ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Ι. ΙΩΑΝΝΙΔΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1969

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Ι. ΙΩΑΝΝΙΔΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1969

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ — ΑΙΣΘΗΤΟΣ ΧΩΡΟΣ

Ἡ σπουδὴ τῆς Γεωμετρίας ὅπως καὶ τῶν ἄλλων Ἐπιστημῶν συνδέεται μὲ τὴν προσπάθειαν τοῦ ἀνθρώπου νὰ ἑρμηνεύσῃ κατὰ ἕνα τρόπον καθολικὸν τὸν περὶ αὐτὸν Κόσμον. Κατὰ τὴν προσπάθειαν ταύτην συνειδητοποιεῖ ὅτι ἡ γνῶσις του εἶναι κατ' ἀνάγκην περιωρισμένη, διότι, ὡς ἐμπειρική, ἀναφέρεται εἰς ὅ,τι ἡ ἀντίληψις ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ Κόσμου τοῦ ἐπιτρέπει ἑκάστοτε νὰ ἐννοήσῃ. Πιστεύει ὅτι προώρισται νὰ ἔχῃ ἀντίληψιν πέραν τῆς ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρίας παρεχομένης καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν αὐτὴν ἀποβλέπει: πρὸς τὴν ἀπελευθέρωσίν του ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ δεσποτείας. Δὲν δύναται νὰ περιορισθῇ εἰς τὴν καταγραφὴν τῶν φαινομένων τοῦ αἰσθητοῦ Κόσμου, ἐνδιαφέρεται διὰ τὰς μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις. Θὰ προετίμα νὰ εὑρίσκεται εἰς ἕνα Κόσμον, τὸν ὁποῖον νὰ δύναται νὰ ἑρμηνεύσῃ ἐν παντί. Οὕτως ἄγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσῃ μὲ τὸν νοῦν του ἕνα τοιοῦτον Κόσμον, ἀπηλλαγμένον ἀπὸ τὰς ἀντιφάσεις τοῦ αἰσθητοῦ καὶ μέσῳ τούτου νὰ ἑρμηνεύσῃ τὸν αἰσθητόν, νὰ ἐπιστρέψῃ δηλαδὴ εἰς αὐτόν. Εἰς τὴν περιοχὴν τῆς Ἐπιστήμης τοῦ Χώρου, ὁ δραματικὸς οὗτος ἀγὼν τοῦ ἀνθρωπίνου νοῦ καὶ αἱ σημειωθεῖσαι ἐπιτυχίαι δὲν ὑπῆρξαν θεαματικαί, δὲν ἀπησχόλησαν τὸ εὐρὺ κοινόν, θὰ παραμείνουν ὅμως αἱ εὐγενέστεραι κατακτήσεις τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, πρὸς τὰς ὁποίας πρέπει ἑκάστοτε νὰ ἀποβλέπωμεν, ὅταν ἡ πίστις μας πρὸς τὴν πνευματικὴν δημιουργίαν ἐμφανίζεται μειωμένη.

Πρέπει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι μέχρι τοῦ **Θαλοῦ τοῦ Μιλησίου** *(639-548 π.Χ.) ὁ ἀνθρώπινος νοῦς δὲν εἶχεν ἀπελευθερωθῆ ἀπὸ τὴν ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτείαν. Ἡ τοιαύτη ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτεία ἀπετέλει, μέχρι τῆς ἐποχῆς του τὴν προϋπόθεσιν καὶ τὴν αἰτίαν τῆς δημιουργίας τῆς Γεωμετρίας, τὴν ὁποίαν ἤσκουν οἱ Αἰγύπτιοι καὶ οἱ Ἀνατολικοὶ λαοί.*

Ὁ Θαλῆς διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ «Ἀπαγωγικοῦ συλλογισμοῦ» καὶ τῆς «Ὑποθέσεως», μετέφερε τὴν ἀναζήτησιν τῆς ἀληθείας ἀπὸ τὴν περιοχὴν τοῦ **αἰσθητοῦ** *εἰς τὴν περιοχὴν τοῦ* **νοητοῦ.** *Ἡ ὑπὸ τοῦ Θαλοῦ θεμελιωθεῖσα ἀποδεικτικὴ Ἐπιστήμη, τίποτε τὸ κοινὸν δὲν ἔχει μὲ τὴν πρὸ αὐτοῦ Γεωμετρίαν τῶν Ἀνατολικῶν λαῶν, διαφέρει αὐτῆς καὶ κατὰ τὸ περιεχόμενον καὶ κατὰ τὸν σκοπόν. Αἱ ἀπὸ τοῦ τέλους τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἐπελθοῦσαι βελτιώσεις καὶ τροποποιήσεις καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν* **παρουσίασιν** *τῆς Ἑλληνικῆς Γεωμετρίας, οὐδὲν σχεδὸν προσθέτουν εἰς τὴν δημιουργίαν τοῦ Θαλοῦ, ἡ ὁποία ὑπῆρξεν ἡ ἀπαλλαγὴ* τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ δεσποτείας. Ἡ ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτεία ἀντικαθίσταται διὰ τοῦ Θαλοῦ ὑπὸ τῆς Γεωμετρικῆς ἐποπτείας, καὶ ὁ **αἰσθητὸς Χῶρος** ὑπὸ τοῦ **Γεωμετρικοῦ Χώρου.**

Τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν τοῦ Γεωμετρικοῦ χώρου δυνάμεθα νὰ προσεγγίσωμεν ἐκ τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τοῦ αἰσθητοῦ χώρου, δι' ἀφαιρετικῆς ἐργασίας τοῦ νοῦ διὰ τῆς ὁποίας τὰ στοιχεῖα ταῦτα τοῦ αἰσθητοῦ χώρου (σημεῖον, γραμμή, ἐπιφάνεια κ.λ.π.) ἀπαλλάσσονται ἀπὸ τὰ μὴ κοινὰ αὐτῶν χαρακτηριστικὰ (χρῶμα, πάχος κ.λ.π.) μὲ τὰ ὁποῖα ἐμφανίζονται συνδεόμενα.

Ἡ μετάβασις ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐποπτικῶν ἐννοιῶν εἰς τὰς ἀντιστοίχους ἀφηρημένας ἐννοίας, αἱ ὁποῖαι θὰ ὀνομασθοῦν **γεωμετρικαὶ** εἶναι τὸ πρῶτον βῆμα πρὸς τὴν ἀφηρημένην Γεωμετρίαν.

Ἂν ὅμως ἀφορμὴ διὰ τὴν δημιουργίαν τῶν ἀνωτέρω γεωμετρικῶν ἐννοιῶν ὑπῆρξεν, ὡς ἀνωτέρω ἐσημειώσαμεν, ἡ ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρία, γεννᾶται εὐλόγως τὸ ἐρώτημα : Πῶς καὶ ἀπὸ ποίου σημείου ἡ Γεωμετρία καθίσταται ἀνεξάρτητος τῆς ἀνωτέρω ἐμπειρίας;

Ἡ ἀπάντησις εἰς τὸ ἐρώτημα τοῦτο συνδέεται μὲ τὴν κατανόησιν τοῦ σκοποῦ τῆς Γεωμετρικῆς ἐρεύνης. Ἂν ὁ σκοπὸς τῆς ἀφηρημένης Γεωμετρίας δὲν εἶναι ἡ θεώρησις τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καθ' ἑαυτὰς ἀλλὰ κυρίως ἡ ἔρευνα τῶν μεταξύ των σχέσεων, τότε ἡ ἀνεξαρτησία ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ χώρου ἐξασφαλίζεται ἅμα τῇ εἰσαγωγῇ τῶν ἐννοιῶν αἱ ὁποῖαι θὰ θεωρηθοῦν ὡς **ἀρχικαὶ** (μὴ ὁριζόμεναι ἐξ ἄλλων ἐννοιῶν) καὶ τοῦ διὰ τῶν τιθεμένων (εἰσαγομένων) ἀξιωμάτων καθορισμοῦ τῶν μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω ἀρχικῶν ἐννοιῶν σχέσεων. Ὁ τοιοῦτος ὅμως καθορισμὸς δύναται καὶ ἐπιβάλλεται νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτείας. Ἡ ἀντίθετος παραδοχὴ ὁδηγεῖ εἰς τὴν ὑποδούλωσιν τοῦ νοῦ εἰς τὸ αἰσθητόν, εἰς τὴν δεσποτείαν τῶν αἰσθήσεων ἐπὶ τῆς διαννοίας.

Οὕτως, ἡ Γεωμετρία θέλει θέση, δι' ἑαυτὴν τὰ ἀξιώματα αὐτῆς, ἀνεξαρτήτως τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτείας καὶ δύναται ἐκ τοῦ λόγου τούτου νὰ εἶναι Εὐκλείδειος ἢ μὴ Εὐκλείδειος.

Ὥστε ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀνεξαρτησία ἐκ τῆς ἐποπτείας τοῦ αἰσθητοῦ ἐξασφαλίζεται, εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, διὰ τῆς ἐκλογῆς τοῦ συστήματος τῶν ἀξιωμάτων ἐπὶ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται ἡ Γεωμετρία.

Ἅμα τῇ ἐκλογῇ τῶν ἀξιωμάτων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὰς μεταξὺ ἀρχικῶν ἐννοιῶν σχέσεις, καθορίζεται ὁ Γεωμετρικὸς χῶρος, εἰς τὴν ἔρευναν τοῦ ὁποίου ἀναφέρεται ἡ ἀντίστοιχος Γεωμετρία.

Ἡ Γεωμετρία τὴν ὁποίαν ἡμεῖς θὰ σπουδάσωμεν εἶναι ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία ἢ ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλειδείου χώρου καὶ περὶ τῶν ἀξιωμάτων καὶ θεωρημάτων αὐτῆς γίνεται λόγος εἰς τὸ βιβλίον τοῦτο.

2. ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ἡ Γεωμετρία βασίζεται ἐπὶ **ἀρχικῶν** τινων ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι, ὡς ἀπέδειξεν ἡ περὶ τὰς βάσεις αὐτῆς ἔρευνα, δὲν δύνανται νὰ ὁρισθοῦν.

Πράγματι, διὰ τὸν ὁρισμὸν κάθε ἐννοίας πρέπει νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀναγκαίως ἄλλαι ἔννοιαι, αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν σειράν των, θὰ πρέπει νὰ ὁρισθοῦν ἐπίσης τῇ βοηθείᾳ ἄλλων ἐννοιῶν κ.ο.κ. Ἐπιβάλλεται ἑπομένως, ἐκ τοῦ λόγου τούτου, ὅπως ἐκλεγοῦν ὡρισμένα στοιχεῖα, αἱ ἔννοιαι τῶν ὁποίων θὰ θεωρηθοῦν ὡς **ἀρχικαί,** *βάσει δὲ τούτων ὁρισθοῦν αἱ ἔννοιαι τῶν ἄλλων στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου. Αἱ ἀρχικαὶ αὗται ἔννοιαι ὠνομάσθησαν* **θεμελιώδη ἢ ἀρχικὰ** *στοιχεῖα τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου.*

Ὡς θεμελιώδη Γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἐθεωρήθησαν τὸ **σημεῖον,** *ἡ* **εὐθεῖα** *καὶ τὸ* **ἐπίπεδον.**

Τὰ στοιχεῖα ταῦτα πρέπει νὰ θεωρηθοῦν ἀνεξαρτήτως καὶ ἀσχέτως τῆς προελεύσεώς των ἢ τοῦ ἐποπτικοῦ των περιεχομένου.

Αἱ ἀνωτέρω ἀρχικαὶ ἔννοια: τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου θὰ ὁρισθοῦν ἐμμέσως διὰ τῶν **ἀξιωμάτων** *τῆς Γεωμετρίας, ἤτοι τῶν ἀρχικῶν προτάσεων, διὰ τῶν ὁποίων ὁρίζονται αἱ μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω Γεωμετρικῶν στοιχείων σχέσεις. Εἰς τὰς σχέσεις αὐτὰς ἀναφέρεται ἡ Γεωμετρικὴ θεωρία καὶ ὄχι εἰς τὰ Γεωμετρικὰ ἀντικείμενα καθ' ἑαυτά.*

Ἡ ἔννοια τῆς **εὐθείας** *τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου θὰ καθορισθῇ ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τὰς ὁποίας ἡμεῖς θὰ ἀποδώσωμεν εἰς αὐτήν, θὰ δεχθῶμεν ὅτι ἔχει.*

Οὕτω διὰ τοῦ ἀξιώματος:

«Πᾶσα εὐθεῖα περιέχει δύο τοὐλάχιστον σημεῖα», *δεχόμεθα μίαν σχέσιν μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν τῆς εὐθείας καὶ τοῦ σημείου, ἡ ὁποία περιγράφεται διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος.*

Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ὁρίζονται **ἐμμέσως** *τὰ Γεωμετρικὰ ἀντικείμενα διὰ τῶν ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας.*

Ἡ ὕπαρξις τῶν ἀντικειμένων τὰ ὁποῖα ὠνομάσαμεν Γεωμετρικὰ στοιχεῖα εἶναι ἕνα ἀξίωμα τῆς Γεωμετρίας: τὸ ἀξίωμα τῆς ὑπάρξεως.

Τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας, μακρὰν τοῦ νὰ ἔχουν τὴν μορφὴν δογμάτων, ἐκφράζουν τὰς θεμελιώδεις ἀληθείας, τὰς ὁποίας ἡ πεῖρα καὶ ἡ παρατήρησις μόναι, δὲν δύνανται νὰ δώσουν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀξιωμάτων ἐπὶ τῶν ὁποίων ἱδρύεται ἡ Γεωμετρικὴ θεωρία, ὀνομάζεται καὶ **σύστημα** *ἀξιωμάτων αὐτῆς. Ἡ ἐκλογὴ ἑνὸς συστήματος ἀξιωμάτων εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἀποτελεῖ τὴν* **θεμελίωσιν** *αὐτῆς.*

Ἡ μέθοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἵδρυσις τῆς Γεωμετρίας βασίζεται ἐπὶ ἀξιωμάτων ὠνομάσθη **ἀξιωματική.**

Ἡ κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἵδρυσις τῆς Γεωμετρίας, δὲν ἐπιβάλλεται μόνον διὰ τὸν λόγον ὅτι ἀποκαλύπτει εἰς τὸν σπουδάζοντα αὐτὴν τὸ κάλλος τῆς κατὰ **Λόγον** *ἐξαρτήσεως τῶν Γεωμετρικῶν ἐννοιῶν, ἀλλὰ καὶ διότι ἐξοικειώνει τοῦτον μὲ τὴν αὐστηρότητα τῆς λογικῆς δημιουργίας, ἡ ὁποία εἶναι ἕνα προνόμιον τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, δίδουσα εἰς τοῦτο τὴν εὐκαιρίαν νὰ χαίρεται τὴν δημιουργίαν αὐτήν.*

Τὰ συμπεράσματα ἐκ τῆς κατὰ τὴν ἀξιωματικὴν μέθοδον ἐρεύνης τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν τοῦ Γεωμετρικοῦ

Χώρου, δὲν προκύπτουν, ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω καταδεικνύεται, ἐκ τῆς ἐμπειρίας, οὔτε δύναται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἐπαληθεύωνται ἐξ αὐτῆς.

Τουναντίον τὰ ἐκ τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας συμπεράσματα ἐμφανίζονται πολλάκις ἀρνούμενα τὴν ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρίαν.

Κατὰ τὴν περαιτέρω σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας θέλουν εἰσαχθῇ, κατὰ λογικὴν ἀνάγκην, ὡρισμένα Γεωμετρικὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα θὰ ὀνομασθοῦν **φανταστικὰ** *Γεωμετρικὰ στοιχεῖα. Τὰ στοιχεῖα αὐτὰ εἶναι στοιχεῖα τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου μὴ ἔχοντα, ἀσφαλῶς, σχέσιν μὲ τὴν ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐμπειρίαν. Οὕτως, ὁ Γεωμετρικὸς Χῶρος ἀποτελεῖ νοητικὸν κατασκεύασμα ὅλως διάφορον τοῦ αἰσθητοῦ Χώρου. Ἡ Γεωμετρικὴ ἕνεκα τούτου ἐποπτεία προώρισται νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς ἀληθείας τὰς ὁποίας οὐδέποτε θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ γνωρίσωμεν διὰ τῆς ἐκ τοῦ αἰσθητοῦ ἐποπτείας.*

Ἀπὸ τὴν καθαρότητα τοῦ Γεωμετρικοῦ συλλογισμοῦ ἐνθουσιασθεὶς ὁ B. Spinoza (1632 - 1677) δίδει εἰς τὴν φιλοσοφίαν του «Γεωμετρικὸν ρυθμόν».

3. Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τὰ **«Στοιχεῖα»** *τοῦ Εὐκλείδου (330 - 273 π.Χ.) ἀποτελοῦν τὸ πρῶτον εἰς τὴν ἱστορίαν παράδειγμα ἱδρύσεως Ἐπιστήμης διὰ τῆς ἀξιωματικῆς μεθόδου.*

Αἱ εἰς τὰ «Στοιχεῖα» περιλαμβανόμεναι προτάσεις, ὡς καὶ αἱ προτάσεις τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τὰ ἀξιώματα τοῦ Εὐκλείδου, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολον προτάσεων, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζεται διὰ τοῦ ὅρου **Εὐκλείδειος Γεωμετρία** *ἢ Γεωμετρία τοῦ* **Εὐκλειδείου Χώρου.**

Ἡ κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα σημειωθεῖσα συστηματικὴ ἔρευνα περὶ τὰς βάσεις τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἵδρυσιν ὑπὸ τῶν N. I. Lobatchewsky (1793 - 1856) καὶ J. Bolyai (1802 - 1860) μιᾶς πρώτης **μὴ Εὐκλειδείου Γεωμετρίας.**

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν αὐτὴν ἀντὶ τοῦ ε' αἰτήματος τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδου κατὰ τὸ ὁποῖον: **«Διὰ σημείου ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας, μία μόνον παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄγεται»,** *εἰσάγεται ἄλλο ἀξίωμα κατὰ τὸ ὁποῖον:* **«Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ἄγονται περισσότεραι τῆς μιᾶς εὐθεῖαι μὴ τέμνουσαι τὴν θεωρουμένην εὐθεῖαν».**

Ἀργότερον ἱδρύεται παρὰ τοῦ B. Riemann (1826 - 1866) μία ἄλλη μὴ Εὐκλείδειος Γεωμετρία εἰς τὴν ὁποίαν εἰσάγεται τὸ ἀξίωμα καθ' ὃ: **«Διὰ σημείου ἐκτὸς εὐθείας οὐδεμία παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην ἄγεται».**

Ἐκ πρώτης ὄψεως αἱ Γεωμετρίαι αὗται φαίνονται ἀρνούμεναι τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν. Δὲν πρόκειται ὅμως περὶ αὐτοῦ:

Τὸ περιεχόμενον τοῦ ἀνωτέρω ε' ἀξιώματος ἐτέθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου ὡς **«αἴτημα»** *καὶ οὐχὶ ὡς θεώρημα, ὅπως τὸ ἐθεώρησαν οἱ ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας ματαίως προσπαθήσαντες νὰ τὸ ἀποδείξουν Μαθηματικοί.*

Μόλις κατὰ τὸν 19ον αἰῶνα διαπιστοῦται ὅτι ἂν ἤθελεν ἐπιχειρηθῇ ἀπόδειξις *τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου διὰ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, οὐδεμία ἀντίφασις πρὸς τὰς εἰσαχθείσας προτάσεις προέρχεται.*

Ἐκ τῆς διαπιστώσεως αὐτῆς δημιουργοῦνται αἱ προϋποθέσεις ἱδρύσεως τῶν ἀνωτέρω νέων Γεωμετριῶν. Ἑκάστη τούτων εἶναι, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, Γεωμετρία ἑνὸς ἄλλου Χώρου, διαφόρου τοῦ Εὐκλειδείου. Δὲν ἔχει κατὰ ταῦτα νόημα ἡ ἐρώτησις : Ποία Γεωμετρία εἶναι ἡ ὀρθοτέρα. Καὶ αἱ δύο νεώτεραι Γεωμετρίαι εἶναι ὀρθαὶ ὅπως καὶ ἡ Γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδου.

Ἡ «Προβολικὴ Γεωμετρία», τὴν ὁποίαν θὰ σπουδάσωμεν πολὺ ἀργότερον, περιέχει καὶ τὰς τρεῖς ὡς ἄνω Γεωμετρίας ὡς μερικάς, οὕτως εἰπεῖν, περιπτώσεις αὐτῆς.

Μετὰ τοὺς N. I. Labatchewsky καὶ B. Riemann, ὁ D. Hilbert (1862 - 1943) ἀποβλέπων εἰς τὴν θεμελίωσιν τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ἐπὶ σταθερᾶς βάσεως, παρουσίασεν ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων διὰ τοῦ ὁποίου θεμελιοῦται πλήρως ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία. Τὸ σύστημα τοῦτο ἀποτελεῖ σήμερον τὴν βάσιν τῆς ἀναπτύξεως τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας εἰς τὸ Σχολεῖον.

Ἐπειδὴ εἰς τὰ Σχολικὰ βιβλία περιοριζόμεθα κατ' ἀνάγκην εἰς τὰς θεμελιώδεις προτάσεις, ὑφίσταται εὐρὺ πεδίον πρωτοβουλίας διὰ τὸν καθηγητὴν περὶ τὴν ἐκλογὴν τῶν θεμάτων, μέσω τῶν ὁποίων θὰ καταστῇ ἐφικτὴ ἡ ταχυτέρα ἐξοικείωσις τῶν μαθητῶν μὲ τὰς Γεωμετρικὰς ἐννοίας καὶ τὸν ἀπαγωγικὸν συλλογισμόν, διὰ τῶν ὁποίων κτᾶται ἡ Γεωμετρικὴ ἐποπτεία, ἤτοι ἡ γνῶσις τῶν στοιχείων καὶ σχημάτων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου καὶ τῶν μεταξύ των σχέσεων.

Ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη, τὰ θεμελιώδη Γεωμετρικὰ στοιχεῖα ἢ ἀντικείμενα τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου, κατατάσσονται εἰς τρεῖς κατηγορίας.

Ὀνομάζομεν **σημεῖα** *τὰ ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατηγορίας,* **εὐθείας** *τὰ ἀντικείμενα τῆς δευτέρας κατηγορίας καὶ* **ἐπίπεδα** *τὰ ἀντικείμενα τῆς τρίτης κατηγορίας. Συμβολίζομεν, συνήθως, τὰ σημεῖα μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα Α, Β, Γ, ... τοῦ ἀλφαβήτου, τὰς εὐθείας μὲ τὰ πεζὰ α, β, γ, ... καὶ τὰ ἐπίπεδα μὲ τὰ Λατινικὰ πεζὰ a, b, c, ... ἢ μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου τιθέμενα ἐντὸς παρενθέσεως.*

Τὰ ἀξιώματα ἐπὶ τῶν ὁποίων ἱδρύεται ἡ Εὐκλείδειος Γεωμετρία κατατάσσονται εἰς πέντε κατηγορίας:

1. Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν κατατάσσονται τὰ ἀξιώματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **περιέχειν ἢ ἀνήκειν.** *Τὰ ἀξιώματα ταῦτα δύνανται νὰ ὀνομάζωνται ἀξιώματα* **θέσεως.** *Οὕτω, τὸ ἀξίωμα:* «**Πᾶσα εὐθεῖα α περιέχει τοὐλάχιστον δύο σημεῖα Α καὶ Α διάφορα ἀλλήλων**», *εἶναι ἕνα ἀξίωμα θέσεως.*

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀξιώματος τούτου εἶναι ὅτι : Κάθε ἀντικείμενον τῆς δευτέρας κατηγορίας (εὐθεῖα), **περιέχει** *τοὐλάχιστον δύο ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατηγορίας (σημεῖα).*

2. Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν κατατάσσονται τὰ ἀξιώματα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **κεῖται μεταξύ.** *Τὰ ἀξιώματα ταῦτα ὀνομάζονται ἀξιώματα* **διατάξεως.** *Οὕτω, τὸ ἀξίωμα:* «**Μεταξὺ δύο ση-**

μείων Α καὶ Β μιᾶς **εὐθείας ε, ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖον Γ**», *εἶναι ἕνα ἀξίωμα διατάξεως.*

3. Ἡ τρίτη κατηγορία ἀξιωμάτων εἶναι ἡ τῶν ἀξιωμάτων τῆς **ἰσότητος.** *Τὰ ἀξιώματα ταῦτα ἀναφέρονται εἰς τὰ ὁρισθέντα βάσει τῶν ἀξιωμάτων θέσεως καὶ διατάξεως σχήματα, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται* **εὐθύγραμμον τμῆμα** *καὶ* **γωνία.**

Ἡ εἰς τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **εἶναι ἴσον.**

4. Ἡ τετάρτη κατηγορία ἀξιωμάτων περιλαμβάνει τὸ ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου θέλομεν ἐπανέλθει κατὰ τὴν εἰσαγωγήν του.

5. Ἡ πέμπτη κατηγορία περιλαμβάνει ἕνα ἀξίωμα συνεχείας, ὡς τὸ ἀξίωμα τοῦ Ἀρχιμήδους ἢ τὸ ἀξίωμα τοῦ R. Dedekind περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος εἰς ἑπομένην τάξιν.

4. ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ ΣΧΗΜΑ

Γεωμετρικὸν σχῆμα *ὀνομάζομεν κάθε πεπερασμένον ἢ μὴ σύνολον Γεωμετρικῶν στοιχείων.*

Αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν ἕνα Γεωμετρικὸν σχῆμα, ὀνομάζονται καὶ **ἰδιότητες** *αὐτοῦ.*

Ἡ διατύπωσις τῶν ἀνωτέρω σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν Γεωμετρικῶν σχημάτων, γίνεται διὰ τῶν ἀποδεικτέων προτάσεων ἢ **θεωρημάτων** *τῆς Γεωμετρίας.*

Ὑπόθεσιν *ἑνὸς θεωρήματος ὀνομάζομεν τὸ σύνολον τῶν συνθηκῶν, αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ὑφιστάμεναι μεταξὺ στοιχείων τινων ἑνὸς Γεωμετρικοῦ σχήματος. Ἐκ τῶν ὑφισταμένων ἐν τῇ ὑποθέσει συνθηκῶν συνεπάγονται αἱ πρὸς ἀπόδειξιν σχέσεις μεταξὺ αὐτῶν ἢ καὶ ἄλλων στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ σχήματος.*

Ἡ διὰ τῶν κανόνων τῆς Λογικῆς βεβαίωσις τῶν ἐκ τῆς ὑποθέσεως συνεπαγομένων ἰδιοτήτων ὀνομάζεται **ἀπόδειξις.**

Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀπόδειξις δέον ἀναγκαίως νὰ βασίζεται εἰς τὰ εἰσαχθέντα ἀξιώματα, τοὺς ὁρισμοὺς καὶ τὰ προηγουμένως ἀποδειχθέντα θεωρήματα. **Πόρισμα** *ἑνὸς θεωρήματος ὀνομάζεται πᾶσα πρότασις τῆς ὁποίας ἡ ἰσχὺς προκύπτει ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ θεωρήματος.*

Ὡς κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τῆς Γεωμετρικῆς θεωρίας θέλει καταστῇ σαφές, αἱ ἰδιότητες τῶν σχημάτων δύνανται νὰ εἶναι **μετρικαί,** *ὡς καὶ αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν μέτρησιν εὐθυγράμμων τμημάτων, γωνιῶν κλπ. ἢ* **γραφικαί.** *Ὡς γραφικαὶ ἰδιότητες τῶν σχημάτων χαρακτηρίζονται αἱ μὴ μετρικαὶ τοιαῦται.*

5. ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΥ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Εἶναι γνωστὸν ἀπὸ τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν, τὴν ὁποίαν διδασκόμεθα εἰς τὰς δύο πρώτας τάξεις τοῦ Γυμνασίου, ὅτι διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν διὰ τὴν **ἰσότητα** *δύο τριγώνων, καταφεύγομεν εἰς μέθοδον βασιζομένην ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς* **μετακινήσεως** *(μεταθέσεως) τοῦ ἑνὸς τούτων βάσει τῆς ὁποίας ἐλέγχομεν ἂν τοῦτο δύ-*

ναται, βάσει τῶν διδομένων συνθηκῶν, νὰ ἀχθῇ εἰς σύμπτωσιν πρὸς τὸ ἄλλο. Δεχόμεθα δηλαδὴ ὅτι ἕνα **γεωμετρικὸν σχῆμα** δύναται νὰ μετακινηθῇ καὶ ὅτι κατὰ τὴν τοιαύτην μετακίνησιν παραμένει **ἀναλλοίωτον.** Τοῦτο ὅμως δὲν δύναται νὰ σημαίνῃ ἄλλο τι εἰμὴ ὅτι παραμένει **ἴσον πρὸς ἑαυτό.** Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τὰς γωνίας.

Ἡ μέθοδος ἐπομένως ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὸ νὰ **ἀποδείξωμεν** τὰ θεωρήματα τῆς ἰσότητος χρησιμοποιοῦντες τὴν ἔννοιαν τῆς μετακινήσεως δὲν εἶναι ὀρθή, ἀκριβῶς διότι ἡ ἔννοια τῆς μετακινήσεως προϋποθέτει τὴν ἔννοιαν τῆς ἰσότητος τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν. Ἡ μέθοδος αὕτη προσήκει, βεβαίως, ὡς ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς «Ἐποπτικῆς Γεωμετρίας» ἡ ὁποία διδάσκεται εἰς τὰς πρώτας τάξεις τοῦ Γυμνασίου.

Εἰς τὴν θεωρητικὴν ὅμως Γεωμετρίαν, δὲν θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα τοῦ **ἀναλλοιώτου** τοῦ Γεωμετρικοῦ σχήματος, ἀλλὰ θὰ θέσωμεν ἄλλα ἀξιώματα διὰ τὴν κατοχύρωσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν προτάσεων τῆς Γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς ἰσότητος. Οὕτω θέλει συνειδητοποιηθῇ ἀμεσώτερον ἡ καθαρότης τοῦ Γεωμετρικοῦ συλλογισμοῦ.

Ὡς θέλει διαπιστωθῇ ἐκ τῆς ἀναπτύξεως τῆς εἰς τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον περιλαμβανομένης θεωρίας, δυνάμεθα, βασιζόμενοι μόνον εἰς τὰ ἀξιώματα τῶν τεσσάρων πρώτων κατηγοριῶν, χωρὶς δηλαδὴ τὴν χρησιμοποίησιν ἀξιώματός τινος συνεχείας, νὰ ἔχωμεν μίαν Γεωμετρικὴν θεωρίαν ἀνεξάρτητον ἀριθμητικῶν ἐννοιῶν. Αἱ εἰσαγόμεναι ἑκάστοτε σχέσεις καὶ πράξεις διατηροῦν τὸν Γεωμετρικὸν χαρακτῆρα αὐτῶν καὶ ὅταν ἀκόμη ὑφίσταται ἀναλογία πρὸς τὰς ἀντιστοίχους ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτως, ἡ διδασκαλία τῆς Γεωμετρίας κατὰ τὰς Γ' καὶ Δ' τάξεις τῶν Γυμνασιακῶν σπουδῶν καθίσταται συντομωτέρα καὶ ἁπλουστέρα.

Παρατήρησις

Αἱ ἐν τῇ εἰσαγωγῇ ἐκτιθέμεναι σκέψεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ Γεωμετρικοῦ χώρου καὶ τὴν θεμελίωσιν τῆς Γεωμετρίας δύνανται νὰ ἀναπτύσσωνται ὑπὸ τοῦ διδάσκοντος κατὰ τὴν πρόοδον τῆς διδασκαλίας καὶ ἐπὶ τῇ εὐκαιρίᾳ τῆς εἰσαγωγῆς εἰς τὰς οἰκείας ἑνότητας εἰς τὰς ὁποίας αἱ σκέψεις αὗται ἀναφέρονται.

Ἡ ἀπὸ τῶν πρώτων ἤδη ὁρισμῶν τῆς Γεωμετρίας εἰσαγωγὴ τῆς ἐννοίας τοῦ **«προσανατολισμοῦ»** εἰς τὴν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἐπίπεδον ἐθεωρήθη ἀναγκαία διὰ τὴν ἁπλούστευσιν τῆς διατυπώσεως, τὴν ἀποφυγὴν τῆς περιπτωσιολογίας καὶ τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων. Ἐν προκειμένῳ, ἀλλὰ καὶ εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ εἰς τὰς βασικὰς ἐννοίας τοῦ γινομένου καὶ τοῦ λόγου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ τὴν ἔννοιαν τοῦ προσανατολισμοῦ εἰς τὸν Χῶρον, ἠκολουθήσαμεν τὰς ὑποδείξεις τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν μὴ εἰσέτι ἐκδοθεῖσαν ἐργασίαν τοῦ καθηγητοῦ κ. **Παναγ. Λαδοπούλου: «Ἐπὶ βασικῶν τινων ἐννοιῶν τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας».**

Καθ' ὅσον, ἐξ ἄλλου, ἀφορᾷ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ «Γεωμετρικοῦ Χώρου» καὶ τὴν ἀνάλυσιν τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν ταύτην, συνεβουλεύθημεν τὴν Εἰσαγωγὴν τοῦ συγγράμματος «Στοιχεῖα Προβολικῆς Γεωμετρίας» Τόμος Α' Ἔκδοσις 1966 τοῦ αὐτοῦ καθηγητοῦ κ. Π. Λαδοπούλου, διὰ τῆς ὁποίας δίδεται λεπτομερὴς καὶ διαφωτιστικὴ ἀνάλυσις τῶν ἀνωτέρω στοιχείων καὶ ἐννοιῶν, ὡς καὶ γενικώτερον τῆς πορείας τῆς ἀνθρωπίνης σκέψεως, εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν Ἐπιστήμην τοῦ Χώρου, ἀπὸ τοῦ Θαλοῦ μέχρι σήμερον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΘΕΣΕΩΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας εἶναι ἡ γνῶσις τῶν μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου **σχέσεων,** ἡ ἑρμηνεία καὶ περιγραφὴ τῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα συνθέτουν τὴν ἔννοιαν τοῦ **γεωμετρικοῦ σχήματος,** ὡς συνόλου στοιχείων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου καὶ ἡ περαιτέρω ἀναζήτησις νέων **ἰδιοτήτων** τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, βασιζομένων εἰς γνωστὰς ἰδιότητας τούτων καὶ ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὸ θεωρούμενον ἑκάστοτε σχῆμα.

ΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Τὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα τῶν ὁποίων αἱ ἔννοιαι θεωροῦνται ὡς ἀρχικαὶ εἶναι τὸ **σημεῖον,** ἡ **εὐθεῖα** καὶ τὸ **ἐπίπεδον.**

Δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχουν αἱ ἀνωτέρω τρεῖς κατηγορίαι ἀντικειμένων τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου. Τὰ ἀντικείμενα τῆς πρώτης κατηγορίας, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν **σημεῖα,** συμβολίζονται, συνήθως, μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα Α, Β, Γ, ... τοῦ ἀλφαβήτου. Τὰ ἀντικείμενα τῆς δευτέρας κατηγορίας, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν **εὐθείας,** συμβολίζονται μὲ τὰ πεζὰ γράμματα α, β, γ, ... τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὰ ἀντικείμενα τῆς τρίτης κατηγορίας, τὰ ὁποῖα ὀνομάζομεν **ἐπίπεδα,** συμβολίζονται μὲ τὰ Λατινικὰ πεζὰ γράμματα a, b, c, ... ἢ μὲ τὰ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, τιθέμενα ἐντὸς παρενθέσεως.

Δεχόμεθα ὅτι μεταξὺ τῶν ἀνωτέρω Γεωμετρικῶν στοιχείων ὑπάρχουν ὡρισμέναι σχέσεις, διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν ὁποίων εἰσάγονται αἱ ἀρχικαὶ ἔννοιαι αἱ ἀποδιδόμεναι δι᾽ ὅρων ὡς οἱ : **κεῖται** ἢ **εἶναι ἐπί, εἶναι μεταξύ, εἶναι ἴσον** κλπ.

Τὰ **ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας** εἶναι αἱ θεμελιώδεις προτάσεις, αἱ διατυπούμεναι μέσῳ τῆς βασικῆς γλώσσης καὶ τῶν ἀνωτέρω ἀρχικῶν ἐννοιῶν, διὰ τῶν ὁποίων περιγράφονται, κατὰ τρόπον πλήρη καὶ ἀκριβῆ, αἱ μεταξὺ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων εἰσαγόμεναι σχέσεις.

Τὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας διαιροῦνται εἰς πέντε κατηγορίας(1).

---

(1) Βλέπε: Εἰσαγωγῆς παραγρ. 3.

Εἰς ἑκάστην τῶν κατηγοριῶν τούτων ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμὸς ἀξιωμάτων τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὰς θεμελιώδεις διὰ τόν Γεωμετρικὸν μας ἔνστικτον ἀληθείας, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ἔννοιαν.

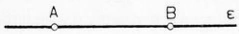
ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΘΕΣΕΩΣ

Ὡς ἀξιώματα **θέσεως** χαρακτηρίζονται ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **ἀνήκειν** ἢ **περιέχειν.**

Τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς :

1. ΑΞΙΩΜΑ. *Πᾶσα εὐθεῖα ε περιέχει τουλάχιστον δύο σημεῖα Α καὶ Β διάφορα ἀλλήλων.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Α, ἢ τὸ Β, **κεῖται ἐπὶ** τῆς ε ἢ ὅτι **ἀνήκει** εἰς τὴν ε ἢ καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ε **διέρχεται** διὰ τοῦ Α ἢ τοῦ Β. (Σχ. 1) (1).



Σχ. 1

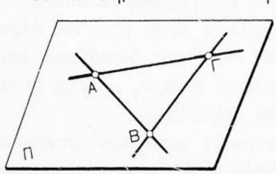
Ὅροι τινὲς ἐκ τῶν ἀνωτέρω, θεωρούμενοι ταυτόσημοι πρὸς τὸν ὅρον «ἀνήκειν» ἢ «περιέχειν», ὡς ὁ ὅρος «κεῖται ἐπὶ» ἢ «διέρχεται» ἔχουν τὴν προέλευσίν των εἰς τὴν ἐποπτείαν(2).

2. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν δύο σημεῖα Α καὶ Β εἶναι διάφορα ἀλλήλων, τότε ὑπάρχει εὐθεῖα ε περιέχουσα τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ μόνον μία.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β **ὁρίζουν** τὴν εὐθεῖαν ε ἢ ὅτι ἡ ε **συνδέει** τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

3. ΑΞΙΩΜΑ. *Πᾶν ἐπίπεδον (Π) περιέχει τουλάχιστον τρία σημεῖα Α, Β, Γ, διάφορα ἀλλήλων καὶ μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.*

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν τρία σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἕκαστον τῶν ὁποίων δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν ὁρίζουν τὰ ἄλλα δύο (Σχ. 3).



Σχ. 3

Ἀντὶ τοῦ ὅρου **δὲν κεῖται ἐπὶ** ἢ **δὲν ἀνήκει** δύναται νὰ εἰσάγεται ὁ ὅρος **κεῖται ἐκτός.** Οὕτω λέγοντες ὅτι: τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΒΓ, ἐννοοῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

4. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τότε ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ ἕνα μόνον.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ **ὁρίζουν** τὸ ἐπίπεδον (Π).

---

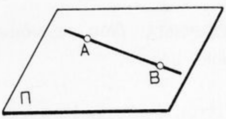
(1) Αἱ εἰς τὸ κείμενον παρεμβαλλόμεναι γραφικαὶ εἰκόνες ἢ γραφικὰ σχήματα δὲν εἶναι ἄλλο τι εἰμὴ **σύμβολα** τοῦ περιεχομένου τῶν διὰ τῶν ἀντιστοίχων ἀξιωμάτων ἢ θεωρημάτων περιγραφομένων σχέσεων. Εἶναι ἀπεικονίσεις τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου εἰς τὸν αἰσθητὸν Χῶρον.

(2) Οἱ ὅροι οὗτοι εἶναι ἄνευ περιεχομένου εἰς τὴν Θεωρητικὴν Γεωμετρίαν.

Ἐφεξῆς λέγοντες ἐπίπεδον ΑΒΓ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

5. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (Π), διάφορα ἀλλήλων, τότε κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι σημεῖον τοῦ (Π).*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ **κεῖται ἐπὶ** τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἢ ὅτι **ἀνήκει** εἰς τὸ (Π) ἢ ὅτι **εἶναι εὐθεῖα** αὐτοῦ (Σχ. 5).

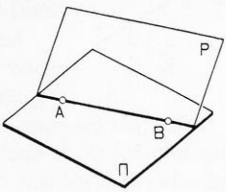


Σχ. 5

6. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν δύο ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ), διάφορα ἀλλήλων, ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, τότε ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β.*

Ἐκ τοῦ ἀξιώματος τούτου ἕπεται ὅτι: Κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν δύο ἐπιπέδων καὶ ἀντιστρόφως, κάθε κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ ὀνομάζεται **τομὴ** τῶν ἐπιπέδων (Π) καὶ (Ρ) ἢ καὶ **ἴχνος** ἑκάστου τούτων ἐπὶ τοῦ ἄλλου. (Σχ. 6).

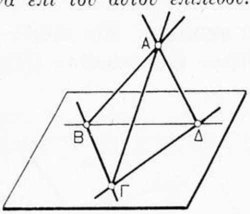


Σχ. 6

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) **τέμνονται** ἢ ὅτι ἕκαστον τούτων **τέμνει** τὸ ἄλλο κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

7. ΑΞΙΩΜΑ. *Ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.*

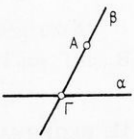
Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἕκαστον τῶν ὁποίων κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ἄλλα τρία. (Σχ. 7). Βάσει τῶν ἀνωτέρω ἀξιωμάτων ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς προτάσεις:



Σχ. 7

8. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο εὐθεῖαι α καὶ β, διάφοροι ἀλλήλων, ἔχουν τὸ πολὺ ἕνα κοινὸν σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, τότε τὰ σημεῖα αὐτὰ ὡς ἀνήκοντα εἰς τὴν α, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (2), τὴν προσδιορίζουν. Ἀφοῦ ὅμως ἀνήκουν καὶ εἰς τὴν β, δυνάμει τοῦ αὐτοῦ ἀξιώματος (2), τὴν προσδιορίζουν. Ἑπομένως ἡ α συμπίπτει μὲ τὴν β. Συμβολικῶς: $\alpha \equiv \beta$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ α καὶ β εἶναι διάφοροι ἀλλήλων.



Σχ. 8

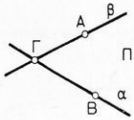
Τὸ κοινὸν σημεῖον Γ δύο εὐθειῶν α καὶ β ὀνομάζεται **τομὴ** αὐτῶν ἢ καὶ ἴχνος ἑκάστης τούτων ἐπὶ τῆς ἄλλης. (Σχ. 8).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι α καὶ β **τέμνονται** ἢ ὅτι ἑκάστη τούτων **τέμνει** τὴν ἄλλην κατὰ τὸ σημεῖον Γ.

Οὕτως ἡ εὐθεῖα α καὶ ἡ εὐθεῖα β, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Γ τῆς α καὶ ἕνα σημεῖον Α κείμενον ἐκτὸς τῆς α (Σχ. 8), εἶναι δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Γ.

9. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π) καὶ ἕνα μόνον.

Ἤτοι, ὑπάρχει ἐπίπεδον (Π) περιέχον τὰς εὐθείας α καὶ β καὶ ἕνα μόνον.



Σχ. 9

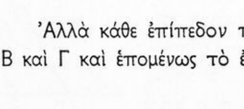
Ἀπόδειξις. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν α καὶ β περιέχει, πλὴν τοῦ κοινοῦ σημείου Γ αὐτῶν (Σχ. 9) καὶ ἕνα ἄλλο. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ σημεῖα αὐτά, κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν β καὶ α καὶ διάφορα τοῦ Γ.

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (8), τὰ δύο ταῦτα νέα σημεῖα εἶναι διάφορα ἀλλήλων καὶ δὲν κεῖνται μετὰ τοῦ Γ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (2).

Τὰ τρία ὅμως σημεῖα Α, Β, Γ προσδιορίζουν, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (4), ἕνα ἐπίπεδον εἰς τὸ ὁποῖον περιέχεται, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (5), ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν.

Κάθε ἐπίπεδον περιέχον τὰς δύο ταύτας εὐθείας θὰ περιέχῃ τὰ τρία ἐν λόγῳ σημεῖα. Ἑπομένως, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (4), ταυτίζεται πρὸς τὸ πρῶτον ἐπίπεδον, τὸ προσδιοριζόμενον ὑπὸ τῶν σημείων τούτων.

10. ΘΕΩΡΗΜΑ. Μία εὐθεῖα α καὶ ἕνα σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π) καὶ ἕνα μόνον.



Σχ. 10

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς α ὑπάρχουν, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (1), δύο σημεῖα Β καὶ Γ (Σχ. 10).

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, προσδιορίζουν, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (4), ἕνα ἐπίπεδον (Π). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο (Π), ὡς περιέχον τὰ Β καὶ Γ, περιέχει, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (5), τὴν εὐθείαν α.

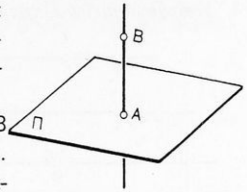
Ἀλλὰ κάθε ἐπίπεδον περιέχον τὴν α καὶ τὸ Α, θὰ περιέχῃ τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ καὶ ἑπομένως τὸ ἐπίπεδον τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ (Π).

11. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ Α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καὶ τὸ Β ἐκτὸς αὐτοῦ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) δὲν ἔχουν, ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 11) καὶ τὸ ἐπίπεδον (Π) εἶχον ἕνα δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον Γ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ἔκειτο (5) ἐπὶ τοῦ (Π). Ἀλλὰ τότε καὶ τὸ σημεῖον Β θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ (Π), τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως.

Τὸ σημεῖον Α ὀνομάζεται **τομὴ** τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἢ καὶ **ἴχνος** αὐτῆς ἐπὶ τοῦ (Π).

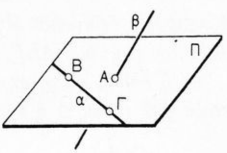
Ἡ εὐθεῖα ΑΒ λέγεται **τέμνουσα** τὸ (Π). Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ΑΒ **τέμνει** τὸ ἐπίπεδον (Π) κατὰ τὸ σημεῖον Α. (Σχ. 11).



Σχ. 11

12. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα α κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) καὶ μία εὐθεῖα β τέμνη τὸ (Π) κατὰ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α, τότε δὲν ὑπάρχει ἐπίπεδον περιέχον τὰς εὐθείας α καὶ β.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Β καὶ Γ δύο σημεῖα τῆς εὐθείας α. (Σχ. 12). Ἂν ὑπῆρχεν ἐπίπεδον (Ρ) περιέχον τὰς α καὶ β, τοῦτο θὰ περιεῖχε τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ λόγῳ τούτου δὲν θὰ ἦτο, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (4), διάφορον τοῦ (Π). Οὕτως, ἡ εὐθεῖα β τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) θὰ ἦτο εὐθεῖα τοῦ (Π). Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τῆς ὑποθέσεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ β τέμνει τὸ (Π).



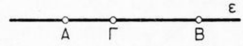
Σχ. 12

Δύο εὐθεῖα α καὶ β, ὡς αἱ ἀνωτέρω, θὰ ὀνομάζωνται **ἀσύμβατοι.**

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

Ὡς ἀξιώματα διατάξεως χαρακτηρίζονται ἐκεῖνα εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εἰσαγομένη ἀρχικὴ ἔννοια εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ **κεῖται μεταξὺ** ἢ **εἶναι μεταξύ.** Τὰ ἀξιώματα ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς :

13. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, διάφορα ἀλλήλων, καὶ τὸ σημεῖον Γ αὐτῆς κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Α καὶ εἶναι διάφορον τοῦ Α καὶ τοῦ Β.* (Σχ. 13)



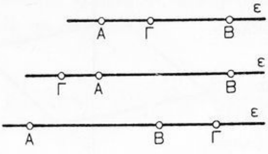
Σχ. 13

Διὰ τοῦ ἀξιώματος τούτου ὁρίζεται, ὡς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ἐμμέσως, ἡ ἔννοια τοῦ **κεῖται μεταξύ.**

14. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, διάφορα ἀλλήλων, τότε:*

1. Ὑπάρχει σημεῖον Γ τῆς ε κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.
2. Ὑπάρχει σημεῖον Γ τῆς ε, ὥστε τὸ Α νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

3. *Ὑπάρχει σημεῖον Γ τῆς ε ὥστε τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α* (Σχ. 14).



Σχ. 14

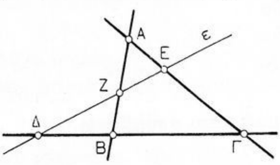
Λέγοντες ἐφεξῆς ὅτι τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι τὸ Γ εἶναι ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ, κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ἐξ ἄλλου, ἂν ἕνα σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ Α καὶ Β **κεῖνται ἑκατέρωθεν** αὐτοῦ.

15. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε, διάφορα ἀλλήλων, τότε τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν, καὶ μόνον αὐτό, κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.*

Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α, τότε ἀποκλείεται νὰ κεῖται τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ἢ τὸ Α μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

16. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας καὶ ε μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, μὴ περιέχουσα οὐδὲν ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημείων.*

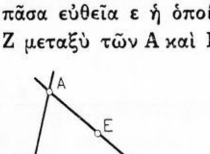
Ἂν ἡ εὐθεῖα ε ἔχῃ σημεῖον Ζ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, τότε ἢ ἔχει σημεῖον Ε μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α ἢ ἔχει σημεῖον Η μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.



Σχ. 16

Ἡ ἔννοια τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος, τὸ ὁποῖον εἶναι γνωστὸν ὡς ἀξίωμα τοῦ Pasch M., εἰσαχθὲν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξιωμάτων τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας ὑπὸ τοῦ D. Hilbert (1862-1943), εἶναι ὅτι, ἂν ἡ εὐθεῖα ε ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον καὶ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α καὶ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, ἤτοι ἂν ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α ἀποκλείεται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, ἤτοι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς μὲ τὴν ΒΓ, ἂν ὑπάρχῃ, δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.

17. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, πᾶσα εὐθεῖα ε ἡ ὁποία ἔχει σημεῖον Ε μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ σημεῖον Ζ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ.



Σχ. 17

Ἀπόδειξις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ε ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ ἔστω Δ τὸ σημεῖον τοῦτο. (Σχ. 17). Τότε, ἐκ τῶν τριῶν ἐπ' εὐθείας κειμένων σημείων Δ, Ε, Ζ, τὸ ἕν, ἔστω τὸ Ζ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ κεῖται (15) μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Ἀλλὰ τότε, ἀφοῦ τὰ σημεῖα Γ, Δ, Ε δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἡ εὐθεῖα ΑΒ, ἔχουσα σημεῖον μεταξὺ τῶν Δ καὶ Ε, πρέπει (16) νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε ἢ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ.

Ἡ εὐθεῖα ὅμως ΑΒ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε, διότι ἔχει σημεῖον, τὸ Α, μὴ κείμενον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε.

Ἐπίσης δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ (16).
Ὥστε, ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ε ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ ἄγει εἰς ἄτοπον.

ΤΟ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΝ ΤΜΗΜΑ

18. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **εὐθύγραμμον τμῆμα** *τὸ σύνολον δύο σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε.*

Τὸ διμελὲς τοῦτο σύνολον {Α, Β} θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον ΑΒ ἢ ΒΑ.

Θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ τῆς εὐθείας ε, τὰ ὁποῖα κεῖνται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, εἶναι **ἐσωτερικὰ σημεῖα** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἢ ὅτι **κεῖνται ἐπὶ** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ε, τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ Α καὶ τοῦ Β καὶ δὲν εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι **ἐξωτερικὸν σημεῖον** αὐτοῦ ἢ ὅτι **κεῖται ἐκτὸς** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β ὀνομάζονται **ἄκρα σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **ἄκρα** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

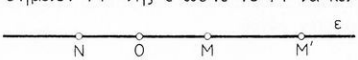
Σχ. 18

Δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀποτελοῦν διμελὲς σύνολον σημείων καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἔχουν τὴν αὐτὴν θέσιν (ταυτίζονται) ἐπὶ τῆς εὐθείας ε (δὲν εἶναι ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς, διάφορα ἀλλήλων). Τὸ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων Α καὶ Β (Α ≡ Β) ὁριζόμενον εὐθύγραμμον τμῆμα θὰ ὀνομάζεται **μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα.** Δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν ΑΒ = 0.

Η ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

19. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν ε καὶ δύο σημεῖα Ο καὶ Μ αὐτῆς διάφορα ἀλλήλων.

Βάσει τοῦ ἀξιώματος (14), ὑπάρχει σημεῖον Μ′ τῆς ε ὥστε τὸ Μ νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ′ καὶ σημεῖον Ν τῆς ε ὥστε τὸ Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν.



Σχ. 19

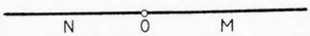
Τὸ σημεῖον Ο δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′, διότι τὸ Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Μ′ (15). Οὕτως ἐπὶ τῆς εὐθείας ε ἔχομεν τέσσερα σημεῖα: Μ, Μ′, Ο, Ν τοιαῦτα ὥστε τὸ Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν καὶ ὄχι μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′.

Ἂν Μ, Μ′, Ο καὶ Ν εἶναι τέσσαρα σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε τοιαῦτα ὥστε τὸ σημεῖον Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν, ἀλλὰ ὄχι μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′, θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῆς εὐθείας ε **κεῖνται πρὸς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου Ο** *καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς εὐθείας ε* **κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου Ο.** (Σχ. 19).

20. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἡμιευθεῖαν,** *ὁριζομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Μ μιᾶς εὐθείας ε, συμβολικῶς: ἡμιευθεῖα ΟΜ, τὸ σύνολον σημείων τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι: τὸ σημεῖον Ο καὶ τὰ σημεῖα Μ′ τῆς εὐθείας ε τὰ ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα ὥστε τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου Ο.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ′ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ (Σχ. 20.1).

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **ἀρχικὸν σημεῖον** τῆς ἡμιευθείας ΟΜ. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα ΟΜ **ἄρχεται** ἀπὸ τοῦ Ο.



Σχ. 20.1

Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΝ, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ τὸ σημεῖον Ν τὸ ὁποῖον εἶναι τοιοῦτον ὥστε τὸ Ο νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Ν ὀνομάζεται **ἀντικειμένη** τῆς ἡμιευθείας ΟΜ.

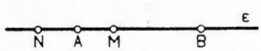
Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε σημεῖον τῆς ἡμιευθείας ΟΝ **κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ.**

Ἕκαστον, ἑπομένως, σημεῖον τῆς εὐθείας ε εἶναι ἀρχικὸν σημεῖον δύο ἡμιευθειῶν ὁριζομένων ἀπὸ δύο σημεῖα τῆς ε κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτοῦ.

Τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Ο τῶν ἡμιευθειῶν ΟΜ καὶ ΟΝ εἶναι κατὰ ταῦτα ἡ τομὴ τούτων.

Ἀναφερόμενοι εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος (18) σημειοῦμεν ὅτι:

Κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον εὐθ. τμήματος ΑΒ δύναται νὰ θεωρηθῆ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἡμιευθειῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἔχει ἀρχικὸν σημεῖον τὸ Α καὶ περιέχει τὸ Β καὶ ἡ ἄλλη ἔχει ἀρχικὸν σημεῖον τὸ Β καὶ περιέχει τὸ Α.



Σχ. 20.2

Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** αὐτοῦ. Κάθε σημεῖον Ν τῆς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 20.2), τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ εἶναι διάφορον τοῦ Α καὶ τοῦ Β, δύναται νὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** αὐτοῦ.

ΤΟ ΗΜΙΕΠΙΠΕΔΟΝ

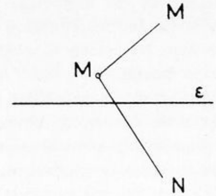
Ἀποδεικνύεται ὅτι:

21. Ἑκάστη εὐθεῖα ε τοῦ ἐπιπέδου χωρίζει ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὰ μὴ ἀνήκοντα εἰς αὐτήν, εἰς δύο σύνολα σημείων:

Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἑνὸς συνόλου ὁρίζει μὲ ἕνα τυχὸν σημεῖον Ν τοῦ ἄλλου συνόλου εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἕνα σημεῖον τῆς ε. Ἀντιθέτως:

Δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τοῦ αὐτοῦ συνόλου ὁρίζουν πάντοτε εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπὶ τοῦ ὁποίου δὲν κεῖται σημεῖον τῆς ε.

Θὰ λέγωμεν ὅτι, τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' (Σχ. 21) τοῦ ἐπιπέδου **κεῖνται πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος** τῆς εὐθείας ε καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τοῦ ἐπιπέδου **κεῖνται ἑκατέρωθεν** τῆς εὐθείας ε.



Σχ. 21

22. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἡμιεπίπεδον** *ὁριζόμενον ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ε ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ ἕνα σημεῖον Μ αὐτοῦ, μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ε συμβολικῶς: ἡμιεπίπεδον (ε, Μ), τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι: τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε καὶ τὰ σημεῖα Μ' τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα ὥστε τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε.*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ' κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Μ.

Ἡ εὐθεῖα ε ὀνομάζεται **ἀρχικὴ εὐθεῖα** τοῦ ἡμιεπιπέδου (ε, Μ).

Τὸ ἡμιεπίπεδον (ε, Ν) τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ε καὶ ἕνα σημεῖον Ν τοῦ ἐπιπέδου, ὅταν τὸ Ν εἶναι τοιοῦτον ὥστε τὰ Μ καὶ Ν νὰ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε, ὀνομάζεται ἡμιεπίπεδον **ἀντικείμενον** τοῦ (ε, Μ). Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ ἡμιεπιπέδου (ε, Ν) κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ε πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Μ.

Ἑκάστη, ἑπομένως, εὐθεῖα ἑνὸς ἐπιπέδου (Π) εἶναι ἀρχικὴ εὐθεῖα δύο ἡμιεπιπέδων ὁριζομένων ἀπὸ δύο σημεῖα τοῦ (Π) τὰ κείμενα ἑκατέρωθεν τῆς ε. Ἡ ἀρχικὴ ἡμιευθεῖα ε τῶν ἀντικειμένων ἡμιεπιπέδων (ε, Μ) καὶ (ε, Ν) εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἡμιεπιπέδων τούτων.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Βάσει τῶν ἀξιωμάτων θέσεως καὶ διατάξεως ἀποδεικνύεται ὅτι: Κάθε ἐπίπεδον (Π), **χωρίζει** ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ Χώρου εἰς δύο σύνολα σημείων, ὁριζόμενα βάσει τῶν ἀναλόγων πρὸς τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ ἐπίπεδον συνθηκῶν.

Τὰ δύο ταῦτα σύνολα εἶναι δύο **ξένα** πρὸς ἄλληλα ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ Χώρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Δίδονται ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ μία εὐθεῖα γ τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον (Π). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει καὶ τὰς τρεῖς εὐθείας α, β, γ.

2. Θεωροῦμεν τρία ἐπίπεδα (Α), (Β), (Γ), τὰ ὁποῖα, θεωρούμενα ἀνὰ δύο τέμνονται. Ἔστωσαν α, β, γ, αἱ τομαὶ τούτων θεωρουμένων ἀνὰ δύο [α ἡ τομὴ τῶν (Β) καὶ (Γ), β ἡ τομὴ τῶν (Γ) καὶ (Α) καὶ γ ἡ τομὴ τῶν (Α) καὶ (Β)]. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε κοινὸν σημεῖον δύο οἱωνδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν α, β, γ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν ἐπιπέδων (Α),(Β),(Γ).

3. Θεωροῦμεν τέσσαρας εὐθείας ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται χωρὶς νὰ κεῖνται ὅλαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν ν εὐθειῶν.

4. Θεωροῦμεν τέσσαρας εὐθείας ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται χωρὶς νὰ διέρχωνται ὅλαι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν ν εὐθειῶν.

5. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τέσσαρα σημεῖα τὰ ὁποῖα, θεωρούμενα ἀνὰ δύο, εἶναι διάφορα ἀλλήλων. Νὰ ὁρισθῇ τὸ πλῆθος τῶν εὐθ. τμημάτων τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω τέσσαρα σημεῖα.

Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων ἀλλήλων εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, ἤτοι πόσαι τὸ πολύ, ἢ τοὐλάχιστον, εἶναι αἱ ὁριζόμεναι ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω τέσσαρα σημεῖα διάφοροι ἀλλήλων εὐθεῖαι.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν ν σημείων.

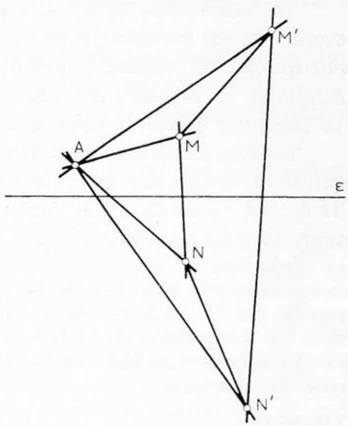
6. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὁριζομένων, διαφόρων ἀλλήλων σημείων, ἤτοι πόσα τὸ πολύ, ἢ τοὐλάχιστον, εἶναι τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τέσσαρας εὐθείας διάφορα ἀλλήλων σημεῖα.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν ν εὐθειῶν.

Ὁμὰς 2α

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις (21) ἡ ἀναφερομένη εἰς τὴν ὕπαρξιν τοῦ ἡμιεπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω A ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ε. Καθορίζομεν ὅπως εἰς ἕνα πρῶτον σύνολον ἀνήκῃ, κάθε σημεῖον M ἔχον τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : Μεταξὺ τῶν A καὶ M, ἤτοι ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος AM, δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς ε. Καθορίζομεν ἐπίσης ὅπως εἰς ἕνα δεύτερον σύνολον ἀνήκῃ κάθε σημεῖον N ἔχον τὴν ἰδιότητα : Μεταξὺ τῶν A καὶ N ὑπάρχει σημεῖον τῆς ε, ἤτοι ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος AN ὑπάρχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :



Σχ. 1α

(1) Ἂν εἶναι M καὶ M′ δύο σημεῖα τοῦ πρώτου συνόλου, τὸ εὐθ. τμῆμα MM′ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε(1).

(2) Ἂν εἶναι N καὶ N′ δύο σημεῖα τοῦ δευτέρου συνόλου, τὸ εὐθ. τμῆμα NN′ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε.

(3) Ἂν εἶναι M ἕνα σημεῖον τοῦ πρώτου συνόλου καὶ N ἕνα σημεῖον τοῦ δευτέρου, τὸ εὐθ. τμῆμα MN περιέχει πάντοτε ἕνα σημεῖον τῆς ε.

Πράγματι ἔχομεν :

(1) Ἐξ ὑποθέσεως, οὔτε τὸ εὐθ. τμῆμα AM οὔτε τὸ AM′ περιέχουν σημεῖον τῆς ε. Ἂν ἡ ε εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν M καὶ M′, τότε, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (18), θὰ εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν A καὶ M ἢ μεταξὺ τῶν A καὶ M′. Ἀλλὰ τοῦτο ἀκριβῶς ἀποκλείεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω ὑποθέσεως.

(2) Ἐξ ὑποθέσεως ἕκαστον τῶν εὐθ. τμημάτων AN καὶ AN′ περιέχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Ἑπομένως, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (17), τὸ εὐθ. τμῆμα NN′ δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε.

(3) Ἐξ ὑποθέσεως, τὸ εὐθ. τμῆμα AM δὲν περιέχει σημεῖον τῆς ε, ἐνῷ τὸ εὐθ. τμῆμα AN′ περιέχει ἕνα σημεῖον τῆς ε. Συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (16) μεταξὺ τῶν M καὶ N ὑπάρχει σημεῖον τῆς ε (ἡ εὐθεῖα MN τέμνει τὴν ε).

Θὰ λέγωμεν ὅτι, τὰ σημεῖα M καὶ M′ (Σχ. 1α) τοῦ ἐπιπέδου, κεῖνται πρὸς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ε καὶ ὅτι τὰ σημεῖα M καὶ N τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ε.

Τέλος σημειοῦμεν ὅτι, τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζόμενον σύνολον τῶν σημείων M εἶναι

---

(1) Δὲν ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ MM′ σημεῖον τῆς ε.

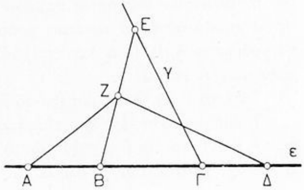
ἀνεξάρτητον τοῦ ἀρχικῶς θεωρηθέντος σημείου Α, ἤτοι ὅτι μονοσημάντως ὁρίζεται τὸ σύνολον τοῦτο ἐκ τῶν στοιχείων ε καὶ Α.

2. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται χωρὶς νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σύνολα σημείων (περιοχαὶ) εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον [1] ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς εὐθείας α, β, γ.

Νὰ ὁρισθοῦν ἐπίσης τὰ σύνολα σημείων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον ἀπὸ τέσσαρας εὐθείας α, β, γ, δ αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι θεωρούμεναι ἀνὰ δύο τέμνονται καὶ θεωρούμεναι ἀνὰ τρεῖς δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

3. Ἄν, δοθέντων τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ εὐθείας ε, τὸ σημεῖον Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ, τότε τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τῆς εὐθείας ε (Σχ. 3α). Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν γ διὰ τοῦ σημείου Γ, διάφορον τῆς ε, καὶ ἕνα σημεῖον Ε αὐτῆς, διάφορον τοῦ Γ. Ἀκολούθως ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΕ, θεωροῦμεν, μεταξὺ τῶν Β καὶ Ε, ἕνα σημεῖον Ζ. Οὕτω μεταξὺ τῶν Β καὶ Ζ δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς εὐθείας γ. Ἂν ἡ εὐθεῖα γ εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Ζ, τότε θὰ εἶχεν αὕτη, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος (16), σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, διότι ἐκ τῆς θέσεως τοῦ Ζ ἡ εὐθεῖα αὕτη δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Ζ. Ἀλλὰ τότε τὸ Γ θὰ ἔκειτο μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὴν ὑπόθεσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Ἑπομένως ἡ εὐθεῖα γ δὲν ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Ζ. Κατόπιν τούτου, ἡ εὐθεῖα γ πρέπει νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Ζ καὶ Δ. Οὕτω: τὰ σημεῖα Β, Ζ, Δ, δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἡ εὐθεῖα γ, δὲν ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Ζ, ἐνῶ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Δ καὶ Ζ. Ἑπομένως (13) ἡ γ πρέπει νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ Γ.



Σχ. 3α

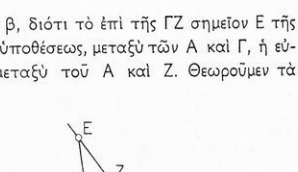
Ὥστε τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

4. Ἄν, δοθέντων τεσσάρων σημείων Α, Β, Γ, Δ μιᾶς εὐθείας ε, τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ καὶ τὸ Β μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, τότε τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν β διὰ τοῦ σημείου Β καὶ ἐπ' αὐτῆς ἕνα σημεῖον Ε διάφορον τοῦ Β (Σχ. 4α). Ἀκόμη θεωροῦμεν, ἐπὶ τῆς ΓΕ, καὶ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε, τὸ σημεῖον Ζ, ὡς καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΖΑ καὶ ΖΔ.

Μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ζ δὲν ὑπάρχει σημεῖον τῆς εὐθείας β, διότι τὸ ἐπὶ τῆς ΓΖ σημεῖον Ε τῆς β δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ζ. Ἐπειδὴ τὸ Β κεῖται, ἐξ ὑποθέσεως, μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, ἡ εὐθεῖα β ἔχει, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (16), σημεῖον μεταξὺ τοῦ Α καὶ Ζ. Θεωροῦμεν τὰ μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα σημεῖα Α, Ζ, Δ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα β ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Ζ, θὰ ἔχῃ (16) σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ὅμως β δὲν δύναται νὰ ἔχῃ σημεῖον μεταξὺ Δ καὶ Ζ, διότι τότε ἢ θὰ εἶχε σημεῖον μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ζ, τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἀφοῦ τὸ Ζ ἐθεωρήθη μεταξὺ τῶν Γ καὶ Ε, ἢ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ τὸ ὁποῖον ἀποκλείεται ἐπίσης ἐκ τῆς προηγουμένης (3), προτάσεως βάσει τῆς ὁποίας τὸ Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

Ἑπομένως, ἡ εὐθεῖα β ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ, δηλαδὴ τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ.

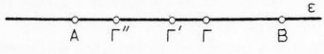


Σχ. 4α

(1) Θεωρούμενον ὡς τὸ σύνολον τῶν σημείων του.

5. Μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε σημείων Α καὶ Β μιᾶς εὐθείας ε ὑπάρχουν περισσότερα τοῦ ἑνὸς σημεῖα αὐτῆς.

Ἀπόδειξις. Μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β (Σχ. 5α) τῆς εὐθείας ε ὑπάρχει (14) τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖον Γ αὐτῆς.



Σχ. 5α

Ὁμοίως, μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ, ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα σημεῖον Γ'

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ τὸ Γ' μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ ἕπεται (ἄσκησις 4) ὅτι τὸ Γ' κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Ὥστε ἐκτὸς τοῦ Γ ὑπάρχει ἐπὶ τῆς ε καὶ ἕνα ἄλλο σημεῖον Γ' κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα σημεῖον Γ'' κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ' τοῦτο θὰ κεῖται, δι' ὅμοιον λόγον, μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, κ.ο.κ.

6. Δοθέντων τεσσάρων σημείων μιᾶς εὐθείας ε, δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς τὰ σημεῖα αὐτὰ τὰ τέσσαρα γράμματα Α, Β, Γ, Δ (νὰ συμβολίσωμεν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ τὰ γράμματα Α, Β, Γ, Δ ἀντιστοίχως) ὥστε τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ.

Τότε τὸ Γ θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ καὶ τὸ Β μεταξὺ τῶν Α.

7. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ὥστε τὸ σημεῖον Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Δ καὶ ὄχι μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ.

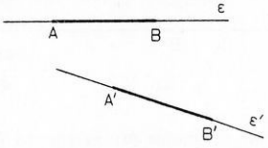
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

Η ΣΧΕΣΙΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων εἰσάγεται διὰ τοῦ κατωτέρω ἀξιώματος :

23. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καὶ A′ ἕνα σημεῖον τῆς αὐτῆς ἢ μιᾶς ἄλλης εὐθείας ε′, ὑπάρχει ἐπὶ τῆς εὐθείας ε′ καὶ ἐπὶ δοθείσης ἐκ τῶν δύο ἀπὸ τοῦ A′ ἡμιευθειῶν, ἕνα σημεῖον B′ καὶ ἕνα μόνον ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα A′B′ νὰ* **εἶναι ἴσον** *πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα AB* (Σχ. 23).



Σχ. 23

Σημειοῦμεν συμβολικῶς : ΑΒ = Α′Β′ (1)

Ἐν προκειμένῳ σημειοῦμεν ὅτι ἡ εἰς τὸ ἀνωτέρῳ ἀξίωμα εἰσαγομένη ἔννοια τοῦ **εἶναι ἴσον** εἶναι ἔννοια ἀρχική(2).

24. ΑΞΙΩΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : αὐτοπαθὴς ἢ ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

Αἱ ἰδιότητες αὗται διατυποῦνται συμβολικῶς ὡς κάτωθι ἀντιστοίχως :

(1) ΑΒ = ΑΒ καὶ ΑΒ = ΒΑ

(2) ΑΒ = Α′Β′ ⇒ Α′Β′ = ΑΒ

(3) ΑΒ = Α′Β′ καὶ Α′Β′ = Α″Β″ ⇒ ΑΒ = Α″Β″.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Ἂν AB = A′B′ καὶ AB = A″B″, τότε θὰ εἶναι A′B′ = A″B″.*

Πράγματι, ἐκ τῆς ΑΒ = Α′Β′ ἕπεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω (24) ἀξίωμα, ὅτι : Α′Β′ = ΑΒ (συμμετρικὴ ἰδιότης). Ἐκ ταύτης καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν ἰσότητος ΑΒ = Α″Β″ ἕπεται, κατὰ τὸ αὐτὸ (24) ἀξίωμα, ὅτι : Α′Β′ = Α″Β″.

ΚΛΑΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

25. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου Ε τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθ. τμημάτων εἰς ὑποσύνολα, ἕκαστον τῶν ὁ-

---

(1) Ἀντὶ τοῦ συμβόλου = δύναται νὰ εἰσαχθῇ τὸ σύμβολον ≅

(2) Ἐν σχέσει πρὸς τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τῆς ἰσότητος ὡς ἀρχικῆς, βλέπε παράγρ. 3. Εἰσαγωγῆς.

ποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθ. τμήματα τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ. *Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον, ὀνομάζεται* **κλάσις ἰσοδυναμίας**[1] *ἐν τῷ Ε, ὁριζομένη ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ.*

Δύο σημεῖα Α καὶ Α′ μιᾶς εὐθείας ε κείμενα ἑκατέρωθεν ἑνὸς σημείου Ο αὐτῆς, θὰ ὀνομάζωνται **συμμετρικὰ** *ἀλλήλων, ὡς πρὸς τὸ Ο, ὅταν ΟΑ = ΟΑ′. Τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ καὶ ΟΑ′ εἶναι στοιχεῖα τῆς αὐτῆς κλάσεως ἰσότητος.*

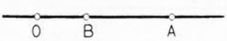
ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

26. ΟΡΙΣΜΟΙ. Ἔστωσαν δύο εὐθ. τμήματα α καὶ β. Θεωροῦμεν ἐπὶ εὐθείας ε ἕνα σημεῖον Ο καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α καὶ Β τῆς ε ὥστε ΟΑ = α καὶ ΟΒ = β.

Ἂν τὸ σημεῖον Α συμπίπτῃ μὲ τὸ Β, τότε τὰ εὐθ. τμήματα α καὶ β ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κλάσιν ἰσότητος καὶ σημειοῦμεν α = β.

