ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1968

Λ. Αδαμόπουλος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

17600

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ε' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ)

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΗΛΙΑ Β. ΝΤΖΙΩΡΑ

ΕΛΛΑΣ

21 ΑΠΡΙΛΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1968

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ *)

§ 1. Πρότασις (ἁπλῆ, κατηγορικὴ) ἢ δήλωσις. – Ἡ ἔννοια τῆς ἁπλῆς προτάσεως ἢ δηλώσεως, ἀκριβέστερον τῆς *«λογικῆς προτάσεως»*, θεωρεῖται ὡς μία πρωταρχικὴ ἔννοια, ὡς ἔννοια μὴ ἐπιδεχομένη ὁρισμόν. Εἰς τὸ συντακτικόν, λ.χ., ἡ (ἁπλῆ) πρότασις ὁρίζεται ὡς *«λόγος συντομώτατος (προφορικὸς ἢ γραπτὸς) μὲ ἐντελῶς ἁπλοῦν περιεχόμενον»*.

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ γενικῶς εἰς τὴν λογικὴν (κλασσικὴν λογικὴν) διὰ τοῦ ὅρου «**πρότασις** ἢ **δήλωσις**» ἐννοοῦμεν μίαν ἔκφρασιν μὲ νόημα, ἀκριβέστερον *ἐννοοῦμεν τὸ περιεχόμενον, τὸ ὁποῖον ἐκφράζομεν διὰ μιᾶς προτάσεως μὲ τὴν ἔννοιαν τοῦ συντακτικοῦ καὶ διὰ τὸ ὁποῖον δυνάμεθα κατὰ ἀκριβῶς ἕνα τρόπον νὰ ἀποφανθῶμεν, ἂν εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδές, ἀποκλείοντες ἄλλην περίπτωσιν.* Οὕτω, π.χ., ἡ ἔκφρασις :

« ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἄρτιος »,

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον ὅ,τι αὕτη ἐκφράζει εἶναι *ἀληθές*.

Ὁμοίως ἡ ἔκφρασις :

« ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι πρῶτος »,

εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον ὅ,τι αὕτη ἐκφράζει εἶναι *ψευδές*.

Τὸ περιεχόμενον λοιπὸν μιᾶς προτάσεως (λογικῆς προτάσεως) ἐπιδέχεται ἀ ν α γ κ α σ τ ι κ ῶ ς ἕνα καὶ μόνον ἕνα τῶν χαρακτηρισμῶν «**ἀληθές**», «**ψευδές**»· οὐδέποτε ὅμως εἶναι καὶ ἀληθὲς καὶ ψευδὲς *(ἀρχὴ τῆς ἀντιφάσεως)*.

Τὰς προτάσεις, ὡς γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως, τὰς παριστάνομεν συμβολικῶς μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου, κατὰ προτίμησιν μὲ p, q, r, . . .

Ἐὰν μία πρότασις p εἶναι ἀληθής, τότε, καὶ μόνον τότε, λέγομεν ὅτι αὕτη ἔχει «**τιμὴν ἀληθείας α**» καὶ γράφομεν $\tau(p) = \alpha$, ἐὰν δὲ αὕτη εἶναι **ψευδής**, τότε, καὶ μόνον τότε, λέγομεν ὅτι ἔχει «**τιμὴν ἀληθείας ψ**» καὶ γράφομεν $\tau(p) = \psi$. Ἐπομένως, ἐὰν πρότασις εὑρεθῇ ἔχουσα συγχρόνως καὶ τὰς δύο τιμὰς ἀληθείας α καὶ ψ, τότε τοῦτο ἀποτελεῖ ἀντίφασιν.

---

* Θεμελιωτὴς τῆς Λογικῆς τῶν προτάσεων ὑπῆρξεν ὁ στωϊκὸς φιλόσοφος **Χρύσιππος** (281–208 π.Χ.).

Παραδείγματα: 1ον: Ἡ ἔκφρασις p: *«Ὁ 2 + 3i ≡ (2,3) εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμός»*· εἶναι μία πρότασις (λογικὴ πρότασις), καθόσον τὸ περιεχόμενον αὐτῆς εἶναι ἀληθές, ἤτοι $\tau(p) = \alpha$.

2ον : Ἡ ἔκφρασις q : *«Ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ῥητὸς ἀριθμός»*· εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον τὸ περιεχόμενόν της εἶναι ψευδές, ἤτοι $\tau(q) = \psi$.

3ον : Ἡ ἔκφρασις *«ὁ ἀριθμὸς x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10»* δὲν εἶναι πρότασις, διότι δὲν ἐπιδέχεται ἕνα τῶν χαρακτηρισμῶν *«ἀληθής»*, *«ψευδής»*.

Εἰς τὴν διατύπωσιν τῶν προτάσεων καὶ γενικώτερον τῶν ἐκφράσεων, ἰδίως δὲ εἰς τὰ Μαθηματικά, συναντῶμεν ὅρους καὶ σύμβολα, ὅπως π.χ. εἰς τὰ δύο πρῶτα παραδείγματα: **«μιγαδικὸς ἀριθμὸς»**, **«ῥητὸς ἀριθμός»**, **«2 + 3i»**, **«$\sqrt{2}$»** καὶ πλῆθος ἄλλα παρόμοια, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν *καθωρισμένην καὶ μόνιμον σημασίαν εἰς ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς ἐπεξεργασίας ἑνὸς θέματος*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καλοῦμεν τοὺς ὅρους καὶ τὰ σύμβολα **σταθεράς**. Ἀντιθέτως εἰς τὸ παράδειγμα 3 τὸ σύμβολον x δὲν ἔχει μοναδικὴν σημασίαν, δύναται λ.χ. τὸ x νὰ εἶναι εἷς οἱοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ἀκόμη εἷς οἱοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμός. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει εἰς τὴν ἔκφρασιν $2x = 6$. Ὁμοίως εἰς τὴν ἔκφρασιν $x^2 + \sqrt{2} > y^3$ τὰ σύμβολα x καὶ y (ἄρα καὶ τὰ x^2 καὶ y^3) ἔχουν ἀκαθόριστον καὶ μὴ μόνιμον σημασίαν, κατέχουν δὲ τὴν θέσιν δύο οἱωνδήποτε, ἀπὸ μίαν εἰδικὴν κατηγορίαν, ἀντικειμένων, λ.χ. τὸ x εἶναι εἷς οἱοσδήποτε φυσικὸς καὶ τὸ y εἷς οἱοσδήποτε πραγματικὸς ἀριθμός. Τὰ τοιαῦτα σύμβολα ὀνομάζομεν **μεταβλητάς.** Φανερὸν εἶναι πλέον ὅτι ἐκφράσεις περιέχουσαι μεταβλητὰς δὲν εἶναι προτάσεις.

§ 2. Προτασιακὸς τύπος ἢ ἀνοικτὴ πρότασις. — Ἐλέχθη ἀνωτέρω ὅτι μία ἔκφρασις περιέχουσα μεταβλητὰς δὲν ἔχει νόημα προτάσεως, καθόσον δὲν γνωρίζομεν ἂν τὸ περιεχόμενον αὐτῆς εἶναι ἀληθὲς ἢ ψευδές. Μία τοιαύτη ἔκφρασις γίνεται πρότασις, ὅταν αἱ ἐν λόγῳ μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν μὲ σταθερὰς ὡρισμένης κατηγορίας. Οὕτως ἡ ἔκφρασις :

«ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10»·

θὰ γίνῃ πρότασις, ἂν ἡ μεταβλητὴ x ἀντικατασταθῇ μὲ ἕνα οἱονδήποτε πραγματικὸν ἀριθμόν. Ἐὰν λ.χ. ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 12, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις: «ὁ 12 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10» μὲ τιμὴν ἀληθείας α. Ἐὰν πάλιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ 7, θὰ προκύψῃ ἡ πρότασις : «ὁ 7 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10» μὲ τιμὴν ἀληθείας ψ. Ὁμοίως ἡ ἔκφρασις :

«ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς x διαιρεῖ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν y»·

γίνεται πρότασις, ἐὰν ἀντικατασταθοῦν π.χ. τὸ $x = 5$ καὶ $y = 35\sqrt{2}$ μὲ τιμὴν ἀληθείας α, καθὼς καὶ διὰ $x = 7$, $y = 33$ μὲ τιμὴν ἀληθείας y. Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὑπάρχουν ζεύγη τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καὶ y ἀπὸ δύο καθοριζόμενα σύνολα, ἐν προκειμένῳ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν καὶ ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἔκφρασις γίνεται ἀληθὴς πρότασις καὶ ἄλλα ζεύγη τιμῶν τῶν x καὶ y, διὰ τὰ ὁποῖα αὕτη γίνεται ψευδὴς πρότασις.

Αἱ ἐκφράσεις : «ὁ x εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 10», «ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς x διαιρεῖ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν y» κ.ἄ, καλοῦνται **προτασιακοὶ τύποι** ἢ **ἀνοικταὶ προτάσεις,** ἄλλως **προτασιακαὶ συναρτήσεις** μιᾶς, ἀντιστοίχως δύο μεταβλητῶν.

Γενικῶς: **Προτασιακὸς τύπος (ἢ ἀνοικτὴ πρότασις) μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται μία ἔκφρασις, ἡ ὁποία περιέχει μίαν ἢ περισσοτέρας μεταβλητάς, καὶ ἡ ὁποία καθίσταται πρότασις τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ ἐν λόγῳ μεταβληταὶ ἀντικατασταθοῦν ἀπὸ στοιχεῖα ἑνὸς ἢ περισσοτέρων συνόλων.**

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις καὶ αἱ ἀνισώσεις εἶναι προτασιακοὶ τύποι.

Χάριν συντομίας συμβολίζομεν τοὺς προτασιακοὺς τύπους μὲ μίαν μεταβλητὴν π.χ. τὴν x διὰ τῶν: $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, ..., μὲ δύο μεταβλητὰς π.χ. τὰς x, y διὰ τῶν: $p(x, y)$, $q(x, y)$..., καὶ γενικῶς διὰ ν μεταβλητάς: $p(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ καὶ ἐννοοῦμεν ὅτι: *ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει ἓν σύνολον ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως τὸ ζεῦγος τῶν μεταβλητῶν (x, y) ἓν σύνολον ζευγῶν ἀντικειμένων, ἀντιστοίχως ἓν σύνολον ν—άδων ἀντικειμένων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀναφέρεται ἡ ἔκφρασις p,...* Τὸ σύνολον αὐτὸ καλοῦμεν **σύνολον ἀναφορᾶς** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν, διὰ τὰς ὁποίας ὁ προτασιακὸς τύπος καθίσταται ἀληθὴς πρότασις, καλεῖται **σύνολον τιμῶν ἀληθείας** τοῦ προτασιακοῦ τύπου.

Εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν προτασιακοῦ τύπου περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι, ἐν γένει, ἓν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν ἢ γενικώτερον ν-άδων ἀντικειμένων. Οὕτως εἰς τὸν προτασιακὸν τύπον $p(x, y)$: «$3x + y = 8$», ὡς σύνολον ἀναφορᾶς δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, δηλ. τὸ σύνολον ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τότε τὸ σύνολον ἀληθείας του εἶναι τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y), τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα $3x + y = 8$, λ.χ. τὰ ζεύγη $(1,5)$, $(2,2)$, $\left(\frac{5}{3}, 3\right)$ κ.ἄ.

Σημείωσις: Προφανῶς οἱ συμβολισμοὶ $p(x)$ καὶ $p(y)$ νοοῦνται ὡς ταυτόσημοι, ἤτοι τὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον συμβολίζει τὴν μεταβλητὴν δὲν μεταβάλλει τὸ εἶδος τοῦ προτασιακοῦ τύπου. Κατὰ συνέπειαν, ἀλλαγὴ τοῦ ἀγνώστου εἰς μίαν ἐξίσωσιν ἢ ἀνίσωσιν, δίδει ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν ἢ ἀνίσωσιν.

§ 3. Ποσοδεῖκται.—Ἔστω $p(x)$ εἷς προτασιακὸς τύπος καὶ Ω τὸ σύνολον ἀναφορᾶς του. Τότε τὸ σύνολον Ω χωρίζεται εἰς δύο σύνολα, ἤτοι εἰς τὸ σύνολον Ω_α, διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὁ προτασιακὸς τύπος $p(x)$ γίνεται λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας α καὶ τὸ σύνολον Ω_ψ, διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ ὁποίου ὁ $p(x)$ γίνεται λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας ψ.

Πολλάκις διὰ νὰ διατυπώσωμεν προτάσεις, αἱ ὁποῖαι χρησιμοποιοῦνται εἰς τὰ Μαθηματικά, προτάσσομεν τοὺς καλουμένους **ποσοδείκτας.**

Οἱ ποσοδεῖκται, ὅπως γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, εἶναι δύο, ἤτοι:

1). Ὁ καλούμενος **ὑπαρξιακὸς ποσοδείκτης,** συμβολιζόμενος μὲ «$\exists$», ὅστις ἀναγιγνώσκεται *«ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕν...»* εἴτε καὶ ἄλλως *«διὰ μερικά...».*

2). Ὁ καλούμενος **καθολικὸς ποσοδείκτης**, συμβολιζόμενος μὲ «$\forall$», ὅστις ἀναγιγνώσκεται *«διὰ κάθε...»* εἴτε καὶ ἄλλως *«δι' ὅλα τά...»*.

Οἱ ποσοδεῖκται προτάσσονται προτασιακῶν τύπων οὕτω :

1). «$\exists\, x p(x)$» ἀναγιγνώσκεται : «ὑπάρχει ἓν τουλάχιστον x, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $p(x)$», εἴτε καὶ οὕτω «διὰ μερικὰ x, ἰσχύει $p(x)$».

2). «$\forall\, x p(x)$» ἀναγιγνώσκεται : «διὰ κάθε x ἰσχύει $p(x)$» εἴτε καὶ οὕτω «δι' ὅλα τὰ x ἰσχύει $p(x)$».

Παρατηροῦμεν τώρα τὰ ἑξῆς : Ἂν $p(x)$ εἶναι εἷς προτασιακὸς τύπος, λ.χ. «ὁ x εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς» καὶ Ω εἶναι τὸ σύνολον ἀναφορᾶς, εἰς τὸ παράδειγμά μας, λ.χ. τὸ σύνολον $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε :

1). Ἡ ἔκφρασις «$\exists\, x p(x)$» εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον αὕτη λαμβάνει τὴν τιμὴν α τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ σύνολον Ω_α δὲν εἶναι κενὸν (δηλαδὴ τὸ σύνολον Ω_ψ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Ω) καὶ τὴν τιμὴν ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ σύνολον Ω_α εἶναι κενὸν (ἤτοι τὸ $\Omega_\psi = \Omega$).

2). Ἡ ἔκφρασις «$\forall\, x p(x)$» εἶναι μία λογικὴ πρότασις, καθόσον αὕτη λαμβάνει τὴν τιμὴν α τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\Omega_\alpha = \Omega$ (δηλαδὴ τὸ Ω_ψ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κενὸν) καὶ τιμὴν ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν Ω_α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Ω (δηλαδὴ τὸ Ω_ψ εἶναι διάφορον τοῦ κενοῦ).

Προτάσεις τῶν μορφῶν 1) καὶ 2) καλοῦνται *ὑπαρξιακαί*, ἀντιστοίχως *ποσοτικαὶ* προτάσεις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι : **Μία ὑπαρξιακὴ ἀντιστοίχως μία ποσοτικὴ πρότασις εἶναι πάντοτε μία λογικὴ πρότασις.**

Παραδείγματα: 1ον: Ἐὰν $p(x)$ εἶναι ὁ προτασιακὸς τύπος : «$x+5 \geqslant 13$» μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις : «$\forall x p(x)$», ἐκτενῶς ἡ : «$\forall x,\ x \in \mathbf{N}$ μὲ $x+5 \geqslant 13$», εἶναι ψευδής, διότι τὸ $\Omega_\alpha = \{8, 9, 10, \ldots\}$ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{N}$, ἐνῷ ἡ πρότασις : «$\exists\, x p(x)$», ἐκτενῶς ἡ : «$\exists\, x,\ x \in \mathbf{N}$ μὲ $x+5 \geqslant 13$», εἶναι ἀληθής, διότι τὸ σύνολον τιμῶν ἀληθείας $\Omega_\alpha = \{8, 9, \ldots\}$ εἶναι διάφορον τοῦ κενοῦ.

2ον : Ἐὰν $p(x)$ εἶναι ὁ προτασιακὸς τύπος : «$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$» μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις : «$\forall x p(x)$» λαμβάνει τὴν τιμὴν α, διότι $\Omega_\alpha \equiv \mathbf{R}$.

Ἐπίσης ἡ : «$\exists\, x p(x)$» λαμβάνει τὴν τιμὴν α, διότι τὸ Ω_ψ εἶναι ἴσον μὲ τὸ κενὸν σύνολον.

3ον : Ἐὰν $p(x)$: «$x^2 + x + 1 < 0$» μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις :

«$\forall x p(x)$» ἐκτενῶς ἡ : «$\forall x,\ x \in \mathbf{R}$ μὲ $x^2 + x + 1 < 0$» εἶναι ψευδής, διότι Ω_α εἶναι τὸ κενὸν σύνολον καὶ συνεπῶς Ω_α γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$.

Ἐπίσης ἡ πρότασις :

«$\exists\, x p(x)$» ἐκτενῶς ἡ : «$\exists\, x,\ x \in \mathbf{R}$: $x^2 + x + 1 < 0$» λαμβάνει τὴν τιμὴν ψ, διότι $\Omega_\alpha = \varnothing$.

Οἱ ποσοδεῖκται προτάσσονται καὶ προτασιακῶν τύπων δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν οὕτω :

$\forall x \forall y\, p(x,y)$, δηλαδὴ διὰ κάθε x καὶ κάθε y ἰσχύει $p(x, y)$.

$\exists x \exists y\, p(x,y)$, δηλαδὴ ὑπάρχει (τοὐλάχιστον) ἓν x καὶ ἓν y, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $p(x, y)$.

$\forall x \exists y\, p(x,y)$, δηλαδὴ διὰ κάθε x ὑπάρχει ἓν y, ὥστε νὰ ἰσχύῃ $p(x, y)$.

$\exists x \forall y\, p(x,y)$, δηλαδὴ ὑπάρχει x, ὥστε διὰ κάθε y νὰ ἰσχύῃ $p(x, y)$.

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις εἶναι λογικαὶ προτάσεις.

Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰς δύο πρώτας περιπτώσεις ἐπιτρέπεται μετάθεσις $\forall x \forall y$ καὶ $\exists x \exists y$, ἤτοι ἰσχύει :

$$\forall x \forall y\, p(x,y) \equiv \forall y \forall x\, p(x,y)$$

$$\exists x \exists y\, p(x,y) \equiv \exists y \exists x\, p(x,y).$$

Τοῦτο δὲν ἐπιτρέπεται εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις, ὡς δεικνύει τὸ κάτωθι :

Παράδειγμα : Ἔστω $p(x, y)$ ὁ προτασιακὸς τύπος : «Ὁ x εἶναι μικρότερος τοῦ y»· μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολο $\mathbb{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε ἡ πρότασις :

$\forall x \exists y\, p(x,y)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν α, ἐνῷ ἡ πρότασις

$\exists y \forall x\, p(x,y)$ λαμβάνει τὴν τιμὴν ψ.

Ἡ πρώτη ἐκφράζει : «διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν ὑπάρχει εἷς μεγαλύτερος», ἐνῷ ἡ δευτέρα ἐκφράζει : «ὑπάρχει εἷς ἀριθμός, ὥστε κάθε ἄλλος νὰ εἶναι μικρότερος».

§ 4. Σύνθετοι προτάσεις. — Ἂς θεωρήσωμεν τὴν πρότασιν :

« ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός ».

Αὕτη εἶναι μία ἁπλῆ λογικὴ πρότασις, καθόσον εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «ἀληθής». Αὕτη ἐκφράζει μίαν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν ἔχει ἓν ἀντικείμενον (πρᾶγμα), δηλ. ὁ ἀριθμὸς 4, ἤτοι τὴν ἰδιότητα :

(I) «. . . εἶναι ἄρτιος ἀριθμός».

Προφανῶς ἡ ἰδιότης αὕτη ἀναφέρεται καὶ εἰς ἄλλα ἀντικείμενα (ἀριθμούς). Οὕτως, ἐὰν εἰς τὴν θέσιν τοῦ 4 γράψωμεν τὸ 7, τότε ἡ πρότασις :

« ὁ 7 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός »,

εἶναι ἐπίσης λογικὴ πρότασις, καθόσον εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ «ψευδής». Τὴν ἰδιότητα (I) καλοῦμεν ἓν **«κατηγόρημα»**.

Αἱ προτάσεις : «ὁ 4 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός», «ὁ 7 εἶναι ἄρτιος ἀριθμός», δὲν δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς δύο ἢ περισσοτέρας ἄλλας προτάσεις, δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ αὐτὸ καὶ μὲ τὴν πρότασιν :

(1) «Οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 12 εἶναι ἄρτιοι».

Αὕτη εἶναι μία λογικὴ πρότασις μὲ τιμὴν ἀληθείας α, ἀλλὰ χωρίζεται εἰς δύο ἄλλας προτάσεις, ἤτοι :

(2) «ὁ ἀριθμὸς 10 εἶναι ἄρτιος» καὶ «ὁ ἀριθμὸς 12 εἶναι ἄρτιος».

᾽Εδῶ ὁ σύνδεσμος «**καὶ**» παίζει ἕνα ρόλον σχηματισμοῦ μιᾶς νέας προτάσεως, τῆς (1) ἐκ τῶν δύο ἁπλῶν προτάσεων (2). Τὴν ὡς ἄνω πρότασιν (1) καλοῦμεν **σύνθετον πρότασιν.**

Γενικῶς : **Μία πρότασις καλεῖται σύνθετος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν συνίσταται ἐξ ἁπλῶν προτάσεων συνδεδεμένων μεταξύ των μὲ διάφορα συνδετικά, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν λογικοὺς συνδέσμους.**

Γενικῶς εἰς τὴν λογικὴν τῶν προτάσεων θεωροῦνται ὡς λογικοὶ σύνδεσμοι αἱ ἐκφράσεις : «**καί**», «**εἴτε**», «**ἐάν..., τότε...**», «**τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν**», ἐπίσης ἡ ἔκφρασις «**ὄχι**», ὅταν τίθεται πρὸ μιᾶς προτάσεως.

᾽Εκ τῶν ἀνωτέρω λογικῶν συνδέσμων ὁ μὲν «ὄχι» εἶναι **μονομελὴς** σύνδεσμος, διότι προτάσσεται μιᾶς προτάσεως, οἱ ὑπόλοιποι ὅμως εἶναι **διμελεῖς**, διότι συνδέουν δύο προτάσεις.

Παραδείγματα συνθέτων προτάσεων.

α). «῾Ο ἀριθμὸς 3 **εἴτε** ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι περιττός».

β). «**᾽Εὰν** ὁ 4 εἶναι ἄρτιος, **τότε** ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος».

γ). «῾Ο φυσικὸς ἀριθμὸς 16 εἶναι ἄρτιος **τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν** διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 2».

δ). «**῎Οχι** ὁ 3 εἶναι ἄρτιος» = «ὁ 3 **δὲν** εἶναι ἄρτιος».

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω σύνθετοι προτάσεις εἶναι λογικαὶ προτάσεις μὲ τιμὴν ἀληθείας α. Κατὰ τὸν χαρακτηρισμὸν τῶν ἀνωτέρω συνθέτων προτάσεων εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας των ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἁπλῶν προτάσεων, ἐξ ὧν αὗται συνίστανται.

Εἰς τὴν λογικὴν τῶν προτάσεων δεχόμεθα γενικῶς ὅτι ἐκ δύο λογικῶν προτάσεων συνίσταται διὰ συνθέσεως αὐτῶν μὲ ἕνα ἐκ τῶν λογικῶν συνδέσμων «καί», «εἴτε», «ἐάν..., τότε...», «τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν» μία νέα λογικὴ πρότασις. ᾽Επίσης ἐκ μιᾶς προτάσεως (λογικῆς) διὰ προτάξεως τῆς ἀρνήσεως «ὄχι», προκύπτει μία λογικὴ πρότασις.

Αἱ προτάσεις θεωρούμεναι εἴτε μεμονωμένως, εἴτε ἐντὸς λογικοῦ συνδυασμοῦ μετ᾽ ἄλλων προτάσεων, ὅμως ὡς ἓν σύνολον, ἀποτελοῦν ἀντικείμενον μελέτης τοῦ μέρους ἐκείνου τῆς Μαθηματικῆς Λογικῆς, τὸ ὁποῖον καλεῖται **Προτασιακὸς Λογισμός.**

§ 5. ῎Αλγεβρα (λογισμὸς) τῶν προτάσεων. – Δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει ἓν σύνολον ἁπλῶν λογικῶν προτάσεων, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ Π· τὰ στοιχεῖα, ἐξ ὧν τὸ Π συνίσταται, δηλ. τὰς προτάσεις, συμβολίζομεν, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὴν § 1, μὲ τὰ γράμματα p, q, r, s,... Δεχόμεθα ἐπὶ πλέον ὅτι εἰς ἑκάστην πρότασιν p ἐκ τοῦ Π ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἷς ἐκ τῶν δύο χαρακτηρισμῶν : «ἀληθής» (α), «ψευδής» (ψ), ἤτοι δεχόμεθα ὅτι ὑφίσταται μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Π εἰς τὸ διμελὲς σύνολον $\{α, ψ\}$: Γράφομεν δέ :

$$τ: \ Π \rightarrow \{α, ψ\} \text{ ἢ καὶ ἄλλως } Π \ni p \longrightarrow τ(p) \in \{α, ψ\}.$$

Διὰ τῆς μονοσημάντου ταύτης ἀπεικονίσεως τ ἑκάστη πρότασις p λαμβάνει ἀκριβῶς μίαν τιμὴν τ(p) ἐν $\{α, ψ\}$, τὴν καλουμένην **τιμὴν ἀληθείας** τῆς προτάσεως p.

Θεωροῦμεν τώρα τοὺς κάτωθι λογικοὺς συνδέσμους, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων ἐφοδιάζομεν τὸ σύνολον Π τῶν ἁπλῶν προτάσεων μὲ *«λογικὰς πράξεις»* :

1). Ὁ σύνδεσμος **«καί»**, ὅστις συμβολίζεται μὲ «$\wedge$» καὶ διαβάζεται *«σύζευξις»*, ἢ «καί», χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς **συζεύξεως.**

2). Ὁ σύνδεσμος **«εἴτε»** ἢ **«ἤ»**, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μὲ «$\vee$» καὶ διαβάζεται *«διάζευξις»*, χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως **τῆς (ἐγκλειστικῆς) διαζεύξεως.**

3). Ἡ ἔκφρασις **«ἐὰν..., τότε...»**, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ «$\Longrightarrow$» καὶ διαβάζεται *«ἔπεται»*, *«συνεπάγεται»*, χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς **συνεπαγωγῆς.**

4). Ἡ ἔκφρασις **«τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν»**, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ «$\Longleftrightarrow$» καὶ διαβάζεται *«ἔπεται καὶ ἀντιστρόφως»* ἢ *«συνεπάγεται καὶ ἀντιστρόφως»*, χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς **(λογικῆς) ἰσοδυναμίας.**

5). Ὁ λογικὸς σύνδεσμος **«ὄχι»**, ὅστις συμβολίζεται μὲ «$\sim$» καὶ διαβάζεται *«ὄχι»* ἢ *«δέν»*, χρησιμοποιεῖται διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς λογικῆς πράξεως τῆς **ἀρνήσεως.**

Δεχόμεθα τώρα τὰ ἑξῆς : α). Ἐὰν εἷς τῶν τεσσάρων πρώτων συνδέσμων τεθῇ μεταξὺ δύο οἱωνδήποτε ἁπλῶν προτάσεων p καὶ q ἐκ τοῦ Π, τότε προκύπτει μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία καλεῖται **σύνθετος πρότασις πρώτης βαθμίδος.** Ἤτοι διὰ κάθε ζεῦγος ἁπλῶν προτάσεων p καὶ q ἐκ τοῦ Π αἱ προτάσεις: $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$ εἶναι σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος. Φανερὸν εἶναι ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ζεύγους p καὶ q ἐπιτρέπεται νὰ συμπίπτουν, ἤτοι αἱ

$$p \vee p, \quad p \wedge p, \quad p \Longrightarrow p, \quad p \Longleftrightarrow p,$$

εἶναι ἐπίσης σύνθετοι προτάσεις πρώτης βαθμίδος διὰ κάθε πρότασιν p ἐκ τοῦ Π.

β). Ἐὰν ὁ πέμπτος λογικὸς σύνδεσμος τεθῇ πρὸ τυχούσης προτάσεως ἐκ τοῦ Π, τότε προκύπτει μία σύνθετος πρότασις, καλουμένη ἐπίσης **πρώτης βαθμίδος,** ἤτοι $\sim p$ εἶναι σύνθετος πρότασις πρώτης βαθμίδος.

§ 6. Πράξεις μεταξὺ λογικῶν προτάσεων. – Δι᾽ ἑκάστην σύνθετον πρότασιν πρώτης βαθμίδος ὁρίζεται ἀκριβῶς μία τιμὴ ἐν $\{\alpha, \psi\}$ τῇ βοηθείᾳ τῶν κατωτέρω πινάκων. Ἡ τιμὴ τῆς συνθέτου προτάσεως ἐν $\{\alpha, \psi\}$, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ *τιμὴ ἀληθείας τῆς συνθέτου προτάσεως*, ὁρίζεται πλήρως ἐκ τῶν τιμῶν ἀληθείας ἑκάστης τῶν ἁπλῶν προτάσεων ἐκ τῶν ὁποίων συνίσταται καὶ τοῦ τρόπου συνδέσεως αὐτῶν πρὸς σχηματισμὸν τῆς συνθέτου προτάσεως, οὐχὶ ὅμως ἀπὸ τὸ περιεχόμενον αὐτῶν.

Οἱ διάφοροι τρόποι συνδέσεως ἁπλῶν προτάσεων πρὸς σχηματισμὸν συνθέτου τοιαύτης, ἀποτελοῦν τὰς **«λογικὰς πράξεις»** μεταξὺ τῶν προτάσεων.

Αἱ θεμελιώδεις λογικαὶ πράξεις εἶναι αἱ ἑξῆς :

1. Σύζευξις: Τὰ ἐξαγόμενα τῆς λογικῆς πράξεως τῆς συζεύξεως $\wedge$ παρέχονται σχηματικῶς, ὅπως γνωρίζομεν καὶ ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς προηγουμένης τάξεως, διὰ τοῦ κάτωθι πίνακος καλουμένου **πίνακος τιμῶν ἀληθείας** τῆς συζεύξεως $p \wedge q$.

(1)

p	q	$p \wedge q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ

Δυνάμει τοῦ ἔναντι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \wedge q)$ τῆς προτάσεως $p \wedge q$ ὁρίζεται ἴση μὲ α, δηλαδὴ $\tau(p \wedge q) = \alpha$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q) = \alpha$ · εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς $p \wedge q$ εἶναι ἴση μὲ ψ, ἤτοι $\tau(p \wedge q) = \psi$.

Ὥστε : **Ἡ σύζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἀμφότεραι αἱ προτάσεις εἶναι ἀληθεῖς.**

Παράδειγμα: Ἔστωσαν αἱ προτάσεις :

p : «Ὁ $\frac{2}{3}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμός» καὶ **q : «Ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός».**

Τότε ἡ σύζευξις αὐτῶν $p \wedge q$: «Ὁ $\frac{2}{3}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ 5 εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς » εἶναι μία σύνθετος πρότασις, ἡ ὁποία εἶναι ψευδὴς (διατί ;).

2. Ἐγκλειστικὴ διάζευξις :

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \vee q)$ τῆς προτάσεως $p \vee q$ ὁρίζεται ἴση μὲ ψ, ἤτοι $\tau(p \vee q) = \psi$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q) = \psi$· εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς $p \vee q$ εἶναι ἴση μὲ α.

(2)

p	q	$p \vee q$
α	α	α
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

Ὥστε : **Ἡ** (ἐγκλειστικὴ) **διάζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν μία τοὐλάχιστον τῶν (ἁπλῶν) προτάσεων εἶναι ἀληθής.**

Παράδειγμα: **Εἶναι ἀληθὴς ἢ εἶναι ψευδὴς ἡ πρότασις :**

«Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον εἴτε ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος» ;

Ἀπάντησις : Ἡ σύνθετος αὐτὴ πρότασις εἶναι ἀληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ p τὴν πρότασιν : «Ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον» καὶ διὰ q τὴν πρότασιν : «Ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος», ἔχομεν $\tau(p) = \psi$ καὶ $\tau(q) = \alpha$. Ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω πίνακα (2), ἡ σύνθετος πρότασις :

$p \vee q$: «ὁ ἀριθμὸς 17 εἶναι τέλειον τετράγωνον εἴτε ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος»

εἶναι ἀληθής.

3. Συνεπαγωγή :

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \Longrightarrow q)$ τῆς προτάσεως $p \Longrightarrow q$ ὁρίζεται ἴση μὲ ψ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \alpha$ καὶ $\tau(q) = \psi$· εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν ἡ τιμὴ τῆς $p \Longrightarrow q$ εἶναι ἴση μὲ α, ἤτοι :

$$\tau(p \Longrightarrow q) = \alpha.$$

(3)

p	q	$p \Longrightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	α
ψ	ψ	α

Ὥστε : **Ἡ συνεπαγωγὴ $p \Longrightarrow q$ εἶναι ψευδὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ p εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ q εἶναι ψευδής. Εἰς πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις εἶναι ἀληθής.**

Πῶς φαίνεται ὅτι ἡ συνεπαγωγὴ δὲν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ λογικὴ πρᾶξις ;

Παράδειγμα: Εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδὴς ἡ πρότασις: «(3 = 4) $\Longrightarrow$ (7 > 2)»;

Ἀπάντησις: Ἡ πρότασις εἶναι ἀληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ p τήν: «3 = 4» καὶ διὰ q τήν: «7 > 2», παρατηροῦμεν ὅτι ἡ p εἶναι ψευδὴς (ψ) καὶ ἡ q εἶναι ἀληθὴς (α). Συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (3), ἡ σύνθετος πρότασις:

$$p \Longrightarrow q: \quad \text{«ἐὰν } 3 = 4, \text{ τότε } 7 > 2\text{»}$$

εἶναι ἀληθής.

Παρατήρησις: Ἄλλοι τρόποι διατυπώσεως τῆς συνεπαγωγῆς $p \Longrightarrow q$ εἶναι καὶ οἱ ἑξῆς:

1. **«p εἶναι ἱκανὴ συνθήκη διὰ q»**
2. **«q εἶναι ἀναγκαία συνθήκη διὰ p»**
3. **«ὑπόθεσις: p, συμπέρασμα: q»**
4. **«p, ὅθεν q»**
5. **«p, ἄρα q»**
6. **«q συνάγεται ἐκ τοῦ p».**

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συνεπαγωγή: «*Ἐὰν* τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα, *τότε* αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν».

Ἡ ὑπόθεσις p: «τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' εἶναι ἴσα» εἶναι **ἱκανὴ συνθήκη** διὰ τὸ συμπέρασμα τῆς ἰσότητος τῶν ἀντιστοίχων γωνιῶν.

Τὸ συμπέρασμα q: «αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν» εἶναι **ἀναγκαία συνθήκη** διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων· δηλαδὴ δὲν δύνανται τὰ τρίγωνα νὰ εἶναι ἴσα χωρὶς αἱ γωνίαι των νὰ εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν.

4) Λογικὴ ἰσοδυναμία.

Δυνάμει τοῦ κάτωθι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(p \Longleftrightarrow q)$ τῆς προτάσεως $p \Longleftrightarrow q$ ὁρίζεται ἴση μὲ α, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q)$· ὅθεν ἡ τιμὴ $\tau(p \Longleftrightarrow q)$ εἶναι ἴση μὲ ψ, ἄν, καὶ μόνον ἂν $\tau(p) \neq \tau(q)$.

(4)

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
α	α	α
α	ψ	ψ
ψ	α	ψ
ψ	ψ	α

Ὥστε: **Ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ δύο προτάσεις εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς ἢ συγχρόνως ψευδεῖς.**

Ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία εἶναι ἀντιμεταθετικὴ λογικὴ πρᾶξις; Νὰ σχηματισθῇ ὁ σχετικὸς πίναξ ἀληθείας.

Παράδειγμα: Εἶναι ἀληθὴς ἢ εἶναι ψευδὴς ἡ πρότασις: «(2 = 5) $\Longleftrightarrow$ (4 > 7)»;

Ἀπάντησις: Ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμία εἶναι ἀληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ p: «2 = 5» καὶ διὰ q: «4 > 7», ἔχομεν $\tau(p) = \psi$ καὶ $\tau(q) = \psi$. Ἑπομένως, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (4), ἡ σύνθετος πρότασις:

$$p \Longleftrightarrow q: \quad \text{«Ὁ } 2 = 5 \text{ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν } 4 > 7\text{»}$$

εἶναι ἀληθής.

Παρατηρήσεις: α). Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς (λογικῆς) ἰσοδυναμίας ἐννοοῦμεν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

1. $p \Longleftrightarrow p$
2. $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow (q \Longleftrightarrow p)$
3. $(p \Longleftrightarrow q \wedge q \Longleftrightarrow r) \Longrightarrow (p \Longleftrightarrow r)$.

β). Ἄλλοι τρόποι λεκτικῆς διατυπώσεως τῆς ἰσοδυναμίας «$p \Longleftrightarrow q$» εἶναι καὶ οἱ ἑξῆς :

1. **«p ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, q».**
2. **«p εἶναι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη διὰ q».**
3. **«p πρέπει καὶ ἀρκεῖ q».**
4. **«p καὶ q εἶναι λογικῶς ἰσοδύναμοι»** ἢ ἁπλῶς **«ἰσοδύναμοι».**
5. **«$p \Longrightarrow q$ καὶ ἀντιστρόφως».**

Σημείωσις: Ἐὰν θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἡ ἰσοδυναμία $p \Longleftrightarrow q$ δύο προτάσεων ὑφίσταται ἐξ ὁρισμοῦ, τότε χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$, ἤτοι γράφομεν $p \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} q$.

5) Ἄρνησις: Κατὰ τὴν λογικὴν αὐτὴν πρᾶξιν διὰ κάθε πρότασιν p δεχόμεθα μίαν πρότασιν τῆς μορφῆς «ὄχι p», συμβολιζομένη «$\sim p$», ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ p εἶναι ψευδής, ψευδὴς δὲ ἂν ἡ p εἶναι ἀληθής.

Οὕτως ὁ πίναξ τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀρνήσεως «$\sim p$» εἶναι ὁ κάτωθι :

(5)

p	~p
α	ψ
ψ	α

Δυνάμει τοῦ ἔναντι πίνακος, ἡ τιμὴ $\tau(\sim p)$ τῆς προτάσεως $\sim p$ ὁρίζεται πάντοτε διάφορος (ἀντίθετος) τῆς τιμῆς $\tau(p)$ τῆς προτάσεως p.

Ὅθεν, ἐὰν $\tau(p) = \alpha$, τότε $\tau(\sim p) = \psi$ καὶ ἐὰν $\tau(p) = \psi$, τότε $\tau(\sim p) = \alpha$.

Ὥστε : **Αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν p καὶ ~p εἶναι πάντοτε ἀντίθετοι.**

Παράδειγμα: **Ἐὰν p : «ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμός»· νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ $\tau(\sim p)$ τῆς** προτάσεως $\sim p$.

Λύσις: Ἔχομεν $\tau(p) = \psi$, ἄρα $\tau(\sim p) = \alpha$, ἔνθα :

$\sim p$: «ὄχι ὁ $\sqrt{2}$ εἶναι ρητὸς ἀριθμός» = «ὁ $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός».

Παρατήρησις: Ἐκτὸς τῶν ἀνωτέρω λογικῶν συνδέσμων χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ὡς σύνδεσμος καὶ ἡ ἔκφρασις **«ἢ μόνον ... ἢ μόνον ...»**, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ «$\underline{\vee}$» ἢ «∇». Τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρω συνδέσμου σχηματίζεται ἡ λεγομένη **ἀποκλειστικὴ διάζευξις.** Οὕτως, ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις δύο προτάσεων p, q συμβολίζεται μέ : $p \underline{\vee} q$ ἢ $p \nabla q$ καὶ ἀναγιγνώσκεται «ἢ μόνον p ἢ μόνον q». Ἡ σύνθετος πρότασις $p \underline{\vee} q$, κατατασσομένη καὶ αὕτη εἰς τὴν πρώτην βαθμίδα εἶναι, ὅπως γνωρίζομεν ἐκ τῆς προηγουμένης τάξεως, ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν p καὶ q εἶναι διάφοροι, ψευδὴς δέ, ὅταν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν p καὶ q εἶναι ἴσαι.

(6)

p	q	$p \underline{\vee} q$
α	α	ψ
α	ψ	α
ψ	α	α
ψ	ψ	ψ

Ὅθεν ἔχομεν τὸν ἔναντι πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως $p \underline{\vee} q$.

Δυνάμει τοῦ πίνακος τούτου, ἡ τιμὴ $\tau(p \underline{\vee} q)$ τῆς προτάσεως $p \underline{\vee} q$ ὁρίζεται ἴση μὲ α, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) \neq \tau(q)$ καὶ $\tau(p \underline{\vee} q) = \psi$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\tau(p) = \tau(q)$.

Ὥστε: **Ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις δύο προτάσεων εἶναι ἀληθὴς τότε, καὶ μόνον** τότε, ἂν ἡ μία εἶναι ἀληθὴς **καὶ ἡ ἄλλη ψευδής.**

Παράδειγμα 1ον: Εἰς τὰ Μαθηματικὰ ἡ ἔκφρασις: «ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ β» ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\alpha \geqq \beta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha > \beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \beta.$$

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ποία ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως: «$4 \geqq 3$».

Ἀπάντησις: Δυνάμει τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν: «$4 > 3$ ἢ $4 = 3$». Αὕτη ὅμως εἶναι ἀληθής, διότι, ἂν παραστήσωμεν μὲ p τὴν πρότασιν: «$4 > 3$» καὶ μὲ q τήν: «$4 = 3$», ἔχομεν: $\tau(p) = \alpha$ καὶ $\tau(q) = \psi$. Ἐπὶ πλέον δὲ οὐδέποτε ἕνας ἀριθμὸς εἶναι καὶ μεγαλύτερος καὶ ἴσος ἑνὸς ἄλλου ἀριθμοῦ. Ἑπομένως ἡ σύνθετος πρότασις: «$4 > 3$ ἢ $4 = 3$» ἀποτελεῖ μίαν ἀποκλειστικὴν διάζευξιν, συνεπῶς, συμφώνως πρὸς τὸν πίνακα (6), ἔχομεν: $\tau(p \veebar q) = \alpha$.

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος συμπεραίνομεν ὅτι εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν: «$3 \geqq 3$» καὶ γενικῶς «$x \geqq x$» $\forall x \in \mathbf{R}$ (διατί;).

Παράδειγμα 2ον: Κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 1 διὰ τὴν λογικὴν πρότασιν ἢ δήλωσιν, τί εἶναι ἡ ἔκφρασις: «Ἡ δήλωσις εἶναι μία ἀληθὴς ἢ ψευδὴς πρότασις».

Ἀπάντησις: Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις εἶναι ἀποκλειστικὴ διάζευξις, διότι ἡ (λογικὴ) πρότασις ἢ δήλωσις εἶναι ἢ μόνον ἀληθὴς (καὶ ὄχι ψευδής), ἢ μόνον ψευδὴς (καὶ ὄχι ἀληθής). Δηλαδὴ ἡ δήλωσις οὐδέποτε εἶναι καὶ ἀληθὴς καὶ ψευδής.

Παράδειγμα 3ον: Ἔστω μία οἰκογένεια μὲ δύο τέκνα, ἀμφότερα ἀγόρια. Ἔστω p ἡ πρότασις: «Τὸ μεγαλύτερον τέκνον εἶναι ἀγόρι» καὶ q ἡ πρότασις: «Τὸ μικρότερον τέκνον εἶναι ἀγόρι». Νὰ ἀποδόσητε λεκτικῶς τὴν σύνθετον πρότασιν $p \veebar q$ καὶ νὰ εὕρητε τὴν τιμὴν ἀληθείας ταύτης.

Ἀπάντησις: Ἡ σύνθετος πρότασις $p \veebar q$ σημαίνει:

$p \veebar q$: «Ἢ μόνον τὸ μεγαλύτερον τέκνον εἶναι ἀγόρι ἢ μόνον τὸ μικρότερον».

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν:

«Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἕνα ἀγόρι καὶ ἕνα κορίτσι».

Προφανῶς ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ψ(=ψεῦδος). Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν καὶ ἐκ τοῦ πίνακος 6, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι: $\tau(p) = \alpha$, $\tau(q) = \alpha$.

Ὥστε: $\tau(p \veebar q) = \psi$.

Ἀνακεφαλαίωσις. Οἱ ἓξ ἀνωτέρω πίνακες τιμῶν ἀληθείας τῶν λογικῶν πράξεων τῆς συζεύξεως, ἐγκλειστικῆς διαζεύξεως, ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως, συνεπαγωγῆς, ἰσοδυναμίας καὶ ἀρνήσεως δύο προτάσεων p, q συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα:

p	q	Σύζευξις	Ἐγκλ. Διάζ.	Ἀπ. Διάζ.	Συνεπαγωγή	Ἰσοδυναμία	Ἄρνησις	
		$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
α	α	α	α	ψ	α	α	ψ	ψ
α	ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	ψ	α
ψ	α	ψ	α	α	α	ψ	α	ψ
ψ	ψ	ψ	ψ	ψ	α	α	α	α

§ 7. Ταυτολογίαι καὶ αὐτοαντιφάσεις.

1). Ταυτολογίαι. Μία σύνθετος πρότασις A, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμφανίζονται αἱ ἁπλαῖ προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa$ ἐκ τοῦ συνόλου Π, καλεῖται μία ταυτολογία τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ τιμὴ ἀληθείας αὐτῆς εἶναι ἡ α (= ἀλήθεια), διὰ κάθε «συνδυασμὸν» τιμῶν ἀληθείας τῶν ἁπλῶν προτάσεων $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa$. Αἱ ταυτολογίαι συμβολίζονται μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου : $\vdash$, ἤτοι :

$\vdash A$ σημαίνει : *ἡ πρότασις A εἶναι μία ταυτολογία.*

Ἀξιόλογοι ταυτολογίαι εἶναι αἱ ἑξῆς :

1). *Νόμος τῆς ταυτότητος* : $\vdash p \Longrightarrow p$.
2). *Νόμος διπλῆς ἀρνήσεως* : $\vdash p \Longleftrightarrow \sim(\sim p)$.
3). *Νόμος ἀποκλείσεως τρίτου* : $\vdash p \veebar (\sim p)$.
4). *Νόμος ἀντιφάσεως* : $\vdash \sim [p \wedge (\sim p)]$.

Τὸ ὅτι εἶναι ταυτολογίαι, φαίνεται σαφῶς ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \wedge (\sim p)$	$p \Longrightarrow p$	$p \Longleftrightarrow \sim(\sim p)$	$p \veebar \sim p$	$\sim[p \wedge (\sim p)]$
α	ψ	α	ψ	α	α	α	α
ψ	α	ψ	ψ	α	α	α	α

Παρατηρήσεις: 1). Ὡρισμέναι ταυτολογίαι, λόγῳ τῆς γενικῆς ἰσχύος των, καλοῦνται **ἀρχαὶ ἢ νόμοι.** Παραδείγματα τοιούτων ταυτολογιῶν εἶναι αἱ ἀνωτέρω ταυτολογίαι (1), (3), (4), αἱ ὁποῖαι εἶναι τρεῖς ἐκ τῶν τεσσάρων νόμων τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους *).

Οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι οἱ κάτωθι τέσσαρες :

α'). *Ὁ νόμος τῆς ταυτότητος*
β'). *Ὁ νόμος τῆς ἀντιφάσεως*
γ'). *Ὁ νόμος τοῦ ἀποχρῶντος λόγου* καὶ
δ'). *Ὁ νόμος τῆς τοῦ τρίτου ἀποκλείσεως.*

2). Ἡ ταυτολογία (3), κατὰ τὴν ὁποίαν ἐκ δύο ἀντιφατικῶν προτάσεων p καὶ $\sim p$ ἡ μία εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ ἄλλη ψευδής, μέση κατάστασις δὲν χωρεῖ, καλεῖται καὶ ἀρχὴ τῆς τοῦ μέσου ἢ τρίτου ἀποκλείσεως.

Παράδειγμα : Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ κάτωθι ἰσοδυναμία :

$$\sim(p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q \quad \textbf{(Νόμος τοῦ De Morgan)}$$

εἶναι ταυτολογία.

* Θεμελιωτὴς τῆς Λογικῆς, γενικῶς ὡς ἐπιστήμης τῶν νόμων τῆς σκέψεως, ὑπῆρξεν ὁ ἐκ Σταγείρων τῆς Μακεδονίας μέγας φιλόσοφος **Ἀριστοτέλης** (384 - 321 π.Χ.).

Λύσις: Σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς δοθείσης ἰσοδυναμίας :

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
α	α	ψ	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	ψ	α	ψ	α	α	α
ψ	α	α	ψ	ψ	α	α	α
ψ	ψ	α	α	ψ	α	α	α

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς δοθείσης ἰσοδυναμίας εἶναι πάντοτε α, διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν p καὶ q.

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἰσοδυναμία εἶναι ταυτολογία.

Ὥστε : $\vdash \sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$.

Σημείωσις: Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ὁ ἕτερος νόμος τοῦ De Morgan.

$$\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q.$$

2). Αὐτοαντιφάσεις. Μία σύνθετος πρότασις Β, εἰς τὴν ὁποίαν ἐμφανίζονται αἱ ἁπλαῖ προτάσεις $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa$, καλεῖται αὐτοαντίφασις τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ τιμὴ ἀληθείας αὐτῆς εἶναι ψ (= ψεῦδος), διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν ἁπλῶν προτάσεων $p_1, p_2, \ldots, p_\kappa$ ἢ συντομώτερον, ὅταν ἡ ἄρνησις αὐτῆς εἶναι μία ταυτολογία.

Μία αὐτοαντίφασις συμβολίζεται μὲ πρόταξιν τοῦ συμβόλου $\sim \vdash$.

Παράδειγμα : Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πρότασις : $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q) \equiv B(p, q)$* **εἶναι αὐτοαντίφασις.**

Λύσις: Σχηματίζομεν τὸν πίνακα τιμῶν ἀληθείας τῆς προτάσεως $B\,(p, q)$.

p	q	$\sim q$	$p \Longrightarrow q$	$p \wedge \sim q$	$B\,(p, q)$	$\sim B\,(p, q)$
α	α	ψ	α	ψ	ψ	α
α	ψ	α	ψ	α	ψ	α
ψ	α	ψ	α	ψ	ψ	α
ψ	ψ	α	α	ψ	ψ	α

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τιμὴ ἀληθείας τῆς προτάσεως $B\,(p, q)$ εἶναι πάντοτε ψ, διὰ κάθε συνδυασμὸν τιμῶν ἀληθείας τῶν p καὶ q. Ἐπίσης ἐκ τῆς τελευταίας στήλης τοῦ ἀνωτέρω πίνακος βλέπομεν ὅτι : $\sim B(p,q)$ εἶναι ταυτολογία. Ἄρα : $\sim \vdash B\,(p, q)$.

Γενικὴ παρατήρησις. Τὰ ἀναπτυχθέντα μέχρι τοῦδε περὶ λογισμοῦ τῶν προτάσεων ἰσχύουν καὶ ἂν εἰς τοὺς ἀνωτέρω πίνακας τὰ σύμβολα p

* Ἐνταῦθα τὸ σύμβολον « $\equiv$ » σημαίνει : συντόμως συμβολίζομεν τὴν ἀριστερὰ πρότασιν μὲ. . .

καὶ q ἀντικατασταθοῦν μὲ προτασιακοὺς τύπους (ἀνοικτὰς προτάσεις), τῶν ὁποίων ὅμως τὸ ἀληθὲς ἢ ψευδὲς θὰ ἀναφέρηται εἰς τὸ σύνολον τιμῶν τῆς μεταβλητῆς ἢ τῶν μεταβλητῶν τῶν ἐν λόγῳ προτασιακῶν τύπων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἔστωσαν αἱ ἀνοικταὶ προτάσεις :

p : «Ὁ x εἶναι ρητὸς ἀριθμός», q : «Ὁ x εἶναι φυσικὸς ἀριθμός».

α). Νὰ γραφοῦν ὑπὸ συμβολικὴν μορφὴν αἱ κάτωθι ἐκφράσεις :

1. «Ὁ x δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός»,
2. «Ὁ x δὲν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός»,
3. «Ὁ x εἶναι ρητὸς καὶ ὄχι φυσικὸς ἀριθμός».

β). Νὰ διατυπωθοῦν μὲ λέξεις οἱ κάτωθι (λογικοὶ) τύποι :

$p \vee q$, $p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge \sim q$, $p \vee \sim q$, $q \Longrightarrow p$, $\sim p \Longleftrightarrow \sim q$.

2. Τί σημαίνει ἑκάστη τῶν κάτωθι λογικῶν προτάσεων ;

α) $(5 < 7) \wedge (7 < 8)$, β) $\sim (\alpha = \beta)$,

γ) $(x < 0) \underline{\vee} (x = 0) \underline{\vee} (x > 0)$.

3. Ἔχουν νόημα συνθέτου προτάσεως αἱ ἐκφράσεις ;

α) «σχῆμα $\underline{\vee}$ τύπος». β) «7 $\Longleftrightarrow$ 3». γ) «Ἀνατολὴ $\underline{\vee}$ Δύσις».

(**Ἀπάντησις :** ὄχι (διατί ;)).

4. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ ἀληθείας τῶν κάτωθι συνθέτων προτάσεων :

α) $\left(4 = \frac{12}{3}\right) \vee (3 = 8)$, β) $\left(3\frac{1}{7} < 5\right) \Longrightarrow (2 = 2)$,

γ) $(7 = 4 + 3) \Longrightarrow (2 > 5)$, δ) $(2 = 3) \Longleftrightarrow (5 = 7)$,

ε) $(27 = 3 \cdot 8) \underline{\vee} (5^2 = 25)$, στ) $(2 > 5) \Longleftrightarrow (3 = 8)$.

5. Δικαιολογήσατε διατὶ ἡ πρότασις : «Ἐὰν ὁ Περικλῆς ἦτο ποταμός, τότε ὁ Παρθενὼν εὑρίσκεται εἰς τὰς Ἀθήνας» εἶναι ἀληθής.

6. Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν ἑπομένων συνθέτων προτάσεων εἶναι ταυτολογία.

α) $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (p \Longrightarrow \sim q)$, β) $p \wedge q \Longrightarrow p \vee q$,

γ) $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p$, δ) $p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$,

ε) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p) \vee q$, στ) $(p \underline{\vee} \sim p) \wedge (q \vee \sim q)$,

ζ) $[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$, η) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (p \Longrightarrow \sim q)] \Longrightarrow \sim p$,

θ) $[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$, ι) $(p \vee q) \wedge r \Longleftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

7. Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν ἑπομένων συνθέτων προτάσεων εἶναι αὐτοαντίφασις.

α) $(p \wedge q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$, β) $(p \underline{\vee} q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$,

γ) $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q)$, δ) $\sim p \wedge \sim q \Longleftrightarrow p \vee q$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

§ 8. Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου.— Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου, ὡς καὶ ἡ ἔννοια τῆς λογικῆς προτάσεως, θεωρεῖται ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια, ὡς ἔννοια μὴ ἐπιδεχομένη ὁρισμόν, ὡς ἔννοια μὴ δυναμένη ν' ἀναχθῇ εἰς ἄλλην ἔννοιαν.

Εἰς τὰ Μαθηματικὰ δεχόμεθα ὅτι ἐπιτρέπεται πολλὰ ἀντικείμενα σαφῶς καθωρισμένα καὶ διακεκριμένα μεταξύ των νὰ θεωρηθοῦν ὡς ἓν νέον ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *τὸ σύνολον τῶν θεωρουμένων ἀντικειμένων.*

Τὰ ἀντικείμενα συμβολίζονται συνήθως μὲ μικρὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. α, β, γ, ... Ἓν σύνολον ἀντικειμένων συμβολίζεται μὲ ἓν κεφαλαῖον γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. Σ, Α, Χ, χωρὶς βεβαίως τοῦτο νὰ εἶναι ὑποχρεωτικόν, π.χ. εἰς τὴν γεωμετρίαν συμβαίνει συχνὰ τὸ ἀντίστροφον. Τὰ ἀντικείμενα α, β, γ, . . ., τὰ ὁποῖα ὁρίζουν ἓν σύνολον, λ.χ. τὸ Σ, καλοῦνται εἰς τὴν «γλῶσσαν τῶν συνόλων», *στοιχεῖα* τοῦ συνόλου Σ, πολλάκις δὲ καὶ *σημεῖα τοῦ συνόλου* Σ.

Δι' ἓν τυχὸν στοιχεῖον x καὶ δι' ἓν τυχὸν σύνολον Σ δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει μία μόνον ἀπὸ τὰς σχέσεις :

1) $x \in \Sigma$ (δηλαδὴ τὸ x ἀνήκει εἰς τὸ Σ ἢ τὸ x εἶναι στοιχεῖον τοῦ Σ).

2) $x \notin \Sigma$ (δηλ. τὸ x δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Σ ἢ τὸ x δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Σ).

Ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν μιᾶς *«σχέσεως ἰσότητος»* ὡρισμένης μεταξὺ τῶν στοιχείων του, βάσει τῆς ὁποίας θεωροῦμεν ταῦτα, ἐὰν δὲν συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $=$, ὡς διακεκριμένα μεταξύ των. Ἀκριβέστερον : *δεχόμεθα ὅτι κάθε σύνολον Σ στοιχείων* $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, x, y, z, \ldots$ *εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ μία σχέσιν ἰσότητος*, ἤτοι ὅτι : *διὰ κάθε ζεῦγος στοιχείων* x, y *ἐκ τοῦ Σ εἶναι βέβαιον καὶ κατὰ ἕνα ἀκριβῶς τρόπον* ($\equiv$ *μονοσημάντως*), *ἂν τὰ στοιχεῖα ταῦτα εἶναι ἴσα, ὁπότε γράφομεν* $x = y$, *ἢ διάφορα, ὁπότε γράφομεν* $x \neq y$. Ἡ σχέσις αὔτη πληροῖ τὰς ἑξῆς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας ($\equiv$ ἀξιώματα) τῆς ἰσότητος :

α) $x = x \quad \forall \; x \in \Sigma$ *(αὐτοπαθὴς ἰδιότης)*

β) ἂν $x = y$, τότε $y = x$ *(συμμετρικὴ ἰδιότης)*

γ) ἂν $x = y$ καὶ $y = z$, τότε $x = z$ *(μεταβατικὴ ἰδιότης)*.

Τὴν ὡς ἄνω ἰσότητα, ἡ ὁποία ὁρίζει τὸ Σ (διακρίνει τὰ στοιχεῖα του) καλοῦμεν «βασικὴν ἰσότητα» πρὸς διάκρισιν ἀπὸ κάθε ἄλλην «ἰσότητα» ὁριζομένην ἐν Σ.

Προσέξατε! Τὸ σύμβολον $=$ συμβολίζει τὴν βασικὴν ἰσότητα καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ $\equiv$, τοῦ ὁποίου ἡ σημασία ἔχει ἤδη ἐξηγηθῇ.

Παραδείγματα συνόλων.

1. Τὸ σύνολον τῶν **φυσικῶν ἀριθμῶν** : $1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$ Τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα : $\mathbf{N}$.

2. Τὸ σύνολον τῶν **ἀκεραίων ἀριθμῶν** : $0, +1, -1, +2, -2, \ldots, +\nu, -\nu, \ldots$ Τοῦτο συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα : $\mathbf{Z}$.

3. Τὸ σύνολον τῶν **ρητῶν ἀριθμῶν**, ὅπερ συμβολίζομεν μέ : $\mathbf{Q}$.

4. Τὸ σύνολον τῶν **πραγματικῶν ἀριθμῶν**, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα $\mathbf{R}$, ἐνῶ μὲ τὰ σύμβολα $\mathbf{R}^+$, $\mathbf{R}_0^+$ συμβολίζομεν τοὺς θετικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς, ἀντιστοίχως τοὺς μὴ ἀρνητικοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς.

5. Τὸ σύνολον τῶν **μιγαδικῶν ἀριθμῶν**, ὅπερ συμβολίζομεν μὲ τὸ γράμμα $\mathbf{C}$.

Οὕτω, δυνάμει τῶν ἀνωτέρω συμβολισμῶν, θὰ ἔχωμεν :

$$1 \in \mathbf{N}, \quad -\frac{2}{3} \notin \mathbf{N}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbf{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbf{R}^+, \quad -\frac{7}{8} \notin \mathbf{Q}^+, \quad -2 \in \mathbf{Z}, \quad 3+5i \in \mathbf{C}.$$

§ 9. Παράστασις συνόλου.– Συνήθεις τρόποι παραστάσεως ἑνὸς συνόλου εἶναι οἱ κάτωθι δύο :

α). **Δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἕκαστον σύνολον ὁρίζεται διὰ δηλώσεως (ἀναγραφῆς) ὅλων τῶν στοιχείων τῶν ἀνηκόντων εἰς αὐτό. Οὕτω, π.χ., τὸ σύνολον μὲ στοιχεῖα αὐτοῦ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4 θὰ συμβολίζωμεν γράφοντες τὰ στοιχεῖα του μεταξὺ ἀγκίστρων, ἤτοι :

$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

Κατὰ τὸν συμβολισμὸν τοῦτον δὲν ἔχει σημασίαν ἡ σειρὰ μὲ τὴν ὁποίαν γράφομεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου μεταξὺ τῶν ἀγκίστρων. Ὅθεν τά: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4, 2\}$, $\{2, 3, 4, 1\}$ κ.τ.λ. συμβολίζουν τὸ αὐτὸ σύνολον. Γενικῶς : $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ συμβολίζει ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα α, β, γ καὶ ἄλλα ἀκόμη, τὰ ὁποῖα ἐκ τοῦ τρόπου δηλώσεως τῶν α, β, γ ἐννοοῦνται καὶ – χάριν συντομίας – παραλείπονται.

Οὕτω τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν συμβολίζεται ὡς κάτωθι :

$$\mathbf{N} \equiv \{1, 2, 3, \ldots\} \ ^{*)}.$$

β). **Διὰ περιγραφῆς τῶν στοιχείων του.** Ὁ ἀνωτέρω τρόπος παραστάσεως ἑνὸς συνόλου δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ πρακτικῶς (τοὐλάχιστον) εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλου μὲ μεγάλον ἀριθμὸν στοιχείων, λ.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνόλου τῶν ὀνομάτων ὅλων τῶν κατοίκων τῆς Εὐρώπης καὶ θεωρητικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν συνόλου μὲ ἄπειρον πλῆθος στοιχείων λ.χ. τοῦ συνόλου $\mathbf{Q}$ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς τὰ σύνολα ὁρίζονται δι' ἰδιοτήτων ἀναφερομένων εἰς τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Ὅλα τὰ ἀντικείμενα μιᾶς ὡρισμένης ἰδιότητος θεωροῦμεν ὡς ἓν σύνολον. Ἂν ἡ ἰδιότης συμβολίζηται μέ : $p(\ )$, τότε $p(x)$ συμβολίζει τὴν (ἀνοικτὴν) πρότασιν ἢ ἄλλως τὴν συνθήκην : «τὸ ἀντικείμενον x ἔχει τὴν ἰδιότητα $p(\ )$».

* Τὸ σύμβολον $\equiv$ (ἴσον) σημαίνει, ὅπου συναντᾶται, «τὸ αὐτὸ δυνάμει ὁρισμοῦ (εἴτε συμβολισμοῦ) μέ».

Μὲ $\{x : p(x)\}$ συμβολίζομεν τότε τὸ σύνολον τῶν ἀντικειμένων μὲ τὴν ἰδιότητα $p(\ )$. Οὕτως, ἂν λ.χ. $p(\ )$ συμβολίζῃ τὴν ἰδιότητα :

«. . . εἶναι ἄρτιος ἀριθμός»,

τότε $p(x)$ συμβολίζει τὴν (ἀνοικτὴν) πρότασιν : «ὁ x εἶναι ἄρτιος ἀριθμός». Αὕτη καθίσταται λογικὴ πρότασις, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος μάλιστα, ἐὰν συμβῇ νὰ εἶναι ἄρτιος καθιστᾷ τὴν πρότασιν ἀληθῆ. Τότε τὸ $\{x : p(x)\}$ συμβολίζει τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Πρὸς ἀποφυγὴν παρερμηνειῶν καὶ ἀντινομιῶν δεχόμεθα ὅτι μία ἰδιότης $p(\ )$ ἀναφέρεται εἰς ἀντικείμενα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς ἓν ὡρισμένον σύνολον Ω. Ἐὰν τώρα ἓν ἀντικείμενον $\alpha \in \Omega$ τεθῇ ἐν $p(\ )$, ἤτοι ἂν γράψωμεν $p(\alpha)$, τότε τὸ $p(\alpha)$ συμβολίζει μίαν λογικὴν πρότασιν, διὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα ν' ἀποφανθῶμεν κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον, ἂν αὕτη εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής. Τότε διὰ τοῦ συμβόλου : $\{x \in \Omega : p(x)\}$ εἴτε ἄλλως $\{x \in \Omega \mid p(x)\}$

ὁρίζεται ἓν ὑποσύνολον Α τοῦ Ω, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα καὶ μόνον αὐτὰ εἶναι ὅλα ἐκεῖνα τὰ $x \in \Omega$, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ $p(x)$, ὡς λογικὴ πρότασις, λαμβάνει τὴν τιμὴν *«ἀληθής»*. Ὥστε δεχόμεθα ὅτι : *Διὰ κάθε σύνολον Ω καὶ μίαν ἰδιότητα $p(\ )$ ὁρίζεται διὰ τοῦ συμβόλου $\{x \in \Omega : p(x)\}$ πάντοτε ἓν σύνολον, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι ὅλα ἐκεῖνα τὰ $x \in \Omega$, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ πρότασις $p(x)$ εἶναι ἀληθής.*

Ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω σημασίαν θὰ θεωρῶμεν εἰς τὰ ἑπόμενα τὸ σύμβολον : $\{x \in \Omega : p(x)\}$. Ἑπομένως, ἐὰν $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$, τότε εἶναι :

$$\forall x, \quad x \in A \iff p(x) \text{ ἀληθής.}$$

Παράδειγμα: Ἔστω ὁ προτασιακὸς τύπος $p(x)$: «$x^2 - 3x + 2 = 0$» μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸν $p(x)$ ἀληθῆ πρότασιν εἶναι : 1, 2.

Ἑπομένως τό : $\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ εἶναι τὸ διμελὲς σύνολον $\{1, 2\}$.

Παρατήρησις: Τὸ σύμβολον « : » ἢ « | » ἀναγιγνώσκεται «τοιοῦτον, ὥστε», τὸ δὲ πρὸ τοῦ ὡς ἄνω συμβόλου γράμμα δημιουργεῖ τὸ σύνολον συμφώνως πρὸς τὴν μετὰ τοῦτο συνθήκην.

§ 10. Τὸ κενὸν σύνολον.— Δεχόμεθα τὴν ὕπαρξιν ἑνὸς συνόλου, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν *«τὸ κενὸν σύνολον»* καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $\{\ \}$ ἢ ἄλλως μὲ $\varnothing$. Τοῦτο εἶναι ἓν σύνολον, εἰς τὸ ὁποῖον οὐδὲν στοιχεῖον ἀνήκει, ἤτοι διὰ κάθε ἀντικείμενον x ἰσχύει $x \notin \varnothing$. Οὕτω τὸ σύνολον : $\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 1 = 0\}$ εἶναι τὸ κενόν. Ὁμοίως, ἂν θεωρήσωμεν τό : $\{x \in \mathbf{R} : x \neq x\} \equiv K$, διαπιστώνομεν ἀμέσως ὅτι τοῦτο δὲν δύναται νὰ ἔχῃ στοιχεῖα, ἤτοι $\forall x \in \mathbf{R}$ ἰσχύει $x \notin K$.

§ 11. Ὑποσύνολον ἄλλου συνόλου. Ὑπερσύνολον. Ἰσότης δύο συνόλων.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο μὴ κενὰ σύνολα.

α). Θὰ λέγωμεν : *«Τὸ σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β»* εἴτε ἄλλως *«τὸ Α περιέχεται ($\equiv$ ἐγκλείεται) εἰς τὸ Β» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μέ : «$A \subseteq B$» τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε $x \in A$ ἕπεται $x \in B$.*

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς μὲ χρῆσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς διατυποῦται συντόμως οὕτω:

$$\boxed{A \subseteq B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \Longrightarrow x \in B)}$$

β). Θὰ λέγωμεν: *«Τὸ σύνολον A εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ B» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ «A ⊇ B» τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ B εἶναι ὑποσύνολον τοῦ A.*

Ἤτοι: $$A \supseteq B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} B \subseteq A.$$

Τὸ σύμβολον « ⊇ » ἀναγιγνώσκεται *«περιέχει τὸ»* ἢ ἄλλως *«ἐγκλείει τό»*.

γ). Θὰ λέγωμεν: *«Τὸ A εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ B» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ A ⊂ B τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ A ⊆ B καὶ ὑπάρχει ἓν (τοὐλάχιστον) y ∈ B μὲ y ∉ A.*

Ἤτοι: $A \subset B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (\forall\, x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\exists\ y \in B : y \notin A)$.

δ). Θὰ λέγωμεν: *«Τὸ A εἶναι ἴσον μὲ τὸ B» καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ A = B τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύουν συγχρόνως: A ⊆ B καὶ B ⊆ A.*

Συντόμως ὁ ὁρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς κάτωθι:

$$\boxed{A = B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).}$$

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος εἶναι ἰσοδύναμος μέ:

$(A = B) \Longleftrightarrow (\forall\, x : x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (y : y \in B \Longrightarrow y \in A) \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$.

Ἐὰν τὰ σύνολα A, B δὲν εἶναι ἴσα γράφομεν: $A \neq B$ (A διάφορον τοῦ B).

Ὥστε: $$A \neq B \Longleftrightarrow \sim (A = B).$$

Κατόπιν τούτου ὁ ὁρισμὸς τοῦ γνησίου ὑποσυνόλου διατυποῦται συντόμως οὕτω:

$$\boxed{A \subset B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \ \text{καὶ}\ A \neq B.}$$

Ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἰδιότητες:

1). $A \subseteq A$, διὰ κάθε σύνολον A *(αὐτοπαθής)*

2). Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ *(ἀντισυμμετρική)*

3). Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma \Longrightarrow A \subseteq \Gamma$ *(μεταβατική)*.

Σημείωσις: Μία σχέσις, ἥτις εἶναι *αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρικὴ* καὶ *μεταβατικὴ* καλεῖται **σχέσις διατάξεως**. Ἡ σχέσις « ⊆ » εἶναι ὅθεν σχέσις διατάξεως.

Παρατηρήσεις: 1). Ἕκαστον σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.

2). Ἕκαστον σύνολον δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του (διατί;)

3). Τὸ κενὸν σύνολον θεωρεῖται ἐξ ὁρισμοῦ ὡς ὑποσύνολον κάθε συνόλου.

4). Δι' ἕκαστον σύνολον ἐκ ν στοιχείων ὑπάρχουν 2^{ν} ὑποσύνολα. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Σ καλεῖται **δυναμοσύνολον** τοῦ συνόλου Σ καὶ συμβολίζεται μέ : $\mathscr{P}(\Sigma)$.

5). Πρέπει νὰ γίνεται διάκρισις μεταξὺ τῶν συμβόλων «$\in$», τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τοῦ «ἀνήκει εἰς...» καὶ «$\subseteq$», τὸ ὁποῖον καλεῖται σύμβολον τοῦ «περιέχεται», διότι τὸ μὲν «$\in$» συσχετίζει στοιχεῖον πρὸς σύνολον, τὸ δὲ «$\subseteq$» σύνολον πρὸς σύνολον, εἰς δὲ τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων στοιχεῖον καὶ σύνολον παίζουν διαφορετικοὺς ρόλους. Τοιουτοτρόπως ἐξηγεῖται διατὶ πάντοτε ἰσχύει $\{\alpha\} \neq \alpha$. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ τελευταίου δίδομεν τὸ ἑξῆς χαρακτηριστικὸν παράδειγμα: Μία κασετίνα, ἡ ὁποία περιέχει ἕνα διαβήτην καὶ τίποτε ἄλλο δὲν εἶναι τὸ αὐτὸ πρᾶγμα μὲ τὸν διαβήτην.

§ 12. Βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς. — Ἐὰν κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν ἑνὸς «ζητήματος» θεωρῶμεν τὰ ὑποσύνολα ἑνὸς γενικωτέρου συνόλου Ω, τότε τὸ Ω καλεῖται **βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς**, (ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ — κατὰ τὴν ἐξέτασιν τοῦ ζητήματος — ἀναφέρονται ὅλα τὰ ἄλλα σύνολα). Γενικῶς εἰς κάθε «ζήτημα» ποὺ ἀφορᾷ σύνολα, ἐπιβάλλεται νὰ καθορίζηται πρῶτα τὸ βασικὸν σύνολον, τοῦ ὁποίου ὑποσύνολον ὀφείλει νὰ εἶναι κάθε ἄλλο σύνολον, τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ ὑπ' ὄψιν ζητήματος. Ἄλλως ὑπάρχει κίνδυνος νὰ περιπέσωμεν εἰς ἀντιφάσεις (ἀντινομίας). Οὕτω π.χ. εἰς ἓν πρόβλημα ἐπιπεδομετρίας βασικὸν σύνολον ἢ σύνολον ἀναφορᾶς θὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἐπίσης εἰς ἓν πρόβλημα ἀλγέβρας αἱ μεταβληταὶ ποὺ θὰ παρουσιασθοῦν εἰς τοὺς ἀντιστοίχους προτασιακοὺς τύπους θὰ ἀναφέρωνται εἰς ἓν γενικὸν σύνολον λ.χ. εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο θὰ εἶναι τὸ βασικὸν σύνολον δι' ὅλα τὰ ὑποσύνολα, τὰ ὁποῖα θὰ παρουσιασθοῦν εἰς τὸ πρόβλημα.

Τὸ βασικὸν σύνολον διαφέρει ἀπὸ πρόβλημα εἰς πρόβλημα καὶ μάλιστα πολλάκις παραλείπεται ὁ ἀκριβὴς καθορισμός του, διότι ἀπὸ τὸ περιεχόμενον τοῦ προβλήματος καθορίζεται καὶ τὸ ἴδιον.

Πράξεις μεταξὺ συνόλων.

Ἂς θεωρήσωμεν ἓν βασικὸν σύνολον Ω, μὴ κενὸν καὶ τελείως ὡρισμένον (λ.χ. $\Omega = \mathbf{R}$), τοῦ ὁποίου τὰ ὑποσύνολα ἂς συμβολίσωμεν μὲ κεφαλαῖα γράμματα τῆς ἀλφαβήτου Α, Β, ... Σ, Χ, Υ· τότε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἓν σύνολον, τὸ ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ $\mathscr{P}(\Omega)$, καὶ τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ Ω. Τοῦτο ὁρίζεται καὶ μὲ ἰδιότητα ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\mathscr{P}(\Omega) \equiv \{X : X \subseteq \Omega\} \equiv \{X : \text{ἂν } x \in X \Longrightarrow x \in \Omega\}.}$$

Μεταξὺ στοιχείων τοῦ συνόλου $\mathscr{P}(\Omega)$ δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν πράξεις ὡς ἑξῆς :

Ἔστωσαν $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ καὶ $B \in \mathscr{P}(\Omega)$· τότε ὁρίζεται :

§ 13. Τομὴ δύο συνόλων.— Καλεῖται τομὴ τοῦ A μὲ τὸ B καὶ συμβολίζεται μὲ $A \cap B$ τὸ κάτωθι σύνολον :

$$\boxed{\mathbf{A \cap B \equiv \{ x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B \}}}$$

Οὕτως, ἐὰν $A = \{0, 1, 3, 4\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 5\}$, τότε $A \cap B = \{1, 3\}$.
Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι :

$$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing \quad \text{καὶ} \quad A \cap \Omega = \Omega \cap A = A \ \text{διὰ κάθε} \ A \subseteq \Omega.$$

Ἐὰν ἡ τομὴ δύο συνόλων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον τότε, καὶ μόνον τότε, τὰ σύνολα καλοῦνται ξένα **μεταξύ των**.

§ 14. Ἡ τομὴ συνόλων καὶ ἡ σύζευξις. —Ἔστωσαν δύο σύνολα A, B ὁριζόμενα διὰ περιγραφῆς καὶ $p(x)$, $q(x)$ ἀντιστοίχως οἱ προτασιακοὶ τύποι μεταβλητῆς x μὲ σύνολον ἀναφορᾶς τὸ Ω, ἤτοι ἔστωσαν :

$$A \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \} \quad \text{καὶ} \quad B \equiv \{ x \in \Omega : q(x) \}.$$

Ἄς σχηματίσωμεν τὸ σύνολον $\Sigma \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \wedge q(x) \}$, δηλαδὴ τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν συγχρόνως ἀληθεῖς προτάσεις τοὺς προτασιακοὺς τύπους $p(x)$, $q(x)$. Προφανῶς τότε τὸ Σ εἶναι ἡ τομὴ τῶν συνόλων A, B. Ὥστε :

$$\mathbf{A \cap B \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \} \cap \{ x \in \Omega : q(x) \} = \{ x \in \Omega : p(x) \wedge q(x) \}}.$$

Παράδειγμα: Ἔστωσαν τὰ σύνολα :

$$A \equiv \{ x \in \mathbf{R} : x^2 - 5x + 6 = 0 \}, \qquad B \equiv \{ x \in \mathbf{R} : x^2 - 9 = 0 \}.$$

Ὁ προτασιακὸς τύπος : «$x^2 - 5x + 6 = 0$» καθίσταται ἀληθὴς πρότασις διὰ $x = 2$ ἢ $x = 3$, ἐξ ἄλλου ὁ προτασιακὸς τύπος : «$x^2 - 9 = 0$» γίνεται ἀληθὴς πρότασις διὰ $x = 3$ ἢ $x = -3$. Τομὴ τῶν συνόλων A καὶ B εἶναι τὸ **μονομελὲς** ἢ **μονοστοιχειακὸν** σύνολον $\{3\}$· συμβολικῶς γράφομεν :

$$\{ x \in \mathbf{R} : x^2 - 5x + 6 = 0 \} \cap \{ x \in \mathbf{R} : x^2 - 9 = 0 \} = \{ x \in \mathbf{R} : (x^2 - 5x + 6 = 0) \wedge (x^2 - 9 = 0) \} = \{3\}.$$

§ 15. Ἕνωσις συνόλων. — Καλεῖται ἕνωσις τοῦ A μὲ τὸ B καὶ συμβολίζεται μὲ $A \cup B$ τὸ κάτωθι σύνολον :

$$\boxed{\mathbf{A \cup B \equiv \{ x \in \Omega : x \in A \vee x \in B \}}}$$

Οὕτως, ἐὰν $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, τότε $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι :

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A \quad \text{καὶ} \quad A \cup \Omega = \Omega \cup A = \Omega \quad \text{διὰ κάθε} \ A \subseteq \Omega,$$

καθὼς καί :

$$\forall x : \ x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B) \quad \text{καὶ} \quad \forall y : \ y \in B \Longrightarrow y \in (A \cup B),$$

ἤτοι : $\quad A \subseteq A \cup B$ καὶ $B \subseteq A \cup B$ διὰ κάθε $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$.

§ 16. Ἡ ἕνωσις συνόλων καὶ ἡ (ἐγκλειστικὴ) διάζευξις. — Ἔστωσαν τὰ σύνολα : $A \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \}$ καὶ $B \equiv \{ x \in \Omega : q(x) \}$. Θεωροῦμεν καὶ τὸ σύνολον $\Sigma \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \vee q(x) \}$, ἤτοι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸν προτασιακὸν τύπον

$p(x)$ εἴτε τὸν $q(x)$ ἀληθῆ πρότασιν καὶ μόνον αὐτάς. Προφανῶς τὸ Σ δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ ἕνωσις τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β. Ὥστε :

$$\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \} \cup \{ x \in \Omega : q(x) \} = \{ x \in \Omega : p(x) \vee q(x) \}.$$

Παράδειγμα :

Ἔστω : $A \equiv \{ x \in \mathbf{R} : 2 < x \leqq 7 \}$, $B \equiv \{ x \in \mathbf{R} : 5 \leqq x \leqq 12 \}$

τότε : $A \cup B \equiv \{ x \in \mathbf{R} : (2 < x \leqq 7) \vee (5 \leqq x \leqq 12) \} = \{ x \in \mathbf{R} : 2 < x \leqq 12 \}$.

