ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ - Ι. ΤΑΜΒΑΚΛΗ

Γ' ΕΚΔΟΣΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τὸ βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπὸ τοὺς συγγραφεῖς μὲ τὴ συμβολὴ τοῦ φιλόλογου καθηγητὴ Ἀθ. Ματσούκα.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ — Ι. ΤΑΜΒΑΚΛΗ

Γ' ΕΚΔΟΣΗ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΣΥΝΟΛΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ

Α) Όταν λέμε «ὁ 6 εἶναι ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ 2», διατυπώνουμε γιὰ τὸν ἀριθμὸ 6 μιὰ πρόταση, ποὺ ἀληθεύει.

Όταν λέμε «τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο», διατυπώνουμε μιὰ πρόταση γιὰ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.

Β) Ἂς ἐξετάσουμε τώρα τὶς ἑξῆς δύο προτάσεις, ποὺ γιὰ συντομία θὰ τὶς ὀνομάσουμε p καὶ q.

p: ἕνας ἀριθμὸς λήγει σὲ 0 ἢ 5
q: ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5.

Γνωρίζουμε ὅτι, ἂν ἡ πρόταση p ἀληθεύει, τότε καὶ ἡ πρόταση q ἀληθεύει. Δηλ. ἂν ἕνας ἀριθμὸς λήγει σὲ 0 ἢ 5, τότε αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Στὴν περίπτωση αὐτὴ λέμε ὅτι ἡ πρόταση p ἔχει ὡς λογικὴ συνέπεια (συνεπάγεται) τὴν πρόταση q. Συμβολικὰ γράφουμε: $p \Rightarrow q$ καὶ διαβάζουμε: ἡ πρόταση p συνεπάγεται τὴν q.

Γενικά, **ὅταν μιὰ πρόταση p ἀληθεύει καὶ αὐτὸ ἔχει ὡς λογικὴ συνέπεια μιὰ ἄλλη πρόταση q νὰ ἀληθεύει ἐπίσης, τότε λέμε ὅτι ἡ πρόταση p συνεπάγεται τὴν πρόταση q.**

Δίνουμε μερικὰ ἀκόμα παραδείγματα.

1ο) Ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές, τότε ἔχει τὶς γωνίες τῆς βάσεώς του ἴσες.

Ἡ πρόταση p εἶναι: ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ πρόταση q εἶναι: τὸ τρίγωνο αὐτὸ ἔχει τὶς γωνίες τῆς βάσεώς του ἴσες. Ἔχουμε $p \Rightarrow q$.

2ο) Ἐὰν $\alpha = 3$, τότε $\alpha^2 = 9$.

Ἡ πρόταση p εἶναι: $\alpha = 3$,

ἡ πρόταση q εἶναι: $\alpha^2 = 9$

Γράφουμε συμβολικά: $\alpha = 3 \Rightarrow \alpha^2 = 9$.

3ο) Ἐὰν ἕνα σχῆμα εἶναι τετράγωνο, τότε εἶναι ὀρθογώνιο.

Ἡ πρόταση p: «ἕνα σχῆμα εἶναι τετράγωνο», ἔχει ὡς συνέπεια τὴν πρόταση q: «τὸ σχῆμα αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιο».

Ἡ ἐργασία μὲ προτάσεις τῆς μορφῆς $p \Rightarrow q$ λέγεται **παραγωγικὸς συλλογισμός.** Ἡ πρόταση p λέγεται **ὑπόθεση** καὶ ἡ πρόταση q λέγεται **συμπέρασμα.** Ἡ συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow q$ διαβάζεται τότε:

ἐὰν p, τότε q ἤ, πιὸ ἁπλά, **p συνεπάγεται q.**

2. ΛΟΓΙΚΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ

Ἀπὸ μιὰ συνεπαγωγὴ «$p \Rightarrow q$» μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε τὴν «$q \Rightarrow p$», ἡ ὁποία λέγεται **ἀντίστροφη** τῆς πρώτης. Ἂν ἡ συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow q$ ἀληθεύει, τότε ἡ $q \Rightarrow p$ εἶναι ἐνδεχόμενο νὰ ἀληθεύει κι αὐτὴ ἢ νὰ μὴν ἀληθεύει.

Παραδείγματα:

1ο) $p \Rightarrow q$: ἂν $x - y = 8$, τότε $x > y$, ἡ ὁποία ἀληθεύει. Ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγὴ $q \Rightarrow p$ εἶναι: ἂν $x > y$, τότε $x - y = 8$, ἡ ὁποία δὲν ἀληθεύει γενικὰ (γιατὶ μπορεῖ λ.χ. νὰ εἶναι $x - y = 5$ κ.τ.λ.).

2ο) $p \Rightarrow q$: Ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο, τότε εἶναι ἰσογώνιο (ἀληθής).

$q \Rightarrow p$: Ἂν ἕνα τρίγωνο εἶναι ἰσογώνιο, τότε εἶναι ἰσόπλευρο (ἀληθής).

Δύο προτάσεις p καὶ q λέμε ὅτι εἶναι ἰσοδύναμες μεταξύ τους, ὅταν οἱ συνεπαγωγὲς $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$ εἶναι καὶ οἱ δύο ἀληθεῖς.

Γράφουμε τότε $p \Leftrightarrow q$ καὶ διαβάζουμε: p ἰσοδυναμεῖ μὲ q. (Διαβάζουμε ἐπίσης: p, ἐ ά ν, κ α ὶ μ ό ν ο ν ἐ ά ν, q).

Δίνουμε ἕνα ἀκόμα παράδειγμα:

Ἐὰν $x > y$, τότε $y < x$ ἢ συμβολικὰ $x > y \Rightarrow y < x$ $(p \Rightarrow q)$.

Ἐὰν $y < x$, τότε $x > y$ ἢ συμβολικὰ $y < x \Rightarrow x > y$ $(q \Rightarrow p)$.

Γράφουμε $p \Leftrightarrow q$, δηλ. $x > y \Leftrightarrow y < x$, ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο συνεπαγωγές, $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$, ἀληθεύουν.

3. ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΕΣ

Α) Ἂς θεωρήσουμε τὴ γνωστή μας ἀπὸ τὴ Β' τάξη ἰσότητα: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, ὅπου ἡ μεταβλητὴ x παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο Q, τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ξέρουμε ὅτι ἡ ἰσότητα αὐτὴ ἀληθεύει γιὰ κάθε τιμὴ $x \in Q$. Αὐτὸ τὸ γράφουμε συμβολικά:

$$\forall x (x \in Q) : (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

καὶ διαβάζουμε: γιὰ κάθε x, ὅπου x ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ρητῶν, ἀληθεύει ὅτι $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

Τὸ σύμβολο $\forall$, τὸ ὁποῖο διαβάζεται «γιὰ κάθε» ἢ «γιὰ ὅλα τά», λέγεται **καθολικὸς ἢ γενικὸς ποσοδείκτης.**

Σὲ περιπτώσεις, λοιπόν, ὅπως ἡ παραπάνω, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιοῦμε τὸ σύμβολο $\forall$. Λ.χ.

$$\forall\alpha\forall\beta(\alpha \in Q)\,(\beta \in Q):\ \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

Β) Ἂς θεωρήσουμε τώρα τὴν ἰσότητα: $3x = 15$, ὅπου $x \in Q$.

Εἶναι εὔκολο νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἰσότητα αὐτὴ δὲν ἀληθεύει γιὰ κάθε τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x, τὴν ὁποία παίρνουμε ἀπὸ τὸ σύνολο Q. Λ.χ. γιὰ $x = 3$ ἡ παραπάνω ἰσότητα γίνεται ἰσότητα ψευδὴς $(9 = 15)$. Ὑπάρχει ὅμως τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x ἀπὸ τὸ Q, γιὰ τὴν ὁποία ἡ $3x = 15$ ἀληθεύει (ἡ $x = 5$). Σ' αὐτὲς τὶς περιπτώσεις γράφουμε:

$$\exists x(x \in Q):\ 3x = 15$$

καὶ διαβάζουμε: ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο x, ὅπου x ἀνήκει στὸ σύνολο Q, γιὰ τὸ ὁποῖο ἀληθεύει ὅτι $3x = 15$.

Ἐπίσης μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$\exists x(x \in Q):\ x + 5 > 8 \quad (\text{γιατί;})$$

Τὸ σύμβολο $\exists$, διαβάζεται «ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο» καὶ λέγεται **ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Ἂν ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγει σὲ 0 ἢ 5, τότε εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Νὰ διατυπώσετε τὴν ἀντίστροφη συνεπαγωγὴ καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύει.

2) Ἂν δύο γωνίες εἶναι ὀρθές, τότε εἶναι ἴσες. Νὰ διατυπώσετε τὴν ἀντίστροφη συνεπαγωγὴ καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύει.

3) Ἂν δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, τότε ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος. Νὰ διατυπώσετε τὴν ἀντίστροφη συνεπαγωγὴ καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύει. Πῶς μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε μαζὶ τὴν ἀρχικὴ πρόταση καὶ τὴν ἀντίστροφή της;

4) Νὰ διατυπώσετε μιὰ πρόταση ἰσοδύναμη πρὸς τήν: ὁ 5 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

5) Νὰ διατυπώσετε μιὰ πρόταση ἰσοδύναμη πρὸς τήν: ἡ εὐθεία ε εἶναι παράλληλη πρὸς τὴν εὐθεία ε'.

6) Νὰ τοποθετήσετε τὸν κατάλληλο ποσοδείκτη στὰ παρακάτω:

α) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in Q$.

β) $2x > 15$, ὅπου $x \in Q$.

γ) $x^2+1 > 0$, ὅταν $x \in Q$

δ) $x^2+1 \neq (x+1)^2$, ὅπου $x \in N$ $(N = \{1, 2, 3, \dots\})$.

ε) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, ὅπου $\alpha, \beta \in Q$.

4. ΣΥΝΟΛΟ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΟΥ

Ὅπως μάθαμε στὴν Α' καὶ Β' τάξη, χρησιμοποιοῦμε τὴ λέξη **«σύνολο»**, ὅταν θέλουμε ν' ἀναφερθοῦμε σὲ πράγματα ὁρισμένα καὶ «διακεκριμένα»*, ποὺ

(*) Ποὺ ξεχωρίζουν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο.

τὰ θεωροῦμε ὅλα μαζί, δηλαδή, ὅπως μποροῦμε νὰ ποῦμε, σὰν μιὰ ὁλότητα. Ἔχουμε παραδείγματος χάρη:

Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας.

Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Γ' τάξεως Γυμνασίου τοῦ Σχολείου μας.

Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας.

Τὸ σύνολο τῶν Νομῶν τῆς Ἑλλάδας.

Τὸ σύνολο τῶν λιμνῶν τῆς Ἑλλάδας κ.ο.κ.

Τὰ πράγματα, ποὺ συναποτελοῦν ἕνα σύνολο, λέγονται **στοιχεῖα** αὐτοῦ τοῦ συνόλου. Ὀνομάζουμε συνήθως ἕνα σύνολο μὲ ἕνα κεφαλαῖο γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας. Ἂν ὀνομάσουμε Z τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, τότε ὁ συμβολισμὸς $-3 \in Z$ σημαίνει ὅτι τὸ στοιχεῖο -3 ἀνήκει στὸ σύνολο Z. Ἂν ἕνα στοιχεῖο α δὲν ἀνήκει σ' ἕνα σύνολο Σ, γράφουμε $\alpha \notin \Sigma$.

Π.χ. $\frac{2}{3} \notin Z$.

5. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ

Α) Μάθαμε στὴν α' καὶ β' τάξη ὅτι ἕνα σύνολο συμβολίζεται:

1) Μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του μέσα σὲ ἄγκιστρο. Π.χ. $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $\Omega = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$, $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

2) Μὲ περιγραφὴ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῶν στοιχείων του μὲ τὴ βοήθεια μεταβλητῆς καὶ ἀγκίστρου.

Τὸ σύνολο, π.χ. Ω, τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας, συμβολίζεται καὶ ὡς ἑξῆς: Ω = { x | x φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου μας } (Ω εἶναι τὸ σύνολο τῶν x, ὅπου x εἶναι φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου μας).

Γιὰ τὸ σύνολο Z, μποροῦμε νὰ γράψουμε:

Z = { x | x ἀκέραιος τῆς Ἀλγέβρας }.

Β) Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν Σ εἶναι ἕνα σύνολο καὶ x ἕνα ἀντικείμενο, τότε ἢ θὰ ἰσχύει $x \in \Sigma$ ἢ θὰ ἰσχύει $x \notin \Sigma$.

6. ΖΕΥΓΟΣ, ΜΟΝΟΜΕΛΕΣ ΣΥΝΟΛΟ, ΤΟ ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ

Α) Ἕνα σύνολο μὲ δύο μόνο στοιχεῖα ὀνομάζεται **διμελὲς σύνολο ἢ ζεῦγος.**

Παράδειγμα: Τὸ σύνολο τῶν χρωμάτων τῆς σημαίας μας εἶναι ἕνα διμελὲς σύνολο.

Β) Εἰσάγουμε στὴ θεωρία τῶν συνόλων καὶ σύνολα, ποὺ ἔχουν ἕνα μόνο στοιχεῖο καὶ τὰ ὀνομάζομε **μονομελῆ** σύνολα.

Παραδείγματα: 1ο) Τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε θετικοὶ οὔτε ἀρνητικοί, εἶναι τὸ { 0 }.

2ο) Τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως **φῶς** εἶναι τὸ μονομελὲς σύνολο { ω }.

Γ) Μαζὶ μὲ τὰ ἄλλα σύνολα θεωροῦμε καὶ ἕνα «σύνολο χωρὶς στοιχεῖα», ποὺ τὸ ὀνομάζουμε: **τὸ κενὸ σύνολο.** Τὸ συμβολίζουμε μὲ $\varnothing$ ἢ $\{\ \}$.

Παραδείγματα: 1ο. Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, ποὺ ἔχουν ἀνάστημα 3 μ., εἶναι τὸ κενὸ σύνολο.

2ο. Τὸ σύνολο $\{x \in N \mid x = x + 5\}$, εἶναι τὸ $\varnothing$.

7. ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ

Α) Δύο σύνολα Α καὶ Β λέγονται **ἴσα,** ἂν κάθε στοιχεῖο τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ Β καὶ ἀντίστροφα κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι καὶ τὸ στοιχεῖο τοῦ Α. Συμβολικὰ γράφουμε: $A = B$.

Παραδείγματα: 1ο. $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma, \alpha\}$.

2ο. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{x \mid x$ μονοψήφιος φυσικὸς ἀριθμός $\}$.

3ο. $\{2, 3, 6, 10\} = \{2, 2+1, 2.3, 11-1\}$.

Β) Τὰ σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{1, 2, 5\}$ δὲν εἶναι ἴσα. Συμβολίζουμε: $A \neq B$ καὶ διαβάζουμε: τὸ σύνολο Α εἶναι δ ι ά φ ο ρ ο τοῦ Β.

Γ) Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητας συνόλων ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $A = A$ (ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα), δηλ. κάθε σύνολο εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἑαυτό του.

β) $A = B \Rightarrow B = A$ (συμμετρικὴ ἰδιότητα).

γ) ($A = B$ καὶ $B = \Gamma$) $\Rightarrow A = \Gamma$ (μεταβατικὴ ἰδιότητα).

Γιὰ τὸ κενὸ σύνολο ἔχουμε: $\varnothing = \varnothing$

8. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΣΥΝΟΛΟΥ

Α) Ἕνα σύνολο Α λέγεται **ὑποσύνολο** ἑνὸς συνόλου Β, ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Β. Συμβολίζουμε: $A \subseteq B$ (τὸ Α εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Β ἢ τὸ Α ἐγκλείεται στὸ Β). Τὸ σύνολο Β λέγεται σύνολο **ἀναφορᾶς** ἢ **ὑπερσύνολο** τοῦ Α.

Παραδείγματα: 1ο. Τὸ σύνολο N_α τῶν ἄρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Ν, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

2ο. Τὸ σύνολο τῶν μακρῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων του.

3ο. Τὸ σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Α, γιατὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α εἶναι στοιχεῖο τοῦ Α. Δηλ., σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε, κάθε σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του.

Β) Ἕνα σύνολο Α λέγεται **γνήσιο ὑποσύνολο** ἑνὸς συνόλου Β, ἂν $A \subseteq B$ καὶ ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο στοιχεῖο τοῦ Β, ποὺ δὲν εἶναι στοιχεῖο τοῦ Α. Συμβολικὰ γράφουμε $A \subset B$ καὶ διαβάζουμε: τὸ Α εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Β.

Σύμφωνα μὲ τὸ συμβολισμὸ αὐτὸ εἶναι:

$N_0 \subset N$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\{\alpha, \iota, \upsilon\} \subset \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$ κ.τ.λ.

Γ) Εἶναι φανερὸ ὅτι ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες γιὰ τὴν ἔννοια «ὑποσύνολο»:

α) $A \subseteq A$ (ἀνακλαστική), δηλαδὴ κάθε σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του.

β) ($A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$) $\Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική). Τὸ ὅτι ἰσχύει ἡ δεύτερη ἰδιότητα φαίνεται ἀμέσως, ἂν κάμουμε διαγράμματα τοῦ Venn γιὰ τὰ σύνολα Α, Β, Γ, ὅπως μάθαμε στὴν α′ καὶ β′ τάξη. Τὸ κενὸ σύνολο $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολο κάθε συνόλου Α, γιατὶ δὲν ὑπάρχει ἀντικείμενο x, ποὺ νὰ ἀνήκει στὸ $\varnothing$ καὶ νὰ μὴν ἀνήκει στὸ Α. Τὸ κενὸ σύνολο ἔχει ὑποσύνολο μόνο τὸν ἑαυτό του: $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Δ) Εἶναι φανερό, ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς ποὺ δώσαμε παραπάνω, ὅτι ($A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A$) $\Leftrightarrow A = B$.

Ε) Εἶναι εὔκολο νὰ ἐννοήσουμε ὅτι ἡ ἔννοια «γνήσιο ὑποσύνολο» ἔχει μόνο τὴ μεταβατικὴ ἰδιότητα. (Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν πρόταση μὲ ἕνα παράδειγμα).

9. ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Σ λέγεται **δυναμοσύνολο** τοῦ συνόλου Σ καὶ παριστάνεται μὲ $\mathscr{P}(\Sigma)$.

Τὸ κενὸ σύνολο ἔχει **ἕνα** μόνο ὑποσύνολο, τὸν ἑαυτό του. Δηλαδὴ ἔχει $1 = 2^0$ ὑποσύνολα.

Τὸ μονομελὲς σύνολο $\{\alpha\}$ ἔχει **δύο** ὑποσύνολα, τὸ $\varnothing$ καὶ τὸν ἑαυτό του, δηλαδὴ ἔχει $2 = 2^1$ ὑποσύνολα.

Τὸ διμελὲς σύνολο $\{\alpha, \beta\}$ ἔχει ὑποσύνολα τὰ $\varnothing$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, δηλαδὴ ἔχει $4 = 2^2$ ὑποσύνολα.

Τὸ τριμελὲς σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ ἔχει ὑποσύνολα τὰ $\varnothing$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, δηλαδὴ ἔχει $8 = 2^3$ ὑποσύνολα.

Ἕνα σύνολο μὲ 4 στοιχεῖα ἔχει $2^4 = 16$ ὑποσύνολα καὶ γενικὰ ἕνα σύνολο μὲ ν στοιχεῖα ἔχει 2^ν ὑποσύνολα.

Παράδειγμα: Τὸ δυναμοσύνολο τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ εἶναι τὸ $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$.

10. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ

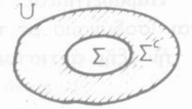
Α) Ἂν U εἶναι ἕνα σύνολο ἀναφορᾶς καὶ Α εἶναι ὑποσύνολό του, τότε τὸ σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ U, ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ Α, λέγεται **συμπλήρωμα** τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ U. Τὸ παριστάνουμε μὲ A^c ἢ $\underset{U}{C}A$. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς συμβολικὰ γράφεται: $\underset{U}{C}A = \{x \mid x \in U \text{ καὶ } x \notin A\}$.

Παραδείγματα: 1ο. Ἔστω $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καὶ $A = \{1, 3, 5\}$. Τότε εἶναι $A^c = \{2, 4, 6\}$.

2ο. Ἔστω σύνολο ἀναφορᾶς τὸ σύνολο N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τότε συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν ἄρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ σύνολο τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

3ο. Ἂν θεωρήσουμε ὡς σύνολο ἀναφορᾶς τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου μας, τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων εἶναι τὸ σύνολο τῶν συμφώνων τοῦ ἀλφαβήτου μας.

Β) Γραφικὰ τὸ συμπλήρωμα $Σ^c$, τοῦ συνόλου Σ, παριστάνεται ἀπὸ τὸ διαγραμμισμένο μέρος τοῦ παραπλεύρως σχήματος, ὅπου U εἶναι τὸ σύνολο ἀναφορᾶς.



Γ) Εἶναι φανερὸ ἀπὸ τὸν ὁρισμό, ποὺ δώσαμε, ὅτι $A \cap A^c = \varnothing$ καὶ $A \cup A^c = U$. Ἐπίσης εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι $\underset{U}{C}\varnothing = U$ καὶ $\underset{U}{C}U = \varnothing$.

11. ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ (Ή ΙΣΟΣΘΕΝΗ) ΣΥΝΟΛΑ

Α) Δύο σύνολα Α καὶ Β, διάφορα ἀπὸ τὸ $\varnothing$, λέμε ὅτι εἶναι **ἰσοδύναμα** ἢ **ἰσοσθενή,** ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὸ Α μὲ τὸ Β ἔτσι, ὥστε σ' αὐτὴ τὴν ἀντιστοιχία κάθε στοιχεῖο τοῦ Α νὰ ἔχει ἕνα καὶ μόνο ἀντίστοιχο στοιχεῖο ἀπὸ τὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β νὰ εἶναι ἀντίστοιχο ἑνὸς καὶ μόνο στοιχείου ἀπὸ τὸ Α. Ὅταν, δηλαδή, ὑπάρχη **ἀμφιμονοσήμαντη** ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β. Γράφουμε συμβολικὰ $A \sim B$ καὶ διαβάζουμε: Τὸ σύνολο Α εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ Β.

Παραδείγματα: 1ο. Τὰ σύνολα $A = \{ α, β, γ \}$ καὶ $B = \{ α, ι, υ \}$ εἶναι ἰσοδύναμα, γιατὶ μποροῦμε νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὸ Α μὲ τὸ Β, π.χ. ὅπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{array}{ccc} \{ α, β, γ \} & & \{ α, β, γ \} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & ἢ & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \{ α, ι, υ \} & & \{ ι, α, υ \} \end{array} \qquad κ.τ.λ.$$

2ο. Τὸ σύνολο τῶν ὀνομάτων τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδας καὶ τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας εἶναι ἰσοδύναμα, γιατὶ ὁρίζεται ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία (ἀντιστοιχία ἕνα πρὸς ἕνα) μεταξὺ τῶν στοιχείων τους.

Β) Γιὰ τὸ κενὸ σύνολο δεχόμαστε ὅτι: $\varnothing \sim \varnothing$.

Γ) Εἶναι φανερὸ ὅτι ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $A \sim A$ (ἀνακλαστική), δηλαδὴ κάθε σύνολο εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸν ἑαυτό του.

β) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (συμμετρική).

γ) ($A \sim B$ καὶ $B \sim Γ$) $\Rightarrow A \sim Γ$ (μεταβατική).

Δ) Ὅπως μάθαμε στὴν α' καὶ β' τάξη, ὅταν δύο σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα, λέμε ὅτι ἔχουν τὸν ἴδιο **πληθικὸ ἀριθμό.** Μάθαμε ἐπίσης μὲ ποιόν τρόπο βρίσκουμε τὸν πληθικὸ ἀριθμὸ ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου.

Ε) Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἕνα σύνολο Α λέγεται **πεπερασμένο** μὲ πληθικὸ ἀριθμὸ ν, ἂν εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἀρχικὸ ἀπόκομμα τοῦ Ν, ποὺ τελειώνει στὸ ν.

Ἕνα σύνολο λέγεται **ἀπειροσύνολο,** ὅταν δὲν εἶναι ἰσοδύναμο μὲ κανένα ἀπόκομμα τοῦ Ν.

Ὅπως γνωρίζουμε ἀπὸ τὴν α΄ καὶ β΄ τάξη, ἕνα σύνολο εἶναι ἀπειροσύνολο, ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, εἶναι ἰσοδύναμο μὲ γνήσιο ὑποσύνολό του.

Παραδείγματα: 1ο. Τὸ σύνολο τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ φανεῖ μὲ τὴν ἑξῆς ἀντιστοιχία:

$$\begin{array}{c} \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots\} \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \qquad \downarrow \\ \{1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ldots,\ \nu^2,\ldots\} \end{array}$$

2ο. Τὸ σύνολο $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$, δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἀπειροσύνολο. Πραγματικὰ τὸ σύνολο αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ γνήσιο ὑποσύνολό του $\{1, 16, 81, 256, \ldots, \nu^4, \ldots\}$, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν παρακάτω ἀντιστοιχία:

$$\begin{array}{c} \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ \nu^2,\ \ldots\} \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \qquad \downarrow \\ \{1,\ 16,\ 81,\ 256,\ \ldots,\ \nu^4,\ \ldots\} \end{array}$$

3ο. Τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου μας εἶναι πεπερασμένο καὶ ἔχει πληθικὸ ἀριθμὸ 24, γιατὶ εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἀπόκομμα τοῦ N, ποὺ τελειώνει στὸ 24.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

7) Ποιοὶ ἀπὸ τοὺς παρακάτω συμβολισμοὺς εἶναι σωστοὶ καὶ ποιοὶ λαθεμένοι;

α) $5 \in N$, β) $\frac{3}{4} \in N$, γ) $5 \in Q$ δ) $\frac{2}{3} \in N$

8) Νὰ ἀναγράψετε τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου:

$$\{x \mid x \text{ ὠκεανὸς τῆς γῆς}\}$$

9) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἄλλον τρόπο τὸ σύνολο T, ὅλων τῶν τριγώνων, ποὺ ἔχουν δύο γωνίες τους ὀρθές.

10) Νὰ συμβολίσετε μὲ χρήση μεταβλητῆς x καὶ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῶν στοιχείων του τὸ σύνολο:

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

11) Νὰ συμβολίσετε ἐνδεικτικὰ ἀναγράφοντας μερικὰ στοιχεῖα του τὸ σύνολο Z^-, τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων.

12) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του τὸ σύνολο:

$$B = \{x \mid x \text{ φυσικὸς διψήφιος διαιρετὸς διὰ } 5\}$$

13) Ὁμοίως τὸ σύνολο:

$$A = \{x \mid x \text{ ἀκέραιος καὶ } -1 < x < 4\}$$

14) Νὰ συμβολίσετε μὲ περιγραφὴ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῶν στοιχείων τους τὰ σύνολα:

$$\Gamma = \{17, 34, 51, 68, 85, 102, 119\}$$

καὶ $\Delta = \{17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, \ldots\}$

15) Νὰ σχηματίσετε τὰ ὑποσύνολα τοῦ $\{\varphi, \chi, \psi, \omega\}$, τὰ ὁποῖα εἶναι διμελῆ.

16) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του τὸ σύνολο:

$$E = \{\psi \mid \psi \text{ πολλαπλάσιο τοῦ 6, καὶ } 10 < \psi < 51\}.$$

17) Νὰ σχηματίσετε τὸ δυναμοσύνολο τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

18) Νὰ συμβολίσετε μὲ ἄλλον τρόπο τὸ σύνολο A, τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 6.

19) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἴσα ἢ ὄχι τὰ σύνολα:

α) $\{3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$ καὶ $\{x \mid x$ θετικὸς ἀκέραιος $> 2\}$.

β) $\{4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots\}$ καὶ $\{x \mid x$ ἀκέραιος τῆς ἀλγέβρας $< 4\}$

20) Νὰ ἀναγράψετε ἐνδεικτικὰ τὸ σύνολο τῶν μὴ ἀρνητικῶν ἀκεραίων.

21) Νὰ περιγράψετε μὲ λόγια τὸ σύνολο:

$\{\ldots, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

22) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀπειροσύνολα τά:

α) $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \ldots\right\}$

β) $\left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \ldots\right\}$

23) Νὰ βρεῖτε ποιός ἀπὸ τοὺς παρακάτω συμβολισμοὺς εἶναι σωστὸς καὶ ποιός λαθεμένος:

α) $\varnothing \in \{\varnothing\}$, β) $\varnothing = \{0\}$, γ) $0 \in \{\,\}$, δ) $x = \{x\}$.

24) Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολο $A = \{1, \{1\}\}$; Εἶναι ἢ ὄχι σωστοὶ οἱ συμβολισμοὶ $1 \in A$, $\{1\} \in A$;

25) Νὰ ἀποφανθεῖτε ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ ὁρίζονται πάνω σὲ μιὰ εὐθεία, εἶναι ἢ ὄχι ὑποσύνολα αὐτῆς τῆς εὐθείας.

26) Ἂν θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο (Ε) ὡς σύνολο σημείων, τί εἶναι τότε μιὰ εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὸ (Ε); Γράψτε τὴν ἀπάντησή σας συμβολικά. Ἂν θεωρήσουμε τὸ (Ε) ὡς σύνολο εὐθειῶν, τί εἶναι τότε ἡ εὐθεία ε;

27) Νὰ κάνετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn γιὰ τὰ σύνολα:

$A = \{1, 2, 5, 7, 9, 10, 12, 15\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 9\}$, $\Gamma = \{1, 2, 5, 9, 10, 13\}$, $E = \{4, 12\}$

28) Ποιό εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Θ, τῶν μαθητριῶν ἑνὸς μεικτοῦ Γυμνασίου, ὡς πρὸς τὸ σύνολο Μ ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου;

29) Ἂν θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο (Ε) ὡς σύνολο σημείων καὶ ἔχουμε χαράξει στὸ ἐπίπεδο ἕνα τρίγωνο, ποιό εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ τριγώνου (μὲ τὸ ἐσωτερικό του) ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδο;

30) Νὰ κάνετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn γιὰ τὰ σύνολα:

$A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ καὶ $\Gamma = \{3, 4, 5, 6, 9\}$.

31) Τρία σύνολα A, B, Γ δὲν ἔχουν κοινὸ στοιχεῖο, ἀνὰ δύο ὅμως ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα. Νὰ κάνετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn, ποὺ νὰ παριστάνει αὐτὴ τὴν περίπτωση.

12. ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Α) Τομὴ συνόλου A μὲ σύνολο B (*) λέγεται τὸ σύνολο, ποὺ κάθε στοιχεῖο του ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ ἀνήκει καὶ στὸ A καὶ στὸ B.

Σύμβολο τῆς τομῆς εἶναι τὸ $\cap$, ποὺ διαβάζεται **τομή**. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς συμβολικὰ γράφεται:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ καὶ } x \in B\}$$

Ὁ ὁρισμὸς περιλαμβάνει καὶ τὴν περίπτωση, ὅπου τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα εἶναι τὸ $\varnothing$, Ἔτσι, π.χ., $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(*) Θεωροῦμε ἕνα σύνολο U βασικό, ὄχι κενό, καὶ τελείως ὁρισμένο, τοῦ ὁποίου τὰ A, B εἶναι ὑποσύνολα. Ἡ πράξη **τομὴ** καὶ ἡ ἑπόμενη πράξη **ἕνωση,** ὁρίζονται στὸ δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(U)$.

Παραδείγματα: 1ο. Ἂν $A = \{α, β, γ, ε\}$ καὶ $B = \{α, ε, η, θ\}$, τότε $A \cap B = \{α, ε\}$.

2ο. Ἂν $A = \{ x \mid x$ ἀκέραιος μεταξὺ -2 καὶ $5 \}$ καὶ $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$, τότε $A \cap B = \{1, 2, 4\}$.

Β) Ἡ πράξη τομὴ ἔχει τὶς ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $A \cap B = B \cap A$ (ἀντιμεταθετική).

β) $(A \cap B) \cap Γ = A \cap (B \cap Γ)$ (προσεταιριστική), ποὺ ἐπαληθεύονται εὔκολα.

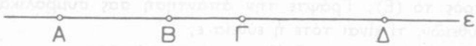
Γ) Μάθαμε στὴν α΄ καὶ β΄ τάξη ὅτι τομὴ τριῶν συνόλων Α, Β, Γ, ποὺ τὴ συμβολίζουμε μέ: $A \cap B \cap Γ$, εἶναι τὸ σύνολο $(A \cap B) \cap Γ$. Ὁμοίως $A \cap B \cap Γ \cap Δ$ εἶναι τὸ σύνολο $(A \cap B \cap Γ) \cap Δ$ κ.ο.κ. Ἐπαληθεύεται εὔκολα ὅτι $A \cap B \cap Γ = A \cap Γ \cap B =$ κ.τ.λ.

Δ) Εἶναι φανερὸ ὅτι, ὅταν $A \subseteq B$, τότε $A \cap B = A$. Εἰδικότερα εἶναι $A \cap A = A$, γιὰ κάθε σύνολο Α.

Ε) Ἂν δύο σύνολα δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, τότε ἡ τομή τους εἶναι τὸ κενὸ σύνολο. Τὰ σύνολα αὐτὰ λέγονται τότε **ξένα μεταξύ τους.**

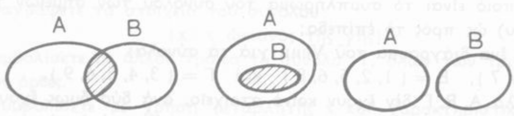
Παραδείγματα: 1ο. Ἂν $A = \{1, 2\}$ καὶ $B = \{3, 4\}$, τότε $A \cap B = \varnothing$.

2ο. Στὸ παρακάτω σχῆμα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ τῆς εὐθείας ε εἶναι σημειοσύνολα ξένα μεταξύ τους: $AB \cap ΓΔ = \varnothing$.



Σχ. 12–1

Παρακάτω βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς τομῆς δύο συνόλων σὲ διάφορες περιπτώσεις:



Σχ. 12–2

13. ΕΝΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Α) Ἕνωση συνόλου Α μὲ σύνολο Β λέγεται τὸ σύνολο, ποὺ ἀποτελοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων, ὅπου βέβαια κάθε κοινὸ στοιχεῖο τους τὸ παίρνουμε μία μόνο φορά. Συμβολικὰ ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς γράφεται:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ εἴτε } x \in B \}$$

Σημ.: Τὸ «εἴτε» σημαίνει ὅτι ἕνα τυχὸν στοιχεῖο x τῆς ἑνώσεως ἀνήκει ἢ μόνο στὸ Α ἢ μόνο στὸ Β ἢ ἀνήκει καὶ στὰ δύο σύνολα Α καὶ Β.

Παραδείγματα: 1ο. Ἂν $A = \{1, 2, 3, 5\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 4\}$, τότε

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2ο. Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{4, 5, 6\}$, τότε:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3ο. Ἂν $\Gamma = \{x \mid x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς, ποὺ λήγει σὲ $0\}$ καὶ $\Delta = \{x \mid x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς, ποὺ λήγει σὲ $5\}$, τότε $\Gamma \cup \Delta = \{x \mid x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς, ποὺ λήγει σὲ 0 ἢ $5\} = \{x \mid x$ ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς διαιρετὸς διὰ $5\}$.

Β) Ἡ πράξη τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων ἔχει τὶς ἰδιότητες:

α) $A \cup B = B \cup A$ (ἀντιμεταθετική).

β) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ (προσεταιριστική), ποὺ ἐπαληθεύονται εὔκολα.

Γ) Μάθαμε στὴν α' καὶ β' τάξη ὅτι ἕνωση τριῶν συνόλων Α, Β, Γ, ποὺ τὴ συμβολίζουμε μὲ $A \cup B \cup \Gamma$, εἶναι τὸ σύνολο $(A \cup B) \cup \Gamma$. Ὁμοίως ὁρίζουμε: $A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta = (A \cup B \cup \Gamma) \cup \Delta$ κ.ο.κ. Εὔκολα ἐπαληθεύεται ὅτι $A \cup B \cup \Gamma = A \cup \Gamma \cup B = B \cup A \cup \Gamma$ κ.τ.λ.

Δ) Ἰσχύει $A \cup \varnothing = A$, γιὰ κάθε σύνολο Α. Γι' αὐτὸ τὸ $\varnothing$ λέγεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** γιὰ τὴν πράξη τῆς ἑνώσεως συνόλων.

Ε) Εἶναι φανερὸ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἑνώσεως ὅτι, ἂν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$. Ἐπίσης εἶναι $A \cup A = A$.

ΣΤ) Τέλος, ἰσχύει ἡ συνεπαγωγὴ $(A \cup B = \varnothing) \Rightarrow (A = \varnothing$ καὶ $B = \varnothing)$.

14. ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Α) Διαφορὰ συνόλου Β ἀπὸ σύνολο Α λέγεται τὸ σύνολο, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ Α, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν στὸ Β. Συμβολίζεται μὲ $A - B$.

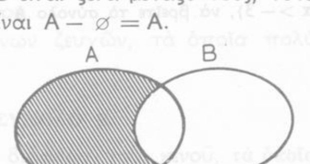
Παραδείγματα: 1ο. Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ $B = \{1, 3, 6\}$, τότε $A - B = \{2, 4, 5\}$.

2ο. Ἂν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ $B = \{\alpha, \delta\}$, τότε $A - B = \{\beta, \gamma\}$.

Συμβολικὰ ὁ παραπάνω ὁρισμὸς γράφεται: $A - B = \{x \mid x \in A$ καὶ $x \notin B\}$.

Β) Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ξένα μεταξύ τους, τότε ἡ διαφορὰ $A - B$ εἶναι τὸ σύνολο Α. Ἐπίσης εἶναι $A - \varnothing = A$.

Γ) Στὸ παραπλεύρως σχῆμα τὸ διαγραμμισμένο μέρος τοῦ Α παριστάνει τὴ διαφορὰ $A - B$. Προφανῶς εἶναι: $A - B = A - (A \cap B)$.



Σχ. 14-1

15. ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Ἔστω Σ ἕνα ὄχι κενὸ σύνολο. Χωρίζουμε τὸ Σ σὲ ὑποσύνολα διάφορα τοῦ $\varnothing$, ξένα μεταξύ τους ἀνὰ δύο, ἔστω τὰ Α, Β, Γ τέτοια, ὥστε $A \cup B \cup \Gamma = \Sigma$. Τότε τὸ σύνολο $\Delta = \{A, B, \Gamma\}$ λέγεται ἕνας **διαμερισμὸς** τοῦ Σ σὲ τρεῖς **κλάσεις**.

Παραδείγματα: 1ο. Ἔστω τὸ σύνολο $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Τὸ σύνολο $\Delta = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$, εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Σ σὲ τρεῖς κλάσεις. Ἕνας ἄλλος διαμερισμὸς τοῦ Σ σὲ δύο κλάσεις εἶναι ὁ $\Delta_1 = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4\}\}$.

2ο. Ἂν θεωρήσουμε τὸ σύνολο N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὰ ὑποσύνολά του $N_\alpha = \{ x \mid x$ φυσικὸς ἄρτιος$\}$ καὶ $N_\pi = \{ x \mid x$ φυσικὸς περιττός$\}$, τότε τὸ σύνολο $\{ N_\alpha, N_\pi \}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ N σὲ δύο κλάσεις, ἐπειδὴ εἶναι: α) $N_\alpha \neq \varnothing$, $N_\pi \neq \varnothing$, β) $N_\alpha \cap N_\pi = \varnothing$ καὶ γ) $N_\alpha \cup N_\pi = N$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32) Ἂν $A = \{ x \mid x$ φυσικὸς διαιρετὸς διὰ $2 \}$ καὶ $B = \{ x \mid x$ φυσικὸς διαιρετὸς διὰ $3 \}$, νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο $A \cap B$.

33) Ἂν ε εἶναι μιὰ εὐθεία καὶ K ἕνας κύκλος σ' ἕνα ἐπίπεδο, τότε τί σημαίνει ὁ συμβολισμὸς $\varepsilon \cap K = \varnothing$;

34) Ἂν ε καὶ ε' εἶναι δύο εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου, τί σημαίνει ὁ συμβολισμὸς $\varepsilon \cap \varepsilon' = \varnothing$;

35) Ἂν $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9 \}$, $B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$. καὶ $\Gamma = \{ 1, 3, 5, 6 \}$, νὰ βρεῖτε τά:

α) $A \cap B$, β) $A \cap \Gamma$, γ) $A \cap B \cap \Gamma$

δ) $A \cup B$, ε) $A - \Gamma$, ζ) $A \cup B \cup \Gamma$

36) Μὲ τὰ σύνολα $A = \{ 1, 2, 3 \}$, $B = \{3, 4, 5\}$ καὶ $\Gamma = \{1, 3, 5\}$ νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι ἰσχύουν:

α) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, β) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Οἱ α) καὶ β) ἰσχύουν γενικά. Νὰ διατυπώσετε μὲ λόγια αὐτὲς τὶς δύο ἰδιότητες.

37) Δίνεται τὸ σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Ἂν A_1 εἶναι τὸ σύνολο τῶν περιττῶν ἀριθμῶν τοῦ A καὶ A_2 τὸ σύνολο τῶν στοιχείων τοῦ A, ποὺ εἶναι μικρότερα τοῦ 6, νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων τους τὰ σύνολα:

α) $A_1 \cap A_2$, β) $A_1 \cup A_2$, γ) $A - A_1$, δ) $A \cap A_1$, ε) $A_2 - A_1$, ζ) $\underset{A}{C} A_1$, η) $\underset{A}{C} A_2$.

38) Ἂν $A \subseteq B$ καὶ ἐπίσης $B \subseteq A$, τί εἶναι ἡ $A \cap B$;

39) Ἕνα σύνολο A ἔχει 10 στοιχεῖα. Ἕνα ἄλλο σύνολο B ἔχει 7 στοιχεῖα καὶ ἡ τομή τους $A \cap B$ ἔχει 4 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα τοῦ A δὲν εἶναι καὶ στοιχεῖα τοῦ B; (Ἀπ. 6).

40) Νὰ κάνετε ἕνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου $A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa \}$

α) σὲ δύο κλάσεις, β) σὲ τέσσερες κλάσεις.

41) Ἂν $A = \{ x \mid x$ ἀκέραιος καὶ $-1 < x < 5 \}$ καὶ $B = \{ 0, 2, -2, 3, 5, 10 \}$, νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο $A \cap B$.

42) Ἂν $A = \{ x \mid x$ ρητὸς ἀριθμὸς καὶ $x < 3 \}$ καὶ $B = \{ x \mid x$ ρητὸς ἀριθμὸς καὶ $x > -3\}$, νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο $A \cap B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ.

16. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Α) Στὴ β΄ τάξη μάθαμε γιὰ τὰ διατεταγμένα ζεύγη σχετικῶν ἀριθμῶν, δηλ. γιὰ παραστάσεις ὅπως οἱ: $(-2, 3)$, $(5, 5)$, $(-3, 6)$ $(-2, -2)$, κ.τ.λ. καὶ γενικὰ (α, β), ὅπου α, β σχετικοὶ ἀριθμοὶ διαφορετικοὶ μεταξύ τους ἢ ὄχι.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι στὸ διατεταγμένο ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν ἐπιτρέπεται ἐναλλαγὴ τῶν ἀριθμῶν, ποὺ τὸ ἀποτελοῦν (ὅταν εἶναι διαφορετικοί), γιατὶ τότε τὸ ζεῦγος ἀλλάζει. Τὸ διατεταγμένο ζεῦγος, π.χ., $(-3, 4)$ εἶναι διάφορο τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(4, -3)$.

Ὑπενθυμίζουμε ἐπίσης ὅτι, ἂν (x, y) εἶναι ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος, τότε τὸ x λέγεται **πρῶτο μέλος** τοῦ διατεταγμένου ζεύγους καὶ τὸ y **δεύτερο μέλος** του.

Β) Μάθαμε ἀκόμη γιὰ τὴ γεωμετρικὴ παράσταση τῶν διατεταγμένων ζευγῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μὲ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Θὰ μελετήσουμε τώρα σύνολα διατεταγμένων ζευγῶν, τὰ ὁποῖα πολὺ συχνὰ θὰ χρησιμοποιήσουμε σ' αὐτὴ τὴν τάξη.

17. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΟ Β.

Ἂν ἔχουμε δύο ὁποιαδήποτε σύνολα Α, Β διάφορα τοῦ κενοῦ, **τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη σύνολα ἀριθμῶν,** μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε παραστάσεις, σὰν τὶς (α, β), (α', β') κ.τ.λ., ὅπου τὸ πρῶτο μέλος κάθε παραστάσεως νὰ ἀνήκει στὸ σύνολο Α καὶ τὸ δεύτερο στὸ σύνολο Β. Ἂν τώρα συμφωνήσουμε νὰ λέμε ὅτι **εἶναι $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, εἶναι $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta'$ (*),** τότε κάθε τέτοια παράσταση λέγεται **διατεταγμένο ζεῦγος.** Τὸ σύνολο ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β), ποὺ σχηματίζονται, ἂν πάρουμε τὸ α ἀπὸ

(*) Κάθε σύνολο διάφορο τοῦ $\varnothing$ εἶναι ἐφοδιασμένο μὲ μιὰ σχέση (§ 21 καὶ § 25) ἰσότητας καὶ μὲ βάση αὐτὴ διακρίνονται τὰ στοιχεῖα του (τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο).

τὸ Α καὶ τὸ β ἀπὸ τὸ Β, λέγεται **καρτεσιανὸ γινόμενο τοῦ συνόλου Α ἐπὶ τὸ σύνολο Β** καὶ συμβολίζεται μὲ $A \times B$.

Στὸν παρακάτω ὁρισμὸ δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $A = B$· τότε τὸ $A \times B$ γίνεται $A \times A$ καὶ γράφεται πιὸ σύντομα: A^2.

Ἐπίσης εἶναι $A \times \varnothing = \varnothing$ καὶ $\varnothing \times B = \varnothing$.

Συμβολικὰ ὁ ὁρισμὸς τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου γράφεται:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ καὶ } y \in B\}.$$

Τὰ σύνολα Α, Β λέγονται **παράγοντες** τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου, πρῶτος τὸ Α, δεύτερος τὸ Β.

Παραδείγματα: 1ο. Ἔστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$. Ἔχομε $A \times B = \{(\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma, 2), (\gamma, 3)\}$. Παρατηροῦμε ὅτι ἀπὸ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α προκύπτουν 2 ζεύγη (ὅσα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ Β), ἑπομένως ἀπὸ τὰ 3 στοιχεῖα τοῦ Α θὰ προκύψουν $3.2 = 6$ ζεύγη. Δηλαδὴ ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $A \times B$ εἶναι τὸ γινόμενο τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τῶν Α καὶ Β.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο συμπεραίνουμε, γενικότερα, ὅτι, ἂν γιὰ δύο πεπερασμένα σύνολα Α καὶ Β εἶναι πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $A = \kappa$ καὶ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $B = \lambda$, τότε πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $(A \times B) = \kappa.\lambda$.

2ο. Ἔστω πάλι $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$ καὶ ἂς σχηματίσουμε τὸ $B \times A$. Ἔχομε $B \times A = \{(2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma)\}$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ $B \times A$ εἶναι $2.3 = 6$. Τὸ $A \times B$ ὅμως εἶναι διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ $B \times A$.

Γενικὰ ἰσχύει: $A \neq B \Rightarrow A \times B \neq B \times A$.

3ο. Ἔστω $A = B = \{-2, 3, 4\}$. Τότε εἶναι $A \times A = A^2 = \{(-2, -2), (-2, 3), (-2, 4), (3, -2), (3, 3), (3, 4), (4, -2), (4, 3), 4, 4)\}$.

18. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΜΕ ΠΙΝΑΚΑ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ.

Στὸ Σχ. 18.1 βλέπετε ἕναν πίνακα, ποὺ ὀνομάζεται **πίνακας διπλῆς εἰσόδου,** μὲ τὸν ὁποῖο παριστάνουμε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο $A \times B$, ὅπου: $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$, δηλ. τὸ $A \times B = \{(\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma, 2), (\gamma, 3)\}$.

3	(α,3)	(β,3)	(γ,3)
2	(α,2)	(β,2)	(γ,2)
B / A	α	β	γ

Σχ. 18–1

Ἡ στήλη τοῦ α δίνει τὰ ζεύγη (α, 2), (α, 3) στὴν κατάλληλη θέση τους. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ γιὰ τὶς στῆλες τῶν β καὶ γ τοῦ πίνακα.

Στὸ Σχ. 18.2 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου γιὰ τὴν παράσταση τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times A$, ὅπου $A = \{-2, 3, 4\}$.

Νὰ κατασκευάσετε πίνακα διπλῆς εἰσόδου γιὰ τὸ $B \times A$, ὅπου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$. (Ποῦ θὰ τοποθετήσετε τὰ στοιχεῖα τοῦ Β;).

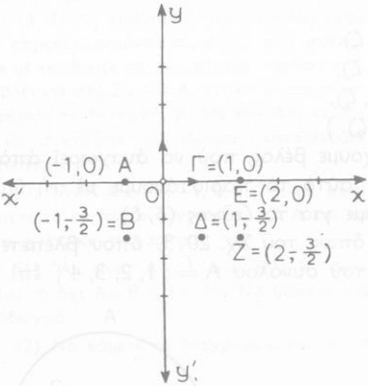
Σημ.: Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ γιὰ ἕνα ὁποιοδήποτε ὑποσύνολο καρτεσιανοῦ γινομένου.

4	(-2,4)	(3,4)	(4,4)
3	(-2,3)	(3,3)	(4,3)
-2	(-2,-2)	(3,-2)	(4,-2)
A / A	-2	3	4

Σχ. 18–2

19. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (ΓΡΑΦΙΚΗ) ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.

Ἂν θεωρήσουμε τὰ μέλη ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς συντεταγμένες σημείου στὸ ἐπίπεδο xOψ, τότε κάθε διατεταγμένο ζεῦγος παριστάνει ἕνα σημεῖο στὸ ἐπίπεδο αὐτό. Ἑπομένως ἕνα καρτεσιανὸ γινόμενο μὲ δύο παράγοντες θὰ παριστάνει τότε ἕνα σύνολο σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σύνολο τῶν σημείων αὐτῶν τὸ ὀνομάζουμε **γεωμετρικὴ** (ἢ γραφική) **παράσταση τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου.** Ἂν π.χ.
$M = \{-1, 2, 1)\}$ καὶ $N = \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$, τότε $M \times N = \left\{ (-1, 0), \left((-1, -\frac{3}{2}\right), (1, 0), \left((1, -\frac{3}{2}\right), (2, 0), \left(2, -\frac{3}{2}\right) \right\}$ καὶ στὸ σχ. 19.1 βλέπετε τὴ γεωμετρική του παράσταση· εἶναι τὸ σημειοσύνολο: {Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ}.



Σχ. 19–1

Σχ. 19–2

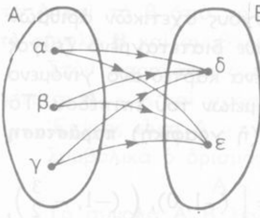
Σημ. Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ ἔχουμε γεωμετρικὴ παράσταση καὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου (ὄχι κενοῦ) ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου.

Β) Γεωμετρικὴ παράσταση ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου κάνουμε συνήθως, ὅταν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν του εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ἀλλὰ καὶ ὅταν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου εἶναι ἄλλης φύσεως, μποροῦμε νὰ ἔχουμε γεωμετρικὴ παράστασή του. Ἂς θεωρήσουμε π.χ. τὰ σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\delta, \varepsilon\}$, ὅπου τὰ α, β, γ, δ, ε εἶναι πρόσωπα (π.χ. Ἀντωνίου, Βασιλείου, Γεωργίου κ.τ.λ.). Ἔχομε $A \times B = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \varepsilon), (\beta, \delta), (\beta, \varepsilon), (\gamma, \delta), (\gamma, \varepsilon)\}$.

Γιὰ νὰ παραστήσουμε γεωμετρικῶς τὸ Α × Β, παίρνουμε ὀρθογώνιους ἄξονες Οχ, Οψ καὶ πάνω στὸν Οχ σὲ ἴσες μεταξύ τους ἀποστάσεις γράφουμε τὰ α, β, γ. Γράφουμε ἐπίσης ὁμοίως πάνω στὸν ἄξονα Οψ τὰ δ, ε (Σχ. 19.2). Τότε τὸ ζεῦγος, π.χ., (α, δ) παριστάνεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ, τὸ ζεῦγος (β, ε) ἀπὸ σημεῖο Ζ κ.τ.λ. καὶ τὸ σύνολο τῶν σημείων {Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ} εἶναι ἡ γεωμετρικὴ παράσταση τοῦ Α × Β.

20. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ.



Σχ. 20–1

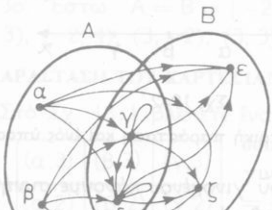
Ὀνομάζουμε διάγραμμα ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn γιὰ τὰ σύνολα A καὶ B, στὸ ὁποῖο ὑπάρχουν ἐπιπλέον καμπύλα βέλη, ποὺ συνδέουν τὰ μέλη κάθε ζεύγους καὶ ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ πρῶτο στὸ δεύτερο μέλος τοῦ ζεύγους. Ἔτσι π.χ., στὸ Σχ. 20.1 βλέπετε τὸ διάγραμμα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου: $A \times B = \{\alpha, \beta, \gamma\} \times \{\delta, \varepsilon\} = \{(\alpha, \delta), (\alpha, \varepsilon), (\beta, \delta)$ $(\beta, \varepsilon), (\gamma, \delta), (\gamma, \varepsilon)\}$.

Στὸ Σχ. 20.2 βλέπετε τὸ διάγραμμα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ἐπὶ τὸ σύνολο $B = \{\gamma, \delta, \varepsilon, \zeta\}$, ποὺ ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα. Εἶναι:

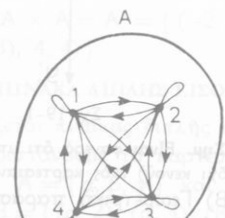
$$A \times B = \{ (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\alpha, \varepsilon), (\alpha, \zeta).$$
$$(\beta, \gamma), (\beta, \delta), (\beta, \varepsilon), (\beta, \zeta),$$
$$(\gamma, \gamma), (\gamma, \delta), (\gamma, \varepsilon), (\gamma, \zeta),$$
$$(\delta, \gamma), (\delta, \delta), (\delta, \varepsilon), (\delta, \zeta). \}$$

Γιὰ τὸ ζεῦγος (γ, γ) πρέπει νὰ ἔχουμε βέλος, ποὺ νὰ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ στοιχεῖο γ καὶ νὰ ἐπιστρέφει στὸ ἴδιο· αὐτὸ τὸ παριστάνουμε μὲ τὴ θηλιά, ποὺ βλέπετε στὸ σχῆμα. Τὸ ἴδιο κάνουμε γιὰ τὸ ζεῦγος (δ, δ).

Ἂν $A = B$, θὰ ἔχουμε διάγραμμα ὅπως τοῦ Σχ. 20.3, ὅπου βλέπετε τὸ διάγραμμα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ἐπὶ τὸν ἑαυτό του.



Σχ. 20–2



Σχ. 20–3

Σημ. Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε διάγραμμα καὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

43) Ἂν τὰ διατεταγμένα ζεύγη $(x+1, 5)$ καὶ $(-4, \psi - 1)$ εἶναι ἴσα, νὰ βρεῖτε τὰ x καὶ ψ.

44) Νὰ πάρετε ἕνα σύστημα ἀξόνων ὀρθοκανονικό (*), νὰ προσδιορίσετε τὰ σημεῖα

(*) Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἕνα σύστημα ἀξόνων λέγεται ὀρθοκανονικό, ἂν εἶναι ὀρθογώνιο καὶ οἱ μονάδες, ποὺ ἔχουν ὁρισθεῖ πάνω στοὺς ἄξονες, ἔχουν ἴσα μήκη.

α) Α = (8,5), β) Β = (–3,6) καὶ νὰ βρεῖτε τὶς συντεταγμένες τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α πρὸς τὴν ἀρχὴ Ο καὶ πρὸς τοὺς ἄξονες x΄Οx καὶ ψ΄Οψ.

45) Ἂν Α = { 1, 2, 3 } καὶ Β = { α, β, γ }, νὰ βρεῖτε τὸ Α×Β, νὰ κάμετε τὸ διάγραμμά του καὶ νὰ τὸ παραστήσετε καὶ μὲ πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

46) Ἂν Α = { 2, 3, –5 } καὶ Β = { 2, –1 }, νὰ βρεῖτε τὸ α) Α×Α, β) Α×Β, γ) Β×Β καὶ νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τοῦ Α×Β καὶ τὴ γεωμετρικὴ παράσταση τοῦ Β×Β.

47) Ποιὰ εἶναι τὰ σύνολα ἀπὸ τὰ ὁποῖα σχηματίσθηκε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο { (–1, –1), (–1, 0), (–1, 1), (0, –1), (0, 0), (0, 1), (1, –1), (1, 0), (1, 1) };

Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου, πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ τὴ γεωμετρική του παράσταση.

48) Ἂν τὸ σύνολο Α×Β περιέχει 5 στοιχεῖα (ζεύγη), πόσα στοιχεῖα μπορεῖ νὰ περιέχει καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα Α καὶ Β;

49) Ἡ ἀκολουθία τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (2, 3), (4, 5), (1, 4), (4, 3), (2, 3), (1,6), (4, 2), (4, 3), (2, 3) εἶναι διαταγὴ ἑνὸς λοχαγοῦ πρὸς «προκεχωρημένη» διμοιρία, ποὺ συντάχθηκε μὲ «κώδικα» τὴ γεωμετρικὴ παράσταση, ποὺ βλέπετε στὸ Σχ. 20–4. α) Νὰ ἀποκρυπτογραφήσετε τὴ διαταγή. β) Μὲ τὸν ἴδιο «κώδικα» νὰ συντάξετε τὸ μήνυμα: «ἀναμένομεν ἐνισχύσεις».

Σχ. 20–4

40) Ἂν Α = { –2, –1, 0, 1, 2 }, νὰ σχηματίσετε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο Α×Α καὶ νὰ κάμετε γραφικὴ παράστασή του.

51) Ἂν εἶναι $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, τότε θὰ εἶναι ἢ ὄχι $A \times B \subseteq U \times U$; Νὰ δώσετε ἕνα παράδειγμα.

52) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τοῦ Α×Α, ἂν Α = { 1, 2 }.

21. ΔΙΜΕΛΗΣ ΣΧΕΣΗ. ΜΕΡΙΚΑ ΕΙΔΗ (ΔΙΜΕΛΩΝ) ΣΧΕΣΕΩΝ.

Α) Ἔστω ὅτι Α καὶ Β εἶναι δύο σύνολα διάφορα τοῦ κενοῦ συνόλου. Κάθε ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α × Β λέγεται **διμελὴς σχέση** ἀπὸ τὸ Α στὸ Β (*). Εἰδικότερα: Κάθε σχέση ἀπὸ ἕνα σύνολο Α στὸ ἴδιο σύνολο Α, δηλ. κάθε ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α × Α, θὰ λέγεται **σχέση μέσα στὸ Α,** εἴτε ἁπλούστερα, **σχέση στὸ Α.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ συμπεραίνουμε ὅτι **κάθε σχέση εἶναι ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν.**

Παράδειγμα: Ἔστω Α = {1, 2, 0, 8 } καὶ Β = { 2, 0, 3, 5 }. Τὸ σύνολο R = { (1, 2), (1, 0), (2, 3), (0, 3), } εἶναι ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου Α × Β = { 1, 2, 0, 8 } × { 2, 0, 3, 5 }. Ἑπομένως τὸ R εἶναι μιὰ σχέση ἀπὸ τὸ σύνολο { 1, 2, 0, 8 } στὸ { 2, 0, 3, 5 }.

Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι ἕνα ζεῦγος (χ, ψ) ἀνήκει σὲ μιὰ σχέση R, γράφουμε συνήθως xRψ. Ὥστε xRψ σημαίνει (x, ψ) ∈ R. Γιὰ τὴ σχέση τοῦ παραπάνω

(*) Στὸ ἑξῆς θὰ παραλείπουμε τὸ ἐπίθετο **διμελής**.

παραδείγματος ἔχουμε: 1R2, 1R0, 2R3, 0R3, δηλαδὴ $(1, 2) \in R$, $(1, 0) \in R$, $(2, 3) \in R$, $(0, 3) \in R$.

Τὸ σύνολο τῶν πρώτων μελῶν τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν μιὰ σχέση R, λέγεται **πρῶτο πεδίο** ἢ **πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R.** Θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ Π. Τὸ σύνολο τῶν δεύτερων μελῶν τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, λέγεται **δεύτερο πεδίο** ἢ **πεδίο τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως.** Θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ Τ. Τὸ σύνολο $\Pi \cup T$ λέγεται **βασικὸ σύνολο τῆς σχέσεως R.** Θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ U. Π.χ. γιὰ τὴ σχέση R τοῦ παραπάνω παραδείγματος, ἔχουμε ὅτι:

τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι $\Pi = \{1, 2, 0\} \subset A$

τὸ πεδίο τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2, 0, 3\} \subset B$

τὸ βασικό της σύνολο εἶναι τὸ $U = \Pi \cup T = \{1, 2, 0, 3\}$.

Παρατήρηση: Ἡ σχέση $R = \{(1, 2), (1, 0), (2, 3), (0, 3)\}$, ποὺ εἶναι μιὰ σχέση ἀπὸ τὸ $A = \{1, 2, 0, 8\}$ στὸ $B = \{2, 0, 3, 5\}$, εἶναι συγχρόνως μιὰ σχέση μέσα στὸ $A \cup B = \Gamma = \{0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, γιατὶ ἡ R εἶναι καὶ ὑποσύνολο τοῦ $\Gamma \times \Gamma$.

Ἡ σχέση R εἶναι ἐπίσης μιὰ σχέση, **ἀπὸ τὸ σύνολο** Π **στὸ σύνολο** Τ, γιατὶ ἡ R εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ $\Pi \times T$ καὶ ἀκόμα εἶναι μιὰ **σχέση μέσα στὸ βασικὸ σύνολο** $U = \{0, 1, 2, 3\}$, γιατὶ εἶναι καὶ ὑποσύνολο τοῦ $U \times U$.

Ἀκόμα ἡ R εἶναι ἐπίσης μιὰ σχέση μέσα στὸ $\{0, 2, 1, 3, 4, 5, 30\}$, ποὺ εἶναι ἕνα ὑπερσύνολο τοῦ U καὶ ἐπίσης εἶναι μιὰ σχέση μέσα σὲ κάθε ὑπερσύνολο τοῦ βασικοῦ της συνόλου U.

Γενικὰ κάθε σχέση ἀπὸ ἕνα σύνολο σὲ ἄλλο εἶναι μιὰ σχέση μέσα στὸ βασικό της σύνολο (γιατί;).

Β) Μιὰ σχέση, ὡς σύνολο (ζευγῶν), καθορίζεται εἴτε μὲ **ἀναγραφὴ** τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, εἴτε μὲ **συνθήκη,** δηλαδὴ **περιγραφὴ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας γιὰ τὰ μέλη τῶν ζευγῶν της.**

Γ) Παραδείγματα σχέσεων. Εἰδικὲς σχέσεις (*).

Παράδειγμα 1ο. Ἂς θεωρήσουμε δύο σύνολα διάφορα τοῦ κενοῦ, π.χ. ἕνα σύνολο μαθητῶν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ ἕνα σύνολο πόλεων $B = \{K, \Lambda, M, N, X\}$. Ζητεῖται νὰ καθορίσουμε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του τὸ σύνολο R_1 τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y), τῶν ὁποίων τὰ μέλη ἱκανοποιοῦν τὴ συνθήκη «ὁ $x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθεῖ τὴν $y \in B$». Συμβολικὰ αὐτὸ γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$R_1 = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ἔχει ἐπισκεφθεῖ } y \in B\}.$$

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι:

ὁ μαθητὴς α ἔχει ἐπισκεφθεῖ τὶς πόλεις Κ, Μ,

ὁ μαθητὴς β ἔχει ἐπισκεφθεῖ τὴν πόλη Λ,

(*) Ἀπὸ τὰ παραδείγματα καὶ τὶς προτεινόμενες γιὰ λύση ἀσκήσεις τοῦ Κεφαλαίου ΙΙ νὰ δοθοῦν, ὅσες κατὰ τὴν κρίση τοῦ διδάσκοντος ἀρκοῦν γιὰ τὴν ἐμπέδωση κάθε ἑνότητας.

ὁ μαθητὴς γ ἔχει ἐπισκεφθεῖ τὶς πόλεις Μ, Ν, Χ,
ὁ μαθητὴς δ δὲν ἔχει ἐπισκεφθεῖ καμιὰ πόλη τοῦ συνόλου Β.

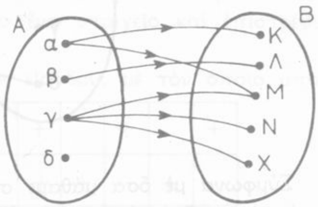
Τὰ διατεταγμένα ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ συνθήκη «$x \in$ Α ἔχει ἐπισκεφθεῖ $y \in$ Β», εἶναι λοιπὸν τὰ ἀκόλουθα: (α, Κ), (α, Μ), (β, Λ), (γ, Μ), (γ, Ν), (γ, Χ). Ὥστε: $R_1 = \{(x, y) \,/\, x \in$ Α ἔχει ἐπισκεφθεῖ $y \in$ Β $\} =$
$= \{$ (α, Κ), (α, Μ), (β, Λ), (γ, Μ), (γ, Ν), (γ, Χ) $\}$.

Ἔχουμε λοιπὸν ἐδῶ μιὰ σχέση R_1 ἀπὸ τὸ Α στὸ Β καὶ εἶναι $R_1 \subset$ Α $\times$ Β. Παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

1) Στὴ σχέση R_1 ἀνήκουν καὶ **στοιχεῖα** (ζεύγη) μὲ **τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος**, π.χ. τὰ (α, Κ) καὶ (α, Μ).
2) τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R_1 εἶναι τὸ Π $= \{$ α, β, γ $\} \subset$ Α.
3) τὸ πεδίο τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως R_1 εἶναι τὸ Τ $= \{$ Κ,Λ,Μ,Ν,Χ $\} \subseteq$ Β,
4) συνθήκη, ποὺ ὁρίζει τὴ σχέση, εἶναι ἡ «$x \in$ Α ἔχει ἐπισκεφθεῖ $y \in$ Β»,
5) τὸ βασικὸ σύνολο τῆς σχέσεως εἶναι τὸ Π $\cup$ Τ $= \{$ α,β,γ,Κ,Λ,Μ,Ν,Χ $\}$.

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ὁ μαθητὴς δ δὲν ἔχει ἐπισκεφθεῖ καμιὰ ἀπὸ τὶς πόλεις τοῦ συνόλου Β καὶ ἑπομένως δὲν ὁρίζεται ζεῦγος μὲ πρῶτο μέλος τὸ δ. Λέμε στὴν περίπτωση αὐτὴ ὅτι **ἡ σχέση δὲν εἶναι ὁρισμένη** γιὰ $x =$ δ.

Τὴν παραπάνω σχέση R_1 ἀπὸ τὸ σύνολο Α στὸ σύνολο Β μποροῦμε νὰ τὴν παραστήσουμε μὲ τὸ διάγραμμα, ποὺ βλέπετε στὸ Σχ. 21.1.



Σχ. 21-1

Στὸ Σχ. 21.2 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου γιὰ τὴ σχέση R_1. Τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη σημειώνονται μὲ σταυροὺς στὴν κατάλληλη θέση τους.

Χ			+	
Ν			+	
Μ	+		+	
Λ		+		
Κ	+			
Β / Α	α	β	γ	δ

Σχ. 21-2

Παράδειγμα 2ο. Ἂς θεωρήσουμε πάλι ἕνα σύνολο μαθητῶν Α $= \{$ α, β, γ, δ $\}$ καὶ ἕνα σύνολο πόλεων Β $= \{$Κ, Λ, Μ$\}$.

Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι:
ὁ μαθητὴς α γεννήθηκε στὴν πόλη Κ,
ὁ μαθητὴς β γεννήθηκε στὴν πόλη Μ,
ὁ μαθητὴς δ γεννήθηκε στὴν πόλη Ν,
ὁ μαθητὴς γ δὲν γεννήθηκε σὲ καμιὰ ἀπὸ τὶς πόλεις τοῦ συνόλου Β.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι μὲ τὴ συνθήκη «$x \in$ Α γεννήθηκε σὲ $y \in$ Β» καθορίζεται τὸ σύνολο $R_2 = \{(x, y) \,/\, x \in$ Α γεννήθηκε σὲ $y \in$ Β$\}$, ποὺ ὡς σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι μιὰ σχέση. Ἡ σχέση αὐτὴ R_2 μπορεῖ νὰ παρασταθεῖ καὶ μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της.

Ἔχουμε τὰ ἑξῆς ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ συνθήκη τῆς σχέσεως: (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ).

Ὥστε εἶναι $R_2 = \{$(α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ)$\}$.

Γιὰ τὴ σχέση R_2, παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς:

1) Μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R_2, **δὲν ὑπάρχουν ζεύγη μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος.**

2) Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R_2 εἶναι τὸ $\Pi = \{α, β, δ\} \subset A$.

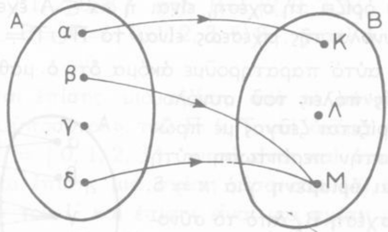
3) Τὸ πεδίο τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως R_2 εἶναι τὸ $T = \{K, M\} \subset B$.

4) Συνθήκη τῆς σχέσεως εἶναι «$x \in A$ γεννήθηκε σὲ $y \in B$».

5) Τὸ βασικὸ σύνολο τῆς σχέσεως R_2 εἶναι τὸ $\Pi \cup T = \{α, β, δ, K, M\}$.

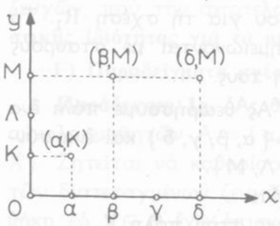
6) Ἡ σχέση αὐτὴ δὲν εἶναι ὁρισμένη γιὰ $x = γ$.

Στὸ Σχ. 21.3 βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως R_2.



Σχ. 21-3

Σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε στὴν § 19, Β μποροῦμε νὰ ἔχουμε γεωμετρικὴ παράσταση τῆς σχέσεως $\{$(α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ)$\}$. Ἡ παράσταση αὐτὴ εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ), ποὺ βλέπετε στὸ Σχ. 21.4. Παρατηροῦμε ὅτι δὲν ὑπάρχουν δύο σημεῖα μὲ τὴν ἴδια τετμημένη.



Σχ. 21-4

Σπουδαία παρατήρηση 1η. Στὸ παραπάνω 2ο παράδειγμα παρατηρήσαμε ὅτι μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R_2, δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα ζεύγη μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος. Οἱ σχέσεις μ' αὐτὴ τὴν ἰδιότητα λέγονται **συναρτήσεις.** Ὥστε:

Κάθε σχέση, στὴν ὁποία μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος, λέγεται συνάρτηση.

Ἡ σχέση ὅμως R_1 τοῦ πρώτου παραδείγματος δὲν εἶναι μιὰ συνάρτηση, γιατὶ ἀνήκουν σ' αὐτὴ περισσότερα ἀπὸ ἕνα ζεύγη μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος, π.χ. τὰ (α, Κ) καὶ (α, Μ). Τὸ διαπιστώνουμε αὐτὸ ἀμέσως καὶ ἀπὸ τὸ σχῆμα 21.1, παρατηρώντας ὅτι ἀπὸ τὸ στοιχεῖο α τοῦ συνόλου Α ἀναχωροῦν περισσότερα ἀπὸ ἕνα βέλη καὶ ἐπίσης ἀπὸ τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου, Σχ. 21.2, παρατηρώντας ὅτι ὑπάρχουν στῆλες μὲ περισσότερους ἀπὸ ἕνα σταυρούς.

Παράδειγμα 3ο (σχέσεως μέσα σ' ἕνα σύνολο). Δίνεται τὸ σύνολο $E = \{2, 3, 4, 6, 8\}$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθεῖ μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της ἡ σχέση: $R_3 = \{(x, y) \,/\, x \in E$ διαιρέτης τοῦ $y \in E\}$.

Ἡ συνθήκη «x διαιρέτης τοῦ y», συμβολικὰ $x \mid y$, καθορίζει τὰ ζεύγη. Πραγματικά:

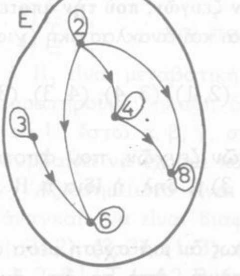
$2 \mid 2$, ζεῦγος (2, 2)	$4 \mid 8$, ζεῦγος (4, 8)
$2 \mid 4$, ζεῦγος (2, 4)	$3 \mid 3$, ζεῦγος (3, 3)
$2 \mid 6$, ζεῦγος (2, 6)	$3 \mid 6$, ζεῦγος (3, 6)
$2 \mid 8$, ζεῦγος (2, 8)	$6 \mid 6$, ζεῦγος (6, 6)
$4 \mid 4$, ζεῦγος (4, 4)	$8 \mid 8$, ζεῦγος (8, 8)

Ἡ σχέση λοιπὸν παριστάνεται, μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της, ὡς ἑξῆς:
$R_3 = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 3), (3, 6), (3, 4), (4, 8), (6, 6), (8, 8)\}$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι **ἡ σχέση R_3 δὲν εἶναι συνάρτηση.** Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της εἶναι τὸ σύνολο $\Pi = \{2, 3, 4, 6, 8\} = E$, τὸ πεδίο τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2, 3, 4, 6, 8\} = E$, τὸ βασικὸ σύνολο τῆς σχέσεως R_3 εἶναι τὸ $\Pi \cup T = E \cup E = E$.

Στὸ Σχ. 21.5, βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως R_3. Κάθε θηλιά, ὅπως γνωρίζουμε, παριστάνει βέλος, ποὺ ξεκινᾶ ἀπὸ ἕνα στοιχεῖο καὶ ἐπιστρέφει (καταλήγει) στὸ ἴδιο στοιχεῖο τοῦ E.

Στὸ σχ. 21.6 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου, μὲ τὸν ὁποῖο μπορούμε νὰ παραστήσουμε τὴ σχέση R_3. Τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη σημειώνονται μὲ ἕνα σταυρό. Στὴ στήλη τοῦ 2 ἔχουμε 4 σταυρούς, δηλ. ἔχουμε 4 ζεύγη μὲ πρῶτο μέλος τὸ 2, κ.τ.λ. Ὅταν λοιπὸν ὑπάρχει στήλη μὲ περισσότερους ἀπὸ ἕνα σταυρούς, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ σχέση δὲν εἶναι συνάρτηση.



Σχ. 21-5

T \ Π	2	3	4	6	8
8	+		+		+
6	+	+		+	
4	+		+		
3		+			
2	+				

Σχ. 21-6

(Νὰ κάνετε γεωμετρικὴ παράσταση τῆς σχέσεως).

Παρατήρηση 2η. Στὸ παραπάνω 3ο παράδειγμα παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

Γιὰ κάθε $x \in E$ τὸ ζεῦγος $(x, x) \in R_3$. Κάθε σχέση μέσα σ' ἕνα σύνολο, ποὺ ἔχει αὐτὴ τὴν ἰδιότητα, λέγεται ἀνακλαστική. Ὥστε ἡ R_3 εἶναι **ἀνακλαστική** σχέση μέσα στὸ σύνολο E.

῎Ας ἐξετάσουμε ἀκόμα τὴ σχέση $R = \{(2,2), (2,3), (3,3), (4,4), (4,3)\}$.

Πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $\Pi = \{2, 3, 4\}$.

Πεδίο τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2, 3, 4\}$.

Βασικὸ σύνολο εἶναι τὸ $U = \Pi \cup T = \{2, 3, 4\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι στὴ σχέση ἀνήκουν τὰ ζεύγη (2, 2), (3, 3), (4, 4). Δηλαδὴ γιὰ κάθε $x \in U$, τὸ ζεῦγος (x, x) ἀνήκει στὴν R. ῎Αρα ἡ σχέση R εἶναι ἀνακλαστική.

Τέλος, εἶναι φανερὸ ὅτι στὸ διάγραμμα μιᾶς ἀνακλαστικῆς σχέσεως μέσα σ' ἕνα σύνολο U θὰ ὑπάρχουν θηλιὲς σ' ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ U (Σχ. 21.5).

Παράδειγμα 4ο (σχέσεως μέσα σ' ἕνα σύνολο). Στὸ σύνολο U τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας μπορεῖ νὰ ὁρισθεῖ ἡ σχέση:

$R_4 = \{(x, y)/x$ συμμαθητὴς τοῦ $y)\}$.

Παρατήρηση 3η. Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν ὁ x_1 εἶναι συμμαθητὴς τοῦ y_1, τότε καὶ ὁ y_1 εἶναι συμμαθητὴς τοῦ x_1 καὶ τὰ ζεύγη (x_1, y_1) καὶ (y_1, x_1) ἀνήκουν στὴ σχέση R_4. ῞Ωστε, ἂν τὸ ζεῦγος (x, y) ἀνήκει στὴν R_3, τότε καὶ τὸ (y, x), ποὺ ὀνομάζεται **ἀντίστροφο** (*) τοῦ προηγούμενου, θὰ ἀνήκει στὴν R_4. Οἱ σχέσεις μ' αὐτὴ τὴν ἰδιότητα λέγονται **συμμετρικές.** ῞Ωστε:

Μιὰ σχέση R σ' ἕνα σύνολο U λέγεται συμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἀντίστροφο τοῦ κάθε ζεύγους της ἀνήκει σ' αὐτή.

Μὲ ἄλλες λέξεις:

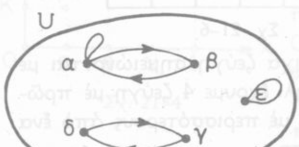
Μιὰ σχέση R μέσα σ' ἕνα σύνολο U λέγεται συμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἐναλλάξουμε τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.

᾿Αξίζει νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ σχέση R_4 εἶναι καὶ ἀνακλαστικὴ (γιατί;), δὲν εἶναι ὅμως συνάρτηση, (γιατί;).

῎Ας ἐξετάσουμε ἀκόμα ἂν ἡ σχέση $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (3, 3)\}$ εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

Παρατηροῦμε ὅτι, ἂν ἐναλλάξουμε τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, προκύπτει $\{(2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4), (3, 3)\}$, δηλ. ἡ ἴδια ἡ R. ῎Αρα ἡ R εἶναι συμμετρική.

Τέλος, ἀπὸ τὸ διάγραμμά της διακρίνουμε ἀμέσως ἂν μιὰ σχέση μέσα σ' ἕνα σύνολο U εἶναι συμμετρική, ἀπὸ τὸ ὅτι, ἂν ἀπὸ ἕνα στοιχεῖο α τοῦ U ἀναχωρεῖ ἕνα βέλος καὶ καταλήγει σ' ἕνα ἄλλο στοιχεῖο β, τότε ἕνα ἄλλο βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ β καὶ καταλήγει στὸ α. ᾿Εννοεῖται ὅτι καὶ κάθε θηλιὰ φανερώνει ζεῦγος, ποὺ ταυτίζεται μὲ τὸ ἀντίστροφό του ζεῦγος. Στὸ Σχ. 21.7 βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς συμμετρικῆς σχέσεως $\{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\gamma, \delta), (\delta, \gamma), (\varepsilon, \varepsilon)\}$ στὸ σύνολο U.



Σχ. 21-7

(*) ῎Αν R εἶναι μιὰ σχέση, ἡ σχέση, ποὺ προκύπτει μὲ ἐναλλαγὴ τῶν μελῶν τῶν ζευγῶν της, λέγεται ἀντίστροφη τῆς R καὶ συμβολίζεται μὲ R^{-1}.

Παρατήρηση 4η. α) Στὴ σχέση R_4 τοῦ 4ου παραδείγματος παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ ἑξῆς ἰδιότητα: ἂν $(x, y) \in R_4$ καὶ $(y, z) \in R_4$, τότε καὶ $(x, z) \in R_4$.

Πραγματικά, ἂν ὁ x εἶναι συμμαθητὴς τοῦ y καὶ ὁ y συμμαθητὴς τοῦ z, τότε καὶ x εἶναι συμμαθητὴς τοῦ z, δηλαδή:

$$(x, y) \in R_4 \text{ καὶ } (y, z) \in R_4 \Rightarrow (x, z) \in R_4.$$

Κάθε σχέση μ' αὐτὴ τὴν ἰδιότητα λέγεται μεταβατική.

β) Ἂς ἐξετάσουμε, γιὰ νὰ ἐννοήσουμε καλύτερα τὶς μεταβατικὲς σχέσεις, τὴ σχέση $R_1 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (2, 4), (1, 4)\}$.

Ἐδῶ εἶναι $\Pi = \{1, 2, 3\}$, $T = \{2, 3, 4\}$, ἑπομένως $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ἔχομε ὅτι:

$\left.\begin{array}{l}(1, 2) \in R_1\\(2, 3) \in R_1\end{array}\right.$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι καὶ $(1, 3) \in R_1$

Ἐπίσης:

$\left.\begin{array}{l}(2, 3) \in R_1\\(3, 4) \in R_1\end{array}\right.$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι καὶ $(2, 4) \in R_1$.

Ἐπίσης:

$\left.\begin{array}{l}(1, 2) \in R_1\\(2, 4) \in R_1\end{array}\right.$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι καὶ $(1, 4) \in R_1$

Ἐπίσης:

$\left.\begin{array}{l}(1, 3) \in R_1\\(3, 4) \in R_1\end{array}\right.$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι καὶ $(1, 4) \in R_1$

Ἄρα ἡ R_1 εἶναι μεταβατική.

Παρατηροῦμε δηλαδὴ ὅτι, ὅταν γιὰ μιὰ ὁποιαδήποτε τριάδα ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ U, ἔστω α, β, γ, συμβαίνει νὰ ἔχουμε $(\alpha, \beta) \in R_1$ καὶ $(\beta, \gamma) \in R_1$, τότε συμβαίνει νὰ ἔχουμε καὶ $(\alpha, \gamma) \in R_1$.

γ) Ἀξιοσημείωτο εἶναι ὅτι τὰ στοιχεῖα α, β, γ ἀπὸ τὸ σύνολο U δὲν εἶναι ἀναγκαῖο νὰ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ τους. Ἡ σχέση, π.χ. $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 2), (5, 6)\}$ εἶναι μεταβατική. Πραγματικὰ εἶναι: $\Pi = \{1, 2, 5\}$, $T = \{2, 3, 6\}$ καὶ $U = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ καὶ ἔχουμε:

$\left.\begin{array}{l}(1, 2) \in R_2\\(2, 3) \in R_2\end{array}\right.$ καὶ $(1, 3) \in R_2$

$\left.\begin{array}{l}(1, 2) \in R_2\\(2, 2) \in R_2\end{array}\right.$ καὶ $(1, 2) \in R_2$

$\left.\begin{array}{l}(2, 2) \in R_2\\(2, 3) \in R_2\end{array}\right.$ καὶ $(2, 3) \in R_2$

Ὁμοίως οἱ σχέσεις $\{(\alpha, \beta), (\beta, \beta)\}$ καὶ $\{(\alpha, \alpha), (\alpha, \beta)\}$ εἶναι μεταβατικές.

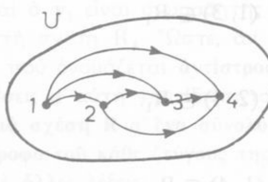
Ὁ συμβολικὸς ὁρισμὸς τῆς μεταβατικῆς σχέσεως εἶναι:

$$\left.\begin{array}{rl} & \forall\ \alpha, \beta, \gamma, \in U\\ \text{μὲ} & (\alpha, \beta) \in R\\ \text{καὶ} & (\beta, \gamma) \in K\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$$

Ὥστε: **μιὰ σχέση R σ' ἕνα σύνολο U λέγεται μεταβατικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, γιὰ κάθε τριάδα μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ U, ἔστω α, β, γ (ὅπου α, β, γ ὄχι κατ' ἀνάγκη διαφορετικὰ μεταξύ τους), γιὰ τὴν ὁποία εἶναι (α, β) ∈ R καὶ (β, γ) ∈ R, εἶναι καὶ (α, γ) ∈ R.**

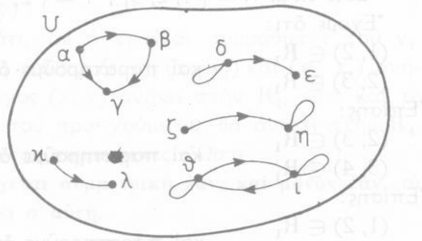
Τέλος, ἀπὸ τὸ διάγραμμά της διακρίνουμε ἀμέσως ἂν μιὰ σχέση μέσα σ' ἕνα σύνολο U εἶναι μεταβατικὴ ἀπὸ τὸ ὅτι, ὅταν ἕνα βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ στοιχεῖο α καὶ πηγαίνει στὸ β καὶ ἕνα δεύτερο βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ β καὶ πηγαίνει στὸ γ, τότε καὶ ἕνα τρίτο βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ α καὶ καταλήγει στὸ γ.

Στὰ σχήματα 21.8 καὶ 21.9 βλέπετε διαγράμματα μεταβατικῶν σχέσεων:



Σχ. 21-8

Διάγραμμα τῆς μεταβατικῆς σχέσεως:
{ (1, 2), (2, 3), (1, 3),
(2, 4), (3, 4), (1, 4) }.



Σχ. 21-9

Διάγραμμα τῆς μεταβατ. σχέσεως:
{ (α, β), (β, γ), (α, γ),
(δ, δ), (δ, ε), (ζ, η), (η, η),
(θ, θ), (θ, ι), (ι, θ), (ι, ι), (κ. λ) }

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

53) Νὰ βρεῖτε: I) τὸ πεδίο ὁρισμοῦ, II) τὸ πεδίο τῶν τιμῶν, III) τὸ βασικὸ σύνολο καὶ IV) ποιὰ εἶναι ἡ συνάρτηση, στὶς ἀκόλουθες σχέσεις:

α) $R = \{ (3, 9), (5, 15), (7, 21), (9, 27) \}$

β) $R_1 = \{ (0, 1), (1, 0), (1, 1), (0, 0) \}$

γ) $R_2 = \{ (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 4) \}$

δ) $R_3 = A^2$, ὅπου $A = \{ 0, 2, -4 \}$

ε) $R_4 = \{ (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5) \}$.

Μήπως μπορεῖτε νὰ βρεῖτε καὶ τὴ συνθήκη στὶς σχέσεις R καὶ R_4;.

54) Στὸ σύνολο Z, τῶν ἀκεραίων τῆς 'Αλγέβρας, καὶ μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο $\Pi = \{ 1, 3, 9, 12 \}$ νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν ζευγῶν, ποὺ τὶς ἀποτελοῦν, τὶς σχέσεις:

α) $R = \{ (x, \psi) \,/\, \psi = x \}$, β) $R_1 = \{ (x, \psi) \,/\, \psi = x - 5) \}$.

55) Νὰ σχεδιάσετε διαγράμματα, πίνακες διπλῆς εἰσόδου καὶ γεωμετρικὲς παραστάσεις γιὰ τὶς ἀκόλουθες σχέσεις:

α) $R = \{ (2, 3), (3, 2), (4, 3), (3, 4), (1, 2), (2, 1) \}$

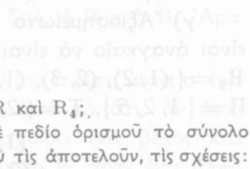
β) $F = \{ (x, \psi) / \psi = 4x \}$ μὲ $x, \psi \in N$, ὅταν $\Pi = \{ 1,2,3,4 \}$

γ) $R_2 = \{ (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4) \}$

δ) $R_3 = \{ (3, 2), (4, 3), (4, 2), (5, 4), (5, 3), (5, 2), (6, 5), (6, 4), (6, 3), (6, 2) \}$.

Ποιὲς ἀπ' αὐτὲς τὶς σχέσεις εἶναι συναρτήσεις;

56) Τὸ διάγραμμα μιᾶς σχέσεως εἶναι ὅπως τὸ βλέπετε στὸ Σχ. 21-10.



Σχ. 21-10

α) Ἡ σχέση εἶναι συνάρτηση ἢ ὄχι καὶ πῶς διακρίνεται αὐτὸ ἀπὸ τὸ διάγραμμα;

β) Νὰ παραστήσετε τὴ σχέση μὲ ἀναγραφὴ τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν.

57) Δίνονται τὰ σύνολα:

$$A = \{ (1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

καὶ
$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

καὶ ζητεῖται νὰ καθορισθεῖ μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της ἡ σχέση:

$$R = \{ (x, y) \,/\, x \in A \text{ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ } y \in B \}.$$

58) Ἕνα σύνολο προσώπων $E = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$ εἶναι γραμμένα σ' ἕναν κατάλογο μ' αὐτὴ τὴ σειρά. Στὸ σύνολο αὐτὸ ζητεῖται: α) νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της τὴ σχέση: $R = \{ (x, y) \,/\, x$ «δείχνει» $y \}$ μὲ τὴν ἔννοια ὅτι τὸ κάθε πρόσωπο δείχνει αὐτούς, ποὺ εἶναι γραμμένοι στὸν κατάλογο μετὰ ἀπ' αὐτόν.

β) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα καὶ πίνακα διπλῆς εἰσόδου τῆς σχέσεως.

γ) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση εἶναι συνάρτηση ἢ ὄχι.

59) Στὸ παραπάνω σύνολο προσώπων Ε: α) νὰ ὁρισθεῖ μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της ἡ σχέση:

$$R_1 = \{ (x, \psi) \,/\, x \text{ ταυτίζεται μὲ } y \},$$

β) νὰ ἐξετασθεῖ ἂν ἡ σχέση εἶναι συνάρτηση,

γ) νὰ ἐξετασθεῖ ἂν ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική,

δ) νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τῆς R_1.

60) Νὰ ἐξετασθεῖ ἂν ἡ σχέση:

$$R = \{ (x, \psi) \,/\, x \perp \psi \}$$

στὸ σύνολο Ε, τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική. (Ἡ R λέγεται σχέση καθετότητας).

61) Νὰ ἐξετασθεῖ ἂν ἡ σχέση «...διαιρέτης τοῦ...» (*) (ἐννοοῦμε τὴ σχέση μὲ συνθήκη τὴ «x διαιρέτης τοῦ ψ») στὸ σύνολο N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική.

62) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικὲς οἱ σχέσεις:

$R_1 = \{ (2, 2), (3, 3), (2, 3), (4, 4), (2, 4) \}$

$R_2 = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 4) \}$

$R_3 = \{ (2, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (4, 8), (8, 8) \}$.

63) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση «μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ» (ἐννοοῦμε τὴ σχέση μὲ συνθήκη τὴ «$x \leqslant y$») στὸ σύνολο N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική. Ἐπίσης ἂν εἶναι μεταβατική.

64) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι συμμετρικὲς οἱ σχέσεις:

α) $R_1 = \{ (\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta) \}$

β) $R_2 = \{ (0, 0), (1, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \}$

γ) $R_3 = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (3, 5) \}$

65) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση:

$$R = (x, \psi) \,/\, x \text{ παραπληρωματικὴ τῆς } \psi \}$$

στὸ σύνολο Κ, τῶν κυρτῶν γωνιῶν, εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

66) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R_2 = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2), 2, 1), (1, 1), (2, 2) \}$ εἶναι συγχρόνως ἀνακλαστικὴ καὶ συμμετρική.

67) Σὲ βασικὸ σύνολο τὸ σύνολο $\mathscr{P}$(A), τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Α, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R = \{ (x, \psi) \,/\, x \subseteq \psi \}$ εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική. Ἐπίσης ἂν εἶναι συμμετρικὴ ἢ μεταβατική.

68) Νὰ ἐξετάσετε ἂν οἱ ἀκόλουθες σχέσεις εἶναι ἢ ὄχι μεταβατικές:

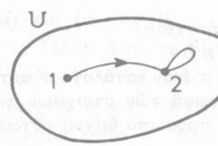
α) $R_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 3) \}$

β) $R_2 = \{ (\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\delta, \alpha), (\delta, \delta), (\alpha, \alpha) \}$

γ) $R_3 = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (1, 4) \}$

(*) Σὲ μιὰ σχέση δίνουμε συνήθως τὸ ὄνομα τῆς συνθήκης της, ἐπειδὴ ἀπὸ αὐτὴ καθορίζεται τὸ σύνολο τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴ σχέση.

69) Στὸ σύνολο $U = \{ 2, 14, 70, 210 \}$ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R = \{ (x, \psi) / x$ διαιρέτης τοῦ $\psi \}$ εἶναι ἢ ὄχι μεταβατική. Νὰ ἐξετάσετε ἐπίσης ἂν ἡ R εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικὴ καὶ συμμετρική.



Σχ. 21-11

70) Στὸ σύνολο U τῶν ἀνδρῶν ἑνὸς χωριοῦ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R = \{ (x, \psi) / x$ ἀδελφὸς τοῦ $\psi \}$ εἶναι ἢ ὄχι μεταβατική. Μήπως ἡ σχέση εἶναι καὶ ἀνακλαστικὴ ἢ συμμετρική;

71) Στὸ Σχ. 21-11 βλέπετε τὸ διάγραμμα μιᾶς σχέσεως R. Νὰ συμβολίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της τὴ σχέση καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι μεταβατική.

22. ΣΧΕΣΗ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ U.

Εἴδαμε στὰ προηγούμενα σχέσεις, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἄλλες εἶναι ἀνακλαστικές, ἄλλες συμμετρικές, ἄλλες μεταβατικές, ἄλλες ἀνακλαστικὲς καὶ συμμετρικὲς (*) κ.τ.λ.

Ὑπάρχουν ὅμως σχέσεις, ποὺ εἶναι συγχρόνως ἀνακλαστικές, συμμετρικὲς καὶ μεταβατικές. Οἱ σχέσεις αὐτὲς λέγονται **σχέσεις ἰσοδυναμίας.**

Παράδειγμα 1ο. Δίνεται ἕνα σύνολο μαθητῶν $M = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξεταστεῖ ἂν ἡ σχέση $R = \{ (x, \psi) / x$ ἔχει αὐτὸ τὸ ἀνάστημα μὲ τὸν $\psi \}$ εἶναι ἢ ὄχι **σχέση ἰσοδυναμίας.**

Ἀπάντηση. α) Ἡ σχέση εἶναι ἀνακλαστική, γιατὶ κάθε μαθητὴς ἔχει τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ τὸν ἑαυτό του καὶ ἑπομένως τὰ ζεύγη (α, α), (β, β), (γ, γ), (δ, δ), $(\varepsilon, \varepsilon)$, (ζ, ζ), ἀνήκουν στὴ σχέση R.

β) Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνας μαθητὴς α ἔχει τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ τὸν β, τότε καὶ ὁ β ἔχει τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ τὸν α καὶ ἑπομένως ἂν $(\alpha, \beta) \in R$, τότε $(\beta, \alpha) \in R$. Ἡ σχέση ἑπομένως εἶναι συμμετρική.

γ) Ἂν ἕνας μαθητὴς α ἔχει τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ τὸν β καὶ ὁ β τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ τὸν ε, τότε καὶ ὁ α ἔχει τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ τὸν ε, δηλαδὴ $(\alpha, \beta) \in R$ καὶ $(\beta, \varepsilon) \in R \Rightarrow (\alpha, \varepsilon) \in R$. Ἄρα ἡ σχέση εἶναι μεταβατική. Ἡ σχέση λοιπὸν εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

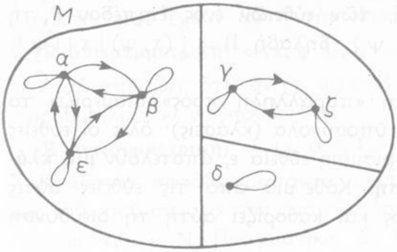
Ἀξιοπαρατήρητο εἶναι ὅτι ἡ συνθήκη «ἔχει τὸ ἴδιο ἀνάστημα μὲ» διαμερίζει τὸ σύνολο (**) M σὲ ὑποσύνολα (κλάσεις), ποὺ τὸ καθένα ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς μαθητές, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο ἀνάστημα μεταξύ τους.

Ἂν π.χ. ὑποθέσουμε ὅτι οἱ μαθητὲς α, β, ε ἔχουν ἀνάστημα 1,80 m, οἱ γ, ζ ἔχουν ἀνάστημα 1,75 m καὶ ὁ δ 1,65 m, τότε θὰ ἔχουμε διαμερισμὸ τοῦ M σὲ τρεῖς κλάσεις, τὶς $\{ \alpha, \beta, \varepsilon \}$, $\{ \gamma, \zeta \}$, $\{ \delta \}$.

(*) Δὲν εἶναι ἀπαραίτητο μιὰ σχέση νὰ εἶναι ἀνακλαστικὴ εἴτε συμμετρικὴ εἴτε μεταβατική. Ἡ σχέση π.χ. $V = \{ (1, 2), (5, 7), (2, 16) \}$ δὲν εἶναι οὔτε ἀνακλαστικὴ οὔτε συμμετρικὴ οὔτε μεταβατική.

(**) Ἡ συνθήκη κάθε σχέσεως ἰσοδυναμίας διαμερίζει τὸ βασικὸ σύνολο.

Στὸ Σχ. 22-1 βλέπετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως R καὶ τὶς κλάσεις, στὶς ὁποῖες διαμερίζεται τὸ M, οἱ ὁποῖες ὀνομάζονται **κλάσεις ἰσοδυναμίας.** Ὅπως φαίνεται στὸ διάγραμμα (σχ. 22-1), μπορεῖ νὰ ἔχουμε κλάσεις ἰσοδυναμίας μὲ δύο στοιχεῖα ἢ καὶ μὲ ἕνα μόνο στοιχεῖο.



Σχ. 22-1

Παράδειγμα 2ο. Νὰ ἐξετασθεῖ ἂν ἡ σχέση $R = \{(1, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 2)$ $(3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

Ἀπάντηση: Ἔχουμε: $\Pi = \{1, 2, 3\}$, $T = \{1, 2, 3\}$, $U = \{1, 2, 3\}$,

α) Στὴ σχέση ἀνήκουν τὰ ζεύγη (1, 1), (2, 2), (3, 3), ἄρα εἶναι ἀνακλαστική.

β) Ἂν ἐναλλάξουμε τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, ἡ σχέση δὲν μεταβάλλεται· πραγματικὰ ἔχουμε τότε:

$\{(2,1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3,3), (3, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3),\} = R$

Ἑπομένως ἡ σχέση εἶναι συμμετρική.

γ) Ἔχουμε ἀκόμα:

$$\left.\begin{matrix}(1, 2) \in R\\(2, 1) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1, 1) \in R \qquad \left.\begin{matrix}(1, 2) \in R\\(2, 2) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1, 2) \in R$$

$$\left.\begin{matrix}(1, 2) \in R\\(2, 3) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1, 3) \in R \qquad \left.\begin{matrix}(1, 1) \in R\\(1, 3) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1, 3) \in R$$

$$\left.\begin{matrix}(2, 1) \in R\\(1, 1) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (2, 1) \in R \qquad \left.\begin{matrix}(2, 2) \in R\\(2, 3) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (2, 3) \in R$$

$$\left.\begin{matrix}(3, 3) \in R\\(3, 2) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (3, 2) \in R \qquad \left.\begin{matrix}(1, 3) \in R\\(3, 3) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (1, 3) \in R$$

$$\left.\begin{matrix}(3, 2) \in R\\(2, 3) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (3, 3) \in R \qquad \left.\begin{matrix}(3, 2) \in R\\(2, 1) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (3, 1) \in R$$

$$\left.\begin{matrix}(3, 1) \in R\\(1, 3) \in R\end{matrix}\right\} \Rightarrow (3, 3) \in R \text{ κ.τ.λ.}$$

δηλαδὴ ἡ σχέση εἶναι καὶ μεταβατική. Ἄρα εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

Παράδειγμα 3ο. Γνωρίζουμε ἀπὸ τὴν α΄ τάξη ὅτι δύο εὐθεῖες ε_1 καὶ ε_2 ἑνὸς ἐπιπέδου P λέγονται παράλληλες, ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, ἡ τομή τους εἶναι τὸ κενὸ σύνολο, δηλαδὴ $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$. Διευρύνοντας τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ θὰ λέμε ὅτι δύο εὐθεῖες ἑνὸς ἐπιπέδου λέγονται παράλληλες ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, ἡ τομή τους εἶναι τὸ κενὸ σύνολο ἢ συμπίπτουν, δηλαδή:

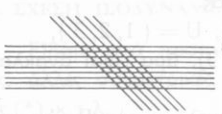
$$\varepsilon_1 \,||\, \varepsilon_2 \Leftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2.$$

Στὴν πρώτη περίπτωση λέμε ὅτι ἔχουμε εὐθεῖες **παράλληλες μὲ στενὴ σημασία·** στὴ δεύτερη λέμε ὅτι ἔχουμε εὐθεῖες παράλληλες μὲ **πλατιὰ σημασία.**

Στὸ ἑξῆς μὲ τὸ σύμβολο $||$ θὰ ἐννοοῦμε παραλληλία μὲ πλατιὰ σημασία.

Ἂς ἐξετάσουμε τώρα, στὸ σύνολο Ε, τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου Ρ, τὴ σχέση $R = \{ (x, \psi) / x$ παράλληλη πρὸς $\psi \}$, δηλαδὴ $R = \{ (x, \psi) \mid x \,||\, \psi \}$, μὲ $x \subset P$, $\psi \subset P$.

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνθήκη «παράλληλη πρὸς» διαμερίζει τὸ σύνολο Ε, τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου, σὲ ὑποσύνολα (κλάσεις)· ὅλες οἱ εὐθεῖες τοῦ Ε, ποὺ εἶναι παράλληλες πρὸς μιὰν ὁρισμένη εὐθεία ε, ἀποτελοῦν **μιὰ κλάση** ἤ, ὅπως συνήθως λέμε, **μιὰ διεύθυνση.** Κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς εὐθεῖες αὐτὲς εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τῆς διευθύνσεως καὶ καθορίζει αὐτὴ τὴ διεύθυνση (Σχ. 22–2).