Σχ. 26.1

Ἂν τὸ Α κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β (Σχ. 26.1), *ἤτοι εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΒ, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα α εἶναι* **μικρότερον** *τοῦ β, συμβολικῶς α < β,, καὶ τὸ β* **μεγαλύτερον** *τοῦ α, συμβολικῶς β > α.*



Σχ. 26.2

Ἂν τὸ σημεῖον Α κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ο (Σχ. 26.2), *τότε τὸ εὐθ. τμῆμα α ὀνομάζεται μεγαλύτερον τοῦ β, καὶ τὸ β μικρότερον τοῦ α.*

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta > \alpha \text{ καὶ } \alpha > \beta \Leftrightarrow \beta < \alpha.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἐπίσης προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύνολον Ε τῶν εὐθ. τμημάτων ἰσχύει ἡ πρότασις :

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in E: \quad \alpha > \beta$ *καὶ* $\beta > \gamma \Rightarrow \alpha > \gamma.$

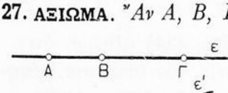
ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

27. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε καὶ Α′, Β′, Γ′ τρία σημεῖα τῆς ε ἢ μιᾶς εὐθείας ε′ διαφόρου τῆς ε, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι:*

(1) Τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ καὶ τὸ Β′ μεταξὺ τῶν Α′ καὶ Γ′ καὶ

(2) ΑΒ = Α′Β′ καὶ ΒΓ = Β′Γ′,

τότε θὰ εἶναι ΑΓ = Α′Γ′.

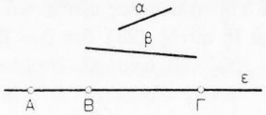


Σχ. 27

---

[1] Εἰδικῶς εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθ. τμημάτων ἡ κλάσις αὕτη θὰ ὀνομάζεται *κλάσις ἰσότητος*. Ἡ κλάσις αὕτη ἰσότητος δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα π.χ. α τοῦ ἀλφαβήτου. Τὸ γράμμα τοῦτο α παριστᾷ ἕνα τυχὸν στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ὁρισθείσης ἐκ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (ἀντιπροσωπεῦον τὴν κλάσιν ἰσότητος).

28. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἔστωσαν α καὶ β δύο εὐθ. τμήματα. Θεωροῦμεν ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημεῖα A καὶ B ὥστε AB = α καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ B πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ A, τὸ σημεῖον Γ ὥστε BΓ = β. Τὸ εὐθ. τμῆμα AΓ ὀνομάζεται* **ἄθροισμα** *τῶν α καὶ β κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν* (Σχ. 28).



Σχ. 28

Τὸ ἄθροισμα τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον : $\alpha + \beta$.

Ἐκ τοῦ ἀξιώματος (27) προκύπτει ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς εὐθείας ε καὶ τοῦ σημείου A αὐτῆς. Ἂν εἶναι γ ἕνα στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα AΓ, δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν : $\gamma = \alpha + \beta$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω (28) ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον E τῶν εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Αἱ ἰδιότητες αὗται διατυποῦνται, συμβολικῶς, ὡς κάτωθι ἀντιστοίχως :

$\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in E$:

(1) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ (2) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(3) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Ἐξ ἄλλου σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο εὐθ. τμημάτων ὁρίζεται ἐκ τῆς σχέσεως : $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$.

2. Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ 0 τὴν κλάσιν (ἕνα στοιχεῖον αὐτῆς) τοῦ μηδενικοῦ εὐθ. τμήματος, θὰ ἔχωμεν ὅτι :

$\forall\ \alpha \in E : \alpha + 0 = \alpha$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα εἶναι τὸ **οὐδέτερον** στοιχεῖον τοῦ συνόλου E τῶν εὐθ. τμημάτων ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

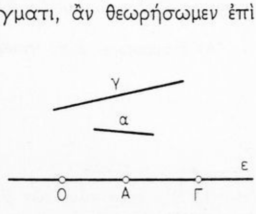
29. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωροῦμεν δύο εὐθ. τμήματα γ καὶ α, ἔνθα γ > α. Ὀνομάζομεν* **διαφορὰν** *τῶν εὐθ. τμημάτων γ καὶ α κατὰ τὴν τάξιν (γ, α), καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον γ - α, τὸ εὐθ. τμῆμα β, τὸ ὁποῖον εἶναι τοιοῦτον ὥστε : $\gamma = \alpha + \beta$.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθ. τμημάτων (28) προκύπτει ὅτι ὑπάρχει τὸ εὐθ. τμῆμα β καὶ εἶναι ἕνα μόνον. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ εὐθείας ε ἕνα σημεῖον O (Σχ. 29) καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ O τὰ σημεῖα Γ καὶ A αὐτῆς, ὥστε $O\Gamma = \gamma$ καὶ $OA = \alpha$, τὸ σημεῖον A κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ Γ, διότι $\gamma > \alpha$.

Ἔστω β ἡ κλάσις τοῦ εὐθ. τμήματος AΓ. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (28) τοῦ ἀθροίσματος ἔχομεν ὅτι :

$O\Gamma = OA + A\Gamma$, ἤτοι : $\gamma = \alpha + \beta$.

Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑπῆρχεν εὐθ. τμῆμα β′ διάφο-



Σχ. 29

ρον τοῦ β (κλάσεως ἰσότητος διαφόρου τῆς τοῦ β) ὥστε : $\gamma = \alpha + \beta'$, τότε ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς $\gamma = \alpha + \beta$ ἕπεται (24) ὅτι : $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ καὶ ἐξ αὐτῆς (28) ὅτι $\beta = \beta'$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, ἑπομένως, ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν :

$\beta = \gamma - \alpha \Leftrightarrow \gamma = \alpha + \beta$.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΦΥΣΙΚΟΝ ΚΑΙ ΡΗΤΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

30. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *εὐθ. τμήματος α ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν μ, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον μ · α, τὸ ἄθροισμα εὐθ. τμημάτων πλήθους μ, ἴσων πρὸς τὸ α.*

Ἂν εἶναι γ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν :

$$\gamma = \mu \cdot \alpha.$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει ὅτι εἰς τὸ σύνολον Ε τῶν εὐθ. τμημάτων ἔχομεν :

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\forall\ \alpha, \beta \in E$ *καὶ* $\mu \in N$[1]:

(1) $\alpha = \beta \Rightarrow \mu \cdot \alpha = \mu \cdot \beta$

(2) $\alpha > \beta \Rightarrow \mu \cdot \alpha > \mu \cdot \beta,\ \alpha < \beta \Rightarrow \mu \cdot \alpha < \mu \cdot \beta$

(3) $\mu \cdot (\alpha + \beta) = \mu \cdot \alpha + \mu \cdot \beta$

(4) $\mu \cdot (\alpha - \beta) = \mu \cdot \alpha - \mu \cdot \beta$

31. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **πηλίκον** *εὐθ. τμήματος α διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* $\frac{\alpha}{\nu}$, *τὸ εὐθ. τμῆμα β διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι :*

$$\alpha = \nu \cdot \beta\text{[2]}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, ἑπομένως, ἔχομεν ὅτι :

$$\beta = \frac{\alpha}{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \nu \cdot \beta$$

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\forall\ \alpha, \beta \in E$ *καὶ* $\nu \in N$: $\qquad \alpha = \nu \cdot \beta$ *καὶ* $\alpha = \nu \cdot \beta' \Rightarrow \beta = \beta'$.

Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $\beta > \beta'$, θὰ ἔχωμεν (30) : $\nu \cdot \beta > \nu. \cdot > \nu \cdot \beta'$, καὶ ἐπειδή, ἐξ ὑποθέσεως $\alpha = \nu \cdot \beta$ καὶ $\alpha = \nu \cdot \beta'$, θὰ εἶναι : $\alpha > \alpha$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι $\alpha = \alpha$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι **ἕνα μόνον** εὐθ. τμῆμα β ὑπάρχει ὥστε : $\beta = \frac{\alpha}{\nu}$.

32. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *εὐθ. τμήματος β ἐπὶ τὸν ῥητὸν ἀριθμὸν* $\frac{\mu}{\nu}$, *τὸ γινόμενον τοῦ εὐθ. τμήματος* $\frac{\beta}{\nu}$ *ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν μ.*

Ἂν ὀνομάσωμεν α τὸ **γινόμενον** τοῦτο θὰ ἔχωμεν, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ :

$$\alpha = \frac{\mu}{\nu} \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha = \mu \cdot \frac{\beta}{\nu}.$$

---

(1) Ν : τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

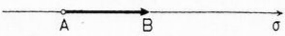
(2) Ἡ ὕπαρξις τοῦ εὐθ. τμήματος β θὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου (Κεφ. IV).

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑ

Δύο οἱαδήποτε σημεῖα Α καὶ Β [1] μιᾶς εὐθείας **σ** ὁρίζουν δύο διατεταγμένα ζεύγη [2]: τὸ (Α,Β) καὶ τὸ (Β,Α).

33. ΑΞΙΩΜΑ. *Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (Α, Β) σημείων τῆς εὐθείας* **σ** *ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς μίαν φοράν* [3]. *Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (Β, Α) ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς μίαν ἄλλην φοράν, διάφορον τῆς πρώτης.*

Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω φορὰς ὀνομασθῇ **θετική**, ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ **ἀρνητική**.

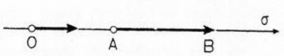


Σχ. 33

34. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία εὐθεῖα* **σ** *ὀνομάζεται* **προσημασμένη** *ἤ, ὅπως συνήθως λέγομεν,* **προσανατολισμένη,** *ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ ἐπ' αὐτῆς ἡ θετικὴ φορά.*

35. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **προσανατολισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα** *ἢ* **διάνυσμα** *ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας* **σ,** *κάθε διατεταγμένον ζεῦγος σημείων (Α, Β) αὐτῆς.*

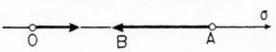
Ἂν ἡ ἐκ τοῦ ζεύγους (Α, Β) ὁριζομένη ἐπὶ τῆς σ φορὰ εἶναι ἡ θετικὴ φορὰ αὐτοῦ, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα (Α, Β) ἢ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι **θετικῶς προσανατολισμένον** (Σχ. 35.1). Ἂν ἡ ἐκ τοῦ ζεύγους (Α, Β) ὁριζομένη ἐπὶ τῆς σ φορὰ εἶναι ἡ ἀρνητική, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι **ἀρνητικῶς προσανατολισμένον** (Σχ. 35.2).



Σχ. 35.1

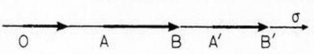
Τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ τμήματος $\overrightarrow{AB}$ ὀνομάζεται **ἀρχικὸν σημεῖον** ἢ **ἀρχὴ** αὐτοῦ, τὸ δὲ δεύτερον σημεῖον του, **τελικὸν σημεῖον** ἢ **πέρας** αὐτοῦ.

Τὰ Α καὶ Β ὀνομάζονται **ἄκρα σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **ἄκρα** τοῦ τμήματος $\overrightarrow{AB}$.



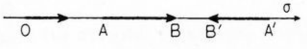
Σχ. 35.2

Δύο εὐθ. τμήματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τῆς εὐθείας **σ** τὰ ὁποῖα εἶναι ἀμφότερα θετικῶς ἢ ἀμφότερα ἀρνητικῶς προσανατολισμένα θὰ ὀνομάζωνται **ὁμόρροπα** (Σχ. 35.3). Ἂν τὸ ἓν ἐκ τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον καὶ τὸ ἄλλο ἀρνητικῶς, θὰ ὀνομάζωνται **ἀντίρροπα** (Σχ. 35.4).



Σχ. 35.3

Ἂν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ταυτίζωνται, τὸ εὐθ. τμῆμα $\overrightarrow{AB}$ θὰ ὀνομάζεται **μηδενικὸν** εὐθ. τμῆμα καὶ θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον 0 ὥστε, ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν : $A \equiv B \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0$.



Σχ. 35.4

---

(1) Διμελὲς σύνολον {Α, Β}.

(2) Ἕνα διμελὲς σύνολον σημείων μιᾶς εὐθείας **σ** ὀνομάζεται *διατεταγμένον ζεῦγος* ἢ ἁπλῶς *ζεῦγος*, ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ τὸ ἐκ τῶν στοιχείων αὐτοῦ τὸ ὁποῖον θεωρεῖται *πρῶτον*.

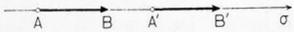
Τὸ γράμμα μὲ τὸ ὁποῖον συμβολίζεται τὸ πρῶτον σημεῖον τοῦ ζεύγους γράφεται, εἰς τὸ ἀντίστοιχον σύμβολον, ἀριστερὰ τοῦ γράμματος μὲ τὸ ὁποῖον συμβολίζεται τὸ δεύτερον.

Τὸ ζεῦγος σημείων (Α, Β) θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\overrightarrow{AB}$.

(3) Ἡ ἔννοια τῆς *φορᾶς* εἶναι ἔννοια *ἀρχικὴ* μὴ δυναμένη νὰ ὁρισθῇ ἐξ ἄλλων ἐννοιῶν. Δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ διὰ τῆς συσχετίσεώς της μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως :

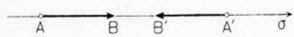
Δεχόμεθα ὅτι : Κάθε σημεῖον Μ μιᾶς εὐθείας **σ** δύναται νὰ λάβῃ, ἅπαξ, τὴν θέσιν κάθε ἄλλου σημείου της, κινούμενον ἐπ' αὐτῆς κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τῆς εὐθείας **σ,** διάφορα ἀλλήλων, τότε τὸ σημεῖον Μ, κινούμενον κατὰ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο φοράς, λαμβάνει τὴν θέσιν τῶν σημείων Α καὶ Β κατὰ τὴν τάξιν (Α, Β), κινούμενον δὲ κατὰ τὴν ἄλλην λαμβάνει τὴν θέσιν τῶν σημείων τούτων κατὰ τὴν τάξιν (Β, Α).

36. ΑΞΙΩΜΑ. *Δοθέντος ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας* **σ**, *ἑνὸς προσανατολισμένου τμήματος* $\overrightarrow{AB}$ *καὶ ἑνὸς σημείου* A' *αὐτῆς, ὑπάρχει ἐπὶ τῆς* **σ** *σημεῖον* B' *καὶ ἕνα μόνον ὥστε τὸ τμῆμα* $\overrightarrow{A'B'}$ *νὰ* **εἶναι ἴσον** *(1) πρὸς τὸ* $\overrightarrow{AB}$. *Συμβολικῶς :* $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$ (Σχ. 36).



Σχ. 36

37. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ τμῆμα* $\overrightarrow{A'B'}$ *τὸ ἴσον πρὸς τὸ* $\overrightarrow{BA}$, *ὀνομάζεται* **ἀντίθετον** *τοῦ* $\overrightarrow{AB}$. *Συμβολικῶς :* $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 37).



Σχ. 37

38. ΑΞΙΩΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον Ε τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας σ εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος: ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

Αὗται διατυποῦνται συμβολικῶς, ὡς κάτωθι ἀντιστοίχως :

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ (2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

(3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''}$.

Ἐκ τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητος προκύπτει ἀμέσως ὅτι :

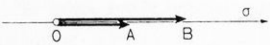
ΠΟΡΙΣΜΑ. Ἄν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''}$, τότε $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''}$

Πράγματι, ἐκ τῆς $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ ἕπεται ὅτι : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς εἰς τὴν ὑπόθεσιν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''}$, ἕπεται ὅτι : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A''B''}$.

39. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις τῆς ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου Ε τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας **σ** προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων, εἰς ὑποσύνολα αὐτοῦ, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ ἐπὶ τῆς **σ** προσανατολισμένα τμήματα τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $\overrightarrow{AB}$.

Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον ὁριζόμενον ἀπὸ ἕνα τμῆμα $\overrightarrow{AB}$ *τῆς εὐθείας σ ὀνομάζεται* **κλάσις ἰσοδυναμίας** *(2) ἐν τῷ Ε, ὁριζομένη ἀπὸ τὸ εὐθ. τμῆμα* $\overrightarrow{AB}$.

40. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ἐπὶ εὐθείας **σ** δύο τμήματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ θετικῶς προσανατολισμένα. Θεωροῦμεν σημεῖον Ο τῆς σ καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς ὥστε : $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ (Σχ. 40.1).



Σχ. 40.1

Ἄν τὸ σημεῖον Β συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, τότε τὸ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν κλάσιν ἰσότητος καὶ θὰ σημειοῦμεν : $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

---

(1) Ἡ ἔννοια *εἶναι ἴσον*, εἶναι, ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη (26), ἀρχικὴ ἔννοια προϋποθέτουσα ἐν προκειμένῳ τὴν ταυτότητα τοῦ προσανατολισμοῦ τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$.

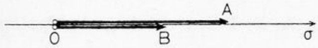
Ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον Ε τῶν προσανατολισμένων τμημάτων εἶναι, ὅπως καὶ ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν, μία σχέσις ἰσοδυναμίας, ἤτοι, ἐξ ὁρισμοῦ μία σχέσις αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

(2) Εἰδικῶς, εἰς τὸ σύνολον Ε τῶν προσανατολισμένων ἐπὶ τοῦ **σ** τμημάτων, ἡ κλάσις αὕτη ὀνομάζεται *κλάσις ἰσότητος* ἐν τῷ Ε.

Ἡ κλάσις ἰσότητος ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸ τμῆμα $\overrightarrow{AB}$ δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\vec{\alpha}$ ($\vec{\alpha}$ τυχὸν τμῆμα τοῦ **σ** ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$)

Ἂν τὸ σημεῖον A κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ B, ἤτοι εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ εὐθ. τμήματος $\overrightarrow{OB}$, θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ τμῆμα $\vec{\alpha}$ εἶναι **μικρότερον** *τοῦ $\vec{\beta}$, συμβολικῶς $\vec{\alpha} < \vec{\beta}$ ἢ τὸ $\vec{\beta}$* **μεγαλύτερον** *τοῦ $\vec{\alpha}$, συμβολικῶς $\vec{\beta} > \vec{\alpha}$.* (Σχ. 40.1).

Ἂν τὸ σημεῖον A κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ B πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ O, τότε τὸ τμῆμα $\vec{\alpha}$ ὀνομάζεται **μεγαλύτερον** *τοῦ $\vec{\beta}$, συμβολικῶς $\vec{\alpha} > \vec{\beta}$, ἢ τὸ $\vec{\beta}$ μικρότερον τοῦ $\vec{\alpha}$.* (Σχ. 40.2).



Σχ. 40.2

Ἐξ ὁρισμοῦ, ἑπομένως ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας : $\vec{\alpha} < \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} > \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\alpha} > \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} < \vec{\alpha}$.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐπὶ ἀρνητικῶς προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ ἰσχύουν κατὰ τὴν ἀντίθετον ἔννοιαν. Οὕτως, ἂν τὸ σημεῖον A κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ B, τὸ τμῆμα $\vec{\alpha}$ ὀνομάζεται μεγαλύτερον τοῦ $\vec{\beta}$ ἢ τὸ $\vec{\beta}$ μικρότερον τοῦ $\vec{\alpha}$.

Ἐπὶ ἀντιρρόπων εὐθ. τμημάτων θεωρεῖται μεγαλύτερον τὸ ἐκ τούτων θετικῶς προσανατολισμένον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. $\forall\ \vec{\alpha},\ \vec{\beta},\ \vec{\gamma} \in E$ (1) : $\vec{\alpha} > \vec{\beta}$ καὶ $\vec{\beta} > \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} > \vec{\gamma}$ (μεταβατικὴ ἰδιότης).

41. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο τμήματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ τῆς εὐθείας* **σ** *ὀνομάζονται* **διαδοχικά,** *ἂν τὸ πέρας τοῦ ἑνὸς συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ ἄλλου* (Σχ. 41).

Σχ. 41

Ἔστωσαν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ δύο εὐθ. τμήματα ἐπὶ τῆς εὐθείας **σ**. *Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον A τῆς* **σ** *καὶ τὰ σημεῖα B καὶ Γ αὐτοῦ ὥστε $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\beta}$. Τὸ εὐθ. τμῆμα $A\Gamma$ ὀνομάζεται* **ἄθροισμα** *τῶν α καὶ β κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν.*

42. ΑΞΙΩΜΑ. *Τὸ τμῆμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ τοῦ ἀνωτέρω (41) ὁρισμοῦ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου A ἐπὶ τῆς εὐθείας* **σ**.

Τὸ ἄθροισμα, κατὰ ταῦτα τῶν τμημάτων α καὶ β εἶναι ἕνα στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τῆς **σ** εὐθ. τμημάτων : τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὸ τμῆμα $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ $\vec{\gamma}$ τὸ στοιχεῖον τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν : $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Εὐκόλως, βάσει τῶν ἀνωτέρω, ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ εὐθείας* **σ.** *εὐθ. τμημάτων ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας **σ** εὐθ. τμημάτων, ἕπεται ὅτι :

(1) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$.

Τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα : $\vec{0}$ ὀνομάζεται **οὐδέτερον** στοιχεῖον τοῦ συνόλου E τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας **σ** εὐθ. τμημάτων, ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πρᾶξιν τῆς προσθέσεως.

(2) $\vec{\alpha} + \vec{\alpha}' = \vec{0}$.

---

(1) E τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας **σ** προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων (διανυσμάτων).

ὅπου $\vec{\alpha}'$ τυχὸν στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τὰ $\vec{\alpha}$ εὐθ. τμήματος. Τὸ $\vec{\alpha}'$ ὀνομάζεται **συμμετρικὸν** ἢ **ἀντίθετον** τοῦ $\vec{\alpha}$ στοιχεῖον τοῦ ἀνωτέρω συνόλου Ε, ὡς πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πρᾶξιν τῆς προσθέσεως. Ἀντὶ τοῦ συμβόλου $\vec{\alpha}'$ δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν καὶ τὸ σύμβολον $-\vec{\alpha}$.

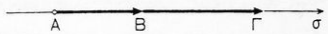
43. ΘΕΩΡΗΜΑ. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α, Β, Γ ἐπὶ εὐθείας, τὸ ἄθροισμα τῶν τμημάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδενικὸν εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ἤτοι : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$ (1)

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τὸ Β κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Εἶναι : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

Ἑπομένως : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0}$.

Διότι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma A}$ εἶναι ἀντίθετα (Σχ. 43).



Σχ. 43

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις καὶ εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις :

44. ΟΡΙΣΜΟΙ. *1. Ὀνομάζομεν* **διαφορὰν** *δύο εὐθ. τμημάτων* $\vec{\alpha}$ *καὶ* $\vec{\beta}$ *μιᾶς εὐθείας* **σ**, *κατὰ τὴν τάξιν* $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, *καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, *τὸ ἄθροισμα τοῦ* $\vec{\alpha}$ *καὶ τοῦ ἀντιθέτου* $-\vec{\beta}$ *τοῦ* $\vec{\beta}$.

2. Ὀνομάζομεν **γινόμενον** *ἑνὸς εὐθ. τμήματος* $\vec{\alpha}$ *μιᾶς εὐθείας* **σ** *ἐπὶ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν* μ, *καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* $\mu \cdot \vec{\alpha}$, *τὸ ἄθροισμα* μ *εὐθ. τμημάτων τῆς εὐθείας σ, ἴσων πρὸς τὸ* $\vec{\alpha}$.

Ἂν εἶναι $\vec{\gamma}$ τὸ γινόμενον τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν :

$$\vec{\gamma} = \mu \cdot \vec{\alpha}.$$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἔχομεν : $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta} \in E$ καὶ $\mu \in N$: (2)

$$(1) \quad \vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \mu \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta}$$

$$(2) \quad \mu \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \mu \cdot \vec{\alpha} + \mu \cdot \vec{\beta}$$

$$(3) \quad \mu \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \mu . \vec{\alpha} - \mu \cdot \vec{\beta}$$

$$(4) \quad \vec{\alpha} < \vec{\beta} \Leftrightarrow \mu \cdot \vec{\alpha} < \mu \cdot \vec{\beta} \text{ καὶ}$$

$$\vec{\alpha} > \vec{\beta} \Leftrightarrow \mu \cdot \vec{\alpha} > \mu \cdot \vec{\beta}$$

3. Ὀνομάζομεν **πηλίκον** *εὐθ. τμήματος* $\vec{\alpha}$ *μιᾶς εὐθείας* **σ** *διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ* **ν**, *καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον* : $\frac{\vec{\alpha}}{\nu}$, *τὸ εὐθ. τμῆμα* $\vec{\beta}$ *τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς ἰσότητος* :

$$\vec{\alpha} = \nu \, . \, \vec{\beta} \text{ (3)}$$

Εὐκόλως, βάσει τῶν ἀνωτέρω, ὁρίζεται τὸ γινόμενον εὐθ. τμήματος $\vec{\alpha}$ ἐπὶ τὸν ρητὸν ἀριθμὸν $\frac{\mu}{\nu}$ (ἔνθα μ, $\nu \in N$), ἐκ τῆς ἰσότητος :

$$\vec{\alpha} \cdot \frac{\mu}{\nu} = \mu \cdot \frac{\vec{\alpha}}{\nu}.$$

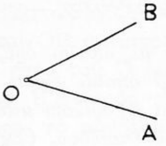
(1) Σχέσις τῶν Chasles — Möbius.

(2) Ε τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας **σ** προσανατολισμένων εὐθ. τμημάτων καὶ Ν τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

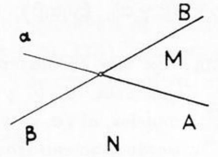
(3) Ἡ ὕπαρξις τοῦ $\vec{\beta}$ θὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.

ΓΩΝΙΑ

45. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γωνίαν** *κάθε διμελὲς σύνολον ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον.*



Σχ. 45



Σχ. 46

Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ ὀνομάζονται **πλευραὶ** τῆς γωνίας καὶ τὸ σημεῖον Ο **κορυφὴ** αὐτῆς.

Δυνάμεθα νὰ συμβολίσωμεν τὴν γωνίαν μὲ τὸ σύμβολον (ΟΑ, ΟΒ).

Σημεῖα τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζομεν τὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἤτοι τὰ σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ, ΟΒ.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΓΩΝΙΑΣ

46. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν α καὶ β αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ ΟΑ καὶ ΟΒ μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ σημεῖον Β καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ σημεῖον Α, ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** *τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).*

Τὸ ἐσωτερικὸν κατὰ ταῦτα σημεῖον μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἡμιεπιπέδων (α, Β) καὶ (β, Α) μὴ ἀνῆκον εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** αὐτῆς.

Κάθε σημεῖον Ν τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) τὸν ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΟΒ αὐτῆς οὔτε ἐσωτερικὸν σημεῖον της, θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** *σημεῖον τῆς γωνίας.*

Τὸ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** αὐτῆς

Ὡς ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, δοθείσης μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), τὸ ἐσωτερικόν, καὶ ἑπομένως τὸ ἐξωτερικὸν αὐτῆς, ὁρίζεται μονοσημάντως.

Διὰ τοὺς εἰς τὴν εἰσαγωγὴν τοῦ παρόντος βιβλίου ἀναφερομένους λόγους, ἤτοι διὰ τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων τῶν προτάσεων εἰς τὰς ὁποίας εἰσάγεται ἡ ἔννοια τῆς γωνίας (ἀποφυγὴν τῆς περιπτωσιολογίας, σαφήνειαν καὶ ἁπλούστευσιν) εἰσάγεται ἀμέσως ἡ ἔννοια τῆς προσανατολισμένης γωνίας

Οὕτως, αἱ σχέσεις ἰσότητος, διατάξεως καὶ ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως θέλουν ὁρισθῆ εἰς τὸ σύνολον τοῦτο: τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου.

---

(1) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς δοθείσης γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ἀποδεικνύεται βάσει τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως.

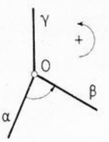
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

Θεωροῦμεν τρεῖς ἡμιευθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἢ α, β, γ τοῦ ἐπιπέδου ἀρχομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

Ἐκ τῶν ἡμιευθειῶν τούτων ὁρίζονται ἕξ διατεταγμέναι τριάδες, αἱ :

(α,β,γ), (β,γ,α), (γ,α,β), (α,γ,β), (γ,β,α), (β,α,γ).

47. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἐκ τῶν ἕξ διατεταγμένων τριάδων αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας α, β, γ τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν ἀρχικὸν σημεῖον, αἱ (α, β, γ), (β, γ, α), (γ, α, β) ὁρίζουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ προσανατολισμὸν* (1) *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.* (Σχ. 47)



Σχ. 47

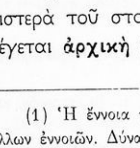
Αἱ (α, γ, β), (γ, β, α), (β, α, γ) ὁρίζουν ἐπίσης μίαν καὶ αὐτὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, διάφορον τῆς πρώτης.

Ἂν ἡ μία ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο φορὰς ὀνομασθῇ **θετική,** ἡ ἄλλη θὰ ὀνομάζεται **ἀρνητική**(2).

48. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ ἐπίπεδον ὀνομάζεται προσημασμένον ἢ* **προσανατολισμένον** *ὅταν ἔχῃ ὁρισθῇ εἰς αὐτὸ ἡ θετικὴ φορά.*

49. ΟΡΙΣΜΟΣ. **Προσανατολισμένην γωνίαν** *ὀνομάζομεν κάθε διατεταγμένον ζεῦγος ἡμιευθειῶν τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀρχικὸν σημεῖον.*

Οὕτω τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (ΟΑ, ΟΒ) ἢ (α,β) τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ (Σχ. 49) εἶναι μία προσανατολισμένη γωνία.



Σχ. 49

Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ ὀνομάζονται **πλευραὶ** τῆς γωνίας καὶ τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Ο αὐτῶν **κορυφὴ** τῆς γωνίας.

Ἡ προσανατολισμένη γωνία τῆς ὁποίας ἡ πρώτη πλευρὰ εἶναι ἡ ΟΑ καὶ ἡ δευτέρα ἡ ΟΒ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον (ΟΑ, ΟΒ). Εἰς τὸ σύμβολον τοῦτο τὸ στοιχεῖον ΟΑ, διὰ τοῦ ὁποίου συμβολίζεται ἡ πρώτη πλευρὰ γράφεται ἀριστερὰ τοῦ στοιχείου ΟΒ διὰ τοῦ ὁποίου συμβολίζεται ἡ δευτέρα. Ἡ ΟΑ λέγεται **ἀρχικὴ** καὶ ἡ ΟΒ **τελικὴ** πλευρὰ τῆς γωνίας.

---

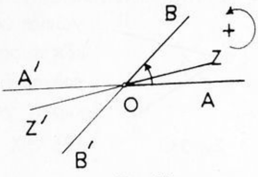
(1) Ἡ ἔννοια τῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου *φορᾶς* εἶναι ἔννοια *ἀρχική*, μὴ δυναμένη νὰ ὁρισθῇ ἐξ ἄλλων ἐννοιῶν. Δύναται νὰ ἑρμηνευθῇ διὰ τῆς συσχετίσεώς της μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς κινήσεως : Δεχόμεθα ὅτι : Κάθε ἡμιευθεῖα ΟΧ τοῦ ἐπιπέδου δύναται νὰ λάβῃ, ἅπαξ, τὴν θέσιν κάθε ἄλλης ἐκ τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν αὐτοῦ, κινουμένη περὶ τὸ Ο κατὰ δύο ἀντιθέτους φοράς. Ἡ εἰς τὴν τριάδα π.χ. (β,γ,α) ἡμιευθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, ἀρχομένων ἀπὸ τοῦ Ο, ἀντιστοιχοῦσα φορὰ εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ μία ἡμιευθεῖα ΟΧ, ἀρχομένη ἀπὸ τοῦ Ο, ὥστε νὰ λάβῃ διαδοχικῶς τὴν θέσιν τῶν ἀνωτέρω ἡμιευθειῶν κατὰ τὴν τάξιν (β, γ, α).

(2) Ἐκ τῆς ἐποπτείας, δικαιολογεῖται ἡ συσχέτισις τῆς μιᾶς ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω δύο φορὰς πρὸς μίαν γνωστὴν κίνησιν, οἵα εἶναι ἡ τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου. Δυνάμεθα κατὰ ταῦτα νὰ δεχθῶμεν ὡς θετικὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φοράν, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

50. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Σημεῖα μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζονται τὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΟΒ αὐτῆς.*

ΚΥΡΤΗ ΚΑΙ ΜΗ ΚΥΡΤΗ ΓΩΝΙΑ

51. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ΟΑ′ καὶ ΟΒ′ (Σχ. 51) αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν πλευρῶν ΟΑ καὶ ΟΒ ἀντιστοίχως μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ). Θεωροῦμεν τὸ σύνολον (Χ) τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Β′Β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ καὶ τὸ σύνολον (Υ) τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας Α′Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ. *Ἡ τομὴ τῶν συνόλων (Χ) καὶ (Υ) εἶναι ἕνα σύνολον (Ζ) ἡμιευθειῶν, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται* ***ἐσωτερικὸν*** *τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).*



Σχ. 51

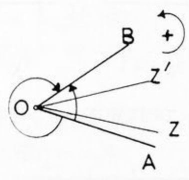
Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου (Ζ), ἤτοι αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀνήκουσαι εἰς αὐτό, ὀνομάζονται καὶ **ἐσωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι** τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ). Τὸ σύνολον (Ζ′) τῶν ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθειῶν ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι διάφορος τῶν ΟΑ, ΟΒ καὶ δὲν εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** αὐτῆς. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου (Ζ′) ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι** τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

52. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ διατεταγμένον σύνολον ἡμιευθειῶν τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι: αἱ πλευραὶ ΟΑ, ΟΒ μιᾶς προσανατολισμένης γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ αἱ ἐσωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι ΟΖ αὐτῆς ὀνομάζεται* ***κυρτὴ*** *προσανατολισμένη γωνία (ΟΑ, ΟΒ) ὁριζομένη ἐκ τῆς γωνίας (ΟΑ,ΟΒ).*

Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ ὀνομάζεται **ἀρχικὴ** πλευρὰ καὶ ἡ ΟΒ **τελικὴ** πλευρὰ τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

Ἂν εἶναι ΟΖ καὶ ΟΖ′ δύο διάφορα τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ, στοιχεῖα τοῦ ἀνωτέρου συνόλου ἡμιευθειῶν τὸ ὁποῖον ὠνομάσαμεν κυρτὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ), τότε :

Ἂν ἡ ΟΖ εἶναι ἐσωτερικὴ ἡμιευθεῖα τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΖ′) θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ΟΖ **προηγεῖται** τῆς ΟΖ′ καὶ ὅτι ἡ ΟΖ′ **ἕπεται** τῆς ΟΖ (Σχ. 52).

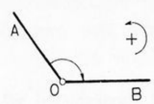


Σχ. 52

Τὸ διατεταγμένον σύνολον ἡμιευθειῶν τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι αἱ πλευραὶ ΟΑ, ΟΒ μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι αὐτῆς, ὀνομάζεται ***μὴ κυρτὴ*** *προσανατολισμένη γωνία (ΟΑ,ΟΒ), ὁριζομένη ἐκ τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).*

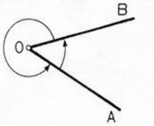
Ἐκ τῆς γωνίας, ἑπομένως, (ΟΑ, ΟΒ) ὁρίζονται μία κυρτὴ καὶ μία μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) (Σχ. 52).

53. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία (OA, OB) ὀνομάζεται **θετικῶς προσανατολισμένη** ἂν ἡ φορὰ αὐτῆς [1] συμπίπτῃ μὲ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορὰν (Σχ. 51), **ἀρνητικῶς** δέ, **προσανατολισμένη** εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν (Σχ. 53).



Σχ. 53

Δύο γωνίαι αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀμφότεραι θετικῶς ἢ ἀμφότεραι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι θὰ ὀνομάζωνται **ὁμοίως προσανατολισμέναι.** Οὕτως, ἡ κυρτὴ γωνία (OA,OB) καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (OB,OA) εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι (Σχ.53.1). Δύο δὲ γωνίαι ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι θετικῶς καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητικῶς προσανατολισμένη θὰ ὀνομάζωνται **ἀντιθέτως προσανατολισμέναι.** Οὕτως, ἡ κυρτὴ γωνία (OA, OB) καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (OA, OB) εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 52).



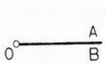
Σχ. 53.1

Σημεῖα μιᾶς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (OA, OB) δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς αὐτήν, ἤτοι τὰ σημεῖα τῶν ἡμιευθειῶν OA, OB καὶ τῶν ἐσωτερικῶν ἡμιευθειῶν τῆς γωνίας (OA,OB) ἢ τῶν ἐξωτερικῶν ἡμιευθειῶν αὐτῆς ἀντιστοίχως.

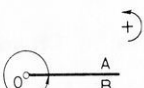
Κάθε σημεῖον M μὴ κείμενον ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (OA, OB) θὰ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** τῆς κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (OA, OB) καθ' ὅσον ἡ ἡμιευθεῖα OM ἀνήκει εἰς τὴν κυρτὴν ἢ τὴν μὴ κυρτὴν (OA, OB) ἀντιστοίχως.

ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΠΛΗΡΗΣ ΓΩΝΙΑ — ΕΥΘΕΙΑ ΓΩΝΙΑ.

54. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐξ ἑνὸς ζεύγους συμπιπτουσῶν ἡμιευθειῶν (OA, OB) ὁρίζονται δύο γωνίαι: τὸ ἐσωτερικὸν τῆς μιᾶς ἐκ τούτων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἄλλης εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀπὸ τοῦ O ἡμιευθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ πρώτη γωνία ὀνομάζεται **μηδενικὴ γωνία** (Σχ. 54.1) ἡ δὲ δευτέρα **πλήρης γωνία** (Σχ. 54.2).



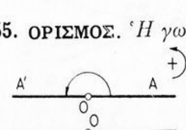
Σχ. 54.1



Σχ. 54.2

55. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἡ γωνία τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ OA, OA' εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι ὀνομάζεται* **εὐθεῖα γωνία** *(OA, OA').* [2]

Ὡς ἐσωτερικαὶ ἡμιευθεῖαι τῆς εὐθείας γωνίας (OA,OA') θεωροῦνται αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς ἡμιευθεῖαι αἱ κείμεναι πρὸς τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο μέρος τῆς εὐθείας A'A (Σχ. 55.1).



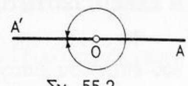
Σχ. 55.1

---

(1) Ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ OA ὥστε νὰ «παραχθῇ» ἡ θεωρουμένη γωνία, ἤτοι λάβῃ ἡ OA τὴν θέσιν τῶν ἡμιευθειῶν τῆς γωνίας αὐτῆς.

(2) Ἡ εὐθεῖα γωνία δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ *ἀποπλατυσμένη* γωνία.

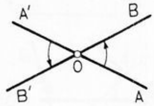
Ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΑ, ΟΑ′) ὁρίζονται δύο εὐθεῖαι γωνίαι (ΟΑ, ΟΑ′) ἀντιθέτως προσανατολισμένα (Σχ. 55.2)



Σχ. 55.2

ΓΩΝΙΑΙ ΚΑΤΑ ΚΟΡΥΦΗΝ

56. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) ὀνομάζονται* **κατὰ κορυφήν,** *ὅταν αἱ πλευραὶ ἑκάστης τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἀντικείμεναι τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.*



Σχ. 56

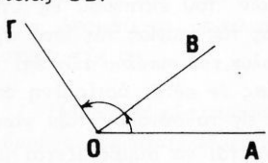
Σημειοῦμεν ὅτι : δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ὁρίζουν δύο ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν. Οὕτως, αἱ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′), ὡς καὶ αἱ (ΟΒ, ΟΑ′) καὶ (ΟΒ′, ΟΑ) εἶναι κατὰ κορυφήν. (Σχ. 56)

Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι.

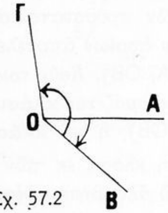
ΓΩΝΙΑΙ ΕΦΕΞΗΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΧΙΚΑΙ

57. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυρταὶ γωνίαι τοῦ ἐπιπέδου θὰ ὀνομάζωνται* **ἐφεξῆς** *ὅταν ἔχουν μίαν κοινὴν πλευρὰν αἱ δὲ μὴ κοιναὶ αὐτῶν πλευραὶ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ κοινὴ αὐτῶν πλευρά.*

Οὕτως, αἱ κυρταὶ γωνίαι τῆς ἐποπτικῆς εἰκόνος (57.1) εἶναι ἐφεξῆς, ἐνῶ αἱ κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) τῆς ἐποπτικῆς εἰκόνος (57.2) δὲν εἶναι ἐφεξῆς, διότι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΟΑ καὶ ΟΓ αὐτῶν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΟΒ.



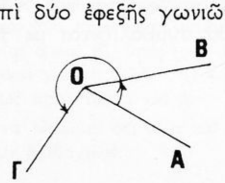
Σχ. 57.1



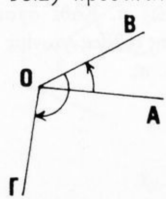
Σχ. 57.2

58. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζονται* **διαδοχικαὶ** *ὅταν ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς μιᾶς τούτων συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν τῆς ἄλλης.*

Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) τοῦ ἐπιπέδου δύνανται νὰ εἶναι ὁμοίως (Σχ. 58.1) ἢ ἀντιθέτως (Σχ. 58.2) προσανατολισμέναι. Τοῦτο ἰσχύει καὶ ἐπὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν.



Σχ. 58.1

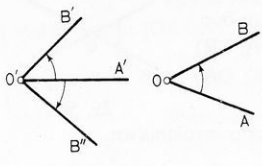


Σχ. 58.2

Η ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου εἰσάγεται διὰ τῶν κατωτέρω ἀξιωμάτων :

59. ΑΞΙΩΜΑ. *Δοθείσης ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου μιᾶς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ μιᾶς ἡμιευθείας Ο'Α', ὑπάρχει ἐπ' αὐτοῦ ἡμιευθεῖα Ο'Β', καὶ μόνον μία, ὥστε ἡ γωνία (Ο'Α',Ο'Β') νὰ* **εἶναι ἴση** *πρὸς τὴν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ ἡμιευθεῖα Ο'Β'', καὶ μόνον μία, ὥστε ἡ γωνία (Ο'Α', Ο'Β'') νὰ* **εἶναι ἀντίθετος** *τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).* (1)



Σχ. 59

Σημειοῦμεν ἀντιστοίχως : (Ο'Α',Ο'Β') = (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β'') = – (ΟΑ, ΟΒ). (Σχ. 59).

60. ΑΞΙΩΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική.*

ΚΛΑΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

61. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις τῆς ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου εἰς ὑποσύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλας τὰς γωνίας τὰς ἴσας πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ). *Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου γωνιῶν θὰ ὀνομάζεται* **κλάσις ἰσοδυναμίας** *ἐν αὐτῷ*, ὁριζομένη ἀπὸ τὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΒ), ἢ καὶ **κλάσις ἰσότητος** εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν.

Ἑκάστη κλάσις ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου φέρον πρὸ αὐτοῦ τὴν ἔνδειξιν $\measuredangle$ ἢ $\measuredangle$ τῆς θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένης γωνίας ἀντιστοίχως. Ἀντὶ τῶν ἐνδείξεων $\measuredangle$ καὶ $\measuredangle$ δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἐνδείξεις + καὶ – ἀντιστοίχως. Αἱ ἀνωτέρω ἐνδείξεις δύνανται νὰ παραλείπωνται ὅταν δὲν χωρεῖ παρεξήγησις ὡς πρὸς τὴν φορὰν τῆς προσανατολισμένης γωνίας.

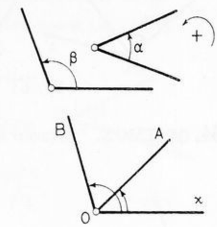
Κάθε στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ὁριζομένης ἀπὸ τὴν θετικῶς προσανατολισμένην εὐθεῖαν γωνίαν (ΟΑ, ΟΑ'), θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\measuredangle$ π ἢ ἁπλῶς π. Κάθε στοιχεῖον τῆς κλάσεως ἰσότητος τῆς ἀρνητικῶς προσανατολισμένης εὐθείας γωνίας (ΟΑ, ΟΑ') θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\measuredangle$ π ἢ μὲ τὸ – π.

(1) Οἱ ὅροι *εἶναι ἴση* καὶ *εἶναι ἀντίθετος* θεωροῦνται ὡς *ἀρχικοί.*

ΣΧΕΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ

62. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου δύο θετικῶς προσανατολισμέναι γωνίαι α καὶ β (Σχ. 62.1). Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΟΧ καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΑ καὶ ΟΒ ὥστε: (ΟΧ, ΟΑ) = α καὶ (ΟΧ, ΟΒ) = β (59).

Ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ συμπίπτῃ μὲ τὴν ΟΒ, τότε αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι τῆς αὐτῆς κλάσεως ἰσότητος. Θὰ σημειοῦμεν α = β.

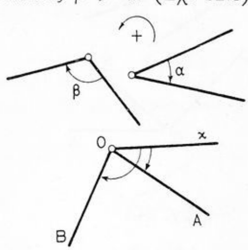


Ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (ΟΧ,ΟΒ), τότε ἡ α ὀνομάζεται **μικροτέρα** *τῆς β, συμβολικῶς* $\alpha < \beta$, *καὶ ἡ γωνία β* **μεγαλυτέρα** *τῆς α, συμβολικῶς* $\beta > \alpha$. (Σχ. 62.1)

Σχ. 62.1

Ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ δὲν ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΒ), τότε ἡ α ὀνομάζεται μεγαλυτέρα τῆς β καὶ ἡ β μικροτέρα τῆς α.

Ἂν αἱ α καὶ β εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι (Σχ. 62.2), τότε, οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοὶ ἰσχύουν κατὰ τὴν ἀντίθετον ἔννοιαν. Οὕτως, ἂν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ ἀνήκῃ εἰς τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΒ), τότε ἡ γωνία α ὀνομάζεται μεγαλυτέρα τῆς β καὶ ἡ β μικροτέρα τῆς α.



Σχ. 62.2

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη κυρτὴ γωνία α εἶναι μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης εὐθείας γωνίας.*

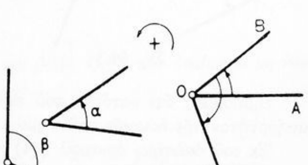
2. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη μὴ κυρτὴ γωνία α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης εὐθείας γωνίας.

3. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη κυρτὴ ἢ μὴ κυρτὴ γωνία α εἶναι μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης πλήρους γωνίας.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ

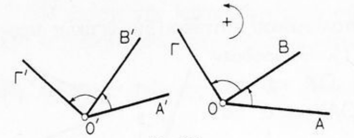
Ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ἀξιώματος (59), οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο προσανατολισμέναι, κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι α καὶ β, ὑπάρχουν δύο τουλάχιστον, διαδοχικαὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς α καὶ β.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι αἱ α καὶ β εἶναι δυνατὸν νὰ γίνουν διαδοχικαί.



Σχ. 62.3

63. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν δύο διαδοχικαί, κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (Ο'Α', Ο'Β') καὶ (Ο'Β', Ο'Γ'), τότε αἱ κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΓ) καὶ (Ο'Α', Ο'Γ') εἶναι ἴσαι* (Σχ. 63).

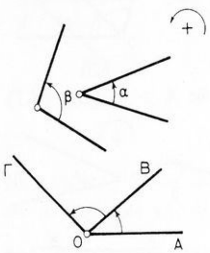


Σχ. 63

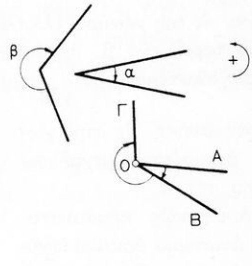
64. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἔστωσαν α καὶ β δύο προσανατολισμέναι κυρταὶ ἢ μὴ κυρταὶ γωνίαι τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν δύο διαδοχικὰς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς α καὶ β.*

Ὀνομάζομεν **ἄθροισμα** *τῶν γωνιῶν α καὶ β κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον α + β :*

Τὴν θετικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΑ,ΟΓ), ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι θετικῶς προσανατολισμέναι. (Σχ. 64.1). *Συμβολικῶς : (ΟΑ, ΟΓ) = α + β.*



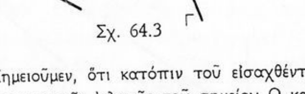
Σχ. 64.1



Σχ. 64.2

Τὴν ἀρνητικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ), ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι (Σχ. 64.2). *Συμβολικῶς : (ΟΑ, ΟΓ) = α + β, καί ἐπὶ ἀντιθέτως προσανατολισμένων γωνιῶν :*

Τὴν θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ), καθ' ὅσον ἡ ἀντίθετος τῆς ἀρνητικῶς προσανατολισμένης εἶναι μικροτέρα ἢ μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης, ἀντιστοίχως (Σχ. 64.3).



Σχ. 64.3

Οὕτως, ἂν ἡ ἀντίθετος τῆς ἀρνητικῶς προσανατολισμένης γωνίας β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς α (Σχ. 64.3), τότε τὸ ἄθροισμα εἶναι ἡ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη γωνία (ΟΑ, ΟΓ).

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον γ τὴν κλάσιν ἰσότητος τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ), θὰ σημειοῦμεν, κατὰ τὰς ἀνωτέρω ἀντιστοίχως περιπτώσεις : $\gamma = \alpha + \beta$.

Σημειοῦμεν, ὅτι κατόπιν τοῦ εἰσαχθέντος (59) ἀξιώματος, τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τοῦ σημείου Ο καὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΑ.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ (64) τοῦ ἀθροίσματος γωνιῶν προκύπτει ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ 1. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου* (¹) *προσανατολισμένων γωνιῶν ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική*

Δυνάμεθα, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο γωνιῶν, ἐκ τῆς σχέσεως : $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

(1) Προσανατολισμένου.

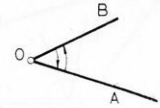
2. *Τὸ ἄθροισμα οἱασδήποτε γωνίας α καὶ τῆς μηδενικῆς εἶναι ἡ γωνία α.*

Συμβολικῶς : $\alpha + O = \alpha$

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ἡ μηδενικὴ γωνία εἶναι τὸ **οὐδέτερον στοιχεῖον** τοῦ συνόλου τούτου, ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως ἐν αὐτῷ.

3. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων γωνιῶν α καὶ α′ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία* (Σχ. 64.4).

Δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν $\alpha + \alpha' = 0$.



Σχ. 64.4

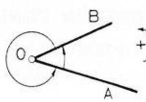
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (64) τοῦ ἀθροίσματος εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ἔχομεν ὅτι :

Δοθείσης μιᾶς γωνίας α ὑπάρχει γωνία α′, καὶ μία μόνον, ὥστε $\alpha + \alpha' = 0$.

Τὸ στοιχεῖον α′ ὀνομάζεται **ἀντίθετον** ἢ **συμμετρικὸν** τοῦ στοιχείου α, ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν δύναται νὰ εἶναι μία πλήρης, θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη γωνία. Τοιοῦτον εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοίως προσανατολισμένων γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΑ) τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ συμπίπτουν (Σχ. 64.5).

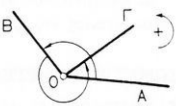


Σχ. 64.5

2. Τὸ ἄθροισμα δύο προσανατολισμένων γωνιῶν δύναται νὰ «καλύψῃ» τὸ ἐπίπεδον περισσοτέρας τῆς μιᾶς φοράς. Τοιοῦτον δύναται νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα μιᾶς κυρτῆς καὶ μιᾶς μὴ κυρτῆς ἢ τὸ ἄθροισμα δύο μὴ κυρτῶν γωνιῶν.

Εἰς τὴν ἐμφανιζομένην (Σχ. 64.6) περίπτωσιν τὴ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) θεωρεῖται ὡς γωνία : ἀποτελουμένη ἀπὸ μίαν πλήρη γωνίαν καὶ ἀπὸ τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΓ).

Γενικεύοντες, δηλαδή, τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας δεχόμεθα ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι μία προσανατολισμένη γωνία.



Σχ. 64.6

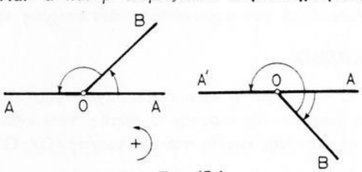
ΓΩΝΙΑΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ

65. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο προσανατολισμέναι γωνίαι α καὶ β ὀνομάζονται* **παραπληρωματικαὶ** *ἀλλήλων, ὅταν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἡ θετικῶς ἢ ἡ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη εὐθεῖα γωνία.*

Δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν ἀντιστοίχως :

$\alpha + \beta = \pi$ ἢ $\alpha + \beta = -\pi$.

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω (65) ὁρισμοῦ καὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν προκύπτει ὅτι :



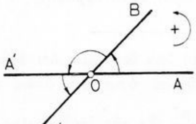
Σχ. 65.1

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. 1. *Δύο ἐφεξῆς γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΑ′) τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ εἶναι ἀντικείμεναι εἶναι παραπληρωματικαί, καὶ ἀντιστρόφως :*

Ἂν δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς, τότε αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι.

2. *Δύο οἱαιδήποτε κατὰ κορυφὴν γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) εἶναι ἴσαι.*

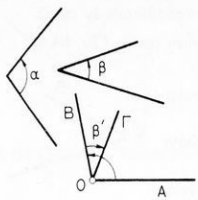
Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΒ, ΟΑ′). (Σχ. 65.1).



Σχ. 65.1

ΔΙΑΦΟΡΑ ΓΩΝΙΩΝ

66. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **διαφορὰν** *δύο γωνιῶν α καὶ β τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὴ θεωρουμένην τάξιν, καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον : α — β, τὸ ἄθροισμα τῆς γωνίας α καὶ τῆς ἀντιθέτου β′ τῆς β.*



Σχ. 66

Ὥστε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἔχομεν ὅτι : $\alpha - \beta = \alpha + \beta'$, ὅπου β′ ἕνα στοιχεῖον τῆς κλάσεως τῆς ἀντιθέτου πρὸς τὴν γωνίαν β γωνίας.

Οὕτως ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν α καὶ β (Σχ. 66) εἶναι ἡ γωνία (ΟΑ,ΟΓ).

Τὸ πρόσημον, κατὰ συνέπειαν, τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$ εἶναι τὸ τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta'$ (64).

Ἂν $\alpha = \beta$, ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΓΩΝΙΑΣ ΕΠΙ ΦΥΣΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ

67. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γινόμενον** *γωνίας α ἐπὶ φυσικὸν ἀριθμὸν μ, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον μ . α, τὸ ἄθροισμα μ γωνιῶν ἴσων πρὸς τὴν α.*

Ἂν εἶναι γ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, θὰ σημειοῦμεν : $\gamma = \mu \cdot \alpha$

Ἂν $\mu = 2, 3, 4, \ldots$ θὰ λέγωμεν ἀντιστοίχως ὅτι ἡ γωνία γ εἶναι διπλασία, τριπλασία κλπ. τῆς α, ἢ ὅτι ἡ α εἶναι τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον κλπ. τῆς γ.

Αἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου εὐθ. τμήματος α ἐπὶ φυσικὸν (44. 2) ἰσχύουν καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου γωνίας ἐπὶ φυσικὸν μ(1).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

68. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὰ εὐθ. τμήματα ἢ αἱ γωνίαι θεωρούμενα πάντοτε ὡς γεωμετρικὰ ἀντικείμενα ἢ σχήματα (2) δύνανται νὰ ὀνομάζωνται **γεωμετρικὰ μεγέθη.**

Γενικώτερον, ὀνομάζομεν **γεωμετρικὰ μεγέθη** τοῦ αὐτοῦ εἴδους, τὰ σχήματα εἰς τὸ σύνολον τῶν ὁποίων ἔχει ὁρισθῆ : μία σχέσις ἰσοδυναμίας, μία σχέσις διατάξεως καὶ ἡ πρᾶξις τῆς προθέσεως, μὲ τὰς σημειωθείσας ἀντιστοίχως ἰδιότητας τούτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως δύο σημεῖα τῶν πλευρῶν μιᾶς κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ), διάφορα τῆς κορυφῆς Ο αὐτῆς, τότε κάθε σημεῖον Μ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ Β εἶναι σημεῖον τῆς κυρτῆς ταύτης γωνίας (ΟΧ, ΟΥ).

2. Ἂν μία ἡμιευθεῖα ΟΓ ἀνήκῃ εἰς τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΟΑ,ΟΒ), τότε ἡ ἀντικειμένη ΟΓ′ αὐτῆς ἀνήκει εἰς τὴν κατὰ κορυφὴν γωνίαν (ΟΑ′,ΟΒ′) αὐτῆς.

3. Ἂν δύο κυρταὶ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ′, ΟΒ′) τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ ἐπὶ πλέον ἡ πλευρὰ ΟΑ′ τῆς δευτέρας εἶναι ἀντικειμένη τῆς πλευρᾶς ΟΑ τῆς πρώτης, τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι κατὰ κορυφήν, ἤτοι αἱ πλευραὶ ΟΒ′ καὶ ΟΒ αὐτῶν εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι.

---

(1) Ἂν δεχθῶμεν ὅτι δοθείσης γωνίας γ καὶ ἀκεραίου ν, ὑπάρχει γωνία α, ὥστε $\gamma = \nu . \alpha$, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν, ὅπως καὶ εἰς τὰ εὐθ τμήματα, τὸ γινόμενον μιᾶς γωνίας γ ἐπὶ τὸν ρητὸν $\frac{\mu}{\nu}$, ἐκ τῆς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha = \gamma \cdot \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \mu \cdot \frac{\gamma}{\nu}.$$

(2) Ἐπὶ τῆς ἐννοίας τοῦ «γεωμ. σχήματος» βλέπε Εἰσαγωγῆς παραγρ. 4.

4. Ἔστωσαν α, β δύο θετικῶς προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα ἢ γωνίαι καὶ μ, ν δύο φυσικοὶ ἀριθμοί. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

(1) $\mu \cdot \alpha < \nu \cdot \beta \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \cdot \alpha < \beta$, (2) $\mu \cdot \alpha = \nu \cdot \beta \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \cdot \alpha = \beta$, (3) $\mu \cdot \alpha > \nu \cdot \beta \Rightarrow \frac{\mu}{\nu} \alpha < \beta$.

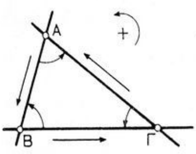
5. Ἔστωσαν α, β, γ τρία θετικῶς προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα ἢ γωνίαι ὥστε : $\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\alpha + \beta > \gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\alpha + \gamma < 3\beta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

69. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Θεωροῦμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα, ἐν γένει, ἐπ' εὐθείας. 'Ονομάζομεν* **τρίγωνον** *ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα τὸ σύνολον τῶν τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.*



Σχ. 69.1

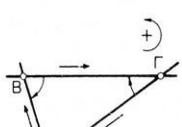
Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ὀνομάζονται **κορυφαὶ** καὶ τὰ εὐθ. τμήματα ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ **πλευραὶ** τοῦ τριγώνου.

Σημεῖα τοῦ τριγώνου ὀνομάζονται αἱ κορυφαὶ καὶ τὰ σημεῖα τὰ ἐσωτερικὰ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι: 'Εκάστη κορυφὴ τοῦ τριγώνου καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰς δύο ἄλλας κορυφὰς αὐτοῦ, **κεῖνται ἀπέναντι** ἀλλήλων. (Σχ. 69.1)

Αἱ πλευραί, ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν κορυφῶν, Α, Β, Γ αὐτοῦ δύνανται νὰ συμβολίζωνται μὲ τὰ πεζὰ γράμματα α, β, γ, ἀντιστοίχως.

'Επὶ τοῦ προσημασμένου (προσανατολισμένου) ἐπιπέδου, τὸ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος σημείων (Α, Β, Γ) ὁριζόμενον τρίγωνον ὀνομάζεται **προσανατολισμένον τρίγωνον.**

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ λέγεται **θετικῶς** ἢ **ἀρνητικῶς προσανατολισμένον** καθ' ὅσον ἡ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος (Α, Β, Γ) ὁριζομένη ἐπ' αὐτοῦ φορὰ εἶναι ἡ θετικὴ (Σχ. 69.1) ἢ ἡ ἀρνητικὴ (Σχ. 69.2) ἀντιστοίχως.



Σχ. 69.2

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, θετικῶς προσανατολισμένου τριγώνου ΑΒΓ, αἱ πλευραὶ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς θετικῶς προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα[1]. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἀρνητικῶς προσανατολισμένου τριγώνου αἱ ἀνωτέρω πλευραὶ θεωροῦνται ὡς ἀρνητικῶς προσανατολισμένα εὐθ. τμήματα.

Γωνίας τοῦ προσανατολισμένου τριγώνου ΑΒΓ ὀνομάζομεν τὰς κυρτὰς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ), (ΒΓ, ΒΑ), (ΓΑ, ΓΒ).

---

(1) Καθορίζοντα τὴν θετικὴν φορὰν τῶν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου φορέων των, ἤτοι τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, θεωρουμένων ὡς ἀξόνων. 'Η διάταξις, κατὰ ταῦτα, (Α, Β, Γ) καθορίζει τὸ πρόσημον τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον, τότε αἱ ἀνωτέρω γωνίαι αὐτοῦ εἶναι θετικῶς προσανατολισμέναι. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ἀρνητικῶς προσανατολισμένου τριγώνου, αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι.

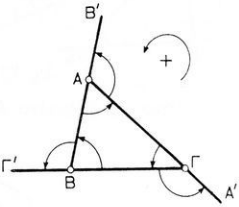
Ἐπὶ θετικῶς προσανατολισμένου τριγώνου, ἑκάστη γωνία αὐτοῦ ἔχει ὡς πρώτην πλευρὰν τὴν θετικὴν ἡμιευθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται καὶ ὡς δευτέραν τὴν ἀρνητικὴν ἡμιευθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας αὕτη κεῖται.

Αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΓ), (ΒΓ, ΒΑ), (ΓΑ, ΓΒ) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δύνανται νὰ συμβολίζωνται, διὰ τὴν συντομίαν, μὲ τὰ γράμματα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως.

70. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ΑΒ′, ΒΓ′, ΓΑ′ αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Αἱ κυρταὶ γωνίαι (ΑΓ,ΑΒ′), (ΒΑ,ΒΓ′), (ΓΒ,ΓΑ′) ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ γωνίαι** *τοῦ τριγώνου ΑΒΓ* (Σχ. 70).

Αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὁμοίως πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου προσανατολισμέναι.



Σχ. 70

Αἱ κατὰ κορυφὴν τῶν ἀνωτέρω ἐξωτερικῶν γωνιῶν ὀνομάζονται ἐπίσης ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ τριγώνου. Αἱ τελευταῖαι αὗται εἶναι ὁμοίως πρὸς τὰς πρώτας προσανατολισμέναι.

71. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἡμιεπίπεδα: (ΒΓ, Α), (ΓΑ, Β), (ΑΒ, Γ).

Τὰ στοιχεῖα (σημεῖα) τῆς τομῆς τῶν ἀνωτέρω ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι σημεῖα τοῦ τριγώνου ὀνομάζονται **ἐσωτερικὰ σημεῖα** τοῦ τριγώνου.

Κάθε σημεῖον Ν τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τριγώνου οὔτε ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ σύνολον τῶν ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ τριγώνου **ἐξωτερικὸν** αὐτοῦ(1).

ΣΧΕΣΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

72. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἄν, δοθέντων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τριγώνων, θεωρήσωμεν μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν κορυφῶν των κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ἀντίστοιχοι κορυφαὶ ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἀλλήλας καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη, τὰ τρίγωνα ταῦτα θὰ ὀνομάζωνται **ὁμόλογα.**

Εἶναι εὐνόητον ὅτι, δοθέντων δύο οἱωνδήποτε τριγώνων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, δύνανται ταῦτα νὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογα κατὰ περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς τρόπους.

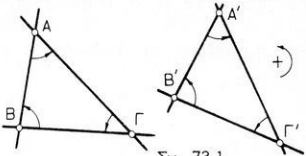
---

(1) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ἐσωτερικοῦ καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀποδεικνύεται βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων διατάξεως.

Αἱ ἀντίστοιχοι, ἤ, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **ὁμόλογοι** κορυφαὶ συμβολίζονται συνήθως μὲ τὸ αὐτὸ γράμμα, ἐπιφυλασσομένου ἑνός τόνου ἢ δείκτου ἢ ἀστερίσκου διὰ τὰς κορυφὰς τοῦ ἑνὸς τριγώνου.

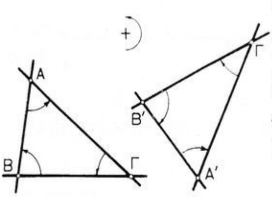
Ἂν εἶναι ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' δύο ὁμόλογα τρίγωνα, αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β'Γ', αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς Β, Β' καὶ Γ, Γ' θὰ ὀνομάζωνται **ὁμόλογοι. Ὁμόλογοι** θὰ ὀνομάζωνται ἐπίσης καὶ αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΓ) καὶ (Α' Β', Α'Γ') κλπ.

73. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο ὁμόλογα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὀνομάζονται* **ὁμορρόπως ἴσα** *ἢ ἁπλῶς* **ἴσα,** *ὅταν οἱ ὁμόλογοι πλευραὶ καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι,* **ἀντιρρόπως** *δὲ* **ἴσα** *ὅταν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι αὐτῶν ἀντίθετοι.*



Σχ. 73.1

Οὕτω, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (Σχ. 73.1), εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι, ὡς ὑποθέτομεν : $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ $A = A'$, $B = B'$, $\Gamma = \Gamma'$, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα.



Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (Σχ. 73.2) εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι, ὡς ὑποθέτομεν :

$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $A = -A'$, $B = -B'$, $\Gamma = -\Gamma'$, εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

1. Δύο ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου(1) εἶναι ὁμοίως (θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς) προσανατολισμένα.

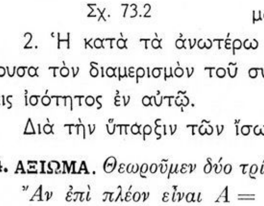
Σχ. 73.2

2. Ἡ κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα ἰσότης εἶναι μία ἰσοδυναμία, ἐπιτρέπουσα τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνων εἰς κλάσεις ἰσότητος ἐν αὐτῷ.

Διὰ τὴν ὕπαρξιν τῶν ἴσων τριγώνων ἀρκεῖ νὰ δεχθῶμεν τὸ ἑξῆς ἀξίωμα:

74. ΑΞΙΩΜΑ. *Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἰς τὰ ὁποῖα $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Ἂν ἐπὶ πλέον εἶναι $A = A'$, τότε θὰ εἶναι $B = B'$ καὶ $\Gamma = \Gamma'$.*

Ἂν εἶναι $A = -A'$, τότε θὰ εἶναι καὶ $B = -B'$ καὶ $\Gamma = -\Gamma'$ Ἤτοι :



Σχ. 74

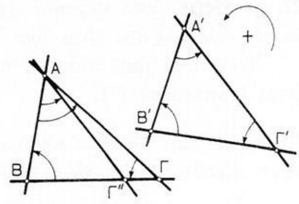
Ἂν αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι κατὰ τὰ δύο ζεύγη καὶ αἱ ὑπὸ τούτων περιεχόμεναι γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι. Ἂν αἱ περιεχόμεναι γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι τότε καὶ αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετοι.

---

(1) Ἐκτὸς ἐναντίας ἐνδείξεως τὸ ἐπίπεδον θεωρεῖται προσανατολισμένον.

Ἐκ τοῦ ἀξιώματος τούτου προκύπτουν αἱ ἀναγκαῖαι καὶ ἱκαναὶ συνθῆκαι αἱ ἀναφερόμεναι εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων. Οὕτως ἔχομεν τὰ ἑξῆς θεωρήματα:

75. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι : $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = (Α′Β′, Α′Γ′) τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.



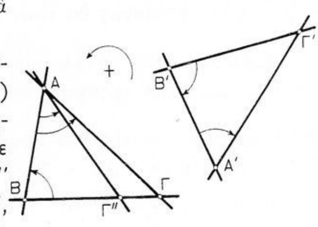
Σχ. 75.1

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ ἀξιώματος (74) ἔχομεν (Σχ. 75.1) ὅτι (ΒΓ, ΒΑ) = (Β′Γ′, Β′Α′) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (Γ′Α′, Γ′Β′). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΒΓ τὸ σημεῖον Γ″ ὥστε:

ΒΓ″ = Β′Γ′ ($= \alpha'$).

Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ″ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχομεν (74) ὅτι: (ΑΒ, ΑΓ″) = (Α′Β′, Α′Γ′). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (59) διότι, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = (Α′Β′, Α′Γ′). Ὥστε ΒΓ = Β′Γ′, ἤτοι $\alpha = \alpha'$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τῶν τριγώνων ἀντιστοίχως, ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (73).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι : $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = − (Α′Β′, Α′Γ′) τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.*

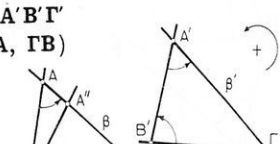


Σχ. 75.2

Πράγματι, ἐκ τοῦ ἀξιώματος (74) ἔχομεν (Σχ. 75.2) (ΒΓ, ΒΑ) = − (Β′Γ′, Β′Α′) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = − (Γ′Α′, Γ′Β′). Ἂν θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς ΒΓ τὸ σημεῖον Γ″ ὥστε ΒΓ″ = Β′Γ′ ($= \alpha'$), ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ″ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχομεν : (ΑΒ, ΑΓ″) = − (Α′Β′, Α′Γ′). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (59), διότι εἶναι καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = − (Α′Β′, Α′Γ′). Ἑπομένως $\alpha = \alpha'$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ ἐπειδὴ αἱ γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι, τὰ τρίγωνα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα (73).

76. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι: $\alpha = \alpha'$, (ΒΓ, ΒΑ) = (Β′Γ′, Β′Α′), (ΓΑ, ΓΒ) = (Γ′Α′, Γ′Β′), τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.



Σχ. 76

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΓΑ τὸ σημεῖον Α″ ὥστε ΓΑ″ = Γ′Α′ ($= \beta'$) καὶ ὑποθέτομεν Α″ $\not\equiv$ Α. Ἐκ τῶν ἴσων (75) τριγώνων Α″ΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχομεν (Σχ. 76). (ΒΓ, ΒΑ″) = (Β′Γ′, Β′Α). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (59), διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ (ΒΓ, ΒΑ) = (Β′Γ′, Β′Α′). Ἑπομένως Α″ ≡ Α, ἤτοι $\beta = \beta'$. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα (75).

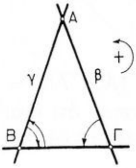
ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι : $\alpha = \alpha'$, $B = -B'$, $\Gamma = -\Gamma'$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.*

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ.

77. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ὀνομάζεται* **ἰσοσκελὲς** *ὅταν δύο τουλάχιστον ἐκ τῶν πλευρῶν του εἶναι ἴσαι* (1).

Ἂν καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσαι τὸ τρίγωνον ὀνομάζεται **ἰσόπλευρον** (2).

78. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσαι, τότε αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ἴσαι, καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 78

. Ἤτοι : $\beta = \gamma \Leftrightarrow (B\Gamma, BA) = (\Gamma A, \Gamma B)$. Ἐθέσαμεν $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$.

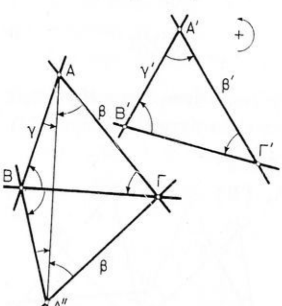
Ἀπόδειξις. Ἔστω $\beta = \gamma$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ (Σχ. 78) ἔχομεν : $\gamma = \beta$, $\beta = \gamma$ καὶ $(AB, A\Gamma) = -(A\Gamma, AB)$. Ἑπομένως θὰ εἶναι (75) : $(B\Gamma, BA) = -(\Gamma B, \Gamma A)$, ἤτοι $(B\Gamma, BA) = (\Gamma A, \Gamma B)$.

Ἀντιστρόφως : ἔστω $(B\Gamma, BA) = (\Gamma A, \Gamma B)$. Εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ ἔχομεν $B\Gamma = \Gamma B$, $(B\Gamma, BA) = -(\Gamma B, \Gamma A)$ καὶ $(\Gamma A, \Gamma B) = -(B\Gamma, BA)$. Ἑπομένως θὰ εἶναι (76) $\beta = \gamma$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἰσογώνιον καὶ ἀντιστρόφως : Κάθε ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσόπλευρον.*

79. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', εἶναι $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν, πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α, τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΧ ὥστε: $(B\Gamma, BX) = -(B'\Gamma', B'A')$ καὶ ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΒΧ τὸ σημεῖον Α'' ὥστε $BA'' = B'A'$ $(=\gamma')$.



Σχ. 79

Εἶναι $BA'' = BA$ $(=\gamma)$, διότι ἐξ ὑποθέσεως $\gamma = \gamma'$ (Σχ. 79).

Ἐκ τῶν τριγώνων Α''ΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχομεν (76, Πόρισμα) ὅτι $A''\Gamma = \beta' = \beta$ καὶ $(A''B, A''\Gamma) = -(A'B', A'\Gamma')$. Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΒΑΑ'' καὶ ΓΑΑ'' ἔχομεν ἀντιστοίχως (78) :

(1) $(AB, AA'') = (A''A, A''B)$ καὶ

(2) $(AA'', A\Gamma) = (A''\Gamma, A''A)$.

---

(1) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προκύπτει ἐκ τοῦ ἀξιώματος (26).

(2) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου θὰ ἀποδειχθῇ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ἐννοίας τοῦ κύκλου.

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$(\text{ΑΒ}, \text{ΑΓ}) = (\text{Α''Γ}, \text{Α''Β}).$$

Ἀλλὰ εἶναι καὶ $(\text{Α'Β'}, \text{Α'Γ'}) = (\text{Α''Γ}, \text{Α''Β})$.

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἕπεται ὅτι :

$$(\text{ΑΒ}, \text{ΑΓ}) = (\text{Α'Β'}, \text{Α'Γ'}),$$

ἤτοι ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι (75) ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.*

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ ἀπόδειξις τῶν εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ἀναφερομένων προτάσεων δὲν ἐβασίσθη ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῆς **μεταθέσεως,** ἀλλὰ εἰς τὰ ἀνεξάρτητα τῆς ἐννοίας αὐτῆς ἀξιώματα τῆς ἰσότητος.

