ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Θ. ΒΑΒΑΛΕΤΣΚΟΥ — Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1970

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Δ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

Θ. ΒΑΒΑΛΕΤΣΚΟΥ — Γ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1970

Ἡ συγγραφὴ τοῦ παρόντος τόμου ἐγένετο ὡς ἑξῆς :

ὑπὸ Θ. Βαβαλέτσκου : Κεφάλαια IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV.

ὑπὸ Γ. Μπούσγου : Κεφάλαια I, II, III καὶ XVI.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

1. ΠΡΟΤΑΣΙΣ.

Ἡ μεταξὺ τῶν ἀνθρώπων συνεννόησις γίνεται μὲ προφορικὸν ἢ γραπτὸν λόγον. Εἰς τὴν Γραμματικὴν καὶ τὸ Συντακτικὸν «λόγος συντομώτατος μὲ ἐντελῶς ἁπλοῦν περιεχόμενον» λέγεται **πρότασις**.

Εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν καὶ τὰ Μαθηματικὰ ἐν γένει θεωροῦμεν τὰς λεγομένας λογικὰς προτάσεις, ἤτοι προτάσεις δι' ἑκάστην τῶν ὁποίων δυνάμεθα κατὰ ἕνα ἀκριβῶς τρόπον νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι, ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὕτη ἐκφράζει, εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδὲς ἀποκλείοντες ἄλλην περίπτωσιν. Οὕτω, π.χ., ἡ πρότασις :

«ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι ἄρτιος» (1)

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, διότι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὕτη ἐκφράζει εἶναι ἀληθές.

Ἡ πρότασις :

«ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι ἀρνητικός» (2)

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, διότι ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον αὕτη ἐκφράζει εἶναι ψευδές.

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις (1) καὶ (2) θεωροῦνται ὡς **ἁπλαῖ** προτάσεις, καθόσον δὲν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο ἢ περισσοτέρας ἄλλας προτάσεις. Τοὐναντίον ἡ πρότασις :

« Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 11 εἶναι πρῶτοι», (3)

ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ὡς ἀληθὴς (εἶναι δηλ. λογικὴ πρότασις), χωρίζεται εἰς δύο ἄλλας, ἤτοι :

«ὁ ἀριθμὸς 2 εἶναι πρῶτος» καὶ «ὁ ἀριθμὸς 11 εἶναι πρῶτος».

Δι' αὐτὸ ἡ πρότασις (3) λέγεται **σύνθετος** πρότασις.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν δεχόμεθα ὅτι :

1) ὑπάρχει ἓν σύνολον ἁπλῶν λογικῶν προτάσεων (τὸ σύνολον τοῦτο συμβολίζομεν μὲ L).

2) εἰς ἑκάστην πρότασιν ἐκ τοῦ L δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἀναλόγως τοῦ περιεχομένου της ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἐκ τῶν χαρακτηρισμῶν : **ἀληθὴς** ἢ **ψευδής**.

Παραδείγματα προτάσεων τοῦ συνόλου L :

1. «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶναι ἴσον πρὸς μίαν εὐθεῖαν - γωνίαν» (ἀληθής).

2. «$4+2=7$» (ψευδής)

Παραδείγματα προτάσεων, αἱ ὁποῖαι δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ L :

1. «τὰ Μαθηματικὰ εἶναι πράσινα» (παραλογισμός)

2. «ἓν τρίγωνον ἀποτελεῖται ἐκ τριῶν γραμμῶν» (ἀσαφής)

3. «$x+10=0$» (δὲν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής).

Ὅταν τὸ περιεχόμενον μιᾶς προτάσεως εἶναι ἀληθές, τότε λέγομεν ὅτι ἡ πρότασις ἔχει **λογικὴν τιμὴν Α** ἢ **τιμὴν ἀληθείας Α**.

Ὅταν τὸ περιεχόμενον μιᾶς προτάσεως εἶναι ψευδές, τότε λέγομεν ὅτι ἡ πρότασις ἔχει **λογικὴν τιμὴν Ψ** ἢ **τιμὴν ἀληθείας Ψ.**

Παραδείγματα :

1. Ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως «ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός» εἶναι Ψ.

2. Ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως «ὁ 3 εἶναι θετικὸς ἀριθμός» εἶναι Α.

Τὰς προτάσεις τοῦ συνόλου L παριστάνομεν συνήθως μὲ τὰ γράμματα p, q, r κτλ. Γράφομεν, π.χ.,

p : «ὁ ἀριθμὸς 135 λήγει εἰς 5».

q : «ὁ ἀριθμὸς 125 εἶναι διαιρετὸς διὰ 5.

2. ΣΤΑΘΕΡΑ ΚΑΙ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ.

Ἡ διὰ τῆς γραφῆς συνεννόησις γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν διαφόρων σημάτων, π.χ. γραμμάτων, λέξεων, φράσεων, προτάσεων, σημείων στίξεως, διαφόρων συμβατικῶν σημάτων (π.χ. ΙΚΑ), εἰκόνων, διαγραμμάτων κ.ο.κ. Τὰ τοιαῦτα σήματα ὀνομάζομεν **σύμβολα.**

Ἓν γράμμα, π.χ. τὸ x, εἶναι σύμβολον. Σύμβολα ἐπίσης εἶναι, π.χ., ἡ λέξις «πέντε», τὸ « + », ὁ ἀριθμὸς 15, τὸ ἐρωτηματικὸν κ.τ.λ.

Ἓν σύμβολον εἶναι δυνατὸν νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ περισσότερα σήματα, καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι ἐπίσης σύμβολον. Π.χ $x+5$, $\alpha^2-\alpha\beta$. Συνήθως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σύμβολον τὸ ὀνομάζομεν **ἔκφρασιν.**

Μέσα εἰς τὰς προτάσεις καὶ γενικώτερον εἰς τὰς ἐκφράσεις, ἰδίως εἰς τὰ Μαθηματικά, εὑρίσκομεν ὅρους ἢ σύμβολα, ὅπως π.χ. «ἄθροισμα», «τρίγωνον», «–8», « + 12», «0» καὶ ἄλλα παρόμοια, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν **καθωρισμένην καὶ μόνιμον σημασίαν εἰς τὸ θέμα, τὸ ὁποῖον ἐξετάζομεν.** Τὰ τοιαῦτα σύμβολα ὀνομάζονται **σταθεραί.**

Ἠμπορεῖ ὅμως εἰς μίαν ἔκφρασιν νὰ ὑπάρχῃ σύμβολον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει μόνιμον καὶ καθωρισμένην σημασίαν εἰς τὴν ἔκφρασιν αὐτήν. Π.χ. εἰς τὴν ἔκφρασιν «ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ 5» τὸ σύμβολον x δὲν ἔχει μόνιμον καὶ καθωρισμένην σημασίαν. Δὲν εἶναι δηλ. τὸ x ὄνομα ἑνὸς ὡρισμένου ἀριθμοῦ. Ἐὰν ὅμως εἰς τὴν θέσιν τοῦ x τεθῇ ἕνας ὁποιοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμός, τότε προκύπτει πρότασις (ἀληθὴς ἢ ψευδής). Τὸ ἴδιον συμβαίνει εἰς τὴν ἔκφρασιν $2x = 4$. Ὁμοίως εἰς τὴν ἔκφρασιν $x > ψ$. Τὰ τοιαῦτα σύμβολα ὀνομάζομεν **μεταβλητάς**.

3. ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΤΥΠΟΣ (Ἢ ΑΝΟΙΚΤΗ ΠΡΟΤΑΣΙΣ).

Α) Ἄς ἐξετάσωμεν πάλιν τὴν ἔκφρασιν :

«ὁ χ εἶναι μικρότερος τοῦ 5»

Ἡ ἔκφρασις αὕτη δὲν εἶναι πρότασις, διότι δὲν δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν ἂν εἶναι ἢ μόνον ἀληθὴς ἢ μόνον ψευδής.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι αὕτη γίνεται πρότασις, ἂν εἰς τὴν θέσιν τῆς μεταβλητῆς **x** τοποθετήσωμεν ἕνα οἱονδήποτε πραγματικὸν ἀριθμόν. Ἄν, π.χ., ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 2, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις «ὁ 2 εἶναι μικρότερος τοῦ 5», ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς πρότασις. Ἄν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 7, θὰ προκύψῃ πάλιν πρότασις «ὁ 7 εἶναι μικρότερος τοῦ 5», ἡ ὁποία ὅμως εἶναι ψευδής.

Ἄς ἐξετάσωμεν ἀκόμη τὴν ἔκφρασιν :

$$2x = 4$$

Ἡ ἔκφρασις αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ ἀποβῇ πρότασις, ἂν τὸ x ἀντικατασταθῇ μὲ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν 3, ὁπότε γίνεται $2 \cdot 3 = 4$, ἡ ὁποία εἶναι πρότασις ψευδής. Ἡ ἰδία ἔκφρασις γίνεται ἀληθὴς πρότασις, ἂν ἡ μεταβλητὴ x ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ 2.

Αἱ ἐκφράσεις «ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ 5», «$2x = 4$», κ.τ.λ. ὀνομάζονται **προτασιακοὶ τύποι** ἢ **ἀνοικταὶ** προτάσεις.

Γενικῶς: **Προτασιακὸς τύπος (ἢ ἀνοικτὴ πρότασις) μιᾶς μεταβλητῆς λέγεται κάθε ἔκφρασις, ἡ ὁποία περιέχει μίαν μόνον μεταβλητὴν καὶ ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς πρότασιν, ὅταν ἡ μεταβλητὴ ἀντικατασταθῇ ἀπὸ τυχὸν στοιχεῖον ἑνὸς καθωρισμένου συνόλου.**

Τὸ στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον ἀντικαθιστᾷ τὴν μεταβλητήν, διὰ νὰ προκύψῃ πρότασις, λέγεται **τιμὴ** τῆς μεταβλητῆς. Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς λέγεται **σύνολον ἀναφορᾶς** τῆς μεταβλητῆς τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Τοῦτο συμβολίζεται συνήθως μὲ U. Π.χ. εἰς τὸν προτασιακὸν τύπον $2x > 3$, ἠμποροῦμεν νὰ λάβωμεν ὡς σύνολον ἀναφορᾶς U τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν· τότε, ἂν ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς **x** εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $1\frac{1}{2}$, θὰ προκύψῃ πρότασις ἀληθής, ἂν εἶναι ἴσος μὲ $1\frac{1}{2}$ ἢ μικρότερος τοῦ $1\frac{1}{2}$ θὰ προκύψῃ πρότασις ψευδής.

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς, διὰ τὰς ὁποίας ἕνας προτασιακὸς τύπος γίνεται ἀληθὴς πρότασις, λέγεται **σύνολον ἀληθείας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Εἰς τὸν προτασιακὸν τύπον, π.χ., $2x = 4$, ἂν θεωρήσωμεν ὡς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι $\{2\}$.

Σημ. Εἴπομεν ὅτι συνήθως ἡ μεταβλητὴ x εἶναι στοιχεῖον ἑνὸς καθωρισμένου συνόλου, ἔστω U, τὸ ὁποῖον ὠνομάσαμεν σύνολον ἀναφορᾶς. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ προτασιακὸς τύπος λέγεται καὶ **συνθήκη εἰς τὸ U** καὶ λέγομεν ὅτι **ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει τὸ U.**

Χάριν συντομίας τοὺς προτασιακοὺς τύπους μὲ μίαν μεταβλητήν, π.χ. **x**, τοὺς παριστάνομεν μὲ p(x), q(x), s(x) κ.ο.κ. καὶ τὰ σύνολα ἀληθείας των ἀντιστοίχως μὲ P, Q, S κ.ο.κ.

Ἂν π.χ. παραστήσωμεν μὲ p (x) τὸν προτασιακὸν τύπον : $1 < x < 5$ καὶ λάβωμεν ὡς σύνολον ἀναφορᾶς τὸ N, τότε ἡ πρότασις p (2) εἶναι ἀληθής, ἐνῶ ἡ p (8) εἶναι ψευδής. Τὸ σύνολον ἀληθείας τοῦ p(x) εἶναι $P = \{ 2, 3, 4 \}$.

Ἐπίσης εἰς τὸν προτασιακὸν τύπον $q(x) : 4x = 20$ ἔχομεν ὅτι $q(5) = 4 \cdot 5 = 20$, δηλ. ἀληθὴς πρότασις, ἐνῶ $q(2) = 4 \cdot 2 = 8$, δηλ. ψευδὴς πρότασις. Σύνολον δὲ ἀληθείας του εἶναι τὸ σύνολον $Q = \{ 5 \}$.

B) Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τὴν ἔκφρασιν $x > \psi$.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ 6 καὶ τὸ ψ μὲ 4 προκύπτει ἡ πρότασις $6 > 4$, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής. Ἂν θέσωμεν $x = 3$ καὶ $\psi = 5$ προκύπτει ἡ ψευδὴς πρότασις $3 > 5$.

Ἡ ἔκφρασις $x > \psi$ λέγεται προτασιακὸς τύπος μὲ δύο μεταβλητάς.

Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὑπάρχουν ζεύγη τιμῶν τῶν μεταβλητῶν (ἀπὸ τὸ σύνολον R), διὰ τὰς ὁποίας ὁ προτασιακὸς τύπος γίνεται ἀληθὴς πρότασις καὶ ἄλλα ζεύγη τιμῶν, διὰ τὰς ὁποίας γίνεται ψευδὴς πρότασις.

Ἂς θεωρήσωμεν ἀκόμη τὴν ἔκφρασιν

«ἡ πόλις x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους ψ».

Ἂν ἀντὶ x θέσωμεν «Ἀθῆναι» καὶ ἀντὶ ψ «Ἑλλάς», προκύπτει ἀληθὴς πρότασις: «Ἡ πόλις Ἀθῆναι εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους Ἑλλάς». Ἂν ἀντὶ x θέσωμεν «Μιλάνον» καὶ ἀντὶ ψ «Ἑλλάς» προκύπτει πρότασις ψευδής. Αἱ ἐκφράσεις $x > \psi$, «ἡ πόλις x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους ψ», λέγονται **προτασιακοὶ τύποι** δύο μεταβλητῶν.

Γενικῶς : **Προτασιακὸς τύπος ἢ ἀνοικτὴ πρότασις δύο μεταβλητῶν λέγεται μία ἔκφρασις, ἡ ὁποία περιέχει δύο μεταβλητὰς καὶ ἡ ὁποία μετατρέπεται εἰς πρότασιν, ὅταν αἱ μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ στοιχεῖα δύο ὁριζομένων συνόλων. Τὰ σύνολα ἀναφορᾶς τῶν μεταβλητῶν ἠμπορεῖ καὶ νὰ ταυτίζωνται.**

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμά μας, $x > \psi$, καὶ αἱ δύο μεταβληταὶ ἀναφέρονται εἰς τὸ σύνολον R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Εἰς τὸ β' παράδειγμα ἡ μεταβλητὴ x ἀναφέρεται εἰς τὸ σύνολον τῶν πόλεων καὶ ἡ ψ εἰς τὸ σύνολον τῶν κρατῶν τοῦ κόσμου.

Χάριν συντομίας συμβολίζομεν τοὺς προτασιακοὺς τύπους μὲ δύο μεταβλητὰς διὰ τῶν p(x, ψ), q(x, ψ) s(x, ψ) κ.ο.κ.

Ἂν p(x, ψ) συμβολίζῃ τὸν προτασιακὸν τύπον τοῦ πρώτου παραδείγματός μας, δηλ. ἂν $p(x, \psi) : x > \psi$, τότε p (7,5) εἶναι ἀληθὴς πρότασις, ἐνῶ p (5, 7) εἶναι πρότασις ψευδής.

Ἐπίσης ἂν q (x, ψ) : «ἡ πόλις x εἶναι πρωτεύουσα τοῦ κράτους ψ», τότε q (Λονδῖνον, Ἀγγλία) εἶναι ἀληθὴς πρότασις, ἐνῶ q (Ρώμη, Βέλγιον) εἶναι ψευδής.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον ἀληθείας προτασιακοῦ τύπου p (x, ψ) δύο μεταβητῶν εἶναι, ἐν γένει, ἕν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ ἐξετάσετε πῶς ἠμποροῦν νὰ ὀνομασθοῦν αἱ κατωτέρω ἐκφράσεις: «—», «παραλληλόγραμμον», «ὀρθὴ γωνία», «17».

2) Νὰ ἐξετάσετε πῶς ἠμποροῦν νὰ ὀνομασθοῦν αἱ ἐκφράσεις :

α) Ὁ 10 εἶναι ἀριθμὸς σύνθετος.

β) $2 = 4$ γ) $5 = 3 + 2$

δ) Ὁ Εὐκλείδης ἦτο φιλόλογος.

ε) Ὁ x εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

στ) $2x + 3 = 23$ ζ) $x + \psi = 5$

3) Γνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχει μία μόνον τιμὴ τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν $2x = 6$. Σημαίνει τοῦτο ὅτι τὸ x εἶναι σταθερὸν εἰς τὴν ἔκφρασιν $2x = 6$;

4) Σταθεραί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὀνόματα τοῦ αὐτοῦ πράγματος, λέγομεν ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμήν. Π.χ. «0» καὶ «2 — 2». Νὰ γράψετε πέντε σταθεράς, αἱ ὁποῖαι νὰ ἔχουν τὴν τιμὴν 6.

5) Ὑπάρχουν ἄραγε προτασιακοὶ τύποι, οἱ ὁποῖοι δὲν γίνονται ἀληθεῖς προτάσεις διὰ καμμίαν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς των ; Ἐξετάσατε τὸν $\frac{x}{x} = 2$. Δώσατε ἕνα ἰδικόν σας παράδειγμα. (Λάβετε ὡς σύνολον ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς τὸ N).

6) Ὑπάρχουν προτασιακοὶ τύποι μιᾶς μεταβλητῆς, οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀληθεῖς προτάσεις δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς των. Προφανὲς παράδειγμα : $x + x = 2x$, ὅπου $x \in R$.

Νὰ εὕρετε ἓν ἰδικόν σας παράδειγμα. Πῶς ὀνομάζονται αἱ ἰσότητες, ὅπως ἡ $x + x = 2x$;

7) Δίδεται ὁ προτασιακὸς τύπος p (x) : $2x = 10$ καὶ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ **R**. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον ἀληθείας P τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

8) Δίδεται ὁ προτασιακὸς τύπος $x + \psi = 5$ καὶ σύνολον ἀναφορᾶς τῶν μεταβλητῶν τὸ $\Sigma = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον ἀληθείας τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

9) Δίδεται ὁ προτασιακὸς τύπος q (x) : $\psi = x + 1$, ὅπου x, ψ εἶναι στοιχεῖα τοῦ **R**. Νὰ εὕρετε δύο ζεύγη διὰ τὰ ὁποῖα q (x, ψ) γίνεται ἀληθὴς πρότασις καὶ δύο διὰ τὰ ὁποῖα γίνεται ψευδής.

10) Δίδεται ὁ προτασιακὸς τύπος p (x) : $x^2 - 25 = 0$.

Νὰ ὁρίσετε σύνολον ἀναφορᾶς του καὶ τὸ ἀντίστοιχον σύνολον ἀληθείας του.

11) Δίδεται ὁ προτασιακὸς τύπος «ἡ πόλις x εὑρίσκεται εἰς τὸν νομὸν ψ)». Σύνολα ἀναφορᾶς : τῆς μεταβλητῆς x τὸ σύνολον τῶν πόλεων τῆς Ἑλλάδος, τῆς μεταβλητῆς ψ τὸ σύνολον τῶν νομῶν τῆς Ἑλλάδος. Νὰ εὕρετε τρία ζεύγη τοῦ συνόλου ἀληθείας τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

4. ΠΟΣΟΔΕΙΚΤΑΙ.

Α) Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἄλγεβραν ὅτι

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1, \text{ ὅπου } x \in R$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι ὁ προτασιακὸς οὗτος τύπος μιᾶς μεταβλητῆς γίνεται ἀληθὴς πρότασις διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, τὴν ὁποίαν τιμὴν λαμβάνομεν ἀπὸ τὸ σύνολον **R**, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Μὲ ἄλλους λόγους τὸ σύνολον ἀληθείας τοῦ προτασιακοῦ τύπου ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον ἀναφορᾶς του.

Συμβολικῶς γράφομεν τότε :

$$\forall x \,(x \in \mathrm{R}) : (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

καὶ διαβάζομεν :

«Διὰ κάθε x, τὸ ὁποῖον x ἀνήκει εἰς τὸ R, ἀληθεύει ὅτι

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Τὸ σύμβολον $\forall$ διαβάζεται «διὰ κάθε...» ἢ «δι' ὅλα τά...» καὶ λέγεται **καθολικὸς ἢ γενικὸς ποσοδείκτης**.

Ἐπίσης $\forall x \,(x \in \mathrm{R}) : x - x = 0$

Ἠμποροῦμεν λοιπόν, ὅταν ἔχωμεν προτασιακοὺς τύπους, τῶν ὁποίων τὸ σύνολον ἀληθείας ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον ἀναφορᾶς, νὰ προτάσσωμεν τὸν γενικὸν ποσοδείκτην.

B) Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα τὸν προτασιακὸν τύπον

$p(x) : x + 3 = 8 \quad (x \in \mathrm{R})$

Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι $p(x)$ δὲν γίνεται ἀληθὴς πρότασις διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, ἀπὸ τὸ R, διότι, π.χ., $p(1) = 4$, δηλ. πρότασις ψευδής. Ἀλλὰ τὸ σύνολον ἀληθείας τοῦ προτασιακοῦ τύπου $x + 3 = 8$ δὲν εἶναι τὸ κενόν. Πράγματι : $p(5) = 8$, δηλ. ἀληθὴς πρότασις.

Γράφομεν συμβολικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην :

$\exists x \,(x \in \mathrm{R}) : x + 3 = 8$

καὶ διαβάζομεν :

«Ὑπάρχει τουλάχιστον ἓν x, τὸ ὁποῖον x ἀνήκει εἰς τὸ R, τοιοῦτον ὥστε νὰ ἀληθεύῃ $x + 3 = 8$».

Τὸ σύμβολον $\exists$ λέγεται **ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης** καὶ διαβάζεται «ὑπάρχει τουλάχιστον ἕν...» ἢ «διὰ μερικά...)

Ἠμποροῦμεν ὁμοίως νὰ γράψωμεν :

α) $\exists x \,(x \in \mathrm{R}) : x + 1 > 5$

β) $\exists x \,(x \in \mathrm{R}) : x = -x$

γ) Ἂν T ὀνομάσωμεν τὸ σύνολον τῶν τριγώνων, τότε

$\exists x \,(x \in \mathrm{T}) :$ x ἰσόπλευρον

Ὥστε : Ὅταν εἰς ἕνα προτασιακὸν τύπον τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τότε δυνάμεθα νὰ προτάσσωμεν τὸν ὑπαρξιακὸν ποσοδείκτην.

Γενικώτερον πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰ ἑξῆς :

Πολλάκις διὰ νὰ διατυπώσωμεν προτάσεις, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ Μαθηματικά, κάμνομεν χρῆσιν τῶν ποσοδεικτῶν. Οἱ ποσοδεῖκται προτάσσονται προτασιακῶν τύπων, ὁπότε οὗτοι καθίστανται προτάσεις ἢ μόνον ἀληθεῖς ἢ μόνον ψευδεῖς.

Οὕτω, π.χ., ἡ πρότασις $\forall x \,(x \in \mathrm{U}) : p(x)$ εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον αὕτη λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας Α ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ σύνολον ἀληθείας της P ταυτίζεται μὲ τὸ σύνολον ἀναφορᾶς U (ὁπότε τὸ $P^c = \varnothing$) καὶ τιμὴν ἀληθείας ψ, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ P εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ U (ὁπότε τὸ $P^c \neq \varnothing$).

Ἐπίσης ἡ πρότασις $\exists x (x \in U) : p(x)$ εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον αὕτη ἔχει τιμὴν ἀληθείας Α, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ σύνολον ἀληθείας της P δὲν εἶναι τὸ κενόν, καὶ τιμὴν ἀληθείας Ψ, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ σύνολον P εἶναι τὸ $\varnothing$ (ὁπότε τὸ $P^c = U$).

Παραδείγματα :

1. Ἂν $p(x) : x + 1 > 3$ καὶ $U = N$, τότε
   α) $\forall x (x \in N) : x + 1 > 3$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας Ψ, διότι $P = \{3, 4, 5, 6, \ldots\} \subset U$.
   β) $\exists x (x \in N) : x + 1 > 3$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας Α, διότι $P = \{3, 4, 5, 6, \ldots\} \neq \varnothing$
2. Ἂν $p(x)$: $x^2 + 1 < 0$ καὶ $U = R$, τότε
   α) $\forall x \ (x \in R) : x^2 + 1 < 0$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας ψ, διότι $P = \varnothing$.
   β) $\exists x (x \in R) : x^2 + 1 < 0$ λαμβάνει τιμὴν ἀληθείας ψ, διότι $P = \varnothing$.
3. Ἂν $p(x) : x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, τότε
   α) $\forall x \ (x \in R) : x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ ἔχει τιμὴν ἀληθείας Α, διότι $P = R$
   β) $\exists x (x \in R) : x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ ἔχει τιμὴν ἀληθείας Α, διότι $P \neq \varnothing$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

12) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδὲς ὅτι :

α) $\forall x (x \in N) : \dfrac{x}{x} = 1$ β) $\forall x (x \in R) : (x + 1)^2 = x^2 + 1$
γ) $\exists x (x \in R) : x = x + 2$, δ) $\exists x (x \in R) : x^2 \neq 0$
ε) $\exists x (x \in R) : (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ στ) $\forall x (x \in R) : x = -x$

13) Νὰ χρησιμοποιήσετε κατάλληλον ποσοδείκτην εἰς τοὺς κάτωθι προτασιακοὺς τύπους :

α) $x \neq x + 1$ β) $x^2 = x$
γ) $|x| = x$ δ) $x - 1 < 2$

ὅπου σύνολον ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς εἶναι τὸ R.

5. ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.

Εἰς τὴν καθημερινὴν συζήτησιν καὶ εἰς τὰ Μαθηματικὰ δὲν χρησιμοποιοῦμεν μόνον ἁπλᾶς προτάσεις. Συνήθως τὰς ἁπλᾶς προτάσεις συνδέομεν μεταξύ των μὲ διάφορα συνδετικά, π.χ. «καί», «εἴτε», «ἢ», «ὄχι», «ἐάν..., τότε...» κ.τ.λ. καὶ σχηματίζομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον νέας προτάσεις. Τὰς τοιαύτας προτάσεις ὀνομάζομεν **συνθέτους προτάσεις.**

6. Η ΣΥΖΕΥΞΙΣ ΔΥΟ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Ὁ ἁπλούστερος τρόπος συνδέσεως δύο προτάσεων εἶναι ἡ **σύζευξις**, κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκφωνοῦμεν ἢ γράφομεν αὐτὰς μαζύ, μὲ ἕνα **καὶ** μεταξύ των. Π.χ. ἀπὸ τὰς ἁπλᾶς προτάσεις : «Ὁ Ἰωάννης εἶναι μαθητής», «ὁ Κώστας εἶναι κηπουρός» προκύπτει μὲ τὴν σύζευξίν των ἡ σύνθετος πρότασις :

«ὁ Ἰωάννης εἶναι μαθητὴς καὶ ὁ Κώστας εἶναι κηπουρός».

Ἡ σύζευξις δύο προτάσεων ἀποτελεῖ πρότασιν καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι ἢ μόνον ἀληθὴς ἢ μόνον ψευδής.

Δεχόμεθα ὅτι ἡ σύζευξις εἶναι ἀληθὴς μόνον ὅταν καὶ αἱ δύο συνιστῶσαι προτάσεις εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς, ἄλλως ἡ σύζευξις εἶναι ψευδής.

Ἡ σύζευξις π.χ., «ὁ Σωκράτης ἦτο ἀστρονόμος καὶ $2+3=5$, εἶναι ψευδής, ἐνῷ ἡ σύζευξις «$2+3=5$ καὶ $2>0$» εἶναι ἀληθής.

Ἡ σύζευξις δύο προτάσεων p καὶ q συμβολίζεται : $p \wedge q$.

Τὸ σύμβολον $\wedge$ διαβάζεται **«καί»** καὶ λέγεται **σύμβολον τῆς συζεύξεως.**

Προσέξατε : τὸ σύμβολον $\wedge$ χρησιμοποιεῖται μόνον διὰ νὰ συνδέῃ προτάσεις. Δὲν ἐπιτρέπεται π.χ. νὰ γράψωμεν «$3 \wedge 2$» ἢ «ὁ Κώστας $\wedge$ ἡ Ἑλένη».

7. ΠΙΝΑΚΕΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ.

Α) Εἰς τὴν Μαθηματικὴν Λογικὴν ἡ περισσότερον χρησιμοποιουμένη μέθοδος πρὸς εὕρεσιν τῶν (λογικῶν) τιμῶν τῶν συνθέτων προτάσεων εἶναι ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποίαν ἀναγράφομεν ὅλας τὰς δυνατότητας ἀληθοῦς ἢ ψευδοῦς τῶν συνιστωσῶν προτάσεων καὶ τῆς προκυπτούσης ἐξ αὐτῶν συνθέτου προτάσεως ὑπὸ μορφὴν πίνακος. Ὁ τοιοῦτος πίναξ λέγεται συνήθως **πίναξ (λογικῶν) τιμῶν** ἢ **πίναξ ἀληθείας.**

Ἀπὸ ἕνα πίνακα ἀληθείας ἠμποροῦμεν νὰ διαπιστώσωμεν μὲ ἓν βλέμμα, ἐὰν μία σύνθετος πρότασις εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ προτάσεις, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, εἶναι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς.

Κατωτέρω βλέπετε τὸν πίνακα ἀληθείας διὰ τὴν πρᾶξιν τῆς συζεύξεως δύο προτάσεων p καὶ q. Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ πίνακος βλέπομεν ὅτι ἡ σύζευξις $p \wedge q$ εἶναι ἀληθὴς μόνον ὅταν καὶ αἱ δύο συνιστῶσαι προτάσεις p, q εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς. Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις ἡ σύζευξις $p \wedge q$ εἶναι ψευδής. Τοῦτο ἐδέχθημεν ὡς ἀληθές, διότι συμφωνεῖ καὶ μὲ τὴν ἐνόρασίν μας.

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

Β) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν σύζευξιν δύο προτάσεων ἠμποροῦμεν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν σύζευξιν δύο ἀνοικτῶν προτάσεων, p (x) καὶ p (x), τὴν ὁποίαν θὰ συμβολίζωμεν μὲ $p(x) \wedge q(x)$.

Ἂς λάβωμεν ἓν παράδειγμα :

Ἔστω ὅτι p (x) εἶναι : $x^2-5x+6=0$ καὶ q(x) : $x-2=0$.

Τότε $p(x) \wedge q(x)$ εἶναι :

$$(x^2-5x+6=0) \wedge (x-2=0), \quad U=R.$$

Ὅταν $x=5$ ἡ ἀνωτέρω σύζευξις μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς σύνθετον πρότασιν :

$$(5^2-5\cdot 5+6=0) \wedge (5+3=0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ψευδής, διότι κάθε μία ἀπὸ τὰς συνιστώσας προτάσεις εἶναι ψευδής.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω σύζευξιν $p(x) \wedge q(x)$ θέσωμεν $x=2$ τότε προκύπτει ἡ πρότασις :

$$(2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0) \wedge (2 - 2 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, διότι κάθε μία ἀπὸ τὰς συνιστώσας προτάσεις εἶναι ἀληθής.

Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς συζεύξεως δύο ἀνοικτῶν προτάσεων $p(x)$, $q(x)$, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν $\{x \mid p(x) \wedge q(x)\}$, ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα $x \in U$ (τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς), τὰ ὁποῖα ἀνήκουν συγχρόνως εἰς τὸ σύνολον P (σύνολον ἀληθείας τῆς $p(x)$) καὶ εἰς τὸ σύνολον Q : (σύνολον ἀληθείας τῆς $q(x)$), δηλ. ἀπὸ τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὴν τομὴν $P \cap Q$.

Ὥστε : $\{x \mid p(x) \wedge q(x)\} = P \cap Q$.

Πράγματι εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔχομεν :

$$\{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \wedge x - 2 = 0\} = \{2,3\} \cap \{2\} = \{2\}$$

8. ΔΙΑΖΕΥΞΙΣ ΔΥΟ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Α) Ὅταν παραθέσωμεν δύο προτάσεις ἐν συνεχείᾳ μὲ τὸ συνδετικὸν «ἢ» ἢ τὸ «εἴτε» μεταξύ των, λέγομεν ὅτι ἐσχηματίσαμεν **τὴν διάζευξιν** τῶν δύο τούτων προτάσεων.

Προσέξατε π.χ. τὰς κατωτέρω τρεῖς συνθέτους προτάσεις.

1) Ἡ Ἐθνικὴ Τράπεζα προσλαμβάνει ἀπολυτηριούχους τοῦ Γυμνασίου, οἱ ὁποῖοι γνωρίζουν Γαλλικὰ **εἴτε** Ἀγγλικά.

2) Θὰ ἀριστεύσω εἰς τὰ Μαθηματικὰ **εἴτε** εἰς τὰ Φυσικά.

3) Θὰ ὑπάγω εἰς τὸν κινηματογράφον **ἢ** θὰ μείνω εἰς τὸ σπίτι.

Εἰς τὴν πρώτην πρότασιν εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ Τράπεζα δὲν ἀποκλείεται νὰ προσλάβῃ ἀπολυτηριοῦχον τοῦ Γυμνασίου ὁ ὁποῖος νὰ γνωρίζῃ Γαλλικὰ καὶ Ἀγγλικά. Ἐπίσης εἰς τὴν δευτέραν πρότασιν ὁ ὁμιλῶν δὲν ἀποκλείει ὅτι ἐνδέχεται νὰ ἀριστεύσῃ καὶ εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ εἰς τὰ Φυσικά.

Εἰς τὴν τρίτην πρότασιν εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ὁμιλῶν θὰ πράξῃ ἓν ἐκ τῶν δύο : ἢ θὰ ὑπάγῃ εἰς τὸν κινηματογράφον ἢ θὰ μείνῃ εἰς τὸ σπίτι. Κατὰ ταῦτα ὅταν λέγωμεν «p ἢ q» θὰ ἐννοοῦμεν ἢ μόνον p εἶναι ἀληθὴς ἢ μόνον q εἶναι ἀληθής.

Εἰς τὴν πρώτην καὶ δευτέραν περίπτωσιν ἡ **μία τουλάχιστον καὶ ἐνδεχομένως αἱ δύο προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς.** Λέγομεν τότε ὅτι ἔχομεν **ἐγκλειστικὴν διάζευξιν** ἤ, ἁπλῶς, **διάζευξιν** καὶ κάμνομεν χρῆσιν τοῦ **«εἴτε»** ὡς συνδετικοῦ. Σύμβολον τῆς ἐγκλειστικῆς διαζεύξεως εἶναι τὸ $\vee$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται **«εἴτε»**.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ τρίτου ἀνωτέρω παραδείγματος **τὸ συνδετικὸν «ἢ» χρησιμοποιεῖται μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι ἡ μία μ ό ν ο ν ἀπὸ τὰς προτάσεις εἶναι ἀληθής, καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ψευδής.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ διάζευξις εἶναι **ἀποκλειστική.** Σύμβολον τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως εἶναι τὸ $\underline{\vee}$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται **ἢ**.

Σημ. Εἰς τὴν καθημερινὴν ὁμιλίαν χρησιμοποιοῦμεν, βεβαίως, τὴν λέξιν **ἢ** μὲ διττὴν σημασίαν. Ἄλλοτε, ὅταν λέγωμεν «p ἢ q», ἐννοοῦμεν ὅτι **μία καὶ μόνον μία** ἀπὸ τὰς προτάσεις εἶναι ἀληθὴς καὶ ἄλλοτε ὅτι **μία τουλάχιστον** πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ **πιθανὸν νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο.**

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὅμως δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸ «ἤ» μὲ διττὴν σημασίαν. Πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἐπακριβῶς τί ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν «p ἤ q»

Παραδείγματα (ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως : $p \vee q$ (p εἴτε q)

1) ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι ρητὸς εἴτε ὁ -2 εἶναι θετικός.

2) ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5 εἴτε ὁ 3 εἶναι φυσικός.

3) ὁ 4 εἶναι διαιρέτης τοῦ 8 εἴτε ὁ -3 εἶναι ἀρνητικός.

Αἱ ἀνωτέρω διαζεύξεις εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις.

4) Ἡ διάζευξις : «ὁ 3 εἶναι ἀρνητικὸς εἴτε ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἀκέραιος» εἶναι ψευδής, διότι ἀμφότεραι αἱ συνιστῶσαι προτάσεις εἶναι ψευδεῖς.

Πίναξ (λογικῶν) τιμῶν τῆς (ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως : $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Δηλαδὴ ἡ διάζευξις $p \vee q$ εἶναι ψευδὴς μόνον ὅταν καὶ αἱ δύο συνιστῶσαι προτάσεις εἶναι ψευδεῖς. Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀληθής.

Παραδείγματα ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως : $p \veebar q$ (p ἤ q)

1) ὁ -3 εἶναι φυσικὸς ἤ ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι θετικὸς

2) ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι ἀκέραιος ἤ ὁ -3 εἶναι ἀρνητικὸς

3) ὁ 2 εἶναι διαιρέτης τοῦ 5 ἤ ὁ -2 εἶναι θετικὸς

4) ὁ 5 εἶναι φυσικὸς ἤ ὁ -5 εἶναι ἀρνητικός.

Αἱ δύο πρῶται ἀποκλειστικαὶ διαζεύξεις εἶναι ἀληθεῖς, ἐνῷ αἱ δύο τελευταῖαι εἶναι ψευδεῖς.

Πίναξ (λογικῶν) τιμῶν τῆς (ἀποκλειστικῆς) διαζεύξεως : $p \veebar q$

p	q	$p \veebar q$
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

Δηλαδὴ ἡ διάζευξις $p \veebar q$ εἶναι ἀληθὴς τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ἡ μία μόνον ἀπὸ τὰς συνιστώσας προτάσεις εἶναι ἀληθής.

Β) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν διάζευξιν δύο προτάσεων ἠμποροῦμεν νὰ ἐξετάσωμεν τὴν διάζευξιν δύο ἀνοικτῶν προτάσεων $p(x)$, $q(x)$, τὴν ὁποίαν θὰ συμβολίζωμεν $p(x) \vee q(x)$.

Ἄς λάβωμεν ἕν παράδειγμα :

Ἔστω ὅτι $p(x)$ εἶναι : $x^2 - 5x + 6 = 0$ καὶ $q(x) : x + 5 = 0$. Τότε $p(x) \vee q(x)$ εἶναι :

$$(x^2 - 5x + 6 = 0) \vee (x + 5 = 0), \quad U = R$$

Όταν $x = 5$, ἡ ἀνωτέρω διάζευξις μετατρέπεται εἰς τὴν ἑξῆς σύνθετον πρότασιν :

$$(5^2 - 5 \cdot 5 + 6 = 0) \vee (5 + 5 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ψευδής, διότι κάθε μία ἀπὸ τὰς συνιστώσας προτάσεις εἶναι ψευδής.

Ἐὰν $x = -5$, ἡ ἀνωτέρω διάζευξις ἀνοικτῶν προτάσεων γίνεται :

$$((-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 6 = 0) \vee (-5 + 5 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, διότι ἡ δευτέρα πρότασις εἶναι ἀληθής. Ἐπίσης, ἂν $x = 3$, τότε ἡ διάζευξις γίνεται :

$$(3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0) \vee (3 + 5 = 0)$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής, διότι ἡ πρώτη ἀπὸ τὰς συνιστώσας προτάσεις εἶναι ἀληθής.

Καταλήγομεν λοιπὸν εἰς τὸ ἑξῆς συμπέρασμα : τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀληθείας τῆς συνθέτου ἀνοικτῆς προτάσεως $p(x) \vee q(x)$ εἶναι ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον ἀληθείας P τῆς $p(x)$ ἢ εἰς τὸ σύνολον ἀληθείας Q τῆς $q(x)$ ἢ ἀνήκουν καὶ εἰς τὰ δύο σύνολα P καὶ Q. Μὲ ἄλλας λέξεις τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς $p(x) \vee q(x)$ εἶναι τὸ $P \cup Q$.

Συμβολικῶς διατυπώνομεν τὸ συμπέρασμα τοῦτο ὡς ἑξῆς :

$$\{ x \mid p(x) \vee q(x) \} = P \cup Q.$$

Γ) Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν ἀποκλειστικὴν διάζευξιν δύο προτάσεων δυνάμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἀποκλειστικὴν διάζευξιν δύο προτασιακῶν τύπων $p(x)$, $q(x)$, τὴν ὁποίαν θὰ συμβολίζωμεν μὲ $p(x) \underline{\vee}\, p(x)$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς $p(x) \underline{\vee}\, q(x)$ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τὰ ὁποῖα καθιστοῦν τὴν $p(x)$ ἀληθῆ καὶ τὴν $q(x)$ ψευδῆ πρότασιν καὶ ἐκεῖνα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς, τὰ ὁποῖα καθιστοῦν τὴν $p(x)$ ψευδῆ καὶ τὴν $q(x)$ ἀληθῆ, δηλ. εἶναι τὸ σύνολον $P \cup Q - P \cap Q$ ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, τὸ σύνολον $(P - Q) \cup (Q - P)$. Συμβολικῶς τὸ συμπέρασμα διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

$$\{ x \mid p(x) \underline{\vee}\, q(x) \} = P \cup Q - P \cap Q \text{ ἢ } (P - Q) \cup (Q - P)$$

Παράδειγμα :

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ $\{ x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \ \underline{\vee}\ x^2 - 6x + 8 = 0 \}$, ὅπου σύνολον ἀναφορᾶς εἶναι τὸ R.

Ἔχομεν $P = \{2, 3\}$, $Q = \{2, 4\}$. Ἑπομένως: $P \cup Q = \{2, 3, 4\}$ καὶ $P \cap Q = \{2\}$. Ὥστε : $P \cup Q - P \cap Q = \{3, 4\}$ καὶ

$$\{ x \mid x^2 - 5x + 6 = 0 \ \underline{\vee}\ x^2 - 6x + 8 = 0 \} = \{3, 4\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (*)

14) Νὰ δείξετε ὅτι αἱ συζεύξεις $p \wedge q$ καὶ $q \wedge p$ ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας.

15) Νὰ δείξετε ὅτι αἱ διαζεύξεις $p \vee q$ καὶ $q \vee p$ ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας.

16) Νὰ διατυπώσετε λεκτικῶς τὴν σύζευξιν καὶ τὴν διάζευξιν τῶν κάτωθι προτάσεων.

α) Ὁ Γεώργιος εἶναι ἀγρότης. Ἡ Ἀγγελικὴ εἶναι οἰκοκυρά.

β) Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι. Αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται.

(*) Ἀπὸ τὰς προτεινομένας ἀσκήσεις εἰς τὸ Κεφάλαιον Ι θὰ δίδωνται ὅσαι κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐμπέδωσιν ἑκάστης ἑνότητος.

17) Νὰ σχηματίσετε τὴν σύζευξιν καὶ διάζευξιν τῶν κατωτέρω προτάσεων. Ἔπειτα νὰ ἀποφανθῆτε περὶ τῆς ἀληθείας ἢ μὴ τῶν συνθέτων προτάσεων, ποὺ θὰ προκύψουν.

α) Ὁ Σεπτέμβριος ἔχει 30 ἡμέρας. Ἡ ἑβδομὰς ἔχει 8 ἡμέρας.

β) Τὸ 3 εἶναι μικρότερον τοῦ 4. Τὸ 4 εἶναι μικρότερον τοῦ 3.

γ) $5+1=6$. $21=3\cdot 7$

δ) $5+1=5$. $8+1=10$

18) Νὰ σχηματίσετε τὴν σύζευξιν καὶ διάζευξιν τῶν κατωτέρω ἀνοικτῶν προτάσεων. Νὰ εὕρετε ἀκολούθως τὰ σύνολα ἀληθείας τῶν συνθέτων ἀνοικτῶν προτάσεων, ποὺ θὰ προκύψουν. (Σύνολον ἀναφορᾶς τὸ R).

α) $x+2=0$, $x^2-4=0$

β) $x^2=0$, $x=2$

γ) $x^2-8x+12=0$, $x^2-5x+6=0$

δ) $x>3$, $x>5$

ε) $x-8=0$, $x>5$

στ) $x^2-4=(x+2)(x-2)$, $x^2-1=(x+1)(x-1)$

Εἰς τὴν ἄσκησιν γ) νὰ εὕρετε καὶ τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως.

19) Ἐὰν α, β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ πρότασις $\alpha\cdot\beta=0$. διατυπώνεται μὲ μίαν διάζευξιν. Ποία εἶναι αὐτὴ ἡ διάζευξις ;

20) Ἐὰν α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ πρότασις $\alpha^2+\beta^2=0$, διατυπώνεται μὲ μίαν σύζευξιν. Ποία εἶναι αὐτὴ ἡ σύζευξις ;

9. ΑΡΝΗΣΙΣ.

Α) Ἡ ἄρνησις διαφέρει ἀπὸ τὰς προηγουμένας πράξεις τῆς διαζεύξεως καὶ συζεύξεως κατὰ τὸ ὅτι εἶναι **μονομελὴς** πρᾶξις. Ἐὰν p εἶναι μία πρότασις, ἡ ἄρνησις τῆς p εἶναι μία νέα (σύνθετος) πρότασις, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίθετον τιμὴν ἀληθείας. Ἐάν, π.χ., ἡ p εἶναι ἀληθής. ἡ ἄρνησις τῆς p εἶναι ψευδὴς καὶ ἐὰν ἡ p εἶναι ψευδὴς ἡ ἄρνησις τῆς p εἶναι ἀληθής.

Ἡ ἄρνησις μιᾶς προτάσεως p συμβολίζεται μὲ $\sim p$ καὶ διαβάζεται : **ὄχι p.**

Παραδείγματα :

1ον, p : ὁ 5 εἶναι φυσικὸς ἀριθμός.

$\sim p$: ὄχι ὁ 5 εἶναι φυσικὸς ἀριθμός = ὁ 5 δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός.

2ον. p : ὁ 2 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

$\sim p$: ὄχι ὁ 2 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς = ὁ 2 δὲν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

3ον. $p : 2+3=5$

$\sim p : 2+3\neq 5$

4ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 180^0.

$\sim p$: τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου δὲν εἶναι 180^0.

Πίναξ ἀληθείας τῆς ἀρνήσεως $\sim$ p

p	$\sim$p
Α	Ψ
Ψ	Α

Σημ. Φραστικῶς αἱ ἀρνήσεις τῶν ἁπλῶν προτάσεων σχηματίζονται συνήθως διὰ τῆς παρεμβολῆς ἑνὸς **ὄχι** (ἢ **δὲν**) εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν.

Παραδείγματα :

1ον. p : ὁ 8 εἶναι τέλειον τετράγωνον.

$\sim$ p : ὁ 8 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

2ον. p : Κάθε τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

$\sim$ p : Κάθε τετράγωνον δὲν εἶναι ὀρθογώνιον.

Τὸ συνηθέστερον σφάλμα, τὸ ὁποῖον γίνεται κατὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἀρνήσεως μιᾶς προτάσεως ὅπως, π.χ., ἡ **«Ὅλοι οἱ μαθηταὶ αὐτῆς τῆς τάξεως ἀγαποῦν τὴν Γεωμετρίαν»**, εἶναι νὰ εἴπωμεν **«κανεὶς μαθητὴς εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν δὲν ἀγαπᾷ τὴν Γεωμετρίαν»**. Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις βεβαίως δὲν συμφωνοῦν, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἡ μία ἄρνησις τῆς ἄλλης, διότι ἐνδέχεται νὰ εἶναι καὶ αἱ δύο ψευδεῖς. Διὰ τοῦτο εἶναι προτιμότερον εἰς τὰς τοιαύτας περιπτώσεις νὰ σχηματίζωμεν τὴν ἄρνησιν λεκτικῶς μὲ τό : ὄχι. Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα λοιπὸν θὰ εἴπωμεν : ὄχι ὅλοι οἱ μαθηταὶ αὐτῆς τῆς τάξεως ἀγαποῦν τὴν Γεωμετρίαν.

Β) Ἐὰν p (x) εἶναι μία ἀνοικτὴ πρότασις, τότε ἡ ἄρνησις αὐτῆς συμβολίζεται μὲ $\sim$ p (x).

Ἐὰν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x δι' ἑνὸς στοιχείου τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς U εἰς τὴν p (x) προκύπτῃ πρότασις ἀληθής, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x διὰ τοῦ αὐτοῦ στοιχείου εἰς τὴν $\sim$ p(x) προκύπτει πρότασις ψευδής. Ἐὰν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς p (x) δι' ἑνὸς στοιχείου τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς προκύπτῃ πρότασις ψευδής, διὰ τῆς ἀντικατάστάσεως τοῦ x εἰς τὴν $\sim$ p(x) διὰ τοῦ αὐτοῦ στοιχείου προκύπτει πρότασις ἀληθής. Ὥστε τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς $\sim$ p(x) ἀποτελεῖται ἐξ ἐκείνων τῶν στοιχείων τοῦ U, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον ἀληθείας P, τῆς p(x), ἑπομένως θὰ ἀνήκουν εἰς τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ P ὡς πρὸς U, δηλ. τὸ P^c.

Συμβολικῶς διατυπώνομεν τὰ ἀνωτέρω ὡς ἑξῆς :

$$\{ x \mid \sim p(x) \} = P^c$$

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἀνοικτὴ πρότασις p(x) : $x^2 - 4 = 0$ καὶ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ R. Τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς p (x) εἶναι τὸ $P = \{ 2, -2 \}$. Τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ **P** ὡς πρὸς R εἶναι τὸ $P^c = \{ x \mid x \neq 2 \wedge x \neq -2 \}$. Ὥστε:

$$\{ x \mid \sim p(x) \} = \{x \mid x \neq -2 \text{ καὶ } x \neq 2\}.$$

10. Η ΑΡΝΗΣΙΣ ΜΙΑΣ ΣΥΖΕΥΞΕΩΣ.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἄρνησιν τῆς συζεύξεως :

« ὁ Α εἶναι ἰατρὸς καὶ ὁ Β εἶναι διδάσκαλος».

Ὅπως ἐμάθομεν (§ 7), διὰ νὰ εἴπωμεν ὅτι ἡ πρότασις αὔτη εἶναι ψευδής, πρέπει ἡ μία τουλάχιστον ἀπὸ τὰς συνιστώσας προτάσεις νὰ εἶναι ψευδής.

Θὰ εἴπωμεν λοιπόν :

«Ὁ Α δὲν εἶναι ἰατρὸς εἴτε ὁ Β δὲν εἶναι διδάσκαλος».

Ἂς λάβωμεν ἓν ἄλλο παράδειγμα :

«Θὰ κερδίσωμεν εἰς τὸν ἀγῶνα τοῦ βόλεϋ μὲ τὴν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Α καὶ θὰ κερδίσωμεν εἰς τὸν ἀγῶνα μὲ τὴν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Β».

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἄρνησιν τῆς ἀνωτέρω συζεύξεως εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ εἴπωμεν : «Δὲν θὰ κερδίσωμεν εἰς τὸν ἀγῶνα βόλεϋ μὲ τὴν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Α εἴτε δὲν θὰ κερδίσωμεν εἰς τὸν ἀγῶνα μὲ τὴν ὁμάδα τοῦ Γυμνασίου Β».

Ἰδοὺ ἓν τρίτον παράδειγμα ἀπὸ τὰ Μαθηματικά : Ἐὰν α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ πρότασις $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ διατυπώνεται μὲ τὴν σύζευξιν $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$. Ἡ ἄρνησις τῆς $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ καὶ διατυπώνεται μὲ τὴν διάζευξιν $\alpha \neq 0$ εἴτε $\beta \neq 0$. Δηλαδή:

$\sim (\alpha = 0 \wedge \beta = 0)$ εἶναι $(\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0)$

Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι ἡ ἄρνησις τῆς $p \wedge q$ εἶναι $\sim p \vee \sim q$. Τὸ πρᾶγμα καθίσταται σαφέστερον ἀπὸ τὸν κατωτέρω πίνακα ἀληθείας.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας στήλας τοῦ πίνακος φαίνεται ὅτι ἡ ἄρνησις τῆς $p \wedge q$ καὶ ἡ διάζευξις $\sim p \vee \sim q$ ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας. Ἐπίσης σαφέστερον φαίνεται ἀπὸ τὰς στήλας 5ην καὶ 7ην ὅτι, ὅταν ἡ $p \wedge q$ εἶναι ἀληθής, ἡ $(\sim p \vee \sim q)$ εἶναι ψευδὴς καὶ ὅταν ἡ $p \wedge q$ εἶναι ψευδής, ἡ $\sim p \vee \sim q$ εἶναι ἀληθής. Ἑπομένως ἡ μία εἶναι ἄρνησις τῆς ἄλλης.

Συμπέρασμα : $\sim (p \wedge q)$ εἶναι : $\sim p \vee \sim q$

11. Η ΑΡΝΗΣΙΣ ΜΙΑΣ ΔΙΑΖΕΥΞΕΩΣ.

Ἂς λάβωμεν τὰς προτάσεις :

p : ὁ Α εἶναι ἰατρός,

q : ὁ Β εἶναι διδάσκαλος.

Ἡ διάζευξις αὐτῶν εἶναι :

$p \vee q$: ὁ Α εἶναι ἰατρὸς εἴτε ὁ Β εἶναι διδάσκαλος

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι ἡ ἄρνησις τῆς $p \vee q$ εἶναι : ὁ Α δὲν εἶναι ἰατρὸς καὶ ὁ Β δὲν εἶναι διδάσκαλος.

Ὥστε $\sim (p \vee q)$ εἶναι : $\sim p \wedge \sim q$

Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα ἀπὸ τὰ Μαθηματικά :

Ἐὰν α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἡ πρότασις $\alpha \cdot \beta = 0$ διατυπώνεται μὲ τὴν διάζευξιν : $\alpha = 0 \vee \beta = 0$. Ἡ ἄρνησις τῆς $\alpha \cdot \beta = 0$ εἶναι $\alpha \cdot \beta \neq 0$ καὶ διατυπώνεται μὲ τὴν σύζευξιν $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta \neq 0$. Δηλαδή :

$\sim (\alpha = 0 \vee \beta = 0)$ εἶναι $(\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0)$

Ἰσχύει λοιπὸν ὅτι : $\sim (p \vee q)$ εἶναι $\sim p \wedge \sim q$.

Τὸ αὐτὸ εὑρίσκομεν, πέραν πάσης ἀμφιβολίας, ἐὰν σχηματίσωμεν ἕνα πίνακα ἀληθείας διὰ τὰς $p \vee q$ καὶ $\sim p \wedge \sim q$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας στήλας τοῦ πίνακος φαίνεται ὅτι ἡ ἄρνησις τῆς $p \vee q$ καὶ σύζευξις $\sim p \wedge \sim q$ ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας. Σαφέστερον βλέπομεν ἀπὸ τὰς στήλας 5ην καὶ 7ην ὅτι, ὅταν ἡ $p \vee q$ εἶναι ἀληθὴς ἡ $\sim p \wedge \sim q$ εἶναι ψευδὴς καὶ ὅταν ἡ $p \vee q$ εἶναι ψευδὴς ἡ $\sim p \wedge \sim q$ εἶναι ἀληθής. Ἑπομένως ἡ μία εἶναι ἄρνησις τῆς ἄλλης.

Συμπέρασμα : $\sim (p \vee q)$ εἶναι : $\sim p \wedge \sim q$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21) Νὰ διατυπώσετε τὰς ἀρνήσεις τῶν κάτωθι προτάσεων :

α) Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἐνδιαφέρουσα.

β) Ὅλοι οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως ἀγαποῦν τὴν Ἄλγεβραν.

γ) Πᾶν τρίγωνον ἔχει τέσσαρας πλευράς.

δ) $5 + 2 = 7$ ε) ὁ 7 εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

στ) $3 + 1 = 5$ ζ) ὁ 4 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

η) Μερικοὶ ἀριθμοὶ δὲν εἶναι ἀρνητικοί.

22) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ $P^c = \{ x \mid \sim p(x) \}$ διὰ τὰς κάτωθι ἀνοικτὰς προτάσεις $p(x)$, ὅπου σύνολον ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς x εἶναι τὸ R.

α) $x = 2$ β) $x = -2$

γ) $x + 7 = 15$ δ) $x^2 = 9$

ε) $x^2 + 1 = 0$ στ) $x^2 \geqslant 16$

23) Νὰ σχηματίσετε τὰς ἀρνήσεις τῶν κάτωθι :

α) Σήμερον εἶναι Τετάρτη καὶ ὁ καιρὸς εἶναι βροχερός.

β) $x = 2$ καὶ $\psi = 5$

γ) $2 \cdot 3 = 6$ καὶ $3 + 2 = 5$

δ) Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ ΑΒΕ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

ε) Θὰ μείνω εἰς τὸ σπίτι ἢ θὰ ὑπάγω εἰς τὸν κινηματογράφον.

στ) $2 + 3 = 6$ εἴτε $3 + 4 = 5$

ζ) $5 \cdot 7 = 35$ εἴτε $4 \cdot 5 = 20$

12. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.

Εἰς τὴν καθημερινὴν ζωήν, ὅταν θέλωμεν νὰ πείσωμεν ἕν πρόσωπον ὅτι κάτι, διὰ τὸ ὁποῖον συζητοῦμεν, εἶναι ἀληθές, συνήθως λέγομεν : «**Αὐτὸ** εἶναι ἀληθές, διότι **ἐκεῖνο** εἶναι ἀληθές». Διὰ νὰ εἶναι πειστικὴ μία τοιαύτη πρότασις, πρέπει οἱ συζητοῦντες νὰ συμφωνοῦν ὅτι τὸ **ἐκεῖνο** εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅτι **αὐτὸ** εἶναι ἀναγκαία συνέπεια **ἐκείνου.** Μὲ ἄλλας λέξεις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ συμφωνία ὡς πρὸς τὰς πληροφορίας, μὲ τὰς ὁποίας ἀρχίζομεν, καὶ ὡς πρὸς τὸ πῶς ἐξάγομεν συμπέρασμα ἀπὸ αὐτὰς τὰς πληροφορίας. **Ἡ λογικὴ ἀσχολεῖται μὲ τὴν μελέτην τῶν κανόνων πρὸς σχηματισμὸν ὀρθῶν προτάσεων.** Ἡ λεγομένη **ἀπόδειξις** συνίσταται εἰς τὸν σχηματισμὸν προτάσεων τοῦ τύπου: Ἐὰν αὐτὸ εἶναι ἀληθές, τότε καὶ ἐκεῖνο πρέπει νὰ εἶναι ἀληθές. Π.χ. «ἐὰν βρέξῃ, τότε ὁ κῆπος μου θὰ ποτισθῇ». Ὁ καθεὶς θὰ συμφωνήσῃ μὲ αὐτὴν τὴν πρότασιν, διότι ὅλοι ἐκ πείρας γνωρίζομεν ὅτι μὲ τὴν βροχὴν ὁ κῆπος θὰ ποτισθῇ.

Ἰδοὺ δύο ἄλλα παραδείγματα ἐκ τῆς Ἀλγέβρας :

1) Ἄν $3x = 5$, τότε $x = \frac{5}{3}$

2) Ἄν $\alpha = 4$ καὶ $\beta = 2$, τότε $\alpha^2 + 2\beta = 20$

Ὅλαι αἱ μαθηματικαὶ ἀποδείξεις χρησιμοποιοῦν προτάσεις τοῦ ἀνωτέρω τύπου.

Συντομώτερον διατυπώνομεν τὰς προτάσεις ταύτας λέγοντες «p συνεπάγεται q», ἢ συμβολικῶς : $p \Rightarrow q$.

Π.χ. $3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$(\alpha = 4$ καὶ $\beta = 2) \Rightarrow \alpha^2 + 2\beta = 20$

Μία σύνθετος πρότασις τῆς μορφῆς : $p \Rightarrow q$ λέγεται, ὡς γνωστόν, **συνεπαγωγή.** Ἡ ἐργασία μὲ ἀληθεῖς προτάσεις τοῦ τύπου : $p \Rightarrow q$ λέγεται **παραγωγικὸς συλλογισμός.** ἤ, ἁπλῶς, **συλλογισμός.** Ἡ πρότασις p λέγεται **ὑπόθεσις** καὶ ἡ πρότασις q λέγεται **συμπέρασμα.** Λέγομεν δὲ ὅτι $p \Rightarrow q$ εἶναι ἓν **θεώρημα.**

Ὅταν ἡ πρότασις p εἶναι ἀληθής, ἡ πρότασις q ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Ἐπίσης ὅταν ἡ πρότασις p εἶναι ψευδής, ἡ πρότασις q ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής.

Πρέπει λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς ἀληθείας μιᾶς συνεπαγωγῆς, ὅταν εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν ἁπλῶν προτάσεων, ἐκ τῶν ὁποίων αὕτη συνίσταται.

Καίτοι ἡ πρὸς τὸν σκοπὸν αὐτὸν ἀκολουθουμένη μέθοδος εἶναι συνέπεια μιᾶς παραδοχῆς, ἐν τούτοις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἐνορατικῶν βάσεων τοῦ ὀρθοῦ συλλογισμοῦ. Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω ὅλας τὰς δυνατὰς περιπτώσεις.

13. ΠΙΝΑΞ ΤΙΜΩΝ ΑΛΗΘΕΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ.

1) Ἐὰν μία ἀληθὴς ὑπόθεσις p ὁδηγῇ εἰς ἓν ἀληθὲς συμπέρασμα q, πιστεύομεν ὅτι ἐκάμομεν ὀρθὸν συλλογισμὸν καὶ θεωροῦμεν τὴν συνεπαγωγὴν ἀληθῆ.

2) Ἐὰν μία ἀληθὴς ὑπόθεσις p ὁδηγῇ εἰς ἓν ψευδὲς συμπέρασμα, τότε εἶναι βέβαιον ὅτι ἔχομεν κάμει λάθος εἰς τὸν συλλογισμὸν καὶ θεωροῦμεν τὴν συνεπαγωγὴν ψευδῆ.

3) Ἐὰν ἡ ὑπόθεσις p εἶναι ψευδής, τότε ὀρθὸς συλλογισμὸς ἠμπορεῖ νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς ἀληθὲς συμπέρασμα καὶ συμφωνοῦμεν νὰ ὀνομάζωμεν ἀληθῆ αὐτὴν τὴν συνεπαγωγήν.

4) Ἐὰν ἡ ὑπόθεσις εἶναι ψευδής, τότε ὀρθὸς συλλογισμὸς ἠμπορεῖ ἐξ ἴσου νὰ μᾶς ὁδηγήσῃ εἰς ψευδὲς συμπέρασμα καὶ τότε συμφωνοῦμεν νὰ ὀνομάζωμεν τὴν συνεπαγωγὴν αὐτὴν ἀληθῆ.

Τὰ ἀνωτέρω συγκεντρώνομεν εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα ἀληθείας :

Πίναξ ἀληθείας τῆς συνεπαγωγῆς : $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

Ὅπως φαίνεται εἰς τὸν πίνακα, **ἡ συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow q$ εἶναι ψευδὴς τότε καὶ μόνον, ὅταν ἡ πρώτη πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ δευτέρα ψευδής. Εἰς ὅλας τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀληθής.**

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοῦ πίνακος :

1) $2 \in N \Rightarrow \frac{1}{2} \in Q$, ἀληθής

2) $3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \in N$, ψευδὴς

3) $\sqrt{2} \in N \Rightarrow \frac{2}{3} \in Q$, ἀληθὴς

4) $\frac{1}{2} \in N \Rightarrow \sqrt{2} \in Q$, ἀληθὴς

Ἔστω ἡ ἀληθὴς συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow q$, ὅπου ἡ p εἶναι ἀληθής. Ἡ συνεπαγωγὴ αὕτη διαβάζεται καὶ μὲ ἄλλους τρόπους. Ἰδοὺ μερικοὶ ἐξ αὐτῶν :

1) ἐὰν p, τότε q
2) p εἶναι ἱκανὴ συνθήκη διὰ q
3) q εἶναι ἀναγκαία συνθήκη διὰ p
4) ἵνα q ἀρκεῖ p

14. ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗ ΔΥΟ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνεπαγωγὴν $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Σύνολον ἀναφορᾶς τὸ U, σύνολον ἀληθείας τῆς $p(x)$ τὸ P, σύνολον ἀληθείας τῆς $q(x)$, τὸ Q. Θέλομεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς συνεπαγωγῆς $p(x) \Rightarrow q(x)$.

Παρατηροῦντες τὸν πίνακα ἀληθείας τῆς συνεπαγωγῆς, βλέπομεν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ καταστήσωμεν τὴν συνεπαγωγὴν $p(x) \Rightarrow q(x)$ ἀληθῆ,

ἂν καταστήσωμεν: $\left\{ \begin{array}{l} \text{τὴν } p(x) \text{ ἀληθῆ καὶ τὴν } q(x) \text{ ἀληθῆ,} \\ \text{τὴν } p(x) \text{ ψευδῆ καὶ τὴν } q(x) \text{ ἀληθῆ,} \\ \text{τὴν } p(x) \text{ ψευδῆ καὶ τὴν } q(x) \text{ ψευδῆ.} \end{array} \right.$

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι :

$$\{ x \mid p(x) \Rightarrow q(x) \} = P^c \cup Q \ (*)$$

Παραδείγματα :

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς συνεπαγωγῆς, $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$. (σύνολον ἀναφορᾶς τὸ R).

Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $P = \{1, -1\}$, ἄρα $P^c = \{ x \mid x \neq 1 \text{ εἴτε } -1 \}$.

(*) Ἀποδεικνύεται ὅτι ὅλαι αἱ περιπτώσεις καλύπτονται ἀπὸ τὸν τύπον τοῦτον.

Εὑρίσκομεν ἔπειτα ὅτι $Q = \{1\}$. Ἑπομένως $P^c \cup Q = \{x \mid x \neq -1\}$.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς συνεπαγωγῆς : $x = 1 \Rightarrow x^2 = 1$. Ἔχομεν $P = \{1\}$, ἄρα $P^c = \{x \mid x \neq 1\}$. $Q = \{1, -1\}$. Ἑπομένως $P^c \cup Q =$ τὸ σύνολον ἀναφορᾶς R.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

24) Νὰ εὕρετε ποῖαι ἀπὸ τὰς κάτωθι συνεπαγωγὰς εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς.

α) $3 = 4 \Rightarrow 3 + 1 = 4$

β) $2 > 0 \Rightarrow 6 = 2 \cdot 3$

γ) $5 = 2 + 3 \Rightarrow 2 > 8$

δ) $2 = 5 + 6 \Rightarrow 8 > 10$

ε) $3 = 2 \Rightarrow 2 > 5$

25) Νὰ σχηματίσετε τὸν πίνακα ἀληθείας τῶν :

α) $p \Rightarrow \sim q$ β) $\sim p \Rightarrow q$ γ) $\sim p \Rightarrow \sim q$

26) Νὰ σχηματίσετε τὸν πίνακα ἀληθείας τῶν

$p \Rightarrow q$ καὶ $\sim p \vee q$

Τί παρατηρεῖτε ;

27) Διὰ νὰ εἶναι $x = -2$ εἶναι ἀναγκαία συνθήκη ἡ $x^2 = 4$. Διατυπώσατε τοῦτο συμβολικῶς μὲ μίαν συνεπαγωγήν.

28) Νὰ σχηματίσετε τὸν πίνακα ἀληθείας τῆς :

$p \Rightarrow (p \vee q)$

29) Νὰ σχηματίσετε δύο συνεπαγωγὰς ἀπὸ κάθε ζεῦγος ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων καὶ νὰ εὕρετε τὰς τιμὰς ἀληθείας των.

α) $3 + 4 = 7$, $5 + 3 = 8$ β) $5 + 1 = 6$, $3 + 2 = 6$

γ) $6 - 3 = 2$, $4^2 = 25$ δ) $0 = 1$, $2 \cdot 5 = 10$

30) Εἰς τὰς κάτωθι συνεπαγωγὰς ἀνοικτῶν προτάσεων νὰ εὕρετε τὰ σύνολα ἀληθείας των.

(Τὸ σύνολον ἀναφορᾶς U εἶναι τὸ $\mathbf{R}$).

α) Ἐὰν $x^2 = 4$, τότε $x = 2$ εἴτε -2

β) Ἐὰν $x = 4$, τότε $x^2 = 16$

γ) Ἐὰν $x^2 = 25$, τότε $x = -5$

δ) Ἐὰν $x = 3$, τότε $x \neq 5$

ε) Ἐὰν $x^2 \geqslant 0$, τότε $x^2 < 0$

στ) Ἐὰν $x^2 - 5x + 6 = 0$, τότε $x = 3$ εἴτε 2

31) «$\alpha = 3$, $\beta = 2$». Εἶναι ἡ πρότασις αὕτη ἱκανὴ ἢ ἀναγκαία συνθήκη διὰ νὰ ἔχωμεν $\alpha + \beta = 5$;

32) Ἔστω ἓν σύνολον 3 προτάσεων : p, q, r, διὰ τὰς ὁποίας σχηματίζομεν ἕνα πίνακα τιμῶν ἀληθείας. Πόσας γραμμὰς θὰ περιέχῃ ὁ πίναξ ; Πόσας ἐὰν αἱ διδόμεναι προτάσεις εἶναι ν ;

33) Ἔστω p ἡ πρότασις «βρέχει» καὶ q ἡ πρότασις «κάμνει κρύο». Νὰ ἀποδόσετε λεκτικῶς τὰς προτάσεις :

$p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \vee \sim q$, $\sim (p \wedge q)$, $p \Rightarrow q$

$p \Rightarrow \sim q$, $\sim p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $\sim p \Rightarrow \sim q$

15. Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΚΑΙ Η ΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ.

Α) Ἔστω ἡ συνεπαγωγή :

« ἂν ἕνας ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0 ἢ 5, τότε εἶναι διαιρετὸς διὰ 5», τὴν ὁποίαν σημειώνομεν $p \Rightarrow q$.

Θεωροῦμεν τώρα τὴν συνεπαγωγήν :
«ἂν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, τότε λήγει εἰς 0 ἢ 5». Τὴν συνεπαγωγὴν αὐτὴν θὰ τὴν σημειώσωμεν μὲ $q \Rightarrow p$, διότι ὑπόθεσις εἰς τὴν δευτέραν αὐτὴν συνεπαγωγὴν εἶναι τὸ συμπέρασμα τῆς πρώτης καὶ τὸ συμπέρασμα τῆς δευτέρας συνεπαγωγῆς εἶναι ὑπόθεσις τῆς πρώτης.

Αἱ συνεπαγωγαὶ $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$ λέγονται **ἀντίστροφοι** ἡ μία τῆς ἄλλης.

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος εἶναι καὶ αἱ δύο ἀληθεῖς. Δὲν συμβαίνει ὅμως αὐτὸ πάντοτε. Ἡ ἀντίστροφος μιᾶς ἀληθοῦς συνεπαγωγῆς ἐνδέχεται νὰ εἶναι ψευδής. Π.χ. $p \Rightarrow q$: ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, τότε εἶναι ἴσαι (ἀληθής), ἐνῷ $q \Rightarrow p$: ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε εἶναι ὀρθαὶ (ψευδὴς ἐν γένει).

Β) Ἔστω ἡ ἀληθὴς συνεπαγωγή :
$p \Rightarrow q$: ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς λήγῃ εἰς 0 ἢ 5, τότε εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Ἡ συνεπαγωγὴ $\sim p \Rightarrow \sim q$ λέγεται **ἀντίθετος** τῆς $p \Rightarrow q$.

Εἰς τὸ παράδειγμά μας λεκτικῶς θὰ εἴπωμεν :
$\sim p \Rightarrow \sim q$: Ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς δὲν λήγῃ εἰς 0 ἢ 5, τότε δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς πρότασις. Δὲν συμβαίνει ὅμως πάντοτε ἡ ἀντίθετος μιᾶς ἀληθοῦς συνεπαγωγῆς νὰ εἶναι ἐπίσης ἀληθής. Ἰδοὺ ἕν παράδειγμα :
$p \Rightarrow q$: ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ὀρθαί, τότε εἶναι ἴσαι (ἀληθής).
$\sim p \Rightarrow \sim q$: ἐὰν δύο γωνίαι δὲν εἶναι ὀρθαί, τότε δὲν εἶναι ἴσαι (ψευδής).

16. Η ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΔΥΟ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Α) Δύο προτάσεις p καὶ q λέγομεν ὅτι εἶναι **ἰσοδύναμοι** μεταξύ των, ἐὰν ἡ σύζευξις $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ εἶναι ἀληθής. Συμβολίζομεν τὸ γεγονὸς αὐτὸ μὲ $p \Leftrightarrow q$ καὶ διαβάζομεν : p ἰσοδυναμεῖ (λογικῶς) μὲ q. Οὕτω, π.χ., αἱ προτάσεις p : ἕνας ἀριθμὸς λήγει εἰς 0 ἢ 5 καὶ q: ἕνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἰσχύει $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$. Γράφομεν λοιπὸν $p \Leftrightarrow q$.

Διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸν πίνακα ἀληθείας τῆς ἰσοδυναμίας, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν τὸν πίνακα ἀληθείας τῆς συζεύξεως $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Ἔχομεν :

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Δηλαδὴ ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς ἰσοδυναμίας :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

Ἤτοι ἡ ἰσοδυναμία δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς μόνον ὅταν καὶ αἱ δύο προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς ταυτοχρόνως.

Μὲ ἄλλας λέξεις δύο προτάσεις p καὶ q λέγομεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμοι, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας συγχρόνως.

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τοῦ πίνακος :

1) ὁ 5 εἶναι ἀκέραιος $\Leftrightarrow$ ὁ -3 εἶναι ἀρνητικὸς (ἀληθής)

2) ὁ $\frac{5}{6}$ εἶναι ἀκέραιος $\Leftrightarrow$ ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι φυσικὸς (ἀληθής)

3) ὁ 2 εἶναι φυσικὸς $\Leftrightarrow$ ὁ $\frac{1}{3}$ εἶναι ἀκέραιος (ψευδής)

4) ὁ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἄρρητος $\Leftrightarrow$ ὁ $\sqrt{3}$ εἶναι ἄρρητος (ψευδής).

5) ἡ εὐθεῖα $\varepsilon // \varepsilon' \Leftrightarrow$ ἡ εὐθεῖα $\varepsilon' // \varepsilon$ (ἀληθής)

6) τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον $\Leftrightarrow$ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον.

Β) Ἡ ἰσοδυναμία $p \Leftrightarrow q$ διατυπώνεται λεκτικῶς καὶ μὲ ἄλλους τρόπους.

Προσέξατε τὰς δύο προτάσεις «p ἐὰν q» καὶ «p μόνον ἐὰν q». Ἡ «p ἐὰν q» σημαίνει $q \Rightarrow p$ καὶ ἡ «p μόνον ἐὰν q» σημαίνει $p \Rightarrow q$. Ἑπομένως ἐὰν καὶ αἱ δύο αὐταὶ προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς, ἡ σύζευξίς των θὰ εἶναι ἀληθής. Ὥστε :

«p ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν q» σημαίνει $p \Rightarrow q$ καὶ $q \Rightarrow p$, δηλαδὴ $p \Leftrightarrow q$.

Ὥστε ἀντὶ νὰ λέγωμεν «p ἰσοδυναμεῖ μὲ q», ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν «p ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν q».

Παράδειγμα : Θεωροῦμεν τὰς ἑξῆς δύο προτάσεις :

p : Δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου δὲν τέμνονται,

q : αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι.

$p \Rightarrow q$: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου δὲν τέμνωνται, τότε εἶναι παράλληλοι (ἀληθής).

$q \Rightarrow p$: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι, τότε δὲν τέμνονται (ἀληθής).

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν :

«Δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι **ἐάν, καὶ μόνον ἐάν,** δὲν τέμνωνται».

Τὴν ἰσοδυναμίαν δύο προτάσεων τὴν διατυπώνομεν καὶ μὲ ἄλλον τρόπον.

Ἂν λάβωμεν πάλιν τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν : **«ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη** διὰ νὰ εἶναι παράλληλοι δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι νὰ μὴ τέμνωνται».

Ἕνας ἄλλος τρόπος διατυπώσεως τῆς ἰσοδυναμίας τῶν ἀνωτέρω δύο προτάσεων p καὶ q εἶναι : «Διὰ νὰ εἶναι παράλληλοι δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου, **πρέπει καὶ ἀρκεῖ** νὰ μὴ τέμνωνται».

Ἂς λάβωμεν ἓν ἄλλο παράδειγμα :

Ὑπενθυμίζομεν τὰ δύο θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Ἐὰν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, τότε αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ διχοτομοῦνται, τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἂς ὀνομάσωμεν p τὴν πρότασιν : «ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον», καὶ q τὸν πρότασιν «ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται».

Τὸ θεώρημα 1 ἐκφράζεται διὰ τῆς συνεπαγωγῆς : $p \Rightarrow q$

Τὸ θεώρημα 2 ἐκφράζεται διὰ τῆς $q \Rightarrow p$.

Καὶ τὰ δύο θεωρήματα μαζὺ ἐκφράζονται διὰ τῆς ἰσοδυναμίας $p \Leftrightarrow q$.

Κάθε μία ἀπὸ τὰς προτάσεις p καὶ q εἶναι **ἱκανὴ συνθήκη** διὰ τὴν ἄλλην καὶ ἐπίσης κάθε μία εἶναι **ἀναγκαία συνθήκη** διὰ τὴν ἄλλην.

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν :

«Ἵνα ἓν τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον **ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη** εἶναι αἱ διαγώνιοί του νὰ διχοτομοῦνται». Ἢ ἀκόμη :

«Ἵνα ἓν τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον **πρέπει καὶ ἀρκεῖ** αἱ διαγώνιοί του νὰ διχοτομοῦνται».

Ἐπίσης, ὅπως εἴδομεν ἀνωτέρω, ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν :

«Ἓν τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον **ἐάν, καὶ μόνον ἐάν,** αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται».

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσοδυναμίας ἐννοοῦμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

α) $p \Leftrightarrow p$

β) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$

γ) $(p \Leftrightarrow q \wedge q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

17. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΑΝΟΙΚΤΩΝ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ.

Ὅπως καὶ εἰς τὴν συνεπαγωγήν, οὕτω καὶ εἰς τὴν ἰσοδυναμίαν ἠμποροῦμεν νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν ἔννοιαν καὶ διὰ ἀνοικτὰς προτάσεις. Ἂς ζητήσωμεν λοιπὸν τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς $p(x) \Leftrightarrow q(x)$.

Ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, ὅπου x ἕνα στοιχεῖον τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς U, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν τομὴν $P \cap Q$, λαμβάνομεν μίαν ἀληθῆ σύνθετον πρότασιν, ἐπειδὴ καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι τώρα ἀληθεῖς προτάσεις. Ἐὰν εἰς τὴν $p(x) \Leftrightarrow q(x)$, θέσωμεν ὅπου x ἓν στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον ἀνήκει εἰς τὴν $P^c \cap Q^c$, λαμβάνομεν πάλιν μίαν ἀληθῆ σύνθετον πρότασιν, διότι τώρα καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι ψευδεῖς προτάσεις. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ x θέσωμεν ὁποιονδήποτε ἄλλο στοιχεῖον τοῦ U, προκύπτει ψευδὴς σύνθετος πρότασις, διότι τὸ ἕνα μέλος τῆς ἰσοδυναμίας θὰ εἶναι ἀληθὴς πρότασις καὶ τὸ ἄλλο ψευδής. Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι :

$$\{ x \mid p(x) \Leftrightarrow q(x) \} = (P \cap Q) \cup (P^c \cap Q^c)$$

Παράδειγμα.

Ζητεῖται τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2)$. Ἔχομεν ὅτι $p(x) : x^2 = 4$ καὶ $q(x) : x = 2$. Ἑπομένως $P = \{2, -2\}$ καὶ $Q = \{2\}$. Ἄρα θὰ εἶναι $P^c = \{ x \mid x \neq 2 \text{ εἴτε } -2 \}$ καὶ $Q^c = \{ x \mid x \neq 2 \}$.

Συνεπῶς $P \cap Q = \{2\}$ καὶ $P^c \cap Q^c = \{x | x \neq 2$ εἴτε $-2\}$ Τελικῶς λοιπὸν ἔχομεν :

$$\{x \mid p(x)) \Leftrightarrow (q(x)\} = (P \cap Q) \cup (P^c \cap Q^c) = \{x \mid x \neq -2\}$$

Σημ. 1. Τὸ σύνολον ἀληθείας τῆς $(x^2 = 4) \Leftrightarrow (x = 2)$ εἶναι ἀμέσως φανερὸν ὅτι εἶναι τὸ $\{x \mid x \neq -2\}$, διότι τὸ -2 εἶναι ἡ μόνη τιμὴ τοῦ x (ἀπὸ τὸ σύνολον ἀναφορᾶς R), διὰ τὴν ὁποίαν δὲν λαμβάνουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας.

Σημ. 2. Αἱ προτάσεις

$$p \vee q, \; p \wedge q, \; p \Rightarrow q, \; p \Leftrightarrow q, \; \sim p$$

λέγονται **σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος,** διὰ κάθε ζεῦγος ἁπλῶν προτάσεων p καὶ q ἐκ τοῦ L.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

34) Νὰ διατυπώσετε τὰς ἀντιστρόφους τῶν κάτωθι συνεπαγωγῶν καὶ νὰ ἀποφανθῆτε ἂν αὗται εἶναι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς.

α) Ἐὰν κάποιος ἐγεννήθη εἰς τὰς Πάτρας, τότε ἔχει Ἑλληνικὴν ἰθαγένειαν.

β) Ἐὰν $x - \psi = 3$, τότε $x > \psi$

γ) Ἐὰν δύο ὀρθογώνια ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, τότε ἔχουν ἴσα ἐμβαδά.

δ) Ἐὰν $x^2 = 25$, τότε $x = 5$ εἴτε $x = -5$.

ε) Ἐὰν ἓν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, τότε ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος.

στ) Ἐὰν $2 + 4 = 5$, τότε $4 + 6 = 8$

35) Νὰ ἀποφανθῆτε, ἂν αἱ κατωτέρω προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των :

α) p : $2x = 10$ $(x \in R)$
q : $x = 5$

β) p : Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον
q : Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσογώνιον

γ) p : $x > \psi$ $(x, \psi \in R)$
q : $\psi < x$

δ) p : ἡ εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε′
q : ἡ εὐθεῖα ε′ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε

ε) p : $x = 4$ εἴτε $x = -4$
q : $x^2 = 16$

36) Νὰ διατυπώσετε προτάσεις ἰσοδυνάμους πρὸς τὰς κάτωθι ἀναγραφομένας :

α) Αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε′ τοῦ ἐπιπέδου (Π) δὲν τέμνονται.

β) Τὸ σημεῖον Μ ἀνήκει εἰς τὴν εὐθεῖαν ε καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν ε′.

γ) Τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε.

δ) Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ ἴσας.

ε) Τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας θ.

στ) $x^2 = 1$.

ζ) $x = 2$ καὶ $\psi = -2$.

37) Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον ἀληθείας εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι ἰσοδυναμίας ἀνοικτῶν προτάσεων (σύνολον ἀναφορᾶς τῆς μεταβλητῆς τὸ R).

α) $(x = 1) \Leftrightarrow (x = -1)$ β) $(x^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$

γ) $(3x = 6) \Leftrightarrow (x = 2)$ δ) $(x \neq 1) \Leftrightarrow (x^2 \neq 1)$

ε) $(x = 5) \Leftrightarrow (x \neq 5)$ στ) $(3x = 6) \Leftrightarrow (3x + 2 = 8)$

18. Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΑΝΤΙΘΕΤΟΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΕΠΑΓΩΓΗΣ.

Α) Εἰς τὰ προηγούμενα ἀπὸ τὴν συνεπαγωγὴν $p \Rightarrow q$ ἐσχηματίσαμεν τὴν ἀντίστροφόν της $q \Rightarrow p$ καὶ τὴν ἀντίθετόν της $\sim p \Rightarrow \sim q$. Μία ἄλλη συνεπαγωγὴ σχετιζομένη μὲ τὴν $p \Rightarrow q$ εἶναι ἡ $\sim q \Rightarrow \sim p$, ἡ ὁποία λέγεται **ἀντιστροφοαντίθετος** τῆς $p \Rightarrow q$.

Παραδείγματα :

1ον. $p \Rightarrow q \quad : x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$

$\sim q \Rightarrow \sim p : x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$

2ον. $p \Rightarrow q$: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου τέμνωνται, τότε αἱ εὐθεῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι. $\sim q \Rightarrow \sim p$: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι, τότε δὲν τέμνονται.

3ον. $p \Rightarrow q$: Ἐὰν πάρω βαθμὸν 17 εἰς τὰ Μαθηματικά, τότε θὰ ἔχω 16 εἰς τὸ ἐνδεικτικόν μου (ἐννοεῖται : μὲ τὴν ὑπάρχουσαν βαθμολογίαν εἰς τὰ ἄλλα μαθήματα). $\sim q \Rightarrow \sim p$: Ἐὰν δὲν ἔχω 16 εἰς τὸ ἐνδεικτικόν μου, τότε δὲν θὰ ἔχω πάρει 17 εἰς τὰ Μαθηματικά.

4ον. $p \Rightarrow q$: Ἐὰν ΑΓ = ΒΔ, τότε τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

$\sim q \Rightarrow \sim p$: Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ δὲν εἶναι ὀρθογώνιον, τότε ΑΓ ≠ ΒΔ.

Β) Ἡ πλέον ἐνδιαφέρουσα ἰδιότης τῆς ἀντιστροφοαντιθέτου μιᾶς συνεπαγωγῆς εἶναι ὅτι εἶναι ἰσοδύναμος (ἔχει τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας) μὲ τὴν δοθεῖσαν συνεπαγωγήν. Δηλαδή :

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Ἂς κατασκευάσωμεν τὸν πίνακα ἀληθείας διὰ τὰς $p \Rightarrow q$ καὶ $\sim q \Rightarrow \sim p$:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Ἀπὸ τὰς στήλας 5ην καὶ 6ην τοῦ πίνακος βλέπομεν ὅτι αἱ σύνθετοι προτάσεις :

$$p \Rightarrow q \text{ καὶ } \sim q \Rightarrow \sim p$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας, εἶναι λοιπὸν ἰσοδύναμοι προτάσεις. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει προκειμένου νὰ ἀποδείξωμεν μίαν συνεπαγωγήν, νὰ ἀποδείξωμεν ἀντ' αὐτῆς τὴν ἀντιστροφοαντίθετόν της.

Οὕτω, π.χ., εἰς τὸ σύνολον τῶν παραλληλογράμμων ἰσχύει ἡ πρότασις : «ἂν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει ἴσας τὰς διαγωνίους του, τότε ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς». Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρότασιν : «Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ δὲν ἔχει ὀρθὰς τὰς γωνίας του, τότε δὲν ἔχει τὰς διαγωνίους του ἴσας».

Ἰδοὺ ἓν ἄλλο παράδειγμα :

Διὰ ν' ἀποδείξωμεν εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅτι : «ὁ γεωμετρικὸς τόπος (τὸ σύνολον) τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ», ἀποδεικνύομεν α) Ἐὰν τυχὸν σημεῖον Μ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ Α καὶ Β, τότε ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον. καὶ β) Ἐὰν τὸ Μ ἀνήκῃ εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ ΑΒ τότε ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ Α καὶ Β.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς : Νὰ ἀποδείξωμεν τὴν α) καὶ κατόπιν ἀντὶ τῆς β) νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀντιστροφοαντίθετον τῆς β), ὅτι δηλ. ἐὰν τὸ Μ δὲν ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ Α καὶ Β, τότε δὲν ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον.

Γ) Μία ἄλλη ἰδιότης τῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι ὅτι εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\sim p \vee q$.

Δηλ. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Πράγματι, ἂν κάμωμεν τὸν πίνακα ἀληθείας,

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α

βλέπομεν ἀπὸ τὰς στήλας 4ην καὶ 5ην ὅτι $p \Rightarrow q$ καὶ $\sim p \vee q$ ἔχουν τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας, δηλ. εἶναι ἰσοδύναμοι προτάσεις καὶ ἠμποροῦμεν, ὅταν χρειασθῇ, νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν μίαν διὰ τῆς ἄλλης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

38) Νὰ διατυπώσετε τὰς ἀντιστροφοαντιθέτους τῶν κάτωθι συνεπαγωγῶν.

α) Ἐὰν τηρῇς τὰς διατάξεις τοῦ κώδικος ὁδικῆς κυκλοφορίας, τότε δὲν θὰ λάβῃς κλῆσιν ἀπὸ τὸν τροχονόμον.

β) Ἐὰν εἰς τὸν Ἄρην δὲν ὑπάρχῃ ἀτμόσφαιρα μὲ ὀξυγόνον, τότε δὲν ὑπάρχει ζωὴ ἐκεῖ.

γ) Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν ε, τότε δὲν ἀνήκει εἰς τὴν ε'.

δ) Ἐὰν ἠμπορέσῃς νὰ διατρέξῃς τρία χιλιόμετρα εἰς 1 λεπτόν, τότε θὰ φάγω τὸ καπέλλον μου.

ε) Ἐὰν $2x = 10$, τότε $x = 5$.

στ) Ἐὰν ἓν σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας θ, τότε τὸ Μ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

39) Νὰ ἀποδείξετε μὲ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς πίνακος ἀληθείας ὅτι ἡ ἄρνησις τῆς $p \Rightarrow q$ εἶναι $p \wedge \sim q$.

40) Κατασκευάζοντες πίνακα τιμῶν ἀληθείας νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἡ συνεπαγωγὴ εἶναι μεταβατική. Δηλ. $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

41) Ἂν p : ε_1 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε_3

q : ε_2 εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε_3

r : ε_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε_2

νὰ γράψετε ὑπὸ συμβολικὴν μορφὴν τὰς ἑξῆς προτάσεις :

α) ἂν ε_1 εἶναι κάθετος πρὸς ε_3 καὶ ε_2 κάθετος πρὸς τὴν ε_3, τότε ἡ ε_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε_2.

β) ἂν ε_1 εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε_3 καὶ ε_2 δὲν εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε_3, τότε ἡ ε_1 δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε_2.

42) Νὰ δείξετε ὅτι αἱ προτάσεις $p \Rightarrow (q \vee r)$ καὶ $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἔχουν δηλαδὴ τὰς αὐτὰς τιμὰς ἀληθείας.

43) Νὰ ἀποδείξετε μὲ κατασκευὴν πίνακος ἀληθείας ὅτι ἡ ἄρνησις τῆς $p \Leftrightarrow q$ εἶναι $\sim p \Leftrightarrow q$ ἢ $p \Leftrightarrow \sim q$.

Ἔπειτα νὰ συμπληρώσετε τὸν κάτωθι πίνακα :

	τύπος	ἄρνησις
Σύζευξις	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
Διάζευξις	$p \vee q$	——
Συνεπαγωγὴ	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
Ἰσοδυναμία	$p \Leftrightarrow q$	——

19. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ.

Α) Εἰς τὴν § 12 εἴπομεν ὅτι Λογικὴ εἶναι ἡ μελέτη τῶν κανόνων πρὸς κατασκευὴν ὀρθῶν συλλογισμῶν.

Ὁ μέγας Ἕλλην φιλόσοφος Ἀριστοτέλης ὑπῆρξεν ὁ πρῶτος μέγας διδάσκαλος καὶ θεμελιωτὴς τῆς Λογικῆς. Ἡ Λογικὴ τὴν ὁποίαν συνέγραψε δὲν ἔχει σχεδὸν προαχθῆ μέχρι σήμερον καὶ εἰς τὴν πραγματικότητα, ὅλα σχεδόν, ὅσα μελετῶμεν σήμερον, ἀνήκουν εἰς ὅ,τι ὀνομάζομεν «Λογικὴν τοῦ Ἀριστοτέλους», ἡ ὁποία ἔχει ἡλικίαν ἄνω τῶν 2000 ἐτῶν. Ἡ μαθηματικοποίησις τῆς Λογικῆς εἶναι, βεβαίως, ἔργον τῶν μεταγενεστέρων καὶ ἰδίως τοῦ Georges Boole (1815–1864) καὶ ἄλλων θεωρητικῶν τῆς Λογικῆς.

Εἰς τὰ Μαθηματικά, ἰδίως εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἡ ἐργασία μας συνίσταται εἰς τὴν ἀπόδειξιν θεωρημάτων, δηλαδὴ προτάσεων. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ἓν θεώρημα πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο ἐπακολουθεῖ λογικῶς ἀπὸ τὰς ὑποθέσεις μας. Διὰ νὰ τὸ κάμωμεν αὐτὸ χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἀρχὰς τῆς λογικῆς, δηλαδὴ λογικοὺς κανόνας.

Ἐάν, π.χ., γνωρίζωμεν ὅτι ἡ πρότασις $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅτι ἡ p εἶναι ἀληθής, τότε δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι q εἶναι ἀληθής. Δηλαδὴ μὲ σύμβολα :

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

Πράγματι, ἂν σχηματίσωμεν πίνακα ἀληθείας,

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

βλέπομεν ὅτι ἡ σύνθετος πρότασις $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ **εἶναι πάντοτε ἀληθής,** ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν ἀληθείας, τὰς ὁποίας λαμβάνουν αἱ συνιστῶσαι αὐτὴν προτάσεις. Μία τοιαύτη πρότασις λέγεται **ταυτολογία** καὶ μὲ τὰς ταυτολογίας, θὰ ἀσχοληθῶμεν κατωτέρω εἰδικώτερον.

Ἡ σύνθετος πρότασις $[(p \Rightarrow q) \land p] \Rightarrow q$, εἶναι πάντοτε, ὡς εἴπομεν, ἕνας ὀρθὸς συλλογισμός. Ἐνίοτε γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς :

$$\left.\begin{array}{ll} p \Rightarrow q & (\text{ἀληθής}) \\ p & (\text{ἀληθής}) \end{array}\right\} \quad (\text{ὑπόθεσις τοῦ συλλογισμοῦ})$$

$$\overline{\text{ἄρα } q \qquad\qquad (\text{συμπέρασμα τοῦ συλλογισμοῦ})}$$

Θὰ δώσωμεν τώρα παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ λογικοῦ κανόνος : $[(p \Rightarrow q) \land p] \Rightarrow q$.

Παράδειγμα :

Ἐλάβομεν μίαν πρόσκλησιν διὰ τὰς γυμναστικὰς ἐπιδείξεις τοῦ Γυμνασίου Α, ἡ ὁποία ἔγραφεν «ἂν βρέχῃ κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν ἐπιδείξεων, ἡ ἑορτὴ θὰ γίνῃ εἰς τὸ κλειστὸν γυμναστήριον» $(p \Rightarrow q)$. Σήμερον εἶναι ἡ ἡμέρα τῆς ἑορτῆς καὶ βρέχει (p εἶναι ἀληθής). Ἐφ' ὅσον λοιπὸν αἱ προτάσεις $p \Rightarrow q$ καὶ p εἶναι καὶ αἱ δύο ἀληθεῖς, γνωρίζωμεν ὅτι q εἶναι ἀληθής, δηλ. ἡ ἑορτὴ θὰ γίνῃ εἰς τὸ κλειστὸν γυμναστήριον. Ἠμποροῦμεν τώρα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἀπεδείξαμεν τὸ θεώρημα: «Ἡ ἑορτὴ τῶν γυμναστικῶν ἐπιδείξεων θὰ γίνῃ εἰς τὸ κλειστὸν Γυμναστήριον».

B) Μία ἄλλη τεχνικὴ χρησιμοποιουμένη εἰς τὰς ἀποδείξεις εἶναι ἡ ἑξῆς : Ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθὴς καὶ ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι q εἶναι ψευδής, τότε ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι p εἶναι ψευδής. Συμβολικῶς : $[(p \Rightarrow q) \land \sim q] \Rightarrow \sim p$

Πράγματι, ἂν κατασκευάσωμεν πίνακα ἀληθείας,

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \land \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \land \sim q] \Rightarrow \sim p$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α

βλέπομεν ὅτι ἡ σύνθετος πρότασις $[(p \Rightarrow q) \land \sim q] \Rightarrow \sim p$ εἶναι πάντοτε ἀληθής, ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν ἀληθείας, τὰς ὁποίας λαμβάνουν αἱ συνιστῶσαι αὐτὴν προτάσεις. Εἶναι δηλαδὴ ταυτολογία καὶ ἠμποροῦμεν νὰ τὴν χρησιμοποιοῦμεν ὡς λογικὸν κανόνα.

Ἰδοὺ ἓν παράδειγμα ἐφαρμογῆς τοῦ κανόνος τούτου :

Παράδειγμα :

Ὁ μαθητὴς Γεωργίου λέγει ὅτι ὁ -5 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 5x + 6 = 0$. Ἐὰν -5 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 5x + 6 = 0$, τότε $(-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 6 = 0$ $(p \Rightarrow q)$. Ἀλλὰ $(-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 6 = 25 + 25 + 6 \neq 0$ (q ψευδής). Ἐφ' ὅσον τώρα γνωρίζομεν ὅτι $p \Rightarrow q$ εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅτι q ψευδής, εἴμεθα βέβαιοι ὅτι p εἶναι ψευδὴς καὶ ὁ Γεωργίου ἔκαμε λάθος. Ὁ -5 δὲν εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι ἀπεδείξαμεν τὸ θεώρημα : «ὁ -5 δὲν εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 5x + 6 = 0$».

Ἡ ὡς ἄνω ἀπόδειξις ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς :

Προτάσεις	Δικαιολογίαι
1) -5 εἶναι ρίζα τῆς $x^2 - 5x + 6 = 0$ $\Rightarrow ((-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 6 = 0)$	1) Ὁρισμὸς ρίζης μιᾶς ἐξισώσεως.
2) $(-5)^2 - 5 \cdot (-5) + 6 \neq 0$	2) Ἀριθμητική.
3) -5 δὲν εἶναι ρίζα τῆς $x^2 - 5x + 6 = 0$	3) Προτάσεις 1 καὶ 2· καὶ κανόνες τῆς λογικῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Εἰς κάθε μίαν ἀπὸ τὰς κατωτέρω ἀσκήσεις 44—52 (*) δίδονται ὡρισμέναι προτάσεις τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν ἀληθεῖς καὶ διατυπώνεται ἓν θεώρημα. Εἰς μερικὰς περιπτώσεις τὸ θεώρημα δύναται νὰ εἶναι ψευδὲς καὶ εἰς ἄλλας νὰ μὴ δίδωνται ἀρκεταὶ πληροφορίαι διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν ἂν τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδές. Ζητεῖται νὰ διατυπώσετε τὰς ἀποδείξεις. (αἱ διδόμεναι ἀληθεῖς προτάσεις λέγονται : ὑποθέσεις).

44) **Ὑπόθεσις.** Ὁ θεῖος Κώστας θὰ μᾶς συνοδεύσῃ εἰς τὸ θέατρον, ἐὰν ἡ μητέρα τὸ ἐπιτρέψῃ. Ἡ μητέρα τὸ ἐπέτρεψε.

Θεώρημα. Ὁ θεῖος Κώστας θὰ μᾶς συνοδεύσῃ εἰς τὸ θέατρον.

45) **Ὑπόθεσις.** Ἐὰν δὲν ὑπάρχῃ ὀξυγόνον εἰς τὴν Σελήνην, τότε δὲν ὑπάρχει ζωὴ ἐκεῖ. Δοκιμαὶ ἔχουν δείξει τελειωτικῶς ὅτι δὲν ὑπάρχει ὀξυγόνον ἐπὶ τῆς Σελήνης.

Θεώρημα. Δὲν ὑπάρχει ζωὴ ἐπὶ τῆς Σελήνης.

46) **Ὑπόθεσις** $x + \psi = 20$, $x - \psi = 4$

Θεώρημα. $x \neq 1$

47) **Ὑπόθεσις** $2x - 3\psi = 7$, $x + 2\psi = 3$

Θεώρημα. $3x - \psi = 10$

48) **Ὑπόθεσις.** Τὸ γινόμενον δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικός. Ὁ ἀριθμὸς α εἶναι θετικός. Τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta$ δὲν εἶναι θετικός.

Θεώρημα. Ὁ ἀριθμὸς β εἶναι ἀρνητικός.

49) **Ὑπόθεσις.** Ἐὰν $\alpha \in Z$, τότε $1 \cdot \alpha = \alpha$. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in Z$, τότε $\beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha = (\beta + \gamma) \cdot \alpha$, $1 + 1 = 2$.

Θεώρημα. Διὰ κάθε $\alpha \in Z$, ἰσχύει $\alpha + \alpha = 2\alpha$

50) **Ὑπόθεσις.** $6 + (-6) = 0{,}8 = 2 + 6$. Διὰ κάθε τριάδα ἀριθμῶν α, β, γ, ἐκ τοῦ Z, ἰσχύει ὅτι $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Ἐπίσης διὰ κάθε $x \in Z$ ἰσχύει ὅτι $x + 0 = x$.

Θεώρημα. $8 + (-6) = 2$.

51) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα πίνακα ἀληθείας διὰ τὴν σύνθετον πρότασιν $(p \wedge q) \vee r$.

52) Ποία εἶναι ἡ ἄρνησις τῆς $\sim p$, δηλαδὴ μὲ ποίαν πρότασιν ἰσοδυναμεῖ ἡ $\sim (\sim p)$;

53) Ἐὰν α, β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ δείξετε ὅτι $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

54) Νὰ ἀποδείξετε τὸ θεώρημα :

Ἐὰν $x = 5$, τότε $3x + 6 = 21$

55) Νὰ ἀποδείξετε τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος τῆς ἀσκήσεως 54.

56) Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$ καὶ $\alpha(3\beta - 8) = \alpha$, τί ἠμπορεῖτε νὰ συμπεράνετε ;

57) Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta \neq 4$ καὶ $(3\alpha + 12)(2\beta - 8) = 0$, τί ἠμπορεῖτε νὰ συμπεράνετε ;

20. ΤΑΥΤΟΛΟΓΙΑ.

Μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία μορφώνεται ἀπὸ ἄλλας προτάσεις p, q, r κ.τ.λ. πεπερασμένου πλήθους, συνδεομένας μὲ τὰ σύμβολα $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\Rightarrow$,

(*) Ἐκ τῶν ἀσκήσεων τούτων θὰ δοθοῦν εἰς τοὺς μαθητάς, ὅσαι κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν ἐμπέδωσιν τῆς ἐννοίας «ἀπόδειξις».

$\Leftrightarrow$, $\sim$, θὰ ὀνομάζεται **λογικὸς τύπος** Αἱ p, q, r, κ.τ.λ., αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ λάβουν τιμὰς Α ἢ Ψ, λέγονται **μεταβληταὶ** τοῦ λογικοῦ τύπου.

Οἱ τύποι, τοὺς ὁποίους συνηντήσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα : $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$, $\sim p$, $p \Leftrightarrow q$, ὀνομάζονται **ἁπλοῖ τύποι.** Συμφώνως πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς ἡ ἔκφρασις $\sim p \wedge \sim q$ εἶναι ἕνας λογικὸς τύπος, ὅπως ἐπίσης καὶ αἱ ἐκφράσεις $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ καὶ $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$, τὰς ὁποίας συνηντήσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα.

Ἀπὸ ὅσα ἐξεθέσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς ἀληθείας ἑνὸς λογικοῦ τύπου, θὰ σχηματίσωμεν ἕνα πίνακα, τοῦ ὁποίου αἱ πρῶται στῆλαι θὰ ἔχουν ἐπικεφαλίδας τὰς ἁπλᾶς προτάσεις p, q, r, κ.τ.λ., ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται ὁ τύπος. Ἐὰν αἱ ἁπλαῖ προτάσεις εἶναι δύο, τότε αἱ γραμμαὶ τοῦ πίνακος θὰ εἶναι $2^2 = 4$. Ἂν αἱ ἁπλαῖ προτάσεις εἶναι τρεῖς, τότε αἱ γραμμαὶ τοῦ πίνακος θὰ εἶναι $2^3 = 8$. Ἂν αἱ προτάσεις εἶναι τέσσαρες, αἱ γραμμαὶ θὰ εἶναι $2^4 = 16$ κ.ο.κ. Ἔπειτα θὰ σχηματίσωμεν ἐν συνεχείᾳ στήλας μὲ ἐπικεφαλίδας τοὺς ἁπλοῦς τύπους, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται ὁ δοθεὶς λογικὸς τύπος. Εἰς τὴν τελευταίαν στήλην ἐπικεφαλὶς θὰ εἶναι ὁ δοθεὶς σύνθετος τύπος. Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν στήλην αἱ τιμαὶ εἶναι εἰς ὅλας τὰς γραμμάς της Α, τότε ὁ δοθεὶς τύπος εἶναι ἀληθής, δι᾿ ὅλας τὰς τιμὰς τῶν συνθετικῶν του προτάσεων καὶ λέγεται **ταυτολογία.** Ὥστε : **ταυτολογία λέγεται πᾶς λογικὸς τύπος, ὁ ὁποῖος ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν (ἀληθῆ ἢ ψευδῆ) τῶν ἁπλῶν προτάσεών του.**

Δύο σπουδαίας ταυτολογίας συνηντήσαμεν εἰς τὰ προηγούμενα καὶ εἴδομεν ὅτι εἰς τὰ Μαθηματικὰ γίνεται μεγάλη χρῆσις αὐτῶν. Εἶναι αἱ ταυτολογίαι:

1) $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
2) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

Δίδομεν μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα ταυτολογιῶν :

1) Ἡ συνεπαγωγὴ $p \Rightarrow p$ εἶναι ταυτολογία.

p	$p \Rightarrow p$
Α	Α
Ψ	Α

2) Ἡ ἰσοδυναμία $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ εἶναι ταυτολογία.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
Α	Ψ	Α	Α
Ψ	Α	Ψ	Α

3) Ἡ σύνθετος πρότασις $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ εἶναι ταυτολογία :

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge q$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

4) Ἡ σύνθετος πρότασις $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)]$ εἶναι ταυτολογία :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee q$	$p \vee \sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)]$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α

5) Ἡ σύνθετος πρότασις $(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$ εἶναι ταυτολογία :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$p \underline{\vee} q$	$(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$	$(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow [(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)]$
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν τριῶν τελευταίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι :

1) $p \Rightarrow q$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\sim p \vee q$

2) $p \Leftrightarrow q$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

3) $p \underline{\vee} q$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι διὰ τῶν πράξεων τῆς ἀρνήσεως, τῆς συζεύξεως καὶ διαζεύξεως δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς ἄλλας πράξεις τῆς συνεπαγωγῆς ($\Rightarrow$), τῆς ἰσοδυναμίας ($\Leftrightarrow$) καὶ τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως ($\underline{\vee}$) καὶ ἑπομένως ὁποιοσδήποτε λογικὸς τύπος δύναται νὰ διατυπωθῇ διὰ τῶν τριῶν συμβόλων : $\wedge$, $\vee$ καί $\sim$.

21. ΑΝΤΙΦΑΣΙΣ.

Μία σύνθετος πρότασις λέγεται ἀντίφασις, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, εἶναι ψευδὴς δι' ὁποιανδήποτε τιμὴν (Α ἢ Ψ) τῶν συνιστωσῶν προτάσεών της.

Κλασσικὸν παράδειγμα ἀντιφάσεως εἶναι ἡ σύνθετος πρότασις $p \wedge \sim p$.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ

Ἀπὸ τὸν κατωτέρω πίνακα βλέπομεν ὅτι ἡ ἄρνησις μιᾶς ταυτολογίας ἀποτελεῖ ἀντίφασιν καὶ ἡ ἄρνησις μιᾶς ἀντιφάσεως ταυτολογίαν.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \vee \sim p)$	$\sim(p \wedge \sim p)$
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

58) Νὰ ἀποδείξετε χρησιμοποιοῦντες πίνακας ἀληθείας ὅτι οἱ κάτωθι τύποι ἀποτελοῦν ταυτολογίας :

α) $[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

β) $[\sim (p \vee q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

γ) $[\sim (p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

59) Ὅμοιον ζήτημα διὰ τοὺς τύπους :

α) $[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$

β) $[\sim (p \Leftrightarrow q)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)$

60) Νὰ ἀποδείξετε ὁμοίως ὅτι ἀποτελοῦν ταυτολογίας οἱ κάτωθι τύποι :

α) $(p \wedge q) \Rightarrow q$

β) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \Rightarrow q$

γ) $p \Rightarrow (p \vee q)$

61) Ὅμοιον ζήτημα διὰ τοὺς τύπους :

α) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

β) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

62) Ὁμοίως :

α) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

β) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

γ) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

63) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι, ἐὰν α εἶναι μία ἀληθὴς πρότασις, τότε $(p \wedge \alpha) \Leftrightarrow p$.

64) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ἐὰν ψ εἶναι μία ψευδὴς πρότασις, τότε $(p \vee \psi) \Leftrightarrow p$.

65) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ καὶ $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$.

22. ΤΥΠΟΙ ΑΛΗΘΕΙΣ ΚΑΤΑ ΣΥΓΚΥΡΙΑΝ.

Ἕνας λογικὸς τύπος, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι οὔτε ταυτολογία οὔτε ἀντίφασις, ἀλλ' ὁ ὁποῖος διὰ μερικὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν του (ἁπλῶν προτάσεών του) δίδει ἀληθὲς ἀποτέλεσμα καὶ δι' ἄλλας ψευδές, λέγεται **τύπος ἀληθὴς κατὰ συγκυρίαν** (ἢ **σχετικὸς τύπος**).

Παράδειγμα. Ὁ τύπος $\sim p \vee q$ εἶναι ἀληθὴς κατὰ συγκυρίαν.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
Α	Α	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α

Οἱ πίνακες ἀληθείας ἀποτελοῦν ἕνα ἀσφαλῆ τρόπον διὰ νὰ διαπιστώνωμεν ἂν ἕνας τύπος εἶναι ταυτολογία ἢ ἀντίφασις ἢ ἀληθὴς κατὰ συγκυρίαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

66) Ἕνας μαθητὴς ἔκαμε τὸν ἑξῆς συλλογισμόν :

$p \Rightarrow q$ (ἀληθής)
q (ἀληθής)
ἄρα p (ἀληθής)

Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ὁ συλλογισμὸς αὐτὸς πάντοτε ἀληθής. (Θὰ κάμετε πίνακα ἀληθείας διὰ $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$.

67) Νὰ δώσετε ἕνα συγκεκριμένον παράδειγμα ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικήν, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ φαίνεται ὅτι ὁ συλλογισμὸς τῆς ἀσκήσεως 66 εἶναι ἀληθὴς κατὰ συγκυρίαν (π.χ. $p : 1 = 3$, $q : 2 = 2$).

68) Ἕνας μαθητὴς ἔκαμε τὸν ἑξῆς συλλογισμόν :

Ἐὰν $x = 0$ καὶ $\psi = z$, τότε $\psi > 1$.

'Αλλὰ $\psi \not> 1$. Ἄρα $\psi \neq z$.

Νὰ ἐλέγξετε τὸν συλλογισμὸν τοῦτον.

(Παραστήσατε μὲ $p : x = 0$, $q : \psi = z$, $r : \psi > 1$ κτλ.).

69) Ἐλέγξατε τοὺς κάτωθι συλλογισμούς :

α) $[(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.

β) $x < 5 \Rightarrow x \neq \psi$, $x \neq \psi \wedge x < 5$.

Ἄρα $x \not< 5 \wedge x = \psi$

γ) $x = 2 \vee x < 2$, $x = 3$ $x \neq 2$, $x = 3 \Rightarrow x \not< 2$.

Ἄρα $x \neq 3$

δ) $x = \psi\psi \neq 1$, $(x = \psi \wedge \psi \neq 1)$. Ἄρα $\psi \neq 1$.

70) Δείξατε ὅτι :

α) ὁ τύπος $[\sim(p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \Rightarrow \sim q)$ εἶναι μία ταυτολογία.

β) ὁ τύπος $(p \wedge q) \wedge \sim q$ ἀποτελεῖ ἀντίφασιν.

γ) ὁ τύπος $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$ εἶναι σχετικὸς τύπος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΥΝΟΛΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ

23. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ. ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.

Ἐμάθομεν εἰς τὰς προηγουμένας τάξεις ὅτι τὴν λέξιν **σύνολον** χρησιμοποιοῦμεν ὅταν θέλωμεν ν' ἀναφερθῶμεν εἰς ἀντικείμενα ὡρισμένα καὶ σαφῶς διακεκριμένα, τὰ ὁποῖα θεωροῦμεν ὡς μίαν ὁλότητα.

Οὕτω, π.χ., ὁμιλοῦμεν περὶ τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας, τοῦ συνόλου τῶν ἀγροτῶν τῆς χώρας μας, τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, τοῦ συνόλου τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου κ.τ.λ.

Τὰ ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα συναποτελοῦν ἓν σύνολον, λέγονται **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου.

Ὀνομάζομεν τὰ σύνολα γενικῶς μὲ κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου μας, τὰ δὲ στοιχεῖα μὲ μικρά.

Ὅταν ἓν στοιχεῖον x ἀνήκῃ εἰς ἓν σύνολον A γράφομεν συμβολικῶς $x \in A$.

Ὅταν ἓν στοιχεῖον x δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον A γράφομεν $x \notin A$.

Δι' ἓν σύνολον A καὶ ἓν στοιχεῖον x ἀληθεύει ἢ $x \in A$ ἢ $x \notin A$.

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς βασικῆς ἰσότητος, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ « = » καὶ βάσει αὐτῆς θεωροῦμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ὡς διακεκριμένα μεταξύ των. Δύο στοιχεῖα α καὶ β λέγομεν ὅτι εἶναι **ἴσα** καὶ γράφομεν $\alpha = \beta$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὰ α καὶ β εἶναι ὀνόματα τοῦ αὐτοῦ στοιχείου. Οὕτω, π.χ., εἰς τὸ σύνολον Q εἶναι $2 = \frac{10}{5}$.

Ἐὰν δὲν εἶναι $\alpha = \beta$, τότε λέγομεν ὅτι α εἶναι **διάφορον** τοῦ β καὶ γράφομεν συμβολικῶς $\alpha \neq \beta$. Διὰ δύο τυχόντα στοιχεῖα x καὶ ψ θὰ ἰσχύῃ :

ἢ $x = \psi$ ἢ $x \neq \psi$.

Ὅπως μᾶς εἶναι γνωστόν, ἓν σύνολον συμβολίζεται :

1) μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του ἐντὸς ἀγκίστρου.
2) μὲ περιγραφὴν χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του τῇ βοηθείᾳ μεταβλητῆς καὶ ἀγκίστρου.

Π.χ. $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$Z = \{x | x$ ἀκέραιος τῆς Ἀλγέβρας $\}$

Πρὸς εὐκολίαν κατὰ τὴν διατύπωσιν γενικῶν προτάσεων εἰσάγεται εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον λέγεται **κενὸν σύνολον**, συμβολιζόμενον μὲ $\varnothing$. Εἰς τὸ σύνολον τοῦτο οὐδὲν στοιχεῖον ἀνήκει.

24. ΥΠΟΣΥΝΟΛΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Λέγομεν ὅτι ἓν σύνολον A εἶναι **ὑποσύνολον** ἑνὸς σύνολου B, καὶ συμβολίζομεν $A \subseteq B$, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ B. Συμβολικῶς ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Οὕτω, π.χ., τὸ σύνολον N, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν : $N \subseteq R$.

Δεχόμεθα ὅτι τὸ κενὸν σύνολον $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολον ὁποιουδήποτε ἄλλου συνόλου, δηλ. $\varnothing \subseteq A$, διὰ κάθε σύνολον A. Τὸ κενὸν σύνολον ἔχει ὑποσύνολον μόνον τὸν ἑαυτόν του, δηλ. $\varnothing \subseteq \varnothing$.

Ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἰδιότητες :

1) $A \subseteq A$ (ἀνακλαστικὴ ἢ αὐτοπαθής).
2) $(A \subseteq B \wedge B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ (μεταβατική)

Ἓν σύνολον A λέγεται **γνήσιον** ὑποσύνολον ἄλλου συνόλου B, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B καὶ ὑπάρχῃ στοιχεῖον $x \in B$ μὲ $x \notin A$. Συμβολικῶς γράφομεν τότε : $A \subset B$. Δηλαδή :

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists \psi \in B : \psi \notin A)$$

Ἐὰν ἓν σύνολον A δὲν εἶναι ὑποσύνολον συνόλου B θὰ γράφωμεν : $A \nsubseteq B$.

Ἡ ἔννοια **γνήσιον ὑποσύνολον** ἔχει μόνον τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα : $(A \subset B \wedge B \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$

Τὸ σύνολον B, τοῦ ὁποίου θεωροῦμεν διάφορα ὑποσύνολα A, Δ, E κ.τ.λ. λέγεται **σύνολον ἀναφορᾶς** ἢ **ὑπερσύνολον** τῶν A, Δ, E κ.τ.λ.

25. ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ.

Δύο σύνολα A καὶ B λέγομεν ὅτι εἶναι **ἴσα**, καὶ συμβολίζομεν $A = B$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖον τοῦ A εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ B καὶ ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ A. Δηλαδή, συμβολικῶς : $(A = B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\forall \psi : \psi \in B \Rightarrow \psi \in A)$

Οὕτω, π.χ., ἐὰν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \left\{\frac{5}{5}, 3, 2\right\}$, τότε ἔχομεν $A = B$.

Ἐὰν δύο σύνολα A καὶ B δὲν εἶναι ἴσα, τότε λέγομεν ὅτι τὸ A εἶναι **διάφορον** τοῦ B καὶ συμβολίζομεν $A \neq B$.

Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν συνόλων:

1) $A = A$ (ἀνακλαστικὴ ἢ αὐτοπαθής).
2) $A = B \Rightarrow B = A$ (συμμετρική).
3) $(A = B \wedge B = \Gamma) \Rightarrow A = \Gamma$ (μεταβατική).

Ἰσχύει ἐπίσης ἡ ἑξῆς ἰδιότης :

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$ (ἀντισυμμετρική)

Πράγματι :

$$\left.\begin{array}{l}(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \\ (B \subseteq A) \Leftrightarrow (\forall x : x \in B \Rightarrow x \in A)\end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

26. ΔΥΝΑΜΟΣΥΝΟΛΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ.

Ὅταν ἔχωμεν ἓν σύνολον U καὶ θεωρήσωμεν ὅλα τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ ὡς ἀντικείμενα, δηλ. ὡς στοιχεῖα ἑνὸς νέου συνόλου, τότε ὁρίζεται ἕνα νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον λέγεται **δυναμοσύνολον** τοῦ U. Τοῦτο συμβολίζεται μὲ $\mathscr{P}(U)$, ἀνήκουν δὲ εἰς αὐτὸ καὶ τὸ κενὸν σύνολον καὶ τὸ ἴδιον τὸ U.

Ὅπως ἐμάθομεν εἰς προηγουμένας τάξεις, κάθε σύνολον διάφορον τοῦ κενοῦ ἔχει τὸ ὀλιγώτερον δύο ὑποσύνολα : τὸ κενὸν σύνολον καὶ τὸν ἑαυτόν του. Ἓν σύνολον μὲ δύο στοιχεῖα ἔχει $2^2 = 4$ ὑποσύνολα. Ἓν σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα ἔχει $2^3 = 8$ ὑποσύνολα, ἓν μὲ πέντε στοιχεῖα ἔχει 2^5 ὑποσύνολα καὶ γενικῶς ἓν σύνολον μὲ ν στοιχεῖα ἔχει 2^ν ὑποσύνολα. Οὕτω, π.χ., ἐὰν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, παρατηροῦμεν δὲ ὅτι τὸ A ἔχει $2^3 = 8$ ὑποσύνολα.

27. ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΤΟΥ VENN.

Εἰς πολλὰς περιπτώσεις διευκολυνόμεθα εἰς τὴν μελέτην ἑνὸς ζητήματος ἀναφερομένου εἰς σύνολα, ἐὰν χρησιμοποιήσωμεν γραφικὰς παραστάσεις αὐτῶν, τὰ γνωστά μας ἀπὸ τὰς προηγουμένας τάξεις διαγράμματα τοῦ Venn. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι εἰς ἓν διάγραμμα τοῦ Venn τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου παριστάνονται διὰ σημείων ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως αὐτῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71) Ἐὰν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, νὰ ἐλέγξετε ἂν εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ἀπὸ τὰς κάτωθι προτάσεις :

$\beta \in A$, $\varepsilon \notin A$, $\zeta \in A$, $8 \in A$, $\gamma \in A$

72) Νὰ δώσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα
 α) $\{x \in R \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ β) $\{x \in N \mid x < 2\}$

73) Νὰ εὕρετε χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα διὰ τὴν περιγραφὴν τῶν κάτωθι συνόλων :
 α) $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$
 β) $\{1, 4, 9, \ldots\}$
 γ) $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

74) Νὰ ἀναγράψετε δύο σύνολα, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα νὰ εἶναι σύνολα.

75) Ἂν $A \subseteq B$ καὶ $A \neq B$ τί συμπεραίνετε διὰ τὸ σύνολον A ;

76) Νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον $\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$

77) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι $(A \subset B \wedge B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$

78) Νὰ σχηματίσετε τὸ δυναμοσύνολον τοῦ $\{\varnothing, \alpha, \beta\}$

79) Νὰ ἀποδείξετε, ὅτι, ἐὰν $A \subseteq \varnothing$, τότε $A = \varnothing$

80) Ποῖον εἶναι τὸ δυναμοσύνολον τοῦ κενοῦ συνόλου ;

81) Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ κενὸν σύνολον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ τυχόντος συνόλου Α.

82) Νὰ ἀναγράψετε τὸ σύνολον λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$(x+1)(2x+1)(x^2-2)(x^2+1)=0$$

α) ὅταν σύνολον ἀναφορᾶς εἶναι τὸ R

β) ὅταν σύνολον ἀναφορᾶς εἶναι τὸ Q

γ) ὅταν σύνολον ἀναφορᾶς εἶναι τὸ N.

28. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΣΥΝΟΛΩΝ.

Ἂς θεωρήσωμεν ἓν σύνολον ἀναφορᾶς U μὴ κενὸν καὶ τελείως ὡρισμένον, τοῦ ὁποίου τὰ ὑποσύνολα ἂς συμβολίσωμεν μὲ Α, Β, Γ, . . . , Χ, Ψ, . . .

Ὅπως γνωρίζομεν δύο ὑποσύνολα τοῦ U, ἔστωσαν τὰ Α, Β, λέγονται ἴσα, ἐάν καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε $x \in A \Rightarrow x \in B$ καὶ διὰ κάθε $\psi \in B \Rightarrow \psi \in A$. Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος αὐτῆς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς βασικὴ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ U, τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστὸν συμβολίζομεν μὲ $\mathscr{P}(U)$. Βάσει τῆς ἰσότητος αὐτῆς τὰ ὑποσύνολα τοῦ U θεωροῦνται διακεκριμένα μεταξύ των. Εἰς τὸ σύνολον τοῦτο, τῶν ὑποσυνόλων τοῦ U, ὁρίζονται πράξεις ὡς ἑξῆς :

Α) Ἕνωσις συνόλων.

Ὡς ἕνωσις δύο συνόλων Α καὶ Β, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ $A \cup B$, ὁρίζεται τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ Α εἴτε εἰς τὸ Β.

Συμβολικῶς γράφομεν :

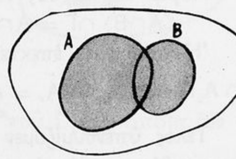
$A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \}$

Ἂν τὰ σύνολα Α καὶ Β ὁρίζονται διὰ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων των, δηλ. ἂν, π.χ., εἶναι

$A = \{ x \in U \mid p(x) \}$ καὶ $B = \{ x \in U \mid q(x) \}$, τότε ἔχομεν, ὅπως γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Λογικήν, ὅτι :

$$A \cup B = \{ x \in U \mid p(x) \vee q(x) \}$$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων Α καὶ Β φαίνεται εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα. Εἶναι τὸ ἐσκιασμένον μέρος τοῦ σχήματος.



Σχ. 28.1

Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

1) $A \cup B = B \cup A$ (ἀντιμεταθετική)

Πράγματι, $A \cup B = \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \} = \{ x \in U \mid x \in B \vee x \in A \}$ (διότι $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$) $= B \cup A$

2) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ (προσεταιριστική)

Πράγματι,

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup \Gamma &= \{ x \in U \mid x \in (A \cup B) \vee x \in \Gamma \} \\ &= \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in B \vee x \in \Gamma \} \\ &= \{ x \in U \mid x \in A \vee x \in (B \cup \Gamma) \}, \text{ διότι } (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \\ &= A \cup (B \cup \Gamma)\end{aligned}$$

Λόγῳ τῆς ἰσχύος τῆς ἰδιότητος 2) συμφωνοῦμεν νὰ γράφωμεν :

$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$

Ἡ πρᾶξις $\cup$ ἐπεκτείνεται διὰ περισσότερα σύνολα :

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_\nu = \bigcup_{\kappa=1}^{\nu} A_\kappa = \{ x \in U \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \ldots \vee x \in A_\nu \}.$$

Β) Τομὴ συνόλων.

Ὡς τομὴ δύο συνόλων Α καὶ Β ὁρίζεται τὸ σύνολον τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β συγχρόνως, συμβολίζεται δὲ μὲ $A \cap B$.

Συμβολικῶς γράφομεν τὸν ὁρισμὸν ὡς ἑξῆς :

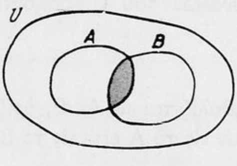
$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \}$

Ἂν τὰ σύνολα Α καὶ Β δίδονται διὰ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων των, π.χ.. ἂν εἶναι :

$A = \{ x \in U \mid p(x) \}$ καὶ $B = \{ x \in U \mid q(x) \}$,

τότε θὰ ἔχωμεν :

$A \cap B = \{ x \in U \mid p(x) \wedge q(x) \}$



Σχ. 28.2

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς τομῆς δύο συνόλων Α καὶ Β φαίνεται εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα. Εἶναι τὸ ἐσκιασμένον μέρος τοῦ σχήματος.

Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες :

1) $A \cap B = B \cap A$ (ἀντιμεταθετική)

Πράγματι :

$A \cap B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \}$
$= \{ x \in U \mid x \in B \wedge x \in A \}$, (διότι $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$)
$= B \cap A$

2) $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ (προσεταιριστική)

Πράγματι,

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{ x \in U \mid x \in (A \cap B) \wedge x \in \Gamma \}$
$= \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in \Gamma \}$
$= \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \in (B \cap \Gamma) \}$, διότι $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
$= A \cap (B \cap \Gamma)$

Λόγῳ τῆς ἰσχύος τῆς ἰδιότητος 2) συμφωνοῦμεν νὰ γράφωμεν :

$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$

Ἡ πρᾶξις $\cap$ ἐπεκτείνεται διὰ περισσότερα σύνολα :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_\nu = \bigcap_{\kappa=1}^{\nu} A_\kappa = \{ x \in U \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge x \in A_\nu \}$$

Τέλος ὑπενθυμίζομεν ὅτι, ἂν $A \cap B = \varnothing$, τότε τὰ σύνολα Α, Β λέγονται **ξένα** μεταξύ των. Κατὰ ταῦτα Ἐὰν $A \cap B \neq \varnothing$ τότε $[\exists x : x \in A \wedge x \in B]$ καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν $[\exists x : x \in A \wedge x \in B]$ τότε $A \cap B \neq \varnothing$ ἢ καὶ $A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow [\exists x : x \in A \wedge x \in B]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

83) Ἐὰν $A = \{1, 2, 3, 5\}$ καὶ $B = \{-1, 3, 7\}$ νὰ σχηματίσετε τὰ σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$

84) Ἂν $A = \{ x \in R \mid x > 0 \}$, $B = \{ x \in R \mid 0 < x < 8 \}$ καὶ $\Gamma = \{ x \in R \mid 2 < x < 6 \}$ νὰ συμβολίσετε μὲ χρῆσιν μεταβλητῆς τὰ σύνολα $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap \Gamma$, $A \cup \Gamma$ $B \cup \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma$, $A \cup B \cup \Gamma$.

85) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

α) $A \cup A = A$ β) $A \cup \varnothing = A$

86) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

α) $A \cap A = A$ β) $A \cap \varnothing = \varnothing$

87) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

α) $A \cap B \subseteq A$ β) $A \cap B \subseteq B$

88) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

α) $A \subseteq A \cup B$ β) $B \subseteq A \cup B$

89) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι $(A \cup B = \varnothing) \Rightarrow (A = \varnothing \wedge B = \varnothing)$

90) Ὁμοίως ὅτι, ἐὰν $A \subseteq B$, τότε : α) $B = A \cup B$ β) $A = A \cap B$

91) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι $(A \cap B) \cap \Gamma \subseteq A \cap (B \cap \Gamma)$ καὶ ἐπίσης ὅτι $A \cap (B \cap \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cap \Gamma$. Τί συνάγομεν ἐξ αὐτῶν ;

92) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha)\ A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \\ \beta)\ A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \end{array}\right\} \text{(ἐπιμεριστικαὶ ἰδιότητες)}$$

Νὰ δείξετε καὶ μὲ διάγραμμα τοῦ Venn ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀληθεύουν.

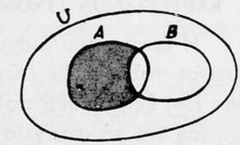
Γ) Διαφορὰ συνόλων.

Ὡς διαφορὰ συνόλου B ἀπὸ τὸ σύνολον A, συμβολιζομένη μὲ $A - B$, ὁρίζεται τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ A, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ B. Ἐὰν τὰ A καὶ B εἶναι ξένα, τότε δεχόμεθα ὅτι $A - B = A$. Τέλος, ἐὰν $A = B$, τότε $A - B = A - A = \varnothing$.

Συμβολικῶς ὁ ὁρισμὸς οὗτος γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$A - B = \{ x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς διαφορᾶς $A - B$ φαίνεται εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα. Εἶναι τὸ ἐσκιασμένον μέρος τοῦ σχήματος.



Σχ. 28.3

Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σχήματος βλέπομεν ἀμέσως ὅτι :

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

Δ) Συμπλήρωμα συνόλου.

Ὀνομάζομεν συμπλήρωμα τοῦ συνόλου A ὡς πρὸς τὸ U, καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ A^c εἴτε μὲ $\underset{U}{C}A$, τὸ σύνολον $U - A$, δηλ. τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ U, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ A.

Συμβολικῶς ὁ ὁρισμὸς οὗτος γράφεται :

$$A^c = \{ x \in U \mid x \notin A \}$$

Εἶναι φανερὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ὅτι :

1) $A \cap A^c = \varnothing$, 2) $A \cup A^c = U$ καὶ 3) $(A^c)^c = A$

Ἐπίσης ὅτι $\underset{U}{C}U = \varnothing$ καὶ $\underset{U}{C}\varnothing = U$

Τέλος ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ἔχομεν ὅτι :

$A - B = A \cap B^c$

Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες, αἱ ὁποῖαι λέγονται νόμοι τοῦ De Morgan :

1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Ἀποδεικνύομεν ἐδῶ τὴν ἰσότητα 2) :

Διὰ κάθε $x \in U$, $x \in (A \cup B)^c \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow \sim(x \in A \vee x \in B)^{(*)} \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A^c \wedge x \in B^c \Rightarrow x \in (A^c \cap B^c)$.

Ὥστε : $(A \cup B)^c \subseteq (A^c \cap B^c)$ (α)

Ἀντιστρόφως :

Διὰ κάθε $x \in U$, $x \in (A^c \cap B^c) \Rightarrow (x \in A^c \wedge x \in B^c) \Rightarrow \sim(x \in A \vee x \in B) \Rightarrow (x \notin A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)^c$

Ὥστε εἶναι $(A^c \cap B^c) \subseteq (A \cup B)^c$ (β)

Ἐκ τῶν (α) καὶ (β) ἕπεται ἡ ἀνωτέρω ἰσότης (2).

Μὲ ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ (1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

93) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

$$(A = B^c) \Leftrightarrow (A^c = B)$$

94) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὰ σύνολα A καὶ $B - A$ εἶναι ξένα μεταξύ των.

95) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι $A - \varnothing = A$

96) Νὰ ἀποδείξετε καὶ μὲ συλλογισμὸν ὅτι

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

(Θὰ ἀντικαταστήσετε τὸ $A - B$ μὲ τὸ ἴσον του $A \cap B^c$ καὶ θὰ ἐφαρμόσετε τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τῆς ἑνώσεως ὡς πρὸς τὴν τομήν).

97) Νὰ ἁπλοποιήσετε τὰς κάτωθι παραστάσεις :

α) $B \cap (A \cup A^c)$ β) $A \cup (\Gamma \cup \Gamma^c)$

γ) $(B \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c)$ δ) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

29. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ Α ΕΠΙ ΣΥΝΟΛΟΝ Β.

Ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὰς προηγουμένας τάξεις : Ἓν ζεῦγος στοιχείων λέγεται διατεταγμένον ζεῦγος, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἔχῃ ὁρισθῇ ποῖον στοιχεῖον εἶναι πρῶτον καὶ ποῖον δεύτερον. Οὕτω, π.χ., ἐὰν διὰ τὰ στοιχεῖα α, β ὁρίσωμεν ὡς πρῶτον τὸ α καὶ ὡς δεύτερον τὸ β ἔχομεν καθορίσει τὴν διάταξιν εἰς τὸ ζεῦγος, τοῦτο δὲ συμβολίζομεν διὰ τοῦ (α,β), ἐνῷ ἂν ὁρίσωμεν ὡς πρῶτον τὸ β καὶ ὡς δεύτερον τὸ α θὰ γράψωμεν (β, α).

Εἰς ἓν διατεταγμένον ζεῦγος (α, β) τὸ α λέγεται : **τὸ πρῶτον μέλος** τοῦ ζεύγους καὶ τὸ β : **τὸ δεύτερον μέλος** τοῦ ζεύγους.

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ διατεταγμένου ζεύγους ἕπεται ὅτι $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$ Εἶναι ὅμως δυνατὸν νὰ ἔχωμεν ζεῦγος μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον καὶ δεύτερον μέλος, ὅπως, π.χ., τὰ (α, α), (β, β), (γ,γ). κ.τ.λ.

Δύο διατεταγμένα ζεύγη (α, β) καὶ (α′, β′) ὁρίζονται ὡς ἴσα, ἐὰν μόνον ἐάν, εἶναι $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta' = \beta'$.

(*) Διότι : $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Ἐὰν Α καὶ Β εἶναι δύο μὴ κενὰ σύνολα, τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β) μὲ α∈Α καὶ β∈Β, λέγεται : καρτεσιανὸν γινόμενον τοῦ συνόλου Α ἐπὶ τὸ σύνολον Β καὶ συμβολίζεται μὲ Α × Β.

Συμβολικῶς ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς γράφεται :

$$A \times B = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \wedge \beta \in B \}$$

Ἂν $A = \varnothing$ ἢ $B = \varnothing$, τότε $A \times B = \varnothing$ ἐξ ὁρισμοῦ. Εἶναι δηλ. $A \times \varnothing = \varnothing$ καὶ $\varnothing \times B = \varnothing$

Ἐὰν $A = B$, τότε $A \times A = A^2 = \{ (\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \wedge \beta \in A \}$

Παραδείγματα : 1ον) Ἐὰν $A = \{ 1, 2 \}$ καὶ $B = \{ \alpha, \beta \}$, τότε

$A \times B = \{ (1,\alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta) \}$ ἐνῷ

$B \times A = \{ (\alpha, 1)\ (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2) \}$. Ὥστε: $A \times B \neq B \times A$

2) Ἐὰν $A = N = \{ 1, 2, 3, \dots \}$, τότε

$$N \times N = N^2 = \left\{ \begin{array}{llll} (1, 1), & (1, 2), & (1, 3), & \dots \\ (2, 1), & (2, 2), & (2, 3), & \dots \\ (3, 1), & (3, 2), & (3, 3), & \dots \\ . & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots \\ . & . & . & \dots \end{array} \right\}$$

Ὑπενθυμίζομεν τὰ κάτωθι :

1) Ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης δὲν ἰσχύει εἰς τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον δύο συνόλων. Δηλ. εἶναι $A \times B \neq B \times A$ ἐκτὸς ἐὰν εἶναι $A = B$ ἢ ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

2) Ἐὰν τὸ σύνολον Α ἔχῃ μ τὸ πλῆθος στοιχεῖα καὶ τὸ Β ἔχῃ ν στοιχεῖα, τότε τὸ $A \times B$ ἔχει $\mu \cdot \nu$ τὸ πλῆθος στοιχεῖα. Ἐὰν τὸ Α ἢ τὸ Β ἔχῃ ἄπειρον πλῆθος στοιχείων, τότε τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $A \times B$ ἔχει ἐπίσης ἄπειρον πλῆθος στοιχείων.

3) Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν ἓν καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ πίνακα διπλῆς εἰσόδου, ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν γ΄ τάξιν.

5) Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέλη ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους ὡς συντεταγμένας σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο ἀξόνων $x'0x$, $\psi'0\psi$, τότε κάθε διατεταγμένον ζεῦγος παριστάνει ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἑπομένως ἓν καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ δύο παράγοντας, π.χ. τὸ $A \times B$, θὰ παριστάνῃ τότε ἓν σύνολον σημείων εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἔχομεν τότε τὴν λεγομένην **γεωμετρικὴν (ἢ γραφικὴν) παράστασιν** τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

98) Ἐὰν τὰ διατεταγμένα ζεύγη $(x + \psi, 1)$ καὶ $(5, x - \psi)$ εἶναι ἴσα, νὰ εὕρετε τὰ x καὶ ψ.

99) Ἐὰν $A = \{ 1, 2, 3 \}$ καὶ $B = \{ 0, 1, -2 \}$, νὰ σχηματίσετε τὸ $A \times B$. Ἔπειτα νὰ κάμετε γεωμετρικὴν παράστασιν αὐτοῦ.

100) Νὰ ἀποδείξετε ὅτι :

α) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

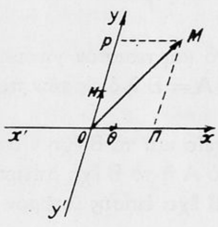
β) Ἂν $A \subseteq B$, τότε $A \times A \subseteq B \times B$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

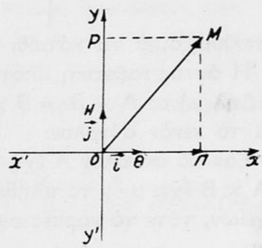
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

30. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΟΓΩΝΙΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ.

Α) Εἰς ἕν ἐπίπεδον (Ε) χαράσσομεν δύο τεμνομένους ἄξονας x΄Οx καὶ ψ΄Οψ, ἔχοντας κοινὴν ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς των καὶ μοναδιαῖα διανύσματα $\overrightarrow{O\Theta} = \vec{i}$ καὶ $\overrightarrow{OH} = \vec{j}$ ἀντιστοίχως (σχ. 30 - 1 καὶ 30, – 2).



Σχ. 30.1



Σχ. 30.2

Οἱ δύο αὐτοὶ ἄξονες ἀποτελοῦν ἕν **σύστημα ἀξόνων** ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ε).

Ἔστω τώρα τυχὸν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Ε). Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς παραλλήλους τῶν ἀξόνων. Ὁρίζονται οὕτως ἕν σημεῖον Π ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄Οx καὶ ἕν σημεῖον Ρ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ψ΄Οψ. Ὁρίζονται ἐπίσης τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OM}$' $\overrightarrow{O\Pi}$, $\overrightarrow{OP}$.

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** τοῦ σημείου Μ.

» » $\overrightarrow{O\Pi}$ » **τετμημένη προβολὴ** τοῦ $\overrightarrow{OM}$.

» » $\overrightarrow{OP}$ » **τεταγμένη προβολὴ** τοῦ $\overrightarrow{OM}$.

Ἡ ἀλγεβρ. τιμὴ $\overline{O\Pi}$, τοῦ $\overrightarrow{O\Pi}$, λέγεται **τετμημένη** τοῦ σημείου Μ.

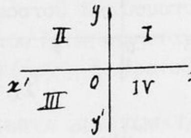
» » » $\overline{OP}$, » $\overrightarrow{OP}$, λέγεται **τεταγμένη** τοῦ σημείου Μ.

Ἡ τετμημένη ἑνὸς σημείου Μ συμβολίζεται μὲ x_M καὶ ἡ τεταγμένη του μὲ ψ_M ὀνομάζονται δὲ ἀμφότεραι **συντεταγμέναι** τοῦ σημείου Μ.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι : 1) μὲ τὸν τρόπον, τὸν ὁποῖον εἴδομεν προηγουμένως, εἰς κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕν, καὶ μόνον ἕν, διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πρῶτον μέλος του τὴν τετμημένην x_M, τοῦ Μ, καὶ δεύτερον μέλος του τὴν τεταγμένην ψ_M, τοῦ Μ, δηλαδὴ τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (x_M, ψ_M). 2) Ἀντιστρόφως εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν (x, ψ) ἀντιστοιχεῖ ἕν καὶ μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ $M(x, \psi)$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῶν $x'x$ καὶ $\psi'\psi$ διανύσματα $\overrightarrow{O\Pi}$ καὶ $\overrightarrow{OP}$ τοιαῦτα, ὥστε $\overline{O\Pi} = x$ καὶ $\overline{OP} = \psi$ καὶ φέρωμεν ἐκ τοῦ Π παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα ψψ καὶ ἐκ τοῦ Ρ παράλληλον πρὸς τὸν $x'x$. Ἡ τομὴ τῶν δύο τούτων εὐθειῶν ὁρίζει τὸ Μ.

Ὑπάρχει λοιπὸν ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ συνόλου $R \times R$ καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Ε).

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἕν σημεῖον Μ ἔχει τετμημένην x καὶ τεταγμένην ψ γράφομεν $M = (x, \psi)$ ἢ $M(x, \psi)$.



Σχ. 30.3

Οἱ δύο ἄξονες σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας, αἱ ὁποῖαι λέγονται **πρώτη, δευτέρα, τρίτη** καὶ **τετάρτη γωνία τῶν ἀξόνων,** ὅπως σημειώνονται κατὰ σειρὰν I, II, III, IV εἰς τὸ σχ. 30 – 3.

Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας I ἔχει συντεταγμένας θετικάς.

Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας III ἔχει συντεταγμένας ἀρνητικάς.

Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας II ἔχει τετμημένην ἀρνητικὴν καὶ τεταγμένην θετικήν. Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας IV ἔχει τετμημένην θετικὴν καὶ τεταγμένην ἀρνητικήν.

Ὁ ἄξων $x'Ox$ λέγεται **ἄξων τῶν x** ἢ **ἄξων τῶν τετμημένων** καὶ ὁ $\psi'O\psi$ λέγεται **ἄξων τῶν ψ** ἢ **ἄξων τῶν τεταγμένων**. Ἡ τομὴ τῶν ἀξόνων Ο λέγεται **ἀρχὴ** τῶν ἀξόνων. Ἡ ἀρχὴ Ο ἔχει ἀμφοτέρας τὰς συντεταγμένας μηδέν, δηλ. $O(0,0)$.

Οἱ ἄξονες λέγονται **ὀρθογώνιοι ἄξονες** συντεταγμένων, ὅταν εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ἄλλως λέγονται **πλαγιογώνιοι** (σχ. 30 - 1).

Ὅταν οἱ ἄξονες εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ἐπὶ πλέον τὰ μοναδιαῖα διανύσματα $\overrightarrow{O\Theta}$ καὶ $\overrightarrow{OH}$ ἔχουν ἴσα μήκη, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἕν **ὀρθοκανονικὸν** σύστημα ἀξόνων.

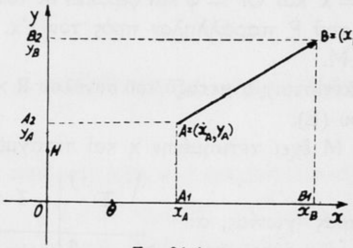
Οὕτω διὰ τῶν συντεταγμένων καθορίζεται ἡ θέσις ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον.

31. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΕΩΣ ΕΦΑΡ. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

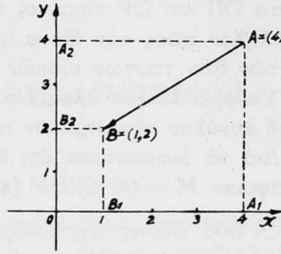
Ἔστω (σχ. 31 - 1) προσανατολισμένον ἐπίπεδον (Ε) ἐφωδιασμένον μὲ τὸ σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων $xO\psi$ καὶ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐπάνω εἰς τὸ (Ε). Φέρομεν ἀπὸ τὰ Α, Β τὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας. Ὁρίζομεν οὕτω τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα $x'Ox$ καὶ $\overrightarrow{A_2B_2}$ ἐπάνω εἰς τὸν ἄξονα $\psi'O\psi$. Τὸ $\overrightarrow{A_1B_1}$ ὀνομάζεται : **τετμημένη προβολὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$, τὸ δὲ $\overrightarrow{A_2B_2}$. **τεταγμένη προβολὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

Ἂν ὁ φορεύς, τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὄχι μηδενικόν) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Οψ, τότε ἡ τετμημένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_1}$ (Σχ. 31 - 3).

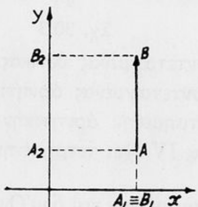
Ἂν ὁ φορεὺς τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Οx, τότε ἡ τεταγμένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A_2A_2}$ (Σχ. 31 - 4).



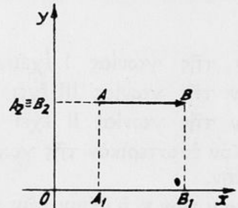
Σχ. 31.1



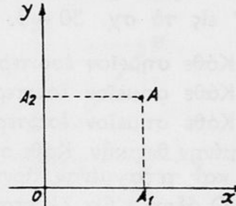
Σχ. 31.2



Σχ. 31.3



Σχ. 31.4



Σχ. 31.5

Ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μηδενικὸν διάνυσμα, π.χ. τὸ $\overrightarrow{AA}$, τότε καὶ αἱ δύο προβολαί του εἶναι μηδενικὰ διανύσματα (Σχ. 31 - 5).

Ἔστω τώρα ὅτι εἶναι : $A = (x_A, \psi_A)$, δηλ. ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Α εἶναι x_A καὶ ἡ τεταγμένη του εἶναι ψ_A. Ἔστω ἐπίσης ὅτι εἶναι $B = (x_B, \psi_B)$. Ὁ ἀριθμὸς $x_B - x_A$ (τετμημένη τοῦ πέρατος μεῖον τετμημένη τῆς ἀρχῆς τοῦ $\overrightarrow{AB}$) ὀνομάζεται : **ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$** καὶ συγχρόνως : **ἡ ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος** x΄Οx, καὶ συμβολίζεται μὲ $\overline{A_1B_1}$ (Σχ. 31 - 1).

Ὁ ἀριθμὸς $\psi_B - \psi_A$ (τεταγμένη τοῦ πέρατος μεῖον τεταγμένη τῆς ἀρχῆς τοῦ διανύσματος) ὀνομάζεται : **ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$** καὶ συγχρόνως : **ἡ ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος** y΄Οy, συμβολίζεται δὲ μὲ $\overline{A_2B_2}$.

Οὕτως εἰς τὸ Σχ. 31 - 2 ἡ τετμημένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A_1B_1}$. Ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $1 - 4 = -3 =$ ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἐπὶ τοῦ x΄Οx. Ἡ τεταγμένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A_2B_2}$. Ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι

$2-4=-2=$ ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ ἐπὶ τοῦ ψ'Ο ψ.

Ἐπίσης ἡ τετμημένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι τὸ B_1A_1, ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι $4-1=3=$ ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{B_1A_1}$ ἐπὶ τοῦ x'Ox.

Ἡ τεταγμένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι τὸ B_2A_2, ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι $4-2=2=$ ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{B_2A_2}$ ἐπὶ τοῦ ψ'Οψ.

Ἐπίσης εἶναι (Σχ. 31 - 2):

ἡ τετμημένη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AA}$ τὸ A_1A_1, ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AA}$: $4-4=0$

ἡ τεταγμένη προβολή τοῦ $\overrightarrow{AA}$ τὸ $\overrightarrow{A_2A_2}$, ἡ τεταγμένη $\overrightarrow{AA}$: $4-4=0$

Ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη ἑνὸς διανύσματος λέγονται **συντεταγμέναι** τοῦ διανύσματος. Διὰ νὰ συμβολίσωμεν ὅτι ἓν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β γράφομεν $\overrightarrow{AB}$ (α, β) ἢ $\overrightarrow{AB}=$ (α, β).

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ θέσις ἑνὸς ἐφαρμοστοῦ διανύσματος καθορίζεται, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς συντεταγμένας τῶν ἄκρων του ἢ τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος καὶ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς ἄκρου του (ἀρχῆς ἢ πέρατος).

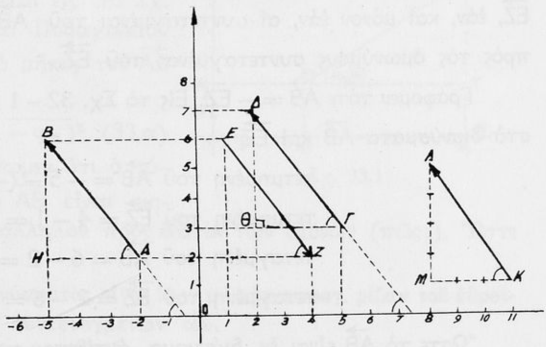
32. ΙΣΑ (Ἢ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ) ΕΦΑΡΜΟΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ.

Α) Ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **ἴσον** ἢ **ἰσοδύναμον** πρὸς ἄλλο $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, αἱ συντεταγμέναι **τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως** πρὸς τὰς ὁμωνύμους των συντεταγμένας **τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$**.

Γράφομεν τότε συμβολικῶς : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Οὕτω, π.χ., εἰς τὸ Σχ. 32 - 1 ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $-5-(-2)=-3$ ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $6-2=4$ ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=2-5=-3$ ἡ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=7-3=4$

Ὥστε, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, εἶναι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 32.1

Γενικῶς, ἐὰν $\overrightarrow{AB}$ (α, β) καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (α', β'), διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν συμβολικῶς (α, β) = (α', β'). Δι' αὐτοῦ ἐννοοῦμεν ὅτι α = α' καὶ β = β'

Ἡ ὁρισθεῖσα ἐδῶ ἔννοια ἰσότητος ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων ἔχει τὰς γνωστὰς ἰδιότητας :

α) Ἀνακλαστικήν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

β) Συμμετρικήν : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$

γ) Τὴν μεταβατικήν: $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{K\Lambda}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{K\Lambda}$

Παρατηρήσεις : 1) Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν ἔχωμεν ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, π.χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$, ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα, καθὲν ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$. Εἶναι τὰ διανύσματα τὰ ἔχοντα τὰς συντεταγμένας των ἴσας πρὸς τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

2) Λόγῳ τῆς ἀνωτέρω 2ας ἰδιότητος τῆς ἐννοίας τῆς ἰσότητος ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν ὅτι : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα μεταξύ των.

3) Ἂν $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα (μεταξύ των) καὶ ὄχι μηδενικά, τότε ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν (οἱ φορεῖς των εἶναι παράλληλοι) καὶ τὴν ἰδίαν φορὰν (εἶναι ὁμόρροπα). (Διότι τριγ. ΑΒΗ = τριγ. ΓΔΘ καὶ $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{\Gamma\Theta}$ παράλληλα καὶ ὁμόρροπα ὅπως ἐπίσης καὶ τὰ $\overrightarrow{HB}$ καὶ $\overrightarrow{\Theta\Delta}$ κ.τ.λ.).

4) Κάθε μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα εἶναι ἴσον πρὸς κάθε ἄλλο μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα (διατί ;).

Β). Ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 32- 1) λέγεται **«ἀντίθετον»** ἄλλου $\overrightarrow{EZ}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, αἱ συντεταγμέναι τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας τοῦ $\overrightarrow{EZ}$.

Γράφομεν τότε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EZ}$. Εἰς τὸ Σχ. 32 – 1 ἔχομεν, π.χ., διὰ τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{EZ}$:

τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = -5-(-2) = -3$

τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{EZ} = 4-1 = 3$,

τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = 6-2 = 4$

τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{EZ} = 2-6 = -4$.

Ὥστε τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἓν διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{EZ}$, δηλ. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EZ}$. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι κάθε διάνυσμα ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίθετον πρὸς τὸ $\overrightarrow{EZ}$ καὶ πρὸς κάθε ἴσον του. Προφανῶς ἀντίθετον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι καὶ τὸ $\overrightarrow{BA}$, δηλ. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Παρατηρήσεις : 1) Ἂν εἶναι $\overrightarrow{AB}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε θὰ εἶναι καὶ τὸ

$\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (ἰδιατί ;). Διὰ τοῦτο ἐπιτρέπεται νὰ λέγωμεν: τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα (μεταξύ των).

2) Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα (μεταξύ των), τότε ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν (οἱ φορεῖς των εἶναι παράλληλοι) καὶ ἀντιθέτους φοράς.

3) Κάθε μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα εἶναι ἀντίθετον πρὸς κάθε ἄλλο μηδενικὸν διάνυσμα (διατί ;)

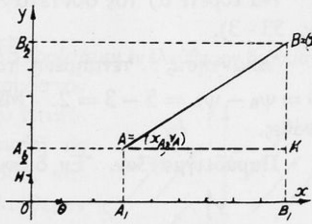
33. ΜΗΚΟΣ ΕΦΑΡΜΟΣΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

Ἔστω τυχὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$. Ὀνομάζεται **μῆκος** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἴτε **ἀπόλυτος τιμὴ** τοῦ $\overrightarrow{AB}$, καὶ συμβολίζεται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$, τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μὲ ἄκρα, τὰ Α,Β. Οὕτω, π.χ., διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ ἔχομεν : μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AA} = |\overrightarrow{AA}| =$ μῆκος τοῦ εὐθυγρ. τμήματος $AA = 0$. Γενικῶς : τὸ μῆκος κάθε μὴ μηδενικοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἕνας ἀπόλυτος πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἂς λάβωμεν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων xOψ (Σχ. 33 - 1) καὶ μοναδιαῖα διανύσματα τὰ $\overrightarrow{O\Theta} \equiv \vec{i}$, $\overrightarrow{OH} \equiv \vec{j}$ μὲ $|\overrightarrow{O\Theta}| = |\overrightarrow{OH}|$. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι εἶναι : $A = (x_A, \psi_A)$, $B = (x_B, \psi_B)$ καὶ ὅτι α) τὸ $\overrightarrow{AB}$ δὲν εἶναι μηδενικὸν καὶ β) τὸ $\overrightarrow{AB}$ δὲν εἶναι παράλληλον πρὸς ἕνα ἐκ τῶν ἀξόνων.

Τότε ὁρίζεται ἓν τρίγωνον ΑΚΒ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Κ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ Σχ. 33 - 1, μὲ ἐφαρμογὴν δὲ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος εὑρίσκομεν ὅτι τὸ μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (\psi_B - \psi_A)^2} \quad (33,\alpha)$$



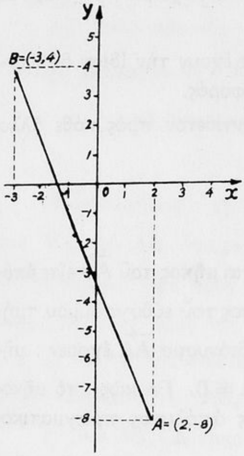
Σχ. 33.1

Εἶναι εὔκολον νὰ ἐξηγήσωμεν ὅτι ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει καὶ ὅταν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι μηδενικὸν διάνυσμα ἢ εἶναι παράλληλον πρὸς ἕνα ἐκ τῶν ἀξόνων (πῶς;). Ὥστε ἰσχύει γενικῶς ὅτι :

Τὸ μῆκος ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν τετραγ. ρίζαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν συντεταγμένων του.

Ἑπομένως : Ἂν δύο τυχόντα ἐφαρμοστὰ διανύσματα εἶναι ἴσα μεταξύ των, τότε θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος (διατί ;). Ἄρα **κάθε δύο ὄχι μηδενικὰ ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος, τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν** καὶ **καὶ τὴν αὐτὴν φοράν.** Ἐπίσης τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἔχουν καὶ κάθε δύο ὄχι μηδενικὰ ἀντίθετα μεταξύ των ἐφαρμοστὰ διανύσματα.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου (μαζὺ καὶ μὲ τὰ μηδενικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα αὐτοῦ) θὰ τὸ συμβολίζωμεν, ὅπου εἰς τὰ ἑπόμενα μᾶς χρειασθῆ, μὲ $\mathcal{D}$.



Σχ. 33.2

Παράδειγμα 1ον. Εἰς ἓν ἐπίπεδον (Ε) (Σχ. 33 - 2) ἐφωδιασμένον μὲ ἄξονας συντεταγμένων χOψ, δίδονται τὰ σημεῖα Α (2, − 8) καὶ Β (− 3,4). **Νὰ** εὕρετε α) τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. β) τὰς συντεταγμένας ἑνὸς διανύσματος ἀντιθέτου τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ γ) τὸ μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (δηλ. τὴν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β).

Ἀπάντησις: α) τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = x_B - x_A = -3 - 2 = -5$ τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = \psi_B - \psi_A = 4 - (-8) = 4 + 8 = 12$.

β) Ἓν διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ θὰ ἔχῃ συντεταγμένας ἀντιθέτους τῶν συντεταγμένων τοῦ $\overrightarrow{AB}$, δηλ. θὰ ἔχῃ τετμημένην : 5 καὶ τεταγμένην −12.

γ) Συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (33, α) εἶναι

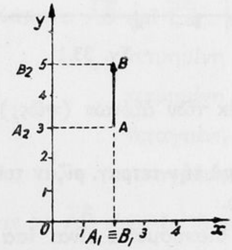
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ μονάδες.}$$

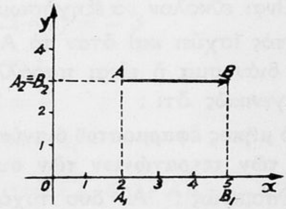
Παράδειγμα 2ον. Εἰς ἓν ἐπίπεδον ἐφωδιασμένον μὲ ἄξονας συντεταγμένων χOψ δίδονται τὰ σημεῖα Α (2, 3), Β (2, 5).

Νὰ εὕρετε α) τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ β) τὸ μῆκος του (Σχ. 33 - 3).

Ἀπάντησις : τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = x_B - x_A = 2 - 2 = 0$, τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = \psi_B - \psi_A = 5 - 3 = 2$. Μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$ μονάδες.

Παράδειγμα 3ον. Ἓν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 0,


Σχ. 33.3


Σχ. 33.4

ἀρχὴν δὲ τὸ σημεῖον Α (2, 3). Νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ πέρατός του Β (Σχ. 33 − 4).

Ἀπάντησις : Ἔστω $B = (x_B, \psi_B)$. τότε : $x_B - 2 = 3 \Leftrightarrow x_B = 3 + 2 = 5$ καὶ $\psi_B - 3 = 0 \Leftrightarrow \psi_B = 3$. Ἄρα Β = (5,3).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

101) Νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ μῆκος του, ἐὰν εἰς ἕν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι $A = (-2, -3)$ καὶ $B = (2, 1)$.

102) Νὰ δείξετε ὅτι τὸ τρίγωνον, ποὺ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα $A = (-2, 8)$, $B = (-1, 1)$ καὶ $\Gamma = (3, 3)$ εἶναι ἰσοσκελές. (Νὰ συγκρίνετε τὰ μήκη τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$).

103) Εἰς ἕνα ἐπίπεδον ἐφωδιασμένον μὲ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων τρία σημεῖα, Α, Β, Γ ἔχουν ἀντιστοίχως συντεταγμένας (3, 1), (3, 5), (– 1, 1). Νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου Δ τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. (Λύσις : θὰ πρέπει νὰ ἔχωμεν : $x_B - x_A = x_\Delta - x_\Gamma$ καὶ $\psi_B - \psi_A = \psi_\Delta - \psi_\Gamma$ καὶ νὰ λύσωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις μὲ ἀγνώστους τὸ x_Δ καὶ ψ_Δ.).

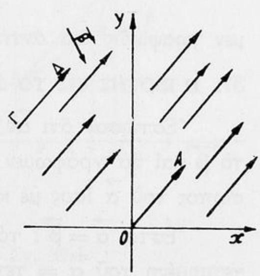
104) Ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4, πέρας δὲ τὸ σημεῖον Β (4, 2). Νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῆς ἀρχῆς του Α καὶ τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος.

34. ΤΟ ΕΛΕΥΘΕΡΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

Ἔστω ἓν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ $\mathcal{D}$, δηλ. ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. (Τὸ $\overrightarrow{AB}$ δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἓν μηδενικὸν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα). Γνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα διανύσματα ἴσα (ἰσοδύναμα) πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἴσων πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ὀνομάζεται : **«ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα»** τοῦ ἐπιπέδου καὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$ (καθὼς καὶ κάθε ἴσον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathcal{D}$) ὀνομάζεται : **εἷς ἀντιπρόσωπος** τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος.

Ὅπως ἀπὸ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὡρίσαμεν ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα, οὕτως ἠμποροῦμεν νὰ ὁρίσωμεν ἀπὸ κάθε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ $\mathcal{D}$ ἀνὰ ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Ἂν γίνῃ τοῦτο, τότε τὸ $\mathcal{D}$ θὰ ἔχῃ διαμερισθῆ εἰς κλάσεις (ὑποσύνολα) ξένας μεταξύ των ἀνὰ δύο, καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) **ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα.**



Σχ. 34.1

Ἓν οἱονδήποτε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathcal{D}$ εἶναι εἷς ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλευθέρου διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου. Συνήθως ὡς ἀντιπρόσωπον ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος τοῦ ἐπιπέδου xOψ (Σχ. 34 - 1) λαμβάνομεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ $\mathcal{D}$, ποὺ ἔχει ὡς ἀρχήν του τὸ O.

Ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι καὶ τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα, δηλ. τὸ σύνολον ὅλων τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου. Τοῦτο θὰ τὸ συμβολίζομεν μὲ $\overrightarrow{O}$.

Κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα θὰ συμβολίζεται δι' ἑνὸς τυχόντος ἀντιπροσώπου του εἴτε διὰ τοῦ ἀντιπροσώπου του μὲ ἀρχὴν τὸ O εἴτε μὲ ἓν μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μαζὶ μὲ ἓν μικρὸν βέλος ὑπεράνω. Οὕτω δυνάμεθα νὰ ὁμιλῶμεν διὰ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ ἢ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, διὰ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\beta}$ κ.τ.λ. (Σχ. 34 - 1).

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\mathcal{D}_0$.

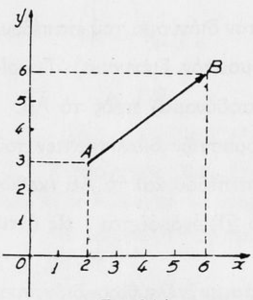
35. ΜΗΚΟΣ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.

Μῆκος ἑνὸς διανύσματος ἀπὸ $\mathcal{D}_0$, δηλ. ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος, ἔστω $\vec{\alpha}$, λέγεται τὸ μῆκος ἑνὸς ἀντιπροσώπου του καὶ συμβολίζεται μὲ $|\vec{\alpha}|$.

Οὕτω, διὰ τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{O}$, ἔχομεν :

$|\vec{O}| = |\overrightarrow{OO}| = 0$

36. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.



Σχ. 36.1

Ἔστω $\vec{\alpha}\in\mathcal{D}_0$. Ὀνομάζεται : τετμημένη τοῦ $\vec{\alpha}$ ἡ τετμημένη ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀντιπροσώπου του καὶ τεταγμένη τοῦ $\vec{\alpha}$ ἡ τεταγμένη τοῦ αὐτοῦ ἢ οἱουδήποτε ἄλλου ἀντιπροσώπου του.

Οὕτω, π.χ., διὰ τὸ $\vec{O}$ εἶναι : τετμημένη του τὸ 0 καὶ τεταγμένη του τὸ 0. Ἐπίσης διὰ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$, ποὺ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 36 - 1), εἶναι: τετμημένη του ὁ 4 καὶ τεταγμένη του ὁ 3. Συμβολικῶς γράφομεν $\vec{\alpha}$ (4,3) Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δοθοῦν αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος ἠμποροῦμεν, νὰ ὁρίσωμεν γραφικῶς ἕνα ἀντιπρόσωπόν του εἰς τὸ ἐπίπεδον xOψ (πῶς ;).

37. Η ΙΣΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ $\mathcal{D}$o.

Ἔστωσαν ὅτι $\vec{\alpha}\in\mathcal{D}_0$ καὶ $\vec{\beta}\in\mathcal{D}$o. Θὰ λέγωμεν ὅτι : τὸ $\vec{\alpha}$ εἶναι **ἴσον** πρὸς τὸ $\vec{\beta}$ καὶ θὰ γράφωμεν : $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχῃ κάποιος ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$ ἴσος μὲ κάποιον ἀντιπρόσωπον τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἔστω $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$: τότε (καὶ μόνον τότε) εἶναι :

τετμημένη τοῦ $\vec{\alpha}$ = τετμημένη τοῦ $\vec{\beta}$ καὶ τεταγμένη τοῦ $\vec{\alpha}$= τεταγμένη τοῦ $\vec{\beta}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι καὶ διὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ἐδῶ ἔννοιαν ἰσότητος ἰσχύουν αἱ τρεῖς γνωσταὶ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος διανυσμάτων. δηλ. ἡ ἀνακλαστική, ἡ συμμετρικὴ καὶ ἡ μεταβατική.

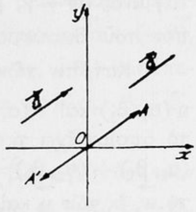
38. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΙΣ ΤΟ $\mathcal{D}$o.

Ἔστω $\vec{\alpha}\in\mathcal{D}_0$ καὶ $\overrightarrow{OA}$ ἀντιπρόσωπός του (Σχ. 38 – 1). Ἔστω $\overrightarrow{OA'}$ ἓν ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{OA}$ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα. Τὸ $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ εἶναι ἀντιπρόσωπος ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος, ἔστω $\vec{\alpha}'$. Αὐτὸ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}'$ λέγεται ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$ καὶ συμβολίζεται μὲ $-\vec{\alpha}$.

Εἶναι φανερὸν ἀπὸ τοὺς ὁρισμούς, ποὺ ἐδώσαμεν, ὅτι :

1) Διὰ κάθε $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ ὑπάρχει ἓν μόνον ἀντίθετόν του διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}_0$.

2) ἂν $\vec{\alpha}'$ εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$, τότε καὶ τὸ $\vec{\alpha}$ εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}'$ καὶ 3) αἱ συντεταγμέναι τοῦ $\vec{\alpha}'$ εἶναι ἀντίθετοι τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τοῦ $\vec{\alpha}$.



Σχ. 38.1

39. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ $\mathscr{D}_0$, ΤΩΝ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ.

Α). Ἂς λάβωμεν τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$, τὰ ὁποῖα βλέπετε εἰς τὸ σχ. 39 - 1. Ὅπως γνωρίζομεν, ἀπὸ ὅσα ἐμάθομεν εἰς τὴν γ' τάξιν, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφαρμοστῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$. Συμβολικῶς γράφομεν $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀθροίσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν προσθετέων διανυσμάτων. Πράγματι εἶναι :

τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = 3$,

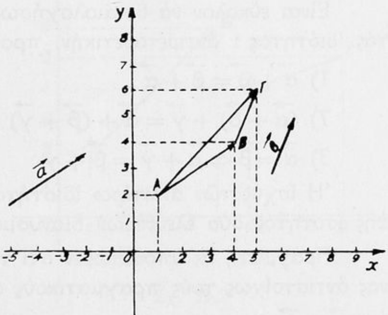
τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = 2$.

τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma} = 1$,

τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma} = 2$

τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma} = 4 = 3 + 1$,

τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma} = 4 = 2 + 2$



Σχ. 39.1

Β) **Ἔστωσαν τώρα** $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ καὶ $\vec{\beta} \in \mathscr{D}_0$ καὶ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ (Σχ. 39 – 1) ἀντιστοίχως ἀντιπρόσωποί των, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικὰ διανύσματα. Ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$, δηλ. τὸ $\overrightarrow{A\Gamma}$. Αὐτό, τὸ $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλευθέρου διανύσματος, ἔστω $\vec{\gamma}$. Τὸ $\vec{\gamma}$ ὀνομάζεται **ἄθροισμα $\vec{\alpha}$ σὺν $\vec{\beta}$** καὶ συμβολίζεται μὲ $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, δηλ. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$. Εἶναι προφανὲς ὅτι τὸ $\vec{\gamma}$ ἔχει ὡς τετμημένην τὸ ἄθροισμα τῆς τετμημένης τοῦ $\vec{\alpha}$ σὺν τὴν τετμημένην τοῦ $\vec{\beta}$ καὶ τεταγμένην τὸ ἄθροισμα τῆς τεταγμένης τοῦ $\vec{\alpha}$ σὺν τὴν τεταγμένην τοῦ $\vec{\beta}$.

Οὕτω, π.χ., ἐὰν $\vec{u}(\alpha, \beta)$ καὶ $\vec{v}(\gamma, \delta)$, τότε τὸ $(\vec{u}+\vec{v})$ θὰ ἔχῃ συντεταγμένας $(\alpha+\gamma,\ \beta+\delta)$ καὶ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ἀντιπρόσωπον τοῦ διανύσματος $(\vec{u}+\vec{v})$, ἀφοῦ γνωρίζομεν τὰς συντεταγμένας του.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω **ὁρίζομεν** ὡς ἄθροισμα δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{u}(\alpha_1, \beta_1)$ καὶ $\vec{v}(\alpha_2, \beta_2)$ καὶ τὸ συμβολίζομεν μὲ $\vec{u}+\vec{v}$, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{w}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\alpha_1+\alpha_2$ καὶ τεταγμένην $\beta_1+\beta_2$. Συνήθως γράφομεν $(\alpha_1, \beta_1)+(\alpha_2, \beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2)$. Ἡ πρᾶξις μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ $\vec{w}$, ἐκ τῶν $\vec{u}$ καὶ $\vec{v}$, λέγεται **πρόσθεσις** ἢ σύνθεσις μέσα εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}_0$.

Ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν προσθετέων διανυσμάτων εἶναι τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα, τότε θὰ ἔχωμεν $\vec{u}+\vec{O}=\vec{u}$, διότι τὸ $\vec{O}$ ἔχει τετμημένην 0 καὶ τεταγμένην 0 καὶ ἑπομένως εἶναι $(\alpha_1, \beta_1)+(0, 0)=(\alpha_1+0,\ \beta_1+0)=(\alpha_1, \beta_1)$

Δηλαδὴ τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα εἶναι τὸ **οὐδέτερον** στοιχεῖον εἰς τὴν πρόσθεσιν ἐν $\mathscr{D}_0$.

Ἂν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εἶναι τρία ἐλεύθερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου (Ε), τότε ὁρίζομεν ὡς ἄθροισμα $\vec{\alpha}$ σὺν $\vec{\beta}$ σὺν $\vec{\gamma}$, καὶ τὸ συμβολίζομεν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, τὸ ἄθροισμα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$.

Ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα μὲ τέσσαρα πέντε κτλ. προσθετέα διανύσματα.

Εἶναι εὔκολον νὰ δικαιολογήσωμεν ὅτι ἡ ὁρισθεῖσα πρόσθεσις ἐν $\mathscr{D}_0$ ἔχει τὰς ἰδιότητας : ἀντιμεταθετικήν, προσεταιριστικὴν καὶ τῆς διαγραφῆς. Ἤτοι:

1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$

7) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

3) $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$

Ἡ ἰσχὺς τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων εἶναι φανερὰ ἀπὸ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων.

Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ ἔχουν συντεταγμένας ἀντιστοίχως τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α_1, β_1 καὶ α_2, β_2. Τότε τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ εἶναι τὸ διάνυσμα μὲ συντεταγμένας $(\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_1+\beta_2)$. Τὸ ἄθροισμα $\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ εἶναι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα μὲ συντεταγμένας $(\alpha_2+\alpha_1,\ \beta_2+\beta_1)$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1$ καὶ $\beta_1+\beta_2=\beta_2+\beta_1$, συμπεραίνομεν ὅτι $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=$ $=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰσχύος τῶν ἰδιοτήτων 2) καὶ 3) εἶναι εὐκολωτάτη.

Γ) Ἀφαίρεσις ἐν $\mathscr{D}_0$ Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Γ' τάξιν ὅτι ἂν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ $\vec{\beta}'$ εἶναι τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\beta}$ τότε ὁρίζεται ὡς **διαφορὰ $\vec{\alpha}$ πλὴν β,** καὶ συμβολίζεται μὲ $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}'$, δηλ. τὸ $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$. Οὕτω διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $\vec{\alpha}$ τὸ ἀντίθετον διάνυσμα τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ λέγεται **ἀφαίρεσις** ἐν $\mathcal{D}_0$.

Ἐπειδὴ τὰ ἀντίθετα διανύσματα ἔχουν ἀντιθέτους τὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας των καὶ ἐπειδή, ὡς εἴδομεν, ἡ διαφορὰ $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ ἰσοῦται μὲ $\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$, διὰ τοῦτο, ἂν εἶναι $\vec{\alpha}(\alpha_1, \beta_1)$ καὶ $\vec{\beta}(\alpha_2, \beta_2)$, τότε εἶναι $-\vec{\beta}(-\alpha_2, -\beta_2)$ καὶ ἑπομένως τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$ ἔχει συντεταγμένας $\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_1-\beta_2$. Συμβολικῶς γράφομεν $(\alpha_1, \beta_1)-(\alpha_2, \beta_2)=(\alpha_1-\alpha_2, \beta_1-\beta_2)$.

Δοθέντων ἑπομένως δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}(\alpha_1, \beta_1)$ καὶ $\vec{\beta}(\alpha_2, \beta_2)$ **ὁρίζομεν** ὡς διαφορὰν των τὸ διάνυσμα, ἔστω $\vec{\gamma}$, τὸ ἔχον συντεταγμένας $\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_1-\beta_2$, δηλ. τὸ $\vec{\gamma}(\alpha_1-\alpha_2, \beta_1-\beta_2)$. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία :

$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}$$

Ἐπίσης ἰσχύει ἡ ἰδιότης :

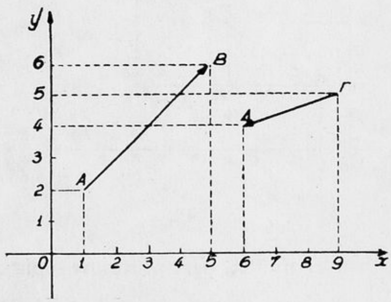
$$\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})-(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

105) Ἐὰν $\vec{u}(2, -5)$ καὶ $\vec{v}(3, 1)$ εἶναι δύο ἐλεύθερα διανύσματα, νὰ ὁρίσετε, μὲ τὰς συντεταγμένας του, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}+\vec{v}$ καὶ νὰ σχεδιάσετε εἰς τὸ ἐπίπεδον $x\,O\,\psi$ ἕνα ἀντιπρόσωπόν του.

106) Ἐὰν $\vec{u}(3, 1)$ καὶ $\vec{v}(2, 5)$ νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τοῦ $\vec{u}+\vec{v}$ καὶ τὸ μῆκος του. Ἔπειτα νὰ εὕρετε μὲ τὰς συντεταγμένας της τὴν διαφορὰν $\vec{u}-\vec{v}$ καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\vec{u}-\vec{v}$.

107) Τὸ διάνυσμα $\vec{\alpha}(-3, 8)$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $\vec{\beta}(-1, -2)$ καὶ ἑνὸς ἄλλου ἀγνώστου διανύσματος. Νὰ εὕρετε τὸ τελευταῖον αὐτὸ διάνυσμα.



Σχ. 39.2

108) Εἰς τὸ σχ. 39 – 2 βλέπετε δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{\Gamma\Delta}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιπρόσωποι δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. Ζητεῖται νὰ εὕρετε ἀπὸ τὸ σχῆμα τὰς συντεταγμένας τῶν διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$. Ἔπειτα νὰ εὕρετε τὸ διάνυσμα τὸ ἴσον μὲ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ κατὰ δύο τρόπους. (ὁ ἕνας τρόπος θὰ εἶναι μὲ τὰς συντεταγμένας). Νὰ εὕρετε ὁμοίως τὸ διάνυσμα τὸ ἴσον μὲ $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

40. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ.

Α) Εἰς τὴν Γ' τάξιν ἐμάθομεν ὅτι : ἐὰν $\vec{AB}$ εἶναι τυχὸν ὄχι μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καὶ $\rho \neq 0$ πραγματικὸς ἀριθμός, τότε ὡς $\rho \cdot \vec{AB}$ ὁρίζεται διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν μὲ τὸ $\vec{AB}$, φορὰν τὴν ἰδίαν ἂν $\rho>0$, ἀντίθετον δέ, ἂν $\rho<0$ καὶ μῆκος ἴσον μὲ $|\rho| \cdot |\vec{AB}|$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι : ἂν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχῃ τετμημένην Χ καὶ τεταγμένην Υ καὶ τὸ $\overrightarrow{AE} = \rho \cdot \overrightarrow{AB}$ (εἰς τὸ σχ. 40 – 1 τὸ $\rho = 2$, εἰς τὸ σχ. 40–2 εἶναι $\rho = -3$) ἔχῃ συντεταγμένας Χ′ καὶ Ψ′ ἀντιστοίχως, τότε λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΚΒ καὶ ΑΛΕ θὰ ἔχωμεν :

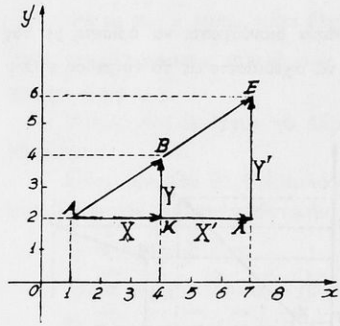
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \rho$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $X' = \rho X$ καὶ $Y' = \rho Y$

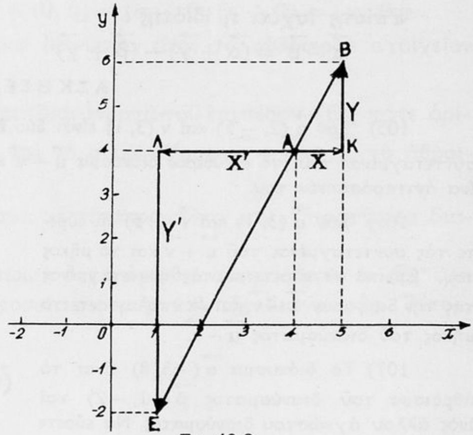
Διὰ τοῦτο δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς $\rho\overrightarrow{AB}$ τὸ διάνυσμα τὸ ἔχον συντεταγμένας ρΧ, ρΥ. Ἤτοι : $\rho \cdot (X, Y) = (\rho X, \rho Y)$

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι ἰσχύει :

$$\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{(\rho X)^2 + (\rho Y)^2} = |\rho| \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} = |\rho| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|$$

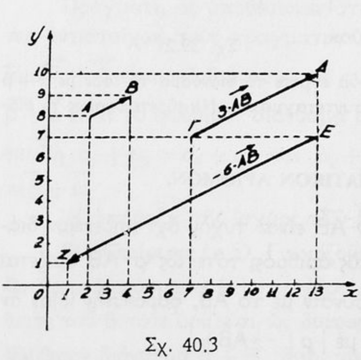


Σχ. 40.1



Σχ. 40.2

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \rho\overrightarrow{AB}$ ἀπὸ τὸν ρ καὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$, ὠνομάσθη **πολλαπλασιασμὸς** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τὸν ρ.



Σχ. 40.3

Β) Ὑπενθυμίζομεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες :

1) $(-2) \cdot (3\overrightarrow{AB}) = -6\overrightarrow{AB} = (-2 \cdot 3)\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EZ}$ (Σχ.40 – 3) καὶ γενικῶς : $\lambda\,(\rho\overrightarrow{AB}) = (\lambda \cdot \rho)\;\overrightarrow{AB}$, ὅπου λ, ρ πραγματικοὶ ἀριθμοί.

2) $\rho\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) = \rho\,\overrightarrow{AB} + \rho\,\overrightarrow{B\Gamma}$, ὅπου ρ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ διαδοχικὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα εἴτε ἐλεύθερα διανύσματα.

Γενικῶς, μὲ βάσιν τοὺς δοθέντας ὁρισμούς, ἡ ἰδιότης 2) ἐξηγεῖται ὡς ἑξῆς.

Ἔστω : τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = \alpha$, τεταγμένη τοῦ $\overrightarrow{AB} = \beta$

» » $\overrightarrow{B\Gamma} = \alpha'$, » » $\overrightarrow{B\Gamma} = \beta'$

Τότε εἶναι :

τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \alpha + \alpha'$

τεταγμένη » $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \beta + \beta'$

Ἄρα τετμημένη τοῦ $\rho \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) = \rho\,(\alpha + \alpha') = \rho\alpha + \rho\alpha'$ καὶ

τεταγμένη τοῦ $\rho \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) = \rho(\beta + \beta') = \rho\beta + \rho\beta'$

Ἂς εὕρωμεν τώρα τὰς συντεταγμένας τοῦ $\rho \cdot \overrightarrow{AB} + \rho \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$. Θὰ εἶναι

τετμημένη τοῦ $\rho \cdot \overrightarrow{AB} + \rho \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \rho\alpha + \rho\alpha'$

τεταγμένη τοῦ $\rho \cdot \overrightarrow{AB} + \rho \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = \rho\beta + \rho\beta'$

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ διανύσματα $\rho(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma})$ καὶ $\rho\overrightarrow{AB} + \rho\overrightarrow{B\Gamma}$ ἔχουν ἴσας τὰς ὁμωνύμους των συντεταγμένας συνάγομεν (§ 32, Α) ὅτι εἶναι ἴσα. Δηλ.

$$\rho\,(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) = \rho\,\overrightarrow{AB} + \rho\,\overrightarrow{B\Gamma}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

109) Ἂν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0 \cdot \overrightarrow{AB}$, τί συμπεραίνετε διὰ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

110) Ἂν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \rho \cdot \overrightarrow{AA}$, τί συμπεραίνετε διὰ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$;

111) Δίδεται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ σχ. 36 – 1 καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν διανύσματα ἴσα πρὸς τά :

α) $3\,\overrightarrow{AB}$, β) $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}$, γ) $-2\,\overrightarrow{AB}$, δ) $\frac{5}{4}\,\overrightarrow{AB}$

(Νὰ ἐργασθῆτε μὲ δύο τρόπους. Ὁ ἕνας τρόπος θὰ εἶναι μὲ συντεταγμένας).

41. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

Α) Ἐξ ὅσων ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 30, § 31, § 39, § 40) συνάγομεν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ἓν διάνυσμα διὰ τῶν μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$, $\vec{j}$ καὶ τῶν συντεταγμένων του.

Πράγματι, ἔχομεν (Σχ. 30 - 1 καὶ 30 - 2) :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Pi} + \overrightarrow{\Pi M}$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $\overrightarrow{O\Pi} = \overline{O\Pi} \cdot \vec{i}$ καὶ $\overrightarrow{\Pi M} = \overrightarrow{OP} = \overline{OP} \cdot \vec{j}$, ἡ ἀνωτέρω διανυσματικὴ ἰσότης γίνεται :

$$\overrightarrow{OM} = \overline{O\Pi} \cdot \vec{i} + \overline{OP} \cdot \vec{j}$$

ἤ, ἂν ὀνομάσωμεν Χ τὴν τετμημένην καὶ Υ τὴν τεταγμένην τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$, τότε

$$\overrightarrow{OM} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$$

Ὁμοίως διὰ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τοῦ σχήματος 33 – 1, ἂν ὀνομάσωμεν $x_B - x_A = X$ καὶ $y_B - y_A = Y$, θὰ εἶναι :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2}, \text{ ἤτοι } \overrightarrow{AB} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$$

B) Ἔστωσαν εἰς τὸ ἐπίπεδον δύο διανύσματα $\vec{V}(X, Y)$ καὶ $\vec{V}'(X', Y')$, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $\vec{V}' = k\vec{V}$. Γνωρίζομεν (§ 40) ὅτι τὰ διανύσματα αὐτὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν (εἶναι παράλληλα). Ἐπειδὴ $\vec{V}' = k\vec{V}$, δηλ. $(X', Y') = (kX, kY)$, θὰ ἔχωμεν (§ 37) :

$$X' = kX \text{ καὶ } Y' = kY$$

ἑπομένως θὰ εἶναι :

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$$

Ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ $\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}$ καὶ ὀνομάσωμεν **k** τὴν τιμὴν τῶν λόγων, θὰ εἶναι :

$$\frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = k \Rightarrow X' = kX \text{ καὶ } Y' = kY$$

καὶ ἑπομένως :

$$\vec{V}' = X'\vec{i} + Y'\vec{j} = kX\vec{i} + kY\vec{j} = k\,(X\vec{i} + Y\vec{j}) = k\vec{V},$$ δηλ. τὰ διανύσματα $\vec{V}'$ καὶ $\vec{V}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

Ὥστε: **ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου εἶναι παράλληλα, εἶναι αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι αὐτῶν νὰ εἶναι ἀνάλογοι.**

Συμβολικῶς :

$$\boxed{\vec{V} \parallel \vec{V}' \Leftrightarrow \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y}}$$

42. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΙΣΟΤΗΣ ΤΟΥ CHASLES. (ΣΑΛ).

Ἐὰν $A(x_A, \psi_A)$, $B(x_B, \psi_B)$, $\Gamma(x_\Gamma, \psi_\Gamma)$, $\Delta(x_\Delta, \psi_\Delta)$ εἶναι τυχόντα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου χΟψ, θὰ ἔχωμεν :

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, \psi_B - \psi_A)$, $\overrightarrow{B\Gamma}(x_\Gamma - x_B, \psi_\Gamma - \psi_B)$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}(x_\Delta - x_\Gamma, \psi_\Delta - \psi_\Gamma)$ καὶ $\overrightarrow{\Delta A}(x_A - x_\Delta, \psi_A - \psi_\Delta)$. Τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A}$ θὰ ἔχῃ τετμημένην $x_B - x_A + x_\Gamma + x_B + x_\Delta + x_\Gamma + x_A - \chi_\Delta = 0$ καὶ τεταγμένην $\psi_B - \psi_A + \psi_\Gamma - \psi_B + \psi_\Delta + \psi_\Gamma + \psi_A - \psi_\Delta = 0$, εἶναι δηλ. μηδενικὸν διάνυσμα. Ἰσχύει λοιπὸν ἡ ἑξῆς ἰσότης :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{O_A},$$

ἡ ὁποία λέγεται **διανυσματικὴ ἰσότης τοῦ Chasles.**

43. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.

Ἔστω $A(x_A, \psi_A)$ τυχὸν σημεῖον καὶ ἓν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}(\alpha, \beta)$ τοῦ ἐπιπέδου χΟψ σχ. 43–1.

Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ (x, ψ) τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{u}$, ὅπου $\lambda \in R$. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τούτων λέγεται : **εὐθεῖα (ε).** Ἡ εὐθεῖα αὕτη ὡρίσθη ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}$.

Ἐὰν εἰς ἀμφοτέρα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} \quad (\lambda \in R)$$

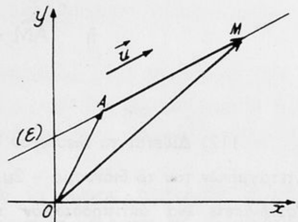
προσθέσωμεν τὸ αὐτὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ θὰ ἔχωμεν :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \overrightarrow{OA}$$

$$\boxed{\text{δηλαδὴ } \overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u} + \overrightarrow{OA}} \qquad (\lambda \in R) \quad (43, \alpha)$$

Ἡ ἐξίσωσις, $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ $(\lambda \in R)$ καθὼς καὶ ἡ $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{u} + \overrightarrow{OA}$ $(\lambda \in R)$ ἐκφράζουν ἡ κάθε μία τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην ἵνα τὸ σημεῖον Μ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν (ε). Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς λ εἶναι ἡ **παράμετρος** τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων.

Ἀπὸ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τῆς εὐθείας (ε) ἕπεται ὅτι ἡ (ε) ὁρίζεται μονοτρόπως ἐκ τοῦ σημείου Α καὶ τοῦ διανύσματος $\vec{u}$.



Σχ. 43.1

Δύο σημεῖα Α καὶ Β (διάφορα μεταξύ των) ὁρίζουν μίαν καὶ μόνον μίαν εὐθεῖαν. Πράγματι, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὸ Α καὶ τὸ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας θὰ εἶναι :

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} \quad (\lambda \in R)$$

ἢ $$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \quad (\lambda \in R)$$

διὰ $\lambda = 0$ ἔχομεν $M \equiv A$ διὰ $\lambda = 1$ ἔχομεν $M \equiv B$.

Παράδειγμα. Δίδονται σημεῖον Α (2,5) καὶ διάνυσμα $\vec{u}\,(-2{,}3)$ εἰς τὸ ἐπίπεδον xOψ καὶ ζητεῖται ἡ διανυσματικὴ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ $\vec{u}$.

Ἀπάντησις. Συμφώνως πρὸς τὴν (43,α), ἂν Μ (x, ψ) εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, ὁπότε θὰ εἶναι $\overrightarrow{OM}\,(x, \psi)$, θὰ ἔχωμεν :

$(x, \psi) = \lambda \cdot (-2{,}3) + (2, 5)$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη διανυσματικὴ ἐξίσωσις.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν διαδοχικῶς :

$$(x, \psi) = (-2\lambda, 3\lambda) + (2{,}5) \Rightarrow$$
$$(x, \psi) = (-2\lambda + 2,\ 3\lambda + 5) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -2\lambda + 2 \\ \psi &= 3\lambda + 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x-2}{-2} &= \lambda \\ \frac{\psi-5}{3} &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{\psi-5}{3} \Rightarrow$$

$3x - 6 = -2\psi + 10 \Rightarrow 3x + 2\psi - 16 = 0$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ λεγομένη **ἀναλυτικὴ ἐξίσωσις** τῆς εὐθείας.

44. ΔΙΕΥΘΥΝΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΥΘΕΙΑΣ.

Τὸ διάνυσμα $\vec{u}(\alpha, \beta)$ λέγεται **διευθύνον διάνυσμα** τῆς εὐθείας (ε).

Τὰ διανύσματα $\vec{u}' = t\vec{u}\ (t \in R)$ εἶναι ἐπίσης διευθύνοντα διανύσματα τῆς (ε), διότι ἡ ἐξίσωσις τῆς (ε) ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{t} \cdot t\vec{u}$$

$$\text{ἢ} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{t}\vec{u}' \quad (\lambda \in R,\ t \in R \text{ καὶ } t \neq 0)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

112) Δίδεται τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}(-3, 5)$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρίσετε διὰ τῶν συντεταγμένων του τὸ διάνυσμα $-2\vec{u}$. Ἔπειτα νὰ λάβετε σύστημα ὀρθοκανονικῶν ἀξόνων καὶ νὰ σχεδιάσετε ἕνα ἀντιπρόσωπον τοῦ $-2\vec{u}$.

113) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι παράλληλα ἢ ὄχι τὰ διανύσματα $\vec{u}(3, 4)$ καὶ $\vec{v}\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

114) Θεωροῦμεν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$:

Α (– 3, 2), Β (1, 3), Γ (1, 2), Δ (5, 3)

Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ ἀνωτέρω διανύσματα εἶναι παράλληλα καὶ ἂν εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς.

115) Δίδεται τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}(2, 1)$ καὶ τὸ σημεῖον Α (2, – 1). Νὰ καθορίσετε τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ Α καὶ ἔχει διευθύνον διάνυσμα τὸ $\vec{u}$.

116) Δίδεται τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}(-1, 2)$ καὶ τὰ σημεῖα Α (2, 2) καὶ Μ (x, y). Ζητεῖται νὰ ἐκφράσετε ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ καὶ $\vec{u}$ εἶναι παράλληλα.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

45. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων καλεῖται ὁ μετασχηματισμὸς αὐτοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων.*

Ἡ ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων εἶναι ἓν ἐκ τῶν σπουδαιοτέρων κεφαλαίων τῆς Ἀλγέβρας, διότι εἰς πλεῖστα ἀλγεβρικὰ θέματα, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἀπαιτεῖται, ὅπως τὰ πολυώνυμα τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν γινομένου παραγόντων. Π.χ. εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἐξισώσεων.

Ὁ μετασχηματισμὸς τῶν πολυωνύμων εἰς γινόμενον παραγόντων, ἐὰν εἶναι δυνατός, δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος, οὔτε δύναται νὰ γίνῃ δι' ὡρισμένων κανόνων. Σκόπιμον εἶναι λοιπὸν ν' ἀσχοληθῶμεν, ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερον μὲ τὸ θέμα τοῦτο.

46. Εἶναι γνωστὴ ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως ἡ ἀνάλυσις εἰς γινόμενον παραγόντων τῶν κάτωθι παραστάσεων, δι' ὃ καὶ ἐπαναλαμβάνονται συντόμως :

1. Παραστάσεις, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι ἔχουν κοινὸν παράγοντα.

Πολυώνυμον = (κοινὸς παράγων) · (πηλίκον πολυωνύμου διὰ κοινοῦ παράγοντος)

Παραδείγματα : α) $4x^3\psi - 10x^2\psi^2 + 12x\psi^3 - 8\psi^4 x = 2x\psi \cdot (2x^2 - 5x\psi + 6\psi^2 - 4\psi^3)$, β) $45\psi^{\nu+1}x - 25\psi^{\nu+2}x^2 + 15\psi^{\nu+3}x^3 = 5\psi^{\nu+1}x\,(9 - 5\psi x + 3\psi^2x^2)$ γ) $15\alpha(\beta - 3)^3 - 3\alpha^2(\beta - 3)^2 + 6\alpha^3(\beta - 3) = 3\alpha(\beta - 3)\,[5(\beta - 3)^2 - \alpha(\beta - 3) + 2\alpha^2]$

2. Παραστάσεις χωριζόμεναι εἰς ὁμάδας

Παραδείγματα : α) $\alpha^2\mu + \beta\nu^2 + \alpha^2\nu^2 + \beta\mu = (\alpha^2\mu + \beta\mu) + (\alpha^2\nu^2 + \beta\nu^2) = \mu(\alpha^2 + \beta) + \nu^2(\alpha^2 + \beta) = (\alpha^2 + \beta) \cdot (\mu + \nu^2)$

β) $\alpha x^\nu + \alpha\psi^\mu - \alpha\beta x^\nu - \alpha\beta\psi^\mu + \beta x^\nu + \beta\psi^\mu = (\alpha x^\nu + \alpha\psi^\mu) - (\alpha\beta x^\nu + \alpha\beta\psi^\mu) +$

$+ (\beta x^\nu + \beta\psi^\mu) = \alpha(x^\nu + \psi^\mu) - \alpha\beta(x^\nu + \psi^\mu) + \beta(x^\nu + \psi^\mu) = (x^\nu + \psi^\mu)(\alpha - \alpha\beta + \beta)$.

Τὴν ἰδίαν παράστασιν χωρίσατε εἰς δύο ὁμάδας καὶ ἀκολούθως ἀναλύσατε εἰς γινόμενον παραγόντων

γ) $x\psi(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(x^2 + \psi^2) = \alpha^2 x\psi + \beta^2 x\psi + \alpha\beta x^2 + \alpha\beta\psi^2 = (\alpha^2 x\psi + \alpha\beta x^2) +$
$+ ((\beta^2 x\psi + \alpha\beta\psi^2) = \alpha x(\alpha\psi + \beta x) + \beta\psi(\beta x + \alpha\psi) = (\alpha\psi + \beta x)\cdot(\alpha x + \beta\psi)$.

3. Παραστάσεις τῆς μορφῆς $A^2 - B^2$ (A καὶ B ἀλγεβρ. παραστάσεις)

$$\boxed{A^2 - B^2 = (A + B)\cdot(A - B)}$$

Παραδείγματα: α) $25x^2 - 81\psi^4 = (5x)^2 - (9\psi^2)^2 = (5x - 9\psi^2)(5x + 9\psi^2)$

β) $\mu^{16} - \nu^8 = (\mu^8 + \nu^4)\cdot(\mu^8 - \nu^4) = (\mu^8 + \nu^4)\cdot(\mu^4 + \nu^2)\cdot(\mu^4 - \nu^2) =$
$= (\mu^8 + \nu^4)\cdot(\mu^4 + \nu^2)\cdot(\mu^2 + \nu)\cdot(\mu^2 - \nu)$.

γ) $\alpha^{2\nu} - \beta^{2\mu} = (\alpha^\nu)^2 - (\beta^\mu)^2 = (\alpha^\nu + \beta^\mu)\cdot(\alpha^\nu - \beta^\mu), \qquad (\nu, \mu \in N)$

δ) $(8x - 3\psi^2)^2 - (5\psi^2 + 2x)^2 = (8x - 3\psi^2 + 5\psi^2 + 2x)\cdot(8x - 3\psi^2 - 5\psi^2 - 2x) =$
$= (2\psi^2 + 10x)(6x - 8\psi^2) = 4(\psi^2 + 5x)\cdot(3x - 5\psi^2)$

4. Παραστάσεις τῆς μορφῆς $A^2 \pm 2AB + B^2$ (A,B παραστάσεις).

$$\boxed{A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2}$$

Παραδείγματα: α) $9x^2 \pm 12x + 4 = (3x)^2 \pm 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = (3x \pm 2)^2$

β) $16\psi^2 + 49x^2\psi^4 - 56x\psi^3 = (4\psi)^2 + (7x\psi^2)^2 - 2\cdot 4\psi\cdot 7x\psi^2 = (4\psi - 7x\psi^2)^2$

γ) $\alpha^{2\nu} \pm 2\alpha^\nu\beta^\mu + \beta^{2\mu} = (\alpha^\nu)^2 \pm 2\alpha^\nu\beta^\mu + (\beta^\mu)^2 = (\alpha^\nu \pm \beta^\mu)^2$

δ) $(x^2 + \psi^2)^2 + 4x^2\psi^2 + 4(x^2 + \psi^2)x\psi = [(x^2 + \psi^2) + 2x\psi]^2 = [(x + \psi)^2]^2 =$
$= (x + \psi)^4$

5. Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\varphi(x) = x^2 + px + q$ $(p, q, x \in R)$

$$\Delta = p^2 - 4q \quad \left| \quad \begin{aligned} &\Delta = O \Leftrightarrow \varphi(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\Delta > O \Leftrightarrow \varphi(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2 = \\ &\qquad = \left(x + \frac{p + \sqrt{\Delta}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{p - \sqrt{\Delta}}{2}\right) \\ &\Delta < O \Leftrightarrow \varphi(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\Delta < O$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ παράστασις $\varphi(x) \equiv x^2 + px + q$ δὲν μετασχηματίζεται εἰς τὸ σύνολον R εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἀλλὰ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Λίαν συντόμως θὰ μάθωμεν τρόπον μετασχηματισμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων τῇ βοηθείᾳ ἄλλου συστήματος ἀριθμῶν.

Παραδείγματα: α) $\varphi(x) = x^2 + 8x + 16\cdot\Delta = 8^2 - 4\cdot 16 = 0$

Ὥστε ἔχομεν: $\varphi(x) = x^2 + 8x + 16 = \left(x + \frac{8}{2}\right)^2 = (x + 4)^2$

β) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 15. \quad \Delta = 2^2 - 4(-15) = 4 + 60 = 64 > O$

Οὕτω : $\varphi(x) = x^2 + 2x - 15 = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{64}}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{2+8}{2}\right)\left(x + \frac{2-8}{2}\right) =$
$= (x+5)\cdot(x-3)$

γ) $\varphi(x) = x^2 - 4x + 1.\ \ \Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1 = 16 - 4 = 12 > 0$

Οὕτως ἔχομεν : $\varphi(x) = x^2 - 4x + 1 = \left(x + \frac{-4+\sqrt{12}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{-4-\sqrt{12}}{2}\right) =$
$= \left(x + \frac{-4+2\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{-4-2\sqrt{3}}{2}\right) = (x - 2 + \sqrt{3})\cdot(x - 2 - \sqrt{3})$

δ) $\varphi(x) = x^2 - 3x + 13.\ \ \Delta = (-3)^2 - 4\cdot 13 = 9 - 52 = -43 < 0$

Ὥστε, ἔχομεν : $\varphi(x) = x^2 - 3x + 13 = \left(x + \frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(-43)}}{2}\right)^2 =$
$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{43}}{2}\right)^2$ ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

6. Παραστάσεως τῆς μορφῆς $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ($\alpha \neq 0, \beta, \gamma \in R$)

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) =$
$= \alpha\,(x^2 + px + q) = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ὅπου $p = \frac{\beta}{\alpha}$, $q = \frac{\gamma}{\alpha}$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\cdot\left(x + \frac{\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$

Καὶ ἐνταῦθα ὅταν $\Delta < 0$, μετασχηματίζεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ ὄχι εἰς γινόμενον δύο παραγόντων εἰς τὸ σύνολον R.

Παραδείγματα: α) $\varphi(x) = 9x^2 + 6x + 1.\ \ \Delta = 6^2 - 4\cdot 9\cdot 1 = 36 - 36 = 0$

Οὕτως ἔχομεν : $\varphi(x) = 9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x + \frac{6}{2\cdot 9}\right)^2 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = (3x+1)^2$

β) $\varphi(x) = 2x^2 - x - 1.\ \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\,(-1) = (1+8) = 9 > 0.$

Ὥστε : $\varphi(x) = 2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{-1+\sqrt{9}}{2\cdot 2}\right)\left(x + \frac{-1-\sqrt{9}}{2\cdot 2}\right) =$
$= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1) = (2x+1)(x-1)$

γ) $\varphi(x) = 3x^2 - x + 2.\ \ \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 3\cdot 2 = 1 - 24 = -23 < 0$

Ὥστε : $\varphi(x) = 3x^2 - x + 2 = 3\left[\left(x + \frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(-23)}}{6}\right)^2\right] = 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \right.$
$\left. + \left(\frac{\sqrt{23}}{6}\right)^2\right].$

δ) $\varphi(x) = 25x^2 - 20x + 1.\ \ \Delta = 20^2 - 4\cdot 25 = 400 - 100 = 300 > 0$

Οὕτω : $\varphi(x) = 25x^2 - 20x + 1 = 25\left(x + \frac{-20+\sqrt{300}}{50}\right)\left(x + \frac{-20-\sqrt{300}}{50}\right) =$
$= 25\left(x + \frac{-2+\sqrt{3}}{5}\right)\left(x + \frac{-2-\sqrt{3}}{5}\right) = (5x - 2 + \sqrt{3})\ (5x - 2 - \sqrt{3})$

Ἰδοὺ τώρα ἄλλαι περιπτώσεις μετασχηματισμοῦ πολυωνύμων εἰς γινόμενα παραγόντων λίαν χρήσιμοι :

7. Παραστάσεις δυνάμεναι νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων παραστάσεων.

α) Συνδυασμὸς τῶν περιπτώσεων 3 καὶ 4

$$A^2 + 2AB + B^2 - \Gamma^2 = (A+B)^2 - \Gamma^2 = (A+B+\Gamma)(A+B-\Gamma)$$

$$A^2 + 2AB + B^2 - \Gamma^2 + 2\Gamma\Delta - \Delta^2 = (A^2 + 2AB + B^2) - (\Gamma^2 - 2\Gamma\Delta + \Delta^2) =$$
$$= (A+B)^2 - (\Gamma-\Delta)^2 = (A+B+\Gamma-\Delta)(A+B-\Gamma+\Delta)$$

ὅπου A, B, Γ, Δ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

β) Παραστάσεις τῆς μορφῆς $x^{2^\nu} + x^{2^{\nu-1}}\psi^{2^{\nu-1}} + \psi^{2^\nu}$, $\nu \in N$ καὶ $\nu \geqslant 2$

$$x^{2^\nu} + x^{2^{\nu-1}}\psi^{2^{\nu-1}} + \psi^{2^\nu} = x^{2^\nu} + 2x^{2^{\nu-1}}\psi^{2^{\nu-1}} + \psi^{2^\nu} - x^{2^{\nu-1}}\psi^{2^{\nu-1}} =$$
$$= (x^{2^{\nu-1}} + \psi^{2^{\nu-1}})^2 - (x^{2^{\nu-2}}\psi^{2^{\nu-2}})^2 = (x^{2^{\nu-1}} + \psi^{2^{\nu-1}} + x^{2^{\nu-2}}\psi^{2^{\nu-2}}) \cdot (x^{2^{\nu-1}} +$$
$$+ \psi^{2^{\nu-1}} - x^{2^{\nu-2}}\psi^{2^{\nu-2}})$$

γ) Παραστάσεις τῆ μορφῆς $x^{2^\nu} + 4\psi^{2^\nu}$, $\nu \in N$ καὶ $\nu \geqslant 2$

$$x^{2^\nu} + 4\psi^{2^\nu} = (x^{2^{\nu-1}})^2 + (2\psi^{2^{\nu-1}})^2 + 4x^{2^{\nu-1}}\psi^{2^{\nu-1}} - 4x^{2^{\nu-1}}\psi^{2^{\nu-1}} =$$
$$= (x^{2^{\nu-1}} + 2\psi^{2^{\nu-1}})^2 - (2x^{2^{\nu-2}}\psi^{2^{\nu-2}})^2 =$$
$$= (x^{2^{\nu-1}} + 2\psi^{2^{\nu-1}} + 2x^{2^{\nu-2}}\psi^{2^{\nu-2}}) \cdot (x^{2^{\nu-1}} + 2x^{2^{\nu-1}} - 2x^{2^{\nu-2}}\psi^{2^{\nu-2}})$$

Εἰς τὰς περιπτώσεις β καὶ γ ἐπιδιώκομεν τὴν συμπλήρωσιν τῆς παραστάσεως διὰ προσθαφαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ μονωνύμου, ἵνα αὕτη καταστῇ διαφορὰ δύο τετραγώνων.

Παραδείγματα : α) $9x^2 + 6\psi x + \psi^2 - \omega^2 = (3x+\psi)^2 - \omega^2 =$
$$= (3x+\psi+\omega)(3x+\psi-\omega)$$

β) $36\alpha^2 + 12\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2 - 4\gamma\delta - 4\delta^2 = (36\alpha^2 + 12\alpha\beta + \beta^2) - (\gamma^2 + 4\gamma\delta +$
$+ 4\delta^2) = (6\alpha+\beta)^2 - (\gamma+2\delta)^2 = (6\alpha+\beta+\gamma+2\delta)(6\alpha+\beta-\gamma-2\delta)$

γ) $x^4 + x^2\psi^2 + \psi^4 = x^4 + 2x^2\psi^2 + \psi^4 - x^2\psi^2 = (x^2+\psi^2)^2 - (x\psi)^2 =$
$$= (x^2+\psi^2+x\psi)(x^2+\psi^2-x\psi)$$

δ) $x^8 + x^4\psi^4 + \psi^8 = x^8 + 2x^4\psi^4 + \psi^8 - x^4\psi^4 = (x^4+\psi^4)^2 - (x^2\psi^2)^2 =$
$$= (x^4+\psi^4+x^2\psi^2)\cdot(x^4+\psi^4-x^2\psi^2) =$$
$$= (x^2+\psi^2+x\psi)(x^2+\psi^2-x\psi)(x^4+\psi^4-x^2\psi^2)$$

ε) $x^4 + 4\psi^4 = (x^2)^2 + (2\psi^2)^2 + 4x^2\psi^2 - 4x^2\psi^2 = (x^2+2\psi^2)^2 - (2x\psi)^2 =$
$$= (x^2+2\psi^2+2x\psi)(x^2+2\psi^2-2x\psi)$$

8. Ἀνάλυσις ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ὅρων εἰς ἄθροισμα ἄλλων.

Πολλάκις παρίσταται ἀνάγκη ἀναλύσεως ἑνὸς ἢ περισσοτέρων ὅρων εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἄλλων, προκειμένου νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἀνάλυσιν εἰς γινόμενον παραγόντων μιᾶς παραστάσεως. Συνήθως τοῦτο ἀπαιτεῖται, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς παραστάσεως εἶναι περιττὸν καὶ ἐπιθυμοῦμεν νὰ τὸ καταστήσωμεν ἄρτιον.

Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖται εἰς πολλὰς περιπτώσεις.

Παραδείγματα : α) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις
$A = x^2\psi + x^2\omega + \psi^2 x + \psi^2\omega + \omega^2 x + \omega^2\psi + 2x\psi\omega$

Ἔχομεν : $A = x^2\psi + x^2\omega + \psi^2 x + \psi^2\omega + \omega^2 x + \omega^2\psi + x\psi\omega + x\psi\omega =$

$= (x^2\psi + x^2\omega) + (\psi^2 x + x\psi\omega) + (\psi^2\omega + \omega^2\psi) + (\omega^2 x + x\psi\omega) =$
$= x^2(\psi + \omega) + x\psi(\psi + \omega) + \omega\psi(\psi + \omega) + \omega x(\omega + \psi) =$
$= (\psi + \omega)(x^2 + x\psi + \omega\psi + \omega x) = (\psi + \omega)[x(x + \psi) + \omega(x + \psi)] =$
$= (\psi + \omega)(x + \psi)(x + \omega)$

β) Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις $\varphi(\chi) = x^3 - 3x + 2$

Ἔχομεν : $\varphi(x) = x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) =$
$= x(x + 1)(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 + x - 2) =$
$= (x - 1)(x^2 + 2x - x - 2) = (x - 1)[(x + 2)x - (x + 2)] =$
$= (x - 1)^2(x + 2)$

9. Παραστάσεις τῆς μορφῆς $x^\nu \pm \psi^\nu$, $\nu \in N$.

Τὰς παραστάσεις αὐτὰς ἀναλύομεν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων καὶ τῆς ταυτότητος τῆς τελείας διαιρέσεως.

α) Αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\alpha^3 \pm \beta^3$ διαιρούμεναι διὰ $\alpha \pm \beta$ δίδουν ὑπόλοιπον 0 καὶ πηλίκον $\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2$. Ἑπομένως ἀναλύονται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\alpha^3 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta) \cdot (\alpha^2 \mp \alpha\beta + \beta^2)}$$

β) Αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $x^\nu - \psi^\nu$ ὅπου $\nu \in \mathbf{N}$, διαιρούμεναι διὰ $\chi - \psi$ δίδουν ὑπόλοιπον 0 καὶ πηλίκον $x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\psi + x^{\nu-3}\psi^2 + \ldots + x\psi^{\nu-2} + \psi^{\nu-1}$.

Ἄρα ἔχομεν $\boxed{x^\nu - \psi^\nu = (x - \psi)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\psi + x^{\nu-3}\psi^2 + \ldots + x\psi^{\nu-2} + \psi^{\nu-1})}$

Ἂν εἶναι $\nu = 2\kappa$, $\kappa \in N$, τότε δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν καὶ ὡς ἀκολούθως

$$\chi^\nu - \psi^\nu = x^{2\kappa} - \psi^{2\kappa} = (x^\kappa + \psi^\kappa)(x^\kappa - \psi^\kappa)$$

Παραδείγματα : 1) $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$
ἢ $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha - \beta)(\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3) = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)$
2) $\alpha^5 - \beta^5 = (\alpha - \beta)(\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4)$
3) $\alpha^6 - \beta^5 = (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha^3 - \beta^3) = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
ἢ $\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha^3)^2 - (\beta^3)^2 = (\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4) =$
$= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ (βλ. περίπτ. 7 β′) ἢ
$\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha - \beta)(\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5) = (\alpha - \beta)[\alpha^4(\alpha + \beta) +$
$+ \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + \beta^4(\alpha + \beta)] = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)(\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4)$ κλπ.

γ) Διὰ τὰς παραστάσεις τῆς μορφῆς $x^\nu + \psi^\nu$ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις : 1) Ἐὰν $\nu = 2\kappa + 1$ (περιττός), τότε τὸ διώνυμον διαιρεῖται διὰ $x + \psi$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$\forall \nu = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbf{N}$ $\boxed{x^\nu + \psi^\nu = (x + \psi)(x^{\nu-1} - x^{\nu-2}\psi + x^{\nu-3}\psi^2 - \ldots - x\psi^{\nu-2} + \psi^{\nu-1})}$

2) Ἐὰν $\nu = 2\kappa$ (ἄρτιος), τότε τὸ διώνυμον διαιρούμενον διὰ $x + \psi$ ἢ διὰ $x - \psi$ δίδει ὑπόλοιπον $2\psi^\nu$ καὶ συνεπῶς δὲν δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν αὐτὸ εἰς γινόμενον παραγόντων ἐπὶ τῇ βάσει τῆς θεωρίας τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων.

Εἴς τινας ὅμως περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας ὁ ν εἶναι ἄρτιον πολλαπλάσιον περιττοῦ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν ὡς ἀκολούθως :

$(6=2\cdot 3)$ $x^6+\psi^6=(x^2)^3+(\psi^2)^3=(x^2+\psi^2)(x^4-x^2\psi^2+\psi^4)$

$(12=4\cdot 3)$ $x^{12}+\psi^{12}=(x^4)^3+(\psi^4)^3=(x^4+\psi^4)(x^8-x^4\psi^4+\psi^8)$

$(10=2\cdot 5)$ $x^{10}+\psi^{10}=(x^2)^5+(\psi^2)^5=(x^2+\psi^2)(x^8-x^6\psi^2+x^4\psi^4-x^2\psi^6+$
$+\psi^8)$

Παραδείγματα:

1) $\alpha^5+\beta^5=(\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$

2) $\alpha^7+\beta^7=(\alpha+\beta)(\alpha^6-\alpha^5\beta+\alpha^4\beta^2-\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4-\alpha\beta^5+\beta^6)$

3) $\alpha^{15}+\beta^{15}=(\alpha^3)^5+(\beta^3)^5=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^{12}-\alpha^9\beta^3+\alpha^6\beta^6-\alpha^3\beta^9+\beta^{12})=$
$=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^{12}-\alpha^9\beta^3+\alpha^6\beta^6-\alpha^3\beta^9+\beta^{12})$

10. Παραστάσεις: Τέλειον τετράγωνον ἢ κύβος πολυωνύμου.

α) Ὅταν ἓν πολυώνυμον περιέχῃ τὰ τετράγωνα μερικῶν μονωνύμων καὶ τὰ διπλάσια γινόμενα αὐτῶν ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους μὲ τὸ κατάλληλον σημεῖον, τότε εἶναι τέλειον τετάγωνον καὶ συνεπῶς ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο ἴσων παραγόντων. Μερικὴ περίπτωσις εἶναι ἡ περίπτωσις ὑπ' ἀριθ. 4.

Παραδείγματα: 1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2=$
$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$

2) $x^2+4\psi^2+9\omega^2+4x\psi-6x\omega-12\omega\psi=x^2+(2\psi)^2+(3\omega)^2+2\cdot 2x\psi-$
$-2x\cdot 3\omega-2\cdot 2\psi\cdot 3\omega=(x+2\psi-3\omega)^2=(x+2\psi-3\omega)(x+2\psi-3\omega)$.

β) Ἐὰν τὸ πολυώνυμον εἶναι τῆς μορφῆς $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3$, τότε εἶναι ὁ κύβος τοῦ διωνύμου $A\pm B$ καὶ συνεπῶς ἀναλύεται εἰς γινόμενον τριῶν ἴσων παραγόντων.

Οὕτω: $A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3=(A\pm B)^3=(A\pm B)(A\pm B)(A\pm B)$

Παραδείγματα:

1) $27x^3+27x^2\psi+9x\psi^2+\psi^3=(3x)^3+3\cdot(3x)^2\psi+3\cdot(3x)\psi^2+\psi^3=$
$=(3x+\psi)^3=(3x+\psi)(3x+\psi)(3x+\psi)$

2) $8x^6\alpha^3-36x^5\alpha+54x^4\alpha-27x^3=(2x^2\alpha)^3-3\cdot(2x^2\alpha)^2(3x)+3(2x^2\alpha)(3x)^2-$
$-(3x)^3=(2x^2\alpha-3x)^3=(2x^2\alpha-3x)(2x^2\alpha-3x)(2x^2\alpha-3x)$

11. Παραστάσεις: Πολυώνυμα βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου.

Ὡς γνωστόν, ἂν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ βαθμοῦ $\geqslant 1$ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha$ ἢ $x=\frac{\beta}{\alpha}$, ὅπου $\alpha, \beta \in R$, τότε διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$ ἢ $\alpha x-\beta$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἰδιότητος αὐτῆς ἀναλύομεν, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι κατορθωτόν, πολυώνυμα ἀνωτέρου τοῦ $\alpha^{ου}$ βαθμοῦ εἰς γινόμενα παραγόντων, ὡς εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα:

Παραδείγματα: 1) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τὸ πολυώνυμον

$\varphi(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$

Εὑρίσκομεν τοὺς διαιρέτας τοῦ γνωστοῦ ὅρου -2. Οὗτοι εἶναι: ± 1, ± 2. Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $x=1$ ἔχομεν $\varphi(1)=1^4+1^3-1^2+1-2=0$. Ἄρα τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-1$ καὶ δίδει πηλίκον $\Pi_1(x)=x^3+2x^2+x+2$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν: $\varphi(x)=(x-1)(x^3+2x^2+x+2)$ (1)

Ὁμοίως, διὰ $x = -2$ ἔχομεν: $\Pi_1(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 = 0$ Ἄρα τὸ $\Pi_1(x)$ διαιρεῖται διὰ $x+2$ καὶ δίδει πηλίκον $\Pi_2(x) = x^2+1$, ὁπότε $\Pi_1(x) = (x+2)\cdot(x^2+1)$ καὶ ἀκολούθως ἡ (1) γράφεται: $\varphi(x) = (x-1)(x+2)(x^2+1)$.

2) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τὸ $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 + 8x + 12$.

Εὑρίσκομεν τοὺς διαιρέτας τοῦ γνωστοῦ ὅρου 12 καὶ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου 2. Οὗτοι εἶναι οἱ ἑξῆς: τοῦ 12 οἱ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$, τοῦ δὲ 2 οἱ $\pm 1, \pm 2$. Ἀκολούθως σχηματίζομεν ὅλα τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀριθμητὰς τοὺς διαιρέτας τοῦ 12 καὶ παρανομαστὰς τοὺς διαιρέτας τοῦ 2.

Ταῦτα εἶναι: $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$. Ἐκ τῶν κλασμάτων αὐτῶν τὸ κλάσμα $-\frac{3}{2}$ μηδενίζει τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$, διότι $\varphi\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{3}{2}\right) + 12 = 0$. Ἄρα τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖται διὰ $2x+3$ καὶ δίδει πηλίκον $\Pi(x) = x^2+4$, ὁπότε $\varphi(x) = (2x+3)(x^2+4)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

117) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

1) $x^\mu \psi^\mu + x^{\mu-1}\psi^{\mu+1} - x^{\mu+1}\psi^{\mu-1}$, $\mu \in N$, 2) $\alpha x^2 + \beta x^2 + \alpha + \beta + \alpha x + \beta x$,
3) $x^2\psi^2(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta(x^4+\psi^4)$, 4) $(\mu^2 x + \nu^2\psi)^2 + (\nu^2 x - \mu^2\psi)^2$,
5) $144x^2\psi^2 - 121\alpha^2\beta^2$, 6) $x^2 - (\alpha-\beta)^2$, 7) $(\alpha x + \beta\psi)^2 - 1$,
8) $(x^2 + x\psi + \psi^2)^2 - (x^2 - x\psi + \psi^2)^2$, 9) $64x^2\psi^4 - 160x^2\psi^2 + 100x^2$,
10) $169x^2\psi^2z^2 - 286x\psi^2z^2 + 121\psi^2z^2$, 11) $4\psi^2\omega^2\beta^2 + 361x^2\psi^2\omega^2\alpha^2 \pm 76\alpha\beta x\psi^2\omega^2$
12) $\alpha^2 - \beta^2 - 2\beta\gamma - \gamma^2$, 13) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\gamma^2 + 12\gamma\delta - 9\delta^2$

118) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ ἀκόλουθα, πολυώνυμα:

1) $x^2 + 4x - 21$, 2) $x^2 \pm 7\alpha x + 12\alpha^2$, 3) $\omega^2 - (\nu-2)x - 2\nu$
4) $2\omega^2 + 4\omega - 70$, 5) $5x^2 - 4x + 1$, 6) $9x^2 - 6\alpha x + \alpha^2 - \beta^2$

119) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ πραστάσεις:

1) $9\alpha^2\beta^2 - 36\alpha\beta + 36 - 25\alpha^2$, 2) $x^4 - 16\omega^4 + 9\psi^4 - 6x^2\psi^2$
3) $2(x^2\psi - 3\omega) - 9 + x^2\psi^2 - \omega^2 + x^2$, 4) $4\alpha^4 + 16\alpha^2\beta^2 + 25\beta^4$
5) $36x^4\psi^4 + 49\alpha^4 - 100\alpha^2x^2\psi^2$, 6) $9x^8 + 1 - 15x^4$, 7) $64\alpha^4x^8 + \psi^4$,
8) $\lambda^{4\nu} + 4\nu^{4\lambda}$, $(\nu, \lambda \in N)$, 9) $\alpha x^2 - (\alpha+1)x + 1$, 10) $\mu x^2 + (\mu - 5\nu)x - 5\nu$
11) $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ (ὑπόδ. $-5x = -3x - 2x$),
12) $x^3 + x^2 - 2$ (ὑπόδ. $x^2 = 2x^2 - x^2$)
13) $64\alpha^3 \pm 27\beta^3$, $\alpha^3\beta^3 \pm \gamma^3$, $(\alpha+\beta)^3 \pm (\alpha-\beta)^3$, $(\alpha-\beta)^3 - \beta^3$
14) $\alpha^4x^8 - \psi^8$, $x^6 \pm 64\alpha^6\psi^6$, $\alpha^{12} \pm 1$, $\alpha^6 \pm \beta^3$
15) $32x^5 \pm 1$, $x^7 \pm \psi^7$, $x^9 \pm \psi^9$, $243\alpha^5 \pm \beta^5$
16) $81x^2 + \psi^2 + 4\omega^2 + 18x\psi - 36x\omega - 4\psi\omega$
17) $9\alpha^2x^4 + \psi^2\beta^4 + 1 - 6\alpha\beta^2x^2\psi - 6\alpha x^2 + 2\beta^2\psi$
18) $8x^3 + 1 + 12x^2 + 6x$, 19) $\alpha^3x^3 - 6\alpha^2x^2\psi + 12\alpha x\psi^2 - 8\psi^3$
20) $27x^3\psi^3 - 8\alpha^3 - 54\alpha x^2\psi^2 + 36\alpha^2x\psi$
21) $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$, 22) $3x^3 + x^2 - 6x + 8$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

120) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις :

1) $\alpha^{16}-\beta^{16}$, 2) $x^{4\mu}-\psi^{4\nu}$, $(\mu, \nu \in N)$, 3) $x^3\psi^{4\nu+5}-\psi^5x^{4\mu+3}$, $(\mu, \nu \in N)$,

4) $\beta\gamma^2+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\beta^2\gamma-\alpha\gamma^2$, 5) $(x-\alpha)^2+12\alpha^2(x-\alpha)+36\alpha^4$

6) $x^2-\psi^2-\omega^2+2\psi\omega+x+\psi-\omega$, 7) $(x+\psi)^2-1-(x+\psi+1)x\psi$

8) $\alpha^2\beta^{2\nu}+2\alpha^{\mu+1}\beta^{\nu+1}+\alpha^{2\mu}\beta^2$, $(\nu, \mu \in N)$

9) $16\alpha^{2\mu-2}\beta^{8\nu}-24\alpha\beta^2+9\alpha^{4-2\mu}\beta^{4-8\nu}$, $(\mu, \nu \in N)$

10) $\alpha^{2\nu}+\beta^{2\mu}\pm 2\alpha^{\nu}\beta^{\mu}-\gamma^{2\lambda}$, $(\mu, \nu, \lambda \in N)$

11) $x^{4\nu}+4x^{2\nu}\psi^{2\mu}+4\psi^{4\mu}-\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta-1$, $(\mu, \nu \in N)$

12) $x^{4\nu}+x^{2\nu}\psi^{2\mu}+\psi^{4\mu}$, $(\mu, \nu \in N)$, 13) $\alpha^4x^{4\nu}\psi^{4\mu}+64\beta^4$, $(\mu, \nu \in N)$

14) $\alpha^6-\beta^9$, 15) $\alpha^9-27\alpha^6-\alpha^3+27$, 16) $x^6-(\alpha^3-1)x^3-\alpha^3$

17) $x^{3\nu}+\psi^{3\mu}+3x^{\nu}\psi^{\mu}(x^{\nu}+\psi^{\mu})$, $(\mu, \nu \in N)$

18) $125x^{3\nu+3}-75x^{2\nu+2}+15x^{\nu+1}-1$, 19) $\dfrac{x^3}{27}-\dfrac{x^2}{3}+x-1$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

47. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ταυτότης καλεῖται ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ἐκ τῶν ὁποίων ἐξαρτῶνται.*

Τὰ δύο μέλη τῆς ταυτότητος λέγονται ἰσοδύναμοι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.

Εἰς μίαν τοιαύτην ἰσότητα τὸ σύμβολον (=) ἀντικαθίσταται συνήθως, χωρὶς τοῦτο νὰ εἶναι ἀπολύτως ἀπαραίτητον, μὲ τὸ σύμβολον ($\equiv$) καὶ τὸ ὁποῖον διαβάζεται : «ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ». Ἤτοι γράφομεν $\varphi(x, \psi, \omega, \ldots) \equiv f(x, y, \omega, \ldots)$.

Ἐὰν ἡ ἰσότης αὕτη ἰσχύῃ μόνον δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν $x, \psi, \omega, \ldots$ καὶ δὲν ἰσχύῃ διὰ καθε τιμὴν τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν, τότε δὲν εἶναι ταυτότης.

Ἡ χρησιμότης τῶν ταυτοτήτων εἶναι πολὺ μεγάλη. Δι' αὐτῶν διευκολύνεται πολὺ ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός· ἤτοι ὁ μετασχηματισμὸς τῶν παραστάσεων εἰς ἁπλουστέρας περισσότερον ἐπωφελεῖς διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ θέματα.

48. ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΙΣ (ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ΤΗΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ) ΜΙΑΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΟΣ.

Ἡ ἐργασία ἐπαληθεύσεως μιᾶς ταυτότητος συνίσταται εἰς διαδοχικοὺς καταλλήλους μετασχηματισμούς, τοὺς ὁποίους θὰ ἐκτελέσωμεν εἰς τὸ ἕν μέλος διὰ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ ἄλλο. Κατάλληλοι δὲ μετασχηματισμοὶ εἶναι : 1) ἐκτέλεσις τῶν πράξεων, 2) ἀντικατάστασις παραστάσεων μὲ τὰς ἐκ ταυτότητος ἴσας αὐτῶν, 3) ἀνάλυσις ὅρων εἰς ἄθροισμα ἄλλων, 4) πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ταυτοτήτων γνωστῶν κατὰ μέλη, 5) προσθαφαίρεσις ὅρων ἢ παραστάσεων κ.λ.π.

Πολλάκις ὑποθέτομεν τὴν ταυτότητα ἀληθῆ καὶ ἀφοῦ ἐπιφέρομεν ὡρισμένας ἁπλοποιήσεις, καταλήγομεν εἰς ἰσότητα ἐκ τῶν προτέρων ἀληθῆ. Ἔπειτα, ἀκολουθοῦντες ἀντιστρόφους μετασχηματισμούς, καταλήγομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ταυτότητα. Καλὸν θὰ εἶναι ὅμως τοῦτο νὰ ἀποφεύγεται, διότι ἄλλως ἀπαιτεῖται προσοχὴ εἰς τὴν χρησιμοποίησιν τῶν μετασχηματισμῶν, οἱ ὁποῖοι δέον νὰ εἶναι ὅλοι ἀντιστρεπτοί.

Ἐὰν ἔχωμεν πρὸς ἐπανάληψιν ταυτότητα ὑπὸ περιορισμούς, ἀκολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν διαδικασίαν, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων πρέπει νὰ ἔχωμεν πάντοτε ὑπ' ὄψιν μας τοὺς περιορισμούς.

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ γνωρίσωμεν ταυτότητας, ἐκτὸς τῶν ἤδη γνωστῶν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, καὶ ἄλλας τὰς ὁποίας οἱ μαθηταὶ δέον νὰ ἀπομνημονεύσουν.

49. ΑΞΙΟΜΝΗΜΟΝΕΥΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ.

Α) Γνωσταὶ ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως

$$(\alpha \pm \beta)^2 \equiv \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \equiv (\alpha \pm \beta)^2 \mp 2\alpha\beta$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \equiv \alpha^2 - \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 \equiv (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$(\alpha \pm \beta)^3 \equiv \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3 \equiv \alpha^3 \pm \beta^3 \pm 3\alpha\beta(\alpha \pm \beta) \Leftrightarrow$$

$$\alpha^3 + \beta^3 \equiv (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \equiv (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\alpha^3 - \beta^3 \equiv (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta) \equiv (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 \equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \equiv (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

$$(x + \alpha)(x + \beta) \equiv x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$(x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma) \equiv x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x + \alpha\beta\gamma$$

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \equiv x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma$$

Ταυτότης τῆς διαιρέσεως

$$\Delta(x) \equiv \delta(x) \cdot \Pi(x) + U(x) \Leftrightarrow \frac{\Delta(x)}{\delta(x)} \equiv \Pi(x) + \frac{U(x)}{\delta(x)} \qquad \delta(x) \neq 0,$$

ὅπου $\Delta(x)$, $\delta(x)$, $\Pi(x)$, $U(x)$ ἀντιστοίχως διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως.

Β) Ἄλλαι ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες.

1) Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2$

Ἔχομεν : $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 \equiv (\alpha + \beta + \gamma + \delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$$\equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta$$

$$\equiv \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta)$$

Γενικῶς $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)^2 \equiv (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) \equiv$
$\equiv \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu) + \ldots + \alpha_\nu(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$
$+ \alpha_\nu) \equiv \alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \ldots + \alpha^2_\nu + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_1\alpha_\nu) + 2(\alpha_2\alpha_3 +$
$+ \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_\nu) \ldots + 2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu \equiv \alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \ldots + \alpha_\nu^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 +$
$\ldots + \alpha_1\alpha_\nu + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_\nu + \ldots + \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)$

Οὕτω : $\boxed{\begin{matrix}\forall \alpha, i = 1, 2, 3, \ldots, \nu \\ i \neq j, j = 2, 3, \ldots, \nu\end{matrix} : (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu)^2 \equiv \Sigma\alpha_i{}^2 + 2\Sigma\alpha_i\alpha_j}$

Ἤτοι : Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου μὲ ν ὅρους ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀλγ. ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ὅρων του λαμβανομένων ἀνὰ δύο, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Παραδείγματα :

α) $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2+(-\gamma)^2+(-\delta)^2+2\alpha\beta+2\alpha(-\gamma)+2\alpha(-\delta)+$
$+2\beta(-\gamma)+2\beta(-\delta)+2(-\gamma)(-\delta) \equiv \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2(\alpha\beta-\alpha\gamma-$
$-\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta+\gamma\delta)$

β) $(\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)^2 \equiv \alpha^2x^6+\beta^2x^4+\gamma^2x^2+\delta^2+2(\alpha\beta x^5+\alpha\gamma x^4+\alpha\delta x^3+$
$+\beta\gamma x^3+\beta\delta x^2+\gamma\delta x)$.

2) Ὁ κύβος τριωνύμου

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha+\beta+\gamma)^3$.

Ἔχομεν : $(\alpha+\beta+\gamma)^3 \equiv (\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)$
$\equiv (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$
$\equiv \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\gamma+3\alpha^2\beta+3\beta^2\alpha+3\beta^2\gamma+3\gamma^2\alpha+3\gamma^2\beta+6\alpha\beta\gamma$
$\equiv \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha^2\gamma+\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma)$

(βλ. περ. 8α ἀναλύσεως) $\equiv \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

Οὕτω : Ὁ κύβος τριωνύμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ 3πλάσιον τοῦ γινομένου τῶν ἀλγεβρ. ἀθροισμάτων τῶν ὅρων του λαμβανομένων ἀνὰ δύο, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Παραδείγματα : Νὰ εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα :

α) $(1+x+x^2)^3 \equiv 1^3+x^3+x^6+3(1+x)(x+x^2)(1+x^2) \equiv 1+x^3+x^6+$
$+3x+3x^2+3x^2+3x^4+3x^4+3x^5+6x^3 \equiv x^6+3x^5+6x^4+$
$+7x^3+6x^2+3x+1$

β) $(2x-3\psi+5)^3 \equiv 8x^3-27\psi^3+125+3(2x-3\psi)(2x+5)(5-3\psi) \equiv$
$\equiv 8x^3-27\psi^3+125-36x^2\psi+60x^2+54x\psi^2+135\psi^2+150x-225\psi$

3) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)}$$

Ἔχομεν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv$
$\equiv (\alpha+\beta)^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \equiv$
$\equiv (\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha+\beta)^2-(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2]-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \equiv$
$\equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha \equiv \frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-$
$-2\beta\gamma-2\gamma\alpha) \equiv \frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

ἄρα ἔχομεν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+$
$+(\gamma-\alpha)^2]$

Παραδείγματα : α) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις $\alpha^3+8\beta^3+27\gamma^3-18\alpha\beta\gamma$.