§ 17. Διαφορὰ δύο συνόλων (συνολοθεωρητικὴ διαφορά). – Ὡς (συνολοθεωρητικὴν) διαφορὰν τοῦ συνόλου Α πλὴν τὸ Β, συμβολιζομένη μὲ Α – Β, ὁρίζομεν τὸ κάτωθι σύνολον :

$$\boxed{\mathbf{A} - \mathbf{B} \equiv \{ x \in \Omega : x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B} \}}$$

Οὕτως, ἐὰν $A \equiv \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$, $B \equiv \{ \alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \eta \}$, τότε $A - B = \{ \gamma \}$. Ὁμοίως, ἐὰν $A \equiv \mathbf{R}$ ($\equiv$ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν), $B \equiv \mathbf{Q}$ ($\equiv$ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν), τότε $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) ἀριθμῶν.

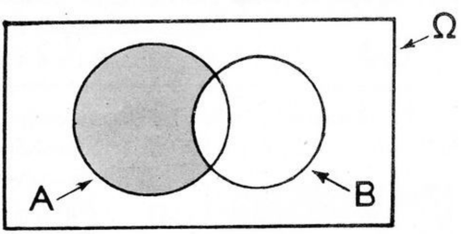
Σχηματικῶς τὸ Α – Β παρίσταται μὲ τὸ ἐσκιασμένον μέρος τοῦ Α εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα τοῦ Venn (σχ. 1).

Ἐὰν τὰ Α καὶ Β ὁρίζωνται διὰ περιγραφῆς (§ 9, β), ἤτοι, ἐὰν

$A \equiv \{ x \in \Omega : p(x) \}$ καὶ

$B \equiv \{ x \in \Omega : q(x) \}$, τότε :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} \{ x \in \Omega : p(x) \wedge \sim q(x) \}^{*)}.$$



Σχ. 1

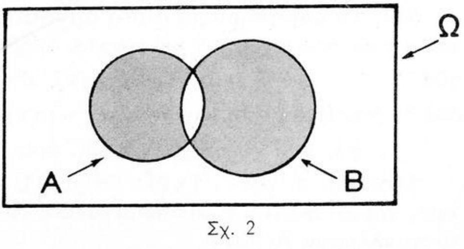
§ 18. Διαζευκτικὸν ἄθροισμα ἢ συμμετρικὴ διαφορὰ δύο συνόλων. Ὡς διαζευκτικὸν ἄθροισμα ἢ συμμετρικὴν διαφοράν, συντόμως **συμμετροδιαφοράν,** δύο συνόλων Α καὶ Β, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου : $A \dotplus B$ καὶ διαβάζομεν : *«Α σὺν Β»* ἢ *«Α κόντρα σὺν Β»*, ὁρίζομεν τὸ κάτωθι σύνολον :

$$\boxed{\mathbf{A} \dotplus \mathbf{B} \equiv \{ x \in \Omega : (x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B}) \vee (x \in \mathbf{B} \wedge x \notin \mathbf{A}) \}}$$

Εἶναι συνεπῶς :

$$\mathbf{A} \dotplus \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A}).$$

Εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα τοῦ Venn παρίσταται ἡ **συμμετρικὴ διαφορὰ** $A \dotplus B$ ἀπὸ τὸ ἐσκιασμένον μέρος τῶν συνόλων Α καὶ Β (σχ. 2).



Σχ. 2

* Τὸ σύμβολον : $\underset{\text{ορσ}}{=\!=}$ σημαίνει, ὅπου συναντᾶται ἐδῶ, « ἴσον ἐξ ὁρισμοῦ ».

§ 19. Τὸ διαζευκτικὸν ἄθροισμα καὶ ἡ ἀποκλειστικὴ διάζευξις.

Ἔστωσαν τὰ σύνολα : $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$· τότε εἶναι :

$$A \dotplus B \equiv \{x \in \Omega : (p(x) \wedge \sim q(x)) \vee (q(x) \wedge \sim p(x))\}.$$

Θεωροῦμεν καὶ τὸ σύνολον $\Sigma \equiv \{(x \in \Omega : p(x) \veebar q(x)\}$, ἤτοι τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἢ μόνον τὸν προτασιακὸν τύπον $p(x)$ ἀληθῆ πρότασιν εἴτε ἢ μόνον τὸν $q(x)$ ἀληθῆ πρότασιν. Προφανῶς τὸ Σ εἶναι ἡ συμμετρικὴ διαφορὰ τῶν δύο συνόλων A, B.

Ὥστε : $\mathbf{A \dotplus B \equiv \{x \in \Omega : p(x)\} \dotplus \{x \in \Omega : q(x)\} = \{x \in \Omega : p(x) \veebar q(x)\}}$.

Σημ. Ἐὰν $A \cap B = \varnothing$, δηλαδὴ τὰ σύνολα A, B εἶναι ξένα μεταξύ των, τότε : $A \dotplus B = A \cup B$.

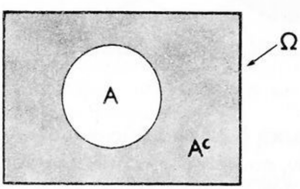
§ 20. Συμπληρωματικὸν σύνολον.

— Ἔστω Ω τὸ βασικὸν σύνολον καὶ A ἓν ὑποσύνολον αὐτοῦ. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Ω, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ A, καλεῖται **συμπληρωματικὸν σύνολον τοῦ A,** ἄλλως **συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς τὸ** (ὑπερσύνολον) $\mathbf{\Omega}$ καὶ συμβολίζεται μέ : A^c , ἢ A', ἢ $\bar{A}$, ἢ $C_\Omega A$.

Ὥστε :

$$\boxed{\mathbf{A^c \underset{\text{ορσ}}{=} \{x \in \Omega : x \notin A\} = \Omega - A.}}$$

Εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα τὸ ὀρθογώνιον μὲ τὴν περίμετρόν του παριστᾷ τὸ βασικὸν σύνολον Ω, ὁ κύκλος τὸ ὑποσύνολον A, τὸ δὲ « ἀπομένον » ἀπὸ τὸ Ω ἐσκιασμένον μέρος τοῦ σχ. 3 παριστᾷ τὸ συμπλήρωμα τοῦ A.



Σχ. 3

Ἰσχύουν προφανῶς αἱ ἑξῆς ἰσότητες :

$$C_\Omega \Omega \equiv \Omega^c = \varnothing \quad \text{καὶ} \quad C_\Omega \varnothing \equiv \varnothing^c = \Omega.$$

Παράδειγμα :

Ἐὰν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ $A = \{2, 4\}$

τότε : $A^c = \{1, 3, 5\}$.

Σημ. Διὰ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί :

$$\forall x,\ x \in A \Longrightarrow x \notin A^c \quad \text{καὶ} \quad \forall x,\ x \in A^c \Longrightarrow x \notin A.$$

§ 21. Τὸ συμπλήρωμα καὶ ἡ ἄρνησις.

— Ἔστω $p(x)$ εἷς προτασιακὸς τύπος μὲ σύνολον ἀναφορᾶς Ω καὶ σύνολον ἀληθείας τὸ A, ἤτοι : $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$,

τότε : $\forall x,\ x \in A \Longleftrightarrow p(x)$ ἀληθὴς πρότασις,

ἄρα ἡ ἄρνησίς της εἶναι ψευδής, ἤτοι $\sim p(x)$ ψευδής. Ἐπὶ πλέον :

$\forall x,\ x \notin A \Longleftrightarrow p(x)$ ψευδής, ἄρα $\sim p(x)$ ἀληθὴς πρότασις.

Οὕτω τὸ σύνολον : $\{x \in \Omega : \sim p(x)\}$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τό : $\sim p(x)$ ἀληθῆ πρότασιν, εἶναι τὸ συμπλήρωμα A^c τοῦ A.

Ὥστε : **Ἐὰν** $\mathbf{A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}}$, **τότε** $\mathbf{A^c \equiv \{x \in \Omega : \sim p(x)\}}$.

Παράδειγμα : Ἐὰν $\Omega \equiv \mathbf{N}$ καὶ $p(x)$: «Ὁ x εἶναι ἄρτιος φυσικὸς ἀριθμός», τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : p(x)\}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τό : $A^c \equiv \{x \in \mathbf{N} : \sim p(x)\}$.

§ 22. Ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν συνόλων.– Βάσει τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν πράξεων :

Α). Τῆς τομῆς.

α_1) $A \cap \Omega = A$, ἤτοι τὸ βασικὸν σύνολον εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως $\cap$.

α_2) $A \cap B = B \cap A$, ἤτοι ἡ πρᾶξις $\cap$ εἶναι *μεταθετική*.

α_3) $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$, ἤτοι ἡ πρᾶξις $\cap$ εἶναι *προσεταιριστική*.

α_4) $A \cap A = A$, ἤτοι ἡ πρᾶξις $\cap$ εἶναι *ἀδύναμος*.

α_5) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.

α_6) Ἰσχύει $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

Β). Τῆς Ἑνώσεως.

β_1) $A \cup B = B \cup A$, ἤτοι ἡ πρᾶξις $\cup$ εἶναι *μεταθετική*.

β_2) $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$, ἤτοι ἡ πρᾶξις $\cup$ εἶναι *προσεταιριστική*.

β_3) $A \cup A = A$, ἤτοι ἡ πρᾶξις $\cup$ εἶναι *ἀδύναμος*.

β_4) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.

β_5) Ἰσχύει : $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

Ἰσχύουν ἐπὶ πλέον αἱ κάτωθι δύο *ἐπιμεριστικαὶ* ἰδιότητες :

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma).$$

Γ). Τῆς διαφορᾶς.

γ_1) $A - B = A \cap B^c$.

γ_2) $A - (A - B) = A \cap B$.

γ_3) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$.

γ_4) $(A - B) \cup B = A \cup B$, ἤτοι ἡ ἕνωσις δὲν εἶναι ἐπιμεριστικὴ ὡς πρὸς τὴν διαφοράν.

γ_5) Ἰσχύει : $A \subseteq B \Longleftrightarrow A - B = \varnothing$.

Δ). Τοῦ διαζευκτικοῦ ἀθροίσματος.

δ_1) $A \dotplus B = B \dotplus A$.

δ_2) $A \dotplus (B \dotplus \Gamma) = (A \dotplus B) \dotplus \Gamma$.

δ_3) $A \dotplus \varnothing = A$, $A \dotplus \Omega = A^c$, $A \dotplus A = \varnothing$, $A \dotplus A^c = \Omega$.

δ_4) $A \cap (B \dotplus \Gamma) = (A \cap B) \dotplus (A \cap \Gamma)$.

δ_5) $A^c \dotplus B^c = A \dotplus B$.

δ_6) $A \cup B = A \dotplus B \dotplus A \cap B$.

Ε). Τοῦ συμπληρώματος.

ε_1) $(A^c)^c = A$ διὰ κάθε $A \subseteq \Omega$.

ε_2) $A \cap A^c = \varnothing$, $A \cup A^c = \Omega$.

ε_3) Ἰσχύει : $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

§ 23. Νόμοι τοῦ De Morgan.— Ἰσχύουν οἱ κάτωθι δύο τύποι :

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ 2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Ἀπόδειξις τοῦ τύπου 1.

α) $\forall x : x \in (A \cap B)^c \Longrightarrow x \notin (A \cap B) \Longrightarrow x \notin A \vee x \notin B$· τοῦτο δηλοῖ ὅτι : $x \in A^c \vee x \in B^c$, ἤτοι $x \in (A^c \cup B^c)$. Ἄρα $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ (1.α)

β) $\forall y : y \in (A^c \cup B^c) \Longrightarrow (y \in A^c) \vee (y \in B^c)$· τοῦτο δηλοῖ :
$(y \notin A) \vee (y \notin B)$, ὅθεν $y \notin (A \cap B) \Longrightarrow y \in (A \cap B)^c$.

Ἄρα: $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. (1.β)

Ἐκ τῶν (1.α) καὶ (1.β) ἕπεται ἀμέσως ὁ τύπος 1.

Ὁ τύπος 2 ἀποδεικνύεται ἤδη εὐκόλως (πῶς ;).

Σημείωσις : Ἡ ἀπόδειξις θὰ ἠδύνατο νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔστω $A \equiv \{x : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x : q(x)\}$, τότε κατὰ τὰς §§ 14, 21 ἔχομεν ἀντιστοίχως $A \cap B \equiv \{x : p(x) \wedge q(x)\}$ καὶ

$$(A \cap B)^c \equiv \{x : \sim (p(x) \wedge q(x))\}.$$

Ἀλλά : $\sim (p(x) \wedge q(x)) \iff \sim p(x) \vee \sim q(x)$ (§ 7, παρδ. 1).

Ἑπομένως :

$$(A \cap B)^c \equiv \{x : \sim (p(x) \wedge q(x))\} = \{x : \sim p(x) \vee \sim q(x)\} =$$
$$= \{x : \sim p(x)\} \cup \{x : \sim q(x)\} = A^c \cup B^c.$$

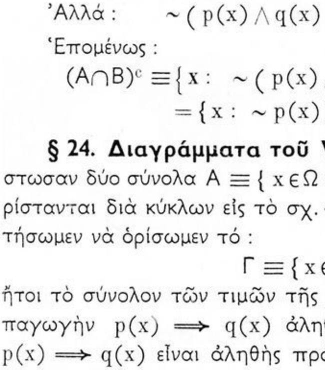
§ 24. Διαγράμματα τοῦ Venn καὶ λογισμὸς τῶν προτάσεων.—Ἔστωσαν δύο σύνολα $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$, τὰ ὁποῖα παρίστανται διὰ κύκλων εἰς τὸ σχ. 4, ὑποσύνολα τοῦ βασικοῦ συνόλου Ω. Θὰ ζητήσωμεν νὰ ὁρίσωμεν τό :

$$\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \Longrightarrow q(x)\},$$

ἤτοι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς x, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὴν συνεπαγωγὴν $p(x) \Longrightarrow q(x)$ ἀληθῆ πρότασιν. Ὡς γνωστὸν ἡ συνεπαγωγὴ $p(x) \Longrightarrow q(x)$ εἶναι ἀληθὴς πρότασις εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις :

1) Ἐὰν p καὶ q εἶναι συγχρόνως ἀληθεῖς προτάσεις.

2) Ἐὰν p ψευδὴς καὶ q ἀληθὴς καὶ 3) Ἐὰν ἀμφότεραι εἶναι ψευδεῖς.



Σχ. 4

Δυνάμει τοῦ ἔναντι σχήματος ὁ προτασιακὸς τύπος p(x) καθίσταται ἀληθὴς πρότασις διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς εἰς τὰς «περιοχὰς» I, II, ὁ δὲ q(x) διὰ τιμὰς τῶν περιοχῶν II, III. Ὁ p(x) καθίσταται ψευδὴς καὶ ὁ q(x) ἀληθὴς πρότασις διὰ τιμὰς τῆς περιοχῆς III. Τέλος καθίστανται ἀμφότεροι ψευδεῖς διὰ τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x εἰς τὴν περιοχὴν IV.

Οὕτω τὸ σύνολον $\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \Longrightarrow q(x)\}$ ἔχει ὡς εἰκόνα, εἰς τὸ σχ. 4, τὰ σημεῖα τῶν περιοχῶν II, III, IV. Ἀλλὰ αἱ περιοχαὶ II, III καὶ IV εἶναι ἀκριβῶς ἡ εἰκὼν τοῦ συνόλου $A^c \cup B$.

Ἄρα : $\Gamma \equiv \{x \in \Omega : p(x) \Longrightarrow q(x)\} = A^c \cup B$.

§ 25. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων. — Ἂς θεωρήσωμεν δύο μὴ κενὰ σύνολα A καὶ B, ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σύνολα σχηματίζεται (ὁρίζεται) ἓν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ πρῶτον παράγοντα τὸ A καὶ δεύτερον τὸ B* καὶ συμβολίζεται μὲ $A \times B$· τὸ νέον τοῦτο σύνολον ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} \equiv \{(\alpha, \beta) : \ \forall\, \alpha \in \mathbf{A} \ \textbf{καὶ} \ \forall\, \beta \in \mathbf{B}\}}$$

Τὸ στοιχεῖον $(\alpha,\beta) \in A \times B$ καλεῖται *ἓν διατεταγμένον ζεῦγος*· ὅθεν τὸ $A \times B$ ὁρίζεται ὡς τὸ σύνολον πάντων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α,β), μὲ $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$.

Τὰ στοιχεῖα α καὶ β τοῦ ζεύγους καλοῦνται ἀντιστοίχως *πρώτη* καὶ *δευτέρα συντεταγμένη (ἢ προβολή)* τοῦ ζεύγους.

Ἡ βασικὴ ἰσότης ὁρίζεται ἐν $A \times B$ ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha,\beta) = (\alpha',\beta') \Longleftrightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{καὶ} \quad \beta = \beta'.$$

Ἐὰν $A = B$, τότε τὸ $A \times A$ συμβολίζεται μὲ A^2.

Τὸ σύνολον Δ τῶν ζευγῶν (α,α) μὲ $\alpha \in A$ καλεῖται *διαγώνιος* τοῦ A^2. Προφανῶς $\Delta \subseteq A^2$.

Ἐὰν $A = \varnothing$ ἢ $B = \varnothing$, τότε ὁρίζομεν : $A \times \varnothing = \varnothing \times B = \varnothing$.

Παράδειγμα: Ἐὰν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha,\beta\}$, τότε :

$$A \times B \equiv \{(1,\alpha), (1,\beta), (2,\alpha), (2,\beta), (3,\alpha), (3,\beta)\} \quad \text{ἐνῶ}$$
$$B \times A \equiv \{(\alpha,1), (\alpha,2), (\alpha,3), (\beta,1), (\beta,2), (\beta,3)\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι : $A \times B \neq B \times A$.

Γενικῶς : **Εἰς τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον δὲν ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ἰδιότης.**

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζεται τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ περισσοτέρους ἀπὸ δύο παράγοντας· π.χ. ἂν A, B, Γ εἶναι μὴ κενὰ ὑποσύνολα τοῦ Ω, ὁρίζομεν ὡς καρτεσιανὸν γινόμενον A ἐπὶ B ἐπὶ Γ καὶ συμβολίζομεν μὲ $A \times B \times \Gamma$ τὸ κάτωθι σύνολον :

$$A \times B \times \Gamma \equiv \{(\alpha,\beta,\gamma) : \quad \alpha \in A, \ \beta \in B \quad \text{καὶ} \quad \gamma \in \Gamma\},$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν *«διατεταγμένων τριάδων»* (α,β,γ) $\forall$ $\alpha \in A$, $\beta \in B$ καὶ $\gamma \in \Gamma$.

Σημείωσις : Θεωροῦμεν τὸ σύνολον **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν *) καὶ σχηματίζομεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον :

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \{(x, y) : \ \forall\, x \in \mathbf{R} \ \text{καὶ} \ \forall\, y \in \mathbf{R}\},$$

ἤτοι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

---

* Τὸ σύνολον **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καλεῖται συχνά: **Εὐθεῖα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** εἴτε ἄλλως **Εὐκλείδειος χῶρος διαστάσεως 1.**

Τὸ $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^2$ καλεῖται, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφρασθῶμεν μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας, Εὐκλείδειον ἐπίπεδον ἢ **Εὐκλείδειος χῶρος διαστάσεως δύο.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Νὰ ὁρισθοῦν καὶ δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ κάτωθι σύνολα :

1) $A \equiv \{x \in \mathbf{N} : x^2 < 50\}$, 2) $B \equiv \{x \in \mathbf{Z} : x$ διαιρέτης τοῦ $24\}$,

3) $\Gamma \equiv \{x \in \mathbf{N} : 5 \leqq x \leqq 29$ τῆς μορφῆς $\nu^2 + 1$ μὲ $\nu \in \mathbf{N}\}$, 4) $\Delta \equiv \{x \in \mathbf{N} : 5 < x < 6\}$.

9. Νὰ ὁρισθοῦν καὶ διὰ περιγραφῆς ἕκαστον τῶν ἀκολούθων συνόλων :

1) $A \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 2) $B \equiv \{1, 4, 9\}$, 3) $\Gamma \equiv \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

4) $\Delta \equiv \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$, 5) $E \equiv \{11, 13, 15, 17, 19\}$, 6) $\Sigma \equiv \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

10. Δίδονται τὰ σύνολα :

$A \equiv \{x \in \mathbf{N} : 3 < x \leqq 7\}$ καὶ $B \equiv \{5, 6, 7, 4\}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $B = A$.

11. Ἐὰν $A \equiv \{x \in \mathbf{R} : 3x = 21\}$ καὶ $y = 7$, εἶναι $y = A$;

12. Ἐὰν $B \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^2 - 25 = 0\}$ καὶ $\Gamma = \{5\}$, εἶναι $\Gamma \subset B$;

13. Δίδεται τὸ σύνολον : $A \equiv \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Ποία ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι ἀληθὴς καὶ ποία ὄχι ; Δικαιολογήσατε τὴν ἀπάντησιν.

1) $\{\alpha\} \in A$, 2) $\alpha \subset A$, 3) $\{\gamma\} \subset A$, 4) $\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$, 5) $\{\varnothing, A, \{\alpha, \beta\}\} \subset A$.

14. Ἐὰν $A \equiv \{1, 2, 3, 4\}$, νὰ ἀναγραφοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$.

15. Τὸ δυναμοσύνολον ἑνὸς συνόλου ἔχει 32 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον ;

16. Ἐὰν Δ_{18} εἶναι τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τῶν 18 καὶ Δ_{42} τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 42, ὁρίσατε τὰ σύνολα $\Delta_{18} \cap \Delta_{42}$ καὶ $\Delta_{18} \cup \Delta_{42}$.

17. Ἐὰν Α, Β, Γ ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω, δείξατε ὅτι :

1) $A \cap (A \cup B) = A$ καὶ $A \cup (A \cap B) = A$, 2) $(A - B) \cap B = \varnothing$,

3) $A \dotplus B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$, 4) $(A - B) \cup (A - B^c) = A$,

5) Ἐὰν $\Gamma \cap A = B \cap A$ καὶ $\Gamma \cup A = B \cup A \Longrightarrow B = \Gamma$,

6) $A - (B \cup \Gamma) = (A - B) \cap (A - \Gamma)$, 7) $(A \cup B) \dotplus (A \cap B) = A \dotplus B$,

8) $A - (B \cap \Gamma) = (A - B) \cup (A - \Gamma)$, 9) $A - (B - A) = A$, 10) $A \dotplus (A \dotplus B) = B$.

18. Δίδεται ὡς βασικὸν σύνολον τὸ $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ ὑποσύνολά του Α, Β, Γ (δι' ἐφαρμογῆς τῶν νόμων τοῦ De Morgan), γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap \Gamma = \{2, 3\}$, $A \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ἀκολούθως νὰ ὁρισθοῦν καὶ τά : $A \cap (A \cup B)$, $\Gamma \cap (A \cup B)$.

19. Δίδονται τὰ σύνολα : $A \equiv \{1, 2, 5\}$, $B = \{2, 4\}$. Νὰ ὁρισθοῦν τά :

1) $A \times B$, 2) $B \times A$, 3) A^2, 4) B^2, 5) $A \times (A \cap B)$.

20. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι τυχόντα ἀντικείμενα, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\gamma, \delta\}, \{\gamma\}\}) \Longrightarrow (\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta).$$

21. Δίδονται διὰ περιγραφῆς τὰ σύνολα :

$A \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 5x^2 + 6x = 0\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \mathbf{R} : x^3 - 3x = x\}$.

Παραστήσατε τὰ κάτωθι σύνολα διὰ περιγραφῆς καὶ ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των :

1) $A \cap B$, 2) $A \cup B$, 3) $A - B$, 4) $B - A$, 5) $A \dotplus B$.

22. Ἐὰν $A \equiv \{x \in \Omega : p(x)\}$ καὶ $B \equiv \{x \in \Omega : q(x)\}$, δείξατε ὅτι τὸ σύνολον τιμῶν ἀληθείας τῆς ἰσοδυναμίας $p(x) \Longleftrightarrow q(x)$ εἶναι τό : $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$, ἤτοι :

$$\{x \in \Omega : p(x) \Longleftrightarrow q(x)\} = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c).$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ἢ ΤΕΛΕΙΑ ΕΠΑΓΩΓΗ

§ 26. Εἰσαγωγή. — Ἂς παρακολουθήσωμεν τὰς ἐκφωνήσεις τῶν κατωτέρω προτάσεων :

1). Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{1}{2}\nu\cdot(\nu+1).$$

2). Ἐὰν $\alpha>-1$, δείξατε ὅτι ἰσχύει : $(1+\alpha)^{\nu}\geqq 1+\nu\alpha$, διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

3). Τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος ν κορυφὰς ἰσοῦται μέ :

$$\frac{\nu(\nu-3)}{2}.$$

4). Διὰ $\nu\in\mathbf{N}$ μὲ $\nu\geqq 4$ νὰ δειχθῇ ὅτι : $\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu}>\nu+1.$

5). Δείξατε ὅτι : $\forall\,\nu\in\mathbf{N}$ ὁ ἀριθμὸς $7^{2\nu}+16\nu-1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 64.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκφωνήσεων παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν μαθηματικαὶ προτάσεις, ἐξαρτώμεναι ἀπὸ ἕνα φυσικὸν ἀριθμὸν ν, τῶν ὁποίων τὴν ἀλήθειαν θέλομεν νὰ δείξωμεν διὰ κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἢ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ ἴσον ἑνὸς δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν_0.

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοιούτων προτάσεων ἐφαρμόζομεν εἰδικὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον γνωστὴν ὡς : **«Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγή».**

Ὥστε : **Μαθηματικὴ ἢ τελεία ἐπαγωγὴ καλεῖται μία γενικὴ μέθοδος ἀποδείξεως, ἡ ὁποία ἐφαρμόζεται προκειμένου ν' ἀποδειχθῇ ὅτι μία πρότασις, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται φυσικὸς ἀριθμὸς ν, ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἢ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu\geqq\nu_0\in\mathbf{N}$.**

Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίαν κατὰ βάσιν ἀρχὴν στηρίζεται ἡ ἐν λόγῳ ἀποδεικτικὴ μέθοδος.

§ 27. Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (ἀξιώματα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν κατὰ Peano*).

Τὸ σύνολον **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται τῇ βοηθείᾳ τῶν κάτωθι ἀξιωμάτων :

Ἀξίωμα I. Ὁ 1 εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, ἤτοι $1\in\mathbf{N}$.

Ἀξίωμα II. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ὑπάρχει εἷς, καὶ μόνον εἷς, «ἑπόμενος» φυσικὸς ἀριθμός, ἤτοι $\forall\,\nu\in\mathbf{N}\Longrightarrow\nu+1\in\mathbf{N}$.

Ἀξίωμα III. Δὲν ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς ν μὲ ἑπόμενον τὸν 1, ἤτοι $\nu+1\neq 1$ (ἀκριβέστερον $\nu+1>1$) $\forall\,\nu\in\mathbf{N}$.

Ἀξίωμα IV. Δύο φυσικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἑπόμενον εἶναι ἴσοι, ἤτοι $\forall\,\nu\in\mathbf{N}$ καὶ $\forall\,\mu\in\mathbf{N}$ μὲ $\nu+1=\mu+1\Longrightarrow\nu=\mu$.

---

* G. Peano (1858 - 1932). Ἰταλὸς μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος.

Ἀξίωμα V. Κάθε σύνολον φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει ὁ 1 καὶ μαζὺ μὲ οἱονδήποτε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἀνήκει εἰς αὐτὸ καὶ ὁ ἑπόμενός του $\nu+1$, συμπίπτει μὲ τὸ σύνολον $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι, ἂν ἓν ὑποσύνολον S τοῦ συνόλου $\mathbf{N}$ πληροῖ τὰς ἑξῆς δύο ἰδιότητας :

$$\left.\begin{array}{ll}(a) & 1\in S \\ (b) & \forall\ \nu\in S \Longrightarrow \nu+1\in S\end{array}\right\} \Longrightarrow S\equiv \mathbf{N}.$$

Τὸ τελευταῖο ἀξίωμα χαρακτηρίζεται καὶ ὡς *«ἀρχὴ τῆς μαθηματικῆς ἢ τελείας (πλήρους) ἐπαγωγῆς»* τῇ βοηθείᾳ τῆς ὁποίας ἀποδεικνύεται τὸ κάτωθι:

§ 28. Θεώρημα (τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).— **Ἐὰν διὰ μίαν πρότασιν p(ν), εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν, εἶναι γνωστὸν ὅτι :**

1) Ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ $\nu=1$, ἤτοι p(1) ἀληθὴς καὶ ἐπὶ πλέον

2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu=k$, ἀποδεικνύεται ὅτι αὔτη ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu=k+1$, ἤτοι p(k+1) ἀληθής, ἂν p(k) ἀληθὴς καὶ τοῦτο διὰ κάθε $k\in\mathbf{N}$, τότε ἡ πρότασις p(ν) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μὲ χρῆσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς διατυποῦται συντόμως οὕτω :

$$\boxed{\{p(1)\wedge[p(k)\ \text{ἀληθὴς}\Longrightarrow p(k+1)]\}\ \text{ἀληθὴς}\Longrightarrow p(\nu)\ \text{ἀληθὴς}\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}}$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω S τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, διὰ τοὺς ὁποίους ἡ $p(\nu)$ εἶναι ἀληθής, ἤτοι ἔστω

$$S\equiv\{\nu\in\mathbf{N}: p(\nu)\}\cdot$$

τὸ σύνολον τοῦτο δὲν εἶναι κενόν, διότι τὸ $1\in S$ ἐφ' ὅσον $p(1)$ ἀληθής. Ἐπὶ πλέον, ἂν $k\in S$, τότε καὶ $k+1\in S$, διότι, ἂν $k\in S$, τότε $p(k)$ ἀληθής, ὅθεν (ὑπόθ. 2) καὶ $p(k+1)$ ἀληθής, συνεπῶς $k+1\in S$. Ὥστε τὸ S ἔχει τὰς ἰδιότητας (a) καὶ (b) τοῦ ἀξιώματος V, συμπίπτει ὅθεν μὲ τὸ σύνολον $\mathbf{N}$. Κατὰ συνέπειαν ἡ (λογικὴ) πρότασις $p(\nu)$ ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

Παρατήρησις: Συμβαίνει πολλάκις μία πρότασις $p(\nu)$ νὰ ἔχῃ νόημα διὰ τιμὰς τοῦ ν μεγαλυτέρας ἢ ἴσας ὡρισμένου φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν_0. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ἰσχύει (προφανῶς) ὑπὸ τὴν ἑξῆς ὅμως διατύπωσιν μὲ χρῆσιν τῶν συμβόλων τῆς λογικῆς :

$$\boxed{\{p(\nu_0)\wedge[p(k)\ \text{ἀληθὴς}\Longrightarrow p(k+1)]\}\ \text{ἀληθὴς}\Longrightarrow p(\nu)\ \text{ἀληθὴς}\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}:\nu\geqq\nu_0}$$

ἤτοι : *Ἐὰν μία πρότασις p(ν) ἀληθεύῃ διὰ $\nu=\nu_0$ καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἀληθεύει διά τινα τιμὴν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν, ἔστω $\nu=k>\nu_0$, ἀποδείξωμεν ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ τὴν τιμὴν $\nu=k+1$, τότε ἡ πρότασις p(ν) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu\geqq\nu_0$.*

Σημείωσις. Εἰς τὸ ἀνωτέρω θεώρημα στηρίζεται ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος τῆς Μαθηματικῆς ἢ τελείας ἐπαγωγῆς. Κατ' αὐτὴν διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν μιᾶς προτάσεως $p(\nu)$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

α). Ἀποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως διὰ $\nu = 1$, (ἐφ' ὅσον διὰ $\nu = 1$ ἔχει νόημα). Ἐὰν διὰ $\nu = 1$ ἡ πρότασις δὲν ἔχῃ νόημα, τὴν ἐπαληθεύομεν διὰ τὸν ἐλάχιστον φυσικὸν ἀριθμὸν ν_0, διὰ τὸν ὁποῖον ἔχει νόημα.

β). Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ $\nu = k$, $k \in \mathbf{N}$, δηλ. $p(k)$ ἀληθής, ἀποδεικνύομεν τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀληθείας τῆς $p(k)$ πιθανῶς δὲ καὶ τοῦ $p(1)$ τὴν ἀλήθειαν τῆς $p(k+1)$.

γ). Συμπεραίνομεν, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (§ 28), ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1η : Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει ἡ ἰσότης :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + \nu = \frac{1}{2}\nu \cdot (\nu + 1). \qquad \text{(i)}$$

Ἀπόδειξις : Ἄς συμβολίσωμεν διὰ τοῦ S τὸ σύνολον τῶν $\nu \in \mathbf{N}$, διὰ τὰ ὁποῖα ἡ (i) ἀληθεύει. Τότε $1 \in S$, διότι ἡ (i) ἀληθεύει διὰ $\nu = 1$, καθ' ὅτι :

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1).$$

Ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁ ἀριθμὸς k ἀνήκει εἰς τὸ S. Τότε ἡ (i) ἀληθεύει δι' αὐτὸν τὸν (φυσικὸν) ἀριθμὸν k· ἤτοι εἶναι :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{1}{2} k \cdot (k+1).$$

Ἐὰν προσθέσωμεν τὸ $k+1$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = (1 + 2 + \ldots + k) + (k+1) =$$

$$= \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{1}{2}(k+1) \cdot [(k+1)+1].$$

Συνεπῶς, ἂν ἡ (i) ἀληθεύῃ διὰ $\nu = k$, τότε ἡ (i) ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu = k+1$, ὅθεν ἂν $k \in S$, τότε $k+1 \in S$. Ἄρα κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἔχομεν $S \equiv \mathbf{N}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ S εἶναι τὸ σύνολον τῶν $\nu \in \mathbf{N}$ διὰ τὰ ὁποῖα ἡ (i) ἀληθεύει, συμπεραίνομεν ὅτι ἡ (i) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

2α : Ἂν $\alpha > -1$ καὶ $\nu \in \mathbf{N}$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(1+\alpha)^\nu \geqq 1 + \nu\alpha \quad \textbf{(ἀνισότης τοῦ Bernoulli).} \qquad \textbf{(ii)}$$

Ἀπόδειξις : α). Διὰ $\nu = 1$ ἰσχύει ὡς ἰσότης, ἐπειδή :

$$(1+\alpha)^1 = 1 + \alpha = 1 + 1 \cdot \alpha.$$

β). Ἔστω ὅτι διὰ $\nu = k$ $(k \in \mathbf{N})$ ἡ ἀνισότης ἀληθεύει, δηλαδὴ ἔστω ὅτι :

$$(1+\alpha)^k \geqq 1 + k\alpha. \qquad (p)$$

Ἐκ τῆς ἀληθείας τῆς (p) θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ἀνισότης (ii) ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k+1$, ἤτοι :

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)\alpha, \qquad (q)$$

δηλαδὴ θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἀλήθειαν τῆς συνεπαγωγῆς $(p) \Longrightarrow (q)$.

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέρη τῆς (p) ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀριθμὸν $(1+\alpha)$ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$(1+\alpha)^{k+1} \geqq (1+k\alpha)(1+\alpha) = 1 + k\alpha^2 + (k+1)\alpha \geqq 1 + (k+1)\alpha,$$

ἤτοι: $$(1+\alpha)^{k+1} \geqq 1 + (k+1)\alpha.$$

Ἄρα ὅταν ἀληθεύῃ ἡ (p), ἀληθεύει καὶ ἡ (q), συνεπῶς ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης (ii) ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

3η: Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu \geqq 4$ νὰ δειχθῇ ὅτι: $$\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu} > \nu + 1. \qquad \text{(iii)}$$

Ἀπόδειξις: Διὰ $\nu = \nu_0 = 4$ ἡ ἀνισότης ἰσχύει, διότι:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > 5 = 4 + 1.$$

Ἔστω ὅτι διὰ $\nu = k$ ($k \in \mathbf{N}$ μὲ $k \geqq 4$) ἡ ἀνισότης (iii) ἰσχύει, ἤτοι:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k > k + 1.$$

Ἐξ αὐτῆς θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀνισότης (iii) ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k+1$, ἤτοι ὅτι:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k+1) + 1.$$

Πράγματι, ἐπειδὴ $$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > \frac{3}{2}(k+1)$$

ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{3}{2}(k+1) > (k+1) + 1 \quad \text{ἢ} \quad \frac{3}{2}(k+1) - (k+1) > 1,$$

δηλαδή: $$k + 1 > 2.$$

Ἡ τελευταία ὅμως ἀνισότης ἰσχύει (διότι $k \geqq 4$). Ὅθεν ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\nu} > \nu + 1$$

ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu \geqq 4$.

Παρατηρήσεις: Πολλάκις, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι μία πρότασις $p(\nu)$ ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν, ἀποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν αὐτῆς δι' ἕνα σημαντικὸν ἀριθμὸν διαδοχικῶν φυσικῶν τιμῶν τοῦ ν, λ.χ. διὰ $\nu = 1, 2, \ldots \nu_0$ καὶ ἀκολούθως συμπεραίνομεν ὅτι αὔτη θὰ ἀληθεύῃ διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ *(ἀτελὴς ἐπαγωγή)*. *Ἡ μέθοδος αὕτη ὁδηγεῖ πολλάκις εἰς ἐσφαλμένα συμπεράσματα καὶ δὲν πρέπει νὰ τὴν μεταχειριζώμεθα.* Ἓν κλασσικὸν παράδειγμα τοιαύτης πλάνης εἶναι ἡ ἑξῆς ψευδὴς πρότασις τοῦ Euler:

«Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμός, τότε ὁ ἀριθμὸς $(\nu^2 - \nu + 41)$ εἶναι πρῶτος».

Ἡ παράστασις $\nu^2 - \nu + 41$ διὰ $\nu = 1, 2, 3, \ldots, 40$ δίδει πρώτους ἀριθμοὺς (μὴ ἔχοντας δηλ. ἄλλον διαιρέτην ἐκτὸς τοῦ ἑαυτοῦ των καὶ τῆς μονάδος), ὅμως διὰ $\nu = 41$ δίδει:

$$\nu^2 - \nu + 41 = 41^2 - 41 + 41 = 41^2,$$

δηλ. ἀριθμὸν μὴ πρῶτον.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ γεγονότος ὅτι ἡ ἔκφρασις $2^{2^\nu}+1$ δίδει διὰ $\nu=1, 2, 3, 4$ πρώτους ἀριθμοὺς δὲν δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ εἰρημένη ἔκφρασις δίδει πρώτους ἀριθμοὺς διὰ πάντας τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, καθ' ὅσον διὰ $\nu=5$ ἡ ἐν λόγῳ ἔκφρασις δίδει σύνθετον ἀριθμόν.

Ἐπίσης δὲν ἀρκεῖ ἡ ἀπόδειξις τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεως διὰ $\nu=k+1$, μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ $\nu=k$. Πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ ἀποδεικνύωμεν τὴν ἀλήθειαν αὐτῆς διὰ $\nu=1$ (ἤ, ἂν δὲν ἔχῃ νόημα διὰ $\nu=1$, ἀποδεικνύομεν τὴν ἀλήθειαν διὰ $\nu=\nu_0$, ἔνθα ν_0 ὁ ἐλάχιστος φυσικὸς ἀριθμός, δι' ὃν ἔχει νόημα ἡ πρότασις). Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὴν ἑξῆς ψευδῆ πρότασιν:

«Διὰ $\nu\in N$ ἰσχύει: $\nu=\nu+17$».

Πράγματι, ἂς παραλείψωμεν νὰ ἐξακριβώσωμεν κατὰ πόσον ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀληθεύει διὰ $\nu=1$.

Ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀληθὴς διὰ $\nu=k$, ἤτοι: $k=k+17$, τότε ἔχομεν

$$k+1=(k+17)+1$$

ἢ

$$k+1=(k+1)+17,$$

δηλ. ἡ πρότασις ἀληθεύει διὰ $\nu=k+1$ μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu=k$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν ὅτι: **εἶναι ἀναγκαῖον ὅπως καὶ αἱ δύο ὑποθέσεις 1) καὶ 2) τοῦ θεωρήματος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς πληροῦνται, ἵνα εἶναι τὸ συμπέρασμα ἀληθές.**

§ 29. Γενικεύσεις τοῦ Θεωρήματος τῆς τελείας Ἐπαγωγῆς. – Ἐκτὸς τῆς μορφῆς τῆς (ἁπλῆς) τελείας ἐπαγωγῆς, τὴν ὁποίαν ἀνεπτύξαμεν προηγουμένως, ὑπάρχουν καὶ δύο ἄλλαι μορφαὶ αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι παρέχονται ὑπὸ τῶν κάτωθι δύο θεωρημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρομεν ἄνευ ἀποδείξεως.

§ 30. Θεώρημα I. – **Ἐὰν $p(\nu)$ εἶναι μία (λογικὴ) πρότασις, εἰς τὴν διατύπωσιν τῆς ὁποίας ἀναφέρεται ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν, ἡ ὁποία πληροῖ τὰς ἑξῆς ὑποθέσεις: 1) «$p(1)$ εἶναι ἀληθής»· 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu\in N$ μὲ $\nu<k$, ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $p(\nu)$ ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu=k$ καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $k\in N$ μὲ $k>1$, τότε: ἡ $p(\nu)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu\in N$.**

Ἐφαρμογή. Νὰ δειχθῇ (διὰ τῆς τελείας ἐπαγωγῆς) ὅτι ἡ ἀνισότης:

$$2^{10\nu}>10^{3\nu} \text{ ἀληθεύει διὰ κάθε } \nu\in N.$$

Ἀπόδειξις: Διὰ $\nu=1$ ἡ ἀνισότης ἀληθεύει, ἤτοι $2^{10}>10^3$.

Ἔστω ὅτι αὕτη ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu<k$ (καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $k\in N$ μὲ $k>1$), ὁπότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις: $\quad 2^{10}>10^3$ καὶ $2^{10(k-1)}>10^{3(k-1)}$,

ἐκ τῶν ὁποίων διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη προκύπτει: $2^{10k}>10^{3k}$, ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ ἀνισότης ἰσχύει καὶ διὰ $\nu=k$· συνεπῶς ἰσχύει $2^{10\nu}>10^{3\nu}$ διὰ κάθε $\nu\in N$.

§ 31. Θεώρημα II. – **Ὑποθέσεις: 1) Ἰσχύει: «ἡ $p(1)$ καὶ $p(2)$ εἶναι ἀληθεῖς», 2) μὲ τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀληθεύουν αἱ $p(k-2)$ καὶ $p(k-1)$ ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ $p(k)$ ἀληθεύει καὶ τοῦτο διὰ τυχὸν $k\in N$ μὲ $k>2$.**

Συμπέρασμα: ἡ $p(\nu)$ ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu\in N$.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει :

$$S_\nu \equiv (3 + \sqrt{5})^\nu + (3 - \sqrt{5})^\nu = \text{πολ. } 2^\nu .$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Διὰ $\nu = 1$ καὶ $\nu = 2$ ἔχομεν ἀντιστοίχως :

$$S_1 = (3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) = 6 = 3 \cdot 2^1$$

$$S_2 = (3 + \sqrt{5})^2 + (3 - \sqrt{5})^2 = 28 = 7 \cdot 2^2.$$

Ἄρα ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = 1$ καὶ $\nu = 2$.

Ἔστω ὅτι αὐτὴ ἰσχύει διὰ $\nu = k - 2,\ k - 1$ (διὰ τυχὸν $k \in \mathbf{N},\ k > 2$), ἤτοι :

$$S_{k-2} \equiv (3 + \sqrt{5})^{k-2} + (3 - \sqrt{5})^{k-2} = \text{πολ} \cdot 2^{k-2} \quad \text{καὶ}$$

$$S_{k-1} \equiv (3 + \sqrt{5})^{k-1} + (3 - \sqrt{5})^{k-1} = \text{πολ} \cdot 2^{k-1}.$$

Θὰ δείξωμεν τότε ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k$.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν μὲ ρίζας $x_1 = 3 + \sqrt{5}$ καὶ $x_2 = 3 - \sqrt{5}$.

Αὕτη εἶναι ἡ $x^2 - 6x + 4 = 0$.

Εὐκόλως τώρα διαπιστοῦται ὅτι :

$$(3 + \sqrt{5})^k + (3 - \sqrt{5})^k \equiv S_k = 6\, S_{k-1} - 4\, S_{k-2}$$

καὶ ἑπομένως :

$$S_k = 6 \cdot \text{πολ } 2^{k-1} - 4 \text{ πολ } 2^{k-2} = \text{πολ} \cdot 2^k ,$$

ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k$.

Ἄρα ἡ πρότασις, δυνάμει τοῦ θεωρήματος ΙΙ, ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Νὰ ἀποδειχθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς Ἐπαγωγῆς αἱ κάτωθι προτάσεις :

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = \dfrac{\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)}{6} \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + \nu)^2 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$
3. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu - 1) = \nu^2 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$
4. $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{\nu(\nu + 1)} = \dfrac{\nu}{\nu + 1} \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$
5. $\dfrac{(\nu + 1)(\nu + 2)\cdots(2\nu)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\nu - 1)} = 2^\nu \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$

24. Διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν, νὰ δειχθῇ ὅτι :

1. Ὁ ἀριθμὸς $7^{2\nu} + 16\,\nu - 1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 64
2. » $3^{4\nu+2} + 2^{6\nu+3}$ » » » 17
3. » $2^{2\nu+1} - 9\nu^2 + 3\nu - 2$ » » » 54.

25. Ἐὰν ν τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθοῦν ἐπαγωγικῶς αἱ ἀνισότητες :

1. $(1 - \alpha)^\nu \geqq 1 - \nu\alpha,$ ὅπου $0 \leqq \alpha \leqq 1$
2. $(1 - \alpha)^\nu < \dfrac{1}{1 + \nu\alpha},$ ὅπου $0 < \alpha \leqq 1$
3. $\left(1 - \dfrac{1}{\nu^2}\right)^\nu \geqq 1 - \dfrac{1}{\nu},$ 4. $\left(1 + \dfrac{1}{6\nu}\right)^{-\nu} > \dfrac{5}{6},$
5. $\dfrac{\nu^2}{2} < 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu < \dfrac{(\nu + 1)^2}{2}.$

26. Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θετικοὶ ἀριθμοί, διάφοροι τοῦ 1, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_\nu) > 2^\nu \sqrt{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_\nu}$$

27. Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}^+$ καὶ $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, δείξατε ὅτι:

1. $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) \geqq 1 + \sigma_\nu \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.
2. $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_\nu) \geqq 1 - \sigma_\nu$, ὅπου ὅμως $0 < \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu < 1$.
3. $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_\nu) < \dfrac{1}{1-\sigma_\nu}$, ὅπου ὅμως $\sigma_\nu < 1$.
4. $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu)\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{1}{\alpha_2} + \cdots + \dfrac{1}{\alpha_\nu}\right) \geqq \nu^2 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

28. Νὰ δειχθῇ (διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς) ὅτι τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος ν—κορυφὰς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$.

29. Νὰ δειχθοῦν (διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς) αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

1. $2^\nu > \nu^3 \quad \forall\ \nu \geqq 10$, 2. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[\nu]{\nu} \quad \forall\ \nu > 3$,
3. $2^{-\mu} < 10^{-\nu}$, διὰ κάθε $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ μὲ: $\mu > \dfrac{10}{3}\nu$,
4. $\dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{\nu}}{\nu} > \dfrac{2}{3}\sqrt{\nu}, \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

30. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2\nu-1)^2 = \dfrac{\nu(4\nu^2-1)}{3}, \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

31. Ὁμοίως $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2\nu-1)^3 = \nu^2(2\nu^2-1), \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

32. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $10^\nu + 3 \cdot 4^{\nu+2} + 5$ διαιρεῖται διὰ 9, $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

33. Ἐὰν θ ἀριθμὸς θετικὸς $\neq 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει ἡ ἀνισότης:

$$\frac{1 + \theta^2 + \theta^4 + \cdots + \theta^{2\nu}}{\theta + \theta^3 + \cdots + \theta^{2\nu-1}} > 1 + \frac{1}{\nu}.$$

34. Ἐὰν $\alpha^2 - \beta^2\gamma = \pi o\lambda \cdot 4$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$ μὲ $\gamma \geqq 0$, τότε δείξατε ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν ἰσχύει:

$$S_\nu \equiv (\alpha + \beta\sqrt{\gamma})^\nu + (\alpha - \beta\sqrt{\gamma})^\nu = \pi o\lambda \cdot 2^\nu.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ι. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 32. Ὁρισμός. – Ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται αὐτὸς οὗτος ὁ ἀριθμός, ἐὰν εἶναι θετικὸς ἢ μηδέν, ὁ ἀντίθετός του, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός.

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α συμβολίζεται μὲ : $|\alpha|$ καὶ ἀναγιγνώσκεται : *«ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ α»* *). Ὡς ἄμεσον συνέπειαν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ ἔχομεν :

$$|\alpha| = \alpha, \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha \geqq 0$$

$$\text{καὶ} \quad |\alpha| = -\alpha, \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha < 0.$$

Οὕτω : $|2| = 2, \quad |0| = 0, \quad \left|-\frac{3}{4}\right| = -\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}.$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι :

$$\forall \quad \alpha \in R \quad \textbf{εἶναι :} \quad |\alpha| \geqq 0.$$

Ἀναλυτικώτερον ἔχομεν :

$$|\alpha| > 0 \iff \alpha \neq 0$$

$$\text{καὶ} \quad |\alpha| = 0 \iff \alpha = 0.$$

Ὅθεν ἡ παράστασις $|\alpha|$ εἶναι **μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός.**
Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ :

Ἀπόλυτος τιμὴ (ἢ μέτρον) ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α καλεῖται ὁ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὁρίζεται οὕτω :

$$\boxed{|\alpha| \underset{\text{ορσ}}{=} \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν} \quad \alpha \geqq 0 \\ -\alpha, & \text{ἐὰν} \quad \alpha < 0 \end{cases}}$$

---

* Τὸ σύμβολον $|\alpha|$ ὡς καὶ ἡ ὀνομασία του, ὀφείλονται εἰς τὸν Γερμανὸν μαθηματικὸν Karl Weierstrass (1815 - 1897).

§ 33. Ἰδιότης Ι. — **Οἱ ἀντίθετοι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν ἴσας ἀπολύτους τιμάς,**

ἤτοι : $$\boxed{\textbf{Ἐὰν} \quad \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow |\alpha| = |-\alpha|}$$

Ἀπόδειξις : Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

(i). Ἐὰν $\alpha > 0$, ὁπότε $-\alpha < 0$, $\Longrightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ $|-\alpha| = -(-\alpha) = \alpha$.

Ὅθεν : $|\alpha| = |-\alpha|$.

(ii). Ἐὰν $\alpha = 0$, ὁπότε καὶ $-\alpha = 0$, $\Longrightarrow |\alpha| = 0$ καὶ $|-\alpha| = 0$.

Ὅθεν : $|\alpha| = |-\alpha|$.

(iii). Ἐὰν $\alpha < 0$, ὁπότε $-\alpha > 0$, $\Longrightarrow |\alpha| = -\alpha$ καὶ $|-\alpha| = -\alpha$.

Ὅθεν καὶ εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν : $|\alpha| = |-\alpha|$.

Ὥστε : $\forall \; \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow |-\alpha| = |\alpha|$.

Πόρισμα. — Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R} \Longrightarrow |\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$.

§ 34. Ἰδιότης ΙΙ. — **Ἐὰν α πραγματικὸς ἀριθμός, τότε :**

$$-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|.$$

Ἀπόδειξις : Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

(i). Ἐὰν $\alpha \geqq 0 \Longrightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ ἑπομένως : $-|\alpha| \leqq \alpha = |\alpha|$.

Ὅθεν καί : $-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$.

(ii). Ἐὰν $\alpha < 0 \Longrightarrow |\alpha| = -\alpha$ καὶ ἑπομένως : $-|\alpha| = \alpha < |\alpha|$.

Ὅθεν καί : $-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$.

Οὐδέποτε εἶναι : $-|\alpha| < \alpha < |\alpha|$.

Ὥστε : $$\boxed{\forall \; \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow -|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|}$$

Παρατήρησις : Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἕπεται ἀμέσως :

$$\forall \; x \in \mathbf{R} \Longrightarrow |x| + x \geqq 0 \quad \text{καὶ} \quad |x| - x \geqq 0.$$

§ 35. Ἰδιότης ΙΙΙ. — **Τὸ τετράγωνον τῆς ἀπολύτου τιμῆς ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου,** ἤτοι ἰσχύει :

$$\boxed{\forall \; \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow |\alpha|^2 = \alpha^2}$$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν $\alpha \geqq 0 \Longrightarrow |\alpha| = \alpha$ καὶ ἄρα $|\alpha|^2 = \alpha^2$.

Ἐὰν $\alpha < 0 \Longrightarrow |\alpha| = -\alpha$ καὶ συνεπῶς $|\alpha|^2 = (-\alpha)^2 = \alpha^2$.

Ὥστε : $\forall \; \alpha \in \mathbf{R} \Longrightarrow |\alpha|^2 = \alpha^2$.

Σπουδαία παρατήρησις. Ἐὰν $\alpha \notin \mathbf{R} \Longrightarrow |\alpha|^2 \neq \alpha^2$.

Οὕτως, ἐὰν $\alpha \in \mathbf{C}$, δηλαδὴ $\alpha = x + iy$, $(y \neq 0) \Longrightarrow |\alpha|^2 \neq \alpha^2$ (διατί ;).

Κατὰ ταῦτα ἡ ἰσότης $|\alpha|^2 = \alpha^2$ συνεπάγεται τὸ πραγματικὸν τοῦ α καὶ τὸ διάφορον $|\alpha|^2 \neq \alpha^2$ συνεπάγεται ὅτι ὁ α εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda + \mu i$, συμβολικῶς (λ, μ), ὅπου $\lambda, \mu \in R$ καὶ $\mu \neq 0$.

Πόρισμα 1ον. – **Γενικώτερον ἰσχύουν τὰ κάτωθι :**

$$\forall\ x \in R,\ \nu \in N \Longrightarrow \begin{cases} |x|^{2\nu} = x^{2\nu} \\ |x|^{2\nu+1} = \begin{cases} x^{2\nu+1}, & \text{ἐὰν } x \geqq 0 \\ -x^{2\nu+1}, & \text{ἐὰν } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

Πόρισμα 2ον. – **Ἐὰν $\alpha \in R$ καὶ $\nu \in N \Longrightarrow \sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$.**

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{ἐὰν } x > 0 \\ -x, & \text{ἐὰν } x < 0 \\ 0, & \text{ἐὰν } x = 0. \end{cases}$$

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις δυνάμεθα ὅθεν νὰ γράφωμεν : $\sqrt{x^2} = |x|$.

§ 36. Ἰδιότης IV.— **Διὰ κάθε ζεῦγος (ε, x) πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $\varepsilon > 0$, ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :**

$$|x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon.$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι ἰσχύει: $|x| \leqq \varepsilon \Longrightarrow |x|^2 \leqq \varepsilon^2$ ἢ κατὰ τὴν ἰδιότητα III : $x^2 \leqq \varepsilon^2$ ἢ $x^2 - \varepsilon^2 \leqq 0$ ἢ $(x-\varepsilon)(x+\varepsilon) \leqq 0$.

Αὕτη, κατὰ τὰ γνωστά, ἀληθεύει διά : $-\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$.

Ὥστε : $|x| \leqq \varepsilon \Longrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon$.

Ἀντιστρόφως : Ἔστω τώρα ὅτι ἰσχύει :

$$-\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon \Longrightarrow (x+\varepsilon) \geqq 0 \wedge (x-\varepsilon) \leqq 0,$$

ἄρα $(x+\varepsilon)(x-\varepsilon) \leqq 0$ ἢ $x^2 - \varepsilon^2 \leqq 0$ ἢ $x^2 \leqq \varepsilon^2$, τότε συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα 2 τῆς προηγουμένης ἰδιότητος, ἐπειδὴ καὶ $\varepsilon > 0$, ἔχομεν : $|x| \leqq \varepsilon$.

Ὥστε : $-\varepsilon \leqq x \leqq +\varepsilon \Longrightarrow |x| \leqq \varepsilon$.

Ἄρα : $\boxed{\forall\ (\varepsilon, x) \in R^+ \times R :\ |x| \leqq \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon \leqq x \leqq \varepsilon}$

Παρατήρησις: Ὁμοίως ἀποδεικνύονται αἱ λογικαὶ ἰσοδυναμίαι :

1η. $-\varepsilon < x < \varepsilon \Longleftrightarrow |x| < \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$

2α. $(x < -\varepsilon$ ἢ $x > \varepsilon) \Longleftrightarrow |x| > \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$.

Ἐφαρμογαί. 1η : Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία :

$$2 \leqq x \leqq 8 \Longleftrightarrow |x-5| \leqq 3.$$

Πράγματι, ἐκ τῶν $2 \leqq x \leqq 8 \Longleftrightarrow -3 \leqq x - 5 \leqq 3 \Longleftrightarrow |x-5| \leqq 3$.

2α : Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ (λογικὴ) ἰσοδυναμία :

$$|x - x_0| < \varepsilon \Longleftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon.$$

Πράγματι : $|x - x_0| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Longleftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

Ἀπόλυτος τιμὴ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 37. Ἰδιότης V.—**Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων,**

ἤτοι : $\boxed{|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|}$

Ἀπόδειξις : Πράγματι, ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων (ἰδιότης II) :

$$-|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$$
$$-|\beta| \leqq \beta \leqq |\beta|$$

διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$-(|\alpha|+|\beta|) \leqq \alpha+\beta \leqq (|\alpha|+|\beta|)$$

καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ἔχομεν :

$$|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|. \tag{5.1}$$

Παρατήρησις : Ἡ ἰσότης ἀληθεύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν : $\alpha\beta \geqq 0$ (διατί ;).

Ὅθεν μία πολὺ χρήσιμος πρότασις εἶναι ἡ ἑξῆς :

$$|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta| \iff \alpha\beta \geqq 0. \tag{5.2}$$

Πόρισμα 1ον.—**Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν των,**

ἤτοι : $\boxed{|\alpha-\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|}$ (5.3)

Πράγματι, ἐὰν εἰς τὴν (5.1) θέσωμεν ἀντὶ β τὸ $-\beta$, θὰ ἔχωμεν :

$$|\alpha-\beta| \leqq |\alpha|+|-\beta| = |\alpha|+|\beta|.$$

Τὸ ἴσον ἰσχύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν : $\alpha\beta \leqq 0$ (διατί ;).

Ὅθεν ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$|\alpha-\beta| = |\alpha|+|\beta| \iff \alpha\beta \leqq 0. \tag{5.4}$$

Πόρισμα 2ον.—**Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}$, τότε διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μὲ $\nu \geqq 2$ ἰσχύει :**

$$\boxed{|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu| \leqq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots+|\alpha_\nu|}$$

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος διὰ τῆς μαθηματικῆς (τελείας) ἐπαγωγῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ $\nu=2$ ἰσχύει (§ 37).

Ἐφαρμογή : Ἐὰν $|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ καὶ $|\beta| < \frac{\varepsilon}{2} \implies |\alpha \pm \beta| < \varepsilon$.

Πράγματι, δι' ἐφαρμογῆς τῶν (5.1) καὶ (5.3) ἔχομεν :

$$|\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha|+|\beta| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ἄρα : $|\alpha \pm \beta| < \varepsilon.$

§ 38. Ἰδιότης VI. – **Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἱανδήποτε τάξιν,**

ἤτοι : $$\boxed{\forall\ \alpha, \beta \in R \ \Big|\ \Longrightarrow |\alpha - \beta| \geqq |\alpha| - |\beta| \ \text{καὶ}\ |\alpha - \beta| \geqq |\beta| - |\alpha|}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Ἐπειδὴ $\alpha = \alpha + \beta - \beta = \beta + (\alpha - \beta)$, ἔχομεν κατὰ τὴν ἰδιότητα V :

$$|\alpha| = |\beta + (\alpha - \beta)| \leqq |\beta| + |\alpha - \beta|, \text{ ἐξ οὗ : } |\alpha - \beta| \geqq |\alpha| - |\beta|. \quad (6.1)$$

Ὁμοίως : $\beta = \beta + \alpha - \alpha = \alpha + (\beta - \alpha)$. Ἄρα :

$$|\beta| = |\alpha + (\beta - \alpha)| \leqq |\alpha| + |\beta - \alpha| = |\alpha| + |\alpha - \beta|, \quad \text{ἐξ οὗ :}$$
$$|\alpha - \beta| \geqq |\beta| - |\alpha|. \quad (6.2)$$

Πόρισμα. – **Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ' οἱανδήποτε τάξιν,**

ἤτοι : $$\boxed{\forall\ \alpha, \beta \in R \ \Big|\ \Longrightarrow |\alpha + \beta| \geqq |\alpha| - |\beta| \ \text{καὶ}\ |\alpha + \beta| \geqq |\beta| - |\alpha|} \quad (6.3)$$

Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὰς (6.1) καὶ (6.2) νὰ τεθῇ ἀντὶ β τὸ $-\beta$.

§ 39. Ἰδιότης VII. – **Διὰ κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει :**

$$\boxed{\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta|}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἐκ τῶν (6.1), (6.2) καὶ (6.3) ἔχομεν :

ἀφ' ἑνός : $$|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha \pm \beta| \quad (7.1)$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου : $$|\beta| - |\alpha| \leqq |\alpha \pm \beta| \quad \text{ἢ} \quad -|\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha| - |\beta|. \quad (7.2)$$

Ἐκ τῶν (7.1) καὶ (7.2) συνάγομεν τὴν διπλῆν ἀνισότητα :

$$-|\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha \pm \beta|$$

ἡ ὁποία, κατὰ τὴν ἰδιότητα IV, γράφεται :

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta|. \quad (7.3)$$

Κατ' ἀκολουθίαν, βάσει καὶ τῆς ἰδιότητος V, θὰ εἶναι :

$$\boxed{\forall\ \alpha, \beta \in R \ \Big|\ \Longrightarrow \big||\alpha| - |\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|} \quad (7.4)$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀποδειχθέντων εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους, μετὰ τῶν ἀντιστοίχων πορισμάτων, συνάγομεν ὅτι :

$$\boxed{\forall\ \alpha, \beta \in R \ \Big|\ \Longrightarrow |\alpha| - |\beta| \leqq \big||\alpha| - |\beta|\big| \leqq |\alpha \pm \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|} \quad (7.5)$$

Ἄ σ κ η σ ι ς. Ἐξετάσατε πότε εἰς τὰς σχέσεις (7.5) ἰσχύει τὸ ἴσον.

Ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 40. Ἰδιότης VIII. – **Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.**

Ἤτοι :
$$\boxed{|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|}$$

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (§ 35, πόρισμα 2ον) ἰσχύει :
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Ἄρα :
$$|\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^2} = |\alpha| \cdot |\beta|. \tag{8.1}$$

Πόρισμα 1ον.–**Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{R}$, τότε διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ μὲ $\nu \geqq 2$ ἰσχύει :**
$$\boxed{|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \ldots \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot |\alpha_3| \ldots |\alpha_{\nu-1}| \cdot |\alpha_\nu|} \tag{8.2}$$

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι διὰ $\nu = 2$ ἰσχύει (§ 40).

Πόρισμα 2ον. – **Ἐὰν $\alpha \in \mathbf{R}$ καὶ $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει πάντοτε :**
$$\boxed{|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu}$$

Προφανῶς, ἀρκεῖ εἰς τὴν (8.2) νὰ τεθῇ : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = \alpha_\nu = \alpha$.

Ἀπόλυτος τιμὴ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν.

§ 41. Ἰδιότης IX. – **Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.**

Ἤτοι :
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \text{ἔνθα} \quad \beta \neq 0.$$

Ἀπόδειξις. Προφανῶς, ἔχομεν : $\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \beta$ (ὑποτίθεται $\beta \neq 0$)

καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν ἰδιότητα VIII θὰ εἶναι :
$$|\alpha| = \left|\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \cdot |\beta|, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|.$$

Ὥστε :
$$\boxed{\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R},\ \beta \neq 0 \ \Big|\ \Longrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}}$$

Πόρισμα. – **Διὰ κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μὲ $\alpha \neq 0$ καὶ $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει :**
$$|\alpha^{\mathbf{k}}| = |\alpha|^{\mathbf{k}}.$$

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων.

Παράδειγμα 1ον: Ἐὰν $\alpha < \beta$ δείξατε ὅτι ἡ παράστασις:

$$A \equiv \big|\, |\alpha - x| + |\beta - x| \,\big|$$

διατηρεῖ σταθερὰν τιμήν, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται μεταξὺ τῶν α καὶ β, δηλαδὴ $\alpha < x < \beta$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\alpha < x < \beta$ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - x < 0 \\ \beta - x > 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} |\alpha - x| = x - \alpha \\ |\beta - x| = \beta - x \end{array}\right| \Longrightarrow A \equiv |x - \alpha + \beta - x| = |\beta - \alpha| = \beta - \alpha,$$

δηλ. ἡ παράστασις A εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x, ἐφ' ὅσον βεβαίως $\alpha < x < \beta$.

Παρατήρησις: Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ ὅταν $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Τί συμβαίνει διὰ $x < \alpha$ ἢ $x > \beta$;

Παράδειγμα 2ον: Ἐὰν $\alpha, \beta \in R$, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία:

$$\big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big| = |\alpha + \beta| \iff \alpha\beta < 0.$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τῆς ἰσότητος $\big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big| = |\alpha + \beta|$ λαμβάνομεν τήν:

$$\left(\big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big|\right)^2 = (|\alpha + \beta|)^2 \quad \text{ἢ} \quad (|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2$$

ἢ $\alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ἢ $|\alpha\beta| = -\alpha\beta$. Ἄρα: $\alpha\beta < 0$, καθόσον, ἐὰν ἦτο $\alpha\beta \geqq 0$, θὰ ἦτο, ἐξ ὁρισμοῦ, $|\alpha\beta| = \alpha\beta$.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν $\alpha\beta < 0 \Longrightarrow |\alpha\beta| = -\alpha\beta$ ἢ $|\alpha||\beta| = -\alpha\beta$

ἢ $\quad -2|\alpha||\beta| = 2\alpha\beta$ ἢ $\alpha^2 - 2|\alpha||\beta| + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

ἢ $\quad |\alpha|^2 - 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2 = (\alpha + \beta)^2$ ἢ $(|\alpha| - |\beta|)^2 = (\alpha + \beta)^2$.

Ὅθεν: $$\big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big| = |\alpha + \beta|.$$

Παράδειγμα 3ον: Ἐὰν $x \in R$ μέ: $-2 \leqq x \leqq 3$, δείξατε ὅτι:

$$|x^2 + 4x - 2| \leqq 23.$$

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν (Πορ. 2ον, § 37).

$$|x^2 + 4x - 2| \leqq |x|^2 + 4|x| + 2.$$

Τώρα ἐκ τῶν $-2 \leqq x \leqq 3 \Longrightarrow -3 \leqq x \leqq 3 \Longrightarrow |x| \leqq 3$, ἐξ ἧς: $x^2 \leqq 9$.

Συνεπῶς: $$|x^2 + 4x - 2| \leqq 9 + 12 + 2 = 23.$$

Παράδειγμα 4ον: Ἐὰν $\alpha, \beta \in R$ καὶ $\alpha^2 \neq \beta^2$, δείξατε ὅτι:

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{\big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big|} + \frac{\big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big|}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leqq 3.$$

Λύσις: Προφανῶς, ἡ $\alpha^2 \neq \beta^2$ δίδει: $|\alpha| \neq |\beta|$, ὅθεν καὶ $\alpha \neq \beta$. Ἐκ τῆς (7.5) § 39 ἔχομεν:

$$|\alpha| - |\beta| \leqq \big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big|, \quad \big|\, |\alpha| - |\beta| \,\big| \leqq |\alpha - \beta| \quad \text{καὶ} \quad |\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|.$$

Ὅθεν : $\dfrac{|\alpha|-|\beta|}{\big||\alpha|-|\beta|\big|} \leqq 1, \quad \dfrac{\big||\alpha|-|\beta|\big|}{|\alpha-\beta|} \leqq 1, \quad \dfrac{|\alpha+\beta|}{|\alpha|+|\beta|} \leqq 1$

καὶ ἐξ αὐτῶν, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{|\alpha|-|\beta|}{\big||\alpha|-|\beta|\big|}+\frac{\big||\alpha|-|\beta|\big|}{|\alpha-\beta|}+\frac{|\alpha+\beta|}{|\alpha|+|\beta|} \leqq 3.$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 5ον : Ἐὰν $\alpha, \beta \in R$, $\alpha\beta \neq 0$, δείξατε ὅτι αἱ ἀνισότητες :

$$\left|\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right|<1, \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<1, \quad \left|\frac{\alpha\beta+2\alpha^2}{\alpha\beta+2\beta^2}\right|<1$$

εἶναι λογικῶς ἰσοδύναμοι, δηλαδὴ ἡ ἀλήθεια τῆς μιᾶς συνεπάγεται τὴν ἀλήθειαν τῶν ὑπολοίπων.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : i). Ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ πρώτη. Τότε ἔχομεν :

$$\left|\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right|^2<1 \;\text{ ἢ }\; 4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2<\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2 \;\text{ ἢ }\; 3\alpha^2<3\beta^2 \;\text{ ἢ }\; \alpha^2<\beta^2,$$

ἐξ οὗ : $|\alpha|<|\beta|$ καὶ ἐπειδὴ $|\beta|>0$, ἔπεται $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}<1$ ἢ $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$, ἤτοι, ἰσχυούσης τῆς πρώτης, ἰσχύει καὶ ἡ δευτέρα.

Ἤδη, ἐκ τῶν δύο πρώτων, διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{|2\alpha+\beta|}{|\alpha+2\beta|}\cdot\frac{|\alpha|}{|\beta|}<1 \;\text{ ἢ }\; \left|\frac{2\alpha^2+\alpha\beta}{\alpha\beta+2\beta^2}\right|<1.$$

(ii). Ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ δευτέρα. Τότε ἀκολουθοῦντες ἀντίθετον πορείαν φθάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας εἰς τὴν πρώτην. Ἀκριβέστερον ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<1 \;\text{ ἢ }\; \alpha^2<\beta^2 \;\text{ ἢ }\; 3\alpha^2<3\beta^2 \;\text{ ἢ }\; 4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2<\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2$$

ἢ $(2\alpha+\beta)^2<(\alpha+2\beta)^2$ ἢ $\left(\dfrac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right)^2<1$, καὶ κατὰ τὴν § 35, πορ. 2ον,

ἔχομεν : $$\left|\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right|<1.$$

Ἐντεῦθεν, ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$, διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν τρίτην.

(iii). Τέλος ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ τρίτη. Τότε ἔχομεν :

$$\left|\frac{\alpha(\beta+2\alpha)}{\beta(\alpha+2\beta)}\right|<1 \;\text{ ἢ }\; \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\cdot\left|\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right|<1.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἀνισότητος ἔπεται ὅτι θὰ ἰσχύῃ ἡ μία τοὐλάχιστον τῶν ἀνισοτήτων :

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|<1 \;\text{ ἢ }\; \left|\frac{2\alpha+\beta}{\alpha+2\beta}\right|<1.$$

Ἰσχυούσης δὲ τῆς μίας τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων, ἰσχύει, ὡς ἐδείχθη εἰς τὰς περιπτώσεις (i) καὶ (ii) καὶ ἡ ἄλλη.

Θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω καὶ δύο εἰδικὰ παραδείγματα· προσέξατε τὴν ἀπόδειξιν :

Παράδειγμα 6ον : Διὰ τοῦ συμβόλου max(α, β), ἀντιστοίχως min(α, β), συμβολίζομεν τὸν μέγιστον (maximum), **ἀντιστοίχως** τὸν ἐλάχιστον (minimum), ἐκ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν **α, β,** τοὺς ὁποίους ὁρίζομεν οὕτω :

$$\boxed{\max(\alpha,\beta)\equiv\begin{cases}\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha\geqq\beta\\ \beta, & \text{ἐὰν } \beta>\alpha\end{cases}}\quad , \quad \boxed{\min(\alpha,\beta)\equiv\begin{cases}\alpha, & \text{ἐὰν } \alpha<\beta\\ \beta, & \text{ἐὰν } \beta\leqq\alpha\end{cases}}$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναλυτικὴ ἔκφρασις τῶν max(α, β) καὶ min(α, β) συναρτήσει τῶν α καὶ β καὶ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Λύσις : I. Ἐὰν $\alpha\geqq\beta$ ἔχομεν :

$$\max(\alpha,\beta)=\alpha=\frac{\alpha+\beta+(\alpha-\beta)}{2}=\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta+|\beta-\alpha|}{2}$$

$$\min(\alpha,\beta)=\beta=\frac{\alpha+\beta-(\alpha-\beta)}{2}=\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta-|\beta-\alpha|}{2}.$$

II. Ἐὰν $\alpha<\beta$ ἔχομεν :

$$\max(\alpha,\beta)=\beta=\frac{\alpha+\beta+(\beta-\alpha)}{2}=\frac{\alpha+\beta+|\beta-\alpha|}{2}=\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}$$

$$\min(\alpha,\beta)=\alpha=\frac{\alpha+\beta-(\beta-\alpha)}{2}=\frac{\alpha+\beta-|\beta-\alpha|}{2}=\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}.$$

Παράδειγμα 7ον : Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2+\xi x+\eta$ καὶ ἰσχύουν : $|\xi|=2\eta$ καὶ $\eta>1$,

νὰ δειχθῇ ὅτι : $$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\geqq 2.$$

Ἀπόδειξις : Ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου εἶναι :

$$\xi^2-4\eta=4\eta^2-4\eta=4\eta(\eta-1)>0, \quad \text{διότι } \eta>1,$$

ἄρα τὸ τριώνυμον ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, διὰ τὰς ὁποίας θὰ ἔχωμεν :

$$\rho_1+\rho_2=-\xi \tag{1}$$
$$\rho_1\cdot\rho_2=\eta. \tag{2}$$

Διὰ διαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=-\frac{\xi}{\eta}. \tag{3}$$

Ἐκ τῆς (3), ἂν λάβωμεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, ἔχομεν :

$$\left|\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}\right|=\left|-\frac{\xi}{\eta}\right| \quad \text{ἢ} \quad \frac{|\rho_1+\rho_2|}{|\rho_1\rho_2|}=\frac{|\xi|}{|\eta|}=\frac{|\xi|}{\eta}, \quad \text{διότι } \eta>0.$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $|\xi|=2\eta$, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{|\rho_1+\rho_2|}{|\rho_1|\cdot|\rho_2|}=\frac{|\xi|}{\eta}=\frac{2\eta}{\eta}=2. \tag{4}$$

Ἀλλά, (ἰδιότης V, § 37) : $|\rho_1|+|\rho_2| \geqq |\rho_1+\rho_2|$ ὁπότε, λόγῳ καὶ τῆς (4), ἔχομεν :

$$\frac{|\rho_1|+|\rho_2|}{|\rho_1|\cdot|\rho_2|} \geqq \frac{|\rho_1+\rho_2|}{|\rho_1|\cdot|\rho_2|} = 2,$$

ἢ

$$\frac{1}{|\rho_1|}+\frac{1}{|\rho_2|} \geqq 2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσοδυναμίαι :

1. $\big||\alpha|-|\beta|\big| = |\alpha-\beta| \iff \alpha\beta \geqq 0,$
2. $\alpha|\beta|-\beta|\alpha| = 0 \iff |\alpha+\beta| \geqq |\alpha-\beta|.$

36. Εὕρετε τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας εἶναι :

1) $|x| < 3{,}2$, 2) $|x| > 1{,}8$ καὶ $|x| \leqq 5$.

37. Ἐὰν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, νὰ εὑρεθῇ πότε ἡ παράστασις :

$$A \equiv |\alpha-x|+|\beta-x|+|\gamma-x|+|\delta-x|$$

διατηρεῖ σταθερὰν τιμήν.

38. Δίδεται ἡ συνάρτησις f μὲ τύπον :

$$f(x) = \frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ἐὰν } |x|<1 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ἐὰν } |x|>1. \end{cases}$$

39. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ μὲ $\alpha\beta\gamma \neq 0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{|\alpha|+|\beta|}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{|\beta|+|\gamma|}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{|\gamma|+|\alpha|} \geqq |\alpha+\beta+\gamma|.$$

40. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἡ παράστασις :

$$y \equiv \sqrt[\nu]{\frac{x}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2}}{x}}+\sqrt[2\nu]{2-|x|+2x^2-|x|^3}, \qquad (\nu = \text{φυσικὸς ἀριθμὸς} > 1).$$

41. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι : $\alpha|\beta|+\beta|\alpha| \leqq \alpha\beta+|\alpha\beta|$. Πότε ἰσχύει τὸ = ;

42. Ἐὰν $x, y \in \mathbf{R}$ μὲ $x<0$ καὶ $y = |5-3x|-2|x|$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $|x|-|y| \leqq 5$.

43. Ἐὰν $x, y \in \mathbf{R}-\{0\}$ καὶ ἰσχύει :

$$\frac{\big|x|y|+y|x|\big|}{|xy|} = 2,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ x καὶ y εἶναι ὁμόσημοι.

44. Ἐὰν $x, y \in \mathbf{R}$, $x \neq \pm y$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\dfrac{|x|}{|x+y|}+\dfrac{|y|}{|x-y|} \geqq 1.$

45. Ἐὰν $x, y \in \mathbf{R}$ καὶ $2x+y+4=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $|x|+|y| \geqq 2$.

46. Ἐὰν $\alpha<\beta<\gamma<\delta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $|\beta-\gamma| < |\alpha-\delta|$.

47. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως $x^2+\gamma x+\delta = 0$ πληροῦν τὰς σχέσεις :

$$|1+\gamma+\delta| = |1-\gamma+\delta| \quad \text{καὶ} \quad |\gamma| > 1+|\delta|,$$

δείξατε ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

48. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ μὲ $\gamma \neq 0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ σχέσεις:

$$|\beta-\delta| < |\alpha-\gamma| \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad |\gamma| < |\beta| \quad (2)$$

συνεπάγονται τήν:

$$\left|\frac{\delta}{\beta}\right| - \left|\frac{\alpha}{\gamma}\right| < 2.$$

49. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ καὶ $|\alpha| > 1$, δείξατε ὅτι ἡ ἰσότης: $\beta = \dfrac{\alpha}{1-|\alpha|}$

συνεπάγεται τάς:

$$|\beta| > 1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = \frac{\beta}{1-|\beta|}.$$

50. Ἐὰν $x, y, z \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι:

$$|x+y-z| + |y+z-x| + |z+x-y| \geqq |x| + |y| + |z|.$$

51. Δείξατε ὅτι: $\max(0,2x) - \min(0,2x) = 2|x|$.

52. Δείξατε ὅτι ἐξ ἑκάστης τῶν σχέσεων:

$$\left|\frac{2x+3y}{3y+2x}\right| < 1, \quad \left|\frac{y}{x}\right| < 1, \quad \left|\frac{2xy+3y^2}{3xy+2x^2}\right| < 1 \quad (x,\ y \in \mathbf{R},\ x \neq 0)$$

ἕπονται αἱ ἄλλαι δύο.

53. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leqq \dfrac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \dfrac{|\beta|}{1+|\beta|}$.

54. Ἐὰν οἱ $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbf{R}$, εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ πληροῦν τὰς σχέσεις:

$$\alpha = \frac{x}{1+|x|+|y|+|z|}, \quad \beta = \frac{y}{1+|x|+|y|+|z|}, \quad \gamma = \frac{z}{1+|x|+|y|+|z|}$$

νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x, y, z συναρτήσει τῶν α, β, γ.

55. Ἐὰν $x \in \mathbf{R}$ καὶ $|2x+9| = 3|x+2|$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $|x|$.

56. Διὰ πᾶν ζεῦγος τιμῶν τῶν x, y ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$|x^2-3y+1| = |3y-x^2-1|.$$

57. Ἐὰν $x, y \in \mathbf{R}$ καὶ $y\sqrt{x^2} - x\sqrt{y^2} + x|x| - y|y| = 0$, δείξατε ὅτι: $|x| = |y|$.

58. Ἐὰν $\alpha^2 = \beta\gamma$ καὶ $2|\beta+\gamma| + |\gamma| > 6 + \beta\gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι:

$$|\gamma| < 2, \quad |\beta| > 3 \quad \text{ἤ} \quad |\gamma| > 2, \quad |\beta| < 3.$$

59. Ἐὰν $|x| > |y|$, δείξατε ὅτι:

$$\frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|y|}{|x-y|} + \frac{|x|}{|x|-|y|} - \frac{|y|}{\big||x|-|y|\big|} \geqq 2.$$

60. Ἐὰν $\gamma > 1$, $|\beta| = 2\gamma$, δείξατε ὅτι αἱ ρίζαι x_1, x_2 τῆς ἐξισώσεως $x^2 - \beta x + \gamma = 0$

πληροῦν τὴν σχέσιν:

$$\frac{1}{|x_1|} + \frac{1}{|x_2|} = 2.$$

61. Ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leqq \sqrt{|\alpha-\beta|}.$$

62. Ἐὰν $x \neq y$, δείξατε ὅτι:

$$|\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+y^2}| < |x-y|.$$

63. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ καὶ $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) \neq 0$, δείξατε ὅτι:

$$\frac{|\alpha|}{|\beta+\gamma|} + \frac{|\beta|}{|\gamma+\alpha|} + \frac{|\gamma|}{|\alpha+\beta|} \geqq \frac{3}{2}.$$

64. Μεταξὺ ποίων ὁρίων μεταβάλλεται ὁ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$, ὅταν διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α, β ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης : $\left|\frac{\alpha+2\beta}{2\alpha+\beta}\right|<1$.

