου, ἔχομεν :

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OH}{O_1H_1}.$$

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις καὶ ἂν τὰ πολύγωνα ἔχουν ν πλευράς.

54. ΠΟΡΙΣΜΑ.— Ἐὰν κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἀχθοῦν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου, σχηματίζεται ἕτερον κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον καὶ ὅμοιον πρὸς τὸ ἐγγεγραμμένον.

Ἀρκεῖ νὰ ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου, αἱ ὁποῖαι θὰ διέλθουν ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς τοῦ περιγεγραμμένου κλπ.

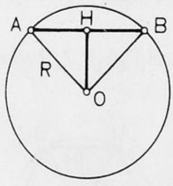
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

234. Ὁ λόγος τῶν ἀποστημάτων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των καὶ ποῖος ὁ τῶν ἐμβαδῶν των ;

235. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἐσωτερικοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι σταθερόν.

55. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.— Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πολυγώνου συναρτήσει τῆς πλευρᾶς του καὶ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Λύσις : Ἔστω $AB=\lambda_\nu$ ἡ πλευρὰ καὶ $OH=\alpha_\nu$ τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο) ἀκτῖνος R, ἔχοντος ν ἀριθμὸν πλευρῶν.



Σχ. 45

1ον : Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΗΑ ἔχομεν :

$$\alpha_\nu^2=R^2-AH^2=R^2-\frac{\lambda_\nu^2}{4}=\frac{4R^2-\lambda_\nu^2}{4},$$

ἐξ οὗ :

$$\boxed{\alpha_\nu=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}} \qquad (1)$$

2ον : Ἐπειδὴ τὸ κανονικὸν πολύγωνον ἔχει ν ἀριθμὸν πλευρῶν, θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ν ἴσα τρίγωνα πρὸς τὸ ΟΑΒ. Ἐὰν E_ν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καν. πολυγώνου, τότε :

$$E_\nu=\nu\cdot(OAB)=\nu\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot\alpha_\nu=$$

$$=\nu\cdot\frac{1}{2}\cdot\lambda_\nu\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}=\frac{1}{4}\,\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}.$$

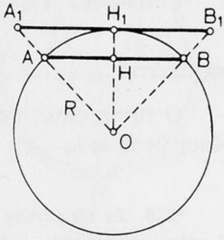
Ὥστε :

$$\boxed{E_\nu=\frac{1}{4}\,\nu\cdot\lambda_\nu\cdot\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}} \qquad (2)$$

Σημείωσις : Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θὰ παριστῶμεν διὰ τοῦ R τὴν ἀκτῖνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, διὰ τοῦ λ_ν τὴν πλευρὰν καὶ διὰ τοῦ α_ν τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

56. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ.— Ἐκ τῆς πλευρᾶς λ_ν κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Λύσις : 1ον : Ἐὰν $AB = \lambda_\nu$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ $A_1B_1 = \lambda'_\nu$ ἡ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου, ἐπειδὴ (§ 53) τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 46

$$\frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{OH_1}{OH} = \frac{R}{\alpha_\nu}$$

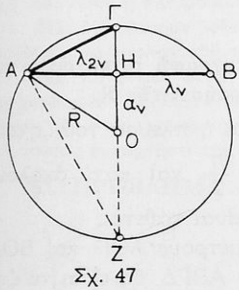
ἢ $$\lambda'_\nu = \frac{R\cdot\lambda_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{R\cdot\lambda_\nu}{\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}} = \frac{2R\cdot\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}$$

$$\boxed{\lambda'_\nu = \frac{2R\cdot\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}$$

2ον : Ἐὰν E'_ν εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου καὶ E_ν τοῦ ἐγγεγραμμένου, τότε :

$$\frac{E'_\nu}{E_\nu} = \frac{OH_1^2}{OH^2} = \frac{R^2}{\alpha_\nu^2},$$ ἐξ οὗ : $$\boxed{E'_\nu = \frac{\nu\cdot R^2\cdot\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}}$$

57. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ.— Ἐκ τῆς πλευρᾶς λ_ν καὶ τῆς ἀκτῖνος R κανονικοῦ πολυγώνου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ $\lambda_{2\nu}$ τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.



Σχ. 47

Λύσις : Ἐὰν $AB = \lambda_\nu$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἔχοντος ν ἀριθμὸν πλευρῶν, καὶ Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΓΒ, τότε ἡ χορδὴ $A\Gamma = \lambda_{2\nu}$ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἄλλου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ ἔχοντος διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Θὰ εἶναι :

$$H\Gamma = O\Gamma - OH = R - \alpha_\nu = R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2} \qquad (1)$$

καί : $$\lambda_{2\nu}^2 = A\Gamma^2 = \Gamma Z\cdot\Gamma H = 2R\left(R - \frac{1}{2}\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}\right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}.$$

Ὅθεν : $$\boxed{\lambda_{2\nu} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\lambda_\nu^2}}} \qquad (2)$$

῾Ο τύπος οὗτος ὀφείλεται εἰς τὸν Ἕλληνα Μαθηματικὸν **᾿Αρχιμήδην***.

58. ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV.— ᾿Εκ τῆς πλευρᾶς $\lambda_{2\nu}$ κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τῆς ἀκτῖνος R αὐτοῦ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ λ_ν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἔχοντος ἥμισυ ἀριθμὸν πλευρῶν.

Λύσις : ᾿Εκ τοῦ σχήματος τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἔχομεν :

$$\mathrm{AZ}^2 = \Gamma\mathrm{Z}^2 - \mathrm{A}\Gamma^2 = 4\mathrm{R}^2 - \lambda_{2\nu}^2, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathrm{AZ} = \sqrt{4\mathrm{R}^2 - \lambda_{2\nu}^2}.$$

᾿Επειδὴ δέ : $\Gamma\mathrm{Z} \cdot \mathrm{AH} = \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{AZ}$ ἢ $2\mathrm{R} \cdot \dfrac{\lambda_\nu}{2} = \lambda_{2\nu} \cdot \sqrt{4\mathrm{R}^2 - \lambda_{2\nu}^2},$

ἕπεται ὅτι :
$$\lambda_\nu = \frac{\lambda_{2\nu}\sqrt{4\mathrm{R}^2 - \lambda_{2\nu}^2}}{\mathrm{R}}.$$

῾Ο τύπος οὗτος προκύπτει καὶ ἐκ τοῦ τύπου (2) τοῦ ᾿Αρχιμήδους, ἂν λυθῇ οὗτος ὡς πρὸς λ_ν .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

***236**. ᾿Εκ τῆς ἀκτῖνος R καὶ τοῦ ἀποστήματος α_ν κανονικοῦ πολυγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς R_1 καὶ τὸ ἀπόστημα $\alpha_{1\nu}$ ἄλλου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ τὴν αὐτὴν περίμετρον. Δηλαδή :

1) $\alpha_{1\nu} = \dfrac{1}{2}(\mathrm{R} + \alpha_\nu)$, 2) $\mathrm{R}_1 = \sqrt{\mathrm{R} \cdot \alpha_{1\nu}}$ καὶ 3) $\mathrm{R}_1 - \alpha_{1\nu} < \dfrac{1}{4}(\mathrm{R} - \alpha_\nu)$.

***237**. ᾿Εὰν p εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἀκτῖνος R καὶ P ἡ περίμετρος τοῦ ὁμοίου περιγεγραμμένου, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ περίμετροι p_1 καὶ P_1 τῶν κανονικῶν κυρτῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ διπλασίου ἀριθμοῦ πλευρῶν.

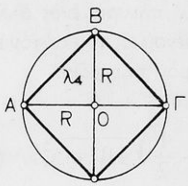
Δηλαδὴ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $\dfrac{2}{P_1} = \dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{p}$, 2) $p_1 = \sqrt{P_1 \cdot p}$ καὶ 3) $P_1 - p_1 < \dfrac{1}{2}(P - p)$

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ $P_1 - p_1 < \dfrac{1}{4}(P - p)$.

ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

59. ΠΡΟΒΛΗΜΑ I.— Εἰς δοθέντα κύκλον (O,R) νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του συναρτήσει τῆς R.



Σχ. 48

᾿Ανάλυσις : Ἂν $\mathrm{AB} = \lambda_4$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τότε $\sphericalangle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ διάμετροι ΑΟΓ, ΒΟΔ θὰ εἶναι κάθετοι.

Σύνθεσις : Ἄγομεν δύο διαμέτρους ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ καθέτους, ὁπότε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον. Διατί ;

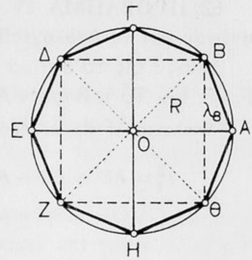
* ᾿Εγεννήθη εἰς τὰς Συρακούσας τῆς Σικελίας. Πιθανῶς δὲ ἐσπούδασεν εἰς ᾿Αλεξάνδρειαν. ῾Ο Πολύβιος, ὁ Τίτος καὶ ὁ Πλούταρχος ἀναφέρουν καὶ ἐκθειάζουν τὰ ἔργα του. ᾿Εφονεύθη ὑπὸ Ρωμαίου στρατιώτου, καθ' ὃν χρόνον ἠσχολεῖτο μὲ μηχανικὰ καὶ μαθηματικὰ προβλήματα. Τότε λέγεται ὅτι εἶπε τὸ περίφημον : **Μή μου τοὺς κύκλους τάραττε.** Ἦτο πρωτότυπος εἰς τὰς μεθόδους του καὶ τὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων του. Εἶναι ὁ μέγιστος τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Κόσμου.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς λ_4. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ἔχομεν:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \quad \text{ἢ} \quad \lambda_4^2 = R^2 + R^2 = 2R^2, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \boxed{\lambda_4 = R\sqrt{2}}$$

60. Πρόβλημα ΙΙ. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του συναρτήσει τῆς R.

Ἀνάλυσις: Ἂν $B\Theta = \lambda_4$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἰς τὸν κύκλον (Ο, R) καὶ Α τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΘ, τότε ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ λ_8 τοῦ ζητουμένου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου.



Σχ. 49

Σύνθεσις. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον (Ο, R) κανονικὸν ὀκτάγωνον, ἐγγράφομεν πρῶτον τετράγωνον καὶ διαιροῦμεν τὰ τέσσαρα προκύπτοντα ἴσα τόξα εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ κατόπιν ἄγομεν τὰς ἀντιτοίχους χορδὰς τῶν ἴσων τούτων τόξων. Τὸ προκύπτον ὀκτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗΘ εἶναι κανονικόν. Διατί;

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς λ_8. Διὰ $\nu = 4$, ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Ἀρχιμήδους, ἔχομεν:

$$\lambda_8 = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_4^2}} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - 2R^2}} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Ὥστε: $\boxed{\lambda_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

238. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R) συναρτήσει τῆς R.

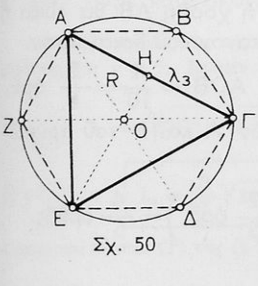
239. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο, R) συναρτήσει τῆς R.

240. Περὶ δοθέντα κύκλον (Ο, R) νὰ περιγραφῇ τετράγωνον ἢ κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

241. Μὲ πλευρὰν δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα α νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον καὶ ἀκολούθως νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του συναρτήσει τοῦ α.

242. Κανονικὸν ὀκτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗΘ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο, R). Ἄγομεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΕ, ΕΗ, ΗΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΒΔΖΘ καὶ σχηματίζεται οὕτω νέον κανονικὸν ὀκτάγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά, τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τούτου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

61. ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙΙ.— Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο,R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον.



Σχ. 50

Ἀνάλυσις: Ἐὰν $AB = \lambda_6$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, τότε ἡ κεντρικὴ γωνία $A\Delta B = \dfrac{\pi}{3}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ τρίγωνον ΟΑΒ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον. Δηλαδή:

$$AB = OA = OB = R.$$

Σύνθεσις: Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς κύκλον (O,R), λαμβάνομεν ἓξ διαδοχικὰς χορδὰς ἴσας πρὸς τὴν ἀκτῖνα R. Τὸ ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικόν. Διατί ;

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι : $\boxed{\lambda_6 = R}$

62. ΠΡΟΒΛΗΜΑ IV.— Εἰς δοθέντα κύκλον (O,R) νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του συναρτήσει τῆς R.

Λύσις : Εἰς τὸ σχῆμα τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἄγομεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ. Τὸ τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσόπλευρον. Διατί ;

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς λ_3. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΕ ἔχομεν :

$\lambda_3^2 = AE^2 = BE^2 - AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$, ἐξ οὗ : $\boxed{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

243. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

244. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R) συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

245. Περὶ δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ περιγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον ἢ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

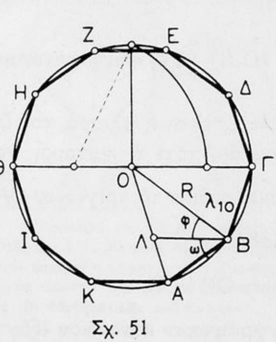
246. Νὰ συγκριθοῦν τὰ ἐμβαδὰ E_3 καὶ E_6 ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον (O, R) καθὼς καὶ τὰ ἐμβαδὰ E_3' καὶ E_6' τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων περὶ τὸν κύκλον τοῦτον.

247. Μὲ πλευρὰν δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα α νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν ἑξάγωνον ἢ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

248. Εἰς κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἄγομεν πάσας τὰς διαγωνίους του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται σχηματίζουν κανονικὸν ἑξάγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του, τὸ ἀπόστημά του καὶ τὸ ἐμβαδόν του συναρτήσει τῆς πλευρᾶς R τοῦ ἀρχικοῦ.

249. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ κανονικὸν δωδεκάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

63. ΠΡΟΒΛΗΜΑ V.—Εἰς δοθέντα κύκλον (O,R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.



Σχ. 51

Ἀνάλυσις : Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ εἶναι τὸ δέκατον τοῦ κύκλου. Τότε ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἡ κεντρικὴ γωνία $AOB = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ ὀρθ.

Ἄρα ἑκάστη τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΟΑΒ θὰ εἶναι :

$$A = B = \frac{1}{2}\left(2 \text{ ὀρθ.} - \frac{2}{5} \text{ ὀρθ.}\right) = \frac{4}{5} \text{ ὀρθῆς.}$$

Ἄγομεν τὴν διχοτόμον ΒΛ τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου ΟΑΒ. Θὰ εἶναι:

$$\omega = \varphi = \frac{2}{5} \text{ ὀρθ.} = \widehat{AOB} \text{ καὶ } \widehat{A\Lambda B} = \widehat{\Lambda O B} + \varphi = \frac{2}{5}\text{ὀρθ.} + \frac{2}{5}\text{ὀρθ.} = \frac{4}{5} \text{ ὀρθ.} = A.$$

Ὅθεν $O\Lambda = \Lambda B = BA$.

Τὸ θεώρημα τῶν διχοτόμων δίδει:

$$\frac{O\Lambda}{\Lambda A} = \frac{OB}{AB} \quad \text{ἢ} \quad \frac{O\Lambda}{\Lambda A} = \frac{OA}{O\Lambda} \quad \text{ἢ} \quad O\Lambda^2 = \overline{OA} \cdot \overline{\Lambda A} \qquad (1)$$

Ἡ (1) δηλοῖ ὅτι τὸ Λ διαιρεῖ τὴν ἀκτῖνα ΟΑ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Ἐπειδὴ δὲ $O\Lambda = AB$ καὶ $AB > A\Lambda$, ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς ἀκτῖνος, διαιρεθείσης εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Σύνθεσις: Διαιροῦμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τοῦ δοθέντος κύκλου (O_1R) εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον διὰ τοῦ σημείου Λ. Κατόπιν λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ κύκλου δέκα διαδοχικὰς χορδὰς $AB = B\Gamma = \ldots = KA = O\Lambda$, ἴσας πρὸς τὸ μεγαλύτερον τῶν τμημάτων, εἰς ὃ διηρέθη ἡ ἀκτὶς ΟΑ. Τὸ προκύπτον δεκάγωνον ΑΒΓ. . . ΙΚ εἶναι, προφανῶς, τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις: Αὕτη νὰ γίνῃ ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς λ_{10}. Ἐὰν τεθῇ $O\Lambda = x$, τότε $\Lambda A = R - x$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$x^2 = R(R-x) \quad \text{ἢ} \quad x^2 + Rx - R^2 = 0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = \lambda_{10}$$

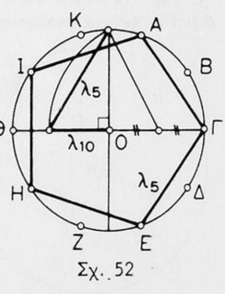
τῆς ἀρνητικῆς ρίζης ἀπορριπτομένης, ὡς ἀπολύτως μείζονος τῆς ἀκτῖνος R τοῦ δοθέντος κύκλου.

Ὥστε: $$\boxed{\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

64. ΠΡΟΒΛΗΜΑ VI.— Εἰς δοθέντα κύκλον (O,R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

Λύσις: Διαιροῦμεν πρῶτον τὸν κύκλον (Ο) εἰς δέκα ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, . . . ΙΚ, ΚΑ καὶ ἄγομεν τὰς χορδὰς ΑΓ, ΓΕ, ΕΗ, ΗΙ, ΙΑ.

Σχηματίζεται οὕτω τὸ πεντάγωνον ΑΓΕΗΙ, τὸ ὁποῖον εἶναι κανονικόν. Διατί;



Σχ. 52

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς λ_5. Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Ἀρχιμήδους, διὰ $\nu = 5$, ἔχομεν:

$$\lambda_{10} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_5^2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-\lambda_5^2}}$$

ἐξ οὗ: $$\boxed{\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$ καὶ ἄρα: $$\boxed{\alpha_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

βάσει τοῦ τύπου (1) τῆς (§ 55).

250. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα καὶ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμένον εἰς κύκλον (O, R) συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

251. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R) συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

252. Περὶ δοθέντα κύκλον (O,R) νὰ περιγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον ἢ πεντάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

253. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραὶ λ_5, λ_6, λ_{10} συνιστοῦν ὀρθογώνιον τρίγωνον.

254. Εἰς κανονικὸν πεντάγωνον πλευρᾶς α ἄγομεν δύο διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωνται. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται τέμνονται εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, καὶ ἀκολούθως νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ἑκάστης συναρτήσει τοῦ α.

255. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου πλευρᾶς α κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς αὐτοῦ τετράγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ τούτων εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δεδεκαγώνου, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τοῦ α.

256. Ἐὰν ἀχθοῦν πᾶσαι αἱ διαγώνιοι κανονικοῦ πενταγώνου πλευρᾶς α, σχηματίζεται διὰ τῆς τομῆς των κανονικὸν πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τοῦ α.

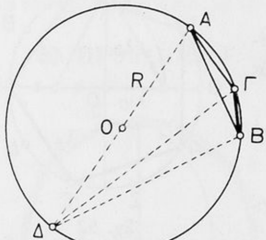
257. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαεξάγωνον, εἰκοσάγωνον καὶ εἰκοσιτεσσαράγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί των καὶ τὸ ἐμβαδόν των συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.

258. Μὲ πλευρὰν δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν δεκάγωνον καὶ πεντάγωνον.

259. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καὶ κέντρου Ο. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς καὶ ἀκτῖνα ΑΟ γράφομεν τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὰς πλευρὰς εἰς ὀκτὼ σημεῖα, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου, τοῦ ὁποίου ζητοῦνται ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τοῦ α.

260. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) ἄγομεν δύο καθέτους διαμέτρους ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Ε τῆς ΟΑ καὶ ἀκτῖνα ΕΒ γράφομεν κύκλον, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα ΟΖ καὶ ΖΒ εἶναι ἀντιστοίχως ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου καὶ πενταγώνου τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν δοθέντα κύκλον (O, R).

65. Πρόβλημα VII. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρά του συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R.



Σχ. 53

Λύσις : Παρατηροῦμεν ὅτι : $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$.

Τοῦτο μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν : Λαμβάνομεν χορδὴν ΑΒ $= R$ καὶ τὴν χορδὴν ΑΓ $= \lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$, ὡς δεικνύει τὸ ἔναντι σχῆμα. Τὸ τόξον ΒΓ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{15}$ τοῦ κύκλου (O, R) καὶ συνεπῶς ἡ χορδὴ ΒΓ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Τὴν χορδὴν ΒΓ ἐπαναλαμβάνομεν διαδοχικῶς δεκαπεντάκις ἐπὶ τοῦ κύκλου (O) καὶ προκύπτει οὕτω κανονικὸν δεκαπεντάγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (O,R).

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς λ_{15}. Ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ καὶ τὰς χορδὰς ΓΔ, ΒΔ. Θὰ εἶναι :

$$Γ\Delta^2 = A\Delta^2 - AΓ^2 = 4R^2 - \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\right]^2, \text{ ἐξ οὗ : } \quad \mathbf{Γ\Delta = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \tag{1}$$

καί : $$B\Delta^2 = A\Delta^2 - AB^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2, \text{ ἐξ οὗ : } \quad \mathbf{B\Delta = R\sqrt{3}} \tag{2}$$

'Επειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΓΒΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (O, R), κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου θὰ ἔχωμεν :

$$ΑΔ \cdot ΓΒ + ΑΓ \cdot ΒΔ = ΑΒ \cdot ΓΔ \quad \text{ἢ} \quad 2R \cdot \lambda_{15} + \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \cdot R\sqrt{3} = R \cdot \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

ἐξ οὗ :

$$\boxed{\lambda_{15} = \frac{R}{4}\left[\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{3}\,(\sqrt{5}-1)\right]} \qquad (3)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

261. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα α_{15} καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_{15} κανονικοῦ δεκαπενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R).

262. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς λ'_{15} κανονικοῦ δεκαπενταγώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (O,R).

263. 'Εκ τῆς πλευρᾶς λ'_ν κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R) νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ λ_ν τοῦ ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

264. 'Εκ τῆς πλευρᾶς $\lambda_{2\nu}$ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O,R), νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ λ_ν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

265. 'Εκ τῆς πλευρᾶς $\lambda'_{2\nu}$ κανονικοῦ πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον (O, R), νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ λ'_ν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

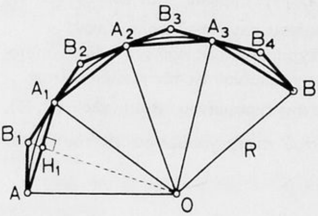
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ *

66. ΘΕΩΡΗΜΑ I.— Ἡ περίμετρος κυρτῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τόξον κύκλου εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τῆς ἀντιστοίχου περιγεγραμμένης.

Ἀπόδειξις : Ἔστω ΑΒ ἓν τόξον τοῦ κύκλου (Ο, R) (σχ. 54). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο διῃρέθη κατά τινα τρόπον εἰς ν ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{\nu-1}.$$



Σχ. 54

Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι αἱ κορυφαὶ μιᾶς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τοῦτο ΑΒ. Ἐὰν ϖ_ν εἶναι ἡ περίμετρος τῆς κανονικῆς ταύτης τεθλασμένης γραμμῆς, τότε :

$$\varpi_\nu = \nu \cdot AA_1.$$

Ἐὰν δὲ H_1 εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AA_1, τότε :

$$\varpi_\nu = \nu \cdot 2 \cdot AH_1. \qquad (1)$$

Εἰς τὰ σημεῖα $A, A_1, A_2, \ldots, A_{\nu-1}$ ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ θεωρηθέντος κύκλου (Ο, R). Αὗται ὁρίζουν τὰ σημεῖα $B_1, B_2, \ldots, B_\nu$, B, τὰ ὁποῖα εἶναι κορυφαὶ ἄλλης τεθλασμένης γραμμῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τόξον ΑΒ. Ἔστω Π_ν ἡ περίμετρος ταύτης. Θὰ εἶναι :

$$\Pi_\nu = \nu \cdot 2 \cdot AB_1 \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου AH_1B_1 ἔχομεν :

$$AH_1 < AB_1 \quad \text{ἢ} \quad \nu \cdot 2AH_1 < \nu \cdot 2 \cdot AB_1$$

ἢ

$$\boxed{\varpi_\nu < \Pi_\nu} \qquad (3)$$

67. ΘΕΩΡΗΜΑ II.— Ἐὰν $\varpi_\nu, \varpi_{2\nu}, \varpi_{4\nu}, \varpi_{8\nu}, \ldots$ εἶναι αἱ περίμετροι τῶν $2^k \cdot \nu$ κυρτῶν κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τόξον κύκλου (Ο, R), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία : $\varpi_\nu, \varpi_{2\nu}, \varpi_{4\nu}, \varpi_{8\nu}, \ldots$ εἶναι μονοτόνως αὔξουσα.

Ἀπόδειξις : Ἔστω ΑΒ ἓν τόξον τοῦ κύκλου (Ο, R) (σχ. 55). Διαιροῦμεν τοῦτο εἰς ν ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων $A_1, A_2, \ldots, A_{\nu-1}$, καὶ ἔστω AA_1 ἡ πρώτη πλευρὰ τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς $AA_1A_2\ldots B$, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τοῦτο ΑΒ.

Ἐὰν Γ_1 εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου AA_1, τότε $A\Gamma_1$ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ μιᾶς ἄλ-

* Λέγοντες ἐμβαδὸν κύκλου, θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ.

λης κυρτῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον AB καὶ ἐχούσης διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Ἐὰν $\varpi_{2\nu}$ εἶναι ἡ περίμετρος αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν :

$$\varpi_{2\nu} = 2\nu \cdot A\Gamma_1.$$

Ἐκ τοῦ τριγώνου $A\Gamma_1 A_1$ θὰ ἔχωμεν :

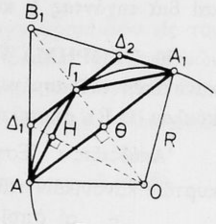
$$AA_1 < A\Gamma_1 + \Gamma_1 A_1 \quad \text{ἢ} \quad AA_1 < 2 \cdot A\Gamma_1$$

ἢ $$\nu \cdot AA_1 < 2\nu \cdot A\Gamma_1$$

ἢ $$\varpi_\nu < \varpi_{2\nu}$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\varpi_\nu < \varpi_{2\nu} < \varpi_{4\nu} < \varpi_{8\nu} < \ldots \qquad (1)$$



Σχ. 55

68. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ. Ἐὰν Π_ν, $\Pi_{2\nu}$, $\Pi_{4\nu}$, $\Pi_{8\nu}$, . . . εἶναι αἱ περίμετροι τῶν $2^k \cdot \nu$ κυρτῶν κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν, τῶν περιγεγραμμένων περὶ τόξον κύκλου (O, R), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία : Π_ν, $\Pi_{2\nu}$, $\Pi_{4\nu}$, $\Pi_{8\nu}$, . . . εἶναι μονοτόνως φθίνουσα.

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἐὰν $\Pi_{2\nu}$ εἶναι ἡ περίμετρος μιᾶς κυρτῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, περιγεγραμμένης περὶ τὸ τόξον κύκλου (O, R), ἀριθμοῦ πλευρῶν 2ν, ἐκ τοῦ σχήματος τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ ἔχωμεν :

$$\Pi_{2\nu} = \nu \cdot 2 \cdot A\Delta_1.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $B_1\Delta_1\Gamma_1$ ἔχομεν :

$$\Gamma_1\Delta_1 < \Delta_1 B_1 \ \text{ἢ}\ A\Delta_1 + \Gamma_1\Delta_1 < A\Delta_1 + \Delta_1 B_1 \ \text{ἢ}\ 2A\Delta_1 < AB_1 \ \text{ἢ}\ 2\nu \cdot A\Delta_1 < \nu \cdot AB_1$$

ἢ $$\Pi_{2\nu} < \Pi_\nu .$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\ldots \Pi_{8\nu} < \Pi_{4\nu} < \Pi_{2\nu} < \Pi_\nu . \qquad (2)$$

69. ΘΕΩΡΗΜΑ IV.— Ἡ περίμετρος τυχούσης ἐκ τῶν $2^k \cdot \nu$ κυρτῶν κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τόξον κύκλου (O,R), εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τῆς ἀντιστοίχου κυρτῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, τῆς περιγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον τοῦτο.

Ἀπόδειξις : α) Ἔστω $\varpi_{2^k.\nu}$ ἡ περίμετρος τῆς κανονικῆς κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον AB τοῦ κύκλου (O, R), καὶ $\Pi_{2^k.\nu}$ ἡ περίμετρος τῆς ἀντιστοίχου περιγεγραμμένης. Κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα εἶναι :

$$\varpi_{2^k.\nu} < \Pi_{2^k.\nu} .$$

β) Ἔστω $\Pi_{2^{k'}.\nu}$ ἡ περίμετρος τῆς περιγεγραμμένης κυρτῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, πλήθους πλευρῶν $2^{k'} \cdot \nu$.

Ἐὰν $k > k'$, θὰ εἶναι :

$$\Pi_{2^k.\nu} < \Pi_{2^{k'}.\nu}$$

Ἄρα :

$$\varpi_{2^k.\nu} < \Pi_{2^{k'}.\nu} \qquad (1)$$

Ἐὰν $k < k'$, θὰ εἶναι :

$$\varpi_{2^k.\nu} < \varpi_{2^{k'}.\nu} \qquad \text{(θεώρ. 1)}$$

καί : $$\varpi_{2^{k'}.\nu} < \Pi_{2^{k'}.\nu} \qquad \text{(θεώρ. 2-3)}$$

Ἄρα : $$\varpi_{2^k.\nu} < \Pi_{2^{k'}.\nu} \qquad (2)$$

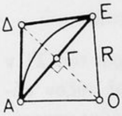
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

$$\varpi_{2^{k}.\nu} < \Pi_{2^{k'}.\nu} \qquad (3)$$

καὶ διὰ **τυχόντας k καὶ k′.**

70. ΘΕΩΡΗΜΑ V.— Αἱ διαφοραὶ τῶν περιμέτρων δύο ἀντιστοίχων κυρτῶν κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν, ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης περὶ τόξον κύκλου (O,R), ἀποτελοῦν μηδενικὴν ἀκολουθίαν.

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν $\Pi_{2^{k}.\nu}$ καὶ $\varpi_{2^{k}.\nu}$ αἱ περίμετροι δύο ἀντιστοίχων κυρτῶν κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν, περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης, αἱ ὁποῖαι ἔχουν $\nu \cdot 2^{k}$ πλευράς. Ἔστωσαν Α, Ε αἱ δύο πρῶται κορυφαὶ τῆς ἐγγεγραμμένης, καὶ ΑΔ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τῆς ἀντιστοίχου περιγεγραμμένης, Γ δὲ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΕ. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα III, θὰ εἶναι :



Σχ. 56

$$\Pi_{2^{k}.\nu} = \nu \cdot 2^{k+1} \cdot \text{ΑΔ} \quad \text{καὶ} \quad \varpi_{2^{k}.\nu} = \nu \cdot 2^{k+1} \cdot \text{ΑΓ}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ ἔχομεν : $\text{ΑΔ} - \text{ΑΓ} < \text{ΔΓ}$. (1)

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΔ ἔχομεν :

$$\text{ΑΔ}^2 = \text{ΓΔ} \cdot \text{ΟΔ}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \text{ΓΔ} = \frac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΟΔ}},$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται : $\text{ΑΔ} - \text{ΑΓ} < \dfrac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΟΔ}}$. (2)

Ἐπειδὴ δὲ ΟΔ>R, ἕπεται ὅτι : $\dfrac{1}{\text{ΟΔ}} < \dfrac{1}{R}$ ἢ $\dfrac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΟΔ}} < \dfrac{\text{ΑΔ}^2}{R}$,

καὶ ἡ (2) γίνεται :

$$\text{ΑΔ} - \text{ΑΓ} < \frac{\text{ΑΔ}^2}{R} \quad \text{ἢ} \quad 2^{k+1} \cdot \nu \cdot \text{ΑΔ} - 2^{k+1} \cdot \nu \cdot \text{ΑΓ} < \frac{2^{k+1} \cdot \nu \cdot \text{ΑΔ}^2}{R}$$

ἢ

$$\Pi_{2^{k}.\nu} - \varpi_{2^{k}.\nu} < \frac{2^{k+1} \cdot \nu \cdot \text{ΑΔ}^2}{R}. \qquad (3)$$

Ἐξ ἄλλου :

$$(\Pi_{2^{k}.\nu})^2 = (2^{k+1} \cdot \nu \cdot \text{ΑΔ})^2 = 2^{2k+2} \cdot \nu^2 \cdot \text{ΑΔ}^2 \quad \text{ἢ} \quad 2^{k+1} \cdot \nu \cdot \text{ΑΔ}^2 = \frac{(\Pi_{2^{k}.\nu})^2}{2^{k+1} \cdot \nu},$$

καὶ ἡ (3) γράφεται :

$$\Pi_{2^{k}.\nu} - \varpi_{2^{k}.\nu} < \frac{(\Pi_{2^{k}.\nu})^2}{2^{k+1} \cdot \nu \cdot R}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\Pi_{2^{k}.\nu} < \Pi_{\nu}$, ἕπεται ὅτι : $\boldsymbol{\Pi_{2^{k}.\nu} - \varpi_{2^{k}.\nu} < \dfrac{(\Pi_{\nu})^2}{2^{k+1} \cdot \nu \cdot R}}$. (4)

Ἐκ τῆς σχέσεως (4) ἕπεται ὅτι : **Ἡ ἀκολουθία τῶν $\boldsymbol{\dfrac{(\Pi_{\nu})^2}{2^{k+1} \cdot \nu \cdot R}}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν,** καθόσον οἱ ἀριθμοὶ Π_{ν}, ν καὶ R εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί.

Κατ' ἀκολουθίαν : $\lim(\Pi_{2^k \cdot \nu} - \varpi_{2^k \cdot \nu}) = 0$, ἤτοι :

$$\lim_{k \to \infty} \Pi_{2^k \cdot \nu} = \lim_{k \to \infty} \varpi_{2^k \cdot \nu}$$

Ἤδη, ἂν νοήσωμεν κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον (O, R), καὶ τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον, δι' ὁμοίων συλλογισμῶν πρὸς ἐκείνους, διὰ τῶν ὁποίων ἀπεδείχθη τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, βεβαιούμεθα ὅτι :

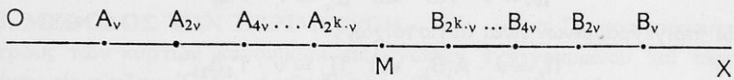
Αἱ ἀκολουθίαι τῶν περιμέτρων τῶν ἀντιστοίχων τούτων κανονικῶν πολυγώνων ἔχουν κοινὸν ὅριον.

Κατ' ἀκολουθίαν : **Ἡ διαφορὰ τῶν περιμέτρων των ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.**

71. Ἀνάπτυγμα καὶ μῆκος κύκλου. Ἐπὶ μιᾶς ἡμιευθείας OX (σχ. 57), ἂς θεωρήσωμεν τὰ ὁμόρροπα τμήματα :

$OA_\nu = \varpi_\nu$ καὶ $OB_\nu = \Pi_\nu$
$OA_{2\nu} = \varpi_{2\nu}$ » $OB_{2\nu} = \Pi_{2\nu}$
$OA_{4\nu} = \varpi_{4\nu}$ » $OB_{4\nu} = \Pi_{4\nu}$
. . . .
$OA_{2^k \cdot \nu} = \varpi_{2^k \cdot \nu}$ » $OB_{2^k \cdot \nu} = \Pi_{2^k \cdot \nu}$,

ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὴν περίμετρον κανονικῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου, καὶ ὧν ἕκαστον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν ἀπὸ τὸ προηγούμενον.



Σχ. 57

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι :

α) Τὰ ἄκρα A_ν, $A_{2\nu}$, $A_{4\nu}$, . . ., $A_{2^k \cdot \nu}$ βαίνουν ἀπομακρυνόμενα τοῦ O, τὰ δὲ ἄκρα B_ν, $B_{2\nu}$, $B_{4\nu}$, . . ., $B_{2^k \cdot \nu}$ πλησιάζουν πρὸς αὐτό.

β) Εἶναι : $OA_\nu < OB_\nu$, $OA_{2\nu} < OB_{2\nu}$, . . ., $OA_{2^k \cdot \nu} < OB_{2^k \cdot \nu}$.

γ) Αἱ διαφοραί :

$OB_\nu - OA_\nu = A_\nu B_\nu$, $OB_{2\nu} - OA_{2\nu} = A_{2\nu} B_{2\nu}$, . . ., $OB_{2^k \cdot \nu} - OA_{2^k \cdot \nu} = A_{2^k \nu} B_{2^k \nu}$

διαρκῶς ἐλαττοῦνται καὶ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ ἄκρα A_ν, $A_{2\nu}$, $A_{4\nu}$, . . ., $A_{2^k \cdot \nu}$, . . . ἀπομακρυνόμενα τοῦ O, καὶ τὰ ἄκρα B_ν, $B_{2\nu}$, $B_{4\nu}$, . . ., $B_{2^k \cdot \nu}$, . . . πλησιάζοντα πρὸς τὸ O, τείνουν ἅπαντα πρὸς τὸ σημεῖον M, ἄκρον τοῦ τμήματος OM. Τοῦτο εἶναι κοινὸν ὅριον τῶν περιμέτρων τῶν ἀντιστοίχων κανονικῶν κυρτῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων περὶ τὸν κύκλον (O,R).

Λέγεται δὲ **ἀνάπτυγμα** τοῦ κύκλου τούτου. Ὥστε :

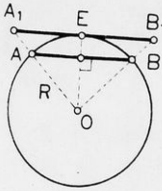
Ἀνάπτυγμα κύκλου καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν τῶν περιμέτρων τῶν $2^k \cdot \nu$ κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον τοῦτον καὶ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων.

Τὸ μῆκος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ κύκλου τούτου καλεῖται μ ῆ κ ο ς τοῦ κύκλου.

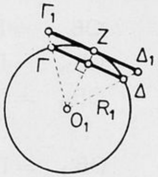
Σημείωσις : Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ὑπάρχει εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν τῶν περιμέτρων κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν, ἐγγεγραμμένων εἰς τόξον κύκλου καὶ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων. Τὸ εὐθύγραμμον τοῦτο τμῆμα καλεῖται **ἀνάπτυγμα** τοῦ τόξου.

Τὸ δὲ μῆκος αὐτοῦ λέγεται **μῆκος τοῦ τόξου** τούτου.

72. ΘΕΩΡΗΜΑ VI.— Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων αὐτῶν*.



Σχ. 57



Σχ. 58

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν (O, R) καὶ (O_1, R_1) δύο κύκλοι. Εἰς ἕκαστον τούτων ἐγγράφομεν κανονικὸν κυρτὸν πολύγωνον ἔχον ν πλευράς. Ἔστω AB ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς καὶ ΓΔ τοῦ ἄλλου. Θεωροῦμεν δὲ καὶ τὰ ἀντίστοιχα περιγεγραμμένα κυρτὰ κανονικὰ πολύγωνα. Ἔστω A_1B_1 ἡ πλευρὰ τοῦ ἑνὸς καὶ $\Gamma_1\Delta_1$ ἡ πλευρὰ τοῦ ἄλλου.

Αἱ περίμετροι, τῶν μὲν ἐγγεγραμμένων εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\varpi_\nu = \nu \cdot AB \quad \text{καὶ} \quad \varpi'_\nu = \nu \cdot \Gamma\Delta, \tag{1}$$

τῶν δὲ περιγεγραμμένων εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\Pi_\nu = \nu \cdot A_1B_1 \quad \text{καὶ} \quad \Pi'_\nu = \nu \cdot \Gamma_1\Delta_1. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$\frac{\varpi_\nu}{\varpi'_\nu} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} \quad (3) \qquad \text{καὶ} \quad \frac{\Pi_\nu}{\Pi'_\nu} = \frac{A_1B_1}{\Gamma_1\Delta_1}. \tag{4}$$

Ἀλλὰ $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{A_1B_1}{\Gamma_1\Delta_1} = \dfrac{R}{R_1}$, ὁπότε, λόγῳ τῶν (3), (4), θὰ εἶναι :

$$\frac{\varpi_\nu}{\varpi'_\nu} = \frac{\mathbf{\Pi}_\nu}{\mathbf{\Pi}'_\nu} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{R}_1}. \tag{5}$$

Ἐὰν $\mathcal{S}$ καὶ $\mathcal{S}_1$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν κύκλων (O) καὶ (O_1), θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις :

$$\varpi_\nu < \mathcal{S} < \Pi_\nu \qquad \text{καὶ} \qquad \varpi'_\nu < \mathcal{S}_1 < \Pi'_\nu$$

ἢ

$$\frac{\varpi_\nu}{2R} < \frac{\mathcal{S}}{2R} < \frac{\Pi_\nu}{2R} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\varpi'_\nu}{2R_1} < \frac{\mathcal{S}_1}{2R_1} < \frac{\Pi'_\nu}{2R_1}. \tag{6}$$

* Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀφείλεται εἰς τὸν Ἱπποκράτην τὸν Χῖον (450 π.Χ.). Οὗτος παρηκολούθησε μαθήματα φιλοσοφίας ἐν Ἀθήναις, καίτοι ἦτο ἔμπορος. Ἵδρυσε δὲ ἰδίαν Σχολήν. Εἰς αὐτὸν ὀφείλεται ὁ τετραγωνισμὸς τῶν μηνίσκων.

Ἡ δευτέρα τῶν (6), λόγῳ τῶν (5), γίνεται :

$$\frac{\varpi_\nu}{2R} < \frac{\mathcal{I}_1}{2R_1} < \frac{\Pi_\nu}{2R}. \qquad (7)$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν (6) καὶ (7), λαμβάνομεν :

$$\frac{\mathcal{I}}{2R} - \frac{\mathcal{I}_1}{2R_1} < \frac{\Pi_\nu}{2R} - \frac{\varpi_\nu}{2R} = \frac{\Pi_\nu - \varpi_\nu}{2R}. \qquad (8)$$

Τοῦ ν τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον, ἡ διαφορὰ $\Pi_\nu - \varpi_\nu$ τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἄρα ἡ διαφορὰ $\frac{\mathcal{I}}{2R} - \frac{\mathcal{I}_1}{2R_1}$, ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας παραδεχόμεθα ὅτι :

$$\frac{\mathcal{I}}{\mathbf{2R}} = \frac{\mathcal{I}_1}{\mathbf{2R_1}}.$$

Ὁ λόγος $\frac{\mathcal{I}}{2R}$ εἶναι, λοιπόν, σταθερός, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ θεωρηθεὶς κύκλος (O,R), καὶ παρίσταται διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π.

Ὥστε : $\frac{\mathcal{I}}{2R} = \pi$, ἐξ οὗ : $\boxed{\mathcal{I} = \mathbf{2R \cdot \pi}}$ (9)

Ὁ τύπος (9) ἐκφράζει ὅτι : **Τὸ μῆκος κύκλου (O, R) εἶναι γινόμενον τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.**

Πρέπει ὅμως νὰ γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν π. Ἡ εὕρεσις τούτου γίνεται κατὰ προσέγγισιν ὡς ἑξῆς :

73. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΡΙΜΕΤΡΩΝ.— Ἐὰν ϖ_ν καὶ Π_ν παριστάνουν τὰς περιμέτρους τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), ἀριθμοῦ πλευρῶν ν, γνωρίζομεν ὅτι :

$$\varpi_\nu < 2\pi R < \Pi_\nu$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν, διὰ $2R = 1$, ἕπεται ὅτι :

$$\varpi_\nu < \pi < \Pi_\nu .$$

1ον : Ὑπολογισμὸς τοῦ $\varpi_{2\nu}$ συναρτήσει τοῦ ϖ_ν . Εἶναι γνωστὸν ὅτι :

$\varpi_{2\nu} = 2\nu \cdot \lambda_{2\nu}$, ἐξ οὗ : $\lambda_{2\nu} = \frac{\varpi_{2\nu}}{2\nu}$ (1)

$\varpi_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu$, ἐξ οὗ : $\lambda_\nu = \frac{\varpi_\nu}{\nu}$ (2)

Ὁ τύπος τοῦ Ἀρχιμήδους $\lambda_{2\nu}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}$ διὰ $R = \frac{1}{2}$, καὶ βάσει τῶν (1) καὶ (2), γίνεται :

$$(\varpi_{2\nu})^2 = \mathbf{2\nu}\,(\,\boldsymbol{\nu} - \sqrt{\nu^2 - (\varpi_\nu)^2}\,), \qquad (3)$$

2ον : Ὑπολογισμὸς τοῦ Π_ν συναρτήσει τοῦ ϖ_ν . Εἶναι γνωστὸν ὅτι :

$$\Pi_\nu = \nu \cdot \lambda'_\nu, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \lambda'_\nu = \frac{\Pi_\nu}{\nu} \qquad (4)$$

καὶ $$\varpi_\nu = \nu \cdot \lambda_\nu , \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \lambda_\nu = \frac{\varpi_\nu}{\nu}. \qquad (5)$$

'Επειδὴ δὲ εἶναι : $\lambda'_\nu = \dfrac{2R \cdot \lambda_\nu}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}}$, ἕπεται, βάσει τῶν (4) καὶ (5), ὅτι :

$$\Pi_\nu = \frac{\nu \cdot \varpi_\nu}{\sqrt{\nu^2 - (\varpi_\nu)^2}}. \qquad (6)$$

'Εφαρμογή : 'Αρχόμενοι ἀπὸ τὴν τιμὴν $\nu = 3$ διὰ τὸν τύπον (3), καὶ ἀπὸ τὴν τιμὴν $\nu = 6$ διὰ τὸν τύπον (6), λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$\varpi_6 = 3$	$\varpi_{12} = 3{,}10582\ldots$	$\Pi_6 = 3{,}46411\ldots$	$\Pi_{12} = 3{,}21540\ldots$
$\varpi_{24} = 3{,}13262\ldots$	$\varpi_{48} = 3{,}13935\ldots$	$\Pi_{24} = 3{,}15967\ldots$	$\Pi_{48} = 3{,}14609\ldots$
$\varpi_{96} = 3{,}14103\ldots$	$\varpi_{192} = 3{,}14145\ldots$	$\Pi_{96} = 3{,}14272\ldots$	$\Pi_{192} = 3{,}14188\ldots$

'Εκ τῶν σχέσεων $\varpi_\nu < \pi < \Pi_\nu$, καὶ τῶν ἀνωτέρω εὑρεθεισῶν τιμῶν τοῦ π, προκύπτει ὅτι :

$$3{,}14145\ldots < \pi < 3{,}14188\ldots$$

καὶ μὲ **δέκα** δεκαδικὰ ψηφία : $\pi = \mathbf{3{,}1415926535}\ldots$

Ἡ τιμὴ ὅμως $\pi = \mathbf{3{,}14159}$ εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὰς συνήθεις ἐφαρμογάς.

Διὰ νὰ ἐνθυμούμεθα ὅμως τὸν ἀριθμὸν π, ἀντιστοιχίζομεν τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τούτου μὲ τὴν γνωστὴν φράσιν :

'Αεὶ ὁ θεὸς ὁ μέγας γεωμετρεῖ,
3 1 4 1 5 9

εἰς τὴν ὁποίαν τὸ πλῆθος τῶν γραμμάτων ἑκάστης λέξεως ἐκφράζει τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ π, ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά.

*** 74. Ἱστορικὸν σημείωμα.** Ἡ σταθερότης τοῦ λόγου τοῦ μήκους κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του ἦτο γνωστὴ εἰς τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνας. Ὁ μέγιστος τῶν Μαθηματικῶν τοῦ κόσμου **'Αρχιμήδης** (287 – 211 π.Χ.) ἐφήρμοσε πρῶτος τὴν μέθοδον τῶν περιμέτρων καὶ εὗρεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὸ κλάσμα :

$$\pi = \frac{22}{7} = 3{,}1428, \text{ ἀκριβῶς δέ : } 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ὁ **Πτολεμαῖος** (87 – 167 μ.Χ.) εὗρε : $\pi = 3{,}14166\ldots.$

Ὁ Ὁλλανδὸς Γεωμέτρης **Metius** (1571 – 1635 μ.Χ.) εὗρε $\pi = \dfrac{355}{113}$.

Ὁ Γάλλος Μαθηματικὸς **Viete** (1600 μ.Χ.) εὗρε :

$$\pi = 3{,}141\ 592\ 653\ 5\ldots$$

μὲ τὴν βοήθειαν κανονικοῦ πολυγώνου ἔχοντος πλῆθος πλευρῶν $\nu = 3.2^{16}$.

Ὁ Ἄγγλος Μαθηματικὸς **Shanks** ὑπελόγισε, τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρων Μαθηματικῶν, τὴν τιμὴν τοῦ π μὲ 707 δεκαδικὰ ψηφία. Τὰ ψηφία ταῦτα ἀναγράφονται εἰς τὴν ζωοφόρον τοῦ Μεγάρου τῆς 'Ανακαλύψεως (Palais de la Découverte) εἰς Παρισίους.

Τὸ ἔτος 1949 δι' ἠλεκτρονικοῦ ὑπολογιστοῦ τύπου ENIAC ὑπελογίσθησαν 2045 δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π. 'Εκ τούτων μόνον τὰ 525 πρῶτα συμπίπτουν μὲ ἐκεῖνα τοῦ Shanks.

Κατὰ τὸ ἔτος 1958 μὲ τὸν ἠλεκτρονικὸν ὑπολογιστὴν IBM 704 ὑπελογίσθησαν τὰ 10 000 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π.

Πρῶτος ὁ Ἑλβετὸς Μαθηματικὸς **Lambert** (1761 μ.Χ.) ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι **ἀσύμμετρος** ἀριθμός.

Βραδύτερον, κατὰ τὸ ἔτος 1882, ὁ Γερμανὸς Μαθηματικὸς **Lindemann** ἀπέδειξεν ὅτι ὁ π εἶναι καὶ **ὑπερβατικὸς** ἀριθμός. Δηλαδὴ ὁ π δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς.

Εὔχρηστοι εἰς τὸν λογισμόν, καὶ ἰδίως εἰς τὴν Φυσικήν, εἶναι αἱ ἀκόλουθοι τιμαί :

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}318\ 309\ 886.., \qquad \lambda o\gamma\pi = 0{,}497\ 149\ 872, \qquad \lambda o\gamma\ \frac{1}{\pi} = \bar{1}{,}502\ 850\ 127$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

266. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 8m. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τούτου ;

267. Τὸ μῆκος ἑνὸς κύκλου εἶναι $\mathcal{T} = 4{,}398226$ m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου.

268. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος κύκλου, ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον, κανονικὸν ἑξάγωνον, κανονικὸν ὀκτάγωνον πλευρᾶς ἀντιστοίχως $5\sqrt{2}$, 8, $10\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

269. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος κύκλου περιγεγραμμένου περὶ τετράγωνον πλευρᾶς $5\sqrt{2}$ καὶ πόσον τοῦ περὶ κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς $2\sqrt{3}$;

270. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (Α, ΑΓ).

271. Νὰ γραφῇ κύκλος ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων κύκλων ἢ ἴσος πρὸς τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

272. Νὰ γραφῇ κύκλος τετραπλάσιος δοθέντος κύκλου (Ο,R).

75. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΞΟΥ.— Ἔστω τ τὸ μῆκος τόξου μ^0 καὶ $\mathcal{T}$ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει τὸ τόξον τοῦτο.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων αὐτῶν. Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\frac{\tau}{\mathcal{T}} = \frac{\mu}{360}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{\tau = \mathcal{T}\cdot\frac{\mu}{360}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τούτου ἐπὶ τὸν λόγον τοῦ μέτρου τοῦ τόξου τούτου πρὸς τὸ μέτρον τοῦ κύκλου.

Ἐπειδὴ $\mathcal{T} = 2\pi R$, ὁ τύπος (1) γίνεται :

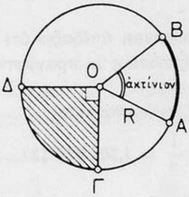
$$\boxed{\tau = \frac{\pi R \mu}{180}} \qquad (2)$$

Ἄλλαι ἐκφράσεις τοῦ μήκους τόξου : Ἐὰν ΑΒ εἶναι τὸ τόξον ἑνὸς κύκλου (Ο, R), τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τ εἶναι ἴσον πρὸς R, ἡ γωνία ΑΟΒ ὀνομάζεται **ἀκτίνιον** (μοναδιαία γωνία).

Ἐὰν τεθῇ $\widehat{AOB} = \alpha$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{\tau}{R} = \frac{\alpha}{1}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{\tau = \alpha R} \qquad (3)$$

Ἔστω ΓΟΔ μία ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κύκλου (O, R). Τότε $\dfrac{\widehat{AOB}}{\widehat{ΓΟΔ}} = \dfrac{\widehat{AOB}}{1 \text{ ὀρθή}}$ καὶ ὁ λόγος τῶν μηκῶν τῶν δύο τόξων AB, ΓΔ εἶναι $\dfrac{R}{\frac{2\pi R}{4}} = \dfrac{2}{\pi}$.



Σχ. 59

Ἄρα : $\dfrac{\widehat{AOB}}{1 \text{ ὀρθή}} = \dfrac{2}{\pi}$, ἐξ οὗ : $(\widehat{AOB}) = \alpha = \dfrac{2}{\pi} \cdot 1$ **ὀρθή.**

Κατ' ἀκολουθίαν : 1 ἀκτίνιον $= 90^\circ \cdot \dfrac{2}{\pi} = \mathbf{57^\circ 17' 44''}$.

Ὁμοίως : 1 ἀκτίνιον $= 100^\beta \cdot \dfrac{2}{\pi} = \mathbf{63{,}662^\beta}$.

Διὰ τὴν μετάβασιν ἀπὸ τὰ ἀκτίνια εἰς τὰς μοίρας καὶ βαθμοὺς γνωρίζομεν τοὺς τύπους :

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}. \tag{4}$$

Ἐκ τῶν τύπων (3) καὶ (4) λαμβάνομεν :

$$\tau = \frac{\pi}{180} R \cdot \mu \quad (5) \qquad \text{καὶ} \qquad \tau = \frac{\pi}{200} R \cdot \beta. \tag{6}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

273. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 8 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τόξου αὐτοῦ 60°, 72°, 30°, 45°.

274. Τόξον κύκλου $(\widehat{AB}) = 38^\circ\, 12'\, 24''$ ἔχει μῆκος 42 mm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του.

275. Τόξον 92,691 β ἔχει μῆκος 65,8 mm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του.

276. Τόξον 1,251 ἀκτινίου ἔχει μῆκος 49 mm. Ποία ἡ ἀκτίς του ;

277. Εἰς κύκλον (O, R) λαμβάνομεν τὰς χορδὰς AB, ΓΔ, EZ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, τετραγώνου, ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑξαγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τῶν ἐλασσόνων τόξων AB, ΓΔ, EZ, ἂν R = 2 cm.

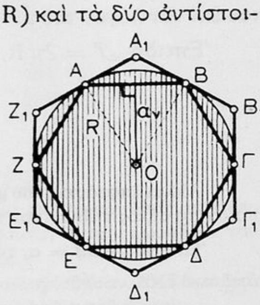
278. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α γράφομεν τόξα, περατούμενα εἰς τὰς ἄλλας δύο κορυφὰς αὐτοῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένης γραμμῆς.

279. Δίδεται ἡμίκυκλος διαμέτρου AOB = 2R. Μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας OA καὶ OB γράφομεν ἡμικύκλους κειμένους ἐντὸς τῶν πρώτου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὅστις ἐφάπτεται τῶν τριῶν ἡμικύκλων.

76. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ.— Θεωροῦμεν κύκλον (O, R) καὶ τὰ δύο ἀντίστοιχα κυρτὰ κανονικὰ πολύγωνα, ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον τοῦτον, ὧν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι ν.

Ἐὰν ϖ_ν καὶ Π_ν εἶναι αἱ περίμετροι τούτων, καὶ α_ν τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου, τότε τὰ ἐμβαδὰ τῶν καν. τούτων πολυγώνων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως.

$$\frac{\varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{R \cdot \Pi_\nu}{2}$$



Σχ. 60

Ἐὰν E_0 εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ θεωρηθέντος κύκλου (O, R), θὰ ἀληθεύουν, προφανῶς, αἱ σχέσεις :

$$\frac{\varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < E_0 < \frac{R \cdot \Pi_\nu}{2}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δέ : $\dfrac{\Pi_\nu \cdot R - \varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} = \dfrac{1}{2}\left[\, R(\Pi_\nu - \varpi_\nu) + \varpi_\nu (R - \alpha_\nu) \right]$ (2)

καὶ $\varpi_\nu < \mathscr{T}$, ὅπου $\mathscr{T}$ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου (O, R), ἔπεται ὅτι :

$$\frac{\Pi_\nu \cdot R - \varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < \frac{1}{2}\left[\, R(\Pi_\nu - \varpi_\nu) + \mathscr{T}(R - \alpha_\nu) \right].$$

Ἀλλὰ τοῦ ν τείνοντος εἰς τὸ ἄπειρον, αἱ διαφοραὶ $\Pi_\nu - \varpi_\nu$ καὶ $R - \alpha_\nu$ τείνουν εἰς τὸν μηδέν. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ διαφορά :

$$\frac{\Pi_\nu \cdot R - \varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2}$$

τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Ἐξ ἄλλου $\varpi_\nu < \mathscr{T} < \Pi_\nu$, ἐξ οὗ : $\dfrac{\varpi_\nu \cdot R}{2} < \dfrac{\mathscr{T} \cdot R}{2} < \dfrac{\Pi_\nu \cdot R}{2}$. (3)

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha_\nu < R$, ἔπεται ὅτι $\dfrac{\varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < \dfrac{\varpi_\nu \cdot R}{2}$ καὶ ἡ (3) γίνεται :

$$\frac{\varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < \frac{\mathscr{T} \cdot R}{2} < \frac{\Pi_\nu \cdot R}{2}, \qquad (4)$$

ἐξ οὗ : $\quad 0 < \dfrac{\mathscr{T} \cdot R}{2} - \dfrac{\varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < \dfrac{\Pi_\nu \cdot R - \varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2}$. (5)

Ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι : $\dfrac{\varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} - E_0 < 0$. (6)

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (5), (6), λαμβάνομεν :

$$\left| E_0 - \frac{\mathscr{T} \cdot R}{2} \right| < \frac{\Pi_\nu \cdot R - \varpi_\nu \cdot \alpha_\nu}{2}. \qquad (7)$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ διαφορὰ $\Pi_\nu \cdot R - \varpi_\nu \cdot \alpha_\nu$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ διαφορὰ $E_0 - \dfrac{\mathscr{T} \cdot R}{2}$ τείνει εἰς τὸ μηδέν.

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ παραδεχθῶμεν ὅτι :

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot \mathscr{T} \cdot R. \qquad (8)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\mathscr{T} = 2\pi R$, ὁ τύπος (8) γίνεται :

$$\boxed{\mathbf{E_0 = \pi R^2}} \qquad (9)$$

Ἐκ τῶν λεχθέντων ἀνωτέρω προκύπτει :

ΟΡΙΣΜΟΣ :— Ἐμβαδὸν κύκλου καλοῦμεν τὸ κοινὸν ὅριον τῶν ἀκολουθιῶν τῶν ἐμβαδῶν τῶν $2^k \cdot \nu$ κανονικῶν κυρτῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον τοῦτον καὶ τῶν ἀντιστοίχων περιγεγραμμένων.

Ὁ τύπος (2) ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ π ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου τούτου.

77. ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΚΥΚΛΟΥ.— Τετραγωνισμὸς δοθέντος κύκλου καλεῖται ἡ κατασκευὴ τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον.

Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν E_0 ἑνὸς κύκλου (Ο, R) εἶναι $E_0 = \frac{1}{2}\mathcal{T}\cdot R$, ἔπεται ὅτι ὁ κύκλος οὗτος εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ἴσην πρὸς τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τούτου καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα R αὐτοῦ. Ἐάν, ἐπομένως, ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τοιοῦτον, τρίγωνον θὰ ἐτετραγωνίζομεν τὸν κύκλον. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπὶ αἰῶνας ἀπησχόλησε τοὺς Μαθηματικοὺς ὅλου τοῦ Κόσμου. Μετὰ τὴν κατὰ τὸ ἔτος 1882 ἀπόδειξιν τοῦ Γερμανοῦ Μαθηματικοῦ Lindemann ὅτι ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ὑπερβατικός, μὴ ὢν ρίζα ἐξισώσεως μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, προέκυψεν ὅτι ἡ κατασκευὴ αὐτὴ εἶναι ἀδύνατος διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου. Ἄρα ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου εἶναι **ἀδύνατος.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

280. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου (Ο) εἶναι 5 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

281. Κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχει πλευρὰν $\alpha = 6$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

282. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει πλευρὰν $2\sqrt{3}$ m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

283. Τὸ ἀπόστημα κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $6\sqrt{3}$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

234. Δίδεται κύκλος (Ο, x). Ἄγομεν δύο χορδὰς αὐτοῦ ΑΒ = 8 cm καὶ ΑΓ = 6 cm καθέτους. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τούτου.

285. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΒ = 12 cm καὶ ΑΓ = 9 cm, ἄγομεν τὸ ὕψος ΑΔ. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ, ΑΔΒ ἐγγράφομεν κύκλους, τῶν ὁποίων ζητοῦνται τὰ ἐμβαδά.

286. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ γράφομεν κύκλους. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἄλλων κύκλων.

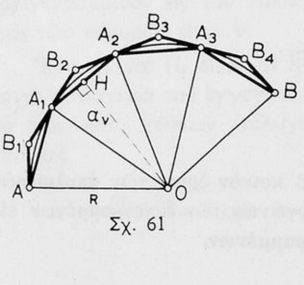
287. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι Ο ἀκτίνων R καὶ R_1, ἔνθα $R > R_1$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς στεφάνης καὶ νὰ συκριθῇ τοῦτο πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει διάμετρον χορδὴν τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἐφαπτομένην τοῦ μικροτέρου.

288. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν δύο δοθέντων κύκλων ἢ ὁσωνδήποτε κύκλων.

289. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἰσοδύναμος πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν δύο δοθέντων κύκλων.

78. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ.— Θεωροῦμεν κυκλικὸν τομέα ΑΟΒΑ, κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος R. α) Παραδεχόμεθα ὅτι ἕνας κυκλικὸς τομεὺς ἔχει ἐμβαδὸν ε_0.

β) Παραδεχόμεθα ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο ε_0 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κυρτοῦ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως καὶ μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς ἄλλου καν. πολυγωνικοῦ τομέως περιγεγραμμένου εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα.



Σχ. 61

Ἐγγράφομεν λοιπὸν εἰς τὸ τόξον ΑΒ τοῦ

τομέως μίαν κανονικὴν κυρτὴν τεθλασμένην γραμμὴν καὶ θεωροῦμεν τὴν ἀντίστοιχον περιγεγραμμένην τοιαύτην. Ἔστω ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτῶν.

Ἐὰν ϖ'_ν καὶ Π'_ν εἶναι αἱ περίμετροι αὐτῶν, α_ν τὸ ἀπόστημα τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ τ τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΒ, θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις : $\varpi'_\nu < \tau < \Pi'_\nu$ καὶ

ἄρα $$\varpi'_\nu \cdot \frac{R}{2} < \tau \cdot \frac{R}{2} < \Pi'_\nu \cdot \frac{R}{2} \quad ἢ \quad \frac{\varpi'_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < \varepsilon_0 < \frac{\Pi'_\nu \cdot R}{2} \qquad (1)$$

καὶ $$\frac{\varpi'_\nu \cdot \alpha_\nu}{2} < \frac{\tau \cdot R}{2} < \frac{\Pi'_\nu \cdot R}{2}. \qquad (2)$$

Ἐργαζόμενοι δὲ ὅπως καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου, ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{\tau \cdot R}{2}} \qquad (3)$$

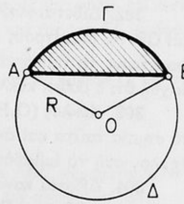
Ἐπειδὴ δέ : $\tau = \frac{\pi R \mu}{180}$ ὁ τύπος (3) γίνεται :

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{\pi R^2 \mu}{360}} \qquad (4)$$

79. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ.— Ἔστω κύκλος (Ο, R) καὶ χορδὴ αὐτοῦ ΑΒ, μὴ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου. Αὕτη χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἄνισα κυκλικὰ τμήματα, τό :

ΑΓΒΑ καλούμενον **ἔλασσον**

καὶ τὸ ΑΔΒΑ καλούμενον **μεῖζον.**



Σχ. 62

Ἐὰν ε_ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐλάσσονος καὶ ε_μ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μείζονος κυκλικοῦ τμήματος, θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\varepsilon_\varepsilon = (ΟΑΓΒ) - (ΟΑΒ)} \quad (1) \quad καὶ \quad \boxed{\varepsilon_\mu = (ΟΑΔΒΟ) + (ΟΑΒ)} \quad (2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

290. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 30° καὶ ἀκτῖνος 8 μ.

291. Ὁμοίως τοῦ τομέως 60° ἢ 120° ἢ 150° καὶ ἀκτῖνος 5 μ.

292. Κυκλικὸς τομεὺς ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{\pi}{3}$ m² καὶ βάσιν 30°. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει ὁ τομεύς.

293. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐλάσσονος τῶν κυκλικῶν τμημάτων, εἰς ἃ διαιρεῖται κύκλος ἀκτῖνος R ὑπὸ χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐν αὐτῷ ἐγγεγραμμένου α) τετραγώνου, β) ἰσοπλεύρου τριγώνου, γ) κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ δ) κανονικοῦ ὀκταγώνου.

294. Εἰς κύκλον (Ο,R) ἄγομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου κειμένας, καὶ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ.

295. Ἡ διάκεντρος δύο ἴσων κύκλων εἶναι $\delta = R\sqrt{3}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς αὐτῶν ἐπιφανείας.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

296. Δίδεται κύκλος (Ο, R) καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκτῖνος ΟΑ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΑ = ΑΒ. Ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΒΓ τοῦ κύκλου (Ο). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου χωρίου ΒΓΑΒ.

297. Συνδέομεν τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς τετραγώνου ΑΒΓΔ μὲ τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, ὅπερ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων, συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου.

298. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τετραγώνου πλευρᾶς α γράφομεν ἡμικύκλους κειμένους εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου τετραφύλλου.

299. Δίδεται τετράγωνον πλευρᾶς α. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha}{2}$ γράφομεν τεταρτοκύκλια εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραγώνου κείμενα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τετραγώνου.

300. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τόξα ἐσωτερικῶς τοῦ τετραγώνου κείμενα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τετραγώνου ΕΖΗΘ.

301. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ ἀκτῖνος R. Μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ γράφομεν ἡμικύκλους ἐσωτερικῶς τοῦ τεταρτοκυκλίου κειμένους καὶ τεμνομένους εἰς τὸ Κ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΚΑ.

302. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ μία διάμετρος αὐτοῦ ΑΟΒ. Ἔστωσαν Γ, Δ τὰ μέσα τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ. Μὲ διαμέτρους ΑΓ, ΑΟ, ΑΔ γράφομεν, ἐσωτερικῶς τοῦ ἄνω ἡμικύκλου, ἡμικύκλους καὶ μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΒΔ, ΒΟ, ΒΓ γράφομεν ἡμικύκλους πρὸς τὸν ἕτερον ἡμίκυκλον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ δοθεὶς κύκλος διαιρεῖται οὕτως εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.

303. Κύκλος (Ο,R) διαιρεῖται εἰς ἓξ ἴσα τόξα διὰ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τόξα ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ περατούμενα εἰς αὐτόν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου καμπυλογράμμου ἑξαφύλλου, καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ.

304. Δίδεται κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, κέντρου Ο καὶ πλευρᾶς α. Μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, . . ., ΟΖ γράφομεν ἡμικύκλους κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ΑΒ, . . . , Ζ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οὕτω σχηματιζομένου καμπυλογράμμου τριφύλλου.

305. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90^\circ$). Γράφομεν τὸν ἡμίκυκλον ΑΒΓ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ, ΑΓ γράφομεν ἡμικύκλους ἐκτὸς τοῦ τριγώνου κειμένους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν μηνίσκων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους).

306. Τραπεζίου ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐὰν x εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριγώνων ΑΕΔ, ΒΕΓ καὶ y, z τὰ ἐμβαδὰ τῶν ΑΕΒ, ΓΕΔ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(x)^2 = (y)\,(z).$$

307. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο,R) καὶ τὸ ἀντίστοιχον περιγεγραμμένον $A_1B_1\Gamma_1$ ἐμβαδῶν ἀντιστοίχως E_1 καὶ E_2. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, τότε :

$$E^2 = E_1 \cdot E_2.$$

308. Δίδεται τεταρτοκύκλιον ΟΑΒ, ἀκτῖνος ΟΑ = R. Μὲ διαμέτρους ΟΑ καὶ ΟΒ γράφομεν ἡμικύκλους, τεμνομένους εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ συγκριθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπυλογράμμων χωρίων ΟΓΟ καὶ ΓΒΑΓ.

309. Δίδεται τετράγωνον ΟΑΓΒ πλευρᾶς α. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ = α γράφομεν ἐντὸς τοῦ τετραγώνου τὸ τόξον ΑΒ. Εἰς τὸ μικτόγραμμον χωρίον ΓΑΒ ἐγγράφομεν κύκλον κέντρου O_1. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου (O_1).

310. Εἰς δοθέντα κύκλον (O, R) νὰ ἐγγραφοῦν τρεῖς ἴσοι κύκλοι, ἐφαπτόμενοι μεταξύ των καὶ τοῦ δοθέντος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων.

311. Τρεῖς ἴσοι κύκλοι, ἀκτῖνος R, ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου τριγώνου ΑΒΓ.

312. Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, πλευρᾶς 2α, γράφομεν ἡμικύκλους τεμνομένους ἀνὰ δύο ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου κατὰ τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου χωρίου ΔΕΖ, καὶ ἀκολούθως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ χωρίον τοῦτο.

313. Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, πλευρᾶς α, καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τὰ τόξα ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ (ἐλάχιστα). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ καμπυλόγραμμον τρίγωνον ΑΒΓ.

314*. Δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O_1, R_1) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἄγομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΓΔ αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ εἶναι ἴσοι. Ἔστω ρ ἡ ἀκτὶς αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1)\ \rho^2 = R \cdot R_1 \quad \text{καὶ} \quad 2)\ \frac{A\Gamma}{A\Delta} = \sqrt{\frac{R}{R_1}}.$$

315. Κύκλος ἀκτῖνος R νὰ διαιρεθῇ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν λ, μ, ν διὰ δύο ὁμοκέντρων κύκλων.

316. Κύκλος (Ο, ΟΑ = R) νὰ διαιρεθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν λ, μ, ν διὰ δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐσωτερικῶς εἰς τὸ Α τοῦ δοθέντος κύκλου.

317. Δίδεται κύκλος (O, R) καὶ μία διάμετρος αὐτοῦ ΑΟΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἓν σημεῖον Γ, τοιοῦτον ὥστε, ἂν μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΓΒ γραφοῦν ἡμίκυκλοι ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, νὰ διαιρεῖται ὁ κύκλος (Ο) εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

318. Κύκλος (O, R) διαιρεῖται ὑπὸ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ εἰς ἓξ ἴσα τόξα. Μὲ κέντρα τὰ Β, Δ καὶ ἀκτῖνα R γράφομεν τὰ τόξα ΓΟΑ καὶ ΓΟΕ. Μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΓΑ γράφομεν τὸ τόξον ΑΕ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου ΑΟΕΑ.

319*. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον Ο, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathcal{D}_0(K) = -\frac{1}{9}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

320*. Ἐὰν A_1, B_1, Γ_1 εἶναι τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (O, R), ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathcal{D}_0(A_1) + \mathcal{D}_0(B_1) + \mathcal{D}_0(\Gamma_1) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

321*. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ καὶ $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ αἱ δυνάμεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ὡς πρὸς τοὺς κύκλους ΚΒΓ, ΚΓΑ καὶ ΚΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = -\frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

322. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α = 90°), νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1\text{ον}: \quad \alpha + \beta + \gamma = \rho + \rho_1 + \rho_2 + \rho_3,$$
$$2\text{ον}: \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \rho^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2.$$

323. Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 8R^2.$$

Τί συμβαίνει, ἂν τὸ ΑΒΓ εἶναι ἀμβλυγώνιον ;

324. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

$$R \geqslant 2\rho \quad \text{καὶ} \quad \frac{4R + \rho}{\rho} \geqslant 9.$$

325. Ἐὰν δ, δ_1, δ_2, δ_3 εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ τὰ κέντρα Ι, Ι'. Ι'', Ι''' τῶν κύκλων ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγεγραμμένων εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ αὐτοῦ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1ον : $\delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 = 12\,R^2$.

2ον* : Ἐὰν α_1, α_2, α_3 εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου Ι' Ι'' Ι''', νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} + \frac{\beta^2}{\beta_1^2} + \frac{\gamma^2}{\gamma_1^2} + \frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha_1\beta_1\gamma_1} = 1.$$

3ον* : Ἐὰν x_1, x_2, x_3 εἶναι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς α, β, γ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{x_2} + \frac{\gamma}{x_3} = \frac{\alpha\beta\gamma}{4x_1\,x_2\,x_3}.$$

326*. Κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ πλευραὶ εἶναι α, β, γ, δ καὶ αἱ διαγώνιοί του λ, μ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδόν του S εἶναι :

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{4\lambda^2\mu^2 - (\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 - \delta^2)^2}.$$

327*. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\rho_1 = 2\rho_2 = 2\rho_3$, τότε $3\alpha = 4\beta$.

328*. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τότε αἱ ἀκτῖνες ρ_1, ρ_2, ρ_3 θὰ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

329*. Δύο κύκλοι (O, R) καὶ (O_1, R_1) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Ἐὰν d εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΓ αὐτῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $\dfrac{2}{d} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_1}$ καὶ 2) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν R καὶ R_1.

330. Τρεῖς κύκλοι (O_1, R_1); (O_2, R_2), (O_3, R_3) εἶναι ἐγγεγραμμένοι εἰς τὴν γωνίαν xyz, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ (O_2) ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῶν (O_1) καὶ O_2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $R_2^2 = R_1 \cdot R_3$.

331. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (O, R). Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, τότε :

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = ct.$$

332. Ἂν κανονικοῦ ὀκταγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘ ἀχθοῦν αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΔΗ, ΗΒ, ΒΕ, ΕΘ, ΘΓ, ΓΖ, ΖΑ, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι κορυφαὶ δύο ἄλλων κανονικῶν ὀκταγώνων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἑκατέρου, συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τοῦ περὶ τὸ δοθὲν ὀκτάγωνον περιγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν δὲ E_1, E_2, E_3 εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τοῦ ἀρχικοῦ καὶ τῶν νέων, τότε :

$$E_1 \cdot E_3 = 2E_2^2.$$

333*. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα ταῦτα γράφομεν τρεῖς κύκλους τεμνομένους ὀρθογωνίως ἀνὰ δύο. Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ R_α, R_β, R_γ αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐν λόγῳ κύκλων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $R_\alpha^2 = \dfrac{1}{2}(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$, $R_\beta^2 = \dfrac{1}{2}(\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2)$, $R_\gamma^2 = \dfrac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)$

2) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ συναρτήσει τῶν R_α, R_β, R_γ.

334*. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ κέντρον βάρους τριγώνου ΑΒΓ καὶ R, R_1, R_2, R_3 αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΚΒΓ ΚΓΑ, ΚΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $R^2 = R_1^2 = R_2 \cdot R_3$ καὶ 2) ὅτι ὁ κύκλος ΚΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ ΑΒΓ, ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ ΑΒΓ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$.

335. Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $|\Gamma - B| = 90^0$, τότε :

$$\delta_1 = d_1 = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} = \upsilon_1\sqrt{2}.$$

336*. Ἐὰν Ο καὶ Ι εἶναι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, περιγεγραμμένου καὶ ἐγγεγραμμένου, εἰς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\rho + \rho_1 = 2R$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΟΙ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

337*. Ἵνα εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ὁ Ἀπολλώνιος κύκλος, ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς τὴν κορυφὴν Α, ἰσοῦται πρὸς τὸν κύκλον ΑΒΓ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ γωνία $(\mu_1, \upsilon_1) = \frac{\pi}{4}$.

338*. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως. Ἐὰν λ, μ, ν εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ Λ Μ Ν καὶ α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha(\tau-\alpha)}{\lambda^2} = \frac{\beta(\tau-\beta)}{\mu^2} = \frac{\gamma(\tau-\gamma)}{\nu^2}.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

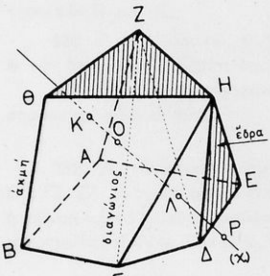
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

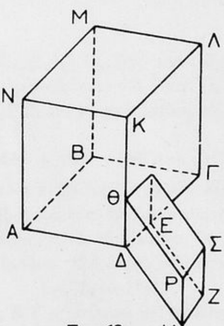
ΠΟΛΥΕΔΡΑ

80. ΟΡΙΣΜΟΣ*.—Πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται ἓν πεπερασμένον Σύνολον ἐπιπέδων κλειστῶν πολυγώνων, τοιούτων ὥστε ἕκαστον νὰ ἔχῃ μὲ ἓν ἄλλο κοινὴν πλευρὰν ἢ τμῆμα ἐσωτερικοῦ πλευρᾶς, ἑκάστη δὲ κοινὴ πλευρὰ ἢ κοινὸν τμῆμα ἐσωτερικοῦ πλευρᾶς νὰ ἀνήκῃ εἰς δύο πολύγωνα τοῦ Συνόλου.

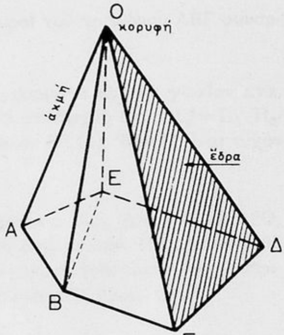
Τὰ πολύγωνα καλοῦνται **ἕδραι**, αἱ δὲ πλευραὶ **ἀκμαὶ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας. Εἰς τὸ (σχ. 63) τὸ πολύγωνον ΘΒΓΗ εἶναι μία ἕδρα καὶ ἡ πλευρὰ ΒΘ ἡ ἀκμὴ τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας. Αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων τούτων εἶναι **αἱ κορυφαὶ** τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 63



Σχ. 63α



Σχ. 64

Διαγώνιος πολυεδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο κορυφὰς αὐτῆς μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας. Οὕτω, τὸ τμῆμα ΓΖ εἶναι μία διαγώνιος.

Διαγώνιον ἐπίπεδον πολυέδρου καλεῖται πᾶν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τρεῖς κορυφὰς μὴ ἀνηκούσας εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν. Οὕτω, τὸ ἐπίπεδον ΟΒΕ (σχ. 64) εἶναι διαγώνιον ἐπίπεδον.

Σημεῖα τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι τὰ **ἐσωτερικὰ** τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν αὐτῆς.

Ὅταν λέγωμεν **ἐπίπεδον τομὴν** μιᾶς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, νοοῦμεν τὴν

* Οὗτος ἐλήφθη ἐκ τοῦ βιβλίου «Παραστατικὴ Γεωμετρία» τοῦ καθηγ. τοῦ Ε.Μ.Π. κ. Π. Λαδοπούλου.

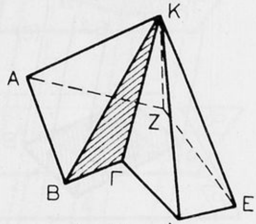
τομὴν τῶν ἐσωτερικῶν τῶν ἑδρῶν καὶ τῶν ἀκμῶν αὐτῆς ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ὄχι τῶν προεκτάσεων τῶν ἑδρῶν ἢ τῶν ἀκμῶν.

Ἓν ἐπίπεδον (Π) θὰ λέγωμεν ὅτι τέμνει ἢ δὲν τέμνει μίαν ἕδραν (ε) τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφανείας, ἐφ' ὅσον ἡ εὐθεῖα τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας (ε) μετὰ τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἔχει ἢ δὲν ἔχει τμῆμα της ἐντὸς τοῦ πολυγώνου τῆς ἕδρας (ε).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Πολύεδρον καλεῖται ἡ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ εἶναι κλειστὸν πολύγωνον ἢ κλειστὰ πολύγωνα.

Εἰδικῶς, ἓν **πολύεδρον καλεῖται κυρτόν, ἐὰν πᾶσα ἐπίπεδος τομὴ αὐτοῦ εἶναι κυρτὸν πολύγωνον.**



Σχ. 65

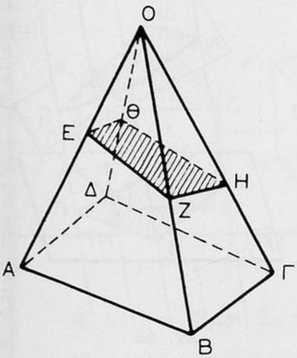
Εἰς τὸ (σχ. 65) ἔχομεν ἓν **μὴ κυρτὸν** πολύεδρον. Ἀποδεικνύεται ὅτι : **Πᾶν μὴ κυρτὸν πολύεδρον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς κυρτὰ πολύεδρα.**

Θεωροῦμεν τὸ πολύεδρον (Π) τοῦ (σχ. 63) καὶ τυχὸν σημεῖον Ο μὴ κείμενον ἐπὶ ἕδρας τοῦ (Π). Τὸ σημεῖον Ο λέγεται **ἐσωτερικὸν** τοῦ (Π), ἐφ' ὅσον ἐπὶ ἑκάστης διὰ τοῦ Ο εὐθείας (x), τὸ σημεῖον Ο κεῖται μεταξύ, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως, τῶν σημείων τομῆς της μὲ τὸ (Π), ἄλλως καλεῖται **ἐξωτερικόν.** Ἐν τοῖς ἀκολούθοις θὰ ἀναφερόμεθα μόνον εἰς κυρτὰ πολύεδρα.

Ἐὰν Ο ἐσωτ. καὶ Ρ ἐξωτερικὸν $\Longrightarrow \exists$ Λ τοῦ πολυέδρου μεταξὺ Ο καὶ Ρ.

Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν των τὰ πολύεδρα λαμβάνουν τὰ ἀκόλουθα ὀνόματα : **Τετράεδρον** (4 ἕδραι), **πεντάεδρον** (5 ἕδραι), **ἑξάεδρον** (ἓξ ἕδραι), **ὀκτάεδρον** (8 ἕδραι), **δωδεκάεδρον** (12 ἕδραι), **εἰκοσάεδρον** (20 ἕδραι),. . . , **ν-εδρον**(ν ἕδραι).

Τὸ ἁπλούστερον τῶν πολυέδρων εἶναι τὸ τ ε τ ρ ά ε δ ρ ο ν.



Σχ. 66

Ἑκάστη ἀκμὴ τοῦ κυρτοῦ ν-έδρου εἶναι ἀκμὴ μιᾶς διέδρου γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι περιέχουν ἀντιστοίχως τὰς ἕδρας τοῦ ν-έδρου, καὶ εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκει ἡ θεωρουμένη ἀκμή.

Οὕτως, ἡ κυρτὴ δίεδρος γωνία Γ-ΑΒ-Ζ (σχ. 63) εἶναι μία δίεδρος γωνία τοῦ πολυέδρου.

Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ ν-έδρου ἀνήκει εἰς τὸ ἐσωτερικὸν οἱασδήποτε διέδρου γωνίας αὐτοῦ.

Ἑκάστη κορυφὴ ν-έδρου εἶναι κορυφὴ μιᾶς **πολυεδρικῆς γωνίας.** Οὕτως, ἂν Α εἶναι ἡ κορυφὴ ν-έδρου καὶ Β, Γ, Δ, . . . , Χ τὰ ἄκρα τῶν ἄλλων ἀκμῶν αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄκρον τὸ Α, τότε ἡ πολύεδρος γωνία Α—ΒΓΔ . . . Χ καλεῖται **πολύεδρος γωνία** τοῦ ν-έδρου. Τὸ πλῆθος τῶν πολυέδρων γωνιῶν ν-έδρου ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ.

Εἰς τὸ (σχ. 66) ἔχομεν μίαν τομὴν ΕΖΗΘ τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου ΟΑΒΓΔ.

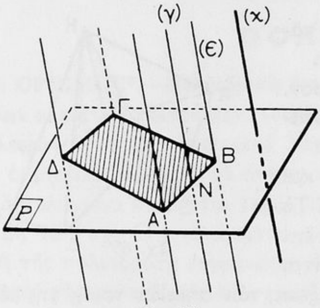
6

Μία εὐθεῖα τέμνουσα κυρτὸν ν-εδρον, τέμνει αὐτὸ εἰς δύο μόνον σημεῖα Κ, Λ (σχ. 63). Διότι, ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, ἡ τομὴ ἡ διερχομένη δι' αὐτῆς θὰ ἦτο μὴ κυρτὸν πολύγωνον, ὅπερ ἄτοπον.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΥΤΩΝ

81. ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ.— Ἐπὶ ἐπιπέδου (P) θεωροῦμεν πολύγωνον, ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καὶ εὐθεῖαν (x) τέμνουσαν τὸ ἐπίπεδον (P).

Καλοῦμεν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν τὸ Σύνολον τῶν εὐθειῶν (γ), τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (χ), καὶ διερχομένων διὰ σημείου τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔ.



Σχ. 67

Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν (γ) ὀνομάζεται **γενέτειρα** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.

Ἰδιαιτέρως, αἱ γενέτειραι αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου καλοῦνται **ἀκμαὶ** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας. Αἱ μεταξὺ τῶν ἀκμῶν περιλαμβανόμεναι ἐπιφάνειαι ὀνομάζονται **ἕδραι** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.

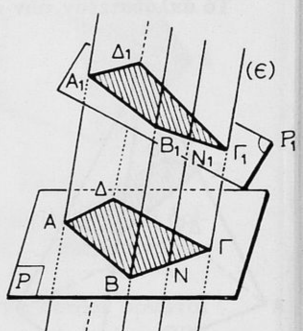
Ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΒΓΔ καλεῖται **ὁδηγός.**

Μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **κυρτή,** ὅταν ὁ ὁδηγὸς εἶναι κυρτὸν πολύγωνον, ἄλλως καλεῖται **μὴ κυρτή.**

82. ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΤΟΜΑΙ ΠΡΙΣΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.— Δοθείσης μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας (Ε), θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P_1) τέμνον μίαν τῶν ἀκμῶν αὐτῆς. Τὸ (P_1), ὡς γνωστόν, θὰ τέμνῃ καὶ τὰς ἄλλας ἀκμὰς αὐτῆς, καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ τέμνῃ καὶ πάσας τὰς ἕδρας αὐτῆς κατὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

Τὸ Σύνολον τῶν κοινῶν σημείων τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P_1) εἶναι ἐπίπεδον πολύγωνον.

Οὕτω, τὸ πολύγωνον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἡ τομὴ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας (Ε) ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου (P_1), (σχ. 68).



Σχ. 68

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (P) εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν ἀκμῶν τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἄλλας ἀκμὰς αὐτῆς καὶ καλεῖται **κάθετος τομή.**

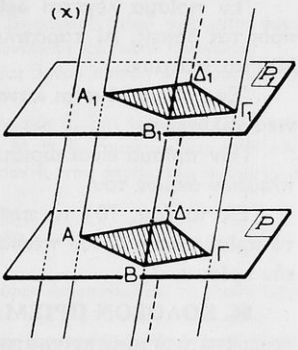
Ὥστε : **Κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας καλεῖται πᾶσα τομὴ αὐτῆς, κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν ἀκμῶν της.**

Οὕτως, ἡ τομὴ ΑΒΓΔ (σχ. 68) εἶναι κάθετος τομὴ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας (Ε).

Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (P) δὲν εἶναι οὔτε κάθετον, οὔτε παράλληλον πρὸς τὰς ἀκμάς, ἡ τομὴ καλεῖται **πλαγία**.

83. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, μὴ παραλλήλων πρὸς τὰς ἀκμάς της, εἶναι πολύγωνα ἴσα.

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ δύο παράλληλοι ἐπίπεδοι τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας. Τὰ τμήματα $ΑΑ_1$ καὶ $ΒΒ_1$ εἶναι ἴσα, ὡς παράλληλα περιεχόμενα μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. Ἀλλὰ καὶ τὰ τμήματα ΑΒ καὶ $Α_1Β_1$ εἶναι παράλληλα, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Ἄρα τὸ σχῆμα $ΑΒΒ_1Α_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Συνεπῶς $ΑΒ = Α_1Β_1$. Ὁμοίως εἶναι καί :



Σχ. 69

$$ΒΓ = Β_1Γ_1, \quad ΓΔ = Γ_1Δ_1 \quad \text{καὶ} \quad ΔΑ = Δ_1Α_1.$$

Αἱ γωνίαι ΒΑΔ καὶ $Β_1Α_1Δ_1$ εἶναι ἴσαι, διότι αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι.

Ὁμοίως εἶναι καί :

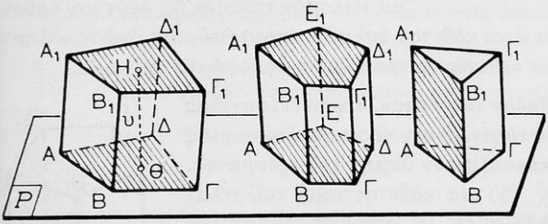
$$\sphericalangle ΑΒΓ = \sphericalangle Α_1Β_1Γ_1, \quad \sphericalangle ΒΓΔ = \sphericalangle Β_1Γ_1Δ_1, \quad \sphericalangle ΓΔΑ = \sphericalangle Γ_1Δ_1Α_1$$

Κατ' ἀκολουθίαν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι ἴσα.

84. ΠΟΡΙΣΜΑ.— Κάθετοι τομαὶ πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσαι.

Διότι εἶναι παράλληλοι τομαί. Ἄρα ἴσαι.

85. ΠΡΙΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΥΤΩΝ.— Πρῖσμα εἶναι τὸ πολύεδρον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τομῶν αὐτῆς.



Σχ. 70 Σχ. 71 Σχ. 72

Αἱ τομαὶ εἶναι αἱ **βάσεις** τοῦ πρίσματος. Ἡ ἀπόστασις ΗΘ τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τοῦ πρίσματος. Οὕτω τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος ($ΒΔ_1$) καὶ τὸ τμῆμα ΗΘ εἶναι τὸ ὕψος του.

Αἱ λοιπαὶ ἕδραι, ὡς ἡ $ΑΒΒ_1Α_1$, εἶναι αἱ **παράπλευροι** ἕδραι τοῦ πρίσματος.

Εἶναι δὲ προφανῶς παραλληλόγραμμα, διότι $\overrightarrow{ΑΑ_1} = \overrightarrow{ΒΒ_1}$.

Τὸ σύνολον τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τοῦ πρίσματος καλεῖται **παράπλευρος ἐπιφάνεια** τοῦ πρίσματος.

Αἱ ἀκμαί, ὡς ἡ $ΑΑ_1$, αἱ μὴ κείμεναι ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῆς βάσεως, εἶναι αἱ

παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος καὶ εἶναι **ἴσαι** πρὸς ἀλλήλας, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμων.

Ἓν πρῖσμα θὰ λέγεται **τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικόν, ἑξαγωνικόν**, . . ., ὅταν αἱ βάσεις του εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, ἑξάγωνα, . . .

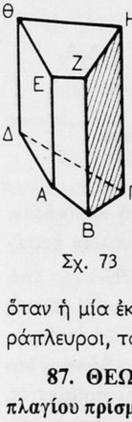
Ἓν πρῖσμα λέγεται **ὀρθόν,** ἂν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις. Αἱ παράπλευροι ἕδραι του εἶναι **ὀρθογώνια.** Ἄλλως τὸ πρῖσμα λέγεται **πλάγιον.**

Ἓν πρῖσμα λέγεται **κανονικόν,** ἐὰν εἶναι ὀρθὸν καὶ αἱ βάσεις του εἶναι **κανονικὰ πολύγωνα.**

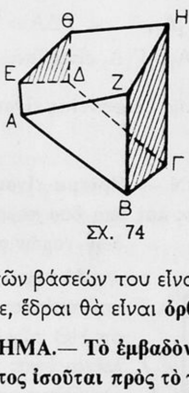
Πᾶν πρῖσμα εἶναι ὡρισμένον διὰ μιᾶς τῶν βάσεών του καὶ μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

Εἰς τὸ (σχ. 70) τὸ πρῖσμα εἶναι πλάγιον τετραγωνικόν. Εἰς τὸ (σχ. 71) τὸ πρῖσμα εἶναι ὀρθὸν πενταγωνικόν. Τὸ (σχ. 72) παριστᾷ κανονικὸν τριγωνικὸν πρῖσμα.

86. ΚΟΛΟΒΟΝ ΠΡΙΣΜΑ.— Κολοβὸν πρῖσμα καλεῖται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ μίαν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν, ὅταν αὕτη τμηθῇ ὑπὸ δύο μὴ παραλλήλων ἐπιπέδων.



Σχ. 73



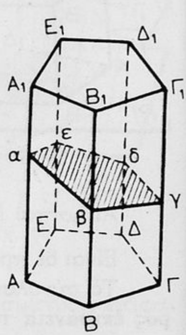
Σχ. 74

Ἕδραι τοῦ πολυέδρου τούτου θὰ εἶναι αἱ δύο ἐπίπεδοι τομαὶ ΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ (σχ. 73) καὶ αἱ λοιπαί, ὡς ἡ ΒΓΗΖ, τραπέζια. Αἱ τομαὶ ΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ εἶναι **αἱ βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

Εἶναι δυνατὸν αἱ παράπλευροι ἕδραι (τινὲς) ἑνὸς κολοβοῦ πρίσματος νὰ εἶναι καὶ τρίγωνα, ὡς τὰ ΑΒΖ καὶ ΕΔΘ (σχ. 74).

Ἓν κολοβὸν πρῖσμα θὰ λέγεται **ὀρθόν,** ὅταν ἡ μία ἐκ τῶν βάσεών του εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμάς. Αἱ παράπλευροι, τότε, ἕδραι θὰ εἶναι **ὀρθογώνια τραπέζια** ἢ **ὀρθογώνια τρίγωνα.**

87. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πλαγίου πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πρίσματος.



Σχ. 75

Λύσις : Ἔστω αβγδε (σχ. 75) μία κάθετος τομὴ τοῦ πλαγίου πρίσματος ($A\Delta_1$). Αἱ πλευραὶ αβ, . . ., εα τῆς τομῆς εἶναι τὰ ὕψη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν (παραλληλογράμμων). Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τούτου θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν.

Δηλ. $E = (\alpha\beta)\cdot\lambda + (\beta\gamma)\cdot\lambda + (\gamma\delta)\cdot\lambda + (\delta\varepsilon)\cdot\lambda + (\varepsilon\alpha)\cdot\lambda$
$= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha)\,\lambda = \varpi\cdot\lambda$

ἤτοι : $\boxed{\mathbf{E} = \varpi\cdot\lambda}$

ἔνθα ω παριστᾷ τὴν περίμετρον τῆς καθέτου τομῆς τοῦ πλαγίου πρίσματος καὶ λ εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

339. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

340. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους 3α καὶ ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἢ τετράγωνον ἢ κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α.

341. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους 2α, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ῥόμβος διαγωνίων α καὶ 3α.

342. Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ, τοιαῦτα ὥστε: ΑΜ = 4α, ΒΝ = 3α, ΓΡ = 2α. Τὸ ἐπίπεδον ΜΝΡ τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Κ τὴν ἀκμὴν τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Δ.

1ον: Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου ΜΝΡΚ.

2ον: Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ ΜΝΡΚ.

3ον: Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμῆμα ΔΚ.

4ον: Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καὶ τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς κολοβοῦ πρίσματος.

5ον: Νὰ γίνῃ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καθὼς καὶ τῆς ὁλικῆς τοιαύτης τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

343. Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΜ = α, ΒΝ = 2α καὶ ΓΡ = x.

1ον: Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ὥστε τὸ τρίγωνον ΜΝΡ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον: Τοῦ x ὁρισθέντος, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓΜΝΡ.

3ον: Νὰ γίνῃ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τούτου.

344. Εἰς πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν διαγωνίων.

345. Νὰ εὑρεθῇ: Διὰ ποῖα διαγώνια ἐπίπεδα ὀρθοῦ πρίσματος τεμνόμενα, ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι κάθετος πρὸς τὰς βάσεις του.

346. Εἰς ἓν τριγωνικὸν πρῖσμα νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1ον: Ἂν δύο παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

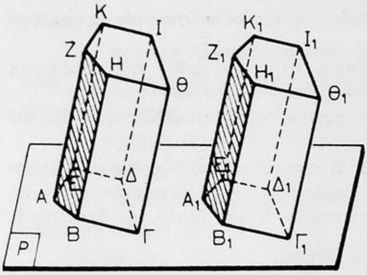
2ον: Ἐὰν δύο ἕδραι εἶναι ἄνισοι, αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι.

88. ΟΡΙΣΜΟΙ.— Δύο πολύεδρα θὰ λέγωνται ὁμόλογα, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῶν ὁμωνύμων στοιχείων αὐτῶν.

Ἐὰν δύο πολύεδρα ἔχουν τριγωνικὰς ἕδρας τοῦ αὐτοῦ πλήθους, τετραγωνικὰς ἕδρας τοῦ αὐτοῦ πλήθους, πενταγωνικὰς ἕδρας τοῦ αὐτοῦ πλήθους, . . ., τὰ πολύεδρα δύνανται νὰ καταστοῦν ὁμόλογα.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΙΣΑ.— Δύο ἁπλᾶ ν-εδρα θὰ λέγωνται ἴσα, ὅταν κατὰ μίαν ἀντιστοιχίαν (ἀπεικόνισιν κορυφῶν) **αἱ ἕδραι καὶ αἱ πολύεδροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ καὶ ἀντιστοίχως ἴσαι.**

Εἰς τὸ (σχ. 76) ἔχομεν δύο πρίσματα (ΑΘ) καὶ ($Α\Theta_1$), τὰ ὁποῖα ἔχουν τρεῖς ἕδρας ΑΒΓΔΕ, ΑΒΗΖ καὶ ΑΕΚΖ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἕδρας $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1$, $A_1B_1H_1Z_1$ καὶ $A_1E_1K_1Z_1$ καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.



Σχ. 76

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὰ περὶ ἰσότητος διέδρων καὶ τριέδρων γωνιῶν, συνάγομεν ὅτι αἱ τρίεδροι γωνίαι Α καὶ A_1 θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ΒΗ, ΓΘ, ΔΙ, ΕΚ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς B_1H_1, $\Gamma_1\Theta_1$, Δ_1I_1, E_1K_1 καὶ ἴσαι, ἕπεται ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ τρίεδροι γωνίαι τῶν δύο πρισμάτων εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἕδραι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ. Ἄρα τὰ πρίσματα εἶναι ἴσα.

Ἐντεῦθεν ἕπονται αἱ προτάσεις :

89. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.— Δύο κολοβὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν τρεῖς ἕδρας μὲ τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

90. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.— Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

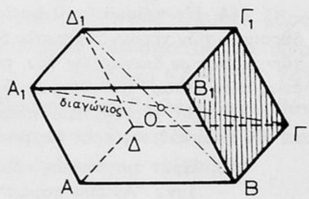
Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τούτου δὲν ἀπαιτεῖται προσανατολισμός.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΙ ΕΙΔΗ ΑΥΤΩΝ

91. ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ.— Παραλληλεπίπεδον καλεῖται τὸ πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι παραλληλόγραμμον.

Προφανῶς ἡ ἄλλη βάσις καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι παραλληλόγραμμα. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα παραλληλεπίπεδον, ἀρκεῖ ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ νὰ φέρωμεν τὰ τμήματα AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$, $\Delta\Delta_1$ παράλληλα, ἴσα καὶ ὁμόρροπα.

Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει ἓξ ἕδρας, **ὀκτὼ** κορυφάς, **δώδεκα** ἀκμὰς καὶ **τέσσαρας** διαγωνίους.



Σχ. 77

92. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΥ.— 1ον : Πᾶσαι αἱ ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα.

Πράγματι, ἀφοῦ ἡ βάσις εἶναι παραλληλόγραμμον, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πρίσματος καὶ ἡ ἀπέναντι ἕδρα θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι ἴσαι, καὶ αἱ λοιποὶ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἐάν, λοιπόν, πᾶσαι αἱ ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα, τοῦτο καλεῖται **πλάγιον** παραλληλεπίπεδον (σχ. 77).

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι : **Αἱ ἀκμαὶ παραλληλεπιπέδου, ἀνὰ τέσσαρες, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι :**

Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 77) θὰ εἶναι :

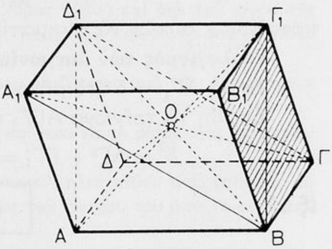
$$A B = \Gamma\Delta = \Gamma_1\Delta_1 = A_1B_1 \text{ καὶ παράλληλοι}$$
$$AA_1 = BB_1 = \Gamma\Gamma_1 = \Delta\Delta_1 \quad » \quad »$$
$$A\Delta = B\Gamma = B_1\Gamma_1 = A_1\Delta_1 \quad » \quad »$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι : **Αἱ ἀπέναντι ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι,** καὶ κατ' ἀκολουθίαν δύνανται νὰ χρησιμεύσουν ὡς βάσεις αὐτοῦ, καθόσον εἶναι καὶ παράλληλοι.

Πᾶν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὡρισμένον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου γωνίας αὐτοῦ, π.χ. τάς : ΑΒ, ΑΔ, AA_1 (σχ. 77).

2ον : Αἱ τέσσαρες διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.

Πράγματι, ἐπειδὴ τὰ τμήματα ΒΓ καὶ $A_1\Delta_1$ εἶναι παράλληλα, ὁμόρροπα καὶ ἴσα, τὸ τετράπλευρον $B\Gamma\Delta_1A_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο. Δηλαδὴ $O\Gamma = OA_1$ καὶ $OB = O\Delta_1$.



Σχ. 78

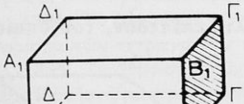
Ἀλλὰ καὶ τὸ τετράπλευρον $A\Delta_1\Gamma_1B$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα αἱ διαγώνιοί του $B\Delta_1$, $A\Gamma_1$ διχοτομοῦνται. Ἄρα αἱ διαγώνιοι $A_1\Gamma$, $B\Delta_1$, $A\Gamma_1$ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Ο. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ διχοτομεῖται ἀπὸ τοῦτο.

Ἡ τομὴ Ο τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ὀνομάζεται **κέντρον** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

3ον : Πότε ἐπίπεδος τομὴ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμον;

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος.

93. ΟΡΘΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ.— Ἓν παραλληλεπίπεδον καλεῖται ὀρθόν, ἐὰν μία παράπλευρος ἀκμή του εἶναι κάθετος πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.



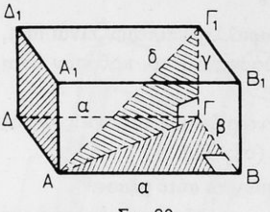
Σχ. 79

Εἰς τὸ παραπλεύρως παραλληλεπίπεδον αἱ βάσεις ΑΒΓΔ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ AA_1 εἶναι κάθετος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ. Ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι παράπλευροι ἀκμαὶ BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ καὶ $\Delta\Delta_1$ θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, αἱ παράπλευροι ἕδραι θὰ εἶναι ὀρθογώνια. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ παραλληλεπίπεδον καλεῖται **ὀρθόν.**

Τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ πλαγίου, μὲ πλεονάζουσαν ἰδιότητα ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι **ὀρθογώνια.**

94. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ.— Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ὀρθογώνια.

Αἱ ἓξ ἕδραι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνια. Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὡρισμένον διὰ τῶν μηκῶν τῶν τριῶν ἀκμῶν, τῶν ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, ἔστω τῆς Γ. Τὰ μήκη τῶν ἀκμῶν τούτων



Σχ. 80

$ΓΒ = β$, $ΓΔ = α$ καὶ $ΓΓ_1 = γ$ καλοῦνται **διαστάσεις** τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἡ μία τούτων καλεῖται **μῆκος,** ἡ ἄλλη **πλάτος** καὶ ἡ τρίτη **ὕψος** ἢ **βάθος.**

Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν ἕδραν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, καὶ τέμνον αὐτό, τὸ διαιρεῖ εἰς δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα.

Ἀντιστρόφως, ὅταν δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην, δυνάμεθα δι᾽ ἐπιπροσθέσεως αὐτῶν νὰ σχηματίσωμεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Ὑπολογισμὸς τῶν διαγωνίων ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

Ἔστω $ΑΓ_1 = δ$ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου $ΑΓ_1$. Ἄγομεν τὴν ΑΓ.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $ΑΓΓ_1$ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνια, θὰ ἔχωμεν :

$$δ^2 = ΑΓ^2 + ΓΓ_1^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2 + ΓΓ_1^2 = α^2 + β^2 + γ^2$$

ἐξ οὗ :

$$\boxed{δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι : $δ_1 = δ_2 = δ_3 = δ = \sqrt{α^2 + β^2 + γ^2}$. (1)

Ἄρα : **Τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄρθοισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.**

Ἐκ τῆς (1) φαίνεται ὅτι :

Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

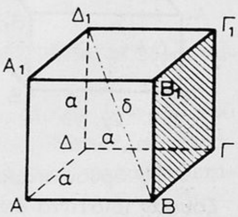
Διότι τὰ διαγώνια ἐπίπεδα εἶναι ὀρθογώνια, ὡς ἔχοντα τὰς διαγωνίους των ἴσας κλπ.

95. Ο ΚΥΒΟΣ.— Κύβος εἶναι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι :

Αἱ ἓξ ἕδραι του εἶναι τετράγωνα πλευρᾶς α. Ἡ πλευρὰ α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου. Ὁ κύβος καλεῖται καὶ **κανονικὸν ἑξάεδρον.**

Ὁ κύβος ἔχει τὰς ἰδιότητας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐπὶ πλέον δὲ ἔχει τὰς ἕδρας του τετράγωνα καὶ ὅλας τὰς ἀκμάς του ἴσας.

Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου, τότε ἡ διαγώνιός του εἶναι :



Σχ. 81

$$δ^2 = α^2 + β^2 + γ^2 = α^2 + α^2 + α^2 = 3α^2, \text{ ἐξ οὗ : } \boxed{δ = α\sqrt{3}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

348. Πᾶν πρῖσμα ἔχον βάσιν τετράπλευρον καὶ τὰς ἀπέναντι παραπλεύρους ἕδρας παραλλήλους, εἶναι παραλληλεπίπεδον.

349. Ἡ βάσις πρίσματος εἶναι τετράπλευρον, αἱ δὲ δύο παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πρῖσμα τοῦτο εἶναι παραλληλεπίπεδον.

350. Πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν παραλληλεπιπέδου καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου.

351. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι παραλλήλων ἀκμῶν παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.

352. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.

353. Δύο κάθετα εὐθύγραμμα τμήματα ἀγόμενα ἐκ τοῦ κέντρου παραλληλεπιπέδου καὶ περατούμενα εἰς τὰς ἀπέναντι ἕδρας αὐτοῦ, εἶναι κορυφαὶ ρόμβου.

354. Ἐπίπεδον διέρχεται ἀπὸ μίαν διαγώνιον μιᾶς ἕδρας κύβου καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι παραλλήλου ἀκμῆς αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῆς τομῆς τοῦ κύβου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

355. Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῆς τομῆς κύβου ὑπὸ ἐπιπέδου ὁριζομένου ὑπὸ τῶν ἄκρων τριῶν ἀκμῶν αὐτοῦ, ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

356. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ κύβου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον μιᾶς διαγωνίου του εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

357. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπὸ ἐπίπεδον μὴ τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου του ἀπὸ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

358. Νὰ σπουδασθῇ τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου ἀκμῆς α.

359. Ἡ διαγώνιος κύβου εἶναι $8\sqrt{3}$ m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

360. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κύβου εἶναι $150\ m^2$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ.

361. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $\alpha = 7$ cm, $\beta = 24$ cm καὶ $\gamma = 60$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος δ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

362. Εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι $\alpha = 15$ m, $\beta = 20$ m καὶ $\delta = 313$ m. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική του ἐπιφάνεια.

363. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4, 5, 6 καὶ ὅτι τὸ ὁλικὸν ἐμβαδόν του εἶναι $1332\ m^2$.

364. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.

365. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου ἀπὸ τὰς κορυφὰς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, ηὐξημένον κατὰ τὸ ἥμισυ το ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

366. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἓξ διαγωνίων ἐπιπέδων τομῶν παραλληλεπιπέδου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν του.

367. Διὰ τοῦ μέσου τῆς ἀκμῆς ΒΓ παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἄγομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ $ΒΔΑ_1$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι ἑξάγωνον καὶ νὰ σπουδασθοῦν αἱ ἰδιότητες τῆς τομῆς.

368. Δίδεται κύβος $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἀκμῆς α. 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν διαγώνιον $ΑΓ_1$. 2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον $ΒΔΑ_1$ εἶναι ἰσόπλευρον. 3) Ὅτι τὸ ἐπίπεδον $ΒΔΑ_1$ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν $ΑΓ_1$ καὶ 4) Ὅτι ἡ προβολὴ τοῦ κύβου ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν $ΑΓ_1$ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

369. Δίδεται κύβος $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ ἀκμῆς α. Τέμνομεν τὸν κύβον ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸ ἐπίπεδον $ΒΔΑ_1$ καὶ διερχομένου διὰ τοῦ μέσου τῆς ΒΓ. 1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον. 2) Ὅτι ἡ $ΑΓ_1$ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου τούτου καὶ 3) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου τούτου συναρτήσει τοῦ α.

370. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ = 2α, ΒΓ = α καὶ ὑψοῦμεν τὰς καθέτους $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$ καὶ $ΔΔ_1$ πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου. Διὰ τοῦ Α ἄγομεν ἐπίπεδον τέμνον τὴν σχηματισθεῖσαν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν. Ὑπὸ ποίας συνθήκας ἡ τομὴ εἶναι 1) ὀρθογώνιον, 2) ρόμβος καὶ 3) τετράγωνον ;

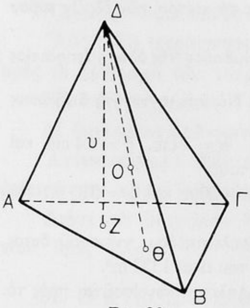
371. Παραλληλεπιπέδου $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ αἱ ἕδραι $ΑΒΒ_1Α_1$ καὶ $ΑΔΔ_1Α_1$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 1) Ἡ κάθετος τομὴ αὐτοῦ, κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν $ΑΑ_1$ εἶναι ρόμβος. 2) τὰ διαγώνια ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν $ΑΑ_1$ καὶ $ΒΒ_1$ εἶναι κάθετα πρὸς τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων $ΑΑ_1$ καὶ $ΒΒ_1$. 3) Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπέχει ἰσάκις τῶν τεσσάρων ἑδρῶν, τῶν περιεχουσῶν τὴν $ΑΑ_1$ ἢ παραλλήλων πρὸς τὴν $ΑΑ_1$.

372. Δίδεται παραλληλεπίπεδον $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$. Διὰ τῶν σημείων Β, Δ, $Α_1$ ἄγομεν ἐπίπεδον τέμνον τὸ παραλληλεπίπεδον κατὰ τὸ τρίγωνον $ΒΔΑ_1$. 1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον $ΑΔΓ_1$ τέμνει τὸ $ΒΔΑ_1$ κατὰ τὴν διάμεσον τοῦ τριγώνου $ΒΔΑ_1$. 2) Ὅτι ἡ $ΑΓ_1$ τέμνει τὸ ἐπίπεδον $ΒΔΑ_1$ κατὰ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου $ΒΔΑ_1$.

ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ — ΠΥΡΑΜΙΣ

96. ΟΡΙΣΜΟΣ.— Θεωροῦμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Καλοῦμεν τετράεδρον τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου ἕδραι εἶναι τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ καὶ ΔΓΑ.



Σχ. 82

Τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι αἱ **κορυφαὶ** τοῦ τετραέδρου, τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ εἶναι αἱ **ἀκμαὶ** τοῦ τετραέδρου καὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα : ΑΒΓ, ΔΑΒ, ΔΒΓ, ΔΓΑ εἶναι αἱ **ἕδραι** τοῦ τετραέδρου.

Ἡ ἀπόστασις ἑκάστης κορυφῆς ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὰς τὰς ἄλλας τρεῖς κορυφὰς τοῦ τετραέδρου (**ἀπέναντι ἕδρας**), καλεῖται **ὕψος** τοῦ τετραέδρου.

Εἰς ἑκάστην ἕδραν τοῦ τετραέδρου ἀντιστοιχεῖ ἓν ὕψος.

Οὕτως, ἡ ἀπόστασις ΔΖ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου ΔΑΒΓ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἕδραν ΑΒΓ.

Τὸ σύνολον τῶν ἑδρῶν τετραέδρου καλεῖται **ἐπιφάνεια** αὐτοῦ.

Ἐὰν σημεῖον Ο εἶναι **ἐσωτερικὸν** τοῦ τετραέδρου, ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα αὐτὸ μὲ ἑκάστην κορυφὴν τέμνει τὴν ἀπέναντι ἕδραν εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς.

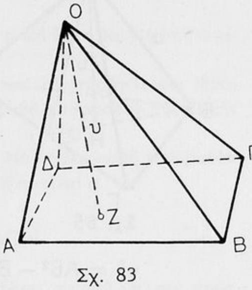
Τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι οὔτε ἐσωτερικὰ οὔτε σημεῖα τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου καλοῦνται **ἐξωτερικὰ** τοῦ τετραέδρου.

97. ΠΥΡΑΜΙΣ.— Πυραμὶς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ μίαν πολύεδρον γωνίαν, ὅταν αὕτη τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, τέμνοντος πάσας τὰς ἀκμὰς αὐτῆς καὶ μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς αὐτῆς.

Ἡ κορυφὴ τῆς πολυέδρου γωνίας Ο καλεῖται **κορυφὴ** τῆς πυραμίδος καὶ ἡ ἕδρα τῆς τομῆς καλεῖται **βάσις** τῆς πυραμίδος.

Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 83) βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ καὶ κορυφὴ τὸ Ο.

Αἱ ἄλλαι ἕδραι, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅλαι τρίγωνα, ὀνομάζονται **παράπλευροι ἕδραι** τῆς πυραμίδος. Αὗται συνιστοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν** τῆς πυραμίδος. Αἱ κοιναὶ ἀκμαὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, αἱ διερχόμεναι διὰ τῆς κορυφῆς Ο, καλοῦνται **παράπλευραι ἀκμαὶ** τῆς πυραμίδος.



Σχ. 83

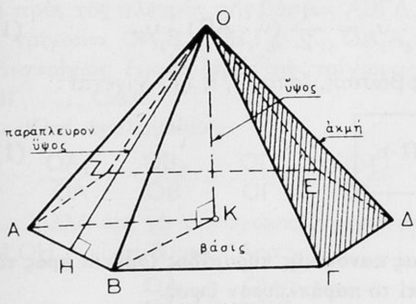
Ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως, εἶναι τὸ **ὕψος** τῆς πυραμίδος.

Μία πυραμὶς θὰ καλῆται **τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική, . . .**, καθόσον ἡ βάσις της εἶναι **τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάγωνον, . . .**

Τὸ τετράεδρον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πυραμὶς κατὰ τέσσαρας τρόπους, ἀναλόγως τῆς ἕδρας, τὴν ὁποίαν θεωροῦμεν ὡς βάσιν.

Τὸ Σύνολον ὅλων τῶν ἑδρῶν μιᾶς πυραμίδος καλεῖται **ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.**

98. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΥΡΑΜΙΣ.— Μία πυραμὶς λέγεται κανονική, ὅταν ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ ὁ ποὺς τοῦ ὕψους της εἶναι τὸ κέντρον τῆς βάσεως.



Σχ. 84

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι κανονικῆς πυραμίδος εἶναι **ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα.**

Τὸ ὕψος $υ_1$ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας κανονικῆς πυραμίδος καλεῖται **παράπλευρον ὕψος** αὐτῆς.

Ἀντιστρόφως : Πᾶσα πυραμὶς τῆς ὁποίας αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα, εἶναι κανονική.

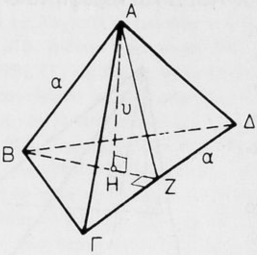
Πράγματι, ἀφοῦ ΟΑ = ΟΒ = . . . = ΟΖ καὶ ΟΚ κοινή, ἕπεται ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΑ, ΟΚΒ, . . ., ΟΚΖ εἶναι ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ΚΑ = ΚΒ = . . . = ΚΖ, ὁπότε ἡ βάσις ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, καθόσον εἶναι

ΑΒ = ΒΓ = . . . = ΖΑ.

Ποῖαι δίεδροι γωνίαι τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι ;

99. ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ.— Τετράεδρον ΑΒΓΔ θὰ καλῆται κανονικόν, ὅταν πᾶσαι αἱ ἀκμαί του εἶναι ἴσαι.

Αἱ ἕδραι του εἶναι πᾶσαι ἰσόπλευρα τρίγωνα ἴσα. Ἔστω α ἡ ἀκμή του. Ὁ πούς Η τοῦ ὕψους ΑΗ θὰ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΒΓΔ καί :



Σχ. 85

$$BZ^2 = B\Gamma^2 - \Gamma Z^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4},$$

ἐξ οὗ : $$\mathbf{BZ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}$$

καὶ $$BH = \frac{2}{3} \cdot BZ = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΗΒ ἔχομεν :

$$\upsilon^2 = AB^2 - BH^2 = \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{6\alpha^2}{9}. \quad \text{Ἄρα :} \quad \boldsymbol{\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}}.$$

100. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ.— Ἔστω ΟΑΒΓΔΕΖ κανονικὴ πυραμὶς (σχ. 84) καὶ $OH = \upsilon_1$ τὸ παράπλευρον ὕψος αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα, ἕπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν E_{ϖ} τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι :

$$E_{\varpi} = 6 \cdot (OAB) = 6 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot \upsilon_1 = 3 \cdot AB \cdot \upsilon_1.$$

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως εἶναι ν, τότε :

$$E_{\varpi} = \nu \cdot (OAB) = \nu \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \upsilon_1 = \frac{1}{2} (\nu \cdot AB) \cdot \upsilon_1. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\nu \cdot AB$ εἶναι ἡ περίμετρος τῆς βάσεως, ἔστω Π, ἡ (1) γίνεται :

$$\boxed{\mathbf{E_{\varpi} = \frac{1}{2} \Pi \cdot \upsilon_1}} \qquad (1)$$

καὶ ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος.

Ἐὰν εἰς τὸ παράπλευρον ἐμβαδὸν κανονικῆς πυραμίδος προστεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, προκύπτει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἔστω $E_{o\lambda}$. Δηλαδή :

$$\boxed{\mathbf{E_{o\lambda} = (B) + \frac{1}{2} \pi \cdot \upsilon_1}} \qquad (2)$$

ΣΗΜ. : Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τυχούσης πυραμίδος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

373. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

374. Πυραμὶς ΟΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἡ ἀκμὴ ΟΑ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἔχει μῆκος 3α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης.

375. Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α καὶ ὕψος 3α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας της.

376. Κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς α, καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι ἔχουν κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν ἴσην πρὸς 60° ἢ 30° ἢ 45°. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

377. Τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς πολυέδρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου (ὀκταέδρου) τούτου, ἂν ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι α.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

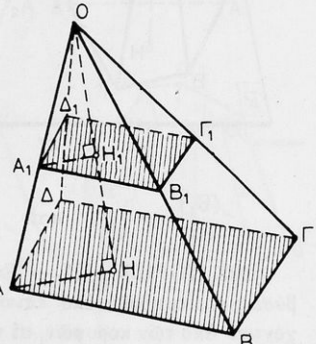
101. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν :

1ον : Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα,

2ον : Ἡ τομὴ εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν βάσιν, καὶ

3ον : Ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρὸς τὸ τῆς βάσεως ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀπ' αὐτῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς.

Ἀπόδειξις : 1ον. Ἐπειδὴ αἱ τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ ἄλλου εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι, ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς τομῆς $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς βάσεως ΑΒΓΔ. Ἄρα τὰ τρίγωνα OA_1B_1, $OB_1\Gamma_1$, . . ., $O\Delta_1A_1$ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, . . ., ΟΔΑ.



Σχ. 86

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{O\Gamma_1}{O\Gamma}=\frac{O\Delta_1}{O\Delta}. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΗΑ καὶ OH_1A εἶναι ὅμοια. Ἄρα :

$$\frac{OA_1}{OA}=\frac{OH_1}{OH}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\boxed{\frac{OA_1}{OA}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{O\Gamma_1}{O\Gamma}=\frac{O\Delta_1}{O\Delta}=\frac{OH_1}{OH}} \qquad (3)$$

2ον : Τὰ πολύγωνα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καὶ ΑΒΓΔ ἔχουν τὰς γωνίας :

$$A_1=A,\ B_1=B,\ \Gamma_1=\Gamma \ \text{ καὶ } \ \Delta_1=\Delta, \qquad (4)$$

διότι αἱ πλευραί των εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι.