Λύσις : Ἔχομεν $\alpha^3+(2\beta)^3+(3\gamma)^3-3\cdot\alpha\cdot 2\beta\cdot 3\gamma \equiv (\alpha+2\beta+3\gamma)(\alpha^2+$
$+4\beta^2+9\gamma^2-2\alpha\beta-6\beta\gamma-3\alpha\gamma)$

β) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $1-\alpha^3+(\alpha+1)^3+3\alpha(\alpha+1) \equiv 2(3\alpha^2+3\alpha+1)$

Λύσις : Ἔχομεν $1-\alpha^3+(\alpha+1)^3+3\alpha(\alpha+1)\equiv 1^3+(-\alpha)^3+(\alpha+1)^3-$
$-3\cdot 1(-\alpha)(\alpha+1)\equiv(1-\alpha+\alpha+1)[1+\alpha^2+(\alpha+1)^2-1\cdot(-\alpha)-1\cdot(\alpha+$
$+1)-(-\alpha)(\alpha+1)]\equiv 2(1+\alpha^2+\alpha^2+1+2\alpha+\alpha-\alpha-1+\alpha^2+\alpha)\equiv$
$\equiv 2(3\alpha^2+3\alpha+1)$

4) Ταυτότητες τοῦ Lagrange

α) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $(\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2)(\beta_1{}^2+\beta^2{}_2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2\equiv$
$\equiv(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2$

Λύσις: Ἔχομεν : $(\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2)(\beta^2{}_1+\beta^2{}_2)-(\alpha_1\beta_1+\beta_2\alpha_2)^2\equiv\alpha^2{}_1\beta^2{}_1+$
$+\alpha^2{}_1\beta^2{}_2+\alpha^2{}_2\beta^2{}_1+\alpha^2{}_2\beta^2{}_2-\alpha^2{}_1\beta^2{}_1-2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2-\alpha^2{}_2\beta^2{}_2\equiv\alpha^2{}_1\beta^2{}_2+\alpha^2{}_2\beta^2{}_1-$
$-2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\equiv(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2\equiv\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2$. Τὸ σύμβολον $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}$ καλούμενον ὁρίζουσα βας τάξεως ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν.

β) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2+\alpha^2{}_3)(\beta^2{}_1+\beta^2{}_2+\beta^2{}_3)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2\equiv$$
$$\equiv\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2$$

Ἡ ἀπόδειξις νὰ γίνῃ ὑπὸ τῶν μαθητῶν

Σημ. Διὰ τὸν σχηματισμὸν τῶν ὁριζουσῶν τοῦ β' μέλους θεωροῦμεν τὰς τριάδας τῶν ἀριθμῶν $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ καὶ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ εἰς δύο στήλας ὡς ὁ πίναξ. $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}$

γ) Γενικῶς θεωροῦμεν τὰς νιάδας τῶν ἀριθμῶν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu)$ καὶ $(\beta_1, \beta_2, \ldots\beta_\nu)$ καὶ τὰς ὁριζούσας βας τάξεως, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τοῦ πίνακος τῶν δύο στηλῶν. Οὕτως ἔχομεν : $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\\ \vdots & \vdots\\ \alpha_\nu & \beta_\nu\end{vmatrix}$

$$(\alpha^2{}_1+\alpha^2{}_2+\ldots+\alpha^2{}_\nu)(\beta_1{}^2+\beta^2{}_2+\ldots\beta^2{}_\nu)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2\equiv$$
$$\equiv\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_\nu & \beta_\nu\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\ldots+\begin{vmatrix}\alpha_{\nu-1} & \beta_{\nu-1}\\ \alpha_\nu & \beta_\nu\end{vmatrix}^2$$

Ἡ ταυτότης αὐτὴ λέγεται ταυτότης τοῦ Lagrange, ἡ δὲ χρησιμότης της εἰς τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν εἶναι μεγάλη. Οἱ μαθηταὶ δύνανται νὰ κάνουν τὰς παρατηρήσεις των, ὡς πρὸς τὸν τρόπον σχηματισμοῦ αὐτῆς.

Παραδείγματα : α) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $(\alpha^2+1)(x^2+1)-(\alpha x+1)^2=$
$=(\alpha-x)^2$

Λύσις: Ἔχομεν : $(\alpha^2+1^2)(x^2+1^2)-(\alpha x+1)^2=\begin{vmatrix}\alpha & x\\ 1 & 1\end{vmatrix}^2=(\alpha-x)^2$

β) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι : $(\alpha^2+1)(x^2+\psi^2+1)-(\alpha x+1)^2=\alpha^2\psi^2+(\alpha-x)^2+\psi^2$

Λύσις : Ἔχομεν : $(\alpha^2+1)(x^2+\psi^2+1)-(\alpha x+1)^2=(\alpha^2+0^2+1^2)\cdot$

$$\cdot(x^2+\psi^2+1)-(\alpha x+0\psi+1)^2=\begin{vmatrix}\alpha & 0\\ x & \psi\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ x & 1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}0 & 1\\ \psi & 1\end{vmatrix}^2=$$

$$=(\alpha\psi-0x)^2+(\alpha-x)^2+(01-\psi\cdot 1)^2=\alpha^2\psi^2+(\alpha-x)^2+\psi^2$$

Σημ. Τοὺς ἐλλείποντας τυχὸν ὅρους συμπληρώνομεν μὲ μηδενικούς.

5) Ταυτότης τοῦ Newton — Διώνυμον τοῦ Newton

α) Εἰς τὰς γνωστὰς ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως ταυτότητας συμπεριελήφθησαν καὶ αἱ ἀκόλουθοι :

$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)\equiv x^2\pm(\alpha_1+\alpha_2)x+\alpha_1\alpha_2$

$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)(x\pm\alpha_3)\equiv x^3\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)x\pm$
$\pm\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

Ἐπίσης εὐκόλως μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι :

$(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)(x\pm\alpha_3)(x\pm\alpha_4)\equiv x^4\pm(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)x^3+(\alpha_1\alpha_2+$
$+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4)x^2\pm(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4)x+$
$+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$

Συνεχίζοντες οὕτω, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν γενικὴν ἔκφρασιν τῆς ταυτότητος τοῦ Newton, τῆς ὁποίας ἡ πλήρης ἀπόδειψις θὰ γίνη εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Οὕτω: $(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)(x\pm\alpha_3)\dots(x\pm\alpha_\nu)\equiv x^\nu\pm(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\nu)x^{\nu-1}+$
$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_2\alpha_\nu+\dots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2}\pm(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+$
$+\dots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\nu+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\dots+\alpha_1\alpha_3\alpha_\nu+\dots+\alpha_1\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\dots+$
$+\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-3}+\dots+(-1)^{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_{\nu-1}+\dots)x+(-1)^\nu\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_\nu$

Ἐὰν δὲ χάριν συντομίας θέσωμεν

Σ_1 τὸ ἄθροισμα τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots\alpha_\nu$ καὶ

$\Sigma_2,\Sigma_3,\dots,\Sigma\kappa$ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν $\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_\nu$, λαμβανομένων ἀντιστοίχως ἀνὰ δύο, ἀνὰ τρεῖς,..., ἀνὰ κ καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{(x\pm\alpha_1)(x\pm\alpha_2)\dots(x\pm\alpha_\nu)\equiv x^\nu\pm\Sigma_1x^{\nu-1}+\Sigma_2x^{\nu-2}\pm\dots+(-1)^{\nu-1}\Sigma_{\nu-1}x+(-1)^\nu\Sigma_\nu}$$

β) Ἐὰν εἰς τὰς προηγουμένας ταυτότητας ἔχωμεν $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_\nu\neq 0$

τότε : $(x\pm\alpha)^2\equiv x^2\pm 2\alpha x+\alpha^2$

$(x\pm\alpha)^3\equiv x^3\pm 3x^2\alpha+3x\alpha^2\pm\alpha^3$

$(x\pm\alpha)^4\equiv x^4\pm 4x^3\alpha+6x^2\alpha^2\pm 4\chi\alpha^3+\alpha^4$

$(x\pm\alpha)^5\equiv x^5\pm 5x^4\alpha+10x^3\alpha^2\pm 10x^2\alpha^3+5x\alpha^4\pm\alpha^5$ κ.λ.π.

Ἡ γενικὴ ἔκφρασις τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου $(x\pm\alpha)^\nu$, $\nu\in N$, τὸ ὁποῖον καλεῖται διώνυμον τοῦ Newton, θὰ δοθῆ εἰς ἀνωτέραν τάξιν. Ἐνταῦθα περιοριζόμεθα εἰς τὰς ἀκολούθους παρατηρήσεις διὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀναπτύγματος.

Παρατηρήσεις :

α) Τὸ ἀνάπτυγμα εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον, ὡς πρὸς τὰ x καὶ α, βαθμοῦ ἴσου πρὸς τὸν βαθμὸν τοῦ διωνύμου, ἔχον πλῆθος ὅρων ἴσον πρὸς τὸν βαθμόν του ηὐξημένον κατὰ 1.

β) Οἱ ἐκθέται τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμενοι, ἐνῷ τοῦ α αὐξανόμενοι

γ) τοῦ ἀναπτύγματος $(x+\alpha)^\nu$ ἅπαντες οἱ ὅροι ἔχουν πρόσημον θετικὸν ἐνῷ τοῦ $(x-\alpha)^\nu$ ἐναλλὰξ θετικὸν καὶ ἀρνητικόν.

δ) Ἕκαστος συντελεστὴς προκύπτει, ἂν λάβωμεν τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ x τοῦ προηγουμένου ὅρου καὶ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὴν τάξιν τοῦ προηγουμένου ὅρου. Οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους συντελεσταὶ εἶναι ἴσοι.

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+\alpha)^9$.

Ἔχομεν : $(x+\alpha)^9 = x^9 + 9x^8\alpha + 36x^7\alpha^2 + 84x^6\alpha^3 + 126x^5\alpha^4 + 126x^4\alpha^5 +$
$+ 84x^3\alpha^6 + 36x^2\alpha^7 + 9x\alpha^8 + \alpha^9$

Παρατηροῦμεν ὅτι : α) τὸ ἀνάπτυγμα εἶναι ὁμογενὲς 9ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x,α.

β) Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι 10

γ) Εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ κατὰ τὰς κατιούσας τοῦ x

δ) Ὁ συντελεστὴς π.χ. 126 λαμβάνεται ἐκ τοῦ $\frac{84 \cdot 6}{4} = 126$

50. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΑΣ (Περιορισμοὶ εἰς οὓς ὑπόκεινται τὰ γράμματα)

1) $\forall\, \alpha, \beta, \gamma : \alpha+\beta+\gamma = 0 \vee \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, τότε ἐκ τῆς ταυτότητος
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ λαμβάνομεν
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv 0 \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

Ἐὰν δὲ $\alpha=\beta=\gamma$, τότε $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = \alpha^3+\alpha^3+\alpha^3 = 3\alpha^3 = 3\alpha\alpha\alpha = 3\alpha\beta\gamma$

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = 0 \Leftrightarrow$
$1/2\,(\alpha+\beta+\gamma)\,[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2] = 0$ (βλ. ταυτότητα 3)

Ἐκ ταύτης ἕπεται $\alpha+\beta+\gamma=0 \vee (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$

Ἕκαστος τῶν ὅρων τῆς παραστάσεως $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικός. Συνεπῶς, ἂν $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0 \Rightarrow (\alpha-\beta)^2 =$
$=0,\ (\beta-\gamma)^2=0,\ (\gamma-\alpha)^2=0 \Rightarrow \alpha-\beta=0,\ \beta-\gamma=0,\ \gamma-\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma$

Δυνατὸν νὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta+\gamma=0 \wedge (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$ ὁπότε $\alpha=\beta=\gamma=0$

Ὥστε : $\boxed{\forall\, \alpha, \beta, \gamma : \alpha+\beta+\gamma = 0 \vee \alpha=\beta=\gamma \Leftrightarrow \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma}$

Ἡ χρησιμότης τῆς ταυτότητος αὐτῆς φαίνεται ἐκ τῶν παραδειγμάτων ποὺ ἀκολουθοῦν.

Παραδείγματα: α) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $(3\alpha-\beta)^3 +$
$+(3\beta-\gamma)^3+(3\gamma-\alpha)^3$, ἂν εἶναι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Λύσις: Ἐπειδὴ $(3\alpha-\beta)+(3\beta-\gamma)+(3\gamma-\alpha) = 2(\alpha+\beta+\gamma) = 2\cdot 0 =$
$=0$, ἕπεται ὅτι $(3\alpha-\beta)^3+(3\beta-\gamma)^3+(3\gamma-\alpha)^3 = 3\,(3\alpha-\beta)\,(3\beta-\gamma)\,(3\gamma-\alpha)$

β) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις $(2\tau-3\alpha)^3+(2\tau-3\beta)^3+(2\tau-3\gamma)^3$

Λύσις: Ἐπειδὴ $(2\tau-3\alpha)+(2\tau-3\beta)+(2\tau-3\gamma)=6\tau-3(\alpha+\beta+\gamma)=6\tau-3\cdot 2\tau=6\tau-6\tau=0$, ἕπεται ὅτι $(2\tau-3\alpha)^3+(2\tau-3\beta)^3+(2\tau-3\gamma)^3=3(2\tau-3\alpha)(2\tau-3\beta)(2\tau-3\gamma)$

2) $\forall \alpha,\beta,\gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha=0 \vee \beta=0 \vee \gamma=0 \Leftrightarrow (\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2=\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$

Οἱ μαθηταί, χρησιμοποιοῦντες τὴν ταυτότητα $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2 \equiv \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$, νὰ κάμουν τὴν ἀπόδειξιν.

3) $\forall \alpha,\beta,\gamma : \alpha+\beta+\gamma=0 \vee \alpha+\beta=\gamma \vee \beta+\gamma=\alpha \vee \gamma+\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2)$

Οἱ μαθηταί, ἀφοῦ ἐπαληθεύσουν τὴν ταυτότητα τοῦ de Moivre $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2 \equiv (\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$, δύνανται νὰ κάμουν τὴν ἀπόδειξιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

121) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ταυτοτήτων :

1) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 \equiv \alpha\beta$

2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \equiv \dfrac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$

3) $(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2+(\mu+\nu)(\mu-\nu)=\mu(2\nu+\mu)+\nu(2\mu-\nu)$

4) $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3 \equiv 2\beta(\beta^2+3\alpha^2)$

5) $(\alpha-x)(\beta+x)(\gamma-x) \equiv (x-\alpha)(x+\beta)(x-\gamma)$

122) Νὰ εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα :

1) $(4x^3-3x^2-2x+1)^2$, 2) $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}+2\right)^2$

3) $(\alpha x+\beta\psi+x\psi+1)^2$, 4) $(\alpha^3-\alpha^2x+\alpha x^2-x^3)^2$

123) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις : $(2x+3\psi-\omega)^2-(x-3\psi+2\omega)^2-(x-3\psi-2\omega)^2$

124) Νὰ εὑρεθοῦν τ' ἀναπτύγματα :

1) $(\alpha^2-\alpha x+x^2)^3$, 2) $(\alpha^{2\nu}+\alpha^\nu+1)^3$

125) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξεγόμενον τῶν πράξεων :

$$(x+\psi+\omega)^3-(x-\psi+\omega)^3-(x+\psi-\omega)^3-(\psi+\omega-x)^3$$

126) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων : $8x^3-27\psi^3-64\omega^3-72x\psi\omega$

127) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha-\beta)^3-\alpha^3+(\alpha+\beta)^3+3\alpha(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) \equiv \alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$$

128) Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ταυτότητος Lagrange :

1) $(\alpha^2+x^2+\psi^2)(x^2+\alpha^2+1)-(2\alpha x+\psi)^2 \equiv (\alpha^2-x^2)^2+(\alpha-x\psi)^2+(x-\alpha\psi)^2$

2) $(x^2+\psi^2+z^2)^2-(x\psi+\psi z+xz)^2 \equiv (x^2-\psi z)^2+(\psi^2-xz)^2+(z^2-x\psi)^2$

3) $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2+\omega^2+1)-(\alpha x+\beta\omega)^2 \equiv \alpha^2\psi^2+\beta^2\psi^2+\alpha^2+\beta^2+(\alpha\omega-\beta x)^2$

129) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα ἀναπτύγματα :

$(2x\pm\psi)^4$, $(x\pm 3)^6$, $(\alpha x^2+1)^5$, $(\alpha\beta\gamma+2x)^7$, $(\alpha^2-x^2)^7$

130) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις : 1) $(x-\psi)^6+(x+\psi)^6-(x^3+\psi^3)(x^3-\psi^3)$

2) $(2x^2-1)^4-(3x+2)^8$, 3) $3(x-3\psi)^4-5(x^2-5\psi^2)^2$

131) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ταυτοτήτων :

1) $$\left.\begin{aligned}&(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3\equiv 3\alpha\beta\,(\alpha+\beta)\\&(\alpha+\beta)^5-\alpha^5-\beta^5\equiv 5\alpha\beta\,(\alpha+\beta)\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\\&(\alpha+\beta)^7-\alpha^7-\beta^7\equiv 7\alpha\beta\,(\alpha+\beta)\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2\end{aligned}\right\}\ \text{Ταυτότητες τοῦ Gauchy}$$

2) $(x+\psi)^4+x^4+\psi^4\equiv 2\,(x^2+x\psi+\psi^2)^2$

3) $(2x+\beta)^5-32x^5-\beta^5\equiv 10\beta x\,(2x+\beta)\,(4x^2+2x\beta+\beta^2)$

4) $(3\alpha-2\beta)^5-243\alpha^5+32\beta^5\equiv 30\alpha\beta\,(2\beta-3\alpha)\,(9\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2)$

132) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ταυτότης τοῦ De Moivre

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\gamma^2\equiv$$
$$\equiv(\alpha+\beta+\gamma)\,(\alpha+\beta-\gamma)\,(\alpha-\beta+\gamma)\,(\alpha-\beta-\gamma)$$

133) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις

$$(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3$$

134) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παρ. $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3$

135) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\kappa+\lambda+\mu$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$(\alpha-\kappa)^3+(\beta-\lambda)^3+(\gamma-\mu)^3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

136) Ἐὰν $\alpha=7x+3\psi+6\omega$, $\beta=6x+2\psi+6\omega$, $\gamma=3x+3\psi+2\omega$ καὶ $x^2=\psi^2+\omega^2$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$

137) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀναπτύγματα τῶν :

1) $(\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu)^2-(\alpha^\nu-\beta^\nu-\gamma^\nu)^2+(-\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu)^2$

2) $(\alpha x^\nu+\beta\psi^\mu)^2+(\alpha x^\nu-\beta\psi^\mu+1)^2-(\alpha\psi^\mu-\beta x^\nu)^2$

138) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3-3\,(\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta)\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)-$ $-\delta^3\equiv(\alpha+\beta+\gamma)^3$

139) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῆς παραστάσεως $(\alpha-\beta+\gamma)^3-\alpha^3+\beta^3-\gamma^3$ ὑπὸ μορφὴν γινομένου

140) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι : $\alpha^9+\alpha^3+1-3\alpha^4\equiv(\alpha-1)\,(\alpha^3+\alpha+1)$

$(\alpha^5+\alpha^4-\alpha^2-1)\equiv(\alpha^3+\alpha+1)\,(\alpha-1)^2\,(\alpha^4+2\alpha^3+2\alpha^2+\alpha+1)$

141) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀλγ. παράστασις $(x^2+\psi^2+\omega^2)\,(\alpha^2+x^2)-(\alpha x+x\psi)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ (δηλ. λαμβάνει $\forall\alpha, x, \psi, \omega\in R$ μόνον θετικὰς ἢ μηδενικὰς τιμάς).

142) Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\in R\wedge\beta_1\cdot\beta_2\neq 0$ καὶ $(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2)\,(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2)=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=\dfrac{\alpha_2}{\beta_2}$

143) Ἐὰν α_i, $\beta_i\in R$, $i=1, 2, 3, \ldots, \nu$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$(\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\ldots+\alpha_\nu{}^2)\,(\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\ldots+\beta_\nu{}^2)\geqslant(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$

(Αὐτὴ καλεῖται ἀνισότης τοῦ Schwarz). Ὑπὸ ποίας συνθήκας εἶναι μόνον ἰσότης;

144) Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ταυτότητες

α) $(x+\psi)^3+(\psi+\omega)^3+(\omega+x)^3-3\,(x+\psi)\,(\psi+\omega)\,(\omega+x)\equiv 2\,(x^3+\psi^3+$ $+\omega^3-3x\psi\omega)$

β) $(x^2-\psi\omega)^3+(\psi^2-\omega x)^3+(\omega^2-x\psi)^3-3\,(x^2-\psi\omega)\,(\psi^2-\omega x)\,(\omega^2-x\psi)\equiv$ $\equiv(x^3+\psi^3+\omega^3-3x\psi\omega)^2$

145) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$A=(\alpha\kappa+\beta\lambda)^3+(\beta\kappa+\gamma\lambda)^3+(\gamma\kappa+\alpha\lambda)^3$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΡΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

51. Τὴν ἔννοιαν τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος καὶ τὰς πράξεις ἐπ' αὐτῶν ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν, δι' ὃ καὶ ἐκθέτομεν τὰς ἐννοίας ταύτας μόνον περιληπτικῶς.

Πᾶσα συνάρτησις $\psi = \frac{A}{B} \in R$, ὅπου A καὶ B ἀκέραια πολυώνυμα μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καὶ $B \neq 0$, λέγεται **ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα.**

Ἓν ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἶναι ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ μιᾶς ρητῆς κλασματικῆς παραστάσεως. Ὁ παρονομαστὴς B τοῦ ρητοῦ ἀλγ. κλάσματος δυνατὸν νὰ εἶναι σταθερά, ὁπότε τὸ κλάσμα εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον. Συνεπῶς ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νὰ θεωρηθῇ ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα.

Αἱ συναρτήσεις $\frac{4\times\psi}{x+\psi}$, $\frac{x^2+1}{x^2-1}$, $\frac{x^2+2x\psi+\psi^2}{x^2+x\psi}$, $\frac{x^3+\psi^3+\omega^3-3x\psi\omega}{x^2+\psi^2+\omega^2}$ εἶναι ρητὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{A}{B}$ πρέπει $B \neq 0$. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐξαιροῦνται αἱ τιμαί, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν. Οὕτω τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$, $x \in \mathbf{R}$ καὶ $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα, εἶναι τὸ σύνολον

$$\Sigma = \mathbf{R} - \{ x/x \in \mathbf{R} \wedge \varphi_2(x) = 0 \}$$

Συμβολίζομεν δέ : $f : x \in \Sigma \rightarrow f(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} \in R$

Ἐπίσης τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως $f(x,\psi) = \frac{\varphi_1(x,\psi)}{\varphi_2(x,\psi)}$, $x,\psi \in \mathbf{R}$ καὶ $\varphi_1(x,\psi)$, $\varphi_2(x,\psi)$ ἀκέραια πολυώνυμα, εἶναι τὸ σύνολον

$$\Sigma = \mathbf{R}^2 - \{ (x,\psi) \mid (x,\psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \varphi_2(x,\psi) = 0 \}$$

Συμβολίζομεν δέ : $f : (x,\psi) \in \Sigma \rightarrow f(x,\psi) = \frac{\varphi_1(x,\psi)}{\varphi_2(x,\psi)} \in \mathbf{R}$

Σημείωσις $R^2 = R \times R$ (Καρτεσιανὸν γινόμενον)
$\wedge =$ καὶ (σύμβολον λογικῆς συζεύξεως)

Παραδείγματα : α) τῆς συναρτήσεως $\left(x, \psi = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$, πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον $\Sigma = \mathbf{R} - \{2, -2\}$

β) τῆς συναρτήσεως $\left(x,\ \psi = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x \in \mathbf{R} \wedge \gamma \neq 0$ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι

τὸ σύνολον $\Sigma = \mathrm{R} - \{ x / x \in \mathrm{R} \wedge \gamma x + \delta = 0 \} = \mathbf{R} - \left\{ -\frac{\delta}{\gamma} \right\}$

52. ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ $\psi = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$, φ_1, φ_2 ἀκερ. πολυώνυμα.

α) Τὸ κλάσμα τοῦτο δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν $\varphi_1 \in \mathbf{R} \wedge \varphi_1 \neq$ $\neq 0 \wedge \varphi_2 = 0$, διότι $\varphi_2 \cdot \psi = 0 \cdot \psi = 0 \neq \varphi_1$

β) Ἐὰν $\varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 \neq 0 \Leftrightarrow \forall \varphi_2 \neq 0 \in \mathrm{R} : \psi = 0$

γ) Ἐὰν $\varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0$ τὸ κλάσμα ψ εἶναι ἀπροσδιόριστον ἢ ἀόριστον.

Εἰς ἄλλην τάξιν θὰ δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο δύναται εἰς περιπτώσεις τινὰς νὰ ἔχῃ μίαν καὶ μόνον τιμήν.

53. ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Δύο ἢ περισσότερα ἀκέραια πολυώνυμα ὀνομάζονται πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν εἶναι μία σταθερὰ $C \neq 0$. Συνεπῶς τὰ πηλίκα ἀκεραίων πολυωνύμων διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα πρῶτα πρὸς ἄλληλα καὶ ἀντιστρόφως.

Ἁπλοποίησις ρητοῦ κλάσματος

Ἐὰν πολ/σωμεν τοὺς ὅρους ἑνὸς ρητοῦ κλάσματος $\psi = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἀκέραιον πολυώνυμον φ(x), λαμβάνομεν ἓν ρητὸν κλάσμα $\frac{\varphi_1 \cdot \varphi}{\varphi_2 \cdot \varphi}$ ἰσοδύναμον τοῦ $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ $\forall x \in \Sigma = \mathbf{R} - \{ x / x \in \mathbf{R} \wedge \varphi = 0 \wedge \varphi_2 = 0 \}$

Ἀντιστρόφως, τὸ κλάσμα $\frac{\varphi_1\, \varphi}{\varphi_2\, \varphi}$ εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ $\forall x \in \Sigma$, ὁπότε λέγομεν, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\varphi_1\, \varphi}{\varphi_2\, \varphi}$ ἔχει ἁπλοποιηθῆ εἰς τὸ $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$. Ἡ ἁπλοποίησις λοιπὸν εἶναι δυνατή, ἐφ' ὅσον τοῦ ρητοῦ κλάσματος οἱ ὅροι ἔχουν κοινὸν παράγοντα ἀλγ. παράστασιν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι, διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἓν ρητὸν ἀλγ. κλάσμα, ἀναλύομεν τοὺς ὅρους του εἰς γινόμενον παραγόντων καὶ διαιροῦμεν ἀμφοτέρους διὰ τῶν κοινῶν των παραγόντων, ὑποθέτοντες τούτους δαφόρους τοῦ μηδενός. Ἐὰν ἡ διαίρεσις γίνῃ διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν ὅρων του, τότε λαμβάνεται κλάσμα ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἀρχικὸν ἔχον ὅρους πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

Παραδείγματα: α) Νὰ ἁπλοποιηθῆ τὸ κλάσμα $A = \frac{x^3 - \psi^3}{x^2 - \psi^2}$, $x, \psi \in \mathrm{R}$

Λύσις: Ἔχομεν $A = \frac{x^3 - \psi^3}{x^2 - \psi^2} = \frac{(x - \psi)(x^2 + x\psi + \psi^2)}{(x + \psi)(x - \psi)}$

Ὑποθέτοντες $x - \psi \neq 0$ διαιροῦμεν τοὺς ὅρους τοῦ A διὰ $x - \psi$ καὶ ἔχομεν $B = \frac{x^2 + x\psi + \psi^2}{x + \psi}$. Τὸ κλάσματα A καὶ B εἶναι ἰσοδύναμα διὰ κάθε $(x, \psi) \in \mathbf{R}^2$

ἐκτὸς τῶν ζευγῶν ἐκείνων, τὰ ὁποῖα μηδενίζουν τὴν παράστασιν $x - \psi$.

Σημ. 1) Τὰ κλάσματα Α καὶ Β διὰ $x + \psi = 0$ δὲν ἔχουν ἔννοιαν.

2) Ὁ παράγων $x - \psi$, καλεῖται παράγων τῆς ἀπροσδιοριστίας τοῦ κλάσματος.

β) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ ρητὸν κλάσμα $A = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$, $x \in \mathbf{R}$

Λύσις: Ἔχομεν $A = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{x+1}{x-2}$, $x - 3 \neq 0$.

Τὸ κλάσμα δὲν ἔχει ἔννοιαν διὰ $x = 2$. Ὁ παράγων $x - 3$ εἶναι ὁ παράγων ἀπροσδιοριστίας τοῦ κλάσματος.

Πράξεις ρητῶν ἀλγ. κλασμάτων.

Αἱ πράξεις πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολ/σμὸς καὶ διαίρεσις ἐπὶ τῶν ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων γίνονται ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν γνωστῶν μέχρι τοῦδε κλασμάτων. Οὕτω ἔχομεν:

$$\forall x \in \Sigma = \mathbf{R} - \{x / x \in \mathbf{R} \wedge \varphi = 0\} \Leftrightarrow \frac{p_1}{\varphi} \pm \frac{p_2}{\varphi} = \frac{p_1 \pm p_2}{\varphi}$$

$$\forall x \in \Sigma = \mathbf{R} - \{x / x \in \mathbf{R} \wedge \varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0\} \Leftrightarrow \frac{p_1}{\varphi_1} \pm \frac{p_2}{\varphi_2} = \frac{p_1\varphi_2 \pm p_2\varphi_1}{\varphi_1 \varphi_2}$$

$$\forall x \in \Sigma = \mathbf{R} - \{x / x \in R \wedge \varphi_1 = 0 \wedge \varphi_2 = 0\} \Leftrightarrow \frac{p_1}{\varphi_1} \cdot \frac{p_2}{\varphi_2} = \frac{p_1 p_2}{\varphi_1 \varphi_2}$$

$$\forall x \in \Sigma = \mathbf{R} - \{x / x \in R \wedge \varphi_1 = O \wedge \varphi_2 = O \wedge p_2 = 0\} \Leftrightarrow \frac{p_1}{\varphi_1} : \frac{p_2}{\varphi_2} = \frac{p_1 \varphi_2}{\varphi_1 p_2}$$

Σημ. Ἅπαντα τὰ πολυώνυμα ἐλήφθησαν ὡς ἀκέρ. πολυώνυμα τοῦ x

Παραδείγματα: α) Νὰ γίνῃ ρητὸν κλάσμα ἡ παράστασις

$$A = \frac{2x - 1}{2x} + \frac{2x}{1 - 2x} - \frac{1}{2x(1 - 2x)}, \ x \in \mathbf{R}$$

Λύσις: τὸ κλάσμα $\dfrac{2x - 1}{2x}$ ἔχει ἔννοιαν ὅταν $x \neq 0$, τὸ $\dfrac{2x}{1 - 2x}$ ὅταν $x \neq \dfrac{1}{2}$ καὶ τὸ $\dfrac{1}{2x(1 - 2x)}$ ὅταν $x \neq 0$ καὶ $x \neq \dfrac{1}{2}$, ἄρα διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων πρέπει νὰ ὑποθέσωμεν $x \neq 0$ καὶ $x \neq \dfrac{1}{2}$. Τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρανομαστῶν εἶναι $2x(1 - 2x)$. Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν λαμβάνομεν:

$$A = \frac{(2x - 1)(1 - 2x) + 2x \cdot 2x - 1}{2x(1 - 2x)} = \frac{4x - 2}{2x(1 - 2x)} = \frac{-2(1 - 2x)}{2x(1 - 2x)} = -\frac{1}{x}$$

β) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$A = \frac{x + 2}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4}{4x}, \ (x \neq 2, x \neq 0)$$

Λύσις: $A = \dfrac{(x + 2)(x^2 - 4)}{(x - 2)4x} = \dfrac{(x + 2)(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)4x} = \dfrac{(x + 2)^2}{4x}$

γ) Νὰ γίνουν αἱ πράξεις

$$A = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 2x + 1} : \frac{x^2 + x}{x - 1}, \ (x \neq 1, x \neq -1, x \neq 0)$$

Λύσις: $A = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 2x + 1} : \dfrac{x^2 + x}{x - 1} = \dfrac{x^4 - 1}{(x - 1)^2} \cdot \dfrac{x - 1}{x^2 + x} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)(x-1)}{(x-1)^2 x (x+1)} =$

$$= \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)^2}{(x - 1)^2 (x + 1) x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

54. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

Τὸ ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, ἐὰν περιέχῃ εἰς τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ἑνὸς τουλάχιστον ἐκ τῶν ὅρων του, ρητὸν κλάσμα, λέγεται **σύνθετον κλάσμα,** ἐν ἀντιθέσει πρὸς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὅρους ἀκεραίας ρητὰς ἀλγ. παραστάσεις καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦνται **ἁπλᾶ.**

Ἓν σύνθετον κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν, ἀφοῦ προηγουμένως μετατρέψωμεν τοὺς ὅρους του εἰς ρητὰ ἀλγ. κλάσματα καὶ ἀκολούθως διαιρέσωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ

$$\frac{A}{B} = A : B, \quad (B \neq 0)$$

Παραδείγματα :

α) Νὰ τραπῇ εἰς ἁπλοῦν τὸ σύνθετον κλάσμα $A = \dfrac{\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+1}{\dfrac{x+\psi}{x-\psi}-1}$

Λύσις : Ὁ ἀριθμητής : $\dfrac{x+\psi}{x-\psi}+1 = \dfrac{x+\psi}{x-\psi}+\dfrac{x-\psi}{x-\psi} = \dfrac{2x}{x-\psi}, \ (x \neq \psi)$

Ὁ παρανομαστής : $\dfrac{x+\psi}{x-\psi}-1 = \dfrac{x+\psi}{x-\psi}-\dfrac{x-\psi}{x-\psi} = \dfrac{2\psi}{x-\psi}, \ (x \neq \psi)$

Τὸ σύνθετον κλάσμα : $A = \dfrac{\dfrac{2x}{x-\psi}}{\dfrac{2\psi}{x-\psi}} = \dfrac{2x}{x-\psi} : \dfrac{2\psi}{x-\psi} = \dfrac{x}{\psi}, \ (x \neq \psi, \ \psi \neq 0)$

β) Νὰ τραπῇ εἰς ἁπλοῦν τὸ σύνθετον κλάσμα $A = \dfrac{4x^2+2x}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}, \quad x \neq 0$

Λύσις : Λαμβάνομεν διαδοχικῶς :

Ἡ παράστασις τοῦ παρονομαστοῦ $1+\dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$,

καὶ συνεπῶς τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ συνθέτου $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1+\dfrac{x}{x+1} = \dfrac{x+1+x}{x+1} = \dfrac{2x+1}{x+1}$

Συνεπῶς $A = \dfrac{4x^2+2x}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \dfrac{2x(2x+1)(x+1)}{2x+1} = 2x(x+1), \quad \left(x \neq -\dfrac{1}{2}\right)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

146) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ ἀκόλουθα ρητὰ κλάσματα

1) $\dfrac{39\beta^2\gamma\delta^4}{65\beta\gamma^3\delta^2}$, 2) $\dfrac{165\mu^3\nu^2x^\nu}{132\mu^4\nu^2x^{\nu-1}}$, 3) $\dfrac{147x^{\nu+2}y^\nu}{49x^{\nu+1}y^{\nu-1}}$, 4) $\dfrac{1-x^2}{(1+\alpha x)^2-(\alpha+x)^2}$,

5) $\dfrac{10\alpha^2-7\alpha^3+10-7\alpha}{\alpha^2-2\alpha^3+1-2\alpha}$, 6) $\dfrac{x^2-(\alpha-\beta)x-\alpha\beta}{x^3+\beta x^2+\alpha x+\alpha\beta}$, 7) $\dfrac{15x^3+35x^2+3x+7}{27x^4+63x^3-12x^2-28x}$,

8) $\dfrac{(\alpha+\beta)^5-\alpha^5-\beta^5}{(\alpha+\beta)^3-\alpha^3-\beta^3}$, 9) $\dfrac{xy(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(x^2+y^2)}{xy(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(x^2-y^2)}$, 10) $\dfrac{x^4-\alpha^2x^2-5x^3+5\alpha^2x}{(x-\alpha)^2(x-5)}$,

11) $\dfrac{(x^2-2y\omega-\omega^2-y^2)(\alpha+\beta-\gamma)}{(x+y+\omega)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-2\alpha\gamma)}$

147. Νὰ μετατραπῇ ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων εἰς ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα.

1) $\dfrac{5}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{(x+2)^2}+\dfrac{3}{x+2}$, 2) $\dfrac{\alpha}{(x-\beta)(x-\gamma)}+\dfrac{\beta}{(x-\gamma)(x-\alpha)}+$
$+\dfrac{\gamma}{(x-\alpha)(x-\beta)}$, 3) $\dfrac{\alpha+\beta}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}+\dfrac{\beta+\gamma}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}+\dfrac{\gamma+\alpha}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}$,

4) $\dfrac{x^3-y^3}{x^4-y^4}-\dfrac{x-y}{x^2-y^2}-\dfrac{x+y}{2(x^2+y^2)}$, 5) $\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x-\alpha)}+\dfrac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(x-\beta)}+$
$+\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(x-\gamma)}$, 6) $\dfrac{\alpha^2-\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^2+\alpha\gamma}{(\beta+\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^2+\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma+\beta)}$,

7) $\dfrac{x^4-\alpha^2x^2-5x^3+5\alpha^2x}{(x-\alpha)^2(x-5)}-\dfrac{x^3-\alpha^2x}{x^2+2\alpha x+\alpha^2}-\dfrac{4\alpha^3x-4\alpha^4}{x^3-\alpha^2x-\alpha x^2+\alpha^3}$, 8) $\dfrac{8\gamma^4-27\gamma\delta^3}{4\gamma^2-9\delta^2}\cdot$
$\cdot\dfrac{2(2\gamma+3\delta)}{4\gamma^2+6\gamma\delta+9\delta^2}$, 9) $\dfrac{11x-2\psi}{6x-\psi}:\dfrac{121x^2-4\psi^2}{36x^2-\psi^2}$, 10) $\dfrac{x^2-25}{x+2}:\dfrac{x^2-9x+20}{x^2-4}$,

11) $\dfrac{\alpha^2-x^2}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha x+x^2}\cdot\left(\alpha+\dfrac{\alpha x}{\alpha-x}\right)$, 12) $\dfrac{\mu^2-\mu\nu+\nu^2}{\mu^3-3\mu\nu(\mu-\nu)-\nu^3}\cdot\dfrac{\mu^2-\nu^2}{\mu^3+\nu^3}$,

13) $\left(\dfrac{x^2}{\psi^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{\psi^2}-\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{x}\right)$, 14) $\left(\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4x+3}\cdot\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x+8}\right):\dfrac{(x-2)^2}{x-1}$,

15) $\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\right):\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

148) Νὰ τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἕκαστον τῶν ἀκολούθων συνθέτων κλασμάτων.

1) $\dfrac{\alpha+\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}}{1-\alpha\dfrac{\beta-\alpha}{1+\alpha\beta}}$, 2) $\dfrac{\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}}$, 3) $\dfrac{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}+\beta}{\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\dfrac{2\alpha^2\beta}{\alpha+\beta}-\beta}$,

4) $\dfrac{\left(1-\dfrac{3\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right)}{1+\dfrac{3\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2}}$, 5) $\dfrac{\left(\alpha-\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\alpha-\dfrac{2\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right)}{\alpha\beta+\dfrac{\alpha\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}}$,

6) $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2-\beta^2+\dfrac{2\beta^2}{1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}}$

149) Νὰ τραπῇ εἰς ἁπλοῦν κλάσμα ἑκάστη τῶν παραστάσεων

1) $\dfrac{\dfrac{2\psi\omega}{\psi+\omega}-\psi}{\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\psi-2\omega}}+\dfrac{\dfrac{2\psi\omega}{\psi+\omega}-\omega}{\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega-2\psi}}$, 2) $\dfrac{\dfrac{x^3-\psi^3}{x^2+\psi^2}\cdot\dfrac{x^2-\psi^2}{x^3+\psi^3}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\psi^2}\right)}{\dfrac{(x+\psi)^2-x\psi}{(x-\psi)^2+x\psi}\cdot\left(\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{x}\right)^2}$

3) $\dfrac{\dfrac{x}{\psi}+\dfrac{\psi}{x}-1}{\dfrac{x^2}{\psi^2}+\dfrac{x}{\psi}+1}\cdot\dfrac{1+\dfrac{\psi}{x}}{x-\psi}:\dfrac{1+\dfrac{\psi^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{\psi}-\dfrac{\psi^2}{x}}$

150 Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

1) $\dfrac{x^6 + 2x^3y^3 + y^6}{x^6 - y^6}$, 2) $\dfrac{\alpha^3\beta^3 + \beta^3\gamma^3 + \gamma^3\alpha^3 - 3\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 - \alpha^2\beta\gamma - \alpha\beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma^2}$,

3) $\dfrac{(\alpha-\beta)^3 + (\beta-\gamma)^3 + (\gamma-\alpha)^3}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$

151) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{(x+y)^3 - \omega^3}{x+y-\omega} + \frac{(y+\omega)^3 - x^3}{y+\omega-x} + \frac{(x+\omega)^3 - y^3}{x+\omega-y}$$

152) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha^2}{2\alpha^2+\beta\gamma} + \frac{\beta^2}{2\beta^2+\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2}{2\gamma^2+\alpha\beta} = 1$$

153) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma} = 0$$

154) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις :

1) $\dfrac{x^2-(\mu+\nu)x+\mu\nu}{x^2-(\mu+\kappa)x+\mu\kappa} \cdot \dfrac{x^2-\kappa^2}{x^2-\nu^2}$, 2) $\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^3+\beta^3} \cdot \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} : \left(\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}\right)^2$,

3) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^4-2x^3+x^2} : \dfrac{x^2+2x+1}{x^3-1)}\right) : \dfrac{(x+1)^2-x}{x^2}$

155) Ἐὰν $x = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ καὶ $y = \dfrac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ παράστασις $\dfrac{x+y}{1-xy}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν α, β, γ.

156) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνθετον κλάσμα $\dfrac{\dfrac{x-\alpha}{1+\alpha x} - \dfrac{x-\beta}{1+\beta x}}{1 + \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}}$ εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x.

157) Ἐὰν $\dfrac{x}{y+\omega} = \alpha$, $\dfrac{y}{\omega+x} = \beta$, $\dfrac{\omega}{x+y} = \gamma$ νὰ δειχθῇ :

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) = 2$$

158) Ἐὰν $\nu \in N$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $A = \dfrac{\alpha^{3\nu}-1}{\alpha^2+\alpha+1}$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ α.

159) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $A = \dfrac{(x^2-x\psi+\psi^2)^3 + (x^2+x\psi+\psi^2)^3}{2(x^2+\psi^2)}$

160) Ὁμοίως τὸ κλάσμα $A = \dfrac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}$

161) Ὁμοίως τὸ κλάσμα $A = \dfrac{(x+\psi)^5 - x^5 - \psi^5}{(x^2+x\psi+\psi^2)\,5x^2\psi^2}$

162) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$ Vα $=\beta=\gamma$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\dfrac{(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)}{\alpha\beta\gamma}$

163) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $A = \dfrac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ α′ ΒΑΘΜΟΥ (Γραμμικά)

(Συμπλήρωσις)

55. Ἐκ τοῦ κεφαλαίου τούτου ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Γ′ τάξιν τ' ἀκόλουθα :

1. Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες συστημάτων.
2. Συστήματα ἰσοδύναμα
3. Μέθοδοι ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος δύο ἐξισ. α′ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.
4. Διερεύνησις τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος.
5. Γραφικὴ ἐπίλυσις τοῦ ἰδίου συστήματος.
6. Ἐπίλυσις γραμμικοῦ συστήματος μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους
7. Προβλήματα ἐπιλυόμενα τῇ βοηθείᾳ συστήματος γραμμικοῦ.

Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν ἄλλας μεθόδους ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος πλέον συντόμους.

56. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ — ΚΑΝΩΝ ΤΟΥ GRAMER.

α) Ἐπίλυσις συστήματος α′ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους

Εἰς τὴν Γ′ τάξιν ἐδόθη ὁ ὁρισμὸς τῆς ὁριζούσης β′ τάξεως.

Οὕτω : $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R} : \ \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύστημα :

$$\Sigma : \left| \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1, \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2 \end{array} \right. \quad \text{ὅπου} \quad \begin{array}{l} \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, x, \psi \in \mathbf{R} \wedge \\ |\alpha_1| + |\beta_1| > 0 \ \wedge \ |\alpha_2| + |\beta_2| > 0 \end{array}$$

Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\Sigma : \ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0 \iff \left\{ (x, \psi) \mid (x, \psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \ \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \right) \right\}$$

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\Sigma : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow \{(x, \psi) \mid (x,\psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \Sigma\} = \left\{ \left(\frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \right) \right\} =$$

$$= \left\{ \left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta \psi}{\Delta} \right) \right\}, \text{ ὅπου } \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \Delta_x = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ Σ εἶναι : $(x, y) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}}$ (1)

ἐξ ὧν $\frac{x}{\Delta_x} = \frac{1}{\Delta}$, $\frac{\psi}{\Delta_y} = \frac{1}{\Delta}$ καὶ ἄρα $\frac{x}{\Delta_x} = \frac{\psi}{\Delta_y} = \frac{1}{\Delta}$

Οἱ τύποι (1) (τύποι τοῦ Gramer) δεικνύουν, ὅτι ἕκαστος ἄγνωστος εἶναι πηλίκον δύο ὁριζουσῶν μὲ παρονομαστὴν κοινὸν τὴν ὁρίζουσαν Δ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ ἀριθμητήν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὴν ὁρίζουσαν τοῦ παρονομαστοῦ ἀντικαταστήσωμεν τὴν στήλην τῶν συντελεστῶν τοῦ ὑπολογιζομένου ἀγνώστου διὰ τῆς στήλης τῶν γνωστῶν ὅρων, εὑρισκομένων ἀπαραιτήτως εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος.

Ἡ τυποποιημένη αὕτη μέθοδος ἐπιλύσεως συστήματος γραμμικοῦ μὲ δύο ἀγνώστους καλεῖται **κανὼν τοῦ Gramer.**

Παραδείγματα : 1ον Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\sum : \begin{vmatrix} 3x + 2\psi = 12 \\ 5x - 3\psi = 1 \end{vmatrix}$ $(x,\psi \in \mathbf{R})$

Λύσις : Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ

$$\text{Gramer λαμβάνομεν : } x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}}, \quad \psi = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-36 - 2}{-9 - 10} = \frac{38}{19} = 2 \text{ , } \psi = \frac{3 - 60}{-9 - 10} = \frac{57}{19} = 3$$

Οὕτω : $\Sigma : \{ (x, \psi) / (x, \psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \Sigma \} = \{ (2, 3) \}$.

2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\sum : \begin{vmatrix} x + \alpha^2\psi = 2 \\ x + \psi = 2\alpha \end{vmatrix}$, ὅπου $\alpha, x, \psi \in \mathbf{R}$

Λύσις : Ὁμοίως λαμβάνομεν :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \alpha^2 \\ 2\alpha & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 2\alpha^3}{1 - \alpha^2} = \frac{2(1 - \alpha)(\alpha^2 + \alpha + 1)}{(1 - \alpha)(1 + \alpha)} = \frac{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}{1 + \alpha}, \quad (\alpha \neq \pm 1),$$

$$\psi = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2\alpha \end{vmatrix}}{1 - \alpha^2} = \frac{2\alpha - 2}{1 - \alpha^2} = \frac{2(\alpha - 1)}{(1 + \alpha)(1 - \alpha)} = -\frac{2}{1 + \alpha}$$

Οὕτω ἔχομεν : $\Sigma : \{ (x, \psi) \mid (x, \psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \Sigma \wedge \alpha \neq \pm 1 \} =$

$$= \left\{ \left(\frac{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}{1 + \alpha}, -\frac{2}{1 + \alpha} \right) \right\}$$

Ἡ μελετηθεῖσα διερεύνησις τοῦ συστήματος $\Sigma: \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \wedge \alpha_2 x + {}$ $+ \beta_2 \psi = \gamma_2$, ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, x, \psi \in \mathbf{R}$, δύναται νὰ συνοψισθῇ ὡς ἀκολούθως :

Διερεύνησις τοῦ συστήματος $\Sigma: \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1 \wedge \alpha_2 x + \beta_2 \psi = \gamma_2$

ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, x, \psi \in \mathbf{R}$

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$	$\Longleftrightarrow$ $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $\psi = \dfrac{\Delta \psi}{\Delta}$	Τὸ σύστημα ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν λύσιν.
$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0$	$\{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in R^2 \wedge \Sigma\} = \varnothing$ Τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.
	$\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$	$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ὄχι ἅπαντα μηδὲν $\{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \Sigma\} = \{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \alpha_1 x + \beta_1 \psi = \gamma_1\}$ Τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις (Ἕνας ἄγνωστος αὐθαίρετος)
	$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0$	$\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ $\{(x, \psi) \mid (x, \psi) \in \mathbf{R}^2 \wedge \Sigma\} = R^2$ Τὸ σύστημα εἶναι ταυτοτικὸν (x καὶ ψ αὐθαίρετοι)

Σημείωσις : Διάφοροι ἄλλαι ὑποπεριπτώσεις δίδονται ὡς ἀσκήσεις.

β) Ἐπίλυσις συστήματος α΄ βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ὁρίζουσαι τρίτης τάξεως.

Τὸ σύμβολον $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ ἀποτελούμενον ἐξ 9 στοιχείων εἰς τρεῖς γραμμὰς καὶ τρεῖς στήλας ὀνομάζομεν ὁρίζουσαν τρίτης τάξεως καὶ ὁρίζομεν :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

τὸ β΄ μέλος ταύτης ὀνομάζεται ἀνάπτυγμα ἢ τιμὴ τῆς Δ, αἱ δὲ ὁρίζουσαι αὐτοῦ μετὰ τοῦ προσήμου **ἐλάσσονες** τῆς Δ.

Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς Δ προκύπτει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ στήλης ἀντιστοίχως ἕκαστον ἐπὶ τὴν ἐλάσσονα ὁρίζουσαν, ἡ ὁποία λαμβάνεται διὰ τῆς διαγραφῆς τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης, εἰς ἣν ἀνήκει τὸ ἐν λόγῳ στοιχεῖον. Πρὸ δὲ ἑκάστου τῶν γινομένων τούτων θέτομεν τὸ σημεῖον τὸ ἀντιστοιχοῦν ἐκ τοῦ πίνακος

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦτο εὑρίσκεται εὐκολώτερον μὲ τὸν κανόνα τοῦ **Sarrus**. Κατ' αὐτὸν ἐπαναλαμβάνομεν κάτω τῆς τρίτης γραμμῆς τὰς δύο πρώτας γραμμὰς ἢ δεξιὰ τῆς τρίτης στήλης τὰς δύο πρώτας στήλας καὶ οὕτω προκύπτει ἀντιστοίχως πίναξ πέντε γραμμῶν καὶ τριῶν στηλῶν. ἢ τριῶν γραμμῶν καὶ πέντε στηλῶν ὡς ἀκολούθως :

$$\text{Πίναξ I} \quad \begin{array}{c|ccc|c} + & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & - \\ + & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & - \\ + & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & - \\ & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \\ & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \end{array} \qquad \text{Πίναξ II} \quad \begin{vmatrix} + & + & + & & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \alpha_3 & \beta_3 \\ - & - & - & & \end{vmatrix}$$

Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν τὰ τρία γινόμενα διαγωνίως, ἐξ ἀριστερῶν ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ κάτω, μὲ τὸ πρόσημον (+) καὶ τὰ ἄλλα τρία γινόμενα πάλιν διαγωνίως, ἐξ ἀριστερῶν κάτω πρὸς τὰ δεξιὰ ἄνω, μὲ τὸ πρόσημον (−).

Οὕτω εὑρίσκωμεν :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2\gamma_3+\alpha_2\beta_3\gamma_1+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta_3\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_3$$

Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν.

1. Τὸ ἀνάπτυγμα ὁριζούσης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν αἱ γραμμαὶ γίνουν στῆλαι καὶ αἱ στῆλαι γραμμαί.
2. Τὸ ἀνάπτυγμα ὁριζούσης ἀλλάσσει πρόσημον, ἂν ἀντιμεταθέσωμεν δύο γραμμὰς ἢ δύο στήλας
3. Ἐὰν εἰς μίαν ὁρίζουσαν δύο γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαι εἶναι αἱ αὐταί, τότε αὕτη ἰσοῦται μὲ μηδέν.
4. Ἐὰν ὁριζούσης τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ στήλης πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $\lambda \in R$, τότε καὶ τὸ ἀνάπτυγμα αὐτῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ.
5. Τὸ ἀνάπτυγμα ὁριζούσης δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης στήλης πολ/σθέντα ἐπὶ $\lambda \neq 0$.

Τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἰσοτήτων τούτων ἀφήνομεν εἰς τοὺς μαθητὰς ὡς ἄσκησιν, ὡς καὶ τὴν διατύπωσιν κι' ἄλλων τυχὸν ἰδιοτήτων.

Παραδείγματα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν κάτωθι ὁριζουσῶν :

$$\alpha) \; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \beta) \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ \alpha & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -\alpha \end{vmatrix} \qquad \gamma) \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

Λύσις :

α) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$: $\Delta_1 = 4 + 54 + 10 - 60 - 6 - 6 = -4$

β) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & -2 & 1 & \alpha \\ \alpha & -1 & 3 & \alpha & -1 \\ 2 & 1 & -\alpha & 2 & 1 \end{vmatrix}$: $\Delta_2 = \alpha + 6\alpha - 2\alpha - 4 - 3 + \alpha^3 = \alpha^3 + 5\alpha - 7$

γ) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 & \alpha \\ 1 & \beta & \beta^2 & 1 & \beta \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & 1 & \gamma \end{vmatrix}$: $\Delta_3 = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma - \alpha^2\beta - \beta^2\gamma - \alpha\gamma^2 = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

— Ἔστω τώρα πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\Sigma : \begin{vmatrix} \alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega = \delta_2 \\ \alpha_3 x + \beta_3 \psi + \gamma_3 \omega = \delta_3 \end{vmatrix}$ (1)

Λύσις : Λαμβάνομεν τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας τῆς ὁριζούσης τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων τοῦ συστήματος (1)

$$A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \; -A_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \; A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

καὶ σχηματίζομεν τὸν γραμμικὸν συνδυασμὸν

$A_1(\alpha_1 x + \beta_1\psi + \gamma_1\omega) + A_2(\alpha_2 x + \beta_2\psi + \gamma_2\omega) + A_3(\alpha_3 x + \beta_3\psi + \gamma_3\omega) = A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + A_3\delta_3 \Leftrightarrow (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)x + (\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3)\psi + (\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3)\omega = A_1\delta_1 + A_2\delta_2 + A_3\delta_3$ Ἀλλὰ εἶναι : $\beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3 = \beta_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \beta_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \beta_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0$

Ἐπίσης εἶναι : $\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3 = \gamma_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \gamma_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \gamma_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) = 0$ Ἄρα $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)\,x = \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3$

ἢ $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ ἢ $\Delta \cdot x = \Delta_x$ (2)

Ἐργαζόμενοι κατ' ἀνάλογον τρόπον λαμβάνομεν

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \psi = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$ ἢ $\Delta \cdot \psi = \Delta_\psi$ (3)

$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \omega = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$ ἢ $\Delta \cdot \omega = \Delta_\omega$ (4)

Ἐὰν εἶναι $\Delta \neq 0$, τότε ἐκ τῶν (2), (3), (4) ἔχομεν :

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \ \psi = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}, \ \omega = \frac{\Delta_\omega}{\Delta}} \quad (5)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος α' βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ κανὼν Gramer.

Διευρεύνησις τοῦ συστήματος (1)

Διακρίνομεν τέσσαρας περιπτώσεις :

1) Ἐὰν εἶναι $\Delta \neq 0$, τότε αἱ ὁρίζουσαι A_1, A_2, A_3 δὲν εἶναι ὅλαι μηδέν. Ἔστω $A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Τότε τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα :

$$A_1(\alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega) + A_2(\alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega) + A_3(\alpha_3 x + \beta_3 \psi + \gamma_3 \omega) = \delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega &= \delta_2 - \alpha_2 x \\ \beta_3 \psi + \gamma_3 \omega &= \delta_3 - \alpha_3 x \end{aligned}$$

Αἱ ἐξισώσεις $\beta_2\psi + \gamma_2\omega = \delta_2 - \alpha_2 x$ καὶ $\beta_3 \psi + \gamma_3 \omega = \delta_3 - \alpha_3 x$ ἀποτελοῦν σύστημα ἔχον μίαν μόνον λύσιν, διότι ὑπετέθη $\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Ἄρα τὸ σύστημα (6) ἔχει μίαν μόνον λύσιν καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ (1) ἔχει μίαν μόνον λύσιν, ἥτις λαμβάνεται ἐκ τῶν τύπων (5).

2) Ἐὰν εἶναι $\Delta = 0$ καὶ εἷς τουλάχιστον τῶν $\Delta_x, \Delta_\psi, \Delta_\omega$ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τότε ἐκ τῶν (2), (3), (4) καθίσταται προφανὲς ὅτι τὸ σύστημα (1) εἶναι ἀδύνατον.

3) Ἐὰν εἶναι $\Delta = \Delta_x = \Delta_\psi = \Delta_\omega = 0$, τότε τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, ἤτοι εἶναι ἀόριστον.

4) Ἐὰν $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, τότε τὸ σύστημα εἶναι ταυτοτικὸν (x, ψ, ω αὐθαίρετοι)

Παρατήρησις 1) Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐὰν εἶναι $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ καὶ συνεπῶς $\Delta_x = \Delta_\psi = \Delta_\omega = 0$, τὸ σύστημα (1) ἔχει μίαν μόνον λύσιν τὴν μηδενικήν, τὸ δὲ σύστημα καλεῖται **ὁμογενές.**

2) Ἐὰν $\Delta, \Delta_x, \Delta_\psi, \Delta_\omega$ εἶναι ὅλα διάφορα τοῦ μηδενὸς τότε ἐκ τῶν (5) λαμβάνομεν :

$$\frac{x}{\Delta_x} = \frac{1}{\Delta}, \frac{\psi}{\Delta_\psi} = \frac{1}{\Delta}, \frac{\omega}{\Delta_\omega} = \frac{1}{\Delta} \Leftrightarrow \frac{x}{\Delta_x} = \frac{\psi}{\Delta_\psi} = \frac{\omega}{\Delta_\omega} = \frac{1}{\Delta}$$

Παραδείγματα : 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα : $\sum : \left| \begin{aligned} 2x + \psi - z &= 1 \\ -x + 2\psi + z &= 6 \\ x + \psi + 2z &= 9 \end{aligned} \right.$ $x, \psi, z \in \mathbf{R}$

Λύσις : Συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ Gramer λαμβάνομεν :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=1\ ,\ \psi=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=2\ ,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}=3$$

Οὕτω ἔχομεν τὴν λύσιν $(x, \psi, z) = (1, 2, 3)$

2) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ στύστημα : $\Sigma: x + 3\psi + \alpha z = -4\alpha \wedge -x + \alpha\psi + \alpha z = -2\alpha^2 \wedge 2x + \psi - z = -1, \quad x, \psi, z, \alpha \in R$

Λύσις : Διὰ τοῦ κανόνος τοῦ Gramer λαμβάνομεν :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -4\alpha & 3 & \alpha \\ -2\alpha^2 & \alpha & \alpha \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\alpha,\ \psi=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4\alpha & \alpha \\ -1 & -2\alpha^2 & \alpha \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=-2\alpha,\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4\alpha \\ -1 & \alpha & -2\alpha^2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=1$$

Οὕτω ἔχομεν τὴν λύσιν $(x, \psi, z) = (\alpha, -2\alpha, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α΄ Ὁμάς :

164) Νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τοῦ κανόνος τοῦ Cramer τὰ συστήματα :

1) $9(2x - 3) - 10(\psi + 3) = 19$, $\quad 6(4x - 9) - 25(\psi + 4) = -6$

2) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{\psi}{3} = 1$, $\quad \dfrac{x}{6} + \dfrac{\psi}{2} = 5$

3) $x + \alpha^2\psi = 2$, $\quad x + \psi = 2\alpha$

4) $kx + (k + 2)\psi = 2$, $\quad x + k\psi = 1$

5) $x + \mu\psi = 1$, $\quad (\mu + 1)x - \psi = 2$

6) $(\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)\psi = 2(\alpha^2 + \beta^2)$
$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\psi = 2(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2)$

β΄ Ὁμάς :

165) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\sum: \left| \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1\psi = \gamma_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2\psi = \gamma_2 \end{array} \right.$ $\quad \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \in R$

1) ἂν $\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \wedge \alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$
2) ἂν $\alpha_1 \neq 0 \vee \beta_1 \neq 0 \wedge \alpha_2 = \beta_2 = 0 \wedge \gamma_2 \neq 0$
3) ἂν $\beta_1 = \beta_2 = 0 \wedge \alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 \neq 0$
4) ἂν $\alpha_1 = \beta_1 = 0 \wedge \gamma_1 \neq 0 \wedge (\alpha_2 \neq 0 \vee \beta_2 \neq 0)$
5) ἂν $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0 \wedge (\gamma_1 \neq 0 \vee \gamma_2 \neq 0)$
6) ἂν $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$
7) ἂν $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0 \wedge (\alpha_1 \neq 0 \vee \beta_1 \neq 0)$

166) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ τὸ σύστημα $\sum : \left| \begin{array}{l} (\lambda + 1)x + 2\mu\psi = 2 \\ (3-\lambda)x + (3\mu-1)\psi = -3 \end{array} \right.$

ὅπου $x, \psi, \lambda, \mu \in R$, ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις ;

167) Διὰ ποίας καὶ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν λ καὶ μ ἀμφότερα τὰ συστήματα

$\Sigma_1 : \left| \begin{array}{l} \mu x + \lambda\psi = 1 \\ 2x - \psi = 3 \end{array} \right.$ καὶ $\Sigma_2 : \left| \begin{array}{l} -\mu x + (\lambda + 1)\psi = 2 \\ x + 2\psi = 5 \end{array} \right.$ εἶναι ἀδύνατα ;

γ' Ὁ μ ά ς :

168) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν ὁριζουσῶν :

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 5 & 15 \end{vmatrix} \quad 2) \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 10 & 6 & 1 \\ 15 & 9 & 1 \end{vmatrix} \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} \quad 4) \begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix}$$

169) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες : $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in R$

$$1) \begin{vmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & 1+\beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & 1+\gamma^2 \end{vmatrix} \equiv \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1 \qquad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv (\alpha+\beta+\gamma)^2$$

δ' Ὁ μ ά ς :

170) Νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τοῦ κανόνος Cramer τὰ συστήματα :

$$1) \left| \begin{array}{l} x + \psi - 2z = -15 \\ x - \psi + z = 10 \\ -2x + \psi + z = 15 \end{array} \right| \quad 2) \left| \begin{array}{l} 3x - \psi + 3z = 1 \\ -x + 2\psi - z = -7 \\ \frac{x}{2} + \frac{\psi}{4} + \frac{z}{3} = -\frac{5}{3} \end{array} \right.$$

$$3) \left| \begin{array}{l} x + \psi + z = 1 \\ \alpha x + \beta\psi + \beta z = \delta \\ \alpha^2 x + \beta^2\psi + \gamma^2 z = \delta^2 \end{array} \right| \quad 4) \left| \begin{array}{l} \alpha x + \psi + \omega = 1 \\ x + \alpha\psi + \omega = \alpha \\ x + \psi + \alpha\omega = \alpha^2 \end{array} \right.$$

57. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΕΙΔΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΔΙ' ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ.

Ἡ ἐπίλυσις ὡρισμένων συστημάτων α' βαθμοῦ εἰδικῆς μορφῆς ἐπιτυγχάνεται δι' εἰδικῶν μεθόδων (τεχνασμάτων) πολὺ συντομωτέρων καὶ ἁπλουστέρων τῶν γνωστῶν μεθόδων ἐπιλύσεως.

Ἀναφέρομεν κατωτέρω εἰδικάς τινὰς μεθόδους ἐπιλύσεως συστημάτων, ἐκ τῶν συνήθως παρουσιαζομένων.

α) Ἡ μέθοδος τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη.

Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιλύονται συστήματα τῆς μορφῆς :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{\nu-1} = \alpha_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_\nu = \alpha_2 \\ x_3 + x_4 + x_5 + \ldots + x_1 = \alpha_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_\nu + x_1 + x_2 + \ldots + x_{\nu-2} = \alpha_\nu \end{array} \right| \quad (1) \qquad \text{ὅπου } x_1, x_2, \ldots x_\nu \text{ ἄγνωστοι}, \ \nu \in N \text{ καὶ } \nu \geqslant 3$$

Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος λαμβάνομεν :
$(\nu-1)(x_1+x_2+\ldots+x_\nu)=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu \Rightarrow$
$\Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_\nu=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu-1}$ (2)

Ἀκολούθως συνδυάζομεν ἑκάστην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1) μὲ τὴν (2), ὁπότε λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$\alpha_1+x_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\nu-1}, \text{ ἐξ ἧς } x_\nu=\frac{\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu-(\nu-2)\alpha_1}{\nu-1}$$

$$x_1+\alpha_2=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1}, \text{ ἐξ ἧς } x_1=\frac{\alpha_1-(\nu-2)\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1}$$

. . . . . κ. ο. κ. . . . . . .

$$x_{\nu-1}+\alpha_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu-1}, \text{ ἐξ ἧς } x_{\nu-1}=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\nu-1}-(\nu-2)\alpha_\nu}{\nu-1}$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :
$x+\psi+z=1,\ \psi+z+\omega=3,\ z+\omega+x=2,\ \omega+x+\psi=6$

Ἐπίλυσις : Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἔχομεν $3(x+\psi+z+\omega)=12$, ἐξ ἧς $x+\psi+z+\omega=4$ (3)

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη ἑκάστην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος ἀπὸ τὴν (3), ὁπότε ἔχομεν ἀντιστοίχως :
$\omega=3,\quad x=1,\quad \psi=2,\quad z=-2$

β) Ἡ μέθοδος τῆς χρησιμοποιήσεως βοηθητικῶν ἀγνώστων.

Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἐπιλύονται τὰ κάτωθι συστήματα :

1. **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :**
ὅπου $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ ἄγνωστοι (1)
$\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu \neq 0$
$\nu \in N$ καὶ $\nu \geqslant 3$

$$\begin{aligned}&\alpha_1x_1+\beta_1(x_2+x_3+\ldots+x_\nu)=\gamma_1\\&\alpha_2x_2+\beta_2(x_3+\ldots+x_\nu+x_1)=\gamma_2\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\alpha_\nu x_\nu+\beta_\nu(x_1+x_2+\ldots+x_{\nu-1})=\gamma_\nu\end{aligned}$$

Ἐπίλυσις :

Ἂν θέσωμεν ὅπου $x_1+x_2+\ldots+x_\nu=K$, τότε ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1) ἀντιστοίχως γράφεται :

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1x_1+\beta_1(K-x_1)=\gamma_1\\&\alpha_2x_2+\beta_2(K-x_2)=\gamma_2\\&\ldots\ldots\ldots\\&\alpha_\nu x_\nu+\beta_\nu(K-x_\nu)=\gamma_\nu\end{aligned}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{aligned}&x_1=(\gamma_1-\beta_1K)/(\alpha_1-\beta_1)\\&x_2=(\gamma_2-\beta_2K)/(\alpha_2-\beta_2)\\&\ldots\ldots\ldots\\&x_\nu=(\gamma_\nu-\beta_\nu K)/(\alpha_\nu-\beta_\nu)\end{aligned}\right\}(2)\quad\begin{aligned}&\text{Ὅπου}\\&\alpha_1\neq\beta_1\\&\alpha_2\neq\beta_2\\&\ldots\\&\alpha_\nu\neq\beta_\nu\end{aligned}$$

Προσθέτομεν τὰς (2) κατὰ μέλη, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$x_1+x_2+\ldots+x_\nu=\frac{\gamma_1-\beta_1K}{\alpha_1-\beta_1}+\frac{\gamma_2-\beta_2K}{\alpha_2-\beta_2}+\ldots+\frac{\gamma_\nu-\beta_\nu K}{\alpha_\nu-\beta_\nu}=K \quad (3)$$

Ἡ ἐξίσωσις (3) εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς K, ἡ ὁποία λυομένη δίδει :

$$K=\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_1-\beta_1}+\frac{\gamma_2}{\alpha_2-\beta_2}+\ldots+\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu-\beta_\nu}\right)\Big/\left(1+\frac{\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2-\beta_2}+\ldots+\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu-\beta_\nu}\right)$$

ὅπερ, ἔστω $K=C$. Τὴν τιμὴν $K=C$ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (2) καὶ ἔχομεν τὰς τιμὰς τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$3x + 2(\psi + z) = 8,\ 4\psi + 3(z + x) = 6,\ z - 4(x + \psi) = 8$$

Ἐπίλυσις : Θέτομεν ὅπου $x + \psi + z = K$, ὁπότε αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος γράφονται : $3x + 2(K - x) = 8$, $4\psi + 3(K - \psi) = 6$, $z - 4(K - z) = 8$, ἐξ ὧν $x = 8 - 2K$, $\psi = 6 - 3K$, $Z = (8 + 4K)/5$. Προσθέτομεν κατὰ μέλη, ὁπότε $x + \psi + z = \frac{78 - 21K}{5}$ καὶ ἄρα $K = \frac{78 - 21K}{5}$, $K = 3$· τέλος δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς $K = 3$ ἔχομεν :

$x = 8 - 2\cdot 3 = 2$, $\psi = 6 - 3\cdot 3 = -3$, $z = (8 + 4\cdot 3) : 5 = 4$

2. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$x_1, x_2, \ldots x_\nu$ ἄγνωστοι

$\alpha_\nu, \gamma_\nu, \delta_\nu, \varepsilon \neq 0$

$\nu \in N$ καὶ $\nu \geqslant 2$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = \ldots = \frac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu} \\ &\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_\nu x_\nu = \varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἐπίλυσις.

1ος τρόπος. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος τῶν ἴσων λόγων ἔχομεν :

$$\frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = \frac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = \ldots = \frac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu} = \frac{x_1 + \frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\gamma_1}{\alpha_1}} = \frac{x_2 + \frac{\beta_2}{\alpha_2}}{\frac{\gamma_2}{\alpha_2}} = \ldots = \frac{x_\nu + \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} =$$

$$= \frac{\delta_1 x_1 + \frac{\delta_1\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1}} = \frac{\delta_2 x_2 + \frac{\delta_2\beta_2}{\alpha_2}}{\frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2}} = \ldots = \frac{\delta_\nu x_\nu + \frac{\delta_\nu\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha\nu}} =$$

$$\frac{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_\nu x_\nu + \frac{\delta_1\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\beta_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} = \frac{\varepsilon + \frac{\delta_1\beta_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\beta_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\beta_\nu}{\alpha_\nu}}{\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}} = K,$$

ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \neq 0$ καὶ $\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu} \neq 0$. Ἄρα $\frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = K$, $\frac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = K, \ldots, \frac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu} = K$, ἐξ ὧν ἔχομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων $x_1, x_2, \ldots x_\nu$

2ος τρόπος. Ἐὰν ἕκαστος τῶν ἴσων λόγων ἔχῃ τιμὴν K, τότε θὰ ἔχωμεν : $\frac{\alpha_1 x_1 + \beta_1}{\gamma_1} = K$, $\frac{\alpha_2 x_2 + \beta_2}{\gamma_2} = K, \ldots, \frac{\alpha_\nu x_\nu + \beta_\nu}{\gamma_\nu} = K$, ἐξ ὧν $x_1 = \frac{K\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_1}$, $x_2 = \frac{K\gamma_2 - \beta_2}{\alpha_2}, \ldots, x_\nu = \frac{K\gamma_\nu - \beta_\nu}{\alpha_\nu}$ (2). Τὰς τιμὰς (2) ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος, ὅτε $\delta_1 \frac{K\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_1} + \delta_2 \frac{K\gamma_2 - \beta_2}{\alpha_2} + \ldots + \delta\nu \frac{K\gamma_\nu - \beta_\nu}{\alpha_\nu} = \varepsilon$. Αὕτη εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς K, ἡ ὁποία λυομένη δίδει :

$$K = \left(\varepsilon + \frac{\beta_1\delta_1}{\alpha_1} + \frac{\beta_2\delta_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\beta_\nu\delta_\nu}{\alpha_\nu}\right) \Big/ \left(\frac{\delta_1\gamma_1}{\alpha_1} + \frac{\delta_2\gamma_2}{\alpha_2} + \ldots + \frac{\delta_\nu\gamma_\nu}{\alpha_\nu}\right) = C$$

Τὴν τιμὴν $K = C$ θέτομεν εἰς τὰς ἐξισώσεις (2), ὁπότε ἔχομεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$

Παράδειγμα Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα : $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \dfrac{\psi + 1}{9} = \dfrac{\omega - 2}{5} \\ x - \psi + 3\omega = -2 \end{array} \right.$

Ἐπίλυσις : Ἔστω Κ ἡ τιμὴ ἑκάστου τῶν ἴσων λόγων. Τότε ἔχομεν $x = 3K$, $\psi = 9K - 1$, $\omega = 5K + 2$ τὰς τιμὰς αὐτὰς θέτομεν εἰς τὴν ἐξισ. $x - \psi + 3\omega = -2$ ὅτε : $3K - (9K - 1) + 3(5K + 2) = -2$, ἐξ ἧς $K = -1$. Τέλος δι' ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς $K = -1$ ἔχομεν $x = -3$, $\psi = -10$, $\omega = -3$

3. **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :**

$x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ ἄγνωστοι $\neq 0$
$\nu \in N$ καὶ $\nu \geqslant 3$

$$(1) \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_{\nu-1}} = \alpha_1 \\ \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \cdots + \dfrac{1}{x_\nu} = \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{x_\nu} + \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{\nu-2}} = \alpha_\nu \end{array} \right.$$

Ἐπίλυσις : Θέτοντες ὅπου $\dfrac{1}{x_1} = x'_1$, $\dfrac{1}{x_2} = x'_2$, $\dfrac{1}{x_3} = x'_3, \ldots, \dfrac{1}{x_\nu} = x'_\nu$ εἰς τὸ σύστημα, ἔχομεν :

$$\left. \begin{array}{l} x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_{\nu-1} = \alpha_1 \\ x'_2 + x'_3 + \ldots + x'_\nu = \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x'_\nu + x'_1 + \ldots + x'_{\nu-2} = \alpha_\nu \end{array} \right| (2)$$

Τὸ σύστημα (2) ἐπιλύεται διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη, ὁπότε δι' ἀντιστροφῆς τῶν τιμῶν $x'_1, x'_2, \ldots x'_\nu$ ἔχομεν τὰς τιμὰς $x_1, x_2, \ldots x_\nu$

Παραδείγματα : 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi} = \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\omega} = \frac{7}{12}, \quad \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4}$$

Ἐπίλυσις : Πρέπει νὰ εἶναι $x\psi\omega \neq 0$

Θέτομεν $\dfrac{1}{x} = x'$, $\dfrac{1}{\psi} = \psi'$, $\dfrac{1}{\omega} = \omega'$, ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\left. \begin{array}{l} x' + \psi' = \dfrac{5}{6} \\ \psi' + \omega' = \dfrac{7}{12} \\ \omega' + x' = \dfrac{3}{4} \end{array} \right| (1)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) ἔχομεν :
$2(x' + \psi' + \omega') = \dfrac{13}{6}$, ἐξ ἧς $x' + \psi' + \omega' = \dfrac{13}{12}$ (2)

Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη, ἑκάστην ἐξίσωσιν ἐκ τῶν (1) ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν (2), ὁπότε ἔχομεν ἀντιστοίχως : $\omega' = \dfrac{1}{4}$, $x' = \dfrac{1}{2}$, $\psi' = \dfrac{1}{3}$, καὶ ἀκολούθως $x = 2$, $\psi = 3$, $\omega = 4$.

2) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα : $\dfrac{x\psi}{\alpha x + \beta\psi} = \gamma$, $\dfrac{\psi\omega}{\gamma\psi + \alpha\omega} = \beta$, $\dfrac{\omega x}{\beta\omega + \gamma x} = \alpha$

Ἐπίλυσις : Ὑποθέτομεν $\alpha\beta\gamma \neq 0$ καὶ $x\psi\omega \neq 0$, ὁπότε τὸ σύστημα γράφεται :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\alpha x+\beta\psi}{x\psi}=\dfrac{1}{\gamma}\\[2mm] \dfrac{\gamma\psi+\alpha\omega}{\psi\omega}=\dfrac{1}{\beta}\\[2mm] \dfrac{\beta\omega+\gamma x}{\omega x}=\dfrac{1}{\alpha}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{\alpha}{\psi}+\dfrac{\beta}{x}=\dfrac{1}{\gamma}\\[2mm] \dfrac{\gamma}{\omega}+\dfrac{\alpha}{\psi}=\dfrac{1}{\beta}\\[2mm] \dfrac{\beta}{x}+\dfrac{\gamma}{\omega}=\dfrac{1}{\alpha}\end{array}\right\}$$

Θέτομεν ὅπου $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{\psi}=\psi'$, $\frac{1}{\omega}=\omega'$ ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\psi'+\beta x'=1/\gamma\\ \gamma\omega'+\alpha\psi'=1/\beta\\ \beta x'+\gamma\omega'=1/\alpha\end{array}\right| \quad (1)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$2\ (\alpha\psi'+\beta x'+\gamma\omega')=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma}$, ἐξ ἧς $\alpha\psi'+\beta x'+\gamma\omega'=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{2\alpha\beta\gamma}$

Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ αὐτὴν ἑκάστην ἐξίσωσιν ἐκ τῶν (1) κατὰ μέλη, ὅτε ἔχομεν :

$\gamma\omega'=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta}{2\alpha\beta\gamma}$, $\beta x'=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma}{2\alpha\beta\gamma}$, $\alpha\psi'=\dfrac{\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma}{2\alpha\beta\gamma}$, ἐξ ὧν

$\omega'=(\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta):\ 2\alpha\beta\gamma^2$, $x'=(\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma):\ 2\alpha\beta^2\gamma$, $\psi'=(\alpha\gamma+$ $+\alpha\beta-\beta\gamma):\ 2\alpha^2\beta\gamma$ καὶ ἀκολούθως $\omega=\dfrac{2\alpha\beta\gamma^2}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\beta}$, $x=\dfrac{2\alpha\beta^2\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma}$,

$\psi=\dfrac{2\alpha^2\beta\gamma}{\alpha\gamma+\alpha\beta-\beta\gamma}$

Σημείωσις. Τὸ θέμα τῆς ἐπιλύσεως συστημάτων δι' εἰδικῶν μεθόδων οὐδόλως ἐξαντλεῖται ἐνταῦθα. Ἐξαρτᾶται δὲ ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ συστήματος καὶ ἀπὸ τὴν δεξιοτεχνίαν καὶ εὐχέρειαν τοῦ ἀσχολουμένου μὲ αὐτά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

171) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\left|\begin{array}{l}x+\psi=-1\\ \psi+\omega=-19\\ \omega+x=2\end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l}x+\psi+\omega=4\\ \psi+\omega+z=-2\\ \omega+z+x=1\\ z+x+\psi=-3\end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l}3x+\psi+\omega=2\\ x+3\psi+\omega=6\\ x+\psi+3\omega=-8\end{array}\right.$

4) $\left|\begin{array}{l}\alpha x+\psi+\omega=1\\ x+\alpha\psi+\omega=\alpha\\ x+\psi+\alpha\omega=\alpha^2\end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l}x+\psi-\omega=\alpha\\ \psi+\omega-x=\beta\\ \omega+x-\psi=\gamma\end{array}\right.$ 6) $\left|\begin{array}{l}\mu x+\nu\psi+z=1\\ x+\mu\nu\psi+z=1\\ x+\nu\psi+\mu z=1\end{array}\right.$

172) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\left|\begin{array}{l}x+3\,(\psi+\omega+z)=15\\ 6\psi+5\,(x+\omega+z)=36\\ 3\omega+(x+\psi+z)=11\\ 5z+2\,(x+\psi+\omega)=17\end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l}\alpha x+\beta\,(\psi+z+\omega)=\gamma\\ \alpha\psi+\beta_1\,(x+z+\omega)=\gamma_1\\ \alpha z+\beta_2\,(x+\psi+\omega)=\gamma_2\\ \alpha\omega+\beta_3\,(x+\psi+z)=\gamma_3\end{array}\right.$

3) $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x}{5}=\dfrac{\psi}{6}=\dfrac{\omega}{15}\\ 2x+\psi-\omega=2\end{array}\right.$ 4) $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x+\alpha}{\mu}=\dfrac{\psi+\beta}{\nu}=\dfrac{\omega+\gamma}{\lambda}\\ x+\psi+\omega=\kappa\end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l}\alpha x=\beta\psi=\gamma\omega\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\delta}\end{array}\right.$

6) $\left|\begin{array}{l}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=1\\ \dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{6}\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{11}{6}\end{array}\right.$ 7) $\left|\begin{array}{l}\dfrac{x\psi\omega}{x\psi+x\omega-\psi\omega}=\alpha\\ \dfrac{x\psi\omega}{\psi\omega+\psi x-\omega x}=\beta\\ \dfrac{x\psi\omega}{\omega x+\omega\psi-x\psi}=\gamma\end{array}\right.$

$$8)\ \left|\begin{array}{l} x\psi\omega=\alpha(\psi\omega-\omega x-x\psi)\\ x\psi\omega=\beta(\omega x-\psi\omega-x\psi)\\ x\psi\omega=\gamma(x\psi-\psi\omega-\omega x)\end{array}\right.$$

173) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

$$1)\ \left|\begin{array}{l} x+\psi=3\\ \psi+\omega=5\\ \omega+\varphi=7\\ \varphi+z=9\\ z+x=6\end{array}\right. \quad 2)\ \left|\begin{array}{l} \nu x+\psi+z+\omega=\nu^3\\ x+\nu\psi+z+\omega=\nu^2\\ x+\psi+\nu z+\omega=\nu\\ x+\psi+z+\nu\omega=1\end{array}\right. \quad 3)\ \left|\begin{array}{l} 2(x+z)+\omega=-5\\ x+2(\psi+\omega)=6\\ 2(\psi+\omega)+z=0\\ 2(z+x)+\psi=-1\end{array}\right.$$

58. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΑΙ.

Ἔστω πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα $\sum:\ \begin{array}{l} x-2\psi=-4\\ 3x+\psi=9\\ x+5\psi=17\end{array}\quad x,\psi\in\mathbf{R}$ τριῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν :

$$\left\{(x,\psi)\ /\ (x,\psi)\in\mathbf{R}^2\ \wedge\ \begin{array}{l} x-2\psi=-4\\ 3x+\psi=9\end{array}\right\}=\{(2,3)\}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις $(x,\psi)=(2,3)$ εἶναι λύσις καὶ τῆς τρίτης ἐξισ. $x+5\psi=17$. Ἤτοι αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος Σ ἔχουν κοινὴν λύσιν.

Τὰς ἐξισώσεις ταύτας καλοῦμεν **συμβιβαστὰς** καὶ τὸ σύστημα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν **συμβιβαστόν.**

Ἐν γένει, ὅταν τὸ πλῆθος μ τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερον τοῦ πλήθους ν τῶν ἀγνώστων, τότε ἐκλέγομεν ν ἐξισώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, καὶ λύομεν τὸ σύστημα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν, ἐφ' ὅσον ἔχῃ τοῦτο λύσιν. Ἡ λύσις τούτου ἐὰν εἶναι λύσις καὶ τῶν ὑπολοίπων ἐξισώσεων, τότε αἱ μ ἐξισώσεις εἶναι **συμβιβασταὶ** καὶ τὸ σύστημα αὐτῶν **συμβιβαστόν,** ἐὰν ὄχι, τότε αἱ ἐξισώσεις εἶναι **ἀσυμβίβαστοι** καὶ τὸ σύστημα **ἀδύνατον.**

Παραδείγματα : 1) Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\in\mathbf{R}$ τῶν ἐξισώσεων $\alpha_1x_1+\beta_1=0$ καὶ $\alpha_2x+\beta_2=0$, ὅπου $\alpha_1, \alpha_2\neq 0$, ἵνα αὗται εἶναι συμβιβασταί.

Λύσις : Ἔχομεν τὰς λύσεις : $\{x\ /\ x\in\mathbf{R}\wedge\alpha_1x+\beta_1=0\}=\left\{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right\}$

$$\{x\ /\ x\in\mathbf{R}\wedge\alpha_2x+\beta_2=0\}=\left\{-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right\}$$

Δέον νὰ εἶναι :

$$-\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\iff\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}\iff\begin{vmatrix}\alpha_1&\beta_1\\ \alpha_2&\beta_2\end{vmatrix}=0,$$

ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις. Τὸ ἀντίστροφον προφανές.

2) Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν $\alpha_{1,2,3}, \beta_{1,2,3}, \gamma_{1,2,3}\in\mathbf{R}$ τῶν ἐξισώσεων $\alpha_1x+\beta_1\psi=\gamma_1$ (1), $\alpha_2x+\beta_2\psi=\gamma_2$ (2), $\alpha_3x+\beta_3\psi=\gamma_3$ (3), ὅπου $|\alpha_1|+|\beta_1|>0$, $|\alpha_2|+|\beta_2|>0$, $|\alpha_3|+|\beta_3|>0$, ἵνα αὗται εἶναι συμβιβασταί.

Λύσις : Ἡ κοινὴ λύσις τῶν (1) καὶ (2) εἶναι $x = \frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$

$\psi = \frac{\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, ὅπου $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Αὕτη ἡ λύσις δέον νὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς (3).

Ἤτοι : $\alpha_3 \cdot \frac{\Delta_x}{\Delta} + \beta_3 \cdot \frac{\Delta_y}{\Delta} = \gamma_3 \Longleftrightarrow \alpha_3\Delta_x + \beta_3\Delta_y = \gamma_3\Delta \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$

Αὐτὴ εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

59. ΑΠΑΛΕΙΦΟΥΣΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ (ΣΥΝΑΡΜΟΖΟΥΣΑ).

Εἰς τὰ ἀνωτέρω δύο παραδείγματα συμβιβαστῶν ἐξισώσεων αἱ εὑρεθεῖσαι σχέσεις εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς **ἀπαλοιφῆς** τῶν ἀγνώστων μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τούτων, δι' ὅ καὶ καλεῖται **ἀπαλείφουσα** τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων.

Ἡ ἀπαλείφουσα ἑνὸς συστήματος εἶναι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστόν.

Παραδείγματα : 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος $x+\psi=3$, $2x-3\psi=-14$, $\lambda x+\mu\psi=\nu$, $\lambda,\mu,\nu,x,\psi \in \mathbf{R}$

Λύσις : Κατὰ τὸ παράδειγμα (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -14 \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda + \nu = 4\mu$$

Ἡ σχέσις $\lambda+\nu=4\mu$ εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος.

2) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ $\lambda \in \mathbf{R}$ τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστὸν $2\lambda x+\psi=\lambda$, $x+\psi=3$, $x-2\psi=2$ ἐν $\mathbf{R}$

Λύσις : Ἵνα τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστὸν πρέπει ἡ ἀπαλείφουσα αὐτοῦ νὰ εἶναι 0.

Ἤτοι : $\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda(2+6) - (2+2\lambda) + (3-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \lambda = -\frac{1}{13}$. Ὥστε, διὰ $\lambda = -\frac{1}{13}$ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι συμβιβαστόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

α' Ὁμάς :

174) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν αἱ ἐξισώσεις εἰς τὰ κάτωθι συστήματα εἶναι συμβιβασταὶ ἢ ὄχι ;

1) $x-5\psi=0$	2) $2x - \frac{\psi}{\beta} = 2\alpha - 1$
$x=\psi+4$	$2\alpha x + \beta\psi = \beta^2 + 2\alpha^2$
$3x-7\psi=8$	$\frac{x}{\alpha} + \frac{2\psi}{\beta} = 3$

175) Ποία σχέσις συνδέει τὰ α, β ἵνα τὰ ἀκόλουθα συστήματα εἶναι συμβιβαστά.

1) $\alpha x = \beta - 1, \quad \beta x = 2\alpha + 1$

2) $\beta x + \alpha\psi = 13, \quad \psi + 2x = 2, \quad 2\beta x + 3\beta\psi = 1$

176) Ἂν αἱ τρεῖς ἐξισώσεις : $\alpha x + \beta\psi = 1, \ \alpha\psi + \beta x = \alpha\beta, \ x + \psi = \alpha + \beta$ εἶναι συμβιβασταί, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha\beta + 1$

β' Ὁ μ ά ς :

177) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\mu \in R$, ἵνα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων $(\mu - 7)\, x = 5$ καὶ $(3\mu - 1)\, x = -1$ εἶναι συμβιβαστόν. Ἀκολούθως νὰ λυθῇ τὸ σύστημα.

178) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος $\left|\begin{array}{l} (\alpha^2 - \beta^2)\, x + \alpha^3 + \beta^3 = 0 \\ x + \alpha + \beta = 0 \end{array}\right.$

179) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα ἑκάστου τῶν ἀκολούθων συστημάτων :

1) $x + \lambda\psi = -\lambda^3$, $x + \mu\psi = -\mu^3$, $x + \nu\psi = -\nu^3$

2) $\alpha x + \gamma\psi + \beta = 0$, $\gamma x + \beta\psi + \alpha = 0$, $\beta x + \alpha\psi + \gamma = 0$

3) $\alpha x + \beta\psi = \gamma$, $\alpha^2 x + \beta^2\psi = \gamma^2$, $\alpha^3 x + \beta^3\psi = \gamma^3$

60. ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.

Ὁρισμός : *Μία γραμμικὴ ἐξίσωσις καλεῖται ὁμογενής, ἐὰν ὁ γνωστὸς ὅρος αὐτῆς εἶναι μηδενικός π.χ.* Αἱ ἐξισώσεις $\alpha x + \beta\psi = 0$, $\alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = 0$ $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu = 0$, ὅπου x_i μεταβληταί, εἶναι γραμμικαὶ ὁμογενεῖς.

Κατὰ συνέπειαν ἓν σύστημα γραμμικῶν ὁμογενῶν ἐξισώσεων εἶναι **ὁ μ ο γ ε ν ὲ ς γ ρ α μ μ ι κ ὸ ν σ ύ σ τ η μ α.**

Τὰ συστήματα :

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1\psi = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2\psi = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1\psi + \gamma_1\omega = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2\psi + \gamma_2\omega = 0 \\ \alpha_3 x + \beta_3\psi + \gamma_3\omega = 0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1\psi + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2\psi + \gamma_2 z = 0 \end{array}\right.$$

εἶναι γραμμικὰ ὁμογενῆ συστήματα.

Σημ. Ἕνας τουλάχιστον ἐκ τῶν συντελεστῶν δέον νὰ εἶναι μὴ μηδενικός. Προφανὴς λύσις ἑνὸς ὁμογενοῦς γραμμικοῦ συστήματος εἶναι ἡ **μηδενικὴ** (ὅλοι οἱ ἄγνωστοι 0)· συνεπῶς ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν. Γεννᾶται ἐνταῦθα τὸ ἐρώτημα, ἂν ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς ἔχῃ κι' ἄλλην λύσιν ἢ ἄλλας λύσεις.

Σκοπὸς τῆς μελέτης τῶν ὁμογενῶν γραμμικῶν συστημάτων εἶναι ἡ ἀναζήτησις τῶν μὴ μηδενικῶν λύσεων αὐτῶν.

61. ΙΚΑΝΑΙ ΚΑΙ ΑΝΑΓΚΑΙΑΙ ΣΥΝΘΗΚΑΙ, ΙΝΑ ΤΟ ΟΜΟΓΕΝΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΧΕΙ ΑΠΕΙΡΟΥΣ ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΛΥΣΕΙΣ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΑΣ.

I. Ἔστω τὸ σύστημα $\Sigma_1 : \left|\begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1\psi = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2\psi = 0, \end{array}\right. \quad \alpha_{1,2}, \beta_{1,2}, x, \psi \in R$

Εἴδομεν, ὅτι ἂν $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ τότε τὸ σύστημα ἔχει μίαν καὶ μόνον λύσιν καὶ ἐνταῦθα τὴν μηδενικὴν (0, 0), ἥτις εἶναι προφανής. Ἂν $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$, τότε τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον, ἔχον ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, ἀποκλειομένης τῆς περιπτώσεως τοῦ ἀδυνάτου, ἐφ' ὅσον ἔχῃ μίαν λύσιν τὴν (0, 0).

Τὰς ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις εὑρίσκομεν προφανῶς ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ Σ_1, ὅταν ὁ εἷς ἄγνωστος ἐκλεγῇ αὐθαιρέτως.

Ἀντιστρόφως. Ἂν τὸ σύστημα Σ_1 ἔχῃ ἐκτὸς τῆς λύσεως (0,0) καὶ τὴν λύσιν (x_1, y_1), τότε ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν δὲν δύναται νὰ εἶναι διάφορος τοῦ 0. Ἄρα θὰ εἶναι $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$.

Ὥστε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα Σ_1 ἔχῃ ἐκτὸς τῆς λύσεως (0, 0) καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι 0.

Ἤτοι $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$

II. Ἔστω τὸ σύστημα $\sum_2 : \left| \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 \psi + \gamma_1 \omega = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 \psi + \gamma_2 \omega = 0 \end{array} \right.$

ὁμογενὲς γραμμικὸν δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Προφανὴς λύσις τούτου εἶναι $(x, \psi, \omega) = (0, 0, 0)$

Ὑποθέτομεν $x\psi\omega \neq 0$, τότε τὸ σύστημα Σ_2 δύναται νὰ γραφῇ

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \dfrac{x}{\omega} + \beta_1 \dfrac{\psi}{\omega} = -\gamma_1 \\ \alpha_2 \dfrac{x}{\omega} + \beta_2 \dfrac{\psi}{\omega} = -\gamma_2 \end{array}\right\} \text{ Λύοντες ὡς πρὸς } \frac{x}{\omega} \text{ καὶ } \frac{\psi}{\omega} \text{ λαμβάνομεν}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{\omega} = \dfrac{\begin{vmatrix} -\gamma_1 & \beta_1 \\ -\gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \dfrac{x}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \\ \dfrac{\psi}{\omega} = \dfrac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & -\gamma_1 \\ \alpha_2 & -\gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \dfrac{\psi}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{x}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \frac{\psi}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}} = \frac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}$$

Οἱ λόγοι οὗτοι ἔχουν ἔννοιαν ὅταν αἱ ὁρίζουσαι τῶν παρονομαστῶν εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\dfrac{x}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\psi}{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} = \lambda, \ \lambda \in R$ καὶ

$$\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ τότε αἱ τιμαὶ}$$

$x = \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \psi = \lambda \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \omega = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ εἶναι λύσεις

τοῦ συστήματος Σ_2. Τοῦτο διεπιστοῦται εὐκόλως ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ Σ_2.

Ὥστε ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα Σ_2, ἐκτὸς τῆς λύσεως (0, 0, 0), ἔχῃ καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, εἶναι $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, $\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 \neq 0$.

III. Ἔστω τὸ σύστημα $\Sigma_3 : \left| \begin{array}{ll} \alpha_1 x + \beta_1\psi + \gamma_1\omega = 0 & (1) \\ \alpha_2 x + \beta_2\psi + \gamma_2\omega = 0 & (2) \\ \alpha_3 x + \beta_3\psi + \gamma_3\omega = 0 & (3) \end{array} \right.$

Προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος Σ_3 εἶναι ἡ $(x, \psi, \omega) = (0, 0, 0)$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν : $x = \lambda \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, $\psi = \lambda \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$, $\omega = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ (4),

ὁπότε ἡ (3) γίνεται : $\lambda [\, \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + \beta_3(\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2) + \gamma_3$

$(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\,] = 0$, ἥτις γράφεται καὶ οὕτω : $\lambda \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$ ἢ $\lambda \cdot \Delta = 0$

Ἐὰν $\Delta \neq 0$ τότε $\lambda = 0$ καὶ συνεπῶς $x = 0$, $\psi = 0$, $\omega = 0$

Ἐὰν $\Delta = 0$, τότε διὰ $\lambda \in R$ ἐκ τῶν (4) θὰ ἔχωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, καθ' ὅσον ὁ λ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως.

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν μία λύσις τοῦ συστήματος Σ_3 εἶναι ἡ $(x_1, \psi_1, \omega_1) \neq (0, 0, 0)$, τότε $\lambda \neq 0$ καὶ συνεπῶς ἐκ τῆς $\lambda \cdot \Delta = 0$ προκύπτει $\Delta = 0$.

Ὥστε, **καὶ ἐδῶ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ σύστημα Σ_3 ἐκτὸς τῆς λύσεως (0, 0, 0) ἔχῃ καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι 0**

Ἤτοι : $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

Παραδείγματα :

1) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ $\lambda \in \mathbf{R}$ τὸ σύστημα $\begin{array}{l} 3x + 2\lambda\psi = 0 \\ 4x - (\lambda+1)\psi = 0 \end{array}$ ἔχει καὶ ἄλλας λύσεις ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς ;

Λύσις : Δέον νὰ ἔχωμεν $\begin{vmatrix} 3 & 2\lambda \\ 4 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -\frac{3}{11}$

Πράγματι· διότι τότε $\left. \begin{array}{r} 3x + 2\left(-\frac{3}{11}\right)\psi = 0 \\ 4x - \left(-\frac{3}{11} + 1\right)\psi = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left. \begin{array}{r} 33x - 6\psi = 0 \\ 44x - 8\psi = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$

$\left. \begin{array}{r} 11x - 2\psi = 0 \\ 11x - 2\psi = 0 \end{array} \right\}$ καὶ ἑπομένως τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἰσοῦται μὲ τὸ τοιοῦτον τῆς δευτέρας.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, γ ἵνα τὸ σύστημα $\Sigma : \left| \begin{array}{l} \alpha x + \psi + \omega = 0 \\ x + \beta\psi + \omega = 0 \\ x + \psi + \gamma\omega = 0 \end{array} \right.$ ἔχῃ καὶ ἄλλας λύσεις ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς $(x, \psi, \omega) = (0, 0, 0)$

Λύσις : Δέον νὰ ἔχωμεν : $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & 1 & \gamma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 2$, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη συνθήκη.

3). Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $6x - \psi - \omega = 0$, $3x + 4\psi - 2\omega = 0$

Λύσις : Προφανὴς εἶναι ἡ λύσις $(x, \psi, \omega) = (0, 0, 0)$ Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἄλλων λύσεων, ἐφ' ὅσον ἔχωμεν :

$$\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 3 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 4 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 12 \neq 0,$$

λαμβάνομεν $x = \lambda \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6\lambda, \quad \psi = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9\lambda, \quad \omega = \lambda \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 27\lambda$

Οὕτω αἱ λύσεις εἶναι :

$$(x, \psi, \omega) = (6\lambda, 9\lambda, 27\lambda), \quad \forall \lambda \in R$$

π.χ. διὰ $\lambda = -1$ λαμβάνομεν $(x, \psi, \omega) = (-6, -9, -27)$, ἥτις εἶναι λύσις τοῦ συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

180) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ $\lambda \in R$ τὸ σύστημα $\left| \begin{array}{l} 5x + (2\lambda - 1)\psi = 0, \\ -2x + (6\lambda + 1)\psi = 0 \end{array} \right.$ ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις ;

181) Ἐὰν τὸ σύστημα $\alpha x + \beta\psi = 0$, $\beta^2 x + \alpha^2\psi = 0$ ἔχει καὶ ἄλλας λύσεις ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς, ποία ἡ σχέσις τῶν α καὶ β .

182) Ποῖα ἐκ τῶν ἀκολούθων συστημάτων ἔχουν μίαν μόνον λύσιν καὶ ποῖα ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις ;

1) $\begin{array}{r} x + \psi - \omega = 0 \\ 2x - \psi + 4\omega = 0 \\ x - 3\psi + \omega = 0 \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} -5\chi + 4\psi + 3\omega = 0 \\ x - 2\psi + \omega = 0 \\ -10x + 8\psi + 6\omega = 0 \end{array}$

183) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ συστήματα (χρησιμοποιήσατε τὰς δύο ὁμογενεῖς ἐξισώσεις)

1) $\left| \begin{array}{l} x + 2\psi - z = 0 \\ 2x - \psi + 3z = 0 \\ x + \psi + z = 2 \end{array} \right.$ 2) $\left| \begin{array}{l} \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega = 0 \\ \alpha^2 x + \beta^2\psi + \gamma^2\omega = 0 \\ x + \psi + \omega = \dfrac{1}{\alpha\beta\gamma} \end{array} \right.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

184) Διὰ ποίας καὶ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ ψ αἱ ὁρίζουσαι

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 4+\psi & 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ καὶ } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2x \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 1-\psi \end{vmatrix}$$ λαμβάνουν ἀμφότεραι τὴν τιμὴν 0.

185) Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\begin{array}{l} x + (3\lambda - 1)\psi = 0 \\ x + 2\psi = \lambda - 4 \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\psi} = \alpha \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\psi} = \beta \end{array}$ 3) $\begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha x + \psi = 0 \\ \beta^2 + \beta x + \psi = 0 \end{array}$

186) Ν' ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες.

1) $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -\lambda^3 \\ 1 & \mu & -\mu^3 \\ 1 & \nu & -\nu^3 \end{vmatrix} = (\lambda-\mu)(\nu-\mu)(\nu-\lambda)(\nu+\lambda+\mu)$ 2) $\begin{vmatrix} x & -x & 0 \\ 0 & x^2 & -1 \\ 1 & x & x+1 \end{vmatrix} = \dfrac{x^5-x}{x-1}$ $(x \neq 1)$

3) $\begin{vmatrix} \alpha\gamma & \alpha\beta & \beta\gamma \\ 1 & 1 & 1 \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ 4) $\begin{vmatrix} \beta^2+\gamma^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \alpha^2+\gamma^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \alpha^2+\beta^2 \end{vmatrix} = 4\alpha^2\beta^2\gamma^2$

187) Νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τοῦ κανόνος τοῦ Cramer τὰ συστήματα :

1) $\begin{aligned} \alpha x + \beta\psi + z &= 1 \\ x + \alpha\beta\psi + z &= \beta \\ x + \beta\psi + \alpha z &= 1 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} x + \psi + z &= 0 \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma z &= 0 \\ \beta\gamma x + \alpha\gamma\psi + \alpha\beta z &= 1 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} x + \alpha\psi + z &= 2\alpha \\ x + \psi + \alpha z &= 0 \\ (\alpha+1)x + \alpha\psi + z &= \alpha \end{aligned}$

188) Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα, διὰ $\lambda \in R$

1) $x + \psi + \lambda\omega = 1 \quad x + \lambda\psi + \omega = \lambda \quad x - \psi + \omega = 3$

189) Ποία ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν α καὶ β, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $\beta x + 2\alpha\psi = \alpha\beta$, $\alpha x - \beta\psi = \alpha\beta$, $x + \psi = 2\alpha - \beta$ ἐπαληθεύωνται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν $x, \psi \in R$;

190) Νὰ προσδιορισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ $\mu \in R$, ἵνα τὸ σύστημα $x + (\mu+1)\psi = 10$, $2x - (4\mu+1)\psi = 5$, $x - \psi = 6$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν ἐν R.

191) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, γ ἵνα τὸ σύστημα ἔχῃ καὶ ἄλλας λύσεις ἐκτὸς τῆς προφανοῦς

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega &= 0 \\ \beta x + \gamma\psi + \alpha\omega &= 0 \\ x + \psi + \omega &= 0 \end{aligned}$$

192) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, γ ἵνα τὸ σύστημα ἔχῃ καὶ ἄλλας λύσεις ἐκτὸς τῆς μηδενικῆς

$$\begin{aligned} \alpha^2 x + \beta^2\psi + \gamma^2\omega &= 0 \\ \alpha x + \beta\psi + \gamma\omega &= 0 \\ x + \psi + \omega &= 0 \end{aligned}$$

193) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστὸν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ $\alpha \in R$ ἐκτὸς $\alpha = 1$ καὶ $\alpha = -1$

$$\begin{aligned} \alpha x + \psi + \omega &= \alpha \\ \alpha x + \alpha\psi + \omega &= 1 \\ x + \alpha\psi + \alpha\omega &= 1 \\ x + \psi + \alpha\omega &= \alpha \end{aligned}$$

194) Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα (Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις ἀποτελοῦν ὁμογενὲς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους)

$$\begin{aligned} \frac{x}{\beta+\gamma} + \frac{\psi}{\gamma-\alpha} - \frac{z}{\alpha-\beta} &= 0 \\ \frac{x}{\beta-\gamma} - \frac{\psi}{\gamma-\alpha} + \frac{z}{\alpha+\beta} &= 0 \\ \frac{x}{\beta+\gamma} + \frac{\psi}{\gamma-\alpha} + \frac{z}{\alpha+\beta} &= 2\alpha \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ — ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

(Συμπλήρωσις τῶν διδαχθέντων εἰς τὴν Γ' τάξιν)

Α'. ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

62. Εἰς τὴν Γ' τάξιν εἴδομεν, ὅτι κατὰ τὴν σπουδὴν τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν διεπιστώθη ἡ ἀδυναμία ρητῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2-2=0$, ἢ τῆς $x^2-3=0$, ἢ ἐν γένει τῆς $x^2=\theta$, ὅπου $\theta>0$ καὶ μὴ τετράγωνος ἀριθμός, διότι δὲν ὑπάρχει ρητός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἀντιστοίχως 2, ἢ 3, ἢ θ. Ὡς ἐκ τούτου, προέκυψεν ἡ ἀνάγκη ἐπεκτάσεως τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν ἀριθμῶν μὲ τὴν δημιουργίαν νέων ἀριθμῶν, ὀνομασθέντων **ἀρρήτων ἢ ἀσυμμέτρων** καὶ οἱ ὁποῖοι κατεσκευάσθησαν κατὰ τρόπον θεραπεύοντα τὰς ἀδυναμίας τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Δηλαδὴ νὰ καθίσταται δυνατὴ ἡ λύσις τῶν ἄνω ἐξισώσεων.

Ἡ θεμελίωσις τοῦ νέου συστήματος τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν ἔγινε κατὰ τρόπον πληροῦντα τὰς διδακτικὰς ἀνάγκας. Οὕτως, ἐγνωρίσαμεν τὰς ἀκολούθους ἐννοίας :

Ὁρισμός. Ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha\in N_0$ καὶ τῆς ἀπεράντου (ἄνευ τέλους) ἀκολουθίας ψηφίων (μονοψηφίων ἀκεραίων) $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_\nu, \ldots$ σχηματίζομεν τὴν ἀπέραντον ἀκολουθίαν ἀριθμῶν.

(1) $\alpha \quad \alpha,\psi_1 \quad \alpha,\psi_1\psi_2 \quad \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3 \quad \ldots \quad \alpha,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$

τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν $\alpha, \psi_1\,\psi_2\,\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$

Τὸ σύμβολον τοῦτο, τὸ ὁποῖον εἶναι μία ἀπειροψήφιος δεκαδικὴ παράστασις, ὀνομάζομεν **ἄρρητον ἢ ἀσύμμετρον** ἀριθμόν, ἂν δὲν παριστάνῃ δεκαδικὸν περιοδικὸν ἀριθμὸν (δηλ. ρητόν), ἤτοι ἄν, μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν εἴτε μετὰ ἀπὸ ἕν ψ καὶ πέραν, δὲν ἐμφανίζεται «τμῆμα ψηφίων» ἐπαναλαμβανόμενον διαρκῶς χωρὶς τὴν ἐμφάνισιν ἄλλων ψηφίων.

Πᾶς ὅρος τῆς ἀκολουθίας (1) εἶναι ἕνας **ρητὸς προσεγγιστικὸς ἀντιπρόσωπος** τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ $\alpha,\psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$

Σχετικὸς ἄρρητος ἀριθμός καλεῖται πᾶς ἄρρητος φέρων πρὸ αὐτοῦ τὸ (+) ἢ τὸ (−).

π.χ. Οἱ ὅροι τῶν ἀκολουθιῶν :

(α) 1 1,4 1,41 1,414 1,4142...

(β) 2 1,5 1,42 1,415 1,4143...

εἶναι ρητοὶ προσεγγιστικοὶ ἀντιπρόσωποι τοῦ ἀρρήτου 1,4142...κατ' ἔλλειψιν ἢ καθ' ὑπεροχὴν ἀντιστοίχως καὶ ἐκφράζουν τιμὰς τῆς $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν 0, 1 0,01 0,001 0,0001...

Οὕτω ἔχομεν $1<1{,}4<1{,}41<1{,}414<\ldots<\sqrt{2}<\ldots<1{,}415<1{,}42<1{,}5<2$, ὁπότε λέγομεν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι (α) καὶ (β) διαχωρίζονται ἀπὸ τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμὸν $\sqrt{2}$, ὁ ὁποῖος διὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἀντιπροσωπεύει τὸν ἀσύμμετρον 1,4142..., τὸν ὁποῖον καθορίζουν αἱ ἀκολουθίαι. Μὲ ἀνάλογον τρόπον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἄλλους ἀρρήτους ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $\sqrt{\theta}$, ὅπου >0 καὶ μὴ τετράγωνος.

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, πρόσθεσις, ἀφαίρεσις πολ/σμός, διαίρεσις καὶ αἱ ἔννοιαι τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος ὁρίζονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ρητῶν (συμμέτρων), καὶ ἔχουν τὰς αὐτὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας, τὰς ὁποίας ἔχουν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ρητῶν. Ὁμοίως ὁρίζεται ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεως ἀρρήτου ἀριθμοῦ.

Αἱ πράξεις αὐταὶ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν εἰς τὴν στοιχειώδη Ἄλγεβραν γίνονται προσεγγιστικῶς. Θεωροῦμεν ἀντὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, προσεγγιστικοὺς ἀντιπροσώπους αὐτῶν (ρητοὺς συνεπῶς) μὲ ὁποιανδήποτε προσέγγισιν θέλωμεν. Οὕτως ὁ ὑπολογισμὸς ἀριθμητικῶν παραστάσεων μὲ ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς γίνεται μὲ πᾶσαν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν, ἡ ὁποία αὐξάνει μὲ τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τῶν ρητῶν ἀντιπροσώπων των. Π.χ. διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ καὶ ὑπολογίσωμεν αὐτό, λαμβάνομεν μὲ προσέγγισιν 0,01 τοὺς ρητοὺς ἀντιπροσώπους καὶ σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $1{,}73+1{,}41=3{,}14$. ὁ 3,14 εἶναι ὁ προσεγγιστικὸς ρητὸς ἀντιπρόσωπος τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Τὸ ἄθροισμα, γινόμενον, διαφορὰ καὶ πηλίκον ἀρρήτων ἀριθμῶν δυνατὸν νὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμός π.χ. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$. Ὁμοίως $\sqrt{18}:\sqrt{2}=\sqrt{18:2}=\sqrt{9}=3$.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν λεχθέντων, σχετικῶς μὲ τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων, συνάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκτελῶμεν πράξεις ἐφαρμόζοντες τὰς ἰδιότητας αὐτῶν, ἀδιαφοροῦντες διὰ τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν, εἴτε πρόκειται περὶ ρητῶν, εἴτε πρόκειται περὶ ἀρρήτων.

63. Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς χρησίμους προτάσεις :

1. Ἐὰν α ἄρρητος καὶ ρ_1, ρ_2 ρητοὶ τότε, ἐὰν εἶναι $\alpha\cdot\rho_1=\rho_2$, θὰ εἶναι $\rho_1=\rho_2=0$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\rho_1\neq 0$, τότε $\alpha\cdot\rho_1=\rho_2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{\rho_2}{\rho_1}$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ ἀριθμὸς $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ εἶναι ρητός. Ἄρα ὁ ρ_1 δὲν δύναται νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ συνεπῶς $\rho_1=0$, ἀλλὰ τότε καὶ $\rho_2=\alpha\cdot 0=0$

2. Ἐὰν α ἄρρητος καὶ ρ ρητός, τότε ὁ ἀριθμὸς $\alpha + \rho$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $\alpha \cdot \rho$ ($\rho \neq 0$) εἶναι ἄρρητοι.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι εἶναι ρητοὶ τότε

$$\alpha + \rho = \rho' = \text{ρητὸς} \Leftrightarrow \alpha = \rho' - \rho = \text{ρητός, ὅπερ ἄτοπον}$$

$$\alpha\rho = \rho'' = \text{ρητὸς} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\rho''}{\rho} \text{ ρητὸς } (\rho \neq 0), \text{ ὅπερ ἄτοπον.}$$

3. Ἐὰν $\theta \in N$ καὶ δὲν εἶναι δύναμις μὲ ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ ν, τότε ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[\nu]{\theta}$ εἶναι ἄρρητος.

Ἀπόδειξις: Ὑπενθυμίζομεν ὅτι τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\theta}$ τῆς νιοστῆς ρίζης τοῦ ἀριθμοῦ θ ἐγνωρίσαμεν εἰς τὴν Γ' τάξιν καὶ ὅτι : $x = \sqrt[\nu]{\theta} \Leftrightarrow x^\nu = \theta$ (διὰ πᾶν $\theta > 0$).

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\sqrt[\nu]{\theta} = \kappa$ ($\kappa \in Z^+$) καὶ ὅτι ὁ $\kappa = \kappa_1^{\lambda 1} \cdot \kappa_2^{\lambda 2} \ldots \kappa_\mu^{\lambda\mu}$, ὅπου $\kappa_{1,2,\ldots\mu}$ καὶ $\lambda_{1,2,\ldots,\mu}$ φυσικοί, τότε: $\theta = \kappa^\nu = \kappa_1^{\nu\lambda 1} \cdot \kappa_2^{\nu\lambda 2} \ldots \kappa_\mu^{\nu\lambda\mu}$, ὅπερ ἄτοπον.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $\sqrt[\nu]{\theta} = \frac{\kappa}{\lambda}$, ὅπου $\kappa, \lambda \in Z^+$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε $\theta = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^\nu = \frac{\kappa^\nu}{\lambda^\nu}$, ὅπερ ἄτοπον, διότι οἱ ἀριθμοὶ κ^ν, λ^ν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὥστε ὁ $\sqrt[\nu]{\theta}$ εἶναι ἄρρητος.

4. Πᾶσα ἀκεραία δύναμις τῆς παραστάσεως $\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma}$, ὅπου α, β, γ ρητοὶ καὶ $\sqrt{\gamma}$ ἄρρητος εἶναι παράστασις τῆς μορφῆς $\kappa \pm \lambda\sqrt{\gamma}$, ὅπου κ, λ ρητοί.

Ἀπόδειξις: α) $(\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma})^2 = \alpha^2 + \beta^2\gamma \pm 2\alpha\beta\sqrt{\gamma} = \kappa_1 \pm \lambda_1\sqrt{\gamma}$

ὅπου $\alpha^2 + \beta^2\gamma = \kappa_1$ καὶ $2\alpha\beta = \lambda_1$

β) $(\alpha \pm \beta\sqrt{\gamma})^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta\sqrt{\gamma} + 3\alpha\beta^2\gamma \pm \beta^3\gamma\sqrt{\gamma} =$

$= (\alpha^3 + 3\alpha\beta^2\gamma) \pm (3\alpha^2\beta + \beta^3\gamma)\sqrt{\gamma} = \kappa_2 \pm \lambda_2\sqrt{\gamma}$

ὅπου $\alpha^3 + 3\alpha\beta^2\gamma = \kappa_2$ καὶ $3\alpha^2\beta + \beta^3\gamma = \lambda_2$

5. Ἐὰν α, β, γ, δ ρητοὶ καὶ $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\delta}$ ἄρρητοι, τότε διὰ νὰ εἶναι $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha = \gamma$, τότε $\sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$, ἐξ οὗ $\beta = \delta$ Ἐξ ἄλλου ἔχομεν: $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta} \Leftrightarrow \alpha - \gamma + \sqrt{\beta} = \sqrt{\delta}$, ἐξ ἧς δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν $(\alpha-\gamma)^2 + \beta + 2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta} = \delta \Rightarrow 2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta} = \delta - \beta - (\alpha-\gamma)^2$. Ἐὰν $\alpha \neq \gamma$ τότε $\sqrt{\beta} = \frac{\delta - \beta - (\alpha-\gamma)^2}{2(\alpha-\gamma)}$ = ρητός, ὅπερ ἄτοπον καθ' ὅσον $\sqrt{\beta}$ ἄρρητος.

Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν $\alpha = \gamma$ καὶ συνεπῶς καὶ $\beta = \delta$. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀρκετόν, ὡς εἶναι προφανές.

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν συμμέτρων λ καὶ μ, ἵνα ἡ παράστασις $(\lambda+\mu)\sqrt{5} + 2\lambda - \mu$ ἰσοῦται πρὸς $\sqrt{5} + 1$.