65. Ἐὰν ξ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$|\xi|<\frac{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|}{|\alpha|}.$$

66. Ἐὰν $\frac{|x|+1}{x-1}=\frac{y-1}{|y|+1}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $xy=0$, $(x, y \in \mathbf{R})$.

67. Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν: $x^2-2\alpha x+\beta=0$ μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ρίζας ρ_1, ρ_2. Ἐὰν $|\rho_2|\leqq|\rho_1|$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $|\alpha|+\sqrt{\alpha^2+|\beta|}\leqq(1+\sqrt{2})\cdot|\rho_1|$.

68. Ἐὰν $|y-\varphi|<|x-\omega|$ καὶ $|\omega|<|\varphi|$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left|\frac{y}{\varphi}\right|-\left|\frac{x}{\omega}\right|<3, \quad (\text{ὑποτίθεται: } \omega, \varphi\neq 0).$$

69. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta xy-\gamma y^2=0$. Ἐὰν μεταξὺ τῶν ριζῶν x_1, x_2 καὶ τῶν συντελεστῶν αὐτῆς ὑφίστανται αἱ σχέσεις :

$$\frac{|x_1+x_2|}{|x_1+x_2|+|x_1x_2|}=|\alpha|, \qquad 1-|\alpha|=\frac{2}{|\beta|}, \qquad \alpha\gamma=-6,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$y=\pm\frac{1}{3}.$$

70. Ἐὰν ξ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^4+\alpha x^2+\beta=0$ καὶ εἶναι $|\xi|<1$, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε :

$$\left|\alpha\xi^2+\frac{\beta}{2}\right|<|\xi|^2+\left|\frac{\beta}{2}\right|.$$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑΣ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ R.

Θὰ ἐκθέσωμεν κατωτέρω τὸν τρόπον ἐπιλύσεως, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$, μερικῶν μορφῶν ἐξισώσεων, εἰς τὰς ὁποίας ὑπεισέρχονται ἀπόλυτοι τιμαὶ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς ἀγνώστων.

§ 42. I. Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x|+\beta=0$, μὲ $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$ καὶ $\alpha\neq 0$.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

α'). Ἔστω $x>0$, τότε (ἐξ ὁρισμοῦ) ἔχομεν $|x|=x$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται :

$$\alpha x+\beta=0, \quad \text{ἐξ οὗ : } x=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x θὰ εἶναι δεκτή, ἐὰν ἱκανοποιῇ τὴν $x>0$. Δηλαδή :

$$-\frac{\beta}{\alpha}>0. \tag{1}$$

Ἐνταῦθα, ἐὰν $\alpha\beta>0$, δηλ. ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, ἡ (1) δὲν ἀληθεύει καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν.

Ἐὰν ὅμως $\alpha\beta<0$, δηλ. οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ (1) ἀληθεύει καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν, τὴν $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

β'). Ἔστω $x < 0$, τότε $|x| = -x$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται :

$$-\alpha x + \beta = 0, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad x = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x θὰ εἶναι δεκτή, ἐὰν πληροῖ τὴν $x < 0$. Δηλαδή :

$$\frac{\beta}{\alpha} < 0. \qquad (2)$$

Ἡ (2), προφανῶς, ἀληθεύει διὰ $\alpha\beta < 0$.

Ὥστε, ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x| + \beta = 0$ εἶναι **ἀδύνατος,** ἢ ἄλλως **ἐστερημένη λύσεως** ὡς πρὸς x, ὅταν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχει δὲ αὕτη λύσεις $x = -\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x = \frac{\beta}{\alpha}$, ὅταν οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x| + \beta = 0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν :

$$x^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

γ'). Ἐὰν $\beta = 0$, ἔχομεν $\alpha|x| = 0$, καὶ συνεπῶς $|x| = 0$, ἐξ οὗ $x = 0$.

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $\alpha\|x\| + \beta = 0$	
$\alpha\beta > 0$	$\alpha\|x\| + \beta = 0$ **ἀδύνατος**
$\alpha\beta < 0$	$\alpha\|x\| + \beta = 0 \Longrightarrow x = \pm \frac{\beta}{\alpha}$
$\beta = 0$	$\alpha\|x\| + \beta = 0 \Longrightarrow x = 0.$

Παραδείγματα : 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $2|x| - 3 = 0$.

Λύσις : Ἔχομεν, ἐν προκειμένῳ, $\alpha = 2$, $\beta = -3$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha\beta = -6 < 0$ ἡ ἐξίσωσις $2|x| - 3 = 0$ ἔχει τὰς λύσεις : $x = \pm \frac{3}{2}$.

2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $4|x| = -7$.

Λύσις : Ἡ ἐξίσωσις γράφεται $4|x| + 7 = 0$. Ἐνταῦθα εἶναι $\alpha = 4$, $\beta = 7$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha\beta = 28 > 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ἀδύνατος**.

§ 43. II. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως τῆς μορφῆς : $\alpha|x| + \beta x + \gamma = 0$ (1), μὲ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $x > 0$, ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ $|x| = x$ καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται :

$$\alpha x + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{ἢ} \quad (\alpha + \beta)\, x = -\gamma. \qquad (2)$$

Ἐὰν $\alpha + \beta \neq 0$, ἡ (2) δίδει : $x = -\frac{\gamma}{\alpha + \beta}$.

Διὰ νὰ εἶναι δεκτὴ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x, πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν $x>0$. Δηλαδὴ πρέπει:

$$-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta}<0 \quad \text{ἢ} \quad \gamma(\alpha+\beta)<0.$$

Ἐὰν $\alpha+\beta=0$, ἡ (2) γίνεται $0x=-\gamma$. Ἐπειδὴ δὲ $\gamma\neq 0$, αὕτη εἶναι ἀδύνατος. Συνεπῶς καὶ ἡ (1) εἶναι **ἀδύνατος**.

β'). Ἐὰν $x<0$, τότε $|x|=-x$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$-\alpha x+\beta x+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad (\beta-\alpha)x=-\gamma \quad \text{ἢ} \quad (\alpha-\beta)x=\gamma. \qquad (3)$$

Ἐὰν $\alpha-\beta\neq 0$, ἡ (3) δίδει: $x=\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$.

Διὰ νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x δεκτή, πρέπει νὰ ἱκανοποιῇ τὴν $x<0$.

Δηλαδή: $\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}<0$, ἐξ οὗ: $\gamma(\alpha-\beta)<0$.

Ἐὰν $\alpha-\beta=0$, δηλ. $\alpha=\beta$, ἡ (3) εἶναι ἀδύνατος, ἐφ' ὅσον $\gamma\neq 0$. Κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ (1) εἶναι **ἀδύνατος**.

γ'). Ἐὰν $x=0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\gamma=0$ καὶ ἐφ' ὅσον $\gamma\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι **ἀδύνατος**.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $\alpha\lvert x\rvert+\beta x+\gamma=0$	
$\alpha+\beta\neq 0$ $\gamma(\alpha+\beta)<0$	$\alpha\lvert x\rvert+\beta x+\gamma=0 \Longrightarrow x=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$
$\alpha+\beta=0$	**ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύτατος.**
$\alpha-\beta\neq 0$ $\gamma(\alpha-\beta)<0$	$\alpha\lvert x\rvert+\beta x+\gamma=0 \Longrightarrow x=\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}$
$\alpha-\beta=0$	**ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.**

Σημείωσις: Διὰ $\beta=0$ ἔχομεν τὴν μορφὴν I (§ 42).

Ἄσκησις: Ἐξετάσατε τὰς κάτωθι ἰδιαιτέρας περιπτώσεις:

(i). $\beta=1$, $\gamma=0$, **(ii).** $\alpha=\pm 1$, $\beta=1$, $\gamma=0$.

Παραδείγματα: 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $3|x|+2x-4=0$.

Λύσις: Λαμβάνοντες τὰς ἐκφράσεις $\alpha+\beta$, $\gamma(\alpha+\beta)$, παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\alpha+\beta=3+2=5\neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma(\alpha+\beta)=-4\times 5=-20<0.$$

Πληροῦνται ὅθεν αἱ συνθῆκαι τῆς περιπτώσεως α') καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπιδέχεται ὡς λύσιν τήν: $x=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=\dfrac{4}{5}$.

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha-\beta=3-2=1\neq 0$ καὶ $\gamma(\alpha-\beta)=-4\times 1=-4<0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπιδέχεται ὡς (ἀρνητικὴν) ρίζαν τήν :

$$x = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} = \frac{-4}{1} = -4.$$

2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $|x| + x + 2 = 0.$ **(ε)**

Λύσις: Ἔστω $x > 0$, τότε $|x| = x$ καὶ ἡ (ε) γίνεται :

$$x + x + 2 = 0 \quad \text{ἤ} \quad 2x = -2, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x = -1.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ὑπετέθη $x > 0$, ἡ τιμὴ $x = -1$ ἀπορρίπτεται.

Ἔστω τώρα $x < 0$, τότε $|x| = -x$ καὶ ἡ (ε) δίδει : $-x + x + 2 = 0$, δηλ. $2 = 0$ (ἀδύνατος).

Διὰ $x = 0$ ἡ (ε) δίδει ἐπίσης $2 = 0$ (ἀδύνατος).

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις $|x| + x + 2 = 0$ **δὲν ἔχει λύσιν.**

Τοῦτο ἄλλωστε τὸ ἀνεμέναμεν, διότι ἐν προκειμένῳ ἔχομεν $\alpha = 1$, $\beta = 1$, ὁπότε : $\alpha - \beta = 1 - 1 = 0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἐξίσωσις (ε) εἶναι **ἀδύνατος**.

§ 44. III. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως τῆς μορφῆς : $\alpha x^2 + \beta|x| + \gamma = 0$ (1), ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ καὶ $\alpha \neq 0$.

Ἐπειδὴ διὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$ εἶναι : $x^2 = |x|^2$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται : $\alpha|x|^2 + \beta|x| + \gamma = 0$, ἡ ὁποία εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς $|x|$.

Ἐὰν θέσωμεν $|x| = y$, ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0 \\ \qquad\qquad |x| = y, \end{cases}$$

ὑπὸ τὸν ὅρον ὅτι **μόνον** αἱ (πραγματικαὶ) μὴ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ὡς πρὸς y μᾶς παρέχουν τὰς ρίζας τῆς δοθείσης. Ἑπομένως ἡ (1) θὰ ἔχῃ λύσιν, ἐφ' ὅσον ἔχει, τοὐλάχιστον, μίαν ρίζαν πραγματικὴν μὴ ἀρνητικὴν ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0. \qquad (2)$$

Ἀναλυτικώτερον διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

1η : Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, ἡ (2) ἔχει ρίζας μιγαδικὰς καὶ συνεπῶς ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

2α: Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, ἡ (2) ἔχει τὴν διπλῆν ρίζαν $y = -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ συνεπῶς :

(i). Ἐὰν $\frac{-\beta}{2\alpha} > 0$, δηλ. $\alpha\beta < 0$, τότε ἡ (1) θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας τάς :

$$x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

(ii). Ἐὰν $\frac{-\beta}{2\alpha} < 0$, δηλ. $\alpha\beta > 0$, τότε ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

3η : Ἐὰν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ἡ (2) ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, ὁπότε :

(i). Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι θετικαὶ καὶ ἐὰν καλέσωμεν αὐτὰς y_1 καὶ y_2, τότε ἡ (1) θὰ ἔχῃ ὡς λύσεις, τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων $|x| = y_1$ καὶ $|x| = y_2$, ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν $x = \pm y_1$ καὶ

$x = \pm y_2$, ἤτοι ἡ (1) θὰ ἔχῃ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην 4 ρίζας, τάς:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = -y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_4 = -y_2.$$

(ii). Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$ καὶ $-\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$, ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι ἀρνητικαί, ὁπότε ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει (ἐν $\mathbf{R}$).

(iii). Ἐὰν $\dfrac{\gamma}{\alpha} < 0$, ἡ (2) ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους, ἔστω τὰς $y_1 < 0 < y_2$, ὁπότε ἡ (1) θὰ ἔχῃ ὡς λύσεις, τὰς λύσεις τῆς $|x| = y_2$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν:

$$x_1 = y_2, \quad x_2 = -y_2.$$

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα:

Πίναξ διερευνήσεως τῆς : $\alpha x^2 + \beta\|x\| + \gamma = 0$ (1)			
$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$	**ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος ἐντὸς τοῦ R.**		
$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$	$-\dfrac{\beta}{2\alpha} > 0$		$\alpha x^2 + \beta\|x\| + \gamma = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\beta}{2\alpha}$
	$-\dfrac{\beta}{2\alpha} < 0$		**ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.**
$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$	$\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$	$-\dfrac{\beta}{\alpha} > 0$	**ἡ** $\alpha x^2 + \beta\|x\| + \gamma = 0$ **ἔχει 4 ρίζας.**
	$\dfrac{\gamma}{\alpha} > 0$	$-\dfrac{\beta}{\alpha} < 0$	**ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος.**
	$\dfrac{\gamma}{\alpha} < 0$		**ἡ** $\alpha x^2 + \beta\|x\| + \gamma = 0$ **ἔχει 2 ρίζας.**

Μερικὴ περίπτωσις: Ἐὰν $\gamma = 0$, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$\alpha|x|^2 + \beta|x| = 0$ ἢ $|x| \cdot (\alpha|x| + \beta) = 0$, ὁπότε:

ἢ $|x| = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας $x = 0$·

ἢ $\alpha|x| + \beta = 0$, ἡ ὁποία ἔχει ἤδη μελετηθῆ εἰς τὴν § 42.

Παραδείγματα: 1ον: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ R, ἡ ἐξίσωσις:

$$\mathbf{x^2 - 5|x| + 6 = 0.}$$

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται: $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$. (1)

Θέτομεν $|x| = y$ $(y > 0)$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $y_1 = 2$ καὶ $y_2 = 3$. Ἄρα $|x| = 2$ καὶ $|x| = 3$, ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν: $x = \pm 2$ καὶ $x = \pm 3$.

Ὥστε, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = -3.$$

2ον : Να ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $x^2 - 4|x| - 12 = 0$. (2)

Λύσις: Ἐπειδὴ εἶναι $x^2 = |x|^2$, θέτοντες $|x| = y$ ($y > 0$) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$y^2 - 4y - 12 = 0,$$

ἀπὸ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν $y = 6$ καὶ $y = -2$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$|x| = 6 \quad (3) \qquad \text{καὶ} \qquad |x| = -2 \quad (4)$$

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν : $x = \pm 6$.

Ἡ (4) εἶναι ἀδύνατος.

Ἑπομένως, αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι : $x_1 = 6$ καὶ $x_2 = -6$.

Παρατήρησις: Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ R, ἐξισώσεων τῆς μορφῆς : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma|x| + \delta = 0$.

Παράδειγμα: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $x^2 - 3x + 2|x| - 6 = 0$. (1)

Λύσις: Διὰ $x = 0$ ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

Ἔστω $x > 0$, τότε $|x| = x$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$ ἢ $x^2 - x - 6 = 0$, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τάς : $x = 3$ καὶ $x = -2$. Ἐξ αὐτῶν δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ θετική.

Ἔστω τώρα $x < 0$, τότε $|x| = -x$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$x^2 - 3x - 2x - 6 = 0 \quad \text{ἢ} \quad x^2 - 5x - 6 = 0.$$

Αὕτη ἔχει ρίζας τάς : $x = 6$ καὶ $x = -1$.

Ἐξ αὐτῶν δεκτὴ εἶναι μόνον ἡ $x = -1$, ὡς πληροῦσα τὴν συνθήκην : $x < 0$.

Ὥστε, αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι : $x = 3$ καὶ $x = -1$.

§ 45. IV. Ἐπίλυσις ἐξισώσεως τῆς μορφῆς : $|A(x)| + |B(x)| + \ldots + |P(x)| + Q(x) = 0$ (1), ὅπου $A(x)$, $B(x)$, ..., $P(x)$, $Q(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς. — Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (1) ἐξετάζομεν τὰ πρόσημα τῶν $A(x)$, $B(x)$, ..., $P(x)$, ἤτοι τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται **ἐντὸς** τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς, διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x καὶ βάσει τῶν προσήμων τούτων ἐξαλείφομεν τὰ ἀπόλυτα, δηλαδὴ ἀντικαθιστῶμεν τὰς παραστάσεις μὲ ἀπολύτους τιμάς, διὰ τῶν ἴσων των, κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἄνευ ἀπολύτων, εὑρίσκοντες οὕτως εἰς ἕκαστον διάστημα τιμῶν τοῦ x καὶ μίαν, ἄνευ ἀπολύτων τιμῶν, ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν πρὸς τὴν (1). Αἱ λύσεις τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐφ' ὅσον εὑρίσκονται ἑκάστοτε εἰς τὸ ἀντίστοιχον διάστημα μεταβολῆς τοῦ x, εἶναι δεκταὶ ὡς λύσεις διὰ τὴν (1), ἄλλως ἀπορρίπτονται.

Παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (IV) πρὸς πλήρη κατανόησιν τοῦ θέματος.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ R, ἡ ἐξίσωσις :

$$-2x + |x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| = -5. \qquad (1)$$

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$|x| - 3|x - 2| + 5|x + 1| - 2x + 5 = 0. \qquad (2)$$

Αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν ἑκάστην παράστασιν εὑρισκομένην ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς εἶναι κατὰ σειράν : $x = 0$, $x = 2$, $x = -1$.

Τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x τοποθετοῦμεν ἐπὶ ἄξονος κατὰ τάξιν αὔξοντος μεγέθους, ὡς κάτωθι φαίνεται :

$$-\infty \qquad\qquad -1 \quad 0 \quad 2 \qquad\qquad +\infty$$

Διακρίνομεν ἤδη τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

α΄). Ἐὰν $-\infty < x < -1$, τότε θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{r} x+1<0 \\ x<0 \\ x-2<0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} |x+1|=-x-1 \\ |x|=-x \\ |x-2|=-x+2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα:} \\ \left.\begin{array}{r} -x-3(-x+2)+5(-x-1)-2x+5=0 \\ x<-1 \end{array}\right\} (\Sigma_1). \end{array}$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει: $x=-\dfrac{6}{5}$ (δεκτή), ὡς πληροῦσα τήν: $x<-1$.

β΄). Ἐὰν $-1 \leqq x < 0$, θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{r} x+1\geqq 0 \\ x<0 \\ x-2<0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} |x+1|=x+1 \\ |x|=-x \\ |x-2|=-x+2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα:} \\ \left.\begin{array}{r} -x-3(-x+2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ -1\leqq x<0. \end{array}\right\} (\Sigma_2). \end{array}$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x=-\dfrac{4}{5}$ (δεκτή), ὡς πληροῦσα τήν :

$$-1 \leqq x < 0.$$

γ΄). Ἐὰν $0 \leqq x < 2$, τότε :

$$\left.\begin{array}{r} x+1>0 \\ x\geqq 0 \\ x-2<0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} |x+1|=x+1 \\ |x|=x \\ |x-2|=-x+2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα:} \\ \left.\begin{array}{r} x-3(-x+2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ 0\leqq x<2. \end{array}\right\} (\Sigma_3). \end{array}$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x=-\dfrac{4}{7}$ (ἀπορρίπτεται), ὡς μὴ πληροῦσα τήν : $0 \leqq x < 2$.

δ΄). Ἐὰν $2 \leqq x < +\infty$, θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{r} x+1>0 \\ x>0 \\ x-2\geqq 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} |x+1|=x+1 \\ |x|=x \\ |x-2|=x-2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{καὶ ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα:} \\ \left.\begin{array}{r} x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0 \\ 2\leqq x. \end{array}\right\} (\Sigma_4). \end{array}$$

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος δίδει : $x=-16$ (ἀπορρίπτεται), ὡς μὴ πληροῦσα τήν : $2 \leqq x < +\infty$.

Ὥστε, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι : $x=-\dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$ καὶ $x=-\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.

Παρατήρησις: Πρὸς ταχυτέραν εὕρεσιν τῶν πραγματικῶν λύσεων τῆς (1) σχηματίζομεν τὸν εἰς τὴν ἑπομένην σελίδα πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς παραστάσεων εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ x, καθὼς ἐπίσης ἀναγράφομεν καὶ τὰς ἀντιστοίχους εἰς αὐτὰ ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν (1) ἐξισώσεις :

x	x−2	x	x+1	$\lvert x\rvert-3\lvert x-2\rvert+5\lvert x+1\rvert-2x+5=0$	Συμπεράσματα
$-\infty$					
	−	−	−	$-x+3(x-2)-5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-\frac{6}{5}\in(-\infty,-1)$, δεκτή.
-1			0		
	−	−	+	$-x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-\frac{4}{5}\in[-1,0)$, δεκτή.
0		0			
	−	+	+	$+x+3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-\frac{4}{5}\notin[0,2)$, ἀπορριπτ.
2	0				
$+\infty$	+	+	+	$x-3(x-2)+5(x+1)-2x+5=0$	$\Longrightarrow x=-16\notin[2,+\infty)$, ἀπορρ.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$\lvert x^2-5x+6\rvert-2\lvert x-1\rvert+2x-3=0.$$

Λύσις : Θέτομεν :

$A\equiv x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, τότε:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
A		+		−		+	

καὶ $B\equiv x-1$, τότε:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
B		−		+	

Ἤδη σχηματίζομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

x	A	B	$\lvert x^2-5x+6\rvert-2\lvert x-1\rvert+2x-3=0$	Συμπεράσματα
$-\infty$	+	−	$x^2-5x+6+2(x-1)+2x-3=0$	Ρίζαι μιγαδικαὶ (ἀπορρίπτονται).
1		0		
	+	+	$x^2-5x+6-2(x-1)+2x-3=0$	$\Longrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, δεκτὴ μόνον ἡ : $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\in[1,2]$.
2	0			
	−	+	$-(x^2-5x+6)-2(x-1)+2x-3=0$	Ρίζαι μιγαδικαὶ (ἀπορρίπτονται).
3	0			
$+\infty$	+	+	$x^2-5x+6-2(x-1)+2x-3=0$	$\Longrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$, δεκτὴ μόνον ἡ : $x=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\in[3,+\infty)$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος καθίσταται φανερὸν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ὡς μόνας πραγματικὰς ρίζας ἔχει τάς: $\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2}$.

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\Big\lvert 2x-\lvert 2x-1\rvert\Big\rvert=-\lambda^2x. \qquad (1)$$

Λύσις : Ἐπειδὴ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1) θὰ πρέπει νὰ εἶναι $x\leqq 0$. Τούτου τεθέντος, ἕπεται ὅτι :

$2x\leqq 0$ ἢ $2x-1\leqq -1$ ἢ $2x-1<0$, ἄρα $\lvert 2x-1\rvert=-2x+1$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$\lvert 2x-(1-2x)\rvert=-\lambda^2x \quad \text{ἢ} \quad \lvert 4x-1\rvert=-\lambda^2x. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ $x \leqq 0$, ἕπεται $4x-1<0$, ἄρα $|4x-1| = 1-4x$ καὶ ἡ (2) γίνεται:

$$1-4x = -\lambda^2 x.$$

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} 1-4x=-\lambda^2 x \\ x \leqq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{r} (4-\lambda^2)\,x=1 \\ x \leqq 0 \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν $\lambda = \pm 2$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (3) γίνεται: $0 \cdot x = 1$, καὶ εἶναι ἀδύνατος, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ἄρα καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι **ἀδύνατος**.

β'). Ἐὰν $\lambda \neq \pm 2$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ συστήματος (3) δίδει:

$$x = \frac{1}{4-\lambda^2}.$$

Ἡ τιμὴ αὕτη πρέπει νὰ πληροῖ τὴν $x \leqq 0$. Δηλαδὴ πρέπει:

$$\frac{1}{4-\lambda^2} \leqq 0 \;\text{ἢ}\; 4-\lambda^2 \leqq 0 \;\text{ἢ}\; \lambda^2 \geqq 4 \;\text{ἢ}\; \lambda^2-4 \geqq 0 \;\text{ἢ}\; (\lambda+2)(\lambda-2) \geqq 0.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι: $\lambda \leqq -2$ καὶ $\lambda \geqq 2$. Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $\lambda \neq \pm 2$, ἕπεται ὅτι: $\lambda < -2$ καὶ $\lambda > 2$.

Ὥστε, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) ἔχει λύσιν μόνον, ὅταν:

$$\boldsymbol{\lambda < -2} \text{ καὶ } \boldsymbol{\lambda > 2}.$$

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 46. Διὰ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$, ἀνισώσεων μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, ἐργαζόμεθα ἑκάστοτε κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς τὸν τρόπον ἐπιλύσεως ἐξισώσεων τῆς ἀντιστοίχου μορφῆς, ὡς ἐξετέθησαν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους (§§ 42, 43, 44, 45).

Ὅπως εἰς τὰς ἐξισώσεις μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου, οὕτω καὶ εἰς τὰς ἀνισώσεις εὑρίσκομεν εἰς ἕκαστον διάστημα μεταβολῆς τοῦ ἀγνώστου καὶ μίαν, ἄνευ ἀπολύτων τιμῶν, ἰσοδύναμον ἀνίσωσιν πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Αἱ τομαὶ τῶν διαστημάτων (λύσεων) ἑκάστης ἰσοδυνάμου ἀνισώσεως μετὰ τοῦ ἀντιστοίχου διαστήματος τιμῶν τοῦ ἀγνώστου, ἀποτελοῦν τὰς λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ θέματος παραθέτομεν κατωτέρω μερικὰ παραδείγματα ἐπιλύσεως ἀνισώσεων διαφόρων μορφῶν.

Παράδειγμα 1ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις: $\dfrac{|x|-5}{3} > \dfrac{x-8}{4}$ **(1)**

Λύσις: α). Ἐὰν $x \geqq 0$, τότε $|x| = x$ καὶ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-5}{3} - \dfrac{x-8}{4} > 0 \\ x \geqq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} x > -4 \\ x \geqq 0 \end{array}\right\} \text{συμβιβασταί.}$$

Ἄρα: $x \geqq 0.$ (2)

β). Ἐὰν $x<0$, τότε $|x|=-x$ καὶ ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{-x-5}{3}-\dfrac{x-8}{4}>0\\ x<0\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{r}-7x>-4\\ x<0\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{r}x<\dfrac{4}{7}\\ x<0\end{array}\right\}\text{ συμβιβασταί.}$$

Ἄρα : $$x<0. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι ἡ (1) ἀληθεύει διὰ κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Παράδειγμα 2ον : Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἡ παράστασις : $\sqrt{3x^2-10|x|+3}$. (1)

Λύσις : Διὰ νὰ ἔχῃ νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἡ παράστασις πρέπει :

$$3x^2-10|x|+3\geqq 0, \quad \text{ἢ ἐπειδὴ } x^2=|x|^2$$

$$3|x|^2-10|x|+3\geqq 0. \qquad (2)$$

Θέτοντες $|x|=y\ (y\geqq 0)$, ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν (2) σύστημα :

$$\left.\begin{array}{r}3y^2-10y+3\geqq 0\\ y\geqq 0\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{array}{r}3(y-3)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)\geqq 0\\ y\geqq 0.\end{array}$$

Τὸ ὡς ἄνω σύστημα πληροῦται διά : $y\geqq 3$ καὶ $0\leqq y\leqq\dfrac{1}{3}$.

Τότε ὅμως ἔχομεν :

$$|x|\geqq 3 \quad \text{καὶ} \quad |x|\leqq\frac{1}{3}.$$

Ἡ πρώτη γράφεται : $x^2\geqq 9$ ἢ $x^2-9\geqq 0$ ἢ $(x-3)(x+3)\geqq 0$ καὶ ἀληθεύει διά : $x\leqq -3$ καὶ $x\geqq 3$.

Ἡ δευτέρα, ὡς γνωστὸν (§ 36), εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν : $-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$.

Ὅθεν, ἡ παράστασις $\sqrt{3x^2-10|x|+3}$ ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τὰς ἑξῆς τιμὰς τοῦ x :

$$-\infty<x\leqq-3, \qquad -\frac{1}{3}\leqq x\leqq\frac{1}{3}, \qquad 3\leqq x<+\infty.$$

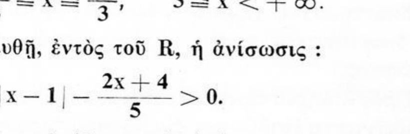
Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ R, ἡ ἀνίσωσις :

$$|x+1|-2|x|+|x-1|-\frac{2x+4}{5}>0. \qquad (1)$$

Λύσις : Ἐργαζόμεθα κατὰ τρόπον ἀνάλογον μὲ τὸν ἐκτεθέντα εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον :

Αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὰς παραστάσεις τὰς ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς, εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς : $x=-1,\ 0,\ 1$.

Θέτομεν : $\left.\begin{array}{l}A\equiv x+1\\ B\equiv x\\ \Gamma\equiv x-1\end{array}\right\}\Longrightarrow$



Καταρτίζομεν ἀκολούθως τὸν κατωτέρω πίνακα, εἰς τὸν ὁποῖον σημειοῦμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς παραστάσεων εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τῶν τιμῶν τοῦ x, ὡς ταῦτα καθορίζονται ὑπὸ τῶν εἰς τὴν προηγουμένην σελίδα πινακίων, καθὼς ἐπίσης ἀναγράφομεν καὶ τὰς ἀντιστοίχους, εἰς τὰ ἑκάστοτε διαστήματα τιμῶν τοῦ x, ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν (1) ἀνισώσεις.

x	A	B	Γ	$\lvert x+1\rvert-2\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert-\frac{2x+4}{5}>0$	Συμπεράσματα
$-\infty$					
	−	−	−	$-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow\ x<-2$. Ἄρα: $x\in(-\infty,-2)\cap(-\infty,-1)=(-\infty,-2)$
-1	0				
	+	−	−	$(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow\ x>-\frac{3}{4}$. Ἄρα: $x\in\left(-\frac{3}{4},+\infty\right)\cap[-1,0)=\left(-\frac{3}{4},0\right)$
0		0			
	+	+	−	$(x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow\ x<\frac{1}{2}$. Ἄρα: $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cap[0,1)=\left[0,\frac{1}{2}\right)$
1			0		
	+	+	+	$(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5}>0$	$\Rightarrow\ x<-2$. Ἄρα: $x\in(-\infty,-2)\cap[1,+\infty)=\varnothing$.
$+\infty$					

Λύσεις τῆς (1) θὰ εἶναι αἱ λύσεις τῶν κάτωθι συστημάτων :

α'). $$\left.\begin{aligned}-(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5}&>0\\ x&<-1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}2x+4&<0\\ x&<-1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}x&<-2\\ x&<-1\end{aligned}\right\}\text{συμβιβασταί.}$$

Ἄρα : $$-\infty<x<-2.$$

β'). $$\left.\begin{aligned}(x+1)+2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5}&>0\\ -1\leqq x&<0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}8x+6&>0\\ -1\leqq x&<0\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}x&>-\frac{3}{4}\\ -1\leqq x&<0\end{aligned}\right\}\text{συμβιβασταί.}$$

Ἄρα : $$-\frac{3}{4}<x<0.$$

γ'). $$\left.\begin{aligned}(x+1)-2x-(x-1)-\frac{2x+4}{5}&>0\\ 0\leqq x&<1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}12x-6&<0\\ 0\leqq x&<1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}x&<\frac{1}{2}\\ 0\leqq x&<1\end{aligned}\right\}\text{συμβιβασταί.}$$

Ἄρα : $$0\leqq x<\frac{1}{2}.$$

δ'). $$\left.\begin{aligned}(x+1)-2x+(x-1)-\frac{2x+4}{5}&>0\\ x&\geqq 1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}2x+4&<0\\ x&\geqq 1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{aligned}x&<-2\\ x&\geqq 1\end{aligned}\right\}\text{ἀσυμβίβαστοι.}$$

Ὥστε, ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις (1) ἀληθεύει διά : $\mathbf{x<-2}$ καὶ $\mathbf{-\frac{3}{4}<x<\frac{1}{2}}$.

Παράδειγμα 4ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις:

$$\big||x| - 5\big| > \big||3x| - 3\big|. \qquad (1)$$

Λύσις: Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν:

$$(|x| - 5)^2 > (3|x| - 3)^2 \quad \text{ἢ} \quad (|x| - 5)^2 - (3|x| - 3)^2 > 0$$

$$\text{ἢ} \quad (4|x| - 8)(-2|x| - 2) > 0 \quad \text{ἢ} \quad 8(|x| - 2)(|x| + 1) < 0. \qquad (2)$$

Ἀλλὰ $|x| + 1 > 0$, διὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$, κατὰ συνέπειαν ἐκ τῆς (2) ἔχομεν:

$$|x| - 2 < 0 \quad \text{ἢ} \quad |x| < 2, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad -2 < x < 2.$$

Παράδειγμα 5ον: Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$|x - 2| + |2x - 1| \geqq \frac{3}{2}. \qquad (1)$$

Δια ποίας τιμὰς τοῦ x ἰσχύει ἡ ἰσότης;

Λύσις: Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 3, ἔχομεν τὸν κάτωθι πίνακα μετὰ τῶν σχετικῶν συμπερασμάτων:

x	$x-2$	$2x-1$	$\lvert x-2\rvert + \lvert 2x-1\rvert \geqq \frac{3}{2}$	Συμπέρασμα
$-\infty$	$-$	$-$	$-(x-2) - (2x-1) \geqq \frac{3}{2}$	$-\infty < x < \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$		0		
	$-$	$+$	$-(x-2) + (2x-1) \geqq \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} \leqq x < 2$
2	0			
$+\infty$	$+$	$+$	$(x-2) + (2x-1) \geqq \frac{3}{2}$	$2 \leqq x < +\infty.$

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος συνάγομεν ὅτι ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ἡ ἰσότης, ὡς εὐκόλως φαίνεται, ἰσχύει διὰ $x = \frac{1}{2}$.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΕΠΙΛΥΟΜΕΝΑ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ R.

§ 47. I. Ἐπίλυσις συστήματος τῆς μορφῆς:

$$\left.\begin{aligned} \alpha|x| + \beta|y| &= \gamma \\ \alpha_1|x| + \beta_1|y| &= \gamma_1 \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἀνεξάρτητοι τῶν x, y.

Θέτομεν $|x| = x_1$, $|y| = y_1$ καὶ τὸ σύστημα (1) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta y_1 &= \gamma \\ \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 &= \gamma_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Τὸ σύστημα (2), ὑποτιθεμένου ὅτι : $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$, ἔχει λύσιν τήν :

$$x_1 = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \qquad y_1 = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}.$$

Ἐπειδὴ δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῶν x καὶ y εἶναι $|x| \geqq 0$, $|y| \geqq 0$, τὸ σύστημα (1) θὰ ἔχῃ λύσιν τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν :

$$\frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \geqq 0, \qquad \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \geqq 0.$$

Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ταύτην αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων :

$$|x| = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}, \qquad |y| = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta},$$

τὰς ὁποίας εὑρίσκομεν ὡς ἐξετέθη εἰς τὴν § 42.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{3|x| - 2|y|} &= \mathbf{10} \\ \mathbf{5|x| + 3|y|} &= \mathbf{23} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Λύσις : Θέτομεν $|x| = x_1$, $|y| = y_1$ καὶ τὸ σύστημα (1) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2y_1 &= 10 \\ 5x_1 + 3y_1 &= 23 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Λύοντες τοῦτο, ἔχομεν : $x_1 = 4$, $y_1 = 1$.

Τότε αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι αἱ λύσεις τοῦ ζεύγους τῶν ἐξισώσεων :

$$\left.\begin{aligned} |x| &= 4 \\ |y| &= 1 \end{aligned}\right\}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \begin{aligned} x &= \pm 4 \\ y &= \pm 1. \end{aligned}$$

Ὥστε, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος (1) εἶναι τὰ ζεύγη :

$(x = 4,\ y = 1)$, $(x = 4,\ y = -1)$, $(x = -4,\ y = 1)$, $(x = -4,\ y = -1)$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} \mathbf{|x| + |y|} &= \mathbf{1} \\ \mathbf{x^2 + y^2} &= \mathbf{1.} \end{aligned}$$

Λύσις : Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται καὶ οὕτω :

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ |x|^2 + |y|^2 &= 1. \end{aligned}$$

Τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα :

$$\begin{aligned} |x| + |y| &= 1 \\ |x \cdot y| &= 0. \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἔχομεν : $x = 0$ ἢ $y = 0$.

Διὰ $x = 0$ ἔχομεν ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος $|y| = 1$, ἐξ οὗ $y = \pm 1$ καὶ διὰ $y = 0$ ἔχομεν $|x| = 1$, ἐξ οὗ : $x = \pm 1$.

Ὥστε, αἱ λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι :

$(x=0,\ y=1),\ (x=0,\ y=-1),\ (x=1,\ y=0),\ (x=-1,\ y=0).$

§ 48. II. Ἐπίλυσις συστήματος τῆς μορφῆς :

$$\left.\begin{aligned} \alpha|x|+\beta|y|+\gamma x+\delta y&=k\\ \alpha'|x|+\beta'|y|+\gamma' x+\delta' y&=k' \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ οἱ σταθεροὶ ὅροι εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τέσσαρας περιπτώσεις :

α′). $x \geqq 0,\ y \geqq 0$, ὁπότε $|x|=x,\ |y|=y$ καὶ τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό :

$$\left.\begin{aligned} (\alpha+\gamma)\ x+(\beta+\delta)\ y&=k\\ (\alpha'+\gamma')\ x+(\beta'+\delta')\ y&=k' \end{aligned}\right\}. \qquad (2)$$

Αἱ μὴ ἀρνητικαὶ λύσεις αὐτοῦ εἶναι λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος.

Συνεχίζομεν τὴν ἐπίλυσιν θεωροῦντες ἀκόμη τὰς περιπτώσεις :

β′). $x \geqq 0,\ y<0$, **γ′).** $x<0,\ y \geqq 0$, **δ′).** $x<0,\ y<0$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$\begin{aligned} x|y|+y|x|&=-6\\ |x|+2|y|+x+2y&=0. \end{aligned}$$

Λ ύ σ ι ς : Ἐκ τῆς πρώτης παρατηροῦμεν ὅτι : $x \neq 0$ καὶ $y \neq 0$.

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α′). Ἐὰν $x>0,\ y>0$, τότε ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$xy+yx=-6$ ἢ $xy=-3$, τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι $xy>0$.

β′). Ἐὰν $x>0,\ y<0$, τότε ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων γίνεται :

$-xy+xy=-6$ ἢ $0=-6$ (ἀδύνατον).

γ′). Ἐὰν $x<0,\ y>0$, τότε ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων δίδει ἐπίσης

$xy-xy=-6$ ἢ $0=-6$ (ἀδύνατον).

δ′). Ἐὰν $x<0,\ y<0$, τότε ἐκ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων λαμβάνομεν : $xy=3$, ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν : $x=1$ καὶ $y=3$ ἢ $x=3$ καὶ $y=1$ ἢ $x=-1$ καὶ $y=-3$ ἢ $x=-3$ καὶ $y=-1$, καθ' ὅσον οἱ x καὶ y πρέπει, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, νὰ εἶναι ἀκέραιοι.

Ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη $x<0,\ y<0$, ἡ πρώτη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος πληροῦται ὑπὸ τῶν ζευγῶν : $(x=-1,\ y=-3)$ ἢ $(x=-3,\ y=-1)$.

Ἀλλὰ τὰ ζεύγη αὐτά, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, πληροῦν καὶ τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ὅθεν αἱ ζητούμεναι λύσεις εἶναι τὰ ζεύγη :

$$\boxed{\begin{aligned} x&=-1\\ y&=-3 \end{aligned}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\begin{aligned} x&=-3\\ y&=-1 \end{aligned}}$$

§ 49. III. Ἐπίλυσις συστημάτων εἰδικῶν μορφῶν.— Παραθέτομεν κατωτέρω παραδείγματα ἐπιλύσεως συστημάτων εἰδικῶν τινων μορφῶν:

Παράδειγμα 1ον: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα:

$$|x+y-7|+x+y=7 \qquad (1)$$

$$x-3y=0. \qquad (2)$$

Λύσις: Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν: $x=3y$. (2′)

Δυνάμει ταύτης ἡ πρώτη γίνεται:

$$|3y+y-7|+3y+y=7 \quad ἢ \quad |4y-7|+4y=7. \qquad (3)$$

Διακρίνομεν ἤδη δύο περιπτώσεις:

α′). Ἐὰν $4y-7 \geqq 0$, δηλ. $4y \geqq 7$ ἢ $y \geqq \frac{7}{4}$, θὰ ἔχωμεν: $|4y-7|=4y-7$, ὁπότε ἡ (3) γίνεται: $4y-7+4y=7$ ἢ $8y=14$, ἐξ ἧς: $y=\frac{7}{4}$. Ἡ τιμὴ ὅμως αὕτη δὲν εἶναι δεκτή, καθ' ὅσον δὲν εἶναι ἀκεραία.

β′). Ἐὰν $4y-7<0$, δηλ. $y<\frac{7}{4}$, θὰ ἔχωμεν $|4y-7|=-(4y-7)$ καὶ ἡ (3) γίνεται: $-(4y-7)+4y=7$ ἢ $0\cdot\psi=0$, ἤτοι ταυτότης ὡς πρὸς y.

Ἐπειδὴ ὅμως, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, πρέπει τὸ y νὰ εἶναι ἀκέραιον καὶ μὴ ἀρνητικὸν ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου, κατὰ τὸν περιορισμόν, πρέπει νὰ εἶναι $y<\frac{7}{4}$, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ζητούμεναι τιμαὶ τοῦ y εἶναι: $y=0$ ἢ $y=1$, ὁπότε ἐκ τῆς (2′) ἔχομεν ἀντιστοίχως $x=0$ ἢ $x=3$.

Ὥστε, αἱ ζητούμεναι ἀκέραιαι καὶ μὴ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τῶν x καὶ **y** εἶναι:

$$(x=0,\ y=0) \quad καὶ \quad (x=3,\ y=1).$$

Παράδειγμα 2ον: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ R, τὸ σύστημα:

$$4\,|x-2|+|y-1|=5 \qquad (1)$$

$$4x-3y=6. \qquad (2)$$

Λύσις: Διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τέσσαρας περιπτώσεις:

Περίπτωσις 1η: Ἐὰν $x-2 \geqq 0$, $y-1 \geqq 0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{r} 4(x-2)+(y-1)=5 \\ 4x-3y=6 \end{array}\right. \quad ἢ \quad \left|\begin{array}{l} 4x+y\ \ =14 \\ 4x-3y=\ \ 6 \end{array}\right., \quad ἐξ\ οὗ: \quad \left|\begin{array}{l} x=3 \\ y=2. \end{array}\right.$$

Τὸ ζεῦγος τοῦτο ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ συστήματος, καθ' ὅσον αἱ τιμαὶ $x=3$ καὶ $y=2$ ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x-2 \geqq 0$ καὶ $y-1 \geqq 0$.

Περίπτωσις 2α: Ἐὰν $x-2 \geqq 0$, $y-1<0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{r} 4(x-2)-(y-1)=5 \\ 4x-3y=6 \end{array}\right. \quad ἢ \quad \left|\begin{array}{l} 4x-y\ \ =12 \\ 4x-3y=\ \ 6 \end{array}\right., \quad ἐξ\ οὗ: \quad \left|\begin{array}{l} x=\frac{15}{4} \\ y=3. \end{array}\right.$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ $y=3$ δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν $y-1<0$, αἱ τιμαὶ $x=\frac{15}{4}$, $y=3$ δὲν ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος.

Περίπτωσις 3η: Ἐὰν $x-2<0$, $y-1\geqq 0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{aligned}-4(x-2)+(y-1)&=5\\ 4x-3y&=6\end{aligned}\right. \quad ἤ \quad \left|\begin{aligned}4x-\ \ y&=2\\ 4x-3y&=6\end{aligned}\right., \text{ ἐξ οὗ: } \left|\begin{aligned}x&=0\\ y&=-2.\end{aligned}\right.$$

Ἐπειδὴ ἡ τιμὴ $y=-2$ δὲν ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην $y-1\geqq 0$, αἱ τιμαὶ $x=0$, $y=-2$ δὲν ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος.

Περίπτωσις 4η: Ἐὰν $x-2<0$, $y-1<0$, τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{aligned}-4(x-2)-(y-1)&=5\\ 4x-3y&=6\end{aligned}\right. \quad ἤ \quad \left|\begin{aligned}4x+\ \ y&=4\\ 4x-3y&=6\end{aligned}\right., \text{ ἐξ οὗ: } \left|\begin{aligned}x&=\frac{9}{8}\\ y&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Τὸ ζεῦγος τοῦτο ἀποτελεῖ λύσιν τοῦ συστήματος, καθ' ὅσον αἱ τιμαὶ $x=\frac{9}{8}$ καὶ $y=-\frac{1}{2}$ ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x-2<0$ καὶ $y-1<0$.

Ὅθεν αἱ λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη:

$$\boxed{\begin{aligned}x&=3\\ y&=2\end{aligned}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\begin{aligned}x&=9/8\\ y&=-1/2\end{aligned}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71. Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$, αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $2|x|-3=0$, 2. $\frac{3}{5}|x|-2x=7$, 3. $\frac{3x+5}{3|x|+5}=-2$,
4. $x^2-7|x|+12=0$, 5. $x^2-3|x|+2x-6=0$, 6. $x^2-4x+2|x|-3=0$,
7. $|x|^3-5|x^2|-17|x|+21=0$, 8. $|x^8|-|3x^4|+2=0$, 9. $|x|-|x-1|=5-3x$,
10. $2x-3|x+3|-5|x+1|+4|x-5|+6=0$, 11. $|2x-1|-3|x-1|=1$,
12. $|2x-1|+|x|+|4x+1|-3|x-3|+7=0$, 13. $|x-2|-3|x-1|+2x-5=0$,
14. $|x-2|+x^2-4x+10=0$, 15. $|x^2-3x+2|+|x-4|-13=0$,
16. $\frac{1}{|x-1|}-\frac{2}{|x-2|}+\frac{1}{|x-3|}=0$ 17. $|x^3-3x^2+2x-1|=|x^3-1|+|3x^2-2x|$.

72. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $2x+3|x|=\lambda x+2$, 2. $\big|x-|x-1|\big|=\lambda x+1$,
3. $|x-3|-\lambda|x-1|=2$, 4. $\lambda|x|+3x=-1$,
5. $|\mu-1|x+(\mu-1)|x|=\mu^2-1$.

73. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἀνισώσεις:

1. $|3x|-2>|x|+8$, 2. $3|x|+4|x-1|>5$, 3. $2|x|+x>10$,
4. $\frac{3|x|+1}{4}-\frac{4-x}{3}>1$, 5. $|2x+1|+|6x|>9$, 6. $\frac{|2x^2-5|}{3|x|}>\frac{|x|+1}{2}$,

7. $|x|^3 - 4x^2 + |x| + 6 > 0,$ 8. $|x-1| + |x-2| - 1 < 2x,$

9. $|2x+1| - 4|x-3| - |x-4| > 3,$ 10. $|x| + |x-1| + |x-2| > 9,$

11. $\big||x| + x\big| - \big||x| - x\big| < |x-2|,$ 12. $|x-1| + |x-2| + |x-3| < x+1.$

* **74**. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν αἱ ἀνισώσεις :

1. $\lambda|x| + 2x > 2\lambda - 3,$ 2. $|x-1| + \lambda|x-2| > 1.$

75. Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x ἰσχύει ἡ σχέσις :

$$f(x) \equiv \left|x + \frac{5}{2}\right| + \left|x - \frac{1}{2}\right| + |x-2| \geqq \frac{9}{2}.$$

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ x ἰσχύει ἡ ἰσότης ;

76. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων ;

$$A \equiv \sqrt{|x|^2 + 2|x| - 4}, \qquad B \equiv \sqrt{|x^2 + 8x - 9| - 24}.$$

77. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} 2|x| + 3|y| = 11 \\ 3|x| - 5|y| = 7 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3|x| - 2|y| = 5 \\ |x| + 3|y| = 9 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} |x| - 2y = 3 \\ x + |y| = 6 \end{cases}$

4. $\begin{cases} |2x - 3y| = 12 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} |x-1| + |y-3| = 4 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} |x| + |y-1| = 3 \\ |x| + |y-2| = 4. \end{cases}$

78. Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

1. $\begin{cases} |x - 2y| + |x + y - 1| = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2|x - y| + |x + y - 3| = 9 \\ 2x + 3y = 19. \end{cases}$

79. Ἐὰν $\alpha \in \mathbf{R}$ νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$|x| + |y| = \alpha$$
$$\alpha y = x^2.$$

80. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$y + y|x| = 6$$
$$|y| - |x| = 2.$$

81. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ζεύγη τῶν ἀκεραίων x, y, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις :

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0$$
$$y + |x-1| < 2.$$

82. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$x^2 = yz$$
$$|y + z| > x^2 + 1.$$

83. Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα :

$$|\lambda x + y| = 2x$$
$$3x + 5y = 2.$$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ

84. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ τί συμπεραίνετε ἐκ τῆς σχέσεως $|\alpha| + |\beta| \neq 0$;

85. Ἐὰν $\alpha, \beta, x, y \in \mathbf{R}$, μὲ $\alpha\beta \neq 0$, ἰσχύουν δὲ αἱ δύο σχέσεις :

$$x = \alpha\{|\alpha| + |\beta|\} \quad \text{καὶ} \quad y = \beta\{|\alpha| + |\beta|\},$$

τότε θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ :

$$\alpha = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}}, \qquad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

καὶ ἀντιστρόφως, αἱ δύο τελευταῖαι συνεπάγονται τὰς δύο πρώτας.

86. Ἐὰν $\alpha\beta \neq 0$ καὶ $\alpha^2 < 16\beta^2$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{15}{4}.$$

87. Ἐὰν $|\alpha| > 1$, δείξατε ὅτι :

$$\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| - 1 < |\alpha| < \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right|.$$

88. Ἐὰν $(x \neq y) \in \mathbf{R}$ καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός, δείξατε ὅτι :

$$\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left[\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y}\right] = 1.$$

89. Ἐὰν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς α ἱκανοποιῇ τὴν σχέσιν $|\alpha| < \sqrt{2} - 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{|1-\alpha|}{1-|\alpha|} < \sqrt{2} + 1.$$

90. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι ἀπὸ τὰς σχέσεις :

$$\alpha = \frac{x}{|y|+|z|}, \quad \beta = \frac{y}{|z|+|x|}, \quad \gamma = \frac{z}{|x|+|y|},$$

ἕπονται αἱ σχέσεις :

$$|\alpha\beta\gamma| \leqq \frac{1}{8}, \qquad \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\gamma|} \geqq \frac{1}{6}.$$

91. Ἵνα ἡ ἰσότης $\big|\alpha|x| + \beta x\big| = \alpha|x| + \beta x$ εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ : $\alpha + \beta \geqq 0$ καὶ $\alpha - \beta \geqq 0$.

92. Νὰ ἐξετάσητε, ἐὰν αἱ σχέσεις $\alpha + \beta \geqq 0$ καὶ $\alpha - \beta \leqq 0$ εἶναι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα ἡ ἰσότης $\big|\alpha|x| + \beta x\big| = \beta|x| + \alpha x$ εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x.

93. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ καὶ $|x| = \alpha x + \beta x + 1$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ὥστε νὰ εἶναι :

$$|\alpha + \beta| < 1.$$

94. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα μεταβολῆς τοῦ x, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ παράστασις :

$$y = |x-5| + |3x+1| + |2x-3|$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

95. Δείξατε διὰ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α, β ὅτι ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$2\beta(1 + |\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$$

ἕπονται αἱ : $\quad |2\beta - 1| < 1$ καὶ $\alpha(1 - |2\beta - 1|) = 2\beta - 1$

καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἕπεται ἡ πρώτη.

96. Ἵνα ἡ ἰσότης $\big|\alpha|x| + \beta x\big| = A|x| + Bx$ εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς x, πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$A = \frac{|\alpha+\beta|}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} \quad \text{καὶ} \quad B = \frac{|\alpha+\beta|}{2} - \frac{|\alpha-\beta|}{2}.$$

97. Ἐὰν $x, y, z \in \mathbf{R}$ καὶ $x^2 + y^2 = z^2$, $|x+y| < \dfrac{z}{|z|+1}$, τότε : $\big||x| - |y|\big| < 3$.

98. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διαστήματα μεταβολῆς τοῦ x καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ λ, ἵνα ἡ παράστασις : $y = |\lambda^2 x + 1| + |2\lambda x + 3|$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

99. Δίδεται ἡ παράστασις : $y = \left|x + \dfrac{3}{2}\right| + \left|x - \dfrac{1}{2}\right| + |x-2|$, νὰ εὑρεθοῦν :

1). Αἱ ἐκφράσεις αὐτῆς ἄνευ τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x.
2). Βάσει τούτων νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ αὐτῆς, ὅταν τὸ x διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

100. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχῃ πραγματικὰς ρίζας καὶ εἶναι :

$$\beta^2 - 5\gamma^2 < 5\beta|\gamma|, \quad \text{νὰ δειχθῇ ὅτι :} \quad \left|\frac{\beta}{\gamma}\right| - \left|\frac{\gamma}{\beta}\right| < 5.$$

101. Ἐκ τῆς σχέσεως: $x_1 = \dfrac{y_1}{1+|y_1|}$ ἕπονται αἱ σχέσεις:

$1-|x_1|>0$ καὶ $y_1 = \dfrac{x_1}{1-|x_1|}$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐνῶ ἐκ τῶν σχέσεων:

$$x_1 = \frac{y_1}{1+|y_1|+|y_2|}, \quad x_2 = \frac{y_2}{1+|y_1|+|y_2|}$$

ἕπονται αἱ σχέσεις:

$1-|x_1|-|x_2|>0$, $y_1 = \dfrac{x_1}{1-|x_1|-|x_2|}$, $y_2 = \dfrac{x_2}{1-|x_1|-|x_2|}$ καὶ ἀντιστρόφως.

102. Ἐὰν $|\lambda|<1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐξ ἑκάστης τῶν σχέσεων:

$|x+\lambda y|<|\lambda x+y|$, $\quad |x|<|y|$, $\quad |x^2+\lambda xy|<|\lambda xy+y^2|$

ἕπονται αἱ ἄλλαι δύο σχέσεις.

103. Ἐὰν $\alpha, \beta, \nu \in \mathbf{Z}$ καὶ $\alpha\beta=-1$, $\nu \geqq 5$, $x = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2\nu} + \dfrac{\beta\sqrt{3}}{2(\nu-1)}$,

νὰ δειχθῇ ὅτι: $40|x| \leqq \sqrt{3}$.

104. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $x^2+\beta x+\gamma=0$, ἔνθα $\beta<\gamma<0$. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν ρ_1, ρ_2 $(\rho_1>\rho_2)$ εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, θὰ εἶναι: $|\rho_2|<\rho_1<1+|\beta|$.

105. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha|x|^3+\beta x^2+\beta|x|+\alpha=0,$$

ἵνα αὕτη ἔχῃ τὸ ἀνώτερον δυνατὸν πλῆθος πραγματικῶν ριζῶν.

106. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}-\{0\}$ καὶ $|\alpha|-|\beta|>1$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2+\alpha x+\beta=0$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἀμφοτέρας τὰς ρίζας της ἀκεραίας.

107. Δείξατε ὅτι διὰ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α, β, γ ἀπὸ τὰς σχέσεις: $2|\beta| \leqq \alpha \leqq \gamma$, ἕπεται ὅτι: $\alpha \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}$. Κατόπιν τούτου δείξατε ὅτι ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α, β, γ πληροῦντες τὰς ἄνω σχέσεις εἶναι μόνον οἱ $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=1$, ἐφ' ὅσον $\alpha\gamma=1+\beta^2$.

108. Ἔστω β πραγματικὸς ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενὸς καὶ τοιοῦτος, ὥστε $|\beta|<1$· ἔστω ἐπίσης x πραγματικὸς ἀριθμὸς κείμενος ἀλγεβρικῶς μεταξὺ 0 καὶ β.

Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\left|\dfrac{\beta-x}{1+x}\right|<|\beta|$.

109. Ἐὰν ξ_1, ξ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-2\alpha x+\beta=0$ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς καὶ ἰσχύῃ: $0<|\xi_1|<|\xi_2|$,

νὰ δειχθῇ ὅτι: $\quad 2\alpha^2-\beta-\left|\dfrac{\beta}{2}\right|<\left|\dfrac{\xi_2}{\sqrt{2}}\right|^2<2\alpha^2-\beta$.

110. Ἐὰν $\nu>0$ καὶ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι:

$$\left|\alpha+\beta+\frac{\nu-\alpha\beta}{\alpha+\beta}\right| \geqq |\sqrt{3\nu}| \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \left|\alpha+\beta+\gamma+\frac{\nu-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right| \geqq \left|\sqrt{\frac{8\nu}{3}}\right| \quad (2)$$

111. Δίδονται τὰ τριώνυμα:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \alpha x^2+\beta x+\gamma \\ \varphi(x) &\equiv \alpha' x^2+\beta' x+\gamma' \end{aligned} \quad \text{μὲ} \quad |\alpha'|<\alpha.$$

Ἐὰν x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ αἱ ρίζαι τοῦ $f(x)$ καὶ ρ_1, ρ_2 $(\rho_1<\rho_2)$ αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία:

$$(|f(x)| \geqq \varphi(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}) \iff (x_1=\rho_1 \quad \text{καὶ} \quad x_2=\rho_2).$$

112. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

$$x^2+x+\lambda|x|+1=0.$$

Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ὥστε αὕτη νὰ ἔχῃ τέσσαρας ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

113. Ἐὰν $x, y, z \in \mathbf{R}$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως :

$$(x^2 - y^2 + z^2)^2 \leqq 4x^2z^2 \qquad (1)$$

ἕπονται αἱ σχέσεις :

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqq |z| \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad |z| \leqq |x| + |y| \quad (3)$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας ἕπεται ἡ πρώτη.

114. Ἐὰν $x, y, z \in \mathbf{R} - \{0\}$ καὶ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$x^2y^2 + x^2z^2 = y^2z^2 \quad \text{καὶ} \quad x^2 + z^2 > |xz| + |zy|,$$

νὰ δειχθῇ ὅτι : 1) $|x| < |y| < |z|$

2) $\dfrac{x^2 + y^2}{z^2} < \dfrac{|x| + |y|}{|z|}$.

115. Τοῦ x λαμβάνοντος τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (α, γ), νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως : $y = \dfrac{\alpha - \beta}{\sqrt{|\gamma - x|}} + \dfrac{\beta - \gamma}{\sqrt{|\alpha - x|}} + \dfrac{\gamma - \alpha}{\sqrt{|\beta - x|}}$, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

1). Διὰ $x < \alpha < \beta < \gamma$

2). Διὰ $\alpha > \beta > \gamma > x$.

Ὑπόδειξις : Θέσατε $\sqrt{|\alpha - x|} = k$, $\sqrt{|\beta - x|} = \lambda$, $\sqrt{|\gamma - x|} = \mu$ καὶ ἐκφράσατε τὴν παράστασιν y συναρτήσει τῶν k, λ, μ.

116. Ἐὰν $|\alpha| + |\beta| = 1$, ἔνθα $\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\}$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\left\{ |\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \right\}^2 + \left\{ |\beta| + \left|\frac{1}{\beta}\right| \right\}^2 \geqq \frac{25}{2}.$$

117. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ μὲ $\alpha\gamma \neq 0$ καὶ $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, ἔνθα ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν $M \equiv \max\left\{ \left|\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right| \right\}$, δείξατε ὅτι :

1). $$2\left|1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right| - 1 < M < 2\left|1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$$

2). $$1 < \left|1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma}\right|$$

3). Πληρουμένων τῶν ὑποθέσεων εἶναι $\beta \neq 0$.

118. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$2|x - 1| + |y + 1| = 7$$
$$|x - 2| + |y| + x - y = 4.$$

119. Ὁμοίως τὸ σύστημα :

$$x^2 = \frac{z^2}{2|yz| - y^2}$$
$$0 < x \leqq \frac{3}{3 + |y + 2|}.$$

120. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος :

$$(x^2 + 4y^2)(z^2 + 4) = (xz + 4y)^2$$
$$16z^2 - 56\left|\frac{x}{y}\right| + 45 < 0$$
$$x^2 + y^2 + |xy| < 64.$$

121. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha|x|^3 + \beta|x|^2 + \beta|x| + \alpha = 0,$$

δείξατε ὅτι αὐτὴ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων :

$$|x| + 1 = 0 \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \alpha|x|^2 + (\beta - \alpha)|x| + \alpha = 0 \quad (2).$$

Ἐπιλύσατε τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

122. Ἐὰν α, β, $x \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι:

$$(x-\alpha)(x-\beta) \leqq 0 \iff \min(\alpha, \beta) \leqq x \leqq \max(\alpha, \beta).$$

123. Ἐὰν $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}, \dfrac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ εἶναι οἱαδήποτε κλάσματα μὲ $\beta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots \nu$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\min\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right) \leqq \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu}{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\nu} \leqq \max\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots, \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\right).$$

124. Ἐὰν α, β, $\gamma \in \mathbf{R}$ καὶ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\gamma = \frac{\alpha\beta}{|\alpha| - |\beta|} \quad \text{καὶ} \quad |\alpha| > |\beta| > 0,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ ἰσχύουν καὶ αἱ σχέσεις:

$$\alpha = \frac{\beta\gamma}{|\gamma| - |\beta|} \quad \text{καὶ} \quad \beta = \frac{\alpha\gamma}{|\alpha| + |\gamma|}.$$

125. Ἐὰν οἱ x, y, ω πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\left|\frac{1}{y+\omega}\right| + \left|\frac{1}{\omega+x}\right| + \left|\frac{1}{x+y}\right| \geqq \frac{9}{2}\left(\frac{1}{|x| + |y| + |\omega|}\right).$$

126. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$3x - 5|y| = 1$$
$$x|y| + y|x| = 4.$$

127. Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὰς σχέσεις:

$$x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz$$
$$xyz < 0 \quad \text{καὶ}$$
$$x^{2\nu+1} - y|y| = 0,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ x, y εἶναι θετικοί.

128. Ἐὰν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ πληροῦν τὴν σχέσιν:

$$|\alpha+\beta| + |\beta+\gamma| + |\gamma+\alpha| \geqq \alpha\beta\gamma(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|),$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι θὰ πληροῦν καὶ τὴν σχέσιν:

$$\alpha\beta\gamma \leqq 2.$$

129. Ἐὰν ξ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως: $\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu = 0$, τοιαύτη ὥστε $|\xi| > 1$, εἶναι δὲ ἐπὶ πλέον: $|\alpha_0| > \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\nu|)$, τότε δείξατε ὅτι:

$$1 < |\xi| < 2.$$

130. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ τριωνύμου: $x^2 - 2\alpha x + \beta$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\beta \neq 0$ καὶ ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι του μὲ $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, θέσωμεν δέ:

$$M \equiv \max\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right), \quad m \equiv \min\left(\left|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right|\right) \quad \text{καὶ} \quad \lambda = 2\left|\frac{2\alpha^2 - \beta}{\beta}\right|,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

α). Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ ἄνισοι.

β). Ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

1. $\lambda - 1 < M < \lambda$, **2.** $\lambda > 2$, **3.** $\dfrac{1}{\lambda} < m < \dfrac{1}{\lambda - 1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ι. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 50. Ἔννοια τοῦ πολυωνύμου. —Ἔστω $\mathbf{R}$ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἓν σύμβολον x, καλούμενον **«μεταβλητὴ»** *), τὸ ὁποῖον κατ' ἀρχὴν οὐδένα πραγματικὸν ἀριθμὸν παριστᾷ, μετὰ τοῦ ὁποίου ὅμως σημειοῦμεν πράξεις τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{R}$, ὡς ἐὰν ἦτο καὶ τὸ x εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς ἢ γενικώτερον εἷς μιγαδικὸς ἀριθμός. Οὕτως ἡ παράστασις x^k, ὅπου k φυσικὸς ἀριθμός, θὰ συμβολίζῃ ἁπλῶς μίαν μορφὴν γινομένου $xx\ldots x$, ὅπου τὸ x θὰ περιλαμβάνεται ὡς παράγων k φορές, ὁμοίως ἡ παράστασις αx^k, ὅπου $\alpha \in \mathbf{R}$ καὶ $k \in \mathbf{N}$, θὰ συμβολίζῃ μίαν μορφὴν γινομένου τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸ σύμβολον x^k. Ὁρίζομεν ἀκόμη, ὅτι τὸ $x^0 = 1$, ὁπότε $\alpha x^0 = \alpha$ διὰ κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$. Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν κάτωθι ὁρισμόν :

Καλεῖται **ἀκέραιον πολυώνυμον** τοῦ x, κάθε ἔκφρασις τῆς μορφῆς :

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad (1)$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ν φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδέν. Οἱ $\alpha_k \in \mathbf{R}$ καλοῦνται **συντελεσταὶ** τοῦ πολυωνύμου. Τὸ α_0 θεωρεῖται ὡς συντελεστὴς τοῦ x^0. Αἱ ἐκφράσεις τῆς μορφῆς $\alpha_k x^k$, ἔνθα k φυσικὸς ἢ μηδέν, καλοῦνται **ἀκέραια μονώνυμα** καὶ ἀποτελοῦν τοὺς **ὅρους** τοῦ πολυωνύμου.

Ἡ παράστασις (1) εἶναι ἓν νέον σύμβολον **), δηλ. δὲν σημαίνει πρόσθεσιν, οὔτε ἄλλην τινὰ πρᾶξιν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, \nu)$ καὶ τῆς μεταβλητῆς x. Ἡ σημασία τῆς παραστάσεως (1), δηλ. τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου, θὰ προκύψῃ κατωτέρω κατόπιν ὡρισμένων ἰδιοτήτων τὰς ὁποίας θὰ ὁρίσωμεν ἐπ' αὐτῆς.

Κατωτέρω ἀντὶ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x θὰ λέγωμεν ἁπλῶς καὶ πολυώνυμον τοῦ x.

Διὰ τὰ πολυώνυμα τῆς μεταβλητῆς x μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς θὰ χρησιμοποιῶμεν τοὺς συμβολισμούς : $f(x)$, $\varphi(x)$, $\pi(x)$, $g(x), \ldots$

---

* Διὰ τοῦ ὅρου **«μεταβλητὴ»** x ἐννοοῦμεν ἓν σύμβολον, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀντιπροσωπεύῃ τὸ τυχὸν στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου ἀριθμῶν. Ὑπάρχει διαφορὰ μεταξὺ τῆς μεταβλητῆς x καὶ τοῦ ἀγνώστου x, τὸν ὁποῖον συναντῶμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις. Ἡ μὲν μεταβλητὴ x εἶναι ἁπλῶς ἓν σύμβολον καὶ ἑπομένως ἔχει ἀπροσδιόριστον τιμήν, ἐνῶ ὁ ἄγνωστος x ἔχει προσδιοριστέαν τιμήν.

** Τὸ x κατὰ τὴν παράστασιν (1) ἑνὸς πολυωνύμου παίζει τὸν ρόλον ἑνὸς **ἀκαθορίστου συμβόλου,** ἄλλως **ἀκαθορίστου μεταβλητῆς.**

Οὕτω θὰ γράφωμεν :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad (2)$$

ἔνθα τὸ σύμβολον «$\equiv$» σημαίνει ὅτι διὰ τοῦ $f(x)$ παρίσταται τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον ἀναγράφεται εἰς τὸ β' μέλος.

Ἐὰν $\alpha_\nu \neq 0$, τότε ὁ ἐκθέτης ν τῆς μεταβλητῆς x καλεῖται **βαθμὸς** τοῦ πολυωνύμου (2). Ὥστε :

Βαθμὸς ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς x, τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Οὕτω τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv 5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, ὁ βαθμὸς εἶναι 3, ἐνῷ τοῦ πολυωνύμου $(x) \equiv 2x^2 - \sqrt{3}x + 1$, ὁ βαθμὸς εἶναι 2.

Ἐὰν $\nu = 0$, τότε ἔχομεν τὸ **σταθερὸν πολυώνυμον**, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν σταθερὸν μόνον ὅρον καὶ συνεπῶς εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐφ' ὅσον ὁ σταθερὸς ὅρος $\alpha_0 \neq 0$, θὰ ὁμιλῶμεν περὶ πολυωνύμου **βαθμοῦ μηδέν**, δηλαδὴ κάθε σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς α θεωρεῖται ὡς πολυώνυμον τοῦ x, βαθμοῦ μηδέν, ἐφ' ὅσον $\alpha \neq 0$. Οὕτω, λ.χ., ὁ ἀριθμὸς 4 δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x βαθμοῦ μηδέν, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $4 \equiv 4x^0$.

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ (2) εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, τότε τὸ $f(x)$ λέγεται **πλῆρες πολυώνυμον** τοῦ x, ἄλλως λέγεται **ἐλλιπές.**

Τὸ πολυώνυμον νιοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x δύναται ἐπίσης νὰ γραφῇ :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_\nu x^\nu, \quad \alpha_\nu \neq 0 \qquad (3)$$

δηλ. κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x.

Κάθε πολυώνυμον δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ πέραν τοῦ βαθμοῦ του, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἐπισυνάψωμεν ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον (3), βαθμοῦ ν, δύναται νὰ γραφῇ :

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu+1}x^{\nu+1} + \alpha_{\nu+2}x^{\nu+2} + \cdots + \alpha_{\nu+k}x^{\nu+k} \qquad (4)$$

μὲ $\alpha_\nu \neq 0$ καὶ $\alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \cdots = \alpha_{\nu+k} = 0 \quad \forall\ k = 1, 2, 3 \cdots$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν δύο πολυώνυμα μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων, προσθέτοντες εἰς τὸ μικροτέρου βαθμοῦ πολυώνυμον ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου (2) εἶναι μηδέν, τότε τὸ $f(x)$ καλεῖται **μηδενικὸν πολυώνυμον.** Ὥστε : **Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :**

$$\mathbf{f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_k \in R, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \nu}$$

καλεῖται μηδενικὸν πολυώνυμον ἢ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς μηδὲν ἐν R τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πάντες οἱ συντελεσταί του εἶναι μηδέν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν :

$$f(x) \equiv 0$$

καὶ ἀναγιγνώσκομεν : *« f(x) ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς μηδέν ».*

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω συμβολισμοῦ, ὁ ὁρισμὸς τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου δίδεται συντόμως οὕτω :

Ἐὰν $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, τότε :

$$\boxed{f(x) \equiv 0 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0.}$$

Πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα πρὸς μηδὲν **οὐδένα** βαθμὸν ἔχουν.

Ἐὰν τὸ $f(x)$ δὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον γράφομεν : $f(x) \not\equiv 0$.

§ 51. Ἄλγεβρα (λογισμὸς) τῶν πολυωνύμων.— Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὸ ὁποῖον παριστῶμεν μὲ $R[x]$· τὰ στοιχεῖα ἐξ ὧν τὸ $R[x]$ συνίσταται, δηλ. τὰ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x συμβολίζομεν, ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον μέ : $f(x)$, $\varphi(x)$, $\pi(x), \ldots$

Ὡς γνωστὸν (§ 8) ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι συνδεδεμένη μὲ τὴν ἔννοιαν μιᾶς σχέσεως βασικῆς ἰσότητος. Ἡ βασικὴ ἰσότης ὁρίζεται ἐν $R[x]$ οὕτω :

Ἐὰν $f(x), \varphi(x) \in R[x]$ καὶ εἶναι :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$\varphi(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0,$$

τότε θὰ λέγωμεν ὅτι : **τὰ δύο πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ εἶναι ἴσα, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὁμοβαθμίων ὅρων εἶναι ἴσοι.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν :

$$f(x) \equiv \varphi(x)$$

καὶ ἀναγιγνώσκομεν : *« $f(x)$ ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ $\varphi(x)$ »*.

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω συμβολισμοῦ, ἡ βασικὴ ἰσότης ἐν $R[x]$ ὁρίζεται συντόμως οὕτω :

$$\boxed{f(x) \equiv \varphi(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_k = \beta_k \text{ διὰ κάθε } k = 0, 1, 2, \ldots, \nu.}$$

Προφανῶς δύο μηδενικὰ πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

Μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου $R[x]$ δυνάμεθα τώρα νὰ ὁρίσωμεν πράξεις ὡς ἑξῆς : Ἔστωσαν $f(x)$, $\varphi(x) \in R[x]$, τότε *) :

α). Καλοῦμεν **ἄθροισμα** τῶν πολυωνύμων $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καὶ $\varphi(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ : $f(x) + \varphi(x)$ τὸ πολυώνυμον :

$$(\alpha_\nu + \beta_\nu) x^\nu + (\alpha_{\nu-1} + \beta_{\nu-1}) x^{\nu-1} + \cdots + (\alpha_1 + \beta_1) x + (\alpha_0 + \beta_0).$$

---

* Δεχόμεθα, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι τὰ πολυώνυμα $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων. Ἐὰν τὰ $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος ὅρων, προσθέτομεν εἰς τὸ πολυώνυμον μὲ ὀλιγωτέρους ὅρους, τοὺς ἀπαιτουμένους ὅρους μὲ συντελεστὰς μηδέν.

β). Καλοῦμεν **ἀντίθετον** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ : $-\varphi(x)$ τὸ πολυώνυμον :

$$(-\beta_\nu)\, x^\nu + (-\beta_{\nu-1})x^{\nu-1} + \cdots + (-\beta_1)x + (-\beta_0)$$

καὶ γράφομεν :

$$-\varphi(x) \equiv -\beta_\nu x^\nu - \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} - \cdots - \beta_1 x - \beta_0.$$

γ). Καλοῦμεν **διαφορὰν** τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μέ : $f(x) - \varphi(x)$, τὸ πολυώνυμον $f(x) + [-\varphi(x)]$. Ἤτοι ἡ διαφορὰ $f(x) - \varphi(x)$ δύο πολυωνύμων $f(x)$, $\varphi(x)$ ἀνάγεται εἰς ἄθροισμα τοῦ $f(x)$ καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$.

Δυνάμει τώρα τῶν α) καὶ β) ἡ διαφορὰ $f(x) - \varphi(x)$ εἶναι τὸ πολυώνυμον :

$$(\alpha_\nu - \beta_\nu)\, x^\nu + (\alpha_{\nu-1} - \beta_{\nu-1})\, x^{\nu-1} + \cdots + (\alpha_1 - \beta_1)\, x + (\alpha_0 - \beta_0).$$

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων προκύπτουν ἀμέσως τὰ ἑξῆς :

1. Τὸ σύνολον τῶν πολυωνύμων $R[x]$ εἶναι «*κλειστὸν*» ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, δηλ. τὸ ἄθροισμα δύο πολυωνύμων ἐκ τοῦ $R[x]$ ἀνήκει εἰς τὸ $R[x]$.
2. Τὸ πολυώνυμον συμβολίζει ἓν ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $\alpha_k x^k$.
3. Ἡ πρόσθεσις τῶν πολυωνύμων ἔχει τὴν μεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν ἰδιότητα, ἤτοι : ἐὰν $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$, τότε ἰσχύουν :

$$\pi_1(x) + \pi_2(x) = \pi_2(x) + \pi_1(x) \text{ καθὼς καὶ}$$

$$\pi_1(x) + [\pi_2(x) + \pi_3(x)] = [\pi_1(x) + \pi_2(x)] + \pi_3(x).$$

4. Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, ἤτοι, ἐὰν $\varphi(x) \equiv 0$, τότε ἰσχύει :

$$f(x) + \varphi(x) \equiv f(x) + 0 \equiv f(x) \quad \text{διὰ κάθε} \quad f(x) \in R[x].$$

Παρατήρησις : Ὁ βαθμὸς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο πολυωνύμων εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων. Οὕτω :

Ἐὰν k εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο πολυωνύμων $f(x)$ καὶ $g(x)$ βαθμῶν ν καὶ μ ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

$$\mathbf{k \leqq max\,(\nu, \mu).}$$

Τὸ ὅτι οὗτος δύναται νὰ εἶναι μικρότερος φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἂν $f(x) \equiv 5x^4 + 4x^3 - 3x + 1$ καὶ $g(x) \equiv -5x^4 + 3x^3 - 2x + 2$, τότε εἶναι :

$$f(x) + g(x) \equiv 7x^3 - 5x + 3.$$

δ). Καλοῦμεν **γινόμενον** δύο μονωνύμων αx^ν καὶ βx^μ τὸ μονώνυμον $\alpha\beta x^{\nu+\mu}$, ἤτοι :

$$(\alpha x^\nu) \cdot (\beta x^\mu) = \alpha\beta x^{\nu+\mu}.$$

ε). Καλοῦμεν **γινόμενον** δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $f(x)$, $g(x)$ καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $f(x) \cdot g(x)$, τὸ πολυώνυμον τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὰ $f(x)$ καὶ $g(x)$ βάσει τοῦ «*ἐπιμεριστικοῦ νόμου*», ἤτοι ἂν πολλαπλασιάσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ $f(x)$ ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τοῦ $g(x)$ καὶ προσθέσωμεν ὅλα τὰ προκύπτοντα μερικὰ γινόμενα: Οὕτως, ἐὰν

$$f(x) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_\nu x^\nu \quad \text{καὶ}$$
$$g(x) \equiv \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_\mu x^\mu,$$

τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι τὸ πολυώνυμον:

$$\pi(x) \equiv f(x)\cdot g(x) = \alpha_0\beta_0 + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)\, x + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_0)\, x^2 + $$
$$+ (\alpha_0\beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_0)\, x^3 + \cdots + \alpha_\nu \beta_\mu x^{\nu+\mu}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: **ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν προκύπτουν τώρα τὰ ἑξῆς:

1. Τὸ σύνολον τῶν πολυωνύμων $R[x]$ εἶναι *κλειστὸν* ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμόν, δηλ. τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἐκ τοῦ $R[x]$ ἀνήκει πάντοτε εἰς τὸ $R[x]$.

2. Ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, ἤτοι ἐὰν $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$, τότε ἰσχύει:

$$[\pi_1(x) + \pi_2(x)]\, \pi_3(x) = \pi_1(x)\, \pi_3(x) + \pi_2(x)\pi_3(x).$$

3. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυωνύμων ἔχει τὴν μεταθετικὴν καὶ προσεταιριστικὴν ἰδιότητα, ἤτοι ἐὰν $\pi_1(x), \pi_2(x), \pi_3(x) \in R[x]$, τότε ἰσχύουν:

$$\pi_1(x)\cdot\pi_2(x) = \pi_2(x)\cdot\pi_1(x)$$
$$\pi_1(x)\,[\pi_2(x)\,\pi_3(x)] = [\pi_1(x)\,\pi_2(x)]\cdot\pi_3(x).$$

4. Ὑπάρχει οὐδέτερον στοιχεῖον ὡς πρὸς τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ εἶναι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv 1$, ἤτοι ἰσχύει:

$$f(x)\cdot\varphi(x) \equiv 1\cdot\varphi(x) \equiv \varphi(x) \text{ διὰ κάθε } \varphi(x) \in R[x].$$

στ'). Καλοῦμεν **ν—οστὴν δύναμιν** ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0$ καὶ συμβολίζομεν ταύτην μὲ $[f(x)]^\nu$, τὸ πολυώνυμον:

$$[f(x)]^\nu \underset{\text{ορσ}}{=} f(x)\cdot f(x) \cdots f(x),$$

ὅπου οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι ν τὸ πλῆθος.

Συνέπειαι τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ εἶναι:

1. $[f(x)]^\nu \cdot [f(x)]^\mu = [f(x)]^{\nu+\mu}$
2. $[[f(x)]^\mu]^\nu = [f(x)]^{\mu\nu}$
3. $[f(x)\cdot g(x)]^\nu = [f(x)]^\nu \cdot [g(x)]^\nu$.

Παρατήρησις: Τὸ σύνολον $R[x]$ τῶν πολυωνύμων μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἐφωδιασμένον μὲ δύο πράξεις: τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, ὡς αὗται ὡρίσθησαν ἀνωτέρω καὶ αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς προαναφερθείσας ἰδιότητας, ἀποτελεῖ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα μιᾶς θεμελιώδους ἀλγεβρικῆς ἐννοίας, τῆς **τοῦ δακτυλίου,** ἔννοιαν τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἕκτην τάξιν.