῞Ενεκα ὅμως τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων OA_1B_1 καὶ $OAB, \ldots$ εἶναι :

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OB_1}{OB}=\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\frac{O\Gamma_1}{O\Gamma}=\frac{\Gamma_1\Delta_1}{\Gamma\Delta}=\frac{O\Delta_1}{O\Delta}=\frac{\Delta_1A_1}{\Delta A},$$

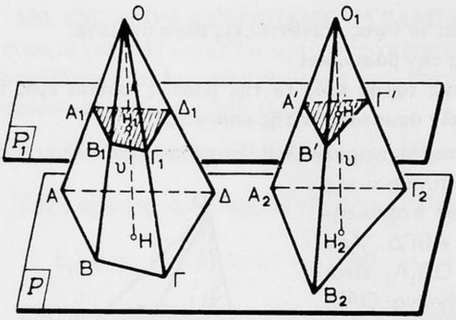
ἤ
$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\frac{\Gamma_1\Delta_1}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta_1A_1}{\Delta A}. \tag{5}$$

Αἱ (4) καὶ (5) δεικνύουν ὅτι τὰ πολύγωνα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καὶ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ὅμοια.

3ον : ῞Ενεκα τῆς ὁμοιότητος τούτων προκύπτει ὅτι :

$$\boxed{\frac{(A_1B_1\Gamma_1\Delta_1)}{(AB\Gamma\Delta)}=\left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2=\left(\frac{OA_1}{OA}\right)^2=\left(\frac{OH_1}{OH}\right)^2} \tag{6}$$

102. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.— Ἐαν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες τμηθοῦν ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων αὐτῶν.



Σχ. 87

Ἀπόδειξις : Ὑποθέτομεν ὅτι τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A_2B_2\Gamma_2$ (βάσεις) κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καὶ ὅτι υ εἶναι τὸ κοινὸν ὕψος τῶν πυραμίδων $OAB\Gamma\Delta$ καὶ $O_1A_2B_2\Gamma_2$.

῎Εστω $OH_1 = OH' = \upsilon_1$ ἡ ἀπόστασις τῆς τομῆς ἀπὸ τῶν κορυφῶν Ο καὶ O_1, καὶ (Β), (B_1) τὰ ἐμβαδὰ τῶν πολυγώνων $AB\Gamma\Delta$, $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καὶ (B_2), (B') τὰ ἐμβαδὰ τῶν $A_2B_2\Gamma_2$ καὶ $A'B'\Gamma'$. Θὰ εἶναι :

$$\frac{(B_1)}{(B)}=\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{(B')}{(B_2)}=\frac{\upsilon_1^2}{\upsilon^2}, \quad \text{ἐξ ὧν :} \quad \frac{(B_1)}{(B)}=\frac{(B')}{(B_2)}$$

103. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ. — Ἐὰν δύο ἰσοϋψεῖς πυραμίδες ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις : Εἰς τὸ προηγούμενον πόρισμα ἐδείξαμεν ὅτι :

$$\frac{(B_1)}{(B)}=\frac{(B')}{(B_2)}. \quad \text{῎Αν λοιπὸν εἶναι } B = B_2 \text{ ἢ } (B) = (B_2),$$

τότε :
$$B_1 = B' \text{ ἢ } (B_1) = (B').$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

378. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ πυραμίδος ΟΑΒΓΔ νὰ ὁρισθῇ σημεῖον A_1, τοιοῦτον ὥστε ἡ δι' αὐτοῦ διερχομένη παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν τομὴ τῆς πυραμίδος νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τέταρτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως.

379. Ἡ ἀκμὴ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους του.

380. Κανονικῆς πυραμίδος ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α καὶ ἑκάστη παράπλευρος ἕδρα ἔχει κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν 60°. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.

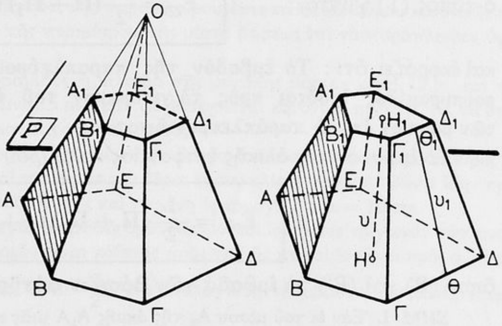
381. Κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καὶ ὕψος ΣΗ=2α. 1ον) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ καὶ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς πυραμίδος. 2ον) Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΣΑ καὶ Ν ἡ τομὴ ΣΒ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΓΔΜ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΔΜΝ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν συναρτήσει τῆς α.

382. Πυραμίδος ΔΑΒΓ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς τὸ Α. Ἡ ἀκμὴ ΔΒ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν βάσιν. Διὰ τυχόντος σημείου Μ τῆς ΑΒ ἄγομεν ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ τῆς πυραμίδος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι ὀρθογώνιον.

383. Πυραμίδος ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς τὸ Γ καὶ ἡ κορυφὴ Σ κινεῖται ἐπὶ εὐθείας xy καθέτου εἰς τὸ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. 1ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα. 2ον) Ἄγομεν τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΣΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΖ τοῦ τριγώνου ΣΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Δ καὶ Ζ. 3ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΣΒΓ. 4ον) Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ζ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἕνα σημεῖον Ο. 5ον) Ἡ ΔΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΣΒ καὶ ΑΖ καὶ 6ον) Ἡ ΔΖ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου τῆς ΒΓ.

384. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς ἐσωτερικὰς καὶ ἐξωτερικὰς διέδρους γωνίας ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

104. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΠΥΡΑΜΙΣ.—Ἔστω ΟΑΒΓΔΕ μία πυραμίς. Θεωροῦμεν τὴν τομὴν $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ τῆς πυραμίδος ταύτης ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ αὐτῆς. Τὸ πολύεδρον τοῦ ὁποίου ἕδραι εἶναι τὰ δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ καὶ τὰ τραπέζια $ΑΒΒ_1Α_1$, $ΒΓΓ_1Β_1$ . . ., $ΕΑΑ_1Ε_1$ καλεῖται **κόλουρος πυραμίς.**



Σχ. 88

Αἱ ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$, εἶναι αἱ **βάσεις** τῆς κολούρου πυραμίδος. Αἱ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι αἱ **παράπλευροι** ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος. Ἡ ἀπόστασις $Η_1Η = υ$ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων καλεῖται **ὕψος** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἐὰν ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ εἶναι κανονική, τότε, ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένη κόλουρος πυραμὶς $ΑΒΓΔΕΑ_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ εἶναι **κανονική.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι **ἰσοσκελῆ τραπέζια ἴσα.**

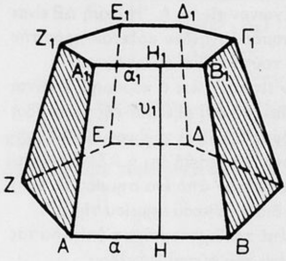
Τὸ ὕψος $Θ_1Θ = υ_1$ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν κανονικῆς κολούρου πυραμίδος καλεῖται **παράπλευρον ὕψος** αὐτῆς.

Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα τῶν βάσεων κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι, προφανῶς, **κάθετος** ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν βάσεων καὶ λέγεται **ἄξων** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός :

ΟΡΙΣΜΟΣ.— Κόλουρος πυραμὶς καλεῖται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι πολύγωνα ὅμοια κείμενα ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι τραπέζια.

105. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ.— Ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἰσοσκελῆ τραπέζια ἴσα. Ἐὰν E_{ϖ} εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, τότε, (σχ. 89), θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 89

$$E_{\varpi} = 6 \cdot (ABB_1A_1) = 6 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1)\upsilon_1$$

ἤ

$$E_{\varpi} = 3\,(\alpha + \alpha_1)\upsilon_1.$$

Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑκάστης βάσεως κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, τότε :

$$E_{\varpi} = \nu \cdot (ABB_1A_1) = \nu \cdot \frac{\alpha + \alpha_1}{2} \cdot \upsilon_1 = $$

$$= \frac{1}{2}\,(\nu \cdot \alpha + \nu \cdot \alpha_1) \cdot \upsilon \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $\nu\alpha$ καὶ $\nu\alpha_1$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ περίμετροι Π καὶ Π_1 τῶν βάσεων, ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$\boxed{E_{\varpi} = \frac{1}{2}\,(\Pi + \Pi_1)\,\upsilon_1} \qquad (2)$$

καὶ ἐκφράζει ὅτι : **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς κολουροπυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος.**

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι :

$$\boxed{E_{o\lambda} = \frac{1}{2}\,(\Pi + \Pi_1)\,\upsilon_1 + (B + B')} \qquad (3)$$

ὅπου (Β) καὶ (Β') τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων αὐτῆς.

ΣΗΜ. Ι. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου A_2 τῆς ἀκμῆς A_1A μιᾶς κολούρου πυραμίδος ἀχθῇ ἐπίπεδος τομὴ $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$, παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις αὐτῆς, καὶ ἐὰν $AB = \alpha$, $A_1B_1 = \alpha_1$, $A_2B_2 = x$, τότε :

$$\frac{(B)}{\alpha^2} = \frac{(B')}{\alpha_1^2} = \frac{(B'')}{x^2} \qquad (3)$$

ἤ

$$\frac{\sqrt{B}}{\alpha} = \frac{\sqrt{B'}}{\alpha_1} = \frac{\sqrt{B''}}{x}$$

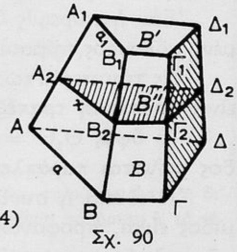
ἤ

$$\frac{2\sqrt{B''}}{2x} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{\alpha + \alpha_1}.$$

Ἀλλὰ $\alpha + \alpha_1 = 2x$, ὁπότε

$2\sqrt{B''} \Rightarrow \sqrt{B} + \sqrt{B'}$, ἐξ οὗ :

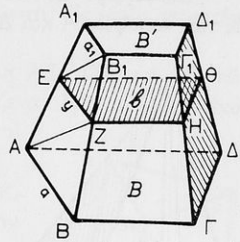
$$\boxed{(B'') = \frac{1}{4}\,(B + B' + 2\sqrt{BB'})} \qquad (4)$$



Σχ. 90

ΣΗΜ. ΙΙ. Δυνάμεθα νὰ φέρωμεν εὐθ. τμῆμα $EZ = \mathbf{y}$ παράλληλον πρὸς τὰς AB, A_1B_1 τοῦ τραπεζίου ABB_1A_1, οὕτως ὥστε τὸ τραπέζιον ABB_1A_1 νὰ χωρίζεται εἰς δύο ὅμοια τραπέζια.

Ἔστω ὅτι ἤχθη τὸ y, ὥστε τὰ τραπέζια A_1B_1ZE καὶ $EZBA$ νὰ εἶναι ὅμοια. Ἂν ἀχθοῦν τὰ τμήματα EB_1 καὶ AZ, ταῦτα χωρίζουν τὰ τραπέζια εἰς τρίγωνα ὅμοια ἀνὰ ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων A_1EB_1 καὶ EAZ ἀφ' ἑνός, καὶ B_1EZ, ZAB ἀφ' ἑτέρου, ἔχομεν :



Σχ. 91

$$\frac{\alpha_1}{y} = \frac{A_1E}{EA} \quad \text{καὶ} \quad \frac{y}{\alpha} = \frac{B_1Z}{ZB} = \frac{A_1E}{EA}.$$

Ἄρα $\quad \dfrac{\alpha_1}{y} = \dfrac{y}{\alpha}$, ἐξ οὗ : $\quad \boxed{\mathbf{y} = \sqrt{\alpha\alpha_1}}$

Τὸ τμῆμα τοῦτο κατασκευάζεται (§ 20).

Διὰ τῆς EZ ἄγομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος, τὸ $EZH\Theta$ καὶ ἔστω (β) τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς. Θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{(B)}{\alpha^2} = \frac{(B')}{\alpha_1^2} = \frac{(\beta)}{y^2} = \frac{(\beta)}{\alpha\alpha_1}, \quad \text{ἐξ ὧν : } (B) = \frac{(\beta)\alpha^2}{\alpha\alpha_1} = \frac{(\beta)\alpha}{\alpha_1} \quad \text{καὶ} \quad (B') = \frac{(\beta)\alpha_1}{\alpha}$$

Ἄρα $(B \cdot B') = \dfrac{(\beta)^2\alpha\alpha_1}{\alpha\alpha_1} = \beta^2$, $\quad$ ἐξ οὗ : $\quad \boxed{(\beta) = \sqrt{BB'}}$

Ὥστε : **Ὑπάρχει τομὴ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις κολούρου πυραμίδος, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

385. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κολούρου κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς μέσης βάσεως ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος αὐτῆς.

386. Κανονικῆς κολούρου πυραμίδος ἡ πλευρὰ τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 12 m. καὶ τῆς μικρᾶς 6 m. Ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι 5 m. Ἐὰν αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πεντάγωνα, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

387. Κόλουρος κανονικὴ πυραμὶς ἔχει μεγάλην βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι 2α καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι ἔχουν κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν ἴσην πρὸς 60^0. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὁλικὸν ἐμβαδὸν αὐτῆς καὶ νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha = 10$ cm.

388. Κόλουρος πυραμὶς ἔχει μεγάλην βάσιν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ὑποτεινούσης α. Ἡ μία τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν εἶναι κάθετος πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἰσοῦται πρὸς α. Ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν τῆς μικρᾶς βάσεως εἶναι $\dfrac{\alpha}{2}$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

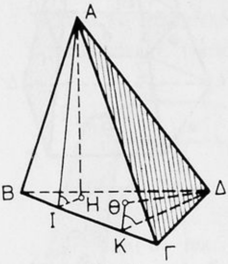
ΟΓΚΟΣ ΤΩΝ ΤΕΤΡΑΕΔΡΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

106. Δύο ἁπλᾶ πολύεδρα (Π_1) καὶ (Π_2) λέγονται προσκείμενα, ὅταν ἔχουν μίαν ἢ περισσοτέρας ἕδρας (ἢ τμήματα ἑδρῶν) κοινὰς καὶ πᾶν σημεῖον ἐσωτερικὸν τοῦ ἑνὸς εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ἄλλου.

Ἐὰν θεωρήσωμεν μὴ ὑφισταμένας τὰς κοινὰς ἕδρας, τότε ὁρίζεται τρίτον πολύεδρον (Π), τοῦ ὁποίου ἕκαστον ἐσωτερικὸν σημεῖον εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (Π_1) ἢ τοῦ (Π_2) ἢ τῶν παραλειφθεισῶν ἑδρῶν. Τὸ πολύεδρον τοῦτο (Π) καλεῖται **ἄθροισμα** τῶν (Π_1) καὶ (Π_2). Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι τὸ (Π) χωρίζεται μὲ τὰς ἀφαιρεθείσας ἕδρας εἰς τὰ (Π_1) καὶ (Π_2), καὶ γράφομεν : $\mathbf{\Pi = \Pi_1 + \Pi_2}$.

106α. ΘΕΩΡΗΜΑ.—Εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θεωρουμένης κορυφῆς αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν ΑΗ καὶ ΔΘ δύο ὕψη τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Δ πρὸς τὰς ἕδρας ΒΓΔ καὶ ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Ἄγομεν τὰ ὕψη ΑΙ καὶ ΔΚ τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ ἀντιστοίχως. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων αἱ ΗΙ καὶ ΘΚ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ αἱ γωνίαι ΑΙΗ καὶ ΔΚΘ θὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀντίστοιχοι τῆς διέδρου ΒΓ τοῦ τετραέδρου. Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΗΙ καὶ ΔΘΚ θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 92

$$\frac{AI}{\Delta K} = \frac{AH}{\Delta\Theta} \iff AI \cdot \Delta\Theta = \Delta K \cdot AH \qquad (1)$$

$$\text{ἢ} \quad AI \cdot \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \Delta\Theta = \frac{1}{2} B\Gamma \cdot \Delta K \cdot AH$$

$$\text{ἢ} \quad (\mathbf{AB\Gamma}) \cdot \mathbf{\Delta\Theta} = (\mathbf{B\Gamma\Delta}) \cdot \mathbf{AH}. \qquad (2)$$

Ἐὰν (Μ) εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ὡρισμένου τούτου γινομένου καὶ λ* ἀριθμὸς σταθερός, τὸ γινόμενον λ(Μ) καλεῖται **ὄ γ κ ο ς** τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ.

Συμβολικῶς : $(AB\Gamma\Delta) = \lambda(M)$ ἢ $\mathbf{V} = \lambda \cdot \mathbf{(M)}$ (3)

ἔνθα V ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπονται αἱ ἑξῆς προτάσεις :

107. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.—Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸνλόγον τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν.

Πράγματι, ἐὰν (β) εἶναι τὸ κοινὸν ἐμβαδὸν τῶν ἴσων ἢ ἰσοδυνάμων βάσεων καὶ υ_1, υ_2 τὰ ἀντίστοιχα ὕψη τῶν τετραέδρων, θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \lambda\,(M_1) = \lambda \cdot (\beta) \cdot \upsilon_1 \\ V_2 = \lambda\,(M_2) = \lambda \cdot (\beta) \cdot \upsilon_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}.$$

108. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.— Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν δύο ὕψη ἴσα, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν (βάσεων), εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τὰ θεωρούμενα ὕψη.

Πράγματι, ἐὰν υ εἶναι τὸ κοινὸν ὕψος τῶν δύο τετραέδρων, τότε, ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \lambda\,(M_1) = \lambda \cdot (\beta_1) \cdot \upsilon \\ V_2 = \lambda\,(M_2) = \lambda \cdot (\beta_2) \cdot \upsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\mathbf{V_1}}{\mathbf{V_2}} = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

109. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.— Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις καὶ τὰ ὕψη τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς βάσεις ταύτας ἴσα, θὰἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

Πράγματι, ἐκ τῶν ἰσοτήτων :

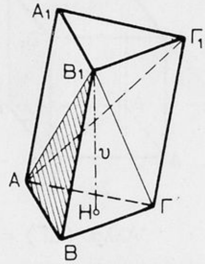
$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \lambda\,(M_1) = \lambda \cdot (\beta) \cdot \upsilon \\ V_2 = \lambda\,(M_2) = \lambda \cdot (\beta) \cdot \upsilon \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathbf{V_1} = \mathbf{V_2}$$

* Περὶ τοῦ λ θὰ ὁμιλήσωμεν εἰς τὴν § 113.

110. ΟΡΙΣΜΟΣ.—Δύο τετράεδρα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

111. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Πᾶν τριγωνικὸν πρῖσμα χωρίζεται εἰς τρία τετράεδρα ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὰς διαγωνίους AB_1, $ΓB_1$ καὶ $AΓ_1$ τῶν ἑδρῶν ABB_1A_1, $BΓΓ_1B_1$ καὶ $AΓΓ_1A_1$, τὸ πρῖσμα χωρίζεται διὰ τῶν ἐπιπέδων $AB_1Γ$ καὶ $AB_1Γ_1$ εἰς τὰ τετράεδρα $B_1ABΓ$, $B_1AΓΓ_1$ καὶ $B_1AΓ_1A_1$.



Σχ. 93

Τὰ τετράεδρα $B_1ABΓ$ καὶ $AB_1Γ_1A_1$ ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰς $ABΓ$ καὶ $A_1B_1Γ_1$ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν ἀπόστασιν τῶν βάσεων τούτων.

Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα· δηλαδή :

$$(B_1ABΓ) = (AB_1Γ_1A_1). \qquad (1)$$

Τὰ τετράεδρα $B_1AΓΓ_1$ καὶ $BAΓΓ_1$ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $AΓΓ_1$ καὶ τὸ ὕψος, διότι ἡ BB_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν $AΓΓ_1$. Δηλαδή :

$$(B_1AΓΓ_1) = (BAΓΓ_1). \qquad (2)$$

Ἀλλά : $(BAΓΓ_1) = (Γ_1ABΓ) = (B_1ABΓ)$, (3)

διότι ἡ $B_1Γ_1$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἕδραν $ABΓ$. Ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι :

$$(B_1AΓ_1A_1) = (B_1AΓΓ_1) = (B_1ABΓ).$$

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος V τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος $(AΓ_1)$ εἶναι τριπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου $B_1ABΓ$. Ἤτοι :

$$V = 3\,(B_1ABΓ) = 3λ\,(ABΓ)\cdot υ. \qquad (4)$$

Ὥστε : **Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι τριπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν αὐτὴν μὲ τὸ πρῖσμα καὶ ὕψος (ἀντίστοιχον) τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.**

112. ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ἐὰν δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἔχουν βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμα.

113. ΕΚΛΟΓΗ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ λ.—Εἴδομεν ὅτι ὁ ὄγκος V ἑνὸς τετραέδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = λ\,(M) \qquad (1)$$

Οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ ἀριθμὸς λ, εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ Συνόλου τῶν πολυέδρων καὶ τοῦ Συνόλου τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁριζομένην βάσει τῆς (1), ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι συνθῆκαι :

1ον : **Εἰς δύο ἴσα πολύεδρα ἀντιστοιχεῖ ὁ αὐτὸς ὄγκος V.**

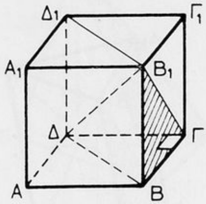
2ον : Θεωροῦμεν δύο πολύεδρα $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ἕδραν (προσκείμενα πολύεδρα) καὶ ἀντιστοίχους ὄγκους V_1 καὶ V_2, τότε τὸ πολύεδρον $(Π)$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων πολυέδρων $(Π_1)$ καὶ $(Π_2)$ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν ὄγκον V, ὅστις θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων V_1 καὶ V_2. Δηλαδή :

$$V = V_1 + V_2.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀριθμοῦ λ συνδέεται μὲ τὴν ἐκλογὴν τοῦ πολυέδρου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ὄγκον τὴν μονάδα τῶν ὄγκων (παραδοχή).

Ὡς τοιοῦτον πολύεδρον ἐκλέγομεν **κύβον,** τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι **τὸ μοναδιαῖον** εὐθύγραμμον τμῆμα.

Τὸ διαγώνιον ἐπίπεδον $ΔΒΒ_1Δ_1$ χωρίζει τὸν κύβον τοῦτον εἰς δύο προσκείμενα τριγωνικὰ πρίσματα, τά: $ΔΒΓΔ_1Β_1Γ_1$ καὶ $ΔΒΑΔ_1Β_1Α_1$. Κατὰ τὰ προηγούμενον θεώρημα ὁ ὄγκος V_1 τοῦ πρίσματος $ΔΒΓΔ_1Β_1Γ_1$ εἶναι τριπλάσιος τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου $Β_1ΔΒΓ$, ἤτοι:



Σχ. 94

$$V_1 = 3λ\,(ΔΒΓ) \cdot (Β_1Β) \tag{1}$$

διότι τὸ τμῆμα $Β_1Β$ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου τούτου.

Ἐπειδὴ δέ: $(ΔΒΓ) = \frac{1}{2}(ΔΓ) \cdot (ΓΒ)$, ἡ (1) γίνεται:

$$V_1 = 3λ \cdot \frac{1}{2}(ΔΓ)\,(ΓΒ)\,(Β_1Β)\,. \tag{2}$$

Ἀλλὰ $(ΔΓ) = (ΓΒ) = (Β_1Β) =$ μονὰς μήκους καὶ ἡ (2) γίνεται:

$$V_1 = \frac{3}{2}λ.$$

Ἐπειδὴ τὰ πρίσματα $ΑΒΔΑ_1Β_1Δ_1$ καὶ $ΔΒΓΔ_1Β_1Γ_1$ ἔχουν ἴσας βάσεις. $ΑΒΔ = ΔΒΓ$ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος $ΒΒ_1$, εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα ὁ ὄγκος V τοῦ κύβου εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου V_1 τοῦ πρίσματος $ΔΒΓΔ_1Β_1Γ_1$. Ἤτοι:

$$V = 2 \cdot V_1 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot λ = 3λ.$$

Ἂν δὲ τεθῇ $V = 1$, τότε: $1 = 3λ$, ἐξ οὗ: $\boldsymbol{λ = \frac{1}{3}}$.

Κατόπιν τούτου εὐκόλως ὑπολογίζομεν τὸν ὄγκον τῶν κυριωτέρων πολυέδρων.

114. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ.— Ἔστω ΔΑΒΓ ἓν τετράεδρον καὶ $ΔΗ = υ$ τὸ ὕψος αὐτοῦ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν βάσιν ΑΒΓ.

Κατὰ τὰ γνωστά, ὁ ὄγκος V τοῦ τετραέδρου τούτου θὰ εἶναι:

$$V = λ \cdot (ΑΒΓ) \cdot υ = \frac{1}{3}(ΑΒΓ) \cdot υ.$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $(ΑΒΓ) = (Β)$, τότε:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\,(B) \cdot υ}.$$

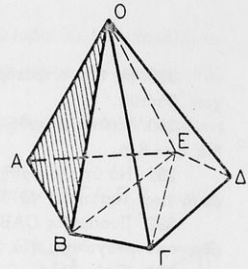
Σχ. 95

Δηλαδή: **Ὁ ὄγκος τριγωνικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος αὐτῆς.**

115. ΟΓΚΟΣ ΑΠΛΩΝ ΚΥΡΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.— Προκειμένου νὰ ὁρισθῇ ὁ ὄγκος τῶν ἁπλῶν κυρτῶν πολυέδρων, παρατηροῦμεν ὅτι :

1ον : Ἐὰν εἰς μίαν πολυγωνικὴν πυραμίδα Ο. ΑΒΓΔΕ ἀχθοῦν αἱ διαγώνιοι ΕΓ, ΕΒ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ, τότε τὰ διαγώνια ἐπίπεδα ΟΓΕ, ΟΒΕ χωρίζουν τὴν πυραμίδα εἰς τὰ τετράεδρα :

ΟΓΔΕ, ΟΒΓΕ, ΟΑΒΕ.



Σχ. 96

2ον : Ἂν θεωρήσωμεν τὰς διαγωνίους τῆς βάσεως, τὰς ἀγομένας ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἢ Β ἢ Γ ἢ Δ, ἔχομεν δεύτερον, τρίτον, τέταρτον, πέμπτον διαμερισμὸν τῆς πυραμίδος εἰς τετράεδρα.

3ον. Ἐὰν θεωρήσωμεν τυχὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον Κ τῆς πυραμίδος, καὶ συνδέσωμεν τοῦτο δι' εὐθειῶν μὲ τὰς κορυφὰς τῆς πυραμίδος, ἔχομεν ἄλλον τρόπον διαμερισμοῦ τῆς πυραμίδος εἰς τετράεδρα.

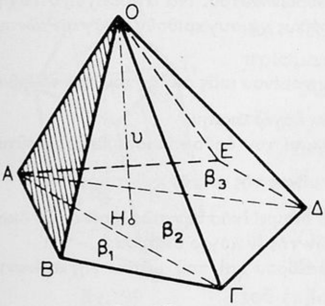
Γενικῶς : **Κάθε ἁπλοῦν κυρτὸν πολύεδρον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τετράεδρα κατὰ πολλοὺς τρόπους,** καί :

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἁπλοῦν κυρτὸν πολύεδρον, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἑκάστοτε διαμερισμοῦ αὐτοῦ εἰς τετράεδρα.

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο καλοῦμεν **ὄγκον** τοῦ ἁπλοῦ τούτου κυρτοῦ πολυέδρου.

Ὥστε : **Ὄγκος ἁπλοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, εἰς τὰ ὁποῖα τοῦτο χωρίζεται.**

116. ΟΓΚΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ.— Ἔστω ΟΑΒΓΔΕ μία πολυγωνικὴ πυραμίς. Ἂν ἀχθοῦν αἱ διαγώνιοι τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἐκ τῆς κορυφῆς Α, τότε ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν :



Σχ. 97

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

ἢ $$V = \frac{1}{3}\beta_1 \upsilon + \frac{1}{3}\beta_2 \upsilon + \frac{1}{3}\beta_3 \upsilon =$$

$$= \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\upsilon$$

ἢ $$\mathbf{V = \frac{1}{3}(B) \cdot \upsilon.}$$

Δηλαδή : **Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.**

117. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.—Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

118. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.—Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ἰσοϋψῶν πυραμίδων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων αὐτῶν.

119. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.—Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Σημείωσις : Ὅταν ἀποβλέπωμεν εἰς τὸν λόγον τῶν ὄγκων δύο πολυέδρων, **δὲν παρίσταται ἀνάγκη** ἐκλογῆς ὡρισμένης τιμῆς τοῦ λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

389. Εἰς πᾶν τετράεδρον τὰ ὕψη εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀντιστοίχων βάσεων.

390. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς του α. Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha = 8$ m.

391. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς α τῆς βάσεως. Ἐφαρμογὴ διὰ $\alpha = 12$ m.

392. Πυραμίδος ΟΑΒΓ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Ἡ τρίεδρος Ο εἶναι τρισορθογώνιος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΟΗ τῆς πυραμίδος καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

393. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου τριέδρου γωνίας Ο λαμβάνομεν τμήματα $OA = \alpha$, $OB = 2\alpha$ καὶ $O\Gamma = 3\alpha$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΟΗ αὐτῆς.

394. Πυραμὶς ἔχει βάσιν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 6 m, 10 m καὶ 8 m. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς 13 m. 1ον) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης. 2ον) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα ἡ πυραμὶς διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ;

395. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου ἀκμῆς α.

396. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α καὶ σημεῖον Ο ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπὸ τὰς ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἶναι σταθερὸν (ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου). Πῶς τροποποιεῖται τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅταν τὸ Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τετραέδρου ;

397. Εἰς κύβον ἀκμῆς α ἄγομεν τὰς διαγωνίους τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι σχηματίζονται ὑπὸ τούτων δύο κανονικὰ τετράεδρα καὶ ἀκολούθως νὰ συγκριθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων τούτων.

398. Ὁ ὄγκος τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς προβολῆς αὐτοῦ ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν ἐν λόγῳ ἀκμήν.

399. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνικοῦ τετραέδρου (ἀπέναντι ἀκμαί του ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι) ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ γινομένου δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν.

400. Τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου τετραέδρου διαιρεῖ ἑκάστην τῶν ἑδρῶν τῶν διερχομένων διὰ τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἑδρῶν τῆς ἐν λόγῳ διέδρου.

401. Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ μιᾶς ἀκμῆς τετραέδρου καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

402. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

403. Ἐπὶ τῆς βάσεως κανονικῆς πυραμίδος λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰς παραπλεύρους ἕδρας εἶναι σταθερόν.

404. Ὁ ὄγκος κανονικῆς πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπὸ μίαν παράπλευρον ἕδραν αὐτῆς.

405. Αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως ΑΒΓ τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι α, β, γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου.

406. Ἐὰν αἱ ἕδραι τετραέδρου εἶναι τρίγωνα ἰσοδύναμα, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἐσωτερικοῦ τοῦ τετραέδρου ἀπὸ τὰς ἕδρας εἶναι σταθερόν.

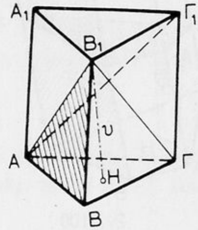
407. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τετραέδρου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ο, τοιοῦτον ὥστε συνδεόμενον μὲ τὰς κορυφάς, νὰ σχηματίζονται τέσσαρα τετράεδρα ἰσοδύναμα ἢ ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν κ,λ,μ,ν.

408. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως νὰ φαίνωνται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, ἂν τὸ ὕψος εἶναι υ καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως α.

409. Ὁ ὄγκος τετραέδρου ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{6}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ, ἑνὸς παραλληλογράμμου κατασκευαζομένου μὲ δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ἀκμῶν τούτων.

410. Εἰς ὀρθογωνικὸν τετράεδρον τὰ γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰς κοινὰς καθέτους αὐτῶν ἀντιστοίχως.

120. ΟΓΚΟΣ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ.— Ἔστω $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ τυχὸν τριγωνικὸν πρῖσμα (ὀρθὸν ἢ πλάγιον) μὲ βάσεις ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$.



Σχ. 98

Εἰς τὴν (§ 111) εὕρομεν ὅτι ὁ ὄγκος V αὐτοῦ εἶναι :

$$V = 3\,(Β_1ΑΒΓ) = 3λ\cdot(ΑΒΓ)\cdot υ$$

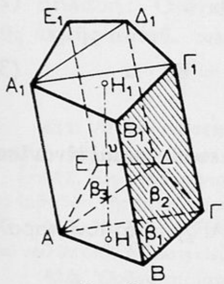
καὶ διὰ $λ = \frac{1}{3}$, λαμβάνομεν : $V = (ΑΒΓ)\cdot υ$.

Ἐὰν τεθῇ (ΑΒΓ) = (Β), τότε : $\mathbf{V = (B)\,υ}$

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

121. ΟΓΚΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ.—Ἔστω $(ΑΔ_1)$ ἓν πενταγωνικὸν πρῖσμα. Ἂν ἀχθοῦν τὰ διαγώνια ἐπίπεδα $ΑΓΓ_1Α_1$ καὶ $ΑΔΔ_1Α_1$, τὸ πρῖσμα χωρίζεται εἰς τρία τριγωνικὰ πρίσματα.



Σχ. 99

Ἄρα ὁ ὄγκος V τοῦ πρίσματος θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριῶν τούτων τριγωνικῶν πρισμάτων.

Δηλαδή :

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = (β_1 + β_2 + β_3)\,υ = (Β)\cdot υ$$

Δηλαδή : $\mathbf{V = (B)\cdot υ}$.

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

122. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.—Ἐὰν δύο πρίσματα ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

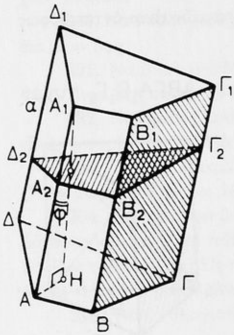
123. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.—Ἐὰν δύο πρίσματα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων αὐτῶν.

124. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.—Ἐὰν δύο ἰσοϋψῆ πρίσματα ἔχουν βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, εἶναι ἰσοδύναμα.

125. ΠΟΡΙΣΜΑ IV.— Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς αὐτοῦ.

126. ΠΟΡΙΣΜΑ V.— Ὁ ὄγκος κανονικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Πᾶν πλάγιον πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς ὀρθόν, ὅπερ ἔχει βάσιν μίαν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πλαγίου.



Σχ. 100

Ἀπόδειξις : Ἔστω $Α_2Β_2Γ_2Δ_2$ μία κάθετος τομὴ τοῦ πλαγίου πρίσματος $(ΑΓ_1)$. Ἡ τομὴ αὕτη εἶναι προβολὴ τῶν βάσεων τοῦ πλαγίου πρίσματος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς.

Ἐὰν Β εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, $Ε_u$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς τοῦ πρίσματος καὶ φ ἡ γωνία τῶν ἐπιπέδων, τῆς βάσεως ΑΒΓΔ καὶ τῆς καθέτου τομῆς $Α_2Β_2Γ_2Δ_2$, θὰ ἔχωμεν :

$$Ε_u = (Β)\cdot συνφ \quad ἢ \quad (Β) = \frac{Ε_u}{συνφ} \qquad (1)$$

Ἐὰν $Α_1Η$ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος, ἐπειδὴ αἱ $Α_1Α$ καὶ $Α_1Η$ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως, ἕπεται ὅτι $\sphericalangle ΑΑ_1Η = φ$. Ἄρα, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $Α_1ΗΑ$, θὰ ἔχωμεν :

$$Α_1Η = Α_1Α\cdot συν\widehat{ΑΑΗ} \quad ἢ \quad υ = α\,συνφ. \qquad (2)$$

Διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$Β\cdot υ = Ε_u\cdot α. \quad Ἀλλὰ\ (Β)υ = V. \quad Ἄρα \quad \mathbf{V = E_u \cdot α} \qquad (3)$$

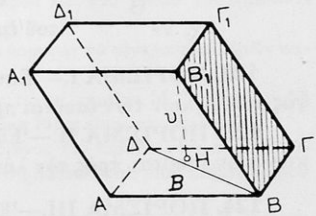
ἔνθα α τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς τοῦ πλαγίου.

128. ΠΟΡΙΣΜΑ.— Δύο πρίσματα τῶν ὁποίων αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ κάθετοι τομαὶ ἰσοδύναμοι, εἶναι ἰσοδύναμα.

129. ΟΓΚΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΩΝ.— α) Ἔστω $(ΑΓ_1)$ πλάγιον παραλληλεπίπεδον. Τοῦτο χωρίζεται εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ὑπὸ τοῦ διαγωνίου ἐπιπέδου $ΒΒ_1Δ_1Δ$, τά: $ΑΒΔΑ_1Β_1Δ_1$ καὶ $ΒΓΔΒ_1Γ_1Δ_1$, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ ἴσας, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. Ἂν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου καὶ V_2 ὁ ὄγκος τοῦ δευτέρου, τότε :

$$V = V_1 + V_2 = 2\cdot V_1 = 2(ΑΒΔ)υ = (ΑΒΓΔ)υ = (Β)\cdot υ$$

Ἤτοι : $$\mathbf{V = (B)\cdot υ} \qquad (1)$$

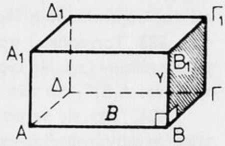


Σχ. 101

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

β) Ἐὰν τὸ παραλ/δον εἶναι ὀρθόν, τότε τὸ ὕψος συμπίπτει μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν $\gamma = B_1B$, καὶ ἑπομένως ὁ τύπος (1) γίνεται :



Σχ. 102

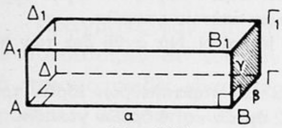
$$V = (B) \cdot \gamma \qquad (2)$$

καὶ ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς (ὕψος).

Τοῦτο ὅμως συνάγεται καὶ ἐκ γνωστοῦ θεωρήματος, καθόσον ἡ βάσις ΑΒΓΔ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κάθετος τομὴ τοῦ παραλ/δου.

γ) Ἐὰν τὸ παραλ/δον εἶναι **ὀρθογώνιον,** τότε :



Σχ. 103

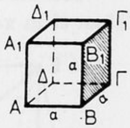
$(B) = (ΑΒΓΔ) = \alpha \cdot \beta$ καὶ ὁ τύπος (2) γίνεται :

$$V = (\alpha \cdot \beta)\, \gamma, \qquad (3)$$

ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

δ) Ἐὰν τὸ παραλ)δον εἶναι κύβος, τότε $\alpha = \beta = \gamma$ καὶ ὁ τύπος (3) γίνεται :



Σχ. 104

$$V = \alpha^3.$$

Δηλαδή : **Ὁ ὄγκος κύβου ἰσοῦται πρὸς τὸν κύβον τοῦ μήκους τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

411. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $\alpha = 8$, $\beta = 10$, $\gamma = 15$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ καὶ ὁ ὄγκος.

412. Εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον εἶναι $\alpha = 25$, $\beta = 40$ $\delta = 57$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

413. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους υ, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον ἢ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἢ κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α.

414. Ὀρθοῦ πρίσματος ὕψους υ ἡ βάσις εἶναι τραπέζιον μὲ βάσεις β, α καὶ ὕψους υ_1. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

415. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 150 cm^3, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

416. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κύβου συναρτήσει τῆς διαγωνίου του.

417. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος μὲ βάσιν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, συναρτήσει τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς στὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος.

418. Πολυγωνικὸν πρῖσμα νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον τριγωνικὸν τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

419. Τριγωνικὸν πρῖσμα ὕψους υ, νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ βάσιν τετράγωνον.

420. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπὸ ταύτην.

321. Ὁ ὄγκος κανονικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του, ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος τῆς βάσεως.

422. Δίδεται πρῖσμα, τοῦ ὁποίου μία κάθετος τομὴ εἶναι ἰσόπλευρον πολύγωνον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου Ο ἐσωτερικοῦ τοῦ πρίσματος ἀπὸ τὰς βάσεις καὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας εἶναι σταθερόν.

423. Τριγωνικοῦ πρίσματος $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι σταθερά, ἡ δὲ κορυφὴ $Α_1$ διαγράφει εὐθεῖαν (x). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν $Β_1$, $Γ_1$, τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ τῶν μέσων τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

424. Ἐὰν εἰς τετραγωνικὸν πρῖσμα τρεῖς διαγώνιοι τέμνωνται, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἡ τετάρτη διαγώνιος διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν τριῶν πρώτων καὶ ὅτι τὸ πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

425. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν ἀκμῶν κύβου ἐπὶ τυχοῦσαν διαγώνιόν του εἶναι ἴσαι πρὸς τὸν τρίτον τῆς διαγωνίου.

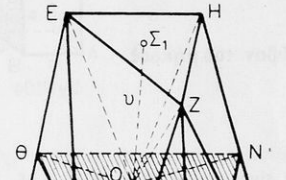
426. Παραλληλεπιπέδου αἱ ἕδραι εἶναι ρόμβοι ἴσοι, μὲ διαγωνίους α καὶ β. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ συναρτήσει τῶν α καὶ β.

427. Ἐὰν δύο παραλληλεπίπεδα ἔχουν μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν τριέδρων τούτων γωνιῶν.

428. Δίδεται πρῖσμα $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ καὶ δύο σταθερὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ ἀχθῇ διὰ τῶν Μ, Ν ἐπίπεδον, τέμνον τὸ πρῖσμα κατὰ τρίγωνον ὀρθογώνιον.

429. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τριγωνικοῦ πρίσματος μετὰ μιᾶς βάσεως αὐτοῦ, περιέχεται μεταξὺ 2 ὀρθῶν καὶ 4 ὀρθῶν γωνιῶν.

130. ΠΡΙΣΜΑΤΟΕΙΔΕΣ.—Πρισματοειδὲς εἶναι τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο ἕδραι εἶναι πολύγωνα κείμενα ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι τρίγωνα ἢ τραπέζια.



Σχ. 105

Αἱ παράλληλοι ἕδραι ὀνομάζονται **βάσεις** τοῦ πρισματοειδοῦς, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι** αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων εἶναι τὸ **ὕψος** τοῦ πρισματοειδοῦς.

Πᾶσα ἀκμὴ ἡ ὁποία δὲν εἶναι πλευρὰ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης βάσεως καλεῖται **παράπλευρος** ἀκμὴ τοῦ πρισματοειδοῦς.

Ἡ διὰ τῶν μέσων τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν διερχομένη τομὴ τοῦ πρισματοειδοῦς καλεῖται **μεσαία τομὴ** ἢ **μέση βάσις** αὐτοῦ.

Οὕτω, τὸ πολύγωνον ΘΙΚΛΜΝ εἶναι ἡ μεσαία τομὴ τοῦ πρισματοειδοῦς(ΒΗ).

Ἂν ἀντὶ τῆς ΒΕ θεωρήσωμεν τὴν ΑΖ, τὸ προκύπτον πρισματοειδὲς εἶναι διάφορον τοῦ προηγουμένου κ.λπ.

Ἂν αἱ βάσεις τοῦ πρισματοειδοῦς ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν καὶ αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι τραπέζια, τὸ πρισματοειδὲς δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **πρισμοειδές**.

Ἡ πυραμὶς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πρισματοειδές, τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις περιορίζεται εἰς τὴν κορυφὴν Σ αὐτῆς.

Τὸ πρῖσμα εἶναι πρισμοειδές.

Τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα θεωρεῖται καὶ ὡς πρισματοειδές, τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις εἶναι μία τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτοῦ καὶ ἡ ἄλλη περιορίζεται εἰς τὴν ἀκμήν, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς θεωρηθείσης βάσεως.

Ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι πρισμοειδὲς μὲ βάσεις πολύγωνα ὅμοια.

131. ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΕΙΔΟΥΣ.—Ὁ ὄγκος πρισματοειδοῦς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = (B + B' + 4B'') \cdot \frac{\upsilon}{6}. \tag{1}$$

ἔνθα (Β) καὶ (Β′) τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ (Β″) τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς.

Πράγματι, ἐὰν ἐπὶ τῆς μεσαίας βάσεως θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον Ο καὶ τὸ συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν μὲ τὰς κορυφὰς τῶν βάσεων καὶ τῆς μέσης τομῆς, τὸ πρισματοειδὲς εἶναι ἄθροισμα τῶν πυραμίδων ΟΑΒΓΔ, ΟΕΖΗ καὶ τῶν τεταέδρων κορυφῆς Ο καὶ μὲ βάσεις τὰς παραπλεύρους ἕδρας, ἐφ' ὅσον εἶναι τρίγωνα ἢ τὰ τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζονται ὑπὸ τῶν διαγωνίων (ἐφ' ὅσον εἶναι τραπέζια). Εἶναι δέ :

$$V_{OAB\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}(B) \cdot \frac{\upsilon}{2} = \frac{1}{6}(B)\upsilon \quad \text{καὶ} \quad V_{OEZ} = \frac{1}{3}(B') \cdot \frac{\upsilon}{2} = \frac{1}{6}(B') \cdot \upsilon.$$

καὶ ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΕ, τότε :

$$V_{OABE} = \frac{1}{3}\,OP \cdot (ABE) = \frac{1}{3}\,OP \cdot 4\,(EI\Theta) = 4 \cdot \frac{1}{3}\,OP \cdot (EI\Theta) =$$

$$= 4 \cdot V_{EOI\Theta} = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (OI\Theta) \cdot \frac{\upsilon}{2} = \frac{4}{6}\,(OI\Theta) \cdot \upsilon.$$

Ὁμοίως :

$$V_{OBZE} = \frac{4}{6}\,(OIK) \cdot \upsilon, \quad V_{OB\Gamma Z} = \frac{4}{6}\,(OK\Lambda) \cdot \upsilon, \quad V_{O\Gamma\Delta Z} = \frac{4}{6}\,(O\Lambda M) \cdot \upsilon,$$

$$V_{O\Delta ZH} = \frac{4}{6}\,(OMN) \cdot \upsilon \quad \text{καὶ} \quad V_{OA\Delta HE} = \frac{4}{6}\,(O\Theta N) \cdot \upsilon.$$

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ὄγκος V τοῦ πρισματοειδοῦς εἶναι :

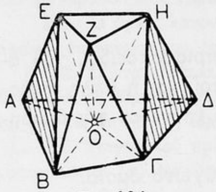
$$V = \frac{\upsilon}{6}\,[\; B + B' + 4\,(O\Theta I + OIK + OK\Lambda + O\Lambda M + OMN + O\Theta N) \;]$$

ἢ

$$V = \frac{\upsilon}{6}\,(B + B' + 4B'').$$

Ὥστε ἀπεδείχθη ὁ τύπος (1) καὶ ὀνομάζεται τύπος τοῦ **Sarrus.**

Σημείωσις I. Ὁ ὄγκος V τοῦ πρισματοειδοῦς δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου :



Σχ. 106

$$\boxed{V = \frac{1}{4}(B + 3B_1)\,\upsilon}$$

ἔνθα υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, (B) τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς βάσεως αὐτοῦ καὶ (B_1) τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ ἀπέχοντος ἀπὸ τὴν βάσιν τούτου ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὕψους τοῦ πρισματοειδοῦς.

Κάμετε ἐπαλήθευσιν, λαμβάνοντες τυχὸν σημεῖον O τῆς βάσεως καὶ συνδέοντες τοῦτο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πρισματοειδοῦς (σχ. 106).

Σημείωσις II. Βάσει τοῦ τύπου τοῦ Sarrus ὑπολογίζεται ὁ ὄγκος τῆς κοινῆς πυραμίδος. Πράγματι, ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦ Sarrus τεθῇ $(B') = 0$, $(B'') = \frac{1}{4}(B,)$ λαμβάνομεν

$$V = \frac{1}{6}(B + B' + 4B'')\,\upsilon = \frac{1}{6}\cdot\left(B + 0 + 4\cdot\frac{1}{4}B\right)\upsilon = \frac{1}{3}(B)\cdot\upsilon,$$

δηλαδὴ τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

Σημείωσις III. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, εἰς τὸν τύπον τοῦ Sarrus θέτομεν $(B) = (B') = (B'')$ καὶ λαμβάνομεν :

$$V = \frac{1}{6}(B + B + 4B)\,\upsilon = (B)\,\upsilon.$$

132. ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ.—Ἔστωσαν (B), (B') τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ καὶ (B'') τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεσαίας τομῆς.

Κατὰ τὴν (§ 105 σημ.) εἶναι :

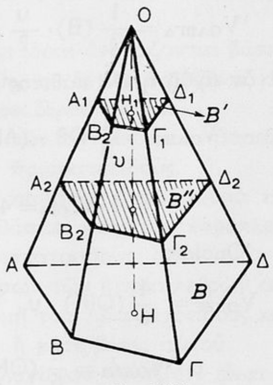
$$(B'') = \frac{1}{4}\left(B + B' + 2\sqrt{BB'}\right),$$

ὁπότε ὁ τύπος τοῦ Sarrus γίνεται :

$$V = \frac{1}{6}(B + B' + 4B'')\,\upsilon =$$

$$= \frac{1}{6}\left(B + B' + B + B' + 2\sqrt{BB'}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)\upsilon$$



Σχ. 107

ἤτοι :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)\upsilon.} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος οὗτος προκύπτει καὶ κατ' ἄλλον τρόπον ὡς ἑξῆς : Θεωροῦμεν τὴν πυραμίδα ΟΑΒΓΔ, ἐξ ἧς προῆλθεν ἡ κόλουρος, καὶ ἔχομεν :

$$\frac{(B)}{OH^2} = \frac{(B')}{OH_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sqrt{B}}{OH} = \frac{\sqrt{B'}}{OH_1} = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}{OH - OH_1} = \frac{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}{\upsilon},$$

ἐξ οὗ :

$$OH = \frac{\upsilon\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}} \quad \text{καὶ} \quad OH_1 = \frac{\upsilon\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{B'}}$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$V = \frac{1}{3}(B)\cdot OH - \frac{1}{3}(B')\cdot OH_1 = \frac{1}{3}(B)\cdot\frac{\upsilon\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}} - \frac{1}{3}(B')\cdot\frac{\upsilon\sqrt{B'}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{B\sqrt{B}-B'\sqrt{B'}}{\sqrt{B}-\sqrt{B'}}\cdot\upsilon = \frac{1}{3}(B+B'+\sqrt{BB'})\,\upsilon.$$

Ὁ τύπος (1) δηλοῖ ὅτι:

Ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν ὕψος τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ βάσεις ἀντιστοίχως τὴν μεγάλην βάσιν, τὴν μικρὰν βάσιν καὶ τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου.

Ἐὰν ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι τοῦ β' εἴδους, τότε ὁ ὄγκος της δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}(B + B' - \sqrt{BB'})\,\upsilon.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

430. Κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὕψος $\upsilon = 12$ cm. καὶ βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν 9 cm. καὶ 4 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

431. Κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὕψος 5α καὶ βάσεις ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν 8α καὶ 2α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς.

432. Ὁμοίως μὲ τὰ αὐτὰ δεδομένα καὶ αἱ βάσεις νὰ εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα.

433. Κόλουρος κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσεις τετράγωνα πλευρῶν 4α καὶ 9α, ὕψος δὲ 6α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς δοθείσης.

434. Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικὰ ἑξάγωνα πλευρῶν 4α καὶ 9α. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς αὐτῆς καὶ ἀκολούθως ὁ ὄγκος της, ἂν τὸ ὕψος της εἶναι 6α.

435. Κόλουρος πυραμὶς νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις αὐτῆς, οὕτως ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων. Ἀκολούθως νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο κολούρων πυραμίδων, εἰς ἃς χωρίζεται ἡ ἀρχικὴ ὑπὸ τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου, ἂν (B) καὶ (B') εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων τῆς δοθείσης.

436. Νὰ κάμετε γεωμετρικὴν ἀπόδειξιν εὑρέσεως τοῦ ὄγκου κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος.

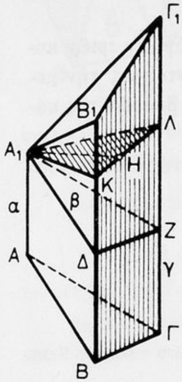
437. Νὰ εὑρεθῇ ὄγκος κολούρου πυραμίδος διὰ χωρισμοῦ αὐτῆς εἰς κοινὰς πυραμίδας μὲ τὴν βοήθειαν ἐσωτερικοῦ σημείου Ο τῆς μιᾶς βάσεως τῆς πυραμίδος αὐτῆς, συνδεομένου μὲ ὅλας τὰς ἄλλας κορυφὰς αὐτῆς.

438. Κόλουρος πυραμὶς μὲ βάσεις ἐμβαδῶν (B), (B') τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς βάσεις εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς ;

439. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις κολούρου πυραμίδος μὲ βάσεις παραλλήλους, διαιροῦντα αὐτὴν εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

133. ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΒΟΥ ΤΡΙΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ.—Ἔστω $ΑΒΓΑ_1Β_1Γ_1$ ἓν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου τὰ μήκη τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$ εἶναι ἀντιστοίχως α,β,γ, καὶ ὅτι: $\alpha < \beta < \gamma$.

Ἐκ τῆς κορυφῆς A_1 ἄγομεν ἐπίπεδον τομὴν $A_1ΔZ$ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ κολοβὸν πρῖσμα εἰς τὸ πρῖσμα $ΑΒΓA_1ΔZ$, παραπλεύρου ἀκμῆς α, καὶ εἰς μίαν πυραμίδα $A_1ΔZΓ_1B_1$. Ἔστω E_u τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς καθέτου τομῆς $A_1ΚΛ$ ἀγομένης ἐκ τοῦ A_1. Τὸ ὕψος A_1H τοῦ τριγώνου $A_1ΚΛ$ εἶναι καὶ ὕψος τῆς πυραμίδος $A_1ΔZΓ_1B_1$, καὶ τὸ ΚΛ εἶναι ὕψος τοῦ τραπεζίου $ΔZΓ_1B_1$.



Σχ. 108

Ὁ ὄγκος τοῦ πλαγίου πρίσματος $A_1ΔZΓΒΑ$ εἶναι $E_u \cdot α$.

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος $A_1ΔZΓ_1B_1$ εἶναι :

$$V_{(A_1ΔZΓ_1B_1)} = \frac{1}{3}(ΔZΓ_1B_1) \cdot A_1H =$$

$$= \frac{1}{3}(ΔB_1 + ZΓ_1) \cdot \frac{1}{2} ΚΛ \cdot A_1H. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$ΔB_1 = β - α, \quad ZΓ_1 = γ - α$$

καὶ

$$\frac{1}{2} \cdot ΚΛ \cdot A_1H = E_u, \quad \text{ἕπεται ὅτι :}$$

$$V_{(A_1ΔZΓΒΑ)} = \frac{1}{3}(β - α + γ - α) \cdot E_u$$

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι :

$$V = E_u \cdot α + \frac{1}{3}(β - α + γ - α) \cdot E_u = E_u \cdot \frac{α + β + γ}{3}$$

ἢ

$$\mathbf{V = \frac{1}{3} E_u (α + β + γ).} \qquad (2)$$

Ἄρα. : **Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν αὐτοῦ.**

134. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.— Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου αὐτοῦ τομῆς ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων.

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι γενικὴ καὶ λίαν χρήσιμος διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ὄγκων τῶν κολοβῶν πρισμάτων.

135. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.— Ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν αὐτοῦ.

136. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.— Πᾶν ὀρθὸν κολοβὸν τριγωνικὸν πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ ὕψη, ἀντιστοίχως, τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς αὐτοῦ.

440. Ἡ βάσις ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει πλευρὰς 9 cm., 12 cm καὶ 15 cm. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι 5 cm, 8 cm καὶ 10 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

441. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς βάσεως, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τῆς ἄλλης βάσεως ἐπὶ τὴν πρώτην.

442. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τῶν βάσεών του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου βάρους τῆς ἄλλης βάσεως ἀπὸ ταύτην.

443. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου (αἱ βάσεις παραλ/μα μὴ παράλληλα) ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν μέσην ἀριθμητικὴν τῶν μηκῶν τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

444. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλ/δου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο παραλλήλων ἑδρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν.

445. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλ/δου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς τῶν βάσεών του ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῆς ἄλλης βάσεως ἀπὸ ταύτην.

446. Διὰ μιᾶς τῶν ἀκμῶν κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διαιροῦν αὐτὸ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

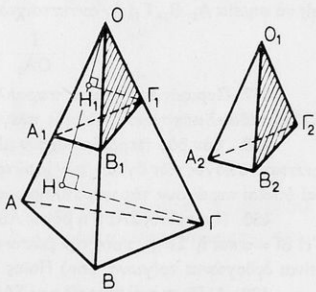
447. Ὀρθὸν κολοβὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ πλευρᾶς γ. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ $ΑΑ_1$, $ΓΓ_1$, $ΕΕ_1$ εἶναι ἀντιστοίχως α, 2α, 3α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

448. Ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ρόμβον ΑΒΓΔ μὲ διαγωνίους $ΑΓ = 2α$ καὶ $ΒΔ = α$. Ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν τμήματα $ΑΑ_1 = 3α$, $ΒΒ_1 = 4α$ καὶ $ΓΓ_1 = α$. 1ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον $Α_1Β_1Γ_1$ διέρχεται διὰ τοῦ Δ. 2ον) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει βάσεις τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ$.

449. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τετραέδρου ΟΑΒΓ, θεωρούμενος ὡς ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτὸ πρισμάτων.

137. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην ἢ συμμετρικήν, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῆς τριέδρου ταύτης.

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν ΟΑΒΓ καὶ $Ο_1Α_2Β_2Γ_2$ δύο τετράεδρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς τριέδρους γωνίας Ο καὶ $Ο_1$ ἴσας. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τῆς ΟΑΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα $ΟΑ_1 = ΟΑ_2$, $ΟΒ_1 = ΟΒ_2$, $ΟΓ_1 = ΟΓ_2$. Τὰ τετράεδρα $ΟΑ_1Β_1Γ_1$ καὶ $Ο_1Α_2Β_2Γ_2$ εἶναι προφανῶς ἴσα. Διατί ; Ἐκ τῶν Γ, $Γ_1$ ἄγομεν τὰ ὕψη τῶν τετραέδρων ΟΑΒΓ καὶ $ΟΑ_1Β_1Γ_1$, τὰ ΓΗ καὶ $Γ_1Η_1$. Τὰ σημεῖα Ο, $Η_1$, Η κεῖνται, ὡς γνωστόν, ἐπ' εὐθείας καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΗΓ καὶ $ΟΗ_1Γ_1$ εἶναι ὅμοια.



Σχ. 109

Ἄρα : $$\frac{ΓΗ}{Γ_1Η_1} = \frac{ΟΓ}{ΟΓ_1} = \frac{ΟΓ}{Ο_1Γ_2}. \qquad (1)$$

Ἀλλά : $$\frac{V_{ΟΑΒΓ}}{V_{ΟΑ_1Β_1Γ_1}} = \frac{\frac{1}{3}(ΟΑΒ)(ΓΗ)}{\frac{1}{3}(ΟΑ_1Β_1)\cdot(Γ_1Η_1)} = \frac{(ΟΑΒ)}{(ΟΑ_1Β_1)} \cdot \frac{ΓΗ}{Γ_1Η_1} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ δὲ $V_{OA_1B_1\Gamma_1} = V_{O_1A_2B_2\Gamma_2}$ καὶ $\dfrac{(OAB)}{(OA_1B_1)} = \dfrac{OA \cdot OB}{OA_1 \cdot OB_1}$,

ἡ (2), βάσει καὶ τῶν (1), γίνεται:

$$\frac{V_{OAB\Gamma}}{V_{O_1A_2B_2\Gamma_2}} = \frac{OA \cdot OB}{OA_1 \cdot OB_1} \cdot \frac{O\Gamma}{O\Gamma_1} = \frac{OA \cdot OB \cdot O\Gamma}{O_1A_2 \cdot O_1B_2 \cdot O_1\Gamma_2}$$

ἤτοι :

$$\boxed{\frac{V_{OAB\Gamma}}{V_{O_1A_2B_2\Gamma_2}} = \frac{\mathbf{OA \cdot OB \cdot O\Gamma}}{\mathbf{O_1A_2 \cdot O_1B_2 \cdot O_1\Gamma_2}}} \qquad (3)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

450. Ἐὰν αἱ τρίεδροι γωνίαι τετραέδρου εἶναι πᾶσαι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι.

451. Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ὀκταέδρου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

452. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἀκμὴν κοινήν, καὶ ἐὰν αἱ δίεδροι αἱ ἀντίστοιχοι εἰς τὴν ἀκμὴν ταύτην εἶναι ἴσαι, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν λόγων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰς διέδρους ταύτας.

453. Δίδεται τετράεδρον ΟΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $O\Gamma = \gamma$ καὶ αἱ περὶ τὸ Ο ἕδραι εἶναι ἑκάστη 60°. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου συναρτήσει τῶν α, β, γ.

454. Πᾶν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ τῶν μέσων Ε καὶ Ζ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΔ, ΒΓ τετραέδρου ΑΒΓΔ, διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

455. Δίδεται κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ ὕψους ΣΗ. Διὰ τυχόντος σημείου O_1 τοῦ ὕψους ἢ τῆς προεκτάσεώς του ἄγομεν τυχὸν ἐπίπεδον, τέμνον τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{\Sigma A_1} + \frac{1}{\Sigma B_1} + \frac{1}{\Sigma \Gamma_1} = \text{ct.}$$

456. Δίδεται κανονικὴ τετραγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ ὕψους $OH = \upsilon$ καὶ ἓν σημεῖον O_1 ἐπὶ τοῦ ΟΗ. Ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ O_1, τέμνει τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, Δ_1 ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{OA_1} + \frac{1}{O\Gamma_1} = \frac{1}{OB_1} + \frac{1}{O\Delta_1}.$$

457. Πυραμὶς ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον. Νὰ διαιρεθῇ αὕτη εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδου διερχομένου διὰ μιᾶς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

458. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἀκμὴν ΑΒ κοινὴν καὶ τὰς διέδρους των ΑΒ παραπληρωματικάς, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰς παραπληρωματικὰς διέδρους.