Λύσις: Ἔχομεν $(\lambda+\mu)\sqrt{5} + 2\lambda - \mu = \sqrt{5} + 1 \Leftrightarrow (\lambda + \mu - 1)\sqrt{5} = 1 + \mu - 2\lambda$, ὅπερ κατὰ τὴν πρότασιν 1, θὰ πρέπει $\lambda + \mu - 1 = 0$ καὶ $1 + \mu - 2\lambda = 0$, ἐξ οὗ ἔχομεν τὴν λύσιν $(\lambda, \mu) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Ἱστορικὴ σημείωσις:

Τὴν ὕπαρξιν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διεπίστωσαν πρῶτοι οἱ Πυθαγόρειοι, ἀκολούθως ὁ Εὔδοξος συνέβαλεν πραγματικῶς εἰς τὴν ἔννοιαν τῶν ἀσυμμέτρων, νεώτεροι δὲ θεωρητικοί, ὡς οἱ Weirstrass (1815–1897), Meray (1835–1911) Cantor (1843–1918), Dedekind (1831–1916), εἰσεχώρησαν πλέον βαθύτερον ἐπὶ τῆς ἐννοίας τῶν ἀσυμμέτρων διὰ τῶν περιφήμων **«τομῶν Dedekind»**.

Β. ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

64. Ὡς γνωστόν, τέσσαρα εἶναι τὰ κύρια στάδια τῆς ἐξελίξεως τοῦ συστήματος τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Τὸ πρῶτον εἶναι ἡ ἔννοια τῶν **ἀπολύτων ἀκεραίων ἢ φυσικῶν ἀριθμῶν.** Ἠκολούθησεν ἡ ἐπέκτασις εἰς τὸ σύστημα τῶν **σχετικῶν ἀκεραίων.** Ἐν συνεχείᾳ ἡ εἰσαγωγὴ τῶν ρητῶν κλασμάτων ἐδημιούργησε τὸ σύστημα τῶν **ρητῶν ἢ συμμέτρων ἀριθμῶν.** Τέλος, ἡ ἔννοια τοῦ **ἀρρήτου ἢ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ** ὡδήγησεν εἰς τὴν ἰδέαν ἐπεκτάσεως τοῦ συστήματος τῶν ρητῶν εἰς ἓν σύστημα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὸ σύνολον τῶν ρητῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν. Τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται σύστημα τῶν **πραγματικῶν ἀριθμῶν.** Βραδύτερον θὰ μάθωμεν καὶ μίαν ἄλλην ἀπέκτασιν πρὸς ἓν εὐρύτερον σύστημα ἀριθμῶν.

Ὥστε, **τὸ σύνολον τῶν ρητῶν καὶ τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν, τῆς Ἀλγέβρας, καλεῖται σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (Real) καὶ παρίσταται διὰ τοῦ R**

Ἐπειδὴ οὐδεὶς ρητὸς ἀριθμὸς εἶναι ἄρρητος καὶ ἀντιστρόφως, ἕπεται ὅτι τὰ δύο σύνολα τῆς Ἀλγέβρας, Q τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ρητῶν καὶ A τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀρρήτων, εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα καὶ διαμερίζουν τὸ σύνολον R.

Οὕτως ἔχομεν: $Q \cap A = \varnothing$, $Q \cup A = R$, $Q \subset R$, $A \subset R$.

Ἐὰν δὲ N_0 εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν καὶ τοῦ μηδενὸς καὶ Z εἶναι τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀκεραίων, τότε:

$$N_0 \subset Z \subset Q \subset R, \quad N_0 \cap A = \varnothing, \quad Z \cap A = \varnothing.$$

Πᾶς πραγματικὸς ἀριθμός, ἐφ' ὅσον εἶναι ἢ ρητὸς ἢ ἄρρητος ἀριθμός, συμβολίζεται διὰ τοῦ $\alpha,\psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$, ὁ ὁποῖος παριστᾷ τὴν ἀκολουθίαν α, α_1,ψ_1 $\alpha,\psi_1\psi_2$ $\ldots$ $\alpha,\psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$, ὅπου $\alpha \in N_0$ καὶ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots \psi_\nu, \ldots$ ἀπέραντος ἀκολουθία μονοψηφίων ἀκεραίων. Τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἢ περιοδικόν, ὁπότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι ρητός, ἢ μὴ περιοδικὸν ὁπότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἄρρητος. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι πάντες οἱ ρητοὶ ἀριθμοὶ συμβολίζονται δι' ἀπειροψηφίου περιοδικοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

65. Η ΙΣΟΤΗΣ ΕΙΣ ΤΟ R.

Δύο πραγματικοὶ ὁμόσημοι ἀριθμοὶ $\alpha, x_1 x_2 x_3 \ldots x_\nu \ldots$ καὶ $\beta, \psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$ ὁρίζονται ἴσοι, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, εἶναι $\alpha = \beta$, $x_1 = \psi_1$, $x_2 = \psi_2, \ldots, x_\nu = \psi_\nu, \ldots$ Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ἡ ἰσχὺς τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος, ἡ ὁποία συνιστᾶ σχέσιν ἰσοδυναμίας.

66. ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣ ΤΟ R.

Εἴδομεν ὅτι αἱ πράξεις ὁρίζονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ρητῶν καὶ αἱ ἰδιότητες παραμένουν ἀναλλοίωτοι, γίνονται δὲ εἰς τὴν στοιχειώδη Ἄλγεβραν προσεγγιστικῶς.

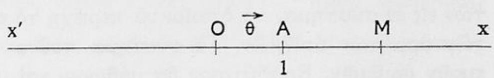
Εἰς τοὺς ἀνωτέρω ἴσους πραγματικοὺς ἀριθμούς, (§ 65), ἂν συμβῇ νὰ εἶναι $\alpha = \beta$, $x_1 = \psi_1$, $x_2 = \psi_2$, $\ldots$ $x_{\nu-1} = \psi_{\nu-1}$ καὶ $x_\nu > \psi_\nu$, τότε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι μὲ μεγαλύτερον τὸν πρῶτον.

Ἡ σύγκρισις μεταξὺ πραγματικῶν ἀριθμῶν γίνεται εἰς τὰς ἐφαρμογὰς μὲ βάσιν τὴν προσεγγιστικὴν ἐκπροσώπησιν τῶν ἀσυμμέτρων. Οὕτω, $\forall\, \alpha, \beta \in R$ μία μόνον πληροῦται ἐκ τῶν σχέσεων : $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$

Ἐπίσης ἂν $\alpha, \beta, \gamma \in R$ καὶ $\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta < \gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha < \gamma$.

67. Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΙΚΩΝ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ R.

Ὡς γνωστόν, ἡ εὐθεῖα x΄x, τὸ σημεῖον O καὶ τὸ μοναδιαῖον



διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = \vec{\theta}$, ἀποτελοῦν ἕναν **ἄξονα**, τὸν ἄξονα $(x'0x, \vec{\theta})$. Ἂν θεωρήσωμεν σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου καὶ λάβωμεν τὸν λόγον $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OA}}$, τότε ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν μέτρων τῶν διανυσμάτων, ὁ ὁποῖος εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς ρητὸς ἢ ἄρρητος καὶ μόνον ἕνας. Οὕτως εἰς κάθε σημεῖον M τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχεῖ εἷς καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμός, ὅστις εἶναι ὁ λόγος τῶν μέτρων τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}$ καὶ $\overrightarrow{OA}$.

Ἀντιστρόφως, εἰς πάντα πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον σημεῖον M τοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον εἶναι πέρας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ καὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν. Ἑπομένως, μεταξὺ τοῦ συνόλου R καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἄξονος x΄0x, ὑπάρχει ἀντιστοιχία ἀμφιμονοσήμαντος, διὰ τοῦτο ὁ ἄξων x΄0x καλεῖται **ἄξων τῶν πραγματικῶν** καὶ εἶναι ἡ γεωμετρικὴ εἰκὼν τοῦ συνόλου R.

68. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ὡς γνωστόν, ἡ ἕνωσις τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς μετὰ τοῦ μηδενὸς καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀντιθέτων των ἀποτελεῖ τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν (πραγματικῶν).

Ὁρισμός. Εἶναι γνωστὸν ἐκ προηγουμένης τάξεως, ὅτι **ἀπόλυτος τιμὴ (ἢ μέτρον)** ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς, ὁ προκύπτων ἀπὸ αὐτόν, ὅταν παραλειφθῇ τὸ πρόσημόν του.

Οὕτως ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+4$ εἶναι ὁ 4, ἡ δὲ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ -4

εἶναι πάλιν ὁ 4, συμβολίζεται δὲ ὡς ἑξῆς: $|+4| = 4$ καὶ $|-4| = 4$ καὶ διαβάζεται «ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $+4$ ἢ τοῦ -4». *

Ἐπειδὴ πάντες οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ταυτίζοναι μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς ἀριθμητικῆς κατὰ σύμβασιν, ἕπεται ὅτι ἔχομεν $4 = +4$ καὶ συνεπῶς $|+4| = +4$ καὶ $|-4| = +4 = -(-4)$.

Ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν αὐστηρότερον ὅτι: **Ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ (ἢ μιᾶς πραγματικῆς παραστάσεως) α καλεῖται αὐτὸς οὗτος ὁ ἀριθμὸς α, ἐὰν εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν, ὁ ἀντίθετός του δέ —α, ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.**

Συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν θὰ ἔχωμεν
$$\boxed{\begin{array}{l} \forall \alpha \in R_0^+ \Rightarrow |\alpha| = \alpha \\ \forall \alpha \in R^- \Rightarrow |\alpha| = -\alpha \, (-\alpha > 0) \end{array}}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράστασις $|\alpha|$ οὐδέποτε γίνεται ἀρνητικὴ καὶ συνεπῶς εἶναι ἕνας **μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός**.

69. ΒΑΣΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ.

1. Ἐὰν $\alpha \in R$, τότε $|\alpha| = |-\alpha|$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha \in R^+ \Rightarrow -\alpha \in R^-$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $|\alpha| = \alpha$ καὶ $|-\alpha| = -(-\alpha) = \alpha$. Ὅθεν $|\alpha| = |-\alpha|$

Ἐὰν $\alpha \in R^- \Rightarrow -\alpha \in R^+$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $|\alpha| = -\alpha$ καὶ $|-\alpha| = -\alpha$. Ὅθεν $|\alpha| = |-\alpha|$

Ἐὰν $\alpha = 0$, τότε $-\alpha = 0$ καὶ προφανῶς $|\alpha| = |-\alpha|$

Ὥστε : $\boxed{\forall \alpha \in R \Rightarrow |\alpha| = |-\alpha|}$

2. Ἐὰν $\alpha \in R$, τότε εἶναι $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha \in R_0^+ \Rightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ ἐπειδὴ $|\alpha| \geqq -|\alpha|$, ἕπεται ὅτι $-|\alpha| \leqslant \alpha = |\alpha|$ (1). Ἐὰν δέ $\alpha \in R^- \Rightarrow |\alpha| = -\alpha$ ἢ $-|\alpha| = \alpha$, ὁπότε $-|\alpha| = \alpha \leqslant |\alpha|$. (2). Αἱ σχέσεις (1) καὶ (2) δίδουν $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$

Ὥστε : $\boxed{\forall \alpha \in R \Rightarrow -|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|}$

3. Ἐὰν $\alpha \in R$ καὶ $\nu \in N$, τότε εἶναι $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha \in R_0^+ \Rightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ ἄρα $|\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$. Ἐὰν $\alpha \in R^- \Rightarrow |\alpha| = -\alpha$ καὶ ἄρα $|\alpha|^{2\nu} = (-\alpha)^{2\nu} = \alpha^{2\nu}$

Ὥστε : $\boxed{\forall \alpha \in R,\ \nu \in N \Rightarrow |\alpha|^{2\nu} = \alpha^{2\nu}}$

4. Ἐὰν $\alpha \in R_0^+$ καὶ $\nu \in N$, τότε εἶναι $|\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1}$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha \in R_0^+ \Rightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ ἄρα $|\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1}$

Ὥστε : $\boxed{\forall \alpha \in R_0^+,\ \nu \in N \Rightarrow |\alpha|^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1}}$

(*). Τὸ σύμβολον | | καὶ ἡ ὀνομασία αὐτοῦ, ὀφείλονται εἰς τὸν Γερμανὸν μαθηματικὸν Weirstrass (1815 - 1897).

5. Ἐὰν $\alpha, x \in R$ καὶ $|x| \leqslant \alpha$, τότε $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $x \in R_0^+ \Rightarrow |x| = x$ καὶ ἐπειδὴ $|x| \leqslant \alpha$, ἔπεται $x \leqslant \alpha$ καὶ ἄρα $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$, διότι $|x| \leqslant \alpha \Rightarrow \alpha \geqslant 0$ Ἐὰν δὲ $x \in R^- \Rightarrow |x| = -x$ καὶ ἐπειδὴ $|x| \leqslant \alpha$, ἔπεται $-x \leqslant \alpha$ ἢ $x \geqslant -\alpha$ καὶ ἄρα $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$, διότι $\alpha \geqslant 0$.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν $x \in R_0^+ \Rightarrow |x| = x$ καὶ ἐπειδὴ $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$, ἔπεται $|x| \leqslant \alpha$. Ἐὰν $x \in R^- \Rightarrow |x| = -x$ ἢ $-|x| = x$ καὶ ἐπειδὴ $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$, ἔπεται $-\alpha \leqslant -|x|$ ἢ $\alpha \geqslant |x|$ ἢ $|x| \leqslant \alpha$

Ὥστε : $\boxed{\forall \alpha, x \in R : |x| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x \leqslant \alpha}$

Σημ. Ἐκτὸς τῶν βασικῶν τούτων ἰδιοτήτων εἰς ἄλλην τάξιν θὰ μάθωμεν καὶ ἄλλας λίαν χρησίμους.

Παραδείγματα: α) Ἐαν $x \in R$ τότε, $|x-7| \leqslant 3 \Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 10$

Πράγματι : $|x-7| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x-7 \leqslant 3 \Leftrightarrow 4 \leqslant x \leqslant 10$

β) Ἐὰν εἶναι $6 < x < 10$ νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τιμῶν τῆς παραστάσεως $A = -|x-1| - 2|x-11|$.

Λύσις: Ἐκ τῆς $6 < x < 10$ ἔχομεν $5 < x-1 < 9$, ὅπερ $|x-1| = x-1$, ἐπίσης $-5 < x-11 < -1$, ὅπερ $|x-11| = -(x-11) = 11-x$

Ἄρα $A = -(x-1) - 2(11-x) = x-21$ ἢ $A+21 = x$ ἢ $6 < A+21 < 10$ ἢ $-15 < A < -11$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

195) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $3+\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[5]{3}$ εἶναι ἀσύμμετροι, ὁ δὲ $3+\sqrt{5}$ νὰ κατασκευασθῇ μὲ προσέγγισιν 0,01.

196) Ἐὰν α ἄρρητος καὶ ρ ρητός, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\rho}$, $\frac{\rho}{\alpha}$ εἶναι ἄρρητοι.

197) Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ παραδειγμάτων, ὅτι τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀρρήτων, δύναται νὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

198) Ἄν $(\alpha, \beta, \gamma) \in Q$ καὶ $\alpha + \beta\sqrt{2} = \gamma\sqrt{3}$, τότε $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

199) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν συμμέτρων λ καὶ μ, ἂν ὁ ἀριθμὸς $(\lambda - \mu)\sqrt{2} - (2\mu - 1)$ εἶναι ἴσος πρὸς τὸν $\sqrt{2}$.

200) Ἄν x ἀσύμμετρος καὶ α, β, γ, δ σύμμετροι, ὑπὸ ποίαν συνθήκην ἡ παράστασις $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ εἶναι ἀριθμὸς σύμμετρος ;

201) Ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν X'OX νὰ εὑρεθοῦν σημεῖα, ἔχοντα γεωμετρικὰς εἰκόνας τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... (διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος).

202) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\forall \alpha, \beta \in R \Rightarrow |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$

203) Ἐὰν $\alpha \in R$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οὐδέποτε εἶναι $-|\alpha| < \alpha < |\alpha|$

204) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\forall \alpha \in R^-$ καὶ $\nu \in N \Rightarrow |\alpha|^{2\nu+1} = -\alpha^{2\nu+1}$

205) Ἐὰν $\alpha, \beta \in R$ καὶ $|\alpha| + |\beta| > 0$, τί συμπεραίνετε διὰ τοὺς α, β ;

206) Ἐὰν $|x-10| \leqslant 5$, τότε $5 \leqslant x \leqslant 15$ καὶ ἀντιστρόφως.

207) Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία: $|x-\alpha| \leqslant \theta \Longleftrightarrow \begin{cases} \theta \geqslant 0 \\ \alpha - \theta \leqslant x \leqslant \alpha + \theta \end{cases}$

208) Ἐὰν $x \in R^+$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως $|x| > \alpha \geqslant 0$ ἕπεται ἡ $0 \leqslant \alpha < x < +\infty$, ἐὰν δὲ $x \in R^-$ ἡ $-\infty < x < -\alpha \leqslant 0$

209) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $(|x| + 8x^2)/(8|x| + 1)$

210) Ἐὰν $\alpha, \beta \in R$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 2|\alpha| \cdot |\beta|$

211) Ἐὰν $x = \sqrt{2} + 1$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
$A = -2|2x-1| - 3|\sqrt{2} - x| - 7|3x - (\sqrt{2}+3)| - 3|x|$

212) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
$7|\alpha-\beta| - 3|\beta-\alpha| + 2|\alpha+\beta| - |2\alpha-\beta|$, ἂν $\alpha > \beta > 0$

213) Ἐὰν $-5 < x < 12$, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τιμῶν τῆς παραστάσεως
$A = -3|x-6| + |x+13| - 2|2x-11| - |12-x|$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

70. ΟΡΙΣΜΟΙ

Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν εἴδομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν λύσεων μιᾶς γραμικῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta \psi = \gamma$, ὅπου $\alpha, \beta \in R$, εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου RxR, ἔχον ἄπειρα στοιχεῖα τῆς μορφῆς $\left(x, \psi = \frac{\gamma - \alpha x}{\beta}\right)$.

Πολλάκις ὅμως ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta \psi = \gamma$, ἤτοι τὰς λύσεις τῆς μορφῆς $(x, \psi) \in ZxZ$.

Τοὺς συντελεστὰς α, β, γ εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ θεωρῶμεν ἀκεραίους. Ἔργον τῆς καλουμένης **ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως α΄ βαθμοῦ** εἶναι ἡ ἔρευνα τῆς ὑπάρξεως καὶ ἡ ἀναζήτησις τῶν ἀκεραίων λύσεων μιᾶς ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς καὶ μεταβλητὰς (ἀγνώστους) ὁσασδήποτε πεπερασμένου πλήθους ἢ καὶ συστήματος α΄ βαθμοῦ μὲ πλῆθος ἐξισώσεων μικρότερον τοῦ τῶν ἀγνώστων.

71* ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣ. $\alpha x + \beta \psi = \gamma$ (1), ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \in Z$

Ι) Ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων στηρίζεται εἰς τὰς ἀκολούθους προτάσεις.

1. Ἐὰν οἱ α, β, γ ἔχουν Μ.Κ.Δ. $\delta \neq 1$, τότε ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha}{\delta} x + \frac{\beta}{\delta} \psi = \frac{\gamma}{\delta}$ **εἶναι ἰσοδύναμος τῆς ἐξισώσεως** (1).

Ἀπόδειξις: Ἡ πρότασις εἶναι προφανὴς καθ' ὅσον διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ δ, μᾶς ἐπιτρέπει δέ, νὰ ὑποθέτωμεν πάντοτε τοὺς συντελεστὰς α, β, γ πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

2. Ἐαν α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ α, β ἔχουν κοινὸν τινὰ διαιρέτην $\delta \neq 1$, ἡ ἐξίσωσις (1) οὐδεμίαν ἀκεραίαν λύσιν ἔχει.

Ἀπόδειξς: Ὁ δ προφανῶς δὲν διαιρεῖ τὸν γ, διαιρεῖ ὅμως τοὺς ὅρους αχ καὶ βψ καὶ συνεπῶς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, οἱοιδήποτε κι' ἂν εἶναι οἱ ἀκέραιοι x

(*) Ὁ Ἕλλην Μαθηματικὸς Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεὺς (360μ.Χ.) ἠρεύνησε καὶ εὗρεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τοιούτων ἐξισώσεων ἕως 4ου βαθμοῦ, διὰ τοῦτο καὶ καλοῦνται *Διοφαντικαὶ ἐξισώσεις*, ἡ δὲ ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις *Διοφαντικὴ ἀνάλυσις*.

καὶ ψ. **Ἑπομένως, ἄν $x\psi \in Z$, τότε τὰ μέλη τῆς** ἐξισώσεως (1) οὐδέποτε γίνονται ἴσα καὶ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος. Ἤτοι οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

3. Ἐὰν α, β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ἀκεραίαν λύσιν.

Ἀπόδειξις: Δυνάμεθα πάντοτε νὰ ὑποθέτωμεν $\alpha > 0$.

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $x = \dfrac{\gamma - \beta\psi}{\alpha}$ (2).

Αἱ διαδοχικαὶ ἀκέραιαι τιμαὶ $0, 1, 2, 3, \ldots, \alpha - 1$ (πλήθους α) τιθέμεναι ἀντὶ τοῦ ψ εἰς τὴν (2), δίδουν τὰς ἀκολούθους λύσεις:

$$(3)\ \left(\frac{\gamma}{\alpha}, 0\right), \left(\frac{\gamma-\beta}{\alpha}, 1\right), \left(\frac{\gamma-2\beta}{\alpha}, 2\right), \ldots, \left(\frac{\gamma-\beta(\alpha-1)}{\alpha}, \alpha-1\right)$$

θεωροῦμεν τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς:

$$(4)\ \frac{\gamma}{\alpha}, \frac{\gamma-\beta}{\alpha}, \frac{\gamma-2\beta}{\alpha}, \ldots, \frac{\gamma-\beta(\alpha-1)}{\alpha}$$

καὶ ἔστω τὰ ἀκέραια πηλίκα $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{\alpha-1}$ καὶ τὰ μὴ ἀρνητικὰ ὑπόλοιπα $\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\alpha-1}$ ἀντιστοίχως τῶν διαιρέσεων $\gamma : \alpha, (\gamma - \beta) : \alpha, \ldots, [\gamma - \beta(\alpha-1)] : \alpha$. Ἐὰν ὑπάρχουν ἀρνητικὰ ὑπόλοιπα τὰ καθιστῶμεν θετικὰ δι' αὐξήσεως ἀπολύτως κατὰ μονάδα τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα. Π.χ. τῆς διαιρέσεως $-\frac{17}{5}$ τὸ πηλίκον εἶναι -3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον -2, ὁπότε λαμβανομεν ὡς πηλίκον τὸ -4 καὶ συνεπῶς ὑπόλοιπον $+3$, διότι $-17 = 5(-4) + 3$. Τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα, α εἰς πλῆθος, εἶναι μικρότερα τοῦ α καὶ διάφορα μεταξύ των. Διότι ἂν δύο τυχόντα $\upsilon_\kappa, \upsilon_\lambda$ $(\kappa < \lambda < \alpha)$ εἶναι ἴσα, ἤτοι ἂν $\upsilon_\kappa = \upsilon_\lambda$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} \gamma - \beta_\kappa &= \alpha\pi_\kappa + \upsilon_\kappa \\ \gamma - \beta_\lambda &= \alpha\pi_\lambda + \upsilon_\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \beta(\lambda - \kappa) = \alpha(\pi_\kappa - \pi_\lambda) \Rightarrow \frac{\beta(\lambda-\kappa)}{\alpha} = \pi_\kappa - \pi_\lambda =$$

= ἀκέραιος.

Ἐπειδὴ δὲ α,β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἄρα ὁ α θὰ πρέπῃ νὰ διαιρῇ τὸν $\lambda - \kappa$, βάσει γνωστῆς ἰδιότητος, ὅπερ ἄτοπον, διότι $0 < \lambda - \kappa < \alpha$. Ὥστε, ὅλα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι διάφορα μεταξύ των, εἰς πλῆθος α καὶ ἕκαστον μικρότερον τοῦ α. Ἄρα ἓν τῶν ὑπολοίπων τούτων εἶναι μηδὲν καὶ κατὰ συνέπειαν εἷς τῶν ρητῶν ἀριθμῶν (4) εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, ἤτοι μία τῶν λύσεων (3) εἶναι ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1).

4. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta\psi = \gamma$ (1) ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν, θὰ ἔχῃ καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος τῆς μορφῆς $(x_0 - \beta\kappa, \psi_0 + \alpha\kappa)$ καὶ μόνον αὐτάς.

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὴν πρότασιν (3), ἐὰν α, β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε ἡ ἐξίσ. (1) ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ἔστω τὴν (x_0, ψ_0). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχει καὶ τὴν ἀκεραίαν λύσιν (x_1, ψ_1). Θὰ ἔχωμεν τότε: $\alpha x_0 + \beta\psi_0 = \gamma$ καὶ $\alpha x_1 + \beta\psi_1 = \gamma$. Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη ἔχομεν: $\alpha(x_1 - x_0) + \beta(\psi_1 - \psi_0) = 0 \Rightarrow x_1 - x_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(\psi_1 - \psi_0)$. Τὸ α' μέλος ταύτης εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἐφ' ὅσον ἐδέχθημεν τὴν ὕπαρξιν καὶ τῆς ἄλλης λύσεως (x_1, ψ_1), διαφόρου τῆς (x_0, ψ_0). Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ τὸ β' μέλος $-\frac{\alpha}{\beta}(\psi_1-\psi_0)$. Ἐπειδὴ δὲ α,β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πρέπει ὁ α νὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα $\psi_1-\psi_0$. Ἐὰν $\kappa \in Z$ εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{\psi_1-\psi_0}{\alpha}$, ἤτοι ἂν $\frac{\psi_1-\psi_0}{\alpha}=\kappa$, τότε $\psi_1 = \psi_0+\alpha\kappa$ καὶ $x_1 = x_0 - \beta\kappa$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων καθίσταται φανερόν, ὅτι πᾶσα ἀκεραία λύσις $(x, \psi) = (x_1\ \psi_1)$, δίδεται ἀπὸ αὐτάς, ὅταν ὁ κ λάβῃ μίαν ἀκεραίαν τιμήν. Ἑπομένως ὑπάρχουν ἄπειραι τὸ πλῆθος ἀκέραιαι λύσεις.

Ἀντιστρόφως. Κάθε λύσις τῆς μορφῆς $(x, \psi) = (x_0-\beta\kappa,\ \psi_0+\alpha\kappa)$ εἶναι λύσις ἀκεραία τῆς ἐξισώσεως (1).

Πράγματι ἔχομεν : $\alpha(x_0-\beta\kappa)+\beta(\psi_0+\alpha\kappa) = \alpha x_0 - \alpha\beta\kappa + \beta\psi_0 + \alpha\beta\kappa = \alpha x_0 + \beta\psi_0 = \gamma$, διότι $\alpha x_0 + \beta\psi_0 = \gamma$

Ὥστε, ἐαν ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν τὴν (x_0, ψ_0), τότε θὰ ἔχῃ καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους.

$$(5) \qquad \boxed{\begin{matrix} x = x_0 - \beta\kappa \\ \psi = \psi_0 + \alpha\kappa \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} x = x_0 + \beta\kappa, \\ \psi = \psi_0 - \alpha\kappa, \end{matrix} \quad \text{διότι } \kappa \in Z}$$

II) Εὕρεσις μιᾶς ἀκεραίας λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta\psi = \gamma$

Διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους (5) πρέπει νὰ εὕρωμεν μόνον μίαν ἀπὸ τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισ. $\alpha x + \beta\psi = \gamma$

Πρὸς τοῦτο, λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον ἐκεῖνον, ποὺ ἔχει τὸν μικρότερον συντελεστήν, π.χ. ἐὰν α μικρὸς τότε : $x = \frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$, καὶ ἀκολούθως κατὰ τὴν πρότασιν (3) θέτομεν ὅπου $\psi = 0, 1, 2, \ldots, \alpha-1$ μέχρις ὅτου εὕρωμεν x ἀκέραιον.

Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί, ἡ προηγουμένη μέθοδος εἶναι ἐπίπονος διὰ τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον ἐκεῖνον, ποὺ ἔχει τὸν μικρότερον συντελεστὴν π.χ. τὸν α. Τότε ἔχομεν $x = \frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\psi = \pi_1 + \frac{\upsilon_1}{\alpha} - \left(\pi_2 + \frac{\upsilon_2}{\alpha}\right)\psi = \pi_1 - \pi_2\psi + \frac{\upsilon_1-\upsilon_2\psi}{\alpha}$

ὅπου π_1, π_2 πηλίκα καὶ υ_1, υ_2 ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $\gamma : \alpha$ καὶ $\beta : \alpha$. Διὰ νὰ εἶναι συνεπῶς ὁ x ἀκέραιος πρέπει τὸ κλάσμα $\frac{\upsilon_1-\upsilon_2\psi}{\alpha}$ νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ω. Ἤτοι $\frac{\upsilon_1-\upsilon_2\psi}{\alpha} = \omega \Leftrightarrow \alpha\omega + \upsilon_2\psi = \upsilon_1$

Αὕτη ἔχει ἀκεραίας λύσεις διότι οἱ α καὶ υ_2 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. (Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του διὰ τοῦ ἑτέρου).

Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν εὕρεσιν ἀκεραίας λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha\omega + \upsilon_2\psi = \upsilon_1$, ἥτις εἶναι ἁπλουστέρα, διότι $\upsilon_2 < \alpha$.

Συνεχίζοντες ὡς προηγουμένως, καταλήγομεν εἰς ἐξίσωσιν μὲ μικροὺς συντελεστάς, ὁπότε ἐργαζόμεθα μὲ τὴν πρώτην μέθοδον.

Παραδείγματα: 1) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x+5\psi=11$.

Ἐπίλυσις: Ἔχομεν $x=\frac{11-5\psi}{3}$. Θέτομεν $\psi=0, 1, 2$. Διὰ $\psi=0$ ἔχομεν $x=\frac{11}{3}$, ἐνῶ διὰ $\psi=1$ ἔχομεν $x=\frac{11-5}{3}=2$. Τὸ ζεῦγος λοιπὸν (2, 1) εἶναι μία ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως. Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους (5) διὰ $(x_0, \psi_0)=(2,1)$ ἔχομεν τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $3x+5\psi=11$.

Οὕτω: $\begin{matrix} x=2-5\kappa \\ \psi=1+3\kappa \end{matrix}$ ἢ $\left.\begin{matrix} x=2+5\kappa \\ \psi=1-3\kappa \end{matrix}\right\}$ ὅπου $\kappa \in Z$

Σημείωσις. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν θετικῶν μόνον ἀκεραίων λύσεων εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ κ, διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις $2-5\kappa>0$ καὶ $1+3\kappa>0$. Ἤτοι $-\frac{1}{3}<\kappa<\frac{2}{5}$ καὶ συνεπῶς $\kappa=0$. Ἄρα διὰ $\kappa=0$ ἔχομεν $(x,\psi)=(2, 1)$, ἥτις εἶναι ἡ μοναδικὴ ἀκεραία θετικὴ λύσις.

2) Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα 176 / 221 εἰς ἄθροισμα ἢ διαφορὰν δύο ἄλλων ρητῶν κλασμάτων, ἐχόντων παρονομαστὰς 13 καὶ 17.

Ἐπίλυσις. Ἐὰν τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι $\frac{x}{13}$ καὶ $\frac{\psi}{17}$, τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{x}{13}+\frac{\psi}{17}=\frac{176}{221} \Leftrightarrow 17x+13\psi=176$ (1).

Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1).

Ἔχομεν $\psi=\frac{176-17x}{13}=\frac{176}{13}-\frac{17}{13}x=13-x+\frac{7-4x}{13}=13-x+\omega$

Τῆς ἐξισώσεως $\omega=\frac{7-4x}{13}$ ἢ $13\omega+4x=7$ ἢ $x=\frac{7-13\omega}{4}$ μία ἀκεραία λύσις εἶναι $(x, \omega)=(-8, 3)$
καὶ ἑπομένως $\psi=13-(-8)+3=24$

Οὕτω, μία ἀκεραία λύσις τῆς (1) εἶναι ἡ $(x_0, \psi_0)=(-8, 24)$, τὸ σύνολον δὲ τῶν λύσεων αὐτῆς δίδεται ἀπὸ τοὺς τύπους

$\begin{matrix} x=-8-13\kappa \\ \psi=24+17\kappa \end{matrix}$ ἢ $\left.\begin{matrix} x=-8+13\kappa \\ \psi=24-17\kappa \end{matrix}\right\}$, ὅπου $\kappa \in Z$

Διὰ $\kappa=0$ ἔχομεν $(x_0, \psi_0)=(-8, 24)$ καὶ ἄρα $-\frac{8}{13}+\frac{24}{17}=\frac{176}{221}$

» $\kappa=1$ » $(x_1, \psi_1)=(-21, 41)$ » » $-\frac{21}{13}+\frac{41}{17}=\frac{176}{221}$

72. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΤΡΕΙΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \left| \begin{matrix} \alpha_1 x+\beta_1\psi+\gamma_1\omega=\delta_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2\psi+\gamma_2\omega=\delta_2 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1 \in Z \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2 \in Z \end{matrix}$

Τοὺς συντελεστὰς $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ ὡς καὶ τοὺς $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν πρώτους μεταξύ των, διότι ἂν δὲν εἶναι, διαιροῦμεν τὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) διὰ τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν ἀντιστοίχως.

Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα οὐδεμίαν ἀκεραίαν λύσιν ἔχει, ἐὰν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ἔχουν Μ.Κ.Δ. $\delta_1 \neq 1$ (πρότασις § 71/2). Τὸ αὐτὸ συμβαίνει, ἐὰν $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ἔχουν Μ.Κ.Δ. $\delta_2 \neq 1$.

Ὑποθέτομεν λοιπὸν ὅτι $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ καὶ $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἀπαλείφομεν τὸν ἕνα ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἔστω τὸν ω.

Οὕτως ἔχομεν : $(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)x + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\psi = \delta_1\gamma_2 - \delta_2\gamma_1$ (3). Ἐὰν ἡ (3) ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις, τότε τὸ σύνολον τῶν λύσεων αὐτῶν θὰ δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\kappa \\ \psi &= \psi_0 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)\kappa \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Τὰς τιμὰς (4) τῶν x καὶ ψ θέτομεν εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, ἔστω εἰς τὴν (1), ὁπότε λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις $\kappa\gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) + \gamma_1\omega = \delta_1 - \alpha_1x_0 - \beta_1\psi_0$ (5)

Ἐὰν ἡ (5) ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις, τότε τὸ σύνολον λύσεων αὐτῆς θὰ δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= \kappa_0 - \gamma_1\lambda \\ \omega &= \omega_0 + \gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\lambda \end{aligned}\right\}, \quad \lambda \in Z, \quad (6)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ κ ἐκ τῶν (6) θέτομεν εἰς τοὺς τύπους (4), ὁπότε λαμβάνομεν :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 - (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(\kappa_0 - \gamma_1\lambda) \\ \psi &= \psi_0 + (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)(\kappa_0 - \gamma_1\lambda) \\ \omega &= \omega_0 + \gamma_1(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\lambda \end{aligned}}$$

Οἱ τύποι οὗτοι δίδουν τὰς ἀκεραίας λύσεις τοῦ συστήματος.

Σημείωσις: Κατὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), προτιμοῦμεν τὸν ἄγνωστον ἐκεῖνον, τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διατί ;

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος

1) $4x + 3\psi + \omega = 5$ καὶ $4x - 6\psi - 3\omega = 7$ (2)

Ἐπίλυσις: Ἀπαλείφομεν τὸν ἄγνωστον ω, ὁπότε λαμβάνομεν : $16x + 3\psi = 22$ (3). Εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς (3).

Οὕτω : $\psi = \dfrac{22 - 16x}{3}$. Μία ἀκεραία λύσις αὐτῆς εἶναι $(x_0, \psi_0) = (1,2)$, τὸ δὲ σύνολον τῶν λύσεων δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 3\kappa \\ \psi &= 2 + 16\kappa \end{aligned}\right\}$ (4), ὅπου $\kappa \in Z$. Ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τῶν (4) γίνεται $4(1 - 3\kappa) + 3(2 + 16\kappa) + \omega = 5 \Leftrightarrow 36\kappa + \omega = -5$ ἢ $\omega = -5 - 36\kappa$, τῆς ὁποίας μία ἀκεραία λύσις εἶναι $(\kappa_0, \omega_0) = (0, -5)$, τὸ δὲ σύνολον τῶν λύσεων αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= 0 - \lambda \\ \omega &= -5 + 36\lambda \end{aligned}\right\} (5),$$ ὅπου $\lambda \in Z$. Τὴν τιμὴν $\kappa = -\lambda$ θέτομεν εἰς τοὺς τύπους (4), ὁπότε λαμβάνομεν τοὺς τύπους

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3\lambda \\ \psi &= 2 - 16\lambda \\ \omega &= -5 + 36\lambda \end{aligned}\right\} (6),$$ οἱ ὁποῖοι διὰ $\lambda \in Z$ δίδουν τὰς ἀκεραίας λύσεις τοῦ συστήματος.

Διὰ $\lambda = 0$ ἔχομεν $(x_0\ \psi_0, \omega_0) = (1, 2, -5)$

» $\lambda = 1$ » $(x_1, \psi_1, \omega_1) = (4, -14, 31)$ κ.ὅ.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

214) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

1) $3x + 5\psi = -12$, 2) $-x + 4\psi = 1$, 3) $7x - 9\psi = -28$,
4) $13x + 21\psi = 91$, 5) $53x + 29\psi = 108$, 6) $40x + 51\psi = 121$

215) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἀκεραίας καὶ θετικὰς τὰς ἀκολούθους παραστάσεις:

1) $\dfrac{7x - 15}{3}$, 2) $\dfrac{133 - 2x}{3}$, 3) $\dfrac{1053 - 31x}{14}$

216) Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{15}$ εἰς ἄθροισμα δύο ῥητῶν κλασμάτων, ἐχόντων παρονομαστὰς ἀντιστοίχως 3 καὶ 5

217) Ἓν χαρτονόμισμα τῶν 50 δραχ. κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ ἀλλαχθῇ μὲ κέρματα τῶν 2 καὶ 5 δραχμῶν;

218) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 3 καὶ διαιρούμενος διὰ 7 δίδει ὑπόλοιπον 2.

219) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ τρίτον τῆς διαφορᾶς τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων αὐξηθὲν κατὰ 5.

220) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἀκολούθων συστημάτων:

1) $\left|\begin{aligned} x + 2\psi - \omega &= -4 \\ 3x - 4\psi + 2\omega &= 17 \end{aligned}\right.$ 2) $\left|\begin{aligned} 7x + 5\psi + 6\omega &= 18 \\ 4x + 2\psi + 3\omega &= 9 \end{aligned}\right.$ 3) $\left|\begin{aligned} 6x - 4\psi + 3z &= 30 \\ 3x + 6\psi - 2z &= 25 \end{aligned}\right.$

4) $\left|\begin{aligned} 3x + 6\psi - 5\psi &= 11 \\ -x + 7\psi - 2\omega &= -16 \end{aligned}\right.$ 5) $\left|\begin{aligned} 7x - 5\psi &= 4 \\ 11x + 13\omega &= 103 \end{aligned}\right.$

221) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 7 καὶ ὁ ὁποῖος δὲν ἀλλάσσει, ἂν τὰ ψηφία αὐτοῦ ἑκατοντάδων καὶ μονάδων ἐναλλαγοῦν.

222) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, ἔχοντες ἄθροισμα 100, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑνὸς διὰ τοῦ 7 εἶναι 1, ἐνῶ τοῦ ἄλλου διὰ τοῦ 9 εἶναι 7.

223) Τρεῖς κτηνοτρόφοι ἔχουν ὁμοῦ 111 ζῷα. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ζῴων τοῦ α' κτηνοτρόφου εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, τοῦ β' διαιρετὸς διὰ 5 καὶ τοῦ γ' διὰ 7. Τὸ τριπλάσιον δὲ τῶν ζῴων τοῦ α' κτηνοτρόφου, τὸ διπλάσιον τοῦ β' καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ γ' ἔχουν ἄθροισμα 400. Πόσα ζῷα εἶχεν ἕκαστος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ

ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ Ή ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

73. Εἰς τὴν Γ' τάξιν εἴδομεν, ὅτι πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς α εἶναι τετράγωνον ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x, ὅστις ἐκλήθη τετραγωνικὴ ρίζα (ἢ ρίζα βας τάξεως) τοῦ α. Ἐξετάσαμεν δὲ τὰς ἰδιότητας καὶ τὰς πράξεις τῶν ριζικῶν βας τάξεως.

Ἤδη θὰ γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τῆς ρίζης τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὁρισμός. Ἐὰν $\alpha \in R$ καὶ $\nu \in N$ καὶ μεγαλύτερος τῆς μονάδος, τότε, ἐὰν ὑπάρχῃ ἕτερος ἀριθμὸς $x \in R$, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν γίνεται ἴσος πρὸς τὸν α, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ x εἶναι **μία νυοστὴ ρίζα (ἢ ρίζα νυοστῆς τάξεως) τοῦ α.**

Οὕτω, ἐὰν $\nu = 2$, ὁ χ εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α,
ἐὰν $\nu = 3$, ὁ x εἶναι μία τρίτη (κυβική) ρίζα τοῦ α.

Π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 25 μία τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ὁ $+5$, διότι $(+5)^2 = 25$
τοῦ ἀριθμοῦ 25 μία τετραγωνικὴ ρίζα εἶναι ὁ -5, διότι $(-5)^2 = 25$
τοῦ ἀριθμοῦ 8 μία τρίτη ρίζα (κυβική) εἶναι ὁ $+2$, διότι $(+2)^3 = 8$
τοῦ ἀριθμοῦ -27 μία κυβικὴ ρίζα εἶναι ὁ -3, διότι $(-3)^3 = -27$
τοῦ ἀριθμοῦ -9 οὐδεμία τετραγωνικὴ πραγματικὴ ρίζα ὑπάρχει ἢ ἄλλη ρίζα ἀρτίας τάξεως, διότι οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν γίνεται ἴσος πρὸς τὸν -9.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῆς μιᾶς πραγματικὰς ρίζας, ὅπως ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ μὴν ἔχῃ πραγματικὴν ρίζαν ἀρτίας τάξεως.

Γενικῶς δέ, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $\nu \in N$, τότε ἀποδεικνύεται ὅτι ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον εἷς θετικὸς ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε : $x^\nu = \alpha$. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως αὐτῆς δύναται νὰ γίνῃ εἰς ἄλλην τάξιν. Ἄς εἴδωμεν ἂν ὑπάρχῃ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς x καὶ τοιοῦτος, ὥστε : $x^\nu = \alpha$. Ἐὰν $\nu = 2\kappa + 1$, ὅπου $\kappa \in N$, τότε οὐδεὶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς x ὑπάρχει ἱκανοποιῶν τὴν $x^\nu = \alpha > 0$

Ἐὰν δέ, $\nu = 2\kappa$, ὅπου $\kappa \in N$ τότε, ἐὰν $x_0 > 0$ εἶναι ἡ μοναδικὴ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισ. $\chi^\nu = \alpha$, ἤτοι $\chi_0{}^\nu = \alpha$, θὰ εἶναι ρίζα τῆς $x^\nu = \alpha$ καὶ ὁ ἀριθμὸς $-x_0 < 0$, διότι $(-x_0)^\nu = \chi_0{}^\nu = \alpha$.

2) Ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ $\nu = 2\kappa + 1$, ὅπου $\kappa \in N$, τότε ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον εἷς πραγματικὸς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς x ἱκανοποιῶν τὴν ἐξίσωσιν $x^\nu = \alpha < 0$. Ἐὰν δὲ $\nu = 2\kappa$, τότε οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς x ὑπάρχει ἱκανοποιῶν τὴν $x^\nu = \alpha < 0$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

Πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς α ἔχει 1) μίαν μόνην πραγματικὴν νυοστὴν ρίζαν x περιττῆς τάξεως ($\nu = 2\kappa + 1$) θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, καθ' ὅσον ὁ α εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀντιστοίχως, ἥτις καλεῖται πρωτεύουσα νυοστὴ ρίζα τοῦ α, 2) δύο πραγματικὰς νυοστὰς ρίζας ἀντιθέτους ἀρτίας τάξεως ($\nu = 2\kappa$), ἂν ὁ $\alpha > 0$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ θετικὴ καλεῖται πρωτεούουσα νυοστὴ ρίζα τοῦ α καὶ 3) οὐδεμίαν πραγματικὴν νυοστὴν ρίζαν, ἂν $\alpha < o$.

Τὴν πρωτεύουσαν νυοστὴν ρίζαν τοῦ α συμβολίζομεν $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Τὸ σύμβολον $\sqrt{}$ καλεῖται **ριζικόν,** ὁ ν **δείκτης** τῆς ρίζης καὶ τὸ α **ὑπόρριζον.** Ἐὰν $\nu = 2$ τότε γράφομεν $\sqrt{\alpha}$, ἥτις ἐκφράζει τὴν πρωτεύουσαν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α.

Πάντα τὰ ἀνωτέρω δικαιολογοῦν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν

$$\boxed{x = \sqrt[\nu]{\alpha} \iff x^\nu = \alpha}$$

ἄμεσος δὲ συνέπεια αὐτῆς εἶναι $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha$.

Ὥστε, συνοψίζοντες, τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1) Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $\nu \in N$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > 0$, ρητὸς ἢ ἄρρητος.

2) Ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ $\nu = 2\kappa + 1$, $\kappa \in N$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} < 0$, ρητὸς ἢ ἄρρητος.

3) Ἐὰν $\alpha < 0$ καὶ $\nu = 2\kappa$, τότε τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

4) Ἐὰν $\alpha \in R$ καὶ $\nu = 2\kappa$, ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$, ἐὰν δὲ $\nu = 2\kappa + 1$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu$.

5) Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ὁρίζομεν : $\sqrt[\nu]{0} = 0$

Παραδείγματα : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι ρίζαι τῶν ἀριθμῶν :

$$\sqrt[3]{27},\ \sqrt[3]{-27},\ \sqrt[4]{16},\ \sqrt[4]{-16},\ \sqrt[5]{3}.$$

***Λύσις* :** Ἡ πρωτεύουσα κυβικὴ ρίζα τοῦ 27 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, διότι $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$. Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3$.

Ἐπίσης $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4}$ ἢ $\sqrt[4]{(-2)^4} = |2| = 2$

Ἡ $\sqrt[4]{-16}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ πρωτεύουσα πέμπτη ρίζα τοῦ 3 εἶναι $\sqrt[5]{3} > 0$ ἄρρητος.

74. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ.

Διὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν χρειαζόμεθα τὴν πρότασιν : **Λῆμμα (Βοηθητικὴ πρότασις).** Ἐὰν δύο θετικῶν ἀριθμῶν αἱ μυοσταὶ δυνάμεις εἶναι ἴσοι ἀριθμοί, τότε καὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν $\alpha, \beta \in R^+$ καὶ $\alpha^\mu = \beta^\mu$, ὅπου $\mu \in N$, τότε ἐκ τῆς $\alpha^\mu - \beta^\mu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2}\beta + \ldots + \beta^{\mu-1}) = 0$ προκύπτει $\alpha - \beta = 0$ ἢ $\alpha = \beta$, διότι ὁ παράγων $\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2}\beta + \ldots + \beta^{\mu-1}$ εἶναι θετικός, ὡς ἄθροισμα θετικῶν προσθετέων.

Ἰδιότης 1η Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $\nu = 2\kappa + 1$, ($\kappa \in N$), τότε $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι προφανῶς ἀρνητικά. Ἂν ὅμως γραφῇ $-\sqrt[\nu]{-\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha}$ γίνονται θετικά. Ὑψώνομεν τὰ μέλη της εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν, ὅτε ἔχομεν:

$$(-\sqrt[\nu]{-\alpha})^\nu = -(\sqrt[\nu]{-\alpha})^\nu = -(-\alpha) = \alpha \text{ καὶ } (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu = \alpha,$$

ἄρα $-\sqrt[\nu]{-\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha}$ ἢ $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$

Ἡ ἰδιότης αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας τῶν ριζῶν ὑποθέτοντες τὰ ὑπόρριζα θετικά, διότι βάσει αὐτῆς, τὸ πρόσημον πλὴν ἐξέρχεται, διὰ ριζικὰ περιττῆς τάξεως, ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ.

Ἰδιότης 2α Ρίζαι τῆς αὐτῆς τάξεως πολλαπλασιάζονται ἢ διαιροῦνται, ἐὰν πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν αἱ ὑπόρριζαι ποσότητες αὐτῶν καὶ τὸ ἐξαγόμενον τεθῇ ὡς ὑπόρριζον ριζικοῦ τῆς αὐτῆς τάξεως.

Ἐαν $\sqrt[\nu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta}$, ὅπου $\alpha, \beta \in R^+$, εἶναι πρωτεύουσαι ρίζαι, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} > 0$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta} > 0$. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι :

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha : \beta} \quad (2)$$

Ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων διαδοχικῶς εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν.

Ἔχομεν : 1) $\left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu \cdot \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \alpha \cdot \beta$ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha\beta}\right)^\nu = \alpha\beta$, ἄρα κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν ἔχομεν $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

$$2) \left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^\nu = \frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu} = \frac{\alpha}{\beta} \text{ καὶ } \left(\sqrt[\nu]{\alpha : \beta}\right)^\nu = \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta}$$

ἄρα κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν ἔχομεν $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

Παρατήρησις : Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) γράφονται καὶ οὕτω :

$$\sqrt[\nu]{\alpha\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \text{ καὶ } \sqrt[\nu]{\alpha : \beta} = \sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta}$$

Ἰδιότης 3η Θετικὸς παράγων ἢ διαιρέτης ριζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ὑπὸ τὸ ριζικόν, ὡς παράγων ἢ διαιρέτης τοῦ ὑπορρίζου, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν τοῦ δείκτου τοῦ ριζικοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta}$ πρωτεύουσα νυοστὴ ρίζα τοῦ $\beta > 0$, τότε θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta}$ (1) καὶ $\dfrac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\beta}{\alpha^\nu}}$ (2)

Ἔχομεν : 1) $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\cdot\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}$

2) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\alpha} = \dfrac{\sqrt[\nu]{\beta}}{\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\beta}{\alpha^\nu}}$, διότι $\alpha = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu}$

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) ἰσχύουν προφανῶς καὶ ἀντιστρόφως.

Ἰδιότης 4η. Ρίζα ἄλλης ρίζης ἀριθμοῦ τινὸς ἰσοῦται μὲ ρίζαν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσαν δείκτην τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν.

Ἀπόδειξις: Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ (1)

Ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητας εἰς τὴν δύναμιν μν.

Ἔχομεν : $\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^\nu\right]^\mu = \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu = \alpha$ καὶ $\left(\sqrt[\nu\mu]{\alpha}\right)^{\mu\nu} = \alpha$

Ὥστε κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν τὰ μέλη τῆς (1) εἶναι ἴσα.

Ἰδιότης 5η Ρίζα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν τὸ ὑπόρριζον καὶ τοῦ ἐξαγομένου ἐξαχθῇ ἡ ρίζα τῆς αὐτῆς τάξεως.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Ἔχομεν : $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\mu = \underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}\ldots\sqrt[\nu]{\alpha}}_{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Οἱ μαθηταὶ νὰ κάνουν τὴν ἀπόδειξιν καὶ μὲ ἄλλον τρόπον.

Ἰδιότης 6η Ἐὰν δείκτην ρίζης καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου αὐτῆς πολ/σωμεν ἢ διαιρέσωμεν (ἂν διαιροῦνται) μὲ τὸν αὐτὸν φυσικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ρίζης δὲν μεταβάλλεται.

Ἀπόδειξις: Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ (1) καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} = \sqrt[\nu:\rho]{\alpha^{\mu:\rho}}$ (2), ὅπου $\rho\in N$ καὶ διαιρέτης τῶν ν καὶ μ.

Ἔχομεν, κατόπιν ὑψώσεως τῶν μελῶν τῆς (1) εἰς τὴν δύναμιν νρ,

1) $\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\right)^{\nu\rho} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\right)^\nu\right]^\rho = (\alpha^\mu)^\rho = \alpha^{\mu\rho}$ καὶ $\left(\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}\right)^{\nu\rho} = \alpha^{\mu\rho}$

2) Θέτομεν $\nu : \rho = \kappa \in N$, ὁπότε $\nu = \kappa\rho$, ἡ δὲ (2) γράφεται $\sqrt[\kappa\rho]{\alpha^\mu} = \sqrt[\kappa]{\alpha^{\mu:\rho}}$. Ὑψοῦμεν τὰ μέλη της εἰς τὴν δύναμιν ρκ

Ἔχομεν $\left(\sqrt[\kappa\rho]{\alpha^\mu}\right)^{\kappa\rho} = \alpha^\mu$ καὶ $\left(\sqrt[\kappa]{\alpha^{\mu:\rho}}\right)^{\kappa\rho} = \left[\left(\sqrt[\kappa]{\alpha^{\mu:\rho}}\right)^\kappa\right]^\rho = (\alpha^{\mu:\rho})^\rho = \alpha^\mu$

Ὥστε κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἰσοῦνται.

Ἀξιοσημείωτος παρατήρησις: Τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας ἐξετάσαμεν, ὑποθέτοντες θετικὰ τὰ ὑπόρριζα. Ἐὰν ὅμως τὰ ὑπόρριζα εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα προσοχὴ κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἰδιοτήτων τούτων, ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

Παραδείγματα: 1) Δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$, ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\beta<0$ ἢ ἐὰν $\alpha<0$ καὶ $\beta<0$, οὔτε $\sqrt{\alpha}/\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha/\beta}$. Ἐνῶ ἐὰν $\alpha<0$ καὶ $\beta<0$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{-\alpha}\cdot\sqrt{-\beta}$ καὶ $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\sqrt{-\alpha}/\sqrt{-\beta}$, διότι $-\alpha>0$ καὶ $-\beta>0$.

2) Δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\sqrt{\sqrt[3]{\alpha}}=\sqrt[6]{\alpha}$ ἂν $\alpha<0$.

3) Δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\alpha\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha^2\beta}$ ἐὰν $\alpha<0$, $\beta>0$, τὸ ὀρθὸν εἶναι $\alpha\sqrt{\beta}=-|\alpha|\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha^2\beta}$.

4) Δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\sqrt[3]{\alpha^5}=\sqrt[6]{\alpha^{10}}$ ἐὰν $\alpha<0$, διότι τὰ μέλη τῆς ἰσότητος εἶναι ἑτερόσημα καὶ συνεπῶς διάφορα. Τὸ ὀρθὸν εἶναι $\sqrt[3]{\alpha^5}=\sqrt[3]{-(-\alpha^5)}=$ $=-\sqrt[3]{(-\alpha)^5}=-\sqrt[6]{(-\alpha)^{10}}=-\sqrt[6]{\alpha^{10}}$.

5) Δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\sqrt[6]{\alpha^2}=\sqrt[3]{\alpha}$ ἐὰν $\alpha<0$, διότι οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt[6]{\alpha^2}$ καὶ $\sqrt[3]{\alpha}$ εἶναι ἑτερόσημοι. Τὸ ὀρθὸν εἶναι: $\sqrt[6]{\alpha^2}=\sqrt[6]{(-\alpha)^2}=\sqrt[3]{-\alpha}>0$.

75. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟΥΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

Καλεῖται ἄρρητος παράστασις, κάθε ἀριθμητικὴ ἢ ἐγγράμματος παράστασις περιέχουσα ἓν τουλάχιστον ριζικόν.

Αἱ παραστάσεις $\alpha+\beta\sqrt{2}$, $\dfrac{\alpha}{3+\sqrt{\beta}}$, $\sqrt{x+\psi}$ εἶναι ἄρρητοι.

1) Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ριζικὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόρριζον ὀνομάζονται **ὅμοια.** Συντελεστὴς δὲ ριζικοῦ καλεῖται ὁ πρὸ αὐτοῦ εὑρισκόμενος παράγων.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀρρήτων μονωνύμων, ὁμοίων ὡς πρὸς τὸ ριζικὸν ποὺ περιέχουν, σχηματίζομεν ἓν ἄρρητον μονώνυμον ὅμοιον ὡς πρὸς τὸ ριζικόν, πρὸς τὰ δοθέντα μὲ συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν ριζικῶν τῶν δοθέντων μονωνύμων.

Παραδείγματα: α) Τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $-3\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$, $-2\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$ ἰσοῦται μὲ $\left(-3+1+\frac{1}{2}-2\right)\sqrt[3]{\alpha^2\beta}=-\frac{7}{2}\sqrt[3]{\alpha^2\beta}$

β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\sqrt[3]{3\alpha^4 x} - 2\sqrt[3]{3\alpha x} + \sqrt[3]{24\alpha^4 x}$

Ἔχομεν $\sqrt[3]{3\alpha^4 x} - 2\sqrt[3]{3\alpha x} + \sqrt[3]{24\alpha^4 x} = \alpha\sqrt[3]{3\alpha x} - 2\sqrt[3]{3\alpha x} + 2\alpha\sqrt[3]{3\alpha x} = (\alpha - 2 + 2\alpha)\sqrt[3]{3\alpha x} = (3\alpha - 2)\sqrt[3]{3\alpha x}$.

2) Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις

Ὁ πολ/σμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀρρήτων παραστάσεων γίνεται ὅπως καὶ εἰς τὰς ρητὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις. Συνεπῶς πρέπει τὰ ριζικὰ τῶν παραστάσεων νὰ εἶναι ἢ νὰ γίνουν τοῦ αὐτοῦ δείκτου. Ριζικὰ δὲ διαφόρων δεικτῶν τρέπονται εἰς ριζικὰ τοῦ αὐτοῦ δείκτου, ἐὰν δείκτης καὶ ἐκθέτης ὑπορρίζου ἑκάστου ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν δεικτῶν διὰ τοῦ δείκτου τοῦ ριζικοῦ.

Παραδείγματα : α) $3\sqrt[3]{\alpha^2\gamma} \cdot \sqrt[3]{\alpha\gamma} \cdot \sqrt[3]{\gamma^4} = 3\sqrt[3]{(\alpha^2\gamma)(\alpha\gamma)\gamma^4} = 3\sqrt[3]{\alpha^3\gamma^6} = 3\alpha\gamma^2$

β) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $A = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} \cdot \sqrt[4]{\gamma}$.

ΕΚΠ δεικτῶν τὸ 12. Οὕτω : $A = \sqrt[12]{\alpha^6} \cdot \sqrt[12]{\beta^4} \cdot \sqrt[12]{\gamma^3} = \sqrt[12]{\alpha^6\beta^4\gamma^3}$

γ) Τὸ πηλίκον : $\dfrac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \dfrac{\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}}{\sqrt[\mu\nu]{\beta^\mu}} = \sqrt[\mu\nu]{\dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\mu}}$ $(\alpha, \beta \in R^+)$

δ) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις $\left(\sqrt{\dfrac{x\psi^2}{\alpha^3}} + \sqrt{\dfrac{x^2}{\psi}}\right) \cdot \left(\sqrt{x\alpha} + \sqrt{\psi^3}\right)$. Ἔχομεν:

$$A = \sqrt{\frac{x\psi^2}{\alpha^3} \cdot \alpha x} + \sqrt{\frac{x\psi^2}{\alpha^3} \cdot \psi^3} + \sqrt{\frac{x^2}{\psi} \cdot \alpha x} + \sqrt{\frac{x^2}{\psi} \cdot \psi^3} = \sqrt{\frac{x^2\psi^2}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{x\psi^5}{\alpha^3}} + \sqrt{\frac{\alpha x^3}{\psi}} + \sqrt{x^2\psi^2} = \frac{x\psi}{\alpha} + \frac{\psi^2}{\alpha}\sqrt{\frac{x\psi}{\alpha}} + x\sqrt{\frac{x\alpha}{\psi}} + x\psi$$

3. Ἁπλοποίησις.

Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν, εἶναι δυνατὸν πολλάκις ριζικὰ ἢ ἄρρητοι παραστάσεις νὰ ἁπλουστευθοῦν ἤ, ὅπως λέγομεν, νὰ ἁπλοποιηθοῦν.

Παραδείγματα : α) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}\, x\sqrt{\dfrac{x}{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{x^2}{9} \cdot \dfrac{x}{3}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{x^3}{27}}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{x}{3}\right)^3} = \sqrt{\dfrac{x}{3}}$ β) $\sqrt{\sqrt[6]{\alpha^2}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^2}} \cdot \sqrt[12]{\alpha^5} = \sqrt[12]{\alpha^2} \cdot \sqrt[12]{\alpha^2} \cdot \sqrt[12]{\alpha^5} = \sqrt[12]{\alpha^9} = \sqrt[4]{\alpha^3}$ $(\alpha > 0)$

76. ΤΡΟΠΗ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΑΡΡΗΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ ΕΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΝ ΜΕ ΡΗΤΟΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗΝ.

Σκόπιμον εἶναι νὰ μετατρέπωμεν, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν, κλάσματα μὲ ἄρρητον παρονομαστὴν εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν, διότι οὕτω διευκολύνονται πολὺ αἱ πράξεις.

Συνηθέστεραι μορφαὶ τοιούτων κλασμάτων εἶναι αἱ ἀκόλουθοι :

1. Κλάσματα τῆς μορφῆς $A = \dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}}$, $\beta > 0$, $\nu, \mu \in N$ καὶ $\nu > \mu$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}$

$$\text{Οὕτω : } A = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}\cdot\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}\cdot\beta^{\nu-\mu}}} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}}} = \frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-\mu}}}{\beta}$$

$$\text{π.χ. } \frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$

2. Κλάσματα τῆς μορφῆς $A = \dfrac{\alpha}{\beta \pm \sqrt{\gamma}}$ ἢ $B = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma}}$, $\beta, \gamma \in R^+$

Ὁρισμός. Ἄρρητοι παραστάσεις ἀρτίας τάξεως διαφέρουσαι μόνον ὡς πρὸς τὸ πρόσημον ἑνὸς ριζικοῦ, ὀνομάζονται **συζυγεῖς**.

α) τὸ κλάσμα Α τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστήν, ἐὰν οἱ ὅροι πολ/σθοῦν ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ του, ἥτις εἶναι ἀντιστοίχως $\beta \mp \sqrt{\gamma}$

$$\text{Οὕτω : } A_1 = \frac{\alpha}{\beta + \sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\beta - \sqrt{\gamma})}{(\beta + \sqrt{\gamma})(\beta - \sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\beta - \sqrt{\gamma})}{\beta^2 - \gamma}$$

$$\text{καὶ } A_2 = \frac{\alpha}{\beta - \sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\beta + \sqrt{\gamma})}{(\beta - \sqrt{\gamma})(\beta + \sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\beta + \sqrt{\gamma})}{\beta^2 - \gamma}$$

β) Πολ/ζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος Β ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ του, ἥτις εἶναι $\sqrt{\beta} \mp \sqrt{\gamma}$

$$\text{Οὕτω : } B_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})}{\beta - \gamma}$$

$$\text{Ἐπίσης } B_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})}{\beta - \gamma}$$

$$\text{π.χ. } \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - 3} = 2 + \sqrt{3}, \quad \frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 - 3} = -(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

3. Κλάσματα τῆς μορφῆς $A = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma} \pm \sqrt{\delta}}$, $\beta, \gamma, \delta \in R^+$.

Προκειμένου νὰ τρέψωμεν ἕν ἐξ αὐτῶν εἰς ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστήν, πολ/ζομεν τοὺς ὅρους του ἐπὶ μίαν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ του.

$$\text{Οὕτω : } A = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} - \sqrt{\delta})(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})} =$$

$= \dfrac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma})^2 - \delta} = \dfrac{\alpha(\sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})}{(\beta + \gamma - \delta) + 2\sqrt{\beta\gamma}}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τῆς μορφῆς 2 καὶ τρέπεται εἰς ἰσοδύναμον μὲ ρητὸν παρονομαστὴν ὡς προηγουμένως.

Π.χ. $\frac{A}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}=\frac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-5}=$

$=\frac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3-5-2\sqrt{6}}=\frac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2\sqrt{6}}=\frac{A(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{-12}$ κ.λ.π.

Γενικῶς : Κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{A}{\sqrt{\alpha_1}\pm\sqrt{\alpha_2}\pm\sqrt{\alpha_3}\pm\ldots\pm\sqrt{\alpha_\nu}}$ τρέπονται εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρονομαστήν, ἐὰν συνεχῶς πολ/ζωμεν ἐπὶ μίαν συζυγῆ παράστασιν τοῦ ἑκάστοτε παρονομαστοῦ, μέχρις ὅτου ὁ παρονομαστὴς γίνῃ ρητός.

4. Κλάσματα τῆς μορφῆς $A=\frac{K}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}$, $B=\frac{\Lambda}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}$, $\alpha,\beta\in R^+$

1) Διὰ τὸ κλάσμα Α διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α) Ἐὰν $\nu=2\kappa+1$, $\kappa\in N$, τότε τὸ κλάσμα Α γράφεται :

$$A=\frac{K}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu+\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{K}{\alpha+\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2}-\ldots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

β) Ἐὰν $\nu=2\kappa$, $\kappa\in N$, τότε ὁμοίως ἔχομεν :

$$A=\frac{K}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{K}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{K}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\cdot\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\cdot\beta^2}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right)$$

π.χ. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{2+3}\cdot\frac{2+3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{3}\right)^3}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[2]{3}}=$

$=\frac{1}{5}\cdot\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}\right)$

2) Τὸ κλάσμα Β γράφεται :

$$B=\frac{\Lambda}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\Lambda}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\Lambda}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu-\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{\Lambda}{\alpha-\beta}\cdot\left(\sqrt{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt{\alpha^{\nu-2}}\beta+\ldots+\sqrt{\beta^{\nu-1}}\right)$$

π.χ. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}=\frac{1}{2-3}\cdot\frac{2-3}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}=-1\cdot\frac{\left(\sqrt[4]{2}\right)^4-\left(\sqrt[4]{3}\right)^4}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{3}}=$

$=-\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{27}\right)$

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς $\Gamma=\frac{M}{\sqrt[\nu]{\alpha}\pm\sqrt[\mu]{\beta}}$, ὅπου α, β ∈ R^+ καὶ

$\nu, \mu \in N$, τότε πρῶτον καθιστῶμεν τὸν παρανομαστὴν ἔχοντα ριζικὰ τοῦ αὐτοῦ δείκτου καὶ ἔπειτα προχωροῦμεν ὡς ἄνω.

Π.χ. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} = \dfrac{1}{4-27}\cdot\dfrac{4-27}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} =$

$= -\dfrac{1}{23}\cdot\dfrac{\left(\sqrt[6]{4}\right)^6-\left(\sqrt[6]{27}\right)^6}{\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}} = -\dfrac{1}{23}\left(\sqrt[6]{4^5}-\sqrt[6]{4^4\cdot 27}+\sqrt[6]{4^3\cdot 27^2}-\sqrt[6]{4^2\cdot 27^3}+\right.$

$\left.+\sqrt[6]{4\cdot 27^4}-\sqrt[6]{27^5}\right)$

77. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟΝ ΕΚΘΕΤΗΝ.

Εἴδομεν ὅτι, κατὰ τὴν 6ην ἰδιότητα τῶν ριζῶν, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν δείκτην ριζικοῦ καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου του διὰ τοῦ αὐτοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω, ἐὰν $\alpha>0$, $\mu,\nu\in N$ καὶ $\mu=\nu\kappa$, ὅπου $\kappa\in N$, τότε διὰ τὴν πρωτεύουσαν ρίζαν $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ θὰ ἔχωμεν :

$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\kappa}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}\right)^\nu=\alpha^\kappa=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$. Δηλαδὴ βλέπομεν ὅτι τὸ σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ἐφ' ὅσον βεβαίως τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι φυσικός. Ἐὰν ὅμως τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ δὲν εἶναι φυσικὸς τότε τὸ σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως. Σκόπιμον εἶναι, ὅπως γενικεύσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ δὲν εἶναι φυσικός, ἀλλὰ ἐν γένει ρητός.

Θὰ καλοῦμεν τὸ σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δύναμιν τοῦ α μὲ ἐκθέτην ρητόν, καὶ ὁρίζομεν νὰ παριστᾶ τὴν νυοστὴν πρωτεύουσαν ρίζαν τῆς μυοστῆς δυνάμεως τοῦ α, ἤτοι τὴν $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ἂν $\frac{\mu}{\nu}>0$ καὶ $\alpha>0$ καὶ τὴν ἀντίστροφον αὐτῆς $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$, ἂν $\frac{\mu}{\nu}<0$ καὶ $\alpha>0$

Θὰ γράψωμεν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καὶ $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}=\dfrac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}=\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$, ὅπου $\mu,\nu\in N$ καὶ $\alpha>0$.

Π. χ. $\alpha^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{\alpha^4}$, $\alpha^{1,2}=\alpha^{\frac{12}{10}}=\alpha^{\frac{6}{5}}=\sqrt[5]{\alpha^6}$, $\alpha^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Σημείωσις Πρέπει νὰ ἀποφεύγωμεν νὰ ἐφαρμόζωμεν τὸν συμβολισμὸν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὅταν $\alpha<0$, διότι πιθανὸν νὰ στερῆται ἐννοίας.

Π.χ. $(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-2$, ἀλλὰ $(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{8^2}=\sqrt[3]{8}=+2$

Προφανῶς $(-8)^{\frac{1}{3}}\neq(-8)^{\frac{2}{6}}$

Ὥστε, βάσει τῶν τεθέντων ὁρισμῶν, **πᾶσα ρίζα δύναται νὰ γραφῇ ὡς δύναμις μὲ ἐκθέτην ρητόν.**

Αἱ νέαι αὐταὶ δυνάμεις μὲ ρητὸν ἐκθέτην ὑπακούουν εἰς τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας σχετικοὺς ἀκεραίους.

78. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

1) **Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\alpha > 0$:**

Ἔχομεν : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} \cdot \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda+\kappa\nu}} =$

$$= \alpha^{\frac{\mu\lambda+\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}}$$

2) **Ὕψωσις δυνάμεως εἰς δύναμιν :**

Ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\kappa}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\kappa}} =$

$$= \alpha^{\frac{\mu\kappa}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}}$$

3) **Ὕψωσις γινομένου εἰς δύναμιν :**

Ἔχομεν : $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu} \cdot \gamma^{\mu}} =$

$$= \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\beta^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$$

4) **Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ $\alpha > 0$:**

Ἔχομεν : $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} : \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} : \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} : \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}:\alpha^{\kappa\nu}} =$

$$= \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda-\kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda-\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}} \quad \left(\frac{\mu}{\nu} > \frac{\kappa}{\lambda}\right)$$

5) **Ὕψωσις κλάσματος εἰς δύναμιν :**

Ἔχομεν : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις ὑπετέθη $\alpha, \beta \in R^{+}$ καὶ $\mu, \nu, \kappa, \lambda \in N$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$, ἕπεται ὅτι αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἰσχύουν καὶ διὰ δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ρητοὺς ἀρνητικούς.

Οἱ μαθηταὶ δύνανται νὰ διατυπώσουν τοὺς κανόνας τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων μὲ δοθέντας ρητοὺς ἀριθμούς.

Παρατήρησις : Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι, ὁ λογισμὸς μὲ ριζικὰ καθίσταται πολὺ εὔκολος, ὅταν ταῦτα ἀντικατασταθοῦν μὲ δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ρητούς.

Ἐφαρμογή : $\left(\sqrt[3]{\alpha^2} \cdot \sqrt[5]{\alpha^3} \cdot \sqrt{\alpha}\right) : \sqrt[6]{\alpha^9} = \left(\alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \alpha^{\frac{3}{5}} \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}\right) : \alpha^{\frac{9}{6}} =$

$$= \alpha^{\frac{53}{30}} : \alpha^{\frac{9}{6}} = \alpha^{\frac{4}{15}} = \sqrt[15]{\alpha^4}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

224) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι ρίζαι τῶν ἀριθμῶν :

$$\sqrt[3]{8},\quad \sqrt[3]{-27},\quad \sqrt[4]{81},\quad \sqrt[5]{32},\quad \sqrt[5]{-243},\quad \sqrt{\frac{1}{16}},\quad \sqrt[3]{-\frac{1}{27}},\quad \sqrt[5]{\frac{1}{243}},\quad \sqrt{0{,}0256}$$

225) Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τετάρτης τάξεως τῶν ἀριθμῶν :

$$16,\quad -16,\quad 49^2,\quad -10^2,\quad 81,\quad 0{,}0081$$

226) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

$$\sqrt[4]{25},\quad \sqrt[6]{49},\quad \sqrt[5]{9^{10}},\quad \sqrt[10]{32},\quad \sqrt[9]{-512},\quad \sqrt[15]{-243},\quad \sqrt[3]{-27\alpha^6\beta^3},\quad \sqrt[10]{-\alpha^2\beta^6\gamma^{10}},\quad \sqrt[18]{64\alpha^{12}\psi^{30}}$$

227) Νὰ ἐξαχθοῦν ἐκτὸς τῆς ρίζης οἱ κατάλληλοι παράγοντες :

$$\sqrt[3]{40},\quad \sqrt[3]{-24},\quad \sqrt[5]{320},\quad \sqrt[5]{-96},\quad \sqrt[4]{0{,}1250},\quad \sqrt[3]{54x^3\psi^4},\quad \sqrt[4]{32x^8\psi\omega^5},\quad \sqrt[\nu]{\chi^{\nu+1}},\quad \sqrt[\nu]{x^{\nu+1}\,\psi^{\nu+2}},\quad \sqrt{16x^{2\nu}\psi^{4\nu}}$$

228) Οἱ ἐκτὸς τῶν ριζῶν παράγοντες νὰ εἰσαχθοῦν ἐντὸς αὐτῆς.

$$3\sqrt[3]{2},\quad -2\sqrt[3]{-7},\quad \alpha\sqrt[4]{3\alpha},\quad \alpha^2\beta\sqrt[4]{-\alpha\beta},\quad -2\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt[5]{-\alpha\beta\gamma},\quad (\alpha+\beta)\sqrt{\alpha-\beta},\quad \frac{3x^2\psi}{\omega}\sqrt[3]{\frac{\omega^2}{9x^2\psi^2}},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}.$$

229) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα γινόμενα καὶ πηλίκα :

1) $5\sqrt{18}\cdot 3\sqrt{8}$, 2) $\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{150}$, 3) $\sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{48}$

4) $\sqrt[3]{75\alpha\beta\gamma}\cdot 2\sqrt[3]{6\alpha^2\beta\gamma^2}\cdot\sqrt[3]{60\alpha^3\beta\gamma^3}$, 5) $\sqrt[\nu]{x^2\omega^{\nu-2}}\cdot\sqrt[\nu]{\psi^{\nu-3}\omega^2}\cdot\sqrt[\nu]{x^{\nu-2}\psi^3}$

6) $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[5]{\alpha^3}\cdot\sqrt[10]{\alpha^4}$, 7) $3\sqrt[4]{\alpha}\cdot 7\sqrt[6]{\alpha^5\beta}\cdot\sqrt[12]{\alpha^3\beta^{10}}$, 8) $5\sqrt[4]{18}:\sqrt[4]{8}$,

9) $4\sqrt[3]{-12}:2\sqrt{2}$, 10) $\left(\sqrt[3]{\alpha^5\beta^4}\cdot\alpha\sqrt[3]{\beta^2}\right):\sqrt[3]{\alpha^2\beta^{12}}$

230) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{-\alpha^5}},\quad \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt[4]{3}}},\quad \left(\sqrt[7]{-\alpha\sqrt{3\alpha}}\right)^{14},\quad \left(\sqrt[3]{\sqrt[7]{-8\alpha^3}}\right)^7,\quad \sqrt[\nu-1]{\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\alpha}}},$$

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[3]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sqrt[4]{\frac{\beta^3}{\alpha^3}}}},\quad \sqrt[3]{9\alpha^2\sqrt{\frac{2\beta}{3\alpha}}}\cdot\sqrt[3]{4\beta^2\sqrt{\frac{3\alpha}{2\beta}}}$$

231) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα :

1) $\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}+\sqrt{12}-\sqrt{3}$, 2) $4\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{-3}+\sqrt[3]{-81}$, 3) $\sqrt[6]{16}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[3]{-4}$,

4) $\sqrt{50}-\sqrt[4]{324}-\sqrt[6]{2916}+\sqrt[8]{256}$, 5) $9\sqrt[3]{2\alpha^6x}-3\sqrt[3]{16\alpha^3x}+\sqrt[3]{2x}$

6) $\sqrt{4\alpha^2+4}-5\sqrt{1+\alpha^2}+\sqrt{x^2+\alpha^2x^2}+\sqrt{9\alpha^2+9}$

7) $5\sqrt{\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{x^3-x^2}}-\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4\alpha^2+4\alpha^3}{x-1}}-\dfrac{3\alpha}{x}\sqrt{\dfrac{\alpha+1}{x-1}}$

232) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

1) $\left(\sqrt[3]{81}+2\sqrt[3]{24}-4\sqrt[3]{375}\right)\cdot\sqrt[3]{-3}$, 2) $\left(x-\alpha+\sqrt{\beta+\alpha^2}\right)\left(x-\alpha-\sqrt{\beta+\alpha^2}\right)$

$$3)\ (\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}),\quad 4)\ (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\psi})(x+\psi+\sqrt[3]{x\psi^2}+\sqrt[3]{x^2\psi})$$

$$5)\ (x\sqrt{x}-\psi\sqrt{\psi}):(\sqrt{x}-\sqrt{\psi}),\qquad 6)\ (\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{\psi^3}):(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x\psi}+\sqrt{\psi})$$

$$7)\ (3\alpha\sqrt{\alpha}+\alpha+\sqrt{\alpha}-2):(3\sqrt{\alpha}-2)$$

233) Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἰσοδύναμα μὲ ρητὸν παρανομαστήν.

$$1)\ \frac{\alpha}{\beta\sqrt{\alpha}},\ \frac{\alpha^3}{\sqrt[3]{\alpha}},\ \frac{\mu\nu}{\sqrt[3]{\mu^2\nu^2}},\ \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha+\beta}},\quad 2)\ \frac{\alpha}{1+\sqrt{\alpha}},\ \frac{7}{\sqrt{x}+\sqrt{\psi}},\ \frac{\alpha+\sqrt{\beta}}{\alpha-\sqrt{\beta}},$$

$$\frac{x\sqrt{\psi}+\psi\sqrt{x}}{x+\sqrt{\psi}},\quad 3)\ \frac{\sqrt{x+\psi}+\sqrt{x-\psi}}{\sqrt{x+\psi}-\sqrt{x-\psi}},\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\psi}}{1-\sqrt{x}+\sqrt{\psi}},\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}},$$

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}},\quad 4)\ \frac{5}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}},\ \frac{5}{1-\sqrt[3]{2}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}},\ \frac{11}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{3}}$$

234) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

$$1)\ \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}},\quad 2)\ \frac{\sqrt{2x+\psi}+\sqrt{2x-\psi}}{\sqrt{2x+\psi}-\sqrt{2x-\psi}}+\frac{\sqrt{2x+\psi}-\sqrt{2x-\psi}}{\sqrt{2x+\psi}+\sqrt{2x-\psi}}$$

$$3)\ \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1+\alpha^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-\alpha^4}}\quad 4)\ \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha}+1}$$

235) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις :

$$1)\ \left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{2}}\right),\ 2)\ \left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}\right)^2,\ 3)\ \left(2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{2}}-1\right)^2,\ 4)\ \left(\gamma^3\right)^{\frac{2}{3}}\cdot$$

$$\cdot\left(\gamma^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\gamma^{\frac{4}{5}}},\ 5)\left(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}}\right)\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}+\beta^{-\frac{1}{2}}\right),\ 6)\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}+\alpha^{-\frac{1}{3}}\beta+\beta^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\alpha^{-\frac{1}{3}}-\beta^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$7)\ \left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right):\left(\alpha^{-\frac{1}{3}}-\beta^{-\frac{1}{3}}\right)$$

236) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις :

$$1)\ \frac{\alpha-\beta}{\alpha^{\frac{3}{4}}+\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{4}}}\qquad\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}\beta^{\frac{1}{4}}+\alpha^{\frac{1}{4}}\beta^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}}}\quad 2)\ \frac{\alpha^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{4}}+1}{\alpha^{\frac{1}{4}}-2\alpha^{\frac{1}{8}}+1}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ*

79. ΑΝΑΓΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΝΕΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Εἰς τὸ κεφάλαιον «ἀνάλυσις ἀκεραίων ἀλγ. παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων» (περίπτωσις 6η) εἴδομεν, ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv$ $\equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$ διὰ $\Delta < 0$ δὲν δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς διαφορὰν δύο τετραγώνων, διότι ὁ ὅρος $\frac{\Delta}{4\alpha^2}$ δὲν εἶναι τετράγωνον πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὡς ἀρνητικός.

Ἐπίσης δι᾿ ὡρισμένας ἐξισώσεις, ὡς αἱ $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 4 = 0$ ἡ λύσις εἶναι ἀδύνατος ἐν R.

Γενικῶς δὲ ἡ ἰσότης $x^{2\nu} = \beta$, $\forall x \in R \wedge \beta \in R^- \wedge \nu \in N_0$, εἶναι ἀδύνατος, διότι οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει x, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρτία δύναμις νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἀκόμη εἴδομεν ὅτι $\forall \alpha \in R^- \wedge \nu \in N$ τὸ σύμβολον $\sqrt[2\nu]{\alpha}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Τὰ ἀνωτέρω ἀλγεβρικὰ θέματα καὶ ἄλλα συναφῆ αὐτῶν ἔμενον ἄλυτα μέχρις ὅτου ἡ ἐπιθυμία τῶν Μαθηματικῶν, ὅπως δώσουν λύσιν εἰς τοιαῦτα θέματα, ὡδήγησεν εἰς τὴν ἐπινόησιν ἑνὸς νέου συστήματος ἀριθμῶν, ἐπιτρέποντος τὴν ἐπιθυμητὴν λύσιν.

Οὕτως εἰσήχθη ἓν νέον σύστημα ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον ὠνομάσθη **σύστημα φανταστικῶν ἀριθμῶν.**

Ἓν τοιοῦτον σύστημα ἀριθμῶν διὰ νὰ γίνῃ δεκτόν, πρέπει νὰ ὑπακούῃ εἰς τοὺς γνωστοὺς μέχρι τοῦδε νόμους, οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Δεχόμεθα διὰ τὸ νέον σύστημα **τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν,** ὅτι ὑπακούει εἰς τοὺς νόμους αὐτούς.

80. ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ — ΟΡΙΣΜΟΙ.

Πᾶν σύστημα ἀριθμῶν ἔχει μίαν μονάδα. Τοῦ συστήματος τῶν φανταστι-

(*) Τὴν θεωρίαν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἐθεμελίωσαν οἱ : D' Alembert, Euler, Gauss.

κῶν ἀριθμῶν τὴν μονάδα παριστῶμεν μὲ τὸ γράμμα i, ἀρχικὸν τῆς Γαλλικῆς λέξεως imagineure, καὶ ὀνομάζομεν αὐτὴν **φανταστικὴν μονάδα. Ἡ φανταστικὴ μονὰς i, ὁρίζομεν ὅπως ἔχει τὴν ἰδιότητα, τὸ τετράγωνον της ὡς καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀντιθέτου αὐτῆς —i νὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μονάδα.** Ἐξ ὁρισμοῦ λοιπὸν ἔχομεν :

$$\boxed{i^2 = -1, \ (-i)^2 = -1} \quad (1)$$

Αἱ ἰσότητες (1) καθιστοῦν δυνατὴν τὴν λύσιν τῆς ἐξισ. $x^2 + 1 = 0$, εἰς τοὺς φανταστικοὺς ἀριθμούς, διότι :

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 = (\pm i)^2 \Rightarrow x = \pm i$$

Ἐπὶ πλέον αἱ ἰσότητες (1) δηλοῦν ὅτι : $\boxed{\sqrt{-1} = \pm i}^{*}$ (2)

Φανταστικὸς ἀριθμὸς καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος γίνεται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς φανταστικῆς μονάδος i, ἢ καὶ τῆς ἀντιθέτου – i, καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ $2i$, $-3i$, $\frac{1}{2}i$, $-\frac{3}{5}i$, $0{,}25i$ εἶναι φανταστικοί. Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι : βi, ὅπου $\beta \neq 0 \in R$.

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τεθέντων ὁρισμῶν, **ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς φανταστικός.**

Πράγματι: $\forall \alpha \in R^- : \sqrt{\alpha} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{|\alpha|} \wedge \sqrt{-1} = \pm i \Rightarrow \boxed{\sqrt{\alpha} = \pm i\sqrt{|\alpha|}}$

Ἐκ τῶν δύο τετραγωνικῶν ριζῶν τοῦ ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ α συμφωνοῦμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt{\alpha}$, νὰ παριστάνωμεν τὴν $i\sqrt{|\alpha|}$, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **πρωτεύουσαν** τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α.

Π.χ. $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} = i\sqrt{16} \cdot i\sqrt{9} = i^2\sqrt{16 \cdot 9} = (-1) \cdot 12 = -12$

Μὴ ὀρθὴ πρᾶξις : $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9} = \sqrt{(-16) \cdot (-9)} = \sqrt{144} = 12$

Αἱ ἀκέραιαι δυνάμεις τῆς φανταστικῆς μονάδος.

Ἔχομεν : 1)

$$\left.\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1, \ (-i)^2 = -1 \end{aligned}\right\} \text{ἐξ ὁρισμοῦ}$$

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = (-1)\, i = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \\ i^5 &= i^4\, i = 1i = i \end{aligned}$$

2) Γενικῶς :

$$\forall \nu \in N : \left| \begin{aligned} i^{4\nu} &= (i^4)^\nu = 1^\nu = 1 \\ i^{4\nu+1} &= i^{4\nu} \cdot i = 1 \cdot i = i \\ i^{4\nu+2} &= i^{4\nu}\, i^2 = 1\,(-1) = -1 \\ i^{4\nu+3} &= i^{4\nu}\, i^3 = 1\,(-i) = -i \\ i^{-\nu} &= \frac{1}{i^\nu} \quad (\text{Δυναταὶ τιμαί : } 1, i, -1, -i) \end{aligned} \right.$$

---

* Τὸν συμβολισμὸν τοῦτον ἐχρησιμοποίησε τὸ πρῶτον ὁ Gauss, ἀλλὰ ὁ Euler (1777) τὸν εἰσήγαγεν ὁριστικῶς.

Παρατηρήσεις :

1) Αἱ δυναταὶ τιμαὶ τῶν δυνάμεων τοῦ i εἶναι i, –1, –i, 1 καὶ ἐναλλάσσονται περιοδικῶς.

2) Αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τῆς i εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $+1, -1$.

3) Αἱ περιτταὶ δυνάμεις τῆς i εἶναι οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ i, –i.

Παραδείγματα : 1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = 0$

Λύσις : $i^7 + i^8 + i^9 + i^{10} = i^7(1 + i + i^2 + i^3) = i^7(1 + i - 1 - i) = i^7 \cdot 0 = 0$

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $A = i^{2\nu} + \frac{1}{i^3} + 2i^4 + 3i^2$

Λύσις : $A = (i^2)^\nu + \frac{1}{-i} + 2 \cdot 1 + 3(-1) = (-1)^\nu + i + 2 - 3 = (-1)^\nu - 1 + i$ Ὅπερ $\forall \nu = 2\kappa, \kappa \in N_0 : A = 1 - 1 + i = i$

$\forall \nu = 2\kappa + 1 : \quad A = -1 - 1 + i = -2 + i$

3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δυναταὶ τιμαὶ τῆς παραστ. : $A = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^\nu$

Λύσις : α) Ἐὰν $\nu = 4\kappa$, ὅπου $\kappa \in N$ ἔχομεν : $A_1 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 = 1$

β) Ἐὰν $\nu = 4\kappa + 1$ ἔχομεν : $A_2 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i = 1 + i$

γ) Ἐὰν $\nu = 4\kappa + 2$ ἔχομεν : $A_3 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i - 1 = i$

δ) Ἐὰν $\nu = 4\kappa + 3$ ἔχομεν : $A_4 = 1 + i - 1 - i + \ldots + 1 + i - 1 - i = 0$

81. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (COMPLEXES) — ΟΡΙΣΜΟΙ *

Ἐὰν α, β∈R, θὰ ὀνομάζωμεν μιγαδικὸν ἀριθμὸν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῆς μορφῆς α + βi, ὅπου ὁ α ἀποτελεῖ τὸ πραγματικὸν μέρος, ὁ δὲ βi τὸ φανταστικὸν μέρος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ διὰ $\beta = 0$ εἶναι $\alpha = \alpha + 0i$ καὶ διὰ $\alpha = 0 \land \beta \neq 0$ εἶναι $\beta i = 0 + \beta i$, ἕπεται ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πραγματικὸς εἴτε φανταστικὸς δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἑπομένως τὸ σύστημα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν περιέχει τὰ συστήματα τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

Ἂν συνεπῶς εἶναι : I τὸ σύνολον τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν βi, R τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν **α** καὶ C τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν α + βi τότε ἔχομεν :

$$R \subset C, \; I \subset C, \; R \cap I = \varnothing, \; (R \cup I) \subset C$$

Εἰς τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $Z = \alpha + \beta i$ παρατηροῦμεν, ὅτι μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β ὑφίσταται μία διμελὴς σχέσις. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὰ α καὶ β ἀποτελοῦν διατεταγμένον ζεῦγος (α, β) καὶ συνεπῶς νὰ συμβολίσωμεν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν ὑπὸ μορφὴν διατεταγμένου ζεύγους μὲ πρῶτον στοιχεῖον τὸ πραγματικὸν μέρος καὶ δεύτερον τὸ φανταστικὸν μέρος αὐτοῦ.

(*) Εἶναι ἀδύνατον ὡς ἀπέδειξεν ὁ Weirstrass, νὰ ὑπάρξῃ σύστημα γενικώτερον τοῦ μιγαδικοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ἰσχύουν ὅλοι οἱ νόμοι τῶν τεσσάρων πράξεων.

Οὕτω ἔχομεν : $\boxed{Z = \alpha + \beta i = (\alpha, \beta),\ \forall \alpha, \beta \in R}$

Ἄμεσος συνέπεια ταῦ νέου συμβολισμοῦ εἶναι ὅτι :

1) Πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $(\alpha, 0)$, $\alpha \in R$

2) Πᾶς φανταστικὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $(0, \beta)$, $\beta \in R$

Πρὸς διαχωρισμὸν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς (α, β) μὲ $\beta \neq 0$ ἀπὸ τοὺς μιγαδικοὺς τῆς μορφῆς (α, β) $\forall \alpha, \beta \in R$, συμφωνοῦμεν τοὺς πρώτους νὰ τοὺς καλοῦμεν **καθαροὺς μιγ. ἀρθμούς.**

82. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ.

Ὁρισμοί: 1) Καλοῦμεν **συζυγῆ** τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $Z = (\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$, τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\bar{Z} = (\alpha, -\beta) = \alpha - \beta i$ · **ἀντισυζυγῆ** δὲ τὸν μιγ. ἀριθμὸν $Z_1 = (-\alpha, \beta) = -\alpha + \beta i$

2) τοὺς μιγαδ. ἀριθμοὺς $Z = (\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ καὶ $-Z = (-\alpha, -\beta) = -\alpha - \beta i$ καλοῦμεν **ἀντιθέτους.**

3) **Μέτρον ἢ ἀπόλυτος τιμὴ** τοῦ $Z = (\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ καλεῖται ὁ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $+\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ καὶ συμβολίζεται :

$$\boxed{\rho = |Z| = |(\alpha, \beta)| = |\alpha + \beta i| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν γίνονται ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν διωνύμων $\alpha + \beta x$ καὶ $\gamma + \delta x$, ὅπου ὁ x εἶναι ἡ φανταστικὴ μονὰς i, καθότι ἐδέχθημεν ἰσχύοντας τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς νόμους ἐπὶ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἰδιότητες τινὲς τῶν πράξεων.

α) Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί, μηδενικός, μοναδιαῖος.

1) Ὁ μηδενικὸς μιγαδικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει καὶ εἶναι ἕνας καὶ μόνος ὁ $0 = 0 + 0i = (0,0)$.

Πράγματι : Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha + \beta i = 0$, ὁπότε $\alpha = -\beta i \Rightarrow \alpha^2 = (-\beta i)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = \beta^2 i^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = -\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0$.

Τὸ α' μέλος $\alpha^2 + \beta^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ ποσότης καὶ ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἕπεται ὅτι $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$.

Ὥστε, ἐὰν $\alpha + \beta i = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$

2) Ὁ μοναδιαῖος μιγαδικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει καὶ εἶναι ἕνας καὶ μόνος ὁ $1 = 1 + 0i = (1,0)$

Πράγματι : Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha + \beta i = 1$, ὁπότε $(\alpha - 1) + \beta i = 0$. Ἄρα $\alpha - 1 = 0$ καὶ $\beta = 0$ ἢ $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 0$ καὶ συνεπῶς $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$

β) Οἱ ἴσοι μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, εἶναι νὰ ἔχουν τὰ πραγματικὰ μέρη ἴσα καὶ τοὺς συντελεστὰς τοῦ i ἴσους. Ἤτοι : $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i \Leftrightarrow \alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$

Πράγματι, ἐὰν $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$, τότε $\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$. Ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha + \beta i =$

$= \gamma + \delta i$, τότε $(\alpha - \gamma) + (\beta - \delta)\, i = 0$ καὶ συνεπῶς $\alpha - \gamma = 0$ καὶ $\beta - \delta = 0$, ὅτε $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$

Σημείωσις : Ἡ σχέσις ἰσότητος μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι :

1) **αὐτοπαθής·** ἤτοι ἔχομεν $(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)$

2) **συμμετρική·** ἤτοι ἔχομεν $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow (\gamma, \delta) = (\alpha, \beta)$

3) **μεταβατική·** ἤτοι ἔχομεν $\left.\begin{array}{l}(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)\\(\gamma, \delta) = (\varepsilon, \zeta)\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha,\beta)=(\varepsilon,\zeta)$

Μία τοιαύτη σχέσις καλεῖται **σχέσις ἰσοδυναμίας.**

Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως.

Ἔχομεν : $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R : (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i$

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R : (\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) i$

Ἡ ἀφαίρεσις $(\alpha_1 + \beta_1 i) - (\alpha_2 + \beta_2 i)$ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν.

Οὕτως, ἔχομεν $(\alpha_1 + \beta_1 i) - (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (-\alpha_2 - \beta_2 i) = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\beta_1 - \beta_2)\, i$

Τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιδαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς πραγματικός.

Πράγματι, $Z + \bar{Z} = (\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha$

$$Z \cdot \bar{Z} = (\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Ὁ μιγαδικὸς ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i \neq (0,0)$ ὑπάρχει καὶ εἶνα ἕνας καὶ μόνος, ὁ $Z^{-1} = (\alpha + \beta i)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\, i$

Πράγματι, ἐὰν $Z = \alpha + \beta i$ καὶ $Z^{-1} = x + \psi i$, τότε πρέπει $(\alpha + \beta i) \cdot (x + \psi i) = 1 = 1 + 0i \Rightarrow (\alpha x - \beta\psi) + (\alpha\psi + \beta x)\, i = 1 + 0i \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x - \beta\psi = 1\\ \alpha\psi + \beta x = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}\\[2mm] \psi = \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\end{array}$$

Καλοῦμεν **πηλίκον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν** $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, ὅπου $Z_2 \neq 0$, τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $x + \psi i$ τοιοῦτον ὥστε :

$(\alpha_2 + \beta_2 i) \cdot (\chi + \psi i) = \alpha_1 + \beta_1 i \Rightarrow (\alpha_2 x - \beta_2 \psi) + (\alpha_2\psi + \beta_2 x) i = \alpha_1 + \beta_1 i \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 x - \beta_2\psi = \alpha_1\\ \alpha_2\psi + \beta_2 x = \beta_1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\\[2mm] \psi = \dfrac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\end{array}$$

Ἤτοι ἔχομεν : $Z_1 : Z_2 = x + \psi i = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\, i$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ **πηλίκου δύο μιγάδων** $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ καὶ $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i \neq (0, 0)$ ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς :

$Z_1 : Z_2 = Z \cdot Z_2^{-1} = (\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i)^{-1} =$

$$= (\alpha_1 + \beta i) \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{-\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\, i\right) = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\, i$$

Ἐπίσης ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως γίνεται ἀμέσως, ἂν πολ/σωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν συζυγῆ μιγαδικὸν τοῦ παρονομαστοῦ.

Ἤτοι: $Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 - \beta_2 i)}{(\alpha_2 + \beta_2 i) \cdot (\alpha_2 - \beta_2 i)} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\, i$

Ἡ ὕψωσις μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς δύναμιν.

Ἔχομεν : $Z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta i + \beta^2 i^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i$

$Z^3 = (\alpha + \beta i)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 \beta i + 3\alpha\beta^2 i^2 + \beta^3 i^3 =$

$= (\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) - (\beta^3 - 3\alpha^2\beta)\, i$

83. ΩΡΙΣΜΕΝΑΙ ΒΑΣΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ.

1) Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha + \beta i$, $\alpha - \beta i$, $-\alpha + \beta i$, $-\alpha - \beta i$ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον.

Οὕτω : $|\alpha + \beta i| = |\alpha - \beta i| = |-\alpha + \beta i| = |-\alpha - \beta i| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

2) Οἱ πραγματικοὶ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $(\alpha, o) = \alpha = \alpha + oi$ ἔχουν μέτρον τὸν $|\alpha|$. Ἤτοι : $|(\alpha, o)| = |\alpha + oi| = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

3) Οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ $(0, \alpha) = \alpha i = 0 + \alpha i$ ἔχουν μέτρον $|\alpha|$.

Ἤτοι : $|(o, \alpha)| = |o + \alpha i| = +\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

4) Τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου ἑνὸς μιγαδ. ἀριθμοῦ $Z = (\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν συζυγῆ του.

Ἤτοι : $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R} : \ |Z|^2 = Z \cdot \overline{Z} \Rightarrow (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 = (\alpha + \beta i) \cdot (\alpha - \beta i) = \alpha^2 + \beta^2$

5) Τὸ μέτρον τοῦ γινομένου δύο μιγαδ. ἀριθμῶν $Z_1 = (\alpha_1 + \beta_1 i)$ καὶ $Z_2 = (\alpha_2 + \beta_2 i)$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέτρων αὐτῶν.

Ἤτοι: $|Z_1 \cdot Z_2| = |(\alpha_1 + \beta_1 i) \cdot (\alpha_2 + \beta_2 i)| = \sqrt{(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^2} =$
$= \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \cdot (\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = |Z_1| \cdot |Z_2|$

Γενικῶς ἔχομεν : $|Z_1 \cdot Z_2 \ldots Z_\nu| = |Z_1| \cdot |Z_2| \ldots |Z_\nu|$

Οἱ μαθηταὶ νὰ ἀποδείξουν τὴν ἰδιότητα ταύτην διὰ τρεῖς καὶ τέσσαρας ἀριθμούς.

6) Τὸ μέτρον τοῦ ἀντιστρόφου Z^{-1} τοῦ μιγαδ. ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέτρου τοῦ $Z \cdot (Z \neq 0)$

Ἤτοι : $|Z^{-1}| = |(\alpha + \beta i)^{-1}| = \left| \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\, i \right| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}} =$
$= \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{|Z|}$

7) Τὸ μέτρον τοῦ πηλίκου δύο μιγαδ. ἀριθμῶν Z_1 καὶ $Z_2 \neq 0$ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν μέτρων αὐτῶν.

Ἤτοι : $\left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = |Z_1 \cdot Z_2^{-1}| = |Z_1| \cdot |Z_2^{-1}| = |Z_1| \cdot \frac{1}{|Z_2|} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

8) Τὸ μέτρον τοῦ πηλίκου δύο συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ πραγματικὴ μονάς (1)

Πράγματι : $\left|\frac{Z}{\bar{Z}}\right| = \frac{|Z|}{|\bar{Z}|} = 1$, διότι $|Z| = |\bar{Z}|$

9) Τὸ μέτρον ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $Z = \alpha + \beta i$ εἶναι μηδέν, ὅταν $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$.

Πράγματι : ἔχομεν $|\alpha + \beta i| = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$. Ἀντιστρόφως : $Z = \alpha + \beta i = 0 + 0i \iff |Z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0$.

10) Ἡ ἰδιότης $\forall Z \in R \Rightarrow |Z|^2 = Z^2$ δὲν ἰσχύει, ὅταν εἶναι $Z \in (C - R)$.

Πράγματι : ἂν $Z = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$, τότε $|\alpha + \beta i|^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Ἐξ ἄλλου ἔχομεν $(\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$.

Ἑπομένως τὸ $|\alpha + \beta i|^2$ δὲν ἰσοῦται πρὸς τὸ $(\alpha + \beta i)^2$

Σημαντικὴ σημείωσις. Ἰδιότητες τινὲς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν ἰσχύουν διὰ τοὺς καθαροὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς (ἰδιότης 10 τῆς ἄνω παραγράφου).

84. ΓΡΑΦΙΚΗ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ) ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΜΙΓΑΔ. ΑΡΙΘΜΩΝ

Γνωρίζομεν, ὅτι τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, ψ) τοῦ συνόλου τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου R^2 ἀπεικονίζονται ἀμφιμονοσημάντως εἰς τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων (Καρτεσιανὸν ἐπίπεδον).

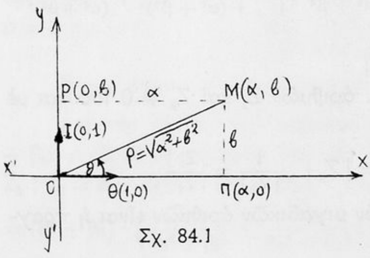
Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί, ὡς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν, δύνανται συνεπῶς νὰ παρασταθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογ. ἀξόνων.

Πράγματι, ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$, ὅπου $\alpha, \beta \in R$, ἀπεικονίζεται εἰς ἕν μόνον σημεῖον M (α, β) τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β καὶ ἀντιστρόφως, τὸ σημεῖον M (α, β) μὲ συντεταγμένας (α, β) ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕνα καὶ μόνον ὡρισμένον μιγαδικὸν ἀριθμὸν $(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$

Ἤτοι.

	Ἀρχέτυπον	Εἰκὼν
$\forall \alpha, \beta \in R$:	$(\alpha, \beta) = \alpha + \beta i$ $\longleftrightarrow$	M (α, β)

Οὕτως ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τοῦ συνόλου $C = \{(x, \psi) / (x, \psi)$ μιγαδικὸς ἀριθμὸς$\}$ καὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου ὁ ἄξων τῶν τετμημένων καὶ τεταγμένων ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **ἄξων τῶν πραγματικῶν καὶ ἄξων τῶν φανταστικῶν,** τὸ δὲ ἐπίπεδον **μιγαδικὸν** ἢ **πολικὸν ἐπίπεδον** (σχῆμα 84.1).



Σχ. 84.1

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τῶν μιγαδ. ἀριθμῶν (α, β) καὶ τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων $\overrightarrow{OM}$ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον 0 τοῦ ἐπιπέδου. Τοῦτο διαπιστοῦται ὁμοίως.

Οὕτω : $\boxed{\forall(\alpha, \beta)\in R^2 : (\alpha, \beta) = (\alpha + \beta i) \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}, \text{ ὅπου } M(\alpha, \beta)}$

Ἐπειδὴ $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ $|\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, ἄρα τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ παριστᾶ τὸ μέτρον τοῦ μιγ. ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$. Ἡ προσημασμένη γωνία $\theta = (\widehat{OX, OM})$ καλεῖται ὅρισμα τοῦ $\alpha+\beta i$.

Εἶναι δὲ $\text{συν}\theta = \dfrac{\alpha}{(\overline{OM})} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καὶ $\text{ημ}\theta = \dfrac{\beta}{(\overline{OM})} = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

Οὕτω, $\forall(\alpha, \beta)\in C$: $\alpha+\beta i = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + i\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) =$

$= \rho\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$, ὅπου ρ τὸ μέτρον καὶ θ τὸ ὅρισμα.

Τὸ μέτρον ρ καὶ τὸ ὅρισμα θ ἑνὸς μιγ. ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$, ἔχοντος εἰκόνα τὸ σημεῖον $M(\alpha, \beta)$ καλοῦνται **πολικαὶ συντεταγμέναι** τοῦ σημείου M.

Ὥστε, πᾶς μιγαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὰς μορφὰς $\alpha+\beta i$ καὶ $\rho\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$. Ἡ πρώτη καλεῖται **Καρτεσιανὴ μορφὴ** καὶ ἡ δευτέρα **τριγωνομετρικὴ μορφὴ**

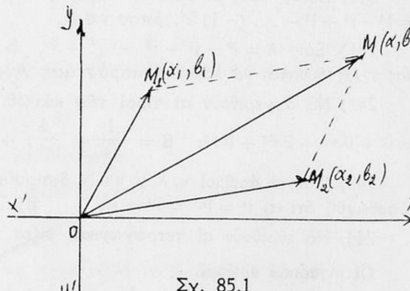
Παράδειγμα : Νὰ τεθῇ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφὴν ὁ $Z = 1 + i\sqrt{3}$

Ἔχομεν $|Z| = \sqrt{1+3} = 2$, $\text{συν}\theta = \dfrac{1}{2}$ καὶ $\text{ημ}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ἄρα $\rho = 2$ καὶ $\theta = 60^0$. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$Z = 1 + i\sqrt{3} = 2\,(\text{συν}60^0 + i\,\text{ημ}\,60^0)$$

85. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ.

1) **Πρόσθεσις.** Ἐὰν $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ καὶ $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ καὶ αἱ εἰκόνες αὐτῶν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OM_1}$ καὶ $\overrightarrow{OM_2}$ ἀντιστοίχως, τότε τὸ ἄθροισμα $Z_1 + Z_2 = Z$ ἔχει ὡς εἰκόνα τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM}$. Ὡς γνωστόν, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον O καὶ πέρας τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαγωνίου τοῦ παραλ/γράμμου OM_1MM_2 (κανὼν τοῦ παραλ/γράμμου).

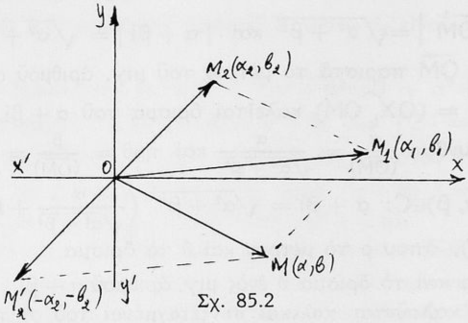


Σχ. 85.1

Ἡ ἀπόδειξις δύναται νὰ γίνῃ ὑπὸ τῶν μαθητῶν εὐκόλως ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουν ὅτι $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ καὶ $\beta_1 + \beta_2 = \beta$. (Σχῆμα 85.1)

2) **Ἀφαίρεσις.** Ἐὰν αἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $Z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ καὶ $Z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ εἶναι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OM_1}$ καὶ $\overrightarrow{OM_2}$ ἀντιστοίχως, τότε ἡ εἰκὼν τῆς διαφορᾶς $Z_1 -$

$-Z_2 = Z$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (Σχῆμα 85.2). Διότι $Z = Z_1 - Z_2 = Z_1 + (-Z_2)$.



Σχ. 85.2

Ἡ εἰκὼν τοῦ $-Z_2$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM'}_2$, συμμετρικὸν τοῦ $\overrightarrow{OM}_2$ ὡς πρὸς τὸ O.

Οὕτω : $\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{M_2O} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM'}_2 = \overrightarrow{OM}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί.

237) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $i^{42} = i^{-14} = -1$, $i^{4\nu+2} = -i^{4\nu} = \dfrac{1}{i^2}$,

$\dfrac{1}{i^{4\nu+1}} = i^{4\nu+3} = -i$, $i^{4\mu+1} : i^{4\nu-1} = -1$, ὅπου $\nu, \mu \in N_0$.

238) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις $-5i^3(-i^7)$, $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$,

$-5i^2 + i \cdot (2i - i^4)$, $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{i^2} + \dfrac{1}{i^3} + \dfrac{1}{i^4}$

239) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\forall \nu \in N_0$ ἔχομεν $i^\nu + i^{\nu+1} + i^{\nu+2} + i^{\nu+3} = 0$

240) Ποίας τιμὰς δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράστασις

$A = 1^0 - i^1 + i^2 - \dots (-1)^\nu i^\nu$, ὅπου $\nu \in N_0$

241) Ἐὰν $A = i^0 + i^1 + i^2 + \dots + i^\nu$, $B = i^0 - i^1 + i^2 - \dots (-1)^\nu i^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$,

ποίας τιμὰς δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράστασις $A + B$;

242) Νὰ συγκριθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων :

$A = i^\lambda + i^{\lambda+1} + i^{\lambda+2} + i^{\lambda+3}$, $B = \dfrac{1}{i^\lambda} + \dfrac{1}{i^{\lambda+1}} + \dfrac{1}{i^{\lambda+2}} + \dfrac{1}{i^{\lambda+3}}$, $\lambda \in \mathbf{N}$

243) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{N}$ διαιρούμενοι διὰ 4 ἀφήνουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον ν' ἀποδειχθῇ ὅτι α) $i^\kappa = i^\lambda = i^\mu = i^\nu$, β) $i^{\kappa+\lambda+\mu+\nu} = 1$

244) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν, -25, -36, -23, -27.

Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

245) Νὰ ἀναχθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς τὴν μορφὴν $\alpha + \beta i$:

α) $-2i(-1+i) - (-3+2i)$, β) $(5+3i) \cdot (5-3i) \cdot i^2$, γ) $(1+i)^3$,

δ) $(2+i)^3 + (2-i)^3$, ε) $(1+2i)^4 - (1-2i)^4$, ζ) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$,

η) $(\alpha+\beta i)^2 + (\alpha-\beta i)^2$, θ) $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} + \dfrac{\alpha-\beta i}{\gamma-\delta i}$, ι) $\dfrac{\alpha+i}{1-\alpha i}$, κ) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$

246) Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

α) $(1-i)^4 = -4$, β) $(-2+7i)\cdot(-2-7i) = 53$, γ) $(-7+i)\cdot(7+i) = -50$

δ) $(2+3i)\cdot(3+2i) = 13i$, ε) $(x-\alpha+\beta i)\cdot(x-\alpha-\beta i) = (x-\alpha)^2+\beta^2$

ζ) $\dfrac{3}{6-5i} = \dfrac{18}{61} + \dfrac{15}{61}i$, η) $\dfrac{\alpha+\beta i}{\beta-\alpha i} = i$, θ) $\dfrac{\alpha+\beta\nu-(\alpha\nu-\beta)i}{1-\nu i} = \alpha+\beta i$

ι) $\dfrac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i} + \dfrac{\alpha-\beta i}{\alpha+\beta i} = \dfrac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha^2+\beta^2}$, κ) $(1+i)^3(1+i^3) = 4i$

247) Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τῶν x, ψ ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$(1-2i)x + (3+5i)\psi = 1+3i$$

248) Ἐὰν $z_1 = (2+i)$, $z_2 = (1-2i)$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = z_1 + z_2 + z_1z_2 + \dfrac{z_1}{z_2} + (z_1-z_2)^2$.

249) Ἐὰν $z_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $z_1 = z_2^2$, β) $z_2 = z_1^2$ καὶ γ) $z_1^3 = z_2^3 = 1$

250) Ἐὰν $z = \alpha+\beta i$ καὶ $\overline{z} = \alpha-\beta i$, ν' ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις :

$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$,

$\overline{(-z)} = -\overline{z}$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $(z \neq 0)$

251) Ὑπὸ ποίαν συνθήκην τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ εἶναι ἀριθμὸς α) πραγματικὸς καὶ β) φανταστικὸς καθαρός ;

Τὸ μέτρον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

252) Ποῖον τὸ μέτρον τῶν ἀριθμῶν $-i$, $1+i$, $1+i\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}+i$, $\dfrac{1+2i}{1-2i}$, $\dfrac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$, $\dfrac{3+2i}{i} - (1+i)$, $\dfrac{(3+4i)\cdot(-1+2i)}{(-1-i)\cdot(3-i)}$, $\dfrac{i\cdot(2-\sqrt{3}+i)^2}{(-1+i)^3}$

253) Ἐὰν $z_1, z_2 \in (C-R)$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2\cdot|z_2|^2$ (ἐφαρμόσατε τὸν τύπον $|z|^2 = z\overline{z}$)

254) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $|\overline{z_1+z_2}| = |\overline{z_1}+\overline{z_2}|$, $z_1, z_2 \in (C-R)$

255) Ἐὰν οἱ $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ πληροῦν τὴν σχέσιν $z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1+z_2|^2$, δείξατε ὅτι $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$

256) Ἐὰν $\alpha+\beta i = 0 \Leftrightarrow |\alpha+\beta i| = 0$

Γραφικὴ παράστασις τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

257) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν $1+i$, $1-2i$, $-3+i$, $-2-\dfrac{1}{2}i$, $(1-2i)^{-1}$, $(1+i)^2$, 1, -1, i, $-i$, $\dfrac{1}{i}$, $-\dfrac{1}{i}$

258) Παραστήσατε γραφικῶς τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$, $-\alpha+\beta i$, $-\alpha-\beta i$ $(\alpha, \beta \in R^+)$. Τί παρατηρεῖτε ;

259) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{3}+i$ καὶ νὰ τεθῇ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν.

260) Αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι ἑνὸς μιγάδος εἶναι $\rho = 5$ καὶ $\theta = 45^0$. Ποῖος ὁ ἀριθμὸς οὗτος ;

261) Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ ἄθροισμα τριῶν καὶ ἀκολούθως τεσσάρων μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

262) Παραστήσατε γεωμετρικῶς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν :

1) $z_1 = -2i$, $z_2 = -3 + 2i$ καὶ 2) $z_1 = 3i$, $z_2 = -2 + 0i$, $z_3 = 1 + i$

263) Ἐὰν $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = +1 + 2i$, ποῖαι αἱ εἰκόνες εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον τῶν διαφορῶν $z_1 - z_2$ καὶ $z_2 - z_1$. Τί παρατηρεῖτε ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

264) Ἐὰν $z_1, z_2 \in (C - R)$, νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$, ὅπου $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_1 + \beta_2 i$, ἵνα ἔχωμεν : α) $z_1 z_2 \in R$. β) $z_1 z_2 \in I$ (R σύνολον πραγματικῶν, I σύνολον φανταστικῶν).

265) Ὑπὸ ποίαν συνθήκην τῶν πραγματικῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ τὸ πηλῖκον $\dfrac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i}$ εἶναι α) πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ β) φανταστικός.

266) Ἐὰν $z_1 z_2 \in (C - R)$ καὶ $z_1 = -\overline{z_2}$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα $z_1 + z_2$ εἶναι καθαρὸς φανταστικὸς ἀριθμὸς καὶ τὸ γινόμενον $z_1 z_2 \in R$

267) Ἐὰν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, ὑπὸ ποίαν συνθήκην τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ θὰ εἶναι α) $(z_1 \cdot z_2) = 0$ καὶ β) $| z_1 - z_2 | = | z_1 + z_2 |$;

268) Ἐὰν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ καὶ $| z_1 |^2 + | z_2 |^2 = | z_2 - z_1 |^2$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 = 0$

269) Ἐὰν $z_1, z_2 \in (C - R)$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $2 (| z_1 |^2 + | z_2 |^2) = | z_1 + z_2 |^2 + | z_1 - z_2 |^2$.

270) Ἐὰν αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha + \beta i$ εἶναι ρ, θ, ποῖαι αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι τοῦ ἀριθμοῦ $z^{-1} = (\alpha + \beta i)^{-1}$;

271) Ὑπὸ ποίαν συνθήκην τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in R$ αἱ εἰκόνες εἰς τὸ πολικὸν ἐπίπεδον τῶν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, κεῖνται ἐπ' εὐθείας διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν ἀξόνων ;

272) Ἐὰν $z = \alpha + \beta i$ καὶ $\overline{z} = \alpha - \beta i$, τοῦ δὲ μιγαδικοῦ $z_1 = x + \psi i$ τὸ μέτρον $| z_1 | = 1$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\left| \dfrac{z - z_1}{1 - \overline{z} z_1} \right| = 1$, $(\overline{z} z_1 \neq 1)$.

273) Παραστήσατε γεωμετρικῶς τοὺς ἀριθμοὺς $\dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\dfrac{z - \overline{z}}{2i}$ ὅπου z μιγαδικὸς ἀριθμὸς καὶ $\overline{z}$ ὁ συζυγὴς αὐτοῦ.

274) Ἐὰν $z = \alpha + \beta i$ καὶ $\overline{z} = \alpha - \beta i$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ z εἶναι ἢ πραγματικὸς ἢ φανταστικὸς ἂν ἰσχύη ἡ σχέσις $z^2 = \overline{z}^2$.

275) Ἐὰν $| z_1 + z_2 | = | z_1 - z_2 |$, ὅπου $z_1, z_2 \in (C - R)$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι : α) $z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} = 0$, ($\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$ συζυγεῖς τῶν z_1, z_2 ἀντιστοίχως) καὶ β) $| z_1 + \overline{z_2} | = |z_1 + \overline{z_2}|$. Ἐπίσης ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἂν $|z_1 + \overline{z_2} | = | \overline{z_1} - z_2 |$ τότε $z_1 z_2 + \overline{z_1 z_2} = 0$.