Ὁ δακτύλιος οὗτος λέγεται «**πολυωνυμικὸς δακτύλιος**» καὶ συμβολίζεται μὲ $R[x]$.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω δύο θεωρήματα:

§ 52. Θεώρημα I.—**Ἐὰν $\varphi(x) \not\equiv 0$, τότε ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι $f(x)\cdot\varphi(x) \equiv 0$ εἶναι $f(x) \equiv 0$.**

Ἀπόδειξις: α). **Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.** Ἔστω ὅτι $f(x)\cdot\varphi(x) \equiv 0$ καὶ $f(x) \not\equiv 0$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Ἐφ᾽ ὅσον $f(x) \not\equiv 0$, ὑπάρχει συντελεστὴς αὐτοῦ $\alpha_\nu \neq 0$ (ν βαθμὸς τοῦ $f(x)$). Ἐπίσης ἐφ᾽ ὅσον $\varphi(x) \not\equiv 0$, ὑπάρχει συντελεστὴς αὐτοῦ $\beta_\mu \neq 0$ (μ βαθμὸς τοῦ $\varphi(x)$). Τότε τὸ γινόμενον $f(x)\cdot\varphi(x)$ θὰ περιλαμβάνῃ ὡς ὅρον τὸν $\alpha_\nu\beta_\mu x^{\nu+\mu}$ μὲ $\alpha_\nu\beta_\mu \neq 0$ καὶ ἑπομένως $f(x)\cdot\varphi(x) \not\equiv 0$, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα $f(x) \equiv 0$.

β). **Ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή.** Πράγματι, ἂν $\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ καὶ $f(x) \equiv 0$, τότε: $f(x)\cdot\varphi(x) \equiv 0\cdot(\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0) \equiv (0\cdot\beta_\mu)x^\mu + (0\cdot\beta_{\mu-1})x^{\mu-1} + \ldots + (0\cdot\beta_1)x + (0\cdot\beta_0) \equiv 0\cdot x^\mu + 0\cdot x^{\mu-1} + \ldots + 0x + 0 \equiv 0$.

§ 53. Θεώρημα II.—**Ἐὰν $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x) \in R[x]$ καὶ εἶναι $\varphi(x) \not\equiv 0$, τότε διὰ νὰ εἶναι $f(x)\cdot\varphi(x) \equiv g(x)\cdot\varphi(x)$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $f(x) \equiv g(x)$.**

Ἀπόδειξις: Πράγματι, ἡ $f(x)\cdot\varphi(x) \equiv g(x)\cdot\varphi(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:

$$f(x)\varphi(x) - g(x)\varphi(x) \equiv 0$$

ἢ

$$\varphi(x)\cdot[f(x) - g(x)] \equiv 0$$

καὶ ἐπειδὴ $\varphi(x) \not\equiv 0$, κατὰ τὸ θεώρημα I, ἡ τελευταία σχέσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:

$$f(x) - g(x) \equiv 0, \quad \text{δηλαδή:} \quad f(x) \equiv g(x).$$

Ἀξιόλογος σημείωσις: Ἐξ ὅλων τῶν μέχρι τοῦδε συμπερασμάτων συνάγομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων $R[x]$ μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς εἶναι *κλειστὸν* ὡς πρὸς τὰς τρεῖς πράξεις, τὴν πρόσθεσιν, τὴν ἀφαίρεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμόν, εἰς τὸν ὁποῖον μάλιστα ἰσχύει ἡ μεταθετικὴ ἰδιότης. Ἐξ ἄλλου (θεώρ. I) γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσον μὲ τὸ μηδὲν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Πάντα ταῦτα χαρακτηρίζουν τὸ σύνολον $R[x]$ τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς μίαν «**ἀκεραίαν περιοχήν**». Περὶ τῆς ἐννοίας τοῦ δακτυλίου καὶ τῆς ἀκεραίας περιοχῆς θὰ γνωρίσωμεν περισσότερα εἰς τὴν ἕκτην τάξιν.

§ 54. Ἀριθμητικὴ τιμὴ πολυωνύμου.—Ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν § 50 εἰς ἓν πολυώνυμον $f(x)$ σημειοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι, ἂν τὸ x ἀντικατασταθῇ μὲ τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμὸν α, δύνανται νὰ ἐκτελεσθοῦν, ὁπότε προκύπτει εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον συμβολίζομεν διὰ τοῦ $f(\alpha)$ καὶ καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διὰ $x = \alpha$. Οὕτως, ἐὰν

$$f(x) \equiv 2x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x - 5$$

θὰ εἶναι:

$$f(2) = 2\cdot2^4 - 5\cdot2^3 + 3\cdot2^2 - 2 - 5 = -3.$$

Ὁ ἀριθμὸς -3 εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τὴν τιμὴν $x=2$. Τὸ αὐτὸ πολυώνυμον διὰ $x=3$ δίδει : $f(3)=46$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος (γινομένου) δύο πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα (γινόμενον) τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν πολυωνύμων.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων προκύπτει ὅτι : **δύο ἐκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα ἔχουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς.** Πράγματι, ἐὰν

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\varphi(x) = \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$$

καὶ $f(x) \equiv \varphi(x)$, ὅτε $\alpha_\nu = \beta_\nu$, $\alpha_{\nu-1} = \beta_{\nu-1}$, $\cdots$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_0 = \beta_0$ (βλ. § 51) θὰ εἶναι καί : $f(\alpha) = \varphi(\alpha)$ διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν α, διότι :

$$f(\alpha) \equiv \alpha_\nu \alpha^\nu + \alpha_{\nu-1}\alpha^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\alpha + \alpha_0 =$$

$$= \beta_\nu \alpha^\nu + \beta_{\nu-1}\alpha^{\nu-1} + \cdots + \beta_1\alpha + \beta_0 \equiv \varphi(\alpha).$$

Τέλος, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου, προκύπτει ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ παντὸς μηδενικοῦ πολυωνύμου εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πάντοτε πρὸς τὸ μηδέν, διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x.

Παρατήρησις: Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ σύμβολον x ἐν τῷ πολυωνύμῳ $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ δι' οἱουδήποτε πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, δι' ὃ καὶ καλεῖται μεταβλητὴ τοῦ πολυωνύμου. Διὰ τῆς τοιαύτης ἀντικαταστάσεως εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν x ἀντιστοιχεῖ εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς $y = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, ἤτοι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ὁρίζει μίαν συνάρτησιν, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν ἐπίσης διὰ τοῦ $f(x)$, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς ἐν $\mathbf{R}$, μὲ τύπον :

$$y = f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0. \qquad (1)$$

Αἱ συναρτήσεις τοῦ τύπου (1) καλοῦνται **πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις ἢ ἀκέραιαι ρηταὶ συναρτήσεις τοῦ x.**

Ὁρίζομεν ὅτι δύο πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ λέγονται ἐκ ταυτότητος ἴσαι καὶ σημειοῦμεν $f(x) \equiv \varphi(x)$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἐὰν αὗται εἶναι ἴσαι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$.

Ἐὰν βεβαίως δύο πολυώνυμα $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἔχουν δηλαδὴ τοὺς αὐτοὺς συντελεστάς, ταῦτα ὁρίζουν ἐντὸς τοῦ $\mathbf{R}$ καὶ ἴσας πολυωνυμικὰς συναρτήσεις.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ γίνεται χρῆσις τῆς ἐκφράσεως : *«Θεωροῦμεν τὴν ἀπεικόνισιν* $f: x \longrightarrow \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ *τοῦ* $\mathbf{R}$ *ἐν τῷ* $\mathbf{R}$». Διὰ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως θὰ ἐννοῶμεν ὅτι θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν f ὡρισμένην ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}$ μὲ τιμὰς ἐν $\mathbf{R}$, ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ διὰ } x \in \mathbf{R}.$$

§ 55. Ἔννοια τῆς ρίζης ἑνὸς πολυωνύμου. — Ἔστω τὸ μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad (1)$$

τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Ἐὰν διὰ $x = \rho$ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι ἴση μὲ μηδέν, ἤτοι $f(\rho) = 0$, τότε ὁ ρ καλεῖται **ρίζα** τοῦ πολυωνύμου (1).

Π.χ. τοῦ πολυωνύμου $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1, $-2, -3$, διότι εἶναι : $f(1) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(-3) = 0$.

Ἐὰν ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον ἐξισώσωμεν μὲ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν μίαν **ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν.**

Οὕτως, ἐκ τοῦ πολυωνύμου (1) ἔχομεν τὴν ἀλγεβρικὴν ἐξίσωσιν ν βαθμοῦ :

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0. \qquad (2)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ x δὲν εἶναι πλέον ἡ *μεταβλητή*, ἀλλὰ μία ρίζα τοῦ πολυωνύμου (1). Αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου (1) εἶναι καὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (2). Ἀξίζει νὰ τονισθῇ ὅτι εἶναι ἐντελῶς διάφορος ἡ ἔννοια τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$ ἀπὸ τὴν ἔννοιαν $f(x) \equiv 0$ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου. Διότι εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ x εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ καὶ ἐπομένως ἔχει προσδιοριστέαν τιμήν, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν τὸ x εἶναι ἡ *«μεταβλητὴ»* τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ καὶ ἐπομένως ἔχει ἀπροσδιόριστον τιμήν.

Ἓν πολυώνυμον ἔχει ἔννοιαν ἀκόμη καὶ ἐὰν τὸ σύμβολον x ἀντικατασταθῇ μὲ μιγαδικοὺς ἀριθμούς, συνεπῶς τὸ πολυώνυμον (1) δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ μιγαδικὰς ρίζας.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + 1$ ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμούς :

$$-1, \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τῆς ρίζης :

Καλεῖται ρίζα ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \not\equiv 0$ κάθε ἀριθμὸς πραγματικὸς ἢ μιγαδικός, ὅστις τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x εἰς τὸ πολυώνυμον τὸ μηδενίζει.

Συντόμως ὁ ὁρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\textbf{Ὁ } \rho \textbf{ εἶναι ρίζα τοῦ } f(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(\rho) = 0.}$$

Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, πραγματικὴ ἢ μιγαδική, λέγεται **ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.** Ἀκριβέστερον : *Εἷς ἀριθμὸς $\zeta \in C$ λέγεται* **ἀλγεβρικὸς** *ὑπεράνω τοῦ* **R** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$, ἤτοι $f(x) \in R[x]$, μὲ $f(\zeta) = 0$.* Εἷς ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι ἀλγεβρικός, καλεῖται **ὑπερβατικός.** Ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς εἶναι, λ.χ., ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς $\pi = 3{,}14159\ldots$ ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς e, περὶ τοῦ ὁποίου γίνεται λόγος εἰς ἑπόμενον κεφάλαιον.

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι ρητοὶ ἢ ἄρρητοι, ἀλλὰ δὲν ἕπεται ὅτι κάθε ἄρρητος εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ π καὶ e.

Εἰς τὴν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν καὶ τὴν Θεωρίαν τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων ἀποδεικνύεται τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 56. Θεώρημα τοῦ D' Alembert. — **Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς (ἢ μιγαδικοὺς) ἀριθμούς, βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, ἔχει ἐντὸς τοῦ συνόλου C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μίαν τοὐλάχιστον ρίζαν.**

Τὸ θεώρημα τοῦτο ὀνομάζεται *θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας*. Τοῦτο διετυπώθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ D' Alembert κατὰ τὸ 1764, ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις ὑπ' αὐτοῦ δὲν ἦτο αὐστηρά. Ἡ πρώτη αὐστηρὰ ἀπόδειξις ἐγένετο τὸ 1799 παρὰ τοῦ Gauss. Ἔκτοτε ἐδόθησαν καὶ ἄλλαι ἀποδείξεις (Cauchy, κ.ἄ.).

Τὸ θεώρημα τοῦ D' Alembert ἐξασφαλίζει μὲν τὴν ὕπαρξιν ρίζης (πραγματικῆς ἢ μιγαδικῆς) διὰ κάθε πολυώνυμον βαθμοῦ $\nu \geqq 1$, δὲν παρέχει ὅμως μέθοδον εὑρέσεως ταύτης.

Ἡ ἀναζήτησις μεθόδων διὰ τὴν εὕρεσιν ριζῶν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως ν βαθμοῦ συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν γενικῶν τύπων, διὰ τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ἐκφράζονται συναρτήσει τῶν συντελεστῶν αὐτῆς διὰ τῶν πράξεων τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως καὶ τῆς ἐξαγωγῆς τῶν ριζικῶν. Ἀποδεικνύεται ὅτι διὰ τὰς ἐξισώσεις μέχρι τετάρτου βαθμοῦ εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθοῦν τοιοῦτοι τύποι. Ὁ Abel ἀπέδειξεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατόν, εἰς κάθε περίπτωσιν, νὰ εὑρεθοῦν γενικοὶ τύποι διὰ τὰς ἐξισώσεις βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ τετάρτου.

§ 57. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων — Μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.

Ἡ ἰσότης τῶν συντελεστῶν τῶν ὁμοβαθμίων ὅρων δύο ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων (§ 51) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς συντελεστὰς ἑνὸς πολυωνύμου εἰς τρόπον, ὥστε νὰ πληροῖ τοῦτο ὡρισμένας συνθήκας. Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι γνωστὴ ὡς **μέθοδος τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.** Ἂς ἴδωμεν πῶς ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδος αὕτη εἰς συγκεκριμένα παραδείγματα :

Ἐφαρμογὴ 1η : Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν α, β, γ οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta \equiv 2x^3 + (\gamma - 2)\,x^2 - (\gamma + 12)\,x - 6\gamma.$$

Λύσις : Ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ x καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι θὰ εἶναι ἴσοι· δηλαδὴ θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ -(\gamma + 12) &= -13 \\ -6\gamma &= \beta \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \gamma - 2 &= \alpha \\ \gamma + 12 &= 13 \\ 6\gamma &= -\beta \end{aligned}\right\}.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν :

$$\alpha = -1, \qquad \beta = -6, \qquad \gamma = 1.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον f(x) τρίτου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν μηδὲν καὶ ἐπαληθεύει τὴν ταυτότητα :

$$f(x) - f(x - 1) \equiv x^2.$$

Ἀκολούθως, βάσει αὐτοῦ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2, \quad (\nu \in N).$$

Λύσις: Τὸ ζητούμενον πολυώνυμον θὰ εἶναι τῆς μορφῆς: $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, ἔνθα α, β, γ, δ προσδιοριστέοι συντελεσταί. Ἐπειδὴ $f(0) = 0$ θὰ πρέπει $\delta = 0$ καὶ τὸ πολυώνυμον γίνεται: $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως θὰ ἔχωμεν:

$$f(x) - f(x-1) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - \alpha(x-1)^3 - \beta(x-1)^2 - \gamma(x-1) \equiv$$
$$\equiv 3\alpha x^2 - (3\alpha - 2\beta)\, x + (\alpha - \beta + \gamma) \equiv x^2.$$

Ἐξ αὐτῆς, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων (§ 51), προκύπτει:

$$\left.\begin{aligned} 3\alpha &= 1 \\ 3\alpha - 2\beta &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 0 \end{aligned}\right\}, \text{ ἐξ οὗ: } \begin{aligned} \alpha &= 1/3 \\ \beta &= 1/2 \\ \gamma &= 1/6. \end{aligned}$$

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι:

$$f(x) \equiv \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x. \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ταυτότητος $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ εὑρίσκομεν, θέτοντες διαδοχικῶς $x = 1,\ x = 2, \ldots, x = \nu$:

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= 1^2 \\ f(2) - f(1) &= 2^2 \\ f(3) - f(2) &= 3^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ f(\nu) - f(\nu-1) &= \nu^2. \end{aligned}$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$f(\nu) - f(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2$, ἢ ἐπειδὴ $f(0) = 0$ ἔχομεν τελικῶς:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + \nu^2 = f(\nu) = \frac{1}{3}\nu^3 + \frac{1}{2}\nu^2 + \frac{1}{6}\nu = \frac{\nu(\nu+1)\cdot(2\nu+1)}{6}.$$

Ἐφαρμογὴ 3η: Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα:

$$\frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}, \quad \nu \in N, \quad \alpha_\nu \beta_\nu \neq 0$$

ἀνεξάρτητον τοῦ x, εἶναι ἡ: $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\beta_{\nu-1}} = \cdots = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_0}{\beta_0}.$

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι τὸ κλάσμα εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x, ἤτοι, ὅτι ἰσοῦται, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x, πρὸς ἀριθμὸν k. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0} \equiv k \qquad (1)$$

ἢ $\quad \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv k\beta_\nu x^\nu + k\beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + k\beta_1 x + k\beta_0.$

Ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας: $\alpha_\nu = k\beta_\nu$, $\alpha_{\nu-1} = k\beta_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1 = k\beta_1$, $\alpha_0 = k\beta_0$.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha_{\nu-1}}{\beta_{\nu-1}} = \ldots = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0}. \tag{2}$$

Ἤτοι, ἐδείχθη ὅτι ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι καὶ ἱκανή. Πράγματι· ἂν ἰσχύῃ ἡ (2) καὶ καλέσωμεν k τοὺς ἴσους λόγους, θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha_\nu = k\beta_\nu, \ \alpha_{\nu-1} = k\beta_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1 = k\beta_1, \ \alpha_0 = k\beta_0.$$

Τὸ δοθὲν κλάσμα τότε γράφεται:

$$\frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} = \frac{k(\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)}{\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0} = k,$$

ἤτοι, εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ x καὶ ἴσον πάντοτε πρὸς $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον: $(2\alpha + 1)x^2 + (3\beta - 1)x + (2\gamma + \beta - \alpha)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

132. Ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν λ καὶ μ διὰ τὰς ὁποίας τὸ πολυώνυμον: $(\lambda - 1)x^2 + (2\mu + 2)x + (\lambda + \mu - 3)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν;

133. Ἐὰν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ καὶ $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$, δείξατε ὅτι τὸ $f(x) \equiv (\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \gamma)x + (\gamma - \alpha)$ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

134. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον $2x^2 + 4x + 5$ ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος μέ: $\alpha(x + 2)(x + 3) + \beta x(x - 1) + \gamma$.

135. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον: $f(x) \equiv x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ εἶναι τετράγωνον τοῦ τριωνύμου $x^2 - x + \gamma$.

136. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x;

α) $\dfrac{3x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 10x + 4}$, β) $\dfrac{4x^2 - 5x - 1}{8x^2 - 10x + 1}$, γ) $\dfrac{2x^3 - 6x^2 + 2x - 2}{x^3 - 3x^2 + x - 1}$.

137. Προσδιορίσατε τὰ λ, μ, ἵνα τὰ κλάσματα:

α) $\dfrac{(\lambda - 1)x^2 + (\mu + 1)x + 1}{x^2 + 5x + 1}$ β) $\dfrac{x^2 + (\lambda - \mu)x + \lambda\mu}{4x^2 + (2\lambda - \mu)x + \lambda - \mu}$

ἔχουν τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ x.

138. Λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ εἶναι τέλειος κύβος, τότε καὶ μόνον τότε, ἐὰν τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν: $\alpha(x + k)^3$, $k \in \mathbf{R}$. Κατόπιν τούτου, δείξατε ὅτι αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα τὸ $f(x)$ εἶναι τέλειος κύβος, εἶναι: $\beta^3 = 27\alpha^2\delta$, $\beta^2 = 3\alpha\gamma$. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ εἶναι τέλειος κύβος.

139. Προσδιορίσατε τὰ λ, μ, ν, ἵνα ἡ παράστασις

$$\frac{(\lambda - 1)x^3 + (\mu + 1)x^2 + (\nu - 1)x - 15}{3x^3 - 6x^2 + x - 5}$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

140. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\gamma^2 = \delta\alpha^2$ καὶ $(4\beta - \alpha^2)^2 = 64\delta$.

141. Προσδιορίσατε τὰ Α, Β, Γ ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$\frac{2x^2 + 10x - 3}{(x + 1)(x^2 - 9)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 3} + \frac{\Gamma}{x - 3}.$$

Ὑπόδειξις: Ἐκτελέσατε πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἐξισώσατε τοὺς ἀριθμητὰς τῶν δύο μελῶν.

142. Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ τετάρτου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν μηδὲν καὶ ἐπαληθεύει τὴν ταυτότητα: $f(x) - f(x - 1) \equiv x^3$. Βάσει τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3$, $\nu \in \mathbf{N}$.

143. Ἐὰν $\alpha + \beta + \gamma = 30$, νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἵνα τὸ κλάσμα $\dfrac{(\alpha - 2)x^2 + (\beta - 4)x + \gamma - 6}{x^2 + 2x + 3}$ ἔχῃ τιμὴν ἀνεξάρτητον τοῦ x.

144. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α, β, γ, δ οὕτως, ὥστε:

$$\alpha\nu^4 + \beta\nu^3 + \gamma\nu^2 + \delta\nu \equiv 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3, \qquad \nu \in \mathbf{N}.$$

145. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv Ax^2 + 2Bxy + \Gamma y^2 + 2\Delta x + 2Ey + Z$$
$$\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \zeta$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θὰ εἶναι:

$$A = \alpha,\ B = \beta,\ \Gamma = \gamma,\ \Delta = \delta,\ E = \varepsilon,\ Z = \zeta.$$

Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων

§ 58. Τελεία διαίρεσις. —Ἔστωσαν $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$ δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ πολυωνυμικοῦ δακτυλίου $R[x]$. Θὰ λέγωμεν:

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) \not\equiv 0$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x) \in R[x]$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x). \tag{1}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι: Τὸ $f(x)$ εἶναι *διαιρετὸν* διὰ $\varphi(x)$, ἢ τὸ $f(x)$ εἶναι *πολλαπλάσιον* τοῦ $\varphi(x)$, ἢ ἡ διαίρεσις $f(x) : \varphi(x)$ εἶναι *τελεία*, ἢ ἀκόμη τὸ $\varphi(x)$ *διαιρεῖ* (ἀκριβῶς) τὸ $f(x)$ καὶ γράφομεν $\varphi(x) \mid f(x)$.

Κατόπιν τοῦ συμβολισμοῦ τούτου ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς δίδεται συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\varphi(x) \mid f(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \exists\ \pi(x) \in R[x] : f(x) \equiv \varphi(x)\pi(x).} \tag{2}$$

Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x)$ δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ $\varphi(x) \not\equiv 0$, τότε γράφομεν:

$$\varphi(x) \nmid f(x).$$

Τὰ πολυώνυμα $f(x)$, $\varphi(x)$ καὶ $\pi(x)$ καλοῦνται ἀντιστοίχως **διαιρετέος**, **διαιρέτης** καὶ **πηλίκον** τῆς τελείας διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi(x)$.

Ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ.

α). Ἐὰν ν, μ $(\nu \geqq \mu)$ καὶ λ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ τῶν $f(x)$, $\varphi(x)$ καὶ

$\pi(x)$ θὰ ἔχωμεν (§ 51,ε) $\mu+\lambda=\nu$, ὅτε $\lambda=\nu-\mu$, ἤτοι : **«ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου».**

β). *Τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον διαιρεῖται (ἀκριβῶς) ὑπὸ παντὸς μὴ μηδενικοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ καὶ δίδει πηλίκον μηδέν.* Πράγματι ἰσχύει : $0 \equiv \varphi(x)\cdot 0$.

γ). *Πᾶν πολυώνυμον διαιρεῖται (ἀκριβῶς) ὑπὸ παντὸς σταθεροῦ πολυωνύμου $\not\equiv 0$, (δηλ. σταθερᾶς ποσότητος $\neq 0$).* Πράγματι, ἐὰν

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{καὶ} \quad \varphi(x) = c\ ^{*)}, \quad c \in \mathbf{R}, \quad c \neq 0$$

ἔχομεν τὴν προφανῆ ταυτότητα :

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv c\cdot\left\{\frac{\alpha_\nu}{c}x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{c}x^{\nu-1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{c}x + \frac{\alpha_0}{c}\right\},$$

ὅπου τὸ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι τὸ πηλίκον.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (2) καὶ τοῦ θεωρήματος § 52, προκύπτει τὸ μονοσήμαντον τοῦ πηλίκου. Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ πρότασις :

Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x)$, τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς ἓν πολυώνυμον $\pi(x) \in R[x]$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x).$$

Πράγματι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ ἕτερον πολυώνυμον $\pi_1(x) \in R[x]$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi_1(x),$$

τότε θὰ ἴσχυε : $\varphi(x)[\pi(x)-\pi_1(x)] \equiv 0$, καὶ ἐπειδὴ $\varphi(x) \not\equiv 0$, θὰ εἶναι, κατὰ τὸ θεώρημα § 52, $\pi(x)-\pi_1(x) \equiv 0$, ἐξ οὗ : $\pi(x) \equiv \pi_1(x)$.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἀποδεικνύομεν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

§ 59. Θεώρημα. – Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x) \Longrightarrow \varphi(x) \mid f(x)\cdot\sigma(x)$, διὰ κάθε πολυώνυμον $\sigma(x) \in R[x]$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $\varphi(x) \mid f(x)$ ἔχομεν : $f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x)$, ὅθεν καί :

$$f(x)\,\sigma(x) \equiv \varphi(x)\cdot[\pi(x)\cdot\sigma(x)] \equiv \varphi(x)\cdot\pi_1(x),$$

ἔνθα $\pi_1(x) \equiv \pi(x)\cdot\sigma(x)$, δηλαδή : $\varphi(x) \mid f(x)\,\sigma(x)$.

Παρατήρησις : Διὰ $\sigma(x) = c$ ἰσχύει : Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x) \Longrightarrow \varphi(x) \mid cf(x)$, $c \in \mathbf{R}$.

§ 60. Θεώρημα. – Ἐὰν $\varphi(x) \mid f_1(x)$ καὶ $\varphi(x) \mid f_2(x) \Longrightarrow \varphi(x) \mid f_1(x) \pm f_2(x)$.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν : $f_1(x) \equiv \pi_1(x)\cdot\varphi(x)$

$$f_2(x) \equiv \pi_2(x)\cdot\varphi(x).$$

Ὅθεν : $f_1(x) \pm f_2(x) \equiv [\pi_1(x) \pm \pi_2(x)]\cdot\varphi(x)$,

ἤτοι $\varphi(x) \mid f_1(x) \pm f_2(x)$.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου καὶ τῆς παρατηρήσεως τοῦ θεωρήματος § 59 προκύπτει τὸ κάτωθι :

* Τὸ γράμμα c εἶναι τὸ ἀρχικὸν τῆς λέξεως constant = σταθερὰ καὶ δὲν πρέπει νὰ συγχέηται μὲ τὸ σύμβολον $\mathbf{C} \equiv$ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (Complex numbers).

§ 61. Θεώρημα. — Ἐὰν $\varphi(x) \mid f_1(x), \varphi(x) \mid f_2(x), \ldots, \varphi(x) \mid f_\nu(x)$, τότε $\varphi(x) \mid c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_\nu f_\nu(x)$, ἔνθα $c_1, c_2, \ldots, c_\nu$ τυχοῦσαι σταθεραί.

§ 62. Θεώρημα. — Ἐὰν $\varphi(x) \mid f_1(x), \varphi(x) \mid f_2(x), \ldots, \varphi(x) \mid f_\nu(x)$, τότε $\varphi(x) \mid f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_\nu(x)$.

Ἡ ἀπόδειξις ὡς εὔκολος παραλείπεται.

Πόρισμα. — Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x) \Longrightarrow \varphi(x) \mid [f(x)]^\nu \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

§ 63. Θεώρημα. — Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x)$ καὶ $f(x) \mid \varphi(x) \Longrightarrow f(x) = c \cdot \varphi(x),\ c \in \mathbf{R}$.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $f(x) \equiv \pi_1(x) \cdot \varphi(x)$

καὶ $\varphi(x) \equiv \pi_2(x) \cdot f(x)$

συνεπῶς $f(x) \equiv \pi_1(x)\, \pi_2(x)\, f(x)$ καὶ ἐπειδὴ $f(x) \not\equiv 0$

κατὰ τὸ θεώρημα § 53 προκύπτει : $\pi_1(x)\, \pi_2(x) \equiv 1$.

Τότε ὅμως ἕκαστον τῶν πολυωνύμων $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)$ πρέπει νὰ εἶναι βαθμοῦ μηδέν, δηλαδὴ σταθεραὶ (διατί ;).

Ὥστε $\pi_1(x) = c_1$, $\pi_2(x) = c_2$, ἔνθα $c_1,\ c_2 \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Ἄρα $f(x) \equiv c_1 \varphi(x)$ ἢ $\varphi(x) \equiv c_2 f(x)$, ὁπότε $f(x) = \frac{1}{c_2}\, \varphi(x)$, δηλαδὴ γενικῶς :

$$f(x) = c \cdot \varphi(x).$$

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τούτου προκύπτει ἀμέσως ὅτι :

Ἐὰν $\varphi(x) \mid f(x) \Longrightarrow c\varphi(x) \mid f(x),\ c \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Οἱ διαιρέται $\varphi(x)$ καὶ $c\varphi(x)$ τοῦ $f(x)$ καλοῦνται **ἰσοδύναμοι διαιρέται.** Ἐξ ὅλων τῶν ἰσοδυνάμων διαιρετῶν ἑνὸς πολυωνύμου $f(x)$ ἐκεῖνος, ὅστις ἔχει ὡς συντελεστὴν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ x τὴν μονάδα, καλεῖται **κύριος διαιρέτης.**

§ 64. Ταυτότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως. — Ἐν γένει ἡ διαίρεσις δύο τυχόντων ἀκεραίων πολυωνύμων δὲν εἶναι τελεία. Εἷς τρόπος διὰ νὰ ἐλέγχωμεν ἂν ἓν πολυώνυμον διαιρῇ ἓν ἄλλο εἶναι ὁ ἀκόλουθος :

Ἔστωσαν, π.χ., τὰ πολυώνυμα $2x^2 - 7x + 6$ καὶ $3x + 1$. Ἵνα τὸ δεύτερον διαιρῇ ἀκριβῶς τὸ πρῶτον, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1) \cdot \pi(x). \tag{1}$$

Ἐπειδή, ὡς ἐλέχθη § 58, ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἕπεται ὅτι τὸ $\pi(x)$ πρέπει νὰ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, ἤτοι τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta$. Τότε ἡ (1) γίνεται :

$$2x^2 - 7x + 6 \equiv (3x + 1)\, (\alpha x + \beta) \equiv 3\alpha x^2 + (\alpha + 3\beta)\, x + \beta,$$

ὁπότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων, θὰ ἔχωμεν συγχρόνως :

$$\begin{aligned} 3\alpha &= 2 \\ \alpha + 3\beta &= -7 \\ \beta &= 6. \end{aligned}$$

Ἡ πρώτη τούτων δίδει $\alpha = \frac{2}{3}$. Διὰ $\alpha = \frac{2}{3}$ καὶ $\beta = 6$ ἡ δευτέρα δὲν ἀληθεύει, διότι :

$$\frac{2}{3} + 3 \cdot 6 = \frac{2}{3} + 18 = 18\frac{2}{3} \neq -7.$$

Συνεπῶς δὲν ὑπάρχει πολυώνυμον $\pi(x)$ πληροῦν τὴν (1), ἄρα τὸ $2x^2-7x+6$ δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $3x+1$. Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι *κατ' ἐξαίρεσιν μόνον* ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι τελεία.

Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν ἀντὶ τῆς ταυτότητος (1) τῆς § 58 ἰσχύει ἡ καλουμένη ταυτότης τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως, ἡ ὁποία διαμορφοῦται καὶ ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸ κάτωθι θεώρημα :

Θεώρημα. – Δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $f(x)$ καὶ $\varphi(x)$, βαθμῶν ν καὶ μ ἀντιστοίχως ($\mu \geqq 0$), ὑπάρχουν πάντοτε δύο μονοσημάντως ὡρισμένα πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ ἐκ τοῦ $R[x]$ τοιαῦτα, ὥστε :

$$f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x) \tag{2}$$

καὶ βαθμὸς $\upsilon(x) <$ βαθμοῦ $\varphi(x)$.

Τὸ $\pi(x)$ καλεῖται *ἀκέραιον πηλίκον* ἢ *ἀλγοριθμικὸν πηλίκον* (συντόμως *πηλίκον*) καὶ τὸ $\upsilon(x)$ καλεῖται *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi(x)$, ἡ δὲ ταυτότης (2) ἡ συνδέουσα διαιρετέον, διαιρέτην, πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον καλεῖται *ταυτότης τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως*.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ πολυώνυμα :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0,\ (\alpha_\nu \neq 0)$$
$$\varphi(x) \equiv \beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1}+\cdots+\beta_1 x+\beta_0,\ (\beta_\mu \neq 0).$$

Θὰ ἀποδείξωμεν :

α). **Τὴν ὕπαρξιν τῶν $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$.** Πρὸς τούτοις διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1η : Ἐὰν $\nu<\mu$, τότε τὸ θεώρημα ἰσχύει, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν $\pi(x)\equiv 0$ καὶ $\upsilon(x)\equiv f(x)$, ὅτε ἡ (2) ἰσχύει, διότι ἔχομεν :

$$f(x)\equiv\varphi(x)\cdot 0+f(x).$$

Περίπτωσις 2α : Ἐὰν $\nu\geqq\mu$, τότε διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον $\alpha_\nu x^\nu$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου $\beta_\mu x^\mu$ τοῦ διαιρέτου λαμβάνομεν ὡς πηλίκον τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}$, τὸ ὁποῖον ἂς καλέσωμεν $\pi_1(x)$, ἤτοι :

$$\pi_1(x)\equiv\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}x^{\nu-\mu}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὸν διαιρέτην $\varphi(x)$ ἐπὶ τὸ $\pi_1(x)$ λαμβάνομεν ὡς γινόμενον τὸ πολυώνυμον :

$$\varphi(x)\,\pi_1(x)\equiv\alpha_\nu x^\nu+\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-1}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-2}\cdot x^{\nu-2}+\cdots+\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_0 x^{\nu-\mu},$$

τὸ ὁποῖον ἔχει μετὰ τοῦ $f(x)$ κοινὸν τὸν πρῶτον ὅρον $\alpha_\nu x^\nu$.

Σχηματίζομεν τὴν διαφοράν :

$$f(x)-\varphi(x)\pi_1(x)\equiv\left(\alpha_{\nu-1}-\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-1}\right)x^{\nu-1}+\left(\alpha_{\nu-2}-\frac{\alpha_\nu}{\beta_\mu}\beta_{\mu-2}\right)x^{\nu-2}+\cdots$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\upsilon_1(x)$ τὸ πολυώνυμον τοῦ δευτέρου μέλους, ἔχομεν :

$$f(x)-\varphi(x)\,\pi_1(x)\equiv\upsilon_1(x)$$

ἢ $f(x)\equiv\varphi(x)\pi_1(x)+\upsilon_1(x)$, μὲ βαθμὸν $\upsilon_1(x)\leqq\nu-1.$ (3)

Τότε: (i). Ἐὰν $\nu - 1 < \mu$ ἡ (3) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

(ii). Ἐὰν $\nu - 1 \geqq \mu$, ἐργαζόμενοι ὁμοίως ἐπὶ τῶν $\upsilon_1(x)$ ὡς διαιρετέον καὶ $\varphi(x)$ ὡς διαιρέτην, λαμβάνομεν:

$$\upsilon_1(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_2(x) + \upsilon_2(x), \quad \text{μὲ βαθμὸν } \upsilon_2(x) < \text{βαθμοῦ } \upsilon_1(x).$$

Ἐὰν τώρα εἶναι πάλιν: βαθμὸς $\upsilon_2(x) \geqq \mu$ (= βαθμὸς $\varphi(x)$), συνεχίζομεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν ἐπὶ τῶν $\upsilon_2(x)$ καὶ $\varphi(x)$, ἤτοι: θὰ ὑπάρχῃ πάλιν ἓν πηλίκον $\pi_3(x)$ καὶ ἓν πολυώνυμον $\upsilon_3(x)$, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\upsilon_2(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi_3(x) + \upsilon_3(x), \quad \text{μὲ βαθμὸν } \upsilon_3(x) < \text{βαθμ. } \upsilon_2(x).$$

Οἱ βαθμοὶ τῶν $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$, $\upsilon_3(x)$ βαίνουσιν διαδοχικῶς ἐλαττούμενοι, ἄρα θὰ φθάσωμεν τελικῶς εἰς ἓν πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ μ τοῦ $\varphi(x)$, ὅτε θὰ λήξῃ ἡ ἐργασία αὕτη. Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \varphi(x)\pi_1(x) + \upsilon_1(x) \\ \upsilon_1(x) &\equiv \varphi(x)\pi_2(x) + \upsilon_2(x) \\ \upsilon_2(x) &\equiv \varphi(x)\pi_3(x) + \upsilon_3(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \upsilon_k(x) &\equiv \varphi(x)\pi_{k+1}(x) + \upsilon_{k+1}(x), \end{aligned} \tag{4}$$

ὅπου τὸ $\upsilon_{k+1}(x)$ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ μ τοῦ $\varphi(x)$. Ἀθροίζοντες τὰς ἰσότητας (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις:

$$f(x) \equiv \varphi(x)\{\pi_1(x) + \pi_2(x) + \cdots + \pi_{k+1}(x)\} + \upsilon_{k+1}(x).$$

Θέτοντες: $\pi_1(x) + \pi_2(x) + \cdots + \pi_{k+1}(x) \equiv \pi(x)$ καὶ $\upsilon_{k+1}(x) = \upsilon(x)$, φθάνομεν εἰς τὴν ἀποδεικτέαν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv \varphi(x)\,\pi(x) + \upsilon(x), \quad \text{μὲ βαθμ. } \upsilon(x) < \mu \ (\equiv \text{βαθμὸς } \varphi(x)).$$

β). Τὸ μονοσήμαντον τῆς παραστάσεως (2).

Τὸ ζεῦγος τῶν πολυωνύμων $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ εἶναι τὸ μ ό ν ο ν διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ (2), διότι, ἐὰν εἶναι καί:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + \upsilon'(x), \quad \text{μὲ βαθμὸν } \upsilon'(x) < \mu,$$

τότε: $\pi'(x) \equiv \pi(x)$ καὶ $\upsilon'(x) \equiv \upsilon(x)$.

Πράγματι, ἐπειδή:

$$\varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi'(x) + \upsilon'(x),$$

ἔχομεν:

$$[\pi(x) - \pi'(x)]\varphi(x) \equiv \upsilon'(x) - \upsilon(x). \tag{5}$$

Ἡ ταυτότης (5) δὲν δύναται νὰ ἰσχύῃ, εἰμὴ μόνον ἂν $\pi(x) - \pi'(x) \equiv 0$ καὶ $\upsilon'(x) - \upsilon(x) \equiv 0$, δηλαδή:

$$\pi(x) \equiv \pi'(x) \quad \text{καὶ} \quad \upsilon(x) \equiv \upsilon'(x),$$

διότι ἄλλως τὸ πρῶτο μέλος τῆς (5) εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ $\geqq \mu$, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ $< \mu$.

Τὸ θεώρημα ὅθεν ἀπεδείχθη πλήρως.

Παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς ταυτότητος διαιρέσεως (2).

1). Ἐὰν $\upsilon(x) \equiv 0$, τότε ἐκ τῆς (2) προκύπτει ἡ ταυτότης (1) τῆς τελείας διαιρέσεως.

2). Ἐκ τῆς (2) ἕπεται : $\varphi(x) \mid f(x) - \upsilon(x)$, δηλαδὴ ἡ διαφορὰ τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸ ὑπόλοιπον εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ διαιρέτου.

3). Ὁ βαθμὸς τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου.

4). Ἐὰν $\varphi(x) \not\equiv 0$ ἡ ταυτότης (2) γράφεται :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)},$$

μὲ βαθμὸν $\upsilon(x) <$ βαθμοῦ $\varphi(x)$.

Τὸ πολυώνυμον $\pi(x)$ καλεῖται *«τὸ ἀκέραιον μέρος»* καὶ τὸ $\dfrac{\upsilon(x)}{\varphi(x)}$ *«τὸ γνήσιον κλασματικὸν μέρος»* τοῦ $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$.

5). Ἡ μέθοδος τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς δίδει ἕναν *ἀλγόριθμον* διὰ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὰ πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$.

Παράδειγμα. Ἐὰν $f(x) = x^3 - 1$, $\varphi(x) = x + 1$· εὕρετε τὰ μονοσημάντως ὡρισμένα πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$, ὥστε νὰ εἶναι :

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x), \text{ μὲ βαθμ. } \upsilon(x) < \text{βαθμ. } \varphi(x) = 1.$$

Λύσις. Ἔχομεν :

$$\upsilon_1(x) \equiv f(x) - \pi_1(x) \cdot \varphi(x) = (x^3 - 1) - x^2 \cdot (x + 1) = -x^2 - 1, \qquad \pi_1(x) = x^2$$
$$\upsilon_2(x) \equiv \upsilon_1(x) - \pi_2(x) \cdot \varphi(x) = -x^2 - 1 - (-x)(x + 1) = x - 1, \qquad \pi_2(x) = -x$$
$$\upsilon_3(x) \equiv \upsilon_2(x) - \pi_3(x)\, \varphi(x) = (x - 1) - 1\,(x + 1) = -2, \qquad \pi_3(x) = 1$$

Ἄρα :

$$\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + \pi_3(x) = x_2 - x + 1$$
$$\upsilon(x) = \upsilon_3(x) = -2.$$

Πόρισμα I. – **Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ διωνύμου $x - \alpha$ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ πολυωνύμου διὰ $x = \alpha$,** ἤτοι :

$$\boxed{\upsilon = f(\alpha)}$$

Γενικώτερον, ἰσχύει ὅτι : **Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $\alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq 0$ εἶναι :**

$$\boxed{\upsilon = f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ρίζης ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου καὶ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος συμπεραίνομεν :

Πόρισμα II. – **Ἐὰν ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x) \iff x - \rho \mid f(x)$,** ἤτοι :

$$\boxed{f(\rho) = 0 \iff f(x) \equiv (x - \rho) \cdot \pi(x)},$$

ἔνθα $\pi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, ἤτοι $\pi(x) \in R[x]$.

Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων

§ 65. Θεώρημα. — **Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρῆται δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν διωνύμων : $(x-\rho_1), (x-\rho_2), \ldots, (x-\rho_\mu)$, ἔνθα $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ ἀριθμοὶ διάφοροι ἀλλήλων ἀνὰ δύο, τότε θὰ διαιρῆται (ἀκριβῶς) καὶ διὰ τοῦ γινομένου :**

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\mu)$$

καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς. Ἔστω ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ τῶν διωνύμων $(x-\rho_1)$, $(x-\rho_2)$, $\ldots$, $(x-\rho_\mu)$, τότε κατὰ τὸ πόρισμα II τῆς προηγουμένης παραγράφου θὰ ἔχωμεν : $f(\rho_1)=0$, $f(\rho_2)=0$, $\ldots$, $f(\rho_\mu)=0$.

Ἔστω $\pi_1(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $f(x):(x-\rho_1)$, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)\cdot\pi_1(x) \qquad (1)$$

ἤτοι, ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\mu=1$.

Δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει διὰ $\mu=k$, ἤτοι δεχόμεθα ὅτι :

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)\cdot\pi_k(x). \qquad (2)$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ $\mu=k+1$.

Πράγματι· ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν (2) $x=\rho_{k+1}$, θὰ ἔχωμεν :

$$f(\rho_{k+1}) \equiv (\rho_{k+1}-\rho_1)\cdot(\rho_{k+1}-\rho_2)\ldots(\rho_{k+1}-\rho_k)\cdot\pi_k(\rho_{k+1}).$$

Ἐπειδὴ $f(\rho_{k+1})=0$ καὶ $\rho_{k+1}-\rho_j \neq 0 \quad \forall\, j=1,2,\ldots,k$ θὰ εἶναι :

$$\pi_k(\rho_{k+1})=0.$$

Τότε ὅμως, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα II § 64, τὸ $\pi_k(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x-\rho_{k+1}$ καὶ ἔστω $\pi_{k+1}(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\pi_k(x):(x-\rho_{k+1})$, τότε:

$$\pi_k(x) \equiv (x-\rho_{k+1})\cdot\pi_{k+1}(x). \qquad (3)$$

Τῇ βοηθείᾳ τῆς τελευταίας ταυτότητος, ἡ (2) γράφεται :

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_k)(x-\rho_{k+1})\cdot\pi_{k+1}(x)$$

ἤτοι, ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ $\mu=k+1$, ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν μ.

Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

§ 66. Θεώρημα. — **Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :**

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_\nu \neq 0$$

μηδενίζεται διὰ ν διαφόρους τιμὰς τοῦ x, τάς : $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{\nu-1}, \rho_\nu$, τότε θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu).$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $f(\rho_1)=f(\rho_2)=\cdots=f(\rho_{\nu-1})=f(\rho_\nu)=0$, ἕπεται, συμφώνως πρὸς τὸ πόρισμα II § 64, ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τῶν διωνύμων:

$$x-\rho_1,\ x-\rho_2,\ \ldots,\ x-\rho_{\nu-1},\ x-\rho_\nu.$$

Τότε ὅμως, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu),$$

καθόσον :

$$\rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \cdots \neq \rho_{\nu-1} \neq \rho_\nu \neq \rho_1.$$

Ἄρα, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu)\cdot\pi, \qquad (1)$$

ὅπου π τὸ πηλίκον.

Ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος εἶναι βαθμοῦ ν, καθὼς καὶ ὁ διαιρέτης, τὸ πηλίκον π θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha_\nu x^\nu$ τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου x^ν τοῦ διαιρέτου. Δηλαδή :

$$\pi = \frac{\alpha_\nu x^\nu}{x^\nu} = \alpha_\nu,$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu). \qquad (2)$$

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ταυτότητα (2) εἶναι $\rho_1=\rho_2$, τότε τὸ γινόμενον $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ γίνεται $(x-\rho_1)^2$ καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα ρ_1 εἶναι **διπλῆ**, ἢ εἶναι **βαθμοῦ πολλαπλότητος δύο.** Ὁμοίως ἐὰν εἶναι $\rho_1=\rho_2=\rho_3$, τότε τὸ γινόμενον $(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)$ γίνεται $(x-\rho_1)^3$ καὶ λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα ρ_1 εἶναι **τριπλῆ**, ἢ εἶναι **βαθμοῦ πολλαπλότητος τρία.**

Διὰ νὰ εἴμεθα περισσότερον ἀκριβεῖς δίδομεν τὸν κάτωθι γενικὸν ὁρισμόν :

Μία ρίζα ρ ἑνὸς πολυωνύμου $f(x)$, διαφόρου τοῦ μηδενικοῦ, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι πολλαπλῆ τάξεως k, ἢ εἶναι βαθμοῦ πολλαπλότητος k (k ἀκέραιος $\geqq 1$), τότε καὶ μόνον τότε, ἄν :

$$(x-\rho)^k \mid f(x) \quad \text{καὶ} \quad (x-\rho)^{k+1} \nmid f(x).$$

Ἐὰν $k=1$, τότε ἡ ρίζα ρ λέγεται **ἁπλῆ**, ἐὰν $k=2$ **διπλῆ**, κ.ο.κ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ ἔχῃ μίαν ρίζαν ρ βαθμοῦ πολλαπλότητος k, τότε ὁ βαθμὸς ν αὐτοῦ εἶναι $\geqq k$.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτει τώρα ἡ ἑξῆς σπουδαία πρότασις :

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα εἷς ἀριθμὸς ρ εἶναι ρίζα, βαθμοῦ πολλαπλότητος k, ἑνὸς πολυωνύμου $f(x)$, εἶναι : νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$(1) \quad f(x) \equiv (x-\rho)^k \cdot \varphi(x) \quad \text{καὶ} \quad (2) \quad \varphi(\rho) \neq 0.$$

Ἀπόδειξις : Ἡ συνθήκη εἶναι ἀναγκαία. Πράγματι, τὸ ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$, προκύπτει ἀπὸ τὸ γενονός, ὅτι τὸ $f(x)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-\rho)^k$, ἄρα ἔχομεν :

$$f(x) \equiv (x-\rho)^k \cdot \varphi(x).$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν ἦτο $\varphi(\rho)=0$, τότε $x-\rho \mid \varphi(x)$, δηλ. $\varphi(x)=(x-\rho)\cdot\pi(x)$ καὶ ἑπομένως θὰ ἴσχυε :

$$f(x) \equiv (x-\rho)^{k+1}\cdot\pi(x), \text{ δηλ. } (x-\rho)^{k+1} \mid f(x), \text{ ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ἡ συνθήκη εἶναι ἱκανή. Πράγματι, ὑποθέσωμεν ὅτι :

$$f(x) \equiv (x-\rho)^k \cdot \varphi(x) \qquad (1)$$

μὲ

$$\varphi(\rho) \neq 0. \qquad (2)$$

Ἡ (1) δεικνύει, ὅτι πράγματι τὸ $f(x)$, εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x-\rho)^k$, ἤτοι $(x-\rho)^k \mid f(x)$.

Ἐὰν καὶ $(x-\rho)^{k+1} \mid f(x)$, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον $g(x)$, ὥστε:

$$f(x) \equiv (x-\rho)^{k+1} \cdot g(x)$$

ἤ
$$f(x) \equiv (x-\rho)^k \cdot (x-\rho)\, g(x). \tag{3}$$

Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (3) λαμβάνομεν:

$$\varphi(x) \equiv (x-\rho) \cdot g(x). \tag{4}$$

Ἡ (4), διὰ $x=\rho$, γίνεται:

$$\varphi(\rho) \equiv 0 \cdot g(\rho)$$

ἤ
$$\varphi(\rho) = 0,$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν (2). Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι: Εἰς κάθε ρίζαν πολυωνύμου $f(x) \not\equiv 0$ ἀντιστοιχεῖ *μονοσημάντως* εἷς μέγιστος ἀκέραιος $k \geqq 1$. Ἐὰν συνεπῶς τὸ πολυώνυμον $f(x)$, βαθμοῦ ν, ἔχῃ ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ καὶ ἑκάστην μὲ βαθμὸν πολλαπλότητος $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu\, (x-\rho_1)^{\lambda_1} \cdot (x-\rho_2)^{\lambda_2} \cdots (x-\rho_k)^{\lambda_k},$$

ἔνθα εἶναι
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = \nu, \qquad (k \leqq \nu).$$

Ἡ παράστασις αὕτη, ἥτις εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη διὰ κάθε πολυώνυμον, ἂν δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἡ θέσις τῶν παραγόντων ἐν αὐτῇ, καλεῖται: *«ἀνάλυσις τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων»*.

Ἐφαρμογή: Τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 + 3x + 2$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς κάτωθι:

$$f(x) \equiv (x-1)^2 (x+1)^3 (x+2),$$

ἤτοι ἔχει τὰς ρίζας 1, -1, -2 εἰς βαθμοὺς πολλαπλότητος ἀντιστοίχως 2, 3, 1.

§ 67. Θεώρημα. — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μηδενίζεται διὰ $\nu+1$ τιμὰς τοῦ x, διαφόρους μεταξύ των, τότε τοῦτο εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον.

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ $\nu+1$ διάφοροι ἀλλήλων τιμαὶ τοῦ x:

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \rho_{\nu+1}$$

μηδενίζουν τὸ πολυώνυμον $f(x)$. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu\, (x-\rho_1)\,(x-\rho_2) \ldots (x-\rho_\nu). \tag{1}$$

Ἡ ταυτότης (1), διὰ $x = \rho_{\nu+1}$, γίνεται:

$$f(\rho_{\nu+1}) \equiv \alpha_\nu\, (\rho_{\nu+1}-\rho_1)(\rho_{\nu+1}-\rho_2) \ldots (\rho_{\nu+1}-\rho_\nu) = 0, \text{ καθόσον } f(\rho_{\nu+1}) = 0. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δέ: $\rho_{\nu+1} \neq \rho_1 \neq \rho_2 \neq \cdots \neq \rho_\nu$, θὰ εἶναι:

$$(\rho_{\nu+1}-\rho_1)(\rho_{\nu+1}-\rho_2)\cdots(\rho_{\nu+1}-\rho_\nu) \neq 0,$$

ὅτε ἐκ τῆς (2), ἕπεται ὅτι: $\alpha_\nu = 0$. Τότε ὅμως τὸ πολυώνυμον $f(x)$ γίνεται:

$$f(x) \equiv \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0. \qquad (3)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ εἰς τὸ πολυώνυμον (3) ἀποδεικνύομεν, ὅτι $\alpha_{\nu-1} = 0$.

Ὁμοίως προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι: $\alpha_{\nu-2} = 0$, $\alpha_{\nu-3} = 0, \ldots, \alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = 0$.

Ὥστε, ἀπεδείχθη ὅτι: $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0. \qquad (4)$

Ἡ (4) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Ἐφαρμογή: Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv (x-\alpha)^2(\beta-\gamma) + (x-\beta)^2(\gamma-\alpha) + (x-\gamma)^2(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Λύσις: Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι: $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$.

Ἐπειδὴ τὸ $f(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του ἕπεται, ὅτι τὸ $f(x)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πόρισμα I. – Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ ν, ἔχει ν τὸ πολὺ διαφόρους ῥίζας.

Πόρισμα II. – Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

μηδενίζεται δι' ἀπείρους τιμὰς τοῦ x, τότε τοῦτο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πόρισμα III. – Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα f(x) καὶ φ(x), βαθμῶν ν, λαμβάνουν τὰς αὐτὰς τιμὰς διὰ ν + 1 διαφόρους τιμὰς τοῦ x, τότε τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.

§ 68. Θεώρημα. – Ἐὰν τὰ ἀκέραια πολυώνυμα:

$$f_1(x) \equiv \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \quad \alpha_\nu \neq 0$$

$$f_2(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0, \quad \beta_\nu \neq 0$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ν διαφόρους ἀλλήλων ῥίζας $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, τότε:

$$\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{\beta_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}} = \cdots = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 66), θὰ ἔχωμεν

$$f_1(x) \equiv \alpha_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu) \qquad (1)$$

$$f_2(x) \equiv \beta_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu). \qquad (2)$$

Ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$f_2(x) \equiv \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} \cdot \alpha_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu) \equiv \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} f_1(x). \qquad (3)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = k$, ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$f_2(x) \equiv k \cdot f_1(x), \text{ δηλαδή:}$$

$$\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0 \equiv k\alpha_\nu x^\nu + k\alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + k\alpha_1 x + k\alpha_0,$$

καὶ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων, ἔχομεν τὰς σχέσεις :

$$\beta_\nu = k\alpha_\nu\,,\quad \beta_{\nu-1} = k\alpha_{\nu-1}\,,\quad \ldots,\quad \beta_1 = k\alpha_1\,,\quad \beta_0 = k\alpha_0 \qquad (4)$$

ἢ

$$\boxed{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{\beta_{\nu-1}}{\alpha_{\nu-1}} = \cdots = \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_0}{\alpha_0}} \qquad (5)$$

Ἀντιστρόφως: Ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ (5). Θέτομεν τοὺς ἴσους λόγους (5) ἴσον μὲ k, ὅτε ἔχομεν :

$$\beta_\nu = k\alpha_\nu\,,\ \beta_{\nu-1} = k\alpha_{\nu-1}\,,\ \ldots,\ \beta_1 = k\alpha_1,\ \beta_0 = k\alpha_0.$$

Τότε :

$$f_2(x) \equiv k\alpha_\nu\, x^\nu + k\alpha_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + k\alpha_0 \equiv k(\alpha_\nu\, x^\nu + \alpha_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_0),$$

ἤτοι : $$f_2(x) \equiv k\, f_1(x).$$

Ἐξ αὐτῆς προκύπτει ὅτι κάθε ρίζα τοῦ $f_1(x)$ εἶναι καὶ ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f_2(x)$.

Παρατήρησις : Αἱ ἰσότητες (4) δὲν ἀντικαθίστανται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (5), ὅταν εἷς τῶν συντελεστῶν β_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, \nu$, π.χ. ὁ $\beta_{\nu-\lambda}$, εἶναι μηδέν. Ἐκ τῆς (4), ἡ σχέσις $\beta_{\nu-\lambda} = k\cdot\alpha_{\nu-\lambda}$ μᾶς δίδει καὶ $\alpha_{\nu-\lambda} = 0$, ὅτε τὰ πολυώνυμα $f_1(x)$, $f_2(x)$ δὲν θὰ ἔχουν τὸν ὅρον μὲ τὸ $x^{\nu-\lambda}$ καὶ ἀπὸ τὰς ἰσότητος (5) θὰ λείπῃ ὁ λόγος $\frac{\beta_{\nu-\lambda}}{\alpha_{\nu-\lambda}}$. Ἐὰν πάλιν τὸ $\alpha_{\nu-\lambda}$ εἶναι μηδέν, ὁ λόγος $\frac{\beta_{\nu-\lambda}}{\alpha_{\nu-\lambda}}$ δὲν ἔχει νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καὶ συνεπῶς καὶ πάλιν μεταξὺ τῶν λόγων τῶν ἰσοτήτων (5) δὲν θὰ ὑπάρχῃ ὁ λόγος $\frac{\beta_{\nu-\lambda}}{\alpha_{\nu-\lambda}}$.

§ 69 Θεώρημα. — Ἐὰν τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x) \equiv \alpha_\nu\, x^\nu + \alpha_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1\, x + \alpha_0$, $\alpha_\nu \neq 0$, μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$, δέχεται ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$), τότε θὰ δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ αὐτοῦ $\alpha - i\beta$.

Ὑποτίθεται ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ 2.

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\varphi(x)$ τὸ πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha + i\beta$ καὶ $\alpha - i\beta$, ἤτοι :

$$\varphi\,(x) \equiv [x - (\alpha + i\beta)]\,[x - (\alpha - i\beta)] \equiv x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2).$$

Τὸ $f(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ $\varphi(x)$ θὰ δώσῃ, κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 64), πηλίκον ἀκέραιον πολυώνυμον, ἔστω τὸ $\pi(x)$ καὶ πρωτοβάθμιον ὑπόλοιπον μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, ἔστω τὸ $\gamma x + \delta$. Τότε, κατὰ τὴν ταυτότητα διαιρέσεως ἀκεραίων πολυωνύμων, θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv \varphi(x)\cdot\pi(x) + (\gamma x + \delta). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ $f(\alpha + i\beta) = 0$ καὶ $\varphi(\alpha + i\beta) = 0$, ἐκ τῆς (1) ἕπεται :

$$\gamma(\alpha + i\beta) + \delta = 0$$

ἢ $$(\alpha\gamma + \delta) + i\beta\gamma = 0, \text{ ἐξ οὗ : } \left\{ \begin{aligned} \alpha\gamma + \delta &= 0 \\ \beta\gamma &= 0. \end{aligned} \right. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\beta \neq 0$, ἕπεται, ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (2), $\gamma = 0$. Τότε, ἐκ τῆς πρώτης τῶν (2), προκύπτει $\delta = 0$.

Διὰ $\gamma = \delta = 0$ ἡ (1) γίνεται:

$$f(x) \equiv \varphi(x) \cdot \pi(x). \tag{3}$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει:

$$f(\alpha - i\beta) \equiv \varphi(\alpha - i\beta)\, \pi(\alpha - i\beta)$$

καὶ ἐπειδὴ $\varphi(\alpha - i\beta) = 0$, θὰ εἶναι: $f(\alpha - i\beta) = 0$, ἤτοι τὸ $f(x)$ δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha - i\beta$.

Γενικώτερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα:

§ 70. Θεώρημα.—**Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον, μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, δέχεται ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$) εἰς βαθμὸν πολλαπλότητος k, θὰ δέχεται ἐπίσης ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῆ του $\alpha - i\beta$ καὶ μάλιστα μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος k.**

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Πόρισμα I.—**Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$, μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, ἔχῃ μιγαδικὰς ρίζας, τὸ πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.**

Πόρισμα II.—**Ἀκέραιον πολυώνυμον περιττοῦ βαθμοῦ μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἔχει τοὐλάχιστον μίαν πραγματικὴν ρίζαν, ἀρτίου δὲ βαθμοῦ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ πάσας τὰς ρίζας του μιγαδικάς.**

§ 71. Θεώρημα. — **Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ ρητοὺς συντελεστὰς δέχεται ρίζαν τὴν $\alpha + \sqrt{\beta}$ ($\alpha \in Q$, $\beta \in Q^+$, $\beta \neq \theta^2$, ὅπου $\theta \in Q$) θὰ δέχεται ἐπίσης καὶ τὴν $\alpha - \sqrt{\beta}$ καὶ μάλιστα μὲ τὸν αὐτὸν βαθμὸν πολλαπλότητος.**

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος τῆς τοῦ προηγουμένου θεωρήματος καὶ ὡς ἐκ τούτου ἐπαφίεται ὡς ἄσκησις.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τετάρτου βαθμοῦ μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ: $x^2 - (\sqrt{2} + i)\, x + i\sqrt{2}$.

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$x^2 - (\sqrt{2} + i)\, x + i\sqrt{2} \equiv (x - \sqrt{2})\,(x - i).$$

Ἐὰν $f(x)$ εἶναι τὸ ζητούμενον πολυώνυμον, τότε, ἐπειδὴ διαιρεῖται διὰ $x - \sqrt{2}$, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ $x + \sqrt{2}$, ὁμοίως ἐπειδὴ διαιρεῖται διὰ $x - i$, δυνάμει τοῦ θεωρήματος § 69, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ $x + i$, ὅθεν, δυνάμει τοῦ θεωρήματος § 65, θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομενου αὐτῶν. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$$f(x) \equiv (x - \sqrt{2})\,(x + \sqrt{2})\,(x - i)(x + i) \equiv (x^2 - 2)(x^2 + 1) \equiv x^4 - x^2 - 2.$$

§ 72. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

Ἐφαρμογὴ 1η: **Προσδιορίσατε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α, β, ἵνα τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου $(x-2)(x-3)$.**

Λύσις. Ἐπειδὴ θέλομεν τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 - 2\alpha x^2 + \beta x + 6$ νὰ διαιρῆται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ γινομένου $(x - 2)\,(x - 3)$, ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ $x - 2$ καὶ διὰ $x - 3$.

Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$f(2) = -8\alpha + 2\beta + 14 = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad 4\alpha - \beta = 7 \qquad (1)$$
$$f(3) = -18\alpha + 3\beta + 33 = 0, \quad \text{ἤτοι} \quad 6\alpha - \beta = 11. \qquad (2)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1.$$

Σημείωσις : Τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β τῆς ἀνωτέρω ἐφαρμογῆς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ δι' ἄλλων τρόπων. Ἐφαρμόσατε ἕναν ἐξ αὐτῶν διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν α καὶ β.

Ἐφαρμογὴ 2α : Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ $x+1$ δίδει ὑπόλοιπον 2, διαιρούμενον διὰ $x-2$ δίδει ὑπόλοιπον 11 καὶ διὰ $x+3$ δίδει ὑπόλοιπον 6. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ γινομένου

$$(x+1)(x-2)(x+3).$$

Λύσις : Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι :

$$f(-1) = 2, \qquad f(2) = 11, \qquad f(-3) = 6. \qquad (1)$$

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x+1)\ (x-2)\ (x+3),$$

τὸ ὁποῖον εἶναι τρίτου βαθμοῦ, θὰ δώσῃ ἓν πηλίκον $\pi(x)$ καὶ ἓν ὑπόλοιπον τὸ πολὺ δευτέρου βαθμοῦ, ἔστω τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Κατὰ τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως θὰ ἔχωμεν :

$$f(x) \equiv (x+1)\ (x-2)\ (x+3) \cdot \pi(x) + \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \qquad (2)$$

Θέτοντες εἰς τὴν (2) διαδοχικῶς $x = -1$, $x = 2$, $x = -3$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς (1), λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{r} \alpha - \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 11 \\ 9\alpha - 3\beta + \gamma = 6. \end{array} \right.$$

Λύοντες τὸ σύστημα (Σ) εὑρίσκομεν : $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$.

Ὥστε, τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι : $x^2 + 2x + 3$.

§ 73. Σχέσεις μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου. — Ἔστω τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \alpha_\nu\, x^\nu + \alpha_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0, \qquad (\alpha_\nu \neq 0)$$

βαθμοῦ ν, μὲ ρίζας $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{\nu-1}, \rho_\nu$.

Ὡς γνωστὸν ἰσχύει :

$$\alpha_\nu\, x^\nu + \alpha_{\nu-1}\, x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \equiv \alpha_\nu\, (x - \rho_1)\, (x - \rho_2) \cdots (x - \rho_\nu). \qquad (1)$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ τοῦ $\alpha_\nu \neq 0$ καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος, τὸ ὁποῖον καὶ διατάσσομεν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, ἔχομεν :

$$x^\nu + \frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\, x^{\nu-1} + \frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}\, x^{\nu-2} + \cdots + \frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}\, x + \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu} \equiv x^\nu - (\rho_1 + \rho_2 + \cdots +$$
$$+ \rho_\nu)\, x^{\nu-1} + (\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_{\nu-1}\rho_\nu)\, x^{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu\, \rho_1\, \rho_2 \cdots \rho_\nu .$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων λαμβάνομεν τὰς σχέσεις :

$$S_1 \equiv \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \cdots + \rho_{\nu-1} + \rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2 \equiv \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \cdots + \rho_1\rho_\nu + \rho_2\rho_3 + \ldots + \rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-1}\,\rho_\nu = +\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$S_3 \equiv \rho_1\rho_2\rho_3 + \rho_1\rho_2\rho_4 + \cdots + \rho_1\rho_2\rho_\nu + \cdots + \rho_{\nu-2}\,\rho_{\nu-1}\,\rho_\nu = -\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}$$

....

....

$$S_\nu \equiv \rho_1\,\rho_2\,\rho_3 \ldots \rho_{\nu-1}\,\rho_\nu = (-1)^\nu \frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Αἱ σχέσεις αὗται μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ τῶν συντελεστῶν ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι γνωσταὶ ὡς σχέσεις τοῦ Vieta.

Διὰ τῶν σχέσεων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ἔχουν δοθῆ αἱ ρίζαι.

Ἐφαρμογὴ 1η : Δίδεται τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv 2x^3 - 3x^2 + 4x - 8.$$

Ἐὰν ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ f(x), νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2.$$

Λύσις : Ἰσχύει προφανῶς ἡ ἰσότης :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)^2 - 2\,(\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3). \qquad (1)$$

Ἀλλά :

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2} \qquad (2)$$

καὶ

$$\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3 = \frac{4}{2} = 2. \qquad (3)$$

Ἡ (1), δυνάμει τῶν (2) καὶ (3), γίνεται :

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot 2 = \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ εὑρεθῇ πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ, τοῦ ὁποίου δύο ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $\rho_1 = 5$ καὶ $\rho_2 = i$.

Λύσις : Ἔστω $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$ τὸ ζητούμενον πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ.

Προφανῶς ἡ τρίτη ρίζα τοῦ ἐν λόγῳ πολυωνύμου εἶναι : $\rho_3 = -i$, (διατί;)

Τότε, συμφώνως πρὸς τὰς σχέσεις τοῦ Vieta, θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{array}{lll} \rho_1+\rho_2+\rho_3=-\dfrac{\beta}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & 5=-\dfrac{\beta}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3=\dfrac{\gamma}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & 1=\dfrac{\gamma}{\alpha} \\ \rho_1\rho_2\rho_3=-\dfrac{\delta}{\alpha}, & \text{ἤτοι} & 5=-\dfrac{\delta}{\alpha} \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \beta=-5\alpha \\ \gamma=\alpha \\ \delta=-5\alpha. \end{array}$$

Ὅθεν τὸ ζητούμενον πολυώνυμον εἶναι :

$$f(x)\equiv\alpha(x^3-5x^2+x-5).$$

* Διαιρετότης ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ διωνύμου $(x-\alpha)^\nu$.

§ 74. Θεώρημα. – Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x-\alpha)^\nu$, $\nu\in N$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν :

$$f(\alpha)=0,\quad f_1(\alpha)=0,\quad f_2(\alpha)=0,\ \ldots,\ f_{\nu-1}(\alpha)=0,$$

ἔνθα $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_{\nu-1}(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων :

$$f(x):x-\alpha,\quad f_1(x):x-\alpha,\ \ldots,\ f_{\nu-2}(x):x-\alpha.$$

Ἀπόδειξις : Ἔστω $\varphi(x)$ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $(x-\alpha)^\nu$, τότε ἔχομεν : $f(x)\equiv(x-\alpha)^\nu\cdot\varphi(x)$. (1)

Διὰ $x=\alpha$ ἡ (1) δίδει $f(\alpha)=0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$. Ἐὰν $f_1(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διὰ $x-\alpha$, τότε, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ $x-\alpha$, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f_1(x)\equiv(x-\alpha)^{\nu-1}\cdot\varphi(x). \tag{2}$$

Διὰ $x=\alpha$ ἡ (2) δίδει $f_1(\alpha)=0$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πολυώνυμον $f_1(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$. Ἐὰν $f_2(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $f_1(x):x-\alpha$, τότε, διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) διὰ $x-\alpha$, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f_2(x)\equiv(x-\alpha)^{\nu-2}\cdot\varphi(x). \tag{3}$$

Διὰ $x=\alpha$ ἡ (3) δίδει $f_2(\alpha)=0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι τὸ $f_2(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$.

Προχωροῦντες, καθ' ὅμοιον τρόπον, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς $\nu-1$ τάξεως εἶναι :

$$f_{\nu-1}(x)\equiv(x-\alpha)\cdot\varphi(x). \tag{ν}$$

Διὰ $x=\alpha$ ἡ σχέσις αὕτη γίνεται $f_{\nu-1}(\alpha)=0$, δηλαδὴ τὸ πολυώνυμον $f_{\nu-1}(x)$ διαιρεῖται διὰ $x-\alpha$.

Ἀντιστρόφως. Ἐφ' ὅσον $f(\alpha)=0$, $f_1(\alpha)=0$, $\ldots$, $f_{\nu-1}(\alpha)=0$, θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} f(x)&\equiv(x-\alpha)\,f_1(x)\\ f_1(x)&\equiv(x-\alpha)\,f_2(x)\\ f_2(x)&\equiv(x-\alpha)\,f_3(x)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f_{\nu-1}(x)&\equiv(x-\alpha)\,f_\nu(x) \end{aligned}$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τούτων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x)\equiv(x-\alpha)^\nu f_\nu(x),$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $(x-\alpha)^\nu$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρεῖται διά τινος δυνάμεως τοῦ $x - \alpha$ ἐργαζόμεθα πολλάκις ὡς ἑξῆς :

Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἔστω ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $(x-\alpha)^2$. Τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x-\alpha)^2 \cdot \varphi(x). \tag{1}$$

Θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν :

$$x - \alpha = y \iff x = y + \alpha \tag{2}$$

καὶ ἡ (1) γίνεται :

$$f(y+\alpha) \equiv y^2 \cdot \varphi(y+\alpha), \tag{3}$$

ὅπου $f(y+\alpha)$ καὶ $\varphi(y+\alpha)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ y.

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει ὅτι τὸ $f(y+\alpha)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ y^2. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ τὸ $f(y+\alpha)$ νὰ στερῆται σταθεροῦ καὶ πρωτοβαθμίου ὅρου, ἤτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$f(y+\alpha) \equiv \alpha_\nu y^\nu + \alpha_{\nu-1} y^{\nu-1} + \cdots + \alpha_3 y^3 + \alpha_2 y^2.$$

Ὁμοίως ἵνα τὸ $f(x)$ διαιρῆται διὰ $(x-\alpha)^3$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ $f(y+\alpha)$ νὰ διαιρῆται διὰ y^3, ἤτοι νὰ εἶναι τῆς μορφῆς : $f(y+\alpha) \equiv \alpha_\nu y^\nu + \alpha_{\nu-1} y^{\nu-1} + \cdots + \alpha_4 y^4 + \alpha_3 y^3$, διότι διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ (2) προκύπτει ὅτι :

$$f(x) \equiv (x-\alpha)^3 \cdot \pi(x) \iff f(y+\alpha) \equiv y^3 \cdot \pi(y+\alpha).$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 1η : Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμός, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv \nu x^{\nu+1} - (\nu+1) x^\nu + 1$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x-1)^2$.

Λ ύ σ ι ς. Διὰ $x = 1$ ἔχομεν :

$$f(1) = \nu - (\nu+1) + 1 = 0.$$

Ἄρα τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - 1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (x-1) \cdot [\nu x^\nu - (x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ldots + x + 1)]. \tag{1}$$

Ἐὰν θέσωμεν $f_1(x) \equiv \nu x^\nu - (x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \ldots + x + 1)$ παρατηροῦμεν ὅτι : $f_1(1) = \nu - (1 + 1 + \ldots + 1 + 1) = \nu - \nu = 0$. Τοῦτο δηλοῖ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f_1(x)$ διαιρεῖται διὰ $x - 1$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$f_1(x) \equiv (x-1)\,\pi(x). \tag{2}$$

Ἕνεκα ταύτης, ἡ (1) γίνεται :

$$f(x) \equiv (x-1)^2 \cdot \pi(x),$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ $(x-1)^2$.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 2α : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x) \equiv x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 24x + 4$$

διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $(x-2)^2$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Ἐκτελοῦμεν τὴν ἀντικατάστασιν :

$$x - 2 = y \iff x = y + 2$$

καὶ ἔχομεν : $f(y+2)=(y+2)^4-9(y+2)^3+25(y+2)^2-24(y+2)+4$.

Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν :

$$f(y+2)\equiv y^4-y^3-5y^2=y^2(y^2-y-5)$$

ἢ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $y=x-2$ ἔχομεν :

$$f(x)\equiv(x-2)^2\cdot[(x-2)^2-(x-2)-5],$$

ἡ ὁποία φανερώνει ὅτι τὸ $f(x)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x-2)^2$.

* Θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὑπολοίπων.

§ 75. Θεώρημα 1ον. – Ἐὰν $\upsilon_1(x)$ καὶ $\upsilon_2(x)$ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f_1(x):\delta(x)$ καὶ $f_2(x):\delta(x)$, $\delta(x)\not\equiv 0$, ἀντιστοίχως, τότε ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$\delta(x)\,|\,f_1(x)-f_2(x)\iff\upsilon_1(x)\equiv\upsilon_2(x).$$

Ἀπόδειξις : Ἔστω $\delta(x)\,|\,f_1(x)–f_2(x)$, τότε $f_1(x)–f_2(x)\equiv\delta(x)\cdot\pi(x)$. (1)

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν :

$$f_1(x)\equiv\delta(x)\,\pi_1(x)+\upsilon_1(x)\,,\quad \text{βαθμ. } \upsilon_1(x)<\text{βαθμ. }\delta(x) \qquad (2)$$

$$f_2(x)\equiv\delta(x)\,\pi_2(x)+\upsilon_2(x)\,,\quad \text{βαθμ. } \upsilon_2(x)<\text{βαθμ. }\delta(x). \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν :

$$f_1(x)-f_2(x)\equiv\delta(x)\,[\pi_1(x)-\pi_2(x)]+\upsilon_1(x)-\upsilon_2(x).$$

Ἀλλά, δυνάμει τῆς (1), ἡ διαίρεσις $[f_1(x)-f_2(x)]:\delta(x)$ εἶναι τελεία καὶ ἑπομένως : $\upsilon_1(x)-\upsilon_2(x)\equiv 0$, ἐξ οὗ : $\upsilon_1(x)\equiv\upsilon_2(x)$.

Ἀντιστρόφως : Ἔστω ὅτι $\upsilon_1(x)\equiv\upsilon_2(x)$ καὶ ὅτι :

$$f_1(x)\equiv\delta(x)\cdot\pi_1(x)+\upsilon_1(x)\quad\text{καὶ}\quad f_2(x)\equiv\delta(x)\,\pi_2(x)+\upsilon_1(x).$$

Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f_1(x)-f_2(x)\equiv\delta(x)\cdot[\pi_1(x)-\pi_2(x)]\implies\delta(x)\,|\,f_1(x)-f_2(x).$$

§ 76. Θεώρημα 2ον. – Ἐὰν $\upsilon_1(x), \upsilon_2(x), \ldots, \upsilon_\nu(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f_1(x):\delta(x)$, $f_2(x):\delta(x)$, $\ldots$, $f_\nu(x):\delta(x)$, τότε αἱ διαιρέσεις $[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_\nu(x)]:\delta(x)$ καὶ $[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\cdots+\upsilon_\nu(x)]:\delta(x)$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν, ἂν συμβολίσωμεν τὰ πολυώνυμα ἁπλῶς μὲ f, δ, π, υ ἀντὶ $f(x)$, $\delta(x)$, $\pi(x)$, $\upsilon(x)$, τὰς σχέσεις :

$$(\sigma)\quad\begin{array}{l|l} f_1\equiv\delta\pi_1+\upsilon_1 & \text{Αὗται προστιθέμεναι κατὰ μέλη δίδουν :}\\ f_2\equiv\delta\pi_2+\upsilon_2 & f_1+f_2+\cdots+f_\nu\equiv\delta(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_\nu)+(\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_\nu).\\ f_3\equiv\delta\pi_3+\upsilon_3 & \text{Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :}\\ \cdots\cdots & \\ f_\nu\equiv\delta\pi_\nu+\upsilon_\nu & (f_1+f_2+\cdots+f_\nu)-(\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_\nu)\equiv\delta(\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_\nu). \end{array}$$

Ἡ τελευταία ταυτότης δηλοῖ ὅτι τὸ δ διαιρεῖ τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων $f_1+f_2+\cdots+f_\nu$ καὶ $\upsilon_1+\upsilon_2+\cdots+\upsilon_\nu$, ἑπομένως, δυνάμει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἕκαστον τούτων διαιρούμενον διὰ τοῦ $\delta(x)$ δίδει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

§ 77. Θεώρημα 3ον. – Αἱ ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος 2, τότε αἱ διαιρέσεις $[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_\nu(x)] : \delta(x)$ καὶ $[\upsilon_1(x) \cdot \upsilon_2(x) \cdots \upsilon_\nu(x)] : \delta(x)$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Τὰς σχέσεις (σ) τῆς προηγουμένης παραγράφου πολλαπλασιάζομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$f_1 f_2 \ldots f_\nu \equiv \delta \cdot \pi + (\upsilon_1 \upsilon_2 \ldots \upsilon_\nu), \qquad (1)$$

ἔνθα π ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν :

$$[f_1 f_2 \ldots f_\nu] - [\upsilon_1 \upsilon_2 \ldots \upsilon_\nu] \equiv \delta \cdot \pi,$$

ἡ ὁποία καὶ ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Παρατήρησις: Τὰ θεωρήματα 2 καὶ 3 ἰσχύουν καὶ ἂν ἀκόμη δὲν ἀντικατασταθοῦν ὅλα τὰ πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\nu(x)$ διὰ τῶν ὑπολοίπων, ἀλλὰ μόνον μερικὰ ἐξ αὐτῶν.

Πόρισμα.– Ἐὰν $\upsilon(x)$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : \delta(x)$, τότε αἱ διαιρέσεις $[f(x)]^\nu : \delta(x)$ καὶ $[\upsilon(x)]^\nu : \delta(x)$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον.

Ἐφαρμογή : Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον: $x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ :

$$x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς: Ὁ διαιρετέος γράφεται :

$$(x^4)^\alpha x^3 + (x^4)^\beta x^2 + (x^4)^\gamma x + (x^4)^\delta .$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $x^4 : x^3 + x^2 + x + 1$ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1. Ἄρα τὰ γινόμενα $(x^4)^\alpha \cdot x^3$ καὶ $1^\alpha \cdot x^3$ διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^3 + x^2 + x + 1$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον (βλ. θεώρ. 3ον καὶ πόρισμα). Ὁμοίως τὰ γινόμενα $(x^4)^\beta \cdot x^2$ καὶ $1^\beta \cdot x^2$ διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^3 + x^2 + x + 1$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ $(x^4)^\gamma x$ καὶ $1^\gamma \cdot x$ ἀφ' ἑνὸς καὶ $(x^4)^\delta$ καὶ 1^δ ἀφ' ἑτέρου. Ἐπομένως τὰ πολυώνυμα :

$$x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta} \quad \text{καὶ} \quad 1^\alpha x^3 + 1^\beta x^2 + 1^\gamma x + 1^\delta \equiv x^3 + x^2 + x + 1$$

διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^3 + x^2 + x + 1$ δίδουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^3 + x^2 + x + 1) : (x^3 + x^2 + x + 1)$ εἶναι μηδέν. Ὅθεν ἡ διαίρεσις $(x^{4\alpha+3} + x^{4\beta+2} + x^{4\gamma+1} + x^{4\delta}) : (x^3 + x^2 + x + 1)$ εἶναι τελεία.

* Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ διωνύμου $x^\nu - \alpha$, ἔνθα $\nu \in N$.

Ἔστω ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$, βαθμοῦ k, καὶ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς ν, μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ k τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, ἤτοι : $\nu \leqq k$.

Τότε ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις :

Τὸ πολυώνυμον $f(x)$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x) \equiv x^{\nu-1} \cdot f_{\nu-1}(x^\nu) + x^{\nu-2} f_{\nu-2}(x^\nu) + \cdots + x f_1(x^\nu) + f_0(x^\nu), \qquad (1)$$

ὅπου $f_{\nu-1}(x^\nu), f_{\nu-2}(x^\nu), \cdots, f_1(x^\nu), f_0(x^\nu)$ ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x^ν .

Πράγματι· οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων τοῦ $f(x)$ θὰ εἶναι ἢ πολλαπλάσια τοῦ ν ἢ πολλαπλάσια τοῦ ν ηὐξημένα κατὰ 1 ἢ πολ.$\nu + 2$ ἢ πολ.$\nu + 3$, κ.ο.κ. Οἱ ὅροι τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν θὰ δίδουν τὸ $f_0(x^\nu)$. Οἱ ὅροι τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολ.$\nu + 1$ θὰ δίδουν τὸ $xf_1(x^\nu)$. Οἱ ὅροι τῶν ὁποίων οἱ ἐκθέται εἶναι πολ.$\nu + 2$ θὰ δίδουν τὸ $x^2f_2(x^\nu)$ κ.ο.κ.