Σχ. 22–2

Τὸ σύνολο $R = \{ (x, \psi), \mid x \,||\, \psi) \}$ στὸ σύνολο Ε, τῶν εὐθειῶν τοῦ Ρ, εἶναι βέβαια ἕνα ἀπειροσύνολο καὶ ἐπομένως τὴ σχέση R δὲν μποροῦμε νὰ τὴν παραστήσουμε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε εὐθεία x εἶναι παράλληλη πρὸς τὸν ἑαυτό της, τὰ ζεύγη (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), κ.τ.λ. θὰ ἀνήκουν στὴ σχέση R. Ἑπομένως ἡ R εἶναι ἀνακλαστική. Ἐπίσης, ἐπειδή, ἂν $x_1 \,||\, \psi_1$, τότε καὶ $\psi_1 \,||\, x_1$, δηλαδή, ἂν τὸ ζεῦγος (x_1, ψ_1) ἀνήκει στὴν R, τότε καὶ τὸ (ψ_1, x_1) θὰ ἀνήκει στὴ σχέση R, γι' αὐτὸ ἡ σχέση εἶναι συμμετρική.

Τέλος, $x \,||\, \psi$ καὶ $\psi \,||\, z \Rightarrow x \,||\, z$ καὶ ἐπομένως γιὰ κάθε τριάδα εὐθειῶν x, ψ, z, γιὰ τὴν ὁποία $(x, \psi) \in R$ καὶ $(\psi, z) \in R$, ἔχομε καὶ $(x, z) \in R$, δηλαδὴ ἡ R εἶναι καὶ μεταβατική. Εἶναι λοιπὸν ἡ R ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

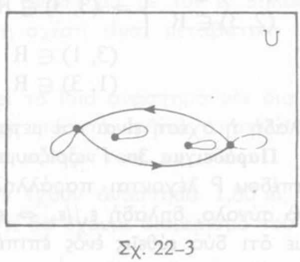
72) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R = \{ (x, \psi) / x = \psi \}$ στὸ σύνολο Ε, τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, εἶναι ἢ ὄχι σχέση ἰσοδυναμίας.

73) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R_1 = \{ (x, \psi) / x \sim \psi \}$ σ' ἕνα σύνολο Ε ἀπὸ σύνολα εἶναι ἢ ὄχι σχέση ἰσοδυναμίας.

74) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση:

$R = \{ (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\gamma, \alpha), (\alpha, \gamma) \}$ εἶναι ἢ ὄχι σχέση ἰσοδυναμίας.

75) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση, τῆς ὁποίας τὸ διάγραμμα βλέπετε στὸ Σχ. 22–3, εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.



Σχ. 22–3

23. ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΗ ΣΧΕΣΗ ΜΕΣΑ Σ' ΕΝΑ ΣΥΝΟΛΟ U.

Ἔστω ἡ σχέση $R = \{ (1, 1), (1, 2), (3,4), (5,2) \}$. Ἔχουμε $\Pi = \{ 1, 3, 5 \}$, $T = \{ 1, 2, 4 \}$, $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ R δὲν περιέχει τὸ ἀντίστροφο ζεῦγος κανενὸς ζεύγους της μὲ μέλη ἀπὸ διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ U. Οἱ σχέσεις, ποὺ ἔχουν αὐτὴ τὴν ἰδιότητα, λέγονται **ἀντισυμμετρικές**. Ὥστε:

(R ἀντισυμμετρική) $\Leftrightarrow$ **(x, ψ U, χ $\neq$ ψ καὶ (χ, ψ) $\in$ R $\Rightarrow$ (ψ, x) $\notin$ R).**

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, ἂν $(x, \psi) \in R$ καὶ $(\psi, x) \in R$, τότε θὰ εἶναι $x = \psi$. Μπ ορ οῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε ὅτι:

(R ἀντισυμμετρική) $\Leftrightarrow$ **(x, ψ $\in$ U, (x, ψ) $\in$ R καὶ (ψ, x) $\in$ R $\Rightarrow$ χ = ψ)**

Κλασσικὸ παράδειγμα ἀντισυμμετρικῆς σχέσεως εἶναι ἡ σχέση «μεγαλύτερος τοῦ» στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἡ σχέση: $R = \{(x, \psi) \mid x > \psi\}$ μὲ $x, \psi \in N$. Πραγματικά, ἂν ἕνα ζεῦγος μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ N (διαφορετικὰ μεταξύ τους) ἀνήκει στὴν R, ὅπως π.χ. τὸ ζεῦγος (5, 4), ἀφοῦ εἶναι $5 > 4$, τὸ ἀντίστροφο ζεῦγος (4, 5) δὲν ἀνήκει στὴν R, γιατὶ δὲν ἰσχύει $4 > 5$.

24. ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΤΑΞΕΩΣ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ U.

Μιὰ σχέση, σ' ἕνα σύνολο U, λέγεται σχέση διατάξεως, ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

Παράδειγμα 1ο. Ἡ σχέση $R = \{(x, \psi) \mid x$ διαιρέτης τοῦ $\psi\}$ στὸ σύνολο N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι μιὰ σχέση διατάξεως.

Πραγματικά: 1) Κάθε ἀριθμὸς τοῦ N εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του· ὁ 1, π.χ., εἶναι διαιρέτης τοῦ 1, ὁ 2 τοῦ 2 κ.ο.κ. καὶ ἑπομένως τὰ ζεύγη (1, 1), (2, 2), (3, 3) κ.τ.λ. ἀνήκουν στὴν R. Ἄρα ἡ R εἶναι ἀνακλαστική. 2) Ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρική, γιατὶ τὸ ζεῦγος π.χ. (4, 8) ἀνήκει στὴν R, ἀλλὰ τὸ (8, 4) δὲν ἀνήκει σ' αὐτή, ἀφοῦ ὁ 8 δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 4. Καὶ γενικά, ἂν ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος μὲ μέλη ἀπὸ διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ N ἀνήκει στὴν R, τότε τὸ ἀντίστροφό του ζεῦγος δὲν ἀνήκει στὴν R. 3) Ἡ R εἶναι μεταβατική. Πραγματικά, ἂν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς x εἶναι διαιρέτης ἑνὸς ἄλλου ψ καὶ ὁ ψ ἑνὸς τρίτου z, τότε καὶ ὁ x θὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ z καὶ ἑπομένως θὰ ἔχουμε: $(x, \psi) \in R$, $(\psi, z) \in R$ καὶ $(x, z) \in R$. Ἡ R λοιπὸν εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἄρα εἶναι σχέση διατάξεως.

Παράδειγμα 2ο. Ἡ σχέση $R_1 = \{(x, \psi) \mid x \leqslant \psi\}$ στὸ σύνολο N, φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι σχέση διατάξεως.

Πραγματικά: 1) Γιὰ κάθε $x \in N$ εἶναι $x = x$ καὶ ἑπομένως $(x, x) \in R_1$, ἄρα ἡ R_1 εἶναι ἀνακλαστική.

2) Ἂν $x, \psi \in N$ καὶ ἰσχύει $x < \psi$, τότε δὲν ἰσχύει $\psi < x$, τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι: ἂν $(x, \psi) \in R_1$, μὲ $x \neq \psi$, τότε $(\psi, x) \notin R_1$. Ἔτσι, π.χ. $2 < 3$ καὶ ἑπομένως $(2, 3) \in R_1$, ἀλλὰ $3 \nless 2$ καὶ ἑπομένως $(3, 2) \notin R_1$. Ἄρα ἡ R_1 εἶναι ἀντισυμμετρική.

3) Ἡ R_1 εἶναι μεταβατική: γιατί, ἂν $x, \psi, z \in N$ καὶ εἶναι $x \leqslant \psi$ καὶ $\psi \leqslant z$, τότε θὰ εἶναι καὶ $x \leqslant z$ καὶ ἑπομένως $(x, \psi) \in R_1$, $(\psi, z) \in R_1$ καὶ $(x, z) \in R_1$. Ἄρα ἡ R_1 εἶναι ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλαδὴ εἶναι σχέση διατάξεως.

25. ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ.

Κάθε σύνολο, στὸ ὁποῖο ἔχει ὁρισθεῖ μιὰ σχέση διατάξεως R, ὀνομάζεται διατεταγμένο σύνολο (μ' αὐτὴ τὴ σχέση). Ὥστε τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἐφοδιασμένο μὲ τὴ σχέση $R = \{(x, \psi) / x$ διαιρέτης τοῦ $\psi\}$ εἶναι διατεταγμένο σύνολο (§ 24, παράδειγμα 1ο).

Τὸ ἴδιο σύνολο N ἐφοδιασμένο μὲ τὴ σχέση R_1 τοῦ παραδείγματος τῆς § 24, δηλαδὴ μὲ τὴ σχέση « $\leqslant$ », εἶναι **ἐπίσης** διατεταγμένο.

Τὸ ἴδιο σύνολο N μπορεῖ νὰ «διαταχθεῖ» καὶ μὲ τὴ σχέση $R_3 = \{(x, \psi) \mid x$ πολλαπλάσιο τοῦ $\psi\}$, γιατὶ κι αὐτὴ ἡ σχέση εἶναι μιὰ σχέση διατάξεως μέσα στὸ N (εἶναι δηλαδὴ ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική).

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι ἕνα σύνολο εἶναι δυνατὸν νὰ διαταχθεῖ κατὰ περισσότερους ἀπὸ ἕναν τρόπους.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι γιὰ τὸ σύνολο N, ὡς πρὸς τὴ σχέση R_1, δηλαδὴ τὴ σχέση « $\leqslant$ », ἰσχύει ἡ ἑξῆς ἰδιότητα:

Γιὰ κάθε $x \in N$ καὶ κάθε $\psi \in N$ ἰσχύει ἢ $x \leqslant \psi$ ἢ $\psi \leqslant x$, δηλαδὴ ἢ μόνο $(x, \psi) \in R$ ἢ μόνο $(\psi, x) \in R$.

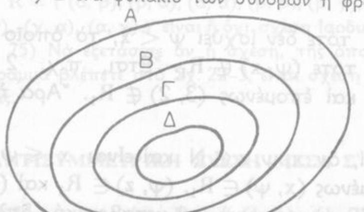
Ἡ ἴδια ἰδιότητα ὅμως δὲν ἰσχύει γιὰ τὸ σύνολο N ὡς πρὸς τὴν R, δηλαδὴ τὴ σχέση «x διαιρέτης τοῦ ψ», γιατί, ἂν x, ψ εἶναι δύο τυχαῖα στοιχεῖα τοῦ N, δὲν ἰσχύει ὁπωσδήποτε ἢ $(x, \psi) \in R$, δηλαδὴ ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ ψ, ἢ $(\psi, x) \in R$, δηλαδὴ ὁ ψ εἶναι διαιρέτης τοῦ x.

Γενικά, κάθε σύνολο U, διατεταγμένο ὡς πρὸς μιὰ σχέση R, μὲ τὴν ἰδιότητα: γιὰ κάθε $x \in U$ καὶ κάθε $\psi \in U$ ἰσχύει ὅτι ἢ $(x, \psi) \in R$ ἢ $(\psi, x) \in R$, λέγεται **ὁλικὰ διατεταγμένο** καὶ ἡ R λέγεται τότε **ὁλικὴ διάταξη,** ἀλλιῶς λέγεται **μερικὰ διατεταγμένο** καὶ ἡ R λέγεται **μερικὴ διάταξη.**

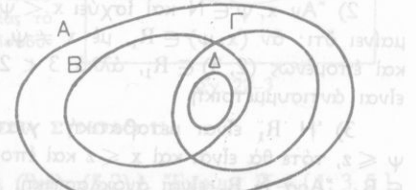
Ἔτσι, π.χ., ἡ σχέση R, τοῦ 1ου παραδείγματος τῆς § 24, εἶναι μιὰ μερικὴ διάταξη, γιατὶ ὑπάρχει π.χ. τὸ ζεῦγος (3, 5), ποὺ αὐτὸ καὶ τὸ ἀντίστροφό του (5, 3) δὲν ἀνήκουν στὴν R, γιατὶ οὔτε ὁ 3 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5, οὔτε ὁ 5 τοῦ 3 καὶ $3 \in N$, $5 \in N$. Ἡ σχέση ὅμως R_1 τοῦ 2ου παραδείγματος τῆς § 24, εἶναι μιὰ ὁλικὴ διάταξη, γιατὶ γιὰ δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα ἀπὸ τὸ N, ἔστω α, β, ἢ θὰ εἶναι $\alpha \leqslant \beta$ καὶ ἑπομένως $(\alpha, \beta) \in R_1$ ἢ θὰ εἶναι $\beta \leqslant \alpha$ καὶ ἑπομένως $(\beta, \alpha) \in R_1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

76) Σ' ἕνα φυλάκιο τῶν συνόρων ἡ φρουρὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα λοχία λ, δύο δεκα-



Σχ. 25-1



Σχ. 25-2

νεῖς δ_1, δ_2 καὶ τρεῖς στρατιῶτες σ_1, σ_2, σ_3. Στὸ σύνολο $U = \{ \lambda, \delta_1, \delta_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}$ ἡ συνθήκη «ὁ x ὑπακούει στὸν ψ» καθορίζει ἕνα σύνολο ζευγῶν, δηλ. μιὰ σχέση.

α) Νὰ καθορίσετε ἂν ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι ὁλικὴ ἢ μερικὴ διάταξη καὶ νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησή σας.

β) Νὰ κάνετε τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως. Πῶς ἀπὸ τὸ διάγραμμα μποροῦμε νὰ διακρίνουμε ἂν εἶναι ὁλικὴ ἢ μερικὴ διάταξη;

77) Στὸ σύνολο $U = \{ A, B, \Gamma, \Delta \}$, ὅπου τὰ A, B, Γ, Δ εἶναι τὰ σύνολα, ποὺ βλέπετε στὸ διάγραμμα τ ῦ Σχ. 25-1, νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων της τὴ σχέση $R_1 = \{ (x, \psi) \,/\, x \subseteq \psi \}$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση εἶναι σχέση διατάξεως καὶ ἂν εἶναι, νὰ ἐξηγήσετε τί διάταξη εἶναι: μερικὴ ἢ ὁλική.

78) Στὸ σύνολο $U = \{ A, B, \Gamma, \Delta \}$, ὅπου τὰ A, B, Γ, Δ εἶναι τὰ σύνολα, ποὺ βλέπετε στὸ διάγραμμα τοῦ Σχ. 25-2, νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, τὴ σχέση:

$$R_2 = \{ (x, \psi) \,/\, x \subseteq \psi \}.$$

Ἔπειτα νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση εἶναι διατάξεως, καί, ἂν εἶναι, τί εἶδος εἶναι καὶ γιατί;

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ — ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως, ποὺ μελετήσαμε στὰ προηγούμενα, παίζει σπουδαῖο ρόλο τόσο στὰ Μαθηματικά, ὅσο καὶ στὶς ἐπιστῆμες, ποὺ τὰ χρησιμοποιοῦν. Γι᾽ αὐτὸ κάνουμε ἐδῶ μιὰν εὐρύτερη ἀνάπτυξη γιὰ τὴν ἔννοια τῆς συναρτήσεως.

26. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ.

Α) Ἔστω ὅτι A καὶ B εἶναι δύο σύνολα διάφορα τοῦ κενοῦ, ὄχι κατανάγκη διαφορετικὰ μεταξύ τους, καὶ ἔστω ὅτι μὲ ἕναν κάποιο τρόπο ἀντιστοιχίζουμε σὲ κάθε στοιχεῖο $x \in A$ ἕνα (καὶ μόνον ἕνα) στοιχεῖο $\psi \in B$. Ἕναν τρόπο ἀντιστοιχίσεως βλέπετε παραπλεύρως μὲ τὰ βέλη τοῦ διαγράμματος (Σχ. 26-1).

Σχ. 26–1

Σ᾽ αὐτὴ τὴν **ἀντιστοιχία**, ὅπως βλέπουμε, κάθε στοιχεῖο ἀπὸ τὸ A ἔχει ἕνα (καὶ μόνον ἕνα) ἀντίστοιχο στοιχεῖο ἀπὸ τὸ B, δηλαδὴ στὴν ἀντιστοιχία αὐτὴ χρησιμοποιοῦνται ὅλα τὰ στοιχεῖα A.

Ἀπὸ τὴν προηγούμενη ἀντιστοιχία ὁρίζεται τὸ σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν $F = \{ (\alpha, \nu), (\beta, \lambda), (\gamma, \kappa), (\delta, \kappa), (\varepsilon, \lambda) \}$.

Τὸ σύνολο F εἶναι μιὰ σχέση ἀπὸ τὸ A στὸ B καὶ παρατηροῦμε σ᾽ αὐτὴν ὅτι: 1) κάθε στοιχεῖο τοῦ A παρουσιάζεται ὡς πρῶτο μέλος κάποιου ἀπὸ τὰ διατεταγμένα ζεύγη, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν F, 2) κάθε στοιχεῖο τῆς F εἶναι διατεταγμένο ζεῦγος μὲ πρῶτο μέλος του ἀπὸ τὸ A καὶ μὲ δεύτερο μέλος του τὸ ἀντίστοιχο τοῦ πρώτου μέλους του στὸ B καὶ 3) δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς σχέσεως F μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο μέλος. Ὥστε:

Ἡ σχέση F εἶναι μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ της τὸ A καὶ μὲ πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολο τοῦ B.

Ἡ συνάρτηση αὐτὴ μπορεῖ νὰ συμβολισθεῖ ὡς ἐξῆς:

$$F = \{ (x, \psi) \mid x \in A \text{ καὶ } \psi \text{ τὸ ἀντίστοιχο τοῦ } x \text{ στὸ } B \}.$$

Κάθε συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ, ἔστω A, καὶ πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολο συνόλου B, συνηθίζεται νὰ ὀνομάζεται καὶ **μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ A στὸ B** ἢ ἁπλῶς **ἀπεικόνιση τοῦ A στὸ B.**

Κάθε μονοσήμαντη ἀπεικόνιση, ἔστω F, ἑνὸς συνόλου A σ' ἕνα σύνολο B, δηλαδὴ κάθε συνάρτηση F μὲ πεδίο ὁρισμοῦ της A καὶ πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολο τοῦ B, συνηθίζεται νὰ συμβολίζεται καὶ ὡς ἐξῆς: $F: A \to B$, ποὺ διαβάζεται: ἡ F ἀπεικονίζει τὸ σύνολο A στὸ B.

Ἀντὶ τοῦ γράμματος F μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ ὁποιοδήποτε ἄλλο· συνήθως τὰ φ, σ, g, R κ.τ.λ.

Ἔστω μιὰ μονοσήμαντη ἀπεικόνιση $f: A \to B$ καὶ ἔστω ὅτι στὸ στοιχεῖο, π.χ., $x \in A$ ἀντιστοιχεῖ τὸ $\psi \in B$· τότε τὸ x ὀνομάζεται **ἀρχέτυπο** τοῦ ψ καὶ τὸ ψ **εἰκόνα** τοῦ x στὴ μονοσήμαντη ἀπεικόνιση f καὶ συμβολίζεται μὲ f(x) (διαβάζεται: ἔφ τοῦ χί). Τὸ f(x) λέγεται καὶ **τιμὴ τῆς συναρτήσεως** στὸ x. Μποροῦμε τώρα νὰ γράψουμε πληρέστερα:

$$f: A \to B: x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B$$

ποὺ διαβάζεται ὡς ἐξῆς: ἡ συνάρτηση f ἀπεικονίζει τὸ σύνολο A στὸ B, ὥστε κάθε $x \in A$ νὰ ἀπεικονίζεται μὲ τὴν f στὸ $f(x) \in B$.

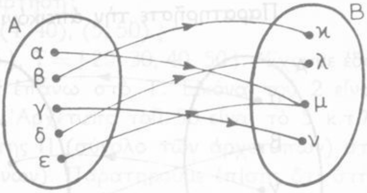
Σημείωση. Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε, ἡ ἔννοια ἀπεικόνιση τοῦ A στὸ B, συμπίπτει μὲ τὴν ἔννοια συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τοῦ A καὶ πεδίο τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολο τοῦ B, γι' αὐτὸ στὰ ἑπόμενα οἱ ὅροι **συνάρτηση** καὶ **ἀπεικόνιση** θὰ χρησιμοποιοῦνται μὲ τὴν ἴδια σημασία, χωρὶς διάκριση.

B) Ὅταν χρησιμοποιοῦμε τὸν ὅρο «συνάρτηση», ἡ μεταβλητὴ $x \in A$ λέγεται **ἀνεξάρτητη μεταβλητὴ** τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ μεταβλητὴ $\psi = f(x) \in B$ (ποὺ εἶναι ἡ εἰκόνα τῆς x) λέγεται **ἐξαρτημένη μεταβλητὴ τῆς συναρτήσεως.**

Παρατήρηση. Εἴπαμε στὰ προηγούμενα ὅτι ἡ ἀντιστοιχία, ποὺ ὁρίζεται, ὅταν σὲ κάθε στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου A ἀντιστοιχίζουμε ἕνα (καὶ μόνο ἕνα) στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου B, πραγματοποιεῖται «μὲ κάποιον τρόπο». Τρόποι ἀντιστοιχίσεως ὑπάρχουν πολλοί· ἕνας τρόπος εἶναι π.χ. μὲ πίνακα, ὅπου καταγράφονται οἱ τιμὲς τῆς μεταβλητῆς x καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς μεταβλητῆς ψ. Συνήθως δίνεται συνθήκη (τύπος ἢ πρόταση), μὲ τὴν ὁποία προσδιορίζεται τὸ δεύτερο μέλος τοῦ κάθε ζεύγους, ὅταν ὁρισθεῖ τὸ πρῶτο, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω σὲ διάφορα παραδείγματα.

27. ΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ A ΕΠΑΝΩ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ B.

Στὰ προηγούμενα (§ 26 A) εἴδαμε τὴ μονοσήμαντη ἀπεικόνιση $f: A \to B$. Σ' αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει στοιχεῖο τοῦ B (τὸ μ), χωρὶς ἀρχέτυπό του στὸ Α, δηλαδὴ σ' αὐτὴ δὲν ἐμφανίζεται κάθε στοιχεῖο τοῦ Β ὡς εἰκόνα κάποιου στοιχείου τοῦ Α. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι ἔχουμε ἀπεικόνιση τοῦ Α **μέσα** στὸ Β. Μπορεῖ ὅμως νὰ σκεφθεῖ κανεὶς καὶ μονοσήμαντες ἀπεικονίσεις ἑνὸς συνόλου Α σὲ σύνολο Β, στὶς ὁποῖες κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι εἰκόνα κάποιου στοιχείου τοῦ Α. Π.χ. στὸ Σχ. 27–1 βλέπετε μιὰ τέτοια ἀπεικόνιση σ μὲ «σύνολο ἀρχετύπων» τὸ Α καὶ «σύνολο εἰκόνων» τὸ Β τοῦ Σχ. 26–1.



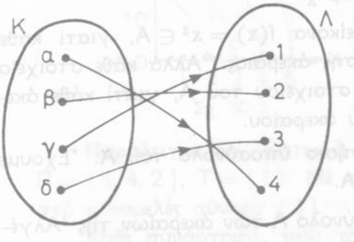
σ : Α→Β
Σχ. 27–1

Κάθε μονοσήμαντη ἀπεικόνιση, ἔστω f: A → B, ὅπου κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι εἰκόνα κάποιου στοιχείου τοῦ Α, λέγεται **μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α ἐπάνω στὸ Β.**

Π.χ. ἡ ἀπεικόνιση, ποὺ παριστάνεται στὸ Σχ. 27–1, εἶναι μιὰ μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α ἐπάνω στὸ Β.

28. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΕΠΑΝΩ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ Β.

Νὰ παρατηρήσετε τὴν ἀπεικόνιση σ στὸ Σχ. 27–1 καὶ τὴν ἀπεικόνιση φ στὸ Σχ. 28–1. Βλέπετε ὅτι καὶ ἡ σ καὶ ἡ φ εἶναι μονοσήμαντες ἀπεικονίσεις ἑνὸς συνόλου ἐπάνω σὲ ἄλλο σύνολο. Διαφέρουν ὅμως στὸ ἑξῆς: στὴ σ ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν εἰκόνων Β, ποὺ ἔχουν περισσότερα ἀρχέτυπα ἀπὸ ἕνα, π.χ. εἶναι σ(α) = μ καὶ σ(ε) = μ. Στὴ φ ὅμως αὐτὸ δὲ συμβαίνει, δηλαδὴ στὴ φ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Λ (τῶν εἰκόνων), εἶναι εἰκόνα μόνον ἑνὸς στοιχείου τοῦ συνόλου Κ (τῶν ἀρχετύπων).

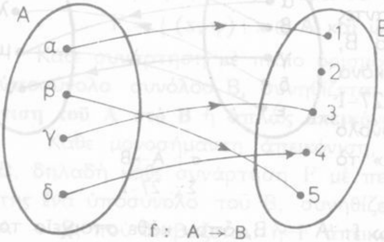


φ: Κ → Λ
Σχ. 28–1

Κάθε μονοσήμαντη ἀπεικόνιση ἑνὸς συνόλου Α ἐπάνω σὲ σύνολο Β, στὴν ὁποία συμβαίνει κάθε στοιχεῖο τοῦ Β νὰ εἶναι εἰκόνα μόνον ἑνὸς στοιχείου τοῦ Α, λέγεται ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α ἐπάνω στὸ Β, εἴτε ἀπεικόνιση ἕνα πρὸς ἕνα τοῦ Α ἐπάνω στὸ Β.

29. ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΜΕΣΑ ΣΕ ΣΥΝΟΛΟ Β.

Παρατηρῆστε τὴν ἀπεικόνιση f: A → B στὸ Σχ. 29–1. Βλέπετε ὅτι ὅπως καὶ στὴν ἀπεικόνιση φ: K → Λ (Σχ. 28–1), διαφορετικὰ μεταξύ τους ἀρχέτυπα ἔχουν διαφορετικὲς μεταξύ τους εἰκόνες, ἀλλὰ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β δὲν εἶναι εἰκόνα στοιχείου τοῦ Α. Τὸ στοιχεῖο $2 \in B$, π.χ., δὲν εἶναι εἰκόνα κανενὸς στοιχείου τοῦ Α.



f: A → B

Σχ. 29–1

Ἔχουμε λοιπὸν τώρα ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α **μέσα** στὸ Β, καὶ **ὄχι ἐπάνω** στὸ Β.

30. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ (ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ).

Παράδειγμα 1ο. Ἂς πάρουμε ὡς σύνολο Α τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σύνολο Β τὸ ἴδιο τὸ Α. Ἂς ἀντιστοιχίσουμε τώρα σὲ κάθε στοιχεῖο $x \in A$ τὸ x^2, ποὺ εἶναι ἐπίσης στοιχεῖο τοῦ Α. Ὁρίζουμε ἔτσι μιὰν ἀπεικόνιση τοῦ Α στὸ Α:

$$f\colon A \to A\colon x \xrightarrow{f} x^2$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε $x \in A$ ἔχει μία εἰκόνα $f(x) = x^2 \in A$, γιατὶ κάθε ἀκέραιος ἔχει ἕνα τετράγωνο, ποὺ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιος. Ἀλλὰ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α δὲν εἶναι εἰκόνα (μὲ τὴν f) κάποιου στοιχείου τοῦ Α, γιατὶ κάθε ἀκέραιος δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη τετράγωνο ἄλλου ἀκεραίου.

Ὥστε τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ Α. Ἔχουμε λοιπὸν ἁπλῶς ἀπεικόνιση τοῦ Α μέσα στὸ Α.

Παράδειγμα 2ο. Ἂς πάρουμε πάλι τὸ σύνολο Α τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σύνολο Β τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων, ποὺ εἶναι τέλεια τετράγωνα, δηλαδὴ $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. Τότε μὲ τὴν ἀπεικόνιση $f\colon A \to B\colon x \xrightarrow{f} x^2$, κάθε ἀκέραιος τοῦ Β εἶναι εἰκόνα δύο στοιχείων τοῦ Α (π.χ. ὁ $25 \in B$ εἶναι εἰκόνα τοῦ $5 \in A$ καὶ τοῦ $-5 \in A$). Ἔχουμε λοιπὸν τώρα ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου Α ἐπάνω στὸ Β.

Παράδειγμα 3ο. Ἂς πάρουμε ὡς σύνολο Α τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ὡς σύνολο Β τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων, ποὺ εἶναι τέλεια τετράγωνα. Στὴν περίπτωση αὐτή, μὲ τὴν ἀπεικόνιση $f\colon A \to B\colon x \xrightarrow{f} x^2$, κάθε ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπεικονίζεται στὸ τετράγωνό του, δηλαδὴ κάθε ἀκέραιος τοῦ Α ἔχει εἰκόνα τὸ τετράγωνό του στὸ Β καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β, εἶναι τετράγωνο ἑνὸς μόνον ἀκεραίου ἀπὸ τὸ Α. Ἔχουμε λοιπὸν τώρα ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Α ἐπάνω στὸ Β.

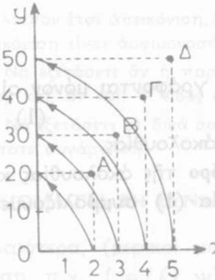
Παράδειγμα 4ο. Ἂς πάρουμε τὴ συνάρτηση:

$$f = \{(2, 20), (3, 30), (4, 40), (5, 50)\}$$

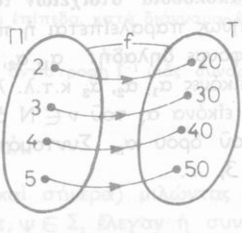
Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι: $\Pi = \{2, 3, 4, 5\}$, $T = \{20, 30, 40, 50\}$. Ἔχουμε ἐδῶ μιὰν ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ Π ἐπάνω στὸ Τ. Εἰκόνα τοῦ 2 εἶναι τὸ 20, δηλαδὴ $f(2) = 20$, $f(3) = 30$ κ.τ.λ. Ἀρχέτυπο τοῦ 50 εἶναι τὸ 5 κ.τ.λ. Μὲ τὴν f ἀπεικονίζεται τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της Π (σύνολο τῶν ἀρχετύπων) στὸ πεδίο τῶν τιμῶν της Τ (σύνολο τῶν εἰκόνων). Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι στὴν τιμὴ $x = 2$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\psi = 20$, ποὺ εἶναι 10.2, δηλ. $10.x$ καὶ γενικὰ κάθε $x \in \Pi$ ἀπεικονίζεται στὸ $10.x \in T$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψουμε:

$$f: \Pi \to T: x \xrightarrow{f} 10x, \text{ ὅπου } x \in \{2, 3, 4, 5\}.$$

Στὸ Σχ. 30–1 βλέπετε διάγραμμα καὶ γεωμετρικὴ παράσταση τῆς συναρτήσεως f. Ἡ γεωμετρική της παράσταση εἶναι τὸ σημειοσύνολο {Α, Β, Γ, Δ}. Στὸ Σχ. 30–2 βλέπετε ἕνα ἄλλο διάγραμμα τῆς f.



Σχ. 30–1



Σχ. 30–2

Παράδειγμα 5ο. Ἔστω ἡ συνάρτηση $\varphi = \{(5, 1), (4, 1), (2, 1)\}$. Ἔχουμε $\Pi = \{5, 4, 2\}$, $T = \{1\}$. Μὲ τὴ φ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ της ἀπεικονίζεται ἐπάνω στὸ μονομελὲς σύνολο {1}.

Κάθε συνάρτηση, ποὺ τὸ πεδίο τῶν τιμῶν της εἶναι μονομελὲς σύνολο, λέγεται **σταθερὴ συνάρτηση.** Ἡ $\varphi = \{(5, 1), (4, 1), (2, 1)\}$ εἶναι λοιπὸν σταθερὴ συνάρτηση.

Σημείωση: Στὶς συναρτήσεις τῶν παραπάνω παραδειγμάτων παρατηροῦμε ὅτι τὰ πεδία ὁρισμοῦ τους καὶ τὰ πεδία τῶν τιμῶν τους ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀριθμούς, γι' αὐτὸ συναρτήσεις ὅπως αὐτὲς ὀνομάζονται **ἀριθμητικὲς συναρτήσεις.**

Παράδειγμα 6ο. Ἂν ἀντιστοιχίσουμε σὲ κάθε κράτος τὴν πρωτεύουσά του, ἔχουμε μιὰν ἀπεικόνιση f τοῦ συνόλου τῶν κρατῶν στὸ σύνολο τῶν πρωτευουσῶν τους καὶ μάλιστα μιὰν ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνιση ἐπάνω. Εἶναι f (Ἑλλάδα) = Ἀθῆναι, f (Γαλλία) = Παρίσι κ.τ.λ. Ἡ Ρώμη εἶναι μὲ τὴν f ἡ εἰκόνα τῆς Ἰταλίας κ.τ.λ.

Παράδειγμα 7ο. Παρατηρῆστε τὶς παρακάτω ἀντιστοιχίες:

$$1)\quad \begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & \nu, \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1, & 4, & 9, & 16, & \ldots, & \nu^2, \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2)\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots \\
\quad\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad\ \ \downarrow \\
\quad\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{\nu}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3)\ 1,\quad 2,\quad 3,\ \ldots,\quad \nu,\ \ldots \\
\quad\ \downarrow\quad\ \downarrow\quad\ \downarrow\qquad\quad \downarrow \\
\quad 0{,}5,\ 0{,}55,\ 0{,}555,\ \ldots,\ 0{,}555\ldots5,\ \ldots
\end{array}$$

Προφανῶς, οἱ παραπάνω ἀντιστοιχίες ὁρίζουν συναρτήσεις. Σ' αὐτὲς τὶς συναρτήσεις (ἀπεικονίσεις) τὸ πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Μιὰ τέτοια συνάρτηση λέγεται **ἀκολουθία.**

Γενικὰ ἡ συνάρτηση $\nu \in N \rightarrow \alpha_\nu \in E$, ὅπου Ε κάποιο σύνολο ἀντικειμένων ὄχι κενό, δηλαδὴ ἡ ἀπεικόνιση, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἀντιστοιχία:

$$\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots \\
\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\qquad\ \ \downarrow \\
\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots
\end{array}$$

λέγεται **ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου Ε.**

Συνήθως παραλείπεται ἡ πρώτη γραμμὴ καὶ γράφονται μόνον οἱ εἰκόνες. Γράφουμε δηλαδή: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ (1)

Οἱ εἰκόνες α_1, α_2, α_3 κ.τ.λ. λέγονται **ὅροι** τῆς ἀκολουθίας.

Τὴν εἰκόνα α_ν τοῦ $\nu \in N$ ὀνομάζομε **νυοστὸ ὅρο** τῆς ἀκολουθίας καὶ τὸ ν δείκτη τοῦ ὅρου α_3. Συντομότερα τὴν ἀκολουθία (1) συμβολίζουμε μὲ α_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79) Ἔστω ἡ συνάρτηση $f: N_0 \rightarrow N_0: x \xrightarrow{f} x + 5$.
Νὰ βρεῖτε τὴν τιμὴ τῆς συναρτήσεως στὸ 2, δηλ. νὰ βρεῖτε τὸ f (2).
Ἐπίσης τὸ f(0). Τί εἶδος ἀπεικόνιση ἔχουμε ἐδῶ;

80) Ἔστω Α τὸ σύνολο τῶν πόλεων τοῦ κόσμου καὶ Β τὸ σύνολο τῶν κρατῶν τοῦ κόσμου. Ἡ σχέση g, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ συνθήκη «$x \in A$ βρίσκεται στὸ $\psi \in B$», εἶναι ἢ ὄχι ἀπεικόνιση καὶ γιατί; Τί εἶδος ἀπεικόνιση ἔχουμε ἐδῶ; Νὰ βρεῖτε τὰ g (Πάτρα), g (Λευκωσία), g (Μιλάνο).

81) Ἔστω Μ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ Ε τὸ σύνολο τῶν ἐπωνύμων τους. Ἂν ἀντιστοιχίσουμε κάθε μαθητὴ στὸ ἐπώνυμό του, ὁρίζουμε μιὰν ἀπεικόνιση τοῦ Μ στὸ Ε. Τί εἶδος ἀπεικόνιση ἔχουμε, ὅταν δὲν ὑπάρχουν συνωνυμίες;

82) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ συνθήκη «ὁ x δὲν ἐκτιμᾶ τὸν ψ» τὸ σύνολο Α, τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως, ὁρίζει συνάρτηση ἢ ἁπλῶς σχέση.

83) Νὰ καταρτίσετε πίνακα μερικῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως:

$$\varphi: Q \rightarrow Q: x \xrightarrow{\varphi} 2x + 1 = \psi$$

Νὰ βρεῖτε, π.χ., τὶς τιμές, ποὺ λείπουν, στὸν ἀποκάτω πίνακα:

τιμὲς τῆς x	−3,	−2,	−1,	0,	$\frac{1}{2}$,	1,	2,	3,	4,	5,	6
τιμὲς τῆς ψ	−5,		−1,		2,		5,				

Νὰ κάμετε ἔπειτα γεωμετρικὴ παράσταση τῆς φ γιὰ ὅλα τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη. Θὰ παρατηρήσετε ὅτι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ κάθε διατεταγμένου ζεύγους βρίσκονται ὅλα πάνω σὲ μιὰ εὐθεία. Νὰ χαράξετε αὐτὴ τὴν εὐθεία.

Γενικά, ὅπως θὰ μάθουμε σὲ ἀνώτερη τάξη, ἡ συνάρτηση σ: $x \rightarrow \alpha x + \beta = \psi$ ($\alpha, \beta, x \in R$) ἔχει ὡς γεωμετρικὴ παράσταση μιὰ εὐθεία.

84) Ἂν N εἶναι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ N_α τὸ σύνολο τῶν ἄρτιων φυσικῶν ἀριθμῶν, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R = \{ (x, \psi) \,/\, x \in N$ εἶναι τὸ μισὸ τοῦ $\psi \in N_\alpha \}$ εἶναι ἀπεικόνιση ἢ ὄχι. Ἂν ναί, τί ἀπεικόνιση εἶναι; Ἂν ἀντὶ τοῦ N_α πάρουμε πάλι τὸ N, τί ἀπεικόνιση ἔχουμε;

85) Ἂν A εἶναι τὸ σύνολο τῶν νυμφευμένων χριστιανῶν ἀνδρῶν στὸν κόσμο καὶ Γ τὸ σύνολο τῶν συζύγων τους, ἡ σχέση:
$R = \{ (x, \psi) \,/\, x \in A$ ἔχει ὡς σύζυγο $\psi \in \Gamma \}$ εἶναι ἀπεικόνιση; Γιατί.
Ἂν παραλείψουμε τὴ λέξη «χριστιανῶν», τότε ἡ R ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι ἀπεικόνιση; Γιατί;

Τί εἶδος ἀπεικόνιση ἔχουμε, ὅταν A εἶναι τὸ σύνολο τῶν νυμφευμένων χριστιανῶν ἀνδρῶν στὸν κόσμο καὶ Γ τὸ σύνολο τῶν παντρεμένων γυναικῶν;

86) Μὲ τὴ γνωστή μας, ἀπὸ τὴν Α΄ τάξη, κατασκευὴ σὲ κάθε σημεῖο M ἑνὸς ἐπιπέδου p ἀντιστοιχίζουμε, τὸ συμμετρικό του πρὸς κέντρο O, σημεῖο M΄ τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου. Ὁρίζουμε λοιπὸν ἔτσι ἀπεικόνιση, ἔστω f, τοῦ p στὸ p. Δηλ. $f: p \rightarrow p: M \xrightarrow{f} M'$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ ἀπεικόνιση εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη.

87) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ παράλληλη μεταφορὰ στὸ ἐπίπεδο, κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, ὁρίζει ἀπεικόνιση, καί, ἂν ναί, τί εἶδος ἀπεικόνιση εἶναι.

88) Νὰ ἐξετάσετε μὲ δικά σας παραδείγματα ἂν ἡ ἀντίστροφη f^{-1} μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι πάντοτε συνάρτηση.

31. ΣΗΜΕΙΩΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ.

Παλαιότερα, (μερικοὶ μαθηματικοὶ ἀκόμα καὶ σήμερα) μιλώντας γιὰ τὴ συνάρτηση π.χ. $f = \{ (\chi, \psi) \mid \psi = 10x \}$, μὲ $x, \psi \in \Sigma$, ἔλεγαν ἡ συνάρτηση $\psi = 10x$. Αὐτὸ ἴσως εἶναι ἕνας σύντομος τρόπος ἐκφράσεως. Πάντως ἐννοοῦμε καὶ τότε τὴ συνάρτηση $f = \{ (x, \psi) \mid \psi = 10x \}$ μὲ $x, \psi \in \Sigma$. Μερικοὶ ἐκφράζονται συντομότερα. Λένε π.χ. «ἡ συνάρτηση 10x» μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ Σ κι ἐννοοῦν τὴ συνάρτηση, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ συνθήκη $\psi = 10x$, μὲ $x \in \Sigma$.

Αὐτὸ συνηθίζεται πολὺ συχνὰ στὴ Φυσική, ὅπου διαβάζουμε π.χ. ἐκφράσεις ὅπως «ἡ ἀπόσταση, ποὺ διατρέχει τὸ κινητό, εἶναι συνάρτηση τοῦ χρόνου». Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει συνάρτηση φ τέτοια, ὥστε ὁ τύπος $\psi = \varphi(x)$, δίνει τὴν ἀπόσταση ψ, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σὲ χρόνο x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

89) Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in Q$ καὶ εἶναι $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, τί συμπεραίνετε γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$;

90) Πότε εἶναι $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$;

91) Νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων τους τὶς σχέσεις:

α) $R = \left\{ (x, \psi)/\psi = \dfrac{x}{2} \right\}$ μὲ $\Pi = \{ 10, 8, 6, 4, 2 \}$

β) $R_1 = \{ x, \psi)/\psi = x + 2 \}$ στὸ σύνολο $U = \{ 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 \}$

γ) $R_2 = \{ x, \psi)/x \geqslant \psi \}$ στὸ $U = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

I) Ποιὲς ἀπὸ τὶς σχέσεις αὐτὲς εἶναι συναρτήσεις;

II) Μήπως ἡ R_2 εἶναι σχέση διατάξεως; μερικῆς; ὁλικῆς;

III) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα τῆς R_1.

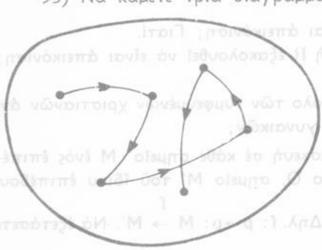
92) Ἔστω $A = \{ α, β, γ \}$ ἕνα σύνολο μαθητῶν τῆς Α' τάξεως τοῦ Δημοτικοῦ Σχολείου καὶ $B = \{ δ, ε \}$ ἕνα σύνολο μαθητῶν τῆς Γ' τάξεως τοῦ Γυμνασίου. Ζητεῖται νὰ ὁρισθοῦν μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων τους οἱ σχέσεις:

$R_1 = \{ (x, ψ)/x \in A$ εἶναι μεγαλύτερος στὴν ἡλικία ἀπὸ $ψ \in B \}$, καὶ

$R_2 = \{ (x, ψ)/x \in A$ εἶναι μικρότερος στὴν ἡλικία ἀπὸ $ψ \in B \}$.

Τί παρατηρεῖτε;

93) Νὰ κάμετε τρία διαγράμματα: 1) μιᾶς ἀπεικονίσεως ἑνὸς συνόλου Α ἐπάνω σὲ ἄλλο σύνολο Β. 2) Μιᾶς ἀμφιμονοσήμαντης ἀπεικονίσεως ἑνὸς συνόλου Γ ἐπάνω σὲ ἄλλο Δ, καὶ 3) μιᾶς ἀμφιμονοσήμαντης ἀπεικονίσεως συνόλου Ε μέσα σὲ σύνολο Θ.



Σχ. 31–1

94) Ἕνας μαθητὴς ἄφησε ἀσυμπλήρωτο τὸ διάγραμμα τῆς σχέσεως «$\leqslant$», ὅπως τὸ βλέπετε στὸ παραπλεύρως σχῆμα. Μπορεῖτε, χωρὶς νὰ γνωρίζετε τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α, νὰ ἀποτελειώσετε τὸ διάγραμμα;

95) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέση $R = \{ (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 3), (4, 4), (1, 4), (2, 4), (1, 3) \}$ εἶναι σχέση διατάξεως καί, ἂν βρεῖτε ὅτι εἶναι, νὰ ἐξετάσετε τί διάταξη εἶναι, ὁλικὴ ἢ μερική.

Νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησή σας.

96) Ἂς παραστήσουμε μὲ F τὴν ἀπεικόνιση:

$$Z \xrightarrow{F} Z : x \to x - 7$$

Ζητεῖται: α) Νὰ βρεῖτε τὰ $F(2)$, $F(-1)$, $F(10)$.

β) Τὸ ἀρχέτυπο τῆς εἰκόνας $F(x) = 0$

γ) Ἂν $F(α) = -9$ ποιὸς εἶναι ὁ α.

$(Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΔΕΚΑΔΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

32. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ ΤΟ ΜΗΔΕΝ.

Α) Ἔστω ὁ ρητὸς ἀριθμὸς μὲ ἀντιπρόσωπό του τὸ ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{3}{4}$. Γνωρίζουμε ὅτι ὁ ρητὸς αὐτὸς τρέπεται σὲ δεκαδικὸ ἀριθμὸ καὶ εἶναι $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Ἐπίσης οἱ ρητοὶ $\frac{3}{2}$, $\frac{17}{8}$(*), $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{50}$ τρέπονται σὲ δεκαδικοὺς καὶ εἶναι:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5,\ \frac{17}{8} = 2{,}125,\ \frac{7}{5} = 1{,}4,\ \frac{3}{50} = 0{,}06$$

Γενικά, ὑπάρχουν ρητοὶ ἀριθμοί, ποὺ τρέπονται σὲ τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς, εἴτε, ὅπως λέγεται, ποὺ παριστάνονται μὲ τερματιζόμενους δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἕνας ρητός, ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$(**), παριστάνεται μὲ ἕνα τερματιζόμενο δεκαδικὸ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχει πολλαπλάσιο τοῦ ν, ποὺ νὰ εἶναι κάποια δύναμη τοῦ 10. Ὁ ρητὸς π.χ. $\frac{5}{11}$ δὲν παριστάνεται μὲ τερματιζόμενο δεκαδικὸ ἀριθμό, γιατὶ δὲν ὑπάρχει πολλαπλάσιο τοῦ 11, ποὺ νὰ εἶναι κάποια δύναμη τοῦ 10.

Β) Ἔστω ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$. Γνωρίζουμε ὅτι εἶναι $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}750 = 0{,}7500 = 0{,}75000\ldots$

Θεωροῦμε τώρα τὴν ἀκολουθία (α_1): 0,75, 0,750, 0,7500, 0,75000, . . .

(*) Σ' αὐτὸ τὸ κεφάλαιο, ὅσες φορὲς ἀναφέρεται κάποιος ρητὸς ἀριθμός, θὰ παίρνουμε ἀντὶ γι' αὐτὸν τὸ ἀνάγωγο κλάσμα, ποὺ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπός του.

(**) Ἡ φράση ὁ ρητὸς $\frac{\mu}{\nu}$ σημαίνει, ὅπου τὴ συναντᾶμε, ὁ **ρητὸς** μὲ ἀντιπρόσωπό του τὸ ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἡ (α_1) ἔχει τὸ ἑξῆς γνώρισμα: **κάθε ὅρος της εἶναι ἴσος μὲ τὸν πρῶτο της ὅρο (σταθερὴ ἀκολουθία).** Μ' ἄλλες λέξεις **ἡ διαφορὰ κάθε ὅρου της ἀπὸ τὸν $\frac{3}{4}$ εἶναι 0.**

Συμφωνοῦμε τὴν ἀκολουθία (α_1) νὰ τὴν παριστάνουμε σύντομα ὡς ἑξῆς: 0,75000... εἴτε, συντομότερα: $0{,}75\dot{0}$, **συμφωνοῦμε** ἀκόμα ἡ παράσταση $0{,}75\dot{0}$ νὰ θεωρεῖται σὰν μιὰ ἄλλη παράσταση τοῦ $\frac{3}{4}$ καὶ νὰ ὀνομάζεται **δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίοδο τὸ ἐπαναλαμβανόμενο ψηφίο 0.**

Γράφουμε: $\frac{3}{4} = 0{,}75\dot{0}$.

Ὥστε ὁ ρητὸς $\frac{3}{4}$ ἔχει τὶς ἑξῆς «δεκαδικὲς παραστάσεις»:

1) 0,75 («κοινὸς» δεκαδικὸς ἀριθμός).
2) $0{,}75\dot{0}$ (περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίοδο τὸ 0).

Ὅπως ἐργασθήκαμε μὲ τὸν $\frac{3}{4}$, μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε καὶ μὲ κάθε ρητό, ποὺ παριστάνεται ὡς «κοινὸς» δεκαδικός. Π.χ.

α) Ἀπὸ τὸν $\frac{3}{2}$ βρίσκουμε τὴν παράσταση: 1,50000..., πιὸ σύντομα $1{,}5\dot{0}$.

β) Ἀπὸ τὸν $\frac{17}{8}$ τὴν 2,125000..., πιὸ σύντομα $2{,}125\dot{0}$

γ) Ἀπὸ τὸν $\frac{9}{20}$ 20 τὴν 0,45000..., πιὸ σύντομα $0{,}45\dot{0}$

Οἱ παραστάσεις: $1{,}5\dot{0}$, $2{,}125\dot{0}$ κ.τ.λ. ὀνομάζονται (ἐπίσης) **δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ μὲ περίοδο** τὸ 0.

Ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖο ἕνας ρητός, ποὺ τρέπεται σὲ κοινὸ δεκαδικό, παριστάνεται σὰν περιοδικὸς δεκαδικός, ἔγινε φανερὸς ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα.

Παρατήρηση. Κάθε δεκαδικὸς περιοδικὸς μὲ περίοδο τὸ 0 εἶναι παράσταση ἀκριβῶς ἑνὸς ρητοῦ, π.χ. ὁ 4,6000... εἶναι παράσταση τοῦ ρητοῦ, ποὺ παριστάνεται μὲ τὸν κοινὸ δεκαδικὸ 4,6 δηλαδὴ τοῦ $\frac{46}{10} = \frac{13}{9}$. **Ἄλλος ρητὸς μὲ παράσταση τὸν 4,60000... δὲν ὑπάρχει.**

Ὥστε κάθε ρητός, ποὺ τρέπεται σὲ τερματιζόμενο δεκαδικό, παριστάνεται ἀπὸ ἕνα δεκαδικὸ περιοδικὸ μὲ περίοδο 0 καὶ ἀντίστροφα κάθε περιοδικὸς μὲ περίοδο τὸ 0 εἶναι παράσταση ἑνὸς μόνο ρητοῦ.

33. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΙ ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΟ ΔΙΑΦΟΡΗ ΤΟΥ 0:

Εἴδαμε ὅτι ὑπάρχουν ρητοί, ποὺ δὲν παριστάνονται σὰν κοινοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί, ὅπως π.χ. ὁ $\frac{5}{11}$. **Ἐπομένως κάθε τέτοιος ρητὸς δὲν παριστάνεται οὔτε** σὰν περιοδικὸς δεκαδικὸς μὲ περίοδο τὸ 0.

Ἂς πάρουμε τώρα τὸ ρητὸ 11 καὶ ἂς ἐκτελέσουμε τὴ «διαίρεση» 5 διὰ 11. Ἔχουμε:

$$
\begin{array}{l|l}
50 & 11 \\ \cline{2-2}
\;\;60 & \\
\;\;\;50 & 0{,}454545\ldots \\
\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;5 &
\end{array}
$$

Μ' αὐτὴ τὴν «τεχνικὴ» σχηματίζεται στὴ θέση τοῦ πηλίκου ἡ ἀριθμητικὴ παράσταση: 0,45454545..., ποὺ ἔχει ἀπειράριθμα ψηφία. Ἂς σχηματίσουμε τώρα τὴν ἑξῆς ἀκολουθία:

$$(\delta_1):\ 0{,}45,\ 0{,}4545,\ 0{,}454545,\ 0{,}45454545\ldots,$$

Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι:

$$\frac{5}{11} - 0{,}45 = \frac{5}{1100} = 0{,}01 \cdot \frac{5}{11}$$

$$\frac{5}{11} - 0{,}4545 = \frac{5}{110.000} = 0{,}0001 \cdot \frac{5}{11}$$

$$\frac{5}{11} - 0{,}454545 = \frac{5}{11000000} = 0{,}000001 \cdot \frac{5}{11}$$

. . . .

Δηλαδὴ ὁ α' ὅρος τῆς (δ_1) διαφέρει ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ κατὰ τὸ ἕνα ἑκατοστὸ τοῦ $\frac{5}{11}$, ὁ β' διαφέρει ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ κατὰ τὸ ἕνα δεκάκις χιλιοστὸ τοῦ $\frac{5}{11}$, ὁ γ' κατὰ τὸ ἕνα ἑκατομμυριοστὸ τοῦ $\frac{5}{11}$ κ.τ.λ., ὁ πεντοκοσιοστὸς διαφέρει ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ κατὰ $0{,}00\ldots01 \cdot \frac{5}{11}$ ὅπου ὁ $0{,}00\ldots01$ ἔχει 1000(!) δεκαδικὰ ψηφία κ.τ.λ.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε ὅτι κάθε **ὅρος τῆς (δ) εἶναι μιὰ «προσέγγιση» τοῦ $\frac{5}{11}$ καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ τοῦ ὅρου ἀπὸ τὸν $\frac{5}{11}$ εἶναι τόσο μικρότερη (δηλαδὴ ἡ προσέγγιση εἶναι τόσο «καλύτερη»), ὅσο ὁ ὅρος αὐτὸς εἶναι πιὸ πολὺ ἀπομακρυσμένος ἀπὸ τὸν πρῶτο ὅρο.**

Ὥστε: **Ἂν ἔχουμε τὴν ἀκολουθία (δ) εἶναι σὰν νὰ ἔχουμε τὸν ἴδιο τὸν $\frac{5}{11}$ καὶ γι' αὐτὸ τὸ λόγο θεωροῦμε τὴν (δ) σὰν μιὰ ἄλλη παράσταση τοῦ ρητοῦ $\frac{5}{11}$.**

Συμφωνοῦμε τὴν ἀκολουθία (δ_1) νὰ τὴν παριστάνουμε γιὰ συντομία ὡς ἑξῆς: 0,454545..., ἢ συντομότερα: $0{,}\dot{4}\dot{5}$.

Συμφωνοῦμε ἀκόμα ἡ παράσταση 0,45 νὰ θεωρεῖται σὰν μιὰ ἄλλη παράσταση τοῦ ρητοῦ $\frac{5}{11}$ καὶ νὰ ὀνομάζεται: δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ πε-

ρίοδο τὸ ἐπαναλαμβανόμενο «τμῆμα ψηφίων» 45. Γράφουμε: $\frac{5}{11} = 0,\dot{4}\dot{5}$.

Ἂν ἐργασθοῦμε μὲ ὅμοιον τρόπο γιὰ τὸ ρητὸ $\frac{2}{3}$, θὰ φθάσουμε στὴν ἀκολουθία (δ_2): 0,6 0,66 0,666...

Θὰ γράψουμε λοιπὸν κι ἐδῶ $\frac{2}{3} = 0,\dot{6}$.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα ὁδηγούμαστε στὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

Ἂν $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ἕνας ρητός, ποὺ δὲν παριστάνεται σὰν κοινὸς δεκαδικός, τότε ἡ «διαίρεση» μ διὰ ν δὲν τερματίζεται καὶ τὰ ψηφία, ποὺ ἐμφανίζονται στὴ θέση τοῦ «πηλίκου», ἀπὸ κάποια θέση καὶ πέρα ἐπαναλαμβάνονται μὲ τὴν ἴδια τάξη. Ὁρίζεται ἔτσι δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἕνα «τμῆμα ἀπὸ ψηφία», ποὺ ἐπαναλαμβάνεται, ὅσες φορὲς θέλουμε, καὶ ποτὲ δὲ συμβαίνει κάθε ψηφίο αὐτοῦ τοῦ «τμήματος» νὰ εἶναι τὸ 0 ἢ τὸ 9. Ὁ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἡ παράσταση, ἔστω δ, ποὺ ἐμφανίζεται μὲ τὴν «τεχνική» τῆς διαιρέσεως μ διὰ ν στὴ θέση τοῦ «πηλίκου», ὀνομάζεται δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς μὲ περίοδο τὸ ἐπαναλαμβανόμενο «τμῆμα ψηφίων» καὶ εἶναι μιὰ ἄλλη παράσταση τοῦ ρητοῦ $\frac{\mu}{\nu}$. Ὁ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ὀνομάζεται ἀκέραιο μέρος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ δ.

Παραδείγματα : Νὰ παρασταθοῦν οἱ ρητοὶ $\frac{6}{7}$, $\frac{328}{2475}$ σὰν περιοδικοὶ δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

1ο. Ὁ $\frac{6}{7}$ δὲν παριστάνεται σὰν κοινὸς δεκαδικός. Πραγματικὰ ἔχουμε:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & \\ 50 & 0,8571428 \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ 4 & \\ \vdots & \end{array}$$

Ὥστε ὁ $\frac{6}{7}$ παριστάνεται ἀπὸ ἕναν περιοδικὸ δεκαδικὸ καὶ εἶναι $\frac{6}{7} =$ $= 0,\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}$.

Ἀκέραιο μέρος : 0 $\left(= \text{ἀριθμὸς ἀκεραίων μονάδων τοῦ } \frac{6}{7} \right)$, **περίοδος :** 857142.

2ο. Ὁ $\frac{328}{2475}$ δὲν παριστάνεται σὰν κοινὸς δεκαδικός. Πραγματικὰ ἔχουμε:

$$\begin{array}{l|l} 3280 & 2475 \\ \hline \;\;8050 & 0,132525\ldots \\ \;\;\;\;6250 & \\ \;\;\;\;\;\;13000 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;6250 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;1300 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

Ὥστε ὁ $\frac{328}{2475}$ παριστάνεται ἀπὸ ἕναν δεκαδικὸ περιοδικὸ καὶ εἶναι: $\frac{328}{2475} =$ $= 0,13\dot{2}\dot{5}$. Ἀκέραιο μέρος 0, περίοδος 25.

Παρατήρηση. Εἴδαμε ὅτι:

$$\frac{5}{11} = 0,\dot{4}\dot{5},\ \frac{2}{3} = 0,\dot{6},\ \frac{6}{7} = 0,\dot{8}5714\dot{2},\ \frac{2475}{328} = 0,13\dot{2}\dot{5}.$$

Στὰ τρία πρῶτα παραδείγματα **ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολή,** στὸ τέταρτο ὅμως ἐμφανίζεται τὸ τμῆμα 13 καὶ ἀμέσως ἔπειτα ἀρχίζει ἡ περίοδος. Ὥστε: **ἡ περίοδος δὲν ἐμφανίζεται πάντοτε ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολή.**

34. ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ.

Α) Ἔστω α ἕνας (ἀπόλυτος) ἀκέραιος καὶ μιὰ ἀκολουθία ψηφίων: (ψ): $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu, \ldots$

Σχηματίζουμε τὴν ἀκολουθία κοινῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν:

(α): $\alpha,\psi_1 \quad \alpha,\psi_1\psi_2 \quad \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3 \quad \ldots \quad \alpha,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu \quad \ldots$

καὶ συμφωνοῦμε νὰ τὴν παριστάνουμε σύντομα ὡς ἑξῆς:

(β): $\alpha,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$

Ὁρισμὸς 1. Κάθε παράσταση, ὅπως ἡ (β), γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει ἡ ἰδιότητα ὅτι: ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴ εἴτε ἔπειτα ἀπὸ κάποιο ψηφίο καὶ πέρα, μετὰ ἀπ' αὐτή, ἐμφανίζεται ἕνα «τμῆμα ψηφίων», ποὺ ἐπαναλαμβάνεται διαρκῶς, χωρὶς νὰ ἐμφανίζονται ἄλλα ψηφία ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ψηφία αὐτοῦ τοῦ τμήματος, ὀνομάζεται: δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός. Τὸ ἐπαναλαμβανόμενο τμῆμα ψηφίων ὀνομάζεται: περίοδος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ.

Ὁ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς ἀκέραιος ὀνομάζεται: **ἀκέραιο μέρος τοῦ δεκαδικοῦ περιοδικοῦ ἀριθμοῦ.**

Ὁρισμὸς 2. Ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται: **ἁπλός,** ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, **ἡ περίοδός του ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολή, καὶ μεικτός,** ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, **ἡ περίοδός του δὲν ἀρχίζει ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολή.** Τὸ τμῆμα ψηφίων μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴ καὶ πρὶν ἀπὸ τὸ πρῶτο τμῆμα τῆς περιόδου ὀνομάζεται: **μὴ περιοδικὸ μέρος τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.**

Παραδείγματα:

1ο) $2,777\ldots7\ldots$, πιὸ σύντομα: $2,\dot{7}$, εἶναι ἁπλὸς δεκαδικὸς περιοδικός.

2ο) $10,3838\ldots38\ldots$, πιὸ σύντομα: $10,\dot{3}\dot{8}$ εἶναι ἁπλὸς δεκαδικὸς περιοδικός.

3ο) $7,1344\ldots4,\ldots$, πιὸ σύντομα: $7,13\dot{4}$ εἶναι μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικός.

4ο) $0,750\ldots0\ldots$, πιὸ σύντομα: $0,75\dot{0}$ εἶναι μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικός.

Ἀπὸ ὅσα εἴδαμε στὰ προηγούμενα, προκύπτουν τὰ ἑξῆς:-

1) Κάθε δεκαδικὸς περιοδικὸς εἶναι παράσταση ἑνὸς μόνο ρητοῦ.

2) Κάθε ρητὸς ρ παριστάνεται μὲ ἕναν τουλάχιστο τρόπο (*) σὰν δεκαδικὸς περιοδικός.

Β) Παρατηροῦμε ἐπιπλέον τὰ ἑξῆς:

1) Ἔστω ἕνας ἁπλὸς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ μὲ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὸ 0. Τότε ὁρίζεται ρητός, ἔστω ρ, ἀπὸ τὸν ὁποῖο, μὲ τὴ γνωστὴ μας τεχνική, βρίσκεται ὁ δ, δηλαδὴ αὐτὸς ὁ δ εἶναι τότε μιὰ παράσταση τοῦ ρ.

Πραγματικά, ἔστω $\delta = 1,\dot{4}\dot{5}$. Παίρνουμε τὸ ρητό: $\rho = 1 + \frac{45}{99} = \frac{16}{11}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι, μὲ τὴ γνωστὴ μέθοδο, βρίσκεται ὅτι ὁ $\frac{5}{11}$ ἔχει σὰν μιὰν ἄλλη παράστασή του, τὸν 1,45. Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἄλλα ὅμοιά του συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανόνας:

Κανόνας 1. Κάθε ἁπλὸς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ, μὲ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὸ 0, μπορεῖ νὰ προκύψει σὰν μιὰ παράσταση τοῦ ρητοῦ, ποὺ εἶναι τὸ ἄθροισμα: ἀκέραιο μέρος τοῦ δ σὺν τὸ κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὴν περίοδο τοῦ δ καὶ παρονομαστὴ τὸν ἀκέραιο, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν περίοδο, ἂν κάθε ψηφίο της μετατραπεῖ σὲ 9.

2) Ἔστω τώρα ἕνας μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ μὲ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὸ 0. Τότε ὁρίζεται ρητός, ἔστω ρ ἀπὸ τὸν ὁποῖο, μὲ τὴ γνωστή μας τεχνική, βρίσκεται ὁ δ, δηλαδὴ αὐτὸς ὁ δ εἶναι τότε μιὰ ἄλλη παράσταση τοῦ ρ.

Πραγματικά, ἔστω $\delta = 2,3\dot{2}\dot{7}$. Μεταθέτουμε τὴν ὑποδιαστολὴ μπροστὰ ἀπὸ τὸ πρῶτο ψηφίο τῆς περιόδου, δηλαδὴ ἐδῶ μιὰ θέση δεξιά, καὶ ἔχουμε τὸν ἁπλὸ περιοδικὸ $23,\dot{2}\dot{7}$ ποὺ σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα 1 εἶναι μιὰ παράσταση τοῦ ρητοῦ: $23 + \frac{27}{99} = 23 + \frac{3}{11} = \frac{256}{11}$ κι αὐτὸν τὸν διαιροῦμε διὰ τοῦ $10^1 = 10$. Ὁ ρητὸς $\rho = \frac{256}{110} = \frac{128}{55}$ παρατηροῦμε ὅτι, μὲ τὴ γνωστή μας τεχνική, μᾶς δίνει τὸν $\delta = 2,3\dot{2}\dot{7}$.

(*) Ἂν θεωρήσουμε καὶ περιοδικοὺς δεκαδικοὺς μὲ περίοδο τὸν 9, τότε:

$$\frac{3}{4} = 0,750, \quad \text{ἀλλὰ καὶ} \quad \frac{3}{4} = 0,74\dot{9}.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἄλλα ὅμοιά του βγαίνει ὁ ἑπόμενος κανόνας:

Κανόνας 2. Κάθε μεικτὸς δεκαδικὸς περιοδικὸς δ, μὲ περίοδο διαφορετικὴ ἀπὸ τὸ 0, προκύπτει σὰν μιὰ παράσταση τοῦ ρητοῦ, ποὺ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: μεταθέτουμε τὴν ὑποδιαστολὴ τοῦ δ τόσες θέσεις, ὥστε νὰ βρεθεῖ ἀκριβῶς μπροστὰ ἀπὸ τὸ πρῶτο ψηφίο τῆς πρώτης περιόδου· προκύπτει τότε ἕνας ἁπλὸς δεκαδικὸς περιοδικός, ἔστω ὁ δ΄. Μὲ τὸν κανόνα 1 ὁρίζουμε ἀπὸ τὸν δ΄ ἕνα ρητό, ἔστω ρ΄. Στὸ τέλος διαιροῦμε τὸν ρ΄ μὲ τὸ 10 ἢ 100 ἢ 1000 κ.τ.λ. ἂν τὴν ὑποδιαστολὴ τοῦ δ τὴ μεταθέσαμε μία, δύο, τρεῖς θέσεις κ.τ.λ.

3) Ὥστε: γιὰ κάθε (ἁπλὸ ἢ μεικτὸ) δεκαδικὸ περιοδικό, ἔστω δ, ὑπάρχει ρητός, τοῦ ὁποίου ὁ δ εἶναι μιὰ ἄλλη παράσταση.

4) Γενικά, μποροῦμε νὰ δικαιολογήσουμε ὅτι: **γιὰ κάθε δεκαδικὸ περιοδικὸ δ ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνο ρητὸς ρ, ποὺ ὁ δ εἶναι μιὰ ἄλλη παράστασή του.**

Πραγματικά (*), ἔστω δ ἕνας δεκαδικὸς περιοδικός. Βρίσκουμε πρῶτα τὸν ρητό, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸν δ μὲ τὸν κανόνα 1 καὶ μὲ τὸν κανόνα 2 καὶ ἔστω ὅτι αὐτὸς εἶναι ὁ ρ. Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι: ὁ δ εἶναι σύντομη παράσταση μιᾶς ἀκολουθίας, ἔστω τῆς (δ): $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\nu, \ldots$ καὶ ὅτι μὲ τοὺς ὅρους τῆς (δ) μποροῦμε νὰ προσεγγίσουμε, ὅσο θέλουμε, τὸν ρ. Δὲν εἶναι λοιπὸν δυνατὸν νὰ ὑπάρχει καὶ ἄλλος ρητὸς $\rho' \neq \rho$, τὸν ὁποῖο νὰ μποροῦμε νὰ προσεγγίσουμε ὅσο θέλουμε, μὲ τοὺς ὅρους τῆς ἴδιας ἀκολουθίας (δ).

5) Γεννᾶται τώρα τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Ἔστω ἕνας ρητὸς ρ· ἀπ᾿ αὐτὸν ὁρίζεται μὲ τὴ γνωστὴ τεχνική, κάποιος περιοδικὸς δεκαδικὸς δ σὰν μιὰ ἄλλη παράσταση. Αὐτὸς ὁ δ εἶναι ὁ μόνος;

Ἡ ἀπάντηση εἶναι: ναί, ἀλλὰ μιὰ ἐξήγηση εἶναι ἀνώτερη ἀπὸ τὶς δυνατότητες αὐτῆς τῆς τάξεως.

6) Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγεται ὅτι: **μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν καὶ τοῦ συνόλου τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν ὁρίζεται μιὰ ἀπεικόνιση ἕνα πρὸς ἕνα.**

Ἄσκηση 1η. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς $4,\dot{0}\dot{1}\dot{8}$. Ποιοῦ ρητοῦ εἶναι αὐτὸς ἡ δεκαδικὴ παράσταση;

Λύση: Σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα **1** ὁ ζητούμενος ρητὸς εἶναι ὁ:

$$\rho = 4 + \frac{18}{999} = 4 + \frac{2}{111} = \frac{444+2}{111} = \frac{446}{111}$$

Ἄσκηση 2η. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς $\delta = 1,62\dot{1}\dot{1}\dot{7}$. Ποιοῦ ρητοῦ εἶναι αὐτὸς ἡ δεκαδικὴ παράσταση;

Λύση: Ἐφαρμόζουμε τὸν κανόνα 2, δηλαδὴ μεταθέτουμε τὴν ὑποδιαστολὴ δύο θέσεις δεξιά, ὁπότε ἔχουμε τὸ δεκαδικὸ περιοδικό: $162,\dot{1}\dot{1}\dot{7}$ καὶ βρίσκουμε τὸν ρητό, ἔστω ρ΄, ποὺ ἡ δεκαδικὴ παράστασή του εἶναι ὁ $162,\dot{1}\dot{1}\dot{7}$, δηλαδή:

$$\rho' = 162 + \frac{117}{999} = 162 + \frac{13}{111} = \frac{17982+13}{111} = \frac{17995}{111}$$

(*) Ἡ δικαιολόγηση μπορεῖ νὰ διδαχθεῖ ἢ παραλειφθεῖ κατὰ τὴν κρίση αὐτοῦ ποὺ διδάσκει.

Στὸ τέλος διαιροῦμε τὸν ρ′ διὰ τοῦ 100· ὁ ζητούμενος ρητὸς εἶναι ὁ $\rho=\left(\frac{17995}{11100}\right)=\frac{3579}{2220}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

97) Νὰ δώσετε τρεῖς δεκαδικὲς παραστάσεις γιὰ καθένα ἀπὸ τοὺς ρητούς:

α) $\frac{2}{5}$ β) $\frac{3}{8}$ γ) $\frac{7}{40}$ δ) $-\frac{27}{20}$

98) Νὰ βρεῖτε ποιοῦ ρητοῦ εἶναι παράσταση καθένας ἀπὸ τοὺς περιοδικούς:

α) $0,\dot{9}$ β) $-1,\dot{2}$ γ) $0,9\dot{6}$

δ) $17,\dot{1}\dot{3}$ ε) $1,10\dot{3}$ ζ) $2,3\dot{9}$

99) Νὰ συγκρίνετε καὶ νὰ βρεῖτε ἂν εἶναι ἴσοι ἢ ποιὸς εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τούς:

α) $0,5\dot{0}$ καὶ $0,4\dot{9}$ β) $0,978\dot{6}0$ καὶ $0,9784\dot{9}$

γ) $0,\dot{9}$ καὶ 1 δ) $0,\dot{1}\dot{1}\dot{0}$ καὶ $0,\dot{1}\dot{1}\dot{1}$

100) Νὰ βρεῖτε τὰ ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:

α) $(0,\dot{8})+(1,\dot{3})$ β) $(0,\dot{3}\dot{8})-(0,\dot{2}\dot{7})$

γ) $(0,\dot{4}\dot{7})\cdot(0,\dot{2})$ δ) $(0,\dot{6}\dot{8}\dot{3}):(0,\dot{4}\dot{9})$

ΑΡΡΗΤΟΙ (ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ) ΑΡΙΘΜΟΙ. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

35. ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΚΑΙ ΡΗΤΟΙ ΜΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ.

Α) Τετράγωνοι ρητοὶ ἀριθμοί. Ἔστω ὁ ρητὸς $\frac{4}{9}$. Παρατηροῦμε ὅτι $\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$, δηλαδὴ ὑπάρχει ὁ θετικὸς ρητὸς $\frac{2}{3}$, ὥστε ὁ $\frac{4}{9}$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνο αὐτοῦ τοῦ ρητοῦ. Μάλιστα εἶναι φανερὸ ὅτι, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν $\frac{2}{3}$, δὲν ὑπάρχει ἄλλος θετικὸς ρητὸς μὲ τὴν ἰδιότητα «τὸ τετράγωνό του νὰ εἶναι $\frac{4}{9}$».

Κάθε ρητὸς ἀριθμός, ποὺ εἶναι τετράγωνο ἄλλου ρητοῦ, λέγεται **τετράγωνος ρητὸς ἀριθμός.** Ἔτσι, π.χ., οἱ 100, 49, 0, 16, 0,25 εἶναι τετράγωνοι ρητοὶ ἀριθμοί.

Ἔστω θ ἕνας τετράγωνος ρητὸς ἀριθμός. **Ὑπάρχει λοιπὸν ἀκριβῶς ἕνας θετικὸς ρητός, ἔστω ὁ ρ, τέτοιος, ὥστε νὰ εἶναι $\rho^2=\theta$.** Αὐτὸς ὁ θετικὸς ρητὸς ρ λέγεται, ὅπως μάθαμε καὶ στὴ β′ τάξη, τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ θ. Π.χ. ὁ $\frac{2}{3}$ εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{4}{9}$, ὁ 10 εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 100 κ.τ.λ.

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς τετράγωνου ρητοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ θ, συμβολίζεται μέ: $\sqrt{\theta}$. Ὥστε εἶναι: $\sqrt{100}=10$, $\sqrt{49}=7$, $\sqrt{0}=0$, $\sqrt{1,21}=1,1$ $\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὰ προηγούμενα συνάγεται ὅτι: ἂν θ εἶναι τετράγωνος ρητὸς καὶ x ἡ τετραγωνική του ρίζα (ὅπως τὴν ὁρίσαμε), τότε οἱ συμβολισμοί $x^2 = \theta$ **καὶ** $x = \sqrt{\theta}$ **εἶναι ἰσοδύναμοι,** δηλ. μποροῦμε νὰ γράφουμε:

$$x^2 = \theta \Leftrightarrow x = \sqrt{\theta}.$$

Ἔτσι, π.χ. εἶναι: $10^2 = 100 \Leftrightarrow 10 = \sqrt{100}$, $1{,}1^2 = 1{,}21 \Leftrightarrow 1{,}1 = \sqrt{1{,}21}$ κ.τ.λ.

Μποροῦμε ἀκόμα νὰ λέμε ὅτι: **ἂν** θ **εἶναι τετράγωνος ρητός, τότε ἡ ἐξίσωση** $x^2 = \theta$ **ἔχει ἀκριβῶς μιὰ λύση στὸ σύνολο τῶν ἀπόλυτων ρητῶν, τὴ** $x = \sqrt{\theta}$.

Σημείωση: Γι' αὐτὴ τὴν ἐξίσωση $x^2 = \theta$, ὅπου θ τετράγωνος ρητός, παρατηροῦμε ὅτι ἐκτὸς ἀπὸ τὴ λύση $\sqrt{\theta}$ ἔχει καὶ τὴν ἀντίθετή της, δηλαδὴ τὴν $-\sqrt{\theta}$, γιατὶ $(-\sqrt{\theta})^2 = (\sqrt{\theta})^2 = \theta$.

Ὥστε: ἡ παραπάνω ἐξίσωση ἔχει στὸ σύνολο τῶν σχετικῶν ρητῶν δύο λύσεις, τίς: $x_1 = \sqrt{\theta}$ **καὶ** $x_2 = -\sqrt{\theta}$.

Β) Μὴ τετράγωνοι ρητοὶ ἀριθμοί. Ἔστω ὁ ρητὸς ἀριθμὸς 3. Εἶναι φανερὸ ὅτι δὲν ὑπάρχει κάποιος φυσικὸς ἀριθμός, ποὺ τὸ τετράγωνό του νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸν 3, γιατὶ $1^2 = 1 < 3$ καὶ $2^2 = 4 > 3$. Ὥστε δὲν ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς ρ, μὲ $\rho^2 = 3$. Ἂς ἐξετάσουμε μήπως ὑπάρχει κάποιο ἀνάγωγο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ μὲ $\beta > 1$, ποὺ τὸ τετράγωνό του νὰ εἶναι ἴσο μὲ 3. Ἀλλὰ αὐτὸ εἶναι ἀδύνατο, γιατὶ τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι καὶ αὐτὸ κλάσμα ἀνάγωγο μὲ παρονομαστὴ $\beta^2 > 1$, ἄρα ὄχι ὁ ἀκέραιος 3. **Ὥστε δὲν ὑπάρχει θετικὸς ρητός, ποὺ τὸ τετράγωνό του νὰ εἶναι ἴσο μὲ 3.** Συνεπῶς ὁ 3 δὲν εἶναι τετράγωνος ρητός. Οἱ ρητοὶ αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγονται: μὴ τετράγωνοι ρητοί. Π.χ. οἱ 2, $\frac{3}{7}$, 5, $\frac{21}{4}$ κ.τ.λ. εἶναι **μὴ τετράγωνοι ρητοί.**

Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, ἂν θ εἶναι ἕνας μὴ τετράγωνος ρητός, μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι: ἡ ἐξίσωση $x^2 = \theta$ δὲν ἔχει κάποια λύση στὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἂς πάρουμε πάλι τὸν 3, πού, ὅπως εἴδαμε, εἶναι ἕνας μὴ τετράγωνος ρητός. Ὅπως παρατηρήσαμε παραπάνω εἶναι:

$$1^2 = 1 < 3, \text{ ἐνῶ } 2^2 = 4 > 3$$

Ἂς πάρουμε τώρα τοὺς ἀριθμούς:

1, 1,1 1,2 1,3 1,4 1,5 1,6 1,7 1,8 1,9 2

καὶ ἂς ὑπολογίσουμε τὰ τετράγωνά τους· θὰ βροῦμε ὅτι:

$1{,}7^2 = 2{,}89 < 3$, ἐνῶ $1{,}8^2 = 3{,}24 > 3$

Γράφουμε τώρα 1,70 ἀντὶ 1,7 καὶ 1,80 ἀντὶ 1,8 καὶ παίρνουμε τοὺς ἀριθμούς:

1,70 1,71 1,72 1,73 1,74 1,75 1,76 1,77 1,78 1,79 1,80,

Ἂς ὑπολογίσουμε τὰ τετράγωνά τους· βρίσκουμε τότε: $1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3$, ἐνῶ $1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3$. Τοὺς 1,73 καὶ 1,74 γράφουμε: 1,730 καὶ 1,740 καὶ παίρνουμε τούς:

1,730 1,731 1,732 1,733 1,734 1,735 1,736 1,737 1,738 1,739 1,740

καὶ ὑπολογίζουμε τὰ τετράγωνά τους· βρίσκουμε τότε:

$1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3$, ἐνῶ $1{,}733^2 = 3{,}0032289 > 3$. Ἡ ἐργασία αὐτὴ μπορεῖ νὰ συνεχισθεῖ, **ὅσο θέλουμε.**

Συνοψίζουμε τώρα τὰ προηγούμενα συμπεράσματα παρατηρώντας ὅτι:

Μὲ τὴν παραπάνω ἐργασία ὑπολογίζουμε: α) θετικοὺς ρητοὺς ποὺ καθενὸς τὸ τετράγωνο εἶναι μικρότερο τοῦ 3 καὶ β) θετικοὺς ρητούς, ποὺ καθενὸς τὸ τετράγωνο εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 3.

Ἔτσι ὑπολογίσαμε:

$1^2 = 1 < 3 \mid 1{,}7^2 = 2{,}84 < 3 \mid 1{,}73^2 = 2{,}9929 < 3 \mid 1{,}732^2 = 2{,}999824 < 3$ κτλ.

$2^2 = 4 > 3 \mid 1{,}8^2 = 3{,}24 > 3 \mid 1{,}74^2 = 3{,}0276 > 3 \mid 1{,}733^2 = 3{,}003289 > 3$ κτλ.

Σχηματίζονται λοιπόν, μὲ τὰ διαδοχικὰ βήματα τῆς παραπάνω ἐργασίας, δύο ἀκολουθίες θετικῶν ρητῶν, οἱ ἑξῆς:

(Κ): 1 1,7 1,73 1,732 . . .

(Α): 2 1,8 1,74 1,733 . . .

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

α) Τὸ τετράγωνο κάθε ὅρου τῆς (Κ) εἶναι < 3

β) Τὸ τετράγωνο κάθε ὅρου τῆς (Α) εἶναι > 3

γ) Οἱ διαφορές:

1ος ὅρος τῆς (Α) — 1ος ὅρος τῆς (Κ), 2ος ὅρος τῆς (Α) — 2ος ὅρος τῆς (Κ), 3ος ὅρος τῆς (Α) — 3ος ὅρος τῆς (Κ) κ.τ.λ. εἶναι ἀντιστοίχως:

1 0,1 0,01 0,001 0,0001 κ.τ.λ.

δ) Οὔτε ἡ ἀκολουθία (Κ) οὔτε ἡ ἀκολουθία (Α) μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνας περιοδικὸς δεκαδικὸς ἀριθμός.

Πραγματικά, ἂς συμβολίσουμε τὴν (Κ) μέ:

(Κ): $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_\nu, \ldots$

καὶ ἔστω ὅτι αὐτὴ εἶναι ὁ δεκαδικὸς περιοδικὸς δ. Ἔστω ὅτι ὁ δ εἶναι ἡ δεκαδικὴ παράσταση τοῦ ρητοῦ ρ· τότε λοιπὸν μὲ τοὺς ὅρους τῆς (Κ) προσεγγίζουμε, ὅσο θέλουμε, τὸν ρ, ἑπομένως μὲ τοὺς ὅρους τῆς ἀκολουθίας:

(Κ′): $\delta_1{}^2, \delta_2{}^2, \delta_2{}^2, \ldots, \delta_\nu{}^2, \ldots$

προσεγγίζουμε, ὅσο θέλουμε, τὸν ρ^2. Πραγματικά:

$\delta_1{}^2 = 1^2 = 1$· ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 1 = 2$

$\delta_1{}^2 = 1{,}7^2 = 2{,}84$· ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 2{,}84 = 0{,}16 < \frac{20}{100} = \frac{2}{10}$

$\delta_2{}^2 = 1{,}73^2 = 2{,}9929$· ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 2{,}9929 = 0{,}0071 <$ $< \frac{80}{10000} = \frac{8}{1000}$

$\delta_4{}^2 = 1{,}732^2 = 2{,}999824$ ἡ ἀπόστασή του ἀπὸ τὸν 3 εἶναι $3 - 2{,}999824 =$ $= 0{,}000176 < \frac{20}{100000} = \frac{2}{10000}$ κ.τ.λ. Ὥστε μὲ τοὺς ὅρους τῆς (Κ′) προσεγγίζουμε, ὅσο θέλουμε καὶ τὸν 3, ἑπομένως ὁ ρ^2 δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἄλλος ἀπὸ τὸν 3, δηλαδὴ εἶναι $\rho^2 = 3$. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατο, ὅπως εἴπαμε παραπάνω.

Ἂς συνεχίσουμε τὴν ἐργασία τῆς κατασκευῆς τῶν ἀκολουθιῶν (Α) καὶ

(Κ), μποροῦμε νὰ φθάσουμε σὲ δεκαδικοὺς μὲ 1000, 100000, 1000000 κ.τ.λ. δεκαδικὰ ψηφία (!). Βρίσκεται λοιπὸν κάποιος ὅρος τῆς ἀκολουθίας (Κ) καὶ κάποιος τῆς ἀκολουθίας (Α) μὲ 1000000 ψηφία δεκαδικὰ ὁ καθένας· ἡ διαφορὰ τοῦ 1ου ἀπὸ τὸν 2ο θὰ εἶναι:

$$0{,}000\ldots01,$$

ὅπου τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶναι ἕνα ἑκατομμύριο (!!). Σκεφθεῖτε πόσο μικρὴ εἶναι αὐτὴ ἡ διαφορὰ καὶ ὅτι μποροῦμε ἀκόμα νὰ φθάσουμε σὲ ἀνάλογες διαφορὲς «ἀφάνταστα μικρότερες».

Μποροῦμε τώρα νὰ συνοψίσουμε τὶς παρατηρήσεις μας γιὰ τὸν μὴ τετράγωνο θετικὸ ρητὸ 3, ὡς ἑξῆς:

1) Δὲν ὑπάρχει θετικὸς ρητός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο νὰ εἶναι ὁ 3. Μὲ ἄλλες λέξεις: **ἡ ἐξίσωση $x^2 = 3$ δὲν ἔχει κάποια λύση μέσα στὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν.**

2) Ὑπάρχουν θετικοὶ ρητοί, ποὺ τὸ τετράγωνο τοῦ καθενὸς εἶναι <3 καὶ μάλιστα εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθεῖ μιὰ ἀκολουθία ἀπὸ θετικοὺς ρητούς, ποὺ «βαίνουν αὐξανόμενοι» (*) καὶ ποὺ τὸ τετράγωνο τοῦ καθενὸς εἶναι <3:

(Κ): 1 1,7 1,73 1,732 . . .

(Τ): 1^2 $1{,}7^2$ $1{,}73^3$ $1{,}732^2$ . . .

2α) Ὑπάρχουν θετικοὶ ρητοί, ποὺ τὸ τετράγωνο τοῦ καθενὸς εἶναι >3 καὶ μάλιστα εἶναι δυνατὸν νὰ σχηματισθεῖ μιὰ ἀκολουθία ἀπὸ θετικοὺς ρητοὺς ποὺ «βαίνουν ἐλαττούμενοι» (**) καὶ ποὺ τὸ τετράγωνο τοῦ καθενὸς εἶναι >3:

(Α): 2 1,8 1,74 1,733 . . .

(Τ′): 2^2 $1{,}8^2$ $1{,}74^2$ $1{,}733^2$ . . .

3) Ἂν δοθεῖ ἕνας δεκαδικός, ὅπως ὁ $\delta = 0{,}000\ldots01$ (μὲ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία), τότε ὑπάρχει ὅρος τῆς (Κ) καὶ ὅρος τῆς (Α) **μὲ διαφορὰ** $<\delta$. Αὐτὸ τὸ διατυπώνουμε καὶ ὡς ἑξῆς: **οἱ δύο ἀκολουθίες** (Α) καὶ (Κ) **«προσεγγίζουν» ἡ μιὰ τὴν ἄλλη, ὅσο θέλουμε.** Τὸ ἴδιο μποροῦμε νὰ ποῦμε καὶ γιὰ τὶς ἀκολουθίες (Τ) καὶ (Τ′).

4) Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας τετραγώνων (Τ) «βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ «προσεγγίζουν ὁλοένα καὶ περισσότερο τὸν 3». Καθὼς τώρα παρατηροῦμε τὶς ἀκολουθίες (Κ) καὶ (Τ) μᾶς γεννᾶται ἡ σκέψη ὅτι **καὶ τῆς (Κ) οἱ ὅροι «προσεγγίζουν» ὁλοένα καὶ περισσότερο καθὼς «βαίνουν» αὐξανόμενοι» κάποιον «ἀριθμό», τοῦ ὁποίου τὸ «τετράγωνο» φαίνεται νὰ εἶναι ὁ 3.**

4α) Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας τετραγώνων (Τ′) «βαίνουν ἐλαττούμενοι» καὶ «προσεγγίζουν ὁλοένα καὶ περισσότερο τὸν 3». Καθὼς τώρα παρατηροῦμε τὶς ἀκολουθίες (Α) καὶ (Τ′) μᾶς γεννᾶται ἡ σκέψη ὅτι **καὶ τῆς (Α) οἱ ὅροι «προσεγγίζουν» ὁλοένα καὶ περισσότερο, καθὼς «βαίνουν ἐλαττούμενοι», κάποιον «ἀριθμό» τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο φαίνεται νὰ εἶναι ο 3.**

Γιὰ ὅλους αὐτοὺς τοὺς λόγους συμφωνοῦμε νὰ παριστάνουμε τὴν ἀκολουθία (Κ) πιὸ σύντομα μὲ 1,732. . . (ὅπου οἱ τελεῖες ἀντιπροσωπεύουν ψηφία, ποὺ βρίσκονται μὲ τὴν ἴδια τεχνική, μὲ τὴν ὁποία βρέθηκαν καὶ τὰ ψηφία 7, 3, 2) **καὶ νὰ λέμε ὅτι: ἡ παράσταση αὐτὴ εἶναι «ἕνας ἄρρητος ἀριθμός».** Ἡ λέξη **«ἄρρητος»** χρησιμοποιήθηκε γιατὶ (ὅπως εἴδαμε προηγουμένως) ἡ παράσταση 1,732. . . δὲν εἶναι κάποιος δεκαδικὸς περιοδικός, δηλαδὴ δὲν εἶναι παράσταση

(*) «αὔξουσα ἀκολουθία» (**) «φθίνουσα ἀκολουθία».

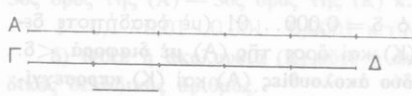
κάποιου ρητοῦ. Εἶναι φυσικὸ νὰ δεχτοῦμε ὅτι ὁ «νέος» αὐτὸς ἀριθμὸς 1,732... ἔχει τὴν ἰδιότητα ὅτι: τὸ **«τετράγωνό»** του εἶναι ὁ 3, δηλαδὴ ὅτι εἶναι ἡ **«τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 3»**. Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας (Κ) εἶναι **«μιὰ προσέγγιση»** τοῦ ἄρρητου ἀριθμοῦ 1,732. . . **καὶ ἡ προσέγγιση, εἶναι τόσο μεγαλύτερη (καλύτερη), ὅσο ὁ ὅρος τῆς (Κ) ποὺ παίρνουμε εἶναι πιὸ ἀπομακρυσμένος ἀπὸ τὸν πρῶτο της ὅρο.** Γι' αὐτὸ μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι: κάθε ὅρος τῆς (Κ) εἶναι **«ἕνας ρητὸς προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος»** τοῦ ἄρρητου ἀριθμοῦ: 1,732. . .

Σημ. Στὴ Β' τάξη μάθαμε νὰ βρίσκουμε τὴν τετραγ. ρίζα ἑνὸς μὴ τετράγωνου ρητοῦ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κ.τ.λ.

Ἂν ἀντὶ τοῦ 3 παίρναμε τὸν 2 εἴτε τὸν 5 καί, γενικά, ἕναν ὁποιονδήποτε μὴ τετράγωνο θετικὸ ρητό, θὰ φθάναμε σὲ ἀνάλογα συμπεράσματα. Ἂν δηλαδὴ παίρναμε ἕνα μὴ τετράγωνο θετικὸ ρητό, ἔστω θ, θὰ σχηματίζαμε πάλι δύο ἀκολουθίες, ἔστω (Κ') καὶ (Α'), ὅπως ἔγινε καὶ μὲ τὸν 3 ἔτσι, ὥστε τὸ τετράγωνο κάθε ὅρου τῆς (Κ') θὰ ἦταν μικρότερο τοῦ θ, τὸ τετράγωνο κάθε ὅρου τῆς (Α') θὰ ἦταν μεγαλύτερο τοῦ θ καὶ οἱ δύο ἀκολουθίες θὰ «προσέγγιζαν» ἡ μία τὴν ἄλλη, ὅσο θέλαμε.

Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο κατασκευάζονται καὶ ἄλλοι «ἄρρητοι ἀριθμοί».

36. ΖΕΥΓΗ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ ΧΩΡΙΣ ΚΟΙΝΗ ΜΟΝΑΔΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΟΥΣ.



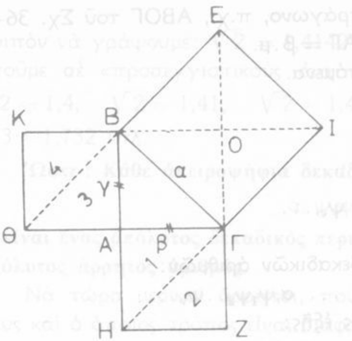
Σχ. 36–1

Παρατηρῆστε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ καὶ μ στὸ Σχ. 36–1. Εἶναι φανερὸ ἐδῶ ὅτι, ἂν τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρηθοῦν μὲ μονάδα τὸ τμῆμα μ, τότε βρίσκουμε: μῆκος τοῦ ΑΒ = 6 μονάδες μ καὶ μῆκος τοῦ ΓΔ = 5 μονάδες μ. Γράφουμε τότε, ὅπως εἶναι γνωστό, ΑΒ = 6.μ, ΓΔ = 5.μ. Γι' αὐτὸ λέμε ὅτι: **τὸ τμῆμα μ εἶναι μιὰ κοινὴ μονάδα μετρήσεως (κοινὸ ὑποπολλαπλάσιο) τῶν τμημάτων ΑΒ, ΓΔ,** εἴτε ὅτι: **τὰ ΑΒ, ΓΔ ἔχουν κοινὴ μονάδα μετρήσεώς τους τὸ μ,** εἴτε ἀκόμα ὅτι: **τὰ ΑΒ, ΓΔ εἶναι σύμμετρα (μεταξύ τους) εὐθύγραμμα τμήματα** (ἀφοῦ ἔχουν κοινὴ μονάδα μετρήσεώς τους).

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ ζεύγη εὐθύγραμμων τμημάτων χωρὶς νὰ βρίσκεται γι' αὐτὰ κάποια κοινὴ μονάδα μετρήσεώς τους.

Ἕνα παράδειγμα:

Ἂς πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ καὶ ἂς κατασκευάσουμε τετράγωνα στὶς κάθετες πλευρὲς καὶ στὴν ὑποτείνουσα, ὅπως βλέπετε στὸ Σχ. 36–2. Ἂς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ ἔχουν κάποια κοινὴ μονάδα μετρήσεώς τους, ἔστω μ. Τότε θὰ εἶναι μῆκος τοῦ ΒΓ ἴσον μέ, π.χ., α μονάδες μ καὶ μῆκος τοῦ ΑΓ (= μῆκος τοῦ ΑΒ) ἴσο μέ, π.χ., β μονάδες μ. Τὰ α καὶ β συμβολίζουν λοιπὸν **ρητοὺς ἀριθμούς.**



Σχ. 36–2

Ἂν φέρουμε τὶς διαγωνίους τῶν τετραγώνων, ὅπως βλέπετε στὸ Σχ. 36–2, εἶναι φανερὸ(*) ὅτι ὅλα τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα μεταξύ τους ἀνὰ δύο. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα 1, 2, 3, 4 ἀποτελοῦν τὸ τετράγωνο ΒΓΙΕ (ἂν τοποθετηθοῦν μὲ κατάλληλο τρόπο πάνω στὸ τετράγωνο ΒΓΙΕ, θὰ τὸ καλύψουν ἀκριβῶς). Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμε ὅτι: ἐμβαδὸ τετρ. ΑΓΖΗ + ἐμβ. τετρ. ΑΒΚΘ = ἐμβ. τετρ. ΒΓΙΕ, δηλαδή: ἐμβ. τετρ. μὲ πλευρὰ ΑΓ + + ἐμβ. τετρ. μὲ πλευρὰ ΑΒ = ἐμβ. τετρ. μὲ πλευρὰ ΒΓ (**).

Θὰ ἴσχυε λοιπὸν τότε ἡ ἰσότητα: $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$.

καί, ἐπειδὴ ὑποθέσαμε $\beta = \gamma$, θὰ ἦταν: $\beta^2 + \beta^2 = \alpha^2$.

Ἀλλὰ $\beta^2 + \beta^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\beta^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} = 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 2.$

Ἀλλ' ἐπειδὴ α, β εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ρητὸς ἀριθμὸς (ὡς πηλίκο δύο ρητῶν). Δὲν ὑπάρχει ὅμως ρητὸς ἀριθμός, ποὺ τὸ τετράγωνό του νὰ εἶναι ἴσο μὲ 2. Εἴμαστε λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ συμπεράνουμε ὅτι **κακῶς ὑποθέσαμε** ὅτι ὑπάρχει κοινὴ μονάδα μετρήσεως τῶν ΑΓ καὶ ΒΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι διαγώνιος τοῦ τετραγώνου ΑΒΟΓ, μποροῦμε νὰ διατυπώσουμε τὸ συμπέρασμά μας ὡς ἑξῆς:

Γιὰ κάθε τετράγωνο ἰσχύει ὅτι: ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρά τους δὲν ἔχουν κοινὴ μονάδα μετρήσεώς τους, δηλαδή, ὅπως ἀλλιῶς λέγεται, ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου δὲν εἶναι σύμμετρα εὐθύγραμμα τμήματα, ἀλλὰ ὅπως ἐπίσης λέγεται) **ἀσύμμετρα.**

37. ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι εἶναι ἀνάγκη νὰ **«ἐπεκτείνουμε»** τὸ σύνολο τῶν ρητῶν **μὲ τὴ δημιουργία νέων ἀριθμῶν,** ποὺ θὰ πρέπει νὰ ὀνομασθοῦν **ἄρρητοι** (μὴ ρητοὶ) **ἢ ἀσύμμετροι,** καὶ ποὺ θὰ εἶναι ἔτσι κατασκευασμένοι ὥστε νὰ θεραπευθοῦν οἱ «ἀδυναμίες τοῦ συστήματος τῶν ρητῶν ἀριθμῶν». Δηλαδή: καὶ ἐξισώσεις ὅπως οἱ $x^2 = 3$, $x^2 = 2$, $x^2 = \theta$ (ὅπου θ θετικὸς ρητὸς μὴ τετράγωνος) νὰ ἔχουν λύση καὶ νὰ ὑπάρχει εὐθύγρ. τμῆμα μ

(*) Π.χ. ἀπὸ τὶς συμμετρίες, ποὺ ὑπάρχουν.

(**) Ἡ πρόταση αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸ λεγόμενο Πυθαγόρειο θεώρημα καὶ ἰσχύει γενικὰ γιὰ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο.

καὶ ἄρρητοι ἀριθμοὶ α, β, ὥστε γιὰ τὸ τετράγωνο, π.χ., ΑΒΟΓ τοῦ Σχ. 36–2 νὰ μποροῦμε νὰ γράψουμε ΒΓ = α.μ καὶ ΑΓ = β.μ.

Αὐτὸ ἀκριβῶς κάνουμε στὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

38. ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ἔστω μιὰ ἀκολουθία ἀπὸ ψηφία:

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu, \ldots$$

καὶ α ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ 0.

Σχηματίζουμε τὴν ἀκολουθία κοινῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν:

$$\alpha,\psi_1 \quad \alpha,\psi_1\psi_2 \quad \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3 \;\ldots\; \alpha,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$$

καὶ ἄς τὴν παραστήσουμε γιὰ συντομία ὡς ἑξῆς:

(α): $\alpha,\psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$

Ἡ παράσταση (α) μπορεῖ νὰ ὀνομασθεῖ: **ἀπειροψήφια δεκαδικὴ παράσταση.**

Παραδείγματα: 1ο. Ἔστω ὅτι στὴν (α) εἶναι:

$\psi_1 = 6,\ \psi_2 = 6, \ldots, \psi_\nu = 6, \ldots$ καὶ $\alpha = 0$

τότε ἡ ἀπειροψήφια δεκαδικὴ παράσταση: 0,666..., εἶναι ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς $\left(\text{ποὺ εἶναι ἴσος, ὅπως γνωρίζουμε, μὲ τὸν } \frac{2}{3}\right)$.

2ο. Ἄς θεωρήσουμε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{10^1}$, $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^3}$, ... τοῦ ἀριθμοῦ 3 (μὲ ἔλλειψη). Σχηματίζεται ἀπ' αὐτὲς ἡ ἀκολουθία (βλ. καὶ σελ. 52):

$$(\mathrm{K}):\ 1{,}7 \quad 1{,}73 \quad 1{,}732\ldots$$

Ἄς πάρουμε τώρα γιὰ ἀκέραιο α τὸν 1 καὶ γιὰ ἀκολουθία $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ τὴν ἀκολουθία ψηφίων: 7, 3, 2,...

δηλαδὴ τὴν ἀκολουθία, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ τελευταῖα ψηφία τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας (Κ). Ἄς σχηματίσουμε τώρα τὴν ἀπειροψήφια δεκαδικὴ παράσταση (Π): 1,732...

Ἡ παράσταση αὐτή, ὅπως εἴδαμε στὰ προηγούμενα, δὲν εἶναι ἡ παράσταση κάποιου δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, δηλαδὴ δὲν εἶναι παράσταση κάποιου ρητοῦ· ὀνομάστηκε τότε: **«ἕνας ἄρρητος ἀριθμός».**

Συμφωνοῦμε τώρα κάθε παράσταση, ὅπως ἡ (Π), δηλαδὴ κάθε παράσταση τῆς μορφῆς $\alpha, \ldots, \psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$, ὅπου α εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ 0 καὶ $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots$ εἶναι ψηφία, **ὅταν δὲν παριστάνει ἕναν δεκαδικὸ περιοδικὸ ἀριθμὸ** (δηλαδὴ ἕναν ρητὸ ἀριθμό), νὰ τὴν ὀνομάζουμε **ἄρρητο»,** εἴτε **«ἕναν ἀσύμμετρο» ἀριθμὸ τῆς Ἀριθμητικῆς,** εἴτε ἕναν **ἀπόλυτο ἄρρητο** (εἴτε **ἀπόλυτο ἀσύμμετρο)** ἀριθμό. Π.χ., ἡ ἀπειροψήφια δεκαδικὴ παράσταση 1,414214..., ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὸ 2 μὲ τὴ γνωστὴ ἀπὸ τὴ Β' τάξη τεχνικὴ τῆς «εὑρέσεως» τῆς τετραγωνικῆς ρίζας τοῦ 2, εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός, ὅπως καὶ ἡ 1,732051..., ποὺ προκύπτει, μὲ τὴν ἴδια τεχνική, ἀπὸ τὸν 3. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ γράψουμε: $\sqrt{2} = 1,414214\ldots$, $\sqrt{3} = 1,732501\ldots$, ἐνῶ, ἂν περιορίστοῦμε σὲ «προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους» τῶν ἀρρήτων, θὰ γράψουμε: $\sqrt{2} \approx 1,4$, $\sqrt{2} \approx 1,41$, $\sqrt{2} \approx 1,414$ κ.τ.λ. καὶ $\sqrt{3} \approx 1,7$, $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{3} \approx 1,732$ κτλ.