Οἱ ὅροι **ὁμορρόπως** καὶ **ἀντιρρόπως** ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου δέχονται τὴν ἑξῆς ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν ἀντιστοίχως :

Δύο ὁμορρόπως ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ, δύνανται διὰ μεταθέσεως τοῦ ἑνὸς τούτων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ νὰ ἀχθοῦν εἰς σύμπτωσιν.

Δύο ἀντιρρόπως ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου δὲν δύνανται νὰ ἀχθοῦν εἰς σύμπτωσιν κατὰ τὰ ἀνωτέρω, δοθέντος ὅτι θέλει πρὸς τοῦτο ἀπαιτηθῆ μετάθεσις τοῦ ἑνὸς τῶν τριγώνων, ἥτις φέρει τοῦτο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου (στροφὴ τούτου περὶ εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου του ὥστε νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν συμμετρικὴν τῆς ἀρχικῆς θέσιν τοῦ ἐπιπέδου του ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν) καὶ ἀκολούθως μετάθεσις αὐτοῦ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

Ὡς ἐσημειώσαμεν ἀνωτέρω, ἡ ἀνωτέρω ἑρμηνεία τυγχάνει ἐποπτικὴ δοθέντος ὅτι ἡ ἔννοια τῆς **μεταθέσεως** ἐν τῷ ἐπιπέδῳ μόνον ὡς κινητικὴ ἔννοια δύναται νὰ νοηθῇ, ἀφοῦ ὡς μὴ βασιζομένη ἐπὶ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων δὲν εἶναι εἰσέτι **γεωμετρική,** πέραν δὲ τούτου μετάθεσις τοῦ τριγώνου, ἥτις φέρει τοῦτο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του, δὲν τυγχάνει ἐπιτρεπτὴ ὡς ἀποδεικτικὴ μέθοδος εἰς τὴν γεωμετρίαν τοῦ ἐπιπέδου, ὄχι μόνον διότι δὲν ἔχει ὁρισθῆ ἡ ἔννοια μιᾶς τοιαύτης μεταθέσεως, ἀλλὰ καὶ διότι ἀναφέρεται εἰς χῶρον διάφορον τοῦ ἐπιπέδου.

Ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει ἡ ἔννοια τῆς μεταθέσεως θέλει ὁρισθῆ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐννοίας τῆς **ἀπεικονίσεως,** ἡ τελευταία δὲ αὕτη θέλει ὁρισθῆ ἐκ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων τῆς ἰσότητος :

Δύο τρίγωνα, καὶ γενικώτερον σχήματα τοῦ ἐπιπέδου, θὰ ὀνομάζωνται ἴσα, ἂν καὶ μόνον ἂν τὰ σημεῖα αὐτῶν δύνανται νὰ ἀντιστοιχοῦν ἀνὰ δύο ὥστε τὰ ἀντίστοιχα (ὁριζόμενα ἀπὸ ζεύγη ἀντιστοίχων σημείων) εὐθύγραμμα τμήματα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι. Ἀναλόγως δὲ πρὸς τὰ ἀνωτέρω θέλει ὁρισθῆ καὶ ἡ ἰσότης τῶν σχημάτων τοῦ χώρου (τῶν μὴ ἐπιπέδων σχημάτων).

ΟΡΘΗ ΓΩΝΙΑ — ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΘΕΤΟΙ ΕΠ' ΑΛΛΗΛΑΣ

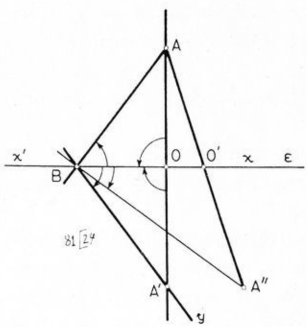
80. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν δύο ἐφεξῆς γωνίας (OA, OB) καὶ (OA′, OB) τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ εἶναι ἀντικείμεναι.

Ἂν αἱ ἀνωτέρω γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι, τότε ἑκάστη τούτων ὀνομάζεται **ὀρθή**.

Συμβολικῶς : $(OA, OB) = \frac{\pi}{2}$.

Αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀνομάζονται **κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας**.

81. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτῆς, ὑπάρχει εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ μόνον μία.



Σχ. 81

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Β τῆς ε, τὴν ἡμιευθεῖαν BY, πρὸς τὸ μέρος τῆς ε πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ BA, ὥστε (BX, BY) = − (BX, BA) καὶ τὸ σημεῖον A′ τῆς ἡμιευθείας BY ὥστε BA′ = BA (Σχ. 81). Τὰ σημεῖα Α καὶ A′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ε. Ἑπομένως ὑπάρχει (21) σημεῖον τῆς ε μεταξὺ τῶν Α καὶ A′. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τοῦτο. Ἐκ τῶν τριγώνων OAB καὶ OA′B ἔχομεν (75) ὅτι (OA, OB) = − (OA′, OB), ἤτοι ὅτι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι (80) ὀρθαὶ καὶ ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι AA′ καὶ ε κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

Ἐξ ἄλλου δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Πράγματι, ἔστω ὅτι ὑπάρχει μία ἄλλη κάθετος AO′ ἐπὶ τὴν ε διὰ τοῦ Α καὶ ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τῆς AO′, καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ O′ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Α, τὸ σημεῖον A″ ὥστε O′A″ = O′A. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι (O′A, O′B) = − (O′A″, O′B), ἐκ τῶν τριγώνων AO′B καὶ A″O′B θὰ ἔχωμεν (75) ὅτι (BX, BA″) = − (BX, BA) καὶ BA″ = BA. Ἑπομένως (24) BA″ = BA′ καὶ (60) : (BX, BA″) = (BX, BA′).

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα A′ καὶ A″ συμπίπτουν. Δὲν ὑπάρχει ἑπομένως ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν ε.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῶν καθέτων ἐπ' ἀλλήλας εὐθειῶν.

82. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ε σημεῖον Ο τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ε ὀνομάζεται **ὀρθὴ προβολὴ** ἢ ἁπλῶς **προβολὴ** τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὴν ε.
Ἡ ἐκ τοῦ Α κάθετος AA′ ἐπὶ τὴν ε ὀνομάζεται **προβάλλουσα** τὸ Α ἐπὶ τὴν ε. Τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ο ὀνομάζεται **συμμετρικὸν** τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ε.

83. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

᾿Απόδειξις. Ἔστωσαν (ΟΑ,ΟΒ) καὶ (Ο′Α′, Ο′Β′) δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι ὀρθαὶ γωνίαι καὶ ΟΓ καὶ Ο′Γ′ αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν ΟΑ καὶ Ο′Α′ ἀντιστοίχως.

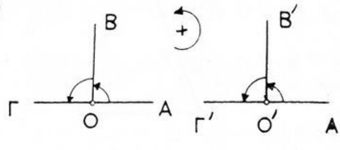
Εἶναι (Σχ. 83). (ΟΑ, ΟΒ) = (ΟΒ, ΟΓ) καὶ (Ο′Α′, Ο′Β′) = (Ο′Β′, Ο′Γ′).

᾿Αλλὰ (ΟΑ, ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΓ) = π καὶ (Ο′Α′, Ο′Β′) + (Ο′Β′, Ο′Γ′) = π

᾿Εκ τούτων ἕπεται ὅτι :

2 (ΟΑ, ΟΒ) = 2 (Ο′Α′, Ο′Β′)

ἢ (ΟΑ, ΟΒ) = (Ο′Α′, Ο′Β′).

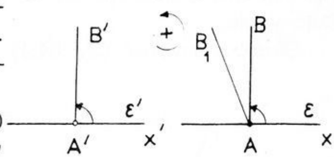


Σχ. 83

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Δοθέντος σημείου Α ἐπὶ εὐθείας ε, ὑπάρχει, ἐπὶ τυχόντος ἐπιπέδου περιέχοντος τὴν ε, εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ μόνον μία*

Πράγματι, ἂν ἐπὶ τοῦ ἀνωτέρω ἐπιπέδου θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε′ καὶ τυχὸν σημεῖον Β′ αὐτοῦ κείμενον ἐκτὸς τῆς ε, ὑπάρχει συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (81), εὐθεῖα Β′Α′ διὰ τούτου κάθετος ἐπὶ τὴν ε′ καὶ μόνον μία (Σχ. 83.1).

Ἂν διὰ τοῦ σημείου Α τῆς ε θεωρήσωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΒ ὥστε : (ΑΧ, ΑΒ) = (Α′Χ′, Α′Β′), ἡ γωνία (ΑΧ, ΑΒ) θὰ εἶναι ὀρθή, ὡς ἴση πρὸς τὴν ὀρθὴν γωνίαν (Α′Χ′, Α′Β′).



Σχ. 83.1

᾿Εξ ἄλλου, δὲν ὑπάρχει ἄλλη διὰ τοῦ Α κάθετος AB_1 ἐπὶ τὴν ε, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἦτο : (ΑΧ, ΑΒ) = (AX, AB_1), ἐνῷ αἱ ΑΒ καὶ AB_1 κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε. Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τοῦ ἀξιώματος (59).

ΓΩΝΙΑ ΟΞΕΙΑ ΚΑΙ ΑΜΒΛΕΙΑ

Ἡ ὀρθὴ γωνία λαμβάνεται ὡς **μέτρον**(1) τῶν γωνιῶν.

84. ΟΡΙΣΜΟΙ. *1. Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη γωνία ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης ὀρθῆς γωνίας θὰ ὀνομάζεται* **ὀξεῖα γωνία.**

Οὕτως, ἡ θετικὴ γωνία (ΟΑ, ΟΓ) (Σχ. 84.1) εἶναι μία ὀξεῖα γωνία, ὡς μικροτέρα τῆς θετικῆς ὀρθῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

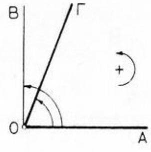
---

(1) Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τῆς πρὸς αὐτὴν συγκρίσεως τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου [Βλέπε σχετικοὺς ὁρισμοὺς (62)]. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν θεωρουμένη ἡ ὀρθὴ γωνία δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ *μοναδιαία γωνία.*

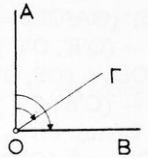
Εἰς τὴν Πρακτικὴν Γεωμετρίαν ὡς μέτρον τῶν γωνιῶν ἐλήφθη ἡ *μοῖρα* ἢ ὁ *βαθμός*. Ἡ ὀρθὴ γωνία, ἡ ὁποία εἶναι τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν εἰς τὴν Θεωρητικὴν Γεωμετρίαν, δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ *ἀπόλυτον μέτρον* αὐτῶν. Ἡ ἐκλογὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας ὡς τοῦ ἀπολύτου μέτρου τῶν γωνιῶν ἐπιβάλλεται διὰ λόγους οἱ ὁποῖοι θέλουν γίνη κατανοητοὶ κατὰ τὴν περαιτέρω σπουδὴν τῆς Γεωμετρίας. ᾿Εκ τῆς σπουδῆς ταύτης θέλει κατανοηθῆ καὶ ὁ λόγος διὰ τὸν ὁποῖον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ἕνα ἀπόλυτον μέτρον διὰ τὰ εὐθ. τμήματα.

Πᾶσα ἀρνητικῶς προσανατολισμένη γωνία ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης ὀρθῆς γωνίας θὰ ὀνομάζεται ἐπίσης ὀξεῖα γωνία.

Οὕτως, ἡ ἀρνητικὴ γωνία (ΟΑ, ΟΓ) (Σχ. 84.2) εἶναι μία ὀξεῖα γωνία.



Σχ. 84.1



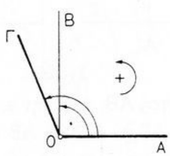
Σχ. 84.2

2. *Πᾶσα θετικῶς προσανατολισμένη κυρτὴ γωνία ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης ὀρθῆς γωνίας θὰ ὀνομάζεται* **ἀμβλεῖα γωνία.**

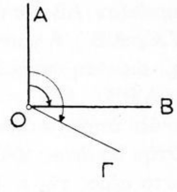
Οὕτως, ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΓ) (Σχ. 84.3) εἶναι μία θετικὴ ἀμβλεῖα γωνία.

Πᾶσα ἀρνητικῶς προσανατολισμένη κυρτὴ γωνία ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα τῆς ὁμοίως προσανατολισμένης ὀρθῆς γωνίας θὰ ὀνομάζεται ἐπίσης ἀμβλεῖα γωνία.

Οὕτως, ἡ ἀρνητικὴ (Σχ. 84.4) γωνία (ΟΑ, ΟΓ) εἶναι μία ἀμβλεῖα γωνία.



Σχ. 84.3



Σχ. 84.4

3. *Δύο γωνίαι τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν θὰ ὀνομάζωνται* **συμπληρωματικαί,** *ἑκατέρα δὲ τούτων* **συμπλήρωμα** *τῆς ἄλλης.*

Σχ. 84.5

4. *Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς (57) καὶ ὁμοίως προσανατολισμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παραπληρωματικαί, συμφώνως πρὸς τὸν ὑπ' ἀριθ. 65 ὁρισμόν, εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας* (Σχ. 84.5).

Ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν ὀνομάζεται **παραπλήρωμα** *τῆς ἄλλης.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν τῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ' = ΑΒ καὶ ΑΓ' = ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι : (1) Β'Γ' = ΒΓ καὶ (2) (ΒΓ, ΒΑ) = (Β'Γ', Β'Α) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (Γ'Α, Γ'Β').

2. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΓ καὶ

ΑΒ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Β', Γ' ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ' = ΑΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ' = ΓΓ' καὶ ὅτι (ΒΓ, ΒΒ') = (ΓΓ', ΓΒ).

3. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ δύο σημεῖα Β' καὶ Γ' τῶν εὐθειῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως ὥστε : (ΒΓ, ΒΒ') = (ΓΓ', ΓΒ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ' = ΓΓ'.

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ δύο σημεῖα Β' καὶ Γ' τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : ἂν ΒΒ' = ΓΓ' καὶ (ΒΓ, ΒΒ') = (ΓΓ', ΓΒ), τότε ΑΓ = ΑΒ, ἤτοι ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

5. Θεωροῦμεν : κυρτὴν γωνίαν (ΑΥ, ΑΖ), ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΥ δύο σημεῖα Β καὶ Γ' καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΖ δύο σημεῖα Β' καὶ Γ ὥστε ΑΒ = ΑΒ' καὶ ΑΓ' = ΑΓ. Ἔστω Δ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ Β'Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (ΑΔ, ΑΒ) = –(ΑΔ, ΑΓ).

6. Κάθε ἐξωτερικὴ γωνία θετικῶς προσανατολισμένου τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν γωνιῶν αὐτοῦ τῶν μὴ προσκειμένων πρὸς τὴν θεωρουμένην ἐξωτερικὴν γωνίαν.

7. Θεωροῦμεν δύο ἴσας κυρτὰς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) καὶ (Ο'Χ', Ο'Υ') καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΖ καὶ Ο'Ζ' τὰς ἀντικειμένας τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ Ο'Χ' τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν ἀντιστοίχως, Νὰ ἀποδειχθῇ, χωρὶς τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν, ὅτι εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι (ΟΥ, ΟΖ) καὶ (Ο'Υ', Ο'Ζ').

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ ΑΥΤΟΥ

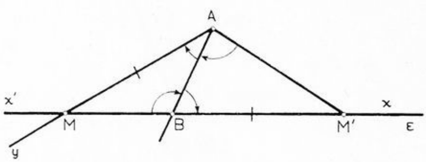
ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

85. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο εὐθεῖαι α καὶ β ὀνομάζονται* **παράλληλοι,** *ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον* (1).

Ἡ κατωτέρω πρότασις ἀναφέρεται εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

86. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς, ὑπάρχει εὐθεῖα διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν σημεῖον Β τῆς ε. Ἂν εἶναι Χ ἕνα ἄλλο, ἐκτὸς τοῦ Β, σημεῖον τῆς εὐθείας ε, θεωροῦμεν πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Χ, τὴν γωνίαν (ΑΒ, ΑΥ) τὴν ἴσην πρὸς τὴν γωνίαν (ΒΑ, ΒΧ) (Σχ. 86). Θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΥ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν ὑποθέτομεν ὅτι τὴν τέμνει εἰς σημεῖον Μ (Σχ. 86) τοιοῦτον ὥστε τὸ Β, ἔστω, νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Χ.



Σχ. 86

Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ε τὸ σημεῖον Μ′ ὥστε τὸ Β νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ′ καὶ ἐπὶ πλέον νὰ εἶναι ΒΜ′ = ΑΜ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΒΑΜ′ εἶναι (75) ἴσα. Πράγματι εἶναι: ΑΒ = ΒΑ, ΑΜ = ΒΜ′ καὶ (ΑΒ, ΑΜ) = (ΒΑ, ΒΜ′).

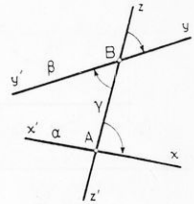
Ἑπομένως θὰ εἶναι: (ΒΜ, ΒΑ) = (ΑΜ′, ΑΒ).

Ἀλλὰ αἱ γωνίαι (ΒΜ, ΒΑ) καὶ (ΒΑ, ΒΜ′) εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἑπομένως καὶ αἱ ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς αὐτὰς γωνίαι: (ΑΒ, ΑΜ) καὶ (ΑΜ′, ΑΒ) εἶναι (84.4) παραπληρωματικαί, ἤτοι αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΜ′ εἶναι ἀντικείμεναι. Ἀλλὰ τὸ συμπέρασμα τοῦτο εἶναι (8) ἄτοπον, διότι αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ΜΜ′, αἱ ὁποῖαι εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα: τὰ Μ καὶ Μ′.

(1) Οὐδὲν ἀξίωμα ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἀπαιτεῖται διὰ τὴν κατοχύρωσιν τῶν ἀποδείξεων τῶν, εἰς τὴν *ἰσότητα* ἀναφερομένων προτάσεων.

87. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν θεωρήσωμεν δύο εὐθείας α καὶ β καὶ μίαν τρίτην εὐθεῖαν ε τέμνουσαν αὐτάς, ἕκαστον τῶν κοινῶν σημείων Α καὶ Β τῆς ε μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως, εἶναι κορυφὴ τεσσάρων κυρτῶν γωνιῶν, ὁριζομένων ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω εὐθείας α, β καὶ ε (Σχ. (87).

Μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὀκτὼ γωνιῶν θὰ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὴ** ἢ **ἐντός,** ἂν ἔχῃ ὡς πλευρὰν μίαν τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ, ἢ ΒΑ καὶ **ἐξωτερικὴ** ἢ **ἐκτὸς** ἂν ἔχῃ ὡς πλευρὰν μίαν τῶν ἡμιευθειῶν τῶν ἀντικειμένων τῆς ΑΒ ἢ τῆς ΒΑ.



Σχ. 87

Δύο γωνίαι ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἔχουσαι κορυφὰς ἀντιστοίχως τὰ Α καὶ Β θὰ ὀνομάζωνται :

Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅταν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ε καὶ εἶναι καὶ αἱ δύο ἐσωτερικαί.

Τοιαῦται γωνίαι εἶναι π.χ. αἱ (ΑΒ, ΑΧ) καὶ (ΒΥ, ΒΑ).

Ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΧ, ΑΖ') καὶ (ΒΖ, ΒΥ).

Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΧ) καὶ (ΒΖ, ΒΥ).

Ἐντὸς ἐναλλάξ. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΧ) καὶ (ΒΑ, ΒΥ').

Ἐκτὸς ἐναλλάξ. Τοιαῦται εἶναι π.χ. αἱ γωνίαι (ΑΧ, ΑΖ') καὶ (ΒΥ', ΒΖ).

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἡ πρότασις (86) διατυποῦται ὡς ἑξῆς :

Ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνῃ δύο εὐθείας α καὶ β καὶ ἐκ τῶν ὁριζομένων κυρτῶν γωνιῶν, δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι, τότε αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.*

2. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι κάθετοι ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν ε, τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.

ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ. Ἀπεδείχθη (86) ὅτι :

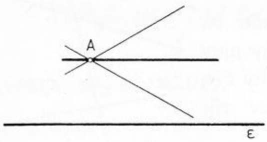
Δοθείσης ἐπὶ ἐπιπέδου εὐθείας ε καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτῆς ὑπάρχει διὰ τοῦ Α εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ε.

Τὸ ὅτι μόνον μία τοιαύτη παράλληλος ὑπάρχει δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποδειχθῇ βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων. Ἡ σχετικὴ πρότασις εἰσήχθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου (300 π.Χ.) εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀξιωμάτων τῆς Γεωμετρίας του ὡς **αἴτημα :**

88. ΑΞΙΩΜΑ. *Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α, ἐκτὸς αὐτῆς, μόνον μία διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ε ἄγεται* (1).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν ἑκάστη ἐκ δύο εὐθειῶν α καὶ β εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν ε, τότε αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι.*

Πράγματι, ἂν αἱ α καὶ β ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν δύο διάφοροι ἀλλήλων παράλληλοι πρὸς τὴν ε, ἀγόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (τοῦ κοινοῦ των σημείου).



Σχ. 88

2. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, τότε τὰ σημεῖα ἑκάστης τούτων κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἄλλης.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι:

Κάθε σημεῖον τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ β καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας β πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ α, ἤτοι κάθε σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως ὡς ἀρχικὰς εὐθείας τὰς α καὶ β καὶ περιέχουν ἀντιστοίχως τὰς β καὶ α, **κεῖται** μεταξὺ τῶν α καὶ β

89. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνῃ δύο παραλλήλους εὐθείας α καὶ β, τότε ἐκ τῶν ὁριζομένων κυρτῶν γωνιῶν δύο οἱαιδήποτε ἐντὸς ἢ ἐκτὸς ἐναλλὰξ εἶναι ἴσαι.

---

(1) Τὸ ἀξίωμα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ε΄ *αἴτημα* τῶν *«Στοιχείων»* τοῦ Εὐκλείδου, ἔνθα εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν ἑξῆς διατύπωσιν.

«Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες».

Ἡ ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου εἰσαγωγὴ τῆς ἀνωτέρω (88) προτάσεως ὡς *αἰτήματος* καὶ οὐχὶ ὡς *θεωρήματος,* ὡς τοῦτο ἐθεωρήθη ἐπὶ πολλοὺς αἰῶνας, ἀποτελεῖ μίαν ἀπόδειξιν τῆς μεγαλοφυΐας του. Ἔπρεπε νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν 19ον αἰῶνα διὰ νὰ διαπιστωθῇ ὅτι ἂν ἤθελεν ἐπιχειρηθῇ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου διὰ τῆς μεθόδου τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὑποτεθῇ δηλαδὴ ὅτι διὰ σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ε, διέρχονται περισσότεραι τῆς μιᾶς εὐθεῖαι μὴ τέμνουσαι τὴν ε, οὐδεμία ἀντίφασις πρὸς τὰς εἰσαχθείσας προτάσεις προέρχεται. Οὕτω, μόλις κατὰ τὸ δεύτερον τέταρτον τοῦ 19ου αἰῶνος ἱδρύεται ὑπὸ τῶν N. I. Lobachewsky (1793 - 1856) καὶ J. Bolyai (1802 - 1860) μία πρώτη *μὴ Εὐκλείδειος Γεωμετρία* εἰς τὴν ὁποίαν ἀντὶ τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου εἰσάγεται τὸ ἀκόλουθον :

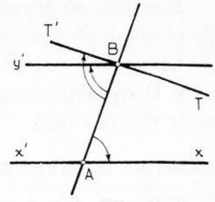
«Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π), διὰ σημείου Α, μὴ κειμένου ἐπὶ εὐθείας ε, διέρχονται περισσότεραι τῆς μιᾶς εὐθεῖαι μὴ τέμνουσαι τὴν ε».

Δοθέντος ὅτι, ὅπως καὶ εἰς τὴν Εἰσαγωγὴν ἐσημειώσαμεν, αἱ μεταξὺ τῶν Γεωμετρικῶν στοιχείων σχέσεις ἀναφέρονται εἰς τὸν «Γεωμετρικὸν Χῶρον» ἤτοι εἰς νοητικὸν κατασκεύασμα ὅλως διάφορον τοῦ «αἰσθητοῦ Χώρου», δὲν πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὅτι ἡ Γεωμετρία τοῦ N. I. Lobachewsky ἀρνεῖται τὴν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν (Βλέπε σχετικῶς Εἰσαγωγῆς παράγρ. 3).

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὰς μέχρι τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου εἰσαχθείσας καὶ ἀποδειχθείσας προτάσεις σημειοῦμεν ὅτι αὗται ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ N. I. Lobachewsky.

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς, ἐξ ἄλλου, τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου προέρχεται ἁπλοποίησις τῶν ἀποδεικτικῶν μέσων καὶ διευκολύνεται ἡ ἵδρυσις τῆς Γεωμετρίας ἥτις, ἐκ τοῦ ἱδρυτοῦ της, ὀνομάζεται *Εὐκλείδειος Γεωμετρία* ἢ *Γεωμετρία τοῦ Εὐκλειδείου Χώρου.*

'Απόδειξις. 'Αρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ἡ πρότασις διὰ δύο ἐντὸς-ἐναλλὰξ γωνίας π. χ. τὰς (AB, AX) καὶ (BA,BY'). Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ δὲν εἶναι ἴσαι καὶ θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθεῖαν BT' (Σχ. 89) ὥστε : (BA, BT') = (AB,AX). Ἡ BT' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν α (87), ἤτοι μία δευτέρα, ἐκτὸς τῆς β, παράλληλος πρὸς τὴν α διὰ τοῦ σημείου B. Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.



Σχ. 89

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν αἱ εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι καὶ ἡ γ τέμνουσα αὐτὰς τότε, δύο οἱαιδήποτε ἐντὸς-ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ δύο οἱαιδήποτε ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.* (1)

2. Κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

3. Δύο οἱαιδήποτε εὐθεῖαι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο παραλλήλους εὐθείας εἶναι παράλληλοι.

4. Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας, τέμνονται.

5. Ἂν δύο εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται ὑπὸ τρίτης ε καὶ ἐκ τῶν σχηματιζομένων κυρτῶν γωνιῶν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, τότε αἱ α καὶ β τέμνονται καὶ μάλιστα πρὸς τὸ μέρος τῆς ε πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ θεωρούμεναι γωνίαι. (2)

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

90. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν δ αὐτοῦ ὀνομάζεται* **διεύθυνσις** *ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.*

Αἱ εὐθεῖαι τοῦ ἀνωτέρου συνόλου, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο εἶναι παράλληλοι (88, Πόρισμα 1).

Μία διεύθυνσις ἐν τῷ ἐπιπέδῳ εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἕνα ὑποσύνολον τῶν εὐθειῶν αὐτοῦ, ὁριζομενων ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν δ αὐτοῦ καὶ συμβολιζόμενον, συνήθως, μὲ τὸ σύμβολον (δ).

Ἂν, γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τῶν παραλλήλων, δεχθῶμεν ὅτι ἡ σύμπτωσις δύο εὐθειῶν εἶναι μία περίπτωσις παραλληλίας, τὸ ἐκ τῆς δ ὁριζόμενον κατὰ τ' ἀνωτέρω ὑποσύνολον, εἶναι μία **κλάσις ἰσοδυναμίας** ἐν τῷ συνόλῳ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου (Π) (3).

---

(1) Αἱ ἀνωτέρω γωνίαι θεωροῦνται ὁμοίως προσανατολισμέναι.

(2) Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου.

(3) 'Ισχύουν αἱ ἰδιότητες : ἀνακλαστκή, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική : διατυπούμεναι συμβολικῶς ὡς κάτωθι :

$\forall\ \alpha, \beta \in (\Pi) : \alpha \parallel \alpha,\ \alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$ καί, $\alpha \parallel \beta$ καὶ $\beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$.

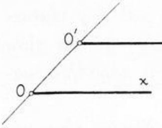
Μία τοιαύτη κλάσις ἰσοδυναμίας ἐν τῷ ἐπιπέδῳ δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ κλάσις παραλληλίας εἰς αὐτό.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν δ ἀνήκει εἰς τὴν κλάσιν ἢ εἰς τὴν διεύθυνσιν (δ). Οὕτω :

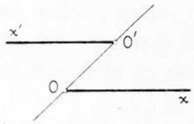
Κάθε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α καὶ τὴν διεύθυνσιν αὐτῆς. Πράγματι, ὑπάρχει μία μόνον εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Α καὶ ἀνήκουσα εἰς τὴν (δ) (88).

ΓΩΝΙΑΙ ΜΕ ΠΛΕΥΡΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥΣ Ἢ ΚΑΘΕΤΟΥΣ

91. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο ἡμιευθεῖαι ΟΧ καὶ Ο'Χ', κείμεναι ἀντιστοίχως ἐπὶ εὐθειῶν τῆς αὐτῆς διευθύνσεως, λέγομεν ὅτι εἶναι *τῆς αὐτῆς* ἢ *ἀντιθέτου* φορᾶς, ὅταν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Ο. καὶ Ο' αὐτῶν (Σχ. 91.1) ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς (Σχ. 91.2) ἀντιστοίχως. Ἂν αἱ ἡμιευθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς, ὅταν ἡ μία τούτων περιέχῃ τὴν ἄλλην καὶ ἀντιθέτου φορᾶς εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν.



Σχ. 91.1



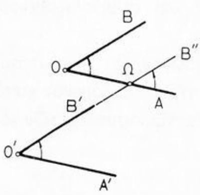
Σχ. 91.2

Δύο ἡμιευθεῖαι τῆς αὐτῆς φορᾶς δύνανται νὰ ὀνομάζωνται **ὁμόρροποι,** τῆς δὲ ἀντιθέτου φορᾶς **ἀντίρροποι.**

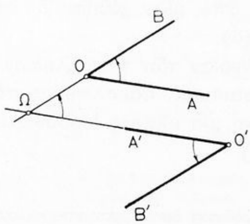
92. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίως προσανατολισμένων κυρτῶν γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.

2. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ἀντιθέτως προσανατολισμένων κυρτῶν γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε ἑκάστη τούτων καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστωσαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β') δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι (Σχ. 92.1). Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν εἶναι Ω τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ ΟΑ καὶ Ο'Β', ἑκάστη τῶν θεωρουμένων γωνιῶν εἶναι (89, Πόρισμα 1) ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΩΑ, ΩΒ'').



Σχ. 92.1

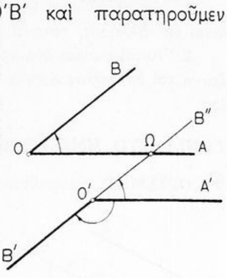


Σχ. 92.2

Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι (Σχ. 92.2) : (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β'). Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι ἴση πρὸς τὴν (ΩΑ',ΩΒ).

2. Ἂν αἱ γωνίαι (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β') τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι

ἀντιστοίχως παράλληλοι, εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 92.3) θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθεῖαν Ο'Β'' τὴν ἀντικειμένην τῆς Ο'Β' καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γωνία (Ο'Α', Ο'Β'') εἶναι (92.1) ἴση πρὸς τὴν (ΟΑ, ΟΒ). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ἀντίθετος (Ο'Β'', Ο'Α') τῆς (Ο'Α', Ο'Β'') καὶ ἡ (Ο'Α', Ο'Β') εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ὁμοίως προσανατολισμέναι ἐφεξῆς γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ Ο'Β' καὶ Ο'Β'' εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι (Σχ. 92.3).



Σχ. 92.3

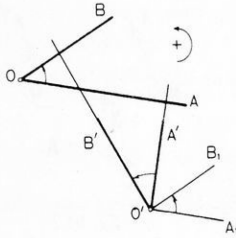
Σημειοῦμεν ὅτι:

Ἂν αἱ πλευραὶ τῶν θεωρουμένων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι ἢ ἀντιστοίχως ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε αἱ γωνίαι εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι, καὶ ἀντιστρόφως:

Ἂν δύο γωνίαι ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως παραλλήλους καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη εἶναι ἴσαι, τότε αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.

93. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίως προσανατολισμένων κυρτῶν γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι.

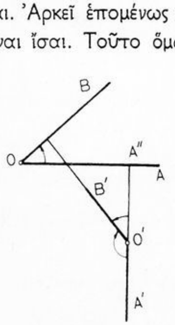
2. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ἀντιθέτως προσαλισμένων κυρτῶν γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε ἑκάστη τούτων καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 93.1

Ἀπόδειξις. 1. Ἔστωσαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (Ο'Α', Ο'Β') δύο ὁμοίως προσανατολισμέναι γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας (Σχ. 93.1). Θεωροῦμεν τὰς ἡμιευθείας $Ο'Α_1$ καὶ $Ο'Β_1$ τὰς ὁμορρόπους ἀντιστοίχως τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ. Αἱ γωνίαι ($Ο'Α_1$, $Ο'Β_1$) καὶ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι (92) ἴσαι. Ἀρκεῖ ἑπομένως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ($Ο'Α_1$, $Ο'Β_1$) καὶ (Ο'Α', Ο'Β') εἶναι ἴσαι. Τοῦτο ὅμως προκύπτει ἀμέσως ἐκ τοῦ ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω γωνιῶν εἶναι συμπλήρωμα τῆς γωνίας ($ΟΒ_1$, ΟΑ'). Πράγματι ἡ ΟΑ' ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της $Ο'Α_1$, ἤτοι ἡ γωνία ($Ο'Α_1$, Ο'Α') εἶναι ὀρθὴ καὶ δι' ὅμοιον λόγον εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ($Ο'Β_1$, Ο'Β').

2. Ἂν αἱ γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως, εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι (Σχ. 93.2), τότε ἡ παραπληρωματικὴ (Ο'Β', Ο'Α'') τῆς (Ο'Α', Ο'Β') ἐκ τούτων, εἶναι ἀντίθετος τῆς (ΟΑ, ΟΒ), ἤτοι ἡ ἀντίθετος τῆς (ΟΑ, ΟΒ) καὶ ἡ (Ο'Α', Ο'Β') εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 93.2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

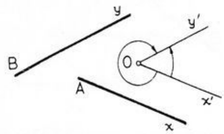
1. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι ἢ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αἱ γωνίαι τούτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.

2. Ἂν αἱ γωνίαι δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ἴσαι ἢ ἀντίθετοι καὶ κατὰ τὰ τρία ζεύγη καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι $\alpha = \beta'$, τότε τὰ τρίγωνα δὲν εἶναι, ἐν γένει, ἴσα, οὔτε ἀντιρρόπως ἴσα.

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΗΜΙΕΥΘΕΙΩΝ

94. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν δύο ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι διάφορα ἀλλήλων καὶ τὰς ἡμιευθείας ΟΧ' καὶ ΟΥ', τὰς ὁμορρόπους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀνωτέρω καὶ ἀγομένας ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 94.1).

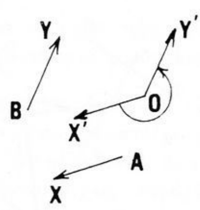
Ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΧ', ΟΥ') ὁρίζονται, βεβαίως δύο γωνίαι : ἡ κυρτὴ καὶ ἡ μὴ κυρτὴ γωνία (ΟΧ', ΟΥ'). Ἂν ἡ μία ἐκ τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη, ἡ δευτέρα θὰ εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη.



Σχ. 94.1

Τὴν θετικῶς προσανατολισμένην γωνίαν (ΟΧ', ΟΥ') ὀνομάζομεν **γωνίαν τῶν ἡμιευθειῶν** *ΑΧ καὶ ΒΥ κατὰ τὴν θεωρουμένην διάταξιν (ΑΧ, ΒΥ).*

Οὕτως, ἐκ τοῦ ζεύγους (ΟΧ', ΟΥ') ὁρίζεται μία μόνον γωνία δοθέντος προσανατολισμοῦ, ἐφ' ὅσον αὕτη εἶναι μικροτέρα τῆς πλήρους γωνίας (θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένης), ἤτοι ἐφ' ὅσον περιοριζόμεθα εἰς τὰς γωνίας τὰς μικροτέρας τῆς πλήρους. Ἡ γωνία (ΟΧ', ΟΥ') εἶναι (92) ἀνεξάρτητος τοῦ σημείου Ο.



Σχ. 94.2

Ἡ γωνία δύο ἡμιευθειῶν ΑΧ καὶ ΒΥ δύναται, κατὰ ταῦτα, νὰ εἶναι κυρτὴ (Σχ. 94.1) ἢ μὴ κυρτὴ (Σχ. 94.2).

Ἂν θεωρήσωμεν τρεῖς ἡμιευθείας ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὰς ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Ο αὐτοῦ ὁμορρόπους πρὸς τὰς ἀνωτέρω ἡμιευθείας ΟΧ', ΟΥ', ΟΖ', τότε μεταξὺ τῶν κυρτῶν προσανατολισμένων γωνιῶν (ΟΧ', ΟΥ'), (ΟΥ', ΟΖ'), (ΟΖ', ΟΧ') ὑφίσταται ἡ σχέσις :

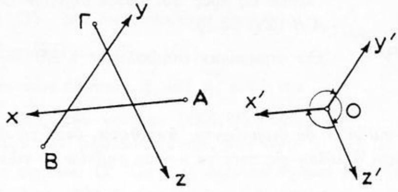
$$(OX', OY') + (OY', OZ') + (OZ', OX') = 0 \ (^1) \quad (\Sigma\chi.\ 94.3).$$

Σχ. 94.3

(1) Σχέσις τῶν Chasles — Möbius.

ἢ ἡ :

$$(OX', OY') + (OY', OZ') + (OZ', OX') = \pm 2\pi \text{ (1)} \quad (\Sigma\chi.\ 94.4)$$



Σχ. 94.4

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

95. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἐφαρμοστὸν διάνυσμα** *εἰς τὸ ἐπίπεδον ἢ προσανατολισμένον εὐθ. τμῆμα ἐν αὐτῷ, κάθε διατεταγμένον ζεῦγος σημείων (A, B) αὐτοῦ.*

Τὸ πρῶτον σημεῖον Α τοῦ διανύσματος, ὀνομάζεται **ἀρχὴ** ἢ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ τὸ δεύτερον σημεῖον Β, **πέρας** ἢ τελικὸν σημεῖον αὐτοῦ (Σχ. 95).

Σχ. 95

Τὸ διάνυσμα (Α, Β) συμβολίζεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολον : $\overrightarrow{AB}$.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω, κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ὁρίζει δύο διανύσματα : τὸ $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ $\overrightarrow{BA}$. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ὀνομάζεται **φορεὺς** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τοῦ $\overrightarrow{BA}$.

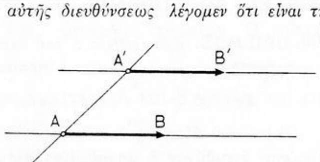
Ἂν τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ συμπίπτουν ($A \equiv B$) τὸ διάνυσμα τοῦτο θὰ ὀνομάζεται **μηδενικὸν** διάνυσμα. Συμβολικῶς $\overrightarrow{0}$.

96. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **διεύθυνσιν** *τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, τὴν ὑπὸ τοῦ φορέως AB αὐτοῦ ὁριζομένην διεύθυνσιν* (90).

Δύο ἢ περισσότερα διανύσματα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως ὀνομάζονται συνήθως **συγγραμμικὰ** διανύσματα.

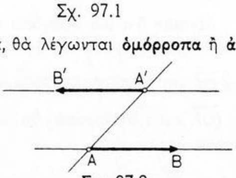
97. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως λέγομεν ὅτι εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς ἢ* **ὁμόρροπα,** *ἂν τὰ πέρατα B καὶ B' αὐτῶν κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα A καὶ A' αὐτῶν* (Σχ. 97.1).

Ἂν τὰ σημεῖα Β καὶ Β' κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΑ' θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ διανύσματα εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς ἢ **ἀντίρροπα** (Σχ. 97.2).



Σχ. 97.1

Ἂν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχουν τὸν αὐτὸν φορέα, θὰ λέγωνται **ὁμόρροπα** ἢ **ἀντίρροπα** καθ' ὅσον ἡ ἡμιευθεῖα ἡ ἔχουσα ἀρχικὸν τὸ σημεῖον Α καὶ περιέχουσα τὸ Β καὶ ἡ ἡμιευθεῖα ἡ ἔχουσα ἀρχικὸν τὸ σημεῖον Α' καὶ περιέχουσα τὸ Β' εἶναι ἀντιστοίχως ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι.

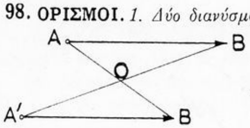


Σχ. 97.2

---

(1) Σχέσις τῶν Chasles — Möbius.

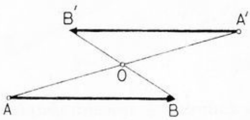
98. ΟΡΙΣΜΟΙ. *1. Δύο διανύσματα* $\overrightarrow{AB}$ *καὶ* $\overrightarrow{A'B'}$ *τοῦ ἐπιπέδου θὰ ὀνομάζωνται* **ἴσα,** *ὅταν τὰ ἄκρα* A, B' *ὡς καὶ τὰ* A', B *αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ (82) ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ κοινὸν σημεῖον* O *τῶν εὐθειῶν* AB' *καὶ* $A'B$ (Σχ. 98.1).



Σχ. 98.1

Θὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 98.1).

2. Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ *καὶ* $\overrightarrow{A'B'}$ *θὰ ὀνομάζωνται* **ἀντίθετα,** *ὅταν τὰ ἄκρα* A, A' *ὡς καὶ τὰ* B, B' *αὐτῶν εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ κοινὸν σημεῖον* O *τῶν εὐθειῶν* AA' *καὶ* BB' (Σχ. 98.2).



Σχ. 98.2

Θὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς : $\overrightarrow{AB} = - \overrightarrow{A'B'}$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται (87) ὅτι δύο ἴσα ἢ ἀντίθετα διανύσματα κεῖνται ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν (εἶναι συγγραμμικά).

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$ τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐκ τοῦ εὐθ. τμήματος AB θὰ ὀνομάζωνται ἐπίσης ἀντίθετα.

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος:* **ἀνακλαστική, συμμετρικὴ** *καὶ* **μεταβατική.**

99. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ ἀνωτέρω (98) σχέσις ἰσότητος ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἰς ὑποσύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν ἐν αὐτῷ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Κάθε τοιοῦτον ὑποσύνολον διανυσμάτων θὰ ὀνομάζεται *κλάσις ἰσοδυναμίας,* εἰδικώτερον κλάσις *ἰσότητος,* εἰς τὸ σύνολον E τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου, ὁριζομένη ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$.

Κάθε στοιχεῖον τῆς ἀνωτέρω κλάσεως ἰσοδυναμίας (ἰσότητος) τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζεται *ἐλεύθερον* ἐν τῷ ἐπιπέδῳ διάνυσμα. Ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα εἰς τὸ ἐπίπεδον συμβολίζεται συνήθως μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα π.χ. α τοῦ ἀλφαβήτου φέρον τὸ σύμβολον $\rightarrow$, ἤτοι μὲ τὸ σύμβολον : $\vec{\alpha}$.

ΑΞΩΝ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

100. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε εὐθεῖα* ξ *τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ ὀνομάζεται* **προσανατολισμένη εὐθεῖα** *ἢ* **ἄξων** *ἐν τῷ ἐπιπέδῳ καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον* $\vec{\xi}$.

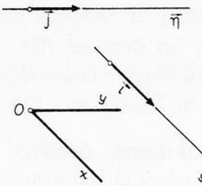
Σχ. 100

Ἡ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ θετικὴ φορὰ καθορίζεται ἐξ ἑνὸς διανύσματος $\vec{\iota}$ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **διευθῦνον** ἢ **μοναδιαῖον διάνυσμα** τοῦ ἄξονος (Σχ. 100).

Λέγομεν ὅτι μία ἡμιευθεῖα OX καὶ ἕνας ἄξων $\vec{\xi}$, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς εἶναι παράλληλοι ἢ ταυτίζονται, ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ὅταν διὰ κάθε σημεῖον A τῆς ἡμιευθείας OX τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ καὶ τὸ διευθῦνον διάνυσμα $\vec{\iota}$ τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$ εἶναι ὁμόρροπα. Εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ($\overrightarrow{OA}$ καὶ $\vec{\iota}$ ἀντίρροπα) θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα OX καὶ ὁ ἄξων $\vec{\xi}$ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν (προσανατολισμόν).

101. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος ἑνὸς ἄξονος $\vec{\xi}$ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τοῦτον μίαν ἡμιευθεῖαν OX παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς μὲ τὸν ἄξονα τοῦτον φορᾶς (100) ἀγομένην ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου.

Τὴν ἡμιευθεῖαν ταύτην ὀνομάζομεν **διευθύνουσαν ἡμιευθεῖαν** τοῦ ἄξονος $\vec{\xi}$.



Σχ. 101

Ἔστωσαν ΟΧ καὶ ΟΥ αἱ διευθύνουσαι ἡμιευθεῖαι δύο ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$ ἀντιστοίχως (Σχ. 101).

Ὀνομάζομεν **γωνίαν τῶν ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$,** κατὰ τὴν θεωρουμένην διάταξιν, $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$, **τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ) τῶν διευθυνουσῶν ἡμιευθειῶν** τῶν ἀξόνων τούτων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου Ο. Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν ὅτι: $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ = (ΟΧ, ΟΥ).

Ἡ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) εἶναι (92) ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου Ο. Ἤτοι ἂν θεωρήσωμεν τὰς ἀπὸ σημείου Ο′, διαφόρου τοῦ Ο, διευθυνούσας ἡμιευθείας Ο′Χ′ καὶ Ο′Υ′ τῶν ἀξόνων $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$, ἡ γωνία (Ο′Χ′, Ο′Υ′) εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ).

102. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω $\vec{\xi}$ μία προσανατολισμένη εὐθεῖα, ἤτοι ἕνας ἄξων τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σύνολον τῶν πρὸς τὴν $\vec{\xi}$ παραλλήλων καὶ ὁμοίως πρὸς ταύτην προσανατολισμένων εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὀνομάζεται **προσανατολισμένη διεύθυνσις** ἐν αὐτῷ.

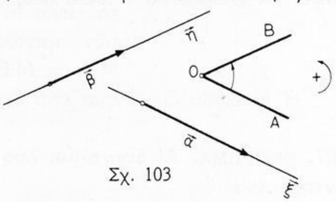
Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι κάθε προσανατολισμένη διεύθυνσις τοῦ ἐπιπέδου εἶναι γνωστή, ὅταν δίδεται ἕνας μόνον ἐκ τῶν ἀξόνων τῶν ἀνηκόντων εἰς τὴν διεύθυνσιν ταύτην.

Ὀνομάζομεν **γωνίαν δύο προσανατολισμένων διευθύνσεων** τὴν γωνίαν τῶν δύο ἀξόνων (101), οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς διευθύνσεις ταύτας.

103. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν **γωνίαν** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ τοῦ ἐπιπέδου τὴν γωνίαν τῶν βάσει τούτων προσανατολιζομένων φορέων των. Ἂν ὀνομάσωμεν $\vec{\xi}$ καὶ $\vec{\eta}$ τοὺς ἄξονας τούτους θὰ ἔχωμεν, ἐξ ὁρισμοῦ :

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\xi}, \vec{\eta}),$$

ἔνθα μὲ τὸ σύμβολον $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ συμβολίζομεν τὴν γωνίαν τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. (Σχ. 103).



Σχ. 103

ΜΕΣΟΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ

104. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὑπάρχει σημεῖον Ο αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον ὥστε: ΟΑ = ΟΒ.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο παραλλήλους διὰ τῶν Α καὶ Β εὐθείας καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α′ καὶ Β′, ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ (Σχ. 104), ὥστε ΑΑ′= ΒΒ′. Ἔστω Ο τὸ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β σημεῖον τῆς Α′Β′ Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΟΑ′ καὶ ΒΟΒ′ (76), ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ.

Σχ. 104

Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι Ο′Α = Ο′Β (Ο′ σημεῖον διάφορον τοῦ Ο, μεταξὺ τῶν Α καὶ Β) ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον. Πράγματι, ἂν εἶναι Β″ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α′ ὡς πρὸς τὸ Ο′, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΟ′Α′ καὶ ΒΟ′Β″ ἕπεται (75), ὅτι

(ΒΑ, ΒΒ') = (ΑΒ, ΑΑ'). Τοῦτο ὅμως ἀποκλείεται ἐκ ταῦ ἀξιώματος (59), δοθέντος ὅτι εἶναι καὶ (ΒΑ, ΒΒ') = (ΑΒ, ΑΑ').

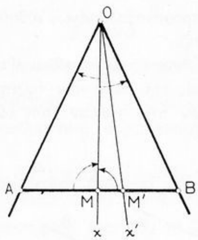
Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **μέσον σημεῖον** ἢ ἁπλῶς **μέσον** τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Σημειοῦμεν: ΟΑ = ΟΒ ἢ ΑΒ = 2ΟΑ.

105. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, εἰς τὸ *μέσον* Ο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ὀνομάζεται **μεσοκάθετος** αὐτοῦ.

ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

106. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθείσης γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ὑπάρχει ἡμιευθεῖα ΟΧ ἐσωτερικὴ αὐτῆς καὶ μία μόνον ὥστε αἱ γωνίαι (ΟΧ, ΟΑ) καὶ (ΟΧ ΟΒ) νὰ εἶναι ἀντίθετοι.

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ἀντιστοίχως ὥστε ΟΑ = ΟΒ καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. 'Εκ τῶν τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι καὶ (ΜΑ, ΜΟ) = − (ΜΒ, ΜΟ), ἕπεται (79) ὅτι (ΟΜ,ΟΑ) = = − (ΟΜ, ΟΒ), ἤτοι (ΟΧ, ΟΑ) = − (ΟΧ, ΟΒ).



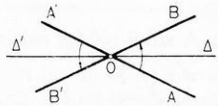
Σχ. 106

'Εξ ἄλλου, ἂν δεχθῶμεν ὅτι ὑπάρχει καὶ μία δευτέρα ἡμιευθεῖα ΟΧ' ὥστε (ΟΧ', ΟΑ) = − (ΟΧ', ΟΒ) καὶ εἶναι Μ' τὸ ἐπὶ τῆς ΑΒ σημεῖον αὐτῆς, τότε ἐκ τῶν τριγώνων ΟΜ'Α καὶ ΟΜ'Β ἔχομεν (75) ὅτι Μ'Α = Μ'Β, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον (104).

'Η ἡμιευθεῖα ΟΧ ὀνομάζεται **διχοτόμος** τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

107. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι [1]

'Απόδειξις. Ἔστωσαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΑ', ΟΒ') δύο κατὰ κορυφὴν γωνίαι καὶ ΟΔ, ΟΔ' αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ἀντιστοίχως (Σχ. 107). Εἶναι: (ΟΑ, ΟΔ) + (ΟΔ, ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΑ') = π καὶ ἐπειδὴ (ΟΑ, ΟΔ) = (ΟΑ', ΟΔ'), διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι τὰ ἡμίση τῶν θεωρουμένων κατὰ κορυφὴν γωνιῶν, ἕπεται ὅτι:



Σχ. 107

(ΟΑ',ΟΔ') + (ΟΔ, ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΑ') = π

ἢ (ΟΔ,ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΔ') = π.

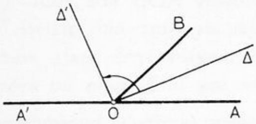
'Εκ ταύτης ἕπεται (65, Πόρισμα 1) ὅτι αἱ ΟΔ καὶ ΟΔ' εἶναι ἀντικείμεναι. Δι' ὅμοιον λόγον αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν (Ο Β, ΟΑ') καὶ (ΟΒ',ΟΑ) εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι.

---

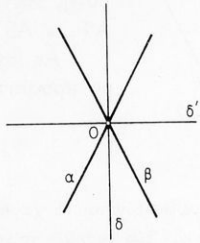
(1) 'Αποτελοῦν εὐθεῖαν.

108. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΑ') δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι, καὶ ΟΔ καὶ ΟΔ' αἱ διχοτόμοι τούτων ἀντιστοίχως (Σχ. 108.1). Αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΑ' εἶναι ἀντικείμεναι.



Σχ. 108.1



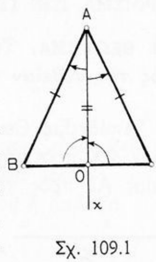
Σχ. 108.2

Εἶναι (ΟΑ, ΟΒ) = 2 (ΟΔ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΑ') = 2 (ΟΒ, ΟΔ'). Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν : $\pi = 2$ (ΟΔ, ΟΒ) + 2 (ΟΒ, ΟΔ') καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι : (ΟΔ, ΟΒ) + (ΟΒ, ΟΔ') $= \frac{\pi}{2}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ἀποτελοῦν δύο εὐθείας δ καὶ δ' καθέτους ἐπ' ἀλλήλας* (Σχ. 108.2).

109. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ = ΑΓ, τότε ἡ διχοτόμος ΑΧ τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

'Απόδειξις. Ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς θεωρουμένης διχοτόμου. Εἶναι: (ΑΟ, ΑΒ) = − (ΑΟ, ΑΓ). Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ ἔχομεν (75): (ΟΒ, ΟΑ) = − (ΟΓ, ΟΑ), ἤτοι ὅτι ἡ ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ, καὶ ΟΒ = ΟΓ, ἤτοι ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

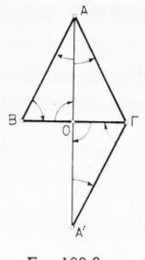


Σχ. 109.1

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ. Ἂν ἐκ τῶν τριῶν συνθηκῶν : (1) Ἡ ἡμιευθεῖα ΑΧ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου (2). Ἡ ΑΧ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (3) Ἡ ΑΧ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἰσχύουν δύο οἱαιδήποτε, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.*

Πράγματι :

Ἂν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ (76, Πόρισμα).



Σχ. 109.2

Ἂν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (3), θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ μέσον Ο τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α'ΟΓ ἔχομεν (75): (ΑΟ, ΑΒ) = Α'Ο, Α'Γ) καὶ ἐπειδὴ (ΑΟ, ΑΒ) = – (ΑΟ,ΑΓ), θὰ εἶναι (Α'Ο, Α'Γ) = – (ΑΟ, ΑΓ). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (78) ὅτι : ΑΓ = Α'Γ ἢ ΑΓ = ΑΒ, διότι Α'Γ = ΑΒ.

Ἂν ἰσχύουν αἱ συνθῆκαι (2) καὶ (3), τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΒ καὶ ΑΟΓ (75).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κάθε γωνία δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς 2^{ν} ἴσας γωνίας (ν τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός).

2. Θεωροῦμεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ Α'ΒΓ (Α'Β = Α'Γ), τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεία ΑΑ' εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΒΓ.

3. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο ἴσων γωνιῶν εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι, τότε καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

4. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος ξ τρία τυχόντα σημεῖα Ο, Α, Β καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\overrightarrow{ΟΑ} + \overrightarrow{ΟΒ} = 2\overrightarrow{ΟΜ}$. Νὰ εὑρεθῇ ἀνάλογος σχέσις διὰ τρεῖς ἡμιευθείας ΟΧ, ΟΑ, ΟΒ.

5. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος ξ τέσσαρα τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ τὰ μέσα Μ, Ν, Ρ, Σ, τῶν εὐθ. τμημάτων $\overrightarrow{ΑΓ}$, $\overrightarrow{ΒΔ}$, $\overrightarrow{ΑΔ}$, $\overrightarrow{ΒΓ}$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

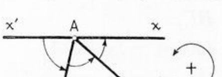
(1) $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΑΔ} + \overrightarrow{ΓΒ} = 2\overrightarrow{ΜΝ}$ (2) $\overrightarrow{ΑΒ} - \overrightarrow{ΓΔ} = \overrightarrow{ΑΓ} - \overrightarrow{ΒΔ} = 2\overrightarrow{ΡΣ}$.

Αἱ κατωτέρω εἰς τὸ τρίγωνον ἀναφερόμεναι προτάσεις εἶναι συνέπειαι τοῦ ἀξιώματος τοῦ Εὐκλείδου.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

110. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 110.1) τὴν διὰ μιᾶς κορυφῆς π.χ. τῆς Α, παράλληλον Χ'Χ πρὸς τὴν ΒΓ (Χ' καὶ Χ ἑκατέρωθεν τοῦ Α, καὶ Χ' πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Β). Αἱ γωνίαι (ΑΧ', ΑΒ) καὶ (ΑΓ, ΑΧ) εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας (ΒΓ, ΒΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) τοῦ τριγώνου. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα : (ΑΒ, ΑΓ) + (ΒΓ, ΒΑ) + (ΓΑ, ΓΒ) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ (ΑΒ, ΑΓ) + (ΑΧ', ΑΒ) + (ΑΓ, ΑΧ) ἤτοι πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν (ΑΧ', ΑΧ).

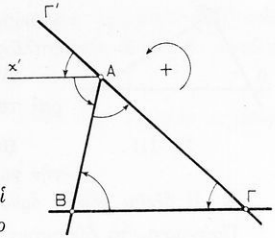


Σχ. 110.1

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ *1. Ἑκάστη ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν αὐτοῦ τῶν μὴ προσκειμένων τῆς θεωρουμένης ἐξωτερικῆς γωνίας.*

Πράγματι, ἡ ἐξωτερικὴ γωνία (ΑΓ', ΑΒ) τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄρθροισμα τῶν γωνιῶν (ΑΓ', ΑΧ') καὶ (ΑΧ', ΑΒ), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (ΓΑ, ΓΒ) καὶ (ΒΓ, ΒΑ) (Σχ. 110.2).



Σχ. 110.2

2. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' αἱ γωνίαι των εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε θὰ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὸ τρίτον.

Ἂν αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἀντίθετοι κατὰ τὰ δύο ζεύγη, τότε θὰ εἶναι ἀντίθετοι καὶ κατὰ τὸ τρίτον ζεῦγος.

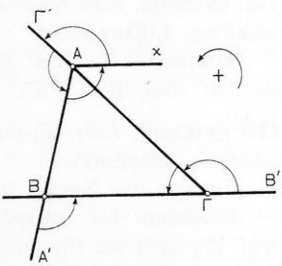
3. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι $\alpha = \alpha'$, $A = A'$, $B = B'$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

4. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν.

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΧ (Σχ. 110.3) τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Γ, ἔχομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα (ΑΓ', ΑΒ) + (ΒΑ', ΒΓ) + (ΓΒ', ΓΑ) εἶναι ἴσον πρὸς τὸ (ΑΓ', ΑΒ) + (ΑΒ, ΑΧ) + (ΑΧ, ΑΓ') = 2π.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.



Σχ. 110.3

5. Κάθε ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι.

6. Ἐκ δύο οἱωνδήποτε γωνιῶν τριγώνου ἡ μία τουλάχιστον εἶναι ὀξεῖα.

Ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου αἱ δύο τουλάχιστον εἶναι ὀξεῖαι.

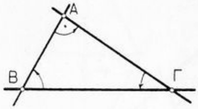
Ἐκ τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου ἡ μία τὸ πολὺ εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ, ΑΜΒΛΥΓΩΝΙΟΝ, ΟΞΥΓΩΝΙΟΝ

111. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου μία τῶν γωνιῶν εἶναι ὀρθὴ ὀνομάζεται* **ὀρθογώνιον.**

Ἂν εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ), τὸ τρίγωνον θὰ ὀνομάζεται **ὀρθογώνιον** κατὰ τὴν γωνίαν ταύτην (Σχ. 111)

Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου προκύπτει ἐκ τῆς ὑπάρξεως τῆς ὀρθῆς γωνίας (81).



Σχ. 111

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ὀνομάζεται **ὑποτείνουσα πλευρὰ** ἢ ἁπλῶς **ὑποτείνουσα** αὐτοῦ (Σχ. 111).

Αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ὀνομάζονται **κάθετοι πλευραὶ** τοῦ τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ὀρθογωνίου, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖαι.*

2. Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι συμπληρωματικαί.

Πράγματι, τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία. (110).

112. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α′, τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι:**
(1) $\beta = \beta'$ καὶ $\gamma = \gamma'$ ἢ (2) $\beta = \beta'$, $B = B'$, ἢ (3) $\alpha = \alpha'$, $B = B'$, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

Ἀπόδειξις. Βασίζεται εἰς τὰς προτάσεις (75) καὶ (76) τὰς ἀναφερομένας εἰς τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων καὶ τὴν πρότασιν (110).

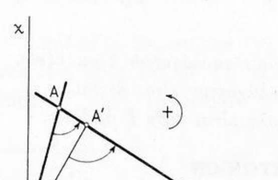
113. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου μία τῶν γωνιῶν εἶναι ἀμβλεῖα ὀνομάζεται* **ἀμβλυγώνιον.**

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ἀμβλυγωνίου κατὰ τὴν γωνίαν Α τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖαι* (110).

114. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ὀνομάζεται* **ὀξυγώνιον.**

Ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὀξυγωνίου τριγώνου παρατηροῦμεν:

Θεωροῦμεν ἕνα ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν (Α′Β, Α′Γ) τρίγωνον Α′ΒΓ (Σχ. 114) καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΒΧ, τὴν κάθετον ἐπὶ ΒΓ καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α′ τοῦ τριγώνου. Ἡ ἡμιευθεῖα ΒΑ′ κεῖται ἐντὸς τῆς ὀρθῆς γωνίας (ΒΓ, ΒΧ), διότι ἡ γωνία (ΒΓ, ΒΑ′) εἶναι ὀξεῖα.



Σχ. 114

Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν κειμένην ἐντὸς τῆς γωνίας (ΒΑ′, ΒΧ) καὶ τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΑ′ σημεῖον Α αὐτῆς. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον.

Πράγματι, ἡ γωνία (ΓΑ, ΓΒ) αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖα (111, Πόρισμα 1). Ἡ γωνία (ΒΓ, ΒΑ) αὐτοῦ εἶναι ὀξεῖα, ὡς μικροτέρα τῆς ὀρθῆς

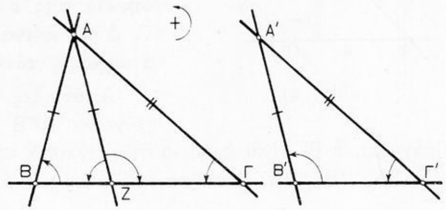
(ΒΓ, ΒΧ). Ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ἐπίσης ὀξεῖα, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΑ'Β (111, Πόρισμα 1).

115. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι β = β', γ = γ' καὶ Γ = Γ', τότε αἱ γωνίαι Β καὶ Β' αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ἡ ὁποία ἔχει ἀρχικὸν σημεῖον τὸ Γ καὶ περιέχει τὸ Β, τὸ σημεῖον Ζ ὥστε ΓΖ = Γ'Β'.

Ἂν τὸ Ζ συμπίπτῃ μὲ τὸ Β, τότε θὰ εἶναι α = α'. Τὰ θεωρούμενα τρίγωνα θὰ εἶναι ἴσα, καὶ λόγῳ τούτου Β = Β'.

Ἂν τὸ Ζ εἶναι διάφορον τοῦ Β (Σχ. 115), ἐκ τῶν ἴσων (75) τριγώνων ΑΖΓ καὶ Α'Β'Γ' ἕπεται ὅτι (ΖΓ, ΖΑ) = (Β'Γ', Β'Α')



Σχ. 115

καὶ ΑΖ = Α'Β' Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΒ = Α'Β', θὰ ἔχωμεν : ΑΒ = ΑΖ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι (ΖΑ, ΖΒ) = (ΒΓ, ΒΑ). Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα (ΖΓ, ΖΑ) + (ΖΑ, ΖΒ) εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν (ΖΓ, ΖΒ) ἑπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα (Β'Γ', Β'Α') + (ΒΓ, ΒΑ), ἤτοι τὸ ἄθροισμα Β + Β', εἶναι ἴσον πρὸς τὴν εὐθεῖαν γωνίαν.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα, τότε ἢ αἱ Β καὶ Β' εἶναι ἀντίθετοι ἢ ἡ Β καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς Β' εἶναι παραπληρωματικαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς δύο ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι α = α', β = β', Α = Α', καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α' εἶναι ὀρθαὶ ἢ ἀμβλεῖαι, τότε τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.*

Πράγματι, αἱ γωνίαι Β καὶ Β' θὰ εἶναι (115) ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Ἐπειδὴ ὅμως αὗται εἶναι ὀξεῖαι ἀποκλείεται νὰ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἑπομένως εἶναι Β = Β' καὶ λόγῳ τούτου τὰ θεωρούμενα τρίγωνα εἶναι (76) ἴσα.

Οὕτως ἐπὶ ὀρθογωνίων τριγώνων ἀπεδείχθη ὅτι :
Ἂν δύο ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α', τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας α καὶ α' ἴσας ὡς καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς β καὶ β' (ἢ γ καὶ γ'), τότε εἶναι ἴσα ἢ ἀντιρρόπως ἴσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

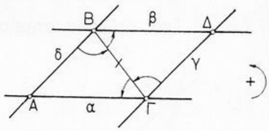
1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἂν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΒ, ΟΓ) εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τούτων εἶναι ἡμιευθεῖαι ἀντικείμεναι καὶ ἀντιστρόφως.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ γωνιῶν δύο θετικῶς προσανατολισμένων τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1) $B + B' = \pi, \gamma = \gamma', \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \beta = \beta'$, (2) $\beta = \beta', B + B' = \pi, \Gamma = \Gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$,
(3) $\beta = \beta', \gamma = \gamma', \ B + B' = \pi \Rightarrow \Gamma = \Gamma'$.

ΜΕΣΟΤΡΙΓΩΝΟΝ ΚΑΙ ΑΝΤΙΜΕΣΟΤΡΙΓΩΝΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

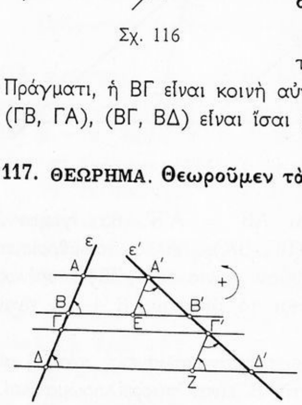
116. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β τέμνωνται ἀπὸ δύο ἄλλας παραλλήλους εὐθείας γ καὶ δ καὶ εἶναι Α, Β, Γ, Δ τὰ κοινὰ σημεῖα (Α, Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τὰς α, β ἀντιστοίχως καὶ Γ, Δ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς γ μὲ αὐτὰς ἀντιστοίχως), τότε : ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΓ = ΒΔ.**



Σχ. 116

Ἀπόδειξις. Τὰ ὁμοίως προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΓΒ καὶ ΔΒΓ (Σχ. 116) εἶναι ἴσα. Πράγματι, ἡ ΒΓ εἶναι κοινὴ αὐτῶν πλευρὰ καὶ αἱ προσκείμεναι αὐτῆς γωνίαι (ΓΒ, ΓΑ), (ΒΓ, ΒΔ) εἶναι ἴσαι (89), ὡς καὶ αἱ (ΒΑ, ΒΓ), (ΓΔ, ΓΒ).

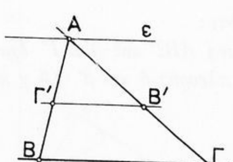
117. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Θεωροῦμεν τὰς παραλλήλους εὐθείας α,β,γ,δ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καὶ Α′, Β′, Γ′, Δ′ αὐτῶν μὲ δύο εὐθείας ε καὶ ε′. Ἂν ΑΒ = ΓΔ, τότε θὰ εἶναι καὶ Α′Β′ = Γ′Δ′.**



Σχ. 117

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 117) τὰς παραλλήλους Α′Ε καὶ Γ′Ζ πρὸς τὴν ε (Ε καὶ Ζ ἐπὶ τῶν β καὶ δ ἀντιστοίχως). Εἶναι : Α′Ε = ΑΒ καὶ Γ′Ζ = ΓΔ (116) καὶ ἐπειδὴ ΑΒ = ΓΔ θὰ εἶναι καὶ Α′Ε = Γ′Ζ. Ἐκ τῶν παραλλήλων Α′Ε καὶ Γ′Ζ πρὸς τὴν ε ἔχομεν : (Α′Ε, Α′Β′) = (Γ′Ζ, Γ′Δ′) (89, Πόρισμα 1) καὶ (ΕΒ′ ΕΑ′) = (ΖΔ′, ΖΓ′) (92). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα Α′ΕΒ′ καὶ Γ′ΖΔ′ εἶναι ἴσα (76), καὶ ἑπομένως Α′Β′ = Γ′Δ′.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἡ διὰ τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου παράλληλος πρὸς μίαν ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.*



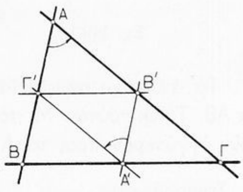
Σχ. 117.1

Ἤτοι, ἂν εἶναι Β′ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὸ κοινὸν σημεῖον Γ′ τῆς διὰ τοῦ Β′ παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ μὲ τὴν ΑΒ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ταύτης ΑΒ (Σχ. 117.1).

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου παράλληλον ε πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν ὅτι ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΒΓ, Β′Γ′ καὶ ε ὁρίζονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΓΑ δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα : τὰ ΑΒ′ καὶ Β′Γ. Ἐκ τούτου ἕπεται, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα (117), ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀνωτέρω παραλλήλων τμήματα ἴσα, ἤτοι ΑΓ′ = Γ′Β (τὸ Γ′ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ).

2. *Ἡ εὐθεῖα ἡ συνδέουσα τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν αὐτοῦ τὸ δὲ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ἔχον ἄκρα τὰ θεωρούμενα μέσα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀνωτέρω τρίτης πλευρᾶς αὐτοῦ.*

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ μέσου Β′ τῆς πλευρᾶς ΓΑ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ, τὸ κοινὸν σημεῖον Γ′ αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ θὰ εἶναι (Πόρισμα 1) τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΒ (Σχ. 117.2). Ἐξ ἄλλου ἂν εἶναι Α′ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου, ἐκ τῶν ἴσων (76) τριγώνων ΑΓ′Β′ καὶ Β′Α′Γ ἔπεται ὅτι Γ′Β′ = Α′Γ, ἤτοι ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα Β′Γ′ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ.



Σχ. 117.2

118. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα Α′, Β′, Γ′ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως, ὀνομάζεται* **μεσοτρίγωνον** *τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.*

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος (117, Πόρισμα 2) ἔχομεν ὅτι : Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ δύναται νὰ ὀνομάζεται **ἀντιμεσοτρίγωνον** τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ (Σχ. 117.2).

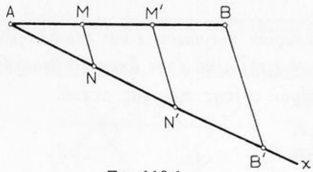
Δοθέντος τριγώνου Α′Β′Γ′, αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ τοῦ ἀντιμεσοτριγώνου του εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν τῶν ἀγομένων διὰ τῶν κορυφῶν Α′, Β′, Γ′, καὶ παραλλήλων ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ (Α κοινὸν σημεῖον τῶν διὰ τῶν Β′ καὶ Γ′ παραλλήλων πρὸς τὰς Γ′Α′ καὶ Α′Β′ κλπ.). Αἱ κορυφαὶ Α′,Β′, Γ′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ προκύπτοντος ἀντιμεσοτριγώνου ΑΒΓ τοῦ Α′Β′Γ′. Πράγματι, ἐκ τῶν Α′Γ = Γ′Β′ καὶ ΒΑ′ = Γ′Β′, ἔπεται ὅτι Α′Γ = ΒΑ′, ἤτοι ὅτι τὸ Α′ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΣΗΜΕΙΑ ΤΡΙΧΟΤΟΜΟΥΝΤΑ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑ

119. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′, καὶ μόνον δύο, ὥστε :

$$\mathrm{AM} = \mathrm{MM'} = \mathrm{M'B}.$$

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν : τυχοῦσαν ἀπὸ τοῦ Α ἡμιευθεῖαν ΑΧ, ἕνα τυχὸν σημεῖον N αὐτῆς καὶ τὰ σημεῖα N′ καὶ B′ (N′ μεταξὺ τῶν N καὶ B′) ὥστε AN = NN′ = N′B, καὶ τὰς διὰ τῶν N καὶ N′ παραλλήλους NM καὶ N′M′ πρὸς τὴν BB′ (M καὶ M′ ἐπὶ τῆς AB). Εἶναι (Σχ. 119.1) AM = MM′ = M′B (117).



Σχ. 119.1

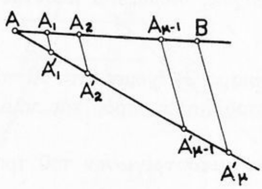
Ἐξ ἄλλου, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄλλα σημεῖα P καὶ P′, διάφορα τῶν M καὶ M′, ἱκανοποιοῦντα τὰς ἀνωτέρω συνθήκας, ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον (117, Πόρισμα).

Τὰ ἀνωτέρω σημεῖα M καὶ M′ ὀνομάζονται **τριχοτομοῦντα** τὸ εὐθ. τμῆμα AB. Τὸ ἐκ τούτων M, τὸ κείμενον μεταξὺ τῶν A καὶ M′ ὀνομάζεται τριχοτομοῦν **ἐγγύτερον** πρὸς τὸ A καὶ τὸ M′ ἐγγύτερον πρὸς τὸ B.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Δοθέντος εὐθ. τμήματος α καὶ φυσικοῦ ἀριθμοῦ μ, ὑπάρχει εὐθ. τμῆμα γ ὥστε : $\alpha = \mu \cdot \gamma$.

Πράγματι, ἔστω AB ἕνα εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ α. Θεωροῦμεν μίαν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν AX ὑπὸ τοῦ A καὶ ὁρίζομεν ἐπ᾽ αὐτῆς μ διαδοχικὰ καὶ ἴσα εὐθ. τμήματα $AA'_1, A_1'A_2', \ldots, A'_{\mu-1}A'_\mu$. Αἱ διὰ τῶν $A_1', A_2' \ldots, A'_{\mu-1}$, παράλληλοι πρὸς τὴν $A'_\mu B$ ὁρίζουν ἐπὶ τῆς AB τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-1}$, τὰ ὁποῖα χωρίζουν (117) τὸ εὐθ. τμῆμα AB εἰς μ ἴσα εὐθ. τμήματα.



Σχ. 119.2

Τὸ εὐθ. τμῆμα AB εἶναι τὸ **γινόμενον** τοῦ εὐθ. τμήματος AA_1 (= γ) ἐπὶ τὸν φυσικὸν μ.

Ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς μ δύναται νὰ ὀνομάζεται **λόγος** τῶν εὐθ τμημάτων α καὶ γ κατὰ τὴν τάξιν (α, γ). Συμβολικῶς : $\frac{\alpha}{\gamma} = \mu$. Ὥστε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ ἔχομεν τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\alpha = \mu \cdot \gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \mu .$$

Τὸ εὐθ. τμῆμα γ ὀνομάζεται **ἀκέραιον ὑποπολλαπλάσιον** τοῦ α.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι ἂν ἕνα εὐθ. τμῆμα δ εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τοῦ γ, θὰ εἶναι καὶ ὑποπολλαπλάσιον τοῦ α, ἤτοι θὰ εἶναι ἕνα **κοινὸν** ὑποπολλαπλάσιον τῶν α καὶ γ.

Δυνάμεθα, κατὰ ταῦτα, νὰ ἔχωμεν πάντοτε δύο εὐθ. τμήματα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν (δέχωνται) ἕνα κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον. Ἐκ τούτου δὲν ἕπεται ὅτι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα α καὶ β, ὑπάρχει πάντοτε κοινὸν ὑποπολλαπλάσιον τούτων. Ἐπὶ τοῦ θέματος τούτου θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Δ τάξεως.

Σημειοῦμεν ὅτι : Δὲν δυνάμεθα, βάσει τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων, νὰ ἀποδείξωμεν διὰ τὴν τυχοῦσαν γωνίαν (OA, OB) πρότασιν ἀνάλογον τῆς ἀνωτέρω (119).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν : γωνίαν (ΟΧ, ΟΥ), σημεῖον Ρ ἐσωτερικὸν αὐτῆς καὶ τὰς καθέτους ΡΑ καὶ ΡΒ ἐπὶ τὰς ΟΥ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως (Α καὶ Β ἐπὶ τῶν ΟΧ, ΟΥ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Ι καὶ Ζ τῶν ΟΡ καὶ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

2. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς εὐθείας ΜΒ', ΜΓ' (Β' καὶ Γ' ἐπὶ τῶν ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως) τὰς τεμνούσας τὰς ΓΑ καὶ ΑΒ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν φ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ.

Ἂν αἱ ΜΒ', ΜΓ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, τότε τὸ ἄθροισμα ΜΒ + ΜΓ' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ ἀγόμενον ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β ἢ τῆς Γ.

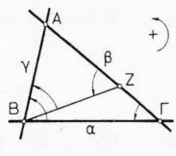
3. Θεωροῦμεν : εὐθ. τμῆμα ΑΒ, τὸ τριχοτομοῦν σημεῖον Γ αὐτοῦ τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ Β, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ' καὶ ΓΑΒ' καὶ τὴν κάθετον Β'Η ἐπὶ τὴν ΑΒ, (Η ἐπὶ τῆς ΑΒ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Α'Β' = Β'Η.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΕΙΣ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

120. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν δύο πλευραὶ τριγώνου ΑΒΓ(1) εἶναι ἄνισοι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι, καὶ ἀντιστρόφως.

Ἤτοι : $\beta > \gamma \Leftrightarrow B > \Gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς ΑΓ, τὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Γ, διὰ τὸ ὁποῖον ΑΖ = ΑΒ (Σχ. 120).



Σχ. 120

Ἂν $\beta > \gamma$, τὸ Ζ κεῖται μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α καὶ ἑπομένως (110, Πόρισμα 1):

(1) (ΖΑ, ΖΒ) > (ΓΑ,ΓΒ). Ἀλλὰ (ΒΓ, ΒΑ) > (ΒΖ, ΒΑ) καὶ ἐπειδὴ (ΒΖ, ΒΑ) = (ΖΑ, ΖΒ) (78), θὰ εἶναι: (ΒΓ, ΒΑ) > (ΖΑ, ΖΒ). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς καὶ τῆς (1) ἕπεται ὅτι :

(ΒΓ, ΒΑ) > (ΓΑ, ΓΒ), ἤτοι $B > \Gamma$.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Πράγματι, ἂν $B > \Gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\beta > \gamma$, διότι ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις $\beta = \gamma$ καὶ $\beta < \gamma$, ἀφοῦ, εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν, $\beta = \gamma$, θὰ εἴχομεν (78) $B = \Gamma$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $B > \Gamma$, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $\beta < \gamma$ θὰ εἴχομεν (120) $B < \Gamma$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $B > \Gamma$.

121. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου, εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ζ τὸ σημεῖον τῆς ΑΓ, πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Γ, διὰ τὸ ὁποῖον ΑΖ = ΑΒ (Σχ. 121).

Εἶναι: (ΒΑ, ΒΖ) = (ΖΒ, ΖΑ) (78), καὶ $\Gamma Z = \beta + \gamma$.

Ἐπειδὴ (ΒΓ, ΒΖ) > (ΒΑ, ΒΖ) θὰ εἶναι (ΒΓ, ΒΖ) > (ΖΒ, ΖΑ). Ἐκ τῆς

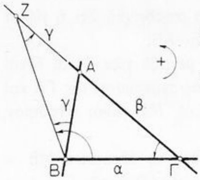
(1) Θετικῶς προσανατολισμένον.

τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι $ΖΓ > ΒΓ$, ἤτοι $β + γ > α$ ἢ $α < β + γ$.

Ἂν εἶναι $α > β > γ$, τότε $β > α - γ$ κλπ.

Σημειοῦμεν ὅτι, ἂν τὰ Α, Β, Γ κεῖνται ἀπ' εὐθείας, θὰ εἶναι :

$$α = β + γ \text{ καὶ } β = α - γ.$$

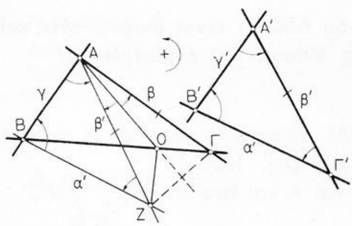


Σχ. 121

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ.*

Ἡ ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας πλευρὰ ἀμβλυγωνίου τριγώνου, εἶναι ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ αὐτοῦ.

122. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ (1) εἶναι : $β = β'$, $γ = γ'$, $Α > Α'$, τότε θὰ εἶναι καὶ $α > α'$ καὶ 2. Ἂν εἶναι $β = β'$, $γ = γ'$, $α > α'$, τότε θὰ εἶναι $Α > Α'$.

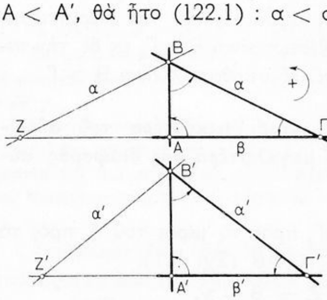


Σχ. 122.1

Ἀπόδειξις. 1. Θεωροῦμεν (Σχ. 122.1) τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΖ ὥστε (ΑΒ, ΑΖ) = (Α′Β′, Α′Γ′) καὶ ἐπ' αὐτῆς τὸ σημεῖον Ζ ὥστε $ΑΖ = β'$. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΖ καὶ Α′Β′Γ′ ἕπεται ὅτι $ΒΖ = α'$. Ἔστω Ο τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΑΖ, ΑΓ). Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΟΓ καὶ ΑΟΖ ἕπεται (76, Πόρισμα 1) ὅτι $ΟΖ = ΟΓ$. Ἔχομεν ὅμως (130) : $ΟΒ + ΟΖ > ΒΖ$, ἤτοι $ΟΒ + ΟΓ > ΒΖ$ ἢ $ΒΓ > α'$, ἤτοι $α > α'$.

2. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς :

Πράγματι, ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις $Α = Α'$ καὶ $Α < Α'$, διότι εἰς μὲν τὴν περίπτωσιν $Α = Α'$ τὰ τρίγωνα θὰ ἦσαν (76) ἴσα καὶ λόγῳ τούτου θὰ ἦτο $α = α'$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $α > α'$, εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν $Α < Α'$, θὰ ἦτο (122.1) : $α < α'$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $α > α'$.



Σχ. 122.2

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Ἂν εἰς δύο ὀρθογώνια, κατὰ τὰς γωνίας Α καὶ Α′, τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ (1) εἶναι $α = α'$ καὶ $Β > Β'$, τότε θὰ εἶναι καὶ $β > β'$ καὶ*

2. Ἂν $α = α'$ καὶ $β > β'$, τότε θὰ εἶναι $Β > Β'$.

Πράγματι ἂν θεωρήσωμεν τὰ συμμετρικὰ Ζ καὶ Ζ′ τῶν Γ καὶ Γ′ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Α′, τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ Β′Γ′Δ′ εἶναι τρίγωνα τοῦ θεωρήματος (122).

(1) Θετικῶς προσανατολισμένα.

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

123. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖαν ε, σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς καὶ τὴν κάθετον ΑΟ ἐπὶ τὴν ε (Ο σημεῖον τῆς ε).

1. Διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς ε, διάφορον τοῦ Ο, εἶναι : ΑΟ < ΑΜ.

2. Ἂν Μ καὶ Μ′ εἶναι δύο σημεῖα τῆς ε, διάφορα ἀλλήλων καὶ τοῦ Ο, τότε ἰσχύει ἡ πρότασις :

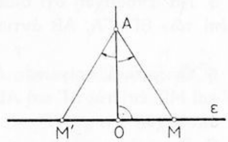
(α) **ΟΜ = ΟΜ′ ⇔ ΑΜ = ΑΜ′, καὶ** (β) **ΟΜ < ΟΜ′ ⇔ ΑΜ < ΑΜ′.**

Ἀπόδειξις. 1. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΜ (Σχ. 123.1) ἔχομεν (120, Πόρισμα) ὅτι ΑΟ < ΑΜ.

Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΟ ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῆς εὐθείας ε.

2. (α) Ἔστω ΟΜ = ΟΜ′ (Σχ. 123.1). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΜ καὶ ΑΟΜ′ ἔχομεν (76, Πόρισμα) ὅτι ΑΜ = ΑΜ′.

Ἂν ΑΜ = ΑΜ′ ἐκ τῶν αὐτῶν τριγώνων ἔχομεν (115, Πόρισμα) : ΟΜ = ΟΜ′.

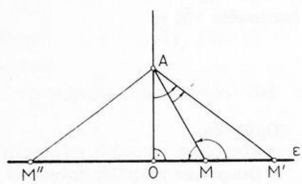


Σχ. 123.1

(β) Ἔστω ΟΜ < ΟΜ′. Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ (Σχ. 123.2) δύνανται νὰ θεωρηθοῦν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο, διότι ἂν κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ συμμετρικὸν Μ′′ τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὸ Ο, ὅτε, ἀφοῦ ΟΜ′′ = ΟΜ′, ἀναγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ Μ καὶ Μ′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο.

Ἐκ τῆς ΟΜ < ΟΜ′ ἕπεται (110, Πόρισμα 1) ὅτι (Μ′Α, Μ′Μ) < (ΜΑ, ΜΟ). Ἀλλὰ (ΜΑ, ΜΟ) < (ΜΜ′, ΜΑ), διότι ἡ (ΜΑ, ΜΟ) εἶναι ὀξεῖα. Ἑπομένως :

(Μ′Α, Μ′Μ) < (ΜΜ′, ΜΑ) καὶ λόγῳ τούτου ΑΜ < ΑΜ′ (120).



Σχ. 123.2

Ἂν ΑΜ < ΑΜ′, τότε ΟΜ < ΟΜ′, διότι ἀποκλείονται αἱ περιπτώσεις ΟΜ = ΟΜ′, ἀφοῦ τότε θὰ ἦτο (75, Πόρισμα) ΑΜ = ΑΜ′, καὶ ΟΜ > ΟΜ′, ἀφοῦ τότε θὰ ἦτο ΑΜ > ΑΜ′, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΑΜ < ΑΜ′.

ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

124. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἀπόστασιν** *δύο παραλλήλων εὐθειῶν α καὶ β τὴν ἀπόστασιν τοῦ τυχόντος σημείου Α τῆς μιᾶς ἀπὸ τῆς ἄλλης* (123).

Ἡ ἀπόστασις αὕτη εἶναι (116) ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου Α τῆς εὐθείας α ἢ τῆς β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ($\beta = \gamma$) καὶ σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Γ καὶ Α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $MB > M\Gamma$.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε ἐσωτερικὸν σημεῖον Μ τριγώνου ΑΒΓ[1] ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1) $(MB, M\Gamma) > (AB, A\Gamma)$, (2) $MB + M\Gamma < \beta + \gamma$, (3) $\tau < MA + MB + M\Gamma < 2\tau$.

3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, διὰ κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις: $\tau < MA + MB + M\Gamma$ (τ ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου).

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον $\alpha > \beta > \gamma$, καὶ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $MA + MB + M\Gamma < \alpha + \beta$.

5. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τρία σημεῖα Α′,Β′,Γ′ τριγώνου ΑΒΓ, κείμενα ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$\tau < AA' + BB' + \Gamma\Gamma' < 3\tau.$$

6. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Μ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς καθέτους ΜΒ′ καὶ ΜΓ′ ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως (Β′ καὶ Γ′ σημεῖα τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $B'\Gamma' < B\Gamma$.

7. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\beta > \gamma$, σημεῖον Μ αὐτοῦ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς παραλλήλους ΜΒ′ καὶ ΜΓ′ πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως (Β′ καὶ Γ′ ἐπὶ τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\gamma < MB' + M\Gamma' < \beta.$$

8. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μίαν εὐθεῖαν ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀπὸ τῆς ε εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα ἢ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τῆς ε, καθ' ὅσον τὰ Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν τῆς ε.

Ὁμὰς 2α

1. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ($\beta = \gamma$) καὶ τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτοῦ τὰ κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ, ὥστε $BB' = \Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $B'\Gamma' > B\Gamma$.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς δύο θετικῶς προσανατολισμένα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

(1) $\alpha = \alpha'$, $\Gamma = \Gamma'$, $B < B' \Rightarrow \beta < \beta'$. (2) $A = A'$, $\gamma = \gamma'$, $B < B' \Rightarrow \beta < \beta'$.

3. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα καὶ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτοῦ κείμενα ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $B'\Gamma' > B\Gamma$.

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ δύο σημεῖα Β′ καὶ Γ′ αὐτοῦ κείμενα ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ, ὥστε $BB' = \Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Ἂν τὰ Β′ καὶ Γ′ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α, θὰ εἶναι $B'\Gamma' > B\Gamma$, καὶ

Ἂν τὰ Β′ καὶ Γ′ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α, θὰ εἶναι $B'\Gamma' < B\Gamma$.

---

(1) Θετικῶς προσανατολισμένων.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

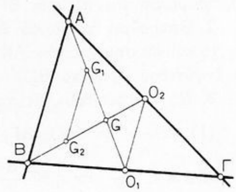
ΚΟΙΝΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΔΙΑΜΕΣΩΝ Ή ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

125. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως.

Ὀνομάζομεν **διαμέσους** *τοῦ τριγώνου, καὶ τὰς συμβολίζομεν συνήθως μὲ τὰ γράμματα* μ_1, μ_2, μ_3, *τὰ εὐθύγραμμα τμήματα* AO_1, BO_2, $ΓO_3$.

126. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ τριχοτομοῦν ἑκάστην τούτων τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ ἀντίστοιχον μέσον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω G τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων AO_1 καὶ BO_2, καὶ G_1, G_2 τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημάτων GA, GB, ἀντιστοίχως. Αἱ G_1G_2 καὶ O_1O_2 εἶναι παράλληλοι καὶ $G_1G_2 = O_1O_2$ (117, Πόρισμα). Ἐκ τῶν ἴσων (76) τριγώνων GG_1G_2 καὶ GO_1O_2 ἕπεται ὅτι $GG_1 = GO_1$, ἤτοι ὅτι τὸ G εἶναι τὸ τριχοτομοῦν τὴν διάμεσον AO_1 σημεῖον τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ O_1 καὶ τὸ τριχοτομοῦν ὁμοίως τὴν BO_2. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαμέσων AO_1, καὶ $ΓO_3$ εἶναι τὸ τριχοτομοῦν τὴν AO_1 τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ O_1, ἤτοι ὅτι δὲν εἶναι διάφορον τοῦ ἀνωτέρω σημείου G. Ὥστε αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου G.



Σχ. 126

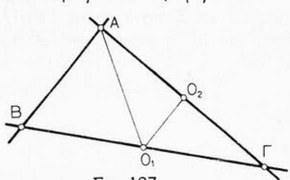
Τὸ σημεῖον τοῦτο G ὀνομάζεται συνήθως, **κέντρον βάρους** ἢ **βαρύκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

127. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ **ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ὑποτείνουσαν, εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης** καὶ **ἀντιστρόφως:**

Ἂν μία διάμεσος τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς ταύτης γωνίαν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω AO_1 ἡ διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 127). Ἡ O_1O_2 (O_2 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΑ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ (126, Πόρισμα) καὶ ἑπομένως κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον $AO_1Γ$ εἶναι ἰσοσκελὲς (109, Πόρισμα), ἤτοι $AO_1 = OΓ$.

Ἀντιστρόφως, ἔστω ὅτι ἡ διάμεσος AO_1 τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ $O_1Γ$ (ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΒΓ).



Σχ. 127

Ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AO_1\Gamma$ ἔχομεν (117, Πόρισμα) ὅτι ἡ O_1O_2 (O_2 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΑ) εἶναι (109, Πόρισμα) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ. Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν O_1O_2, ἑπομένως (89, Πόρισμα 2) κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἤτοι ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ὀρθή.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν εἰς ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 2\gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $B = 2\Gamma$, καὶ ἀντιστρόφως, ἤτοι :*

$$\alpha = 2\gamma \Leftrightarrow B = 2\Gamma \ (\text{ἢ } B = \frac{\pi}{3})$$

Πράγματι, τὸ τρίγωνον AO_1B εἶναι ἰσόπλευρον διότι εἶναι (127) $AO_1 = BO_1$ καὶ ἐξ ὑποθέσεως $AB = BO_1$. Ἐκ τούτου ἕπεται (78, Πόρισμα) ὅτι $B = \frac{\pi}{3}$ καὶ ἐπειδὴ (111, Πόρισμα 2) εἶναι $B + \Gamma = \frac{\pi}{2}$, θὰ εἶναι : $\Gamma = \frac{\pi}{6}$ καὶ ἑπομένως $B = 2\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ ἀπέχουν ἴσον τῆς εὐθείας AO_1 (O_1 τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ).

2. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ μέσον Κ τῆς διαμέσου BO_2 αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΚ καὶ ΒΓ εἶναι τὸ τριχοτομοῦν τὴν πλευρὰν ΒΓ αὐτοῦ σημεῖον τὸ ἐγγύτερον πρὸς τὸ Β.

3. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $\beta > \gamma \Leftrightarrow (AO_1, A\Gamma) < (AB, AO_1)$, (2) $\beta > \gamma \Leftrightarrow (O_1\Gamma, O_1A) > (O_1A, O_1B)$,

(3). $A < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu_1 > \frac{\alpha}{2}$, $A > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mu_1 < \frac{\alpha}{2}$, (4). $\frac{3\tau}{2} < \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 < 2\tau$,

(5). $\beta > \gamma \Leftrightarrow \mu_2 < \mu_3$, (6). $\beta - \gamma < 2\mu_1$, (7). $2\mu_1 > \beta + \gamma - \alpha$,

(8). $\beta > \gamma \Leftrightarrow \mu_3 - \mu_2 < \mu_1 < \mu_2 + \mu_3$.

4. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Μ τῆς ΒΓ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ, τὴν διὰ τοῦ Μ παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον AO_1, καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΒ′ + ΜΓ′ εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ.

5. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὴν διὰ τοῦ Μ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ τῆς ὁποίας ἔστωσαν Β′ καὶ Γ′ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΒ′ + ΜΓ′ εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Μ.

6. Δίδεται ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ καὶ τὰς προβολὰς Ε καὶ Ζ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : ἡ διὰ τοῦ Μ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ἤτοι ἀνεξαρτήτου τοῦ σημείου Μ.

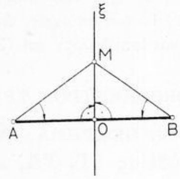
7. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως ὥστε ΑΕ = ΑΖ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ ἢ κάθετος ἐπ’ αὐτήν.

128. ΘΕΩΡΗΜΑ. (1) Πᾶν σημεῖον Μ τῆς μεσοκαθέτου εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β αὐτοῦ, καὶ ἀντιστρόφως:

(2) Πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου, ἀπέχον ἴσον ἀπὸ δύο σημείων Α καὶ Β αὐτοῦ εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

᾿Απόδειξις. (1) Ἔστω Μ (Σχ. 128.1) ἕνα σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ ἔχομεν (79, Πόρισμα) ὅτι : ΜΑ = ΜΒ.

(2) Ἐκ τῶν αὐτῶν ἀντιρρόπως ἴσων (79, Πόρισμα) τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ (Σχ. 128.1), ἔχομεν : (ΟΑ, ΟΜ) = − (ΟΒ, ΟΜ) καὶ ΟΑ = ΟΒ, καὶ ἐκ τούτων ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

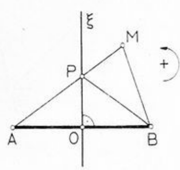


Σχ. 128.1

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἕνα σημεῖον Μ δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ξ εὐθ. τμήματος ΑΒ, δὲν ἀπέχει ἴσον τῶν Α καὶ Β, καὶ εἶναι ΜΑ > ΜΒ ἢ ΜΑ < ΜΒ, καθ' ὅσον τὸ Μ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ξ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β ἢ τὸ Α ἀντιστοίχως (Σχ. 128.2). Πράγματι, ἔστω ὅτι τὸ Μ (Σχ. 128.2) κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ξ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β καὶ ὅτι εἶναι Ρ τὸ μεταξὺ τῶν Α καὶ Μ σημεῖον τῆς ξ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΡΒΜ ἔχομεν (121) :

ΜΡ + ΡΒ > ΜΒ ἢ ΜΡ + ΡΑ > ΜΒ ἢ ΜΑ > ΜΒ κλπ.



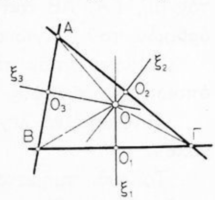
Σχ. 128.2

129. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (1).

᾿Απόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων ξ_1 καὶ ξ_2 τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΑ(2) (Σχ. 129). Εἶναι (128) : ΟΒ = ΟΓ καὶ ΟΓ = ΟΑ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ΟΒ = ΟΑ καὶ ἑπομένως (128) ὅτι τὸ Ο εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ξ_3 τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκτὸς τοῦ ἀνωτέρω σημείου Ο δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Πράγματι, ἂν ἕνα σημεῖον Ο′ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν Α,Β,Γ, τότε ἐκ τῆς Ο′Β = Ο′Γ ἕπεται (128) ὅτι κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ξ_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ καὶ ἐκ τῆς ΟΓ = ΟΑ ὅτι κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ξ_2 τῆς πλευρᾶς ΓΑ. Ἑπομένως τὸ Ο′ δὲν εἶναι διάφορον τοῦ Ο.



Σχ. 129

Τὸ σημεῖον τοῦτο Ο ὀνομάζεται **περίκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

(1) Εἶναι εὐθεῖαι **συντρέχουσαι**.

(2) Αἱ μεσοκάθετοι αὗται τέμνονται, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα 96 (Πόρισμα 4).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΜ, ΒΝ) = – (ΒΜ, ΑΝ).

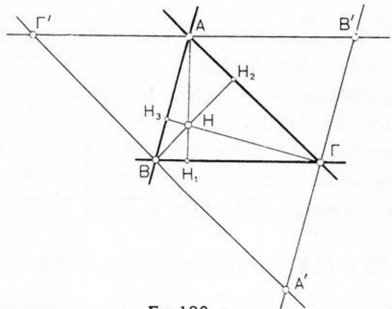
2. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\alpha > \beta > \gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $OO_1 < OO_2 < OO_3$ (O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ Ο τὸ περίκεντρον αὐτοῦ).

3. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως, ὥστε ΒΑ' = ΓΒ' = ΑΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) Τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον καὶ (2) τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον.

ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

130. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διὰ τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (1)

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν (Σχ. 130) τὸ ἀντιμεσοτρίγωνον Α'Β'Γ' τοῦ τριγώνου ΑΒΓ(118). Αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' καὶ ἑπομένως αἱ διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἶναι αἱ μεσοκάθετοι τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστὸν (129), διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (138).



Σχ. 130

Ὀνομάζομεν Η τὸ σημεῖον τοῦτο. Τὸ σημεῖον Η ὀνομάζεται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

131. ΟΡΙΣΜΟΙ. Αἱ προβολαὶ H_1,H_2,H_3 τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἶναι κορυφαὶ τριγώνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ὀρθικὸν** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἕκαστον τῶν σημείων Α,Β,Γ,Η, εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀποτελοῦν **ὀρθοκεντρικὸν σύνολον.**

Τὰ εὐθ. τμήματα AH_1,BH_2,$ΓH_3$ ὀνομάζονται **ὕψη** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, συμβολίζονται δέ, συνήθως, μὲ τὰ γράμματα υ_1, υ_2, υ_3 ἀντιστοίχως.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

2. Τὸ ὀρθόκεντρον ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ.

(1) Εἶναι εὐθεῖαι συντρέχουσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

'Ομὰς 1η

1. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη τῶν γωνιῶν (ΒΓ, BH_2), (ΓH_3, ΓΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ) αὐτοῦ [1].

2. Ἂν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖαι, τότε τὸ σημεῖον H_1 αὐτοῦ κεῖται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ. Ἂν ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα, τὸ H_1 κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ Γ.

3. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον Β = 2Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
(1) Ἂν ἡ γωνία Β εἶναι ὀξεῖα, τότε $\gamma = H_1\Gamma - H_1B$.
(2) Ἂν ἡ γωνία Β εἶναι ἀμβλεῖα, τότε $\gamma = H_1\Gamma + H_1B$.

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ [2] καὶ τὸ μέσον E_1 τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΑ (Η τὸ ὀρθόκεντρον). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα O_1E_1 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος H_2H_3.

5. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1) $2\upsilon_1 < \beta + \gamma$, (2). $\tau < \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 < 2\tau$,

(3). $\beta > \gamma \Leftrightarrow (AH_1, A\Gamma) > (AB, AH_1)$, (4). $\beta > \gamma \Leftrightarrow \upsilon_2 < \upsilon_3$.

6. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι δοθέντα σημεῖα καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ΒΓ ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐκ τῶν τριγώνων τούτων ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον εἶναι τὸ ἰσοσκελές.

7. Θεωροῦμεν : ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ τὰς παραλλήλους ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' πρὸς τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως (Α', Β', Γ' σημεῖα τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Τὸ ἄθροισμα ΜΑ' + ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι σταθερόν, ἤτοι ἀνεξάρτητον τοῦ ἐσωτερικοῦ σημείου Μ.

Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' τέμνουν τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

2. Ἂν αἱ ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τότε τὸ ἄθροισμα ΜΑ' + ΜΒ' + ΜΓ' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος υ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.
3. Ἂν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (ΜΑ', ΜΒ', ΜΓ' κάθετοι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως) τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, τότε εἶναι :

$$MB' + M\Gamma' - MA' = \upsilon.$$

4. Ἂν τὸ Μ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου καὶ ἐσωτερικὸν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, τότε θὰ εἶναι :

$$MA' - MB' - M\Gamma' = \upsilon.$$

8. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\alpha > \beta > \gamma$, σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ καὶ τὰς ἀποστάσεις : $MM_1 = x_1$, $MM_2 = x_2$, $MM_3 = x_3$ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $x_1 + x_2 + x_3 > \upsilon_1$.

9. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ αἱ εὐθεῖαι H_1O_2 καὶ H_1O_3 εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

10. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰς προβολὰς Ε καὶ Ζ τοῦ σημείου H_1 ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
(1). Ἡ εὐθεῖα AO_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ (2). (ΓΑ,ΓΒ) = (ΖΕ,ΖΑ).

---

(1) Εἰς τὰς προτεινομένας ἐφεξῆς ἀσκήσεις, τὰς ἀναφερομένας εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, θὰ συμβολίζωνται, ἐκτὸς ἀντιθέτου ἐνδείξεως, μὲ τὰ γράμματα :

O_1, O_2, O_3 τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως.

Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τοῦ τριγώνου (περίκεντρον).

H_1, H_2, H_3 τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν κλπ., κατὰ τὰ εἰς τὰς οἰκείας παραγράφους 134 — 135 ἀναφερόμενα.

(2) Θετικῶς προσανατολισμένον.

'Ομὰς 2α

1. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, τυχὸν σημεῖον Ε τῆς ΑΒ, τὴν διὰ τούτου παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Η αὐτῆς μὲ τὴν AH_1, τὴν εἰς τὸ Η κάθετον ἐπὶ τὴν ΗΓ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ζ αὐτῆς μὲ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΖ = ΒΕ.

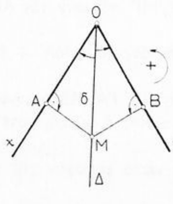
2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) Τὸ περίκεντρον τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖον ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον εἶναι ἀντιστοίχως ὀξυγώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον. Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ περίκεντρον αὐτοῦ εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης του. (2) Τὸ ὀρθόκεντρον τριγώνου εἶναι σημεῖον ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ καθ' ὅσον τὸ τρίγωνον εἶναι ἀντιστοίχως ὀξυγώνιον ἢ ἀμβλυγώνιον. Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ εἶναι ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας.

ΕΓΚΕΝΤΡΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

132. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Κάθε σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΧ καὶ ΟΥ, καὶ ἀντιστρόφως:

2. Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΧ, ΟΥ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς.

'Απόδειξις. 1. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ΜΑ, ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως.



Σχ. 132.1

Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ ἀντιθέτους τὰς γωνίας (ΟΜ, ΟΑ) καὶ (ΟΜ, ΟΒ), ἔπεται (112) ὅτι ΜΑ = ΜΒ.

2. Ἂν αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ εἶναι ἴσαι, ἐκ τῶν ἰδίων ὀρθογωνίων τριγώνων ἔχομεν (112) ὅτι: (ΟΜ, ΟΑ) = − (ΟΜ, ΟΒ), ἤτοι ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ἤτοι τῆς (ΟΧ, ΟΥ).

Σημειοῦμεν ὅτι, ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β κείμενον ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν εὐθειῶν δ ἢ δ' ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς α καὶ β, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν α καὶ β, καὶ ἀντιστρόφως:*

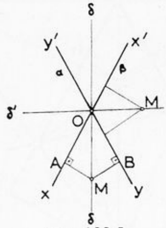
Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων, κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν εὐθειῶν δ ἢ δ' ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν ὑπὸ τῶν α καὶ β ὁριζομένων γωνιῶν.

Πράγματι, ἂν ἕνα σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς δ ἢ τῆς δ' ἀπέχει (132.1) ἴσον ἀπὸ τῶν α καὶ β.

Ἀντιστρόφως, ἂν ἕνα σημεῖον Μ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β, τότε:

Ἂν εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) (Σχ. 132.2) ἢ τῆς ἀντικειμένης της (ΟΧ', ΟΥ'), κεῖται (132.2) ἐπὶ τῆς δ.

Ἂν εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΥ', ΟΧ) ἢ τῆς ἀντικειμένης της, κεῖται ἐπὶ τῆς δ'.

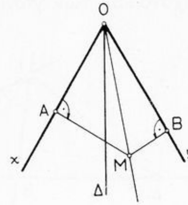


Σχ. 132.2

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἕνα σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν κυρτῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΔ αὐτῆς, δὲν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ καὶ εἶναι $MA > MB$ ἢ $MA < MB$, καθ' ὅσον τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας (ΟΔ, ΟΥ) ἢ τῆς (ΟΧ, ΟΔ) ἀντιστοίχως.

Πράγματι, ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ (Σχ. 132.3), τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὴν (ΟΧ, ΟΜ) > (ΟΜ, ΟΥ), ἔπεται (122, Πόρισμα 1) ὅτι $MA > MB$.

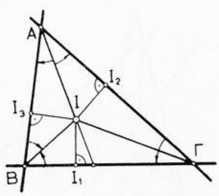


Σχ. 132.3

133. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

2. Αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

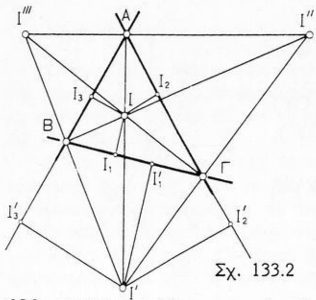
Ἀπόδειξις. 1. Ἔστω Ι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου (89, Πόρισμα 5) καὶ I_1, I_2, I_3 αἱ προβολαὶ τοῦ Ι ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως (Σχ. 133.1). Ἐπειδὴ τὸ Ι εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου θὰ ἔχωμεν (132.1) ὅτι $II_1 = II_2$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Β, ὅτι $II_1 = II_3$. Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι $II_2 = II_3$ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὸ Ι εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου, διότι εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχον ἴσον τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ (132.2). Ὥστε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι εὐθεῖαι συντρέχουσαι.



Σχ. 133.1

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ι αὐτῶν ὀνομάζεται **ἔγκεντρον** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

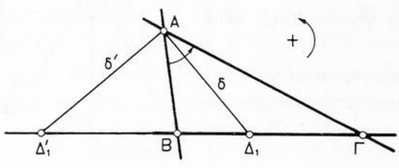
2. Ἔστω Ι' τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου. Ἔχομεν ἀντιστοίχως (132.1) ὅτι $I'I'_2 = I'I'_3$ καὶ $I'I'_1 = I'I'_3$. Ἐκ τούτων ἔπεται



Σχ. 133.2

ὅτι $I'I'_1 = I'I'_2$ καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι τὸ σημεῖον I', ὡς ἐσωτερικὸν τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ τοῦ τριγώνου, κεῖται (132.2) ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Γ καὶ Α καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου διέρχονται διὰ σημείου I'', καὶ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Γ αὐτοῦ διέρχονται διὰ σημείου I'''

134. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν Δ_1, Δ_2, Δ_3 τὰ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀντιστοίχως καὶ Δ_1', Δ_2', Δ_3' τὰ ἐπὶ τούτων σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου (Σχ. 134). Τὰ εὐθ. τμήματα $Α\Delta_1$, $Β\Delta_2$, $Γ\Delta_3$ ὀνομάζονται **ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι** τοῦ τριγώνου καὶ συμβολίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὰ γράμματα δ_1, δ_2, δ_3.

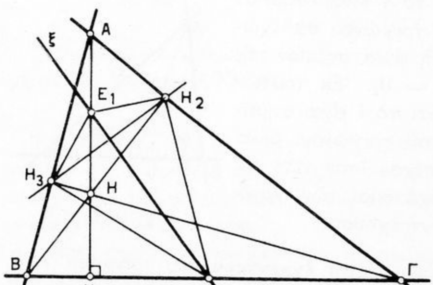


Σχ. 134

Τὰ εὐθ. τμήματα $Α\Delta_1'$, $Β\Delta_2'$, $Γ\Delta_3'$ ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι** τοῦ τριγώνου καὶ συμβολίζονται ἀντιστοίχως μὲ τὰ γράμματα δ_1', δ_2', δ_3'.

135. Ἀναφερόμενοι εἰς τὰς ἀποδεικτικὰς προτάσεις καὶ τὴν ἐπὶ τούτων μέθοδον τῆς ἀποδείξεως, σημειοῦμεν :

Κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τῆς **ἀποδείξεως** τῶν εἰς τὸ παρὸν καὶ τὰ ἑπόμενα κεφάλαια ἀναφερομένων ἀποδεικτικῶν προτάσεων, δυνάμεθα νὰ ἀκολουθήσωμεν δύο μεθόδους. Ἡ μία ἐκ τούτων, λεγομένη **ἀνάλυσις,** μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν **ἀναλυτικὴν ἀπόδειξιν** τῆς θεωρουμένης προτάσεως. Ἡ ἄλλη εἶναι ἡ **σύνθεσις.** Ἡ μὲ ταύτην συνδεομένη ἀπόδειξις ὀνομάζεται **συνθετικὴ ἀπόδειξις.**



Σχ. 135

Κατὰ τὴν ἀναλυτικὴν ἀπόδειξιν ὑποθέτομεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἀποδεικτέα πρότασις, καὶ ἐκ τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς, συνδυαζομένης μὲ γνωστὰς (ἀποδειχθείσας) προτάσεις πορίζόμεθα τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν. Ὡς παράδειγμα ἀναφέρομεν τὴν πρότασιν περὶ ἧς ἡ ὑπ' ἀριθ. 4 ἄσκησις (παράγρ. 131, ὁμὰς 1η), ἄσκησις τοῦ παρόντος κεφαλαίου.

Ἐν προκειμένῳ, ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐθεία O_1E_1 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος H_2H_3. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς ἐν συνδυασμῷ πρὸς τὴν πρότασιν

(128) προκύπτει ὅτι (1) $O_1H_2 = O_1H_3$ καὶ (2) $E_1H_2 = E_1H_3$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι αἱ ἀνωτέρω σχέσεις (1) καὶ (2) ἰσχύουν συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (127).

Ἡ ἀνάλυσις μόνη δὲν ἀποτελεῖ ἀπόδειξιν, διότι ἐκ τοῦ ὅτι ὑποθέτοντες ἰσχύουσαν τὴν ἀποδεικτέαν πρότασιν, ἀγόμεθα εἰς πρότασιν ἰσχύουσαν, δὲν ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ ἀποδεικτέα πρότασις. Τοῦτο εἶναι βέβαιον μόνον ὅταν αἱ εἰς ἃς ἀναφερόμεθα κατὰ τὴν ἀνάλυσιν προτάσεις εἶναι **ἀντιστρεπταί.** Ὁ περὶ τούτου ἔλεγχος γίνεται διὰ τῆς συνθετικῆς ἀποδείξεως, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖται ἡ ἀντίστροφος ἀποδεικτικὴ πορεία.

Οὕτως, ἡ σύνθεσις μόνη ἀποτελεῖ πλήρη ἀπόδειξιν.

Ἡ ἀναλυτικὴ πορεία κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκ τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως ἀγόμεθα εἰς μίαν γνωστὴν (ἰσχύουσαν) πρότασιν, μέσῳ προτάσεων αἵτινες ἐλέγχονται **ἰσοδύναμοι,** ἀποτελεῖ βεβαίως πλήρη ἀπόδειξιν (ἀναλυτικὴ ἀπόδειξις).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Ἂν ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΓ), τότε ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, καὶ ἀντιστρόφως.

2. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν διχοτόμον $A\Delta_1$ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτῆς μὲ τὰς εὐθείας BH_2 καὶ ΓH_3 ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΕΖ εἶναι ἰσοσκελές.

3. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν ἀπὸ τοῦ Γ ἡμιευθεῖαν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ κορυφὴ Α τοῦ τριγώνου, καὶ τὸ σημεῖον Ζ τῆς ἡμιευθείας αὐτῆς διὰ τὸ ὁποῖον ΓΖ = ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΒΖ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Β τοῦ τριγώνου.

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $\beta > \gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον Δ_1 κεῖται μεταξὺ τῶν H_1 καὶ O_1 (Δ_1, H_1, O_1 τὰ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖα τῆς διχοτόμου τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου αὐτοῦ ἀντιστοίχως).

5. Θεωροῦμεν θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ < ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ' ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς Α, ὥστε ΑΖ = ΑΖ' = γ (Ζ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Γ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
1. Ἑκάστη τῶν γωνιῶν (ΒΓ, ΒΖ) καὶ (ΑΗ, $A\Delta_1$) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς τῶν γωνιῶν (ΒΓ, ΒΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) τοῦ τριγώνου.
2. Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν (ΒΓ, ΒΖ') καὶ (ΒΓ, ΒΖ) εἶναι ἴση πρὸς μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

6. Θεωροῦμεν θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸν ὁποῖον ΑΒ < ΑΓ.
1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(O_3H_1, O_3O_1) = (B\Gamma, BA) - (\Gamma A, \Gamma B)$.
2. Ἔστω Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΓΑ καὶ O_3H_1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :
$$(\Sigma H_1, \Sigma\Gamma) = (B\Gamma, BA) - (\Gamma A, \Gamma B).$$
3. Ἂν ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου εἶναι ὀρθή, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $(AH, AO) = (B\Gamma, BA) - (\Gamma A, \Gamma B)$ καὶ ὅτι ἡ $A\Delta_1$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (AH, AO_1).

7. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Ι τοῦ ἐπιπόδου του [1], τὴν διὰ τοῦ Ι παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ΒΕ καὶ ΓΖ. Ἀνάλογος πρότασις ἰσχύει διὰ τὰ σημεῖα Ι', Ι'', Ι'''.

8. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ τυχὸν θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι :
(1) $(IB, I\Gamma) = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{2}$ καὶ (2) $(I'\Gamma, I'B) = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$, ἔνθα Α ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) τοῦ τριγώνου. Νὰ ὁρισθοῦν ὁμοίως αἱ γωνίαι (ΙΓ, ΙΑ), ὡς (Ι''Α, Ι''Γ) ὡς καὶ αἱ (ΙΑ, ΙΒ), (Ι'''Β, Ι''' Α).

9. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰς προβολὰς Ε καὶ Ζ τῶν Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $A\Delta_1$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $O_1E = O_1Z$.

---

(1) Ἔγκεντρον τοῦ τριγώνου.

10. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α τρίγωνον ΑΒΓ, τὴν διχοτόμον $ΑΔ_1$ αὐτοῦ, τὴν διὰ τοῦ $Δ_1$ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $Δ_1Ε = Δ_1Β$ καὶ $Δ_1Ζ = Δ_1Γ$.

11. Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ $Δ_2Δ_3$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

12. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $β > γ \Leftrightarrow ΙΒ < ΙΓ$ (2). $β > γ \Leftrightarrow Ι'Β > Ι'Γ$.

(Ι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ἐσωτ. διχοτόμων τοῦ τριγώνου καὶ Ι' τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ).

13. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις : (1) $β = γ \Leftrightarrow μ_2 = μ_3$ (2) $β = γ \Leftrightarrow ΟΟ_2 = ΟΟ_3$ (3) $β = γ \Leftrightarrow υ_2 = υ_3$ (4) $β = γ \Leftrightarrow δ_2 = δ_3$.

14. Νὰ ἀποδειχθοῦν εἰς τὸ θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον ΑΒΓ αἱ σχέσεις :

(1). $β > γ \Leftrightarrow Δ_1Γ > Δ_1Β$ (2). $β > γ \Leftrightarrow (Δ_1Γ, Δ_1Α) > (Δ_1Α, Δ_1Β)$

(3). $2δ_1 < β + γ$ (4). $δ_1 + δ_2 + δ_3 < 2τ$ (5). $β > γ \Leftrightarrow δ_2 < δ_3$

(6). $β > γ \Rightarrow ΒΔ_3 < Δ_2Δ_3 < Δ_3Γ$.

15. Τὸ σημεῖον Ι εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τὰ Ι', Ι'', Ι''' ἐξωτερικὰ σημεῖα αὐτοῦ.

Τὰ σημεῖα Α, Ι'', Ι''' κεῖνται ἐπὶ εὐθείας.

Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθικὸν τρίγωνον τοῦ τριγώνου Ι' Ι'' Ι'''.

Τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου Ι' Ι'' Ι''' εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθικοῦ του ΑΒΓ.

Ἐκτὸς τῶν σημείων Ι', Ι'', Ι''', δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.

Αἱ εὐθεῖαι ΙΑ, ΙΒ, ΙΓ εἶναι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $Ι_1Ι_2Ι_3$.

Ὁμὰς 2α

1. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), τὴν διχοτόμον $ΑΔ_1$ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας $ΑΔ_1$ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' τῶν εὐθειῶν ΒΜ καὶ ΓΜ μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΒ' = ΓΓ'.

2. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ σημεῖον Ι', τὴν διὰ τοῦ Ι' παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α' καὶ Β' τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς ΒΓ καὶ ΓΑ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι Α'Β' = ΑΒ'–Α'Β.

3. Θεωροῦμεν : ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ μέσον $Ο_1$ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, τὴν διὰ τοῦ Α' κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' αὐτῆς μὲ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Γ καὶ Β τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Α'Γ' = ΑΓ καὶ Α'Β' = ΑΒ.

4. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον $β > γ$, τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α αὐτοῦ, τὴν διὰ τοῦ μέσου $Ο_1$ τῆς πλευρᾶς ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀνωτέρω διχοτόμον καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ' καὶ ΑΓ' εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν β καὶ γ του τριγώνου.

Περίπτωσις διχοτόμου ἐξωτερικῆς γωνίας Α.

5. Αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΒΓ.

6. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰς καθέτους ΒΖ καὶ ΒΖ' ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 1. Ἡ εὐθεῖα ΖΖ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου $Ο_1$ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. 2. Τὰ εὐθ. τμήματα $Ο_1Ζ'$ καὶ $Ο_1Ζ$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα καὶ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν πλευρῶν β καὶ γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

7. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Α κάθετον δ' ἐπὶ τὴν διχοτόμον $ΑΔ_1$, τῆς γωνίας Α αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Διὰ κάθε σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ο, διάφορον τοῦ Α, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΜΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

8. Θεωροῦμεν: θετικῶς προσανατολισμένον τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ < ΑΓ, ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ μεταξὺ τῶν Α καὶ $Δ_1$, τὰς ΒΜ καὶ ΓΜ, καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' αὐτῶν μὲ τὰ ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(1) (ΒΜ,ΒΑ) > (ΓΑ, ΓΜ), (2) ΜΒ < ΜΓ, (3) ΓΜ − ΜΒ < ΑΓ − ΑΒ, (4) ΒΒ' < ΓΓ'.

9. Ἂν εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν ἀντὶ τῆς συνθήκης ΑΒ < ΑΓ, δίδεται ἡ ΑΒ = ΑΓ, τότε θὰ εἶναι ΒΒ' = ΓΓ'.

10. Νὰ διατυπωθῇ καὶ ἀποδειχθῇ ἀντίστοιχος τῆς ἀνωτέρω (78) πρότασις, διὰ σημεῖον Μ κείμενον μεταξὺ τῶν Α καὶ $Ο_1$ ($Ο_1$ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ).

11. Θεωροῦμεν : Γωνίαν (ΑΥ, ΑΖ), σημεῖον Δ τῆς διχοτόμου αὐτῆς, τὴν διὰ τοῦ Δ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀνωτέρω διχοτόμον, τὰ κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς μὲ τὰς ΑΥ καὶ ΑΖ ἀντιστοίχως καὶ μίαν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Δ εὐθεῖαν τῆς ὁποίας ἔστωσαν Β' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΥ καὶ ΑΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΓ < Β'Γ'.

Ὁμὰς 3η

1. Θεωροῦμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων :

(1) $β = β'$, $γ = γ'$ καὶ $μ_1 = μ'_1$ (ἢ $μ_2 = μ'_2$) (2) $β = β'$, $γ = γ'$ καὶ $υ_1 = υ'_1$ (ἢ $υ_2 = υ'_2$) (3) $α = α'$ καὶ $υ_2 = υ'_2$, $υ_3 = υ'_3$ (ἢ $υ_1 = υ'_1$, $υ_2 = υ'_2$) (4) $α = α'$, $υ_1 = υ'_1$, $μ_1 = μ'_1$ (5) $Β = Β'$, $Γ = Γ'$ καὶ $υ_1 = υ'_1$ (6) $α = α'$, $υ_1 = υ'_1$ καὶ $Β = Β'$ (7) $α = α'$, $Β = Β'$, $δ_2 = δ'_2$.
τὰ θεωρούμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

2. Θεωροῦμεν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (ΑΒ = ΑΓ καὶ Α'Β' = Α'Γ'). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων :

(1) $Α = Α'$, $υ_1 = υ'_1$. (2) $α = α'$, $υ_1 = υ'_1$ (ἢ $υ_2 = υ'_2$ ἢ $υ_3 = υ_3'$)
(3) $Β = Β'$, $υ_1 = υ'_1$ (ἢ $υ_2 = υ'_2$), τὰ θεωρούμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα

3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) Ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον, τότε : $H \equiv G \equiv O \equiv I$ καὶ (2) Εἰς ἑκάστην τῶν περιπτώσεων : $H \equiv G$, $H \equiv O$, $H \equiv I$, $G \equiv O$, $G \equiv I$, $O \equiv I$, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

4. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ = ΑΓ, τότε τὰ σημεῖα G, O, I, I' κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΗ (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου) καὶ (2) Ἂν μία ἀπὸ τὰς τριάδας σημείων : AGH, AHO, AHI, AHI', AGO, AGI, AGI', AOI, AOI', HII', GII', OII', κεῖται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ = ΑΓ).

5. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ γωνία Α εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ καὶ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα 2λ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐκ τούτων ἔχον τὴν ἐλαχίστην πλευρὰν ΒΓ εἶναι τὸ ἰσοσκελές.

6. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α, δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως ὥστε ΒΕ + ΓΖ = ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐλάχιστον εὐθ. τμῆμα ΕΖ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν ΑΕ = ΑΖ.

7. Νὰ ἀποδειχθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ἡ σχέσις : $Β = 2Γ \Rightarrow β < 2γ$.

8. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ τὰ σημεῖα H, G, O κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι HG = 2GO (1).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως αὐτῆς, θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Η (ὀρθόκεντρον) καὶ G (βαρύκεντρον) τοῦ τριγώνου καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας HG, πρὸς τὸ μέρος τοῦ G πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Η, τὸ σημεῖον Ο ὥστε HG 2 GO καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ $ΟΟ_1$ ($Ο_1$ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

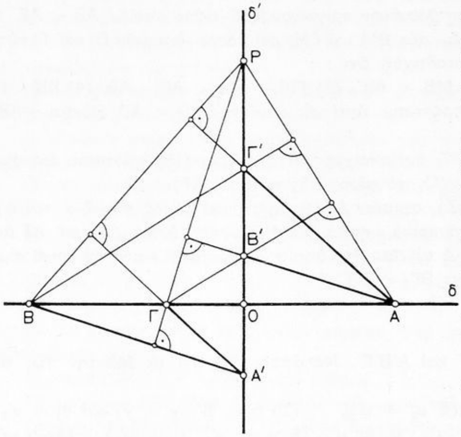
---

(1) Euler L. (1708 — 1783).

9. Θεωροῦμεν δύο καθέτους ἐπ᾽ ἀλλήλας εὐθείας δ καὶ δ′ καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ′ καὶ Α′Β εἶναι παράλληλοι ὡς καὶ αἱ ΑΓ′ καὶ Α′Γ, τότε θὰ εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ΒΓ′ καὶ Β′Γ (1)

Ὑπόδειξις. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὰ εἰς τὴν πρότασιν σημεῖα, θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Α τῆς δ, δύο τυχούσας διὰ τούτου εὐθείας ΑΒ′ ΑΓ′ (Β′ καὶ Γ′ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν δ′), ἕνα τυχὸν σημεῖον Α′ τῆς δ′ καὶ τὰς διὰ τούτου παραλλήλους Α′Β καὶ Α′Γ πρὸς τὰς ΑΒ′ καὶ ΑΓ′ ἀντιστοίχως (Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν μὲ τὴν δ).

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ′ καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν Β′Γ.



Σχ. 9α

(1) Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι θεμελιώδους σημασίας διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου καὶ τοῦ λόγου δύο εὐθ. τμημάτων, περὶ τῶν ὁποίων γίνεται λόγος εἰς τὴν ἑπομένην τάξιν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

136. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἀπὸ ἀπόψεως θεωρητικῆς τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. κατασκευῶν εἶναι θεωρήματα ὑπάρξεως. Ἀποδεικνύεται διὰ τούτων ὅτι ἡ ὕπαρξις τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων ἢ σχημάτων (σημείων, εὐθειῶν, εὐθ. τμημάτων, γωνιῶν, τριγώνων κλπ.) προκύπτει ἐκ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων ὑπάρξεως.

Ἀπεδείχθη (104) ὅτι δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὑπάρχει μέσον σημεῖον αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον. Δυνάμεθα, κατόπιν τούτου, νὰ εἴπωμεν ὅτι τὸ πρόβλημα τῆς διχοτομήσεως τοῦ εὐθ. τμήματος ἔχει ἐπιλυθῆ. Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διχοτόμησιν τῆς γωνίας κλπ.

Ἀπὸ πρακτικῆς ἀπόψεως τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. κατασκευῶν συνδέονται μὲ τὰς πρακτικὰς ἐκείνας ἐνεργείας, αἱ ὁποῖαι ἀποβλέπουν εἰς τὴν μέσῳ μιᾶς γραφικῆς εἰκόνος ἐμφανιζομένης ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σχεδιάσεως, ὑλοποίησιν τῶν νοητικῶν ἐνεργειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέονται μὲ τὸ ἀντίστοιχον πρόβλημα. Ἡ γραφικὴ αὕτη εἰκὼν δὲν εἶναι, ὡς ἤδη ἐσημειώσαμεν, ἄλλο τι, εἰμὴ μία ἀπεικόνισις τοῦ Γεωμ. χώρου εἰς τὸν αἰσθητὸν χῶρον, ἕνα σύμβολον τοῦ περιεχομένου τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διδόμενα πρὸς τὰ ζητούμενα στοιχεῖα τῆς κατασκευῆς, τὸ ὁποῖον προώρισται νὰ διευκολύνῃ τοὺς συλλογισμοὺς καὶ τὴν ἔμπνευσιν εἰς ὅ,τι ἀφορᾶ τὴν ἀναζήτησιν τῶν ὑφισταμένων εἰς τὸν Γεωμετρικὸν χῶρον σχέσεων. Ἡ γραφικὴ αὕτη εἰκὼν δέον νὰ ἀνταποκρίνεται, κατὰ τὴν ἐπιβαλλομένην ἑκάστοτε πρακτικὴν ἀκρίβειαν, πρὸς τὰς διδομένας συνθήκας καὶ πρὸς τὰ ἐκ τῶν ἀξιωμάτων καὶ τῶν ἀποδειχθέντων θεωρημάτων συμπεράσματα.

Οὕτω, συμφώνως πρὸς τὰ ἀξιώματα θέσεως, ἡ ὕπαρξις μιᾶς εὐθείας συνδέεται μὲ τὴν ὕπαρξιν δύο σημείων. Δεχόμεθα ὅτι τοῦτο :

(1) Ἐπιτρέπει τὴν γραφικὴν ἐμφάνισιν τῶν δύο τούτων σημείων καὶ τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα αὐτὰ συνδέονται διὰ μιᾶς εὐθείας, καὶ

(2) Ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ πρᾶξις αὕτη δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ.

Δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι, ἡ πρᾶξις ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ σημείου δύο εὐθειῶν, κειμένων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ μὴ παραλλήλων, δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ.

Διὰ τὴν πρακτικὴν ἐκτέλεσιν τῶν γραφικῶν τούτων πράξεων ἐπιτρέπεται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **κανών.**

Οὕτω, δεχόμεθα ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῶν κατωτέρω θεμελιωδῶν προβλημάτων ἐξασφαλίζεται ἐκ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων θέσεως:

137. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ δοθὲν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου.

138. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β.

139. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο δοθεισῶν μὴ παραλλήλων εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

Δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι ἡ κατωτέρω κατασκευὴ ἐξασφαλίζεται ἐκ τῶν εἰσαχθέντων ἀξιωμάτων τῆς ἰσότητος :

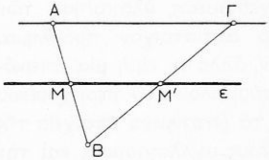
140. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Ἐπὶ δοθείσης ἡμιευθείας ΑΧ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Β, ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

Ἡ ἀνωτέρω κατασκευὴ πραγματοποιεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος σχεδιάσεως τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **μεταφορεύς.**

Τέλος δεχόμεθα ὅτι ἡ κίνησις τῶν ὀργάνων σχεδιάσεως εἶναι κίνησις στερεοῦ σώματος.

Ἐξ ἄλλου, τὰ κατωτέρω προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὰ τέσσαρα προηγούμενα καὶ ἐπιλύονται διὰ τῆς ἀποκλειστικῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος καὶ τοῦ μεταφορέως(1).

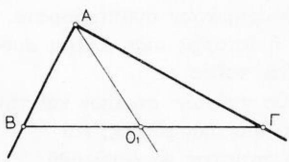
141. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθείσης εὐθείας ε καὶ σημείου Α ἐκτὸς αὐτῆς νὰ κατασκευασθῇ ἡ διὰ τοῦ Α παράλληλος πρὸς τὴν ε.



Σχ. 141

Λύσις. Συνδέομεν δι᾽ εὐθείας τὸ Α μὲ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Β τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Μ (Σχ. 141). Συνδέομεν ἀκολούθως δι᾽ εὐθείας τὸ Β μὲ ἕνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον Μ′ τῆς ε καὶ εὑρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν Γ τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ Μ′. Ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ε (117, Πόρισμα).

142. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθὴ γωνία ἔχουσα κορυφὴν δοθὲν σημεῖον Α.



Σχ. 142

Λύσις. Κατασκευάζεται (Σχ. 142) τυχοῦσα ἀπὸ τοῦ Α ἡμιευθεῖα καὶ ὁρίζεται ἐπ᾽ αὐτῆς τυχὸν σημεῖον O_1. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ O_1 ὁρίζονται, ἑκατέρωθεν τοῦ O_1, τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε $O_1B = O_1A$ (Σχ. 142).

Ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ὀρθὴ (127).

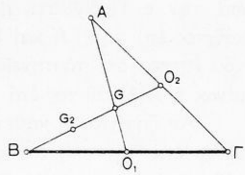
---

(1) Διὰ τῶν προβλημάτων τούτων ἐπιδιώκεται, παραλλήλως πρὸς τὴν εἰσαχθεῖσαν ἔννοιαν τῆς γεωμ. κατασκευῆς, ἡ ἄσκησις τῆς ἱκανότητος τοῦ μαθητοῦ εἰς τὸ νὰ δίδῃ λύσιν, βάσει τῆς μέχρι τοῦδε ἀποκτηθείσης γνώσεως (ἀποδεικτικῶν προτάσεων), εἰς προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἀπαραίτητος ἡ ἔννοια τοῦ κύκλου καὶ ἡ μὲ ταύτην συνδεομένη χρῆσις τοῦ **διαβήτου.**

Εἰς τὸ ἑπόμενον Κεφάλαιον θὰ δοθοῦν προβλήματα γεωμ. κατασκευῶν τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις γίνεται τῇ βοηθείᾳ εὐθειῶν καὶ κύκλων, ἤτοι εἰς προβλήματα τὰ ὁποῖα ἑρμηνεύονται ἐποπτικῶς, διὰ γραφικῶν εἰκόνων πραγματοποιουμένων ἐπὶ τοῦ πίνακος σχεδιάσεως, τῇ βοηθείᾳ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

143. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐπὶ τυχούσης ἀπὸ τοῦ Β ἡμιευθείας ὁρίζονται τὰ σημεῖα G_2, G καὶ O_2 ὥστε $BG_2 = G_2G = GO_2$ (Σχ. 143) καὶ τὸ συμμετρικὸν Α τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ O_2. Τὸ κοινὸν σημεῖον O_1 τῶν ΒΓ καὶ AG εἶναι τὸ ζητούμενον μέσον (126).



Σχ. 143

144. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ χωρισθῇ δοθὲν εὐθ. τμῆμα ΑΒ. εἰς ν ἴσα εὐθ. τμήματα.

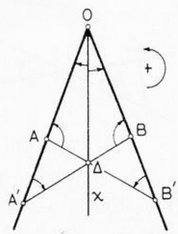
Λύσις. Βλέπε πρότασιν (119).

145. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ διχοτομηθῇ δοθεῖσα γωνία (ΟΧ,ΟΥ).

Λύσις. Ὁρίζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ ΟΥ τῆς γωνίας : δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὥστε ΟΑ = ΟΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ δύο ἄλλα σημεῖα Α′ καὶ Β′ ὥστε ΟΑ′ = ΟΒ′ (Σχ. 145). Ὁρίζεται τὸ κοινὸν σημεῖον Δ τῶν εὐθειῶν ΑΒ′ καὶ Α′Β. Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΔ εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος.

Πράγματι, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΒ′ καὶ ΟΒΑ′ ἔχομεν (75) (ΑΒ′, ΑΟ) = – (ΒΑ′, ΒΟ) καὶ (Β′Ο, Β′Α) = – (Α′Ο, Α′Β). Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἕπεται : (ΑΑ′, ΑΔ) = – (ΒΒ′, ΒΔ), ἤτοι (ΑΔ, ΑΑ′) = – (ΒΔ, ΒΒ′).

Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων τριγώνων ΑΔΑ′ καὶ ΒΔΒ′ ἕπεται ὅτι ΔΑ′ = ΔΒ′ καὶ ἐκ τῶν ἐπίσης ἀντιρρόπως ἴσων (79) τριγώνων ΟΔΑ′ καὶ ΟΔΒ′ ἕπεται ὅτι (ΟΔ, ΟΑ′) = – (ΟΔ, ΟΒ′), ἤτοι ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ).



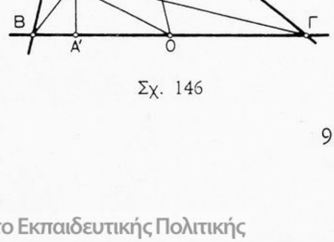
Σχ. 145

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐγένετο χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀξιώματος τῆς παραλλήλου (88).

Ἐξ ἄλλου ἕνας δεύτερος τρόπος ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ἀνταποκρίνεται εἰς τὸ σχετικὸν (86) θεώρημα ὑπάρξεως.

146. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε.

Λύσις. Ὁρίζεται τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ε καὶ ἀκολούθως δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ο. Ἐπὶ δύο οἱωνδήποτε ἡμιευθειῶν ἀγομένων ἀπὸ τοῦ Ο καὶ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τῆς ε ὁρίζονται ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Β′ καὶ Γ′ ὥστε ΟΒ′ = ΟΓ′ = ΟΒ. Ὁρίζεται τὸ κοινὸν σημεῖον Α τῶν εὐθειῶν ΒΓ′ καὶ ΓΒ′ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Η τῶν εὐθειῶν ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ Ἡ εὐθεῖα ΑΗ εἶναι κάθετος



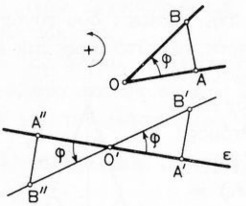
Σχ. 146

ἐπὶ τὴν ε. Πράγματι, ἡ γωνία (Β'Β, Β'Γ) εἶναι (127) ὀρθή, ἤτοι ἡ ΒΒ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ καὶ δι' ὅμοιον λόγον ἡ ΓΓ' κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἑπομένως ἡ ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ (130).

Ἂν ζητῆται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ε ἡ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ρ κειμένου ἐπὶ τῆς ε ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, κατασκευάζεται τυχοῦσα, κατὰ τὰ ἀνωτέρω κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Ἡ διὰ τοῦ Ρ παράλληλος πρὸς αὐτὴν εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (87, Πόρισμα 2)

147. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Λύσις. Κατασκευάζεται τυχοῦσα κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας φ (Σχ. 147). Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας φ. Ὁρίζεται τυχὸν σημεῖον Ο' τῆς ε καὶ λαμβάνεται ἐπ' αὐτῆς, πρὸς τὸ ἕνα ἢ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ Ο', τὸ σημεῖον Α' ὥστε Ο'Α' = ΟΑ. Κατασκευάζεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ε εἰς τὸ Α' καὶ ὁρίζεται ἐπ' αὐτῆς τὸ σημεῖον Β' ὥστε νὰ εἶναι : Α'Β' = ΑΒ καὶ αἱ γωνίαι (Ο'Α', Ο'Β') καὶ (ΟΑ,ΟΒ) ὁμοίως προσανατολισμέναι.



Σχ. 147

Ἐκ τῶν ἴσων (112) ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β' ἔχομεν ὅτι : (Ο'Α', Ο'Β') = (ΟΑ, ΟΒ), ἤτοι ὅτι ἡ εὐθεῖα Ο'Β' ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα Ο'Β' εἶναι **λύσις** τοῦ προβλήματος. Εἰς τὸ συμμετρικὸν Α'' τοῦ σημείου Α' ὡς πρὸς τὸ Ο' δὲν ἀντιστοιχεῖ δευτέρα λύσις τοῦ προβλήματος. Ἡ ὁριζομένη εὐθεῖα Ο'Β'' συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην.

Κάθε παράλληλος πρὸς τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν τοῦ προβλήματος εἶναι ἐπίσης λύσις τοῦ προβλήματος. Ὑπάρχει ἑπομένως μία διεύθυνσις (90), ἀνταποκρινομένη εἰς τὴν δοθεῖσαν συνθήκην.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα δέον ὅπως ἱκανοποιῇ καὶ μίαν δευτέραν δοθεῖσαν συνθήκην, π.χ. ὅπως διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ, τότε τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν λύσιν : τὴν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν τὴν ἀνήκουσαν εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν διεύθυνσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται δύο γωνίαι τριγώνου. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

148. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γεωμετρικὸν τόπον** *σημείων, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἱκανοποιεῖ μίαν συνθήκην (Σ), τὸ σύνολον τῶν σημείων τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης (Σ).*

Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι κατὰ ταῦτα, ἕνα γεωμ. σχῆμα, ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος [1] ὁρισμοῦ.

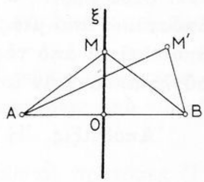
Ἐκ τῶν ἀξιωμάτων θέσεως (6) προκύπτει ὅτι :

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων εἶναι ἡ τομὴ αὐτῶν.

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν τοῦ Ἐπιπέδου ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς προτάσεις αἱ ἀναφερόμεναι εἰς γεωμ. τόπους σημείων ἀντιστοιχοῦντας εἰς θεμελιώδεις (βασικάς) τινας συνθήκας :

149. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β [2] εἶναι ἴσαι, εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, κάθε σημεῖον Μ τῆς μεσοκαθέτου ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β (128). Ἀντιθέτως (Σχ. 149). Κάθε σημεῖον Μ′ τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ δὲν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β. Πράγματι, ἂν κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ξ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Β θὰ εἶναι (128) Μ′Α > Μ′Β.



Σχ. 149.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰς ἑξῆς δύο προτάσεις :

(1) Κάθε σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ξ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, καὶ

(2) Κάθε σημεῖον τῆς ἀνωτέρω μεσοκαθέτου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β.

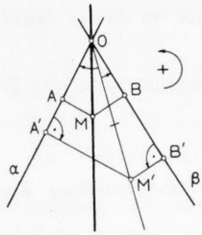
Ἑκάστη τῶν προτάσεων τούτων ἀποδεικνύεται, ἐπίσης, ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν τριγώνων ΜΟΑ καὶ ΜΟΒ (128).

Ὡς κατωτέρω θέλομεν ἴδει, ὁ εἰς δοθεῖσαν συνθήκην (Σ) ἀντιστοιχῶν γεωμ. τόπος δύναται νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας ἢ εὐθ. τμήματα.

(1) Βλέπε : Εἰσαγωγῆς παράγρ. 4.

(2) Ἕκαστον τῶν ὁποίων ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην : ΜΑ = ΜΒ.

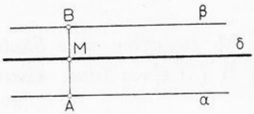
150. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β εἶναι ἴσαι, εἶναι αἱ διχοτόμοι δ καὶ δ′ τῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων ὁριζομένων γωνιῶν.



Σχ. 150.1

Ἀπόδειξις. (1) Κάθε σημεῖον Μ (Σχ. 150.1) τῆς δ ἢ τῆς δ′ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν α καὶ β. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ (112).

(2) Κάθε σημεῖον Μ (Σχ. 150.1) μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς δ ἢ τῆς δ′ δὲν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν α καὶ β. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν τριγώνων ΟΜ′Α′ καὶ ΟΜ′Β (122, Πόρισμα 1).



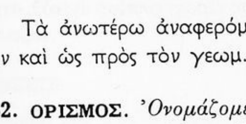
Σχ. 150.2

Σημειοῦμεν ὅτι (Σχ. 150.2):

Ἂν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι α καὶ β εἶναι παράλληλοι, ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ παράλληλος δ πρὸς τὰς α καὶ β ἡ ἀπέχουσα ἴσον ἀπὸ τούτων ἢ **μεσοπαράλληλος** τῶν α καὶ β.

151. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς παραλλήλους α καὶ α′ πρὸς τὴν ε τὰς ἀπεχούσας ἀπὸ αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς προτάσεως (116): Πράγματι, ἂν εἶναι Α (Σχ. 151) ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, καὶ α ἡ διὰ τούτου παράλλος πρὸς τὴ ε, κάθε σημεῖον Μ τῆς α ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, ἤτοι ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τῆς ε εἶναι ἴση πρὸς τὸ δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ (116). Ἀντιθέτως κάθε σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α δὲν ἀπέχει ἀπὸ τῆς ε ἀπόστασιν λ.



Σχ. 151

Τὰ ἀνωτέρω ἀναφερόμενα εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμ. τόπου σημείων ἰσχύουν καὶ ὡς πρὸς τὸν γεωμ. τόπον εὐθειῶν. Ἔχομεν, κατὰ ταῦτα:

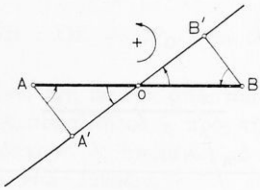
152. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **γεωμετρικὸν τόπον εὐθειῶν,** *ἑκάστη τῶν ὁποίων ἱκανοποιεῖ μίαν συνθήκην (Σ), τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης (Σ).*

Ἡ κατωτέρω πρότασις ἀναφέρεται εἰς γεωμ. τόπον ἀντιστοιχοῦντα εἰς συνθήκην ἀντίστοιχον τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ θεώρημα (149).

153. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν εὐθειῶν ε τοῦ ἐπιπέδου, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β εἶναι δύο δέσμαι εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ μία τούτων εἶναι ἡ ἔχουσα κέντρον τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (1) καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ δέσμη τῶν εὐθειῶν τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (2).

Ἀπόδειξις. Κάθε εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, ἤτοι αἱ ἀποστάσεις ΑΑ' καὶ ΒΒ' τῶν σημείων Α καὶ Β ἀπὸ αὐτῆς εἶναι ἴσαι (112). Τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ κάθε εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ (116).

Ἐξ ἄλλου κάθε εὐθεῖα ἱκανοποιοῦσα τὴν ἀνωτέρω συνθήκην ΑΑ' = ΒΒ', διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ ἢ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Πράγματι, ἂν τὰ Α καὶ Β κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς ε καὶ εἶναι Ο τὸ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β σημεῖον τῆς ε, ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΑ' καὶ ΟΒΒ' ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ.



Σχ. 153

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΥ — ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ

154. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ πρότασις τοῦ γεωμ. τόπου δύναται νὰ διατυποῦται ὑπὸ μορφὴν προβλήματος. Οὕτως ἀντὶ τοῦ θεωρήματος (149) θὰ ἔχωμεν τὸ πρόβλημα :

Δίδονται εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο σημεῖα Α καὶ Β'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Α καὶ Β εἶναι ἴσαι.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο θεωρεῖται ἐπιλυθὲν ἂν ἀποδειχθοῦν αἱ προτάσεις (1) καὶ (2) τοῦ θεωρήματος (149).

Γενικώτερον, ὅταν ἡ πρότασις τοῦ γεωμ. τόπου διατυποῦται ὡς πρόβλημα, διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτοῦ :

1. Θεωροῦμεν, ἂν πρόκειται περὶ γεωμ. τόπου σημείων, ἕνα σημεῖον Μ περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (Σ) καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι τοῦτο εἶναι σημεῖον **γνωστοῦ** (3) σχήματος.

Διὰ τὴν κατὰ τ' ἀνωτέρω ἀπόδειξιν δέον νὰ ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ἐκ τῶν σχετικῶν θεωρημάτων προκύπτουσαι σχέσεις, μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων καὶ τοῦ σημείου Μ. Βάσει τούτων θὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σημεῖον Μ, περὶ τοῦ ὁποίου ὑπετέθη ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (Σ), ἱκανοποιεῖ

(1) Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου τῶν διερχομένων διὰ τοῦ Ο.

(2) Παράλληλος δέσμη εὐθειῶν.

(3) Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὁποίου, καὶ ἑπομένως ἡ κατασκευὴ αὐτοῦ, προκύπτουν ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ἡ δοθεῖσα συνθήκη.

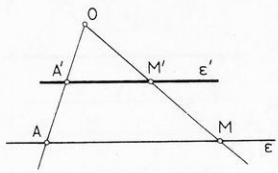
μίαν ἰσοδύναμον αὐτῆς συνθήκην (Σ_1) καὶ λόγῳ τούτου, μίαν ἄλλην ἰσοδύναμον αὐτῆς συνθήκην (Σ_2) κ.ο.κ. μέχρι μιᾶς θεμελιώδους συνθήκης ($\Sigma\nu$), εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἕνα γνωστὸν γεωμετρικὸν σχῆμα.

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι (Σ_1), (Σ_2),..., ($\Sigma\nu$) ὀνομάζονται **ἰσοδύναμοι** συνθῆκαι.

2. Ἐξετάζομεν, ἂν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ εὑρεθέντος σχήματος ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν συνθήκην (Σ), ἤ, ἂν λόγῳ ταύτης, ἕνα ὑποσύνολον τούτου δὲν ἱκανοποιεῖ αὐτήν, καθοριζομένου οὕτω τοῦ γεωμ. τόπου.

Ὡς παραδείγματα ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς προβλήματα :

155. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ τὸ μέσον Μ′ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ′.

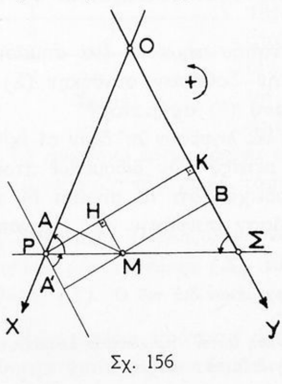


Σχ. 155

Λύσις. Ἔστω Α ἕνα δοθὲν σημεῖον τῆς ε καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτῆς. Τὸ μέσον Α′ τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΑ εἶναι ἕνα γνωστὸν σημεῖον τοῦ γεωμ. τόπου καὶ τὸ μέσον Μ′ τοῦ ΟΜ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΜ προκύπτει ὅτι ἡ Α′Μ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε (117, Πόρισμα), ἤτοι ὅτι ἡ Α′Μ′, ἢ ε′, εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα (88).

Ἐξ ἄλλου κάθε σημεῖον Μ′ τῆς ε′ ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην, διότι ἂν εἶναι Μ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ε καὶ τῆς ΑΜ′ τὸ Μ′ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΜ (117, Πόρισμα).

156. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται κυρτὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Ὀνομάζομεν Μ κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς ἀνωτέρω γωνίας τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τῆς δοθείσης γωνίας ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ.