Σημείωσις: Τὴν ὡς ἄνω πρότασιν δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν αὐστηρότερον διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ἐφαρμογή: Ἔστω $f(x) \equiv 3x^7 - 5x^6 + 8x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 7x + 3$ καὶ ἔστω ὅτι $\nu = 3$.

Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως τὸ $f(x)$ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $f(x) \equiv x^2(8x^3 - 4) + x(3x^6 - 3x^3 + 7) - (5x^6 - 2x^3 - 3)$.

§ 78. Θεώρημα. — Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ τεθέντος ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(x) \equiv x^{\nu-1} f_{\nu-1}(x^\nu) + x^{\nu-2} f_{\nu-2}(x^\nu) + \cdots + xf_1(x^\nu) + f_0(x^\nu)$$

διὰ τοῦ διωνύμου $x^\nu - \alpha$ εἶναι:

$$\upsilon(x) \equiv x^{\nu-1} f_{\nu-1}(\alpha) + x^{\nu-2} f_{\nu-2}(\alpha) + \cdots + xf_1(\alpha) + f_0(\alpha).$$

Ἀπόδειξις: Ἐκ τοῦ θεωρήματος § 76 προκύπτει ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x^\nu - \alpha)$ εἶναι: $\upsilon(x) \equiv \upsilon_{\nu-1}(x) + \upsilon_{\nu-2}(x) + \cdots + \upsilon_1(x) + \upsilon_0(x)$, ὅπου $\upsilon_{\nu-1}(x)$, $\upsilon_{\nu-2}(x)$, $\ldots$, $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_0(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων: $x^{\nu-1} f_{\nu-1}(x^\nu) : (x^\nu - \alpha)$, $x^{\nu-2} f_{\nu-2}(x^\nu) : (x^\nu - \alpha)$, $\ldots$, $xf_1(x^\nu) : (x^\nu - \alpha)$, $f_0(x^\nu) : (x^\nu - \alpha)$. Τὸ ὑπόλοιπον ὅμως τῆς διαιρέσεως τοῦ $f_{\nu-1}(x^\nu)$ διὰ τοῦ $x^\nu - \alpha$ εἶναι τὸ $f_{\nu-1}(\alpha)$, διότι, ἐὰν τεθῇ $x^\nu = y$, τότε, ὡς γνωστὸν (§ 64, πόρισμα I), τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f_{\nu-1}(y) : (y - \alpha)$ εἶναι $\upsilon = f_{\nu-1}(\alpha)$. Ἐξ ἄλλου τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $x^{\nu-1}$ διὰ τοῦ $x^\nu - \alpha$ εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ $x^{\nu-1}$, διότι εἶναι μικροτέρου βαθμοῦ ὁ διαιρετέος ἀπὸ τὸν διαιρέτην. Ἄρα τὸ γινόμενον $x^{\nu-1} \cdot f_{\nu-1}(x^\nu)$ καὶ τὸ $x^{\nu-1} \cdot f_{\nu-1}(\alpha)$ διαιρούμενα διὰ τοῦ $x^\nu - \alpha$ δίδουν τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα. Ἀλλὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $x^{\nu-1} \cdot f_{\nu-1}(\alpha) : (x^\nu - \alpha)$ εἶναι τὸ $x^{\nu-1} f_{\nu-1}(\alpha)$. Ὅθεν $\upsilon_{\nu-1}(x) \equiv x^{\nu-1} f_{\nu-1}(\alpha)$.

Ὁμοίως $\upsilon_{\nu-2}(x) \equiv x^{\nu-2} f_{\nu-2}(\alpha)$, $\ldots$, $\upsilon_1(x) \equiv xf_1(\alpha)$, $\upsilon_0(x) \equiv f_0(\alpha)$. Ἄρα:

$$\upsilon(x) \equiv x^{\nu-1} f_{\nu-1}(\alpha) + x^{\nu-2} f_{\nu-2}(\alpha) + \cdots + xf_1(\alpha) + f_0(\alpha).$$

Πόρισμα. — Διὰ νὰ διαιρῆται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv x^{\nu-1} f_{\nu-1}(x^\nu) + x^{\nu-2} \cdot f_{\nu-2}(x^\nu) + \cdots + xf_1(x^\nu) + f_0(x^\nu)$$

διὰ τοῦ $x^\nu - \alpha$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι:

$$f_{\nu-1}(\alpha) = 0,\ f_{\nu-2}(\alpha) = 0,\ \ldots,\ f_1(\alpha) = 0,\ f_0(\alpha) = 0.$$

Ἐφαρμογαί: 1η: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ διὰ τοῦ διωνύμου $x^3 + 2$.

Λύσις: Τὸ $f(x)$ γράφεται: $f(x) \equiv x^2(2x^3 - 2) - x(3x^3 - 3) + (4x^3 - 4)$. Ἐὰν εἰς τοῦτο θέσωμεν ὅπου $x^3 = -2$, λαμβάνομεν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον:

$$\upsilon(x) \equiv -6x^2 + 9x - 12.$$

2α : Ἐὰν α, β, γ θετικοὶ ἀκέραιοι, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x) \equiv x^{3\alpha} + x^{3\beta+1} + x^{3\gamma+5}$ διὰ τοῦ $x^3 - 2$.

Λύσις: Τὸ f(x) γράφεται:

$$f(x) \equiv x^2 \cdot (x^3)^{\gamma+1} + x(x^3)^{\beta} + (x^3)^{\alpha}.$$

Ἐὰν εἰς τοῦτο θέσωμεν ὅπου $x^3 = 2$, λαμβάνομεν τὸ ὑπόλοιπον.

$$\upsilon(x) \equiv 2^{\gamma+1} \cdot x^2 + 2^{\beta} \cdot x + 2^{\alpha}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

146. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ οὕτως, ὥστε νὰ πληροῦν τὴν σχέσιν $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, τὸ δὲ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ νὰ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν 7 διὰ $x = 1$.

147. Ἐὰν $\nu \in \mathbf{N}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv (x+1)^{2\nu} - x^{2\nu} - 2x - 1$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ: $2x^3 + 3x^2 + x$.

148. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον:

$$f(x) \equiv 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ: $(x-3)(x+2)$.

149. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ k καὶ λ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου: $f(x) \equiv x^3 - 8x^2 - 8\lambda x + k$, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι: $\rho_1 = \rho_2$.

150. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x) \equiv x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x-1)^2$.

151. Νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον: $f(x) \equiv x^{\nu+1} + \alpha x + \beta$ διαιρῆται διὰ τοῦ $(x-1)^2$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.

152. Ἀκέραιον πολυώνυμον f(x) διαιρούμενον διὰ $x - 2$ δίδει ὑπόλοιπον 12, διαιρούμενον δὲ διὰ $x - 3$ δίδει ὑπόλοιπον 17. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x-2)(x-3)$.

153. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $x^3 + \alpha x + \beta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $(x-k)^2$, δείξατε ὅτι μεταξὺ τῶν α καὶ β ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 = 0$.

154. Ἐὰν διὰ τρεῖς διαφόρους τιμὰς τοῦ x τὰ τριώνυμα:

$$(\alpha-2)x^2 + (2\beta-1)x + \gamma \quad \text{καὶ} \quad x^2 + 5x + \alpha + 1$$

λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς, νὰ προσδιορισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ.

155. Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον f(x) διαιρῆται διὰ τοῦ $x - 3$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(4x-5)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x - 2$.

156. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον: $f(x) \equiv x^{\nu} + \xi y^{\nu} + \eta z^{\nu}$, $(\nu \in \mathbf{N},\ \nu \geqq 2)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x) \equiv x^2 - (\alpha y + \beta z)x + \alpha\beta yz$, τότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\frac{\xi}{\alpha^{\nu}} + \frac{\eta}{\beta^{\nu}} + 1 = 0.$$

(**Ὑπόδειξις**: Ἀναλύσατε τὸ φ(x) εἰς γινόμενον παραγόντων κτλ.).

157. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν $\alpha \neq \beta$, τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου f(x) διὰ τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)$ εἶναι:

$$\upsilon(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} x + \frac{\beta f(\alpha) - \alpha f(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν διαίρεσιν: $(x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 8x - 9) : (x-3)(x-2)$.

158. Εὕρετε τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην, ἵνα ἡ ἐξίσωσις: $x^3 - 3\alpha x + 2\beta = 0$ ἔχῃ διπλῆν ρίζαν.

159. Προσδιορίσατε τὰ α καὶ β ὥστε ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 24x - 72 = 0$ νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\left(\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}$. Ἀκολούθως νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.

160. Ἐὰν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv \alpha x^4 + \beta x^3 - 18x^2 + 15x - 5$ διὰ τοῦ $\varphi(x) \equiv x^2 - 3x + 2$ εἶναι $\upsilon(x) \equiv 4x - 7$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 4$.

161. Δείξατε ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ $x^2 - \alpha^2$ εἶναι τό:
$$\upsilon(x) \equiv \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha}\, x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}.$$

162. Διὰ ποίας τιμὰς τῶν k καὶ λ τὸ πολυώνυμον: $f(x) \equiv 3x^4 - kx^3 + 5x^2 - 9x + \lambda$ διαιρεῖται διὰ $x^2 - 1$;

163. Ἐὰν $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:
$$\alpha^3 + \alpha^2 x + \alpha y + z = 1$$
$$\beta^3 + \beta^2 x + \beta y + z = 1$$
$$\gamma^3 + \gamma^2 x + \gamma y + z = 1.$$
(**Ὑπόδειξις:** Παρατηρήσατε ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(t) \equiv t^3 + xt^2 + yt + (z-1)$ ἔχει ρίζας τὰ α, β, γ).

164. Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x)$ διαιρούμενον διὰ $x^2 + x + 1$ δίδει ὑπόλοιπον $x - 1$, διαιρούμενον δὲ διὰ $x^2 - x + 1$ δίδει ὑπόλοιπον $2x + 1$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x^4 + x^2 + 1)$.
(**Ὑπόδειξις:** Παρατηρήσατε ὅτι: $x^4 + x^2 + 1 \equiv (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$).

165. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, τῆς ὁποίας ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Νὰ εὑρεθῇ ποία συνθήκη ὑπάρχει μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι της.

166. Ἐὰν $k, \lambda, \mu \in \mathbf{N}$ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $x^{3k+2} + x^{3\lambda+1} + x^{3\mu}$ διαιρεῖται διὰ $x^2 + x + 1$.

167. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς διαιρεῖται διὰ τοῦ $x^2 - 2x + 1$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \geqq 3$.

168. Ἐὰν -4 καὶ -164 εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων $f(x) : (x + 1)$ καὶ $f(x) : (x - 3)$ ἀντιστοίχως, τότε νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x^2 - 2x - 3)$. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x)$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ μὲ ρίζας 0, 2, -2, ποία ἡ ἄλλη ρίζα του;

169. Ἐὰν $\nu \in \mathbf{N}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον: $x^{4\nu+2} - (2\nu + 1)x^{2\nu+2} + (2\nu + 1)x^{2\nu} - 1$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x^2 - 1)^3$.

170. Εὕρετε τὴν μεταξὺ τῶν α, β, γ, δ σχέσιν, ἵνα αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου: $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ πληροῦν τὴν σχέσιν: $\rho_1 + \rho_3 = 2\rho_2$.

171. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^4 + (\alpha - \beta)x^3 + 2\alpha x^2 - 5x + 4$ νὰ διαιρῆται διὰ τῆς μεγαλυτέρας δυνατῆς δυνάμεως τοῦ $x - 1$.

172. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα $f(x) \equiv x^3 + \alpha x - \beta$ καὶ $\varphi(x) \equiv \beta x^3 - \alpha x - 1$ μὲ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ ἔχουν μίαν πραγματικὴν ρίζαν κοινήν, τότε ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

1) $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = -2\alpha$, **2)** $|\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3| > \frac{3}{2}$, ἔνθα ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι ρίζαι τοῦ $f(x)$.

173. Δείξατε ὅτι διὰ κάθε ρίζαν ρ τοῦ πολυωνύμου $f(x) \equiv x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς, ἰσχύει ἡ ἀνισότης:
$$|\rho| < 1 + |\alpha_{\nu-1}| + |\alpha_{\nu-2}| + \cdots + |\alpha_1| + |\alpha_0|.$$

174. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^2 + \alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ καὶ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς η μὲ $\eta \geqq 2$. Ἐὰν m καλέσωμεν τὸν $\max\{|f(0)|, |f(\eta)|, |f(-\eta)|\}$, τότε δείξατε ὅτι:
$$m \equiv \max\{|f(0)|, |f(\eta)|, |f(-\eta)|\} \geqq \eta.$$

175. Εὕρετε τὴν μεταξὺ τῶν α, β, γ, δ σχέσιν, ἵνα αἱ ρίζαι $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ τοῦ πολυωνύμου $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως: $\rho_1+\rho_2=\rho_3+\rho_4$.

176. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον $f(x)\equiv x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἔνθα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, ἔχῃ διπλῆν ρίζαν ἀριθμὸν ρ καὶ εἶναι $\rho\leqq 0$ ἢ $\rho\geqq 1+\sqrt{2}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\geqq \rho^2+2\rho.$$

177. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $f(x)$ διὰ τοῦ $x^2-2\rho x+\rho^2$ εἶναι τό: $\pi(\rho)x+f(\rho)-\rho\pi(\rho)$, ὅπου $\pi(x)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $[f(x)-f(\rho)]:(x-\rho)$.

178. Ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρούμενον διὰ $x+2$ δίδει ὑπόλοιπον 7, διαιρούμενον διὰ $x-3$ δίδει ὑπόλοιπον 17. Τί ὑπόλοιπον θὰ δώσῃ ἂν τοῦτο διαιρεθῇ διὰ τοῦ x^2-x-6; Προσδιορίσατε ἓν τοιοῦτον πολυώνυμον. Ὑποθέσατε ἀκολούθως ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι τρίτου βαθμοῦ καὶ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $2x^2+x-3$. Ποῖον εἶναι τότε τοῦτο;

179. Ἐὰν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$, $\gamma\neq 0$ καὶ αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2, ρ_3 τοῦ πολυωνύμου:

$$f(x)\equiv x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

πληροῦν τὰς σχέσεις: $|\rho_1|=2|\rho_2|=3|\rho_3|$, τότε δείξατε ὅτι: $|\alpha\beta|<11|\gamma|$.

180. Δίδεται τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς:

$$f(x)\equiv \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0.$$

Θέτομεν $|x|=\theta$, ὑποθέτοντες $\theta\neq 1$, καὶ $m\equiv \max\{|\alpha_0|, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_{\nu-1}|, |\alpha_\nu|\}$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$|f(x)|\leqq m\cdot\frac{\theta^{\nu+1}-1}{\theta-1}.$$

II. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα.

§ 79. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι – Ὁρισμοί. – Ὡς εἰς τὴν § 50 ὡρίσθη ἡ ἔννοια τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς μὲ συντελεστὰς πραγματικοὺς ἀριθμούς, κατὰ τὸν αὐτὸν ἀκριβῶς τρόπον εἰσάγεται καὶ ἡ ἔννοια τοῦ πολυωνύμου ν τὸ πλῆθος μεταβλητῶν $x, y, z, \ldots, t$.

Ἐπειδὴ εἰς ὅλας σχεδὸν τὰς ἐφαρμογὰς ποὺ συναντῶμεν εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον αἱ μεταβληταὶ δὲν εἶναι περισσότεραι τῶν τριῶν, διὰ τοῦτο κατωτέρω θὰ περιορισθῶμεν εἰς πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν x, y, z· αἱ δὲ προτάσεις αἱ ὁποῖαι θὰ διατυπωθοῦν γενικεύονται, ἐν γένει, καὶ διὰ πολυώνυμα περισσοτέρων μεταβλητῶν.

Κατόπιν τούτου δίδομεν τοὺς κάτωθι ὁρισμούς:

α'). Ἀκέραιον μονώνυμον τῶν x, y, z καλεῖται πᾶσα ἔκφρασις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^k y^\lambda z^\mu \tag{1}$$

ὅπου α (σταθερὸς) πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ k, λ, μ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἢ μηδέν. Ὁ ἀριθμὸς α καλεῖται **συντελεστὴς** τοῦ μονωνύμου (1), τὰ δὲ σύμβολα x, y, z καλοῦνται **μεταβληταί**. Τὸ ἄθροισμα $k+\lambda+\mu$ τῶν ἐκθετῶν, ἐφ' ὅσον $\alpha\neq 0$, καλεῖται **βαθμὸς** τοῦ μονωνύμου (1). Ἐὰν $k=\lambda=\mu=0$ καὶ $\alpha\neq 0$ τὸ μονώνυμον (1) ἀνάγεται εἰς τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν α καὶ λέγομεν εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὅτι τὸ μονώνυμον (1) εἶναι **βαθμοῦ μηδέν**. Ἐὰν $\alpha=0$, τότε τὸ μονώνυμον καλεῖται **μηδενικὸν** καὶ δὲν ὁμιλοῦμεν διὰ τὸν βαθμόν του. Τέλος ἐὰν $\alpha \neq 0$, λέγομεν ὅτι τὸ μονώνυμον (1) εἶναι ὡς πρὸς x βαθμοῦ k, ὡς πρὸς y βαθμοῦ λ, ὡς πρὸς z βαθμοῦ μ, ὡς πρὸς x καὶ y βαθμοῦ $k+\lambda$, κ.ο.κ. Οὕτω, π.χ., τὸ μονώνυμον: $-3x^2yz^3$ εἶναι 6ου βαθμοῦ, ἐνῶ ὡς πρὸς x καὶ z εἶναι βαθμοῦ 5ου.

β'). Δύο μονώνυμα καλοῦνται **ὅμοια** (ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς των), ἂν ἐν τῇ παραστάσει των ἔχουν τὰς αὐτὰς μεταβλητὰς καὶ ἑκάστην μὲ τὸν αὐτὸν ἐκθέτην, διαφέρουν δὲ (ἂν διαφέρουν) μόνον κατὰ τοὺς συντελεστάς των. Οὕτω, π.χ., τὰ μονώνυμα: $-3x^2yz^3$, $2x^2yz^3$ εἶναι ὅμοια.

Τὰ μὴ ὅμοια μονώνυμα καλοῦνται **ἀνόμοια.**

Τὰ μονώνυμα τῆς μορφῆς: $\alpha x^k y^\lambda z^\mu$ καὶ $-\alpha x^k y^\lambda z^\mu$ καλοῦνται **ἀντίθετα.**

Δύο μὴ μηδενικὰ μονώνυμα $\alpha x^k y^\lambda z^\mu$ καὶ $\beta x^\nu y^\rho z^\sigma$ καλοῦνται **ἐκ ταυτότητος ἴσα** καὶ γράφομεν $\alpha x^k y^\lambda z^\mu \equiv \beta x^\nu y^\rho z^\sigma$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν:

$$\alpha = \beta, \qquad k = \nu, \qquad \lambda = \rho, \qquad \mu = \sigma.$$

γ'). Τὸ **ἄθροισμα** τῶν ἀκεραίων μονωνύμων: $\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}$, $\alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2}, \ldots,$ $\alpha_\nu x^{k_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu}$ παρίσταται οὕτω:

$$\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \cdots + \alpha_\nu x^{k_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu}.$$

Ἐὰν δὲ τὰ ὡς ἄνω μονώνυμα εἶναι ὅμοια τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων, ἤτοι:

$$\alpha_1 x^k y^\lambda z^\mu + \alpha_2 x^k y^\lambda z^\mu + \cdots + \alpha_\nu x^k y^\lambda z^\mu = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu)\, x^k y^\lambda z^\mu.$$

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται **ἀναγωγὴ** αὐτῶν.

Ἡ **διαφορὰ** δύο μονωνύμων ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου μονωνύμου.

Γινόμενον τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}$, $\alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2}, \ldots, \alpha_\nu x^{k_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu}$ καλεῖται τὸ μονώνυμον: $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu\, x^{k_1+k_2+\cdots+k_\nu} y^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu} z^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως συνάγομεν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων μὴ μηδενικῶν μονωνύμων ὡς πρὸς ἑκάστην μεταβλητὴν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων ὡς πρὸς τὴν ἐν λόγῳ μεταβλητήν.

Ἀκέραιον μονώνυμον λέγομεν ὅτι εἶναι **διαιρετὸν** δι' ἄλλου, μὴ μηδενικοῦ, ἀκεραίου μονωνύμου, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον δίδει τὸ πρῶτον, ἤτοι ὅταν τὸ πηλίκον τῶν δύο μονωνύμων εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον. Π.χ. τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $12x^3y^2z^5$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου $4x^2yz^3$, διότι τὸ πηλίκον εἶναι τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $3xyz^2$.

δ'). Ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν x, y, z καλεῖται κάθε ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων τῶν x, y, z, ἐκ τῶν ὁποίων δύο τοὐλάχιστον εἶναι ἀνόμοια, ἤτοι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν x, y, z εἶναι μία παράστασις τῆς μορφῆς:

$$\alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1} + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \cdots + \alpha_\nu x^{k_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu}, \tag{2}$$

ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ (σταθεροὶ) πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ k_i, λ_i, μ_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$

ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καλοῦνται **συντελεσταὶ** τοῦ πολυωνύμου (2). Τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ πολυώνυμον (2), καλοῦνται **ὅροι** αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., ἡ παράστασις :

$$5x^3y^2z - 3xy^3z + 2x^2yz^3 - 7xy$$

εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν x, y, z μὲ ὅρους τὰ μονώνυμα :

$$5x^3y^2z, \quad -3xy^3z, \quad 2x^2yz^3, \quad -7xy.$$

Διὰ τὰ πολυώνυμα ν μεταβλητῶν $x, y, z, \ldots, t$ θὰ χρησιμοποιῶμεν τοὺς συμβολισμούς :

$$f(x,y,z,\ldots,t) \text{ ἢ } \varphi(x,y,z,\ldots,t) \text{ ἢ } \pi(x,y,z,\ldots,t) \text{ ἢ } g(x,y,z,\ldots,t) \text{ κ.λ.π.}$$

Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον (2) τῶν μεταβλητῶν x, y, z γράφεται :

$$f(x,y,z) \equiv \alpha_\nu x^{k_\nu} y^{\lambda_\nu} z^{\mu_\nu} + \cdots + \alpha_2 x^{k_2} y^{\lambda_2} z^{\mu_2} + \alpha_1 x^{k_1} y^{\lambda_1} z^{\mu_1}. \qquad (3)$$

Καλοῦμεν «**ἀνηγμένον**» ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον εἰς τὸ ὁποῖον ἔχουν ἐκτελεσθῆ αἱ σημειωθεῖσαι πράξεις καὶ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

Κατωτέρω λέγοντες *«πολυώνυμον»* θὰ ἐννοῶμεν *«ἀκέραιον ἀνηγμένον πολυώνυμον»*.

Ἐὰν πάντες οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς πολυωνύμου $f(x,y,z,\ldots)$, ν τὸ πλῆθος μεταβλητῶν, εἶναι μηδέν, τότε τοῦτο καλεῖται πάλιν **μηδενικὸν πολυώνυμον** ἢ **πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς μηδέν.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν γράφομεν ἐπίσης : $f(x,y,z,\ldots) \equiv 0$. Εἰς τὴν ἀντίθετον δὲ περίπτωσιν γράφομεν : $f(x,y,z,\ldots) \not\equiv 0$.

Βαθμὸς ἑνός, μὴ μηδενικοῦ, ἀκεραίου πολυωνύμου καλεῖται ὁ μέγιστος βαθμὸς τῶν μονωνύμων αὐτοῦ. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv 3xy^3 - 6x^5 + 3x^2y^3z^2 - 5z^4, \text{ εἶναι ἑβδόμου βαθμοῦ.}$$

Βαθμὸς ἑνὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς μίαν μεταβλητὴν καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἐκθέτης τῆς μεταβλητῆς ταύτης. Οὕτω τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον $f(x,y,z)$ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x εἶναι 5ου βαθμοῦ, ὡς πρὸς y 3ου καὶ ὡς πρὸς z 4ου βαθμοῦ.

ε'). Ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z,\ldots)$ τοῦ ὁποίου πάντες οἱ ὅροι (ὄχι ὅμοιοι) εἶναι μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς $x,y,z,\ldots$ καλεῖται **ὁμογενές**. Ὁ κοινὸς βαθμὸς τῶν ὅρων του καλεῖται **βαθμὸς ὁμογενείας** τοῦ πολυωνύμου.

Κάθε μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον $f(x,y,z,\ldots)$, ν βαθμοῦ δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἕνα ἀκριβῶς τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z,\ldots) \equiv f_\nu(x,y,z,\ldots) + f_{\nu-1}(x,y,z,\ldots) + \cdots + f_0(x,y,z,\ldots), \qquad (4)$$

ἔνθα $f_k(x,y,z,\ldots)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον k βαθμοῦ ὁμογενείας ἢ τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον καὶ $f_\nu(x,y,z,\ldots) \not\equiv 0$.

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ πολυώνυμον $f(x, y, z,\ldots)$ ἔχει γραφῆ ὑπὸ τὴν μορφὴν (4) λέγομεν ὅτι τοῦτο ἔχει διαταχθῆ εἰς *ὁμογενεῖς ὁμάδας*.

Κατόπιν τούτων ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν x, y, z δύναται νὰ διαταχθῇ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας ὡς κάτωθι:

$$f(x,y,z) \equiv \alpha_0 + [\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z] + [\alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 z^2 + \alpha_7 xy + \alpha_8 xz + \alpha_9 yz] +$$
$$+ \alpha_{10} x^3 + \alpha_{11} y^3 + \alpha_{12} z^3 + \alpha_{13} x^2 y + \alpha_{14} x^2 z + \alpha_{15} y^2 x + \ldots,$$

ἔνθα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots$ οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου.

στ'). Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον πολυωνύμων τριῶν καὶ γενικῶς ν μεταβλητῶν ὁρίζεται ὡς ἀκριβῶς καὶ διὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Κατὰ συνέπειαν καὶ τὰ πολυώνυμα ν τὸ πλῆθος μεταβλητῶν μὲ πραγματικοὺς συντελεστὰς ἀποτελοῦν *δακτύλιον*, ὁ ὁποῖος συμβολίζεται μέ: $\mathbf{R}[x,y,z,\ldots]$.

Ἡ ἰσότης μεταξὺ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, περιεχόντων τὰς αὐτὰς μεταβλητάς, ὁρίζεται ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Ἀκριβέστερον λέγομεν ὅτι:

Δύο ἀκέραια πολυώνυμα $f(x,y,z,\ldots)$ καὶ $\varphi(x,y,z,\ldots)$ εἶναι ἴσα ἢ ἐκ ταυτότητος ἴσα, καὶ γράφομεν $f(x,y,z,\ldots) \equiv \varphi(x,y,z,\ldots)$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν σύγκεινται ἀπὸ ἴσα μονώνυμα ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ἂν ἡ διαφορά των εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον. Ἤτοι:

$$\boxed{f(x,y,z,\ldots) \equiv \varphi(x,y,z,\ldots) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x,y,z,\ldots) - \varphi(x,y,z\ldots) \equiv 0}$$

Οὕτω, π.χ., τὰ πολυώνυμα:

$f(x,y) \equiv \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 - \delta x + \varepsilon y + \theta$ καὶ $\varphi(x,y) \equiv 2x^2 - 3xy + y^2 + 5x + 4$

θὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν:

$$\alpha = 2, \quad \beta = -3, \quad \gamma = 1, \quad \delta = -5, \quad \varepsilon = 0, \quad \theta = 4.$$

ζ'). Καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** τοῦ πολυωνύμου $f(x, y, z,\ldots)$ διὰ $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma, \ldots$, ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ἀριθμοὶ πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοί, τὸν ἀριθμὸν $f(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἂν εἰς τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z,\ldots)$ ἀντικαταστήσωμεν τὰς μεταβλητὰς $x,y,z,\ldots$ διὰ τῶν $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ ἀντιστοίχως.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο πολυωνύμων ν μεταβλητῶν καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου προκύπτει ὅτι:

Ἐὰν $f(x,y,z,\ldots) \equiv \varphi(x,y,z,\ldots) \Longrightarrow f(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) = \varphi(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ καὶ ἐὰν $f(x,y,z,\ldots) \equiv 0 \Longrightarrow f(\alpha,\beta,\gamma,\ldots) = 0$ διὰ κάθε ν—άδα τιμῶν $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ τῶν $x, y, z,\ldots$ ἀντιστοίχως.

Παρατήρησις. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναφέρονται εἰς πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν, διατάσσομεν συνήθως αὐτὰ ὡς πρὸς μίαν μεταβλητήν. Ἀκριβέστερον ἰσχύει ἡ ἑξῆς πρότασις:

Κάθε μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον $f(x,y,z)$, ν βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x, δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x κατὰ μοναδικὸν (μονοσήμαντον) τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$f(x,y,z) \equiv f_\nu(y,z)\,x^\nu + f_{\nu-1}(y,z)\,x^{\nu-1} + \cdots + f_1(y,z)\,x + f_0(y,z), \tag{4}$$

ἔνθα $f_\nu(y,z), f_{\nu-1}(y,z), \ldots, f_0(y,z)$ ἀκέραια πολυώνυμα τῶν μεταβλητῶν y,z καὶ $f_\nu(y,z) \not\equiv 0$.

Προφανῶς ἡ διάταξις αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς :

Συλλέγομεν πρῶτον τοὺς ὅρους οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ x εἰς τὴν μεγαλυτέραν δύναμιν ν καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα τὸ x^{ν}, ὅτε ἔχομεν ὡς συντελεστὴν τοῦ x^{ν} ἐν γένει πολυώνυμον τῶν y καὶ z, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $f_{\nu}(y,z)$. Ἀκολούθως συλλέγομεν τοὺς ὅρους οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ x εἰς τὴν δύναμιν $\nu-1$ καὶ μεταξὺ αὐτῶν ἐξάγομεν κοινὸν παράγοντα τὸν $x^{\nu-1}$ καὶ ἔχομεν οὕτω ὡς συντελεστὴν τοῦ $x^{\nu-1}$ ἐν γένει πολυώνυμον τῶν y καὶ z, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν $f_{\nu-1}(y,z)$. Προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον συλλέγομεν τέλος τοὺς ὅρους οἱ ὁποῖοι δὲν ἔχουν τὴν μεταβλητὴν x καὶ οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουν τὸν τελευταῖον προσθετέον $f_0(y,z)$ τοῦ ἀναπτύγματος (4).

Τὸ αὐτὸ πολυώνυμον $f(x,y,z)$, ἐὰν εἶναι βαθμοῦ μ ὡς πρὸς μίαν ἄλλην μεταβλητὴν π.χ. τὴν y δύναται νὰ διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ y, δηλ. νὰ λάβῃ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z) \equiv f_{\mu}(x,z)\, y^{\mu} + f_{\mu-1}(x,z)\, y^{\mu-1} + \ldots + f_1(x,z)\, y + f_0(x,z), \qquad (4')$$

ἔνθα $f_{\mu}(x,z),\ f_{\mu-1}(x,z), \ldots, f_0(x,z)$ ἀκέραια πολυώνυμα τῶν x,z καὶ $f_{\mu}(x,z) \not\equiv 0$.

Ἐφαρμογή. Τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv 5x^4y^2z^3 - 3x^3yz^5 + 2x^3z - x^4y + 4yx - 7xy^2z + 3z - 2y$$

διατάσσεται κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x ὡς κάτωθι :

$$f(x,y,z) \equiv (5y^2z^3 - y)\, x^4 + (2z - 3yz^5)\, x^3 + (4y - 7y^2z)\, x + (3z - 2y).$$

η'). Ἀνάλογοι προτάσεις πρὸς τὰ θεωρήματα I καὶ II τῶν §§ 52, 53 διατυποῦνται καὶ διὰ πολυώνυμα περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν, ἤτοι :

1ον : Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $f(x,y,z,\ldots)$ καὶ $\varphi(x,y,z,\ldots)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδὲν ἐνῶ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, τότε τὸ ἄλλο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Δηλαδή :

Ἐὰν $f(x,y,z,\ldots)\cdot\varphi(x,y,z,\ldots) \equiv 0$ καὶ $\varphi(x,y,z,\ldots) \not\equiv 0 \Longrightarrow f(x,y,z,\ldots) \equiv 0$.

2ον : Ἐὰν $f(x,y,z,\ldots)\cdot\varphi(x,y,z,\ldots) \equiv g(x,y,z,\ldots)\cdot\varphi(x,y,z,\ldots)$ καὶ

$\varphi(x,y,z,\ldots) \not\equiv 0$, τότε : $f(x,y,z,\ldots) \equiv g(x,y,z,\ldots)$.

Διαιρετότης ἀκεραίων πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν.

§ 80. Τελεία διαίρεσις. – Ἡ τελεία διαίρεσις ἀκεραίων πολυωνύμων περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν ὁρίζεται ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς. Οὕτω θὰ λέγωμεν ὅτι :

Τὸ μὴ μηδενικὸν πολυώνυμον $\varphi(x,y,z,\ldots)$ διαιρεῖ τὸ $f(x,y,z,\ldots)$ καὶ γράφομεν $\varphi(x,y,z,\ldots) \mid f(x,y,z,\ldots)$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x,y,z,\ldots)$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης :

$$f(x,y,z,\ldots) \equiv \varphi(x,y,z,\ldots)\cdot\pi(x,y,z,\ldots). \qquad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z,\ldots)$ *διαιρεῖται* (ἀκριβῶς) ἢ εἶναι *διαιρετὸν* διὰ τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x,y,z,\ldots)$ ἢ ἀκόμη ὅτι ἡ διαίρεσις $f(x,y,z,\ldots) : \varphi(x,y,z,\ldots)$ εἶναι *τελεία*.

Τὸ πολυώνυμον $\pi(x,y,z,\ldots)$ καλεῖται ἐπίσης *πηλίκον* τῆς τελείας διαιρέσεως $f(x,y,z,\ldots) : \varphi(x,y,z,\ldots)$. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον $f(x,y) \equiv x^3 + y^3$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $\varphi(x,y) \equiv x^2 - xy + y^2$ καὶ δίδει πηλίκον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi(x,y) \equiv x + y$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ *πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως* $f(x,y,z,\dots) : \varphi(x,y,z,\dots)$, *ἤτοι τὸ πολυώνυμον* $\pi(x,y,z,\dots)$, *ὁρίζεται μονοσημάντως*· πράγματι, ἐὰν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο πολυώνυμον $\pi_1(x,y,z,\dots)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi_1(x,y,z,\dots), \tag{2}$$

τότε, δυνάμει τῶν (1) καὶ (2), θὰ εἴχομεν :

$$\varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi(x,y,z,\dots) \equiv \varphi(x,y,z,\dots) \cdot \pi_1(x,y,z,\dots)$$

καὶ ἑπομένως :

$$\varphi(x,y,z,\dots) \cdot [\pi(x,y,z,\dots) - \pi_1(x,y,z,\dots)] \equiv 0 \tag{3}$$

Ἀλλὰ $\varphi(x,y,z,\dots) \not\equiv 0$, ὅθεν (§ 79, η) θὰ εἶναι :

$$\pi(x,y,z,\dots) - \pi_1(x,y,z,\dots) \equiv 0 \quad ἢ \quad \pi(x,y,z,\dots) \equiv \pi_1(x,y,z,\dots)$$

Δηλαδὴ **ἓν μόνον** πηλίκον ὑπάρχει.

Σημείωσις. Εἰς τὴν περίπτωσιν πολυωνύμων περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν δὲν ἰσχύει ἓν ἀνάλογον θεώρημα πρὸς τὸ τῆς § 64. Κατὰ ταῦτα :

Δοθέντων δύο πολυωνύμων $A(x,y)$ καὶ $B(x,y)$ **δὲν** ὑπάρχουν πάντοτε δύο πολυώνυμα $Q(x,y)$ καὶ $R(x,y)$ (μὲ βαθμὸν τοῦ $R(x,y)$ μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ $B(x,y)$) τοιούτων, ὥστε :

$$A(x,y) \equiv B(x,y) \cdot Q(x,y) + R(x,y).$$

Παράδειγμα: $A(x,y) \equiv x^3 + 2xy^2 - x + 1, \quad B(x,y) \equiv x + y - 1.$

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μερικὰ βασικὰ θεωρήματα διαιρετότητος.

§ 81. Θεώρημα.— Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ διωνύμου $x - y$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν : $f(y,y,z) \equiv 0$, δηλ. καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν, ὅταν εἰς αὐτὸ τεθῇ ἀντὶ x τὸ y.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $x - y \mid f(x,y,z)$, τότε, ἐὰν καλέσωμεν $\pi(x,y,z)$ τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως $f(x,y,z) : (x - y)$, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y) \cdot \pi(x,y,z) \tag{1}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὸ x διὰ τοῦ y λαμβάνομεν :

$$f(y,y,z) \equiv 0. \tag{2}$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ (2) καὶ ὅτι ν εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ $f(x,y,z)$ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x. Τότε τὸ $f(x,y,z)$ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$f(x,y,z) \equiv f_\nu(y,z)x^\nu + f_{\nu-1}(y,z)\, x^{\nu-1} + \cdots + f_1(y,z)\, x + f_0(y,z).$$

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $f(x,y,z)$ διὰ $x - y$, θὰ εὕρωμεν ἓν πηλίκον $\pi(x,y,z)$ καὶ ἓν ὑπόλοιπον μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x, δηλ. ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ περιέχον τὸ x, ἀλλὰ μόνον τὰς μεταβλητὰς y καὶ z.

Ἐὰν $\upsilon(y,z)$ καλέσωμεν τὸ ἐν λόγῳ ὑπόλοιπον, θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z) + \upsilon(y,z). \tag{3}$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (3) τὸ x μὲ τὸ y καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν (2) λαμβάνομεν :

$$\upsilon(y,z) \equiv f(y,y,z) \equiv 0,$$

δηλαδὴ τὸ $\upsilon(y,z)$ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον, ὅτε ἡ (3) γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y,z), \quad δηλαδὴ \quad (x-y) \mid f(x,y,z).$$

§ 82. Θεώρημα. — **Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρῆται δι' ἑνὸς ἑκάστου τῶν διωνύμων: $x-y$, $y-z$, $z-x$, τότε θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου :**

$$(x-y)(y-z)(z-x) \not\equiv 0$$

καὶ ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ $x-y$ θὰ ἔχωμεν, ἐὰν $\pi_1(x,y,z)$ καλέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y)\cdot\pi_1(x,y,z). \tag{1}$$

Ἐὰν εἰς τὴν (1) τεθῇ ὅπου y τὸ z λαμβάνομεν :

$$f(x,z,z,) \equiv (x-z)\cdot\pi_1(x,z,z). \tag{2}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ $y-z$, θὰ εἶναι (§ 81) $f(x,z,z) \equiv 0$.
Τότε ὅμως ἐκ τῆς (2) προκύπτει : $\pi_1(x,z,z) \equiv 0$, διότι $x-z \not\equiv 0$.

Ἐκ τῆς $\pi_1(x,z,z) \equiv 0$ προκύπτει ὅτι τὸ πολυώνυμον $\pi_1(x,y,z)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ $y-z$, ὅθεν θὰ ἔχωμεν, ἐὰν $\pi_2(x,y,z)$ καλέσωμεν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης :

$$\pi_1(x,y,z) \equiv (y-z)\,\pi_2(x,y,z). \tag{3}$$

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (3), γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z)\,\pi_2(x,y,z). \tag{4}$$

Ἐὰν εἰς τὴν (4) τεθῇ ὅπου z τὸ x λαμβάνομεν :

$$f(x,y,x) \equiv (x-y)(y-x)\cdot\pi_2(x,y,x). \tag{5}$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $z-x$, θὰ εἶναι $f(x,y,x) \equiv 0$.
Τότε ὅμως ἐκ τῆς (5) προκύπτει : $\pi_2(x,y,x) \equiv 0$, διότι $(x-y)(y-x) \not\equiv 0$.

Ἀλλὰ $\pi_2(x,y,x) \equiv 0$ δηλοῖ ὅτι τὸ πολυώνυμον $\pi_2(x,y,z)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $z-x$. Ἄρα :

$$\pi_2(x,y,z) \equiv (z-x)\cdot\pi(x,y,z), \tag{6}$$

ἔνθα $\pi(x,y,z)$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\pi_2(x,y,z) : (z-x)$.

Ἡ (4), δυνάμει τῆς (6), γίνεται :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z)(z-x)\cdot\pi(x,y,z).$$

Συνεπῶς τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$.
Τὸ ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

Δι' ἀναλόγου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ τὸ κάτωθι :

§ 83. Θεώρημα.— **Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρῆται :**

(i) διὰ $x+y$, $y+z$, $z+x$ $\iff$ διαιρεῖται καὶ διὰ $(x+y)(y+z)(z+x)$
(ii) διὰ x, y, z, $\iff$ » » » $x\cdot y\cdot z$
(iii) διὰ $x+y-z$, $y+z-x$, $z+x-y$ $\iff$ » » » $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$.

Σημείωσις. Τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἰσχύουν γενικῶς διὰ κάθε πολυώνυμον $f(x,y,z,\ldots,t)$, ν τὸ πλῆθος μεταβλητῶν, αἱ δὲ ἀποδείξεις εἶναι πανομοιότυποι τῶν ἀνωτέρω ὡς καὶ διὰ πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ν φυσικὸς ἀριθμός, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^{2\nu+1} - x^{2\nu+1} - y^{2\nu+1} - z^{2\nu+1}$$

διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου : $(x+y)(y+z)(z+x)$.

Λύσις. Ἀντικαθιστῶντες τὸ x μὲ τὸ $-y$ εἰς τὸ $f(x,y,z)$ εὑρίσκομεν :

$$f(-y,y,z) \equiv (-y+y+z)^{2\nu+1} - (-y)^{2\nu+1} - y^{2\nu+1} - z^{2\nu+1} \equiv z^{2\nu+1} + y^{2\nu+1} - y^{2\nu+1} - z^{2\nu+1} \equiv 0.$$

Ἄρα τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ $x+y$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι διαιρεῖται διὰ $y+z$ καὶ $z+x$. Τότε ὅμως, συμφώνως πρὸς τὸ τελευταῖον θεώρημα τὸ $f(x,y,z)$ θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+y)(y+z)(z+x)$.

ʽΟμογενῆ πολυώνυμα

§ 84. ʽΟρισμοί.— Εἰς τὴν παράγραφον 79 εἴδομεν ὅτι: *"Εν ἀκέραιον πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται* **ὁμογενὲς** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὅλοι οἱ ὅροι του, δηλαδὴ τὰ μονώνυμα (μὴ μηδενικὰ) ἐξ ὧν σύγκειται εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ σύνολον τῶν μεταβλητῶν.*

ʽΟ κοινὸς βαθμὸς τῶν ὅρων του καλεῖται **βαθμὸς ὁμογενείας** τοῦ πολυωνύμου. Οὕτω, π.χ., τὸ πολυώνυμον: $f(x,y,z) \equiv 2x^3 - y^3 + 3z^3 + x^2y + y^2z - z^2x + 3xyz$ εἶναι ὁμογενές, τρίτου βαθμοῦ. Ἐπίσης τὸ πολυώνυμον $\varphi(x,y) \equiv x^3y - 2x^2y^2 + 3xy^3$ εἶναι ὁμογενὲς τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας, ἐνῶ τὸ πολυώνυμον: $g(x,y) \equiv x^2 + y^2 + xy + x + y$ δὲν εἶναι ὁμογενές.

Ἔστω τώρα ἓν ὁμογενὲς πολυώνυμον $f(x,y,z)$, βαθμοῦ ὁμογενείας ν, τότε ὁ τυχὼν ὅρος αὐτοῦ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς: $\alpha x^k y^\rho z^\mu$, ἔνθα α (σταθερὸς) πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ k,ρ,μ φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἢ μηδὲν τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $k + \rho + \mu = \nu$. ʽΟ ὅρος οὗτος, ἐὰν τὰ x,y,z ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν γινομένων: λx, λy, λz, ἔνθα λ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμός, $\lambda \neq 0$, γίνεται:

$$\alpha(\lambda x)^k (\lambda y)^\rho (\lambda z)^\mu \equiv \alpha \cdot \lambda^{k+\rho+\mu} x^k y^\rho z^\mu \equiv \lambda^\nu \cdot \alpha x^k y^\rho z^\mu,$$

ἤτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^ν. Ἐφ' ὅσον ὁ τυχὼν ὅρος τοῦ πολυωνύμου $f(x,y,z)$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^ν, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z)$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ λ^ν. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τοῦ ὁμογενοῦς πολυωνύμου:

Ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z, \ldots)$ καλεῖται ὁμογενές, ν βαθμοῦ, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z, \ldots) \equiv \lambda^\nu \cdot f(x,y,z, \ldots)$$

διὰ κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ **καὶ** $(x,y,z, \ldots) \neq (0,0,0, \ldots)$.

Παράδειγμα: Τὸ πολυώνυμον: $f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ εἶναι ὁμογενὲς τρίτου βαθμοῦ, διότι ἔχομεν:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 - 3(\lambda x)(\lambda y)(\lambda z) \equiv \lambda^3 \cdot (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \equiv \lambda^3 \cdot f(x,y,z).$$

Ἄσκησις. Ἀποδείξατε τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν ἀνωτέρω δύο ὁρισμῶν τοῦ ὁμογενοῦς πολυωνύμου.

Ἰδιότητες τῶν ʽΟμογενῶν πολυωνύμων

§ 85. Ἰδιότης I.— **Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον, βαθμοῦ ὁμογενείας ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τὰ ὁμογενῆ πολυώνυμα $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ βαθμῶν ὁμογενείας ν καὶ μ ἀντιστοίχως. Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^\nu \cdot f(x,y,z) \quad (1)$$

$$\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z) \equiv \lambda^\mu \cdot \varphi(x,y,z). \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{\nu+\mu}\cdot f(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z) \quad (3)$$

Ἡ (3) μᾶς βεβαιώνει ὅτι τὸ γινόμενον $f(x,y,z)\cdot\varphi(x,y,z)$ τῶν δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ὁμογενὲς πολυώνυμον $\nu+\mu$ βαθμοῦ ὁμογενείας.

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον ἑνὸς ὁμογενοῦς καὶ ἑνὸς μὴ ὁμογενοῦς πολυωνύμου καθὼς καὶ τὸ γινόμενον δύο μὴ ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον μὴ ὁμογενὲς (διατί;)

§ 86. Ἰδιότης ΙΙ.– Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενές, βαθμοῦ ὁμογενείας ἴσου πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$, $\pi(x,y,z)$ ἀντιστοίχως ὁ διαιρετός, ὁ διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως καὶ ν, μ $(\nu>\mu)$ ἀντιστοίχως οἱ βαθμοὶ ὁμογενείας τῶν $f(x,y,z)$ καὶ $\varphi(x,y,z)$. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x,y,z)\equiv\varphi(x,y,z)\cdot\pi(x,y,z) \quad (1)$$

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{\nu}\cdot f(x,y,z) \quad (2)$$

$$\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{\mu}\cdot\varphi(x,y,z). \quad (3)$$

Ἡ ταυτότης (1), ἐὰν τὰ x,y,z ἀντικατασταθοῦν ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν λx, λy, λz γίνεται :

$$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\varphi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\cdot\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$

ἢ δυνάμει τῶν (2) καὶ (3) :

$$\lambda^{\nu}\cdot f(x,y,z)\equiv\lambda^{\mu}\cdot\varphi(x,y,z)\cdot\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z). \quad (4)$$

Διαιροῦντες τὰς (4) καὶ (1) κατὰ μέλη λαμβάνομεν μετὰ τὰς πράξεις :

$$\pi(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\equiv\lambda^{\nu-\mu}\cdot\pi(x,y,z),$$

ἡ ὁποία δηλοῖ ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον βαθμοῦ ὁμογενείας $\nu-\mu$.

Σημείωσις. Ἡ ἰδιότης ΙΙ ἀποδεικνύεται συντομώτερον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ἔχοντες ὅμως ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν παρατήρησιν τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Παρατήρησις. Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων δὲν εἶναι πάντοτε ὁμογενὲς πολυώνυμον. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων :

Ἐὰν $f(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3-3xyz$ (ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ)

καὶ $\varphi(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ (» » δευτέρου »)

τότε τὸ ἄθροισμά των, ἤτοι τὸ πολυώνυμον :

$$\sigma(x,y,z)\equiv f(x,y,z)+\varphi(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3+x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-3xyz$$

δὲν εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ x, y, z.

Ἀντιθέτως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ πολυώνυμα :

$f(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3-3xyz$ (ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ)

$g(x,y,z)\equiv x^2y+y^2z+z^2x+5xyz$ (ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ)

τότε καὶ τό :

$$\tau(x,y,z)\equiv f(x,y,z)+g(x,y,z)\equiv x^3+y^3+z^3+x^2y+y^2z+z^2x+2xyz$$

εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον καὶ μάλιστα τοῦ *αὐτοῦ* βαθμοῦ ὁμογενείας.

Γενικῶς: **Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ὁμογενῶν πολυωνύμων θὰ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον, ἐὰν τὰ πολυώνυμα τὰ ὁποῖα προστίθενται εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y) \equiv \sqrt{x^2 + y^2 - 8xy}$ εἶναι ὁμογενὲς πρώτου βαθμοῦ ὁμογενείας.

182. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y) \equiv \dfrac{x^2 + 2y^2}{8xy + 4y^2}$ εἶναι ὁμογενὲς μηδενικοῦ βαθμοῦ ὁμογενείας.

183. Δίδεται τὸ πολυώνυμον: $f(x,y,z) \equiv \sqrt[3]{\dfrac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{x + y + z}}$. Δείξατε ὅτι εἶναι ὁμογενὲς μὲ βαθμὸν ὁμογενείας 1/3.

184. Δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον: $f(x,y) \equiv 9x^5y^3 + 3x^4y^4 - 14xy^7$ εἶναι ὁμογενές, ὀγδόου βαθμοῦ ὁμογενείας.

(Νὰ γίνῃ εἰς τὰς ἀνωτέρω ἀσκήσεις χρῆσις τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ).

185. Ὁμοίως, τῇ βοηθείᾳ τοῦ δευτέρου ὁρισμοῦ, δείξατε ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y) \equiv x^5 - 5x^4y + 6x^3y^2 - 5x^2y^3 + xy^4 - y^5$$

εἶναι ὁμογενὲς 5ου βαθμοῦ ὁμογενείας.

186. Δίδονται αἱ: $\dfrac{xy + yz + zx}{x + y + z}$, $\dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Εἶναι ὁμογενεῖς; Ἐν καταφατικῇ περιπτώσει νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς τῆς ὁμογενείας των.

Συμμετρικὰ πολυώνυμα

§ 87. Βοηθητικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοί. — α΄). Ἔστωσαν ν τὸ πλῆθος διάφορα ἀλλήλων διατεταγμένα στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται ὡς στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Ε, ἤτοι $E \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_\nu\}$.

Καλεῖται μ ε τ ά θ ε σ ι ς τῶν ν αὐτῶν στοιχείων κάθε ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Ε ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.

Οὕτω, π.χ., ἐὰν $E \equiv \{x, y, z\}$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἀπεικόνισιν:

$$x \leftrightarrow y, \qquad y \leftrightarrow x, \qquad z \leftrightarrow z,$$

τότε αὕτη εἶναι μία μετάθεσις τῶν στοιχείων τοῦ τριμελοῦς συνόλου Ε.

Τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν (μετάθεσιν) παριστῶμεν συμβολικῶς οὕτω:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y & x & z \end{pmatrix} \text{ ἢ ἁπλούστερον } \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}^{*)}$$

Μεταθέσεις τοῦ τριμελοῦς συνόλου $\{x, y, z\}$ εἶναι καὶ αἱ ἑξῆς:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & z & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

Ὥστε ἐκ τοῦ τριμελοῦς συνόλου $\{x, y, z\}$ λαμβάνομεν $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ μεταθέσεις.

---

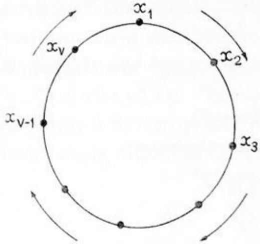
*) Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν γράφονται τὰ πρότυπα καὶ εἰς τὴν δευτέραν κάτωθεν ἑκάστου προτύπου ἡ εἰκὼν αὐτοῦ.

Εἰς ἓν ἑπόμενον κεφάλαιον θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : *Τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων ἑνὸς συνόλου ἐκ ν στοιχείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$.

Μία εἰδικὴ περίπτωσις μεταθέσεως εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου Ε ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἑπόμενόν του, τὸ δὲ τελευταῖον στοιχεῖον x_ν εἰς τὸ πρῶτον x_1. Δηλαδὴ ἡ μετάθεσις :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{\nu-1} & x_\nu \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_\nu & x_1 \end{pmatrix}$$

Μία τοιαύτη μετάθεσις καλεῖται : **κυκλικὴ μετάθεσις**.



Σχ. 5

Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἀμέσως ἐὰν τὰ ν διατεταγμένα στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ φαντασθῶμεν ὅτι εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ μιᾶς περιφερείας κύκλου καὶ θεωρήσωμεν ἓν κινητὸν τὸ ὁποῖον διαγράφει τὴν περιφέρειαν (σχ. 5) κατὰ τὴν φορὰν ποὺ δεικνύουν τὰ βέλη, τότε τὸ κινητὸν μετὰ τὸ x_1 θὰ συναντήσῃ τὸ x_2, μετὰ τὸ x_2 τὸ x_3... καὶ τέλος μετὰ τὸ x_ν θὰ συναντήσῃ πάλιν τὸ x_1.

Κυκλικαὶ μεταθέσεις ἐκ δύο στοιχείων καλοῦνται εἰδικώτερον **ἀντιμεταθέσεις**.

β'). Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον $f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 3x + 2y + 1$ τῶν μεταβλητῶν x καὶ y. Ἐὰν ἀντιμεταθέσωμεν τὰς μεταβλητὰς x καὶ y, δηλ. ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ y καὶ ἀντὶ y τὸ x θὰ προκύψῃ τὸ πολυώνυμον $f(y,x) \equiv y^2 + x^2 - 3y + 2x + 1$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι διάφορον τοῦ $f(x,y)$, ἤτοι ἔχομεν : $f(y,x) \not\equiv f(x,y)$.

Ἀντιθέτως ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y) \equiv x^2 + y^2 - 2xy + 3(x+y) - 5$$

καὶ ἀντιμεταθέσωμεν τὰς μεταβλητάς του προκύπτει πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ δοθέν, ἤτοι ἐν προκειμένῳ ἰσχύει : $f(y,x) \equiv f(x,y)$.

Ὁμοίως, ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν :

$$f(x,y,z) \equiv x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του x, y, z μίαν οἱανδήποτε μετάθεσιν, λ.χ. τήν : $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$, ἤτοι ἂν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ z, ἀντὶ y τὸ x καὶ ἀντὶ z τὸ y θὰ προκύψῃ τὸ πολυώνυμον :

$$f(z,x,y) \equiv z^3 + x^3 + y^3 - 3zxy.$$

Εἶναι δέ : $$f(z,x,y) \equiv f(x,y,z).$$

Τὰ πολυώνυμα τῶν δύο τελευταίων παραδειγμάτων καλοῦνται : **συμμετρικά**.

Κατόπιν τούτων δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ συμμετρικοῦ πολυωνύμου.

Ἀκέραιον, μὴ μηδενικόν, πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται συμμετρικὸν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν δι' οἱασδήποτε μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του προκύπτῃ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Οὕτως, ἐὰν $f(x,y,z)$ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς x,y,z θὰ ἔχωμεν :

$$f(y,z,x) \equiv f(z,x,y) \equiv f(y,x,z) \equiv f(z,y,x) \equiv f(x,z,y) \equiv f(x,y,z).$$

γ'). Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y). \tag{1}$$

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ πολυώνυμον δὲν εἶναι συμμετρικόν, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμόν, διότι, ἐὰν λάβωμεν τὴν μετάθεσιν $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \end{pmatrix}$ καὶ τὴν ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του, θὰ προκύψῃ πολυώνυμον $f(z,y,x)$ διάφορον τοῦ δοθέντος.

Ἀντιθέτως, ἐὰν ἐπὶ τῶν μεταβλητῶν του x,y,z ἐφαρμόσωμεν τὴν κυκλικὴν μετάθεσιν, ἤτοι ἂν θέσωμεν ἀντὶ x τὸ y, ἀντὶ y τὸ z καὶ ἀντὶ z τὸ x, θὰ ἔχωμεν :

$$f(y,z,x) \equiv y^2(z-x) + z^2(x-y) + x^2(y-z). \tag{2}$$

Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$f(y,z,x) \equiv f(x,y,z).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον (1) εἶναι **κυκλικῶς συμμετρικόν.** Ὥστε :

Ἀκέραιον, μὴ μηδενικόν, πολυώνυμον δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν καλεῖται κυκλικῶς συμμετρικὸν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν δι' οἱασδήποτε κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του προκύπτῃ πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ ἀρχικόν.

Εἶναι φανερὸν τώρα ὅτι κάθε συμμετρικὸν πολυώνυμον εἶναι καὶ κυκλικῶς συμμετρικόν, τὸ ἀντίστροφον ὅμως δὲν ἀληθεύει (διατί;).

Κατωτέρω εἰς περιπτώσεις καθ' ἃς τὸ πολυώνυμον εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν θὰ τονίζωμεν τοῦτο ἰδιαιτέρως.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν περίπτωσιν πολυωνύμου δύο μεταβλητῶν αἱ ἔννοιαι : *«συμμετρικὸν πολυώνυμον»* καὶ *«κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον»* εἶναι ταυτόσημοι.

Ἰδιότητες τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων

§ 88. Ἰδιότης I.—Τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων εἶναι πάντοτε συμμετρικὸν πολυώνυμον.

Ἡ ἀπόδειξις ὡς εὔκολος παραλείπεται.

§ 89. Ἰδιότης II.—Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων (τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν) εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ καὶ $\pi(x,y,z)$ ἀντιστοίχως ὁ διαιρετέος, διαιρέτης καὶ τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων $f(x,y,z)$ καὶ $\varphi(x,y,z) \not\equiv 0$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x,y,z) \cdot \pi(x,y,z). \tag{1}$$

Διὰ μιᾶς τυχούσης μεταθέσεως τῶν x,y,z· π.χ. τῆς $\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \end{pmatrix}$, ἡ (1) γίνεται :

$$f(z,x,y) \equiv \varphi(z,x,y) \cdot \pi(z,x,y)$$

ἢ
$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x,y,z) \cdot \pi(z,x,y), \qquad (2)$$

διότι τὰ πολυώνυμα f(x,y,z) καὶ φ(x,y,z) ὑπετέθησαν συμμετρικά.

Διὰ συγκρίσεως τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\pi(z,x,y) \equiv \pi(x,y,z).$$

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ οἱαδήποτε ἄλλη μετάθεσις τῶν x,y,z καθιστᾷ τὸ πηλίκον π(x,y,z) ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς ἑαυτό· ὅθεν τὸ π(x,y,z) εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα f(x,y,z) καὶ φ(x,y,z) εἶναι κυκλικῶς συμμετρικά, τότε τὸ πηλίκον π(x,y,z) εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον.

§ 90. Ἰδιότης III.— Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον f(x,y,z) εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x,y,z καὶ διαιρῆται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου φ(x,y,z) $\not\equiv 0$ (οὐχὶ κατ' ἀνάγκην συμμετρικοῦ), τότε θὰ διαιρῆται διὰ παντὸς πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ φ(x,y,z) δι' οἱασδήποτε μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του.

Ἀπόδειξις. Ἔστω π(x,y,z) τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως f(x,y,z) : φ(x,y,z), τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(x,y,z) \cdot \pi(x,y,z). \qquad (1)$$

Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ταυτότητος (1) ἐκτελέσωμεν μίαν οἱανδήποτε μετάθεσιν τῶν x,y,z· π.χ. τὴν $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$, τὸ πρῶτον μέλος δὲν βλάπτεται, διότι τὸ f(x,y,z) εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον, ἐνῶ τὸ δεύτερον μέλος γίνεται : φ(y,x,z) · π(y,x,z), καὶ ἑπομένως ἡ (1) γράφεται :

$$f(x,y,z) \equiv \varphi(y,x,z) \cdot \pi(y,x,z). \qquad (2)$$

Ἡ (2) δεικνύει ὅτι τὸ f(x,y,z) διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ φ(y,x,z).

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι τὸ f(x,y,z) διαιρεῖται διὰ παντὸς ἄλλου πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ φ(x,y,z) δι' οἱασδήποτε ἄλλης μεταθέσεως τῶν x,y,z.

Σημείωσις. Ἐὰν τὸ πολυώνυμον f(x,y,z) εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν ἡ Ἰδιότης III ἰσχύει ὑπὸ τὴν ἑξῆς ὅμως διατύπωσιν :

Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον f(x,y,z) εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x,y,z καὶ διαιρῆται διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου φ(x,y,z) $\not\equiv 0$ (οὐχὶ κατ' ἀνάγκην συμμετρικοῦ), τότε θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τῶν πολυωνύμων φ(y,z,x) καὶ φ(z,x,y), τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τοῦ φ(x,y,z) διὰ κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν μεταβλητῶν του.

Πόρισμα. — Κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρετὸν διὰ $x - y$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x - y)(y - z)(z - x)$, διαιρετὸν διὰ $x + y$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x + y)(y + z)(z + x)$, διαιρετὸν δὲ διὰ $x + y - z$ θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου :

$$(x + y - z)(y + z - x)(z + x - y).$$

§ 91. Ἰδιότης IV.— Ἐὰν ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y)$ συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x, y εἶναι διαιρετὸν διὰ $x - y$, θὰ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ $(x - y)^2$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ $x - y$ διαιρεῖ τὸ $f(x,y)$ ὑπάρχει πολυώνυμον $\pi(x,y)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$f(x,y) \equiv (x - y) \cdot \pi(x,y). \qquad (1)$$

Τότε :
$$f(y,x) \equiv (y - x) \cdot \pi(y,x). \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἐπειδὴ τὸ $f(x,y)$ ὑπετέθη συμμετρικόν, ἕπεται :

$$(x - y)\cdot\pi(x,y) \equiv (y - x) \cdot \pi(y,x)$$

ἢ
$$(x - y)[\pi(x,y) + \pi(y,x)] \equiv 0. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ $x - y \not\equiv 0$, ἐκ τῆς (3) ἕπεται :

$$\pi(x,y) + \pi(y,x) \equiv 0,$$

ἢ ἀντικαθιστῶντες τὸ x διὰ τοῦ y ἔχομεν :

$$\pi(y,y) + \pi(y,y) \equiv 0, \quad \text{δηλ.} \quad \pi(y,y) \equiv 0,$$

συνεπῶς τὸ $\pi(x,y)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $x - y$. Κατὰ ταῦτα ὑπάρχει πολυώνυμον $\varphi(x,y)$ τοιοῦτον, ὥστε :

$$\pi(x,y) \equiv (x - y) \cdot \varphi(x,y).$$

Τότε ἡ (1) γίνεται :

$$f(x,y) \equiv (x - y)^2 \cdot \varphi(x,y),$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι τὸ $f(x,y)$ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ $(x-y)^2$.

§ 92. Μορφαὶ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.— Ἡ γενικὴ μορφὴ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων μέχρι τρίτου βαθμοῦ εἶναι :

α'). Διὰ δύο μεταβλητὰς x καὶ y.

1). *Πρωτοβάθμια* : $\alpha(x + y) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0.$

2). *Δευτεροβάθμια* : $\alpha(x^2 + y^2) + \beta xy + \gamma(x + y) + \delta, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ καὶ $\alpha \neq 0$ ἢ $\beta \neq 0$.

3). *Τριτοβάθμια* : $\alpha(x^3 + y^3) + \beta(x^2y + y^2x) + \gamma xy + \delta(x + y) + \varepsilon, \ \alpha, \beta, \ldots, \varepsilon \in \mathbf{R}$ καὶ $\alpha \neq 0$ ἢ $\beta \neq 0$.

β'). Διὰ τρεῖς μεταβλητὰς x,y,z.

1). *Πρωτοβάθμια* : $\alpha(x + y + z) + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}, \quad \alpha \neq 0.$

2). *Δευτεροβάθμια* : $\alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + yz + zx) + \gamma(x + y + z) + \delta\cdot$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$ καὶ α ἢ $\beta \neq 0$.

3). *Τριτοβάθμια* : $\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$ $+\gamma xyz+\delta(x^2+y^2+z^2)+\varepsilon(xy+yz+zx)+\theta(x+y+z)+\eta$, ἔνθα $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\theta,\eta\in\mathbf{R}$ καὶ ἓν τοὐλάχιστον τῶν $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$.

Ἄς ἀποδείξωμεν τὸ α_2 τῶν ἀνωτέρω :

Πράγματι· κάθε πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y εἶναι τῆς μορφῆς :

$$f(x,y)\equiv Ax^2+By^2+\Gamma xy+\Delta x+Ey+\Theta \tag{1}$$

ἔνθα Α, Β, Γ, Δ, Ε, Θ (σταθεροὶ) πραγματικοὶ ἀριθμοί, ὄχι ὅλοι ὑποχρεωτικῶς $\neq 0$.

Διὰ νὰ εἶναι τοῦτο κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον, πρέπει νὰ παραμένῃ ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς ἑαυτό, δι' οἱασδήποτε κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν x, y (ἀντιμεταθέσεως).

Δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν x καὶ y προκύπτει τὸ πολυώνυμον :

$$f(y,x)\equiv Ay^2+Bx^2+\Gamma yx+\Delta y+Ex+\Theta, \tag{2}$$

τὸ ὁποῖον ὀφείλει νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ πολυώνυμον (1), ἤτοι :

$$Ay^2+Bx^2+\Gamma yx+\Delta y+Ex+\Theta\equiv Ax^2+By^2+\Gamma xy+\Delta x+Ey+\Theta.$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸν ὁρισμὸν τῆς ἰσότητος (§ 79) δύο πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν ἔχομεν : $Ay^2\equiv By^2$, $Bx^2\equiv Ax^2$, $\Gamma yx\equiv\Gamma xy$, $\Delta y\equiv Ey$, $Ex\equiv\Delta x$, $\Theta=\Theta$, ἐξ ὧν :

$$A=B,\qquad \Delta=E.$$

Θέτοντες $A=B=\alpha$, $\Gamma=\beta$, $\Delta=E=\gamma$ καὶ $\Theta=\delta$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον (1), πρέπει νὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην τῆς μορφῆς :

$$\alpha(x^2+y^2)+\beta xy+\gamma(x+y)+\delta.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκονται καὶ αἱ γενικαὶ μορφαὶ τῶν κυκλικῶς συμμετρικῶν πολυωνύμων, τὰς ὁποίας ἀνεγράψαμεν ἀνωτέρω.

§ 93. Τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα. — Ἄς θεωρήσωμεν ν μεταβλητὰς $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, τότε τὰ ἁπλούστερα συμμετρικὰ πολυώνυμα ὡς πρὸς αὐτὰς εἶναι τὰ κάτωθι :

$$\begin{aligned}
S_1 &\equiv x_1+x_2+\cdots+x_\nu\\
S_2 &\equiv x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_\nu+x_2x_3+\cdots+x_2x_\nu+\cdots+x_{\nu-1}x_\nu\\
S_3 &\equiv x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_1x_2x_\nu+x_2x_3x_4+\cdots+x_{\nu-2}x_{\nu-1}x_\nu\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S_\nu &\equiv x_1x_2x_3\cdots x_\nu .
\end{aligned}$$

Τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα καλοῦνται **στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα** τῶν μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$.

Οὕτω, π.χ., τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα δύο μεταβλητῶν x, y εἶναι τά : $S_1=x+y$ καὶ $S_2=xy$,

τριῶν μεταβλητῶν x, x, z εἶναι :

$$S_1=x+y+z,\qquad S_2=xy+yz+zx,\qquad S_3=xyz.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι : *Πᾶν ἀκέραιον συμμετρικὸν πολυώνυμον δύναται νὰ ἐκφρασθῇ πάντοτε κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων.*

Οὕτω, π.χ., τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον :

$$f(x,y)\equiv x^3-2x^2y-2xy^2+y^3 \tag{1}$$

γράφεται :

$$f(x,y)\equiv(x+y)^3-3xy(x+y)-2xy(x+y)\equiv(x+y)^3-5xy(x+y)$$

ἢ ἄν : $S_1 = x + y$ καὶ $S_2 = xy$,

τότε : $f(x,\psi) \equiv S_1^3 - 5S_1S_2$,

ἤτοι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον (1) ἔχει ἐκφρασθῆ συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων τῶν μεταβλητῶν του.

§ 94. Ὁμογενῆ καὶ κυκλικῶς συμμετρικὰ πολυώνυμα.— Εἶναι φανερὸν ὅτι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νὰ εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰς μεταβλητάς του χωρὶς συγχρόνως νὰ εἶναι καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν ὡς πρὸς αὐτὰς καὶ ἀντιστρόφως, δύναται νὰ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν χωρὶς νὰ εἶναι καὶ ὁμογενὲς συγχρόνως. Ὑπάρχουν ὅμως περιπτώσεις καθ' ἃς ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον ἔχει συγχρόνως ἀμφοτέρας τὰς ἰδιότητας τῆς ὁμογενείας καὶ τῆς κυκλικῆς συμμετρίας. Ἓν τοιοῦτον πολυψνυμον δύναται νὰ προκύψῃ ἀπὸ ἓν κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον, ἐὰν παραλειφθοῦν οἱ ὅροι αὐτοῦ οἱ καταστρέφοντες τὴν ὁμογένειαν. Οὕτως εὑρίσκομεν, π.χ., ὅτι τὰ μόνα ὁμογενῆ καὶ συγχρόνως κυκλικῶς συμμετρικὰ πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν x,y,z εἶναι τῶν κάτωθι μορφῶν :

1). Πρώτου βαθμοῦ : $\alpha(x+y+z)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$.

2). Δευτέρου βαθμοῦ : $\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

3). Τρίτου βαθμοῦ : $\alpha(x^3+y^3+z^3)+\beta(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)+$
$+\gamma xyz$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$.

Ὅλα τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα τῆς § 93 εἶναι συγχρόνως καὶ ὁμογενῆ.

Προφανῶς ἰσχύει ἡ πρότασις :

Τὸ πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως δύο ὁμογενῶν καὶ κυκλικῶς συμμετρικῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν (διατί ;).

§ 95. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ὁμογενῶν καὶ συμμετρικῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.— Αἱ μέχρι τοῦδε προτάσεις ἐπὶ τῶν ὁμογενῶν καὶ συμμετρικῶν πολυωνύμων χρησιμεύουν πολλάκις διὰ νὰ μετατρέπωμεν ταχέως εἰς γινόμενα παραγόντων διάφορα ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα, ὅπως γίνεται φανερὸν ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον. Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ πολυώνυμον :

$$f(x,y,z) \equiv (x-y)(x^3+y^3)+(y-z)(y^3+z^3)+(z-x)(z^3+x^3).$$

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ $x=y$ εἶναι $f(y,y,z) \equiv 0$, ἄρα τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ $x-y$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι κυκλικῶς συμμετρικὸν θὰ διαιρῆται (§ 90, πόρισμα) καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ κυκλικῶς συμμετρικά, διὰ τοῦτο τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θὰ εἶναι ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ, ἀφοῦ τὸ $f(x,y,z)$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καὶ ὁ διαιρέτης τρίτου. Θὰ εἶναι δηλαδὴ τοῦτο τῆς μορφῆς : $\alpha(x+y+z)$, ἔνθα α σταθερὸς ἀριθμός.

Κατόπιν τούτων θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$(x-y)(x^3+y^3)+(y-z)(y^3+z^3)+(z-x)(z^3+x^3) \equiv \alpha(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x) \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x,y,z. Δίδομεν εἰς τὰ x,y,z μία τριάδα αὐθαιρέτων τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν μηδενίζουν τὸν διαιρέτην $(x-y)(y-z)(z-x)$· π.χ. $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$ καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\alpha = 1$.

Ἑπομένως:

$$(x-y)(x^3+y^3)+(y-z)(y^3+z^3)+(z-x)(z^3+x^3) \equiv (x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x).$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z) \equiv (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(x+y)(y+z)(z+x)$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

Λύσις: Ἐὰν εἰς τὸ $f(x,y,z)$ τεθῇ ἀντὶ x τὸ $-y$ εὑρίσκομεν $f(-y,y,z) \equiv 0$. Ἄρα τὸ $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x+y$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι συμμετρικὸν θὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ γινομένου $(x+y)(y+z)(z+x)$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $f(x,y,z)$ εἶναι ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν πέμπτου βαθμοῦ, ὁ δὲ διαιρέτης $(x+y)(y+z)(z+x)$ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν τρίτου βαθμοῦ, ἕπεται ὅτι τὸ πηλίκον θὰ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν δευτέρου βαθμοῦ, ἤτοι τῆς μορφῆς:

$$\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx), \text{ ἔνθα } \alpha, \beta \text{ πραγματικοὶ ἀριθμοί.}$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5 \equiv (x+y)(y+z)(z+x)\cdot[\alpha(x^2+y^2+z^2)+\beta(xy+yz+zx)]. \quad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἀληθὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, z.

Θέτοντες εἰς τὴν (1), π.χ., $x = y = z = 1$ εὑρίσκομεν:

$$\alpha + \beta = 10. \quad (2)$$

Θέτοντες δὲ ἀκολούθως εἰς τὴν (1) $x = 0$, $y = 2$, $z = -1$ εὑρίσκομεν:

$$5\alpha - 2\beta = 15. \quad (3)$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν: $\alpha = 5$, $\beta = 5$ καὶ τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι: $5(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

§ 96. Σύντομος γραφὴ ἀθροισμάτων καὶ γινομένων.

— Ἐνίοτε παρουσιάζονται ἀθροίσματα τῆς μορφῆς:

$$\alpha+\beta+\gamma, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \quad \alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta), \text{ κ.τ.λ.}$$

Τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ παριστάνομεν συμβολικῶς ὡς ἑξῆς (ἀντιστοίχως):

$$\Sigma\alpha, \quad \Sigma\alpha\beta, \quad \Sigma\alpha^2(\beta-\gamma).$$

Ὁμοίως χρησιμοποιοῦμεν τὸ σύμβολον Π διὰ τὴν συμβολικὴν γραφὴν γινομένων. Οὕτω, π.χ., τὸ γινόμενον: $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ παριστάνομεν συμβολικῶς μέ: $\Pi(\beta-\gamma)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

187. Νὰ γραφοῦν πλήρως αἱ ἀκόλουθοι ἐκφράσεις:

$$\Sigma\alpha^3(\beta-\gamma), \quad \Sigma\alpha^2(\beta-\gamma)^3, \quad \Sigma(\alpha\beta-\gamma^2)(\alpha\gamma-\beta^2).$$

188. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\Sigma\alpha^2(\beta+\gamma)+3\alpha\beta\gamma \equiv (\Sigma\alpha)\cdot(\Sigma\beta\gamma).$$

189. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\Sigma\beta\gamma(\beta+\gamma)+2\alpha\beta\gamma \equiv \Pi(\beta+\gamma).$$

190. Ὁμοίως ὅτι: $\alpha\beta\gamma(\Sigma\alpha)^3-(\Sigma\beta\gamma)^3 = \alpha\beta\gamma\Sigma\alpha^3-\Sigma\beta^3\gamma^3 = \Pi(\alpha^2-\beta\gamma)$.

191. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν:

$$\frac{\Sigma\alpha^3(\beta-\gamma)}{\Sigma(\beta-\gamma)^3}, \quad \frac{\Sigma\alpha^2(\beta-\gamma)^3}{\Pi(\beta-\gamma)}.$$

192. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3 = \Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\,\Sigma\alpha\beta\gamma.$$

193. Ὁμοίως ὅτι : $(\Sigma\alpha)^2 = \Sigma\alpha^2 + 2\,\Sigma\alpha\beta.$

194. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἐκφράσεις :

α). $\Sigma\dfrac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, β). $\Sigma\dfrac{\beta+\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, γ). $\Sigma\dfrac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$.

195. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ $\Sigma\dfrac{4\alpha^2-1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$ δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν α,β,γ. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος;

196. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ ὑπολογισθῇ τό :

$$\left(\Sigma\frac{\alpha}{\alpha-\gamma}\right)\cdot\left(\Sigma\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\right).$$

197. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\Sigma(\alpha\beta-\gamma^2)(\alpha\gamma-\beta^2) = (\Sigma\beta\gamma)(\Sigma\beta\gamma-\Sigma\alpha^2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

198. Ἐὰν $f(0,y,z)\equiv 0$ καὶ $f(-x,y,z)\equiv f(x,y,z)$, τότε τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,y,z)$ διαιρεῖται διὰ x^2. Ἐὰν δὲ ἐπὶ πλέον τὸ $f(x,y,z)$ εἶναι καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον, τότε θὰ διαιρῆται διὰ $x^2y^2z^2$.

199. Προσδιορίσατε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον : $f(x,y)\equiv 4x^4+12x^3y+\alpha x^2y^2+\beta xy^3+y^4$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου.

200. Ἐὰν τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον $f(x,y)$ διαιρῆται διὰ $(x-y)^{2k+1}$, τότε θὰ διαιρῆται καὶ διὰ $(x-y)^{2k+2}$, $k\in\mathbf{N}$.

201. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α) $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, β) $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2+8xyz$,

γ) $x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+2xyz$, δ) $x(y^4-z^4)+y(z^4-x^4)+z(x^4-y^4)$,

ε) $(x-y)(x+y)^2+(y-z)(y+z)^2+(z-x)(z+x)^2$.

202. Ὁμοίως αἱ κάτωθι :

α) $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

β) $(y-z)^2(y+z-2x)+(z-x)^2(z+x-2y)+(x-y)^2(x+y-2z)$.

203. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ρηταὶ παραστάσεις :

α) $\dfrac{x^2(y-z)^3+y^2(z-x)^3+z^2(x-y)^3}{(x-y)(y-z)(z-x)}$, β) $\dfrac{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)}{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}$.

204. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z)\equiv x^\nu(y-z)+y^\nu(z-x)+z^\nu(x-y)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\varphi(x,y,z)\equiv(x-y)(y-z)(z-x)$ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu\geqq 2$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον διὰ $\nu=3$ ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως.

205. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ συμμετρικὸν πολυώνυμον : $f(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$, λαμβάνει τὴν μορφήν : $f\equiv S_1^3-3S_1S_2+3S_3$, ἔνθα S_1, S_2, S_3 τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα ἀντιστοίχως πρώτου, δευτέρου καὶ τρίτου βαθμοῦ τῶν μεταβλητῶν x_1, x_2, x_3, x_4.

206. Ἵνα τὸ πολυώνυμον $f(x,y,z)\equiv\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$ εἶναι συμμετρικὸν πολυώνυμον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$.

207. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ :

α) $\Sigma yz(y^2-z^2)$, β) $\Sigma(y+z)^3-2\Sigma x^3+6xyz$,

γ) $\Sigma x(y+z)^2-4xyz$, δ) $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$.

208. Νὰ προσδιορισθῆ πολυώνυμον $f(x,y,z)$ ὁμογενὲς καὶ κυκλικῶς συμμετρικὸν 2ου βαθμοῦ τοιοῦτον, ὥστε: $f(0,1,1)=5$ καὶ $f(0,0,1)=6$.

209. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$3x^2+12y^2+10z^2+26yz+17zx+13xy$$

εἶναι γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων 1ου βαθμοῦ ὁμογενείας, νὰ εὑρεθοῦν τὰ πολυώνυμα αὐτά.

210. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z)\equiv x^{\nu}\,[z^2(x-y)^2-y^2(z-x)^2]+y^{\nu}\,[x^2(y-z)^2-z^2(x-y)^2]+z^{\nu}\,[y^2(z-x)^2-x^2(y-z)^2],$$

$\nu\in\mathbf{N}$, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $P\equiv(x-y)(y-z)(z-x)$. Ποῖον τὸ πηλίκον;

211. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y)\equiv\alpha+\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+\delta xy+\varepsilon(x^3+y^3)+\lambda(x^2y+xy^2)$$

λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$F(X,Y)\equiv\alpha+\beta X+(\delta-2\gamma)Y+\gamma Y^2+(\lambda-3\varepsilon)XY+\varepsilon X^3,$$

ὅπου $X=x+y$ καὶ $Y=xy$.

212. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ πολυώνυμον:

$$f(x,y,z)\equiv 12\,[(x+y+z)^{2\nu}-(x+y)^{2\nu}-(y+z)^{2\nu}-(z+x)^{2\nu}+x^{2\nu}+y^{2\nu}+z^{2\nu}],\quad \nu\in\mathbf{N},\ \nu\geqq 2$$

εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πολυωνύμου:

$$\varphi(x,y,z)\equiv(x+y+z)^4-(x+y)^4-(y+z)^4-(z+x)^4+x^4+y^4+z^4.$$

(**Ὑπόδειξις:** Παρατηρήσατε ὅτι τὸ $\varphi(x,y,z)$ καὶ $f(x,y,z)$ μηδενίζονται διὰ $x=0$, $y=0$, $z=0$ καὶ ὅτι $x+y+z\mid f(x,y,z)$).

III. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΡΗΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 97. Ὁρισμός.– Καλοῦμεν **ρητὸν κλάσμα** ὡς πρὸς x τὸ πηλίκον $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x, δηλαδὴ κάθε παράστασιν τῆς μορφῆς:

$$k(x)\equiv\frac{f(x)}{\varphi(x)}\equiv\frac{\alpha_\mu x^\mu+\alpha_{\mu-1}x^{\mu-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0}{\beta_\nu x^\nu+\beta_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\beta_1x+\beta_0},\tag{1}$$

ὅπου α_i, β_j, $\begin{matrix} i=0,1,\ldots,\mu, \\ j=0,1,\ldots,\nu \end{matrix}$, πραγματικοὶ ἀριθμοί, μ καὶ ν ἀκέραιοι θετικοί*) καὶ $\alpha_\mu\neq 0$, $\beta_\nu\neq 0$.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων ἀκεραίων πολυωνύμων δυνάμεθα νὰ ἀναλύσωμεν τὸ ρητὸν κλάσμα (1) εἰς ἄθροισμα ἄλλων ἁπλῶν κλασμάτων. Πρὸς ἐπίτευξιν ὅμως τῆς ἀναλύσεως ταύτης, πρέπει ὁ ἀριθμητὴς τῆς (1), δηλ. τὸ πολυώνυμον $f(x)$ νὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει, δηλ. ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ ($\mu\geqq\nu$), ἡ ἀνάλυσις τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν κλάσματος μὲ βαθμὸν ἀριθμητοῦ μικρότερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ.

---

* Διὰ $\mu=\nu=0$ τὸ $k(x)$ γίνεται $\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$, ἤτοι εἶναι μία σταθερά, διὰ $\nu=0$, $\mu\geqq 1$ τὸ $k(x)$ γίνεται ἓν πολυώνυμον.

Πράγματι, ἐὰν $\pi(x)$ καλέσωμεν τὸ πηλίκον καὶ $\upsilon(x)$ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $f(x):\varphi(x)$, ἔχομεν : $f(x)\equiv\varphi(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$, ὁπότε :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\equiv\pi(x)+\frac{\upsilon(x)}{\varphi(x)}. \qquad (2)$$

Προφανῶς τὸ $\pi(x)$ εἶναι $\mu-\nu$ βαθμοῦ καὶ τὸ $\upsilon(x)$ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ ν.

Ἐκ τῆς (2) εἶναι τώρα φανερὸν ὅτι ἡ ἀνάλυσις τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἀνάλυσιν τοῦ κλάσματος $\dfrac{\upsilon(x)}{\varphi(x)}$, εἰς τὸ ὁποῖον ὅμως ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ.

§ 98. Ἀνάλυσις τοῦ κλάσματος $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων, ὅπου ὁ βαθμὸς τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\varphi(x)$.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

Περίπτωσις I. Ἐὰν τὸ $\varphi(x)$ ἔχῃ **μόνον ἁπλᾶς πραγματικὰς ρίζας** $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, ἤτοι ἐὰν εἶναι τῆς μορφῆς $\varphi(x)\equiv(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$ **), τότε δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ν πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ τοιούτους, ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ ταυτότης :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}\equiv\frac{f(x)}{(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)}\equiv\frac{A_1}{x-\rho_1}+\frac{A_2}{x-\rho_2}+\cdots+\frac{A_\nu}{x-\rho_\nu}. \qquad (3)$$

Πράγματι, ἐκ τῆς (3), ἀπαλλασσομένης τῶν παρονομαστῶν, προκύπτει ἡ ταυτότης :

$$f(x)\equiv A_1(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu)+A_2(x-\rho_1)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu)+\cdots+$$
$$+A_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1}). \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς (4), διὰ $x=\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$f(\rho_1)=A_1(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\ldots(\rho_1-\rho_\nu) \Longrightarrow A_1=\frac{f(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)\ldots(\rho_1-\rho_\nu)}$$

$$f(\rho_2)=A_2(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)\ldots(\rho_2-\rho_\nu) \Longrightarrow A_2=\frac{f(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(\rho_2-\rho_3)\ldots(\rho_2-\rho_\nu)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(\rho_\nu)=A_\nu(\rho_\nu-\rho_1)(\rho_\nu-\rho_2)\ldots(\rho_\nu-\rho_{\nu-1}) \Longrightarrow A_\nu=\frac{f(\rho_\nu)}{(\rho_\nu-\rho_1)(\rho_\nu-\rho_2)\ldots(\rho_\nu-\rho_{\nu-1})}.$$

Παρατήρησις. Τὰ $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ προσδιορίζονται καὶ ἐκ τῆς ταυτότητος (4) ἀρκεῖ νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἐξισωθοῦν οἱ συντελεσταὶ τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων τῶν μελῶν τῆς (4), λυθῇ δὲ ἀκολούθως τὸ σύστημα, τὸ ὁποῖον θὰ προκύψῃ.

**) Δεχόμεθα, πρὸς εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν, ὅτι ὁ συντελεστὴς β_ν τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα· τοῦτο δὲν περιορίζει τὴν γενικότητα, καθόσον : ἂν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς καὶ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος (1) διὰ β_ν, ὅπερ ὑπετέθη $\neq 0$, τὸ κλάσμα δὲν μεταβάλλεται, ἐνῶ ἐπιτυγχάνεται, ὅπως ὁ συντελεστὴς τοῦ x^ν γίνῃ ἴσος πρὸς τὴν μονάδα.

Ἐφαρμογή. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα : $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-3}. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$x^2+x+1 \equiv A_1(x-2)(x-3) + A_2(x-1)(x-3) + A_3(x-1)(x-2). \tag{2}$$

Ἡ ταυτότης (2) διὰ $x = 1, 2, 3$ δίδει ἀντιστοίχως : $A_1 = \frac{3}{2}$, $A_2 = -7$, $A_3 = \frac{13}{2}$.

Ὅθεν :

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv \frac{3}{2(x-1)} - \frac{7}{(x-2)} + \frac{13}{2(x-3)}.$$

Περίπτωσις II. Ἐὰν τὸ $\varphi(x)$ ἔχῃ **πραγματικὰς καὶ πολλαπλᾶς ρίζας** ἢ γενικώτερον **ἁπλᾶς καὶ πολλαπλᾶς πραγματικὰς ρίζας**, ἤτοι ἂν εἶναι, π.χ., τῆς μορφῆς :

$$\varphi(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)^k \dots (x-\rho_\mu)^\lambda, \text{ μὲ } 1+1+k+\dots+\lambda = \nu,$$

τότε τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ δύναται νὰ γραφῇ κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{A_1}{x-\rho_1} + \frac{A_2}{x-\rho_2} + \frac{B_1}{x-\rho_3} + \frac{B_2}{(x-\rho_3)^2} + \dots + \frac{B_k}{(x-\rho_3)^k} + \dots + \frac{M_1}{x-\rho_\mu} +$$
$$+ \frac{M_2}{(x-\rho_\mu)^2} + \dots + \frac{M_\lambda}{(x-\rho_\mu)^\lambda},$$

ὅπου $A_1, A_2, B_1, B_2, \dots, B_k, \dots, M_1, M_2, \dots, M_\lambda$ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καταλλήλως προσδιοριζόμενοι.

Ἂς ἐργασθῶμεν διὰ τὸ ἁπλούστερον ἐπὶ παραδειγμάτων.

Ἐφαρμογὴ 1η: Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2}$ εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύσις. Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B_1}{(x+3)} + \frac{B_2}{(x+3)^2}. \tag{1}$$

Ἐκ ταύτης, δι' ἀπαλοιφῆς τῶν παρονομαστῶν, λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα :

$$x^2+4x+7 \equiv A(x+3)^2 + B_1(x+2)(x+3) + B_2(x+2). \tag{2}$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) εὑρίσκομεν :

$$x^2+4x+7 \equiv (A+B_1)x^2 + (6A+5B_1+B_2) + (9A+6B_1+2B_2). \tag{3}$$

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x τῶν μελῶν τῆς (3) λαμβάνομεν τὸ σύστημα :

$$A+B_1 = 1, \quad 6A+5B_1+B_2 = 4, \quad 9A+6B_1+2B_2 = 7.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν :

$$A = 3, \quad B_1 = -2, \quad B_2 = -4.$$

Ὅθεν : $$\frac{x^2+4x+7}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{3}{x+2} - \frac{2}{(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2}.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα : $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \dfrac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2}$ **εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λύσις : Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἡ ἀνάλυσις δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3\cdot(x+3)^2} \equiv \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3} + \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x+3)^2}.$$

Ἐργαζόμενοι ἤδη, ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἐφαρμογήν, εὑρίσκομεν :

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -3, \quad B_1 = 2, \quad B_2 = -5,$$

καὶ ἐπομένως ἡ ζητουμένη ἀνάλυσις εἶναι :

$$\frac{3x^4-9x^3+4x^2-34x+1}{(x-2)^3(x+3)^2} \equiv \frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^3} + \frac{2}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

Περίπτωσις III. Ἐὰν τὸ ρητὸν κλάσμα εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu},$$

ὅπου ὁ βαθμὸς τοῦ $f(x)$ εἶναι μικρότερος τοῦ 2ν, ν ἀκέραιος $\geqq 1$ καὶ β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\boldsymbol{\beta^2 - 4\gamma < 0}$, τότε ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_\nu, B_\nu$ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$\frac{f(x)}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2+\beta x+\gamma} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2} + \cdots + \frac{A_\nu x+B_\nu}{(x^2+\beta x+\gamma)^\nu}.$$

Ἵνα καταστήσωμεν σαφέστερον τὸ πρᾶγμα, ἂς ἐργασθῶμεν ἐφ' ἑνὸς παραδείγματος.

Ἐφαρμογή. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} \equiv \dfrac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$ **εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λύσις : Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ x^2-x+1 ἔχει μιγαδικὰς ρίζας, ἐπὶ πλέον δὲ τὸ κλάσμα $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3}$ πληροῖ ὅλας τὰς ὑποθέσεις τῆς περιπτώσεως III, ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{A_1x+B_1}{x^2-x+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2-x+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2-x+1)^3}. \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν :

$$x^5+1 \equiv (A_1x+B_1)(x^2-x+1)^2 + (A_2x+B_2)(x^2-x+1) + A_3x+B_3.$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x τῶν δύο μελῶν, λαμβάνομεν ἓν πρωτοβάθμιον σύστημα ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$, τὸ ὁποῖον λυόμενον δίδει :

$$A_1 = 1, \quad B_1 = 2, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = -3, \quad A_3 = -1, \quad B_3 = 2.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς αὐτὰς λαμβάνομεν τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{x^5+1}{(x^2-x+1)^3} \equiv \frac{x+2}{x^2-x+1} + \frac{x-3}{(x^2-x+1)^2} - \frac{x-2}{(x^2-x+1)^3}.$$

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς IV. Ἐὰν τὸ $\varphi(x)$ ἔχῃ **ρίζας πραγματικὰς καὶ μιγαδικὰς ἁπλᾶς ἢ πολλαπλᾶς,** τότε ἰσχύουν συγχρόνως αἱ περιπτώσεις II καὶ III.

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$ **εἰς ἄθροισμα κλασμάτων.**

Λ ύ σ ι ς : Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος γράφεται $(x-1)(x+1)(x^2+1)^2$, ἤτοι ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἁπλᾶς καὶ μιγαδικὰς πολλαπλᾶς (διπλᾶς), ὅθεν, συμφώνως πρὸς τὰς περιπτώσεις II καὶ III, θὰ ἔχωμεν τὴν κάτωθι ἀνάλυσιν :

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B_1x+\Gamma_1}{x^2+1} + \frac{B_2x+\Gamma_2}{(x^2+1)^2}. \qquad (1)$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν τῆς (1) ἐπὶ $(x^2-1)(x^2+1)^2$ προκύπτει :

$$x+2 \equiv A_1(x+1)(x^2+1)^2 + A_2(x-1)(x^2+1)^2 + (B_1x+\Gamma_1)(x^2-1)(x^2+1) + (B_2x+\Gamma_2)(x^2-1),$$

ὅθεν τελικῶς :

$$x+2 \equiv (A_1+A_2+B_1)x^5 + (A_1-A_2+\Gamma_1)x^4 + (2A_1+2A_2+B_2)x^3 + (2A_1-2A_2+\Gamma_2)x^2 +$$
$$+ (A_1+A_2-B_1-B_2)x + (A_1-A_2-\Gamma_1-\Gamma_2).$$

Διὰ συγκρίσεως τῶν συντελεστῶν τῶν δύο ἴσων πολυωνύμων προκύπτει τὸ κάτωθι γραμμικὸν σύστημα :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + B_1 &= 0 \\ A_1 - A_2 + \Gamma_1 &= 0 \\ 2A_1 + 2A_2 + B_2 &= 0 \\ 2A_1 - 2A_2 + \Gamma_2 &= 0 \\ A_1 + A_2 - B_1 - B_2 &= 1 \\ A_1 - A_2 - \Gamma_1 - \Gamma_2 &= 2. \end{aligned}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν :

$$A_1 = \frac{3}{8},\quad A_2 = -\frac{1}{8},\quad B_1 = -\frac{1}{4},\quad B_2 = -\frac{1}{2},\quad \Gamma_1 = -\frac{1}{2},\quad \Gamma_2 = -1$$

καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἀνάλυσις εἶναι :

$$\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}x+1}{(x^2+1)^2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$ **εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.**

Λ ύ σ ι ς : Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διακρίνουσα τοῦ τριωνύμου x^2+x+1 εἶναι ἀρνητική. Ἄρα τὸ κλάσμα δέχεται τὴν ἀνάλυσιν :

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+\Gamma}{x^2+x+1}. \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$2x+1 \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+\Gamma)(x+1) \qquad (2)$$

ἢ

$$2x+1 \equiv (A+B)x^2 + (A+B+\Gamma)x + (A+\Gamma). \qquad (3)$$

συνεπῶς :

$$A+B=0, \qquad A+B+\Gamma=2, \qquad A+\Gamma=1.$$

Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν : $A=-1$, $B=1$, $\Gamma=2$.
Ὅθεν :

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)} \equiv -\frac{1}{x+1} + \frac{x+2}{x^2+x+1}.$$

Σημ. Ταχεῖα εὕρεσις τῶν Α, Β, Γ.

Ἐκ τῆς ταυτότητος (2) διὰ $x = -1 \Longrightarrow A = -1$.

» » » » » $x = 0 \Longrightarrow A + \Gamma = 1$, ἐξ ἧς: $\Gamma = 2$.

Ἐξισοῦντες τοὺς συντελεστὰς τοῦ x^2 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) εὑρίσκομεν:

$$0 = A + B \Longrightarrow B = 1.$$

2α. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}$ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων ὡς παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος.

Λύσις: Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος γράφεται:

$$(x^2+x)(x^2+1) \equiv x(x+1)(x^2+1)$$

καὶ συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{(x^2+x)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma x + \Delta}{x^2+1}. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β' μέλος:

$$1 \equiv (A+B+\Gamma)x^3 + (A+\Gamma+\Delta)x^2 + (A+B+\Delta)x + A. \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει τὸ κάτωθι σύστημα:

$$A+B+\Gamma = 0, \quad A+\Gamma+\Delta = 0, \quad A+B+\Delta = 0, \quad A = 1.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν: $A = 1$, $B = -\dfrac{1}{2}$, $\Gamma = -\dfrac{1}{2}$, $\Delta = -\dfrac{1}{2}$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς αὐτὰς λαμβάνομεν τὴν ἀνάλυσιν:

$$\frac{1}{(x^2+x)(x^2+1)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{x+1}{2(x^2+1)}.$$

3η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3}$ εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων.

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀριθμητὴς εἶναι πολυώνυμον μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ. Διαιροῦντες τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ τρέποντες τὸν παρονομαστὴν εἰς γινόμενον ἔχομεν, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον (2) τῆς § 97.

$$\frac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3} \equiv (x+2) + \frac{5x-7}{(x-3)(x+1)}.$$

Ἐργαζόμενοι ἤδη εἰς τὸ κλάσμα $\dfrac{5x-7}{(x-3)(x+1)}$, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν Ι, εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μέ:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}$$

Ἄρα ἔχομεν:

$$\frac{x^3-2x-13}{x^2-2x-3} \equiv (x+2) + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+1}.$$

4η. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\dfrac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}.$$

Λύσις: Ἔχομεν κατὰ τὰ προηγούμενα:

$$\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} \equiv \frac{A}{2\nu-1} + \frac{B}{2\nu+1}.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν:

$$1 \equiv A(2\nu+1) + B(2\nu-1)$$

ἤ $$1 \equiv 2(A+B)\nu + (A-B)$$

Ὁπότε :

$$A+B=0$$
$$A-B=1.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν : $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$.

Ὅθεν :

$$\frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{2\nu+1}\right). \tag{1}$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

Διὰ $\nu=1$: $\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

Διὰ $\nu=2$: $\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

Διὰ $\nu=3$: $\frac{1}{5\cdot 7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

. . . .

Διὰ $\nu=\nu$: $\frac{1}{(2\nu-1)(2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\nu-1}-\frac{1}{(2\nu+1)}\right)$.

Προσθέτοντες τὰς ὡς ἄνω ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν :

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2\nu-1)\cdot(2\nu+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\nu+1}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

213. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων τὰ κάτωθι ρητὰ κλάσματα :

1) $\frac{1}{(x^2-4)(x+1)}$, 2) $\frac{3x-1}{x^2-5x+6}$, 3) $\frac{8x^2-19x+2}{(x+2)(x-1)(x-4)}$, 4) $\frac{1}{(1+x^2)^2\cdot(1+x)}$

5) $\frac{x^5+2}{(x^2+x+1)^3}$, 6) $\frac{x^2-x+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$, 7) $\frac{3x^2+7x+2}{(x+1)(x^2+2x+5)}$, 8) $\frac{10x^2+32}{x^3\cdot(x-4)^2}$.

214. Ὁμοίως :

1) $\frac{3x+4}{x^2-9x+14}$, 2) $\frac{3x^2-5x-6}{x^3-6x^2+11x-6}$, 3) $\frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$, 4) $\frac{x^2}{(x^2-2x+5)^2}$,

5) $\frac{2x^3+7x^2-2x-2}{2x^2+x-6}$, 6) $\frac{5x^2-4}{x^4-5x^2+4}$, 7) $\frac{x^3}{x^3-3x+2}$, 8) $\frac{7x-10}{(3x-4)(x-1)^2}$.

215. Νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων τὸ κλάσμα : $\frac{3x^2+x+2}{x^3-1}$.

216. Ὁμοίως τό : $\frac{x+1}{x^4-5x^3+9x^2-7x+2}$.

217. Τὸ κλάσμα $\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}.$$

218. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu(\nu+2)}$ καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα : $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{\nu(\nu+2)}$.

219. Δείξατε ὅτι : $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\dots+\frac{1}{(3\nu-1)(3\nu+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu}{3\nu+2}$.

220. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων μὲ παρονομαστὰς ἀντιστοίχως $\nu(\nu+1)$ καὶ $(\nu+1)(\nu+2)$ καὶ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀναλύσεως ταύτης νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}.$$

221. Ἀναλύσατε τὸ κλάσμα $\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)}$ εἰς ἄθροισμα δύο κλασμάτων, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ ἔχῃ παρονομαστὴν τὸ $(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k-1)$ καὶ τὸ ἕτερον τὸ $(\nu+2)(\nu+3)\dots(\nu+k-1)(\nu+k)$.

IV. ΔΙΩΝΥΜΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 99. Ὁρισμός.— Καλοῦμεν **διώνυμον ἐξίσωσιν** μὲ ἕναν ἄγνωστον, κάθε ἀκεραίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$\boxed{Ax^k + Bx^\mu = 0} \tag{1}$$

ὅπου x ὁ ἄγνωστος, A καὶ B πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (συντελεσταί), μὴ ἐξαρτώμενοι ἐκ τοῦ x, μὲ $A\cdot B\neq 0$ καὶ k, μ ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοί, διάφοροι ἀλλήλων καὶ οὐχὶ ἀμφότεροι μηδέν.

§ 100. Ἐπίλυσις τῆς διωνύμου ἐξισώσεως (1).— Θὰ δείξωμεν εὐθὺς ἀμέσως ὅτι : *πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς διωνύμου ἐξισώσεως $y^\nu \pm 1 = 0$, ὅπου ν φυσικὸς ἀριθμός.*

Πράγματι· ἐὰν ὑποτεθῇ, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι $k>\mu\geqq 0$ ἡ (1) γίνεται :

$$x^\mu(Ax^{k-\mu}+B)=0$$

καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$x^\mu = 0 \quad (2) \qquad \text{καὶ} \qquad Ax^{k-\mu}+B=0. \quad (3)$$

Ἡ (2) ἔχει ρίζαν $x=0$ εἰς βαθμὸν πολλαπλότητος μ.

Ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν : $x^{k-\mu}=-\frac{B}{A}$, ἡ ὁποία, ἐὰν τεθῇ $\nu=k-\mu$, $\nu\in\mathbf{N}$, καὶ $-\frac{B}{A}=\alpha$, γίνεται :

$$\boxed{x^\nu = \alpha} \tag{4}$$

Τὸ πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς (4), πραγματικῶν καὶ μιγαδικῶν, εἶναι ν, αἱ νιοσταὶ ρίζαι τοῦ α, καὶ εὑρίσκονται, ὅπως θὰ ἴδωμεν εἰς μίαν τῶν ἑπομένων παραγράφων, διὰ τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

Ἐν τούτοις ὅμως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς (4) καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἔστω γ ἡ πρωτεύουσα νιοστὴ ρίζα τοῦ $|\alpha|$, ἤτοι $\gamma=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$, ἐξ οὗ: $\gamma^\nu=|\alpha|$.

Τότε : ἐὰν $\alpha > 0 \implies |\alpha| = \alpha$ καὶ ἡ (4) γράφεται : $x^\nu = \gamma^\nu$ ἢ $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\nu = 1$, ἐνῷ

ἐὰν $\alpha < 0 \implies |\alpha| = -\alpha$ καὶ ἡ (4) γράφεται : $x^\nu = -\gamma^\nu$ ἢ $\left(\frac{x}{\gamma}\right)^\nu = -1$.

Θέτομεν $\frac{x}{\gamma} = y$ καὶ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις γράφονται ἀντιστοίχως :

$$y^\nu - 1 = 0 \quad (5) \quad \text{καὶ} \quad y^\nu + 1 = 0 \quad (6)$$

Ἑπομένως ἡ ἐπίλυσις τῆς διωνύμου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς διωνύμου ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (5) ἢ (6).

Πρὸς ἐπίλυσιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις I: Ἐὰν $\nu = 2\rho + 1$, δηλ. ν περιττός, τότε :

Ἡ (5) γίνεται : $(y-1)(y^{2\rho} + y^{2\rho-1} + \cdots + y + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων : $y - 1 = 0$ καὶ $y^{2\rho} + y^{2\rho-1} + \cdots + y + 1 = 0$ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ τελευταία εἶναι ἀντίστροφος.

Ὁμοίως ἡ (6) γίνεται : $(y+1)(y^{2\rho} - y^{2\rho-1} + \cdots - y + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων : $y + 1 = 0$ καὶ $y^{2\rho} - y^{2\rho-1} + \cdots - y + 1 = 0$.

Περίπτωσις II: Ἐὰν $\nu = 2\rho$, δηλ. ν ἄρτιος, τότε :

Ἡ $y^\nu + 1 = 0$ γίνεται : $y^{2\rho} + 1 = 0$ ἢ $y^\rho + \frac{1}{y^\rho} = 0$, ἡ ὁποία διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ $y + \frac{1}{y} = z$ ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν ρ βαθμοῦ.

Τέλος διὰ $\nu = 2\rho$ ἡ (5) γίνεται : $y^{2\rho} - 1 = 0$ ἢ $(y^\rho - 1)(y^\rho + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων : $y^\rho - 1 = 0$ καὶ $y^\rho + 1 = 0$, ἑκατέρα τῶν ὁποίων ἀνάγεται εἰς μίαν τῶν προηγουμένων μορφῶν.

§ 101. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν διωνύμων ἐξισώσεων :

Παράδειγμα 1ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$2x^5 + 3x^2 = 0.$$

Λύσις: Αὕτη γράφεται $x^2(2x^3 + 3) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x^2 = 0$ καὶ $2x^3 + 3 = 0$.

Ἡ πρώτη ἔχει τὴν διπλῆν ρίζαν $x_1 = x_2 = 0$.

Ἡ δευτέρα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν : $x^3 + \frac{3}{2} = 0$. Θέτομεν $x = y \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ καὶ ἡ τελευταία γίνεται : $\frac{3}{2}y^3 + \frac{3}{2} = 0$ ἢ $y^3 + 1 = 0$ ἢ $(y+1)(y^2 - y + 1) = 0$.

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $y = -1$ καὶ $y^2 - y + 1 = 0$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει : $y = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν $x = y\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$, ἔχομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης :

$$x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad x_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \quad x_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Παράδειγμα 2ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$x^4 + 81 = 0. \tag{1}$$

Λύσις : Αὐτὴ γράφεται : $x^4 + 3^4 = 0$ ἢ $\left(\frac{x}{3}\right)^4 + 1 = 0.$ (2)

Θέτομεν : $\frac{x}{3} = y$ (3) καὶ ἡ (2) γίνεται $y^4 + 1 = 0.$

Αὐτὴ γράφεται : $(y^2 + 1)^2 - 2y^2 = 0$ ἢ $(y^2 + \sqrt{2}\,y + 1)(y^2 - \sqrt{2}\,y + 1) = 0$ καὶ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$y^2 + \sqrt{2}\,y + 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad y^2 - \sqrt{2}\,y + 1 = 0.$$

Αὗται λυόμεναι δίδουν ἀντιστοίχως : $y = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$ καὶ $y = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2}$.

Θέτοντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (3) ἔχομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης :

$$x_1 = \frac{3(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}, \quad x_2 = \frac{3(-\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2}, \quad x_3 = \frac{3(\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2}, \quad x_4 = \frac{3(\sqrt{2} - i\sqrt{2})}{2}.$$

Παράδειγμα 3ον : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος.

Λύσις : Ἔστω x ἡ κυβικὴ ρίζα τῆς μονάδος. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$x^3 = 1 \quad \text{ἢ} \quad x^3 - 1 = 0 \quad \text{ἢ} \quad (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν $x = 1$ καὶ $x^2 + x + 1 = 0$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει :

$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Ἑπομένως αἱ ζητούμεναι ρίζαι εἶναι :

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad \rho_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι :

$$\boldsymbol{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 0, \quad \rho_2\,\rho_3 = 1, \quad \rho_2 = \rho_3^2, \quad \rho_3 = \rho_2^2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

222. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1) $x^3 - 5 = 0$, 2) $x^4 + 2 = 0$, 3) $x^4 + 16 = 0$, 4) $3x^4 + 7 = 0$,
5) $8x^3 - 27 = 0$, 6) $8x^3 + 125 = 0$, 7) $32x^5 + 1 = 0$, 8) $x^{12} - 1 = 0$.

223. Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ μιγαδικαὶ κυβικαὶ ρίζαι τῆς μονάδος, δείξατε ὅτι :

1) $(1 + \rho_2)^4 = \rho_1$, 2) $(1 + \rho_1 - \rho_2)^3 - (1 - \rho_1 + \rho_2)^3 = 0$,
3) $(1 + 2\rho_1 + 3\rho_2)(1 + 3\rho_1 + 2\rho_2) = 3$, 4) $(1 - \rho_1 + \rho_2)(1 + \rho_1 - \rho_2) = 4$.

224. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῆς ἀρνητικῆς μονάδος.

225. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν i καὶ −i.

Τριγωνομετρικὴ μορφὴ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.
Τύπος τοῦ De Moivre.

§ 102. Ὅρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z \neq 0$. — Ἔστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$ μὲ $z \neq 0$ καὶ $x, y \in \mathbf{R}$· ἔχουν τότε ἔννοιαν ἐν $\mathbf{R}$ αἱ παραστάσεις:

$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ καὶ ὁ z δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\,\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \tag{1}$$

'Επειδή : $-1 \leqq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1, \quad -1 \leqq \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1$

καὶ
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1,$$

τὰ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ δύνανται νὰ εἶναι ἀντιστοίχως τὸ συνημίτονον καὶ τὸ ἡμίτονον καταλλήλου γωνίας φ, ἤτοι :

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{2}$$

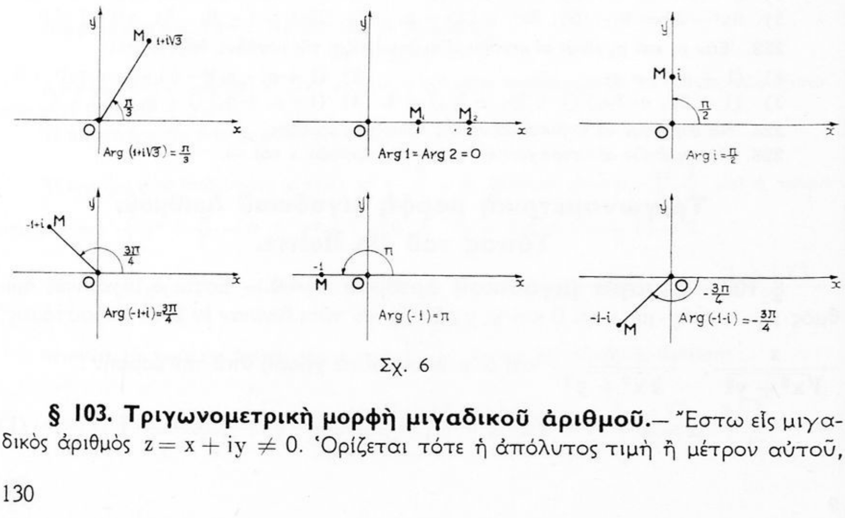
῾Ως γνωστόν, ὑπάρχουν ἄπειροι τὸ πλῆθος γωνίαι, αἱ ὁποῖαι πληροῦν τὰς σχέσεις (2), τὰ δὲ μέτρα αὐτῶν εἰς ἀκτίνια διαφέρουν κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 2π. 'Εκ τούτων ὑπάρχει ἀ κ ρ ι β ῶ ς μία, ἡ ὁποία πληροῖ τὰς (2) καὶ ἐπὶ πλέον τὴν συνθήκην : $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Ταύτην καλοῦμεν : **τὸ βασικὸν (πρωτεῦον) ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = x + iy \ (\neq 0)$ καὶ συμβολίζομεν μέ : Argz** (Argument = ὅρισμα).

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Διὰ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $z = 1 + i\sqrt{3}$ ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -\pi < \varphi \leqq \pi,$$

ἐξ οὗ : $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, ὥστε : $\operatorname{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$.

Γεωμετρικῶς τὸ ὅρισμα μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z παριστᾷ τὴν κυρτὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ὁ θετικὸς ἡμιάξων Ox μετὰ τῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος OM, τῆς παριστώσης τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν z, ὡς ἐμφαίνεται εἰς τὰς περιπτώσεις τῶν κάτωθι σχημάτων (βλ. Σχ. 6).



Σχ. 6

§ 103. Τριγωνομετρικὴ μορφὴ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.— Ἔστω εἷς μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy \neq 0$. ῾Ορίζεται τότε ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἢ μέτρον αὐτοῦ,

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$ καὶ τὸ ὅρισμά του $\mathrm{Arg}z = \varphi$ καὶ ἰσχύουν, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω :

$$\text{συν}\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho}, \qquad \text{ημ}\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho}. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$x = \rho\,\text{συν}\varphi, \qquad y = \rho\,\text{ημ}\varphi$$

καὶ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy$ λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\boxed{\mathbf{x + iy = \rho\ (\text{συν}\varphi + i\ \text{ημ}\varphi)}} \tag{2}$$

Ἡ μορφὴ εἰς τὸ 2ον μέλος τῆς (2) καλεῖται : **Τριγωνομετρικὴ μορφὴ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = x + iy$.**

Οὕτως εἶναι, π.χ., (βλ. καὶ σχῆμα 6, § 102) :

$$1 = 1\ (\text{συν}0 + i\ \text{ημ}0), \qquad -1 = 1\ (\text{συν}\pi + i\ \text{ημ}\pi),$$

$$i = 1\left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right), \qquad -i = 1\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right),$$

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right), \qquad -1 - i = \sqrt{2}\left(\text{συν}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right),$$

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{4}\right), \qquad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1\left(\text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{3}\right).$$

Κάθε λοιπὸν μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy \neq 0$ ἔχει ἀκριβῶς μίαν τριγωνομετρικὴν παράστασιν $z = \varrho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$, ὅπου ϱ εἶναι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ z (ἢ ἄλλως τὸ μέτρον τοῦ z) καὶ φ τὸ βασικὸν ὅρισμά του $(-\pi < \varphi \leqq \pi)$.

Ἀντιστρόφως : *Διὰ κάθε διατεταγμένον ζεῦγος (ϱ, φ) μὲ $\varrho > 0$ καὶ $-\pi < \varphi \leqq \pi$ ὑπάρχει ἀκριβῶς εἷς μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = x + iy \neq 0$ μὲ τριγωνομετρικὴν μορφήν : $\varrho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)$*· οὗτος εἶναι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς μὲ $x = \rho\,\text{συν}\varphi$ καὶ $y = \rho\,\text{ημ}\varphi$.

Κατόπιν τούτων ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \mathbf{x = \rho\,\text{συν}\varphi} \\ \mathbf{y = \rho\,\text{ημ}\varphi} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathbf{\rho = \sqrt{x^2+y^2}} \\ \mathbf{\text{συν}\varphi = \frac{x}{\rho},\ \text{ημ}\varphi = \frac{y}{\rho}} \end{array}\right.}$$

Παρατήρησις: Ἐπειδὴ $\text{συν}\varphi = \text{συν}\,(2k\pi + \varphi)$ καὶ $\text{ημ}\varphi = \text{ημ}(2k\pi + \varphi)$, ὅπου $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, ἡ παράστασις (2) γράφεται ὑπὸ τὴν γενικωτέραν μορφήν :

$$\boxed{\mathbf{z = x + iy = \rho\ [\text{συν}\,(\varphi + 2k\pi) + i\,\text{ημ}\,(\varphi + 2k\pi)]}} \tag{3}$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται τώρα τὸ κάτωθι :

§ 104. Θεώρημα.— Δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφὴν εἶναι ἴσοι τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἔχουν ἴσα μέτρα καὶ ὁρίσματα διαφέροντα κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν :

$$\rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1) = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2),$$

θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1\text{συν}\varphi_1 = \rho_2\text{συν}\varphi_2 \Longrightarrow \rho_1^2\text{συν}^2\varphi_1 = \rho_2^2\text{συν}^2\varphi_2 \\ \rho_1\,\text{ημ}\varphi_1 = \rho_2\,\text{ημ}\varphi_2 \Longrightarrow \rho_1^2\,\text{ημ}^2\varphi_1 = \rho_2^2\,\text{ημ}^2\varphi_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \rho_1^2(\text{συν}^2\varphi_1 + \text{ημ}^2\varphi_1) = \\ = \rho_2^2(\text{συν}^2\varphi_2 + \text{ημ}^2\varphi_2), \end{array}$$

ἐξ οὗ : $\rho_1^2 = \rho_2^2$ καὶ ἐπειδὴ $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, ἕπεται : $\boldsymbol{\rho_1 = \rho_2}$,

ὁπότε θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{r} \text{συν}\varphi_1 = \text{συν}\varphi_2 \\ \text{ημ}\varphi_1 = \text{ημ}\varphi_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boldsymbol{\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi}.$$

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν $\rho_1 = \rho_2$ καὶ $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$, θὰ ἔχωμεν :

$$\text{συν}\varphi_1 = \text{συν}\varphi_2, \quad \text{ημ}\varphi_1 = \text{ημ}\varphi_2$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1) = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2).$$

Χρῆσις τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἰς τὰς πράξεις.– Ἡ τριγωνομετρικὴ μορφὴ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν ἁπλούστερον τὸν πολλαπλασιασμόν, τὴν διαίρεσιν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀκριβέστερον ἰσχύουν τὰ κάτωθι θεωρήματα :

§ 105. Θεώρημα.– **Τὸ γινόμενον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι εἷς μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον μὲν τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν μιγάδων, ὅρισμα δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ορισμάτων αὐτῶν.** Ἤτοι, ἐάν :

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1) \\ z_2 = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\,[\,\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\text{ημ}(\varphi_1 + \varphi_2)\,].$$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς δοθείσας θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1\rho_2\,(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1)\,(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2) = \rho_1\rho_2[\,(\text{συν}\varphi_1\,\text{συν}\varphi_2 - \text{ημ}\varphi_1\,\text{ημ}\varphi_2) + \\ &+ i\,(\text{συν}\varphi_1\,\text{ημ}\varphi_2 + \text{ημ}\varphi_1\,\text{συν}\varphi_2)\,] = \rho_1\rho_2\,[\,\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\text{ημ}(\varphi_1 + \varphi_2)\,]. \end{aligned}$$

§ 106. Πόρισμα.– Ἐὰν $z_1 = \rho_1(\text{συν}\varphi_1 + i\,\text{ημ}\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\text{συν}\varphi_2 + i\,\text{ημ}\varphi_2)\,\ldots$

$$\ldots\, z_\nu = \rho_\nu\,(\text{συν}\varphi_\nu + i\,\text{ημ}\varphi_\nu\,),$$

τότε :

$$z_1 z_2 \ldots z_\nu = \rho_1\rho_2 \ldots \rho_\nu\,[\,\text{συν}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\nu\,) + i\,\text{ημ}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_\nu\,)\,] \quad (1)$$

Ἡ ἀπόδειξις νὰ δοθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον :

$$[\,2(\text{συν}\,30^\circ + i\,\text{ημ}\,30^\circ)\,]\cdot[\,\sqrt{2}\,(\text{συν}\,40^\circ + i\,\text{ημ}\,40^\circ)\,]\cdot[\,\sqrt{3}\,(\text{συν}\,50^\circ + i\,\text{ημ}\,50^\circ)\,].$$

Λύσις: Ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{aligned} &[\,2(\text{συν}\,30^\circ + i\,\text{ημ}\,30^\circ\,)\,]\cdot[\,\sqrt{2}\,(\text{συν}\,40^\circ + i\,\text{ημ}\,40^\circ)\,]\cdot[\,\sqrt{3}\,(\text{συν}\,50^\circ + i\,\text{ημ}\,50^\circ)\,] = \\ &= 2\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,[\,\text{συν}(30^\circ + 40^\circ + 50^\circ) + i\,\text{ημ}(30^\circ + 40^\circ + 50^\circ\,] = \\ &= 2\sqrt{6}\,(\text{συν}\,120^\circ + i\,\text{ημ}\,120^\circ) = 2\sqrt{6}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{6} + 3i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

§ 107. Θεώρημα.— **Ὁ ἀντίστροφος ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z ($\neq 0$) ἔχει μέτρον μὲν τὸ ἀντίστροφον τοῦ μέτρου του, ὅρισμα δὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ ὁρίσματός του.**

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι, ἂν $z = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\ \eta\mu\varphi)$ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$[\,\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\ \eta\mu\varphi)\,]^{-1} = \frac{1}{\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\ \eta\mu\varphi)} = \frac{1(\sigma\upsilon\nu\varphi - i\ \eta\mu\varphi)}{\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\ \eta\mu\varphi)\,(\sigma\upsilon\nu\varphi - i\,\eta\mu\varphi)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi - i\ \eta\mu\varphi}{\rho(\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi)} = \frac{1}{\rho}\,(\sigma\upsilon\nu\varphi - i\ \eta\mu\varphi) = \frac{1}{\rho}\,[\,\sigma\upsilon\nu\,(-\varphi) + i\ \eta\mu\,(-\varphi)\,].$$

Κατὰ ταῦτα :

$$[\,\rho(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\ \eta\mu\varphi)\,]^{-1} = \frac{1}{\rho}\,[\,\sigma\upsilon\nu(-\varphi) + i\ \eta\mu(-\varphi)\,].$$

Τῇ βοηθείᾳ τώρα τῶν θεωρημάτων τῶν § § 105, 107, ἕπεται ἀμέσως τὸ κάτωθι :

§ 108. Θεώρημα.— **Τὸ πηλίκον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον τὸ πηλίκον τῶν μέτρων των καὶ ὅρισμα τὴν διαφορὰν τῶν ὁρισμάτων των.** Ἤτοι, ἐάν :

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \rho_1(\sigma\upsilon\nu\varphi_1 + i\ \eta\mu\varphi_1) \\ z_2 &= \rho_2(\sigma\upsilon\nu\varphi_2 + i\ \eta\mu\varphi_2) \neq 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\,\sigma\upsilon\nu(\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \eta\mu(\varphi_1 - \varphi_2)\,].$$

Ὑ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔχομεν : $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ κ.τ.λ.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. **Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον :** $\dfrac{-2}{1+i}$.

Λ ύ σ ι ς : Ἔχομεν :

$$\frac{-2}{1+i} = \frac{-2+0i}{1+i} = \frac{2\,(\,\sigma\upsilon\nu\,180^\circ + i\ \eta\mu\,180^\circ\,)}{\sqrt{2}\,(\,\sigma\upsilon\nu\,45^\circ + i\ \eta\mu\,45^\circ\,)} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,[\,\sigma\upsilon\nu\,(180^\circ - 45^\circ) +$$

$$+ i\ \eta\mu\,(180^\circ - 45^\circ)] = \frac{2}{\sqrt{2}}\,(\sigma\upsilon\nu\,135^\circ + i\ \eta\mu\,135^\circ) = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + i.$$

§ 109. Θεώρημα (De Moivre). **Ἡ νιοστὴ δύναμις μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι μιγαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων μέτρον τὴν νιοστὴν δύναμιν τοῦ μέτρου τοῦ μιγάδος καὶ ὅρισμα τὸ ν—πλάσιον τοῦ ὁρίσματος αὐτοῦ.** Ἤτοι, ἐάν :

$$z = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi) \Longrightarrow z^\nu = \rho^\nu\,[\,\sigma\upsilon\nu\,(\nu\varphi) + i\,\eta\mu\,(\nu\varphi\,)\,]$$

ἢ $$\boxed{[\,\rho\,(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\ \eta\mu\varphi)\,]^\nu = \rho^\nu\,[\,\sigma\upsilon\nu(\nu\varphi) + i\ \eta\mu(\nu\varphi)\,]} \qquad (\tau)$$

Ὁ τύπος (τ) ὁ ὁποῖος δίδει τὴν νιοστὴν δύναμιν ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι γνωστὸς ὑπὸ τὸ ὄνομα : τ ύ π ο ς τ ο ῦ D e M o i v r e*)

* De Moivre (1667-1754). Γάλλος μαθηματικός.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς παραγράφου 106 θέσωμεν:

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_\nu = \rho\,(\text{συν}\varphi + i\ \text{ημ}\varphi),\ \text{τότε προκύπτει ὁ}\ (\tau).$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς I : Τὸ θεώρημα τοῦ De Moivre δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ὑ π ό δ ε ι ξ ι ς : Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = 2$. Ὑποθέσατε ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = k$ καὶ δείξατε ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = k + 1$.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς II : Ὁ τύπος τοῦ De Moivre ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος ἀρνητικός. Πράγματι, ἔχομεν:

$$[\rho\,(\text{συν}\varphi + i\ \text{ημ}\varphi)]^{-k} = \{[\rho\,(\text{συν}\varphi + i\ \text{ημ}\varphi)]^{-1}\}^k = \{\rho^{-1}\cdot[\text{συν}\,(-\varphi) + i\ \text{ημ}\,(-\varphi)]\}^k =$$
$$= \rho^{-k}\cdot[\text{συν}\,(-k\varphi) + i\ \text{ημ}\,(-k\varphi)],\quad k \in \mathbf{N}.$$

Ρίζαι μιγαδικῶν ἀριθμῶν

§ 110. Ὁρισμός.— *Δοθέντος ἑνὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ* $a \neq (0,0)$ *καλοῦμεν νιοστὴν ῥίζαν αὐτοῦ, (συμβολισμός:* $\sqrt[\nu]{a}$*), κάθε μιγαδικὸν ἀριθμὸν* z *τοιοῦτον, ὥστε:* $z^\nu = a$, ἤτοι:

$$\boxed{\sqrt[\nu]{a} = z \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} z^\nu = a} \qquad (1)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ πληροῦντες τὴν (1). Πρὸς τοῦτο θὰ ἀποδείξωμεν τὸ κάτωθι θεώρημα:

§ 111. Θεώρημα (ὑπάρξεως νιοστῆς ῥίζης μιγάδος).—

Ἐὰν $a = \rho\,(\text{συν}\theta + i\ \text{ημ}\theta)$, $a \neq 0$, εἶναι τυχὼν μιγαδικὸς ἀριθμός, ὑπάρχουν ἀ κ ρ ι β ῶ ς ν διάφοροι ἀλλήλων νιοσταὶ ῥίζαι αὐτοῦ, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις:

$$z^\nu = a \qquad (1)$$

ἔχει ἀκριβῶς ν διαφόρους ἀλλήλων ῥίζας, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἐκ τοῦ τύπου:

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right) + i\ \text{ημ}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right)\right],$$

ἔνθα $k = 0, 1, 2, \ldots, (\nu - 1)$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἔστω ὅτι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός:

$$z = r\,(\text{συν}\varphi + i\ \text{ημ}\varphi)$$

ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1). Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον τοῦ De Moivre, ἔχομεν:

$$r^\nu\,[\text{συν}(\nu\varphi) + i\ \text{ημ}(\nu\varphi)] = \rho\cdot(\text{συν}\theta + i\ \text{ημ}\theta). \qquad (2)$$

Ἡ (2) ὅμως ἀληθεύει τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν:

$$r^\nu = \rho \quad \text{καὶ} \quad \nu\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν:

$$r = \sqrt[\nu]{\rho}\,^{*)} \quad \text{καὶ} \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{\nu}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

*) $\sqrt[\nu]{\rho}$ εἶναι ἡ θετικὴ νιοστὴ ῥίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ρ.

Ὥστε :

$$z = \sqrt[\nu]{\rho} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{\theta + 2k\pi}{\nu} \right], \quad k \in \mathbf{Z}. \qquad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοί, ὁριζόμενοι ὑπὸ τῆς (3) διὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ k, οἵτινες ἐπαληθεύουν τὴν (1).

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ν μόνον ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι διάφοροι μεταξύ των, διὰ τὰς διαφόρους ἀκεραίας τιμὰς τοῦ k. Ἀκριβέστερον θὰ δείξωμεν ὅτι :

Ἐὰν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς k λάβῃ τὰς τιμὰς $0, 1, 2, \ldots, \lambda, \ldots, \mu, \ldots, \nu-1$ ἀπὸ τὴν (3) προκύπτουν ἀντιστοίχως ν ἀριθμοί : $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$ διάφοροι ἀλλήλων καὶ ὅτι ἂν k λάβῃ τιμὴν διάφορον τῶν $0, 1, 2, \ldots, \nu-1$, δηλ. ἂν $k \geqq \nu$ ἢ $k < 0$, τότε ὁ προκύπτων ἀπὸ τὴν (3) μιγαδικὸς ἀριθμὸς z θὰ συμπίπτῃ πρὸς ἕνα τῶν $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$.

Πράγματι, ἂς δώσωμεν κατ' ἀρχὰς εἰς τὸ k τὰς ν διαδοχικὰς τιμάς : $0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$, τότε ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν ν ἀριθμοὺς $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον $\sqrt[\nu]{\rho}$, ὁρίσματα δὲ ἀντιστοίχως τά :

$$\frac{\theta}{\nu}, \quad \frac{\theta + 2\pi}{\nu}, \quad \frac{\theta + 4\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\theta + 2\lambda\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\theta + 2\mu\pi}{\nu}, \ldots, \frac{\theta + 2(\nu-1)\pi}{\nu}.$$

Οἱ ν οὗτοι ἀριθμοὶ $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_\lambda, \ldots, z_\mu, \ldots, z_{\nu-1}$ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων, διότι, ἂν δύο τυχόντες ἐξ αὐτῶν ἦσαν ἴσοι, ἔστω οἱ z_λ καὶ z_μ, ἔνθα $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$, $\lambda \neq \mu$ καὶ $0 \leqq \lambda, \mu < \nu$, θὰ ἔπρεπε :

$$\frac{\theta + 2\lambda\pi}{\nu} - \frac{\theta + 2\mu\pi}{\nu} = 2k'\pi, \quad k' \in \mathbf{Z}.$$

Δηλαδή : $$\lambda - \mu = k'\nu, \quad k' \in \mathbf{Z}.$$

Εἶναι ὅμως $0 < |\lambda - \mu| < \nu$ καὶ ἑπομένως $0 < |k'\nu| < \nu$ ἢ $0 < |k'| < 1$ ἄτοπον, διότι δι' οὐδὲν $k' \in \mathbf{Z}$ εἶναι $0 < |k'| < 1$.

Ὥστε : $\quad z_\lambda \neq z_\mu \quad \forall \quad \lambda, \mu \in [0, \nu-1], \quad \lambda \neq \mu$ καὶ $\lambda, \mu \in \mathbf{Z}$.

Ἂς ἴδωμεν τώρα τί συμβαίνει, ἂν ὁ k λάβῃ ἀκεραίας τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $[0, \nu-1]$, δηλαδὴ τί συμβαίνει διὰ $k \geqq \nu$ ἢ $k < 0$.

Ἐφ' ὅσον $k \notin [0, \nu-1]$, ἐὰν καλέσωμεν λ τὸ πηλίκον καὶ k_1 τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $k : \nu$ θὰ εἶναι : $k = \lambda\nu + k_1$, ὅπου λ καὶ k_1 ἀκέραιοι μὲ $0 \leqq k_1 < \nu$, δηλ. $\quad k_1 \in [0, \nu-1]$.

Ἔχομεν δὲ τότε :

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \frac{\theta + 2(\lambda\nu + k_1)\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{\theta + 2(\lambda\nu + k_1)\pi}{\nu} \right] =$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} + 2\lambda\pi \right) + i\,\eta\mu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} + 2\lambda\pi \right) \right] =$$

$$= \sqrt[\nu]{\rho} \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} \right) + i\,\eta\mu \left(\frac{\theta + 2k_1\pi}{\nu} \right) \right] = z_{k_1}, \; k_1 = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1.$$

Ἤτοι, ἂν $k \neq 0, 1, 2, \dots, \nu-1$, δηλ. ἂν $k \geqq \nu$ ἢ $k < 0$, τότε ὁ προκύπτων ἐκ τῆς (3) μιγαδικὸς ἀριθμὸς z συμπίπτει πρὸς ἓν τῶν $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}$.

Ὥστε, πράγματι, ὑπάρχουν ἀκριβῶς ν διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν :

$$z^\nu = a = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta).$$

Οὗτοι δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{\rho} \cdot \left[\text{συν}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right)\right]} \qquad (4)$$

ὅπου $k = 0, 1, 2, \dots, \nu-1$.

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος προκύπτει ὅτι κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς $a \neq 0$ ἔχει ἀκριβῶς ν νιοστὰς ρίζας, δηλ. τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{a}$ ἔχει ν διαφόρους τιμὰς (τὰς (4)), εἶναι δηλαδή, ὡς ἄλλως λέγομεν, ν—σήμαντον.

Οὕτω, π.χ., $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt{25} = \pm 5$, $\sqrt{2} = \pm \sqrt{2}$, ὅπου τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἔχει τὴν γνωστὴν διὰ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ἔννοιαν.

Κατὰ ταῦτα :

Εἰς τὴν περιοχὴν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν (ἀκόμη καὶ ἂν ὁ ἀριθμὸς a εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ γράφεται οὕτω $a = \alpha + i0$ μὲ $\alpha \in \mathbf{R}$) εἰς τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ δίδομεν διττὴν σημασίαν, ἤτοι ἀκριβέστερον :

Μὲ $\sqrt{a}$, ὅπου $a \in \mathbf{C}$, ὁρίζονται καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $z^2 = a$· αὗται συμπίπτουν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $a = 0$.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς ἀνωτέρω σημασίας τοῦ συμβόλου $\sqrt{\ }$ ἐν $\mathbf{C}$, δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὰς λύσεις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως : $ax^2 + bx + c = 0$ μὲ $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{C}$, διὰ τοῦ τύπου :

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ἐφαρμογαί : 1η : Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt[3]{8i}$.

Λύσις : Ἔχομεν : $8i = 8\left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right)$ καὶ ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει :

$$\sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8\left(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt[3]{8}\left(\text{συν}\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) =$$

$$= 2\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2.$$

Διὰ $k = 0$: $2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

Διὰ $k = 1$: $2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

Διὰ $k = 2$: $2\left(\text{συν}\frac{3\pi}{2} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{2}\right) = 0 - 2i = -2i.$

2α : Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt[4]{2 + 2i\sqrt{3}}$.

Λύσις : Ἔχομεν : $2 + 2i\sqrt{3} = 4\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{3}\right)$ καὶ ὁ τύπος (4) τῆς § 111 διὰ $\nu = 4,\quad \rho = 4,\quad \theta = \dfrac{\pi}{3}$ δίδει :

$$z_k \equiv \sqrt[4]{4\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt[4]{4}\cdot\left[\text{συν}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left[\text{συν}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right].$$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου διὰ $k = 0, 1, 2, 3$ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{12}\right),\qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{7\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{12}\right),$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{13\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{13\pi}{12}\right),\qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{19\pi}{12} + i\,\text{ημ}\frac{19\pi}{12}\right).$$

§ 112. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν νιοστῶν ριζῶν μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ.

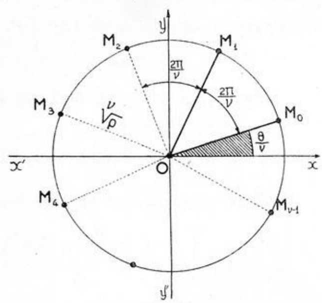
— Ἔστω ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $a = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$, μὲ νιοστὰς ρίζας τὰς κάτωθι :

$$z_0 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{\theta}{\nu}\right]$$

$$z_1 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right)\right]$$

$$z_2 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right)\right]$$

. . . .



Σχ. 7

$$z_{\nu-1} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν}\left(\frac{\theta}{\nu} + (\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\theta}{\nu} + (\nu-1)\frac{2\pi}{\nu}\right)\right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι πᾶσαι αἱ νιοσταὶ ρίζαι τοῦ a ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, ἤτοι $|z_k| = \sqrt[\nu]{\rho},\ k = 0, 1, \ldots, (\nu-1)$, καὶ ὁρίσματα τοιαῦτα, ὥστε ἀπό τινος ἀρχικῆς τιμῆς $\dfrac{\theta}{\nu}$ αὐξάνουν διαρκῶς κατὰ $\dfrac{2\pi}{\nu}$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, ἂν λάβωμεν τὰς εἰκόνας αὐτῶν $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_{\nu-1}$ εἰς τὸ μιγαδικὸν ἐπίπεδον, αὗται θὰ κεῖνται ἐπὶ κύκλου κέντρου O καὶ ἀκτῖνος $\sqrt[\nu]{\rho}$, θὰ εἶναι δὲ κορυφαὶ κανονικοῦ ν—πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

§ 113. Ἐφαρμογαί τῶν ἀνωτέρω εἰς τὴν λύσιν διωνύμων ἐξισώσεων.

Παράδειγμα 1ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x^\nu - 1 = 0$. (1)

Λύσις: Αὕτη γράφεται $x^\nu = 1$. Ἐπειδὴ $1 = 1\,(\text{συν}0 + i\,\text{ημ}0)$, ὁ τύπος (4) τῆς § 111 δίδει ἀμέσως διὰ $\nu = \nu$, $\rho = 1$, $\theta = 0$:

$$x_k = \text{συν}\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2k\pi}{\nu}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1. \tag{2}$$

Δι' ἑκάστην τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ k προκύπτει ἐκ τῆς (2) καὶ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (1). Ἄρα ἡ (1) ἔχει ν ρίζας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται **νιοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος.**

Διὰ $k = 0$ ἔχομεν ἐκ τῆς (2) τὴν ρίζαν $x_0 = 1$. Καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸν τύπον τοῦ De Moivre εἶναι:

$$\text{συν}\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2k\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}\right)^k, \qquad k \in \mathbf{N},$$

αἱ ν νιοσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος εἶναι αἱ δυνάμεις:

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{\nu-1},$$

ὅπου:

$$\omega = \text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}.$$

Σημ. Κάθε ρίζα x_k τῆς μονάδος, ἡ ὁποία ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ δίδῃ τὰς ἄλλας ρίζας ὡς δυνάμεις αὐτῆς, καλεῖται **ἀρχικὴ ν–οστὴ ρίζα τῆς μονάδος.** Π.χ. ἡ $x_1 = \text{συν}\dfrac{2\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\pi}{\nu} \equiv \omega$ εἶναι ἀρχικὴ ν–οστὴ ρίζα τῆς μονάδος, διότι:

$$x_1^0 = x_0, \quad x_1^1 = x_1, \quad x_1^2 = x_2, \quad x_1^3 = x_3, \quad \ldots, \quad x_1^{\nu-1} = x_{\nu-1}.$$

Παράδειγμα 2ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x^6 + 64\,i = 0$.

Λύσις: Ἔχομεν:

$$x^6 = -64\,i = 64\,(-i) = 64\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Ἄρα ἡ τυχοῦσα ἕκτη ρίζα θὰ εἶναι κατὰ τὸν τύπον (4) τῆς μορφῆς:

$$x_k = \sqrt[6]{64}\left[\text{συν}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Διὰ $k = 0$ εἶναι: $x_0 = 2\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{12} - i\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$

Διὰ $k = 1$ εἶναι: $x_1 = 2\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,(1 + i).$ κ.λ.π.

Παράδειγμα 3ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Λύσις. Θέτομεν πρῶτον τὸν $1 + i\sqrt{3}$ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν. Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 3} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \theta = \text{Arg}\,(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3},$$

ἄρα:

$$1 + i\sqrt{3} = \rho\,(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta) = 2\cdot\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right).$$

Συνεπῶς ὁ τύπος (4) τῆς § 111 διὰ $\nu = 3$, $\rho = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ δίδει:

$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\text{συν}\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right] = \sqrt[3]{2}\cdot\left[\text{συν}\frac{(6k+1)\pi}{9} + i\,\text{ημ}\frac{(6k+1)\pi}{9}\right].$$

'Εκ τοῦ τύπου τούτου διὰ $k = 0, 1, 2$ εὑρίσκομεν τὰς ζητουμένας ρίζας, ἤτοι :

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{9} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{9}\right), \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\text{συν}\frac{7\pi}{9} + i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\text{συν}\frac{13\pi}{9} + i\,\text{ημ}\frac{13\pi}{9}\right).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

226. Νὰ τεθοῦν ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφὴν οἱ κάτωθι μιγαδικοὶ ἀριθμοί :

α) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, β) $-3 + 4i$, γ) $\sqrt{3} - 3i$, δ) $2 + 2\sqrt{3}i$, ε) $3\sqrt{3} + 3i$,

στ) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, ζ) $-\sqrt{3} + i$, η) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$, θ) $1 + \text{συν}t + i\,\text{ημ}t$.

227. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὅρισμα τοῦ :

$$\left[\frac{1 + i + \sqrt{3}(1 - i)}{1 + i}\right]^3.$$

228. Δείξατε διὰ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὅτι : $2 \times (-3) = -6$ καὶ $(-2) \times (-3) = +6$.

229. 'Εὰν ν φυσικὸς ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(α). $(\text{συν}\theta - i\,\text{ημ}\theta)^\nu = \text{συν}(\nu\theta) - i\,\text{ημ}(\nu\theta)$

(β). $(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)^{-\nu} = \text{συν}(-\nu\theta) + i\,\text{ημ}(-\nu\theta)$.

230. 'Εὰν $z = \text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta$ καὶ $\nu \in \mathbf{N}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$z^\nu + z^{-\nu} = 2\,\text{συν}(\nu\theta)$$

$$z^\nu - z^{-\nu} = 2i\,\text{ημ}(\nu\theta).$$

231. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $(1 + i)^{12} = 64$, β) $(1 + i)^{-6} = (-2i)^{-3}$, γ) $(1 + i)^{10} = 32i$,

δ) $(\sqrt{3} + i)^{150} = -2^{150}$, ε) $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{13} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$, στ) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17} =$

$= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ζ) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{3k} = 1 \quad \forall\, k \in \mathbf{Z}$.

232. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ημ3θ συναρτήσει τοῦ ημθ καὶ τὸ συν3θ συναρτήσει τοῦ συνθ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ De Moivre.

233. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

α) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{24}$, β) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + i^{258}$, γ) $(\text{συν}\,12^0 + i\,\text{ημ}\,12^0)^{10} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

234. Νὰ ἐπιλυθοῦν (τριγωνομετρικῶς) αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α). $x^3 = 1 - i\sqrt{3}$, β) $x^6 \pm 64 = 0$, γ) $4x^7 + 1 = 0$, δ) $x^3 + 8i = 0$,

ε). $x^{12} + 1 = 0$, στ) $x^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$, ζ) $x^5 = -\sqrt{3} + i$, η) $3x^5 + 24x^2 = 0$.

235. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἕκται ρίζαι τοῦ : $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.

236. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ : $-8 + 8i\sqrt{3}$.

237. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὅρισμα τοῦ ἀριθμοῦ $(1 + \text{συν}\,\theta + i\,\text{ημ}\,\theta)^2$.

238. Δίδεται : $E = (1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8$. Δείξατε ὅτι : $E = -2^8$.

(**'Υπόδειξις :** Νὰ γίνῃ χρῆσις τῆς τριγωνομετρικῆς μορφῆς τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν).

239. Δείξατε ὅτι ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = συνθ + i\,ημθ$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $z = \frac{1 + iλ}{1 - iλ}$, ὅπου λ κατάλληλος πραγματικὸς ἀριθμός. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ.

240. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$α) \quad (1 + i)^ν + (1 - i)^ν = 2^{\frac{ν+2}{2}} \cdot συν \frac{νπ}{4}, \quad ν \in \mathbf{N}$$

$$β) \quad (1 + i)^ν - (1 - i)^ν = i\,2^{\frac{ν+2}{2}} \cdot ημ \frac{νπ}{4}, \quad ν \in \mathbf{N}.$$

241. Ἐὰν $ω_κ$, $k = 0,1,2,\ldots, ν-1$ εἶναι αἱ $ν$ – οσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$α) \quad 1 + ω_1 + ω_2 + \cdots + ω_{ν-1} = 0$$

$$β) \quad ω_1\, ω_2\, ω_3 \cdots ω_{ν-1} = 1.$$

242. Γράψατε τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $1 + i\sqrt{3}$ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφὴν καὶ δείξατε ὅτι :

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

243. Νὰ ἀναλυθῇ τὸ ρητὸν κλάσμα εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν κλασμάτων :

$$\frac{1}{x^4 + 4}$$

Ὑπόδειξις : Παρατηρήσατε ὅτι : $x^4 + 4 \equiv (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

244. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{(συν\,70^0 + i\,ημ\,70^0)^5}{(συν\,40^0 + i\,ημ\,40^0)^5} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i).$$

245. Νὰ ἐπιλυθῇ (τριγωνομετρικῶς) ἡ ἐξίσωσις $x^6 + 64 = 0$. Νὰ σημειωθοῦν τὰ ὀρίσματα τῶν 6 ριζῶν. Πῶς παριστάνονται γεωμετρικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης ;

246. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ λ, μ, ἵνα ὁ μιγαδικὸς ἀριθμός : $\sqrt{2}\,(συν\,45^0 + i\,ημ\,45^0)$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως : $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + λx + μ = 0$.

247. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου :

$$f(x) \equiv \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^ν - 1.$$

248. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις :

$$(1 + z)^{2ν} + (1 - z)^{2ν} = 0.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$z = i\,εφ \frac{2k + 1}{4ν} π,$$

ὅπου τὸ k λαμβάνει τὰς τιμάς : 0, 1, 2, . . . , 2ν–1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 114. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι.– α΄). Διαστήματα. Ἔστωσαν α καὶ β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ *) μὲ $\alpha < \beta$· τότε καλοῦμεν :

1ον. *«Ἀνοικτὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β»* καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ (α, β) τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ **R** :

$$(\alpha, \beta) \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ \alpha < x < \beta \}.$$

Τὰ σημεῖα (δηλαδὴ οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ) α καὶ β καλοῦνται καὶ *«ἄκρα τοῦ διαστήματος»* (α, β), τὸ δὲ σημεῖον $\frac{\alpha+\beta}{2}$ *«μέσον»* ἢ ἄλλως *«κέντρον»* τοῦ διαστήματος. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα (α, β) δὲν συμπεριλαμβάνονται τὰ ἄκρα α καὶ β τοῦ διαστήματος, ἤτοι $\alpha \notin (\alpha,\beta)$ καὶ $\beta \notin (\alpha,\beta)$.

Παράδειγμα : $(3, 8) \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ 3 < x < 8 \}$

2ον. *«Κλειστὸν διάστημα μὲ ἄκρα α, β»* καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ [α, β] τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ **R** :

$$[\alpha, \beta] \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ \alpha \leqq x \leqq \beta \}.$$

Εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνονται καὶ τὰ δύο ἄκρα α καὶ β, ἤτοι $\alpha, \beta \in [\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα : $[-1, +1] \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ -1 \leqq x \leqq +1 \}$.

3ον. *«Κλειστὸν ἀριστερά, ἀνοικτὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα α, β»* καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ [α, β) τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ **R** :

$$[\alpha, \beta) \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ \alpha \leqq x < \beta \}.$$

Εἰς τὸ [α,β) συμπεριλαμβάνεται **μόνον** τὸ ἀριστερὸν ἄκρον α, οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ β, ἤτοι $\alpha \in [\alpha,\beta)$, ἀλλὰ $\beta \notin [\alpha,\beta)$.

---

* Ὡς γνωστὸν τὸ σύνολον τῶν ρητῶν (συμμέτρων) καὶ ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) καλεῖται σύνολον τῶν **πραγματικῶν ἀριθμῶν.** Τὸ σύνολον τοῦτο καλοῦμεν καὶ *«εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν»* (ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐκφρασθῶμεν μὲ τὴν γλῶσσαν τῆς Γεωμετρίας)· οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ θεωροῦνται τότε ὡς *σημεῖα τῆς εὐθείας*. Διὰ τὰ σημεῖα χρησιμοποιοῦμεν τὰ αὐτὰ σύμβολα μὲ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἡ ταυτοποίησις αὕτη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας βασίζεται εἰς τὸ ἀξίωμα τῆς ἀντιστοιχίας τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας. Κατὰ τὸ ἀξίωμα τοῦτο μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων ἑνὸς ἄξονος ὑφίσταται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, δηλαδὴ εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ ἀντιστρόφως.

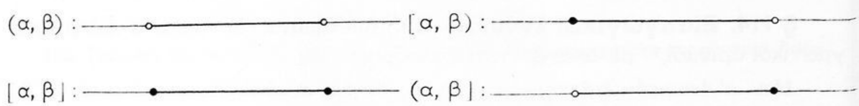
4ον. *«Ἀνοικτὸν ἀριστερά, κλειστὸν δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα α, β»* καὶ συμβολίζομεν τοῦτο μὲ $(\alpha, \beta]$ τὸ κάτωθι ὑποσύνολον τοῦ $\mathbf{R}$:

$$(\alpha, \beta] \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ \alpha < x \leqq \beta \}.$$

Εἰς τοῦτο συμπεριλαμβάνεται **μόνον** τὸ δεξιὸν ἄκρον β, οὐχὶ ὅμως καὶ τὸ ἀριστερόν, ἤτοι $\alpha \notin (\alpha, \beta]$, ἀλλὰ $\beta \in (\alpha, \beta]$.

Παράδειγμα : $\quad (0, 1] \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ 0 < x \leqq 1 \}$.

Ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τὰ ὡς ἄνω διαστήματα παρίστανται μὲ εὐθύγραμμα τμήματα ὡς κάτωθι :



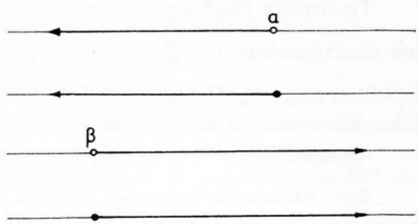
Κατ' ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων, ἔχομεν καὶ τὰ ἀκόλουθα διαστήματα :

$(-\infty, \alpha) \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ x < \alpha \}$:

$(-\infty, \alpha] \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ x \leqq \alpha \}$:

$(\beta, +\infty) \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ \beta < x \}$:

$[\beta, +\infty) \equiv \{ x \in \mathbf{R} : \ \beta \leqq x \}$:



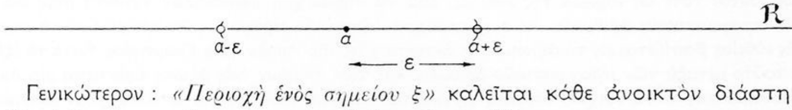
τὰ ὁποῖα καλοῦνται *«ἀπέραντα»* (ἀριστερά, ὡς τὰ δύο πρῶτα, ἀντιστοίχως δεξιά, ὡς τὰ δύο τελευταῖα), ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰ προηγούμενα τὰ ὁποῖα καλοῦνται *«πεπερασμένα»*.

Τὰ διαστήματα ταῦτα παρίστανται ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν δεξιὰ σχημάτων.

Ὑπάρχουν ἐν ὅλῳ *ἐννέα* τύποι διαστημάτων. Ἐνίοτε θὰ γράφωμεν : $\mathbf{R} \equiv (-\infty, +\infty)$. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ συμβολίζωμεν συχνὰ τὰ διαστήματα ἐν $\mathbf{R}$ μὲ τὸ γράμμα Δ.

Σημ. Τὰ σύμβολα $-\infty$ *(πλὴν ἄπειρον)* καὶ $+\infty$ *(σὺν ἄπειρον)* **δὲν παριστάνουν πραγματικοὺς ἀριθμούς.** Ταῦτα χρησιμοποιοῦνται ἀνωτέρω μόνον πρὸς εὐκολίαν εἰς τὸν συμβολισμόν.

β'). Περιοχὴ σημείου ἐν R. Ἔστω ἓν σημεῖον $\alpha \in \mathbf{R}$ καὶ ε εἷς θετικὸς ἀριθμὸς $(\varepsilon > 0)$. Κάθε ἀνοικτὸν διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ καλεῖται *«περιοχὴ τοῦ σημείου α μὲ κέντρον τὸ α καὶ ἀκτῖνα ε»*.



Γενικώτερον : *«Περιοχὴ ἑνὸς σημείου ξ»* καλεῖται κάθε ἀνοικτὸν διάστημα (α,β) τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον ξ, ἤτοι $\xi \in (\alpha, \beta)$.

Οὕτω, λ.χ., τὸ διάστημα $(1,2)$ εἶναι περιοχὴ τοῦ $\sqrt{2}$, διότι $\sqrt{2} \in (1,2)$.

γ΄). Ἀπόστασις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον. Ἔστωσαν $x \in \mathbf{R}$ καὶ $y \in \mathbf{R}$. Καλοῦμεν *«ἀπόστασιν τοῦ x ἀπὸ τοῦ y»* τὸν μὴ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν $|x - y|$, συμβολίζομεν δὲ ταύτην μὲ $d(x, y)$. Ὥστε εἶναι :

$$\mathbf{d(x, y)} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} |x - y| \quad \forall\; x \in \mathbf{R} \quad \text{καὶ} \quad \forall\; y \in \mathbf{R}.$$

Αὕτη ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

$$d_1 : \quad \mathbf{d}(x, y) \geqq 0 \quad \text{καὶ} \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$$

$$d_2 : \quad d(x, y) = d(y, x) \qquad \textit{(συμμετρικὴ ἰδιότης)}$$

$$d_3 : \quad d(x, y) \leqq d(x, z) + d(z, y) \qquad \textit{(τριγωνικὴ ἰδιότης).}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Αἱ d_1 καὶ d_2 εἶναι προφανεῖς, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς $d(x, y)$ καὶ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀπολύτων τιμῶν. Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν d_3. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα (τοῦ ἀθροίσματος) τῶν ἀπολύτων τιμῶν ἔχομεν :

$$d(x, y) = |x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leqq |x-z| + |z-y| = d(x, z) + d(z, y).$$

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ τὴν ἀπόστασιν d, ὡς αὕτη ὡρίσθη ἀνωτέρω, λέγομεν ὅτι εἶναι εἷς **«μετρικὸς χῶρος»** καὶ γράφομεν $(\mathbf{R},\mathbf{d})$. Γενικῶς θὰ λέγωμεν ὅτι : *ἓν σύνολον E εἶναι εἷς μετρικὸς χῶρος τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν εἰς κάθε ζεῦγος (x, y) στοιχείων αὐτοῦ ἀντιστοιχῇ εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς $d(x,y)$, ὁ ὁποῖος καλεῖται* **ἀπόστασις** *τῶν $x \in E$, $y \in E$* καὶ ὅστις πληροῖ τὰς ἀνωτέρω τρεῖς ἰδιότητας d_1, d_2, d_3.

Ἄ σ κ η σ ι ς. Ἐὰν $d(x,y)$ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τοῦ $x \in \mathbf{R}$ ἀπὸ τοῦ $y \in \mathbf{R}$ δείξατε ὅτι καὶ ἡ $d^*(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ ἔχει τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας d_1, d_2, d_3, ἤτοι, ὅτι καὶ ἡ $\mathbf{d}^*(x, y)$ εἶναι ἐπίσης μία ἀπόστασις ἐπὶ τοῦ $\mathbf{R}$.

δ΄). Μῆκος διαστήματος. Ἔστω Δ ἓν διάστημα (ἐν $\mathbf{R}$) μὲ ἄκρα α, β· *«ἡ ἀπόστασις $|\alpha - \beta|$ καλεῖται τὸ μῆκος τοῦ διαστήματος Δ»* καὶ συμβολίζεται μὲ $\mu(\Delta)$. Ὥστε εἶναι :

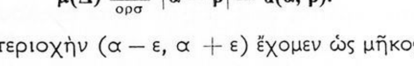
$$\boldsymbol{\mu(\Delta)} \underset{\text{ορσ}}{=\!=} |\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| = \mathbf{d}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}).$$

Οὕτω διὰ τὴν περιοχὴν $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ ἔχομεν ὡς μῆκος της τὸ 2ε.

Μία χρήσιμος παρατήρησις εἶναι ἡ ἑξῆς : Ἔστω $x_0 \in \mathbf{R}$ καὶ $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ἡ περιοχὴ τοῦ x_0 μὲ ἀκτῖνα ε. Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \iff |x - x_0| < \varepsilon}$$

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν παρατηρήσατε καὶ τὴν κάτωθι εἰκόνα :



§ 115. Ὁρισμοί.— Γνωρίζομεν ἤδη, ἀπὸ τὰ μαθήματα τῶν προηγουμένων τάξεων, τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως· ἂς ἐπαναλάβωμεν ἐνταῦθα τὸν ὁρισμόν της:

Καλοῦμεν συνάρτησιν μὲ πεδίον ὁρισμοῦ ἕνα σύνολον A καὶ πεδίον τιμῶν ἕνα σύνολον B (τὰ A, B ὑποτίθενται $\neq \varnothing$) κάθε μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f τοῦ A εἰς τὸ B. Γράφομεν δέ:

$$f: A \longrightarrow B \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad A \ni x \longrightarrow f(x) \in B.$$

Ἔστω τώρα μία συνάρτησις α μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς ἐν B, αὕτη θὰ συμβολισθῇ οὕτω:

$$\alpha: \mathbf{N} \longrightarrow B \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad \mathbf{N} \ni \nu \longrightarrow \alpha(\nu) \in B.$$

Κάθε συνάρτησις ὡς ἡ ἀνωτέρω α καλεῖται: **«μία ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου B»**. Εἰδικῶς, ἂν $B \subseteq \mathbf{R}$ ἡ ἀκολουθία α καλεῖται: **«ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν»**.

Ὥστε: *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κάθε συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τιμὰς εἰς τὸ σύνολον **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν*, δηλαδὴ *μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ **N** εἰς τὸ **R***.

Τὴν τιμὴν $\alpha(\nu)$ μιᾶς ἀκολουθίας α συνηθίζομεν νὰ τὴν συμβολίζωμεν μὲ α_ν, γράφοντες δηλαδὴ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν ν ὡς κάτω δείκτην τοῦ α. Αἱ τιμαὶ μιᾶς ἀκολουθίας α καλοῦνται *«ὅροι»* αὐτῆς καὶ δυνάμεθα νὰ καταχωρίσωμεν αὐτοὺς εἰς ἕνα πίνακα ὡς κάτωθι:

1	2	3	. . .	ν	. . .
α_1	α_2	α_3	. . .	α_ν	. . .

εἰς τὸν ὁποῖον παραλείπεται συνήθως ἡ πρώτη γραμμὴ καὶ γράφονται μόνον οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας, ἤτοι:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots \qquad (1)$$

Ὁ ὅρος α_1 καλεῖται πρῶτος ὅρος τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας, ὁ α_2 δεύτερος ὅρος καὶ γενικῶς ὁ α_ν *νιοστὸς* ἢ *γενικὸς* ὅρος τῆς ἀκολουθίας (1).

Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ χρησιμοποιῶμεν πολλάκις τὴν ἀκόλουθον ἔκφρασιν:

«ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$»

Δι' αὐτῆς ἐννοοῦμεν, ὅτι θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν $\alpha: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}$ ὁριζομένην οὕτω:

$$\alpha(\nu) = \alpha_\nu \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Συντομώτερον μία ἀκολουθία παρίσταται καὶ οὕτω:

$$\alpha_\nu,\quad \nu = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{ἢ καὶ ἄλλως} \quad \alpha_\nu,\quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Θὰ δώσωμεν τώρα μερικὰ παραδείγματα ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

1. Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι ἡ ἀκολουθία:

$$1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ν, ἤτοι $\alpha_\nu = \nu$.

2. Ἡ ἀκολουθία:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{\nu}$, ἤτοι $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$.

3. Ἡ ἀκολουθία: $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

4. Ἡ ἀκολουθία: $c, c, c, \ldots, c, \ldots$ (ἔνθα $c \in \mathbf{R}$).

Ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος 4 καλεῖται: *«ἡ σταθερὰ ἀκολουθία $\alpha_\nu = c$, $\nu = 1, 2, \ldots$»*. Ὅθεν ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος 3, εἶναι ἡ σταθερὰ ἀκολουθία $\alpha_\nu = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$

5. Ἡ ἀκολουθία: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}, \ldots$

6. Ἐὰν ἀπεικονίσωμεν τοὺς περιττοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς εἰς τὸν ἀριθμὸν 0 καὶ τοὺς ἀρτίους φυσικοὺς εἰς τὸν ἀριθμὸν 1, θὰ προκύψῃ ἡ ἀκολουθία:

$$0, 1, 0, 1, \ldots, 0, 1, \ldots$$

Συνήθως ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathbf{N} \ni \nu \longrightarrow \alpha_\nu = \begin{cases} 1, & \text{ἂν } \nu \text{ ἄρτιος} \\ 0, & \text{ἂν } \nu \text{ περιττός.} \end{cases}$$

7. Ἡ ἀκολουθία: $\alpha_\nu = \frac{2\nu}{\nu+3}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, γράφεται ἐκτενῶς:

$$\frac{2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{6}{6}, \frac{8}{7}, \ldots, \frac{2\nu}{\nu+3}, \ldots$$

Παρατήρησις. Ἐνίοτε ὁ δείκτης ν τοῦ α_ν λαμβάνεται οὕτως, ὥστε νὰ διατρέχῃ τὰς τιμάς: $0, 1, 2, 3, \ldots$, ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu, \ldots$$

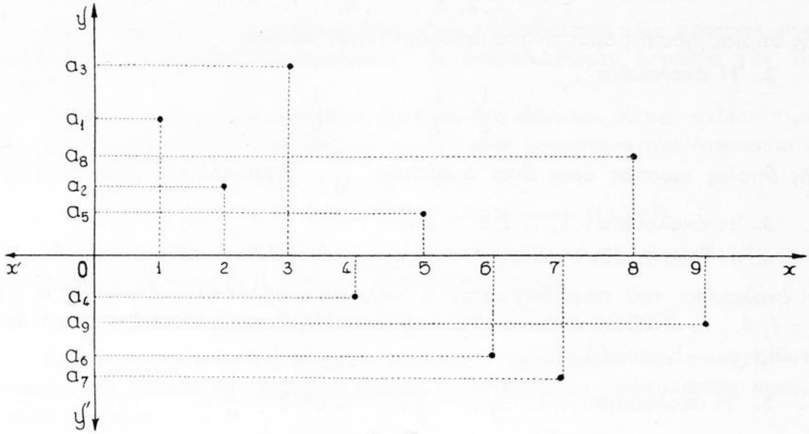
ὁ δὲ ὅρος $\alpha_{\nu-1}$ εἶναι τότε ὁ *«νιοστὸς ὅρος»* τῆς ἀκολουθίας.