Ὥστε: Κάθε ἀπειροψήφια δεκαδικὴ παράσταση:

$$\alpha, \psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$$

ἢ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ρητός, ἢ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος ἄρρητος ἀριθμός.

Νὰ τώρα μερικοὶ ἄρρητοι, ποὺ εἶναι φανερὸς ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς τους καὶ ὁ ὁποῖος τρόπος εἶναι διαφορετικὸς ἀπὸ ὅσους εἴδαμε στὴν § 35.

α) 0,50550555055550...

β) 0,12122122212222...

γ) 0,03403434034343 4...

δ) 0,123456789101112...

39. ΣΧΕΤΙΚΟΙ ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ὅπως ἀπὸ τοὺς ἀπόλυτους ρητοὺς ὁρίσαμε τοὺς σχετικοὺς ρητούς, ἔτσι ἀκριβῶς καὶ ἀπὸ τοὺς ἀπόλυτους ἄρρητους ὁρίζονται οἱ λεγόμενοι: **σχετικοὶ ἄρρητοι,** ἂν τοποθετήσουμε ἕνα + (θετικοὶ ἄρρητοι) ἢ ἕνα − (ἄρρητοι ἀρνητικοὶ) μπροστὰ σὲ κάθε ἀπόλυτο ἄρρητο. Π.χ. $+1,4142\ldots$, $-1,732\ldots$, κ.τ.λ.

40. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.

Ἔστω A_ρ τὸ σύνολο τῶν σχετικῶν ἄρρητων ἀριθμῶν καὶ Q τὸ σύνολο τῶν σχετικῶν ρητῶν. Τότε κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A_\rho \cup Q$ ὀνομάζεται: **ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.** Τὸ σύνολο $A_\rho \cup Q$, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, συνηθίζεται νὰ συμβολίζεται μὲ R (Διεθνῶς μὲ R ἢ Re). Ἔτσι τὸ σύνολο τῶν γνωστῶν μας ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ R, δηλ. $Q \subset R$.

Κάθε στοιχεῖο λοιπὸν τοῦ R, δηλ. κάθε πραγματικὸς ἀριθμός, ἢ εἶναι ἕνας σχετικὸς ρητὸς (δεκαδικὸς περιοδικὸς) ἢ εἶναι ἕνας σχετικὸς ἄρρητος. Γι' αὐτὸ ἕνας ἄρρητος ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ λέγεται καί: **ἀπειροψήφιος δεκαδικὸς μὴ περιοδικός.** Π.χ., ἡ $\sqrt{3}$ εἶναι ἕνας ἀπειροψήφιος δεκαδικὸς μὴ περιοδικὸς ἀριθμός.

Ἔστω ἕνας **πραγματικὸς ἀριθμὸς** $A = \alpha, \psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$ Κάθε ὅρος τῆς ἀκολουθίας:

$$(\alpha): \alpha \quad \alpha,\psi_1 \quad \alpha,\psi_1\psi_2 \quad \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3$$

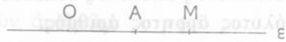
εἶναι «μιὰ προσέγγιση» τοῦ Α εἴτε, ὅπως μποροῦμε νὰ ποῦμε, «ἕνας προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος» τοῦ Α. Ἡ προσέγγιση εἶναι τόσο μεγαλύτερη (καλύτερη), ὅσο ὁ προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος εἶναι πιὸ ἀπομακρυσμένος ἀπὸ τὸν πρῶτο ὅρο τῆς ἀκολουθίας (α).

41. Η ΓΕΝΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ ΕΥΘΥΓΡ. ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣ ΑΛΛΟ.

Α) Ἄς πάρουμε μιὰ εὐθεία ε καὶ δύο σημεῖα της, τὸ Ο καὶ δεξιά του τὸ Α.

Ὁρίζεται τότε τὸ τμῆμα ΟΑ (Σχ. 41–1). Ἔστω καὶ ἕνα ἄλλο τμῆμα, τὸ ΟΜ. Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι, π.χ. στὸ Σχ. 41–1, εἶναι: $1 \cdot ΟΑ < ΟΜ < 2 \cdot ΟΑ$.

Ἂν χωρίσουμε τὸ ΟΑ σὲ 10 ἴσα μέρη καὶ πάρουμε τὰ τμήματα (τ): $1 \cdot ΟΑ$, $1{,}1 \cdot ΟΑ$, $1{,}2 \cdot ΟΑ$ $1{,}3 \cdot ΟΑ$ $1{,}4 \cdot ΟΑ$ $1{,}5 \cdot ΟΑ$ $1{,}6 \cdot ΟΑ$ $1{,}7 \cdot ΟΑ$ $1{,}8 \cdot ΟΑ$ $1{,}9 \cdot ΟΑ$ $2 . ΟΑ$, τότε τὸ ΟΜ ἢ θὰ συμπέσει μὲ ἕνα ἀπ' αὐτὰ ἢ θὰ βρεθεῖ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀπ' αὐτὰ τὰ τμήματα. Ἂν συμπέσει μὲ ἕνα ἀπ' αὐτά, π.χ. ἂν εἶναι $ΟΜ = 1{,}6 . ΟΑ$, τότε ὁ 1,6 ὀνομάζεται: **λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ** καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$.



Εἶναι λοιπὸν τότε ἀπὸ ὁρισμὸ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}6$.

Σχ. 41–1

Ἂν τὸ ΟΜ δὲν εἶναι ἴσο μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα (τ), τότε θὰ εἶναι, π.χ. $1{,}6 \cdot ΟΑ < ΟΜ < 1{,}7 \cdot ΟΑ$.

Παίρνουμε τώρα τὰ τμήματα:

$(τ_1)$: $1{,}6 \cdot ΟΑ = 1{,}60 \cdot ΟΑ$ $1{,}61 \cdot ΟΑ$ $1{,}62 \cdot ΟΑ$ ... $1{,}69 \cdot ΟΑ$ $1{,}70 \cdot ΟΑ = 1{,}7 \cdot ΟΑ$.

Πάλι τώρα ἢ θὰ συμβεῖ τὸ ΟΜ νὰ εἶναι ἴσο μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα $(τ_1)$ ἢ θὰ βρίσκεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀπὸ τὰ $(τ_1)$. Ἂν εἶναι, π.χ., $ΟΜ = 1{,}65 \cdot ΟΑ$, τότε ὁ 1,65 ὀνομάζεται **λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ** καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$. Εἶναι λοιπὸν τότε ἀπὸ τὸν ὁρισμό: $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}65$. Ἂν τὸ ΟΜ δὲν εἶναι ἴσο μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ τμήματα $(τ_1)$, τότε θὰ εἶναι ἔστω:

$$1{,}65 . ΟΑ < ΟΜ < 1{,}66 . ΟΑ.$$

Μποροῦμε νὰ συνεχίσουμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο· τότε δύο εἶναι τὰ ἐνδεχόμενα: **α) μπορεῖ νὰ φθάσουμε ἔπειτα ἀπὸ μερικὰ «βήματα» σ' ἕναν κοινὸ δεκαδικό**, π.χ. τὸν 1,65432 καὶ νὰ εἶναι: $ΟΜ = 1{,}65432 . ΟΑ$· τότε ὁ δεκαδικὸς 1,6542 θὰ ὀνομασθεῖ: ὁ λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ, θὰ συμβολισθεῖ μὲ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$ καὶ θὰ γράψουμε: $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}65432$.

β) μπορεῖ ἡ παραπάνω ἐργασία νὰ μὴν τερματίζεται· τότε θὰ ὁρισθεῖ ἕνας ἀπειροψήφιος δεκαδικός, ἔστω: 1,6543216..., **ποὺ ἢ θὰ εἶναι ἕνας ρητὸς** (δηλαδὴ δεκαδικὸς περιοδικὸς) **ἢ θὰ εἶναι ἕνας μὴ ρητός.** Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ὁ ἀπειροψήφιος δεκαδικὸς 1,6543216... θὰ ὀνομασθεῖ **λόγος τοῦ ΟΜ πρὸς τὸ ΟΑ, συμβολικὰ $\frac{ΟΜ}{ΟΑ}$ καὶ θὰ γράψουμε : $\frac{ΟΜ}{ΟΑ} = 1{,}6543216...$** εἴτε **ταυτόσημα : $ΟΜ = (1{,}6543216...) . ΟΑ$.**

Γενικά : ἂν ΑΒ, ΓΔ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε εὐθύγραμμα τμήματα, ὅπου ΓΔ διάφορο τοῦ μηδενικοῦ τμήματος, ὁρίζεται μὲ τὸν παραπάνω τρόπο ἡ ἔννοια : λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ καὶ εἶναι ἕνας ἀπόλυτος πραγματικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἕνας ρητὸς ἢ ἕνας ἄρρητος ἀριθμός. Ὁ πραγματικὸς αὐτὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται καὶ μῆκος τοῦ ΑΒ μὲ μονάδα τὸ ΓΔ.

Ὥστε: **Ὅταν δοθεῖ ἕνα εὐθύγραμμο ὄχι μηδενικὸ τμῆμα, ἔστω μ, γιὰ μονάδα**

μετρήσεως εὐθύγραμμων τμημάτων καὶ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, ἔστω ΑΒ, τότε ὁρίζεται ἕνας καὶ μόνο πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ λόγος $\frac{AB}{\mu}$, δηλ. τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ ἢ ἀπόλυτη τιμὴ τοῦ ΑΒ, συμβολικά: (ΑΒ).

Ἂν $\frac{AB}{\mu} = x$, τότε συμβολίζουμε: $AB = x \cdot \mu$ εἴτε $(AB) = x$ μονάδες μ, π.χ. $(AB) = 5$ cm.

Σημ. Ὅταν λοιπὸν γράφουμε $(AB) = 5$ cm, ἐννοοῦμε $\frac{AB}{1 \text{ cm}} = 5$. Μποροῦμε βέβαια νὰ γράψουμε: $AB = 5.(1 \text{ cm})$, ἀλλ' αὐτὸ δὲ συνηθίζεται. Δηλ. στὸ συμβολισμὸ $(AB) = 5$ cm δὲ σημειώνεται πολ/σμός, ἀλλὰ τὸ cm εἶναι δηλωτικὸ τῆς μονάδας, ποὺ χρησιμοποιήθηκε στὴ μέτρηση.

Β) Ἂν ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ὁ λόγος $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ εἶναι, ὅπως μάθαμε στὰ προηγούμενα, ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἔστω ν. Ἔχουμε τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \nu \Leftrightarrow AB = \nu \cdot \Gamma\Delta$ (1)

Ἂν πάρουμε τώρα ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα μ, οἱ λόγοι $\frac{AB}{\mu} =$ (ἔστω) x καὶ $\frac{\Gamma\Delta}{\mu} =$ (ἔστω) ψ, δηλ. τὰ μήκη τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ μὲ μονάδα τὸ μ, εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ ψ.

Ἔχουμε λοιπὸν τότε:

$AB = x \cdot \mu$ καὶ $\Gamma\Delta = \psi \cdot \mu$

καὶ ἑπομένως ἡ δεύτερη ἰσότητα στὴν πιὸ πάνω ἰσοδυναμία (1) γίνεται:

$$x \cdot \mu = \nu \cdot \psi \cdot \mu$$

δηλαδή: x μονάδες $\mu = (\nu \cdot \psi)$ μονάδες μ

ὥστε:

$$x = \nu\psi$$

καὶ ἑπομένως $\frac{x}{\psi} = \nu$.

Ἡ πρώτη λοιπὸν ἰσότητα ἰσοδυναμίας (1) γίνεται:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{x}{\psi}$$

Δηλαδή: **ὁ λόγος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ πρὸς ἄλλο ΓΔ, εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀντίστοιχων μηκῶν τους, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα.**

42. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Ἔστω μιὰ εὐθεία καὶ δύο σημεῖα της τὸ Ο καί, δεξιά του, τὸ Α (σχ. 42–1.) Ἂς ἀντιστοιχίσουμε στὸ Ο τὸν ἀριθμὸ 0 καὶ στὸ Α τὸν ἀριθμὸ 1.

Σχ. 42–1

Τότε: σὲ κάθε σημεῖο Μ τῆς ε μποροῦμε ν' ἀντιστοιχίσουμε ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ ὡς ἑξῆς: α) ἂν τὸ Μ εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο, ποὺ εἶναι καὶ τὸ Α, ἀντιστοιχίζουμε τὸ λόγο $\frac{OM}{OA}$, ποὺ ἔχει ὁρισθεῖ πιὸ πάνω· β) ἂν τὸ Μ δὲν εἶναι πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ο, ποὺ εἶναι καὶ τὸ Α, ἀντιστοιχίζουμε τὸν «ἀντίθετο» τοῦ λόγου $\frac{OM}{OA}$.

Ὁρίζεται λοιπὸν μιὰ μονοσήμαντη ἀπεικόνιση τοῦ σημειοσυνόλου ε στὸ R.

Δεχόμαστε ὅτι ἡ ἀπεικόνιση αὐτή, ἔστω F, εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη· δηλ. δεχόμαστε ὅτι γιὰ κάθε $\alpha \in R$ ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνο σημεῖο Μ τῆς ε, ὥστε ἡ εἰκόνα τοῦ Μ μὲ τὴν ἀπεικόνιση F νὰ εἶναι ὁ α. Ἡ εὐθεία ε ὀνομάζεται τότε : εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

43. ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ R.

Α) Στὸ σύνολο τῶν δεκαδικῶν περιοδικῶν δὲν ὁρίσαμε ἰδιαίτερα πράξεις, διάταξη κ.τ.λ., γιατὶ κάθε δεκαδικὸς περιοδικὸς ἔχει ἀκριβῶς ἕναν «ἀντιπρόσωπο» στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ γιὰ τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς ἔχουν ὁρισθεῖ ἡ διάταξη καὶ οἱ τέσσερες πράξεις. Γι' αὐτό, ἂν θέλαμε νὰ ὁρίσουμε τὴν ἔννοια: ἄθροισμα $\delta_1 + \delta_2$, ὅπου δ_1, δ_2 δεκαδικοὶ περιοδικοί, θὰ τὴν ὁρίζαμε ὡς ἑξῆς: **ἂν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρητοὶ μὲ ἀντιπροσώπους τους στὸ σύνολο τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν τοὺς δ_1, δ_2, τότε ἄθροισμα $\delta_1, + \delta_2$ εἶναι ὁ δεκαδικὸς ἀντιπρόσωπος τοῦ ἀθροίσματος $\rho_1 + \rho_2$.**

Ἀνάλογα θὰ κάναμε γιὰ τὶς ἄλλες πράξεις καθὼς καὶ γιὰ τὴ διάταξη.

Β) Τὸ πρόβλημα ὅμως τοῦ νὰ ὁρίσουμε πράξεις καὶ διάταξη στὸ σύνολο R εἶναι διαφορετικό, γιατὶ ἐδῶ τὸν κάθε πραγματικὸ ἀριθμό, ὅπως τὸν θεωροῦμε σὰν ἀπειροψήφιο δεκαδικό, δὲν τὸν ἔχουμε «ὁλόκληρο» (ἐκτὸς μόνο, ἂν ὁ πραγματικὸς ποὺ θεωροῦμε, εἶναι, εἰδικότερα, δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμός), **ἀλλὰ ἔχουμε μόνο : ρητοὺς προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους** (ὅσους θέλουμε γιὰ τὸν κάθε πραγματικὸ ἀριθμό). Ὁ ὁρισμὸς λοιπὸν τῶν πράξεων καὶ τῆς διατάξεως στὸ σύνολο R θὰ πρέπει νὰ ὁρισθεῖ μὲ τὴ βοήθεια τῶν προσεγγιστικῶν ἀντιπροσώπων τους. **Μιὰ ἀνάπτυξη αὐτοῦ τοῦ θέματος ὑπερβαίνει τὶς δυνατότητες αὐτῆς τῆς τάξεως καὶ στὴν πράξη δὲν ἔχει σκοπιμότητα.** Γι' αὐτὸ περιοριζόμαστε μόνο νὰ δώσουμε ἕναν «τρόπο» γιὰ τὶς πράξεις καὶ τὴ διάταξη, ὁ ὁποῖος **ἐξυπηρετεῖ στὶς πρακτικὲς ἐφαρμογές.** Γιὰ νὰ κατανοηθεῖ αὐτὸς ὁ τρόπος παίρνουμε ἕνα παράδειγμα: Ἂς πάρουμε τοὺς ἀρρήτους $\alpha_1 = \sqrt{3}$, $\alpha_2 = \sqrt{2}$. Γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὴν ἔννοια **ἄθροισμα $\sqrt{3} + \sqrt{2}$,** παίρνουμε προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους τους **μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ δεκαδικῶν ψηφίων,** π.χ. τοὺς 1,73 καὶ 1,41, βρίσκουμε τὸ ἄθροισμα: $1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14$ καὶ λέμε ὅτι: **«ὁ 3,14 εἶναι ἕνας προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος τοῦ ἀθροίσματος $\alpha_1 + \alpha_2$».** Στὴν πράξη λέμε: **τὸ ἄθροισμα $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ εἶναι περίπου 3,14** καὶ γράφουμε: $\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 3{,}14$.

Μποροῦμε νὰ ἔχουμε προσέγγιση, ὅσο θέλουμε μεγαλύτερη, ἀρκεῖ νὰ παίρνουμε προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους μὲ περισσότερα, κάθε φορὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Γιὰ τὴ διάταξη, παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι εἶναι:

$1,7 > 1,41$

$1,73 > 1,41$ γι' αὐτὸ θὰ ποῦμε ὅτι: ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι μεγαλύτερος

$1,732 > 1,414$ τοῦ $\sqrt{2}$ καὶ θὰ συμβολίσουμε: $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.

Γ) Ἐκτὸς ἀπὸ ὅσα εἴπαμε πρέπει νὰ γνωρίζουμε καὶ τὰ ἑξῆς:

Στὸ σύνολο R ὁρίζονται μὲ αὐστηρότητα πράξεις: πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, ἀφαίρεση, διαίρεση· ὁρίζονται ἐπίσης οἱ ἔννοιες «μεγαλύτερος τοῦ» καὶ «μικρότερος τοῦ». **Οἱ πράξεις αὐτὲς καὶ οἱ ἀνισότητες (*) ἔχουν τὶς ἴδιες ἰδιότητες, ποὺ ἔχουν οἱ ὁμώνυμές τους πράξεις καὶ οἱ ἀνισότητες στὸ σύνολο Q, τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, καὶ εἰδικότερα, ὅταν ἀναφέρονται στοὺς ρητοὺς ἀριθμούς, «συμπίπτουν» μὲ τὶς ὁμώνυμες πράξεις καὶ ἀνισότητες τοῦ συνόλου Q.** Ἀναφέρουμε ἐδῶ αὐτὲς τὶς πράξεις καὶ ἀνισότητες μὲ τὶς ἰδιότητές τους.

1ο. Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση.

1α) Γιὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ κάθε $\beta \in R$ ὁρίζεται μονοσήμαντα ἕνας $\gamma \in R$, ποὺ ὀνομάζεται: **τὸ ἄθροισμα α σὺν β,** συμβολικά: $\alpha + \beta$.

1β) Ἡ πρόσθεση εἶναι **ἀντιμεταθετική:** $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

1γ) Ἡ πρόσθεση εἶναι **προσεταιριστική:** $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

1δ) Ἡ ἐξίσωση $x + \alpha = \beta$ ἔχει μιὰ καὶ μόνο λύση, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\beta - \alpha$ καὶ ὀνομάζεται: **διαφορὰ β πλὴν α.**

Ἡ πράξη εὑρέσεως τῆς διαφορᾶς ὀνομάζεται: **ἀφαίρεση.** Ειδικά: α) **ἡ πρόσθεση ἔχει ἕνα καὶ μόνον οὐδέτερο στοιχεῖο,** τὸν 0, $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ γιὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ β) γιὰ κάθε $\alpha \in R$ ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνο $\alpha' \in R$ μὲ $\alpha + \alpha' = 0$. Ὁ α' λέγεται: ὁ ἀντίθετος τοῦ α καὶ συμβολίζεται μὲ $-\alpha$. Δηλ. εἶναι:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0 \quad \forall\, \alpha \in R.$$

2ο. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση:

2α) Γιὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ κάθε $\beta \in R$ ὁρίζεται μονοσήμαντα ἕνας $\gamma \in R$, ποὺ ὀνομάζεται: **τὸ γινόμενο** α ἐπὶ β, συμβολικὰ $\alpha.\beta$. Ἡ πράξη εὑρέσεως τοῦ γινομένου λέγεται **πολλαπλασιασμός.**

2β) Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι **ἀντιμεταθετικός:** $\alpha.\beta = \beta.\alpha$.

2γ) Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι **προσεταιριστικός:**

$$\alpha.(\beta.\gamma) = (\alpha.\beta).\gamma$$

2δ) Ἡ ἐξίσωση $\alpha.x = \beta$, $\alpha \neq 0$ ἔχει μία καὶ μόνο λύση, ποὺ συμβολίζεται μὲ β: α εἴτε $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ὀνομάζεται **πηλίκο β διὰ α** εἴτε **κλάσμα β διὰ α** εἴτε **ὁ ἀντίστροφος τοῦ α**

Ἡ πράξη εὑρέσεως τοῦ πηλίκου ὀνομάζεται **διαίρεση.**

(*) Παριστάνουμε μὲ R^+ τὸ σύνολο τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μὲ R^- τὸ σύνολο τῶν ἀρνητικῶν. Δηλ. $R^- \cup \{0\} \cup R^+ = R$.

Εἰδικά: α) ὁ πολλαπλασιασμὸς ἔχει ἕνα καὶ μόνο **οὐδέτερο στοιχεῖο**, τὸν 1, $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ γιὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ β) γιὰ κάθε $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνο $\alpha' \in R$ μὲ $\alpha . \alpha' = 1$. Ὁ α' λέγεται: **ὁ ἀντίστροφος τοῦ α** καὶ συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{\alpha}$. Δηλ. εἶναι $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1 \ \forall \alpha \in R$.

2ο. Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

3ο. Ὁρίζονται ἐπίσης οἱ ἀνισότητες: **«μεγαλύτερος τοῦ»**, $\alpha > \beta$, καὶ **«μικρότερος τοῦ»**, $\alpha < \beta$, καὶ ἔχουν τὶς ἰδιότητες τῶν ὁμώνυμών τους ἀνισοτήτων στὸ σύνολο Q, τῶν σχετικῶν ρητῶν. Γιὰ κάθε $\alpha \in R$ καὶ $\beta \in R$ ἰσχύει μία καὶ μόνο ἀπὸ τὶς προτάσεις:

$$\text{i) } \alpha = \beta \qquad \text{ii) } \alpha > \beta \qquad \text{iii) } \alpha < \beta$$

4ο. Ἐπίσης στὸ R ὁρίζεται καὶ ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως.

Οἱ δυνάμεις ἔχουν κι ἐδῶ τὶς ἴδιες ἰδιότητες, ποὺ ἔχουν στὸ σύνολο Q, τῶν ρητῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Π.χ., ἂν x εἶναι κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός, ὁρίζεται τὸ τετράγωνό του $x^2 = x \cdot x$ (ἀπὸ ὁρισμὸ) καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

Δ) Ἔπειτα ἀπ' αὐτὲς τὶς παραδοχὲς μποροῦμε νὰ ἀποδείξουμε διάφορες προτάσεις, ὅπως π.χ.:

1) $\alpha . 0 = 0$, γιὰ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ α.

Ἀπόδειξη:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 0 &= \alpha \cdot 0 + 0 && \text{(γιατὶ τὸ 0 εἶναι οὐδέτερο στὴν πρόσθεση)}\\
&= \alpha \cdot 0 + \alpha + (-\alpha) && \text{(γιατὶ } \alpha + (-\alpha) = 0\text{)}\\
&= \alpha \cdot 0 + 1 \cdot \alpha + (-\alpha) && \text{(γιατὶ } 1\,\alpha = \alpha\text{)}\\
&= \alpha \cdot (0 + 1) + (-\alpha) && \text{(ἐπιμεριστικότητα πολ/σμοῦ)}\\
&= \alpha \cdot 1 + (-\alpha) && \text{(τὸ 0 οὐδέτερο στὴν πρόσθεση)}\\
&= \alpha + (-\alpha) && \text{(τὸ 1 οὐδέτερο στὸν πολ/σμό)}\\
&= 0 && \text{(παραδοχὴ ὑπάρξεως ἀντιθέτου γιὰ κάθε}\\
\text{Ὥστε } \alpha \cdot 0 &= 0 && \text{πραγματικὸ α).}
\end{aligned}$$

2) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha \quad (\forall\ \alpha \in R)$

Ἀπόδειξη:

$$\begin{aligned}
(-1) \cdot \alpha &= (-1) \cdot \alpha + 0\\
&= (-1) \cdot \alpha + \alpha + (-\alpha)\\
&= (-1) \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha + (-\alpha)\\
&= [(-1) + 1] \cdot \alpha + (-\alpha)\\
&= 0\,\alpha + (-\alpha)\\
&= 0 + (-\alpha)\\
&= -\alpha
\end{aligned}$$

Ὥστε: $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

3) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \quad \forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R$

'Απόδειξη:

i) $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$

Εἶναι $\alpha+\gamma=\alpha+\gamma$ (1) (ἀνακλαστικὴ ἰδιότητα ἰσότητας)

$\Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$ (ἀντικατάσταση τοῦ α στὸ δεύτερο μέλος τῆς (1) μὲ τὸ ἴσο του β ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ὅτι $\alpha=\beta$)

Ὥστε: $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$

ii) $\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$

Εἶναι: $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ (ἀπὸ τὴν ὑπόθεση)

$\Rightarrow (\alpha+\gamma)+(-\gamma)=(\beta+\gamma)+(-\gamma)$ (μονοσήμαντο τοῦ ἀθροίσματος)

$\Rightarrow \alpha+[\gamma+(-\gamma)]=\beta+[\gamma+(-\gamma)]$ (προσεταιρισμὸς)

$\Rightarrow \alpha+0=\beta+0$ (γιατὶ $\gamma+(-\gamma)=0$)

$\Rightarrow \alpha=\beta$ (γιατὶ τὸ 0 οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν πρόσθεση)

Ὥστε: $\alpha+\gamma=\beta+\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$

'Ισχύει λοιπὸν $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$

Παρατήρηση: Ἂν στὴν τελευταία αὐτὴ ἰσοδυναμία τεθεῖ ὅπου γ τὸ $-\gamma$, προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha-\gamma=\beta-\gamma$

4) $\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\beta\gamma}$ $(\beta, \gamma \in R,\ \beta\neq 0,\ \gamma\neq 0)$

'Απόδειξη:

Ἔχουμε διαδοχικά: $\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot(\beta\gamma)=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}\beta.\gamma=\frac{1}{\beta}\cdot\beta\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma=$

$$=\left(\frac{1}{\beta}\cdot\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{\gamma}\cdot\gamma\right)=1\cdot 1=1$$

'Αλλὰ καὶ $\frac{1}{\beta\gamma}\cdot(\beta\gamma)=1$

Ἄρα ἰσχύει $\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\beta\gamma}$

(Νὰ ἐξηγηθοῦν τὰ βήματα τῆς ἀποδείξεως ἀπὸ τοὺς μαθητὲς μὲ τὴ βοήθεια τοῦ καθηγητῆ τους).

5) $(\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma) \Rightarrow \alpha>\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$

'Απόδειξη:

$(\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma) \Rightarrow (\alpha-\beta>0$ καὶ $\beta-\gamma>0) \Rightarrow (\alpha-\beta+\beta-\gamma>0)$ $\Rightarrow \alpha-\gamma>0 \Rightarrow \alpha>\gamma$.

6) $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$

'Απόδειξη:

$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta>0 \Leftrightarrow \alpha-\beta+\gamma+(-\gamma)>0 \Leftrightarrow (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)>0 \Rightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

7) $(\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>0) \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R,\ \gamma>0)$

Ἀπόδειξη:

i) $(\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > 0) \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$

Ἔχουμε διαδοχικά: $(\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > 0) \Rightarrow (\alpha - \beta > 0$ καὶ $\gamma > 0) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha - \beta)\cdot\gamma > 0 \Rightarrow \alpha\gamma - \beta\gamma > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.

ii) $(\alpha\gamma > \beta\gamma$ καὶ $\gamma > 0) \Rightarrow \alpha > \beta$

Ἔχουμε διαδοχικά: $(\alpha\gamma > \beta\gamma$ καὶ $\gamma > 0) \Rightarrow (\alpha\gamma - \beta\gamma > 0$ καὶ $\frac{1}{\gamma} > 0)$

$$\Rightarrow (\alpha\gamma - \beta\gamma)\cdot\frac{1}{\gamma} > 0$$
$$\Rightarrow \alpha\gamma\cdot\frac{1}{\gamma} - \beta\gamma\cdot\frac{1}{\gamma} > 0$$
$$\Rightarrow \alpha\left(\gamma\cdot\frac{1}{\gamma}\right) - \beta\left(\gamma\cdot\frac{1}{\gamma}\right) > 0$$
$$\Rightarrow \alpha\cdot 1 - \beta\cdot 1 > 0$$
$$\Rightarrow \alpha - \beta > 0$$
$$\Rightarrow \alpha > \beta$$

Ὥστε ἰσχύει: $(\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > 0) \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$.

(Νὰ ἐξηγηθοῦν τὰ βήματα τῆς ἀποδείξεως ἀπὸ τοὺς μαθητὲς μὲ τὴ βοήθεια τοῦ καθηγητῆ τους).

8) $(\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < 0) \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R}$

Ἀπόδειξη:

Ἀφοῦ $\gamma < 0$, θὰ εἶναι $-\gamma > 0$ καὶ σύμφωνα μὲ τὴν (7) θὰ εἶναι:

$(\alpha > \beta$ καὶ $-\gamma > 0) \Leftrightarrow \alpha(-\gamma) > \beta(-\gamma) \Leftrightarrow -\alpha\gamma > -\beta\gamma$

$\Leftrightarrow -\alpha\gamma - (-\beta\gamma) > 0 \Leftrightarrow -\alpha\gamma + \beta\gamma > 0 \Leftrightarrow$

$\beta\gamma - \alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta\gamma > \alpha\gamma \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$.

Ἐφαρμογή: $\alpha > \beta \Leftrightarrow -\alpha < -\beta \Leftrightarrow \kappa - \alpha < \kappa - \beta$

9) Εὔκολα μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν καὶ οἱ παρακάτω χρήσιμες προτάσεις, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{R}$:

α) $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$

β) $(\alpha\gamma = \beta\gamma$ καὶ $\gamma \neq 0) \Rightarrow \alpha = \beta$

γ) $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$

δ) $(\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$

ε) $(\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta) \Rightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$

στ) $(\alpha > \beta$ καὶ $k > 0) \Rightarrow \frac{\alpha}{\kappa} > \frac{\beta}{\kappa}$

ζ) $(\alpha > \beta$ καὶ $k < 0) \Rightarrow \frac{\alpha}{\kappa} < \frac{\beta}{\kappa}$

η) $\alpha > \beta > 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$

θ) $(\alpha > \beta \geqslant 0$ καὶ $\gamma > \delta \geqq 0) \Rightarrow \alpha\gamma > \beta\delta$

ι) $\alpha > \beta \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2$, $(\alpha < 0,\ \beta < 0$ καὶ $\alpha > \beta) \Rightarrow \alpha^2 < \beta^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

101) Παρατηρῆστε τὸν ἀπειροψήφιο δεκαδικό:

$$\alpha = 0{,}20200200020000200002\ldots,$$

ὅπου εἶναι φανερὸς ὁ τρόπος, μὲ τὸν ὁποῖο προχωροῦμε στὴν ἀναγραφὴ τῶν δεκαδικῶν ψηφίων του. Τί ἀριθμὸς εἶναι ὁ α; Δικαιολογῆστε τὴν ἀπάντησή σας.

102) Ὁ ἀριθμὸς $x = 0{,}101001000100001\ldots$ εἶναι ἀσύμμετρος. Μπορεῖτε νὰ ὁρίσετε ἕναν ἀριθμὸ ψ τέτοιον, ὥστε $x+\psi$ νὰ εἶναι ρητός;

103) Νὰ ἐργασθεῖτε ὅπως στὴν 43, Δ γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι $(-1).(-1) = 1$.

104) Νὰ ἀποδείξετε, στηριζόμενοι στὰ προηγούμενα, ὅτι ἂν $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, τότε:

α) $-(-\alpha) = \alpha$

β) $(-\alpha).\beta = -(\alpha\beta)$

γ) $\alpha.(-\beta) = -(\alpha\beta)$

δ) $(-\alpha).(-\beta) = \alpha\beta$

ε) $-(\alpha+\beta) = (-\alpha)+(-\beta)$

105) Εἴδαμε στὴν 43, Γ ὅτι, ὅπως ἀποδεικνύεται, ἡ ἐξίσωση $\alpha x = \beta$, ὅπου $\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta \in \mathrm{R}$ καὶ $\beta \neq 0$, ἔχει μία μοναδικὴ λύση, ποὺ συμβολίζεται μὲ β: α ἢ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ὀνομάζεται: τὸ πηλίκο $\frac{\beta}{\alpha}$. Θὰ εἶναι ἑπομένως $\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha} = \beta$. Ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενο $\beta.\frac{1}{\alpha}$ ὅταν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ α δίνει: $\left(\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\alpha = \beta\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha\right) = \beta\cdot 1 = \beta$. Ἄρα ἰσχύει $\frac{\beta}{\alpha} = \beta\cdot\frac{1}{\alpha}$.

Νὰ χρησιμοποιήσετε τὴν τελευταία αὐτὴ ἰσότητα καὶ τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῶν πράξεων, γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$, ὅπου $\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta \in \mathrm{R}$, $\gamma \in \mathrm{R}$, $\beta \neq 0$.

β) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$, ὅπου $\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta \in \mathrm{R}$, $\gamma \in \mathrm{R}$, $\delta \in \mathrm{R}$ καὶ $\beta \neq 0$, $\delta \neq 0$.

γ) $(\alpha = \beta$ καὶ $\gamma \neq 0) \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ $\quad(\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{R})$

δ) $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma}$ $\quad(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{R}, \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0)$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

44. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΒΑΣΗ ΡΗΤΟ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ.

Α) Στὴ β΄ τάξη μάθαμε γιὰ τὶς δυνάμεις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μὲ ἐκθέτες ἀκεραίους θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς καὶ τὶς ἰδιότητές τους.

Ὑπενθυμίζουμε ἐδῶ μὲ συντομία τὶς ἰδιότητες αὐτές:

1) $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

2) $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

3) $(\alpha\cdot\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu}\cdot\beta^{\mu}$

4) $\dfrac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$, ὅπου $\alpha \neq 0$

5) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \dfrac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$, ὅπου $\beta \neq 0$

Ὁρίσαμε ὅτι $\alpha^0 = 1$, γιὰ κάθε ρητὸ $\alpha \neq 0$.

Ὁρίσαμε ἐπίσης ὅτι $\alpha^{-\mu} = \dfrac{1}{\alpha^{\mu}}$ γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο μ καὶ κάθε ρητὸ $\alpha \neq 0$.

Παραδείγματα: 1ο. Νὰ ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση $(\alpha^{-3}\cdot\beta^2)^{-2}$. Ἔχουμε:

$(\alpha^{-3}\cdot\beta^2)^{-2} = (\alpha^{-3})^{-2}\cdot(\beta^2)^{-2}$ (ἀπὸ τὴν ἰδιότητα 3)

$= \alpha^6\cdot\beta^{-4}$ (ἀπὸ τὴν ἰδιότητα 2)

$= \alpha^6\cdot\dfrac{1}{\beta^4}$ $\left(\text{ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ } \alpha^{-\mu} = \dfrac{1}{\alpha^{\mu}}\right)$

$= \dfrac{\alpha^6}{\beta^4}$

2ο. Νὰ ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση: $\left(\dfrac{5x^3\psi^4}{2x^{-2}}\right)^{-2}$

Ἔχουμε:

$$\left(\frac{5x^3\psi^4}{2x^{-2}}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\dfrac{5x^3\psi^4}{2x^{-2}}\right)^2} \qquad \left(\text{ὁρισμὸς τοῦ } \alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}\right)$$

$$= \frac{1}{\dfrac{(5x^3\psi^4)^2}{(2x^{-2})^2}} \qquad (\text{ἀπὸ τὴν ἰδιότητα 5})$$

$$= \frac{(2x^{-2})^2}{(5x^3\psi^4)^2} \quad \text{(τροπὴ τοῦ σύνθετου κλάσματος σὲ ἁπλό)}$$

$$= \frac{2^2(x^{-2})^2}{5^2(x^3)^2(\psi^4)^2} \quad \text{(λόγω τῆς ἰδιότητας 3)}$$

$$= \frac{4x^{-4}}{25x^6\psi^8} \quad \text{(λόγω τῆς ἰδιότητας 2)}$$

$$= \frac{4}{25x^6\psi^8} \cdot \frac{1}{x^4} \quad \left(\text{ἐπειδὴ } x^{-\mu} = \frac{1}{x^\mu}\right)$$

$$= \frac{4}{25x^{10}\psi^8} \quad \text{(λόγω τῆς ἰδιότητας 1)}$$

Β) Στὰ προηγούμενα (§ 43, Γ) εἴδαμε ὅτι ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως μὲ ἐκθέτη ἀκέραιο θετικό, ἀρνητικὸ ἢ μηδὲν καὶ μὲ βάση κάποιον πραγματικὸ ἀριθμὸ (ἑπομένως καὶ ἄρρητο) ὁρίζεται ὅπως ἀκριβῶς ὅταν ἡ βάση εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς καὶ οἱ γνωστές μας ἰδιότητες ἰσχύουν ἐπίσης καὶ γι' αὐτὲς τὶς δυνάμεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

106) Νὰ ἁπλοποιήσετε τὶς παρακάτω ἐκφράσεις, στὶς ὁποῖες ὑποτίθεται ὅτι, ὅπου ὑπάρχει μεταβλητὴ στὸν παρονομαστή, παίρνει πραγματικὲς τιμὲς διαφορετικὲς ἀπὸ τὸ μηδέν. Νὰ δώσετε τελικὲς ἐκφράσεις χωρὶς ἀρνητικοὺς ἐκθέτες:

α) $\alpha^3 \cdot 5^3 \cdot 5$ β) $(-5x^2\psi)^2$ γ) $\frac{x^{-2}}{x^{-5}}$

δ) $\frac{(x^{-3})^2 \cdot x^5}{x^{-1}}$ ε) $(-2x^{-4})^2$ ζ) $\frac{2x^{-3}}{3\psi^{-2}}$

ζ) $(\alpha^{-2}\beta)^4$ η) $(\alpha^4 \cdot \alpha^{-4})^4$ θ) $\frac{x^0}{\psi^{-2}}$

ι) $\frac{3^4}{2^3+2^0}$ ια) $0^1 \cdot 1^0$ ιβ) $\frac{2^{-2}+3^{-3}}{4^{-2}-9^{-1}}$

107) Νὰ ἐκφράσετε κάθε ἀριθμὸ σὰν δύναμη τοῦ 2 καὶ ἔπειτα νὰ ἁπλοποιήσετε:

α) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 64\right]^{-3} \cdot 32^{-2}$ β) $\frac{32^4 - 16^3}{8^5 + 4^6}$

45. ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Α) Εἴδαμε στὰ προηγούμενα ὅτι μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν κάθε θετικὸς ρητὸς εἶναι τετράγωνο ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Εἴδαμε ἐπίσης ὅτι κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα μπορεῖ νὰ μετρηθεῖ καὶ νὰ παρασταθεῖ ἀπὸ πραγματικὸ ἀριθμό.

Ἀποδεικνύεται ὅτι: γιὰ κάθε πραγματικὸ **θετικὸ** ἀριθμὸ β καὶ γιὰ κάθε φυσικὸ ν ὑπάρχει ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς θετικός, ἔστω α, μὲ τὴν ἰδιότητα: ἡ νυοστὴ δύναμη τοῦ α νὰ εἶναι ὁ β, δηλαδὴ μὲ τὴν ἰδιότητα:

$$\alpha^\nu = \beta \qquad (1)$$

Ὁ μοναδικὸς αὐτὸς πραγματικὸς θετικὸς ἀριθμὸς α λέγεται: **νυοστὴ ρίζα** τοῦ β καὶ συμβολίζεται $\sqrt[\nu]{\beta}$, δηλαδὴ εἶναι ἀπὸ ὁρισμό: $\alpha = \sqrt[\nu]{\beta}$ (2)

Οἱ συμβολισμοὶ λοιπὸν (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Δηλ. ἰσχύει:

$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta$ (γιὰ κάθε θετικὸ β καὶ ν φυσικό). Ὁρίζουμε ἐπίσης: $\sqrt[\nu]{0} = 0$ γιὰ κάθε $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

Στὸ συμβολισμὸ $\sqrt[\nu]{\beta}$, τὸ $\sqrt[\nu]{}$ λέγεται **ριζικό,** ὁ ν λέγεται **δείκτης** τῆς **ρίζας** καὶ ὁ β **ὑπόρριζο.** Ὁ δείκτης 2 δὲ γράφεται, ἀλλὰ ὑπονοεῖται.

Συμβατικὰ ὁρίζουμε: $\sqrt[1]{\beta} = \beta$

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα λέγεται καὶ **ρίζα δευτέρας τάξεως,** ἡ τρίτη λέγεται καὶ **κυβικὴ ρίζα** ἢ **ρίζα τρίτης τάξεως,** ἡ τέταρτη ρίζα λέγεται ρίζα **τετάρτης τάξεως** κ.τ.λ.

Παραδείγματα:

1ο. $\sqrt[3]{8} = 2$, γιατὶ $2^3 = 8$

2ο. $\sqrt[4]{81} = 3$, γιατὶ $3^4 = 81$

3ο. $\sqrt[5]{243} = 3$, γιατὶ $3^5 = 243$ κ.ο.κ.

Β) Ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι: γιὰ κάθε πραγματικὸ ἀρνητικὸ ἀριθμὸ β καὶ γιὰ κάθε **περιττὸ** φυσικὸ ν ὑπάρχει ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς **ἀρνητικὸς** ἀριθμὸς α, ὥστε νὰ ἰσχύει:

$$\alpha^\nu = \beta \qquad (1')$$

Ὁ μοναδικὸς αὐτὸς πραγματικὸς ἀρνητικὸς α λέγεται ἐπίσης: νυοστὴ ρίζα τοῦ β καὶ συμβολίζεται πάλι μέ: $\sqrt[\nu]{\beta}$. Δηλ. εἶναι:

$$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \qquad (2')$$

Ὥστε καὶ πάλι εἶναι:

$\alpha = \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta$ (γιὰ κάθε $\beta < 0$ καὶ ν φυσικὸ περιττὸ)

Παραδείγματα:

1ο) $\sqrt[3]{-8} = -2$, γιατὶ $(-2)^3 = -8$

2ο) $\sqrt[5]{-243} = -3$, γιατὶ $(-3)^5 = -243$

3ο) $\sqrt[7]{-128} = -2$, γιατὶ $(-2)^7 = -128$ κ.ο.κ.

Γ) Εἶναι φανερὸ ὅτι $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$, ὅταν ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ὁρίζεται σύμφωνα μὲ ὅσα εἴπαμε παραπάνω.

Εἶναι π.χ. $\left(\sqrt[3]{-8}\right)^3 = -8$, $\left(\sqrt[4]{81}\right)^4 = 81$ κ.τ.λ.

Παρατήρηση 1η. Ὁρίσαμε προηγουμένως τὴ σημασία τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ 1) ὅταν $\alpha > 0$ καὶ ν ἕνας φυσικὸς καὶ

2) ὅταν $\alpha < 0$ καὶ ν ἕνας περιττὸς φυσικός.

Ἑπομένως σύμβολα ὅπως τὰ $\sqrt[4]{-10}$, $\sqrt{-16}$, $\sqrt[8]{-10}$ κ.τ.λ. δὲν ὁρίσαμε.

Ὁ λόγος εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ἡ ἐξίσωση $x^\nu = \alpha$, ἂν εἶναι $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος φυσικός, δὲν ἔχει κάποια λύση στὸ σύνολο R.

Ἡ ἐξίσωση, π.χ., $x^2 = -6$, γιὰ κανένα $x \in \mathrm{R}$ δὲν ἐπαληθεύεται. Ὥστε ἡ παράσταση $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δὲν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, μόνο ἐὰν εἶναι $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος φυσικός. Σὲ κάθε ἄλλη περίπτωση ἔχει ἔννοια.

Παρατήρηση 2η. Σύμφωνα μὲ τὰ προηγούμενα, ἂν ἡ παράσταση $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἔχει ἔννοια, ἰσχύει:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$$

Αὐτὸ δὲν ἰσχύει μόνο, ἐὰν εἶναι $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος φυσικός.

Ἡ παράσταση ὅμως $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$ ἔχει ἔννοια πάντοτε (ἀκόμα καὶ ὅταν $\alpha < 0$ καὶ ν ἄρτιος) καὶ μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε ὅτι εἰδικὰ γιὰ $\alpha<0$ καὶ ν ἄρτιο εἶναι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = -\alpha = |\alpha|$$

Π.χ. $\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{2^4} = 2 = -(-2) = |-2|$, $\sqrt{(-4)^2} = \sqrt{4^2} = 4 = |-4|$.

Ὥστε: ὅταν ν εἶναι ἄρτιος φυσικὸς καὶ α ἕνας πραγματικός, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$$

Στὴν τετάρτη τάξη θὰ μάθουμε γενικὰ γιὰ τὶς ρίζες τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὶς ἰδιότητές τους.

Τώρα θὰ περιορισθοῦμε στὰ ριζικὰ δευτέρας τάξεως.

46. ΡΙΖΙΚΑ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ.

Α) Εἴπαμε παραπάνω ὅτι $\sqrt{x^2} = |x|$

Ἀναλυτικότερα μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = x \\ x < 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = -x \end{array}\right\}$$

π.χ. $\sqrt{(-5)^2} = 5$, $\sqrt{5^2} = 5$

Ἐπίσης $\sqrt{(3-x)^2} = |3-x|$. Ἑπομένως:

ἂν $3 - x \geqslant 0$, δηλ. ἂν $x \leqslant 3$, τότε $\sqrt{(3-x)^2} = 3 - x$,

ἂν $3 - x < 0$, δηλ. ἂν $x > 3$, τότε $\sqrt{(3-x)^2} = -(3-x) = x - 3$.

Β) Γινόμενο δύο ριζῶν. Ἔστω ὅτι ζητοῦμε τὸ γινόμενο $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, ὅπου α, β θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί. Γνωρίζουμε ὅτι τὸ γινόμενο αὐτὸ ὑπάρχει (§ 43, Γ καὶ § 45).

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $\sqrt{\alpha} = x$ καὶ $\sqrt{\beta} = \psi$. Σχηματίζουμε τὸ γινόμενο $x\psi = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \alpha \\ \psi = \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \psi^2 = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow x^2\psi^2 = \alpha\beta, \text{ δηλ. } (x\psi)^2 = \alpha\beta$$

Ἀλλὰ $(x\psi)^2 = \alpha\beta \Leftrightarrow x\psi = \sqrt{\alpha\beta}$, δηλαδή:

$$\boxed{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}} \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότητα (1) λέει ὅτι: **γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε δύο ρίζες δευτέρας τάξεως ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσουμε τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγουμε τὴ ρίζα τῆς δυετέρας τάξεως.**

Π.χ. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{4} = \sqrt{12}$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

Ἡ ἰσότητα (1) γράφεται καί:

$$\boxed{\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}} \qquad (2)$$

Δηλαδή: **γιὰ νὰ ἐξαγάγουμε τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς γινομένου ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγουμε τὴ ρίζα κάθε παράγοντα καὶ νὰ πολλαπλασιάσουμε τὰ ἐξαγόμενα.**

Π.χ. $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$.

καὶ γενικότερα $\sqrt{\alpha^2\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}$.

Π.χ. $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{45}$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{15} = \sqrt{75} = \sqrt{25\cdot 3} = 5\sqrt{3}$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ ἐπεκτείνουμε τὸν προηγούμενο κανόνα καὶ γιὰ περισσότερα ριζικά.

Π.χ. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{6}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$.

Γ) Πηλίκο δύο ριζῶν. Ἔστω ὅτι ζητοῦμε τὸ $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$, ὅπου α, β θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί. Γνωρίζουμε ὅτι τὸ πηλίκο αὐτὸ ὑπάρχει καὶ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἔστω λοιπὸν ὅτι $\sqrt{\alpha} = x$ καὶ $\sqrt{\beta} = \psi$. Σχηματίζουμε τὸ πηλίκο $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \dfrac{x}{\psi}$. Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι:

$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x^2 = \alpha \\ \psi = \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \psi^2 = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{\psi^2} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ δηλαδὴ } \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ἀλλὰ $\left(\dfrac{x}{\psi}\right)^2 = \dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\psi} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, δηλαδή,

$$\boxed{\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \qquad (3)$$

Ἡ ἰσότητα (3) λέει ὅτι:

Γιὰ νὰ διαιρέσουμε δύο ρίζες δευτέρας τάξεως ἀρκεῖ νὰ διαιρέσουμε τὸ ὑπόρριζο τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὑπορρίζου τοῦ διαιρέτη καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγουμε τὴ ρίζα δευτέρας τάξεως.

Π.χ. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2,\ \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{3}{48}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

Ἡ ἰσότητα (3) γράφεται καί:

$$\boxed{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}} \qquad (4)$$

καὶ λέει ὅτι:

Γιὰ νὰ ἐξαγάγουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ διαιρετέου καὶ νὰ τὴ διαιρέσουμε μὲ τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ διαιρέτη.

Π.χ. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3},\quad \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Δ) Ἂν ἔχουμε ἀλγεβρικὸ κλάσμα μὲ ὄχι ρητὸ παρονομαστή, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἰσοδύναμο κλάσμα μὲ ρητὸ παρονομαστή, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω παραδείγματα:

1ο. $\frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

2ο. $\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

108) Νὰ συμπτύξετε τὰ παρακάτω ἀθροίσματα (ὅπου εἶναι δυνατόν):

α) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + \sqrt{2}$ β) $2\sqrt{3} + \sqrt{12}$ γ) $\sqrt{3} + \sqrt{27}$

δ) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$ ε) $\sqrt{6} + \sqrt{24} + \sqrt{54} - 2\sqrt{6}$

σ) $\sqrt{8} + \sqrt{50} - \sqrt{98}$ ζ) $\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$

109) Νὰ βρεῖτε τὰ γινόμενα:

α) $\sqrt{375}\cdot\sqrt{48}\cdot\sqrt{405}$ β) $\sqrt{275}\cdot\sqrt{135}\cdot\sqrt{165}$ γ) $\sqrt{3\alpha}\cdot\sqrt{12\alpha}$

δ) $(5-\sqrt{2})\cdot(5+\sqrt{2})$ ε) $(\sqrt{2}-1)\cdot(2-\sqrt{2})$ ζ) $(\sqrt{5}-1)^2$

110) Νὰ ὑπολογίσετε κατὰ προσέγγιση 1/100 τὰ παρακάτω:

α) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ β) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$ γ) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ δ) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

111) Νὰ βρεῖτε γιὰ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω κλάσματα ἰσοδύναμό του μὲ ρητὸ παρονομαστή:

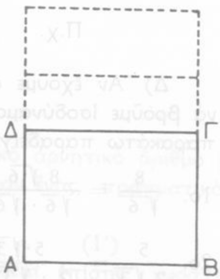
α) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ β) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ γ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ δ) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ ε) $\frac{5}{2\sqrt{2}}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

47. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Α) Ἐξετάζουμε τὸ σύνολο τῶν ὀρθογωνίων παραλληλογράμμων, ποὺ ἔχουν βάση τὸ ὁρισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (σχ. 47–1). Τὸ τῆμα αὐτὸ ΑΒ ὑποθέτουμε ὅτι ἔχει μῆκος 4, ἂν μετρηθεῖ μὲ κάποια ὁρισμένη μονάδα. Ἕνα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια αὐτά, ὅπως τὸ ΑΒΓΔ ἔχει ὕψος ΒΓ, ποὺ μὲ τὴν ἴδια μονάδα, ποὺ μετρήσαμε τὴ βάση, ἔχει μῆκος (ΒΓ) = υ. Καθὼς ξέρουμε, τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι: (ΑΒΓΔ) = 4·υ (τετραγ. μονάδες). Σ' αὐτὴ τὴν ἔκφραση τοῦ ἐμβαδοῦ 4υ τὸ γράμμα υ μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμός. Λέμε ὅτι τὸ υ εἶναι μιὰ **«μεταβλητή»**. Τὸ υ παίρνει τιμὲς στὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν R^+. Οἱ θετικοὶ ἀριθμοί, μὲ τοὺς ὁποίους ἀντικαθιστοῦμε τὸ υ στὴν ἔκφραση 4υ, λέγονται **τιμὲς τῆς μεταβλητῆς υ**.



Σχ. 47 - 1

Ἂν τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ εἶναι α, τότε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ΑΒΓΔ θὰ εἶναι: (ΑΒΓΔ) = α·υ.

Ἡ ἔκφραση αυ περιέχει δύο γράμματα. Ἀπὸ τὰ γράμματα αὐτά, στὴν περίπτωση ποὺ ἐξετάζουμε, τὸ α παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ ὁρισμένου τμήματος ΑΒ καὶ συνεπῶς εἶναι ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός, ὁ ἴδιος γιὰ ὅλα τὰ ὀρθογώνια μὲ βάση ΑΒ. Τὸ ἄλλο γράμμα υ εἶναι μιὰ μεταβλητὴ καὶ σὲ κάθε τιμὴ της ἀντιστοιχίζεται ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο καὶ τὸ ἐμβαδό του. Μὲ τὶς συμφωνίες αὐτὲς στὴν ἔκφραση αυ τὸ α εἶναι μιὰ **«σταθερὰ»** καὶ τὸ υ μιὰ **«μεταβλητή»**.

Β) Ὑποθέτουμε ὅτι στὴν ἔκφραση $-3\omega^2 + 2\varphi - 5$ τὰ γράμματα ω καὶ φ παίρνουν τιμὲς στὸ σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Σὲ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (ω_0, φ_0) τιμῶν τῶν γραμμάτων ω καὶ φ ἀντιστοιχίζεται μία, καὶ μόνο μία, τιμὴ τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς.

Π.χ. ἂν $\omega = -2$ καὶ $\varphi = 10$, ἡ ἔκφραση παίρνει τὴν τιμή:

$$-3\cdot(-2)^2+2\cdot10-5=-3\cdot4+2\cdot10-5=-12+20-5=3.$$

Τὰ ω καὶ φ εἶναι οἱ μεταβλητὲς στὴν ἔκφραση $-3\omega^2+2\varphi-5$.

48. Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Βλέπουμε ὅτι στὶς ἐκφράσεις:

$$4\upsilon,\quad \alpha\upsilon,\quad 2\pi\rho,\quad \pi\rho^2,\quad \pi x^2 y,\quad 2\pi\alpha(\alpha+y),\quad -3\omega^2+2\varphi-5$$

περιέχονται ὁρισμένοι ἀριθμοὶ καὶ γράμματα. Συμφωνοῦμε τὰ γράμματα νὰ παίρνουν διάφορες ἀριθμητικὲς τιμὲς ἢ καὶ νὰ μένουν σταθερά, ὅπως τὸ $\pi=3,14$... Οἱ ἀριθμοὶ καὶ τὰ γράμματα σὲ κάθε μιὰ ἔκφραση ἀπὸ αὐτὲς **συνδέονται** μεταξύ τους **μὲ τὰ γνωστὰ σύμβολα τῶν πράξεων**.

Κάθε μιὰ τέτοια ἔκφραση ὀνομάζεται **ἀλγεβρικὴ παράσταση**.

Σὲ μιὰ ἀλγεβρικὴ παράσταση, ὅταν ἀντικαταστήσουμε τὰ γράμματα μὲ ἀριθμητικὲς τιμὲς καὶ ἐκτελέσουμε τὶς πράξεις, ποὺ σημειώνονται σ' αὐτή, θὰ βρεθεῖ τελικὰ σὰν ἀποτέλεσμα ἕνας ἀριθμός. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς λέγεται **ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως** γιὰ τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν μεταβλητῶν της.

(Τί εἶναι λοιπὸν **ἀλγεβρικὴ παράσταση** καὶ τί **ἀριθμητικὴ τιμὴ της**;)

Ἡ Ἄλγεβρα θὰ μᾶς διδάξει ποιὰ εἶναι τὰ εἴδη τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, μὲ ποιὸν τρόπο βρίσκεται ἡ ἀριθμητική τους τιμὴ καὶ πῶς θὰ ἐκτελοῦμε πράξεις μὲ ἀλγεβρικὲς παραστάσεις.

49. ΑΚΕΡΑΙΟ ΜΟΝΩΝΥΜΟ

Α) Ὁρισμός. Κάθε παράσταση, ποὺ περιέχει γράμματα μὲ ἐκθέτες φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ποὺ σ' αὐτὰ ἔχει σημειωθεῖ μόνο πολλαπλασιασμός, λέγεται ἀκέραιο μονώνυμο ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

Π.χ. οἱ ἀλγεβρικὲς παραστάσεις

$$4\upsilon,\quad \alpha\upsilon,\quad 2\pi\rho,\quad \pi x^2 y,\quad -3\omega^2\varphi,\quad 7\alpha\beta\gamma^2,\quad -\frac{2}{3}x\psi\omega^3$$

εἶναι **ἀκέραια μονώνυμα** ὡς πρὸς τὰ γράμματα ποὺ περιέχουν.

Ἡ παράσταση $\frac{2}{\alpha}x^3y$ εἶναι ἀκέραιο μονώνυμο, ἂν τὸ α εἶναι σταθερὰ ($\neq0$). Ἂν τὸ α εἶναι μεταβλητή, τότε ἡ παράσταση αὐτὴ δὲν εἶναι ἀκέραιο μονώνυμο (ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω στὸ 47, Δ, εἶναι μονώνυμο κλασματικό).

Ἡ παράσταση $(\lambda-3)\alpha^2\beta$, ὅταν τὸ λ εἶναι σταθερά, εἶναι ἀκέραιο μονώνυμο τῶν α καὶ β, ἂν ὅμως τὸ λ εἶναι μεταβλητή, τότε δὲν εἶναι ἡ παράσταση αὐτὴ ἀκέραιο μονώνυμο.

Σὲ κάθε μονώνυμο ἐφαρμόζονται οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τοῦ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ καὶ τῶν ΔΥΝΑΜΕΩΝ.

Λ.χ. τὸ μονώνυμο $A=5x^3(-2)y^2(-3)x\omega$ τῶν x, y, ω γράφεται: $A=5\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^3\cdot x\cdot y^2\cdot\omega$ (γιατί;) ἢ καὶ $A=30x^4y^2\omega$ (γιατί;).

Ἡ μορφὴ $A = 30x^4y^2\omega$ λέγεται **τελικὴ μορφὴ** τοῦ μονωνύμου Α.

Κάθε μονώνυμο θὰ παίρνεται μὲ τὴν τελική του μορφή.

Κάθε μονώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς x ἔχει τελικὴ μορφὴ αx^μ, ὅπου τὸ α εἶναι σταθερὰ καὶ $\mu \in N$ (N = τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν).

Κάθε μονώνυμο δύο μεταβλητῶν x καὶ y ἔχει τελικὴ μορφὴ $\alpha x^\mu y^\nu$, ὅπου α = σταθερὰ καὶ $\mu \in N$ καὶ $\nu \in N$.

Μποροῦμε εὔκολα νὰ ἐπεκταθοῦμε γιὰ τὴν τελικὴ μορφὴ μονωνύμου τριῶν, τεσσάρων κλπ. μεταβλητῶν.

Β) Συντελεστὴς καὶ κύριο ποσὸ μονωνύμου. Σὲ κάθε μονώνυμο ὁ ἀριθμητικὸς παράγοντας θὰ λέγεται συντελεστής του. Οἱ μεταβλητὲς μὲ τοὺς ἐκθέτες τους ἀποτελοῦν τὸ ἐγγράμματο μέρος τοῦ μονωνύμου. Τὸ μέρος αὐτὸ λέγεται κύριο ποσὸ τοῦ μονωνύμου.

Π.χ. τοῦ μονωνύμου $-\frac{4}{3}x^3y$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $-\frac{4}{3}$ καὶ κύριο ποσὸ τὸ x^3y.

Τοῦ $\omega\varphi^2$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $+1$ (οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) καὶ κύριο ποσὸ τὸ $\omega\varphi^2$, ἐνῶ τοῦ $-x^4$ συντελεστὴς εἶναι ὁ -1, γιατὶ $-x^4 = (-1)\cdot x^4$ καὶ κύριο ποσὸ τὸ x^4.

Ἂν εἶναι λ = σταθερὰ ($\neq 0$), τότε τοῦ μονωνύμου $\frac{2}{\lambda}\alpha^3\beta$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $\frac{2}{\lambda}$ καὶ κύριο ποσὸ τὸ $\alpha^3\beta$.

Ἂν εἶναι λ = σταθερά, τοῦ μονωνύμου $(\lambda-1)x^2y\omega^3$ συντελεστὴς εἶναι ὁ $(\lambda-1)$ καὶ κύριο ποσὸ τὸ $x^2y\omega^3$.

Γ) Βαθμὸς μονωνύμου. Βαθμὸς μονωνύμου ὡς πρὸς μία του μεταβλητὴ λέγεται ὁ ἐκθέτης, ποὺ ἔχει ἡ μεταβλητὴ αὐτὴ στὸ μονώνυμο· ὡς πρὸς περισσότερες μεταβλητές του λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, ποὺ ἔχουν αὐτὲς στὸ μονώνυμο.

Λ.χ. τὸ $-7x^4y^2\omega$ εἶναι τέταρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, δεύτερου ὡς πρὸς y, πρώτου ὡς πρὸς ω, ἕκτου ὡς πρὸς x καὶ y, ἕβδομου ὡς πρὸς x, y, ω κλπ.

Ἐπειδὴ εἶναι $x^0 = 1$, ὅταν $x \neq 0$, κάθε σταθερὰ γράφεται μὲ μορφὴ μονωνύμου μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς μιὰ ἢ καὶ περισσότερες μεταβλητές, ὅπως λ.χ. $7 = 7x^0$, $-3 = -3x^0y^0$.

Κάθε μονώνυμο εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς κάθε μεταβλητή, ποὺ δὲν τὴν περιέχει. Λ.χ. τὸ $-2\alpha^3x^2$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴ μεταβλητὴ y, γιατὶ γράφεται: $-2\alpha^3x^2y^0$.

Τὸ μονώνυμο αx^μ, ὅταν εἶναι $\alpha = 0$, λέγεται **μηδενικὸ μονώνυμο**. Τὸ μηδενικὸ μονώνυμο μπορεῖ νὰ ἔχει ὁσεσδήποτε μεταβλητὲς καὶ μὲ κάθε βαθμό.

Τὰ μονώνυμα x καὶ $-x$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴ μεταβλητὴ x κι ἔχουν ἀντίστοιχα συντελεστὴ τὸν $+1$ καὶ -1.

Δ) Κλασματικὸ μονώνυμο. Κάθε ἀλγεβρικὴ παράσταση στῆς ὁποίας τὶς μεταβλητὲς ἔχει σημειωθεῖ μόνο πολλαπλασιασμός, ἀλλὰ μερικοὶ (ἢ καὶ ὅλοι) ἀπὸ τοὺς ἐκθέτες τους εἶναι ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι, λέγεται κλασματικὸ μονώνυμο.

Λ.χ. ἡ παράσταση $2\alpha^3\beta^{-2}$ εἶναι ἕνα κλασματικὸ μονώνυμο. Ἐπειδὴ (Κεφ. IV § 44) εἶναι $\beta^{-2} = \frac{1}{\beta^2}$, τοῦτο γράφεται: $2\alpha^3 \frac{1}{\beta^2}$ ἢ καὶ $\frac{2\alpha^3}{\beta^2}$, ὅπου $\beta \neq 0$.

Ἐπίσης τὸ κλασματικὸ μονώνυμο $-\frac{3}{7}x^{-2}y^3\omega^{-5}$ γράφεται: $-\frac{3y^3}{7x^2\omega^5}$, ὅπου εἶναι $x\omega \neq 0$.

Ὥστε: **Τὰ κλασματικὰ μονώνυμα εἶναι ἀλγεβρικὲς παραστάσεις, στὶς ὁποῖες ἔχει σημειωθεῖ καὶ διαίρεση μὲ μεταβλητή.** Εἶναι λοιπὸν τὰ κλασματικὰ μονώνυμα **πηλίκα** ἀκεραίων μονωνύμων καὶ θὰ τὰ ἐξετάσουμε ἀργότερα. Στὰ ἀμέσως ἑπόμενα θὰ ἀσχοληθοῦμε μόνο μὲ ΑΚΕΡΑΙΑ μονώνυμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

112) Θεωροῦμε τὰ τρίγωνα, ποὺ ἔχουν βάση τὸ δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ. Ἂν τὸ ὕψος ἑνὸς ἀπὸ αὐτὰ εἶναι υ, ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδό του; Στὴν παράσταση αὐτὴ τοῦ ἐμβαδοῦ νὰ ὁρισθοῦν οἱ σταθερὲς καὶ οἱ μεταβλητές. Ἂν εἶναι μονώνυμο, ποιὸς εἶναι ὁ συντελεστής, ποιὸ τὸ κύριο ποσὸ καὶ ποιὸς ὁ βαθμός του;

113) Ἡ ἀκτίνα ἑνὸς κύκλου εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\Sigma = \{1, 3, 5\}$. Νὰ ὑπολογισθεῖ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου. Ποιὰ εἶναι ἡ γενικὴ ἔκφραση τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου; Ἂν εἶναι μονώνυμο, ποιὸς εἶναι ὁ συντελεστής, ποιὸ τὸ κύριο ποσὸ καὶ ποιὸς ὁ βαθμός του;

114) Θεωροῦμε τὸ σύνολο τῶν τραπεζίων. Ἂν οἱ βάσεις ἑνὸς ἀπὸ αὐτὰ εἶναι Β καὶ β καὶ τὸ ὕψος υ, ποιὸ εἶναι τὸ ἐμβαδό του; Στὴν ἔκφραση αὐτὴ τοῦ ἐμβαδοῦ ποιὲς εἶναι οἱ μεταβλητὲς καὶ σὲ ποιὸ σύνολο ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἀνήκει κάθε μιά;

115) Θεωροῦμε τὸ σύνολο τῶν ὀρθῶν κυκλικῶν κώνων. Ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς ἔχει ἀκτίνα βάσεως R καὶ ὕψος υ. Ποιὰ εἶναι ἡ ἔκφραση τοῦ ὄγκου του V. Ἂν εἶναι μονώνυμο ἡ ἔκφραση αὐτή, ποιὸς εἶναι ὁ συντελεστής, ποιὸ τὸ κύριο ποσὸ καὶ ποιὸς ὁ βαθμός του;

116) Νὰ βρεῖτε τὸ συντελεστή, τὸ κύριο ποσὸ καὶ τὸ βαθμὸ ὡς πρὸς μιὰ ἢ περισσότερες μεταβλητὲς στὰ μονώνυμα: $\frac{3}{4}x$, $\frac{1}{5}x^3$, $x\psi^3\omega$, $-2\alpha\beta^2x$, $356\omega^4\psi^3x^{12}\alpha$, $\lambda x^3\psi\beta$, (λ = σταθερά), $-\frac{4}{3}x^2\psi$, $\sqrt{7}\,x\psi\omega^2$, $-\alpha^3\psi^5\omega^4z$, $\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha\beta\gamma$.

117) Νὰ τεθοῦν στὴν τελική τους μορφὴ τὰ μονώνυμα:

$$A = \left(-\frac{2}{5}x^3\psi\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\alpha^2x^2\psi, \quad B = \left(\frac{3}{4}x^4\psi^2z^3\right)\left(\frac{-1}{9}x^2z\right)(4x\psi z^2),$$

$$\Gamma = \left(-\frac{1}{3}\right)^2\alpha^3\beta\cdot\frac{12}{5}x^3\alpha\beta^2\left(-\frac{1}{4}x\psi^0\right)$$ καὶ νὰ βρεῖτε τὸ συντελεστή τους, τὸ κύριο ποσὸ καὶ τὸ βαθμό τους ὡς πρὸς μιὰ ἢ περισσότερες μεταβλητές τους.

50. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΟΝΩΝΥΜΟ.

Α) **Ἀριθμητικὴ τιμὴ μονωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς.** Θεωροῦμε τὸ μονώνυμο $2x$ τῆς μεταβλητῆς x. Συμβολίζουμε τοῦτο μὲ τὸ $\varphi(x)$, δηλ. θέτουμε: $\varphi(x) = 2x$.

Γιὰ τὴν τιμὴ $x = -3$ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ (§ 48) τοῦ μονωνύμου αὐτοῦ εἶναι -6. Μποροῦμε νὰ γράψουμε: $\varphi(-3) = 2\cdot(-3)$ ἢ $\varphi(-3) = -6$.

Ἂν μᾶς δοθεῖ τὸ σύνολο $\Sigma = \left\{0, 1, 5, -\frac{7}{3}\right\}$ καὶ εἶναι $x \in \Sigma$, τότε οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς τοῦ μονωνύμου $2x$ εἶναι τὸ σύνολο: $E = \left\{0, 2, 10, -\frac{14}{3}\right\}$. Σὲ κάθε $x \in \Sigma$ ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸ μονώνυμο $\varphi(x)$ ἕνα, καὶ μόνο ἕνα, στοιχεῖο τοῦ Ε. Ἔτσι εἶναι: $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 2$, $5 \rightarrow 10$, $-\frac{7}{3} \rightarrow -\frac{14}{3}$.

Δηλ. **Ἀπεικονίζεται τὸ Σ μονοσήμαντα στὸ Ε.**

Ὥστε ἔχουμε **μιὰ συνάρτηση,** τὴ

$$\varphi : \forall\ x \in \Sigma \rightarrow \varphi(x) \in E$$

Ἡ συνάρτηση αὐτὴ φ εἶναι **μιὰ συνάρτηση - μονώνυμο τοῦ x** μὲ **πεδίο ὁρισμοῦ τὸ Σ** καὶ **πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο Ε.** Ἡ μεταβλητὴ x, ποὺ εἶναι τυχαῖο στοιχεῖο **ἀρχέτυπο** ἀπὸ κάποιο ἀριθμοσύνολο Σ, λέγεται **ἀνεξάρτητη μεταβλητή,** καὶ ἡ **εἰκόνα** $\varphi(x)$ τοῦ ἀρχετύπου x λέγεται **ἐξαρτημένη μεταβλητή.**

Ἐπειδὴ σὲ κάθε ἀρχέτυπο $x \in \Sigma$ μὲ τὴ συνάρτηση φ ἀντιστοιχίζεται μιὰ καὶ μόνο εἰκόνα, δηλ. ἡ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ μονωνύμου $\varphi(x) \in E$, δημιουργοῦνται διατεταγμένα ζεύγη, ὅπως τὰ $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(5, 10)$ καὶ γενικὰ τὸ ζεῦγος $(x, \varphi(x))$.

Ἡ εἰκόνα $\varphi(x)$ τοῦ ἀρχετύπου x συμφωνοῦμε νὰ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα y, δηλ. νὰ εἶναι $y = \varphi(x)$ ἢ καὶ $y = 2x$. Ἔτσι κάθε διατεταγμένο ζεῦγος τιμῶν τῶν μεταβλητῶν παίρνει τὴ μορφὴ (x_0, y_0). **Τὸ σύνολο αὐτῶν τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ἀποτελεῖ τὴ συνάρτηση - μονώνυμο $\varphi(x)$ καὶ εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $\Sigma \times E$.**

Β) Μονώνυμο περισσότερων μεταβλητῶν. Ἂς πάρουμε τὸ μονώνυμο $2x^3z$ κι ἂς τὸ συμβολίσουμε: $\varphi(x, z) = 2x^3z$. Ἂν τὸ x εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\Sigma_1 = \{-1, 0, 2\}$ καὶ τὸ z τοῦ συνόλου $\Sigma_2 = \{3, 5\}$, τότε σχηματίζονται διατεταγμένα ζεύγη $(x, z) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2$ καὶ στὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἀντιστοιχίζεται σὰν εἰκόνα ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ $\varphi(x, z)$ τοῦ μονωνύμου. Λ.χ. γιὰ $x = -1$ καὶ $z = 3$, δηλ. γιὰ τὸ ζεῦγος $(-1, 3)$ ἀντιστοιχίζεται ἡ τιμὴ $\varphi(-1, 3) = 2\cdot(-1)^3\cdot 3 = -6$ τοῦ μονωνύμου $\varphi(x, z)$. Γιὰ τὸ ζεῦγος $(2, 5)$ ἀντίστοιχη εἰκόνα εἶναι ἡ τιμὴ $\varphi(2, 5) = 2\cdot 2^3\cdot 5 = 2\cdot 8\cdot 5 = 80$. Γενικὰ στὸ ζεῦγος (x, z) ἀντίστοιχη εἰκόνα εἶναι ἡ τιμὴ $\varphi(x, z)$.

Σχηματίζουμε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο τῶν συνόλων Σ_1 καὶ Σ_2. Εἶναι $\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{(-1, 3), (-1, 5), (0, 3), (0, 5), (2, 3), (2, 5)\}$. Γιὰ κάθε στοιχεῖο τοῦ $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ ὑπολογίζουμε τὴν εἰκόνα του μὲ τὸ μονώνυμο $\varphi(x, z) = 2x^3z$. Τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων ἀντίστοιχα εἶναι: $E = \{-6, -10, 0, 48, 80\}$. Τὰ ζεύγη $(0, 3)$ καὶ $(0, 5)$ ἔχουν τὴν ἴδια εἰκόνα, τὸ 0. Πάλι λοιπὸν δημιουργεῖται **μιὰ συνάρτηση - μονώνυμο μὲ δύο ἀνεξάρτητες μεταβλητές,** τὶς $x \in \Sigma_1$ καὶ $z \in \Sigma_2$ καὶ **μὲ ἐξαρτημένη μεταβλητὴ τὸ μονώνυμο** $\varphi(x, z) = 2x^3z$. **Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ** εἶναι τὸ σύνολο $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ καὶ **πεδίο τιμῶν** τὸ Ε. Μὲ ὅμοιο τρόπο ἐξετάζονται συναρτήσεις - μονώνυμα μὲ περισσότερες ἀπὸ δύο μεταβλητές.

Ἂν προσέξουμε μὲ ποιὸν τρόπο ἔγινε παραπάνω ὁ ὑπολογισμὸς γιὰ τὴν εὕρεση τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ἑνὸς μονωνύμου, συμπεραίνουμε ὅτι:

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ μονωνύμου γιὰ δοσμένες τιμὲς τῶν μεταβλητῶν του, πρέπει πρῶτα νὰ βροῦμε τὶς δυνάμεις τῶν μεταβλητῶν κι ὕστερα τὸ γινόμενο τῶν ἐξαγομένων.

Γ) Ὅμοια μονώνυμα. Ὅμοια λέγονται ἐκεῖνα τὰ μονώνυμα, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο κύριο ποσό.

Λ.χ. τά: $0{,}2x^5$, $-7x^5$, $\frac{2}{3}x^5$ εἶναι ὅμοια μονώνυμα, γιατὶ ἔχουν τὸ ἴδιο κύριο ποσὸ x^5. Ἐπίσης τὰ $3x^4y^2$, $-2x^4y^2$ εἶναι ὅμοια.

Τὰ ὅμοια μονώνυμα διαφέρουν, ἂν διαφέρουν, μόνο κατὰ τὸ συντελεστή τους.

Δύο ὅμοια μονώνυμα, ποὺ ἔχουν συντελεστὲς ἀντίθετους ἀριθμούς, λέγονται ἀντίθετα. Λ.χ. τὰ $2xy^5z$, $-2xy^5z$ εἶναι ἀντίθετα μονώνυμα.

Μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε σὰν ὅμοια μονώνυμα ὡς πρὸς μία ἢ περισσότερες μεταβλητές, χωρὶς τὰ μονώνυμα νὰ εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς ὅλες τὶς μεταβλητές τους. Λ.χ. τὰ μονώνυμα: $18x^3y\omega$, $-4\alpha x^3\omega$, $7\pi\beta x^3\omega$, εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές τους x καὶ ω.

51. ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΑΚΕΡΑΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ.

Οἱ πράξεις ποὺ μάθαμε στοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς γίνονται καὶ στὰ μονώνυμα, γιατὶ κάθε μονώνυμο ἀντιπροσωπεύει πραγματικὸ ἀριθμό, ὅταν οἱ μεταβλητές του ἀνήκουν στὸ R. Στὶς πράξεις αὐτὲς ἰσχύουν ὅλες οἱ γνωστές μας ἰδιότητες, ὅπως ἡ μεταθετική, ἡ προσεταιριστική, ἡ ἐπιμεριστικὴ κλπ.

Α) Πρόσθεση μονωνύμων. (Δὲ θὰ ἐξετασθεῖ ἡ ἀφαίρεση στὰ μονώνυμα, γιατὶ ἡ ἀφαίρεση σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον ἀνάγεται στὴν πρόσθεση τοῦ ἀντιθέτου του).

Γιὰ νὰ προσθέσουμε μονώνυμα, γράφουμε τὸ ἕνα ὕστερ' ἀπὸ τὸ ἄλλο στὴ σειρὰ καὶ τὸ καθένα μὲ τὸ πρόσημό του. Ἡ παράσταση, ποὺ προκύπτει, λέγεται ἄθροισμα τῶν μονωνύμων ἢ ὅρων.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων: $-3x^4, 2x^5, 8x^2, -\frac{3}{5}x$ εἶναι ἡ παράσταση : $-3x^4+2x^5+8x^2-\frac{3}{5}x$, ποὺ λέγεται καὶ **πολυώνυμο.** Ἀντίστροφα τὸ πολυώνυμο $2z^3y-3zy^2-\alpha zy+10$ εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων ἢ ὅρων: $2z^3y, -3zy^2, -\alpha zy, 10$. Νὰ δικαιολογήσετε, γιατὶ εἶναι: $-3x^2-(-7y)=-3x^2+$ $+7y$ καὶ $5\alpha y-(-4x^3\omega)-(+2yz)=5\alpha y+4x^3\omega-2yz$.

Β) Ἀναγωγὴ ὅμοιων ὅρων. Στὸν πολλαπλασιασμὸ συναντήσαμε τὴν **ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα,** ποὺ συνδέει τὴν πράξη αὐτὴ μὲ τὴν πρόσθεση, δηλ. τὴν ἰσότητα στὸ R:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\mu=\alpha\mu+\beta\mu+\gamma\mu \quad (1)$$

καὶ ἀπὸ αὐτὴν τήν: $\alpha\mu+\mu\beta+\gamma\mu=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\mu \quad (2)$ (Γιατί;)

Σύμφωνα μὲ τὴν ἰσότητα (2) λέμε ὅτι **στὸ ἄθροισμα $\alpha\mu+\beta\mu+\gamma\mu$ τὸ μ εἶναι «κοινὸς παράγοντας τῶν ὅρων κι ὅτι ἐξάγεται ἐκτὸς παρενθέσεως» καὶ τὸ ἄθροισμα γράφεται μὲ τὴ μορφὴ γινομένου $(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\mu$.**

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν τῶν ὅμοιων μονωνύμων: $-5x^3, 7x^3, 12x^3, -2x^3$ εἶναι: $-5x^3+7x^3+12x^3-2x^3=(-5+7+12-2)x^3=12x^3$.

Μὲ ὅμοιο τρόπο: $7{,}5\alpha^2y^5 - 2{,}5\alpha^2y^5 + 6\alpha^2y^5 - 12\alpha^2y^5 = -\alpha^2y^5$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ συμπεραίνουμε ὅτι **τὸ ἄθροισμα ὅμοιων μονωνύμων (ἢ ὅμοιων ὅρων) εἶναι μονώνυμο ὅμοιο μὲ αὐτά, μὲ συντελεστὴ τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τους.**

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντίθετων μονωνύμων εἶναι 0.

Λ.χ. τὰ ἀντίθετα μονώνυμα: $7\alpha^2\beta x^3$, $-7\alpha^2\beta x^3$, ἔχουν ἄθροισμα:

$$7\alpha^2\beta x^3 - 7\alpha^2\beta x^3 = (7-7)\alpha^2\beta x^3 = 0.$$

Ἡ πρόσθεση ὅμοιων μονωνύμων λέγεται καὶ **«ἀναγωγὴ ὅμοιων ὅρων».**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

118) Στὸ σύνολο $\Sigma = \left\{\frac{1}{3}, -1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$ ὁρίζεται ἡ συνάρτηση $\varphi(x) = 6x^2$. Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων Ε.

119) Στὸ σύνολο $\Sigma = \left\{-1, 0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ ὁρίζεται ἡ συνάρτηση $\varphi(x) = 4x^4$. Νὰ βρεθοῦν ἀρχέτυπα $x \in \Sigma$, ποὺ νὰ ἔχουν τὴν ἴδια εἰκόνα.

120) Δίνονται τὰ σύνολα $\Sigma_1 = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}\right\}$ καὶ $\Sigma_2 = \{1, 2, 3\}$. Νὰ βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς τοῦ $\varphi(x, \psi) = -3x^2\psi$, ὅταν $x \in \Sigma_1$ καὶ $\psi \in \Sigma_2$.

121) Νὰ βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς τῶν μονωνύμων: $4\alpha^3\beta x$, $-2\alpha\beta^2x^3\psi$, $-\frac{2}{5}\alpha\beta x\psi^2$, $-7\alpha^2\beta^2x\omega$, $-\alpha^3x^2\omega^3$, ὅταν $\alpha = -2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $x = -3$, $\psi = \frac{2}{3}$, $\omega = -1$.

122) Τὸ σύνολο $\Sigma = \left\{-3, -2, -1, \frac{1}{2}, 0\right\}$ ἀπεικονίζεται πρῶτα μὲ τὴ $\varphi(x) = 3x^5$ κι ὕστερα μὲ τὴν $f(x) = 3x^3$.
Νὰ βρεῖτε τὰ σύνολα τῶν εἰκόνων $E = \varphi(\Sigma)$ καὶ $E_1 = f(\Sigma)$ κι ἔπειτα τὰ σύνολα $E \cup E_1$ καὶ $E \cap E_1$. Ποιὰ στοιχεῖα τοῦ Σ ἔχουν τὴν ἴδια εἰκόνα στὶς δύο ἀπεικονίσεις;

123) Τὸ σύνολο μονωνύμων:

$$\Sigma = \left\{-2x, \frac{3}{5}x^2, 7x, -8x^3, -\frac{1}{2}x^4, 2x, -x^2, 0{,}1x^3, 5x^4\right\}$$

νὰ χωριστεῖ σὲ κλάσεις ὅμοιων μονωνύμων.

124) Νὰ κάμετε τὶς πράξεις:

α) $-3x^2 + 5x - (-2x^2) - 5x$, β) $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\psi^4 - (-2\psi^3) - 5\psi^3$,

γ) $3\alpha^2\beta x - 2\alpha\beta^2\psi - 4\alpha^2\beta x + 5\alpha\beta^2\psi - 8\alpha\beta x\psi$.

Γ) Πολλαπλασιασμὸς μονωνύμων. Ἐπειδὴ κάθε μονώνυμο εἶναι ἕνα γινόμενο, ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μονωνύμων γίνεται ὅπως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν γινομένων, δηλ. **σχηματίζεται ἕνα γινόμενο - μονώνυμο, ποὺ περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντες τῶν μονωνύμων, καὶ μόνο αὐτούς.** Τὸ μονώνυμο αὐτὸ πρέπει νὰ πάρει τὴν τελική του μορφὴ (§ 49, Α).

Λ.χ. τὰ μονώνυμα: $A = -\frac{3}{5}x^4y$, $B = 8xy^3\omega$ ἔχουν γινόμενο:

$$A \cdot B = \left(-\frac{3}{5}x^4y\right) \cdot (8xy^3\omega) = -\frac{3}{5}x^4x\psi 8x\psi^3\omega =$$

$$= -\frac{3}{5} \cdot 8 \cdot x^4\, x \cdot y \cdot y^3\omega = -\frac{24}{5}x^5y^4\omega.$$

Πρέπει νὰ θυμηθοῦμε πὼς **δυνάμεις μὲ τὴν ἴδια βάση πολλαπλασιάζονται, ἂν σχηματίσουμε δύναμη μὲ τὴν ἴδια βάση καὶ ἐκθέτη τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.**

Ἀπὸ τὸ παράδειγμά μας συμπεραίνουμε πὼς **τὸ γινόμενο μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμο, ποὺ ἔχει συντελεστὴ τὸ γινόμενο τῶν συντελεστῶν τῶν δοσμένων μονωνύμων καὶ κύριο ποσὸ τὸ γινόμενο τῶν κυρίων ποσῶν τους.**

Στὶς περιπτώσεις ποὺ θὰ παρουσιάζεται **δύναμη μονωνύμου**, θὰ ἐφαρμόζεται ἡ ἰδιότητα, πῶς **ὑψώνεται γινόμενο σὲ δύναμη κι ὕστερα δύναμη σὲ ἄλλη δύναμη.**

Λ.χ. $(2x^3)^2 = 2^2 \cdot (x^3)^2 = 4x^6$, $(-3x^4y^2)^3 = (-3)^3\ (x^4)^3 \cdot (y^2)^3 = -27x^{12}y^6$, $(\alpha x^\mu)^\rho = \alpha^\rho x^{\mu\rho}$ ὅπου $\mu \in N_0$ καὶ $\rho \in N_0$.

Ἂν τὰ Α, Β, Γ εἶναι ὁποιαδήποτε μονώνυμα, τὸ γινόμενό τους γράφεται ΑΒΓ ἢ ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ κλπ.

Ἀκόμα εἶναι: **$(AB)\Gamma = (A\Gamma)B = A(B\Gamma)$.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

125) Νὰ κάμετε τὶς πράξεις:

α) $(-4x^3)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}x\right)$ β) $\left(-\frac{2}{5}x^4\right)\cdot\left(\frac{3}{2}x^5\right)\cdot(10x^2)$

γ) $(3x^\mu)(-2x^\mu)$, δ) $(-2x^3)^2\cdot(-x^2)^3$ ε) $\left(-\frac{1}{3}x^4\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^5$

126) Νὰ κάμετε τὶς πράξεις:

α) $\left(-\frac{1}{3}\omega^3\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\omega^4\right)\cdot(-3\omega^3)^2$ β) $5\psi^{\mu+1}\cdot(-2\psi^{\mu+2})(-3\psi^\mu)$ $(\mu \in N)$.

γ) $[(\alpha x^2)^3]^4\cdot(\alpha x^3)^5\cdot\left(\frac{1}{\alpha}\omega^2\right)^7$ δ) $\left(\frac{7}{3}x^3\psi^2\right)\left(-\frac{1}{3}x\psi^3\omega\right)$

ε) $\left(-\frac{2}{3}\alpha^2\beta x^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\alpha\beta^2 x\psi\right)(9\alpha^3\psi^3\beta)$.

127) Νὰ βρεῖτε τὸ συντελεστὴ καὶ τὸ βαθμὸ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς x, ψ, z τοῦ γινομένου $\left(\frac{3}{4}x^4\psi^2z^3\right)\cdot\left(-\frac{1}{9}x^2z\right)\cdot(4x\psi z^2)$.

Δ) Διαίρεση μονωνύμων. Ἂν δοθοῦν τὰ μονώνυμα $A = 16x^5y^4$ καὶ $B = -4x^2y^2$ καὶ ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα **τρίτο ἀκέραιο μονώνυμο Γ**, ποὺ πολλαπλασιαζόμενο μὲ τὸ Β νὰ δίνει γινόμενο τὸ Α, θὰ ἔχουμε: $\mathbf{A = B\cdot\Gamma}$ καὶ τὸ Γ θὰ εἶναι τὸ **«πηλίκο τῆς διαιρέσεως Α διὰ Β»**. Τὸ Α λέγεται **ὁ διαιρετέος** καὶ τὸ Β **ὁ διαιρέτης** τῆς διαιρέσεως Α διὰ Β. Θὰ ὑποθέσουμε **πάντοτε** ὅτι εἶναι $B \neq 0$.

Στὴ διαίρεση μονωνύμου διὰ μονωνύμου ἐφαρμόζεται ἡ ἰδιότητα τῶν δυνάμεων: $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$, ὅπου οἱ ἐκθέτες μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοὶ καὶ $\mu \geqslant \nu$.

Ἔτσι εἶναι: $A : B = 16x^5y^4 : (-4x^2y^2) = \frac{16x^5y^4}{-4x^2y^2} = -4x^3y^2$, συνεπῶς $\Gamma = -4x^3y^2$.

Παρατηροῦμε ὅτι: **Ὑπάρχει τὸ πηλίκο Γ σὰν ἀκέραιο μονώνυμο ὅταν, καὶ**

μόνο ὅταν, ὁ διαιρετέος Α περιέχει τοὺς παράγοντες τοῦ διαιρέτη Β καὶ καθένα μὲ ἐκθέτη ἴσο ἢ μεγαλύτερο.

Παραδείγματα: **1ο)** $\left(-\frac{1}{3}\alpha^4\beta^2\gamma\right):(3\alpha^4\gamma)=-\frac{1}{9}\beta^2$ ἂν $\alpha\neq0$ καὶ $\gamma\neq0$.

2ο) $\left(-\frac{7}{3}x^3y^2\right):\left(\frac{3}{5}x^3y^2\right)=-\frac{35}{9}$, ἂν $xy\neq0$.

3ο) $\left(-\frac{1}{2}x^3\alpha\omega^4\right):(-3x\omega^6)=\frac{1}{6}x^2\alpha\frac{\omega^4}{\omega^6}=\frac{1}{6}\frac{x^2\alpha}{\omega^2}$, ἂν $x\omega\neq0$.

Στὸ παράδειγμα αὐτὸ τὸ πηλίκο δὲν εἶναι ἀκέραιο μονώνυμο. Εἶναι κλασματικὸ (§ 49, Δ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128) Νὰ βρεῖτε τὸ πηλίκο στὶς διαιρέσεις:

α) $(-20x^5):(5x^3)$ β) $(-15x^6):\left(-\frac{3}{5}x^4\right)$

γ) $(-3x^2)^3:(-2x^3)$ δ) $(-4x^5)^3:(2x^2)^6$

129) Νὰ βρεῖτε τὸ πηλίκο στὶς διαιρέσεις:

α) $(3\alpha\omega^{2\mu}):(-2\alpha\omega^{\mu})$ β) $(-6x^4\psi^3):(-2x\psi^2)$

γ) $\left(\frac{3}{5}x^3\psi^4z\right):(-x^2\psi^4)$ δ) $(7x^3\psi^2\omega)(-2x^2\psi^3):(-14x^4\psi^5\omega)$

130) Νὰ βρεῖτε τὸ πηλίκο στὶς διαιρέσεις:

α) $(2\alpha^3\beta)^2.(-3\alpha\beta^2\gamma^3)^3.(-4\alpha^4\beta^2\gamma^3):(-3\alpha^2\beta^3\gamma^2)^3$

β) $\left(\frac{2}{3}\alpha^4\beta\gamma^3\right)^2\cdot(-\alpha\beta^2\gamma):\left(-\frac{4}{9}\alpha^9\beta^3\gamma^7\right)$

52. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Α) Ὁρισμός. Ἀκέραιο πολυώνυμο λέγεται τὸ (ἀλγεβρικὸ) ἄθροισμα ἀκέραιων μονωνύμων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δύο τουλάχιστο εἶναι ἀνόμοια.

Τὰ μονώνυμα, ποὺ τὸ ἄθροισμά τους (§ 51, Α) ἀποτελεῖ ἕνα πολυώνυμο, λέγονται καὶ **ὅροι τοῦ πολυωνύμου**, οἱ δὲ μεταβλητές τους εἶναι **οἱ μεταβλητὲς τοῦ πολυωνύμου.** Εἶναι λοιπὸν φανερὸ ὅτι ὑπάρχουν πολυώνυμα μὲ μιὰ ἢ περισσότερες μεταβλητές.

Λ.χ. τὸ $2\omega^2-5\omega+7$ εἶναι πολυώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς, τῆς ω, ἐνῶ τὸ $3x^2y-2xz^2+8z$ εἶναι πολυώνυμο τριῶν μεταβλητῶν, τῶν x, y, z, ἐφόσον δὲν ὁρίσαμε σὰν σταθερὰ κανένα ἀπὸ τὰ γράμματα αὐτά.

Σὲ κάθε πολυώνυμο **τὰ ὅμοια μονώνυμα** τὰ ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὸ ἄθροισμά τους, ποὺ τὸ βρίσκουμε μὲ **τὴν ἀναγωγή τους** (§ 51, Β).

Λ.χ. : $-3x^4+\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{3}x+8x^4-\frac{1}{2}x^2+x^4+15=6x^4+3x^2-\frac{1}{3}x+15$

(Γιατί;) Συμβολικὰ γράφουμε: $\varphi(x)=6x^4+3x^2-\frac{1}{3}+15$ καὶ διαβάζουμε: πολυώνυμο φ τοῦ x ἴσον κλπ.

Ἐπίσης: $2x^2y^3-5x^2y+3x^2y^3-2x^3y+7x^2y-6x^3y=5x^2y^3+2x^2y-8x^3y=$ $=\varphi(x,y)$ (διαβάζουμε: πολυώνυμο φ τῶν x, y).

Στὰ πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\Phi(x, y)$ δὲν ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι. Τὰ πολυώνυμα αὐτὰ λέγονται **«συνεπτυγμένα»** ἢ **«ἀνηγμένα»**.

Κάθε ἀνηγμένο πολυώνυμο μὲ δύο ὅρους λέγεται διώνυμο, μὲ τρεῖς ὅρους λέγεται τριώνυμο. Ἔτσι τά: $3x^4-5x$, $\alpha x^\mu-\beta$, $-4x^3y\omega+2\alpha\beta$ εἶναι διώνυμα, ἐνῶ τά: $3x^4+6x^2-12$, $x^2y+\alpha\omega+y$, $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι τριώνυμα.

Κάθε μονώνυμο μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ σὰν συνεπτυγμένο πολυώνυμο. Λ.χ. $2x^5=2x^5+0x^4+0x^3+7x^2-7x^2$.

Σὲ κάθε πολυώνυμο εἶναι δυνατὸν οἱ ὅροι νὰ τοποθετηθοῦν μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ ἐκθέτες μιᾶς μεταβλητῆς νὰ εἶναι κατὰ μέγεθος αὐξανόμενο **(ἀνιοῦσες δυνάμεις)** ἢ ἐλαττούμενο **(κατιοῦσες δυνάμεις)**. (Ἰδιότητα τῆς μεταθέσεως ἢ ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴ θέση στὸ ἄθροισμα).

Λ.χ. Στὸ $\Phi(x)=5x^4-2x^3+7x^2+15x-6$ οἱ ἐκθέτες τοῦ x εἶναι κατὰ μέγεθος ἐλαττούμενο. Λέμε ὅτι τὸ $\Phi(x)$ εἶναι **«διατεταγμένο κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x»**.

Τὸ $\Phi(\omega)=2-\frac{5}{4}\omega+13\omega^2-8\omega^3$ εἶναι **«διατεταγμένο κατὰ τὶς ἀνιοῦσες δυνάμεις τοῦ ω»**.

Τὸ $\Phi(x, y)=3x^3+2x^2y-5xy^2-y^4$ εἶναι διατεταγμένο κατὰ τὶς κατιοῦσες τοῦ x καὶ κατὰ τὶς ἀνιοῦσες τοῦ y.

Μηδενικὸ λέγεται τὸ πολυώνυμο ,ποὺ ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι μηδενικὰ μονώνυμα (§ 49, Γ).

Ἀντίθετα εἶναι δύο πολυώνυμα, ὅταν ἔχουν τοὺς ὅρους ἀνὰ δύο ἀντίθετους. Λ.χ. τά: $3x^4y-5x^3y^2+4y-7$ καὶ $-3x^4y+5x^3y^2-4y+7$ εἶναι ἀντίθετα πολυώνυμα.

Β) Βαθμὸς πολυωνύμου. Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς μιὰ μεταβλητή του λέγεται ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς ἐκθέτες, ποὺ ἔχει ἡ μεταβλητὴ στοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.

Π.χ. τὸ πολυώνυμο $\Pi(x, y)=-2x^3y+4xy^2-7x^4y^2+6x+y^5-12$ εἶναι **τέταρτου** βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ **πέμπτου** ὡς πρὸς y.

Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς περισσότερες μεταβλητὲς λέγεται ὁ μέγιστος ἀπὸ τοὺς βαθμοὺς τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς αὐτές.

Ἔτσι τὸ προηγούμενο πολυώνυμο $\Pi(x, y)$ εἶναι **ἕκτου** βαθμοῦ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητὲς x, y, γιατὶ ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος του εἶναι τὸ μονώνυμο $-7x^4y^2$, ποὺ εἶναι **ἕκτου** βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y (§ 49, Γ).

Τὸ πολυώνυμο $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)=5\alpha^2\beta^3-2\alpha^3\beta\gamma^4+\frac{2}{3}\alpha\beta^2\gamma^2-7\gamma$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, τρίτου ὡς πρὸς β, τέταρτου ὡς πρὸς γ, πέμπτου ὡς πρὸς α καὶ β, ἕβδομου ὡς πρὸς α καὶ γ, πέμπτου ὡς πρὸς β καὶ γ καὶ ὄγδοου ὡς πρὸς α, β, γ.

Γ) Γενικὴ μορφὴ ἀκέραιου πολυωνύμου μυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς μία μεταβλητὴ x.

Κάθε συνεπτυγμένο ἀκέραιο πολυώνυμο μπορεῖ νὰ «διατάσσεται» κατὰ τὶς ἀνιοῦσες ἢ κατιοῦσες δυνάμεις μιᾶς μεταβλητῆς του.

Ἔτσι λ.χ. τά: $\Phi(x) = 3x^5 - 2x^4 + 7x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 8x + 47$,

$$F(x, y) = -2x^3y - 4x^2y^3 + 13xy - y^4$$

εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x, ἐνῶ τὸ $\Sigma(\omega, x) = \frac{3}{4}\omega^3 - 5\omega x + 2\omega^2x^2 - 7x^3$ εἶναι κατὰ τὶς ἀνιοῦσες τοῦ x.

Ἕνα πολυώνυμο διατεταγμένο κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις μιᾶς του μεταβλητῆς, λ.χ. τῆς x, θὰ ἔχει τὴ γενικὴ μορφή:

$$A_0x^\mu + A_1x^{\mu-1} + A_2x^{\mu-2} + A_3x^{\mu-3} + \ldots + A_{\mu-1}x + A_\mu \qquad (1)$$

ὅπου ὁ μ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ οἱ συντελεστὲς $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{\mu-1}, A_\mu$ εἶναι ὁρισμένοι ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὴ μεταβλητὴ x. Τὸ πολυώνυμο (1) εἶναι **«μυοστοῦ»** βαθμοῦ, ἂν $A_0 \neq 0$.

Τὸ πολυώνυμο (1) λέγεται **«πλῆρες»**, ἂν ὅλοι οἱ συντελεστές του εἶναι διάφοροι τοῦ 0.

Τὰ παραπάνω πολυώνυμα Φ(x), F(x, y), Σ(ω, x) εἶναι **«πλήρη»** ὡς πρὸς τὴ μεταβλητὴ x.

Ἕνα «μὴ πλῆρες» πολυώνυμο, ὡς πρὸς μιά του μεταβλητὴ λέγεται καὶ **«ἐλλιπές»**. Λ.χ. τὸ $2\alpha x^4 - 5\alpha^2x^2 + 8x$ εἶναι ἐλλιπὲς ὡς πρὸς τὴ μεταβλητὴ x.

Ἕνα ἐλλιπὲς πολυώνυμο μπορεῖ νὰ συμπληρωθεῖ μὲ μηδενικὰ μονώνυμα καὶ νὰ πάρει τὴ μορφὴ τοῦ πλήρους πολυωνύμου. Λ.χ. τὸ $5x^4 + 7x$ γράφεται: $5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 7x + 0$, ποὺ εἶναι πλῆρες πολυώνυμο.

Δ) Ὁμογενὲς πολυώνυμο. Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο λέγεται ὁμογενές, ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ ἴδιου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές του.

Λ.χ. τὸ πολυώνυμο $3x - 2y + \omega$ εἶναι ὁμογενὲς πρώτου βαθμοῦ, τὸ $x^2 - 7xy + 4y^2$ ὁμογενὲς δεύτερου βαθμοῦ, τὸ $x^3 + 2x^2y - \frac{2}{3}xy^2 + 5y^3$ ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ, ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές τους. Τὸ πολυώνυμο $-4\alpha^3 + 2\alpha\beta\gamma - \beta\gamma^2 + \gamma\alpha^2$ εἶναι ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ.

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς πολυωνύμου γραφοῦν σὲ ὁμάδες, ἔτσι ὥστε καθεμιὰ ὁμάδα νὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμο μὲ βαθμὸ ὁμογένειας διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ βαθμὸ τῶν ἄλλων, θὰ λέμε ὅτι τὸ πολυώνυμο εἶναι **«διατεταγμένο σὲ ὁμογενεῖς ὁμάδες»**. Λ.χ. τὸ $(5\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) - (2\alpha + \beta) + 13$ εἶναι διατεταγμένο σὲ ὁμογενεῖς ὁμάδες.

Ε) Ἴσα πολυώνυμα. Δύο πολυώνυμα λέγονται **ἴσα**, ὅταν ἔχουν τὴν ἴδια συνεπτυγμένη μορφή, δηλ. εἶναι οἱ ὅροι τους ἀνὰ δύο τοῦ ἴδιου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές τους κι ἔχουν τοὺς ἴδιους συντελεστές.

Λ.χ. τὸ $\Phi(x, y) = -3x^4 + 2xy^2 - 5xy + 7xy^2 + xy - y^3 + 5x^2y$ καὶ τὸ $\pi(x, y) = -3x^4 + 9xy^2 - 4xy - y^3 + 5x^2y$ εἶναι ἴσα πολυώνυμα, γιατὶ τὸ Π(x, y) εἶναι ἡ συνεπτυγμένη μορφὴ τοῦ Φ(x, y). Τὰ δύο πολυώνυμα Φ(x, y) καὶ Π(x, y) λέμε ἀκόμα ὅτι **«ταυτίζονται»** καὶ ἡ ἰσότητα $\Phi(x, y) = \Pi(x, y)$ λέγεται **«ταυτότητα»**.