Σχ. 156

Λύσις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἀνήκει εἰς τὸν ζητούμενον γεωμετρικὸν τόπον, ἤτοι ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην :

(1) $MA + MB = \lambda$

Θεωροῦμεν ἐπὶ τῆς ΜΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Μ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β, τὸ σημεῖον Α′ ὥστε $MA' = MA$. Θὰ εἶναι : $MA' + MB = MA + MB = \lambda$, ἤτοι : $A'B = \lambda$

Ἐκ τούτου ἕπεται (151) ὅτι τὸ Α′ εἶναι σημεῖον γνωστῆς εὐθείας : τῆς παραλλήλου ψ πρὸς τὴν ΟΥ τῆς ἀπεχούσης ἀπὸ αὐτῆς τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

Ἔστω Ρ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς παραλλήλου αὐτῆς ψ μὲ τὴν ΟΧ καὶ Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ΡΜ μὲ τὴν ΟΥ.

Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΑΡ καὶ ΜΑ'Ρ (115, Πόρισμα) ἔχομεν ὅτι :

$$(\mathrm{PM},\ \mathrm{PA}) = -\ (\mathrm{PM},\ \mathrm{PA}')$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι (78) καί :

$$(\Sigma\mathrm{B},\ \Sigma\mathrm{M}) = -\ (\mathrm{PM},\ \mathrm{PA}')$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :

$$(\mathrm{PM},\ \mathrm{PA}) = (\Sigma\mathrm{B},\ \Sigma\mathrm{M}),$$ ἤτοι :

$(\mathrm{P}\Sigma,\ \mathrm{PO}) = (\Sigma\mathrm{O},\ \Sigma\mathrm{P})$ καὶ ἐξ αὐτῆς (78) ὅτι : $\mathrm{O}\Sigma = \mathrm{OP}$, ἤτοι ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΡΣ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἡ ἀπόστασις ἑπομένως τοῦ Ρ ἀπὸ τῆς ΟΥ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τῆς ΟΧ. Οὕτω, τὸ Σ κεῖται ἐπὶ γνωστῆς παραλλήλου χ πρὸς τὴν ΟΧ : τῆς ἀπεχούσης ἀπὸ αὐτῆς, τῆς ΟΧ, τὴν ἀπόστασιν λ. Ἑπομένως τὸ Σ εἶναι γνωστὸν σημεῖον, ὡς κοινὸν σημεῖον δύο γνωστῶν εὐθειῶν.

Ἀπεδείχθη οὕτως ὅτι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς γνωστῆς εὐθείας ΡΣ.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας ΡΣ, κείμενον μεταξὺ τῶν Ρ καὶ Σ, ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνωτέρω δοθεῖσαν συνθήκην (1) :

Πράγματι, ἂν εἶναι Μ ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας ΡΣ κείμενον μεταξὺ τῶν Ρ καὶ Σ καὶ ΜΑ, ΜΒ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \lambda$.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωροῦμεν τὰς καθέτους ΡΚ καὶ ΜΗ ἐπὶ τὰς ΟΥ καὶ ΡΚ ἀντιστοίχως (Κ ἐπὶ τῆς ΟΥ καὶ Η ἐπὶ τῆς ΡΚ).

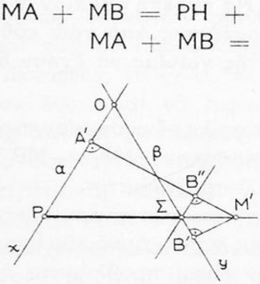
Ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΡΜ καὶ ΗΜΡ ἔχομεν ὅτι : (1) $\mathrm{MA} = \mathrm{PH}$

Ἐξ ἄλλου εἶναι (116) : (2) $\mathrm{MB} = \mathrm{HK}$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν :

$\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \mathrm{PH} + \mathrm{HK}$, ἤτοι : $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \mathrm{PK}$, ἤ :

$\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \lambda$, ἥτις εἶναι ἡ ἀποδεικτέα.



Σχ. 156.1

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη (1) τοῦ γεωμ. τόπου δὲν ἱκανοποιεῖται ὅμως ἀπὸ τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ εὐθ. τμήματος ΡΣ.

Πράγματι, ἂν εἶναι Μ' ἕνα τοιοῦτον σημεῖον (Σχ. 156.1) θὰ ἔχωμεν :

$\mathrm{M'A'} - \mathrm{M'B'} = \mathrm{M'A'} - \mathrm{M'B''}$, ἤτοι :

$\mathrm{M'A'} - \mathrm{M'B'} = \mathrm{A'B''} = \lambda$, διότι $\mathrm{M'B''} = \mathrm{M'B'}$, ὡς τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἀντιρρόπως ἴσων τριγώνων Μ'ΣΒ' καὶ Μ'ΣΒ''.

Ὥστε, τὰ ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΡΣ δὲν ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην $\mathrm{MA} + \mathrm{MB} = \lambda$ ἀλλὰ τὴν $\mathrm{MA} - \mathrm{MB} = \lambda$.

Ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος ἀποτελεῖται, κατὰ ταῦτα, ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ρ καὶ ὀνομάζομεν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

2. Δίδονται ἐπὶ εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ μία εὐθεῖα η κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς η καὶ ὀνομάζομεν Μ' τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ εἰς τὰ Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ'.

3. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β τῶν πλευρῶν ΟΧ καὶ ΟΥ τῆς γωνίας ἀντιστοίχως ὥστε : ΟΑ + ΟΒ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

4. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Β' καὶ Γ' τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ, ὥστε ΒΒ' = ΓΓ'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων Β'Γ'.
Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ, τῆς ἀνωτέρω προτάσεως, εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' θεωροῦνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΒΓ.

5. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τρία σημεῖα Α', Β', Γ' τοῦ τριγώνου κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, ὥστε ΒΑ' = ΓΒ' = ΑΓ'. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

6. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου σημεῖον Ο καὶ εὐθεῖα ε. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ε καὶ τὸ σημεῖον Μ' τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν :

$$(ΟΜ,\ ΟΜ') = φ \quad καὶ \quad ΟΜ = ΟΜ'$$

ἔνθα φ δοθεῖσα προσανατολισμένη γωνία.
Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ' εἶναι μία εὐθεῖα ε'.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΥ ΚΑΙ ΤΗΣ ΓΕΩΜ. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ

Τὸ πρόβλημα (156) γεωμ. τόπου ἠδύνατο νὰ διατυπωθῇ ὡς πρόβλημα κατασκευῆς σημείου, ὡς κάτωθι :

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται κυρτὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἐσωτερικὸν τῆς ἀνωτέρω γωνίας τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ ΟΧ καὶ ΟΥ τῆς γωνίας νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου, θεωροῦμεν ἕνα σημεῖον περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι ἱκανοποιεῖ τὴν δοθεῖσαν συνθήκην : ΜΑ + ΜΒ = λ, ἤτοι ὅτι εἶναι, ὡς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **λύσις** τοῦ προβλήματος.

Ἀπεδείχθη, ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα σημεῖα, ἱκανοποιοῦντα τὴν συνθήκην αὐτήν, ἤτοι ὅτι τὸ πρόβλημα τοῦτο δέχεται ἀπείρους λύσεις. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ εἴπωμεν ὅτι τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. τόπων εἶναι προβλήματα γεωμ. κατασκευῶν : τὰ ἐκ τούτων δεχόμενα ἀπείρους λύσεις.

Ἐξ ἄλλου, τὰ προβλήματα τῶν γεωμ. κατασκευῶν, σημείων καὶ εὐθειῶν, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνάγονται αἱ πλεῖσται τῶν γεωμ. κατασκευῶν ἐν γένει, ἐπιλύονται τῇ βοηθείᾳ τῶν γεωμ. τόπων. Πράγματι, διὰ τὸν προσδιορισμὸν ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον, βάσει δύο συνθηκῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ σημεῖον, δέον νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς διδομένας συνθήκας, θεωρουμένας ἀνεξαρτήτως ἀλλήλων. Ἤτοι, δέον νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν πρώτην ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο συνθηκῶν, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν (ἀφαιρουμένης) τῆς δευτέρας καὶ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν δευτέραν, μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς πρώτης. Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἀνωτέρω δύο γεωμ. τόπων, ἀποτελουμένη ἀπὸ ἕνα ἢ περισσότερα σημεῖα. Τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ ἐπὶ προσδιορισμοῦ εὐθείας.

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ εἰς τὴν φύσιν τῶν διδομένων στοιχείων καὶ συνθηκῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ζητεῖται ἡ κατασκευὴ ἑνὸς σχήματος, π.χ. εὐθείας, εὐθυγράμμου τμήματος, γωνίας, τριγώνου, τὰ στοιχεῖα ταῦτα δύνανται νὰ ἔχουν ἢ νὰ μὴ ἔχουν **δοθεῖσαν θέσιν** εἰς τὸ ἐπίπεδον. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, δίδονται, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, ὡς **μεγέθη**. Τὸ ζητούμενον σχῆμα δὲν ἔχει τότε ἀναγκαίως ὡρισμένην θέσιν εἰς τὸ ἐπίπεδον. Δυνάμεθα ἑπομένως, διὰ τὴν κατασκευήν του, νὰ ὁρίσωμεν αὐθαιρέτως τὴν θέσιν στοιχείων τινων ἐκ τῶν δοθέντων.

157. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐπίλυσιν ἑνὸς προβλήματος γεωμ. κατασκευῆς ὀνομάζομεν τὴν εὕρεσιν μιᾶς ἀκολουθίας πεπερασμένου πλήθους κατασκευῶν, διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ μεταφορέως, διὰ τῶν ὁποίων ἐπιτυγχάνεται ἡ εὕρεσις ἑνὸς σχήματος ἱκανοποιοῦντος δοθείσας τινας συνθήκας. Ἕνα τοιοῦτον σχῆμα ὀνομάζεται, ὡς ἐσημειώσαμεν, **λύσις** τοῦ προβλήματος.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΙΣ

158. ΟΡΙΣΜΟΣ. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς προβλήματος γεωμ. κατασκευῆς δέον κατὰ τὰ ἀνωτέρω, νὰ ἀναλυθοῦν αἱ μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων καὶ τοῦ ζητουμένου σχήματος σχέσεις. Μία τοιαύτη ἀνάλυσις εἶναι ἡ αὐτοτελὴς θεώρησις τῶν διδομένων συνθηκῶν, τῶν μὲ αὐτὰς συνδεομένων γεωμ. τόπων, ὡς καὶ τῶν ἐκ τῶν ἀποδεικτικῶν προτάσεων γνωστῶν σχέσεων.

Δυνάμεθα, ἐν γένει, νὰ δεχθῶμεν ὅτι, τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν τουλάχιστον λύσιν καὶ νὰ ἐμφανίσωμεν μίαν ἀντίστοιχον γραφικὴν εἰκόνα, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ ζητούμενον στοιχεῖον. Σημειοῦμεν ἀκολούθως τὰ στοιχεῖα τὰ ὁποῖα συνδέονται πρὸς αὐτὸ συμφώνως πρὸς τὰς διδομένας συνθήκας. Οὕτως, ἂν ζητῆται ἡ κατασκευή, ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐκ τῆς γωνίας Α αὐτοῦ καὶ τῆς συνθήκης ὅπως αἱ κορυφαί, Α,Β,Γ αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, α,β,γ, θὰ ἐμφανίσωμεν τὴν ἀντίστοιχον γραφικὴν εἰκόνα, ἀρχίζοντες πρῶτον ἀπὸ ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον. Ἀκολούθως θὰ ἐμφανίσωμεν τρεῖς τυχούσας διὰ τῶν κορυφῶν εὐθείας α, β, γ, περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γραφικῆς αὐτῆς εἰκόνος θὰ ἀναζητήσωμεν τὰς ὑφισταμένας μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων καὶ τῶν στοιχείων τοῦ ζητουμένου σχήματος σχέσεις.

Εἰς τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω γραφικὴν εἰκόνα δέον ὅπως ἐμφανίζωνται ἱκανοποιούμεναι, κατὰ μίαν εὔλογον προσέγγισιν αἱ διδόμεναι συνθῆκαι, ὥστε νὰ διευκολύνεται ἡ ἀναζήτησις τῶν ὑφισταμένων σχέσεων.

Ἐν προκειμένῳ δέον νὰ σημειώσωμεν ὅτι:

Ἀνεξαρτήτως τῆς συμβολῆς τῆς γραφικῆς εἰκόνος (γραφικοῦ σχήματος) εἰς τὴν ἐπίλυσιν καὶ τὴν ἀπόδειξιν, ἡ τελευταία αὕτη δέον νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἀντιλήψεως τὴν ὁποίαν ἔχομεν ἀποκλειστικῶς ἐξ αὐτῆς (τῆς γραφικῆς εἰκόνος).

Τὰ ἐκ τῆς ἀναζητήσεως τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν διδομένων καὶ τῶν ζητουμένων στοιχείων, συμπεράσματα, πρέπει, διὰ νὰ διατηροῦν τὸ λογικὸν αὐτῶν **κῦρος,** νὰ προκύπτουν ἀποκλειστικῶς ἀπὸ τὰ εἰσαχθέντα ἀξιώματα καὶ τὰ ἀποδειχθέντα θεωρήματα ὑπάρξεως.

Τὸ σύνολον τῶν παρατηρήσεων αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς τὰς μεταξὺ τῶν διδομένων καὶ τῶν ζητουμένων στοιχείων σχέσεις, βάσει τῶν ὁποίων πραγματοποιεῖται ἡ σύνθεσις (κατασκευή), ἀποτελεῖ τὴν λεγομένην **ἀνάλυσιν.**

Ἡ **σύνθεσις** εἶναι τὸ σύνολον τῶν γεωμετρικῶν πράξεων μέσω τῶν ὁποίων πραγματοποιεῖται ἡ κατασκευὴ τοῦ ζητουμένου σχήματος.

Κατὰ τὴν **ἀπόδειξιν** ἐπαληθεύεται ὅτι τὸ εὑρεθὲν σημεῖον, ἢ γενικώτερον τὸ εὑρεθὲν σχῆμα, ἱκανοποιεῖ τὰς δοθείσας συνθήκας, ἤτοι ὅτι εἶναι **λύσις** τοῦ προβλήματος. Ἡ λεγομένη **διερεύνησις** ἀφορᾷ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑφίστανται μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων διὰ νὰ ὑπάρχουν λύσεις τοῦ προβλήματος, ἤτοι ἕνα ἢ περισσότερα σχήματα, ἱκανοποιοῦντα τὰς διδομένας συνθήκας.

Ἂν πρόκειται περὶ κατασκευῆς σημείου, ἔνθα ἡ **λύσις** προκύπτει ὡς τομὴ δύο γεωμετρικῶν τόπων, αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀνταποκρίνονται εἰς τὴν ὕπαρξιν τῶν γεωμετρικῶν τούτων τόπων καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν. Ὡς παράδειγμα ἀναφέρομεν τὸ πρόβλημα:

Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν, β καὶ γ. Ἐν προκειμένῳ οἱ δύο γεωμ. τόποι εἶναι: ἡ εὐθεῖα α καὶ οἱ διχοτόμοι τῶν ὑπὸ τῶν εὐθειῶν β καὶ γ ὁριζομένων γωνιῶν (150). Τὸ πρόβλημα δέχεται, ἐν γένει, δύο λύσεις: τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς α μὲ τὰς ἀνωτέρω διχοτόμους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Α τῆς α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ Α νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς β.

2. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ εὐθεῖα α διερχομένη διὰ τοῦ Α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α ὥστε $MA + MB = \lambda$.

3. Δίδεται ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ τῆς ΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ Β′ καὶ Γ′ ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως, ὁρίζουν τὸ ἐλάχιστον εὐθ. τμῆμα Β′Γ′.

4. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ὥστε: (1). $MA = MB$. (2). Τὸ ἄθροισμα $MA + MB$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον (3) Ἡ διαφορὰ $MA - MB$ νὰ εἶναι μεγίστη.

5. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων.

6. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ μὴ διερχόμεναι διὰ σημείου. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τούτων.

7. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ΜΒ καὶ ΜΓ ἀπὸ τῶν β καὶ γ νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ (λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα). Γενίκευσις εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἀντὶ τῶν καθέτων ΜΒ καὶ ΜΓ ἐπὶ τὰς β καὶ γ, θεωροῦνται αἱ τέμνουσαι ταύτας ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Ὁμὰς 2α

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ σχηματίζουσα ἴσας γωνίας μὲ τὰς α καὶ β.

2. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε νὰ εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ.

3. Δίδονται δύο εὐθεῖαι β καὶ γ καὶ ἕνα σημεῖον Η. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Η καὶ τοῦ κοινοῦ σημείου Α τῶν β καὶ γ χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ σημείου τούτου Α.

4. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι : ΒΧ = ΧΥ = ΥΓ.

5. Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν α, β, καὶ γ, δ, ἔχοντα διαφόρους ἀλλήλων διευθύνσεις, καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α, β, γ, δ, ὥστε ἂν εἶναι Α,Β,Γ,Δ, τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι : ΑΒ = ΓΔ.

6. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διὰ τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ εὐθεῖα τῆς ὁποίας αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἔχουν ἄθροισμα (1). Μέγιστον (2). Ἐλάχιστον.

7. Δίδονται : δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β, δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως καὶ ἕνα σημεῖον Ο μεταξὺ τῶν α καὶ β. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα νὰ εἶναι ΑΧ + ΒΥ = λ.

8. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος, πρὸς τὴν ΒΓ ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως νὰ εἶναι :
(1). ΧΥ = ΒΧ + ΓΥ (2). ΒΧ + ΓΥ = λ (3). ΒΧ + ΑΥ = λ

9. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ο καὶ ἀπέχουσα ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.

10. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ.

11. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ δύο εὐθείας α καὶ β, χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κοινοῦ σημείου Ο αὐτῶν.

12. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως, ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, νὰ εἶναι ΧΑ = ΥΓ. Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

13. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως, τέμνουσα τὰς α καὶ β, ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα νὰ εἶναι ΡΑ = ΡΒ.

14. Δίδονται δύο εὐθεῖαι β καὶ γ καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Α τέμνουσα τὰς β καὶ γ, ὥστε ἂν εἶναι Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως νὰ εἶναι ΑΒ = ΒΓ.

Ὁμὰς 3η

1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1) β, γ, Α (2) α, Β, γ (3) α, Α, Β (4) α, Β, β + γ (ἢ β–γ) (5) Α, β,

$\alpha+\gamma$ (ἢ $\alpha-\gamma$) (6) B, Γ, 2τ (7) α, A, B − Γ (8) A, HA = λ, HΓ = μ (9) B, Γ, $\beta+\gamma$ (ἢ $\beta-\gamma$) (10) A, δ_1, υ_2 (11) B, Γ, υ_1 (12) α, B, υ_1.

2. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων (σημείων) :

(1). B, Γ, H (2) B, Γ, G, (3) B, Γ, I (ἢ I′ ἢ I′′ ἢ I′′′). (4) A, H_2, H_3 (ἢ H_1, H_2) (5) O_1, O_2, O_3 (6) H_1, H_2, H_3 (7) I, I′, I′′ (ἢ I′′′) (8) I′, I′′, I′′′.

3. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ καὶ σημεῖον Α ἐπὶ τῆς α. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι: Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν β καὶ γ, καὶ τὰ σημεῖα H_1, H_2, H_3 αὐτοῦ (ἢ τὰ O_1, O_2, O_3 ἢ τὰ Δ_1, Δ_2, Δ_3 ἢ τὰ Δ_1', Δ_2', Δ_3') νὰ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν εὐθειῶν α, β, γ.

4. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ τὸ τρίγωνον τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

5. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1) Κορυφαὶ Β καὶ Γ, ὕψος υ_1, καὶ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε. (2) Γωνία Α, ὕψη υ_2, υ_3. (3) Γωνία Α, περίμετρος 2τ, ὕψος υ_2 (4) μ_1, (AO_1, AB), (AO_1, AΓ) (5) β, γ, B − Γ (6) Σημεῖα : I, Δ_2, Δ_3 (7) Αἱ μεσοκάθετοι ξ_1, ξ_2, ξ_3 τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἕνα σημεῖον Ρ αὐτοῦ (8) Αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ, ἕνα σημεῖον Ρ τῆς ΑΒ καὶ ἕνα σημεῖον Σ τῆς ΑΓ.

6. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :

(1). α, β (2) β, B (3) B, $\beta+\gamma$ (4) β, $\alpha+\gamma$ (ἢ $\alpha-\gamma$)

(5) υ_1 (ἢ δ_1), B − Γ (6) B − Γ, 2τ (7) B, $\alpha+\gamma$ (ἢ $\alpha-\gamma$) (8) α, $\Delta_2\Gamma$ (= λ).

7. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῶν στοιχείων : $\alpha+\beta$ (=λ).

8. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων : (1). B, υ, (2). Σημεῖα A, O_2, Δ_3.

9. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἐκ τῶν στοιχείων :

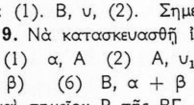
(1) α, A (2) A, υ_1 (ἢ υ_2) (3) B, υ_1 (ἢ υ_2) (4) υ_1, μ_2 (5) A, $\alpha+\beta$ (ἢ $\alpha-\beta$) (6) B, $\alpha+\beta$ (7) A, 2τ (8) υ_1, 2τ (9) α, $\beta+\upsilon_1$ (10) Σημεῖα H_2 H_3 καὶ σημεῖον Ρ τῆς ΒΓ.

10. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ στοιχεῖα : (1) α, υ_1 (2) υ_1, ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι σημεῖα μιᾶς δοθείσης εὐθείας καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ. (3) Ἡ κορυφὴ Α, (ΑΒ, ΑΓ) = φ, καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν β καὶ γ.

11. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ τῆς συνθήκης ὅπως αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

Η ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

159. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω $\vec{\alpha}$ ἕνα δοθὲν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἐπὶ τῆς ἀπὸ τοῦ Μ ἡμιευθείας τῆς ἐχούσης τὴν αὐτὴν πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}$ φορὰν (100), τὸ σημεῖον Μ′ ὥστε (1) $\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$. Ὡς γνωστόν, ὑπάρχει σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην (1), καὶ ἕνα μόνον.



Σχ. 159

Ἐξ ἄλλου, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ ἐπιπέδου, ὑπάρχει σημεῖον Μ αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

Ἡ ἐκ τῆς (1) ὁριζομένη, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ, τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ὀνομάζεται παράλληλος μεταφορὰ ἢ ἁπλῶς **μεταφορά.**[1]

Ἂν τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$ καὶ εἶναι Μ′ τὸ ἀντίστοιχον ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην, δυνάμεθα νὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς :

$$M \xrightarrow{\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})} M'$$

Τὸ σημεῖον Μ′ δύναται νὰ ὀνομάζεται **ὁμόλογον** τοῦ Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀντιστοιχίας αὐτῆς, τὴν ὁποίαν ὀνομάσαμεν **μεταφοράν,** προκύπτει ὅτι αὕτη ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων (Μ,Μ′). Τὸ διάνυσμα τὸ ὁρίζον τὴν μεταφορὰν εἶναι τὸ $\overrightarrow{MM'}$.

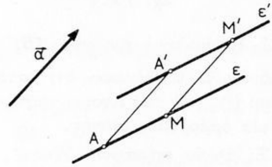
Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ) [2] κατὰ μίαν μεταφορὰν $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$ ὀνομάζομεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν ὁμολόγων ὅλων τῶν σημείων αὐτοῦ κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην.

Ὁ ἀνωτέρω γεωμ. τόπος εἶναι, κατὰ ταῦτα, ἕνα σύνολον σημείων (Φ′) ὁριζόμενον ἐκ τοῦ (Φ) βάσει τῆς συνθήκης $\overrightarrow{MM'} = \vec{\alpha}$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

160. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ ὁμόλογον μιᾶς εὐθείας ε κατὰ μίαν μεταφορὰν $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$ εἶναι μία εὐθεῖα ε′ παράλληλος πρὸς τὴν ε

Ἀπόδειξις. Ἔστω Α′ τὸ ὁμόλογον ἑνὸς δοθέντος σημείου Α τῆς ε καὶ Μ′ τὸ ὁμόλογον ἑνὸς τυχόντος σημείου Μ αὐτῆς, κατὰ τὴν μεταφορὰν $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$.



Σχ. 160

Ἡ εὐθεῖα Α′Μ′ ἢ ε′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ Α′ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ε (88)

Ἐξ ἄλλου κάθε σημεῖον Μ′ τῆς ε′ εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ τῆς ε. Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τούτου παράλληλον ΜΜ′ πρὸς τὸν φορέα τοῦ $\vec{\alpha}$ (Μ ἐπὶ τῆς ε), θὰ εἶναι : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$, ἤτοι τὸ Μ′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν $\mathbf{T}\,(\vec{\alpha})$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ ὁμόλογον εὐθ. τμήματος ΑΒ, κατὰ μίαν μεταφορὰν $T\,(\vec{\alpha})$, εἶναι εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.*

---

(1) Ἡ ἀντιστοιχία, ἐν γένει, κατὰ τὴν ὁποίαν :

α) Κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (πρότυπον) ἔχει ἐν αὐτῷ ἕνα μόνον ἀντίστοιχον (εἰκόνα).

β) Κάθε σημεῖον Μ′ (εἰκὼν) εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς μόνον σημείου Μ (προτύπου), ἤτοι δύο σημεῖα Μ καὶ Ν διάφορα ἀλλήλων (πρότυπα) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀντίστοιχον σημεῖον (εἰκόνα).

γ) Δὲν ὑπάρχουν σημεῖα Μ′, μὴ ἔχοντα ἀντίστοιχον Μ (πρότυπον),

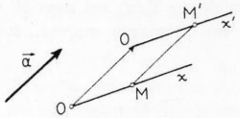
ὀνομάζεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἢ **ἀπεικόνισις** τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου (ἐφ' ἑαυτοῦ).

Ἡ ἀπεικόνισις $\mathbf{T}\,(-\vec{\alpha})$ ἢ $\mathbf{T}^{-1}(\vec{\alpha})$ ὀνομάζεται **ἀντίστροφος** τῆς $T\,(\vec{\alpha})$. Ἔχομεν ἑπομένως :

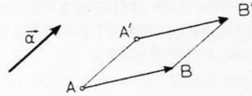
$$M \xrightarrow{\mathbf{T}} M' \Leftrightarrow M' \xrightarrow{\mathbf{T}^{-1}} M.$$

(2) Θεωρουμένου ὡς συνόλου σημείων.

2. Τὸ ὁμόλογον ἡμιευθείας ΟΧ κατὰ μίαν μεταφορὰν Τ $(\vec{\alpha})$ εἶναι ἡμιευθεῖα Ο'Χ' ὁμόρροπος πρὸς τὴν ΟΧ (Σχ. 160.2).



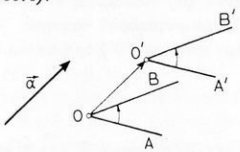
Σχ. 160.2



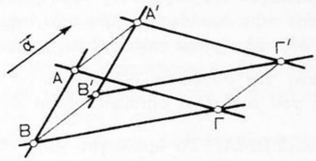
Σχ. 160.3

3. Τὸ ὁμόλογον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 160.3).

4. Τὸ ὁμόλογον γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι γωνία (Ο'Α', Ο'Β') ἴση πρὸς τὴν (ΟΑ, ΟΒ). (Σχ. 160.4).



Σχ. 160.4



Σχ. 160.5

5. Τὸ ὁμόλογον τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ. (Σχ. 160.5).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι κατὰ τὴν μεταφορὰν **διατηροῦνται** τὰ εὐθ. τμήματα καὶ αἱ γωνίαι. (1) Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ταύτην ἡ παράλληλος μεταφορὰ εἶναι, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, μία **ὁμόρροπος ἰσότης.**

Ἐξ ἄλλου σημειοῦμεν ὅτι :

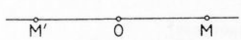
Ἂν τὸ ὁμόλογον ἑνὸς σημείου Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν **Τ** $(\vec{\alpha})$ εἶναι τὸ σημεῖον Μ', τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ', κατὰ τὴν μεταφορὰν ταύτην εἶναι ἕνα σημεῖον Μ'' διάφορον τοῦ Μ', ἐκτὸς ἂν $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τούτων δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ εἶναι γνωστῆς διευθύνσεως καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ (ΑΒ = λ).

Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ

161. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη (25), δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' ὀνομάζονται συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς σημεῖον Ο, ὅταν τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ' (Σχ. 168), ἢ ὅταν τὰ σημεῖα ταῦτα Μ καὶ Μ' ταυτίζωνται πρὸς τὸ Ο.



Σχ. 161

Ἔστω Ο ἕνα δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ὑπάρχει σημεῖον Μ', καὶ ἕνα μόνον, ὥστε τὸ Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'. Ἂν τὸ σημεῖον Μ ὀνομασθῇ **πρότυπον**, τὸ Μ θὰ ὀνομασθῇ **εἰκὼν** τοῦ Μ.

(1) Δύο οἱαδήποτε ὁμόλογα κατὰ τὴν μεταφορὰν εὐθ. τμήματα εἶναι ἴσα ὡς καὶ δύο οἱαιδήποτε ὁμόλογοι γωνίαι.

Ἡ ἐκ τοῦ σημείου Ο ὁριζομένη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Μ αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ τὸ Μ′ ὥστε τὸ Ο νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ′ ὀνομάζεται **συμμετρία** ὡς πρὸς τὸ Ο.

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον τῆς συμμετρίας.**

Ἡ εἰκὼν ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου κατὰ τὴν συμμετρίαν τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, ἤτοι τὸ συμμετρικὸν Μ′ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Ο, δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **ὁμόλογον** τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν τὴν ἔχουσαν κέντρον τὸ Ο.

Ἂν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον **Σ** (Ο) τὴν ὡς πρὸς τὸ Ο συμμετρίαν καὶ μὲ τὸ Μ′ τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτήν, θὰ σημειοῦμεν :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{\mathbf{\Sigma}\,(\mathrm{O})} \mathrm{M}'$$

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Ἂν τὸ ὁμόλογον Μ′ τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν **Σ**(Ο) θεωρηθῇ ὡς πρότυπον, τότε ἡ εἰκὼν αὐτοῦ, κατὰ τὴν Σ(Ο), εἶναι τὸ Μ. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ σημειώσωμεν :

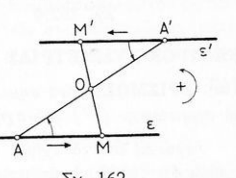
$$\mathrm{M} \xrightarrow{\mathbf{\Sigma}} \mathrm{M}' \Leftrightarrow \mathrm{M}' \xrightarrow{\mathbf{\Sigma}} \mathrm{M}.$$

Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖον Ο, λεγομένη καὶ **κεντρικὴ συμμετρία,** εἶναι, ὡς δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, μία ἀπεικόνισις συμπίπτουσα μὲ τὴν ἀντίστροφον αὐτῆς. Συμβολικῶς $\mathbf{T} = \mathrm{T}^{-1}$.

Ὀνομάζομεν **ὁμόλογον** ἑνὸς σχήματος (Φ), κατὰ μίαν κεντρικὴν συμμετρίαν, τὸν γεωμ. τόπον (Φ′) τῶν ὁμολόγων (συμμετρικῶν) τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Φ), κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτήν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

162. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν δοθείσης εὐθείας ε ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι εὐθεῖα ε′ παράλληλος πρὸς τὴν ε

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καὶ Μ ἕνα δοθὲν καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς ε καὶ Α′ καὶ Μ′ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ὡς πρὸς τὸ Ο ἀντιστοίχως (Σχ. 162). Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ′ (75), ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι (ΑΜ, ΑΟ) καὶ (Α′Μ′, Α′Ο) εἶναι ἴσαι καὶ ἑπομένως ὅτι ἡ εὐθεῖα Α′Μ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε. Ἡ εὐθεῖα αὕτη Α′Μ′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα, ὡς διερχομένη διὰ τοῦ γνωστοῦ σημείου Α καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ε. Ἔστω ε′ ἡ εὐθεῖα αὕτη.



Σχ. 162

Παρατηροῦμεν ὅτι, τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας ε′ ὡς πρὸς τὸ Ο εἶναι ἡ εὐθεῖα ε.

Αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε′ ὀνομάζονται **συμμετρικαὶ ἀλλήλων** ὡς πρὸς τὸ Ο.

Ἂν ἡ εὐθεῖα ε διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο, ἡ συμμετρικὴ ε′ αὐτῆς, ὡς πρὸς τὸ Ο, συμπίπτει μὲ τὴν ε. Πράγματι, τὸ σημεῖον Ο συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του (1), καὶ τὸ συμμετρικὸν τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς ε εἶναι σημεῖον τῆς ε.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι εὐθ. τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ* (Σχ. 162.1).

2. Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας ΑΧ, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι ἡμιευθεῖα Α′Χ ἀντίρροπος τῆς ΑΧ.

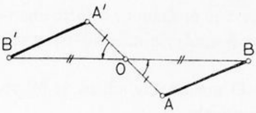
Αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΧ καὶ Α′Χ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΑ′, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α τῶν Α′ αὐτῶν (Σχ. 162.2)

3. Τὸ συμμετρικὸν διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

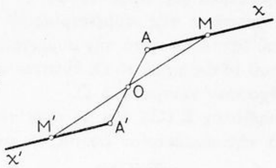
---

(1) Τὸ Ο εἶναι τὸ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του.

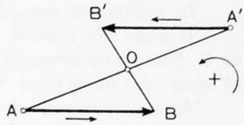
Τὰ τελικὰ σημεῖα τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ἀρχικὰ σημεῖα των (Σχ. 162.3)



Σχ. 162.1



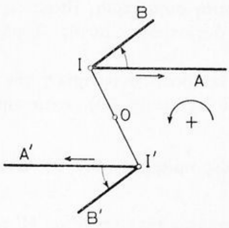
Σχ. 162.2



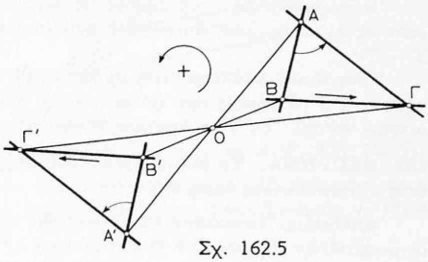
Σχ. 162.3

4. Τὸ συμμετρικὸν γωνίας (ΙΑ, ΙΒ) εἶναι γωνία (Ι'Α', Ι'Β') ἴση πρὸς τὴν θεωρουμένην (Σχ. 162.4).

5. Τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ. Πράγματι, αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι. (Σχ. 162.5).



Σχ. 162.4



Σχ. 162.5

ΚΕΝΤΡΟΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

163. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἕνα σημεῖον Ο ὀνομάζεται* **κέντρον συμμετρίας** *ἑνὸς σχήματος (Φ), ὅταν τὸ συμμετρικὸν (Φ') τοῦ σχήματος (Φ), ὡς πρὸς τὸ Ο, συμπίπτει μὲ τὸ (Φ).*

Λέγοντες ὅτι τὸ σχῆμα (Φ) **δέχεται** ἕνα σημεῖον Ο ὡς κέντρον συμμετρίας, ἐννοοῦμεν ἀκριβῶς ὅτι τὸ (Φ) συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του (Φ) ὡς πρὸς τὸ Ο.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ μέσον Ο ἑνὸς εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.*

2. Κάθε σημεῖον μιᾶς εὐθείας ε εἶναι κέντρον συμμετρίας αὐτῆς.

3. Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο δύο τεμνομένων εὐθειῶν ε καὶ ε' εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος.

4. Κάθε σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου (160) δύο παραλλήλων εὐθειῶν ε καὶ ε', εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος, ἤτοι τῆς ἑνώσεως τῶν ε καὶ ε'. Γενικώτερον :

5. Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') ἔχουν ἕνα κοινὸν κέντρον συμμετρίας, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς ἑνώσεως τῶν (Φ) καὶ (Φ'), ὡς καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν, καί,

Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων, ὡς πρὸς σημεῖον Ο, τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον συμμετρίας τῆς ἑνώσεως τῶν (Φ) καὶ (Φ') καθὼς καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον Ο. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ο τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως νὰ εἶναι ΟΑ = ΟΒ.

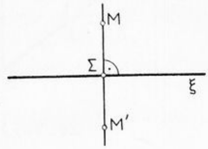
Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

164. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστω ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μία εὐθεῖα ξ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου. Ὡς γνωστὸν (84) ὑπάρχει σημεῖον Μ' καὶ ἕνα μόνον ὥστε ἡ ξ νὰ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ'. Τὸ σημεῖον τοῦτο ὀνομάσθη (82) **συμμετρικὸν** τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ξ. (Σχ. 164).

Ἡ μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ὁριζομένη, ἐκ τῆς εἰς τὴν εὐθεῖαν ξ ἀναφερομένης ὡς ἄνω συνθήκης, ἀντιστοιχία ὀνομάζεται **συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν.**

Ἂν τὴν ἀνωτέρω συμμετρίαν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον **Σ**(ξ), καὶ εἶναι Μ' τὸ ἀντίστοιχον (εἰκὼν) ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ ταύτην, θὰ σημειοῦμεν :

$$M \xrightarrow{\boldsymbol{\Sigma}(\xi)} M'$$



Σχ. 164

Τὸ σημεῖον Μ' δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ(ξ).

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἂν $M \xrightarrow{\boldsymbol{\Sigma}(\xi)} M'$, τότε θὰ εἶναι: $M' \xrightarrow{\boldsymbol{\Sigma}(\xi)} M$

Ὥστε, κατὰ τὴν συμμετρίαν **Σ**(ξ) τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ' ἀντιστοιχοῦν, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, **διττῶς** πρὸς ἄλληλα.

Τοῦτο ἰσχύει, ὡς ἐσημειώσαμεν ἤδη, καὶ εἰς τὴν συμμετρίαν **Σ** (Ο) ὡς πρὸς σημεῖον Ο, δὲν ἰσχύει ὅμως, ἐν γένει, εἰς τὴν **μεταφοράν.**

Ἐξ ἄλλου, τὰ σημεῖα τῆ εὐθείας ξ, ἡ ὁποία ὀνομάζεται καὶ **ἄξων** τῆς συμμετρίας **Σ** (ξ), συμπίπτουν πρὸς τά συμμετρικά των, κατὰ τὴν συμμετρία αὐτήν. Τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος ξ τῆς συμμετρίας, δύνανται νὰ ὀνομάζονται **διπλᾶ** σημεῖα αὐτῆς.

Ὁμόλογον ἑνὸς σχήματος (Φ) κατὰ μίαν συμμετρίαν Σ (ξ), ἢ **συμμετρικὸν** αὐτοῦ ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ, ὀνομάζεται τὸ σύνολον (Φ') τῶν συμμετρικῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Φ), ὡς πρὸς αὐτήν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν, ἕπεται ὅτι :

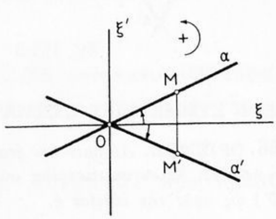
165. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας α, ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ, εἶναι εὐθεῖα α'.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς α μὲ τὴν ξ. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τῆς α καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ' αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ξ. Ἐπειδὴ ἡ ξ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΜ', θὰ εἶναι (Σχ. 165) (ΟΣ, ΟΜ') = −(ΟΣ, ΟΜ).

Ἡ εὐθεῖα ΟΜ' εἶναι εὐθεῖα γνωστὴ διότι διέρχεται διὰ τοῦ Ο καὶ σχηματίζει μὲ τὴν εὐθεῖαν ξ γωνίαν ἀντίθετον τῆς γωνίας τῶν ξ καὶ α.

Ἡ εὐθεῖα ξ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς μιᾶς ἐκ τῶν γωνιῶν τῶν α καὶ α'.

Ἡ α' εἶναι συμμετρικὴ τῆς α καὶ ὡς πρὸς τὴν κάθετον ξ' ἐπὶ τὴν ξ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν τῆς εὐθείας α' ὡς πρὸς τὴν ξ εἶναι ἡ εὐθεῖα α.



Σχ. 165

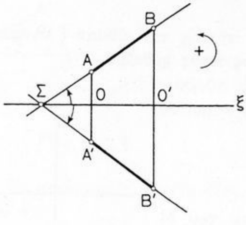
Αἱ εὐθεῖαι α καὶ α' ὀνομάζονται **συμμετρικαὶ ἀλλήλων** ὡς πρὸς τὴν ξ.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν α καὶ α', τὸ ὁποῖον εἶναι σημεῖον τῆς ξ, συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικόν του ὡς πρὸς τὴν ξ.

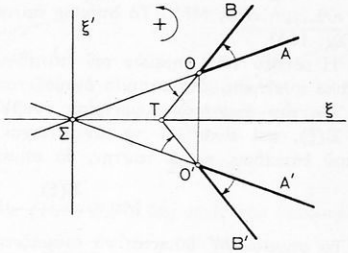
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ συμμετρικὸν εὐθ. τμήματος ΑΒ, ὡς πρὸς εὐθεῖαν, εἶναι εὐθ. τμῆμα Α'Β' ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.*

Πράγματι, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Α'Β' τέμνονται ἐπὶ τῆς ξ, ἤτοι ἡ Α'Β' διέρχεται διὰ τοῦ κοι-



Σχ. 165.1



Σχ. 165.2

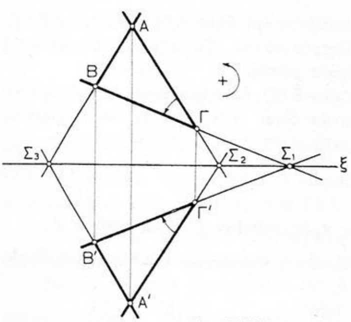
νοῦ σημείου τῶν ΑΒ καὶ ξ. Ἐκ τῶν ΣΒ = ΣΒ' καὶ ΣΑ = ΣΑ' ἔπεται ὅτι ΑΒ = Α'Β' (Σχ. 165.1).

2. Τὸ συμμετρικὸν γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι γωνία (Ο'Α', Ο'Β') ἀντίθετος τῆς θεωρουμένης (ΟΑ, ΟΒ).

Πράγματι, ἐκ τῶν ἀντιρρόπως, ἴσων τριγώνων ΟΣΤ καὶ Ο'ΣΤ ἔχομεν (Σχ. 165.2):

(ΟΣ, ΟΤ) = – (Ο'Σ, Ο'Τ) καὶ ἑπομένως

(ΟΑ,ΟΒ) = – (Ο'Α' Ο'Β') (1).



Σχ. 165.3

3. Τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τρίγωνον Α'Β'Γ' ἀντιρρόπως ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

Πράγματι, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν τριγώνων τούτων εἶναι (165, πόρισμα 1) ἴσαι καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι (165 πόρισμα 2) ἀντίθετοι (Σχ. 165.3).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω πορισμάτων προκύπτει ὅτι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν ξ εἶναι, ὅπως δυνάμεθα νὰ λέγωμεν, μία **ἀντίρροπος ἰσότης.**

ΑΞΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

166. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέγομεν ὅτι ἕνα σχῆμα (Φ) δέχεται τὴν εὐθεῖαν ξ ὡς ἄξονα συμμετρίας, ἢ ὅτι ἡ ξ εἶναι* **ἄξων συμμετρίας** *αὐτοῦ, ὅταν τὸ σχῆμα τοῦτο συμπίπτῃ μὲ τὸ συμμετρικόν του (Φ') ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἔπεται ὅτι :

---

(1) Ὅταν ἡ ἡμιευθεῖα ΟΒ στρέφεται περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ἡ συμμετρική της Ο'Β' ὡς πρὸς τὴν ξ, στρέφεται περὶ τὸ συμμετρικὸν Ο' τοῦ Ο κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν.

(2) Τὸ ὑπὸ τούτων ἀποτελούμενον σχῆμα.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Κάθε εὐθεῖα ε δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας :*

(α) Αὐτὴν τὴν ε. *(β) Κάθε εὐθεῖαν ξ κάθετον ἐπ' αὐτήν.*

Δέχεται, ἐπομένως, ἀπείρους ἄξονας συμμετρίας.

2. Κάθε εὐθ. τμῆμα δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας :

(α) Τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται. *(β) Τὴν μεσοκάθετον ξ αὐτοῦ.*

Δὲν ὑπάρχουν ἄλλοι ἄξονες συμμετρίας, διότι λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν συμμετρικῶν εὐθ. τμημάτων, δύο περιπτώσεις εἶναι δυναταί: Ἢ τὰ ἄκρα αὐτῶν συμπίπτουν μὲ τὰ συμμετρικά των, ἢ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων.

3. Κάθε γωνία δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία περιέχει τὴν διχοτόμον της.

4. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι (1) *δέχονται ὡς ἄξονα συμμετρίας ἑκάστην ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ξ καὶ καὶ ξ' αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰς διχοτόμους τῶν ὑπὸ τούτων ὁριζομένων γωνιῶν.*

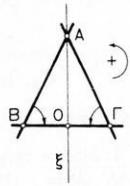
Ἂν αἱ δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τότε ἑκάστη τούτων εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τούτων ἀποτελουμένου σχήματος.

5. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι δέχονται ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν μεσοπαράλληλον αὐτῶν.

6. Κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον δέχεται ὡς ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία περιέχει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς Α αὐτοῦ.

Ἐξ ἄλλου : *Ἂν ἕνα τρίγωνον δέχεται ἕνα ἄξονα συμμετρίας, ξ, εἶναι ἰσοσκελές.*

Ἤτοι τουλάχιστον δύο πλευραί του εἶναι ἴσαι.



Σχ. 166

Πράγματι, δύο ἐκ τῶν κορυφῶν του, πρέπει νὰ εἶναι συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ. Ἔστωσαν Β καὶ Γ αἱ κορυφαὶ αὗται. Ἡ τρίτη κορυφὴ Α πρέπει νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν συμμετρικήν της ὡς πρὸς τὴν ξ, ἤτοι πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας ξ. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ (165, πόρισμα 1).

7. Κάθε ἰσόπλευρον τρίγωνον δέχεται τρεῖς ἄξονας συμμετρίας.

Ἐξ ἄλλου: *Ἂν ἕνα τρίγωνον δέχεται δύο ἄξονας συμμετρίας, εἶναι ἰσόπλευρον.*

Ἐπομένως δέχεται καὶ ἕνα τρίτον ἄξονα συμμετρίας.

Γενικώτερον :

8. Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ)' εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς μίαν εὐθεῖαν ξ, τότε ἡ ἕνωσις αὐτῶν ὡς καὶ ἡ τομή των, δέχονται τὴν ξ ὡς ἄξονα συμμετρίας, καὶ

Ἂν δύο σχήματα (Φ) καὶ (Φ') δέχωνται κοινὸν ἄξονα συμμετρίας, μίαν εὐθεῖαν ξ, τότε ἡ ξ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς ἑνώσεως καὶ τῆς τομῆς αὐτῶν.

Τὸ κατωτέρω πρόβλημα εἶναι ἕνα παράδειγμα ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον ἀναφερομένων :

167. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε κάθετος ἐπὶ τὴν α ὥστε ἂν εἶναι Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς α, β, γ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΑΒ = ΑΓ.

Λύσις. Ὑποθέτομεν ὅτι μία εὐθεῖα ε εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος (Σχ. 167). Παρατηροῦμεν ὅτι:

(1) Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν α.

(2) Ἐπειδὴ τὸ Β εἶναι σημεῖον τῆς δοθείσης εὐθείας β, ἕπεται (165) ὅτι

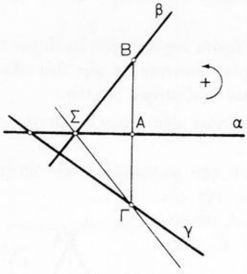
---

(1) Τὸ ὑπὸ τούτων ἀποτελούμενον σχῆμα.

τὸ Γ εἶναι σημεῖον τῆς συμμετρικῆς β′ τῆς β ὡς πρὸς τὴν α, ἡ ὁποία β′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις:

Κατασκευάζεται ἡ συμμετρικὴ β′ τῆς εὐθείας β ὡς πρὸς τὴν α καὶ εὑρίσκεται τὸ κοινὸν σημεῖον Γ αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν γ. Ἡ διὰ τοῦ σημείου τούτου Γ κάθετος ἐπὶ τὴν α εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Πράγματι:



Σχ. 167

Τὸ κοινὸν σημεῖον Β τῆς ἀνωτέρω καθέτου ἐπὶ τὴν α μὲ τὴν β εἶναι τὸ συμμετρικὸν τῆς Γ ὡς πρὸς τὴν α (165), διότι ἡ α εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ ὑπὸ τῶν β καὶ β′ ἀποτελουμένου σχήματος. Ἑπομένως ΑΒ = ΑΓ. Σημειοῦμεν ὅτι: Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ β′ νὰ τέμνῃ τὴν γ, ἤτοι ἡ γ πρέπει νὰ ἔχῃ διεύθυνσιν διάφορον τῆς β′. Ἐξ ἄλλου ἡ διὰ τοῦ Γ′ κάθετος ἐπὶ τὴν α πρέπει νὰ τέμνῃ τὴν β, ἤτοι ἡ β δὲν πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α. Ὑπὸ τὰς συνθήκας αὐτὰς τὸ πρόβλημα δέχεται λύσιν καὶ μόνον μίαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α′ τῆς εὐθείας ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΑ′ ὥστε: (ΜΑ′, ΜΒ) = − (ΜΑ′, ΜΓ).

2. Ἔστω Ο ἕνα δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Θεωροῦμεν ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ σημεῖον Μ′ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν:

$$(1) \quad (ΟΜ,\ ΟΜ') = φ \quad καὶ \quad ΟΜ = ΟΜ'$$

ἔνθα φ δοθεῖσα προσανατολισμένη γωνία,

Ἐκ τῶν ἀξιωμάτων τῆς ἰσότητος προκύπτει ὅτι ἕνα μόνον σημεῖον Μ ὑπάρχει.

Ἐκ τῶν (1) ὁρίζεται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐφ᾽ ἑαυτοῦ, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **στροφή.**

Τὸ σημεῖον Μ′ ὀνομάζεται **εἰκὼν** ἢ **ὁμόλογον** τοῦ Μ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. Τὸ ὁμόλογον μιᾶς εὐθείας ε, κατὰ μίαν δοθεῖσαν στροφήν, εἶναι μία εὐθεῖα ε′.

2. Τὸ ὁμόλογον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα Α′Β′ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ.

3. Τὸ ὁμόλογον μιᾶς γωνίας (ΑΧ, ΑΥ) εἶναι γωνία (Α′Χ′, Α′Υ′) ἴση πρὸς τὴν (ΑΧ, ΑΥ).

4. Τὸ ὁμόλογον τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τρίγωνον Α′Β′Γ′ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ ΑΒΓ. (1)

(1) Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ στροφὴ εἶναι μία **ὁμόρροπος ἰσότης.**

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΤΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

Η ΠΟΛΥΓΩΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

168. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν ἕνα διατεταγμένον σύνολον ν σημείων:

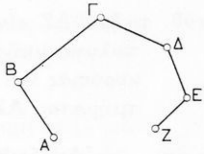
Α, Β, Γ,...., Ε, Ζ (1)

Ὀνομάζομεν **πολυγωνικὴν γραμμὴν** *ΑΒΓ...ΕΖ τὸ σύνολον τῶν* ν-1 *εὐθ. τμημάτων ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εἶναι διαδοχικὰ σημεῖα τοῦ ἀνωτέρω διατεταγμένου συνόλου, σημείων* (Σχ. 168).

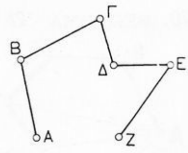
Τὰ σημεῖα Α,Β,...,Ζ ὀνομάζονται κορυφαὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς καὶ τὰ ἐκ τούτων Α καὶ Ζ **ἄκρα** αὐτῆς.

Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ,...,ΖΑ ὀνομάζονται **πλευραὶ** τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.

Σημεῖα τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὀνομάζομεν τὰς κορυφὰς καὶ τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὀνομάζεται **περίμετρος** αὐτῆς.

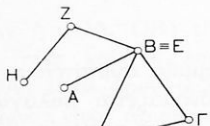


Σχ. 168.1

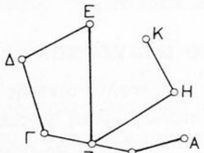


Σχ. 168.2

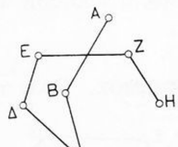
Διαγώνιος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ὀνομάζεται κάθε εὐθ. τμῆμα τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι δύο κορυφαὶ τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, μὴ διαδοχικαί.



Σχ. 168.3



Σχ. 168.4



Σχ. 168.5

Μία πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ ὀνομάζεται **ἁπλῆ,** τότε μόνον ὅταν ἰσχύουν αἱ ἑξῆς συνθῆκαι:

(1) Αἱ κορυφαὶ αὐτῆς εἶναι σημεῖα διάφορα ἀλλήλων.

(1) Σημειοῦντες : Α,Β,Γ, .., Ε,Ζ θεωροῦμεν **ἀλφαβητικὴν** διάταξιν τοῦ συνόλου. Σημειοῦντες : A_1, A_2, A_3,..., $A_{\nu-1}$, A_ν θεωροῦμεν **ἀριθμητικὴν** διάταξιν.

(2) Οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ αὐτῆς, δὲν ὑπάρχει κορυφὴ αὐτῆς ἡ ὁποία νὰ κεῖται μεταξὺ τούτων.

(3) Δὲν ὑπάρχουν, ἐκτὸς τῶν κορυφῶν της, σημεῖα αὐτῆς τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι ἐσωτερικὰ περισσοτέρων τῆς μιᾶς πλευρῶν.

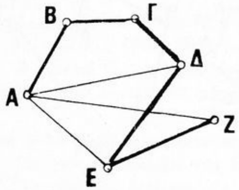
Ἂν μία τῶν ἀνωτέρω συνθηκῶν δὲν ἰσχύῃ, ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ ὀνομάζεται **μὴ ἁπλῆ** (Σχ. 168.3, 168.4, 168.5).

169. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μία ἁπλῆ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΒΓ . . . ΕΖ, ἔχουσα ν κορυφάς, θὰ ὀνομάζεται* **κυρτὴ** *ὅταν οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ αὐτῆς, αἱ λοιπαὶ ν-2 κορυφαὶ της κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἄνω διαδοχικὰς κορυφάς.*

Ἂν ὑπάρχουν κορυφαὶ τῆς ἁπλῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς κείμεναι ἑκατέρωθεν μιᾶς τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ δύο διαδοχικὰς κορυφάς της, ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ θὰ ὀνομάζεται **μὴ κυρτή**. (Σχ. 168.2).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἔπεται ὅτι :

170. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ εὐθ. **τμῆμα ΑΖ εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου κάθε πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΒΓ... ΕΖ, ἡ ὁποία ἔχει ν κορυφὰς καὶ ὡς ἄκρα τὰ ἄκρα Α καὶ Ζ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΖ.**



Σχ. 170

Ἀπόδειξις. Ἡ πρότασις ἔχει ἀποδειχθῆ διὰ $\nu = 3$. Ἔστω ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = \mu$ θὰ εἶναι : $ΑΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ$. Ἀλλὰ εἶναι (121) $ΑΕ < ΑΔ + ΔΕ$ (Σχ. 170).

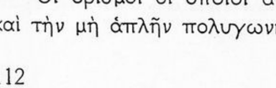
Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν : $ΑΕ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ$, ἤτοι ὅτι ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = \mu + 1$. Ἑπομένως ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ κάθε ν.

ΤΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

171. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὅταν τὰ ἄκρα μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς συμπίπτουν τότε ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ὀνομάζεται **πολύγωνον.**

Ἂν ἕνα πολύγωνον ἔχῃ ν κορυφάς, θὰ ἔχῃ ν πλευρὰς (Σχ. 171).

Ἂν $\nu = 4,5,6,...,\nu$, τὸ πολύγωνον ὀνομάζεται ἀντιστοίχως : **τετράπλευρον, πεντάγωνον, ἑξάγωνον,..., ν—γωνον.**

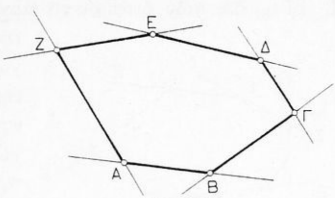


Σχ. 171

Σημειοῦμεν ὅτι :

Οἱ ὁρισμοὶ οἱ ὁποῖοι ἀναφέρονται εἰς τὴν ἁπλῆν, κυρτὴν ἢ μὴ κυρτήν, καὶ τὴν μὴ ἁπλῆν πολυγωνικὴν γραμμὴν ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ πολύγωνον.

172. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **ἐσωτερικὸν** *κυρτοῦ ν-γώνου ΑΒΓ... ΕΖ τὴν τομὴν τῶν τῶν ν ἡμιεπιπέδων τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ἀρχικὰς εὐθείας τὰς ΑΒ, ΒΓ,..., ΖΑ ἀντιστοίχως καὶ περιέχουν τὰς ἄλλας ν—2 κορυφὰς αὐτοῦ* (1).

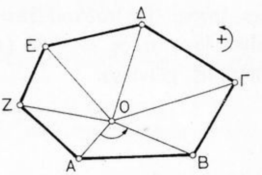


Σχ. 172

173. ΟΡΙΣΜΟΣ. Κάθε κυρτὴ γωνία ὡς ἡ (ΑΒ, ΑΖ) τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ ἄγονται ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς Α καὶ διέρχονται ἀπὸ τὰς προσκειμένας αὐτῆς κορυφὰς Β καὶ Ζ τοῦ πολυγώνου, περιέχει εἰς τὸ ἐσωτερικόν της ὅλας τὰς ἄλλας ν-3 κορυφὰς αὐτοῦ. Μία τοιαύτη γωνία ὀνομάζεται **ἐσωτερικὴ γωνία** ἢ ἁπλῶς **γωνία** τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου δύναται, κατὰ ταῦτα, νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ τομὴ τῶν συνόλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Κάθε σημεῖον τῆς ἀνωτέρω τομῆς ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** τοῦ πολυγώνου.

174. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὅταν τὸ ἐπίπεδον κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ... ΕΖ εἶναι προσημασμένον (προσανατολισμένον) τότε τὸ πολύγωνον ὀνομάζεται* **προσανατολισμένον** (2).

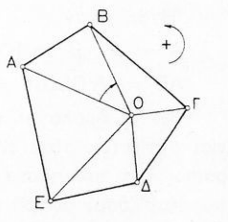
Ἂν θεωρήσωμεν ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον Ο τοῦ πολυγώνου τούτου καὶ τὰς ἀπὸ τούτου ἡμιευθείας τὰς διερχομένας διὰ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, τότε δύο οἱαιδήποτε ἐκ τῶν ὁριζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ), (ΟΒ, ΟΓ),...,(ΟΖ, ΟΑ) εἶναι ἐφεξῆς. Ἂν μία ἐκ τούτων εἶναι θετικῶς προσανατολισμένη τότε καὶ αἱ λοιπαὶ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι καὶ λέγομεν ὅτι τὸ πολύγωνον εἶναι θετικῶς προσανατολισμένον.



Σχ. 174.1

Ἂν ἡ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένη, τότε καὶ αἱ λοιπαὶ ἐκ τῶν (ΟΒ, ΟΓ),..., (ΟΖ, ΟΑ) εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμέναι καὶ τὸ πολύγωνον εἶναι ἀρνητικῶς προσανατολισμένον.

Αἱ εἰς τὸν προσανατολισμὸν τῶν γωνιῶν τριγώνου ἀναφερόμεναι παρατηρήσεις ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ κυρτὸν πολύγωνον.



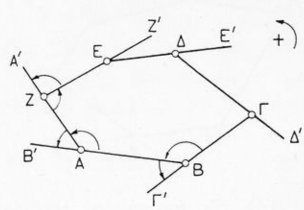
Σχ. 174.2

175. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἔστωσαν ΑΒ′, ΒΓ′,...,ΖΑ′ αἱ ἡμιευθεῖαι αἱ ἀντικείμεναι τῶν

(1) Ἡ ὕπαρξις τῆς ἀνωτέρω τομῆς ἀποδεικνύεται βάσει τῶν ἀξιωμάτων διατάξεως.

(2) Δοθέντος ὅτι, τὸ σύνολον τῶν κορυφῶν αὐτῶν θεωρεῖται διατεταγμένον, ὁρίζεται ἐκ τούτου μία φορὰ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητικὴ καθ' ὅσον τρεῖς διαδοχικαὶ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου ὁρίζουν τὴν θετικὴν ἢ τὴν ἀρνητικήν, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, φοράν.

ΑΒ, ΒΓ,...,ΖΑ τῶν ὁποίων τὰ ἀρχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ,..., Ε, Ζ καθορίζουν τὴν θετικὴν ἐπὶ τοῦ πολυγώνου φοράν. Αἱ κυρταὶ γωνίαι (ΑΖ, ΑΒ'), (ΒΑ, ΒΓ'),...,(ΖΕ, ΖΑ'), ὀνομάζονται **ἐξωτερικαὶ γωνίαι** τοῦ πολυγώνου. Αἱ ἀνωτέρω ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ πολυγώνου εἶναι ὁμοίως πρὸς τὰς γωνίας αὐτοῦ προσανατολισμέναι. Αἱ κατὰ κορυφὴν τῶν ὡς ἄνω ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἐπίσης ἐξωτερικαὶ γωνίαι τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 175

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

176. ΘΕΩΡΗΜΑ· 1. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ ν—γώνου εἶναι ἴσον πρὸς 2(ν—2) ὀρθὰς γωνίας 2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν, ἤτοι πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.

'Απόδειξις. Θεωροῦμεν τὰς διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος (110) εἰς τὰ ὁριζόμενα ν-2 τρίγωνα καὶ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἰσοτήτων.

2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον πρὸς 2ν ὀρθάς. 'Εκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς 2ν — 2 (ν — 2) ὀρθὰς ἤτοι πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας ἢ 2π (δύο πλήρεις γωνίας).

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΙΣΑ

177. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο ὁμοίως προσανατολισμένα ὁμόλογα* (1) *κυρτὰ πολύγωνα ΑΒΓ... ΕΖ καὶ Α'Β'Γ'...Ε'Ζ' ὀνομάζονται* **ἴσα.** *ὅταν εἶναι ἴσαι αἱ ὁμόλογαι πλευραὶ καὶ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι τούτων.*

῎Ητοι, ὅταν :

Α = Α', Β = Β', Γ = Γ', ..., Ζ = Ζ' καὶ

ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ', ΓΔ = Γ'Δ',..., ΖΑ = Ζ'Α'.

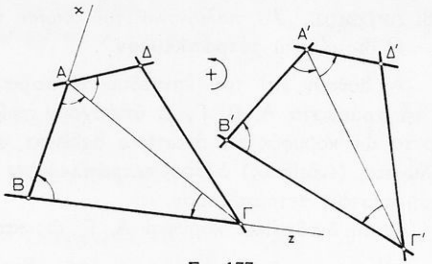
῎Αν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι, ἀλλὰ αἱ ὁμόλογοι γωνίαι ἀντίθετοι, τότε τὰ πολύγωνα ὀνομάζωνται **ἀντιρρόπως ἴσα.** Δύο ἀντιρρόπως ἴσα πολύγωνα εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα.

Καθ' ὅσον ἀφορᾶ τὴν ὕπαρξιν δύο ἴσων κυρτῶν πολυγώνων, παρατηροῦμεν :

---

(1) ῎Εχει ὁρισθῆ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν κορυφῶν των. Βάσει ταύτης αἱ κορυφαὶ τῶν πολυγώνων ἀντιστοιχοῦν διττῶς πρὸς ἀλλήλας. Αἱ ἀντίστοιχαι κορυφαὶ ὀνομάζονται *ὁμόλογοι*. 'Ομόλογοι γωνίαι τῶν πολυγώνων ὀνομάζονται αἱ γωνίαι τούτων, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ εἶναι ὁμόλογοι. 'Ομόλογοι πλευραί, διαγώνιοι κλπ. τούτων, ὀνομάζονται αἱ πλευραί, διαγώνιοι κλπ, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ ὁμολόγους κορυφάς.

Ἂν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι δύο ἴσα τρίγωνα τοῦ ἐπιπέδου καὶ Δ τυχὸν σημεῖον ἐσωτερικὸν π.χ. τῆς γωνίας (ΒΓ, ΒΑ), ὑπάρχει σημεῖον Δ' καὶ ἕνα μόνον, ὥστε τὰ τρίγωνα ΓΔΑ καὶ Γ'Δ'Α' νὰ εἶναι ἴσα. Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἴσα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ. Πράγματι, αἱ πλευραί των ΓΔ, Γ'Δ' καὶ ΔΑ, Δ'Α' εἶναι ἴσαι λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ'. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν (ΑΒ, ΑΓ) = (Α'Β', Α'Γ') καὶ (ΑΓ, ΑΔ) = (Α'Γ',Α'Δ'), διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει ὅτι αἱ γωνίαι (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (Α'Β', Α'Δ') τῶν πολυγώνων εἶναι ἴσαι καὶ δι' ὅμοιον λόγον καὶ αἱ (ΓΔ, ΓΒ) καὶ (Γ'Δ', Γ'Β'). Ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν Δ καὶ Δ' προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ'.



Σχ. 177

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κάθε εὐθεῖα ε μὴ περιέχουσα δύο διαδοχικὰς κορυφὰς κυρτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτήν.

2. Ἂν Μ καὶ Μ' εἶναι δύο ἐσωτερικὰ σημεῖα κυρτοῦ πολυγώνου, δὲν ὑπάρχει σημεῖον τοῦ πολυγώνου κείμενον μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ'.

3. Τὸ ἐσωτερικὸν κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἕνα κυρτὸν σύνολον σημείων.

Ἤτοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' αὐτοῦ, κάθε σημεῖον κείμενον μεταξὺ τῶν Μ καὶ Μ' εἶναι σημεῖον τοῦ συνόλου.

4. Αἱ $\nu-3$ διαγώνιοι κυρτοῦ ν—γώνου αἱ ἀγόμεναι διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς αὐτοῦ χωρίζουν τὸ ν—γωνον τοῦτο εἰς $\nu-2$ τρίγωνα. Τὰ εὐθ. τμήματα τὰ συνδέοντα ἕνα ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κυρτοῦ ν—γώνου μετὰ τὰς ν κορυφὰς αὐτοῦ χωρίζουν τὸ ν—γωνον τοῦτο εἰς ν τρίγωνα.

5. Πᾶσα εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ ἐσωτερικοῦ σημείου κυρτοῦ πολυγώνου ἔχει δύο, καὶ μόνον δύο, κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ πολύγωνον.

6. Πᾶσα ἡμιευθεῖα ἀγομένη ἀπὸ σημείου ἐσωτερικοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ΑΒΓ... ΕΖ ἔχει ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ πολύγωνον.

7. Τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον κυρτοῦ πολυγώνου ἔχει ἕνα κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ πολύγωνον καὶ μόνον ἕνα.

8. Πᾶσα εὐθεῖα μὴ περιέχουσα δύο διαδοχικὰς κορυφὰς κυρτοῦ πολυγώνου, ἔχει τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα μὲ τὸ πολύγωνον.

9. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πλῆθος τῶν κοινῶν σημείων ἑνὸς ἁπλοῦ πολυγώνου καὶ μιᾶς εὐθείας ε, ἡ ὁποία δὲν περιέχει οὐδεμίαν κορυφὴν αὐτοῦ, εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

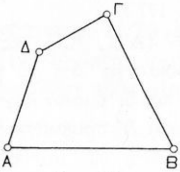
10. Τὸ ὁμόλογον κυρτοῦ πολυγώνου εἰς παράλληλον μεταφορὰν ἢ στροφὴν ἢ συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον, εἶναι πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον.

11. Τὸ ὁμόλογον κυρτοῦ πολυγώνου, εἰς μίαν συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν, εἶναι πολύγωνον ἀντιρρόπως ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον.

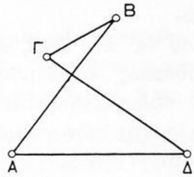
178. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Τὸ πολύγωνον τοῦ ὁποίου τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν εἶναι ὁ 4 ($\nu = 4$) ὀνομάζεται* **τετράπλευρον.**

Ἂν δοθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τέσσαρα σημεῖα τὰ ὁποῖα συμβολίζονται μὲ τὰ γράμματα Α, Β, Γ, Δ ὑπάρχουν τρία διάφορα ἀλλήλων τετράπλευρα ἔχοντα ὡς κορυφὰς τὰ ἀνωτέρω δοθέντα σημεῖα (Σχ. 178). Ἐκτὸς ἐναντίας δηλώσεως (ἐνδείξεως) ὁ ὅρος **τετράπλευρον** ἀναφέρεται εἰς τὸ ἁπλοῦν, κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν, τετράπλευρον.

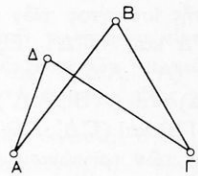
Αἱ μὴ διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α, Γ, ὡς καὶ αἱ Β, Δ κάθε τετραπλεύρου θὰ



Σχ. 178.1



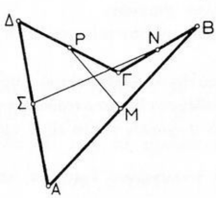
Σχ. 178.2



Σχ. 178.3

ὀνομάζωνται **ἀπέναντι** κορυφαὶ αὐτοῦ. Δύο πλευραὶ ἔχουσαι κοινὸν ἄκρον ὀνομάζονται **προσκείμεναι** πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου. Δύο πλευραὶ μὴ ἔχουσαι κοινὸν ἄκρον, ὡς αἱ ΑΒ, ΓΔ ἢ αἱ ΒΓ, ΔΑ ὀνομάζονται **ἀπέναντι** πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου.

Οὕτω, εἰς τὸ τετράπλευρον ἔχομεν δύο ζεύγη ἀπέναντι κορυφῶν καὶ δύο ζεύγη ἀπέναντι πλευρῶν.

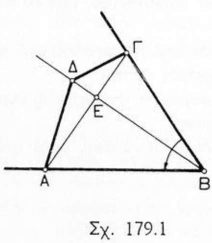


Σχ. 178.4

Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ἁπλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 178.1) εἶναι τὸ ζεῦγος τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ΑΒ, ΓΔ τοῦ μὴ ἁπλοῦ τετραπλεύρου ΑΒ ΓΔ (Σχ. 178.2).

Τὰ δύο εὐθ. τμήματα ἕκαστον τῶν ὁποίων συνδέει τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ὀνομάζονται **διάμεσοι** αὐτοῦ. Ἂν εἶναι Μ, Ν, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ διάμεσοι αὐτοῦ εἶναι τὰ εὐθ. τμήματα ΜΡ, ΝΣ (Σχ. 178.4).

179. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ αὐτοῦ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

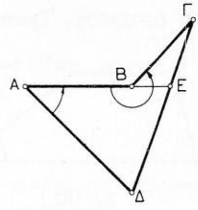


Σχ. 179.1

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 179.1) ἡ κορυφὴ Δ αὐτοῦ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τῆς γωνίας (ΒΓ,ΒΑ). Ἡ ἡμιευθεῖα ἑπομένως ΒΔ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ. Δι' ὅμοιον λόγον ἡ διαγώνιος ΑΓ ἔχει σημεῖον μεταξὺ τῶν Β καὶ Δ.

Ἀντιστρόφως, ἂν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἔχουν κοινὸν σημεῖον, ἔστω Ε, τότε δύο οἱαιδήποτε διαδοχικαὶ κορυφαὶ τοῦ τετραπλεύρου κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει τὰς δύο ἄλλας, διαδοχικάς, κορυφὰς αὐτοῦ. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτὸν (179).

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἂν ἕνα τετράπλευρον εἶναι μὴ κυρτόν, μία τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν δύο διαδοχικὰς κορυφὰς του ἔχει ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰς δύο ἄλλας διαδοχικὰς κορυφάς του.*



Σχ. 179.2

Ἂν αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει σημεῖον Ε μεταξὺ τῶν Γ καὶ Δ (21).

Ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο Ε κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ ἑπομένως τὸ τετράπλευρον εἶναι μὴ ἁπλοῦν. Ὅταν τὸ σημεῖον Ε τῆς εὐθείας ΑΒ δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β (Σχ. 179.2) τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα ἁπλοῦν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον. Τὸ τετράπλευρον τοῦτο ἔχει μίαν κυρτὴν γωνίαν (ΒΑ, ΒΓ).

Ἡ κυρτὴ γωνία (ΒΑ, ΒΓ) δὲν εἶναι γωνία τοῦ τετραπλεύρου (τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα αὐτῆς δὲν εἶναι ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τετραπλεύρου).

180. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἑκάστη διαγώνιος κυρτοῦ τετραπλεύρου χωρίζει τοῦτο εἰς δύο τρίγωνα.

Ἡ ἀπόδειξις παραλείπεται ὡς ἁπλῆ.

Εἰς τὸ ἁπλοῦν μὴ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 179.2) ἡ μία μόνον διαγώνιος ΒΔ αὐτοῦ τὸ χωρίζει εἰς δύο τρίγωνα.

181. ΘΕΩΡΗΜΑ. ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν.

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ἁπλοῦ μὴ κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσον πρὸς μίαν πλήρη γωνίαν.

Ἡ ἀπόδειξις τῶν ἀνωτέρω προτάσεων παραλείπεται ὡς ἁπλῆ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου του, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα ἐλάχιστον.

2. Θεωροῦμεν : κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι′ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Γ καὶ Δ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Ι καὶ Ι′ κεῖνται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

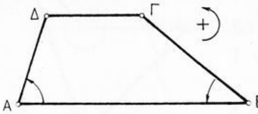
3. Ἂν κυρτοῦ τετραπλεύρου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος, τότε αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ἄλλου ζεύγους εἶναι παράλληλοι ἢ συμπίπτουσαι.

4. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : 1. Ἂν ἁπλοῦν τετράπλευρον δέχεται ἕνα ἄξονα συμμετρίας καὶ ἕνα κέντρον συμμετρίας, τότε τὸ κέντρον τοῦτο κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος συμμετρίας. 2. Ἂν δέχεται ἕνα ἄξονα συμμετρίας, τότε ὁ ἄξων οὗτος περιέχει μίαν διαγώνιον ἢ μίαν διάμεσον αὐτοῦ.

5. Δοθέντος τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὑπάρχουν ἄπειρα τετράπλευρα Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἑκάστου τῶν ὁποίων τὰ μέσα τῶν πλευρῶν εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος. Γενίκευσις εἰς τὸ πολύγωνον τὸ ἔχον ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν.

ΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

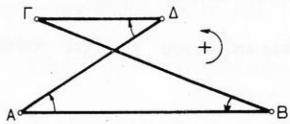
182. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τραπέζιον *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι κατὰ τὸ ἕνα μόνον ζεῦγος.*



Σχ. 182.1

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ὀνομάζονται **βάσεις** αὐτοῦ. Ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου ὀνομάζεται **ὕψος** αὐτοῦ. Ἕνα τραπέζιον δύναται νὰ εἶναι κυρτὸν (Σχ. 182.1) ἢ μὴ κυρτὸν (Σχ. 182.2). Τὸ μὴ κυρτὸν τραπέζιον δὲν εἶναι ἁπλοῦν τετράπλευρον. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ τραπεζίου ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου, αἱ βάσεις εἶναι ἄνισα εὐθ. τμήματα.*



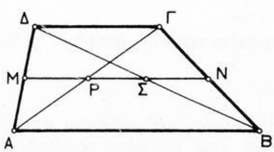
Σχ. 182.2

2. Παντὸς κυρτοῦ τραπεζίου αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι ἑκάστης τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαὶ (89, Πόρισμα 1).

3. Παντὸς μὴ κυρτοῦ τραπεζίου αἱ κυρταὶ γωνίαι αἱ προσκείμεναι ἑκάστης τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι ἀντίθετοι.

4. Κάθε τραπέζιον τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ὀρθὴν ἔχει καὶ μίαν δευτέραν ὀρθὴν γωνίαν. Τὸ τραπέζιον τοῦτο ὀνομάζεται **ὀρθογώνιον τραπέζιον.**

183. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κάθε τραπεζίου κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.



Σχ. 183

Ἀπόδειξις. Ἡ διὰ τοῦ μέσου Μ (Σχ. 183) μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του (117, Πόρισμα) καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἄλλης ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἡ διάμεσος κάθε κυρτοῦ τραπεζίου, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν βάσεών του.*

Πράγματι, τὰ εὐθ. τμήματα ΜΣ καὶ ΣΝ (Σχ. 183) εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ (117, Πόρισμα).

2. *Τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων κάθε κυρτοῦ τραπεζίου, ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων αὐτοῦ.*

Πράγματι, τὸ εὐθ. τμῆμα ΡΣ (Σχ. 183) εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΣ καὶ ΜΡ τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ ἡμίση τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ τραπεζίου.

ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟΝ

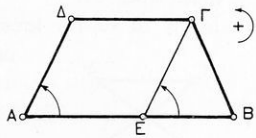
184. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἰσοσκελὲς *τραπέζιον ὀνομάζεται κάθε τραπέζιον, κυρτὸν ἢ μὴ κυρτόν, τοῦ ὁποίου αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι:

185. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι ἑκάστης τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως:

2. Κάθε τραπέζιον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι μιᾶς βάσεως αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, εἶναι ἰσοσκελές.

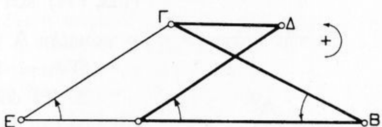
Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 185.1), θεωροῦμεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ Γ παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΔΑ (Ε ἐπὶ τῆς ΑΒ). Εἶναι ΓΕ = ΔΑ (116) καί, λόγω τῆς ὑποθέσεως, ΒΓ = ΔΑ. Ἑπομένως ΓΕ = ΓΒ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΓΒΕ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι (ΕΒ, ΕΓ) = (ΒΓ, ΒΕ) καὶ ἐπειδὴ (ΑΒ, ΑΔ) = (ΕΒ, ΕΓ), θὰ εἶναι (ΑΒ, ΑΔ) = (ΒΓ, ΒΑ). Αἱ γωνίαι Δ καὶ Γ εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως.



Σχ. 185.1

Ἡ ἀνωτέρω, διὰ τῆς θεωρήσεως τῆς παραλλήλου ΓΕ πρὸς τὴν ΔΑ ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιον (Σχ. 185.2).

2. Ἂν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 185.1) εἶναι κυρτόν, θεωροῦμεν τὴν παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΔΑ. Ἔχομεν ὅτι: (ΑΒ, ΑΔ) = (ΕΒ, ΕΓ). Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν (ΑΒ, ΑΔ) = (ΒΓ, ΒΑ). Ἑπομένως (ΒΓ, ΒΑ) = (ΕΒ, ΕΓ). Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (78) ὅτι ΒΓ = ΓΕ. Ἀλλὰ ΔΑ = ΓΕ (116). Ἑπομένως ΒΓ = ΔΑ, ἤτοι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.



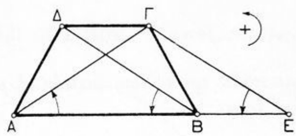
Σχ. 185.2

Ἂν εἶναι (ΔΑ, ΔΓ) = (ΓΔ, ΓΒ), τότε θὰ εἶναι καὶ (ΑΒ, ΑΔ) = (ΒΓ, ΒΑ) καί, ὡς ἀπεδείχθη, ΒΓ = ΑΔ.

Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἰσχύει καὶ διὰ τὸ μὴ κυρτὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιον (Σχ. 185.2).

186. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Αἱ διαγώνιοι παντὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἴσαι, καὶ 2. Ἂν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου εἶναι ἴσαι, τότε τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξις. 1. Τὸ ἀποδεικτέον, καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις : κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ, προκύπτει ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΒΑΔ (75, Πόρισμα).



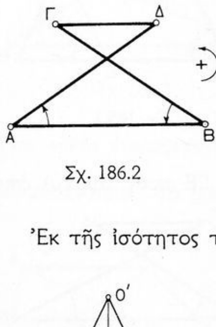
Σχ. 186.1

2. Ἂν τὸ τραπέζιον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 186.1) θεωροῦμεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Γ παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΔΒ (Ε ἐπὶ τῆς ΑΒ). Εἶναι ΔΒ = ΓΕ καὶ ἐξ ὑποθέσεως : ΒΔ = ΑΓ. Ἑπομένως εἶναι ΓΑ = ΓΕ. Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται ὅτι, (ΑΒ, ΑΓ) = (ΕΓ, ΕΑ). Ἀλλὰ καὶ (ΒΔ, ΒΑ) = (ΕΓ, ΕΑ) (89, Πόρισμα 1), ἑπομένως : (ΑΒ, ΑΓ) = (ΒΔ, ΒΑ). Ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΒΑΔ ἔχομεν (76, Πόρισμα) : ΒΓ = ΔΑ, ἤτοι ὅτι τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἂν τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 186.2) εἶναι μὴ κυρτόν, τότε τὸ κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ = ΒΔ (διαγώνιοι τοῦ μὴ κυρτοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ) καὶ ἑπομένως (1) ΑΔ = ΒΓ.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Εἰς τὸ κυρτὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 186.3), τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν διαγωνίων αὐτοῦ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων ἑκάστης βάσεως αὐτοῦ, ἤτοι ΟΑ = ΟΒ καὶ ΟΓ = ΟΔ.

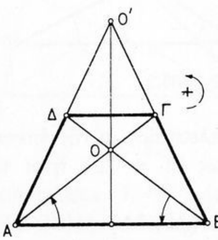


Σχ. 186.2

Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ κοινὸν σημεῖον Ο′ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΒΓ. Πράγματι, ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν (ΑΒ, ΑΓ) καὶ (ΒΔ, ΒΑ) (Σχ. 186.3) ἕπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν (ΓΔ, ΓΑ) καὶ (ΔΒ, ΔΓ) (186.3) ὅτι ΟΓ = ΟΔ (78).

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ τραπεζίου ἕπεται ὅτι :

Ο′Α = Ο′Β καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι Ο′Γ = Ο′Δ.



Σχ. 186.3

2. Ἡ ἀνωτέρω παρατήρησις ἰσχύει καὶ εἰς τὸ μὴ κυρτὸν τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 186.2), διότι τὸ κοινὸν σημεῖον Ο′ τῶν διαγωνίων εὐθειῶν αὐτοῦ εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ (ΑΓ καὶ ΒΔ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ κυρτοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ).

3. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο καὶ Ο′ (Σχ. 186, 3) ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τῶν Α καὶ Β, κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΟΟ′ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ τραπεζίου καὶ δι᾽ ὅμοιον λόγον καὶ ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΓΔ αὐτοῦ.

187. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ μεσοκάθετος τῶν βάσεων ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Τὸ συμμετρικὸν κάθε σημείου τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου ὡς πρὸς τὴν ΟΟ′ (186) εἶναι σημεῖον τῆς ἄλλης ἐκ τούτων, διότι ἡ ΟΟ′ εἶναι διχοτόμος (109, Πόρισμα) τῆς γωνίας Ο′.

Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν κάθε σημείου τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης βάσεως ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον ΟΟ′, εἶναι σημεῖον τῆς αὐτῆς βάσεως δηλαδὴ σημεῖον τοῦ τραπεζίου.

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ἰσοσκελοῦς, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τῶν βάσεων αὐτοῦ καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι ἐκ τοῦ λόγου τούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον Ι′ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΙΙ′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

2. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ε καὶ ε′ καὶ ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Α′. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν ε καὶ ε′ ἀντιστοίχως ὥστε :

ΑΜ + Α′Μ′ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΜ′ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ΑΜ — ΑΜ′ = λ.

3. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς κορυφῆς Α καὶ μὴ ἔχουσαν, ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ τρίγωνον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἐπὶ τὴν ε ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

4. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ εὐθεῖαν ε μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ τρίγωνον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῆς εὐθείας ε εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπὸ τῆς ε.

Γενίκευσις εἰς τὸ τετράπλευρον.

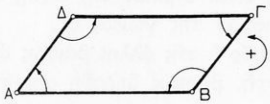
5. 1. Ἂν ἕνα τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές, τότε ἡ διάμεσος αὐτοῦ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν βάσεών του εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς, 2. Ἂ ἡ διάμεσος τραπεζίου ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν βάσεών του εἶναι κάθετος, ἐπ' αὐτὰς τότε τὸ τραπέζιον εἶναι ἰσοσκελές.

6. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἡ προβολὴ μιᾶς τυχούσης κορυφῆς του ἐπὶ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

7. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι ὡς καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

188. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **παραλληλόγραμμον** *κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.*

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἕπεται ὅτι :



Σχ. 188

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε παραλληλόγραμμον εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον.*

Πράγματι, οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαὶ Α, Β αὐτοῦ, αἱ δύο ἄλλαι Γ, Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, διότι ἄλλως αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν θὰ ἦταν παράλληλοι (Σχ. 188).

ΓΩΝΙΑΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

189. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ αἱ προσκείμεναι τῶν πλευρῶν γωνίαι αὐτοῦ.**

Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ προσκείμεναι τῆς πλευρᾶς ΑΒ γωνίαι Α καὶ Β αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικαὶ (89, Πόρισμα 1).

Ἀντιστρόφως, ἂν εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $Α + Β = π$ καὶ $Β + Γ = π$, τότε ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἀνωτέρω ἕπεται (87, Πόρισμα 1) ὅτι εἶναι παράλληλοι αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας ὅτι εἶναι παράλληλοι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, ἤτοι ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

190. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κυρτὸν καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτοῦ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.**

Ἀπόδειξις. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι κάθε παραλληλογράμμου ἔχουν τὸ αὐτὸ παραπλήρωμα (89, Πόρισμα 1) καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσαι.

Ἔστω ὅτι εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 188) εἶναι (1) $Α = Γ$ καὶ $Β = Δ$.

Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτόν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ αὐτοῦ εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας. Ἑπομένως, λόγῳ τῶν (1), θὰ εἶναι :

$$Α + Β = Β + Γ = Γ + Δ = Δ + Α = π.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι τὸ κυρτὸν τοῦτο τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον (189).

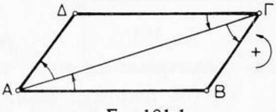
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

191. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κυρτὸν καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.

Ἀπόδειξις. 1. Τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων (76) τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (Σχ. 191.1).

2. Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀντίστροφον πρότασιν παρατηροῦμεν :

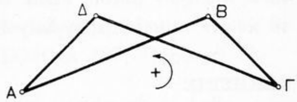
Ἔστω ΑΒΓΔ (Σχ. 191.1) ἕνα τετράπλευρον εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ = ΓΔ καὶ ΒΓ = ΔΑ. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (79) ἕπεται ὅτι : (ΑΒ, ΑΓ) = (ΓΔ, ΓΑ) καὶ (ΓΑ, ΓΒ) = (ΑΓ, ΑΔ). Ἂν τὰ σημεῖα Β καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΓ (Σχ. 191. 1), αἱ γωνίαι (ΑΓ, ΑΒ) καὶ (ΓΔ, ΓΑ) εἶναι ἐντὸς ἐναλλὰξ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 191.1

Δι' ὅμοιον λόγον, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, καὶ ἑπομένως τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον (188).

Ἂν τὰ σημεῖα Β καὶ Δ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ (Σχ. 191.2), αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ (εὐθ. τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ) δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ἑπομένως κυρτὸν (179) καὶ λόγω τούτου δὲν εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 191.2

192. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κυρτὸν καὶ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι κατὰ τὸ ἓν ζεῦγος.

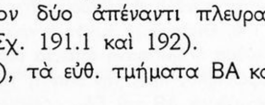
Ἀπόδειξις. Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων (76) τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (Σχ. 191.1).

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τὴν ἀντίστροφον πρότασιν παρατηροῦμεν :

Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράπλευρον εἰς τὸ ὁποῖον δύο ἀπέναντι πλευραί, ἔστω αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ, εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (Σχ. 191.1 καὶ 192).

Ἂν τὸ τετράπλευρον εἶναι κυρτὸν (Σχ. 191.1), τὰ εὐθ. τμήματα ΒΑ καὶ ΓΔ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ καὶ τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΓΔΑ (75).

Ἂν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ δὲν εἶναι κυρτὸν (Σχ. 192) δὲν δύναται νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

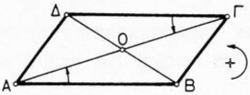


Σχ. 192

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

193. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διχοτομοῦνται αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Κάθε παραλληλόγραμμον εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον (188, Πόρισμα). Ἑπομένως αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ (Σχ. 193) αὐτοῦ τέμνονται. Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ (76) ἕπεται ὅτι : ΟΑ = ΟΓ καὶ ΟΒ = ΟΔ.



Σχ. 193

Ἀντιστρόφως, ἂν αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομοῦνται, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο καὶ λόγω τούτου παράλληλοι (162).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων κάθε παραλληλογράμμου εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ τετραπλεύρου τούτου.*

2. Ἡ διάμεσος κάθε παραλληλογράμμου, ἡ συνδέουσα τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ καὶ περιέχει τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν δύο διαγωνίων παραλληλογράμμου μεγαλυτέρα εἶναι ἡ συνδέουσα τὰς κορυφὰς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

2. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Ρ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ΑΡ καὶ ΓΜ μὲ τὴν ΒΔ εἶναι τὰ τριχοτομοῦνται τὴν διαγώνιον ΒΔ.

3. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διάμεσοι κάθε τετραπλεύρου καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του διχοτομοῦνται.

4. Θεωροῦμεν δύο παραλληλόγραμμα ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἄλλο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ταῦτα ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον συμμετρίας.

5. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἔστω Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων του. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ περίκεντρα τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ, ὡς καὶ τὰ ὀρθόκεντρα αὐτῶν, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

6. Θεωροῦμεν τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον ΑΒ = ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ἡ εὐθεῖα ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ μέσα Ν καὶ Σ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ αὐτοῦ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ.

7. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν ΔΜ καὶ ΔΝ μὲ τὴν ΑΓ εἶναι τὰ τριχοτομοῦντα τὴν διαγώνιον ΑΓ.

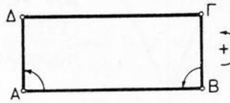
8. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Β αὐτοῦ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΕΖ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΖ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν διαγώνιον ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) Αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. (2) Αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου. (3) Αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ τετραπλεύρου. (4) Αἱ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς Δ τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου. (5) Αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται ἀπὸ τῆς κορυφῆς Δ αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

9. Θεωροῦμεν κυρτὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι κατὰ τὰ δύο ζεύγη. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, αἱ διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ αὐτοῦ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τούτων.

ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ

194. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀρθογώνιον *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί.* (Σχ. 194).

Ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς προτάσεις :



Σχ. 194

195. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶν κυρτὸν τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶναι ἴσον πρὸς τέσσαρας ὀρθὰς (183). Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, ἑκάστη τούτων θὰ εἶναι ὀρθή.

196. ΘΕΩΡΗΜΑ. Πᾶν ὀρθογώνιον εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι (87, Πόρισμα 1).

197. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν ἑνὸς παραλληλογράμμου μία γωνία εἶναι ὀρθή, τότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. Δύο γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ἔχουσαι διαδοχικὰς κορυφὰς εἶναι παραπληρωματικαὶ (87, Πόρισμα 1). Ἂν ἑπομένως ἡ μία τούτων εἶναι ὀρθὴ θὰ εἶναι ὅλαι αἱ γωνίαι ὀρθαί.

198. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ δύο διάμεσοι ὀρθογωνίου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἑκάστη τούτων εἶναι μεσοκάθετος τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ὁποίων διέρχεται.

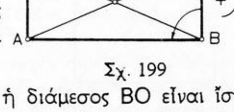
Σημειοῦμεν ὅτι :

Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι συμμετρικαὶ ἀλλήλων ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν διαμέσων αὐτοῦ.

199. ΘΕΩΡΗΜΑ. 1. Παντὸς ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, καὶ

2. Ἂν παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι, τότε τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις. 1. Αἱ διαγώνιοι εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν διαμέσων τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ ἑπομένως ἴσαι. (Σχ. 199)

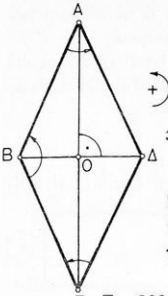


Σχ. 199

2. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 199) τοῦ ὁποίου ἡ διάμεσος ΒΟ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΑΓ, εἰς τὴν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ, ἔχομεν (127) ὅτι $(ΒΓ, ΒΑ) = \frac{\pi}{2}$.

Ο ΡΟΜΒΟΣ

200. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ρόμβος *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραί εἶναι ἴσαι* (Σχ. 200).



Σχ. 200

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Κάθε παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, εἶναι ρόμβος.*

Πράγματι, ἔστω ὅτι ΑΒ = ΔΑ. Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι (191) : ΑΒ = ΓΔ καὶ ΔΑ = ΒΓ. Ὥστε ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι.

2. Κάθε ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον.

201. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς ρόμβου [1] **εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.**

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν ΑΒ = ΑΔ καὶ ΓΒ = ΓΔ ἕπεται ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΒΔ τοῦ ρόμβου (149).

Δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς διαγωνίου ΑΓ.

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦνται καὶ κεῖνται ἐπὶ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του.*

202. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀπέναντι κορυφὰς τετραπλεύρου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ,τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Δύο οἱαιδήποτε διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου τούτου εἶναι ἴσαι, ὡς συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διαγώνιον εὐθεῖαν ΑΓ ἢ τὴν ΒΔ.

203. ΘΕΩΡΗΜΑ. Κάθε παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις. Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται (193). Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ἔχομεν ὅτι ἑκάστη τούτων κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς ἄλλης. Οὕτω, θὰ εἶναι ΑΒ = ΑΔ.

ΤΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΝ

204. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τετράγωνον *ὀνομάζεται κάθε τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαὶ καί αἱ πλευραὶ ἴσαι* (Σχ. 204).

Σχ. 204

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *1. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ρόμβος καὶ ὀρθογώνιον.*

2. Ἵνα ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθὴν καὶ δύο προσκειμένας πλευρὰς ἴσας.

---

1. Διαγώνιοι εὐθεῖαι.

3. Ἵνα ἕνα τετράπλευρον εἶναι τετράγωνον πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ νὰ διχοτομοῦνται καὶ νὰ εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

4. Κάθε τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας : τὰς δύο διαγωνίους καὶ τὰς δύο διαμέσους εὐθείας αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Θεωροῦμεν: ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ἕνα τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΒΔ, τὸ συμμετρικὸν Γ' τῆς κορυφῆς Γ αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸ Ρ καὶ τὰς προβολὰς Η καὶ Κ τοῦ Γ' ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, τὰ σημεῖα Κ, Η, Ρ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2. Θεωροῦμεν ρόμβον ΑΒΓΔ καὶ τὰ ὀρθόκεντρα Η καὶ Η' τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι 1. Τὰ σημεῖα Η καὶ Η' κεῖνται ἐπὶ τῆς ΑΓ. 2. Τὸ τετράπλευρον ΒΗΔΗ' εἶναι ρόμβος.

3. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ ἕνα σημεῖον Μ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΜΒ $<$ ΜΔ.

4. Θεωροῦμεν τετράγωνον ΑΒΓΔ καὶ δύο τυχούσας εὐθείας ε καὶ ε' καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Ἔστωσαν Α' καὶ Γ' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε μὲ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως, καὶ Β' καὶ Δ' τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς ε' μὲ τὰς ΒΓ καὶ ΑΔ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι Α'Γ' $=$ Β'Δ'.

5. Θεωροῦμεν: τετράγωνον ΑΒΓΔ, τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΕ (Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖνται αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Δ) καὶ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΒΓΖ (Ζ πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α καὶ Δ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

6. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀντιστοίχως καὶ κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀντιστοίχων εὐθειῶν (ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ θεωρούμεναι πλευραὶ) πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ παραλληλόγραμμον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ κέντρα τῶν ἀνωτέρω τετραγώνων εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

7. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ μέρος ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ τρίγωνον, τὰ τετράγωνα ΒΓΔΕ, ΓΑΖΗ καὶ ΑΒΙΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: 1. Ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΚΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. 2. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΒΗ καὶ ΓΙ κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΜ. 3. Ἂν εἶναι Β' καὶ Γ' τὰ κέντρα τῶν τετραγώνων ΓΑΖΗ καὶ ΑΒΙΚ ἀντιστοίχως καὶ Α' τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε: Α'Β' $=$ Α'Γ' καὶ ἡ γωνία (Α'Β', Α'Γ') εἶναι ὀρθή. 4. Αἱ μεσοκάθετοι τῶν εὐθ. τμημάτων ΖΚ, ΙΒ, ΔΗ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ὁμὰς 2α

1. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τῶν εὐθειῶν α καὶ β ἀντιστοίχως ἔχουν: (1) δοθὲν ἄθροισμα λ. (2) δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

Περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν αἱ ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τὰς α καὶ β ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ.

2. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τὸ Ο εὐθεῖαν, τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν αὐτῆς μὲ τὴν ε καὶ τὰς προβολὰς τοῦ Ο ἐπὶ τὰς διχοτόμους αὐτάς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἀνωτέρω προβολῶν.

3. Δίδονται ἐπ' εὐθείας ε δύο σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Γ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ε τὰ τετράγωνα ΑΓΔΕ καὶ ΓΒΖΗ τῶν ὁποίων ἔστωσαν Ι καὶ Κ τὰ κέντρα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΙΚ.

4. Δίδεται ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ. Ὀνομάζομεν Β' καὶ Γ' τὰς προβολὰς τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης διὰ τὸ ὁποῖον τὸ εὐθ. τμῆμα Β'Γ' εἶναι ἐλάχιστον.

5. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΓΔ ὥστε: ΑΜ = ΑΒ + ΜΔ.

6. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐκ τῶν ὁποίων τὸ τὸ Α κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς β πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ α καὶ τὸ Β πρὸς τὸ μέρος τῆς α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ β. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΜΝ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ ἡ πολυγωνικὴ γραμμὴ ΑΜΝΒ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

7. Δίδεται ὀξεῖα γωνία (ΟΧ,ΟΥ) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐσωτερικὰ αὐτῆς. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΟΧ καὶ ΟΥ δύο σημεῖα Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ περίμετρος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΑΧΥΒ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

8. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ ἐσωτερικὰ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Χ καὶ Υ τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ὥστε ἡ περίμετρος τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΡΧΥΣ νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

9. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Α' τῆς πλευρᾶς ΑΒ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως τρία σημεῖα Β', Γ', Δ' ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου Α'Β'Γ'Δ' νὰ εἶναι ἐλαχίστη.

10. Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν α, β, καὶ γ, δ καὶ ἕνα σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ, τέμνουσα τὰς α, β, γ, δ ὥστε ἂν εἶναι Α, Β, Γ, Δ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι ΑΒ = ΓΔ.

11. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ὥστε ἂν εἶναι Χ καὶ Υ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι ΑΧ = ΓΥ.

12. Νὰ κατασκευασθῇ πεντάγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν.

13. Νὰ κατασκευασθῇ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων: (1) α, γ, Α, Β, Γ (2) Μέσων Μ, Ν, Ρ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ἀντιστοίχως καὶ τῆς συνθήκης α = β = γ.

14. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ἐκ τῶν στοιχείων :

Σημεῖα : (1) Β, Ε. Ζ, Σ. (2) Μ, Ν, Σ, Ζ. (3) Α, Β, Γ, Ζ. (4) Α, Β, Γ, Κ. (5) Α, Β, Ν, Ρ. (6) Α, Β, Ν, Ζ. (7) Α, Β, Ν, Κ. (8) Α, Β, Ζ, Κ. (9) Α, Μ, Ν, Ρ. (10) Α, Μ, Ν, Ζ. (11) Α, Μ, Ν, Κ. (12) Μ, Ν, Ζ, Κ.

(Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ, Κ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν διαγωνίων καὶ Μ, Ν, Ρ, Σ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἀντιστοίχως).

15. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται : (1) Αἱ διαγώνιοι, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ γωνία (ΒΑ, ΒΔ). (2) Ἡ βάσις α, αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν (3) Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα λ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του (4) Αἱ βάσεις α, γ, καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β. (5) Αἱ βάσεις α, γ, τὸ ὕψος υ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως εἶναι ἰσοσκελές. (6) Αἱ διαγώνιοι, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ γωνία Α.

16. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται: (1) Αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν. (2) Ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ γωνία (ΒΑ, ΒΔ) καὶ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ). (3) Ἡ πλευρὰ ΑΒ, ἡ γωνία Α καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ΑΒ. (4) Τὰ μέσα τριῶν πλευρῶν του.

17. Εἰς δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον, ἔχον ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο.

18. Θεωροῦμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ Α καὶ Γ εἶναι δοθέντα σημεῖα καὶ αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ Β καὶ Δ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν β καὶ δ, παραλλήλων πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐκ τούτων ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

19. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται: (1) Ἡ διαφορὰ λ δύο προσκειμένων πλευρῶν καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του (2). Ἡ περίμετρος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων.

20. Δίδεται ρόμβος ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν ρόμβον, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ρόμβου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐκ τούτων ἔχον: (1) Τὴν μεγίστην (ἢ ἐλαχίστην) περίμετρον. (2) Τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα διαγωνίων.

21. Νὰ κατασκευασθῇ ρόμβος ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται: (1) Μία κορυφὴ αὐτοῦ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον. (2) Ἡ διεύθυνσις μιᾶς διαγωνίου του καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ πλευραί του διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα.

22. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ ὅταν δίδωνται: (1) Ἡ διαγώνιος αὐτοῦ. (2) Τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) διαγωνίου καὶ πλευρᾶς. (3) Ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς ἀπὸ μιᾶς διαγωνίου. (4) Ἡ κορυφὴ Α καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Δ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν. (5) Ἡ συνθήκη ὅπως εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον (Αἱ κορυφαί του εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου.)

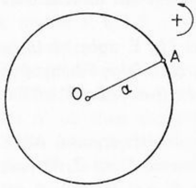
23. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ τετράγωνα ΒΓΔΕ καὶ ΓΑΖΗ (Δ, Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Α καὶ Ζ,Η πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΓΑ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΗ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

24. Θεωροῦμεν ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΓΑΖΗ (Δ, Ε πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Γ καὶ Ζ, Η πρὸς τὸ μέρος τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β) καὶ τὰς προβολὰς Δ' καὶ Η' τῶν Δ καὶ Η ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) ΔΔ' + ΗΗ' = ΒΓ. (2) Τὰ σημεῖα Δ, Α, Η κεῖνται ἀπ' εὐθείας. (3) Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΔΕ καὶ ΖΗ κεῖται ἐπὶ τῆς διὰ τοῦ Α καθέτου ἐπὶ τὴν ΒΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ο ΚΥΚΛΟΣ

205. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ὀνομάζομεν* **κύκλον** *ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, κάθε σύνολον σημείων Μ αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης : ΟΜ = α, ὅπου Ο δοθὲν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ α δοθὲν εὐθ. τμῆμα.*



Σχ. 205

Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **κέντρον** τοῦ κύκλου καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα α **ἀκτίς,** αὐτοῦ.

Ἂν ἑπομένως συμβολίσωμεν τὸν κύκλον κέντρου Ο καὶ ἀκτῖνος α μὲ τὸ σύμβολον (Ο, α) [1] θὰ ἔχωμεν :

$$(О, α) = \{ Μ : ΟΜ = α \}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου ἕπεται ὅτι :

Κάθε ἡμιευθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου Ο κύκλου (Ο,α) περιέχει ἕνα σημεῖον Μ αὐτοῦ καὶ ἕνα μόνον (23) καί,

Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου περιέχει δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τοῦ κύκλου καὶ μόνον δύο. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

206. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἕνα σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου (Ο,α) θὰ ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν σημεῖον** αὐτοῦ, ὅταν εἶναι ΟΑ $<$ α Τὸ σύνολον τῶν ἐσωτερικῶν σημείων κύκλου (Ο,α) ὀνομάζεται **ἐσωτερικὸν** αὐτοῦ. Ἕνα σημεῖον Β τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου (Ο), θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν σημεῖον** αὐτοῦ, ὅταν εἶναι ΟΑ $>$ α. Τὸ σύνολον τῶς ἐξωτερικῶν σημείων τοῦ κύκλου ὀνομάζεται **ἐξωτερικὸν** αὐτοῦ.

207. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε εὐθ. τμῆμα ΑΒ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι σημεῖα τοῦ (Ο) ὀνομάζεται* **χορδὴ** *αὐτοῦ.*

Κάθε χορδὴ τοῦ κύκλου περιέχουσα τὸ κέντρον ὀνομάζεται **διάμετρος** αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα Α καὶ Α′ κάθε διαμέτρου κύκλου εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κέντρον του καὶ ὀνομάζονται, συνήθως, **ἀντιδιαμετρικὰ** σημεῖα τοῦ κύκλου.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Κάθε κύκλος ἔχει ἕνα μόνον κέντρον Ο.*

Πράγματι, ἂν εἶχε δύο κέντρα, τότε ἡ διάμετρος αὐτοῦ, ἡ περιέχουσα τὰ κέντρα θὰ εἶχε δύο μέσα.

---

(1) Ἀντὶ τοῦ συμβόλου (Ο, α) χρησιμοποιεῖται καὶ τό : Ο (α).

2. Μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνας κύκλος (O) δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

Πράγματι, ἂν εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα Α,Β,Γ, θὰ εἴχομεν: ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Ἀλλὰ τότε ἂν εἶναι Ι καὶ Ι′ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ΟΙ καὶ ΟΙ′ θὰ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τὴν ε (109). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (81).

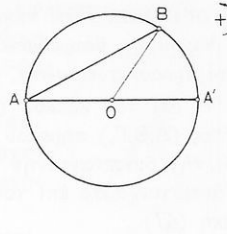
3. Δύο οἱαιδήποτε διάμετροι τοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.

Πράγματι, ἑκάστη τούτων εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος α τοῦ κύκλου.

Κάθε χορδὴ ΑΒ κύκλου (O) (¹) *εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου ΑΑ′ αὐτοῦ.*

Ἑπομένως εἶναι μικροτέρα κάθε διαμέτρου τοῦ (O).

Πράγματι, ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΟΒ (Σχ. 207) ἔχομεν: $AB < OA + OB$, καὶ ἐπειδὴ $OB = OA'$: $AB < OA + OA'$, ἤτοι $AB < AA'$.

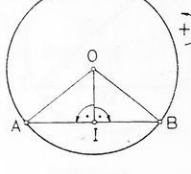


Σχ. 207

208. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον Ο ἑνὸς κύκλου (Ο) μὲ τὸ μέσον Ι οἱασδήποτε χορδῆς ΑΒ αὐτοῦ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΙ καὶ ΟΒΙ (Σχ. 208.1). Ἔχομεν (79, Πόρισμα) ὅτι: $(IO, IA) = -(IO, IB)$.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου Ο κύκλου* (O) *ἐπὶ οἱανδήποτε εὐθεῖαν ὁριζομένην ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ, εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ* (109, Πόρισμα).



Σχ. 208.1

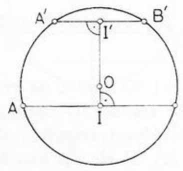
2. Ἡ μεσοκάθετος κάθε χορδῆς ΑΒ κύκλου (O) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του (149).

Ἑπομένως τὸ κέντρον τοῦ (O) εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων δύο οἱωνδήποτε χορδῶν αὐτοῦ.

3. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα Ι καὶ Ι′ δύο παραλλήλων χορδῶν(²) *ΑΒ καὶ Α′Β′ κύκλου (O), διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ.*

4. Ἂν δύο χορδαὶ κύκλου (O) διχοτομοῦνται, τότε τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (O).

Ἤτοι αἱ ἐν λόγῳ χορδαὶ εἶναι διάμετροι τοῦ (O). Πράγματι, ἂν τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν χορδῶν τούτων ἦτο διάφορον τοῦ κέντρου Ο, τότε ἡ εὐθεῖα ΟΙ θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς δύο χορδὰς (εὐθείας). Τοῦτο ὅμως εἶναι (81) ἄτοπον.



Σχ. 208.3

---

(1) Ὅταν δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ μνημονεύεται ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (O, α), θὰ συμβολίζεται οὗτος μὲ τὸ σύμβολον (O).

(2) Αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α′Β′ ὀνομάζωνται, συνήθως, παράλληλοι, ὅταν αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αὗται εἶναι παράλληλοι.

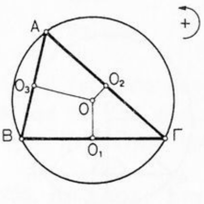
5. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων χορδῶν κύκλου (O) *δοθείσης διευθύνσεως, εἶναι ἡ διάμεσος τοῦ* (O) *ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.*

6. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω) τοῦ ἐπιπέδου, ἕκαστος τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B αὐτοῦ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB.

209. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Κάθε κύκλος* (O) *εἰς τὸν ὁποῖον ἔχομεν προσαρτήσει μίαν φορὰν διαγραφῆς, θεωρούμενος εἰς τὸ προσημασμένον, ἢ ὅπως συνήθως λέγομεν εἰς τὸ προσανατολισμένον, ἐπίπεδον ὀνομάζεται* **προσανατολισμένος** *κύκλος* (1).

Ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου (O) φορὰ δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐκ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος (A,B,Γ,) σημείων αὐτοῦ(2), καὶ εἶναι ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητικὴ καθ' ὅσον ἡ εἰς τὴν διατεταγμένην τριάδα τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου O ἡμιευθειῶν OA, OB, OΓ ἀντιστοιχοῦσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου φορὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἡ θετικὴ ἢ ἡ ἀρνητικὴ (47).

210. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Μια διατεταγμένη τριὰς (A,B,Γ) σημείων τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ὁρίζει ἕνα προσανατολισμένον κύκλον.**



Σχ. 210

Ἀπόδειξις. Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων (περίκεντρον) τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (129) καὶ ἡ ἀκτὶς τὸ εὐθ. τμῆμα (OA = OB = = OΓ). Ἡ ἐπὶ τοῦ κύκλου φορὰ ὁρίζεται ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος (A, B, Γ) σημείων αὐτοῦ (3).

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν ἕνα σημεῖον O ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τριῶν σημείων A, B, Γ ἑνὸς κύκλου (O), τότε τοῦτο εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (O).*

ΤΟΞΟΝ ΚΥΚΛΟΥ — ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΣ ΓΩΝΙΑ

211. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν κύκλον (O) καὶ δύο σημεῖα A καὶ B αὐτοῦ. *Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας AB ὀνομάζεται* **τόξον** *τοῦ κύκλου* (4).

Τὰ σημεῖα A καὶ B ὀνομάζονται **ἄκρα σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **ἄκρα** τοῦ τόξου.

---

(1) Ὁ κύκλος μὲ τὴν προσαρτηθεῖσαν εἰς αὐτὸν φορὰν εἶναι, καθ' ἑαυτόν, ἕνας προσημασμένος κύκλος. Ὁ προσημασμένος οὗτος κύκλος, ἐν ἀναφορᾷ πρὸς τὸ προσημασμένον (προσανατολισμένον) ἐπίπεδον, εἶναι προσανατολισμένος.

(2) Ἡ εἰς τὴν ἀνωτέρω διατεταγμένην τριάδα (A, B, Γ), ἢ (47) τὴν τριάδα (σA, σB. σΓ), ἀντιστοιχοῦσα φορὰ εἶναι ἡ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ κινηθῇ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἕνα σημεῖον, M ὥστε νὰ λάβῃ διαδοχικῶς τὴν θέσιν τῶν σημείων A, B, Γ, κατὰ τὴν σημειωθεῖσαν τάξιν.

(3) Αἱ τριάδες (A, B, Γ), (B, Γ, A), (Γ, A, B) ὁρίζουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ κύκλου, καὶ αἱ (A, Γ, B), (Γ, B, A), (A, A, Γ) τὴν ἀντίθετον αὐτῆς.

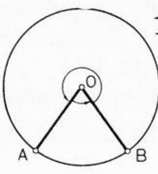
(4) Ὅτι ὑπάρχουν δύο σύνολα σημείων τοῦ κύκλου ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας AB ἀποδεικνύεται εὐκόλως :

Τὸ σημεῖον Α ὀνομάζεται **ἀρχὴ** ἢ ἀρχικὸν σημεῖον καὶ τὸ Β **πέρας** ἢ τελικὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΒ (Σχ. 211).

Ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΒ) τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ αἱ πλευραὶ περιέχουν τὰ σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο) ὀνομάζεται **ἐπίκεντρος γωνία** ἀντίστοιχος τοῦ τόξου ΑΒ.

Σημεῖα τόξου ΑΒ κύκλου (Ο), ἀντιστοίχου τῆς ἐπικέντρου κυρτῆς ἢ μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ὀνομάζομεν τὰ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης σημεῖα τοῦ (Ο) καὶ τὰ σημεῖα τοῦ (Ο) τὰ ἐσωτερικὰ τῆς θεωρουμένης γωνίας.

Τὸ τόξον ΑΒ κύκλου (Ο) θεωρεῖται **θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένον,** καθ' ὅσον ἡ ἀντίστοιχος αὐτοῦ ἐπίκεντρος γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς προσανατολισμένη ἀντιστοίχως.



Σχ. 211

Τὰ δύο τόξα ΑΒ τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ἐσωτερικὰ τῆς κυρτῆς καὶ τῆς μὴ κυρτῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) ἀντιστοίχως,. εἶναι τὸ **ἔλασσον** καὶ τὸ **μεῖζον** τόξον ΑΒ.

212. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ χορδὴ ΑΒ κύκλου (Ο) ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ ἐλάσσονος ἢ μείζονος τοῦ τόξου ΑΒ τοῦ (Ο) δύναται νὰ ὀνομάζεται **ἀντίστοιχος** τοῦ θεωρουμένου ἐλάσσονος ἢ μείζονος τόξου ΑΒ.

Ἂν ἡ χορδὴ ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ (Ο), ἕκαστον τῶν ἀντιστοίχων αὐτῆς τόξων ΑΒ ὀνομάζεται **ἡμικύκλιον.**

213. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κύκλοι (Ο) καὶ* (Ο′) *θὰ ὀνομάζωνται* **ἴσοι,** *ὅταν αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.*

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν τὴν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου καὶ τὸ μέσον Ι τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ, ἐκ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ) προκύπτει ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λόγῳ τούτου (123) ὅτι ΟΙ<ΟΑ. Ἂν εἶναι Ζ καὶ Ζ′ τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τοῦ (Ο) τῆς κειμένης ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΙ (Σχ. 211.1), θὰ εἶναι ΟΖ>ΟΙ, διότι ΟΑ>ΟΙ. Ἑπομένως τὸ σημεῖον Ζ τοῦ κύκλου κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Ο. Τὸ Ζ′ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Ο. (Σχ. 211.1).

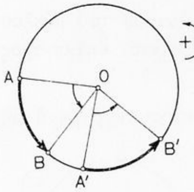
Ἂν ἡ εὐθεῖα ΑΒ περιέχῃ τὸ κέντρον Ο, τότε τὰ ἄκρα κάθε διαμέτρου τοῦ (Ο) κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ. Οὕτω, τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου χωρίζονται ἀπὸ τὰ Α καὶ Β εἰς δύο σύνολα, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα ἀντιστοιχοῦν διττῶς (ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα). Ἕκαστον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω δύο σύνολα ὀνομάζεται **ἡμικύκλιον** συζυγὲς τοῦ ἄλλου. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι τὰ ἄκρα τῶν δύο τούτων ἡμικυκλίων.

Σχ. 211.1

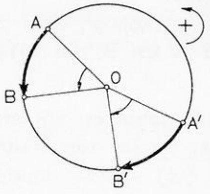
Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου (Ο) τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ κέντρον Ο αὐτοῦ ὀνομάζεται **μεῖζον** τόξον ΑΒ τοῦ (Ο). Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ (Ο) τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ κέντρον ὀνομάζεται **ἔλασσον** τόξον ΑΒ τοῦ (Ο).

Ἂν τὸ δισύνολον {Α, Β} τῶν ἄκρων τοῦ τόξου θεωρηθῇ διατεταγμένον τὸ ὑπὸ τῶν σημείων τούτων Α καὶ Β ὁριζόμενον, μεῖζον ἢ ἔλασσον, τόξον ΑΒ, ὀνομάζεται **προσανατολισμένον τόξον** ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $\overset{\frown}{\vec{AB}}$.

214. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δύο κυκλικὰ τόξα ΑΒ καὶ Α′Β′ ὀνομάζονται* **ἴσα** (Σχ. 212.1) *ἢ* **ἀντίθετα,** (Σχ. 212.2) *ὅταν ἀνήκουν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους ἀντιστοίχως, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἀντστοίχως ἴσαι ἢ ἀντίθετοι.*



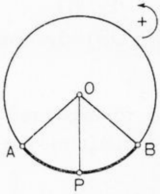
Σχ. 212.1



Σχ. 212.2

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων τόξων ἑνὸς κύκλου (Ο) ἢ κύκλων ἴσων πρὸς ἀλλήλους, ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος : αὐτοπαθὴς ἢ ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.*

Αἱ ἰδιότητες αὗται ἀποδεικνύονται διὰ τῆς θεωρήσεως τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων, ἑνὸς κύλου (Ο) ἢ κύκλων ἴσων πρὸς ἀλλήλους, ἐπιτρέπει τὸν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου τούτου εἰς **κλάσεις.** Ἑκάστη τούτων δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα πεζὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου φέρον τὴν ἔνδειξιν $\overrightarrow{\ }$ π.χ. $\overrightarrow{\alpha}$.



Σχ. 212.3

2. Ἂν εἶναι Ρ τὸ ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας (ΟΑ, ΟΒ) σημεῖον τοῦ ἀντιστοίχου αὐτῆς τόξου ΑΒ, τὰ τόξα $\overrightarrow{AP}$ *καὶ* $\overrightarrow{PB}$ *εἶναι ἴσα.*

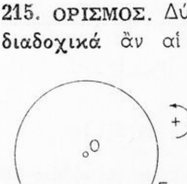
Τὸ σημεῖον Ρ ὀνομάζεται **μέσον σημεῖον** ἢ ἁπλῶς **μέσον** τοῦ τόξου τούτου ΑΒ.

Αἱ σχέσεις διατάξεως εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων κύκλου (Ο) ἢ ἴσων πρὸς ἀλλήλους κύκλων, ὁρίζονται, ὅπως καὶ ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος, διὰ τῆς θεωρήσεως τῶν ἀντιστοίχων πρὸς αὐτὰ ἐπικέντρων γωνιῶν. Ἤτοι ἔχομεν:

Ἂν εἶναι α καὶ β ἀντιστοίχως, αἱ κλάσεις τῶν τόξων αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ δύο τόξα ΑΒ καὶ ΕΖ καὶ α′ καὶ β′ αἱ κλάσεις τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰ ἀνωτέρω τόξα ἐπικέντρων γωνιῶν (ΟΑ, ΟΒ) καὶ (ΟΕ, ΟΖ), θὰ σημειοῦμεν:

$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha' > \beta'$ κλπ.

215. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο τόξα ΑΒ καὶ ΒΓ τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Ο), ὀνομάζονται **διαδοχικὰ** ἂν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι διαδοχικαί.



Σχ. 215

Ὀνομάζομεν **ἄθροισμα** δύο τάξεων α καὶ β τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Ο) ἢ ἴσων κύκλων, κατὰ τὴν θεωρουμένην τάξιν, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ τὸ σύμβολον α + β, τὸ τόξον τοῦ ὁποίου ἡ κλάσις γ ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα τόξον τοῦ κύκλου (Ο) τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων πρὸς τὰ τόξα α καὶ β ἐπικέντρων γωνιῶν τοῦ κύκλου (Ο). Θὰ σημειοῦμεν συμβολικῶς : $\gamma = \alpha + \beta$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἀθροίσματος δύο τόξων ἕπεται ὅτι :

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εἰς τὸ σύνολον τῶν προσανατολισμένων τόξων κύκλου* [1] *ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως : μονότροπος, μεταθετικὴ καὶ προσεταιριστική.*

Βάσει τῆς τελευταίας δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο τόξων.

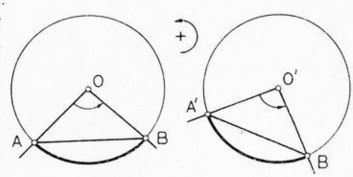
Σημειοῦμεν ὅτι :

(1) Τὸ **μηδενικὸν τόξον** καὶ τὸ **ἀντίθετον** δοθέντος τόξου α, κύκλου (Ο), ὁριζόμενον ἐκ τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν, εἶναι ἀντιστοίχως τὸ οὐδέτερον καὶ τὸ ἀντίθετον στοιχεῖον τῆς προθέσεως εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων ἑνὸς κύκλου (Ο) ἢ κύκλων ἴσων πρὸς ἀλλήλους.

(2) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ ἀναφερόμενα εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ὁρίζεται ἡ **διαφορὰ** δύο τόξων α καὶ β τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων, ὡς καὶ τὸ **γινόμενον** τόξου α ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν.[2]

216. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο), ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο′), εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσα μείζονα ἢ ἐλάσσονα τόξα καὶ ἀντιστρόφως.

᾿Απόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒ καὶ Α′Β′ αἱ ἴσαι χορδαί. Ἐκ τῶν ἴσων (79) τριγώνων ΑΟΒ καὶ Α′Ο′Β′ (Σχ. 216), ἕπεται ὅτι (ΟΑ, ΟΒ) = (Ο′Α′, Ο′Β′) καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι ΑΒ = Α′Β′. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν αὐτῶν τριγώνων.



Σχ. 216

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Δοθείσης χορδῆς ΑΒ κύκλου (Ο) ὑπάρχει χορδὴ Α′Β′ τοῦ (Ο) ἴση πρὸς τὴν ΑΒ καὶ μία μόνον.*

Πράγματι, ὑπάρχει ἡμιευθεῖα ΑΒ′ καὶ μία μόνον ὥστε (ΟΑ, ΟΒ′) = – (ΟΑ, ΟΒ).

Τὰ σημεῖα Β καὶ Β′ (Σχ. 216.1) εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Πράγματι, εἶναι ΑΒ = ΑΒ′ καὶ ΟΒ = ΟΒ′. Ἑπομένως ἡ ΟΑ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΒΒ′.

---

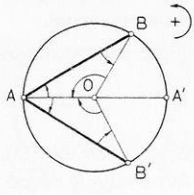
(1) Ἢ ἴσων πρὸς ἀλλήλους κύκλων.

(2) Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων κυκλικῶν τόξων δύναται νὰ καλύψῃ τὸν κύκλον περισσοτέρας τῆς μιᾶς φοράς. Γενικεύοντες τὴν ἔννοιαν τοῦ τόξου δεχόμεθα ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἕνα προσανατολισμένον τόξον.

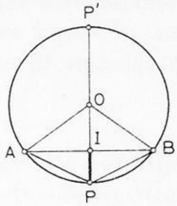
Σημειοῦμεν ὅτι :

(α) Ἡ σχέσις τῶν Chasles — Möbius ἡ ἀναφερομένη εἰς τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν, ἰσχύει, κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν τόξων κύκλου (Ο).

(β) Ὡς μέτρον τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Ο) ἢ ἴσων κύκλων, ἤτοι ὡς μοναδιαῖον τόξον, τοῦ συνόλου τῶν ἀνωτέρω τόξων δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ τόξον τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἡ θετικῶς προσανατολισμένη ὀρθὴ γωνία.



Σχ. 216.1



Σχ. 216.2

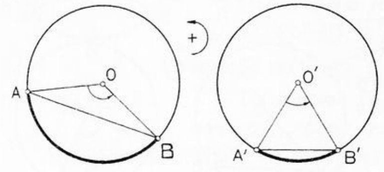
2. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ μέσον I μιᾶς χορδῆς AB κύκλου (O) καὶ ἀπὸ τὸ μέσον P τοῦ ἀντιστοίχου ἐλάσσονος ἢ μείζονος τόξου AB εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς AB.

Πράγματι, εἰς τὰ τρίγωνα OPA καὶ OPB (Σχ. 216.2) ἔχομεν OA = OB (ἀκτῖνες τοῦ κύκλου (O)) καὶ PA = PB (216). Ἑπομένως (OP, OA) = − (OP, OB).

Ἤτοι ἡ OP εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (OA, OB) τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB καὶ ἑπομένως μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς AB αὐτοῦ.

217. ΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ εὐθ. τμῆμα IP (Σχ. 216.2) τὸ συνδέον τὸ μέσον τοῦ μείζονος ἢ ἐλάσσονος τόξου AB κύκλου (O), μὲ τὸ μέσον τῆς ἀντιστοίχου χορδῆς ὀνομάζεται **βέλος** τοῦ θεωρουμένου μείζονος ἢ ἐλάσσονος τόξου

218. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (O) ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (O) καὶ (O′,) εἰς δύο ἄνισα ἐλάσσονα τόξα AB καὶ A′B′ (1) **ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισοι χορδαὶ καὶ ἀντιστρόφως εἰς ἀνίσους χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισα ἐλάσσονα τόξα.**



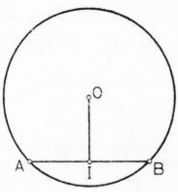
Σχ. 218

Ἀπόδειξις. Ἂν $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A'B'}$ θὰ εἶναι (OA, OB) > (O′A′, O′B′).

Ἐκ τῶν τριγώνων AOB καὶ A′O′B′ ἕπεται (122) ὅτι AB > A′B′ (Σχ. 218).

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀντιστρόφου προτάσεως προκύπτει ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν αὐτῶν τριγώνων.

219. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν **ἀπόστημα** χορδῆς AB κύκλου (O), τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (O) ἀπὸ τοῦ μέσου I τῆς χορδῆς AB (Σχ. 219).



Σχ. 219

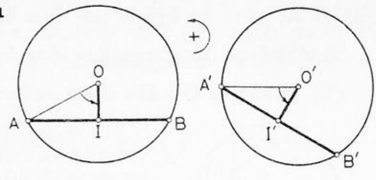
Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα OI εἶναι (208) κάθετος ἐπὶ τὴν AB τὸ ἀπόστημα τῆς χορδῆς AB εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τῆς εὐθείας AB.

(1) Θετικῶς προσανατολισμένα.

220. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο'): Ἂν δύο χορδαὶ εἶναι ἴσαι, τότε καὶ τὰ ἀποστήματα αὐτῶν εἶναι ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἂν ΑΒ = Α'Β', τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΟΑΙ καὶ Ο'Α'Ι' (115, Πόρισμα).

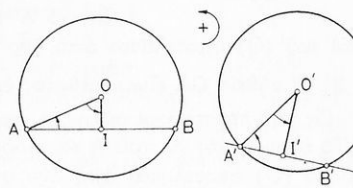
Ἂν ΟΙ = Ο'Ι', τὸ ἀποδεικτέον προκύπτει ἐπίσης ἐκ τῶν ἀνωτέρω τριγώνων ΟΑΙ καὶ Ο'Α'Ι'. (115, Πόρισμα).



Σχ. 220

221. ΘΕΩΡΗΜΑ. Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους (Ο) καὶ (Ο'): Ἂν δύο χορδαὶ εἶναι ἄνισοι τότε καὶ τὰ ἀποστήματα αὐτῶν εἶναι ἄνισα καὶ εἰς τὴν μεγαλυτέραν χορδὴν ἀντιστοιχεῖ τὸ μικρότερον ἀπόστημα καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἂν ΑΒ > Α'Β' θὰ εἶναι καὶ ΙΑ > ΙΑ' (Σχ. 221). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΟΑΙ καὶ Ο'Α'Ι' ἔχομεν (122, Πόρισμα 2) ὅτι (ΟΑ, ΟΙ) > (Ο'Α', Ο'Ι') καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι (ΑΙ, ΑΟ) < (Α'Ι', Α'Ο').



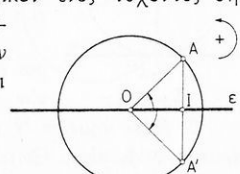
Σχ. 221

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς ἕπεται (122, Πόρισμα 1) ὅτι ΟΙ < Ο'Ι'.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀντιστρόφου προτάσεως προκύπτει ἐκ τῆς θεωρήσεως τῶν αὐτῶν τριγώνων (122, Πορίσματα 1 καὶ 2).

222. ΘΕΩΡΗΜΑ. Κάθε εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου κύκλου (Ο), εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις. Ἂν εἶναι Α (Σχ. 222) τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς τυχόντος σημείου Α τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΙΑ καὶ ΟΙΑ' ἕπεται (112) ὅτι ΟΑ' = ΟΑ, ἤτοι Ο'Α' = α, ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τοῦ (Ο).



Σχ. 222

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Δύο ἴσα ἢ ἀντίθετα τόξα ΑΒ καὶ Α'Β' κύκλου (Ο) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν διερχομένην διὰ κέντρου Ο τοῦ (Ο).*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

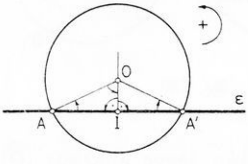
1. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐσωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν χορδῶν τοῦ κύκλου (Ο) αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὸ σημεῖον Α, ἡ μικροτέρα εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ.

ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

223. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν μία εὐθεῖα ε καὶ ἕνας κύκλος (Ο) ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, τότε θὰ ἔχουν καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α'.**

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι δύο περιπτώσεις εἶναι δυναταί.

(1) Ἡ εὐθεῖα ΟΑ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε.



Σχ. 223

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θεωροῦμεν τὴν κάθετον ΟΙ ἐπὶ τὴν ε (Ι ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε). Τὸ σημεῖον Ι εἶναι διάφορον τοῦ Α. Τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ι, εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο). Πράγματι, ἐκ τῶν τριγώνων ΟΑΙ καὶ ΟΑ'Ι ἔχομεν (112) ὅτι : ΟΑ' $=$ ΟΑ, ἤτοι ὅτι ΟΑ' $=$ $=$ α, ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τοῦ (Ο). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ Α' εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο). Ὥστε ἡ τομὴ τῆς ε καὶ τοῦ (Ο) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σημεῖα διάφορα ἀλλήλων.

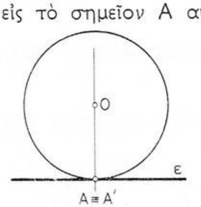
2) Ἡ εὐθεῖα ΟΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ προβολὴ Ι τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε εἶναι τὸ σημεῖον Α. Τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Ι συμπίπτει μὲ τὸ Α. Ἡ τομὴ τῆς ε καὶ τοῦ (Ο) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Α' συμπίπτοντα εἰς ἕν.

ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ

224. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν ἡ τομὴ εὐθείας ε καὶ κύκλου (Ο) ἀποτελῆται ἀπὸ δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα Α καὶ Α', τότε ἡ ε λέγεται **τέμνουσα** τὸν (Ο).

Ἂν ἡ τομὴ τῆς ε καὶ τοῦ (Ο) ἀποτελῆται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, ἤτοι δύο σημεῖα Α καὶ Α' συμπίπτοντα εἰς ἕν, τότε ἡ ε ὀνομάζεται **ἐφαπτομένη** τοῦ (Ο) εἰς τὸ σημεῖον Α αὐτοῦ (Σχ. 224).



Σχ. 224

Τὸ σημεῖον Α ὀνομάζεται **σημεῖον ἐπαφῆς** τῆς ε καὶ τοῦ (Ο).

ΠΟΡΙΣΜΑ *1. Ἡ ἐφαπτομένη κύκλου (Ο) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ.*

Πράγματι, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν ἡ ἀνωτέρω ἐφαπτομένη θὰ εἶχε μὲ τὸν (Ο) καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α' διάφορον τοῦ Α (223.1).

2. Κάθε σημεῖον Ν τῆς ἐφαπτομένης κύκλου (Ο) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ, διάφορον τοῦ Α, εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (Ο).

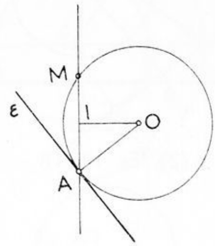
Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΝ ἔχομεν ὅτι ΟΝ $>$ ΟΑ ἤτοι ΟΝ $>$ α.

3. Ἡ διὰ τοῦ σημείου Α κύκλου (Ο) κάθετος ξ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο).

Πράγματι, εἰς τὴν ἀντίθετον περίπτωσιν θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ε εἰς τὸ σημεῖον Α : ἡ ξ καὶ ἡ ΟΑ.

Ἐπὶ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης κύκλου (Ο) κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτοῦ παρατηροῦμεν:

Ἂν τὸ Α εἶναι ἕνα σταθερὸν σημεῖον τοῦ (Ο) καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἐφαπτομένην τοῦ (Ο) κατὰ τὸ Α τὴν θέσιν τῆς τεμνούσης ΑΜ τὸν κύκλον (Ο) τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν περίπτωσιν $M \equiv A$.



Σχ. 224.1

Πράγματι, διὰ κάθε σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ἡ εὐθεῖα ΟΙ, ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τὸ μέσον Ι τῆς χορδῆς ΑΜ, εἶναι (208) κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ. Εἰς τὴν περίπτωσιν $M \equiv A$, τὸ σημεῖον Ι ταυτίζεται πρὸς τὰ Α καὶ Μ καὶ ἡ εὐθεῖα ΟΙ πρὸς τὴν ΟΑ. Ἑπομένως ἡ ἀντίστοιχος πρὸς τὴν ΟΙ ($\equiv$ ΟΑ) εὐθεῖα ΑΜ εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΙ ($\equiv$ ΟΑ), ἤτοι (224, Πόρισμα 1) ἡ ἐφαπτομένη ε τοῦ κύκλου (Ο) κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτοῦ.

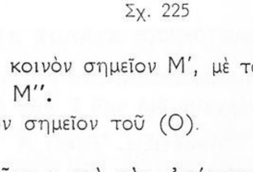
Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ εἰς τὸ Α ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) εἶναι ἡ ὁρικὴ θέσις τῆς διὰ τοῦ Α τεμνούσης ΑΜ τοῦτον, τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν θέσιν τοῦ σημείου Μ τοῦ (Ο) τὴν συμπίπτουσαν μὲ τὴν τοῦ Α.

4. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω), ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς εἶναι ἡ εἰς τὸ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ε.

226. ΑΞΙΩΜΑ. *Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον κύκλου (Ο), τότε μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ὑπάρχει τουλάχιστον ἕνα σημεῖον τοῦ (Ο).*

Σημειοῦμεν ὅτι:

Ἂν εἶναι Μ τὸ σημεῖον τοῦτο (Σχ. 225), δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ καὶ δεύτερον σημεῖον Μ'' τοῦ (Ο) μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, διότι τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ὁ κύκλος (Ο) θὰ εἶχον κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.



Σχ. 225

Πράγματι, ἡ ΟΜ δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ διότι τότε ἡ ΑΒ θὰ ἦτο ἡ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) εἰς τὸ Μ, καὶ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς, ἑπομένως καὶ τὰ Α, Β, θὰ ἦσαν ἐξωτερικὰ τοῦ (Ο), ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως τὸ Α εἶναι ἐσωτερικὸν αὐτοῦ.

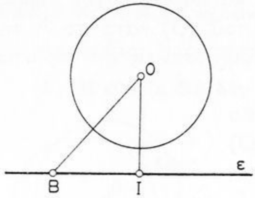
Λόγῳ τούτου ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχει ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Μ', μὲ τὸν (Ο) (223), τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τῶν Μ καὶ Μ''.

Ὥστε μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ὑπάρχει ἕνα μόνον σημεῖον τοῦ (Ο).

226. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν: κύκλον Ο (α), εὐθεῖαν ε καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΙ τοῦ κέντρου τοῦ (Ο) ἀπὸ τῆς (ε).

(1) Ἂν ΟΙ $>$ α, τότε ἡ ε δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (Ο).

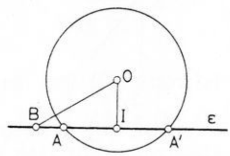
(2) Ἂν $OI < \alpha$, **τότε ἡ ε εἶναι τέμνουσα τὸν (O).**
(3) Ἂν $OI = \alpha$, **τότε ἡ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O).**



Σχ. 226.1

Ἀπόδειξις. (1) Ἐκ τῆς OI > α ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον I (προβολὴ τοῦ O ἐπὶ τὴν ε) εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Ἐξ ἄλλου κάθε σημεῖον B τῆς ε, διάφορον τοῦ I, εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OBI ἔχομεν ὅτι OB > OI (120) καὶ ἑπομένως OB > α, ἀφοῦ OI > α. Ὥστε τὸ B εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O).

(2) Ἐκ τῆς OI < α ἕπεται ὅτι τὸ I εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O).



Σχ. 226.2

Θεωροῦμεν (Σχ. 226.2) τῆς ε, ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἡμιευθείας αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀρχικὸν σημεῖον τὸ I, τὸ σημεῖον B ὥστε IB = α (α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου (O). Τὸ σημεῖον B εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Πράγματι εἶναι OB > IB (120), ἤτοι OB > α. Ὑπάρχει, ἑπομένως, μεταξὺ τῶν I καὶ B σημεῖον M τοῦ κύκλου (O) καὶ ἕνα μόνον (225). Ἔστω A τὸ σημεῖον τοῦτο. Τὸ συμμετρικὸν A′ τοῦ A, ὡς πρὸς τὸ I, εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς ε καὶ τοῦ (O), διάφορον τοῦ A.

Ὥστε ἡ ε εἶναι ἡ τέμνουσα τὸν (O).

(3) Ἐκ τῆς OI = α ἕπεται ὅτι τὸ I εἶναι σημεῖον τοῦ (O) καὶ ὅτι ἡ ε ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν OI εἰς τὸ I, εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O).

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἡ ἀντίστροφος τῆς ἀνωτέρω προτάσεως (226) ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ σημειώσωμεν :

$OI > \alpha \Leftrightarrow$ **ε δὲν ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (O).**

$OI = \alpha \Leftrightarrow$ **ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O).**

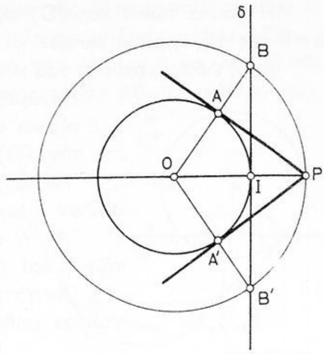
$OI < \alpha \Leftrightarrow$ **ε εἶναι τέμνουσα τὸν (O).**

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΥΚΛΟΥ ΔΙΑ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΑΥΤΟΥ

227. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν ἕνα σημεῖον P εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον κύκλου O(α), ὑπάρχουν διὰ τοῦ P δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ (O) καὶ μόνον δύο.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω A τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ μίαν ἐφαπτομένην διερχομένην διὰ τοῦ P (Σχ. 227). Τὸ τρίγωνον OAP εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν A (224, Πόρισμα 1). Ἔστω I τὸ μεταξὺ τῶν O καὶ P σημεῖον τοῦ (O). Ἡ κάθετος δ ἐπὶ τὴν OI εἰς τὸ σημεῖον I, ἡ ὁποία εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O), τέμνει τὴν OA εἰς ἕνα σημεῖον, ἔστω B. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OAP καὶ OIB ἕπεται (112) ὅτι OB = OP, ἤτοι τὸ B εἶναι σημεῖον τοῦ ὁμοκέντρου τοῦ (O) κύκλου, τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ εὐθ. τμῆμα OP.

Ὥστε τὸ σημεῖον B εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς δ καὶ τοῦ κύκλου O (OP). Ἀλλὰ ἡ δ ἔχει δύο κοινὰ σημεῖα B καὶ B′ μὲ τὸν ἀνωτέρω κύκλον O (OP), διότι ἡ ἀπόστασις OI τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τούτου ἀπὸ αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος OP αὐτοῦ. Ἑπομένως ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου O (α), διὰ τοῦ σημείου P, καὶ μόνον δύο. Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς A καὶ A′ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν OBκαὶ OB′ μὲ τὸν κύκλον O(α).

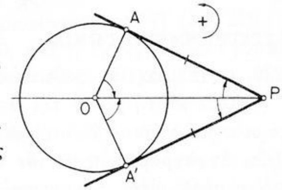


Σχ. 227

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἡ ἡμιευθεῖα PO εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας (PA,PA′) καὶ ἡ OP διχοτόμος τῆς γωνίας (OA, OA′).*

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ γωνία (PA,PA′) εἶναι ἡ γωνία ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος (O) **φαίνεται** ἀπὸ τοῦ σημείου P. (Σχ. 227.1)

2. Τὰ εὐθ. τμήματα PA καὶ PA′ εἶναι ἴσα. Τὰ σημεῖα A καὶ A′ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν PO.



Σχ. 227.1

Τὸ εὐθ. τμῆμα PA, ἢ τὸ PA′, ὀνομάζεται καὶ **ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις** τοῦ σημείου P ἀπὸ τοῦ κύκλου (O).

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ὁ κύκλος (O) ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς κυρτῆς γωνίας (PA, PA′) εἶναι **ἐγγεγραμμένος** εἰς αὐτήν.

3. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δύο τεμνομένων εὐθειῶν α καὶ β ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν διχοτόμων τῶν κυρτῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τούτων.

Ἂν αἱ α καὶ β εἶναι παράλληλοι ὁ ἀνωτέρω γεωμ. τόπος εἶναι ἡ μεσοπαράλληλος αὐτῶν.

ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

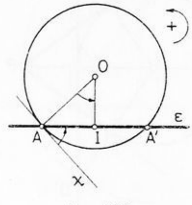
228. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὀνομάζομεν **γωνίαν** εὐθείας ε καὶ κύκλου (O), εἰς ἕνα κοινὸν σημεῖον A αὐτῶν, τὴν κυρτὴν γωνίαν (OA, OI), ὅπου I ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου O τοῦ κύκλου (O) ἐπὶ τὴν ε (Σχ. 228).

Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ σημεῖον A τοῦ κύκλου ἡμιευθεῖαν AX[1], τὴν κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ε πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου, θὰ ἔχωμεν : (OA, OI) = (AX, AI).

(1) Ἡμιεφαπτομένην AX.

Ἡ γωνία τῶν ε καὶ (Ο) εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α' αὐτῶν εἶναι ἀντίθετος τῆς γωνίας αὐτῶν εἰς τὸ Α. (Σχ. 228)

Ἂν ἡ ε διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ (Ο), ἡ ἀνωτέρω γωνία εἶναι ὀρθή.



Σχ. 228

Δυνάμεθα, εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ε **τέμνει ὀρθογωνίως** τὸν (Ο) ἢ ὅτι ἡ ε εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν (Ο).

Ἀντιστρόφως, ἂν μία εὐθεῖα ε τέμνῃ ὀρθογωνίως ἕνα κύκλον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου του.

Ἂν ἡ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Ο), ἡ γωνία (ΟΑ, ΟΙ) τῶν ε καὶ (Ο) εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία.

Ἀντιστρόφως, κάθε εὐθεῖα ε τέμνουσα τὸν (Ο) ὑπὸ γωνίαν μηδενικήν, εἶναι ἐφαπτομένη αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς κύκλου (Ο) καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α' τοῦ (Ο) μὲ τὴν εὐθεῖαν ΡΟ (Α πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ Ρ). Ἂν εἶναι Β ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ (Ο), διάφορον τῶν Α καὶ Α', τότε:

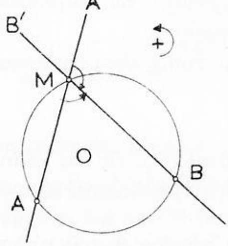
$$PA < PB \text{ καὶ } PA' > PB \quad (1)$$

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ

229. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ.

Κάθε κυρτὴ γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) αἱ δὲ πλευραὶ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένη** *εἰς τὸν κύκλον γωνία, ἔχουσα ὡς* **ἀντίστοιχον τόξον** *τὸ ὁμοίως πρὸς αὐτὴν προσανατολισμένον (ὁμόσημον) τόξον ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο).*

Τὸ ἀντίστοιχον μιᾶς ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β αὐτοῦ θὰ εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, τὸ ἔλασσον ἢ τὸ μεῖζον τόξον ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο).



Σχ. 229

Οὕτω:

Ἂν τῆς θετικῶς προσανατολισμένης γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) (Σχ. 229) τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι τὸ ἔλασσον τόξον ΑΒ, τότε τῆς ἀρνητικῶς προσανατολισμένης γωνίας (ΜΑ', ΜΒ) ἀντίστοιχον τόξον εἶναι τὸ μεῖζον τόξον ΑΒ διότι τοῦτο εἶναι τὸ ὁμόσημον πρὸς αὐτὴν τόξον ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο).

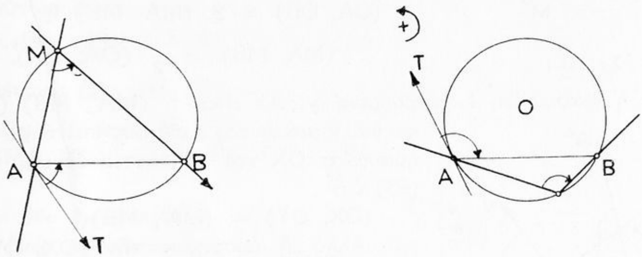
Σημειοῦμεν ὅτι:

Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β τοῦ κύκλου (Ο), τὸ πρόσημον μιᾶς γωνίας ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κύκλον (Ο), τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι σημεῖον τοῦ μείζονος τόξου ΑΒ (Σχ. 229), αἱ δὲ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων

(1) Τὸ εὐθ. τμῆμα ΡΑ ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τοῦ σημείου Ρ ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο).

διὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ (κορυφῆς τῆς θεωρουμένης γωνίας) ἐπὶ τοῦ ἐν λόγῳ μείζονος τόξου ΑΒ.

Τοῦτο ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ κορυφὴ Μ τῆς θεωρουμένης γωνίας εἶναι σημεῖον τοῦ ἐλάσσονος τόξου ΑΒ τοῦ κύκλου (Ο). (Σχ. 229.1)



Σχ. 229.1

Ἂν τὸ σημεῖον Μ ταυτίζεται πρὸς τὸ σημεῖον Α, τότε ἡ πλευρὰ ΜΑ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι (224) ἡ ἡμιεφαπτομένη ΜΤ (Σχ. 229.1) τοῦ κύκλου (Ο) κατὰ τὸ σημεῖον Α ($\equiv$Μ) αὐτοῦ, καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ γωνία (ΑΤ, ΑΒ).

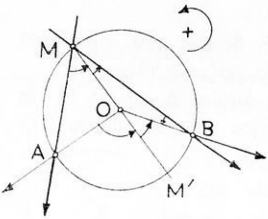
230. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Δοθείσης ἐγγεγραμμένης γωνίας (ΜΑ, ΜΒ), ἡ ὁμοίως πρὸς αὐτὴν προσανατολισμένη γωνία (ΟΑ, ΟΒ), ἔνθα Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Ο), ὀνομάζεται ἀντίστοιχος* **ἐπίκεντρος** *τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν (Ο) γωνίας (ΜΑ, ΜΒ).*

231. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σταθερὰ σημεῖα κύκλου (Ο) καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον αὐτοῦ, κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον (Ο) γωνία ἔχουσα κορυφὴν τὸ Μ, καὶ πλευρὰς κειμένας ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων ἀντιστοίχως διὰ τῶν Α καὶ Β, εἶναι σταθερὰ (ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ὁμοίως πρὸς αὐτὴν προσανατολισμένης γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), ἤτοι τῆς ἀντιστοίχου πρὸς αὐτὴν ἐπικέντρου γωνίας τοῦ κύκλου (Ο).