§ 116. Γραφικὴ παράστασις ἀκολουθίας. — Ἔστω α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ διάγραμμα αὐτῆς εἶναι τότε τὸ σύνολον:

$$\{(1, \alpha_1), (2, \alpha_2), \ldots, (\nu, \alpha_\nu), \ldots\} \equiv \Sigma$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $\mathbf{N} \times \mathbf{R}$ καὶ οὐχὶ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Σ εἶναι (προφανῶς) διάφορα μεταξύ των καὶ παρίστανται διὰ «μεμονωμένων» σημείων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν μεμονωμένων σημείων εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$

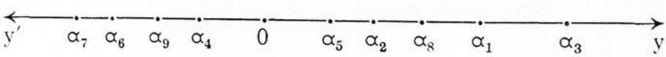
Εἰς τὸ κάτωθι σχῆμα παρίστανται ἐννέα ὅροι μιᾶς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$



Σχ. 8

Ἐὰν θεωρήσωμεν μόνον τὰς τεταγμένας τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, δι' ὧν παρίσταται γραφικῶς ἡ ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$, ἔχομεν τὴν συνήθη ἐπὶ ἑνὸς μόνου ἄξονος παράστασιν τῆς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$

Οὕτως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος ἔχομεν :



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

249. Γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας : $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu + 1}{\nu^2}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

250. Γράψατε τοὺς ὀκτὼ πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας : $\beta_\nu = \dfrac{1}{\nu + 2}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

251. Γράψατε τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν : 2, 4, 6, 8, . . . ὑπὸ τὴν μορφὴν α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$

252. Γράψατε τὴν ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : 1, 3, 5, 7, . . . ὑπὸ τὴν μορφὴν β_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$

253. Γράψατε τοὺς ἑπτὰ πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu} + \frac{\nu}{2\nu + 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

254. Ὁμοίως γράψατε τοὺς ἐννέα πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{\nu+1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

255. Ὁμοίως γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας :

$$\alpha_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{2\nu - 1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

§ 117. Φραγμένη ἀκολουθία.—α'). Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

ἐκτενῶς ἡ : $\quad 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{\nu}, \ldots$

Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει :

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqq 1 \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

ἤτοι, ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ταύτης εἶναι μικρότεροι ἢ ἴσοι τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ 1· λέγομεν δὲ ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη εἶναι **«φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω»** ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 1.

Γενικῶς : *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *καλεῖται* **φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ἐν R** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς* s *τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :*

$$\alpha_\nu \leqq s \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ὁ ἀριθμὸς s καλεῖται *«ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$*»*. Οὕτως, ὁ ἀριθμὸς 1 εἶναι ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Προφανῶς, ἂν s εἶναι ἓν ἄνω φράγμα μιᾶς ἀκολουθίας, τότε καὶ κάθε ἄλλος πραγματικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ s εἶναι ἐπίσης ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας.

β'). Ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὰς ἀκολουθίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι φραγμέναι πρὸς τὰ ἄνω ἐν **R**, ὑπάρχουν ἀκολουθίαι, τῶν ὁποίων ὅλοι οἱ ὅροι εἶναι μεγαλύτεροι ἢ ἴσοι ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ· λ.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = 2\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἐκτενῶς : $\quad 2, 4, 6, 8, \ldots, 2\nu, \ldots$

Διὰ τὴν ἀκολουθίαν ταύτην παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει :

$$2 \leqq \alpha_\nu = 2\nu \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

λέγομεν δὲ ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη εἶναι **«φραγμένη πρὸς τὰ κάτω»** ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν 2. Γενικῶς : *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1, 2 \ldots$ *καλεῖται* **φραγμένη πρὸς τὰ κάτω ἐν R** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς σ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:*

$$\sigma \leqq \alpha_\nu \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ὁ ἀριθμὸς σ καλεῖται *«κάτω φράγμα τῆς ἀκολουθίας* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$*»*.

γ'). Τέλος ὑπάρχουν ἀκολουθίαι, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω φραγμέναι ἐν **R**· λ.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, διότι ἰσχύει :

$$0 \leqq \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqq 1 \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}$$

ἤτοι, ὅλοι οἱ ὅροι της ἀνήκουν εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα [0, 1], λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη εἶναι **«φραγμένη»**.

Γενικῶς : *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ *καλεῖται* **φραγμένη ἐν R** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία αὕτη εἶναι καὶ πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω φραγμένη ἐν* **R**, ἤτοι, ἂν s εἶναι ἓν ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ σ τὸ ἀντίστοιχον κάτω φράγμα, τότε ἰσχύει :

$$\sigma \leqq \alpha_\nu \leqq s \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Ἂν τώρα φ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος τῶν $|\sigma|$ καὶ $|s|$, τότε ἡ (1) συνεπάγεται, ἀφ' ἑνὸς μέν :

$$\alpha_\nu \leqq s \leqq |s| \leqq \varphi \qquad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}$$

ἀφ' ἑτέρου δέ :

$$\alpha_\nu \geqq \sigma \geqq -|\sigma| \geqq -\varphi \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἄρα ἰσχύει τότε :

$$-\varphi \leqq \alpha_\nu \leqq \varphi \qquad \forall \quad \nu \in \mathbf{N} \tag{2}$$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_\nu| \leqq \varphi \qquad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ ἡ (3), τότε προφανῶς ἡ ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, διότι ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (2). Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι :

Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν , $\nu = 1, 2 \ldots$ *εἶναι φραγμένη ἐν* **R** *(ἢ καὶ ἄλλως «ἀπολύτως φραγμένη ἐν* **R**») *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ πραγματικὸς ἀριθμὸς φ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :*

$$|\alpha_\nu| \leqq \varphi \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ὁ ἀριθμὸς φ καλεῖται *φράγμα*, ἀκριβέστερον *«ἀπόλυτον φράγμα»* τῆς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ ἐν **R**.

Φραγμένη ἀκολουθία εἶναι π.χ. ἡ $\dfrac{2\eta\mu\nu}{\nu^3}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, διότι ἰσχύει :

$$\left|\frac{2\,\eta\mu\nu}{\nu^3}\right| = \frac{2\,|\eta\mu\nu|}{\nu^3} \leqq \frac{2}{\nu^3} \leqq 2 \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_\nu = \frac{4\,\sigma\upsilon\nu\,3\nu}{5\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \qquad \text{διότι :}$$

$$|\alpha_\nu| = \left|\frac{4\,\sigma\upsilon\nu\,3\nu}{5\nu}\right| = \frac{4\,|\sigma\upsilon\nu 3\nu|}{5\nu} \leqq \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\nu} \leqq \frac{4}{5} \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \ldots$$

Ἀντιθέτως αἱ ἀκολουθίαι :

$$1, \; 4, \; 9, \; 16, \ldots, \nu^2, \ldots$$

καὶ

$$10, \; 10^2, \; 10^3, \ldots, 10^\nu, \ldots$$

δὲν εἶναι φραγμέναι (διατί ;).

§ 118. Ἔστω μία ἀκολουθία πραγμ. ἀριθμῶν α_ν , $\nu = 1,2,\ldots$, π.χ. ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ μία συνθήκη π.χ. ἡ : $\alpha_\nu < \dfrac{1}{998}$· παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $\nu = 1, 2, 3, \ldots, 998$ ἤτοι, ἂν $\nu \in \{1, 2, 3, \ldots, 998\}$, ἡ συνθήκη $\alpha_\nu < \dfrac{1}{998}$

δὲν πληροῦται, ἀντιθέτως ἂν $\nu = 999, 1000, 1001, \ldots$, ἤτοι ἂν καλέσωμεν $\nu_0 \equiv 999$, τότε διὰ κάθε δείκτην $\nu \geqq \nu_0 = 999$ ἡ συνθήκη : $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} < \frac{1}{998}$ πληροῦται παρὰ τοῦ ὅρου α_ν, λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι : «*τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *πληροῦν τὴν ὡς ἄνω συνθήκην*».

Γενικῶς : ἂν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, θὰ λέγωμεν : «*τελικῶς ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *πληροῦν μίαν συνθήκην ἢ ἰδιότητα*» *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ συνθήκη ἢ ἡ ἰδιότης πληροῦται παρὰ τοῦ ὅρου* α_ν *διὰ κάθε δείκτην* $\nu \in \mathbf{N}$ *ἐξαιρέσει ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου δεικτῶν*, δηλαδὴ *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ εἷς δείκτης* $\nu_0 \in \mathbf{N}$ *τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε δείκτην* $\nu \geqq \nu_0$, *ὁ ὅρος* α_ν *πληροῖ τὴν συνθήκην ἢ ἰδιότητα ταύτην.*

§ 119. Ἔστωσαν δύο ἀκολουθίαι : α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἐκτενῶς αἱ :

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \ldots, \quad \alpha_\nu, \ldots$$
$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \beta_3, \ldots, \quad \beta_\nu, \ldots$$

Μεταξὺ αὐτῶν ὁρίζονται τὰ κάτωθι :

Ἰσότης. Αἱ α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλοῦνται ἴσαι τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ : $\alpha_\nu = \beta_\nu$ διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἄθροισμα τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία $(\alpha_\nu + \beta_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδὴ ἡ : $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3, \ldots, \alpha_\nu + \beta_\nu, \ldots$

Διαφορὰ τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μεῖον β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu = 1, 2 \ldots$, δηλαδὴ ἡ : $\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_\nu - \beta_\nu, \ldots$

Γινόμενον ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ξ ἐπὶ τὴν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία : $\xi\alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἐκτενῶς ἡ ἀκολουθία :

$$\xi\alpha_1, \xi\alpha_2, \ldots, \xi\alpha_\nu, \ldots$$

Γινόμενον τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἐπὶ τὴν β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu \beta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδὴ ἡ : $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_\nu\beta_\nu, \ldots$

Πηλίκον τῆς α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ διὰ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $\beta_\nu \neq 0$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$, καλεῖται ἡ ἀκολουθία, ἡ ὁποία ἔχει ὅρους τὰ πηλίκα τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῶν ἐν λόγῳ ἀκολουθιῶν, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἐκτενῶς ἡ :

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}, \quad \ldots$$

Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $\alpha_\nu \geqq 0$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$, καλεῖται ἡ ἀκολουθία : $\sqrt{\alpha_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἐκτενῶς ἡ :

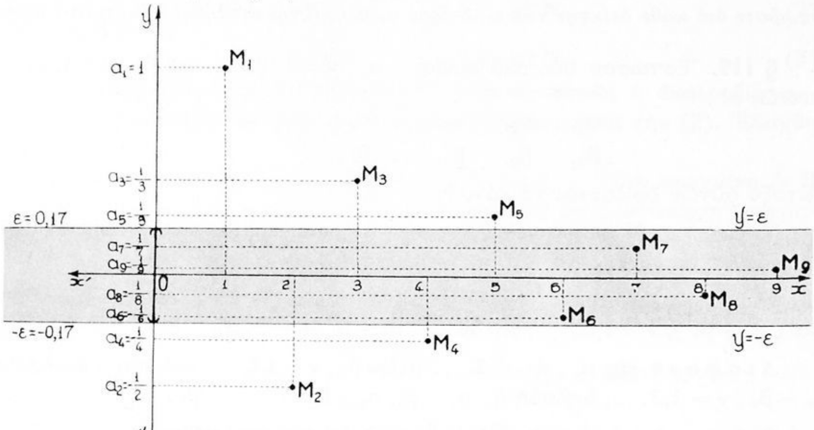
$$\sqrt{\alpha_1}, \quad \sqrt{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \sqrt{\alpha_\nu}, \quad \ldots$$

§ 120. Ὁρισμός.—Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μὲ γενικὸν ὅρον $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1}\cdot\dfrac{1}{\nu}$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία :

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots,\ (-1)^{\nu-1}\cdot\frac{1}{\nu},\ \ldots$$

Αὕτη παρίσταται γραφικῶς ὡς εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα ἐμφαίνεται.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ἕνα θετικὸν ἀριθμὸν ε, π.χ. τὸν $\varepsilon = 0{,}17$, ὡς ἐπίσης καὶ τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις $y = \varepsilon = 0{,}17$ καὶ $y = -\varepsilon = -0{,}17$, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ὁρίζουν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων μίαν «*ταινίαν*» (βλ. Σχ. 9).



Σχ. 9

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα, ὅτι τὰ σημεῖα M_1, M_2, M_3, M_4 καὶ M_5 κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας, ἐνῷ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 6$ καὶ «*πέραν*» ἀντίστοιχα σημεῖα, ἤτοι τὰ M_6, M_7, $M_8,\ldots$ εὑρίσκονται **ὅλα** ἐντὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y = \varepsilon$ καὶ $y = -\varepsilon$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ τεταγμέναι τῶν M_1, M_2, M_3, M_4 καὶ M_5, ἤτοι οἱ ὅροι α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, ἐνῷ οἱ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 6$ καὶ πέραν ἀντίστοιχοι ὅροι, ἤτοι οἱ : α_6, α_7, $\alpha_8,\ldots$ κεῖνται **ὅλοι** εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, δηλαδὴ εἰς μίαν περιοχὴν τοῦ μηδενός, καθόσον τὸ $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ γράφεται καὶ οὕτω : $(0-\varepsilon,\ 0+\varepsilon)$.

Ὥστε : $\quad -\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqq \nu_0 = 6 \quad (\varepsilon = 0{,}17)$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqq \nu_0 = 6.$$

Ἐὰν τώρα λάβωμεν ἕνα ἄλλον θετικὸν ἀριθμὸν ε, μικρότερον τοῦ προηγουμένου, π.χ. τὸν $\varepsilon = 0{,}09$, καὶ ἐπαναλάβωμεν τὰ ἀνωτέρω, τότε καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τὰ σημεῖα M_1, $M_2, \ldots$ καὶ M_{11} κεῖνται ἐκτὸς τῆς ταινίας τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν $y = \varepsilon = 0{,}09$ καὶ $y = -\varepsilon = -0{,}09$, ἐνῷ τὰ ἀπὸ τοῦ δείκτου $\nu = 12$ καὶ πέραν ἀντίστοιχα σημεῖα, ἤτοι τὰ $M_{12}, M_{13}, \ldots, M_\nu, \ldots$ εὑρίσκονται ἐντὸς τῆς ἐν λόγῳ ταινίας, δηλαδὴ αἱ τεταγμέναι τῶν σημείων τούτων, ἤτοι οἱ ὅροι : $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας κεῖνται εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, ἤτοι ἰσχύει :

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < +\varepsilon \qquad \forall\ \nu \geqq \nu_0 = 12 \qquad (\varepsilon = 0{,}09)$$

ἢ ἰσοδυνάμως :

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \qquad \forall\ \nu \geqq \nu_0 = 12.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς ἑκάστην ἐκλογὴν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε ὑπάρχει εἷς δείκτης ν_0, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ε, ἤτοι $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$. Οὕτω, διὰ $\varepsilon = 0{,}17$ ἔχομεν, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 6$, ἐνῷ διὰ $\varepsilon = 0{,}09$ ἔχομεν $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon) = 12$.

Τὴν ἐν λόγῳ ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $\alpha_\nu = (-1)^{\nu-1} \cdot \dfrac{1}{\nu}$, ἡ ὁποία πληροῖ τὰ ἀνωτέρω χαρακτηρίζομεν ὡς **«μηδενικὴν ἀκολουθίαν»**.

Γενικῶς : *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *καλεῖται* **μηδενικὴ ἀκολουθία** *καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ* $\alpha_\nu \to 0$ *τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν : διὰ κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχῃ δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενος, ἐν γένει, ἐκ τοῦ ε) *τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :*

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \textit{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Συντόμως, μὲ χρῆσιν τῶν γνωστῶν μας συμβόλων, ὁ ὁρισμὸς οὗτος δίδεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu| < \varepsilon\ \ \forall\ \nu \geqq \nu_0}}$$

§ 121. Παραδείγματα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.

1ον. *Ἡ σταθερὰ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.*

2ον. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική,* διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται νὰ ληφθῇ ἐδῶ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\dfrac{1}{\varepsilon}$*) τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ ἰσχύει : $|\alpha_\nu| = \left|\dfrac{1}{\nu}\right| = \dfrac{1}{\nu} \leqq \dfrac{1}{\nu_0} < \varepsilon$, διότι ἐκ τῆς $\nu_0 > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \dfrac{1}{\nu_0} < \varepsilon$.

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι :

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\ \left(\text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } \nu_0 \geqq \frac{1}{\varepsilon}\right) : |\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{\nu}\right| < \varepsilon\ \ \forall\ \nu \geqq \nu_0.$$

---

* Τοῦτο συμπεραίνομεν, διότι ἰσχύει : $|\alpha_\nu| = \dfrac{1}{\nu} < \varepsilon \Longleftrightarrow \nu > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Ἄρα : $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$

Σημείωσις: Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὑπενθυμίζει τὰς ἀποσβεννυμένας ἀναπηδήσεις μιᾶς ἐλαστικῆς σφαίρας ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου. Τὸ ὕψος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνέρχεται ἡ σφαῖρα εἰς ἑκάστην ἀναπήδησιν εἶναι μικρότερον τῶν προηγουμένων καὶ **τελικῶς** ἡ σφαῖρα ἰσορροπεῖ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ (ὕψος ἀναπηδήσεως μηδέν).

3ον. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu} \to 0$, διότι $\forall\, \varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\nu_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται ἐπίσης νὰ ληφθῇ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\varepsilon}$ (διατί ;) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_\nu| = \left|(-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu} < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Σημείωσις: Ἡ ἀκολουθία τοῦ παραδείγματος (3) ὑπενθυμίζει τὰς ἀποσβεννυμένας αἰωρήσεις ἑνὸς ἐκκρεμοῦς ἢ ἑνὸς ἐλατηρίου περὶ τὴν θέσιν ἰσορροπίας αὐτοῦ.

4ον. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι μηδενική*, διότι διὰ τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \equiv \nu_0(\varepsilon)$, καὶ ὡς τοιοῦτος δύναται νὰ ληφθῇ ἐδῶ εἷς φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $\frac{1}{\varepsilon^2}$, τοιοῦτος, ὥστε: διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}$ ἰσχύει : $|\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon$, διότι ἐκ τῆς: $\nu \geqq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon.$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \left(\text{ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ } \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}\right) : |\alpha_\nu| = \left|\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right| < \varepsilon \;\;\forall\; \nu \geqq \nu_0.$$

Ἄρα : $\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0.$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

§ 122. Ἰδιότης Ι. – Διὰ μίαν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει :

$$\boxed{\textbf{Ἐὰν } \alpha_\nu \to 0 \iff -\alpha_\nu \to 0 \textbf{ ὡς καὶ } |\alpha_\nu| \to 0}$$

Ἀπόδειξις: Πράγματι· διότι, ἂν $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, τότε θὰ εἶναι καί :

$$|-\alpha_\nu| = |\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \text{καθὼς ἐπίσης καὶ} \quad ||\alpha_\nu|| = |\alpha_\nu| < \varepsilon.$$

Ἀντιστρόφως: ἂν : $-\alpha_\nu \to 0$, τότε $|-\alpha_\nu| < \varepsilon$, δηλαδὴ $|\alpha_\nu| < \varepsilon$, ἄρα $\alpha_\nu \to 0$, ὁπότε καὶ $|\alpha_\nu| \to 0$.

§ 123. Ἰδιότης ΙΙ. – **Ἐὰν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική, τότε καὶ ἡ προκύπτουσα ἐκ ταύτης διὰ προσθήκης ἢ διαγραφῆς ἑνὸς πεπερασμένου πλήθους ὅρων εἶναι ἐπίσης μηδενικὴ ἀκολουθία.**

Παράδειγμα: Ἡ $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$, τότε καὶ ἡ ἀκολουθία : $\beta_\nu = \frac{1}{\nu+4}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

ἐκτενῶς ἡ : $\quad \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots,$

ἡ ὁποία προκύπτει διὰ διαγραφῆς τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων τῆς $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἐπίσης μηδενικὴ ἀκολουθία.

§ 124. Ἰδιότης ΙΙΙ. – **Κάθε μηδενικὴ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.**

Ἤτοι : $\boxed{\textbf{Ἐὰν } \alpha_\nu \to 0, \textbf{ τότε } \alpha_\nu, \nu = 1, 2, \ldots \textbf{ εἶναι φραγμένη.}}$

Ἀπόδειξις. Ἂς ἐφαρμόσωμεν τὸν ὁρισμὸν τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας διὰ $\varepsilon = 1 > 0$, τότε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_\nu| < 1 \quad \forall \quad \nu > \nu_0. \tag{1}$$

Ἔστω τώρα $\qquad A \equiv \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_\nu|)$.

Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$|\alpha_\nu| \leqq A < A + 1 \quad \forall \quad \nu = 1, 2, \ldots, \nu_0. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$|\alpha_\nu| < A + 1 \equiv \varphi \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ὅθεν ἡ α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἀντιστρέφεται, ἤτοι κάθε φραγμένη ἀκολουθία δὲν εἶναι πάντοτε μηδενική. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἔστω ἡ ἀκολουθία : $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἐκτενῶς ἡ ἀκολουθία :

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

Αὕτη εἶναι φραγμένη, διότι : $|\alpha_\nu| = |(-1)^\nu| = 1 \leqq 1 \quad \forall \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$ ἐν τούτοις ὅμως αὕτη δὲν εἶναι μηδενικὴ (διατί ;).

Ἀντιθέτως ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, διότι ἰσχύει :

$$|\alpha_\nu| = \left|(-1)^\nu \cdot \frac{1}{\nu}\right| = \frac{1}{\nu} \leqq 1 \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N} \text{ καὶ συγχρόνως } \alpha_\nu \to 0.$$

§ 125. Ἰδιότης IV. – **Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.**

Ἤτοι : $\boxed{\textbf{Ἐάν : } \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ \beta_\nu \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \pm \beta_\nu \to 0}$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν αἱ α_ν καὶ β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν μηδενικῆς ἀκολουθίας: Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\nu_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu_0' \tag{1}$$

$$|\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \equiv \nu_0''. \tag{2}$$

Ἐὰν καλέσωμεν $\nu_0(\varepsilon)$ τὸν μέγιστον τῶν $\nu_0'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ καὶ $\nu_0''\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, ἤτοι ἂν $\nu_0(\varepsilon) \equiv \max(\nu_0', \nu_0'')$, τότε διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$, αἱ ἀνισότητες (1) καὶ (2) πληροῦνται συγχρόνως καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν:

$$|\alpha_\nu \pm \beta_\nu| \leqq |\alpha_\nu| + |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0(\varepsilon),$$

ἤτοι: $|\alpha_\nu + \beta_\nu| < \varepsilon$ καὶ $|\alpha_\nu - \beta_\nu| < \varepsilon$ διὰ κάθε $\nu > \nu_0(\varepsilon)$.

Αἱ τελευταῖαι ἀνισότητες μᾶς πληροφοροῦν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι: $\alpha_\nu + \beta_\nu$, καὶ $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενικαί.

§ 126. Ἰδιότης V.— Τὸ γινόμενον μηδενικῆς ἀκολουθίας ἐπὶ φραγμένην εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

Ἤτοι:

$$\boxed{\text{Ἐὰν} \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to 0 \\ \beta_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots \ \text{φραγμένη} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \beta_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω φ ἓν φράγμα τῆς ἀκολουθίας β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ἔχομεν:

$$|\beta_\nu| \leqq \varphi \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha_\nu \to 0 \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\frac{\varepsilon}{\varphi} > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0\left(\frac{\varepsilon}{\varphi}\right)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ:

$$|\alpha_\nu| < \frac{\varepsilon}{\varphi} \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0. \tag{2}$$

Τότε ὅμως, διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0$, ἔχομεν δυνάμει τῶν (1) καὶ (2) ὅτι:

$$|\alpha_\nu \beta_\nu| = |\alpha_\nu| \cdot |\beta_\nu| < \frac{\varepsilon}{\varphi} \cdot \varphi = \varepsilon.$$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0\left(\frac{\varepsilon}{\varphi}\right) : |\alpha_\nu \beta_\nu| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geqq \nu_0.$$

Ἄρα:

$$\alpha_\nu \beta_\nu \to 0.$$

§ 127. Ἰδιότης VI.— **Τὸ γινόμενον δύο, ἢ γενικώτερον ἑνὸς πεπερασμένου πλήθους, μηδενικῶν ἀκολουθιῶν εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.**

Ἤτοι :

$$\boxed{\text{Ἐὰν} \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu\,\beta_\nu \to 0}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἡ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὡς μηδενικὴ ἀκολουθία εἶναι (ἰδιότης III) φραγμένη, ἄρα ἡ $\alpha_\nu\,\beta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην εἶναι (ἰδιότης V) μηδενικὴ ἀκολουθία.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu} \longrightarrow 0,\ \beta_\nu = \dfrac{1}{\nu} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \alpha_\nu\,\beta_\nu = \dfrac{1}{\nu^2} \to 0.$

Ἄ σ κ η σ ι ς : Ἀποδείξατε τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα ἀνεξαρτήτως τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων, ἀλλὰ μόνον τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ μηδενικῆς ἀκολουθίας.

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων IV καὶ V ἕπονται ἀμέσως αἱ κάτωθι δύο ἰδιότητες :

§ 128. Ἰδιότης VII.— **Ἐὰν $\alpha_\nu \to 0$, τότε $\xi\alpha_\nu \to 0$ διὰ κάθε $\xi \in \mathrm{R}$.**

Οὕτως, ἐκ τῆς $\dfrac{1}{\nu} \to 0 \Longrightarrow \dfrac{3}{\nu} = 3 \cdot \dfrac{1}{\nu} \to 0.$

§ 129. Ἰδιότης VIII.— **Διὰ κάθε $\xi, \eta \in \mathrm{R}$, ἐὰν $\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu \to 0.$**

§ 130. Ἰδιότης IX.— **Ἐὰν $\beta_\nu \to 0$ καὶ διὰ μίαν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἰσχύῃ : $|\alpha_\nu| \leqq |\beta_\nu|$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2 \ldots$ εἶναι μηδενική.**

Ἤτοι :

$$\boxed{\text{Ἐὰν} \left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu| \leqq |\beta_\nu| \quad \forall \quad \nu \in \mathrm{N}\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to 0}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς : Ἐκ τοῦ ὅτι $\beta_\nu \to 0$ ἕπεται : Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\beta_\nu| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Τότε ὅμως ἔχομεν :

$$|\alpha_\nu| \leqq |\beta_\nu| < \varepsilon, \qquad \text{ἤτοι} \qquad |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \text{ διὰ κάθε } \ \nu \geqq \nu_0(\varepsilon).$$

Ἄρα : $\alpha_\nu \to 0.$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή : Δείξατε ὅτι : $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu^2 + \nu + 1} \to 0.$

Πράγματι :

$$|\alpha_\nu| = \frac{1}{\nu^2 + \nu + 1} < \frac{1}{\nu^2 + \nu} < \frac{1}{\nu}$$ καὶ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα (ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\nu} \to 0$) εἶναι $\alpha_\nu \to 0$.

§ 131. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ον. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ ω σταθερὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν καὶ $|\omega| < 1$ εἶναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. α). Διὰ $\omega = 0 < 1$ εἶναι προφανές.

β). Διὰ $\omega \neq 0$, ἔχομεν: $0 < |\omega| < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{|\omega|} > 1$. Ἄρα $\dfrac{1}{|\omega|} = 1 + \theta$, $\theta > 0$ καὶ ἑπομένως:

$$|\alpha_\nu| = |\omega^\nu| = |\omega|^\nu = \frac{1}{(1+\theta)^\nu} \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (§ 28, παρδ. 2), ἤτοι τὴν ἀνισότητα:

$$(1+\theta)^\nu \geqq 1 + \nu\theta,$$

ἔχομεν:

$$(1+\theta)^\nu > \nu\theta \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Τότε ἡ (1) δίδει:

$$|\alpha_\nu| = |\omega^\nu| < \frac{1}{\nu\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\nu} \quad \forall \quad \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\nu} \longrightarrow 0$, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων VII καὶ IX εἶναι καὶ $\alpha_\nu = \omega^\nu \longrightarrow 0$.

Ὥστε ἡ ἀκολουθία:

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots, \omega^\nu, \ldots$$

μὲ $|\omega| < 1$ εἶναι μηδενική.

Οὕτω, π.χ., αἱ ἀκολουθίαι: $\dfrac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $\dfrac{1}{10^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, $3^{-\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι πᾶσαι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ον. Ἡ ἀκολουθία: $\alpha_\nu = \alpha\omega^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ μὲ $|\omega| < 1$ καὶ $\alpha \in \mathbf{R}$, ἤτοι ἡ: $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \ldots, \alpha\omega^\nu, \ldots$, εἶναι μηδενική.

Πράγματι· δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος καὶ τῆς ἰδιότητος VII.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 3ον. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+2} - \sqrt{\nu^2+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. Εἶναι γνωστὸν ὅτι: $x - y = \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$. Ἐὰν θέσωμεν $x = \sqrt{\nu^2+2}$, $y = \sqrt{\nu^2+1}$, ἔχομεν:

$$|\alpha_\nu| = \left|\sqrt{\nu^2+2} - \sqrt{\nu^2+1}\right| = \left|\frac{(\sqrt{\nu^2+2})^2 - (\sqrt{\nu^2+1})^2}{\sqrt{\nu^2+2} + \sqrt{\nu^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\nu^2+2} + \sqrt{\nu^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}} < \frac{1}{\nu}.$$

Ἄρα, ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\nu} \longrightarrow 0$, δυνάμει τῆς ἰδιότητος IX, προκύπτει ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+2} - \sqrt{\nu^2+1}, \ \nu = 1, 2, \ldots \text{ εἶναι μηδενική.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

256. Δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι εἶναι μηδενικαί:

1) $\dfrac{\nu}{\nu^3+\nu+1}$, 2) $\dfrac{(-1)^\nu}{(\nu+1)^2}$, 3) $\dfrac{1+\sqrt{\nu}}{\nu^3}$, 4) $\sqrt{\nu^2+3} - \sqrt{\nu^2+1}$.

257. Ὁμοίως αἱ ἀκολουθίαι:

1) $\dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^5\nu}{\sqrt{\nu}}$, 2) $\nu^{3/2} \cdot (\sqrt{\nu^4+4} - \nu^2)$, 3) $\sqrt[3]{\nu+1} - \sqrt[3]{\nu}$, 4) $\nu \cdot (\sqrt{\nu^4+4} - \nu^2)$.

258. Διὰ $\varepsilon > 0$, νὰ προσδιορισθῇ δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε διὰ $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$, νὰ εἶναι

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon,$$

ὅπου : α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{2}{\nu^2+\nu}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{3}{4\nu^2 - 2\nu}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu^3\nu}{\sqrt{\nu}}$, 4) $\alpha_\nu = \dfrac{3}{\sqrt{\nu^2+2}}$.

259. Ἐὰν ἡ ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική, θὰ εἶναι μηδενικὴ καὶ ἡ $\sqrt{|\alpha_\nu|}$.

ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΑΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΟΡΙΟΥ.

§ 132. Ὁρισμός.— Ἔστω ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_\nu = \frac{3\nu+1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Διὰ τὴν ὡς ἄνω ἀκολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει : $\alpha_\nu - 3 = \dfrac{1}{\nu}$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - 3$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\dfrac{3\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ **«συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 3»**.

Γενικῶς θὰ λέγωμεν : *«ἡ ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ πραγματικῶν ἀριθμῶν* **συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α** ἢ ἄλλως **τείνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α** καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μέ : $\alpha_\nu \to \alpha$ *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία ($\alpha_\nu - \alpha$), $\nu = 1, 2, \ldots$*, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_1 - \alpha, \ \alpha_2 - \alpha, \ \alpha_3 - \alpha, \ldots, \alpha_\nu - \alpha, \ldots$$

εἶναι μηδενική.

Τὸν ἀριθμὸν α καλοῦμεν **«ὅριον»** ἢ **«ὁριακὴν τιμὴν»** τῆς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ γράφομεν : $\textbf{ὁρ}\,\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha}$ ἢ ἄλλως $\boldsymbol{\lim \alpha_\nu = \alpha}$.

Τὸ lim εἶναι συγκοπὴ τῆς λατινικῆς λέξεως limes = ὅριον καὶ χρησιμοποιεῖται διεθνῶς.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγεται ὅτι :

ἡ α_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μία μηδενικὴ ἀκολουθία $\Longleftrightarrow \alpha_\nu \to 0 \Longleftrightarrow \lim \alpha_\nu = 0$.

Ὅθεν ὁ ὁρισμὸς τῆς συγκλινούσης ἀκολουθίας διατυποῦται συντόμως οὕτω :

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = \alpha \ \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \ \lim (\alpha_\nu - \alpha) = 0}$$

Οὕτω διὰ τὸ παράδειγμά μας ἔχομεν :

$$\lim \frac{3\nu+1}{\nu} = 3, \quad \text{διότι} \quad \lim\left(\frac{3\nu+1}{\nu} - 3\right) = \lim \frac{1}{\nu} = 0.$$

§ 133. Πρότασις.—**Ἡ ὁριακὴ τιμὴ μιᾶς συγκλινούσης ἀκολουθίας εἶναι μονοσημάντως ὡρισμένη, δηλ. κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία ἔχει ἀκριβῶς ἕνα ὅριον.**

Ἀπόδειξις. Ἐὰν συνέβαινε $\alpha_\nu \to \alpha$ καὶ συγχρόνως $\alpha_\nu \to \alpha'$ μὲ $\alpha \neq \alpha'$, τότε θὰ ἔπρεπε αἱ : $\alpha_\nu - \alpha$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ $\alpha_\nu - \alpha'$, $\nu = 1,2,\ldots$ νὰ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι, συνεπῶς καὶ ἡ διαφορά των, ἤτοι ἡ ἀκολουθία :

$$\beta_\nu \equiv (\alpha_\nu - \alpha) - (\alpha_\nu - \alpha') = \alpha' - \alpha, \quad \nu = 1,2\ldots$$

εἶναι μηδενική· αὔτη ὅμως εἶναι σταθερά, ἤτοι $\beta_\nu = \alpha' - \alpha$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ὅθεν μηδενικὴ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\alpha' - \alpha = 0$ (διατί ;).

Διὰ τὰς συγκλινούσας ἀκολουθίας ἰσχύει τὸ κάτωθι :

§ 134. Θεώρημα.– (Ἰσοδύναμοι ὁρισμοὶ συγκλινούσης ἀκολουθίας).

Ἔστω α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν· αἱ κάτωθι προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι :

(i). Ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α, ἤτοι $\lim \alpha_\nu = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

(ii). Διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ ε) τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \text{ διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0.$$

Ἢ ὅπερ τὸ αὐτό :

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_\nu < \alpha + \varepsilon \text{ διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0.$$

Ἀπόδειξις. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Πράγματι· $\lim \alpha_\nu = \alpha \Longrightarrow \lim(\alpha_\nu - \alpha) = 0$, τὸ ὁποῖον, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας, σημαίνει ὅτι :

$$\forall \; \varepsilon > 0 \; \exists \; \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \text{ τοιοῦτος, ὥστε διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0 \text{ ἰσχύει :}$$
$$|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon < \alpha_\nu < \alpha + \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Πράγματι· δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας ἡ πρότασις (ii) δηλοῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - \alpha$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική, τότε ὅμως, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς συγκλινούσης ἀκολουθίας, ἕπεται ὅτι : $\lim \alpha_\nu = \alpha$.

Παραδείγματα συγκλινουσῶν καὶ μὴ συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν :

1ον : Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία : $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 1, διότι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - 1$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

Γενικῶς κάθε *«σταθερὰ ἀκολουθία»* : $c, c, c, \ldots, c, \ldots$ διὰ $c \in \mathbf{R}$, συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν c.

2ον : Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu - 1}{3\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\dfrac{2}{3}$, ἤτοι· $\lim \alpha_\nu = \lim \dfrac{2\nu - 1}{3\nu} = \dfrac{2}{3}$.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν :

$$\frac{2\nu - 1}{3\nu} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3\nu} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

καὶ ἐπειδή :

$$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\nu} \longrightarrow 0, \quad \text{ἕπεται :} \quad \lim \frac{2\nu - 1}{3\nu} = \frac{2}{3}.$$

Ὁμοίως εἶναι : $\lim \dfrac{3\nu - 5}{4\nu} = \dfrac{3}{4}$ (διατί;).

Δίδομεν κατωτέρω καὶ δύο παραδείγματα ἀκολουθιῶν αἱ ὁποῖαι δὲν συγκλίνουν ἐν $\mathbf{R}$· προσέξατε τὴν ἀπόδειξιν :

3ον : Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots$ συγκλίνει πρός τινα ἀριθμὸν $x \in \mathbf{R}$. Τότε διὰ κάθε $\varepsilon > 0$, ἄρα καὶ διὰ $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$|(-1)^\nu - x| < \frac{1}{2} \qquad \forall \; \nu \geqq \nu_0.$$

Εἰδικῶς :

$$|(-1)^{\nu_0}-x|<\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad |(-1)^{\nu_0+1}-x|<\frac{1}{2},$$

διότι $\nu_0 \geqq \nu_0$ καὶ $\nu_0+1 \geqq \nu_0$. Τότε ὅμως ἔχομεν :

$$|(-1)^{\nu_0}-(-1)^{\nu_0+1}|=|(-1)^{\nu_0}-x+x-(-1)^{\nu_0+1}|\leqq|(-1)^{\nu_0}-x|+|x-(-1)^{\nu_0+1}|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

ἤτοι : $$|(-1)^{\nu_0}-(-1)^{\nu_0+1}|<1. \tag{1}$$

Ἀλλά : $$|(-1)^{\nu_0}-(-1)^{\nu_0+1}|=2. \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι $2<1$, ἄτοπον. Ἐπειδὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία $(-1)^{\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$ συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$ ὁδηγεῖ εἰς ἄτοπον, συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη *δὲν* συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

4ον. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ δὲν συγκλίνει ἐν R.

Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία : $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ συγκλίνει πρὸς τινα ἀριθμὸν $y \in \mathbf{R}$. Τότε δοθέντος $\varepsilon=\frac{1}{3}$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τοιοῦτος, ὥστε :

$$|\nu-y|<\frac{1}{3} \quad \forall \ \nu \geqq \nu_0.$$

Εἰδικῶς :

$$|\nu_0-y|<\frac{1}{3} \quad \text{καὶ} \quad |\nu_0+1-y|<\frac{1}{3},$$

διότι : $\nu_0 \geqq \nu_0$ καὶ $\nu_0+1 \geqq \nu_0$. Τότε ὅμως ἔχομεν :

$$1=|(\nu_0+1)-\nu_0|\leqq|\nu_0+1-y|+|y-\nu_0|<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}.$$

ἤτοι : $$1<\frac{2}{3}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\nu$, $\nu=1,2,\cdots$ συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$ ὁδηγεῖ εἰς ἄτοπον, συμπεραίνομεν ὅτι αὐτὴ ἡ ἀκολουθία *δὲν* συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

§ 135. Ἰδιότης Ι. – Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\textbf{Ἐὰν} \quad \alpha_\nu \to \alpha \implies -\alpha_\nu \to -\alpha}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι· ἐπειδὴ $\alpha_\nu \to \alpha \implies (\alpha_\nu-\alpha)\to 0$, τότε ὅμως (§ 122, ἰδ. Ι) καὶ ἡ $-(\alpha_\nu-\alpha)=-\alpha_\nu+\alpha$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία, ἤτοι : $-\alpha_\nu-(-\alpha)\to 0$. Ἄρα : $-\alpha_\nu \to -\alpha$.

§ 136. Ἰδιότης ΙΙ. – Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\textbf{Ἐὰν} \quad \alpha_\nu \to \alpha \implies |\alpha_\nu| \to |\alpha|}$$

Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδὴ τὸ γεγονός, ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸ $|\alpha|$ δὲν συνεπάγεται ὅτι $\alpha_\nu \to \alpha$.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Πράγματι· ἀπὸ $\alpha_\nu \to \alpha \implies (\alpha_\nu-\alpha)\to 0$, τότε ὅμως (§ 122, ἰδ. Ι) καὶ $|\alpha_\nu-\alpha|\to 0$.

Ἀλλὰ $|\,|\alpha_\nu| - |\alpha|\,| \leqq |\alpha_\nu - \alpha| \to 0$, ἄρα καὶ $(|\alpha_\nu| - |\alpha|) \to 0$ (§ 130, ἰδ. IX)

Τότε ὅμως :
$$\lim |\alpha_\nu| = |\alpha|.$$

Τὸ ὅτι τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει πάντοτε δεικνύει τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἡ ἀκολουθία : $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{\nu+1}, \ldots$ δὲν συγκλίνει (διατί ;) καὶ ὅμως ἡ ἀκολουθία : $|1|, |-1|, |1|, |-1|, \ldots, |(-1)^{\nu+1}|, \ldots$ συγκλίνει εἰς τὸ 1.

Παρατηρήσεις : 1). Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική, τότε ἡ ἰδιότης II, ὡς ἐδείχθη § 122, ἀντιστρέφεται, ἤτοι, ἂν $|\alpha_\nu| \longrightarrow 0 \Longrightarrow \alpha_\nu \longrightarrow 0$.

2). Ἐκ τοῦ συμπεράσματος τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος II συνάγεται ὅτι ἐπιτρέπεται νὰ γράφωμεν :
$$\lim |\alpha_\nu| = |\lim \alpha_\nu|$$
ἤτοι : **Τὸ ὅριον τῆς ἀπολύτου τιμῆς μιᾶς ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ὁρίου αὐτῆς.**

§ 137. Ἰδιότης III. – Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad \left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to \alpha\\ \beta_\nu \to \alpha\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \alpha_\nu - \beta_\nu \to 0}$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἐπειδὴ $\alpha_\nu - \alpha$ καὶ $\beta_\nu - \alpha$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν :
$$(\alpha_\nu - \alpha) - (\beta_\nu - \alpha) = \alpha_\nu - \beta_\nu, \quad \nu = 1,2,\ldots$$
εἶναι μία μηδενικὴ ἀκολουθία.

§ 138. Ἰδιότης IV. – Κάθε συγκλίνουσα ἐν R ἀκολουθία εἶναι φραγμένη.

Ἤτοι : $\boxed{\text{Ἐὰν } \alpha_\nu \to \alpha \Longrightarrow \alpha_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots \text{ εἶναι φραγμένη}}$

Ἀπόδειξις. Πράγματι ἀπὸ $\alpha_\nu \to \alpha \Longrightarrow (\alpha_\nu - \alpha) \to 0$, τότε ὅμως (Ἰδ. III, § 124) ἡ $\alpha_\nu - \alpha$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη, ἤτοι ὑπάρχει πραγματικὸς ἀριθμὸς $\theta > 0$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :
$$|\alpha_\nu - \alpha| \leqq \theta \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1,2,\ldots$$
Ἀλλά :
$$|\alpha_\nu| - |\alpha| \leqq |\alpha_\nu - \alpha|$$
ἄρα κατὰ μείζονα λόγον ἔχομεν :
$$|\alpha_\nu| - |\alpha| \leqq \theta \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1,2,\ldots$$
δηλαδή :
$$|\alpha_\nu| \leqq |\alpha| + \theta \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1,2,\ldots$$
ἤ
$$|\alpha_\nu| \leqq \varphi \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu = 1,2,\ldots$$
ὅπου $\varphi = |\alpha| + \theta$.

Ἄρα ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη.

Παρατηρήσεις : α'). Ἡ ἰδιότης IV ἰσχυρίζεται ὅτι μία ἀκολουθία ἡ ὁποία συγκλίνει ἐν R εἶναι φραγμένη. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἀληθεύει πάντοτε, δηλαδὴ κάθε φραγμένη ἀκολουθία δὲν εἶναι πάντοτε συγκλίνουσα. Περὶ τούτου βεβαιούμεθα ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα : Ἡ ἀκολουθία $(-1)^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἂν καὶ εἶναι φραγμένη δὲν συγκλίνει· (βλ. πρδ. 3, § 134).

β'). Ἡ Ἰδιότης IV εἶναι ἐπίσης χρήσιμος προκειμένου νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὡρισμέναι ἀκολουθίαι δὲν συγκλίνουν ἐν **R**. Οὕτως, ἡ ἀκολουθία $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ δὲν συγκλίνει ἐν **R**, διότι αὕτη δὲν εἶναι φραγμένη (διατί ;).

§ 139. Ἰδιότης V.— Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν συγκλίνει ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Ἤτοι:

$$\boxed{\text{Ἐὰν} \quad \left.\begin{matrix} \alpha_\nu \to \alpha \\ \beta_\nu \to \beta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \pm \beta_\nu \to \alpha \pm \beta}$$

Ἀπόδειξις. Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἰδιότητα μόνον διὰ τὸ ἄθροισμα, ἀναλόγως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν διαφορὰν $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu = 1,2\ldots$

Πράγματι· ἐπειδὴ $\alpha_\nu - \alpha$ καὶ $\beta_\nu - \beta$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι καὶ τὸ ἄθροισμά των :

$$(\alpha_\nu - \alpha) + (\beta_\nu - \beta) = (\alpha_\nu + \beta_\nu) - (\alpha + \beta), \quad \nu = 1,2,\ldots$$

εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία.

Ἄρα: $$\alpha_\nu + \beta_\nu \to \alpha + \beta.$$

Παρατηρήσεις: 1). Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης γράφεται συνήθως ὡς ἑξῆς :

$$\lim(\alpha_\nu \pm \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu \pm \lim \beta_\nu .$$

Ἤτοι : **Τὸ ὅριον ἀθροίσματος (ἀντιστοίχως διαφορᾶς) δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα (ἀντιστοίχως διαφορὰν) τῶν ὁρίων αὐτῶν.**

2). Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ *πεπερασμένας τὸ πλῆθος* συγκλινούσας ἀκολουθίας, ἤτοι : $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu + \cdots + x_\nu) = \lim \alpha_\nu + \lim \beta_\nu + \cdots + \lim x_\nu$.

3). Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἰσχύει διὰ συγκλινούσας ἀκολουθίας *ἀπείρου πλήθους*. Περὶ τούτου πειθόμεθα ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος.

Ἔστω εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μήκους ἴσου πρὸς τὴν μονάδα, τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν εἰς ν ἴσα μέρη, ἔνθα $\nu \in \mathbf{N}$. Τότε τὸ ἄθροισμα :

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu},$$

ἐὰν ἔχῃ ν προσθετέους, θὰ εἶναι ἴσον πρός : $\frac{1}{\nu} \cdot \nu = 1$, διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$.

Ἐὰν ἐφαρμόσωμεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα διὰ τὸ ὡς ἄνω ἄθροισμα ἔχομεν :

$$\lim\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right) = \lim\frac{1}{\nu} + \lim\frac{1}{\nu} + \cdots + \lim\frac{1}{\nu} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0,$$

ἤτοι ψευδές, καθ' ὅσον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἐλήφθη μὲ μῆκος ἴσον πρὸς τὴν μονάδα.

§ 140. Ἰδιότης VI. — Ἔστω ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\text{Ἐὰν} \quad \alpha_\nu \to \alpha \Longrightarrow \lambda\alpha_\nu \to \lambda\alpha \quad \forall \ \lambda \in \mathbf{R}}$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι· διότι ἡ ἀκολουθία :

$$\lambda\alpha_\nu - \lambda\alpha = \lambda(\alpha_\nu - \alpha), \quad \nu = 1,2,\ldots$$

εἶναι μηδενική, καθόσον ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - \alpha$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

Παρατήρησις: Ἐκ τοῦ συμπεράσματος τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συνάγεται ὅτι ἐπιτρέπεται νὰ γράφωμεν :

$$\lim(\lambda \cdot \alpha_\nu) = \lambda \cdot \lim \alpha_\nu, \quad \text{διὰ κάθε} \quad \lambda \in \mathbf{R} \quad \text{μὲ} \quad \lambda = \text{σταθερόν}.$$

Οὕτω :
$$\lim \frac{5}{\nu} = 5 \cdot \lim \frac{1}{\nu} = 5 \cdot 0 = 0.$$

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων V καὶ VI ἕπεται εὐκόλως ἡ :

§ 141. Ἰδιότης VII. – Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι α_ν, β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\text{Ἐὰν} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to \alpha \\ \beta_\nu \to \beta \end{array}\right\} \implies \xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu \to \xi\alpha + \eta\beta \quad \forall \quad \xi, \eta \in \mathbf{R}.}$$

§ 142. Ἰδιότης VIII.– Τὸ γινόμενον δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν συγκλίνει πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων αὐτῶν.

Ἤτοι :
$$\boxed{\text{Ἐὰν} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to \alpha \\ \beta_\nu \to \beta \end{array}\right\} \implies \alpha_\nu \beta_\nu \to \alpha\beta}$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι· ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_\nu \beta_\nu - \alpha\beta = \alpha_\nu \beta_\nu - \beta_\nu \alpha + (\beta_\nu \alpha - \alpha\beta) = \beta_\nu (\alpha_\nu - \alpha) + \alpha(\beta_\nu - \beta), \quad \nu = 1,2,\ldots$$

εἶναι μηδενική, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ $\alpha_\nu - \alpha \to 0$ καὶ β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη, ἄρα $\beta_\nu (\alpha_\nu - \alpha) \to 0$, ἀφ' ἑτέρου δὲ $\beta_\nu - \beta \to 0$ καὶ α σταθερά, ἄρα $\alpha(\beta_\nu - \beta) \to 0$. Ἑπομένως ἡ $\alpha_\nu \beta_\nu - \alpha\beta$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία, ὡς ἄθροισμα μηδενικῶν ἀκολουθιῶν, ὅθεν : $\alpha_\nu \beta_\nu \to \alpha\beta$.

Παρατηρήσεις: 1). Τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος γράφεται συνήθως ὡς ἑξῆς :
$$\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu) = \lim \alpha_\nu \cdot \lim \beta_\nu .$$

Ἤτοι : **Τὸ ὅριον τοῦ γινομένου δύο συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν παραγόντων.**

2). Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἰσχύει γενικώτερον διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένον τὸ πλῆθος, ἤτοι : $\lim(\alpha_\nu \cdot \beta_\nu \cdot \gamma_\nu \cdots x_\nu) = \lim \alpha_\nu \cdot \lim \beta_\nu \cdot \lim \gamma_\nu \cdots \lim x_\nu$.

Τὸ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἰσχύει, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων δὲν εἶναι πεπερασμένον, πειθόμεθα ἐκ τοῦ ἑξῆς παραδείγματος : Ἔστω ἡ ἀκολουθία :

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{\nu}\right), \quad \nu = 1, 2, \cdots$$

Κατὰ τὴν ἰδιότητα VIII θὰ ἔχωμεν :

$$\lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdot \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \cdots \lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right),$$

ἀλλὰ $\lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) = 1 + \lim \frac{1}{\nu} = 1 + 0 = 1$ καὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν παραγόντων εἶναι ἴσον πρὸς τὴν μονάδα, ἄρα $\lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu = 1$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω $\lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \equiv e = 2,7182818\ldots$

§ 143. Ἰδιότης IX.— **Ἐὰν $\beta_\nu \to \beta \neq 0$ καὶ $\beta_\nu \neq 0$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\beta_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\beta}$, ἤτοι :**

$$\boxed{\lim \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\lim \beta_\nu}}$$

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἔχομεν :

$$\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \beta_\nu}{\beta\beta_\nu} = -\frac{1}{\beta\beta_\nu} \cdot (\beta_\nu - \beta), \qquad \nu = 1,2,\ldots$$

ἡ ἀκολουθία ὅμως $\beta \cdot \beta_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ ὡς συγκλίνουσα πρὸς τὸ β^2 εἶναι φραγμένη, ὁπότε καὶ ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\beta \cdot \beta_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη (διατί ;), ἐξ ἄλλου ἡ $\beta_\nu - \beta$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μία μηδενικὴ ἀκολουθία, ὅθεν καὶ ἡ :

$$\frac{1}{\beta_\nu} - \frac{1}{\beta}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

εἶναι μηδενικὴ ἀκολουθία, ὡς γινόμενον μηδενικῆς ἐπὶ φραγμένην ἀκολουθίαν.

Ἄρα :
$$\lim \frac{1}{\beta_\nu} = \frac{1}{\beta}.$$

§ 144. Ἰδιότης X.— **Ἐὰν $\alpha_\nu \to \alpha$, $\beta_\nu \to \beta \neq 0$ καὶ εἶναι $\beta_\nu \neq 0$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε ἰσχύει :**

$$\boxed{\lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\lim \alpha_\nu}{\lim \beta_\nu}}$$

Ὑπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις ἁπλουστάτη, ἂν ληφθοῦν ὑπ' ὄψιν αἱ ἰδιότητες VIII καὶ IX.

§ 145. Ἰδιότης XI.—**Ἐὰν δύο ἀκολουθίαι α_ν καὶ β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνουν καὶ ἰσχύῃ $\alpha_\nu \leqq \beta_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$, τότε θὰ ἔχωμεν : $\lim \alpha_\nu \leqq \lim \beta_\nu$.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν α καὶ β τὰ ὅρια τῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀντιστοίχως, ἤτοι $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καὶ $\lim \beta_\nu = \beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\alpha \leqq \beta$.

Ἐν πρώτοις ἔχομεν $\beta_\nu - \alpha_\nu \geqq 0$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$ Ἐξ ἄλλου ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu - \alpha_\nu \to \beta - \alpha$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ θὰ ἔχωμεν :

$$(\beta - \alpha) - \varepsilon < \beta_\nu - \alpha_\nu < (\beta - \alpha) + \varepsilon \quad \forall \ \nu \geqq \nu_0 = \nu_0(\varepsilon).$$

Ἐὰν ἦτο $\alpha > \beta$, τότε $\alpha - \beta > 0$ καὶ ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης διὰ $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$ γίνεται :

$$2(\beta - \alpha) < \beta_\nu - \alpha_\nu < 0 \text{ διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0(\varepsilon),$$

δηλαδὴ $\beta_\nu < \alpha_\nu$ τελικῶς δι' ὅλους τοὺς δείκτας, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἄρα :
$$\alpha \leqq \beta.$$

Θεωροῦντες τὴν β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ἢ τὴν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ὡς σταθερὰν ἀκολουθίαν ἔχομεν ἀντ.στοίχως τὰ κάτωθι πορίσματα:

Πόρισμα I.– Ἐὰν οἱ ὅροι ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ **εἶναι ἀπό τινος δείκτου καὶ πέραν μικρότεροι ἢ ἴσοι ἀριθμοῦ β, τότε ἰσχύει : $\lim \alpha_\nu \leqq \beta$.**

Ἤτοι:

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad \left.\begin{array}{l} \alpha_\nu \to \alpha \\ \alpha_\nu \leqq \beta,\ \forall\, \nu \geqq \nu_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \leqq \beta.}$$

Πόρισμα II. – Ἔστω ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad \left.\begin{array}{l} \beta_\nu \to \beta \\ \alpha \leqq \beta_\nu,\ \forall\, \nu \geqq \nu_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \leqq \beta = \lim \beta_\nu}$$

§ 146. Ἰδιότης XII. – Ἔστωσαν αἱ ἀκολουθίαι α_ν, β_ν, γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ Τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad \left.\begin{array}{l} \beta_\nu \to \alpha, \quad \gamma_\nu \to \alpha \\ \beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \gamma_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha_\nu \to \alpha}$$

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς. Ἀπὸ $\beta_\nu \to \alpha$ ἕπεται: διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_1(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ : $\alpha - \varepsilon < \beta_\nu < \alpha + \varepsilon$ διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_1(\varepsilon)$.
Ὁμοίως ἀπὸ $\gamma_\nu \to \alpha$ ἕπεται ὅτι ὑπάρχει δείκτης $\nu_2(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$\alpha - \varepsilon < \gamma_\nu < \alpha + \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε} \quad \nu \geqq \nu_2(\varepsilon).$$

Τότε ὅμως, ἐὰν $\nu_0 = \max\,[\nu_1(\varepsilon), \nu_2(\varepsilon)]$, θὰ ἔχωμεν διὰ κάθε $\nu \geqq \nu_0$

$$\alpha - \varepsilon < \beta_\nu \leqq \alpha_\nu \leqq \gamma_\nu < \alpha + \varepsilon,$$

ἤτοι
$$\alpha - \varepsilon < \alpha_\nu < \alpha + \varepsilon$$

ἢ ἰσοδυνάμως
$$|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon \quad \text{διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0.$$

Ἄρα :
$$\lim \alpha_\nu = \alpha.$$

§ 147. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ον: Δείξατε ὅτι :

$$\lim \frac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

Λ ύ σ ι ς. Διαιροῦμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τῆς *μεγαλυτέρας δυνάμεως* τοῦ ν, δηλ. διὰ ν^2 καὶ ἡ ἀκολουθία γράφεται :

$$\frac{2\nu^2 + 4\nu - 7}{3\nu^2 + 1} = \frac{2 + \dfrac{4}{\nu} - \dfrac{7}{\nu^2}}{3 + \dfrac{1}{\nu^2}}.$$

Αἱ ἀκολουθίαι ὅμως $\frac{4}{\nu}=4\cdot\frac{1}{\nu}$, $\nu=1,2\ldots$, $\frac{1}{\nu^2}$, $\nu=1,2,\ldots$ καὶ $\frac{7}{\nu^2}=7\cdot\frac{1}{\nu^2}$ $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι πᾶσαι μηδενικαὶ ἀκολουθίαι. Ἑπομένως ἔχομεν κατὰ σειράν :

$$\lim\frac{2\nu^2+4\nu-7}{3\nu^2+1}=\lim\frac{2+\frac{4}{\nu}-\frac{7}{\nu^2}}{3+\frac{1}{\nu^2}}=\frac{\lim\left(2+\frac{4}{\nu}-\frac{7}{\nu^2}\right)}{\lim\left(3+\frac{1}{\nu^2}\right)}=$$

$$=\frac{2+\lim\frac{4}{\nu}-\lim\frac{7}{\nu^2}}{3+\lim\frac{1}{\nu^2}}=\frac{2+0-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

Ὥστε : $\lim\frac{2\nu^2+4\nu-7}{3\nu^2+1}=\frac{2}{3}\equiv$ μὲ τὸν λόγον τῶν συντελεστῶν τῶν *μεγιστοβαθμίων* ὅρων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.

Γενικῶς : *Ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ, τὸ κλάσμα ἔχει ὅριον τὸν λόγον τῶν συντελεστῶν τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ.*

Παράδειγμα 2ον : Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\alpha_\nu\equiv\frac{\nu^3-\nu^2+1}{\nu^5+2\nu^4-3}$$

εἶναι μηδενική.

Λύσις. Διαιροῦμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος διὰ τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ ν, δηλ. διὰ ν^5, ὅτε λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα:

$$\frac{\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^5}}{1+\frac{2}{\nu}-\frac{3}{\nu^5}}.$$

Ἀλλὰ $\lim\left(\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^5}\right)=\lim\frac{1}{\nu^2}-\lim\frac{1}{\nu^3}+\lim\frac{1}{\nu^5}=0-0+0=0$

καὶ $\lim\left(1+\frac{2}{\nu}-\frac{3}{\nu^5}\right)=1+2\lim\frac{1}{\nu}-3\lim\frac{1}{\nu^5}=1+2\cdot0-3\cdot0=1.$

Τότε, δυνάμει τῆς ἰδιότητος X τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, ἔχομεν :

$$\lim\alpha_\nu\equiv\lim\frac{\nu^3-\nu^2+1}{\nu^5+2\nu^4-3}=\lim\frac{\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^5}}{1+\frac{2}{\nu}-\frac{3}{\nu^5}}=\frac{\lim\left(\frac{1}{\nu^2}-\frac{1}{\nu^3}+\frac{1}{\nu^5}\right)}{\lim\left(1+\frac{2}{\nu}-\frac{3}{\nu^5}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

Γενικῶς : *Ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ τὸ κλάσμα ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.*

Παράδειγμα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ

$$\alpha_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha}, \quad \text{ἔνθα} \quad \alpha > 0.$$

Λύσις (i). Θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\alpha > 1$, τότε εἶναι καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha} > 1$. Θέτοντες $\sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \varepsilon_\nu$, ὅπου $\varepsilon_\nu > 0$, ἔχομεν : $\alpha = (1 + \varepsilon_\nu)^\nu$ ἤ, κατὰ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli (βλ. ἐφαρμογὴ 2α, § 28),

$$\alpha = (1 + \varepsilon_\nu)^\nu \geqq 1 + \nu\varepsilon_\nu > \nu\varepsilon_\nu$$

ὁπότε :
$$0 < \varepsilon_\nu < \alpha \cdot \frac{1}{\nu}.$$

Ἀλλὰ $\lim \alpha \cdot \dfrac{1}{\nu} = 0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν (§146) $\lim \varepsilon_\nu = 0$.

Ὅθεν $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = \lim (1 + \varepsilon_\nu) = 1 + \lim \varepsilon_\nu = 1$.

(ii). Ἔστω ὅτι $\alpha < 1$, τότε εἶναι καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha} < 1$.

Θέτοντες $\sqrt[\nu]{\alpha} = \dfrac{1}{1 + \varepsilon_\nu}$, $\varepsilon_\nu > 0$, ἔχομεν :

$$\alpha = \frac{1}{(1 + \varepsilon_\nu)^\nu} \leqq \frac{1}{1 + \nu\varepsilon_\nu} < \frac{1}{\nu \cdot \varepsilon_\nu} \Longrightarrow \varepsilon_\nu < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\nu} \qquad (\alpha > 0)$$

Ἀλλὰ $\lim \dfrac{1}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{\nu} = \dfrac{1}{\alpha} \lim \dfrac{1}{\nu} = 0$ καὶ ἑπομένως $\lim \varepsilon_\nu = 0$.

Ὅθεν $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$.

(iii). Διὰ $\alpha = 1$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{1} = 1$, ἄρα $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = \lim \sqrt[\nu]{1} = 1$.

Παράδειγμα 4ον. Δείξατε ὅτι :

$$\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1.$$

Ἀπόδειξις. Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει $\sqrt[\nu]{\nu} > 1$ διὰ κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$ ὅθεν δυνάμεθα νὰ θέσωμεν :

(1) $\qquad \sqrt[\nu]{\nu} = (1 + \delta_\nu)^2$, ὅπου $\delta_\nu > 0$ διὰ κάθε $\nu = 2, 3, \ldots$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν : $\sqrt{\nu} = (1 + \delta_\nu)^\nu$ ἢ κατὰ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli

(2) $\qquad \sqrt{\nu} = (1 + \delta_\nu)^\nu \geqq 1 + \nu\delta_\nu > \nu\delta_\nu$

ἢ
$$0 < \delta_\nu < \frac{\sqrt{\nu}}{\nu} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}$$

Ἀλλὰ $\lim \dfrac{1}{\sqrt{\nu}} = 0$ (βλ. πρδ. 4, § 121) καὶ συνεπῶς $\lim \delta_\nu = 0$.

Τότε ὅμως $1 + \delta_\nu \to 1 + 0 = 1$ καὶ $(1 + \delta_\nu)^2 \to 1 \cdot 1 = 1$.

Ὅθεν ἐκ τῆς (1) ἔχομεν : $\lim \sqrt[\nu]{\nu} = 1$.

Παράδειγμα 5ον.

Ἐὰν $\lim \alpha_\nu = \alpha,\ \alpha_\nu > 0,\ \alpha \neq 0 \implies \lim \sqrt{\alpha_\nu} = \sqrt{\alpha}$.

Ἀπόδειξις. Προφανῶς ἰσχύει :

$$0 < \frac{1}{\sqrt{\alpha_\nu} + \sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Ἑπομένως :

$$|\sqrt{\alpha_\nu} - \sqrt{\alpha}| = \frac{|\alpha_\nu - \alpha|}{\sqrt{\alpha_\nu} + \sqrt{\alpha}} < \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot |\alpha_\nu - \alpha|.$$

Ἀλλὰ $\alpha_\nu - \alpha \to 0$ (διότι $\alpha_\nu \to \alpha$), καὶ συνεπῶς $\sqrt{\alpha_\nu} - \sqrt{\alpha} \to 0$.

Ὅθεν :
$$\lim \sqrt{\alpha_\nu} = \sqrt{\alpha}.$$

Παρατηρήσεις :

1). Ἐκ τοῦ συμπεράσματος τοῦ παραδείγματος 5 συνάγεται ὅτι ἐπιτρέπεται νὰ γράφωμεν:

$$\lim \sqrt{\alpha_\nu} = \sqrt{\lim \alpha_\nu}$$

ἤτοι : **τὰ σύμβολα lim καὶ $\sqrt{\ }$ ἐπιτρέπεται νὰ ἐναλλάσσωνται ἀριστερὰ τῆς ἀκολουθίας** α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$

2). Μὲ τὰς ὑποθέσεις τοῦ παραδείγματος 5 ἰσχύει γενικώτερον :

$$\lim \sqrt[k]{\alpha_\nu} = \sqrt[k]{\lim \alpha_\nu}, \quad \text{ἔνθα } k \in \mathbf{N} \ (\text{διατί ;}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

260. Νὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν ὑπάρχουν, τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν μὲ γενικοὺς ὅρους :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 + 3}{2\nu^2 - 5\nu + 7}$, 2) $\alpha_\nu = \sqrt{1 + \dfrac{4}{\nu}}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^2 + 3}$,

4) $\alpha_\nu = \left(2 + \dfrac{1}{\nu}\right)^2$, 5) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^3 - 3\nu + 2}{5\nu^3 + 7}$, 6) $\alpha_\nu = \sqrt[3]{\dfrac{8\nu^2 + 5}{64\nu^2 + \nu + 1}}$

261. Διὰ $\varepsilon > 0$, νὰ προσδιορισθῇ δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε διὰ $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$ νὰ εἶναι :

$$\left| \frac{\nu^2 + 1}{\nu^2 - 1} - 1 \right| < \varepsilon.$$

262. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^\nu \cdot \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

263. Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \nu^2$, $\nu = 1, 2, \ldots$

264. Εἶναι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2}{\nu^2 + 1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ φραγμένη ;

265. Ἐὰν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, δείξατε ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία : $\dfrac{1}{\nu} \cdot \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη καὶ ἰσχύει :

$$\lim \frac{1}{\nu} \alpha_\nu = 0.$$

266. Δείξατε ὅτι : $\lim \dfrac{\nu^4 - 4\nu^3 + \nu + 6}{2\nu^4 + 7\nu^2 + 2\nu - 1} = \dfrac{1}{2}$.

267. Ἐὰν ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνῃ ἐν $\mathbf{R}$, δείξατε ὅτι καὶ ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, ὅπου $\beta_\nu = \alpha_{\nu+1}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$, συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$ καὶ ἰσχύει :

$$\lim \alpha_{\nu+1} = \lim \alpha_\nu .$$

268. Δείξατε ὅτι :
$$\lim \sqrt[\nu]{\nu^2 + \nu} = 1.$$

ΜΟΝΟΤΟΝΟΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΙ

§ 148. Ὁρισμοί.— Ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = 2^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία:
$$2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^\nu, \ldots$$
διατηρεῖ προφανῶς τὴν διάταξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἰσχύει
$$\nu < \mu \Longrightarrow 2^\nu = \alpha_\nu < \alpha_\mu = 2^\mu .$$

Γενικῶς μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν διατηροῦσα, ὡς καὶ ἡ $\alpha_\nu = 2^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ τὴν διάταξιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καλεῖται «**γνησίως αὔξουσα**». Ἀκριβέστερον διὰ μίαν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ ὁρίζομεν:

Ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται **γνησίως αὔξουσα** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ: $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$*

Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζομεν:

Ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται **γνησίως φθίνουσα** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ: $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$*

Οὕτως ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, διότι διὰ πᾶν ν εἶναι:
$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} > \frac{1}{\nu+1} = \alpha_{\nu+1}.$$

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὴν ἀκολουθίαν: $1,1,2,2,3,3,\ldots,\nu,\nu,\ldots$ Διὰ τὴν ἐν λόγῳ ἀκολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει:
$$\nu < \mu \Longrightarrow \alpha_\nu \leqq \alpha_\mu$$
λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι **αὔξουσα.**

Ἀκριβέστερον: *θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι* **αὔξουσα** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ: $\alpha_\nu \leqq \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$*

Ὁμοίως: *Ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι* **φθίνουσα** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ: $\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$*

Οὕτω, λ.χ., ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$ εἶναι φθίνουσα (μὴ αὔξουσα). Κατὰ ταῦτα λέγομεν ὅτι μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι **γνησίως μονότονος** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν αὕτη εἶναι γνησίως αὔξουσα ἢ γνησίως φθίνουσα.

Ἀντιστοίχως δὲ λέγομεν ὅτι ἡ α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι **μονότονος**, ἂν αὕτη εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα. Προφανῶς κάθε γνησίως μονότονος ἀκολουθία εἶναι καὶ μονότονος, δὲν ἰσχύει ὅμως τὸ ἀντίστροφον (διατί;)

Διὰ νὰ δηλώσωμεν τὸ εἶδος τῆς μονοτονίας μιᾶς ἀκολουθίας χρησιμοποιοῦμεν τὰ κάτωθι σύμβολα:

$$\begin{array}{lcll}
\alpha_\nu \Uparrow & \Longleftrightarrow & \alpha_\nu \text{ εἶναι} & \textit{γνησίως αὔξουσα} \\
\alpha_\nu \Downarrow & \Longleftrightarrow & \alpha_\nu \text{ εἶναι} & \textit{γνησίως φθίνουσα} \\
\alpha_\nu \uparrow & \Longleftrightarrow & \alpha_\nu \text{ εἶναι} & \textit{αὔξουσα} \\
\alpha_\nu \downarrow & \Longleftrightarrow & \alpha_\nu \text{ εἶναι} & \textit{φθίνουσα.}
\end{array}$$

Ἡ ἀκολουθία : α, α, α, . . ., α, . . . μὲ ὅλους τοὺς ὅρους της ἴσους μὲ α ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ (μοναδικὴ) περίπτωσις ἀκολουθίας, ἡ ὁποία εἶναι συγχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα. Δηλαδὴ ἰσχύει :

Ἡ α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι σταθερὰ $\iff$ ἡ α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ταυτοχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα.

Εἶναι προφανὲς ὅτι κάθε αὔξουσα ἀκολουθία εἶναι πάντοτε φραγμένη κάτωθεν μὲ κάτω φράγμα τὸν πρῶτον ὅρον της, ἐνῶ κάθε φθίνουσα ἀκολουθία εἶναι φραγμένη ἄνωθεν μὲ ἄνω φράγμα τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς. Ὅθεν ὁσάκις κατωτέρω λέγομεν ὅτι : μία μονότονος ἀκολουθία εἶναι φραγμένη, θὰ ἐννοοῦμεν πάντοτε : ἂν μὲν εἶναι αὔξουσα ἢ γνησίως αὔξουσα ὅτι : αὕτη ἔχει καὶ ἓν **ἄνω** φράγμα, ἂν δὲ εἶναι φθίνουσα ἢ γνησίως φθίνουσα ὅτι : αὕτη ἔχει καὶ ἓν **κάτω** φράγμα.

§ 149. Τὸ μονότονον καὶ ἡ σύγκλισις ἀκολουθίας.—Ἂς θεωρήσωμεν πρῶτον τὴν ἀκολουθίαν ν^2, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἤτοι τήν :

$$1, 4, 9, 16, \ldots, \nu^2, \ldots$$

καὶ δεύτερον τὴν ἀκολουθίαν $\frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἤτοι τήν :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{\nu}{\nu+1}, \ldots$$

Δι' ἀμφοτέρας παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι αὔξουσαι καὶ μάλιστα γνησίως αὔξουσαι ἀκολουθίαι. Ἐκ τούτων ἡ πρώτη δὲν εἶναι φραγμένη (πρβλ. § 117), οὔτε δὲ συγκλίνει πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν. Ἀντιθέτως ἡ δευτέρα, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία $\frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη, διότι : $\left|\frac{\nu}{\nu+1}\right| = \frac{\nu}{\nu+1} \leqq 1$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη συγκλίνει καὶ μάλιστα $\lim \frac{\nu}{\nu+1} = 1$.

Τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία $\frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει γενικῶς διὰ κάθε αὔξουσαν καὶ φραγμένην ἀκολουθίαν. Ἀκριβέστερον δεχόμεθα τὸ ἀκόλουθον ἀξίωμα :

§ 150. Ἀξίωμα.— Κάθε μονότονος καὶ φραγμένη ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι συγκλίνουσα ἐν $\mathbf{R}$.

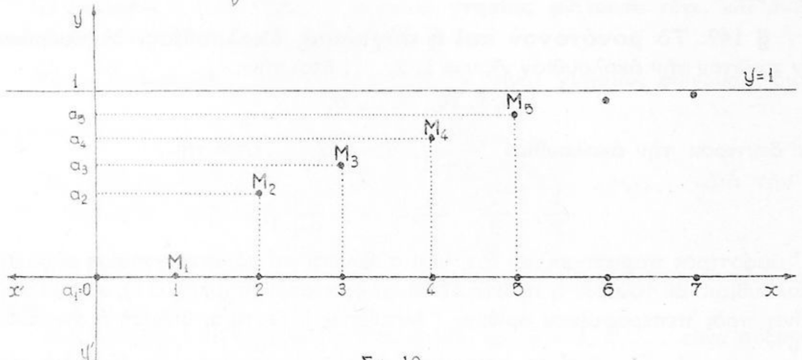
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω ἀξίωμα ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξιν τοῦ ὁρίου εἰς τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ μιᾶς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ ὑπὸ ὡρισμένας ὑποθέσεις. Δὲν παρέχει βεβαίως οὐδεμίαν ἔνδειξιν περὶ τοῦ πῶς θὰ ὑπολογισθῇ σαφῶς τὸ ὅριον, ὁπωσδήποτε ὅμως εἶναι σπουδαῖον νὰ γνωρίζωμεν εἰς πολλὰς περιπτώσεις ὅτι μία ἀκολουθία συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$, διότι τότε εἴμεθα περισσότερον εἰς θέσιν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ὁριακὴν τιμὴν τῆς ἀκολουθίας.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος ἕπονται αἱ εἰδικώτεραι προτάσεις :

α). *Ἐὰν μία ἀκολουθία* a_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι αὔξουσα καὶ ἔχει ἓν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν* s, *τότε εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει :* $\lim a_\nu \leqq s$.

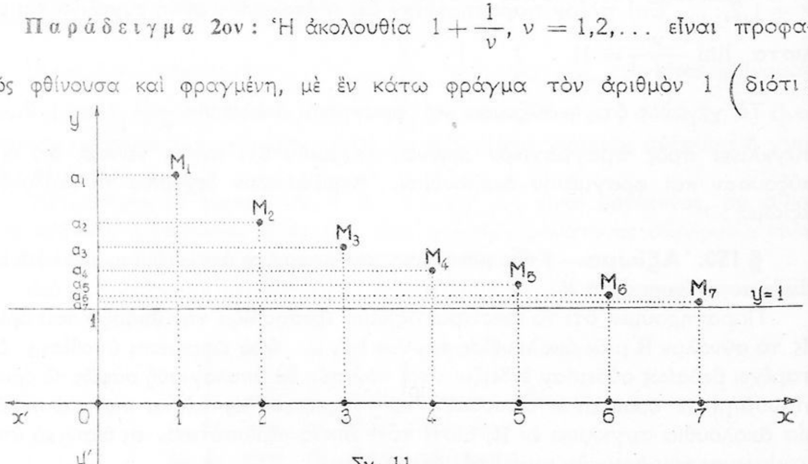
β). *Ἐὰν μία ἀκολουθία* a_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ *εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχει ἓν κάτω φράγμα τὸν ἀριθμὸν* σ, *τότε εἶναι συγκλίνουσα καὶ ἰσχύει :* $\sigma \leqq \lim a_\nu$.

Παράδειγμα 1ον : Ἡ ἀκολουθία $\dfrac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι προφανῶς αὔξουσα καὶ φραγμένη $\left(\text{διότι : } \dfrac{\nu-1}{\nu} = 1 - \dfrac{1}{\nu} < 1\right)$, ὅθεν συγκλίνει πρὸς ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ 1. Δίδομεν εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\dfrac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$



Σχ. 10

Παράδειγμα 2ον : Ἡ ἀκολουθία $1 + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι προφανῶς φθίνουσα καὶ φραγμένη, μὲ ἓν κάτω φράγμα τὸν ἀριθμὸν 1 (διότι :



Σχ. 11

$1 < 1+\frac{1}{\nu}$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots\Big)$, ἑπομένως συγκλίνει πρὸς ἀριθμὸν μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ 1.

Εἰς τὸ σχῆμα (11) τῆς ἔναντι σελίδος δίδομεν τοὺς ἑπτὰ πρώτους ὅρους τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = 1+\frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$

Παρατήρησις. Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς αὐξούσης καὶ μὴ φραγμένης ἀκολουθίας $\alpha_\nu = \nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$, ἡ ὁποία δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, λέγομεν ὅτι αὕτη *ἀπειρίζεται θετικῶς*. Ἀλλὰ καὶ γενικώτερον διὰ μίαν αὔξουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν α_ν, $\nu = 1, 2,\ldots$ θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη «*ἀπειρίζεται θετικῶς*», ἢ ἄλλως «*συγκλίνει πρὸς τὸ* $+\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει πρὸς τὸ* $+\infty$» (τὸ σύμβολον $+\infty$ ἀναγιγνώσκεται: «*σὺν ἄπειρον*»).

Κατ' ἀναλογίαν διὰ μίαν φθίνουσαν καὶ μὴ φραγμένην ἀκολουθίαν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη «*ἀπειρίζεται ἀρνητικῶς*» ἢ ἄλλως «*συγκλίνει πρὸς τὸ* $-\infty$» ἢ ἀκόμη «*τείνει πρὸς τὸ* $-\infty$» (τὸ σύμβολον $-\infty$ ἀναγιγνώσκεται: «*πλὴν ἄπειρον*»).

§ 151. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν μονοτόνων ἀκολουθιῶν

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω ἡ ἀκολουθία τῶν ἐμβαδῶν τῶν εἰς δοθέντα κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων, ἤτοι ἡ ἀκολουθία:

$$E_3,\ E_4,\ E_5, \ldots, E_\nu, \ldots$$

ὅπου E_ν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευράς.

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι:

$$E_3 < E_4 < E_5 < \ldots < E_\nu < E_{\nu+1} < \ldots$$

ἤτοι, ἡ ἀκολουθία E_ν, $\nu = 3,4,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἐπὶ πλέον αὕτη εἶναι πρὸς τὰ ἄνω φραγμένη μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμόν, ὅστις παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἱουδήποτε περιγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κυρτοῦ πολυγώνου. Ὅθεν, δυνάμει τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος, συνάγομεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀκολουθία E_ν, $\nu = 3,4,\ldots$ συγκλίνει πρὸς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν. Τὸν πραγματικὸν αὐτὸν ἀριθμόν, δηλ. τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας E_ν, $\nu = 3, 4, \ldots$, καλοῦμεν, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Παράδειγμα 2ον: Μελετήσατε τὴν ἀκολουθίαν:

$$\alpha_1 = \sqrt{2},\ \alpha_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \alpha_3 = \sqrt{2+\alpha_2} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots, \alpha_\nu = \sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}, \ldots$$

ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν.

Λύσις: Προφανῶς ἔχομεν: $\alpha_1 < \alpha_2$. Ἔστω ὅτι: $\alpha_k < \alpha_{k+1}$, τότε $2+\alpha_k < 2+\alpha_{k+1}$ ἢ $\sqrt{2+\alpha_k} < \sqrt{2+\alpha_{k+1}}$, δηλαδὴ $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$. Ἄρα, δυνάμει τοῦ θεωρ. τῆς τελείας ἐπαγωγῆς (§ 28), θὰ ἔχωμεν: $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}$, $\nu = 2,3,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα (μονότονος).

Ἐξετάζομεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν ἂν εἶναι φραγμένη ἄνωθεν. Πράγματι· $\alpha_1 = \sqrt{2} < 2$, ἔστω ὅτι καὶ $\alpha_{\nu-1} < 2$, τότε $2 + \alpha_{\nu-1} < 4$, ἐξ οὗ : $\sqrt{2+\alpha_{\nu-1}} < 2$ δηλ. $\alpha_\nu < 2$. Ἄρα, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἰσχύει : $\alpha_\nu < 2$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}$, $\nu = 2,3,\ldots$ μὲ $\alpha_1 = \sqrt{2}$ εἶναι φραγμένη ἄνωθεν.

Ἑπομένως, δυνάμει τοῦ ἀξιώματος § 150, ἡ ὡς ἄνω ἀκολουθία συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, ὅστις θὰ εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ 2 (διατί ;).