276) Ἐὰν $z = \alpha + \beta i$ καὶ $\overline{z} = \alpha - \beta i$, ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παραστάσεις $\dfrac{2z}{1 + z\overline{z}}$, $\dfrac{2\overline{z}}{1 + z\overline{z}}$ εἶναι μιγαδικοὶ συζυγεῖς ἀριθμοί.

277) Ἐὰν $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in R$, καὶ $| 2z - 1 | = | z - 2|$ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ B^{OY} ΒΑΘΜΟΥ

86. ΟΡΙΣΜΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (περιληπτική ὑπόμνησις).

ΟΡΙΣΜΟΙ : *Πᾶσα ἰσότης μεταξὺ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων (ἀγνώστων) τῶν παραστάσεων τούτων, καλεῖται ἐξίσωσις.*

Ἐνταῦθα δὲν ἀποκλείεται ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν δύναται ἡ ἰσότης νὰ εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις καλεῖται ταυτότης. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $4x^2 + 1 - 4x = (2x - 1)^2$ εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶν $x \in R$.

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **ἄγνωστοι** τῆς ἐξισώσεως διὰ τὰς ὁποίας εἶναι αὕτη ἀληθὴς καλεῖται **ἐπίλυσις** τῆς ἐξισώσεως. Αἱ οὕτω δὲ εὑρισκόμεναι τιμαὶ καλοῦνται **λύσεις ἢ ρίζαι** τῆς ἐξισώσεως.

Δύο ἢ περισσότεραι ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκριβῶς λύσεις (ὄχι κοινὰς λύσεις), **καλοῦνται ἰσοδύναμοι.**

Ἰδιότητες : 1) Ἡ ἐξίσωσις $f(x) = \varphi(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $f(x) + \sigma(x) = \varphi(x) + \sigma(x)$, ἐφ' ὅσον εἰς τὸ σύνολον εἰς τὸ ὁποῖον ἀναφερόμεθα, ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ ἔχῃ νόημα. Οὕτω : $f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x) + \sigma(x) = \varphi(x) + \sigma(x)$

2) Ἡ ἐξίσωσις $f(x) = \varphi(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $\lambda f(x) = \lambda\varphi(x)$, ὅπου $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$ καὶ ἀνεξάρτητον τοῦ x.

Οὕτω συμβολίζομεν : $\lambda \in R,\ \lambda \neq 0 :\ f(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \lambda f(x) = \lambda\varphi(x)$.

3) Ἡ ἐξίσωσις $f(x) = \varphi(x)$ δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $f(x) \cdot \sigma(x) = \varphi(x) \cdot \sigma(x)$, ὅπου $\sigma(x)$ συνάρτησις τοῦ x.

Πράγματι, διότι $f(x) \cdot \sigma(x) = \varphi(x) \cdot \sigma(x) \Leftrightarrow \sigma(x)[f(x) - \varphi(x)] = 0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\sigma(x) = 0 \vee f(x) = \varphi(x)$.

4) Ἂν $\varphi(x) = 0$ καὶ $\varphi(x) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \cdots \varphi_\nu(x)$, τότε τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς $\varphi(x) = 0$ ἰσοῦται μὲ τὴν ἕνωσιν τῶν συνόλων τῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0, \ldots, \varphi_\nu(x) = 0$. Πράγματι, διότι διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ $\varphi(x) = 0$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἷς τουλάχιστον ἐκ τῶν $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\nu(x)$

νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0, \ldots \varphi_\nu(x) = 0$ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) = 0$.

5) Ἡ ἐξίσωσις $f(x) = \varphi(x)$ δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $[\varphi(x)]^2 = [f(x)]^2$.

Διότι : $[\varphi(x)]^2 - [f(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow (\varphi(x) + f(x))(\varphi(x) - f(x)) = 0$, ἥτις δίδει $\varphi(x) = -f(x) \vee \varphi(x) = f(x)$

Ἐκ τῆς περιληπτικῆς ταύτης ὑπομνήσεως, ἄνευ ἀποδείξεως, τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων συμπεραίνομεν, ὅτι κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων δέον νὰ λαμβάνωμε σοβαρῶς ὑπ' ὄψιν αὐτάς, διὰ νὰ μὴν ὑποπίπτωμεν εἰς σφάλματα.

87. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΕΞΙΣ. Β΄ ΒΑΘΜΟΥ (1)

Ὁρισμός. Καλεῖται ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς χ, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μὲ $\alpha \neq 0$ καὶ α, β, γ πραγματικοὶ ἢ καὶ μιγαδικοί. Ἐνταῦθα θὰ θεωροῦνται οἱ α, β, γ οἱ ὁποῖοι καλοῦνται **συντελεσταί**, πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ καὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις μὴ περιέχουσαι τὸν ἄγνωστον x.

Οὕτω διὰ τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ οἱ συντελεσταί ἔχουν ἀντιστοίχως τὰς παρακειμένας τιμάς :

$3x^2 - 2x = 0$	$\alpha = 3$,	$\beta = -2$,	$\gamma = 0$
$-5x^2 + 7 = 0$	$\alpha = -5$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 7$
$-\frac{1}{2}x^2 = 0$	$\alpha = -\frac{1}{2}$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$
$x^2 - 3x + 1 = 0$	$\alpha = 1$,	$\beta = -3$,	$\gamma = 1$
$\alpha x^2 - (\alpha + 1)x - 3\alpha = 0$	$\alpha' = \alpha$,	$\beta' = -(\alpha + 1)$,	$\gamma' = -3\alpha$
$(\lambda - 1)x^2 - 4\lambda + (\lambda^2 - 9) = 0$	$\alpha = \lambda - 1$,	$\beta = -4\lambda$,	$\gamma = \lambda^2 - 9$

Αἱ τρεῖς πρῶται ἐξισώσεις δὲν περιέχουν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, διὰ τοῦτο καλοῦνται **ἐ λ λ ι π ε ῖ ς**. Αἱ ἄλλαι τρεῖς εἶναι **π λ ή ρ ε ι ς** μορφαί.

Ἐν γένει, ἐὰν	$\beta = \gamma = 0$	λαμβάνομεν	$\alpha x^2 = 0$	ἐλλιπεῖς μορφαὶ
»	$\beta = 0 \wedge \gamma \neq 0$	»	$\alpha x^2 + \gamma = 0$	
»	$\beta \neq 0 \wedge \gamma = 0$	»	$\alpha x^2 + \beta x = 0$	
»	$\beta \neq 0 \wedge \gamma \neq 0$	»	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$	πλήρης μορφὴ

Τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $(\alpha \neq 0, \beta, \gamma) \in R$, θὰ καλοῦμεν **λύσιν** ἢ **ρίζαν** τὴν τιμὴν $x = x_0 \in C$, ἐὰν ἔχωμεν $\varphi(x)_0 = \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma = 0$. ($C = \{ x \,/\, x$ μιγαδικὸς ἀριθμ. $\}$ *).

Ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, τὸ σύνολον τῶν λύσεων (ριζῶν) τῆς β΄/θμίου ἐξισώσεως εἶναι διμελές.

Ἐὰν λοιπὸν x_1 καὶ x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἰς τὸ σύνολον C, τότε αἱ $f(x_1) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0$ καὶ $f(x_2) = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0$ εἶναι ἀληθεῖς ἰσότητες.

---

(1) Τὰς ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ μὲ ἕναν ἄγνωστον ἐπραγματεύθη τὸ πρῶτον ὁ Ἕλλην: Μαθηματικὸς Διόφαντος.

(*) Τὸ σύνολον C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν περιέχει τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (κεφάλαιον περὶ Μιγαδικῶν).

Συμβολίζομεν :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma \in R \\ f(x_1)=0,\ f(x_2)=0\end{array}\right\} \Leftrightarrow \Sigma = \{\, x / x \in C \wedge f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0\} = \{\, x_1\ x_2\,\}$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισ. β΄ βαθμοῦ.

1) Ἡ ἐλλιπὴς μορφὴ $\alpha x^2 = 0,\ \alpha \neq 0$.

Ἐπειδὴ $\alpha \neq 0$, ἐκ τῆς $\alpha x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ἢ $x \cdot x = 0$, ἐξ οὗ $x_1 = x_2 = 0$

2) Ἡ ἐλλιπὴς μορφὴ $\alpha x^2 + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0$.

Ἔχομεν : $\alpha x^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \gamma/\alpha = 0$, ὁπότε

α) Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, δηλαδὴ οἱ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι, τότε $-\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται :

$$x^2 - \left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(x - \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right) = 0,$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x + \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = 0,\ x - \sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = 0$, ἐξ οὗ

$x_1 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}},\ x_2 = +\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$

β) Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, δηλαδὴ οἱ α καὶ γ εἶναι ὁμόσημοι, τότε ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ δὲν ἔχει λύσιν ἐν R διότι $x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} > 0\ \forall x \in R$, ἔχει ὅμως λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν φανταστικῶν I. Οὕτω λαμβάνομεν τὰς λύσεις :

$x_1 = -\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = -i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}},\quad x_2 = +\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} = i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$

3) Ἡ ἐλλιπὴς μορφὴ $\alpha x^2 + \beta x = 0,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$.

Ἔχομεν : $\alpha x^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(\alpha x + \beta) = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x = 0,\ \alpha x + \beta = 0$, ἐξ οὗ λαμβάνομεν $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

4) Ἡ πλήρης μορφὴ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἰδιότητας ἰσοδυναμίας τῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν διαδοχικῶς :

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (πολ/ζομεν ἐπὶ 4α)

$\Leftrightarrow\ 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + 4\alpha\gamma = 0$ (προσθέτομεν τὸν β^2)

$\Leftrightarrow\ 4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma = 0$

$\Leftrightarrow\ (2\alpha x + \beta)^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma) = 0$ (θέτομεν ὅπου $\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta$)

ἢ $(2\alpha x + \beta)^2 - \Delta = 0$

ἢ $(2\alpha x + \beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2 = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $2\alpha x + \beta + \sqrt{\Delta} = 0,\ 2\alpha x + \beta - \sqrt{\Delta} = 0$, ἐξ οὗ λαμβάνομεν

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha},\ x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζας, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τὸν τύπον

$$\boxed{x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (1)}$$

Ἡ παράστασις $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \in R$ καλεῖται **διακρίνουσα** τῆς ἐξισώσεως.

Σημ. Αἱ ἐξετασθεῖσαι ἐλλιπεῖς μορφαὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τοῦ ἀνωτέρω γενικοῦ τύπου.

Ἡ διακρίνουσα εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθῇ ὑπὸ τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Ἐὰν $\Delta > 0$, τότε αἱ ρίζαι x_1, x_2 αἱ διδόμεναι ἀπὸ τὸν τύπον (1) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

β) Ἐὰν $\Delta = 0$, τότε αἱ ρίζαι x_1, x_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι, ὁπότε λέγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν διπλῆν ρίζαν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

γ) Ἐὰν $\Delta < 0$, τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἢ ἡ ἰσοδύναμός της $(2\alpha x + \beta)^2 = \Delta$ δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον R, διότι $\forall x \in R \Rightarrow (2\alpha x + \beta)^2 > \Delta$, ἔχει ὅμως λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν τῆς μορφῆς (α, β) μὲ $\beta \neq 0$, αἱ δὲ ρίζαι x_1, x_2 λέγομεν ὅτι εἶναι καθαραὶ μιγαδικαί.

Εἰδικὴ περίπτωσις Ὁ τύπος (1) δύναται ν' ἁπλουστευθῇ, ἐὰν ὁ συντελεστὴς β τοῦ x εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2

Οὕτω, ἐὰν $\beta = 2\beta'$, τότε $\Delta = (2\beta')^2 - 4\alpha\gamma = 4\beta'^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta'^2 - \alpha\gamma)$

Συνεπῶς $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta' \pm 2\sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}$

Ἐὰν δὲ $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geqslant 0 \Leftrightarrow 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) \geqslant 0 \Leftrightarrow \beta'^2 - \alpha\gamma \geqslant 0$

Ὁμοίως ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow 4(\beta'^2 - \alpha\gamma) < 0 \Leftrightarrow \beta'^2 - \alpha\gamma < 0$

Παραδείγματα : 1) Να ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

α) $9x^2 - 16 = 0$, β) $4x^2 + 3x = 0$, γ) $6x^2 - 5 = 0$, δ) $5x^2 + 3 = 0$

Ἐπίλυσις α) Ἔχομεν $9x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (3x + 4)(3x - 4) = 0$ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $\begin{cases} 3x + 4 = 0 \\ 3x - 4 = 0, \end{cases}$ ἐξ οὗ : $\begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3} \\ x_2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

Οὕτω : $\Sigma = \{ x / x \in R \wedge 9x^2 - 16 = 0 \} = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$

β) Ἔχομεν $4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(4x + 3) = 0$ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $\begin{cases} x = 0 \\ 4x + 3 = 0 \end{cases}$, ἐξ οὗ : $\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{4} \end{matrix}$

Οὕτω : $\Sigma = \{ x / x \in R \wedge 4x^2 + 3x = 0 \} = \left\{ 0, -\frac{3}{4} \right\}$

γ) Ἔχομεν $6x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{6} + \sqrt{5})(x\sqrt{6} - \sqrt{5}) = 0$ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x\sqrt{6} + \sqrt{5} = 0$, $x\sqrt{6} - \sqrt{5} = 0$, ἐξ οὗ λαμβάνομεν τὰς λύσεις $x_1 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{30}}{6}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

Ὥστε : $\Sigma = \{ x / x \in R \wedge 6x^2 - 5 = 0 \} = \left\{ -\frac{\sqrt{30}}{6}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right\}$

δ) Ἔχομεν $5x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow (x\sqrt{5})^2 - (\sqrt{-3})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x\sqrt{5}+\sqrt{-3})\cdot(x\sqrt{5}-\sqrt{-3})=0$ ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x\sqrt{5}+\sqrt{-3}=0$, $x\sqrt{5}-\sqrt{-3}=0$, ἐξ οὗ $x_1=-i\sqrt{3}$, $x_2=i\sqrt{3}$

Ὥστε : $\Sigma=\{x \,/\, x\in I \wedge 5x^2+3=0\}=\{-i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$

2) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $x^2+2x-3=0$, β) $x^2-6x+13=0$, γ) $3x^2-5x+1=0$

Ἐπίλυσις. α) Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$

ἄρα $\Delta=2^2-4\cdot1\cdot(-3)=4+12=16$. Διὰ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν :

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\dfrac{-2\pm4}{2}$, ἐξ οὗ : $x_1=\dfrac{-2+4}{2}=1$, $x_2=\dfrac{-2-4}{2}=-3$

Οὕτω : $\Sigma=\{x/x\in\mathbf{R}\wedge x^2+2x-3=0\}=\{1,-3\}$

β) Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=13$

ἄρα $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16$. Διὰ τοῦ τύπου (1) ἔχομεν :

$x=\dfrac{6\pm\sqrt{-16}}{2\cdot1}=\dfrac{6\pm4i}{2}$, ἐξ οὗ : $x_1=3+2i$, $x_2=3-2i$

Οὕτω : $\Sigma=\{x/x\in C\wedge x^2-6x+13=0\}=\{3+2i, 3-2i\}$

γ) Ἐπειδὴ $\alpha=3$, $\beta=-5$, $\gamma=1$

ἄρα $\Delta=(-5)^2-4\cdot3\cdot1=25-12=13$. Διὰ τοῦ τύπου (1) Ἔχομεν :

$x=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{2\cdot3}=\dfrac{5\pm\sqrt{13}}{6}$, ἐξ οὗ : $x_1=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$, $x_2=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$

Οὕτω : $\Sigma=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge 3x^2-5x+1=0\}=\left\{\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}, \dfrac{5-\sqrt{13}}{6}\right\}$

3) Ἐὰν $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$, νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$x^2+2\beta x-(\alpha^2+2\alpha\beta)=0$$

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ x εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $x=\dfrac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha}$, λαμβάνομεν :

$x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2+\alpha^2+2\alpha\beta}}{1}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2}}{1}=\dfrac{-\beta\pm|\alpha+\beta|}{1}=-\beta\pm|\alpha+\beta|$,

ἐξ οὗ : $x_1=-\beta+\alpha+\beta=\alpha$, $x_2=-\beta-\alpha-\beta=-(\alpha+2\beta)$

Οὕτω : $\Sigma=\{x \mid x\in R\wedge x^2+2\beta x-(\alpha^2+2\alpha\beta)=0\wedge\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}=\{\alpha, -(\alpha+2\beta)\}$

4) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{8}{x-1}=\dfrac{15}{x+9}$

Ἐπίλυσις. τὰ κλάσματα ἔχουν ἔννοιαν, ὅταν $x\neq4$, $x\neq1$, $x\neq-9$. Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις καὶ διατάσσοντες, λαμβάνομεν $2x^2-41x+119=0$. Διὰ τοῦ τύπου λαμβάνομεν τὰς λύσεις $x_1=\dfrac{41+27}{4}=17$, $x_2=\dfrac{41-27}{4}=\dfrac{7}{2}$, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν.

5) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{2x^2-5x+2}{x-2}=0$.

Ἐπίλυσις.

Τὸ κλάσμα διὰ $x = 2$ εἶναι ἀόριστον, διότι οἱ ὅροι αὐτοῦ μηδενίζονται. Ἤτοι, ὁ παρονομαστὴς $x - 2$ εἶναι ὁ παράγων ἀπροσδιοριστίας τοῦ κλάσματος. Ὑποθέτοντες $x \neq 2$ λαμβάνομεν μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως $(2x^2 - 5x + 2) : (x - 2) = (2x - 1)$. Ἄρα $2x - 1 = 0$, ἐξ ἧς $x = +\frac{1}{2}$, ἥτις εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

88. ΕΙΔΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

Τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισωσ. $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διακρίνουσαν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \in R$

Οὕτω διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν $\Delta > 0$, τότε $\sqrt{\Delta} \in R$ καὶ συνεπῶς $x = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \in R$

Ἤτοι αἱ ρίζαι x_1, x_2 εἶναι **πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.**

Ἐὰν δὲ εἶναι $\Delta = \kappa^2$ καὶ $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in Q$ τότε αἱ ρίζαι x_1, x_2 ἐκφράζονται ρητῶς. Ἤτοι $x_1, x_2 \in Q$. Ἄλλως αἱ ρίζαι εἶναι ἄρρητοι (ἀσύμμετροι) συζυγεῖς. Δηλαδὴ ὅταν ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ ἔχει ὡς ρίζαν τὸν ἀσύμμετρον $x_1 = A + \sqrt{B}$, $B \neq \mu^2$ θὰ ἔχῃ καὶ τὴν ρίζαν $x^2 = A - \sqrt{B}$ (παραδ. 2γ')

2) Ἐὰν $\Delta = 0$, τότε $\sqrt{\Delta} = 0$ καὶ συνεπῶς $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} \in R$.

Ἤτοι αἱ ρίζαι $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι **πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.**

3) Ἐὰν $\Delta < 0$, τότε $\sqrt{\Delta} \in I$ καὶ συνεπῶς $x = \dfrac{-\beta \pm i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \in (C - R)$.

Ἤτοι $x_1 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} + \dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}$ **καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς.**

Τῶν προτάσεων τούτων ἰσχύουν καὶ αἱ ἀντίστροφοι.

Οἱ μαθηταὶ δύνανται εὐκόλως νὰ κάμουν τὴν ἀπόδειξιν.

Κατωτέρω δίδομεν συνοπτικῶς τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα εἰς δύο πίνακας.

Πίναξ Ι

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in R$	
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$	Δύο ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι : $x_2 < x_1$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$	Δύο ρίζαι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι : $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$	Δύο ρίζαι καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς.

Πίναξ ΙΙ

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in Q$		
$\Delta > 0$	$\Delta = k^2$, $k \in Q$	Δύο ρίζαι πραγματικαὶ ἄνισοι καὶ σύμμετροι.
	$\Delta \neq k^2$	Δύο ρίζαι πραγματικαὶ ἄνισοι καὶ ἀσύμμετροι.
$\Delta = 0$		Δύο ρίζαι πραγματικαὶ ἴσαι καὶ σύμμετροι.
$\Delta < 0$		Δύο ρίζαι καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς.

Σημαντικὴ παρατήρησις. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι τότε ἡ ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς ἀνίσους.
Διότι τότε : $\alpha\gamma < 0 \Leftrightarrow -4\alpha\gamma > 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ ἢ $\Delta > 0$.

89. ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Ἔχομεν $\Delta \geqslant 0$ καὶ $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $x_1 - x_2$:

$$x_1 - x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}$$

Τὸ σημεῖον τῆς διαφορᾶς $x_1 - x_2$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ πρόσημον τοῦ α, διότι $\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{\Delta} \geqslant 0$.

Οὕτω : Ἐὰν $\alpha > 0$, τότε $x_1 - x_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x_1 \geqslant x_2$
Ἐὰν $\alpha < 0$, τότε $x_1 - x_2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x_1 \leqslant x_2$

Σημαντικὴ σημείωσις. Σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχωμεν εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἑνιαίαν διάταξιν τῶν πραγματικῶν ριζῶν x_1, x_2. Διὰ τοῦτο συμφωνοῦμεν εἰς τὰ ἑπόμενα νὰ χρησιμοποιῶμεν τὴν διάταξιν $x_2 \leqslant x_1$, ὁπότε ἂν $\alpha > 0$ τότε $x_1 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ καὶ $x_2 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, ἂν δὲ $\alpha < 0$ τότε $x_1 = \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ καὶ $x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

90. ΕΙΔΟΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$

Καλοῦνται ρίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x)$ αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ ὁποῖαι τὸ μηδενίζουν. Συνεπῶς αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x)$ εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ καὶ κατὰ συνέπειαν τὰ συμπεράσματα, τὰ συναχθέντα ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν αὐτῆς, δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν καὶ ἐνταῦθα (πίνακες Ι καὶ ΙΙ).

Παραδείγματα. 1) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων : α) $x^2 - 5x + 4 = 0$, β) $x^2 + 2x + 1 = 0$, γ) $5x^2 + 13x + 9 = 0$

Λύσις α) Ἔχομεν : $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0$
Ἤτοι, ἡ διακρίνουσα Δ τῆς ἐξισώσεως εἶναι τέλειον τετράγωνον πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς συμμέτρους καὶ ἀνίσους.
β) Ἔχομεν $\Delta = 2^2 - 4.\ 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

Ἄρα ἔχει δύο ρίζας ἴσας πραγματικάς : $x_1 = x_2 = -\dfrac{2}{2 \cdot 1} = -1$

γ) Ἔχομεν $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 169 - 180 = -11 < 0$
Ἄρα ἔχει δύο ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς.

2) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων.
α) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$, β) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, $\alpha, \beta \in R$

Λύσις : α) Εἶναι : $\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geqslant 0$

῎Αρα ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς συμμέτρους ὡς πρὸς α, β ἀνίσους ἢ ἴσας, ἐφ' ὅσον θὰ ἔχωμεν $\alpha \neq \beta$ ἢ $\alpha = \beta$ ἀντιστοίχως.

β) Εἶναι : $\Delta = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta^2 = -(2\beta)^2 < 0$

῎Αρα ἔχει δύο ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς, ἐὰν $\beta \neq 0$.

3) Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ λεR, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας α) ἴσας, β) πραγματικὰς ἀνίσους καὶ γ) καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς. $f(x) = 3x^2 + 2x - (3\lambda + 1) = 0$

Λύσις : α) ῎Εχομεν $\Delta = 2^2 + 4 \cdot 3 \cdot (3\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow 9\lambda + 4 = 0$ ἐξ ἧς : $\lambda = -\frac{4}{9}$. ῞Ωστε διὰ $\lambda = -\frac{4}{9}$ ἡ $f(x) = 0$ ἔχει μίαν ρίζαν διπλῆν. Αὕτη εἶναι $x_1 = x_2 = -\frac{2}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$

β) ῎Εχομεν $\Delta = 2^2 + 4 \cdot 3(3\lambda + 1) > 0 \Leftrightarrow 9\lambda + 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{4}{9}$.

῞Ωστε διὰ $\lambda > -\frac{4}{9}$ ἡ $f(x) = 0$ ἔχει δύο ρίζας πραγμ. ἀνίσους.

γ) ῎Εχομεν $\Delta = 2^2 + 4 \cdot 3(3\lambda + 1) < 0 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{4}{9}$

῞Ωστε διὰ $\lambda < -\frac{4}{9}$ ἡ $f(x)=0$ ἔχει δύο ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς.

Συνοπτικὸς πίναξ

Τιμαὶ τοῦ λ	$-\infty$	$-\frac{4}{9}$	$+\infty$
Πρόσημον τῆς Δ	—	0	+
Εἶδος ριζῶν τῆς f (x) = 0	Δύο καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς	$-\frac{1}{3}$	Δύο πραγματικαὶ ἄνισοι

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁ μ ὰ ς α' :

278) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $6x^2 + 5x = 0$, $-55x^2 + 75x = 0$
2) $2x^2 - 18 = 0$, $7x^2 + 1 = 0$, $121x^2 - 196 = 0$
3) $x^2 - 2x - 80 = 0$, $x^2 - 9x + 14 = 0$, $x^2 + 25x + 156 = 0$
4) $4x^2 + 7x - 2 = 0$, $2x^2 - 2x - 2 = 0$, $5x^2 - 7x + 1 = 0$
5) $2x^2 + 2x + 5 = 0$, $9x^2 - 6x + 4 = 0$,
6) $5x^2 + \sqrt{3}\,x - 1 = 0$, $(1 - \sqrt{2})\,x^2 - 2(1 + \sqrt{2})\,x + 3\sqrt{2} + 1 = 0$
7) $(x+1)^2 - (x-1)(x+2) = -2x(x-3)$, $(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) - (3x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 1 - 2x$
8) $\frac{3x + 1}{3 - x} - \frac{3 - x}{x + 1} - \frac{5}{3} = 0$, $\frac{25}{12} - \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{x - 3}{2x + 1}$
9) $\frac{1}{x - 8} + \frac{1}{x - 6} + \frac{1}{x + 6} + \frac{1}{x + 8} = 0$

10) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}+\frac{x+3}{x-3}=3,$

Ὁ μ ὰ ς β΄ :

279) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $(4x-1)^2+3(4x-1)=0$

2) $(4x+1)^2+3(16x^2-1)=0,$

3) $(3x+2)(5x-1)+(3x+7)(1-5x)=(1-5x)(2+15x)$

280) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $15x^2+26\mu x+7\mu^2=0$

2) $x^2-(\alpha^2-\beta^2)x-\alpha^2\beta^2=0,$ $\qquad x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2-\beta^2)^2=0$

3) $4x^2-4\alpha x+(\alpha^2-\beta^2)=0,$ $\qquad \kappa x^2+(\lambda+\mu)x-\kappa+\lambda+\mu=0$

4) $\frac{x+\alpha}{x-\alpha}+\frac{x+\beta}{x-\beta}+\frac{x+\gamma}{x-\gamma}=3,$ $\qquad \frac{\alpha+\beta}{x+\beta}+\frac{\alpha+\gamma}{x+\gamma}=2\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma}{x+\beta+\gamma}$

Ὁ μ ὰ ς γ΄ :

281) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων χωρὶς νὰ εὑρεθοῦν αὗται :

1) $x^2-11x+28=0,$ $\quad x^2-24x+143=0,$ $\quad x^2-16x+64=0$

2) $x^2-17x+11=0,$ $\quad 3x^2+7x+5=0,$ $\quad 8x^2-4x+5=0$

282) Ἐὰν $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}$ προσδιορίσατε τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων :

1) $3\alpha x^2+(3\alpha-\beta)x-\beta=0$

2) $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta=0,$ $\qquad 4\alpha^2x^2+4\alpha x+\beta^2+1=0$

283) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $x^2-2(\lambda+2)x+2\lambda^2-17=0$ ἔχει μίαν ρίζαν διπλῆν ; Ἐὰν $x_1=11$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ x_2.

284) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ ν ἡ ἐξίσωσις $(\nu+3)x^2-(2\nu+1)x+\nu+2=0$ ἔχει α) ρίζας ἴσας, β) πραγματικὰς ἀνίσους, γ) καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς.

285) Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $x^2+\alpha x+\beta=0$ ἔχῃ ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $2+3i$, νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α καὶ β.

286) Ἐὰν ἡ ἐξίσ. $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ ἔχῃ ρίζας $x_1\neq x_2\in\mathbf{R}$, νὰ ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἐξίσ. $x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)\cdot x+2\beta(\alpha+\gamma)+3\alpha\gamma=0.$

287) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων $f_1(x)=\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ καὶ $f_2(x)=\alpha x^2+2\beta\kappa x+\kappa^2\gamma=0$ εἶναι τὸ αὐτὸ δι' ἀμφοτέρας.

288) Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισ. $x^2+2\beta x+\gamma=0$ εἶναι καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ αἱ ρίζαι τῆς $x^2+2x+\gamma+2\beta(x+1)+1=0$ εἶναι ἐπίσης καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς.

289) Ἐὰν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{Q}$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\alpha+2\beta-\gamma)x^2-$ $-2\alpha x+\alpha+\gamma-2\beta=0$ εἶναι ρηταὶ ἐκφράσεις τῶν α, β, γ.

290) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς παραστάσεως

$(\alpha_1x+\beta_1)^2+(\alpha_2x+\beta_2)^2$, ἐὰν $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbf{R}\wedge\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\neq\frac{\beta_1}{\beta_2}$. Τί συμβαίνει ἂν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}$;

91. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΩΝ $\alpha, \beta, \gamma \in R$

Ὁρισμός. Μία παράστασις $\varphi(x_1, x_2)$, περιέχουσα τὰς ρίζας x_1, x_2 τῆς ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, καλεῖται **συμμετρικὴ** ὡς πρὸς τὰς ρίζας x_1, χ_2, ἐὰν δὲν μεταβάλλεται δι' ἐναλλαγῆς τῶν x_1, x_2. Ἤτοι : $\varphi(x_1,x_2) = \varphi(x_2, x_1)$.

Οὕτως αἱ παραστάσεις :

$$x_1 + x_2,\ x_1 \cdot x_2,\ \chi_1^3 + x_2^3,\ \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2},\ \ (2x_1 + 3)(2x_2 + 3) + 5x_1x_2$$

εἶναι συμμετρικαὶ παραστάσεις τῶν ριζῶν x_1, x_2

Αἱ συμμετρικαὶ παραστάσεις τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δύνανται, ὡς θὰ ἴδωμεν, νὰ ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τῶν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

Ἄθροισμα, γινόμενον καὶ ἀπόλυτον διαφορᾶς τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\quad \alpha, \beta, \gamma \in R$.

Ἐκ τῶν ἐκφράσεων τῶν ριζῶν τῆς $f(x) = 0$.

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha},\quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

λαμβάνομεν : $x_1 + x_2 = \dfrac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \dfrac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = -\dfrac{\beta}{\alpha}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) = \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}$$

Οὕτως ἔχομεν :

Θεμελιώδεις σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$
$S_1 = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha},\ P_1 = x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$
$x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\alpha},\quad \lvert x_1 - x_2 \rvert = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{\lvert\alpha\rvert}$

Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα S_1 καὶ τὸ γινόμενον P_1 τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $f(x) = 0$ εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς πραγματικός.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι δύο ἀριθμοὶ πληροῦντες τὰς σχέσεις $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, οὗτοι θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.

Πράγματι ἐκ τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0. \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{\beta}{\alpha} x + \dfrac{\gamma}{\alpha} = 0$ καὶ τῶν

$x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha},\quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ λαμβάνομεν :

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0 \Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0$,

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x - x_1 = 0,\ x - x_2 = 0$, ἐξ οὗ : $x = x_1$, $x = x_2$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ἡ πρότασις :

Οἱ ἀριθμοὶ x_1, x_2, ἵνα εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισ. $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῦν τὰς σχέσεις $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ **καὶ** $x_1 x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Ἐφαρμογαὶ

1. Ἐκ τοῦ γινομένου καὶ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν, νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ, ἔχουσα ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.

Ἐὰν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις καὶ x_1, x_2 αἱ ρίζαι αὐτῆς, τότε $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Ἐπειδὴ ὅμως : $\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = S \text{ δοθεὶς ἀριθμὸς} \\ x_1 \cdot x_2 = P \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} -\dfrac{\beta}{\alpha} = S \\ \dfrac{\gamma}{\alpha} = P \end{array}$

Ἄρα ἔχομεν :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Ὥστε, διὰ τὸν σχηματισμὸν μιᾶς ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος S καὶ τοῦ γινομένου P τῶν ριζῶν αὐτῆς, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον $x^2 - Sx + P = 0$

Σημαντικὴ παρατήρησις. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2, τῶν ὁποίων δίδονται τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον, ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2 - Sx + P = 0$.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 9 καὶ γινόμενον 14.

Λύσις Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, τότε εἶναι $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 x_2 = 14$, ἡ δὲ ἐξίσωσις ἡ ἔχουσα αὐτοὺς ὡς ρίζας εἶναι $x^2 - 9x + 14 = 0$. Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως αὐτῆς λαμβάνομεν $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2}$ ἢ $x_1 = 7$, $x_2 = 2$

2. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ, ὅταν δίδωνται αἱ ρίζαι αὐτῆς.

Λύσις : Ἐὰν $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ εἶναι αἱ δοθεῖσαι ρίζαι τῆς ζητουμένης ἐξισώσεως, τότε ἔχομεν διαδοχικῶς

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \alpha + \beta \\ x_1 \cdot x_2 = \alpha\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = S \\ \alpha\beta = P \end{array}\right., \text{ ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου } x^2 - Sx + P = 0$$

λαμβάνομεν $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

Παράδειγμα : Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ, ἔχουσα ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\dfrac{1}{2}$, 4.

Λύσις : Ἔχομεν $x_1 + x_2 = \dfrac{1}{2} + 4 = \dfrac{9}{2}$, $x_1 x_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 4 = 2$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις εἶναι :

$$x^2 - \frac{9}{2} x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

92. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

1. Ὑπολογισμὸς τοῦ $S_2 = x_1^2 + x_2^2$ καὶ $S_3 = x_1^3 + x_2^3$

Ἔχομεν $S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$

Ὁμοίως $S_3 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3 \cdot \dfrac{\gamma}{\alpha} \cdot \left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right) =$
$= \dfrac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$

Οὕτω : $\boxed{x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}, \quad x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}}$

2. Ὑπολογισμὸς τοῦ $S_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu$, $\nu \in N$.

Ἐπειδὴ x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,

ἄρα : $\left.\begin{array}{l} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \end{array}\right|$ Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $x_1^{\nu-2}$ καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ $x_2^{\nu-2}$,

ὁπότε : $\left.\begin{array}{l} \alpha x_1^\nu + \beta x_1^{\nu-1} + \gamma x_1^{\nu-2} = 0 \\ \alpha x_2^\nu + \beta x_2^{\nu-1} + \gamma x_2^{\nu-2} = 0 \end{array}\right|$, προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη

λαμβάνομεν :

$\alpha(x_1^\nu + x_2^\nu) + \beta(x_1^{\nu-1} + x_2^{\nu-1}) + \gamma(x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu-2}) = 0$

ἢ $\alpha S_\nu + \beta S_{\nu-1} + \gamma S_{\nu-2} = 0$

Οὕτω : $\boxed{S_\nu = -\dfrac{\beta}{\alpha} S_{\nu-1} - \dfrac{\gamma}{\alpha} S_{\nu-2} = S_1 S_{\nu-1} - P_1 S_{\nu-2}}$

Διὰ τοῦ τύπου τούτου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ $S_\nu = x_1^\nu + x_2^\nu$, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ ἀθροίσματα $S_{\nu-1} = x_1^{\nu-1} + x_2^{\nu-1}$, $S_{\nu-2} = x_1^{\nu-2} + x_2^{\nu-2}$

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ἔχομεν : $S_4 = S_1 S_3 - P_1 S_2$. Ἐπειδὴ $S_1 = 3$, $P_1 = 2$, ἔχομεν

$S_2 = \dfrac{-(-3)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2}{1^2} = 9 - 4 = 5$ καὶ $S_3 = \dfrac{-(-3)^3 + 3 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot 2}{1^3} = 27 - 18 = 9.$

Ἄρα $S_4 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 27 - 10 = 17$

Παρατήρησις: Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος $\dfrac{1}{x_1^\nu} + \dfrac{1}{x_2^\nu}$, $\nu \in N$, ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Οὕτω : $\dfrac{1}{x_1^\nu} + \dfrac{1}{x_2^\nu} = \dfrac{x_1^\nu + x_2^\nu}{x_1^\nu\, x_2^\nu} = \dfrac{S_\nu}{P_1^\nu}$

3. Ὑπολογισμὸς οἱασδήποτε ρητῆς συμμετρικῆς παραστάσεως $\varphi(x_1, x_2)$ τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

Εἰς μίαν ρητὴν συμμετρικὴν παράστασιν τῶν ριζῶν $\varphi(x_1, x_2)$ εἶναι πάντοτε δυνατὴ ἡ ἔκφρασις αὐτῆς συναρτήσει τοῦ ἀθροίσματος $x_1 + x_2$ καὶ τοῦ γινομένου x_1x_2 καὶ συνεπῶς συναρτήσει τῶν συντελεστῶν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, διότι ὁ τυχὼν ὅρος αὐτῆς ἢ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς Ax_1x_2, $Bx_1^2x_2^2, \dots, \Sigma x_1^\nu x_2^\nu$, ὁπότε θὰ ἐκφράζεται διὰ τοῦ x_1x_2, ἢ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $Tx_1^\kappa x_2^\lambda$, ὁπότε μὲ τὸν ἀντίστοιχόν του $Tx_1^\lambda x_2^\kappa$ θὰ δίδουν διώνυμον τῆς μορφῆς $T_1x_1^\kappa x_2^\lambda + Tx_1^\lambda x_2^\kappa = Tx_1^\lambda x_2^\lambda (x_1^{\kappa-\lambda} + x_2^{\kappa-\lambda}) = TP^\lambda S_{\kappa-\lambda}$, $\kappa > \lambda$.

Ἐάν, τέλος, ὑπάρχῃ ὅρος τῆς μορφῆς Γx_1^ν, θὰ ὑπάρχῃ καὶ ὁ ἀντίστοιχός του Γx_2^ν, ὁπότε πάλιν θὰ ἔχωμεν $\Gamma x_1^\nu + \Gamma x_2^\nu = \Gamma (x_1^\nu + x_2^\nu) = \Gamma S_\nu$.

Ὥστε, **πᾶσα ρητὴ παράστασις συμμετρικὴ τῶν ριζῶν x_1, x_2 τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἐκφράζεται ρητῶς συναρτήσει τῶν $\alpha, \beta, \gamma \in R$.**

Παράδειγμα : Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως.
$\varphi(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^2 + \rho_2^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 + 3\rho_1^2\rho_2 + 3\rho_1 \rho_2^2$, ἐὰν ρ_1, ρ_2, εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \alpha x + \beta = 0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Λύσις : Ἡ $\varphi(\rho_1, \rho_2)$ εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ρ_1, ρ_2.

Ἔχομεν :
$$\begin{aligned}\varphi(\rho_1, \rho_2) &= \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 + 3\rho_1\rho_2 (\rho_1 + \rho_2) = \\ &= 2(\rho_1^2 + \rho_2^2) - 2\rho_1\rho_2 + 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2) = \\ &= 2(\rho_1 + \rho_2)^2 - 6\rho_1\rho_2 + 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2) = \\ &= 2(-\alpha)^2 - 6\beta + 3\beta(-\alpha) = 2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 6\beta\end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς α' :

291) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ **S** καὶ **P** τῶν ριζῶν ἑκάστης τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται :

1) $x^2 - 12x - 7 = 0$, $x^2 + x\sqrt{3} + \sqrt{5} = 0$
2) $-x^2 + 3x - 1 = 0$, $x^2\sqrt{2} + x\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = 0$
3) $(\alpha + \beta)x^2 - (\alpha^2 - \beta^2)x + \alpha^3 + \beta^3 = 0$, $\alpha\beta\gamma^2x^2 + (\alpha^2\beta - \alpha\beta^2)x - \alpha^2\beta^2\gamma = 0$

292) Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος **S** καὶ τοῦ γινομένου **P** δύο ἀριθμῶν νὰ εὑρεθοῦν οὗτοι εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

1) $S = 15$, $P = 14$, 2) $S = -19$, $P = 84$ 3) $S = 2\alpha$, $P = \alpha^2 - \beta^2$

293) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ, ἔχουσα ρίζας :

1) 7 καὶ −5, 2) −10 καὶ $-\frac{1}{2}$, 3) $5 + \sqrt{3}$ καὶ $5 - \sqrt{3}$
4) $-2 + 3i$ καὶ $-2 - 3i$, 5) $\alpha + \beta$ καὶ $\alpha - \beta$, 6) $\frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\alpha + \beta}{\beta}$

294) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἄλλην ρίζαν αὐτῆς.

295) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα τὸ τριώνυμον $x^2 - 5\lambda x + \lambda^2$ ἔχῃ ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{2}$.

296) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $x^2 - (m+1)x + m = 0$, νὰ εὑρεθῇ

1) διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ m ἔχει ρίζας ἀντιθέτους,
2) διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ m πληροῦται ἡ σχέσις $3x_1 + 2x_2 = 7$
3) διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ m ἔχει ρίζας ἀντιστρόφους.

297) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν α, β, γ τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ἵνα αἱ ρίζαι αὐτῆς x_1, x_2 πληροῦν τὴν σχέσιν $\kappa x_1 + \lambda x_2 = \mu$.

Ὁ μ ὰ ς β' :

298) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2 - 2x + 6 = 0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων :

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$, $x_1^{-3} + x_2^{-3}$

2) $(x_1 - x_2)^2$, $\frac{2}{x_1 + 3} + \frac{2}{x_2 + 3}$, $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$, $\frac{x_1}{x_2^2} + \frac{x^2}{x_1^2}$

299) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας 1) τὰ ἀντίστροφα τῶν ριζῶν, 2) τὰ ἀντίστροφα τῶν τετραγώνων καὶ 3) τοὺς κύβους τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2 - \alpha x + \beta = 0$

300) Ἐὰν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 3x + \kappa = 0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κ, ἵνα : $5\rho_1^3\rho_2 - 4\rho_1^2\rho_2 = 2\kappa + 3 + 4\rho_1\rho_2^2 - 5\rho_1\rho_2^3$.

301) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $\lambda \in R$ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $2\lambda x(x-1) - x(x-2) + 3\lambda = 0$ ἰσοῦται πρὸς 4 ;

302) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισ. $2x^2 + \mu x - 3\nu = 0$ πληροῦν τὰς σχέσεις $3\rho_1 + 3\rho_2 = 2\rho_1\rho_2$ καὶ $1 - \rho_1\rho_2 = 5(\rho_1 + \rho_2 - 2)$

303) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις :

$$(\alpha x_1 + \beta)^{-2} + (\alpha x_2 + \beta)^{-2}, \qquad (\alpha x_1 + \beta)^{-3} + (\alpha x_2 + \beta)^{-3}$$

304) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : $\left| \begin{array}{l} -3\rho_1\rho_2 x + 5(\rho_1 + \rho_2)\psi = 4(\rho_1 + \rho_2) \\ (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1\rho_2\psi = 7\rho_1\rho_2 \end{array} \right.$
ὅπου ρ_1, ρ_2 ρίζαι τῆς $x^2 - 3x + 1 = 0$

305) Νὰ κατασκευασθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι x_1, x_2 πληροῦν τὰς σχέσεις $x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) = -5$ καὶ $x_1x_2 - \mu(x_1 + x_2) = -1$ καὶ ἀκολούθως νὰ προσδιορισθῇ ὁ μ, ἵνα ἡ κατασκευασθεῖσα ἐξίσωσις ἔχῃ ρίζας ἴσας.

93. ΠΡΟΣΗΜΟΝ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΟΥ $\Phi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$.

Εἴδομεν ὅτι τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διακρίνουσαν $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ καὶ ὅτι αὗται δύνανται νὰ εἶναι πραγματικαὶ ἄνισοι ($\Delta > 0$), πραγματικαὶ ἴσαι ($\Delta = 0$) καὶ καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς ($\Delta < 0$).

Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἔχομεν ρίζας πραγματικάς, διότι τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς δὲν διεκρίναμεν εἰς θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς.

Τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ γινόμενον $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ τὸ ἄθροισμα $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ αὐτῶν.

Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

I. $\Delta > 0$. Αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ ἄνισοι.

α) $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$. Αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι, ὁπότε ἐὰν ἔχωμεν

1) $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἀμφότεραι εἶναι θετικαὶ $(x, x_2 \in R^+)$,

2) $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἀμφότεραι εἶναι ἀρνητικαὶ $(x_1, x_2 \in R^-)$

Ἡ περίπτωσις $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow \beta = 0$ μὲ $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ $\Delta > 0$ εἶναι ἀδύνατος.

β) $P = \frac{\gamma}{\alpha} < 0$. Αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι, ὁπότε ἐὰν ἔχωμεν

1) $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἀπολύτως μεγαλυτέρα εἶναι ἡ θετικὴ $(x_1 \in R^+, x_2 \in R^-$, ἢ $x_2 < 0 < x_1$ καὶ $|x_2| < |x_1|$),

2) $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἀπολύτως μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἀρνητική ($x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ ἢ $x_2 < 0 < x_1$ καὶ $|x_1| < |x_2|$),

3) $S = -\frac{\beta}{\alpha} = 0$ αἱ ρίζαι εἶναι ἀντίθετοι ($x_2 < 0 < x_1$ καὶ $|x_1| = |x_2|$)

γ) $P = \frac{\gamma}{\alpha} = 0$. Ἡ μία ρίζα εἶναι 0 καὶ ἡ ἄλλη διάφορος τοῦ μηδενὸς (ἀποκλείεται $x_1 = x_2 = 0$, διότι $\Delta > 0$), ὁπότε ἐὰν ἔχωμεν

1) $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἡ $x_2 = 0$ καὶ ἡ $x_1 > 0$ $\left(x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$,

2) $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἡ $x_1 = 0$ καὶ ἡ $x_2 < 0$ $\left(x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$,

II. $\Delta = 0$. Αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ ἴσαι $\left(x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ συνεπῶς

$P = \frac{\gamma}{\alpha} \geq 0$, ὁπότε ἐὰν ἔχωμεν

α) $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ $S = -\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἀμφότεραι εἶναι θετικαὶ ($x_1 = x_2 \in R^+$),

β) $P = \frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καί $S = -\frac{\beta}{\alpha} < 0$ ἀμφότεραι εἶναι ἀρνητικαὶ ($x_1 = x_2 \in R^-$)

γ) $P = \frac{\gamma}{\alpha} = 0$ ἀμφότεραι εἶναι 0 ($x_1 = x_2 = 0$).

III. $\Delta < 0$. Αἱ ρίζαι εἶναι καθαραὶ μιγαδικαὶ συζυγεῖς ($|x_1| = |x_2|$).

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

Πρόσημον ριζῶν τοῦ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$

Δ	P	S	Εἶδος ριζῶν καὶ πρόσημον αὐτῶν
+	+	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^+ \Leftrightarrow 0 < x_2 < x_1$
		−	$x_1 \in R^-$, $x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < x_1 < 0$
		0	περίπτωσις ἀδύνατος
	−	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < 0 < x_1$ καὶ $|x_2| < |x_1|$
		−	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^- \Leftrightarrow x_2 < 0 < x_1$ καὶ $|x_1| < |x_2|$
		0	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^- \wedge x_1 = -x_2 \Rightarrow |x_1| = |x_2|$
	0	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 = 0$ $\left(x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$
		−	$x_1 = 0$, $x_2 \in R^-$ $\left(x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$
		0	περίπτωσις ἀδύνατος, διότι $\Delta \neq 0$
0	+	+	$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R^+$
		−	$x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R^-$
	0	0	$x_1 = x_2 = 0$
−			$x_1 \in (C-R)$, $x_2 \in (C-R)$ καὶ $x_1 = \overline{x_2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$

Παραδείγματα: α) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων.

1) $x^2 - 2x - 5 = 0$, 2) $x^2 + 5x + 4 = 0$, 3) $3x^2 - x + 1 = 0$

Λύσεις: 1) Ἔχομεν $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-5) = 24 > 0$, $P = -\frac{5}{1} < 0$ καὶ $S = -\frac{-2}{1} = 2 > 0$. Ἄρα $x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ καὶ $|x_2| < |x_1|$.

2) Ἔχομεν $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 4 = 9 > 0$, $P = 4 > 0$ καὶ $S = -5 < 0$. Ἄρα $x_1 \in R^-$, $x_2 \in R^- \iff x_2 < x_1 < 0$.

3) Ἔχομεν $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$

Ἄρα $x_1 \in (C - R), x_2 \in (C - R)$ καὶ $x_1 = \overline{x_2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$.

β) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ρίζαι x_1, x_2 τῆς ἐξισ. $x^2 - 8x + \lambda = 0$ εἶναι ἑτερόσημοι μὲ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν θετικήν;

Λύσις. Πρέπει νὰ πληροῦνται αἱ συνθῆκαι $P < 0$ καὶ $S > 0$ (Δὲν λαμβάνομεν $\Delta > 0$, διότι ὅταν $P < 0 \Rightarrow \Delta > 0$)

Ἄρα $P = \lambda < 0$ καὶ $S = -(-8) = 8 > 0$ Ὥστε:

Διὰ $\lambda < 0$ ἔχομεν $x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ καὶ $|x_2| < |x_1|$

γ) Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2 - 6x + 5(2\mu - 1) = 0$, $\mu \in R$

Λύσις. Ἐξετάζομεν τὰς ποσότητας Δ, P, S:

$$\Delta = 36 - 60(2\mu - 1) = 12(3 - 10\mu + 5) = 24(4 - 5\mu)$$

Τὸ σημεῖον τῆς Δ εἶναι:

μ	$-\infty$		4/5		$+\infty$
Δ		+	0	−	

$P = \frac{5(2\mu - 1)}{3} = \frac{5}{3}(2\mu - 1)$

Τὸ σημεῖον τοῦ P εἶναι:

μ	$-\infty$		1/2		$+\infty$
P		−	0	+	

$S = -\frac{-6}{3} = 2 > 0$ Ἀκολούθως συντάσσομεν τὸν πίνακα:

μ	Δ	P	S	Εἶδος ριζῶν τῆς $3x^2 - 6x + 5(2\mu - 1) = 0$
$-\infty$	+	−	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^-$ καὶ $\|x_2\| < \|x_1\|$
$\frac{1}{2}$	—	0	—	$x_1 \in R^+$, $x_2 = 0$, $x_1 = 2$
	+	+	+	$x_1 \in R^+$, $x_2 \in R^+$
$\frac{4}{5}$	0	—	—	$x_1 = x_2 = +1$
$+\infty$	—	+	+	$x_1 \in (C - R)$, $x_2 \in (C - R)$ καὶ $x_1 = \overline{x_2} \Rightarrow \|x_1\| = \|x_2\|$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

306) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

1) $x^2 - 6x + 9 = 0$, $\quad 7x^2 + 14x - 1 = 0$

2) $4x^2 - 4x + 1 = 0$, $\quad -3x^2 - 9x + 2 = 0$

307) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ $\lambda \in R$ διὰ τὰς ὁποίας αἱ ρίζαι τῆς ἐξισ. $3x^2 - 2x + 3(\lambda - 7) = 0$ εἶναι : 1) ἀμφότεραι θετικαί, 2) ἑτερόσημοι μὲ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν θετικήν, 3) μίαν διπλῆν θετικήν, 4) καθαραὶ μιγαδικαὶ κατὰ μέτρον ἴσαι.

308) Νὰ διερευνηθῇ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ ἑκάστη τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων καὶ νὰ γίνῃ πινακογράφησις τῶν συμπερασμάτων τῆς διερευνήσεως.

1) $x^2 - 4x - 3(2 - 5\lambda) = 0$, 2) $-2x^2 + 5x - 7(1 - \lambda) = 0$

309) Νὰ εὕρετε τὸ εἶδος καὶ τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $2x(x - \alpha) = \alpha^2$, ὅταν α πραγματικὸς καὶ $\alpha \neq 0$

94. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$ καὶ $\alpha \neq 0$ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ x ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε ἔχομεν : $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Ἐξ ἄλλου τὸ τριώνυμον γράφεται :

$$f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \equiv \alpha[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \equiv$$
$$\equiv \alpha[x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] \equiv \alpha[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] \equiv$$
$$\equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

Ὥστε, **Διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ τριώνυμον $f(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἰς γινόμενον α΄ | βαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν τὰς ρίζας αὐτοῦ καὶ κατόπιν σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$.**

Παράδειγμα: Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ τριώνυμα 1) $x^2 - 7x + 10$, 2) $3x^2 + x - 2$, 3) $x^2 - 4x + 5$

Λύσεις: 1) Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $x_1 = 5$, $x_2 = 2$

Ἄρα ἔχομεν : $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$

2) Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -1$

Ἄρα ἔχομεν : $3x^2 + x - 2 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x + 1) = (3x - 2)(x + 1)$

3) Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $x_1 = 2 + i$, $x_2 = 2 - i$. Ἄρα ἔχομεν : $x^2 - 4x + 5 = (x - (2 + i))(x - (2 - i)) = (x - 2 - i)(x - 2 + i)$

Ἤτοι ἡ ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου $x^2 - 4x + 5$ μὲ ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς δὲν εἶναι δυνατὴ μὲν (βλ. 5η περίπ. ἀναλύσεως) εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν, εἶναι ὅμως δυνατὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν.

95. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΗΣ Β΄/ΘΜΙΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΕΚ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΑΥΤΗΣ.

Ἐὰν δοθοῦν αἱ ρίζαι x_1, x_2 τῆς β΄/θμίου ἐξισώσεως, δυνάμεθα χρησιμοποιοῦντες τὸν μετασχηματισμὸν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

Παράδειγμα: Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β΄ βαθμοῦ, ἔχουσα ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς α) 3, −2, β) $2 \pm \sqrt{3}$, γ) $-3 \pm 2i$

Λύσις : α) ἔχομεν $\alpha(x-3)(x+2)=\alpha(x^2-x-6)=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$

β) Ἔχομεν $\alpha[x-(2+\sqrt{3})][x-(2-\sqrt{3})]=\alpha[(x-2)^2-3]=$ $=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-3=0 \Leftrightarrow x^2-4x+1=0$

γ) Ἔχομεν $\alpha[x-(-3+2i)][x-(-3-2i)]=\alpha[(x+3)^2-(2i)^2]=$ $=0 \Leftrightarrow (x+3)^2+4=0 \Leftrightarrow x^2+6x+13=0$

Σημείωσις. Ὁ παράγων α τοῦ γινομένου δύναται νὰ παραλείπεται ἢ καὶ νὰ εἶναι οἱοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

310) Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενον α'/βαθμίων παραγόντων τοῦ x τὰ ἀκόλουθα τριώνυμα β' βαθμοῦ :

1) x^2+7x-8, $\quad x^2-11x-26$

2) $2x^2+11x+5$ $\quad x^2+x\psi-72\psi^2$, $\quad \nu^2x^2-6\nu x-91$

3) $x^2-2\alpha x+(\alpha^2-\beta^2)$ $\quad x^2-2\mu x+\mu^2-\nu$, $\quad x^2-2\alpha x-3\alpha^2-4\beta(\beta-2\alpha)$.

311) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ, ἔχουσα ρίζας :

1) $-\frac{3}{4}$ καὶ $-\frac{1}{2}$, 2) $5\pm2\sqrt{3}$, 3) $\frac{1}{2}\pm\frac{3i}{2}$

4) $\alpha\pm\sqrt{2\beta}$, 5) $\lambda\pm3\mu i$, 6) $\alpha^2+\beta^2$ καὶ $\alpha-\beta$

312) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

1) $\dfrac{x^2-15x}{x^2-14x-15}$, $\dfrac{3x^2+19x-14}{6x^2-x-2}$

2) $\dfrac{3x^2-7x\psi+2\psi^2}{6x^2-5x\psi+\psi^2}$, $\dfrac{x^2-x(2\alpha+3\beta+1)+(2\alpha+3\beta)}{2x^2-x(4\alpha+6\beta+1)+(2\alpha+3\beta)}$

96. ΑΛΛΑΙ ΕΙΔΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΤΟΥ $f(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἐν $\mathbf{R}$

Ἐὰν x_1, x_2 αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε $x_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, $x_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Τὸ δὲ τριώνυμον γράφεται :

$$f(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma\equiv\alpha(x-x_1)(x-x_2)\equiv\alpha\left(x-\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x-\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\equiv\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$$

Διακρίνομεν τώρα τὰς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν $\Delta>0$, τότε $f(x)\equiv\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$.

ἤτοι τὸ τριώνυμον $f(x)$ $\forall x\in R$ μετασχηματίζεται εἰς διαφορὰν δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων ἐπὶ τὸ $\alpha\neq0$.

2) Ἐὰν $\Delta=0$, τότε $f(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma\equiv\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$·

ἤτοι τὸ $f(x)$ $\forall x\in R$ μετασχηματίζεται εἰς τέλειον τετράγωνον πραγματικῆς παραστάσεως ἐπὶ τὸ $\alpha\neq0$.

3) Ἐὰν $\Delta<0$, τότε $f(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma\equiv\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]\equiv$

$$\equiv \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \right)^2 \right].$$

ἤτοι τὸ $f(x) \forall x \in R$ μετασχηματίζεται εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων ἐπὶ τὸ $\alpha \neq 0$.

Σημείωσις. Αἱ ἀνωτέρω μορφαὶ εἶναι λίαν χρήσιμοι διὰ τὰ ἑπόμενα κεφάλαια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

313) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ $\lambda \in R$ διὰ τὰς ὁποίας τὰ ἀκόλουθα τριώνυμα εἶναι α) τέλεια τετράγωνα, β) ἴσα πρὸς τὴν διαφορὰν δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων, γ) ἴσα πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων :

1) $5(2\lambda - 1)x^2 + x - 1$, 2) $-7x^2 + 5x - 3(2 - 3\lambda)$

314) Νὰ εὑρεθῇ ποῖα ἐκ τῶν ἀκολούθων τριωνύμων μετασχηματίζονται εἰς διαφορὰν καὶ ποῖα εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων :

1) $4x^2 + 20\alpha x + 21\alpha^2$, 2) $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta$

3) $\alpha^2 x^2 - 2\alpha^3 x + \alpha^4 + 1$, 4) $9\alpha^4 x^2 - 8\alpha^2\beta(3x - 2\beta) + 16\beta^2$

97. ΠΡΟΣΗΜΟΝ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ ΤΟΥ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq 0$ ΔΙΑ ΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $(x, \varphi(x) \equiv x^2 - 5x + 6) \in R^2$. Αὕτη εἶναι τελείως ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂς εὕρωμεν μερικὰς τιμὰς αὐτῆς π.χ. τούς : $\varphi(-4)$, $\varphi(2)$, $\varphi\left(\frac{5}{2}\right)$, $\varphi(3)$, $\varphi(10)$. Οὕτω ἔχομεν :

$\varphi: \; x = -4 \longrightarrow \varphi(-4) = 42 > 0$ $\qquad \varphi: \; x = \frac{5}{2} \longrightarrow \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$

$\varphi: \; x = 2 \longrightarrow \varphi(2) = 0$ $\qquad \varphi: \; x = 3 \longrightarrow \varphi(3) = 0$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἄλλοτε εἶναι θετικαί, ἄλλοτε ἀρνητικαὶ καὶ μόνον διὰ $x_1 = 2$ καὶ $x_2 = 3$ (αἱ ρίζαι τῆς $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$) εἶναι ἴσαι πρὸς 0.

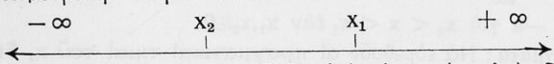
Πολλάκις εἰς τὰ ἑπόμενα μαθήματα θὰ εὑρεθῶμεν εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ γνωρίζωμεν τὸ πρόσημον τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$, διὰ τυχοῦσαν τιμὴν $x = \xi \in R$, ἄνευ εὑρέσεως τῆς τιμῆς $\varphi(\xi) \in R$.

Εἴδομεν ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μετασχηματίζεται εἰς τὴν μορφὴν $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} \right]$. Τὸ πρόσημον τῆς τυχούσης τιμῆς αὐτοῦ $\varphi(\xi)$, διὰ $x = \xi$ προφανῶς ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς Δ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ α.

Οὕτω διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν $\Delta > 0$, τότε $x_1 \neq x_2 \in R$ καὶ ἔστω $x_2 < x_1$

Αἱ ρίζαι x_1, x_2 διαμερίζουν τὸ σύνολον R εἰς τρία διαστήματα ὡς φαίνεται εἰς τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν.



Ἂς θεωρήσωμεν μίαν τιμὴν $x = \xi \in R$. Διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Ἐὰν $\xi < x_2 < x_1 \Leftrightarrow \xi - x_1 < 0$ καὶ $\xi - x_2 < 0 \Rightarrow (\xi - x_1)(\xi - x_2) > 0$ Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha(x - x_1)(x - x_2)$ λαμβάνομεν $\varphi(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2) = \alpha \cdot$ (θετικὸς ἀριθ.)

Ἄρα ἡ τιμὴ $\varphi(\xi)$ ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α. Ἤτοι $\alpha . \varphi(\xi) > 0$

β) Ἐὰν $x_2 < \xi < x_1 \Leftrightarrow \xi - x_1 < 0$ καὶ $\xi - x_2 > 0 \Rightarrow (\xi - x_1)(\xi - x_2) < 0$ καὶ συνεπῶς

$\varphi(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2) = \alpha \cdot$ (ἀρνητικὸς ἀριθμός).

Ἄρα ἡ τιμὴ $\varphi(\xi)$ ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ $-\alpha$. Ἤτοι $\alpha\varphi(\xi) < 0$

γ) Ἐὰν $x_2 < x_1 < \xi \Leftrightarrow \xi - x_1 > 0$ καὶ $\xi - x_2 > 0 \Rightarrow (\xi - x_1)(\xi - x_2) > 0$ καὶ $\varphi(\xi) = \alpha(\xi - x_1)(\xi - x_2) = \alpha \cdot$ (θετικὸς ἀριθμός)

Ἄρα ἡ τιμὴ $\varphi(\xi)$ ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α. Ἤτοι $\alpha\varphi(\xi) > 0$

2) Ἐὰν $\Delta = 0$, τότε $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha} \in R$ καὶ τὸ τριώνυμον μετασχηματίζεται εἰς $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha \cdot \left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$, ὁπότε ἐὰν $x = \xi \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ λαμβάνομεν $\varphi(\xi) = \alpha \cdot \left(\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \alpha \cdot$ (θετικὸς ἀρ.)

Ἄρα ἡ τιμὴ $\varphi(\xi)$ διὰ πᾶν $\xi \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ἔχει τό πρόσημον τοῦ α.

3) Ἐὰν $\Delta < 0$, τότε $x_1\, x_2 \in (C - R)$ καὶ τὸ τριώνυμον μετασχηματίζεται εἰς $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha\left[\left(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right]$, ὁπότε λαμβάνομεν $\varphi(\xi) =$
$= \alpha\left[\left(\xi + \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha}\right)^2\right] = \alpha \cdot$ (θετικὸς ἀριθμός).

Ἄρα ἡ τιμὴ $\varphi(\xi)$ διὰ πᾶν $\xi \in R$ ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α.

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται ὡς ἀκολούθως :

$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Πρόσημον τῆς Δ	Ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$	Πρόσημον τοῦ $\varphi(x)$ (διὰ $x = \xi \in R$)	
$\Delta > 0$	$x_1, x_2 \in R$, $x_2 < x_1$	$x < x_2 < x_1$ ἢ $x_2 < x_1 < x$	πρόσημον τοῦ α, $\alpha\varphi(\xi) > 0$
		$x_2 < x < x_1$	πρόσημον τοῦ $-\alpha$, $\alpha\varphi(\xi) < 0$
$\Delta = 0$	$x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha} \in R$	$\forall x \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha}$	πρόσημον τοῦ α, $\alpha\varphi(\xi) > 0$
$\Delta < 0$	$x_1, x_2 \in (C - R)$	$\forall x \in R$	πρόσημον τοῦ α, $\alpha\varphi(\xi) > 0$

Ὥστε: **Τὸ τριώνυμον φ(x) λαμβάνει τιμὴν ὁμόσημον τοῦ α.**

α) διὰ $x < x_2 < x_1$ ἢ $x_2 < x_1 < x$, ἐὰν $x_1, x_2 \in R$, β) διὰ $\forall x \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha} \in R$ ἐὰν $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ καὶ γ) διὰ $\forall x \in R$, ἐὰν $x_1, x_2 \in (C - R)$, λαμβάνει δὲ τιμὴν ὁμόσημον τοῦ $-\alpha$ γιὰ $x_2 < x < x_1$ ἐὰν $x_1, x_2 \in R$.

Παραδείγματα: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὰ ἀκόλουθα τριώνυμα ἔχουν τιμὰς θετικὰς ἢ ἀρνητικάς :

1) $x^2 - 6x + 8$, 2) $x^2 - 6x + 9$ 3) $3x^2 - x + 1$

Λύσις :

1) Ἐπειδὴ $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$ καὶ $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, ἕπεται ὁ ἀκόλουθος πίναξ

Τιμαὶ τοῦ x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
πρόσημον τοῦ τριωνύμου		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Ἐπειδὴ $\Delta = 36 - 36 = 0$ καὶ $x_1 = x_2 = 3$, ἕπεται ὅτι τὸ τριώνυμον $\forall x \neq 3$ καθίσταται θετικόν. Οὐδέποτε γίνεται ἀρνητικόν.

3) Ἐπειδὴ $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$, ἕπεται ὅτι τὸ τριώνυμον $\forall x \in R$ καθίσταται θετικόν. Οὐδέποτε γίνεται ἀρνητικόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

315) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $x \in R$ τὰ ἀκόλουθα τριώνυμα γίνονται θετικὰ ἢ ἀρνητικά ;

1) $3x^2 - x - 4$, 2) $4x^2 - 20x + 25$, 3) $x^2 + x + 1$

4) $-x^2 + x - 1$ 5) $-2x^2 + 16x - 40$, 6) $-3x^2 + 2x - 5$

316) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv 5x^2 + \mu x + 2\mu^2$ $(\mu \in R)$ εἶναι θετικὸν $\forall x \in R$.

317) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καθίσταται ὁμόσημον τοῦ α 1) $\forall x \in R$, τότε ἔχει ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς, 2) $\forall x \neq -\frac{\beta}{2\alpha} \in R$, τότε $x_1 = x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} \in R$.

318) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀνίσους, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς $\xi \in R$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha\varphi(\xi) < 0$

319) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 2\lambda x + (\lambda - 1) = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς $\forall \lambda \in R$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

98. ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ (περιληπτική ὑπόμνησις)

Ὁρισμοί: *Καλεῖται ἀνίσωσις ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν* x *πᾶσα σχέσις τῆς μορφῆς* $\varphi(x) > f(x)$ *ἤ* $f(x) < \varphi(x)$, *ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς δι' εἰδικὰς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου* x, *ὅπου* $\varphi(x)$, $f(x)$ *πραγματικαὶ συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς* x, *ἔχουσαι τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ.* Ἐὰν εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ συνόλου ἀναφορᾶς αὐτῆς, τότε καλεῖται **μόνιμος ἀνίσωσις.**

Ἐπίλυσις ἀνισώσεως, ἐν συνόλῳ S, καλεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ ἀγνώστου x ἐν τῷ S, αἱ ὁποῖαι τὴν καθιστοῦν ἀληθῆ (ἐπαληθεύουν).

Αἱ εὑρισκόμεναι διὰ τῆς ἐπιλύσεως τιμαὶ τοῦ x καλοῦνται **λύσεις** τῆς ἀνισώσεως.

Δύο ἢ περισσότεραι ἀνισώσεις, ἐν συνόλῳ S, καλοῦνται **ἰσοδύναμοι,** ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ σύνολον λύσεων.

Ἰδιότητες: 1) Ἡ ἀνίσωσις $\varphi(x) > f(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνίσωσιν $\varphi(x) + \tau(x) > f(x) + \tau(x)$, ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτησις $\tau(x)$ εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ σύνολον ἀναφορᾶς S.

2) Ἡ ἀνίσωσις $\varphi(x) > f(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\varphi(x) - f(x) > 0$.

3) Ἡ ἀνίσωσις $\varphi(x) > 0$, ἐν S, εἶναι ἰσοδύναμος τῆς ἀνισώσεως $\varphi(x) \cdot \sigma(x) > 0$, ἂν ἡ ἀνίσωσις $\sigma(x) > 0$, ἐν S, εἶναι μόνιμος.

4) Ἐὰν αἱ ἀνισώσεις, ἐν S, $\varphi(x) > 0$ καὶ $f(x) > 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε καὶ ἡ $\varphi(x) + f(x) > 0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς αὐτάς.

Ἐκ τῆς περιληπτικῆς ταύτης ὑπομνήσεως, ἄνευ ἀποδείξεως, τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισώσεων συμπεραίνομεν, ὅτι κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἀνισώσεων δέον νὰ λαμβάνωμεν σοβαρῶς ὑπ' ὄψιν αὐτὰς ὡς ἐπίσης καὶ τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἀνισοτήτων, διὰ νὰ μὴν ὑποπίπτωμεν εἰς σφάλματα.

99. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΙΣ Β'/ΘΜΙΟΥ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ

Ὁρισμός. *Καλεῖται ἀνίσωσις β' βαθμοῦ, ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν* x, *πᾶσα ἀνίσωσις τῆς μορφῆς* $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ *ἢ* < 0 *μὲ* $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$. (οἱ α, β, γ δύνανται νὰ εἶναι καὶ πραγματικαὶ παραστάσεις μὴ περιέχουσαι τὸν ἄγνωστον x).

Τὸ α' μέλος τῆς ἀνισώσεως εἶναι τὸ τριώνυμον β' βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον εἴδομεν ὅτι εἶναι τελείως ὡρισμένον εἰς τὸ σύνολον R. Οὕτω διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἀνισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ἢ < 0 ἐν τῷ συνόλῳ R, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν τὰ συμπεράσματα τῆς ἐξετάσεως τοῦ προσήμου τῆς ἀριθμ. τιμῆς τοῦ τριωνύμου φ(x) διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ ἢ < 0, $(\alpha \neq 0)$.

Ὡς γνωστόν, τὸ πρόσημον τῆς ἀριθμ. τιμῆς τοῦ φ(x) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς διακρινούσης Δ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha \neq 0$. Οὕτω δυνάμεθα εὐκόλως νὰ δικαιολογήσωμεν τὴν συμπλήρωσιν τοῦ κάτωθι πίνακος.

Δ	α	Σύνολον λύσεων τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$	Σύνολον λύσεων τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$
+	+	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid -\infty < x < x_2 \wedge x_1 < x < +\infty\}$	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid x_2 < x < x_1\}$
+	−	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid x_2 < x < x_1\}$	$x_1, x_2 \in R,\ x_2 < x_1$ $\{x \in R \mid -\infty < x < x_2 \wedge x_1 < x < +\infty\}$
0	+	$\left\{x \in R \mid x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$	$\{\ \} = \varnothing$
0	−	$\{\ \} = \varnothing$	$\left\{x \in R \mid x \neq -\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$
−	+	$\{x \mid x \in R\}$	$\{\ \} = \varnothing$
−	−	$\{\ \} = \varnothing$	$\{x \mid x \in R\}$

Σημείωσις. Τὰ σύμβολα $-\infty$ καὶ $+\infty$ δὲν ἀντιπροσωπεύουν ὡρισμένους πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Παραδείγματα : Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R, αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις :

1) $3x^2 - x - 2 > 0$, 2) $-3x^2 + x + 4 > 0$, 3) $x^2 + 6x + 9 < 0$, 4) $x^2 + x + 1 > 0$

Ἐπίλυσις: 1) $\alpha = 3 > 0$, $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Ἡ ἀνίσωσις πληροῦται διὰ $x > 1$ καὶ διὰ $x < -\frac{2}{3}$

Ἄρα τὸ σύνολον λύσεων εἶναι : $\left\{x \in R \mid -\infty < x < -\frac{2}{3} \wedge 1 < x < +\infty\right\}$

2) $\alpha = -3$, $\Delta = 1 - 4(-3)4 = 49 > 0$, $x_1 = \frac{4}{3}$, $x_2 = -1$

Ἡ ἀνίσωσις ἀληθεύει διὰ $-1 < x < \frac{4}{3}$.

Σύνολον λύσεων : $\{ x \in R \mid -1 < x < \frac{4}{3} \}$

3) $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 36 - 36 = 0$, $x_1 = x_2 = -3$

Ἡ ἀνίσωσις δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον R.

Σύνολον λύσεων : $\{ x \in R \mid x^2 + 6x + 9 < 0 \} = \varnothing$

4) $\alpha = 1 > 0$, $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, $x_1 x_2 \in (C - R)$

Ἡ ἀνίσωσις εἶναι ἀληθὴς διὰ πάσας τὰς πραγμ. τιμὰς τοῦ x. Εἶναι μία μόνιμος ἀνίσωσις. Σύνολον λύσεων : $\{ x \mid x \in R \}$.

100. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ

Μία ἀνίσωσις βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου ὡς πρὸς x διὰ νὰ ἐπιλυθῇ, δέον νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \ldots \varphi_\nu(x) > 0$ ἢ < 0, ὅπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots \varphi_\nu(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ, ἔχοντα τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ.

Οἱ παράγοντες β' βαθμοῦ, ἐὰν ἔχουν ρίζας πραγματικάς, δύνανται νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἐὰν ἔχουν ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς, δύνανται νὰ παραλειφθοῦν ὡς μονίμως θετικοί, (διότι πάντοτε δυνάμεθα νὰ ὑποθέτωμεν τὸν α θετικόν). Συνεπῶς ἡ ἀνωτέρω ἀνίσωσις πάντοτε εἶναι δυνατὸν να λάβῃ τὴν μορφὴν $(x - \rho_1)(x - \rho_2) \ldots (x - \rho_\mu) > 0$ ἢ < 0 $(\mu \in N)$. Ἡ ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως αὐτῆς εἶναι γνωστὴ ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν R, ἡ ἀνίσωσις :

$$f(x) \equiv (x-3)(x^2+1)(x^2-x+2)(-2x^2+7x-3)(-x^2+5x) < 0$$

Ἐπίλυσις : Ἐξετάζομεν τοὺς δευτεροβαθμίους παράγοντας.

Οὕτως ἔχομεν : $x^2 + 1$, $\Delta = -4 < 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in R$

$$x^2 - x + 2,\ \Delta = -7 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 2 > 0 \ \forall x \in R$$

$$-2x^2 + 7x - 3,\ \Delta = 25 > 0 \Rightarrow -2x^2 + 7x - 3 = -2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$-x^2 + 5x,\ \Delta = 25 > 0 \Rightarrow -x^2 + 5x = -x(x-5)$$

Ἄρα ἡ ἀνίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀνίσωσιν :

$(x-3)(-2)(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(-x)(x-5) < 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $(x-3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-5)x < 0$. Ὁ παράγων $(x-3)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικὸς $\forall x \in R$, ἑπομένως διὰ $x \neq 3$, ἡ ἀνίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-5)x < 0.$$

Αἱ ρίζαι τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς εἶναι $0, \frac{1}{2}, 5$, Οὕτως ἔχομεν:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		3		5		$+\infty$
Πρόσημον τοῦ $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)\,x$		$-$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	
Πρόσημον τοῦ $(x-3)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-5)\,x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Ἄρα τὸ σύνολον λύσεων τῆς $f(x)<0$ εἶναι: $\{x\in R \mid -\infty<x<0 \wedge \frac{1}{2}<x<5 \wedge x\neq 3\}$

101. ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Μία ἀνίσωσις καλεῖται κλασματική, ἐὰν δύναται νὰ λάβη τὴν μορφήν, $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} > 0$ ἢ < 0. Ὅπου $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ πραγματικαὶ ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ x, ἔχουσαι πεδίον ὁρισμοῦ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τοῦ ρητοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημον τοῦ γινομένου αὐτῶν, ἕπονται αἱ ἀκόλουθοι ἰσοδυναμίαι :

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}>0(\text{ἐν } S) \Leftrightarrow \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)>0\ (\text{ἐν } S)$$

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}<0\ (\text{ἐν } S) \Leftrightarrow \varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)<0\ (\text{ἐν } S)$$

S τὸ σύνολον ὁρισμοῦ τοῦ $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$

Ἄρα ἡ ἐπίλυσις τῆς ἀνισώσεως $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} >0$ ἢ <0 ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἀνισώσεως τῆς μορφῆς $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x) > 0$ ἢ < 0

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐν R, ἡ ἀνίσωσις :

$$\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-1}<\frac{5}{x+3}$$

Ἐπίλυσις: Ἔχομεν $\frac{3}{x-2}+\frac{3}{x-1}-\frac{5}{x+3}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+24x-37}{(x-2)(x-1)(x+3)}<0$

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι $S=R-\{2,1,-3\}$

Ἐπιλύομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $(x^2+24x-37)(x-2)(x-1)(x+3)<0$, ὡς προηγουμένως, ὁπότε λαμβάνομεν τὸ σύνολον λύσεων :

$$\{x\in S \mid -\infty<x<-12-\sqrt{181} \wedge -3<x<1 \wedge -12+\sqrt{181}<x<2\}$$

102. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ.

Ἐὰν δύο ἢ περισσότεραι ἀνισώσεις, ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εἶναι ἀληθεῖς διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἀγνώστου x, ἐν συνόλῳ S, τότε λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν **σύστημα ἀνισώσεων**.

Ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος ἀνισώσεων καλοῦμεν τὴν εὕρεσιν τῶν κοινῶν λύσεων τῶν ἀνωσώσεων αὐτοῦ. Τὸ σύνολον τῶν κοινῶν τούτων λύσων εἶναι ἡ τομὴ τῶν συνόλων λύσεων τῶν ἀνισώσεων, εὑρίσκεται δὲ διὰ τοῦ γνωστοῦ πίνακος, ὅστις καθορίζει τὰ κοινὰ διαστήματα λύσεων τῶν ἀνισώσεων.

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐν R, τὸ σύστημα τῶν ἀνισώσεων :

1) $3x>6$, 2) $x^2-6x+5<0$, 3) $x^3-9x^2+14x \leqslant 0$

Ἐπίλυσις: Τὸ σύνολον λύσεων τῆς πρώτης εἶναι : $\Sigma_1 = \{ x \in R \mid x > 2 \}$ Τὸ σύνολον λύσεων τῆς δευτέρας εἶναι: $\Sigma_2 = \{ x \in R \mid 1 < x < 5 \}$. Ἡ τρίτη γράφεται $x(x-7)(x-2) \leqslant 0$, ἥτις εἶναι ἀληθὴς διὰ $-\infty < x < 0$ καὶ $2 < x < 7$.

x	$-\infty$		0		2		7		$+\infty$
$x^3 - 9x^2 + 14x$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Τὸ σύνολον λύσεων τῆς τρίτης : $\Sigma_3 = \{ x \in R \mid -\infty < x \leqslant 0 \wedge 2 \leqslant x \leqslant 7 \}$

Τὸ σύνολον λύσεων τοῦ συστήματος λαμβάνεται ἐκ τοῦ ἀκολούθου πίνακος.

x	$3x-6$	x^2-6x+5	x^3-9x^2+14x	Λύσεις συστήματος
$-\infty$				
	$-$	$+$	$-$	
0	$-$	$+$	0	
	$-$	$+$	$+$	
1	$-$	0	$+$	
	$-$	$-$	$+$	
2	0	$-$	0	$2 < x < 5$
	$+$	$-$	$-$	
5	$+$	0	$-$	
	$+$	$+$	$-$	
7	$+$	$+$	0	
	$+$	$+$	$+$	
$+\infty$				

Σύνολον λύσεων τοῦ συστήματος εἶναι :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \{ x \in R \mid 2 < x < 5 \}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

320) Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐν R, αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις:

1) $x^2 - 2x + 3 > 0$, $\quad 3x^2 - 13x + 10 < 0$, $\quad -x^2 + 2x + 3 > 0$
2) $-6x^2 + 11x - 4 < 0$, $\quad 16x^2 - 8x + 1 > 0$, $\quad x^2 + \sqrt{3}\,x - 1 < 0$
3) $(x^2 - 9x + 14)(x-4) < 0$, $\quad x^3 + 1 > x^2 + x$, $\quad x^4 - 1 > x^3 - x$
4) $(x^2 - 2x + 1)(3x^2 + 1)(2x - 1) > 0$, $\quad (2x^2 - 5x - 7)(x^2 - 1)(3x^2 + 7) < 0$
5) $\dfrac{x^2 - 4}{x + 1} > 0$, $\quad \dfrac{x^2}{x+1} > 2$
6) $\dfrac{2}{3x+1} > \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$
7) $\dfrac{x^2(x+2)(x-3)^3}{(x+4)^2(x-5)^5} \leqslant 0$, $\quad \dfrac{3x^3 - 7x^2 + 4x}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} \geqslant 0$

321) Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐν συνόλῳ R, τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 < 0 \\ -x^2 + 2x > 0, \end{cases}$ $\qquad$ 2) $\left\{ -1 < \dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)} < 1 \right.$

3) $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ -3x^2 + 16x - 5 < 0 \\ -x^2 + 2x + 48 > 0 \end{cases}$ 4) $x^3 - 5x^2 + 6x \leqslant 0$, $-x^2 + 2x + 3 > 0$, $2x^2 - 5x - 7 > 0$

322) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $\lambda \in R$ ἡ ἐξίσ. $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 3)x - \lambda + 3 = 0$ ἔχει ρίζας α) πραγματικὰς καὶ β) καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς.

323) Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ μ τὸ τριώνυμον $\varphi(x) = (\mu - 2)x^2 - 2(\mu + 3)x + 2\mu - 18$ ἔχει ρίζας α) θετικὰς καὶ β) ἀρνητικάς.

103. ΘΕΣΕΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΠΡΑΓΜ. ΡΙΖΑΣ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι (πραγματικαί), ὅπου $x_2 \leqslant x_1$, καὶ δοθῇ πραγματικὸς ἀριθμὸς ξ, τότε οἱ τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x_1, x_2, ξ δύνανται νὰ παρουσιάσουν τὰς ἑξῆς σχέσεις διατάξεως :

$$\xi < x_2 \leqslant x_1 \qquad x_2 \leqslant x_1 < \xi, \qquad x_2 < \xi < x_1,$$

καλουμένας **θέσεις τοῦ ξ ὡς πρὸς τὰς ρίζας.**

Ἑκάστη τῶν θέσεων τούτων τοῦ ξ χαρακτηρίζεται ἀπὸ ὡρισμένας συνθήκας μεταξὺ τοῦ ξ καὶ τῶν συντελεστῶν α, β, γ.

1) Ἐὰν $\xi < x_2 \leqslant x_1$, τότε ὡς γνωστὸν $\alpha\varphi(\xi) > 0$ (§ 97)

Ἐπίσης ἔχομεν $\xi < x_2 \leqslant x_1 \Longleftrightarrow \xi < x_2$ καὶ $\xi < x_1 \Rightarrow 2\xi < x_1 + x_2$ ἢ $\xi < \frac{x_1 + x_2}{2}$ ἢ $\xi < -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἢ $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$. Ἄρα αἱ συνθῆκαι εἶναι $\Delta \geqslant 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$ καὶ $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω $\Delta \geqslant 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$ καὶ $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$. Ἐκ τῆς $\Delta \geqslant 0$ ἕπεται $x_2 \leqslant x_1 \in R$. Ἐκ τῆς δευτέρας $\alpha\varphi(\xi) > 0$ ἕπεται ὅτι ὁ ξ δὲν δύναται νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Τέλος ἐκ τῆς τρίτης $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$ ἕπεται ὅτι ὁ ξ εἶναι μικρότερος καὶ τῆς μικροτέρας ρίζης x_2, διότι ἂν ἦτο $x_2 \leqslant x_1 < \xi$, τότε $x_1 < \xi$ καὶ $x_2 < \xi \Rightarrow x_1 + x_2 < 2\xi \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} < \xi \Rightarrow \xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$.

2) Ἐὰν $x_2 \leqslant x_1 < \xi$, τότε ἔχομεν πάλιν $\alpha\varphi(\xi) > 0$ καὶ ἐπειδὴ ἐκ τῆς $x_2 \leqslant x_1 < \xi$ ἕπεται $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$, ἄρα αἱ συνθῆκαι εἶναι $\Delta \geqslant 0$ $\alpha\varphi(\xi) > 0$, καὶ $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\Delta \geqslant 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$ καὶ $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$, τότε ἔχομεν ρίζας πραγματικὰς $(x_2 \leqslant x_1)$, ὁ ξ δὲν δύναται νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ συνεπῶς, ὡς κείμενος ἐκτὸς τῶν ριζῶν, εἶναι μεγαλύτερος καὶ τῆς μεγαλυτέρας x_1, διότι ἄλλως θὰ ἔχωμεν $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$.

3) Ἐὰν $x_2 < \xi < x_1$, τότε ὡς γνωστὸν $\alpha\varphi(\xi) < 0$ (§ 97)

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\alpha\varphi(\xi) < 0$, τότε ἀφ' ἑνὸς ἔχομεν ρίζας πραγματικάς, ἀφ' ἑτέρου $x_2 < \xi < x_1$, διότι ἂν $\Delta \leqslant 0$ εἶναι $\alpha\varphi(\xi) > 0$. Ἐὰν δὲ ὁ ξ ἔκειτο ἐκτὸς τῶν ριζῶν θὰ εἴχομεν $\alpha\varphi(\xi) > 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάζομεν ὅτι :

Αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα ὁ $\xi \in R$ εἶναι 1) μικρότερος τῶν $x_2 \leqslant x_1$, εἶναι $\Delta \geqslant 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$, $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} < 0$ καὶ 2) μεγαλύτερος τῶν $x_2 \leqslant x_1$, εἶναι $\Delta \geqslant 0$, $\alpha\varphi(\xi) > 0$, $\xi + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὁ $\xi \in R$ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν x_1, $x_2 \in R$, εἶναι $\alpha\varphi(\xi) < 0$.

Παρατήρησις. Τὴν συνθήκην $\alpha\varphi(\xi) < 0$ χρησιμοποιοῦμεν πολλάκις ὡς κριτήριον πραγματικότητος τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$.

Τὰ ἀνωτέρω, ὡς καὶ μερικώτεραι περιπτώσεις, συνοψίζονται ὡς ἑξῆς :

$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x_2 \leqslant x_1$			
Δ	$\alpha\varphi(\xi)$	$\xi + \frac{\beta}{2\alpha}$	Θέσις τοῦ ξ ὡς πρὸς x_1, x_2
+	+	+	$x_2 < x_1 < \xi$
		−	$\xi < x_2 < x_1$
	−	+	$x_2 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \xi < x_1$
		−	$x_2 < \xi < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_1$
		0	$x_2 < \xi = \frac{x_1 + x_2}{2} < x_1$
	0	+	$x_2 < x_1 = \xi$
		−	$\xi = x_2 < x_1$
0	+	+	$x_1 = x_2 < \xi$
		−	$\xi < x_1 = x_2$
	0	0	$x_1 = x_2 = \xi$

Παραδείγματα: α) Ποία ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -3, 0, 9, 10 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) \equiv x^2 - 8x - 9 = 0$;

Λύσις: Ἔχομεν $\Delta = 64 + 36 = 100 > 0$, $x_2 < x_1$ καὶ $\alpha = 1$. Ἐπειδὴ $\alpha\varphi(-3) = 9 + 24 - 9 = 24 > 0$ καὶ $-3 + \frac{\beta}{2\alpha} = -3 - 4 = -7 < 0$, ἕπεται ὅτι $-3 < x_2 < x_1$

Ὁμοίως $\alpha\varphi(0) = -9 < 0$ ἄρα $x_2 < 0 < x_1$

$\alpha\varphi(9) = 81 - 72 - 9 = 0 \Rightarrow x_2 < x_1 = 9 \Rightarrow x_2 < x_1 = 9 < 10$

Ὅλαι ὁμοῦ διατάσσονται : $-3 < x_2 < 0 < x_1 = 9 < 10$

β) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x) \equiv 4x^2 - x + 2(\lambda - 1)$ εἶναι μικρότεραι τῆς μονάδος :

Λύσις: Πρέπει νὰ ἔχωμεν $x_2 \leqslant x_1 < 1$

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\Delta \geqslant 0$, $\alpha\varphi(1) > 0$, $1 + \frac{\beta}{2\alpha} > 0$.

Οὕτως ἔχομεν : $\Delta = 1 - 32(\lambda - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{33}{32}$,

$\alpha\varphi(1) = 4(4 - 1 + 2\lambda - 2) = 4(1 + 2\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{1}{2}$,

$1 + \frac{\beta}{2\alpha} = 1 + \frac{-1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} > 0 \quad (\forall \lambda \in R)$.

Αἱ $\lambda \leqslant \frac{33}{32}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$ συναληθεύουν διὰ $-\frac{1}{2} < \lambda \leqslant \frac{33}{32}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

324) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 2$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἑκάστου τῶν τριωνύμων. $\varphi_1(x) \equiv 3x^2 - x - 4$, $\varphi_{(2)} \equiv 4x^2 + 4x - 3$.

325) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $\lambda \in R$ αἱ ρίζαι x_1, x_2 τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv -7x^2 + 2x - (3\lambda - 2)$ περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $-1, 1$.

326) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, χωρὶς τὴν χρῆσιν τῆς διακρινούσης :

1) $(x-5)(x-3) - 5 = 0$, 2) $(x-\alpha)(x-\beta) = \kappa^2$ $(\alpha, \beta, \kappa \neq 0 \in R)$

327) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $0 < \gamma < \beta < \alpha$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι x_1, x_2 περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ 1.

328) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀριθμοῦ 2 πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv 2x^2 - 3x + 5(1 - 2\lambda)$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

329) Ἐὰν $\xi_1, \xi_2, \in R$ καὶ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $\varphi(x)$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ἐὰν εἶναι $\varphi(\xi_1) \cdot \varphi(\xi_2) < 0$, μία τῶν ὁποίων περιέχεται μεταξὺ τῶν $\xi_1 < \xi_2$. Ἀκολούθως ἐπὶ τῇ βάσει τῆς προτάσεως ταύτης, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x) \equiv (x-2)(x+3) + (x+2)(x-3) - (2-x)(3-x) = 0$ εἶναι πραγματικαὶ ἄνισοι καὶ ἡ μία τῶν ὁποίων περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ

104. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ β΄ ΒΑΘΜΟΥ.

Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι οἱ συντελεσταὶ α, β, γ τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ πολλάκις εἶναι συναρτήσεις ἑνὸς γράμματος $\lambda \in R$, τὸ ὁποῖον, χωρὶς νὰ δίδεται ἀριθμητικῶς, θεωρεῖται ὡς γνωστὴ ποσότης ἀνεξάρτητος τοῦ x καὶ ἀπὸ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ ὁποίου ἐξαρτῶνται αἱ ρίζαι καὶ τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου.

Τὸ γράμμα λ καλεῖται **παράμετρος**, αἱ δὲ ἐξισώσεις ἢ ἀνισώσεις περιέχουσαι αὐτὸ **παραμετρικαί.**

Διὰ νὰ διερευνήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ παραμετρικὴν κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν γνωστὸν πίνακα (§ 93), ὁ ὁποῖος ἐξετάζει τὸ εἶδος καὶ τὸ πρόσημον τῶν ριζῶν αὐτῆς.

Παράδειγμα : Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσ. $\varphi(x) \equiv (2\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 2)x + 3\lambda = 0$, ὅταν $\lambda \in R$.

Λύσις : Ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τῶν $\Delta(\lambda)$, $P(\lambda)$ καὶ $S(\lambda)$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ. Οὕτως ἔχομεν :

$$\Delta(\lambda)=4(\lambda-2)^2-12\lambda(2\lambda-1)=-4(5\lambda^2+\lambda-4)=-20(\lambda+1)\left(\lambda-\frac{4}{5}\right)$$

Τὸ σημεῖον τῆς $\Delta(\lambda)$ δίδεται ἀπὸ τὸν γραφικὸν πίνακα :

λ	$-\infty$		-1		$4/5$		$+\infty$
$\Delta(\lambda)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$P(\lambda)=\frac{3\lambda}{2\lambda-1}$. Τὸ κλάσμα $\frac{3\lambda}{2\lambda-1}$ εἶναι ὁμόσημον τοῦ $3\lambda(2\lambda-1)$, τοῦ ὁποίου τὸ σημεῖον δίδεται ἀπὸ τὸν γραφικὸν πίνακα :

λ	-8		0		$1/2$		$+\infty$
$3\lambda(2\lambda-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(\lambda)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$S(\lambda)=\frac{2(\lambda-2)}{2\lambda-1}$. Τὸ κλάσμα $\frac{2(\lambda-2)}{2\lambda-1}$ εἶναι ὁμόσημον τοῦ $2(\lambda-2)(2\lambda-1)$, τοῦ ὁποίου τὸ σημεῖον δίδεται ἀπὸ τὸν γραφικὸν πίνακα :

λ	$-\infty$		$1/2$		2		$+\infty$
$2(\lambda-2)(2\lambda-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$S(\lambda)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Τὰ ἀνωτέρω βοηθοῦν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα διερευνήσεως :

Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\varphi(x)\equiv(2\lambda-1)x^2-2(\lambda-2)x+3\lambda=0$				
λ	$\Delta(\lambda)$	$P(\lambda)$	$S(\lambda)$	Εἶδος ριζῶν καὶ πρόσημον αὐτῶν
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2\in(C-R)$ καὶ $x_1=\bar{x}_2\Rightarrow\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$
-1	0			$x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}=1$
	$+$	$+$	$+$	$x_1\in R^+, x_2\in R^+\Leftrightarrow 0<x_1<x_2$
0		0		$x_1\in R^+, x_2=0\quad\left(x_1=-\frac{\beta}{\alpha}=4\right)$
	$+$	$-$	$+$	$x_1\in R^+, x_2\in R^-\Leftrightarrow x_2<0<x_1$ καὶ $\lvert x_2\rvert<\lvert x_1\rvert$
$\frac{1}{2}$		$\Vert$	$\Vert$	Ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος
	$+$	$+$	$-$	$x_1\in R^-, x_2\in R^-\Leftrightarrow x_2<x_1<0$
$\frac{4}{5}$	0			$x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}=-2$
	$-$	$+$	$-$	$x_1, x_2\in(C-R)$ καὶ $x_1=\bar{x}_2\Rightarrow\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$
2			0	$x_1\in I, x_2\in I$ καὶ $x_1=-x_2$
	$-$	$+$	$+$	$x_1, x_2\in(C-R)$ καὶ $x_1=\bar{x}_2\Rightarrow\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert$
$+\infty$				

Σημ. C σύνολον μιγαδικῶν, I σύνολον καθαρῶν φανταστικῶν.

105. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ.

Διὰ νὰ διερευνήσωμεν μίαν ἀνίσωσιν β΄ βαθμοῦ παραμετρικήν, δηλ. νὰ εὕρωμεν τὰ σύνολα λύσεων αὐτῆς κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν γνωστὸν πίνακα (§ 99).

Παράδειγμα: Νὰ διερευνηθῇ ἡ ἀνίσωσις
$\varphi(x)\equiv(3\lambda-2)x^2-(\lambda-1)x+2(\lambda-1)<0$, ὅταν $\lambda\in R$.

Λύσις: Ἐξετάζομεν τὸ σημεῖον τῶν $\Delta(\lambda)$ καὶ $\alpha(\lambda)$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ. Οὕτως ἔχομεν :

$\Delta(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - 8(\lambda - 1)(3\lambda - 2) = (\lambda - 1)(-23\lambda + 15)$

Τὸ σημεῖον τῆς $\Delta(\lambda)$ δίδεται ἀπὸ τὸν πίνακα :

λ	$-\infty$		$\frac{15}{23}$		1		$+\infty$
$\Delta(\lambda)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$\alpha(\lambda) = 3\lambda - 2$, ὅπερ ἔχει σημεῖον θετικὸν διὰ $\lambda > \frac{2}{3}$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ $\lambda < \frac{2}{3}$. Μηδενίζεται δὲ διὰ $\lambda = \frac{2}{3}$. Τὰ ἀνωτέρω βοηθοῦν εἰς τὴν σύνταξιν τοῦ ἀκολούθου πίνακος :

Διερεύνησις τῆς ἀνισ. $\varphi(x) \equiv (3\lambda - 2)x^2 - (\lambda - 1)x + 2(\lambda - 1) < 0$			
λ	$\Delta(\lambda)$	$\alpha(\lambda)$	Σύνολον λύσεων τῆς $\varphi(x) < 0$
$-\infty$			
	$-$	$-$	$\{x / x \in R\}$
$\frac{15}{23}$	0		$\left\{x \in R / x \neq -\frac{\beta}{2\alpha} = 4\right\}$
	$+$	$-$	$x_2 < x_1$, $\{x \in R / -\infty < x < x_2 \wedge x_1 < x < +\infty\}$
$\frac{2}{3}$		0	ἀνίσωσις α΄/βάθμιος, $\{x \in R / -\infty < x < 2\}$
	$+$	$+$	$x_2 < x_1$, $\{x \in R / x_2 < x < x_1\}$
1	0		$\{\quad\} = \varnothing$
	$-$	$+$	$\{\quad\} = \varnothing$
$+\infty$			

Σημείωσις. Τὰ x_1, x_2 εἶναι ἐκφράσεις τοῦ λ καὶ μεταβάλλονται μετὰ τοῦ λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

330) Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις καὶ ἀνισώσεις, ὅταν $\lambda \in R$:

1) $(2\lambda - 3)x^2 + 2(6\lambda - 5)x + 18\lambda + 25 = 0$

2) $(\lambda - 5)x^2 - 4\lambda x + \lambda - 2 = 0$, 3) $(\lambda + 1)x^2 - 3\lambda x + 4\lambda > 0$

4) $x^2 + 2(2\lambda - 1)x + 3\lambda^2 - 5 > 0$, 5) $(\lambda + 2)x^2 + 12x + 10 - 6\lambda \leqslant 0$

331) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{x^2 \cdot 5x + 6}{x - 2}$ λαμβάνει πᾶσαν πραγματικὴν τιμήν, ὅταν $x \in R$.

332) Ἐὰν x πραγματικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $(x^2 + 2x - 11)/2(x - 3)$ δὲν δύναται νὰ λάβῃ τιμὰς τοῦ διαστήματος $]2, 6]$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΔΥΟ Β΄/ΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΙΝΑ ΑΙ ΡΙΖΑΙ ΤΩΝ ΠΛΗΡΟΥΝ ΩΡΙΣΜΕΝΑΣ ΣΥΝΘΗΚΑΣ

106. Δίδονται δύο ἐξισώσεις $\varphi_1(x) \equiv \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1 = 0$ καὶ $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2 = 0$ $(\alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0)$ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ ρίζας ἀντιστοίχως

(x_1,x_2) **καὶ** (ρ_1, ρ_2). **Ζητοῦνται αἱ σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν των, ἵνα αὗται ἔχουν ρίζας:**

1. Ἀναλόγους μὲ λόγον λ.

Ἔχομεν : $\frac{x_1}{\rho_1}=\frac{x_2}{\rho_2}=\lambda \Leftrightarrow x_1 = \lambda\rho_1$ καὶ $x_2 = \lambda\rho_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \lambda(\rho_1 + \rho_2)$ καὶ $x_1x_2 = \rho_1\rho_2\lambda^2$ ἢ $-\frac{\beta_1}{\alpha_1}= \lambda \left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)$ καὶ $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}= \frac{\gamma_2}{\alpha_2}\lambda^2$ ἢ $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\lambda\beta_2}$ καὶ $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2\lambda^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2\lambda}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2\lambda^2}} \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑφίσταται ἡ συνθήκη (1), τότε αἱ ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας ἀναλόγους μὲ λόγον λ. Πράγματι, θέτοντες τοὺς λόγους (1) ἴσον μὲ κ λαμβάνομεν :

$\alpha_1 = \kappa\alpha_2$, $\beta_1 = \kappa\beta_2\lambda$, $\gamma_1 = \kappa\gamma_2\lambda^2$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις $\varphi_1(x) = 0$ γίνεται $\varphi_1(x)\equiv \equiv\kappa\alpha_2x^2 + \kappa\beta_2\lambda x + \kappa\gamma_2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2x^2 + \beta_2\lambda x + \gamma_2\lambda^2 = 0$.

Αὕτη ἔχει ρίζας $x_1 = \lambda\frac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$ ἢ $x_1 = \lambda\rho_1 \Rightarrow \frac{x_1}{\rho_1} = \lambda$

$x_2 = \lambda\frac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$ ἢ $x_2 = \lambda\rho_2 \Rightarrow \frac{x_2}{\rho_2} = \lambda$,

ὅπερ $\frac{x_1}{\rho_1} = \frac{x_2}{\rho_2}= \lambda$. Ὥστε ἡ συνθήκη (1) εἶναι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία.

2. Ἀντιθέτους. Ἔχομεν : $x_1 = -\rho_1$ καὶ $x_2 = -\rho_2 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = -(\rho_1 + \rho_2) \\ x_1x_2 = \rho_1\rho_2 \end{array}\right| \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l} -\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right) \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1}=\frac{\gamma_2}{\alpha_2} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=-\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \quad (2)$$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑφίσταται ἡ συνθήκη (2), τότε αἱ ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας ἀντιθέτους. Πράγματι, θέτοντες τοὺς λόγους (2) ἴσον μὲ κ, λαμβάνομεν : $\alpha_1 = \kappa\alpha_2$, $\beta_1 = -\kappa\beta_2$, $\gamma_1 = \kappa\gamma_2$, ὁπότε $\varphi_1(x) \equiv \kappa\alpha_2x^2 - \kappa\beta_2x + \kappa\gamma_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2x^2 - \beta_2x + \gamma_2 = 0$, ἥτις ἔχει ρίζας $x_1 = \frac{\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$, $x_2 = \frac{\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$.

Αὗται εἶναι ἀντίθετοι τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισ. $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2x^2 + \beta_2x + \gamma_2 = 0$.

Ὥστε ἡ συνθήκη (2) εἶναι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία.

Τὸ ἀνωτέρω δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πόρισμα τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν αἱ ρίζαι εἶναι ἀνάλογοι μὲ λόγον $\lambda = -1$.

3. Ἀντιστρόφους. Ἔχομεν : $x_1 = \frac{1}{\rho_1}$ καὶ $x_2 = \frac{1}{\rho_2} \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \\ x_1x_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \end{array}\right\} \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2} \\ x_1x_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} \end{array}\right] \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l} -\frac{\beta_1}{\alpha_1} = -\frac{\beta_2}{\gamma_2} \\ \frac{\gamma_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\gamma_2} \end{array}\right] \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \\ \frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\boxed{\frac{\alpha_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\alpha_2}}$ (3). Ἡ σχέσις (3) εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ὑφίσταται ἡ συνθήκη (3), τότε αἱ ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας ἀντιστρόφους. Πράγματι, θέτοντες τοὺς λόγους (3) ἴσον μὲ κ, λαμβάνομεν :

$\alpha_1 = \kappa\gamma_2,\ \beta_1 = \kappa\beta_2,\ \gamma_1 = \kappa\alpha_2$, ὁπότε $\varphi_1(x) \equiv \kappa\gamma_2 x^2 + \kappa\beta_2 x + \kappa\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \gamma_2 x^2 + \beta_2 x + \alpha_2 = 0$, ἥτις ἔχει ρίζας $x_1 = \dfrac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\gamma_2}$, $x^2 = \dfrac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\gamma_2}$.

Αἱ ρίζαι δὲ τῆς $\varphi_2(x) = 0$ εἶναι $\rho_1 = \dfrac{-\beta_2 - \sqrt{\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$, $\rho_2 = \dfrac{-\beta_2 + \sqrt{\beta_2 - 4\alpha_2\gamma_2}}{2\alpha_2}$.

Ἐξ αὐτῶν ἔχομεν $x_1 \cdot \rho_1 = \dfrac{\beta^2 - (\beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2)}{4\alpha_2\gamma_2} = 1 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{\rho_1}$. Ὁμοίως δὲ $x_2 = \dfrac{1}{\rho_2}$.

Ὥστε: **Αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $\varphi_1(x) = 0$ καὶ $\varphi_2(x) = 0$, ἔχουν ρίζας 1) ἀναλόγους μὲ λόγον λ, 2) ἀντιθέτους καὶ 3) ἀντιστρόφους, εἶναι ἀντιστοίχως αἱ (1), (2), (3).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

333) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ αἱ ἐξισώσεις $\varphi_1(x) \equiv (\lambda + 2)x^2 - (\mu + 1)x - 3 = 0$ καὶ $\varphi_2(x) \equiv (\mu - 1)x^2 + 4\lambda x + 2 = 0$ ἔχουν ρίζας α) ἀναλόγους μὲ λόγον 2, β) ἀντιθέτους καὶ γ) ἀντιστρόφους.

334) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ, ἔχουσα ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^2 + \lambda x + \mu = 0$. Ἀκολούθως νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τῶν λ καὶ μ διὰ τὰς ὁποίας αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας α) ἀναλόγους μὲ λόγον 2, β) ἀντιθέτους καὶ γ) ἀντιστρόφους.

335) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας $x_1 + \dfrac{1}{x_1}$ καὶ $x_2 + \dfrac{1}{x_2}$, ὅπου x_1, x_2 ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας ἀναλόγους μὲ λόγον κ.

107. ΑΠΑΛΕΙΦΟΥΣΑ ΔΥΟ ΤΡΙΩΝΥΜΩΝ Β' ΒΑΘΜΟΥ.

Ἐὰν δοθοῦν δύο τριώνυμα $\varphi_1(x) \equiv \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$ καὶ $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2{}^2 x + \beta_2 x + \gamma_2$ μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, καὶ ρίζας ἀντιστοίχως (x_1, x_2) καὶ (ρ_1, ρ_2), τότε θὰ καλοῦμεν τὴν πραγματικὴν παράστασιν

$$R = (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$

ἀπαλείφουσα τῶν δύο τριωνύμων.

Ἡ ἐξέτασις τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀπαλειφούσης R δύο τριωνύμων β' βαθμοῦ βοηθεῖ εἰς τὴν ἐπίλυσιν πολλῶν σπουδαίων προβλημάτων.

α) Μορφαὶ τῆς ἀπαλειφούσης R

Δοθέντων τῶν ἀνωτέρω τριωνύμων, ἡ ἀπαλείφουσα δύναται νὰ λάβῃ τὰς ἀκολούθους μορφάς:

1η $$R = \alpha_1^2\, \varphi_2(x_1)\varphi_2(x_2) = \alpha^2{}_2\varphi_1(\rho_1)\, \varphi_1(\rho_2)$$

Πράγματι. Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1)\,\varphi_2(x_2) &= (\alpha_2 x_1^2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2)(\alpha_2 x_2^2 + \beta_2 x_2 + \gamma_2) = \\ &= \alpha_2^2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_2\beta_2 x_1 x_2 (x_1 + x_2) + \alpha_2\gamma_2 (x_1^2 + x_2^2) + \beta_2^2 x_1 x_2 + \\ &\quad + \beta_2\gamma_2(x_1 + x_2) + \gamma_2^2 = \\ &= \frac{1}{\alpha_1^2}\left[(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1)^2 - (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)\right] = \frac{1}{\alpha_1^2} \cdot R \end{aligned}$$

Ἄρα $R = \alpha_1^2\, \varphi_2(x_1)\, \varphi_2(x_2)$, ὁμοίως δὲ $R = \alpha_2^2\, \varphi_1(\rho_1)\, \varphi_1(\rho_2)$

2α $$R = \alpha_1^2\alpha_2^2 (x_1 - \rho_1)(x_2 - \rho_1)(x_1 - \rho_2)(x_2 - \rho_2)$$

3η $$R=\frac{1}{4}\left[(2\alpha_1\gamma_2+2\alpha_2\gamma_1-\beta_1\beta_2)^2-\Delta_1\Delta_2\right],$$
$$\text{ὅπου}\quad \Delta_1=\beta_1{}^2-4\alpha_1\gamma_1,\ \Delta_2=\beta_2{}^2-4\alpha_2\gamma_2$$

Οἱ μαθηταὶ δύνανται εὐκόλως νὰ ἐπαληθεύσουν τὰς μορφὰς τῆς R 2α καὶ 3η.

β) Ἰδιότητες τῆς ἀπαλειφούσης R

1. Ἐὰν ἡ ἀπαλείφουσα $R=0$, τότε ἐκ τῆς $R=\alpha_2{}^2\varphi_1(\rho_1)\,\varphi_1(\rho_2)$ ἔχομεν $\alpha_2{}^2\varphi_1(\rho_1)\,\varphi_1(\rho_2)=0 \Leftrightarrow \varphi_1(\rho_1)=0 \vee \varphi_1(\rho_2)=0$, ὁπότε ἐὰν $\varphi_1(\rho_1)=0$ καὶ ἐπειδὴ $\varphi_2(\rho_1)=0$ (ρ_1 εἶναι ρίζα τοῦ $\varphi_2(x)$), ἕπεται ὅτι ἡ ρ_1 εἶναι κοινὴ ρίζα τῶν $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$. Ἐὰν δὲ $\varphi_1(\rho_1)=0$ καὶ $\varphi_1(\rho_2)=0$, τότε τὰ $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ ἔχουν ἀμφοτέρας τὰς ρίζας κοινάς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν: $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, διότι $x_1+x_2=\rho_1+\rho_2$ καὶ $x_1x_2=\rho_1\rho_2 \Rightarrow -\frac{\beta_1}{\alpha_1}=-\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ καὶ $\frac{\gamma_1}{\alpha_1}=\frac{\gamma_2}{\alpha_2} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν τὰ τριώνυμα ἔχουν κοινὴν ἢ κοινὰς ρίζας, τότε προφανῶς $R=0$.

Ὥστε: **Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὰ τριώνυμα $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ ἔχουν μίαν τουλάχιστον κοινὴν ρίζαν, εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς 0.**

2. Ἐὰν ἡ ἀπαλείφουσα $R=0$ καὶ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$, τότε εἴδομεν ὅτι τὰ τριώνυμα $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ ἔχουν μίαν τουλάχιστον κοινὴν ρίζαν, δὲν δύνανται ὅμως νὰ ἔχουν ἀμφοτέρας τὰς ρίζας κοινάς, διότι τότε θὰ ἦτο $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\beta_1}{\beta_2}=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον, διότι ὑπετέθει $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν τὰ τριώνυμα ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν ρίζαν τὴν x_0, τότε:
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1x_0{}^2+\beta_1x_0+\gamma_1=0\\ \alpha_2x_0{}^2+\beta_2x_0+\gamma_2=0\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\ x_0{}^2=\frac{\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\ \text{καὶ}\ x_0=\frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1},$$
ἐξ ὧν λαμβάνομεν $\frac{\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}=\left(\frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}\right)^2$ καὶ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$ καὶ ἄρα $(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)=0$ καὶ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$. Ἡ κοινὴ αὕτη ρίζα x_0 εἶναι πραγματική, διότι ἂν ἦτο μιγαδικὴ τῆς μορφῆς $\kappa+\lambda i$, τότε τὰ τριώνυμα θὰ εἶχον κοινὴν ρίζαν καὶ τὴν συζυγῆ $\kappa-\lambda i$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶχον δύο κοινὰς ρίζας, ὅπερ ἄτοπον.

Ὥστε: **Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τὰ τριώνυμα $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ ἔχουν μίαν καὶ μόνην πραγματικὴν κοινὴν ρίζαν, τὴν $x_0=\frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}$, εἶναι ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν $R=0$ καὶ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$.**

Σημείωσις. Ἄλλαι ἰδιότητες τῆς ἀπαλειφούσης R, λίαν ἀξιόλογοι, θὰ ἐξετασθοῦν εἰς ἄλλην τάξιν.

Παράδειγμα: Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις $\varphi_1(x)\equiv 2x^2-x-3=0$ καὶ $\varphi_2=x^2-(2\lambda-3)x+4\lambda=0$ ἔχουν μίαν καὶ μόνην πραγματικὴν κοινὴν ρίζαν καὶ νὰ εὑρεθῇ αὕτη.

Λύσις : Πρέπει $R = 0$ καὶ $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$

Ἔχομεν : $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -2(2\lambda - 3) - 1(-1) = -4\lambda + 7 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{7}{4}$

$\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = -1 \cdot 4\lambda + (2\lambda - 3)(-3) = -10\lambda + 9$

$\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1 = 2 \cdot 4\lambda - 1 \cdot (-3) = 8\lambda + 3$

Ἄρα $R = (8\lambda + 3)^2 - (-4\lambda + 7)(-10\lambda + 9) = 0 \Leftrightarrow 12\lambda^2 + 77\lambda - 27 = 0$, ἐξ ἧς $\lambda_1 = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -\frac{27}{4}$

Ἡ κοινὴ ρίζα διὰ $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ εἶναι $x_0 = \frac{-(8\lambda + 3)}{-4\lambda + 7} = -1$

καὶ διὰ $\lambda_2 = -\frac{27}{4}$ εἶναι: $x_0 = \frac{3}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

336) Ποία ἡ συνθήκη μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα τὰ τριώνυμα $\varphi_1(x) \equiv \alpha x^2 + x + \beta$ καὶ $\varphi_2(x) \equiv x^2 + \alpha x + \beta$ ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν ρίζαν, ἥτις νὰ εὑρεθῇ.

337) Ἂν αἱ ἐξισώσεις $x^2 + \rho x + \kappa = 0$ καὶ $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν ρίζαν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $(\kappa - \lambda)^2 = (\rho\lambda - \kappa^2)(\kappa - \rho)$.

338) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν μ καὶ ν τὰ τριώνυμα $\varphi_1(x) = \mu x^2 - (\mu - 1)x - 5$ καὶ $(\nu - 2)x^2 - 3\nu x + 1$ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας ;

339) Ἐὰν x_0 εἶναι ἡ κοινὴ ρίζα τῶν δύο τριωνύμων $\varphi_1(x) \equiv \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$ καὶ $\varphi_2(x) \equiv \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2$ καὶ R ἡ ἀπαλείφουσά των, νὰ ἀποδειχθῇ

ὅτι : $R = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}{\alpha_1} \cdot \varphi_1(x_0) = \frac{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2}{\alpha_2} \cdot \varphi_2(x_0)$

340) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τριώνυμα $\varphi_1(x) \equiv \lambda x^2 - (\lambda\mu + 1)x + \mu$ καὶ $\varphi_2(x) \equiv \lambda\mu x^2 + (\lambda^2 - \mu)x - \lambda = 0$ ἔχουν κοινὴν ρίζαν, ἥτις νὰ εὑρεθῇ.

341) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις $x^2 + \alpha x - 3 = 0$ καὶ $x^2 - 2\alpha x + 3 = 0$ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἀμφοτέρας τὰς ρίζας κοινάς. Εὕρατε δὲ τὰς τιμὰς τοῦ α, ἵνα αὗται ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν.

ΤΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΝ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ὡς ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ ΤΟΥ Χ

108. I) ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1) Μεταβληταὶ τείνουσαι πρὸς τὸ 0, ∞ καὶ πρὸς σταθερὸν $\alpha \in R$

Μία μεταβλητὴ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν λέγομεν : α) ὅτι τείνει πρὸς τὸ 0, καὶ συμβολίζομεν $x \to 0$, ὅταν μεταβαλομένη δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$, ὁσονδήποτε μικροῦ κατὰ βούλησιν,

β) ὅτι τείνει πρὸς τὸ ∞ (θετικὸν ἢ ἀρνητικόν), καὶ συμβολίζομεν $x \to \infty$, ὅταν μεταβαλομένη, δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $M > 0$, ὁσονδήποτε μεγάλου,

γ) ὅτι τείνει πρὸς τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν α, καὶ συμβολίζομεν $x \to \alpha$, ὅταν μεταβαλομένη δύναται ἡ διαφορὰ $x - \alpha$ νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$, ὁσονδήποτε μικροῦ κατὰ βούλησιν.

2) Μεταβολαὶ μιᾶς συναρτήσεως

Μία συνάρτησις $\psi = \varphi(x)$, ἔχουσα σύνολον ὁρισμοῦ τὸ $\Sigma \subseteq R$, λέγεται :

α) **αὔξουσα εἰς τὸ Σ,** ὅταν εἰς δύο οἱασδήποτε ἀνίσους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x, $x_1, x_2 \in \Sigma$ ἀντιστοιχοῦν ὁμοίως ἄνισοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως.

Ἤτοι, ἂν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$,

β) **φθίνουσα εἰς τὸ Σ,** ὅταν εἰς τὰς ἐν λόγῳ τιμὰς $x_1, x_2 \in \Sigma$ ἀντιστοιχοῦν ἀνομοίως αἱ ἄνισοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως. Ἤτοι, ἂν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ καὶ

γ) **σταθερὰ εἰς τὸ Σ,** ὅταν εἰς τὰς δύο ἀνίσους τιμὰς $x_1, x_2 \in \Sigma$ ἀντιστοιχοῦν ἴσαι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως. Ἤτοι, ἂν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.