ΣΤ) Κυκλικὴ μετατροπὴ γραμμάτων - Συμμετρικὰ πολυώνυμα.

Ἂν στὸ πολυώνυμο $\Pi(\alpha, \beta, \gamma) = 3\alpha^2 - 2\beta^3 + 5\gamma^2 - 7\alpha\beta\gamma$ θέσουμε ὅπου α τὸ β, ὅπου β τὸ γ καὶ ὅπου γ τὸ α, θὰ προκύψει τὸ πολυώνυμο $\Pi'(\alpha, \beta, \gamma) = 3\beta^2 - 2\gamma^3 + 5\alpha^2 - 7\beta\gamma\alpha$ καὶ θὰ λέμε ὅτι τὸ $\Pi'(\alpha, \beta, \gamma)$ προέρχεται ἀπὸ τὸ $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ μὲ **«κυκλικὴ μετατροπὴ»** τῶν γραμμάτων α, β, γ. Μὲ ὅμοιο τρόπο ἀπὸ τὸ $\Pi'(\alpha, \beta, \gamma)$ μὲ κυκλικὴ μετατροπὴ τῶν α, β, γ γίνεται τὸ πολυώνυμο $\Pi''(\alpha, \beta, \gamma) = 3\gamma^2 - 2\alpha^3 + 5\beta^2 - 7\gamma\alpha\beta$.

Σ' ἕνα πολυώνυμο ἡ κυκλικὴ μετατροπὴ δύο μόνο γραμμάτων λ.χ. τῶν α καὶ β γίνεται μὲ τὴν ἀντικατάσταση τοῦ α μὲ τὸ β καὶ τοῦ β μὲ τὸ α. Ἡ μετατροπὴ αὐτὴ λέγεται καὶ **«ἐναλλαγὴ τῶν α καὶ β»**. Ἔτσι ἀπὸ τὸ $\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = -5\alpha^3 + 2\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2\gamma - \gamma^4$ μὲ ἐναλλαγὴ τῶν α καὶ β ἔχουμε τὸ $\Phi'(\alpha, \beta, \gamma) = -5\beta^3 + 2\alpha^2 - 4\beta\alpha + \beta^2\gamma - \gamma^4$.

Ἂν ἕνα πολυώνυμο δὲ μεταβάλλεται μὲ τὴν ἐναλλαγὴ δυὸ γραμμάτων του, θὰ λέγεται **συμμετρικὸ** ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

Λ.χ. τὸ πολυώνυμο $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 7xy + 6$ εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές του x, y, γιατὶ ἡ ἐναλλαγὴ τῶν x, y δίνει τὸ πολυώνυμο $\Phi(y, x) = y^2 + x^2 - 7yx + 6$, ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\Phi(x, y)$.

Τὸ πολυώνυμο $5(x^2 + \omega^2) - 3x\omega + 2y^2x + 2y^2\omega - 12$ εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὰ γράμματα x, ω. (Γιατί;).

Κυκλικὸ ἢ κυκλικὰ συμμετρικὸ λέγεται ἕνα πολυώνυμο, ὅταν ἡ κυκλικὴ μετατροπὴ τῶν γραμμάτων του δὲν τὸ μεταβάλλει.

Λ.χ. τὰ πολυώνυμα: $2(x + \psi + \omega) - 15$, $3(x^2 + \psi^2 + \omega^2) - x - \psi - \omega + 4$, $x + \psi + \omega - 8x\psi\omega + 2$, $x^3 + \psi^3 + \omega^3 - 2x\psi\omega + 15$ εἶναι κυκλικὰ ἢ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές τους x, ψ, ω.

Ἂν τὸ πολυώνυμο $\Phi(x, y, \omega)$ εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές του x, y, ω, μὲ τὴν κυκλικὴ μετατροπή τους γίνεται τὸ πολυώνυμο $\Phi(y, \omega, x)$ καὶ ἡ ἰσότητα $\Phi(x, y, \omega) = \Phi(y, \omega, x)$ εἶναι μία ταυτότητα.

Τὸ πολυώνυμο $k(x + y + z)$, ὅπου k ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὰ x, y, z εἶναι πολυώνυμο **συμμετρικὸ** καὶ **ὁμογενὲς** πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z, ἐνῶ τὸ $k(x^2 + y^2 + z^2) + \lambda(xy + yz + zx)$ εἶναι συμμετρικὸ καὶ ὁμογενὲς δεύτερου βαθμοῦ, ἂν τὰ k, λ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὰ x, y, z.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131) Στὰ παρακάτω πολυώνυμα νὰ κάμετε τὶς ἀναγωγὲς τῶν ὅμοιων ὅρων, νὰ βρεῖτε τὸ βαθμὸ καθενὸς ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές του καὶ νὰ ἐξετάσετε ποιὰ εἶναι ἴσα καὶ ποιὰ ἀντίθετα πολυώνυμα:

$2x^3 - 5x^2 + 3x - x^2 + 7x - 8$, $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$, $x\omega^2 - 3x^2\omega + 12\omega - 5$, $\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta$, $4x\psi^3\omega - 7x\psi + 5\psi^2 + 12x\psi - 6x\psi^3\omega - 4$, $-8 + 10x - 6x^2 + 2x^3$, $5 - 12\omega - x\omega^2 + 3x^2\omega$.

132) Τὰ παρακάτω πολυώνυμα νὰ τὰ γράψετε στὴν ἀνηγμένη τους μορφή, νὰ βρεῖτε τὸ βαθμὸ καθενὸς ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές του καὶ νὰ τὰ διατάξετε κατὰ τὶς ἀνιοῦσες δυνάμεις μιᾶς ἀπὸ τὶς μεταβλητές:

$$7x^3 - 5x + 2x^2 - 6x^4 - x^3 + 8x - 13x^2 + 45$$
$$-5x^2\psi^3 + 6x\psi^4 + 3\psi^5 - 8x\psi^4 + 12x^3\psi^3 - 4\psi^5 + 2x\psi^4 - 3x\psi$$
$$-\frac{1}{3}\omega^3 + \frac{1}{2}\omega^2 x - \frac{5}{3}\omega x^2 + \frac{1}{2}\omega^3 - x^3 + \omega^2 x - \frac{1}{3}\omega x^2 - 100$$
$$2x\psi - x^2 + \psi^2 - 4x + 3\psi - 5x\psi - 2x^2 + x - \psi + 41$$

Ἀπὸ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ ποιὸ εἶναι ὁμογενές; Ποιὸ διατάσσεται σὲ ὁμάδες ὁμογένειας;

133) Νὰ σχηματισθεῖ τὸ πολυώνυμο μὲ ὅρους τὰ μονώνυμα: $-\frac{3}{5}x^4$, $2x^3$, $-x$, $7x^2$, $-\frac{1}{2}x$, $-4x^2$, $\frac{2}{5}x^4$, x^3 καὶ νὰ γραφεῖ μὲ τὴ συνεπτυγμένη του μορφή. Νὰ βρεθεῖ ὁ βαθμός του καὶ νὰ διαταχθεῖ κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x. Νὰ ἐξετασθεῖ ἂν εἶναι πλῆρες ἢ ἐλλιπὲς πολυώνυμο.

134) Στὸ σύνολο τῶν μονωνύμων:

$$\Sigma = \left\{ -x^2\psi,\ 5x\psi,\ -2x\psi^2,\ \frac{1}{2}x\psi,\ 4x^3y - 4x\psi^3,\ \frac{2}{5}x^2\psi,\ 2x\psi^3,\ -x^3\psi \right\}$$

νὰ βρεῖτε τὶς κλάσεις τῶν ὅμοιων μονωνύμων. Νὰ σχηματισθεῖ τὸ πολυώνυμο μὲ ὅρους τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ. Ποιὸς εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου αὐτοῦ ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς ψ, ὡς πρὸς x καὶ ψ; Νὰ διαταχθεῖ τὸ πολυώνυμο κατὰ τὶς ἀνιοῦσες τοῦ ψ. Νὰ ἐξετασθεῖ ἂν εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὶς μεταβλητές του.

53. Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ

Α) Ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς. Δίνεται τὸ πολυώνυμο: $\Phi(x) = 7x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ τῆς μεταβλητῆς x. Ἂν ἡ x εἶναι στοιχεῖο ἑνὸς συνόλου ἀριθμῶν λ.χ. τοῦ $\Sigma = \{-1, 0, 1, 2\}$, τότε γιὰ κάθε $x \in \Sigma$ μὲ τὸ πολυώνυμο $\Phi(x)$ ὁρίζεται μιὰ ἀντίστοιχη εἰκόνα. Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὴν εἰκόνα ἑνὸς ἀρχετύπου, λ.χ. τοῦ $x = 2$, ὑπολογίζουμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ κάθε ὅρου (§ 50, Α, Β) γιὰ $x = 2$ καὶ προσθέτουμε τὶς τιμὲς αὐτές. Ἔτσι θὰ βροῦμε γιὰ $x = 2$:

$$\Phi(2) = 7\cdot2^3 - 3\cdot2^2 + 5\cdot2 - 6 = 7\cdot8 - 3\cdot4 + 5\cdot2 - 6 = 56 - 12 + 10 - 6 = 48.$$

Μὲ ὅμοιο τρόπο εἶναι: $\Phi(-1) = -21$, $\Phi(0) = -6$ καὶ $\Phi(1) = 3$, ἄρα τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων εἶναι: $E = \{-21, -6, 3, 48\}$.

Ἡ εὕρεση τῆς εἰκόνας $\Phi(\alpha)$ ἑνὸς ἀρχετύπου $x = \alpha$ λέγεται καὶ **«ὑπολογισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς»** τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x)$ γιὰ $x = \alpha$.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ ἑνὸς πολυωνύμου γιὰ κάποια τιμὴ τῆς μεταβλητῆς του πρέπει νὰ βροῦμε τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ κάθε ὅρου του καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν τῶν τιμῶν.

Μὲ τὰ παραπάνω ἔχουμε τὴν ἀπεικόνιση:

$$\mathbf{\Phi : \forall\, x : x \in \Sigma \ \rightarrow\ \Phi(x) = (7x^3 - 3x^2 + 5x - 6) \in E}$$

Ἡ ἀπεικόνιση τοῦ Σ στὸ Ε εἶναι **μονοσήμαντη,** συνεπῶς ἔχουμε μιὰ συνάρτηση ποὺ θὰ λέγεται καὶ

$$\textbf{συνάρτηση - πολυώνυμο}\ \mathbf{\Phi(x) = 7x^3 - 3x + 5x^2 - 6}$$

Τὸ Σ εἶναι ἕνα σύνολο σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ τὸ ἴδιο τὸ R, καὶ τότε τὸ Ε θὰ εἶναι ἕνα ἀριθμητικὸ σύνολο.

Β) Πολυώνυμα μὲ περισσότερες μεταβλητές. Μᾶς δίνουν τὸ πολυώνυμο: $\Phi(x, \psi) = 3x^2\psi - 5x\psi + 7\psi^2 - 4$ μὲ δύο μεταβλητές, τὶς x, ψ. Ἂν $x = 2$, $\psi = -4$, θὰ εἶναι: $\Phi(2, -4) = 3 \cdot 2^2 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 \cdot (-4) + 7(-4)^2 - 4 = 3 \cdot 4 \cdot (-4) - 5 \cdot 2 \cdot (-4) + 7 \cdot 16 - 4 = -48 + 40 + 112 - 4 = 100$. Ὁ ἀριθμὸς 100 λέγεται ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ $\Phi(x, \psi)$ γιὰ $x = 2$, $\psi = -4$.

Γιὰ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (x, ψ), ὅταν $x \in R$ καὶ $\psi \in R$, θὰ ὑπολογίζεται μιὰ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x, \psi)$. Ἔτσι δημιουργεῖται μία ἀπεικόνιση τοῦ συνόλου $R \times R$ σ' ἕνα ἀριθμητικὸ σύνολο, τὸ σύνολο τιμῶν τοῦ $\Phi(x, \psi)$. Ἡ ἀπεικόνιση αὐτὴ εἶναι μονοσήμαντη, εἶναι δηλ. μιὰ συνάρτηση.

Οἱ μεταβλητὲς τοῦ πολυωνύμου λέγονται καὶ **«ἀνεξάρτητες μεταβλητές»**, ἐνῶ τὸ πολυώνυμο εἶναι **«ἐξαρτημένη μεταβλητή»**. Συνήθως λέμε «ἡ συνάρτηση $\Phi(x, \psi) = 3x^2\psi - 5x\psi + 7x^2 - 4$» κι ἐννοοῦμε ὅσα εἴπαμε παραπάνω.

Εὔκολα ἐπεκτείνονται τὰ προηγούμενα σὲ πολυώνυμα μὲ περισσότερες ἀπὸ δύο μεταβλητές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135) Τὸ σύνολο $\Sigma = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ ἀπεικονίζεται μὲ τὸ $\Phi(x) = 4x^2 - 5x + 3$. Νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο τιμῶν τῆς συναρτήσεως.

136) Τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ νὰ βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς $\Pi(-1)$, $\Pi(1)$, $\Pi(0)$, $\Pi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$.

137) Τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x, \psi) = 2x^3 - 4x\psi^2 + 5x - 6\psi + 12$ νὰ βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς γιὰ τὰ ζεύγη: α) $x = 2$, $\psi = -1$, β) $x = -3$, $\psi = 2$, γ) $x = 0$, $\psi = \frac{1}{2}$, δ) $x = -\frac{1}{2}$, $\psi = 0$.

138) Μᾶς δίνουν τὰ σύνολα $\Sigma_1 = \{-1, 0, 1, 2\}$, $\Sigma_2 = \{-2, 1, 3\}$ καὶ τὸ πολυώνυμο $\Phi(\alpha, \beta) = 2\alpha^2 - 5\alpha\beta + \beta^2$. Ἂν $\alpha \in \Sigma_1$ καὶ $\beta \in \Sigma_2$, νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων μὲ τὸ $\Phi(\alpha, \beta)$.

139) Νὰ ἀπεικονίσετε τὸ σύνολο $\Sigma = \{-2, -1, 1, 2\}$ μὲ τὸ πολυώνυμο $\Phi(x) = x^4 - 5x^2$, ὅταν $x \in \Sigma$.

140) Στὸ σύνολο $\Sigma = \{-3, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ὁρίζονται οἱ συναρτήσεις $\Phi(x) = x^6 - 2x^5 - 18x$ καὶ $\Pi(x) = 10x^4 - 20x^3 - 9x^2$. Νὰ βρεθοῦν τὰ πεδία τιμῶν τῶν δύο συναρτήσεων.

141) Μᾶς δίνουν τὰ σύνολα $\Sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ καὶ $T = \{-1, 4, 5\}$ καὶ τὴ συνάρτηση $\varphi(x, \psi) = 2x - 3\psi + 5$, ὅπου $x \in \Sigma$ καὶ $\psi \in T$.

Νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων $\varphi(x, \psi)$.

142) Μᾶς δίνουν τὴ συνάρτηση:

$$\varphi : \forall(x, \psi) : (x, \psi) \in R \times R \rightarrow [\varphi(x, \psi) = 3x - \psi + 7] \in R$$

Νὰ δείξετε ὅτι κάθε ἀριθμὸς $\rho \in R$ εἶναι ὁπωσδήποτε εἰκόνα ζεύγους $(x', \psi') \in R \times R$. Ἕνα π.χ. ζεῦγος εἶναι τὸ $x' = 5$, $\psi' = 22 - \rho$. Τὸ $(5, 22 - \rho)$ ἔχει σ' αὐτὴ τὴ συνάρτηση εἰκόνα τὸν ἀριθμὸ ρ.

143) Στὴ συνάρτηση τῆς ἄσκησης 142 νὰ δείξετε ὅτι ὅλα τὰ ζεύγη μὲ τὴ μορφὴ $(x', 3x' + 7)$, ὅπου $x' \in R$, ἔχουν εἰκόνα τὸ μηδέν. Νὰ προσδιορίσετε τὰ ζεύγη αὐτὰ ἂν $x' \in \Sigma$, ὅπου $\Sigma = \left\{-3, -2, -\frac{1}{2}, 0, 1, 2, \frac{5}{2}\right\}$

144)* Δίνεται ἡ συνάρτηση:

$$\varphi : (x, \psi) : \forall (x, \psi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow [\varphi(x, \psi) = \alpha x + \beta\psi + \gamma] \in \mathbb{R}$$

Νὰ δείξετε ὅτι κάθε ἀριθμὸς $\rho \in \mathbb{R}$ εἶναι στὴ συνάρτηση αὐτὴ εἰκόνα τῶν ἀπειραρίθμων διατεταγμένων ζευγῶν (x', ψ'), ὅπου $x' \in \mathbb{R}$ καὶ $\psi' = -\frac{\alpha}{\beta}x' - \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\rho}{\beta}$, ἂν $\beta \neq 0$.

145)* Στὴ συνάρτηση τῆς ἀσκήσεως 144 νὰ δείξετε ὅτι τὰ ζεύγη $(x', \psi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ποὺ ἔχουν εἰκόνα τὸ μηδέν, εἶναι μὲ μορφὴ $(x', -\frac{\alpha}{\beta}x' - \frac{\gamma}{\beta})$, δηλ. x' = αὐθαίρετος πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\psi' = -\frac{\alpha}{\beta}x' - \frac{\gamma}{\beta}$, ἂν $\beta \neq 0$.

146)* Δίνεται τὸ σύνολο $\Sigma = \{2, 5, 7\}$ καὶ ὁ διψήφιος ἀριθμὸς $\varphi(x, y)$ μὲ x δεκάδες καὶ $y - 5$ μονάδες, ὅπου $x \in \Sigma$ καὶ $y \in \Sigma$. Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν διψήφιων $\varphi(x, y)$.

147)* Στὴ συνάρτηση $\varphi : \forall (x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow [\varphi(x, y) = 5x - y + 3] \in \mathbb{R}$ νὰ βρεθοῦν τὰ ζεύγη (x', y'), ποὺ ἔχουν εἰκόνα τὸν 7 ἢ τὸν -12 ἢ τὸν $\alpha \in \mathbb{R}$. Ποιὰ ζεύγη ἔχουν εἰκόνα τὸ 0;

148)* Νὰ δείξετε ὅτι στὴ συνάρτηση $\varphi(x, y) = 4x + 7y - 13$ ὅλα τὰ ζεύγη $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ὅπου $x = -2 + 7\lambda$, $y = 3 - 4\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ἔχουν εἰκόνα τὸ 0.

54. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ.

Α) Πρόσθεση πολυωνύμων. Ἐπειδὴ κάθε πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἡ πρόσθεση πολυωνύμων εἶναι πρόσθεση ἀθροισμάτων, ἄρα:

Γιὰ νὰ προσθέσουμε πολυώνυμα, σχηματίζουμε τὸ πολυώνυμο ποὺ περιέχει ὅλους τοὺς ὅρους τῶν δοσμένων πολυωνύμων καὶ μόνο αὐτούς.

Εἶναι ἑπόμενο στὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων νὰ γίνουν οἱ ἀναγωγὲς τῶν ὅμοιων ὅρων καὶ νὰ γραφεῖ τοῦτο στὴ συνεπτυγμένη του μορφή.

Παραδείγματα : 1ο) Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα :

$\mathbf{\Phi(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1, \Pi(x) = 2x^4 - x^3 + 8x + 13, \Sigma(x) = -2x^4 + 3x^2 - 7x + 5.}$

Εἶναι: $\Phi(x) + \Pi(x) + \Sigma(x) = (5x^3 - 4x^2 + 6x - 1) + (2x^4 - x^3 + 8x + 13) + (-2x^4 + 3x^2 - 7x + 5) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 1 + 2x^4 - x^3 + 8x + 13 - 2x^4 + 3x^2 - 7x + 5 = 4x^3 - x^2 + 7x + 17.$

Ἡ πρόσθεση αὐτὴ γίνεται ὅπως ἀπέναντι. Οἱ ὅμοιοι ὅροι βρίσκονται στὴν ἴδια στήλη. Ἡ πρόσθεση γίνεται κατὰ στῆλες.

$$\begin{array}{rrrrrr}
\Phi(x(= & & 5x^3 & -4x^2 & +6x & -1 \\
\Pi(x) = & 2x^4 & -x^3 & & +8x & +13 \\
\Sigma(x) = & -2x^4 & & +3x^2 & -7x & +5 \\
\hline
\Phi(x)+\Pi(x)+\Sigma(x) = & 0x^4 & +4x^3 & -x^2 & +7x & +17 \\
\text{ἢ καὶ } \Phi(x)+\Pi(x)+\Sigma(x) = & & 4x^3 & -x^2 & +7x & +17
\end{array}$$

2ο) Νὰ προστεθοῦν τὰ πολυώνυμα :

$\mathbf{\Phi(x, y) = 2x^3y - 3xy + 4y^2, \Pi(x, y) = -3x^3y - 7xy + y^2 - 3x^2, \Sigma(x, y) = -xy^3 + 5xy - 2x^2}$

Εἶναι: $\Phi(x, \psi) + \Pi(x, \psi) + \Sigma(x, \psi) = (2x^3\psi - 3x\psi + 4\psi^2) + (-3x^3\psi - 7x\psi + \psi^2 - 3x^2) + (-x\psi^3 + 5x\psi - 2x^2) = 2x^3\psi - 3x\psi + 4\psi^2 - 3x^3\psi - 7x\psi + \psi^2 - 3x^2 - x\psi^3 + 5x\psi - 2x^2 = -x^3\psi - 5x\psi + 5\psi^2 - x\psi^3 - 5x^2.$

Ἰδιότητες. Ἂν δοθοῦν τὰ πολυώνυμα Φ, Π, Σ μὲ μία ἢ περισσότερες μεταβλητές, εἶναι εὔκολο νὰ βεβαιωθοῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

I. $\Phi+\Pi = \Pi+\Phi$ (ἀντιμεταθετικότητα)

II. $(\Phi+\Pi)+\Sigma = \Phi+(\Pi+\Sigma)$ (προσεταιριστικότητα)

III. **Τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο** εἶναι **οὐδέτερο** στοιχεῖο στὴν πρόσθεση τῶν πολυωνύμων, δηλ. $\Phi+0 = 0+\Phi = \Phi$.

IV. **Κάθε πολυώνυμο ἔχει τὸ ἀντίθετό του,** δηλ. γιὰ τὸ Φ βρίσκεται ἕνα καὶ μόνο πολυώνυμο Φ′, ὥστε νὰ εἶναι $\Phi+\Phi'=0$.

Β) Ἀφαίρεση πολυωνύμων. Ἀφαίρεση τοῦ πολυωνύμου Β ἀπὸ τὸ πολυώνυμο Α λέγεται ἡ πρόσθεση στὸ Α τοῦ ἀντίθετου πολυωνύμου Β.

Παράδειγμα: Ἂν $\Phi(x) = 2x^4-5x^3+6x^2-14$ καὶ $\Pi(x)=-3x^3+5x^2+3x-8$ θὰ εἶναι: $\Phi(x)-\Pi(x) = (2x^4-5x^3+6x^2-14)-(-3x^3+5x^2+3x-8)$ ἢ

$$\Phi(x)-\Pi(x) = (2x^4-5x^3+6x^2-14)+(+3x^3-5x^2-3x+8) =$$
$$= 2x^4-5x^3+6x^2-14+3x^3-5x^2-3x+8 =$$
$$= 2x^4-2x^3+x^2-3x-6$$

Προσέχοντας τὰ παραδείγματα στὴν πρόσθεση καὶ στὴν ἀφαίρεση τῶν πολυωνύμων παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε ἄθροισμα πολυωνύμων, γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τελικὴ μορφή του, ἐξαλείφουμε παρενθέσεις κι ἐκτελοῦμε ἀναγωγὲς ὅμοιων ὅρων.

Κατὰ τὴν ἐξάλειψη τῶν παρενθέσεων παρατηροῦμε ὅτι: 1) Ἂν μπροστὰ στὴν παρένθεση ὑπάρχει τὸ πρόσημο + (ἢ κανένα πρόσημο), οἱ ὅροι της μένουν ὅπως εἶναι, καὶ 2) ἂν μπροστὰ στὴν παρένθεση ὑπάρχει τὸ —, οἱ ὅροι της μεταβάλλονται στοὺς ἀντίθετους.

Παράδειγμα: Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$3x\psi-(-5x+\psi-2)+(-2x+7\psi)-(8x\psi-4\psi+5)+(x-\psi+1)$$

Ἐξαλείφουμε τὶς παρενθέσεις ἐφαρμόζοντας τὰ παραπάνω καὶ βρίσκουμε:

$$3x\psi+5x-\psi+2-2x+7\psi-8x\psi+4\psi-5+x-\psi+1=-5x\psi+4x+9\psi-2.$$

Ἀντίστροφα, ἂν σ' ἕνα πολυώνυμο μερικοὺς ὅρους του κλείσουμε μέσα σὲ παρένθεση ποὺ μπροστά της θὰ ἔχει τὸ +, οἱ ὅροι θὰ γραφοῦν ὅπως εἶναι, ἂν ἔχει ὅμως μπροστά της τὸ —, τότε θὰ μεταβληθοῦν στοὺς ἀντίθετους.

Παράδειγμα: Εἶναι $7x-4\alpha\beta+6\alpha-2\beta+3\psi-8\omega+x\psi-12 = 7x-(4\alpha\beta-6\alpha+2\beta)+(3\psi-8\omega)-(-x\psi+12)$.

Γ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμο. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο ἐπὶ μονώνυμο, ἐφαρμόζουμε τὴν **ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση, δηλ. **πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμο καὶ προσθέτουμε τὰ μονώνυμα, ποὺ προκύπτουν.**

Παραδείγματα: 1ο) $-3x^2\cdot(2x^3-5x^2+6x-4) = -6x^5+15x^4-18x^3+12x^2$

2ο) $\left(-\frac{2}{3}x^4+\frac{x^3}{2}-\frac{x}{6}+\frac{3}{2}\right)\cdot 6x = -4x^5+3x^4-x^2+9x$

3ο) $(x^2\psi-2x\psi+\psi^3)\cdot(-2x\psi^2) = -2x^3\psi^3+4x^2\psi^3-2x\psi^5$

4ο) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$A = (x^2-2\psi)\cdot 3\psi+(x\psi+\psi^2)\cdot(-x)+(x+\psi)\cdot(-2x\psi)-(x+3)\cdot 2\psi^2$$

Εἶναι: $A = (3x^2\psi - 6\psi^2) + (-x^2\psi - x\psi^2) + (-2x^2\psi - 2x\psi^2) - (2x\psi^2 + 6\psi^2) =$
$= 3x^2\psi - 6\psi^2 - x^2\psi - x\psi^2 - 2x^2\psi - 2x\psi^2 - 2x\psi^2 - 6\psi^2 = -12\psi^2 - 5x\psi^2$

Δ) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων πολυωνύμων. Τὸ γινόμενο δύο πολυωνύμων βρίσκεται ὅπως τὸ γινόμενο δύο ἀθροισμάτων, δηλ. πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ ἑνὸς πολυωνύμου μὲ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἄλλου καὶ προσθέτουμε τὰ μονώνυμα, ποὺ προκύπτουν.

Παραδείγματα 1ο) Νὰ βρεθεῖ τὸ γινόμενο τῶν πολυωνύμων:

$$\Phi(x) = 3x^2 - 5x + 6 \quad \text{καὶ} \quad \Pi(x) = 2x + 3$$

Εἶναι: $\Phi(x) \cdot \Pi(x) = (3x^2 - 5x + 6) \cdot (2x + 3) = 3x^2 \cdot (2x + 3) - 5x \cdot (2x + 3) + 6 \cdot (2x + 3) = 6x^3 + 9x^2 - 10x^2 - 15x + 12x + 18 = 6x^3 - x^2 - 3x + 18.$

Τὸ πολυώνυμο $\Phi(x)$ εἶναι 2ου βαθμοῦ, τὸ $\Pi(x)$ εἶναι 1ου ὡς πρὸς τὴ μεταβλητή τους x. Τὸ γινόμενό τους εἶναι 3ου βαθμοῦ, δηλ. ὅσο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$.

Τὰ δύο πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$ εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x κι ἔτσι εἶναι καὶ τὸ γινόμενό τους. Στὸ γινόμενο $\Phi(x) \cdot \Pi(x)$ ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος $6x^3$ εἶναι τὸ γινόμενο τῶν δύο μεγιστοβαθμίων ὅρων τῶν πολυωνύμων $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$, $3x^2 \cdot 2x = 6x^3$ κι ὁ ἐλαχιστοβάθμιος ὅρος 18 εἶναι τὸ γινόμενο τῶν δύο ἐλαχιστοβαθμίων ὅρων τῶν $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$, $6 \cdot 3 = 18$. Εἶναι φανερὸ ὅτι αὐτοὶ οἱ δύο ὅροι στὸ γινόμενο **θὰ ὑπάρχουν πάντοτε** κι ἂν ἀκόμα ὅλοι οἱ ὅροι μὲ ἐνδιάμεσο βαθμὸ μὲ τὶς ἀναγωγὲς γίνουν μηδενικὰ μονώνυμα.

Ἄρα: Τὸ γινόμενο δύο μὴ μηδενικῶν πολυωνύμων ποτὲ δὲν μπορεῖ νὰ γίνει μηδενικὸ πολυώνυμο ἢ μονώνυμο.

2ο) Νὰ βρεθεῖ τὸ γινόμενο τῶν πολυωνύμων:

$$\Phi(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 2, \quad \Pi(x) = x^2 + 5x - 2$$

Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε τὰ πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$ καὶ νὰ μπορέσουμε πιὸ εὔκολα νὰ προσθέσουμε τοὺς ὅμοιους ὅρους, ἐκτελοῦμε τὸν πολλαπλασιασμὸ ὅπως στοὺς ἀκεραίους ἀριθμούς.

$$\begin{array}{rl}
\Phi(x) = & 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - x + 2 \\
\Pi(x) = & x^2 + 5x - 2 \\
\hline
\Phi(x) \cdot x^2 = & 3x^6 - 5x^5 + 6x^4 - x^3 + 2x^2 \\
\Phi(x) \cdot 5x = & +15x^5 - 25x^4 + 30x^3 - 5x^2 + 10x \\
\Phi(x) \cdot (-2) = & -6x^4 + 10x^3 - 12x^2 + 2x - 4 \\
\hline
\Phi(x) \cdot \Pi(x) = & 3x^6 + 10x^5 - 25x^4 + 39x^3 - 15x^2 + 12x - 4
\end{array}$$

Δηλ. θέσαμε πολλαπλασιαστέο τὸ $\Phi(x)$ ποὺ ἔχει περισσότερους ὅρους, καὶ πολλαπλασιαστὴ τὸ $\Pi(x)$. Ὕστερα ὑπολογίσαμε τὰ μερικὰ γινόμενα $\Phi(x) \cdot x^2$, $\Phi(x) . 5x$, $\Phi(x) \cdot (-2)$, τὰ προσθέσαμε κι ἔτσι βρήκαμε τὸ γινόμενο $\Phi(x) \cdot \Pi(x)$.

Προσέξαμε τὰ ὅμοια μονώνυμα νὰ γραφοῦν κατὰ στῆλες.

3ο) Νὰ βρεθεῖ τὸ γινόμενο τῶν πολυωνύμων:

$$\Phi(x) = 2x^4 - x^2 + x - 3 \quad \text{καὶ} \quad \Pi(x) = 2x^2 + 5$$

Τὰ πολυώνυμα $\Phi(x)$ καὶ $\Pi(x)$ εἶναι ἐλλιπῆ (§ 52, Γ). Συμπληρώνουμε τὸν πολλαπλασιαστέο $\Phi(x)$ μὲ τὸ μηδενικὸ μονώνυμο $0x^3$ κι ἔτσι γίνεται $\Phi(x) = 2x^4 + 0 \cdot x^3 - x^2 + x - 3$ (πλῆρες πολυώνυμο). Ἐκτελοῦμε τὸν πολλαπλασιασμὸ τώρα $\Phi(x)\cdot\Pi(x)$ ὅπως στὸ προηγούμενο παράδειγμα. Θὰ βροῦμε $\Phi(x)\cdot\Pi(x) = 4x^6 - 8x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 5x - 15$.

4ο) Νὰ γίνει ὁ πολλαπλασιασμός: $(x^2+xy+y^2).(x-y)$.

Εἶναι: $(x^2+x\psi+\psi^2)\cdot(x-\psi) = (x^2+x\psi+\psi^2)\cdot x + (x^2+x\psi+\psi^2)\cdot(-\psi) =$
$= x^3+x^2\psi+x\psi^2-x^2\psi-x\psi^2-\psi^3 = x^3-\psi^3$

5ο) Νὰ γίνει ὁ πολλαπλασιασμός: $(2\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+5\alpha\beta-6).(\alpha\beta-2)$.

Εἶναι: $(2\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+5\alpha\beta-6)\cdot(\alpha\beta-2) = 2\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3+5\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta-$
$-4\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-10\alpha\beta+12 = 2\alpha^3\beta^2-3\alpha^2\beta^3+5\alpha^2\beta^2-16\alpha\beta-4\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+12$

Ε) Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πολυωνύμων. Ἂν δοθοῦν τὰ πολυώνυμα Φ, Π, Σ μιᾶς ἢ περισσότερων μεταβλητῶν, μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι εἶναι:

I. $\Phi.\Pi = \Pi.\Phi$ (Μεταθετικότητα)

II. $(\Phi.\Pi)\Sigma = \Phi(\Pi.\Sigma) = (\Phi\Sigma)\Pi$ (προσεταιριστικότητα)

III. $\Phi 1 = 1\Phi = \Phi$

IV. Γιὰ τὸ ἀκέραιο πολυώνυμο Φ δὲν μποροῦμε νὰ προσδιορίσουμε **τὸ ἀντίστροφό του,** δηλ. ἕνα πολυώνυμο Φ′ τέτοιο, ὥστε νὰ εἶναι: $\Phi\cdot\Phi' = 1$.

Λ.χ. ἂν $\Phi(x) = x^3-7x^2+6x-2$, τὸ Φ′, ἂν ὑπάρχει, θὰ δίνει γινόμενο μὲ τὸ $\Phi(x)$ ἴσο μὲ 1. Ἀλλὰ ἡ ἰσότητα $(x^3-7x^2+6x-2)\cdot\Phi'(x) = 1$ δὲν ἀληθεύει, γιατὶ τὸ πρῶτο μέλος της εἶναι ἕνα πολυώνυμο μεγαλύτερο τοῦ τρίτου βαθμοῦ καὶ δὲν ταυτίζεται μὲ τὸ δεύτερο μέλος, ποὺ εἶναι ἡ σταθερὰ 1.

V. **Εἶναι: $(\Phi+\Pi)\cdot\Sigma = \Phi\cdot\Sigma+\Pi\cdot\Sigma$** (ἐπιμεριστικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση).

ΣΤ) Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί. Στὴν Ἄλγεβρα θὰ συναντήσουμε συχνὰ παραστάσεις μὲ τὶς μορφές:

$(\alpha+\beta)^2, (\alpha-\beta)^2, (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta), (\alpha+\beta+\gamma)^2, (\alpha+\beta)^3, \ldots$

κι εἶναι ἀνάγκη γιὰ μεγαλύτερη εὐχέρεια στὶς πράξεις, νὰ ἀπομνημονεύσουμε τὰ ἐξαγόμενά τους.

1) εἶναι: $(\alpha+\beta)^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

2) εἶναι: $(\alpha-\beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Ἔτσι λέμε: Τὸ τετράγωνο τοῦ ἀθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) δύο ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ πρώτου ὅρου σὺν (ἢ πλὴν) τὸ διπλάσιο γινόμενο τῶν ὅρων σὺν τὸ τετράγωνο τοῦ δεύτερου ὅρου.

3) εἶναι: $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta) = \alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2-\beta^2$

Δηλαδή: Τὸ γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος δύο ὅρων ἐπὶ τὴ διαφορά τους ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ μειωτέου πλὴν τὸ τετράγωνο τοῦ ἀφαιρετέου τῆς διαφορᾶς.

4) εἶναι: $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta) = (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta) = \alpha^3+3\alpha^2\beta$
$+3\alpha\beta^2+\beta^3$ (νὰ διατυπωθεῖ κανόνας)

Μπορεῖ νὰ γραφεῖ καί: $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

5) εἶναι: $(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)^2\cdot(\alpha-\beta) = (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta) =$
$= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ (νὰ διατυπωθεῖ κανόνας)

Μπορεῖ νὰ γραφεῖ καί: $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

6) εἶναι: $(x+\alpha)(x+\beta)=x^2+\alpha x+\beta x+\alpha\beta=x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

7) εἶναι: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+$
$+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

8) εἶναι: $(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)=\alpha^3+\beta^3$

9) εἶναι: $(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^3-\beta^3$

10) εἶναι: $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)-(\alpha x+\beta\psi)^2=(\alpha\psi-\beta x)^2$

Ὅλες οἱ παραπάνω ἰσότητες εἶναι **ταυτότητες** μὲ μεγάλη χρησιμότητα στὴν Ἄλγεβρα.

Μὲ τὴ συμμετρικὴ ἰδιότητα στὴν ἰσότητα προκύπτουν ἀπὸ τὶς προηγούμενες οἱ ἀξιοσημείωτες ταυτότητες:

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$

$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$ κλπ.

Ἐφαρμογές. 1) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις: $(\alpha x+\beta)^2+(\alpha x-\beta)^2$.

Ἐπειδὴ εἶναι: $(\alpha x+\beta)^2=(\alpha x)^2+2(\alpha x)\beta+\beta^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$ καὶ $(\alpha x-\beta)^2=\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2$, βρίσκουμε:
$(\alpha x+\beta)^2+(\alpha x-\beta)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2+\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2=2\alpha^2x^2+2\beta^2$

Συνηθίζουμε νὰ λέμε: Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha x+\beta)^2$ εἶναι τὸ τριώνυμο α^2x^2+ $+2\alpha\beta x+\beta^2$.

2) Νὰ βρεθοῦν τὰ ἀναπτύγματα τῶν: $(3x^2\psi+2x^4)^2$, $\left(\frac{2}{3}\cdot x^3-1\right)^2$.

Εἶναι: $(3x^2\psi+2x^4)^2=(3x^2\psi)^2+2\cdot(3x^2\psi)\cdot(2x^4)+(2x^4)^2=$
$=9x^4\psi^2+12x^6\psi+4x^8$

καὶ $\left(\frac{2}{3}x^3-1\right)^2=\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2-2\left(\frac{2}{3}x^3\right)\cdot1+1^2=\frac{4}{9}x^6-\frac{4}{3}x^3+1.$

3) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις: $(7x^3\psi+5\alpha^4)\cdot(7x^3\psi-5\alpha^4)$

Σύμφωνα μὲ τὴν παραπάνω ταυτότητα 3 εἶναι:

$$(7x^3\psi+5\alpha^4)\cdot(7x^3\psi-5\alpha^4)=(7x^3\psi)^2-(5\alpha^4)^2=49x^6\psi^2-25\alpha^8$$

4) Μὲ τὴν ἴδια ταυτότητα 3 εἶναι:

$$(x^2+3x+2)(x^2-3x+2)=[(x^2+2)+3x][(x^2+2)-3x]=$$
$$=(x^2+2)^2-(3x)^2=x^4+4x^2+4-9x^2=x^4-5x^2+4$$

5) Νὰ βρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν: $(x+\psi-\omega)^2, (x-\psi-\omega)^2$.

Ἐφαρμόζοντας τὴν ταυτότητα 7, ἔχουμε:

$$(x+y-\omega)^2=x^2+y^2+(-\omega)^2+2xy+2x(-\omega)+2y(-\omega)=$$
$$=x^2+y^2+\omega^2+2xy-2x\omega-2y\omega$$

καὶ $(x-\psi-\omega)^2=x^2+\psi^2+\omega^2-2x\psi-2x\omega+2\psi\omega.$

6) Εὔκολα μποροῦμε νὰ βροῦμε κάνοντας πολλαπλασιασμοὺς τὰ ἀναπτύγματα τῶν $(\alpha+\beta)^4, (\alpha-\beta)^4, (\alpha+\beta)^4$ κλπ.

Λ.χ. $(\alpha+\beta)^4=(\alpha+\beta)^3\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)\cdot(\alpha+\beta)=$
$=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$
καὶ $(\alpha-\beta)^4=\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^3+\beta^4$.

Ζ) Διαίρεση πολυωνύμου μὲ μονώνυμο. Μᾶς δίνουν τὸ ἀκέραιο πολυώνυμο Φ καὶ τὸ ἀκέραιο μονώνυμο Μ. Ἂν ὑπάρχει τὸ ἀκέραιο πολυώνυμο Π τέτοιο, ὥστε νὰ εἶναι: **Φ = Π · Μ,** θὰ λέμε τότε ὅτι τὸ Φ **εἶναι διαιρετὸ** διὰ τοῦ Μ καὶ ὅτι τὸ Π εἶναι τὸ **πηλίκο τοῦ Φ διὰ Μ.** Συμβολικὰ εἶναι: **Φ : Μ = Π.**

Ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκουμε τὸ πηλίκο Π, λέγεται διαίρεση τοῦ Φ διὰ Μ.

Ἂς εἶναι : $\Phi(x,\psi)=8x^4\psi^3-12x^3\psi^5+20x^2\psi^3-4x^3\psi^3$ καὶ $M(x,\psi)=4x^2\psi$
Ἂν διαιρέσουμε κάθε ὅρο τοῦ $\Phi(x,\psi)$ μὲ τὸ $M(x,\psi)$ καὶ προσθέσουμε τὰ πηλίκα, βρίσκουμε τὸ πολυώνυμο $2x^2\psi^2-3x\psi^4+5\psi^2-x\psi^2$, κι εὔκολα φθάνουμε στὴ διαπίστωση ὅτι εἶναι:

$$\Phi(x,\psi)=(2x^2\psi^2-3x\psi^4+5\psi^2-x\psi^2)\cdot M(x,\psi) \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν (1) συμπεραίνουμε ὅτι ὑπάρχει τὸ πηλίκο $\Phi(x,\psi):M(x,\psi)$ καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ πολυώνυμο $\Pi(x,\psi)=2x^2\psi^2-3x\psi^4+5\psi^2-x\psi^2$, ἄρα εἶναι :

$$(8x^4\psi^3-12x^3\psi^5+20x^2\psi^3-4x^3\psi^3):4x^2\psi=2x^2\psi^2-3x\psi^4+5\psi^2-x\psi^2 \qquad (2)$$

(Νὰ διατυπώσετε τὸ σχετικὸ κανόνα).

Παραδείγματα : 1ο) Εἶναι: $(\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3+3\alpha\beta^4):\left(-\frac{2}{3}\alpha\beta^2\right)=-\frac{3}{2}\alpha^2+$
$+\frac{3}{2}\alpha\beta-\frac{9}{2}\beta^2$

2ο) $(3\psi^5-6\psi^4+8\psi^3):3\psi^3=\psi^2-2\psi+\frac{8}{3}$

3ο) $(\alpha\omega^6-\beta\omega^5-\gamma\omega^4+2\omega^3):\omega^3=\alpha\omega^3-\beta\omega^2-\gamma\omega+2$

4ο) Ἡ διαίρεση $3x^5-x^4+2x^3+x^2-5x$ διὰ x^2 δὲν εἶναι δ υ ν α τ ὴ στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων, γιατὶ ὁ ὅρος $-5x$ τοῦ διαιρετέου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ x^2.

Η) Διαίρεση πολυωνύμου μὲ πολυώνυμο.

α) Ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸ πολυώνυμο $\delta(x)=2x^3-5x^2+6x-3$ ἐπὶ τὸ πολυώνυμο $\Pi(x)=3x+2$, θὰ βροῦμε γινόμενο τὸ πολυώνυμο $\Delta(x)=6x^4-11x^3+8x^2+3x-6$ καὶ συνεπῶς ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$\Delta(x)=\delta(x)\cdot\Pi(x) \quad (1)$$

β) Ἂν μὲ τὰ πολυώνυμα: $\delta(\omega)=3\omega^3-5\omega+6$, $\Pi(\omega)=2\omega-3$ καὶ $\upsilon(\omega)=-7\omega+8$ σχηματίσουμε τὴν παράσταση $\delta(\omega)\cdot\Pi(\omega)+\upsilon(\omega)$, θὰ βροῦμε τὸ πολυώνυμο $\Delta(\omega)=6\omega^3-19\omega^2+20\omega-10$ καὶ ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$\Delta(\omega)=\delta(\omega)\cdot\Pi(\omega)+\upsilon(\omega) \quad (2)$$

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ ἡ (1) γράφεται: $\Delta(x)=\delta(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$, (1′) ἂν σὰν $\upsilon(x)$ θεωρηθεῖ τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω μποροῦμε νὰ θέσουμε τὸ **πρόβλημα :**

«Ἂν δοθοῦν τὰ πολυώνυμα $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$, μὲ βαθμὸ τοῦ $\delta(x)$ μικρότερο ἢ ἴσο μὲ τὸ βαθμὸ τοῦ $\Delta(x)$, ὑπάρχουν δύο ἄλλα πολυώνυμα, λ.χ. τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$, μὲ βαθμὸ τοῦ $\upsilon(x)$ μικρότερο τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\delta(x)$, ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ ταυτότητα : $\Delta(x) = \delta(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x)$; Καὶ ἂν ὑπάρχουν εἶναι τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ ὁρισμένα κατὰ μονοσήμαντο τρόπο; Καὶ ἂν ναί, τότε μὲ ποιὸν τρόπο θὰ τὰ βροῦμε;»

Π.χ. ἂν $\Delta(x) = 6x^4 - 11x^3+8x^2+3x-6$ καὶ $\delta(x) = 2x^3-5x^2+6x-3$, τότε ἀπὸ τὸ α΄ παράδειγμα παραπάνω ἰσχύει ἡ (1΄) καὶ μποροῦμε νὰ πάρουμε $\Pi(x) = 3x+2$ καὶ $\upsilon(x) = 0$. Εἶναι ὅμως τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ μονοσημάντως ὁρισμένα; Καὶ ἂν ναί, μὲ ποιὸν τρόπο θὰ βρεθοῦν, ὅταν δοθοῦν τὰ $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$;

Ἀπὸ τὸ β΄ ἐπίσης παράδειγμα, ἂν δοθοῦν τὰ $\Delta(\omega)$ καὶ $\delta(\omega)$, ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ (2), θὰ ἔχουμε $\Pi(\omega) = 2\omega - 3$ καὶ $\upsilon(\omega) = -7\omega+8$ χωρὶς καὶ τώρα νὰ γνωρίζουμε, ἂν τὰ $\Pi(\omega)$ καὶ $\upsilon(\omega)$ εἶναι μονοσημάντως ὁρισμένα καί, ἂν ναί, μὲ ποιὸν τρόπο θὰ τὰ βροῦμε.

γ) Σ' ἀνώτερη τάξη (τοῦ Λυκείου) θὰ ἀποδειχθεῖ τὸ **θεώρημα:**

Γιὰ δύο δοσμένα πολυώνυμα $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$ μὲ βαθμὸ τοῦ $\delta(x) \leqslant$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\Delta(x)$ ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνο πολυώνυμο $\Pi(x)$ καὶ ἕνα καὶ μόνο πολυώνυμο $\upsilon(x)$ μὲ βαθμὸ τοῦ $\upsilon(x) <$ τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\delta(x)$, ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ ταυτότητα :

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : \Delta(x) = \delta(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x) \qquad (\alpha)$$

Ἡ (α) λέγεται **ταυτότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$.**

Διαίρεση τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$ λέγεται ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκουμε τὰ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$. Τὸ $\Delta(x)$ ὀνομάζεται **ὁ διαιρετέος,** τὸ $\delta(x)$ **ὁ διαιρέτης,** τὸ $\Pi(x)$ **τὸ πηλίκο** καὶ τὸ $\upsilon(x)$ **τὸ ὑπόλοιπο** τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$.

Κάθε διαίρεση μὲ ὑπόλοιπο τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο λέγεται **«τέλεια διαίρεση».** Κάθε διαίρεση, ποὺ ἔχει ὑπόλοιπο πολυώνυμο μὴ μηδενικό, μὲ βαθμὸ μικρότερο ἀπὸ τὸ βαθμὸ τοῦ διαιρέτη, λέγεται **«μὴ τέλεια»** ἢ **«ἀτελής».**

Στὸ α΄ παραπάνω παράδειγμα ἡ διαίρεση τοῦ $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$ εἶναι τέλεια, μὲ πηλίκο τὸ $\Pi(x) = 3x+2$ καὶ ὑπόλοιπο $\upsilon(x) = 0$. Μπορεῖ νὰ γραφεῖ: $(6x^4 - 11x^3+8x^2+3x-6) : (2x^3-5x^2+6x-3) = 3x+2$.

Στὸ β΄ παράδειγμα ἡ διαίρεση τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$ εἶναι ἀτελὴς μὲ πηλίκο $\Pi(\omega) = 2\omega-3$ καὶ ὑπόλοιπο $\upsilon(\omega) = -7\omega+8$.

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων $\Delta(x)$ διὰ $\delta(x)$ δίνεται, ὅπως θὰ δοῦμε ἀργότερα (§ 59), μὲ τὴ μορφὴ $\frac{\Delta(x)}{\delta(x)}$ καὶ λέγεται ρητὸ ἀλγεβρικὸ κλάσμα ἢ ἁπλὰ ρητὸ κλάσμα. Πάντοτε ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι $\delta(x) \neq 0$.

δ) Πῶς ἐκτελοῦμε τὴ διαίρεση πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.

Ἂς πάρουμε τὰ πολυώνυμα τοῦ παραπάνω παραδείγματος β΄:

$$\Delta(\omega) = 6\omega^3 - 19\omega^2+20\omega-10 \text{ καὶ } \delta(\omega) = 3\omega^2-5\omega+6.$$

Θὰ ἐκθέσουμε ἕναν τρόπο γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ πηλίκου $\Pi(\omega)$ καὶ τοῦ ὑπολοίπου $\upsilon(\omega)$ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$. Πρέπει τὰ $\Delta(\omega)$ καὶ $\delta(\omega)$ νὰ εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις τῆς κοινῆς τους μεταβλητῆς καὶ ὅπως θὰ διαπιστώσουμε μοιάζει ὁ τρόπος αὐτὸς μὲ τὴν ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως πολυψήφιου φυσικοῦ μὲ ἕναν ἄλλο φυσικὸ ἀριθμό. Τοποθετοῦμε τὸ διαιρετέο $\Delta(\omega)$ ἀριστερὰ καὶ τὸ διαιρέτη $\delta(\omega)$ δεξιὰ στὸ παραπάνω «σχῆμα» τῆς

$$
\begin{array}{rl|l}
\Delta(\omega) = & 6\omega^3 - 19\omega^2 + 20\omega - 10 & 3\omega^2 - 5\omega + 6 = \delta(\omega) \\
\cline{3-3}
-\delta(\omega)\cdot 2\omega = & -6\omega^3 + 10\omega^2 - 12\omega & 2\omega - 3 = \Pi(\omega) \\
\cline{2-2}
\text{α' μερ. ὑπόλ. } \upsilon_1(\omega) = & -9\omega^2 + 8\omega - 10 & \\
-\delta(\omega)\cdot(-3) = & +9\omega^2 - 15\omega + 18 & \\
\cline{2-2}
\text{ὑπόλοιπο } \upsilon(\omega) = & -7\omega + 8 &
\end{array}
$$

διαιρέσεως. Διαιροῦμε τὸν α' ὅρο τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ $\delta(\omega)$ καὶ τὸ πηλίκο $6\omega^3 : 3\omega^2 = 2\omega$ γράφεται δεξιὰ καὶ κάτω ἀπὸ τὸ διαιρέτη. Τὸ 2ω ἀποτελεῖ τὸν α' ὅρο τοῦ πηλίκου $\Pi(\omega)$. Πολλαπλασιάζουμε κατόπι τὸ $\delta(\omega)$ ἐπὶ 2ω καὶ τὸ γινόμενο γράφεται κάτω ἀπὸ τὸ $\Delta(\omega)$ **καὶ ἀφαιροῦμε,** τὸ δὲ ἐξαγόμενο τῆς διαφορᾶς $\Delta(\omega) = \delta(\omega).2\omega$ εἶναι τὸ πολυώνυμο $\upsilon_1(\omega) = -9\omega^2 + 8\omega - 10$, ποὺ ὀνομάζεται **τὸ πρῶτο μερικὸ ὑπόλοιπο** τῆς διαιρέσεως $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$.

Συνεχίζουμε τώρα μὲ τὸν ἴδιο τρόπο σὰν τὸ $\upsilon_1(\omega)$ νὰ εἶναι ὁ διαιρετέος στὴ διαίρεση $\upsilon_1(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$. Δηλ. διαιροῦμε τὸν α' ὅρο τοῦ $\upsilon_1(\omega)$ μὲ τὸν α' ὅρο τοῦ $\delta(\omega)$ καὶ τὸ πηλίκο $-9\omega^2 : 3\omega^2 = -3$ γράφεται δεξιὰ στὸ «σχῆμα» καὶ κάτω ἀπὸ τὸ $\delta(\omega)$ διαδοχικὰ μὲ τὸν α' ὅρο 2ω τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζουμε τὸ $\delta(\omega)$ ἐπὶ τὸ (-3) καὶ τὸ γινόμενο τὸ **ἀφαιροῦμε** ἀπὸ τὸ $\upsilon_1(\omega)$. Ἡ διαφορὰ $\upsilon(\omega) = \upsilon_1(\omega) - \delta(\omega)\cdot(-3) = -7\omega + 8$ γράφεται ἀριστερὰ στὸ «σχῆμα» κι εἶναι **τὸ δεύτερο μερικὸ ὑπόλοιπο** τῆς διαιρέσεως $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$. Ἐπειδὴ ὁ βαθμὸς τοῦ $\upsilon(\omega)$ εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ βαθμὸ τοῦ $\delta(\omega)$, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ἐργασία τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(\omega)$ διὰ $\delta(\omega)$ τελείωσε καὶ εἶναι τὸ $2\omega - 3 = \Pi(\omega)$ τὸ πηλίκο, τὸ δὲ $\upsilon(\omega) = -7\omega + 8$ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς. Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἔχουμε τὴν ταυτότητα:

$$6\omega^3 - 19\omega^2 + 20\omega - 10 = (3\omega^2 - 5\omega + 6)\cdot(2\omega - 3) + (-7\omega + 8).$$

Ἂς ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση καὶ στὸ α' παράδειγμα:

$$
\begin{array}{rl|l}
\Delta(x) = & 6x^4 - 11x^3 + 8x^2 + 3x - 6 & 2x^3 - 5x^2 + 6x - 3 = \delta(x) \\
\cline{3-3}
-\delta(x)\cdot 3x = & -6x^4 + 15x^3 - 18x^2 + 9x & 3x + 2 \quad = \Pi(x) \\
\cline{2-2}
\text{α' μερ. ὑπόλ.} = & 4x^3 - 10x^2 + 12x - 6 & \\
-\delta(x)\cdot 2 = & -4x^3 + 10x^2 - 12x + 6 & \\
\cline{2-2}
\text{ὑπόλοιπο } \upsilon(x) = & 0. &
\end{array}
$$

Παρατηρήσεις: 1η) Ἂν εἶναι $\upsilon(x) \neq 0$, ἡ ταυτότητα $\Delta(x) = \delta(x)\Pi(x) + \upsilon(x)$ γράφεται καὶ μὲ τὴ μορφή: $\dfrac{\Delta(x)}{\delta(x)} = \Pi(x) + \dfrac{\upsilon(x)}{\delta(x)}$ (β)

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ μεταβλητὴ x παίρνει τιμές, ποὺ δὲ μηδενίζουν τὸ $\delta(x)$, δηλ. ὅτι εἶναι $\delta(\chi) \neq 0$.

Τὸ Π(x) λέγεται **τὸ ἀκέραιο μέρος** τοῦ πηλίκου Δ(x) διὰ δ(x).

Ὁ βαθμὸς τοῦ Π(x) εἶναι ἴσος μὲ τὴ διαφορὰ τοῦ βαθμοῦ τοῦ δ(x) ἀπὸ τὸ βαθμὸ τοῦ Δ(x).

2η) Ἂν εἶναι τὸ Δ(x) τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο καὶ $\delta(x) \neq 0$, τότε τὰ Π(x) καὶ υ(x) εἶναι ἐπίσης τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο.

3η) Ἂν ὁ βαθμὸς τοῦ Δ(x) εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸ βαθμὸ τοῦ δ(x), τότε ὡς Π(x) ὁρίζουμε πάλι τὸ μηδενικὸ πολυώνυμο καὶ τὸ υ(x) εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ Δ(x), δηλ. εἶναι:

$$\frac{\Delta(x)}{\delta(x)} = 0 + \frac{\upsilon(x)}{\delta(x)} \quad \text{καὶ} \quad \Delta(x) = \upsilon(x) \quad (\text{ταυτότητα}).$$

4η) Ὅταν ὁ διαιρετέος Δ(x) εἶναι μὴ πλῆρες πολυώνυμο ὡς πρὸς τὴ μεταβλητή του, συμπληρώνεται μὲ μηδενικὰ μονώνυμα ἢ γράφεται μὲ τρόπο, ὥστε νὰ μένουν κενὰ ἀνάμεσα στοὺς ὅρους του στὶς θέσεις τῶν ὅρων ποὺ λείπουν.

Παραδείγματα

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -x^3-x^2 & x^2-x+1 \\ \hline -x^2+0x+1 & \\ +x^2+x & \\ \hline x+1 & \\ -x-1 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8\psi^4 -12\psi+7 & 2\psi^2-3\psi+1 \\ \cline{2-2} -8\psi^4+12\psi^3-4\psi^2 & 4\psi^2+6\psi+7 \\ \hline 12\psi^3-4\psi^2-12\psi+7 & \\ -12\psi^3+18\psi^2-6\psi & \\ \hline 14\psi^2-18\psi+7 & \\ -14\psi^2+21\psi-7 & \\ \hline 3\psi & \end{array}$$

5η) Ἂν ὁ διαιρετέος κι ὁ διαιρέτης εἶναι διατεταγμένα πολυώνυμα κατὰ τὶς ἀνιοῦσες δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς τους κι ἐφαρμοσθεῖ ἡ προηγούμενη «τεχνικὴ» γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ πηλίκου, στὴν περίπτωση ποὺ ἡ διαίρεση εἶναι τέλεια βρίσκεται τὸ πηλίκο καὶ τελειώνει ἡ πράξη, στὴν ἀτελὴ ὅμως ἡ πράξη συνεχίζεται ἀπεριόριστα **(ἐπ' ἄπειρον)** καὶ στὴ θέση τοῦ πηλίκου μποροῦμε νὰ βροῦμε ὅσους ὅρους θέλουμε. Ἡ διαίρεση στὴν περίπτωση αὐτὴ λέγεται **«ἀτέρμων» διαίρεση.** Π.χ.

$$\begin{array}{r|l} 12-7x+x^2 & 3-x \\ \cline{2-2} -12+4x & 4-x \\ \hline -3x+x^2 & \\ +3x-x^2 & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3-2x+x^2 & 1-x \\ \cline{2-2} -3+3x & 3+x+2x^2 \\ \hline x+x^2 & \\ -x+x^2 & \\ \hline 2x^2 & \\ -2x^2+2x^3 & \\ \hline 2x^3 & \end{array}$$

Βλέπουμε ὅτι στὴ διαίρεση $(3-2x+x^2)$ διὰ $(1-x)$ κάθε φορὰ προκύπτει ὑπόλοιπο μεγαλύτερου βαθμοῦ ἀπὸ τὸ προηγούμενό του καὶ γιὰ τοῦτο ἡ διαίρεση αὐτὴ δὲν ἔχει τέλος **(ἀτέρμων).**

6η) Γιὰ νὰ διαιρέσουμε πολυώνυμα μὲ περισσότερες μεταβλητές, καθορίζουμε ἀπὸ αὐτὲς μία σὰν μεταβλητὴ γιὰ τὴν ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως, διατάσσουμε τὰ πολυώνυμα κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις αὐτῆς τῆς μεταβλητῆς κι ἐργαζόμαστε, ὅπως στὰ παραδείγματα, ποὺ εἴδαμε παραπάνω.

Π.χ. στὴ διαίρεση $(9x^2 - 12x\psi + 4\psi^2 - 7\psi)$ διὰ $(3x - \psi)$ ὁρίζουμε γράμμα γιὰ τὴν ἐκτέλεσή της τὸ x, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὶς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x, ἐκτελοῦμε κατὰ τὰ γνωστὰ τὴ διαίρεση καὶ βρίσκουμε πηλίκο $3x - 3\psi$ κι ὑπόλοιπο $\psi^2 - 7\psi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

149) Νὰ βρεῖτε τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων:
$\Phi(x) = 2x^5 - 3x^4 + 7x - 6$, $\Pi(x) = -x^5 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 12$ καὶ
$\Sigma(x) = 5x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 3x - 1$.

150) Ἂν εἶναι: $A = 3x^2 - 7x + 8$, $B = -3x^3 + 2x^2 - 6x - 5$,
$\Gamma = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 12x - 3$, $\Delta = x^3 - 5x^2 + x + 2$
νὰ βρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα $A + B + \Gamma + \Delta$, $A - B + \Gamma - \Delta$, $A - B - \Gamma + \Delta$,
$-A - (B - \Gamma) - \Delta$, $A + B - (\Gamma - \Delta)$.

151) Ἂν εἶναι: $A = 3x - 5 + 6x^2 - 3x^3 + x^4$, $B = -x^2 + 2x - x^3 - 6x^4 + 7$,
$\Gamma = x^3 + 2x - 2 - x^4 + 3x^2$, νὰ βρεθοῦν τὰ πολυώνυμα:
$\Phi(x) = A + B - \Gamma$, $\Pi(x) = A - B + \Gamma$, $\Sigma(x) = A - B - \Gamma$, $P(x) = A + B + \Gamma$.

Ποιὸ εἶναι τὸ ἄθροισμα $\Phi(x) + \Pi(x) + \Sigma(x) + P(x)$; Τί παρατηρεῖτε; Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν εἰκόνων τοῦ συνόλου

$$\Sigma = \left\{ -\frac{1}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2} \right\} \text{ μὲ τὴ συνάρτηση } P(x) = A + B + \Gamma;$$

152) Μᾶς δίνουν τὰ πολυώνυμα: $A = x^4 - 3x^2\psi^2 + \psi^4$, $B = -2x^2 + \psi^4$, $\Gamma = 3x\psi + 2x^2\psi^2 + x^3\psi^3$. Τίνος βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ὡς πρὸς ψ καὶ ὡς πρὸς x καὶ ψ εἶναι τὸ πολυώνυμο $A + B - \Gamma$;

153) Ἂν εἶναι $\varphi(x, \psi) = 3x + \psi - 5$, $\sigma(x, \psi) = -2x - 3\psi + 8$, $f(x, \psi) = x - 2\psi + 3$, νὰ βρεθοῦν στὴ συνεπτυγμένη τους μορφὴ τὰ πολυώνυμα: α) $\varphi(x, \psi) + \sigma(x, \psi) + f(x, \psi)$, β) $\varphi(x, \psi) - [\sigma(x, \psi) - f(x, \psi)]$, γ) $-[\varphi(x, \psi) - \sigma(x, \psi)] - f(x, \psi)$.

154) Ἂν εἶναι: $\varphi(x, \psi) = x - 2\psi + 3$, $\sigma(x, \psi) = 3x + \psi - 5$, $f(x, \psi) = -5x + 3\psi - 1$, νὰ βρεθοῦν τὰ πολυώνυμα: $A = 2\varphi(x, \psi) + 2\sigma(x, \psi) - f(x, \psi)$, $B = 2\sigma(x, \psi) + 2f(x, \psi) - \varphi(x, \psi)$ καὶ $\Gamma = 2\varphi(x, \psi) + 2f(x, \psi) - \sigma(x, \psi)$. Κατόπι νὰ βρεθεῖ τὸ $\Pi = A + B + \Gamma$ καὶ τὸ $P = \varphi(x, \psi) + \sigma(x, \psi) + f(x, \psi)$. Ποιὰ σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ Π καὶ τοῦ P;

155) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:
α) $\left(\frac{2}{5} x^3 - 4x^2 + 7x - 6)\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} x^3\right)$ β) $(-3x^2 + x - 5)\left(-\frac{2}{3} x^4\right)$
γ) $(5\omega^3 - 3\omega^2 + 2)\left(-\frac{4}{5}\omega^3\right)$ δ) $(\alpha^{2x} + \alpha^x + 1)\cdot \alpha^x$
ε) $(2x^{\mu-3} - 4x^{\mu-2} + x^{\mu-1})\cdot(-3x^4)$.

156) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:
α) $(x^2 - 2\psi).3\psi + (x\psi + \psi^2).(-x) + (x + \psi)(-2x\psi) - (x + 3)2\psi^2$
β) $4[2(x - \psi) - 3(2x + \psi)] + 2[3(x^2 - x\psi + \psi^2) - 4x - (x^2 - \psi)]$
γ) $4[2(x - \psi) + 3(2x - \psi)] - 2[3(x^2 + x\psi - \psi^2) + 4x - (x^2 + \psi)]$
Νὰ βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς τῶν ἐξαγομένων α΄, β΄, γ΄ ὅταν εἶναι:

$$(x, \psi) \in \{(2, -1), (0, 3), (-1, 1)\}.$$

157) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:
α) $(x^3 - 7x^2 + 6x - 2).(x + 3)$ β) $(-2x^3 + 5x^4 - 7x - 8 + x^2)(-3 + x^2 - 5x)$
γ) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ δ) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

158) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $(x^3+x\psi^2+x^2\psi+\psi^3)(x-\psi)$

β) $(x^2+2x\psi+\psi^2)(x+\psi)+(x^2-2x\psi+\psi^2)(x-\psi)$

γ) $(64\alpha^3-48\alpha^2\beta+36\alpha\beta^2-27\beta^3).(4\alpha+3\beta)$

159) Νὰ βρεθεῖ γιὰ $x=\frac{1}{3}$ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου:

$(x+5)(x-1)(x-3)-(x+3)(x-2)^2$ καὶ γιὰ $x=-1$ τοῦ

$(x^3+2x^2+5x-1).(2-2x^2)-(x^3-3x^2+x-2)(x^3-2x^2+1)$.

160) Ποιὰ εἶναι τὰ ἀναπτύγματα τῶν:

α) $(2\alpha-3\beta)^2$ β) $(5\alpha^2+1)^2$ γ) $\left(\frac{3}{2}x^2+4x\psi\right)^2$ δ) $\left(7\alpha-\frac{3}{2}\beta^2\right)^2$

ε) $(x+1)^3$ στ) $(5\alpha+3\beta)(5\alpha-3\beta)$ ζ) $(\psi-2)^2$

161) Νὰ βρεῖτε τὰ ἀναπτύγματα τῶν:

α) $(x-\psi+z)^2$ β) $(3x+2\psi-1)^2$ γ) $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$

δ) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$ ε) $(x^\mu+\psi^\nu)^2$

162) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις:

α) $(x^3+2\psi^2)^2-(\psi^2+2x^3)^2+(x^3-2\psi^2)(x^3+2\psi^2)$

β) $(2x+3)^2+(2x-3)^2+(2x+3)(2x-3)-3(x-5)^2$

γ) $-(2x+1)^2+(2x+1)(-2x-1)-(x+3)(x-3)-(x-3)(-x-3)$

δ) $(x+3)^2+(x-3)^2+(x-2)^2+(x+2)^2-(x+3)(x-3)-(x+2)(x-2)$

ε) $(2x+5)^2-(x-5)^2+(3x-1)^2-(2x+1)^2-(2x+3)(2x-3)$

στ) $(x^2+1)^2+(2x^2-3)^2-(3x^2+4)^2+(x^2-2)^2+(x^2+3)(x^2-3)$

163) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $(2\alpha^3-2\alpha^2)^2+(5\alpha+2)^2-(3\alpha^2-\alpha)^2-(\alpha^2+2)^2$

β) $(3x^4-5x^2)^2-(x^3+3x)^2+(x+1)^2-(x^4+3x^2)(x^4-3x^2)$

γ) $\left(\frac{2}{3}x^2+2\right)^2+\left(\frac{1}{3}x^2-x\right)^2-\left(\frac{3}{2}x^2-5x\right)\left(\frac{3}{2}x^2+5x\right)$

δ) $(\alpha^x+3)^2-(\alpha^x-2)^2+(\alpha^x+5)\cdot(\alpha^x-5)$

164) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\beta+\gamma-\alpha)^2$

β) $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2$

γ) $x^2(\psi-z)^3+\psi^2(z-x)^3+z^2(x-\psi)^3$

δ) $(x+\psi+z)\,[(x-\psi)^2+(\psi-z)^2+(z-x)^2]$

165) Νὰ ἀποδείξετε τὶς ταυτότητες:

α) $(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

γ) $\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4=(\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$.

166) Γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ x νὰ δείξετε ὅτι ἡ παράσταση $(2x+1)^2-1$ εἶναι ἀκέραιος διαιρετὸς διὰ 8.

167) Ἂν εἶναι: $x=\alpha^2-\beta^2$, $\psi=2\alpha\beta$, $z=\alpha^2+\beta^2$, νὰ δείξετε ὅτι θὰ εἶναι καὶ $x^2+y^2=z^2$. Ἂν οἱ α, β εἶναι φυσικοὶ ($\alpha>\beta$), οἱ x, ψ, z θὰ εἶναι μήκη πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.

168) Ἂν εἶναι: $x=3\alpha+2\beta+2\gamma$, $\psi=2\alpha+\beta+2\gamma$, $z=2\alpha+2\beta+\gamma$ καὶ $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\psi^2+z^2=x^2$, δηλ. ἂν τὰ α, β, γ εἶναι πλευρὲς ὀρθογ. τριγώνου, θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ τὰ x, ψ, z πλευρὲς ὀρθογωνίου τριγώνου.

169) Ἂν εἶναι: $\alpha=8x$, $\beta=3x^2+4$, $\gamma=3x^2+4x-4$, νὰ δείξετε ὅτι θὰ εἶναι: $\beta^2+3\alpha\gamma=(\alpha+\gamma)^2$.

170) Ἂν εἶναι: $\alpha=(x-3)^2$, $\beta=-(x+3)^2$, $\gamma=12x$, νὰ δείξετε ὅτι θὰ εἶναι καί: $\alpha^2-\beta\gamma=\beta^2-\alpha\gamma=\gamma^2-\alpha\beta$.

171) Μᾶς δίνουν τοὺς θετικοὺς μονοψήφιους x, ψ, ω. Ζητεῖται νὰ σχηματίσουμε ὅλους τοὺς διψήφιους, παίρνοντας δύο ἀπὸ τὰ τρία ψηφία μὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Ποιὸ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διψήφιων αὐτῶν; Τί παρατηροῦμε;

172) Μὲ τοὺς x, ψ, ω τῆς ἀσκήσεως 171 νὰ σχηματίσετε ὅλους τοὺς δυνατοὺς τριψήφιους. Ποιὸς εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ συνόλου τους; Νὰ δείξετε ὅτι τὸ ἄθροισμά τους διαιρεῖται μὲ τὸ 222. Ποιὸ εἶναι τὸ πηλίκο;

173) Ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δείξετε ὅτι:

1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\gamma^2-\alpha\beta)$, 2) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(2\gamma^2-\alpha\beta)^2$

3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

174) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $(8x^5-3x^4+6x^3):(-3x^3)$ β) $(-12\alpha x^5+18\alpha x^3-6\alpha x^2):(-6\alpha x^2)$

γ) $(\omega^{2x}+\omega^{3x}):\omega^{2x}$ δ) $(\alpha^{3\mu}+2\alpha^{2\mu}+6\alpha^{\mu}).(-3\alpha^{\mu})$

ε) $(6\alpha x^5-3\alpha x^4+9\alpha^2x^3-12\alpha^3x^2):(-2\alpha x^2)$

στ) $\left(\frac{12}{5}\alpha^3\beta^2-\frac{4}{5}\alpha^2\beta^3+\frac{8}{15}\alpha^2\beta^2\right):\left(-\frac{4}{5}\alpha^2\beta^2\right)$

175) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $(x^3-x^2-21x+45):(x+5)$ β) $(18x^3+9x^2-50x-25):(3x-5)$

γ) $(2x^3-3x^2-17x-12):(2x+3)$ δ) $(\omega^3+4\omega^2-11\omega-30):(\omega^2-\omega-6)$

ε) $(9x^6-4x^4+21x^3+14x^2):(3x-2)$

στ) $(x^3+4x^2-18x+2):(x^2+1)$

ζ) $(\psi^4+2\psi^3-19\psi^2-8\psi+60):(\psi^2-5\psi+6)$

η) $(\omega^4-\omega^2+1):(\omega^2+\omega+1)$

176) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $[(3x+5)^2+(2x+3)^2-3x(2x+4)-(x+1)^2]:(3x-2)$

β) $(3\alpha^{4x}+14\alpha^{3x}+9\alpha^{x}+2):(\alpha^{2x}+5\alpha^{x}+1)$

γ) $[(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2]:(x^2+x-12)$

δ) $[(x+3\psi)^2+4(x+2\psi)^2-(x+\psi)^2]:4(x+3\psi)$

ε) $(3\alpha^5+25\alpha^4\beta+33\alpha^3\beta^2+14\alpha^2\beta^3):(\alpha^2+7\alpha\beta)$

στ) $(x^4-3x^3\psi+6x^2\psi^2-3x\psi^3+\psi^4):(x^2-x\psi+\psi^2)$

177) Ἂν εἶναι $\varphi(x)=2x^2-5x+3$, νὰ ἐκτελεσθεῖ ἡ διαίρεση:

$[\varphi(x)+\varphi(x-2)-\varphi(x-1)]:(x-3)$

178) Ἂν εἶναι $\varphi(x)=x^3-2x^2+3x-1$, νὰ γίνει ἡ διαίρεση:

$[\varphi(x+1)+\varphi(x-1)-\varphi(x)]:(x-2)$

179) Ἂν εἶναι $\varphi(x)=x^2+5x-6$, νὰ γίνει ἡ διαίρεση:

$[\varphi(x-2).\varphi(x+2)-\varphi(x)-10]:(x^2-x-2)$

180) Νὰ δείξετε τὴν ταυτότητα:

$x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$

Ἂν $x\in N$, τί συμπεραίνετε ἀπὸ τὴν ταυτότητα αὐτή;

181) Νὰ συμπτυχθεῖ τὸ πολυώνυμο $\Delta(x)=x+5\lambda-\lambda x^2+3x^2+3x^3+4x^2-4\lambda x$, ὅταν $\lambda=6$ κι ὕστερα νὰ γίνει ἡ διαίρεση $\Delta(x)$ διὰ $(x+3)(x-2)$. Τὸ $\Delta(x)$ μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφὴ γινομένου πρωτοβάθμιων παραγόντων.

182) Νὰ βρεθεῖ πολυώνυμο, τὸ ὁποῖο πολλαπλασιαζόμενο μὲ τὸ x^2-x+1 νὰ δίνει γινόμενο τὸ x^4-x^2+2x-1.

183) Νὰ βρεθεῖ πολυώνυμο, τὸ ὁποῖο πολλαπλασιαζόμενο μὲ τὸ $x+3$ γίνεται $x^3-5x^2+7x+95$.

184) Νὰ προσδιορίσετε τοὺς ὅρους Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε οἱ ἀκόλουθες παραστάσεις νὰ εἶναι τέλεια τετράγωνα:

$$25k^2 + 9\lambda^2 + A, \quad B + 16\alpha^2 - 40\alpha\beta, \quad \lambda^6 - 20\lambda^3\mu^3 + \Gamma,$$

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \Delta, \quad (x + \psi)^2 + \omega^2 + E$$

185) Νὰ δείξετε ὅτι εἶναι:

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + \psi^2 + z^2) - (\alpha x + \beta\psi + \gamma z)^2 = (\alpha\psi - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma\psi)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2.$$

55. ΥΠΟΛΟΙΠΟ ΤΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ Φ(x) ΜΕ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟ ΔΙΩΝΥΜΟ ΤΗΣ ΙΔΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

Α) Ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $x - \alpha$. Ἂν διαιρέσουμε τὸ πολυώνυμο $\varphi(x) = \lambda x + 5$ (λ ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὸ x) μὲ τὸ διώνυμο $x - 3$, θὰ βροῦμε

$$\begin{array}{r|l} \lambda x + 5 & x - 3 \\ \cline{2-2} -\lambda x + 3\lambda & \lambda \\ \cline{1-1} 3\lambda + 5 & \end{array}$$

πηλίκο τὸ λ καὶ ὑπόλοιπο $\upsilon = 3\lambda + 5$. Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι $\upsilon = \varphi(3)$, δηλ. τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $(x - 3)$ εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὴν τιμή, ποὺ παίρνει ὁ διαιρετέος $\lambda x + 5$ γιὰ $x = 3$, κι ἀκόμα ὅτι γιὰ $x = 3$ μηδενίζεται ὁ διαιρέτης $x - 3$.

Ἐκτελώντας τὴ διαίρεση τοῦ $\Delta(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 20$ μὲ τὸ διώνυμο $\delta(x) = x + 2$, βρίσκουμε πηλίκο τὸ $x^3 - 4x^2 + x + 6$ κι ὑπόλοιπο τὸ 8. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ x, ποὺ μηδενίζει τὸ διαιρέτη $x + 2$, εἶναι ἡ $x = -2$ καὶ γιὰ τὴν τιμὴ αὐτὴ εἶναι $\Delta(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^3 - 7 \cdot (-2)^2 + 8(-2) + 20 = 16 + 16 - 28 - 16 + 20 = 8$, δηλ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ διαιρετέου $\Delta(x)$ γιὰ $x = -2$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\Delta(x)$ διὰ $x + 2$.

Θὰ ἀποδείξουμε μὲ γενικὸ τρόπο τὴν πρόταση **(Θεώρημα)**:

Τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ διὰ τοῦ διωνύμου $x - \alpha$ εἶναι ἡ τιμὴ $\varphi(\alpha)$, δηλ. ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ διαιρετέου $\varphi(x)$ γιὰ $x = \alpha$.

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι στὴ διαίρεση $\varphi(x)$ διὰ $x - \alpha$ τὸ πηλίκο εἶναι $\Pi(x)$ καὶ τὸ ὑπόλοιπο υ. Τὸ υ εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὸ x, δηλ. σταθερὰ (γιατί;). Σύμφωνα μὲ τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως εἶναι:

$$\varphi(x) = (x - \alpha)\,\Pi(x) + \upsilon \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ἡ (1) εἶναι ταυτότητα, ἀληθεύει γιὰ κάθε τιμὴ τῆς μεταβλητῆς $x \in \mathbb{R}$, ἄρα καὶ γιὰ $x = \alpha$, δηλ. γιὰ τὴν τιμὴ τοῦ x, ποὺ μηδενίζει τὸ διαιρέτη $x - \alpha$. Γιὰ $x = \alpha$ ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε:

$$\varphi(\alpha) = 0 \cdot \Pi(\alpha) + \upsilon \;\Rightarrow\; \varphi(\alpha) = \upsilon \tag{2}$$

Ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι εἶναι $\upsilon = \varphi(\alpha)$, δηλ. τὸ θεώρημα.

Ἐφαρμογές: 1η) Νὰ βρεθεῖ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 10$ διὰ τοῦ $x - 2$ χωρὶς νὰ ἐκτελεσθεῖ ἡ πράξη. Τὸ ἴδιο διὰ τοῦ $x + 2$.

Σύμφωνα μὲ τὸ παραπάνω θεώρημα τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ $x - 2$ εἶναι: $\varphi(2) = 2^3 - 5 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 10 = 8 - 5 \cdot 4 + 9 \cdot 2 - 10 = 8 - 20 + 18 - 10 = -4$, ἄρα $\upsilon = -4$.

Ἡ τιμή, ἡ ὁποία στὴ δεύτερη περίπτωση μηδενίζει τὸ διαιρέτη $x + 2$, εἶναι ἡ $x = -2$, συνεπῶς τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $x + 2$ εἶναι τὸ $\upsilon = \varphi(-2) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 + 9(-2) - 10 = -8 - 20 - 18 - 10 = -56$.

2η) Ποιὸ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωμύνου $\varphi(x) = 4x^3 - 24x^2 + 41x - 5$ διὰ τοῦ $2x - 5$;

Ὁ διαιρέτης $2x - 5$ μηδενίζεται γιὰ $x = \frac{5}{2}$. Ἂν $\Pi(x)$ καὶ υ εἶναι τὸ πηλίκο καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $2x - 5$, θὰ εἶναι τὸ υ ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὸ x καὶ θὰ ἔχουμε τὴν ταυτότητα:

$$4x^3 - 24x^2 + 41x - 5 = (2x - 5)\Pi(x) + \upsilon$$

Ἂν σ' αὐτὴ θέσουμε ὅπου x τὴν τιμὴ $\frac{5}{2}$, βρίσκουμε:

$$\frac{125}{2} - \frac{300}{2} + \frac{205}{2} - 5 = 0 \cdot \Pi\left(\frac{5}{2}\right) + \upsilon \Rightarrow 10 = \upsilon$$

Ἄρα τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $2x-5$ εἶναι τὸ $\upsilon = 10 = \varphi\left(\frac{5}{2}\right)$

Γενικά. Τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $(\alpha x+\beta)$, ὅπου α καὶ β σταθερὲς $(\alpha \neq 0)$, εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\upsilon = \varphi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Πραγματικά. Ἂν $\Pi(x)$ εἶναι τὸ πηλίκο καὶ ἡ σταθερὰ υ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $(\alpha x+\beta)$, ἔχουμε τὴν ταυτότητα:

$$\varphi(x) = (\alpha x+\beta)\Pi(x)+\upsilon \qquad (\alpha)$$

Ἡ τιμὴ τοῦ x, ποὺ μηδενίζει τὸ διαιρέτη $\alpha x + \beta$, εἶναι ἡ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ γι' αὐτὴν ἡ ταυτότητα (α) γίνεται: $\varphi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0 \cdot \Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \upsilon$, δηλ. $\upsilon = \varphi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Β) Θεώρημα : Ἕνα πολυώνυμο $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸ διὰ $x - \alpha$, ὅταν καὶ μόνο μηδενίζεται γιὰ $x = \alpha$.

Ἀπόδειξη. 1) Ἂν εἶναι $\varphi(\alpha) = 0$, τότε τὸ ὑπόλοιπο υ τῆς διαιρέσεως $\varphi(x)$ διὰ $x - \alpha$ εἶναι 0, δηλ. ἡ διαίρεση εἶναι τέλεια καὶ ἡ παραπάνω ταυτότητα (1) γίνεται $\varphi(x) = (x - \alpha)\Pi(x)$, ὅπου τὸ πηλίκο $\Pi(x)$ εἶναι ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x. Εἶναι λοιπὸν τὸ $\varphi(x)$ διαιρετὸ διὰ $x - \alpha$.

Ἀντίστροφα. 2) Ἂν τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετὸ διὰ $x - \alpha$, τότε ἰσχύει ἡ ταυτότητα: $\varphi(x) = (x - \alpha)\Pi(x)$, συνεπῶς εἶναι $\varphi(\alpha) = 0$, δηλ. μηδενίζεται τὸ $\varphi(x)$ γιὰ $x = \alpha$.

Ἔτσι ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία: $\quad \varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = (x - \alpha)\Pi(x)$

Ἐφαρμογές: Ἀπὸ τὶς διαιρέσεις: 1) $(\alpha^3 - \beta^3)$ διὰ $(\alpha - \beta)$, 2) $(\alpha^3 + \beta^3)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ καὶ 3) $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$, ποιὰ εἶναι τέλεια (α μεταβλητή, β σταθερὰ $\neq 0$).

1) Τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $(\alpha^3 - \beta^3)$ διὰ $(\alpha - \beta)$ εἶναι: $\upsilon = \beta^3 - \beta^3 = 0$, ἄρα ἡ διαίρεση αὐτὴ εἶναι τέλεια.

2) Τῆς διαιρέσεως $(\alpha^3 + \beta^3)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι: $\upsilon = (-\beta)^3 + \beta^3 = 0$, ἄρα κι αὐτὴ εἶναι τέλεια.

3) Τῆς διαιρέσεως $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ τὸ ὑπόλοιπο εἶναι: $\upsilon = (-\beta)^5 - \beta^5 = -2\beta^5$, ἄρα ἡ διαίρεση αὐτὴ εἶναι ἀτελής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

186) Νὰ βρεθεῖ τὸ ὑπόλοιπο, χωρὶς νὰ γίνει ἡ πράξη, στὶς ἀκόλουθες διαιρέσεις:

α) $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$ β) $(3x^2 - 5x + 2) : (x - 1)$

γ) $(3x^2 - 10x - 8) : (3x + 2)$ δ) $(7x^2 + 6x - 1) : (x + 1)$

ε) $(3x^5 - 7x^3 + 9x^2 - 10x + 20) : (x + 2)$ στ) $(8\psi^3 + 125) : (2\psi + 5)$

ζ) $(\omega^6 - \alpha^6) : (\omega^2 - \alpha^2)$ η) $(\psi^{12} + \omega^{12}) : (\psi^4 + \omega^4)$

187) Νὰ προσδιορίσετε τὸ λ ἔτσι, ὥστε τὸ πολυώνυμο $\varphi(x) = x^3 - 2x + \lambda$ νὰ εἶναι διαιρετὸ διὰ τοῦ $x - 1$. Κατόπι νὰ ἐκτελέσετε τὴ διαίρεση: $\varphi(x)$ διὰ $(x - 1)$.

188) Τὸ πολυώνυμο $\Phi(x)$ διαιρούμενο διὰ τοῦ $x^2 - 1$ ἀφήνει ὑπόλοιπο $3x - 5$. Νὰ βρεθεῖ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\Phi(x)$ διὰ $(x - 1)$ καθὼς καὶ τῆς $\Phi(x)$ διὰ $(x + 1)$.

189) Τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου $\Phi(x)$ διὰ τοῦ $x^2 + x - 6$ εἶναι $5x + 1$. Ποιὸ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως $\Phi(x)$ διὰ $(x - 2)$ καὶ ποιὸ τῆς $\Phi(x)$ διὰ $(x + 3)$;

190) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ πολυώνυμο $(x + \psi + z)^7 - x^7 - \psi^7 - z^7$ εἶναι διαιρετὸ διὰ τῶν $x + \psi$, $\psi + z$, $z + x$.

56. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΗΛΙΚΑ

Ἐκτελώντας τὴ διαίρεση $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha - \beta)$ βρίσκουμε (§ 54, Η δ, παρατήρηση 4η) πηλίκο $\Pi(\alpha, \beta) = \alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4$ καὶ ὑπόλοιπο τὸ 0. Τὸ πηλίκο $\Pi(\alpha, \beta)$ εἶναι πολυώνυμο ὁμογενὲς τέταρτου βαθμοῦ καὶ συμμετρικό, ἔχει πέντε ὅρους καὶ τὸν καθένα μὲ συντελεστὴ τὸ $+1$. Εἶναι διατεταγμένο κατὰ τὶς κατιοῦσες τοῦ γράμματος διαιρέσεως α καὶ κατὰ τὶς ἀνιοῦσες τοῦ ἄλλου β. Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ τὸ σχηματίσουμε εὔκολα, χωρὶς τὴν ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha - \beta)$. Ἐπίσης τὸ ὑπόλοιπο βρίσκεται ἀμέσως (§ 55) καὶ εἶναι: $\upsilon = \beta^5 - \beta^5 = 0$.

Ἐκτελώντας τὴ διαίρεση $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ θὰ βροῦμε πηλίκο τὸ $\Pi'(\alpha, \beta) = \alpha^4 - \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4$ καὶ ὑπόλοιπο τὸ $-2\beta^4$. Τὸ $\Pi'(\alpha, \beta)$ εἶναι ὁμογενὲς τέταρτου βαθμοῦ καὶ συμμετρικὸ πολυώνυμο, ἔχει 5 ὅρους, μὲ συντελεστὲς διαδοχικὰ $+1$ καὶ -1, καὶ εἶναι διατεταγμένο κατὰ τὶς κατιοῦσες τοῦ α καὶ τὶς ἀνιοῦσες τοῦ β. Ἔτσι καὶ τὸ $\Pi'(\alpha, \beta)$ σχηματίζεται εὔκολα, χωρὶς τὴν ἐκτέλεση τῆς διαιρέσεως $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$, ὅπως λέμε «ἀπὸ μνήμης». Τὸ ὑπόλοιπο εἶναι: $\upsilon = (-\beta)^5 - \beta^5 = -2\beta^5$.

Ἀνάλογες παρατηρήσεις μποροῦμε νὰ ἔχουμε σὲ κάθε διαίρεση διωνύμου μὲ μορφὴ $\alpha^\mu - \beta^\mu$ ἢ $\alpha^\mu + \beta^\mu$ διὰ $\alpha - \beta$ ἢ $\alpha + \beta$, ὅπου $\mu \in N$.

Γενικὰ διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις **(πάντοτε $\mu \in N$)**.

Α') Ἡ διαίρεση: $(x^\mu - \alpha^\mu)$ διὰ $(x - \alpha)$ ἔχει ὑπόλοιπο: $\upsilon = \alpha^\mu - \alpha^\mu = 0$ καὶ πηλίκο: $x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-2}x + \alpha^{\mu-1}$

Ἄρα εἶναι: $$\boxed{x^\mu - \alpha^\mu = (x - \alpha)(x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1})} \qquad (1)$$

Π.χ. $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

$\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3)$

Β') Ἡ διαίρεση: $(x^\mu + \alpha^\mu)$ διὰ $(x - \alpha)$ εἶναι ἀτελής, μὲ ὑπόλοιπο $\upsilon = 2\alpha^\mu$ καὶ πηλίκο τὸ ἴδιο μὲ τὴν προηγούμενη περίπτωση.

Ἄρα εἶναι: $\boxed{x^\mu + \alpha^\mu = (x - \alpha)(x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1}) + 2\alpha^\mu}$ (2)

Γ') Ἡ διαίρεση: $(x^\mu - \alpha^\mu)$ διὰ $(x + \alpha)$ ἔχει ὑπόλοιπο: $\upsilon = (-\alpha)^\mu - \alpha^\mu$. Ὁ ἐκθέτης μ μπορεῖ νὰ εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός.

Ἂν εἶναι $\mu = 2\rho$, $\rho \in N$, τότε $\upsilon = 0$ καὶ τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι: $\Pi = x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots + \alpha^{\mu-2} - x\alpha^{\mu-2}$.

Ἄρα: $\boxed{\mu = 2\rho \Leftarrow x^\mu - \alpha^\mu = (x + \alpha)(x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots - \alpha^{\mu-1})}$ (3)

Ἂν εἶναι $\mu = 2\rho + 1$, τότε εἶναι $\upsilon = -\alpha^\mu - \alpha^\mu = -2\alpha^\mu$ καὶ ἡ διαίρεση $(x^\mu - \alpha^\mu)$ διὰ $(x + \alpha)$ εἶναι ἀτελὴς μὲ πηλίκο τὸ πολυώνυμο

$$\Pi' = x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots - \alpha^{\mu-2}x + \alpha^{\mu-1}$$

Ἄρα: $\boxed{\mu = 2\rho + 1 \Leftarrow x^\mu - \alpha^\mu = (x + \alpha)(x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots + \alpha^{\mu-1}) - 2\alpha^\mu}$ (4)

Π.χ. $x^4 - y^4 = (x + y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)$

$x^5 - y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - 2y^5$

Δ') Ἡ διαίρεση: $(x^\mu + \alpha^\mu)$ διὰ $(x + \alpha)$ ἔχει ὑπόλοιπο $\upsilon = (-\alpha)^\mu + \alpha^\mu$.

Ἂν εἶναι $\mu = 2\rho$, $\rho \in N$ ἡ διαίρεση εἶναι ἀτελὴς μὲ ὑπόλοιπο $\upsilon = 2\alpha^\mu$ καὶ πηλίκο τὸ Π, ποὺ βρήκαμε παραπάνω στὴν περίπτωση Γ'. Ἔτσι εἶναι:

$\boxed{\mu = 2\rho \Rightarrow x^\mu + \alpha^\mu = (x + \alpha)(x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots - \alpha^{\mu-1}) + 2\alpha^\mu}$ (5)

Ἂν εἶναι $\mu = 2\rho + 1$, τότε $\upsilon = 0$ καὶ πηλίκο εἶναι τὸ Π', ἑπομένως:

$\boxed{\mu = 2\rho + 1 \Leftarrow x^\mu + \alpha^\mu = (x + \alpha)(x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} - \ldots + \alpha^{\mu-1})}$ (6)

Π.χ. $x^6 + y^6 = (x + y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5) + 2y^6$

$x^5 + y^5 = (x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

191) Νὰ προσδιορίσετε τὸ πηλίκο καὶ τὸ ὑπόλοιπο στὶς παρακάτω διαιρέσεις, χωρὶς νὰ ἐκτελέσετε τὴν πράξη:

α) $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha - \beta)$ β) $(\alpha^5 + \beta^5)$ διὰ $(\alpha - \beta)$

γ) $(\alpha^6 - \beta^6)$ διὰ $(\alpha - \beta)$ δ) $(\alpha^6 + \beta^6)$ διὰ $(\alpha - \beta)$

192) Τὸ ἴδιο στὶς διαιρέσεις:

α) $(\alpha^5 - \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ β) $(\alpha^5 + \beta^5)$ διὰ $(\alpha + \beta)$

γ) $(\alpha^6 - \beta^6)$ διὰ $(\alpha + \beta)$ δ) $(\alpha^6 + \beta^6)$ διὰ $(\alpha + \beta)$

193) Τὸ ἴδιο στὶς διαιρέσεις:

α) $\frac{x^5 + 1}{x + 1}$, β) $\frac{x^6 - 1}{x - 1}$, γ) $\frac{x^4 - 1}{x + 1}$, δ) $\frac{x^4 + 1}{x - 1}$

ε) $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$, στ) $\frac{\psi^4 - \alpha^4}{\psi^2 - \alpha^2}$, ζ) $\frac{27x^3 + 1}{3x + 1}$, η) $\frac{8\alpha^3 + \beta^3}{2\alpha + \beta}$

194) Νὰ βρεθεῖ ἀπὸ ποιὲς τέλειες διαιρέσεις τῆς μορφῆς $(x^\nu \pm \alpha^\nu)$ διὰ $(x \pm \alpha)$ ἔχουμε πηλίκα καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω πολυώνυμα:

α) $x^3+x^2\alpha+x\alpha^2+\alpha^3$, β) $x^4+x^3+x^2+x+1$, γ) x^3-x^2+x-1,

δ) $\psi^2-\psi+1$, ε) $\omega^4-\omega^3\alpha+\omega^2\alpha^2-\omega\alpha^3+\alpha^4$, στ) $\psi^2+2\psi+4$.

195) Νὰ δειχθεῖ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $3^{16}-1$, $3^{40}-1$, $3^{2\nu}-1$ $(\nu \in N)$ εἶναι διαρετοὶ διὰ 8.

57. ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΣΕ ΓΙΝΟΜΕΝΟ (ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ)

Α) Σημασία τοῦ προβλήματος τῆς παραγοντοποιήσεως. Στὰ Μαθηματικά, ποὺ διδαχθήκαμε στὶς δύο πρῶτες τάξεις τοῦ Γυμνασίου, πολλὲς φορὲς τρέψαμε φυσικοὺς ἀριθμοὺς σὲ γινόμενα παραγόντων, ὅπως γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ. καὶ τοῦ Ε.Κ.Π. δοσμένων ἀριθμῶν, γιὰ τὴν τροπὴ ἑτερώνυμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα, γιὰ νὰ ἐξετάσουμε ἂν ἕνας ἀριθμὸς διαιρεῖται ἀπὸ ἕναν ἄλλο κλπ. Στὴν Ἄλγεβρα ὁ μετασχηματισμὸς ἑνὸς πολυωνύμου σὲ γινόμενο ἄλλων ἀκεραίων ἐπίσης πολυωνύμων εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σπουδαιότερα προβλήματα. Μὲ τὴν τροπὴ σὲ γινόμενα γίνονται ἁπλούστερες πολύπλοκες παραστάσεις, προπάντων μποροῦμε νὰ ἐπιτύχουμε τὴ λύση ἐξισώσεων καὶ ἀνισώσεων μὲ βαθμὸ ἀνώτερο τοῦ πρώτου.

Ἡ τροπὴ σὲ γινόμενο ἑνὸς πολυωνύμου λέγεται καὶ ἀνάλυση σὲ γινόμενο παραγόντων ἢ παραγοντοποίηση τοῦ πολυωνύμου.

Δὲν εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἡ τροπὴ ἑνὸς πολυωνύμου σὲ γινόμενο. Παρακάτω θὰ δοῦμε μερικὲς περιπτώσεις, ἀπὸ τὶς πιὸ συνηθισμένες, στὶς ὁποῖες μὲ στοιχειώδη τρόπο μποροῦμε νὰ ἐπιτύχουμε τὴν παραγοντοποίηση μιᾶς ἀκέραιας παραστάσεως.

Β) Περιπτώσεις ἀναλύσεως.

1) Κοινοὶ παράγοντες. Ὅταν οἱ ὅροι μιᾶς δοσμένης γιὰ ἀνάλυση παραστάσεως περιέχουν κοινὸ παράγοντα, τότε θέτουμε αὐτὸν «ἐκτὸς παρενθέσεως» (§ 51, Β), σύμφωνα μὲ τὸν ἐπιμεριστικὸ νόμο, ποὺ συνδέει τὸν πολλαπλασιασμὸ μὲ τὴν πρόσθεση, δηλ. $\alpha\mu+\beta\mu+\gamma\mu=\mu(\alpha+\beta+\gamma)$ καὶ τότε τρέπεται τὸ πολυώνυμο σὲ γινόμενο.

Παραδείγματα: 1) $4\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+6\alpha^2\beta^3=2\alpha^2\beta(2\alpha-\beta+3\beta^2)$

2) $x(\alpha-\beta)+\psi(\alpha-\beta)-\omega(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(x+\psi-\omega)$

3) $3\alpha(x-\psi)-2\omega(x-\psi)-(x-\psi)=(x-\psi)(3\alpha-2\omega-1)$

4) $7(x+2)(\psi-3)-\psi+3=7(x+2)(\psi-3)-(\psi-3)=$
$=(\psi-3)[7(x+2)-1]=(\psi-3)(7x+14-1)=(\psi-3)(7x+13)$

5) $\alpha^3-\alpha=\alpha(\alpha^2-1)$.

2) Μὲ ὁμάδες ὅρων. Ἂν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου χωρίζονται σὲ ὁμάδες (μὲ τὸ ἴδιο πλῆθος ὅρων) καὶ σὲ καθεμιὰ ὁμάδα ἐξάγεται κοινὸς παράγοντας ἐκτὸς παρενθέσεως καὶ παρουσιάζεται τὸ ἴδιο πολυώνυμο μέσα στὴν παρένθεση γιὰ ὅλες τὶς ὁμάδες, τότε γίνεται ἡ ἀνάλυση τοῦ πολυωνύμου σὲ γινόμενο παραγόντων.

Παραδείγματα: 1) $\alpha x+\beta\psi+\alpha\psi+\beta x=\alpha x+\alpha\psi+\beta x+\beta\psi=\alpha(x+\psi)+$
$+\beta(x+\psi)=(x+\psi)(\alpha+\beta)$ ἢ ἀκόμη:

$\alpha x+\beta\psi+\alpha\psi+\beta x=\alpha x+\beta x+\beta\psi+\alpha\psi=x(\alpha+\beta)+\psi(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)(x+y)$

2) $x^3-x\psi+x^2\psi^2-\psi^3=x(x^2-\psi)+\psi^2(x^2-\psi)=(x^2-\psi)(x+\psi^2)$

3) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^3+1)(x^2+x+1)$

4) $5\alpha^3\beta+10\alpha\beta^3+5\alpha^2\beta^2-2\alpha^2-4\beta^2-2\alpha\beta=5\alpha\beta(\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta)-2(\alpha^2+2\beta^2+$
$+\alpha\beta)=(\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta)(5\alpha\beta-2)$.

3) **Διαφορὰ δύο τετραγώνων.** Ἂν ἕνα πολυώνυμο γράφεται μὲ τὴ μορφὴ τῆς διαφορᾶς δύο τετραγώνων, τότε ἐπειδή:

$$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

τὸ πολυώνυμο αὐτὸ θὰ τρέπεται σὲ γινόμενο παραγόντων, δηλ. **τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴ διαφορὰ τῶν βάσεων** τῶν δύο αὐτῶν τετραγώνων.

Παραδείγματα. 1) $4x^6-25\psi^4=(2x^3)^2-(5\psi^2)^2=(2x^3+5\psi^2)(2x^3-5\psi^2)$

2) $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

3) $\omega^2-x^2+2x\psi-\psi^2=\omega^2-(x^2-2x\psi+\psi^2)=\omega^2-(x-\psi)^2=[\omega+$
$+(x-\psi)][\omega-(x-\psi)]=(\omega+x-\psi)(\omega-x+\psi)$

4) $\omega^5-\omega=\omega(\omega^4-1)=\omega(\omega^2+1)(\omega^2-1)=\omega(\omega^2+1)(\omega+1)(\omega-1)$

5) $(\alpha-\beta)^4-1=[(\alpha-\beta)^2+1][(\alpha-\beta)^2-1]=[(\alpha-\beta)^2+1](\alpha-\beta+1)$
$(\alpha-\beta-1)$.

4) **Διαφορὰ ἢ ἄθροισμα δύο κύβων.** Ἂν ἕνα πολυώνυμο μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφὴ τῆς διαφορᾶς ἢ τοῦ ἀθροίσματος δύο κύβων, τότε, σύμφωνα μὲ τὶς γνωστές μας (§ 54, Στ' 8 καὶ 9) ταυτότητες: $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ (1) καὶ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ (2) τρέπεται σὲ γινόμενο παραγόντων.

Παραδείγματα: 1) $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$

2) $\psi^3+1=(\psi+1)(\psi^2-\psi+1)$

3) $8\omega^3+125=(2\omega)^3+5^3=(2\omega+5)[(2\omega)^2-(2\omega)\cdot5+5^2]=$
$=(2\omega+5)(4\omega^2-10\omega+25)$

4) $(x+2\psi)^3-(2x+\psi)^3=[(x+2\psi)-(2x+\psi)][(x+2\psi)^2+(x+2\psi)(2x+$
$+\psi)+(2x+\psi)^2]=(x+2\psi-2x-\psi)(x^2+4x\psi+4\psi^2+2x^2+4x\psi+x\psi$
$+2\psi^2+4x^2+4x\psi+\psi^2)=(\psi-x)(7x^2+13x\psi+7\psi^2)$.