459. Πυραμίδος ΣΑΒΓ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α καὶ ἡ γων. $B = 60^\circ$. Ἡ $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἡ $\Sigma\Gamma \perp$ πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἔχει μῆκος 2α. 1ον) Δείξατε ὅτι αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα. 2ον) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ;

460. Αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ εἶναι $A\Sigma B = 120^\circ$, $B\Sigma\Gamma = 90^\circ$ καὶ $A\Sigma\Gamma = 60^\circ$ καὶ $\Sigma A = \Sigma B = \Sigma\Gamma = \alpha$. 1ον) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ 2ον) Ποῖος ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΑΙ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

Α΄. ΚΟΙΝΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

138. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν κορυφῶν τετραέδρου καὶ τῶν κέντρων βάρους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστην κορυφὴν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀντιστοίχου τμήματος.

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν AA_1 καὶ BB_1 τὰ τμήματα, τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β καὶ τῶν κέντρων βάρους τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ ἀντιστοίχως.

Τὰ A_1 καὶ B_1 κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν διαμέσων ΒΕ καὶ ΑΕ τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καὶ ΑΓΔ. Ἄρα τὰ τμήματα AA_1 καὶ BB_1 τέμνονται, καθόσον κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΕ. Ἔστω Κ ἡ τομὴ των. Ἐπειδή :

$$\frac{BE}{A_1E}=\frac{3}{1}=\frac{AE}{B_1E},$$

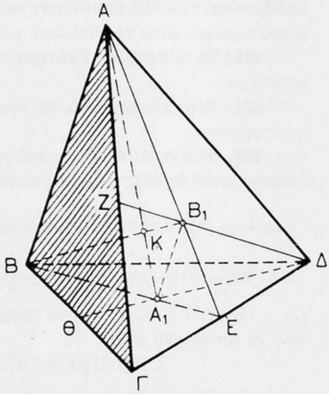
ἕπεται ὅτι τὸ τμῆμα A_1B_1 εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἄρα τὰ τρίγωνα ΚΑΒ καὶ KA_1B_1 εἶναι ὅμοια, καί :

$$\frac{AK}{KA_1}=\frac{BK}{KB_1}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{3}{1},$$

ἐξ οὗ : $$KA=3\cdot KA_1$$

ἢ $$KA=\frac{3}{4}AA_1 \quad \text{καὶ} \quad KB=\frac{3}{4}BB_1.$$



Σχ. 110

Ἀνὰ δύο λοιπὸν τὰ τμήματα ταῦτα τέμνονται. Ἐπειδὴ δὲ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ.

Τὸ σημεῖον Κ καλεῖται **κέντρον βάρους** τοῦ τετραέδρου.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραέδρου καὶ τῶν κέντρων βάρους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του, ὀνομάζονται **διάμεσοι** τοῦ τετραέδρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

461. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας διέδρους ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.

462. Τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ καὶ διχοτομοῦνται ὑπὸ τούτου.

463. Τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ μιᾶς ἀκμῆς τετραέδρου καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου βάρους.

464. Τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς ἓξ διέδρους γωνίας τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

465. Τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἓξ ἀκμῶν τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

466. Τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας τετραέδρου καὶ τὰ διχοτομοῦντα τὰς ἄλλας τρεῖς ἐξωτερικὰς διέδρους γωνίας αὐτοῦ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

467. Τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς τρεῖς διέδρους τριέδρου γωνίας τετραέδρου, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας (**διχοτόμος τριέδρου**).

468. Αἱ διχοτόμοι τῶν τεσσάρων τριέδρων γωνιῶν τετραέδρου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

469. Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τετραέδρου καὶ εἰς τὰ κέντρα τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ αὐτὰς ἄγομεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς ἕδρας ταύτας. Δείξατε ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

470. Δύο τετράεδρα ἔχοντα μίαν δίεδρον ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας ἕδρας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ εἶναι ἴσα.

471. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τετραέδρου ἀπὸ ἐπίπεδον μὴ τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

472. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραέδρου καὶ τῶν κέντρων τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς ἀπέναντι ἕδρας διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι τὰ γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου νὰ εἶναι ἴσα.

473. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ τετραέδρου.

474. Τετράεδρον ΑΒΓΔ νὰ προβληθῇ ἐπὶ ἐπίπεδον κατὰ τρίγωνον ἢ παραλληλόγραμμον ἢ τετράγωνον.

475. Ἐὰν α, α_1 καὶ β, β_1 καὶ γ, γ_1 εἶναι αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ τετραέδρου καὶ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 αἱ διάμεσοί του AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$, $\Delta\Delta_1$ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1ον : $\mu_1^2 = \dfrac{1}{9}\left[3\left(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2\right) - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right]$, $\mu_2 = \ldots$, $\mu_3 = \ldots$, $\mu_4 = \ldots$,

2ον : $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 = \dfrac{4}{9}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2\right)$,

3ον : Ἂν x, y, ω εἶναι τὰ τμήματα, τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 4\,(x^2 + y^2 + \omega^2).$$

476. Ἐὰν τὰ ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι ἴσα, τότε αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἰς τὰ ἔνκεντρα αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἰσχύει τὸ ἀντίστροφον ;

477. Τὰ ἐπίπεδα τὰ ἀγόμενα ἐκ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν τετραέδρου καθέτως πρὸς τὰς ἀπέναντι ἀκμάς, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

478. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ, κέντρου βάρους Κ, καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 4MK^2 + KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2 + K\Delta^2 \qquad \textbf{(Leibnitz)}$$

479. Εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ γινόμενον δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν δύο ζευγῶν τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ.

480. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τετραέδρου περιέχεται μεταξὺ 4 ὀρθῶν καὶ 6 ὀρθῶν γωνιῶν.

481. Εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν ἄλλων ἑδρῶν.

482. Ἐὰν τετραέδρου αἱ ἀπέναντι δίεδροι εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι.

483. Τετράεδρον ΑΒΓΔ νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, οὕτως ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον (τρεῖς περιπτώσεις).

484. Δοθέντος τετραέδρου ΑΒΓΔ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης : $MA^2 + MB^2 = M\Gamma^2 + M\Delta^2$.

485. Νὰ κατασκευασθῇ τετράεδρον ἐκ τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν καὶ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας αὗται σχηματίζουν μεταξύ των.

486. Ὁμοίως ἐκ τῶν μέσων Κ, Λ, Μ, Ν τεσσάρων ἀκμῶν του (δώδεκα λύσεις).

487. Ὁμοίως ἐκ τῶν ἓξ ἀκμῶν του.

488. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ο ἐσωτερικὸν τῆς ἕδρας ΑΒΓ. Αἱ ἐκ τοῦ Ο ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀκμὰς ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ τέμνουν τὰς ἕδρας ΔΒΓ, ΔΓΑ, ΔΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Τότε :

$$\frac{OA_1}{\Delta A} + \frac{OB_1}{\Delta B} + \frac{O\Gamma_1}{\Delta\Gamma} = 1.$$

489. Νὰ ἐξετασθῇ καὶ ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν τὸ Ο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

490. Διὰ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου ἄγομεν ἐπίπεδα παράλληλα καὶ σχηματίζεται οὕτως ἕνα παραλληλεπίπεδον, **περιγεγραμμένον** περὶ τὸ τετράεδρον (τὸ τετράεδρον **ἐγγεγραμμένον**), τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1ον : Ἐὰν δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει βάσεις ὀρθογώνια.

2ον : Ἐὰν τὸ τετράεδρον ἔχῃ δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἴσα, τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθόν.

3ον : Ἐὰν δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι, τὰ ἀντίστοιχα παραλληλόγραμμα εἶναι ρόμβοι.

4ον : Ἐὰν τὸ τετράεδρον ἔχῃ τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἴσα, τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

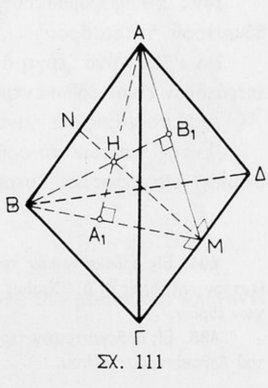
5ον : Ἐὰν δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, τότε καὶ τὸ τρίτον ζεῦγος εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, καὶ αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι **ρόμβοι** (ρομβόεδρον).

6ον : Ἐὰν δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ τετραέδρου εἶναι ἴσαι καὶ ὀρθογώνιοι, αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι τετράγωνα.

7ον : Ἐὰν τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικόν, τὸ περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος καὶ ἀντιστρόφως.

Β'. ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΚΜΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥΣ

139. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἐαν τὰ ὕψη AA_1 καὶ BB_1 τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνωνται, αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.



ΣΧ. 111

Ἀπόδειξις : Ἔστω ΑΒΓΔ ἓν τετράεδρον, τοῦ ὁποίου τὰ ὕψη AA_1 καὶ BB_1 τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἐπειδὴ ἡ AA_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ AA_1 εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ ἡ BB_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΓΔ, ἕπεται ὅτι ἡ BB_1 εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἀφοῦ, λοιπόν, ἡ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὰς εὐθείας AA_1 καὶ BB_1, ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΗ, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΓΔ θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΑΒ.

140. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.— Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι, τὰ ὕψη AA_1 καὶ BB_1 τέμνονται.

Ἀπόδειξις : Ἀφοῦ ἡ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΑΒ, ὑπάρχει ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς ΑΒ καὶ κάθετον πρὸς τὴν ΓΔ, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Μ. (σχ. 111). Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΜ. Τότε θὰ εἶναι, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ AA_1 κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΜ, ἀφ' ἑτέρου δὲ ἡ AA_1 ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓΔ. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ AA_1 θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΓΔ. Ὁμοίως καὶ ἡ BB_1 θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΓΔ. Ἄρα τὰ ὕψη AA_1 καὶ BB_1 τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνονται.

Παρατηρήσεις. 1ον : Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓΔ, ἕπεται ὅτι τὰ ὕψη τοῦ τετραέδρου, τὰ ἀγόμενα ἐκ τῶν Γ καὶ Δ, τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Η' διάφορον, ἐν γένει, τοῦ Η.

2ον : Ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΜ, ἡ εὐθεῖα ΜΗ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἀλλ' ἡ ΜΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἄρα ἡ ΜΗΝ εἶναι **κοινὴ κάθετος** τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

491. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὕψος AA_1 αὐτοῦ, ἔχει τὸν πόδα του A_1 ἐπὶ τοῦ ὕψους ΒΜ τῆς ἕδρας ΒΓΔ.

492. Ἐὰν δύο ὕψη τετραέδρου τέμνωνται, θὰ τέμνωνται καὶ τὰ ἄλλα δύο ὕψη αὐτοῦ, καὶ τὸ τετράεδρον θὰ ἔχῃ δύο ἀπέναντι ἀκμὰς ὀρθογωνίους.

493. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνει τὸ ὕψος AA_1 αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκμαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

Γ'. ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΙΚΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

141. ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἓν τετράεδρον λέγεται ὀρθοκεντρικὸν ἢ ὀρθογωνικόν, ὅταν ἔχῃ καὶ τὰ τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του ὀρθογωνίους εὐθείας.

Τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας :

1ον : Τὰ ὕψη ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (ὀρθόκεντρον τετραέδρου).

2ον : Ἐὰν δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι, τὸ τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

Αἱ ἀποδείξεις νὰ γίνουν ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

Ἐκτὸς τούτων τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ἔχει καὶ ἄλλας ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἀναγράφομεν (μερικὰς) ὑπὸ μορφὴ ἀσκήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

494. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ ὁ ποὺς τοῦ ὕψους AA_1 συμπίπτει μὲ τὸ ὀρθόκεντρον τῆς ἕδρας ΒΓΔ. Ὁμοίως καὶ οἱ πόδες τῶν ἄλλων ὑψῶν εἶναι τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν.

495. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τεράεδρον αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του διέρχονται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τούτου.

496. Ἐὰν εἰς τὸ ὀρθόκεντρον A_1 τριγώνου ΒΓΔ ὑψώσωμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΓΔ, τότε πᾶν σημεῖον Α τῆς καθέτου ταύτης δίδει ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ.

497. Ἐὰν ὁ πούς A_1 τοῦ ὕψους AA_1 τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, τότε τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

498. Ἐὰν τρία ὕψη τετραέδρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τότε καὶ τὸ τέταρτον ὕψος διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τούτου καὶ τὸ τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

499. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ ἀθροίσματα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἴσα.

500. Τὰ μέσα τῶν ἓξ ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου καὶ τὰ ἄκρα τῶν κοινῶν καθέτων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου τούτου.

501. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἴσα.

502. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι ρομβόεδρον.

503. Ἡ τομὴ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμάς του εἶναι ὀρθογώνιον.

504. Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου εἰς τὰ κέντρα βάρους αὐτῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

505. Οἱ πόδες τῶν κοινῶν καθέτων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου συμπίπτουν μὲ τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου τούτου.

506. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον μία ἕδρα εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον.

507. Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶναι οἱ πόδες τῆς κοινῆς καθέτου τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ΜΓ \cdot ΜΔ + ΝΑ \cdot ΝΒ = ΜΝ^2$ καὶ ἀντιστρόφως.

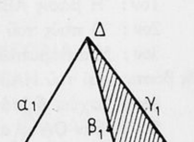
508. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $ΑΒ^2 + ΓΔ^2 = 4\,ΕΖ^2$, ἂν Ε,Ζ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

509. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ἐκ τῶν τεσσάρων ἀκμῶν του.

Δ΄. ΙΣΟΕΔΡΙΚΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

142. ΟΡΙΣΜΟΣ.— Ἓν τετράεδρον καλεῖται ἰσοεδρικόν, ὅταν αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι.

143. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.—Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ τετραέδρου εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἕδραι του εἶναι τρίγωνα ἴσα, καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 112

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἴσαι:

$$α = α_1, \quad β = β_1, \quad γ = γ_1.$$

Τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ, ΒΓΔ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἄρα εἶναι ἴσα.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

144. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.—Τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἰσοεδρικοῦ τετραέδρου εἶναι κάθετα ἀνὰ δύο.

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

510. Εἰς ἓν ἰσοεδρικὸν τετράεδρον :

1ον : Αἱ τέσσαρες τρίεδροι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

2ον : Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν μιᾶς τριέδρου γωνίας αὐτοῦ εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

3ον : Αἱ ἕδραι του εἶναι πᾶσαι ὀξυγώνια τρίγωνα.

4ον : Αἱ δίεδροι αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων ἀκμῶν εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.

5ον : Ἑκάστη κορυφή του προβάλλεται ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ἕδρας εἰς ἓν σημεῖον, συμμετρικὸν τοῦ ὀρθοκέντρου τῆς ἕδρας ταύτης ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὴν ἕδραν ταύτην.

6ον : Αἱ ἕδραι του εἶναι ἰσοδύναμοι.

7ον : Τὰ ὕψη του εἶναι ἴσα.

8ον : Τὸ περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ ἀντιστρόφως.

9ον : Τὸ κέντρον βάρους ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν του.

10ον : Τὸ κέντρον βάρους ἀπέχει ἰσάκις τῶν ἑδρῶν του.

11ον : Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Ο, ἐσωτερικοῦ τοῦ τετραέδρου, ἀπὸ τὰς ἕδρας του εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ὕψος του.

12ον : Παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, τὸ τέμνει κατὰ παραλληλόγραμμον σταθερᾶς περιμέτρου.

Ε΄. ΤΡΙΣΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

145. ΟΡΙΣΜΟΣ.— Ἓν τετράεδρον καλεῖται τρισορθογώνιον, ὅταν ἔχῃ μίαν τρίεδρον γωνίαν αὐτοῦ τρισορθογώνιον.

Τοῦτο ἔχει χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἀναγράφομεν ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

511. Ἐὰν ἡ τρίεδρος γωνία Ο τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος :

1ον : Ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον τρίγωνον.

2ον : Ὁ πούς τοῦ ὕψους ΟΗ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τῆς βάσεως ΑΒΓ.

3ον : Μία παράπλευρος ἕδρα του, ἔστω ἡ ΟΑΒ, ἔχει ἐμβαδὸν μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ΗΑΒ.

4ον : Ἰσχύει ἡ ἰσότης : $(ΑΒΓ)^2 = (ΟΑΒ)^2 + (ΟΒΓ)^2 + (ΟΓΑ)^2$.

5ον : Ἐὰν $ΟΑ = α$, $ΟΒ = β$, $ΟΓ = γ$ καὶ $ΟΗ = υ$, τότε :

$$\frac{1}{υ^2} = \frac{1}{α^2} + \frac{1}{β^2} + \frac{1}{γ^2}.$$

512. Ἵνα τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τὴν κορυφὴν Ο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ κορυφὴ Ο νὰ προβάλλεται εἰς τὸ ὀρθόκεντρον Η τῆς βάσεως Ο, καὶ τὸ ὕψος ΟΗ νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται τὸ ὕψος τῆς βάσεως ὑπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου Η αὐτῆς.

513. Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ, ἂν ἀχθῇ ἐντὸς αὐτοῦ ἡμιευθεῖα ΟΔ :

1ον : Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μετὰ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ἰσοῦται πρὸς τρεῖς ὀρθὰς γωνίας.

2ον : Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων γωνιῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν δευτέρων.

514. Νὰ κατασκευασθῇ τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ ἐκ τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως ΑΒΓ αὐτοῦ.

515. Νὰ τμηθῇ τρισορθογώνιος γωνία Ο ὑπὸ ἐπιπέδου, οὕτως ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν τρίγωνον ΔΕΖ.

516. Τὸ τρισορθογώνιον τετράεδρον εἶναι καὶ ὀρθοκεντρικόν.

517. Ἐὰν Ο εἶναι κορυφὴ τῆς τρισορθογωνίου γωνίας τετραέδρου ΟΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, τὸ τετράεδρον ΟΔΕΖ ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμάς του ἴσας καὶ ἀντιστρόφως.

518. Δίδεται τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ εἰς τὸ Ο. 1ον: Δείξατε ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ΟΗ ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ ἀντιστοίχως.

2ον: Ἐὰν K_1, K_2, K_3, K_4 εἶναι τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ, ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ἀντιστοίχως δείξατε ὅτι: $11\, OK_1^2 = ΓK_2^2 + AK_3^2 + BK_4^2$.

519. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΒΓΑ συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τῆς βάσεως ΑΒΓ αὐτοῦ.

ΣΤ'. ΤΟ ΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΝ

146. Γνωρίζομεν ὅτι: **Κανονικὸν τετράεδρον εἶναι ἐκεῖνο, ὅπερ ἔχει ἕδρας ἰσόπλευρα τρίγωνα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

520. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ:

1ον: Τὰ ὕψη του εἶναι ἴσα.

2ον: Αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.

3ον: Τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀντιστοίχων ζευγῶν καὶ ἀνὰ δύο κάθετα μεταξύ των.

4ον: Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α τοῦ τετραέδρου τούτου νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων τούτων.

5ον: Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τοῦ ὕψους ΑΗ, τὸ τετράεδρον ΟΒΓΔ εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τὸ σημεῖον Ο.

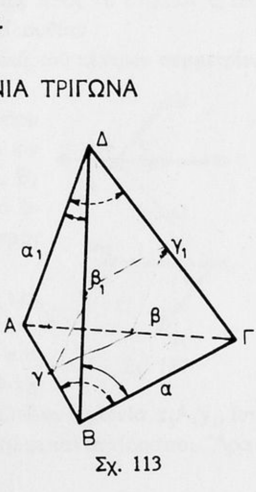
6ον: Τὸ περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος.

Ζ'. ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ ΜΕ ΕΔΡΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

147. Εἰς ἓν τοιοῦτον τετράεδρον αἱ θέσεις τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ἑκάστης ἕδρας δύναται νὰ εἶναι αἱ τοῦ παραπλεύρου σχήματος. Διατί;

Αἱ ἄλλαι τρεῖς περιπτώσεις ἀποκλείονται. Διατί;

(Ὑπόδειξις: Κάμετε χρῆσιν τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος).



Σχ. 113

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

521. Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἕδραι τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα:

1ον: Ἡ ἀκμὴ ΒΔ εἶναι κοινὴ κάθετος τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ.

2ον: Αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν ΔΒΑ καὶ ΒΔΓ ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὰς τιμὰς τῶν διέδρων ΒΓ καὶ ΔΑ ἀντιστοίχως.

3ον: Αἱ ἀκμαὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.

4ον: Τὸ μέσον τῆς ΑΓ ἀπέχει ἴσον τῶν κορυφῶν τοῦ τετραέδρου.

5ον: Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΔΓ, ΔΒ, ΑΒ καὶ ΑΓ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

6ον: Πᾶσα τομὴ παράλληλος πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

7ον: Αἱ διάμεσοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν Δ καὶ Β εἶναι ἴσαι.

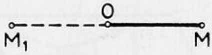
ΣΗΜ: Διὰ τὸ τετράεδρον, ἐν γένει, ὑπάρχουν πάμπολλαι ἀσκήσεις. Θὰ ἔπρεπε νὰ γραφῇ ὁλόκληρον βιβλίον. Διὰ τὸ σχολεῖον εἶναι ἀδύνατον νὰ γραφοῦν ὅλαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ

148. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ.— Θεωροῦμεν σημεῖον Ο τοῦ χώρου σταθερόν. Εἰς πᾶν σημεῖον Μ τοῦ χώρου (σχ. 114) ἀντιστοιχεῖ ἓν μόνον σημεῖον M_1, τοιοῦτον ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα MM_1 νὰ ἔχῃ μέσον τὸ Ο.

Τὸ M_1 καλεῖται συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Ο.



Σχ. 114

Τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_1 ὡς πρὸς τὸ Ο εἶναι τὸ σημεῖον Μ. Τὰ σημεῖα Μ καὶ M_1 εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἄρα:

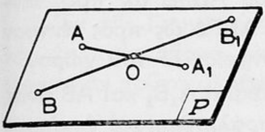
Δύο σημεῖα Μ καὶ M_1 καλοῦνται συμμετρικὰ ὡς πρὸς δοθὲν σημεῖον Ο, ὅταν τὸ Ο εἶναι μέσον τοῦ τμήματος MM_1.

Εἰς τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ταύτην ἀντιστοιχίαν τὰ σημεῖα Μ καὶ M_1 καλοῦνται **ὁμόλογα.**

Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται **κέντρον** συμμετρίας.

Τὸ κέντρον συμμετρίας Ο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του, καὶ εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τοῦ χώρου, ὅπερ ἔχει τὴν ἰδιότητα ταύτην.

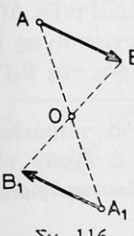
149. ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟΝ.— ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο σχήματα λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον Ο, ὅταν πᾶν σημεῖον ἑκατέρου εἶναι συμμετρικὸν σημείου τινὸς τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦτο.



Σχ. 115

1ον: Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Ρ) καὶ σημεῖον Ο (σχ. 115) κείμενον ἐπ' αὐτοῦ. Τὸ συμμετρικὸν παντὸς σημείου Α, Β, . . . τοῦ (Ρ) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τοῦ (Ρ). Κατ' ἀκολουθίαν:

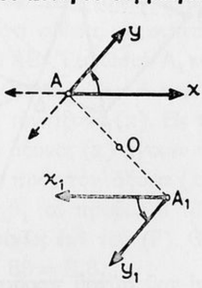
Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου συμμετρίας εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ ἐπίπεδον.



Σχ. 116

2ον: Ἔστω Ο τὸ σταθερὸν σημεῖον τοῦ χώρου καὶ ΑΒ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα (σχ. 116). Τὰ συμμετρικὰ A_1, B_1 τῶν Α,Β ὁρίζουν τὸ τμῆμα A_1B_1, τὸ ὁποῖον εἶναι συμμετρικὸν τοῦ ΑΒ ὡς πρὸς κέντρον τὸ Ο.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα A_1B_1 καὶ ΑΒ εἶναι ἴσα, παράλληλα καὶ ἀντίρροπα.

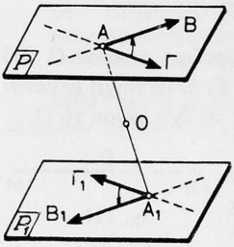


Σχ. 117

3ον: Θεωροῦμεν γωνίαν xAy καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς (σχ. 117). Τὸ συμμετρικὸν τῆς γωνίας xAy ὡς πρὸς τὸ Ο εἶναι ἡ γωνία $x_1A_1y_1$, ἴση πρὸς τὴν xAy, καθόσον αἱ πλευραί των εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Ἄρα:

Τὸ συμμετρικὸν γωνίας xAy ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O εἶναι γωνία $x_1A_1y_1$ ἴση πρὸς τὴν κατακορυφὴν τῆς xAy.

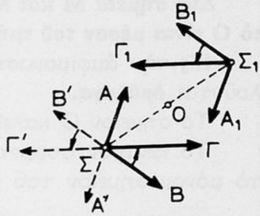
4ον: Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P) καὶ σημεῖον O ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ. 118). Ἐπὶ τοῦ (P) θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον A καὶ τὰς διὰ τοῦ A ἡμιευθείας AB καὶ AΓ τοῦ (P). Αἱ συμμετρικαὶ τούτων ὡς πρὸς τὸ O εἶναι αἱ ἡμιευθεῖαι A_1B_1, $A_1\Gamma_1$, παράλληλοι πρὸς τὰς AB, AΓ ἀντιστοίχως καὶ ἀντίρροποι. Αἱ A_1B_1, $A_1\Gamma_1$ ὁρίζουν ἐπίπεδον (P_1) παράλληλον πρὸς τὸ (P). Ἄρα :



Σχ. 118

Τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου (P) ὡς πρὸς κέντρον O κείμενον ἐκτὸς αὐτοῦ εἶναι ἐπίπεδον (P_1) παράλληλον πρὸς τὸ (P), ἀγόμενον ἐκ τοῦ A_1, συμμετρικοῦ σημείου A τοῦ (P) ὡς πρὸς κέντρον O.

5ον: Δύο κατακορυφὴν τρίεδροι γωνίαι ΣΑΒΓ καὶ ΣΑ'Β'Γ' εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν Σ (σχ. 119). Ἡ συμμετρικὴ τῆς ΣΑΒΓ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O εἶναι ἡ τρίεδρος $\Sigma_1A_1B_1\Gamma_1$, ἴση πρὸς τὴν ΣΑ'Β'Γ'. Ἄρα :



Σχ. 119

Τὸ συμμετρικὸν τριέδρου ὡς πρὸς κέντρον O εἶναι τρίεδρος ἴση πρὸς τὴν κατακορυφὴν τῆς δοθείσης.

6ον: Ἔστω Α'Β'Γ'Δ τὸ συμμετρικὸν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ ὡς πρὸς κέντρον τὴν κορυφὴν Δ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ τὸ συμμετρικὸν τοῦ ΑΒΓΔ ὡς πρὸς κέντρον τυχὸν σημεῖον O τοῦ χώρου.

Σχ. 119α

Αἱ ἀκμαὶ A_1B_1 καὶ AB εἶναι ἴσαι, παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Αἱ ἀκμαὶ Α'Β' καὶ AB εἶναι ἴσαι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι. Ἄρα αἱ ἀκμαὶ Α'Β' καὶ A_1B_1 εἶναι ὁμμορόπως ἴσαι.

Ὁμοίως αἱ ἀκμαὶ Β'Γ', ΔΓ', ΔΒ', Α'Δ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμορρόπως ἴσαι πρὸς τὰς $B_1\Gamma_1$, $\Delta_1\Gamma_1$, Δ_1B_1, $A_1\Delta_1$.

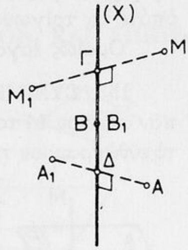
Οὕτω, τὰ δύο τετράεδρα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, Α'Β'Γ'Δ ἔχουν τὰς ἕδρας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ. Ἄρα εἶναι ἴσα. Ὥστε :

Τὸ συμμετρικὸν τετραέδρου ὡς πρὸς κέντρον O (διαφόρου τῶν κορυφῶν τοῦ δοθέντος τετραέδρου) **εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κατακορυφὴν τοῦ δοθέντος.** Ἑπομένως καί :

Τὰ κατακορυφὴν τετράεδρα δοθέντος τετραέδρου εἶναι ἴσα μεταξύ των.

Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπεκταθῇ τὸ θεώρημα τοῦτο καὶ διὰ τυχὸν κυρτὸν πολύεδρον;

150. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ.— Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (x) τοῦ χώρου (σχ. 120). Εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M_1 τοῦ χώρου, τοιοῦτον ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα MM_1 νὰ ἔχῃ τὸ μέσον του ἐπὶ τῆς (x) καὶ νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν (x). Τὸ M_1 καλεῖται συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὴν (x). Ἀντιστρόφως τὸ σημεῖον M εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ M_1 ὡς πρὸς τὴν (x). Ὥστε:



Σχ. 120

Δύο σημεῖα M καὶ M_1 τοῦ χώρου θὰ λέγωνται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν (x) τοῦ χώρου, ὅταν ἡ (x) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος MM_1.

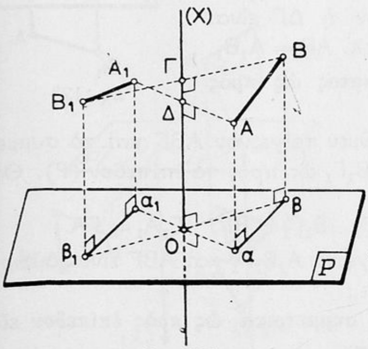
Τὰ M_1 καὶ M ὀνομάζονται καὶ ὁμόλογα σημεῖα. Ἡ (x) καλεῖται **ἄξων συμμετρίας.** Πᾶν σημεῖον B τοῦ ἄξονος συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του B_1, εἰς τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς x.

151. ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ. ΟΡΙΣΜΟΣ.— Δύο σχήματα (Σ) καὶ ($Σ_1$) λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα (x), ὅταν πᾶν σημεῖον A_1 τοῦ ($Σ_1$) εἶναι συμμετρικὸν σημείου A τοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (x), καὶ ἀντιστρόφως.

Τὰ σημεῖα τῶν (Σ) καὶ ($Σ_1$) εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα. Τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ ἑνὸς σχήματος εἶναι ἐπίσης κοινὰ τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ ἄλλου σχήματος.

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας τοῦ ἐπιπέδου γνωρίζομεν ὅτι: δύο σχήματα συμμετρικά, ὡς πρὸς ἄξονα, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ των, εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα. Ἂς ἴδωμεν ἂν τοῦτο ἀληθεύῃ καὶ εἰς τὸν χῶρον.

152. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Δύο σχήματα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.



Σχ. 121

Ἀπόδειξις: Ἔστω AB εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ (x) δοθεῖσα εὐθεῖα, μὴ συνεπίπεδος (ἐν γένει) μὲ τὸ AB. Ἔστωσαν A_1 καὶ B_1 τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A καὶ B ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (x). Εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον O τοῦ ἄξονος (x) ἄγομεν τὸ ἐπίπεδον (P) κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα (x). Ἔστωσαν αβ καὶ $α_1β_1$ αἱ προβολαὶ τῶν AB καὶ A_1B_1 ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ (P). Θὰ εἶναι $Aα = A_1α_1$ καὶ $Bβ = B_1β_1$.

Ἐπειδὴ δὲ $ΔA = ΔA_1$, καὶ $ΓB = ΓB_1$, ἕπεται ὅτι $Oα = Oα_1$ καὶ $Oβ = Oβ_1$. Ἄρα τὰ τρίγωνα Oαβ καὶ $Oα_1β_1$ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα. Συνεπῶς $αβ = α_1β_1$. Τὰ ὀρθογώνια τραπέζια ABβα καὶ $A_1B_1β_1α_1$

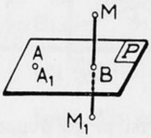
ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος $αβ = α_1β_1$ καὶ τὰς αὐτὰς βάσεις $Αα = Α_1α_1$ καὶ $Ββ = Β_1β_1$·

Ἄρα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα καὶ κατ' ἀκολουθίαν $Α_1Β_1 = ΑΒ$.

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ΑΒ θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΕ καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ $Α_1Β_1Ε_1$ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (x), τότε θὰ εἶναι $Α_1Β_1 = ΑΒ$, $Α_1Ε_1 = ΑΕ$ καὶ $Β_1Ε_1 = ΒΕ$· ὁπότε τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ $Α_1Β_1Ε_1$ θὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ κάθε ἄλλο σχῆμα (Σ).

153. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.— Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Ρ). Εἰς πᾶν σημεῖον Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον $Μ_1$ τοῦ χώρου, τοιοῦτον ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $ΜΜ_1$ νὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ δὲ ἴχνος Β τοῦ (Ρ) καὶ τοῦ $ΜΜ_1$ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος $ΜΜ_1$·



Σχ. 122

Τὸ $Μ_1$ καλεῖται συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ)·

Ἀντιστρόφως τὸ Μ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ $Μ_1$ ὡς πρὸς τὸ (Ρ). Ἄρα:

Δύο σημεῖα Μ καὶ $Μ_1$ τοῦ χώρου καλοῦνται συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον (Ρ), ὅταν τὸ ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι μεσοκάθετον τοῦ τμήματος $ΜΜ_1$.

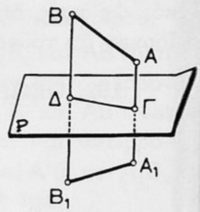
Τὰ Μ καὶ $Μ_1$ καλοῦνται καὶ **ὁμόλογα** σημεῖα. Τὸ δὲ ἐπίπεδον (Ρ) καλεῖται **ἐπίπεδον συμμετρίας.**

Ἓν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου συμμετρίας συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του $Α_1$, καὶ μόνον τὰ σημεῖα τοῦ (Ρ) ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην.

154. ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.— ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο σχήματα καλοῦνται συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον, ἐὰν πᾶν σημεῖον ἑκατέρου εἶναι συμμετρικὸν σημείου τινὸς τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

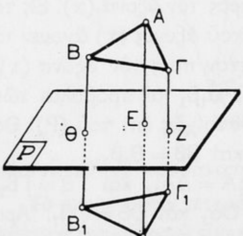
1ον: Ἔστω ΑΒ εὐθύγραμμον τμῆμα καὶ τὸ συμμετρικόν του $Α_1Β_1$ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ), (σχ. 123).

Ἐὰν τὸ ΑΒ εἶναι πλάγιον πρὸς τὸ (Ρ), τότε τὸ σχῆμα $ΑΒΒ_1Α_1$ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον, καθόσον ἡ ΔΓ εἶναι μεσοκάθετος τῶν βάσεών του $ΒΒ_1$ καὶ $ΑΑ_1$. Δηλ. $ΑΒ = Α_1Β_1$.



Σχ. 123

Ὥστε: **Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς εὐθ. τμήματος ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶναι εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς αὐτό.**



Σχ. 124

2ον: Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ $Α_1Β_1Γ_1$ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ). Θὰ εἶναι:

$$Α_1Β_1 = ΑΒ, \quad Β_1Γ_1 = ΒΓ, \quad Γ_1Α_1 = ΓΑ.$$

Ἄρα τὰ τρίγωνα $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα. Ὥστε:

Δύο τρίγωνα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$ ἕπεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ ΑΒΓ.

Ἄρα : **Δύο γωνίαι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἀντιρρόπως ἴσαι.**

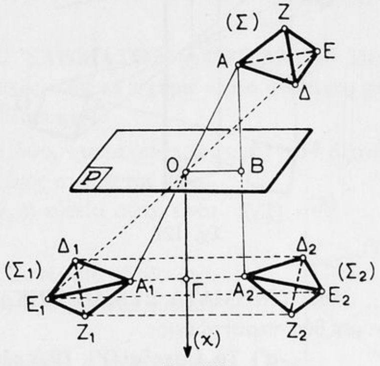
Ἐπειδὴ πᾶν ἐπίπεδον πολύγωνον χωρίζεται εἰς τρίγωνα, ἕπεται ὅτι :

Δύο πολύγωνα συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἐπίπεδον εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα (μὲ τὴν αὐτὴν διάταξιν ἰσότητος τριγώνων).

155. ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

— Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

1ον : **Τὸ ἐπίπεδον νὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου.** Ἔστω σχῆμα (Σ) καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ (Σ_1) ὡς πρὸς κέντρον Ο, καὶ (Σ_2) τὸ συμμετρικὸν τοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ Ο (Σχ. 125).



Σχ. 125

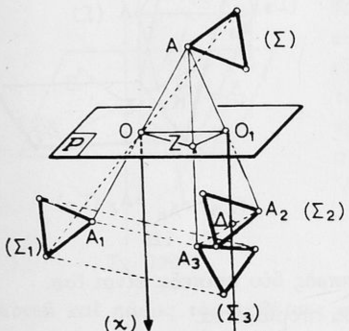
Ἐὰν Α εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ (Σ), καὶ A_1, A_2 τὰ συμμετρικὰ αὐτοῦ πρὸς τὸ κέντρον Ο καὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ), θὰ εἶναι $OA_1 = OA$ καὶ $BA_2 = BA$. Ἄρα τὸ τμῆμα ΟΒ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ τμῆμα A_1A_2 καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. Τὸ ΟΒ εἶναι καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ AA_2.

Ἐὰν εἰς τὸ Ο ἀχθῇ κάθετος Ox πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ), αὕτη θὰ τέμνῃ δίχα καὶ καθέτως τὸ τμῆμα A_1A_2. Ἄρα τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_2 εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς αὔξονα Ox.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῶν (Σ_1) καὶ (Σ_2), ἕπεται ὅτι ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox. Ἄρα εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

Ὥστε : **Τὰ συμμετρικὰ σχήματος πρὸς κέντρον καὶ ἐπίπεδον δι' αὐτοῦ διερχόμενον εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.**

2ον : **Τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου. α')** Ἔστωσαν (Σ_1) καὶ (Σ_2) δύο σχήματα συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος (Σ) ὡς πρὸς δύο κέντρα Ο καὶ O_1. Διὰ τῆς OO_1 ἄγομεν τυχὸν ἐπίπεδον (Ρ) καὶ ἔστωσαν A_1, A_2, A_3 τὰ συμμετρικὰ ἑνὸς σημείου Α τοῦ (Σ) ὡς πρὸς κέντρα Ο καὶ O_1 καὶ πρὸς τὸ (Ρ) ἀντιστοίχως. Κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν τὰ σημεῖα A_1 καὶ A_3 θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα Ox. Ὁμοίως τὰ σημεῖα A_2 καὶ A_3 θὰ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα $O_1y \parallel Ox$.



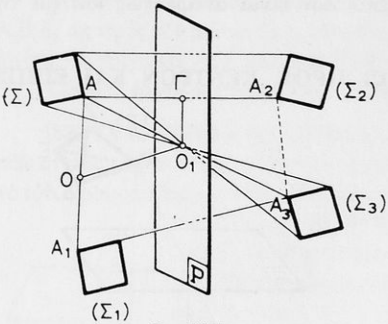
Σχ. 126

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει διὰ πάντα τὰ σημεῖα τῶν (Σ_1), (Σ_3) ἀφ' ἑνός, καὶ (Σ_2), (Σ_3) ἀφ' ἑτέρου, ἕπεται ὅτι :

$(\Sigma_1) = (\Sigma_3)$ ὁμορρόπως. καὶ $(\Sigma_2) = (\Sigma_3)$ ὁμορρόπως $\Longrightarrow (\Sigma_1) = (\Sigma_2)$.

Ἄρα: **Τὰ πρὸς δύο κέντρα συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος εἶναι ἴσα.**

β) Ἔστωσαν (Σ_1) καὶ (Σ_2) τὰ συμμετρικὰ σχήματα τοῦ σχήματος (Σ) ὡς πρὸς κέντρον O καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον (P). Ἂν (Σ_3) εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O_1 τοῦ ἐπιπέδου (P), θὰ εἶναι $(\Sigma_2) = (\Sigma_3)$ ὁμορρόπως Ἐπειδὴ δὲ τὰ (Σ_1) καὶ (Σ_3) εἶναι συμμετρικὰ τοῦ (Σ) ὡς πρὸς δύο κέντρα O καὶ O_1, ἕπεται ὅτι $(\Sigma_1) = (\Sigma_3)$. Ἄρα $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$ ὁμορρόπως Ὥστε:



Σχ. 127

Τὰ πρὸς κέντρον καὶ τυχὸν ἐπίπεδον συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

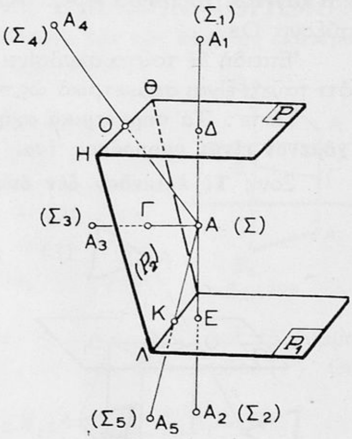
156. ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΑ.— Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α΄) Τὰ ἐπίπεδα (P), (P_2) τέμνονται.

β΄) Τὰ ἐπίπεδα (P), (P_1) εἶναι παράλληλα.

Ἔστωσαν (Σ_1) καὶ (Σ_2) τὰ συμμετρικὰ σχήματος (Σ) ὡς πρὸς τὰ παράλληλα ἐπίπεδα (P) καὶ (P_1). Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν (Σ_3) τοῦ σχήματος (Σ) ὡς πρὸς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον (P_2), ὅπερ τέμνει τὰ (P) καὶ (P_1) κατὰ τὰς εὐθείας ΗΘ, ΚΛ ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν δὲ (Σ_4) καὶ (Σ_5) τὰ συμμετρικὰ σχήματα τοῦ (Σ) ὡς πρὸς τὰ κέντρα O καὶ K (σημεῖα) τῶν εὐθειῶν ΗΘ καὶ ΚΛ ἀντιστοίχως. Κατὰ τὰ προηγούμενα θεωρήματα θὰ εἶναι:

$$\left.\begin{array}{ll}(\Sigma_1) = (\Sigma_4) \text{ ὁμορρόπως} & (1)\\ (\Sigma_3) = (\Sigma_4) \quad \text{»} & (2)\end{array}\right\} \Longrightarrow (\Sigma_1)=(\Sigma_3) \quad (3)$$



Σχ. 128

Ὁμοίως $(\Sigma_3) = (\Sigma_5)$ (4) καὶ $(\Sigma_2) = (\Sigma_5)$ ὁμορρόπως (5). Ἄρα $(\Sigma_2) = (\Sigma_3)$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$. Ὥστε:

Τὰ συμμετρικὰ σχήματα ἑνὸς σχήματος ὡς πρὸς δύο ἐπίπεδα εἶναι ἴσα.

Εὐκόλως ἤδη ἀποδεικνύονται τὰ ἀκόλουθα πορίσματα.

157. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.—**Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶναι δίεδρος γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν, ἀλλ' ἀντιθέτου φορᾶς.**

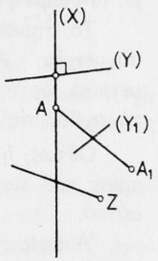
158. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.—Τὸ συμμετρικὸν πολυέδρου γωνίας εἶναι πολύεδρος γωνία, ἔχουσα μετ' αὐτῆς ἀντιρρόπως ἴσα, ἓν πρὸς ἕν, πάντα τὰ ὁμοειδῆ στοιχεῖα.

Ἄρα ἴση πρὸς τὴν κατακορυφὴν τῆς δοθείσης.

159. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.—Τὸ συμμετρικὸν πολυέδρου εἶναι πολύεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει μετ' ἐκείνου ἀντιρρόπως ἴσας, ἑκάστην ἑκάστη, τὰς ἕδρας καὶ διέδρους γωνίας.

160. ΑΞΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΕΝΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ. — ΟΡΙΣΜΟΣ. – Μία εὐθεῖα εἶναι ἄξων συμμετρίας ἑνὸς σχήματος, ἐὰν τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.



Σχ. 129

1ον : Ἄξων συμμετρίας μιᾶς εὐθείας. Ἔστω μία εὐθεῖα (x). Αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν συμμετρικήν της ὡς πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν (Y), κάθετον πρὸς τὴν (x).

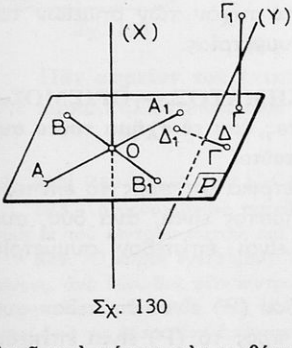
Ἐξ ἄλλου, τὸ συμμετρικὸν A_1 ἑνὸς σημείου Α τῆς (x) ὡς πρὸς εὐθεῖαν (Y_1), μὴ κάθετον πρὸς τὴν (x), δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς (x).

Ἄρα ἡ (Y_1) δὲν εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὴν εὐθεῖαν (x).

Κατ' ἀκολουθίαν :

Μία εὐθεῖα x ἔχει ἀπείρους ἄξονας συμμετρίας, τὸν ἑαυτόν της καὶ πάσας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι πρὸς αὐτήν.

2ον : Ἄξων συμμετρίας ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἔστω ἓν ἐπίπεδον (P). Τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν αὐτοῦ καὶ ὡς πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν (x), κάθετον πρὸς αὐτό. Ἐξ ἄλλου, τὸ συμμετρικὸν Γ_1 ἑνὸς σημείου Γ τοῦ (P) ὡς πρὸς εὐθεῖαν (Y), πλαγίαν πρὸς τὸ (P), δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ (P), ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως ἐκείνης, καθ' ἣν τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς τὴν (Y) εἰς τὸ σημεῖον Δ, τομὴν τῆς (Y) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P). Ἄρα ἡ (Y) δὲν εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὸ (P)·

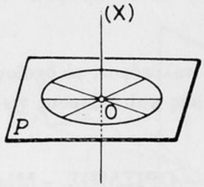


Σχ. 130

Ὅθεν :

Ἓν ἐπίπεδον (P) ἔχει ἀπείρους ἄξονας συμμετρίας, πάσας τὰς εὐθείας τὰς κειμένας ἐπ' αὐτοῦ καὶ πάσας τὰς καθέτους πρὸς αὐτό.

3ον : Ἄξων συμμετρίας ἑνὸς κύκλου. Πᾶσαι αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶναι ἄξονες συμμετρίας εἰς τὸ ἐπίπεδον (P) τοῦ κύκλου. Ἵνα δὲ μία εὐθεῖα (x), μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ (P), εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ κύκλου (O), πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ το ἐπίπεδον (P).



Σχ. 131

Ἐπίσης πρέπει νὰ εἶναι μεσοκάθετος τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ ποδός της, ὅστις θὰ εἶναι τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου. Ἐὰν λοιπὸν ἡ (x) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (P) εἰς τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου, τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν (x). Ἡ εὐθεῖα (x) καλεῖται, συνήθως, **ἄξων τοῦ κύκλου.**

161. ΚΕΝΤΡΟΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΕΝΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ. — ΟΡΙΣΜΟΣ. — Ἕν σημεῖον εἶναι κέντρον συμμετρίας σχήματος, ἐὰν τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον συμμετρίας. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἓν σημεῖον, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας διὰ τὸ σχῆμα τοῦτο.

Οὕτως, ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου. Τὸ κέντρον κύκλου εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀναφέρατε σχήματα τῆς Γεωμετρίας τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν κέντρον συμμετρίας.

1ον : Κέντρον συμμετρίας ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς τὴν (§ 155) εἴδομεν ὅτι: τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου συμμετρίας, εἶναι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο καὶ ὅτι : ἓν ἐπίπεδον ἔχει ὡς συμμετρικὸν ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτό, ὅταν τὸ κέντρον συμμετρίας κεῖται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Οὕτως, ἓν ἐπίπεδον ἔχει κέντρον συμμετρίας, τὸ τυχὸν τῶν σημείων του, καὶ οὐδὲν ἄλλο σημεῖον δύναται νὰ εἶναι κέντρον συμμετρίας.

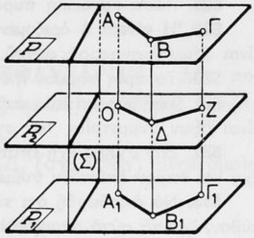
162. ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΕΝΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.— ΟΡΙΣΜΟΣ.— Ἕν ἐπίπεδον εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας ἑνὸς σχήματος, ἐὰν τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας. Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὰ σημεῖα ἑνὸς σχήματος εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἓν ἐπίπεδον, τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας διὰ τὸ σχῆμα.

Οὕτως, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι πᾶν ἐπίπεδον (P) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας ἑαυτοῦ, καὶ ὅτι πᾶν ἐπίπεδον (P_1) κάθετον πρὸς τὸ (P) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ (P) καὶ οὐδὲν ἄλλο ἐπίπεδον.

1ον : Ἐπίπεδα συμμετρίας δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (P) καὶ (P_1). Πᾶν ἐπίπεδον (Σ) κάθετον ἐπὶ τὰ (P) καὶ (P_1), εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας, διότι ἀφήνει ἕκαστον ἐκ τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (P_1) ἀμετάβλητον.

Ἐξαιρουμένης τῆς περιπτώσεως ταύτης, ἂς θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα A,B,Γ τοῦ (P), καὶ ἂς φέρωμεν τὰς καθέτους AA_1, BB_1, $ΓΓ_1$ ἐπὶ τὸ (P_1).



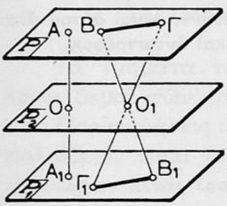
Σχ. 132

Ἂν O, Δ, Z εἶναι τὰ μέσα τῶν τμημάτων AA_1, BB_1, $ΓΓ_1$, τότε τὰ τμήματα ΔO καὶ ΔZ θὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ (P), καθόσον εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλα πρὸς τὰ τμήματα BA καὶ BΓ. Τὰ τμήματα ΔO καὶ ΔZ ὁρίζουν ἐπίπεδον (P_2) παράλληλον πρὸς τὰ (P) καὶ (P_1).

Ἀντιστρόφως, ἐὰν O εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P_2), καὶ ἀχθοῦν αἱ κάθετοι OA καὶ OA_1 πρὸς τὰ (P) καὶ (P_1), θὰ εἶναι $OA = ΔB = ΔB_1 = OA_1$. Ἄρα τὸ (P_2) εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῶν (P) καὶ (P_1). Καλεῖται δὲ **μεσοπαράλληλον** τῶν (P) καὶ (P_1). Ἄρα:

Δοθέντων δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (P) καὶ (P_1), ὑπάρχει ἐπίπεδον (P_2), ἀπέχον ἴσον τῶν (P) καὶ (P_1), τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.

2ον : Κέντρα συμμετρίας δύο παραλλήλων ἐπιπέδων. Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα παράλληλα (P) καὶ (P_1) καὶ (P_2) τὸ ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτῶν.



Σχ. 133

Ἔστω O_1 τυχὸν σημεῖον τοῦ (P_2). Ἐκ τοῦ O_1 ἄγομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰ (P) καὶ (P_1) εἰς τὰ σημεῖα B καὶ B_1. Ὁμοίως μία ἄλλη εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τοῦ O_1 τέμνει τὰ (P) καὶ (P_1) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ $Γ_1$. Αἱ BΓ καὶ $B_1Γ_1$ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ $OA_1 = OA$, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θὰ εἶναι καὶ

$$BO_1 = O_1B_1 \quad \text{καὶ} \quad ΓO_1 = O_1Γ_1.$$

Ἄρα τὸ O_1 εἶναι κέντρον συμμετρίας τῶν ἐπιπέδων (P) καὶ (P_1). Ὥστε:

Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P_2) εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (P) καὶ (P_1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

522. Πᾶν παραλ/δον ἔχει ἓν κέντρον συμμετρίας.

523. Τὸ ὀρθογώνιον παραλ/δον ἔχει τρεῖς ἄξονας συμμετρίας, ἀνὰ δύο καθέτους, ἀγομένους ἐκ τοῦ κέντρου αὐτοῦ, καὶ τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

524. Ὁ κύβος ἔχει : 1ον) Ἓν κέντρον συμμετρίας, 2ον) Τρεῖς ἄξονας συμμετρίας διερχομένους, ἀνὰ δύο, διὰ τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν του, 3ον) Τέσσαρας ἄξονας ἐπαναφορᾶς διερχομένους, ἀνὰ δύο, διὰ τῶν ἀπέναντι κορυφῶν του, 4ον) Ἓξ ἄξονας συμμετρίας ὁριζομένους ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του, 5ον) Τρία ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα πρὸς τοὺς ἄξονας τοὺς διερχομένους διὰ τῶν κέντρων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν καὶ 6ον) Ἓξ ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα πρὸς τοὺς ἄξονας τοὺς διερχομένους διὰ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

525. Πᾶσα δίεδρος γωνία ἔχει ἕνα ἄξονα συμμετρίας, τὴν κοινὴν ἀκμήν, καὶ ἕνα ἐπίπεδον συμμετρίας, ποῖον;

526. Ἐὰν αἱ ἕδραι πολυέδρου γωνίας εἶναι ἴσαι, αὕτη ἔχει ἄξονα ἐπαναφορᾶς.

527. Εἰς κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) Τὰ ὕψη του εἶναι ἄξονες ἐπαναφορᾶς. 2) Τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ. 3) Τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ ἑκάστου τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν του καὶ τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας.

528. Πᾶσα κανονικὴ πυραμὶς ἔχει ἕνα ἄξονα ἐπαναφορᾶς.

529. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῶν κέντρων τῶν βάσεων ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, εἶναι ἄξων ἐπαναφορᾶς αὐτοῦ.

530. Τὸ πρὸς σημεῖον ἢ ἐπίπεδον συμμετρικὸν ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον πρὸς αὐτό.

531. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα καθέτως τεμνόμενα εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας σχήματος, ἡ τομή των εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος τούτου.

532. Ἐὰν σχῆμα ἔχῃ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ ἄξονα συμμετρίας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, θὰ ἔχῃ καὶ ἕτερον ἐπίπεδον συμμετρίας.

533. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κανονικὸν ὀκτάεδρον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κύβου, ἔχει τὰ αὐτὰ στοιχεῖα συμμετρίας, ἅτινα ἔχει ὁ κύβος οὗτος.

534. Ἐὰν σχῆμα ἔχῃ ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ κέντρον συμμετρίας, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ ἔχῃ καὶ ἄξονα συμμετρίας.

535. Σχήματα συμμετρικὰ τρίτου ὡς πρὸς δύο εὐθείας παραλλήλους, δύνανται νὰ εἶναι συμμετρικὰ καὶ ὡς πρὸς εὐθεῖαν;

536. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο σχήματα συμμετρικὰ τρίτου ὡς πρὸς ἐπίπεδον καὶ ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, εἶναι συμμετρικὰ καὶ ὡς πρὸς σημεῖον.

537. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο σχήματα συμμετρικὰ τρίτου ὡς πρὸς εὐθεῖαν καὶ σημεῖον κείμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, εἶναι συμμετρικὰ καὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον.

538. Ἐὰν τετράεδρον ΑΒΓΔ δέχεται ἄξονα συμμετρίας, τότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι κατὰ δύο ζεύγη καὶ ἀντιστρόφως.

539. Ἐὰν τετράεδρον δέχεται δύο ἄξονας συμμετρίας, τότε αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη καὶ δέχεται καὶ τρίτον ἄξονα συμμετρίας, καὶ ἀντιστρόφως.

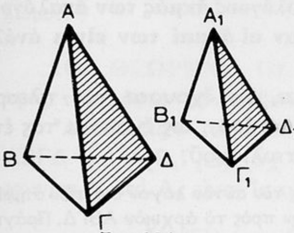
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

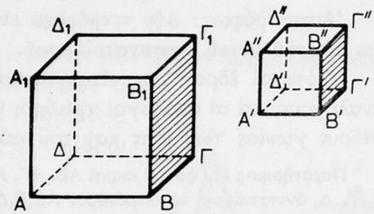
163. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΟΜΟΙΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.— Δύο πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ἐὰν εἶναι ὁμόλογα καὶ ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας ὁμοίας καὶ τὰς ὁμολόγους πολυέδρους γωνίας ὁμορρόπως ἴσας.

Οὕτω, δύο κανονικὰ τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ (σχ. 134α) εἶναι ὅμοια πολύεδρα.

Ὁμοίως δύο κύβοι (σχ. 134β) εἶναι πολύεδρα ὅμοια.



Σχ. 134α



Σχ. 134β

Τὰ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ δύο ὁμολόγων κορυφῶν λέγονται **ὁμόλογοι** ἀκμαὶ τῶν πολυέδρων.

Παρατηρήσεις : 1ον. Ἐπειδὴ αἱ ὁμόλογοι πολύεδροι γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι : **Αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσαι.**

Οὕτως, αἱ δίεδροι ΑΒ καὶ A_1B_1 τῶν ὁμοίων τετραέδρων εἶναι ἴσαι.

2ον. Ἐπειδὴ αἱ ὅμοιαι ἕδραι τῶν ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος καὶ ἐπειδὴ μία καὶ ἡ αὐτὴ ἀκμὴ ἐπὶ ἑκάστου πολυέδρου ἀνήκει εἰς δύο διαδοχικὰς ἕδρας ὁμοίας, ἕπεται ὅτι :

Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι σταθερός.

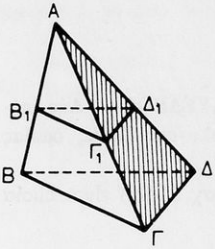
Ὁ σταθερὸς λόγος τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων καλεῖται **λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν.**

Α′. ΟΜΟΙΑ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

164. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Ἐὰν τετράεδρον ΑΒΓΔ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου $B_1\Gamma_1\Delta_1$, παραλλήλου πρὸς μίαν ἕδραν του ΒΓΔ, ὁρίζεται δεύτερον τετράεδρον $AB_1\Gamma_1\Delta_1$ ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον.

Ἀπόδειξις : Αἱ ἀκμαὶ $B_1\Gamma_1$, ΒΓ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου.

Ὁμοίως αἱ ἀκμαὶ Δ_1B_1, $\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΔΒ, ΓΔ. Ἄρα αἱ τέσσαρες ἕδραι ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ, ΒΓΔ, τοῦ πρώτου τετραέδρου, εἶναι ὅμοιαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἕδρας $AB_1\Gamma_1$, $A\Gamma_1\Delta_1$, $A\Delta_1B_1$, $B_1\Gamma_1\Delta_1$ τοῦ δευτέρου τετραέδρου $AB_1\Gamma_1\Delta_1$.



Σχ. 135

Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν ἑδρῶν τούτων, αἱ τρίεδροι γωνίαι Β καὶ B_1 ἔχουν τὰς ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ἐπὶ πλέον αἱ γωνίαι αὗται εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι: $B = B_1$. Ὁμοίως $\Gamma = \Gamma_1$ καὶ $\Delta = \Delta_1$.

Οὕτω, τὰ δύο τετράεδρα ἔχουν τὰς ἕδρας των τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ ὁμοίας καὶ τὰς τριέδρους ὁμολόγους γωνίας ἴσας. Ἄρα εἶναι ὅμοια.

Παρατήρησις I : Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν ὅτι : **Δύο ὅμοια τετράεδρα ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἀκμάς των ἀναλόγους.**

Ἀντιστρόφως : **Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ὅταν αἱ ἀκμαί των εἶναι ἀνάλογοι καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.**

Διότι αἱ ἕδραι των εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοιαι, ὡς ἔχουσαι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, καὶ αἱ ὁμόλογοι τρίεδροι γωνίαι των εἶναι ἴσαι, ὡς ἔχουσαι τὰς ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

Παρατήρησις II. Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ διαιρεθοῦν εἰς τὸν αὐτὸν λόγον διὰ τῶν σημείων B_1, Γ_1, Δ_1 ἀντιστοίχως, τὸ τετράεδρον $AB_1\Gamma_1\Delta_1$ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικὸν ΑΒΓΔ. Πράγματι, ἡ $B_1\Gamma_1$ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καθὼς καὶ $\Gamma_1\Delta_1 \parallel \Gamma\Delta$ καὶ $\Delta_1A_1 \parallel \Delta A$. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον $B_1\Gamma_1\Delta_1$ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ΒΓΔ, καὶ τὰ τετράεδρα $AB_1\Gamma_1\Delta_1$ καὶ ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ὅμοια.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τυχοῦσαν πυραμίδα, τεμνομένην ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτῆς.

165. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν δύο ἕδρας ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας διέδρους ἴσας καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν δύο τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ (σχ. 136), εἰς τὰ ὁποῖα ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δίεδρον γωνίαν A_1B_1, τὰ δὲ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $A_1B_1\Delta_1$.