Ἀπόδειξις. Ἔστω (ΜΑ, ΜΒ) ἡ θεωρουμένη ἐγγεγραμμένη γωνία (Σχ. 231.1), Ἔχομεν, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν τῶν Chasles-Möbius :

$$(1) \qquad (ΜΑ, ΜΒ) = (ΜΑ, ΜΟ) + (ΜΟ, ΜΒ)$$

Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΟΜΑ, καὶ ΜΟΒ ἔχομεν (110, Πόρισμα 1) ἀντιστοίχως :



Σχ. 231.1

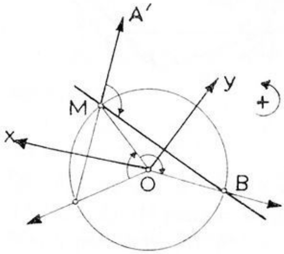
(1) (ΟΑ, ΟΜ′) = 2. (ΜΑ, ΜΟ), καὶ
(2) (ΟΜ′, ΟΒ) = 2. (ΜΟ, ΜΒ)

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν :
(ΟΑ, ΟΜ′) + (ΟΜ′, ΟΒ) = 2. { (ΜΑ, ΜΟ) + (ΜΟ, ΜΒ)}, ἤτοι :

(ΟΑ, ΟΒ) = 2. (ΜΑ, ΜΒ) ἢ

$$(\text{ΜΑ, ΜΒ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΟΑ, ΟΒ}).$$

Ἂν ἡ θεωρουμένη ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἡ (ΜΑ′, ΜΒ) (Σχ. 231.2) καὶ θεωρήσωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ ἡμιευθείας ΟΧ καὶ ΟΥ ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν (93) ὅτι :



Σχ. 231.2

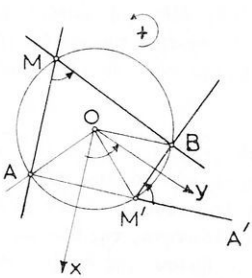
(ΟΧ, ΟΥ) = (ΜΑ′, ΜΒ)

Ἀλλὰ ἡ ὁμόσημος τῆς (ΟΧ, ΟΥ) γωνία (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι διπλασία τῆς (ΟΧ, ΟΥ), ἀφοῦ αἱ ΟΧ καὶ ΟΥ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν (ΟΑ, ΟΜ) καὶ (ΟΜ, ΟΒ), ἤτοι :

$$(\text{ΟΧ, ΟΥ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΟΑ, ΟΒ})$$

Ἑπομένως :

$$(\text{ΜΑ′, ΜΒ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΟΑ, ΟΒ})$$



Σχ. 231.3

Ἂν ἡ θεωρουμένη ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἡ (Μ′Α′, Μ′Β) (Σχ. 231.3), θεωροῦμεν τὰς καθέτους ΟΧ καὶ ΟΥ ἐπὶ τὰς Μ′Α καὶ Μ′Β ἀντιστοίχως καὶ ἔχομεν :

(ΟΧ, ΟΥ) = (Μ′Α′, Μ′Β)

ἐνῶ (ΟΑ, ΟΒ) = 2.(ΟΧ, ΟΥ), διότι αἱ ΟΧ καὶ ΟΥ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν (ΟΑ, ΟΜ′) καὶ (ΟΜ′, ΟΒ).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

$$(\text{Μ′Α′, Μ′Β}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΟΑ, ΟΒ})$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Δύο οἱαιδήποτε ὁμόσημοι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον (Ο) καὶ ἔχουσαι τὸ αὐτὸ ἢ ἴσα ἀντίστοιχα τόξα τοῦ (Ο) εἶναι ἴσαι, καί,*

Δύο ἴσαι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον (Ο) ἔχουν ἴσα ἀντίστοιχα τόξα.

2. Κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον (Ο) γωνία (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν ὁμόσημον αὐτῆς γωνίαν (ΑΤ, ΑΒ), ἔνθα ΑΤ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο).

Πράγματι, εἶναι, ὡς ἀπεδείχθη (231) :

$$(1) \quad (\text{ΜΑ, ΜΒ}) = \frac{1}{2}\,(\text{ΟΑ,ΟΒ}).$$

Ἐξ ἄλλου, ἂν εἶναι ΟΙ ἡ ἀπὸ τοῦ Ο ἡμιευθεῖα, ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ΑΤ, ἡ ἡμιεφαπτομένη τοῦ (Ο) ἡ κειμένη πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ Μ τῆς θεωρουμένης ἐγγεγραμμένης γωνίας, θὰ ἔχωμεν:

(2) (ΑΤ, ΑΒ) = (ΟΑ, ΟΙ)

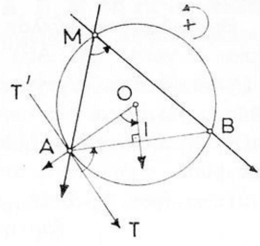
διότι αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι (ὁμόσημοι) κυρταὶ γωνίαι καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀντιστοίχως καθέτους.

Ἀλλὰ εἶναι (93) (ΟΑ, ΟΙ) $= \frac{1}{2}$ (ΟΑ, ΟΒ).

Ἐπομένως: (2) (ΑΤ, ΑΒ) $= \frac{1}{2}$ (ΟΑ, ΟΒ).

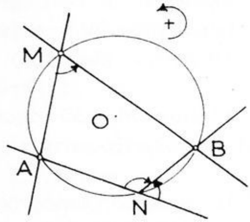
Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι :

(ΜΑ, ΜΒ) = (ΑΤ, ΑΒ).

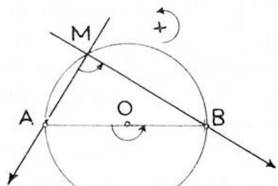


Σχ. 231.4

3. *Ἂν δύο ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον (Ο) γωνίαι (ΜΑ, ΜΒ) καὶ (ΝΑ, ΝΒ) εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμέναι, τότε ἑκάστη τούτων καὶ ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης εἶναι παραπληρωματικαί.* (Σχ. 231.5).



Σχ. 231.5



Σχ. 231.6

4. *Κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον (Ο) τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθή, καὶ ἀντιστρόφως: Τὸ ἀντίστοιχον κάθε ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον (Ο) ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡμικύκλιον τοῦ κύκλου τούτου.* (Σχ. 231.6).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κάθε γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ Μ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν (Ο), τῶν ὁποίων τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ τόξα τοῦ (Ο) τὰ κείμενα ἐντὸς τῆς θεωρουμένης γωνίας καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς.

2. Κάθε γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) καὶ αἱ πλευραὶ τέμνουσαι ἢ ἐφαπτόμεναι τοῦ (Ο) ἢ ἡ μία τούτων τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη αὐτοῦ, εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τὰ ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ τόξα τοῦ (Ο) τὰ ἐσωτερικὰ τῆς θεωρουμένης γωνίας.

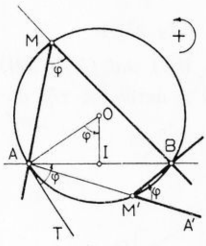
232. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι κορυφὴ γωνίας ἴσης πρὸς δοθεῖσαν, προσανατολισμένην, γωνίαν φ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β, εἶναι ἕνας κύκλος (Ο) διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ (Σχ. 232) ἕνα σημεῖον ἱκανοποιοῦν τὴν ἐν τῇ προτάσει συνθήκην (εἶναι κορυφὴ γωνίας ἴσης πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων ἀντιστοίχως διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α καὶ Β).

Θεωροῦμεν τὸν κύκλον ΑΜΒ καὶ τὴν ἡμιεφαπτομένην ΑΤ αὐτοῦ διὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία (ΑΤ, ΑΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν θεωρουμένην γωνίαν κορυφῆς Μ (ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν θεωρούμενον κύκλον), ἤτοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Οὕτως, ἡ ἀνωτέρω ἡμιευθεῖα ΑΤ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ θεωρουμένου σημείου Μ.

Τὸ κέντρον, ἐξ ἄλλου, Ο τοῦ θεωρηθέντος κύκλου ΑΜΒ εἶναι ἐπίσης ἀνεξάρτητον τοῦ θεωρουμένου σημείου Μ, ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΤ κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτῆς καὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.



Σχ. 232

Ὁ κύκλος ἑπομένως ΑΜΒ εἶναι σταθερός, ἤτοι ὁρίζεται ἀποκλειστικῶς ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων: τῶν σημείων Α καὶ Β καὶ τῆς γωνίας φ.

Ὥστε κάθε σημεῖον Μ ἱκανοποιοῦν τὴν ἐν τῇ προτάσει συνθήκην εἶναι σημεῖον τοῦ ἀνωτέρω γνωστοῦ κύκλου (Ο, ΟΑ).

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἀνωτέρω κύκλου (Ο, ΟΑ), εἴτε ἀνήκει εἰς τὸ μεῖζον εἴτε εἰς τὸ ἔλασσον τόξον ΑΒ, ἱκανοποιεῖ τὴν ἀνωτέρω συνθήκην.

Πράγματι, ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΟΑ, ΟΙ) ἥτις τελευταία εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΑΤ, ΑΒ) ἡ ὁποία εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τόπου προκύπτει ἐκ τῆς ἀποδείξεως: Τὸ κέντρον του κατασκευάζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΤ, κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτῆς, ἐνῷ ἡ τελευταία αὕτη ἡμιευθεῖα ΑΤ κατασκευάζεται ὥστε (ΑΤ, ΑΒ) = φ.

Ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ (= ΟΒ).

Σημειοῦμεν ὅτι:

Ἂν τὴν γωνίαν κορυφῆς Μ, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ τῶν Α καὶ Β, συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον (ΜΑ, ΜΒ), (ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν αἱ πλευραὶ αὐτῆς περιέχουν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἢ ἡ μία τούτων καὶ ἡ ἀντικειμένη τῆς ἄλλης περιέχουν τὰ σημεῖα αὐτά), ἡ ἀποδειχθεῖσα πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

«Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο δοθέντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης:

$$(MA,\ MB) = \varphi$$

ἔνθα φ δοθεῖσα, προσανατολισμένη γωνία, διάφορος τῆς εὐθείας γωνίας π, εἶναι κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β».

233. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἡ συνθήκη :**

(1) (ΜΑ, ΜΒ) = (ΝΑ, ΝΒ) [1]

εἶναι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Μ, Ν, ἐκ τῶν ὁποίων τρία οἱαδήποτε δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις. Ἂν τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Ν εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἀπεδείχθη (231, Πόρισμα 1) ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνθήκη (1) ἰσχύει.

Ἂν, ἀντιστρόφως, ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ Α, Β, Μ, Ν εἶναι τέσσαρα σημεῖα διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει ἡ (1), ἀποδεικνύεται ὅτι ταῦτα εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωροῦμεν τοὺς κύκλους ΑΜΒ καὶ ΒΝΑ καὶ τὰς ἐφαπτομένας ΑΤ καὶ ΑΤ' αὐτῶν ἀντιστοίχως κατὰ τὸ σημεῖον Α (Σχ. 233).

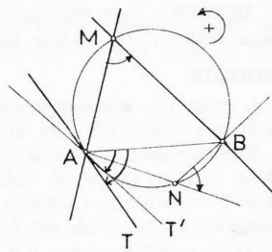
Ἔχομεν, ὡς ἀπεδείχθη (131, Πόρισμα 2) ὅτι :
(ΜΑ, ΜΒ) = (ΑΤ, ΑΒ) ἢ (ΜΒ, ΜΑ) = (ΑΒ, ΑΤ)
καὶ δι' ὅμοιον λόγον : (ΝΒ, ΝΑ) = (ΑΒ, ΑΤ').

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων καὶ τῆς ἐν τῇ ὑποθέσει συνθήκης (1) προκύπτει ὅτι :

(ΑΒ, ΑΤ) = (ΑΒ, ΑΤ')

καὶ ἐξ αὐτῆς ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΤ καὶ ΑΤ' ταυτίζονται.

Λόγῳ τούτου οἱ κύκλοι ΑΜΒ καὶ ΒΝΑ ταυτίζονται. Ἑπομένως τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Ν εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου.



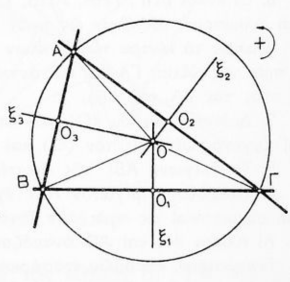
Σχ. 233

ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΚΥΚΛΟΣ

234. ΟΡΙΣΜΟΣ. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ, ὁ κύλος ΑΒΓ ὀνομάζεται **περιγεγραμμένος** κύκλος αὐτοῦ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς τὸν κύκλον. Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι τὸ περίκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (129).

Τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι ἀντιστοίχως ὀξυγώνιον, ἢ ἀμβλυγώνιον.

Ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Α, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ αὐτοῦ (127).



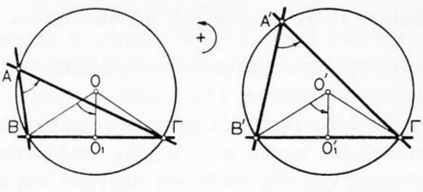
Σχ. 234

Ἀποδεικνύεται ὅτι :

---

(1) Σημειοῦντες : (ΜΑ, ΜΒ) ἐννοοῦμεν τὴν γωνίαν τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β (βλ. σημείωσιν παραγρ. 232).

235. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἂν εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι α = α' καὶ Α = Α', τότε οἱ περιγεγραμμένοι αὐτῶν κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') εἶναι ἴσοι.



Σχ. 235

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OO_1B καὶ $O'O'_1B'$ (Σχ. 235) εἶναι ἴσα (112), διότι εἶναι ἴσαι αἱ κάθετοι πλευραὶ O_1B καὶ O_1B' αὐτῶν καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι (OB, OO_1) καὶ $(O'B', O'O'_1)$, ὡς ἴσαι πρὸς τὰ ἡμίση τῶν γωνιῶν Α καὶ Α' τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἑπομένως ΟΒ = Ο'Β', ἤτοι $r = r'$. [1]

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε καὶ οἱ περιγεγραμμένοι αὐτῶν κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') εἶναι ἴσοι.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐλάσσονος τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

2. Θεωροῦμεν: δύο παραλλήλους ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ κάθετος, τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ καὶ μίαν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ο, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνουν τὰς ἡμιευθείας ΑΧ καὶ ΒΥ, κατὰ τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) Ὁ κύκλος διαμέτρου ΑΒ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας Α'Β' καὶ (2) Ὁ κύκλος διαμέτρου Α'Β' ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΑΒ.

3. Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν γωνίαν (ΑΗ, ΑΟ) ἢ τὴν (ΑΟ, ΑΗ) (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου καὶ Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ).

4. Τὰ σημεῖα τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου ΑΒΓ.

5. Ἂν τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς σημείου τοῦ ὕψους ΑΑ' τριγώνου ΑΒΓ, ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, εἶναι σημεῖον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κύκλου, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ[2].

6. Οἱ κύλοι ΒΗΓ, ΓΗΑ, ΑΗΒ, καὶ ΑΓΒ εἶναι ἴσοι. Τὰ κέντρα τῶν κύκλων ΒΗΓ καὶ ΒΗ'Γ εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν ΒΓ.

Ὁμοίως τὰ κέντρα τῶν κύκλων ΓΗΑ, ΓΗ''Α, ὡς καὶ τῶν ΑΗΒ, ΑΗ'''Β εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως. (Η'' καὶ Η''' τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η ὡς πρὸς τὰς ΓΑ καὶ ΑΒ).

7. Δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ σημείου Η τοῦ ἐπιπέδου του, ὑπάρχουν ἄπειρα τρίγωνα ΑΒΓ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν (Ο) καὶ ἔχοντα ὡς ὀρθόκεντρον τὸ Η.

8. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον βάρους.

9. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Αἱ ἡμιευθεῖαι ΑΟ καὶ ΑΗ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΗ καὶ ΑΟ ὀνομάζονται **ἰσογώνιοι** ὡς πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

Γενικώτερον, δοθεισῶν τεσσάρων εὐθειῶν α, α', β, β' διερχομένων διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θὰ λέγωμεν ὅτι αὗται ἀποτελοῦν δύο ζεύγη **ἰσογώνια**, ὅταν αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν (α, α') ἔχουν τὰς αὐτὰς διχοτόμους μὲ τὰς γωνίας τῶν εὐθειῶν (β, β') (Σχ. 9α).

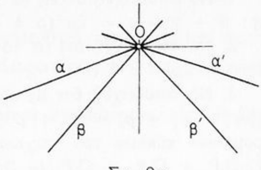
---

(1) Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ ὅταν Α = — Α'.

(2) Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι, κατὰ ταῦτα, **χαρακτηριστικὴ** ἰδιότης τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου.

Ἂν τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν (α, α') καὶ (β, β') εἶναι ἰσογώνια, αἱ γωνίαι (α,β) καὶ (α,'β') εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν (α,α') καὶ (β, β'). (Σχ. 9α)

Ἐξ ἄλλου, δύο ζεύγη εὐθειῶν (α_1, α_1') καὶ (β_1, β_1') θὰ ὀνομάζωνται ζεύγη **ἀντιπαραλλήλων** εὐθειῶν, ὅταν τὰ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου ζεύγη (α, α') καὶ (β, β') τῶν παραλλήλων πρὸς τὰ πρῶτα εὐθειῶν, εἶναι ζεύγη ἰσογωνίων εὐθειῶν.



Σχ. 9α

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΣ ΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΝ ΚΥΚΛΟΣ

236. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ὡς ἀπεδείχθη ἤδη (133, Πόρισμα 5), δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα Ι, Ι', Ι'', Ι''' καὶ μόνον τέσσαρα ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ (Σχ. 236).

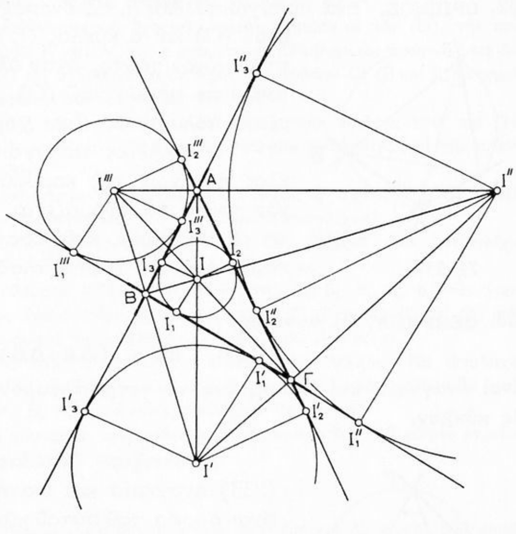
Ἕκαστον ἐκ τῶν σημείων τούτων εἶναι κέντρον κύκλου ἐφαπτομένου τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν (224, Πόρισμα 1). Ἡ ἀκτὶς ἑκάστου κύκλου εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Συμβολίζομεν μὲ τὰ σύμβολα (Ι), (Ι'), (Ι''), (Ι''') τοὺς κύκλους τούτους (Σχ. 236).

Ὁ κύκλος (Ι) ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ οἱ (Ι'), (Ι''), (Ι''') **παραγγεγραμμένοι** κύκλοι αὐτοῦ.

Αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τούτων συμβολίζονται ἀντιστοίχως :

Τοῦ ἐγγεγραμμένου μὲ τὸ γράμμα ρ.

Τῶν παραγγεγραμμένων (Ι'), (Ι''), (Ι'''), τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰς γωνίας Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, μὲ τὰ ρ_1, ρ_2, ρ_3 ἢ τὰ ρ', ρ'', ρ'''.



Σχ. 236

Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἀνωτέρω κύκλων μὲ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται συνήθως, ὡς ἑξῆς :

Τὰ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τοὺς κύκλους (Ι), (Ι'), (Ι''), (Ι''') μὲ τὰ I_1, I_1', I_1'', I_1''' ἀντιστοίχως. Τὰ ἐπὶ τῆς ΓΑ μὲ τὰ I_2, I_2', I_2'', I_2''' καὶ τὰ ἐπὶ τῆς ΑΒ μὲ τὰ I_3, I_3', I_3'', I_3'''.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ, ἰσχύει ἡ σχέσις: $\beta + \gamma - \alpha = 2\rho$ (ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου).

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις: (1) $\upsilon_1 = 3\rho$ (2) $r < 2\rho$.

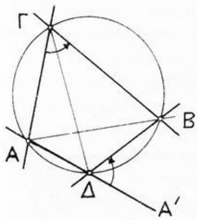
3, Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ἰσχύουν αἱ σχέσεις:
(1) $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 4r + \rho$ (ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3 αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου καὶ r ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου αὐτοῦ κύκλου).
(2) $O_1P_1 + O_2P_2 + O_3P_3 = 2r - \rho$ (P_1, P_2, P_3 τὰ μέσα τῶν τόξων ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ κύκλου ΑΒΓ τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ μέρος τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ ἀντιστοίχως).

4, Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Εἰς τὸ ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις:
$OO_1 + OO_2 + OO_3 = r + \rho$ καὶ (2) Εἰς τὸ ἀμβλυγώνιον, κατὰ τὴν γωνίαν Α, τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις: $OO_2 + OO_3 - OO_1 = r + \rho$.

5. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἔστωσαν ρ_1, ρ_2, ρ_3 αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\rho_1 + \rho_3 = \rho_2 + \rho_4$.

ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ

237. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἕνα πολύγωνον ΑΒΓ... ΕΖ ὀνομάζεται **ἐγγεγραμμένον** εἰς κύκλον (Ο) καὶ ὁ κύκλος (Ο) **περιγεγραμμένος** περὶ τὸ πολύγωνον τοῦτο, ὅταν ὅλαι αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι σημεῖα τοῦ (Ο). Αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου (Ο).



Σχ. 237

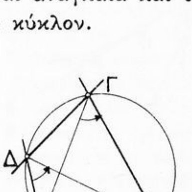
Ἂν δοθέντος πολυγώνου ΑΒΓ... ΕΖ ὑπάρχῃ κύκλος περιέχων τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, τότε τὸ πολύγωνον τοῦτο θὰ ὀνομάζεται **ἐγγράψιμον** εἰς κύκλον.

Εἰδικώτερον, καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (κυρτὸν ἢ μὴ ἁπλοῦν) ἰσχύει ἡ πρότασις:

238. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἡ συνθήκη:

$$(\Gamma A, \Gamma B) = (\Delta A, \Delta B)$$

εἶναι ἀναγκαῖα καὶ ἱκανή, ἵνα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 238

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη ἀπεδείχθη (233) ἀναγκαία καὶ ἱκανή, ἵνα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ἑπομένως ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ ἵνα τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (κυρτὸν ἢ μὴ ἁπλοῦν) εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Εἰς τὴν ὑπ' ἀριθ. 238 ἐποπτικὴν εἰκόνα, ἀνταποκρινομένην εἰς τὴν περίπτωσιν κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Δ αὐτοῦ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ.

Εἰς τὴν ὑπ' ἀριθ. 237 ἐποπτικὴν εἰκόνα, ἀνταποκρινομένην εἰς τὴν περίπτωσιν μὴ ἁπλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ κορυφαὶ Γ καὶ Δ κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἡ συνθήκη (ΓΑ, ΓΒ) = (ΔΑ, ΔΒ) εἶναι (232, Σημείωσις) ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ διὰ τὴν ἐγγραψιμότητα τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ. *1. Ἵνα ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ*

2. Ἵνα ἕνα κυρτὸν τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἵνα ἕνα μὴ κυρτὸν τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ σημεῖον Α ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Ἔστω δ ἡ εἰς τὸ Α κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ε τέμνουσαν τὸν (Ο). Ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς Ε μὲ τὸν (Ο) καὶ Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τὰς ἐφαπτομένας τοῦ (Ο) εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΕ = ΑΖ.

2. Θεωροῦμεν : κύκλον (Ο), εὐθεῖαν ε μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (Ο), τὴν προβολὴν Ι τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ε, δύο σημεῖα Α καὶ Α′ τῆς ε συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Ι καὶ δύο ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ Α′Β′ τοῦ (Ο) μὴ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΙ (Β καὶ Β′ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΒ′ διέρχεται διὰ τοῦ Ι.

3. Θεωροῦμεν : Τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ, τοὺς κύκλους ΒΗΓ καὶ ΓΗΑ καὶ τὰ δεύτερα ἐκτὸς τῶν Α καὶ Β, κοινὰ σημεῖα Β′ καὶ Α′ αὐτῶν ἀντιστοίχως μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΑ′ = ΒΒ′.

4. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις : $2OO_1 = HA$. (Ο καὶ Η τὸ περίκεντρον καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ἀντιστοίχως).

5. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς οἱονδήποτε τρίγωνον ΑΒΓ αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθικοῦ τοῦ θεωρουμένου τριγώνου.

6. Θεωροῦμεν κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τὰς διχοτόμους δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ, Δ αὐτοῦ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α′ $(\delta_1 \cdot \delta_2)$ (1), Β′ $(\delta_2 \cdot \delta_3)$ Γ′ $(\delta_3 \cdot \delta_4)$, Δ′ $(\delta_4 \cdot \delta_1)$ εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

7. Θεωροῦμεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ κύκλου (Ι) καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κυρτὸν τετράπλευρον Α′Β′Γ′Δ′ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ι) εἰς τὰ Α, Β, Γ, Δ, εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

8. Ἂν αἱ μεσοκάθετοι τριῶν πλευρῶν τετραπλεύρου διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τότε τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ὁμὰς 2α

1. Δίδεται γωνία (ΑΥ, ΑΖ). Θεωροῦμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΥ καὶ ΑΖ αὐτῆς δύο σημεῖα Β καὶ Γ ὥστε ΑΒ + ΑΓ = 2λ καὶ τὸ μέσον Α′ τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου ΑΒΓ, τοῦ ἀντιστοίχου τῆς γωνίας (ΑΥ, ΑΖ). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1). Ἂν Β′ καὶ Γ′ εἶναι δύο τυχόντα σημεῖα τῶν ΑΥ καὶ ΑΖ ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ′ + ΑΓ′ = 2λ, τότε ὁ κύκλος ΑΒ′Γ′ διέρχεται διὰ τοῦ Α′ καὶ (2) Ἂν εἶναι Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΓ καὶ Β′Γ′, ἡ ΟΑ′ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν Β′Γ′, ἤτοι ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν εὐθ. τμημάτων Β′Γ′ διέρχονται διὰ τοῦ Α′.

---

(1) Τὸ ὑπὸ τῶν εὐθειῶν δ_1 καὶ δ_2 ὁριζόμενον σημεῖον δύναται νὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον $(\delta_1 \cdot \delta_2)$, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν σημείων Α, Β ὁριζομένη εὐθεῖα, μὲ τὸ σύμβολον : [Α.Β].

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (1) Ὁ κύκλος (Ω) ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα O_1, O_2, O_3, τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα H_1, H_2, H_3 αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὰ μέσα Z_1, Z_2, Z_3 τῶν εὐθ. τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἀντιστοίχως (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου). (2) Τὸ κέντρον Ω τοῦ κύκλου τούτου εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΟ (Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ) καὶ ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος r τοῦ κύκλου ΑΒΓ. (1)

Ὁμὰς 3η

1. Ἕνα πολύγωνον ΑΒΓ...ΕΖ ὀνομάζεται **περιγεγραμμένον** εἰς κύκλον (Ι), ὅταν οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο διαδοχικαὶ κορυφαί του, ἡ ὑπὸ τούτων ὁριζομένη εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ι). Ἂν δοθέντος πολυγώνου ὑπάρχῃ κύκλος (Ι) ἐφαπτόμενος τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τὸ πολύγωνον θὰ ὀνομάζεται **περιγράψιμον** ἢ **παρεγγράψιμον,** καθ' ὅσον ὁ κύκλος οὗτος (Ι) κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τοῦ τετραπλεύρου ἀντιστοίχως.

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : Ἵνα ἕνα κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

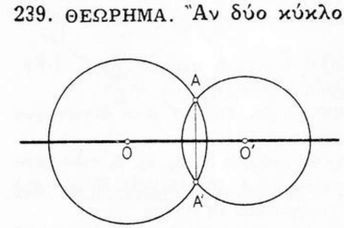
2. Ἵνα ἕνα παραλληλόγραμμον εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ρόμβος.

3. Ἂν αἱ διχοτόμοι τριῶν γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι περιγράψιμον εἰς κύκλον.

4. Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ περιγεγραμμένον περὶ κύκλον (Ι). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται αἱ ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου (Ι) εἶναι παραπληρωματικαί.

ΤΟΜΗ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

239. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, κείμενον ἐκτὸς τῆς διακέντρου ΟΟ′ αὐτῶν (2), τότε ἔχουν ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α′ : τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον.**



Σχ. 239

Ἀπόδειξις. Τὸ συμμετρικὸν Α′ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸν ΟΟ′ εἶναι (222) σημεῖον τοῦ (Ο) καὶ δι' ὅμοιον λόγον καὶ τοῦ (Ο′), ἤτοι εἶναι τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον τῶν δύο κύκλων (Σχ. 239).

Ὅταν δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα θὰ ὀνομάζωνται **τεμνόμενοι.**

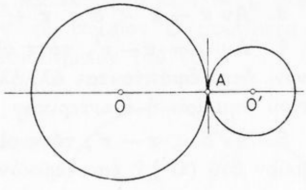
240. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ἂν δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′), διάφοροι ἀλλήλων, ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον Α, κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν, τότε δὲν ἔχουν, ἐκτὸς αὐτοῦ, ἄλλο κοινὸν σημεῖον.**

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ ἀνωτέρω κύκλοι ἔχουν ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Β ἀγόμεθα εἰς ἄτοπον. Πράγματι, ἂν τὸ Β ἔκειτο ἐπὶ τῆς δια-

(1) Euler L (1707-1783).

(2) Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν δύο κύκλους τῆς προτάσεως ἂν θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Ο καὶ Ο′ διάφορα ἀλλήλων καὶ ἕνα σημεῖον Α κείμενον ἐντὸς τῆς εὐθείας ΟΟ′. Οἱ κύκλοι Ο(ΟΑ) καὶ Ο′(Ο′Α) ἔχουν κοινὸν τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου ΟΟ′ αὐτῶν.

κέντρου ΟΟ', τότε οἱ κύκλοι θὰ εἶχον μίαν κοινὴν διάμετρον καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦσαν διάφοροι ἀλλήλων. Ἂν τὸ Β ἔκειτο ἐκτὸς τῆς διακέντρου, τότε οἱ κύκλοι θὰ εἶχον (239) καὶ ἕνα τρίτον κοινὸν σημεῖον : τὸ συμμετρικὸν Β' τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ', καὶ ἑπομένως δὲν θὰ ἦσαν διὰ τὸν λόγον τοῦτον (210) διάφοροι ἀλλήλων, ὅπως ἐξ ὑποθέσεως θεωροῦνται [1].

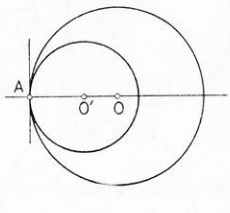


Σχ. 240.1

ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ἂν δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα μόνον κοινὸν σημεῖον Α, τότε τοῦτο κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.*

Πράγματι, ἂν τὸ Α ἔκειτο ἐκτὸς τῆς διακέντρου, τότε οἱ κύκλοι θὰ εἶχον καὶ ἕνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α', διάφορον τοῦ Α.

Θὰ λέγωμεν ὅτι οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') **ἐφάπτονται** ἀλλήλων κατὰ τὸ σημεῖον Α. Τὸ σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ' τῶν κύκλων, ὀνομάζεται **σημεῖον ἐπαφῆς** τῶν κύκλων (Σχ. 240.1 καὶ 240.2).



Σχ. 240.2

Ὥστε ἡ τομὴ δύο κύκλων (Ο) καὶ (Ο') ἀποτελεῖται, ἐν γένει, ἀπὸ δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα, ὅταν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται, συμπίπτουν εἰς ἕν.

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστου τῶν δύο ἐφαπτομένων κύκλων (Ο) καὶ (Ο') εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Α αὐτῶν, εἶναι, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΟ' εἰς τὸ Α, ἐφαπτομένη καὶ τοῦ ἄλλου, ἤτοι μία **κοινὴ ἐφαπτομένη** τῶν δύο κύκλων.

Ἂν τὰ κέντρα Ο καὶ Ο' τῶν ἐφαπτομένων κύκλων κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α αὐτῶν, λέγομεν ὅτι οἱ κύκλοι **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς** (Σχ. 240.1).

Ἂν τὰ κέντρα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου ἐπαφῆς λέγομεν ὅτι **ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.** (Σχ. 240.2).

241. ΘΕΩΡΗΜΑ. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο') ἀκτίνων $\mathbf{r}$ καὶ $\mathbf{r}'$ ἀντιστοίχως ($\mathbf{r} \geqslant \mathbf{r}'$) καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΟ' $= \delta$ τῶν κέντρων των.

1. Ἂν $\delta > \mathbf{r} + \mathbf{r}'$, τότε οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ κάθε σημεῖον Μ ἑκάστου τούτων ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ἄλλου.

2. Ἂν $\delta = \mathbf{r} + \mathbf{r}'$, τότε οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον καὶ ἕνα μόνον, ἤτοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, καὶ κάθε σημεῖον Μ ἑκάστου

---

(1) Τὸ ἐπὶ τῆς διακέντρου κοινὸν σημεῖον Α τῶν δύο κύκλων, συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν Α' αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον. Δυνάμεθα, λόγῳ τούτου, νὰ θεωρήσωμεν ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α', τὰ ὁποῖα συμπίπτουν εἰς ἕν.

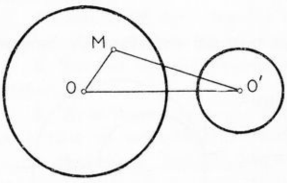
τούτων, ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ σημείου, ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ ἄλλου.

3. Ἂν $r - r' < \delta < r + r'$, τότε οἱ κύκλοι τέμνονται.

4. Ἂν $\delta = r - r'$, τότε οἱ κύκλοι ἔχουν ἕνα κοινὸν σημεῖον καὶ ἕνα μόνον, ἤτοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, καὶ κάθε σημεῖον τοῦ (O'), ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ σημείου ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (O).

5. Ἂν $\delta < r - r'$, τότε οἱ κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ κάθε σημεῖον τοῦ (O') ἢ ἐσωτερικὸν αὐτοῦ, εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (O).

Ἀπόδειξις. 1. Ἂν οἱ κύκλοι εἶχον κοινὸν σημεῖον Α ἐκτὸς τῆς διακέντρου, τότε ἐκ τῶν $OA = r$ καὶ $O'A = r'$ καὶ τοῦ τριγώνου OAO' θὰ εἴχομεν:



Σχ. 241.1

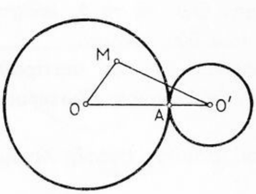
$\delta < r + r'$, ἐνῶ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\delta > r + r'$.

Δι' ὅμοιον λόγον δὲν ὑπάρχει σημεῖον ἐπὶ τῆς διακέντρου. Ἐξ ἄλλου, διὰ κάθε σημεῖον Μ διὰ τὸ ὁποῖον $OM \leqslant r$ ἔχομεν (Σχ. 241.1) $O'M \geqslant OO' - OM > r + r' - OM > r'$, διότι $OO' > r + r'$.

Ἑπομένως κάθε τοιοῦτον σημεῖον Μ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O').

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἕκαστος τῶν (O) καὶ (O') **κεῖται ἐκτὸς** τοῦ ἄλλου, ἢ ὅτι οἱ (O) καὶ (O') **κεῖνται ἐκτός ἀλλήλων.**

2. Ἔστω Α τὸ σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος OO' διὰ τὸ ὁποῖον $OA = \sigma$. Θὰ εἶναι $O'A = r'$. Τὸ σημεῖον Α εἶναι, ἐπομένως, κοινὸν σημεῖον τῶν (O) καὶ (O'). Δὲν ὑπάρχει (240), ἐκτὸς τοῦ Α, ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν (O) καὶ (O').



Σχ. 241.2

Ἐξ ἄλλου ἂν $OM \leqslant r$, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 241.2) $O'M \geqslant OO' - OM \geqslant r + r' - OM > r'$.

Ἑπομένως κάθε τοιοῦτον σημεῖον Μ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O').

Ἕκαστος τῶν (O) καὶ (O') **ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς** τοῦ ἄλλου, ἢ (240, Πόρισμα) οἱ κύκλοι (O) καὶ (O') **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς** ἀλλήλων.

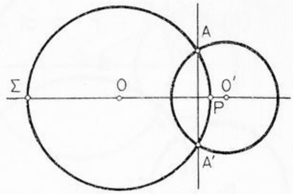
3. Ἔστωσαν Ρ καὶ Σ (Σχ. 241.3), τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (O) μὲ τὴν διάκεντρον OO' τῶν κύκλων. (Σ πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ O').

Ἐκ τῆς $r \geqslant r'$ ἕπεται ὅτι $r' < \delta + r$, ἤτοι ὅτι $r' < O'\Sigma$ ἢ $O'\Sigma > r'$. Ἐξ αὐτῆς ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Σ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O'). Ἐξ ἄλλου:

Ἂν $\delta > r$, τὸ σημεῖον O' εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O). Ἐκ τῆς $\delta < r + r'$ ἕπεται ὅτι : $\delta - r < r'$ ἢ $O'P < r'$, ἤτοι ὅτι τὸ P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (O').

Ἂν $\delta = r$, τὸ O' εἶναι σημεῖον τοῦ (O), καὶ ἐκ τῆς $\delta < r + r'$ ἕπεται ὅτι $r' > O$. Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον O συμπίπτει μὲ τὸ P καὶ ἐπειδὴ $r' > O$, τὸ P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O').

Ἂν $\delta < r$, τὸ O' εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O). Ἐκ τῆς $\delta > r - r'$ ἕπεται ὅτι $r' > r - \delta$ ἢ $r - \delta < r'$ ἢ $O'P < r'$, ἤτοι ὅτι τὸ σημεῖον P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O').



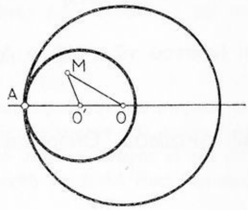
Σχ. 241.3

Ὥστε καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις : $\delta > r$, $\delta = r$, $\delta < r$, τὸ P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ (O'), ἐνῷ τὸ Σ εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι οἱ δύο κύκλοι (O) καὶ (O') ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα A καὶ A'.

Τὰ σημεῖα ταῦτα, δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς διακέντρου OO' αὐτῶν.

Πράγματι, ἂν ἦσαν σημεῖα τῆς OO', δὲν θὰ ἦσαν διάφορα τῶν P καὶ Σ. Ἀλλὰ τὰ P καὶ Σ δὲν εἶναι κοινὰ σημεῖα τῶν κύκλων, διότι $O'P < r'$ καὶ $O'\Sigma > r'$.

4. Ἔστω A τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας OO', τὸ πρὸς τὸ μέρος τοῦ O πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ O', διὰ τὸ ὁποῖον $OA = r$. Θὰ εἶναι $O'A = r'$. Τὸ σημεῖον A εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν (O) καὶ (O'), κείμενον ἐπὶ τῆς OO', καὶ ἑπομένως δὲν ὑπάρχει, ἐκτὸς αὐτοῦ, ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (O) καὶ (O'). Ἐξ ἄλλου, ἂν $O'M \leqslant r'$, θὰ ἔχωμεν (Σχ. 241.4) : $OM \leqslant OO' + O'M \leqslant OO' + r$, ἤτοι $OM \leqslant r$.



Σχ. 241.4

Οἱ κύκλοι (O) καὶ (O') **ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς.** (240 Πόρισμα).

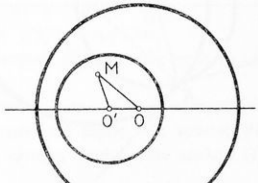
5. Ἂν οἱ κύκλοι εἶχον κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς OO', τότε θὰ ἦτο :

$$\delta > r - r', \text{ ἐνῷ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι } \delta < r - r'.$$

Ὁμοίως ἀποκλείεται νὰ ἔχουν οἱ κύκλοι κοινὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς OO'. Ἐξ ἄλλου ἂν $O'M \leqslant r'$, τότε θὰ ἔχωμεν (Σχ. 241.5) :

$$OM \leqslant OO' + O'M \leqslant OO' + r' < r,$$

διότι $OO' = \delta < r - r'$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ κύκλος (O') **κεῖται ἐντὸς** τοῦ (O).



Σχ. 241.5

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Αἱ σημειωθεῖσαι, ὡς ἄνω, πέντε περιπτώσεις, εἶναι αἱ μόναι δυναταί, διότι ἐθεωρήθησαν ὅλαι αἱ δυναταὶ σχέσεις τοῦ δ πρὸς τὸ ἄθροισμα $r + r'$ καὶ τὴν διαφορὰν $r - r'$.

2. Τῆς ἀνωτέρω προτάσεως (241) ἰσχύει καὶ ἡ ἀντίστροφος, ἀποδεικνυομένη εὐκόλως, διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Ὥστε :

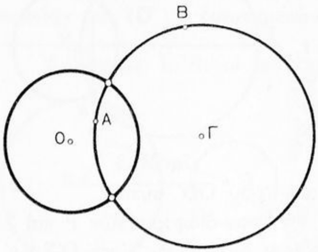
Διὰ δύο κύκλους (Ο) καὶ (Ο') ἀκτίνων r καὶ r' ἀντιστοίχως ($r \geqslant r'$) ἔχομεν:

(1) $\delta > r + r' \Leftrightarrow$ οἱ κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων.

(2) $\delta = r + r' \Leftrightarrow$ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς.

(3) $r - r' < \delta < r + r' \Leftrightarrow$ οἱ κύκλοι τέμνονται.

(4) $\delta = r - r' \Leftrightarrow$ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς.



Σχ. 241.6

(5) $\delta < r - r' \Leftrightarrow$ ὁ κύκλος (Ο') κεῖται ἐντὸς τοῦ (Ο).

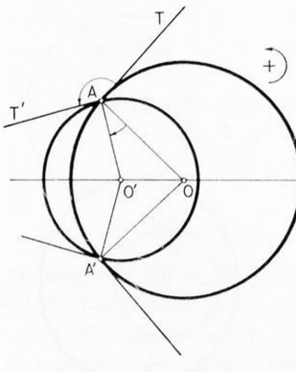
3. Ἐν συνεχείᾳ πρὸς τὸ **ἀξίωμα** (246) δεχόμεθα ὅτι :

Ἂν Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως ἕνα ἐσωτερικὸν καὶ ἕνα ἐξωτερικὸν σημεῖον κύκλου (Ο), καὶ (Γ) ἕνας κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β, ὑπάρχει ἐπὶ ἑκάστου τῶν τόξων ΑΒ τοῦ κύκλου (Γ), ἕνα τουλάχιστον, σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο).

Ἐκ τῆς προτάσεως (210) προκύπτει ὅτι ἐπὶ ἑκάστου τῶν τόξων ΑΒ ὑπάρχει ἕνα μόνον σημεῖον τοῦ (Ο).

ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

242. ΟΡΙΣΜΟΣ. Θεωροῦμεν δύο τεμνομένους κύκλους (Ο) καὶ (Ο'), τῶν ὁποίων ἔστωσαν Α καὶ Α' τὰ κοινὰ σημεῖα.



Σχ. 242

Ὀνομάζομεν **γωνίαν** τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο'), εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον Ο αὐτῶν, τὴν κυρτὴν γωνίαν (ΑΤ, ΑΤ'), τῶν ἡμιεφαπτομένων ΑΤ καὶ ΑΤ' τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα, ἐκτὸς τοῦ Α, εἶναι ἐξωτερικὰ τῶν (Ο') καὶ (Ο) ἀντιστοίχως. (ΑΤ ἡ ἡμιεφαπτομένη τοῦ (Ο), τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα εἶναι ἐξωτερικὰ τοῦ (Ο') καὶ τοῦ ΑΤ' ἡ ἡμιεφαπτομένη τοῦ (Ο') τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα εἶναι ἐξωτερικὰ σημεῖα τοῦ (Ο)).

Ἡ ἀνωτέρω γωνία (ΑΤ, ΑΤ') εἶναι (93) παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιθέτου τῆς γωνίας (ΑΟ, ΑΟ'), ἤτοι τῆς γωνίας (ΑΟ', ΑΟ) (Σχ. 242).

1. Ἡ γωνία τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο') εἰς τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον Α' αὐτῶν εἶναι ἀντίθετος τῆς γωνίας αὐτῶν εἰς τὸ Α. Πράγματι, αἱ γωνίαι τῶν κύκλων κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α' εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΟ' (239). Τὰ τρίγωνα ΑΟΟ' καὶ Α'ΟΟ' εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

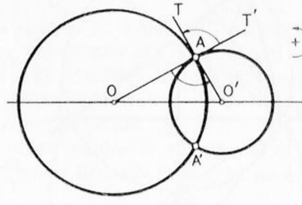
243. ΟΡΙΣΜΟΣ. Ἂν ἡ γωνία (AT, AT') δύο κύκλων εἶναι ὀρθή, λέγομεν ὅτι οἱ κύκλοι **τέμνονται ὀρθογωνίως**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐφαπτομένη ἑκάστου τῶν κύκλων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον A αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἄλλου (Σχ. 243).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἂν οἱ κύκλοι (O) καὶ (O') ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐξωτερικῶς, ἡ γωνία αὐτῶν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον των εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, διότι αἱ πλευραὶ AT καὶ AT' αὐτῆς ταυτίζονται.

Ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐσωτερικῶς, ἡ γωνία αὐτῶν εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον των εἶναι ἡ εὐθεῖα γωνία.



Σχ. 243

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (O) καὶ (O') οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον, καὶ ὀνομάζομεν : A, B τὰ ἐπὶ τῆς διακέντρου OO' σημεῖα τοῦ (O), A',B' τὰ ἐπ' αὐτῆς σημεῖα τοῦ (O') (1) καὶ M, M' δύο τυχόντα σημεῖα τῶν (O) καὶ (O') ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

Ἂν δύο κύκλοι (O) καὶ (O') κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, τότε : $AA' < MM' < BB'$ (2)

Ἂν ὁ κύκλος (O') κεῖται ἐντὸς τοῦ (O), τότε :

Ἂν τὸ O' κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ B, εἶναι $A'B < MM' < AA'$(3)

Ἂν τὸ O' κεῖται μεταξὺ τῶν O καὶ A, εἶναι $AB' < MM' < BB'$.

2. Θεωροῦμεν : δύο κύκλους (O) καὶ (O') ἐφαπτομένους ἐσωτερικῶς (O' ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου (O)) κατὰ τὸ σημεῖον A, τὸ ἀντιδιαμετρικὸν A' τοῦ A εἰς τὸν κύκλον (O) καὶ τὴν μίαν τῶν διὰ τούτου ἐφαπτομένων τοῦ (O') τῆς ὁποίας ἔστω Δ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὸν (O') καὶ τὸ κοινόν, ἐκτὸς τοῦ A', σημεῖον B μὲ τὸν (O). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ AΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (AA', AB).

3. Μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τῶν ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ σημείων ἐπαφῆς μὲ τοὺς κύκλους (I), (I'), (I''), (I''') ὑπάρχουν οἱ ἑξῆς ἁπλαῖ σχέσεις :

(1) $AI_2 = AI_3 = \tau - \alpha$, $BI_3 = BI_1 = \tau - \beta$, $\Gamma I_1 = \Gamma I_2 = \tau - \gamma$

(2) $AI_2' = AI_3' = \tau$, $BI_3'' = BI_1'' = \tau$, $\Gamma I_1''' = \Gamma I_2''' = \tau$

(3) $I_1I_1' = \beta - \gamma$, $I_2I_2'' = \alpha - \gamma$, $I_3I_3''' = \alpha - \beta$

(4) $I_1''I_1''' = \beta + \gamma$, $I_2'I_2''' = \gamma + \alpha$, $I_3'I_3'' = \alpha + \beta$

(5) $I_2I_2' = I_3I_3' = \alpha$, $I_1I_1'' = I_3I_3'' = \beta$, $I_1I_1''' = I_2I_2''' = \gamma$

(6) $I_2''I_2''' = I_3''I_3''' = \alpha$, $I_3'I_3''' = I_1'I_1''' = \beta$, $I_1'I_1'' = I_2'I_2'' = \gamma$, κλπ.

4. Τὰ σημεῖα I_1, I'_1 τῆς ΒΓ, ὡς καὶ τὰ I''_1, I'''_1 εἶναι συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ μέσον O_1 τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

5. Θεωροῦμεν : τρίγωνον ΑΒΓ, τὸν κύκλον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου ἔστω O τὸ κέντρον, τὸ μέσον P_1 τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ ἀνωτέρω κύκλου, τοῦ κειμένου πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΒΓ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ κορυφὴ A τοῦ τριγώνου, καὶ τὰ κέντρα I καὶ I' τῶν κύκλων (I) καὶ (I') ἀντιστοίχως(4). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

---

(1) Ἕκαστον τῶν A', B' θεωρεῖται μεταξὺ τῶν B καὶ B'.

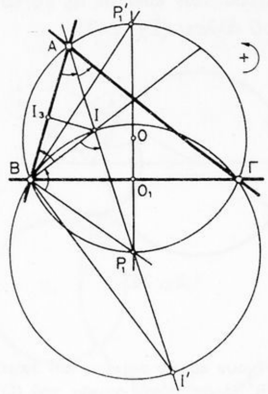
(2) Τὸ εὐθ. τμῆμα AA' ὀνομάζεται **ἀπόστασις** τῶν κύκλων (O) καὶ (O)' εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν : $\delta > r + r'$.

(3) Τὸ σημεῖον A' θεωρεῖται μεταξὺ τῶν B καὶ B'.

(4) Τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου.

(1) Τὰ σημεῖα A, P_1, I, I' κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

(2) Τὰ εὐθ. τμήματα P_1B καὶ $P_1\Gamma$ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ P_1I, ἤτοι τὸ σημεῖον I εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου κέντρου P_1 καὶ ἀκτῖνος P_1B (Σχ. 5α).



Σχ. 5α

Ὑπόδειξις. (1) Ἡ ἡμιευθεῖα AP_1 εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας A τοῦ τριγώνου καὶ λόγῳ τούτου διέρχεται διὰ τῶν σημείων I καὶ I' κλπ.

6. Τὸ μέσον P_1 τοῦ τόξου ΒΓ τῆς προηγουμένης προτάσεως εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος II'.

Ὁ κύκλος διαμέτρου II' διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου.

Τὸ ἀντιδιαμετρικὸν P_1', τοῦ μέσου P_1 τοῦ τόξου ΒΓ, εἰς τὸν κύκλον ΑΒΓ, εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος $I''\,I'''$.

Ὁ κύκλος διαμέτρου $I''\,I'''$ διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Οἱ κύκλοι διαμέτρου II'' καὶ $I''\,I'''$ τέμνονται ὀρθογωνίως.

Ὁμὰς 2α

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: (1) Ὁ κύκλος (Ω) ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὰ μέσα O_1, O_2, O_3 τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα H_1, H_2, H_3 αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὰ μέσα Z_1, Z_2, Z_3 τῶν εὐθ. τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ ἀντιστοίχως (Η τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου). (2) Τὸ κέντρον Ω τοῦ κύκλου τούτου εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΗΟ (Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ΑΒΓ) καὶ ἡ ἀκτὶς εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος r τοῦ κύκλου ΑΒΓ[1].

2. Ἵνα ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως αἱ προβολαὶ αὐτοῦ, ἐπὶ τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, κεῖνται ἐπ' εὐθείας.[2]

3. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Β καὶ Γ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν: σημεῖον Α τοῦ (Ο) τὴν προβολὴν Α' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὰς προβολὰς Β' καὶ Γ' τῶν σημείων Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Α'Β'Γ' εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ σημείου Α τοῦ κύκλου (Ο).

4. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν τοὺς τρεῖς κύκλους ΡΑΒ, ΡΒΓ, ΡΓΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ συμμετρικοὶ τῶν ἀνωτέρω κύκλων ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως, διέρχονται διὰ σημείου Ρ'

5. Τὰ ὀρθόκεντρα τῶν τεσσάρων τριγώνων ἕκαστον τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ δύο προσκειμένας πλευρὰς καὶ μίαν διαγώνιον ἐγγραψίμου εἰς κύκλον τετραπλεύρου, εἶναι κορυφαὶ τετραπλεύρου ἴσου πρὸς τὸ θεωρούμενον.

6. Θεωροῦμεν ἐγγράψιμον εἰς κύκλον τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὰς προβολὰς τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων του ἐπὶ τὰς πλευράς αὐτοῦ (εὐθείας ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ πλευραί του). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

(1) Τὸ τετράπλευρον τὸ ἔχον κορυφὰς τὰς ἀνωτέρω προβολὰς εἶναι ἐγγράψιμον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.

(2) Ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διὰ τῶν τεσσάρων τούτων προβολῶν διέρχεται καὶ διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ ἀρχικοῦ τετραπλεύρου.

---

(1) Euler L. (1707—1783).
(2) Εὐθεῖα R. Simson. (1767—1868).

7. Θεωροῦμεν : κύκλον (O), εὐθεῖαν ε μὴ ἔχουσαν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸν (O), δύο διαμέτρους τοῦ (O) καθέτους ἐπ' ἀλλήλας καὶ τὰ κοινὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ αὐτῶν μὲ τὴν ε. Θεωροῦμεν ἐπίσης τὰς διὰ τῶν Ρ καὶ Σ ἐφαπτομένας τοῦ (O) καὶ τὰ τέσσαρα κοινὰ σημεῖα αὐτῶν, τὰ διάφορα τῶν Ρ καὶ Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα ταῦτα σημεῖα εἶναι συγκυκλικά.

Ὁμὰς 3η

1. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΒΓΑ', ΓΑΒ', ΑΒΓ' τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ Α', Β', Γ' κεῖνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ μέρος τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : (1) Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' διέρχονται διὰ σημείου (2) Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν κορυφῶν εἶναι ἐλάχιστον.

2. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς βάσεως ΒΓ καὶ ἀπὸ τοῦ Μ τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. τῶν ὁποίων ἔστωσαν Ε καὶ Ζ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως.

1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΖ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος ΑΖΕ διέρχεται διὰ ἑνὸς δευτέρου, ἐκτὸς τοῦ Α, σταθεροῦ σημείου.

3. Δίδονται δύο εὐθεῖαι δ καὶ δ' κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ ἕνα σημεῖον Α μιᾶς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν (δ, δ'). Θεωροῦμεν δύο κύκλους ἕκαστος τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ τῶν Ο καὶ Α καὶ ὀνομάζομεν Μ, Μ' τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὴν δ καὶ Ν, Ν' τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὴν δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΜΜ' = ΝΝ'.

4. Δίδεται κύκλος (O) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ μὴ ἀντιδιαμετρικά. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ὀνομάζομεν Ω καὶ Ω' τὰ κέντρα τῶν κύκλων οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ Ρ καὶ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως τοῦ κύκλου (O) κατὰ τὰ σημεῖα ἔστω Α καὶ Β.

(1) Νὰ εὑρεθοῦν σύνολα τῶν σημείων Ω καὶ Ω'.

(2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΩΩ' διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου (ἀνεξαρτήτου τοῦ σημείου Ρ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐδόθη ἡ ἔννοια τοῦ γεωμ. τόπου σημείων καὶ τοῦ γεωμ. τόπου εὐθειῶν εἰς τὸ ἐπίπεδον. Εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο ὁ κύκλος ὡρίσθη ὡς σύνολον σημείων ὁριζόμενον βάσει τῆς συνθήκης $OM = \alpha$, ἢ τῆς $(MA, MB) = \varphi$, ὅπου φ δοθεῖσα προσανατολισμένη γωνία καὶ A, B δοθέντα σημεῖα (205 καὶ 232).

Ἐκ τῶν εἰς τὸν κύκλον ἀναφερομένων προτάσεων προκύπτει ὅτι :

244. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων διέρχεται διὰ δύο δοθέντων σημείων A καὶ B εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος AB.** (208, Πόρισμα 6).

245. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας α εἰς δοθὲν σημεῖον A αὐτῆς εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν α εἰς τὸ σημεῖον A.** (224, Πόρισμα 4).

246. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰς δοθείσας εὐθείας.** (227, Πόρισμα 3).

247. ΘΕΩΡΗΜΑ. **Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστη τῶν ὁποίων ἀπέχει ἀπὸ δοθέντος σημείου O ἀπόστασιν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα α εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτῖνος α.**

Ἀπόδειξις. Ἂν μία εὐθεῖα ε ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ O ἀπόστασιν α εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτῖνος α.

Σημειοῦμεν ὅτι :

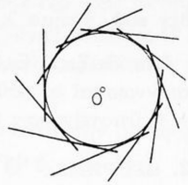
Ὁ κύκλος (O) ὡς ὡρίσθη ἀρχικῶς (205) θεωρεῖται, κατὰ τὴν ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, **παραγόμενος** ὑπὸ σημείου μεταβαλλομένου θέσει καὶ διατηροῦντος σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθέντος σημείου O, ἤτοι ὡς **σημειογενής.**

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω (247) θεωρήματος ἔχομεν μίαν ἄλλην θεώρησιν τοῦ κύκλου, ἀνταποκρινομένην εἰς τὴν γένεσιν αὐτοῦ ὑπὸ μιᾶς εὐθείας μεταβαλλομένης θέσει ὥστε νὰ διατηρῇ σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ δοθέντος σημείου O.

Βάσει ταύτης ὁ κύκλος θεωρεῖται ὡς **εὐθειογενής,** ἤτοι ὡς τὸ σύνολον τῶν ἐφαπτομένων του (Σχ. 247).

Γενικώτερον ὅταν αἱ εὐθεῖαι ἑνὸς συνόλου εἶναι ἐφαπτόμεναι ἑνὸς κύκλου (Ο), ὁ κύκλος οὗτος (Ο) δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ **περιβάλλουσα** τοῦ συνόλου τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν.

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ δι' ἕνα σύνολον κύκλων: Ἂν οἱ κύκλοι τοῦ συνόλου εἶναι ἐφαπτόμενοι ἑνὸς κύκλου (Ο), ὁ κύκλος οὗτος (Ο) δύναται νὰ ὀνομάζεται καὶ περιβάλλουσα τοῦ συνόλου τῶν ἀνωτέρω κύκλων.



Σχ. 247

248. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον (Ο), αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθὲν ἀντίστοιχον τόξον, εἶναι ἡ δέσμη τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου τούτου.

'Απόδειξις. Ἑκάστη τῶν διχοτόμων τῆς προτάσεως διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ἀνωτέρω τόξου. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν.

Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀναφέρονται εἰς γεωμ. τόπους ἀντιστοιχοῦντας εἰς θεμελιώδεις τινὰς συνθήκας:

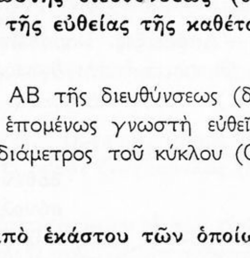
249. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΑΒ δοθέντος κύκλου (Ο), αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν γνωστῆς διευθύνσεως (δ), εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου (Ο) ἡ κειμένη ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

'Απόδειξις. Ἂν εἶναι Μ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς ΑΒ τῆς διευθύνσεως (δ), ἡ ΟΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἤτοι τὴν (δ), καὶ ἑπομένως γνωστὴ εὐθεῖα. Ὁ γεωμ. τόπος εἶναι ἡ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ΟΜ διάμετρος τοῦ κύκλου (Ο) (208, Πόρισμα 5).

250. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἀπὸ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἕνας δοθεὶς κύκλος Ο(r) φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.

'Απόδειξις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΑΟ (Σχ. 250) τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ κάθετος πλευρὰ ΟΑ (= r) καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία, ὡς ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς φ, ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΟΜ = α.

Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο (α).

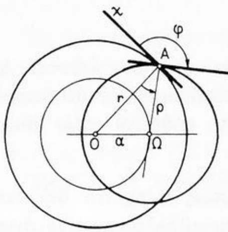


Σχ. 250

251. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις ἀπὸ δοθέντος κύκλου Ο (r), εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ, εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ (Σχ. 252), τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ κάθετοι πλευραὶ (ΟΑ = r, ΜΑ = λ) ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΟΜ = α. Τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο(α).

252. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος ρ, ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει δοθέντα κύκλον Ο (r) ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.



Σχ. 252

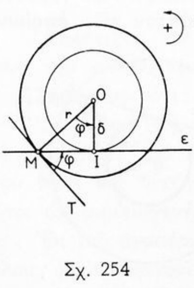
Ἀπόδειξις. Ἔστω Α τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ (Ο) μὲ ἕνα κύκλον (Ω) τέμνοντα τὸν (Ο) ὑπὸ τὴν γωνίαν φ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΑΩ τοῦ ὁποίου εἶναι γνωσταὶ αἱ πλευραὶ (ΟΑ = r) καὶ (ΩΑ = ρ) καὶ ἡ περιεχομένη γωνία (ΑΩ, ΑΟ), ὡς παραπληρωματικὴ τῆς φ, προκύπτει ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ πλευρὰ ΟΩ = α. Τὸ σημεῖον Ω εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο(α).

253. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ω τῶν κύκλων (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος ρ, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἑνὸς δοθέντος κύκλου Ο(r) εἶναι ἕνας κύκλος ὁμόκεντρος τοῦ δοθέντος.

Ἀπόδειξις. Παραλείπεται ὡς ἁπλῆ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ τόπου εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων r καὶ ρ τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ω) (241).

254. ΘΕΩΡΗΜΑ. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει δοθέντα κύκλον (Ο) ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ, εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἐφαπτομένων ἑνὸς κύκλου ὁμοκέντρου τοῦ (Ο).



Σχ. 254

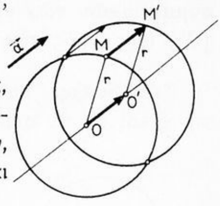
Ἀπόδειξις. Ἔστω ε μία τυχοῦσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸν (Ο) ὑπὸ γωνίαν φ καὶ ΟΙ ἡ διὰ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΙΟΜ (Σχ. 254), τοῦ ὁποίου εἶναι γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα (ΟΜ = r) καὶ ἡ γωνία φ, ἕπεται ὅτι εἶναι γνωστὴ ἡ ἀπόστασις ΟΙ τοῦ Ο ἀπὸ τῆς ε. Ἑπομένως ἡ ε εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου, τοῦ ὁμοκέντρου τοῦ (Ο), τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὸ γνωστὸν εὐθ. τμῆμα ΟΙ = δ. Ὁ κύκλος οὗτος Ο(δ) εἶναι ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ε.

255. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται κύκλος Ο(r) καὶ διάνυσμα $\vec{\alpha}$. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ κύκλου Ο(r) καὶ τὸ ὁμόλογον Μ′ αὐτοῦ κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ′ εἶναι ἕνας κύκλος Ο′(r) ἴσος πρὸς τὸν (Ο) τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ο′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Ο κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο′ (Σχ. 255) τὸ ὁμόλογον τοῦ Ο κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$ $(\overrightarrow{OO'} = \vec{\alpha})$. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΟΟ′Μ′Μ ἔχομεν ὅτι: $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM} = r$. Ἑπομένως τὸ Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο′(r).

Ἡ ἀνωτέρω (255) πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Τὸ ὁμόλογον κύκλου (Ο), κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$, *εἶναι κύκλος (Ο′) ἴσος πρὸς τὸν (Ο).*



Σχ. 255

Σημειοῦμεν ὅτι:

1. Ἂν ὁ κύκλος (Ο) θεωρηθῇ προσανατολισμένος, τότε ὁ ὁμόλογος (Ο′) αὐτοῦ, κατὰ οἱανδήποτε μεταφοράν, ἔχει τὸν αὐτὸν μὲ τὸν (Ο) προσανατολισμόν, ἤτοι δύο ὁμόλογα τόξα ἢ ὁμόλογοι ἐπίκεντροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ὁμοίως προσανατολισμέναι.

2. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι τοῦ ἐπιπέδου, ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὁμόλογος τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν παράλληλον μεταφοράν.

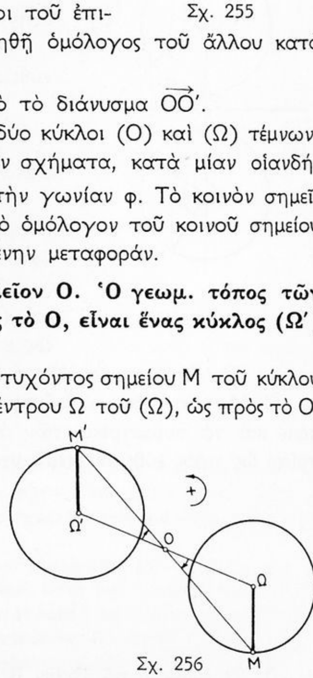
Πράγματι, ἡ μεταφορὰ αὕτη ὁρίζεται ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OO'}$.

3. Ἂν ἕνας κύκλος (Ο) καὶ μία εὐθεῖα ε ἢ δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ω) τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε καὶ τὰ ὁμόλογα αὐτῶν σχήματα, κατὰ μίαν οἱανδήποτε μεταφορὰν $T(\vec{\alpha})$ τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν (Ο) καὶ ε ἢ τῶν (Ο) καὶ (Ω), εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὁμολόγων σχημάτων, κατὰ τὴν θεωρουμένην μεταφοράν.

256. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται κύκλος (Ω) καὶ σημεῖον Ο. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ (Ω), ὡς πρὸς τὸ Ο, εἶναι ἕνας κύκλος (Ω′) ἴσος πρὸς τὸν (Ω).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ κύκλου (Ω), ὡς πρὸς τὸ Ο, καὶ Ω′ τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Ω τοῦ (Ω), ὡς πρὸς τὸ Ο.

Ἐκ τῶν ἴσων (75) τριγώνων ΟΩΜ καὶ ΟΩ′Μ′ προκύπτει ὅτι: Ω′Μ′ = ΩΜ = r. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Ω′ εἶναι γνωστὸν σημεῖον. Ἑπομένως τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ω′(r). Ἐν προκειμένῳ ἔχομεν μίαν μερικὴν περίπτωσιν τοῦ προηγουμένου γεωμ. τόπου, κατὰ τὴν ὁποίαν φ = π. Ὁ κύκλος (Ω′) ὀνομάζεται **συμμετρικὸς** τοῦ (Ω) ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο.



Σχ. 256

Σημειοῦμεν ὅτι :

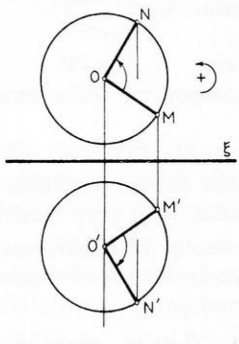
1. Οἱ κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένοι.

2. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι (Ω) καὶ (Ω'), ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμόλογος τοῦ ἄλλου, εἰς μίαν μόνον συμμετρίαν. Τὸ κέντρον τῆς συμμετρίας αὐτῆς εἶναι τὸ μέσον Ο τοῦ εὐθ. τμήματος ΩΩ'.

3. Ἂν μία εὐθεῖα καὶ ἕνας κύκλος ἢ δύο κύκλοι τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε καὶ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν, κατὰ οἱανδήποτε συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον, τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν φ.

257. ΘΕΩΡΗΜΑ. Δίδεται κύκλος Ο(r) καὶ εὐθεῖα ξ. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τὴν ξ [1] εἶναι ἕνας κύκλος (Ο') ἴσος πρὸς τὸν (Ο).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο' τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Ο τοῦ (Ο) ὡς πρὸς τὴν ξ καὶ Μ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ τυχόντος σημείου Μ τοῦ (Ο). Εἶναι : Ο'Μ' = ΟΜ = r. Ἐπειδὴ τὸ Ο' εἶναι γνωστὸν σημεῖον, τὸ σημεῖον Μ' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο' (r).



Σχ. 257

Ἡ πρότασις δύναται νὰ διατυπωθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Τὸ συμμετρικὸν ἑνὸς κύκλου (Ο) ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ξ εἶναι κύκλος (Ο') ἴσος πρὸς τὸν (Ο).

Σημειοῦμεν ὅτι :

1. Οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένοι.

Πράγματι, δύο οἱαιδήποτε ὁμόλογοι, κατὰ τὴν συμμετρίαν, ἐπίκεντροι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι.

2. Οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο'), ὁ τυχὼν ἐκ τούτων δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμετρικὸς τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μόνον συμμετρίαν : Τὴν ἔχουσαν ὡς ἄξονα τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΟΟ'.

3. Ἂν μία εὐθεῖα καὶ ἕνας κύκλος, ἢ δύο κύκλοι τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν φ, τότε καὶ τὰ συμμετρικὰ τῶν ἀνωτέρω σχήματα, κατὰ οἱανδήποτε συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν, τέμνονται ὑπὸ γωνίαν ἀντίθετον τῆς φ.

(1) Τὸ ὁμόλογον τοῦ κύκλου (Ο), κατὰ τὴν συμμετρίαν Σ(ξ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν χορδῶν ΑΒ δοθέντος κύκλου (Ο) αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Ρ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ κύκλου διαμέτρου ΟΡ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐσωτερικά τοῦ (Ο).

2. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α, αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχόντα κύκλον ἐφαπτόμενον τῆς ε εἰς τὸ Α καὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ε. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἄκρων Μ καὶ Μ' τῆς διαμέτρου αὐτῆς.

3. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχόντα ἐκ τῶν κύκλων (Ω) ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τῆς ε εἰς τὸ Α καὶ τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ τὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων ἐπαφῆς.

4. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Θεωροῦμεν τυχὸν εὐθ. τμῆμα ΑΒ = λ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τῶν α καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΒ.

5. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τούτων ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν : τυχοῦσαν ἐκ τῶν διὰ τοῦ Ο εὐθειῶν, τὰς προβολὰς Α' καὶ Β' τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως ἐπ' αὐτὴν καὶ τὸ μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος Α'Β'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ.

6. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο'). Θεωροῦμεν δύο τυχούσας παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, ἢ ἀντιρρόπους, ἀκτῖνας ΟΑ καὶ Ο'Α' τῶν ἀνωτέρω κύκλων ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Μ τῶν εὐθ τμημάτων ΑΑ'.

7. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου διὰ τὸ ὁποῖον ΑΒ + ΑΓ = λ καὶ τὴν προβολὴν Μ τοῦ Β (ἢ τοῦ Γ) ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν προβολῶν Μ τοῦ Β (ἢ τοῦ Γ) τῆς προηγουμένης προτάσεως ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν ΑΓ — ΑΒ = λ.

8. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ ἑκάστου τῶν ὁποίων ἡ διάμεσος ΒΒ' εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κορυφῶν Α τῶν τριγώνων τούτων.

9. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ ἐφαπτομένη ε αὐτοῦ. Ἔστω Β τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τῆς ε καὶ τὴν δευτέραν, ἐκτὸς τῆς ε ἐφαπτομένην ΑΓ τοῦ (Ο) (Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τῶν κέντρων Ι τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ.
(2) Τῶν προβολῶν τοῦ Β ἐπὶ τὰς εὐθείας ΟΑ.
(3) Τῶν ὀρθοκέντρων Η τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

10. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάμεσος ΑΒ αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Γ τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τὴν προβολὴν Γ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :

(1) Τοῦ σημείου Μ τῆς ΟΓ διὰ τὸ ὁποῖον ΑΜ = ΓΓ'.
(2) Τοῦ σημείου Μ' τῆς ΟΓ διὰ τὸ ὁποῖον ΟΜ = ΟΓ'.
(3) Τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΟΓΓ'.

11. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ε καὶ ε', τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον, καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ω) καὶ (Ω') ἐφαπτομένους ἀλλήλων καὶ τῶν ε καὶ ε' κατὰ τὰ Α καὶ Α' ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς Μ τῶν κύκλων τούτων.

12. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α αὐτῆς. Θεωροῦμεν ἑκατέρωθεν τοῦ Α δύο σημεῖα Ω καὶ Ω' τῆς ε, τοὺς κύκλους Ω(ΩΑ) καὶ Ω'(Ω'Α), τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα Β καὶ Β' τῶν κύκλων τούτων μὲ τὴν ε ἀντιστοίχως καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Ι καὶ Ι' τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω') ἀντιστοίχως μὲ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν αὐτῶν ἐφαπτομένην. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων ΒΙΙ'Β', ὅταν τὰ Ω καὶ Ω' μεταβάλωνται ἐπὶ τῆς ε ὥστε : ΑΩ — ΑΩ' = λ.

13. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα δ διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου του. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ε τοῦ (Ο) καὶ τὰς προβολὰς Μ καὶ Μ' τοῦ Ο ἐπὶ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν δ καὶ ε ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν Μ καὶ τῶν Μ'.

14. Δίδονται δύο σημεῖα Ο καὶ Α. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :
(1) Τῶν προβολῶν τοῦ Α ἐπὶ τὰς εὐθείας τὰς διερχομένας διὰ τοῦ Ο.
(2). Τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α ὡς πρὸς τὰς ἀνωτέρω εὐθείας.

15. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Θεωροῦμεν τρεῖς τυχούσας ἡμιευθείας ΑΧ, ΒΥ, ΓΖ ὥστε (ΑΒ,ΑΧ) = (ΒΓ, ΒΥ) = (ΓΑ, ΓΖ). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων : Α' (ΑΧ.ΓΖ), Β' (ΑΧ. ΒΥ), Γ' (ΒΥ.ΓΖ).

Ὁμὰς 2α

1. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι β καὶ γ, ἕνα σημεῖον Α καὶ μία εὐθεῖα α διερχομένη διὰ τοῦ Α, τῆς ὁποίας ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν ε τῆς ὁποίας ἔστωσαν Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα μὲ τὰς β καὶ γ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ δευτέρου, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινοῦ σημείου Α' τῶν κύκλων ΑΜΒ καὶ ΑΝΓ.

2. Δίδεται κύκλος(Ο) καὶ σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐκ τῶν διὰ τοῦ Α εὐθειῶν τῶν τεμνουσῶν τὸν (Ο), τὰ κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς μὲ τὸν (Ο) καὶ τοὺς κύκλους (Ω) καὶ (Ω') οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ τοῦ Α καὶ ἐφάπτονται ἀντιστοίχως τοῦ (Ο) κατὰ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ δευτέρου, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινοῦ σημείου Μ τῶν (Ω) καὶ (Ω').

3. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν δύο τυχούσας τεμνούσας ΡΑΑ' καὶ ΡΒΒ' τοῦ (Ο). Ἔστω Μ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ρ, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΡΑΒ καὶ ΡΑ'Β' καὶ Ν τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ρ, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων ΡΑΒ' καὶ ΡΑ'Β. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι τῶν σημείων Μ καὶ τῶν σημείων Ν.

4. Δίδεται εὐθεῖα ε, σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Η μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ Β εἶναι σημεῖον τῆς ε καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τὸ Η.
1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ο τῶν κύκλων ΑΒΓ καὶ τῶν κέντρων τῶν κύκλων Euler τῶν τριγώνων ΑΒΓ.
2. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι H_1H_2 (H_1 καὶ H_2 τὰ ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΓΑ σημεῖα τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ) διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.
3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ.