5) **Διαφορὰ ἢ ἄθροισμα δυνάμεων μὲ τὸν ἴδιο ἐκθέτη.** Στὰ ἀξιοσημείωτα πηλίκα βρήκαμε τὴν ταυτότητα (§ 56)

$x^\mu-\alpha^\mu=(x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1})$ $\mu\in N$

καὶ τήν: $x^\mu+\alpha^\mu=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}-\ldots+\alpha^{\mu-1})$ ἂν $\mu=$ περιττὸς (§ 56, 4), ποὺ μᾶς βοηθοῦν νὰ ἀναλύσουμε διώνυμα τέτοιας μορφῆς. Π.χ.

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$\omega^5+1=(\omega+1)(\omega^4-\omega^3+\omega^2-\omega+1)$$
$$\alpha^6-\beta^6=(\alpha-\beta)(\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4+\beta^5)$$

6) **Ἀνάπτυγμα τέλειου τετραγώνου.** Σύμφωνα μὲ τὶς ταυτότητες:

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha-\beta)^2$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

ἂν ἕνα πολυώνυμο εἶναι ἀνάπτυγμα τέλειου τετραγώνου, θὰ τρέπεται ἀμέσως σὲ γινόμενο δύο παραγόντων.

Παραδείγματα : 1) $\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2$

2) $\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2=(\alpha x-\beta)^2$

3) $\omega^2-2\omega+1=(\omega-1)^2$

4) $x^2+2x+1=(x+1)^2$

5) $(x-\psi)^2+2(\alpha+\beta)(x-\psi)+(\alpha+\beta)^2=(x-\psi+\alpha+\beta)^2$

6) $9x^2-\frac{12x}{5}+\frac{4}{25}=(3x)^2-2\cdot(3x)\cdot\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\left(3x-\frac{2}{5}\right)^2$

7) $\alpha^2\psi^4+2\alpha\beta^2\psi^2+\beta^4=(\alpha\psi^2)^2+2(\alpha\psi^2)\cdot\beta^2+(\beta^2)^2=(\alpha\psi^2+\beta^2)^2$

8) $x^2+\psi^2+\omega^2+2x\psi-2x\omega-2\psi\omega=(x+\psi-\omega)^2$

7) Τριώνυμο δεύτερου βαθμοῦ μὲ μία μεταβλητή.

α') Κάθε τριώνυμο δεύτερου βαθμοῦ μὲ μία μεταβλητὴ x ἔχει, συνεπτυγμένο, τὴ μορφὴ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅπου α, β, γ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ x καὶ $\alpha\neq0$. Ἂν εἶναι $\beta=0$ ἢ $\gamma=0$, τὸ τριώνυμο εἶναι ἐλλιπὲς (ὄχι πλῆρες) καὶ τότε εἶναι ἕνα διώνυμο τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\gamma$ ἢ $\alpha x^2+\beta x$ ἀντίστοιχα.

Παρατηροῦμε πὼς εἶναι $\alpha x^2+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$. Ἂν ἡ παράσταση $x^2+\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, τότε τρέπεται σὲ γινόμενο (περίπτωση 3), διαφορετικὰ δὲν ἀναλύεται.

Π.χ. $\quad 2x^2-8=2(x^2-4)=2(x+2)(x-2)$

$$3x^2-5=3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)=3\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

Ἐνῶ τὸ $5x^2+9=5\left(x^2+\frac{9}{5}\right)$ δὲν ἀναλύεται σὲ γινόμενο στὸ R.

Ἡ ἄλλη ἐλλιπὴς μορφὴ $\alpha x^2+\beta x$ γίνεται:
$\alpha x^2+\beta x=x(\alpha x+\beta)$. Ἔτσι $3x^2-7x=x(3x-7)$ καὶ $5x^2+12x=x(5x+12)$

β') Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ τριώνυμο εἶναι πλῆρες μὲ $\alpha=1$, δηλ. ἔχουμε τὸ $\varphi(x)=x^2+\beta x+\gamma$.

Ἐπειδὴ εἶναι: $x^2+\beta x=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}$, τὸ τριώνυμο γράφεται:

$$\varphi(x)=x^2+\beta x+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2}{4}+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\beta^2-4\gamma}{4} \quad (1)$$

Ἂν εἶναι $\beta^2-4\gamma=0$, τότε τὸ $\varphi(x)=x^2+\beta x+\gamma=\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2$, δηλ. τὸ $\varphi(x)$ εἶναι ἀνάπτυγμα ἑνὸς τέλειου τετραγώνου.

Ἂν εἶναι $\beta^2-4\gamma=$ θετικὸς ἀριθμός, τότε τὸ $\varphi(x)$ παρουσιάζεται στὴ μορφὴ (1) σὰν διαφορὰ δύο τετραγώνων, συνεπῶς ἀναλύεται σὲ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

῎Αν εἶναι $β^2-4γ=$ ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε τό $φ(x)$ εἶναι, στὴ μορφὴ (1), ἄθροισμα δύο θετικῶν ποσοτήτων καὶ δὲν τρέπεται σὲ γινόμενο στὸ σύνολο R.

Π.χ. 1) $x^2+6x+9=(x+3)^2-9+9=(x+3)^2$

2) $x^2-7x+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=$

$=\left(x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)=(x-3)(x-4)$

3) $x^2+4x+5=(x+2)^2-4+5=(x+2)^2+1$, ἄρα σὰν ἄθροισμα δύο θετικῶν δὲν ἀναλύεται στὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

4) $x^2+3x-10=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-10=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{49}{4}=$

$=\left(x+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\right)=(x+5)(x-2)$

γ) Κανονικὴ μορφὴ τοῦ τριωνύμου.

Στὸ τριώνυμο $φ(x)=αx^2+βx+γ$, ἐπειδὴ εἶναι $α\neq 0$, ἔχουμε:

$$φ(x)=αx^2+βx+γ=α\left(x^2+\frac{β}{α}x+\frac{γ}{α}\right)=α\left(x^2+2\cdot\frac{β}{2α}x+\frac{β^2}{4α^2}-\frac{β^2}{4α^2}+\frac{γ}{α}\right)=$$

$$=α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2-\frac{β^2}{4α^2}+\frac{γ}{α}\right]=α\left[\left(x+\frac{β}{2α}\right)^2-\frac{β^2-4αγ}{4α^2}\right] \qquad (2)$$

Ἡ μορφὴ (2) λέγεται **κανονικὴ μορφὴ** τοῦ τριωνύμου $αx^2+βx+γ$.

῎Αν εἶναι $β^2-4αγ=0$, τὸ $φ(x)$ εἶναι ὡς πρὸς x ἕνα τέλειο τετράγωνο.

῎Αν εἶναι $β^2-4αγ>0$, τὸ $φ(x)$ ἔχει τὴ μορφὴ τῆς διαφορᾶς δύο τετραγώνων καὶ τρέπεται σὲ γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων τοῦ x.

῎Αν εἶναι $β^2-4αγ<0$, τὸ $φ(x)$ εἶναι ἄθροισμα δύο θετικῶν ποσοτήτων καὶ δὲν ἀναλύεται σὲ γινόμενο στὸ σύνολο R. Ἡ παράσταση $β^2-4αγ$ λέγεται **διακρίνουσα** τοῦ τριωνύμου $φ(x)=αx^2+βx+γ$ καὶ συμβολικὰ παριστάνεται μὲ τὸ $Δ$.

Παραδείγματα: 1) $φ(x)=4x^2+12x+9=4\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)=$

$=4\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right]=4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4\,\frac{(2x+3)^2}{4}=(2x+3)^2.$

Τὸ $φ(x)$ ἔχει $Δ=β^2-4αγ=12^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$.

2) $φ(x)=2x^2-x-15=2\left(x^2-\frac{x}{2}-\frac{15}{2}\right)=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{15}{2}\right]=$

$=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{121}{16}\right]=2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2\right]=2\left(x-\frac{1}{4}+\frac{11}{4}\right)$

$\left(x-\frac{1}{4}-\frac{11}{4}\right)=2\left(x+\frac{10}{4}\right)\left(x-\frac{12}{4}\right)=2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-3)=(2x+5)(x-3)$

Εἶναι: $Δ=β^2-4αγ=1^2+4\cdot2\cdot15=1+120=121>0$

3) $φ(x)=3x^2+5x+4=3\left(x^2+\frac{5}{5}x+\frac{4}{3}\right)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{4}{3}\right]=$

$=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\frac{23}{36}\right]$, ἄρα δὲν ἀναλύεται σὲ γινόμενο στὸ σύνολο R. Εἶναι $Δ=β^2-4αγ=5^2-4\cdot3\cdot4=25-48=-23<0$.

Γ) Συνδυασμὸς τῶν προηγούμενων περιπτώσεων στὴν παραγοντοποίηση πολυωνύμου.

Στὴν τροπὴ σὲ γινόμενο ἑνὸς πολυωνύμου, ἐφόσον βέβαια εἶναι δυνατὴ αὐτὴ ἡ ἀνάλυση, εἴμαστε συχνὰ ὑποχρεωμένοι νὰ συνδυάσουμε καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε δύο ἢ περισσότερες ἀπὸ τὶς προηγούμενες περιπτώσεις. Ἂς δοῦμε τὰ παρακάτω παραδείγματα:

1) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta)^2=$
$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$

2) $(x+\psi)^2-\omega^2-x\psi(x+\psi+\omega)=(x+\psi+\omega)(x+\psi-\omega)-x\psi(x+\psi+\omega)$
$=(x+\psi+\omega)(x+\psi-\omega-x\psi)$

3) $(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2=(x+3)^2(x-3)^2-(x+5)(x-3)^2=$
$=(x-3)^2[(x+3)^2-(x+5)]=(x-3)^2(x^2+6x+9-x-5)=$
$=(x-3)^2(x^2+5x+4)$

Ἀλλὰ $x^2+5x+4=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=$
$=\left(x+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)=(x+4)(x+1)$, ἑπομένως εἶναι:
$(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2=(x-3)^2(x+4)(x+1)$

4) Νὰ ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενο ἡ παράσταση:

$$\Pi(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2$$

Εἶναι: $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^2=$
$=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)=$
$=[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2][(\alpha-\beta)^2-\gamma^2]=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$.

5) Νὰ ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενο ἡ παράσταση:

$$\Pi(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma$$

Ἔχουμε: $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)+(\alpha^2\gamma+\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma)+(\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta)=$
$=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma(\alpha+\beta)^2+\gamma^2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)[\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)+\gamma^2]=$
$=(\alpha+\beta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+\gamma^2)=(\alpha+\beta)[\alpha(\beta+\gamma)+\gamma(\beta+\gamma)]=$
$=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$.

Σημείωση. Κάθε παράσταση ἀκέραια, ἡ ὁποία δὲν ἀναλύεται σὲ γινόμενο ἀκεραίων ὡς πρὸς τὰ γράμματά της παραγόντων, λέγεται **πρώτη**. Λ.χ. οἱ παραστάσεις $x+5$, $7x^2+\psi^2$, $12(\alpha^2+\beta^2)$, $x^2+x\psi+\psi^2$ εἶναι κάθε μιὰ **πρώτη**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

196) Νὰ τραποῦν σὲ γινόμενα παραγόντων τὰ πολυώνυμα:

α) $3x^2\psi-2x\psi^2+5x^2\psi^2$ β) $2\alpha^3\beta^2\gamma+7\alpha^2\beta\gamma x-\sqrt{3}\,\alpha^2\beta\gamma^2\psi$
γ) $\alpha(x-\psi)-\lambda(x-\psi)$ δ) $x^2(\alpha-\beta)-\alpha+\beta$
ε) $4(\alpha-2\beta)(3x-\psi)+5(3\beta-\alpha)(x-3\psi)$

197) Νὰ τραποῦν σὲ γινόμενα παραγόντων τὰ πολυώνυμα:

α) $\psi^2+\alpha\psi+\beta\psi+\alpha\beta$ β) $3\omega^3-7\omega^2+3\omega-7$
γ) $6x^2+3\lambda^2x+8\lambda x+4\lambda^3$ δ) $44\alpha^4\beta+77\alpha^3\beta^3-20\alpha^2\beta^2-35\alpha\beta^4$

ε) $\alpha\beta(x^2+\psi^2)+x\psi(\alpha^2+\beta^2)$ στ) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha^3+\beta^3)$

ζ) $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$ η) $\omega^5+\omega^4+\omega^3+\omega^2+\omega+1$

198) Νὰ παραγοντοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

α) ω^2-1 β) $7x^3-7x$ γ) $4\psi^2-7$ δ) $4\alpha^2-49\beta^2$

ε) $49\alpha^6-\psi^4$ στ) $20\alpha^3x^3-5\alpha x$ ζ) $(3x-2\alpha+\beta)^2-(\alpha+3x-\beta)^2$

η) $(5\alpha^2+2\alpha-3)^2-(\alpha^2-2\alpha-3)^2$ θ) $\psi^7-\psi^5-\psi^3+\psi$

199) Νὰ τραποῦν σὲ γινόμενα παραγόντων οἱ παραστάσεις:

α) $\lambda x^4-\lambda$, β) $\omega^6-\alpha^6$, γ) $\alpha\beta^4-\alpha^4\beta$, δ) $\omega^6+125\alpha^6$

ε) $\alpha^4-\alpha^3-\alpha^2+1$, στ) $x^3\psi^3-x^3-\psi^3+1$, ζ) $(\beta^2+4)(x^2+1)-(\beta+2x)^2$

η) $\lambda x^2+2\lambda x\psi+\lambda\psi^2-(x+\psi)^3$ θ) $\alpha^6-9\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4+9\beta^6$

200) Νὰ βρεθεῖ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x)=x^3-x^2-21x+45$ διὰ τοῦ $(x+5)$. Κατόπι νὰ τραπεῖ τὸ $\Phi(x)$ σὲ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

201) Νὰ ἀναλυθοῦν σὲ γινόμενα τὰ πολυώνυμα:

α) $\alpha^4-18\alpha^2+81$, β) $\psi^3+\psi-2\psi^2$, γ) $2\omega^2+2\omega\psi+\dfrac{1}{2}\psi^2$

δ) $(x+\psi)^2+1-2(x+\psi)$, ε) $(\alpha^2+9)(x^2+4)-(\alpha x+6)^2$

στ) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)-(\alpha x+\beta\psi)^2$, ζ) $(3x^2-2)^2+32(3x^2-2)+256$

202) Ἐπίσης τὰ πολυώνυμα:

α) $25x^2-110x+121$ β) $25x^2-20\alpha x+4\alpha^2$

γ) $x^2+7x+10$ δ) x^2-x-6 ε) x^2+4x+3

στ) x^2-2x-8 ζ) $x^2-3\alpha x+2\alpha^2$ η) $\psi^2-(K+\lambda)\psi+K\lambda$

θ) $x^2+8x+12$ ι) x^2+3x+5 ια) $x^2-7x+13$

203) Ἐπίσης τὰ τριώνυμα:

α) $9x^2-30x+25$ β) $3\psi^2+5\psi-2$ γ) $7\omega^2+25\omega-50$

δ) $5z^2+7z+3$ ε) $2\psi^2-5\psi+4$ στ) $-3\omega^2+4\omega-3$

204) Ἐπίσης οἱ παραστάσεις:

α) $(x+3)(x-1)^2-4(x+3)$ β) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$

γ) $\lambda^2+\lambda+1$ δ) $16\lambda^4+9\mu^4$ ε) $\omega^4-\alpha^4-\alpha^2\beta^2+2\alpha^3\beta$

στ) $\alpha^2+4\alpha\beta+3\beta^2$ ζ) $\alpha^2-4\alpha\beta+3\beta^2$ η) $16\omega^4-17\omega^2+1$

205) Νὰ τραπεῖ σὲ γινόμενο ἡ παράσταση: $A=(x-\alpha)^3+(x+\alpha)^2(x-\alpha)-2\beta(x^2+\alpha^2)$. Ποιὰ εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς A γιὰ $x=\alpha+\beta$;

206) Νὰ τραποῦν σὲ γινόμενα οἱ παραστάσεις:

α) $16\alpha^2\beta^2-4\beta^4-4\alpha^4+\alpha^2\beta^2$ β) $\psi^5+2\psi^4+\psi^3-\psi^2-2\psi-1$

γ) x^3+2x^2-3 δ) $\psi^3+\psi^2-2$

ε) $(\omega^2-4)^2-(3\omega-2)(\omega+2)^2$ στ) $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+3(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$

207) Νὰ μετασχηματισθεῖ τὸ πολυώνυμο: $\varphi(x)=(3x-1)(x-2)^2-9(3x-1)$ σὲ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων καθὼς καὶ τὸ $f(x)=x^2-4x-5$.

Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\varphi(x):f(x)$, ὅταν $x=0$ ἢ $x=-3$.

208) Νὰ τραπεῖ σὲ γινόμενο τὸ $\Phi(x)=(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2$ καθὼς καὶ τὸ $F(x)=x(x-6)(x+4)+9x+36$ καὶ νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πηλίκου $\Phi(x):F(x)$, γιὰ $x=-3$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=0$.

58. Μ.Κ.Δ. ΚΑΙ Ε.Κ.Π. ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

α) Μ.Κ.Δ. δύο ἢ περισσότερων πολυωνύμων. Στὴ διαίρεση πολυωνύμου μὲ πολυώνυμο (§ 54, Η) εἴδαμε ὅτι ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο Φ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ ἀκέραιο πολυώνυμο Δ, ἂν ὑπάρχει ἕνα τρίτο ἀκέραιο πολυώνυμο Π, ὥστε νὰ εἶναι: $\Phi = \Delta \cdot \Pi$ **(1).**

Τὸ Φ λέγεται καὶ **πολλαπλάσιο τοῦ Δ,** ἐνῶ τὸ Δ **διαιρέτης τοῦ Φ.** Ἀπὸ τὴν (1) συμπεραίνουμε ὅτι τὸ Φ εἶναι καὶ πολλαπλάσιο τοῦ Π καὶ τὸ Π διαιρέτης τοῦ Φ.

Παραδείγματα: Τὸ $(x+1)^3$ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $x+1$.

Τὸ $x^3-\psi^3$ εἶναι διαρετὸ μὲ τὸ $x-\psi$.

Τὸ $x^3+\psi^3$ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $x+\psi$.

Παρατήρηση: Ἂν τὸ πολυώνυμο Δ εἶναι διαιρέτης τοῦ Φ, τότε καὶ κάθε πολυώνυμο λΔ, ὅπου λ σταθερὰ $\neq 0$, εἶναι διαιρέτης τοῦ Φ.

Π.χ. τοῦ $x^4-\psi^4$ εἶναι διαιρέτης τὸ $x^2-\psi^2$ ὅπως καὶ τὸ $5(x^2-\psi^2)$, τὸ $-4(x^2-\psi^2)$, τὸ $\lambda(x^2-\psi^2)$, ὅπου λ σταθερὰ $\neq 0$.

Ὁρισμός. Κοινὸς διαιρέτης δύο δοσμένων ἀκεραίων πολυωνύμων Φ καὶ Σ λέγεται κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο Δ, ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς καὶ τὸ Φ καὶ τὸ Σ.

Λ.χ. τῶν πολυωνύμων x^3-1 καὶ x^2-1 κοινὸς διαιρέτης εἶναι τὸ πολυώνυμο $x-1$, καθὼς καὶ τὸ $\lambda(x-1)$, ὅπου $\lambda =$ σταθερὰ $\neq 0$.

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ περισσότερων πολυωνύμων λέγεται τὸ πολυώνυμο μέγιστου βαθμοῦ, ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς καθένα ἀπὸ αὐτά.

Ἂν τῶν πολυωνύμων Α, Β, Γ εἶναι τὸ Δ ὁ Μ.Κ.Δ., θὰ εἶναι καὶ κάθε πολυώνυμο λΔ, ὅπου λ σταθερὰ $\neq 0$, μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τους. Ἀπὸ τοὺς ἄπειρους αὐτοὺς Μ.Κ.Δ., ποὺ μεταξύ τους διαφέρουν κατὰ σταθερὸ παράγοντα, **θὰ θεωροῦμε κατὰ συνθήκη ἐκεῖνον, ποὺ ἔχει τοὺς πιὸ ἁπλοὺς συντελεστές.**

Σύμφωνα μὲ ὅσα μάθαμε σὲ μικρότερες τάξεις τοῦ Γυμνασίου γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ. δοσμένων ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἔχουμε:

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων, ποὺ ἔχουν ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων, σχηματίζουμε τὸ γινόμενο τῶν κοινῶν μόνο παραγόντων τους, στὸ ὁποῖο παίρνουμε τὸν καθένα μὲ τὸ μικρότερο ἀπὸ τοὺς ἐκθέτες του. Συντελεστὴς τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς (ἀόριστος) $\neq 0$.

Παραδείγματα: 1) Νὰ βρεθεῖ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν μονωνύμων:

$18\alpha^3\beta^2\gamma x,\ -48\alpha^2\beta^3\gamma^3\omega,\ 30\alpha^4\beta^2\gamma\psi^2,\ -24\alpha^3\beta^3\gamma^2\varphi$

Εἶναι: Μ.Κ.Δ.$=\lambda\alpha^2\beta^2\gamma$, ὅπου $\lambda =$ σταθερὰ $\neq 0$. Μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὸ λ μὲ τὸ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμητικῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων, δηλ. $\lambda = 6$.

2) Νὰ βρεθεῖ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων:

$A=(x-1)^2(x+2)^2,\ B=5x(x-1)^3(x+2)^2,\ \Gamma=(x^2+3x+2)^2\,(x-1).$

Τὰ Α καὶ Β ἔχουν ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων. Γιὰ τὸ Γ ὅμως εἶναι: $x^2+3x+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=$

$=\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=(x+2)\ (x+1)$, συνεπῶς ἔχουμε:

$\Gamma=(x+2)^2(x+1)^2(x-1)$ καὶ τότε τῶν Α, Β, Γ ὁ Μ.Κ.Δ. εἶναι: Μ.Κ.Δ. $=(x-1)(x+2)^2$.

β) Ε.Κ.Π. δύο ἢ περισσότερων πολυωνύμων. Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο δύο ἢ περισσότερων πολυωνύμων λέγεται τὸ πολυώνυμο τοῦ ἐλάχιστου βαθμοῦ, ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς μὲ καθένα ἀπὸ αὐτά.

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ Ε.Κ.Π. δοσμένων πολυωνύμων, ποὺ ἔχουν ἀναλυθεῖ σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων, σχηματίζουμε τὸ γινόμενο ἀπὸ τοὺς κοινοὺς καὶ τοὺς μὴ κοινοὺς παράγοντές τους, στὸ ὁποῖο παίρνουμε τὸν καθένα μὲ τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τοὺς ἐκθέτες του.

Παραδείγματα: 1) Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν μονωνύμων $6\alpha^3\beta$, $-15\alpha^4\beta^2\gamma$, $45\alpha\beta^3\gamma x$, $-30\alpha^2\beta\gamma^3\omega$ εἶναι τὸ μονώνυμο $90\alpha^4\beta^3\gamma^3x\omega$ ἢ πιὸ γενικὰ τὸ $\lambda\alpha^4\beta^3\gamma^3x\omega$, ὅπου $\lambda=$ σταθερὰ $\neq 0$.

2) Νὰ βρεθεῖ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν πολυωνύμων:
$A=(x-1)^2(x+2)^2$, $B=5x(x-1)^3(x+2)^2$, $\Gamma=(x+2)^2(x+1)^2(x-1)$.
Εἶναι Ε.Κ.Π.$=5x(x-1)^3(x+2)^2(x+1)^2$ καὶ γενικά:

$$\lambda x(x-1)^3(x+2)^2(x+1)^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

209) Νὰ βρεῖτε τὸ Μ.Κ.Δ. τῶν παραστάσεων:
α) $12\alpha\beta x$, $6\alpha x\psi$, $3\alpha\beta x\psi$
β) $45\alpha^3\beta x\psi^3$, $-15\alpha^2\beta^3xz$, $5\alpha^3\beta x^2\psi$
γ) $x^4\psi^2-x^2\psi^4$, $x^4\psi^3+x^3\psi^4$, $x^4\psi^2+2x^3\psi^3+x^2\psi^4$
δ) $\alpha^2-\beta^2$, $\alpha^3-\beta^3$, $\alpha^4-\beta^4$
ε) x^2-1, x^2-3x+2, x^2-x

210) Νὰ βρεῖτε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παραστάσεων:
α) $15\alpha^3\beta^2x\psi$, $-12\alpha^2\beta^3x^2\omega$, $36\alpha\beta x\omega^3$, $-5\alpha^2\beta x^3\omega^2\psi^2$
β) $6(x+\psi)^2$, $8(x^2-\psi^2)$, $3(x-\psi)^2$
γ) x^2-1, x^2+1, x^4-1, x^8-1
δ) $A=(x^2-1)^2(x+3)$, $B=(x^2+3x)(x+1)^2$, $\Gamma=(x^2+6x+9)(x-1)^2$

211) Νὰ βρεθεῖ ὁ Μ.Κ.Δ. καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παραστάσεων:
α) $A=35x^4(x^3-\psi^3)$, $B=-42x\psi^3(x-\psi)^2(x^2+\psi^2)$, $\Gamma=7x^2\psi(x^2-\psi^2)(x+\psi)^2$
β) $A=x^2-4x+4$, $B=x^2+x-6$, $\Gamma=x^2-4$, $\Delta=(x^2+6x+9)(x-2)^2$
γ) $A=\alpha^6-\beta^6$, $B=3\alpha^4\beta-3\alpha\beta^4$, $\Gamma=(\alpha^2-\beta^2)^2(\alpha-\beta)$
δ) $A=5\omega^5-5\omega$, $B=(\omega^2-1)(\omega^2+1)^2$, $\Gamma=(\omega^3-1)(\omega+1)(\omega^2+1)$.

59. ΡΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

α) Ἀλγεβρικὸ κλάσμα. **Ἀλγεβρικὸ κλάσμα λέγεται τὸ ἀκριβὲς πηλίκο δύο** πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β. Συμβολίζεται μὲ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ὑποθέτουμε πάντοτε $\beta \neq 0$.

Π.χ. τὰ πηλίκα $\frac{-3}{5}$, $\frac{3}{-5}$, $\frac{-3}{-5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{-8}{\sqrt{3}}$ εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ σ' αὐτὰ ἰσχύουν ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων.

Κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς α παίρνει τὴ μορφὴ $\frac{\alpha}{1}$, δηλ. εἶναι κλάσμα μὲ παρονομαστὴ 1.

Κάθε κλάσμα μὲ ἴσους ὅρους ἰσοῦται μὲ 1, δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$ $(\alpha \neq 0)$. Κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ δηλ. μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμητῆ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφο τοῦ παρονομαστῆ.

Ἰδιότητα. Ἂν πολλαπλασιάσουμε ἢ διαιρέσουμε τοὺς ὅρους κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ($\neq 0$), προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμο πρὸς τὸ δοσμένο.

$$\text{Ἂν } \left.\begin{array}{l} \beta \neq 0 \\ \lambda \neq 0 \end{array}\right\} \text{ τότε εἶναι } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lambda\alpha}{\lambda\beta} \text{ καὶ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha:\lambda}{\beta:\lambda}$$

Μὲ τὴν ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητας αὐτῆς **ἁπλοποιοῦμε** ἕνα κλάσμα, ἂν οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸ διαιρέτη, καὶ **τρέπουμε ἑτερώνυμα κλάσματα σὲ ὁμώνυμα.**

Οἱ πράξεις: Πρόσθεση, Ἀφαίρεση, Πολλαπλασιασμὸς καὶ Διαίρεση γίνονται ὅπως καὶ στὰ ἀριθμητικὰ κλάσματα.

Σημείωση. Γιὰ τὸ σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μιλήσαμε στὴν § 40. Στὴν Α' τάξη τοῦ Λυκείου θὰ μάθουμε γιὰ τὸ σύνολο τῶν μιγαδικῶν, τοῦ ὁποίου τὸ R εἶναι ἕνα ὑποσύνολο. Τόθε τὰ ὁρίσουμε τὴν ἔννοια τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ. Θὰ δοῦμε ὅτι κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς δὲν εἶναι καὶ ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Ἕνας τέτοιος λ.χ. εἶναι ὁ γνωστός μας ἀπὸ τὴ Γεωμετρία ἀριθμὸς $\pi = 3{,}14157\ldots$ (λόγος μιᾶς περιφέρειας πρὸς τὴ διάμετρό της). Ὁ π εἶναι πραγματικός, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, ὅπως ὁ π, λέγονται ὑπερβατικοί. Ἔτσι ἕνα ἀλγεβρικὸ κλάσμα μπορεῖ νὰ εἶναι ἕνας ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς κι ἀκόμα ἕνας ἀλγεβρικὸς ἀριθμὸς νὰ μὴν εἶναι σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό μας ἀλγεβρικὸ κλάσμα.

β) Ρητὸ ἀλγεβρικὸ κλάσμα. Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων Α καὶ Β παίρνει τὴ μορφὴ $\frac{A}{B}$ καὶ λέγεται ρητὸ ἀλγεβρικὸ κλάσμα ἢ ἁπλὰ ρητὸ κλάσμα.

Τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ γιὰ κάθε τιμὴ τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν τῶν πολυωνύμων Α καὶ Β παίρνει γιὰ ἀριθμητικὴ τιμὴ τὸ πηλίκο τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν Α καὶ Β γιὰ τὶς θεωρούμενες τιμὲς τῶν μεταβλητῶν, μὲ ἐξαίρεση τῶν ὅσων μηδενίζουν τὸν παρονομαστὴ Β. Ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{A}{B}$ σὰν συνάρτηση ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο, στὸ ὁποῖο δὲν περιέχονται οἱ τιμὲς ποὺ μηδενίζουν τὸν παρονομαστὴ Β. Θὰ ὑποθέτουμε λοιπὸν πάντοτε

$B \neq 0$. Π.χ. τὸ κλάσμα $\varphi(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$ ὅπου $x \in R$, ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο $R - \{2\}$, γιατὶ πρέπει νὰ εἶναι $x \neq 2$.

Ἀκόμα τὸ κλάσμα $F(x) = \frac{5x-1}{(x-3)(x+1)}$, $x \in R$, εἶναι ὁρισμένο γιὰ κάθε x γιὰ τὸ ὁποῖο εἶναι $(x-3)(x+1) \neq 0$, δηλ. $x \neq 3$ καὶ $x \neq -1$. Ἄρα ἡ συνάρτηση $F(x)$ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο $R - \{3, -1\}$.

Τὸ κλάσμα $\sigma(x) = \frac{(x+2)^2}{x^2+5}$ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τὸ R, γιατὶ εἶναι $x^2+5 \neq 0$ γιὰ κάθε $x \in R$.

Τὸ κλάσμα $\sigma(x,\psi) = \frac{x^2+5x\psi+\psi^2}{3x-\psi+7}$ ὅπου $x \in R$ καὶ $\psi \in R$ ὁρίζεται στὸ σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, ψ) τοῦ $R \times R$, γιὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $3x - \psi + 7 \neq 0$.

γ) Ἁπλοποίηση. Κάθε κλάσμα $\frac{A}{B}$ ἁπλοποιεῖται, ἂν οἱ ὅροι του ἔχουν κοινὸ παράγοντα.

Παραδείγματα: 1) Νὰ ἁπλοποιηθεῖ τὸ $\varphi(x) = \frac{3x^2\psi z^3}{6x^3\omega z}$.

Διαιροῦμε καὶ τοὺς δυὸ ὅρους τοῦ κλάσματος μὲ τὸ $3x^2z$ καὶ ἔχουμε: $\varphi(x) = \frac{\psi z^2}{2x\omega}$. Ἐπειδὴ ὑποθέτουμε ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος $\varphi(x)$ εἶναι $6x^3\omega z \neq 0$, θὰ εἶναι καὶ $3x^2z \neq 0$ κι ἡ διαίρεση τῶν ὅρων τοῦ $\varphi(x)$ μὲ τὸν κοινὸ παράγοντα $3x^2z$ εἶναι δυνατή.

2) Νὰ ἁπλοποιηθεῖ τὸ κλάσμα $\varphi(x) = \frac{x^2-4}{x^2+5x+6}$.

Εἶναι $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ καὶ $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$, συνεπῶς $\varphi(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+3)}$. Ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι $(x+2)(x+3) \neq 0$, θὰ ἔχουμε: $x \neq -2$, $x \neq -3$, ἄρα τὸ πεδίο ὁρισμοῦ εἶναι: $R - \{-2, -3\}$. Ἂν ἁπλοποιήσουμε μὲ τὸν κοινὸ παράγοντα $x+2$, προκύπτει τὸ κλάσμα $\varphi(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ νέο κλάσμα $\frac{x-2}{x+3}$ εἶναι ὁρισμένο γιὰ $x = -2$, γιατὶ γίνεται $\frac{-4}{1} = -4$ γιὰ $x = -2$, γιὰ νὰ εἶναι ὅμως ἴσο μὲ τὸ ἀρχικὸ $\frac{x^2-4}{x^2+5+6}$, πρέπει νὰ ἔχει καὶ τὸ ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ, δηλ. τὸ $R - \{-2, -3\}$. Ὥστε καὶ γιὰ τὸ νέο κλάσμα $\frac{x-2}{x+3}$ θὰ θεωροῦμε ὅτι εἶναι $x \neq -2$, $x \neq -3$.

δ) Τροπὴ σὲ ὁμώνυμα. Γιὰ νὰ τρέψουμε ρητὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα, ἐργαζόμαστε ὅπως καὶ στὰ ἀριθμητικά, δηλ. βρίσκουμε ἕνα κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν τους ἢ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν καὶ πολλαπλασιάζουμε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος μὲ τὸ ἀντίστοιχο πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ κοινοῦ πολλαπλασίου ἢ τοῦ Ε.Κ.Π. μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος αὐτοῦ.

Παραδείγματα: 1) Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

$$\frac{3\alpha}{2\beta\gamma}, \quad \frac{-5\beta}{3\alpha\gamma}, \quad \frac{\gamma}{6\alpha\beta}$$

Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $6\alpha\beta\gamma$ καὶ τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὰ κλάσματα πηλίκα τῆς διαιρέσεως τοῦ $6\alpha\beta\gamma$ μὲ κάθε παρονομαστὴ εἶναι 3α, 2β, γ, συνεπῶς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι:

$$\frac{9\alpha^2}{6\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{-10\beta^2}{6\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{\gamma^2}{6\alpha\beta\gamma}$$

2) Νὰ τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

$$A=\frac{3\alpha-2}{\alpha+3}, \quad B=\frac{\alpha+1}{\alpha^2-9}, \quad \Gamma=\frac{\alpha^2+2}{(\alpha-3)^2}$$

Οἱ παρονομαστὲς εἶναι: $\alpha+3$, $\alpha^2-9=(\alpha+3)(\alpha-3)$, $(\alpha-3)^2$, ἄρα τὸ Ε.Κ.Π. εἶναι $(\alpha+3)(\alpha-3)^2$ καὶ τὰ ἀντίστοιχα πρὸς τὰ κλάσματα πηλίκα εἶναι: $(\alpha-3)^2$, $\alpha-3$, $\alpha+3$.

Πολλαπλασιάζουμε τοὺς ὅρους τοῦ Α μὲ τὸ $(\alpha-3)^2$, τοὺς ὅρους τοῦ Β μὲ τὸ $\alpha-3$ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ Γ ἐπὶ $\alpha+3$ καὶ ἔχουμε:

$$A=\frac{(3\alpha-2)(\alpha-3)^2}{(\alpha+3)(\alpha-3)^2}, \quad B=\frac{(\alpha+1)(\alpha-3)}{(\alpha+3)(\alpha-3)^2}, \quad \Gamma=\frac{(\alpha^2+2)(\alpha+3)}{(\alpha+3)(\alpha-3)^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212) Νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο ὁρισμοῦ στὰ παρακάτω κλάσματα:

α) $\varphi(x)=\frac{5}{2x-6}$ β) $\sigma(x)=\frac{7x+1}{2x^2-3}$ γ) $\pi(x)=\frac{2x^2+3}{x^2-4x+4}$

δ) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2-7x+10}$ ε) $\tau(x)=\frac{-3}{x^3-4x}$

213) Νὰ ἁπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:

α) $\frac{12x^3\alpha\psi^2}{14\alpha^2\psi^2}$, β) $\frac{27\alpha^3\beta^2\omega\psi}{18\alpha^4\beta\omega^2\psi^3}$, γ) $\frac{3x^2+3x}{2x^3-2x}$

δ) $\frac{\omega^4-81}{\omega^2-9}$, ε) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-4x+3}$, στ) $\frac{(\alpha\beta-1)^2-(\alpha+1)^2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$,

ζ) $\frac{(x^2-4)^2-(x+2)^2}{x^2-4x+3}$ η) $\frac{x^2+x}{x^3-x}$ θ) $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\alpha-\beta-\beta^2}$

214) Νὰ τρέψετε σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα:

α) $A=\frac{3}{x+2}$, $B=\frac{-x}{x-1}$, $\Gamma=\frac{5x}{x^2-1}$, $\Delta=\frac{x+2}{x+1}$

β) $A=\frac{3\alpha\beta}{5x^3\psi^2\omega}$, $B=\frac{2x\psi}{3\alpha^2\beta\omega^2}$, $\Gamma=\frac{2\alpha x}{15\beta^2\psi^2\omega}$

γ) $A=\frac{1}{(x-\psi)(\psi-\omega)}$, $B=\frac{1}{(\psi-x)(x-\omega)}$, $\Gamma=\frac{-3}{(\omega-x)(\omega-\psi)}$

215) Νὰ ἁπλοποιηθεῖ τὸ κλάσμα $\Phi(x)=\frac{x^3-x^2-4}{x^2-5x+6}$ καὶ νὰ ὁρισθεῖ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ του.

60. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΡΗΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

Α) Πρόσθεση καὶ ἀφαίρεση. Τρέπουμε τὰ κλάσματα σὲ ὁμώνυμα καὶ ἡ παράσταση μὲ τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ποὺ ἔχει ἀριθμητὴ τὸ ἄθροισμα (ἀλγεβρικὸ) τῶν ἀριθμητῶν τῶν κλασμάτων καὶ παρονομαστὴ τὸν κοινὸ παρονομαστή τους.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ἔτσι προκύπτει ἕνα ρητὸ κλάσμα.

Παραδείγματα : 1) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$A = \frac{5}{3\alpha^2\beta} - \frac{2}{\alpha\beta\gamma} + \frac{3}{4\beta\gamma^2} - 2$$

Ἐπειδὴ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $12\alpha^2\beta\gamma^2$, ἔχουμε:

$$A = \frac{20\gamma^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2} - \frac{24\alpha\gamma}{12\alpha^2\beta\gamma^2} + \frac{9\alpha^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2} - \frac{24\alpha^2\beta\gamma^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2} = \frac{20\gamma^2 - 24\alpha\gamma + 9\alpha^2 - 24\alpha^2\beta\gamma^2}{12\alpha^2\beta\gamma^2}$$

2) Νὰ γίνει ἕνα ρητὸ κλάσμα ἡ παράσταση:

$$A = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x(x+3)}.$$

Ἐπειδὴ εἶναι: $x^2 + x = x(x+1)$, $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι : Ε.Κ.Π.$= x(x+1)(x+2)(x+3)$ καὶ θὰ ἔχουμε:

$$A = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{2}{x(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+2)(x+3) + x(x+3) + x(x+1) - 2(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{x^2 + 5x + 6 + x^2 + 3x + x^2 + x - 2x^2 - 6x - 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 + 3x + 2}{x(x+1)(+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x(x+3)}.$$

Ἡ παράσταση Α εἶναι ὁρισμένη στὸ σύνολο $R - \{0, -1, -2, -3\}$ (Γιατί;)

Β) Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ρητὰ κλάσματα, σχηματίζουμε ἕνα κλάσμα μὲ ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν τους καὶ παρονομαστὴ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τους. Ὥστε τὸ γινόμενο ρητῶν κλασμάτων εἶναι ἕνα ρητὸ κλάσμα.

Γιὰ νὰ διαιρέσουμε ρητὸ κλάσμα μὲ ἕνα ἄλλο, πολλαπλασιάζουμε τὸ πρῶτο ἐπὶ τὸ ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη. Τὸ πηλίκο ρητῶν κλασμάτων εἶναι ρητὸ κλάσμα.

Σύμφωνα μὲ τοὺς κανόνες αὐτοὺς ἔχουμε:

$$\frac{A}{B} \times \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A \times \Gamma}{B \times \Delta} \quad \text{ἂν } B \neq 0,\ \Delta \neq 0$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{A}{B} : \frac{\Gamma}{\Delta} = \frac{A}{B} \times \frac{\Delta}{\Gamma} \quad \text{ἂν } B \neq 0,\ \Delta \neq 0 \text{ καὶ } \Gamma \neq 0.$$

Παραδείγματα : 1) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

$$\frac{12x^3\psi}{5\alpha\beta} \cdot \frac{10\alpha^2\gamma}{x^4\psi^3} \cdot \frac{2\alpha x}{3\beta\psi} \cdot \left(\frac{-\beta\gamma}{x\psi}\right)$$

Τὸ γινόμενο εἶναι : $\dfrac{-240x^4\psi\alpha^3\beta\gamma^2}{15\alpha\beta^2x^5\psi^5} = \dfrac{-16\alpha^2\gamma^2}{\beta x\psi^4}$

Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων εἶναι γινόμενα, μποροῦμε νὰ ἁπλοποιήσουμε κι ὕστερα νὰ ὑπολογίσουμε τὸ γινόμενο τῶν κλασμάτων.

2) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις : $\left(\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+\dfrac{x-\psi}{x+\psi}\right)\times\left(\dfrac{x+\psi}{x-\psi}-\dfrac{x-\psi}{x+\psi}\right)$

Εἶναι : $\left(\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+\dfrac{x-\psi}{x+\psi}\right)\cdot\left(\dfrac{x+\psi}{x-\psi}-\dfrac{x-\psi}{x+\psi}\right)=$

$$\frac{(x+\psi)^2+(x-\psi)^2}{(x-\psi)\,(x+\psi)}\cdot\frac{(x+\psi)^2-(x+\psi)^2}{(x-\psi)\,(x+\psi)}=\frac{(2x^2+2\psi^2)\cdot 4x\psi}{(x-\psi)^2\,(x+\psi)^2}=$$

$$=\frac{8\,(x^2+\psi^2)\,x\psi}{(x-\psi)^2\,(x+\psi)^2}$$

3) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις : $\dfrac{\alpha^2\beta^2-\beta^4}{\alpha^3-\beta^3}:\dfrac{\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$

Εἶναι : $\dfrac{\alpha^2\beta^2-\beta^4}{\alpha^3-\beta^3}:\dfrac{\alpha\beta^2+\beta^3}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}=\dfrac{\beta^2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^3-\beta^3}\cdot\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\beta^2\,(\alpha+\beta)}=$

$$=\frac{\beta^2\,(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha-\beta)\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\,\beta^2\,(\alpha+\beta)}=1 \text{ (ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὰ } \alpha,\beta).$$

4) Νὰ γίνει ἕνα ρητὸ κλάσμα ἡ παράσταση:

$$A=\left(\frac{x-3}{3x+1}-\frac{x-4}{4x+1}\right):\left(1+\frac{x-3}{3x+1}\cdot\frac{x-4}{4x+1}\right)$$

Ὁ διαιρετέος εἶναι : $\Delta=\dfrac{x-3}{3x+1}-\dfrac{x-4}{4x+1}=\dfrac{(x-3)\,(4x+1)-(3x+1)\,(x-4)}{(3x+1)\,(4x+1)}=$

$$=\frac{4x^2-12x+x-3-3x^2+12x-x+4}{(3x+1)\,(4x+1)}=\frac{x^2+1}{(3x+1)\,(4x+1)}$$

Ὁ διαιρέτης εἶναι: $\delta=1+\dfrac{x-3}{3x+1}\cdot\dfrac{x-4}{4x+1}=\dfrac{(3x+1)\,(4x+1)+(x-3)\,(x-4)}{(3x+1)\,(4x+1)}=$

$$=\frac{12x^2+3x+4x+1+x^2-4x-3x+12}{(3x+1)\,(4x+1)}=\frac{13x^2+13}{(3x+1)\,(4x+1)}=\frac{13(x^2+1)}{(3x+1)\,(4x+1)}$$

Ἄρα εἶναι : $A=\Delta:\delta=\dfrac{x^2+1}{(3x+1)\,(4x+1)}:\dfrac{13(x^2+1)}{(3x+1)\,(4x+1)}$

Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς A εἶναι τὸ $R-\left[-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{4}\right]$.

Ἐπειδὴ γιὰ κάθε $x\in R$ εἶναι $x^2+1\neq 0$, προκύπτει : $A=\dfrac{1}{13}$, δηλ. ἡ παράσταση A εἶναι σταθερά, ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὸ x.

Γ) Σύνθετα κλάσματα. Σύνθετο λέγεται κάθε κλάσμα, ποὺ ὁ ἕνας τουλάχιστο ὅρος του περιέχει κλάσμα. Τὸ ρητὸ κλάσμα μὲ ὅρους ἀκέραιες παραστάσεις λέγεται ἁπλὸ κλάσμα.

Ἕνα σύνθετο κλάσμα τρέπεται σὲ ἁπλό, ἂν διαιρέσουμε τὸν ἀριθμητή του μὲ τὸν παρονομαστή του. Ἐπίσης μποροῦμε νὰ τρέψουμε σὲ ἁπλὸ ἕνα σύνθετο κλάσμα πολλαπλασιάζοντας καὶ τοὺς δύο ὅρους του μὲ ἕνα κοινὸ πολλαπλάσιο καὶ συνήθως μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν, τοὺς ὁποίους θέλουμε νὰ ἐξαλείψουμε.

Παραδείγματα: 1) Νὰ γίνει ἁπλὸ τὸ κλάσμα $K = \dfrac{\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x}}$

Ὁ ἀριθμητὴς γίνεται : $A = \dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x^2+(x-1)(x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{2x^2-1}{x(x+1)}$
κι ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν $x \neq 0$ καὶ $x \neq 1$, δηλ. ὁρίζεται στὸ σύνολο $R - \{0, -1\}$.

Ὁ παρονομαστὴς γίνεται: $\Pi = \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x} = \dfrac{x^2-x^2+1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$
καὶ ὁρίζεται στὸ ἴδιο σύνολο μὲ τὸν ἀριθμητὴ Α.

Ἔχουμε λοιπόν : $K = \dfrac{A}{\Pi} = \dfrac{2x^2-1}{x(x+1)} : \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{(2x^2-1)x(x+1)}{x(x+1)} = 2x^2-1.$

2) Νὰ τραπεῖ σὲ ἁπλὸ κλάσμα τό : $K = \dfrac{\dfrac{x+\psi}{x-\psi} + \dfrac{x-\psi}{x+\psi}}{\dfrac{1}{(x+\psi)^2} + \dfrac{1}{(x-\psi)^2}}.$

Ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ Κ μὲ τὸ γινόμενο $(x+\psi)^2$ $(x-\psi)^2$, ὅπου ὑποθέτουμε: $x \neq \psi$ καὶ $x \neq -\psi$, ἔχουμε:

$$K = \frac{\left[\dfrac{x+\psi}{x-\psi} + \dfrac{x-\psi}{x+\psi}\right] \quad (x+\psi)^2(x-\psi)^2}{\left[\dfrac{1}{(x+\psi)^2} + \dfrac{1}{(x-\psi)^2}\right] \quad (x+\psi)^2(x-\psi)^2} = \frac{(x+\psi)^3(x-\psi)+(x+\psi)(x-\psi)^3}{(x-\psi)^2+(x+\psi)^2} =$$

$$= \frac{(x+\psi)\,(x-\psi)\,[(x+\psi)^2+(x-\psi)^2]}{(x-\psi)^2+(x+\psi)^2} = (x+\psi)\,(x-\psi) = x^2-\psi^2.$$

3) Νὰ γίνει ἁπλὸ τὸ σύνθετο: $K = \dfrac{\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{\dfrac{1}{x}+2} - \dfrac{x-3}{1+3x}}{1 + \dfrac{(1-\dfrac{2}{x})\,(1-\dfrac{3}{x})}{(2+\dfrac{1}{x})\,(3+\dfrac{1}{x})}}$

Ὁ ἀριθμητὴς μὲ τὶς προϋποθέσεις $x \neq 0$, $x \neq -\dfrac{1}{3}$ γίνεται:

$$A = \frac{\dfrac{x-2}{x}}{\dfrac{1+2x}{x}} - \frac{x-3}{1+3x} = \frac{x-2}{2x+1} - \frac{x-3}{3x+1}.$$

Ἂν εἶναι καὶ $x \neq -\dfrac{1}{2}$, ἔχουμε: $A = \dfrac{(x-2)\,(3x+1)-(x-3)\,(2x+1)}{(2x+1)\,(3x+1)} =$

$$= \frac{x^2+1}{(2x+1)\,(3x+1)}$$

Ὁ παρονομαστὴς μὲ τὶς ἴδιες ὅπως καὶ στὸν ἀριθμητὴ προϋποθέσεις γιὰ τὸν x, γίνεται:

$$\Pi = 1 + \frac{\frac{(x-2)}{x} \cdot \frac{(x-3)}{x}}{\frac{2x+1}{x} \cdot \frac{3x+1}{x}} = 1 + \frac{(x-2)\ (x-3)}{(2x+1)\ (3x+1)} = \frac{(2x+1)\ (3x+1) + (x-2)\ (x-3)}{(2x+1)\ (3x+1)} =$$

$$= \frac{7x^2 + 7}{(2x+1)\ (3x+1)} = \frac{7(x^2+1)}{(2x+1)\ (3x+1)}.$$

Ὥστε εἶναι: $K = A : \Pi = \frac{x^2+1}{(2x+1)\ (3x+1)} : \frac{7(x^2+1)}{(2x+1)\ (3x+1)} =$

$= \frac{(x^2+1)\ (2x+1)\ (3x+1)}{(2x+1)\ (3x+1)\ 7(x^2+1)} = \frac{1}{7}$ δηλ. ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὸ x, γιὰ κάθε $x \in R - \left\{0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

216) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{x\psi\omega}$ β) $\frac{x}{3\alpha\beta} + \frac{2\psi}{5\beta\gamma} - \frac{\omega}{6\alpha\gamma}$ γ) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x^2-1}$

δ) $\frac{x^2}{x-\psi} + \frac{\psi^2}{\psi-x}$ ε) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-3}$ στ) $\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2}$

217) Νὰ γίνουν ἕνα ρητὸ κλάσμα οἱ παραστάσεις:

α) $\frac{2x-1}{5} + \frac{x+3}{4} - \frac{9x-1}{10}$ β) $\frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha-3} - \frac{6}{\alpha^2-9}$

γ) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-3}{x+1}$ δ) $\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)\ (x-\beta)}$

218) Ὁμοίως οἱ παραστάσεις:

α) $2x - 1 + \frac{3-5x^2}{x+3}$ β) $7 + \frac{2\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{3\beta}{\alpha-\beta}$

γ) $\frac{2x\psi}{x+\psi} - x$ δ) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-2\alpha}$ ε) $\frac{7}{3\alpha+5} - \frac{2}{\alpha-1}$

219) Νὰ βρεθεῖ, ἂν $\omega \in R$, τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς

$$A = \frac{\omega-3}{4(\omega^2-3\omega+2)} + \frac{\omega-2}{\omega^2-4\omega+3} - \frac{\omega-1}{4(\omega^2-5\omega+6)}$$

νὰ πάρει ἡ A τὴ μορφὴ ρητοῦ κλάσματος καὶ νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἐξαγομένου, ὅταν εἶναι $\omega = 1$ καὶ $\omega = -2$.

220) Νὰ γίνει ἕνα ρητὸ κλάσμα ἡ παράσταση:

$$A = \frac{\alpha+2\beta}{\alpha^2+4\alpha\beta+3\beta^2} + \frac{\alpha+3\beta}{4(\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2)} - \frac{\alpha+\beta}{4(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)}$$

221) Ἂν $\psi \in R$, νὰ βρεθεῖ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ τῆς παραστάσεως:

$$A = \frac{1}{\psi+\psi^2} + \frac{1}{\psi^2+3\psi+2} + \frac{1}{\psi^2+5\psi+6} - \frac{2}{\psi(\psi+3)}.$$

νὰ θέσετε τὴν A σὲ μορφὴ ρητοῦ κλάσματος καὶ νὰ βρεῖτε τὴν ἀριθμητική του τιμὴ γιὰ $\psi = -2$.

222) Νὰ ἁπλοποιήσετε τὶς παραστάσεις:

$$A = \frac{(x^2-9)^2 - (x+5)\ (x-3)^2}{(x^2+x-12)^2}, \quad B = \frac{(x^2-1)^2 + 9(x+1)^2}{(x^2+6x+5)}$$

καὶ νὰ βρεῖτε τὸ ἄθροισμα A+B.

223) Νὰ κάνετε τὶς πράξεις:

α) $\frac{7x\psi}{\omega^2} \cdot \frac{3\alpha\omega}{\psi^2}$ β) $\left(-\frac{3x^3\psi}{2\alpha\beta^2}\right) \cdot \left(-\frac{4\alpha\beta^3}{5x\psi^2}\right) \cdot \frac{10\alpha\psi}{\beta x^2}$

γ) $\frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4}$ δ) $\frac{x^2-1}{\alpha+\beta} : \frac{x+1}{\alpha^2-\beta^2}$ ε) $\left(\frac{6x^3\omega}{5\alpha\beta} \cdot \frac{\beta^2 x\omega}{\alpha\gamma}\right) : \frac{2x^2\omega}{5\alpha\beta\gamma}$

στ) $\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) : \left(\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\right)$

224) Νὰ γίνουν οἱ πράξεις:

α) $\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right) : \frac{x^2-1}{x^2-4}$ β) $\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) : \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$

γ) $\left(\alpha - \frac{4\psi^2}{\alpha}\right)\left(\beta - \frac{4x^2}{\beta}\right) : \left(1 + \frac{2x}{\beta} + \frac{2\psi}{\alpha} + \frac{4x\psi}{\alpha\beta}\right)$

δ) $\left(\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}\right) : \frac{2x^2}{1-x}$ ε) $\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2-x^2} + \frac{3}{\alpha+x} - \frac{1}{\alpha-x}\right) : \left(\frac{\alpha^2+x^2}{\alpha x^2} + \frac{2}{x}\right)$

στ) $\left(\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-4\alpha\beta-21\beta^2} \cdot \frac{\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}\right) : \frac{1}{\alpha-7\beta}$

225) Νὰ γίνει ἕνα ρητὸ κλάσμα ἡ παράσταση:

α) $A = \frac{x^4+x^2\psi^2+\psi^4}{x^3+\psi^3} \cdot \frac{x^2+3x\psi+2\psi^2}{x^2-3x\psi-10\psi^2} : \frac{1}{x-5\psi}$

β) $B = \frac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} - \beta}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta-2\alpha}} + \frac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} - \alpha}{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha-2\beta}} - \frac{1 - \frac{x-\alpha}{\alpha}}{\frac{x+1}{\beta x} - \frac{1}{\beta}}$

γ) $\Gamma = \frac{3}{1+\frac{\alpha}{\beta+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}$

δ) $\Delta = \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha - \frac{\beta}{1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}}} + \frac{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha\beta}} - \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha + \frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$

226) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις:

α) $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

β) $\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

γ) $\frac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\gamma+\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\alpha+\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

δ) $\frac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\alpha\beta}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$

227) Ἂν εἶναι $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$, νὰ δείξετε ὅτι ἀληθεύουν οἱ ταυτότητες:

1) $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ 2) $\frac{\alpha(\beta^3-\gamma^3)}{\beta-\gamma} + \frac{\beta(\gamma^3-\alpha^3)}{\gamma-\alpha} + \frac{\gamma(\alpha^3-\beta^3)}{\alpha-\beta} = 0$

228) Νὰ δείξετε ὅτι οἱ παραστάσεις:

$$K = \frac{x^5+2x^4+4x^3+2x^2+4x+8}{x^2+2x+4}, \qquad \Lambda = \frac{x^5-2x^4+4x^3-2x^2+4x-8}{x^2-2x+4}$$

εἶναι πάντοτε ὁρισμένες στὸ $\mathbb{R}$, ἰσοδυναμοῦν μὲ ἀκέραιες παραστάσεις καὶ νὰ προσδιορίσετε κατόπι τὶς παραστάσεις $K^2+\Lambda^2$ καὶ $K\cdot\Lambda$.

229) Ἂν εἶναι $\alpha = \frac{1}{1+x}$, $\beta = \frac{1}{1-x}$, νὰ βρεῖτε τὴν τιμὴ τῆς $T = \frac{\alpha+\beta x}{\beta-\alpha x}$

230) Ἂν εἶναι $\frac{x}{\psi} = \frac{2}{5}$, νὰ βρεθεῖ ἡ τιμὴ τῆς $A = \frac{2x+\psi}{4(x-\psi)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

61. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Α) Θεωροῦμε τὶς συναρτήσεις - πολυώνυμα τοῦ πρώτου βαθμοῦ:

$$(1)\ \forall\, x \in \mathbf{R} : x \to 3x - 7 = \varphi(x), \qquad (2)\ \forall\, x \in \mathbf{R} : x \to x + 5 = \sigma(x)$$

Οἱ συναρτήσεις (1) καὶ (2) ἔχουν κοινὸ τὸ πεδίο ὁρισμοῦ, τὸ R. Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι : $\varphi(6) = 3\cdot 6 - 7 = 11$ καὶ $\sigma(6) = 6+5 = 11$, δηλ. **τὸ ἀρχέτυπο $6 \in \mathbf{R}$ ἔχει καὶ μὲ τὴ συνάρτηση φ καὶ μὲ τὴ συνάρτηση σ τὴν ἴδια εἰκόνα, τὸν $11 \in \mathbf{R}$.**

Ἐπειδὴ εἶναι $\varphi(6) = \sigma(6)$, λέμε ὅτι **ἡ ἰσότητα $3x - 7 = x + 5$ ἀληθεύει γιὰ $x = 6$.**

Στὰ ἑπόμενα μαθήματα θὰ δοῦμε ὅτι **ἡ ἰσότητα $3x - 7 = x + 5$ ἀληθεύει μόνο γιὰ $x = 6$.** Γιὰ κάθε $x \neq 6$ εἶναι $3x - 7 \neq x+5$.

Β) Θεωροῦμε τὶς συναρτήσεις - πολυώνυμα:

$$(1)\ \forall x \in \mathrm{R} : x \to x+4 = \varphi_1(x), \quad (2)\ \forall\, x \in \mathrm{R} : x \to x+5 = \sigma_1(x)$$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ ἀντιληφθοῦμε ὅτι ἡ ἰσότητα $x+4 = x+5$ δὲν ἀληθεύει γιὰ καμιὰ τιμὴ τοῦ $x \in \mathrm{R}$. Γιὰ κάθε $x \in \mathrm{R}$ εἶναι $x+4 \neq x+5$. **Τὸ σύνολο τῆς μεταβλητῆς $x \in \mathbf{R}$, γιὰ τὶς ὁποῖες εἶναι $\varphi_1(x) = \sigma_1(x)$, εἶναι τὸ** $\varnothing$.

Γ) Θεωροῦμε τὶς συναρτήσεις - πολυώνυμα:

$$(1)\ \forall\, x \in \mathrm{R} : x \to 2(x+3) = \varphi_2(x), \quad (2)\ \forall\, x \in \mathrm{R} : x \to 2x+6 = \sigma_2(x)$$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἰσότητα $\varphi_2(x) = \sigma_2(x)$ ἀληθεύει γιὰ κάθε $x \in \mathrm{R}$. **Τὸ σύνολο τῶν τιμῶν τῆς $x \in \mathbf{R}$, γιὰ τὶς ὁποῖες ἀληθεύει ἡ ἰσότητα $2(x+3) = 2x+6$, εἶναι αὐτὸ τὸ ἴδιο τὸ $\mathbf{R}$.**

Δ) Γενικά. Ἂν $x \to \varphi(x)$ καὶ $x \to \sigma(x)$ εἶναι δύο ὁποιεσδήποτε συναρτήσεις μὲ κοινὸ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα ὑποσύνολο M τοῦ R ἡ πρόταση:

$$\boxed{\varphi(x) = \sigma(x)} \qquad (\varepsilon)$$

λέγεται **ἐξίσωση μὲ ἕνα ἄγνωστο, τὸν x.**

Ἡ παράσταση $\varphi(x)$ εἶναι τὸ **πρῶτο μέλος,** ἡ $\sigma(x)$ τὸ **δεύτερο μέλος τῆς ἐξισώσεως (ε).**

Ἔτσι λοιπὸν οἱ ἰσότητες $3x-7=x+5$, $x+4=x+5$, $2(x+3)=2x+6$, ποὺ θεωρήσαμε παραπάνω, εἶναι ἐξισώσεις μὲ ἄγνωστο τὸν x.

Ἂν τὰ $\varphi(x)$ καὶ $\sigma(x)$ εἶναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα, ὅπως στὶς τρεῖς αὐτὲς ἐξισώσεις, ἡ ἐξίσωση (ε) λέγεται **πρωτοβάθμια.** Κάθε $\alpha \in M$ μὲ τὴν ἰδιότητα: $\boldsymbol{\varphi(\alpha)=\sigma(\alpha)}$ λέγεται **ρίζα ἢ καὶ λύση τῆς ἐξισώσεως (ε).**

Ἔτσι 1) ἡ ἐξίσωση $3x-7=x+5$ ἔχει ρίζα (καὶ μοναδική) τὴ $x=6$.

2) Ἡ ἐξίσωση $x+4=x+5$ δὲν ἔχει καμιὰ ρίζα.

3) Κάθε $x \in R$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $2(x+3)=2x+6$.

Κάθε ἐξίσωση, ὅπως ἡ $\varphi(x)=\sigma(x)$ μὲ $x \in R$, ὀνομάζεται:

α) ἀδύνατη ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ σύνολο τῶν ριζῶν της εἶναι τὸ $\varnothing$. Λ.χ. ἡ ἐξίσωση $x+4=x+5$ εἶναι ἀδύνατη.

β) ἀόριστη ἢ ταυτότητα, ἂν καὶ μόνο ἂν τὸ σύνολο τῶν ριζῶν της εἶναι τὸ R. Λ.χ. ἡ $2(x+3)=2x+6$ εἶναι ταυτότητα.

Κάθε ἐξίσωση, ὅπως ἡ (ε), τῆς ὁποίας τὰ μέλη εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ἀκέραια,** ἐνῶ, ἂν τὰ μέλη της εἶναι ρητὰ κλάσματα (τῆς ἴδιας μεταβλητῆς) λέγεται **ρητή.** Ἡ μεταβλητὴ x λέγεται **ἄγνωστος** τῆς ἐξισώσεως (ε).

Ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (ε) ἀποτελεῖ τὴν ἐπίλυσή της.

Σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω οἱ ἐξισώσεις: $3x-7=x+5$, $x^2-3x=x+1$ εἶναι ἀκέραιες μὲ ἄγνωστο τὸν x, ἐνῶ ἡ $\frac{\omega-5}{\omega-4}=\frac{\omega-4}{\omega+2}$ εἶναι ρητὴ μὲ ἄγνωστο τόν ω.

Ὅλες οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\varphi(x)=\sigma(x)$, ὅπου τὰ φ καὶ σ εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς, λέγονται **ἐξισώσεις μὲ ἕναν ἄγνωστο.**

Ε) Ἂν $\varphi(x,\psi)$ καὶ $\sigma(x,\psi)$ εἶναι δύο συναρτήσεις τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ ψ, ἡ ἰσότητα $\boxed{\varphi(x,\psi)=\sigma(x,\psi)}$ (ε)

λέγεται **ἐξίσωση μὲ δύο ἀγνώστους.**

Π.χ. οἱ ἐξισώσεις $2x+3\psi=x^2+\psi-1$, $x+\psi=5$ εἶναι ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους, τοὺς x καὶ ψ.

Κάθε ζεῦγος (ξ, η) μὲ τὴν ἰδιότητα: $\varphi(\xi,\eta)=\sigma(\xi,\eta)$ ὀνομάζεται **μία λύση τῆς ἐξισώσεως (ε).**

Π.χ. μία λύση τῆς ἐξισώσεως $x+\psi=5$ εἶναι τὸ ζεῦγος (1, 4). Μιὰ ἄλλη λύση της εἶναι τὸ ζεῦγος (−2, 7).

Ἀνάλογα ὁρίζουμε ἐξισώσεις μὲ 3, 4 καὶ περισσότερους ἀγνώστους. Π.χ. ἡ $x+\psi+\omega=8$ ἔχει τρεῖς ἀγνώστους, ἐνῶ ἡ $2x-\psi=\omega^2-\varphi+5$ ἔχει τέσσερες.

Παρατήρηση. Ὅταν λέμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $3x-7=x+5$ **ἀληθεύει γιὰ**

$x = 6$, ἐννοοῦμε ὅτι, ὅταν τοποθετήσουμε ὅπου x τὸν 6, προκύπτει **μία ἀληθὴς ἀριθμητικὴ ἰσότητα,** δηλ. $3 \cdot 6 - 7 = 6 + 5$ ἢ $11 = 11$.

Στ) Ἰσοδύναμες ἐξισώσεις. Δύο ἐξισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχουν τὶς ἴδιες λύσεις (δηλ. κάθε ρίζα τῆς πρώτης εἶναι καὶ ρίζα τῆς ἄλλης καὶ κάθε ρίζα τῆς δεύτερης εἶναι καὶ ρίζα τῆς πρώτης).

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ αὐτὸ εὔκολα συμπεραίνουμε ὅτι:

α) Κάθε ἐξίσωση μπορεῖ νὰ ἀντικατασταθεῖ μὲ μιὰ ἰσοδύναμή της.

β) Δύο ἐξισώσεις ἰσοδύναμες πρὸς μία τρίτη εἶναι καὶ μεταξύ τους ἰσοδύναμες.

1ο Θεώρημα. Ἂν $\varphi(x)$, $\sigma(x)$, $\pi(x)$ εἶναι πολυώνυμα, τότε οἱ ἐξισώσεις:

$$\boxed{\varphi(x) = \sigma(x)} \quad \textbf{καὶ} \quad \boxed{\varphi(x) + \pi(x) = \sigma(x) + \pi(x)}$$

εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἀπόδειξη. Ἂς εἶναι $x = \alpha$ μιὰ ρίζα τῆς πρώτης. Θὰ δείξουμε ὅτι εἶναι ἡ $x = \alpha$ καὶ ρίζα τῆς ἄλλης. Ἔχουμε: $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) \Rightarrow \varphi(\alpha) + \pi(\alpha)$, δηλ. τὸ α εἶναι καὶ ρίζα τῆς ἄλλης ἐξισώσεως.

Ἂν $x = \beta$ εἶναι μία ρίζα τῆς δεύτερης, τότε ἔχουμε: $\varphi(\beta) + \Pi(\beta) = \sigma(\beta) + \pi(\beta) \Rightarrow \varphi(\beta) = \sigma(\beta)$, δηλ. τὸ β εἶναι καὶ ρίζα τῆς πρώτης.

Ἄρα, ἐπειδὴ κάθε ρίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶναι καὶ ρίζα τῆς δεύτερης, καὶ κάθε ρίζα τῆς δεύτερης εἶναι καὶ ρίζα τῆς πρώτης, οἱ δύο αὐτὲς ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἔτσι: **Ἂν προσθέσουμε (ἢ ἀφαιρέσουμε) τὸ ἴδιο πολυώνυμο $\Pi(x)$ καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$, προκύπτει μιὰ ἐξίσωση ἰσοδύναμη πρὸς αὐτήν.**

Παράδειγμα: Θεωροῦμε τὴν ἐξίσωση $\psi^2 - 4\psi = 3\psi - 10$ (α). Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη της προστεθεῖ λ.χ. τὸ πολυώνυμο $(-3\psi + 10)$, βρίσκεται ἡ ἐξίσωση $\psi^2 - 4\psi + (-3\psi + 10) = 3\psi - 10 + (-3\psi + 10)$ (β). Οἱ (α) καὶ (β) εἶναι ἰσοδύναμες ἐξισώσεις. Ἡ ἐξίσωση (β) μετὰ τὶς ἀναγωγὲς στὸ δεύτερο μέλος γράφεται: $\psi^2 - 4\psi - 3\psi + 10 = 0$ (β΄) καὶ παρατηροῦμε ὅτι ἀπὸ τὸ δεύτερο μέλος της (α) οἱ ὅροι 3ψ καὶ -10 **μεταφέρθηκαν στὸ πρῶτο, ἀλλὰ μὲ τὸ ἀντίθετο πρόσημο.** Προφανῶς εἶναι: $\psi^2 - 4\psi = 3\psi - 10 \Leftrightarrow \psi^2 - 7\psi + 10 = 0$.

Γενικά. Ἡ ἐξίσωση $\varphi(x) = \sigma(x) + \rho(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἐξίσωση $\varphi(x) - \rho(x) = \sigma(x)$. (γιατί;)

Ὥστε μποροῦμε σὲ κάθε ἐξίσωση νὰ μεταφέρουμε ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος της στὸ ἄλλο ὁσουσδήποτε ὅρους, ἀλλὰ καθένα μὲ τὸ ἀντίθετο πρόσημο.

Π.χ. εἶναι: $x^3 - 2x^2 + 7 = 3x - 5 \rightarrow x^3 + 7 = 2x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow x^3 + 5 - 3x = 2x^2 - 7$ κλπ.

2ο Θεώρημα. Ἂν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ τὰ πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ τὸν ἴδιο πραγματικὸ ἀριθμὸ $\mu \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωση ποὺ προκύπτει

$\mu \cdot \varphi(x) = \mu \cdot \sigma(x)$ **εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν πρώτη. Τὸ ἴδιο ἰσχύει, ἂν διαιρέσουμε μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, δηλ. εἶναι:** $\boxed{\varphi(x) = \sigma(x) \Leftrightarrow \mu \cdot \varphi(x) = \mu \cdot \sigma(x)}$

καὶ $\boxed{\varphi(x) = \sigma(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\mu}\ \sigma(x)}$

Ἀπόδειξη. Ἂν $x = \alpha$ εἶναι μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$, ἀπὸ τὶς ἰσοδυναμίες: $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) \Leftrightarrow \mu \cdot \varphi(\alpha) = \mu \cdot \sigma(\alpha)$ (1) καὶ $\varphi(\alpha) = \sigma(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} \cdot \varphi(\alpha) = \frac{1}{\mu} \cdot \sigma(\alpha)$ (2) συμπεραίνουμε ὅτι ἡ πρότασή μας ἰσχύει.

Π.χ. εἶναι: $3x - 7 = x + 5 \Leftrightarrow -5(3x - 7) = -5(x + 5) \Leftrightarrow -15x + 35 = -5x - 25$.

Στὴν ἐξίσωση: $\frac{2x^2}{5} - \frac{3x}{2} + 5 = \frac{x^2}{2} - x$ (α) ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ ἕνα κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων τῶν μελῶν της, λ.χ. μὲ τὸ Ε.Κ.Π., ποὺ εἶναι τὸ 10, βρίσκουμε τὴν ἰσοδύναμη ἐξίσωση: $10\left(\frac{2x^2}{5} - \frac{3x}{2} + 5\right) = 10\left(\frac{x^2}{2} - x\right)$ ἢ τὴν $4x^2 - 15x + 50 = 5x^2 - 10x$ (β)

Ἡ (β) ἔχει συντελεστὲς τῶν ὅρων της ἀκεραίους.

Μποροῦμε λοιπὸν μὲ τὴ βοήθεια αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος νὰ ἐξαλείψουμε τοὺς ἀριθμητικοὺς παρονομαστὲς μιᾶς ἐξισώσεως.

Παρατήρηση. Ἂν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ πολλαπλασιασθοῦν μὲ παράσταση, ποὺ περιέχει τὸν ἄγνωστο x, π.χ. τὴν $\pi(x)$, τότε ἡ νέα ἐξίσωση, ποὺ προκύπτει, $\varphi(x) \cdot \pi(x) = \sigma(x) \cdot \pi(x)$, θὰ ἔχει ρίζες (ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ρίζες τῆς πρώτης) καὶ τὶς τιμὲς τοῦ x, ποὺ μηδενίζουν τὴν παράσταση $\pi(x)$, χωρὶς νὰ εἶναι βέβαια καὶ λύσεις τῆς $\varphi(x) = \sigma(x)$. Ἄρα οἱ δύο ἐξισώσεις δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμες. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $2x = 7$ καὶ ἡ $2x(x - 5) = 7(x - 5)$ (ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν πρώτη) δὲν εἶναι ἰσοδύναμες, γιατὶ ἡ δεύτερη ἔχει ρίζα καὶ τὴ $x = 5$, τὴν ὁποία ὅμως δὲν ἔχει ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωση.

Ἂν διαιρέσουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \sigma(x)$ μὲ παράσταση $\pi(x)$, ἡ ἐξίσωση ποὺ προκύπτει $\frac{\varphi(x)}{\pi(x)} = \frac{\sigma(x)}{\pi(x)}$ δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ ἰσοδύναμη πρὸς τὴν πρώτη.

Π.χ. ἡ ἐξίσωση $(x - 3)(x + 5) = (7x - 1)(x - 3)$ ἔχει ρίζες τὶς $x = 3$ καὶ $x = 1$. Διαιροῦμε καὶ τὰ δυό της μέλη μὲ τὸ διώνυμο $x - 3$ καὶ προκύπτει ἡ ἐξίσωση $x + 5 = 7x - 1$, ποὺ δὲν ἔχει ρίζα τὴ $x = 3$, συνεπῶς δὲν εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχική.

Ζ) Τελικὴ μορφὴ καὶ βαθμὸς μιᾶς ἀκέραιας ἐξισώσεως. Ἂν σὲ μιὰ ἀκέραια ἐξίσωση μὲ ἕναν ἄγνωστο ἐκτελέσουμε τὶς πράξεις, ποὺ σημειώνονται στὰ δυό της μέλη, ἐξαλείψουμε τοὺς ἀριθμητικοὺς παρονομαστὲς (ἂν ὑπάρχουν) καὶ μεταφέρουμε τοὺς ὅρους τοῦ δεύτερου μέλους στὸ πρῶτο (μὲ τὸ ἀντίθετο βέβαια πρόσημο), ἐκτελώντας τὶς ἀναγωγὲς τῶν ὅμοιων ὅρων, καταλήγουμε σὲ μιὰ ἐξίσωση ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχικὴ καὶ μὲ μορφὴ

$$\boxed{\Pi(x) = 0,}$$

ὅπου τὸ $\Pi(x)$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x.

Ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου Π(x) λέγεται καὶ βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Π.χ. δίνεται ἡ ἐξίσωση: $2x(x+3) - 5x = (x+1)^2 - 2x + 12$ (α)

Ἐφαρμόζοντας σ᾽ αὐτή, ὅσα εἴπαμε πιὸ πάνω, ἔχουμε:

(α) $\Leftrightarrow 2x^2+6x-5x = x^2+2x+1-2x+12 \Leftrightarrow 2x^2+6x-5x-x^2-2x-1+$ $+2x-12=0 \Leftrightarrow x^2+x-13=0$ (β). Ἡ ἐξίσωση (β) εἶναι δεύτερου βαθμοῦ.

Δίνεται ἡ ἐξίσωση: $\frac{3(2x-1)}{5} - \frac{x}{2} + 1 = x - \frac{x-1}{5}$ (α′)

Ἀπὸ αὐτὴ κατὰ τὰ προηγούμενα προκύπτει:

(α′) $\Leftrightarrow 10\left\{\frac{3(2x-1)}{5} - \frac{x}{2} + 1\right\} = 10\cdot\left(x - \frac{x-1}{5}\right) \Leftrightarrow 6(2x-1)-5x+10=$ $=10x-2(x-1) \Leftrightarrow 12x-6-5x+10 = 10x-2x+2 \Leftrightarrow 12x-6-5x+10-$ $-10x+2x-2=0 \Leftrightarrow -x+2=0$, ἡ ὁποία εἶναι ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ.

Σημείωση. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργασίας καὶ κάθε ἀκέραια ἐξίσωση μὲ περισσότερους ἀγνώστους θὰ παίρνει τὴ μορφὴ $A=0$, ὅπου τὸ A θὰ εἶναι ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, ἀνηγμένο κι ἀκόμη μὲ ἀκέραιους ἀριθμητικοὺς συντελεστές. Ὁ βαθμὸς τοῦ A ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους εἶναι καὶ ὁ βαθμὸς τῆς δοσμένης ἐξισώσεως ὡς πρὸς τοὺς ἴδιους ἀγνώστους.

Π.χ. ἡ $3x-2\psi+7=0$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ψ, ἐνῶ ἡ $2x^2\psi - 3x + 5\psi^2 - 7 = 0$ εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρὸς x, δευτεροβάθμια ὡς πρὸς ψ καὶ τρίτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ψ.

Η) Ἀνηγμένη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ. Λύση καὶ διερεύνηση.

Ι) Κάθε ἐξίσωση, ποὺ τελικὰ παίρνει τὴ μορφὴ $\alpha x+\beta=0$, ὅπου x εἶναι ὁ ἄγνωστος καὶ τὰ α, β σταθερὲς ἢ παραστάσεις ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὸ x, λέγεται πρωτοβάθμια ἐξίσωση μὲ ἕναν ἄγνωστο.

Ἂν οἱ α, β εἶναι ἀριθμοί, ὅπως στὴν $3x-1=0$, ἡ ἐξίσωση λέγεται **ἀριθμητική**. Ἂν εἶναι γενικοὶ ἀριθμοί, ὅπως στὴ $2\lambda x+\mu=0$, τότε λέγεται **ἐγγράμματη.**

ΙΙ) Ἐπίλυση ἀριθμητικῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

Παράδειγμα. 1) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(x+3)^2 = x(x-5)$ (1)

Λύση. Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις καὶ στὰ δύο μέλη κι ἔχουμε:

$$x^2+6x+9 = x^2-5x$$

Μεταφέρουμε στὸ α′ μέλος τὰ μονώνυμα τοῦ x, στὸ β′ τοὺς σταθεροὺς (αὐτοὺς ποὺ εἶναι ἀνεξάρτητοι ἀπὸ τὸ x), δηλ. **χωρίζουμε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους** κι ἔτσι ἔχουμε: $x^2+6x-x^2+5x=-9$.

Ἐκτελοῦμε τὶς ἀναγωγὲς τῶν ὅμοιων ὅρων καὶ προκύπτει ἡ ἐξίσωση:

$$11x = -9$$

Διαιροῦμε καὶ τὰ δύο μέλη μὲ τὸ συντελεστὴ 11 τοῦ ἀγνώστου, δηλ. πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς $11x = -9$ ἐπὶ τὸν $\frac{1}{11}$ (ἀντίστροφο τοῦ 11) κι ἔχουμε: $x = \frac{-9}{11}$. Ἡ τελευταία αὐτὴ ἐξίσωση εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχικὴ κι ἔχει τὴ μοναδικὴ ρίζα $x = -\frac{9}{11}$. Ἄρα καὶ ἡ ἐξίσωση (1), ποὺ δόθηκε γιὰ λύση, ἔχει μόνον αὐτὴ τὴ ρίζα στὸ σύνολο R.

2) Στὸ σύνολο N νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $\frac{2x-1}{7} + \frac{x}{3} = x - 7$ (2)

Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι 21. Θὰ ἔχουμε:

(2) $\Leftrightarrow 21\cdot\left(\frac{2x-1}{7} + \frac{2}{3}\right) = 21(x-7) \Leftrightarrow 3(2x-1) + 7x = 21(x-7) \Leftrightarrow 6x - {}$ $-3 + 7x = 21x - 147 \Leftrightarrow 6x + 7x - 21x = 4 - 147 \Leftrightarrow -8x = -144 \Leftrightarrow 8x = 144 \Leftrightarrow x = 18.$

Ἐπειδὴ ἡ ρίζα ποὺ βρήκαμε εἶναι ἀριθμὸς φυσικός, ἡ ἐξίσωση (2) λέμε ὅτι εἶναι **δυνατὴ** στὸ σύνολο N καὶ ἀκόμα ὅτι ἡ ρίζα $x = 18$ εἶναι **παραδεκτή.**

3) Στὸ σύνολο R νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση:

$$(3x-1)(x+5) - 7x = 3(x+2)^2 + 5(2-x) \qquad (3)$$

Ἐκτελοῦμε τὶς πράξεις καὶ στὰ δύο μέλη κι ἔχουμε:

$$3x^2 - x + 15x - 5 - 7x = 3x^2 + 12x + 12 + 10 - 5x$$

Χωρίζουμε γνωστοὺς ἀπὸ ἀγνώστους, δηλ. μεταφέρουμε στὸ α΄ μέλος τοὺς ὅρους τοῦ x καὶ στὸ β΄ τοὺς γνωστοὺς ἀριθμοὺς κι ἔτσι προκύπτει: $3x^2 - x + 15x - 7x - 3x^2 - 12x + 5x = 5 + 12 + 10.$

Ἐκτελώντας τὶς ἀναγωγὲς βρίσκουμε:

$$0x = 27 \qquad (3')$$

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε τιμὴ τοῦ x, ὅταν πολλαπλασιάζεται μὲ μηδέν, γίνεται μηδέν, δηλ. τὸ α΄ μέλος τῆς ἐξισώσεως (3΄) εἶναι $\neq$ ἀπὸ τὸ β΄. Ἡ ἐξίσωση λοιπὸν (3΄) εἶναι **ἀδύνατη,** ἄρα καὶ ἡ ἀρχικὴ (3).

4) Νὰ λυθεῖ στὸ σύνολο R ἡ ἐξίσωση:

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} + x = \frac{5x-1}{6} + 1 \qquad (4)$$

Εἶναι: (4) $\Leftrightarrow 6\cdot\left(\frac{x+1}{3} - \frac{x-1}{2} + x\right) = 6\cdot\left(\frac{5x-1}{6} + 1\right) \Leftrightarrow 2(x+1) - {}$ $-3(x-1) + 6x = 5x - 1 + 6 \Leftrightarrow 2x + 2 - 3x + 3 + 6x = 5x - 1 + 6 \Leftrightarrow 2x - 3x + {}$ $+ 6x - 5x = -2 - 3 - 1 + 6 \Leftrightarrow \quad 0x = 0 \qquad (4')$

'Επειδὴ γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ x τὸ α' μέλος τῆς (4') εἶναι μηδέν, δηλ. εἶναι ἴσο μὲ τὸ β', κάθε ἀριθμὸς εἶναι λύση τῆς ἐξισώσεως, ἄρα καὶ τῆς ἀρχικῆς (4). Λέμε ὅτι **ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀόριστη ἢ ταυτότητα.**

III) 'Επίλυση τῆς γενικῆς ἐξισώσεως τοῦ α' βαθμοῦ.

Εἴδαμε παραπάνω ὅτι ἡ ἐξίσωση τοῦ α' βαθμοῦ ἔχει γενικὰ τὴ μορφή:

$$\alpha x+\beta=0$$

'Απὸ αὐτὴ ἔχουμε τὴν ἰσοδύναμή της $\alpha x=-\beta$ καὶ μποροῦμε νὰ διακρίνουμε τὶς ἀκόλουθες δυνατὲς περιπτώσεις:

1) Νὰ εἶναι $\alpha \neq 0$. 2) Νὰ εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta \neq 0$. 3) Νὰ εἶναι $\alpha=0$, $\beta=0$.

α' περίπτωση. "Αν εἶναι $\alpha \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ $\frac{1}{\alpha}$ κι ἔχουμε: $x=-\frac{\beta}{\alpha}$. **'Η τιμὴ $-\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι ἡ μοναδικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$.**

Πραγματικὰ ἄλλη λύση δὲν ὑπάρχει. "Αν εἶχε ἡ ἐξίσωση καὶ τὴ ρίζα $x=\gamma \neq -\frac{\beta}{\alpha}$ τότε ἔπρεπε νὰ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$$\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=-\beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha\cdot\gamma=-\beta,$$

συνεπῶς καὶ ἡ $\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha\cdot\gamma$, ἄρα καὶ ἡ $-\frac{\beta}{\alpha}=\gamma$.

'Αλλὰ ὑποθέσαμε ὅτι εἶναι $\frac{-\beta}{\alpha} \neq \gamma$ καὶ δὲν εἶναι δυνατὸ νὰ εἶναι συγχρόνως $\frac{-\beta}{\alpha} \neq \gamma$ καὶ $\frac{-\beta}{\alpha}=\gamma$. "Ωστε εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νὰ συμπεράνουμε ὅτι κακῶς ὑποθέσαμε πὼς ὑπάρχει καὶ ἄλλη λύση τῆς ἐξισώσεως, ἐκτὸς ἀπὸ τὴ $x=\frac{-\beta}{\alpha}$.

β' περίπτωση. "Αν εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $0\cdot x=-\beta$. 'Επειδὴ τὸ α' μέλος της γιὰ κάθε x εἶναι μηδὲν καὶ τὸ β' εἶναι $\neq 0$, ἡ ἐξίσωση αὐτή, συνεπῶς καὶ ἡ ἀρχικὴ $\alpha x+\beta=0$, **εἶναι ἀδύνατη, δὲν ἔχει λύση.**

γ' περίπτωση. "Αν εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $\mathbf{0x=0}$ καὶ κάθε ἀριθμὸς $x \in R$ εἶναι λύση της, δηλ. ἡ ἐξίσωση $\alpha x+\beta=0$ **εἶναι ταυτότητα (ἀόριστη).**

Τὰ ὅσα βρήκαμε σχετικὰ μὲ τὴ λύση τῆς $\alpha x+\beta=0$, τὰ τοποθετοῦμε στὸν παράκτω πίνακα:

Γενικὴ ἐξίσωση τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x+\beta=0$	
$\alpha \neq 0$	Μοναδικὴ λύση ἡ $x=-\frac{\beta}{\alpha}$
$\alpha=0$ καὶ $\beta \neq 0$	'Αδύνατη ἐξίσωση
$\alpha=0$ καὶ $\beta=0$	'Αόριστη ἐξίσωση (ταυτότητα)

Ἐφαρμογή. Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ λ ἡ ἐξίσωση $\lambda(\lambda x - 2) = x - 2$ εἶναι δυνατή, ἀδύνατη ἢ ἀόριστη;

Τὸ γράμμα λ στὴν περίπτωση ποὺ ἐξετάζουμε εἶναι μιὰ μεταβλητὴ ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὸν ἄγνωστο x. Γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ λ προκύπτει καὶ μιὰ νέα ἐξίσωση ἀπὸ τὴν ἀρχική. Ἂν λ.χ. πάρουμε $\lambda = 7$, ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $7(7x - 2) = x - 2$, ἂν εἶναι $\lambda = \frac{1}{3}$, ἔχουμε τὴν ἐξίσωση $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = x - 2$ κλπ. Κάθε μιὰ ἀπὸ αὐτὲς μπορεῖ νὰ λυθεῖ μὲ τὸν τρόπο, ποὺ μάθαμε γιὰ τὶς ἐξισώσεις μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστές. Τὴ μεταβλητὴ λ ὀνομάζουμε **παράμετρο τῆς ἐξισώσεως.**

Θὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση καὶ θὰ ἐφαρμόσουμε τὰ συμπεράσματα τοῦ πιὸ πάνω πίνακα.

Εἶναι: $\lambda(\lambda x - 2) = x - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 x - 2\lambda = x - 2 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = 2\lambda - 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = 2(\lambda - 1)$ (α)

Ὁ συντελεστὴς τοῦ ἀγνώστου x στὴν ἐξίσωση (α) εἶναι $\lambda^2 - 1$ ἢ καὶ $(\lambda + 1)(\lambda - 1)$. Αὐτὸς μηδενίζεται γιὰ $\lambda = -1$ ἢ $\lambda = 1$.

Γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἐξίσωση πρέπει νὰ εἶναι $\lambda^2 - 1 \neq 0$, δηλ. $\lambda \neq -1$ καὶ $\lambda \neq 1$. Τότε ἔχει ἡ (α), ἐπομένως καὶ ἡ ἀρχική, μιὰ λύση τή:

$$x = \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 1} \Leftrightarrow x = \frac{2(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\lambda + 1}$$

Ἂν εἶναι $\lambda = -1$, ἡ (α) γίνεται $0x = -4$ καὶ εἶναι ἀδύνατη.

Ἂν εἶναι $\lambda = 1$, ἡ (α) γίνεται $0x = 0$ καὶ εἶναι ἀόριστη.

Ἡ ἐργασία ποὺ ἔγινε **γιὰ τὴν ἐξέταση ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων** ὀνομάζεται καὶ **διερεύνηση τῆς ἐξισώσεως.**

62. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΕΣ ΣΕ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΕΣ

Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $A.B = 0$. Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $A.B = 0$ (1), ὅπου τὰ A, B εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς x μὲ τὸ ἴδιο πεδίο ὁρισμοῦ, εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὸ σύνολο τῶν ἐξισώσεων: $A = 0$, $B = 0$ (2).

Ὅπως γνωρίζουμε, γιὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενο $A \cdot B$ ἴσο μὲ 0, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς παράγοντές του νὰ εἶναι μηδέν. Συνεπῶς οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι οἱ ρίζες τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ ἀντίστροφα οἱ ρίζες τῶν (2) εἶναι καὶ οἱ ρίζες τῆς (1)

Μὲ τὸν ἴδιο συλλογισμὸ γίνεται φανερὸ ὅτι κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma = 0$, ὅπου τὰ A, B, Γ εἶναι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x, εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὸ σύνολο τῶν ἐξισώσεων $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$.

Ἂν μιὰ ἐξίσωση $\Phi(x) = 0$ εἶναι πιὸ μεγάλου βαθμοῦ ἀπὸ τὸν πρῶτο, μπορεῖ νὰ ἐπιλυθεῖ, ἂν ἐπιτύχουμε ἀνάλυση τοῦ πολυωνύμου $\Phi(x)$ σὲ γινόμενο παραγόντων πρώτου βαθμοῦ.

Παραδείγματα: 1) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(x - 3)(2x + 5) = 0$ (1)

Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὸ σύνολο τῶν ἐξισώσεων $x - 3 = 0$, $2x + 5 = 0$ ποὺ οἱ ρίζες τους εἶναι: $x = 3$, $x = -\frac{5}{2}$. Ὥστε ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει ρίζες τὶς $x = 3$, $x = -\frac{5}{2}$ καὶ μόνον αὐτές.

2) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(3x+7)(x^2 - 4) = 5x(3x+7)(x+2)$ (2)

Εἶναι: (2) $\Leftrightarrow (3x+7)(x+2)(x-2) - 5x(3x+7)(x+2) = 0 \Leftrightarrow (3x+7)$ $(x+2)(x-2-5x) = 0 \Leftrightarrow (3x+7)(x+2)(-4x-2) = 0$ (2′)

Δηλ. ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὸ σύνολο τῶν ἐξισώσεων:

$3x + 7 = 0$, $x + 2 = 0$, $-4x - 2 = 0$ κι ἔχει ρίζες $x = -\frac{7}{3}$, $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$ καὶ μόνον αὐτές.

3) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $9x^2 - 16 = 0$ (3)

Ἡ (3) εἶναι δεύτερου βαθμοῦ μὲ ἐλλιπὴ μορφή, γιατὶ δὲν ἔχει πρωτοβάθμιο ὅρο. Τὸ α′ μέλος της, σὰν διαφορὰ δύο τετραγώνων, τρέπεται σὲ γινόμενο δύο παραγόντων κι ἡ (3) γίνεται: $(3x+4)(3x-4) = 0$, ποὺ εἶναι ἰσοδύναμη πρὸς τὸ σύνολο $\{3x + 4 = 0,\ 3x - 4 = 0\}$, δηλ. πρὸς τὸ $\left\{x = -\frac{4}{3},\ x = \frac{4}{3}\right\}$

Ἄρα ἡ (3) ἔχει λύσεις τὶς $x = -\frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3}$ καὶ μόνον αὐτές.

4) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $2x^2 + 5 = 0$ (4)

Ἡ (4) εἶναι ἐπίσης ἐξίσωση δεύτερου βαθμοῦ ἐλλιπής. Ἔχει ἰσοδύναμη τὴ $2x^2 = -5$ ἢ τὴ $x^2 = -\frac{5}{2}$, ποὺ εἶναι ἀδύνατη στὸ σύνολο R, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνο ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ δὲν μπορεῖ ποτὲ νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Στὸ Λύκειο θὰ μιλήσουμε γιὰ τοὺς μιγάδες ἀριθμούς, στὸ σύνολο τῶν ὁποίων θὰ εἶναι δυνατὴ μιὰ τέτοια ἐξίσωση.

5) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $5x^2 + 3x = 0$ (5)

Ἡ (5) εἶναι δεύτερου βαθμοῦ ἐλλιπής, γιατὶ δὲν ἔχει σταθερὸ ὅρο. Εἶναι: (5) $\Leftrightarrow x(5x+3) = 0 \Leftrightarrow \{x = 0,\ 5x + 3 = 0\}$, ἄρα ἔχει τὶς λύσεις $x = 0$ καὶ $x = -\frac{3}{5}$ καὶ μόνον αὐτές.

6) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $x^2 - 6x + 8 = 0$ (6)

Ἡ (6) εἶναι πλήρης ἐξίσωση τοῦ δεύτερου βαθμοῦ. Ἀναλύουμε τὸ α′ μέλος της σὲ γινόμενο. Εἶναι: $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 9 + 8 = (x-3)^2 - 1 =$ $= (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = (x-2)(x-4)$, ἑπομένως:

(6) $\Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \{x - 2 = 0,\ x - 4 = 0\} \Leftrightarrow \{x = 2,\ x = 4\}$.

63. ΡΗΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Α) Κάθε ρητὴ ἐξίσωση, δηλ. κάθε ἐξίσωση, ποὺ τουλάχιστο τὸ ἕνα μέλος της εἶναι ρητὴ κλασματικὴ παράσταση, παίρνει τελικὰ τὴ μορφή:

$$\boxed{\frac{\Phi}{\Pi}=0} \qquad (1)$$

ὅπου τὰ Φ καὶ Π εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα μὲ μιὰ ἢ περισσότερες μεταβλητές.

Τὸ κλάσμα $\frac{\Phi}{\Pi}$ θεωρεῖται **ἀνάγωγο,** δηλ. δὲν ἐπιδέχεται ἁπλοποίηση. Ρίζες τῆς (1) εἶναι ὅλες οἱ τιμὲς τοῦ ἀγνώστου, ποὺ μηδενίζουν τὸν ἀριθμητὴ Φ, ὄχι ὅμως καὶ τὸν παρονομαστὴ Π. Συνεπῶς γιὰ τὶς λύσεις τῆς (1) θὰ ἔχουμε:

$$\boxed{\Phi=0 \quad \text{καὶ} \quad \Pi\neq 0} \qquad (2)$$

Β) Ἂν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ρητῆς ἐξισώσεως τὰ πολλαπλασιάσουμε ἐπὶ ἕνα κοινὸ πολλαπλάσιο τῶν παρονομαστῶν (ποὺ τὸ ὑποθέτουμε βέβαια διάφορο τοῦ μηδενός), γίνεται ἐξάλειψη τῶν παρονομαστῶν καὶ ἡ ρητὴ ἐξίσωση μετασχηματίζεται σὲ μιὰ ἰσοδύναμή της ἀκέραια ἐξίσωση, ποὺ θὰ λυθεῖ σύμφωνα μὲ τὰ γνωστά.

Τὰ παρακάτω παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν τὸν τρόπο ἐργασίας.

1ο) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\frac{\omega-5}{\omega-1}=\frac{\omega-4}{\omega+2}$ (1)

Λύση. Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(\omega-1)(\omega+2)$. Γιὰ νὰ εἶναι $(\omega-1)(\omega+2)\neq 0$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\omega\neq 1$, $\omega\neq -2$ (2).

Πολλαπλασιάζοντας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. ἔχουμε: $(\omega+2)(\omega-5)=(\omega-4)(\omega-1)$ καὶ ἀπὸ αὐτή:

$$\omega^2+2\omega-5\omega-10=\omega^2-4\omega-\omega+4 \Leftrightarrow 2\omega=14 \Leftrightarrow \omega=7.$$

Ἡ τιμὴ $\omega=7$ ἐκπληρώνει τὶς σχέσεις (2) καὶ συνεπῶς εἶναι παραδεκτὴ λύση της (1).

2ο) Νὰ λυθεῖ ἡ ἐξίσωση : $\frac{2x-3}{x-3}-\frac{2(x+1)}{x+2}=\frac{15}{x^2-x-6}$ (1)

Λύση. Ἐπειδὴ $x^2-x-6=(x+2)(x-3)$ (γιατί;), ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $\frac{2x-3}{x-3}-\frac{2(x+1)}{x+2}=\frac{15}{(x-3)(x+2)}$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι: $x\neq 3$, $x\neq -2$ (2)

Ἐξαλείφοντας τοὺς παρονομαστὲς ἔχουμε:

$(1)\Leftrightarrow(2x-3)(x+2)-2(x+1)(x-3)=15 \Leftrightarrow 2x^2-3x+4x-6-2x^2-2x+$ $+6x+6=15 \Leftrightarrow 5x=15$, ἄρα $x=3$. Ἡ τιμὴ $x=3$ δὲν ἐκπληρώνει τὶς σχέσεις (2) κι ἑπομένως ἡ ἐξίσωση (1) δὲν ἔχει λύση, εἶναι ἀδύνατη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

231) Νὰ λυθοῦν στὸ σύνολο τῶν ρητῶν οἱ ἐξισώσεις:

α) $7x-4=2x+5$ β) $45x+18=-132-5x$

γ) $(2x-1)-(3x+7)=5-[(x-3)-4x]$

δ) $(3x+5)-(x+2)=2(x-1)+3$

ε) $2(2x+3)-7-2x=9+2(x-5)$

στ) $3(x-2)-2(x+1)-5(x-3)=7(2x-1)-4(x+5)$

ζ) $3(x-2)-(5-12x)+x(x-4)=(x+2)^2+7x-15$

232) Ἐπίσης στὸ σύνολο τῶν ρητῶν νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $(x-2)(x-3)+(x-4)(x-5)=2(x-3)(x-4)$

β) $x(\sqrt{3}+1)+3=x+3\sqrt{3}$

γ) $\left(2x-\frac{3}{5}\right)\left(5x+\frac{2}{3}\right)=10(x-1)(x+1)-\frac{2}{5}$

δ) $3(\psi-1)^2-2(\psi-1)(\psi+1)=(\psi+1)^2$

ε) $(3\omega+4)(4\omega-1)-(7\omega-2)(\omega+1)=(5\omega-3)(\omega-2)+1$

στ) $(5z-2)^2-2(4z-3)^2=(7z+2)(1-z)+14$

233) Στὸ σύνολο R νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $x(2\sqrt{3}-2)-4=2(\sqrt{3}-x)+4$

β) $(3x+1)^2-(x\sqrt{2}-1)^2=7(x-3)(x-\sqrt{2})$

γ) $\frac{x-3}{5}=\frac{x+1}{2}$ δ) $\frac{3x+7}{12}=\frac{2x-5}{8}$

ε) $x+\frac{2x-7}{3}-\frac{x-5}{2}=1$ στ) $\frac{5(3\psi-1)}{4}=\frac{\psi-2}{8}+1$

ζ) $\frac{(x-5)(x+1)}{3}+\frac{(x+2)(x-3)}{5}=\frac{8(x-2)^2}{15}$

234) Στὸ σύνολο R νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

α) $3x-\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{2}-1=\frac{3(x-1)}{2}+\frac{x-1}{6}$

β) $\frac{4x}{7}-\frac{2(3x-2)}{21}-\frac{x-5}{3}=\frac{5(3-4x)}{7}+\frac{1}{3}$

γ) $\frac{1}{3}\left\{\frac{x-2}{2}-\frac{2(x+1)}{5}-1\right\}=\frac{3(x+2)}{10}-1$

δ) $\frac{3x-1}{2}-\frac{3(x-1)}{4}-\frac{2x-3}{5}-\frac{3(x+3)}{4}+\frac{5(x-3)}{6}=0$

ε) $\dfrac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}-\dfrac{2x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{6}-\frac{3x}{4}$.

στ) $\dfrac{\frac{6\omega-3}{5}-1}{3-\frac{3-4\omega}{10}}=3$

235) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῆς παραμέτρου λ οἱ ἀκόλουθες ἐξισώσεις εἶναι δυνατές, ἀδύνατες ἢ ἀόριστες (διερεύνηση τῶν ἐξισώσεων), ἂν $\lambda, x, \psi, \omega \in R$.

α) $\frac{x+2}{3\lambda}-\frac{1}{6\lambda}=\frac{\lambda}{6}-\frac{x}{2\lambda}$ β) $\frac{x-2}{\lambda-2}+\frac{x+2}{\lambda+2}=1$

γ) $\lambda(\psi-\lambda)-5(2\lambda-\psi)=-10-7\lambda$ δ) $(\lambda^2-1)\omega+5(3-\lambda)=8\omega$

ε) $\frac{\omega+\lambda}{\lambda+1}+\frac{\omega-\lambda}{\lambda-1}=\frac{2\omega}{\lambda^2-1}$

236) Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις, (α, β σταθερές):

α) $4(2x-\alpha-\beta)=\beta-\alpha$ β) $\psi(\alpha+2\beta)=(\alpha+6)(\psi+3)-10$.

γ) $(3\alpha+2)x-(5\beta-2)(x+1)=2x-1$

δ) $3(\beta-\omega)+2\omega(1-2\beta)=\beta(\omega-2)+\omega$

ε) $(x-\alpha)^2+5(2x-\beta)=(x+\alpha)^2+2$

237) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν λ, $\mu \in R$, ἡ ἐξίσωση

$$\frac{5\lambda\psi-5\mu}{4}+4=\frac{3\lambda-3\mu\psi}{4}+8\psi$$

εἶναι ταυτότητα;

238) Νὰ ὁρίσετε τὸν $\lambda \in R$ στὴν $\dfrac{\omega(5\lambda+3)}{15}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2(\omega+1)}{3}+\dfrac{1}{5}$, γιὰ νὰ ἀδύνατη ἐξίσωση.

239) Νὰ δείξετε ὅτι κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $A(x)\cdot\Gamma(x)=B(x)\cdot\Gamma(x)$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὸ σύνολο τῶν ἐξισώσεων: $A(x)=B(x)$, $\Gamma(x)=0$.

240) Νὰ δείξετε ὅτι κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $[A(x)]^2=[B(x)]^2$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὸ σύνολο τῶν ἐξισώσεων: $A(x)=B(x)$, $A(x)=-B(x)$.