Σχ. 136

Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμῆμα $AE = A_1B_1$ καὶ διὰ τοῦ Ε ἄγομεν ἐπίπεδον ΕΖΗ παράλληλον πρὸς τὸ ΒΓΔ. Τὰ τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ ΑΕΖΗ εἶναι ὅμοια. Ἄρα αἱ ἕδραι ΑΕΖ, ΑΕΗ, θὰ εἶναι ὅμοιαι πρὸς τὰς ἕδρας ΑΒΓ, ΑΒΔ ἀντιστοίχως καὶ κατ' ἀκολουθίαν πρὸς τὰς ἕδρας $A_1B_1\Gamma_1$, $A_1B_1\Delta_1$. Ἐξ ἄλλου $AE = A_1B_1$. Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΕΗ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰς $A_1B_1\Gamma_1$, καὶ $A_1B_1\Delta_1$.

Ἔχοντες δὲ ὑπ' ὄψιν τὰ περὶ ἰσότητος τῶν διέδρων καὶ τριέδρων γωνιῶν, συνάγομεν ὅτι τὸ τετράεδρον ΑΕΖΗ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τετράεδρον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράεδρον ΑΕΖΗ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ ἴσον του $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

Παρατήρησις: Δοθέντος τετραέδρου ΑΒΓΔ καὶ τοῦ τριγώνου $Β_1Γ_1Δ_1$, ὁμοίου πρὸς τὴν ἕδραν ΒΓΔ, δυνάμεθα ἐπὶ τοῦ τριγώνου $Β_1Γ_1Δ_1$, ὡς βάσεως, νὰ κατασκευάσωμεν τετράεδρον ὅμοιον πρὸς τὸ πρῶτον.

Πράγματι, ἂς φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον $Β_1Γ_1Α_1$, οὕτως ὥστε ἡ δίεδρος γωνία $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν δίεδρον ΒΓ.

Ἔπειτα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $Α_1Β_1Γ_1$ ἴσην πρὸς τὴν ΑΒΓ, καὶ τὴν γωνίαν $Α_1Γ_1Β_1$ ἴσην πρὸς τὴν ΑΓΒ.

Τὸ τετράεδρον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ. Διότι τὰ τετράεδρα ταῦτα ἔχουν μίαν δίεδρον ἴσην, περιεχομένην μεταξὺ δύο ὁμοίων ἑδρῶν καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

166. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ.—Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων τετραέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν των.

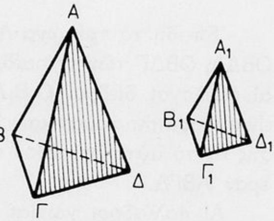
Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν δύο ὅμοια τετράεδρα ΑΒΓΔ καὶ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ (σχ. 137). Ἐπειδὴ αἱ τρίεδροι γωνίαι Α καὶ $Α_1$ εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{V_{(ΑΒΓΔ)}}{V_{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}} = \frac{ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ΑΔ}{Α_1Β_1\cdot Α_1Γ_1\cdot Α_1Δ_1} =$$

$$= \frac{ΑΒ}{Α_1Β_1}\cdot\frac{ΑΓ}{Α_1Γ_1}\cdot\frac{ΑΔ}{Α_1Δ_1} =$$

$$= \frac{ΑΒ}{Α_1Β_1}\cdot\frac{ΑΒ}{Α_1Β}\cdot\frac{ΑΒ}{Α_1Β_1} = \frac{ΑΒ^3}{Α_1Β_1{}^3},$$

καθόσον $\dfrac{ΑΓ}{Α_1Γ_1} = \dfrac{ΑΔ}{Α_1Δ_1} = \dfrac{ΑΒ}{Α_1Β_1}$. Ἄρα: $\dfrac{V_{(ΑΒΓΔ)}}{V_{(Α_1Β_1Γ_1Δ_1)}} = \dfrac{ΑΒ^3}{Α_1Β_1{}^3}$



Σχ. 137

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

540. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.

541. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραέδρου ΑΒΓΔ φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἀπέναντι ἕδρας, τὰ ὁποῖα, τεμνόμενα ἀνὰ δύο, ὁρίζουν νέον τετράεδρον $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων.

542. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τετραέδρου, συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α τοῦ δοθέντος τετραέδρου.

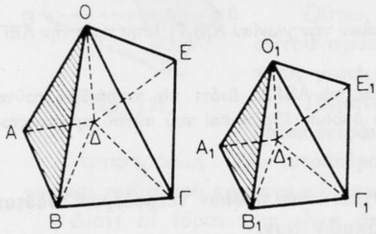
543. Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΑΒ πυραμίδος ΑΒΓΔ νὰ ὁρισθῇ σημεῖον $Α_1$, τοιοῦτον ὥστε τὸ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμενον ἐπίπεδον παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν ΒΓΔ νὰ διαιρῇ αὐτὸ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

544. Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ τετραέδρου ΑΒΓΔ πολ/σθοῦν ἐπὶ λ, διατηρηθοῦν δὲ αἱ τρίεδροι γωνίαι του, ποσάκις μεγαλύτερος γίνεται ὁ ὄγκος του;

Β'. ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

167. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Δύο πεντάεδρα ἀποτελούμενα ἐκ τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὁμοίων τετραέδρων, ἑνὸς πρὸς ἕνα, καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις : Ἔστω ΟΑΒΔ, ΟΒΓΔ, ΟΓΔΕ, μία διάταξις τετραέδρων προσκειμένων, εἰς ἃ εἶναι χωρισμένον τὸ πολύεδρον ΟΑΒΓΔΕ καὶ $O_1A_1B_1\Delta_1$, $O_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, $O_1\Gamma_1\Delta_1E_1$, μία καὶ ἡ αὐτὴ διάταξις ὁμοίων τετραέδρων πρὸς τὴν πρώτην, εἰς ἣν εἶναι χωρισμένον τὸ πολύεδρον $O_1A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1$ (σχ. 138). Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δυὸ ταῦτα πολύεδρα εἶναι ὅμοια.



Σχ. 138

Πράγματι, αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν πολυέδρων εἶναι ὅμοιαι, ὡς ἀποτελούμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὁμοίων τριγώνων καὶ τῆς αὐτῆς διατάξεως.

Οὕτως, ἡ ἕδρα ΑΒΓΔ τοῦ πρώτου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ $A_1B_1\Delta_1$, $B_1\Gamma_1\Delta_1$ τῆς ἕδρας $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ τοῦ ἄλλου.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ δίεδροι ΟΒΔΑ, ΟΒΔΓ τῶν τετραέδρων ΟΑΒΔ, ΟΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί. Ὁμοίως, αἱ ὁμόλογοι δίεδροι $O_1B_1\Delta_1A_1$, $O_1B_1\Delta_1\Gamma_1$ τῶν τετραέδρων $O_1B_1\Delta_1A_1$, $O_1B_1\Delta_1\Gamma_1$ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα $A_1B_1\Delta_1$, $B_1\Gamma_1\Delta_1$ κεῖνται ἐπίσης εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ἀποτελοῦν τὴν ἕδραν $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ ὁμοίαν πρὸς τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ.

Αἱ πολύεδροι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἴσαι, καθόσον ἔχουν ὅλα τὰ στοιχεῖα των ἴσα καὶ τῆς αὐτῆς διατάξεως. Διότι αἱ ὁμόλογοι ἕδραι τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ὅμοιαι καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ. Αἱ πολύεδροι γωνίαι ἔχουν ὅλας τὰς ἕδρας ἴσας ἑκάστην ἑκάστη καὶ τῆς αὐτῆς διατάξεως. Ἐπὶ πλέον αἱ ὁμόλογοι δίεδροι γωνίαι τῶν πολυέδρων τούτων γωνιῶν εἶναι ἴσαι, ὡς ὁμόλογοι δίεδροι δύο ὁμοίων τετραέδρων καὶ ὡς ἀθροίσματα ἴσων διέδρων γωνιῶν.

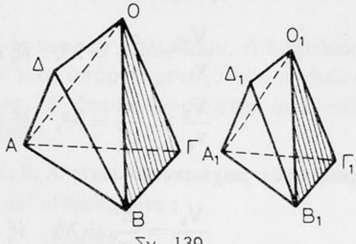
Ἡ δίεδρος ΒΓΔΕ π.χ. σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν δύο ἑδρῶν ΑΒΓΔ, ΓΔΕ τοῦ πρώτου πολυέδρου, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν ΒΓΔΟ, ΕΓΔΟ, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὰ τετράεδρα ΟΒΓΔ, ΟΓΔΕ.

Ἡ δίεδρος $B_1\Gamma_1\Delta_1E_1$, σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν ἑδρῶν $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, $\Gamma_1\Delta_1E$ τοῦ δευτέρου πολυέδρου, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὁμολόγων διέδρων $B_1\Gamma_1\Delta_1O_1$, $E_1\Gamma_1\Delta_1O_1$, αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τὰ τετράεδρα $O_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, $O_1\Gamma_1\Delta_1E_1$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἰσχύει καὶ διὰ τυχὸν πολύεδρον, ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς.

168. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.— Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα ὅμοια ἀνὰ ἓν καὶ τῆς αὐτῆς διατάξεως.

Ἀπόδειξις : Ἔστω Ο σημεῖον ἐντὸς τοῦ πρώτου πολυέδρου. Συνδέομεν τὸ σημεῖον Ο μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου τούτου καὶ ἔστω ΟΑΒΓ ἓν τῶν τετραέδρων τούτων. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ἔχουν ὡς ὁμόλογα ἐπὶ τοῦ δευτέρου τετραέδρου τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1. Διὰ τῆς ἀκμῆς A_1B_1 ἄγομεν ἐπίπεδον $O_1A_1B_1$, ἄνωθεν τῆς ἕδρας $A_1B_1\Gamma_1$, σχηματίζον δίεδρον γωνίαν $O_1A_1B_1\Gamma_1$ ἴσην πρὸς τὴν δίεδρον γωνίαν ΟΑΒΓ, ἄνωθεν τῆς ἕδρας ΑΒΓ κειμένης. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $O_1A_1B_1$ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $O_1A_1B_1$ ὅμοιον πρὸς τὸ ΟΑΒ. Συνδέομεν τὸ O_1 μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ δευτέρου πολυέδρου καὶ χωρίζομεν οὕτω τὸ δεύτερον πολύεδρον εἰς τετράεδρα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν πρὸς ἐκεῖνα τοῦ πρώτου πολυέδρου, καὶ μένει τώρα νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τετράεδρα ταῦτα εἶναι ὅμοια ἀνὰ δύο.



Σχ. 139

Ἔστω Δ μία τετάρτη κορυφὴ τοῦ πρώτου πολυέδρου, τοιαύτη ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ νὰ ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας ἢ ἐπὶ δύο διαδοχικῶν ἑδρῶν. Συγκρίνομεν τὰ δύο τετράεδρα ΟΑΒΔ, $O_1A_1B_1\Delta_1$.

Αἱ ἕδραι ΟΑΒ, $O_1A_1B_1$ εἶναι ὅμοιαι, ὡς ὁμόλογοι τῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων ΟΑΒΓ, $O_1A_1B_1\Gamma_1$.

Αἱ ἕδραι ΑΒΔ, $A_1B_1\Delta_1$ εἶναι ὅμοιαι ὡς ὁμόλογα τρίγωνα τῶν δύο ὁμοίων ἑδρῶν τῶν δοθέντων πολυέδρων.

Ἐπὶ πλέον, ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ δύο δίεδροι ΟΑΒΔ, $O_1A_1B_1\Delta_1$ εἶσαι ἴσαι ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων διέδρων ΟΑΒΓ, $O_1A_1B_1\Gamma_1$.

Ἐὰν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, αἱ δύο δίεδροι γωνίοι ΟΑΒΔ, $O_1A_1B_1\Delta_1$ εἶναι ἀκόμη ἴσαι ὡς διαφοραὶ τῶν ἴσων διέδρων, ΔΑΒΓ καὶ ΟΑΒΓ ἀφ' ἑνός, $\Delta_1A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $O_1A_1B_1\Gamma_1$ ἀφ' ἑτέρου.

Εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, τὰ τετράεδρα ΟΑΒΔ, $O_1A_1B_1\Delta_1$ εἶναι ὅμοια.

Ἡ αὐτὴ ἀπόδειξις θὰ ἐφαρμοσθῇ βαθμηδὸν καὶ ἡ ὁμοιότης τῶν δύο θεωρηθέντων τετραέδρων θὰ μᾶς ὁδηγήσῃ τελικῶς εἰς τὸ νὰ συμπεράνωμεν ὅτι τὰ δύο ἑπόμενα τετράεδρα εἶναι ὅμοια.

Σημ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τῆς Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς.

Τὰ σημεῖα Ο καὶ O_1 καλοῦνται **ὁμόλογα.** Ἐὰν τὰ ἄκρα δύο εὐθ. τμημάτων εἶναι ὁμόλογα σημεῖα τῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων, ταῦτα εἶναι ὁμόλογα. Τοιαῦτα εἶναι αἱ διαγώνιοι, αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ δύο ὁμολόγων κορυφῶν τῶν ὁμοίων πολυέδρων.

169. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν των.

Ἀπόδειξις : Θεωροῦμεν δύο πολύεδρα ὅμοια Π καὶ Π_1 ἔχοντα ὄγκον ἀντιστοίχως V καὶ V_1. Ἔστωσαν α καὶ α_1 δύο ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν.

Ἔστωσαν V_1, V_2, V_3, ..., V_ν οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πρῶτον πολύεδρον καὶ $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_\nu$ οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ δεύτερον, καὶ τὰ ὁποῖα τετράεδρα εἶναι ὅμοια.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῆς (§ 166), ἐὰν λ εἶναι ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\alpha_1}$ τῆς ὁμοιότητος τῶν Π καὶ Π_1, λ θὰ εἶναι καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμοίων τετραέδρων, εἰς ἃ ταῦτα χωρίζονται. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{array}{l} \frac{V_1}{v_1} = \frac{\alpha^3}{\alpha_1^3} = \lambda^3, \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad V_1 = v_1 \cdot \lambda^3 \\ \frac{V_2}{v_2} = \frac{\alpha^3}{\alpha_1^3} = \lambda^3, \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad V_2 = v_2 \cdot \lambda^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{V_\nu}{v_\nu} = \frac{\alpha^3}{\alpha_1^3} = \lambda^3, \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad V_\nu = v_\nu \cdot \lambda^3 \end{array}\right\} \text{Ἄρα} :$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_\nu = \lambda^3 (\, v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_\nu \,)$$

ἢ

$$V = v \cdot \lambda^3, \quad \text{ἐξ οὗ} : \quad \boxed{\frac{V}{v} = \lambda^3 = \frac{\alpha^3}{\alpha_1^3}}$$

170. ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ἐὰν πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ πολυέδρου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διατηρηθῶσι δὲ ἀμετάβλητοι αἱ πολύεδροι γωνίαι αὐτῶν, τὸ πολύεδρον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν κύβον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

545. Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ κύβου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 5, διατηρηθῶσι δὲ αἱ πολύεδροι γωνίαι αὐτοῦ, πολλαπλάσιος γίνεται ὁ κύβος οὗτος ;

546. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων ἀκμῶν.

547. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν μίαν ἕδραν ὁμοίαν καὶ τὰς τρεῖς προσκειμένας διέδρους ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

548. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τρεῖς ἕδρας ὁμοίας καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

549. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν πέντε διέδρους ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ.

550. Τὰ τετράγωνα τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς κύβους δύο ὁμολόγων ἑδρῶν.

551. Τὸ τετράεδρον ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ συμμετρικὸν τοῦ τετραέδρου τούτου. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τούτων τῶν τετραέδρων ;

552. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι V, αἱ δὲ διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν α,β,γ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

171. Ἐὰν Ε εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυέδρου, Α ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν του καὶ Κ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν του, ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν τούτων μία ἀξιοσημείωτος ἀριθμητικὴ σχέσις, ἡ ὁποία ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος, ὀφειλομένου εἰς τὸν Euler.

172. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ EULER.—Ἐὰν Κ, Ε, Α εἶναι ἀντιστοίχως τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν, ἑδρῶν καὶ ἀκμῶν ἑνὸς ἁπλοῦ πολυέδρου, τότε :

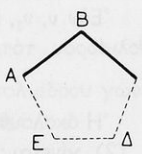
$$K + E = A + 2 \qquad \text{(Euler)}$$

Ἀπόδειξις : Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἀπὸ τὸ δοθὲν πολύεδρον ἀφαιροῦμεν μίαν ἕδραν του, ἔπειτα μίαν δευτέραν ἕδραν ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μὲ τὴν προηγουμένην ἀφαιρεθεῖσαν ἕδραν μίαν ἀκμὴν κοινήν. Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν μίαν τρίτην ἕδραν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μὲ τὴν προηγουμένως ἀφαιρεθεῖσαν δευτέραν ἕδραν μίαν ἀκμὴν κοινὴν κ.ο.κ. μέχρις ὅτου ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία ἕδρα τοῦ πολυέδρου.

Ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πολύεδρον ἡ πρώτη ἕδρα του, δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ πολύεδρον οὔτε ἀκμὴ οὔτε κορυφή. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἀπομένουσα πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ τόσας ἀκμὰς καὶ κορυφάς, ὅσας εἶχε τὸ ἀρχικὸν πολύεδρον, ἀλλὰ μίαν ἕδραν ὀλιγώτερον.

Ἐὰν A_1 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀφαιρουμένων ἀκμῶν τῆς πρώτης ἕδρας τοῦ πολυέδρου καὶ K_1 ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀφαιρουμένων κορυφῶν αὐτοῦ, προφανῶς, θὰ εἶναι $A_1 = K_1$, ἐξ οὗ : $A_1 - K_1 = 0$. (1)

Ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ πολύεδρον μίαν ἄλλην ἕδραν του, τὴν δευτέραν, τρίτην κ.ο.κ. ἐκτὸς τῆς τελευταίας ἕδρας του, ἡ ἀπομένουσα πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια χάνει μίαν ἀκμὴν περισσότερον ἀπὸ ὅσας κορυφὰς χάνει. Διότι, ἔστω ὅτι ἀφαιρεῖται ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕ, ἡ ὁποία ἔχει μὲ τὴν ἀπομένουσαν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν κοινὰς τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΒΓ, εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἡ ἕδρα αὕτη, θὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὴν πολυεδρικὴν ἐπιφάνειαν **τρεῖς ἀκμαί**, αἱ ΑΕ, ΕΔ, ΔΓ (αἱ μὴ κοιναὶ) καὶ μόνον **δύο κορυφαὶ** αἱ Ε καὶ Δ.



Σχ. 140

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $A_2, A_3, A_4, \ldots$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀφαιρουμένων ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου τῆς δευτέρας, τρίτης, τετάρτης,... ἕδρας καὶ μὲ $K_2, K_3, K_4, \ldots$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀφαιρουμένων κορυφῶν αὐτοῦ, ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις :

$$A_2 - K_2 = 1 \qquad (2)$$
$$A_3 - K_3 = 1 \qquad (3)$$
$$A_4 - K_4 = 1 \qquad (4)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ἔνθα κάθε ἰσότης ἀπαριθμεῖ μίαν ἕδραν.

Τέλος, ἐὰν ἀπὸ τὸ πολύεδρον ἀφαιρέσωμεν καὶ τὴν τελευταίαν ἕδραν του, θὰ ἀφαιρεθοῦν τόσαι ἀκμαί, ὅσαι καὶ κορυφαί. Οὕτως, ἐὰν A_ν, K_ν εἶναι ἀντιστοίχως ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν (πλευρῶν) καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν τῆς τελευταίας ἕδρας τοῦ πολυέδρου, θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν σχέσιν:

$$A_\nu - K_\nu = 0 \qquad (\nu)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1), (2), . . ., (ν), λαμβάνομεν :

$$(A_1 + A_2 + A_2 + \ldots + A_\nu) - (K_1 + K_2 + K_3 + \ldots + K_\nu) = (\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{E}) - 2,$$

ὅπου εἰς τὸ δεύτερον μέλος ὑπάρχουν τόσαι μονάδες, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος Ε τῶν ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου πλὴν 2 μονάδες. Ἄρα :

$$(A_1 + A_2 + \ldots + A_\nu) - (K_1 + K_2 + \ldots + K_\nu) = E - 2, \qquad (\lambda)$$

Ἀλλὰ $\quad A_1 + A_2 + \ldots + A_\nu = A, \qquad K_1 + K_2 + \ldots + K_\nu = K$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ (λ) γίνεται :

$$A - K = E - 2, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{\mathbf{K + E = A + 2}}$$

Μὲ βάσιν τὸ θεώρημα τοῦτο τοῦ Euler ἀποδεικνύονται ἄλλαι τινὲς ἀξιοσημείωτοι προτάσεις διὰ τὰ κυρτὰ πολύεδρα καὶ ἀναφερόμεναι εἰς τὰ στοιχεῖα καρυφάς, ἀκμάς, ἕδρας κ.λπ. αὐτῶν.

173. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πασῶν τῶν ἑδρῶν κυρτοῦ πολυέδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν ἠλαττωμένον κατὰ 8.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν μία ἕδρα τοῦ πολυέδρου ἔχῃ ν κορυφάς, τότε τὸ ἄθροισμα Σ_1 τῶν γωνιῶν της θὰ εἶναι :

$$\Sigma_1 = 2\nu - 4 \text{ ὀρθαὶ γωνίαι.} \qquad (1)$$

Ἐὰν ν, ν_1, ν_2,. . . εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῶν πλευρῶν τῶν διαφόρων ἑδρῶν τοῦ πολυέδρου, τότε τὸ ἄθροισμα Σ τῶν γωνιῶν τῶν ἑδρῶν του θὰ εἶναι :

$$\Sigma = (2\nu - 4) + (2\nu_1 - 4) + (2\nu_2 - 4) + \ldots \qquad (2)$$

Ἡ ἀκολουθία αὕτη ἔχει Ε ὅρους, ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν του. Ἄρα ἡ (2) γίνεται :

$$\Sigma = 2(\nu + \nu_1 + \nu_2 + \ldots) - 4E. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ ἑκάστη ἀκμὴ ἀνήκει εἰς δύο ἕδρας, θὰ εἶναι :

$$\nu + \nu_1 + \nu_2 + \ldots = 2A, \qquad (4)$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ (3) γίνεται :

$$\Sigma = 2 \cdot 2A - 4E = 4A - 4E = 4(A - E). \qquad (5)$$

Ἀλλά, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Euler, εἶναι $A - E = K - 2$, καὶ ἡ(5) γίνεται :

$$\mathbf{\Sigma = 4\,(K - 2).} \qquad (6)$$

173α. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δὲν ὑπάρχει κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ ἕδραι νὰ ἔχουν πλευρὰς περισσοτέρας τῶν πέντε (5).

173β. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.— Ὁμοίως, τοῦ ὁποίου πᾶσαι αἱ πολύεδροι γωνίαι νὰ ἔχουν περισσοτέρας τῶν πέντε (5) ἀκμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

553. Εἰς πᾶν κυρτὸν πολύεδρον εἶναι: $2A \geqslant 3E$ καὶ $2A \geqslant 3K$.

554. Ὁμοίως ὅτι: $K \leqslant 2(E-2)$, $A \leqslant 3(E-2)$, $K \geqslant \frac{1}{2}E+2$ καὶ $A \geqslant \frac{3}{2}E$.

555. Ἐὰν αἱ ἕδραι κυρτοῦ πολυέδρου ἀποτελοῦνται ἀπὸ πολύγωνα περιττοῦ πλήθους πλευρῶν, τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

556. Ἐὰν αἱ πολύεδροι γωνίαι κυρτοῦ πολυέδρου περιέχουν περιττὸν πλῆθος ἀκμῶν, τὸ πλῆθος τῶν πολυέδρων γωνιῶν του εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

557. Εἰς πᾶν πολύεδρον εἶναι $A < 3K$, $A < 3E$.

558. Ὁμοίως ὅτι: $\frac{3}{2}K \leqslant A$.

559. Δὲν ὑπάρχει κανὲν ἁπλοῦν πολύεδρον μὲ ἑπτὰ ἀκμάς.

174. ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ.— ΟΡΙΣΜΟΣ.— Πολύεδρον θὰ λέγεται κανονικόν, ὅταν πᾶσαι αἱ ἕδραι αὐτοῦ εἶναι κανονικὰ πολύγωνα ἴσα*

Οὕτως, ὁ κύβος καὶ τὸ κανονικὸν τετράεδρον εἶναι κανονικὰ πολύεδρα.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ καὶ τῶν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων καὶ ν - ἑδρων γωνιῶν, ἕπεται ὅτι αἱ δίεδροι καὶ ν - εδροι γωνίαι κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

175. ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΕΩΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν μόνον πέντε εἴδη κανονικῶν πολυέδρων.

Ἀπόδειξις: Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἑκάστη ἕδρα τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου ἔχει μ πλευρὰς καὶ ὅτι ἑκάστη ν - εδρος γωνία τούτου ἔχει ν ἀκμάς.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστης γωνίας Α μιᾶς ἕδρας αὐτοῦ εἶναι:

$$A = 2 - \frac{4}{\mu} \text{ ὀρθαί.} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ν-ἑδρικῶν γωνιῶν ἑκάστης πολυέδρου γωνίας αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν, δηλαδή:

$$\nu \cdot A < 4 \text{ ὀρθῶν} \quad \text{ἢ} \quad A < \frac{4}{\nu} \text{ ὀρθῶν,} \qquad (2)$$

ἕπεται ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ὅτι:

$$2 - \frac{4}{\mu} < \frac{4}{\nu}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \boxed{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} > \frac{1}{2}} \qquad (3)$$

Κατὰ τὰ πορίσματα ὅμως (§ 173α - 173β) εἶναι:

$$3 \leqslant \nu < 6 \quad \text{καὶ} \quad 3 \leqslant \mu < 6$$

* Καὶ αἱ πολύεδροι γωνίαι του ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκ τούτων καὶ τῆς (3) προκύπτουν αἱ ἑξῆς πέντε λύσεις:

$$\text{I)}\ \left.\begin{matrix}\mu=3\\ \nu=3\end{matrix}\right\}\quad \text{II)}\ \left.\begin{matrix}\mu=3\\ \nu=4\end{matrix}\right\}\quad \text{III)}\ \left.\begin{matrix}\mu=4\\ \nu=3\end{matrix}\right\}\quad \text{IV)}\ \left.\begin{matrix}\mu=3\\ \nu=5\end{matrix}\right\}\quad \text{V)}\ \left.\begin{matrix}\mu=5\\ \nu=3\end{matrix}\right\}\qquad (4)$$

Ἐὰν Ε εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, τότε τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν του θὰ εἶναι μΕ. Ἐπειδὴ δὲ κάθε ἀκμὴ ἀνήκει εἰς δύο ἕδρας, θὰ ἔχωμεν:

$$\mu E = 2A \qquad (5)$$

Ἀλλ' ἑκάστη ἀκμὴ συνδέει δύο κορυφάς. Ἄρα: $\nu . K = 2A$. (6)

Ἐκ τῶν (5), (6) καὶ τῆς $K + E = A + 2$, λαμβάνομεν, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν Κ καὶ Ε, τὴν σχέσιν:

$$\boxed{\frac{1}{A} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}} \qquad (7)$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

	μ	ν	Α	Ε	Κ	Καν. Πολύεδρον
Διὰ	3	3	6	4	4	**Τετράεδρον**
	4	3	12	6	8	**Ἑξάεδρον** (κύβος)
	3	4	12	8	6	**Ὀκτάεδρον**
	5	3	30	12	20	**Δωδεκάεδρον**
	3	5	30	20	12	**Εἰκοσάεδρον**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν **μόνον πέντε εἴδη κανονικῶν κυρτῶν πολυέδρων.**

Ταῦτα καλοῦνται **Στερεὰ τοῦ Πλάτωνος** *.

176. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ.— ΘΕΩΡΗΜΑ.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχῃ σημεῖον ἐντὸς τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου ἀπέχον πρῶτον ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφάς του καὶ δεύτερον ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας του.

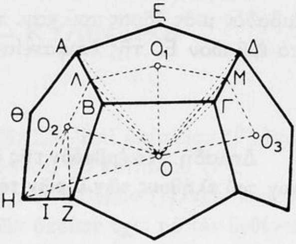
Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν δύο ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒΖΗΘ ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου μὲ κέντρα ἀντιστοίχως O_1 καὶ O_2.

Αἱ κάθετοι $O_1\Lambda$ καὶ $O_2\Lambda$ ἐκ τῶν κέντρων O_1 καὶ O_2 πρὸς τὴν κοινὴν ἀκμὴν ΑΒ, τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Λ. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον $O_1\Lambda O_2$ θὰ εἶναι

* Ἡ Γεωμετρία τοῦ χώρου χρεωστεῖ πολλὰ εἰς τὸν μέγαν τοῦτον Ἀθηναῖον φιλόσοφον. Εἶναι ὁ εἰσηγητής τῆς τρίτης διαστάσεως τῶν σωμάτων. Ἡ σπουδὴ τῶν κανον. πολυέδρων συνεδέθη μὲ τὸ ὄνομά του. Τὰ πέντε κανον. πολύεδρα, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιεῖ ὁ Πλάτων διὰ νὰ ἐξηγήσῃ τὴν συγκρότησιν τοῦ ὑλικοῦ κόσμου, ἐκλήθησαν ὑπὸ τῶν παλαιῶν καὶ Πλατωνικὰ σώματα. Εἰς τὴν «Πολιτείαν», διὰ νὰ δηλώσῃ τὸ ἀντικείμενον τῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου, μεταχειρίζεται τὴν ἔκφρασιν «τὸ περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξησιν καὶ τοῦ βάθους μετέχον» (μελέτη τῆς διαστάσεως τοῦ κύβου καὶ παντὸς ἔχοντος βάθος). Ὁ ὅρος Γεωμετρία τοῦ χώρου ἀναγράφεται ὡς ἑξῆς: «τέχνη, ἣν δὴ στερεομετρίαν ἐκάλεσαν οἱ προστυχεῖς αὐτῇ γεγονότες» (εἰς τέχνην, τὴν ὁποίαν, ὡς γνωστόν, ὠνόμασαν στερεομετρίαν οἱ ἀσχοληθέντες μὲ αὐτήν). Εἰς τὸν Πλάτωνα ὀφείλεται τὸ πρῶτον ἡ σπουδὴ τῶν Γεωμετρικῶν τόπων, ἡ ἀναλυτικὴ καὶ συνθετικὴ μέθοδος διὰ τὴν ἐπίλυσιν Γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ὑπὸ πολλῶν θεωρεῖται ὡς ὁ θεὸς τῆς Γεωμετρίας.

κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν ΑΒ εἰς τὸ Λ καὶ θὰ περιέχῃ τὰς καθέτους O_1O, O_2O ἐπὶ τὰς ἕδρας ΑΒΓΔΕ, ΑΒΖΗΘ. Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἄξονες τῶν ἑδρῶν ΑΒΓΔΕ, ΑΒΖΗΘ. Ἄρα :

$OA = OB = O\Gamma = O\Delta = OE = OZ = OH = O\Theta$ (1)



Σχ. 141

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $OO_1\Lambda$ καὶ $OO_2\Lambda$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν ΟΛ κοινὴν καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς $O_1\Lambda = O_2\Lambda$ ὡς ἀποστήματα τῶν ἴσων ἑδρῶν ΑΒΓΔΕ, ΑΒΖΗΘ. Ἄρα $\sphericalangle O\Lambda O_1 = \sphericalangle O\Lambda O_2$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία $O_1\Lambda O_2$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου ΑΒ τοῦ καν. πολυέδρου, ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον $O\Lambda O_1$ εἶναι σταθερὸν διὰ πάσας τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου.

Ἐὰν O_3 εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἕδρας, ἡ ὁποία ἔχει κοινὴν ἀκμὴν ΓΔ μὲ τὰ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔΕ, καὶ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ταύτην εἰς τὸ κέντρον O_3, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Ο, καθόσον τὰ τρίγωνα O_3MO καὶ OO_1M εἶναι ἴσα.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι πᾶσαι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ καν. πολυέδρου εἰς τὰ κέντρα αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **κέντρον** τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου.

Τὸ Ο ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου καὶ ἰσάκις ἀπὸ τὰς ἕδρας αὐτοῦ. Δηλαδή :

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = \ldots$$

Ἡ ἀπόστασις OO_1 καλεῖται **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου.

Ἡ ἀπόστασις ΟΑ καλεῖται **ἀκτὶς** τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου.

177. ΣΧΕΣΙΣ ΑΚΤΙΝΟΣ, ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΝ. ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ ΚΑΙ ΑΠΟΣΤΗΜΑΤΟΣ ΜΙΑΣ ΕΔΡΑΣ ΑΥΤΟΥ Ἢ ΑΚΤΙΝΟΣ ΤΩΝ ΕΔΡΩΝ ΑΥΤΟΥ.

Ἐὰν τεθῇ $OH = R$, $OO_2 = \alpha$ καὶ $O_2H = \rho$ καὶ $O_2I = \alpha_1$, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OO_2H θὰ ἔχωμεν:

$$OH^2 = OO_2^2 + O_2H^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{R^2 = \alpha^2 + \rho^2}} \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OO_2I ἔχομεν:

$$OI^2 = OO_2^2 + O_2I^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\mathbf{OI^2 = \alpha^2 + \alpha_1^2}} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) φαίνεται ὅτι : τὸ κέντρον Ο ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ.

178. ΠΟΡΙΣΜΑ.— Πᾶν κανονικὸν πολύεδρον δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσαι εἶναι αἱ ἕδραι του.

Πράγματι, ἐὰν ἀχθοῦν πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, τοῦτο χωρίζεται εἰς τόσας κανονικὰς πυραμίδας, ὅσαι εἶναι καὶ αἱ ἕδραι του. Βάσεις τῶν πυραμίδων τούτων εἶναι αἱ ἕδραι τοῦ καν. πολυέδρου καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυέδρου.

179. ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΝ. ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ.— Ἐὰν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τοῦ καν. πολυέδρου καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ, τότε τὸ ἐμβαδὸν E_ν τῆς ἐπιφανείας του δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{E_\nu = \nu \cdot E}$$

Δηλαδή : **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι γινόμενον τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν του ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

560. Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α κανονικοῦ τινος πολυέδρου νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς του, τὸ ἀπόστημά του, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος (καὶ διὰ τὰ 5 κανονικὰ πολύεδρα).

561. Πᾶσα τομὴ κανονικοῦ ὀκταέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο ἀξόνων του, εἶναι τετράγωνον.

562. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κανονικοῦ ἑξαέδρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ ὀκταέδρου ἀκμῆς α.

563. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὄγκος κανονικοῦ πολυέδρου (καὶ τῶν πέντε εἰδῶν) συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

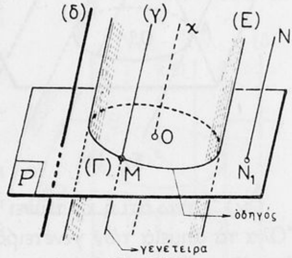
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ — ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

180. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.—Ἐπὶ ἐπιπέδου (P) θεωροῦμεν κύκλον (Γ). Ἔστω δὲ καὶ εὐθεῖα (δ), τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (P).

Καλοῦμεν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν τὸ Σύνολον τῶν εὐθειῶν (γ), τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ), ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μὲ τὸν δοθέντα κύκλον (Γ) κοινὸν σημεῖον.

Ὁ κύκλος (Γ) καλεῖται **ὁδηγὸς** ἢ **βάσις** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 142

Ἡ διὰ τοῦ κέντρου O τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Γ) παράλληλος x πρὸς τὴν (δ) καλεῖται **ἄξων** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

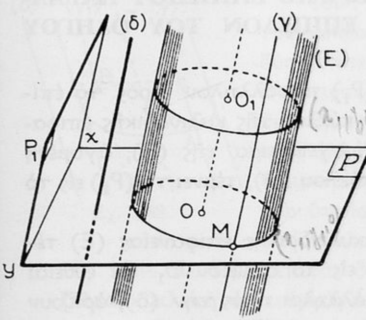
Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν (γ) καλεῖται **γενέτειρα** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

Ἡ ἀνωτέρω κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ὀνομάζεται καὶ **κυκλικὴ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια.**

Ἐὰν ὁ ὁδηγὸς εἶναι εὐθεῖα, τότε τὸ Σύνολον τῶν εὐθειῶν (γ) εἶναι ἐπίπεδον, τέμνον τὸ (P) κατὰ τὸν ὁδηγὸν τοῦτον.

Συνέπειαι : Διὰ νὰ γνωρίσωμεν ἐὰν σημεῖον N κεῖται ἢ οὒ ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (E), ἄγομεν ἐκ τοῦ N τὴν παράλληλον πρὸς τὴν (δ). Αὕτη τέμνει τὸ ἐπίπεδον (P) εἰς τὸ σημεῖον N_1. Ἐὰν τὸ N_1 δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Γ), τότε λέγομεν ὅτι τὸ N **δὲν κεῖται** ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ἐὰν τὸ N_1 κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Γ), τότε καὶ τὸ N κεῖται ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, καθὼς καὶ κάθε ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας NN_1.

181. ΕΠΙΠΕΔΟΙ ΤΟΜΑΙ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΠΡΟΣ ΤΟΝ ΑΞΟΝΑ.—Ἔστω κυκλικὴ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια (E) (σχ. 143) καὶ ἐπίπεδον (P_1) παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα OO_1 τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, ἤτοι πρὸς τὴν διεύθυνσιν (δ). Τὸ (P_1) θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν xy.



Σχ. 143

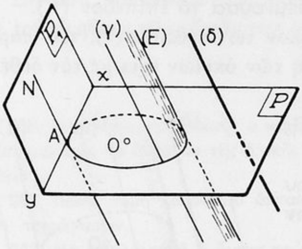
α) Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ xy δὲν τέμνει τὸν ὁδηγόν (O). Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (P_1) ἔτεμνε τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν (E) εἰς τὸ σημεῖον N, ἡ παράλληλος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ N πρὸς τὴν διεύθυνσιν (δ) θὰ ἔτεμνε τὸν ὁδηγὸν κύκλον

f(x,y)=0

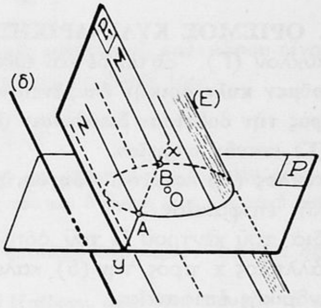
εἰς ἓν σημεῖον N_1, κείμενον ἐπὶ τῆς xy, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον (P_1) οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχει μετὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

β) Ἔστω ὅτι ἡ xy ἐφάπτεται τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον A (σχ. 144).

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν (δ), τῆς ἀγομένης διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς A, κεῖνται ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P_1), ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (E), καὶ μόνον αὐτά. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον (P_1) ἔχει μετὰ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (E) κοινὰ σημεῖα μόνον τὰ τῆς γενετείρας AN, καὶ μόνον αὐτά.



Σχ. 144



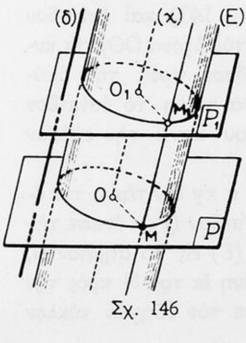
Σχ. 145

γ) Ἔστω ὅτι ἡ xy τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλου εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B (σχ. 145). Ὅλα τὰ σημεῖα τῶν γενετειρῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν A καὶ B, κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P_1) καὶ ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Ἀντιστρόφως, ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον, κοινὸν τοῦ ἐπιπέδου P_1 καὶ τῆς ἐπιφανείας (E), ἡ ἐκ τοῦ M ἀγομένη γενέτειρα θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ (P_1), καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ τέμνῃ τὸν ὁδηγὸν κύκλον εἰς τὸ σημεῖον A ἢ B. Ἄρα τὸ (P_1) θὰ τέμνῃ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν κατὰ δύο γενετείρας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Πᾶσα τομὴ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς γενετείρας αὐτῆς εἶναι δύο γενέτειραι ἢ μία.

182. ΤΟΜΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΥΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥ ΠΡΟΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΟΥ ΟΔΗΓΟΥ ΚΥΚΛΟΥ.—



Σχ. 146

Ἔστω ἐπίπεδον (P_1) παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (E) (σχ. 146). Μία γενέτειρα τῆς (E), ἀγομένη ἐκ τοῦ σημείου M τοῦ κύκλου (O), τέμνει τὸ (P_1) εἰς τὸ σημεῖον M_1.

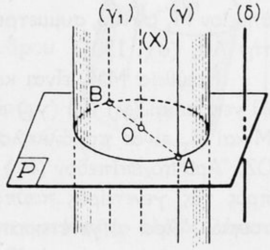
Ὁ ἄξων Ox τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (E) τέμνει τὸ ἐπίπεδον (P_1) εἰς τὸ σημεῖον O_1. Αἱ εὐθεῖαι OO_1 καὶ MM_1, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν (δ), ὁρίζουν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ (P_1) καὶ (P) κατὰ δύο εὐθείας παραλλήλους, O_1M_1 καὶ ΟΜ. Τὸ σχῆμα OMM_1O_1 εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα $O_1 M_1 = OM$. Κατ' ἀκολουθίαν τό M_1 γράφει κύκλον κέντρου O_1 καὶ ἀκτῖνος $O_1 M_1 = OM$, κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P_1).

Ἀντιστρόφως, ἡ παράλληλος πρὸς τὴν (δ), ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ M_1, τέμνει τὸ ἐπίπεδον (Ρ) εἰς τὸ σημεῖον Μ. Τὸ σχῆμα O_1M_1MO εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ $OM = O_1M_1$. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ κατ'ἀκολουθίαν τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (Ε).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ὁδηγὸν κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τέμνει αὐτὴν κατὰ κύκλον ἴσον πρὸς τὸν ὁδηγὸν κύκλον.

183. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.—Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου καὶ (ΟΧ) ὁ ἄξων τοῦ κύκλου τούτου. Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι (Αγ), $(B\gamma_1)$, παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα (ΟΧ), τότε, τοῦ Α διαγράφοντος τὸν κύκλον (Ο), ἡ (Αγ) θὰ γράψῃ μίαν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς. Ὥστε:

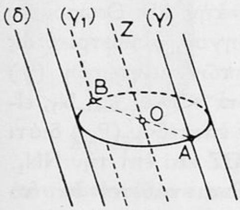


Σχ. 147

Κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς καλεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία παράγεται ὑπὸ εὐθείας συναντώσης ἕνα κύκλον, καὶ καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου.

Ἡ τομὴ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος αὐτῆς (ΟΧ) εἶναι δύο γενέτειραι Αγ καὶ $B\gamma_1$, παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα (ΟΧ) καὶ συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα.

184. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.— Θεωροῦμεν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα κύκλον (Ο) καὶ μίαν διεύθυνσιν (δ), πλαγίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (Ο).



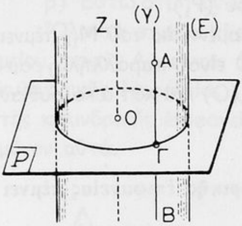
Σχ. 148

1ον: Ἔστωσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀντιδιαμετρικὰ τοῦ κύκλου (Ο). Τὸ Ο εἶναι κέντρον συμμετρίας διὰ τὰς δύο γενετείρας (γ) καὶ (γ_1), τὰς διερχομένας διὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ἄρα τὸ Ο εἶναι ἓν κέντρον συμμετρίας διὰ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν. Τοῦτο συμβαίνει καὶ διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τοῦ ἄξονος ΟΖ. Ἄρα ὁ ΟΖ εἶναι ἄξων συμμετρίας δι' ὅλα τὰ ζεύγη τῶν γενετειρῶν, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

Πᾶσα κυκλικὴ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἔχει ἄπειρα κέντρα συμμετρίας (ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος ΟΖ), (σχ. 148).

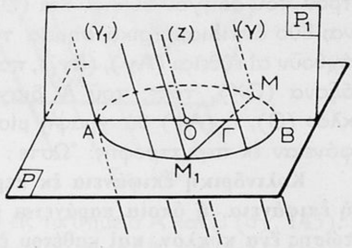
2ον : Ἔστω ἕνα ἐπίπεδον (P) κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΖ τῆς κυκλικῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον καὶ πρὸς τὰς γενετείρας αὐτῆς. Κατ' ἀκολουθίαν τυχὸν σημεῖον Α μιᾶς γενετείρας (γ), διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Γ τῆς τομῆς, ἔχει τὸ συμμετρικόν του Β ἐπὶ τῆς αὐτῆς γενετείρας (γ) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (P). Ἄρα :



Σχ. 149

Πᾶσα κάθετος τομὴ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτῆς.

3ον : Ἔστω (P_1) ἓν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΟΖ μιᾶς πλαγίας κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁδηγοῦ. Τὸ (P_1) τέμνει τὸ (P) κατὰ τὴν διάμετρον ΑΒ, ἡ ὁποία εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο). Εἰς ἓν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου (Ο) ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον M_1 αὐτοῦ, συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ΑΒ, (σχ. 150).

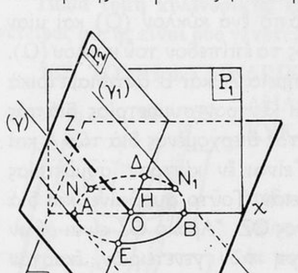


Σχ. 150

Ἡ εὐθεῖα MM_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ (P_1). Αἱ γενέτειραι (γ) καὶ (γ_1) αἱ ἀγόμεναι ἐκ τῶν Μ καὶ M_1 εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα ΟΖ. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον (P_1) εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς γενετείρας ταύτας, ἀπέχον ἰσάκις τούτων. Ἄρα αἱ γενέτειραι (γ) καὶ (γ_1) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ (P_1). Ἄρα :

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καὶ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου, εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

4ον : Ἔστω (P_2) ἓν ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΟΖ τῆς κυκλικῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας μὲ ὁδηγὸν τὸν κύκλον (Ο), κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον P_1. (σχ. 151).



Σχ. 151

Τὸ (P_2) τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον κατὰ τὴν διάμετρον ΔΕ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Ν καὶ N_1 τοῦ ὁδηγοῦ, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ΔΕ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν γενετειρῶν (γ) καὶ (γ_1) τῶν διερχομένων διὰ τῶν Ν καὶ N_1, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου (P_2,) διότι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΖ καὶ ἐπὶ τὴν NN_1. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον $NN_1\gamma_1$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (P_2). Ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι μέσον τοῦ τμήματος NN_1, καὶ αἱ γενέτειραι (γ) καὶ (γ_1) διέρχονται διὰ τῶν Ν καὶ N_1, ἕπεται ὅτι αἱ (γ) καὶ (γ_1) εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (P_2). Ἄρα ἡ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια δέχεται ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας καὶ τὸ ἐπίπεδον (P_2).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων συνάγομεν ὅτι, ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ ἄξονος ΟΖ μιᾶς κυκλικῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τρία ἐπίπεδα συμμετρίας :

α) **Τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ τοῦ ὁδηγοῦ τὸ (P_1),**

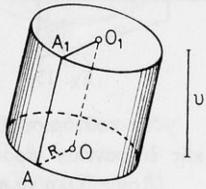
β) **Τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ΟΖ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον P_1, τὸ (P_2),**

γ) **Τὸ διὰ τοῦ Ο κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΟΖ, τὸ (Ρ).**

Τὰ τρία ἐπίπεδα (Ρ), (P_1), (P_2) σχηματίζουν τρίεδρον γωνίαν τρισορθογώνιον.

Αἱ ἀκμαὶ ταύτης εἶναι **ἄξονες συμμετρίας** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

185. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ.— Κύλινδρος εἶναι τὸ Σύνολον, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι : τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα δύο ἐπιπέδων τομῶν κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, παραλλήλων πρὸς τὸν ὁδηγὸν κύκλον, τὰ σημεῖα τῶν τομῶν τούτων καὶ τὰ σημεῖα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας τὰ μεταξὺ τῶν τομῶν τούτων.



Σχ. 152

Οἱ δύο κύκλοι τομῆς καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου καὶ εἶναι **ἴσοι.**

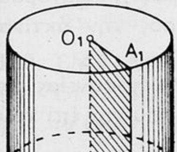
Ἡ κοινὴ ἀκτίς των εἶναι ἡ **ἀκτὶς R** τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων εἶναι τὸ **ὕψος** τοῦ κυλίνδρου, (σχ. 152).

Ἐὰν αἱ γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις, ὁ κύλινδρος καλεῖται **κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς,** ἄλλως λέγεται **πλάγιος κύλινδρος.**

Μία γενέτειρα AA_1, αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ O_1A_1, καὶ τὸ τμῆμα OO_1 ὁρίζουν τὸ ὀρθογώνιον OAA_1O_1.

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι παράγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον OO_1A_1A (σχ. 153), ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν ἀκίνητον πλευράν του OO_1 κατὰ γωνίαν 2π.



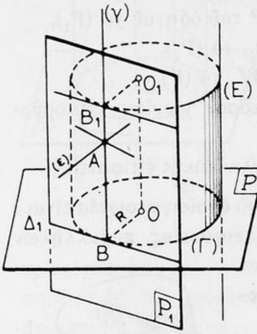
Σχ. 153

Ἡ OO_1 καλεῖται **ἄξων** τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου, τὸ δὲ ὀρθογώνιον OO_1A_1A καλεῖται **μεσημβρινὸν ἐπίπεδον** τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου.

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος OO_1 τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου εἶναι, προφανῶς, ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτοῦ.

Ὁ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τό : **Ὑποσύνολον τοῦ Συνόλου τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα OO_1 μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.**

186. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.— Θεωροῦμεν κύλινδρον ἐκ περιστροφῆς μὲ ἄξονα OO_1, τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ, τὴν γενέτειραν (γ), ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον (Γ) εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἡ γενέτειρα (γ) εἶναι, προφανῶς, παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα OO_1. Ἡ ἐφαπτομένη $B\Delta_1$ εἰς τὸ Β τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Γ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου. Ἡ $B\Delta_1$ εἶναι ἐπίσης καθετος ἐπὶ τὴν γενέτειραν (ΒΑγ). Ἄρα ἡ $B\Delta_1$ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον (ΟΒΑγ), (σχ. 154.



Σχ. 154

Τὸ ἐπίπεδον $\Delta_1 BA$, τὸ ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν γενέτειραν (γ) τοῦ σημείου Α καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην $B\Delta_1$ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Γ) εἰς τὸ σημεῖον Β, καθ᾽ ὃ ἡ (γ) τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον, καλεῖται **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

Τὸ ἐπίπεδον $OBAB_1O_1$ καλεῖται **μεσημβρινὸν ἐπίπεδον** τῆς κυλινδρικῆς ταύτης ἐπιφανείας. Ὥστε:

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἓν σημεῖον μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ μεσημβρινὸν ἐπίπεδον αὐτῆς, τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου τούτου.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας προκύπτει ὅτι:

1ον: **Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γενετείρας (γ) τοῦ σημείου Α ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (P_1).** Δηλαδὴ ἡ γενέτειρα (γ) τοῦ σημείου Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (P_1).

2ον: **Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον (P_1) εἰς τὸ Α δὲν ἔχει, ἐκτὸς τῶν σημείων τῆς (γ), ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν κύλινδρον.**

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἡ γενέτειρα (γ) τοῦ σημείου Α ὀνομάζεται **γενέτειρα ἐπαφῆς** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (Ε) καὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τὸ Α.

Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ ἄξονος OO_1 τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου ἀπὸ τοῦ τυχόντος ἐφαπτομένου αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου τούτου.

Ὀνομάζομεν **ἐφαπτομένην** τῆς κυλινδρικῆς ἐκ περιστροφῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς, πᾶσαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Α καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Κάθε ἐφαπτομένη εὐθεῖα (ε) τῆς ἐκ περιστροφῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτῆς **δὲν ἔχει,** ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν κυλινδρικὴν ἐπιφάνειαν.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

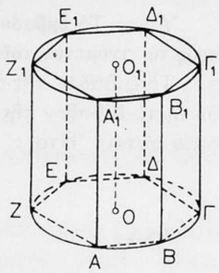
187. Ἐσωτερικὸν καὶ ἐξωτερικὸν σημεῖον κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς. Ἓν σημεῖον Α θὰ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν ἑνὸς** κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἄν, καὶ μόνον ἄν, ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη παράλληλος πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου τέμνῃ τὰς δύο βάσεις εἰς ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτῶν.

Πᾶν σημεῖον τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐσωτερικὸν οὔτε σημεῖον τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, καλεῖται **ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ.**

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι : **Ἀπὸ σημεῖον Μ, ἐξωτερικὸν ἑνὸς κυλίνδρου, ἄγονται δύο, καὶ μόνον δύο, ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτοῦ.**

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος.

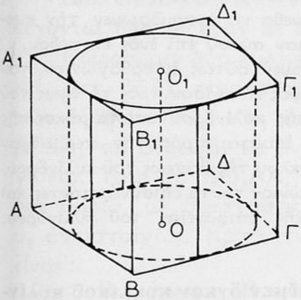
188. ΠΡΙΣΜΑΤΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΕΙΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΝ.— α) Ἔστω κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς μὲ κυκλικὰς βάσεις (Ο) καὶ (O_1). Εἰς τὸν κύκλον (Ο) ἐγγράφομεν ἓν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἐκ τῶν κορυφῶν τούτου Α,Β,Γ,Δ, Ε,Ζ ἄγομεν τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου. Αὗται τέμνουν τὸν ἄλλον κύκλον (O_1) κατὰ τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, Δ_1, E_1, Z_1 ἀντιστοίχως. Τὸ προκῦψαν πρῖσμα ΑΒΓΔΕΖ $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1Z_1$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ἐκ περιστροφῆς κύλινδρον OO_1.



Σχ. 155

Ὥστε : **Ἓν πρῖσμα θὰ λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου, αἱ δὲ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος εἶναι γενέτειραι τοῦ κυλίνδρου.**

β) Περὶ τὴν βάσιν (Ο) ἑνὸς ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου περιγράφομεν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἐκ τῶν Α,Β,Γ,Δ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου. Αἱ παράλληλοι αὗται τέμνουν τὴν ἄλλην βάσιν (O_1) κατὰ τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, Δ_1.

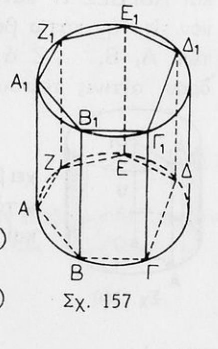


Σχ. 156

Τὸ προκῦψαν πρῖσμα $AB\Gamma\Delta A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύλινδρον OO_1. Ὥστε :

Πρῖσμα θὰ λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύλινδρον, ὅταν αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος, αἱ δὲ ἕδραι τοῦ πρίσματος εἶναι ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

189. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ.— ΟΡΙΣΜΟΣ.— Καλοῦμεν ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν $2^k \cdot \nu$ κανονικῶν πρισμάτων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύλινδρον.



Σχ. 157

Ἔστω ΑΒΓΔΕ. . . A_1B_1. . . κανονικὸν πρῖσμα, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν **ἐκ περιστροφῆς** κύλινδρον, ὕψους υ καὶ ἀκτῖνος βάσεως R.

Τὸ ἐμβαδὸν ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος τούτου εἶναι :

$$\varepsilon = \varpi\ \upsilon, \qquad (1)$$

ἔνθα ϖ ἡ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Κατ' ἀκολουθίαν : $\quad \text{ορ}\ \varepsilon = \text{ορ}\ (\varpi \cdot \upsilon) = (\text{ορ}\ \varpi)\ \upsilon \quad (2)$

Ἐπειδὴ δέ, ἐξ ὁρισμοῦ, ορ ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν E_u τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου, καὶ ορ$\varpi = 2\pi R$, τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως, ἡ (2) γίνεται :

$$\boxed{\mathbf{E_u = 2\pi\, R \cdot \upsilon}} \tag{3}$$

Ἄρα : **Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.**

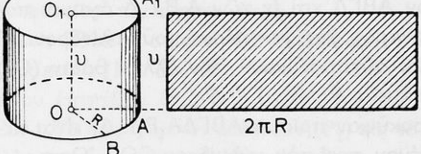
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου θὰ εὑρεθῇ, ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του προστεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ἤτοι :

$$E_{o\lambda} = 2\pi R\upsilon + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(\upsilon + R). \tag{4}$$

Ὥστε :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E_u} &= \mathbf{2\pi\, R\, \upsilon} \\ \mathbf{E_{o\lambda}} &= \mathbf{2\pi\, R\,(\upsilon + R)} \end{aligned}} \tag{5}$$

190. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς. Παραδεχόμεθα ὅτι, ἐὰν κόψωμεν τὸν κύλινδρον ἐκ περιστροφῆς (σχ. 158) κατὰ μῆκος τῆς γενετείρας AA_1 αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.



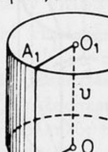
Σχ. 158

Λαμβάνομεν οὕτως ἓν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ ἐκ περιστροφῆς κυλίνδρου καὶ τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του ἰσοῦται πρὸς τὴν περίμετρον 2πR τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο ἐπισυνάπτοντες καὶ τοὺς κύκλους τῆς βάσεως, λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Κατ' ἀκολουθίαν ἐπαληθεύονται οἱ τύποι (5) τῆς (§ 189).

191. ΟΓΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ.—Καλοῦμεν ὄγκον κυκλικοῦ κυλίνδρου, τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν ὄγκων $2^k \cdot \nu$ κανον. πρισμάτων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύλινδρον τοῦτον.

Ἔστω πλάγιος κυκλικὸς κύλινδρος (BE_1), (σχ. 159), καὶ ΑΒΓΔΕΖ ἓν κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν κάτω βάσιν τοῦ κυλίνδρου τούτου. Ἐκ τῶν Α, Β, . . . , Ζ ἄγομεν τὰς γενετείρας τοῦ κυλίνδρου, αἵτινες τέμνουν τὸν ἄνω κύκλον εἰς τὰ σημεῖα $A_1 B_1, \ldots, Z_1$.

Σχ. 159



Σχ. 160

Τὸ σχηματισθὲν πρῖσμα (BE_1) ἔχει βάσεις κανονικὰ πολύγωνα. Ἔστω υ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος. Τοῦτο εἶναι καὶ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ὁ ὄγκος V_1 τοῦ πρίσματος εἶναι :

$$V_1 = B \cdot \upsilon \tag{1}$$

Ἄρα : $$\text{ορ } V_1 = \text{ορ } B \cdot \upsilon \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ ορV_1, ἐξ ὁρισμοῦ, εἶναι ὁ ὄγκος V τοῦ πλαγίου κυκλικοῦ κυλίνδρου καὶ ορ $B = \pi R^2 =$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῶν πρισμάτων συνεχῶς διπλασιάζηται, ἡ (2) γίνεται :

$$V = \pi R^2 \cdot \upsilon \tag{3}$$

Ἐὰν ὁ κύλινδρος εἶναι ἐκ περιστροφῆς, τότε τὸ ὕψος υ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἄξονα OO_1 τοῦ κυλίνδρου τούτου, καὶ θὰ ἔχωμεν πάλιν :

$$\boxed{\mathbf{V = \pi R^2 \cdot \upsilon}} \tag{4}$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

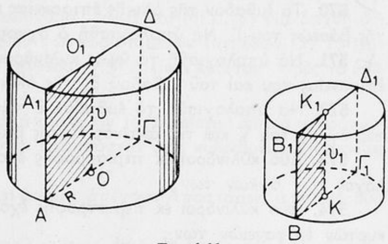
Ὁ ὄγκος κυλίνδρου μὲ βάσεις κύκλους ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

192. ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ : I.—Ἐὰν δύο κύλινδροι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων αὐτῶν.

II.— Ἐὰν δύο κύλινδροι ἔχουν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

193. ΟΜΟΙΟΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΙ (1).— Ὁρισμός.—Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς λέγονται ὅμοιοι, ὅταν αἱ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδοι τομαὶ αὐτῶν εἶναι ὅμοιαι.