5. Δίδεται κύκλος (Ο). Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Α τοῦ (Ο) καὶ τὰς διὰ τούτου παραλλήλους ΑΒ καὶ ΑΓ πρὸς δοθείσας εὐθείας δ καὶ δ' ἀντιστοίχως. (Β καὶ Γ σημεῖα τοῦ (Ο)). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων Ι τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ.

6. Δίδεται κύκλος (Ο). Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους (Ω), δοθείσης ἀκτῖνος ρ, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τοῦ (Ο). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς Μ τῶν (Ω) μὲ τὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν τὰς παραλλήλους πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ.

7. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Ρ ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὴν μίαν τῶν διὰ τοῦ Ρ ἐφαπτομένων τοῦ (Ο). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ἐκ τῶν διὰ τοῦ Ρ τεμνουσῶν τὸν (Ο), τὰ κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ αὐτῆς μὲ τὸν (Ο), καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Η.

8. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') καὶ ἐπὶ τούτων δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ' τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως ὥστε (ΟΑ, ΟΜ) = −(Ο'Α', Ο'Μ'). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων Ρ τῶν εὐθ. τμημάτων ΜΜ'.

9. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο') καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἐπὶ τούτων ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δύο τυχούσας ἀκτῖνας ΟΒ καὶ Ο'Β' τῶν (Ο) καὶ (Ο') ἀντιστοίχως (Β καὶ Β' σημεῖα τῶν (Ο) καὶ (Ο')), τεμνομένας ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμ. τόποι :
(1) Τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β'.
(2) Τοῦ κέντρου Ω τοῦ κύκλου ΜΒΒ'.

Ὁμὰς 3η

1. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν: τυχὸν σημεῖον Μ, τὸ συμμετρικὸν Μ′ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Α, τὸ συμμετρικὸν Μ″ τοῦ Μ′ ὡς πρὸς τὸ Β καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ‴ τοῦ Μ″ ὡς πρὸς τὸ Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΜΜ″

2. Δίδονται δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Θεωροῦμεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ΑΒ καὶ ΑΔ διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ΑΓ.

3. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α′ αὐτῆς. Θεωροῦμεν δύο κύκλους (Ω) καὶ (Ω′) ἐφαπτομένους ἀλλήλων καὶ τῆς ε κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν διακέντρων ΩΩ τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω)′.

4. Δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ. Ἔστωσαν Β′ καὶ Γ′ αἱ προβολαὶ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ ἐπὶ τῆς ΓΑ καὶ ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν Β′Γ′.

5. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν εὐθειῶν ε ἑκάστης τῶν ὁποίων ἀπέχει ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἀποστάσεις αἱ ὁποῖαι ἔχουν:
1. Δοθὲν ἄθροισμα λ. 2. Δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

6. Δίδονται δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Θεωροῦμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ τὰ ἴσα πρὸς δοθὲν τρίγωνον, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχονται ἀντιστοίχως διὰ τῶν σημείων Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον (περιβάλλουσα) τῶν εὐθειῶν ΒΓ.

7. Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν τυχὸν ἐκ τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι: ΜΑ + ΜΒ = λ, καὶ τοὺς κύκλους (Ω) καὶ (Ω′) οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαμέτρους τὰ εὐθ. τμήματα ΜΑ καὶ ΜΒ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περιβάλλουσα τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ω′).

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τοῦ κύκλου καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις προβλημάτων μὴ δυναμένων νὰ ἐπιλυθῶσι μὲ τὴν ἀποκλειστικὴν χρησιμοποίησιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ μεταφορέως.

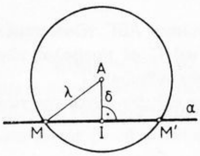
Ἐδέχθημεν (225) ὅτι ἂν ἕνα σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν καὶ ἕνα σημεῖον Β ἐσωτερικὸν ἑνὸς δοθέντος κύκλου (Ο), ὑπάρχει μεταξὺ τῶν Α καὶ Β σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) καὶ ἕνα μόνον. Δεχόμεθα ὅτι τοῦτο ἐπιτρέπει τὴν γραφικὴν ἐμφάνισιν τῶν δύο τούτων σημείων καὶ τοῦ κύκλου, καὶ ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ πρᾶξις ἡ ὁποία συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β σημείου τοῦ κύκλου, δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ. Ἀπεδείχθη (223) ὅτι ἕνας κύκλος καὶ μία εὐθεῖα, ἔχουν ἐν γένει, δύο κοινὰ σημεῖα. Δεχόμεθα ὅτι ἐκ τούτου ἐξασφαλίζεται ὅτι ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκονται τὰ σημεῖα ταῦτα δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ. Διὰ τὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐκτέλεσιν τῶν ἐποπτικῶν τούτων ἐνεργειῶν, τῶν ἀνταποκρινομένων εἰς τὰ ἀντίστοιχα ἀξιώματα καὶ θεωρήματα ὑπάρξεως, ἐπιτρέπεται ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ὀργάνου τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν **διαβήτην.** Κατὰ τὴν τοιαύτην ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν δεχόμεθα ὅτι ἡ κίνησις τῶν ὀργάνων σχεδιάσεως (κανόνος καὶ διαβήτου ἢ κανόνος καὶ μεταφορέως, ὅταν ἡ χρησιμοποίησις τοῦ διαβήτου, ἤτοι τῆς ἐννοίας τοῦ κύκλου, δὲν εἶναι ἀπαραίτητος) εἶναι κίνησις στερεοῦ σώματος.

Κατωτέρω δίδονται θεμελιώδη τινα προβλήματα γεωμετρικῶν κατασκευῶν, ἡ ἐπίλυσις τῶν ὁποίων πραγματοποιεῖται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

258. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδονται εὐθεῖα α καὶ σημεῖον Α μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς α ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.(1)

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ Μ (Σχ. 258) εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος, ἤτοι ὅτι ΑΜ = λ.

Τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος λ. Ἑπομένως εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς α καὶ τοῦ κύκλου Α(λ).

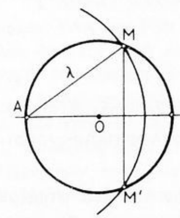


Σχ. 258

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ. Τὸ πρόβλημα δέχεται δύο, μίαν, ἢ οὐδεμίαν λύσιν καθ' ὅσον τὸ εὐθ. τμῆμα λ εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον τῆς ἀποστάσεως δ τοῦ σημείου Α ἀπὸ τῆς εὐθείας α.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν (λ > δ) αἱ λύσεις Μ καὶ Μ' εἶναι σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν προβολὴν Ι τοῦ Α ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

259. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται κύκλος Ο(r) καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.



Σχ. 259

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ Α δίδεται ἐπὶ τοῦ δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι ἡ λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς ΑΜ = λ ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Α(λ). Ἑπομένως τὸ Μ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (Ο) καὶ Α (λ).

Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ. Ὑπάρχουν ἐν γένει, δύο λύσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι συμμετρικαί, ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΑ τῶν ἀνωτέρω κύκλων (239).

Ἂν λ<2r τὸ πρόβλημα δέχεται δύο λύσεις, διότι ἡ τομὴ τῶν κύκλων Ο(r) καὶ Α(λ) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα (241).

Ἂν λ = 2r, τὸ πρόβλημα δέχεται μίαν λύσιν: τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ σημείου Α εἰς τὸν κύκλον (Ο), διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ τομὴ τῶν κύκλων περιορίζεται εἰς ἕνα σημεῖον: τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν. (Δύο σημεῖα συμπίπτοντα εἰς ἕν).

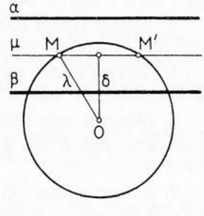
Ἐὰν λ > 2r, δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος (241).

Ὁμοίως ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σημεῖον Α δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο), εἶναι δηλαδὴ ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ.

(1) Εὐθ. τμῆμα μιᾶς δοθείσης κλάσεως ἰσότητος λ τοῦ συνόλου τῶν εὐθ. τμημάτων.

260. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπὸ δύο δοθεισῶν παραλλήλων α καὶ β καὶ δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθέντος σημείου Ο.

Λύσις. Ἔστω ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ ἱκανοποιεῖ τὴν πρώτην ἐκ τῶν δοθεισῶν συνθηκῶν εἶναι σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου μ (150) τῶν α καὶ β. Ἐπειδὴ ἱκανοποιεῖ τὴν δευτέραν, ΟΜ = λ, εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Ο(λ). Ἡ σύνθεσις εἶναι ἁπλῆ. Τὸ σημεῖον Μ κατασκευάζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας μ καὶ τοῦ κύκλου Ο(λ).



Σχ. 260

Τὸ πρόβλημα δέχεται τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ κύκλου Ο(λ) καὶ τῆς εὐθείας μ. Οὕτως ἂν εἶναι δ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ τῆς μεσοπαραλλήλου μ τῶν α καὶ β, θὰ ἔχωμεν:

1. Ἂν $\delta < \lambda$, ἡ τομὴ τῆς εὐθείας μ καὶ τοῦ κύκλου Ο(λ) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο διάφορα ἀλλήλων σημεῖα Μ καὶ Μ′. Ὑπάρχουν δηλαδὴ δύο λύσεις τοῦ προβλήματος.

2. Ἂν $\delta = \lambda$, ἡ μ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο(λ), ἤτοι ἡ τομὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ : τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς μ καὶ τοῦ κύκλου Ο(λ). Ὑπάρχει μία λύσις.

3. Ἂν $\delta > \lambda$, ἡ εὐθεῖα μ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο(λ), ἤτοι δὲν ὑπάρχουν κοινὰ σημεῖα αὐτῶν. Δὲν ὑπάρχει, ἑπομένως, λύσις τοῦ προβλήματος.

Παρατηροῦμεν ὅτι :

Ὅπως ἐσημειώσαμεν ἤδη (156) αἱ πλεῖσται τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν ἀνάγονται εἰς κατασκευὰς σημείων. Ἀπὸ τῆς ἀπόψεως αὐτῆς πρέπει νὰ δοθῇ μεγαλυτέρα σημασία εἰς τὴν κατηγορίαν αὐτὴν τῶν κατασκευῶν.

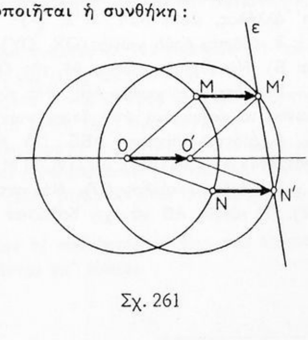
Κατωτέρω παραθέτομεν παραδείγματά τινα κατασκευῶν, ἀναγομένων εἰς κατασκευὰς σημείων.

261. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα καὶ Μ καὶ Μ′ τῶν (Ο) καὶ ε ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιῆται ἡ συνθήκη :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\lambda}\ (^1)$$

Λύσις. Ὑποθέτοντες ὅτι τὰ Μ, Μ′ (Σχ. 261) ἀποτελοῦν λύσιν ἔχομεν : Τὸ Μ′ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν μεταφορὰν $T(\overrightarrow{\lambda})$.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο), ἕπεται (255) ὅτι τὸ Μ′ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο′) τοῦ ὁμολόγου τοῦ (Ο) κατὰ τὴν ἀνωτέρω μεταφοράν. Οὕτω, τὸ σημεῖον Μ′ προσδιορίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ε μὲ τὸν κύκλον (Ο′). Ὑπάρχουν, ἐν γένει, δύο σημεῖα κοινὰ τῆς (ε) καὶ τοῦ (Ο′).



Σχ. 261

(1) $\overrightarrow{\lambda}$ δοθὲν ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου (107).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Δίδεται κύκλος (Ο), εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α τῆς ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τοῦ σημείου Α καὶ ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο).

2. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε τέμνουσα τοῦτον. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ = λ τοῦ (Ο) ὥστε τὸ μέσον αὐτῆς νὰ εἶναι σημεῖον τῆς ε.(1)

3. Δίδεται εὐθεῖα ε, σημεῖον Α αὐτῆς καὶ σημεῖον Β ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ὥστε: ΜΑ + ΜΒ = λ. (1)

4. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ὥστε (1). ΜΑ + ΜΒ = λ (2). ΜΑ − ΜΒ = λ.(1)

5. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ τρία σημεῖα Α, Β, Γ αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Δ τοῦ (Ο) ὥστε τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ εἶναι περιγράψιμον.

6. Δίδονται τρία σημεῖα Ρ, Α, Β. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ καὶ ἀπέχουσα ἀπὸ τῶν Α καὶ Β ἀποστάσεις ἐχούσας (1). Δοθὲν ἄθροισμα λ (2). Δοθεῖσαν διαφορὰν λ.(1)

7. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Ἔστω ΟΗ ἡ προβάλλουσα τὸ κέντρον τοῦ (Ο) ἐπὶ τὴν ε (Η ἐπὶ τῆς ε). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΟΗ τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ (Ο) νὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασίν του ΜΗ ἀπὸ τῆς ε.

8. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε τοῦ ὁποίου ἡ ἐφαπτομενικὴ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κύκλου (Ο) νὰ εἶναι δοθεῖσα λ. (1)

9. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ διάμετρος ΒΓ τοῦ (Ο) ὥστε (ΑΒ, ΑΓ) = φ (φ δοθεῖσα γωνία).

10. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε ἀπὸ τοῦ ὁποίου ὁ κύκλος (Ο) νὰ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν φ ἢ ἡ χορδή, ἡ ὁποία ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ (Ο) μὲ τὰς ἀπὸ τοῦ Μ ἐφαπτομένας αὐτοῦ, νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ. (1).

Ὁμὰς 2α

1. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπὸ τοῦ ὁποίου τὰ εὐθύγραμμα ταῦτα τμήματα νὰ φαίνωνται ὑπὸ δοθείσας γωνίας φ καὶ ω ἀντιστοίχως.

2. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἕνας κύκλος (Ο) καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ δεύτερα, ἐκτὸς τοῦ Μ, κοινὰ σημεῖα τῶν ΜΡ καὶ ΜΣ μὲ τὸν (Ο) νὰ εἶναι ΑΒ = λ. (1)

3. Δίδονται δύο ἐφαπτόμενοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) τῶν ὁποίων ἔστω Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο χορδαὶ ΑΜ καὶ ΑΜ′ τῶν κύκλων τούτων ἀντιστοίχως, κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ὥστε ΜΜ′ = λ. (1)

4. Δίδεται ὀρθὴ γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἐπὶ τῆς ΟΧ δύο σημεῖα Α καὶ Β (Α μεταξὺ τῶν Ο καὶ Β). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ΟΒ ὥστε: (ΜΑ, ΜΒ) = 2 · (ΒΜ, ΒΑ).

5. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

6. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του διὰ τὸ ὁποῖον: (ΑΒ, ΑΜ) = (ΒΓ, ΒΜ) = (ΓΑ, ΓΜ).

7. Δίδεται κύκλος (Ο). Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ ὥστε (1) ΑΒ = λ καὶ (2). Ἡ εὐθεῖα ΑΒ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

---

(1) λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

Ὁμὰς 3η

1. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ τοῦ (Ο) παράλληλος πρὸς τὴν ε, ὥστε ἂν εἶναι Α′ καὶ Β′ αἱ προβολαὶ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν ε, ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου ΑΑ′Β′Β νὰ εἶναι δοθεῖσα 2τ (τ δοθὲν εὐθ. τμῆμα).

2. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ). Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τούτων ἀντιστοίχως, ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι : (1) ΜΜ′ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ (2). Ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

3. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) καὶ σημεῖον Α τοῦ (Ο). Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως ὥστε : (1) Ἡ ΜΜ′ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον ΟΟ′ καὶ (2) ἡ γωνία (ΑΜ, ΑΜ′) ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ.

4. Δίδεται εὐθεῖα ξ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ξ ὥστε (ΜΑ, ΜΧ′) = 2 · (ΜΧ, ΜΒ), ἔνθα Χ καὶ Χ′ σημεῖα τῆς ξ ἑκατέρωθεν τοῦ Μ.

5. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α αὐτοῦ ὥστε (ΜΒ, ΜΑ) + (ΜΓ, ΜΑ) = φ, ἔνθα φ δοθεῖσα γωνία.

6. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ) καὶ ἕνα σημεῖον Σ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὸ Σ καὶ κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν (Ο) καὶ (Γ).

7. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Γ) καὶ μία εὐθεῖα ξ. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν (Ο) καὶ (Γ) ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς συνθῆκαι : (1). Ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ξ καὶ (2). τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΜ′ νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ξ.

8. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν (ΜΓ, ΜΑ) καὶ (ΜΑ, ΜΒ) νὰ εἶναι δοθεῖσα φ. Μέγιστον τῆς ἀνωτέρω διαφορᾶς.

9. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) καὶ μία εὐθεῖα ξ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ξ ὥστε αἱ ἀπὸ τούτου δύο ἐφαπτόμεναι τῶν (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν ξ.

10. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς μιᾶς τούτων ὥστε ἂν θεωρηθῇ ἡ διὰ τούτου παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν δ καὶ εἶναι Β καὶ Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὰς δύο ἄλλας ἐκ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, νὰ εἶναι ΜΒ = ΜΓ.

11. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τοῦ (Ο) ὥστε ΑΒ = ΑΓ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = φ, ἔνθα φ δοθεῖσα γωνία.

12. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου : κύκλος (Ο), εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῶν (Ο) καὶ ε ἀντιστοίχως ὥστε ΑΒ = ΑΓ καὶ (ΑΒ, ΑΓ) = φ.

13. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ (Ο). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ (Ο), ὥστε ἂν Α′ καὶ Β′ εἶναι κοινὰ σημεῖα τοῦ (Ο′) μὲ τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι Α′Β′ = λ, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

14. Δίδονται δύο παράλλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν α καὶ β ἀντιστοίχως, δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ὥστε ΕΖ = λ καὶ (ΟΕ, ΟΖ) = $\pi/2$.

15. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εὐθεῖα ε καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ε. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ τῆς ε διὰ τὸ ὁποῖον ἡ γωνία (ΜΑ, ΜΒ) εἶναι μεγίστη.

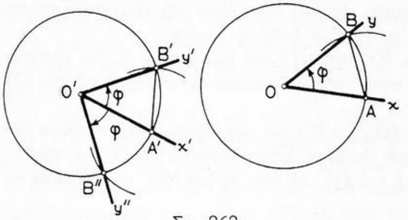
16. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′). Νὰ εὑρεθῆ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου των ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συθῆκαι : (1) Αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ ἀποστάσεις ΜΑ καὶ ΜΑ′ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν (Ο) καὶ (Ο′) νὰ εἶναι ἴσαι καὶ (2). Ἡ γωνία (ΜΑ, ΜΑ′) νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν φ.

17. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου του, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

262. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡμιευθεῖα Ο'Υ' σχηματίζουσα μὲ δοθεῖσαν ἡμιευθεῖαν Ο'Χ' γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ.

Λύσις. Ἔστω (ΟΧ,ΟΥ) ἡ δοθεῖσα γωνία φ. Ἐκ τῶν γνωστῶν (212) σχέσεων μεταξὺ τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ τῶν ἀντιστοίχων τόξων εἰς δύο ἴσους κύκλους ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις (Σχ. 262).

Κατασκευάζομεν δύο ἴσους κύκλους μὲ κέντρα τὰ Ο καὶ Ο' καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν. Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα τοῦ πρώτου κύκλου μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) ἀντιστοίχως καὶ Α τὸ ἐπὶ τῆς Ο'Χ' σημεῖον τοῦ δευτέρου κύκλου. Ὁρίζομεν (259) τὰ σημεῖα Β' καὶ Β'' ὥστε Α'Β' = = Α'Β'' = ΑΒ (Σχ. 262). Αἱ ἡμιευθεῖαι Ο'Β' καὶ Ο'Β'' εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος. Πράγματι, αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ Α'Β', ὡς καὶ αἱ ΑΒ καὶ Α'Β'' εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσαι. Ἑπομένως θὰ εἶναι καὶ (Ο'Χ', Ο'Υ') = (ΟΧ, ΟΥ) καὶ (Ο'Χ', Ο'Υ'') = –(ΟΧ,ΟΥ).



Σχ. 262

Σημειοῦμεν ὅτι : Ἐκ τῶν εὑρεθεισῶν δύο γωνιῶν ἡ λύσις εἶναι ἡ ὁμοίως πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν φ προσανατολισμένη.

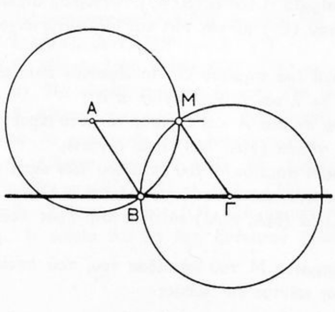
263. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ διὰ δοθέντος σημείου Α παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

Λύσις. Ἐκ τοῦ σχετικοῦ (86) θεωρήματος ὑπάρξεως ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις : Ὁρίζεται τυχὸν σημεῖον Β τῆς α. Τοῦτο χωρίζει τὴν α εἰς τὰς ἡμιευθείας ΒΧ καὶ ΒΧ'. Κατασκευάζεται (262), πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἡ γωνία (ΒΑ, ΒΧ), ἡ ἡμιευθεῖα ΑΥ ὥστε (ΑΒ, ΑΥ) = (ΒΑ,ΒΧ). Ἡ εὐθεῖα ἡ περιέχουσα τὴν ΑΥ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος (86).

Σημειοῦμεν ὅτι :

Ἐκ τῆς προτάσεως (191) τῆς ἀναφερομένης εἰς τὸ παραλληλόγραμμον, ἔχομεν τὴν ἑξῆς σύνθεσιν :

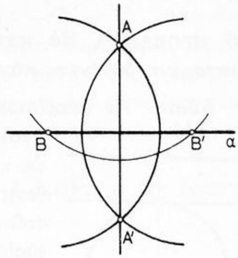
Λαμβάνονται ἐπὶ τῆς α δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ (Σχ. 263) καὶ κατασκευάζονται οἱ κύκλοι Α(ΒΓ) καὶ Γ(ΑΒ). Διὰ λόγους πρακτικοὺς λαμβάνεται ΒΓ=ΑΒ. Ἔστω Μ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων τούτων. Ἡ εὐθεῖα ΑΜ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Πράγματι, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΜ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σχ. 263

264. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.

Λύσις. Θεωροῦμεν τὰς περιπτώσεις: (1) Τὸ Α δὲν εἶναι σημεῖον τῆς α. Ἐκ τῶν προτάσεων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὴν τομὴν δύο κύκλων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις: Ὁρίζεται ἐπὶ τῆς α τυχὸν σημεῖον Β καὶ κατασκευάζεται ὁ κύκλος κέντρου Α καὶ ἀκτῖνος ΑΒ. Ἔστω Β′ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, σημεῖον τοῦ κύκλου τούτου μὲ τὴν α. Κατασκευάζονται οἱ κύκλοι Β(ΒΑ) καὶ Β′(Β′Α) (1) τῶν ὁποίων ἔστω Α′ τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὸν σημεῖον. Ἡ εὐθεῖα ΑΑ′ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος (239).



Σχ. 264

(2) Τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς α.

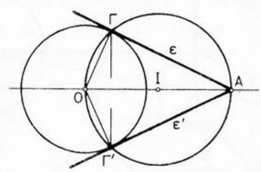
Ὁρίζονται ἑκατέρωθεν αὐτοῦ δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Β′ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Α. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα δύο ἴσων κύκλων Β(ρ) καὶ Β′(ρ), ἔνθα ρ τυχὸν εὐθ. τμῆμα μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος τοῦ ΑΒ, εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΒ′, ἤτοι ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

Σημειοῦμεν ὅτι:

1. Εὐκόλως βάσει τῶν ἀνωτέρω ἐπιλύεται τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς, διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, τῆς μεσοκαθέτου δοθέντος εὐθ. τμήματος.

265. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (Ο).

Λύσις. Ἂν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ (Ο) τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. Ἂν τὸ Α εἶναι σημεῖον τοῦ (Ο), ἡ διὰ τοῦ Α κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἶναι ἡ μόνη λύσις τοῦ προβλήματος



Σχ. 265

Ἂν τὸ σημεῖον Α εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ (Ο), ἡ σύνθεσις προκύπτει ἐκ τῶν ἑξῆς παρατηρήσεων. (Σχ. 265): Ἂν ἡ εὐθεῖα ε εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος καὶ εἶναι Γ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της μὲ τὸν κύκλον (Ο), ἡ εὐθεῖα ΟΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε, ἤτοι εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΓΟ, ΓΑ). Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Γ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου ΟΑ ὁ ὁποῖος καστασκευάζεται ἐκ τῶν δοθέντων στοιχείων.

Ἡ σύνθεσις κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εἶναι ἁπλῆ: Τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ′ εὑρίσκονται ὡς κοινὰ σημεῖα τοῦ κύκλου (Ο) καὶ τοῦ κύκλου διαμέτρου ΟΑ (241.3).

---

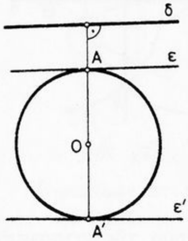
(1) Ἢ δύο τυχόντες ἴσοι κύκλοι, ἔχοντες κέντρα τὰ Β καὶ Β′ καὶ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΒ′.

Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΑΓ′ εἶναι αἱ δύο λύσεις τοῦ προβλήματος. Τὸ σχῆμα εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΟΑ.

Σημειοῦμεν ὅτι, ἡ προηγουμένη κατασκευὴ ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν τῆς τομῆς δύο συνόλων (οἰκογενειῶν) εὐθειῶν. Τοῦ συνόλου τῶν διὰ τοῦ σημείου Α εὐθειῶν (ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν κέντρου Α) καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ο). Ἡ εἰς τὸ σχετικὸν θεώρημα ὑπάρξεως (227) ἀνταποκρινομένη ἐπίλυσις τοῦ αὐτοῦ προβλήματος εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀξιώματος τῆς παραλλήλου (88).

266. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δοθείσης διευθύνσεως (δ), ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (Ο).

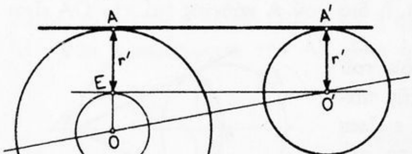
Λύσις. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ε ἀνήκει εἰς τὴν διεύθυνσιν (δ) καὶ εἶναι Α τὸ σημεῖον ἐπαφῆς της μὲ τὸν (Ο), ἡ εὐθεῖα ΟΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ε, εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν (δ). Ἡ σύνθεσις κατόπιν τούτου εἶναι ἁπλῆ : Κατασκευάζεται ἡ διὰ τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο) κάθετος ἐπὶ τὴν (δ) καὶ εὑρίσκονται τὰ κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α′ αὐτῆς μὲ τὸν (Ο). Αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ (Ο) εἰς τὰ Α καὶ Α′ εἶναι αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος. Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐπιτρέπει τὴν εὕρεσιν τῆς τομῆς τῶν ἑξῆς δύο συνόλων εὐθειῶν: τοῦ συνόλου τῶν εὐθειῶν τῆς δοθείσης διευθύνσεως καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ο).



Σχ. 266

267. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (Ο) καὶ (Ο′)(1)

Λύσις. Ἔστωσαν r καὶ r′ αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) ἀντιστοίχως. Ὑποθέτομεν r > r′. Ἔστω ΑΑ′ μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν (Ο) καὶ (Ο′). Ἂν θεωρήσωμεν τὴν διὰ τοῦ Ο′ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΑ′ τὸ κοινὸν σημεῖον Ε αὐτῆς μὲ τὴν ΟΑ κεῖται μεταξὺ τῶν Ο καὶ Α, διότι ΑΕ = r′ καὶ ΑΟ > r′.



Σχ. 267.1

Ἑπομένως : ΟΕ = r − r′. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθὴ ἡ γωνία (ΕΟ, ΕΟ′), ὡς ἴση πρὸς τὴν (ΑΟ,ΑΑ′),

(1) Μία κοινὴ ἐφαπτομένη δύο κύκλων (Ο) καὶ (Ο′) θὰ ὀνομάζεται **ἐξωτερικὴ** ἢ **ἐσωτερικὴ** καθ' ὅσον τὰ κέντρα Ο καὶ Ο′ τῶν κύκλων κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς.

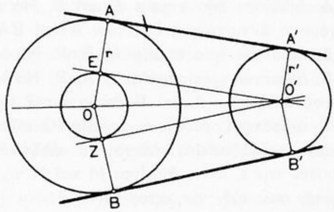
Ἡ κατασκευὴ τῶν κοινῶν ἐφαπτομένων δύο κύκλων ταυτίζεται, ἀπὸ ἀπόψεως θεωρητικῆς, μὲ τὴν ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τῆς τομῆς τοῦ συνόλου τῶν ἐφαπτομένων τοῦ (Ο) καὶ τοῦ συνόλου τῶν **ἐφαπτομένων** τοῦ (Ο′).

ἡ εὐθεῖα O'E εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτῖνος r — r' (Σχ. 267.1). Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις (Σχ. 267.2):

Κατασκευάζεται ὁ κύκλος O(r—r') καὶ αἱ διὰ τοῦ O' ἐφαπτόμεναι O'E, O'Z (Σχ. 267.2) τοῦ κύκλου τούτου (E καὶ Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς). Εὑρίσκονται τὰ ἐπὶ τῶν OE καὶ OZ σημεῖα A καὶ B τοῦ (O) καὶ κατασκευάζονται αἱ διὰ τοῦ O' παράλληλοι O'A', καὶ O'B' πρὸς τὰς ἀκτῖνας OA καὶ OB ἀντιστοίχως. Αἱ εὐθεῖαι AA' καὶ BB' εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Πράγματι, ἔχομεν ὅτι : EA = OA —OE = r —(r —r') = r'. Ἀλλὰ εἶναι καὶ O'A' = r'. Ἑπομένως τὸ τετράπλευρον EAA'O' εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ ἡ γωνία (EO', EA) τοῦ παραλληλογράμμου τούτου εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ (AE, AA') καὶ ἡ (A'A,A'O'), ἑπομένως ἡ AA' εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (O), ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OA αὐτοῦ κατὰ τὸ ἄκρον A αὐτῆς, καὶ τοῦ (O') διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Σημειοῦμεν ὅτι : ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη AA' εἶναι ἡ ὁμόλογος τῆς ἐφαπτομένης O'E τοῦ κύκλου O (r-r') κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{EA} = \vec{r'}$ τῆς ὁποίας ἡ διεύθυνσις εἶναι ἡ τῆς εὐθείας OE καὶ ἡ φορὰ ἡ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OE}$.



Σχ. 267.2

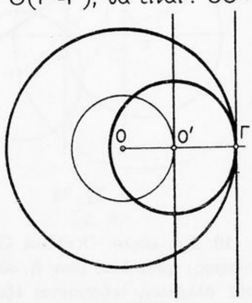
Δι' ὅμοιον λόγον ἡ BB' εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν (O) καὶ (O'). Ἐκ τῆς ἀναλύσεως προκύπτει ὅτι δὲν ὑπάρχουν ἄλλαι κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δοθέντων κύκλων.

Ὡς πρὸς τὴν ὕπαρξιν λύσεως παρατηροῦμεν :

1. Ἂν τὸ σημεῖον O' εἶναι ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου O(r-r'), ἤτοι : Ἂν OO' > r -r', οἱ κύκλοι (O) καὶ (O') κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, ἢ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ τέμνονται (241.3). Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν δύο κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι τῶν (O) καὶ (O').

2. Ἂν τὸ σημεῖον O' εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου O(r -r'), θὰ εἶναι : OO'= = r -r'. Ὁ κύκλος O' (r') ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τοῦ O(r) εἰς σημεῖον, ἔστω Γ. Ἡ εἰς τὸ Γ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων εἶναι ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη (Σχ. 267. 3). Οἱ δύο κύκλοι (O) καὶ (O') δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλας κοινὰς ἐφαπτομένας, διότι κάθε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου O'(r') εἶναι τέμνουσα τοῦ O(r).

3. Ἂν τὸ σημεῖον O' εἶναι ἐσωτερικὸν τοῦ κύκλου O(r-r') θὰ εἶναι : OO' < r-r'. Ὁ κύκλος O' (r') κεῖται ἐντὸς τοῦ O(r). Οἱ δύο κύκλοι δὲν ἔχουν κοινὴν ἐφαπτομένην, διότι κάθε ἐφαπτομένη τοῦ O'(r')



Σχ. 267.3

εἶναι τέμνουσα τοῦ O(r). Ἀναλόγως ἐπιλύεται καὶ τὸ πρόβλημα τῆς κατασκευῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης δύο κύκλων O(r) καὶ O′(r′).

Σημειοῦμεν ὅτι:

Ἂν οἱ διδόμενοι κύκλοι εἶναι ἴσοι, τότε κάθε κοινὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον OO′ αὐτῶν ἢ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος OO′. Ἑπομένως κατασκευάζεται κατὰ τὸ πρόβλημα (265 ἢ 266). Ὑπάρχουν τὸ πολὺ τέσσαρες κοιναὶ ἐφαπτόμεναι: δύο ἐξωτερικαὶ καὶ δύο ἐσωτερικαί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Δίδεται ἡμιευθεῖα AX. Νὰ κατασκευασθῇ ἡμιευθεῖα AY ὥστε (AX, AY) = π/2, χωρὶς τὴν χρησιμοποίησιν σημείων τῆς ἡμιευθείας AX′ τῆς ἀντικειμένης τῆς AX.

2. Νὰ κατασκευασθῇ διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ὀρθὴ γωνία ἔχουσα κορυφὴν ἕνα δοθὲν σημεῖον A.

3. Νὰ τριχοτομηθῇ δοθεῖσα ὀρθὴ γωνία.

4. Δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β διερχόμεναι ἀντιστοίχως διὰ τῶν A καὶ B καὶ ἀπέχουσαι ἀλλήλων δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

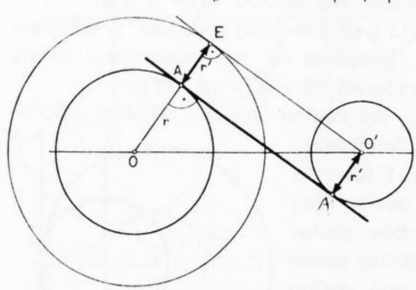
5. Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ἀπέχουσα ἴσον ἀπὸ τούτων.

6. Δίδονται τρία σημεῖα P, A, B. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ P καὶ ἀπέχουσα ἀπὸ τῶν A καὶ B ἀποστάσεις ἐχούσας δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

7. Δίδονται: εὐθεῖα ε, σημεῖον O αὐτῆς καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας διερχόμεναι ἀντιστοίχως διὰ τῶν A καὶ B καὶ τέμνουσαι τὴν ε, ὥστε ἂν εἶναι M καὶ N τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, τὸ σημεῖον O νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος MN.

8. Δίδεται κύκλος (O) καὶ σημεῖον A ἐξωτερικὸν αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ A τέμνουσα τὸν (O) ὥστε ἡ ὁριζομένη ἐπ' αὐτῆς χορδὴ τοῦ (O) νὰ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

9. Νὰ κατασκευασθῇ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη δύο δοθέντων κύκλων (O) καὶ (O′).



Σχ. 9α

Ὑπόδειξις. Ἂν ἡ AA′ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος, ἤτοι μία κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν (O) καὶ (O′), ἡ διὰ τοῦ O παράλληλος πρὸς τὴν AA′ εἶναι γνωστὴ εὐθεῖα. Πράγματι, ἄγεται ἀπὸ τοῦ γνωστοῦ σημείου O′ καὶ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου O(r + r′). Ἂν εἶναι E τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς ἀνωτέρω παραλλήλου, μὲ τὴν OA, ἐκ τοῦ ὀρθογ. παραλληλογράμμου AA′O′E ἔχομεν ὅτι AE = A′O′ = r′. Ἑπομένως OE = OA + AE = r + r′. Ἐπειδὴ ἡ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AA′ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν O′E καὶ ἑπομένως ἡ O′E εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου O(r + r′).

10. Δύο κύκλοι O(r) καὶ O′(r′) τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι διάφορα ἀλλήλων, ἔχουν τέσσαρας, τρεῖς, δύο, μίαν ἢ οὐδεμίαν κοινὴν ἐφαπτομένην καθ' ὅσον ἀντιστοίχως: κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, τέμνονται, ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς ὁ εἷς τούτων κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου.

11. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο παράλληλοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς α καὶ β ὥστε ἂν εἶναι Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι $AB = \lambda$. (1)

12. Δίδονται δύο τεμνόμεναι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′) τῶν ὁποίων ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ κοινὰ σημεῖα. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Α, ὥστε ἂν εἶναι Μ καὶ Μ′ τὰ δεύτερα ἐκτὸς τοῦ Α, κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ο′) νὰ εἶναι $MM' = \lambda$.

Ὁμὰς 2α

1. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′). Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τούτους ὥστε αἱ ὁριζόμεναι ἐπ᾽ αὐτῆς χορδαὶ τῶν κύκλων τούτων νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς δύο δοθέντα εὐθ. τμήματα λ καὶ λ′.

2. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′), ἐκ τῶν ὁποίων ὁ (Ο′) κεῖται ἐντὸς τοῦ (Ο). Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) ὥστε ἡ ἐπ᾽ αὐτῆς ὁριζομένη χορδὴ τοῦ (Ο) νὰ εἶναι δοθεῖσα λ.

3. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ δύο ἐφαπτόμεναι α καὶ β αὐτοῦ. Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη τοῦ (Ο) ὥστε, ἂν εἶναι Μ καὶ Ν τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς α καὶ β ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι $MN = \lambda$.

4. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ) καὶ ἐπὶ τῆς ΟΧ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι διὰ τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως, ὥστε ἂν εἶναι Α′ καὶ Β′ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα τούτων μὲ τὴν ΟΥ, νὰ εἶναι $AA' + BB' = 2\lambda$.

5. Δίδεται γωνία (ΑΥ, ΑΖ) καὶ σημεῖον Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΑΥ καὶ ΑΖ τῆς γωνίας ὥστε, ἂν εἶναι Β καὶ Γ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εἶναι δοθεῖσα 2τ.

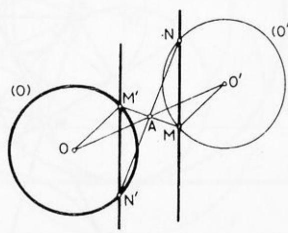
6. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε διερχομένη διὰ τοῦ Α ὥστε αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ἐπ᾽ αὐτὴν νὰ ἔχουν: (1) δοθὲν ἄθροισμα λ, (2) δοθεῖσαν διαφορὰν λ.

7. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε τέμνουσα τὸ τρίγωνον ὥστε ἂν εἶναι Α′, Β′, Γ′ τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῆς μὲ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νὰ εἶναι $A'B' = A'\Gamma' = \lambda$, ἔνθα λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

8. Δίδονται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου: εὐθεῖα ε, κύκλος (Ο) καὶ σημεῖον Α. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διὰ τοῦ Α τέμνουσα τὴν εὐθεῖαν ε καὶ τὸν κύκλον (Ο), ὥστε ἂν εἶναι Μ καὶ Μ′ ἀντιστοίχως τὰ κοινὰ σημεῖα, νὰ εἶναι $AM = AM'$.

Ὑπόδειξις. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐκ τῆς $AM' = AM$ ἔπεται ὅτι: τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν συμμετρίαν ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Α.

Ἀλλὰ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ε. Ἐπομένως τὸ Μ′ εἶναι σημεῖον τῆς ὁμολόγου ε′ τῆς ε κατὰ τὴν συμμετρίαν αὐτὴν (302). Οὕτω, τὸ Μ′ εὑρίσκεται ὡς κοινὸν σημεῖον τῆς ε′ μὲ τὸν κύκλον (Ο).



Σχ. 8α

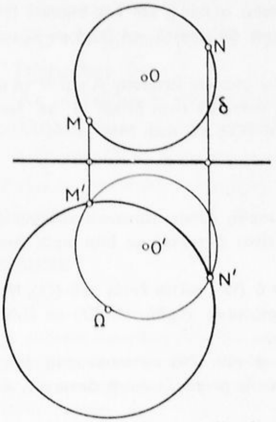
---

(1) λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

9. Δίδονται δύο κύκλοι (Ο) καὶ (Ω) καὶ μία εὐθεῖα ε. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα δ κάθετος ἐπὶ τὴν ε καὶ τέμνουσα τοὺς δοθέντας κύκλους ὥστε, ἂν εἶναι Μ καὶ Μ′ τὰ κοινὰ σημεῖα ἀντιστοίχως, τὸ εὐθ. τμῆμα νὰ διχοτομῆται ὑπὸ τῆς ε.

Ὑπόδειξις. Ἔστω δ μία λύσις τοῦ προβλήματος καὶ Μ καὶ Μ′ κοινὰ σημεῖα τῆς δ μὲ τοὺς κύκλους (Ο) καὶ (Ω) ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμεν ὅτι :

Τὸ σημεῖον Μ′ (Σχ. 9α) εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς τὴν ε. Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (Ο) τὸ Μ′ εἶναι (257) σημεῖον τοῦ συμμετρικοῦ (Ο′) τοῦ κύκλου (Ο) ὡς πρὸς τὴν ε. Ἑπομένως τὸ Μ′ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (Ω) καὶ (Ο′).

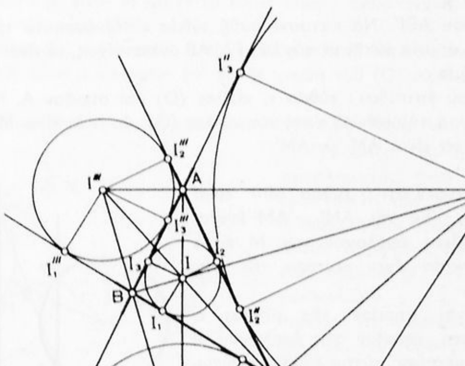


Σχ. 9α

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΚΥΚΛΩΝ

268. ΠΡΟΒΛΗΜΑ· Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν α, β, γ αἱ ὁποῖαι, θεωρούμεναι ἀνὰ δύο, τέμνονται.

Λύσις. Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν (Α τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν β καὶ γ κλπ). Τὸ κέντρον μιᾶς λύσεως τοῦ προβλήματος ἀπέχει ἴσον



Σχ. 268

ἀπὸ τῶν διδομένων εὐθειῶν. Ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν β καὶ γ εἶναι σημεῖον τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης ἐκ τῶν διχοτόμων δ_1 ἢ δ_1' τῶν γωνιῶν τῶν β καὶ γ. Ἐπίσης ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τῶν εὐθειῶν γ καὶ α εἶναι σημεῖον τῆς μιᾶς τῶν διχοτόμων δ_2 ἢ δ_2' τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν γ καὶ α (Σχ. 268).

Ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι σημεῖον μιᾶς τῶν δ_1 ἢ δ_2' καὶ μιᾶς τῶν δ_2 ἢ δ_2'. Ἔχομεν ἑπομένως τέσσαρας λύσεις: Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δ_1 καὶ δ_2, διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ ἡ δ_3, τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δ_1 καὶ δ_2' διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ δ_3', τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δ_1' καὶ δ_2 διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ δ_3' καὶ τὸ σημεῖον τῶν δ_1' καὶ δ_2' διὰ τοῦ ὁποίου διέρχεται καὶ ἡ δ_3. Τὰ ζητούμενα σημεῖα εἶναι τὰ κέντρα Ι καὶ Ι', Ι'', Ι''' τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἂν αἱ δύο ἐκ τῶν διδομένων εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι, ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων περιορίζεται εἰς δύο.

Ἂν καὶ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος r εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

(1) Ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε καὶ διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α.

(2) Διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ ὁρίζων ἐπὶ δοθείσης εὐθείας ε, ἢ ἐπὶ δοθέντος κύκλου (Ο), χορδὴν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

(3) Ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ ἔχων τὸ κέντρον του ἐπὶ δευτέρου δοθέντος κύκλου (Ο').

(4) Ὁρίζων ἐπὶ δοθέντος κύκλου (Ο) χορδὴν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε (ἢ δοθέντος κύκλου (Ο')).

(5) Τέμνων δύο δοθέντας κύκλους (Ο) καὶ (Ο') κατὰ διάμετρον.

(6) Ἐφαπτόμενος ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικως δύο δοθέντων τεμνομένων κύκλων (Ο) καὶ (Ο')

(7) Τέμνων ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον (Ο) καὶ κατὰ διάμετρον δεύτερον δοθέντα κύκλον (Ο').

2. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) :

(1) Ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν καί, ἐξωτερικῶς, ἑνὸς δοθέντος κύκλου (Ο).

(2) Ὁρίζων ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν χορδὰς ἴσας πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα λ.

(3) Ἐφαπτόμενος τριῶν δοθέντων ἴσων κύκλων.

3. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς καὶ δοθέντος κύκλου Ο(r).

Ὑπόδειξις. Θεωροῦμεν ἕνα κύκλον (Ω) περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος (1).

Σχ. 3α

(1) Εἰς τὰ Μαθηματικὰ τῆς Δ' τάξεως, θὰ ἔχωμεν καὶ μιὰν ἄλλην μέθοδον εὑρέσεως τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, βασιζομένην εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ γινομένου δύο εὐθ. τμημάτων.

Θεωροῦμεν (Σχ. 3α) τὸν κύκλον ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Ω (ὁμόκεντρον τοῦ (Ω), καὶ διέρχεται διὰ τοῦ Ο, καὶ ἐφαπτομένην αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν ε. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόστασις τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς ἀπὸ τῆς ε εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα r τοῦ κύκλου (Ο), ἡ ἐφαπτομένη αὕτη εἶναι μία γνωστὴ εὐθεῖα. Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς Ι μὲ τὸν θεωρηθέντα κύκλον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου δ ἐπὶ τὴν ε κατὰ τὸ σημεῖον Α αὐτῆς.

4. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε.

Ὑπόδειξις. Ἔστω (Ω) μία λύσις τοῦ προβλήματος (Σχ. 319) καὶ Ι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς λύσεως αὐτῆς μὲ τὴν ε. Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν ε. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι ἕνα γνωστὸν σημεῖον, ὡς συμμετρικὸν τοῦ δοθέντος Α ὡς πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε. Ἡ γωνία (ΙΑ,' ΙΒ) ἀποδεικνύεται γνωστή.

Ὁμὰς 2α

1. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε καὶ δοθέντος κύκλου (Ο) εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτοῦ.

2. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ δευτέρου δοθέντος κύκλου (Ο') εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτοῦ.

3. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς καὶ διερχόμενος διὰ δευτέρου δοθέντος σημείου Β.

4. Δίδεται γωνία (ΟΧ, ΟΥ). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὴν γωνίαν αὐτὴν κύκλος (Ω) ἔχων δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ.

5. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ω) δοθείσης ἀκτῖνος ρ:
(1) Διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β.
(2) Ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε εἰς δοθὲν σημεῖον Α αὐτῆς.

6. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι: (1) Οἱ κύκλοι νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β (2) Νὰ τέμνωνται ὀρθογωνίως κατὰ ἕνα τρίτον δοθὲν σημεῖον Γ.

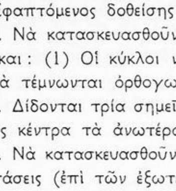
7. Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Νὰ κατασκευασθοῦν τρεῖς κύκλοι ἔχοντες κέντρα τὰ ἀνωτέρω σημεῖα καὶ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων ἀνὰ δύο.

8. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο κύκλοι (Ω) καὶ (Ω') ὅταν δίδωνται αἱ ἐφαπτομενικαὶ αὐτῶν ἀποστάσεις (ἐπὶ τῶν ἐξωτερικῶν καὶ ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων των) καὶ ἡ γωνία τῆς διακέντρου των μὲ μίαν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

269. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται αἱ τρεῖς πλευραὶ αὐτοῦ.

Λύσις. Αἱ δοθεῖσαι πλευραὶ εἶναι αἱ $ΒΓ = α$, $ΓΑ = β$, $ΑΒ = γ$. Ὑποθέτομεν $α > β > γ$. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας εὐθ. τμῆμα ΒΓ ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν α. Ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Β(γ): κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ γ, καὶ τοῦ κύκλου Γ(β): κέντρου Γ καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς τὸ β. Ἑπομένως εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο τούτων κύκλων. Ἂν ἡ τομὴ ἀποτελῆται ἀπὸ δύο διακεκριμένα σημεῖα Α καὶ Α' τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος. Αἱ δύο αὗται λύσεις εἶναι τρίγωνα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ λόγῳ τούτου ἀντιρρόπως ἴσα (Σχ. 269).



Σχ. 269

Ἵνα εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευή, ἤτοι ἵνα ὑπάρχη λύσις, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἀνωτέρω κύκλοι κέντρων Β καὶ Γ νὰ ἔχουν τομὴν (δύο ἢ ἕνα σημεῖον). Διὰ νὰ ὑπάρχουν δύο λύσεις πρέπει ἑπομένως καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι (241).

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma.$$

Ἐπειδὴ τὸ εὐθ. τμῆμα α εἶναι μεγαλύτερον ἑκάστου τῶν β καὶ γ, θὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς διαφορᾶς β - γ. Ἑπομένως ἡ συνθήκη διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\alpha < \beta + \gamma.$$

Ὥστε ἵνα τρία εὐθ. τμήματα εἶναι πλευραὶ τριγώνου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως τὸ μεγαλύτερον τούτων εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἂν $\alpha = \beta = \gamma$, οἱ ἀνωτέρω κύκλοι ἔχουν δύο διακεκριμένα κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α', διότι ἡ ἀπόστασις α τῶν κέντρων των εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων των καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἡ ὁποία εἶναι τὸ μηδενικὸν εὐθ. τμῆμα.

Τὸ κατασκευαζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι **ἰσόπλευρον.**

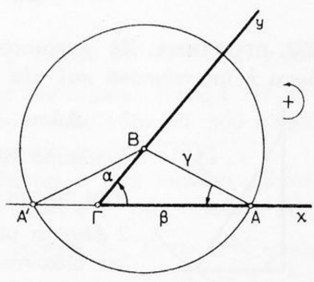
Ἂν ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ $\alpha = \beta + \gamma$, τότε ἡ τομὴ τῶν ἀνωτέρω κύκλων εἶναι σημεῖον τῆς ΒΓ. Αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

270. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ μία γωνία κειμένη ἀπέναντι μιᾶς τῶν διδομένων πλευρῶν.

Λύσις. Ἔστω ὅτι δίδονται αἱ πλευραὶ ΒΓ = α, ΑΒ = γ, καὶ ἡ γωνία Γ = φ.

Περίπτωσις Ι. $\alpha < \gamma$.

Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας (ΓΧ, ΓΥ) ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν φ, π.χ. ἐπὶ τὴν ΓΥ, ὁρίζεται τὸ σημεῖον Β ὥστε ΓΒ = α καὶ κατασκευάζεται ὁ κύκλος κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος γ. Ὁ κύκλος οὗτος ἔχει (226) δύο σημεῖα Α καὶ Α' ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΓ, ἡ ὁποία περιέχει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας Γ. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Α' (Σχ. 270.1).

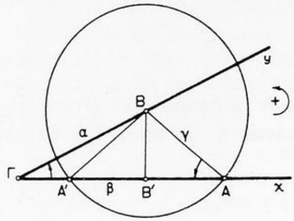


Σχ. 270.1

Ἂν ἡ γωνία Γ εἶναι ὀρθή, ἔχομεν δύο λύσεις ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ. Ἂν ἡ γωνία Γ δὲν εἶναι ὀρθή, ἔχομεν ἕνα τρίγωνον ὡς λύσιν.

Περίπτωσις ΙΙ. $\alpha = \gamma$. Ἡ γωνία Γ εἶναι τότε ὀξεῖα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ Γ συμπίπτει μὲ τὸ Α' ἢ μὲ τὸ Α. Τὸ πρόβλημα ἔχει τότε μίαν μόνον λύσιν.



Σχ. 270.3

Περίπτωσις III. $\alpha > \gamma$. Ἡ γωνία Γ εἶναι τότε ὀξεῖα.

Κατασκευάζεται ἡ διὰ τοῦ B κάθετος BB′ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν α.

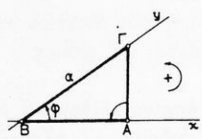
1. Ἂν $\gamma = BB'$, ὑπάρχει ἕνα μόνον τρίγωνον: τὸ BB′Γ (Σχ. 270.3)

2. Ἂν $\gamma > BB'$, τὰ σημεῖα A καὶ A′ τῆς εὐθείας AΓ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ (Σχ. 270.3), καὶ ὑπάρχουν δύο τρίγωνα ἱκανοποιοῦντα τὰς δοθείσας συνθήκας: τὸ τρίγωνον ABΓ καὶ τὸ A′BΓ.

3. Ἂν $\gamma < BB'$. Δὲν ὑπάρχει λύσις τοῦ προβλήματος.

271. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία ὀξεῖα γωνία.

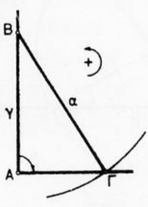
Λύσις. Τὰ διδόμενα στοιχεῖα εἶναι: ἡ γωνία $A = \frac{\pi}{2}$, ἡ $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία $B = \varphi$.



Σχ. 271

Λύσις. Κατασκευάζεται γωνία (BX, BY) ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν $B = \varphi$. Λαμβάνεται ἐπὶ τῆς BY τὸ σημεῖον Γ ὥστε $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἄγεται ἡ διὰ τοῦ Γ κάθετος ΓA ἐπὶ τὴν BX. Τὸ τρίγωνον ABΓ εἶναι **λύσις** τοῦ προβλήματος. Τὸ πρόβλημα δέχεται πάντοτε λύσιν καὶ μόνον μίαν (Σχ. 271).

272. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία κάθετος πλευρά.

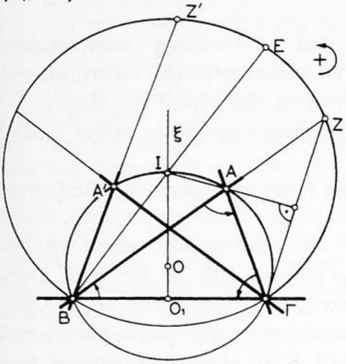


Σχ. 272

Λύσις. Τὰ διδόμενα στοιχεῖα εἶναι ἡ γωνία $A = \frac{\pi}{2}$, ἡ πλευρὰ $B\Gamma = \alpha$ καὶ ἡ $AB = \gamma$. Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ τῆς παραγράφου (270), ὅταν ἡ γωνία $A = \frac{\pi}{2}$. 2 Δέχεται μίαν λύσιν, καὶ μόνον μίαν, ἂν $\alpha > \gamma$ (Σχ. 272). Ἂν δίδωνται αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ, ἡ κορυφὴ A εἶναι κοινὸν σημεῖον τοῦ κύκλου διαμέτρου BΓ καὶ τοῦ κύκλου $B(\gamma)$: κέντρου B καὶ ἀκτῖνος γ.

273. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ABΓ ἐκ τῶν στοιχείων: πλευρᾶς $B\Gamma = \alpha$, γωνίας $(AB, A\Gamma) = \varphi$, καὶ ἀθροίσματος $\Gamma A + AB = \lambda$.

Λύσις. Θεωροῦμεν ἕνα τρίγωνον ABΓ περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι λύσις προβλήματος (ἱκανοποιεῖ τὰς δοθείσας συνθήκας). Παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν εἰς τυχοῦσαν θέσιν τὴν πλευρὰν ΒΓ = α. Κατόπιν τούτου τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν (κατασκευὴν τῆς κορυφῆς Α).



Σχ. 273

Ἐκ τῆς συνθήκης (ΑΒ, ΑΓ) = φ ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Α εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου (232) διερχομένου διὰ τῶν σημείων Β καὶ Γ.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν συνθήκην ΓΑ + ΑΒ = λ, παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐμφανίσωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα λ, θεωροῦντες ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται τὸ Β, τὸ σημεῖον Ζ ὥστε ΑΖ = ΓΑ, διότι τότε θὰ εἶναι: ΒΖ = ΒΑ + ΑΖ = ΒΑ + ΓΑ = λ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Ζ, εὑρίσκεται ἐκ τούτου τὸ σημεῖον Α (διότι εἰς τὴν ΑΖ = ΑΓ προκύπτει ὅτι τὸ Α εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΖ).

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ τώρα εἰς τὸ σημεῖον Ζ παρατηροῦμεν:

Ἐκ τῆς ΒΖ = λ προκύπτει ὅτι τοῦτο εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου Β(λ): κέντρου Β καὶ ἀκτῖνος λ. Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ γωνία (ΑΒ, ΑΓ) εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΓΖ, θὰ εἶναι:

$$(ZB, Z\Gamma) = \frac{1}{2}\,(AB, A\Gamma) = \frac{1}{2}\,\varphi.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας αὐτῆς: $(ZB,\ Z\Gamma) = \frac{\varphi}{2}$ ἕπεται ὅτι τὸ Ζ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ κύκλου, διερχομένου διὰ τῶν γνωστῶν σημείων Β καὶ Γ. Τὸ κέντρον μάλιστα τοῦ κύκλου τούτου εἶναι τὸ μέσον Ι τοῦ τόξου ΒΓ τοῦ κύκλου τοῦ ὁριζομένου ἐκ τῶν σημείων Β, Γ καὶ τῆς γωνίας φ. (Σχ. 273).

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων, ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις: Κατασκευάζονται οἱ ἀνωτέρω δύο γεωμ. τόποι τοῦ σημείου Ζ, ἤτοι ὁ κύκλος Β(λ) καὶ ὁ ὁριζόμενος ἐκ τῶν σημείων Β, Γ καὶ τῆς γωνίας $\frac{\varphi}{2}$. Ἔστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων τούτων. Κατασκευάζεται ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΖ. Ἂν ἡ τελευταία αὕτη τέμνῃ τὴν ΒΔ κατὰ σημεῖον Α διάφορον τοῦ Β, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

Ἡ περὶ τούτου ἀπόδειξις παραλείπεται ὡς ἁπλῆ.

Καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὰς συνθήκας (σχέσεις μεταξὺ τῶν διδομένων στοιχείων) αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑφίστανται διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν παρατηροῦμεν:

Ἂν εἶναι Ε τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Β, κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΒΙ μὲ τὸν κύκλον τὸν ὁριζόμενον ἀπὸ τὰ Β, Γ καὶ τὴν γωνίαν $\frac{\varphi}{2}$, πρέπει, διὰ νὰ ὑπάρχῃ τομὴ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ κύκλου καὶ τοῦ Β(λ), νὰ εἶναι :

$$\lambda \leqslant ΒΕ.$$

Ἐφ' ὅσον ἡ συνθήκη αὕτη ἱκανοποιεῖται, διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΖ νὰ τέμνῃ τὴν ΒΖ εἰς σημεῖον Α τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΖ, διάφορον τοῦ Β, ἤτοι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι : $ΒΓ < ΒΖ$ ἤτοι $\alpha < \lambda$. Τὸ πρόβλημα δέχεται τουλάχιστον μίαν λύσιν ὅταν :

$$\alpha < \lambda \leqslant ΒΕ.$$

Ἄν $\lambda = ΒΕ$, τὸ σημεῖον Α συμπίπτει μὲ τὸ Ι καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Ὅταν $\alpha < \lambda < ΒΕ$, ὁ κύκλος Β(λ) τέμνει τὸν κύκλον ΒΕΓ κατὰ τὰ σημεῖα Ζ καὶ Ζ', συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΕ. Ἡ ΒΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας (ΒΕ, ΒΖ') καὶ αἱ πλευραὶ αὐτῆς τέμνουσιν τὸν κύκλον ΒΙΓ κατὰ δύο σημεῖα Α καὶ Α', συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ἑπομένως ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $\alpha, Γ, \upsilon_1$. (2). $\alpha, Γ, \upsilon_2$. (3) $\alpha, Γ, \mu_1$. (4), $\alpha, Γ, \mu_2$. (5) $\alpha, Γ, \mu_3$. (6). $\alpha, Γ, \beta + \gamma$ (7). $\alpha, Γ, \beta - \gamma$. (8). $\alpha, Α, \upsilon_1$ (9). $\alpha, Α, \upsilon_2$ (10). $\alpha, Α, \mu_1$. (11). $\alpha, Α, \mu_2$. (12). $\alpha, Α, \rho$ (13). $\alpha, Α, \beta + \gamma$. (14). $\alpha, Α, \beta - \gamma$.

2. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $\beta + \gamma, Β - Γ, \upsilon_2$ (2). $\beta - \gamma, Β - Γ, \upsilon_2$ (3). $r, \beta + \gamma, Β - Γ$. (4). $r, \beta - \gamma, Β - Γ$. (5). $r, \beta + \gamma, \upsilon_2 + \upsilon_3$ (6). $\rho, \upsilon_1, Α$ (7). $\rho, \upsilon_1. Β - Γ$ (8). $r, \upsilon_1, Β - Γ$. (9). $\upsilon_1, \delta_1, \mu_1$ (10). $r, \delta_1, Β - Γ$.

3. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $Β, \upsilon_2, \upsilon_3$ (2). $Β, \upsilon_1, \upsilon_3$ (3). $Β, \mu_3, \mu_2$. (4). $Β, \mu_3, \mu_1$. (5). υ_1, μ_1, μ_2 (6). $Β, \delta_2, \upsilon_1$. (7). $Β, \delta_2, \upsilon_2$ (8). $Α, \rho, 2r$. (9). $Α, r, 2\tau$. (10). $Α, \delta_1, \rho$ (11). $Α, \upsilon_2, \mu_2$ (12). $Α, \upsilon_2, \mu_1$ (13) $Α, \upsilon_2, \mu_3$. (14). $Α, r, \rho$ (15). $Α, \upsilon_1, r$ (16). $Α, \upsilon_2, r$ (17). $Α, \mu_1, r$ (18). $Α, \mu_2, r$.

4. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων (σημείων) :
(1). $Α, Ο, Ο_1$ (2). $Α, Ο_1, Η$ (3). $Β, G, Η$ (4). $Β, Γ, G$ (5). $Β, Γ, Ι$ (6). $Β, Γ, Ι'$ (7). $Β, Γ, Ι''$ (8). $Β, Γ, Ι'''$ (9). $Η, G, Η_1$ (10). $Η_1, Η, Ο$ (11). $Η_1, Η_2, Η_3$ (12) $Ο_1, Ο_2, Ο_3$ (13) $Α, Η, G$ (14). $Ι, Ο, Ι'$. (15) $Ι, Ι', Ι''$. (16). $Ι', Ι'', Ο$ (17). $Α, G, Ο$ (18). $Β, Ο, \Omega$ (1).

5. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $\alpha, Α, Β - Γ$. (2). $\alpha, \beta + \gamma, Β - Γ$ (3). $\alpha, \beta - \gamma, Β - Γ$ (4). $\alpha, 2\tau, r$ (5). $\alpha, ΟΟ_1 = \lambda, ΟΟ_2 = \mu$. (6). $\beta, \gamma, Β - Γ$.

6. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $\alpha, \beta + \gamma$ (2). $\alpha, \beta - \gamma$. (3). $Β, \rho$. (4). $Β, 2\tau$. (5)· α, μ_2 (6). β, μ_1. (7). β, μ_2. (8). $\upsilon_1, Β - Γ$ (9). $\delta_1, Β - Γ$ (10). $2\tau, Β - Γ$. (11). δ_2, σημεῖον Ι.

7. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν στοιχείων :
(1). $Α, 2\tau$ (2). $\upsilon_1, 2\tau$.

---

(1) Ω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Euler τοῦ τριγώνου.

'Ομὰς 2α

1. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται τὰ στοιχεῖα:
(1). (Ο), γωνίαι Β, Γ. (2). (Ι), γωνίαι Β, Γ. (3). Κύκλοι (Ι) καὶ (Ι').
(4). Κύκλοι (Ι'') καὶ (Ι''').
(5). (Ο), αἱ διευθύνσεις τῶν ΑΒ, ΑΓ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ ΑΓ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ.
(6). (Ο), καὶ αἱ διευθύνσεις τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ.
(7). (Ο), Α, καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ.
(8). (Ο), ἡ διεύθυνσις τῆς ΒΓ, καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ.
(9). Σημεῖα $Ο_2$, $Ο_3$ καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Α καὶ Β εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθέντων κύκλων (ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου ἢ δύο εὐθειῶν).
(10). Κορυφαί, Β, Γ, γωνία Β καὶ τὸ ἐπὶ τῆς ΒΓ σημεῖον Ρ τῆς ΟΑ.
(11). Κορυφὴ Α, πλευρὰ α, συνθῆκαι ὅπως: ἡ ΒΓ εἶναι γνωστῆς διευθύνσεως καὶ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν $ε_1$ καὶ $ε_2$ (ἢ δύο δοθέντων κύκλων ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου).
(12). Κορυφαὶ Β, Γ, διαφορὰ γωνιῶν Β — Γ, καὶ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε.
(13). Κορυφαὶ Β, Γ, β - γ καὶ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον μιᾶς εὐθείας δοθείσης ε.

2. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται:
(1) Αἱ συνθῆκαι: (α) Ὅπως εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.
(β) Αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Σ.
καὶ (γ) Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ εἶναι ἐφαπτομένη δοθέντος κύκλου (Γ).
(2) Αἱ συνθῆκαι ὅπως εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν τρίγωνον Α'Β'Γ'.

3. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται:
(1) Αἱ μεσοκάθετοι $ξ_1$, $ξ_2$, $ξ_3$ τῶν πλευρῶν του καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ κορυφὴ Α εἶναι σημεῖον τῆς $ξ_1$.
(2) Αἱ μεσοκάθετοι $ξ_1$, $ξ_2$, $ξ_3$ καὶ τὸ σημεῖον $Ο_1$ (μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ).
(3) Αἱ διὰ τῶν κορυφῶν του κάθετοι $η_1$, $η_2$, $η_3$ ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ ἡ κορυφὴ Α.
(4) Αἱ εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ ἕνα σημεῖον Ρ αὐτοῦ (ἢ ἡ κορυφὴ Α).
(5) Αἱ δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ αὐτοῦ καὶ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντστοίχως (ἢ ἡ κορυφὴ Α).
(6) Ὁ κύκλος (Ι) καὶ ἡ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαί του εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου Ι τοῦ κύκλου (Ι).

4. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δίδωνται:
(1) Σημεῖα $Ο_2$, $Ο_3$ καὶ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν $ε_2$ καὶ $ε_3$ (ἢ κύκλων).
(2) Σημεῖα Α, $Ο_1$ καὶ συνθήκη ὅπως αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ἀντιστοίχως σημεῖα δύο δοθεισῶν εὐθειῶν $ε_2$ καὶ $ε_3$ (ἢ κύκλων).
(3) Σημεῖα $Ο_1$, $Η_3$, $Δ_2$ καὶ ἡ συνθήκη $Ο_1Η_3 = Ο_1Δ_2$ ἢ σημεῖα $Ο_1$, $Η_3$, $Δ_3$ καὶ συνθήκη $Δ_2Ο_1 = Δ_2Η_3$.
(4) Σημεῖα Β, Γ, Η, καὶ διαφορὰ γωνιῶν Β — Γ.
(5) Σημεῖα $Ο_1$, $Δ_1$, $Η_1$, καὶ ἀκτὶς r.
(6) Κορυφαὶ Β, Γ, ὕψος $υ_1$ καὶ συνθήκη ὅπως ἡ περίμετρος εἶναι ἐλαχίστη.
(7) Κορυφαὶ Β, Γ καὶ μέσον $Ρ_3$ τοῦ εὐθ. τμήματος Ι'Ι''.
(8) Κορυφαὶ Β, Γ, γωνία Α καὶ ἡ συνθήκη ὅπως ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου Ρ.
(9) Κορυφαὶ Α', Β', Γ' τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων ΒΓΑ', ΓΑΒ', ΑΒΓ' τὰ ὁποῖα κεῖνται

πρὸς τὸ μέρος τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ὁποῖον δὲν κεῖνται αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ.

5. Εἰς δοθέντα κύκλον (Ο) νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως διὰ τριῶν δοθέντων σημείων.

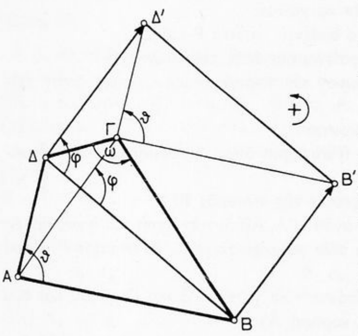
6. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ε καὶ ε′ τῶν ὁποίων ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον. Νὰ εὑρεθοῦν δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ τῶν ε καὶ ε′ ἀντιστοίχως ὥστε νὰ ἱκανοποιοῦνται αἱ ἑξῆς δύο συνθῆκαι : (α) ΜΜ′ = λ (β) Ἂν εἶναι Σ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ε καὶ ε′ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἀντιστοίχως, καὶ Ν καὶ Ν′ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν ε καὶ ε′ ἀντιστοίχως μὲ τὴν διὰ τοῦ Σ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΣ, νὰ εἶναι ΝΝ′ = μ (λ καὶ μ δοθέντα εὐθ. τμήματα).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΩΝ

274. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων : Διαγώνιοι ΑΓ = λ καὶ ΒΔ = μ, γωνία (ΑΓ, ΒΔ) = φ τῶν διαγωνίων καὶ γωνίαι Α = θ καὶ Γ = ω.

Λύσις. Θεωροῦμεν ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ περὶ τοῦ ὁποίου ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι λύσις (Σχ. 274).

Ἂν θεωρήσωμεν τὴν ὁμόλογον Β′Δ′ τῆς διαγωνίου ΒΔ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{\text{ΑΓ}}$, ἔχομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΒΒ′Δ′Δ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία (ΔΒ,ΔΔ′) εἶναι ἡ γωνία φ τῶν διαγωνίων, καὶ αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ΔΒ καὶ ΔΔ′ ἴσαι πρὸς τὰς διαγωνίους ΒΔ καὶ ΑΓ τοῦ τετραπλεύρου ἀντιστοίχως.



Σχ. 274

Ἐξ ἄλλου αἱ γωνίαι ὑπὸ τὰς ὁποίας φαίνονται ἀπὸ τοῦ σημείου Γ αἱ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ τετραπλεύρου.

Εἰδικώτερον, εἰς τὸ προκείμενον πρόβλημα εἶναι :

(ΓΒ′, ΓΔ′) = (ΑΒ, ΑΔ) = θ καὶ (ΓΔ,ΓΒ) = ω.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω παρατηρήσεων ἕπεται ἡ ἑξῆς σύνθεσις :

Κατασκευάζεται παραλληλόγραμμον ΒΒ′Δ′Δ ἐκ τῶν προσκειμένων πλευρῶν του ΔΒ = μ, ΔΔ′ = λ καὶ τῆς περιεχομένης γωνίας (ΔΒ, ΔΔ′) = φ.

Τὸ σημεῖον (κορυφὴ) Γ ὁρίζεται ὡς κοινὸν σημεῖον δύο γνωστῶν κύκλων ἀντιστοιχούντων εἰς τὰς συνθήκας (ΓΔ, ΓΒ) = ω καὶ (ΓΒ′, ΓΔ′) = θ. Εὑρεθείσης τῆς κορυφῆς Γ, ἡ ὑπολειπομένη κορυφὴ Α ὁρίζεται ὡς ὁμόλογος τῆς Γ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\overrightarrow{\text{Δ′Δ}} = \overrightarrow{\lambda}$, ἢ ὡς κοινὸν σημεῖον τῶν διὰ τῶν Β καὶ Δ παραλλήλων πρὸς τὰς Β′Γ καὶ Δ′Γ ἀντιστοίχως(1).

(1) Ἡ θεώρησις τοῦ μὲ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ συνδεομένου, κατὰ τὰ ἀνωτέρω παραλληλόγραμμου, ἐπιβάλλεται εἰς πλείστας ἐκ τῶν κατασκευῶν τετραπλεύρων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς 1η

1. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων:
(1) $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ γωνίαι Β, Γ.
(2) Κύκλος (Ο), $AB = \alpha$, $\Delta A = \delta$, $\beta + \gamma = \delta$.
(3) Κύκλος (Ο), $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\beta + \delta = \lambda$.
(4) $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$, γωνίαι Α, Γ, γωνία $(A\Gamma, B\Delta) = \varphi$.
(5) $AB = \alpha$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$, γωνία $(A\Gamma, B\Delta) = \varphi$.
(6) $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ τῆς συνθήκης ὅπως ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ.
(7) $AB = \alpha$, $\Delta A = \delta$, γωνίαι Β, Δ καὶ συνθήκη ὅπως εἶναι περιγράψιμον.
(8) Γωνίαι Α, Β, Γ, διαγώνιοι $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$.

2. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων:
(1) $B\Gamma = \beta$, $A\Gamma = \lambda$, $B\Delta = \mu$, διάμεσος σ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν.
(2) Μέσα Μ, Ν, Ρ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αὐτοῦ ἀντιστοίχως καὶ εὐθ. τμῆμα σ συνδέον τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του.

3. Νὰ κατασκευασθῇ ἐγγράψιμον τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐκ τῶν στοιχείων:
$AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $A\Gamma = \lambda$, γωνία $(A\Gamma, B\Delta) = \varphi$.

4. Νὰ κατασκευασθῇ τετράπλευρον τοῦ ὁποίου δίδονται:
(1) Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος (Ι) καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι.
(2) Ἡ πλευρὰ $AB = \alpha$ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ.
(2) Αἱ πλευραὶ $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$, $\Delta A = \delta$ καὶ τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.
(4) Τὰ μέσα Μ, Ν, Ρ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Γ (ἢ αἱ γωνίαι Α καὶ Β).

5. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ νὰ εἶναι χορδαὶ τῶν δύο κύκλων ἀντιστοίχως.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΙ ΑΙ ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ ΑΥΤΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΤΟ ΠΟΛΥΓΩΝΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Ο ΚΥΚΛΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

᾿Επιμελητὴς ἐκδόσεως : ΗΛΙΑΣ Β. ΝΤΖΙΩΡΑΣ (᾿Απ. Δ. Σ. 3902/25-6-69).

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1969 (VIII) - 'Αντ. 85.000 - Συμβ. 1811/20-5-69 — 1861/27-5-69

ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ : Χ. ΧΡΗΣΤΟΥ—ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΑΦΟΙ ΡΟΔΗ

ΟΕ
ΔΒ