241) Νὰ λυθοῦν στὸ R οἱ ἐξισώσεις:

α) $(3x-5)(x+3)(2x+1)=0$ β) $(3x-5)(x+3)(x^2-81)=0$

γ) $(x^2-9)(2x+7)(x^2+1)=0$ δ) $(2x+3)(x^2-1)=(x+1)(x^2-1)$

ε) $(\psi-2)^2=(1-2\psi)^2$ στ) $4\psi^2-4\psi+1=9$

ζ) $5(\psi^2-2\psi+1)=4(\psi^2-1)$ η) $3\omega^2+13\omega=0$

θ) $7\omega^2-35\omega=0$ ι) $5\omega^2-125=0$

ια) $2\omega^2+8=0$ ιβ) $\omega^3-4\omega=0$

242) Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις στὸ R:

α) $x^2-6x+9=0$ β) $3x^2+4x-4=0$

γ) $x^3-x^2-x+1=0$ δ) $(x-3)(2x+1)^2-(x^2-9)(x+3)=0$

ε) $(x^2-4)^2-(x+2)^2(5x-4)=0$ στ) $(3\omega^2+2\omega-9)^2=(\omega^2+2\omega+9)^2$

243) Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις στὸ R:

α) $\dfrac{3x-2}{x+1}=\dfrac{6x-1}{2x+3}$ β) $\dfrac{2}{x+5}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x-3}{(x+5)(x+2)}$

γ) $\dfrac{13}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{5x-3}{x^2-1}$ δ) $\dfrac{4}{\psi+2}+\dfrac{1}{\psi-2}=\dfrac{\psi}{\psi^2-4}$

ε) $\dfrac{2}{\omega(\omega+2)}=\dfrac{-1}{\omega^2+5\omega+6}$ στ) $\dfrac{1}{x^2+4x+4}=\dfrac{2}{x+2}$

244) Νὰ λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις στὸ R (α, β, σταθερές):

α) $\dfrac{\psi+\alpha}{\psi+\beta}=\dfrac{\psi-2\alpha}{\psi+3\beta}$ β) $\dfrac{\alpha+2\beta}{\omega+3}=\dfrac{\alpha+6}{\omega}-\dfrac{10}{\omega^2+3\omega}$

γ) $\dfrac{1}{\psi-\alpha}-\dfrac{1}{\psi-\beta}=\dfrac{\alpha-\beta}{\psi^2-\alpha\beta}$

245) Νὰ λυθοῦν στὸ R οἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{5x}{x^2-16}+\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{3}{x+4}=0$ β) $\dfrac{\psi-3}{\psi-5}+\dfrac{\psi-9}{\psi-11}=\dfrac{\psi-7}{\psi-9}+\dfrac{\psi-5}{\psi-7}$

γ) $\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{2x+1}{x^2+5x+6}=\dfrac{1}{x+2}$ δ) $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2+2x}=\dfrac{2x-1}{x(x+2)}$

246) Νὰ προσδιορίσετε τὸν λ, γιὰ νὰ εἰναι τέλεια ἡ διαίρεση τοῦ $\varphi(x)=x^4+(\lambda-1)x^3-(3\lambda-5)x-\lambda+1$ διὰ τοῦ $x+1$. Νὰ λυθεῖ κατόπι ἡ ἐξίσωση $\varphi(x)=0$.

64. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΟΥ ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΙ ΜΕ ΜΙΑ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.

α) Ἡ Ἄλγεβρα μᾶς δίνει ἕνα γενικὸ τρόπο γιὰ τὴ λύση προβλημάτων μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἐξισώσεων. Ἂν σ' ἕνα πρόβλημα ἡ σχέση, ποὺ συνδέει τὰ «δεδομένα» μὲ τὸ «ζητούμενο» (τὸν ἄγνωστο ἢ τοὺς ἀγνώστους) καὶ ἡ ὁποία καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, πάρει τὴ μορφὴ ἐξισώσεως, ἡ λύση της δίνει καὶ τὴ λύση τοῦ προβλήματος. Καλύτερα θὰ ἀντιληφθοῦμε τὸν τρόπο ἐργασίας ἀπὸ τὴ λύση τῶν ἑπόμενων προβλημάτων.

Πρόβλημα 1ο. Ἂν οἱ μαθητὲς μιᾶς τάξεως Γυμνασίου τοποθετηθοῦν ἀνὰ 3 σὲ κάθε θρανίο, θὰ μείνουν ὄρθιοι 5 μαθητές. Ἂν ὅμως τοποθετηθοῦν ἀνὰ 4, τότε χρειάζονται ἀκόμη 19 μαθητές, γιὰ νὰ συμπληρώσουν ὅλα τὰ θρανία. Πόσα εἶναι τὰ θρανία καὶ πόσοι οἱ μαθητές;

Ἡ λύση τοῦ προβλήματος μὲ τὴν Ἄλγεβρα γίνεται σὲ 4 φάσεις.

α) Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου. Στὸ πρόβλημά μας εἶναι ἄγνωστος ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν κι ὁ ἀριθμὸς τῶν θρανίων. Ἂς ὑποτεθεῖ ὅτι χ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν. Ἐπειδὴ μένουν 5 ὄρθιοι, ὅταν καθήσουν ἀνὰ τρεῖς σὲ κάθε θρανίο, ἕπεται ὅτι στὰ θρανία τοποθετήθηκαν $\chi - 5$ μαθητὲς καὶ τὰ θρανία θὰ εἶναι $\frac{x-5}{3}$. Ἐπειδή, ὅταν καθήσουν ἀνὰ 4 σὲ κάθε θρανίο, μένουν κενὲς 19 θέσεις, ὅλες οἱ θέσεις τῶν θρανίων μποροῦν νὰ συμπληρωθοῦν μὲ $\chi + 19$ μαθητὲς καὶ τὰ θρανία θὰ εἶναι $\frac{x+19}{4}$.

β) Κατάστρωση τῆς ἐξισώσεως. Ὁ ἀριθμὸς τῶν θρανίων μένει ὁ ἴδιος εἴτε καθήσουν οἱ μαθητὲς ἀνὰ 3 εἴτε καθήσουν ἀνὰ 4, συνεπῶς ἔχουμε:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{x+19}{4} \qquad (1)$$

Ἡ (1) ἀποτελεῖ τὴν ἐξίσωση τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος χ εἶναι ἀριθμὸς μαθητῶν, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος, δηλ. $\chi \in \mathrm{N}$. Λέμε λοιπὸν ὅτι ὁ ἄγνωστος τῆς ἐξισώσεως (1) **«ὑπόκειται στὸν περιορισμὸ $x \in \mathrm{N}$».** (2)

γ) Λύση τῆς ἐξισώσεως. Ἀπὸ τὴν (1) κατὰ τὰ γνωστὰ ἔχουμε:

$(1) \Leftrightarrow 4(\chi - 5) = 3(\chi + 19) \Leftrightarrow 4\chi - 20 = 3\chi + 57 \Leftrightarrow \chi = 77$ μαθητές.

δ) Διερεύνηση τῆς λύσεως. Ἡ λύση $\chi = 77$ μαθητὲς ἐκπληρώνει τὸν περιορισμὸ (2). Τὰ θρανία εἶναι $(77 - 5) : 3 = 24$. Ἂν τοποθετηθοῦν ἀνὰ 4 σὲ κάθε θρανίο, τότε χρειάζονται, γιὰ νὰ συμπληρωθοῦν ὅλα τὰ θρανία, $24 \times 4 = 96$ μαθητές, δηλ. $96 - 77 = 19$ ἀκόμα μαθητές.

Ἄλλη λύση τοῦ ἴδιου προβλήματος. 1. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ψ εἶναι τὰ θρανία. Ὅταν τοποθετηθοῦν σ' αὐτὰ ἀνὰ 3 οἱ μαθητές, θὰ καθήσουν 3ψ μαθητὲς καὶ μένουν ὄρθιοι 5, δηλ. οἱ μαθητὲς εἶναι $3\psi + 5$. Ὅταν καθήσουν ἀνὰ 4 σὲ κάθε θρανίο, λείπουν 19 γιὰ νὰ συμπληρωθοῦν τὰ θρανία, δηλ. οἱ μαθητὲς εἶναι $4\psi - 19$.

2. Ἡ ἐξίσωση εἶναι: $3\psi + 5 = 4\psi - 19$ μὲ $\psi \in N$.

3. Ἔχουμε: $3\psi + 5 = 4\psi - 19 \Leftrightarrow 3\psi - 4\psi = -5 - 19 \Leftrightarrow \psi = 24$ θρανία.

4. Ἀφοῦ τὰ θρανία εἶναι 24, οἱ μαθητὲς εἶναι $24 \times 3 + 5 = 77$. Ἡ λύση εἶναι παραδεκτή.

Πρόβλημα 2ο. Ὁ εἰσπράκτορας ἑνὸς λεωφορείου διέθεσε σὲ μιὰ διαδρομὴ 33 εἰσιτήρια τῶν 2, τῶν 3 καὶ τῶν 5 δραχμῶν καὶ εἰσέπραξε συνολικὰ 117 δραχμές. Τὰ δίδραχμα εἰσιτήρια ἦταν διπλάσια ἀπὸ τὰ τρίδραχμα. Νὰ βρεθεῖ πόσα ἀπὸ κάθε εἶδος εἰσιτήρια διέθεσε.

1. Ἐκλέγουμε ὡς ἄγνωστο χ τὸν ἀριθμὸ τῶν εἰσιτηρίων τῶν τριῶν δραχμῶν. Ἀφοῦ τὰ τρίδραχμα εἶναι χ, τὰ δίδραχμα εἰσιτήρια, σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι 2χ. Ἐπειδὴ ὅλα τὰ εἰσιτήρια εἶναι 33, τὰ πεντάδραχμα θὰ εἶναι: $33 - (\chi + 2\chi)$, δηλ. $33 - 3\chi$.

2. Γιὰ τὴν κατάστρωση τοῦ προβλήματος σκεπτόμαστε ἔτσι: Ἀπὸ τὰ χ τρίδραχμα εἰσέπραξε ὁ εἰσπράκτορας 3χ δραχμές, ἀπὸ δίδραχμα $2\cdot(2\chi)$ κι ἀπὸ τὰ πεντάδραχμα $5\cdot(33 - 3\chi)$. Ἀλλὰ συνολικὰ εἰσέπραξε 117 δραχμές. Ἔχουμε λοιπὸν τὴν ἐξίσωση:

$$3\chi + 2(2\chi) + 5(33 - 3\chi) = 117$$

3. Ἐπιλύοντας τὴν ἐξίσωση αὐτὴ παρατηροῦμε ὅτι ὁ χ πρέπει νὰ εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς ($\chi \in N$). Βρίσκουμε $\chi = 6$ τρίδραχμα, ἄρα $6\cdot 2 = 12$ εἶναι τὰ δίδραχμα καὶ $33 - (6 + 12) = 15$ τὰ πεντάδραχμα.

4. Ἡ λύση ποὺ βρήκαμε εἶναι παραδεκτή, γιατὶ εἶναι ὁ $\chi = 6$ φυσικὸς καὶ σὲ δραχμὲς ἀπὸ τὰ εἰσιτήρια ἔχουμε:

$$3\cdot 6 + 12\cdot 2 + 15\cdot 5 = 18 + 24 + 75 = 117.$$

Πρόβλημα 3ο. Ἕνας πατέρας 61 χρονῶν ἔχει τρία παιδιὰ 24, 21 καὶ 18 χρονῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα ἦταν ἢ θὰ εἶναι τριπλάσια ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν του;

1. Ὑποθέτουμε ὅτι τὸ ζητούμενο θὰ γίνει ὕστερ' ἀπὸ χ χρόνια ἀπὸ σήμερα. Οἱ ἡλικίες τους θὰ εἶναι τότε: $61 + \chi$, $24 + \chi$, $21 + \chi$, $18 + \chi$.

2. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν παιδιῶν εἶναι: $(24 + \chi) + (21 + \chi) + (18 + \chi)$, δηλ. $63 + 3\chi$. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος τὸ τριπλάσιο αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὴν ἡλικία τοῦ πατέρα, συνεπῶς προκύπτει ἡ ἐξίσωση:

$$3(63 + 3\chi) = 61 + \chi \qquad (1)$$

Στὴν (1) ὁ χ πρέπει νὰ βρίσκεται μέσα στὰ λογικὰ ὅρια τῆς ζωῆς τοῦ ἀνθρώπου. Ἂν ὁ χ εἶναι θετικός, τὸ ζητούμενο θὰ πραγματοποιηθεῖ στὸ μέλλον. Ἂν ὁ χ εἶναι μηδέν, τὸ ζητούμενο συμβαίνει τώρα. Ἂν ὅμως ὁ χ εἶναι ἀρνητικός, τὸ ζητούμενο ἔγινε πιὰ στὰ περασμένα κι εἶναι φανερὸ ὅτι σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση πρέπει νὰ εἶναι $18 + \chi \geq 0$, γιατὶ ἀλλιῶς δὲν θὰ εἶχε γεννηθεῖ τὸ τρίτο παιδί.

3. Ἀπὸ τὴν ἐπίλυση τῆς (1) βρίσκουμε $\chi = -16$. Ἔγινε λοιπὸν τὸ ζητούμενο στὸ παρελθόν, πρὶν ἀπὸ 16 χρόνια. Τότε ἦταν ὁ πατέρας 45 καὶ τὰ παιδιὰ 8, 5 καὶ 2 χρονῶν.

4. Ἡ λύση εἶναι παραδεκτή, γιατὶ ὁ $\chi = -16$ εἶναι μέσα σὲ λογικὰ ὅρια, ἐκπληρώνει τὸν περιορισμὸ $18 + \chi \geqq 0$ καὶ τέλος εἶναι:

$$3 \cdot (8 + 5 + 2) = 45.$$

Πρόβλημα 4ο. Ἂν ἀπὸ τὸ πενταπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσουμε τὸν 145, βρίσκουμε τὰ δύο τρίτα του αὐξημένα κατὰ 14. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

1. Ἔστω ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ χ.

2. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος ἔχουμε τὴν ἐξίσωση:

$$5\chi - 145 = \frac{2x}{3} + 14 \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ ὁ χ εἶναι ἕνας ἀριθμός, δὲν ὑπάρχει γι' αὐτὸν κανένας περιορισμός.

3. Ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε: $(1) \Leftrightarrow 15\chi - 435 = 2\chi + 42 \Leftrightarrow 13\chi = 477 \Leftrightarrow \chi = 36\frac{9}{13}$.

4. Ἡ λύση $\chi = 36\frac{9}{13}$ εἶναι παραδεκτὴ κι εὔκολα διαπιστώνουμε ὅτι ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

247) Ὁ ἀριθμητὴς ἑνὸς κλάσματος εἶναι κατὰ 7 πιὸ μικρὸς ἀπὸ τὸν παρονομαστή. Ἂν καὶ στοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος προστεθεῖ ὁ 13, προκύπτει κλάσμα ἴσο μὲ $\frac{2}{3}$. Νὰ βρεθεῖ τὸ κλάσμα αὐτό.

248) Νὰ βρεθεῖ ἕνας ἀριθμὸς ποὺ τὸ ἑπταπλάσιό του ἂν ἐλαττωθεῖ κατὰ τὸ μισό του νὰ δίνει τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ αὐξημένο κατὰ 22.

249) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ ἂν ἐλαττωθοῦν κατὰ 8, δίνουν τὸν ἀριθμὸ αὐτὸ αὐξημένο κατὰ 20;

250) Τρεῖς ἄνισοι ἀκέραιοι ἔχουν ἄθροισμα 308. Ὁ μεσαῖος εἶναι κατὰ 17 μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ μικρότερο καὶ κατὰ 10 μικρότερος ἀπὸ τὸ μεγαλύτερο. Ποιοὶ εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀκέραιοι;

251) Τρεῖς διαδοχικοὶ περιττοὶ ἔχουν ἄθροισμα 27. Νὰ τοὺς βρεῖτε.

252) Νὰ βρεῖτε τρεῖς διαδοχικοὺς ἀρτίους, ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 28.

253) Ἕνας γιὰ τὴν ἡλικία του εἶπε: «Ἂν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἡλικίας μου ἀφαιρεθεῖ τὸ ἕβδομό της, βρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 18». Πόσων χρονῶν εἶναι;

254) Ἕνας μαθητὴς ἔπρεπε νὰ πολλαπλασιάσει ἕναν ἀριθμὸ ἐπὶ 145, ἀλλὰ τὸν πολλαπλασίασε ἐπὶ τὸν 154 κι ἔτσι βρῆκε γινόμενο μεγαλύτερο κατὰ 2043. Ποιὸς ἦταν ὁ ἀριθμός;

255) Ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ τριπλάσιο ἑνὸς ἄλλου κατὰ 10. Ἂν αὐξήσουμε τὸ μικρότερο κατὰ 125 καὶ ἐλαττώσουμε τὸν ἄλλο κατὰ 35, τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἴσα. Ποιοὶ εἶναι αὐτοὶ οἱ ἀριθμοί;

256) Ἕνας πατέρας εἶναι 52 χρονῶν κι ἔχει δύο παιδιὰ ἡλικίας 15 καὶ 21 χρονῶν. Ὕστερ' ἀπὸ πόσα χρόνια ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν τῶν δύο παιδιῶν του;

257) Ἕνας ἀριθμὸς σχηματίζεται ἀπὸ δύο διαδοχικὰ ψηφία κι εἶναι μικρότερος κατὰ 2 μονάδες ἀπὸ τὸ ἑξαπλάσιο τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του. Νὰ βρεῖτε αὐτὸ τὸν ἀριθμό.

258) Ἕνα ἐργοστάσιο ἀπασχολεῖ 18 ἐργάτες καὶ 13 ἐργάτριες καὶ πληρώνει γιὰ ὅλους σὲ μιὰν ἡμέρα 2161 δραχμές. Ἂν ὁ ἐργάτης παίρνει τὴν ἡμέρα 30,5 δραχμὲς περισσότερες ἀπὸ τὴν ἐργάτρια, νὰ βρεῖτε τὸ ἡμερομίσθιό τους.

259) Κάποιος ἀγόρασε αὐγὰ πρὸς 8 δρχ. τὰ δέκα. Ἐπειδὴ τοῦ ἔσπασαν 5, τὰ ὑπόλοιπα τὰ ἐπούλησε πρὸς 9 δραχμὲς τὰ 6 αὐγὰ κι ἔτσι μπόρεσε νὰ κερδίσει 70,9 δρχ. Πόσα αὐγὰ εἶχε ἀγοράσει;

260) Ἂν οἱ μαθητὲς μιᾶς τάξεως καθήσουν στὰ θρανία μιᾶς αἴθουσας ἀνὰ 5, μένουν ὄρθιοι 4. Ἂν ὅμως καθήσουν ἀνὰ 3, μένουν ὄρθιοι 24. Νὰ βρεῖτε τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν καὶ τῶν θρανίων.

261) Ἕνας ἐργάτης ἀνάλαβε νὰ ἐκτελέσει ἕνα ἔργο σὲ 63 ἡμέρες. Συμφώνησαν νὰ παίρνει 80 δρχ. γιὰ κάθε ἡμέρα ἐργασίας, ἀλλὰ νὰ πληρώνει 100 δρχ. γιὰ κάθε ἡμέρα, ποὺ δὲ θὰ ἐργαζόταν. Νὰ βρεῖτε πόσες ἡμέρες ἐργάστηκε στὶς ἑξῆς περιπτώσεις: α) ποὺ πῆρε 3060 δρχ., β) δὲν πῆρε τίποτε, καὶ γ) πλήρωσε καὶ 180 δρχ.

262) Τριώροφος πύραυλος ἔχει συνολικὸ βάρος 360 τόννους. Ὁ α' ὄροφος ἔχει τριπλάσιο βάρος ἀπὸ τὸ μεσαῖο, ὁ ὁποῖος εἶναι διπλάσιος στὸ βάρος ἀπὸ τὸν τρίτο. Νὰ βρεθεῖ τὸ βάρος κάθε ὀρόφου.

263) Ποσὸ 335 δραχμῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ 82 μεταλλικὰ κέρματα τῶν 2, τῶν 5 καὶ τῶν 10 δρχ. Τὰ πεντάδραχμα εἶναι κατὰ 2 περισσότερα ἀπὸ τὰ δεκάδραχμα. Νὰ βρεθεῖ πόσα εἶναι τὰ κέρματα ἀπὸ κάθε εἶδος.

264) Ἕνας κουρέας εἶπε σ' ἕναν πελάτη του, ποὺ ἤθελε νὰ τὸν πληρώσει: «τριπλασίασε τὰ ὅσα ἔχω καὶ θὰ σοῦ δώσω 81 δραχμές». Τὸ ἴδιο ἔγινε καὶ μὲ δεύτερο καὶ μὲ τρίτο πελάτη καὶ τότε δὲν ἀπόμεινε τίποτε στὸν κουρέα. Πόσα χρήματα εἶχε ὁ κουρέας ἀρχικά;

265) Δυὸ πόλεις βρίσκονται στὴν ὄχθη ἑνὸς πλωτοῦ ποταμοῦ, ποὺ τὰ νερά του κυλοῦν μὲ ταχύτητα 3 μιλ/ὡρ. Ἕνα ποταμόπλοιο, ποὺ ἐκτελεῖ τὴ συγκοινωνία ἀνάμεσα στὶς δυὸ αὐτὲς πόλεις, ἀναπλέει τὸν ποταμὸ σὲ 34 ὧρες καὶ τὸν κατεβαίνει, χωρὶς νὰ ἀλλάξει ταχύτητα, σὲ 22 ὧρες. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀπόσταση τῶν δύο πόλεων καὶ ἡ ταχύτητα τοῦ πλοίου.

266) Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν 190,8 χλμ. Ἀπὸ τὴν Α ἀναχωρεῖ γιὰ τὴ Β μιὰ ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 42,5 χλμ/ὡρ. καὶ τὴν ἴδια στιγμὴ ξεκινᾶ ἀπὸ τὴ Β ἀντίθετα μιὰ ἄλλη μὲ ταχύτητα 37 χλμ/ὡρ. Νὰ βρεῖτε σὲ πόσες ὧρες καὶ σὲ ποιὰ ἀπόσταση ἀπὸ τὴν Α θὰ συναντηθοῦν.

267) Ἕνα κεφάλαιο ποὺ τοκίζεται πρὸς 5% σὲ 3 χρόνια γίνεται μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 27600 δρχ. Ποιὸ εἶναι τὸ κεφάλαιο;

268) Κάποιος ἀπὸ τὸ ἐτήσιο εἰσόδημά του ἐξοικονόμησε καὶ κατέθεσε στὸ Ταμιευτήριον 36000 δρχ. Τὸν ἐπόμενο χρόνο ἐλάττωσε τὶς δαπάνες του κατὰ 10% κι αὔξησε τὸ εἰσόδημά του κατὰ 5%. Ἔτσι μπόρεσε νὰ καταθέσει 60.000 δρχ. Νὰ βρεῖτε τὸ ἀρχικὸ εἰσόδημά του.

269) Ἂν τὰ $\frac{3}{7}$ ἑνὸς κεφαλαίου τὰ τοκίσουμε πρὸς 5% καὶ τὸ ὑπόλοιπο πρὸς 4,5%, παίρνουμε σ' ἕνα χρόνο ἀπὸ τὸ β' μέρος 510 δραχμὲς τόκο περισσότερο ἀπὸ τὸν τόκο τοῦ πρώτου. Ποιὸ εἶναι τὸ κεφάλαιο αὐτό;

270) 117 χλγρ. ἁλμυροῦ νεροῦ περιέχουν 3,5 χλγρ. ἁλάτι. Πόσο καθαρὸ νερὸ πρέπει νὰ ρίξουμε σ' αὐτό, γιὰ νὰ γίνει ἡ περιεκτικότητά του σ' ἁλάτι 2,5%;

271) Ὁ πατέρας τῆς Ἀλγέβρας Διόφαντος ἔζησε τὸ ἕκτο τῆς ζωῆς του ὡς παιδί, τὸ δωδέκατό της ὡς νέος, τὸ ἕβδομό της ὕστερ' ἀπὸ τὸ γάμο του καὶ 5 χρόνια ἀκόμα, ὁπότε κι ἀπόκτησε ἕνα γιό, ὁ ὁποῖος ἔζησε τὰ μισὰ χρόνια ἀπὸ ὅσα ὁ πατέρας του, ἔζησε δὲ ἀκόμα 4 χρόνια ὕστερ' ἀπὸ τὸ θάνατο τοῦ γιοῦ του. Πόσα χρόνια ἔζησε ὁ Διόφαντος;

65. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ.

Α) Ἂς λάβουμε τὴν παράσταση $3x-5$, ὅπου x εἶναι κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός. Ἂν ἀντὶ x θέσουμε $\frac{5}{3}$, τότε ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $3x-5$ εἶναι ὁ 0. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα γνωρίζουμε ὅτι μόνο γιὰ $x = \frac{5}{3}$ ἰσχύει $3x-5=0$. Ἑπομένως, ἂν εἶναι $x \neq \frac{5}{3}$, θὰ εἶναι $3x-5 \neq 0$.

Ἂς θέσουμε τώρα στὴν ἴδια παράσταση ἀντὶ x πρῶτα τὸν 4 κι ἔπειτα τὸν $\frac{1}{3}$. Βρίσκουμε: 1ο) $3 \cdot 4 - 5 = 12 - 5 = 7$, δηλαδὴ ἀριθμὸ θετικὸ ($>0$) καὶ 2ο) $3 \cdot \frac{1}{3} - 5 = \frac{3}{3} - 5 = 1 - 5 = -4$, δηλαδὴ ἀριθμὸ ἀρνητικὸ (<0). Ὥστε ἄλλες τιμὲς τοῦ $x\left(\neq \frac{5}{3}\right)$ δίνουν τιμὴ θετικὴ (>0) στὴν παράσταση $3x-5$ καὶ ἄλλες ἀρνητικὴ (<0).

Τίθεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα:

Νὰ ὁρισθεῖ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶναι:

1ο) $3x-5>0$ καὶ 2ο) $3x-5<0$.

Καθεμιὰ ἀπὸ τὶς παραστάσεις $3x-5>0$ καὶ $3x-5<0$ λέγεται: **μιὰ ἀνίσωση πρώτου βαθμοῦ.** Μὲ τὸν ὅρο αὐτὸ ἐννοοῦμε γενικὰ κάθε παράσταση, ποὺ ἀνάγεται στὴ μορφὴ $\alpha x + \beta > 0$ εἴτε $\alpha x + \beta < 0$, ὅπου α, β γνωστοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ x ἄγνωστος πραγματικὸς ἀριθμὸς (ποὺ πρέπει νὰ ὁρισθεῖ).

Ἡ φράση **«νὰ λυθεῖ (ἢ νὰ ἐπιλυθεῖ) ἡ ἀνίσωση...»** σημαίνει «νὰ βρεθοῦν οἱ τιμὲς τοῦ ἀγνώστου, γιὰ τὶς ὁποῖες ἡ ἀνίσωση γίνεται ἀληθὴς (ἀριθμητικὴ) ἀνισότητα» ἤ, ὅπως λέμε ἀλλιῶς, ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωση.

Τὸ σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου, ποὺ ἐπαληθεύουν μιὰν ἀνίσωση, λέγεται **σύνολο λύσεων** τῆς ἀνισώσεως.

Δύο ἀνισώσεις λέγονται **ἰσοδύναμες,** ὅταν ἔχουν τὸ ἴδιο σύνολο λύσεων.

Β) Γενικὰ μιὰ ἀνίσωση πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕναν ἄγνωστο ἔχει τὴ μορφὴ $\varphi(x) > \sigma(x)$ ἢ $\varphi(x) < \sigma(x)$, ὅπου $\varphi(x)$, $\sigma(x)$ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα καὶ $\varphi(x) - \sigma(x)$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ.

Ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων μιᾶς ἀνισώσεως στηρίζεται στὶς παρακάτω προτάσεις. Γιὰ κάθε $x \in R$:

1η. $\varphi(x) > \sigma(x) \Leftrightarrow \varphi(x) - \sigma(x) > 0$

2η. $\varphi(x) > \sigma(x) \Leftrightarrow \varphi(x) + \pi(x) > \sigma(x) + \pi(x)$

ὅπου $\pi(x)$ ἀλγεβρικὴ παράσταση ὁρισμένη γιὰ τὴν τιμὴ τοῦ x, ποὺ θεωροῦμε.

3η. $\varphi(x) > \sigma(x) \Leftrightarrow \lambda\varphi(x) > \lambda\sigma(x), \quad \lambda \in R^+$

4η. $\varphi(x) > \sigma(x) \Leftrightarrow \mu\varphi(x) < \mu\sigma(x), \quad \mu \in R^-$

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ἰσοδυναμιῶν αὐτῶν εἶναι εὔκολες. Στηρίζονται στὶς ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.

(Νὰ γίνουν ἀπὸ τοὺς μαθητὲς μὲ τὴ βοήθεια τοῦ καθηγητῆ τους).

Οἱ ἰσοδυναμίες αὐτὲς μᾶς ἐπιτρέπουν:

α) Νὰ μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος τῆς ἀνισώσεως στὸ ἄλλο, ἀλλάζοντας τὸ πρόσημό του.

β) Νὰ ἐξαλείψουμε τοὺς παρονομαστὲς μιᾶς ἀνισώσεως πολλαπλασιάζοντας τὰ μέλη της ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.

γ) Νὰ ἀλλάξουμε τὰ πρόσημα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισώσεως, ἀλλάζοντας συγχρόνως τὸ $>$ μὲ τὸ $<$ (καὶ τὸ $<$ μὲ τὸ $>$).

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε λοιπὸν μιὰν ἀνίσωση πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕναν ἄγνωστο, μεταβαίνουμε διαδοχικὰ ἀπὸ τὴ δοσμένη ἀνίσωση σὲ ἰσοδύναμές της, ὥσπου νὰ καταλήξουμε στὴ $x > \alpha$ ἢ $x < \alpha$, ὅπου α δὲν περιέχει πιὰ τὸν ἄγνωστο x, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 1ο. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση $3x - 5 > 0$, $x \in R$.

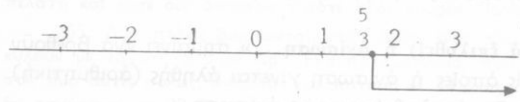
Ἔχουμε: $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$

Ὥστε ἡ ἀρχικὴ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ x, μὲ $x > \frac{5}{3}$ καὶ μόνο.

Μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τῶν συνόλων γράφουμε:

$$\{x \mid 3x - 5 > 0\} = \left\{x \mid x > \frac{5}{3}\right\} \qquad x \in R$$

Αὐτὸ συμβολίζουμε σχηματικὰ ὡς ἑξῆς:



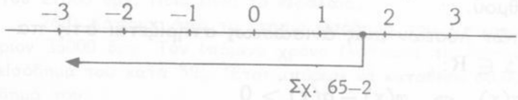
Σχ. 65–1

Παίρνουμε τὴν εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, σημειώνουμε ζωηρὰ τὸ σημεῖο $\frac{5^*}{3}$ καὶ ὑπογραμμίζουμε τὶς τιμές, γιὰ τὶς ὁποῖες ἐπαληθεύεται ἡ ἀνίσωση μὲ ἕνα βέλος, ὅπως βλέπετε στὸ Σχ. 65–1.

Παράδειγμα 2ο. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $3x - 5 < 0$.

Ἔχουμε: $3x - 5 < 0 \Leftrightarrow 3x < 5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{3}$

Δηλαδὴ αὐτὴ ἡ ἀνίσωση ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ x, μὲ $x < \frac{5}{3}$ καὶ μόνο. Σχηματικὰ τὸ συμπέρασμα παριστάνεται στὸ Σχ. 65–2.



Σχ. 65–2

Παρατήρηση: Ἐπειδὴ μᾶς ἦταν γνωστὸ ὅτι:

1ο) εἶναι $3x - 5 = 0$ μόνο γιὰ $x = \frac{5}{3}$

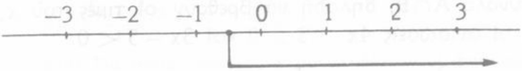
2ο) εἶναι $3x - 5 > 0$ μόνο γιὰ $x > \frac{5}{3}$

(*) Ἡ κουκίδα, ποὺ ἀντιπροσωπεύει τὸν $\frac{5}{3}$, εἶναι λευκὴ στὸ κέντρο της. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ $\frac{5}{3}$ δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο λύσεων τῆς ἀνισώσεως.

μπορούσαμε ἀμέσως νὰ συμπεράνουμε ὅτι ἡ ἀνίσωση $3x-5<0$ ἐπαληθεύεται μόνο γιὰ $x<\frac{5}{3}$.

Παράδειγμα 3ο. Νὰ ἐπιλυθεῖ ἡ ἀνίσωση: $-4x+3<5$.

Ἔχουμε: $-4x+3<5 \Leftrightarrow -4x<2 \Leftrightarrow 4x>-2 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

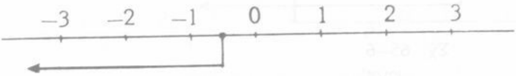


Σχ. 65–3

Σχηματικὰ τὸ συμπέρασμα παριστάνεται στὸ Σχ. 65–3.

Παράδειγμα 4ο. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $-4x+3>5$

Μὲ ὅμοια ἐργασία καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ποὺ ἐκφράζεται στὸ Σχ. 65–4.



Σχ. 65–4

Γενικὲς παρατηρήσεις:

1η) Μιὰ ἀνίσωση εἶναι ἐνδεχόμενο νὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε πραγματικὸ ἀριθμό. Π.χ. ἡ $0x+10>0$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε $x \in R$ (γιατί);

2η) Μπορεῖ νὰ μὴν ὑπάρχει κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός, ποὺ νὰ ἐπαληθεύει τὴν ἀνίσωση. Π.χ. τὴν $0x-8>0$ κανεὶς $x \in R$ δὲν τὴν ἐπαληθεύει (γιατί;)

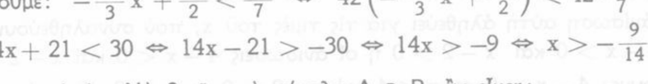
Παράδειγμα 5ο. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}<\frac{5}{7}$.

Ἔχουμε: $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}<\frac{5}{7} \Leftrightarrow 42\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\right)<42\cdot\frac{5}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -14x+21<30 \Leftrightarrow 14x-21>-30 \Leftrightarrow 14x>-9 \Leftrightarrow x>-\frac{9}{14}$.

Ἐφαρμογὴ 1η. Νὰ βρεῖτε τὸ σύνολο $A \cap B$, ἂν εἶναι:
$A=\{x/x$ ἀκέραιος καὶ $x<3\}$ καὶ $B=\{x/x$ ἀκέραιος καὶ $x>-3\}$.

Λύση. Πάνω στὴν εὐθεία τῶν σχετικῶν ἀκεραίων σημειώνουμε ζωηρὰ τὰ σημεῖα, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου A καὶ ὑπογραμμίζουμε μὲ βέλος (Σχ. 65–5).



Σχ. 65–5

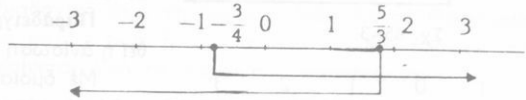
Ἐπίσης μὲ ἕνα ἄλλο βέλος ὑπογραμμίζουμε τὰ σημεῖα, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου B.

Ὅπως βλέπουμε στὸ Σχ. 65–5 εἶναι: $A=\{2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$
$B=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $A \cap B=\{-2, -1, 1, 0, 1, 2\}$

Εἶναι φανερὸ ὅτι $A \cap B$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ x, γιὰ τὶς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις: $x < 3$ καὶ $x > -3$, καὶ x ἀκέραιος πραγματικὸς ἀριθμός.

Ὥστε $A \cap B = \{x \mid x \in Z$ καὶ $-3 < x < 3\}$, ὅπου $Z =$ τὸ σύνολο τῶν σχετικῶν ἀκεραίων.

Ἐφαρμογὴ 2η. Θεωροῦμε τὰ σύνολα: $A = \{x \mid 3x - 5 < 0\}$, $B = \{x \mid 4x + 3 > 0\}$. Νὰ ὁρισθεῖ τὸ σύνολο $A \cap B$, δηλαδὴ νὰ βρεθοῦν οἱ τιμὲς τοῦ x, γιὰ τὶς ὁποῖες συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις $4x + 3 > 0$ καὶ $3x - 5 < 0$.



Σχ. 65–6

Λύση. Ἔχουμε: $A = \{x \mid 3x - 5 < 0\} = \{x \mid 3x < 5\} = \left\{x \mid x < \frac{5}{3}\right\}$.

Ἐπίσης $B = \{x \mid 4x + 3 > 0\} = \{x \mid 4x > -3\} = \left\{x \mid x > -\frac{3}{4}\right\}$.

Ὅπως εἶναι φανερὸ ἀπὸ τὸ σχῆμα 65–6 εἶναι:

$$A \cap B = \left\{x \mid x \in R \text{ καὶ } -\frac{3}{4} < x < \frac{5}{3}\right\}.$$

Μὲ ἄλλες λέξεις οἱ ἀνισώσεις $3x - 5 < 0$ καὶ $4x + 3 > 0$ συναληθεύουν γιὰ τὶς τιμὲς τοῦ x, ποὺ περιέχονται μεταξὺ $-\frac{3}{4}$ καὶ $+\frac{5}{3}$.

Ἐφαρμογὴ 3η. Νὰ λυθεῖ ἡ ἀνίσωση $\frac{4-x}{x-2} > 0$, $x \in R$.

Ἡ ἀνίσωση αὐτὴ ἀληθεύει γιὰ τὶς τιμὲς τοῦ x, ποὺ συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις $4 - x > 0$ καὶ $x - 2 > 0$ ἢ οἱ ἀνισώσεις $4 - x < 0$ καὶ $x - 2 < 0$.

Ἔχουμε: $4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ καὶ $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$. Ἑπομένως οἱ δύο πρῶτες ἀνισώσεις συναληθεύουν ὅταν $2 < x < 4$.

Γιὰ τὶς δύο ἀνισώσεις $4 - x < 0$ καὶ $x - 2 < 0$ ἔχουμε: $4 - x < 0 \Leftrightarrow x > 4$ καὶ $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Ἑπομένως οἱ ἀνισώσεις αὐτὲς δὲν συναληθεύουν γιὰ καμιὰ τιμὴ τοῦ x. Ἄρα ἡ ἀρχικὴ ἀνίσωση ἀληθεύει, ὅταν $2 < x < 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

272) Νὰ λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις:

α) $7x - 12 < x - 18$ β) $4 - 2x < -9 - 5x$

γ) $2(x-1) + 3(2x+4) - 7 < 5(2x-1) - (x-3)$

δ) $(x+5)^2 - 2(3x-6) > (x-3)^2 - 3(2x+5)$

ε) $\frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3} > x - \frac{x-1}{2}$ στ) $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 < \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{15}\right)$

ζ) $27x - 5(2x-5) < 6(3x-5) - 5(1-2x) - 2$

η) $\frac{2(3x-5)}{3} - \frac{5(5x+10)}{12} < 3(3x+2) - 71$

θ) $(\psi+2)^2-3(\psi-5)<\psi(\psi+1)+20$

ι) $(2\omega-3)(\omega+2)-4(1+\omega)>\omega(2\omega+1)-2(2\omega+5)$

ια) $(z-1)^2+(z-3)^2+(z-5)^2<3(z+15)(z-7)$

273) Νὰ λυθοῦν οἱ ἀνισώσεις (παράμετρος λ):

α) $\lambda x-3<2x+7$ β) $(x+\lambda)^2-(x-\lambda)^2>4\lambda$

γ) $(x+1)^3-2x(x-4)-\lambda x>(x+1)(x^2-1)+7$

δ) $\dfrac{(5\lambda+3)x}{15}-\dfrac{1}{5}<\dfrac{2(x+1)-1}{3}$

274) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ x συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $3x-1<x+5$, β) $2(x-5)>x-15$, γ) $(x+1)^2>x(x+1)+1$

275) Γιὰ ποιὲς ἀκέραιες τιμὲς τοῦ x συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{x-5}{2}<\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{x+1}{9}$ καὶ β) $\dfrac{3x-14}{12}+\dfrac{3x-2}{4}>\dfrac{2(x-1)}{3}$

276) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ ψ συναληθεύουν οἱ ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{(\psi+3)(\psi-2)}{10}-\dfrac{(\psi+2)(\psi-1)}{14}<\dfrac{(\psi-3)(\psi+2)+4}{35}$ καὶ

β) $\dfrac{\psi-1}{5}+\dfrac{2\psi+3}{10}>\dfrac{3}{4}\cdot\left(\psi-\dfrac{\psi+4}{2}\right)+\dfrac{3\psi-4}{8}$

277) Νὰ λύσετε τὶς ἀνισώσεις:

α) $\dfrac{x-3}{x-7}>0$ β) $\dfrac{2\psi-3}{\psi-4}>0$ γ) $\dfrac{2\psi+5}{\psi-1}<0$

δ) $\dfrac{\psi-2}{\psi-3}-1<0$ ε) $\dfrac{2x+3}{x+2}>1$ στ) $\dfrac{x+1}{2x-3}<\dfrac{1}{2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

66. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

Α) Σύστημα δύο ἐξισώσεων. Ἄς θεωρήσουμε δύο ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους τίς: $\varphi(x, \psi) = 0$ καὶ $\sigma(x, \psi) = 0$ καὶ ὅτι τὸ σύνολο λύσεων τῆς πρώτης εἶναι τὸ Α καὶ τῆς δεύτερης τὸ Β. Προκύπτει τὸ ζήτημα: Ὑπάρχουν ζεύγη (x, y), τὰ ὁποῖα νὰ ἐπαληθεύουν συγχρόνως καὶ τὶς δύο αὐτὲς ἐξισώσεις; Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ σύνολο αὐτῶν τῶν ζευγῶν εἶναι τὸ $A \cap B$.

Τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων: $[\varphi(x, \psi) = 0,\ \sigma(x, \psi) = 0]$ (Σ), τῶν ὁποίων ζητοῦμε κοινὴ λύση, ὀνομάζεται **ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.**

Τὸ πρόβλημα, ποὺ παρουσιάζεται λοιπὸν τώρα, εἶναι:

Νὰ βρεθεῖ τὸ σύνολο τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (Σ).

Γιὰ κάθε ζεῦγος $(\lambda, \rho) \in A \cap B$ θὰ συμβαίνει: $\varphi(\lambda, \rho) = 0$ καὶ $\sigma(\lambda, \rho) = 0$, συνεπῶς τὸ ζεῦγος αὐτὸ (λ, ρ) θὰ εἶναι μία λύση τοῦ (Σ).

Ἡ εὕρεση τοῦ συνόλου τῶν λύσεων ὀνομάζεται : ἡ ἐπίλυση τοῦ συστήματος.

Β) Ἰσοδυναμία συστημάτων. Δύο συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὶς ἴδιες λύσεις, δηλ. κάθε λύση τοῦ πρώτου εἶναι λύση καὶ τοῦ δεύτερου καὶ ἀντίστροφα.

Ἔστω τὸ σύστημα (Σ) μὲ ἐξισώσεις:

$$\varphi(x, \psi) = 0 \quad (1)$$
$$\sigma(x, \psi) = 0 \quad (2)$$

Ἂν k, λ εἶναι δύο σταθερές, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἡ μία τουλάχιστο, λ.χ. ἡ k εἶναι $\neq 0$, τότε **ἡ ἐξίσωση $k\varphi(x, \psi) + \lambda\sigma(x, \psi) = 0$ (3) λέγεται ἕνας γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν (1) καὶ (2).**

Ἰσχύει τὸ ἀκόλουθο χρήσιμο θεώρημα.

Θεώρημα. Ἂν σ' ἕνα σύστημα (Σ) ἀντικατασταθεῖ μιά του ἐξίσωση μὲ ἕνα γραμμικὸ συνδυασμὸ τῶν ἐξισώσεών του, προκύπτει ἰσοδύναμο σύστημα.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τὸ σύστημα $\left.\begin{matrix}\varphi = 0\\ \sigma = 0\end{matrix}\right\}$ (Σ) καὶ τὸ $\left.\begin{matrix}k\varphi + \lambda\cdot\sigma = 0\\ \sigma = 0\end{matrix}\right\}$ (Σ')

Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε λύση (x_0, ψ_0) τοῦ (Σ) εἶναι καὶ λύση τοῦ (Σ'). Ἀντίστροφα. Κάθε λύση (x'_0, ψ'_0) τοῦ (Σ') θὰ ἐπαληθεύει τὴν $k\varphi + \lambda\sigma = 0$ κι ἐπειδὴ εἶναι $\sigma = 0$, θὰ ἔχουμε καὶ $k\varphi = 0$. Ἀλλὰ ὑποθέσαμε $k \neq 0$, ἄρα εἶναι $\varphi = 0$, δηλ. τὸ ζεῦγος (x'_0, ψ'_0) ἐπαληθεύει τὶς ἐξισώσεις $\varphi = 0$, $\sigma = 0$, συνεπῶς εἶναι λύση τοῦ συστήματος (Σ).

Γ) Ἐπίλυση πρωτοβάθμιων συστημάτων δύο ἀγνώστων.

Ἂν εἶναι $\varphi(x, \psi) = \alpha x + \beta\psi + \gamma$ καὶ $\sigma(x, \psi) = \alpha' x + \beta'\psi + \gamma'$

τὸ σύστημα: $$\boxed{\left.\begin{aligned} \alpha x + \beta\psi + \gamma &= 0 \\ \alpha' x + \beta'\psi + \gamma' &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}} \quad (A)$$

εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ συστήματος δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

Τὸ σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι τό:

$$\Sigma = \{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in R \times R \text{ καὶ } \alpha x + \beta\psi + \gamma = 0\}$$

Τὸ σύνολο τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι τό:

$$T = \{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in R \times R \text{ καὶ } \alpha' x + \beta'\psi + \gamma' = 0\}$$

Ἐπίλυση τοῦ (A) εἶναι ὁ προσδιορισμὸς τοῦ συνόλου $\Sigma \cap T$. Ὁ προσδιορισμὸς αὐτὸς εἶναι δυνατὸ νὰ γίνει καὶ **γραφικά,** γιατὶ κάθε ἐξίσωση τοῦ (A) παριστάνεται, ὅπως εἶναι γνωστό, μὲ μιὰ εὐθεία γραμμὴ σ' ἕνα σύστημα ἀξόνων $xO\psi$. Πρὶν ἀπὸ τὴ γραφικὴ λύση θὰ ἐξετάσουμε **ὑπολογιστικοὺς τρόπους** γιὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς συστήματος, ὅπως τὸ (A).

I. Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.

Παράδειγμα. Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $$\left.\begin{aligned} x - 2\psi + 17 &= 0 \\ 3x + \psi + 16 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix} \quad (A)$$

Ἐπειδὴ $x - 2\psi + 17 = 0 \Leftrightarrow x = 2\psi - 17$, ἀντὶ τοῦ συστήματος (A) ἂς πάρουμε τό: $$\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ 3x + \psi + 16 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1')\\(2)\end{matrix} \quad (B)$$

Παρατηροῦμε, ὅτι κάθε λύση τοῦ (A) εἶναι καὶ τοῦ (B), ἐπειδὴ ἡ (1) τοῦ (A) ἔχει ἀντικατασταθεῖ μὲ τὴν ἰσοδύναμή της (1') στὸ B. Ἀλλὰ καὶ κάθε λύση τοῦ (B) γίνεται ἀμέσως φανερὸ ὅτι εἶναι καὶ τοῦ (A), γιατὶ ἡ (2) εἶναι ἡ ἴδια στὰ δύο συστήματα καὶ ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν (1').

Στὸ (B) μποροῦμε τὴν ἔκφραση τοῦ **x** ἀπὸ τὴν (1') νὰ θέσουμε ἀντὶ **x** στὴ (2), δηλ. νὰ ἔχουμε τὸ ἰσοδύναμο πρὸς τὸ (B) σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ 3(2\psi - 17) + \psi + 16 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(1')\\(2')\end{matrix} \quad (\Gamma)$$

Στὸ σύστημα ὅμως (Γ) ἡ ἐξίσωση (2′) εἶναι ἐξίσωση α′ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστο κι ἑπομένως κατὰ τὰ γνωστὰ μπορεῖ νὰ ἐπιλυθεῖ.

Εἶναι: $(2') \Leftrightarrow 6\psi - 51 + \psi + 16 = 0 \Leftrightarrow 7\psi = 35 \Leftrightarrow \psi = 5$

Ἄρα τὸ (Γ) εἶναι ἰσοδύναμο πρὸς τό: $\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \quad (1') \\ \psi &= 5 \quad (2'') \end{aligned}\right\} \quad (\Delta)$

Τὸ (Δ) ὅμως εἶναι ἰσοδύναμο πρὸς τό: $\left.\begin{aligned} x &= 2\cdot 5 - 17 \quad (1'') \\ \psi &= 5 \quad (2'') \end{aligned}\right\} \quad (E)$

δηλ. μὲ τό: $\boxed{\left.\begin{aligned} x &= -7 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\} \quad (Z)}$

Εἶναι λοιπὸν τὸ (Α) ἰσοδύναμο πρὸς τὸ (Ζ), ἄρα ἔχει λύση τὴ μοναδική: $x = -7$, $\psi = 5$, δηλ. τὸ ζεῦγος $(-7, 5)$.

Ὥστε: Γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους **μὲ τὴ μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως:**

1) Λύνουμε τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὸν ἕναν ἄγνωστο λ.χ. ὡς πρὸς x (δηλ. ἐκφράζουμε τὸ x ὡς συνάρτηση τοῦ ψ).

2) Ἀντικαθιστοῦμε στὴν ἄλλη ἐξίσωση τοῦ συστήματος τὸν x μὲ τὴν ἔκφραση, ποὺ βρήκαμε, καὶ λύνουμε τὴν ἐξίσωση ποὺ προκύπτει, ὁπότε βρίσκουμε τὸν ἄγνωστο ψ.

3) Τὴν τιμὴ αὐτὴ τοῦ ψ ἀντικαθιστοῦμε στὴν ἔκφραση τοῦ x, ποὺ βρέθηκε στὸ 1ο βῆμα τῆς ἐργασίας αὐτῆς, καὶ κατόπιν ὑπολογίζουμε τὴν τιμὴ τοῦ x.

Τὸν τρόπο αὐτὸ τῆς ἐργασίας γιὰ τὴ λύση ἑνὸς συστήματος ὀνομάζουμε καὶ **μέθοδο ἀπαλοιφῆς μὲ τὴν ἀντικατάσταση.**

II. Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.

Παράδειγμα : Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα : $\left.\begin{aligned} x - 2\psi + 17 &= 0 \quad (1) \\ 3x + \psi + 16 &= 0 \quad (2) \end{aligned}\right\} \quad (A)$

Ἐπειδὴ εἶναι: $x - 2\psi + 17 = 0 \Leftrightarrow x = 2\psi - 17$ καὶ $3x + \psi + 16 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\psi + 16}{3}$ ἀντὶ γιὰ τὸ (Α) παίρνουμε τὸ ἰσοδύναμό του σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \quad (1') \\ x &= -\frac{\psi + 16}{3} \quad (2') \end{aligned}\right| \quad (B)$$

Στὸ σύστημα (Β) ὁ ἄγνωστος x ἐκφράζεται καὶ στὶς δύο ἐξισώσεις ὡς συνάρτηση τοῦ ψ. Ἂν θεωρήσουμε τὴν ἐξίσωση: $2\psi - 17 = -\dfrac{\psi + 16}{3}$ (2″), συμπεραίνουμε ὅτι εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἐξίσωση (2′), γιατὶ οἱ ἐκφράσεις $2\psi - 17$ καὶ x εἶναι ἀπὸ τὴν (1′) ἰσοδύναμες. Ἀλλὰ τότε τὸ Β εἶναι ἰσοδύναμο πρὸς τὸ σύστημα: $\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ 2\psi - 17 &= -\frac{\psi+16}{3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1') \\ &(2'') \end{aligned} \quad (\Gamma)$

Ἐπειδὴ $(2'') \Leftrightarrow 6\psi - 51 = -\psi - 16 \Leftrightarrow 7\psi = 35 \Leftrightarrow \psi = 5$, τὸ (Γ) εἶναι

ἰσοδύναμο πρὸς τὸ σύστημα: $\left.\begin{aligned} x &= 2\psi - 17 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1') \\ &(2''') \end{aligned} \quad (\Delta)$

Στὴν (1′) τοῦ (Δ) ἀντικαθιστοῦμε τὸ ψ μὲ τὴν τιμή του 5 ἀπὸ τὴ (2‴)

κι ἔτσι ἔχουμε τὸ σύστημα: $\left.\begin{aligned} x &= 2\cdot 5 - 17 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\}$ (Ε) δηλ. τὸ $\left.\begin{aligned} x &= -7 \\ \psi &= 5 \end{aligned}\right\}$ (Ζ)

Ὥστε ἡ λύση τοῦ (Α) εἶναι ἡ (−7, 5).

Στὴ γλώσσα τῶν συνόλων μποροῦμε νὰ γράψουμε:

$$\left\{ (x,\psi) \mid (x,\psi) \in R \times R \text{ καὶ } \left.\begin{aligned} x - 2\psi + 17 &= 0 \\ 3x + \psi + 16 &= 0 \end{aligned}\right\} \right\} = \{(-7,5)\}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω καταλήγουμε ὅτι, γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους μὲ **τὴ μέθοδο τῆς συγκρίσεως:**

1) Λύνουμε καὶ τὶς δύο ἐξισώσεις ὡς πρὸς τὸν ἴδιο ἄγνωστο, λ.χ. τὸν x.

2) Ἐξισώνουμε τὶς δύο ἐκφράσεις τοῦ x, ὁπότε προκύπτει μιὰ ἐξίσωση μὲ ἕναν ἄγνωστο, τὸν ψ καὶ 3) λύνουμε τὴν ἐξίσωση αὐτὴ καὶ βρίσκουμε τὸν ψ. Ἔπειτα προσδιορίζουμε τὸν x ἀπὸ τὴ μιὰ ἀπὸ τὶς ἐκφράσεις του.

III. Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

Παραδείγματα: 1ο) Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα: $\left.\begin{aligned} x - 2\psi + 17 &= 0 \\ 3x + \psi + 16 &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned} \quad (A)$

Τὸ σύστημα (Α) θ' ἀντικαταστήσουμε μὲ ἕνα ἰσοδύναμό του (Β), στὸ ὁποῖο ἡ μιὰ ἐξίσωση νὰ εἶναι ἡ (1) ἢ ἡ (2) κι ἡ ἄλλη ἕνας γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν (1) καὶ (2), σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα (§ 66, Β), δηλ. ἡ ἐξίσωση:

$$k(x - 2\psi + 17) + \lambda(3x + \psi + 16) = 0 \qquad (3)$$

Μποροῦμε στὴν (3) νὰ ἐκλέξουμε τοὺς ἀριθμοὺς k καὶ λ, ἔτσι, ὥστε νὰ γίνει μηδὲν ὁ συντελεστὴς εἴτε τοῦ x εἴτε τοῦ ψ. Λ.χ. ἂν στὴν (3) θέσουμε $k = -3$ (δηλ. ὁ ἀντίθετος τοῦ συντελεστῆ τοῦ x στὴ 2η ἐξίσωση) καὶ $\lambda = 1$ (δηλ. ὁ συντελεστὴς τοῦ x στὴν 1η ἐξίσωση), τότε ἡ (3) γίνεται:

$$-3(x - 2\psi + 17) + (3x + \psi + 16) = 0 \Leftrightarrow 7\psi - 35 = 0 \Leftrightarrow \psi = 5$$

Ἂν στὴν (3) θέσουμε $\lambda = 2$ (ὁ ἀντίθετος τοῦ συντελεστῆ τοῦ ψ στὴν α' ἐξίσωση) καὶ $k = 1$ (ὁ συντελεστὴς τοῦ ψ στὴ δεύτερη), ἔχουμε:

$$(x - 2\psi + 17) + 2(3x + \psi + 16) = 0 \Leftrightarrow 7x + 49 = 0 \Leftrightarrow x = -7.$$

Πρακτικὰ γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ τῆς μεθόδου αὐτῆς ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Γιὰ νὰ ἀπαλείψουμε τὸν x, στὸ σύστημα (Α) πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη της (1) ἐπὶ –3, ἐνῶ πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 1, κι ἔτσι ἔχουμε:

$$(A)\ \begin{array}{l} x-2\psi+17=0 \\ 3x+\psi+16=0 \end{array} \left| \begin{array}{r} -3 \\ 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (A')\ \left. \begin{array}{l} -3x+6\psi-51=0 \\ 3x+\psi+16=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array}$$

Μὲ πρόσθεση κατὰ μέλη τῶν (1') καὶ (2'), γιὰ νὰ σχηματίσουμε τὸ γραμμικὸ συνδυασμὸ (3) τῶν (1) καὶ (2), βρίσκουμε: $7\psi-35=0$, δηλ. ἔγινε ἀπαλοιφὴ τοῦ x καὶ συνεπῶς βρέθηκε τὸ ἰσοδύναμο πρὸς τὸ (Α) σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} 7\psi-35=0 \\ 3x+\psi+16=0 \end{array} \right\} (B)$$ ποὺ πολὺ εὔκολα ἐπιλύεται.

2ο) Νὰ λυθεῖ τὸ σύστημα: $\left. \begin{array}{l} 3x+8\psi-20=0 \\ -2x+3\psi+55=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}\ (A)$

Ἂς ἀπαλείψουμε τὸν ψ. Ὁ ψ ἔχει ὁμόσημους συντελεστὲς στὶς ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Πολλαπλασιάζουμε καὶ τὰ δύο μέλη της (1) ἐπὶ 3 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ –8. Θὰ ἔχουμε:

$$(A)\ \begin{array}{l} 3x+8\psi-20=0 \\ -2x+3\psi+55=0 \end{array} \left| \begin{array}{r} 3 \\ -8 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (A')\ \left. \begin{array}{l} 9x+24\psi-60=0 \\ 16x-24\psi-440=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1') \\ (2') \end{array}$$

Μὲ πρόσθεση κατὰ μέλη τῶν (1') καὶ (2') βρίσκουμε τὸ γραμμικὸ συνδυασμό τους: $25x-500=0$, ἄρα $x=20$. Ἀντικαθιστοῦμε τὸν x μὲ τὴν τιμή του 20 σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ (Α) λ.χ. στὴν (1) καὶ βρίσκουμε:

$$3\cdot 20+8\psi-20=0 \Leftrightarrow 8\psi=-40 \rightarrow \psi=-5.$$

Ἂν θελήσουμε νὰ ἀπαλείψουμε τὸν x, ὁ ὁποῖος ἔχει ἑτερόσημους συντελεστὲς στὶς (1) καὶ (2), πολλαπλασιάζουμε τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ 2 καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (2) ἐπὶ 3 κι ἔτσι ἔχουμε:

$$(A)\ \begin{array}{l} 3x+8\psi-20=0 \\ -2x+3\psi+55=0 \end{array} \left| \begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (A'')\ \left. \begin{array}{l} 6x+16\psi-40=0 \\ -6x+9\psi+165=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1'') \\ (2'') \end{array}$$

Μὲ τὴν πρόσθεση κατὰ μέλη τῶν (1'') καὶ (2'') προκύπτει ὁ γραμμικὸς συνδυασμός τους: $25\psi+125=0$, δηλ. $\psi=-5$.

Ἀφοῦ ὑπολογίσαμε τὸν ψ, τὸν ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὴν τιμή του –5 σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) καὶ βρίσκουμε ἀμέσως καὶ τὸν x.

Ἀπὸ τὰ ὅσα εἴπαμε παραπάνω, συμπεραίνουμε ὅτι γιὰ νὰ λύσουμε ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους πρώτου βαθμοῦ μὲ τὴ μέθοδο τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ:

1ο) Πολλαπλασιάζουμε τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸ $k \neq 0$ καὶ τὰ μέλη τῆς δεύτερης ἐπὶ ἕναν ἀριθμὸ $\lambda \neq 0$, ἐκλέγοντας τοὺς k καὶ λ ἔτσι, ὥστε στὶς ἐξισώσεις ποὺ προκύπτουν οἱ συντελεστὲς ἑνὸς ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους νὰ εἶναι ἀντίθετοι. 2ο) Μὲ πρόσθεση κατὰ μέλη τῶν δύο νέων ἐξισώσεων ἐξαλείφεται ὁ ἄγνωστος μὲ τοὺς ἀντίθετους συντελεστὲς καὶ προσδιορίζεται ὁ ἄλλος ἄγνωστος καὶ 3ο) ἀφοῦ πιὰ εἶναι γνωστὸς ὁ ἕνας ἄγνωστος, εὔκολα βρίσκουμε τὸν ἄλλο μὲ ἀντικατάσταση σὲ μιὰ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος.

Τὴ μέθοδο τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ ὀνομάζουμε καὶ **μέθοδο τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.**

67. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) Κάθε σύστημα δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφή:

$$(A): \left.\begin{array}{l}(1): \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ (2): \alpha' x + \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\}$$

ὅπου x, ψ εἶναι οἱ ἄγνωστοι καὶ τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ συμβολίζουν δοσμένους πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (σταθερές, ἀνεξάρτητες ἀπὸ τοὺς x, ψ).

Ι. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ εἶναι $\neq 0$. Ἀπὸ τὴν (1) βρίσκουμε: $x = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ κι ἀντικαθιστώντας τὸ x μὲ τὸ ἴσο του στὴ (2) τοῦ (A) ἔχουμε τή:

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma,$$

ὥστε εἶναι:

$$(A) \left\{\begin{array}{l}\alpha x + \beta\psi = \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lr} x = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} & (3) \\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\psi = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma & (4)\end{array}\right\} \quad (B)$$

Στὸ σύστημα (B) ἡ ἐξίσωση (4) εἶναι μὲ ἕναν ἄγνωστο, τὸν ψ. Ἂν λοιπὸν ἡ (4) εἶναι δυνατή, ἀδύνατη ἢ ἀόριστη, τότε θὰ εἶναι καὶ τὸ (B), ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμό του (A) σύστημα δυνατό, ἀδύνατο ἢ ἀόριστο ἀντίστοιχα.

1ο. Ἡ (4) εἶναι δυνατή, ὅταν καὶ μόνο εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Ἄρα: **Τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατό, ὅταν καὶ μόνο εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.**

Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἀπὸ τὴν (4) ἔχουμε: $\psi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Θέτοντας τὴν τιμὴ αὐτὴ τοῦ ψ στὴν (3), βρίσκουμε: $\psi = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$.

Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι: $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\beta}{\beta'} \quad (i)$

2ο. Ἂν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$, ἡ ἐξίσωση (4) εἶναι ἀδύνατη. Δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ ψ λύση τῆς (4). Ὥστε κι ἀπὸ τὴν (3) δὲν θὰ ὑπάρχει λύση της ὡς πρὸς x **καὶ τὸ σύστημα (A) εἶναι ἀδύνατο.**

Στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι: $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta' = \alpha'\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0 \Leftrightarrow \alpha\gamma' \neq \alpha'\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'}$, συνεπῶς εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \neq \frac{\gamma}{\gamma'} \quad \text{(ii)}$$

Ἂν θέσουμε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \rho$, θὰ ἔχουμε: $\alpha = \alpha'\rho$, $\beta = \beta'\rho$, $\gamma \neq \gamma'\rho$ ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὶς (ii). Ἡ ἐξίσωση (1) τοῦ (A) γίνεται : $\rho(\alpha'x + \beta'\psi) = \gamma$ καὶ τὸ σύστημα (A) γράφεται : $\left.\begin{array}{r}\rho(\alpha'x+\beta'\psi)=\gamma\\ \alpha'x + \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\}$ Οἱ δύο αὐτὲς ἐξισώσεις εἶναι ἀδύνατο νὰ ἀληθεύουν συγχρόνως, γιατὶ εἶναι $\rho\gamma' \neq \gamma$.

Μποροῦμε νὰ λέμε στὴν περίπτωση αὐτὴ ὅτι οἱ ἐξισώσεις εἶναι **ἀσυμβίβαστες (δὲν εἶναι συμβιβαστές).**

3ο. Ἂν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$, ἡ ἐξίσωση (4) γίνεται ἀόριστη. Τὸ ψ μπορεῖ νὰ πάρει κάθε τιμὴ στὸ σύνολο R. Σὲ κάθε τιμὴ τοῦ ψ ἀντιστοιχίζεται μὲ τὴν (3) τοῦ συστήματος (B) μιὰ μόνο τιμὴ τοῦ x. Τὸ σύστημα λοιπὸν (B), ἄρα καὶ τὸ (A) **ἔχει μιὰ ἀπειρία λύσεων.** Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἔχουμε:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

δηλ. $$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \qquad \text{(iii)}$$

Ἂν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τοῦ (A) ἰσχύει ἡ (iii), τότε τὸ σύστημα αὐτὸ εἶναι εἶναι ἀόριστο. Γιατὶ ἂν θέσουμε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \rho$, ἀπὸ τὶς (iii) ἔχουμε $\alpha = \alpha'\rho$, $\beta = \beta'\rho$ καὶ $\gamma = \gamma'\rho$ κι οἱ ἐξισώσεις τοῦ (A) γίνονται:

$\left.\begin{array}{r}\rho(\alpha'x + \beta'\psi) = \rho\gamma'\\ \alpha'x + \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\}$ ποὺ συμπίπτουν σὲ μιὰ μόνο ἐξίσωση, ἐπειδὴ εἶναι $\rho \neq 0$.

Ἀλλὰ μιὰ ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ ἔχει ἄπειρες λύσεις (x, ψ) στὸ σύνολο $R \times R$.

II. Ἂν εἶναι οἱ $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ καὶ $\gamma = \gamma' = 0$. Ἐπειδὴ οἱ (3) καὶ (4) ἰσχύουν, βρίσκουμε ἀπὸ τὴν (4), ἂν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, ὅτι $\psi = 0$ καὶ ἀπὸ τὴν (3) ἐπίσης $x = 0$, δηλ. τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατὸ κι ἔχει μιὰ λύση, τὴ $x = 0$, $\psi = 0$.

Ἂν στὴν περίπτωση αὐτὴ εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$, τὸ (A) εἶναι σύστημα ἀόριστο.

III. Ἂν εἶναι $\alpha = \beta = 0$, τότε τὸ σύστημα (A) γίνεται:

$\left.\begin{array}{r}0 = \gamma\\ \alpha'x + \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\}$ Ἂν εἶναι $\gamma = 0$, τὸ (A) περιορίζεται σὲ μιὰ μόνο ἐξίσωση, τὴν $\alpha'x + \beta'\psi = \gamma'$ κι ἔχει ἄπειρες λύσεις. Ἂν ὅμως εἶναι $\gamma \neq 0$, τὸ (A) εἶναι σύστημα ἀδύνατο.

Τὰ ἴδια συμπεράσματα ἔχουμε καὶ στὴν περίπτωση ποὺ εἶναι: $\alpha' = \beta' = 0$.

IV. Ἂν εἶναι $\alpha = \alpha' = 0$, ἐξαφανίζεται ὁ ἕνας ἄγνωστος καὶ τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r}\beta\psi = \gamma \\ \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\} \quad (\Gamma)$$

Ἂν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) ἔχει τὴ λύση: $x \in R$ (δηλ. $x =$ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πραγματικὸς) καὶ $\psi = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma'}{\beta'}$, ἄρα τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστο.

Ἂν εἶναι $\frac{\gamma}{\beta} \neq \frac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) εἶναι ἀδύνατο.

V. Ἂν εἶναι $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, τὸ σύστημα (A) γίνεται:

$$\left.\begin{array}{r}0x + 0\psi = \gamma \\ 0x + 0\psi = \gamma'\end{array}\right\}$$ Ἂν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' = 0$, ἔχουμε δύο ταυτότητες. Τὰ x, ψ παίρνουν καὶ τὰ δύο αὐθαίρετες τιμὲς καὶ λέμε ὅτι τὸ (A) ἔχει **διπλὴ ἀοριστία λύσεων.**

Ἂν ἕνα ἀπὸ τὰ γ καὶ γ' εἶναι $\neq 0$, τὸ (A) εἶναι ἀδύνατο.

Ἡ περίπτωση $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ μπορεῖ νὰ παρουσιασθεῖ στὴ μελέτη **παραμετρικῶν συστημάτων.** Λ.χ. συμβαίνει τοῦτο στὸ σύστημα (μὲ παράμετρο τὸ λ).

$$\left.\begin{array}{r}(\lambda + 1)x + (\lambda^2 - 1)\psi = 24 \\ (\lambda^3 + 1)x - (\lambda + 1)\psi = 17\end{array}\right\} \text{γιὰ } \lambda = -1.$$

Συμπέρασμα. Τὸ σύστημα $\left.\begin{array}{r}\alpha x + \beta\psi = \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma'\end{array}\right\}$ ἔχει μιὰ λύση καὶ μόνο μιά, τὴ $x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $\psi = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Ἂν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατο.

Ἂν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστο.

Παραδείγματα 1ο. Γιὰ τὸ σύστημα: $\left.\begin{array}{r}x + \psi = 2 \\ 2x - \psi = 1\end{array}\right\} \quad (A_1)$

ἔχουμε: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\alpha' = 2$, $\beta' = 1$, $\gamma' = 1$, συνεπῶς $\alpha\beta' - \alpha'\beta = -1 - 2 = -3 \neq 0$, ἄρα τὸ (A_1) ἔχει μία μόνο λύση, τή:

$$x = \frac{-2-1}{-1-2} = 1, \quad \psi = \frac{1-4}{-1-2} = 1$$

2ο. Γιὰ τὸ σύστημα: $\left.\begin{array}{r}x + \psi = 2 \\ 3x + 3\psi = 4\end{array}\right\} \quad (A_2)$

ἔχουμε: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\alpha' = 3$, $\beta' = 3$, $\gamma' = 4$, ἄρα $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 3 - 3 = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 4 - 6 = -2 \neq 0$, συνεπῶς τὸ (A_2) εἶναι ἀδύνατο.

3ο. Γιὰ τὸ σύστημα: $\left.\begin{array}{r}x + \psi = 2 \\ 4x + 4\psi = 8\end{array}\right\} \quad (A_3)$

Ἔχουμε: $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\alpha' = 4$, $\beta' = 4$, $\gamma' = 8$, ἄρα $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 4 - 4 = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 8 - 8 = 0$, συνεπῶς τὸ (A_3) εἶναι ἀόριστο.

Παρατηροῦμε ὅτι οἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ (A_3) εἶναι ἰσοδύναμες (ἡ β′ προκύπτει ἀπὸ τὴν α′, ἂν πολλαπλασιασθοῦν τὰ μέλη της ἐπὶ 4). Τὸ σύνολο τῶν λύσεων τοῦ (A_3) εἶναι τὸ ἑξῆς:

$$\{(x, \psi) \mid x + \psi = 2\} \text{ μὲ } x \in R,\ \psi \in R, \text{ δηλ.}$$

τὸ σύνολο $\{(x, \psi) \mid \psi = 2 - x,\ x \in R\}$

4ο. Γιὰ τὸ σύστημα: $\left.\begin{array}{l} 0x + 0\psi = 0 \\ 0x + 0\psi = 0 \end{array}\right\} (A_4)$

ἔχουμε: $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$, ἄρα τὸ (A_4) εἶναι ἀόριστο. Τὸ σύνολο τῶν λύσεων τοῦ (A_4) εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν ζευγῶν (x, ψ) μὲ $x \in R$ καὶ $\psi \in R$.

β) Παρατήρηση. Ἡ εὕρεση τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους, ὅπως κι ἡ διερεύνησή του, συντομεύεται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο. Συμφωνοῦμε τὴν παράσταση: $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ νὰ τὴ γράφουμε ὡς ἑξῆς:

$$(\pi):\ \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

Ἡ παράσταση (π) ὀνομάζεται: **μιὰ ὁρίζουσα 2ης τάξεως.**

Ἔτσι οἱ παραστάσεις: $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma$, $\gamma\beta' - \gamma'\beta$ γράφονται:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}.$$

Ἂν λοιπὸν εἶναι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$, ἡ μοναδικὴ λύση τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} \alpha x + \beta\psi = \gamma \\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \end{array}\right\} (A) \quad \text{γράφεται}: \quad x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

καὶ μὲ τὴ μορφὴ αὐτὴ εἶναι εὐκολομνημόνευτη. (Νὰ διατυπώσετε τὸ σχετικὸ κανόνα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

278) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $x + \psi = 3$, $2x + 2\psi - 6 = 0$ β) $2x - \psi + 4 = 0$, $x - \dfrac{\psi}{2} + 2 = 0$ γ) $x - \psi = 4$, $3x - 3\psi + 6 = 0$

279) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $3x + \psi - 6 = 0$, $6x + 2\psi + 9 = 0$ β) $x - 3\psi = 6$, $x + \psi = 10$ γ) $2x + \psi = 5$, $x - \psi = 1$

280) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $2x - 5\psi = 10$ β) $5x + \psi = 3$ γ) $7x - 3\psi = 14$

$-x + \frac{5}{2}\psi = -5$ $-10x - 2\psi + 6 = 0$ $5x + \psi = 10$

281) Ἐπίσης τὰ συστήματα:

α) $x + 3\psi = 2$ β) $-2x + 3\psi = -6$ γ) $4x + \psi = 8$

$3x - 5 = -9\psi$ $2x - 3\psi + 12 = 0$ $4x + 3\psi = 24$

282) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $3x + 2\psi + 1 = 0$ β) $2x + \psi = \alpha$ γ) $\frac{x}{3} - \frac{\psi}{2} = 1$

$5x - \psi + 32 = 0$ $7x - 2\psi = 31\alpha$ $2x - 5\psi = -2$

283) Ἐπίσης τὰ συστήματα:

α) $2x - 3\psi = 5\beta - \alpha$ β) $\frac{3x - \psi + 2}{2} = \frac{x + 2\psi}{5}$

$3x - 2\psi = \alpha + 5\beta$ $\frac{x - 2\psi - 3}{3} = \frac{2x - \psi}{2}$

284) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $2(3x - \psi) + 3(x + \psi) - (x - \psi) = 70$ β) $\frac{x - 2\psi + 8}{3} + \frac{x + \psi - 6}{2} = \frac{x + 4}{3}$

$3(x + 2\psi) - 2(x - \psi) + 5(2x - \psi) = 98$ $x - 3\psi = \frac{3x}{4} - 5$

285) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $\frac{x + 3\psi}{5} - \frac{2x - \psi}{4} = 2\psi + \frac{1}{4}$ β) $\frac{z - 3\omega}{7} = \frac{z + \omega}{2} + z - 4$

$\frac{2x + 5\psi}{4} + \frac{x - \psi}{3} = x - 3$ $2(2z - 3\omega) + 5(z + 2\omega) = 6z - \omega$

286) Νὰ διερευνηθεῖ τὸ σύστημα (μ = παράμετρος)

$$\mu x + \psi = 3$$
$$2x + (\mu + 1)\psi = 6$$

287) Νὰ διερευνηθοῦν τὰ συστήματα:

α) $\mu x - \psi = 2$ β) $\mu(2x + \psi) = 4$

$x + (\mu + 2)\psi = -2$ $\mu x + (\mu - 1)\psi = 2$

288) Νὰ προσδιορίσετε τοὺς λ καὶ μ ἔτσι, ὥστε τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}(2\lambda - 1)x + (4\mu + 1)\psi = 3\\ (\lambda + 1)x + (\mu - 2)\psi = 3\end{array}\right\}$$ νὰ ἔχει ἄπειρες στὸ πλῆθος λύσεις.

289) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

α) $\frac{2}{4x + \psi - 5} = \frac{1}{x + 2\psi + 10}$ β) $\frac{11}{2x - 3\psi} + \frac{18}{3x - 2\psi} = 13$

$\frac{3}{4x + \psi - 5} + \frac{5}{x + 2\psi + 10} = -\frac{13}{8}$ $\frac{27}{3x - 2\psi} - \frac{2}{2x - 3\psi} = 1$

68. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

A) Ἔστω τὸ σύστημα : $\left.\begin{array}{l}\alpha x + \beta\psi = \gamma \quad (1)\\ \alpha' x + \beta'\psi = \gamma' \quad (2)\end{array}\right\}$ (A) κι ἂς εἶναι ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς α, β καθὼς κι ἕνας τουλάχιστο ἀπὸ τοὺς α′, β′ διαφορετικὸς ἀπὸ τὸ μηδέν.

Τὸ σύνολο τῶν σημείων (x, ψ) τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὴν (1), ἀποτελοῦν κατὰ τὰ γνωστὰ μιὰ εὐθεία, ὅπως καὶ τὸ σύνολο τῶν σημείων (x, ψ), ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴ (2).

Ἂν παραστήσουμε στὸ ἐπίπεδο αὐτὲς τὶς εὐθεῖες, καὶ γιὰ τοῦτο εἶναι ἀρκετὸ νὰ προσδιορίσουμε δύο σημεῖα τῆς καθεμιᾶς τους γιὰ νὰ τὴ χαράξουμε, τότε:

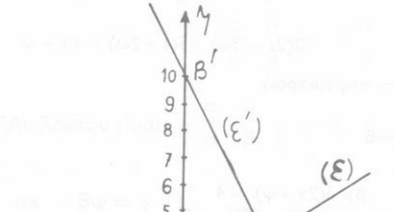
α) Ἂν αὐτὲς τέμνονται καὶ τὸ σημεῖο τομῆς τους εἶναι λ.χ. τὸ (ξ, η), τότε (καὶ μόνο) τὸ σύστημα (Α) ἔχει τὴ μοναδικὴ λύση ($x = \xi$, $\psi = \eta$).

β) Ἂν οἱ εὐθεῖες αὐτὲς εἶναι παράλληλες, χωρὶς νὰ ταυτίζονται σὲ μιὰ εὐθεία, τότε (καὶ μόνο) τὸ (Α) εἶναι ἀδύνατο.

γ) Ἂν, τέλος, οἱ δύο αὐτὲς εὐθεῖες ταυτίζονται σὲ μιὰ εὐθεία (συμπίπτουν), τότε (καὶ μόνο) τὸ (Α) εἶναι ἀόριστο.

Παραδείγματα: 1ο) Νὰ ἐπιλυθεῖ γραφικὰ τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3\psi + 6 &= 0 \\ 2x + \psi - 10 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \end{aligned}$$



Σχ. 68–1

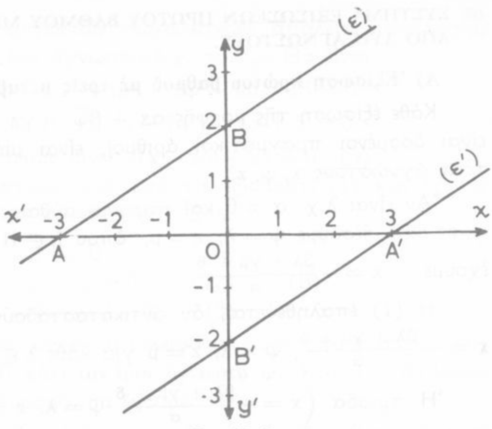
Λύση. Ἡ παραστατικὴ εὐθεία ε τῆς ἐξισώσεως (1) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α ($x = -3$, $\psi = 0$) καὶ Β($x = 0$, $\psi = 2$) σὲ ὀρθογώνιους ἄξονες xOψ (σχ. 68–1).

Ἡ παραστατικὴ εὐθεία ε′ τῆς ἐξισώσεως (2) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α′ ($x = 5$, $\psi = 0$) καὶ Β′($x = 0$, $\psi = 10$) στοὺς ἴδιους ἄξονες. Οἱ εὐθεῖες ε καὶ ε′ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Μ, τοῦ ὁποίου οἱ συντεταγμένες, ὅπως βλέπουμε στὸ τετραγωνισμένο φύλλο χαρτιοῦ τῶν ἀξόνων xOψ, εἶναι $x = 3$ καὶ $\psi = 4$. Τὸ ζεῦγος ($x = 3$, $\psi = 4$) εἶναι κοινὴ λύση τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), (καὶ ἡ μοναδική). Πραγματικὰ εἶναι ἀπὸ τὴν (1): $2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 6 = 0$ καὶ ἀπὸ τὴ (2): $2 \cdot 3 + 4 - 10 = 0$ καὶ $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 2 + 6 = 8 \neq 0$.

2ο) Νὰ ἐπιλυθεῖ γραφικὰ τὸ σύστημα:

$$2x - 3\psi + 6 = 0 \quad (1)$$
$$-4x + 6\psi + 12 = 0 \quad (2)$$

Λύση. Ἡ παραστατικὴ εὐθεία ε τῆς ἐξισώσεως (1) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A($x = -3$, $\psi = 0$) καὶ B($x = 0$, $\psi = 2$) στὸ σχ. 68–2.



Σχ. 68–2

Ἡ παραστατικὴ εὐθεία ε' τῆς (2) ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A' ($x = 3$, $\psi = 0$) καὶ B' ($x = 0$, $\psi = -2$) στὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων μὲ τὴν ε. Ἀπὸ τὸ σχ. 68–2 παρατηροῦμε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες ε καὶ ε' εἶναι παράλληλες, μὴ συμπίπτουσες, δὲν ἔχουν λοιπὸν σημεῖο τομῆς. Τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἀδύνατο. Ἀκόμα λέμε ὅτι: οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι συμβιβαστές.

Ἀπευθείας φαίνεται πὼς τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατο, ἀπὸ τὸ ὅτι εἶναι ἐδῶ: $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 12 - 12 = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = -24 - 24 = -48 \neq 0$.

3ο) Νὰ ἐπιλυθεῖ γραφικὰ τὸ σύστημα

$$2x - 3\psi + 6 = 0 \quad (1)$$
$$-4x + 6\psi - 12 = 0 \quad (2)$$

Λύση. Οἱ παραστατικὲς εὐθεῖες τῶν (1) καὶ (2) ταυτίζονται στὴν ε τοῦ προηγούμενου σχήματος (68–2). Κι οἱ δύο ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα A(–3, 0) καὶ B(0, 2). Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ε εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος αὐτοῦ. Οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) συμπίπτουν σὲ μιὰ ἐξίσωση (εἶναι ἰσοδύναμες).

Β) Παρατήρηση. Ἡ γραφικὴ ἐπίλυση ἑνὸς συστήματος δὲ δίνει πάντοτε ἀποτελέσματα ἱκανοποιητικά, γιατὶ γίνονται σφάλματα, τόσο ἀπὸ τὴν ἀδεξιότητά μας ὅσο κι ἀπὸ τὴν ἀτέλεια τῶν γεωμετρικῶν μας ὀργάνων, στὴν ἐκτέλεση τῶν σχεδίων καὶ στὶς μετρήσεις πάνω σ' αὐτά. Ἡ ὑπολογιστικὴ μέθοδος ἐπιλύσεως δίνει μὲ ἀναμφισβήτητη ἀκρίβεια ἀποτελέσματα καὶ τὸ πιὸ σπουδαῖο εἶναι ὅτι μποροῦμε νὰ ἐλέγχουμε ἀμέσως αὐτὰ τὰ ἐξαγόμενα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

290) Νὰ ἐπιλύσετε γραφικὰ τὰ συστήματα τῆς ἀσκ. 278.

291) Ἐπίσης νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικὰ τὰ συστήματα τῆς ἀσκ. 279.

292) Μᾶς δίνουν τὶς ἐξισώσεις: $5x - 13\psi = 2$ (1), $2x + \psi = 7$ (2) καὶ $x - 2\psi = 1$ (3), γιὰ νὰ τὶς παραστήσουμε μὲ εὐθεῖες στὸ ἴδιο σύστημα ἀξόνων xOψ. Τί παρατηροῦμε στὸ σχῆμα ποὺ προκύπτει;

69. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΠΟ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

Α) Ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς μεταβλητές.

Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0$ (1), ὅπου οἱ α, β, γ, δ εἶναι δοσμένοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, εἶναι μιὰ ἐξίσωση πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους x, ψ, z.

Ἂν εἶναι λ.χ. $\alpha \neq 0$ καὶ πάρουμε αὐθαίρετες πραγματικὲς τιμὲς γιὰ τοὺς ψ, z, δηλ. θέσουμε $\psi = \lambda$, $z = \mu$, ὅπου $\lambda \in R$ καὶ $\mu \in R$, τότε ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε: $x = -\dfrac{\beta\lambda + \gamma\mu + \delta}{\alpha}$.

Ἡ (1) ἐπαληθεύεται, ἂν ἀντικατασταθοῦν οἱ x, ψ, z μὲ τὶς τιμές:
$x = -\dfrac{\beta\lambda + \gamma\mu + \delta}{\alpha}$, $\psi = \lambda$, $z = \mu$ γιὰ κάθε $\lambda \in R$ καὶ $\mu \in R$.

Ἡ τριάδα $\left(x = -\dfrac{\beta\lambda + \gamma\mu + \delta}{\alpha}\ \psi = \lambda,\ z = \mu\right)$ ὀνομάζεται **μιὰ λύση τῆς (1)** (γιὰ κάθε $\lambda \in R$ καὶ $\mu \in R$). Ἡ (1) δὲν ἀληθεύει γιὰ κάθε τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν (ρ, λ, μ) εἶναι μιὰ τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἐπαληθεύει τὴν (1), τότε κάθε τριάδα (ρ′, λ, μ), ὅπου $\rho' \neq \rho$, δὲν ἐπαληθεύει τὴν (1). Γιὰ παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωση $x + \psi + z - 6 = 0$ (α). Ἂς πάρουμε $\psi = 2$, $z = 1$. Τότε ἔχουμε: $x + \psi + z - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \psi - z$ καὶ συνεπῶς $x = 6 - 2 - 1 \Leftarrow x = 3$. Ἡ τριάδα (3, 2, 1) εἶναι μιὰ λύση τῆς (α), ἐνῶ ἡ τριάδα λ.χ. (4, 2, 1) δὲν εἶναι λύση της.

Β) Σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους x, ψ, z.

Ἂν ἔχουμε τρεῖς ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς μεταβλητὲς x, ψ, z:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha x + \beta\psi + \gamma z + \delta = 0 & (1) \\ \alpha' x + \beta'\psi + \gamma' z + \delta' = 0 & (2) \\ \alpha'' x + \beta''\psi + \gamma'' z + \delta'' = 0 & (3) \end{array}\right\} (\Sigma)$$

καὶ ζητοῦμε τὶς κοινὲς λύσεις τους, τότε λέμε ὅτι ἔχουμε ἕνα σύστημα (Σ) τριῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) μὲ ἀγνώστους x, ψ, z.

Κάθε **κοινὴ λύση** τῶν (1), (2) καὶ (3), ἂν ὑπάρχει, ὀνομάζεται **μιὰ λύση** τοῦ συστήματος (Σ).

Ἐπίλυση τοῦ συστήματος λέγεται ἡ **εὕρεση** τῶν λύσεών του (ἂν ὑπάρχουν).

Κατὰ τὴν ἐπίλυση συστήματος πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσότερους ἀπὸ δύο ἀγνώστους ἐφαρμόζουμε τοὺς ἴδιους τρόπους ἀπαλοιφῆς ἀγνώστου, ποὺ μάθαμε γιὰ τὴ λύση συστήματος μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δυὸ ἀγνώστους. Πολὺ καλὰ θὰ φανεῖ τοῦτο στὰ παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα. 1ο) Νὰ ἐπιλυθεῖ τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{ll} 3x + \psi - 2\omega - 9 = 0 & (1) \\ x - 2\psi + \omega + 5 = 0 & (2) \\ 2x + \psi + 3\omega + 2 = 0 & (3) \end{array}\right\} (A)$$

Λύση. Μὲ τὴ μέθοδο τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀπαλείφουμε μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) τὸν ἕνα ἄγνωστο λ.χ. τὸν ψ. Θὰ εἶναι:

$$\begin{array}{l|l} 3x+\psi-2\omega-9=0 & 2 \\ x-2\psi+\omega+5=0 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 6x+2\psi-4\omega-18=0 \\ x-2\psi+\ \omega+5=0 \end{array}$$

Ὁ γραμμικὸς συνδυασμὸς αὐτῶν δίνει: $7x-3\omega-13=0$ (α).

Στὸ σύστημα (Α) ἀντικαθιστοῦμε μιὰ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) μὲ τὴν (α) λ.χ. τὴν (1) κι ἔχουμε τὸ σύστημα (Β), δηλ.

$$(\mathrm{A}) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 7x-3\omega-13=0 & (\alpha) \\ x-2\psi+\omega+5=0 & (2) \\ 2x+\psi+3\omega+2=0 & (3) \end{array} \quad (\mathrm{B}).$$

Μὲ ὁποιαδήποτε γνωστή μας μέθοδο ἀπαλείφουμε τώρα στὸ σύστημα (Β) μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) **πάλι τὸν ἴδιο ἄγνωστο ψ.** Ἔτσι λ.χ. ἂν ἐφαρμόσουμε ξανὰ τὸ γραμμικὸ συνδυασμό, θὰ ἔχουμε:

$$\begin{array}{l|l} x-2\psi+\omega+5=0 & 1 \\ 2x+\psi+3\omega+2=0 & 2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x-2\psi+\omega+5=0 \\ 4x+2\psi+6\omega+4=0 \end{array}$$

κι ἀπὸ αὐτὲς μὲ πρόσθεση κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἐξίσωση $5x+7\omega+9=0$ (β), μὲ τὴν ὁποία στὸ (Β) ἂς ἀντικαταστήσουμε τὴν ἐξίσωση (2). Βρίσκουμε:

$$(\mathrm{B}) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} 7x-3\omega-13=0 & (\alpha) \\ 5x+7\omega+9=0 & (\beta) \\ 2x+\psi+3\omega+2=0 & (3) \end{array} \quad (\Gamma).$$

Τὸ σύστημα (Γ), ἰσοδύναμο πρὸς τὸ ἀρχικὸ (Α), ἔχει λύση ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχει λύση τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (α) καὶ (β), ποὺ εἶναι πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους. Λύνοντας τὸ σύστημα τοῦτο βρίσκουμε $x=1$, $\omega=-2$, συνεπῶς εἶναι:

$$(\Gamma) \Leftrightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ \omega=-2 \\ 2x+\psi+3\omega+2=0 \end{array} \quad (\Delta).$$

Στὴν τρίτη ἐξίσωση τοῦ (Δ) θέτουμε τὶς τιμὲς $x=1$, $\omega=-2$ καὶ προσδιορίζουμε τὸν τρίτο ἄγνωστο ψ. Εἶναι:

$$2\cdot 1+\psi+3\cdot(-2)+2=0 \Leftrightarrow \psi=2$$

Ὥστε τὸ σύστημα (Α) ἔχει τὴ μοναδικὴ λύση $(x=1,\ \psi=2,\ \omega=-2)$.

2ο) Νὰ ἐπιλυθεῖ τὸ σύστημα: $\begin{array}{ll} x+4\psi-2z=-2 & (1) \\ x-3\psi-7z=19 & (2) \\ 3x+5\psi+z=15 & (3) \end{array}$ (Α)

Λύση. Γιὰ τὴν ἐπίλυση αὐτοῦ τοῦ συστήματος ἂς ἐφαρμόσουμε τὴ μέθοδο τῆς ἀντικαταστάσεως. Λύνοντας μιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς ἐξισώσεις ὡς πρὸς ἕναν ἄγνωστο, ἐκφράζουμε αὐτὸν **«συναρτήσει τῶν δύο ἄλλων ἀγνώστων»** καὶ τὴν τιμή του αὐτὴ θέτουμε στὶς ἄλλες δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἔτσι λ.χ. ἔχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow \quad x = -2 - 4\psi + 2z \text{ καὶ συνεπῶς εἶναι:}$$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x = -2 - 4\psi + 2z & (1') \\ (-2-4\psi+2z) - 3\psi - 7z = 19 & (2') \\ 3(-2-4\psi+2z) + 5\psi + z = 15 & (3') \end{array} \quad (B)$$

Στὸ σύστημα (B) οἱ ἐξισώσεις (2′) καὶ (3′) γίνονται:
$(2') \Leftrightarrow -7\psi - 5z = 21$ καὶ $(3') \to -7\psi + 7z = 21$, ἄρα εἶναι:

$$(B) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x = -2 - 4\psi + 2z & (1') \\ -7\psi - 5z = 21 & (2'') \\ -7\psi + 7z = 21 & (3'') \end{array} \quad (\Gamma)$$

Στὸ σύστημα (Γ) λύνοντας τὸ σύστημα τῶν (2″) καὶ (3″) βρίσκουμε: $\psi = -3$ καὶ $z = 0$, καὶ ἀπὸ τὴν (1′) ἔχουμε: $x = 10$.

Ὥστε τὸ σύστημα (A) ἔχει τὴ μοναδικὴ λύση (10, –3, 0).

Γ) Παρατήρηση. Ἂν ἔχουμε σύστημα μὲ τέσσερες ἐξισώσεις καὶ ἰσάριθμους ἀγνώστους, μὲ τὴν ἀπαλοιφὴ τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ καθεμιᾶς ἀπὸ τὶς ὑπόλοιπες ἐξισώσεις προκύπτει ἕνα σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους, τὸ ὁποῖο καὶ ἐπιλύουμε. Εἶναι φανερὸ πὼς μὲ παρόμοιο τρόπο ἐπεκτείνοντας μποροῦμε νὰ ἐπιλύσουμε συστήματα μὲ πέντε ἢ περισσότερες ἐξισώσεις καὶ ἰσάριθμες ἀγνώστους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

293) Νὰ ἐπιλύσετε τὰ συστήματα:

α) $\begin{cases} x - 2\psi + \omega = 4 \\ 2x + \psi - 5\omega = 9 \\ x - 3\psi - \omega = -3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2x + \psi + 3\omega = -1 \\ -x + \psi - 2\omega = 2 \\ -x + 2\psi - 3\omega = 1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 2x - 3\psi + 7\omega = 4 \\ -x + 2\psi + 12\omega = 4 \\ 5x - 8\psi + \omega = 4 \end{cases}$

294) Νὰ ἐπιλύσετε τὰ συστήματα:

α) $\begin{cases} 3\alpha - 2\beta + 5\gamma = -5 \\ \alpha + 3\beta - 6\gamma = 35 \\ -4\alpha + \beta + 13\gamma = -10 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \lambda + 3\mu + 4\nu = 3 \\ -2\lambda - 7\mu + 12\nu = 1 \\ 5\lambda + 8\mu = -16 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 3x + 2\psi = 2 \\ 4\psi - 5\omega = 1 \\ \omega + 4z = 1{,}2 \\ 3x + 5\omega = 2 \end{cases}$

295) Νὰ δείξετε ὅτι ἡ τριάδα $(x=3, \psi=1, \omega=0)$ εἶναι μιὰ κοινὴ λύση τῶν ἐξισώσεων $2x + \psi - 4\omega = 7$ (1), $x + 3\psi + \omega = 6$ (2).
Κατόπιν νὰ ἐξετασθεῖ ἂν εἶναι κοινὲς λύσεις τους καὶ οἱ τριάδες:

$$\left(\frac{41}{5}, \frac{-7}{5}, 2\right), \quad \left(7, 0, \frac{7}{4}\right), \quad \left(\frac{13k+15}{5}, \frac{5-6k}{5}, k\right)$$

296) Τὸ σύστημα $3x - \psi + 2\omega = 0$ (1), $x + 2\psi - \omega = 0$ (2) ποιὲς ἀπὸ τὶς τριάδες (–3, 5, 7), (6, –10, –14), (4, 0, –6) ἔχει ὡς λύσεις; Νὰ δείξετε πὼς κάθε λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ δίνεται ἀπὸ τὶς $x = -3k$, $\psi = 5k$, $\omega = 7k$ γιὰ κάθε $k \in R$.

297) Νὰ ἐπιλύσετε τὰ συστήματα:

α) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{5} = \dfrac{\psi}{3} = \dfrac{z}{7} \\ 2x - 3\psi + z + 16 = 0 \end{array}\right\}$ β) $\left.\begin{array}{l} x + 2(\psi + z) = 1 \\ 3\psi - 5(x+z) = -10 \\ -2z + 3(x+\psi) = 11 \end{array}\right\}$

298) Νὰ ἐπιλύσετε τὰ συστήματα:

α) $\frac{x-1}{3}=\frac{\psi+1}{4}=\frac{z-2}{5}$ β) $\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$

$2x+3\psi-4z=7$ $\beta x\gamma+\gamma\alpha\psi+\alpha\beta z=\delta$

299) Νὰ ἐπιλύσετε τὰ συστήματα:

α) $x+\psi+z=14$
$\psi+z+\varphi=15$
$z+\varphi+x=20$
$\varphi+x+\psi=35$

β) $x+\psi+z+\omega=10$
$2x-\psi+z=3$
$4\psi+3z=17$
$7\psi-3z=5$

70. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Α) Ἂν σ' ἕνα πρόβλημα ὑπάρχουν περισσότεροι ἀπὸ ἕναν ἄγνωστοι, ἡ λύση του μπορεῖ νὰ στηριχθεῖ στὴ λύση ἑνὸς συστήματος, τοῦ ὁποίου οἱ ἐξισώσεις πιθανὸ νὰ εἶναι πρωτοβάθμιες. Στὴν περίπτωση αὐτὴ τὸ πρόβλημα ἀνάγεται στὴ λύση ἑνὸς συστήματος πρώτου βαθμοῦ, ὅπως φαίνεται στὰ παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα: 1ο) Σήμερα ὁ Πέτρος εἶναι κατὰ 8 χρόνια μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀδερφό του Γιάννη. Ὕστερ' ἀπὸ 6 χρόνια οἱ ἡλικίες τους θὰ ἔχουν λόγο 11 : 9. Νὰ βρεθεῖ ἡ ἡλικία τοῦ καθενός.

Λύση. Ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι x ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου σήμερα καὶ ψ τοῦ Γιάννη. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος εἶναι: $x=\psi+8$ (1). Ὕστερ' ἀπὸ 6 χρόνια ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου θὰ εἶναι $x+6$ καὶ τοῦ Γιάννη $\psi+6$. Ἐπειδὴ οἱ ἡλικίες τους αὐτὲς θὰ ἔχουν λόγο $\frac{11}{9}>1$, θὰ εἶναι:

$$\frac{x+6}{\psi+6}=\frac{11}{9} \quad (2).$$

Ἔτσι λοιπὸν καταστρώθηκε τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x=\psi+8 \quad (1)\\ \dfrac{x+6}{\psi+6}=\dfrac{11}{9} \quad (2)\end{array}\right\} \quad (A)$$

Ἐπειδὴ πρόκειται γιὰ ἡλικίες ἀνθρώπων, οἱ ἄγνωστοι x καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ μέσα σὲ παραδεκτὰ ὅρια.

Ἐπιλύουμε τὸ σύστημα κατὰ τὰ γνωστά:

$$(A)\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\psi+8\\ 9x-11\psi=12\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\psi+8\\ 9(\psi+8)-11\psi=12\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=\psi+8\\ \psi=30\end{array}\right\}\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=38\\ \psi=30\end{array}\right\}$$

Ἡ λύση $x=38$, $\psi=30$ ἱκανοποιεῖ τοὺς περιορισμοὺς κι ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα. Πραγματικὰ εἶναι ὁ Πέτρος 8 χρόνια πιὸ μεγάλος ἀπὸ τὸν ἀδερφό του κι ὕστερα ἀπὸ 6 χρόνια οἱ ἡλικίες τους θὰ εἶναι $38+6=44$, $30+6=36$ μὲ λόγο $\frac{44}{36}=\frac{11}{9}$. Ἄρα ἡ λύση ποὺ βρέθηκε εἶναι παραδεκτή.

2ο) Σὲ μιὰ ἐκδρομὴ πῆραν μέρος 91 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες, καὶ παιδιά.

Οἱ γυναῖκες ἦταν 5 περισσότερες ἀπὸ τὰ παιδιά. Ὅλα τὰ ἔξοδα ἦταν 5.940 δρχ. καὶ τὰ πλήρωσαν οἱ μεγάλοι, κάθε ἄνδρας ἀπὸ 100 δρχ. καὶ κάθε γυναίκα ἀπὸ 80 δρχ. Πόσοι ἦταν οἱ ἄνδρες, οἱ γυναῖκες καὶ τὰ παιδιά;

Λύση. Ἂν x εἶναι οἱ ἄνδρες, ψ οἱ γυναῖκες καὶ ω τὰ παιδιά, ἀπὸ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος ἔχουμε τὸ σύστημα:

$$(A)\ \begin{array}{ll} x+\psi+\omega=91 & (1)\\ \psi=\omega+5 & (2)\\ 100x+80\psi=5940 & (3)\end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x+\psi+\omega=91 & (1')\\ \psi-\omega=4 & (2')\\ 5x+4\psi=297 & (3')\end{array}\ (B)$$

Ἀπὸ τὶς (1′) καὶ (2′) μὲ πρόσθεση κατὰ μέλη προκύπτει ἡ ἐξίσωση: $x+2\psi=96$, κι ἔτσι ἔχουμε:

$$(B) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} x+2\psi=96 & (1'')\\ \psi-\omega=5 & (2'')\\ 5x+4\psi=297 & (3'')\end{array}\ (\Gamma)$$

Ἐπιλύοντας τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1′′) καὶ (3′′) βρίσκουμε $x=35$, $\psi=30{,}5$. Προφανῶς ἡ λύση αὐτὴ δὲν εἶναι παραδεκτὴ κι ἑπομένως δὲ χρειάζεται νὰ προχωρήσουμε στὴν εὕρεση τῆς τιμῆς τοῦ ω. Τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατο λόγῳ τῆς φύσεως τῶν ζητουμένων του.

3ο) Ἂν τὴ βάση σ' ἕνα ὀρθογώνιο (παραλληλόγραμμο) τὴν ἐλαττώσουμε κατὰ 5 μέτρα κι αὐξήσουμε τὸ ὕψος του κατὰ 2 μέτρα, ἡ ἐπιφάνειά του ἐλαττώνεται κατὰ 20 τ.μ. Ἂν ὅμως αὐξήσουμε τὴ βάση κατὰ 8 μ. κι ἐλαττώσουμε τὸ ὕψος κατὰ 3 μ., ἡ ἐπιφάνειά του μένει ἡ ἴδια. Ποιὲς εἶναι οἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ;

Λύση. Ἂν x εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως καὶ ψ τὸ ὕψος σὲ μέτρα, ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις x καὶ ψ εἶναι τὸ γινόμενό τους xψ, σύμφωνα μὲ τὸ πρῶτο μέρος τῆς ἐκφωνήσεως θὰ εἶναι: $(x-5)(\psi+2)=$ $=x\psi-20$ (1) καὶ σύμφωνα μὲ τὸ δεύτερο: $(x+8)(\psi-3)=x\psi$ (2).