Θεωροῦμεν δύο κυλίνδρους OO_1 καὶ KK_1 (σχ. 161), τοιούτους ὥστε αἱ διὰ τῶν ἀξόνων OO_1, KK_1 ἀγόμεναι τομαὶ $ΑΓΔΑ_1$ καὶ $ΒΓ_1Δ_1Β_1$ νὰ εἶναι ὅμοια ὀρθογώνια. Τότε τὰ OO_1AA, KK_1B_1B θὰ εἶναι ὅμοια, μὲ διαστάσεις R, υ καὶ R_1, υ_1 ἀντιστοίχως. Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ εἶναι :



Σχ. 161

$$\frac{R}{R_1} = \frac{\upsilon}{\upsilon_1} = \frac{R+\upsilon}{R_1+\upsilon_1}, \quad \text{καὶ}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = 2\pi R\,\upsilon \\ E_1 = 2\pi R_1 \upsilon_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{E}{E_1} = \frac{R\upsilon}{R_1\upsilon_1} = \frac{R}{R_1}\cdot\frac{\upsilon}{\upsilon_1} = \frac{R}{R_1}\cdot\frac{R}{R_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon_1^2}. \tag{1}$$

Ὁμοίως :

$$\left.\begin{array}{l} E_{ολ} = 2\pi R\,(\upsilon + R) \\ E_{1ολ} = 2\pi R_1\,(\upsilon_1 + R_1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{E_{ολ}}{E_{1ολ}} = \frac{R}{R_1}\cdot\frac{\upsilon+R}{\upsilon_1+R_1} = \frac{R}{R_1}\cdot\frac{R}{R_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon_1^2}. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

$$\mathbf{\frac{E}{E_1} = \frac{E_{ολ}}{E_{1ολ}} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{\upsilon^2}{\upsilon_1^2}}. \tag{3}$$

Δηλαδή : **Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων κυλίνδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγων τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν τετραγώνων τῶν ὑψῶν αὐτῶν.**

---

(1). Δὲν πρέπει νὰ γίνῃ συσχέτισις μὲ τὰ ὅμοια πολύεδρα.

Ἐπίσης θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{array}{l} V = \pi R^2 \upsilon \\ V_1 = \pi R_1^2 \upsilon_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{\upsilon^3}{\upsilon_1^3}. \qquad (4)$$

Ἄρα : **Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων κυλίνδρων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των ἢ πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὑψῶν αὐτῶν.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

564. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς εἶναι 8 cm, καὶ τὸ ὕψος του 12 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνειά του.

565. Κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος 8 m καὶ ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας 25,12 m^2. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

566. Κυλινδρικὴ δεξαμενὴ ἔχει βάθος 4 m καὶ ὄγκον 12,56 m^3. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της.

567. Σιδηρὰ κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὄγκον 4,5216 m^3 καὶ ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας 15,072 m^2. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως, τὸ ὕψος καὶ τὸ βάρος τούτου, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ σιδήρου εἶναι 7,8.

568. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων ἐκ περιστροφῆς, ἐχόντων ἴσας βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

569. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο κυλίνδρων ἐκ περιστροφῆς ἐχόντων ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτῶν.

570. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς εἶναι Ε καὶ ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς του Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

571. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς, ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ E_1 τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του.

572. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ὄγκου του V καὶ τῆς ἀκτῖνος R τῆς βάσεως.

573. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς ἔχουν ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων των ;

574. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς ἔχουν ἰσοδυνάμους ὄγκους. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των ;

575. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ἂν στρέψωμεν αὐτὸ διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο διαδοχικὰς πλευράς του, οἱ παραγόμενοι ὄγκοι εἶναι ἀντιστοίχως $V = 108\ m^3$ καὶ $V_1 = 12\ m^3$.

576. Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἐξ οὗ παράγεται, ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, ὃν γράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου.

577. Ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τοῦ παραγομένου ὑπὸ ὀρθογωνίου, στρεφομένου περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτοῦ, μὴ τέμνοντα αὐτό, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου, ὃν γράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

578. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς, οὕτως ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σχηματιζομένων κυλίνδρων.

579. Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

580. Ἐπίπεδον περιέχον μίαν γενέτειραν (γ) κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς καὶ ἓν σημεῖον Α τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας του, ἐπανατέμνει αὐτὴν κατὰ μίαν γενέτειραν, διερχομένην διὰ τοῦ Α.

581. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἐφάπτωνται μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἡ τομή των εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς γενετείρας.

582. Διὰ σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.

583. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

584. Μία εὐθεῖα, διάφορος μιᾶς γενετείρας κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο μετ' αὐτῆς. Ἐὰν ἔχῃ τρία, θὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν γενέτειραν.

585. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κυλίνδρων, τῶν ἐφαπτομένων δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ;

586. Ὁμοίως τῶν ἐφαπτομένων δύο ἐπιπέδων.

587. Νὰ ὁρισθῇ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἐφαπτομένης δύο δοθέντων ἐπιπέδων καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α.

588. Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ γενέτειραν κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. θὰ τέμνῃ καὶ τὰς ἄλλας.

589. Πᾶν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διὰ μιᾶς γενετείρας κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τέμνει ταύτην κατὰ μίαν ἄλλην γενέτειραν ἢ ἐφάπτεται αὐτῆς.

590. Οἱ ἄξονες δύο κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι παράλληλοι. Νὰ ὁρισθῇ ἡ τομὴ αὐτῶν καὶ τὰ κοινὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα.

591. Δοθείσης κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἡ κοινὴ κάθετος τοῦ ἄξονος καὶ μιᾶς χορδῆς διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

592. Εἰς κύλινδρον ἐκ περιστροφῆς ἄγομεν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα παράλληλα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχῃ μεσημβρινὸν ἐπίπεδον κοινὸν τῶν δύο τούτων ἐπιπέδων, κάθετον πρὸς αὐτά.

√**593**. Ἔστωσαν Ο καὶ O_1 τὰ κέντρα τῶν βάσεων κυλίνδρου καὶ Μ σημεῖον ἐκτὸς αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Μ ἄγονται τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κυλίνδρου ΜΑΒ καὶ ΜΓΔ. 1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΒ ∥ ΓΔ. 2) Τὸ ἐπίπεδον OO_1M διχοτομεῖ τὴν δίεδρον τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων. 3) Τὸ ἐπίπεδον OO_1M διχοτομεῖ τὴν δίεδρον $AOO_1\Delta$. 4) Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον OO_1M.

√**594**. Θεωροῦμεν ὅλας τὰς εὐθείας τὰς ἀπεχούσας ἀπόστασιν R (δοθεῖσαν) ἀπὸ σταθερὰν εὐθεῖαν (Χ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αὗται ἐφάπτονται μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς.

595. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν (δ), αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀποστάσεις α,β ἀπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (x) καὶ (y);

596. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς, μὲ παραλλήλους ἄξονας, φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν δίεδρον γωνίαν.

597. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ὧν αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ τὰς πλευρὰς δοθέντος τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

598. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθείας παραλλήλους εἶναι λ, ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας ταύτας εἶναι k^2.

599. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ δοθὲν σημεῖον Α αὐτοῦ εἶναι λ.

600. Διὰ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἄγομεν δύο ἐπίπεδα κάθετα. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῆς τομῆς αὐτῶν.

601. Δίδεται κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς καὶ σημεῖον Ρ ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἄγεται ἡ τέμνουσα ΡΑΒ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου τῆς χόρδῆς ΑΒ.

602. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συμμετρικὸν κυλίνδρου ὡς πρὸς ἄξονα καὶ ὡς πρὸς ἐπίπεδον.

603. Τὸ ὁμοιόθετον κυλίνδρου ὡς πρὸς κέντρον εἶναι κύλινδρος ;

604. Δύο κύλινδροι ἐκ περιστροφῆς ἔχουν τοὺς ἄξονάς των παραλλήλους. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή των εἶναι τοὐλάχιστον δύο γενέτειραι.

605. Κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἀκτῖνα βάσεως $R = 4$ καὶ ὕψος $υ = 3$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος ἔχων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ποῖαι αἱ διατάστεις τοῦ δευτέρου κυλίνδρου ;

606. Νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς ἐκ τριῶν γενετειρῶν αὐτῆς.

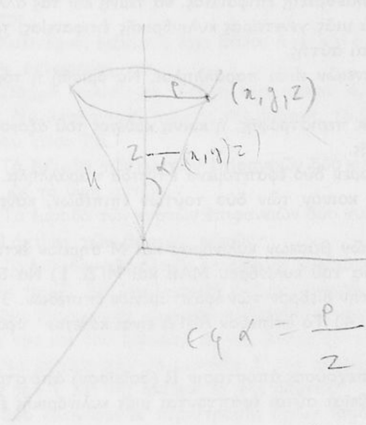
607. Ὁμοίως ἐκ τριῶν δοθέντων ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

608. Ὁμοίως ἐκ δύο ἐφαπτομένων ἐπιπέδων καὶ μιᾶς ἐφαπτομένης.

609. Ὁμοίως ἐκ δύο ἐφαπτομένων εὐθειῶν καὶ μιᾶς γενετείρας.

610. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ), καὶ τέμνουσα δύο κύκλους (Γ) καὶ ($Γ_1$) κειμένους ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καὶ ($Π_1$).

611. Δύο κύλινδροι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ κοινὸν ἄξονα. Ἄν $R > R_1$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτῶν, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτῶν, ὁ περιεχόμενος μεταξὺ τῶν δύο κυλίνδρων, ἂν αἱ βάσεις των κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

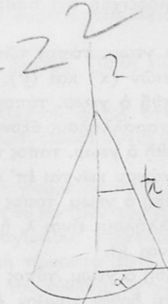


$$\frac{x^2+y^2}{\rho^2} = \frac{(k-z)^2}{k^2}$$

$$x^2+y^2 = \frac{\rho^2}{k^2}(k-z)^2$$

$$\varepsilon\varphi\, \alpha = \frac{\rho}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$$x^2+y^2 = cz^2$$



$$\frac{x^2+y^2}{a^2} = \left(\frac{z-1}{k}\right)^2$$

$$x^2+y^2 = \frac{a^2}{k^2}(z-1)^2$$

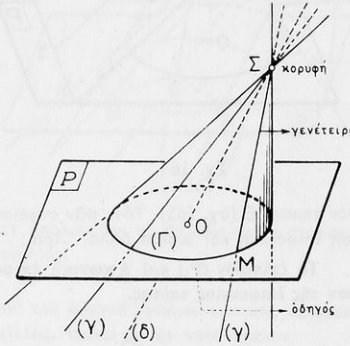
3

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

ΚΩΝΙΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΙ — ΚΩΝΟΣ — ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

194. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΩΝΙΚΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.— Ἐπὶ ἐπιπέδου (Ρ) θεωροῦμεν κύκλον (Γ) καὶ σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).



Σχ. 162

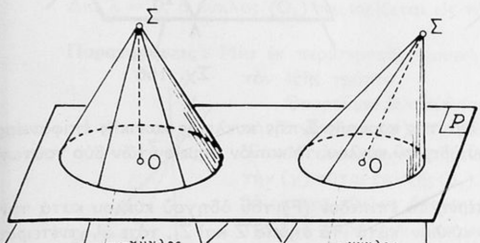
Καλοῦμεν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, τὸ Σύνολον τῶν εὐθειῶν (γ), ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Σ καὶ ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν δοθέντα κύκλον (Γ).

Ὁ κύκλος (Γ) καλεῖται **ὁδηγὸς** ἢ **βάσις** τῆς κωνικῆς ταύτης ἐπιφανείας. Τὸ σταθερὸν σημεῖον Σ καλεῖται **κορυφὴ** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν (γ) ὀνομάζεται **γενέτειρα** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐπὶ ἑκάστης γενετείρας ἡ κορυφὴ Σ ὁρίζει δύο ἡμιευθείας ἀντιθέτους. Τὸ Σύνολον τῶν ἡμιευθειῶν, αἵτινες συναντοῦν τὸν κύκλον (Γ), ἀποτελεῖ μίαν **χώνην.** Αἱ ἀντίθετοι ἡμιευθεῖαι ἀποτελοῦν μίαν δευτέραν **χώνην.**

Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν Σ μὲ τὸ κέντρον Ο τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Γ) δύναται νὰ ὀνομάζεται **ἄξων** τῆς κωνικῆς ταύτης ἐπιφανείας.



Σχ. 163

Ὅταν ὁ ὁδηγὸς δὲν εἶναι κύκλος, ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια λέγεται ἁπλῶς **κωνικὴ ἐπιφάνεια.**

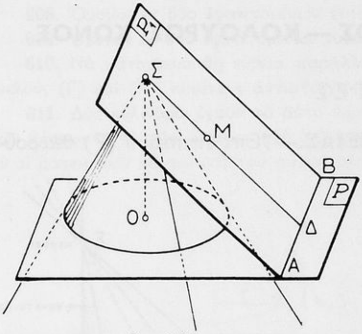
Μία κωνικὴ ἐπιφάνεια εἶναι γνωστή, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ κορυφὴ αὐτῆς καὶ ὁ ὁδηγὸς κύκλος.

Ἐὰν ὁ ὁδηγὸς εἶναι εὐθεῖα, τότε ἡ γενέτειρα (δ) γράφει ἐπίπεδον, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Σ καὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας.

Ἐὰν ἡ κορυφὴ Σ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου, τότε ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.**

195. Ἐπίπεδοι τομαὶ κωνικῆς ἐπιφανείας μὲ ὁδηγὸν κύκλον. Θὰ ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς τὸ ἐπίπεδον τομῆς διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τῆς κυκλικῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἢ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου.

Πρώτη περίπτωσις. Τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.



Σχ. 164

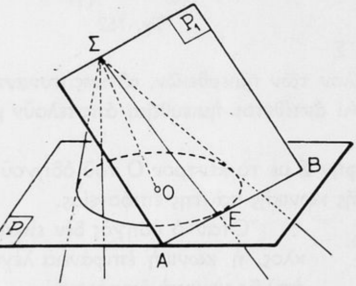
α) Ἔστω ὅτι τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς (P_1) διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Σ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ τέμνει τὸ ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν AB, ἡ ὁποία δὲν ἔχει κανένα κοινὸν σημεῖον μετὰ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου(O).

Ἐὰν τὸ (P_1) καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια εἶχον κοινὸν σημεῖον, ἔστω τὸ M, τότε ἡ ΣM θὰ ἔτεμνε τὴν AB εἰς ἓν σημεῖον Δ αὐτῆς, ἡ δὲ ΣMΔ θὰ ἦτο γενέτειρα καὶ θὰ ἔτεμνε τὸν ὁδηγὸν κύκλον, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα:

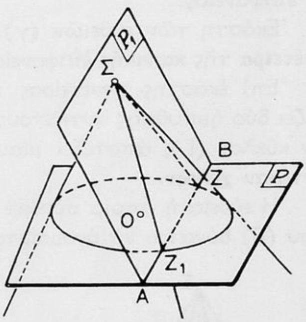
Τὸ ἐπίπεδον (P_1) δὲν ἔχει ἄλλο κοινὸν σημεῖον μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἐκτὸς τοῦ Σ.

β) Ἔστω ὅτι ἡ τομὴ AB τῶν ἐπιπέδων (P_1) καὶ (P) ἔχει μετὰ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου ἕν, κοινὸν σημεῖον E (σχ. 165). Τότε πᾶν σημεῖον τῆς ΣE εἶναι κοινὸν τοῦ ἐπιπέδου (P_1) καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ οὐδένα ἄλλο. Ἄρα:

Τὸ ἐπίπεδον (P_1) καὶ ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ ὁδηγὸν κύκλον ἔχουν κοινὴν μίαν γενέτειραν τῆς ἐπιφανείας ταύτης.



Σχ. 165



Σχ. 166

γ) Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (P_1) διέρχηται διὰ τῆς κορυφῆς Σ τῆς κυκλικῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν εἶναι μόνον τὸ Σ.

δ) Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς (P_1) τέμνη τὸ ἐπίπεδον (P) τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου κατὰ τὴν εὐθεῖαν AB, καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον κατὰ τὰ σημεῖα Z καὶ Z_1, τότε αἱ γενέτειραι ΣZ καὶ $ΣZ_1$ εἶναι κοιναί, τοῦ ἐπιπέδου (P_1) καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καὶ οὐδεμία ἄλλη. Ἄρα:

Τὸ ἐπίπεδον τομῆς (P_1) ἔχει μετὰ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας δύο κοινὰς γενετείρας.

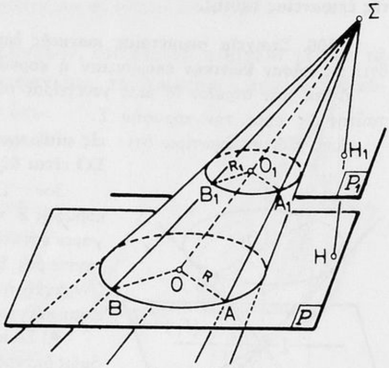
Δευτέρα περίπτωσις: Τὸ ἐπίπεδον τομῆς εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου. Ἔστω ἐπίπεδον (P_1), παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Σ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (σχ. 167). Ἐὰν A εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου, ἡ γενέτειρα ΣA τέμνει τὸ ἐπίπεδον (P_1) εἰς ἓν σημεῖον A_1.

Ὁμοίως, ἐὰν O εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου, ἡ ΣO τέμνει τὸ ἐπίπεδον (P_1) εἰς τὸ σημεῖον O_1. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα (P_1) καὶ (P) εἶναι παράλληλα, ἕπεται ὅτι τὰ τμήματα OA καὶ O_1A_1 εἶναι παράλληλα, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Τὰ τρίγωνα ΣOA καὶ $ΣO_1A_1$ εἶναι ὅμοια. Ἄρα :

$$\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{ΣO_1}{ΣO}, \text{ ἐξ οὗ : } O_1A_1 = OA \cdot \frac{ΣO_1}{ΣO}, \quad (1)$$

ἡ ὁποία σχέσις δεικνύει ὅτι τὸ τμῆμα O_1A_1 εἶναι ὡρισμένον, καὶ τὸ σημεῖον A_1 θὰ γράφῃ κύκλον (O_1) κέντρου O_1 καὶ ἀκτῖνος O_1A_1, ὁριζομένης ἐκ τῆς σχέσεως (1).

Ὁ κύκλος (O_1) θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P_1).



Σχ. 167

Ἀντιστρόφως, ἐὰν B_1 εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O_1), ἡ $ΣB_1$ τέμνει τὸ ἐπίπεδον (P) εἰς ἓν σημεῖον B, τοιοῦτον ὥστε :

$$OB = O_1B_1 \cdot \frac{ΣO}{ΣO_1} = O_1A_1 \cdot \frac{ΣO}{ΣO_1} =$$
$$= OA \cdot \frac{ΣO_1}{ΣO} \cdot \frac{ΣO}{ΣO_1} = OA.$$

Ἄρα τὸ B κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (O), καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ B_1 εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P_1) καὶ τῆς θεωρηθείσης κωνικῆς ἐπιφανείας.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ πρότασις :

Πᾶν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου κωνικῆς ἐπιφανείας, μὴ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς τῆς κων. ἐπιφανείας, τέμνει αὐτὴν κατὰ κύκλον.

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (O), ἡ ἀκτὶς R_1 τῆς τομῆς εἶναι :

$$\mathbf{R_1 = R \cdot \frac{ΣO_1}{Σ} = R \cdot \frac{ΣH_1}{ΣH}}, \quad (2)$$

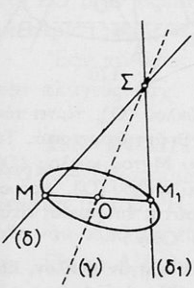
ἔνθα $ΣH_1$ καὶ ΣH αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς Σ ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα (P_1) καὶ (P) ἀντιστοίχως.

Σημείωσις : Ἐὰν τεθῇ $\frac{ΣH_1}{ΣH} = λ$, τότε $R_1 = λ \cdot R$. Ἐπειδὴ εἰς ἕκαστον λ ἀντιστοιχεῖ εἷς κύκλος (O_1), ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς τὸ Σύνολον τῶν κύκλων (O_1), οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ λ (ἀπὸ 0 ἕως ∞).

Διὰ λ = 0, ὁ κύκλος (O_1) περιορίζεται εἰς τὴν κορυφὴν Σ.

Παρατηρήσεις : Μία ἐκ περιστροφῆς κωνικὴ ἐπιφάνεια δύναται νὰ παραχθῇ καὶ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον.

Θεωροῦμεν δύο εὐθείας (δ) καὶ ($δ_1$), τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον Σ, καὶ τὴν διχοτόμον (γ) τῆς μιᾶς τῶν γωνιῶν τῶν δύο εὐθειῶν (δ) καὶ ($δ_1$). Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (δ), τότε τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν (γ) κεῖται ἐπὶ τῆς ($δ_1$). Ἐὰν τὸ M στρέφηται περὶ τὴν διχοτόμον (γ), θὰ γράφῃ κύκλον ἄξονος (γ), καὶ κατ' ἀκολουθίαν αἱ διάφοροι θέσεις τῆς (δ) παράγουν μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς μὲ κορυφὴν Σ καὶ ἄξονα (γ). Ὅθεν :



Σχ. 168

Ἡ ἐπιφάνεια ἡ παραγομένη διὰ τῆς στροφῆς μιᾶς εὐθείας περὶ μίαν ἄλλην, τὴν ὁποίαν τέμνει ὑπὸ ὡρισμένην γωνίαν, εἶναι κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

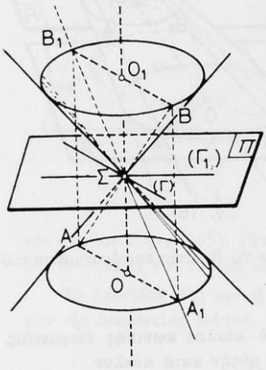
Καλοῦμεν **μεσημβρινὸν ἐπίπεδον** μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΣO τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο). Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς δύο γενετείρας ΣΜ καὶ $ΣΜ_1$ (σχ. 168), συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΣΟ. Κατ' ἀκολουθίαν:

Εἰς μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς ὁ ἄξων αὐτῆς εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

*** 196. Στοιχεῖα συμμετρίας κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς:** 1ον: Εἶναι προφανὲς ὅτι: **εἰς πᾶσαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἡ κορυφὴ Σ αὐτῆς εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῆς.**

Διότι, πᾶν σημεῖον Μ μιᾶς γενετείρας αὐτῆς ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τῆς γενετείρας ταύτης ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν Σ.

2ον: Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι: **εἰς μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς ὁ ἄξων αὐτῆς ΣΟ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.**



Σχ. 169

3ον: Ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς. Διὰ τῆς κορυφῆς Σ καὶ καὶ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο) ἄγομεν ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει τὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν κατὰ τὰς γενετείρας ΣΑ καὶ $ΣΑ_1$ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα ΣΟ. Ἂν ἀχθῇ ἡ ἄλλη διχοτόμος (ΣΓ) τῆς γωνίας ΑΣΒ, αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΟ.

Αἱ ΣΑ καὶ $ΣΒ_1$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν (ΣΓ). Τοῦ Α ὅμως διαγράφοντος τὸν κύκλον (Ο), ἡ ΣΓ στρέφεται περὶ τὸ Σ, διαγράφουσα ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΣΟ. Ἄρα αἱ ΣΑ καὶ $ΣΒ_1$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π).

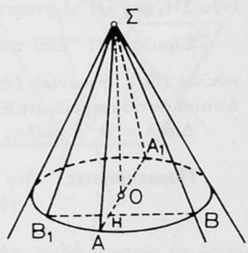
Οὕτω, τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶναι τὸ σημεῖον $Β_1$ καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸ (Π) εἶναι τὸ σημεῖον $Ο_1$. Ἄρα τὸ συμμετρικὸν τοῦ κύκλου (Ο) ὡς πρὸς τὸ (Π) εἶναι ὁ κύκλος $(Ο_1)$. Ὅθεν:

Πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς της, εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

4ον: Ἔστω ἓν μεσημβρινὸν ἐπίπεδον $(Π_1)$ σταθερόν, (σχ. 170). Τοῦτο τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ $Α_1$ ἀντιδιαμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ο. Πᾶν σημεῖον Β τοῦ κύκλου (Ο) ἔχει τὸ συμμετρικόν του $Β_1$, ἐπὶ τοῦ κύκλου τούτου, ὡς πρὸς τὴν διάμετρον $ΑΑ_1$.

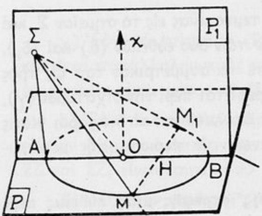
Ἄρα αἱ γενέτειραι $ΣΒ_1$ καὶ ΣΒ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $ΣΑΑ_1$. Ὅθεν:

Πᾶν μεσημβρινὸν ἐπίπεδον κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτῆς.



Σχ. 170

Σημείωσις: Θεωροῦμεν μίαν κωνικὴν κυκλικὴν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Σ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο), (σχ. 171). Τὸ διὰ τῆς ΣΟ ἀγόμενον ἐπίπεδον $(Ρ_1)$ καθέτως πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Ρ) τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο), τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιδιαμετρικά. Τὸ συμμετρικὸν σημεῖον $Μ_1$ παντὸς σημείου Μ τοῦ κύκλου (Ο) ὡς πρὸς τὴν διάμετρον ΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο). Ἄρα αἱ γενέτειραι ΣΜ καὶ $ΣΜ_1$ τῆς κωνικῆς ταύτης ἐπιφανείας εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον $(Ρ_1)$. Ὅθεν:



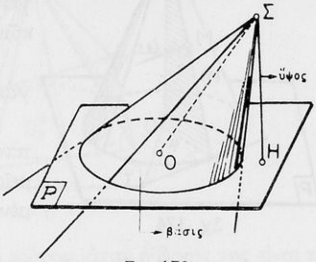
Σχ. 171

Πᾶσα πλαγία κωνικὴ ἐπιφάνεια μὲ ὁδηγὸν κύκλον, δέχεται ἐπίπεδον συμμετρίας $(Ρ_1)$, τὸ διὰ τῆς κορυφῆς καὶ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως διερχόμενον καὶ κάθετον πρὸς τὴν βάσιν ταύτην.

Ἡ ὕπαρξις δύο ἄλλων ἐπιπέδων συμμετρίας σχηματιζόντων μετὰ τοῦ (P_1) τρισορθογώνιον τρίεδρον γωνίαν κορυφῆς Σ εἶναι προφανής.

Ὑπόδειξις: Τὰ δύο ἄλλα ἐπίπεδα συμμετρίας εἶναι τὰ κάθετα ἐπὶ τὸ (P_1), τὰ διερχόμενα διὰ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ εὐθεῖαι ΣΑ καὶ ΣΒ.

197. ΚΩΝΟΣ.—Κῶνος καλεῖται τὸ Σύνολον, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι: τὰ σημεῖα τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου τούτου καὶ τὰ σημεῖα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀπὸ τῆς κορυφῆς μέχρι τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου.



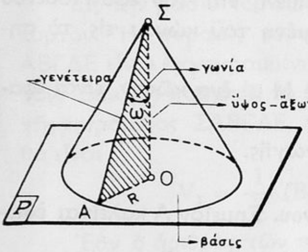
Σχ. 172

Ἡ κορυφὴ Σ τῆς χώνης εἶναι καὶ ἡ **κορυφὴ** τοῦ κώνου. Ἡ ἐπίπεδος τομή, ἡ ὁποία ὁρίζει τὸν κῶνον, καλεῖται **βάσις** τοῦ κώνου. Ἡ ἀπόστασις ΣΗ $= \upsilon$ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἶναι τὸ **ὕψος** αὐτοῦ.

Τὸ μέρος τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς κορυφῆς Σ καὶ τῆς βάσεως ὀνομάζεται **πλαγία ἐπιφάνεια** ἢ **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου.

Ἐὰν ἡ κορυφὴ Σ εἶναι σημεῖον τοῦ ἄξονος τῆς βάσεως τοῦ κυκλικοῦ κώνου, τότε ὁ κῶνος καλεῖται **ἐκ περιστροφῆς**.

Διότι ὁ ἐκ περιστροφῆς κῶνος παράγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΣΟΑ (σχ. 173), ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν σταθερὰν κάθετον πλευράν του ΣΟ κατὰ γωνίαν 2π.



Σχ. 173

Ἡ ΟΣ εἶναι ὁ **ἄξων** ἢ τὸ ὕψος τοῦ κώνου τούτου.

Πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ εἶναι **μεσημβρινὸν ἐπίπεδον** τοῦ κώνου τούτου.

Ὅταν ἡ γενέτειρα ΣΑ γράφῃ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου τούτου, διατηρεῖ σταθερὸν μῆκος, καλεῖται δὲ συνήθως καὶ **πλευρὰ** τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου.

Αἱ γενέτειραι ΣΑ σχηματίζουν μετὰ τοῦ ἄξονος ΣΟ μίαν **ὀξεῖαν** γωνίαν ω ὡρισμένην, ἡ ὁποία καλεῖται **γενέτειρα γωνία** τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου.

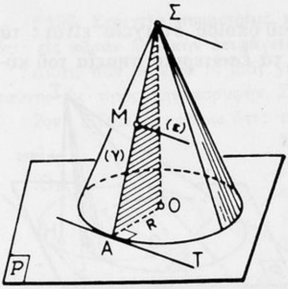
Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ κώνου δὲν συμπίπτῃ μὲ τὸν ἄξονα αὐτοῦ, ὁ κῶνος καλεῖται **πλάγιος** (σχ. 172).

198. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΤΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΚΩΝΟΥ.— Θεωροῦμεν ἕνα ἐκ περιστροφῆς κῶνον καὶ σημεῖον Μ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ. Ἡ διὰ τοῦ Μ διερχομένη γενέτειρα (γ) τοῦ κώνου τέμνει τὸν ὁδηγὸν κύκλον εἰς τὸ σημεῖον Α.

Εἰς τὸ Α ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο). Τὸ ὑπὸ τῶν ΣΑ καὶ ΑΤ ὁριζόμενον ἐπίπεδον καλεῖται **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι :

α) **Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γενετείρας (γ) τοῦ σημείου Μ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον**, δηλαδὴ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον Μ, περιέχει τὴν γενέτειραν (γ) τοῦ σημείου τούτου.



Σχ. 174

β) Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον Μ αὐτοῦ δὲν ἔχει, ἐκτὸς τῶν σημείων τῆς γενετείρας (γ) τοῦ Μ, ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν κῶνον.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

γ) Ἡ διὰ τοῦ Μ παράλληλος πρὸς τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Α αὐτοῦ μὲ τὴν ΣΜ εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου ΣΑΤ.

Ἡ γενέτειρα (γ) τοῦ σημείου Μ καλεῖται **γενέτειρα ἐπαφῆς** τοῦ κώνου μὲ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς τὸ Μ.

δ) Ἡ γωνία ΣΑΟ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος τῆς διέδρου τῶν ἐπιπέδων τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἐφαπτομένου τοῦ κώνου κατὰ τὴν γενέτειραν ΣΑ.

ε) Τὸ μεσημβρινὸν ἐπίπεδον ΣΟΑ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον ΣΑΤ τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου εἰς τὸ σημεῖον Μ.

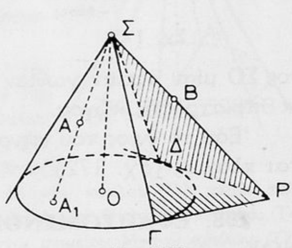
στ) Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Μ καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου τοῦ κώνου εἰς τὸ Μ, καλεῖται **ἐφαπτομένη** τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον Μ.

ζ) Ἐὰν μία εὐθεῖα ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Μ μὲ ἕνα κῶνον, εἶναι ἐφαπτομένη αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

199. Ἐσωτερικὸν καὶ ἐξωτερικὸν σημεῖον κώνου. Σημεῖον Α καλεῖται **ἐσωτερικὸν** σημεῖον δοθέντος κώνου (Σ), ὅταν ἡ ΣΑ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο) εἰς ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ A_1.

Πᾶν σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ κώνου, οὔτε ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ, καλεῖται ἐξωτερικὸν σημεῖον (σχ. 175).

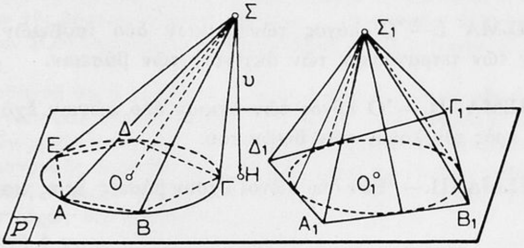


Σχ. 175

200. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Διὰ σημείου Β κειμένου ἐκτὸς τοῦ κώνου ἄγονται δύο ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα τοῦ κώνου.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν Ρ εἶναι ἡ τομὴ τῆς ΣΒ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο) καὶ ΡΓ, ΡΔ αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (Ο), αἱ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ Ρ, ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων ΣΡΓ καὶ ΣΡΔ εἶναι, προφανῶς, ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ κώνου καὶ περιέχει τὸ σημεῖον Β.

201. ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΚΑΙ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ ΕΙΣ ΚΩΝΟΝ.— Πυραμὶς θὰ λέγεται **ἐγγεγραμμένη** εἰς δοθέντα κῶνον, ὅταν ἡ βάσις αὐτῆς εἶναι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαί της εἶναι γενέτειραι τοῦ κώνου τούτου (σχ. 176).



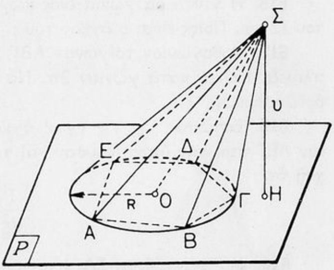
ΣΧ. 176 Σχ. 177

Μία πυραμὶς λέγεται **περιγεγραμμένη** περὶ κῶνον, ὅταν ἡ βάσις της εἶναι πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου, αἱ δὲ ἕδραι της εἶναι ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου (σχ. 177).

202. ΟΓΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΚΩΝΟΥ.— Ἔστω κῶνος κορυφῆς Σ, ἔχων βάσιν κύκλον (Ο, R). Ἔστω υ τὸ ὕψος τοῦ κώνου τούτου.

Εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου τούτου ἐγγράφομεν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ κυρτόν. Ἡ πυραμὶς κορυφῆς Σ καὶ βάσεως ΑΒΓΔΕ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κῶνον τοῦτον. Ἐὰν (Β) παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ, τότε ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶναι :

$$V_1 = \frac{1}{3}\,(\text{Β}) \cdot υ \qquad (1)$$



Σχ. 178

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῶν ἐγγεγραμμένων πυραμίδων εἰς τὸν κῶνον συνεχῶς διπλασιάζεται, τὰ ἐμβαδὰ τῶν διαφόρων τούτων πολυγώνων τείνουν πρὸς τὸ ἐμβαδὸν πR^2 τοῦ κύκλου τῆς βάσεως.

Ἑπομένως, ἐκ τῆς (1), ἕπεται ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν διαφόρων πυραμίδων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κῶνον σχηματίζουν μίαν ἀκολουθίαν, ἡ ὁποία ἔχει ὅριον πεπερασμένον ἀριθμόν. Τὸ ἀριθμὸν τοῦτον καλοῦμεν **ὄγκον** τοῦ κώνου. Ἄρα :

$$\text{ορ}\, V_1 = \frac{1}{3}\,\text{ορ}\,(\text{Β}) \cdot υ \quad \text{ἢ} \quad \boxed{V = \frac{1}{3}\,\pi R^2 \cdot υ} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

α΄) **Ὄγκος κώνου καλεῖται τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν ὄγκων $2^k \cdot ν$ κανονικῶν πυραμίδων ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κῶνον τοῦτον.**

καὶ β′) **Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος.**

Σημ. Ἐὰν ὁ κῶνος εἶναι ἐκ περιστροφῆς, τότε τὸ ὕψος υ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου τούτου.

203. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.— Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ἰσοϋψῶν κώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

204. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.— Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο κώνων ἐχόντων τὴν αὐτὴν βά-σιν, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν του.

205. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.— Ἐὰν δύο κῶνοι ἔχουν βάσεις ἴσας καὶ ὕψη ἴσα εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

612. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ὀρθοῦ κώνου εἶναι $R = 9$ cm καὶ τὸ ὕψος του $υ = 12$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

613. Ἐκ περιστροφῆς κώνου ἡ ἀκτὶς εἶναι $R = 24$ cm καὶ τὸ μῆκος τῆς γενετείρας του $λ = 40$ cm. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

614. Ἐκ περιστροφῆς κώνου ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι 94,20 m. Ἂν τὸ ὕψος του εἶναι $υ = 9$ cm, ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

615. Ὁ ὄγκος ἐκ περιστροφῆς κώνου εἶναι 36π cm³ καὶ τὸ ὕψος του $υ = 12$ cm. Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του ;

616. Ἡ γενέτειρα γωνία ἑνὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι 30° ἢ 60° ἢ 45° καὶ τὸ ὕψος του 12 cm. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

617. Ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς β,γ στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευρὰς ταύτας κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν παραχθησομένων ὀρθῶν κώνων.

618. Ἔστωσαν $V_α$, $V_β$, $V_γ$ οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διὰ περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ περὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς καὶ κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{V_β^2} + \frac{1}{V_γ^2} = \frac{1}{V_α^2}.$$

619. Διὰ μιᾶς εὐθείας ΣΑ, ἐξωτερικῆς μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, ἄγομεν δύο ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα αὐτῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΣΑ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς γενετείρας ἐπαφῆς.

620. Τετραγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ κῶνον ἐκ περιστροφῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι παραπλεύρων ἑδρῶν.

621. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας (δύο περιπτώσεις).

622. Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

623. Μία εὐθεῖα, διάφορος μιᾶς γενετείρας κωνικῆς ἐπιφανείας, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο μετὰ τῆς ἐπιφανείας ταύτης. Ἐὰν ἔχῃ τρία συμπίπτει μὲ μίαν γενέτειραν.

624. Διὰ δοθέντος σημείου Α ἄγομεν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων τούτων διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

625. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ κοινὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα δύο κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς· ἐχουσῶν κοινὴν κορυφὴν καὶ βάσεις κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

626. Δίδεται ἐκ περιστροφῆς κῶνος κορυφῆς Σ καὶ σημεῖον Μ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Διὰ τοῦ Μ ἄγονται τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ κώνου καὶ ἔστωσαν ΣΑ καὶ ΣΒ αἱ γενέτειραι ἐπαφῆς. Ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς βάσεως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 1) Τὸ ἐπίπεδον ΣΟΜ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ΣΜ. 2) Τὸ ἐπίπεδον ΣΟΜ διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ΣΟ καὶ 3) Τὸ ἐπίπεδον ΣΟ Μ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ.

627. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας τῶν δύο γενετειρῶν τῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ ἐπιπέδου.

628. Δοθεισῶν τριῶν τεμνομένων εὐθειῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες κωνικαὶ ἐπιφάνειαι ἐκ περιστροφῆς, αἱ ὁποῖαι δέχονται τὰς εὐθείας ταύτας ὡς γενετείρας.

629. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀκμῶν τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν, ὧν αἱ ἕδραι διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν.

630. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι ἴσος πρὸς λ.

631. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν ΣΧ, τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Σ, καὶ ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι ἴσος πρὸς k.

632. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀκμῶν τῶν διέδρων γωνιῶν (ὀρθῶν), ὧν αἱ ἕδραι ἐφάπτονται δοθείσης ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

633. Νὰ κατασκευασθῇ κωνικὴ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ἄξονος αὐτῆς καὶ δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας της.

634. Ὁμοίως ἐξ ἑνὸς σημείου αὐτῆς Α, μιᾶς ἐφαπτομένης (t) καὶ τοῦ ἄξονος.

635. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἄξονος, μιᾶς ἐφαπτομένης (t) καὶ τοῦ σημείου ἐπαφῆς της.

636. Ὁμοίως ἐκ τοῦ ἄξονος, δύο ἐφαπτομένων (t), (t_1) ἀγομένων ἐκ σημείου Α.

637. Ὁμοίως ἐκ δύο γενετειρῶν (γ), (γ_1) καὶ μιᾶς ἐφαπτομένης (t).

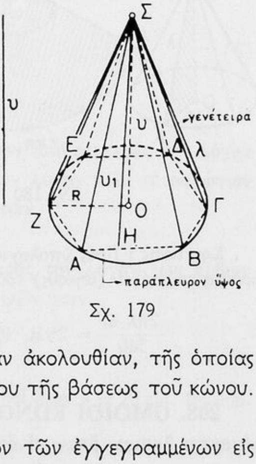
638. Ὁμοίως ἐκ τῆς κορυφῆς Σ, ἑνὸς σημείου Α καὶ δύο ἐφαπτομένων (t), (t_1).

206. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΩΝΟΥ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.—

Ἔστω κῶνος ἐκπεριστροφῆς ὕψους υ καὶ ἀκτῖνος βάσεως R. Εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου τούτου ἐγγράφομεν κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἄγομεν τὰς γενετείρας, τὰς διερχομένας διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου τούτου. Ἡ προκύπτουσα πυραμὶς εἶναι κανονική, **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὸν κῶνον. Τὸ ἐμβαδὸν E_1 τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης εἶναι :

$$E_1 = \frac{1}{2} \Pi_1 \cdot \Sigma H, \qquad (1)$$

ἔνθα Π_1 ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ΣΗ τὸ παράπλευρον ὕψος αὐτῆς.



Σχ. 179

Νοοῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου συνεχῶς διπλασιάζεται. Ἄρα αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν τούτων πολυγώνων σχηματίζουν μίαν ἀκολουθίαν, τῆς ὁποίας τὸ ὅριον εἶναι ὡρισμένος ἀριθμός : τὸ μῆκος τοῦ κύκλου τῆς βάσεως τοῦ κώνου. Δηλαδὴ $2\pi R$.

Τὰ παράπλευρα ὕψη τῶν κανονικῶν πυραμίδων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κῶνον, σχηματίζουν μίαν ἄλλην ἀκολουθίαν, ἔχουσαν ὅριον ἄλλο ὡρισμένον μῆκος: τὴν γενέτειραν λ τοῦ κώνου.

Κατ' ἀκολουθίαν τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν ἔχουν ὅριον ὡρισμένον. Τὸ ὅριον τοῦτο Ε καλεῖται **ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐκ περιστροφῆς κώνου.** Ἄρα:

$$\text{ορ } E_1 = \frac{1}{2} \text{ ορ } \Pi_1 \cdot \text{ ορ } \Sigma H \cdot \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\mathbf{E} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \mathbf{R} \cdot \lambda = \pi \mathbf{R} \cdot \lambda} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ὁρισμός.— Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς καλεῖται τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν 2^k ν κανονικῶν πυραμίδων ἐγγεγραμμένων ὡς τὸν κῶνον τοῦτον.

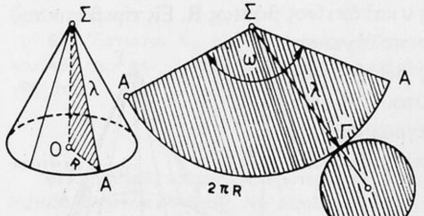
Ἐκ δὲ τοῦ τύπου (2) ἕπεται ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τοῦ μήκους τοῦ κύκλου τῆς βάσεως ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου προστεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πR^2, προκύπτει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{E}_\kappa &= \pi \mathbf{R} \lambda \\ \mathbf{E}_{o\lambda} &= \pi \mathbf{R}^2 + \pi \mathbf{R} \lambda = \pi \mathbf{R} (\mathbf{R} + \lambda) \end{aligned}} \qquad (3)$$

207. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς (ἀκτῖνος R καὶ ἀποστήματος λ) γίνεται ὅπως καὶ τὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς πυραμίδος. Κόπτομεν τὸν κῶνον κατὰ μῆκος μιᾶς γενετείρας ΣΑ (μήκους λ), ὁπότε ὁ κύκλος τῆς βάσεως ἀναπτύσσεται κατὰ ἕνα τόξον κύκλου ἀκτῖνος λ καὶ μήκους 2πR (σφ. 174). Ἐὰν εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο ΣΓΑ, τὸ ὁποῖον εἶναι κυκλικὸς τομεὺς κέντρου Σ καὶ ἀκτῖνος λ, ἐπισυνάψωμεν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.



Σχ. 180

Ὥστε: **Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι κυκλικὸς τομεὺς ἀκτῖνος λ, καὶ τοῦ ὁποίου τὸ τόξον ἔχει μῆκος 2πR.**

Σημείωσις: Πρὸς ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας ω τοῦ τομέως, ἀρκεῖ νὰ ἐξισώσωμεν δύο ἐκφράσεις τοῦ τόξου (μήκους) τοῦ κύκλου τούτου. Οὕτως, ἐὰν ἡ ω ἐκφράζηται εἰς μοίρας:

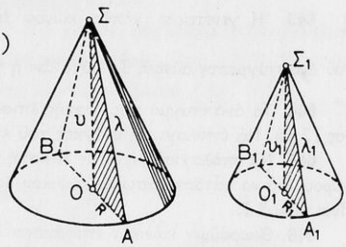
$$\frac{2\pi\lambda \cdot \omega}{360} = 2\pi R, \text{ ἐξ οὗ: } \quad \boxed{\omega = 360^0 \cdot \frac{\mathbf{R}}{\lambda}} \quad (\omega \text{ εἰς μοίρας})$$

208. ΟΜΟΙΟΙ ΚΩΝΟΙ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ.— Δύο κῶνοι ἐκ περιστροφῆς λέγονται ὅμοιοι, ὅταν αἱ διὰ τῶν ἀξόνων αὐτῶν ἀγόμεναι τομαὶ εἶναι ὅμοιαι.

῾Ως γνωστόν, αἱ τομαὶ εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΣΟΑ καὶ $Σ_1O_1A$ θὰ εἶναι ὅμοια.

α) Ἐὰν ε καὶ $ε_1$ εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο ὁμοίων κώνων, θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} ε &= πRλ \\ ε_1 &= πR_1λ_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{ε}{ε_1} = \frac{Rλ}{R_1λ_1} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{λ}{λ_1} \quad (1)$$



Σχ. 181

Ἐπειδὴ δέ :

$$\frac{R}{R_1} = \frac{λ}{λ_1} = \frac{υ}{υ_1} = \frac{R+λ}{R_1+λ_1},$$ ἡ (1) γίνεται :

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{ε}}{\boldsymbol{ε_1}} = \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{R}_1^2} = \frac{\boldsymbol{λ}^2}{\boldsymbol{λ}_1^2} = \frac{\boldsymbol{υ}^2}{\boldsymbol{υ}_1^2}} \quad (2)$$

β) Ἐὰν $ε_{ολ}$ καὶ $ε_{1ολ}$ εἶναι τὰ ὁλικὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{aligned} ε_{ολ} &= πR(R+λ) \\ ε_{1ολ} &= πR_1(R_1+λ_1) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{ε_{ολ}}{ε_{1ολ}} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{R+λ}{R_1+λ} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{R}{R_1} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{λ^2}{λ_1^2} = \frac{υ^2}{υ_1^2}.$$

Ἄρα :
$$\boxed{\frac{\boldsymbol{ε}}{\boldsymbol{ε_1}} = \frac{\boldsymbol{ε_{ολ}}}{\boldsymbol{ε_{1ολ}}} = \frac{\mathbf{R}^2}{\mathbf{R}_1^2} = \frac{\boldsymbol{λ}^2}{\boldsymbol{λ}_1^2} = \frac{\boldsymbol{υ}^2}{\boldsymbol{υ}_1^2}} \quad (3)$$

γ) Ἐὰν V καὶ V_1 εἶναι οἱ ὄγκοι αὐτῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}πR^2 \cdot υ \\ V_1 &= \frac{1}{3}πR_1^2 \cdot υ_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{V}{V_1} = \frac{R^2}{R_1^2} \cdot \frac{υ}{υ_1} = \frac{R^2}{R_1^2} \cdot \frac{R}{R_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{λ^3}{λ_1^3} = \frac{υ^3}{υ_1^3}$$

Ἄρα :
$$\boxed{\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{V_1}} = \frac{\mathbf{R}^3}{\mathbf{R}_1^3} = \frac{\boldsymbol{λ}^3}{\boldsymbol{λ}_1^3} = \frac{\boldsymbol{υ}^3}{\boldsymbol{υ}_1^3}} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) συνάγομεν ὅτι :

῾Ο λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των καὶ οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν πλευρῶν των ἢ τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

Ἐκ τῶν (4) συνάγομεν ὅτι :

῾Ο λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων κώνων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων ἢ τῶν πλευρῶν των ἢ τὸν ὑψῶν των.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

639. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ἀκτῖνα βάσεως $R = 36$ cm καὶ ὕψος $υ = 27$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

640. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὕψος $υ = 32$ cm καὶ ἀπόστημα $λ = 40$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

641. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὕψος 40 cm καὶ περίμετρον βάσεως 188,4 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

642. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι 2160 π cm^2 καὶ ἡ γενέτειρά του $\lambda = 6$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του.

643. Ἡ γενέτειρα γωνία κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι $\frac{\pi}{6}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ. Τὸ αὐτὸ ἂν ἡ γενέτειρα γωνία εἶναι $\frac{\pi}{4}$ ἢ $\frac{\pi}{3}$.

644. Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἡμικύκλιον ἀκτῖνος 12 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

645. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς R καὶ ἡ γωνία ω ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως ἐξ ἑνὸς φύλλου ψευδαργύρου, διὰ νὰ κατασκευάσωμεν κωνικὸν δοχεῖον χωρητικότητος 5 λιτρῶν καὶ εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι $\upsilon = 3$ R.

646. Θεωροῦμεν κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς, ἧς ἡ γενέτειρα γωνία $\omega = 30^o$. Τέμνομεν αὐτὴν ὑπὸ ἐπιπέδων καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα καὶ ἀπεχόντων ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀντιστοίχως κατὰ 2 cm, 4 cm, 5cm. 1) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τομῶν καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2^2, 4^2, 5^2. 2) Ὁμοίως, ἡ αὐτὴ πρότασις, διὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν τριῶν τούτων κώνων καὶ 3) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν τριῶν τούτων κώνων καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις αὐτῶν.

647. Θεωροῦμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς $\upsilon = 12$ cm. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του διαιρεθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ;

648. Δίδεται κῶνος ἐκ περιστροφῆς καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθοῦν δύο ἐπίπεδοι τομαὶ παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του νὰ χωρισθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

649. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος.

650. Τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ τὴν διαγώνιόν του κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνειά τοῦ παραγομένου σχήματος.

651. Ἰσόπλευρος κῶνος ἔχει ὕψος $\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

652. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ παράγεται, ἐπὶ τὴν περίμετρον τοῦ κύκλου, ὃν γράφει τὸ κέντρον βάρος τοῦ τριγώνου τούτου.

653. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπὸ τὸ ἀπόστημά του.

654. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V κώνου ἐκ περιστροφῆς ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας του $E_{o\lambda}$ καὶ τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ λ.

655. Ὁμοίως ἐκ τοῦ $E_{o\lambda}$ καὶ τοῦ ὕψους υ.

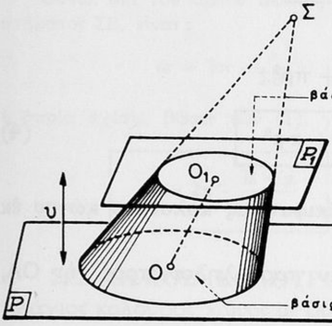
656. Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ὑποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἡ γωνία $B = \frac{\pi}{6}$. Τοῦτο στρέφεται περὶ τὴν ὑποτείνουσαν κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.

209. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ.— Κόλουρος κῶνος εἶναι τὸ Σύνολον, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι : τὰ σημεῖα τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας, τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ ὁδηγοῦ, τὰ σημεῖα τομῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ ἐπιπέδου παραλ-

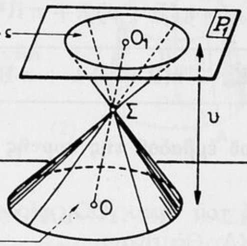
λήλου πρὸς τὸν ὁδηγόν, τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῆς τομῆς ταύτης καὶ τὰ σημεῖα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὰ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου.

Οἱ δύο κύκλοι (O) καὶ (O_1) καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κολούρου κώνου. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τοῦ κολούρου κώνου.

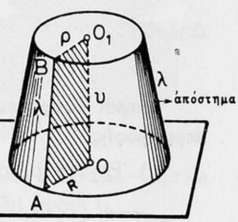
Ἐὰν αἱ βάσεις κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς χώνης τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὁ κόλουρος κῶνος καλεῖται **κόλουρος κῶνος τοῦ πρώτου εἴδους** (σχ. 182). Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν καλεῖται **κόλουρος κῶνος δευτέρου εἴδους** (σχ. 183).



Σχ. 182



Σχ. 183



Σχ. 184

Ἐὰν ἡ κωνικὴ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς, δηλαδὴ αἱ βάσεις εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὁ κόλουρος κῶνος ὀνομάζεται **κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς** (σχ. 184).

Ὁ κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς δύναται νὰ παραχθῇ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τραπέζιον OO_1BA, ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὸ ὕψος του OO_1 κατὰ γωνίαν 2π, ἂν τὸ ὕψος του OO_1 θεωρηθῇ σταθερὸν θέσει καὶ μεγέθει.

Τὸ μέρος τῆς γενετείρας $AB = \lambda$ καλεῖται **ἀπόστημα** ἢ **πλευρὰ** τοῦ κολούρου κώνου.

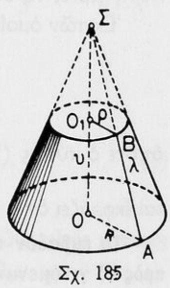
Αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου $OA = R$ καὶ $O_1B = \rho$ καλοῦνται **ἀκτῖνες** τοῦ κολούρου κώνου, **κάτω** καὶ **ἄνω** βάσεως.

210. ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΡΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ.—Ἔστω κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς μὲ βάσεις (O, R) καὶ (O_1, ρ), ὕψους υ καὶ ἀποστήματος λ (ἔνθα $R > \rho$).

Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὡς διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν δύο κώνων κορυφῆς Σ καὶ μὲ βάσεις ἀντιστοίχως τοὺς κύκλους (O, R) καὶ (O_1, ρ).

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΟΑ καὶ $ΣO_1B$ (σχ. 185), ἔχομεν: $\dfrac{ΣA}{R} = \dfrac{ΣB}{\rho} = \dfrac{ΣA - ΣB}{R - \rho} = \dfrac{\lambda}{R - \rho}$,

ἐξ ὧν: $\mathbf{ΣA} = \dfrac{\lambda R}{R - \rho}$ (1) καὶ $\mathbf{ΣB} = \dfrac{\lambda \rho}{R - \rho}$ (2)



Σχ. 185

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου θὰ εἶναι :

$$E = \pi R \cdot \Sigma A - \pi\rho \cdot \Sigma B = \pi R \cdot \frac{\lambda R}{R-\rho} - \pi\rho \cdot \frac{\lambda\rho}{R-\rho} = \pi\lambda \cdot \frac{R^2-\rho^2}{R-\rho} =$$

$$= \pi\lambda\,(R+\rho).$$

Ὥστε :

$$\boxed{\mathbf{E_{\text{κυρτῆς}} = \pi(R+\rho)\lambda}} \qquad (3)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας $E_{ολ}$ εἶναι :

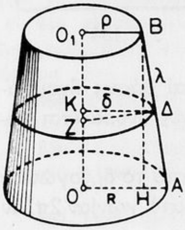
$$E_{ολ} = \pi(R+\rho)\,\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2.$$

Δηλαδή :

$$\boxed{\mathbf{E_{ολ} = \pi(R+\rho)\,\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2}} \qquad (4)$$

Ἕτεραι ἐκφράσεις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς.

α) Ἐκ τοῦ μέσου Κ τοῦ ὕψους OO_1 φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΑ, τὴν ΚΔ. Θὰ εἶναι :



Σχ. 186

$$K\Delta = \delta = \frac{R+\rho}{2}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{R + \rho = 2\delta}$$

καὶ ἡ σχέσις (3) γίνεται :

$$\boxed{\mathbf{E_{\text{κυρτῆς}} = 2\pi\,\delta \cdot \lambda}} \qquad (5)$$

Σημείωσις : Ὁ κύκλος (Κ, δ) λέγεται **μέση βάσις** τοῦ κολούρου κώνου (σχ. 186).

Ὁ τύπος (5) ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ μέσου κύκλου ἐπὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κολούρου κώνου.

β) Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, κειμένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ OO_1BA. Αὕτη τέμνει τὸ ὕψος OO_1 εἰς τὸ Ζ. Ἐπίσης ἄγομεν τὴν κάθετον ΒΗ ἐπὶ τὴν ΟΑ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΚΔΖ καὶ ΒΗΑ ἔχομεν :

$$\frac{Z\Delta}{\lambda} = \frac{\delta}{BH} = \frac{\delta}{\upsilon}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \mathbf{\delta\lambda = Z\Delta \cdot \upsilon}, \qquad (6)$$

ὁπότε ὁ τύπος (5) γίνεται :

$$\boxed{\mathbf{E_{\text{κυρτή}} = 2\pi \cdot Z\Delta \cdot \upsilon}} \qquad (7)$$

καὶ ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ κύκλου (Κ, ΔΖ) ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κολ. κώνου.

211. Ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς. Τὸ (Σχ. 187) δεικνύει τίνι τρόπῳ γίνεται τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ ἐκ περιστροφῆς κολούρου κώνου.

Ἔστω Σ ἡ τομὴ τῶν $OO_1 = υ$ καὶ $AB = λ$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΟΑ καὶ $ΣO_1B$ ἔχομεν:

$$\frac{ΣB}{ρ} = \frac{ΣA}{R} = \frac{ΣB+λ}{R}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \left.\begin{aligned} \mathbf{ΣB} &= \frac{\mathbf{λρ}}{\mathbf{R-ρ}} \\ \mathbf{ΣA} &= \mathbf{ΣB} + \mathbf{λ} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

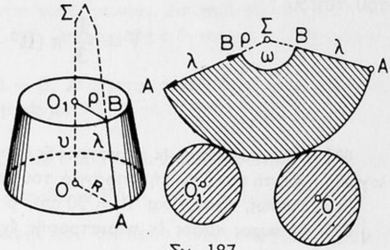
Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς γωνίας ω τοῦ τομέως τοῦ ἀναπτύγματος ἔχομεν ὑπ' ὄψιν τὴν (§ 75).

Οὕτω, διὰ τὸν κῶνον ἀκτῖνος ρ καὶ ἀποστήματος ΣΒ, εἶναι :

$$ω = 2π \cdot \frac{ρ}{ΣB}$$

ἡ ὁποία σχέσις, βάσει τῶν (1), γίνεται :

$$\boxed{\mathbf{ω = 2π \cdot \frac{R-ρ}{λ}}} \qquad (2)$$

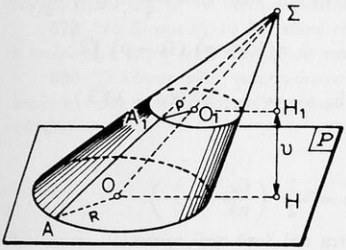


Σχ. 187

212. ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΚΩΝΟΥ ΜΕ ΒΑΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥΣ.

— Ἔστω πλάγιος κόλουρος κῶνος μὲ βάσεις κύκλους (O, R), $(O_1,ρ)$ καὶ ὕψους υ.

Ἐὰν Σ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἐξ ἧς προῆλθεν ὁ κόλουρος κῶνος, ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΣΟΗ, $ΣO_1H_1$ καὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΣΟΑ καὶ $ΣO_1A_1$, θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 188

$$\frac{ΣO_1}{ΣO} = \frac{ΣH_1}{ΣH} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{ρ}{R}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{ΣH}{R} = \frac{ΣH_1}{ρ} = \frac{ΣH - ΣH_1}{R-ρ} = \frac{υ}{R-ρ},$$

$$\text{ὅθεν :} \quad \mathbf{ΣH = \frac{υR}{R-ρ}} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{ΣH_1 = \frac{υρ}{R-ρ}}.$$

Καὶ ἂν V εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, V_1, V_2 οἱ ὄγκοι τῶν (Σ,O,R), $(Σ,O_1,ρ)$, τότε :

$$V_{κολ} = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}πR^2 \cdot ΣH - \frac{1}{3}πρ^2 \cdot ΣH_1 = \frac{1}{3}πR^2 \cdot \frac{υR}{R-ρ} - \frac{1}{3}πρ^2 \cdot \frac{υρ}{R-ρ} =$$

$$= \frac{1}{3}πυ \cdot \frac{R^3-ρ^3}{R-ρ} = \frac{1}{3}πυ\,(R^2+ρ^2+Rρ).$$

Ὥστε :

$$\boxed{\mathbf{V_{κολ.\ κώνου} = \frac{1}{3}π(R^2+ρ^2+Rρ)υ}} \qquad (1)$$

Ἂν ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι ἐκ περιστροφῆς, τότε ὁ ἄξων OO_1 εἶναι κάθετος πρὸς τὰς βάσεις τῶν κύκλων (O) καὶ (O_1) καὶ τὸ ὕψος $υ = OO_1$.

Ἡ σχέσις (1) ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου μὲ βάσεις κύκλους εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς ἔχει βάσιν τὴν κάτω βάσιν, ὁ ἄλλος τὴν ἄνω βάσιν καὶ ὁ τρίτος τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο βάσεων.

Σημ. Ἐὰν ὁ κόλουρος κῶνος εἶναι τοῦ β' εἴδους, τότε ὁ ὄγκος του δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + \rho^2 - R\rho)\upsilon.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

657. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει $R = 16$ cm, $\rho = 4$ cm καὶ $\upsilon = 20$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του καὶ ὁ ὄγκος.