Τὴν φορὰν μεταβολῆς τῆς ἄνω συναρτήσεως $\psi = \varphi(x)$ καθορίζει προφανῶς τὸ σημεῖον τοῦ λόγου $\dfrac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2}$, ὁ ὁποῖος ἂν εἶναι θετικὸς ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα, ἂν ἀρνητικὸς φθίνουσα καὶ ἂν ἰσοῦται μὲ 0 ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερά.

Ἡ ἔννοια τῆς συνεχείας μιᾶς συναρτήσεως.

Μία συνάρτησις $\psi = \varphi(x)$, ὡρισμένη εἰς ἕν σύνολον $\Sigma \subseteq R$, λέγεται **συνεχὴς διά τινα τιμὴν $x_0 \in \Sigma$,** ἐάν, τοῦ x τείνοντος πρὸς τὸ x_0, ἡ συνάρτησις τείνει πρὸς τὴν τιμὴν $\varphi(x_0)$.

Ἐὰν δὲ ἡ $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν $x_0 \in \Sigma$, τότε λέγεται **συνεχὴς εἰς τὸ σύνολον Σ.**

109. II) 1) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΕΙΣ ΤΟ R.

Ἔστω $x_0 \in R$ μία τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x καὶ $\varphi(x_0) = \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως. Ἐὰν λάβωμεν καὶ τὴν τιμὴν $x_0 + \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$ καὶ ὅσον θέλομεν μικρὰ ποσότης, τότε ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι $\varphi(x_0 + \varepsilon) = \alpha(x_0 + \varepsilon)^2 + \beta(x_0 + \varepsilon) + \gamma$. Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $\varphi(x_0 + \varepsilon) - \varphi(x_0) = \alpha(x_0 + \varepsilon)^2 + \beta(x_0 + \varepsilon) + \gamma - (\alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma) = 2\alpha x_0 \varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon$.

Ἐπειδὴ ε ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός, κάθε ὅρος τοῦ βου μέλους ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν ὅσον θέλομεν μικρὰν καὶ συνεπῶς ἡ διαφορὰ $\varphi(x_0 + \varepsilon) - \varphi(x_0)$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $\varepsilon' > 0$, ὁσονδήποτε μικροῦ κατὰ βούλησιν. Ἄρα $\varphi(x_0 + \varepsilon) \to \varphi(x_0)$. Ἐπειδὴ δέ, $x_0 + \varepsilon \to x_0$, διότι $\varepsilon > 0$ ὁσονδήποτε μικρός, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$. Ἡ τιμὴ ὅμως x_0 εἶναι τυχοῦσα καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν $x \in R$ καὶ ἄρα συνεχὴς εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R.

2) Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ὅταν $x \in R$

Ἔστω $x_1, x_2 \in R$ $(x_1 < x_2)$ δύο τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x καὶ $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως. Σχηματίζομεν τὸν λόγον $\dfrac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} =$

$$= \frac{\alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma - \alpha x_2^2 - \beta x_2 - \gamma}{x_1 - x_2} = \frac{\alpha(x_1^2 - x_2^2) + \beta(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = \alpha(x_1 + x_2) + \beta =$$

$$= \alpha\left(x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Διὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ σημείου αὐτοῦ διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

α) Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ λάβομεν $x_1 < x_2 \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε ἔχομεν $x_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $x_2 \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 + x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha} < 0 \Rightarrow \alpha\left(x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha}\right) < 0 \Rightarrow \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} <$ < 0 καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι **φθίνουσα.**

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἂν $\alpha > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x_1 < x_2$, τότε ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **αὔξουσα.**

Ὥστε, ἡ συνάρτησις διὰ $\alpha > 0$ εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι φθίνουσα καὶ εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x < +\infty$ αὔξουσα. Δηλαδὴ ἀλλάσσει φορὰν μεταβολῆς καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ φθίνουσα γίνεται αὔξουσα, διέρχεται διὰ μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς καλουμένης **ἐλάχιστον (minimum) τῆς συναρτήσεως.**

β) **Ἐὰν $\alpha < 0$, ἀποδεικνύομεν ὡς προηγουμένως, ὅτι ἡ συνάρτησις εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι αὔξουσα καὶ εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x < +\infty$ φθίνουσα.** Ἤτοι πάλιν ἀλλάσει φορὰν μεταβολῆς καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ αὔξουσα γίνεται φθίνουσα, διέρχεται διὰ μιᾶς μεγίστης τιμῆς, **καλουμένης μέγιστον (maximum) τῆς $\varphi(x)$.**

3) Μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ τριώνυμον, ἂν $\alpha > 0$, εἰς τὸ σύνολον ὁρισμοῦ του (R) λαμβάνει τιμὰς διερχομένας δι' ἑνὸς ἐλαχίστου, τὸ ὁποῖον εἶναι : $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καὶ ἂν $\alpha < 0$, εἰς τὸ σύνολον R λαμβάνει τιμὰς διερχομένας δι' ἑνὸς μεγίστου, τὸ ὁποῖον εἶναι: $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Τὴν ἐξέτασιν τῆς μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]$. Οὕτω διακρίνομεν τὰ ἑξῆς :

α) Ἐὰν $\alpha > 0$, τότε ὅταν $x \to \pm\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \to +\infty$ καὶ τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \to +\infty$. Ἄρα $\varphi(x) \to +\infty$ διὰ $x \to \pm\infty$. Ἐν συνεχείᾳ, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς μὲν ἀλλὰ ἐλαττουμένας συνεχῶς, διὰ x δὲ ἴσον πρὸς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0$ καὶ συνεπῶς $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left[0 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Ἀκολούθως, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$ καὶ ἡ τιμὴ τῆς $\varphi(x)$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

β) Ἐὰν $\alpha < 0$, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καί, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως τοῦ $+\infty$, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τείνουσα εἰς τὸ $-\infty$.

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

Πίναξ μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

	x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha > 0$	$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(4\alpha\gamma-\beta^2)/4\alpha$ ἐλάχιστον	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha < 0$	$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$(4\alpha\gamma-\beta^2)/4\alpha$ μέγιστον	$\searrow$	$-\infty$

Παραδείγματα : α) Τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv 3x^2 - 2x + 3$ ἔχει ἕνα ἐλάχιστον διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2\cdot 3} = \frac{1}{3}$, διότι $\alpha = 3 > 0$, τὸ ὁποῖον εἶναι $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \frac{4\cdot3\cdot3-(-2)^2}{4\cdot 3} = \frac{8}{3}$

β) Τὸ τριώνυμον $f(x) \equiv -x^2 - 2x + 2$ ἔχει ἕνα μέγιστον διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$, διότι $\alpha = -1 < 0$. Τοῦτο εἶναι $\varphi_{(-1)} = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

342) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

1) $\varphi_1(x) \equiv 3x^2 - 2x + 4$, $\varphi_2(x) \equiv x^2 - 7x - 1$, $\varphi_3(x) \equiv x^2 - 7x$, $\varphi_4(x) \equiv 5x^2 - 4$

2) $\sigma_1(x) \equiv -x^2 - 3x + 1$, $\sigma_2(x) \equiv 3 - (x-1)^2$, $\sigma_3(x) \equiv -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}(x+2)^2$

343) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv (\lambda - 1)x^2 - \lambda x + \lambda$ ἔχῃ μέγιστον τὸν ἀριθμὸν -1.

344) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεταξὺ τῶν α καὶ β σχέσις, ἵνα τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv -x^2 + (\alpha+\beta)x - (\alpha-\beta)$ ἔχῃ μέγιστον τὸν ἀριθμὸν $\alpha + \beta$.

345) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ γινόμενον $(2\alpha - x)(2\beta + x)$ γίνεται μέγιστον καὶ ποῖον τὸ μέγιστον τοῦτον $(\alpha, \beta \in R)$.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

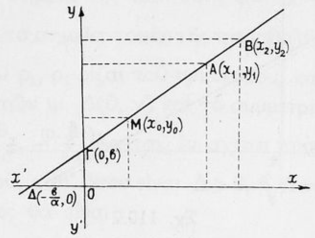
$\psi = \alpha x + \beta$ καὶ $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

110. Ὁρισμός. *Γραφικὴ παράστασις ἢ γεωμετρικὴ ἢ παραστατικὴ καμπύλη μιᾶς συναρτήσεως $\psi = \varphi(x)$ καλεῖται ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα ἔχουν τετμημένας τὰς τιμὰς τοῦ συνόλου ὁρισμοῦ αὐτῆς καὶ τεταγμένας τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ συνόλου τιμῶν τῆς συναρτήσεως.*

1. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$, ὅταν $(x, \psi) \in R^2$

Ἐὰν x_1 καὶ x_2 εἶναι δύο αὐθαίρετοι τιμαὶ τοῦ x, τότε αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶναι $\psi_1 = \alpha x_1 + \beta$ καὶ $\psi_2 = \alpha x_2 + \beta$. Κατασκευάζομεν τὰ σημεῖα $A(x_1, \psi_1)$ καὶ $B(x_2, \psi_2)$, ἀναφερόμενοι εἰς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων $x'Ox$, $\psi'O\psi$. Ἂς θεωρήσωμεν καὶ ἓν τρίτον σημεῖον $M(x_0, \psi_0 = \alpha x_0 + \beta)$.

Ἐκ τῶν
$$\psi_0 = \alpha x_0 + \beta$$
$$\psi_1 = \alpha x_1 + \beta$$
$$\psi_2 = \alpha x_2 + \beta$$



Σχ. 110.1

δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη ἔχομεν:

$$\left.\begin{matrix}\psi_0 - \psi_1 = \alpha(x_0 - x_1)\\ \psi_0 - \psi_2 = \alpha(x_0 - x_2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\psi_0 - \psi_1}{\psi_0 - \psi_2} = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} \Leftrightarrow \frac{\psi_0 - \psi_1}{x_0 - x_1} = \frac{\psi_0 - \psi_2}{x_0 - x_2} = \alpha$$

Οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας αὐτῆς εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$ $(x_0 - x_1, \psi_0 - \psi_1)$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ $(x_0 - x_2, \psi_0 - \psi_2)$ οἱ δὲ λόγοι $\frac{\psi_0 - \psi_1}{x_0 - x_1}$, $\frac{\psi_0 - \psi_2}{x_0 - x_2}$ εἶναι οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως ἀντιστοίχως αὐτῶν.

Ἄρα τὰ διανύσματα ἔχουν συντελεστὰς διευθύνσεως ἴσους καὶ συνεπῶς εἶναι συγγραμμικά. Ἤτοι τὸ σημεῖον $M(x_0, \psi_0)$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB, ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη τυχόν, ἕπεται ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας AB εἶναι σημεῖον τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$.

Ὥστε, **ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = \alpha x + \beta$ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ μὲ συντελεστὴν διευθύνσεως, τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, ὁ ὁποῖος εἶναι α, διὰ τοῦτο καὶ καλεῖται ἡ $\psi = \alpha x + \beta$ γραμμικὴ συνάρτησις.**

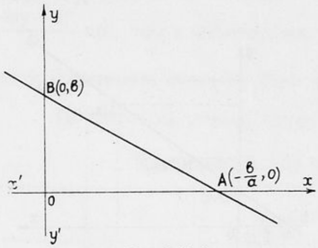
Ἡ συνάρτησις διὰ $x = 0$ δίδει $\psi = \beta$ καὶ διὰ $\psi = 0$ δίδει $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, τὰ δὲ σημεῖα $\Gamma(0, \beta)$ καὶ $\Delta\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῆς εὐθείας $\psi = \alpha x + \beta$ μὲ τοὺς ἄξονας $\psi'0\psi$ καὶ $x'0x$ ἀντιστοίχως. Ἡ τεταγμένη β τοῦ σημείου Γ καὶ ἡ τετμημένη $-\frac{\beta}{\alpha}$ τοῦ Δ καλοῦνται ἀντιστοίχως **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** καὶ **τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν,** ἀμφότεραι δὲ **συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχήν.**

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x + \beta$ διὰ $\beta = 0$, ἤτοι τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x$, εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν ἀξόνων, διότι διὰ $x = 0$ εἶναι καὶ $\psi = 0$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x + \beta$, ὅταν $\alpha = 0$, ἤτοι τῆς σταθερᾶς συναρτ. $\psi = \beta$, εἶναι εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $x'Ox$, διότι διὰ πᾶν x εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ψ πάντοτε β.

Κατασκευὴ τῆς εὐθείας $\psi = \alpha x + \beta$

Μία εὐθεῖα ὁρίζεται διὰ δύο μόνον σημείων. Τὰ χαρακτηριστικώτερα προφανῶς, διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς εὐθείας $\psi = \alpha x + \beta$, εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς μὲ τοὺς ἄξονας. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχήν. Οὕτω, τὰ σημεῖα $A\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ καὶ $B(0, \beta)$ ἀρκοῦν διὰ νὰ ὁρίσουν τὴν εὐθεῖαν AB, ἥτις εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσ. $\psi = \alpha x + \beta$.

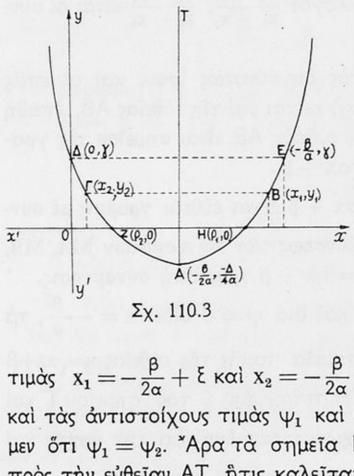


Σχ. 110.2

Σημ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων ($\psi = \alpha x$), τότε διὰ τὴν κατασκευήν της, ἀρκεῖ ἓν μόνον σημεῖον.

2. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ἀναφερόμενοι εἰς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων x'0x, ψ'0ψ. Οὕτω διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :



Σχ. 110.3

α) Ἐὰν $\alpha > 0$. Ἡ συνάρτησις διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην της τιμὴν $\psi = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \frac{-\Delta}{4\alpha}$, ὅταν δὲ $-\infty < x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἔχει πεδίον τιμῶν τὸ $\left(+\infty, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καὶ ὅταν $-\frac{\beta}{2\alpha} < x < +\infty$ ἔχει πεδίον τιμῶν τὸ $\left(\frac{-\Delta}{4\alpha}, +\infty\right)$.

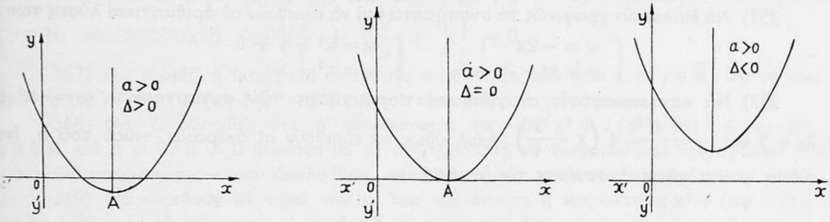
Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον A $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$. Ἀκολούθως λαμβάνομεν δύο τιμὰς $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} + \xi$ καὶ $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} - \xi$ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν τιμὴν $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ψ_1 καὶ ψ_2 τῆς συναρτήσεως. Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\psi_1 = \psi_2$. Ἄρα τὰ σημεῖα $B(x_1, \psi_1)$ καὶ $\Gamma(x_2, \psi_2)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AT, ἥτις καλεῖται ἄξων συμμετρίας τῆς γραμμῆς $\psi = \varphi(x)$, καὶ συνεπῶς ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρ. $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα ΔΓΖΑ καὶ ΑΗΒΕ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας AT. Διὰ τὴν κατασκευὴν λοιπὸν κατὰ προσέγγισιν τῆς γραμμῆς $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δέον νὰ εὕρωμεν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας, διότι εἶναι ἡ γραμμὴ καμπύλη καὶ οὐδὲν τμῆμα αὐτῆς εἶναι εὐθύγραμμον. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἡ εὐθεῖα $\psi = Ax + B$ τέμνει τὴν γραμμὴν $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα, διότι τὸ σύστημα ποὺ ἀποτελοῦν ἔχει τὸ πολὺ δύο λύσεις.

Τὴν καμπύλην ταύτην καλοῦμεν **παραβολήν**, τὸ σημεῖον Α **κορυφὴν** αὐτῆς καὶ τὸν ἄξονα ΑΤ **ἄξονα τῆς παραβολῆς.**

Παρατηρήσεις 1) Τὰ χαρακτηριστικώτερα σημεῖα τῆς καμπύλης $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι : ἡ κορυφὴ αὐτῆς $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, τὰ σημεῖα τομῆς τῆς παραβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x $Z(\rho_2, 0)$ καὶ $H(\rho_1, 0)$, ὅπου ρ_1, ρ_2 ρίζαι τοῦ τριωνύμου, καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς παραβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν ψ $\Delta(0, \gamma)$ καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ $E\left(-\frac{\beta}{\alpha}, \gamma\right)$. 2) Τὸ σημεῖον $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ κεῖται, ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄξονα $x'0x$, κάτωθεν, ἢ ἐπί, ἢ ἄνωθεν αὐτοῦ, καθ' ὅσον εἶναι $\Delta > 0$, ἢ $\Delta = 0$, ἢ $\Delta < 0$. Πράγματι, διότι τότε ἀντιστοίχως θὰ εἶναι :

$$\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} < 0, \quad \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} = 0, \quad \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} > 0$$

Τοῦτο δεικνύεται εἰς τὰ ἀκόλουθα σχήματα.



Σχ. 110.4

β) Ἐὰν α < 0. Τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν σκεπτόμενοι ὁμοίως. Τὴν ἐργασίαν ταύτην ἀφήνομεν διὰ τοὺς μαθητάς.

Παράδειγμα : Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = x^2 - 5x + 6$

Κατασκευή: Ἐπειδὴ $\alpha = 1 > 0$, ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον. Εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας τῶν χαρακτηριστικῶν σημείων τῆς καμπύλης. Κορυφή : $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Σημεῖα τομῆς μὲ τὸν $x'0x$: $\Gamma(2,0)$ καὶ $B(3,0)$. Σημεῖον τομῆς μὲ τὸν $\psi'0\psi$: $\Delta(0, 6)$ καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ $E(5,6)$. Δύο ἕτερα συμμετρικὰ σημεῖα : $Z(1,2)$ καὶ $H(4,2)$. Μὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην κατὰ προσέγγισιν. Τὴν κατασκευὴν ταύτην δεικνύει τὸ σχῆμα.

Σχ. 110.5

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

346) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$\psi = \frac{2}{3}x - 2, \quad \psi = -2 - \frac{1}{2}x, \quad x = \pm\psi, \quad \psi = \alpha x + 2, \quad \psi = \pm x + \beta$

347) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ αἱ εὐθεῖαι $\psi = (\lambda - 1)x + 2\mu$ καὶ $\psi = -(2+\lambda)x + 5$ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον $M\left(\frac{3}{7}, \frac{20}{7}\right)$;

348) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν εὐθειῶν $\psi = 2x + 1$, $\psi = -x + 3$, $\psi = x + \frac{5}{3}$. Τί παρατηρεῖτε ; Δικαιολογήσατε τὴν παρατήρησίν σας.

349) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

$\psi = -\frac{x^2}{3} + 2x - 2, \quad \psi = -\frac{x^2}{2} + 4, \quad \psi = x^2 + x + 1$

$\psi = 2x^2 + x, \quad \psi = x^2 - x - 6, \quad \psi = -x^2 + x - 2$

350) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ α τὸ μέγιστον τῆς συναρ. $\psi = -\frac{x^2}{3} + 2x - 2\alpha$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 1 ; Ἀκολούθως παραστήσατε αὐτὴν γραφικῶς.

351) Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ λύσεις των :

$$\left\{\begin{array}{l}\psi = -2x - 1\\ \psi = x^2 - 2x - 5,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\psi = x^2 - x + 1\\ \psi = x^2 + x\end{array}\right.$$

352) Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν συναρτήσεων $\psi = -x^2 + 2x + 3$ καὶ $\psi = \frac{x^2}{2} - 4\left(x - \frac{3}{4}\right)$. Ἀκολούθως νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ α, ἵνα ἡ εὐθεῖα $\psi = \alpha$ τέμνῃ ἀμφοτέρας τὰς καμπύλας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

353) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)x^2 + 2(\alpha + \beta + \gamma)x + 3 = 0$, $\quad \alpha, \beta, \gamma \in R$

2) $\frac{(\alpha - x)^3 - (\beta - x)^3}{(x - \alpha)^2 + (\beta - x)^2} = \alpha - \beta$, $\quad \alpha, \beta \in R$

3) $(\kappa - x)^3 + (x - \lambda)^3 = (\kappa - \lambda)^3$ $\quad \kappa, \lambda \in R$

4) $(x - \alpha + 2\beta)^3 - (x - 2\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta)^3$, $\quad \alpha, \beta \in R$

5) $\frac{(x - \alpha)(x - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} - \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\gamma - \alpha)} = 1$ $\quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \in R$

354) Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζαν τὸν μιγαδικὸν $\mu + \nu i$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα τῆς $f(x) = 0$ εἶναι ὁ μιγαδικὸς $\mu - \nu i$.

355) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $3x^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 0$.

356) Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ἔχῃ ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ρίζας τῆς $f(x) + \lambda(2x + \alpha) = 0 \ \forall \lambda \in R$

357) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\beta^2x^2 + (\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2)x + \gamma^2 = 0$, ἂν α, β, γ παριστοῦν μήκη τῶν πλευρῶν τυχόντος τριγώνου.

358) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β′ βαθμοῦ, ἔχουσα ρίζας τὰς x_1^2, x_2^2 καὶ ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα ἡ νέα ἐξίσωσις ἔχῃ διπλῆν ρίζαν.

359) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τοῦ τριωνύμου $f(x) = \alpha^2 x + \beta x + \gamma$ καὶ $\frac{S}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $f\left(\frac{S}{2}+k\right)=f\left(\frac{S}{2}-k\right)$, ὅπου k τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμός.

360) Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ k καὶ λ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+kx+\lambda=0$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ k καὶ λ.

361) Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισ. $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1+\lambda(\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2)=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχει σχέσις μεταξὺ τῶν ριζῶν x_1, x_2 ἀνεξάρτητος τοῦ λ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις ἔχει διπλῆν ρίζαν.

362) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ἔχουσα ρίζας x_1, x_2. Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις, ἔχουσα ρίζας $x_1+\lambda$, $x_2+\lambda$ καὶ ἀκολούθως νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ, ἵνα αὕτη εἶναι τῆς μορφῆς 1) $Ax^2+\Gamma=0$ καὶ 2) $Ax^2+Bx=0$.

363) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ κ καὶ λ ὥστε, ἂν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισ. $x^2+\kappa x+\lambda=0$, τότε οἱ ἀριθμοὶ x_1+1, x_2+1 νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισ. $x^2-\kappa^2 x+\kappa\lambda=0$.

364) Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in Q$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει ρίζαν τὸν ἀσύμμετρον $\kappa+\sqrt{\lambda}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἄλλη ρίζα τῆς $f(x)=0$ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος $\kappa-\sqrt{\lambda}$. Ἔνθα $\kappa, \lambda \in Q$ καὶ λ μὴ τέλειον τετράγωνον ρητοῦ.

365) Ἐὰν τῶν ἐξισώσεων $x^2+2\alpha x+\beta=0$ καὶ $x^2+2Ax+B=0$ αἱ ρίζαι εἶναι ἀντιστοίχως (x_1, x_2) καὶ (x_1+k, x_2+k), νὰ δειχθῇ ὅτι : $A^2-B=\alpha^2-\beta$.

366) Ἐὰν αἱ ρίζαι x_1, x_2 τῆς ἐξισ. $\alpha x^2+\beta x+\beta=0$ ἐἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $\mu, \nu \in N$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}+\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=0$.

367) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, ἵνα τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=\alpha^2 x^2+(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)x+\gamma^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

368) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(\alpha+\beta)^2 x^2+2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha-\beta)^2$, $\alpha, \beta \in R$ καὶ $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς διαφορὰν δύο τετραγώνων πραγματικῶν παραστάσεων καὶ ἀκολούθως νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων.

369) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ μ, διὰ τὰς ὁποίας ἡ παράστασις $x^2+(\mu\psi+2)x+ +(2\psi+3)(\psi-1)$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο ρητῶν πραγματικῶν παραγόντων α'/θμίων ὡς πρὸς x καὶ ψ.

370) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἡ παράστασις $(\alpha x+\beta)^2+ +(\gamma x+\delta)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἐν συνεχείᾳ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν αἱ παραστάσεις $(\alpha_1 x+\beta_1)^2+(\alpha_2 x+\beta_2)^2$ καὶ $(\alpha_2 x+\beta_2)^2+(\alpha_3 x+\beta_3)^2$ εἶναι τέλεια τετράγωνα, τότε καὶ ἡ παράστασις $(\alpha_1 x+\beta_1)^2+(\alpha_3 x+\beta_3)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_{1,2,3}$, $\beta_{1,2,3}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ὑποτίθενται πραγματικοί.

371) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $f(x) \equiv 2x^2-\lambda(10x-7)-1$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀνίσους $\forall \lambda \in R$.

372) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) \equiv (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)+(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)+(x-\alpha_3)(x-\alpha_1)=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀνίσους, ἂν $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3$.

373) Ὁμοίως διὰ τὴν $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{x-\alpha_3}+\frac{\alpha_2+\alpha_3}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_3+\alpha_1}{x-\alpha_2}=0$, ἂν $\alpha_1^2<\alpha_2^2<\alpha_3^3$.

374) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις β' βαθμοῦ ἔχουσα διπλῆν ρίζαν τὴν κοινὴν ρίζαν τῶν δύο τριωνύμων $x^2-\alpha x+\beta$ καὶ $x^2-8x+\alpha$.

375) Ὑπὸ ποίαν συνθήκην τὰ τριώνυμα $x^2+\alpha x\psi+\beta\psi^2$ καὶ $x^2+\gamma x\psi+\delta\psi^2$ ἔχουν ἕνα κοινὸν παράγοντα πρώτου βαθμοῦ ;

376) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ Δ τῆς ἐξισ. $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1+\lambda(\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2)=0$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἂν αἱ ἐξισ. $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma=0$ καὶ $\alpha_2 x^2+\beta_2 x+\gamma_2=0$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν.

377) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις :

1) $x^2-(3\alpha+\beta)x+2\alpha(\alpha+\beta)<0$,

2) $\frac{(x+\alpha)^2}{(x+\beta)^2}<\frac{\alpha^2+x^2}{\beta^2+x^2}$, ἂν $\alpha>\beta>0$.

378) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ παράστασις $(\lambda - 2)x^2 + 4x + \lambda + 1$ διατηρεῖ ὁμοσήμους τιμὰς διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ;

379) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον ὁρισμοῦ τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως
$\psi = 5\sqrt{x^2 - 4x + 3} - 2\sqrt{-x^2 + 6x + 8}$

380) Νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $x \in R$ ἀληθεύει ἡ ἀνίσωσις $x^2 - 2\alpha x + (\beta + \gamma)^2 > 0$, ἂν α, β, γ παριστοῦν μήκη πλευρῶν τριγώνου ;

381) Τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ διὰ $x = 5$ ἔχει ἐλάχιστον τὸν -3, ἡ μία του δὲ ρίζα εἶναι ὁ ἀριθμὸς 2. Εὕρατε τὰ α, β, γ.

382) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $\psi = \alpha_1 x + \beta_1$, $\psi = \alpha_2 x + \beta_2$, $\psi = \alpha_3 x + \beta_3$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ

ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

111. Ὁρισμός. *Καλεῖται διτετράγωνος ἐξίσωσις ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, πᾶσα ἐξίσωσις 4ου βαθμοῦ, περιέχουσα μόνον ἀρτίας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου.*

Ἤτοι τῆς μορφῆς $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\beta, \gamma \in R$ ἢ καὶ πραγματικαὶ παραστάσεις μὴ περιέχουσαι τὸν x.

Τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ καλεῖται **διτετράγωνον τριώνυμον.**

112. ΕΠΙΛΥΣΙΣ.

Ἐπίλυσις αὐτῆς ἐπιτυγχάνεται διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x^2 = \psi$, ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\psi^2 + \beta\psi + \gamma = 0$, ἥτις καλεῖται **ἐπιλύουσα** τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως.

Ἡ ἐπιλύουσα ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις ψ_1 καὶ ψ_2 πραγματικὰς ἢ καθαρὰς μιγαδικὰς συζυγεῖς, ὁπότε ἐπανερχόμενοι εἰς τὸν μετασχηματισμὸν $x^2 = \psi$ ἔχομεν $x^2 = \psi_1$ καὶ $x^2 = \psi_2$. Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς πραγματικὸς ἢ μιγαδικός, ἔχει δύο μόνον τετραγωνικὰς ρίζας ἀντιθέτους (§ 73), εὑρίσκομεν ἐκ τῶν $x^2 = \psi_1$ καὶ $x^2 = \psi_2$ τὰς λύσεις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $x = \pm\sqrt{\psi_1}$, $x = \pm\sqrt{\psi_2}$, ἐξ ὧν ἔχομεν $x_1 = +\sqrt{\psi_1}$, $x_2 = -\sqrt{\psi_1}$, $x_3 = +\sqrt{\psi_2}$, $x_4 = -\sqrt{\psi_2}$.

Ὥστε : Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλυούσης εἶναι ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως, ἀνὰ δύο ἀντίθετοι.

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$

Τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους καὶ τοῦ προσήμου τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλυούσης αὐτῆς.

Οὕτως, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ συμπεράσματα τοῦ πίνακος τῆς (§ 93), δυνάμεθα νὰ συμπληρώσωμεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα διερευνήσεως τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως :

Διερεύνησις τῆς ἐξισ. $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0,\ \alpha,\beta,\gamma\in R,\ \alpha\neq 0$				
Δ	P	S	Ρίζαι ἐπιλυούσης	Εἶδος ριζῶν διτετραγώνων
+	+	+	$\psi_1, \psi_2 \in R^+$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \in R,\ x_1=-x_2,\ x_3=-x_4$
		—	$\psi_1, \psi_2 \in R^-$	$x_1, x_2, x_3, x_3 \in I$
	—	+	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 \in R^-$	$x_1, x_2 \in R,\ x_3, x_4 \in I$
		—	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 \in R^-$	$x_1, x_2 \in R,\ x_3, x_4 \in I$
		0	$\psi_1 \in R^+, \psi_2 \in R^-, \psi_1=-\psi_2$	$x_1 . x_2 \in R,\ x_3, x_4 \in I$
	0	+	$\psi_1 \in R^+, \psi_2=0$	$x_1, x_2, x_3=x_4=0\in R$
		—	$\psi_2 \in R^-, \psi_1=0$	$x_3, x_4 \in I,\ x_1=x_2=0$
0	+	+	$\psi_1=\psi_2 \in R^+$	$x_1=x_3\in R,\ x_2=x_4\in R$
		—	$\psi_1=\psi_2 \in R^-$	$x_1=x_3\in I,\ x_2=x_4\in I$
		0	$\psi_1=\psi_2=0$	$x_1=x_2=x_3=x_4=0$
—			$\psi_1, \psi_2 \in (C-R)$	$x_1, x_2, x_3, x_4 \in (C-R)$

Σημ. I σύνολον τῶν φανταστικῶν, C σύνολον τῶν μιγαδικῶν.

113. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΤΟΥ ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\varphi(x)\equiv\alpha x^4+\beta x^2+\gamma,\ \alpha\neq 0$.

Ἐὰν ψ_1, ψ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐπιλυούσης $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma$, τότε $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma\equiv\alpha(\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2)$. Ἐκ δὲ τῆς $x^2=\psi \Leftrightarrow \psi=x^2$ προκύπτει :

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma\equiv\alpha(x^2-\psi_1)(x^2-\psi_2)\equiv$$
$$\equiv\alpha(x+\sqrt{\psi_1})(x-\sqrt{\psi_1})(x+\sqrt{\psi_2})(x-\sqrt{\psi_2})\equiv$$
$$\equiv\alpha(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

Ἐκ τοῦ μετασχηματισμοῦ τούτου ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διτετράγωνον τριώνυμον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ρίζας του.

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἄλλας μορφὰς τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου, τὰς ὁποίας δίδομεν ὡς ἀσκήσεις.

Παραδείγματα : 1) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $36x^4+11x^2-5=0$

Ἐπίλυσις: Ὁ μετασχηματισμὸς $x^2=\psi$ δίδει τὴν ἐπιλύουσαν $36\psi^2+11\psi-5=0$, ἥτις ἔχει ρίζας $\psi_1=\frac{1}{4}$, $\psi_2=-\frac{5}{9}$

Αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων $x^2=\frac{1}{4}$, ἐξ ἧς $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$ καὶ $x^2=-\frac{5}{9}$, ἐξ ἧς $x_3=i\frac{\sqrt{5}}{3}$, $x_4=-i\frac{\sqrt{5}}{3}$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισ. $2x^4-5x^2-3=0$

Λύσις : Ἔχομεν διὰ $x^2=\psi$ τὴν ἐπιλύουσαν $2\psi^2-5\psi-3=0$, ἥτις δίδει: $\Delta=25+24=49>0$, $P=-\frac{3}{2}<0$, $S=\frac{5}{2}>0$

Ἄρα ἡ ἐπιλύουσα ἔχει ρίζας πραγματικάς, ἑτεροσήμους μὲ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν θετικήν. Καὶ συνεπῶς ἡ διτετράγωνος ἔχει (ἐκ τῆς θετικῆς) δύο ρίζας πραγματικὰς ἀντιθέτους καὶ (ἐκ τῆς ἀρνητικῆς) δύο ρίζας φανταστικὰς ἀντιθέτους.

3) Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ τριώνυμον

$$\varphi(x) \equiv x^4 - \alpha x^2 (\alpha - 1) - \alpha^3, \quad \alpha > 0$$

Λύσις : Λαμβάνομεν τὴν ἐπιλύουσαν $\psi^2 - \alpha\psi(\alpha - 1) - \alpha^3$, ἥτις ἔχει ρίζας $\psi_1 = \alpha^2$, $\psi_2 = -\alpha$. Συνεπῶς αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι : $x^2 = \alpha^2$, ἐξ ἧς $x_1 = \alpha$, $x_2 = -\alpha$ καὶ $x_3 = i\sqrt{\alpha}$, $x_4 = -i\sqrt{\alpha}$

Ἄρα ἔχομεν $\varphi(x) \equiv x^4 - \alpha x^2 (\alpha - 1) - \alpha^3 \equiv (x-\alpha)(x+\alpha)(x - i\sqrt{\alpha})(x + i\sqrt{\alpha}) \equiv$

$$\equiv (x-\alpha)(x+\alpha)(x^2+\alpha)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

383) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$, $\quad 9x^4 - 5x^2 - 4 = 0$

2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x^2+2} = \dfrac{x}{2}$, $\quad \dfrac{2(x^2+2)}{5} = \dfrac{(x^2-1)(x^2-2)+6}{x^2+1}$

3) $x^2(\alpha x^2 - 1) = \alpha\beta^2(\alpha x^2 - 1)$, $\quad \dfrac{x^4+1}{x^2-1} = \dfrac{\alpha}{\beta}\left(x^2 - 1\right)$

324) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων :

1) $2x^4 - 5x^2 - 7 = 0$, $\quad$ 2) $11x^4 + 13x^2 + 2 = 0$, $\quad$ 3) $2x^4 + 19x^2 + 9 = 0$

385) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων τὰ τριώνυμα :

1) $\varphi_1(x) \equiv x^4 + 13x^2 - 48$, 2) $\varphi_2(x) \equiv 36x^4 - 13x^2 + 1$, 3) $\varphi_3(x) \equiv \alpha^2\beta^2\gamma^2 x^4 + x^2(\alpha^2 - \beta^2\gamma^2) - 1$

386) Νὰ σχηματισθῇ διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἔχουσα ρίζας

1) $\pm 3, \pm \dfrac{1}{2}$, $\quad$ 2) $\pm\sqrt{3}, \pm i$, $\quad$ 3) $\pm \dfrac{i}{2}, \quad \pm 2i\sqrt{2}$, 4) $\pm \dfrac{\alpha}{2}, \pm \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

387) Νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $(\lambda - 1)x^4 - 4x^2 + \lambda + 2 = 0$, $\quad$ 2) $(\mu+1)x^2 - 2(\mu - 1)x + 3(\mu - 1) = 0$

388) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, μετασχηματίζεται εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων τοῦ x.

389) Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\alpha} < 0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ μετασχηματίζεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων καὶ ἑνὸς β'/βαθμίου παράγοντος ὡς πρὸς x.

114. ΜΕΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΔΙΠΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΕΙΣ ΑΠΛΑ

Αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, ὅπου $A, B \in Q^+$, B μὴ τέλειον τετράγωνον ρητοῦ καὶ $A > \sqrt{B} \Rightarrow A^2 - B > 0$, καλοῦνται διπλᾶ τετραγωνικὰ ριζικά. Τὰ Α καὶ Β δύναται νὰ εἶναι καὶ ρηταὶ παραστάσεις.

Τοιαῦται παραστάσεις ἀπαντῶνται εἰς τὰς λύσεις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως, ὅταν ἡ διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ τῆς ἐπιλυούσης αὐτῆς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον ρητῆς παραστάσεως τῶν συντελεστῶν α, β, γ ὑποτιθεμένων ρητῶν. Πράγματι εἰς τὰς λύσεις τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως

$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}}$, ἐὰν θέσωμεν $-\frac{\beta}{2\alpha}=A$ καὶ $\frac{\Delta}{4\alpha^2}=B$, ἔχομεν $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

Αἱ δυσκολίαι, τὰς ὁποίας δημιουργοῦν τὰ διπλᾶ ριζικά, αἴρονται εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ αὐτῶν εἰς ἁπλᾶ.

Πρὸς τούτοις, ζητοῦμεν δύο ρητοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς x καὶ ψ τοιούτους, ὥστε : $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{\psi}$, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς τουλάχιστον νὰ εἶναι μὴ τέλειον τετράγωνον ρητοῦ.

Τὸ διπλοῦν σημεῖον δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν ἐκ τῆς $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{\psi}$, δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, $A+\sqrt{B}=x+\psi+2\sqrt{x\psi}$. Ἐπειδὴ $\sqrt{B}$ καὶ $\sqrt{x\psi}$ ἄρρητοι καὶ A καὶ $x+\psi$ ρητοί, ἔπεται (§ 63)

$$\left.\begin{array}{l}A=x+\psi\\ \sqrt{B}=2\sqrt{x\psi}\end{array}\right\}\Rightarrow A-\sqrt{B}=x+\psi-2\sqrt{x\psi}\Rightarrow A-\sqrt{B}=(\sqrt{x}-\sqrt{\psi})^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{A-\sqrt{B}}=|\sqrt{x}-\sqrt{\psi}|$$

Ὥστε ἔχομεν δι' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις $x+\psi=A$, $\sqrt{B}=2\sqrt{x\psi}$, ἢ $x+\psi=A$, $4x\psi=B$ ἢ $x+\psi=A$, $x\psi=\frac{B}{4}$, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν ἐξίσωσιν $\omega^2-A\omega+\frac{B}{4}=0$ μὲ ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς x καὶ ψ. Αἱ ρίζαι αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι :

$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$, $\psi=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$. Διὰ νὰ εἶναι δὲ οἱ x καὶ ψ ρητοί, πρέπει $A^2-B=\Gamma^2$, $(\Gamma\in Q)$, ὅθεν $x=\frac{A+|\Gamma|}{2}$, $\psi=\frac{A-|\Gamma|}{2}$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $x,\psi\in Q^+$ καὶ $x=\frac{A+|\Gamma|}{2}$, $\psi=\frac{A-|\Gamma|}{2}$, τότε :

$$(\sqrt{x}\pm\sqrt{\psi})^2=x+\psi\pm2\sqrt{x\psi}=\frac{A+|\Gamma|}{2}+\frac{A-|\Gamma|}{2}\pm2\sqrt{\frac{A^2-\Gamma^2}{4}}=$$
$$=A\pm\sqrt{B}.$$

Ὅθεν $|\sqrt{x}\pm\sqrt{\psi}|=\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

Ἄρα: **Διὰ νὰ ὑπάρχουν ρητοὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ ψ, μὲ ἕνα τουλάχιστον μὴ τέλειον τετράγωνον ρητοῦ, τοιοῦτοι, ὥστε $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{\psi}$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $A, B\in Q^+$ $A^2-B=\Gamma^2$, $(\Gamma\in Q)$.**

Ὁ μετασχηματισμὸς τότε τοῦ διπλοῦ ριζικοῦ εἶναι δυνατὸς καὶ γίνεται βάσει τοῦ τύπου

$$\boxed{\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\pm\left(\sqrt{\frac{A+|\Gamma|}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-|\Gamma|}{2}}\right)}$$

Παραδείγματα: Νὰ μετασχηματισθῇ ἕκαστον τῶν ἀκολούθων διπλῶν ριζικῶν εἰς ἁπλᾶ : $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$.

Λύσις: α) Ἐπειδὴ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}$ καὶ $3^2-8=1=1^2$, ἔχομεν $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{1}=\sqrt{2}+1$

β) Ἔχομεν $\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} + \sqrt{2\alpha + \sqrt{4(\alpha^2 - \beta^2)}}$ καὶ ἐπειδὴ $A = 2\alpha$, $B = 4(\alpha^2 - \beta^2)$, ἕπεται $A^2 - B = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - \beta^2) = 4\beta^2 = \Gamma^2$. Ὅθεν $\sqrt{2\alpha + 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} = \sqrt{\dfrac{2\alpha + 2\beta}{2}} + \sqrt{\dfrac{2\alpha - 2\beta}{2}} = \sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha - \beta}$. Ὑπεθέσαμεν $\alpha \geqslant \beta > 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

390) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἁπλᾶ ριζικὰ αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

1) $\sqrt{7 + \sqrt{13}}$, $\sqrt{8 - \sqrt{15}}$, $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$, $\sqrt{14 - 2\sqrt{13}}$,

2) $\sqrt{\alpha + 2\sqrt{\alpha - 1}}$, $\sqrt{\alpha^2 + 3 - 2\alpha\sqrt{3}}$, $\sqrt{\alpha + \beta - \gamma - 2\sqrt{(\beta - \gamma)\alpha}}$

3) $\sqrt{11 - 2\sqrt{30}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$, $\sqrt{3 + 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}} +$
$+ \sqrt{3 + 8\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}$

391) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ἵνα ἡ παράστασις, $\forall x > 4$, $\psi = \sqrt{x + \lambda\sqrt{x - 4}}$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἁπλᾶ ριζικά.

392) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\psi = \sqrt{x + 3\sqrt{2x - 9}} - \sqrt{x - 3\sqrt{2x - 9}}$ ἰσοῦται μὲ $\sqrt{2(2x - 9)}$, ἂν $4{,}5 \leqslant x \leqslant 9$ καὶ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x, ἂν $x > 9$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ *

115. Ὁρισμός. *Ἐξίσωσις τις $\varphi(x) = 0$ καλεῖται ἀντίστροφος, ὅταν, ἔχουσα ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $\varrho \neq \pm 1$, ἔχῃ ὡς τοιαύτην καὶ τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{1}{\varrho}$ $(\varrho \neq 0)$.*

Βάσει τοῦ τεθέντος ὁρισμοῦ, μία ἀντίστοφος ἐξίσωσις δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντὶ τοῦ x τεθῇ τὸ $\dfrac{1}{x}$, $(x \neq 0)$.

Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ εἶναι ἀντίστροφος 3ου βαθμοῦ, διότι ἂν ἀντὶ τοῦ x τεθῇ εἰς αὐτὴν $\dfrac{1}{x}$ εὑρίσκομεν:

$\alpha \cdot \dfrac{1}{x^3} + \beta \cdot \dfrac{1}{x^2} + \beta \cdot \dfrac{1}{x} + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta x + \beta x^2 + \alpha x^3 = 0$, ἥτις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

Ἀποδεικνύεται ὅτι : **Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = 0$ εἶναι ἀντίστροφος, εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων αὐτῆς, οἱ ἰσάκις τῶν ἄκρων ἀπέχοντες, νὰ εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι.**

Εἰδικώτερον, ἐὰν ἡ ἀντίστροφος στερῆται τῶν ριζῶν ± 1, εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων αὐτῆς, οἱ ἰσάκις τῶν ἄκρων ἀπέχοντες, εἶναι ἴσοι.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις β' ἕως καὶ ε' βαθμοῦ εἶναι :

(*) Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως ὀφείλεται εἰς τὸν De Moivre (1667–1754).

$\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$

$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$

$\alpha x^4 + \beta x^3 + \beta x + \alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$

$\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ $\qquad$ $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0$

Ἡ λύσις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων 3ου, 4ου καὶ 5ου βαθμοῦ δύναται ἐν γένει νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

116. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Ἐπίλυσις ἀντιστρόφων ἐξισώσεων 3ου καὶ 4ου βαθμοῦ μὲ ἐλλείποντα τὸν μεσαῖον ὅρον.

Τὸ πρῶτον μέλος τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν μετασχηματίζεται εὐκόλως εἰς γινόμενον παραγόντων.

α) Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $(\alpha, \beta \in R)$

Ἔχομεν : $\alpha x^3 + \beta x^2 + \beta x + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(x^3 + 1) + \beta x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x + 1)[\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha] = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x + 1 = 0$ καὶ $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$, ἐξ οὗ ἔχομεν $x = -1$ καὶ ἄλλας δύο ρίζας ἀντιστρόφους ἐκ τῆς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως $\alpha x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$

β) Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^3 + \beta x^2 - \beta x - \alpha = 0$ $(\alpha, \beta \in R)$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν $(x - 1)[\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha] = 0$, ἥτις δίδει : $x = 1$ καὶ ἄλλας δύο ρίζας ἀντιστρόφους.

γ) Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0$ $(\alpha, \beta \in R)$

Ἔχομεν : $\alpha x^4 + \beta x^3 - \beta x - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha(x^4 - 1) + \beta x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x^2 - 1)[\alpha x^2 + \beta x + \alpha] = 0$, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισ. $x^2 - 1 = 0$ καὶ $\alpha x^2 + \beta x + \alpha = 0$, ἐξ οὗ ἔχομεν $x = \pm 1$ καὶ δύο ἄλλας ρίζας ἀντιστρόφους.

Σημ. Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^4 + \beta x^3 + \beta x + \alpha = 0$ λύεται, ὅπως ἡ πλήρης 4ου βαθμοῦ $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ κατωτέρω.

2. Ἐπίλυσις ἀντιστρόφων ἐξισ. 4ου καὶ 5ου βαθμοῦ.

α) Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ x^2, $(x \neq 0)$, ὁπότε ἔχομεν $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta x + \gamma + \frac{\beta}{x} + \frac{\alpha}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha\left(x^2 + \frac{1}{x_2}\right) + \beta\left(x + \frac{1}{x}\right) + \gamma = 0$. Ἐκτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x + \frac{1}{x} = \omega$, ὅτε $x^2 + \frac{1}{x_2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = \omega^2 - 2$, καὶ δι' ἀντικαταστάσεως λαμβάνομεν $\alpha(\omega^2 - 2) + \beta\omega + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma - 2\alpha = 0$, ἥτις καλεῖται **ἐπιλύουσα** τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχει ἐν γένει δύο ρίζας ω_1, ω_2. Ἐπανερχόμενοι εἰς τὸν μετασχηματισμὸν $x + \frac{1}{x} = \omega$, λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις : $x + \frac{1}{x} = \omega_1$ καὶ $x + \frac{1}{x} = \omega_2$ ἢ $x^2 - \omega_1 x + 1 = 0$ καὶ $x^2 - \omega_2 x + 1 = 0$, αἱ ὁποῖαι δίδουν ἐν γένει ἀνὰ δύο ρίζας, καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίστροφος 4ου βαθμοῦ ἔχει ἐν γένει 4 ρίζας.

Τὸ εἶδος τῶν 4 τούτων ριζῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν ω_1, ω_2 τῆς ἐπιλυούσης καὶ ἀκολούθως ἐκ τῆς διακρινούσης $\Delta_1 = \omega_1{}^2 - 4$ καὶ $\Delta_2 = \omega_2{}^2 - 4$ τῶν ἐξισώσεων $x^2 - \omega_1 x + 1 = 0$ καὶ $x^2 - \omega_2 x + 1 = 0$ ἀντιστοίχως.

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$

Ἐπίλυσις: Διαιροῦμεν διὰ x^2 καὶ λαμβάνομεν διαδοχικῶς: $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$, ἥτις διὰ $x + \frac{1}{x} = \omega \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \omega^2 - 2$ γίνεται: $6\omega^2 - 35\omega + 50 = 0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\omega_1 = \frac{10}{3}$ καὶ $\omega_2 = \frac{5}{2}$. Οὕτως ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\left|\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0, \text{ ἐξ ἧς ἔχομεν } x_1 = 3 \text{ καὶ } x_2 = \frac{1}{3} \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0, \text{ ἐξ ἧς ἔχομεν } x_3 = 2 \text{ καὶ } x_4 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

β) Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$

Ἔχομεν: $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow$
$\alpha(x^5 + 1) + \beta x(x^3 + 1) + \gamma x^2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x + 1)[\alpha(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) + \beta x(x^2 - x + 1) + \gamma x^2] = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x + 1 = 0$, $\alpha x^4 + (\beta - \alpha)x^3 + (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + (\beta - \alpha)x + \alpha = 0$. Ἡ πρώτη δίδει $x = -1$. Ἡ δεύτερη εἶναι ἀντίστροφος 4ου βαθμοῦ καὶ ἐπιλύεται ὡς προηγουμένως.

γ) Ἡ ἀντίστροφος $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha = 0$ $(\alpha, \beta, \gamma \in R)$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἔχομεν τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων:

$x - 1 = 0$, ἐξ ἧς $x = 1$ καὶ
$\alpha x^4 + (\alpha + \beta)x^3 + (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha = 0$, ἥτις πάλιν εἶναι ἀντίστροφος 4ου βαθμοῦ.

Γενικαὶ παρατηρήσεις. 1) Αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις ἀνωτέρου τοῦ 5ου βαθμοῦ δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ἐπιλυθοῦν δι' ἀναγωγῆς των εἰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις.

2) Ὁ μετασχηματισμὸς $x + \frac{1}{x} = \omega$ ὑποβιβάζει ἐν γένει τὸν βαθμὸν μιᾶς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως ἀρτίου βαθμοῦ εἰς τὸ ἥμισυ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

393) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1) $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0$, $\quad x^3 - \frac{37}{12}x^2 + \frac{37}{12}x - 1 = 0$

2) $x^4 - 6x^3 + 6x - 1 = 0$, $\quad x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$

3) $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = 0$,

4) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$, $\quad 2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$

5) $\frac{x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{(x - 1)^2}$, $\quad \frac{(1 + x)^4}{1 + x^4} = 2$, $\quad \frac{(x^2 - x + 1)^2}{x^4 - x^3 + x^2 - x + 1} = \frac{9}{13}$

394) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις (μὴ ἀντίστροφοι):

1) $6x^4 + 25x^3 + 12x^2 - 25x + 6 = 0$, 2) $x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

3) $5x^4 - 16x^3 + 2x^2 + 16x + 5 = 0$, 4) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 4 = 0$

395) Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ $x^3 + \lambda x^2 + \lambda x + 1 = 0$ $(\lambda \in R)$.

ΔΙΩΝΥΜΟΙ ΚΑΙ ΤΡΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

117. ΔΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ.

Ὁρισμός. *Καλεῖται διώνυμος ἐξίσωσις, ὡς πρὸς ἄγνωστον τὸν* x, *πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς* $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} = 0$, *ὅπου* A *καὶ* B *πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ πραγματικαὶ παραστάσεις μὴ περιέχουσαι τὸν ἄγνωστον καὶ* $\kappa, \lambda \in N$.

Αἱ ἐξισώσεις : $x^3 + 8 = 0$, $x^4 - 81 = 0$, $27x^4 - 64x = 0$, $2x^3 - 3x^2 = 0$ εἶναι διώνυμοι.

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισ. $\mathbf{Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} = 0}$ ($A \neq 0$ καὶ $\kappa > \lambda \in N$).

Ἔχομεν: $Ax^{\kappa} + Bx^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow Ax^{\lambda}\left(x^{\kappa-\lambda} + \frac{B}{A}\right) = 0 \Leftrightarrow x^{\lambda}\left(x^{\kappa-\lambda} + \frac{B}{A}\right) = 0$,

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x^{\lambda} = 0$, $x^{\kappa-\lambda} + \frac{B}{A} = 0$.

Ἐκ τῆς πρώτης $x^{\lambda} = 0$ ἔχομεν λ ρίζας ἴσας πρὸς 0, $(x_1 = x_2 = \ldots = x_{\lambda} = 0)$. Εἶναι δηλαδὴ τὸ 0 ρίζα λ βαθμοῦ πολλαπλότητος.

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις, ἐὰν θέσωμεν $\kappa - \lambda = \nu \in N$ καὶ $-\frac{B}{A} = \alpha$, γράφεται : $x^{\nu} = \alpha$.

Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) Ἐὰν ν ἄρτιος, τότε ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς ἀντιθέτους, ὅταν $\alpha > 0$ καὶ οὐδεμίαν πραγματικήν, ὅταν $\alpha < 0$

β) Ἐὰν ν περιττός, τότε ἔχει πάντοτε μίαν μόνην πραγματικὴν ρίζαν, θετικὴν μὲν ὅταν $\alpha > 0$, ἀρνητικὴν δὲ ὅταν $\alpha < 0$

Αἱ ὑπόλοιποι ρίζαι εἶναι καθαραὶ μιγαδικαί, τὴν εὕρεσιν τῶν ὁποίων θὰ ἐξετάσωμεν εἰς ἄλλην τάξιν. Ἐν τούτοις καὶ ἡμεῖς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς καθαρὰς μιγαδικὰς ρίζας, ὅταν ὁ ν λάβῃ μικρὰς τιμάς.

Παραδείγματα: Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1) $x^3 + 1 = 0$, 2) $x^4 + 16 = 0$, 3) $x^6 - 1 = 0$, 4) $x^5 - 5x^2 = 0$

Ἐπίλυσις: 1) Ἔχομεν : $x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x + 1 = 0$ καὶ $x^2 - x + 1 = 0$, ἐξ οὗ ἔχομεν $x_1 = -1$ καὶ $x_2 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Ἔχομεν: $x^4 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 16 + 8x^2 - 8x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2+4)^2 - (2\sqrt{2}\,x)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 - 2\sqrt{2}x + 4) = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 4 = 0$ καὶ $x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 4 = 0$, ἐξ οὗ ἔχομεν τὰς ρίζας x_1, x_2, x_3, x_4.

3) Τὴν ἐξίσωσιν $x^6 - 1 = 0$ δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν, ἐπιλύοντες μίαν ἐκ τῶν ἰσοδυνάμων της :

α) $(x^3+1)(x^3-1) = 0$, ἥτις δίδει : $x^3 + 1 = 0$, $x^3 - 1 = 0$

β) $(x^2-1)(x^4+x^2+1) = 0$, ἥτις δίδει : $x^2 - 1 = 0$, $x^4 + x^2 + 1 = 0$

γ) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$, ἥτις δίδει τὰς ἐξισώσεις $x - 1 = 0$, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ (ἀντίστροφος)

4) Ἔχομεν : $x^5 - 5x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^3 - 5) = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x^2 = 0$ καὶ $x^3 - 5 = 0$. Ἐκ τῆς $x^2 = 0$ ἔχομεν $x_1 = x_2 = 0$. Ἡ δευτέρα γρά-

φεται $x^3 - (\sqrt[3]{5})^3 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt[3]{5})(x^2 + \sqrt[3]{5}\,x + \sqrt[3]{25}) = 0$, ἥτις ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσ. $x - \sqrt[3]{5} = 0$, $x^2 + \sqrt[3]{5}\,x + \sqrt[3]{25} = 0$, ἐξ οὗ ἔχομεν $x_1 = \sqrt[3]{5}$,

$x_2 = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $x_3 = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}(-1 - i\sqrt{3})$

118. ΤΡΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Καλεῖται τριώνυμος ἐξίσωσις, ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς* $Ax^\kappa + Bx^\lambda + \Gamma x^\mu = 0$, *ὅπου* A, B, Γ *πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἢ πραγματικαὶ παραστάσεις μὴ περιέχουσαι τὸν ἄγνωστον καὶ* $\kappa, \lambda, \mu \in N$.

Ἐνταῦθα ἐνδιαφέρει μόνον ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν ἔχομεν $\kappa - \lambda = \lambda - \mu$, ὅταν εἶναι $\kappa > \lambda > \mu$, διότι τότε ἡ ἐπίλυσίς τῆς $A\kappa^\kappa + Bx^\lambda + \Gamma x^\mu = 0$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως $Ax^{2\nu} + Bx^\nu + \Gamma = 0$, $\nu \in N$.

Ἐπίλυσις: Ἐὰν $\kappa - \lambda = \lambda - \mu = \nu \Rightarrow \lambda = \mu + \nu$, $\kappa = \mu + 2\nu$, ὁπότε: $Ax^{\mu+2\nu} + Bx^{\mu+\nu} + \Gamma x^\mu = 0 \Leftrightarrow x^\mu(Ax^{2\nu} + Bx^\nu + \Gamma) = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $x^\mu = 0$, $Ax^{2\nu} + Bx^\nu + \Gamma = 0$. Ἡ $x^\mu = 0$ δίδει $x_1 = x_2 = \ldots = x_\mu = 0$ ἤτοι ἔχει τὸ μηδὲν ρίζαν μυοστοῦ βαθμοῦ πολλαπλότητος.

Εἰς τὴν $Ax^{2\nu} + Bx^\nu + \Gamma = 0$, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x^\nu = \psi$, λαμβάνομεν $A\psi^2 + B\psi + \Gamma = 0$, ἥτις καλεῖται **ἐπιλύουσα** τῆς ἐξισώσεως καὶ ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις ψ_1 καὶ ψ_2. Ἐπανερχόμενοι εἰς τὸν μετασχηματισμὸν $x^\nu = \psi$, λαμβάνομεν τὰς διωνύμους ἐξισώσεις $x^\nu = \psi_1$ καὶ $x^\nu = \psi_2$.

Τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς τριωνύμου $Ax^{2\nu} + Bx^\nu + \Gamma = 0$ ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλυούσης αὐτῆς.

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^{10} - 26x^7 - 27x^4 = 0$

Ἐπίλυσις: Ἔχομεν $10 - 7 = 7 - 4$, ἄρα ἡ ἐξίσωσις γράφεται: $x^4(x^6 - 26x^3 - 27) = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν $x^4 = 0$, $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ καὶ $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$, ἥτις διὰ $x^3 = \psi$ δίδει τὴν ἐπιλύουσα $\psi^2 - 26\psi - 27 = 0$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι $\psi_1 = 27$, $\psi_2 = -1$. Συνεπῶς ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὰς διωνύμους ἐξισώσεις:

$x^3 = 27 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$. Ρίζαι $x_5 = 3$, $x_{6,\,7} = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{3i\sqrt{3}}{2}$

$x^3 = -1 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$. Ρίζαι $x_8 = -1$, $x_{9,\,10} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

396) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1) $x^3 - 8 = 0$, $8x^3 + 27 = 0$, $64x^6 - x^3 = 0$, $x^5 - 81x - 0$

2) $x^5 - 32 = 0$, $x^8 - 256 = 0$, $x^6 \pm 729 = 0$, $x^{12} - 1 = 0$

3) $x^{10} \pm 1 = 0$, $x^8 \pm 1 = 0$, $3x^7 - 2x^4 = 0$, $x^9 - x^5 + x^4 - 1 = 0$

397) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1) $x^6 - 5x^3 - 24 = 0$, $x^8 - 80x^4 - 81 = 0$, $x^{10} + 31x^5 - 32 = 0$

2) $x^{12} - 33x^7 + 32x^2 = 0$, $(x - 1)^6 - 9(x - 1)^3 + 8 = 0$, $2x^3 + \dfrac{3}{x^3} = 5$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

119. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Καλεῖται ἐξίσωσις μὲ ριζικὰ ἢ ἄρρητος ἐξίσωσις, ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς ὁποίας τὸ ἓν τουλάχισνον μέλος εἶναι ἄρρητος ἀλγεβρικὴ παράστασις ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον.* Αἱ λύσεις μιᾶς ἀρρήτου ἐξισώσεως δέον νὰ ἀνήκουν εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ ὅλων τῶν ἀρρήτων παραστάσεων τῆς ἐξισώσεως. Εἰς τὰ ἑπόμενα ὡς πεδίον ὁρισμοῦ θὰ λαμβάνεται ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον θὰ καθιστᾶ πραγματικὰς τὰς παραστάσεις τῆς ἐξισώσεως ἤτοι, ἡ ἐπίλυσις τῶν ἀρρήτων ἐξισώσεων θὰ γίνεται ἐν τῷ συνόλῳ R.

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν μιᾶς ἀρρήτου ἐξισώσεως ἐπιδιώκομεν τὴν ἀναγωγὴν αὐτῆς εἰς ρητὴν ἐξίσωσιν, ἥτις δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος τῆς ἀρρήτου ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὰς ἀκολούθους προτάσεις :

1) Ἐὰν τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ὑψώσωμεν εἰς ἀρτίαν δύναμιν, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς ἀρχικῆς καὶ τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς $\varphi_1(x) = -\varphi_2(x)$.

2) Ἐὰν τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ ὑψώσωμεν εἰς περιττὴν δύναμιν, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς ρίζας μόνον τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς ἀρχικῆς.

Αἱ προτάσεις αὐταὶ μᾶς ὑποχρεώνουν, ὅπως, μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως, εἰς ἣν ἀγόμεθα κατόπιν διαδοχικῶν ὑψώσεων δι' ἐξάλειψιν τῶν ριζικῶν, γίνεται ἐπαλήθευσις ἤ, ὅπερ καὶ τὸ μεθοδικώτερον, γίνεται ἔλεγχος, ἐὰν αἱ ρίζαι ἱκανοποιοῦν τοὺς τεθέντας περιορισμούς, οἱ ὁποῖοι ἐξασφαλίζουν τὸ ὁμόσημον τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως καὶ καθιστοῦν τὰς παραστάσεις αὐτῆς πραγματικάς.

120. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

α) Τῆς μορφῆς (1) $\sqrt{A(x)} = B(x)$, ἐν R, ($A(x), B(x) \in Q$).

Πρέπει νὰ εἶναι $A(x) \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{A(x)} \geqslant 0$. Ἄρα διὰ νὰ ὑπάρχῃ λύσις, πρέπει $B(x) \geqslant 0$, ὁπότε δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον τῶν μελῶν λαμβάνομεν (2) $A(x) = [B(x)]^2 \Leftrightarrow [B(x)]^2 - (\sqrt{A(x)})^2 = 0$, ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος $B(x) = \sqrt{A(x)}$ καὶ $B(x) = -\sqrt{A(x)}$. Ἄρα διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν (1) ἀρκεῖ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν (2) καὶ ἐκ τῶν λύσεων νὰ ἀποκλεισθοῦν ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι δὲν ἱκανοποιοῦν τὸν περιορισμὸν $B(x) \geqslant 0$. Προφανῶς ἀποκλείονται αἱ λύσεις τῆς $B(x) = -\sqrt{A(x)}$, διότι καθιστοῦν τὸ $B(x) \leqslant O$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) καὶ τὸ σύστημα $B(x) \geqslant 0$, $A(x) = [B(x)]^2$ ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις.

Παράδειγμα. Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $2x - 3 = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$

Ἐπίλυσις. Τὸ ὑπόρριζον, ὡς ἔχον ρίζας καθαρὰς μιγαδικὰς εἶναι μονίμως θετικόν. Πρέπει νὰ ἔχωμεν λοιπὸν $2x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$ (περιορισμός). Ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς ἐξισ. εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν:

$(2x-3)^2 = x^2 - 2x + 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$, ἐξ οὗ $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Ἡ λύσις $x^2 = \frac{1}{3}$ ἀποκλείεται, ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμόν.

β) Τῆς μορφῆς (1) $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = \Gamma(x)$, ἐν R.

Αἱ A, B, Γ ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ x.

Πρέπει νὰ εἶναι $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $\Gamma \geqslant 0$. Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν: $A + B + 2\sqrt{A \cdot B} = \Gamma^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{AB} = \Gamma^2 - A - B$ (2)· ἀκολούθως πρέπει $\Gamma^2 - A - B \geqslant 0$ καὶ δι' ὑψώσεως ἐκ νέου τῶν μελῶν τῆς (2) εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν τὴν ρητὴν ἐξίσωσιν $4AB = (\Gamma^2 - A - B)^2$ (3). Ἐκ τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς 3 ὅσαι πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $\Gamma \geqslant 0$, $\Gamma^2 - A - B \geqslant 0$, εἶναι λύσεις τῆς (1).

Αἱ σχέσεις $A \geqslant 0$ καὶ $B \geqslant 0$ εἶναι ἀληθεῖς ἐφ' ὅσον εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἄλλαι. Πράγματι, ἡ (3) γράφεται : $4AB = \Gamma^4 - 2\Gamma^2(A+B) + (A+B)^2 \Leftrightarrow \Gamma^4 + (A-B)^2 = 2\Gamma^2(A+B)$. Τὸ α' μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι μὴ ἀρνητικόν. Ἄρα καὶ τὸ β' μέλος πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικόν. Ἤτοι $2\Gamma^2(A+B) \geqslant 0$, ἐξ ἧς $A + B \geqslant 0$. Ἐπειδὴ δέ, ἐκ τῆς (3) ἕπεται ὅτι $AB \geqslant 0$, ἄρα $A \geqslant 0$ καὶ $B \geqslant 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ εἴσωσις (1) καὶ τὸ σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \Gamma \geqslant 0 \\ \Gamma^2 - A - B \geqslant 0 \\ 4AB = (\Gamma^2 - A - B)^2 \end{array}\right| \text{ ἔχουν τὰς αὐτὰς λύσεις}$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν **R** ἡ ἐξισ. $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} = 3$.

Ἐπίλυσις: Πρέπει $x - 8 > 0$, $x - 5 > 0$, ἐξ ὧν $x > 8$, $x > 5$. Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν : $x - 8 + x - 5 + 2\sqrt{(x-8)(x-5)} = 9 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{(x-8)(x-5)} = 11 - x$, ἀκολούθως πρέπει $11 - x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 11$ καὶ δι' ὑψώσεως ἐκ νέου εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν τὴν ρητὴν ἐξίσωσιν $(x-8)(x-5) = (11-x)^2 \Leftrightarrow 9x = 81$ ἢ $x = 9$. Οἱ περιορισμοὶ συναληθεύουν διὰ $8 < x \leqslant 11$. Ἄρα ἡ λύσις $x = 9$ εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

γ) Τῆς μορφῆς (1) $\sqrt{A(x)} + \sqrt{B(x)} = \sqrt{\Gamma(x)}$, ἐν R ($A, B, \Gamma \in Q$).

Διὰ τὰς ρητὰς συναρτήσεις τοῦ x, A(x), B(x) καὶ Γ(x) διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $\Gamma \geqslant 0$, τότε δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον ἡ (1) γράφεται $A + B + 2\sqrt{AB} = \Gamma \Leftrightarrow 2\sqrt{AB} = \Gamma - (A+B)$. Ἀκολούθως ἐὰν $\Gamma - (A+B) \geqslant 0$, τότε ὑψοῦντες ἐκ νέου εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν τὴν ρητὴν ἐξίσωσιν $4AB = [\Gamma - (A+B)]^2$ (2).

Ἐκ τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (2), ὅσαι πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, $\Gamma \geqslant 0$ καὶ $\Gamma - (A+B) \geqslant 0$, εἶναι λύσεις τῆς ἐξισ. (1)

Ἄρα αἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι καὶ λύσεις τῆς (1) $\quad \sum_1 : \left| \begin{array}{l} A \geqslant 0,\ B \geqslant 0,\ \Gamma \geqslant 0 \\ \Gamma - (A+B) \geqslant 0 \\ 4AB = [\Gamma - (A+B)]^2 \end{array}\right.$

2) Ἐὰν $A < 0$, $B < 0$, $\Gamma < 0$, τότε $-A > 0$, $-B > 0$, $-\Gamma > 0$, ἡ δὲ ἐξίσωσις (1)

γράφεται $i\sqrt{-A(x)} + i\sqrt{-B(x)} = i\sqrt{-\Gamma(x)} \iff \sqrt{-A} + \sqrt{-B} = \sqrt{-\Gamma}$ (3). Ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς (3) εἰς τὸ τετράγωνον ἔχομεν $-A - B + 2\sqrt{AB} = -\Gamma$ $\iff 2\sqrt{AB} = A + B - \Gamma$. Ἀκολούθως ἐὰν $A + B - \Gamma > 0$, τότε ὑψοῦντες ἐκ νέου εἰς τὸ τετράγωνον, ἔχομεν τὴν ρητὴν ἐξίσωσιν $4AB = (A + B - \Gamma)^2$ ἢ $4AB = [\,\Gamma - (A + B)\,]^2$ (4).

Ἐκ τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (4), ὅσαι πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς $A<0$, $B<0$, $\Gamma<0$ καὶ $A + B - \Gamma > 0$, εἶναι λύσεις τῆς ἐξισ. (1).

Ἄρα αἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι καὶ λύσεις τῆς ἐξισ. (1)

$$\sum\nolimits_2 : \left|\begin{array}{c} A<0,\ B<0,\ \Gamma<0 \\ A + B - \Gamma > 0 \\ 4AB = [\,\Gamma - (A + B)\,]^2 \end{array}\right.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάζεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ἐν R τὰς λύσεις τοῦ συστήματος Σ_1 καὶ τὰς λύσεις τοῦ συστήματος Σ_2 καὶ μόνον αὐτάς, διότι ἄλλαι περιπτώσεις διὰ τὰ A, B, Γ εἶναι ἀδύνατοι.

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x-8} + \sqrt{x-5} = \sqrt{3x-21}$

Ἐπίλυσις: Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως παρέχονται ἀπὸ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x - 8 \geqslant 0,\ x - 5 \geqslant 0,\ 3x - 21 \geqslant 0,\ 3x - 21 - (x - 8 + x - 5) \geqslant 0 \\ 4\,(x - 8)\,(x - 5) = [\,3x - 21 - (x - 8 + x - 5)\,]^2 \end{cases} \quad (1)$$

καὶ ἀπὸ τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x - 8 < 0,\ x - 5 < 0,\ 3x - 21 < 0,\ x - 8 + x - 5 - (3x - 21) > 0 \\ 4\,(x - 8)\,(x - 5) = [\,3x - 21 - (x - 8 + x - 5)\,]^2 \end{cases} \quad (2)$$

Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος (1):

Ἔχομεν $x \geqslant 8$, $x \geqslant 5$, $x \geqslant 7$, $x \geqslant 8$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων γίνεται: $x^2 - 12x + 32 = 0$, ἐξ ἧς $x_1 = 8$ καὶ $x_2 = 4$

Αἱ λύσεις τοῦ συστήματος λαμβάνονται ἐκ τοῦ ἀκολούθου πίνακος

x	$x-8$	$x-5$	$3x-21$	$3x-21-(x-8+x-5)$	$x^2-12x+32$	Λύσεις τοῦ συστήματος
$-\infty$						
	−	−	−	−	+	
4	−	−	−	−	0	
	−	−	−	−	−	
5	−	0	−	−	−	
	−	+	−	−	−	
7	−	+	0	−	−	
	−	+	+	−	−	
8	0	+	+	0	0	$x = 8$
	+	+	+	+	+	
$+\infty$						

Ἐπίλυσις τοῦ συστήματος (2):

Ἐπειδὴ $x - 8 + x - 5 - (3x - 21) > 0 \iff 3x - 21 - (x - 8 + x - 5) < 0$, α ἄλλαι δὲ ἀνισότητες καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι αἱ αὐταί, δυνάμεθα ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος νὰ λάβωμεν τὰς λύσεις τοῦ συστήματος (2). Οὕτω αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (2) εἶναι : $x = 4$

Ἑπομένως αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $x_1 = 8$, $x_2 = 4$ καὶ μόνον αὐταί.

δ) Περίπτωσις γενική

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ περισσότερα τῶν δύο ριζικῶν βας τάξεως, τότε ἐπὶ τῇ βάσει περιορισμῶν, δι' ἀλλεπαλλήλων ὑψώσεων εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν ρητὴν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία θὰ περιέχῃ ὅλας τὰς λύσεις τῆς ἀρχικῆς καὶ ἄλλας ἀκόμη, ἐνδεχομένως, αἱ ὁποῖαι δέον νὰ ἀποκλεισθοῦν, ὡς μὴ πληροῦσαι τοὺς περιορισμούς.

121. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΗΣ Βας ΤΑΞΕΩΣ

Αἱ ἐξισώσεις μὲ ριζικὰ ἀνωτέρας τῆς βας τάξεως παρουσιάζουν ποικιλίαν μορφῶν. Δὲν ὑπάρχει δὲ ἑνιαῖος τρόπος ἐπιλύσεως. Συνήθως ἀκολουθεῖται ἡ μέθοδος τῆς ὑψώσεως τῶν μελῶν τῆς ἀρρήτου ἐξισώσεως εἰς κατάλληλον δύναμιν, ὥστε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις νὰ περιέχῃ ὀλιγώτερα ριζικά.

Παραδείγματα : α) Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξισ. $\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = 3 + x$

Ἐπίλυσις : Ὑψοῦντες εἰς τὸν κύβον τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως λαμβάνομεν: $x^3 + 9x^2 = (3 + x)^3 \Leftrightarrow x^3 + 9x^2 = 27 + 27x + 9x^2 + x^3 \Leftrightarrow x = -1$, ἥτις εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

β) Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[4]{8x^2 - 1} = 2x$.

Ἐπίλυσις: Ὑψοῦντες εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως λαμβάνομεν : $8x^2 - 1 = 16x^4 \Leftrightarrow 16x^4 - 8x^2 + 1 = 0$, ἥτις ἔχει ρίζας $x_1 = x_3 = \frac{1}{2}$ $x_2 = x_4 = -\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει $2x \geqq 0 \Leftrightarrow x \geqq 0$, ἄρα ἡ λύσις $x = -\frac{1}{2}$ δέον νὰ ἀποκλεισθῇ.

γ) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\Gamma} = 0$, ὅπου Α, Β, Γ ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου x

Ἐπίλυσις : Εἰς τὸ κεφάλαιον «ταυτότητες» ἐμάθομεν ὅτι :

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in R : \alpha + \beta + \gamma = 0 \vee \alpha = \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$$

Ἄρα ἐκ τῆς δοθείσης ἕπεται ἡ $\left(\sqrt[3]{A}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{B}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\Gamma}\right)^3 = 3\sqrt[3]{AB\Gamma} \Leftrightarrow A + B + \Gamma = 3\sqrt[3]{AB\Gamma}$ καὶ δι' ὑψώσεως εἰς τὸν κύβον ἡ $(A + B + \Gamma)^3 = 27AB\Gamma$.

Ἄρα ἔχομεν :

$$\boxed{\text{Ἐὰν } x \in R : \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\Gamma} = 0 \Leftrightarrow (A + B + \Gamma)^3 = 27AB\Gamma}$$

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις ἐν R $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-4} = 0$ εἶναι ἰσοδύναμος τῆς

$$(x-2+x-3+x-4)^3=27\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\Leftrightarrow(3x-9)^3=$$
$$=27\,(x^3-9x^2+26x-24)\Leftrightarrow(x-3)^3=x^3-9x^2+26x-24\Leftrightarrow x=3,$$ ἥτις εἶναι λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

398) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $5\sqrt{x-3}=\sqrt{x+9}$, $\quad \sqrt{x}+\sqrt{x+32}=16$

2) $2x=3+\sqrt{x^2-2x+6}$, $\quad \sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$,

3) $\sqrt{5(x+2)}-\sqrt{x+1}=\sqrt{x+6}$, $\quad \sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{2x+9}$

4) $\sqrt{x-15}-\sqrt{x-10}=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+17}$, $\quad (x+3)\sqrt{x+2}=(x+2)\sqrt{x+5}$

5) $\dfrac{4-\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{4x+20}}{4+\sqrt{x}}$, $\quad \dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$, $\quad 2\sqrt{x-\dfrac{x-8}{\sqrt{x}}}=6$

399) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $\sqrt[3]{x+49}-\sqrt[3]{x-49}=2$, $\quad \sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1$

2) $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{3x+2}=0$, $\quad \sqrt[3]{5x}-\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=0$

3) $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$, $\quad \left(\dfrac{10x-1}{10x+1}\right)\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-2x}}=1$, $\quad 4\sqrt[3]{x}-\dfrac{20}{\sqrt[3]{x}}=11$

400) Νὰ ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $\quad \sqrt{\alpha+\sqrt{x}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

ΑΠΛΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΒΑΘΜΟΥ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ

122. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Καλεῖται ἀνωτέρου τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἓν σύστημα δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, ἐὰν μία τουλάχιστον τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου.* Ταῦτα παρουσιάζουν μεγάλην ποικιλίαν μορφῶν καὶ ὡς ἐκ τούτου δὲν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος ἐπιλύσεώς των.

Ἐνταῦθα ἀναφέρονται μερικαὶ ἁπλαῖ μορφαὶ συστημάτων, τὰ ὁποῖα συχνὰ παρουσιάζονται καὶ εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ὁποίων ἀνάγονται δυσκολώτεραι μορφαὶ συστημάτων.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν, ἑνὸς τοιούτου συστήματος χρησιμοποιοῦμεν ἐκτὸς τῶν μεθόδων ἐπιλύσεως γραμμικοῦ συστήματος καὶ ἄλλους εἰδικοὺς τρόπους (τεχνάσματα), μὴ ὑπαγομένους εἰς ὡρισμένους κανόνας, ἐπιδιώκοντες οὕτω τὴν εὕρεσιν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων.

123. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta\psi=\gamma$, $Ax^2+Bx\psi+\Gamma\psi^2+\Delta x+E\psi+Z=0$

Ἡ ἐπίλυσις αὐτοῦ εἶναι εὔκολος, διότι ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν $x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$, ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δευτέραν ἀναγόμεθα εἰς δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ψ (*).

(*) Τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται σύστημα βου βαθμοῦ, διότι ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις

Παραδείγματα : 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $x+\psi=\alpha$, $x\psi=\beta$

Ἐπίλυσις : Ἔχομεν $\begin{cases} x+\psi=\alpha \\ x\psi=\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-\psi \\ (\alpha-\psi)\psi=\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-\psi \\ \psi^2-\alpha\psi+\beta=0, \end{cases}$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν συστημάτων.

$$\begin{cases} x=\alpha-\psi \\ \psi=\rho_1 \end{cases}, \begin{cases} x=\alpha-\psi \\ \psi=\rho_2 \end{cases}, \text{ ἐξ οὗ } \begin{cases} x=\alpha-\rho_1 \\ \psi=\rho_1 \end{cases}, \begin{cases} x=\alpha-\rho_2 \\ \psi=\rho_2 \end{cases}$$

ὅπου ρ_1, ρ_2 ρίζαι τῆς ἐξισ. $\psi^2-\alpha\psi+\beta=0$

2) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $x+\psi=\alpha$, $x^2+\psi^2=\beta^2$

Ἐπίλυσις : 1ος τρόπος. Ἔχομεν $\begin{cases} x+\psi=\alpha \\ x^2+\psi^2=\beta^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-\psi \\ (\alpha-\psi)^2+\psi^2=\beta^2 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\alpha-\psi \\ 2\psi^2-2\alpha\psi+\alpha^2-\beta^2=0, \end{cases}$ τὸ ὁποῖον ἐπιλύεται ὡς προηγουμένως

2ος τρόπος $\begin{cases} x+\psi=\alpha \\ x^2+\psi^2=\beta^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+\psi=\alpha \\ (x+\psi)^2-2x\psi=\beta^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+\psi=\alpha \\ \alpha^2-2x\psi=\beta^2 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+\psi=\alpha \\ x\psi=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2} \end{cases}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τῆς μορφῆς τοῦ παραδ. (1).

3) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 3x^2-4x\psi+\psi^2-2x+\psi+1=0 \\ x+3\psi=7 \end{cases}$

Ἐπίλυσις : Ἔχομεν :

$\begin{cases} 3(7-3\psi)^2-4(7-3\psi)\psi+\psi^2-2(7-3\psi)+\psi+1=0 \\ x=7-3\psi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40\psi^2-147\psi+134=0 \\ x=7-3\psi \end{cases}$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν συστημάτων $\begin{cases} \psi=2 \\ x=1 \end{cases}$ καὶ $\begin{cases} \psi=67/40 \\ x=79/40 \end{cases}$

β) τῆς μορφῆς $\begin{cases} \alpha_1x^2+\beta_1x\psi+\gamma_1\psi^2+\delta_1x+\varepsilon_1\psi+\zeta_1=0 \\ \alpha_2x^2+\beta_2x\psi+\gamma_2\psi^2+\delta_2x+\varepsilon_2\psi+\zeta_2=0 \end{cases}$

Ἡ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἀπὸ τὴν ἐπίλυσιν μιᾶς ἐξισώσεως ἀνωτέρου τοῦ βου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐπιτύχωμεν. Εἰς εἰδικὰς ὅμως περιπτώσεις δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα, ὡς τοῦτο καθίσταται φανερὸν ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων :

Παραδείγματα : 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα : $\begin{cases} x^2+4\psi^2=52 \\ x\psi=12 \end{cases}$

Ἐπίλυσις :

Ἔχομεν $\begin{cases} x^2+4\psi^2=52 \\ x\psi=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2\psi)^2=52 \\ 4x\psi=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2\psi)^2=100 \\ x\psi=12 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2\psi=\pm 10 \\ x\psi=12 \end{cases}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν

συστημάτων $\begin{cases} x+2\psi=10 \\ x\psi=12 \end{cases}$ (1), $\begin{cases} x+2\psi=-10 \\ x\psi=12 \end{cases}$ (2). Αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι $(x, \psi) = (4, 3)$ ἢ $(x, \psi) = (6, 2)$ καὶ τοῦ συστήματος (2) εἶναι $(x, \psi) = (-4, -3)$ ἢ $(x, \psi) = (-6, -2)$

Ἄρα αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι:

x	−4	4	−6	6
ψ	−3	3	−2	2

2) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} 3x^2 + 3\psi^2 - 11x - 7\psi + 10 = 0 \\ x^2 + \psi^2 - 4x - 3\psi + 5 = 0 \end{cases}$

Ἐπίλυσις: Ἔχομεν:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3\psi^2 - 11x - 7\psi + 10 = 0 \\ x^2 + \psi^2 - 4x - 3\psi + 5 = 0 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3\psi^2 - 11x - 7\psi + 10 = 0 \\ -3x^2 - 3\psi^2 + 12x + 9\psi - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2\psi - 5 = 0 \\ x^2 + \psi^2 - 4x - 3\psi + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ (5-2\psi)^2 + \psi^2 - 4(5-2\psi) - 3\psi + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ 5\psi^2 - 15\psi + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ \psi^2 - 3\psi + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\psi \\ \psi = 2 \end{cases} \text{ καὶ } \begin{array}{l} x = 5 - 2\psi \\ \psi = 1 \end{array}$$

ἐξ ὧν ἔχομεν τὰς λύσεις $(x, \psi) = (1, 2)$ καὶ $(x, \psi) = (3, 1)$

γ) **τῆς μορφῆς** $\begin{cases} \alpha_1 x^2 + \beta_1 x\psi + \gamma_1 \psi^2 = \delta_1 & (\delta_1 \neq 0) \\ \alpha_2 x^2 + \beta_2 x\psi + \gamma_2 \psi^2 = \delta_2 & (\delta_2 \neq 0) \end{cases}$

Τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ βου βαθμοῦ, τὰ δὲ δεύτερα μέλη σταθεροὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός. Ταῦτα καλοῦνται **ὁμογενῆ συστήματα.**

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῶν ἐκτελοῦμεν τὸν μετασχηματισμὸν $x = \lambda\psi$ $(\psi \neq 0)$. Οὕτω λαμβάνομεν :

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda^2\psi^2 + \beta_1 \lambda\psi^2 + \gamma_1\psi^2 = \delta_1 \\ \alpha_2\lambda^2\psi^2 + \beta_2 \lambda\psi^2 + \gamma_2\psi^2 = \delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2 (\alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1) = \delta_1 \\ \psi^2 (\alpha_2\lambda^2 + \beta_2\lambda + \gamma_2) = \delta_2 \end{cases},$$

ἀκολούθως διαιροῦμεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{\alpha_1\lambda^2 + \beta_1\lambda + \gamma_1}{\alpha_2\lambda^2 + \beta_2\lambda + \gamma_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2} \Leftrightarrow (\alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1)\lambda^2 + (\beta_1\delta_2 - \beta_2\delta_1)\lambda + (\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1) = 0,$$

ἥτις δίδει $\lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2$. Ἐπανερχόμενοι εἰς τὸν μετασχηματισμόν, ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὰ συστήματα :

$$\begin{cases} x = \lambda_1\psi \\ \alpha_1 x^2 + \beta_1 x\psi + \gamma_1\psi^2 = \delta_1 \end{cases}, \begin{cases} x = \lambda_2\psi \\ \alpha_1 x^2 + \beta_1 x\psi + \gamma_1\psi^2 = \delta_1 \end{cases}$$

τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις εἶναι γνωστή.

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2 - 3x\psi + 2\psi^2 = 2 \\ 2x^2 + x\psi - \psi^2 = 20 \end{cases}$

Θέτομεν $x = \lambda\psi$ καὶ ἔχομεν :

$$\begin{cases} \lambda^2\psi^2 - 3\lambda\psi^2 + 2\psi^2 = 2 \\ 2\lambda^2\psi^2 + \lambda\psi^2 - \psi^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi^2 (\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 2 \\ \psi^2 (2\lambda^2 + \lambda - 1) = 20 \end{cases}, \text{ ἀκολούθως}$$

διαιροῦμεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, ὅτε ἔχομεν $\frac{\lambda^2-3\lambda+2}{2\lambda^2+\lambda-1}=\frac{1}{10} \Leftrightarrow 8\lambda^2-31\lambda+$ $+21=0$, ἐξ ἧς $\lambda_1=3$, $\lambda_2=\frac{7}{8}$.

Οὕτως ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὰ συστήματα:

$$\left\{\begin{array}{l} x=3\psi \\ x^2-3x\psi+2\psi^2=2 \end{array}\right. \quad (1), \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{8}\psi \\ x^2-3x\psi+2\psi^2=2 \end{array}\right. \quad (2)$$

Αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι $(x, \psi)=(3, 1)$, $(x, \psi)=(-3, -1)$ καὶ τοῦ συστήματος (2) εἶναι $(x, \psi)=\left(\frac{7\sqrt{2}}{3}, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$, $(x, \psi)=\left(-\frac{7\sqrt{2}}{3}, -\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)$

δ) Συστήματα συμμετρικά.

Ἓν σύστημα καλεῖται συμμετρικόν, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του, ὅταν ὅλαι αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους.

π.χ. τὰ συστήματα εἶναι συμμετρικὰ $\left|\begin{array}{l} x+\psi=\alpha \\ x\psi=\beta \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2=\alpha \\ x\psi=\beta \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2+x+\psi=\alpha \\ x+\psi+x\psi=\beta \end{array}\right.$

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν αὐτῶν δὲν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος.

Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν βοηθητικοὺς ἀγνώστους, ὡς φαίνεται εἰς τὸ κάτωθι παράδειγμα.

Παράδειγμα : 1) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2+x+\psi=\alpha \\ x+\psi+x\psi=\beta \end{array}\right.$

Ἐπίλυσις : Θέτομεν ὅπου $x+\psi=\varphi$ καὶ $x\psi=\omega$, ὁπότε τὸ σύστημα (1) γράφεται $\begin{array}{l} \varphi^2-2\omega+\varphi=\alpha \\ \varphi+\omega=\beta \end{array}$

Τοῦτο ἐπιλύεται ὡς τὰ συστήματα τῆς μορφῆς (α) καὶ δίδει τὰς λύσεις $\begin{array}{l} \varphi=\kappa_1 \\ \omega=\lambda_1 \end{array}$ καὶ $\begin{array}{l} \varphi=\kappa_2. \\ \omega=\lambda_2 \end{array}$ Ἄρα προκύπτουν πρὸς ἐπίλυσιν τὰ συστήματα $\begin{array}{l} x+\psi=\kappa_1 \\ x\psi=\lambda_1 \end{array}$ καὶ $\begin{array}{l} x+\psi=\kappa_2 \\ x\psi=\lambda_2 \end{array}$, τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι γνωστή.

124. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΤΩΝ ΔΥΟ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

α) Ὅταν ἡ μία μόνον ἐξίσωσις εἶναι δευτεροβάθμιος καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι πρωτοβάθμιοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐπιλύομεν τὸ σύστημα τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, θεωροῦντες ἕνα τῶν ἀγνώστων ὡς γνωστὸν καὶ ἀκολούθως ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα Σ : $\left\{\begin{array}{l} 2x^2+\psi^2-4x\omega-2\psi\omega+3x-4\psi-13=0 \\ 5x-\psi-\omega=2 \\ 7x-3\psi+\omega=-6 \end{array}\right.$

Ἐπίλυσις : Θεωροῦντες τὸν ω ὡς γνωστὸν ἐπιλύομεν τὸ σύστημα τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ἐξισώσεως. Οὕτως ἔχομεν τὴν λύσιν $(x, \psi)=\left(\frac{3+\omega}{2}, \frac{11+3\omega}{2}\right)$.

Τὰς τιμὰς τῶν x καὶ ψ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν καὶ ἔχομεν

$$2\left(\frac{3+\omega}{2}\right)^2+\left(\frac{11+3\omega}{2}\right)^2-4\cdot\frac{3+\omega}{2}\cdot\omega-2\cdot\frac{11+3\omega}{2}\cdot\omega+3\cdot\frac{3+\omega}{2}-4\cdot\frac{11+3\omega}{2}-$$

$$-13=0 \Leftrightarrow 9\omega^2+8\omega-17=0, \text{ ἐξ ἧς } \omega_1=1,\ \omega_2=-\frac{17}{9}.$$

Ἑπομένως : διὰ $\omega = 1$ ἔχομεν $(x, \psi) = (2, 7)$ καὶ

διὰ $\omega = -\frac{17}{9}$ ἔχομεν $(x, \psi) = \left(\frac{5}{9}, \frac{8}{3}\right)$.

Ἄρα αἱ λύσεις τοῦ συστήματος Σ εἶναι : $\begin{cases} (x, \psi, \omega) = (2, 7, 1) \\ (x, \psi, \omega) = \left(\frac{5}{9}, \frac{8}{3}, -\frac{17}{9}\right) \end{cases}$

β) Ὅταν περισσότεραι τῆς μιᾶς ἐξισώσεις εἶναι δευτεροβάθμιοι (ἢ καὶ ὅλαι) καὶ αἱ ἄλλαι πρωτοβάθμιοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει ἑνιαῖος τρόπος ἐπιλύσεως.

Παραδείγματα : 1) **Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :** $\begin{cases} x+\psi+\omega=\alpha & (1) \\ x^2+\psi^2+\omega^2=\beta^2 & (2) \\ x\psi=\gamma^2 & (3) \end{cases}$

Λύσις : Ἡ (1) γράφεται

$x+\psi=\alpha-\omega$. Ὑψοῦμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (2) καὶ (3) ἔχομεν διαδοχικῶς $x^2+\psi^2+2x\psi=\alpha^2+\omega^2-2\alpha\omega$, $\beta^2-\omega^2+2\gamma^2=\alpha^2+\omega^2-2\alpha\omega \Leftrightarrow 2\omega^2-2\alpha\omega+\alpha^2-\beta^2-2\gamma^2=0$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι ἔστω ω_1 καὶ ω_2. Οὕτως, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (3) δίδουν τὰ συστήματα :

$$\begin{cases} x+\psi=\alpha-\omega_1 \\ x\psi=\gamma^2 \\ \omega=\omega_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+\psi=\alpha-\omega_2 \\ x\psi=\gamma^2 \\ \omega=\omega_2 \end{cases}$$

τὰ ὁποῖα λυόμενα μᾶς δίδουν τὰς λύσεις τοῦ ἀρχικοῦ.

2) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα
$\alpha, \beta, \gamma \in R^+$

$$\begin{cases} x(x+\psi+\omega)+\psi\omega=\alpha^2 & (1) \\ \psi(x+\psi+\omega)+\omega x=\beta^2 & (2) \\ \omega(x+\psi+\omega)+x\psi=\gamma^2 & (3) \end{cases}$$

Λύσις : τὸ σύστημα γράφεται :

$(x+\psi)(x+\omega)=\alpha^2$, $(\psi+\omega)(\psi+x)=\beta^2$, $(\omega+x)(\omega+\psi)=\gamma^2$ (4).

Πολ/ζομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $(x+\psi)^2(\omega+\psi)^2(\omega+x)^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow (x+\psi)(\omega+\psi)(\omega+x)=\pm\alpha\beta\gamma$. Διαιροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν διαδοχικῶς διὰ τῶν (4) καὶ ἔχομεν: $x+\psi=\pm\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, $\psi+\omega=\pm\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, $\omega+x=\pm\frac{\alpha\gamma}{\beta}$

Οὕτως ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὰ συστήματα :

(5) $\{x+\psi=\alpha\beta/\gamma,\ \ \psi+\omega=\beta\gamma/\alpha,\ \ \omega+x=\alpha\gamma/\beta$

(6) $\{x+\psi=-\alpha\beta/\gamma,\ \ \psi+\omega=-\beta\gamma/\alpha,\ \ \omega+x=-\alpha\gamma/\beta$.

Σημείωσις. Τὰ ἐξετασθέντα ἀνωτέρω παραδείγματα παρέχουν μόνον μίαν ἁπλῆν ἰδέαν τῶν εἰδικῶν μεθόδων, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται διὰ τὴν ἐπίλυσιν συστημάτων ἀνωτέρου τοῦ πρώτου βαθμοῦ καὶ κατ' ἀκολουθίαν οἱ μαθηταὶ πρέπει νὰ κάμουν μακρὰν ἐξάσκησιν εἰς μεγάλον ἀριθμὸν ἀσκήσεων, διὰ νὰ δυνηθοῦν νὰ ἀποκτήσουν κάποιαν εὐχέρειαν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς α΄

401) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\left|\begin{array}{l} x+\psi=2 \\ 4x\psi=3 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x^2+2x\psi-\psi^2+4x-6\psi+7=0, \\ 2x+\psi=4 \end{array}\right.$

3) $\left|\begin{array}{l} x/5+\psi/5=1 \\ 7x^2+5x\psi-3\psi^2-2x-27=0 \end{array}\right.$ 4) $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2=157 \\ x\psi=66 \end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l} x^2-x\psi=14 \\ x\psi-\psi^2=10 \end{array}\right.$

6) $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2+x+\psi=62 \\ (x-\psi)(x+\psi+1)=50 \end{array}\right.$ 7) $\left|\begin{array}{l} 3x^2+3\psi^2-11x-7\psi+10=0 \\ x^2+\psi^2-4x-3\psi+5=0 \end{array}\right.$

8) $\left|\begin{array}{l} (x+\psi)^2-3(x+\psi)=10 \\ 9x^2-5x-7\psi=25 \end{array}\right.$ 9) $\left|\begin{array}{l} x^2+2x\psi-\psi^2=1 \\ 3x^2-3x\psi+5\psi^2=17 \end{array}\right.$

10) $\left|\begin{array}{l} x^2+x\psi-\psi^2=-4 \\ (8x-\psi)(x+2\psi)=-36 \end{array}\right.$

Ὁμὰς β΄

402) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\left|\begin{array}{l} x+\psi-2\omega=6 \\ 2x-\psi=-1 \\ 2x^2+x\psi+\omega^2-4\omega=10 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x+\psi+\omega=6 \\ x^2+\psi^2=2\omega^2-13 \\ x\psi=2 \end{array}\right.$

3) $\left|\begin{array}{l} x^2+z^2=46+\psi^2 \\ x+\psi-z=14 \\ x^2=9 \end{array}\right.$ 4) $\left|\begin{array}{l} x^2+\psi^2+\omega^2=84 \\ x+\psi+\omega=14 \\ x\omega=\psi^2 \end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l} x(x+\psi+\omega)+\psi\omega=21 \\ \psi(x+\psi+\omega)+\omega x=18 \\ \omega(x+\psi+\omega)+x\psi=42 \end{array}\right.$

6) $\left|\begin{array}{l} x(x+\psi+\omega)=\alpha^2 \\ \psi(x+\psi+\omega)=\beta^2 \\ \omega(x+\psi+\omega)=\gamma^2 \end{array}\right.$ 7) $\left|\begin{array}{l} x(\psi+\omega)=\alpha^2 \\ \psi(x+\omega)=\beta^2 \\ \omega(x+\psi)=\gamma^2 \end{array}\right.$

Ὁμὰς γ΄

403) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{\psi}=11 \\ x+\psi=65 \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} x^3+\psi^3=19 \\ x+\psi=1 \end{array}\right.$

3) $\left|\begin{array}{l} x^3-\psi^3=37 \\ x^2+x\psi+\psi^2=37 \end{array}\right.$ 4) $\left|\begin{array}{l} x+\psi-2\sqrt{x\psi}=\sqrt{x}-\sqrt{\psi} \\ \sqrt{x}+\sqrt{\psi}=5 \end{array}\right.$ 5) $\left|\begin{array}{l} x\psi=\alpha^2 \\ \psi\omega=\beta^2 \\ \omega x=\gamma^2 \end{array}\right.$

6) $\left|\begin{array}{ll} x\psi z=6 & z\omega x=12 \\ \psi z\omega=8 & \omega x\psi=24 \end{array}\right.$ 7) $\left|\begin{array}{l} (x+\psi)(x^3+\psi^3)=432 \\ x^2+\psi^2=20 \end{array}\right.$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ' ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Β^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

125. ΟΡΙΣΜΟΣ. *Ἓν πρόβλημα θὰ καλῆται πρόβλημα ἀνωτέρου τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἐὰν ἡ λύσις του ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν μιᾶς ἐξισώσεως μὲ ἕνα ἄγνωστον β^{ου} βαθμοῦ, ἢ εἰς τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ πρώτου βαθμοῦ.* Διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς τοιούτου προβλήματος, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰ εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν ἀναφερθέντα διὰ τὰ προβλήματα α^{ου} βαθμοῦ.

Ἤτοι: α) Ἐκλέγομεν τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους τοῦ προβλήματος.

(β) Καταστρώνομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος.

(γ) Θέτομεν τοὺς περιορισμοὺς τῶν ἀγνώστων, τοὺς πηγάζοντας ἀπὸ τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος.

(δ) Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

(ε) Ἐκτελοῦμεν τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος.

Διὰ τὸ τελευταῖον στάδιον τῆς διερευνήσεως ἀπαιτεῖται μεγάλη προσοχή, ἰδίως ὅταν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος παρίστανται διὰ γραμμάτων, διότι αἱ λύσεις πρέπει νὰ εἶναι πραγματικαὶ (συνθήκη πραγματικότητος), θετικαὶ ἢ ἀρνητικαὶ (σημεῖον τῶν λύσεων) καὶ μεγαλύτεραι ἢ μικρότεραι ἀριθμοῦ τινὸς ξ (θέσις ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου).

126. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ Βου ΒΑΘΜΟΥ

α) **Πρόβλημα.** Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον αὐξανόμενον κατὰ τὸ 5/πλάσιον αὐτοῦ γίνεται 50.

Λύσις: Ἐὰν x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τότε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι x^2, τὸ δὲ 5/πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ 5x.

Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2 + 5x = 50$.

Περιορισμός : Ὁ x δέον νὰ εἶναι ἀκέραιος ($x \in Z$)

Ἐπίλυσις τῆς $x^2 + 5x - 50 = 0$. Ἔχομεν $x_1 = 5$, $x_2 = -10$.

Διερεύνησις : Αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαὶ $x_1 = 5$, $x_2 = -10$ πληροῦν τὸν τεθέντα περιορισμὸν καὶ συνεπῶς τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

β) **Πρόβλημα:** Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 15 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἐλαττούμενον κατὰ 41 νὰ καθίσταται ἴσον πρὸς τὸ 5/πλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἄλλου.

Λύσις: Ἐὰν x εἶναι τὸ ἓν μέρος, τὸ ἄλλο θὰ εἶναι 15–x. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2 - 41 = 5\,(15 - x)^2$

Περιορισμός : Πρέπει νὰ εἶναι $0 < x < 15$.

Ἐπίλυσις τῆς $x^2 - 41 = 5\,(15 - x)^2$. Ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς εἶναι $4x^2 - 150x + 1166 = 0$, ἐξ ἧς $x_1 = \frac{53}{2}$, $x_2 = 11$.

Διερεύνησις : Ἡ ρίζα $x_1 = \frac{53}{2}$ ἀπορρίπτεται, διότι $\frac{53}{2} > 15$. Τὰ ζητούμενα λοιπὸν μέρη εἶναι 11 καὶ 4.

γ) **Πρόβλημα.** Ἔμπορος πωλῶν ἐλαίας πρὸς 22 δρχ. τὸ χιλιόγραμμον, κερδίζει ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν τὸ ἥμισυ τοῦ κόστους ἑκάστου χιλιογράμμου. Πόσον κοστίζει τὸ χιλιόγραμμον ;

Λύσις: Ἐὰν τὸ χιλιόγραμμον κοστίζῃ x δρχ., θὰ κερδίζῃ $\frac{x}{2}\%$ καὶ ἐπομένως ἀπὸ x δρχ. θὰ κερδίζῃ $\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{100} = \frac{x^2}{200}$.

Συνεπῶς, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x + \frac{x^2}{200} = 22$

Περιορισμός : Πρέπει νὰ εἶναι $0<x<22$.

Ἐπίλυσις : $x + \frac{x^2}{200} = 22 \Leftrightarrow x^2 + 200x - 4400 = 0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $x_1 = 20$, $x_2 = -220$

Διερεύνησις : Ἡ $x_2 = -220$ ἀπορρίπτεται.

Ὥστε, τὸ χιλιόγραμμον κοστίζει 20 δρχ.

δ) **Πρόβλημα.** Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ μ μονάδας μήκους, τὸ ἐμβαδόν του θὰ γίνῃ μ − 3 φορὰς τοῦ ἄλλου. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ;

Λύσις : Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου εἶναι x, τότε ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγώνου θὰ εἶναι x + μ μονάδας μήκους καὶ τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἀντιστοίχως x^2 καὶ $(x+\mu)^2$. Ἑπομένως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $(x+\mu)^2 = (\mu-3)x^2$.

Περιορισμός : Πρέπει $x>0$ καὶ $x+\mu>0$

Ἐπίλυσις : $(x+\mu)^2 = (\mu-3)x^2 \Leftrightarrow (4-\mu)x^2 + 2x\mu + \mu^2 = 0$, ἥτις δίδει δύο ρίζας $x_1 = \frac{-\mu+\sqrt{\mu^2(\mu-3)}}{4-\mu}$, $x_2 = \frac{-\mu-\sqrt{\mu^2(\mu-3)}}{4-\mu}$

Διερεύνησις : Τὸ εἶδος τῶν ριζῶν καὶ τὸ πρόσημον αὐτῶν, ὡς γνωστὸν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῶν Δ, P, S.

Σχηματίζοντες τὸν πίνακα διερευνήσεως διαπιστοῦμεν ὅτι διὰ $\mu>4$ ἔχομεν λύσιν εἰς τὸ πρόβλημα.

Οὕτω, διὰ $\mu = 7$ ἔχομεν $x_1 = -\frac{7}{3}$, ἥτις ἀπορρίπτεται καὶ $x_2 = 7$, ἥτις εἶναι δεκτή.

127. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΔΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

α) **Πρόβλημα.** Τὰ ψηφία διψηφίου ἀριθμοῦ ἔχουν γινόμενον 35. Ἐὰν γίνῃ ἀντιμετάθεσις τῶν ψηφίων, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων κατὰ 40. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

Λύσις : Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ x δεκάδας καὶ ψ ἁπλᾶς μονάδας, τότε θὰ ἔχωμεν : $x\psi = 35$ καὶ $10\psi + x = x\psi + 40$

Περιορισμός : Πρέπει νὰ εἶναι $0<x<10$, $0<\psi<10$ καὶ $x, \psi \in Z$

Ἐπίλυσις : $\left\{\begin{array}{l} x\psi = 35 \\ x + 10\psi = 75 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (75-10\psi)\psi = 35 \\ x = 75 - 10\psi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\psi^2 - 15\psi + 7 = 0 \\ x = 75 - 10\psi \end{array}\right.$,

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν συστημάτων

$$\begin{cases} \psi = 7 \\ x = 75 - 10\psi \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi = \frac{1}{2} \\ x = 75 - 10\psi \end{cases}$$

Ἄρα ἔχομεν τὰς λύσεις : $(x, \psi) = (5, 7)$, $(x, \psi) = \left(70, \frac{1}{2}\right)$

Διερεύνησις : Τὸ ζεῦγος $(x, \psi) = \left(70, \frac{1}{2}\right)$ προφανῶς ἀπορρίπτεται.

Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 57.

β) **Πρόβλημα.** Ἡ περίμετρος ὀρθογ. τριγώνου εἶναι 60 cm καὶ τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος 12cm. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του ;

Λύσις : Ἐὰν x, ψ, z εἶναι τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ τῆς ὑποτεινούσης, τότε θὰ εἶναι $x^2 + \psi^2 = z^2$ καὶ $x + \psi + z = 60$

Ἐξ ἄλλου τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εἶναι $E = \frac{x\psi}{2} = \frac{12z}{2} \Rightarrow x\psi = 12z$. Τὸ σύστημα λοιπὸν εἶναι :

$$x^2 + \psi^2 = z^2, \quad x + \psi + z = 60, \quad x\psi = 12z$$

Περιορισμός : Πρέπει $x>0$, $\psi>0$, $z>0$ καὶ μικρότεροι τοῦ 60. Ἐπιλύοντες τὸ σύστημα ἔχομεν $x = 20$, $\psi = 15$, $z = 25$.

γ) **Πρόβλημα.** Δύο ἐργάται ἐκτελοῦν ἓν ἔργον εἰς λ ὥρας. Ὁ πρῶτος μόνος τὸ ἐκτελεῖ εἰς α ὥρας ὀλιγωτέρας τοῦ δευτέρου. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος μόνος ἐκτελεῖ τὸ ἔργον ; $\alpha > 0$, $\lambda > 0$

Λύσις: Ἐὰν ὁ α′ χρειάζεται x ὥρας καὶ ὁ β′ ψ ὥρας, τότε θὰ εἶναι $x + \alpha = \psi$. Ὁ πρῶτος εἰς 1 ὥραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου, ὁ β′ τὸ $\frac{1}{\psi}$ καὶ ἀμφότεροι ὁμοῦ τὸ $\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi}$, εἰς λ δὲ ὥρας ἐκτελοῦν τὸ ὅλον ἔργον. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν :

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi}\right)\lambda = 1.$$

Περιορισμός : Πρέπει νὰ εἶναι $x > 0$, $\psi > 0$, $x > \lambda$, $\psi > \lambda$

Ἐπίλυσις :
$$\begin{cases} \psi = \alpha + x \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\psi}\right)\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \alpha + x \\ \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha + x}\right)\lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = \alpha + x \\ x^2 - (2\lambda - \alpha)x - \alpha\lambda = 0 \end{cases}$$

τὸ ὁποῖον δίδει :

$$(x, \psi) = \left(\frac{2\lambda - \alpha + \sqrt{4\lambda^2 + \alpha^2}}{2}, \frac{2\lambda + \alpha + \sqrt{4\lambda^2 + \alpha^2}}{2}\right)$$ ἥτις εἶναι δεκτή.

Ἡ ἄλλη λύσις ἀπορρίπτεται ἐπειδὴ $x < 0$, $\psi < 0$, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐκ τοῦ γινομένου τῶν ριζῶν $x_1 x_2 = -\alpha\lambda < 0$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁμὰς α′ :

404) Τὸ τετράγωνον τῆς ἡλικίας παιδὸς ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ διπλάσιόν της, γίνεται ἴσον πρὸς τὸ διπλάσιόν της. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία αὐτή.

405) Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 25 γίνεται ἴσος πρὸς τὸν ἀντίστροφον τοῦ πηλίκου.

406) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος αὐξανόμενος κατὰ τὸ 7/πλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης του γίνεται 44.

407) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι διαδοχικοὶ περιττοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι 74.

408) Ἔμπορος πωλῶν τὸ ἀμπόρευμά του ἀντὶ 39 δραχ. κερδίζει τόσον τοῖς ἑκατόν, ὅσον τὸ εἶχεν ἀγοράσει. Πόσον τὸ ἠγόρασεν.

409) Πατὴρ 40 ἐτῶν ἔχει υἱὸν 3 ἐτῶν. Μετὰ πόσον χρόνον ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι κατὰ 5 ἔτη μικροτέρα τοῦ τετραγώνου τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

410) Ποσότης 630 κιλῶν τροφίμων ἐπρόκειτο νὰ διανεμηθῇ εἰς ὡρισμένας πτωχὰς οἰκογενείας. Ἐπειδὴ 15 ἐκ τῶν οἰκογενειῶν δὲν προσῆλθον, ἑκάστη τῶν ὑπολοίπων ἔλαβεν 1 κιλὸν τροφίμων ἐπὶ πλέον. Ποῖον τὸ πλῆθος τῶν οἰκογενειῶν ;

411) Τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι 3 cm, 6 cm, 8 cm. Κατὰ ποῖον τμῆμα πρέπει νὰ αὐξηθοῦν αἱ πλευραί, ἵνα δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν τρίγωνον ὀρθογώνιον ;

Ὁ μ ὰ ς β΄ :

412) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων νὰ εἶναι κατὰ 1 μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, διαιρούμενος δὲ διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του νὰ δίδῃ πληλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 10.

413) Κεφάλαιον ἐξ 27.000 δραχ. τοκίζεται πρὸς 6% χωριζόμενον εἰς δύο μέρη. Τὸ πρῶτον ἐτοκίσθη ἐπὶ 5 μῆνας περισσότερον καὶ ἔδωσε τόκον 1500 δραχ., τὸ δὲ β΄ ἔδωσε τόκον 900 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου.

414) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαγώνιον 20 cm καὶ ἐμβαδὸν 192 cm^2.

415) Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἔκ τινος τόπου διὰ νὰ διανύσουν ἀπόστασιν 90 km. Τὸ ἥμισυ τῆς ταχύτητος τοῦ πρώτου καὶ τὸ τρίτον τῆς ταχύτητος τοῦ β΄ ἔχουν ἄθροισμα 16 km. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες, ἂν ὁ α΄ ἐτερμάτισε $\frac{1}{2}$ τῆς ὥρας ἐνωρίτερον τοῦ β΄.

416) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4. Τὸ τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ἄλλων κατὰ 36. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

417) Ὁ ἀριθμὸς 3 καὶ τρεῖς ἄλλοι συνιστοῦν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας οἱ ἡγούμενοι ἔχουν ἄθροισμα 9, οἱ ἑπόμενοι 12 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ὅρων εἶναι 125. Ποία ἡ ἀναλογία ;

418) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογ. τριγώνου, ἂν αἱ κάθετοι πλευραὶ διαφέρουν κατὰ 5m καὶ ἡ ὑποτείνουσα μὲ τὸ ἐπ᾿ αὐτὴν ὕψος δίδει ἄθροισμα 37 m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

419) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 2(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha-\beta)^2 = 0$, $\alpha, \beta \in R$, καὶ νὰ τεθοῦν αἱ ρίζαι αὐτῆς ὑπὸ μορφὴν ἁπλῶν ριζικῶν.

420) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν α καὶ β ἡ ἐξίσωσις $(\alpha+\beta)x^4 + (2\alpha-\beta-10)x^3 + 2x^2 - (\alpha-\beta-7)x + 6 - \alpha = 0$ εἶναι διτετράγωνος καὶ διὰ ποίας δευτεροβάθμιος. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν.

421) Ὑπὸ ποίαν συνθήκην τὸ τριώνυμον $\varphi(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in Q$, ἔχει ρίζας τῆς μορφῆς $\sqrt{\lambda} \pm \sqrt{\mu}$, ὅπου $\lambda, \mu \in Q^+$

422) Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἁπλᾶ ριζικὰ αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

1) $\sqrt{x^2+1+\sqrt{x^4+x^2+1}}$ $(x \in R)$, 2) $\sqrt{\frac{5x}{\psi} + \frac{2x}{z}\sqrt{\frac{5x}{\psi} - \frac{x^2}{z^2}}}$

423) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\forall \alpha, \beta \in R^+$

$A = \sqrt{\alpha + 2\beta\sqrt{\alpha-\beta^2}} + \sqrt{\alpha - 2\beta\sqrt{\alpha-\beta^2}}$ ἰσοῦται μὲ 2β, ἂν $\beta^2 \leqslant \alpha \leqslant 2\beta^2$ καὶ μὲ $2\sqrt{\alpha-\beta^2}$, ἂν $\alpha > 2\beta^2$

424) Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 2) $x^4 + x^3 + x^2 + kx + k^2 = 0 \quad (k \in R)$

425) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ὑπὸ τὰς ὁποίας ἡ ἐπιλύουσα τῆς ἐξισ. $x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1 = 0$ εἶναι ἀντίστροφος ἐξίσωσις.

426) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + 8 = 0$

427) Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις

1) $5x\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} = 296$, 2) $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$

428) Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσ. $\sqrt{x^2 - 4x} = x - \lambda$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ καὶ x.

429) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

1) $x^2 + \psi^2 + \omega^2 = 21\alpha^2$
$\psi\omega + \omega x - x\psi = 6\alpha^2$
$3x + \psi - 2\omega = 3\alpha$

2) $z^2 + x^2 = 1 \quad x\psi + z\omega = 0$
$\psi^2 + \omega^2 = 1 \quad (2x + \psi)(2z + \omega) = 2$

430) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος.

$x^2 + \psi^2 + \omega^2 = \alpha^2, \quad x\psi = \beta^2, \quad \psi\omega = \gamma^2, \quad \omega x = \delta^2$

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

128. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ.

Ἡ στατιστικὴ εἰς τὴν ἐποχήν μας, μὲ τὴν ὅλως ἰδιαιτέραν σπουδαιότητα τὴν ὁποίαν ἀπέκτησε διὰ τὴν ἀνθρωπότητα, ἀνεπτύχθη εἰς μίαν ἐκτεταμένην ἐπιστήμην μὲ πολλοὺς κλάδους.

Ἡ σπουδαιότης τῆς Στατιστικῆς ἔγκειται εἰς τὸ ὅτι αὕτη ἐπιτυγχάνει προβλέψεις τῆς συμπεριφορᾶς ἑνὸς «πληθυσμοῦ» χωρὶς νὰ εἶναι ἀνάγκη (ἢ ὅταν δὲν εἶναι δυνατὸν) νὰ προβλεφθῇ ἡ συμπεριφορὰ τῶν ἀτόμων αὐτοῦ. Ὑπὸ αὐτὴν δὲ τὴν ἔννοιαν ἔχει ἐφαρμογὰς ὄχι μόνον εἰς τὴν Οἰκονομίαν ἢ τὴν Κοινωνιολογίαν γενικῶς, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν νεωτέραν Φυσικήν.

Ἡ Στατιστική, ὡς κλάδος τῶν «Ἐφηρμοσμένων Μαθηματικῶν», ἔχει ὡς ἔργον τὴν συλλογὴν στοιχείων, τὴν ταξινόμησίν των καὶ τὴν παρουσίασιν αὐτῶν εἰς κατάλληλον μορφήν, δυναμένων νὰ ἀναλυθοῦν καὶ ἑρμηνευθοῦν διὰ τὴν ἐξυπηρέτησιν διαφόρων σκοπῶν. Π.χ. διὰ τὴν παρακολούθησιν τῆς ἀναπτύξεως καὶ ἐξελίξεως τοῦ «κτηνοτροφικοῦ πληθυσμοῦ» τῆς χώρας μας τὸ Ὑπουργεῖον Γεωργίας συνεκέντρωσε στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα μετὰ τὴν ταξινόμησιν παρουσίασε διὰ τοῦ ἀκολούθου πίνακος :

Ἐξέλιξις Κτηνοτροφικοῦ πληθυσμοῦ

Εἶδος ζώου	Εἰς χιλιάδας κεφαλῶν			
	1959	1961	1963	1964
Βόες	1045,7	1108,9	1160,0	1140,3
Βούβαλοι	72,6	67,2	63,5	60,8
Πρόβατα	9333,9	9593,5	9720,0	9450,0
Αἶγες	5066,1	4979,0	4700,0	4570,0
Χοῖροι	638,1	621,6	632,0	646,8
Πτηνὰ	15146,3	16341,9	18000,0	18426,3

Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν ἐγνωρίσαμεν ὡρισμένας βασικὰς ἐννοίας τῆς

Στατιστικῆς, τοὺς τρόπους συγκεντρώσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων, ἐπεξεργασίας καὶ παρουσιάσεως αὐτῶν διὰ τῶν ἀριθμητικῶν πινάκων καὶ διαγραμμάτων.