Οἱ ἄγνωστοι x, ψ πρέπει νὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἔπειτ' ἀπὸ τὶς πράξεις καὶ τὶς ἀναγωγὲς ἀποτελοῦν τὸ σύστημα:

$$(A)\ \left.\begin{array}{r} 2x-5\psi=-10\\ -3x+8\psi=24\end{array}\right\}.$$ Ἀπὸ τὴ λύση του προκύπτει $x=40$, $\psi=18$, ποὺ ἐπαληθεύουν τὸ πρόβλημα. Ἡ λύση εἶναι παραδεκτή.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

300) Σ' ἕνα Γυμνάσιο οἱ τάξεις Α καὶ Β μαζὶ ἔχουν 118 μαθητές, ἡ Β καὶ Γ 100 καὶ οἱ Γ καὶ Α 94. Πόσους μαθητὲς ἔχει κάθε τάξη;

301) Ἕνας πατέρας θέλει νὰ μοιράσει 204.000 δρχ. στὰ τρία παιδιά του, ποὺ εἶναι 7, 12 καὶ 15 χρονῶν, ὥστε τὰ μερίδια νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὶς ἡλικίες τους. Πόσα θὰ πάρει τὸ κάθε παιδί;

302) Ἂν τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου αὐξηθεῖ κατὰ 5 μ. κι ἐλαττωθεῖ τὸ πλάτος του κατὰ 2 μ. ἢ ἐλαττωθεῖ τὸ μῆκος κατὰ 3 μ. κι αὐξηθεῖ τὸ πλάτος κατὰ 2 μ., ἡ ἐπιφάνειά του δὲν μεταβάλλεται. Νὰ βρεθοῦν οἱ διαστάσεις του.

303) Νὰ βρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ, ἂν ὁ β διαιρούμενος διὰ τοῦ α δίνει πηλίκο 3 καὶ ὑπόλοιπο 5, ὁ γ διαιρούμενος διὰ τοῦ β δίνει πηλίκο 2 κι ὑπόλοιπο 1, κι ὁ ἴδιος ὁ γ διὰ τοῦ α δίνει πηλίκο 7 κι ὑπόλοιπο 3.

304) Ἕνας πατέρας ἔχει σήμερα ἡλικία κατὰ 7 χρόνια μικρότερη ἀπὸ τὸ τετραπλάσιο τῆς ἡλικίας τῆς κόρης του. Ὕστερ' ἀπὸ 15 χρόνια οἱ ἡλικίες θὰ ἔχουν λόγο 7 πρὸς 15. Νὰ βρεθεῖ ποιὰ εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα καὶ ποιὰ τῆς κόρης.

305) Ἡ ἀπόσταση ἀνάμεσα στὶς πόλεις Α καὶ Β εἶναι 41860 μ. Ἀπὸ αὐτὲς ἀναχωροῦν τὴν ἴδια στιγμὴ γιὰ νὰ συναντηθοῦν δύο πεζοπόροι. Ὁ ἕνας βαδίζει τὴν ὥρα 550 μ. περισσότερο ἀπὸ τὸν ἄλλο, γι' αὐτὸ ὅταν συναντήθηκαν εἶχε διατρέξει 1540 μ. περισσότερο ἀπὸ τὸν ἄλλο. Νὰ βρεθεῖ ἡ ὡριαία ταχύτητα τοῦ καθενὸς καὶ σὲ πόσο χρόνο ἀπὸ τὴν ἀναχώρησή τους ἔγινε ἡ συνάντησή τους.

306) Τρεῖς γυναῖκες ἔχουν μαζὶ 105 αὐγά. Ἂν στὴ β' δώσουν ἡ α' τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν αὐγῶν της κι ἡ γ' 8, τότε κι οἱ τρεῖς θὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ αὐγῶν. Πόσα ἔχει ἡ κάθε μιά;

307) Σ' ἕνα λόχο ἀνήκουν στρατιῶτες κι ἄλογα κι εἶναι 140 κεφάλια καὶ 340 πόδια. Πόσοι εἶναι οἱ στρατιῶτες καὶ πόσα τὰ ἄλογα;

308) Ἡ συνάρτηση - πολυώνυμο $\Phi(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ γιὰ τὰ ἀρχέτυπα 0, 1, 2, 3 δίνει ὡς εἰκόνες ἀντίστοιχα 0, 1, 4, 27. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α, β, γ, δ κι ὕστερα νὰ γίνει ἡ διαίρεση $\Phi(x)$ διὰ $(x-2)$.

309) Ἕνας τριψήφιος ἀριθμὸς ἔχει ψηφίο τῶν μονάδων τὸ 0 καὶ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του τὸν 11. Ὅταν ἐλαττωθεῖ κατὰ 396, δίνει τὸν τριψήφιο, ποὺ προκύπτει μὲ τὴν ἐναλλαγὴ τῶν ψηφίων του. Νὰ βρεθεῖ ὁ τριψήφιος αὐτός.

310) Τὰ ψηφία ἑνὸς διψήφιου ἀριθμοῦ ἔχουν ἄθροισμα 11. Ἂν ἀνάμεσα στὰ ψηφία του παρεμβληθεῖ ὁ 5, βρίσκεται τριψήφιος, ὁ ὁποῖος μὲ τὸ ζητούμενο διψήφιο ἔχει ἄθροισμα ἴσο μὲ 396. Ποιὸς εἶναι ὁ διψήφιος αὐτός;

311) Ὁ Α εἶπε στὸν Β: «Ἂν μοῦ δώσεις ὅσες δραχμὲς ἔχεις, θὰ ἔχω 1350 δρχ.». Ὁ Β ἀπάντησε: «Ὅταν ξοδέψω 75 δρχ. καὶ σὺ μοῦ διπλασιάσεις ὅσα θὰ ἔχω, τότε θὰ μείνεις μὲ 625 δρχ.». Πόσα ἔχει ὁ καθένας;

312) Ἕνας ἔμπορος, ὅταν θέλησε νὰ πληρώσει τὴν πρώτη δόση ἀπὸ τὶς δέκα τοῦ φόρου του στὴν Οἰκονομικὴ Ἐφορία, σκέφθηκε πὼς ἂν πουλοῦσε ἕνα κομμάτι ὕφασμα πρὸς 32 δρχ. τὸ μέτρο, θὰ τοῦ ἔλειπαν ἀκόμα 320 δρχ., ἂν ὅμως τὸ πουλοῦσε πρὸς 40 δρχ. τὸ μέτρο, θὰ τοῦ περίσσευαν καὶ 200 δρχ. Πόσα μέτρα ἦταν τὸ κομμάτι αὐτὸ καὶ πόσος ὁλόκληρος ὁ φόρος;

313) Τρεῖς φίλοι Α, Β, Γ παίζουν ἀνὰ δύο «κορώνα - γράμματα» καὶ συμφωνοῦν ὅποιος χάνει νὰ διπλασιάζει τὰ χρήματα τοῦ ἄλλου, ποὺ κερδίζει. Πρῶτοι ἔπαιξαν οἱ Α, Β κι ἔχασε ὁ Α, ὕστερα οἱ Β, Γ κι ἔχασε ὁ Β καὶ στὸ τέλος οἱ Γ, Α κι ἔχασε ὁ Γ. Ἔτσι τελικὰ ὁ Α ἔχασε 60 δρχ., ὁ Β κέρδισε 55 δρχ. κι ὁ Γ ἔμεινε μὲ 40 δρχ. Πόσες δρχ. εἶχε ὁ καθένας ἀρχικά;

314) Τὸ δοχεῖο Α περιέχει 300 κιλὰ λάδι καὶ τὸ Β 340 κιλὰ διαφορετικῆς ποιότητας. Ἡ συνολικὴ ἀξία τοῦ λαδιοῦ εἶναι 13320 δρχ. Ἂν μεταγγίσουμε 90 κιλὰ ἀπὸ τὸ καθένα στὸ ἄλλο δοχεῖο, ἔχουμε μείγματα τῆς ἴδιας ἀξίας. Νὰ βρεῖτε τὴν τιμὴ τοῦ κιλοῦ κάθε μιᾶς ποιότητας λαδιοῦ.

315) Ἕνα βαρέλι περιέχει 240 κιλὰ κρασὶ μὲ 60 κιλὰ νερό, ἕνα ἄλλο περιέχει 150 κιλὰ κρασὶ μὲ 90 κιλὰ νερό. Πόσα κιλὰ ἀπὸ κάθε βαρέλι πρέπει νὰ πάρουμε, ὥστε μὲ τὴν ἀνάμειξή τους νὰ σχηματισθεῖ μεῖγμα ἀπὸ 105 κιλὰ κρασὶ καὶ 45 κιλὰ νερό;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

71. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟ ΤΜΗΜΑ (ΕΦΑΡΜΟΣΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ) ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ.

Α) Ἂς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο Ε, π.χ. τὸ ἐπίπεδο τοῦ πίνακα, καὶ πάνω σ᾽ αὐτὸ δύο διαφορετικὰ μεταξύ τους σημεῖα Α, Β (σχ. 71–1).

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα του τὰ Α, Β μπορεῖ νὰ διαγραφεῖ ἀπὸ ἕνα κινητὸ σημεῖο εἴτε κατὰ τὴ φορὰ ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετη φορά, δηλ. ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α.

Σχ. 71–1

Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα του τὰ Α, Β μαζὶ μὲ τὴ φορὰ ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β ὀνομάζεται τὸ **προσανατολισμένο τμῆμα** ἄλφα βῆτα εἴτε τὸ **ἐφαρμοστὸ διάνυσμα** ἄλφα βῆτα καὶ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{AB}$. Τὸ Α ὀνομάζεται **ἀρχὴ** τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, τὸ Β **πέρας** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

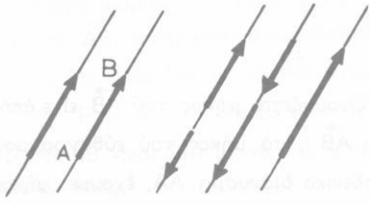
Ἐπίσης, τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ Α, Β μαζὶ μὲ τὴ φορὰ ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α ὀνομάζεται: τὸ προσανατολισμένο τμῆμα βῆτα ἄλφα εἴτε: τὸ **ἐφαρμοστὸ διάνυσμα** βῆτα ἄλφα καὶ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{BA}$. Τὸ Β ὀνομάζεται **ἀρχή,** τὸ Α **πέρας** τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{BA}$. Ὥστε: ἀπὸ κάθε, ὄχι μηδενικό, εὐθύγραμμο τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου Ε ὁρίζονται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα μὲ τὶς φορές τους ἀντίθετες.

Κάθε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, π.χ. $\overrightarrow{AB}$, τοῦ ἐπιπέδου Ε παριστάνεται γραφικῶς σ᾽ αὐτὸ μὲ εὐθ. τμῆμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖο παράγεται, μαζὶ μὲ μία **αἰχμὴ** στὸ πέρας του (Σχ. 71–1 καὶ 71–2).

Ἡ εὐθεία, πάνω στὴν ὁποία βρίσκεται ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, ὀνομάζεται **φορέας** (εἴτε στήριγμα) τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος. Στὸ σχ. 71–2 βλέπετε τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα: 1) $\overrightarrow{AB}$ μὲ φορέα του τὴν εὐθεία ε, 2) $\overrightarrow{A'B'}$ μὲ φορέα του τὴν εὐθεία ε′ καὶ 3) $\overrightarrow{B''A''}$ μὲ φορέα του τὴν εὐθεία ε″.

Β) Τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων ἑνὸς ἐπιπέδου Ε θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{D}$.

Ἔστω ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{D}$. Ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα στὸ $\mathcal{D}$, ποὺ οἱ φορεῖς τους εἶναι εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὸ φορέα τοῦ ΑΒ (Σχ. 71–2).



Σχ. 71–2

Ὅλα αὐτὰ τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἀποτελοῦν ἕνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ $\mathcal{D}$.

Ὅπως ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὁρίσαμε τὸ παραπάνω ὑποσύνολο τοῦ $\mathcal{D}$, ἔτσι μποροῦμε νὰ κάνουμε καὶ γιὰ κάθε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathcal{D}$. Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο τὸ $\mathcal{D}$ διαμερίζεται σὲ ὑποσύνολά του, ποὺ τὸ καθένα εἶναι διαφορετικὸ τοῦ κενοῦ, εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἕνωσή τους εἶναι τὸ $\mathcal{D}$. Δηλαδὴ μὲ τὸν προηγούμενο τρόπο διαμερίζεται τὸ $\mathcal{D}$ σὲ **κλάσεις ἰσοδυναμίας.** Κάθε μία ἀπ' αὐτὲς τὶς κλάσεις ἰσοδυναμίας ὀνομάζεται **διεύθυνση.**

Π.χ. ἡ κλάση ἰσοδυναμίας ποὺ ὁρίσαμε προηγουμένως ἀπὸ τὸ ΑΒ εἶναι μία διεύθυνση καὶ ὀνομάζεται **διεύθυνση τοῦ $\overrightarrow{AB}$.** Τὸ ΑΒ ἀνήκει σ' αὐτὴ τὴ διεύθυνση, ἤ, ὅπως ἀλλιῶς λέμε, τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἔχει αὐτὴ τὴ διεύθυνση. Ἡ διεύθυνση ἑνὸς ἐφαρμοστοῦ διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου Ε παριστάνεται καὶ καθορίζεται ἀπὸ τὸ φορέα του εἴτε ἀπὸ ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου Ε παράλληλη πρὸς τὸ φορέα του. Π.χ. ἡ διεύθυνση τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 71–3) παριστάνεται ἀπὸ τὴν εὐθεία ε τοῦ ἐπιπέδου Ε εἴτε ἀπὸ ὁποιαδήποτε παράλληλή της εὐθεία τοῦ Ε.

Γ) Ἐφαρμοστὰ διανύσματα μὲ τὴν ἴδια διεύθυνση 1) μπορεῖ νὰ ἔχουν τὴν ἴδια φορά, ὁπότε λέμε ὅτι: τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ εἶναι **ὁμόρροπο** πρὸς τὸ ἄλλο, ὅπως τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ (Σχ. 71–3). 2) μπορεῖ νὰ ἔχουν ἀντίθετες φορές, ὁπότε λέμε ὅτι: τὸ καθένα ἀπ' αὐτὰ εἶναι **ἀντίρροπο** πρὸς τὸ ἄλλο. Στὸ Σχ. 71–3 εἶναι: $\overrightarrow{AB}$ ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{B''A''}$ (καὶ $\overrightarrow{B''A''}$ ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{AB}$). Ἐπίσης εἶναι $\overrightarrow{A'B'}$ ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{B''A''}$ (καὶ $\overrightarrow{B''A''}$ ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$).

Σχ. 71–3

72. ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

Εἴδαμε ὅτι ἀπὸ κάθε ὄχι μηδενικὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ὁρίζονται δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$. **Δεχόμαστε** τώρα ὅτι καὶ ἀπὸ κάθε μηδενικὸ εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΑ παράγεται ἕνα (συμβατικὸ) ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, ποὺ τὸ ὀνομάζομε **μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα**, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο Α, καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\overrightarrow{AA}$ εἴτε μὲ $\overrightarrow{O_A}$. Τὸ Α ὀνομάζεται **ἀρχὴ** τοῦ $\overrightarrow{AA}$ καὶ (συγχρόνως) **πέρας** τοῦ $\overrightarrow{AA}$. Γιὰ τὸ μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα δὲν ὁρίζουμε οὔτε διεύθυνση οὔτε φορά.

73. ΜΗΚΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

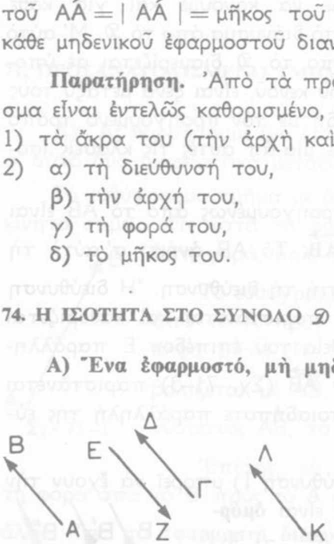
Ἔστω ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Ὀνομάζεται **μῆκος** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἴτε **ἀπόλυτη τιμὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$, καὶ συμβολίζεται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$, τὸ μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος μὲ ἄκρα τὰ Α, Β. Π.χ. γιὰ τὸ μηδενικὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$, ἔχουμε: μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AA} = |\overrightarrow{AA}| =$ μῆκος τοῦ εὐθύγρ. τμήματος $AA = 0$. Γενικὰ τὸ μῆκος κάθε μηδενικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἀπὸ ὁρισμὸ ὁ ἀριθμὸς 0.

Παρατήρηση. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα εἶναι ἐντελῶς καθορισμένο, ὅταν γνωρίζουμε:

1) τὰ ἄκρα του (τὴν ἀρχὴ καὶ τὸ πέρας του) ἢ
2) α) τὴ διεύθυνσή του,
β) τὴν ἀρχή του,
γ) τὴ φορά του,
δ) τὸ μῆκος του.

74. Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathscr{D}$ ΤΩΝ ΕΦΑΡΜΟΣΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Α) Ἕνα ἐφαρμοστό, μὴ μηδενικό, διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται ἴσο ἢ ἰσοδύναμο μὲ ἄλλο ἐφαρμοστὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τὴν ἴδια διεύθυνση καὶ τὴν ἴδια φορά. Π.χ. στὸ Σχ. 74-1 τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ἐπίσης εἶναι τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{K\Lambda}$. Συμβολικὰ γράφουμε: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 74—1

Κάθε μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ὁρίζεται ὡς ἴσο πρὸς κάθε ἄλλο ἐπίσης μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα.

Β) Ἡ ἔννοια ἰσότητας, ποὺ ὁρίσαμε ἐδῶ, ἔχει τὶς γνωστὲς ἰδιότητες:

α) ἀνακλαστική : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

β) συμμετρική : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$

γ) μεταβατική : $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}\\ \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{K\Lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{K\Lambda}$

Τὸ ὅτι οἱ προηγούμενες ἰδιότητες ἰσχύουν γιὰ τὰ μὴ μηδενικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ἐπαληθεύεται εὔκολα μὲ διαστημόμετρο καὶ μὲ παράλληλη μετάθεση τοῦ γνώμονα. Γιὰ τὰ ἐφαρμοστὰ μηδενικὰ διανύσματα οἱ ἰδιότητες αὐτὲς εἶναι τελείως φανερές.

Παρατηρήσεις : 1) Εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν ἔχουμε ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, π.χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$, ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ποὺ τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$. (Παρατηρῆστε καὶ τὸ Σχ. 75–1 παρακάτω).

2) Ἔπειτα ἀπὸ τὴ 2η ἰδιότητα τῆς ἔννοιας τῆς ἰσότητας, ἀντὶ νὰ λέμε ὅτι τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, μποροῦμε νὰ λέμε ὅτι τὰ : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

3) Ὁ ὁρισμὸς ποὺ δώσαμε γιὰ τὴν ἰσότητα δύο ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἑξῆς ὁρισμό. Δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ἴσα, ἂν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΔ (ἀρχὴ τοῦ ἑνός, πέρας τοῦ ἄλλου) καὶ ΓΒ ἔχουν τὸ ἴδιο μέσο (γιατί;).

75. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ἕνα ἐφαρμοστό, ὄχι μηδενικό, διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **ἀντίθετο** ἄλλου $\overrightarrow{EZ}$, ἄν, καὶ μόνον ἄν, ἔχει τὸ ἴδιο μῆκος μὲ τὸ $\overrightarrow{EZ}$, τὴν ἴδια διεύθυνση μὲ τὸ $\overrightarrow{EZ}$ καὶ φορὰ τὴν ἀντίθετη τῆς φορᾶς τοῦ $\overrightarrow{EZ}$. Π.χ. στὸ Σχ. 74–1 τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα ἀντίθετο διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{EZ}$. Ἕνα ἄλλο διάνυσμα ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{EZ}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

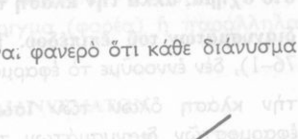
Γιὰ νὰ συμβολίσουμε ὅτι, π.χ., τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα διάνυσμα ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{EZ}$, γράφουμε: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EZ}$.

Κάθε μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα **ὁρίζεται** ὡς ἕνα ἀντίθετο πρὸς κάθε ἄλλο μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα.

Ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνα ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{EZ}$, τότε εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε διάνυσμα ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετο πρὸς τὸ $\overrightarrow{EZ}$ καὶ πρὸς κάθε ἴσο του. (Βλέπετε καὶ Σχ. 75–1).

Προφανῶς ἕνα ἀντίθετο ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι καὶ τὸ $\overrightarrow{BA}$, δηλ. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Παρατήρηση : Ἂν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε θὰ εἶναι καὶ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (γιατί;). Γι' αὐτὸ ἐπιτρέπεται τότε νὰ λέμε: τὰ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα μεταξύ τους καὶ νὰ γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$.

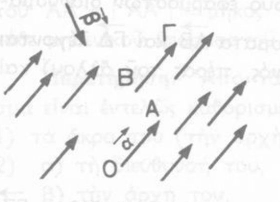


Σχ. 75–1

76. ΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Ε), $\mathscr{D}$ τὸ σύνολο τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ (Ε) καὶ $\overrightarrow{AB}$ ἕνα διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$, (τὸ $\overrightarrow{AB}$ δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἕνα μηδενικὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα). Γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἴσα μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$. **Τὸ σύνολο (ἢ κλάση) ὅλων τῶν ἴσων μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζεται : ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου** καὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$ (καθὼς καὶ κάθε ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}$) ὀνομάζεται: **ἕνας ἀντιπρόσωπος** τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος.

Ὅπως ἀπὸ τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὁρίσαμε ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα, μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε ἀπὸ κάθε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Ἂν γίνει αὐτό, τότε τὸ $\mathscr{D}$ θὰ ἔχει διαμερισθεῖ σὲ κλάσεις (ὑποσύνολα) ξένες μεταξύ τους ἀνὰ δύο, καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ὁποῖες εἶναι (ἀπὸ ὁρισμὸ) **ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα.**



Σχ. 76–1

Ἕνα ὁποιοδήποτε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλεύθερου διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου.

Ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι καὶ τὸ **μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα,** δηλ. τὸ σύνολο ὅλων τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου. Θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\overrightarrow{0}$.

Ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα θὰ συμβολίζεται μὲ ἕνα μικρὸ γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μαζὶ μὲ ἕνα μικρὸ βέλος πάνω ἀπὸ αὐτό. Ἔτσι, **ὅταν π.χ. λέμε τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ (Σχ. 76-1), δὲ θὰ ἐννοοῦμε τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, ποὺ βλέπουμε στὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὴν κλάση τῶν ἴσων μὲ τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.** Ἐπίσης ὅταν λέμε: τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ (Σχ. 76–1), δὲν ἐννοοῦμε τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, ποὺ βλέπουμε στὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὴν κλάση ὅλων τῶν ἴσων μὲ τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ τοῦ σχήματος ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.

Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος $\overrightarrow{\alpha}$, γράφουμε: $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{AB}$.

Τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἐλεύθερων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου θὰ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\mathscr{D}_0$.

77. ΜΗΚΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Μῆκος ἢ ἀπόλυτη τιμὴ ἑνὸς διανύσματος ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}_0$, δηλαδὴ ἑνὸς ἐλεύθερου διανύσματος, ἔστω $\vec{\alpha}$, λέγεται τὸ μῆκος ἑνὸς ἀντιπροσώπου του καὶ συμβολίζεται μὲ $|\vec{\alpha}|$.

Π.χ., γιὰ τὸ μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα 0, ἔχουμε:

$$|\vec{0}| = |\overrightarrow{AA}| = 0$$

78. Η ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathscr{D}_0$, ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Ἔστω ὅτι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου (Ε). Θὰ λέμε ὅτι **τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\beta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἐφαρμοστὸ $\overrightarrow{AB}$,** ποὺ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$, **εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐφαρμοστὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$,** ποὺ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\beta}$.

Συμβολικὰ γράφουμε: $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι καὶ γιὰ τὴν ἔννοια ἰσότητας ποὺ ὁρίσαμε ἐδῶ, ἰσχύουν οἱ τρεῖς γνωστὲς ἰδιότητες, δηλ. ἡ ἀνακλαστική, ἡ συμμετρικὴ καὶ ἡ μεταβατική.

79. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ $\mathscr{D}_0$. ΣΥΓΓΡΑΜΜΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

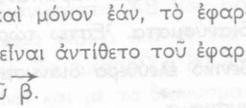
Α) Θὰ λέμε ὅτι τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ εἶναι ἀντίθετο τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{\beta}$, καὶ θὰ συμβολίζουμε $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, ποὺ εἶναι ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$, εἶναι ἀντίθετο τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ποὺ εἶναι ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\beta}$.

Εἶναι φανερὸ ἀπὸ τὸν προηγούμενο ὁρισμὸ ὅτι 1) γιὰ κάθε $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ ὑπάρχει ἕνα μόνο ἀντίθετό του διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}_0$, καὶ 2) ἂν $\vec{\alpha}'$ εἶναι τὸ ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha}$, τότε τὸ $\vec{\alpha}$ εἶναι τὸ ἀντίθετο τοῦ $\vec{\alpha}'$. Συμβολικὰ γράφουμε $\vec{\alpha} = -\vec{\alpha}'$ καὶ $\vec{\alpha}' = -\vec{\alpha}$. Ἀντίθετο τοῦ $\vec{0}$ ὁρίζεται τὸ ἴδιο τὸ $\vec{0}$. Δηλ. $-\vec{0} = \vec{0}$.

Β) Δύο διανύσματα, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο στήριγμα (φορέα) ἢ παράλληλα στηρίγματα, λέγονται συγγραμμικά.

80. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathscr{D}_0$, ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Α) Πρόσθεση. Παρατηρῆστε τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$, ποὺ βλέπετε στὸ παραπλεύρως σχῆμα 80–1. Τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ ὀνομάζεται **ἕνα διαδοχικὸ**(*) **διάνυσμα** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ λέγεται: **τὸ ἄθροισμα** τοῦ ἐφαρμοστοῦ $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ ἐφαρμοστὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὸ ἄθροι-

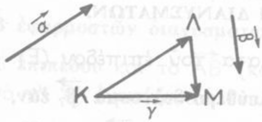


Σχ. 80–1

(*) Δύο ἢ περισσότερα ἐφαρμοστὰ διανύσματα λέγονται διαδοχικά, ὅταν ἡ ἀρχὴ τοῦ καθενὸς συμπίπτει μὲ τὸ πέρας τοῦ προηγούμενου, ἀπὸ τὸ δεύτερο κι ἔπειτα.

σμα αὐτὸ $\overrightarrow{ΑΓ}$ εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα, ποὺ ἔχει ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τοῦ πρώτου καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ δεύτερου ἀπὸ τὰ δοσμένα ἐφαρμοστὰ διαδοχικὰ διανύσματα. Γράφουμε $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΓ} = \overrightarrow{ΑΓ}$.

Ἂς πάρουμε τώρα δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 80–2). Ὁρίζουμε ὁπουδήποτε στὸ ἐπίπεδο ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΚΛ} = \vec{α}$. Κατόπι ὁρίζουμε ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΛΜ} = \vec{β}$ διαδοχικὸ τοῦ $\overrightarrow{ΚΛ}$. Ὁρίζεται τότε, ὡς ἄθροισμα τοῦ $\overrightarrow{ΚΛ}$ σὺν τὸ $\overrightarrow{ΛΜ}$, τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΚΜ}$. Τὸ



Σχ. 80–2

ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{γ} = \overrightarrow{ΚΜ}$ λέγεται: ἄθροισμα τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{α}$ σὺν τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{β}$. Συμβολικὰ γράφουμε:

$$\vec{α} + \vec{β} = \vec{γ}$$

Ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκουμε τὸ ἄθροισμα δύο διανυσμάτων τοῦ συνόλου $\mathscr{D}_0$, **λέγεται πρόσθεση μέσα στὸ** $\mathscr{D}_0$.

Ὁρίσαμε παραπάνω πρόσθεση μὲ δύο προσθετέα, ὄχι μηδενικά, ἐλεύθερα διανύσματα. Ἔστω τώρα ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{α}$ (ὄχι μηδενικὸ) καὶ τὸ μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{0}$. Ὁρίζουμε ὡς ἄθροισμα $\vec{α} + \vec{0}$ τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{α}$.

Γράφουμε: $\vec{α} + \vec{0} = \vec{α}$

Πραγματικά: $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΒ} = \overrightarrow{ΑΒ}$ $(\vec{α} = \overrightarrow{ΑΒ},\ \vec{0} = \overrightarrow{ΒΒ})$

Δηλαδὴ τὸ μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα εἶναι **οὐδέτερο στοιχεῖο** γιὰ τὴν πρόσθεση μέσα στὸ $\mathscr{D}_0$.

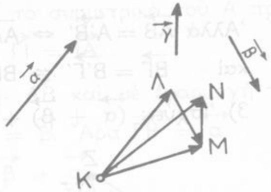
Ἂς ζητήσουμε τώρα νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα δύο ἀντίθετων ἐλεύθερων διανυσμάτων: $\vec{α}$ καὶ $-\vec{α}$.

Ἂν $\overrightarrow{ΑΒ}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{α}$, τότε $\overrightarrow{ΒΑ}$ εἶναι ὁ ἀντιπρόσωπος τοῦ $-\vec{α}$ καὶ διαδοχικὸ διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{ΑΒ}$. Ἄρα εἶναι $\overrightarrow{ΑΒ} + \overrightarrow{ΒΑ} = \overrightarrow{ΑΑ} = \vec{O}_Α$ καὶ ἑπομένως $\vec{α} + (-\vec{α}) = \vec{0}$.

Β) Ἄθροισμα μὲ περισσότερα ἀπὸ δύο προσθετέα ἐλεύθερα διανύσματα.

Ἂν $\vec{α}$, $\vec{β}$, $\vec{γ}$ (Σχ. 80–3) εἶναι τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου, ὁρίζουμε ὡς ἄθροισμα: $\vec{α}$ σὺν $\vec{β}$ σὺν $\vec{γ}$, καὶ τὸ συμβολίζουμε μὲ $\vec{α} + \vec{β} + \vec{γ}$, τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα, ποὺ προκύπτει ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὅτι $\overrightarrow{ΚΛ} = \vec{α}$, $\overrightarrow{ΛΜ} = \vec{β}$, $\overrightarrow{ΜΝ} = \vec{γ}$. Δηλ. τὰ διαδοχικὰ $\overrightarrow{ΚΛ}$, $\overrightarrow{ΛΜ}$, $\overrightarrow{ΜΝ}$ εἶναι ἀντιπρόσωποι τῶν $\vec{α}$, $\vec{β}$,

$\vec{\gamma}$. Ὁρίζουμε πρῶτα τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{K\Lambda} + \overrightarrow{\Lambda M}$, δηλ. τὸ $\overrightarrow{KM}$. Ἔπειτα ὁρίζουμε τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MN}$. Προκύπτει τότε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{KN}$. Τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\delta} = \overrightarrow{KN}$ εἶναι ἀπὸ ὁρισμὸ τὸ «ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$».



Σχ. 80–3

Εἶναι λοιπόν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\delta}$.

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε, γιὰ νὰ ὁρίσουμε ἄθροισμα μὲ τέσσερα, πέντε κλπ. προσθετέα ἐλεύθερα διανύσματα.

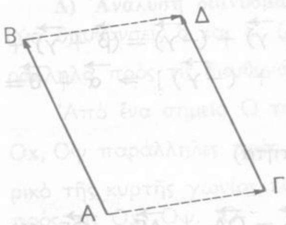
Ἔχουμε λ.χ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} + \vec{\delta} = [(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}] + \vec{\delta}$ κλπ.

Γ) Ἰδιότητες.

1) Ἔστω ὅτι $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι δύο ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα. Τότε ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$$

Πραγματικά, σύμφωνα μὲ τὸ δεύτερο ὁρισμό, ποὺ δώσαμε γιὰ τὰ ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα (§ 74, Παρατήρηση 3), τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ὁρίζουν τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ καὶ οἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΓΒ ἔχουν τὸ ἴδιο μέσο (Σχ. 80–4). Ἀλλὰ τότε τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{B\Delta}$. Ἄρα εἶναι $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$. Καὶ ἀντίστροφα, ἂν $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, πάλι ὁρίζεται τὸ παραλληλόγραμμο ΑΓΒΔ κλπ.

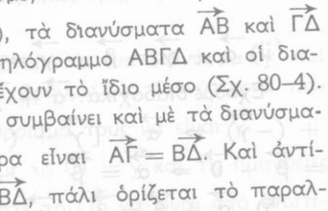


Σχ. 80–4

Ἑπομένως ἰσχύει: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$.

2) Τὸ ἄθροισμα δύο ἐλεύθερων διανυσμάτων δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοὺς ἀντιπροσώπους τους, ποὺ παίρνουμε γιὰ νὰ τὸ βροῦμε, καὶ εἶναι ἕνα καὶ τὸ ἴδιο ἐλεύθερο διάνυσμα, ὅποιους ἀντιπροσώπους τους κι ἂν πάρουμε.

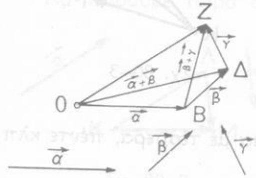
Πραγματικὰ (Σχ. 80–5): Ἂν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος ἑνὸς ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἀντιπρόσωπος τοῦ ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{\beta}$, τὸ $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Ἂν τώρα πάρουμε δύο ἄλλους ἀντιπροσώπους τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$, π.χ. τοὺς $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ ἀντιστοίχως, τότε τὸ $\overrightarrow{A'\Gamma'}$ εἶναι ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



Σχ. 80–5

'Αλλὰ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$
καὶ $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$ $\Big\} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{\Gamma\Gamma'} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$.

3) 'Ισχύει: $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστικὴ ἰδιότητα)



Σχ. 80–6

Πραγματικά, ἂν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εἶναι τρία ἐλεύθερα διανύσματα, κατασκευάζουμε $\overrightarrow{OB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{B\Delta} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\Delta Z} = \vec{\gamma}$.

Ἔχουμε: $\overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ καὶ $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{\Delta Z} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma}$ (1)

Ἐπίσης ἔχουμε: $\overrightarrow{BZ} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ καὶ $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BZ} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (2)

'Απὸ τὶς (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι:

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$$

4) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ (ἰδιότητα διαγραφῆς)

i) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ (ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τὴν ἰδιότητα 2)

ii) $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Ἔχουμε διαδοχικά: $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) = (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) + (-\vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{\alpha} + [\vec{\gamma} + (-\vec{\gamma})] = \vec{\beta} + [\vec{\gamma} + (-\vec{\gamma})] \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\beta} + \vec{0} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$

5) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότητα)

i) Διανύσματα ὄχι συγγραμμικὰ (Σχ. 80–7).

Ἂν εἶναι $\overrightarrow{O\Delta} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta E} = \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{OE}$ (1)

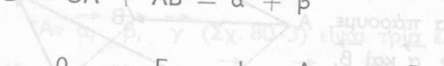
'Αλλὰ καὶ τὰ $\overrightarrow{OB}$ καὶ $\overrightarrow{BE}$ εἶναι ἀντιπροσωπευτικὰ τῶν $\vec{\beta}$ καὶ $\vec{\alpha}$ ἀντιστοίχως καὶ τότε εἶναι: $\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE}$ (2)

'Απὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

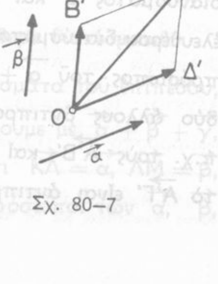
ii) Συγγραμμικὰ διανύσματα (Σχ. 80–8).

Ἂν εἶναι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$, τότε εἶναι

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (3)



Σχ. 80–8



Σχ. 80–7

Ἂν εἶναι τὸ Ι μέσο τοῦ τμήματος ΟΒ καὶ Γ τὸ συμμετρικὸ τοῦ Α πρὸς κέντρο συμμετρίας τὸ Ι, τότε εἶναι $\vec{OI} = \vec{IB}$ καὶ $\vec{\Gamma I} = \vec{IA}$.

Ἡ $\vec{OI} = \vec{IB}$ γράφεται: $\vec{O\Gamma} + \vec{\Gamma I} = \vec{IA} + \vec{AB}$ καὶ μὲ ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητας τῆς διαγραφῆς: $\vec{O\Gamma} = \vec{AB}$, δηλ. $\vec{O\Gamma} = \vec{\beta}$. Ἄρα $\vec{\Gamma B} = \vec{\alpha}$.

Εἶναι λοιπὸν τώρα: $\vec{OB} = \vec{O\Gamma} + \vec{\Gamma B} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (4)

Ἀπὸ τὶς (3) καὶ (4) προκύπτει: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$.

6) $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

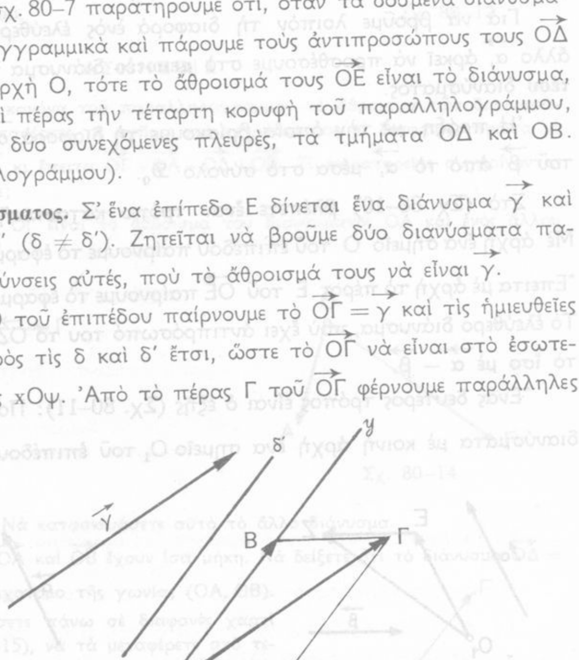
Ἂν $\vec{AB} = \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{BX} = \vec{x}$ μὲ ἄγνωστο τὸ πέρας Χ τοῦ $\vec{BX}$, τότε ἡ $\vec{\alpha} + \vec{x} = \vec{\alpha}$ γράφεται: $\vec{AB} + \vec{BX} = \vec{AB}$, δηλ. $\vec{AX} = \vec{AB}$, ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι: $X \equiv B$. Ἀλλὰ τότε $\vec{BX} = \vec{BB} = \vec{O}_B$. Ἄρα $\vec{x} = \vec{0}$.

Παρατήρηση: Στὸ σχ. 80–7 παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν τὰ δοσμένα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ δὲν εἶναι συγγραμμικὰ καὶ πάρουμε τοὺς ἀντιπροσώπους τους $\vec{O\Delta}$ καὶ $\vec{OB}$ ἀπὸ τὴν ἴδια ἀρχὴ Ο, τότε τὸ ἄθροισμά τους $\vec{OE}$ εἶναι τὸ διάνυσμα, ποὺ ἔχει ἀρχὴ τὸ Ο καὶ πέρας τὴν τέταρτη κορυφὴ τοῦ παραλληλογράμμου, ποὺ κατασκευάζεται μὲ δύο συνεχόμενες πλευρές, τὰ τμήματα ΟΔ καὶ ΟΒ. (Κανόνας τοῦ παραλληλογράμμου).

Δ) Ἀνάλυση διανύσματος. Σ' ἕνα ἐπίπεδο Ε δίνεται ἕνα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ καὶ δύο διευθύνσεις δ καὶ δ' (δ ≠ δ'). Ζητεῖται νὰ βροῦμε δύο διανύσματα παράλληλα πρὸς τὶς διευθύνσεις αὐτές, ποὺ τὸ ἄθροισμά τους νὰ εἶναι $\vec{\gamma}$.

Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου παίρνουμε τὸ $\vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ καὶ τὶς ἡμιευθεῖες Οx, Οψ παράλληλες πρὸς τὶς δ καὶ δ' ἔτσι, ὥστε τὸ $\vec{O\Gamma}$ νὰ εἶναι στὸ ἐσωτερικὸ τῆς κυρτῆς γωνίας xΟψ. Ἀπὸ τὸ πέρας Γ τοῦ $\vec{O\Gamma}$ φέρνουμε παράλληλες πρὸς τὶς Οx, Οψ. Ὁρίζονται τότε τὰ διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{OB} = \vec{\beta}$, ποὺ εἶναι αὐτά, τὰ ὁποῖα ζητοῦμε, γιατὶ εἶναι:

$\vec{O\Gamma} = \vec{OA} + \vec{OB}$, ἄρα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.



Σχ. 80–9

Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται **ἀνάλυση** διανύσματος σὲ δύο ἄλλα κατὰ τὶς διευθύνσεις ποὺ μᾶς δόθηκαν.

Ε) Ἀφαίρεση. Δίνονται δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ καὶ ζητεῖται τρίτο διάνυσμα $\vec{x}$ τέτοιο, ὥστε, ὅταν προστεθεῖ στὸ δεύτερο, νὰ δίνει ἄθροισμα τὸ πρῶτο. Δηλαδή:

$$\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$$

Ἔχουμε διαδοχικά: $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \Leftrightarrow (-\vec{\beta}) + (\vec{\beta} + \vec{x}) = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \leftrightarrow [(-\vec{\beta}) + \vec{\beta}] + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$.

Ὥστε τὸ διάνυσμα $\vec{x}$ ὑπάρχει καὶ εἶναι τὸ $\vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$. Τὸ διάνυσμα αὐτὸ λέγεται διαφορὰ $\vec{\alpha}$ πλὴν $\vec{\beta}$ καὶ συμβολίζεται μὲ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

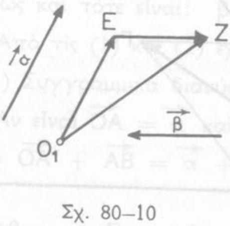
Ὥστε εἶναι: $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$.

Γιὰ νὰ βροῦμε λοιπὸν τὴ διαφορὰ ἑνὸς ἐλεύθερου διανύσματος $\vec{\beta}$ ἀπὸ ἄλλο $\vec{\alpha}$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε στὸ **μειωτέο** διάνυσμα τὸ ἀντίθετο τοῦ **ἀφαιρετέου** διανύσματος.

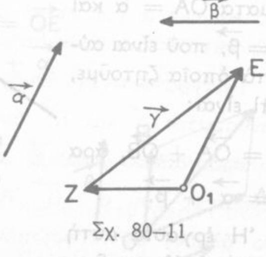
Ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκουμε τὴ διαφορὰ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, λέγεται ἀφαίρεση τοῦ $\vec{\beta}$ ἀπὸ τὸ $\vec{\alpha}$, μέσα στὸ σύνολο $\mathscr{D}_0$.

Στὸ (Σχ. 80–10) βλέπετε ἕναν τρόπο κατασκευῆς τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$: Μὲ ἀρχὴ ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου παίρνουμε τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OE} = \vec{\alpha}$. Ἔπειτα μὲ ἀρχὴ τὸ πέρας Ε τοῦ $\overrightarrow{OE}$ παίρνουμε τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{EZ} = -\vec{\beta}$. Τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα, ποὺ ἔχει ἀντιπρόσωπό του τὸ $\overrightarrow{OZ}$, εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ἴσο μὲ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Ἕνας δεύτερος τρόπος εἶναι ὁ ἑξῆς (Σχ. 80–11): Παίρνουμε δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα μὲ κοινὴ ἀρχὴ ἕνα σημεῖο O_1 τοῦ ἐπιπέδου $\overrightarrow{O_1E} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{O_1Z} = \vec{\beta}$.



Σχ. 80–10



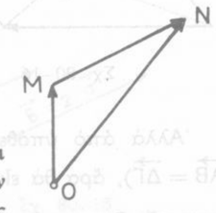
Σχ. 80–11

Τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\gamma}$, ποὺ ἔχει ἀντιπρόσωπό του τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ZE}$, εἶναι τὸ διάνυσμα τὸ ἴσο μὲ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Πραγματικά, $\overrightarrow{O_1Z} + \overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{O_1E} \Rightarrow \overrightarrow{ZE} = \overrightarrow{O_1E} - \overrightarrow{O_1Z} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Σημείωση: Τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴ ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου καὶ πέρας ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου, λέγεται **διανυσματικὴ ἀκτίνα** τοῦ σημείου Μ ὡς πρὸς ἀρχὴ τὸ Ο.

5) Ἂν $\overrightarrow{MN}$ εἶναι ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καὶ Ο ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, τότε εἶναι φανερὸ ὅτι θὰ ἔχουμε (Σχ. 80–12): $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$, ἄρα $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} + (-\overrightarrow{OM})$, δηλ. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.



Σχ. 80–12

Ὥστε: Κάθε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι διαφορὰ τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας τοῦ πέρατός του μεῖον τὴ διανυσματικὴ ἀκτίνα τῆς ἀρχῆς του, ὡς πρὸς ἀρχὴ τους ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

316) Νὰ βρεῖτε μὲ τὸν κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τοῦ Σχ. 80-13 (ἀφοῦ μεταφέρετε τὸ σχῆμα στὸ τετράδιό σας μὲ διαφανὲς) πρῶτα μὲ τὴ σειρὰ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta}$ κι ἔπειτα $\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{O\Delta} + \overrightarrow{OB}$. Τί παρατηρεῖτε συγκρίνοντας τὰ διανύσματα, ποὺ βρίσκετε;

317) Στὸ Σχ. 80-14 τὸ $\overrightarrow{O\Gamma}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ καὶ ἑνὸς ἄλλου

Σχ. 80–13

Σχ. 80–14

διανύσματος μὲ ἀρχὴ τὸ Α. Νὰ κατασκευάσετε αὐτὸ τὸ ἄλλο διάνυσμα.

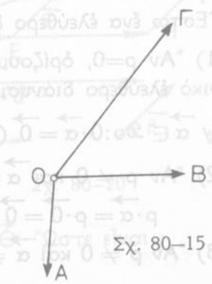
318) Δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ ἔχουν ἴσα μήκη. Νὰ δείξετε ὅτι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ἔχει φορέα τὴ διχοτόμο τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΒ).

319) Ἀφοῦ ἀποτυπώσετε πάνω σὲ διαφανὲς χαρτὶ τὰ διανύσματα τοῦ Σχ. (80-15), νὰ τὰ μεταφέρετε στὸ τετράδιό σας καί, σὲ τρία χωριστὰ σχεδιάσματα, νὰ ἐκτελέσετε τὶς ἀκόλουθες πράξεις:

α) $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{O\Gamma}$

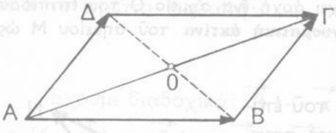
β) $\overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma})$

γ) $(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma}) + \overrightarrow{OB}$



Σχ. 80–15

Πρέπει νὰ βρεῖτε τρία ἴσα διανύσματα. Θυμᾶστε ἀντίστοιχες ἰσότητες ἀπὸ τὸν ἀλγεβρικὸ λογισμό;



Σχ. 80–16

320) Νὰ δείξετε μὲ τὴ βοήθεια τῶν διανυσμάτων ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦν ἡ μιὰ τὴν ἄλλη.

Λύση. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα παραλληλόγραμμο (Σχ. 80–16) καὶ Ο τὸ μέσο τῆς διαγωνίου ΑΓ. Παρατηροῦμε ὅτι εἶναι: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta O} + \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Ἀλλὰ ἀπὸ ὑπόθεση τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι ἴσα ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$), ἄρα θὰ εἶναι: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Delta O} + \overrightarrow{O\Gamma}$. Καὶ μὲ ἐφαρμογὴ τῆς ἰδιότητας τῆς διαγραφῆς (ἐπειδὴ $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{O\Gamma}$) θὰ ἔχουμε:

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Delta O} + \overrightarrow{O\Gamma} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Delta O}$$

Ἀλλά, ἀφοῦ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OB}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta O}$ εἶναι ἴσα, ἢ βρίσκονται πάνω στὸν ἴδιο φορέα ἢ σὲ παράλληλους φορεῖς. Ἔχουν ὅμως ἕνα κοινὸ σημεῖο, τὸ Ο, ἄρα εἶναι στὸν ἴδιο φορέα καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Delta O}$, τὸ Ο εἶναι μέσο τῆς διαγωνίου ΔΒ.

321) Νὰ βρεῖτε τὰ ἀκόλουθα διανύσματα (χωρὶς σχῆμα):

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} =$; β) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$:

γ) $\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{A\Gamma}) =$; δ) $(\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{A\Gamma}) - \overrightarrow{A\Delta}$;

Σχ. 80–17

322) Στὸ σχ. 80-17 ἔχετε δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. Ζητεῖται νὰ βρεῖτε τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα τὸ ἴσο μὲ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ κατὰ δύο τρόπους (ἀφοῦ μεταφέρετε μὲ διαφανὲς χαρτὶ τὰ διανύσματα στὸ τετράδιό σας). Νὰ βρεῖτε ἐπίσης τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα τὸ ἴσο μὲ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

Ζ) Γινόμενο πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ διάνυσμα.

Ἔστω ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καὶ ρ πραγματικὸς ἀριθμός.

1) Ἂν ρ=0, ὁρίζουμε ὡς γινόμενο τοῦ 0 ἐπὶ τὸ α, συμβολικὰ $0 \cdot \vec{\alpha}$, τὸ μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα. Δηλαδή:

$\forall\ \vec{\alpha} \in \mathscr{D}o : 0 \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ (ἀπὸ ὁρισμὸ)

2) Ἂν $\rho \neq 0$ καὶ $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ὁρίζουμε:

$\rho \cdot \vec{\alpha} = \rho \cdot \vec{0} = \vec{0}$

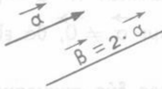
3) Ἂν $\rho \neq 0$ καὶ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε ὁρίζουμε ὡς **τὸ γινόμενο τοῦ ρ ἐπὶ τὸ ἐλεύ-**

θερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$, καὶ συμβολίζουμε $\rho\cdot\vec{\alpha}$, **τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα** $\vec{\beta}$, **ποὺ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:**

Διεύθυνσή του ἡ διεύθυνση τοῦ $\vec{\alpha}$, φορά του ἡ φορὰ τοῦ $\vec{\alpha}$, ἂν $\rho > 0$, ἢ ἡ ἀντίθετή της, ἂν $\rho < 0$ καὶ μῆκος του ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $|\rho|\cdot|\vec{\alpha}|$.

Γράφουμε συμβολικὰ $\vec{\beta} = \rho\vec{\alpha}$.

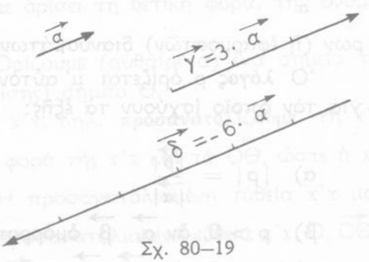
Π.χ. στὸ παραπλεύρως σχῆμα 80–18 εἶναι $\vec{\beta} = 2\cdot\vec{\alpha}$, δηλ. τὸ $\vec{\beta}$ εἶναι τὸ ὁμόρροπο τοῦ $\vec{\alpha}$ ἐλεύθερο διάνυσμα μὲ μῆκος $2\cdot|\vec{\alpha}|$.



Ἡ πράξη, μὲ τὴν ὁποία βρίσκουμε τὸ $\vec{\beta}$ ἀπὸ τὸν 2 καὶ τὸ $\vec{\alpha}$, λέγεται πολλαπλασιασμὸς τοῦ $\vec{\alpha}$ ἐπὶ τὸν 2.

Σχ. 80–18

Στὸ Σχ. 80–19 βλέπετε τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\cdot\vec{\alpha}$ καὶ τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\delta} = -6\cdot\vec{\alpha}$.



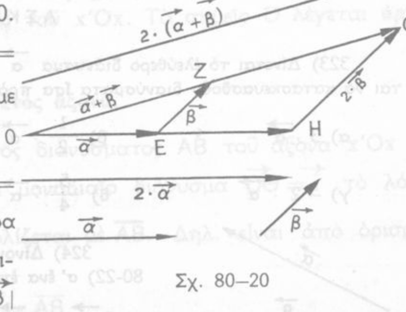
Ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α) $(-2)\cdot(3\vec{\alpha}) = -6\cdot\vec{\alpha} = (-2\cdot3)\vec{\alpha}$, ὅπως φαίνεται στὸ Σχ. 80–19 καὶ γενικὰ $\lambda\cdot(\rho\vec{\alpha}) = (\lambda\cdot\rho)\cdot\vec{\alpha}$, ὅπου λ, ρ, πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\vec{\alpha}$ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα.

Σχ. 80–19

β) $\rho\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = \rho\cdot\vec{\alpha}+\rho\cdot\vec{\beta}$, ὅπου ρ ὁποιοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ὁποιαδήποτε ἐλεύθερα διανύσματα.

Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ ἐπαληθεύεται εὔκολα π.χ. γιὰ $\rho = 2$, μὲ τὸ Σχ. 80–20. Παίρνουμε $\overrightarrow{OE} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{EZ} = \vec{\beta}$, ἄρα $\overrightarrow{OZ} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Στὴν ἡμιευθεία ΟΕ παίρνουμε $\overrightarrow{EH} = \vec{\alpha}$, ὁπότε $\overrightarrow{OH} = 2\cdot\vec{\alpha}$.



Στὴν ἡμιευθεία ΟΖ παίρνουμε $\overrightarrow{Z\Theta} = \overrightarrow{OZ}$, ὁπότε $\overrightarrow{O\Theta} = 2\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta})$. Ἐὰν τώρα χαράξουμε τὸ ΗΘ, μποροῦμε νὰ διαπιστώσουμε μὲ τὸ διαβήτη ὅτι $H\Theta = 2\cdot|\vec{\beta}|$

Σχ. 80–20

καὶ μὲ παράλληλη μετάθεση τοῦ γνώμονα ὅτι $\overrightarrow{EZ}\,||\,\overrightarrow{H\Theta}$. Ὥστε εἶναι:

$\overrightarrow{O\Theta} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{H\Theta}$, δηλαδὴ $2\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 2\cdot\vec{\alpha} + 2\cdot\vec{\beta}$.

γ) $(\rho_1+\rho_2)\vec{\alpha} = \rho_1\vec{\alpha} + \rho_2\vec{\alpha}$, ποὺ ἐπαληθεύεται πολὺ εὔκολα. Π.χ.

$$2\cdot\vec{\alpha} + \vec{\alpha} = 2\cdot\vec{\alpha} + 1\cdot\vec{\alpha} = (2+1)\vec{\alpha} = 3\cdot\vec{\alpha}$$

Παρατήρηση: Ἂν $\lambda, \mu \in \mathrm{R}$ καὶ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda\cdot\vec{\alpha} = \mu\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda = \mu$.

Πραγματικά: $\lambda\cdot\vec{\alpha} = \mu\cdot\vec{\alpha} \Rightarrow \lambda\cdot\vec{\alpha} - \mu\cdot\vec{\alpha} = \vec{0} \Rightarrow (\lambda-\mu)\vec{\alpha} = \vec{0}$ καί, ἐπειδὴ ὑποθέσαμε $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, θὰ εἶναι $\lambda - \mu = 0$, δηλ. $\lambda = \mu$.

Η) Λόγος δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων.

Τὴν ἰσότητα $\vec{\beta} = \rho\cdot\vec{\alpha}$ μὲ $\rho \in \mathrm{R}$, $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ **συμφωνοῦμε** νὰ τὴ γράφουμε καὶ ὡς $\dfrac{\vec{\beta}}{\vec{\alpha}} = \rho$. Εἰσάγουμε ἔτσι τὴν ἔννοια τοῦ λόγου δύο συγγραμμικῶν ἐλεύθερων (ἢ ἐφαρμοστῶν) διανυσμάτων $\vec{\beta}$ καὶ $\vec{\alpha}$ μὲ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$.

Ὁ **λόγος** ρ ὁρίζεται μ' αὐτὸν τὸν τρόπο ὡς ὁ πραγματικὸς ἀριθμός, γιὰ τὸν ὁποῖο ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & |\rho| = \dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}|} \\ \beta) & \rho > 0, \text{ ἂν } \vec{\alpha}, \ \vec{\beta} \text{ ὁμόρροπα} \\ \gamma) & \rho < 0, \text{ ἂν } \vec{\alpha}, \ \vec{\beta} \text{ ἀντίρροπα} \\ \delta) & \rho = 0, \text{ ἂν } \vec{\beta} = \vec{0} \end{array}\right\} \ \vec{\alpha} \neq \vec{0}$$

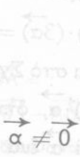
Π.χ. στὸ Σχ. 80–19 εἶναι $\dfrac{\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}} = 3$, $\dfrac{\vec{\delta}}{\vec{\alpha}} = -6$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

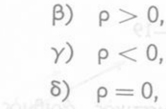
323) Δίνεται τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ (Σχ. 80-21) καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν διανύσματα ἴσα πρὸς τό:

α) $3\cdot\vec{\alpha}$ β) $\dfrac{1}{2}\cdot\vec{\alpha}$

γ) $-2\cdot\vec{\alpha}$ δ) $\dfrac{5}{4}\cdot\vec{\alpha}$



Σχ. 80–21



Σχ. 80–22

324) Δίνονται τὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ (Σχ. 80-22) σ' ἕνα ἐπίπεδο καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν τά:

α) $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, β) $\dfrac{3}{5}\vec{\alpha} + \dfrac{2}{3}\vec{\beta}$ γ) $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

81. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΠΑΝΩ ΣΕ ΑΞΟΝΑ. ΟΛΙΣΘΑΙΝΟΝΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Α) Ἔστω (Ε) ἕνα ἐπίπεδο καὶ ε μιὰ εὐθεία του. Ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα τοῦ (Ε) μὲ κοινὸ φορέα τους τὴν εὐθεία ε. Ὅπως ὁρίσαμε τὴν ἔννοια ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὴν ἔννοια: ἐφαρμοστὸ διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὸν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο ἀπὸ τὴν ἔννοια: ἐφαρμοστὸ διάνυσμα τῆς εὐθείας ὁρίζεται ἡ ἔννοια: ἐλεύθερο διάνυσμα τῆς εὐθείας. Συνήθως τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα πάνω σὲ εὐθεία λέγεται **ὀλισθαῖνον διάνυσμα.**

Ὅσα εἴπαμε στὰ προηγούμενα ἰσχύουν, βέβαια, καὶ γιὰ τὰ ἐλεύθερα διανύσματα, ποὺ φέρονται πάνω σὲ εὐθεία.

Β) Προσανατολισμένη εὐθεία. Ἄξονας.

Πάνω σὲ μιὰ εὐθεία $x'x$ (Σχ. 80–1) διακρίνουμε δύο φορὲς κινήσεως: τὴ φορὰ ἀπὸ τὸ x' πρὸς τὸ x καὶ τὴν ἀντίθετή της, ἀπὸ τὸ x πρὸς τὸ x'. Ἂν τὴν πρώτη τὴν ὀνομάσουμε **θετικὴ φορά,** τὴν ἀντίθετή της θὰ τὴν ὀνομάσουμε **ἀρνητικὴ φορά.**

Μιὰ εὐθεία, πάνω στὴν ὁποία ἔχουμε ὁρίσει τὴ θετικὴ φορά, τὴν ὀνομάζουμε **προσανατολισμένη εὐθεία.**

Ἔστω (Σχ. 81–1) μιὰ εὐθεία $x'x$. Ὁρίζουμε (αὐθαίρετα) ἕνα σημεῖο της Ο καὶ δεξιά του ἕνα ἄλλο (αὐθαίρετο ἐπίσης) σημεῖο Θ.

Ὁρίζουμε τώρα τὴ θετικὴ φορὰ τῆς $x'x$, δηλ. **προσανατολίζουμε** τὴ $x'x$. Συμφωνοῦμε νὰ παίρνουμε ἔτσι τὴ θετικὴ φορὰ τῆς $x'x$ καὶ τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$, ὥστε ἡ $x'x$ νὰ ἔχει θετικὴ φορὰ τὴ φορὰ τοῦ $\overrightarrow{O\Theta}$. Ἡ προσανατολισμένη εὐθεία $x'x$ μαζὶ μὲ τὸ Ο καὶ τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$, δηλαδὴ τὸ σύνολο {προσανατολισμένη εὐθεία $x'x$, Ο, $\overrightarrow{O\Theta}$}, ὀνομάζεται: **ἄξονας** $x'Ox$. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Theta}$ λέγεται: **μοναδιαῖο διάνυσμα** τοῦ ἄξονα $x'Ox$. Τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ Ο, Θ θὰ εἶναι ἡ μονάδα μετρήσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἄξονα $x'Ox$. Τὸ σημεῖο Ο χωρίζει τὸν ἄξονα $x'Ox$ σὲ δύο ἡμιάξονες. Τὸν Ox, ποὺ λέγεται καὶ **θετικὸς ἡμιάξονας** τοῦ $x'Ox$ καὶ τὸν Ox', ποὺ λέγεται καὶ **ἀρνητικὸς ἡμιάξονας** τοῦ $x'Ox$. Τὸ σημεῖο Ο λέγεται **ἀρχὴ** ἢ **σημεῖο ἀναφορᾶς.**

Σχ. 81–1

Γ) Ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος ἑνὸς ἄξονα.

Ὀνομάζουμε **ἀλγεβρικὴ τιμὴ** ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἄξονα $x'Ox$ (ἢ διανύσματος συγγραμμικοῦ του) μὲ μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{O\Theta} = \vec{i}$ τὸ λόγο $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}}$. Ἡ ἀλγεβρικὴ αὐτὴ τιμὴ συμβολίζεται μὲ $\overline{AB}$. Δηλ. εἶναι ἀπὸ ὁρισμό:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{i}} = \overline{AB}.$$

Μὲ ἄλλα λόγια ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ τοῦ ἄξονα $x'Ox$ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος (μὲ μονάδα τὸ ΟΘ) προσημασμένο μὲ $+$, ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τὴ θετικὴ φορὰ τοῦ ἄξονα, ἢ μὲ $-$, ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τὴν ἀρνητικὴ φορά.

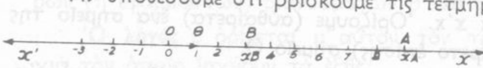
Τὸ $\overline{AB}$ λοιπὸν παριστάνει ἕναν πραγματικὸ ἀριθμὸ θετικό, ἀρνητικὸ ἢ μηδέν.

Ἡ ἰσότητα $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{i}} = \overline{AB}$ γράφεται ἰσοδύναμα καὶ ἔτσι: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overrightarrow{i}$.

Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς ἐλεύθερου διανύσματος $\overrightarrow{\alpha}$ τοῦ $x'Ox$ λέγεται ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς ἀντιπροσώπου τοῦ $\overrightarrow{AB}$. Δηλ. ὁρίζουμε $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ καὶ γράφουμε $\overrightarrow{\alpha} = \alpha \cdot \overrightarrow{i}$.

Ἔστω τώρα ἕνας ἄξονας $x'Ox$ (Σχ. 81–2) καὶ ἕνα σημεῖο του, τὸ Α. Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{OA}$, τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας (*) $\overrightarrow{OA}$, λέγεται **τετμημένη** τοῦ σημείου Α καὶ συμβολίζεται μὲ x_A.

Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι βρίσκουμε τὶς τετμημένες ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἄξονα $x'Ox$, τότε σὲ κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τετμημένη αὐτοῦ τοῦ σημείου, καὶ ἀντίστροφα σὲ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα, τὸ σημεῖο ποὺ εἶναι πέρας τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας, τῆς ὁποίας ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμή. Ὁρίζεται ἔτσι μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἄξονα μὲ τὸ σύνολο R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.



Σχ. 81–2

Ἂς πάρουμε τώρα ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, τοῦ ἄξονα $x'Ox$ (Σχ. 81–2). Ἔχουμε $\overline{OA} = x_A$, $\overline{OB} = x_B$, δηλ. x_A καὶ x_B εἶναι οἱ τετμημένες τῶν σημείων Α καὶ Β. Ἀλλὰ (§80 Ε, 5) εἶναι: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overrightarrow{i} = \overline{OB} \cdot \overrightarrow{i} - \overline{OA} \cdot \overrightarrow{i} \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overrightarrow{i} = (\overline{OB} - \overline{OA}) \cdot \overrightarrow{i} \Leftrightarrow$ (§80, Ζ, παρατήρηση) $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ ἢ $\overline{AB} = x_B - x_A$. Δηλαδή: **ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος AB ἑνὸς ἄξονα, εἶναι ἴση μὲ τὴ διαφορὰ $x_B - x_A$ τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων του (πέρατος πλὴν ἀρχῆς).**

Ἔτσι π.χ. στὸ Σχ. 81–2 ἔχουμε: α) ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB} \equiv \overline{AB} = x_B - x_A = 3 - 9 = -6$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AA} \equiv \overline{AA} = 9 - 9 = 0$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{BB} \equiv \overline{BB} = 3 - 3 = 0$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{O\Theta} \equiv \overline{O\Theta} = 1 - 0 = 1$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{\Theta O} \equiv \overline{\Theta O} = 0 - 1 = -1$ κλπ.

(*) Κάθε διάνυσμα τοῦ ἄξονα μὲ ἀρχὴ τὸ Ο καὶ πέρας ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἄξονα λέγεται διανυσματικὴ ἀκτίνα τοῦ σημείου Α (βλ. καὶ § 80, Ε, σημείωση).

82. ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ CHASLES (ΣΑΛ.)

Ἔστω x΄Ox ἕνας ἄξονας τοῦ ἐπιπέδου (E) καὶ A, B, Γ, τρία τυχόντα σημεῖα τοῦ ἄξονα. Γιὰ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{A\Gamma}$, ἰσχύει, ὅπως ξέρουμε, ὅτι:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$$

Ἂν $\overline{AB}, \overline{B\Gamma}, \overline{A\Gamma}$ εἶναι οἱ ἀλγεβρικὲς τιμὲς τῶν διανυσμάτων αὐτῶν, τότε ἰσχύει ἐπίσης:

$$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{A\Gamma}$$

Πραγματικά, ἂν X_A, X_B, X_Γ εἶναι οἱ τετμημένες τῶν A, B, Γ στὸν ἄξονα, θὰ εἶναι:

$\overline{AB}=X_B-X_A$ καὶ $\overline{B\Gamma}=X_\Gamma-X_B$, ἑπομένως:

$\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=X_B-X_A+X_\Gamma-X_B=X_\Gamma-X_A=\overline{A\Gamma}$.

Γιὰ τέσσερα σημεῖα A, B, Γ, Δ, ὁπωσδήποτε τοποθετημένα στὸν ἄξονα ἰσχύει ἐπίσης: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$ καὶ $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{A\Delta}$.

Τὰ προηγούμενα γενικεύονται εὔκολα καὶ γιὰ ὁσαδήποτε (σὲ πεπερασμένο πλῆθος) σημεῖα πάνω σὲ ἄξονα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

325) Πέντε σημεῖα A, B, Γ, Δ, E εἶναι τοποθετημένα σὲ ἄξονα μὲ τρόπο αὐθαίρετο. Νὰ βρεῖτε τὰ ἀθροίσματα:

α) $\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, β) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$, γ) $\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{EB}$,

δ) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{AB}$, ε) $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{B\Gamma}$, στ) $\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Delta B}$.

326) Τρία σημεῖα A, B, Γ εἶναι ὁρισμένα σὲ σειρὰ αὐθαίρετη σ' ἕναν ἄξονα. Νὰ βρεῖτε τὶς διαφορές:

α) $\overline{AB}-\overline{\Gamma B}$, β) $\overline{BA}-\overline{\Gamma A}$, γ) $\overline{AB}-\overline{A\Gamma}$, δ) $\overline{BA}-\overline{B\Gamma}$, ε) $\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B}$.

327) Ἔστω ὅτι σ' ἕναν ἄξονα εἶναι ὁρισμένα τέσσερα σημεῖα A, B, Γ, Δ ἔτσι, ὥστε $\overline{AB}=-6$, $\overline{B\Gamma}=+4$, $\overline{\Gamma\Delta}=+8$. Χωρὶς νὰ κάμετε σχῆμα α) νὰ βρεῖτε τά: $\overline{BA}$, $\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Delta B}$, $\overline{\Delta A}+\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B}$, $\overline{B\Delta}-\overline{B\Gamma}-\overline{\Gamma\Delta}$.

β) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ $\overline{EZ}$, ἂν εἶναι $\overline{\Delta E}=-3$ καὶ $\overline{BZ}=-9$.

328) Δίνονται σὲ ἄξονα δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίτο διάνυσμα, ὥστε νὰ εἶναι:

α) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{0}$ β) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}$

329) Τέσσερα σημεῖα A, B, Γ, Δ στὸν ἄξονα x΄Ox δίνονται μὲ τὶς τετμημένες τους $X_A=2$, $X_B=-4$, $X_\Gamma=5$, $X_\Delta=-7$.

Ζητεῖται: α) νὰ βρεῖτε τὶς ἀλγεβρικὲς τιμὲς καθενὸς ἀπὸ τὰ διανύσματα: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Delta}$. β) Νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς ἰσότητες:

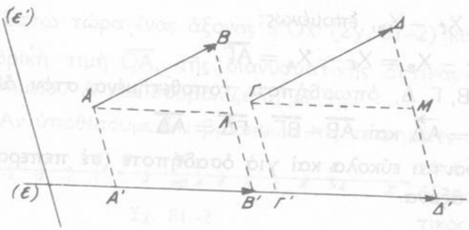
$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$, $\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta A} = \overline{0}$, $\overline{B\Delta} - \overline{B\Gamma} = \overline{\Gamma\Delta}$

330) Σὲ ἄξονα x'Ox δίνονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β μὲ τὶς τετμημένες τους $X_A = 3$, $X_B = -5$. Ζητεῖται: α) νὰ βρεῖτε τὶς τετμημένες τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι $\overline{AE} = 4$, $\overline{BZ} = 8$, $\overline{HA} = -2$, $\overline{\Theta B} = 12$. Τί παρατηρεῖτε σχετικὰ μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Ζ; β) Νὰ βρεῖτε τὴν τετμημένη x τοῦ σημείου Μ, ποὺ καθορίζεται μὲ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ἰσότητες:

$\overline{AM} = \overline{BA}$, $\overline{AM} = \overline{MB}$, $\overline{MA} = 2 \cdot \overline{AB}$, $3 \cdot \overline{AM} - \overline{MN} = 0$

83. ΠΛΑΓΙΑ ΚΑΙ ΟΡΘΗ ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΤΟΥ.

Ἔστω διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἑνός ἐπιπέδου (Ε) καὶ μία εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου Σχ. 83–1. Ἔστω ἀκόμα καὶ μία ἄλλη εὐθεία (ε') τοῦ (Ε), ποὺ νὰ εἶναι τέμνουσα τῆς (ε). Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β φέρνουμε τὶς παράλληλες τῆς (ε')· αὐτὲς ὁρίζουν πάνω στὴν (ε) τὰ σημεῖα Α', Β', συνεπῶς καὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$, ποὺ ὀνομάζεται: **προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πάνω στὴν (ε) παράλληλα πρὸς τὴν (ε')**.



Σχ. 83-1

Εἰδικά, ἂν ε' ⊥ ε, τότε ἡ προβολὴ $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πάνω στὴν (ε) παράλληλα πρὸς τὴν (ε') ὀνομάζεται: **ὀρθὴ προβολὴ** τοῦ AB πάνω στὴν (ε). Ἀλλιῶς λέγεται **πλάγια** προβολή.

Θεώρημα τῶν προβολῶν. Ἔστω ὅτι τὰ ὄχι μηδενικὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τοῦ ἐπιπέδου (Ε) εἶναι τῆς ἴδιας διευθύνσεως (συγγραμμικὰ) καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ οἱ προβολές τους πάνω στὴν εὐθεία (ε) τοῦ (Ε) παράλληλα πρὸς τὴν εὐθεία (ε') τοῦ (Ε). Οἱ προβολὲς αὐτὲς δὲν εἶναι ὑποχρεωτικὰ ὀρθές.

Ἰσχύει τότε τὸ ἑξῆς **Θεώρημα:**

Οἱ λόγοι $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}$ **καὶ** $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$ **εἶναι ἴσοι, δηλ.:**

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

Αὐτὸ ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς: Σχηματίζουμε τὰ τρίγωνα ΑΛΒ, ΓΜΔ μὲ τὶς παράλληλες ΑΛ καὶ ΓΜ πρὸς τὴν (ε). Τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια, γιατὶ οἱ γωνίες τους εἶναι ἴσες (σχηματίζονται ἀπὸ πλευρὲς παράλληλες καὶ ὁμόρροπες). Ἄρα ἔχουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τους (ὡς πρὸς τὴν ἴδια μονάδα) ἀνάλογα. Δηλαδή:

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|} = \frac{|\overrightarrow{A\Lambda}|}{|\overrightarrow{\Gamma M}|}$$

ἀλλὰ $|\overrightarrow{A\Lambda}| = |\overrightarrow{A'B'}|$, $\quad |\overrightarrow{\Gamma M}| = |\overrightarrow{\Gamma' M'}|$,

Ὥστε,
$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{\Gamma\Delta}|} = \frac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ 1ο) ἂν εἶναι $\overrightarrow{AB}$ ὁμόρροπο τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε εἶναι:

α) $\overrightarrow{A'B'}$ ὁμόρροπο τοῦ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ καὶ

β) $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}\right|$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = \left|\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}\right|$

καὶ ἀπὸ τὴν (1) θὰ ἔχουμε:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

2ο) ἂν εἶναι $\overrightarrow{AB}$ ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε εἶναι:

α) $\overrightarrow{A'B'}$ ἀντίρροπο τοῦ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ καὶ

β) $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = -\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}\right|$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = -\left|\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}\right|$

καὶ ἀπὸ τὴν (1) πάλι θὰ ἔχουμε:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}$$

Δηλαδή: **ὁ λόγος δύο διανυσμάτων τῆς ἴδιας διευθύνσεως εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν προβολῶν τους πάνω σὲ μιὰν εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου τους.**

Σπουδαία παρατήρηση. Εἴδαμε παραπάνω ὅτι:

$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = \left|\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}\right|$, ἂν τὰ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ὁμόρροπα

καὶ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = -\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}}\right|$, ἂν τὰ $\overrightarrow{A'B'}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ἀντίρροπα.

Ἀλλὰ καὶ γιὰ τὶς ἀλγεβρικὲς τιμὲς τῶν προβολῶν πάνω στὴν (ε), ὅταν αὐτὴ εἶναι ἄξονας, ἰσχύει:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{\Gamma'\Delta'}} = \frac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}, \text{ ἂν τὰ } \overrightarrow{A'B'} \text{ καὶ } \overrightarrow{\Gamma'\Delta'} \text{ εἶναι ὁμόρροπα}$$

$$\text{καὶ } \frac{\overline{A'B'}}{\overline{\Gamma'\Delta'}} = -\frac{|\overrightarrow{A'B'}|}{|\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}|}, \text{ ἂν τὰ } \overrightarrow{A'B'} \text{ καὶ } \overrightarrow{\Gamma'\Delta'} \text{ εἶναι ἀντίρροπα.}$$

Ἰσχύει ἐπομένως : $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{\Gamma'\Delta'}}$

(Οἱ μαθητὲς νὰ διατυπώσουν τὸ συμπέρασμα μὲ λόγια).

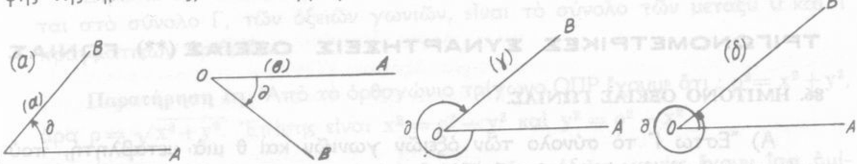
ΚΑΦΑΛΑΙΟ ΙΧ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ(*)

84. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ.

Ἀπὸ τὴ Γεωμετρία μᾶς εἶναι γνωστὴ ἡ ἔννοια τῆς προσανατολισμένης γωνίας. Ὑπενθυμίζουμε ἐδῶ ὅσα μᾶς χρειάζονται γιὰ τὴ σπουδὴ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς ὀξείας γωνίας. Γιὰ τὴν ἐποπτικὴ ἑρμηνεία τῆς ἔννοιας τῆς προσανατολισμένης γωνίας ὑποθέτουμε ὅτι μιὰ ἡμιευθεία μὲ ἀρχὴ Ο στρέφεται γύρω στὸ Ο κατὰ τὴ φορὰ τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ ἢ τὴν ἀντίθετή της, ἀπὸ μιὰν ἀρχικὴ θέση ΟΑ σὲ μιὰ τελικὴ θέση ΟΒ, ὅπως φαίνεται γιὰ διάφορες περιπτώσεις στὸ Σχ. 84–1.

Ἡ στροφὴ αὐτὴ παράγει μιὰ γωνία, ποὺ τὴ συμβολίζουμε μὲ ∢(ΟΑ, ΟΒ) στὴν α′ περίπτωση καὶ τὴν ὀνομάζουμε **ἀρνητικὴ γωνία,** καὶ μὲ τὸ σύμβολο ∢(ΟΑ, ΟΒ) στὴ δεύτερη καὶ τὴν ὀνομάζουμε **θετικὴ γωνία.** Καθεμιὰ ἀπὸ αὐτὲς τὶς γωνίες λέγεται **προσανατολισμένη γωνία.** Συνήθως, στὸ σχῆμα ἕνα καμπύλο βέλος στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας φανερώνει τὴ φορὰ περιστροφῆς τῆς ἡμιευθείας, ποὺ διαγράφει τὴ γωνία.



Σχ. 84–1

Ἡ ΟΑ λέγεται **ἀρχικὴ πλευρὰ** τῆς γωνίας καὶ ἡ ΟΒ **τελικὴ πλευρὰ** της. Τὸ Ο λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας.

Ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ ΟΑ μπορεῖ καθὼς στρέφεται ἡ ἡμιευθεία, νὰ διαγράψει ὁσεσδήποτε πλήρεις γωνίες προτοῦ νὰ πάρει τὴν τελικὴ θέση τῆς ΟΒ. Ὑπάρ-

(*) Ἱδρυτὴς τῆς Τριγωνομετρίας θεωρεῖται ὁ Ἵππαρχος (150 π.Χ.), Ἕλληνας ἀστρονόμος καὶ μαθηματικὸς ἀπὸ τὴ Νίκαια τῆς Βιθυνίας.

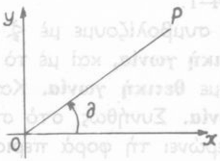
χουν λοιπὸν ἀπειράριθμες γωνίες μὲ τὴν ἴδια ἀρχικὴ καὶ τὴν ἴδια τελικὴ πλευρά, θετικὲς ἢ ἀρνητικές.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ μιᾶς γωνίας (*) εἶναι ἀριθμὸς θετικός, ἂν ἡ γωνία εἶναι θετική, καὶ ἀρνητικός, ἂν εἶναι ἀρνητική. Ἔτσι π.χ., στὸ Σχ. 84–1 (α) ἡ ∡ (ΟΑ, ΟΒ) ἔχει ἀλγεβρικὴ τιμὴ 45°, ἡ ∡ (ΟΑ, ΟΒ) τοῦ σχ. 84–1, (β) ἔχει ἀλγ. τιμὴ −45°, ἡ ∡ (ΟΑ, ΟΒ) τοῦ σχ. 84–1, (γ) ἔχει ἀλγ. τιμὴ −315° καὶ ἡ ∡ (ΟΑ, ΟΒ) τοῦ σχ. 84–1, (δ) ἔχει ἀλγ. τιμὴ 360°+45° = 405°. Μιὰ θετικὴ γωνία, μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθὴ καὶ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ μηδενική, λέγεται **ὀξεία γωνία**

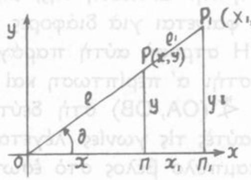
Ἑπομένως ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ μιᾶς θετικῆς ὀξείας γωνίας εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ 0° καὶ μικρότερη ἀπὸ 90°.

85. ΓΩΝΙΑ ΣΕ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΘΕΣΗ.

Θὰ λέμε ὅτι μιὰ γωνία θ βρίσκεται σὲ **κανονικὴ θέση** ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων ΧΟΨ, ἂν ἡ γωνία θ ἔχει τοποθετηθεῖ πάνω στὸ ἐπίπεδο ΧΟΨ ἔτσι, ὥστε ἡ κορυφή της νὰ βρίσκεται στὸ Ο καὶ ἡ ἀρχικὴ πλευρά της νὰ ἔχει ταυτισθεῖ μὲ τὸν ἡμιάξονα ΟΧ. Ἂν ἡ γωνία θ εἶναι μιὰ ὀξεία γωνία, ὅταν τεθεῖ σὲ κανονικὴ θέση, ἡ τελικὴ πλευρά της θὰ βρεθεῖ στὸ ἐσωτερικὸ τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων, ὅπως βλέπετε στὸ σχ. 85–1.



Σχ. 85–1



Σχ. 86–1

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΟΞΕΙΑΣ (**) ΓΩΝΙΑΣ

86. ΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Α) Ἔστω Γ τὸ σύνολο τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ θ μιὰ μεταβλητή, ποὺ παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο Γ. Κάθε τιμὴ λοιπὸν τῆς θ ἀπὸ τὸ Γ εἶναι μιὰ ὀξεία γωνία.

Ἔστω μιὰ γωνία θ σὲ κανονικὴ θέση (Σχ. 86–1) καὶ Ρ (x, y) ἕνα τυχὸν σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς θ, διάφορο τῆς ἀρχῆς Ο.

(*) Ἂν μ(= 0) εἶναι ἡ ἀπόλυτη τιμὴ μιᾶς γωνίας, ὄχι μηδενικῆς, τότε τὸν ἀριθμὸ —μ ὀνομάζουμε ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ἀντίστοιχης θετικῆς γωνίας καὶ τὸν —μ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ἀντίστοιχης ἀρνητικῆς γωνίας.

(**) Στὸ Κεφάλαιο αὐτό: ὀξεία γωνία = θετικὴ ὀξεία γωνία.

Ὀνομάζουμε **ἡμίτονο** τῆς γωνίας θ, συμβολικὰ ημθ, τὸ λόγο $\frac{\psi}{\rho}$, ὅπου ρ τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OP}$ καὶ y ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου P. Δηλαδὴ εἶναι $\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho}$ ἀπὸ ὁρισμό.

Ἂς πάρουμε ἄλλο, ἐπίσης τυχόν, σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, ἔστω τὸ $P_1\ (x_1, y_1)$, διάφορο τῆς ἀρχῆς Ο. Σύμφωνα μὲ τὸν προηγούμενο ὁρισμὸ εἶναι $\eta\mu\theta = \frac{\psi_1}{\rho_1}$, ὅπου ρ_1 τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας τοῦ P_1 καὶ y, ἡ τεταγμένη τοῦ P_1. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi_1}{\rho_1}$ (ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΟΠΡ καὶ $O\Pi_1P_1$).

Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ θέση τοῦ σημείου P πάνω στὴν τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας, ἀλλὰ μόνο ἀπὸ τὴ θέση αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Ὥστε σὲ κάθε ὀξεία γωνία θ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ,καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$.

Ἔχουμε λοιπὸν ἐδῶ μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὴ συνάρτηση $\theta \rightarrow \eta\mu\theta$.

Β) Ἐπειδὴ γιὰ κάθε ὀξεία γωνία θ σὲ κανονικὴ θέση καὶ γιὰ τὸ τυχὸν σημεῖο P(x, y) τῆς τελικῆς πλευρᾶς της εἶναι $y > 0$, $\rho > 0$, (γιατί;) καὶ $y < \rho$ (γιατί;), γι' αὐτὸ ὁ λόγος $\frac{\psi}{\rho}$ εἶναι πάντοτε θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 1.

Ὥστε γιὰ κάθε ὀξεία γωνία θ ἔχουμε ὅτι $0 < \eta\mu\theta < 1$.

Δηλ. τὸ πεδίο τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\theta \rightarrow \eta\mu\theta$, ὅπου θ μεταβάλλεται στὸ σύνολο Γ, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, εἶναι τὸ σύνολο τῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παρατήρηση 1η. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΠΡ ἔχουμε ὅτι : $\rho^2 = x^2 + y^2$, ἄρα $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ἐπίσης εἶναι $x^2 = \rho^2 - y^2$ καὶ $y^2 = \rho^2 - x^2$.

Παρατήρηση 2η. Εἶναι φανερὸ ὅτι δύο ἴσες ὀξεῖες γωνίες ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, γιατί, ὅταν τεθοῦν σὲ κανονικὴ θέση, ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων, θὰ ἔχουν τὴν ἴδια τελικὴ πλευρά.

Ἀντιστρόφως, ἂν δύο ὀξεῖες γωνίες ἔχουν τὸ ἴδιο ἡμίτονο, εἶναι ἴσες. Πραγματικά: ἂν θ καὶ θ_1 εἶναι δύο ὀξεῖες γωνίες (σχ. 86–1), γιὰ τὶς ὁποῖες εἶναι $\eta\mu\theta = \eta\mu\theta_1$, τότε θὰ εἶναι $\frac{y}{\rho} = \frac{y_1}{\rho_1}$ (1). Ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε $\frac{y^2}{\rho^2} = \frac{{y_1}^2}{{\rho_1}^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{\rho^2 - y^2} = \frac{{\psi_1}^2}{{\rho_1}^2 - {y_1}^2} \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = \frac{{y_1}^2}{{x_1}^2} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς ἀναλογίες (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι: $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{\rho}{\rho_1}$

Ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΟΠΡ καὶ $ΟΠ_1Ρ_1$ ἔχουν τὶς πλευρές τους ἀνάλογες. Ἄρα εἶναι ὅμοια, συνεπῶς ἔχουν καὶ τὶς γωνίες τους ἴσες.

Θὰ εἶναι λοιπὸν $\theta_1 = \theta$. Ἐπειδὴ λοιπὸν δύο ἴσες ὀξεῖες γωνίες ἔχουν ἴσα ἡμίτονα καὶ ἀντιστρόφως δύο ὀξεῖες γωνίες, ποὺ ἔχουν ἴσα ἡμίτονα, εἶναι ἴσες, γι' αὐτὸ τὸ ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας θ τὸ γράφουμε καὶ ὡς ἡμίτονο, τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς της. (Οἱ ἴσες γωνίες ἔχουν ἴσες ἀπόλυτες τιμές). Γράφουμε, π.χ., ημ30°, ημ28° 30′ κτλ. Ἑπομένως καὶ στὸ συμβολισμὸ ημθ μποροῦμε νὰ θεωροῦμε ὅτι θ εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ὀξείας γωνίας. Ἡ συνάρτηση $\theta \to$ ημθ εἶναι τότε μιὰ ἀριθμητικὴ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ, τὸ $\{\theta^\circ | \theta^\circ \in R$ καὶ $0^\circ < \theta^\circ < 90^\circ\}$ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο: $\{\psi | \psi \in R$ καὶ $0 < \psi < 1\}$.

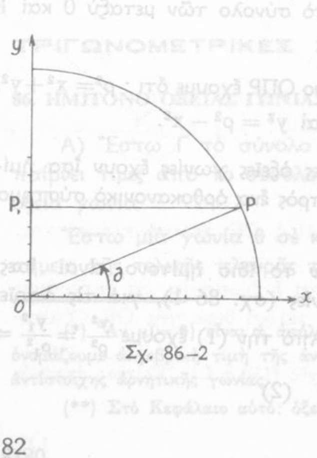
Σημείωση. Ἂν ἡ γωνία θ εἶναι μηδενικὴ γωνία, τότε ἡ ἀρχικὴ καὶ ἡ τελικὴ πλευρά της ταυτίζονται (πρὶν γίνει περιστροφή) μὲ τὸν ΟΧ καὶ τὸ τυχὸν σημεῖο Ρ τῆς τελικῆς πλευρᾶς της ἔχει τεταγμένη 0 καὶ τετμημένη ρ.

Εἶναι τότε $\frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$. Γι' αὐτὸ ὁρίζουμε ὡς ημθ, γιὰ θ = μηδενικὴ γωνία, τὸν ἀριθμὸ 0 καὶ γράφουμε $ημ0^0 = 0$. Ἂν $\theta = 90^0$, τότε ἡ τετμημένη εἶναι 0 καὶ ἡ τεταγμένη ρ καὶ εἶναι $\frac{\psi}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$. Γι' αὐτὸ ὁρίζουμε ὡς ἡμίτονο τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸ 1 καὶ γράφουμε $ημ90^0 = 1$.

Παραδείγματα : 1ο) Νὰ βρεῖτε τὸ ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας θ, ἂν τὸ Ρ (4,3) εἶναι σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς της, μὲ τὴ γωνία σὲ κανονικὴ θέση.

Λύση. Ἔχουμε $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. Ἑπομένως $ημθ = \frac{y}{\rho} = \frac{3}{5}$

2ο) Νὰ κατασκευάσετε μιὰ ὀξεία γωνία θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι $ημθ = \frac{5}{13}$.

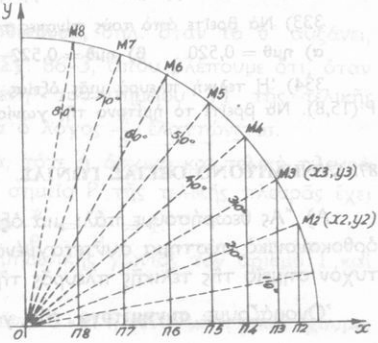


Σχ. 86–2

Λύση. Παίρνουμε ὀρθοκανονικὸ σύστηστημα ἀξόνων ΧΟΨ καὶ ὁρίζουμε μοναδιαῖο διάνυσμα (Σχ. 86–2). Ἐπειδὴ μποροῦμε νὰ πάρουμε y = 5 καὶ ρ = 13, γράφουμε τόξο περιφέρειας στὸ ἐσωτερικὸ τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα 13 μονάδες. Ἔπειτα πάνω στὸν ἄξονα ΟΨ βρίσκουμε τὸ σημεῖο P_1 (0,5) καὶ φέρνουμε ἀπὸ τὸ P_1 εὐθεία παράλληλη πρὸς τὸ ΟΧ. Ἂν αὐτὴ τέμνει τὸ τόξο στὸ Ρ, φέρνουμε τὴν ΟΡ, ὁπότε ἡ ζητούμενη γωνία θ εἶναι ἡ $\measuredangle$ (ΟΧ, ΟΡ). Πραγματικά, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἡμιτόνου, ἔχουμε $ημθ = \frac{y}{\rho} = \frac{5}{13}$.

Παρατήρηση 3η. Ἡ συνάρτηση $\theta° \rightarrow$ ημθ° εἶναι **αὔξουσα**· δηλ. ὅταν τὸ θ° αὐξάνει, αὐξάνει καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ημθ°. Αὐτὸ φαίνεται στὸ Σχ. 86–3, ὅπου μὲ κέντρο τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτίνα 50 mm γράψαμε τέταρτο περιφέρειας καὶ μιὰ σειρὰ ἀπὸ ὀξεῖες γωνίες σὲ κανονικὴ θέση: $\measuredangle(OX, OM_2) = 20°$, $\measuredangle(OX, OM_3) = 30°$, ... $\measuredangle(OX, OM_8) = 80°$.

Ἂν μετρήσουμε τὰ τμήματα Π_2M_2, Π_3M_3, ..., Π_8M_8, καὶ βροῦμε τὶς τεταγμένες τῶν σημείων M_2M_3, ... M_8, εἶναι εὔκολο νὰ ὑπολογίσουμε τὰ $\frac{\psi_2}{\rho}$, $\frac{\psi_3}{\rho}$, ..., $\frac{\psi_8}{\rho}$, δηλ. τὰ ημ 20°, ημ 30°, ... ,ημ 80°.



Σχ. 86–3

Βρίσκουμε κατὰ προσέγγιση ἑκατοστοῦ τὰ ἑξῆς:

θ°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
ημ θ°	0,34	0,50	0,64	0,76	0,80	0,94	0,98

Ἀλλ' ἡ προσέγγιση, ποὺ κατορθώνουμε νὰ πετύχουμε μὲ τέτοιες γραφικὲς μεθόδους, εἶναι ἱκανοποιητική.

Μὲ μεθόδους, ποὺ χρησιμοποιοῦν στὰ ἀνώτερα μαθηματικά, ἔχουν καταρτισθεῖ πίνακες τῶν τιμῶν τοῦ ἡμιτόνου μὲ πολὺ καλύτερη προσέγγιση. Στὶς τελευταῖες σελίδες αὐτοῦ τοῦ βιβλίου ὑπάρχει ἕνας τέτοιος πίνακας.

Στὸν πίνακα αὐτὸν ἀναγράφονται οἱ γωνίες ἀπὸ 0° ἕως 90° αὐξανόμενες ἀνὰ 10′ καὶ οἱ ἀντίστοιχες τιμὲς τῶν ἡμιτόνων.

Μὲ τὸν πίνακα αὐτὸ μποροῦμε α) ὅταν γνωρίζουμε τὴν τιμὴ (σὲ μοῖρες) μιᾶς ὀξείας γωνίας, νὰ βροῦμε τὸ ἡμίτονό της καὶ β) ὅταν γνωρίζουμε τὸ ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας νὰ βροῦμε τὴν τιμή της.

Δίνουμε μερικὰ παραδείγματα γιὰ τὴν κατανόηση τοῦ τρόπου, μὲ τὸν ὁποῖο χρησιμοποιοῦμε τοὺς πίνακες.

α) Ἀπὸ τὴ γωνία νὰ βρεθεῖ τὸ ἡμίτονο:

ημ 38° = 0,616

ημ 60° 20′ = 0,869

ημ 60° 38′ ≃ ημ 60° 40′ = 0,872

ημ 65° 12′ ≃ ημ 65° 10′ = 0,908

β) Ἀπὸ τὸ ἡμίτονο νὰ βρεθεῖ ἡ γωνία:

ημθ = 0,755 ⇒ θ = 49°

ημθ = 0,264 ⇒ θ = 15° 20′

ημθ = 0,580 ≃ 0,581 ⇒ θ = 35° 30′

ημθ = 0,440 ≃ 0,441 ⇒ θ = 26° 10′

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

331) Νὰ κατασκευάσετε μιὰ ὀξεία γωνία θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι:

α) $\eta\mu\theta = \frac{7}{10}$, β) $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, γ) $\eta\mu\theta = \frac{1}{4}$

332) Νὰ βρεῖτε μὲ χρήση τῶν πινάκων τά:

α) ημ35^0 $30'$ β) ημ76^0 $42'$ γ) ημ 18^0 $29'$

333) Νὰ βρεῖτε ἀπὸ τοὺς πίνακες τὴ γωνία θ, ὅταν:

α) ημθ = 0,520 β) ημθ = 0,522 γ) ημθ = 0,247

334) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας σὲ κανονικὴ θέση περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο P (15,8). Νὰ βρεῖτε τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας.

87. ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Α) Ἂς θεωρήσουμε πάλι μιὰ ὀξεία γωνία θ σὲ κανονικὴ θέση ὡς πρὸς ἕνα ὀρθοκανονικὸ σύστημα συντεταγμένων ΧΟΨ (Σχ. 86–1) καὶ ἔστω P(x, y) ἕνα τυχὸν σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, διαφορετικὸ τῆς ἀρχῆς Ο.

Ὀνομάζουμε **συνημίτονο** τῆς γωνίας θ, συμβολικὰ συνθ, τὸ λόγο $\frac{x}{\rho}$, ὅπου x ἡ τετμημένη τοῦ σημείου P καὶ ρ τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OP}$. Δηλαδὴ εἶναι ἀπὸ ὁρισμὸ συνθ $= \frac{x}{\rho}$.

Ἂν πάρουμε ἄλλο, ἐπίσης τυχὸν σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, ἔστω τὸ $P_1(x_1, y_1)$, διάφορο τῆς ἀρχῆς Ο, θὰ εἶναι, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό, συνθ $= \frac{x_1}{\rho_1}$, ὅπου ρ_1 τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{OP_1}$. Ἀλλὰ εἶναι $\frac{x}{\rho} = \frac{x_1}{\rho_1}$ (ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΠΡ καὶ $ΟΠ_1P_1$), δηλαδὴ τὸ συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ θέση τοῦ P πάνω στὴν τελικὴ πλευρά, ἀλλὰ ἀπὸ τὴ θέση τῆς ἴδιας τῆς πλευρᾶς, δηλ. ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Δηλ. σὲ κάθε ὀξεία γωνία θ ἀντιστοιχεῖ ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{x}{\rho}$, καὶ ἔχουμε πάλι μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο τῶν ὀξειῶν γωνιῶν καὶ πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὴ συνάρτηση θ → συνθ.

Β) Ἐπειδὴ γιὰ κάθε ὀξεία γωνία θ σὲ κανονικὴ θέση καὶ γιὰ τὸ τυχὸν σημεῖο P(x, y) τῆς τελικῆς πλευρᾶς της εἶναι $x > 0$, $\rho > 0$ καὶ $x < \rho$, γι' αὐτὸ ὁ λόγος $\frac{x}{\rho}$ εἶναι πάντοτε θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 1. Ὥστε γιὰ κάθε ὀξεία γωνία θ ἔχουμε $0 \leq$ συνθ < 1. Δηλαδὴ τὸ πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως θ → συνθ, ὅπου τὸ θ μεταβάλλεται στὸ σύνολο τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, εἶναι τὸ σύνολο τῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμε πάλι ὅτι εἶναι $\rho^2 = x^2 + y^2$, ἄρα $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Διαπιστώνουμε ἐπίσης εὔκολα ὅτι δύο ἴσες ὀξεῖες γωνίες ἔχουν τὸ ἴδιο συνημίτονο καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δύο ὀξεῖες γωνίες ἔχουν τὸ ἴδιο συνημίτονο, εἶναι ἴσες.

Ἂν πάρουμε τὶς τιμὲς (σὲ μοῖρες) τῶν ὀξειῶν γωνιῶν θ, τότε ἡ συνάρτηση θ → συνθ γίνεται ἀριθμητικὴ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο

$\{\theta^\circ | \theta^\circ \in R$ καὶ $0 < \theta^\circ < 90^\circ\}$ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο $\{\psi | \psi \in R$ καὶ $0 < \psi < 1\}$.

Γ) Ἡ συνάρτηση $\theta^\circ \rightarrow$ συνθ° εἶναι **φθίνουσα,** δηλ. ὅταν τὸ θ° αὐξάνει, τὸ συνθ° ἐλαττώνεται. Αὐτὸ φαίνεται στὸ Σχ. 86–3, ὅπου βλέπουμε ὅτι, ὅταν αὐξάνει ἡ γωνία, ἐλαττώνεται ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ τῆς τελικῆς πλευρᾶς, ἐνῶ τὸ ρ παραμένει σταθερό, ἄρα ὁ λόγος $\frac{x}{\rho}$ ἐλαττώνεται.

Ἂν ἡ γωνία θ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, τότε ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ πλευρὰ της ταυτίζονται μὲ τὸν ΟΧ καὶ τὸ τυχὸν σημεῖο Ρ τῆς τελικῆς πλευρᾶς ἔχει τετμημένη ρ καὶ τεταγμένη 0. Εἶναι λοιπὸν $\frac{x}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$.

Γι' αὐτὸ ὁρίζουμε ὡς συνημίτονο τῆς μηδενικῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸ 1 καὶ γράφουμε συν0° = 1.

Ἂν θ° = 90°, τότε ἡ τετμημένη τοῦ Ρ εἶναι 0 καὶ ἡ τεταγμένη ρ καὶ ἔχουμε: $\frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$. Γι' αὐτὸ ὁρίζουμε ὡς συνημίτονο τῆς ὀρθῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸ 0 καὶ γράφουμε συν90° = 0.

Ὅπως γιὰ τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, ἔτσι καὶ γιὰ τὰ συνημίτονα ἔχουν κατασκευασθεῖ πίνακες, ποὺ παρέχουν τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν ἀπὸ 0° ἕως 90° ἀνὰ 10'. Ὁ τρόπος χρήσεως τῶν πινάκων αὐτῶν φαίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω παραδείγματα:

α) Ἀπὸ τὴ γωνία νὰ βρεθεῖ τὸ συνημίτονο:	β) Ἀπὸ τὸ συνημίτονο νὰ βρεθεῖ ἡ γωνία:
συν 56° = 0,559	συνθ = 0,946 ⇒ θ = 19°
συν 35° 20' = 0,816	συνθ = 0,832 ⇒ θ = 33° 40'
συν 39° 32' ≃ συν 39° 30' = 0,772	συνθ = 0,238 ≃ 0,239 ⇒ θ = 76° 10'
συν 65° 38 ≃ συν 65° 40' = 0,412	συνθ = 0,186 ≃ 0,185 ⇒ θ = 79° 20'

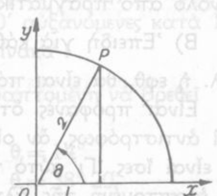
Παραδείγματα: 1ο) Νὰ βρεῖτε τὸ συνημίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας θ, ποὺ βρίσκεται σὲ κανονικὴ θέση καὶ ἡ τελικὴ πλευρά της περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Ρ(3,4).

Λύση. Ἔχουμε ὅτι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ἑπομένως συνθ $= \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5}$.

2ο) Νὰ κατασκευάσετε μιὰ ὀξεία γωνία θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι συνθ $= \frac{1}{2}$.

Λύση. Παίρνουμε ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων καὶ ὁρίζουμε μοναδιαῖο διάνυσμα (Σχ. 87–1). Ἐπειδὴ μποροῦμε νὰ πάρουμε x = 1 καὶ ρ = 2, γράφουμε στὸ ἐσωτερικὸ τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων τόξο περιφέρειας μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα 2 μονάδες. Ἔπειτα πάνω στὸν ἄξονα ΟΧ βρίσκουμε τὸ σημεῖο (Ι, Ο), ἀπὸ τὸ ὁποῖο φέρνουμε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα ΟΨ. Ἂν τέμνει τὸ τόξο στὸ σημεῖο Ρ, φέρνουμε τὴν ΟΡ, ὁπότε ἡ ζητούμενη γωνία εἶναι ἡ



Σχ. 87–1

∢ (ΟΧ, ΟΡ). Πραγματικά, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ συνημιτόνου, εἶναι συν ∢ (ΟΧ, ΟΡ) $= \frac{x}{\rho} = \frac{1}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

335) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας θ σὲ κανονικὴ θέση διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Ρ (1, 3). Νὰ βρεῖτε τὸ συνημίτονο καὶ τὸ ἡμίτονο τῆς γωνίας θ.