658. Ὁμοίως, ὅταν εἶναι $R = 30$ cm, $\rho = 6$ cm καὶ $\lambda = 40$ cm.

659. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει $\rho = 10$ cm, $\lambda = 50$ cm καὶ γενέτειραν γωνίαν $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ποία ἡ ἐπιφάνειά του καὶ ὁ ὄγκος του ;

660. Ὁμοίως, ὅταν $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\upsilon = 12$ cm καὶ $R = 24$ cm.

661. Εἰς κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $\lambda = \sqrt{\upsilon^2 + (R-\rho)^2}$, 2) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}} = \pi(R+\rho)\sqrt{\upsilon^2 + (R-\rho)^2} = \pi\lambda\,(2R - \sqrt{\lambda^2 - \upsilon^2})$.

662. Ἂν ἡ γενέτειρα γωνία κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ἢ $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ἢ $\varphi = \frac{\pi}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ἀντιστοίχως ὅτι : 1) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}} = \pi(R+\rho)(R-\rho)\sqrt{2}$,

2) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}} = = \frac{2}{9}\pi\upsilon(6\rho\sqrt{3} + 3\upsilon)$, 3) $E_{\kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}} = \frac{1}{2}\pi\lambda(4\rho + \lambda\sqrt{3})$.

663. Ἐὰν $\varphi = \frac{\pi}{6}$, τότε νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1)\ R = \frac{1}{2}\left(\frac{E_\kappa}{\pi\lambda} + \frac{\lambda}{2}\right) \quad \text{καὶ } 2)\quad \rho = \frac{1}{2}\left(\frac{E_\kappa}{\pi\lambda} - \frac{\lambda}{2}\right).$$

664. Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς δίδεται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{1}{4}\pi\upsilon\left[(R+\rho)^2 + \frac{1}{3}(R-\rho)^2\right].$$

665. Αἱ διαστάσεις κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι R, ρ, υ. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως πρέπει νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεων;

666. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτήν, ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ;

667. Ἐπὶ τοῦ ἀποστήματος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς νὰ ὁρισθῇ σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε, ἂν ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, νὰ διαιρῆται ὁ ὄγκος του εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ;

668. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἰς κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς εἶναι $\lambda = R + \rho$, ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν 1) μεταξὺ υ καὶ τῶν R, ρ ; 2) μεταξὺ V καὶ τῶν E_κ, υ ;

669. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως R. Νὰ τμηθῇ οὗτος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.

670. Ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α στρέφεται κατὰ γωνίαν 2π περὶ ἄξονα xy τοῦ ἐπιπέδου του, κάθετον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Α. Ποῖος ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος ;

671. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ὁ ἄξων xy ἀπέχῃ τῆς ΒΓ ἀπόστασιν α.

672. Κανονικὸν ἡμιεξάγωνον στρέφεται κατὰ γωνίαν 2π περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΒ = 2α Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.

673. Τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α στρέφεται κατὰ γωνίαν 2π περὶ ἄξονα xy τοῦ ἐπιπέδου του κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Γ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου σχήματος.

674. Ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = α, ΑΔ = β. Στρέφεται τοῦτο κατὰ γωνίαν 2π περὶ εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου του, κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Γ. Ποῖος ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος ;

675. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος, ὅπερ παράγεται ὑπὸ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, στρεφομένου περὶ ἄξονα xAy παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ = 2α, ἂν γωνία ΒΔΑ = $\frac{\pi}{6}$.

676. Ὁ ὄγκος κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς τοῦ δευτέρου εἴδους παρέχεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

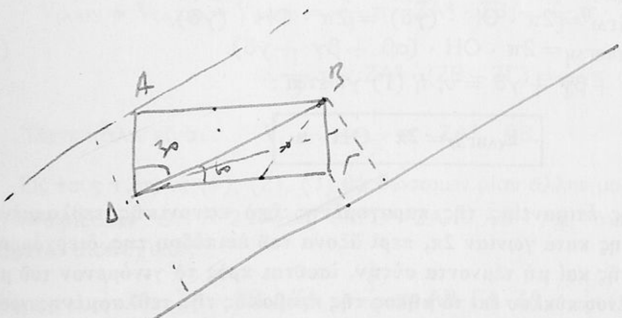
$$V = \frac{1}{3}\,\pi υ\,(R^2 + \rho^2 - R\rho).$$

677. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ παραλ/μου ΑΒΓΔ στρεφομένου διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ κατὰ γωνίαν 2π ;

678. Κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἶναι υ = 3 m, R = 4 m, ρ = 1 m. Νὰ διαιρεθῇ οὗτος εἰς δύο μέρη ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ὥστε τὸ προσκείμενον μέρος πρὸς τὴν μεγαλυτέραν βάσιν νὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ἄλλου μέρους.

679. Νὰ διαιρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις του.

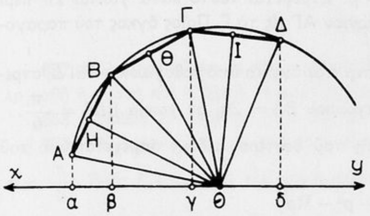
680. Ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων κολούρων κώνων ἐκ περιστροφῆς ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν των ἢ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.



ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

213. ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΣΑ ΥΠΟ ΚΑΝ. ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ, ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΗΣ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΗΣ.

Θεωροῦμεν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ κέντρου Ο καὶ μίαν εὐθεῖαν xΟy (ἄξονα) τοῦ ἐπιπέδου της, μὴ τέμνουσαν αὐτὴν (σχ. 189).



Σχ. 189

Ὁρισμός. Καλοῦμεν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ περὶ τὸν ἄξονα xOy, τὸ Σύνολον τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀκτῖνας τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τῆς δοθείσης καν. τεθλασμένης ἀπὸ τὸν δοθέντα ἄξονα καὶ κέντρα τοὺς πόδας τῶν καθέτων τούτων ἐπὶ τὸν ἄξονα.

Ἐμβαδόν. Ἡ καν. τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ ἔχει κέντρον τὸ κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ ἀκτῖνα $OA = R$. Ἔστωσαν α, β, γ, δ αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ τὸν ἄξονα xOy ἀντιστοίχως. Ἔστωσαν ἐπίσης ΟΗ, ΟΘ, ΟΙ αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς καν. τεθλ. γραμμῆς.

Θὰ εἶναι : $OH = O\Theta = OI$.

Κατὰ τὰ εἰς τὴν (§ 210) λεχθέντα, θὰ ἔχωμεν :

$$E_{(AB)} = 2\pi \cdot OH \cdot (\alpha\beta),$$
$$E_{(B\Gamma)} = 2\pi \cdot O\Theta \cdot (\beta\gamma) = 2\pi \cdot OH \cdot (\beta\gamma),$$
$$E_{(\Gamma\Delta)} = 2\pi \cdot OI \cdot (\gamma\delta) = 2\pi \cdot OH \cdot (\gamma\delta),$$

Ἄρα : $$E_{(AB\Gamma\Delta)} = 2\pi \cdot OH \cdot (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta). \quad (1)$$

Ἂν δὲ τεθῇ $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta = \upsilon$, ἡ (1) γίνεται :

$$\boxed{E_{(AB\Gamma\Delta)} = 2\pi \cdot OH \cdot \upsilon}$$

καὶ ἐκφράζει ὅτι :

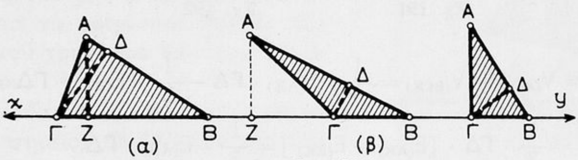
Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, στρεφομένης κατὰ γωνίαν 2π, περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου της, διερχόμενον δια τοῦ κέντρου αὐτῆς καὶ μὴ τέμνοντα αὐτήν, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς προβολῆς τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα.

214. ΟΓΚΟΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΥ ΥΠΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΥ ΠΕΡΙ ΑΞΟΝΑ.

Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, προτιθέμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου τούτου, ὅταν στρέφηται περὶ ἄξονα xy κατὰ γωνίαν 2π, διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς τοῦ τριγώνου, μὴ τέμνοντα αὐτὸ καὶ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου.

Διακρίνομεν τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

α) **Ὁ ἄξων περιστροφῆς συμπίπτει μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ.** Ἄγομεν τὰ ὕψη ΑΖ καὶ ΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Σημειοῦμεν δὲ τρεῖς περιπτώσεις διὰ τὸ σχῆμα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καθόσον εἶναι $\hat{\Gamma} < 90^0$, $\hat{\Gamma} > 90^0$, $\Gamma = 90^0$.



Σχ. 190

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἔχομεν τὸ (σχ. 190γ) καὶ ἄρα :

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi \cdot \Gamma A^2 \cdot \Gamma B. \tag{1}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ (σχ. 190α), θὰ ἔχωμεν :

$$V_{(AB\Gamma)} = V_{(A\Gamma Z)} + V_{(AZB)} = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot Z\Gamma + \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot ZB =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot (Z\Gamma + ZB) = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot \Gamma B.$$

Ἤτοι :

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot \Gamma B. \tag{2}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ (σχ. 190β), θὰ ἔχωμεν :

$$V_{(AB\Gamma)} = V_{(AZB)} - V_{(AZ\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot ZB - \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot Z\Gamma =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot (ZB - Z\Gamma) = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot \Gamma B.$$

Ὥστε πάλιν εἶναι :

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA^2 \cdot \Gamma B. \tag{3}$$

Εἰς τοὺς τύπους (1), (2), (3) θὰ δώσωμεν μίαν ἄλλην μορφήν.

Γνωρίζομεν ὅτι : $2\,(AB\Gamma) = \Gamma B \cdot ZA = AB \cdot \Gamma\Delta$, ὁπότε ὁ τύπος (3) γράφεται διαδοχικῶς :

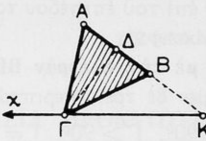
$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}\pi \cdot ZA \cdot \Gamma B \cdot ZA = \frac{1}{3}\pi \cdot AB \cdot \Gamma\Delta \cdot ZA = \frac{1}{3}(\pi \cdot ZA \cdot AB) \cdot \Gamma\Delta =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot E_{(AB)} \cdot \Gamma\Delta.$$

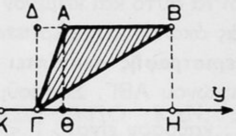
Ἤτοι :

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3} \cdot E_{(AB)} \cdot \Gamma\Delta. \tag{4}$$

β) **Ὁ ἄξων περιστροφῆς διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Γ** (σχ. 191).
Ἔστω ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ τέμνει τὸν ἄξονα περιστροφῆς εἰς τὸ σημεῖον Κ.



Σχ. 191



Σχ. 192

Θὰ ἔχωμεν :

$$V_{(ΑΒΓ)} = V_{(ΑΓΚ)} - V_{(ΒΓΚ)} = \frac{1}{3} \cdot E_{(ΑΚ)} \cdot ΓΔ - \frac{1}{3} \cdot E_{(ΒΚ)} \cdot ΓΔ =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot ΓΔ \cdot [E_{(ΑΚ)} - E_{(ΒΚ)}] = \frac{1}{3} \cdot E_{(ΑΒ)} \cdot ΓΔ.$$

Ὥστε πάλιν εἶναι :

$$V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3} \cdot E_{(ΑΒ)} \cdot ΓΔ. \qquad (5)$$

γ) **Ὁ ἄξων περιστροφῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ** (σχ. 192).
Ἄγομεν τὰς καθέτους ΑΘ, ΒΗ ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ τὸ ὕψος ΓΔ. Θὰ ἔχωμεν :

$$V_{(ΑΒΓ)} = V_{(ΑΓΘ)} + V_{(ΑΘΗΒ)} - V_{(ΓΒΗ)} =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot ΘΑ^2 \cdot ΓΘ + \pi \cdot ΘΑ^2 \cdot ΘΗ - \frac{1}{3} \pi \cdot ΗΒ^2 \cdot ΓΗ =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot ΓΔ^2 \cdot ΓΘ + \pi \cdot ΓΔ^2 \cdot ΘΗ - \frac{1}{3} \pi \cdot ΓΔ^2 \cdot ΓΗ =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot ΓΔ^2 \cdot (ΓΘ + 3 \cdot ΘΗ - ΓΗ) = \frac{1}{3} \pi \cdot ΓΔ^2 (ΓΘ + ΘΗ + 2 \cdot ΘΗ - ΓΗ) =$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot ΓΔ^2 \cdot (ΓΗ + 2 \cdot ΘΗ - ΓΗ) = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot ΓΔ^2 \cdot ΘΗ =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2\pi \cdot ΓΔ \cdot ΑΒ) \cdot ΓΔ = \frac{1}{3} \cdot E_{(ΑΒ)} \cdot ΓΔ.$$

Ὥστε, καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, εἶναι :

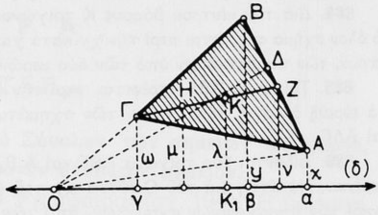
$$\boxed{V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3} \cdot E_{(ΑΒ)} \cdot ΓΔ} \qquad (6)$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, στρεφομένου περὶ ἄξονα κατὰ γωνίαν 2π, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του, μὴ τέμνοντα αὐτὸ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Γ, ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος τοῦ τριγώνου τούτου.

215. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ*.— Ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ ἑνὸς τριγώνου, στρεφομένου περὶ ἄξονα κατὰ γωνίαν 2π, κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ κέντρον βάρους Κ τοῦ τριγώνου τούτου.

Ἀπόδειξις: Ἔστω ΑΒΓ ἓν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα (δ), κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του καὶ μὴ τέμνοντα τὸ τρίγωνον. Μία ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου θὰ τέμνῃ τὸν ἄξονα τοῦτον.



Σχ. 193

Ἔστω ὅτι ἡ ΒΓ τέμνει τὸν ἄξονα (δ) εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἄγομεν τὴν ΟΑ, τὸ ὕψος ΟΔ καὶ παριστῶμεν διὰ τῶν x, y, ω τὰς ἀποστάσεις Αα, Ββ, Γγ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τὸν ἄξονα (δ).

Θὰ ἔχωμεν:

$$V_{(OAB)} = \frac{1}{3} \cdot O\Delta \cdot E_{(AB)} = \frac{1}{3} \cdot O\Delta \cdot \pi \cdot (x+y) \cdot AB = E_{(OAB)} \cdot \frac{2}{3}\pi(x+y)$$

καὶ ὁμοίως:
$$V_{(OA\Gamma)} = E_{(OA\Gamma)} \cdot \frac{2}{3}\pi(x+\omega),$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{2}{3}\pi \cdot [E_{(OAB)} \cdot (x+y) - E_{(OA\Gamma)} \cdot (x+\omega)]. \qquad (1)$$

Ἀλλά:
$$\frac{E_{(OAB)}}{OB} = \frac{E_{(OA\Gamma)}}{O\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{E_{(OAB)}}{y} = \frac{E_{(OA\Gamma)}}{\omega} = \frac{E_{(AB\Gamma)}}{y-\omega},$$

ἐξ ὧν:
$$E_{(OAB)} = E_{(AB\Gamma)} \cdot \frac{y}{y-\omega} \quad \text{καὶ} \quad E_{(OA\Gamma)} = E_{(AB\Gamma)} \cdot \frac{\omega}{y-\omega},$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{2}{3}\pi \cdot E_{(AB\Gamma)}\left[\frac{y(x+y)-\omega(x+\omega)}{\psi-\omega}\right] = E_{(AB\Gamma)} \cdot 2\pi \cdot \frac{\chi+\psi+\omega}{3}. \qquad (2)$$

Ἔστω Η τὸ μέσον τοῦ ΓΚ καὶ λ, μ, ν αἱ ἀποστάσεις τῶν Κ, Η, Ζ ἀπὸ τὸν ἄξονα (δ), ἔνθα Κ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Ζ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Θὰ εἶναι: $x+y=2\nu$, $\mu+\nu=2\lambda$, $\omega+\lambda=2\mu$, (διάμεσοι τραπεζίων), ἐξ ὧν: $x+y+\omega+\mu+\nu+\lambda=2\mu+2\nu+2\lambda$ ἢ $x+y+\omega=\mu+\nu+\lambda=2\lambda+\lambda=3\lambda$ καὶ ἡ (2) γίνεται:

$$\boxed{V_{(AB\Gamma)} = E_{(AB\Gamma)} \cdot 2\pi \cdot \lambda}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

681. Περὶ ποίαν πλευρὰν πρέπει νὰ στραφῇ τρίγωνον ΑΒΓ κατὰ γωνίαν 2π, ὥστε νὰ παραχθῇ ὁ μέγιστος ὄγκος;

* Ἕλλην Μαθηματικὸς τῆς Ἀλεξανδρινῆς ἐποχῆς.

682. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ του εὐθεῖα χy, μὴ τέμνουσα αὐτό, τοιαύτη ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, στρεφομένου περὶ τὴν χy, νὰ εἶναι μέγιστος;

683. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἓν σημεῖον Δ, τοιοῦτον ὥστε οἱ ὄγκοι τῶν σχημάτων, οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΑΔΓ, στρεφομένων περὶ ἄξονα xy τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, μὴ τέμνοντος αὐτό, νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

684. Διὰ τοῦ κέντρου βάρους Κ τριγώνου ΑΒΓ ἄγεται παράλληλος xy πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὸ ὅλον σχῆμα στρέφεται περὶ τὴν χy κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων, τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν δύο μερῶν, εἰς ἃ χωρίζεται τὸ τρίγωνον ὑπὸ τῆς xy.

685. Τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον του ΑΔ κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχημάτων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ;

686. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$ καὶ ἓν σημεῖον Ο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Π) κειμένων. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα xy τοῦ (Π), μὴ τέμνουσα τὰ τρίγωνα, τοιαύτη ὥστε οἱ ὄγκοι τῶν παραγομένων σχημάτων, ὑπὸ τῶν τριγώνων, στρεφομένων περὶ τὴν xy κατὰ γωνίαν 2π, νὰ ἔχουν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

Σ Φ Α Ι Ρ Α

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

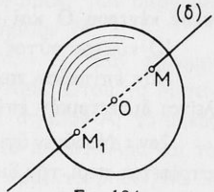
216. ΟΡΙΣΜΟΣ.— Σφαῖρα καλεῖται τὸ Σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ ἓν σταθερὸν σημεῖον.

Τὸ σταθερὸν σημεῖον O εἶναι τὸ **κέντρον** τῆς σφαίρας (σχ. 194). Ἡ ὡρισμένη ἀπόστασις εἶναι ἡ **ἀκτὶς** τῆς σφαίρας.

Ὁ συμβολισμός : σφαῖρα (O, R) παριστᾷ τὴν σφαῖραν κέντρου O καὶ ἀκτῖνος R.

Ἐπὶ μιᾶς τυχούσης εὐθείας (δ) διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου O μιᾶς σφαίρας, ὑπάρχουν δύο σημεῖα M καὶ M_1, καὶ μόνον δύο, τοιαῦτα ὥστε :

$$OM = OM_1 = R.$$



Σχ. 194

Τὸ τμῆμα MM_1 εἶναι ἡ **διάμετρος** τῆς σφαίρας.

Ἓν σημεῖον N ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** τῆς σφαίρας (O, R), ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $ON < R$, καὶ **ἐξωτερικὸν** αὐτῆς, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $OM > R$.

Οὕτω, τὰ στοιχεῖα O καὶ R μιᾶς σφαίρας διαμερίζουν τὰ σημεῖα N τοῦ χώρου εἰς τρία Σύνολα :

$ON < R$ ... ἐσωτερικὸν σφαίρας
$ON = R$ ... ἐπιφάνεια σφαίρας
$ON > R$ ... ἐξωτερικὸν σφαίρας,

ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου.

Ἡ σφαῖρα εἶναι κλειστὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία διαχωρίζει τὸν χῶρον εἰς ἐσωτερικὸν καὶ ἐξωτερικὸν αὐτῆς.

Δύο σφαῖραι τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος εἶναι **ἴσαι.** Διότι ἡ σύμπτωσις τῶν κέντρων των συνεπάγεται τὴν σύμπτωσιν τῶν σημείων αὐτῆς.

Ἐὰν σημεῖον A εἶναι ἐσωτερικὸν σφαίρας (O, R), καὶ ἕτερον σημεῖον B εἶναι ἐξωτερικὸν αὐτῆς, τότε ἡ AB τέμνῃ τὴν σφαῖραν εἰς ἕν, καὶ μόνον ἕν, σημεῖον αὐτῆς.

Κάθε σφαῖρα (O) ἔχει μόνον ἕνα κέντρον. Διότι, ἐὰν εἶχε καὶ δεύτερον κέντρον O_1, τότε ἡ διάμετρος αὐτῆς ἡ περιέχουσα τὰ δύο κέντρα θὰ εἶχε δύο μέσα, ὅπερ ἄτοπον.

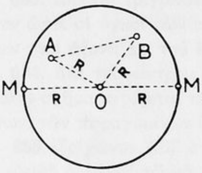
Δύο τυχοῦσαι διάμετροι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι **ἴσαι,** ὡς ἀθροίσματα ἴσων ἀκτίνων.

Ἂν δύο σημεῖα A καὶ B εἶναι τυχόντα σημεῖα τῆς αὐτῆς σφαίρας (O, R), τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB καλεῖται **χορδὴ** τῆς σφαίρας.

Ἡ διάμετρος σφαίρας εἶναι ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ αὐτῆς :

Πράγματι, ἐὰν MOM_1 εἶναι μία διάμετρος σφαίρας (O, R), καὶ AB μία χορδὴ αὐτῆς (σχ. 195), τότε ἐκ τοῦ τριγώνου OAB θὰ ἔχωμεν :

$$OA + OB > AB \quad \text{ἢ} \quad OM + OM_1 > AB \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{MM_1 > AB.}$$



Σχ. 195

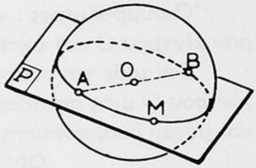
217. ΤΟΜΗ ΣΦΑΙΡΑΣ ΥΠΟ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΑΥΤΗΣ.

1ον : Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς σφαίρας κέντρου O καὶ ἀκτῖνος R, τὰ κείμενα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) (σχ. 196), τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου O, ἀπέχουν ἀπόστασιν R ἀπὸ τὸ O, καὶ **ἀντιστρόφως.** Ἄρα :

Πᾶν ἐπίπεδον περιέχον τὸ κέντρον σφαίρας (O, R), τέμνει αὐτὴν κατὰ κύκλον κέντρου O καὶ ἀκτῖνος R.

Ὁ κύκλος οὗτος εἶναι **μέγιστος** κύκλος.

Πᾶν ἐπίπεδον περιέχον τὸ κέντρον σφαίρας καλεῖται **διαμετρικὸν** ἐπίπεδον αὐτῆς.



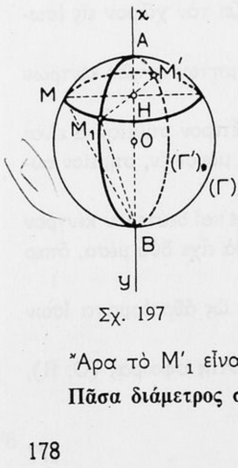
Σχ. 196

2ον : Νοοῦμεν ὅτι ὁ κύκλος διαμέτρου AB (σχ. 196) στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ταύτην. Πᾶν σημεῖον M τοῦ κύκλου τούτου, ἀπέχον πάντοτε ἀπόστασιν R ἀπὸ τὸ κέντρον O, κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας (O, R), καὶ **ἀντιστρόφως**, πᾶν σημεῖον M τῆς σφαίρας ἀνήκει εἰς τὸν μέγιστον κύκλον αὐτῆς, ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου AB καὶ τοῦ σημείου τούτου M.

218. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΜΙΑΣ ΣΦΑΙΡΑΣ. — 1ον : Κέντρον συμμετρίας.

Εἰς τὴν (§ 216) εἴδομεν ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα (δ) διέρχηται ἀπὸ τὸ κέντρον O μιᾶς σφαίρας (O, R), ὑπάρχουν δύο σημεῖα M καὶ M_1, καὶ μόνον δύο, τοιαῦτα ὥστε : $\quad OM = OM_1 = R.$ Ἄρα :

Τὸ κέντρον σφαίρας εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῆς.



Σχ. 197

2ον : Ἄξων συμμετρίας. Ἔστω M ἓν σημεῖον τοῦ κύκλου (Γ) καὶ M_1 ἡ νέα θέσις αὐτοῦ, ὅταν ὁ κύκλος (Γ) λάβῃ τὴν θέσιν (Γ'), στρεφόμενος περὶ τὴν εὐθεῖαν xOy (σχ. 197). Τὰ τρίγωνα MAB καὶ M_1AB εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ M καὶ ἴσα, καὶ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν M καὶ M_1 ἐπὶ τὴν AB τέμνουν αὐτὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον H. Ἄρα $HM = HM_1$. Ἄρα τὸ σημεῖον M γράφει κύκλον κέντρου H καὶ ἀκτῖνος HM. Ἡ AB εἶναι ἄξων τοῦ κύκλου τούτου. Εἰς πᾶν σημεῖον M_1 τοῦ κύκλου τούτου ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον M'_1, συμμετρικὸν τοῦ M_1 ὡς πρὸς τὸ H.

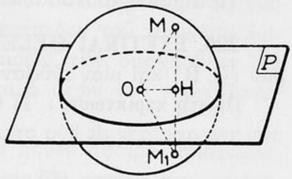
Ἄρα τὸ M'_1 εἶναι συμμετρικὸν τοῦ M_1 ὡς πρὸς ἄξονα AB. Ὥστε :

Πᾶσα διάμετρος σφαίρας εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

3ον : Ἐπίπεδον συμμετρίας : Ἔστω (P) διαμετρικὸν ἐπίπεδον σφαίρας (O, R) (σχ. 198). Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας, καὶ M_1 τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον (P), θὰ εἶναι :

$$OM_1 = OM = R,$$

ἄρα τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας (O). Κατ' ἀκολουθίαν :

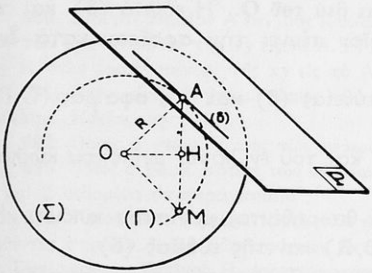


Σχ. 198

Πᾶν διαμετρικὸν ἐπίπεδον σφαίρας εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας αὐτῆς.

219. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΕΙΣ ΣΗΜΕΙΟΝ ΣΦΑΙΡΑΣ. — Θεωροῦμεν σφαῖραν (O, R) καὶ ἓν σημεῖον A ἐπ' αὐτῆς. Ἔστω (Γ) εἷς τῶν ἀπείρων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ A. Ἐπὶ τοῦ κύκλου τούτου θεωροῦμεν ἓν σημεῖον M.

Τὸ τρίγωνον OAM εἶναι ἰσοσκελές, διότι OA = OM = R. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάμεσον OH αὐτοῦ, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AM. Ὅταν τὸ M τείνῃ πρὸς τὸ σταθερὸν σημεῖον A, τὸ μῆκος τοῦ AM τείνει πρὸς τὸ μηδέν. Ἄρα καὶ τὸ μῆκος τοῦ AH τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ δὲ σημεῖον H τείνει πρὸς τὸ A.



Σχ. 199

Εἰς τὸ A ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην (δ) τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου, ἡ ὁποία θὰ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα OA.

Θεωροῦμεν ὅλους τοὺς μεγίστους κύκλους τῆς σφαίρας τοὺς διερχομένους διὰ τοῦ A καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς ἕκαστον τούτων εἰς τὸ σημεῖον A. Πᾶσαι αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται θὰ εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν OA εἰς τὸ σημεῖον A. Ἄρα θὰ κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου (P), καθέτου πρὸς τὴν OA εἰς τὸ A.

Ἀντιστρόφως : Πᾶσα εὐθεῖα (δ) διερχομένη διὰ τοῦ A καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ (P), καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OA εἰς τὸ A, εἶναι ἐφαπτομένη ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ σημείου O καὶ τῆς εὐθείας (δ). Ἄρα :

Τὸ Σύνολον τῶν ἐφαπτομένων εὐθειῶν εἰς ἓν σημεῖον A μιᾶς σφαίρας εἶναι ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν, τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OA τῆς σφαίρας εἰς τὸ A.

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἐξ ὁρισμοῦ, καλεῖται **ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** τῆς σφαίρας (O, R).

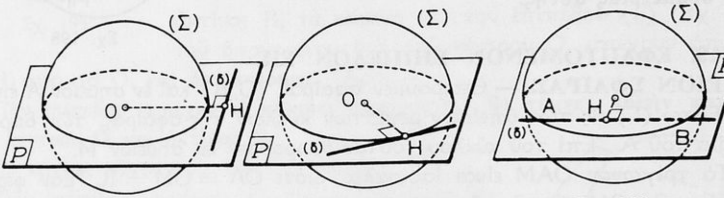
Ἰδιότητες τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου. Διὰ πᾶν σημεῖον M′, διάφορον τοῦ A, τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (P) εἰς τὸ A τῆς σφαίρας (σχ. 199), εἶναι OM′ > OA = R. Ἄρα τὸ σημεῖον M′ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἄρα :

Τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον μιᾶς σφαίρας ἔχει μετ' αὐτῆς ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται **σημεῖον ἐπαφῆς** τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου.

220. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑΣ. — Θεωροῦμεν σφαῖραν (O, R) καὶ μίαν εὐθεῖαν (δ).

Πρώτη περίπτωσις : Ἡ (δ) διέρχεται διὰ τοῦ O. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ (δ) τέμνει τὴν σφαῖραν εἰς δύο σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον O αὐτῆς.



Σχ. 200 Σχ. 201 Σχ. 202

Δευτέρα περίπτωσις : Ἡ (δ) δὲν διέρχεται διὰ τοῦ O. Ἡ εὐθεῖα (δ) καὶ τὸ σημεῖον O ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον (P), τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα μέγιστον κύκλον.

Τὰ κοινὰ σημεῖα, ἐὰν ὑπάρχουν, τῆς εὐθείας (δ) καὶ τῆς σφαίρας (O,R) θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου (P).

Θὰ εἶναι, λοιπόν, κοινὰ τῆς εὐθείας (δ) καὶ τοῦ ἐν λόγῳ μεγίστου κύκλου (σχ. 200 – 201 – 202).

Ἀντιστρόφως : Πᾶν κοινὸν σημεῖον τοῦ θεωρηθέντος μεγίστου κύκλου καὶ τῆς εὐθείας (δ) εἶναι κοινὸν τῆς σφαίρας (O, R) καὶ τῆς εὐθείας (δ).

Ἀναγόμεθα οὕτως εἰς τὸ γνωστὸν πρόβλημα τῆς γεωμετρίας τοῦ ἐπιπέδου :

Δοθέντος κύκλου (O,R) ἐπὶ ἐπιπέδου (P) καὶ τῆς εὐθείας (δ), τοιαύτης ὥστε ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τὸ O νὰ εἶναι d, ποία εἶναι ἡ θέσις τῆς (δ) ὡς πρὸς τὸν κύκλον O, κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς d ;

Κατ' ἀκολουθίαν :

Ἐὰν $\mathbf{d > R}$, ἡ (δ) κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (O,R). Ἄρα ἡ (δ) κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (O,R).

Ἐὰν $\mathbf{d = R}$, ἡ (δ) ἐφάπτεται τοῦ κύκλου (O,R). Ἄρα ἡ (δ) ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (O,R).

Ἐὰν $\mathbf{d < R}$, ἡ (δ) τέμνει τὸν κύκλον (O,R). Ἄρα ἡ (δ) τέμνει τὴν σφαῖραν (O,R) εἰς δύο σημεῖα.

221. ΒΑΣΙΚΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ ΤΗΝ ΣΦΑΙΡΑΝ.— Εἶναι προφανὲς ὅτι : **Μία σφαῖρα εἶναι ὡρισμένη, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον της καὶ τὴν ἀκτῖνα αὐτῆς.**

Μία σφαῖρα εἶναι ὡρισμένη καὶ ὑπὸ τὰς ἀκολούθους εὐκολοαποδείκτους γεωμετρικὰς συνθήκας.

1ον : Δοθέντος σημείου Α, πᾶν σημεῖον Ο τοῦ χώρου εἶναι κέντρον σφαίρας, διερχομένης διὰ τοῦ Α.

2ον : Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β, εἶναι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΒ.

3ον : Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διὰ τριῶν σημείων Α,Β,Γ, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, εἶναι ὁ ἄξων τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

4ον : Δοθέντος τετραέδρου ΑΒΓΔ ὑπάρχει μία μόνον σφαῖρα, διερχομένη διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τετραέδρου τούτου (**περιγεγραμμένη σφαῖρα** περὶ τετράεδρον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

687. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ σταθερόν, θέσει καὶ μεγέθει, φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ;

688. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ), εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτοῦ ;

689. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων δύο ἐπιπέδων (Ρ) καὶ (P_1) ;

690. Δίδεται σημεῖον Α ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy. 1) Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς xy εἰς τὸ Α. 2) Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, τῶν ἐφαπτομένων τῆς xy εἰς τὸ Α ;

691. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης εὐθείας xy ;

692. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν δοθείσης σφαίρας (Ο,R) ;

693. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα $MA^2+MB^2 = k^2$, ἔνθα Α καὶ Β δεδομένα σταθερὰ σημεῖα ;

694. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων: 1) τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Α. 2) Τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, διερχομένων διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α,Β· 3) Τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένων δοθέντος ἐπιπέδου (Π). 4) Τῶν σφαιρῶν ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένων δύο παραλλήλων εὐθειῶν (δ) καὶ (δ_1) ;

695. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κύκλος (ω, ρ) καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ, ὁρίζουν μίαν σφαῖραν.

696. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι δύο κύκλοι (ω,ρ) καὶ (ω_1,ρ_1), μὴ κείμενοι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἔχοντες δύο κοινὰ σημεῖα Α,Β, ὁρίζουν μίαν σφαῖραν.

697. Δύο κύκλοι (ω,ρ) καὶ (ω_1,ρ_1), μὴ κείμενοι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁρίζουν μίαν σφαῖραν.

698. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν τετραέδρου (ἐγγεγραμμένη ἢ παραγγεγραμμέναι).

699. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰς ὁποῖα ἰσχύουν αἱ ἰσότητες :

1) $MA : MB = \mu : \nu$, 2) $\mu \cdot MA^2 \pm \nu \cdot MB^2 = k^2$.

700. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσα κανονικὴ πυραμὶς εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν.

701. Πᾶν ὀρθογώνιον παραλ/δον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν.

702. Πᾶσα κόλουρος κανονικὴ πυραμὶς εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν.

703. Ὑπάρχουν σφαῖραι ἐφαπτόμεναι τῶν ἀκμῶν κανονικῆς πυραμίδος ;

704. Συναρτήσει τῆς ἀκμῆς α κύβου, νὰ ὑπολογισθῇ 1) ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, 2) τῆς ἐγγεγραμμένης καὶ 3) τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ κύβου.

705. Πῶς συνδέονται αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, περιγεγραμμένης, ἐγγεγραμμένης καὶ ἐφαπτομένης τῶν ἓξ ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α ;

706. Ποῖος ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἰσότης : $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = k^2$, ἔνθα Α,Β,Γ αἱ κορυφαὶ σταθεροῦ τριγώνου ΑΒΓ ;

707. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν μία σφαῖρα ἐφάπτεται τῶν ἓξ ἀκμῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ, τότε θὰ εἶναι :
$$AB + \Gamma\Delta = A\Gamma + B\Delta = A\Delta + B\Gamma.$$

708. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἀκτῖνος R, διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων Α,Β,Γ μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας.

709. Νὰ γραφῇ σφαῖρα, διερχομένη διὰ τριῶν δεδομένων σημείων Α,Β,Γ καὶ ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ).

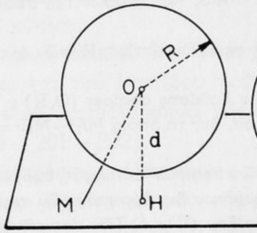
710. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἀκτῖνος R, διερχομένη διὰ δύο δεδομένων σημείων Α,Β καὶ ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ).

711. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1), μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ δύο σημεῖα Α καὶ A_1 ἐπ' αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει μία, καὶ μόνον μία, σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν (δ) καὶ (δ_1) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ A_1.

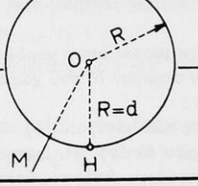
712. Μεταβλητὴ σφαῖρα διέρχεται διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφάπτεται δοθέντος ἐπιπέδου (Ρ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

222. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΣΦΑΙΡΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.— Θεωροῦμεν σφαῖραν (Ο, R) καὶ ἓν ἐπίπεδον (Ρ), τοιοῦτον ὥστε ἡ ἀπόστασις ΟΗ τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο νὰ εἶναι d.

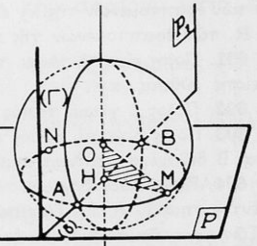
1ον : Ἐὰν $d > R$ (σχ. 203), τὸ σημεῖον Η κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (Ο, R).



Σχ. 203



Σχ. 204



Σχ. 205

Διὰ πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) ἔχομεν : $OM \geqslant OH$.

Πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) εἶναι, λοιπόν, ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς σφαίρας : **Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) λέγεται ἐξωτερικὸν τῆς σφαίρας.**

Ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι ἐξωτερικὸν τῆς σφαίρας (Ο, R), τότε $OH > R$ ἢ $d > R$.

2ον : Ἐὰν $d = R$, τὸ ἐπίπεδον (Ρ) ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (Ο, R). Τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ ἡ σφαῖρα ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ Η (σχ. 204).

3ον : Ἐὰν $d < R$, ἓν μεταβλητὸν ἐπίπεδον (P_1), διερχόμενον διὰ τῆς ΟΗ, τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα μέγιστον κύκλον (Γ) καὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) κατὰ μίαν εὐθεῖαν (δ), (σχ. 205).

Ἐπειδὴ $OH < R$, ἡ εὐθεῖα (δ) καὶ ὁ κύκλος (Γ) τέμνονται. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα τῆς τομῆς των. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὰ Α καὶ Β ἀνήκουν εἰς τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ εἰς τὴν σφαῖραν (Ο, R).

Κατ' ἀκολουθίαν, **ἐὰν $d < R$, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον (P) ἔχουν κοινὰ σημεῖα.** Δηλαδὴ τέμνονται.

Ἔστω M τυχὸν σημεῖον, κοινὸν τῆς σφαίρας (O, R) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P). Θὰ εἶναι:

$HM^2 = OM^2 - OH^2 = R^2 - d^2$, ἐξ οὗ: $\mathbf{HM = \sqrt{R^2 - d^2}} =$ ὡρισμένον.

Ὅθεν: **Πᾶν κοινὸν σημεῖον M τῆς σφαίρας (O,R) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) κεῖται ἐπὶ κύκλου κέντρου H καὶ ἀκτῖνος $\mathbf{HM = \sqrt{R^2 - d^2}}$.**

Ἀντιστρόφως. Πᾶν σημεῖον N τοῦ κύκλου (H, HM) εἶναι κοινὸν τῆς σφαίρας (O, R) καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P), καθόσον ὁ κύκλος (H, HM) κεῖται ἐπὶ τοῦ (P) καὶ ὅτι:

$ON^2 = OH^2 + HN^2 = d^2 + HM^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2$, ἐξ οὗ: $\mathbf{ON = R}$,

δηλαδὴ τὸ N κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας (O, R).

Ὅθεν: **Ἐὰν $d < R$, ἡ σφαῖρα (O,R) καὶ τὸ ἐπίπεδον (P) τέμνονται κατὰ κύκλον.**

Ἐὰν τὸ (P) διέρχηται διὰ τοῦ O, τότε $d = 0$, καὶ τὸ ἐπίπεδον (P) εἶναι διαμετρικὸν τῆς σφαίρας, καὶ ἄρα $\mathbf{HM = R}$.

Ἡ τομή, τότε, εἶναι **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας.

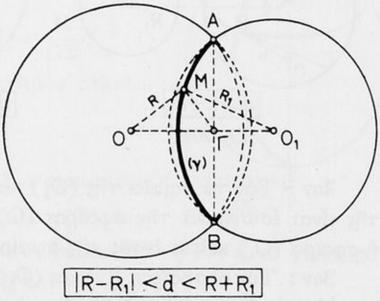
Ἐὰν $d \neq 0$, ὁ κοινὸς κύκλος τοῦ (P) καὶ τῆς σφαίρας (O, R) καλεῖται **μικρὸς κύκλος** τῆς σφαίρας.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι: **Ἐαν κύκλος ἔχῃ τρία κοινὰ σημεῖα μετὰ μιᾶς σφαίρας, θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας ταύτης**, καὶ ὅτι:

Ἡ σφαῖρα εἶναι μία ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἐπιπέδους καμπύλας (κύκλους).

223. ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ. — Ἔστωσαν δύο διακεκριμένα σφαῖραι (O) καὶ (O_1) καὶ M ἓν κοινὸν σημεῖον αὐτῶν. Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ M δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου OO_1 τῶν σφαιρῶν τούτων. Τὸ ἐπίπεδον OMO_1 τέμνει τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο μεγίστους κύκλους, τεμνομένους εἰς τὸ M.

Τοῦ τριγώνου OMO_1 γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς $OO_1 = \delta$, $OM = R$ καὶ $O_1M = R_1$. Ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος MΓ αὐτοῦ, τότε τὸ σημεῖον Γ εἶναι ὡρισμένον ἐπὶ τῆς διακέντρου OO_1 καὶ τὸ ὕψος ΓM εἶναι ὡρισμένον, ὑπολογιζόμενον συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου OMO_1, βάσει τοῦ τύπου τοῦ Ἥρωνος. Οὕτω, τὸ M ἀπέχει ὡρισμένην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ ὡρισμένον σημεῖον Γ τῆς διακέντρου OO_1. Ἄρα θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου (Γ,ΓM). Κατ' ἀκολουθίαν:



$\boxed{|R - R_1| < d < R + R_1}$

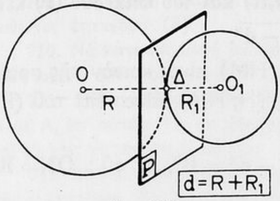
Σχ. 206

Ἡ τομὴ δύο σφαιρῶν τεμνομένων εἶναι κύκλος, ἔχων ὡς ἄξονα τὴν διάκεντρον τῶν σφαιρῶν τούτων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι :

α΄) Ὑπάρχουν σημεῖα τῆς σφαίρας (O_1) ἐσωτερικὰ τῆς (O) καὶ σημεῖα τῆς (O) ἐσωτερικὰ τῆς (O_1).

β΄) Ἐὰν δύο σφαῖραι (O) καὶ (O_1) ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Δ, τότε τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου OO_1 τῶν σφαιρῶν τούτων.



$d = R + R_1$

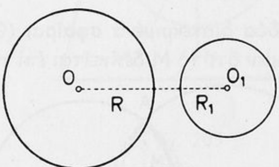
Σχ. 207

Διότι, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν αἱ σφαῖραι θὰ εἶχον ἄπειρα κοινὰ σημεῖα [τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (γ)], κατὰ τὸν ὁποῖον, συμφώνως πρὸς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, **τέμνονται.**

Δύο σφαῖραι ἔχουσαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὀνομάζονται **ἐφαπτόμεναι,** καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον καλεῖται **σημεῖον ἐπαφῆς** αὐτῶν.

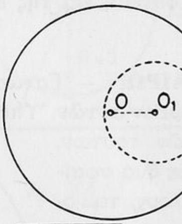
γ΄) Ἂν δύο σφαῖραι (O) καὶ (O_1) ἐφάπτωνται κατὰ τὸ σημεῖον Δ, τότε τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς (O) εἰς τὸ Δ εἶναι καὶ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς (O_1) εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο Δ, καὶ ἂν δύο σφαῖραι (O) καὶ (O_1) ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς ἓν κοινὸν σημεῖον Δ αὐτῶν, τότε αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἀλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον τοῦτο.

224. ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ. — 1ον. Ἐὰν τὰ σημεῖα μιᾶς σφαίρας (O_1) καὶ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτῆς εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα μιᾶς ἄλλης σφαίρας (O), τότε λέγομεν ὅτι αἱ σφαῖραι (O) καὶ (O_1) **κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων** (σχ. 208).



$d > R + R_1$

Σχ. 208



$d < R - R_1$

Σχ. 209

$d = R + R_1$

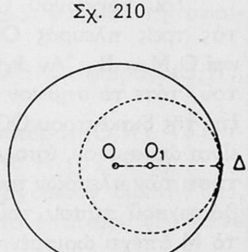
Σχ. 210

2ον : Ἐὰν τὰ σημεῖα τῆς (O_1) καὶ τὰ ἐσωτερικὰ αὐτῆς εἶναι ἐσωτερικὰ τῆς σφαίρας (O), τότε λέγομεν ὅτι ἡ σφαῖρα (O_1) **κεῖται ἐντὸς** τῆς σφαίρας (O) (σχ. 209).

3ον : Ἐὰν αἱ σφαῖραι (O) καὶ (O_1) ἐφάπτωνται, τότε :

Ἂν τὰ κέντρα των κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ κοινοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι αἱ σφαῖραι **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς** εἰς τὸ Δ (σχ. 210).

Ἂν τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν (O) καὶ (O_1) κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Δ, τότε λέγομεν ὅτι αἱ σφαῖραι αὗται **ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς** (σχ. 211).



$d = R - R_1$

Σχ. 211

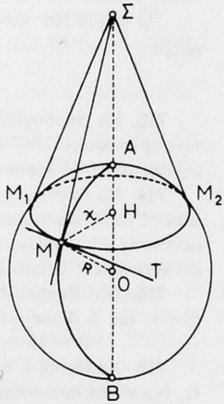
Ἐὰν d εἶναι τὸ μῆκος τῆς διακέντρου OO_1 δύο σφαιρῶν (O, R) καὶ (O_1, R_1), τότε ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις (ἀκριβῶς, ὅπως καὶ αἱ ἀντίστοιχοι προτάσεις τῆς ἐπιπέδου Γεωμετρίας, αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν θέσιν δύο κύκλων), δηλαδή :

$d > R + R_1$	$\Longleftrightarrow$	Σφαῖραι ἐκτὸς ἀλλήλων
$d = R + R_1$	$\Longleftrightarrow$	» ἐφαπτόμεναι ἐξωτερικῶς
$\mid R - R_1 \mid < d < R + R_1$	$\Longleftrightarrow$	» τεμνόμεναι
$d = \mid R - R_1 \mid$	$\Longleftrightarrow$	» ἐφαπτόμεναι ἐσωτερικῶς
$d < \mid R - R_1 \mid$	$\Longleftrightarrow$	» ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Δύο σφαῖραι τοῦ αὐτοῦ κέντρου λέγονται **ὁμόκεντροι.**

Αἱ προτάσεις τῆς Ἐπιπέδου Γεωμ. αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἀπόστασιν δύο κύκλων (O) καὶ (O_1), ἰσχύουν καὶ διὰ δύο σφαίρας. Ὁμοία ἀπόδειξις.

225. ΚΩΝΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΝ.— Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἐφαπτομένων τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου Σ, ἐκτὸς σφαίρας (O,R) κειμένου, πρὸς τὴν σφαῖραν ταύτην, εἶναι κῶνος ἐκ περιστροφῆς, ἔχων κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ.



Σχ. 212

Ἀνάλυσις : Ἔστω σφαῖραι (O, R) καὶ σημεῖον Σ σταθερὸν ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΣΟ. Τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον. Τούτου ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΜ. Τὸ τρίγωνον ΟΜΣ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Μ. Ἐκ τοῦ Μ ἄγομεν τὴν κάθετον ΜΗ πρὸς τὴν ΟΣ. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΜΣ (σχ. 212), ἔχομεν :

$$OM^2 = O\Sigma \cdot OH \text{ ἢ } R^2 = O\Sigma \cdot OH, \text{ ἐξ οὗ : } \mathbf{OH = \frac{R}{O\Sigma}}, \quad (1)$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὸ Η εἶναι σταθερὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΟΣ.

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΜΣ ἔχομεν :

$$x^2 = HM^2 = HO \cdot H\Sigma, \text{ ἐξ οὗ : } x = \sqrt{HO \cdot H\Sigma} = \text{ὡρισμένον.}$$

Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ κύκλου τῆς σφαίρας (O), κέντρου Η καὶ ἀκτῖνος $x = \sqrt{OH \cdot H\Sigma}$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ΣΜ εἶναι γενέτειρα κώνου, κορυφῆς Σ μὲ ὁδηγὸν τὸν κύκλον (H, x).

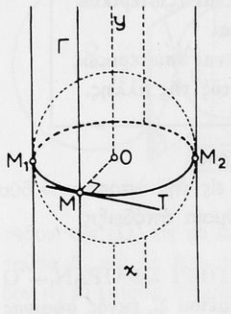
Ἀντιστρόφως. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (H,x). Ἐπειδὴ εἶναι $x^2 = HO \cdot H\Sigma$, τὸ τρίγωνον ΣΜΟ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Μ. Ἄρα ἡ $OM \perp \Sigma M$. Τὸ Μ καὶ ἡ ΣΟ ὁρίζουν ἐπίπεδον, τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, διερχόμενον διὰ τοῦ Μ. Ἄρα ἡ ΣΜ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΜ, εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ. Ἄρα ἡ ΣΜ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον Μ.

Ἡ ἀνωτέρω κωνικὴ ἐπιφάνεια καλεῖται **περιγεγραμμένη** περὶ τὴν σφαῖραν (O,R), ἡ δὲ σφαῖρα **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὴν ἐν λόγῳ κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

Ὁ κύκλος (H,x) καλεῖται **κύκλος ἐπαφῆς** τῆς σφαίρας καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

226. ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΝ.

Θεωροῦμεν σφαῖραν (O,R) καὶ ἕνα μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Θεωροῦμεν ἐπίσης τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν (Γ) τῶν παραλλήλων πρὸς τὸν ἄξονα Oy τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου. Τὸ Σύνολον τῶν εὐθειῶν (Γ) εἶναι, ὡς γνωστόν, κυλινδρικὴ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια, μὲ ὁδηγὸν τὸν μέγιστον τοῦτον κύκλον.



Σχ. 213

Ἂν εἰς τυχὸν σημεῖον M τοῦ μεγίστου κύκλου (O,OM) ἀχθῇ ἐφαπτομένη MΓ, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τούτου, τότε ἡ MT θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν γενέτειραν MΓ, τὸ δὲ ἐπίπεδον TMΓ θὰ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας (O,R) εἰς τὸ σημεῖον M καὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῆς γενετείρας MΓ αὐτῆς.

Ἡ ἀνωτέρω κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια θὰ λέγεται **περιγεγραμμένη** περὶ τὴν σφαῖραν (O, R), ἡ δὲ σφαῖρα **ἐγγεγραμμένη** εἰς τὴν κυλινδρικὴν ταύτην ἐπιφάνειαν.

Ὁ μέγιστος κύκλος (O) καλεῖται **κύκλος ἐπαφῆς** τῶν δύο τούτων ἐπιφανειῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

713. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν MT εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (H,x), (σχ. 212), τότε τὸ ἐπίπεδον ΣMT ἐφάπτεται τοῦ κώνου κατὰ τὴν γενέτειραν ΣM καὶ τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο M (**ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** σφαίρας καὶ κωνικῆς ἐπιφανείας).

714. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν MT εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ μεγίστου κύκλου (O,OM) εἰς τὸ σημεῖον M καὶ ἡ γενέτειρα MΓ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (σχ. 213) ὁρίζουν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (O,R) καὶ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας (**ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον** σφαίρας καὶ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας).

715. Δύο σφαῖραι ἔχουν ἀκτῖνας $R = 5$ cm καὶ $R_1 = 3$ cm. Ποῖαι εἶναι αἱ σχετικαὶ θέσεις αὐτῶν, ἐὰν ἡ διάκεντρός των εἶναι :

$d = 15$ cm, $d = 8$ cm, $d = 4$ cm, $d = 2$ cm, $d = 1$ cm ;

716. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχετικὴ θέσις δύο σφαιρῶν, ὅταν ἡ διάκεντρος d καὶ αἱ ἀκτῖνες R καὶ R_1 ἔχουν τὰς ἀκολούθους τιμὰς εἰς ἑκατοστόμετρα.

d	1	7	3	6	5
R	5	5	3	2	12
R_1	3	2	3	3	7

717. Αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν τεμνομένων εἶναι $R = 3\sqrt{13}$ cm, $R_1 = 2\sqrt{13}$ cm, καὶ ἡ διάκεντρος $d = 13$ cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς αὐτῶν.

718. Δίδονται δύο σημεῖα A,B σταθερὰ ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M τοῦ (Π), ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ τμῆμα AB φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

Ὁμοίως, ἵνα $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Ὁμοίως, ἵνα $MA : MB = (\mu : \nu) \neq 1$.

719. Ἀπὸ τὰ σημεῖα μιᾶς σφαίρας(O, R) ἄγομεν εὐθύγραμμα τμήματα μήκους λ, παράλληλα πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἄκρων αὐτῶν.

720. Τὸ κέντρον O μιᾶς σφαίρας κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου μίαν δίεδρον γωνίαν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαὶ τῶν ἑδρῶν καὶ τῆς σφαίρας εἶναι κύκλοι ἴσοι.

721. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σφαῖρα περιγεγραμμένη περὶ κῶνον ἐκ περιστροφῆς.

722. Ἵνα ἑξάεδρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἕδραι του νὰ εἶναι τετράπλευρα ἐγγράψιμα εἰς κύκλους.

723. Πᾶς κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν.

724. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς εἶναι τοιοῦτος, ὥστε τὸ ὕψος του εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν διαμέτρων τῶν βάσεών του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οὗτος εἶναι περιγράψιμος εἰς σφαῖραν.

725. Σφαῖρα ἀκτῖνος ρ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κῶνον ἐκ περιστροφῆς ἀκτῖνος βάσεως R καὶ ὕψους υ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1}{R^2} = \dfrac{1}{\rho^2} - \dfrac{2}{\rho . \upsilon}$.

726. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Οχψζ λαμβάνομεν τμήματα $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $O\Gamma = \gamma$. Νὰ ὁρισθῇ τὸ κέντρον καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Α,Β,Γ,Ο.

727. Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος R καὶ ζητεῖται ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς τριέδρου στερεᾶς γωνίας Ο, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ ἐφάπτονται τῆς σφαίρας, ἂν καὶ αἱ ἕδραι της εἶναι ἑκάστη 60^0.

728. Ἐπὶ ἐπιπέδου (Ρ) δίδεται σταθερὸν σημεῖον Α καὶ μία σταθερὰ εὐθεῖα Οx, κάθετος ἐπὶ τὸ (Ρ) εἰς τὸ σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τὰς σφαίρας τὰς ἐφαπτομένας τοῦ (Ρ) εἰς τὸ Α καὶ τὰ διὰ τῆς Οx ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῶν σφαιρῶν τούτων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

729. Τὸ ὁμοιόθετον σφαίρας ὡς πρὸς κέντρον εἶναι σφαῖρα.

730. Τετραέδρου ΑΒΓΔ ἡ βάσις ΑΒΓ εἶναι σταθερά, ἡ δὲ κορυφὴ Δ κινεῖται ἐπὶ σφαίρας (O, R). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τετραέδρου.

731. Δίδεται σφαῖρα (O, R) καὶ χορδὴ ΒΓ αὐτῆς σταθερά. Ἓν σημεῖον Α διαγράφει τὴν σφαῖραν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

732. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σφαίρας (O) καὶ (O_1) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν διάκεντρον OO_1 τῶν σφαιρῶν, καὶ ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ τυχὸν διὰ τῆς OO_1 διερχόμενον.

733. Ἐὰν τὰ κέντρα Ο, O_1, O_2 τριῶν σφαιρῶν δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τὸ σχῆμα τοῦτο ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας τὸ (OO_1O_2).

734. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μία σφαῖραν (Ο) καὶ μίαν εὐθεῖαν (δ), δέχεται ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας: 1) τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, τὸ διὰ τῆς (δ) διερχόμενον. 2) Τὸ διαμετρικὸν ἐπίπεδον τῆς σφαίρας, τὸ κάθετον πρὸς τὴν (δ).

735. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν σφαῖραν (Ο) καὶ ἕνα ἐπίπεδον (Ρ), ἔχει: 1) ἄξονα συμμετρίας τὴν διὰ τοῦ κέντρου κάθετον εὐθεῖαν (ε) ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (Ρ), καὶ 2) ἐπίπεδον συμμετρίας κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἄξονος συμμετρίας (ε).

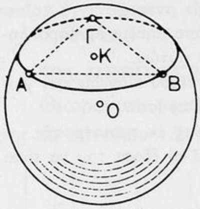
ΠΟΛΟΙ ΚΥΚΛΟΥ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ – ΚΥΚΛΟΙ ΕΠΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

227. ΜΙΚΡΟΙ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΣΦΑΙΡΑΣ.– Εἴδομεν ὅτι, πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου της εἶναι ἕνας **μικρὸς κύκλος**, καὶ πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς εἶναι ἕνας **μέγιστος κύκλος** αὐτῆς.

Θὰ γνωρίσωμεν ἤδη μερικὰς ἰδιότητας αὐτῶν.

228. ΘΕΩΡΗΜΑ I.— Διὰ τριῶν διακεκριμένων σημείων Α, Β, Γ μιᾶς σφαίρας διέρχεται ἕνας, καὶ μόνον ἕνας κύκλος.



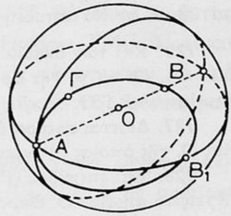
Σχ. 214

Πράγματι, ἐὰν Α,Β,Γ εἶναι τρία σημεῖα ἐπὶ τῆς σφαίρας (Ο), ταῦτα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι μία εὐθεῖα ἔχει δύο μόνον κοινὰ σημεῖα μετὰ μιᾶς σφαίρας. Ἄρα τὰ σημεῖα Α,Β,Γ ὁρίζουν ἐπίπεδον, ὅπερ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα κύκλον. Ἐν γένει, τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, καὶ ἡ τομὴ εἶναι μικρὸς κύκλος.

229. ΘΕΩΡΗΜΑ II.— Διὰ δύο διακεκριμένων σημείων μιᾶς σφαίρας διέρχεται κύκλος.

Ἀπόδειξις : Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α') Τὰ Α,Β εἶναι ἀντιδιαμετρικά. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην διὰ τῶν Α,Β διέρχονται ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας.



Σχ. 215

β') Τὰ Α, B_1 δὲν εἶναι ἀντιδιαμετρικά. Τότε τὸ κέντρον Ο τῆς σφαίρας καὶ τὰ Α, B_1 ὁρίζουν ἐπίπεδον, τέμνον τὴν σφαῖραν κατὰ ἕνα μόνον μέγιστον κύκλον.

γ') Ἐὰν τὰ Α, B_1 δὲν εἶναι ἀντιδιαμετρικά, τότε δι' αὐτῶν διέρχονται ἄπειροι μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας, διότι τὰ Α, B_1 καὶ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς σφαίρας ὁρίζουν μικρὸν κύκλον.

Τὸ ἔλασσον τόξον ΑΒ τοῦ μεγίστου κύκλου καλεῖται **σφαιρικὴ ἀπόστασις τῶν σημείων Α καὶ Β αὐτῆς.**

ΑΛΛΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1ον.— Δύο τυχόντες μέγιστοι κύκλοι σφαίρας διχοτομοῦνται.

2ον.— Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμισφαίρια).

3ον.— Οἱ μέγιστοι κύκλοι σφαίρας εἶναι ἴσοι.

4ον.— Δύο μικροὶ κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἴσον ἀπέχοντες τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσοι, καὶ ἀντιστρόφως.

230. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΚΥΚΛΟΙ ΣΦΑΙΡΑΣ.— Αἱ τομαὶ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων λέγονται παράλληλοι κύκλοι σφαίρας.

231. ΠΟΛΟΙ ΚΥΚΛΟΥ ΣΦΑΙΡΑΣ.— Ἔστω ἐπίπεδον (Ρ), τὸ ὁποῖον τέμνει δοθεῖσαν σφαῖραν (Ο, R) κατὰ τὸν κύκλον (Γ). Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ). Ἡ διάμετρος ΟΗ τῆς σφαίρας (Ο), ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ), εἶναι ἄξων συμμετρίας διὰ τὴν σφαῖραν (Ο) καὶ διὰ τὸ ἐπίπεδον (Ρ).