Κατωτέρω ἐπαναλαμβάνομεν τοὺς τρόπους παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων, λόγῳ τῆς ἰδιαιτέρας σημασίας αὐτῶν.

129. ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ — ΠΙΝΑΚΕΣ

Τὰ στατιστικὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν διαλογὴν καὶ ἐπεξεργασίαν, παρουσιάζονται κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι εὐχερὴς ἡ μελέτη των καὶ ἡ συναγωγὴ συμπερασμάτων. Ἡ παρουσίασις αὕτη γίνεται συνήθως κατὰ δύο τρόπους.

α) Ὑπὸ μορφὴν ἀριθμητικοῦ στατιστικοῦ πίνακος

β) Ὑπὸ μορφὴν γραφικοῦ στατιστικοῦ πίνακος.

Ἀριθμητικοὶ πίνακες. Οὗτοι δύνανται νὰ ἔχουν μορφὴν ἑνὸς κειμένου ἐκθέσεως τῶν πληροφοριῶν μὲ πᾶσαν δυνατὴν λεπτομέρειαν. Συνήθως ὅμως εἶναι **συγκεντρωτικοὶ** μὲ στήλας καὶ γραμμάς, ἁπλοῖ εἰς τὴν ἀνάγνωσιν καὶ εἰς τὴν μεταξὺ τῶν στοιχείων σύγκρισιν.

Συχνότης — πίναξ συχνοτήτων. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ τιμαὶ μιᾶς μεταβλητῆς x, εἰς μίαν στατιστικὴν ἔρευναν ἐκ N παρατηρήσεων εἶναι : $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$ καὶ ὅτι ἐξ αὐτῶν τῶν τιμῶν ν_1 εἶναι ἴσαι πρὸς x_1, ν_2 ἴσαι πρὸς $x_2, \ldots \nu_\mu$ ἴσαι πρὸς x_μ.

Οὕτω, σχηματίζομεν τὸν πίνακα τῶν δύο σειρῶν. (1)

x_1	x_2	x_3	...	x_μ
ν_1	ν_2	ν_3	...	ν_μ

Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\mu$ καλεῖται **ἀπόλυτος συχνότης** ἢ ἁπλῶς **συχνότης** τῆς ἀντιστοίχου τιμῆς x καὶ συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα f. Προφανῶς εἶναι $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu = N$. Ὁ N εἶναι ὁ πληθάριθμος τοῦ πληθυσμοῦ (σύνολον παρατηρήσεων) καὶ καλεῖται **ὁλικὴ συχνότης**, συμβολίζεται δὲ καὶ μὲ Σf.

Οἱ λόγοι $\frac{\nu_1}{N}, \frac{\nu_2}{N}, \ldots, \frac{\nu_\mu}{N}$ καλοῦνται **σχετικαὶ συχνότητες** τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ἀντιστοίχως καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ 100 ἐκφράζει τὴν **ἑκατοστιαία (%) σχετικὴν συχνότητα.** Τὰ ἀθροίσματα $\Sigma_1 = \nu_1$, $\Sigma_2 = \nu_1 + \nu_2$, $\Sigma_3 = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3, \ldots$, $\Sigma_\mu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\mu$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, τὰ ἀθροίσματα $\Sigma_1 = f_1$, $\Sigma_2 = f_1 + f_2, \ldots$, $\Sigma_\mu = f_1 + f_2 + \ldots + f_\mu$ καλοῦνται **ἀθροιστικαὶ συχνότητες.**

Τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν σχετικῶν συχνοτήτων μιᾶς στατιστικῆς ἐρεύνης ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Πράγματι, ἔχομεν : $\frac{\nu_1}{N} + \frac{\nu_2}{N} + \ldots + \frac{\nu_\mu}{N} = 1$ ἢ $\frac{f_1}{\Sigma f} + \frac{f_2}{\Sigma f} + \ldots + \frac{f_\mu}{\Sigma f} = 1$

Ὁ πίναξ (1), ὅστις δύναται νὰ γραφῇ καὶ εἰς δύο στήλας, ἀποτελεῖ τὸν **πίνακα συχνοτήτων** ἢ τὴν **κατανομὴν συχνοτήτων.**

Παραδείγματα συγκεντρωτικῶν ἀριθμ. πινάκων.

1) Κατὰ τὸ σχολ. ἔτος 1967 - 68 ἐνεγράφησαν εἴς τι Γυμνάσιον 764 μαθηταί, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα κατεγράφησαν εἰς ἕν βιβλίον, «τὸ Μαθητολόγιον». Τοῦτο ἀποτελεῖ ἕνα γενικὸν πίνακα λεπτομερῆ ἄνευ ταξινομήσεως, ἀπὸ ὅπου δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν στατιστικὰς πληροφορίας σχετικὰς μὲ τὸν πληθυσμὸν τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου τούτου. Ἡ συμπλήρωσις τοῦ κάτωθι συγκεντρωτικοῦ πίνακος ἔγινεν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ποιοτικῆς ἰδιότητος «τάξις ἐγγραφῆς»

Κατανομὴ τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου κατὰ τάξεις

Τάξεις ἐγγραφῆς	Ἀριθμὸς μαθητῶν Ἀπόλυτος συχνότης f	Ἀθροιστικὴ συχνότης	Ἑκατοστιαία σχετικὴ συχνότης $100\frac{f}{\Sigma f}$	Ἀθροιστικὴ ἑκατοστιαία σχετικὴ συχνότης
Α′	$f_1 = 245$	$\Sigma_1 = 245$	32,1	32
Β′	$f_2 = 160$	$\Sigma_2 = 405$	21	53
Γ′	$f_3 = 134$	$\Sigma_3 = 539$	17,5	70,5
Δ′	$f_4 = 90$	$\Sigma_4 = 629$	11,8	82,3
Ε′	$f_5 = 70$	$\Sigma_5 = 699$	9,1	91,5
ΣΤ′	$f_6 = 65$	$\Sigma_6 = 764$	8,5	100
	$\Sigma f = 764$		100,0	

Ἡ συμπλήρωσις τῆς β′ στήλης εἶναι προφανής. Ἡ τρίτη στήλη «ἀθροιστικὴ συχνότης» συνεπληρώθη ὡς ἑξῆς : Διὰ κάθε τάξιν ἀντιστοιχίζεται τὸ ἄθροισμα τῆς ἀπολύτου συχνότητος τῆς τάξεως καὶ ὅλων τῶν προηγουμένων αὐτῆς. Ἡ συμπλήρωσις τῆς δ′ στήλης ἔγινε βάσει τοῦ τύπου $100 \cdot f/\Sigma f$, ἡ δὲ συμπλήρωσις τῆς ε′ στήλης ἔγινε ὡς καὶ τῆς γ′ στήλης ἐκ τῆς δ′ στήλης.

Ὁ πίναξ οὗτος εἶναι ἁπλοῦς, τὰ δὲ συμπεράσματα ἐκ τῆς μελέτης αὐτοῦ προφανῆ.

2) Εἰς μίαν ἔρευναν τοῦ ὕψους τῶν 764 μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου τοῦ προηγουμένου παραδείγματός μας κατεγράφησαν εἰς προχείρους καταστάσεις τὰ ὕψη αὐτῶν, τὰ ὁποῖα ἐνεφάνισαν τιμὰς μεταξὺ τοῦ 135cm καὶ 185cm. Ἡ ποσοτικὴ ἰδιότης «ὕψος μαθητοῦ» εἶναι μία συνεχὴς μεταβλητὴ (θεωρητικῶς) μὲ τιμὰς εἰς τὸ διάστημα [135cm, 185 cm], τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἄκρων τιμῶν, δηλαδὴ τὸ **εὖρος** τῆς μεταβλητῆς, ὅπως λέγεται, εἶναι 185 – 135 = 50cm.

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ταύτης χωρίζεται εἰς 5 τάξεις (ὁμάδας) τοῦ αὐτοῦ εὔρους 50/5 = 10 cm.

Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται **ὁμαδοποίησις** τῶν παρατηρήσεων.

Ὁ κάτωθι συγκεντρωτικὸς πίναξ ἔγινεν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ποσοτικῆς ἰδιότητος «ὕψος μαθητοῦ» κατόπιν τῆς ἀνωτέρω ὁμαδοποιήσεως.

Κατανομὴ 764 μαθητῶν ἑνὸς Γυμνασίου κατὰ ὕψη

Τάξεις ὕψους	Μέση τιμὴ	Ἀριθμὸς μαθητῶν Ἀπόλ. συχνότης f	Ἀθροιστικὴ συχνότης	Σχετικὴ συχνότης %	Ἀθροιστικὴ σχετικὴ συχνότης
1η 135–145	140	94	94	12,3	12,3
2α 145–155	150	176	270	23	35,3
3η 155–165	160	278	548	36,4	71,7
4η 165–175	170	180	728	23,6	95,3
5η 175–185	180	36	764	4,7	100
		$\Sigma f = 764$		100,0	

Εἰς τὴν α΄ στήλην αἱ τάξεις εἶναι διαστήματα τῆς μεταβλητῆς x τοῦ ὕψους κλειστὰ ἀριστερὰ καὶ ἀνοικτὰ δεξιά, πλὴν τῆς 5ης τάξεως, ἥτις εἶναι διάστημα κλειστὸν ἑκατέρωθεν.

Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων τιμῶν ἑκάστης τάξεως καλεῖται **μέση τιμὴ** καὶ μὲ τὰς μέσας τιμὰς συμπληροῦται ἡ β΄ στήλη.

Ἡ συμπλήρωσις τῶν ὑπολοίπων στηλῶν ἔγινεν ὡς καὶ προηγουμένως.

Καὶ ὁ πίναξ οὗτος εἶναι ἁπλοῦς καὶ ἡ ἀνάγνωσις αὐτοῦ εὔκολος.

Π.χ. ἀπὸ τὴν γ΄ στήλην φαίνεται, ὅτι 36 μαθηταὶ ἔχουν μέσον ὕψος 180 cm, ἐνῷ ἀπὸ τὴν δ΄ στήλην φαίνεται, ὅτι 548 μαθηταὶ ἔχουν ἀνάστημα κάτω τοῦ 165cm. Ἐκ τῆς ε΄ στήλης συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ 12,3% τῶν μαθητῶν εἶναι ἀναστήματος κάτω τῶν 145 cm, ἐνῷ ἐκ τῆς τελευταίας στήλης ὅτι τὸ 71, 7% εἶναι ὕψους κάτω τῶν 165 cm.

Σημείωσις. Εἰς κάθε πίνακα πρέπει νὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ ἄνω μέρος ἕνας **τίτλος,** ἴσως καὶ ἕνας **ὑπότιτλος**. Ἀκόμη δὲν ἀποκλείεται νὰ γραφοῦν καὶ ὑποσημειώσεις. Πάντα ταῦτα μὲ τὸν σκοπὸν νὰ πληροφοροῦν συντόμως καὶ σαφῶς τί περιέχει ὁ πίναξ, μὲ ποίαν κατάταξιν συνετάχθη καὶ εἰς ποίαν χρονικὴν περίοδον καὶ εἰς ποῖον τόπον ἀναφέρεται.

Γραφικοὶ πίνακες (διαγράμματα)

Ἡ παρουσίασις τῶν στατιστικῶν δεδομένων διὰ συγκεντρωτικῶν ἀριθμητικῶν πινάκων, παρουσιάζει μερικὰς δυσκολίας ὡς πρὸς τὴν ἑρμηνείαν, διότι ἀπαιτεῖται ἀπὸ τοὺς περισσοτέρους ἀνθρώπους μεγάλη προσπάθεια κατανοήσεως τῆς ἀκριβοῦς σημασίας των.

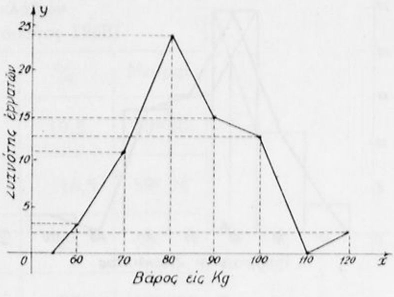
Τελείως ὅμως διάφορος εἶναι ἡ ἐντύπωσις, τὴν ὁποίαν δοκιμάζομεν, ὅταν ἡ παρουσίασις τῶν στατιστικῶν δεδομένων γίνῃ ὑπὸ μορφὴν γεωμετρικοῦ σχήματος, γραφικῆς παραστάσεως. Ἐπὶ πλέον δὲ ἡ ἐντύπωσις αὕτη εἶναι ζωηροτέρα καὶ μεγαλυτέρας διαρκείας.

Αἱ **γραφικαὶ παραστάσεις** ἢ ἁπλῶς **διαγράμματα** εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν καὶ παρέχουν ἀμέσως καὶ συνοπτικῶς διαφόρους χρησίμους πληροφορίας.

Ἡ ποικιλία τῶν γραφικῶν παραστάσεων, τὰς ὁποίας χρησιμοποιεῖ ἡ Στατιστική, εἶναι μεγάλη. Θὰ ἀναφέρωμεν τὰς δύο κυριωτέρας κατηγορίας :

α) τὰς γραμμικὰς παραστάσεις ἢ γραμμικὰ διαγράμματα καὶ β) τὰς δι' ἐπιφανειῶν γραφικὰς παραστάσεις. Συνήθως ἀναφερόμεθα εἰς τὸ γνωστὸν σύστημα τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων.

1) **Πολύγωνον συχνότητος.** Ὅταν ἡ μεταβλητὴ x εἰς μίαν στατιστικὴν ἔρευναν εἶναι συνεχής, τότε τὰ ζεύγη (x, f), ἀπεικονιζόμενα εἰς τὸ σύστημα τῶν ὀρθογ. ἀξόνων x0ψ, δίδουν συνεχῆ τεθλασμένην γραμμήν, τὸ καλούμενον **Πολύγωνον συχνότητος.** Ἡ παραπλεύρως γραμμικὴ παράστασις δίδει τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῆς κάτωθεν αὐτῆς κατανομῆς 68 ἐργατῶν ἑνὸς ἐργοστασίου κατὰ βάρη.



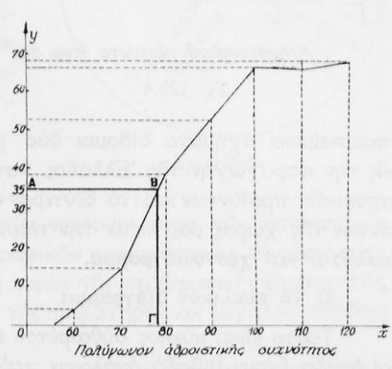
Σχ. 129.1

Πολλάκις εἰς τὴν Στατιστικὴν εἶναι χρήσιμος ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς

Κατανομὴ 68 ἐργατῶν κατὰ βάρη εἰς kg

Τάξεις	Μέση τιμή	f	$100\frac{f}{\Sigma f}$	Ἀθροιστικὴ συχνότης	Ἀθρ. σχετικὴ συχνότης %
55– 65	60	3	4,4	3	4,4
65– 75	70	11	16,2	14	20,6
75– 85	80	24	35,3	38	55,9
85– 95	90	15	22,1	53	78
95–105	100	13	19,1	66	97,1
105–115	110	0	0,0	66	97,1
115–125	120	2	2,9	68	100
		$\Sigma f = 68$	100		

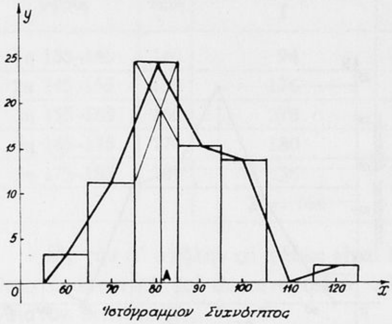
ἀθροιστικῆς συχνότητος, ὁπότε τὸ πολύγωνον ποὺ λαμβάνομεν καλεῖται **πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος.** Ἡ παρακειμένη γραμμικὴ παράστασις εἶναι τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος τῆς κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν κατὰ βάρη. Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν ΑΒ ⊥ 0ψ καὶ ἀκολούθως ΒΓ ⊥ 0x, συμπεραίνομεν ὅτι 35 ἐργάται ἔχουν βάρος ὀλιγώτερον τῶν 78 Kg (τὸ 78 εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Γ).



Σχ. 129.2

2) **Ἱστόγραμμον συχνότητος**

Τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος εἶναι ὁ συνηθέστερος τρόπος παρουσιάσεως στατιστικῶν δεδομένων. Διὰ τὴν κατασκευὴν αὐτοῦ κατασκευάζομεν ὀρθογώνια μὲ βάσεις τὰ ἴσα τμήματα τοῦ ἄξονος 0x, εἰς τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ τὸ εὖρος ἑκάστης τάξεως τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς, καὶ ὕψη τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας αὐτῆς.

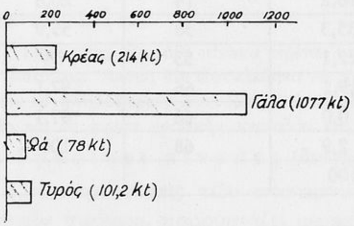


Σχ. 129.3

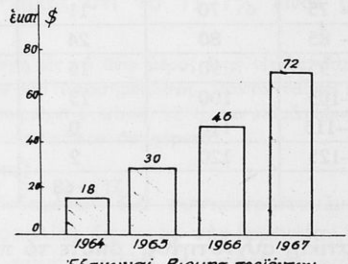
Τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ὀρθογωνίου ἀπεικονίζει τὴν ἀντίστοιχον πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ συχνότητα. Τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος τοῦ σχήματός μας δίδει τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῆς κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν κατὰ βάρη μὲ τεθλασμένην δὲ γραμμὴν παρίσταται τὸ πολύγωνον συχνότητος.

3) **Τὸ ραβδόγραμμον.**

Τοῦτο ἀποτελεῖται ἀπὸ μίαν σειρὰν ὀρθογωνίων, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι καὶ στηρίζονται εἰς τὸν αὐτὸν ἄξονα (ἢ τὸν Ox ἢ τὸν Oψ). Τὰ μήκη των εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ποὺ παριστοῦν. Εἰς τὰ δύο



Σχ. 129.4



Σχ. 129.5

παρακείμενα σχήματα δίδομεν δύο ραβδογράμματα. Τὸ πρῶτον ἀναφέρεται εἰς τὴν παραγωγὴν τῆς Ἑλλάδος κατὰ τὸ ἔτος 1964 τῶν κυριωτέρων κτηνοτροφικῶν προϊόντων καὶ τὸ δεύτερον εἰς τὰς ἐξαγωγὰς τῶν βιομηχανικῶν προϊόντων τῆς χώρας μας κατὰ τὴν τετραετίαν 1964 - 1967. Τὸ βον ραβδόγραμμα καλεῖται καὶ **χρονοδιάγραμμα.**

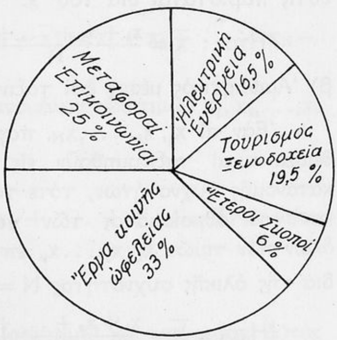
4) **Τὸ κυκλικὸν διάγραμμα**

Τοῦτο εἶναι κύκλος αὐθαιρέτου ἀκτῖνος διαμερισμένος εἰς κυκλικοὺς τομεῖς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἐμβαδὰ ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς καὶ τῶν ὁποίων συνεπῶς τὰ τόξα ἔχουν μέτρα ἀνάλογα πρὸς τὰς αὐτὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς. Ἐνταῦθα δίδομεν ἕν τοιοῦτον διάγραμμα ἀπεικονίζον τὴν χρηματοδότησιν διαφόρων κλάδων τῆς οἰκονομικῆς ζωῆς τῆς χώρας

Χρηματοδότησις 5 κλάδων
εἰς ἑκατομ. δραχμῶν (Αὔγουστος 1968)

Κλάδοι	Ποσὸν	%	Μοῖραι
1. Τουρισμὸς Ξενοδοχεῖα	3.900	19,5	70° 10′
2. Ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια	3.300	16,5	59° 24′
3. Μεταφοραὶ ἐπικοινωνίαι	5.000	25	90°
4. Ἔργα κοινῆς ὠφελείας	6.600	33	118° 50′
5. Ἕτεροι σκοποὶ	1.200	6	21° 36′
Ἄθροισμα	20.000	100	360°

μας κατὰ τὸν Αὔγουστον 1968. Τὸ 1% ἀντιστοιχίζεται εἰς τόξον $\frac{360^\circ}{100} = 3{,}6^\circ = 3^\circ 36'$, ἑπομένως τὰ 16,5% εἰς τόξον $3{,}6 \times 16{,}5 = 59^\circ\, 24'$.



Σχ. 129.6

Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω γραφικῶν παραστάσεων τῶν στατιστικῶν δεδομένων ὑπάρχουν ἀκόμη τὰ **χαρτογράμματα**, τὰ ὁποῖα εἶναι γεωγραφικοὶ χάρται μὲ ποικιλίαν χρωμάτων, ἐπίσης ὑπάρχουν τὰ **εἰδογραφήματα** ἢ **εἰδογράμματα,** τὰ ὁποῖα εἶναι πίνακες σχεδίων καὶ εἰκόνων προσώπων ἢ πραγμάτων καὶ τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦνται μὲ ποικίλας μορφὰς εἰς τὰς διαφημίσεις.

130. ΚΕΝΤΡΙΚΑΙ ΤΙΜΑΙ

Εἰς τὰ προηγούμενα εἴδομεν τρόπους παρουσιάσεως τῶν στατιστικῶν δεδομένων δι' ἀριθμητικῶν πινάκων καὶ γραφικῶν παραστάσεων. Ἡ φάσις αὕτη τῆς παρουσιάσεως ἀποτελεῖ ἕναν οὐσιώδη τομέα τῆς περιγραφικῆς Στατιστικῆς, διότι μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπὸ τὸν κόπον ἐκ τῆς παρατηρήσεως μεγάλου πλήθους ἀριθμῶν.

Τίθεται ὅμως τὸ ἐρώτημα : μήπως εἶναι δυνατὸν ἡ περιγραφὴ μιᾶς σειρᾶς στατιστικῶν στοιχείων νὰ γίνῃ μὲ ἐλαχίστας χαρακτηριστικὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι νὰ δεικνύουν τὴν τάσιν τοῦ ἐξεταζομένου φαινομένου καὶ νὰ διατηρῶνται εὐκολώτερον εἰς τὴν μνήμην ; π.χ. Ἡ ἐντύπωσις, ἡ ὁποία δημιουργεῖται ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ πίνακος βαθμολογίας ἑνὸς μαθητοῦ εἰς ἕκαστον μάθημα κεχωρισμένως, εἶναι βεβαίως ἀσφαλής, ὅμως εἶναι κατὰ πολὺ ἁπλουστέρα, σαφεστέρα καὶ διαρκὴς εἰς τὴν μνήμην, ἂν ἴδωμεν τὸν γενικὸν βαθμὸν ἐπιδόσεως, τὸν μέσον ὅρον ὅπως λέγομεν.

Εἰς τὴν Στατιστικὴν συνήθως ἀναζητοῦμεν μερικὰς χαρακτηριστικὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι ἀντικαθιστοῦν ἕνα σύνολον ἀριθμῶν συγκεντρουμένων ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον πέριξ αὐτῶν καὶ αἱ ὁποῖαι νὰ δίδουν μίαν ἱκανοποιητικὴν ἰδέαν τοῦ συνόλου τῶν ἐξεταζομένων ἀριθμῶν.

Αἱ χαρακτηριστικαὶ αὐταὶ τιμαὶ λέγονται **κεντρικαὶ τιμαὶ** ἢ μέσοι, διακρίνονται δὲ συνήθως εἰς **μέσους κεντρικῆς τάσεως** καὶ εἰς **μέσους θέσεως.** Οἱ πρῶτοι εἶναι ὁ **ἀριθμητικός,** ὁ **γεωμετρικὸς** καὶ ὁ **ἁρμονικὸς μέσος** καὶ οἱ δεύτεροι ἡ **διάμεσος** καὶ ἡ **ἐπικρατοῦσα τιμή.** Ἐκ τῶν πρώτων θὰ γίνῃ ἡ ἐξέτασις μόνον τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου.

Ἀριθμητικὸς μέσος (ἢ μέση τιμή)

α) Ἀριθμητικὸς μέσος ἐπὶ ἀταξινομήτων στοιχείων.

Ἐὰν $x_1, x_2, \ldots x_N$ εἶναι αἱ παρατηρηθεῖσαι τιμαί, τότε τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν τιμῶν διὰ τοῦ πλήθους N αὐτῶν δίδει τὸν ἀριθμητικὸν μέσον, ὅστις παρίσταται διὰ τοῦ $\overline{x}$.

Ἤτοι : $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$ ἢ $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x}{N}$ (1)

β) Ἀριθμητικὸς μέσος ἐπὶ ταξινομηθέντων στοιχείων.

Ἐὰν αἱ $x_1, x_2, \ldots, x_N$ παρατηρηθεῖσαι τιμαὶ ταξινομηθοῦν εἰς πίνακα κατανομῆς συχνοτήτων, τότε τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων ὅλων τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους συχνότητάς των $f_1, f_2, \ldots, f_\mu$ διὰ τῆς ὁλικῆς συχνότητος $N = \Sigma f$ δίδει τὸν ἀριθμητικὸν μέσον $\overline{x}$. *

x_1	x_2	...	x_μ
f_1	f_2	...	f_μ

Ἤτοι : $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \dfrac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_\mu x_\mu}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ (2)

Παράδειγμα : 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ ἀναστήματος 12 μαθητῶν. Τὰ ἀναστήματα αὐτῶν ἀταξινόμητα εἶναι :

151, 152, 152, 156, 156, 156, 162, 162, 162, 162, 168, 168 cm

(*) Ἐκ τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots x_N$ αἱ f_1 εἶναι ἴσαι πρὸς x_1, αἱ f_2 ἴσαι πρὸς $x_2, \ldots$, αἱ f_μ ἴσαι πρὸς x_μ καὶ συνεπῶς ἔχομεν $x_1 + x_2 + \ldots + x_N = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_\mu x_\mu$.

Μέσον ἀνάστημα:

$$\overline{x}=\frac{151+152+152+156+156+156+162+162+162+162+168+168}{12}=\frac{1907}{12}=158{,}9\text{ cm}$$

Ὁ πίναξ κατανομῆς συχνοτήτων εἶναι:
καὶ συνεπῶς κατὰ τὸν τύπον (2)

151	152	156	162	168
1	2	3	4	2

ἔχομεν: $\overline{x}=\dfrac{1\cdot151+2\cdot152+3\cdot156+4\cdot162+2\cdot168}{12}=158{,}9\text{cm}$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον βάρος τῶν 68 ἐργατῶν ἐκ τοῦ πίνακος κατανομῆς συχνοτήτων τοῦ παραδείγματος τῆς σελ. 211.

Ὁ ὑπολογισμὸς ἐνταῦθα τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου γίνεται κατὰ προσέγγισιν, διότι θεωροῦμεν ὡς τιμὰς τῆς x τὰς μέσας τιμὰς τῆς β' στήλης.

Οὕτως ἔχομεν:

$$\overline{x}=\frac{3\cdot60+11\cdot70+24\cdot80+15\cdot90+13\cdot100+0\cdot110+2\cdot120}{68}=84{,}7$$

Ἄρα τὸ μέσον βάρος τῶν 68 ἐργατῶν εἶναι 84, 7 Kg.

Ἰδιότητες τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου

1) Ἔστω $x_1, x_2, \ldots x_\mu, \ldots, x_N$ αἱ παρατηρηθεῖσαι τιμαὶ καὶ $\overline{x}$ ὁ ἀριθ. μέσος αὐτῶν. Ἐὰν τὴν διαφορὰν $x_\mu-\overline{x}$ καλέσωμεν **ἀπόκλισιν** τῆς τυχούσης τιμῆς x_μ ἀπὸ τοῦ μέσου $\overline{x}$, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων τοῦ συνόλου τῶν δεδομένων ἀπὸ τοῦ $\overline{x}$ εἶναι μηδέν.

Πράγματι, $(x_1-\overline{x})+(x_2-\overline{x})+\ldots+(x_N-\overline{x})=x_1+x_2+\ldots+x_N-$
$-N\overline{x}=N\overline{x}-N\overline{x}=0.$

2) Ὁ μέσος $\overline{x}$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν τιμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ ἐπὶ τὰς σχετικὰς συχνότητας αὐτῶν.

Πράγματι, ἐκ τοῦ τύπου (2) ἔχομεν:

$\overline{x}=\dfrac{f_1}{\Sigma f}x_1+\dfrac{f_2}{\Sigma f}x_2+\ldots+\dfrac{f_\mu}{\Sigma f}\cdot x_\mu=F_1x_1+F_2x_2+\ldots+F_\mu x_\mu=\Sigma Fx$, ὅπου $F_1, F_2, \ldots, F_\mu$ εἶναι αἱ σχετικαὶ συχνότητες

Διάμεσος (x_δ)

Ἐὰν $x_1, x_2, \ldots x_N$ εἶναι αἱ N παρατηρηθεῖσαι τιμαὶ καὶ γράψωμεν αὐτὰς κατὰ τάξιν αὐξανομένου μεγέθους, τότε ἂν μὲν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος τῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, αὐτὸς εἶναι ἡ διάμεσος τῶν ἀριθμῶν $x_1,x_2 \ldots x_N$, ἂν δὲ δὲν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος, λαμβάνεται ὡς διάμεσος τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο μεσαίων ὅρων.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ἡ διάμεσος εἶναι ἀριθμός, ὁ ὁποῖος χωρίζει τὸ σύνολον τῶν τιμῶν $x_1, x_2 \ldots x_N$ εἰς δύο τάξεις μὲ τὸν αὐτὸν πληθάριθμον. Ὁ τύπος δὲ $\dfrac{N+1}{2}$ δίδει τὴν τάξιν τῆς διαμέσου εἰς τὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν. Π.χ.

ἡ διάμεσος τῶν ἀριθμῶν 3, 10, 13, 19, 20, 30, 32 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 19, ὅστις κατέχει τὴν τάξιν $\frac{7+1}{2} = 4$ος. Ἐνῷ τῶν ἀριθμῶν 12, 15, 15, 15, 19, 40, 40, 41 εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{15+19}{2} = 17$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{8+1}{2} = 4{,}5$ ἄρα κατέχει τὴν 5ην τάξιν καὶ συνεπῶς κεῖται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 19.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς διαμέσου ὁμαδοποιημένων παρατηρήσεων παρουσιάζει δυσκολίαν τινὰ καὶ κάποιαν ἀοριστίαν διὰ τὴν τιμὴν αὐτῆς, διότι δὲν γνωρίζομεν τὰς ἀκριβεῖς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς. Πρὸς τοῦτο, διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς διαμέσου τῶν τιμῶν τοῦ πίνακος κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν τῆς σελ. 211 σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἔχομεν $N = 68$ καὶ $\frac{N+1}{2} = \frac{68+1}{2} = 34,5$. Ἄρα ἡ διάμεσος τιμὴ κεῖται μεταξὺ τῆς 34ης καὶ 35ης ἐκ τῶν 68 διατεταγμένων κατὰ τάξιν μεγέθους τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x καὶ συνεπῶς ἀνήκει εἰς τὴν τάξιν 75 – 85, ὡς τοῦτο φαίνεται ἐκ τῆς στήλης (ἀθροιστικὴ συχνότης).

Πρὸ τῆς διαμέσου ταύτης τιμῆς ὑπάρχουν 34 τιμαί, ἐξ ὧν αἱ 14 ἀνήκουν εἰς τὴν τάξιν 55 – 75 καὶ αἱ ὑπόλοιποι 20 ἀνήκουν εἰς τὴν τάξιν 75 – 85. Ὥστε ἡ τάξις 75 – 85, εὔρους 10 μονάδων, περιλαμβάνει εἰς τὰς 24 τιμὰς αὐτῆς τὴν τιμὴν τῆς διαμέσου καὶ 20 τιμὰς πρὸ αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ 24 τιμαὶ καλύπτουν εὖρος 10 μονάδων, αἱ 20 τιμαὶ θὰ καλύπτουν εὖρος $10 \cdot \frac{20}{24}$ μον.

Ἑπομένως ἡ διάμεσος τιμὴ κατὰ προσέγγισιν εἶναι :

$$x_\delta = 75 + 10 \cdot \frac{20}{24} = 75 + 8{,}3 = 83,3 \text{ kg}$$

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος τοῦ παραδείγματός μας ὑπελογίσθη εἰς τὰ προηγούμενα καὶ εὑρέθη ὅτι εἶναι $\overline{x} = 84{,}7$. Ἡ τιμὴ αὕτη ὀλίγον διαφέρει τῆς διαμέσου τιμῆς $x_\delta = 83{,}3$.

Γενικῶς, ἐὰν x_λ εἶναι ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τῆς τάξεως, εἰς ἣν ἀνήκει ἡ διάμεσος τιμὴ x_δ, Σf ἡ ὁλικὴ συχνότης, f_δ ἡ συχνότης τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀνήκει ἡ x_δ, F ἡ ἀθροιστικὴ συχνότης ὅλων τῶν τάξεων πρὸ τῆς τάξεως τῆς x_δ καὶ ε τὸ εὖρος τῆς τάξεως τῆς x_δ, τότε, ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν τὸν τύπον :

$$x_\delta = x_\lambda + \varepsilon \cdot \frac{\frac{1}{2}\Sigma f - F}{f_\delta}$$

Γραφικὸς προσδιορισμὸς τῆς διαμέσου. Οὗτος εἶναι πολὺ εὔκολος, ἀλλὰ δὲν παρέχει μεγάλην ἀκρίβειαν.

Κατασκευάζομεν τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος καὶ φέρομεν τὴν κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα Οψ εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον χωρίζει εἰς δύο ἰσοπληθεῖς ὁμάδας τὴν ὁλικὴ συχνότητα. Ἡ κάθετος αὕτη τέμνει τὸ πολύγωνον εἰς ἓν σημεῖον, ἡ δὲ κάθετος ἀπὸ αὐτὸ πρὸς τὸν ἄξονα Οχ ὁρίζει σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οχ, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι ἡ διάμεσος τιμή. Εἰς τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος τῆς σελ. 211 ἡ διάμεσος εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Γ.

Ἐπικρατοῦσα τιμὴ (X_ε)

Ὁ μέσος αὐτὸς εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς, ἥτις παρουσιάζεται συχνότερον, ἤτοι **ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μεγίστην συχνότητα,** καὶ συνεπῶς ἔχει ἔννοιαν, ὅταν τὰ δεδομένα ἐμφανίζονται εἰς κατανομὴν συχνοτήτων. Π.χ. Ἐὰν ἐκ τῶν ἐργατῶν ἑνὸς ἐργοστασίου οἱ λαμβάνοντες ἡμερομίσθιον 200 δρχ. εἶναι οἱ πολυαριθμότεροι, τότε λέγομεν ὅτι τὸ ἐπικρατέστερον ἡμερομίσθιον (ἐπικρατοῦσα τιμή) εἰς τὸ ἐργοστάσιον εἶναι 200 δρχ.

Ὁ προσδιορισμὸς μὲ ἀκρίβειαν τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς προϋποθέτει τὴν γνῶσιν ὅλων τῶν στοιχείων τῆς κατανομῆς καὶ ἑπομένως εἶναι δυσχερής, ὅταν τὰ στοιχεῖα εἶναι πολυπληθῆ καὶ ἀκανόνιστα.

Εἰς μίαν κανονικὴν κατανομὴν συχνοτήτων ὁ προσδιορισμὸς τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς κατὰ προσέγγισιν στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἐμπειρικοῦ τύπου :

$$x_\varepsilon - x_\delta = 2\,(x_\delta - \overline{x})$$

Σημείωσις: Κατόπιν παρατηρήσεως προέκυψεν ὅτι, ἐὰν ἡ κατανομὴ συχνοτήτων εἶναι κάπως κανονική, ἡ διάμεσος x_δ περιέχεται μεταξὺ τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς x_ε καὶ τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου $\overline{x}$. Ἐὰν ἡ κατανομὴ εἶναι συμμετρικὴ (ἱστόγραμμον συχνότητος συμμετρικόν), τότε εἶναι $x_\varepsilon = x_\delta = \overline{x}$.

Γραφικῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμε τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμὴν ἀπὸ τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος ὡς ἑξῆς : Συνδέομεν δι' εὐθυγράμμων τμημάτων τὰς ἄνω κορυφὰς τοῦ ὀρθογωνίου τῆς μεγαλυτέρας συχνότητος μὲ τὰς γειτονικὰς κορυφὰς τῶν δύο ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ὀρθογωνίων καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν τμημάτων τούτων φέρομεν κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα Ox, ἡ ὁποία ὁρίζει τὴν ἐπικρατοῦσαν τιμήν. π.χ. Εἰς τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος τῆς σελ. 212 ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Α.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τῆς ἐπικρατούσης τιμῆς εἰς τὴν κατανομὴν τῶν 68 ἐργατῶν εἰς σελ. 211 λαμβάνομεν :

$$x_\varepsilon - 83{,}3 = 2\,(83{,}3 - 84{,}7) \Rightarrow x_\varepsilon = 80{,}5 \text{ κg.}$$

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῶν κεντρικῶν τιμῶν

Ὁ ἀριθμητικὸς μέσος ὑπολογίζεται εὐκόλως καὶ ἔχει καθωρισμένην τιμήν, ἥτις ὅμως ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὰς ἀκραίας τιμάς, διὰ τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ μὴν εἶναι ἐπαρκῶς ἀντιπροσωπευτικὴ κεντρικὴ τιμή. Ἐν τούτοις, εἶναι ὁ πλέον εὔχρηστος, ὁ πλέον κατανοητὸς καὶ ὁ πλέον γνωστὸς μέσος εἰς τὴν Στατιστικὴν πρᾶξιν.

Ἡ διάμεσος ὑπολογίζεται σχετικῶς εὐκόλως καὶ ἡ τιμή της ἐπηρεάζεται μόνον ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν δεδομένων τιμῶν (δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὰς ἀκραίας τιμάς), διὰ τοῦτο εἶναι περισσότερον κεντρικὴ τιμὴ καὶ συνεπῶς μᾶς πληροφορεῖ πληρέστερον τοῦ ἀριθμ. μέσου.

Ἡ ἐπικρατοῦσα τιμή, τέλος, ὑπολογίζεται μόνον κατὰ προσέγγισιν σχετικῶς εὐχερῶς (ἡ εὕρεσις τῆς ἀληθοῦς τιμῆς εἶναι δύσκολος καὶ δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὰς ἀκραίας τιμάς.

Τὰ πλεονεκτήματα καὶ μειονεκτήματα τῶν κεντρικῶν τιμῶν ἐμφανίζονται κατὰ περίπτωσιν καὶ συνεπῶς εἰς τὰς στατιστικὰς ἐφαρμογὰς ἡ προτίμησις των γίνεται κατὰ περίπτωσιν.

131. ΔΙΑΣΠΟΡΑ — ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΙΣ — ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΔΙΑΣΠΟΡΑΣ

Εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ὅτι αἱ τρεῖς κεντρικαὶ τιμαὶ (ἀριθμητ. μέσος, διάμεσος, ἐπικρατοῦσα τιμή) παρέχουν πολλάκις μόνον ἐνδείξεις διὰ τὴν τάσιν τῶν δεδομένων μιᾶς κατανομῆς. Εἶναι φυσικὸν λοιπόν, ὅτι εἶναι ἀνεπαρκεῖς νὰ περιγράψουν μὲ κάποιαν ἀκρίβειαν τὴν φυσιογνωμίαν τῆς κατανομῆς.
Π.χ. Εἰς ἕνα ἔρανον οἱ 12 ὑπάλληλοι μιᾶς ὑπηρεσίας προσέφερον τὰ ἑξῆς ποσά : 10, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 25, 30, 30, 45, 50. (1). Αἱ κεντρικαὶ τιμαὶ τῆς σειρᾶς αὐτῆς εἶναι : $\overline{x} = 25$, $x_\delta = 20$, $x_\varepsilon = 20$. Ἐὰν ἀπὸ τοὺς ἰδίους ὑπαλλήλους ἡ σειρὰ τῶν εἰσφορῶν ἦτο :

5, 10, 10, 10, 20, 20, 20, 20, 20, 30, 35, 100 (2)

τότε αἱ κεντρικαὶ τιμαὶ πάλιν εἶναι : $\overline{x} = 25$, $x_\delta = 20$, $x_\varepsilon = 20$ Αἱ σειραὶ (1) καὶ (2) παρ' ὅλον ὅτι ἔχουν τὰς αὐτὰς κεντρικὰς τιμὰς ἐν τούτοις διαφέρουν μεταξύ των πάρα πολύ. Εἰς τὴν σειράν (1) αἱ τιμαὶ διασπείρονται ἀπὸ 10 ἕως 50 καὶ τὸ εὖρος τῆς κατανομῆς εἶναι $50 - 10 = 40$, ἐνῷ εἰς τὴν (2) ἀπὸ 5 ἕως 100 μὲ εὖρος $100 - 5 = 95$, διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ κατανομὴ τῆς σειρᾶς (2) ἔχει μεγαλυτέραν διασπορὰν ἀπὸ τὴν κεντρικὴν τιμήν.

Ἡ Στατιστικὴ ἔρευνα, ὡς ἐκ τούτου, εἶναι ὑποχρεωμένη, ὅπως ἐξετάσῃ καὶ ἄλλας τιμὰς τῆς μεταβολῆς τῶν στατιστικῶν δεδομένων.

Τὴν συγκέντρωσιν ἢ ἀπομάκρυνσιν τῶν στατιστικῶν δεδομένων πέριξ μιᾶς κεντρικῆς τιμῆς ὀνομάζομεν **διασποράν**.

Τὸ εὖρος τῆς κατανομῆς δὲν εἶναι κατάλληλον διὰ τὴν περιγραφὴν τῆς διασπορᾶς τῶν δεδομένων, διότι ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὰς ἀκραίας τιμάς. Θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν διασπορὰν μὲ τὴν εὕρεσιν τοῦ μέσου ὅρου τῶν ἀποκλίσεων τῶν τιμῶν ἀπὸ τοῦ μέσου $\overline{x}$ αὐτῶν, ὅμως, ἀτυχῶς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκλίσεων τούτων εἶναι μηδὲν (σελ. 215, 1η ἰδιότης τοῦ ἀριθμ. μέσου). Τὰ τετράγωνα ὅμως τῶν ἀποκλίσεων, ἤτοι τὰ $(x_\lambda - \overline{x})^2$, εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ συνεπῶς ὁ ἀριθμητικὸς μέσος αὐτῶν $\frac{\Sigma (x_\lambda - \overline{x})^2}{N}$ διάφορος τοῦ μηδενός. Τὴν ποσότητα αὐτὴν συμβολίζομεν μὲ τὸ σ^2 καὶ καλοῦμεν **μέσην τετραγωνικὴν ἀπόκλισιν** ἢ **διακύμανσιν τῆς κατανομῆς,** τὴν δὲ θετικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτῆς σ **τυπικὴν ἀπόκλισιν.**

Ὥστε ἔχομεν :
$\lambda = 1,2,\dots,N$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma (x_\lambda - \overline{x})^2}{N} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x_\lambda - \overline{x})^2}{N}} \quad (2)}$$

Ἀναπτύσσοντες τὸ ἄθροισμα $\Sigma (x_\lambda - \overline{x})^2$ λαμβάνομεν :

$$\Sigma(x_\lambda - \overline{x})^2 = (x_1, - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_N - \overline{x})^2 =$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2) - 2\bar{x}\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_N) + N\bar{x}^2 =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2) - 2\bar{x} \cdot N\bar{x} + N\bar{x}^2 = \Sigma x_\lambda^2 - N\bar{x}^2$$

καὶ ἄρα οἱ τύποι (1) καὶ (2) γράφονται:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{\Sigma x_\lambda^2}{N} - \bar{x}^2 \quad (1') \quad \text{καὶ} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x_\lambda^2}{N} - \bar{x}^2} \quad (2')}$$

Παραδείγματα. 1) Αἱ διακυμάνσεις τοῦ προηγουμένου παραδείγματος τοῦ ἐράνου τῶν 12 ὑπαλλήλων εἶναι εἰς τὰς δύο περιπτώσεις:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{12}\left[(10-25)^2 + (15-25)^2 + \ldots + (50-25)^2\right] = \frac{1}{2}\,(15^2 + 10^2 + \ldots + 25^2) =$$
$$= \frac{400}{3}$$
$$\sigma_2^2 = \frac{1}{12}\left[(5-25)^2 + (10-25)^2 + \ldots + (100-25)^2\right] = \frac{1}{12}\,(20^2 + 15^2 + \ldots + 75^2) =$$
$$= \frac{3475}{6}$$

Αἱ δὲ τυπικαὶ ἀποκλίσεις εἶναι: $\sigma_1 = \sqrt{\frac{400}{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, $\sigma_2 = \sqrt{\frac{3475}{6}}$

2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διακύμανσις τῶν ἀριθμῶν 6, 8, 11, 12. Ἔχομεν $\bar{x} = \frac{37}{4} = 9{,}25$. Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον (1) ἔχομεν:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}\left[(6-9{,}25)^2 + \ldots + (12-9{,}25)^2\right] = \frac{1}{4}\,(3{,}25^2 + 1{,}25^2 + 1{,}75^2 + 2{,}75^2) \simeq 5{,}7$$

Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον (1′) ἔχομεν:

$$\sigma^2 = \frac{1}{4}\,(6^2 + 8^2 + 11^2 + 12^2) - \left(\frac{37}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}\,(36 + 64 + 121 + 144) - \frac{1369}{16} \simeq 5{,}7$$

Ὁ τύπος (1′) ἐνταῦθα μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπὸ πολυπλόκους πολλαπλασιασμούς.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἔχουν ταξινομηθῆ εἰς ἕναν πίνακα κατανομῆς

x_1	x_2	...	x_λ
f_1	f_2	...	f_λ

$f_1 + f_2 + \ldots + f_\lambda = N = \Sigma f$, τότε τὰ τετράγωνα τῶν ἀποκλίσεων, πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους συχνότητας, δίδουν **μέσην τετραγωνικὴν ἀπόκλισιν** $\sigma^2 = \frac{\Sigma f_\lambda\,(x_\lambda - \bar{x})^2}{\Sigma f}$ (3) καὶ **τυπικὴν ἀπόκλισιν** $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_\lambda\,(x_\lambda - \bar{x})^2}{\Sigma f}}$ (4)

Ἐὰν δὲ σκεφθῶμεν ὡς καὶ προηγουμένως, τότε οἱ τύποι (3) καὶ (4) γράφονται:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma f_\lambda\, x_\lambda^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2 \quad (3') \quad \text{καὶ} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_\lambda\, x_\lambda^2}{\Sigma f} - \bar{x}^2} \quad (4')$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς αἱ ἀποκλίσεις ὑπολογίζονται μὲ τὰς μέσας τιμὰς τῶν τάξεων.

Σημείωσις: Ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις σ εἶναι τὸ μέτρον τῆς διασπορᾶς καὶ ἐκφράζεται διὰ τῶν ἀρχικῶν μονάδων μετρήσεως τῶν δεδομένων.

Παράδειγμα: Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τῆς ὁμαδοποιημένης κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν τῆς σελίδος 211.

Σχηματίζομεν τὸν πίνακα : Ἀριθμητικὸς μέσος $\bar{x} = 84,7$ kg.

Μέση τιμὴ	f_λ	x_λ^2	$f_\lambda x_\lambda^2$	$x_\lambda - \bar{x}$	$(x_\lambda - \bar{x})^2$	$f_\lambda (x_\lambda - \bar{x})^2$
60	3	3600	10800	– 24,7	610,09	1830,27
70	11	4900	53900	– 14,7	216,09	2376,99
80	24	6400	153600	– 4,7	22,09	530,16
90	15	8100	121500	5,3	28,09	421,35
100	13	10000	130000	15,3	234,09	3043,17
110	0	12100	—	25,3	640,09	—
120	2	14400	28800	35,3	1246,09	2492,18
Ἄθροισμα	68		498600			10694,12

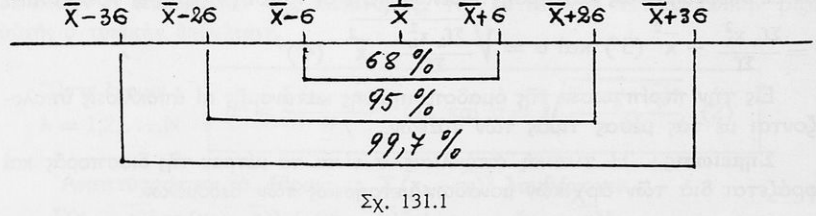
Ἄρα, συμφώνως τῷ τύπῳ (4΄) ἔχομεν : $\sigma = \sqrt{\dfrac{498600}{68} - 84,7^2} \simeq 12,6$ kg

συμφώνως δὲ τῷ τύπῳ (4) ἔχομεν : $\sigma = \sqrt{\dfrac{10694,12}{68}} \simeq 12,6$ kg

Σημασία τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως

Ἡ γνῶσις τῆς μέσης τιμῆς $\bar{x}$ καὶ τῆς τυπικῆς ἀποκλίσεως σ παρέχει ἀνεκτίμητον συμβολὴν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς μορφῆς τῆς κατανομῆς συχνοτήτων κατὰ τρόπον ἱκανοποιητικόν, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ δεδομένα διασπείρονται κανονικῶς καὶ συμμετρικῶς περὶ τὸν μέσον $\bar{x}$. Ὅταν ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις εἶναι μικρά, τὰ δεδομένα τείνουν νὰ συσσωρευθοῦν πέριξ τοῦ μέσου, καὶ ὅταν εἶναι μεγάλη, τείνουν νὰ διασπαροῦν. Αἱ στατιστικαὶ μελέται δεικνύουν ὅτι εἰς μίαν κανονικὴν καὶ συμμετρικὴν κατανομὴν τὰ διαστήματα ἑκατέρωθεν τοῦ μέσου $\bar{x}$ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς σ, 2σ, 3σ περιλαμβάνουν τὰ 68%, 95%, 99,7% περίπου ἀντιστοίχως τῆς ὁλικῆς συχνότητος τῶν δεδομένων.

Ὁ ἀκόλουθος πίναξ δίδει συνοπτικῶς τὴν διασπορὰν τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἑκατέρωθεν τῆς μέσης τιμῆς $\bar{x}$ εἰς ἑκατοστιαῖα ποσοστὰ τῆς ὁλικῆς



Σχ. 131.1

συχνότητος, ἔχει δὲ σκοπὸν νὰ θέσῃ κατώτερα ὅρια ἀσφαλείας καὶ νὰ βοηθήσῃ συνεπῶς εἰς τὴν διαπίστωσιν τυχὸν λαθῶν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εὕρομεν $\sigma = 12{,}6$ kg καὶ $\bar{x} = 84{,}7$kg. Ἄρα εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $\bar{x} - \sigma = 84{,}7 - 12{,}6 = 72{,}1$ ἕως $\bar{x} + \sigma = 84{,}7 + 12{,}6 = 97{,}3$ διαπιστοῦμεν, κατόπιν ἐξετάσεως τοῦ πολυγώνου ἀθροιστικῆς συχνότητος, ὅτι ἀνήκουν αἱ 46 ἐκ τῶν 68 τιμῶν, ἤτοι τὸ 67, 6%. Πράγματι, ἡ τιμὴ 72, 1 ἀντιστοιχεῖ περίπου εἰς τὴν ἀθροιστικὴν συχνότητα 19 καὶ ἡ τιμὴ 97,3 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ 65 καὶ συνεπῶς $65 - 19 = 46$.

Ἐπίσης, εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ $\bar{x} - 2\sigma = 84{,}7 - 2 \cdot 12{,}6 = 59{,}5$ ἕως $\bar{x} + 2\sigma = 109{,}9$ ἀνήκουν 63 ἐκ τῶν 68 τιμῶν, ἤτοι τὸ 92, 6%. Πράγματι, ἡ τιμὴ 59,5 ἀντιστοιχεῖ περίπου εἰς τὴν ἀθροιστικὴν συχνότητα 3 καὶ ἡ τιμὴ 109, 9 εἰς τὴν 66 καὶ συνεπῶς $66 - 3 = 63$.

Τὸ διάγραμμα τῆς διασπορᾶς

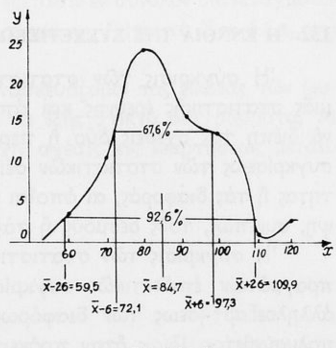
Εἴδομεν, ὅτι κάθε κατανομὴ συχνοτήτων δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς μὲ ἓν ἱστόγραμμον ἢ πολύγωνον συχνότητος. Ἡ εἰκὼν αὕτη εἶναι τυπικὴ τοῦ ἐξεταζομένου πληθυσμοῦ. Ἂν ὅμως φαντασθῶμεν ὅτι ὁ πληθυσμὸς μεταβάλλεται συνεχῶς, ἐνῷ ταυτοχρόνως τὸ εὖρος τῶν τάξεων μικραίνει, τότε τὸ ἱστόγραμμον ἢ τὸ πολύγωνον ὁριακῶς θὰ ταυτισθῇ μὲ μίαν καμπύλην (τὸ διάγραμμα τῆς διασπορᾶς), ἡ ὁποία καθορίζεται πλήρως ἀπὸ τὸν μέσον $\bar{x}$ καὶ τὴν τυπικὴν ἀπόκλισιν σ. Ὁ μέσος $\bar{x}$ ἀποτελεῖ τὸ μέτρον θέσεως ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις τὸ μέτρον διασπορᾶς. Ἐὰν ἡ τιμὴ σ εἶναι μικρά, τότε ἡ καμπύλη παρουσιάζει μεγάλην κυρτότητα, ἐὰν δὲ μεγάλη, τότε ἡ καμπύλη εἶναι ἁπλωμένη. Κατωτέρω δίδομεν τὸ διάγραμμα διασπορᾶς τῆς κατανομῆς τῶν 68 ἐργατῶν ἐκ τοῦ ἱστογράμμου συχνότητος τῆς σελ. 212.

Ἔχομεν $\bar{x} = 84{,}7$ καὶ $\sigma = 12{,}6$. Εἰς τὸ διάστημα $(\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma)$ ἀνήκουν 46 ἐκ τῶν 68 τιμῶν, ἤτοι τὸ 67, 6%. Εἰς τὸ διάστημα $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$ ἀνήκουν 63 ἐκ τῶν 68 τιμῶν, ἤτοι τὸ 92, 6%.
Οὕτω συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διασπορὰ δὲν εἶναι μεγάλη.

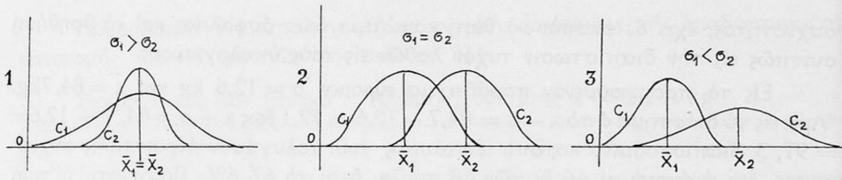
Δύο ἢ καὶ περισσότεροι πληθυσμοὶ εἶναι δυνατόν : 1) νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν μέσον καὶ νὰ διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν διασποράν, 2) νὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν διασπορὰν καὶ διάφορον μέσον καὶ 3) νὰ διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν διασπορὰν καὶ τὸν μέσον.

Τὰ ἀκόλουθα διαγράμματα διασπορᾶς ἀναφέρονται εἰς τὰς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἀντιστοίχως.

Ὁ πίναξ τοῦ σχ. 131.1, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν διασπορὰν εἰς ἑκατοστιαῖα ποσοστά,

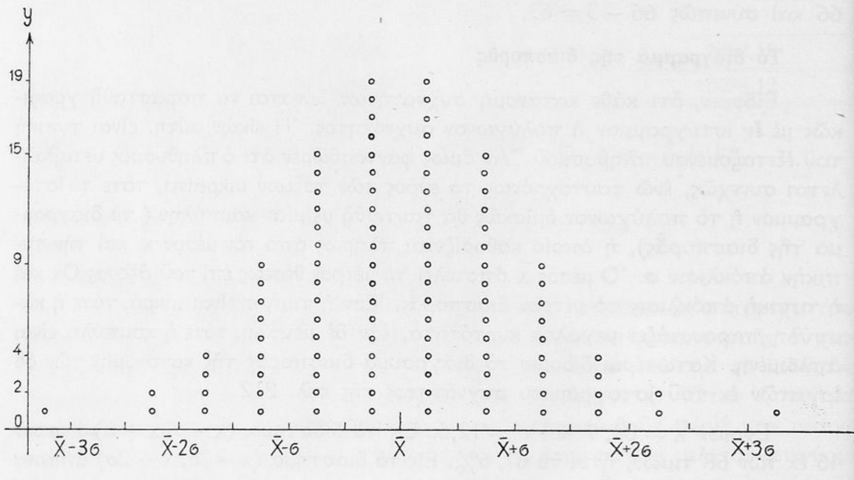


Σχ. 131.2



Σχ. 131.3

ἰσχύει ἀπολύτως, ὅταν ἡ κατανομὴ συχνοτήτων εἶναι κανονικὴ καὶ συμμετρικὴ περὶ τὸν μέσον $\bar{X}$. Τὸ ἀκόλουθον στικτὸν διάγραμμα δίδει τὴν εἰκόνα μιᾶς τοιαύτης κατανομῆς.



Σχ. 131.4

132. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΕΩΣ

Ἡ σύγκρισις τῶν στατιστικῶν δεδομένων ἀποτελεῖ τὴν τελικὴν φάσιν μιᾶς στατιστικῆς ἐρεύνης καὶ ἀποσκοπεῖ εἰς τὴν ἀνεύρεσιν νόμου τινός, ὅστις νὰ διέπῃ τὰς σχέσεις δύο ἢ περισσοτέρων ὑπὸ ἐξέτασιν φαινομένων. Διὰ τῆς συγκρίσεως τῶν στατιστικῶν σειρῶν δύναται ὁ ἐρευνητὴς νὰ εὕρῃ τὰς ὁμοιότητας ἢ τὰς διαφοράς, αἱ ὁποῖαι χαρακτηρίζουν δύο φαινόμενα καὶ νὰ ἀνακαλύψῃ, συνεπῶς, τοὺς δεσμοὺς ἢ τὰς σχέσεις ἐξαρτήσεώς των.

Ἡ σύγκρισις τῶν στατιστικῶν δεδομένων, ἐφ' ὅσον λαμβάνει χώραν ἐπὶ πραγμάτων ἐπιδεκτικῶν συγκρίσεως, παρουσιάζει δυσκολίας, διότι ἡ σχέσις ἀλληλοεξαρτήσεως τῶν διαφόρων φαινομένων (φυσικῶν ἢ οἰκονομικῶν) εἶναι πολυσύνθετος, ἰδίως ὅταν πρόκειται περὶ οἰκονομικῶν.

Αἱ Φυσικαὶ ἐπιστῆμαι, τὰ Μαθηματικά, ἡ Ἀστρονομία, ἡ Βιολογία παρέχουν πλεῖστα ὅσα παραδείγματα συγκρίσεως διαφόρων ποσῶν καὶ ἐκφράζουν τὰς σχέσεις ἀλληλοεξαρτήσεως αὐτῶν διὰ τύπων (νόμων) ἀπολύτως σταθερῶν καὶ ἀναλλοιώτων.

Αἱ σχέσεις αὗται δὲν ὑφίστανται προκειμένου περὶ οἰκονομικῶν φαινομένων. Ἐν τούτοις ἡ Στατιστικὴ παρέχει ἱκανοποιητικὰς ἐνδείξεις ἐπὶ τῆς πορείας τῶν φαινομένων τούτων, καίτοι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἑτερογενῆ.

Συχνὰ συμβαίνει αἱ μεταβολαὶ εἰς μίαν μεταβλητὴν νὰ συνοδεύωνται ἀπὸ παραλλήλους μεταβολάς, εἰς μίαν ἄλλην μεταβλητὴν καὶ νὰ ὑπάρχῃ μεταξύ των σχέσις τις, ἢ ὅπως λέγομεν αἱ μεταβληταὶ νὰ εἶναι **συσχετισμέναι**. Π.χ. τὸ ὕψος καὶ τὸ βάρος ἀνθρώπων, τὸ ὕψος καὶ ἡ ἡλικία ἀνθρώπων, ἡ θερμοκρασία καὶ ἡ διαστολὴ μετάλλων κ.λ.π.

Ὅταν δύο μεταβληταὶ x καὶ ψ μεταβάλλωνται παραλλήλως κατὰ τρόπον, ὥστε εἰς μεγάλας ἢ μικρὰς τιμὰς τῆς x νὰ ἀντιστοιχοῦν κατὰ τὸ πλεῖστον μεγάλαι ἢ μικραὶ τιμαὶ τῆς ψ ἀντιστοίχως, χωρὶς ὅμως νὰ ὑπάρχῃ Μαθηματική τις σχέσις (σταθερὸς νόμος) μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν τούτων, τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει **θετικὴ συσχέτισις** μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν x καὶ ψ. Π.χ. τὸ ὕψος καὶ τὸ βάρος ἀνθρώπων εὑρίσκονται εἰς **θετικὸν συσχετισμόν.**

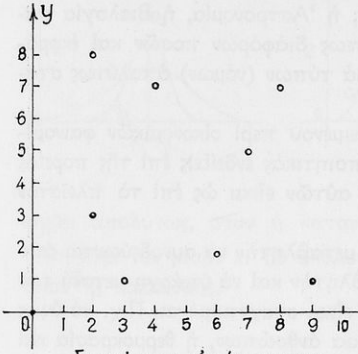
Ὅταν δὲ εἰς μεγάλας τιμὰς τῆς x ἀντιστοιχοῦν κατὰ τὸ πλεῖστον μικραὶ τιμαὶ τιμαὶ τῆς ψ καὶ ἀντιστρόφως, τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει **ἀρνητικὴ συσχέτισις**· Π.χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν φυτῶν ἀνὰ μονάδα ἐπιφανείας καὶ ἡ ἀπόδοσις ἑκάστου τῶν φυτῶν.

Τέλος, ὅταν αἱ τιμαί τῆς μιᾶς μεταβλητῆς δὲν φαίνονται νὰ ἐπηρεάζουν τὰς τιμὰς τῆς ἄλλης, δηλ. ὅταν αἱ δύο μεταβληταὶ εἶναι ἀνεξάρτητοι, τότε λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀσυσχέτιστοι.** Π.χ. τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα ἀνθρώπων.

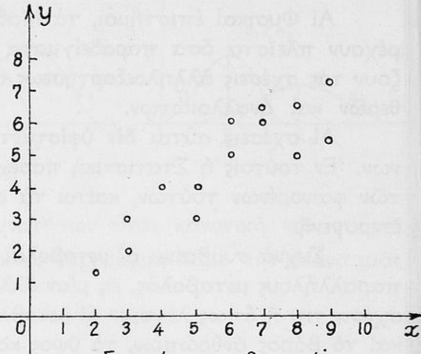
Ἡ γραφικὴ παράστασις ὑποβοηθεῖ εἰς τὴν προσπάθειαν ἀνευρέσεως μιᾶς σχέσεως ἐξαρτήσεως μεταξὺ δύο φαινομένων.

Οὕτως, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν πρὸς ἐξέτασιν ἕν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν ἀντιστοίχων τιμῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ ψ. Ἤτοι τὸ $\Sigma = \{ (x_1, \psi_1) (x_2, \psi_2), \ldots, (x_\lambda, \psi_\lambda), \ldots (x_N, \psi_N) \}$

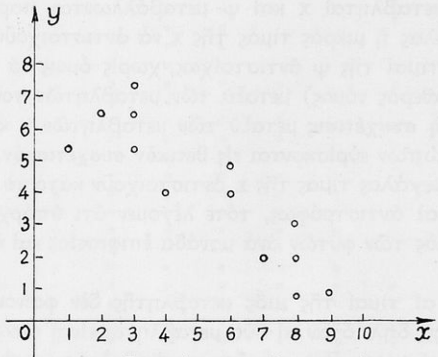
Εἰς ἕν σύστημα ὀρθογ. ἀξόνων xOψ κατασκευάζομεν τὰς εἰκόνας τῶν ζευγῶν τούτων. Τότε εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν τὰ ἑξῆς στικτὰ διαγράμματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἱκανὰ νὰ καταδείξουν, ἂν ὑπάρχῃ σχέσις τις ἐξαρτήσεως μεταξὺ τῶν δύο μεταβλητῶν θετικὴ ἢ ἀρνητική.



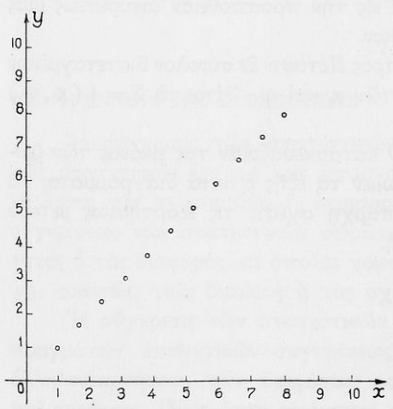
Συσχέτισις ἀνύπαρκτος



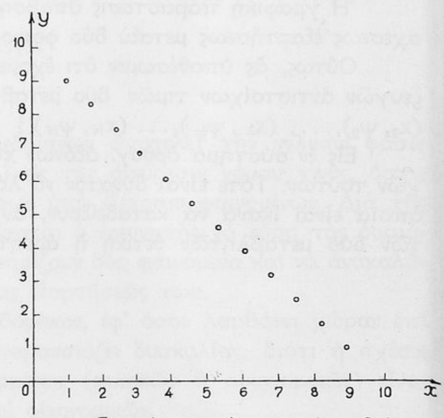
Συσχέτισις θετική



Συσχέτισις ἀρνητική



Συσχέτισις θετική τελεία



Συσχέτισις ἀρνητική τελεία

Σημείωσις. Ἐκτὸς τῶν στικτῶν διαγραμμάτων γίνεται χρῆσις καὶ τῶν γραμμικῶν διαγραμμάτων (καμπύλων) κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἡ μία καμπύλη νὰ πίπτῃ ἐπὶ τῆς ἄλλης καὶ νὰ καθίσταται προφανὴς ὁ συσχετισμὸς ἢ μὴ τῶν δύο μεταβλητῶν.

Τὰ ἀνωτέρω διαγράμματα εἶναι μὲν ἀναγκαῖα, ὡς προπαρασκευαστικὴ ἐργασία, ὄχι ὅμως καὶ ἐπαρκῆ. Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν σαφεστέρας, ἐνδείξεις καὶ νὰ ἑρμηνεύσωμεν τὰς τυχὸν ὁμοιότητας καὶ διαφοράς, εἶναι ἀνάγκη νὰ κάμωμεν ἀριθμητικὰς συγκρίσεις.

Οὕτως, ἐὰν $\overline{x}$ καὶ $\overline{\psi}$ εἶναι οἱ μέσοι τῶν σειρῶν τοῦ πίνακος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν $\begin{cases} x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots, x_N \\ \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\lambda, \ldots \psi_N \end{cases}$, τότε ἓν πρῶτον κριτήριον διὰ τὴν ὕπαρξιν συσχετίσεως μεταξὺ τῶν x καὶ ψ, παρέχει τὸ ἄθροισμα:

$(x_1 - \overline{x})(\psi_1 - \overline{\psi}) + (x_2 - \overline{x})(\psi_2 - \overline{\psi}) + \ldots + (x_N - \overline{x})(\psi_N - \overline{\psi})$ (1), τὸ ὁποῖον ἐὰν εἶναι θετικόν, δηλοῖ ὅτι ἡ συσχέτισις εἶναι θετική, διότι τότε τὰ περισσότερα γινόμενα $(x_\lambda - \overline{x})(\psi_\lambda - \overline{\psi})$ εἶναι θετικά, ποὺ σημαίνει ὅτι τὰ περισσότερα ζεύγη $(x_\lambda, \psi_\lambda)$ δίδουν ἀποκλίσεις ἐκ τῶν μέσων $\overline{x}$ καὶ $\overline{\psi}$ ὁμοσήμους. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα (1) εἶναι ἀρνητικόν, τότε δηλοῖ ὅτι ἡ συσχέτισις εἶναι ἀρνητική. Ἐάν, τέλος, εἶναι ἐγγὺς τοῦ μηδενός, τότε δεικνύει τὸ ἀσυσχέτιστον τῶν x καὶ ψ.

Ὁ βαθμὸς τῆς συσχετίσεως μεταξὺ δύο μεταβλητῶν μετρεῖται ὑπὸ τοῦ καλουμένου **συντελεστοῦ συσχετίσεως r**, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπὸ τὸ πηλίκον τοῦ μέσου ὅρου τοῦ ἀθροίσματος (1) διὰ τοῦ γινομένου τῶν τυπικῶν ἀποκλίσεων σ_x καὶ σ_ψ τῶν μεταβλητῶν x καὶ ψ.

Ἤτοι ἔχομεν :
$$r = \frac{\frac{1}{N}\Sigma(x_\lambda - \overline{x})(\psi_\lambda - \overline{\psi})}{\sqrt{\frac{\Sigma(x_\lambda - \overline{x})^2}{N}}\sqrt{\frac{\Sigma(\psi_\lambda - \overline{\psi})^2}{N}}} = \frac{\Sigma(x_\lambda - \overline{x})(\psi_\lambda - \overline{\psi})}{\sqrt{\Sigma(x_\lambda - \overline{x})^2 \cdot \Sigma(\psi_\lambda - \overline{\psi})^2}} \qquad (2)$$

Ὁ συντελεστὴς r εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν μονάδων μετρήσεως, ἀποδεικνύεται δὲ ὅτι περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$. Ἤτοι $-1 \leqslant r \leqslant +1$. Ὅταν $r > 0$, τότε ἔχομεν θετικὴν συσχέτισιν, ἡ ὁποία καθίσταται ἰσχυροτέρα, καθὼς ὁ r πλησιάζει πρὸς τὸ $+1$. Ὅταν $r < 0$, τότε ἔχομεν ἀρνητικὴν συσχέτισιν, ἡ ὁποία καθίσταται ἰσχυροτέρα, καθὼς ὁ r πλησιάζει πρὸς τὸ -1. Ὅταν τὸ r εἶναι ἐγγὺς τοῦ μηδενός, τότε ἡ συσχέτισις εἶναι λίαν ἀσθενὴς ἢ οὐδεμία συσχέτισις ὑπάρχει. Τέλος, ἐὰν $r = +1$ ἢ $r = -1$, τότε ἔχομεν ἀπόλυτον θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν συσχέτισιν, ὁπότε μεταξὺ τῶν μεταβλητῶν x καὶ ψ ὑπάρχει μαθηματικὴ γραμμικὴ σχέσις τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x + \beta$. Ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως r χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἐξακρίβωσιν τοῦ ὑπάρχοντος δεσμοῦ ἐξαρτήσεως μεταξὺ δύο φαινομένων εἰς πλείστας ὅσας περιπτώσεις, ἰδιαιτέρως δὲ εἰς τὴν Μετεωρολογίαν, Βιολογίαν, Ἰατρικήν, Γεωργικὴν ἔρευναν καὶ εἰς τὴν Οἰκονομίαν.

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν ὅμως δέον ὁ ἐρευνητὴς νὰ ἐνεργῇ μετὰ πολλῆς περισκέψεως, διότι πολλάκις εὑρίσκομεν ἰσχυρὸν συντελεστὴν συσχετίσεως διὰ φαινόμενα τὰ ὁποῖα λογικῶς οὐδένα δεσμὸν ἐξαρτήσεως δύνανται νὰ ἔχουν.

Τὸ ὀρθὸν εἶναι νὰ ἐξετάζωμεν λογικῶς τὸ πρόβλημα πρῶτον καὶ ἀκολούθως νὰ διερευνῶμεν τὸ ἀποτέλεσμα.

῾Ο διάσημος στατιστικολόγος Tschuprow ἀναφέρει, ὅτι εἰς μίαν στατιστικὴν ἔρευναν ἐπὶ τοῦ μεγέθους τῶν ζημιῶν ἐκ πυρκαϊῶν καὶ τῆς παρουσίας ἢ μὴ πυροσβεστικῶν ἀντλιῶν ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως ἀπέδειξεν, ὅτι αἱ πλέον ἐνδιαφέρουσαι ζημίαι συμπίπτουν γενικῶς μὲ τὴν παρουσίαν τῶν ἀντλιῶν. Πρέπει λοιπὸν νὰ καύσωμεν τὰς ἀντλίας ;

Παράδειγμα: Οἱ βαθμοὶ 12 μαθητῶν εἰς τὰ ῾Ελληνικά, Μαθηματικά, Φυσικὴ εἶναι.

῾Ελληνικὰ	x	1	2	4	5	6	7	10	12	13	15	16	19	$9,2 = \overline{x}$
Μαθηματικὰ	ψ	2	10	4	12	12	16	16	18	18	16	18	19	$13,4 = \overline{\psi}$
Φυσικὴ	z	1	9	4	10	16	12	14	16	14	16	18	18	$12,3 = \overline{z}$

Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως τῶν ἐπιδόσεων τῶν μαθητῶν εἰς τὰ 1) ῾Ελληνικὰ καὶ Μαθηματικά, 2) Μαθηματικὰ καὶ Φυσικὴ.

Εὑρίσκομεν τὰς ἀποκλίσεις καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον 2.

Οὕτω:

$x_\lambda - \overline{x}$	− 8,2	−7,2	−5,2	−4,2	−3,2	−2,2	0,8	2,8	3,8	5,8	6,8	9,8
$\psi_\lambda - \overline{\psi}$	−11,4	−3,4	−9,4	−1,4	−1,4	2,6	2,6	4,6	4,6	2,6	4,6	5,6
$z_\lambda - \overline{z}$	−11,3	−3,3	−8,3	−2,3	3,7	−0,3	1,7	3,7	1,7	3,7	5,8	5,8

$$\Sigma (x_\lambda - \overline{x})(\psi_\lambda - \overline{\psi}) = (-8,2)(-11,4) + (-7,2)(-3,4) + \ldots + (9,8)(5,6) = 305,16$$

$$\Sigma (\psi_\lambda - \overline{\psi})(z_\lambda - \overline{z}) = (-11,4)(-11,3) + (-3,4)(-3,3) + \ldots + (5,6)(5,8) = 313,36$$

$$\Sigma (x_\lambda - \overline{x})^2 = (-8,2)^2 + (-7,2)^2 + \ldots + (6,8)^2 + (9,8)^2 = 377,68$$

$$\Sigma (\psi_\lambda - \overline{\psi})^2 = (-11,4)^2 + (-3,4)^2 + \ldots + (4,6)^2 + (5,6)^2 = 348,92$$

$$\Sigma (z_\lambda - \overline{z}) = (-11,3)^2 + (-3,3)^2 + \ldots + (5,8)^2 + (5,8)^2 = 326,98$$

῎Αρα ἔχομεν : 1) $r_1 = \dfrac{305,16}{\sqrt{377,68 \cdot 348,92}} = \dfrac{305,16}{363,01} \simeq 0,84$

2) $r_2 = \dfrac{313,36}{\sqrt{348,92 \cdot 326,98}} = \dfrac{313,36}{337,77} \simeq 0,93$

᾿Εκ τῶν εὑρεθέντων συντελεστῶν συσχετίσεως συμπεραίνομεν :

1) ὅτι ἀμφότεραι αἱ συσχετίσεις εἶναι θετικαὶ καὶ λίαν ἰσχυραὶ

2) ὅτι ἡ συσχέτισις τῶν ἐπιδόσεων τῶν μαθητῶν εἰς τὰ Μαθηματικὰ — Φυσικὴ εἶναι ἰσχυροτέρα τῆς τοιαύτης εἰς τὰ ῾Ελληνικά — Μαθηματικά.

Οἱ μαθηταὶ εἰς ἀμφοτέρας τὰς συσχετίσεις δύνανται νὰ κατασκευάσουν τὸ μικτὸν διάγραμμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

431) ᾿Εκ τῶν κατωτέρω ἰδιοτήτων ποῖαι εἶναι ποιοτικαὶ καὶ ποῖαι ποσοτικαί ; ᾿Εκ δὲ τῶν μεταβλητῶν ποῖαι εἶναι συνεχεῖς καὶ ποῖαι ἀσυνεχεῖς. ᾿Ανάστημα — ἡλικία — ἐπάγγελμα — εἰσόδημα — θρησκεία — γλῶσσα — οἰκογενειακὴ κατάστασις — ἀριθμὸς ἀγάμων — γεωργικὸς

κλῆρος — θερμοκρασία ἀέρος — θεραπευτήρια κατὰ γεωγραφικὸν διαμέρισμα — βάρος — ἐξαγωγὴ σταφίδος εἰς τόννους — ἀπουσίαι μαθητῶν.

432) Εἰς ἕνα πρόχειρον διαγωνισμὸν οἱ 42 μαθηταὶ τῆς τάξεως μας ἔλαβον τοὺς ἀκολούθους βαθμούς :

12,	8,	15,	17,	10,	11,	6,	10,	12,	14,	11,	19,	16,	12
16,	10,	20,	7,	12,	11,	10,	13,	15,	9,	17,	18,	14,	2
13,	17,	18,	10,	14,	6,	11,	12,	14,	10,	13,	15,	13,	12

Νὰ σχηματισθῇ πίναξ κατανομῆς συχνοτήτων μὲ στήλας ἀπολύτου, σχετικῆς καὶ ἀθροιστικῆς συχνότητος.

433) Τὸ ἔτος 1965 οἱ μετανάσται ἐξ Ἑλλάδος ἀνῆλθον εἰς 117 χιλιάδας περίπου, ἐξ ὧν 65 χιλ. ἄνδρες καὶ 52 χιλ. γυναῖκες ἡλικίας ἀπὸ 0 — 75 ἐτῶν, ὡς ὁ ἀκόλουθος πίναξ : (Πηγή : Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς 1966)

Ἡλικία	0–5	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30	31–35	36–40	41–45	46–50	51–55	56–60	61–65	66–70	71–75	Σύνολον
Ἄνδρες	1,8	1,6	1,3	5,3	10,2	17	11,9	8,6	3,8	1,5	0,9	0,5	0,3	0,2	0,1	65
Γυναῖκες	1,8	1,6	1,4	8	11	10,3	7,1	4,7	2	1	1,1	0,8	0,6	0,4	0,2	52

Νὰ σχηματισθῇ πίναξ κατανομῆς μὲ στήλας ὡς τῆς προηγ. ἀσκήσεως.

434) Αἱ ἀφίξεις εἰς Ἑλλάδα περιηγητῶν ἐκ τοῦ Ἐξωτερικοῦ ἀπὸ τοῦ ἔτους 1959–1965 ἔχουν ὡς ἀκολούθως : (Στατιστικὴ Ἐπετηρὶς 1966)

Ἔτος	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	
Ἀφίξεις	340,0	399,4	494,2	597,9	741,2	757,5	976,1	Εἰς χιλιάδας

Νὰ σχηματισθῇ πίναξ κατανομῆς μὲ στήλας ὡς τῆς προηγ. ἀσκήσεως.

435) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ πολύγωνον συχνότητος τῶν ἀσκήσεων 2, 3 καὶ 4 ὡς καὶ τὸ πολύγωνον ἀθροιστικῆς συχνότητος.

436) Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἱστόγραμμον συχνότητος καὶ ἀθροιστικῆς συχνότητος τῶν ἀσκήσεων 2 καὶ 3.

437) Νὰ κατασκευασθῇ ραβδόγραμμον διὰ τὰ στοιχεῖα τῆς ἀσκ. 4.

438) Τὰ γενικὰ ἔξοδα μιᾶς ἐπιχειρήσεως εἶναι :

Μισθοὶ δραχμαὶ 300.000, ἐνοίκια δραχ. 200.000, ἀσφάλειαι καὶ φόροι δραχ. 100.000, διαφήμισις 150.000, διάφορα δρχ. 50.000. Νὰ κατασκευασθῇ κυκλικὸν διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

439) Τὸ ἔτος 1966 ἡ ἔκτασις τῆς Ἑλλάδος παρουσίασεν τὴν ἑξῆς κατανομήν : Γεωργικὴ ἔκτασις 30%, Δασικὴ ἔκτασις 20,3%, Ἔκτασις βοσκῆς 38,2%, Οἰκοδομημένη ἔκτασις 3,5%, ἀμμώδης ἔκτασις 4,8%, ἔκτασις καλυπτομένη ὑπὸ ὑδάτων 3,2%. Νὰ κατασκευασθῇ κυκλικὸν διάγραμμα αὐτῆς τῆς κατανομῆς.

440) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμ. μέσος καὶ ἡ διάμεσος εἰς τὰ δεδομένα τῶν ἀσκήσεων 2, 3 καὶ 4.

441) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπικρατοῦσα τιμὴ εἰς τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως 3 κεχωρισμένως διὰ τοὺς ἄνδρας καὶ γυναίκας καὶ ἀκολούθως διὰ τὸ σύνολον τῶν μεταναστῶν.

442) Τὸ προσωπικὸν μιᾶς ἐπιχειρήσεως κατανέμεται ἀναλόγως τῶν ἐτῶν ὑπηρεσίας ὡς κάτωθι :

Ἔτη ὑπηρεσίας	1–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
Ἀριθμὸς ὑπαλλήλων	108	70	39	20	11	5	5	3	2

Νὰ γίνῃ ὁ πίναξ κατανομῆς συχνοτήτων ἀπολύτου, σχετικῆς καὶ ἀθροιστικῆς καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ κεντρικαὶ τιμαὶ $\bar{x}$, x_δ , x_ε

443) Ὁ ἀριθμ. μέσος τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, $\nu \in N$, εἶναι $\bar{x}$.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμ. μέσος τῶν ἀριθμῶν α) $x_1+\kappa, x_2+\kappa, \ldots, x_\nu+\kappa$, β) $x_1-\kappa, x_2-\kappa, \ldots, x_\nu-\kappa$, γ) $\kappa x_1, \kappa x_2, \ldots, \kappa x_\nu$, δ) $\frac{x_1}{\kappa}, \frac{x_2}{\kappa}, \ldots, \frac{x_\nu}{\kappa}$, $\kappa \neq 0$, καὶ ε) $\kappa x_1+\lambda, \kappa x_2+\lambda, \ldots, \kappa x_\nu+\lambda$.

444) Δίδονται τὰ ἑξῆς βάρη εἰς kg : 3, 6, 6, 12, 9, 12, 10, 9, 12, 14, 17. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμ. μέσος καὶ ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις.

445) Τὰ ἡμερομίσθια 500 ἐργατῶν ἑνὸς ἐργοστασίου κατανέμονται ὡς ἑξῆς :

Τάξεις ἡμερομισθ.	...–55	55–65	65–75	75–85	85–95	95–105	105–...
Ἀριθμὸς ἐργατῶν	40	190	120	70	50	20	10

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμ. μέσος, ἡ τυπικὴ ἀπόκλισις καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἡμερομίσθιον α) ἀπὸ $\bar{x}-\sigma$ ἕως $\bar{x}+\sigma$ καὶ β) ἀπὸ $\bar{x}-2\sigma$ ἕως $\bar{x}+2\sigma$. Νὰ γίνῃ δὲ καὶ τὸ διάγραμμα διασπορᾶς.

446) Τὰ ἀναστήματα καὶ τὰ βάρη 346 ἀτόμων κατανέμονται ὡς ἑξῆς :

Βάρος εἰς kg	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90	90–95	95–100
Ἀριθμὸς ἀτόμων	2	3	12	38	88	70	55	39	26	13

Ἀνάστημα cm	150–155	155–160	160–165	165–170	170–175	175–180	180–185	185–190
Ἀριθμὸς ἀτόμων	1	2	9	48	131	102	40	13

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ μέσοι, αἱ διακυμάνσεις, αἱ τυπικαὶ ἀποκλίσεις εἰς ἑκάστην σειρὰν καὶ νὰ ἐξετασθῇ εἰς ποίαν εἶναι μεγαλυτέρα ἡ διασπορά.

447) Δύο τυχαῖαι μεταβληταὶ ἐνεφανίσθησαν εἰς ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν ὡς ἀκολούθως :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ψ	4	5	10	12	5	5	4	5	4	3

Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως καὶ νὰ γίνῃ τὸ στικτὸν διάγραμμα τῶν 10 τούτων ζευγῶν.

448) Τὰ χρησιμοποιηθέντα ὑπὸ μιᾶς ἑταιρείας κεφάλαια ἐπὶ 10 διαδοχικὰ ἔτη ὡς καὶ τὰ ἀντίστοιχα κέρδη δίδονται ὡς ἀκολούθως :

Κεφάλαιον εἰς ἑκατομ. δρχ.	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Κέρδος εἰς ἑκατομ. δρχ.	2	4	8	5	10	15	14	20	22	30

Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς συσχετίσεως καὶ νὰ γίνῃ τὸ στικτὸν διάγραμμα.

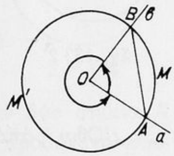
ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

133. ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ ΤΟΞΟΝ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ Η ΓΩΝΙΑ. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ

Ἐπὶ ἑνὸς κύκλου κέντρου Ο (Σχ. 133.1) ἂς θεωρήσωμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Τὰ σημεῖα Α καὶ Β χωρίζουν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο τόξα, τὸ $\overset{\frown}{AMB}$ καὶ τὸ $\overset{\frown}{BM'A}$. Αἱ ἡμιευθεῖαι Οα καὶ Οβ ὁρίζουν δύο ἐπικέντρους γωνίας, τὰς ∢ (Οα, Οβ) καὶ ∢ (Οβ, Οα). Ἡ ∢ (Οα, Οβ) ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{AMB}$ καὶ ἡ ∢ (Οβ, Οα) εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{BM'A}$. Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου στρέφεται περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν περιστροφῆς, ὅταν τὸ σημεῖον Α κινούμενον διαγράψῃ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AMB}$, ἡ ἀκτὶς Οα, ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ σημεῖον Α, θὰ διαγράψῃ τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας (Οα, Οβ)



Σχ. 133.1

Ἡ **ἀπόλυτος τιμὴ** ἑνὸς τόξου (ἢ μιᾶς γωνίας) εἶναι ὁ λόγος τοῦ τόξου (ἢ τῆς γωνίας) πρὸς τὴν μονάδα τῶν τόξων (ἢ τῶν γωνιῶν).

Ἡ γεωμετρία διδάσκει ὅτι λόγος δύο τόξων τῆς αὐτῆς ἀκτῖνος ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ ἑπομένως : **ἓν τόξον ἔχει τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν μὲ τὴν ἀντίστοιχόν του ἐπίκεντρον γωνίαν, ἐὰν βεβαίως ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν τόξων λαμβάνεται τὸ τόξον τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν μονάδα τῶν γωνιῶν.**

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τόξα ἀνήκοντα εἰς κύκλους μὲ διαφορετικὰς ἀκτῖνας ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμήν, ἢ ὅπως ἄλλως λέγομεν, ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀπόλυτον ἀριθμόν, ὅταν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν ἢ ἴσας ἐπικέντρους γωνίας.

Τὸ μέγεθος ἑνὸς τόξου ἐκφράζεται κατὰ δύο τρόπους :

1) μὲ τὸ μῆκος του, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ ἀκτὶς του καὶ

2) μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμήν του, τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ὡρισμένης μονάδος τόξων,

ἡ ὁποία ἀπόλυτος τιμὴ δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

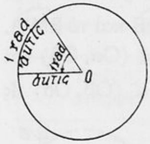
Βασικὴ μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν εἶναι ἡ ὀρθὴ γωνία. Ἡ ἀντίστοιχος μονὰς τόξων εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ κύκλου. Ἡ ὀρθὴ γωνία ὑποδιαιρεῖται εἰς 90 ἴσας γωνίας ἑκάστη ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται **μία μοῖρα**, συμβολικῶς 1^0. Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσας γωνίας ἑκάστη ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται **ἓν λεπτόν**, συμβολικῶς $1'$. Ἡ γωνία τοῦ $1'$ ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη, ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται **ἓν δεύτερον λεπτόν**, συμβολικῶς $1''$.

Ἀντιστοίχως τὸ 1/4 τοῦ κύκλου ὑποδιαιρεῖται εἰς 90 ἴσα τόξα ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται μία μοῖρα κύκλου καὶ συμβολίζεται ὁμοίως 1^0. Τὸ τόξον μιᾶς μοίρας ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη ἕκαστον ἐκ τῶν ὁποίων λέγεται ἓν λεπτὸν ($1'$) κύκλου κ.τ.λ.

Ἡ θεωρητικὴ μονὰς τόξων ἢ γωνιῶν εἶναι τὸ ἀκτίνιον (rad). **Τὸ ἀκτίνιον** εἶναι τόξον τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει τὸ τόξον. Ἐπίσης **γωνία ἑνὸς ἀκτινίου** λέγεται ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία τοῦ τόξου ἑνὸς ἀκτινίου (Σχ. 133.2).

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑπομένως ἑνὸς τόξου εἰς ἀκτίνια εἶναι ὁ λόγος τοῦ μήκους τοῦ τόξου τούτου πρὸς τὴν ἀκτῖνα. Τὸ μῆκος s ἑνὸς τόξου κύκλου ἀκτῖνος ρ συνδέεται μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν α τοῦ τόξου τούτου εἰς ἀκτίνια διὰ τῆς ἰσότητος:

$$\alpha = \frac{s}{\rho} \Leftrightarrow s = \alpha\rho$$



Σχ. 133.2

Ἐὰν ὡς μονὰς μετρήσεως τοῦ μήκους ληφθῇ ἡ ἀκτὶς ρ, τότε τὸ μῆκος τοῦ τόξου ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν ὁποῖον ἐκφράζεται καὶ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ τόξου τούτου εἰς ἀκτίνια.

Ὅθεν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ κύκλου ὁλοκλήρου εἰς ἀκτίνια εἶναι $\frac{2\pi\rho}{\rho} = 2\pi$. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς 2π ἐκφράζει ἐπίσης τὸ μῆκος κύκλου ἀκτῖνος ἴσης μὲ τὴν μονάδα. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἡμικυκλίου εἶναι π καὶ τοῦ $\frac{1}{4}$ τοῦ κύκλου εἶναι $\frac{\pi}{2}$.

Ἀναφέρομεν ἐδῶ καὶ μίαν μονάδα, τὴν ὁποίαν ἐσχάτως χρησιμοποιοῦν εἰς τὰς στρατιωτικὰς ἐφαρμογάς, τὸ mil*, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{6400}$ τοῦ κύκλου. Τοῦτο κατὰ μεγάλην προσέγγισιν ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{1000}$ rad.

Ἐὰν διὰ τῶν α καὶ μ παραστήσωμεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τοῦ αὐτοῦ τόξου μὲ μονάδας ἀντιστοίχως τὸ ἀκτίνιον καὶ τὴν μοῖραν, ἐὰν τὸ τόξον τοῦτο δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν κύκλον, θὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}} \qquad (133,\ \alpha)$$

(*) «χιλιοστὸν» κατὰ τὴν ἑλληνικὴν στρατιωτικὴν ὁρολογίαν.

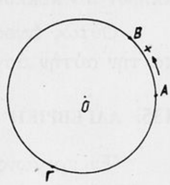
Πράγματι, δύο τόξα ἂς μετρηθοῦν διαδοχικῶς μὲ μονάδας τὸ ἀκτίνιον καὶ τὴν μοῖραν. Ἔστωσαν δὲ α καὶ μ αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τοῦ πρώτου τόξου εἰς ἀκτίνια καὶ μοίρας καὶ α′ καὶ μ′ τοῦ δευτέρου τόξου ἀντιστοίχως εἰς ἀκτίνια καὶ μοίρας. Ἡ γεωμετρία διδάσκει ὅτι ὁ λόγος δύο τόξων δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν μονάδα μετρήσεως των καὶ ὅτι ἰσχύει : $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\mu}{\mu'}$

Ἐὰν ὡς δεύτερον τόξον ληφθῇ τὸ ἥμισυ κύκλου τότε ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\mu}{\mu'}$ γίνεται $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$.

Ἡ ἰσότης λοιπὸν (133, α) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ εὑρίσκωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἑνὸς τόξου ὡς πρὸς τὴν μίαν ἐκ τῶν μονάδων, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμήν του ὡς πρὸς τὴν ἄλλην.

134. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΣ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΤΟΞΟΝ.

Ἐὰν ἓν κινητὸν σημεῖον ἀναχωρήσῃ ἔκ τινος σημείου Α ἑνὸς κύκλου (Σχ. 134), δύναται νὰ διαγράψῃ αὐτὸν κινούμενον ἐπ' αὐτοῦ κατὰ δύο φοράς. Ἐκ τῶν φορῶν τούτων ἡ ἀντίθετος πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ὁρίζεται ὡς **θετικὴ φορὰ** καὶ ἡ συμφωνοῦσα μὲ τὴν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ὡς **ἀρνητικὴ φορά.** Ὅταν ἐπὶ ἑνὸς κύκλου, ἔχῃ ὁρισθῇ ἡ θετική, ἑπομένως καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορά, ὁ κύκλος λέγεται **προσανατολισμένος.** Τὴν θετικὴν φορὰν συμβολίζομεν εἰς τὸ σχῆμα μὲ ἓν βέλος συνοδευόμενον μὲ τὸ σύμβολον $+$.



Σχ. 134

Ἐὰν τώρα ἐπὶ ἑνὸς προσανατολισμένου, κύκλου ἔχωμεν δύο σημεῖα Α καὶ Β, τότε ἐπὶ τοῦ κύκλου τούτου ὁρίζονται τέσσαρα τόξα προσανατολισμένα, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος εἶναι μικρότερον τοῦ κύκλου διότι ἓν τόξον $\overset{\frown}{AB}$ εἶναι δυνατὸν νὰ διαγραφῇ ὑπὸ κινητοῦ σημείου εἴτε ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β εἴτε ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ Α. Ὁρίζονται λοιπὸν δύο τόξα ΑΒ : ἓν λεγόμενον **θετικὸν τόξον ΑΒ,** συμβολιζόμενον μὲ $\overset{\curvearrowright}{AB}^{+}$, καὶ ἓν **ἀρνητικὸν τόξον ΑΒ,** συμβολιζόμενον μὲ $\overset{\curvearrowright}{AB}^{-}$, καθ' ὅσον τὸ ἓν ἔχει τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ προσανατολισμένου κύκλου καὶ τὸ ἄλλο τὴν ἀρνητικήν. Γενικῶς ἓν τόξον προσανατολισμένον συμβολίζεται μὲ $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

Ὁρίζονται ἐπίσης δύο τόξα $\overset{\frown}{BA}$, τὸ ἓν θετικὸν $\overset{\curvearrowright}{BA}^{+}$ καὶ τὸ ἄλλο ἀρνητικὸν $\overset{\curvearrowright}{BA}^{-}$. Διὰ νὰ μὴ γίνεται σύγχυσις δυνάμεθα νὰ διατηρήσωμεν τὸ ὄνομα **γεωμετρικὸν τόξον ΑΒ,** συμβολικῶς $\overset{\frown}{AB}$, διὰ τὸ μικρότερον θετικὸν τόξον $\overset{\curvearrowright}{AB}^{+}$.

Τοῦ προσανατολισμένου τόξου $\overset{\curvearrowright}{AB}$, τὸ σημεῖον Α λέγεται : **ἡ ἀρχὴ** τοῦ $\overset{\curvearrowright}{AB}$ καὶ τὸ Β : **τὸ πέρας** τοῦ $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

Τὰ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ὁρισθέντα τόξα εἶναι μερικαὶ περιπτώσεις γενικωτέρων προσανατολισμένων τόξων, τῶν ὁποίων τὸ μῆκος δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μήκους τοῦ κύκλου.

Πράγματι, ἂν φαντασθῶμεν ἕν κινητὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ κύκλου (Σχ. 134), τοῦτο δύναται ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α νὰ ἐκτελέσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας περιστροφὰς διατρέχον τὸν κύκλον καὶ νὰ σταματήσῃ εἰς τὸ Β. Τὸ κινητὸν τοῦτο σημεῖον δύναται μάλιστα νὰ κινηθῇ κατὰ τὴν θετικὴν ἢ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ κύκλου.

Τὰ οὕτως ὁριζόμενα τόξα λέγονται **τριγωνομετρικὰ** τόξα, καὶ συμβολίζονται ἐπίσης διὰ τοῦ συμβόλου $\overset{\frown}{AB}$.

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως ἕν τριγωνομετρικὸν τόξον τελείως ὡρισμένον, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν 1) τὴν ἀρχήν του, 2) τὸ πέρας του, 3) τὴν φορὰν του καὶ 4) τὸν ἀριθμὸν τῶν ὁλοκλήρων περιστροφῶν, τὰς ὁποίας τὸ κινητὸν σημεῖον διέγραψε μέχρις ὅτου σταματήσῃ εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου. Ὥστε :

Τριγωνομετρικὸν τόξον $\overset{\frown}{AB}$ λέγονται ὅλα τὰ τόξα, τὰ ὁποῖα διαγράφονται ὑπὸ κινητοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α καὶ κινούμενον πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, θετικὴν ἢ ἀρνητικήν, σταματᾶ εἰς τὸ Β πρὶν ἢ διατρέξῃ ὁλόκληρον τὸν κύκλον ἢ ἀφοῦ διατρέξῃ προηγουμένως ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν κύκλων.

Οὕτως ἐννοοῦμεν ὅτι ὑπάρχουν ἀπειράριθμα τριγωνομετρικὰ τόξα ἔχοντα τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας, θετικὰ καὶ ἀρνητικά.

135. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ.

Ἕν τριγωνομετρικὸν τόξον, ὅπως ἕν γεωμετρικὸν τόξον, δύναται νὰ μετρηθῇ μὲ μίαν ἐκ τῶν μονάδων τόξων. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμή, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει τὸ μέγεθος, ἀλλ' ὄχι καὶ τὴν φορὰν τοῦ τόξου. Ἐὰν τώρα εἰς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν προτάξωμεν τὸ +, ἐὰν τὸ τόξον εἶναι θετικὸν καὶ τὸ —, ἐὰν αὐτὸ εἶναι ἀρνητικόν, ἔχομεν τὴν λεγομένην **ἀλγεβρικὴν τιμὴν** τοῦ προσανατολισμένου τόξου.

Δύο προσανατολισμένα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων εἶναι ἴσα, ὅσαν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν τιμήν. Εἶναι **ἀντίθετα,** ἐὰν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ των εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίθετοι.

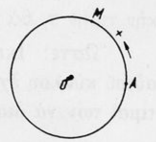
Τὸ προσανατολισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν καὶ πέρας ταυτιζόμενα πρὸ πάσης περιστροφῆς, εἶναι ἕν συμβατικὸν τόξον, λεγόμενον **μηδενικὸν τόξον.** Τούτου ἀλγεβρικὴ τιμὴ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 0.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ προσανατολισμένον τόξον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία μεταβλητή, ἡ ὁποία δύναται νὰ λάβῃ ὅλας τὰς πραγματικὰ τιμάς, ἡ ὁποία δηλ. διατρέχει τὸ σύνολον R, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῶν τόξων ὡς ἕνα ἄλλο σύμβολον διὰ τὸ τόξον.

136. ΤΟΞΑ ΕΧΟΝΤΑ ΚΟΙΝΗΝ ΑΡΧΗΝ ΚΑΙ ΚΟΙΝΟΝ ΠΕΡΑΣ.

Ἔστω προσανατολισμένος κύκλος κέντρου Ο (Σχ.136), Α ἡ ἀρχὴ τῶν τόξων καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου. Ἔστω τ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου θετικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Ἐὰν c εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ θετικοῦ κύκλου (ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῶν τόξων εὑρίσκεται πάντοτε εἰς τὴν αὐτὴν μονάδα: εἰς μοίρας ἢ εἰς ἀκτίνια), τότε τὸ δεύτερον θετικὸν τόξον $\overset{\frown}{AM}$ θὰ ἔχῃ ἀλγεβρικὴν τιμὴν $c+\tau$ τὸ τρίτον $2c+\tau$, τὸ τέταρτον $3c+\tau$ καὶ γενικῶς ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ τυχόντος θετικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$, θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\kappa c+\tau$, ὅπου κ εἶναι θετικὸς ἀκέραιος ἢ ὁ 0.

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ πρώτου ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ θὰ εἶναι $-c+\tau$, τοῦ δευτέρου ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ θὰ εἶναι $-2c+\tau$, τοῦ τρίτου $-3c+\tau$, τοῦ τετάρτου $-4c+\tau$ καὶ γενικῶς ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ τυχόντος ἀρνητικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AM}$ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\kappa c+\tau$, ὅπου κ κάποιος ἀρνητικὸς ἀκέραιος.



Σχ. 136

Ἐὰν λοιπὸν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ τυχόντος τόξου $\overset{\frown}{AM}$ (θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ), αὕτη θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$x=\kappa c+\tau, \quad \kappa\in Z$$

Ἐὰν ὡς μονὰς ἔχῃ ληφθῆ τὸ ἀκτίνιον ὁ τύπος γίνεται :

$$\boxed{x=2\kappa\pi+\tau,} \quad , \quad \kappa\in Z \qquad (\alpha)$$

Ἐὰν ὡς μονὰς ἔχῃ ληφθῆ ἡ μοῖρα ὁ τύπος γίνεται :

$$\boxed{x^0=360^0\ \kappa+\tau^0,} \quad , \quad \kappa\in Z \qquad (\alpha')$$

Ἡ ἰσότης (α), καὶ ἐπίσης ἡ (α΄), δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀντὶ τῆς τ λάβωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἄλλου, ἀλλ' ὡρισμένου, τόξου $\overset{\frown}{AM}$. Πράγματι, ἐὰν εἰς τὸν ἀνωτέρω τύπον (α) ἀντικαταστήσωμεν τὸ κ μὲ κάποιον ἀριθμὸν τοῦ συνόλου Ζ, π.χ. τὸν κ_1, θὰ εὕρωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τ_1 ἑνὸς ἐκ τῶν τόξων $\overset{\frown}{AM}$. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$x=2\kappa\pi+\tau$$
$$\tau_1=2\kappa_1\pi+\tau$$

καὶ ἐκ τούτων δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη :

$$x-\tau_1=2\,(\kappa-\kappa_1)\pi, \quad \delta\eta\lambda. \quad x=2\lambda\pi+\tau_1$$

ὅπου $\lambda\in Z$ καὶ τ_1 εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ τυχόντος ἀλλ' ὡρισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$.

Ὁ τύπος λοιπὸν (α) μᾶς δίδει τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ τυχόντος προσανατολισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν ἑνὸς τυχόντος ἀλλ' ὡρισμένου τόξου $\overset{\frown}{AM}$.

Ὁ αὐτὸς τύπος (α) γράφεται :

$$x-\tau=2\kappa\pi \quad \text{ἢ} \quad x^0-\tau^0=360^0\kappa, \quad \kappa\in Z$$

Δηλαδή: **Δύο τριγωνομετρικὰ τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ πέρας διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν κύκλων.**

Ἀντιστρόφως : ἂς θεωρήσωμεν ἕν τόξον $\overset{\frown}{AM}$ μὲ ἀλγεβρικὴν τιμὴν

$$\tau_1 = 2\kappa\pi + \tau$$

καὶ ἕν ἄλλο τόξον μὲ τὴν ἰδίαν ἀρχὴν Α καὶ ἀλγεβρικὴν τιμὴν τ_2 διαφέρουσαν τῆς τ_1, κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς ὁλοκλήρου κύκλου ἔστω κατὰ $\kappa_2\, 2\pi$. Τότε, συμφώνως πρὸς ὅσα ἀνωτέρω εἴπομεν, θὰ εἶναι :

$$\tau_2 = \tau_1 + \kappa_2\, 2\pi = 2\kappa\pi + \tau + 2\kappa_2\pi = 2(\kappa + \kappa_2)\pi + \tau$$

καὶ ἐπειδὴ $\kappa_1 \in Z$, $\kappa \in Z$ θὰ εἶναι καὶ $(\kappa_1 + \kappa) \in Z$ καὶ ἑπομένως

$$\tau_2 = 2\lambda\pi + \tau, \ \lambda \in Z$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος συνάγομεν ὅτι τὸ τόξον μὲ ἀλγεβρικὴν τιμὴν τ_2 θὰ ἔχῃ πέρας τὸ σημεῖον Μ.

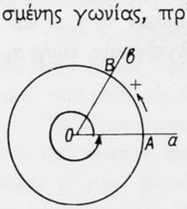
Ὥστε: **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο προσανατολισμένα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἔχοντα κοινὴν ἀρχὴν ἔχουν καὶ κοινὸν πέρας εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ των νὰ διαφέρουν κατὰ 2κπ (360^0κ), ὅπου κ∈Z.**

137. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΥΤΗΣ.

Ἡ ἔννοια τῆς προσανατολισμένης γωνίας καὶ τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς της μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὴν γ' τάξιν.

Ἡ ἀντιστοιχία, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τόξου καὶ ἐπικέντρου γωνίας του μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συνδέσωμεν τὴν ἔννοιαν τοῦ προσανατολισμένου τόξου μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Σχ. 137).

Πράγματι ὅταν τὸ κινητὸν σημεῖον ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α διαγράφῃ τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}$, τότε ἡ ἡμιευθεῖα Οα διαγράφει τὸ ἐσωτερικὸν τῆς προσανατολισμένης γωνίας (Οα, Οβ), τὴν ὁποίαν συμβολίζομεν μὲ ∢ (Οα, Οβ), ἂν εἶναι θετικὴ ἢ μὲ ∢ (Οα, Οβ), ἂν εἶναι ἀρνητική. Ἡ τελικὴ πλευρὰ Οβ τῆς προσανατολισμένης γωνίας, πρὶν ἢ λάβῃ τὴν τελικὴν θέσιν αὐτῆς Οβ δύναται νὰ ἐκτελέσῃ μίαν ἢ περισσοτέρας περιστροφὰς περὶ τὸ Ο καὶ νὰ διαγράψῃ οὕτω ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν πλήρων γωνιῶν. Ὑπάρχουν ἑπομένως ἀπειράριθμοι προσανατολισμέναι γωνίαι ἔχουσαι τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευρὰν. Ἑκάστη ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων λέγεται : **τριγωνομετρικὴ** γωνία. Κατὰ ταῦτα ὑπάρχει μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν τόξων $\overset{\frown}{AB}$ καὶ τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν (Οα, Οβ)



Σχ. 137

Ἡ μικροτέρα θετικὴ γωνία ∢ (Οα, Οβ), ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $\overset{\frown}{AB}^{+}$, ἠμπορεῖ νὰ ὀνομασθῇ **γεωμετρικὴ** γωνία, ἡ ὁποία συμβολίζεται ∢ (Οα, Οβ).

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ x τῆς τυχούσης τριγωνομετρικῆς γωνίας μὲ ἀρχικὴν πλευρὰν Οα καὶ τελικὴν πλευρὰν Οβ δίδεται προφανῶς ὑπὸ τοῦ τύπου :

$x^0 = 360^0\kappa + \tau^0$ ἢ $x = 2\kappa\pi + \tau$, ὅπου $\kappa \in Z$ καὶ τ εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ μιᾶς ὁποιασδήποτε ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων, ἀλλ' ὡρισμένης, εἰς μοίρας ἢ ἀκτίνια.

Δυνάμεθα δὲ νὰ διατυπώσωμεν τὴν ἑξῆς πρότασιν :

Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο τριγωνομετρικαὶ γωνίαι ἔχουσαι κοινὴν ἀρχικὴν ἔχουν καὶ κοινὴν τελικὴν πλευράν, εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαί των νὰ διαφέρουν κατὰ 2κπ ($360^0\kappa$), ὅπου $\kappa \in Z$.

Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ μεταβαίνωμεν ἀδιαφόρως ἀπὸ τὰ τόξα εἰς τὰς ἀντιστοίχους γωνίας καὶ ἀντιστρόφως καὶ νὰ ἐφαρμόζωμεν εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μεγεθῶν τούτων τὰς μετρικὰς ἰδιότητας τοῦ ἄλλου, διότι ἓν προσανατολισμένον τόξον καὶ ἡ ἀντίστοιχος προσανατολισμένη γωνία ἔχουν πάντοτε τὴν αὐτὴν φοράν.

Δύο τριγωνομετρικαὶ γωνίαι λέγονται ἀντίθετοι, ὅταν αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαί των εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίθετοι.

138. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΔΥΟ Η ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΩΝ ΤΟΞΩΝ

Ἄθροισμα προσανατολισμένων τόξων ἑνὸς κύκλου ὀνομάζομεν τὸ προσανατολισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ἀλγεβρικὴν τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων τόξων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι διὰ τὸ ἄθροισμα τῶν προσανατολισμένων τόξων ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες.

1) Δυνάμεθα εἰς ἓν ἄθροισμα προσανατολισμένων τόξων νὰ ἀλλάξωμεν τὴν σειρὰν τῶν προσθετέων.

2) Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε προσθετέους δι' ἑνός, τοῦ ἀθροίσματός των.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα προσανατολισμένων τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta E}$,... καθιστῶμεν αὐτὰ διαδοχικά. Λαμβάνομεν, π.χ., ἀπὸ τοῦ σημείου Β ἓν τόξον $\overset{\frown}{BZ}$ ἀλγεβρικῆς τιμῆς ἴσης μὲ τὴν τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου Ζ ἓν τόξον $\overset{\frown}{Z\Theta}$ ἀλγεβρικῆς τιμῆς ἴσης πρὸς τὴν τοῦ $\overset{\frown}{\Delta E}$ κ.ο.κ. Τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου Α καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ τελευταίου, θὰ ἔχῃ ἀλγεβρικὴν τιμὴν ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων τόξων, δηλ. θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

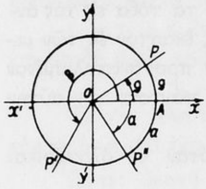
Οὕτω, π.χ., ἂν Α, Β, Γ (Σχ. 134, σελ. 231) εἶναι τρία σημεῖα ἐπὶ κύκλου προσανατολισμένου καὶ θεωρήσωμεν τὰ τόξα $\overset{\frown}{AB}$ καὶ $\overset{\frown}{B\Gamma}$, τότε ἄθροισμά των εἶναι τὸ τόξον $\overset{\frown}{A\Gamma}$. Ἐὰν α εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$, β ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γεωμετρικοῦ τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$, τότε θὰ ἔχωμεν :

ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overset{\frown}{AB} = \alpha + 2\kappa\pi$, ἀλγ. τιμὴ τοῦ $\overset{\frown}{B\Gamma} = \beta + 2\kappa'\pi$, ἑπομένως ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος $\overset{\frown}{A\Gamma} = \alpha + \beta + 2\lambda\pi$, ὅπου $\lambda \in Z$.

Τὰ ἀνωτέρω ἐπεκτείνονται εὐκόλως εἰς τὰς προσανατολισμένας γωνίας.

139. ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑ ΕΙΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΝ ΘΕΣΙΝ.

Λέγομεν ὅτι μία προσανατολισμένη γωνία εὑρίσκεται εἰς **κανονικὴν θέσιν** ὡς πρὸς ἕν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων x΄Ox, ψ΄Οψ, ἂν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀρχὴν Ο τῶν ἀξόνων καὶ ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ αὐτῆς ταυτίζεται μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα Ox, ὅταν ἡ γωνία τοποθετηθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων.



Σχ. 139

Διὰ νὰ τοποθετήσωμεν, π.χ., γωνίαν 240^0 εἰς κανονικὴν θέσιν φανταζόμεθα ὅτι ἡ ἡμιευθεῖα Ox στρέφεται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν κατὰ 240^0 (Σχ 139), ὁπότε ὁρίζεται ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας. Οὕτως ἡ γωνία β ἔχει ἀλγεβρικὴν τιμὴν 240^0. Τοῦτο συμβολίζομεν γράφοντες $\beta = 240^0$. Ὁμοίως εἰς τὸ αὐτὸ σχῆμα εἶναι $\alpha = -60^0$ καὶ $\theta = 30^0$.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τοῦ μήκους γράψωμεν κύκλον (Σχ. 139), τότε εἰς ἑκάστην τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν, π.χ., θ, β, α ἀντιστοιχεῖ ἕν προσανατολισμένον τόξον, τὸ ὁποῖον, ὅπως γνωρίζομεν, ἔχει τὴν αὐτὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν μὲ τὴν ἀντίστοιχον αὐτοῦ γωνίαν. **Δι᾽αὐτὸ δυνάμεθα ἀδιαφόρως νὰ ὁμιλῶμεν περὶ γωνίας α ἢ περὶ τόξου $\overset{\frown}{AP''}$, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ἐπίσης τόξον α.** Ἐπίσης ἔχομεν τὴν γωνίαν θ ἢ τὸ τόξον θ ($\equiv \overset{\frown}{AP}^+$).

Ὁ ἀνωτέρω κύκλος, ὅστις γράφεται μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα, λέγεται **τριγωνομετρικὸς κύκλος.** Τὸ σημεῖον Α (1,0) λέγεται **ἀρχὴ τῶν τόξων** τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου. Εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος τέμνει τὸν ἄξονα Ox. Τὸ $\overrightarrow{OA}$ εἶναι ἑπομένως τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ ἄξονος x΄Ox.

Ἡ ἀκτὶς τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ πέρατος ἑνὸς τόξου τοῦ κύκλου, λέγεται **τελικὴ ἀκτὶς** τοῦ τόξου τούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

449) Νὰ τρέψετε ἓν ἀκτίνιον εἰς μοίρας.

450) Νὰ τρέψετε μίαν μοῖραν εἰς ἀκτίνια.

451) Νὰ τρέψετε 45^0 εἰς ἀκτίνια.

452) Νὰ τρέψετε $\frac{\pi}{16}$ ἀκτίνια εἰς μοίρας.

453) Μὲ τὴν βοήθειαν μοιρογνωμονίου νὰ κατασκευάσετε εἰς κανονικὴν θέσιν γωνίας ἐχούσας ἀλγεβρικὰς τιμάς :

α) 75^0 β) 125^0 γ) 210^0 δ) -150^0 ε) 330^0
στ) -330^0 ζ) 385^0 η) -370^0 θ) 930^0 ι) -955^0

454) Νὰ ἀναφέρετε πέντε γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἰς κανονικὴν θέσιν ἔχουν τὴν αὐτὴν τελικὴν **πλευρὰν μὲ τὴν $\theta = 100^0$.**

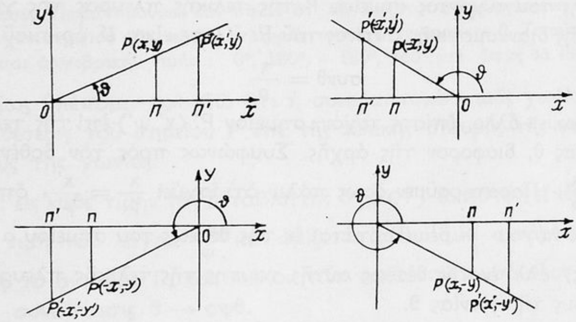
455) Αἱ γωνίαι $\theta = 125^0$ καὶ $\varphi = -955^0$ εἰς κανονικὴν θέσιν ἔχουν τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευράν. Νὰ ἐξηγήσετε τὸ διατί.

456) Νὰ ἐξετάσετε ἂν αἱ γωνίαι $\kappa = 930^0$ καὶ $\lambda = -870^0$ ἔχουν, εἰς κανονικὴν θέσιν, τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευράν.

140. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ.

Ἔστω θ μία μεταβλητή, ἡ ὁποία λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τὸ σύνολον Γ ὅλων τῶν τριγωνομετρικῶν γωνιῶν. Τὰ στοιχεῖα λοιπὸν τοῦ συνόλου Γ εἶναι γωνίαι, ὄχι ἀριθμοί.

Διὰ κάθε γωνίαν θ τοῦ συνόλου Γ φανταζόμεθα ὅτι τίθεται εἰς κανονικὴν



Σχ. 140.1

θέσιν ὡς πρὸς ἓν ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων (Σχ. 140.1).

Ἔστω P (x, ψ) τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ διάφορον τῆς ἀρχῆς O.