336) Νὰ κατασκευάσετε μιὰ ὀξεία γωνία θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι α) συνθ $= \frac{3}{10}$, β) συνθ $= \frac{2}{5}$, γ) συνθ $= \frac{1}{3}$.

336) Νὰ βρεῖτε μὲ χρήση τῶν πινάκων τά:
α) συν 32° 40′ β) συν 75° 41′ γ) συν 18° 28′

338) Νὰ βρεῖτε ἀπὸ τοὺς πίνακες τὴν ὀξεία γωνία θ, ὅταν:
α) συνθ = 0,949 β) συνθ = 0,736 γ) συνθ = 0,370

88. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ.

Α) Ἂς θεωρήσουμε πάλι μιὰ γωνία θ σὲ κανονικὴ θέση, ὅπου θ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Γ, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν (Σχ. 86–1) καὶ ἔστω Ρ(x, y) ἕνα τυχὸν σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, διάφορο τῆς ἀρχῆς Ο.

Ὀνομάζουμε **ἐφαπτομένη** τῆς ὀξείας γωνίας θ, συμβολικὰ εφθ, τὸ λόγο $\frac{y}{x}$. Δηλ. εἶναι ἀπὸ ὁρισμὸ εφθ $= \frac{y}{x}$.

Ἂν πάρουμε ἄλλο σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, π.χ. τὸ P_1 (x_1, y_1), διάφορο τῆς ἀρχῆς Ο, θὰ εἶναι σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ εφθ $= \frac{y_1}{x_1}$.

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$ (ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΠΡ, $ΟΠ_1Ρ_1$). Ὥστε ὁ λόγος $\frac{y}{x}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴ θέση τοῦ Ρ πάνω στὴν τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας, ἀλλ' ἀπὸ τὴ θέση τῆς ἴδιας τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἀπὸ τὸ μέγεθος τῆς γωνίας θ.

Σὲ κάθε ὀξεία γωνία θ ἀντιστοιχεῖ ἑπομένως ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{y}{x}$. Ἔχουμε δηλαδὴ καὶ ἐδῶ μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο Γ, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, καὶ πεδίο τιμῶν ἕνα σύνολο ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὴ συνάρτηση θ → εφθ.

Β) Ἐπειδὴ γιὰ κάθε ὀξεία γωνία θ εἶναι $y > 0$ καὶ $x > 0$, ὁ λόγος $\frac{y}{x}$, δηλ. ἡ εφθ, θὰ εἶναι πάντοτε ἕνας θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

Εἶναι προφανὲς ὅτι δύο ἴσες ὀξεῖες γωνίες ἔχουν τὴν ἴδια ἐφαπτομένη. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν οἱ ἐφαπτόμενες δύο ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι ἴσες, οἱ γωνίες θὰ εἶναι ἴσες. Γι' αὐτὸ τὴν ἐφαπτομένη μιᾶς ὀξείας γωνίεας τὴ γράφουμε καὶ ὡς ἐφαπτομένη τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς της. Γράφουμε, π.χ., εφ 30°, εφ 25° 30′ κ.ο.κ.

Ἂν μετρήσουμε τὶς γωνίες σὲ μοῖρες καὶ τὶς ἀντικαταστήσουμε μὲ τὶς ἀλγεβρικὲς τιμές τους, τότε ἡ συνάρτηση $\theta \to$ εφθ γίνεται μιὰ ἀριθμητικὴ συνάρτηση $\theta^\circ \to$ εφθ°, μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο $\{\theta^\circ \mid \theta^\circ \in \mathrm{R}$ καὶ $0^\circ < \theta^\circ < 90^\circ\}$ καὶ πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο $\{\psi \mid \psi \in \mathrm{R}$ καὶ $\psi > 0\}$.

Παρατηρώντας τὸ Σχ. 86–3 ἐννοοῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση $\theta^\circ \to$ εφθ° εἶναι αὔξουσα. Πραγματικὰ στὸ Σχ. 86–3 βλέπουμε ὅτι, ὅταν ἡ ὀξεία γωνία αὐξάνει, τότε ὁ ἀριθμητὴς τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$ γίνεται ἀριθμὸς μεγαλύτερος, ἐνῶ ὁ παρονομαστὴς γίνεται μικρότερος καὶ ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$ γίνεται μεγαλύτερος ἀριθμός. Μάλιστα, ὅσο περισσότερο ἡ γωνία θ πλησιάζει πρὸς τὴν ὀρθή, τόσο μεγαλύτερη γίνεται ἡ ἐφαπτομένη της καὶ μπορεῖ νὰ γίνει μεγαλύτερη ἀπὸ κάθε ἀριθμὸ δοσμένο ἀπὸ πρωτύτερα.

Ἂν ἡ γωνία θ εἶναι ἡ μηδενικὴ γωνία, τότε ἡ τελικὴ πλευρά της ταυτίζεται (πρὶν γίνει περιστροφὴ) μὲ τὴν ἀρχικὴ πάνω στὸ OX καὶ τὸ τυχὸν σημεῖο P τῆς τελικῆς πλευρᾶς ἔχει τεταγμένη 0 καὶ τετμημένη ρ.

Εἶναι λοιπὸν τότε $\frac{\psi}{x} = \frac{0}{\rho} = 0$. Γι' αὐτὸ ὁρίζουμε ὡς ἐφαπτομένη τῆς μηδενικῆς γωνίας τὸν ἀριθμὸ 0 καὶ γράφουμε εφ$0^\circ = 0$.

Ἂν $\theta^\circ = 90^\circ$, τότε ἡ τεταγμένη τοῦ P εἶναι ρ, καὶ ἡ τετμημένη 0 καὶ ἡ παράσταση $\frac{\psi}{x}$ δὲν ἔχει ἔννοια πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Δὲν ὁρίζεται λοιπὸν ἐφαπτομένη γιὰ γωνία 90°.

Γ) Ἂν στὸ Σχ. 86–3 μετρήσουμε τὰ τμήματα $\Pi_2M_2, \Pi_3M_3, \ldots, \Pi_8M_8$ καὶ ἔπειτα τὰ τμήματα $O\Pi_2, O\Pi_3, \ldots, O\Pi_8$ καὶ ὑπολογίσουμε τὶς τιμὲς τῶν λόγων $\frac{\Pi_2M_2}{O\Pi_2}, \frac{\Pi_3M_3}{O\Pi_3}, \ldots, \frac{M_8\Pi_8}{O\Pi_8}$, θὰ ἔχουμε τὸν παρακάτω πίνακα γιὰ τὶς τιμὲς τῶν εφ 20°, εφ 30°, ..., εφ 80°.

θ°	10°	20°	30°	40°	50°	50°	70°	80°
εφθ°	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,74	5,67

Βλέπουμε καὶ ἀπὸ τὸν πίνακα ὅτι ἡ συνάρτηση $\theta^\circ \to$ εφθ° εἶναι αὔξουσα καὶ ἐννοοῦμε ὅτι μπορεῖ νὰ πάρει ὅλες τὶς θετικὲς πραγματικὲς τιμές.

Ὅπως γιὰ τὰ ἡμίτονα καὶ τὰ συνημίτονα ἔτσι καὶ γιὰ τὶς ἐφαπτόμενες ἔχουν κατασκευασθεῖ πίνακες, ποὺ δίνουν τὶς τιμὲς τῆς ἐφαπτομένης μὲ προσέγγιση μισοῦ χιλιοστοῦ γιὰ τὶς γωνίες ἀπὸ 0° ἕως 89° 50′ αὐξανόμενες κατὰ 10′. Δίνουμε μερικὰ παραδείγματα χρησιμοποιήσεως τοῦ πίνακα :

α) Ἀπὸ τὴ γωνία νὰ βρεθεῖ ἡ ἐφαπτομένη

εφ 28° = 0,352
εφ 46° 20′ = 1,084
εφ 65° 22′ ≃ εφ 65° 20′ = 2,177
εφ 65° 28′ ≃ εφ 65° 30′ = 2,194

β) Ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένη νὰ βρεθεῖ ἡ γωνία

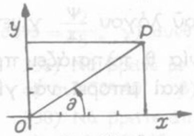
εφθ = 0,249 ⇒ θ = 14°
εφθ = 0,791 ⇒ θ = 38° 20′
εφθ = 0,518 ≃ 0,517 ⇒ θ = 27° 20′
εφθ = 2,770 ≃ 2,773 ⇒ θ = 70° 10′

Παραδείγματα: 1ο) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας θ σὲ κανονικὴ θέση περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο P (3,4). Νὰ βρεῖτε τὴν εφθ, τὸ ημθ καὶ τὸ συνθ.

Λύση. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ ἔχουμε $εφθ = \frac{4}{3}$. Γνωρίζουμε ἐξάλλου ὅτι $ρ = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{25} = 5$ καὶ ἐπομένως εἶναι $ημθ = \frac{4}{5}$ καὶ $συνθ = \frac{3}{5}$.

2ο) Νὰ κατασκευάσετε ὀξεία γωνία θ, ἂν γνωρίζετε ὅτι $εφθ = \frac{3}{4}$.

Λύση. Μποροῦμε νὰ πάρουμε $y = 3$, $x = 4$, ὁπότε σὲ ὀρθοκανονικὸ σύστημα ἀξόνων ΧΟΨ καθορίζουμε τὴ θέση τοῦ σημείου P (4,3) καὶ ἔπειτα φέρνουμε τὴν OP (Σχ. 88–1). Ἡ $\sphericalangle$(OX, OP) εἶναι ἡ ζητούμενη γωνία, γιατί $εφ \sphericalangle(OX, OP) = \frac{ψ}{x} = \frac{3}{4}$.



Σχ. 88–1

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

339) Ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς ὀξείας γωνίας σὲ κανονικὴ θέση περνᾶ ἀπὸ τὸ σημεῖο P (1, 3). Νὰ βρεῖτε τὴν ἐφαπτομένη τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ τὸ ἡμίτονό της.

340) Νὰ κατασκευάσετε ὀξεῖες γωνίες μὲ τὶς ἑξῆς ἐφαπτόμενες: α) $εφθ_1 = \frac{3}{4}$, β) $εφθ_2 = \frac{1}{2}$, γ) $εφθ_3 = 3$.

341) Νὰ βρεῖτε μὲ χρήση τῶν πινάκων τὰ ἑξῆς:
α) εφ $35^0\ 35'$ β) εφ $48^0\ 48'$ γ) εφ $26^0\ 23'$

342) Νὰ βρεῖτε ἀπὸ τοὺς πίνακες τὴν ὀξεία γωνία θ, ὅταν:
α) $εφθ = 1{,}235$ β) $εφθ = 0{,}376$ γ) $εφθ = 2{,}085$

89. ΠΩΣ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΤΑ ΗΜΘ, ΣΥΝΘ, ΕΦΘ, ΤΗΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ Θ.

Μάθαμε στὰ προηγούμενα ὅτι γιὰ μιὰ ὀξεία γωνία θ: $ημθ = \frac{ψ}{ρ}$, $συνθ = \frac{x}{ρ}$, $εφθ = \frac{ψ}{x}$, ὅπου x, y εἶναι οἱ συντεταγμένες ἑνὸς σημείου P τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, ποὺ βρίσκεται σὲ κανονικὴ θέση.

Μάθαμε ἀκόμα ὅτι ἰσχύει: $x^2 + y^2 = ρ^2$.

Διαιρώντας τὰ μέλη τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητας διὰ $ρ^2$ βρίσκουμε: $\frac{x^2}{ρ^2} + \frac{ψ^2}{ρ^2} = \frac{ρ^2}{ρ^2}$ δηλ. $\frac{x^2}{ρ^2} + \frac{ψ^2}{ρ^2} = 1$ καί, ἐπειδὴ $\frac{x}{ρ} = συνθ$ καὶ $\frac{ψ}{ρ} = ημθ$, ἡ ἰσότητα γίνεται:

$$συν^2θ + ημ^2θ = 1 \qquad (1)$$

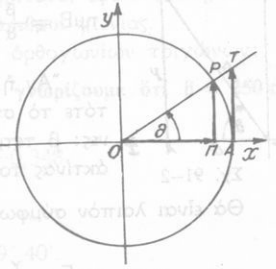
Ἐξάλλου ἔχουμε $εφθ = \frac{ψ}{x} = \frac{\frac{ψ}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \frac{ημθ}{συνθ}$.

$$\text{δηλαδὴ} \quad εφθ = \frac{ημθ}{συνθ} \qquad (2)$$

Σημείωση. Τὰ ημθ, συνθ, εφθ μιᾶς ὀξείας γωνίας θ, λέγονται τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας θ.

90. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ημθ, συνθ, εφθ ΜΙΑΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ θ ΣΤΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΟ.

Ἔστω θ μία ὀξεία γωνία σὲ κανονικὴ θέση (Σχ. 88–2). Μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ ἀκτίνα τὴ μονάδα τοῦ μήκους (ποὺ ἔχει ὁρισθεῖ) γράφουμε περιφέρεια, ποὺ τέμνει τὴν ἀρχικὴ πλευρὰ τῆς θ στὸ Α καὶ τὴν τελικὴ στὸ Ρ (x, y). Φέρνουμε ἀκόμα τὴν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο, ΟΑ) στὸ Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν τελικὴ πλευρὰ τῆς θ στὸ Τ. Ὅπως ξέρουμε, εἶναι:



Σχ. 88–2

1ο) $\text{ημθ} = \frac{\psi}{\rho} = y$ (γιατὶ $\rho = 1$) = ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Pi P}$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ποῦμε ὅτι τὸ ημθ παριστάνεται γεωμετρικὰ ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Pi P}$.

2ο) $\text{συνθ} = \frac{x}{\rho} = x$ (γιατὶ $\rho = 1$). Παριστάνεται γεωμετρικὰ ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Pi}$.

3ο) $\text{εφθ} = \frac{\psi}{x} = \frac{(\Pi P)}{(O\Pi)} = \frac{(NT)}{(OA)} = (AT)$. Παριστάνεται γεωμετρικὰ ἀπὸ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AT}$.

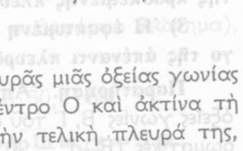
Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι, ἂν ὡς σημεῖο τῆς τελικῆς πλευρᾶς μιᾶς ὀξείας γωνίας σὲ κανονικὴ θέση πάρουμε ἐκεῖνο, ὅπου ὁ κύκλος μὲ κέντρο Ο καὶ ἀκτίνα τὴ μονάδα, ὁ λεγόμενος τριγωνομετρικὸς κύκλος, τέμνει τὴν τελικὴ πλευρά της, τότε οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας θ παίρνουν τὶς παραπάνω γεωμετρικὲς σημασίες.

91. ΠΩΣ ΣΧΕΤΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ ΤΑ ΚΥΡΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΝΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

Κύρια στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου λέγονται οἱ πλευρές του καὶ οἱ γωνίες του.

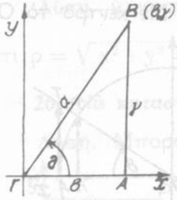
Ἔστω ΑΒΓ ἕνα τρίγωνο ὀρθογώνιο στὸ Α. Γιὰ νὰ ἁπλουστεύσουμε τοὺς συμβολισμούς, συμφωνοῦμε νὰ παριστάνουμε τὶς τιμὲς τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μὲ τὰ γράμματα Α, Β, Γ τῶν κορυφῶν τους καὶ τὰ μήκη τῶν ἀπέναντι πλευρῶν μὲ τὰ ἀντίστοιχα μικρὰ γράμματα α, β, γ, δηλαδὴ (ΒΓ) = α, (ΑΓ) = β, (ΑΒ) = γ.

Ἂν τώρα τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ τεθεῖ πάνω στὸ ἐπίπεδο ΧΟΨ ἔτσι, ὥστε ἡ ὀξεία γωνία του, π.χ. Β, νὰ βρεθεῖ σὲ κανονικὴ θέση (Σχ. 91–1), τότε τὸ σημεῖο Γ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας Β θὰ ἔχει συντεταγμένες: τετμημένη γ, τεταγμένη β καὶ μῆκος τῆς



Σχ. 91–1

διανυσματικῆς ἀκτίνας $\overrightarrow{B\Gamma}$ ἴσο μὲ α. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τοὺς γνωστούς μας ὁρισμοὺς θὰ εἶναι:



Σχ. 91–2

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} \qquad (1)$$

Ἂν ἡ ὀξεία γωνία Γ τεθεῖ σὲ κανονικὴ θέση (Σχ. 91–2), τότε τὸ σημεῖο Β τῆς τελικῆς πλευρᾶς θὰ ἔχει συντεταγμένες: β τετμημένη, γ τεταγμένη καὶ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας τοῦ Β ἴσον μὲ α.

Θὰ εἶναι λοιπὸν σύμφωνα μὲ τοὺς γνωστοὺς ὁρισμούς:

$$\eta\mu\,\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha}, \quad \sigma\upsilon\nu\,\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} \qquad (2)$$

Μὲ λόγια οἱ τύποι (1) καὶ (2) διατυπώνονται ὡς ἑξῆς:

1) Τὸ ἡμίτονο ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ λόγο (*) τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσα.

2) Τὸ συνημίτονο ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ λόγο τῆς προσκείμενης πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσα.

3) Ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ λόγο τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν προσκείμενη κάθετη πλευρά.

Παρατήρηση. Ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) προκύπτουν τὰ ἑξῆς γιὰ τὶς ὀξεῖες γωνίες Β, Γ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓ, οἱ ὁποῖες, ὅπως ξέρουμε, εἶναι συμπληρωματικὲς ($B + \Gamma = 90°$).

$$\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma, \quad \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma.$$

Δηλαδή: **τὸ ἡμίτονο μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι ἴσο μὲ τὸ συνημίτονο τῆς συμπληρωματικῆς της καὶ τὸ συνημίτονο ὀξείας γωνίας εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἡμίτονο τῆς συμπληρωματικῆς της γωνίας.**

92. ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ.

Ἀπὸ τοὺς τύπους (1) καὶ (2) τῆς § 91 συμπεραίνουμε ὅτι:

1ο) Ὅταν γνωρίζουμε τὰ μήκη δύο πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου μποροῦμε, μὲ χρήση τῶν πινάκων, νὰ βροῦμε μὲ ὑπολογισμοὺς τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς καὶ τὶς τιμὲς τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

2ο) Ὅταν γνωρίζουμε τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς καὶ τὴν τιμὴ μιᾶς ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, μποροῦμε μὲ ὑπολογισμοὺς νὰ βροῦμε τὰ μήκη τῶν ἄλλων πλευρῶν καὶ τὴν τιμὴ τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας τοῦ τριγώνου.

(*) Ὅπως μάθαμε στὴν § 41, Β ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν μηκῶν τους, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα.

Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται **ἐπίλυση τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.** Καὶ ἐπειδὴ σ' αὐτὴ γίνεται χρήση τοῦ ἡμιτόνου, τοῦ συνημιτόνου καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ποὺ στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ἔχουν ὁρισθεῖ ὡς λόγοι εὐθύγραμμων τμημάτων, γι' αὐτὸ ἀκριβῶς οἱ ἀριθμοί: ἡμίτονο, συνημίτονο, ἐφαπτομένη, ὀνομάστηκαν **τριγωνομετρικοὶ λόγοι ἢ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ** γωνίας.

Δίνουμε παρακάτω παραδείγματα ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων:

1ο. Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ἂν γνωρίζουμε ὅτι $\beta = 250$ cm καὶ $\alpha = 718$ cm.

Ἐπίλυση. Γνωρίζουμε ὅτι: $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{250}{718} = 0,348$.

Ἀπὸ τοὺς πίνακες βρίσκουμε:

$B \simeq 20^\circ\, 20'$.

$\Gamma = 90^\circ - (20^\circ\, 20') = 89^\circ\, 60' - (20^\circ\, 20') = 69^\circ\, 40'$.

Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος βρίσκουμε:

$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 718^2 - 250^2 = 453024$, ἄρα $\gamma = \sqrt{453024} = 673$ cm.

2ο. Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ἂν $\gamma = 30,5$ cm καὶ $B = 32^0 10'$.

Ἐπίλυση. $\Gamma = 90^\circ - B = 57^\circ\, 40'$.

$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \beta = \gamma\ \varepsilon\varphi\ B$. Ἑπομένως εἶναι $\beta = 30,5\ \varepsilon\varphi\ 32^\circ\, 10' = 30,5 \cdot 0,629 =$ $= 19,18$, δηλαδὴ $\beta = 19,18$ cm, $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}$ (ἀπὸ τὸ πυθαγόρειο θεώρημα), δηλ.: $\alpha = \sqrt{19,18^2 + 30,5^2} = \sqrt{1298,1224} \simeq 36,03$ cm.

Γιὰ τὸ ἐμβαδὸ Ε ἔχουμε: $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot 19,18 \cdot 30,5$ cm².

3ο. Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ἂν $\beta = 2\sqrt{10}$ m, $\gamma = 3$ m.

Ἐπίλυση. Ἔχουμε $\varepsilon\varphi\ B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{\sqrt{40}}{3} = \frac{6,324}{3}$ καὶ ἀπὸ τοὺς πίνακες βρίσκουμε $B \simeq 64^\circ\, 40'$, ἄρα $\Gamma = 90^\circ - B = 25^\circ\, 20'$.

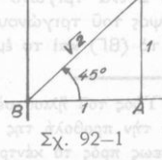
Τὴν α τὴ βρίσκουμε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ πυθαγόρειου θεωρήματος ἢ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ τύπου $\frac{\beta}{\alpha} = \eta\mu\, B$, γιατὶ $\beta = \alpha\, \eta\mu\, B \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$.

4ο. Νὰ βρεῖτε, χωρὶς χρήση πινάκων, τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας τῶν 45°. Σὲ κάθε ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $B = \Gamma = 45^\circ$ καὶ $\beta = \gamma$. Μποροῦμε λοιπὸν νὰ πάρουμε $\beta = \gamma = 1$ (Σχ. 92–1), ὁπότε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2}$ καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι:

$$\eta\mu\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

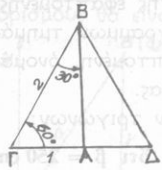
$$\sigma\upsilon\nu\ 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\ 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$



Σχ. 92–1

5ο. Νὰ βρεῖτε, χωρὶς χρήση πινάκων, τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν τῶν γωνιῶν 60° καὶ 30°. Σὲ κάθε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ κάθε γωνία ἔχει ἀπόλυτη τιμὴ 60°. Ἡ διχοτόμος κάθε γωνίας, π.χ. τῆς Β, εἶναι κάθετη στὴν ἀπέναντί της πλευρὰ καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου. Ἂν λοιπὸν πάρουμε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ, ποὺ ἡ πλευρά του ἔχει μῆκος 2 μονάδες (Σχ. 92–2), τότε στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ θὰ ἔχουμε: $(ΒΓ) = 2$, $(ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΓ)^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow (ΑΒ) = \sqrt{3}$ καὶ θὰ εἶναι:



Σχ. 92–2

$$ημ\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = συν\,30°$$

$$συν\,60° = \frac{1}{2} = ημ\,30°$$

$$εφ\,60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$εφ\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

343) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ἂν $α = 12$, $Β = 13^0\,20'$.

344) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο, ΑΒΓ ἂν $γ = 400$ mm, $β = 446$ mm.

345) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἂν $α = 1{,}16$ cm, $γ = 0{,}518$ cm.

346) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἂν $β = 75$ m, $Γ = 68^0\,42'$.

347) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἂν $α = 15$ m, $Γ = 56^0\,30'$.

348) Νὰ ἐπιλυθεῖ ὀρθογώνιο τρίγωνο, ἂν $β = 135$ m, $Β = 79^0\,28'$.

349) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, γιὰ τὰ ὁποῖα γνωρίζουμε ὅτι:

α) $γ = 38$ m, $Γ = 16^0\,13'$
β) $α = 225$ cm, $Β = 48^0\,40'$
γ) $α = 346{,}2$ m, $Γ = 23^0\,18'$
δ) $β = 25{,}4$ m, $γ = 38{,}2$ m
ε) $β = 506{,}2$ cm, $α = 984{,}8$ cm

350) Νὰ βρεῖτε τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς, ποὺ ρίχνει στύλος ποὺ ἔχει ὕψος 15 m, ὅταν τὸ ὕψος (*) τοῦ ἥλιου πάνω ἀπὸ τὸν ὁρίζοντα εἶναι 20^0.

351) Δένδρο ποὺ ἔχει ὕψος 10 m ρίχνει σὲ κάποια στιγμὴ σκιὰ 12 m. Νὰ βρεῖτε τὸ ὕψος τοῦ ἥλιου πάνω ἀπὸ τὸν ὁρίζοντα σ' ἐκείνη τὴ στιγμή.

352) Σὲ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ὅτι ἡ κάθετη πλευρὰ ΑΒ ἔχει μῆκος 8 cm καὶ τὸ ὕψος ΑΗ, ποὺ ἔχει τιμὴ 4,8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε χωριστὰ καθεμιὰ ἀπὸ τὶς ὀξεῖες γωνίες του ἀπὸ αὐτὰ τὰ δοσμένα στοιχεῖα κι ἔπειτα νὰ ἐλέγξετε ἂν τὸ ἄθροισμα τους εἶναι 90^0.

353) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $(ΑΒ) = 7$ m, $(ΑΓ) = 13$ m, $Α = 40^0$. Ἐὰν ΓΗ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν κορυφὴ Γ, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ (ΑΗ), (ΓΗ), (ΒΗ), ἡ γωνία Β, τὸ (ΒΓ) καὶ τὸ ἐμβαδὸ Ε τοῦ τριγώνου.

(*) Ὕψος τοῦ ἥλιου σὲ μιὰ χρονικὴ στιγμὴ σ' ἕνα τόπο ὀνομάζουμε τὴ γωνία, ποὺ σχηματίζει μὲ τὴν προβολή της πάνω στὸ ὁριζόντιο ἐπίπεδο ἡ ὀπτικὴ ἀκτίνα ἀπὸ τὸ σημεῖο τῆς παρατηρήσεως πρὸς τὸ κέντρο τοῦ ἥλιου.

354) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι (ΑΒ) = (ΑΓ) = 46 cm καὶ ἡ ἀπόλυτη τιμὴ τῆς γωνίας Α εἶναι $58^0\,17'$. Νὰ βρεῖτε τὴν τιμὴ τοῦ ὕψους ΑΔ καὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου.

355) Νὰ βρεῖτε τὴν ἀπόλυτη τιμὴ τόξου (σὲ μοῖρες), τὸ ὁποῖο ἔχει χορδὴ 10 cm σὲ κύκλο μὲ ἀκτίνα 12 cm.

356) Νὰ βρεῖτε τὴν ἀπόλυτη τιμὴ (σὲ μοῖρες) τόξου, ποὺ ἔχει χροδὴ 280 mm καὶ ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου 750 mm.

357) Σ' ἕναν κύκλο μὲ ἀκτίνα R = 23 cm νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος χορδῆς τόξου $52^0\,22'$.

358) Νὰ κατασκευάσετε σὲ χιλιοστομετρικὸ χαρτὶ τὰ ὀρθογώνια, στὸ Α, τρίγωνα ΑΒΓ, ὅταν

α) $\text{συν}\,\Gamma = \frac{1}{2}$ καὶ (ΑΓ) = 50 mm

β) $\text{ημ}\,B = \frac{2}{5}$ καὶ (ΑΒ) = 35 mm

γ) $\text{εφ}\,\Gamma = \frac{4}{3}$ καὶ (ΑΓ) = 25 mm

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

93. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Α) Περιεχόμενο καὶ σκοπὸς τῆς Στατιστικῆς. Κάθε χρόνο στὶς ἐφημερίδες δημοσιεύονται οἱ ἀπολογισμοί, οἱ ἰσολογισμοὶ τῶν διαφόρων Ἑταιρειῶν, Τραπεζῶν κλπ., ποὺ συνήθως συνοδεύονται ἀπὸ σχεδιαγράμματα καὶ «Στατιστικοὺς πίνακες» γιὰ τὴν εὐκολότερη καὶ καλύτερη κατανόησή τους. Τὸ ἴδιο γίνεται μὲ τοὺς προγραμματισμοὺς τῶν ἔργων τῆς βιομηχανίας ἢ τοῦ κράτους. Ἀκόμα εἶναι γνωστὲς οἱ «ἀπογραφὲς τοῦ πληθυσμοῦ», ποὺ πραγματοποιεῖ ἡ Ἐθνικὴ Στατιστικὴ Ὑπηρεσία. Ἀπογραφὲς πληθυσμοῦ ἢ ἐκτάσεων γιὰ τὴ γεωργία γίνονταν ἀπὸ τὴν πολὺ ἀρχαία ἐποχή.

Ἡ Στατιστικὴ σήμερα ἀπόκτησε ἰδιαίτερη σπουδαιότητα γιὰ τὸν πολιτισμό μας κι ἀναπτύχθηκε σὲ μιὰ ἐκτεταμένη ἐπιστήμη μὲ πολλοὺς κλάδους. Σ' ὅλα τὰ κράτη οἱ στατιστικὲς ἔρευνες ἐνεργοῦνται συστηματικὰ ἀπὸ ὀργανωμένες ἄριστα στατιστικὲς ὑπηρεσίες.

Ἡ Στατιστικὴ εἶναι ἕνας κλάδος τῶν «Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν» κι ἔχει ὡς ἔργο της τὴ συγκέντρωση στοιχείων, τὴν ταξινόμησή τους καὶ τὴν παρουσίασή τους μὲ κατάλληλη μορφή, ἔτσι ὥστε νὰ μποροῦν νὰ ἀναλυθοῦν καὶ νὰ ἑρμηνευθοῦν γιὰ τὴν ἐξυπηρέτηση διαφόρων σκοπῶν.

Β) Πληθυσμός, Στατιστικὰ δεδομένα, Ἰδιότητες. Ἡ Στατιστικὴ ὡς στοιχεῖα γιὰ τὸ ἔργο της συγκεντρώνει ἀριθμούς, ποὺ ναφέρονται σ' ἕνα σύνολο ἀπὸ ἀντικείμενα (ἔμψυχα ἢ ἄψυχα). Τὸ σύνολο αὐτὸ ὀνομάζεται

Ἐξέλιξη κτηνοτροφικοῦ πληθυσμοῦ

(Σὲ χιλιάδες κεφαλές)

Εἶδος ζώου	1959	1961	1963	1964
Βόδια	1045,7	1108,9	1160	1140,4
Βουβάλια	72,6	67,2	63,5	60,8
Πρόβατα	9333,9	9593,5	9720	9450
Αἶγες	5066,1	4979,0	4700	4570
Χοῖροι	638,1	621,6	632	646,8
Πτηνὰ	15146,3	16341,9	18000	18426,3

Πηγή: Ὑπουργεῖο Γεωργίας. Πίνακας 1.

στατιστικὸς πληθυσμὸς ἢ μόνο **πληθυσμός.** Π.χ. στὸν ἀπέναντι πίνακα 1 ὑπάρχουν στοιχεῖα γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τοῦ «κτηνοτροφικοῦ πληθυσμοῦ» τῆς χώρας μας μέσα στὰ χρόνια 1959 - 1964.

Στὸν παρακάτω πίνακα 2 περιέχονται στοιχεῖα γιὰ τὴν ἐξέλιξη **«τοῦ πληθυσμοῦ τῶν μονίμων μεταναστῶν»** μέσα στὴν πενταετία 1960 - 64, δηλ. αὐτῶν ποὺ ἀναχώρησαν ἀπὸ τὴν Ἑλλάδα γιὰ μόνιμη ἐγκατάσταση στὸ ἐξωτερικό.

Ἐξέλιξη τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μονίμων μεταναστῶν

	1960	1961	1962	1963	1964
Ἄρρενες Θήλεις	33278 14490	36209 22628	51868 32186	61966 38106	66265 39403
Ἄθροισμα	47768	58837	84054	100072	105668

Πηγή: Ε.Σ.Υ.Ε. Πίνακας 2

Κάθε στατιστικὸς πληθυσμὸς ἐξετάζεται γιὰ ὁρισμένα χαρακτηριστικὰ τῶν στοιχείων του. Ἕνα σύνολο ἀνθρώπων εἶναι «πληθυσμὸς» λ.χ. ὡς πρὸς τὴν ἡλικία ἢ τὸ ἀνάστημα ἢ τὸ φόρο εἰσοδήματος ἢ τη μόρφωση κλπ. Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν ἑνὸς σχολείου εἶναι «πληθυσμὸς» ὡς πρὸς τη βαθμολογία ἢ τὶς ἀπουσίες ἢ τὸ βάρος κλπ.

Οἱ χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες ἑνὸς πληθυσμοῦ, γιὰ τὶς ὁποῖες ἐνδιαφέρεται ἡ Στατιστική, διακρίνονται **σὲ ποιοτικὲς** καὶ **σὲ ποσοτικὲς ἰδιότητες.**

1) Ποιοτικὲς ἰδιότητες. Ποιοτικὴ εἶναι κάθε ἰδιότητα, ἡ ὁποία δὲν ἐπιδέχεται μέτρηση, δηλ. δὲν ἐκφράζεται σὲ ὁρισμένες μονάδες μετρήσεως. Σὲ κάθε πληθυσμὸ ἀνθρώπων οἱ ἰδιότητες λ.χ. φύλο, ἔγγαμος, ὀρθόδοξος, ἀλλοδαπός, ἀναλφάβητος εἶναι ποιοτικές. Σύμφωνα μ' αὐτὲς τὶς ἰδιότητες μπορεῖ ἕνα σύνολο νὰ διαμερισθεῖ σὲ κλάσεις καὶ μὲ ἀπαρίθμηση νὰ βρεθεῖ ὁ πληθάριθμος καθεμιᾶς ἀπὸ αὐτὲς τὶς κλάσεις.

2) Ποσοτικὲς ἰδιότητες. Ποσοτικὴ εἶναι κάθε ἰδιότητα, ἡ ὁποία μπορεῖ νὰ μετρηθεῖ, δηλ. νὰ ἐκφραστεῖ μὲ ὁρισμένες μονάδες (λ.χ. βάρους, ὄγκου, μήκους, ἐπιφάνειας κλπ.). Οἱ ποσοτικὲς ἰδιότητες παίρνουν ἀριθμητικὲς τιμές, ἑπομένως εἶναι **μεταβλητές.** Τὸ ἀνάστημα, τὸ βάρος, ἡ ἡλικία, τὸ εἰσόδημα τῶν ἀνθρώπων εἶναι ποσότητες μεταβλητὲς κι ἀποτελοῦν ποσοτικὲς ἰδιότητες τῶν ἀντίστοιχων πληθυσμῶν. Στὶς περιπτώσεις ἀπαριθμήσεως τῶν στοιχείων ἑνὸς πληθυσμοῦ καὶ τοῦ προσδιορισμοῦ σχετικῶν ποσοστῶν, λ.χ. γεννήσεων, γάμων, παραγωγῆς προϊόντων κλπ., τὰ ποσοστὰ αὐτὰ θεωροῦνται ὡς ποσότητες μεταβλητές.

Μιὰ μεταβλητὴ εἶναι **συνεχής,** ὅταν μπορεῖ νὰ πάρει (τουλάχιστο θεωρητικά) κάθε τιμή σ' ἕνα διάστημα. Π.χ. ἡ «χωρητικότητα» σ' ἕναν πληθυσμό πλοίων ἢ τὸ εἰσόδημα ἀνθρώπων ἢ ὁ φόρος εἰσοδήματος, εἶναι **συνεχεῖς** μεταβλητές.

Μιὰ μεταβλητὴ εἶναι **ἀσυνεχής,** ὅταν παίρνει γιὰ τιμὲς μόνο φυσικοὺς ἀριθμούς. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν, ποὺ φοιτοῦν στὰ ἑλληνικὰ γυμνάσια, ὁ ἀριθμὸς τῶν σελίδων ἑνὸς πληθυσμοῦ ἀπὸ βιβλία εἶναι **ἀσυνεχεῖς** μεταβλητές.

Οἱ ἀριθμοί, ποὺ ἀναφέρονται στὰ στοιχεῖα ἑνὸς πληθυσμοῦ, ὀνομάζονται στατιστικὰ δεδομένα. Ἡ συγκέντρωση τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἀποτελεῖ τὴ σπουδαιότερη φάση στὶς ἐργασίες γιὰ μιὰ στατιστικὴ ἔρευνα.

94. ΤΡΟΠΟΙ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΕΩΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Ἡ συλλογὴ τῶν στατιστικῶν στοιχείων γίνεται μὲ τοὺς ἑξῆς τρόπους:

α) Μὲ ἀπογραφή. Μὲ τὴν ἀπογραφὴ συγκεντρώνονται οἱ ἀπαραίτητες πληροφορίες **ἀπὸ ὅλο τὸ στατιστικὸ πληθυσμό.** Ἀπὸ πρὶν ἑτοιμάζεται προσεκτικὰ εἰδικὸ ἐρωτηματολόγιο **(δελτίο ἀπογραφῆς)** καὶ μιὰ ὁρισμένη ἡμέρα εἰδικοὶ ὑπάλληλοι, **οἱ ἀπογραφεῖς,** τὸ συμπληρώνουν γιὰ κάθε **ἀπογραφόμενο.** Οἱ ἀπαντήσεις στὰ ἐρωτήματα τοῦ δελτίου εἶναι συνήθως ἕνα **«ναί»** ἢ ἕνα **«ὄχι»** ἢ **ἕνας ἀριθμός.**

β) Μὲ δειγματοληψία. Σὲ πολλὲς περιπτώσεις δὲν εἶναι ἀπαραίτητη ἡ γενικὴ ἀπογραφὴ ἑνὸς πληθυσμοῦ. Τότε γίνεται **«δειγματοληψία»,** δηλ. ἀπογραφὴ ἑνὸς ὑποσυνόλου τοῦ πληθυσμοῦ, **ἑνὸς δείγματος,** ὅπως λέγεται, τὸ ὁποῖο παίρνεται κατὰ τέτοιον τρόπο, ὥστε νὰ ἀντιπροσωπεύει ὅσο τὸ δυνατὸ περισσότερο τὸν ἀρχικὸ πληθυσμό. Ἔτσι λ.χ. ἡ Ε.Σ.Υ.Ε. πρὶν ἀπὸ λίγα χρόνια, γιὰ νὰ μελετήσει τὰ ἔξοδα τῆς ἑλληνικῆς οἰκογένειας, **τοῦ «νοικοκυριοῦ»,** ὅπως εἶπαν, ἔκαμε ἀπογραφὴ σ' ἕνα δεῖγμα ἀπὸ 2500 μόνο νοικοκυριά.

γ) Μὲ συνεχὴ ἐγγραφή. Σὲ εἰδικὰ δελτία καταγράφονται στοιχεῖα καὶ πληροφορίες γιὰ ἕναν πληθυσμό, συγκεντρώνονται τὰ δελτία αὐτὰ ἀπὸ εἰδικὲς ὑπηρεσίες καὶ γίνεται ἀπὸ αὐτὲς ἡ μελέτη τους. Συνεχὴς ἐγγραφὴ λ.χ. γίνεται στὰ ληξιαρχεῖα μὲ τὶς δηλώσεις τῶν γεννήσεων, γάμων, θανάτων κλπ., στὰ νοσοκομεῖα γιὰ τὴν κίνηση τῶν ἀσθενῶν, στὰ τελωνεῖα κλπ.

Σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις, ὅταν πρόκειται γιὰ τὴ μελέτη ἑνὸς εἰδικοῦ θέματος, γίνεται ἡ λεγόμενη **στατιστικὴ ἔρευνα.** Π.χ. γιὰ τὴν ἐξακρίβωση τῆς παιδικῆς ἐγκληματικότητας ἢ τῆς ἐξαπλώσεως μιᾶς ἀρρώστιας ἢ γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῶν ἀναλφαβήτων μιᾶς χώρας κλπ., γίνεται στατιστικὴ ἔρευνα. Αὐτὴ γίνεται ἢ μὲ γενικὴ ἀπογραφὴ τοῦ πληθυσμοῦ ἢ μὲ κατάλληλη δειγματοληψία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

359) Ἀπὸ ἕνα σύνολο μαθητῶν νὰ ὁρίσετε «στατιστικὸ πληθυσμὸ» μὲ χαρακτηριστικὸ α) ποιοτικὸ καὶ β) ποσοτικό.

360) Ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες, ποιὲς εἶναι ποιοτικὲς καὶ ποιὲς ποσοτικές; Ἀπὸ

τὶς μεταβλητὲς ποιὲς εἶναι συνεχεῖς καὶ ποιὲς ἀσυνεχεῖς; 1) ἀνάστημα, 2) εἰσόδημα, 3) βάρος, 4) ἀριθμὸς ἀγάμων, 5) γεωργικὸς κλῆρος, 6) παραγωγὴ ἑσπεριδοειδῶν σὲ τόννους, 8) ἀριθμὸς διαζυγίων, 9) ἀπουσίες μαθητῶν σ' ἕνα σχολεῖο, 10) βαθμὸς ἐτήσιας προόδου προαγόμενων μαθητῶν τῶν γυμνασίων, 11) θύματα τροχαίων δυστυχημάτων σ' ἕνα μήνα 12) ταχύτητα τῶν πλοίων, 13) διάρκεια ζωῆς σὲ ὧρες τῶν ἠλεκτρικῶν λαμπτήρων, 14) ἡ παραγωγὴ ἀμνῶν στὴν Ἑλλάδα, 15) ἡ εἰσαγωγὴ κατεψυγμένου κρέατος σὲ τόννους στὴ χώρα μας.

361) Ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες μεταβλητὲς ποιὲς εἶναι συνεχεῖς καὶ ποιὲς ἀσυνεχεῖς; 1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν κτισμάτων σ' ἕνα νομὸ τῆς Ἑλλάδας, 2) Τὸ πλῆθος τῶν ἀνδρῶν τῶν λόχων τοῦ πεζικοῦ μας, 3) Ἡ θερμοκρασία σ' ἕναν τόπο, 4) τὰ ἡμερομίσθια τῶν Ἑλλήνων ἐργατῶν, 5) τὸ ὠφέλιμο φορτίο τῶν φορτηγῶν αὐτοκινήτων, 6) ὁ ἀριθμὸς τῶν αὐτοκινήτων, ποὺ κυκλοφοροῦν στὴν Ἀθήνα τὴν τελευταία δεκαετία, 7) ἡ κατανάλωση ἠλεκτρικοῦ ρεύματος σὲ κιλοβατῶρες τῶν οἰκογενειῶν σὲ μιὰ συνοικία, 8) τὰ τυπογραφικὰ λάθη στὶς σελίδες ἑνὸς βιβλίου.

95. ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΚΑΙ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

α) Ἐπεξεργασία στατιστικῶν στοιχείων. Ὅταν συγκεντρωθοῦν τὰ στοιχεῖα, δηλ. οἱ σχετικὲς πρὸς ὁρισμένα χαρακτηριστικὰ ἑνὸς πληθυσμοῦ πληροφορίες, ἡ ὑπηρεσία, ποὺ διενεργεῖ τὴ στατιστικὴ μελέτη, ἐλέγχει τὰ στοιχεῖα αὐτά. Ἐξετάζονται ἕνα πρὸς ἕνα τὰ δελτία τῆς ἀπογραφῆς, ἂν εἶναι ὁλόκληρα καὶ σωστὰ συμπληρωμένα, καὶ ἀρχίζει ἡ διαλογὴ τῶν στοιχείων, ὥστε μὲ τὴ μορφὴ ἀριθμῶν νὰ παρουσιαστοῦν στοὺς πίνακες. Ἂν τὰ δελτία εἶναι λίγα (ὡς τὰ 1000), ἡ διαλογὴ γίνεται «μὲ τὸ χέρι», ἀλλιῶς μὲ ἡμιαυτόματες μηχανὲς (ὡς τὰ 5000 δελτία) καὶ μὲ τέλεια αὐτόματες (πέρα ἀπὸ τὰ 5000 δελτία). Στὴν περίπτωση τῆς μηχανικῆς διαλογῆς κάθε δελτίο πρέπει νὰ «μεταγραφεῖ» σὲ ἄλλο, στὸ ὁποῖο κάθε πληροφορία ἀντιστοιχίζεται μὲ κάποιον «κώδικα», μὲ ἕναν ἀριθμὸ κι ὁ ἀριθμὸς μὲ μιὰ ὀπὴ τοῦ δελτίου ἀπογραφῆς. Ἂν οἱ ὀπὲς εἶναι ἀπὸ πρὶν ἕτοιμες στὸ περιθώριο τοῦ δελτίου γύρω-γύρω στὴν περίμετρό του, τοῦτο λέγεται **διάτρητο.** Ἂν ὅμως τὶς ὀπὲς τὶς ἀνοίξει στὸ δελτίο ἀπογραφῆς εἰδικὴ μηχανὴ ἔπειτ' ἀπὸ τὴ συμπλήρωσή του, τοῦτο λέγεται **διατρητό.** Ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἐργασία διατρήσεως, μιὰ μηχανή, **ἡ ἐπαληθεύτρια,** ἐλέγχει μήπως ὑπάρχουν σφάλματα στὰ δελτία μεταγραφῆς. Τέλος τὰ δελτία μεταγραφῆς τοποθετοῦνται σὲ μιὰ ἄλλη μηχανή, **τὸ διαλογέα,** ὁ ὁποῖος τὰ χωρίζει σὲ ὁμάδες σύμφωνα μὲ τὰ ζητούμενα στοιχεῖα καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῆς διαλογῆς καταγράφονται σὲ πίνακες.

β) Παρουσίαση στατιστικῶν δεδομένων - Πίνακες. Ὁ πιὸ κατάλληλος τρόπος, γιὰ νὰ παρουσιασθοῦν τὰ στατιστικὰ δεδομένα γιὰ μελέτη, εἶναι ὁ **πίνακας.** Συνήθως στὴ Στατιστικὴ οἱ πίνακες εἶναι **συγκεντρωτικοί.** Σ' αὐτοὺς σὲ μικρὴ ἔκταση καὶ μὲ ἁπλὸ τρόπο περιέχονται τὰ στοιχεῖα μιᾶς ἔρευνας. Τὰ στοιχεῖα τοποθετοῦνται σὲ στῆλες καὶ γραμμὲς κι εἶναι εὔκολη ἡ σύγκριση μεταξύ τους.

Παραδείγματα. Σ' ἕνα γυμνάσιο (πρώτης βαθμίδας) ἐγγράφηκαν μὲ τὴν ἔναρξη τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1975 - 76 συνολικὰ 464 μαθητές. Σ' ἕνα ἰδιαίτερο βιβλίο, **τὸ μαθητολόγιο,** γράφηκαν μὲ τὴ σειρὰ ποὺ ἐμφανίστηκαν γιὰ ἐγγραφή, δηλ. καταχωρίσθηκε τὸ ὀνοματεπώνυμο τοῦ κάθε μαθητή, τὸ ὄνομα τοῦ πατέρα του, τὸ ἔτος κι ὁ τόπος γεννήσεώς του, ἡ τάξη κλπ. Τὸ μαθητολόγιο λοιπὸν εἶναι ἕνας **γενικὸς πίνακας**, μιὰ ἀποθήκη μὲ στοιχεῖα τοῦ πληθυσμοῦ τῶν μαθητῶν αὐτοῦ τοῦ σχολείου.

Ἔστω ὅτι θέλουμε νὰ μάθουμε πόσοι εἶναι οἱ μαθητὲς κάθε τάξης. Μὲ ἀπαρίθμηση βρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ τῶν μαθητῶν καὶ τὰ ἀποτελέσματα τὰ ἐμφανίζουμε στὸ συνοπτικὸ πίνακα 3 παραπλεύρως. Ἐδῶ ἔχουμε ποιοτικὴ ταξινόμηση μὲ βάση τὴν ἰδιότητα «τάξη ἐγγραφῆς» καὶ μὲ τὰ τρία χαρακτηριστικά της, τὰ Α΄, Β΄, Γ΄.

Τάξη	Ἐγγραφέντες
Α΄	235
Β΄	134
Γ΄	95
Ἄθροισμα	464

Πίνακας 3

Στὸ σύνολο τῶν μαθητῶν ἔγινε ἕνας διαμερισμὸς σὲ τρεῖς ὁμάδες, στὶς τρεῖς αὐτὲς ἰδιαίτερες τάξεις. Ἡ ἐργασία αὐτὴ ὁμαδοποιήσεως λέγεται **κατανομὴ τοῦ πληθυσμοῦ κατὰ συχνότητες** ἢ πιὸ σύντομα **κατανομὴ συχνοτήτων.** Ὁ πληθάριθμος κάθε τάξης λέγεται **ἀπόλυτη συχνότητα** καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα f. Ὁ πληθάριθμος τοῦ πληθυσμοῦ λέγεται **ὁλικὴ συχνότητα** καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ **N** ἢ μὲ τὸ **Σf.** Ἔτσι γιὰ τὴν Α΄ τάξη εἶναι $f = 235$ καὶ γιὰ τὴ Γ $f = 95$, ἐνῶ εἶναι $\Sigma f = 464$.

Σχετικὴ συχνότητα λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπόλυτης συχνότητας πρὸς τὴν ὁλική. Π.χ. γιὰ τὴν Α΄ τάξη ἡ σχετικὴ συχνότητα εἶναι: $\frac{f}{\Sigma f} = \frac{235}{464} = 0{,}506$

Τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν συχνοτήτων εἶναι ἴσο μὲ τὴ μονάδα. Πραγματικὰ εἶναι:

$$\frac{f_1}{\Sigma f} + \frac{f_2}{\Sigma f} + \frac{f_3}{\Sigma f} = \frac{f_1 + f_2 + f_3}{\Sigma f} = \frac{\Sigma f}{\Sigma f} = 1.$$

Τὸ γινόμενο τῆς σχετικῆς συχνότητας ἐπὶ 100 δίνει τὴ σχετικὴ συχνότητα σὲ ἑκατοστιαῖα ποσοστὰ (τόσο τοῖς ἑκατό). Ἔτσι π.χ. γιὰ τὴν Α΄ τάξη εἶναι 50,6%.

Σημείωση. Στὰ Μαθηματικὰ τὸ ἄθροισμα $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x\nu$ συμβολίζεται μὲ τὸ $\sum_{\kappa=1}^{\nu} x_\kappa$ δηλ. «ἄθροισμα τῶν ὅρων x μὲ δείκτη k, ὅταν τὸ k παίρνει φυσικὲς τιμὲς ἀπὸ 1 ἕως ν». Στὴ Στατιστικὴ ὅμως τὸ $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f_\kappa$ γράφεται συμβατικὰ ὡς Σf.

Τάξη	Ἐγγραφέντες		Ἄθροισμα
	Μαθητὲς	Μαθήτριες	
Α΄	130	105	235
Β΄	65	69	134
Γ΄	50	45	95
Ἄθροισμα	245	209	464

Πίνακας 4

Ἂς ὑποτεθεῖ ὅτι τὸ γυμνάσιο τοῦ παραδείγματός μας εἶναι σχολεῖο μικτό. Σὲ κάθε τάξη θὰ ἀπαριθμήσουμε χωριστὰ μαθητὲς καὶ μαθήτριες. Σχηματίζεται λοιπὸν ὁ πίνακας 4. Σ' αὐτὸν ἐξετάστηκε ὁ πληθυσμὸς ὡς πρὸς δύο ποιοτικὲς ἰδιότητες. Πρῶτα ὡς πρὸς τὴν τάξη (μὲ τρία χαρακτηριστικὰ Α,Β,Γ) καὶ ὕστερα ὡς πρὸς τὸ φύλο (μὲ δύο χαρακτηριστικά, «ἄρρεν - θῆλυ»). Ὁ πίνακας 4 λέμε ὅτι **εἶναι μὲ 3 X 2** θυρίδες ἢ ἁπλὰ **«πίνακας 3 X 2».**

Στὸν πίνακα 5 ἔχουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ 4, ἀλλὰ μὲ σχετικὲς συχνότητες σὲ ἑκατοστιαῖα ποσοστά. Αὐτὰ ὑπολογίζονται ὡς πρὸς τὰ ἀθροίσματα τῶν στηλῶν. Π.χ. βλέπουμε ὅτι στὴ Β′ τάξη ἀνήκουν τὰ 26,5% τῶν μαθητῶν, τὰ 31,5% τῶν μαθητριῶν καὶ τὰ 28,9% ὅλου τοῦ μαθητικοῦ πληθυσμοῦ τοῦ σχολείου.

Τάξη	Ἐγγραφέντες		Ἄθροισμα
	Μαθητὲς	Μαθήτριες	
Α′	53	47,9	50,6
Β′	26,5	31,5	28,9
Γ′	20,5	20,6	20,5
Ἄθροισμα	100	100	100

Πίνακας 5

Στὸν πίνακα 1 (§ 93, Β) ὁ κτηνοτροφικὸς πληθυσμὸς ταξινομεῖται ποιοτικὰ μὲ κατανομὴ συχνοτήτων σύμφωνα μὲ τὸ εἶδος τοῦ ζώου. Ἡ κατανομὴ γίνεται σὲ μιὰ σειρὰ ἐτῶν. Στὴ σειρὰ αὐτὴ παρουσιάζεται μιὰ ποσοτικὴ μεταβολὴ τοῦ ἀριθμοῦ κάθε εἴδους. Ὁ ἀριθμὸς τῶν κεφαλῶν κάθε εἴδους εἶναι μιὰ ἀσυνεχὴς μεταβλητή. Ἐπειδὴ ἡ χρονολογικὴ κατάταξη δίνει τὴν εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τοῦ πληθυσμοῦ μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου, νομίζουμε ὅτι ἡ μεταβολὴ αὐτὴ τοῦ πληθυσμοῦ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ χρόνο, ἐνῶ γνωρίζουμε ὅτι δὲν εἶναι ἡ παρέλευση τοῦ χρόνου ἡ αἰτία γιὰ τὴ μεταβολὴ τοῦ πληθυσμοῦ τῶν ζώων. **Συμφωνοῦμε νὰ θεωροῦμε τὶς δύο μεταβλητές,** τὸ χρόνο καὶ τὴν ποσοτικὴ ἐξέλιξη τοῦ πληθυσμοῦ, **ὡς ποσὰ συμμεταβλητά.**

Στὸν πίνακα 2 (§ 93, Β) ἔχουμε ποιοτικὴ κατὰ φύλο ταξινόμηση τοῦ πληθυσμοῦ του, σὲ μιὰ συγχρόνως χρονολογικὴ κατάταξη, ἡ ὁποία μᾶς δείχνει τὴν ποσοτικὴ ἐξέλιξη αὐτοῦ μέσα στὴν 5ετία 1960 - 64.

Σημείωση. Κάθε πίνακας στατιστικῶν στοιχείων θὰ ἔχει στὸ πάνω μέρος του ἕνα τίτλο. Αὐτὸς θὰ πληροφορεῖ σύντομα καὶ σαφῶς γιὰ τὸ τί περιέχει ὁ πίνακας, μὲ ποιὰ κατάταξη, σὲ ποιὰ χρονικὴ περίοδο καὶ σὲ ποιὸν τόπο. Στὸ κάτω μέρος γράφεται ἡ πηγή, ἀπὸ τὴν ὁποία προέρχονται τὰ στοιχεῖα τοῦ πίνακα. Τὸ «τόσο τοῖς ἑκατὸ» ἢ συμβολικὰ % ὑπολογίζεται πάντοτε μὲ προσέγγιση ἑνὸς δεκάτου.

Στὸν παρακάτω πίνακα 6, τὸ % ὑπολογίζεται πάνω στὸ σύνολο τοῦ πληθυσμοῦ γιὰ κάθε χρόνο. Παρατηροῦμε σ' αὐτὸν ὅτι στὴν Ἀθήνα καὶ στὴ Θεσσαλονίκη συγκεντρώνεται τὸ 60% περίπου τῆς οἰκοδομικῆς δραστηριότητας τῆς χώρας μας.

γ) Κατάρτιση ἑνὸς πίνακα. Ὑποθέτουμε ὅτι στὸ γυμνάσιο μὲ τοὺς 464 μαθητές, τῶν ὁποίων μιὰ κατανομὴ ἐμφανίσθηκε στὸν πίνακα 3 (§ 95, β), ἔγινε ἔρανος γιὰ τὸν Ε.Ε.Σ. Οἱ εἰσφορὲς καταχωρίζονται σὲ ὀνομαστικὲς καταστάσεις τῶν μαθητῶν, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦν πίνακες, ἀλλ' ὄχι συνοπτικοὺς καὶ εὔχρηστους.

Ἔστω ὅτι ἡ μικρότερη εἰσφορὰ εἶναι 4,5 δρχ. κι ἡ μεγαλύτερη 28,5 δρχ.

Γεωγραφική κατανομή τῆς ἰδιωτικῆς οἰκοδομικῆς δραστηριότητας
(σὲ χιλιάδες κυβ. μέτρων)

	1962	%	1963	%	1964	%
1 Περιοχὴ Ἀθηνῶν	10095	50,8	11032	48,7	12948	46,9
2 Στερεὰ Ἑλλάδα - Εὔβοια	1524	7,7	2032	9,0	2421	8,7
3 Πελοπόννησος	1212	6,1	1576	7,0	1745	6,3
4 Ἰόνιοι Νῆσοι	147	0,8	274	1,2	243	0,9
5 Ἤπειρος	321	1,6	330	1,4	423	1,5
6 Θεσσαλία	524	2,6	736	3,3	1119	4,1
7 Μακεδονία	2377	12,0	2809	12,4	3417	12,4
8 Θεσσαλονίκη	2344	11,8	2334	10,3	3589	13,0
9 Θράκη	498	2,5	617	2,7	584	2,1
10 Νῆσοι Αἰγαίου	496	2,5	595	2,6	607	2,2
11 Κρήτη	317	1,6	325	1,4	516	1,9
	19855	100	22660	100	27612	100

Πηγή: Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος

Πίνακας 6

Ἡ διαφορὰ $28,5 - 4,5 = 24$ τῶν δύο ἀκραίων τιμῶν λέγεται **εὖρος (πλάτος) τῆς μεταβλητῆς.** Ἡ μεταβλητὴ (ἐρανικὴ εἰσφορὰ) εἶναι συνεχής, γιατὶ μπορεῖ νὰ πάρει κάθε τιμὴ ἀνάμεσα στὶς δύο ἀκραῖες τιμές. Τὸ σύνολο τῶν τιμῶν της χωρίζεται σὲ τάξεις (ἀπὸ 10 τὸ ὀλιγότερο, ὡς 25 τὸ περισσότερο). Ἐδῶ ἂς πάρουμε 12 τάξεις. Τὸ πλάτος καθεμιᾶς εἶναι $\frac{24}{12} = 2$. Στὸν πίνακα 7 ἡ α΄ στήλη «τάξεως εἰσφορᾶς» συμπληρώνεται ἀμέσως.

Σὲ κάθε τάξη ὑπάρχουν ἀκραῖες τιμές. Συμφωνοῦμε ἡ ἀνώτερη τιμὴ νὰ μὴν ἀνήκει στὴν τάξη, ἀλλὰ νὰ εἶναι ἡ κατώτερη τιμὴ στὴν ἑπόμενη τάξη.

Π.χ. στὴν 4η τάξη δὲν ἀνήκει ἡ τιμὴ 12,5 δρχ. Ἄρα ὅσοι ἀπὸ τοὺς 464 μαθητὲς πλήρωσαν 12,5 δρχ. θὰ συμπεριληφθοῦν στὴν 5η τάξη.

Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἀκραίων τιμῶν σὲ κάθε τάξη λέγεται **μέση τιμή.** Μὲ τὶς μέσες τιμὲς σχηματίζεται ἡ β΄ στήλη. Κατόπι μὲ ἀπαρίθμηση τῶν μαθητῶν, τῶν ὁποίων ἡ εἰσφορὰ στὸν ἔρανο ἀνήκει σὲ κάθε τάξη, γίνεται ἡ κατανομὴ κατὰ συχνότητες καὶ συμπληρώνεται ἡ γ΄ στήλη. Στὴ γ΄ στήλη φαίνεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν εἰσφορές, ὥστε νὰ σχηματισθεῖ ἡ 4η, ἡ 6η καὶ ἡ 10η τάξη. Ἔτσι λοιπὸν ἔγινε ἡ **ὁμαδοποίηση** τοῦ πληθυσμοῦ, ἡ κατανομὴ του κατὰ συχνότητες (95, β).

Ἡ δ΄ στήλη ἔχει τίτλο «ἀθροιστικὴ συχνότητα». Σ' αὐτὴν ἀντιστοιχί-

Ἔρανος μαθητῶν γιὰ τὸν Ἑλλ. Ἐρυθρὸ Σταυρὸ Α΄ Γυμνασίου

Τάξεις εἰσφορᾶς	Μέση τιμή	Ἀριθμὸς μαθητῶν (ἀπόλ. συχν. f	Ἀθροιστικὴ συχνότητα	Σχετικὴ συχνότητα %	Ἀθροιστ. σχετ. συχνότητα
1η. 4,5 - 6,5	5,5	58	58	12,5	12,5
2η. 6,5 - 8,5	7,5	30	88	6,5	19,0
3η. 8,5 - 10,5	9,5	54	142	11,6	30,6
4η. 10,5 - 12,6	11,5	—	142	—	30,6
5η. 12,5 - 14,5	13,5	85	227	18,3	48,9
6η. 14,5 - 16,5	15,5	—	227	—	48,9
7η. 16,5 - 18,2	17,2	69	296	14,9	63,8
8η. 18,5 - 20,5	19,5	80	376	17,2	81,0
9η. 20,5 - 22,5	21,5	63	439	13,6	94,6
10η. 22,5 - 24,5	23,5	—	439	—	94,6
11η. 24,5 - 26,5	25,5	15	454	3,2	97,8
12η. 26,5 - 28,5	27,5	10	464	2,2	100
		Σf = 464		100	

Στοιχεῖα ὑποθετικὰ Πίνακας 7

ζεται γιὰ κάθε τάξη τὸ ἄθροισμα τῆς ἀπόλυτης συχνότητας τῆς τάξεως καὶ ὅλων τῶν προηγουμένων της. Π.χ. γιὰ τὴν 3η τάξη ἔχουμε: $54+30+58=142$, δηλ. οἱ 142 μαθητὲς πλήρωσαν λιγότερες ἀπὸ 9,5 δρχ. ὁ καθένας.

Ἡ σχετικὴ συχνότητα σὲ ποσοστὰ (ἐπὶ τοῖς ἑκατὸ) % γράφεται στὴν ε΄ στήλη. Γιὰ τὴν 5η τάξη ἡ σχετικὴ συχνότητα εἶναι $\frac{85}{464}=18{,}3\%$, δηλ. τὸ 18,3% τῶν μαθητῶν πλήρωσε ἀπὸ 12,5 ὡς 14,5 δρχ. ἢ καὶ μέση τιμὴ 13,5 δρχ.

Ἡ 6η στήλη τῆς «ἀθροιστικῆς σχετικῆς συχνότητας» σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δεδομένα τῆς 5ης, ὅπως ἀκριβῶς ἡ 4η στήλη σχηματίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς 3ης. Στὴν ὄγδοη τάξη ἡ ἀθροιστικὴ σχετικὴ συχνότητα εἶναι 81%. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ 81% τῶν μαθητῶν πλήρωσε κάτω ἀπὸ 20,5 δρχ. ὁ καθένας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

362) Τὸ 1968 στὴν Ἑλλάδα γιὰ ἄτομα ἀπὸ δέκα ἐτῶν καὶ πάνω μὲ ἀπογραφὴ συγκεντρώθηκαν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα. Σὲ 121.000 πρόσωπα, ποὺ ἦταν διπλωματοῦχοι ἀνωτάτων σχολῶν, 26000 ἦταν γυναῖκες. Σὲ 544.000 ἀποφοίτους γυμνασίου οἱ 311.000 ἦταν ἄνδρες. Σὲ 2.836.000 ἀποφοίτους τοῦ δημοτικοῦ σχολείου ἦταν 1.628.000 ἄνδρες. Σὲ 1.995.000, ποὺ

δὲν τελείωσαν τὸ δημοτικό, ἦταν 1.021.000 γυναῖκες. Σὲ 1.245.000 ἀγράμματους ἦταν 246.000 ἄνδρες. Νὰ γίνει πίνακας 2 X 5 θυρίδων. (Στοιχεῖα ὑποθετικά).

363) Σὲ μιὰ ἀπογραφὴ 3500 οἰκογενειῶν βρέθηκαν 275 οἰκογένειες χωρὶς κανένα παιδί, 845 μὲ ἕνα, 1056 μὲ δύο, 712 μὲ τρία, 542 μὲ τέσσερα κι οἱ ὑπόλοιπες μὲ πέντε καὶ πάνω. Νὰ γίνει πίνακας μὲ σχετικὲς συχνότητες. (Δεδομένα ὑποθετικά). Νὰ συμπληρωθεῖ στήλη ἀθροιστικῆς συχνότητας.

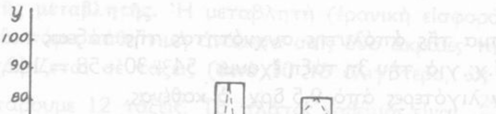
364) Ὁ γυμναστὴς ἑνὸς γυμνασίου στὶς μετρήσεις τοῦ ἀναστήματος τῶν 464 μαθητῶν του βρῆκε κατώτερο ὕψος 1,40 μ. καὶ ἀνώτερο 1,88 μ. Νὰ σηματίσετε ἕναν πίνακα, ὅπως ὁ 7, μὲ κατανομὴ σὲ 12 τάξεις καὶ μὲ ἀπόλυτες συχνότητες ἀντίστοιχα 38, 55, 120, 84, 42, 31, 12, 4, 48, 0, 18, 12.

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ.

Τὰ στατιστικὰ δεδομένα παρουσιάζονται ὄχι μονάχα μὲ πίνακες, ἀλλὰ καὶ μὲ γραφικὲς παραστάσεις, **μὲ διαγράμματα.** Μὲ τὶς γραφικὲς παραστάσεις ἡ στατιστικὴ ἔρευνα γίνεται ἀμέσως φανερὴ καὶ τὰ συμπεράσματά της εἶναι κατανοητὰ μὲ τὸν πιὸ ἁπλὸ καὶ σύντομο τρόπο, μὲ «μιὰ ματιά». Οἱ κυριότεροι τρόποι κατασκευῆς διαγραμμάτων εἶναι οἱ ἀκόλουθοι.

α) Τὸ ἱστόγραμμα συχνότητας. Ὅταν τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα ἐμφανίζονται μὲ κατανομὴ σὲ συχνότητες, τότε σ' ἕνα σύστημα ὀρθογώνιων ἀξόνων ΧΟΨ (σχ. 96,1) οἱ τιμὲς τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχίζονται σὲ σημεῖα στὸν ἄξονα ΟΧ κι οἱ τιμὲς τῆς συχνότητας στὸν ἄξονα ΟΨ. Ἡ μονάδα μήκους εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα αὐθαίρετο γιὰ κάθε ἄξονα, ἀλλὰ τέτοιο, ποὺ νὰ ἐπιτρέπει στὸ σχέδιο νὰ τοποθετηθοῦν στὸν ἄξονα ΟΧ ὅλες οἱ τιμὲς τῆς μεταβλητῆς καὶ στὸν ΟΨ ὅλες οἱ ἀντίστοιχες συχνότητες. Στὸν ἄξονα ΟΧ σημειώνονται διαδοχικὰ τμήματα ἀντίστοιχα πρὸς τὸ πλάτος τῶν διαδοχικῶν τάξεων τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς. Στὸ Σχ. 96–1 ποὺ ἀποτελεῖ τὸ διάγραμμα τοῦ πίνακα 7, βλέπουμε στὸν ἄξονα ΟΧ ὅλα αὐτὰ τὰ τμήματα νὰ εἶναι ἴσα, γιατὶ οἱ 12 τάξεις τῆς κατανομῆς ἔχουν τὸ ἴδιο πλάτος καὶ σὲ κάθε τμῆμα γράφεται ἡ μέση τιμὴ τῆς ἀντίστοιχης τάξεως. Μὲ βάσεις τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα κατασκευάζονται ὀρθογώνια, ποὺ ἔχουν ὕψη ἀνάλογα πρὸς τὴν ἀντίστοιχη συχνότητα καὶ τὴν ὁποία ὑπολογίζουμε πάνω στὸν ἄξονα ΟΨ. Ἂν οἱ βάσεις εἶναι ἴσες, τότε τὰ ἐμβαδὰ (ἑπομένως κι οἱ συχνότητες) εἶ-

Ἱστόγραμμα ἐρανικῆς εἰσφορᾶς μαθητῶν τοῦ Α΄ γυμνασίου



Σχ. 96–1

ναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὕψη τῶν ὀρθογωνίων. Τὸ διάγραμμα τέτοιας μορφῆς λέγεται **ἱστόγραμμα συχνότητας.**

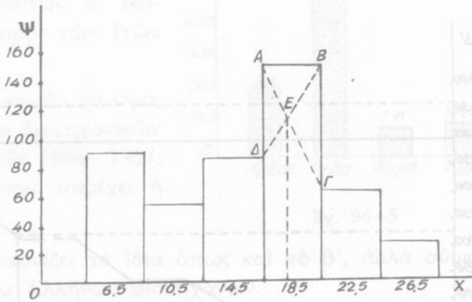
β) Τὸ πολύγωνο συχνότητας. Στὸ Σχ. 96–1 τοῦ πίνακα 7 ὑπάρχει μιὰ πολυγωνικὴ (ὄχι συνεχὴς) γραμμή, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν πάνω βάσεων τῶν ὀρθογωνίων τοῦ διαγράμματος.

Ἔρανος μαθητῶν Α΄ Γυμνασίου γιὰ τὸν Ε.Ε.Σ.

Τάξεις εἰσφορᾶς	Μ.Τ.	f	ἀθροιστ. συχν.	%	ἀθρ. %
1η. 4,5 — 8,5	6,5	88	88	18,9	18,9
2η. 8,5 — 12,5	10,5	54	142	11,7	30,6
3η. 12,5 — 16,5	14,5	85	227	18,3	48,9
4η. 16,5 — 20,5	18,5	149	376	32,1	81
5η. 20,5 — 24,5	22,5	63	439	13,6	94,6
6η. 24,5 — 28,5	26,5	25	464	5,4	100
		464		100	

Πίνακας 8

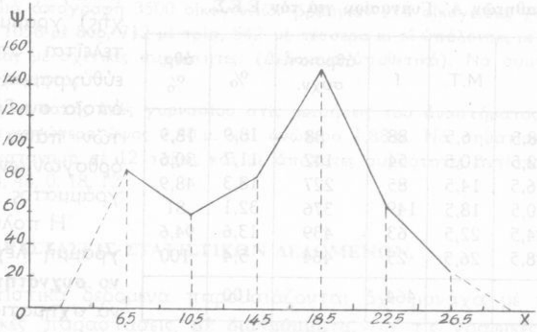
Ἡ πολυγωνικὴ αὐτὴ γραμμὴ λέγεται **πολύγωνο συχνότητας** καὶ μπορεῖ νὰ σχηματισθεῖ ἀντὶ γιὰ τὸ ἱστόγραμμα συχνότητας, μόνον ὅταν ἡ μεταβλητὴ εἶναι (ἢ θεωρεῖται) συνεχής. Τὰ ἄκρα τοῦ πολυγώνου συχνότητας ὁρίζονται πάνω στὸν ἄξονα ΟΧ. Παίρνουμε τὰ μέσα δύο τμημάτων ἴσων μὲ τὸ πλάτος τῶν τάξεων, τὸ ἕνα στὴν ἀρχὴ (πρὸς τ' ἀριστερὰ) καὶ τὸ ἄλλο στὸ τέλος (πρὸς τὰ δεξιὰ) τῆς σειρᾶς τῶν βάσεων τῶν ὀρθογωνίων τοῦ ἱστογράμματος. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ πολύγωνο συχνότητας σχηματίζεται, ἂν ἀπὸ τὰ σημεῖα, ποὺ ἀπεικονίζουν τὶς μέσες τιμὲς στὸν ἄξονα ΟΧ, ὑψωθοῦν κάθετα πάνω σ' αὐτὸν τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὶς ἀντίστοιχες συχνότητες κι ἑνωθοῦν μὲ πολυγωνικὴ γραμμὴ τὰ ἄκρα αὐτῶν τῶν τμημάτων. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο σχηματίζεται καὶ τὸ ἱστόγραμμα καὶ τὸ πολύγωνο τῆς σχετικῆς συχνότητας.



Σχ. 96–2

Τὰ στατιστικὰ δεδομένα τοῦ πίνακα 7 τὰ παρουσιάζουμε καὶ στὸν πίνακα 8. Τὸ πλάτος σὲ κάθε τάξη εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχο τοῦ πίνακα 7, γιὰ τοῦτο στὸν 8 οἱ τάξεις εἶναι μόνο 6. Ὅπως βλέπουμε στὶς τάξεις αὐτὲς δὲν ὑπάρχει καμιὰ μὲ πληθάριθμο τὸ μηδέν. Στὸ Σχ. 96–2 παρουσιάζεται τὸ ἱστόγραμμα τῆς συχνότητας γιὰ τὸν πίνακα 8. Στὸ παρακάτω Σχ. 96–3 ἔχουμε τὸ πολύγωνο τῆς συχνότητας τῶν στοιχείων τοῦ πίνακα 8.

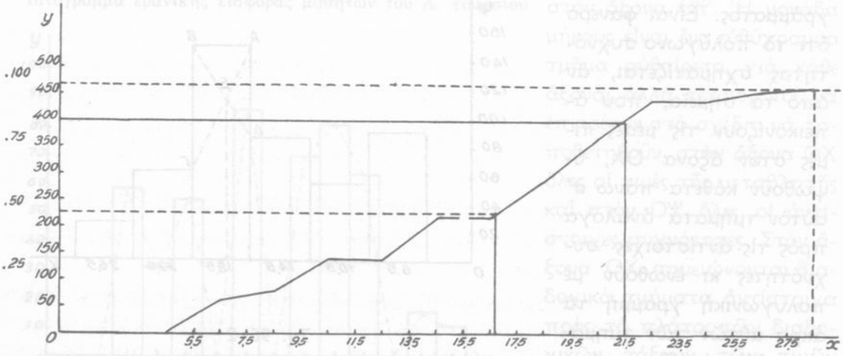
Πολύγωνο συχνότητας. Πίνακας 8



Σχ. 96–3

γ) Τὸ πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας. Σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις στὴ στατιστικὴ μελέτη κάποιου θέματος εἶναι χρήσιμη ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς

Πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας. Πίνακας 7



Σχ. 96–4

ἀθροιστικῆς συχνότητας. Γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ πολυγώνου τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας σ' ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ΧΟΨ προσδιορίζουμε τὰ σημεῖα ποὺ ἔχουν ὡς τετμημένη **τὴν ἀνώτερη ἀκραία τιμὴ** κάθε τάξεως καὶ τεταγμένη τὴν ἀντίστοιχη πρὸς τὴν τάξη ἀθροιστικὴ συχνότητα. Ἔτσι θὰ ἔχουμε μιὰ σειρὰ ἀπὸ «διακεκριμένα» (ξεχωριστὰ) σημεῖα, πού, ὅταν τὰ ἑνώσουμε μὲ εὐθύγραμμα τμήματα διαδοχικά, θὰ σχηματίσουν τὸ πολύγωνο τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας. Στὸ παραπάνω Σχ. 96–4 ἔχουμε τὸ πολύγωνο τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας τοῦ πίνακα 7.

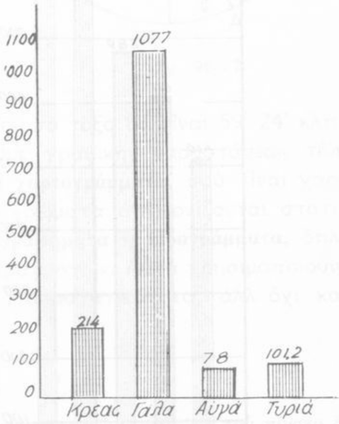
Ἂν γράψουμε μιὰ κάθετο στὸν ἄξονα ΟΨ σ' ὁποιοδήποτε σημεῖο του λ.χ. σ' ἐκεῖνο, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸν ἀριθμὸ 400, θὰ κόψει τὸ πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας σ' ἕνα σημεῖο Α. Αὐτοῦ τοῦ σημείου Α ἡ τετμημένη εἶναι κατὰ προσέγγιση 21,30, συνεπῶς συμπεραίνουμε ὅτι 400 μαθητὲς τοῦ γυμνασίου ἔδωσαν λιγότερο ἀπὸ 21,30 δρχ. στὸν ἔρανο ὁ καθένας.

δ) Τὸ ραβδόγραμμα. Τὸ ραβδόγραμμα ἀποτελεῖται ἀπὸ μιὰ σειρὰ ὀρθογώνια, ποὺ ἔχουν ἴσες βάσεις καὶ στηρίζονται στὸν ἴδιο ἄξονα. Τὰ μήκη τους εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὶς ἀντίστοιχες συχνότητες ἢ γενικότερα τὶς τιμὲς ποὺ παριστάνουν. Στὸ Σχ. 96–5 ἔχουμε ἕνα ραβδόγραμμα, ποὺ παριστάνει τὴν παραγωγὴ στὴν Ἑλλάδα τὸ ἔτος 1964 τῶν κυριότερων κτηνοτροφικῶν προϊόντων σὲ χιλιάδες τόννους.

Στὸ ἑπόμενο Σχ. 96–6 ἔχουμε ἕνα τριπλὸ ραβδόγραμμα. Τὸ α' δίνει τὴν εἰκόνα τῆς ἐξελίξεως τῆς ἀξίας τῶν εἰσαγωγῶν στὴν Ἑλλάδα βιομηχανικῶν προϊόντων σ' ἑκατομμύρια δολλάρια στὴ σειρὰ τῶν ἐτῶν 1963 - 1967.

Τὸ β' ραβδόγραμμα ἀπεικονίζει τὸ ὕψος τῆς ἀξίας τῶν ἐξαγωγῶν τῶν βιομηχανικῶν μας προϊόντων στὴν τετραετία 1964 - 1967, σύμφωνα μὲ τὰ στοιχεῖα, ποὺ παρέχει ἡ Τράπεζα τῆς Ἑλλάδος.

Παραγωγὴ κτηνοτροφικῶν προϊόντων κατὰ τὸ 1964 σὲ χιλιάδες τόννους

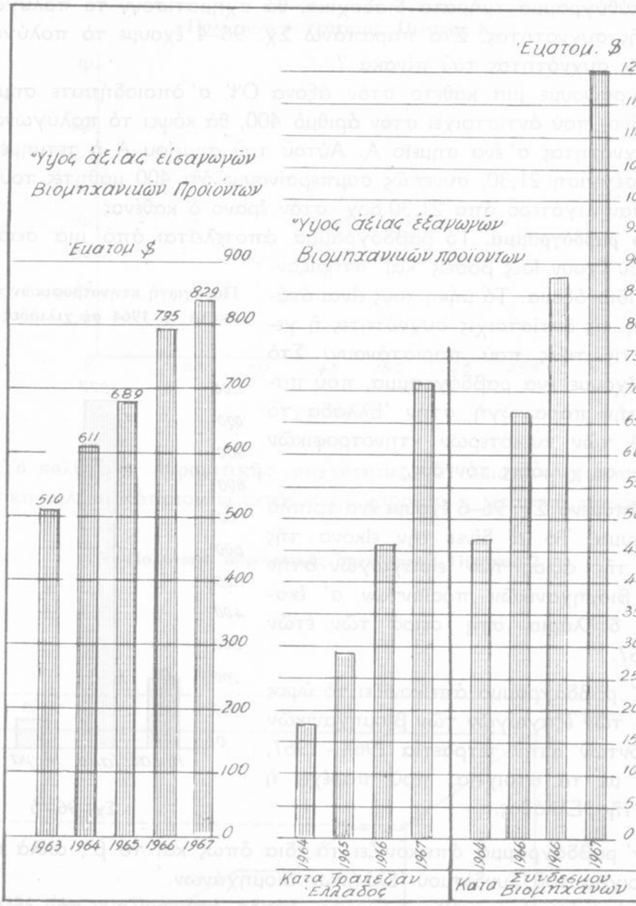


Σχ. 96—5

Τὸ γ' ραβδόγραμμα ἀπεικονίζει τὰ ἴδια ὅπως καὶ τὸ β', ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ Συνδέσμου Ἑλλήνων Βιομηχάνων.

Καὶ τὰ τρία αὐτὰ ραβδογράμματα, ἐπειδὴ ἀπεικονίζουν τὴν ἐξέλιξη ἑνὸς πληθυσμοῦ στὴ διάρκεια μιᾶς σειρᾶς ἐτῶν, λέγονται καὶ **χρονοδιαγράμματα.**

ε) Τὸ κυκλικὸ διάγραμμα. Γιὰ τὴ γραφικὴ ἀπεικόνιση στατιστικῶν δεδομένων σὲ μιὰ ὁρισμένη χρονικὴ στιγμὴ εἶναι χρήσιμο καὶ τὸ κυκλικὸ διάγραμμα. Ἕνας κύκλος μὲ αὐθαίρετη ἀκτίνα χωρίζεται σὲ κυκλικοὺς τομεῖς, ποὺ ἔχουν ἐμβαδὰ ἀνάλογα πρὸς τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς μεταβλητῆς. Ἐπειδὴ σὲ κάθε κύκλο τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τομέων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη τῶν τόξων τους, τὰ ὁποῖα πάλι εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὶς ἀπόλυτες τιμές τους σὲ μονάδες γωνιῶν ἢ τόξων, λ.χ. σὲ μοῖρες, διαιρεῖται ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου σὲ τόξα ἀνάλογα πρὸς τὶς τιμές τῆς μεταβλητῆς καὶ γράφονται οἱ ἀκτίνες στὰ σημεῖα τῶν διαιρέσεων. Στὸ Σχ. 96–7 ἔχουμε ἕνα κυκλικὸ διάγραμμα, ποὺ ἀπεικο-



Σχ. 96—6

νίζει τὴ χρηματοδότηση σειρᾶς κλάδων τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς τῆς Ἑλλάδας τὸν Αὔγουστο τοῦ 1970, ὅπως παρουσιάζεται στὸν πίνακα 9. Ἡ συνολικὴ χρηματοδότηση ἀνέρχεται στὸ ποσὸ τῶν 20000 ἑκατομμυρίων δραχμῶν καὶ ἀντιστοιχίζεται μὲ ὁλόκληρο τὸ ἐμβαδὸ τοῦ κύκλου (Σχ. 96–7). Τὸ 1% ἀντιστοιχίζεται σὲ τόξο $\frac{360^\circ}{100} = 3{,}6^\circ$, ἑπομένως τὸ 19,5% σὲ τόξο $3{,}6^\circ \times 19{,}5 = 70^\circ\, 10'$, ἄρα ἡ χρηματοδότηση τοῦ Τουρισμοῦ καὶ γιὰ τὶς ξενοδοχειακὲς ἐπιχειρήσεις ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸν τομέα ΑΚΒ, ποὺ ἔχει βάση τὸ τόξο ΑΒ = = 70° 10′. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἡ ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια ἔχει χρηματοδότηση, ποὺ

Χρηματοδότηση 5 κλάδων σὲ ἑκατομμύρια δραχμὲς

(Αὔγουστος 1970)

Κλάδοι	Ποσὸ	%	Μοῖρες
1. Τουρισμὸς Ξενοδοχεῖα	3.900	19,5	70° 10′
2. Ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια	3.300	16,5	59° 24′
3. Μεταφορὲς ἐπικοινωνίες	5.000	25	90°
4. Ἔργα κοινῆς ὠφελείας	6.600	33	118° 50′
5. Ἄλλοι σκοποὶ	1.200	6	21° 36′
Ἄθροισμα	20.000	100	360°

Στοιχεῖα ὑποθετικὰ Πίνακας 9

Σχ. 96—7

ἀπεικονίζεται μὲ τὸν τομέα ΒΚΓ καὶ τοῦ ὁποίου τὸ τόξο ΒΓ εἶναι 59° 24′ κλπ.

Ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς προηγούμενους τρόπους γραφικῆς παραστάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων ὑπάρχουν ἀκόμα τὰ **χαρτογράμματα**, ποὺ εἶναι χάρτες γεωγραφικοί, στοὺς ὁποίους μὲ διάφορα χρώματα ἀπεικονίζονται στατιστικὰ στοιχεῖα. Ἀκόμα ὑπάρχουν τὰ **εἰδογραφήματα** ἢ **εἰδογράμματα**, δηλ. πίνακες μὲ σχέδια καὶ εἰκόνες προσώπων καὶ πραγμάτων. Αὐτὰ χρησιμοποιοῦνται πολὺ στὶς διαφημίσεις, ἔχουν μεγάλη παραστατικότητα, ἀλλ᾽ ὄχι καὶ ἀκρίβεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

365) Νὰ κάμετε τὸ πολύγωνο ἀθροιστικῆς συχνότητας τῶν στοιχείων τοῦ πίνακα 8.

366) Νὰ σχηματίσετε ραβδόγραμμα μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀσκ. 363.

367) Νὰ σχηματίσετε ραβδόγραμμα μὲ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀσκ. 364.

368) Τὸ 1970 ὑπῆρχαν τὰ ἀκόλουθα στοιχεῖα γιὰ τὴν κατανομὴ τῆς ἐκτάσεως τῆς Ἑλλάδας: Βοσκότοποι 34,5%, γεωργικὴ γῆ 31%, δάση 20,3%, οἰκοδομημένη ἔκταση 4,5%, ἀμμώδης ἔκταση 5,8%, ἔκταση καλυπτόμενη μὲ νερὰ 3,9%. Νὰ γίνει τὸ κυκλικὸ διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

97. ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ.

α) Γενικά. Στὴ Στατιστικὴ συχνὰ γίνεται ἀντικατάσταση πολλῶν ἀριθμῶν μὲ μιὰ χαρακτηριστικὴ τιμή. Ἡ τιμὴ αὐτὴ φανερώνει **τὴν τάση**, ποὺ ὑπάρχει στὰ στατιστικὰ δεδομένα νὰ συγκεντρώνονται **στὴν περιοχὴ αὐτῆς τῆς τιμῆς**, καὶ περιγράφει μὲ τρόπο ἁπλὸ καὶ μὲ σαφήνεια ὁλόκληρο τὸ σύνολο τῶν δεδομένων.

Οἱ χαρακτηριστικὲς τιμές, οἱ ὁποῖες ἀντικαθιστοῦν ἕνα σύνολο ἀριθμῶν, ὀνομάζονται κεντρικὲς ἢ τακτικὲς τιμὲς ἢ καὶ παράμετροι.

Διακρίνονται **σὲ μέσους κεντρικῆς τάσεως** καὶ **σὲ μέσους θέσεως.** Οἱ πρῶτοι εἶναι ὁ **ὁ ἀριθμητικός, γεωμετρικὸς** καὶ **καὶ ὁ ἁρμονικὸς** καὶ οἱ δεύτεροι **ἡ διάμεσος** καὶ **ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή.** Ἀπὸ τοὺς πρώτους θὰ ἐξετάσουμε μόνο τὸν ἀριθμητικὸ μέσο.

β) Ἀριθμητικὸς μέσος. Μέσος ἀριθμητικὸς στατιστικῶν στοιχείων, ποὺ εἶναι ἀταξινόμητα, εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματός τους διὰ τοῦ πληθαρίθμου τοῦ συνόλου τους.

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος λέγεται καὶ **μέσος ὅρος.** Ὑπολογίζεται μόνο σὲ τιμὲς μεταβλητῶν. Ἂν τὰ δεδομένα εἶναι $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, ὁ ἀριθμητικὸς μέσος $\overline{x}$ εἶναι:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_\nu}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x}{\nu} \qquad (1)$$

Θὰ δοῦμε μὲ παραδείγματα πῶς προσδιορίζεται ὁ μέσος ὅρος, ὅταν τὰ στοιχεῖα εἶναι ταξινομημένα ἢ ἔχει γίνει ἡ ὁμαδοποίησή τους.

1ο. Σ' ἕνα ἐργοστάσιο 15 βοηθοὶ ἔχουν ἡμερομίσθιο ἀπὸ 42 δρχ., 20 ἐργάτες ἀπὸ 75 δρχ., 6 τεχνίτες ἀπὸ 120 δρχ. καὶ 2 ἐπιστάτες ἀπὸ 150 δρχ. Πόσα κατὰ μέσο ὅρο παίρνει ὁ ἐργαζόμενος στὸ ἐργοστάσιο αὐτό;

Ὅλοι οἱ ἐργαζόμενοι εἶναι 43 καὶ παίρνουν:

$$15 \times 42 + 20 \times 75 + 6 \times 120 + 2 \times 150 = 3150 \text{ δρχ.}$$

ἐπομένως ἡ μέση τιμὴ εἶναι: $x = \ = 73{,}25$ δρχ.

Ἂν ὁ καθένας παίρνει τὴν ἡμέρα 73,25 δρχ., τὸ ἐργοστάσιο θὰ πληρώσει σ' ὅλους μιὰ ἡμέρα τὸ ἴδιο ποσό, δηλ. 3150 δρχ.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_3$ ἔχουν ἀντίστοιχα συχνότητες $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_3$, ἡ μέση τιμή τους εἶναι:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_\nu x_\nu}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_\nu} \quad \text{ἢ} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} \qquad (2)$$

2ο. Ὅταν τὰ στοιχεῖα εἶναι ὁμαδοποιημένα καὶ διαμερίζονται σὲ τάξεις, τότε παίρνουμε γιὰ κάθε τάξη τὴ μέση τιμὴ κι ἐργαζόμαστε ὅπως στὸ προηγούμενο παράδειγμα. Λ.χ. μὲ τὰ δεδομένα τοῦ πίνακα 8 ἡ μέση τιμὴ τῆς ἐρανικῆς εἰσφορᾶς εἶναι:

$$\overline{x} = \frac{88 \cdot 6{,}5 + 54 \cdot 10{,}5 + 85 \cdot 14{,}5 + 149 \cdot 18{,}5 + 63 \cdot 22{,}5 + 25 \cdot 26{,}5}{88 + 54 + 85 + 149 + 63 + 25} = \frac{7208}{474} \simeq 15{,}5.$$

Ἰσχύει λοιπὸν καὶ στὴν περίπτωση αὐτὴ ὁ τύπος (2).

γ) Ἡ διάμεσος. Διάμεσος λέγεται ἡ τιμή, ἡ ὁποία χωρίζει τὰ δεδομένα σὲ δύο τάξεις μὲ τὸν ἴδιο πληθάριθμο. Ὁ μέσος αὐτός, ὅπως κι ὁ ἀριθμητικός, ἐφαρμόζεται σὲ τιμὲς μεταβλητῶν. Τὰ δεδομένα κατατάσσονται κατὰ μέγεθος αὐξανόμενο γιὰ τὴν εὕρεση τῆς διαμέσου. Π.χ. ἂν οἱ τιμὲς τῆς μεταβλητῆς εἶναι 6, 9, 11, 15, 16, 19, 20 ἡ διάμεσος εἶναι ὁ 15, ἐνῶ ἂν εἶναι οἱ τιμὲς 6, 9, 11, 15, 16, 19, 20, 30 ἡ διάμεσος εἶναι $\delta = \frac{15+16}{2} = 15{,}5$, δηλ. ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο μεσαίων τιμῶν.

Ἂν τὰ στοιχεῖα βρίσκονται σὲ πίνακα κατανομῆς κατὰ συχνότητες, ἡ διάμεσος ὑπολογίζεται μὲ μιὰ σχέση, ποὺ θὰ τὴ μάθουμε σ' ἀνώτερη τάξη στὸ λύκειο. Γραφικὰ ὅμως προσδιορίζεται πολὺ εὔκολα ἡ διάμεσος, ἂν σχηματίσουμε τὸ πολύγωνο τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας. Π.χ. στὸ Σχ. 96–4 ἡ κάθετος στὸν ἄξονα ΟΨ στὸ σημεῖο, τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸν 232 (ἢ 50%) τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας, τέμνει τὴν πολυγωνικὴ γραμμὴ σ' ἕνα σημεῖο Δ μὲ τετμημένη περίπου 16,80, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ 50% τῶν μαθητῶν πλήρωσε κάτω ἀπὸ 16,80 δρχ., τὸ δὲ ἄλλο 50% περισσότερο ἀπὸ 16,80 δρχ.

δ) Ἡ ἐπικρατούσα τιμή. Ὁ μέσος αὐτὸς εἶναι ἐκείνη ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, ποὺ ἀντιστοιχίζεται στὴ μέγιστη συχνότητα. Ἐφαρμόζεται, ὅταν τὰ δεδομένα ἐμφανίζονται σὲ κατανομὴ συχνοτήτων. Καὶ ὁ μέσος αὐτὸς ὑπολογίζεται μὲ μιὰ σχέση, ποὺ θὰ τὴ μάθουμε σὲ ἄλλη τάξη. Γραφικὰ στὸ Σχ. 96–2 τὸ μεγαλύτερο ὀρθογώνιο τοῦ ἱστογράμματος εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν 4η τάξη μέσης τιμῆς 18,5 δρχ. Στὴν τάξη αὐτὴ ἡ ἀπόλυτη συχνότητα εἶναι 149, ἡ μεγαλύτερη ἀπὸ ὅλες σ' αὐτὴ τὴν κατανομή. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὶς δύο πάνω κορυφὲς Α καὶ Β αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ τὶς γειτονικὲς κορυφὲς Γ καὶ Δ τῶν δύο σὲ συνέχεια ἄλλων ὀρθογωνίων, τέμνονται στὸ σημεῖο Ε. Ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Ε στὸν ἄξονα ΟΧ ὁρίζει τὴν ἐπικρατούσα τιμή. Αὐτὴ εἶναι περίπου 18,10 γιὰ τὸν πίνακα 8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

369) Τὰ ἡμερομίσθια 6 ἐργατῶν εἶναι 75 δρχ., 82 δρχ., 100 δρχ., 107 δρχ., 112 δρχ., 120 δρχ. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν καὶ ποιὰ ἡ διάμεσος;

370) Ἕνας μαθητὴς γυμνασίου στὸ Α' τετράμηνο βαθμολογήθηκε στὰ θρησκευτικὰ μὲ 16, στὰ ἀρχαῖα μὲ 13, στὰ νέα μὲ 14, στὰ μαθηματικὰ μὲ 12, στὴ φυσικὴ μὲ 14, στὰ τεχνικὰ μὲ 17, στὰ ἀγγλικὰ μὲ 13, στὴν ἱστορία μὲ 16, στὴ γεωγραφία μὲ 15, στὴ γυμναστικὴ μὲ 18 καὶ στὴ μουσικὴ μὲ 12. Ποιὰ εἶναι ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς βαθμολογίας του κατὰ τὸ τετράμηνο αὐτό;

371) Ὅταν ἀναμείξουμε 45 κιλὰ λάδι τῶν 28 δρχ. μὲ 20 κιλὰ τῶν 24 δρχ. καὶ 35 κιλὰ τῶν 18 δρχ., πόσο θὰ στοιχίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος;

372) Οἱ ἀριθμοὶ 3, 7, 12, x ἔχουν μέσο ἀριθμητικὸ τὸν 10. Νὰ βρεθεῖ ὁ x.

373) Νὰ προσδιορισθεῖ γραφικὰ ἡ διάμεσος στὰ δεδομένα τῆς ἀσκ. 365.

374) Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσο ἀριθμητικὸ τὸν $\overline{x}$. Νὰ βρεθεῖ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν $x_1+\alpha$, $x_2+\alpha$, $x_3+\alpha$, ὅπως καὶ τῶν $x_1-\alpha$, $x_2-\alpha$, $x_3-\alpha$ ἢ τῶν $x_1\alpha$, $x_2\alpha$, $x_3\alpha$. Νὰ γίνει ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς ἀσκήσεως.

375) Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσο ἀριθμητικὸ τὸν $\overline{x}$ καὶ οἱ $\alpha x_1+\beta$, $\alpha x_2+\beta$, $\alpha x_3+\beta$ τὸν $\overline{\psi}$. Νὰ δείξετε ὅτι εἶναι: $\overline{\psi} = \alpha\overline{x}+\beta$.

19, 20, 30 ἡ διάμεσος εἶναι $\delta = \frac{15+16}{2} = 15{,}5$, δηλ. ὁ μέσος ὅρος τῶν δύο μεσαίων τιμῶν.

Ἂν τὰ στοιχεῖα βρίσκονται σὲ πίνακα κατανομῆς κατὰ συχνότητες, ἡ διάμεσος ὑπολογίζεται μὲ μιὰ σχέση, ποὺ θὰ τὴ μάθουμε σ' ἀνώτερη τάξη στὸ Λύκειο. Γραφικὰ ὅμως προσδιορίζεται πολὺ εὔκολα ἡ διάμεσος, ἂν σχηματίσουμε τὸ πολύγωνο τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας. Π.χ. στὸ Σχ. 96–4 ἡ κάθετος στὸν ἄξονα ΟΨ στὸ σημεῖο, τὸ ὁποῖο ἀντιστοιχίζεται μὲ τὸν 232 (ἢ 50%) τῆς ἀθροιστικῆς συχνότητας, τέμνει τὴν πολυγωνικὴ γραμμὴ σ' ἕνα σημεῖο Δ μὲ τετμημένη περίπου 16,80, ποὺ σημαίνει ὅτι τὸ 50% τῶν μαθητῶν πλήρωσε κάτω ἀπὸ 16,80 δρχ., τὸ δὲ ἄλλο 50% περισσότερο ἀπὸ 16,80 δρχ.

δ) **Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή.** Ὁ μέσος αὐτὸς εἶναι ἐκείνη ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, ποὺ ἀντιστοιχίζεται στὴ μέγιστη συχνότητα. Ἐφαρμόζεται, ὅταν τὰ δεδομένα ἐμφανίζονται σὲ κατανομὴ συχνοτήτων. Καὶ ὁ μέσος αὐτὸς ὑπολογίζεται μὲ μιὰ σχέση, ποὺ θὰ τὴ μάθουμε σὲ ἄλλη τάξη. Γραφικὰ στὸ Σχ. 96-2 τὸ μεγαλύτερο ὀρθογώνιο τοῦ ἱστογράμματος εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν 4η τάξη μέσης τιμῆς 18,5 δρχ. Στὴν τάξη αὐτὴ ἡ ἀπόλυτη συχνότητα εἶναι 149, ἡ μεγαλύτερη ἀπὸ ὅλες σ' αὐτὴ τὴν κατανομή. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ συνδέουν τὶς δύο πάνω κορυφὲς Α καὶ Β αὐτοῦ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ τὶς γειτονικὲς κορυφὲς Γ καὶ Δ τῶν δύο σὲ συνέχεια ἄλλων ὀρθογωνίων, τέμνονται στὸ σημεῖο Ε. Ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Ε στὸν ἄξονα ΟΧ ὁρίζει τὴν ἐπικρατοῦσα τιμή. Αὐτὴ εἶναι περίπου 18,10 γιὰ τὸν πίνακα 8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

369) Τὰ ἡμερομίσθια 6 ἐργατῶν εἶναι 75 δρχ., 82 δρχ., 100 δρχ., 107 δρχ., 112 δρχ. καὶ 120 δρχ. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν καὶ ποιὰ ἡ διάμεσος;

370) Ἕνας μαθητὴς γυμνασίου στὸ Α' τετράμηνο βαθμολογήθηκε στὰ θρησκευτικὰ μὲ 16, στὰ ἀρχαῖα μὲ 13, στὰ νέα μὲ 14, στὰ μαθηματικὰ μὲ 12, στὴ φυσικὴ μὲ 14, στὰ τεχνικὰ μὲ 17, στὰ ἀγγλικὰ μὲ 13, στὴν ἱστορία μὲ 16, στὴ γεωγραφία μὲ 15, στὴ γυμναστικὴ μὲ 18 καὶ στὴ μουσικὴ μὲ 12. Ποιὰ εἶναι ἡ μέση ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς βαθμολογίας του κατὰ τὸ τετράμηνο αὐτό;

371) Ὅταν ἀναμείξουμε 45 κιλὰ λάδι τῶν 28 δρχ. μὲ 20 κιλὰ τῶν 24 δρχ. καὶ 35 κιλὰ τῶν 18 δρχ., πόσο θὰ στοιχίζει τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος;

372) Οἱ ἀριθμοὶ 3, 7, 12, x ἔχουν μέσο ἀριθμητικὸ τὸν 10. Νὰ βρεθεῖ ὁ x.

373) Νὰ προσδιορισθεῖ γραφικὰ ἡ διάμεσος στὰ δεδομένα τῆς ἀσκ. 365.

374) Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσο ἀριθμητικὸ τὸν $\bar{x}$. Νὰ βρεθεῖ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν $x_1+\alpha$, $x_2+\alpha$, $x_3+\alpha$, ὅπως καὶ τῶν $x_1-\alpha$, $x_2-\alpha$, $x_3-\alpha$ ἢ τῶν $x_1\alpha$, $x_2\alpha$, $x_3\alpha$. Νὰ γίνει ἀριθμητικὴ ἐφαρμογὴ αὐτῆς τῆς ἀσκήσεως.

375) Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, x_3 ἔχουν μέσο ἀριθμητικὸ τὸν $\bar{x}$ καὶ οἱ $\alpha x_1+\beta$, $\alpha x_2+\beta$, $\alpha x_3+\beta$ τὸν $\bar{\psi}$. Νὰ δείξετε ὅτι εἶναι: $\bar{\psi} = \alpha\bar{x} + \beta$.

ΠΙΝΑΚΕΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ʽΗμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοίρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,891	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0 935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,988	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0,957	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

Ἐφαπτόμεναι ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖρες	0′	10′	20′	30′	40	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,363	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0.344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0.499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3.271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	5,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9,255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171.9	343,8

Συνημίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

Σύνολα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

Καρτεσιανὸ γινόμενο συνόλου. Διμελεῖς σχέσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

Πραγματικοὶ ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Διανύσματα στὸ ἐπίπεδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

Τριγωνομετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ X

Στοιχεῖα περιγραφικῆς στατιστικῆς.

Ἔκδοσις Η', [illegible] - Ἀντίτυπα [illegible] - Σύμβασις 2718/28-4-76

Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία : Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ Α.Ε.

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ Νόμου 1129 τῆς 15)21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α΄ 108).

024000019890

Ἔκδοσις Η΄, 1976 (VIII)-Ἀντίτυπα 135.000 - Σύμβασις 2718/28-4-76

Ἐκτύπωσις - Βιβλιοδεσία: Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ Α.Ε.