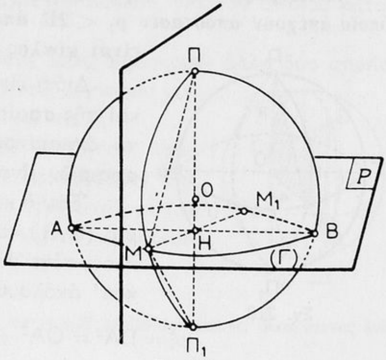
Διὰ τῆς ΟΗ θεωροῦμεν ἐπίπεδον (P_1). Τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν (Ο) κατὰ μέγιστον κύκλον καὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) κατὰ μίαν εὐθεῖαν, τέμνουσαν τὸν κύκλον τοῦτον εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ $Μ_1$, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Η (σχ. 216), καὶ κείμενα ἐπὶ τοῦ κύκλου (Γ).

Ὅταν τὸ ἐπίπεδον (P_1) στρέφηται περὶ τὴν ΟΗ, τὰ Μ καὶ $Μ_1$ γράφουν τὸν κύκλον (Γ).

Ἡ ΟΗ τέμνει τὴν σφαῖραν (Ο) εἰς δύο σημεῖα Π καὶ $Π_1$, ἀντιδιαμετρικὰ τῆς σφαίρας ταύτης, καὶ ἡ $ΠΠ_1$ καλεῖται, ὡς γνωστόν, **ἄξων τοῦ κύκλου (Γ).**

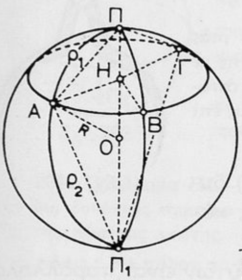
Τὰ σημεῖα Π καὶ $Π_1$ καλοῦνται **πόλοι** τοῦ κύκλου (Γ). Ἄρα :

Πόλοι κύκλου σφαίρας καλοῦνται τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ σφαῖρα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος ἑνὸς κύκλου αὐτῆς.



Σχ. 216

232. ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἕκαστος πόλος ἑνὸς κύκλου σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου τούτου.



Σχ. 217

Πράγματι, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΠ, ΒΗΠ, ΓΗΠ, ... εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΗΠ κοινὴν καὶ

$$ΗΑ = ΗΒ = ΗΓ = \ldots$$

Ἄρα $$ΠΑ = ΠΒ = ΠΓ = \ldots$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί :

$$Π_1Α = Π_1Β = Π_1Γ = \ldots$$

Σημείωσις : Τὰ τόξα ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, ... τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὸν πόλον Π καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (Γ), εἶναι **ἴσα.** Διότι εἶναι τόξα ἴσων χορδῶν ἴσων κύκλων. Καλοῦνται δὲ **πολικαὶ ἀποστάσεις** τῶν σημείων Α,Β,Γ, ... τοῦ κύκλου (Γ)

Τὰ τμήματα $ΠΑ = ρ_1$ καὶ $Π_1Α = ρ_2$ καλοῦνται **πολικαὶ ἀκτῖνες** τοῦ κύκλου (Γ).

Ἐκ τοῦ (σχ. 217) θὰ ἔχωμεν, ἂν $ΟΗ = d$:

1ον : $ΠΑ^2 + Π_1Α^2 = ΠΠ_1^2$ ἢ $\boxed{ρ_1^2 + ρ_2^2 = 4R^2,}$

2ον : $ΠΑ^2 = ΠΠ_1 \cdot ΠΗ$ ἢ $\boxed{ρ_1^2 = 2R\,(R - d),}$

3ον : $Π_1Α^2 = ΠΠ_1 \cdot Π_1Η$ ἢ $\boxed{ρ_2^2 = 2R\,(R + d)}$

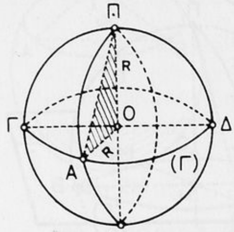
Ἂν κληθῇ ρ ἡ ἀκτὶς ΗΑ τοῦ κύκλου (Γ), τότε :

$$d = \sqrt{R^2 - ρ^2}$$

καὶ αἱ δύο τελευταῖαι σχέσεις γίνονται :

$$ρ_1^2 = 2R\,(R - \sqrt{R^2 - ρ^2}) \quad \text{καὶ} \quad ρ_2^2 = 2R\,(R + \sqrt{R^2 - ρ^2}).$$

Ἀντιστρόφως : Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς σφαίρας (O,R), τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν $\rho_1 < 2R$ ἀπὸ ἄλλο σταθερὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας, εἶναι κύκλος μὲ πόλον τὸ σημεῖον Π.



Σχ. 218

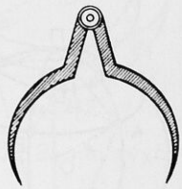
Διότι εἶναι ἡ τομὴ τῆς δοθείσης σφαίρας (O, R) καὶ τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Π καὶ ἀκτῖνα τὸ ὡρισμένον μῆκος $P_1 < 2R$, καθόσον ἡ τομὴ δύο σφαιρῶν εἶναι κύκλος.

Ἐὰν ὁ κύκλος (Γ) εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας (O,R) καὶ Π, Π_1 οἱ πόλοι τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου, τότε θὰ εἶναι ΟΑ = R καὶ ΟΠ = R (σχ. 218) καὶ κατ' ἀκολουθίαν.

$$\rho_1^2 = \Pi A^2 = OA^2 + O\Pi^2 = R^2 + R^2 = 2R^2 \text{ ἐξ οὗ : } \boldsymbol{\rho_1 = R\sqrt{2}.}$$

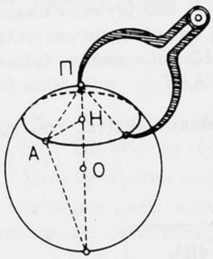
Τὰ τόξα $\widehat{\Pi A} = \widehat{\Pi_1 A}$ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστου κύκλου.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας.


Σχ. 219

233. Σφαιρικὸς διαβήτης. Διὰ νὰ γράψωμεν ὅμως κύκλους ἐπὶ μιᾶς σφαίρας χρειαζόμεθα εἰδικὸν ὄργανον. Τοῦτο εἶναι κοινὸς διαβήτης μὲ καμπυλωμένα σκέλη (σχ. 219) καὶ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο σημείων Α καὶ Β μιᾶς σφαίρας καὶ νὰ γράφωμεν κύκλους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ταύτης.

Οὕτω, μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας (O, R) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀπείρους κύκλους ἐπὶ τῆς σφαίρας ταύτης.



Σχ. 220

Τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων τούτων εἶναι παράλληλα ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν διάμετρον $\Pi\Pi_1$.

Διὰ νὰ γράψωμεν ὅμως μέγιστον κύκλον ἐπὶ τῆς σφαίρας (O, R), πρέπει νὰ λάβωμεν, ὡς ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, τὴν χορδὴν τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ἤτοι $\rho_1 = R\sqrt{2}$.

Εἶναι ἀνάγκη, ἑπομένως, νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας. Πρὸς τοῦτο λύομεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα.

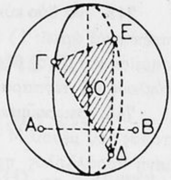
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΕΠΙ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

234. ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι.— Δοθείσης σφαίρας νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

Λύσις : Ἐπὶ τῆς σφαίρας λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β. Μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου τὸ αὐτό, γράφομεν δύο τόξα ἐπὶ τῆς σφαίρας, τεμνόμενα εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἐπειδὴ ΓΑ = ΓΒ, τὸ Γ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τῆς χορδῆς ΑΒ τῆς σφαίρας. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται τὸ Γ.

Ὁμοίως, μὲ κέντρα τὰ Α,Β καὶ ἀκτῖνας ἴσας, εὑρίσκομεν ἄλλα δύο σημεῖα Ε καὶ Δ, τὰ ὁποῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ τὸ Γ.

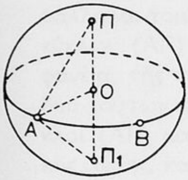
Ἤδη, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ καὶ κατασκευάζομεν ἐπὶ ἐπιπέδου τρίγωνον ΓΔΕ, ἔχον πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα. Ἡ ἀκτὶς R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης σφαίρας (Ο).



Σχ. 221

235. Πρόβλημα II.— Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος, διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων Α καὶ Β αὐτῆς.

Λύσις : Συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὑπολογίζομεν τὴν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας (Ο). Κατόπιν μὲ κέντρα (πόλους) τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνα $\rho_1 = R\sqrt{2}$ γράφομεν κύκλους ἐπὶ τῆς σφαίρας, οἱ ὁποῖοι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Π καὶ Π_1. Εἶτα μὲ πόλους (κέντρα) τὸ σημεῖον Π ἢ Π_1 καὶ ἀκτῖνα $\rho_1 = \Pi A = R\sqrt{2}$ γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰ Α, Β καί, προφανῶς, θὰ εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας (Ο, R).



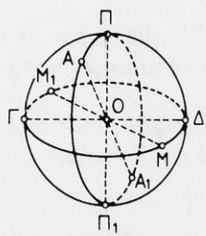
Σχ. 222

Ἐὰν τὰ σημεῖα Α,Β εἶναι ἀντιδιαμετρικὰ εἰς τὴν σφαῖραν (Ο), τότε ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, διερχόμενοι διὰ τῶν σημείων τούτων.

236. Πρόβλημα III.— Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας (Ο) νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α τῆς σφαίρας καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δοθέντα μέγιστον κύκλον ΓΔ τῆς σφαίρας ταύτης.

Λύσις : Μὲ πόλον τὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ ἀκτῖνα $R\sqrt{2}$ (R ἡ ἀκτὶς τῆς δοθείσης σφαίρας Ο) γράφομεν μέγιστον κύκλον ἐπὶ τῆς σφαίρας, ὅστις τέμνει τὸν ἄλλον δοθέντα μέγιστον κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ M_1, ἀντιδιαμετρικὰ τοῦ κύκλου ΓΔ. Κατόπιν μὲ πόλον τὸ Μ ἢ M_1 καὶ ἀκτῖνα $MA = R\sqrt{2}$ γράφομεν ἄλλον μέγιστον κύκλον, ὅστις διέρχεται ἀπὸ τὸ Α καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν δοθέντα ΓΔ.

Πράγματι, ἡ ΜΑ εἶναι χορδὴ τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ὁ κύκλος $\Pi A M \Pi_1$ θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ Α. Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου $\Pi A \Pi_1$, ἡ διάμετρος MOM_1 θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου $\Pi A \Pi_1$. Ἄρα ὁ κύκλος $\Pi A \Pi_1$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν κύκλον ΓΔ.



Σχ. 223

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

736. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας (Ο, R = 15 cm) ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς μικροῦ κύκλου αὐτῆς εἶναι 9 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πολικὴ ἀκτὶς τῶν σημείων τοῦ μικροῦ τούτου κύκλου.

737. Μικρὸς κύκλος σφαίρας ἀπέχει ἀπὸ τὸν πόλον 3 cm, ἡ δὲ πολικὴ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου εἶναι 6 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ κύκλου.

738. Αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων κύκλων σφαίρας εἶναι α καὶ β (α > β), ἡ δὲ ἀπόστασίς των δ. Ποία ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ;

739. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς μικροῦ κύκλου σφαίρας εἶναι 6 cm, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸν πόλον εἶναι 4 cm. Ποία ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ;

√ **740**. Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ κύκλος ἀκτῖνος ρ, διερχόμενος διὰ δύο δεδομένων σημείων Α,Β τῆς σφαίρας ταύτης.

/ **741**. Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ κύκλος δεδομένης ἀκτῖνος λ.

742. Ἵνα δύο κύκλοι ἀνήκουν εἰς σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα.

743. Ἵνα δύο κύκλοι κείμενοι ἐπὶ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων, ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ: 1) νὰ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα. 2) νὰ ἐφάπτωνται τῆς αὐτῆς εὐθείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ 3) οἱ ἄξονές των νὰ τέμνωνται καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων των νὰ τέμνῃ τοὺς δύο κύκλους εἰς τέσσαρα σημεῖα ὁμοκύκλια.

744. Θεωροῦμεν σφαῖραν (Ο,R) καὶ μεταβλητὴν χορδὴν αὐτῆς ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ, ὅταν: 1) ΑΒ = λ, 2) ἡ ΑΒ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ (ἢ μένῃ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ) καὶ 3) Ἡ ΑΒ = λ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Γ ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

745. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R καὶ 1) διερχομένη διὰ δύο σημείων Α,Β καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας. 2) Διερχομένη διὰ σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δύο ἐπιπέδων (Ρ) καὶ ($Ρ_1$), 3) Διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Γ καὶ ἐφαπτομένη δύο σφαιρῶν. 4) Διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτομένη σφαίραςκ αἱ δοθέντος ἐπιπέδου. 5) Ἐφαπτομένη δύο ἐπιπέδων καὶ μιᾶς σφαίρας καί, 6) Ἐφαπτομένη δύο σφαιρῶν καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

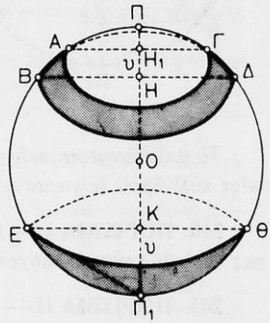
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΖΩΝΗ — ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΤΟΜΕΥΣ

ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ – ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ κλπ.

237. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ.— Σφαιρικὴ ζώνη ὀνομάζεται τὸ Σύνολον τῶν σημείων δύο παραλλήλων κύκλων μιᾶς σφαίρας (Ο) καὶ τῶν σημείων τῆς σφαίρας ταύτης, τὰ ὁποῖα κεῖνται μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων τούτων.

Ἔστω μία σφαῖρα (Ο, R) καὶ ΑΓ, ΒΔ δύο παράλληλοι τομαὶ αὐτῆς. Τὸ Σύνολον τῶν σημείων τῶν κύκλων (ΑΓ) καὶ (ΒΔ) καὶ τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν δύο τούτων κύκλων, καλεῖται **σφαιρικὴ ζώνη.** Οἱ κύκλοι (ΑΓ) καὶ (ΒΔ) καλοῦνται **βάσεις** τῆς σφαιρικῆς ζώνης, καὶ ἡ ἀπόστασις $HH_1 = υ$ τῶν δύο βάσεων καλεῖται **ὕψος** τῆς σφαιρικῆς ζώνης.



Σχ. 224

Ἐὰν τὸ ἓν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς τὸ $Π_1$ (σχ. 224), τότε ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν βάσιν.

Οὕτως, ἡ σφαιρικὴ ζώνη $Π_1ΕΘ$ ἔχει μίαν βάσιν τὴν ΕΘ. Ὕψος τῆς σφαιρικῆς ταύτης ζώνης εἶναι τὸ τμῆμα $ΚΠ_1$.

Τυχὸν ἐπίπεδον χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο σφαιρικὰς ζώνας μὲ μίαν βάσιν, τὴν τομὴν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Ἡ σφαιρικὴ ζώνη ΑΒΓΔ δύναται νὰ παραχθῇ ἀπὸ τὸ τόξον ΑΒ (σχ. 224), στρεφομένου κατὰ γωνίαν 2π περὶ τὴν διάμετρον $ΠΠ_1$ τῆς σφαίρας (Ο), ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτό, καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

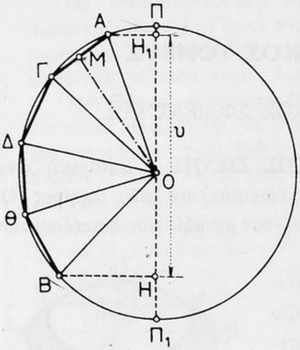
238. ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ. — Καλοῦμεν ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραγομένων ἐπιφανειῶν ὑπὸ $2^k \cdot ν$ κανονικῶν τεθλασμένων γραμμῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸ τόξον ΑΒ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἡ σφαιρικὴ ζώνη.

239. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΖΩΝΗΣ.

Ἔστω ΑΒ τόξον μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας (Ο, R), τὸ ὁποῖον δὲν τέμνεται ὑπὸ τῆς διαμέτρου $ΠΠ_1$ τῆς σφαίρας ταύτης. Εἰς τὸ τόξον τοῦτο ἐγγράφομεν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΓΔΘΒ καὶ ἔστω ΟΜ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς.

Εἰς τὴν (§ 213) εὕρομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία παράγεται ὑπὸ τῆς κανονικῆς ταύτης τεθλασμένης γραμμῆς, στρεφομένης κατὰ γωνίαν 2π περὶ ἄξονα $\Pi\Pi_1$, μὴ τέμνοντα αὐτήν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$E_1 = 2\pi \cdot OM \cdot \upsilon, \qquad (1)$$



Σχ. 225

ἔνθα υ τὸ ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$\text{ορ } E_1 = 2\pi \cdot \text{ορ } OM \cdot \upsilon = 2\pi \cdot R \cdot \upsilon$$

ἤτοι : $$\boxed{\mathbf{E_Z = 2\pi\, R \cdot \upsilon}} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) ἐκφράζει ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης.

Σημείωσις : Ὁ τύπος (2) ἐκφράζει ὅτι : Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς ἀκτῖνος βάσεως R καὶ ὕψους υ.

240. ΠΟΡΙΣΜΑ I.— Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο σφ. ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὑψῶν αὐτῶν.

241. ΠΟΡΙΣΜΑ II.— Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ἰσοϋψῶν σφ. ζωνῶν, ἀνίσων σφαιρῶν, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν τούτων.

242. ΠΟΡΙΣΜΑ III.— Δύο ἰσοϋψεῖς σφ. ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἰσοδύναμοι.

243. ΠΟΡΙΣΜΑ IV.— Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν βάσιν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται ἡ ζώνη αὐτή.

244. ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΦΑΙΡΑΣ. — Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ (σχ. 225) εἶναι ἡμίκυκλος, τὸ ἐμβαδὸν τὸ ὁποῖον θὰ παραχθῇ ὑπ' αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, διὰ τὴν ὁποίαν $\upsilon = 2R$. Ἄρα ὁ τύπος (2) γίνεται :

$$E_\Sigma = 2\pi R \cdot \upsilon = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2, \quad \text{ἤτοι :} \quad \boxed{\mathbf{E_\Sigma = 4\pi\, R^2}}$$

245. ΠΟΡΙΣΜΑ. — Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Πράγματι, ἐὰν $E_1 = 4\pi R_1^2$ καὶ $E_2 = 4\pi R_2^2 \implies \boxed{\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{R_1^2}{R_2^2}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

746. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 3 m καὶ τὸ ὕφος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης αὐτῆς εἶναι $υ = 0{,}4$ m. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης ταύτης.

747. Τὸ ἐπίπεδον μικροῦ κύκλου σφαίρας ἀκτῖνος 16 cm ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπόστασιν ἴσην πρὸς 4 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν ζωνῶν τῆς σφαίρας ταύτης.

748. Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους $υ = 5$ cm εἶναι 251,2 cm². Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει ἡ ζώνη αὕτη.

749. Αἱ περίμετροι τῶν βάσεων σφαιρικῆς ζώνης ὕψους $υ = 0{,}2$ dm εἶναι 8π dm καὶ 16π dm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει ἡ ζώνη αὕτη.

750. Τὸ ἐμβαδὸν σφαίρας εἶναι 100π cm². Ποία ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

751. Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης παραγομένης ὑπὸ τόξου ΑΒ στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον $ΡΡ_1$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ δακτυλίου ἀκτίνων ΡΑ καὶ ΡΒ.

752. Σφαῖρα ἀκτῖνος R νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδων ἴσων ἀπεχόντων ἀπὸ τὸ κέντρον, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν ταῦτα.

753. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος σφαιρικῆς ζώνης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἐμβαδόν της ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει ἡ ζώνη.

754. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ζώνη, τὴν ὁποίαν ὁρίζουν δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι ἐπὶ τρίτης σφαίρας, διερχομένης ἀπὸ τὸ κέντρον των, ἔχει ἐμβαδὸν σταθερόν.

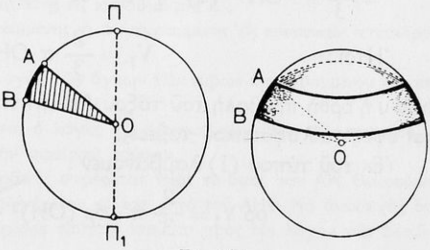
755. Δοθεῖσα σφαιρικὴ ζώνη νὰ διαιρεθῇ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον ὑπὸ κύκλου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις τῆς ζώνης ἢ εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

756. Τὸ ἐμβαδὸν μονοβασικῆς σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ζώνην ταύτην.

757. Δύο κύκλοι (O,R) καὶ (O_1, R_1) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἄγεται ἡ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν ΑΒ καὶ τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὴν OO_1 κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ΑΒ, εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι παράγονται ὑπὸ τῶν κύκλων (Ο) καὶ (O_1).

246. ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΤΟΜΕΥΣ.— Θεωροῦμεν κύκλον (O, R) καὶ κυκλικὸν τομέα αὐτοῦ ΟΑΒΟ, μὴ τεμνόμενον ὑπὸ τῆς διαμέτρου $Π_1Π$ τούτου.

Τὸ ὅλον σχῆμα στρέφεται κατὰ γωνίαν 2π περὶ τὴν διάμετρον $ΠΠ_1$, ὁπότε θὰ παραχθῇ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἓν σχῆμα, τὸ ὁποῖον καλεῖται **σφαιρικὸς τομεύς.**



Σχ. 226

Ὥστε: **Σφαιρικὸς τομεὺς καλεῖται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ κυκλικοῦ τομέως, στρεφομένου κατὰ γωνίαν 2π περὶ διάμετρον τοῦ κύκλου εἰς ὃν ἀνήκει, καὶ ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτόν.**

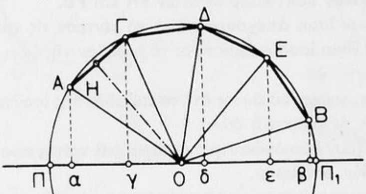
Εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ σφαιρικὸς τομεὺς περιέχεται μεταξὺ δύο κώνων, τοὺς ὁποίους παράγουν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τῆς σφαιρικῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ τόξον ΑΒ τοῦ τομέως.

Ἡ ζώνη αὕτη καλεῖται **βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως.**

237. ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ. — Ὄγκον σφαιρικοῦ τομέως καλοῦμεν τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ 2^k ν κανονικῶν πολυγωνικῶν τομέων ἐγγεγραμμένων εἰς κυκλικὸν τομέα, στρεφομένων κατὰ γωνίαν 2π περὶ ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τομέως, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ καὶ μὴ τέμνοντα αὐτόν.

Σημείωσις : Πολυγωνικὸς τομεὺς καλεῖται τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου δύο πλευραὶ συμπίπτουν μὲ τὰς ὁρικὰς ἀκτῖνας κυκλικοῦ τομέως, αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραί του εἶναι χορδαὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τομέως.

248. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΓΚΟΥ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ. — Ἔστω πολυγωνικὸς κανονικὸς τομεὺς ΟΑΓΔΕΒΟ, ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα ΟΑΒ ἀκτῖνος R καὶ κέντρου Ο, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις (τόξον) ΑΒ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση ἑνὸς ἡμικύκλου (σχ. 227).



Σχ. 227

Τὸ ὅλον σχῆμα στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον $ΠΠ_1$ τοῦ κύκλου (Ο), ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸν τομέα. Ἔστω ΟΗ τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως.

Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου σχήματος ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κανονικοῦ πολυγωνικοῦ τομέως εἶναι :

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot ΟΗ \cdot [E_{ΑΓ} + E_{ΓΔ} + E_{ΔΕ} + E_{ΕΒ}] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot ΟΗ \cdot [2\pi \cdot ΟΗ \cdot αγ + 2\pi \cdot ΟΗ \cdot γδ + 2\pi \cdot ΟΗ \cdot δε + 2\pi \cdot ΟΗ \cdot εβ]$$

$$= \frac{2}{3} \pi \cdot ΟΗ^2 \cdot (αγ + γδ + δε + εβ) = \frac{2}{3} \pi \cdot ΟΗ^2 \cdot υ$$

Ἤτοι: $$V_1 = \frac{2}{3} \pi \cdot ΟΗ^2 \cdot υ, \qquad (1)$$

ἔνθα υ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ τόξου ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον $ΠΠ_1$, τὸ ὁποῖον καλεῖται καὶ **ὕψος** τοῦ σφαιρικοῦ τομέως.

Ἐκ τοῦ τύπου (1) λαμβάνομεν :

$$\text{ορ } V_1 = \frac{2}{3} \pi \cdot \text{ορ } (ΟΗ)^2 \cdot υ = \frac{2}{3} \pi \cdot R^2 \cdot υ \qquad (2)$$

Ἐπειδή, ἐξ ὁρισμοῦ, ορ $V_1 = V_{στ}$, ἡ σχέσις (2) γίνεται :

$$\boxed{V_{στ} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot υ} \qquad (3)$$

Ἡ σχέσις (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$V_{στ} = 2\pi R υ \cdot \frac{R}{3} \qquad (4)$$

καὶ ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει.

249. ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΑΣ.— Ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ τοῦ μεγίστου κύκλου $ΠΑΠ_1$ (σχ. 227) γίνῃ ἴσον πρὸς τὸν ἡμίκυκλον $ΠΑΒΠ_1$, τότε $υ = 2R$, καὶ ὁ ἡμίκυκλος θὰ γράψῃ σφαῖραν διαμέτρου $ΠΠ_1 = 2R$. Ἑπομένως, ἂν εἰς τὸν τύπον (3) ἀντικαταστήσωμεν τὸ υ μὲ τὸ 2R, θὰ λάβωμεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας (O, R). Δηλαδή :

$$\boxed{V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi R^3.} \tag{1}$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον τοῦτον θέσωμεν $R = δ/2$, ὅπου δ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, θὰ λάβωμεν τὸν τύπον :

$$\boxed{V_{σφ} = \frac{1}{6}\pi δ^3.} \tag{2}$$

250. ΠΟΡΙΣΜΑ.— Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Πράγματι, ἐάν :

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = \dfrac{4}{3}\pi R_1^3 \\[2ex] V_2 = \dfrac{4}{3}\pi R_2^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_1} = \frac{R_1^3}{R_2^3}} \tag{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

758. Ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι $R = 12$ cm. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος της ;

759. Ὁ ὄγκος σφαίρας εἶναι 36π m^3. Ποῖον τὸ ἐμβαδόν της;

760. Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας περιγεγραμμένης εἰς κύβον ἀκμῆς α ;

761. Ποῖος ὁ ὄγκος σφαίρας περιγεγραμμένης ἢ ἐγγεγραμμένης εἰς κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α ;

762. Δίδεται σφαῖρα (O, R). Ποῖος ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν κύβων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν ταύτην ;

763. Δίδεται σφαῖρα (O, R) καὶ ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν κανονικῶν τετραέδρων ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν ταύτην.

764. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ τὸ ὕψος του ΑΗ. Θεωροῦμεν καὶ τὴν ἐγγεγραμμένην σφαῖραν εἰς τὸν παραγόμενον κῶνον ὑπὸ τοῦ ΑΗΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ κώνου καὶ τῆς σφαίρας ταύτης, ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο τούτων σχημάτων.

765. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α.

α) Νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς ἡ κορυφὴ Σ μιᾶς τετραγωνικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν τὸ τετράγωνον τοῦτο, οὕτως ὥστε ἡ πολύεδρος γωνία Σ νὰ ἔχῃ ἕδρας ἴσας πρὸς $\frac{\pi}{3}$ ἑκάστην.

β') Νὰ ὁρισθῇ γεωμετρικῶς τὸ κέντρον O τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὴν πυραμίδα ταύτην, καθὼς καὶ ὄγκος τῆς σφαίρας ταύτης.

γ') Νὰ ὁρισθῇ τὸ κέντρον ω καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὴν πυραμίδα ταύτην.

δ') Νὰ ὁρισθῇ ἀλγεβρικῶς τὸ κέντρον ω_1 τῆς σφαίρας, τῆς ἐφαπτομένης τῶν ὀκτὼ ἀκμῶν τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ. Ἐὰν δὲ $\omega_1 O = x$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ταύτης.

ε') Νὰ ὁρισθῇ γεωμετρικῶς τὸ κέντρον ω_2 τῆς σφαίρας, τῆς ἐφαπτομένης τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καὶ τῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἀκμῶν τῆς πυραμίδος. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ τμῆμα $O\omega_2$ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ταύτης.

στ') Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι τοῦ ὄγκου ἑκάστης τῶν προηγουμένων σφαιρῶν πρὸς τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

766. Ἐὰν υ_1, υ_2, υ_3, υ_4 εἶναι τὰ ὕψη τετραέδρου ΑΒΓΔ, τὰ ἀγόμενα ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ,Δ, ἀντιστοίχως καὶ ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, ἐγγεγραμμένης καὶ παρεγγεγραμμένων ἀντιστοίχως εἰς τὰς πολυέδρους γωνίας Α,Β,Γ,Δ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α') $\dfrac{1}{\upsilon_1}+\dfrac{1}{\upsilon_2}+\dfrac{1}{\upsilon_3}+\dfrac{1}{\upsilon_4}=\dfrac{1}{\rho}$

β') $\dfrac{1}{\rho_1}=\dfrac{1}{\upsilon_2}+\dfrac{1}{\upsilon_3}+\dfrac{1}{\upsilon_4}-\dfrac{1}{\upsilon_1}$

γ') $\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{1}{\upsilon_3}+\dfrac{1}{\upsilon_4}+\dfrac{1}{\upsilon_1}-\dfrac{1}{\upsilon_2}$

δ') $\dfrac{1}{\rho_3}=\dfrac{1}{\upsilon_4}+\dfrac{1}{\upsilon_1}+\dfrac{1}{\upsilon_2}-\dfrac{1}{\upsilon_3}$

ε') $\dfrac{1}{\rho_4}=\dfrac{1}{\upsilon_1}+\dfrac{1}{\upsilon_2}+\dfrac{1}{\upsilon_3}-\dfrac{1}{\upsilon_4}$

στ') $\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}+\dfrac{1}{\rho_3}+\dfrac{1}{\rho_4}=\dfrac{2}{\rho}.$

767. Ὁ ὄγκος V_1 σφαίρας, ὁ ὄγκος V_2 κυλίνδρου περιγεγραμμένου εἰς τὴν σφαῖραν ταύτην καὶ ὁ ὄγκος V_3 τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἰσοπλεύρου κώνου συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων :

$$\frac{V_1}{4}=\frac{V_2}{6}=\frac{V_3}{9}.$$

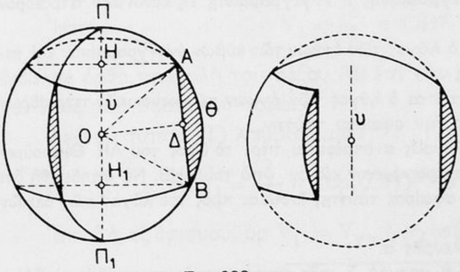
768. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν αὐτῶν σχημάτων συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων :

α') $\dfrac{E_1}{4}=\dfrac{E_2}{6}=\dfrac{E_3}{9}$, β') ὅτι: $V_2^2=V_1\cdot V_3$, γ) $E_2^2=E_1\cdot E_3$.

769. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες R καὶ R_1 δύο σφαιρῶν, ἐὰν εἶναι $R-R_1=\alpha$ καὶ $V-V_1=4\pi\beta^3$.

770. Πᾶν κανονικὸν πολύεδρον εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον περὶ σφαῖραν. Ποῖοι οἱ ὄγκοι τῶν σφαιρῶν τούτων, δι' ὅλα τὰ κανονικὰ πολύεδρα ;

251. ΣΦΑΙΡΙΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ.– Ἔστω κύκλος (Ο) κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος R, χορδὴ αὐτοῦ ΑΒ καὶ διάμετρος $\Pi\Pi_1$, μὴ τέμνουσα τὴν χορδὴν ΑΒ. Τὸ ἔλασσον τόξον $\widehat{AB}$ καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ ὁρίζουν τὸ κυκλικὸν **τμῆμα** ΑΘΒΑ (σχ. 228).



Σχ. 228

Ὁρισμός. — Ὀνομάζομεν σφαιρικὸν δακτύλιον τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΘΒΑ, ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον $\Pi\Pi_1$ κατὰ γωνίαν 2π.

Ἔστωσαν Η καὶ H_1 αἱ προβολαὶ τῶν Α καὶ Β ἐπὶ τὴν διάμετρον $\Pi\Pi_1$. Τὸ τμῆμα $HH_1=\upsilon$ καλεῖται **ὕψος** τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου. Εἶναι δηλαδὴ τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου τὸ ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἡ ὁποία παράγεται ἀπὸ τὸ τόξον ΑΒ.

Ἑπομένως : Ὁ σφαιρικὸς δακτύλιος ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σφαιρικὴν ζώνην ὕψους $HH_1 = υ$ καὶ ἀπὸ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς, μὲ ἀπόστημα τὴν χορδὴν ΑΒ.

252. ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΔΑΚΤΥΛΙΟΥ.— Προφανῶς, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος παράγεται ἀπὸ τὸν κυκλικὸν τομέα ΟΑΘΒ, καὶ τοῦ ὄγκου τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ. Κατ' ἀκολουθίαν, ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΔ κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$V_{\sigma\delta} = V_{\sigma\tau} - V_{OAB} = \frac{2}{3}\pi R^2 υ - \frac{1}{3}\cdot OΔ \cdot E_{AB} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot υ - \frac{2}{3}\pi \cdot OΔ^2 \cdot υ =$$

$$= \frac{2}{3}\pi υ\,(R^2 - OΔ^2) = \frac{2}{3}\pi υ \cdot AΔ^2 = \frac{2}{3}\pi \cdot υ \cdot \frac{1}{4}\cdot AB^2 = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot υ$$

Ἤτοι :

$$\boxed{V_{\sigma\delta} = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot υ} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος οὗτος ἐκφράζει ὅτι :

Ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἕκτον τοῦ ὄγκου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου καὶ ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

Σημείωσις : Ἂν εἰς τὸν τύπον (1) θέσωμεν $AB = 2R$, καὶ $υ = 2R$, προκύπτει ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας (Ο,R).

$$V_\sigma = \frac{1}{6}\pi AB^2 \cdot υ = \frac{1}{6}\pi \cdot 4R^2\, 2R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

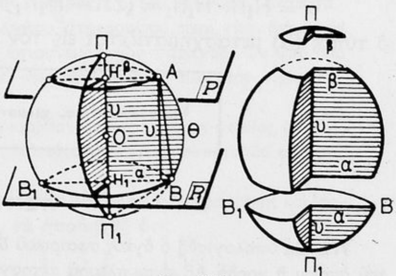
253. ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ ΤΜΗΜΑ.— Ἔστω σφαῖρα (Ο, R) καὶ μία διάμετρος αὐτῆς $ΠΠ_1$.

Ἄγομεν δύο ἐπίπεδα (Ρ) καὶ $(Ρ_1)$ κάθετα ἐπὶ τὴν διάμετρον $ΠΠ_1$.

Ταῦτα τέμνουν τὴν σφαῖραν (Ο, R) κατὰ δύο κύκλους, κέντρων Η καὶ $Η_1$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι :

Τὸ Σύνολον τῶν σημείων τῆς σφαίρας καὶ τῶν ἐσωτερικῶν σημείων αὐτῆς, τὰ ὁποῖα κεῖνται μεταξὺ τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων, τεμνόντων τὴν σφαῖραν, καλεῖται σφαιρικὸν τμῆμα.



Σχ. 229

Αἱ τομαὶ (Η) καὶ $(Η_1)$ τῶν ἐν λόγῳ ἐπιπέδων μὲ τὴν σφαῖραν καλοῦνται **βάσεις** τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἡ ἀπόστασις $ΗΗ_1$ τῶν κέντρων τῶν βάσεων (Η) καὶ $(Η_1)$ καλεῖται **ὕψος** τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων (Ρ) ἢ $(Ρ_1)$ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, τὸ ἀντίστοιχον σφαιρικὸν τμῆμα καλεῖται **μονοβασικόν**.

Ἂν τὰ ἐπίπεδα (P) καὶ (P_1) εἶναι ἐφαπτόμενα, τότε τὸ ἀντίστοιχον σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι ὁλόκληρος ἡ σφαῖρα.

Κατὰ ταῦτα: **Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ σφαῖραν, τέμνει αὐτὴν εἰς δύο μονοβασικὰ σφαιρικὰ τμήματα.**

254. ΟΓΚΟΣ ΣΦΑΙΡΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ.— Προφανῶς, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου, ὁ ὁποῖος παράγεται ἀπὸ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΘΒΑ (σχ. 229), καὶ τοῦ κολούρου κώνου, ὅστις παράγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τραπέζιον HH_1BA. Οὕτως, ἐὰν τεθῇ $HA = \beta$, $H_1B = \alpha$, $HH_1 = \upsilon$, καὶ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΑΓ ἐπὶ τὴν H_1B, θὰ εἶναι $A\Gamma = \upsilon$ καὶ $\Gamma B = \alpha - \beta$. Ἄρα:

$$AB^2 = \upsilon^2 + (\alpha - \beta)^2 = \upsilon^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \qquad (1)$$

Ἄρα ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος θὰ εἶναι:

$$V = \frac{1}{6}\pi \cdot AB^2 \cdot \upsilon + \frac{1}{3}\pi\upsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = \frac{1}{6}\pi\upsilon(\upsilon^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) +$$

$$+ \frac{1}{3}\pi\upsilon(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta) = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi(\alpha^2 + \beta^2)\upsilon$$

Ἤτοι: $$\boxed{\mathbf{V_{\text{σφ. τμήματος}} = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi(\alpha^2 + \beta^2)\cdot\upsilon}} \qquad (2)$$

Ἐὰν τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι μονοβασικόν, τότε $\beta = 0$ καὶ ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$\boxed{\mathbf{V_{\text{μονοβασικοῦ σφ. τμήματος}} = \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{2}\pi\alpha^2\upsilon}} \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ εἰς τὸ μονοβασικὸν σφαιρικὸν τμῆμα Π_1BB_1 εἶναι

$$\alpha^2 = H_1\Pi \cdot H_1\Pi_1 = (2R - H_1\Pi_1)\cdot H_1\Pi_1 = (2R - \upsilon)\upsilon = 2R\upsilon - \upsilon^2,$$

ὁ τύπος (3) μετασχηματίζεται εἰς τόν:

$$\boxed{\mathbf{V_{\text{μονοβασικοῦ σφ. τμήματος}} = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2(3R - \upsilon)}} \qquad (4)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

771. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου, ὅστις παράγεται ἀπὸ κυκλικὸν τμῆμα, τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι πλευρὰ τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R, ἡ δὲ διάμετρος διέρχεται ἀπὸ τὸ Α.

772. Ὁμοίως, ἂν ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι πλευρὰ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἢ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος R καὶ ἡ διάμετρος διέρχεται ἀπὸ τὸ Α.

773. Σφαῖρα ἀκτῖνος 6 m τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος τοῦ κέντρου 2μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ σφαῖρα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

774. Ἡ διάμετρος σφαίρας (O, R) τέμνεται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων καθέτων πρὸς αὐτὴν εἰς τρία ἴσα μέρη. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν τριῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα προκύπτουν.

775. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι (O, R) καὶ (O, R_1), ἔνθα $R > R_1$ καὶ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι χορδαὶ αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ σφαιρικοὶ δακτύλιοι, οἱ ὁποῖοι θὰ παραχθοῦν ἀπὸ τὰ δύο κυκλικὰ τμήματα, ὅταν ταῦτα στραφοῦν περὶ μίαν διάμετρον, μὴ τέμνουσαν αὐτά, κατὰ γωνίαν 2π, εἶναι ἰσοδύναμοι.

776. Δίδεται σφαῖρα (O, R). Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς ἀκτῖνος της OA λαμβάνομεν τμῆμα AΣ = R. Ἐκ τοῦ Σ ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας πρὸς τὴν σφαῖραν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος, ὅπερ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς ἐλάσσονος μονοβασικῆς σφαιρικῆς ζώνης.

777. Ἐὰν (β), (β_1), (β_2) εἶναι τὰ ἐμβαδὰ τῶν βάσεων καὶ τῆς μέσης τομῆς ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος ὕψους υ, τότε ὁ ὄγκος τοῦ σφ. τμήματος εἶναι :

$$V = \frac{1}{6}(\beta + \beta_1 + 4\beta_2)\upsilon.$$

778. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρὸς τὰ 2/3 τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς του ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου εἰς τὸ μέσον τοῦ ὕψους του.

779. Δίδονται δύο σφαῖραι (O, R) καὶ (O_1, R_1), ὧν ἡ διάκεντρος αὐτῶν εἶναι $OO_1 = d$. Ἐὰν αἱ σφαῖραι αὗται τέμνωνται, νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.

780. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος τοῦ περιεχομένου μεταξὺ δύο σφαιρῶν (O, R) καὶ (Oι, R_1) ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κώνου περὶ αὐτάς.

781. Ἰσόπλευρος κῶνος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων καὶ ὁ τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο τούτων σχημάτων ;

782. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων καὶ ὁ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν τῶν δύο σχημάτων ;

783. Εἰς κωνικὴν ἐπιφάνειαν ἐκ περιστροφῆς ἐγγράφομεν τρεῖς σφαίρας, ὧν ἡ μεσαία ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς τῶν δύο ἄλλων. Πῶς συνδέονται αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν τούτων ;

784. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R. Τέμνομεν τὸ σχῆμα ὑπὸ δύο ἐπιπέδων (P) καὶ (P_1), καθέτων πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὅστις ἔχει βάσεις τὰς ἐν λόγῳ τομάς.

785. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R. Τέμνομεν τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κύλινδρον ὑπὸ δύο ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τοῦ ἄξονος τοῦ κυλίνδρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἀποκοπτομένων ἐπιφανειῶν ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κυλίνδρου εἶναι ἴσα.

786. Τὸ ἐμβαδὸν σφαίρας παραγομένης ὑπὸ ἡμικύκλου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρόν του εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ δύο ἡμικανονικῶν ὁμοίων πολυγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου περὶ τὸν ἡμίκυκλον τοῦτον.

787. Δίδεται σφαῖρα (O, R) καὶ θεωροῦμεν τὰς τρισορθογωνίους τριέδους γωνίας, ἑκάστης τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι ἐφάπτονται τῆς σφαίρας ταύτης. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Σ τῶν τριέδρων τούτων γωνιῶν.

788. Ἐὰν R, ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, περιγεγραμμένης, ἐγγεγραμμένης καὶ ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν κύβου καὶ κανονικοῦ ὀκταέδρου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha')\ R^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 \quad \text{καὶ} \quad \beta')\ \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{\rho_2^2}.$$

γ') Εὕρετε ἀναλόγους σχέσεις διὰ τὸ κανονικὸν δωδεκάεδρον καὶ κανονικὸν εἰκοσάεδρον.

789. Θεωροῦμεν τρεῖς σφαίρας ἐφαπτομένας ἀνὰ δύο ἐξωτερικῶς καὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) κατὰ τὰ σταθερὰ σημεῖα A, B, Γ αὐτοῦ. Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν τούτων.

790. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$V = \pi\rho^2 \upsilon - \frac{1}{12}\pi\upsilon^3,$$

ἔνθα ρ ἡ ἀκτὶς τῆς μεσαίας τομῆς αὐτοῦ καὶ υ τὸ ὕψος του (**τύπος Maclaurin**).

791. Δίδεται κύβος ἀκμῆς α. Θεωροῦμεν ὅλας τὰς σφαίρας ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται ἐντὸς κύβου καὶ ἔχει διάμετρον ἴσην πρὸς $\frac{\alpha}{\nu}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν τούτων εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τοῦ ν.

792. Κυλίνδρου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διάμετρον τῆς βάσεως αὐτοῦ. Εἰς τοῦτον ἐγγράφομεν σφαῖραν καὶ ἐκ περιστροφῆς κῶνον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν τούτων σχημάτων εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3, 2, 1.

793. Ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ὄγκων τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου καὶ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

794. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἑνὸς κώνου καὶ ἑνὸς κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς περιγεγραμμένων ὡς σφαῖραν ἀκτῖνος R ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ὁλικοῦ ἐμβαδοῦ των ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.

795. Κῶνος ἐκ περιστροφῆς ὕψους υ καὶ ἀκτῖνος βάσεως R ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον σφαίρας ἀκτῖνος R_1. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο τούτων σχημάτων.

796. Ὁ ὄγκος V ὁ περιλαμβανόμενος μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων σφαιρῶν (O,R) καὶ (O,R_1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸν ὄγκον ἑνὸς κολούρου κώνου, ἔχοντος βάσεις τοὺς μεγίστους κύκλους τῶν σφαιρῶν τούτων καὶ ὕψος τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως $d = R - R_1$ τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν.

797. Δύο ἴσαι σφαῖραι (O,R) καὶ (O_1R_1) εἶναι τοιαῦται ὥστε $OO_1 = 4R$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V, ὁ περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν σφαιρῶν καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου

798. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καὶ κύλινδρος ἐγγεγραμμένος εἰς τὴν σφαῖραν ἀκτῖνος βάσεως R/2. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους αὐτῶν.

799. Δίδεται ἡμίκυκλος διαμέτρου ΑΒ καὶ σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Μὲ διαμέτρους ΑΓ καὶ ΓΒ γράφομεν δύο ἄλλους ἡμικύκλους ἐντὸς τοῦ πρώτου. Τὸ ὅλον σχῆμα στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ κατὰ γωνίαν 2π. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχήματος, τὸν ὁποῖον θὰ γράψῃ τὸ καμπυλόγραμμον τρίγωνον, τὸ σχηματιζόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν ἡμικύκλων, συναρτήσει τῶν ΑΓ=α καὶ ΓΒ=β.

800. Θεωροῦμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς, περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν (O,R). Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὑπὸ τούτων ὁριζομένων ἐπὶ τῆς σφαίρας μονοβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.

801. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος ἀμφικύρτου σφαιρικοῦ φακοῦ ἐκ τοῦ πάχους αὐτοῦ ε καὶ τῶν ἀκτίνων R, R_1 τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τοῦτον.

802. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ὁ φακὸς εἶναι κοιλόκυρτος.

803. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἀμφικοίλου φακοῦ, συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R καὶ R_1 τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι τὸν ὁρίζουν, τοῦ πάχους ε αὐτοῦ καὶ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς καθέτου τομῆς αὐτοῦ πρὸς τὸν κύριον ἄξονα τοῦ φακοῦ.

804. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κώνου ἐκ περιστροφῆς ἀκτῖνος βάσεως ρ, περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτῖνος R.

805. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας (O,R) καὶ (O,R_1) ὁμοκέντρους μὲ $R > R_1$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος V, ὁ περιλαμβανόμενος μεταξὺ τῶν σφαιρῶν καὶ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων, ἀπεχόντων ἀπὸ τὸ κέντρον O ἀποστάσεις ἀντιστοίχως α καὶ α+β, ἔνθα $\alpha+\beta < R$ καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου O.

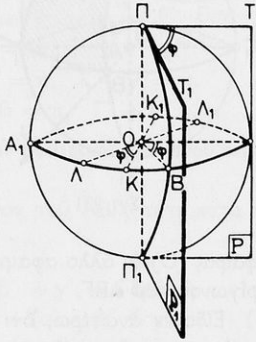
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ — ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

255. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ ΣΦΑΙΡΑΣ. Ἔστω σφαῖρα (Ο, R) καὶ $ΑΒΑ_1$ μέγιστος κύκλος αὐτῆς. Ἔστωσαν Π καὶ $Π_1$ οἱ πόλοι τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου τῆς σφαίρας.

Ἔστωσαν (Ρ) καὶ $(Ρ_1)$ δύο ἐπίπεδα, διερχόμενα διὰ τοῦ ἄξονος $ΠΠ_1$. Ταῦτα τέμνουν τὴν σφαῖραν (Ο, R) κατὰ δύο μεγίστους κύκλους $(ΠΑΠ_1)$ καὶ $(ΠΒΠ_1)$. Εἰς τὸ σημεῖον Π ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΠΤ καὶ $ΠΤ_1$ τῶν ἡμικύκλων $(ΠΑΠ_1)$ καὶ $(ΠΒΠ_1)$. Ἡ γωνία φ τῶν ἐφαπτομένων ΠΤ καὶ $ΠΤ_1$ καλεῖται **γωνία** τῶν δύο ἡμικύκλων $(ΠΑΠ_1)$ καὶ $(ΠΒΠ_1)$. Αἱ ΠΤ καὶ $ΠΤ_1$ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων (Ρ) καὶ $(Ρ_1)$.



Σχ. 230

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς γωνίας $ΤΠΤ_1$ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου τῆς διέδρου $ΑΠΠ_1Β$, δηλαδὴ $|φ| = |\widehat{ΑΟΒ}|$. Ἡ τιμὴ αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ τόξου ΑΒ τοῦ μεγίστου κύκλου $(ΑΒΑ_1)$ τῆς σφαίρας (Ο).

Ὁ μέγιστος κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς πόλους τὰ σημεῖα Π καὶ $Π_1$ περιέχει τοὺς πόλους Κ, $Κ_1$ καὶ Λ, $Λ_1$ τῶν μεγίστων κύκλων $ΠΑΠ_1$ καὶ $ΠΒΠ_1$ ἀντιστοίχως.

Ἂν αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΚΟΛ ἔχουν τὴν αὐτὴν διάταξιν, εἶναι **ἴσαι,** διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους. Ἂν ὅμως ἔχουν ἀντίθετον διάταξιν, τότε εἶναι **παραπληρωματικαί.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

ΟΡΙΣΜΟΣ : Γωνία δύο μεγίστων κύκλων σφαίρας καλεῖται ἡ γωνία τῶν ἐφαπτομένων τῶν μεγίστων τούτων κύκλων εἰς τὰ σημεῖα τῆς τομῆς αὐτῶν.

256. ΣΦΑΙΡΙΚΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΥΤΟΥ.— Θεωροῦμεν τρίεδρον γωνίαν Oxyz καὶ τυχοῦσαν σφαῖραν (Ο, R), ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κέντρον τὸ σημεῖον Ο (κορυφὴν τῆς τριέδρου). Αἱ ἀκμαὶ Ox, Oy, Oz τέμνουν τὴν σφαῖραν κατὰ τὰ σημεῖα Γ, Β, Α ἀντιστοίχως.

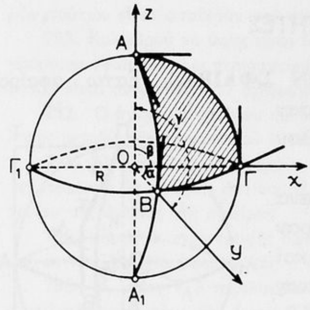
Αἱ ἕδραι xOy, yOz, zOx τέμνουν τὴν σφαῖραν κατὰ μεγίστους κύκλους αὐτῆς, διερχομένους διὰ τῶν σημείων Β, Γ καὶ Β, Α καὶ Α, Γ ἀντιστοίχως.

ΟΣΙΣΜΟΣ. Καλοῦμεν σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ τὸ Σύνολον τῶν σημείων τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.

Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καλοῦνται **κορυφαὶ** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Τὰ τόξα $\widehat{B\Gamma}=\widehat{\alpha}$, $\widehat{\Gamma A}=\widehat{\beta}$, $\widehat{AB}=\widehat{\gamma}$ καλοῦνται **πλευραὶ** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ τῶν ἐφαπτομένων τῶν μεγίστων τούτων κύκλων, θεωρουμένων ἀνὰ δύο, εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα Α, Β, Γ αὐτῶν, καλοῦνται **γωνίαι** τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 231

Αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς ἑδρικὰς γωνίας τῆς τριέδρου Oxyz.

Αἱ γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους τῶν διέδρων τῆς τριέδρου Oxyz.

Αἱ γνωσταὶ προτάσεις, αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὰς τριέδρους γωνίας, ἔχουν ἀντιστοίχους προτάσεις εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.

Εἰς τὴν παραπληρωματικὴν $Ox_1\, y_1\, z_1$ δοθείσης τριέδρου Oxyz ἀντιστοιχεῖ ἐπὶ τῆς σφαίρας (Ο) ἓν ἄλλο σφαιρικὸν τρίγωνον Α′Β′Γ′, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **πολικὸν** τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ.

Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ ὡρίσθη ὡς τομὴ τῆς σφαίρας καὶ μιᾶς τριέδρου γωνίας, ἐχούσης κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Ἐὰν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι κορυφὴ μιᾶς πολυέδρου γωνίας, τότε ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τῆς πολυέδρου ταύτης γωνίας εἶναι **σφαιρικὸν πολύγωνον.**

Ἑπομένως, ἐπὶ τῶν προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰς πολυέδρους γωνίας ἀντιστοιχοῦν προτάσεις ἀναφερόμεναι εἰς τὰ σφαιρικὰ πολύγωνα.

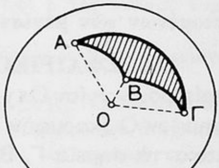
Ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ εἶναι **ὀρθογώνιον, δισορθογώνιον, τρισορθογώνιον, ἀμβλυγώνιον** ἢ **ὀξυγώνιον.**

Ἐπίσης δύναται νὰ εἶναι **ἰσόπλευρον, ἰσοσκελὲς** ἢ **σκαληνόν.**

Εἰς πᾶν σφαιρικὸν τρίγωνον διακρίνομεν **ὕψη, διαμέσους, διχοτόμους.**

Θὰ ἀναγράψωμεν ἐν τοῖς ἀκολούθοις ἰδιότητάς τινας ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ πολυγώνων.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Ἑκάστη πλευρὰ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.



Σχ. 232

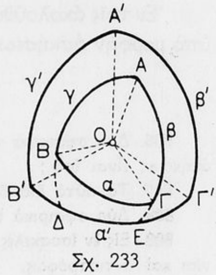
Ἔστω ΑΒΓ ἓν σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ ΑΓ ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ. Εἰς τὴν ἀντίστοιχον τρίεδρον γωνία Ο — ΑΒΓ ἔχομεν, ὡς γνωστόν :

$$|\sphericalangle \Gamma OB - \sphericalangle AOB| < \sphericalangle \Gamma OA < \sphericalangle \Gamma OB + \sphericalangle AOB.$$

Ἄρα : $$|\mathbf{AB} - \mathbf{B\Gamma}| < \mathbf{\Gamma A} < \mathbf{AB} + \mathbf{B\Gamma}.$$

258. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι πολικὰ ἀλλήλων, αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου.

Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' δύο πολικὰ ἀλλήλων σφαιρικὰ τρίγωνα. Ἔστω ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ τοῦ ΑΒΓ τέμνουν τὴν πλευρὰν Β'Γ' τοῦ Α'Β'Γ' εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὸ Β' εἶναι πόλος τοῦ ΑΕ, ἕπεται ὅτι $B'E = \frac{\pi}{2}$. Ἐπειδὴ τὸ Γ' εἶναι πόλος τοῦ ΑΔ, ἕπεται ὅτι $\Delta\Gamma' = \frac{\pi}{2}$ ἀκτ. Ἄρα: $B'E + \Delta\Gamma' = \pi$ καί, κατ' ἀκολουθίαν, ἐπειδὴ $B'\Delta + \Delta E + \Delta\Gamma' = \pi$, ἕπεται ὅτι: $\Delta E + B'\Gamma' = \pi$. Ἀλλ' ἡ τιμὴ τοῦ ΔΕ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς γωνίας Α καὶ $B'\Gamma' = \alpha'$. Ἄρα: $A + \alpha' = \pi$. Ὁμοίως $B + \beta' = \pi$, $\Gamma + \gamma' = \pi$.



Σχ. 233

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι: $A' + \alpha = \pi$, $B' + \beta = \pi$, $\Gamma' + \gamma = \pi$.

259. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ.— Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου περιέχεται μεταξὺ 2 ὀρθ. καὶ 6 ὀρθῶν.

Πράγματι, ἐὰν Α'Β'Γ' εἶναι τὸ πολικὸν τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} A + \alpha' = 2 \text{ ὀρθ.} \\ B + \beta' = 2 \text{ »} \\ \Gamma + \gamma' = 2 \text{ »} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} A + B + \Gamma + \alpha' + \beta' + \gamma' = 6 \text{ ὀρθ. ἢ} \\ A + B + \Gamma = 6 \text{ ὀρθ.} - (\alpha' + \beta' + \gamma') \end{array} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\alpha' + \beta' + \gamma' < 4$ ὀρθ., ἕπεται ὅτι:

$$A + B + \Gamma = 6 \text{ ὀρθ.} - \text{ἄθροισμα μικρότερον τῶν 4 ὀρθ., ἤτοι}$$
$$A + B + \Gamma > 2 \text{ ὀρθ.}$$

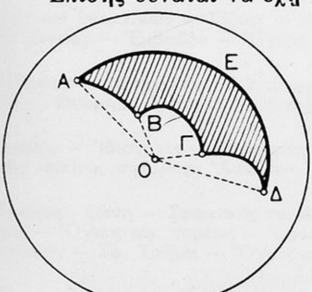
Ἀλλὰ $\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $A + B + \Gamma < 6$ ὀρθ.

Ἄρα: $\boxed{2 \text{ ὀρθ.} < A + B + \Gamma < 6 \text{ ὀρθ.}}$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι:

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχῃ δύο, ἢ τουλάχιστον τρεῖς, ὀρθὰς γωνίας. Ἐπίσης δύναται νὰ ἔχῃ δύο, ἢ τουλάχιστον τρεῖς, ἀμβλείας γωνίας.

Ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ δύο ὀρθὰς γωνίας, καλεῖται **δισορθογώνιον**. Ἐὰν δὲ ἔχῃ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, καλεῖται **τρισορθογώνιον**.



Σχ. 234

260. ΘΕΩΡΗΜΑ IV.— Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον τῶν 2π ἀκτινίων.

Πράγματι, εἰς τὴν πολυεδρικὴν γωνίαν Ο – ΑΒΓΔ ἔχομεν:

$$\widehat{BOA} + \widehat{\Gamma OB} + \widehat{\Delta O\Gamma} + \widehat{\Delta OA} < 4 \text{ ὀρθ.}$$

ἢ $AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A < 2\pi$ ἀκτινίων.

Σημείωσις : **Διαγώνιος** σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς κορυφὰς τοῦ σφαιρικοῦ τούτου πολυγώνου.

Ἐν τοῖς ἀκολούθοις ἀναγράφομεν μερικὰς ἰδιότητας τῶν σφαιρικῶν τριγώνων ὑπὸ μορφὴν ἀσκήσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

806. Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν, εἶναι ἴσα ;

807. Τὸ αὐτὸ διὰ δύο σφαιρικὰ πολύγωνα.

808. Δύο σφαιρικὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ἴσα ; καὶ πότε ;

809. Εἰς ἓν ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν ἀντιστοιχοῦν ἴσαι γωνίαι καὶ ἀντιστρόφως.

810. Ἐὰν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον θὰ εἶναι καὶ ἰσογώνιον καὶ ἀντιστρόφως.

811. Ἑκάστη πλευρὰ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑπολοίπων.

812. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν κυρτοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερον ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς ἣν ἀνήκει τοῦτο.

813. Ἐὰν δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶναι ὁμοίως ἄνισοι καὶ ἀντιστρόφως.

814. Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσα :

1) ἂν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

2) ἐὰν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας καὶ

3) ἂν ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

815. Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα ;

816. Ἰσχύει τοῦτο διὰ δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ;

Σημείωσις : Ἐπὶ μιᾶς σφαίρας **δὲν ἔχομεν σφαιρικὰ τρίγωνα ὅμοια.** Δὲν ὑφίσταται ἡ θεωρία τῆς ὁμοιότητος, ἡ ἀναφερομένη εἰς τὰ εὐθύγραμμα τρίγωνα καὶ πολύγωνα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΚΕΦΔΛΑΙΟΝ IX

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

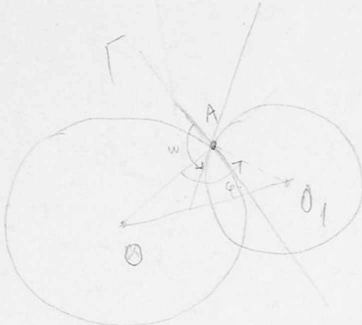
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

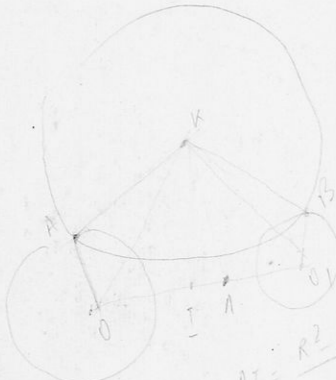
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVII

024000019930

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ', 1972 (VI) - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 51.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ 2254/18-4-72

Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : ΙΩ. ΚΑΜΠΑΝΑΣ Α.Ε., Φιλαδελφείας 4, Ἀθῆναι





$ΛI = \frac{R^2 - R_1^2}{OO_1}$

$KA^2 = KO^2 - R^2$

$KB^2 = KO_1^2 - R_1^2$

$KA^2 - KB^2 = KO^2 - KO_1^2 - (R^2$

ΟΕ
ΔΒ