1) Ὀνομάζομεν **ἡμίτονον** τῆς γωνίας θ, συμβολικῶς ημθ, τὸν λόγον τῆς τεταγμένης τοῦ τυχόντος σημείου P πρὸς τὸ μῆκος ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{OP}$. Ὥστε εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$ημθ = \frac{ψ}{ρ}$$

Ἄς λάβωμεν ἄλλο, ἐπίσης τυχόν, σημεῖον P′ (x′,ψ′) ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, διάφορον τῆς ἀρχῆς. Συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν θὰ εἶναι $ημθ = \frac{ψ'}{ρ'}$, ὅπου ρ′ τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ σημείου P′. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι $\overrightarrow{OP'} = λ\overrightarrow{OP}$ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $x' = λx$ καὶ $ψ' = λψ$, ἐκ τῶν ὁποίων ἕπεται ὅτι $\frac{x}{x'} = \frac{ψ}{ψ'} = \frac{\sqrt{x^2+ψ^2}}{\sqrt{x'^2+ψ'^2}} = \frac{ρ}{ρ'}$. Ὅθεν $\frac{ψ}{ρ} = \frac{ψ'}{ρ'}$, $\frac{x}{ρ} = \frac{x'}{ρ'}$, $\frac{ψ}{x} = \frac{ψ'}{x'}$ κτλ.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἰσχύει $\frac{ψ}{ρ} = \frac{ψ'}{ρ'}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ρ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἀλλὰ μόνον ἐκ τῆς θέσεως αὐτῆς ταύτης τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας θ.

Ὥστε : εἰς κάθε γωνίαν θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ εἷς καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμός : ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{\rho}$.

Ὁρίζεται λοιπὸν ἐδῶ μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καὶ πεδίον τιμῶν ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις θ ⟶ ημθ.

2) Ὀνομάζομεν **συνημίτονον** τῆς γωνίας θ, συμβολικῶς συνθ, τὸν λόγον τῆς τετμημένης τοῦ τυχόντος σημείου Ρ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας πρὸς τὸ μῆκος ρ, τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ Ρ. Ὥστε εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\text{συν}\theta = \frac{x}{\rho}$$

Ἂς λάβωμεν ἄλλο, ἐπίσης τυχόν, σημεῖον Ρ′ (x′ ψ′) ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, διάφορον τῆς ἀρχῆς. Συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν εἶναι ημθ $= \frac{x'}{\rho'}$ · Παρατηροῦμεν ὅμως πάλιν ὅτι ἰσχύει $\frac{x}{\rho} = \frac{x'}{\rho'}$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{x}{\rho}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου ρ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς, ἀλλ' ἐκ τῆς θέσεως αὐτῆς ταύτης τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας θ.

Ὥστε : εἰς κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ εἷς καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμός : ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{x}{\rho}$.

Ὁρίζεται λοιπὸν μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καὶ πεδίον τιμῶν ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις θ ⟶ συνθ.

3) Ὀνομάζομεν **ἐφαπτομένην** μιᾶς γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικῶς εφθ, τὸν λόγον τῆς τεταγμένης τοῦ τυχόντος σημείου Ρ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ σημείου τούτου. Ὥστε εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\text{εφ}\theta = \frac{\psi}{x} \qquad x \neq 0$$

Ἂν λάβωμεν ἄλλο, ἐπίσης τυχόν, σημεῖον Ρ′ (x′, ψ′) ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, διάφορον τῆς ἀρχῆς, θὰ εἶναι συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν εφθ $= \frac{\psi'}{x'}$. Ἀλλ', ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, ἰσχύει $\frac{\psi}{x} = \frac{\psi'}{x'}$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας, δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ Ρ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἀλλ' ἐκ τῆς θὲσεως αὐτῆς ταύτης τῆς τελικῆς πλευρᾶς, δηλαδὴ ἐκ τοῦ μεγέθους, τῆς γωνίας θ.

Σημείωσις. Ὅταν $x = 0$, ὁ λόγος ψ/x δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἑπομένως δὲν ὁρίζεται τότε ἐφαπτομένη τῆς γωνίας θ. Τοῦτο συμβαίνει, π.χ., διὰ τὰς γωνίας, αἵ ὁποῖαι ἔχουν ἀλγεβρικὴν τιμὴν $90^{0}, -90^{0}, 270^{0}, -270^{0}, 450^{0}$ κτλ., ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

῞Ωστε : εἰς κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς θ ἀντιστοιχεῖ εἷς καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\psi}{x}$.

Ὁρίζεται λοιπὸν καὶ ἐδῶ μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καὶ πεδίον τιμῶν ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις $\theta \rightarrow$ εφθ.

4) Ὀνομάζομεν **συνεφαπτομένην** μιᾶς γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικῶς σφθ, τὸν λόγον τῆς τετμημένης τοῦ τυχόντως σημείου P, τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, πρὸς τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου τούτου. ῞Ωστε εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\text{σφ}\theta = \frac{x}{\psi} \qquad \psi \neq 0$$

Σημείωσις. Παρατηροῦμεν καὶ πάλιν ὅτι δὲν ὁρίζεται συνεφαπτομένη διὰ γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς τελικῆς πλευρᾶς των ἔχει τεταγμένην 0. Τοιαῦται γωνίαι εἶναι, π.χ., αἱ ἔχουσαι ἀλγεβρικὴν τιμήν : 0^0, 180^0, -180^0, 360^0 κτλ. ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Εὐκόλως βλέπομεν καὶ ἐδῶ ὅτι ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου P ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἀλλ' ἐκ τοῦ μεγέθους τῆς γωνίας.

῞Ωστε: εἰς κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{x}{\psi}$ καὶ ὁρίζεται οὕτω μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ της τὸ σύνολον Γ, καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις $\theta \longrightarrow$ σφθ.

5) Ὀνομάζομεν **τέμνουσαν** τυχούσης γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικῶς τεμθ, τὸν λόγον τοῦ μήκους ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ τυχόντος σημείου $P(x,\psi)$ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ σημείου τούτου. Ἤτοι εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

$$\text{τεμ}\theta = \frac{\rho}{x} \qquad x \neq 0$$

Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ ὅτι δὲν ὁρίζεται τέμνουσα διὰ γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς των ἔχει τετμημένην 0. Τοιαῦται γωνίαι εἶναι, π.χ., αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀλγεβρικὴν τιμὴν 90^0, -90^0, 270^0, -270^0, κ.τ.λ ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

Καὶ πάλιν ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ἡ τέμνουσα μιᾶς γωνίας θ δὲν μεταβάλλεται, ἂν λάβωμεν ἄλλο, διάφορον τῆς ἀρχῆς, σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας. ῞Ωστε: εἰς κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς θ ($\theta \in \Gamma$) ἀντιστοιχεῖ εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\frac{\rho}{x}$ καὶ ὁρίζεται οὕτω μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις $\theta \longrightarrow$ τεμθ.

β) Ὀνομάζομεν **συντέμνουσαν** τυχούσης γωνίας θ ($\theta \in \Gamma$), συμβολικῶς στεμθ, τὸν λόγον τοῦ μήκους ρ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος τοῦ τυχόντος σημείου P (x, ψ), τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, πρὸς τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου P. Ἤτοι εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ :

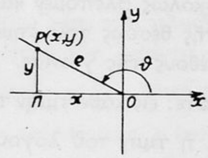
$$\text{στεμθ} = \frac{\rho}{\psi} \qquad \psi \neq 0$$

Κάμνομεν καὶ διὰ τὸν λόγον $\frac{\rho}{\psi}$ ἀναλόγους παρατηρήσεις μὲ ἐκείνας, τὰς ὁποίας ἐκάμομεν διὰ τοὺς ὁρισθέντας ἀνωτέρω λόγους.

Ὁρίζεται καὶ πάλιν μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Γ, ὅλων τῶν γωνιῶν, καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ συνάρτησις θ ⟶ στεμθ.

Ἀνακεφαλαιώνοντες τοὺς ἀνωτέρω δοθέντας ὁρισμοὺς ἔχομεν ὅτι, διὰ τυχοῦσαν τριγωνομετρικὴν γωνίαν θ εἰς κανονικὴν θέσιν ὡς πρὸς ἓν σύστημα ὀρθοκανονικὸν καὶ διὰ P(x, ψ) τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{OP}$ εἶναι ρ, ἔχομεν (Σχ. 140.2)

$$\left.\begin{aligned} \text{ημθ} &= \frac{\psi}{\rho} \\ \text{συνθ} &= \frac{x}{\rho} \\ \text{εφθ} &= \frac{\psi}{x} \\ \text{σφθ} &= \frac{x}{\psi} \\ \text{τεμθ} &= \frac{\rho}{x} \\ \text{στεμθ} &= \frac{\rho}{\psi} \end{aligned}\right\} (\tau)$$

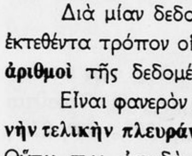


Σχ. 140.2

Αἱ ὁρισθεῖσαι ἀνωτέρω ἓξ συναρτήσεις : θ ⟶ ημθ, θ ⟶ συνθ, θ ⟶ εφθ, θ ⟶ σφθ, θ ⟶ τεμθ, θ ⟶ στεμθ, λέγονται **τριγωνομετρικαὶ** συναρτήσεις τῆς γωνίας θ.

Διὰ μίαν δεδομένην τριγωνομετρικὴν γωνίαν ὁρίζονται κατὰ τὸν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον οἱ ἓξ ὡρισμένοι λόγοι (τ), οἱ ὁποῖοι λέγονται **τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ** τῆς δεδομένης γωνίας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι **τριγωνομετρικαὶ γωνίαι εἰς κανονικὴν θέσιν, ἔχουσαι κοινὴν τελικὴν πλευράν, ἔχουν ἴσους τοὺς ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς των.** Οὕτω, π.χ., ἐπειδὴ αἱ γωνίαι μὲ ἀλγεβρικὰς τιμὰς 30° καὶ − 330° ἔχουν τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευρὰν θὰ ἔχουν τοὺς αὐτοὺς ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.



Σχ. 140.3

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς γωνίας θ, ἐὰν ἡ τελικὴ αὐτῆς πλευρά, εἰς κανονικὴν θέσιν, διέρχεται διὰ τοῦ σημείου P(3, − 4).

Λύσις : Μία τοιαύτην γωνίαν θ βλέπετε εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΡ ἔχομεν $\rho^2 = x^2 + \psi^2 \Leftrightarrow \rho = \sqrt{x^2 + \psi^2}$. Ἑπομένως $\rho = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$. Εἶναι τότε συμφώνως πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς (τ) :

$$\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho} = -\frac{4}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{3}{5}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\psi}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{\psi} = -\frac{3}{4}$$

$$\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{\rho}{x} = \frac{5}{3}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{\rho}{\psi} = -\frac{5}{4}$$

Παρατήρησις 1η. Ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς (τ) βλέπομεν ἀμέσως ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰσότητες αἵτινες εἶναι ταυτότητες (διότι εἶναι ἀληθεῖς προτάσεις διὰ κάθε τιμὴν τῆς γωνίας θ, διὰ τὴν ὁποίαν ἀμφότεραι αἱ συναρτήσεις εἰς ἑκάστην ἰσότητα εἶναι ὡρισμέναι) :

$$\eta\mu\theta = \frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu\theta} \Leftrightarrow \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\tau\varepsilon\mu\theta} \Leftrightarrow \tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{1}{\sigma\varphi\theta} \Leftrightarrow \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}$$

Παρατήρησις 2α. Ἀπὸ τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς (τ) βλέπομεν ἐπίσης ὅτι εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰ πρόσημα τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας, ὅταν γνωρίζομεν εἰς ποίαν γωνίαν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς δοθείσης γωνίας.

α) $\eta\mu\theta = \frac{\psi}{\rho}$. Ἐπειδὴ ψ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς εἰς τὴν I καὶ II καὶ ἀρνητικὸς εἰς τὴν III καὶ IV γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ ρ πάντοτε θετικὸς ἀριθμός, διὰ τοῦτο τὸ ημθ εἶναι θετικὸν διὰ γωνίας μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν I καὶ II γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἀρνητικὸν διὰ γωνίας μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν III καὶ IV γωνίαν τῶν ἀξόνων.

β) $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{x}{\rho}$. Ἐπειδὴ x εἶναι θετικὸν εἰς τὴν I καὶ IV γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἀρνητικὸν εἰς τὴν II καὶ III, διὰ τοῦτο τὸ συνθ εἶναι θετικὸν διὰ γωνίας μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὰς I καὶ IV γωνίας τῶν ἀξόνων καὶ ἀρνητικὸν διὰ τὰς γωνίας μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὰς II καὶ III γωνίας τῶν ἀξόνων.

γ) $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\psi}{x}$. Ἐπειδὴ x καὶ ψ ἔχουν τὰ αὐτὰ πρόσημα εἰς τὴν I καὶ III γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἀντίθετα πρόσημα εἰς τὴν II καὶ IV γωνίαν τῶν ἀξόνων, διὰ τοῦτο ἡ εφθ εἶναι θετικὴ διὰ γωνίας μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν I καὶ III γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἀρνητικὴ διὰ γωνίας μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὰς II καὶ IV γωνίας τῶν ἀξόνων.

Ἀναλόγους παρατηρήσεις δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ διὰ τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας θ.

457) Νὰ εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς μικροτέρας θετικῆς γωνίας θ εἰς κανονικὴν θέσιν, ἐὰν P εἶναι σημεῖον τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ P εἶναι : α) P (3,4) β) P (– 5, 12) γ) P (– 1, – 3)

458) Εἰς ποίαν γωνίαν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἡ τελικὴ πλευρὰ μιᾶς γωνίας θ εὑρισκομένης εἰς κανονικὴν θέσιν, ἐάν :

α) ημθ καὶ συνθ εἶναι ἀμφότερα ἀρνητικά.

β) ημθ καὶ εφθ εἶναι ἀμφότερα θετικά.

γ) ημθ εἶναι θετικὸν καὶ τεμθ εἶναι ἀρνητική.

δ) τεμθ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ εφθ εἶναι ἀρνητική.

ε) εφθ εἶναι θετικὴ καὶ τεμθ εἶναι ἀρνητική.

στ) ημθ εἶναι θετικὸν καὶ συνθ εἶναι ἀρνητικόν.

459) Εἰς ποίαν γωνίαν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἡ τελικὴ πλευρὰ γωνίας θ, εἰς κανονικὴν θέσιν, ἐάν :

α) ημθ > 0 β) συνθ < 0 γ) εφθ < 0 δ) τεμθ > 0

460) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ημθ $= \frac{8}{17}$ καὶ ὅτι ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς θ, εἰς κανονικὴν θέσιν εὑρισκομένης, εὑρίσκεται εἰς τὴν I γωνίαν τῶν ἀξόνων, νὰ εὑρεθοῦν τὰ συνθ καὶ εφθ.

461) Ἐὰν συνθ $= \frac{5}{6}$, νὰ εὕρετε τὰ ημθ καὶ εφθ.

462) Ἐὰν εφθ $= -\frac{3}{4}$, νὰ εὕρετε τὰ ημθ καὶ συνθ.

(Ὑπόδειξις : ἐπειδὴ εφθ $= \frac{\psi}{x}$ εἶναι ἀρνητική, ἡ θ εἶναι γωνία μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν II γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἂν λάβωμεν $x = -4$, $\psi = 3$ ἢ γωνία μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν IV γωνίαν τῶν ἀξόνων, ἂν λάβωμεν $x = 4$, $\psi = -3$. Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις $\rho = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$).

463) Νὰ εὕρετε τὸ ημθ, δοθέντος ὅτι συνθ $= -\frac{4}{5}$ καὶ ὅτι εφθ > 0.

464) Νὰ εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μιᾶς γωνίας θ, διὰ τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν ὅτι ημθ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ συνθ $= \frac{1}{2}$.

465) Εἰς ποίαν γωνίαν τῶν ἀξόνων εὑρίσκονται αἱ τελικαὶ πλευραὶ καὶ ποῖα εἶναι τὰ πρόσημα τοῦ ἡμιτόνου, τοῦ συνημιτόνου καὶ τῆς ἐφαπτομένης ἑκάστης ἐκ τῶν γωνιῶν μὲ ἀλγεβρικὴν τιμήν :

α) 125° β) 75° γ) -320° δ) 210° ε) 460° στ) -250° ζ). -1000°

466) Νὰ εὕρετε τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς γωνίας θ, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι :

α) ημθ $= \frac{7}{25}$ β) εφθ $= \frac{3}{5}$ καὶ $180^\circ < \theta < 270^\circ$.

141. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.

Α) Ἐν πρώτοις συμφωνοῦμεν τὸ ἑξῆς : θὰ γράφωμεν, π.χ., ημ 18° καὶ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ ἡμίτονον γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει ἀλγεβρικὴν τιμὴν 18°. Ἐπίσης εἰς τοὺς συμβολισμοὺς ημθ, συνθ, εφθ κτλ. τὸ θ θὰ τὸ νοοῦμεν ὡς ἀλγεβρικὴν τιμὴν γωνίας. Τοῦτο πράττομεν, διότι ἡ τριγωνομετρικὴ γωνία προσδιορίζεται ἀκριβῶς, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀλγεβρικὴν τιμήν της.

Ἔπειτα ἀπὸ τὴν συμφωνίαν αὐτὴν ἡ θ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶναι μία μεταβλητή, ἡ ὁποία δύναται νὰ διατρέχῃ τὸ σύνολον R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μετρηθῆ μὲ μονάδα τὴν μοῖραν.

Β) Θὰ ζητήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῶν γωνιῶν 0^0, 90^0, 180^0, 270^0, 360^0.

Ἔστω P τυχὸν σημεῖον (ὄχι ἡ ἀρχὴ) ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ

α) Ὅταν $\theta = 0^0$, τότε $x = \rho$, $\psi = 0$ καὶ ἐπομένως :

$$\eta\mu 0^0 = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$$

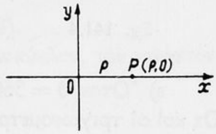
$$\sigma\upsilon\nu 0^0 = \frac{x}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

$$\varepsilon\varphi 0^0 = \frac{\psi}{x} = \frac{0}{\rho} = 0$$

$$\sigma\varphi 0^0 = \frac{x}{\psi} = \frac{\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται) *}$$

$$\tau\varepsilon\mu 0^0 = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu 0^0 = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$



Σχ. 141.1

β) Ὅταν $\theta = 90^0$, τότε $x = 0$, $\psi = \rho$ καὶ ἐπομένως :

$$\eta\mu 90^0 = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$

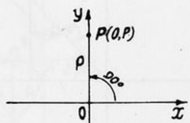
$$\sigma\upsilon\nu 90^0 = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$$

$$\varepsilon\varphi 90^0 = \frac{\psi}{x} = \frac{\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$

$$\sigma\varphi 90^0 = \frac{x}{\psi} = \frac{0}{\rho} = 0$$

$$\tau\varepsilon\mu 90^0 = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu 90^0 = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{\rho} = 1$$



Σχ. 141.2

γ) Ὅταν $\theta = 180^0$, τότε $x = -\rho$, $\psi = 0$ καὶ ἐπομένως :

$$\eta\mu 180^0 = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$$

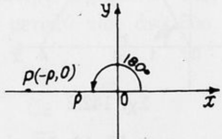
$$\sigma\upsilon\nu.180^0 = \frac{x}{\rho} = \frac{-\rho}{\rho} = -1$$

$$\varepsilon\varphi 180^0 = \frac{\psi}{x} = \frac{0}{-\rho} = 0$$

$$\sigma\varphi.180^0 = \frac{x}{\psi} = \frac{-\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$

$$\tau\varepsilon\mu 180^0 = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{-\rho} = -1$$

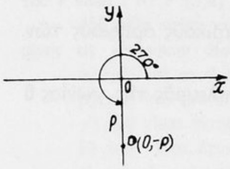
$$\sigma\tau\varepsilon\mu 180^0 = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$



Σχ. 141.3

(*) δηλ. δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

δ) Ὅταν $\theta = 270^0$, τότε $x = 0$, $\psi = -\rho$ καὶ ἑπομένως :



Σχ. 141.4

$$\eta\mu 270^0 = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-\rho}{\rho} = -1$$

$$\sigma\upsilon\nu 270^0 = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$$

$$\varepsilon\varphi 270^0 = \frac{\psi}{x} = \frac{-\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$

$$\sigma\varphi.270^0 = \frac{x}{\psi} = \frac{0}{-\rho} = 0$$

$$\tau\varepsilon\mu 270^0 = \frac{\rho}{x} = \frac{\rho}{0} \text{ (δὲν ὁρίζεται)}$$

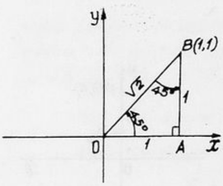
$$\sigma\tau\varepsilon\mu 270^0 = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\rho}{-\rho} = -1$$

ε) Ὅταν $\theta = 360^0$, τότε ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς θ ταυτίζεται μὲ τὸν ἄξονα Οx καὶ οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῆς γωνίας 360^0 εἶναι ἴσοι μὲ τοὺς ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας 0^0.

142. ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΙΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ 45^0, 60^0, 30^0.

α) Ὅπως ἐμάθομεν εἰς τὴν γ′ τάξιν εἶναι :

$$\eta\mu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sigma\upsilon\nu 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \varepsilon\varphi 45^0 = 1.$$



Σχ. 142.1

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι :

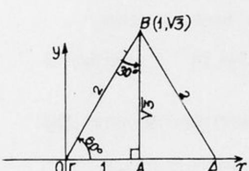
$$\tau\varepsilon\mu 45^0 = \frac{\rho}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu 45^0 = \frac{\rho}{\psi} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\sigma\varphi.45^0 = \frac{x}{\psi} = \frac{1}{1} = 1$$

β) Ἐμάθομεν εἰς τὴν γ′ τάξιν ὅτι :

$$\eta\mu 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \sigma\upsilon\nu 60^0 = \frac{1}{2}, \ \varepsilon\varphi 60^0 = \sqrt{3}$$



Σχ. 142.2

Εὐκόλως εὑρίσκομεν τώρα ὅτι :

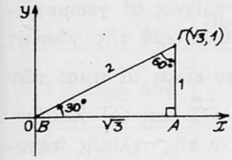
$$\sigma\varphi.\ 60^0 = \frac{x}{\psi} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tau\varepsilon\mu 60^0 = \frac{\rho}{x} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu.60^0 = \frac{\rho}{\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

γ) Ἐμάθομεν εἰς τὴν γ′ τάξιν ὅτι :

$$\eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}, \ \sigma\upsilon\nu 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \varepsilon\varphi 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Σχ. 142.3

Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$σφ.30^0 = \frac{x}{ψ} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

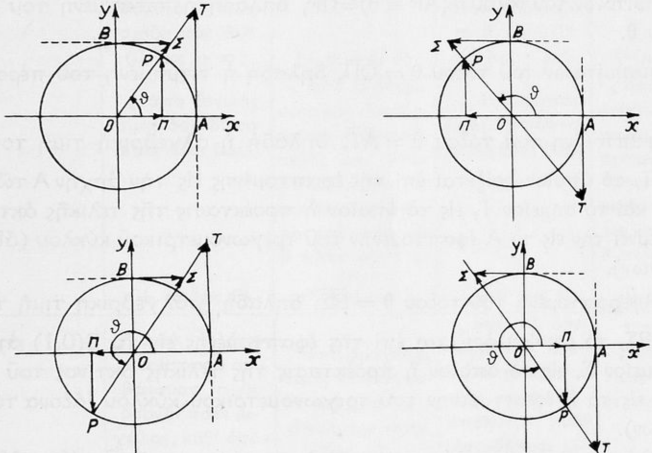
$$τεμ30^0 = \frac{ρ}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$στεμ30^0 = \frac{ρ}{ψ} = \frac{2}{1} = 2$$

143. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Ἔστω θ δοθεῖσα γωνία εἰς κανονικὴν θέσιν (Σχ. 143).

Μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν καὶ ἀκτῖνα τὴν μονάδα χαράσσομεν κύκλον, τὸν γνωστόν



Σχ. 143

μας τριγωνομετρικὸν κύκλον, τέμνοντα τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον Α(1,0), τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ Β (0,1), τὴν δὲ τελικὴν πλευρὰν τῆς γωνίας θ εἰς τὸ Ρ.

Φέρομεν τὴν ΠΡ κάθετον πρὸς τὸν ἄξονα Οx καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, αἵτινες τέμνουν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς θ ἢ τὴν προέκτασιν αὐτῆς κατ' ἀντίθετον φορὰν εἰς τὰ Τ καὶ Σ ἀντιστοίχως.

Ὅπως εἶναι εὔκολον νὰ παρατηρήσωμεν εἰς τὰ ἀνωτέρω σχήματα 143, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΠΡ, ΟΑΤ καὶ ΟΒΣ εἶναι ὅμοια μεταξύ των ἀνὰ δύο. Ἔχομεν λοιπόν :

$$ημθ = \frac{\overline{ΠΡ}}{\overline{ΟΡ}} = \overline{ΠΡ} \qquad σφθ = \frac{\overline{ΟΠ}}{\overline{ΠΡ}} = \frac{\overline{ΒΣ}}{\overline{ΟΒ}} = \overline{ΒΣ}$$

$$συνθ = \frac{\overline{ΟΠ}}{\overline{ΟΡ}} = \overline{ΟΠ} \qquad τεμθ = \frac{\overline{ΟΡ}}{\overline{ΟΠ}} = \frac{\overline{ΟΤ}}{\overline{ΟΑ}} = \overline{ΟΤ}$$

$$εφθ = \frac{\overline{ΠΡ}}{\overline{ΟΠ}} = \frac{\overline{ΑΤ}}{\overline{ΟΑ}} = \overline{ΑΤ} \qquad στεμθ = \frac{\overline{ΟΡ}}{\overline{ΠΡ}} = \frac{\overline{ΟΣ}}{\overline{ΟΒ}} = \overline{ΟΣ}$$

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{\Pi P}$, $\overrightarrow{O\Pi}$, $\overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{B\Sigma}$, $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{O\Sigma}$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ **γεωμετρικαὶ παραστάσεις** τῶν συναρτήσεων ημθ, συνθ, εφθ, σφθ, τεμθ, στεμθ τῆς γωνίας (τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AP} \equiv$)θ, **αἱ δὲ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν διανυσμάτων εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν ἀντιστοίχων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων τῆς θ.** Διὰ τὰ $\overrightarrow{O\Sigma}$ καὶ $\overrightarrow{OT}$ λαμβάνεται ἡ φορὰ των θετική, ὅταν αὕτη συμφωνεῖ μὲ τὴν φορὰν τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας, ἄλλως ἡ φορὰ των θεωρεῖται ὡς ἀρνητική.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι δυνάμεθα, ὁσάκις τοῦτο μᾶς ἐξυπηρετεῖ, ὡς τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς τελικῆς πλερᾶς τῆς τριγωνομετρικῆς γωνίας νὰ λαμβάνωμεν ἐκεῖνο τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ τριγωνομετρικὸς κύκλος τέμνει τὴν τελικὴν πλευράν. Τότε ἐπειδὴ $\rho = 1$ θὰ εἶναι (Σχ. 143) :

1) ἡμίτονον τοῦ τόξου θ ($\overset{\frown}{AP} \equiv$ θ)$=\overline{\Pi P}$, δηλαδὴ ἡ τεταγμένη τοῦ πέρατος τοῦ τόξου θ.

2) συνημίτονον τοῦ τόξου θ $= \overline{O\Pi}$, δηλαδὴ ἡ τετμημένη τοῦ πέρατος τοῦ τόξου θ.

3) ἐφαπτομένη τοῦ τόξου θ $= \overline{AT}$, δηλαδὴ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AT}$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὴν ἀρχὴν Α τῶν τόξων ἀπὸ τὸ Α καὶ τὸ σημεῖον Τ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ προέκτασις τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου θ τέμνει τὴν εἰς τὸ Α ἐφαπτομένην τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων).

4) συνεφαπτομένη τοῦ τόξου θ $= \overline{B\Sigma}$, δηλαδὴ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{B\Sigma}$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Β(0,1) ἀπὸ τὸ Β καὶ τὸ σημεῖον Σ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ προέκτασις τῆς τελικῆς ἀκτῖνος τοῦ τόξου θ τέμνει τὴν εἰς τὸ Β ἐφαπτομένην τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου (ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων).

Ἀναλόγως ὁρίζεται ἡ τέμνουσα καὶ ἡ συντέμνουσα τοῦ τόξου θ(*)

144. ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Ρ (Σχ. 143) ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ Α κινεῖται κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν διαγράφον τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον. Τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ γωνία θ (τὸ τόξον θ $\equiv \overset{\frown}{AP}^{+}$) μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0^0 ἕως 360^0.

Εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι ἔχομεν διὰ τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις τὸν κάτωθι πίνακα, ὅστις δεικνύει τὰς μεταβολὰς τῶν τιμῶν των, διὰ τὰς ἀντιστοίχους μεταβολὰς τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς θ.

(Εἰς τὸν πίνακα τὸ $\nearrow$ = αὐξάνει καὶ τὸ $\searrow$ = ἐλαττοῦται)

(*) Οἱ ὁρισμοὶ νὰ δοθοῦν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διδάσκοντος.

Πίναξ μεταβολῶν τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων

θ αὐξάνει ἀπὸ	0 ἕως $\frac{\pi}{2}$ (0^0 ἕως 90^0)	$\frac{\pi}{2}$ ἕως π (90^0 ἕως 180^0)	π ἕως $\frac{3\pi}{2}$ (180^0 ἕως 270^0)	$\frac{3\pi}{2}$ ἕως 2π (270^0 ἕως 360^0)
ημθ	↗ ἀπὸ 0 ἕως 1	↘ ἀπὸ 1 ἕως 0	↘ ἀπὸ 0 ἕως −1	↗ ἀπὸ −1 ἕως 0
συν θ	↘ ἀπὸ 1 ἕως 0	↘ ἀπὸ 0 ἕως −1	↗ ἀπὸ −1 ἕως 0	↗ ἀπὸ 0 ἕως 1
εφ θ	↗ ἀπὸ 0 ἀπεριορίστως λαμβάνουσα ὁσονδήποτε μεγάλας θετικὰς τιμάς, καθ' ὅσον τὸ θ πλησιάζει τὰς 90^0 (0 ἕως $+\infty$)	↗ ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἕως τὸ 0. ($-\infty$ ἕως 0)	↗ ἀπὸ 0 ἀπεριορίστως λαμβάνουσα ὁσονδήποτε μεγάλας θετικὰς τιμάς, καθ' ὅσον πλησιάζει τὸ θ τὰς 270^0 (0 ἕως $+\infty$)	↗ ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἕως τὸ 0. ($-\infty$ ἕως 0)
σφθ	↘ ἀπὸ θετικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας ἕως 0. ($+\infty$ ἕως 0)	↘ ἀπὸ 0 ἀπεριορίστως λαμβάνουσα ἀρνητικὰς τιμὰς κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὁσονδήποτε μεγάλας καθ' ὅσον τὸ θ πλησιάζει τὰς 180^0 (0 ἕως $-\infty$)	↘ ἀπὸ θετικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας ἕως 0 ($+\infty$ ἕως 0)	↘ ἀπὸ 0 ἀπεριορίστως λαμβάνουσα τιμὰς ἀρνητικὰς κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὁσονδήποτε μεγάλας καθ' ὅσον τὸ θ πλησιάζει τὰς 360^0 (0 ἕως $-\infty$)
τεμ θ (*)	↗ ἀπὸ 1 ἀπεριορίστως λαμβάνουσα τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας, καθ' ὅσον τὸ θ πλησιάζει τὰς 90^0 (1 ἕως $+\infty$)	↗ ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἕως −1. ($-\infty$ ἕως 1)	↘ ἀπὸ −1 ἀπεριορίστως λαμβάνουσα ἀρνητικὰς τιμὰς κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὁσονδήποτε μεγάλας, καθ' ὅσον τὸ θ πλησιάζει τὰς 270^0 (−1 ἕως $-\infty$)	↘ ἀπὸ θετικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας ἕως 1. ($+\infty$ ἕως 1)
στεμ θ	↘ ἀπὸ μεγάλας θετικὰς τιμὰς ἕως 1 ($+\infty$ ἕως 1)	↗ ἀπὸ 1 ἕως θετικὰς τιμὰς ὁσονδήποτε μεγάλας (1 ἕως $+\infty$)	↗ ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς μεγάλας κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἕως −1. ($-\infty$ ἕως − 1)	↘ ἀπὸ −1 ἀπεριορίστως. (− 1 ἕως $-\infty$)

Σημ. Εἰς τὴν § 9 ἐμάθομεν διὰ ποίας τιμὰς τῆς θ δὲν ὁρίζονται αἱ συναρτήσεις $\theta \to$ εφθ, $\theta \to$ σφθ, $\theta \to$ τεμθ καὶ $\theta \to$ στεμθ.

(*) Ἡ μεταβολὴ τῆς τεμθ καὶ στεμθ δύναται νὰ διδαχθῇ ἢ νὰ παραλειφθῇ κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος.

145. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ.

Α) Ἐθεωρήσαμεν ἕως τώρα τὰς τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις, ὡς συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς θ, ἡ ὁποία λαμβάνει τιμὰς ἀπὸ τὸ σύνολον Γ, ὅλων τῶν τριγωνομετρικῶν γωνιῶν. Εἴδομεν δὲ ὅτι δυνάμεθα νὰ λάβωμεν, ἀντὶ τῶν γωνιῶν θ, τὰς ἀλγεβρικάς των τιμὰς εἰς μοίρας, ὁπότε ἡ μεταβλητὴ θ διατρέχει τὸ σύνολον R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἂν αἱ γωνίαι τοῦ συνόλου Γ μετρηθοῦν μὲ μονάδα τὸ ἀκτίνιον, τότε δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὴν τιμὴν μιᾶς γωνίας x εἰς ἀκτίνια ὡς ἕνα ἄλλο σύμβολον διὰ τὴν γωνίαν καὶ νὰ ἀναφερώμεθα εἰς τὴν μεταβλητὴν x, ὡς μίαν μεταβλητήν, ἡ ὁποία διατρέχει τὸ R.

Τότε εἰς κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς $x \in R$, ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ ἑκάστης τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ἀνήκουσα εἰς ἓν σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅταν, ἐννοεῖται, ἡ συνάρτησις ὁρίζεται διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τῆς μεταβλητῆς x. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσαι συναρτήσεις λέγονται: **πραγματικαὶ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις.** Οὕτως αἱ συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ψ = ημx, ψ = συνx, ψ = εφx, ψ = σφx κ.τ.λ. εἰς τὰς ὁποίας ἡ μεταβλητὴ x νοεῖται διατρέχουσα τὸ σύνολον R καὶ ἡ ψ ὡρισμένα σύνολα πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Κάθε τριγωνομετρικὴ συνάρτησις ἔχει ὡς πεδίον ὁρισμοῦ της τὸ σύνολον R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐξαιρουμένων τῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα *

συνάρτησις	πεδίον ὁρισμοῦ	πεδίον τιμῶν
ψ = ημx	R	$\{\psi \in R \mid -1 \leqslant \psi \leqslant 1\}$
ψ = συνx	R	$\{\psi \in R \mid -1 \leqslant \psi \leqslant 1\}$
ψ = εφx	$R - \left\{\frac{\pi}{2} + \kappa\pi\right\}$, $\kappa \in Z$	R
ψ = σφx	$R - \{\kappa\pi\}$, $\kappa \in Z$	R
ψ = τεμx	$R - \left\{\frac{\pi}{2}\kappa + \pi\right\}$, $\kappa \in Z$	$\{\psi \in R \mid \psi \leqslant -1\}$, $\{\psi \in R \mid \psi \geqslant 1\}$
ψ = στεμx	$R - \{\kappa\pi\}$, $\kappa \in Z$	$\{\psi \in R \mid \psi \leqslant -1\}$, $\{\psi \in R \mid \psi \geqslant 1\}$

Β) Αἱ τιμαὶ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δίδονται εἰς πίνακας, εὑρίσκονται δὲ αἱ τιμαὶ αὗται μὲ μεθόδους, τὰς ὁποίας χρησιμοποιοῦν τὰ ἀνώτερα μαθηματικά. (Βλέπε πίνακας εἰς τὰς τελευταίας σελίδας τοῦ βιβλίου).

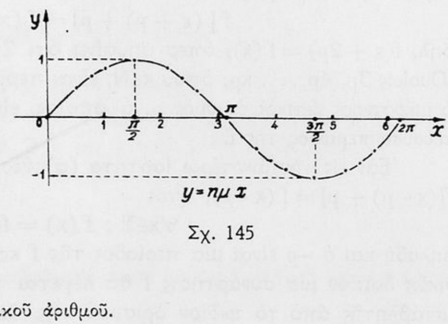
Προκειμένου νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν, π.χ., τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ψ = ημx, ψ = συνx ψ = εφx, δίδομεν εἰς τὴν μεταβλητὴν x τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως 2π καὶ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς ψ ἀπὸ τοὺς πίνακας. Κάθε ζεῦγος ἀντιστοίχων τιμῶν ἀπεικονίζεται μὲ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ἔχομεν λάβει ἓν σύστημα ἀξόνων ὀρθο-

(*) Δὲν εἶναι ἀπαραίτητον οἱ μαθηταὶ νὰ ἀπομνημονεύσουν τὸν πίνακα. Δύνανται νὰ συμβουλεύωνται αὐτὸν ὁσάκις τὸν χρειάζονται.

κανονικόν. Οὕτω, π.χ. εὑρίσκομεν διὰ τὰς ἀνωτέρω συναρτήσεις τὰς ἀντιστοίχους τιμάς, αἱ ὁποῖαι ἐμφαίνονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

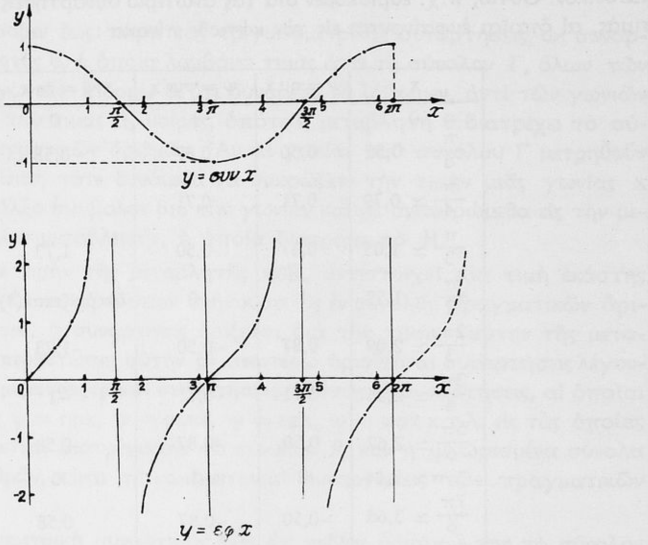
x	ψ = ημ x	ψ = συν x	ψ = εφ x
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6} \simeq 0,52$	0,50	0,87	0,58
$\frac{\pi}{4} \simeq 0,79$	0,71	0,71	1
$\frac{\pi}{3} \simeq 1,05$	0,87	0,50	1,73
$\frac{\pi}{2} \simeq 1,57$	1	0	δὲν ὁρίζεται (*)
$\frac{2\pi}{3} \simeq 2,09$	0,87	−0,50	−1,73
$\frac{3\pi}{4} \simeq 2,36$	0,71	−0,71	−1
$\frac{5\pi}{6} \simeq 2,62$	0,50	−0,87	−0,58
$\pi \simeq 3,14$	0	−1	0
$\frac{7\pi}{6} \simeq 3,66$	−0,50	−0,87	0,58
$\frac{5\pi}{4} \simeq 3,92$	−0,71	−0,71	1
$\frac{4\pi}{3} \simeq 4,19$	−0,87	−0,50	1,73
$\frac{3\pi}{2} \simeq 4,71$	−1	0	δὲν ὁρίζεται
$\frac{5\pi}{3} \simeq 5,23$	−0,87	0,50	−1,73
$\frac{7\pi}{4} \simeq 5,49$	−0,71	0,71	−1
$\frac{11\pi}{6} \simeq 5,76$	−0,5	0,87	−0,58
$2\pi \simeq 6,28$	0	1	0

Εὑρίσκομεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα εἰς τὸ ἐπίπεδον xOψ καὶ ἑνώνομεν αὐτὰ διὰ μιᾶς ὁμαλῆς καμπύλης. Προκύπτουν τότε αἱ κάτωθι γραφικαὶ παραστάσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη λέγεται **ἡμιτονοειδὴς καμπύλη** καὶ ἡ δευτέρα **συνημιτονοειδὴς καμπύλη.**



Σχ. 145

(*) δηλ. δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.



Σχ. 145

146. ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ. ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ.

Ἔστω f μία συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἕν σύνολον Σ, πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἔστω δὲ ὅτι ὑπάρχει εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς p διάφορος τοῦ 0 τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$f(x+p) = f(x) \qquad (\alpha)$$

διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ f ὁρίζεται. Λέγομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ὁ p εἶναι **μία περίοδος** τῆς συναρτήσεως f, ἡ δὲ f λέγεται **περιοδικὴ** συνάρτησις. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι :

$$f\,[\,(x+p)+p] = f\,(x+p) = f\,(x)$$

δηλ. $f(x+2p) = f\,(x)$, ὅπερ σημαίνει ὅτι 2p εἶναι ἐπίσης μία περίοδος τῆς f. Ὁμοίως 3p, 4p, . . ., κp, ὅπου κ∈N, εἶναι περίοδος τῆς f. Ἐὰν ἡ f εἶναι περιοδικὴ ὁ μικρότερος θετικὸς ἀριθμὸς p, ὁ ὁποῖος εἶναι περίοδος τῆς f, λέγεται : **πρωτεύουσα περίοδος** τῆς f.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα (α) θέσωμεν ὅπου x τὸ x - p, λαμβάνομεν $f[(x-p)+p] = f\,(x-p)$, ἤτοι

$$\forall x \in \Sigma : \; f\,(x) = f(x-p)$$

δηλαδὴ καὶ ὁ $-p$ εἶναι μία περίοδος τῆς f καὶ ἑπομένως καὶ ὁ $-2p, -3p, \ldots$ Γενικῶς λοιπὸν μία συνάρτησις f θὰ λέγεται περιοδική, ἐὰν διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της, ἰσχύῃ :

$f(x) = f(x + \kappa p)$, ὅπου $\kappa \in Z - \{0\}$ καὶ p εἶναι σταθερὸς ὡρισμένος πραγματικὸς ἀριθμός.

Ἡ ἐλαχίστη **θετικὴ** τιμὴ τοῦ κp λέγεται : ἡ πρωτεύουσα **περίοδος** τῆς συναρτήσεως f.

Οὕτω, π.χ., ἐπειδὴ αἱ γωνίαι θ(*) καὶ $\theta + 2\pi \cdot \kappa$ ἔχουν τὴν αὐτὴν τελικὴν πλευράν, θὰ ἰσχύουν αἱ ἰσότητες :

$$\eta\mu x = \eta\mu\,(x + 2\kappa\pi), \qquad \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\,(x + 2\kappa\pi)$$

διὰ κάθε τιμὴν τῆς γωνίας x. Ἑπομένως αἱ συναρτήσεις $\psi = \eta\mu x$, $\psi = \sigma\upsilon\nu x$ εἶναι περιοδικαί. Καί, ἐπειδὴ διὰ $\kappa = 1$ ἡ παράμετρος $2\kappa\pi$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην θετικὴν τιμήν, διὰ τοῦτο αἱ συναρτήσεις αὗται ἔχουν πρωτεύουσαν περίοδον τὸ 2π. Ἡ συνάρτησις $\psi = \varepsilon\varphi x$ ἔχει ὡς περίοδον τὸ 2π, διότι $\varepsilon\varphi(x + 2\pi) = \varepsilon\varphi x$, ἀλλ' ὄχι ὡς πρωτεύουσαν περίοδον, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

Ἡ κατασκευὴ τῆς γραφικῆς παραστάσεως μιᾶς περιοδικῆς συναρτήσεως, ὅπως ἡ $\psi = \eta\mu x$, καθίσταται εὐκολωτέρα, διότι ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τμῆμα αὐτῆς. Πράγματι, ἐπειδὴ $\eta\mu x = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu\,(x + 4\pi)$ κ.τ.λ., αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς τῆς x ἀπὸ 0 ἕως 2π συμπίπτουν μὲ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς τιμὰς τῆς x ἀπὸ 2π ἕως 4π, ἀπὸ 4π ἕως 6π κ.τ.λ. ἢ εἰς τὰς τιμὰς τῆς x ἀπὸ -2π ἕως 0, -4π ἕως -2π κ.τ.λ. Ἐὰν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ἓν τμῆμα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $\psi = \eta\mu x$, π.χ. τὸ τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς τιμὰς τῆς x ἀπὸ 0 ἕως 2π, ἀρκεῖ ἔπειτα μία παράλληλος μετάθεσις πρὸς τὸν ἄξονα Ox κατὰ διάνυσμα ἀλγεβρικῆς τιμῆς 2π ἢ -2π διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ἢ τὸ ἀμέσως προηγούμενον τμῆμα τῆς παραστατικῆς καμπύλης, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς τιμὰς τῆς x ἀπὸ 2π ἕως 4π ἢ ἀπὸ -2π ἕως 0.

Ἡ συνάρτησις $\psi = \varepsilon\varphi x$ ἔχει πρωτεύουσαν περίοδον τὸ π, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

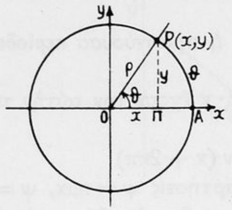
147. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΤΟΞΟΥ).

Ἐμάθομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 140, παρατήρησις 1η) ὅτι μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων τῆς αὐτῆς γωνίας θ ἰσχύουν αἱ ταυτότητες :

$$\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\ ,\ \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta}\ ,\ \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} \qquad (\alpha)$$

Ἔστω τώρα τυχοῦσα γωνία θ, εἰς κανονικὴν θέσιν, τῆς ὁποίας ἡ τελικὴ πλευρὰ δὲν συμπίπτει μὲ ἡμιάξονα (Σχ. 147). Τότε, μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι $x \neq 0$ καὶ ἑπομένως $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ (δηλ. $\theta \neq \kappa\pi + \pi/2$, $\kappa \in Z$), θὰ ἔχωμεν :

(*) Ἐννοοῦμεν γωνίαν ἀλγεβρικῆς τιμῆς θ, τῆς ὁποίας γωνίας ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἔχει εὑρεθῆ εἰς ἀκτίνια.



Σχ. 147

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\psi}{x} = \frac{\frac{\psi}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \text{ δηλ.}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} \quad (\beta)$$

$$\sigma\varphi\theta = \frac{x}{\psi} = \frac{\frac{x}{\rho}}{\frac{\psi}{\rho}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}, \text{ δηλ.}$$

$$\boxed{\sigma\varphi\theta = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}} \quad (\gamma)$$ ὅπου ὑποτίθεται ὅτι ἡ θ εἶναι γωνία διὰ τὴν ὁποίαν $\eta\mu\theta \neq 0$ (δηλ. $\theta \neq \kappa\pi$, $\kappa \in Z$).

Ἐξ ἄλλου, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΠΡ, ἔχομεν :

$$x^2 + \psi^2 = \rho^2 \quad (\delta)$$

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς (δ) διὰ ρ^2 εὑρίσκομεν :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{\psi^2}{\rho^2} = 1, \text{ δηλ. } \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\psi}{\rho}\right)^2 = 1,$$

ἡ ὁποία, ἐπειδὴ $x/\rho = \sigma\upsilon\nu\theta$ καὶ $\psi/\rho = \eta\mu\theta$, γίνεται

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1} \quad (\varepsilon)$$

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς (δ) διὰ x^2, ὑποτιθεμένου $x \neq 0$, εὑρίσκομεν $1 + \left(\frac{\psi}{x}\right)^2 = \left(\frac{\rho}{x}\right)^2$, δηλαδή :

$$\boxed{1 + \varepsilon\varphi^2\theta = \tau\varepsilon\mu^2\theta} \quad (\zeta)$$

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς (δ) διὰ ψ^2 ($\psi \neq 0$) εὑρίσκομεν $\left(\frac{x}{\psi}\right)^2 + 1 = \left(\frac{\rho}{\psi}\right)^2$, δηλαδή :

$$\boxed{1 + \sigma\varphi^2\theta = \sigma\tau\varepsilon\mu^2\theta} \quad (\eta)$$

Αἱ ταυτότητες (α), (β), (γ), (δ), (ε), (ζ), (η) εἶναι αἱ θεμελιώδεις σχέσεις μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων **τῆς αὐτῆς** γωνίας (τοῦ αὐτοῦ τόξου).

148. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) Νὰ ἐκφρασθῇ ἑκάστη τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων τῆς γωνίας θ ἐκ τοῦ ημθ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου $\sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta = 1$ ἔχομεν :

$\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1 - \eta\mu^2\theta \Rightarrow |\,\sigma\upsilon\nu\theta\,| = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}$, ἄρα

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1 - \eta\mu^2\theta} \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu\theta = -\sqrt{1 - \eta\mu^2\theta}$$

Συμβολικῶς τοὺς δύο τύπους γράφομεν :

$$\text{συν}\theta = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}$$

$$\text{εφ}\theta = \frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta} = \frac{\text{ημ}\,\theta}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\,\theta}}, \quad \text{σφ}\theta = \frac{1}{\text{εφ}\,\theta} = \frac{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\,\theta}}{\text{ημ}\,\theta}$$

$$\text{τεμ}\theta = \frac{1}{\text{συν}\,\theta} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\,\theta}}, \quad \text{στεμ}\theta = \frac{1}{\text{ημ}\,\theta}$$

Τὸ πρόσημον τῆς τετραγ. ρίζης καθορίζεται, ἐὰν γνωρίζομεν εἰς ποίαν γωνίαν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας θ. Οὕτω, π.χ., ἐὰν εὑρίσκεται εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τῶν ἀξόνων, θὰ λάβωμεν προκειμένου νὰ εὕρωμεν τὸ συνθ τὸν τύπον $\text{συν}\theta = -\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta}$, διότι μία τοιαύτη γωνία ἔχει ὡς συνημίτονον ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

2) Νὰ ἐκφρασθοῦν αἱ τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις τῆς γωνίας θ ἐκ τῆς εφθ.

Λύσις : Ὁ τύπος (ζ) τῆς προηγουμένης § 147 δίδει :

$$\text{τεμ}^2\theta = 1 + \text{εφ}^2\theta \Leftrightarrow \frac{1}{\text{συν}^2\,\theta} = 1 + \text{εφ}^2\theta \Leftrightarrow$$

$$\text{συν}^2\theta = \frac{1}{1+\text{εφ}^2\,\theta} \Leftrightarrow \boxed{\text{συν}^2\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\,\theta}}} \qquad (\alpha)$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου $\frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta} = \text{εφ}\theta$ εὑρίσκομεν :

$$\frac{\text{ημ}\,\theta}{\text{συν}\,\theta} = \text{εφ}\theta \Leftrightarrow \text{ημ}\theta = \text{συν}\theta\,\text{εφ}\theta \Leftrightarrow$$

$$\text{ημ}\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\,\theta}}\,\text{εφ}\theta \Leftrightarrow \boxed{\text{ημ}\theta = \frac{\text{εφ}\,\theta}{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\,\theta}}} \qquad (\beta)$$

Τέλος εἶναι $\text{σφ}\theta = \frac{1}{\text{εφ}\,\theta}$ καὶ $\text{στεμ}\theta = \frac{1}{\text{ημ}\,\theta} = \frac{\pm\sqrt{1+\text{εφ}^2\,\theta}}{\text{εφ}\,\theta}$

Καὶ ἐδῶ τὸ πρόσημον τῆς τετραγ. ρίζης καθορίζεται, ὅταν γνωρίζωμεν εἰς ποίαν γωνίαν τῶν ἀξόνων εὑρίσκεται ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας θ.

3) Χρησιμοποιοῦντες τὰς θεμελιώδεις ταυτότητας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἄλλων τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ μιᾶς ἐξ αὐτῶν.

Ἔστω, π.χ., ὅτι εἶναι $\text{ημ}\theta = \frac{3}{5}$ καὶ $-360^0 < \theta < -270^0$.

Ἐκ τοῦ τύπου $\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1$, εὑρίσκομεν $\text{συν}^2\theta = 1 - \text{ημ}^2\theta$, ὅθεν $\text{συν}\theta = \pm\sqrt{1-\text{ημ}^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$. Ἐπειδὴ ἡ τελικὴ πλευρὰ τῆς γωνίας θ εὑρίσκεται εἰς τὴν Ι γωνίαν τῶν ἀξόνων θὰ λάβωμεν τὸ πρόσημον +, διότι μία τοιαύτη γωνία ἔχει συνημίτονον θετικόν. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι : $\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$, $\sigma\varphi\theta = \frac{4}{3}$, $\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{5}{4}$, $\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{5}{3}$.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἔστω $\varepsilon\varphi\theta = -\frac{5}{12}$. Ἐπειδὴ ἡ εφθ εἶναι ἀρνητική, ἡ θ θὰ εἶναι γωνία μὲ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν ΙΙ ἢ ΙV γωνίαν τῶν ἀξόνων. Εὑρίσκομεν:

$$\sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta} = -\frac{12}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{169}{144}}} = \pm\frac{12}{13}$$

$$\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \pm\frac{13}{12}$$

$$\eta\mu\theta = \frac{\varepsilon\varphi\theta}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\theta}} = \frac{-\frac{5}{12}}{\pm\frac{13}{12}} = \pm\frac{5}{13}$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta} = \pm\frac{13}{5}$$

Ἐὰν ἡ θ ἔχῃ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν ΙΙ γωνίαν τῶν ἀξόνων.	Ἐὰν ἡ θ ἔχῃ τελικὴν πλευρὰν εἰς τὴν ΙV γωνίαν τῶν ἀξόνων
$\varepsilon\varphi\theta = -\frac{5}{12}$	$\varepsilon\varphi\theta = -\frac{5}{12}$
$\sigma\varphi\theta = -\frac{12}{5}$	$\sigma\varphi\theta = -\frac{12}{5}$
$\tau\varepsilon\mu\theta = -\frac{13}{12}$	$\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{13}{12}$
$\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{12}{13}$	$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{12}{13}$
$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{13}{5}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta = -\frac{13}{5}$
$\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$	$\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$

4) Μὲ βάσιν τὰς θεμελιώδεις τριγωνομετρικὰς ταυτότητας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ἄλλας τριγωνομετρικὰς ταυτότητας.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu^3\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu\theta$$

Λύσις : $\eta\mu^3\theta + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu\theta\,(\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = \eta\mu\theta \cdot 1 = \eta\mu\theta$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{\sigma\tau\varepsilon\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}$$

Λύσις : $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x} + \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x} = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x\, \eta\mu\, x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x\, \eta\mu\, x} =$

$$= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x} \cdot \frac{1}{\eta\mu\, x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\, x}\,\sigma\tau\varepsilon\mu x = \frac{\sigma\tau\varepsilon\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x}$$

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\frac{1+\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x}=\frac{\text{ημ}\,x}{1-\text{συν}\,x}$$

Λύσις : Ἐν πρώτοις πρέπει : $\text{ημ}x \neq 0$ καὶ $1-\text{συν}x \neq 0$.

$$\frac{1+\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x}=\frac{(1+\text{συν}\,x)\,(1-\text{συν}\,x)}{\text{ημ}\,x\,(1-\text{συν}\,x)}=\frac{1-\text{συν}^2\,x}{\text{ημ}\,x\,(1-\text{συν}\,x)}=\frac{\text{ημ}^2\,x}{\text{ημ}\,x\,(1-\text{συν}\,x)}=\frac{\text{ημ}\,x}{1-\text{συν}\,x}$$

Παράδειγμα 4ον: Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$2\,\text{στεμ}\,x=\frac{\text{ημ}\,x}{1+\text{συν}\,x}+\frac{1+\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x}$$

Λύσις: $\dfrac{\text{ημ}\,x}{1+\text{συν}\,x}+\dfrac{1+\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x}=\dfrac{\text{ημ}^2\,x+(1+\text{συν}\,x)^2}{\text{ημ}\,x\,(1+\text{συν}\,x)}=$

$$=\frac{\text{ημ}^2\,x+1+2\,\text{συν}\,x+\text{συν}^2\,x}{\text{ημ}\,x\,(1+\text{συν}\,x)}=\frac{(\text{ημ}^2\,x+\text{συν}^2\,x)+1+2\,\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x\,(1+\text{συν}x)}=$$

$$=\frac{1+1+2\,\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x\,(1+\text{συν}\,x)}=\frac{2+2\,\text{συν}\,x}{\text{ημ}\,x\,(1+\text{συν}\,x)}=\frac{2\,(1+\text{συν}\,x)}{\text{ημ}\,x\,(1+\text{συν}\,x)}=$$

$$=\frac{2}{\text{ημ}\,x}=2\cdot\frac{1}{\text{ημ}\,x}=2\,\text{στεμ}\,x$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων γίνεται φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι μία ἰσότης περιέχουσα τριγωνομετρικὰς συναρτήσεις, εἶναι ταυτότης, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ἕν μέλος αὐτῆς (τὸ πρῶτον ἢ τὸ δεύτερον) καὶ διὰ καταλλήλων μετασχηματισμῶν νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ ἄλλο μέλος. Εἰς σπανίας περιπτώσεις μετασχηματίζομεν καὶ τὰ δύο μέλη, διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ ἴδωμεν ἂν πρόκειται περὶ ταυτότητος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

467) Ἐὰν $\text{ημ}\theta=\dfrac{2}{3}$ καὶ $0^\circ<\theta<90^\circ$, νὰ εὕρετε τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς θ.

468) Ἐὰν $\text{συν}\theta=-\dfrac{5}{6}$ καὶ $90^\circ<\theta<180^\circ$, νὰ εὕρετε τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας θ.

469) Ἐὰν $\text{εφ}\theta=-\dfrac{5}{4}$ καὶ $90^\circ<\theta<180^\circ$ νὰ εὕρετε τοὺς ἄλλους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας θ.

470) Ἐὰν $\text{εφ}\theta=-\dfrac{4}{3}$ καὶ $270^\circ<\theta<360^\circ$ νὰ εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ κλάσματος $\dfrac{\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta-\text{εφ}\theta}{\text{τεμ}\theta+\text{στεμ}\theta-\text{σφ}\theta}$

471) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $\text{ημ}\theta\ \text{σφ}\theta\ \text{τεμ}\theta=1$ β) $\text{τεμ}\theta-\text{τεμ}\theta\ \text{ημ}^2\theta=\text{συν}\theta$

472) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $\text{ημ}^2\theta\ (1+\text{σφ}^2\theta)=1$ β) $\text{ημ}^2\theta\ \text{τεμ}^2\theta-\text{τεμ}^2\,\theta=-1$

473) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$(\text{ημ}\theta+\text{συν}\theta)^2+(\text{ημ}\theta-\text{συν}\theta)^2=2$

474) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\text{εφ}^2\theta\ \text{συν}^2\theta+\text{σφ}^2\theta\ \text{ημ}^2\theta=1$$

475) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\varepsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} = \tau\varepsilon\mu\theta$$

476) Ὁμοίως ὅτι :

α) $\dfrac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}$ β) $\eta\mu^4\theta - \sigma\upsilon\nu^4\theta = 2\eta\mu^2\theta - 1$

477) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\varepsilon\varphi\theta - \eta\mu x}{\eta\mu^3 x} = \frac{\tau\varepsilon\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

478) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\sigma\upsilon\nu x\ \sigma\varphi x - \eta\mu x\ \varepsilon\varphi x}{\sigma\tau\varepsilon\mu x - \tau\varepsilon\mu x} = 1 + \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu\ x$$

479) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi x\ \sigma\tau\varepsilon\mu x - \tau\varepsilon\mu x\ \sigma\varphi x} = \eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x$$

480) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $\dfrac{1-\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = 1 - 2\ \eta\mu^2 x$ β) $1 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\eta\mu x} = \eta\mu x$

481) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu x - \sigma\varphi x} - \frac{1}{\sigma\tau\varepsilon\mu x + \sigma\varphi x} = \frac{2}{\varepsilon\varphi x}$$

482) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu^2\alpha\,(1+\sigma\varphi^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\,(1+\varepsilon\varphi^2\alpha) = 2$$

483) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\tau\varepsilon\mu\alpha + \varepsilon\varphi\alpha - 1)\,(\tau\varepsilon\mu\alpha - \varepsilon\varphi\alpha + 1) = 2\varepsilon\varphi\alpha$$

484) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(1 - \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 2\,(1-\eta\mu\alpha)\,(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$$

485) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta}$$

486) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \eta\mu^2\beta = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$$

487) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta)^2 = 1$$

488) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις :

$$\eta\mu^6\alpha + \sigma\upsilon\nu^6\alpha - \frac{3}{2}\,(\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha)$$

ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ α.

489) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\eta\mu^8\alpha + \sigma\upsilon\nu^8\alpha - 2\,(1 - \eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2$$

ἔχει μίαν σταθερὰν τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ α.

490) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι παράστασις

$$\eta\mu^4\alpha\,(3 - 2\eta\mu^2\alpha) + \sigma\upsilon\nu^4\alpha\,(3 - 2\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha)$$

ἔχει τιμὴν σταθερὰν ἀνεξάρτητον τοῦ α

491) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$2\sigma\upsilon\nu^8 x - 2\eta\mu^8 x + 3\eta\mu^6 x - 5\sigma\upsilon\nu^6 x + 3\sigma\upsilon\nu^4 x = \eta\mu^2 x$$

492) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\eta\mu^6 x + 3\eta\mu^2 x\ \sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^6 x$$

ἔχει τιμὴν σταθερὰν ἀνεξάρτητον τοῦ x.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΟΞΕΙΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

149. ΓΩΝΙΑΙ ΜΕ ΚΟΙΝΗΝ ΤΕΛΙΚΗΝ ΠΛΕΥΡΑΝ

Ἐμάθομεν εἰς τὴν § 140 ὅτι γωνίαι μὲ κοινὴν τελικὴν πλευρὰν ἔχουν τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ εἰς τὴν § 137 ὅτι, ὅταν δύο γωνίαι (ἐννοεῖται πάντοτε : εἰς κανονικὴν θέσιν) διαφέρουν κατὰ 2κπ (360^0κ), τότε ἔχουν κοινὴν τελικὴν πλευράν.

Ἑπομένως ἔχομεν τὰς κάτωθι ταυτότητας, ὅπου κ∈Z.

ημ $(\theta^0 + 360^0\kappa) =$ ημθ^0	σφ $(\theta^0 + 360^0\kappa) =$ σφθ^0
συν $(\theta^0 + 360^0\kappa) =$ συνθ^0	τεμ $(\theta^0 + 360^0\kappa) =$ τεμθ^0
εφ $(\theta^0 + 360^0\kappa) =$ εφθ^0	στεμ $(\theta^0 + 360^0\kappa) =$ στεμθ^0

Οὕτω, π.χ., εἶναι :

ημ $410^0 =$ ημ $(50^0 + 360^0) =$ ημ50^0

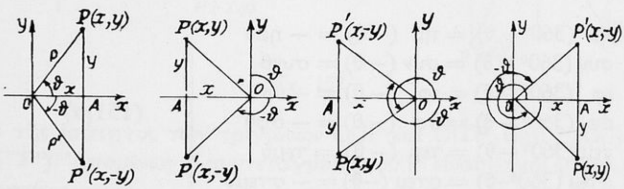
συν $870^0 =$ συν$(150^0 + 2 \cdot 360^0) =$ συν 150^0

εφ $(-1000^0) =$ εφ $(80^0 - 3 \cdot 360^0) =$ εφ 80^0

150. ΓΩΝΙΑΙ ΑΝΤΙΘΕΤΟΙ (ΤΟΞΑ ΑΝΤΙΘΕΤΑ)

Ἔστωσαν δύο γωνίαι θ καὶ −θ εἰς κανονικὴν θέσιν. Ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς θ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον P (x, ψ) καὶ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς −θ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον P′ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι (OP′) = (OP), δηλ. ρ′ = ρ (Σχ. 150).

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον OPP′ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ Ox διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς του, θὰ εἶναι PP′ $\perp$ Ox καὶ AP = AP′. Τὸ σημεῖον λοιπὸν P′ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ P ὡς πρὸς τὸν ἄξονα x′Ox, ἄρα εἶναι P′(x, − ψ).



Σχ. 150

Ἔχομεν λοιπὸν ὅτι :

$$\left.\begin{aligned}
\text{ημ}\,(-\theta) &= \frac{-\psi}{\rho'} = \frac{-\psi}{\rho} = -\frac{\psi}{\rho} = -\,\text{ημ}\theta \\
\text{συν}\,(-\theta) &= \frac{x}{\rho'} = \frac{x}{\rho} = \text{συν}\theta \\
\text{εφ}\,(-\theta) &= \frac{-\psi}{x} = -\frac{\psi}{x} = -\text{εφ}\theta \\
\text{σφ}\,(-\theta) &= \frac{x}{-\psi} = -\frac{x}{\psi} = -\text{σφ}\theta \\
\text{τεμ}\,(-\theta) &= \frac{\rho'}{x} = \frac{\rho}{x} = \text{τεμ}\theta \\
\text{στεμ}\,(-\theta) &= \frac{\rho'}{-\psi} = -\frac{\rho}{\psi} = -\,\text{στεμ}\theta
\end{aligned}\right\} \quad (150,\alpha)$$

῞Ωστε : ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἀντίθετοι, τότε ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ τὴν αὐτὴν τέμνουσαν, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς των ἀριθμούς.

Οὕτω, π.χ., ημ $(-20^0) = -$ ημ 20^0

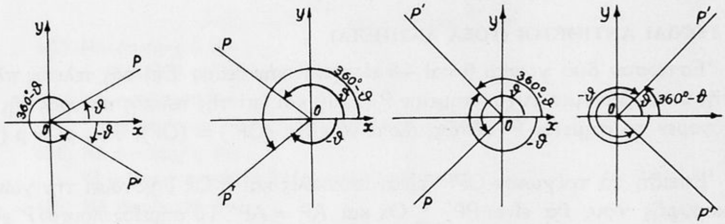
συν $(-20^0) =$ συν 20^0

εφ $(-20^0) = -$ εφ20^0 κ.τ.λ. κ.τ.λ.

συν $(-30^0) =$συν $30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

151. ΓΩΝΙΑΙ ΕΧΟΥΣΑΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΙΑΝ ΠΛΗΡΗ ΓΩΝΙΑΝ. (ΤΟΞΑ ΕΧΟΝΤΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΜΙΑΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ)

῎Εστωσαν, εἰς κανονικὴν θέσιν, δύο γωνίαι θ καὶ $360^0 - θ$. Γνωρίζομεν (§ 137) ὅτι αἱ γωνίαι $-θ$ καὶ $360^0-θ$ ἔχουν κοινὴν τελικὴν πλευρὰν καὶ ἑπομένως ἔχουν τοὺς αὐτοὺς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 151

$$\left.\begin{aligned}
&\text{ημ } (360^0 - θ) = \text{ημ } (-θ) = -\text{ημθ}\\
&\text{συν } (360^0 - θ) = \text{συν } (-θ) = \text{συνθ}\\
&\text{εφ } (360^0 - θ) = -\text{εφ } (-θ) = -\text{εφθ}\\
&\text{σφ } (360^0 - θ) = \text{σφ } (-θ) = -\text{σφθ}\\
&\text{τεμ } (360^0 - θ) = \text{τεμ } (-θ) = \text{τεμθ}\\
&\text{στεμ } (360^0 - θ) = \text{στεμ } (-θ) = -\text{στεμθ}
\end{aligned}\right\} \quad (151,α)$$

῞Ωστε : ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα μίαν πλήρη γωνίαν (360^0), τότε ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον καὶ τὴν αὐτὴν τέμνουσαν, ἀντιθέτους δὲ ὅλους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς.

Οὕτω, π.χ., εἶναι :

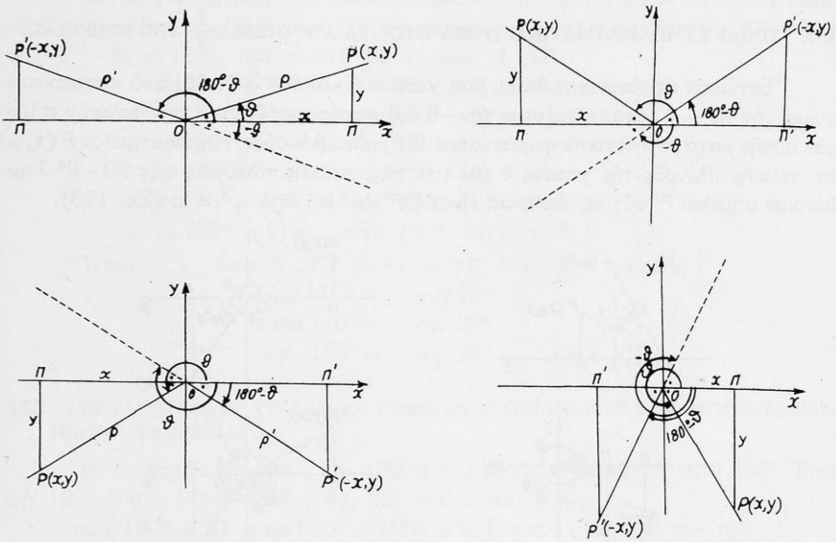
ημ. $330^0 = -$ημ$30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

εφ $300^0 = -$εφ $60^0 = -\sqrt{3}$

συν $315^0 =$ συν $45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

152. ΓΩΝΙΑΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ (ΤΟΞΑ ΕΧΟΝΤΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΗΜΙΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ)

Ἔστωσαν εἰς κανονικὴν θέσιν δύο γωνίαι θ καὶ $180^0 - \theta$. (Διὰ νὰ σχεδιάσωμεν τὴν $180^0 - \theta$ κατασκευάζωμεν τὴν $-\theta$ καὶ προεκτείνομεν ἔπειτα τὴν τελικὴν αὐτῆς πλευρὰν κατ᾽ ἀντίθετον φορὰν δηλ. στρέφομεν τὴν τελικὴν πλευρὰν αὐτῆς κατὰ γωνίαν 180^0). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον $P(x, \psi)$ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς θ καὶ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας $180^0 - \theta$ λαμβάνομεν σημεῖον P' ὥστε νὰ εἶναι $OP' = OP$, ὁπότε θὰ εἶναι $\rho' = \rho$ (Σχ. 152).



Σχ. 152

Λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΟΠΡ καὶ ΟΠ′Ρ′ εἶναι : (ΟΠ) = (ΟΠ′) καὶ (ΠΡ) = Π′Ρ′). Ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι τοῦ P' εἶναι $-x$ καὶ ψ, δηλ. $P(-x,\psi)$. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ημ}\ (180^0-\theta) & = \dfrac{\psi}{\rho'} = \dfrac{\psi}{\rho} = \text{ημ}\theta \\[2ex] \text{συν}\ (180^0-\theta) & = \dfrac{-x}{\rho'} = -\dfrac{x}{\rho} = -\text{συν}\theta \\[2ex] \text{εφ}\ (180^0-\theta) & = \dfrac{\psi}{-x} = -\dfrac{\psi}{x} = -\text{εφ}\theta \\[2ex] \text{σφ}\ (180^0-\theta) & = \dfrac{-x}{\psi} = -\dfrac{x}{\psi} = -\text{σφ}\theta \\[2ex] \text{τεμ}\ (180^0-\theta) & = \dfrac{\rho'}{-x} = -\dfrac{\rho}{x} = -\text{τεμ}\theta \\[2ex] \text{στεμ}\ (180^0-\theta) & = \dfrac{\rho'}{\psi} = \dfrac{\rho}{\psi} = \text{στεμ}\theta \end{array}\right\} \quad (152,\alpha)$$

Ὥστε : **Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, τότε ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ τὴν αὐτὴν συντέμνουσαν καὶ ἀντιθέτους τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικούς των ἀριθμούς.**

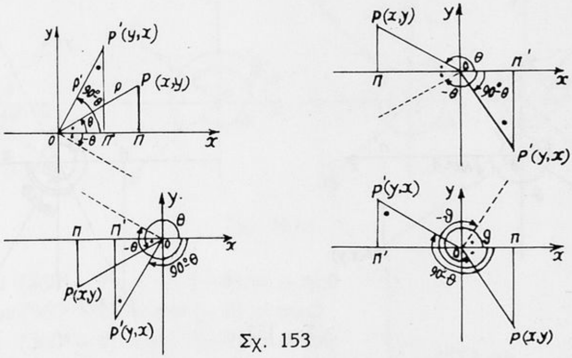
Οὕτω, π.χ. ἐπειδὴ $150^0 + 30^0 = 180^0$ θὰ εἶναι :

$$\eta\mu\, 150^0 = \eta\mu 30^0 = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\, 150^0 = -\sigma\upsilon\nu\, 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

153. ΓΩΝΙΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ (ΤΟΞΑ ΕΧΟΝΤΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑ $\frac{1}{4}$ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ)

Ἔστωσαν εἰς κανονικὴν θέσιν, δύο γωνίαι θ καὶ $90^0 - \theta$. (Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν $90^0 - \theta$ κατασκευάζομεν τὴν $-\theta$ καὶ στρέφομεν ἔπειτα τὴν τελικὴν πλευρὰν αὐτῆς κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν κατὰ 90^0). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον $P(x,\psi)$ ἐπὶ τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ καὶ ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς $90 - \theta^0$ λαμβάνομεν σημεῖον P′ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $OP' = OP$, δηλ. $\rho' = \rho$ (Σχ. 153).



Σχ. 153

Λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΟΠΡ καὶ ΟΠ′Ρ′ ἔχομεν (ΟΠ′) = (ΠΡ) καὶ (Π′Ρ′) = (ΟΠ). Ἑπομένως τὸ Ρ′ ἔχει τετμημένην ψ καὶ τεταγμένην x. Ἔχομεν λοιπόν :

$$\left.\begin{aligned}
\eta\mu\,(90^0-\theta) &= \frac{x}{\rho'} = \frac{x}{\rho} = \sigma\upsilon\nu\theta\\
\sigma\upsilon\nu\,(90^0-\theta) &= \frac{\psi}{\rho'} = \frac{\psi}{\rho} = \eta\mu\theta\\
\varepsilon\varphi\,(90^0-\theta) &= \frac{x}{\psi} = \sigma\varphi\theta\\
\sigma\varphi\,(90^0-\theta) &= \frac{\psi}{x} = \varepsilon\varphi\theta\\
\tau\varepsilon\mu\,(90^0-\theta) &= \frac{\rho'}{\psi} = \frac{\rho}{\psi} = \sigma\tau\varepsilon\mu\theta\\
\sigma\tau\varepsilon\mu(90^0-\theta) &= \frac{\rho'}{x} = \frac{\rho}{x} = \tau\varepsilon\mu\theta
\end{aligned}\right\}\quad (153,\alpha)$$

Ὥστε : ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, τότε τὸ ἡμίτονον ἑκάστης ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης, ἡ ἐφαπτομένη μὲ τὴν συνεφαπτομένην καὶ ἡ τέμνουσα μὲ τὴν συντέμνουσαν.

Οὕτω, π.χ., ἐπειδὴ $20^0 + 70^0 = 90^0$, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} &\text{ημ } 70^0 = \text{συν } 20^0 \\ &\text{συν } 70^0 = \text{ημ } 20^0 \\ &\text{εφ } 70^0 = \text{σφ } 20^0 \qquad \text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

154. ΓΩΝΙΑΙ ΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑΙ ΚΑΤΑ ΜΙΑΝ ΟΡΘΗΝ (ΤΟΞΑ ΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ ΚΑΤΑ ΤΕΤΑΡΤΟΝ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ)

Ἔστω ὅτι ἔχομεν, εἰς κανονικὴν θέσιν, τὰς γωνίας θ καὶ $90^0 + θ$. Θέλομεν νὰ ἴδωμεν πῶς σχετίζονται οἱ τριγωνομετρικοὶ των ἀριθμοί. Ἐπειδὴ $(90^0 + θ) + (90^0 - θ) = 180^0$, διὰ τοῦτο θὰ ἔχωμεν (§ 152) :

$$\left.\begin{aligned} \text{ημ } (90^0 + θ) &= \text{ημ } (90^0 - θ) = \text{συνθ} \\ \text{συν } (90^0 + θ) &= -\text{συν } (90^0 - θ) = -\text{ημθ} \\ \text{εφ } (90^0 + θ) &= -\text{εφ } (90^0 - θ) = -\text{σφθ} \\ \text{σφ } (90^0 + θ) &= -\text{σφ } (90^0 - θ) = -\text{εφθ} \\ \text{τεμ } (90^0 + θ) &= -\text{τεμ } (90^0 - θ) = -\text{στεμθ} \\ \text{στεμ } (90^0 + θ) &= \text{στεμ. } (90^0 - θ) = \text{τεμθ} \end{aligned}\right\} \quad (154,α)$$

Οὕτω, π.χ., ἐπειδὴ $110^0 = 90^0 + 20^0$, διὰ τοῦτο θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} &\text{ημ } 110^0 = \text{συν } 20^0 \\ &\text{συν } 110^0 = -\text{ημ } 20^0 \\ &\text{εφ } 110^0 = -\text{σφ } 20^0 \qquad \text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

155. ΓΩΝΙΑΙ ΔΙΑΦΕΡΟΥΣΑΙ ΚΑΤΑ ΕΥΘΕΙΑΝ - ΓΩΝΙΑΝ (ΤΟΞΑ ΔΙΑΦΟΡΕΝΤΑ ΚΑΤΑ ΗΜΙΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ)

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι θ καὶ $180^0 + θ$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ 180^0. Ἐπειδὴ $180^0 + θ = 90^0 + (90^0 + θ)$, διὰ τοῦτο θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} \text{ημ } (180^0 + θ) &= \text{ημ } [90^0 + (90^0 + θ)] = \text{συν } (90^0 + θ) = -\text{ημθ} \\ \text{συν } (180^0 + θ) &= \text{συν } [90^0 + (90^0 + θ)] = -\text{ημ } (90^0 + θ) = -\text{συνθ} \\ \text{εφ } (180^0 + θ) &= \text{εφ } [90^0 + (90^0 + θ)] = -\text{σφ } (90^0 + θ) = \text{εφθ} \\ \text{σφ } (180^0 + θ) &= \text{σφ } [90^0 + (90^0 + θ)] = -\text{εφ } (90^0 + θ) = \text{σφθ} \\ \text{τεμ } (180^0 + θ) &= \text{τεμ } [90^0 + (90^0 + θ)] = -\text{στεμ } (90^0 + θ) = -\text{τεμθ} \\ \text{στεμ } (180^0 + θ) &= \text{στεμ } [90^0 + (90^0 + θ)] = \text{τεμ } (90^0 + θ) = -\text{στεμθ} \end{aligned}$$

Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς : ἐπειδὴ $(180^0 + θ) + (180^0 - θ) = 360^0$, διὰ τοῦτο (§ 151) θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} \text{ημ } (180^0 + θ) &= -\text{ημ } (180^0 - θ) = -\text{ημθ} \\ \text{συν } (180^0 + θ) &= \text{συν } (180^0 - θ) = -\text{συνθ} \\ \text{εφ } (180^0 + θ) &= -\text{εφ } (180^0 - θ) = \text{εφθ} \\ \text{σφ } (180^0 + θ) &= -\text{σφ } (180^0 - θ) = \text{σφθ} \\ \text{τεμ } (180^0 + θ) &= \text{τεμ } (180^0 - θ) = -\text{τεμθ} \\ \text{στεμ } (180^0 + θ) &= -\text{στεμ } (180^0 - θ) = -\text{στεμθ} \end{aligned}$$

Ὥστε : ἐὰν δύο γωνίαι διαφέρουν κατὰ 180^0, τότε ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην καὶ τὴν αὐτὴν συνεφαπτομένην, ἀντιθέτους δὲ τοὺς ἄλλους ὁμωνύμους τριγωνομετρικούς των ἀριθμούς.

Οὕτω, π.χ., ἐπειδὴ $225^0 = 180^0 + 45^0$, διὰ τοῦτο θὰ εἶναι :

$$\text{ημ}\, 225^0 = -\,\text{ημ}\, 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{εφ}\, 225^0 = \text{εφ}\, 45^0 = 1$$

$$\text{συν}\, 225^0 = -\,\text{συν}\, 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Σημείωσις. Παρατηροῦμεν ὅτι $\text{εφ}\,(\pi + \theta) = \text{εφ}\,\theta$ καὶ $\text{σφ}\,(\pi + \theta) = \text{σφ}\,\theta$. Ἐπίσης $\text{εφ}\,(2\pi + \theta) = \text{εφ}\,\theta$ καὶ $\text{σφ}\,(2\pi + \theta) = \text{σφ}\,\theta$, ὅπως γνωρίζομεν. Ὁμοίως εἶναι $\text{εφ}\,(3\pi + \theta) = \text{εφ}\,[2\pi + (\pi + \theta)] = \text{εφ}\,(\pi + \theta) = \text{εφ}\,\theta$ κτλ. Ἤτοι αἱ συναρτήσεις $\psi = \text{εφ}\,x$ καὶ $\psi = \text{σφ}\,x$ ἔχουν περίοδον τὸν π.

156. ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΤΥΧΟΥΣΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΤΟΞΟΥ) ΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΜΕΤΡΙΚΟΝ ΑΡΙΘΜΟΝ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ) ΜΙΚΡΟΤΕΡΑΣ ΤΩΝ 45^0.

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους, τοὺς ὁποίους ἐμάθομεν εἰς τὰς παραγράφους 149 ἕως 155, δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὴν εὕρεσιν ἑνὸς τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ τυχούσης γωνίας θ (θετικῆς ἢ ἀρνητικῆς) εἰς τὴν εὕρεσιν τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ γωνίας μὴ ἀρνητικῆς καὶ μικροτέρας τῶν 45^0.

Ἔστω, π.χ., ὅτι ζητεῖται ἡ $\text{εφ}\,(-1250^0)$. Ἐν πρώτοις γνωρίζομεν ὅτι $\text{εφ}\,(-1250^0) = -\,\text{εφ}\,1250^0$ (§ 150).

Διαιροῦμεν τώρα τὸν 1250 διὰ 360 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 170, ἄρα εἶναι $1250^0 = 170^0 + 3 \cdot 360^0$. Ἔχομεν ἑπομένως :

$$\begin{aligned} \text{εφ}\,(-1250^0) = -\,\text{εφ}\,1250^0 &= -\,\text{εφ}\,(170^0 + 3 \cdot 360^0) \\ &= -\,\text{εφ}\,170^0 && (\S\ 149) \\ &= \text{εφ}\,10^0 && (\S\ 152) \end{aligned}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \text{ημ}\,(-1385^0) &= -\,\text{ημ}\,1385^0 && (\S\ 150) \\ &= -\,\text{ημ}\,(305^0 + 3 \cdot 360^0) \\ &= -\,\text{ημ}\,305^0 && (\S\ 149) \\ &= \text{ημ}\,55^0 && (\S\ 151) \\ &= \text{συν}\,35^0 && (\S\ 153) \end{aligned}$$

Γενικῶς δυνάμεθα νὰ ἀκολουθῶμεν τὸν ἑξῆς κανόνα : Ἀναγόμεθα πρῶτον εἰς γωνίαν θετικὴν καὶ μικροτέραν τῶν 360^0. Ἔπειτα ἐὰν ἡ γωνία αὕτη εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 270^0 τὴν συνδυάζομεν μὲ τὴν 360^0. Ἂν εἶναι μεταξὺ 180^0 καὶ 270^0, εὑρίσκομεν πόσον διαφέρει ἀπὸ 180^0 καὶ τὴν συνδυάζομεν μὲ τὴν διαφορὰν αὐτήν. Ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 90^0 καὶ μικροτέρα τῶν 180^0 τὴν συνδυάζομεν μὲ τὴν παραπληρωματικήν της καὶ τέλος ἐὰν εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 45^0 καὶ μικροτέρα τῶν 90^0 τὴν συνδυάζομεν μὲ τὴν συμπληρωματικήν της.

Παραδείγματα :

ημ $290^0 = -$ ημ $70^0 = -$ συν 20^0

συν $260^0 = -$συν $80^0 = -$ ημ 10^0

εφ $140^0 = -$ εφ 40^0

σφ $85^0 =$ εφ 5^0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

493) Νὰ ἀναχθοῦν εἰς τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς μὴ ἀρνητικῆς γωνίας μικροτέρας τῶν 45^0 οἱ κάτωθι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοί :

α) ημ 135^0 β) συν 315^0 γ) εφ 200^0 δ) σφ 400^0 ε) τεμ 325^0

στ) συν (-760^0) ζ) εφ (-1385^0) η) ημ 2880^0 θ) στεμ 825^0 ι) στεμ 610^0

494) Νὰ εὕρετε τὰς τιμὰς (ἀκριβεῖς) τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων : ημ, συν, εφ, σφ τῶν γωνιῶν :

α) 150^0 β) 225^0 γ) -330^0 δ) -120^0 ε) -210^0 στ) -315^0

495) Νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ κάτωθι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μὲ τριγωνομετρικοὺς ἀριθμοὺς τῆς γωνίας θ.

α) συν $(\theta - 90^0)$, β) εφ $(270^0 - \theta)$, γ) συν $(\theta + 540^0)$

δ) ημ $(\theta - 270^0)$ ε) ημ $(\theta - 180^0)$ στ) συν $(270^0 + \theta)$

ζ) ημ $(\theta - 720^0)$ η) εφ $(-540^0 + \theta)$ θ) συν $(\theta - 180^0)$

496) Ἐὰν εφ $25^0 = \alpha$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν κλασμάτων :

α) $\dfrac{\text{εφ } 155^0 - \text{εφ } 115^0}{1 + \text{εφ } 155^0 \text{ εφ } 115^0}$ β) $\dfrac{\text{εφ } 205^0 - \text{εφ } 115^0}{\text{εφ } 245^0 + \text{εφ } 335^0}$

497) Ἐὰν $A + B + \Gamma = 180^0$, νὰ δειχθῇ ὅτι ημ$(B + \Gamma) =$ ημ A καὶ συν $\dfrac{B + \Gamma}{2} =$ ημ$\dfrac{A}{2}$.

498) Ἐὰν θ εἶναι γωνία μὲ τὴν τελικήν της πλευρὰν εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τῶν ἀξόνων (δηλ. $90^0 < \theta < 180^0$) διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι : εφ $\theta = -2/3$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τότε :

α) $\dfrac{\text{ημ } (90^0 - \theta) - \text{συν } (180^0 - \theta)}{\text{εφ } (270^0 + \theta) + \text{σφ } (360^0 - \theta)} = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ καὶ

β) $\dfrac{\text{εφ } (90^0 + \theta) + \text{συν } (180^0 + \theta)}{\text{ημ } (270^0 - \theta) - \text{σφ } (-\theta)} = \dfrac{2 + \sqrt{13}}{2 - \sqrt{13}}$

499) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) συν 0^0 ημ^2 $270^0 - 2$ συν 180^0 εφ $45^0 = 3$

β) 3 ημ 0^0 τεμ $180^0 + 2$ στεμ $90^0 -$ συν $360^0 = 1$

γ) 2τεμπ συν0+3 ημ^3 $\dfrac{3\pi}{2} -$ στεμ $\dfrac{\pi}{2} = -6$

δ) εφπ συν $\dfrac{3\pi}{2}$ + τεμ $2\pi -$ στεμ $\dfrac{3\pi}{2} = 2$

500) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα :

α) $\dfrac{\text{συν } (90^0 + \alpha) \text{ τεμ } (-\alpha) \text{ εφ } (180^0 - \alpha)}{\text{τεμ } (360^0 + \alpha) \text{ ημ } (180^0 + \alpha) \text{ σφ } (270^0 - \alpha)}$

β) $\dfrac{\text{ημ } (180^0 - \alpha) \text{ σφ } (270^0 - \alpha) \text{ συν } (\alpha - 360^0)}{\text{εφ } (180^0 + \alpha) \text{ εφ } (90^0 + \alpha) \text{ συν } (270^0 + \alpha)}$

501) Ὁμοίως τὰ κάτωθι κλάσματα :

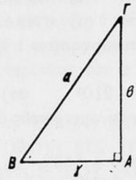
α) $\dfrac{\text{συν } \left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) \text{ τεμ } (-\alpha) \text{ εφ } (\pi - \alpha)}{\text{τεμ } (2\pi + \alpha) \text{ ημ } (\pi + \alpha) \text{ σφ } \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}$

β) $\dfrac{\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\varepsilon\varphi\,(\pi-\beta)}{\varepsilon\varphi\,(\pi-\beta)\,\sigma\upsilon\nu\,(\pi-\alpha)}+\dfrac{\sigma\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\eta\mu\left(\gamma-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu\,(\pi-\gamma)\,\varepsilon\varphi\,(-\alpha)}$

γ) $\dfrac{\varepsilon\varphi\,(\pi-\theta)\,\sigma\varphi\,(\pi+\theta)\,\varepsilon\varphi\,(-\theta)\,\varepsilon\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\varepsilon\varphi\,(\pi+\theta)\,\sigma\varphi\,(\pi-\theta)\,\sigma\varphi\,\theta\,\varepsilon\varphi\,(2\pi-\theta)}$

157. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ.

Εἰς τὴν γ' τάξιν ἐμάθομεν πῶς σχετίζονται μεταξύ των τὰ κύρια στοιχεῖα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. Ὑπενθυμίζομεν ἐδῶ τοὺς σχετικοὺς τύπους :



Σχ. 157.1

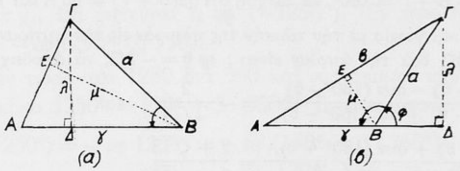
$$\left.\begin{array}{l}\beta=\alpha\eta\mu\ B=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\ \Gamma\\ \gamma=\alpha\,\eta\mu\ \Gamma=\alpha\,\sigma\upsilon\nu\ B\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta=\gamma\varepsilon\varphi\ B=\gamma\ \sigma\varphi\ \Gamma\\ \gamma=\beta\ \varepsilon\varphi\ \Gamma=\beta\ \sigma\varphi\ B\end{array}\right\}$$

$$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$$

Θὰ ζητήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τύπους συνδέοντας τὰ στοιχεῖα τυχόντος μὴ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν μὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον (Σχ. 157.2).



Σχ. 157.2

Εἰς τὸ σχ. 157-2,(α) ἔχομεν ἕνα ὀξυγώνιον τρίγωνον. Εἰς τὸ σχ. 157–2, (β) ἔχομεν ἕνα τρίγωνον ἀμβλυγώνιον. Φέρομεν τὴν ΓΔ κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ὀνομάζομεν (ΓΔ) = λ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ δι' ἀμφότερα τὰ σχήματα ἔχομεν λ = βημ Α. (1)

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΔΒ τοῦ σχ. (α) ἔχομεν λ = αημΒ (2)

Ἀπὸ δὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΔ τοῦ σχ. (β) ἔχομεν λ = αημφ = αημΒ (διότι Β + φ = 180⁰), ἔχομεν δηλ. πάλιν τὴν (2). Ἑπομένως ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=\beta\,\eta\mu\,A\\ \lambda=\alpha\,\eta\mu\,B\end{array}\right\}\Rightarrow \beta\eta\mu\,A=\alpha\eta\mu B\Rightarrow\ \frac{\alpha}{\eta\mu\,A}=\frac{\beta}{\eta\mu\,B}\qquad(3)$$

Φέρομεν τώρα τὴν κάθετον ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ καὶ θέτομεν (ΒΕ) = μ. Δι' ἀμφότερα τὰ σχήματα ἔχομεν :

$\mu = \alpha \eta\mu\, \Gamma$ καὶ $\mu = \gamma \eta\mu A$. Ἑπομένως ἔχομεν :

$$\left.\begin{array}{l}\mu = \alpha\,\eta\mu\,\Gamma \\ \mu = \gamma\,\eta\mu\,A\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\,\eta\mu\,\Gamma = \gamma\,\eta\mu\,A \Rightarrow \frac{\alpha}{\eta\mu\,A} = \frac{\gamma}{\eta\mu\,\Gamma} \quad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) συνάγομεν ὅτι

$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu\,A} = \frac{\beta}{\eta\mu\,B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\,\Gamma}} \qquad (157,\alpha)$$

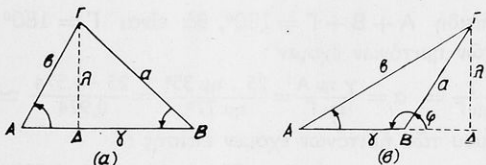
Ὥστε: **εἰς κάθε τρίγωνον τὰ μήκη τῶν πλευρῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.**

Αἱ ἀναλογίαι (157,α) ἀποτελοῦν τὸν λεγόμενον **νόμον τῶν ἡμιτόνων.**

158. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Ἄς λάβωμεν πάλιν ἕν μὴ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 158) Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ δι' ἀμφότερα τὰ σχήματα ἔχομεν :

$$\beta^2 = \lambda^2 + (A\Delta)^2 \quad (1)$$



Σχ. 158

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΓΔ τοῦ σχ. (α) ἔχομεν :
$\lambda = \alpha \eta\mu B$ καὶ $(\Delta B) = \alpha\, \sigma\upsilon\nu B$.

Ἑπομένως εἶναι :

$$(A\Delta) = (AB) - (\Delta B) = \gamma - \alpha\sigma\upsilon\nu B$$

καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$\beta^2 = \lambda^2 + (A\Delta)^2 = \alpha^2\,\eta\mu^2 B + \gamma^2 - 2\gamma\alpha\,\sigma\upsilon\nu B + \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2 B =$$
$$= \alpha^2\,(\eta\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B) + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu B$$
$$= \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\sigma\upsilon\nu B$$

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ τοῦ σχ. (β) ἔχομεν :

$\lambda = \alpha\eta\mu\varphi = \alpha\eta\mu B$ (διότι $B + \varphi = 180^0$) καὶ $(B\Delta) = \alpha\sigma\upsilon\nu\varphi = -\,\alpha\sigma\upsilon\nu B$

Ἑπομένως εἶναι :

$$(A\Delta) = (AB) + (B\Delta) = \gamma - \alpha\,\sigma\upsilon\nu\, B$$

καὶ ἡ (1) γίνεται καὶ διὰ τὸ τρίγωνον τοῦτο :

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$$

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως φέροντες τὰς καθέτους ἀπὸ τὰς κορυφὰς Γ καὶ

Α ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς εὑρίσκομεν ἀκόμη δύο ὁμοίους τύπους :

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,A$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\,A$$

Ὥστε ἔχομεν τοὺς τύπους :

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\,A \\ \beta^2 &= \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\,\text{συν}\,B \\ \gamma^2 &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\,\Gamma \end{aligned}\right\} (158,\ \alpha)$$

Οἱ ἀνωτέρω τύποι* (158, α) ἀποτελοῦν τὸν λεγόμενον **νόμον τῶν συνημιτόνων**, ὁ ὁποῖος λεκτικῶς διατυπώνεται ὡς ἑξῆς :

Τὸ τετράγωνον τοῦ μήκους μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν μεῖον τὸ **διπλάσιον γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.**

159. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1) Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\gamma = 25\text{cm}$, $A = 35^0$ καὶ $B = 68^0$ Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ α, β, Γ.

Λύσις : Ἐπειδὴ $A + B + \Gamma = 180^0$, θὰ εἶναι $\Gamma = 180^0 - (A + B) = 77^0$
Ἐκ τοῦ νόμου τῶν ἡμιτόνων ἔχομεν :

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}\,A} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\,\Gamma} \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma\,\text{ημ}\,A}{\text{ημ}\,\Gamma} = \frac{25\ .\ \text{ημ}\,35^0}{\text{ημ}\,77^0} = \frac{25\cdot 0{,}574}{0{,}974} \simeq 15\text{ cm}.$$

Ἐκ τοῦ νόμου τῶν ἡμιτόνων ἔχομεν ἐπίσης :

$$\frac{\beta}{\text{ημ}\,B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\,\Gamma} \Rightarrow \beta = \frac{\gamma\,\text{ημ}\,B}{\text{ημ}\,\Gamma} = \frac{25\cdot\text{ημ}\,68^0}{\text{ημ}\,77^0} = \frac{25\cdot 0{,}927}{0{,}974} \simeq 24\text{ cm}$$

2) Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 132\text{m}$, $\beta = 124\text{m}$, $\Gamma = 28^0\,40'$. Ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ἡ πλευρὰ γ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Β.

Λύσις : Ἐκ τοῦ νόμου τῶν συνημιτόνων ἔχομεν :
$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\,\Gamma = 132^2 + 224^2 - 2\cdot 132\cdot 224\,\text{συν}\,28^0\,40' = 15714$, ἄρα $\gamma = \sqrt{15714} \simeq 125\text{ m}$

Διὰ τὴν Α : $\dfrac{\alpha}{\text{ημ}\,A} = \dfrac{\gamma}{\text{ημ}\,\Gamma} \Rightarrow \text{ημ}A = \dfrac{\alpha\,\text{ημ}\,\Gamma}{\gamma} = \dfrac{132\,\text{ημ}\,28^0\,40'}{125} = \dfrac{132\cdot 0{,}480}{125} =$
$= 0{,}507$ καὶ ἐκ τῶν πινάκων τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν $A = 30^0\,30'$.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς $\text{ημ}B = \dfrac{\beta\,\text{ημ}\,\Gamma}{\gamma}$ ὅτι $B = 120^0\,40'$.
Δυνάμεθα, βεβαίως, νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν Β ἀπὸ τὸν τύπον $A + B + \Gamma = 180^0$.

Εἰς τὴν Ε΄ τάξιν θὰ μάθωμεν νὰ ὑπολογίζωμεν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τυχόντος τριγώνου, ὅταν δίδωνται ἀρκετὰ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα καὶ θὰ ἴδωμεν πότε καὶ πῶς γίνεται ἡ ἐργασία αὕτη, τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν **ἐπίλυσιν** τοῦ τριγώνου.

(*) Οἱ τύποι προκύπτουν ὁ εἷς ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ κυκλικῆς τροπῆς τῶν α, β, γ καὶ Α, Β, Γ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

502) Τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\alpha = 384$ mm, $\beta = 593$ mm, $\gamma = 276$ mm. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι του.

503) Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\beta = 300$ mm, $A = 36^0$, $B = 65^0$. Ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ α καὶ γ.

504) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει :

$$\beta^2 - \gamma^2 = \alpha\ (\beta\ \text{συν}\ \Gamma - \gamma\ \text{συν}\ B)$$

505) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει :

$$\alpha = \beta\ \text{συν}\ \Gamma + \gamma\ \text{συν}\ B$$

(Νὰ εὕρετε διὰ κυκλικῆς τροπῆς τῶν γραμμάτων τὰς ἄλλας ταυτότητας διὰ τὰ β καὶ γ).

506) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει :

$$\frac{\text{εφ}\ A}{\text{εφ}\ B} = \frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{\gamma^2 + \beta^2 - \alpha^2}$$

Ἡμίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	0,707	0,709	0,711	0,713	0,715	0,717
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	0,719	0,721	0,723	0,725	0,727	0,729
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	0,731	0,733	0,735	0,737	0,739	0,741
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	0,743	0,745	0,747	0,749	0,751	0,753
4	0,070	0,073	0,076	0,078	0,081	0,084	49	0,755	0,757	0,759	0,760	0,762	0,764
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	0,766	0,768	0,770	0,772	0,773	0,775
6	0,105	0,107	0,110	0,113	0,116	0,119	51	0,777	0,779	0,781	0,783	0,784	0,786
7	0,122	0,125	0,128	0,131	0,133	0,136	52	0,788	0,790	0,792	0,793	0,795	0,797
8	0,139	0,142	0,145	0,148	0,151	0,154	53	0,799	0,800	0,802	0,804	0,806	0,807
9	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	54	0,809	0,811	0,812	0,814	0,816	0,817
10	0,174	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	55	0,819	0,821	0,822	0,824	0,826	0,827
11	0,191	0,194	0,197	0,199	0,202	0,205	56	0,829	0,831	0,832	0,834	0,835	0,837
12	0,208	0,211	0,214	0,216	0,219	0,222	57	0,839	0,840	0,842	0,843	0,845	0,847
13	0,225	0,228	0,231	0,233	0,236	0,239	58	0,848	0,850	0,851	0,853	0,854	0,856
14	0,242	0,245	0,248	0,250	0,253	0,256	59	0,857	0,859	0,860	0,862	0,863	0,865
15	0,259	0,262	0,264	0,267	0,270	0,273	60	0,866	0,867	0,869	0,870	0,872	0,873
16	0,276	0,278	0,281	0,284	0,287	0,290	61	0,875	0,876	0,877	0,879	0,880	0,882
17	0,292	0,295	0,298	0,301	0,303	0,306	62	0,883	0,884	0,886	0,887	0,888	0,890
18	0,309	0,312	0,315	0,317	0,320	0,323	63	0,891	0,892	0,894	0,895	0,896	0,898
19	0,326	0,328	0,331	0,334	0,337	0,339	64	0,899	0,900	0,901	0,903	0,904	0,905
20	0,342	0,345	0,347	0,350	0,353	0,356	65	0,906	0,908	0,909	0,910	0,911	0,912
21	0,358	0,361	0,364	0,367	0,369	0,372	66	0,914	0,915	0,916	0,917	0,918	0,919
22	0,375	0,377	0,380	0,383	0,385	0,388	67	0,921	0,922	0,923	0,924	0,925	0,926
23	0,391	0,393	0,396	0,399	0,401	0,404	68	0,927	0,928	0,929	0,930	0,931	0,933
24	0,407	0,409	0,412	0,415	0,417	0,420	69	0,934	0 935	0,936	0,937	0,938	0,939
25	0,423	0,425	0,428	0,431	0,433	0,436	70	0,940	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945
26	0,438	0,441	0,444	0,446	0,449	0,451	71	0,946	0,946	0,947	0,948	0,949	0,950
27	0,454	0,457	0,459	0,462	0,464	0,467	72	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,955
28	0,469	0,472	0,475	0,477	0,480	0,482	73	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,960
29	0,485	0,487	0,490	0,492	0,495	0,497	74	0,961	0,962	0,963	0,964	0,964	0,965
30	0,500	0,503	0,505	0,508	0,510	0,513	75	0,966	0,967	0,967	0,968	0,969	0,970
31	0,515	0,518	0,520	0,523	0,525	0,527	76	0,970	0,971	0,972	0,972	0,973	0,974
32	0,530	0,532	0,535	0,537	0,540	0,542	77	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,978
33	0,545	0,547	0,550	0,552	0,554	0,557	78	0,978	0,979	0,979	0,980	0,981	0,981
34	0,559	0,562	0,564	0,566	0,569	0,571	79	0,982	0,982	0,988	0,983	0,984	0,984
35	0,574	0,576	0,578	0,581	0,583	0,585	80	0,985	0,985	0,986	0,986	0,987	0,987
36	0,588	0,590	0,592	0,595	0,597	0,599	81	0,988	0,988	0,989	0,989	0,989	0,990
37	0,602	0,604	0,606	0,609	0,611	0,613	82	0,990	0,991	0,991	0,991	0,992	0,992
38	0,616	0,618	0,620	0,623	0,625	0,627	83	0,993	0,993	0,993	0,994	0,994	0,994
39	0,629	0,632	0,634	0,636	0,638	0,641	84	0,995	0,995	0,995	0,995	0,996	0,996
40	0,643	0,645	0,647	0,649	0,652	0,654	85	0,996	0,996	0,997	0,997	0,997	0,997
41	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665	0,667	86	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
42	0,669	0,671	0,673	0,676	0,678	0,680	87	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999
43	0,682	0,684	0,686	0,688	0,690	0,693	88	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
44	0,695	0,697	0,699	0,701	0,703	0,705	89	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Συνημίτονα ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	45	0,707	0,705	0,703	0,701	0,699	0,697
1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	46	0,695	0,693	0,690	0,688	0,686	0,684
2	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	0,999	47	0,682	0,680	0,678	0,676	0,673	0,671
3	0,999	0,998	0,998	0,998	0.998	0,998	48	0,669	0,667	0,665	0,663	0,660	0,658
4	0,998	0,997	0,997	0,997	0,997	0,996	49	0,656	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645
5	0,996	0,996	0,996	0,995	0,995	0,995	50	0,643	0,641	0,638	0,636	0,634	0,632
6	0,995	0,994	0,994	0,994	0,993	0,993	51	0,629	0,627	0,625	0,623	0,620	0,618
7	0,993	0,992	0,992	0,991	0,991	0,991	52	0,616	0,613	0,611	0,609	0,606	0,604
8	0,990	0,990	0,989	0,989	0,989	0,988	53	0,602	0,599	0,597	0,595	0,592	0,590
9	0,988	0,987	0,987	0,986	0,986	0,985	54	0,588	0,585	0,583	0,581	0,578	0,576
10	0,985	0,984	0,984	0,983	0,983	0,982	55	0,574	0,571	0,569	0,566	0,564	0,562
11	0,982	0,981	0,981	0,980	0,979	0,979	56	0,559	0,557	0,554	0,552	0,550	0,547
12	0,978	0,978	0,977	0,976	0,976	0,975	57	0,545	0,542	0,540	0,537	0,535	0,532
13	0,974	0,974	0,973	0,972	0,972	0,971	58	0,530	0,527	0,525	0,523	0,520	0,518
14	0,970	0,970	0,969	0,968	0,967	0,967	59	0,515	0,513	0,510	0,508	0,505	0,503
15	0,966	0,965	0,964	0,964	0,963	0,962	60	0,500	0,497	0,495	0,492	0,490	0,487
16	0,961	0,960	0,960	0,959	0,958	0.951	61	0,485	0,482	0,480	0,477	0,475	0,472
17	0,956	0,955	0,955	0,954	0,953	0,952	62	0,469	0,467	0,464	0,462	0,459	0,457
18	0,951	0,950	0,949	0,948	0,947	0,946	63	0,454	0,451	0,449	0,446	0,444	0,441
19	0,946	0,945	0,944	0,943	0,942	0,941	64	0,438	0,436	0,433	0,431	0,428	0,425
20	0,940	0,939	0,938	0,937	0,936	0,935	65	0,423	0,420	0,417	0,415	0,412	0,409
21	0,934	0,933	0,931	0,930	0,929	0,928	66	0,407	0,404	0,401	0,399	0,396	0,393
22	0,927	0,926	0,925	0,924	0,923	0,922	67	0,391	0,388	0,385	0,383	0,380	0,377
23	0,921	0,919	0,918	0,917	0,916	0,915	68	0,375	0,372	0,369	0,367	0,364	0,361
24	0,914	0,912	0,911	0,910	0,909	0,908	69	0,358	0,356	0,353	0,350	0,347	0,345
25	0,906	0,905	0,904	0,903	0,901	0,900	70	0,342	0,339	0,337	0,334	0,331	0,329
26	0,899	0,898	0,896	0,895	0,894	0,892	71	0,326	0,323	0,320	0,317	0,315	0,312
27	0,891	0,890	0,888	0,887	0,886	0,884	72	0,309	0,306	0,303	0,301	0,298	0,295
28	0,883	0,882	0,880	0,879	0,877	0,876	73	0,292	0,290	0,287	0,284	0,281	0,278
29	0,875	0,873	0,872	0,870	0,869	0,867	74	0,276	0,273	0,270	0,267	0,264	0,262
30	0,866	0,865	0,863	0,862	0,860	0,859	75	0,259	0,256	0,253	0,250	0,248	0,245
31	0,857	0,856	0,854	0,853	0,851	0,850	76	0,242	0,239	0,236	0,233	0,231	0,228
32	0,848	0,847	0,845	0,843	0,842	0,840	77	0,225	0,222	0,219	0,216	0,214	0,211
33	0,839	0,837	0,835	0,834	0,832	0,831	78	0,208	0,205	0,202	0,199	0,197	0,194
34	0,829	0,827	0,826	0,824	0,822	0,821	79	0,191	0,188	0,185	0,182	0,179	0,177
35	0,819	0,817	0,816	0,814	0,812	0,811	80	0,174	0,171	0,168	0,165	0,162	0,159
36	0,809	0,807	0,806	0,804	0,802	0,800	81	0,156	0,154	0,151	0,148	0,145	0,142
37	0,799	0,797	0,795	0,793	0,792	0,790	82	0,139	0,136	0,133	0,131	0,128	0,125
38	0,788	0,786	0,784	0,783	0,781	0,779	83	0,122	0,119	0,116	0,113	0,110	0,107
39	0,777	0,775	0,773	0,772	0,770	0,768	84	0,105	0,102	0,099	0,096	0,093	0,090
40	0,766	0,764	0,762	0,760	0,759	0,757	85	0,087	0,084	0,081	0,078	0,076	0,073
41	0,755	0,753	0,751	0,749	0,747	0,745	86	0,070	0,067	0,064	0,061	0,058	0,055
42	0,743	0,741	0,739	0,737	0,735	0,733	87	0,052	0,049	0,047	0,044	0,041	0,038
43	0,731	0,729	0,727	0,725	0,723	0,721	88	0,035	0,032	0,029	0,026	0,023	0,020
44	0,719	0,717	0,715	0,713	0,711	0,709	89	0,017	0,015	0,012	0,009	0,006	0,003

Ἐφαπτόμεναι ὀξειῶν γωνιῶν.

Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40′	50′	Μοῖραι	0′	10′	20′	30′	40	50′
0	0,000	0,003	0,006	0,009	0,012	0,015	45	1,000	1,006	1,012	1,018	1,024	1,030
1	0,017	0,020	0,023	0,026	0,029	0,032	46	1,036	1,042	1,048	1,054	1,060	1,066
2	0,035	0,038	0,041	0,044	0,047	0,049	47	1,072	1,079	1,085	1,091	1,098	1,104
3	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064	0,067	48	1,111	1,117	1,124	1,130	1,137	1,144
4	0,070	0,073	0,076	0,079	0,082	0,085	49	1,150	1,157	1,164	1,171	1,178	1,185
5	0,087	0,090	0,093	0,096	0,099	0,102	50	1,192	1,199	1,206	1,213	1,220	1,228
6	0,105	0,108	0,111	0,114	0,117	0,120	51	1,235	1,242	1,250	1,257	1,265	1,272
7	0,123	0,126	0,129	0,132	0,135	0,138	52	1,280	1,288	1,295	1,303	1,311	1,319
8	0,141	0,144	0,146	0,149	0,152	0,155	53	1,327	1,335	1,343	1,351	1,360	1,368
9	0,158	0,161	0,164	0,167	0,170	0,173	54	1,376	1,385	1,393	1,402	1,411	1,419
10	0,176	0,179	0,182	0,185	0,188	0,191	55	1,428	1,437	1,446	1,455	1,464	1,473
11	0,194	0,197	0,200	0,203	0,206	0,210	56	1,483	1,492	1,501	1,511	1,520	1,530
12	0,213	0,216	0,219	0,222	0,225	0,228	57	1,540	1,550	1,560	1,570	1,580	1,590
13	0,231	0,234	0,237	0,240	0,243	0,246	58	1,600	1,611	1,621	1,632	1,643	1,653
14	0,249	0,252	0,256	0,259	0,262	0,265	59	1,664	1,675	1,686	1,698	1,709	1,720
15	0,268	0,271	0,274	0,277	0,280	0,284	60	1,732	1,744	1,756	1,767	1,780	1,792
16	0,287	0,290	0,293	0,296	0,299	0,303	61	1,804	1,816	1,829	1,842	1,855	1,868
17	0,306	0,309	0,312	0,315	0,318	0,322	62	1,881	1,894	1,907	1,921	1,935	1,949
18	0,325	0,328	0,331	0,335	0,338	0,341	63	1,963	1,977	1,991	2,006	2,020	2,035
19	0.344	0,348	0,351	0,354	0,357	0,361	64	2,050	2,066	2,081	2,097	2,112	2,128
20	0,364	0,367	0,371	0,374	0,377	0,381	65	2,145	2,161	2,177	2,194	2,211	2,229
21	0,384	0,387	0,391	0,394	0,397	0,401	66	2,246	2,264	2,282	2,300	2,318	2,337
22	0,404	0,407	0,411	0,414	0,418	0,421	67	2,356	2,375	2,394	2,414	2,434	2,455
23	0,424	0,428	0,431	0,435	0,438	0,442	68	2,475	2,496	2,517	2,539	2,560	2,583
24	0,445	0,449	0,452	0,456	0,459	0,463	69	2,605	2,628	2,651	2,675	2,699	2,723
25	0,466	0,470	0,473	0,477	0,481	0,484	70	2,747	2,773	2,798	2,824	2,850	2,877
26	0,488	0,491	0,495	0.499	0,502	0,506	71	2,904	2,932	2,960	2,989	3,018	3,047
27	0,510	0,513	0,517	0,521	0,524	0,528	72	3,078	3,108	3,140	3,172	3,204	3,237
28	0,532	0,535	0,539	0,543	0,547	0,551	73	3.271	3,305	3,340	3,376	3,412	3,450
29	0,554	0,558	0,562	0,566	0,570	0,573	74	3,487	3,526	3,566	3,606	3,647	3,689
30	0,577	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	75	3,732	3,776	3,821	3,867	3,914	3,962
31	0,601	0,605	0,609	0,613	0,617	0,621	76	4,011	4,061	4,113	4,165	4,219	4,275
32	0,625	0,629	0,633	0,637	0,641	0,645	77	4,331	4,390	4,449	4,511	4,574	4,638
33	0,649	0,654	0,658	0,662	0,666	0,670	78	4,705	4,773	4,843	4,915	4,989	5,066
34	0,675	0,679	0,683	0,687	0,692	0,696	79	5,145	5,226	5,309	5,396	5,485	5,576
35	0,700	0,705	0,709	0,713	0,718	0,722	80	5,671	5,769	5,871	5,976	6,084	6,197
36	0,727	0,731	0,735	0,740	0,744	0,749	81	6,314	6,435	6,561	6,691	6,827	6,968
37	0,754	0,758	0,763	0,767	0,772	0,777	82	7,115	7,269	7,429	7,596	7,770	7,953
38	0,781	0,786	0,791	0,795	0,800	0,805	83	8,144	8,345	8,556	8,777	9,010	9.255
39	0,810	0,815	0,819	0,824	0,829	0,834	84	9,514	9,788	10,08	10,39	10,71	11,06
40	0,839	0,844	0,849	0,854	0,859	0,864	85	11,43	11,83	12,25	12,71	13,20	13,73
41	0,869	0,874	0,880	0,885	0,890	0,895	86	14,30	14,92	15,60	16,35	17,17	18,07
42	0,900	0,906	0,911	0,916	0,922	0,927	87	19,08	20,21	21,47	22,90	24,54	26,43
43	0,933	0,938	0,943	0,949	0,955	0,960	88	28,64	31,24	34,37	38,19	42,96	49,10
44	0,966	0,971	0,977	0,983	0,988	0,994	89	57,29	68,75	85,94	114,6	171,9	343,8

Τριγωνομετρικαὶ συναρτήσεις

Γωνία εἰς : ἀκτίνια	μοίρας	ημ	συν	εφ	σφ
0,00	0,0	0,00	1,00	0,00	*
0,09	5,0	0,087	0,996	0,087	11,4
0,10	5,7	0,10	0,995	0,10	10,0
0,17	10,0	0,17	0,98	0,18	5,7
0,20	11,5	0,20	0,98	0,20	4,9
0,26	15,0	0,26	0,97	0,27	3,7
0,30	17,2	0,30	0,96	0,31	3,2
0,35	20,0	0,34	0,94	0,36	2,7
0,40	22,9	0,39	0,92	0,42	2,4
0,44	25,0	0,42	0,91	0,47	2,1
0,50	28,6	0,48	0,88	0,55	1,8
0,52 ($\pi/6$)	30,0	0,50	0,87	0,58	1,7
0,60	34,4	0,56	0,83	0,68	1,5
0,61	35,0	0,57	0,82	0,70	1,4
0,70	40,1	0,64	0,76	0,84	1,2
0,78 ($\pi/4$)	45,0	0,71	0,71	1,00	1,00
0,80	45,8	0,72	0,70	1,0	0,97
0,87	50,0	0,77	0,64	1,2	0,84
0,90	51,6	0,78	0,62	1,3	0,79
0,96	55,0	0,82	0,57	1,4	0,70
1,00	57,3	0,84	0,54	1,6	0,64
1,08 ($\pi/3$)	60,0	0,87	0,50	1,7	0,58
1,10	63,0	0,89	0,45	2,0	0,51
1,13	65,0	0,91	0,42	2,1	0,47
1,20	68,7	0,93	0,36	2,6	0,39
1,22	70,0	0,94	0,34	2,8	0,37
1,30	74,5	0,96	0,27	3,6	0,28
1,40	80,2	0,985	0,17	5,8	0,17
1,48	85,0	0,996	0,09	11,4	0,09
1,50	85,9	0,998	0,07	14,1	0,07
1,57 ($\pi/2$)	90,0	1,00	0,00	*	0,00

* δὲν ὁρίζεται

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημον εἰς ἀπόδειξιν τῆς γνησιότητος αὐτῶν.

Ἀντίτυπον στερούμενον τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπον. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὰς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 1946 (Ἐφ. Κυβ. 1946 Α′ 108).

Ἔκδοσις Β′ 1970 (VI) - Ἀντίτυπα 45.000 - Σύμβασις 2007/4-4-70

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ : Ι. ΔΙΚΑΙΟΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : ΟΚΤΩΡΑΤΟΣ - ΚΟΥΚΙΑΣ