Ἔστω λοιπὸν $\alpha = \lim \alpha_\nu$, τότε λαμβάνοντες τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $\alpha_\nu = \sqrt{2+\alpha_{\nu-1}}$ ἔχομεν (ἐπειδὴ $\lim \alpha_\nu = \lim \alpha_{\nu+1} = \alpha$) :

$$\lim \alpha_\nu = \lim \sqrt{2+\alpha_{\nu-1}} = \sqrt{2+\lim \alpha_{\nu-1}}$$

ἢ $\quad \alpha = \sqrt{2+\alpha} \quad$ ἢ $\quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν :

$$\alpha = 2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha = -1.$$

Ἡ ρίζα $\alpha = -1$ ἀπορρίπτεται, διότι τὸ ὅριον α πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καθ' ὅσον ὅλοι οἱ ὅροι τῆς αὐξούσης ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί.

Ὅθεν : $$\mathbf{\lim \alpha_\nu = 2.}$$

Παράδειγμα 3ον. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ :

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{2\alpha_\nu + 4}{3} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = 0$$

συγκλίνει ἐν R. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας;

Ἀπόδειξις. Προφανῶς $\alpha_1 < \alpha_2$ $\left(\text{διότι : } \alpha_1 = 0 < \frac{2\alpha_1 + 4}{3} = \frac{4}{3}\right)$.

Ἔστω ὅτι $\alpha_k < \alpha_{k+1}$ δηλ. $\alpha_{k+1} - \alpha_k > 0$, τότε εἶναι καὶ $\alpha_{k+1} < \alpha_{k+2}$, διότι :

$$\alpha_{k+2} - \alpha_{k+1} = \frac{2\alpha_{k+1} + 4}{3} - \frac{2\alpha_k + 4}{3} = \frac{2(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{3} > 0.$$

Ἄρα $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$, ἤτοι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα. Αὕτη εἶναι καὶ φραγμένη μὲ ἓν ἄνω φράγμα τὸν ἀριθμὸν 5, ἤτοι $|\alpha_\nu| \leqq 5 \ \forall\ \nu = 1,2,\ldots$ Πράγματι· $|\alpha_1| = 0 \leqq 5$. Ἔστω ὅτι ἰσχύει : $|\alpha_k| \leqq 5$, θὰ δείξωμεν ὅτι καί : $|\alpha_{k+1}| \leqq 5$. Πράγματι· ἔχομεν :

$$|\alpha_{k+1}| = \left|\frac{2\alpha_k + 4}{3}\right| \leqq \frac{2|\alpha_k| + 4}{3} \leqq \frac{2\cdot 5 + 4}{3} = \frac{14}{3} \leqq 5.$$

Ἄρα α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ φραγμένη ἄνωθεν, ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ αὔξουσα, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 150, συγκλίνει ἐν **R** πρὸς ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ πέντε.

Ἔστω $x \equiv \lim \alpha_\nu$, τότε ἔχομεν :

$$x = \lim \alpha_{\nu+1} = \lim \frac{2\alpha_\nu + 4}{3} = \frac{2x + 4}{3}$$

ἢ $\quad 3x = 2x + 4$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν : $x = 4$.

Ὅθεν ἡ α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 4, δηλ. $\mathbf{\lim \alpha_\nu = 4.}$

Παράδειγμα 4ον: Μελετήσατε τὴν ἀκολουθίαν: α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ

$$\alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{3}{\alpha_\nu}\right) \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{3}{\theta}\right), \text{ ἔνθα } \theta > 0,$$

ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας;

Λύσις. Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι: $\alpha_\nu > 0$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$

'Εξ ἄλλου ἔχομεν, ἀπὸ τὴν γνωστὴν ἀνισότητα: $\frac{x+y}{2} \geqq \sqrt{xy}$, ἔνθα $x, y > 0$:

$$\alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu-1} + \frac{3}{\alpha_{\nu-1}}\right) \geqq \sqrt{\alpha_{\nu-1} \cdot \frac{3}{\alpha_{\nu-1}}} = \sqrt{3}, \text{ ἤτοι } \alpha_\nu \geqq \sqrt{3} \text{ διὰ κάθε } \nu = 1, 2 \ldots$$

'Επίσης ἔχομεν:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{3}{\alpha_\nu}\right) - \alpha_\nu = \frac{3 - \alpha_\nu^2}{2\alpha_\nu} \leqq 0 \text{ (διότι: } \alpha_\nu^2 \geqq 3 \Longleftrightarrow 3 - \alpha_\nu^2 \leqq 0),$$

ἤτοι: $\alpha_\nu \geqq \alpha_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φθίνουσα. 'Επειδὴ δὲ εἶναι καὶ φραγμένη ἐκ τῶν κάτω, διότι

$$\alpha_\nu \geqq \sqrt{3} \quad \forall \ \nu = 1, 2, \ldots, \quad \text{θὰ συγκλίνῃ ἐν } \mathbf{R}.$$

Ἔστω x τὸ $\lim \alpha_\nu$, τότε εἶναι καί:

$$x = \lim \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\lim \alpha_\nu + \frac{3}{\lim \alpha_\nu}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

ἢ $x^2 = 3$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν: $x = \sqrt{3}$ καὶ $x = -\sqrt{3}$ (ἀπορρίπτεται).

Ὅθεν: $$\lim \alpha_\nu = \sqrt{3}.$$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

269. Γράψατε τοὺς πέντε πρώτους ὅρους τῶν κάτωθι ἀκολουθιῶν:

α) $1 + \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, β) $\alpha + (\nu - 1)\omega$, $\nu = 1, 2, \ldots$, γ) $\frac{\nu}{\sqrt{1+\nu^2}}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

δ) $\frac{1}{\nu(\nu+1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ε) $(-1)^{\nu+1}\alpha\omega^{\nu-1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, στ) $\frac{\sqrt{\nu+1}}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

270. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων εἶναι φραγμέναι καὶ ποῖαι δὲν εἶναι:

1) $\alpha_\nu = \frac{2\nu}{\nu^2 + 1}$, 2) $\alpha_\nu = \frac{\nu \,\eta\mu\, 3\nu}{\nu^2 + 1}$, 3) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2 + 1}{2\nu}$,

4) $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}\,\eta\mu\,\frac{\pi\nu}{2}$, 5) $\alpha_\nu = \nu \cdot 3^{-\nu}$, 6) $\alpha_\nu = \frac{\eta\mu\,\nu + \sigma\upsilon\nu^3 5\nu}{\nu^3 \cdot \sqrt{\nu}}$.

271. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολουθιῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μονότονοι καὶ ποῖαι δὲν εἶναι; Καθορίσατε τὸ εἶδος μονοτονίας διὰ τὰς μονοτόνους ἐξ αὐτῶν. Ποῖαι εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποῖαι αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ των;

272. 'Υπολογίσατε τὰς ὁριακὰς τιμὰς τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ γενικοὺς ὅρους:

1) $\alpha_\nu = \frac{3\nu + 2}{\nu^2 + 1}$, 2) $\alpha_\nu = \frac{3\nu^2 - 5}{\nu^2}$, 3) $\alpha_\nu = \left(\frac{2\nu^2 - 3}{3\nu^2 - 2}\right)^2$,

4) $\alpha_\nu = \sqrt{\dfrac{3\nu^2+2}{4\nu^2+\nu+1}}$, 5) $\alpha_\nu = \dfrac{\sqrt{\nu}-1}{\sqrt{\nu}+1}$, 6) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu\cdot\sqrt{\nu}}$,

7) $\alpha_\nu = (\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu})\cdot\sqrt{\nu+\dfrac{1}{2}}$, 8) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+\sqrt{\nu}}-\sqrt{\nu-\sqrt{\nu}}$.

273. Ὁμοίως :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2+3}{2\nu^2-3\nu+1}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2+3\nu-1}{5\nu^3-\nu+7}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^4+2}{\nu^2-4}-\dfrac{2\nu^5-3\nu^3}{2\nu^3+1}$,

4) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^2+\nu}-\nu$, 5) $\alpha_\nu = \dfrac{1+2+\cdots+\nu}{\nu^2}$, 6) $\alpha_\nu = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+\nu^2}{\nu^3}$.

274. Ἐὰν $\lim \alpha_\nu = \alpha$ καὶ $\rho \in \mathbf{N}$, δείξατε ὅτι : $\lim(\alpha_\nu^\rho) = \alpha^\rho$, δηλ. $\lim(\alpha_\nu^\rho) = (\lim\alpha_\nu)^\rho$.

275. Διὰ $\varepsilon > 0$, νὰ προσδιορισθῇ δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, ὥστε διὰ $\nu \geqq \nu_0(\varepsilon)$, νὰ εἶναι

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon,$$

ὅπου α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2\nu+1}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2-1}{\nu^2+1}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + 2\sigma\upsilon\nu 5\nu}{\sqrt{\nu}}$, 4) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}$.

Ἐφαρμογὴ διὰ $\varepsilon = 10^{-6}$.

276. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1)\quad \lim\sqrt{\frac{9\nu^2}{\nu^2+3}} = 3, \qquad 2)\quad \lim\sqrt[3]{\frac{\nu^2+\nu-1}{27\nu^2-4}} = \frac{1}{3}.$$

277. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκολουθίαι :

$$\alpha_\nu = \frac{2\nu^2-1}{3\nu^2+2}, \qquad \beta_\nu = \frac{2\nu+3}{3\nu-2}, \qquad \gamma_\nu = \sqrt{\frac{4\nu-3}{9\nu+5}}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ἔχουν κοινὸν ὅριον.

278. Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι :

$$\alpha_\nu = \nu^2, \qquad \beta_\nu = \nu, \qquad \gamma_\nu = \nu^3, \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

(i) $\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu = \lim \gamma_\nu = +\infty$

(ii) $\lim \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = +\infty$, $\lim \dfrac{\gamma_\nu}{\beta_\nu} = +\infty$, $\lim \dfrac{\gamma_\nu}{\alpha_\nu} = +\infty$

(iii) $\lim \dfrac{\alpha_\nu}{\gamma_\nu} = \lim \dfrac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \lim \dfrac{\beta_\nu}{\gamma_\nu} = 0$.

279. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι $\lim\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = e$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τύπων :

1) $\alpha_\nu = \left(1+\dfrac{1}{2\nu}\right)^\nu$, 2) $\alpha_\nu = \left(1+\dfrac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}$, 3) $\alpha_\nu = \left(1-\dfrac{1}{\nu^2}\right)^\nu$.

280. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\lim\left[\frac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}}\right] = 1$$

(Ὑ π ό δ ε ι ξ ι ς : Προσθέσατε κατὰ μέλη τὰς προφανεῖς ἀνισότητας :

$\dfrac{1}{\sqrt{\nu^2+\nu}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{\nu^2+k}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{\nu^2+1}}$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ καὶ ἐφαρμόσατε τὴν ἰδιότητα XII, § 146).

281. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης :

$$\left| \lim \frac{\nu^2+3}{2\nu^2-1} + x \right| < \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

282. Δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι ἀκολουθίαι εἶναι μονότονοι καὶ φραγμέναι :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu^2+1}$, 3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^2+1}$, 4) $\alpha_\nu = \dfrac{4\nu+1}{5\nu}$.

283. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ :

$$\alpha_{\nu+1} = \sqrt{1+\alpha_\nu} \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = 1$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα, φραγμένη καὶ ὅτι : $\lim \alpha_\nu = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

284. Δίδεται ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, μὲ $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{4\alpha_\nu + 3}$ καὶ $\alpha_1 = 5$. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι συγκλίνουσα καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριόν της.
(Ὑπόδειξις : Δείξατε ὅτι εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη κάτωθεν ὑπὸ τοῦ $\sqrt{3}$ κτλ.).

285. Δίδεται ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι :

$$\alpha_1 = \lambda > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_{\nu+1} = \frac{1}{2}\left(\alpha_\nu + \frac{\lambda^2}{\alpha_\nu}\right) \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \ldots$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι συγκλίνουσα καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριόν της.

(Ὑπόδειξις : Στηριχθῆτε ἐπὶ τῆς γνωστῆς ἀνισότητος $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geqq xy$ καὶ δείξατε ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἀκολουθία εἶναι φραγμένη καὶ φθίνουσα).

286. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ : $\alpha_{\nu+1} = \dfrac{3\alpha_\nu + 1}{4}$ καὶ $\alpha_1 = 0$ εἶναι αὔξουσα καὶ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ὑπὸ τῆς μονάδος. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας ;

(Ὑπόδειξις : Προχωρήσατε ὡς εἰς τὸ παράδειγμα 3, § 151).

287. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ : $\alpha_{\nu+1} = \sqrt{2\alpha_\nu}$ καὶ $\alpha_1 = 1$ εἶναι αὔξουσα καὶ φραγμένη. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας ;

288. Μελετήσατε ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὴν σύγκλισιν τὴν ἀκολουθίαν : β_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\text{μέ : } \beta_{\nu+1} = \frac{3\beta_\nu - 4}{5} \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1, 2, \ldots \text{ καὶ } \beta_1 = -3.$$

Ποῖον τὸ ὅριον τῆς ἐν λόγῳ ἀκολουθίας ;

289. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία : α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ :

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha + \alpha_\nu^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_1 = \alpha, \quad \text{ὅπου} \quad 0 < \alpha \leqq \frac{1}{4}$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα καὶ ὅτι συγκλίνει εἰς τὴν μικροτέραν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως : $t^2 - t + \alpha = 0$.

290. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

εἶναι γνησίως αὔξουσα.

291. Νὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν ὑπάρχουν, αἱ ὁριακαὶ τιμαὶ τῶν ἀκολουθιῶν μὲ γενικοὺς ὅρους :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{1^3 + 2^3 + \cdots + \nu^3}{\nu^4}$, 2) $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu^2(\nu - 3 + 4\nu^2)}{5(\nu-1)^3 \cdot (3\nu+4)}$.

292. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι : $\lim \left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu = e$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων :

1) $\alpha_\nu = \left(1 - \dfrac{1}{\nu}\right)^\nu$, 2) $\alpha_\nu = \left(1 + \dfrac{2}{\nu}\right)^\nu$, 3) $\alpha_\nu = \left(1 + \dfrac{3}{\nu}\right)^\nu$.

293. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

εἶναι γνησίως φθίνουσα.

294. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1)\quad \lim\left(1 + \frac{\alpha}{\nu}\right)^{\nu} = e^{\alpha}, \qquad 2)\quad \lim\left(1 + \frac{1}{\nu^2}\right)^{\nu} = \sqrt{e},$$

γνωστοῦ ὄντος, ὅτι : $\lim\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu} = e.$

295. Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ δείξατε ὅτι :

$$\lim\left(\sqrt{(\nu+\alpha)(\nu+\beta)} - \nu\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

296. Δείξατε ὅτι αἱ ἀκολουθίαι α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, αἱ ὁποῖαι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι τύπων, εἶναι πᾶσαι μηδενικαί :

$$1)\quad \alpha_\nu = \frac{2^\nu}{\nu!}, \qquad 2)\quad \alpha_\nu = \frac{\nu!}{\nu^\nu}, \qquad 3)\quad \alpha_\nu = \frac{2^\nu \cdot \nu!}{(3\nu)^\nu},$$

ὅπου τὸ σύμβολον $\nu!$ (ν παραγοντικὸν) παριστᾷ τὸ γινόμενον : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu \equiv \nu!$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

§ 152. Εἰσαγωγή. — Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ὡρίσαμεν τὴν ἔννοιαν τῆς ἀκολουθίας καὶ ἀπεδείξαμεν τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν ἀκολουθιῶν. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ μελετήσωμεν τρεῖς εἰδικὰς κατηγορίας ἀκολουθιῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει καὶ μίαν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα. Ἀναλόγως τῆς χαρακτηριστικῆς ταύτης ἰδιότητος διακρίνομεν τὰς ἀκολουθίας αὐτάς, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **προόδους**, εἰς : **α) Ἀριθμητικὰς προόδους, β) Ἁρμονικὰς προόδους** καὶ γ) **Γεωμετρικὰς προόδους.**

I. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 153. Ὁρισμοί. — Ἔστω α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Θὰ λέγωμεν ὅτι «*ἡ ἀκολουθία :*

$$\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,,\ \ldots,\ \alpha_\nu\,,\ \ldots \tag{1}$$

εἶναι μία **ἀριθμητικὴ πρόοδος** ἢ **πρόοδος κατὰ διαφορὰν** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἕκαστος ὅρος της* (ἐκτὸς τοῦ πρώτου) *προκύπτῃ ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ*».

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμός, ὅστις προστίθεται εἰς κάθε ὅρον τῆς προόδου διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον, καλεῖται «**λόγος**» τῆς ἀριθμ. προόδου καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὸ γράμμα ω. Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) καλοῦνται **ὅροι τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.**

Οὕτω, π.χ., ἡ ἀκολουθία :

$$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ldots \tag{2}$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = 2$.

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$19,\ 16,\ 13,\ 10,\ 7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \ldots \tag{3}$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = -3$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τὸν ὁποῖον διετυπώσαμεν ἀνωτέρω, συνάγομεν ὅτι : ἐὰν α_ν καὶ $\alpha_{\nu+1}$ εἶναι δύο διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ λόγον ω, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega,\quad \nu = 1,2,\ldots}} \tag{4}$$

Ἐκ τῆς (4) προκύπτει : $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε $\nu = 1, 2,\ldots$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τῆς ἀριθμητικῆς προόδου :

Ἀριθμητικὴ πρόοδος *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας δύο οἱωνδήποτε διαδοχικοὶ ὅροι της ἔχουν διαφοράν, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν αὐτὸν πάντοτε ἀριθμόν, ὅστις καλεῖται* **λόγος** *τῆς ἀριθμητικῆς προόδου.*

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν τώρα τὰ ἑξῆς :

α'). Ἐὰν ὁ λόγος ω εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τότε $\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu > 0$ ἢ $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλ. ἡ πρόοδος α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι **γνησίως αὔξουσα** (ἄρα καὶ αὔξουσα).

β'). Ἐὰν $\omega < 0$, τότε $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλ. ἡ πρόοδος α_ν, $\nu = 1, 2 \ldots$ εἶναι **γνησίως φθίνουσα.** Οὕτως ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος (2) εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐνῶ ἡ (3) εἶναι γνησίως φθίνουσα.

Παρατήρησις. Εἰς τὴν τετριμμένην περίπτωσιν καθ' ἣν $\omega = 0$, ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι μία ἀκολουθία ἴσων ἀριθμῶν (σταθερὰ ἀκολουθία) καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι τότε, καὶ μόνον τότε συγχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα, ὡς ἐλέχθη καὶ εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον.

Ἰδιότητες τῆς ἀριθμητικῆς προόδου

§ 154. Ἰδιότης Ι.— Ὁ νιοστὸς ὅρος α_ν ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον α_1 καὶ λόγον ω εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς προστεθῇ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Ἤτοι :
$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Διὰ $\nu = 1$ ἡ (1) προφανῶς ἀληθεύει.

Δεχόμεθα ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu = k$, ἤτοι ὅτι ἰσχύει : $\alpha_k = \alpha_1 + (k-1)\,\omega$.

Ἐξ αὐτῆς, διὰ προσθέσεως εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ λόγου ω, ἔχομεν :

$\alpha_k + \omega = \alpha_1 + (k-1)\,\omega + \omega$. Ἀλλὰ $\alpha_k + \omega = \alpha_{k+1}$ (ὁρισμὸς ἀριθμ. προόδου).

Ἄρα : $\alpha_{k+1} = \alpha + (k-1)\omega + \omega$ ἢ $\alpha_{k+1} = \alpha_1 + k\omega = \alpha_1 + [(k+1)-1]\,\omega$, ἤτοι ἡ ἰδιότης Ι ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu = k+1$, ἑπομένως, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, ἀληθεύει διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$

Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθῇ ὁ 15ος ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 7, 15, 23, 31,...

Λύσις : Ἐνταῦθα ἔχομεν : $\alpha_1 = 7$, $\omega = 8$, $\nu = 15$, $\alpha_{15} = ;$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$ εὑρίσκομεν :

$$\alpha_{15} = 7 + (15-1)\cdot 8 = 7 + 14 \cdot 8 = 119.$$

Παρατηρήσεις : α'). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι τελείως ὡρισμένη, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος της α_1 καὶ ὁ λόγος της ω, διότι τότε οἱ ὅροι της θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

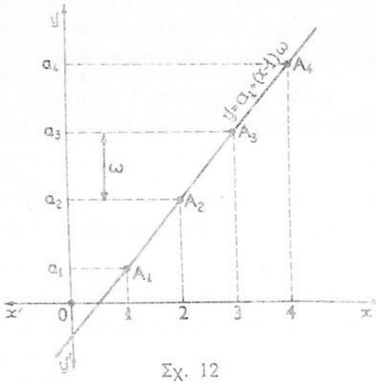
1ος ὅρος,	2ος ὅρος,	3ος ὅρος,	4ος ὅρος,	5ος ὅρος, . . .	
α_1,	$\alpha_1 + \omega$,	$\alpha_1 + 2\omega$,	$\alpha_1 + 3\omega$,	$\alpha_1 + 4\omega, \ldots$	(2)

β'). Ὁ τύπος (1) εἶναι μία ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν α_ν, α_1, ν, ω. Ὡς πρὸς ἑκάστην μεταβλητὴν ἡ ἐξίσωσις εἶναι πρώτου βαθμοῦ· ἄρα ἐὰν δοθοῦν αἱ τιμαὶ τριῶν ἐκ τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν, δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν καὶ τὴν τετάρτην, ἐπιλύοντες μίαν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ.

γ'). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως (β) ἀγόμεθα εἰς μίαν *«γεωμετρικὴν παράστασιν»* τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὸν α_1 καὶ λόγον ω. Πράγματι· ἂς θεωρήσωμεν ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων Ox, Oy καὶ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox τὰς διαδοχικὰς τιμὰς τοῦ ν, δηλ. $\nu = 1, 2, \ldots$

Σημειοῦμεν ἀκολούθως τὰ σημεῖα:

A_1 μὲ συντεταγμένας 1 καὶ α_1.
A_2 » » 2 καὶ $\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$
A_3 » » 3 καὶ $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\omega$
. . . .
A_ν » » ν καὶ $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$
. . . .



Σχ. 12

Τὰ *μεμονωμένα* αὐτὰ σημεῖα δίδουν μίαν γεωμετρικὴν παράστασιν τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὸ α_1 καὶ λόγον ω. Διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν τῆς γραμμῆς (εὐθείας), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$, ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον (1) νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ν μὲ τὸ x καὶ τὸ α_ν μὲ τὸ y, τότε:

$$y = \alpha_1 + (x-1)\,\omega. \qquad (\varepsilon)$$

§ 155. Ἰδιότης ΙΙ. — Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων, τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἰσάκις ἀπεχόντων (ἰσαπεχόντων) τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν «ἄκρων» ὅρων.

Ἀπόδειξις: Ἔστω μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων καὶ λόγον ω. Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχῃ ν ὅρους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$, τότε οἱ ὅροι α_1 καὶ α_ν εἶναι οἱ **ἄκροι** ὅροι. Δύο δὲ ὅροι τῆς προόδου λέγονται **«ἰσαπέχοντες»** τῶν ἄκρων, ἐὰν ὁ εἷς ἔχῃ τόσους ὅρους πρὸ αὐτοῦ, ὅσους ὁ ἄλλος μετ' αὐτοῦ. Οὕτω, λ.χ., οἱ ὅροι α_2 καὶ $\alpha_{\nu-1}$ εἶναι ἰσαπέχοντες. Ὁμοίως οἱ: $\alpha_3, \alpha_{\nu-2}$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι:

$$\alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = (\alpha_1 + \omega) + \alpha_{\nu-1} = \alpha_1 + (\alpha_{\nu-1} + \omega) = \alpha_1 + \alpha_\nu$$

$$\alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = (\alpha_2 + \omega) + \alpha_{\nu-2} = \alpha_2 + (\alpha_{\nu-2} + \omega) = \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_1 + \alpha_\nu$$

$$\alpha_4 + \alpha_{\nu-3} = (\alpha_3 + \omega) + \alpha_{\nu-3} = \alpha_3 + (\alpha_{\nu-3} + \omega) = \alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = \alpha_1 + \alpha_\nu \text{ κ.ο.κ.}$$

Ὥστε, ἐὰν οἱ ν ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τότε:

$$(\alpha_2 + \alpha_{\nu-1}) = (\alpha_3 + \alpha_{\nu-2}) = \cdots = \alpha_1 + \alpha_\nu\,.$$

Οὕτω, π.χ., οἱ ὀκτὼ ἀριθμοί: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 εὑρισκόμενοι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, πληροῦν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, διότι εἶναι:

$$3 + 17 = 20, \quad 5 + 15 = 20, \quad 7 + 13 = 20, \quad 9 + 11 = 20.$$

Παρατήρησις : Ἐὰν ὑπάρχῃ **«μεσαῖος ὅρος»**, ἤτοι ὅρος προηγούμενος καὶ ἑπόμενος τοῦ αὐτοῦ πλήθους ὅρων (καὶ τοῦτο θὰ συμβαίνῃ ὁσάκις τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι περιττόν), τότε τὸ διπλάσιον τοῦ μεσαίου ὅρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων. Π.χ., ἂς θεωρήσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοοδον ἐκ τῶν πέντε ὅρων : 3, 5, 7, 9, 11, τότε $3+11=5+9=2\cdot 7$.

§ 156. Πόρισμα.– Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, καθ' ἣν τάξιν γράφονται, εἶναι :

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma} \tag{1}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$ καλεῖται **ἀριθμητικὸς μέσος** τῶν α καὶ γ.

Γενικῶς *ἐὰν ἔχωμεν ν ἀριθμοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καλοῦμεν* **ἀριθμητικὸν μέσον** *τῶν ν αὐτῶν ἀριθμῶν καὶ παριστῶμεν τοῦτον μὲ M_A, τὸν πραγματικὸν ἀριθμόν :*

$$\boxed{M_A = \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}} \tag{2}$$

§ 157. Ἰδιότης III.– Τὸ ἄθροισμα $\Sigma_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\,\nu}{2}} \tag{1}$$

Ἀπόδειξις. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν τὸν ἀνωτέρω τύπον διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ἡ ἀπόδειξις ὅμως αὕτη, ὡς εὔκολος, ἐπαφίεται εἰς τὸν ἀναγνώστην. Θὰ δώσωμεν μίαν ἄλλην ἀπόδειξιν, ἡ ὁποία στηρίζεται εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα :

Γράφομεν ἀφ' ἑνός : $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{\nu-2} + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$

καὶ ἀφ' ἑτέρου : $\Sigma_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu-2} + \cdots + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_1$.

Προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1+\alpha_\nu) + (\alpha_2+\alpha_{\nu-1}) + \cdots + (\alpha_{\nu-1}+\alpha_2) + (\alpha_\nu+\alpha_1)$$

ἢ ἐπειδὴ $\alpha_1+\alpha_\nu = \alpha_2+\alpha_{\nu-1} = \cdots = \alpha_{\nu-1}+\alpha_2 = \alpha_\nu+\alpha_1$ (λόγῳ τῆς ἰδιότ. II) καὶ αἱ παρενθέσεις εἶναι ν τὸ πλῆθος, θὰ ἔχωμεν :

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1+\alpha_\nu)\cdot\nu \quad ἢ \quad \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1+\alpha_\nu)\cdot\nu}{2}.$$

Πόρισμα.– Τὸ ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου $\alpha_1 = \alpha$, τοῦ λόγου ω καὶ τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha+(\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2}} \tag{2}$$

Παρατήρησις. Οἱ δύο τύποι :

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_\nu = \frac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\cdot \nu}{2}$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τοὺς α_1, α_ν, ω, ν, Σ_ν.

Ἐὰν λοιπὸν μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν, τότε οἱ ἀνωτέρω δύο τύποι ἀποτελοῦν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους, λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν τοὺς ὑπολοίπους δύο.

Ἐφαρμογή. Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 2 καὶ ὁ ἑνδέκατος 92. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων ὅρων αὐτῆς.

Λύσις : Ἔχομεν $\alpha_1 = 2$, $\alpha_{11} = 92$, $\omega = ;$, $\Sigma_{20} = \;;$

Ἐκ τοῦ τύπου $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\,\omega$ ἔχομεν διὰ $\nu = 11$, $92 = 2 + 10\cdot\omega$, ἐξ οὗ : $\omega = 9$.

Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι : $\quad 2, 11, 20, 29, 38, \ldots$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τοῦ τύπου : $\Sigma_\nu = \dfrac{[2\alpha + (\nu - 1)\,\omega]\cdot\nu}{2}$ λαμβάνομεν διὰ $\nu = 20$

$$\Sigma_{20} = \frac{(4 + 19\cdot 9)\cdot 20}{2} = 1750.$$

§ 158. Παρεμβολὴ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων.

– **Ὁρισμοί :** Οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ καλοῦνται **ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι** δοθέντων ἀριθμῶν α, τ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πεπερασμένη ἀκολουθία :

$$\alpha,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\mu,\ \tau$$

εἶναι μία ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν α, τ καλοῦμεν **παρεμβολὴν μ ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων** τὴν εὕρεσιν μ ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία :

$\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \tau$ νὰ εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ὡς ἄνω ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν λόγον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου : $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \tau$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω' τὸν λόγον τῆς προόδου αὐτῆς, τότε, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων της εἶναι $\mu + 2$, ὁ τ θὰ εἶναι ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν $\mu + 2$ τάξιν καὶ συνεπῶς θὰ ἰσοῦται μέ : $\alpha + (\mu + 2 - 1)\,\omega' = \alpha + (\mu + 1)\,\omega'$.

Ὥστε : $\quad \tau = \alpha + (\mu + 1)\,\omega'$

Ἄρα :
$$\boxed{\omega' = \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος οὗτος καλεῖται **τύπος παρεμβολῆς ἀριθμητικῶν ἐνδιαμέσων** ἢ συντόμως **τύπος τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς.**

Ὁρισθέντος, ἐκ τοῦ τύπου (1), τοῦ *«λόγου παρεμβολῆς»* ω', οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ :

$$x_1 = \alpha + \frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \quad x_2 = \alpha + 2\,\frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}, \ldots, x_\mu = \alpha + \mu\,\frac{\tau - \alpha}{\mu + 1}.$$

Ἐφαρμογή: Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 41 νὰ παρεμβληθοῦν 7 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι.

Λύσις: Ὁ τύπος (1) τῆς § 158 δίδει διὰ $\tau = 41,\ \alpha = 9,\ \mu = 7$

$$\omega' = \frac{41-9}{7+1} = 4$$

καὶ ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ:

$$9,\quad 13,\quad 17,\quad 21,\quad 25,\quad 29,\quad 33,\quad 37,\quad 41.$$

§ 159. Συμμετρικὴ παράστασις τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου πεπερασμένου πλήθους ὅρων. — Ἐπειδὴ εἰς διάφορα προβλήματα ἀριθμητικῶν προόδων εἰσέρχονται τρεῖς ἢ περισσότεροι ἄγνωστοι διὰ τοῦτο πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀγνώστων, ἰδία ὅταν δίδεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, σκόπιμον εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις 1η: Ἡ πρόοδος ἔχει περιττὸν πλῆθος ὅρων.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχῃ $(2\nu+1)$ ὅρους, τότε ὑπάρχει μεσαῖος τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ ἓν γράμμα λ.χ. μὲ x καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι ω, γράφομεν τὴν πρόοδον ὡς ἑξῆς:

$$x-\nu\omega, \ldots, x-2\omega,\ x-\omega,\ x,\ x+\omega,\ x+2\omega, \ldots,\ x+\nu\omega.$$

Περίπτωσις 2α: Ἡ πρόοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ὅρων (ἔστω 2ν).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν δύο « μεσαῖοι » ὅροι τοὺς ὁποίους παριστῶμεν μέ: $x-\lambda$ καὶ $x+\lambda$, ὅτε ὁ λόγος ω τῆς προόδου εἶναι:

$\omega = (x+\lambda)-(x-\lambda) = 2\lambda$. Τότε ἡ πρόοδος γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$x-(2\nu-1)\lambda, \ldots, x-3\lambda,\ x-\lambda,\ x+\lambda,\ x+3\lambda,\ \ldots,\ x+(2\nu-1)\lambda.$$

Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν **ὁ x δὲν εἶναι ὅρος** τῆς ἀριθμ. προόδου.

Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 33, τὸ δὲ γινόμενον 1287.

Λύσις: Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν μεσαῖον ὅρον τῆς προόδου καὶ μὲ ω τὸν λόγον, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ θὰ εἶναι: $x-\omega,\ x,\ x+\omega$. Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}(x-\omega)+x+(x+\omega) &= 33\\ (x-\omega)\cdot x\cdot(x+\omega) &= 1287\end{aligned}\right\}\quad \text{ἢ}\quad \begin{aligned}3x &= 33 &&(1)\\ x\,(x^2-\omega^2) &= 1287 &&(2)\end{aligned}$$

Ἡ (1) δίδει ἀμέσως $x = 11$. Τότε ἡ (2) λυομένη ὡς πρὸς ω δίδει: $\omega = \pm 2$.

Ἄρα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι: 9, 11, 13 ἢ 13, 11, 9.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

297. Γράψατε τοὺς ὀκτὼ πρώτους ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $x^2-5x+6=0$.

298. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος ἀριθμητικῆς προόδου ἐὰν $\alpha_1 = 3$ καὶ $\alpha_{12} = 80$.

299. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

300. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πλήθους αὐτῶν.

301. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν.

(**Ὑπόδειξις :** Χρησιμοποιήσατε τὴν ταυτότητα : $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ καὶ θέσατε διαδοχικῶς $x = 1, 2, \ldots, \nu$ ἐπὶ πλέον λάβατε ὑπ' ὄψιν τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀσκήσεως 299).

302. Ἐὰν $\Sigma_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3$ καὶ $\Sigma_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu$, ὑπολογίσατε τὸ Σ_3 ἀναχωροῦντες ἐκ τῆς ταυτότητος : $(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ καὶ ἀκολούθως δείξατε ὅτι : $\Sigma_3 = (\Sigma_1)^2$.

303. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 25 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ ἀριθμοῦ 11.

304. Εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον δίδονται ἐκ τῶν πέντε στοιχείων α_1, ω, ν, α_ν, Σ_ν τρία οἱαδήποτε. Πόσα διάφορα προβλήματα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ ποῖα; Εἰς ἕκαστον πρόβλημα νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἄγνωστα συναρτήσει τῶν ἑκάστοτε γνωστῶν καὶ νὰ γίνῃ, ὅπου ἀπαιτεῖται, ἡ σχετικὴ διερεύνησις.

305. Ὁρίσατε τὸν k οὕτως, ὥστε οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου : (i) $3k$, $k+4$, $k-1$, (ii) $3k-7$, $k+2$, $12-2k$.

306. Δείξατε ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε καὶ οἱ ἀριθμοί : $x = \alpha^2 - \beta\gamma$, $y = \beta^2 - \alpha\gamma$, $z = \gamma^2 - \alpha\beta$

εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου. Ποῖος ὁ λόγος τῶν λόγων τῶν δύο αὐτῶν προόδων;

307. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος ἀριθμ. προόδου γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ ν ἰσοῦται πρός : $3\nu^2 + \nu$.

308. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ κάτωθι ἄθροισμα ἐκ ν ὅρων :

$$\Sigma = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots$$

(**Ὑπόδειξις :** Παρατηρήσατε ὅτι : $\alpha_\nu = \nu(\nu+1)(\nu+2) = \nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu$).

309. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 9 καὶ 34 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι οὕτως, ὥστε νὰ προκύψῃ μία ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 11 ὅρους. Ποῖοι εἶναι οἱ ὅροι οὗτοι;

310. Δείξατε ὅτι ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, καθ' ἣν τάξιν δίδονται, ἀνήκουν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον (χωρὶς κατ' ἀνάγκην νὰ εἶναι διαδοχικοὶ) εἶναι : ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{\beta-\alpha}{x+1} = \frac{\gamma-\beta}{y+1}$$

ἔχει ἀκεραίαν καὶ θετικὴν λύσιν ὡς πρὸς x, y, ἔνθα x εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ α καὶ β καὶ y τῶν εὑρισκομένων μεταξὺ β καὶ γ.

311. Ἐξετάσατε ἂν οἱ ἀριθμοί : $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ἀποτελοῦν ὅρους (οἱασδήποτε τάξεως) μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀριθμητικῆς προόδου.

312. Πόσους ἀριθμ. ἐνδιαμέσους πρέπει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 19, ὥστε ὁ δεύτερος ἐνδιάμεσος νὰ ἔχῃ πρὸς τὸν τελευταῖον ἐνδιάμεσον λόγον ἴσον μὲ 1/6.

313. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς 26, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των πρὸς 214.

314. Ὁ τέταρτος καὶ ὁ ὄγδοος ὅρος ἀριθμ. προόδου ἔχουν ἄθροισμα 18, οἱ δὲ κύβοι των ἔχουν ἄθροισμα 3402. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

315. Νὰ εὑρεθοῦν πέντε ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες διαδοχικοὺς ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 45 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι 137/180.

316. Εἰς μίαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\nu \in \mathbf{N}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου : $\Sigma_\nu = 8\nu^2 - \nu$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τάξις τοῦ ὅρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τιμὴν 263.

317. Τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων δύο ἀριθμητικῶν προόδων ἔχουν λόγον $\dfrac{7\nu+2}{\nu+1}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $\nu \in \mathbf{N}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν πέμπτων ὅρων τῶν δύο προόδων.

318. Ἐὰν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις :

$$\frac{\alpha+\delta}{2} > \sqrt[4]{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

319. Προσδιορίσατε τὰ α καὶ β οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισώσεως $x^2 - \alpha x + \beta = 0$ καὶ αἱ ρίζαι ρ_3, ρ_4 τῆς $x^2 - (5\alpha - 4)x + \beta = 0$, γραφόμεναι κατὰ τὴν τάξιν ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

320. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ρίζαι της ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

321. Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν α, β, γ, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως : $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, νὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

II. ΑΡΜΟΝΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 160. Ὁρισμός. – *Μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots \qquad (1)$$

εἶναι **ἁρμονικὴ πρόοδος** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία*

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}, \ldots \qquad (2)$$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Οὕτως, ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$$

εἶναι ἁρμονικὴ πρόοδος, διότι οἱ ἀντίστροφοί των, κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν,

$$3, 5, 7, 9, \ldots$$

ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον (μὲ λόγον $\omega = 2$).

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου ὁρισμοῦ τῆς ἁρμονικῆς προόδου συνάγομεν, ὅτι ζητήματα ἀφορῶντα ἁρμονικὴν πρόοδον ἀνάγονται εἰς ἐπίλυσιν ζητημάτων τῆς ἀντιστοίχου ἀριθμητικῆς προόδου. Ἕνεκα τούτου θὰ μελετήσωμεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας τῶν ἁρμονικῶν προόδων ὑπὸ μορφὴν ἐφαρμογῶν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων.

§ 161. Εὕρεσις τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου τῆς ὁποίας δίδονται οἱ δύο πρῶτοι ὅροι. – Ἔστω ἡ ἁρμονικὴ πρόοδος :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots \qquad (1)$$

Τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν ταύτης, ἡ ἀκολουθία : $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots, \frac{1}{\alpha_\nu}, \ldots$ (2)

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}$.

Ἀλλὰ ὁ νιοστὸς ὅρος τῆς (2) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1) τῆς § 154, ἤτοι :

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha_1} + (\nu - 1) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{\alpha_2 + (\nu-1)(\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\alpha_1(\nu-1) - \alpha_2(\nu-2)}{\alpha_1\alpha_2}$$

Ἄρα ὁ νιοστὸς ὅρος α_ν τῆς ἁρμονικῆς προόδου (1) εἶναι τότε ὁ :

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1(\nu-1)-\alpha_2(\nu-2)}} \qquad (3)$$

§ 162. Συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

Ἐφ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, οἱ ἀντίστροφοί των $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν (§ 160), εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ συνεπῶς (§ 156) θὰ ἔχωμεν :

$$2\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \beta=\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}}$$

Ἄρα :

$$\boxed{\beta=\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἀληθεύῃ ἡ (1), τότε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου (διατί;).

Ὅθεν : **Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου εἶναι ἡ ἰσότης (1).**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ β καλεῖται **ἁρμονικὸς μέσος** τῶν α καὶ γ.

Γενικῶς : *Δοθέντων ν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καλοῦμεν* **ἁρμονικὸν μέσον** *αὐτῶν καὶ τὸν συμβολίζομεν διὰ M_H, τὸν ἀριθμόν :*

$$\boxed{M_H=\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_\nu}}} \qquad (2)$$

Παρατήρησις : Ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν :

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} \quad (\text{διατί;}) \qquad (3)$$

Κατὰ ταῦτα, **ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι, κατὰ τὴν δοθεῖσαν τάξιν, διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ νὰ ἀποτελοῦν ἁ ρ μ ο ν ι κ ὴ ν ἀ ν α λ ο γ ί α ν.**

§ 163. Παρεμβολὴ ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων.– Οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ καλοῦνται **ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι** δοθέντων ἀριθμῶν α, τ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία : $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \tau$ εἶναι ἁρμονικὴ πρόοδος.

Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν α, τ καλοῦμεν **παρεμβολὴν μ ἁρμονικῶν ἐνδιαμέσων**, τὴν εὕρεσιν μ ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία $\alpha, x_1, x_2, \ldots, x_\mu, \tau$ νὰ εἶναι ἁρμονικὴ πρόοδος.

Τίθεται τώρα τὸ ἑξῆς **πρόβλημα :**

Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ τ νὰ παρεμβληθοῦν μ ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παρεμβληθοῦν μ ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\tau}$. Ἐκ τοῦ τύπου (1) (§ 158) τῆς ἀριθμητικῆς παρεμβολῆς εὑρίσκομεν ἐν προκειμένῳ :

$$\omega' = \frac{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\alpha}}{\mu + 1} = \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1)\alpha\tau} \cdot \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τῆς ἁρμονικῆς παρεμβολῆς.**

Ὁρισθέντος ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ λόγου ω′ εὑρίσκομεν τοὺς μ ἀριθμητικοὺς ἐνδιαμέσους τῶν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\tau}$, ὁπότε οἱ ἀντίστροφοί των θὰ εἶναι οἱ ζητούμενοι μ ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν α καὶ τ, ἤτοι θὰ ἔχωμεν :

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1)\alpha\tau}}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + 2\frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1)\alpha\tau}}, \ldots, x_\mu = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \mu\frac{\alpha - \tau}{(\mu + 1)\alpha\tau}}.$$

Ἐφαρμογή. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{5}{11}$ νὰ παρεμβληθοῦν 5 ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι.

Λύσις. Πρὸς τοῦτο παρεμβάλομεν πέντε ἀριθμητικοὺς ἐνδιαμέσους μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων ,ἤτοι μεταξὺ $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{11}{5}$.

Ὁ τύπος (1), διὰ $\tau = \frac{5}{11}$, $\alpha = \frac{5}{2}$, $\mu = 5$ δίδει : $\omega' = \frac{3}{10}$.

Τότε οἱ πέντε ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι τῶν $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{11}{5}$ εἶναι οἱ : $\frac{7}{10}, 1, \frac{13}{10}, \frac{8}{5}, \frac{19}{10}$

κατὰ συνέπειαν οἱ ζητούμενοι ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι εἶναι οἱ ἀντίστροφοί των, ἤτοι :

$$\frac{10}{7}, 1, \frac{10}{13}, \frac{5}{8}, \frac{10}{19}.$$

καὶ ἡ ἁρμονικὴ πρόοδος εἶναι : $\frac{5}{2}, \frac{10}{7}, 1, \frac{10}{13}, \frac{5}{8}, \frac{10}{19}, \frac{5}{11}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

322. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 31ος ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου $\frac{1}{25}, \frac{1}{33}, \frac{1}{41}, \ldots$ καὶ ὁ 8ος ὅρος τῆς προόδου : $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \ldots$

323. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ k οὕτως, ὥστε οἱ ἀριθμοί : $1 + k$, $3 + k$, $9 + k$, καθ' ἣν τάξιν δίδονται, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

324. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\frac{5\alpha-3\beta}{\alpha\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}.$$

325. Ἐὰν $\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$, β, $\frac{\beta+\gamma}{1-\beta\gamma}$ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου, τότε οἱ α, $\frac{1}{\beta}$, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

326. Νὰ παρεμβληθοῦν 19 ἀριθμητικοὶ ἐνδιάμεσοι καὶ 19 ἁρμονικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3. Ἐὰν δὲ ξ εἶναι εἷς ἀριθμητικὸς ἐνδιάμεσος καὶ η ὁ ἀντίστοιχος ἁρμονικὸς θὰ εἶναι :

$$\xi+\frac{6}{\eta}=5.$$

327. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ συνιστοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, τότε καὶ οἱ ἀριθμοί :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha},\quad \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta},\quad \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$$

συνιστοῦν ἐπίσης ἁρμονικὴν πρόοδον.

328. Ἐὰν οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοὶ α, β,γ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$1)\quad \frac{\alpha+\beta}{2\alpha-\beta}+\frac{\gamma+\beta}{2\gamma-\beta}>4$$

$$2)\quad \beta^2(\alpha-\gamma)^2=2\left[\gamma^2(\beta-\alpha)^2+\alpha^2(\gamma-\beta)^2\right].$$

329. Ἐὰν οἱ α, β, γ συνιστοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\beta+\gamma}{\beta-\gamma}=2.$$

330. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu=(\nu-1)\,\alpha_1\alpha_\nu\,.$$

331. Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου εἶναι $\frac{33}{40}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι 15. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ τρεῖς ἀριθμοί.

332. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $15x^3-46x^2+36x-8=0$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι της εὑρίσκονται ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ.

333. Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ εἶναι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου καὶ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ εἶναι ὅροι ἁρμονικῆς προόδου καὶ ἰσχύουν : $\alpha_1=\beta_1=\alpha$ καὶ $\alpha_5=\beta_5=\beta$, νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\alpha_3\beta_3$.

334. Ἐὰν ἡ παράστασις : $\alpha(\beta-\gamma)x^2+\beta(\gamma-\alpha)xy+\gamma(\alpha-\beta)y^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εὑρίσκονται ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ.

335. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ὅροι ἁρμονικῆς προόδου τάξεως λ, μ, ν ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης :

$$(\mu-\nu)\,\alpha+(\nu-\lambda)\,\beta+(\lambda-\mu)\,\gamma=0.$$

336. Εὕρετε τὴν συνθήκην, ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ὅροι ἁρμονικῆς προόδου, οὐχὶ κατ' ἀνάγκην διαδοχικοὶ καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τῆς εὑρεθείσης συνθήκης ἐξετάσατε ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{15}, \frac{1}{32}$ ἀνήκουν εἰς ἁρμονικὴν πρόοδον καὶ ποίαν.

337. Ἐὰν αἱ ρίζαι x_1, x_2, x_3 τῆς ἐξισώσεως : $x^3+3\alpha x^2+3\beta x+\gamma=0$, $\beta\neq 0$, ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, θὰ εἶναι :

$$3\alpha\gamma-\gamma^2=2\beta^3.$$

III. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 164. Ὁρισμοί.— Ἔστω α_ν , $\nu=1, 2, \ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, διαφόρων τοῦ μηδενός. Θὰ λέγωμεν ὅτι «*ἡ ἀκολουθία* :

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots \tag{1}$$

εἶναι μία **γεωμετρικὴ πρόοδος** *ἢ* **πρόοδος κατὰ πηλίκον** *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἕκαστος ὅρος της, ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἐφεξῆς, προκύπτῃ ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν σταθερὸν ἀριθμόν».*

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμὸς καλεῖται **λόγος** τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ παρίσταται συνήθως καὶ αὐτὸς μὲ τὸ γράμμα ω.

Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1) καλοῦνται καὶ **ὅροι** τῆς γεωμετρικῆς προόδου. Οὕτως ἡ ἀκολουθία :

$$2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots \qquad (2)$$

εἶναι μία γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = -2$.

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{4}, \ \frac{1}{8}, \ \frac{1}{16}, \ldots \qquad (3)$$

εἶναι μία γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ λόγον $\omega = \frac{1}{2}$.

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ τῆς γεωμετρικῆς προόδου συνάγομεν ὅτι : ἐὰν α_ν καὶ $\alpha_{\nu+1}$ εἶναι δύο διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον ω, θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \cdot \omega, \quad \nu = 1,2,\ldots} \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) προκύπτει : $\alpha_{\nu+1} : \alpha_\nu = \omega$ καὶ τοῦτο διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$ Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς ἰσοδύναμος ὁρισμὸς τῆς γεωμετρικῆς προόδου :

Γεωμετρικὴ πρόοδος *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον* $\alpha_{\nu+1} : \alpha_\nu$ *δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της ἰσοῦται μὲ τὸν αὐτὸν πάντοτε ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος καλεῖται* **λόγος** *τῆς γεωμετρικῆς προόδου.*

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν τώρα τὰ ἑξῆς :

(i). Ἐὰν $|\omega| > 1$, τότε $|\alpha_{\nu+1}| > |\alpha_\nu|$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδὴ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι **ἀπολύτως αὔξουσα.**

Οὕτως ἡ πρόοδος (2) εἶναι ἀπολύτως αὔξουσα.

(ii). Ἐὰν $|\omega| < 1$, τότε $|\alpha_{\nu+1}| < |\alpha_\nu|$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$, δηλ. ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι **ἀπολύτως φθίνουσα.**

Οὕτως ἡ πρόοδος (3) εἶναι ἀπολύτως φθίνουσα, διότι $|\omega| = \frac{1}{2} < 1$.

Παρατήρησις. Ἐὰν $|\omega| = 1$, δηλαδὴ $\omega = \pm 1$, ἔχομεν :

(i). Διὰ $\omega = 1$ ἡ γεωμ. πρόοδος εἶναι μία ἀκολουθία ἴσων ἀριθμῶν (σταθερὰ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \alpha_1$, $\forall\ \nu = 1, 2, \ldots$) καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι συγχρόνως αὔξουσα καὶ φθίνουσα.

(ii). Διὰ $\omega = -1$ ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι ἀπολύτως σταθερά, διότι : $|\alpha_{\nu+1}| = |\alpha_\nu \cdot \omega| = |\alpha_\nu| = |\alpha_1|$ καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι συγχρόνως ἀπολύτως αὔξουσα καὶ φθίνουσα.

Ἰδιότητες τῆς γεωμετρικῆς προόδου

§ 165. Ἰδιότης Ι.— Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος ὅρος της ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου αὐτῆς ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμόν, ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Ἤτοι: $\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}, \quad \nu = 1,2,\ldots}$ (1)

Ἀπόδειξις: Ἡ ἰδιότης προφανῶς ἰσχύει διὰ $\nu = 1$.

Δεχόμεθα ὅτι ἀληθεύει διὰ $\nu = k$, ἤτοι ὅτι ἰσχύει: $\alpha_k = \alpha_1 \cdot \omega^{k-1}$.
Ἐξ αὐτῆς προκύπτει $\alpha_k \cdot \omega = \alpha_1 \cdot \omega^k$. Ἀλλὰ $\alpha_k \cdot \omega = \alpha_{k+1}$ (ὁρισμὸς γεωμ. προόδου).

Ἄρα: $$\alpha_{k+1} = \alpha_1 \cdot \omega^k = \alpha_1 \cdot \omega^{(k+1)-1}$$
ἤτοι, ἡ ἰδιότης ἀληθεύει καὶ διὰ $\nu = k+1$, ἑπομένως, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ἀληθεύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

Ἐφαρμογαί. 1η: Νὰ εὑρεθῇ ὁ 7ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου: $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$

Λύσις. Ἔχομεν $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\omega = 2$, $\nu = 7$, $\alpha_7 = ;$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀνωτέρω τύπου (1) εὑρίσκομεν: $\alpha_7 = \frac{1}{2} \cdot 2^6 = 32$.

2α: Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἡ ὁποία ἔχει:
$$\alpha_1 = 6, \quad \omega = 2, \quad \alpha_\nu = 3072.$$

Λύσις. Εἰς τὸν τύπον $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \omega^{\nu-1}$ θέτομεν ἀντὶ τῶν α_1, ω, α_ν τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν: $$3072 = 6 \cdot 2^{\nu-1} \quad \text{ἢ} \quad 2^{\nu-1} = 512.$$

Ἐπειδὴ $512 = 2^9$ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται:
$$2^{\nu-1} = 2^9, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \nu - 1 = 9 \quad \text{ἢ} \quad \nu = 10.$$

Παρατήρησις: Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος συμπεραίνομεν ὅτι μία γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι τελείως ὡρισμένη, ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος της α_1 καὶ ὁ λόγος της ω, διότι τότε οἱ ὅροι της θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

1ος ὅρος	2ος ὅρος	3ος ὅρος	4ος ὅρος	5ος ὅρος . . .
α_1,	$\alpha_1\omega$,	$\alpha_1\omega^2$,	$\alpha_1\omega^3$,	$\alpha_1\omega^4$, . . . κ.ο.κ.

§ 166. Ἰδιότης ΙΙ.— Εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἰσάκις ἀπεχόντων τῶν ἄκρων, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων, ἐὰν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττόν, τότε ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἀπόδειξις. α'). Ἔστω μία γεωμ. πρόοδος μὲ ν ὅρους: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ καὶ λόγον ω. Παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει:
$$\alpha_2 \cdot \alpha_{\nu-1} = (\alpha_1\omega) \cdot \left(\frac{\alpha_\nu}{\omega}\right) = \alpha_1\alpha_\nu$$
$$\alpha_3 \cdot \alpha_{\nu-2} = (\alpha_1\omega^2) \cdot \left(\frac{\alpha_\nu}{\omega^2}\right) = \alpha_1 \cdot \alpha_\nu$$

καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁ εἷς ἔχῃ k ὅρους πρὸ αὐτοῦ, θὰ εἶναι ἴσος μέ : $\alpha_1 \cdot \omega^k$, τότε ὁ ἔχων k ὅρους μετ' αὐτὸν θὰ εἶναι ἴσος μέ : $\frac{\alpha_\nu}{\omega^k}$ συνεπῶς τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτῶν ὅρων εἶναι : $(\alpha_1\omega^k) \cdot \left(\frac{\alpha_\nu}{\omega^k}\right) = \alpha_1\alpha_\nu$.

β'). Ἔστω ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι περιττόν, τότε ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος, ἔστω ὁ α_λ . Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι $\alpha_\lambda = \alpha_{\lambda-1} \cdot \omega$ καὶ $\alpha_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda+1}}{\omega}$.

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha_\lambda^2 = (\alpha_{\lambda-1} \cdot \omega) \cdot \left(\frac{\alpha_{\lambda+1}}{\omega}\right) = \alpha_{\lambda-1} \cdot \alpha_{\lambda+1} = \alpha_1\,\alpha_\nu ,$$

ἤτοι ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων.

§ 167. Πόρισμα I.– **Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ, καθ' ἣν τάξιν γράφονται, εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου εἶναι :**

$$\boxed{\beta^2 = \alpha\gamma} \qquad (1)$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ β καλεῖται **γεωμετρικὸς μέσος** ἢ **μέσος ἀνάλογος** τῶν α καὶ γ.

Γενικῶς : *Καλοῦμεν* **γεωμετρικὸν μέσον** *ν πραγματικῶν ἀριθμῶν* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ *καὶ συμβολίζομεν τοῦτον μὲ* M_Γ, *τὸν πραγματικὸν ἀριθμόν, ὅστις ὁρίζεται οὕτω:*

$$\boxed{M_\Gamma = \sqrt[\nu]{\alpha_1\alpha_2\ \ldots\ \alpha_\nu}} \qquad (2)$$

§ 168. Πόρισμα II.– **Τὸ γινόμενον** $\Pi_\nu \equiv \alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ **τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :**

$$\boxed{\Pi_\nu^2 = (\alpha_1 \cdot \alpha_\nu)^\nu} \qquad (1)$$

Σημείωσις. Ὁ ἀνωτέρω τύπος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\Pi_\nu = \alpha_1^\nu \cdot \omega^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}, \text{ ὅπου ω ὁ λόγος τῆς προόδου. (Διατί;).} \qquad (2)$$

§ 169. Ἰδιότης III.– **Τὸ ἄθροισμα** $\Sigma_\nu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ **τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον** $\omega \neq 1$ **δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :**

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\,\omega - \alpha_1}{\omega - 1}} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις : Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος :

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \qquad (2)$$

ἐπὶ τὸν λόγον ω εὑρίσκομεν :

$$\omega\Sigma_\nu = \alpha_1\omega + \alpha_2\omega + \cdots + \alpha_\nu\omega \qquad (3)$$

'Αφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (2) καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι:

$$\alpha_1\omega = \alpha_2,\ \alpha_2\omega = \alpha_3, \ldots,\ \alpha_{\nu-1}\omega = \alpha_\nu,$$

εὑρίσκομεν:

$$\omega\Sigma_\nu - \Sigma_\nu = \alpha_\nu\omega - \alpha_1 \quad \text{ἢ} \quad (\omega - 1)\cdot\Sigma_\nu = \alpha_\nu\omega - \alpha_1.$$

'Εκ τῆς τελευταίας ἰσότητος, διὰ $\omega \neq 1$, προκύπτει:

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}.$$

"Ασκησις. Νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τύπος (1) τοῦ ἀθροίσματος διὰ τῆς μεθόδου τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

§ 170. Πόρισμα.– Τὸ ἄθροισμα $\Sigma_\nu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu$ τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ λόγον $\omega \neq 1$ δίδεται συναρτήσει τοῦ πρώτου ὅρου α_1, τοῦ λόγου ω καὶ τοῦ πλήθους ν τῶν ὅρων του ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}} \tag{1}$$

'Ο τύπος (1) δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς γεωμ. προόδου, χωρὶς νὰ παρίσταται ἀνάγκη νὰ εὕρωμεν τὸν νιοστὸν ὅρον αὐτῆς.

'Εφαρμογή: Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀκτὼ πρώτων ὅρων τῆς προόδου:

2, 6, 18, 54, ...

Λύσις: Εἰς τὸν τύπον (1) (§ 170) θέτοντες $\alpha_1 = 2$, $\omega = 3$, $\nu = 8$ λαμβάνομεν:

$$\Sigma_8 = \frac{2(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2(6561 - 1)}{2} = 6560.$$

Παρατηρήσεις: α'). 'Εὰν εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον εἶναι $\omega = 1$ οἱ τύποι (1) τῶν § 169, 170 διὰ τὸ Σ_ν δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμοσθοῦν (διατί;). Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν, δηλ. ἐὰν $\omega = 1$, ἡ πρόοδος ἔχει ὅλους τοὺς ὅρους της ἴσους μὲ τὸν πρῶτον καὶ συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων ἰσοῦται μέ: $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_1 = \nu\cdot\alpha_1$.

β'). Οἱ δύο τύποι:

$$\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1} \quad (1) \qquad \text{καὶ} \qquad \Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1} \quad (2)$$

περιέχουν πέντε ἀγνώστους, τοὺς $\alpha_1, \alpha_\nu, \omega, \nu, \Sigma_\nu$. 'Εὰν λοιπὸν μᾶς δοθοῦν οἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν, τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς ὑπολοίπους δύο ἐπιλύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2). 'Η ἐπίλυσις τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος εἶναι, ἐν γένει, εὔκολος πλὴν τῶν ἑξῆς δύο περιπτώσεων:

(i). 'Εὰν ζητοῦνται οἱ α_1 καὶ ω. Τότε τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\Sigma_\nu - \alpha_\nu)\,\omega^\nu - \Sigma_\nu\,\omega^{\nu-1} + \alpha_\nu = 0. \tag{3}$$

(ii). 'Εὰν ζητοῦνται οἱ α_ν καὶ ω. Τότε τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) δίδει τὴν ἐξίσωσιν:

$$\alpha_1\omega^\nu - \Sigma_\nu\omega + (\Sigma_\nu - \alpha_1) = 0. \tag{4}$$

Αἱ ἐξισώσεις (3) καὶ (4) εἶναι ν βαθμοῦ καὶ ἐὰν μὲν ὁ $\nu \leqq 4$ αὗται ἐπιλύονται, ἐὰν ὅμως ὁ $\nu > 4$, πρᾶγμα συνηθέστερον, τότε δὲν καθίσταται δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις αὐτῶν μὲ τὰς στοιχειώδεις γνώσεις τῆς 'Αλγέβρας.

Μερικὰ ἀπὸ τὰ παρουσιαζόμενα προβλήματα ἐπιλύονται μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων, τὴν θεωρίαν τῶν ὁποίων ἀναπτύσσομεν εἰς ἓν τῶν ἑπομένων κεφαλαίων.

Ἐφαρμογὴ 1η : Γεωμετρικῆς προόδου ἀποτελουμένης ἐξ ὀκτὼ ὅρων ὁ τελευταῖος ὅρος της ἰσοῦται πρὸς 384 καὶ ὁ λόγος ἰσοῦται πρὸς 2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος της καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της.

Λύσις : Ἔστωσαν α_1 ὁ πρῶτος ὅρος, ω ὁ λόγος καὶ α_ν ὁ νιοστὸς ὅρος τῆς γεωμ. προόδου.

Ἐκ τῶν τύπων $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ καὶ $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_\nu\omega - \alpha_1}{\omega - 1}$ διὰ $\omega = 2$, $\nu = 8$, $\alpha_\nu = 384$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$384 = \alpha_1 \cdot 2^7 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - \alpha_1}{2 - 1} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $\alpha_1 = 3$.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (2) τὸ α_1 μὲ τὸ ἴσον του εὑρίσκομεν :

$$\Sigma_8 = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον τὸ 5 ὁ ἕβδομος ὅρος της ἰσοῦται πρὸς 3645. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπτὰ πρώτων ὅρων της.

Λύσις : Ἐκ τῶν τύπων $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ καὶ $\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha_\nu\,\omega - \alpha_1}{\omega - 1}$, διὰ $\alpha_1 = 5$, $\nu = 7$, καὶ $\alpha_7 = 3645$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως :

$$3645 = 5 \cdot \omega^6 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_7 = \frac{3645 \cdot \omega - 5}{\omega - 1} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $\omega^6 = 729$, ἐξ ἧς : $\omega = \pm 3$.

Διὰ $\omega = 3$ ἡ πρόοδος εἶναι : 5, 15, 45, 135,... (3)

Διὰ $\omega = -3$ ἡ πρόοδος εἶναι 5, −15, 45, −135, ... (4)

Ἡ πρώτη εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἡ δευτέρα δὲν εἶναι οὔτε αὔξουσα οὔτε φθίνουσα, εἶναι ὅμως ἀπολύτως αὔξουσα καὶ μάλιστα γνησίως.

Ἐκ τῆς (2) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ ω μὲ τὰς τιμάς του +3 καὶ −3 εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως :

$$\Sigma_7 = \frac{3645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = 5465, \qquad \Sigma'_7 = \frac{3645\,(-3) - 5}{-3 - 1} = 2735.$$

Τὸ πρῶτον ἄθροισμα ἀναφέρεται εἰς τὴν πρόοδον (3), τὸ δεύτερον εἰς τὴν πρόοδον (4).

§. 171. Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων.— Ὁρισμοί.

Οἱ ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ καλοῦνται **γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι** δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πεπερασμένη ἀκολουθία :

$$\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\mu,\ \beta \qquad (1)$$

εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β καλοῦμεν **παρεμβολὴν μ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** τὴν εὕρεσιν μ ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$ τοιούτων, ὥστε ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_\mu,\ \beta \quad \text{νὰ εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ὡς ἄνω γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου (1). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω τὸν λόγον τῆς προόδου αὐτῆς τότε, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ὅρων της εἶναι $\mu + 2$, ὁ β θὰ κατέχῃ τὴν $\mu + 2$ θέσιν καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\beta = \alpha \cdot \omega^{(\mu+2)-1} \quad \text{ἢ} \quad \beta = \alpha \cdot \omega^{\mu+1}$$

Ἄρα : $$\boxed{\omega=\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος παρεμβολῆς γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων** ἢ συντόμως **τύπος τῆς γεωμετρικῆς παρεμβολῆς**.

Ἡ παρεμβολὴ γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων εἶναι δυνατὴ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, πλὴν τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α, β εἶναι ἑτερόσημοι ($\alpha\beta<0$) καὶ τὸ πλῆθος τῶν παρεμβαλομένων ὅρων περιττὸς ἀριθμὸς (διατί;).

Ὁρισθέντος ἐκ τοῦ τύπου (1) τοῦ λόγου ω, οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι :

$$x_1=\alpha\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\quad x_2=\alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2,\ldots,x_\mu=\alpha\left(\sqrt[\mu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^\mu.$$

Ἐφαρμογή. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 48 νὰ παρεμβληθοῦν τρεῖς γεωμ. ἐνδιάμεσοι.

Λύσις : Ἐκ τοῦ τύπου (1) διὰ $\alpha=3$, $\beta=48$ καὶ $\mu=3$, λαμβάνομεν :

$$\omega=\sqrt[4]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{16},\quad \text{ἐξ οὗ :}\quad \omega=2.$$

Συνεπῶς οἱ ζητούμενοι γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι εἶναι οἱ : 6, 12, 24.

§ 172. Συμμετρικὴ παράστασις τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου πεπερασμένου πλήθους ὅρων.

— Πρὸς περιορισμὸν τῶν ἀγνώστων εἰς διάφορα προβλήματα γεωμετρικῶν προόδων, ἰδία ὅταν δίδεται τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου καλὸν εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

Περίπτωσις 1η : Ἡ πρόοδος ἔχει περιττὸν πλῆθος ὅρων.

Ἐὰν ἡ πρόοδος ἔχῃ $(2\nu+1)$ ὅρους, τότε ὑπάρχει μεσαῖος, τὸν ὁποῖον συμβολίζομεν μὲ x καὶ ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι ω γράφομεν τὴν πρόοδον ταύτην ὡς ἑξῆς :

$$\frac{x}{\omega^\nu},\ldots,\frac{x}{\omega^2},\frac{x}{\omega},x,x\omega,x\omega^2,\ldots,x\omega^\nu.$$

Περίπτωσις 2α : Ἡ πρόοδος ἔχει ἄρτιον πλῆθος ὅρων, ἔστω 2ν.

Εἰς αὐτὴν τὴν περίπτωσιν ὑπάρχουν δύο *«μεσαῖοι»* ὅροι ἰσαπέχοντες τῶν ἄκρων, τοὺς ὁποίους παριστῶμεν μέ : $\frac{x}{\lambda}$ καὶ xλ, ὅτε ὁ λόγος ω τῆς γεωμ. προόδου εἶναι : $\omega=x\lambda:\frac{x}{\lambda}=\lambda^2$ καὶ ἡ πρόοδος γράφεται τότε ὡς ἑξῆς :

$$\frac{x}{\lambda^{\nu+1}},\ldots,\frac{x}{\lambda^3},\frac{x}{\lambda},x\lambda,x\lambda^3,\ldots,x\lambda^{\nu+1}.$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ x **δὲν εἶναι ὅρος** τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὡς ἐλέχθη, εἶναι λ^2.

Ἐφαρμογή. **Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες πραγμ. ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμ. προόδου, ἐὰν τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς 729 καὶ ὁ τέταρτος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν δύο μεσαίων.**

Λύσις : Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, περίπτωσις 2α, παριστῶμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς :

$$\frac{x}{\lambda^3},\quad \frac{x}{\lambda},\quad x\lambda,\quad x\lambda^3.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται πρὸς 729, θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{x}{\lambda^3}\cdot\frac{x}{\lambda}\cdot x\lambda\cdot x\lambda^3 = 729$$

ἢ $\qquad x^4 = 729 = 27^2, \qquad$ ἐξ οὗ : $\quad x = \pm 3\sqrt{3}.$

Ἐξ ἄλλου, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν, ἔχομεν : $x\lambda^3 = \left(\frac{x}{\lambda}\right)\cdot(x\lambda) = x^2$ ἢ $\lambda^3 = x$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν : $\lambda = \pm\sqrt{3}.$

Διὰ $x = 3\sqrt{3}$ καὶ $\lambda = \sqrt{3}$ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι : $1, 3, 9, 27.$

Διὰ $x = -3\sqrt{3}$ καὶ $\lambda = -\sqrt{3}$ εὑρίσκομεν πάλιν τοὺς ἰδίους ἀριθμούς.

§ 173. Ἄθροισμα ἀπείρων ὅρων ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.— Ἔστω μία γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ πρῶτον ὅρον τὸ α καὶ λόγον ω, ἤτοι ἔστω ἡ πρόοδος :

$$\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ldots,\ \alpha\omega^{\nu-1},\ldots \tag{1}$$

Ἂς συμβολίσωμεν μὲ Σ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1), τὸ ὁποῖον, ὡς γνωστόν, δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}.$$

Ἔστω τώρα ὅτι ὁ λόγος ω τῆς (1) πληροῖ τὴν συνθήκην : $0 < |\omega| < 1$, δηλαδὴ ἡ (1) εἶναι ἀπολύτως φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος, τότε ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα :

§ 174. Θεώρημα.— **Διὰ κάθε θετικὸν ἀριθμὸν ε (ὁσονδήποτε μικρὸν) ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :**

$$\left|\Sigma_\nu - \frac{\alpha}{1-\omega}\right| < \varepsilon \quad \textbf{διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0.$$

Ἢ ὅπερ τὸ αὐτό : $\qquad \lim\limits_{\nu\to\infty}\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha}{1-\omega}.$

Ἀπόδειξις. Πράγματι : $\quad \Sigma_\nu = \alpha + \alpha\omega + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1}$

$$\text{ἢ}\quad \Sigma_\nu = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma_\nu = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha}{1-\omega}\,\omega^\nu.$$

Ἡ ἀκολουθία ὅμως ω^ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $|\omega| < 1$ εἶναι μηδενικὴ (βλ. Κεφ. V § 131, παράδειγμα 1ον).

Ὅθεν : $\quad \lim\limits_{\nu\to\infty}\Sigma_\nu = \dfrac{\alpha}{1-\omega},\quad$ διότι $\quad \lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\alpha}{1-\omega}\cdot\omega^\nu = 0.$

᾿Εκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Καλοῦμεν **ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου** *μὲ πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον ω τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν* $\frac{\alpha}{1-\omega}$ *πρὸς τὸν ὁποῖον συγκλίνει τὸ ἄθροισμα* Σ_ν *τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου.* Γράφομεν δὲ συμβολικῶς :

$$\Sigma_\infty \quad \text{ἤ} \quad \Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} + \cdots = \frac{\alpha}{1-\omega}.$$

῞Ωστε :

$$\boxed{\text{᾿Εὰν } |\omega| < 1 \Longrightarrow \Sigma_\infty \equiv \Sigma = \frac{\alpha}{1-\omega}} \qquad (1)$$

Λέγομεν δὲ τότε : **«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ λόγον ω μὲ $0 < |\omega| < 1$ ἰσοῦται μέ : $\frac{\alpha}{1-\omega}$».**

Σημ. ᾿Εὰν $\alpha = 1$ τότε : $\Sigma = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{\nu-1} + \cdots = \frac{1}{1-\omega}$.

᾿Εφαρμογὴ 1η : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα : $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{3^\nu} + \cdots$

Λύσις : Οἱ ἄπειροι προσθετέοι τοῦ ἀθροίσματος συνιστοῦν γεωμ. πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον $\alpha = 4$ καὶ λόγον $\omega = \frac{1}{3}$. ᾿Επομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (1), ἤτοι :

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + \cdots + \frac{4}{3^\nu} + \cdots = \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = 6.$$

᾿Εφαρμογὴ 2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἀπὸ τὸ ὁποῖον παράγεται τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 4,513513...

Λύσις : Τὸ δεκαδικὸν περιοδικὸν κλάσμα 4, 513513... γράφεται :

$$4 + \frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \cdots$$

᾿Αλλὰ

$$\frac{513}{1000} + \frac{513}{1000^2} + \frac{513}{1000^3} + \cdots = \frac{\frac{513}{1000}}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{513}{999}.$$

῎Αρα :

$$4{,}513513\ldots = 4 + \frac{513}{999} = \frac{4509}{999}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 4,513513..., ὅταν τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν του ψηφίων αὐξάνει ἀπεριορίστως, τείνει πρὸς τὸν ρητὸν ἀριθμὸν $\frac{4509}{999}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

338. Χαρακτηρίσατε τὰς κάτωθι προόδους ὡς πρὸς τὸ μονότονον καὶ τὸ εἶδος μονοτονίας :

α) $12, 6, 3, \ldots$, β) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \ldots$, γ) $3, -6, 12, \ldots$, δ) $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

339. Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος 1, 3, 9, 27, 81,... Δείξατε ὅτι αἱ διαφοραὶ μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων σχηματίζουν μίαν νέαν γεωμ. πρόοδον. Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ γενικευθῇ δι' οἱανδήποτε γεωμ. πρόοδον;

340. Προσδιορίσατε τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν x οὕτως, ὥστε οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν διαδοχικοὺς ὅρους γεωμ. προόδου : 1) $x-2,\ 2x,\ 7x+4$, 2) $2x-2,\ 3x+6,\ 12x+6$.

341. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α) $\alpha_1 = 4,\quad \omega = 4,\quad \Sigma_\nu = 5460$, β) $\alpha_4 = 13,\quad \alpha_6 = 117,\quad \alpha_\nu = 9477$,

γ) $\alpha_1 = 4,\quad \alpha_\nu = 972,\quad \Sigma_\nu = 1456$, δ) $\alpha_\nu = 81,\quad \omega = \frac{3}{4},\quad \Sigma_\nu = 781$.

342. Νὰ σχηματισθῇ γεωμ. πρόοδος, ἡ ὁποία ἔχει ὡς πρῶτον ὅρον τὴν μικροτέραν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως $x^3 - 2x^2 - 25x + 50 = 0$ καὶ ὡς λόγον τὴν μεγαλυτέραν ρίζαν. Ἐπὶ πλέον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι τριπλάσιον τῆς τρίτης ρίζης τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως.

343. Νὰ παρεμβληθοῦν 4 γεωμετρικοὶ ἐνδιάμεσοι μεταξὺ τῆς μικροτέρας καὶ τῆς μεγαλυτέρας ρίζης τῆς ἐξισώσεως $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

344. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ν γεωμετρικῶν ἐνδιαμέσων παρεμβαλλομένων μεταξὺ 1 καὶ α ἰσοῦται πρός :

$$\sqrt[\nu+1]{\alpha}\left(\sqrt[\nu+1]{\alpha^\nu} - 1\right) : \left(\sqrt[\nu+1]{\alpha} - 1\right).$$

345. Γεωμετρικῆς προόδου ἐξ ὀκτὼ ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων ὅρων εἶναι 40, τῶν δὲ ὑπολοίπων τὸ ἄθροισμα εἶναι 3240. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου.

346. Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων φθινούσης γεωμ. προόδου εἶναι 65, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων της 81. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

347. Ἀπολύτως φθινούσης γεωμ. προόδου ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι τὸ 1/2 τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων ὅρων της, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι 20. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

348. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γεωμ. πρόοδον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των 52 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των 1456.

349. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων ἀπολύτως φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 12, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπείρων ὅρων της εἶναι 48. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

350. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

$$\alpha)\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \cdots \qquad \beta)\ 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

$$\gamma)\ \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \cdots \quad (\alpha > \beta > 0).$$

351. Πρὸς ποῖον ἀριθμὸν τείνει τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος: $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} + \cdots$ διὰ τοῦ ἀθροίσματος : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^\nu + \cdots$, ὅταν τὸ $\nu \to \infty$.

352. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κοινὰ κλάσματα ἐκ τῶν ὁποίων παράγονται τὰ κάτωθι δεκαδικὰ περιοδικὰ κλάσματα :

1) 0,17651651..., 2) 2,341702702..., 3) 27,327575..., 4) 3,7292929...

353. Εἰς ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ εὑρίσκομεν νέον τοιοῦτον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τριγώνων.

354. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμ. προόδου νὰ δειχθῇ :

1) $(\alpha+\delta)\cdot(\beta+\gamma) - (\alpha+\gamma)\cdot(\beta+\delta) = (\beta-\gamma)^2$

2) $(\beta-\gamma)^2 + (\gamma-\alpha)^2 + (\delta-\beta)^2 = (\alpha-\delta)^2$.

355. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις: $\sqrt{\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}}}$, ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ριζικῶν εἶναι ἀπεριόριστον.

356. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου σχηματίζουν γεωμ. πρόοδον νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῆς προόδου ἐπαληθεύει τὴν σχέσιν : $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \omega < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

357. Τρεῖς ἀριθμοὶ x, y, z ἔχουν ἄθροισμα 147, ἐὰν οἱ x, y, z εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμ. προόδου καὶ οἱ x, z, y γεωμετρικῆς προόδου, νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἀριθμοί.

358. Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἰσχύει :

$\beta^2 - \alpha\gamma = 0, \quad \gamma^2 - \beta\delta = 0,$ τότε θὰ εἶναι : $|\alpha - \delta| \geqq 3\,|\beta - \gamma|$.

359. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{\gamma^3}\right) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3.$$

360. Ἐὰν $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0$ καὶ $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοί : $\alpha, \gamma, \beta\sqrt[3]{4}$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΡΟΟΔΩΝ

361. Ἐὰν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ καὶ M_A, M_Γ, M_H εἶναι ἀντιστοίχως ὁ μέσος ἀριθμητικός, μέσος γεωμετρικὸς καὶ μέσος ἁρμονικὸς αὐτῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$M_A \geqq M_\Gamma \geqq M_H \,. \qquad \text{(ἀνισότης τοῦ Cauchy)}.$$

362. Ἐὰν $x \geqq 0, \quad y \geqq 0$ δείξατε ὅτι :

$$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y \geqq x^{1/3} \cdot y^{2/3}.$$

Πότε ἰσχύει τὸ ἴσον;

363. Τὴν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν χωρίζομεν εἰς ὁμάδας ὡς ἀκολούθως :

1, (2, 3, 4, 5), (6, 7, 8,. . ., 12), (13, 14,. . ., 22), (23, 24,. . .),. . .

Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς ν—οστῆς ὁμάδος συναρτήσει τοῦ ν καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων εἰς τὴν ν—οστὴν ὁμάδα ἰσοῦται πρός :

$$(3\nu - 2)\cdot\left[(\nu-1)^2 + \frac{\nu^2+1}{2}\right].$$

364. Ἐὰν S_1 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ω καὶ S_2 τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν ὅρων, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$S_2 - \frac{1}{\nu}S_1^2 = \frac{1}{12}\nu\omega^2(\nu^2 - 1).$$

365. Ἐὰν $F(x) \equiv \sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\cdot\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\cdot\sqrt{\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\cdots}}}$

νὰ δειχθῇ ὅτι : $F\left(\frac{33}{55}\right) = \frac{132}{187}$.

366. Νὰ δειχθῇ ὅτι : ἐὰν τὸ ἄθροισμα ν ὅρων ἀριθμητικῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγους κατὰ σειρὰν 1, 2, 3,. . . εἶναι ν^2, τότε οἱ πρῶτοι ὅροι των ἀποτελοῦν φθίνουσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἡ ὁποία καὶ νὰ ὁρισθῇ.

367. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως : $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἀποτελοῦν: α). Ἀριθμητικὴν πρόοδον, β). Γεωμετρικὴν πρόοδον.

368. Νὰ ὁρισθῇ ὁ k οὕτως, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^3 - 8x^2 - 6x - k = 0$ νὰ ἀποτελοῦν πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ γεωμετρικὴν καὶ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτή.

(**Ὑπόδειξις.** Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὰ συμπεράσματα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως).

369. Χωρίζομεν 4200 ἀντικείμενα εἰς $\nu + 1$ ὁμάδας οὕτως, ὥστε ἡ πρώτη ὁμὰς νὰ περιλαμβάνῃ 5 ἀντικείμενα, ἡ δευτέρα 8, ἡ τρίτη 11, κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὁμάδων, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὑπολειπομένων ἀντικειμένων.

370. Ἐὰν οἱ α, β, γ, x, y, z εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὁ μὲν α εἶναι μέσος ἀριθμητικὸς τῶν β καὶ γ, ὁ δὲ x μέσος ἁρμονικὸς τῶν y, z νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: ὁ αx εἶναι μέσος γεωμετρικὸς τῶν βy καὶ γz τότε, καὶ μόνον τότε, ἄν: $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta}$.

371. Ἐὰν οἱ διάφοροι ἀλλήλων θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρικῆς ἢ ἁρμονικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu \geqq 2$ ἰσχύει ἡ ἀνισότης:

$$\alpha^\nu + \gamma^\nu > 2\beta^\nu .$$

(**Ὑπόδειξις.** Ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).

372. Ἔστω ἡ ἀκολουθία: α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ (1), διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι:

$$\alpha_{\nu+2} = \xi \cdot \alpha_{\nu+1} + \eta \cdot \alpha_\nu \qquad \forall\ \nu \in \mathbf{N}\ \ (\xi,\ \eta \in \mathbf{R}).$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, ὅπου $\alpha_1 \neq 0$, εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως:

$$x^2 - \xi x - \eta = 0,$$

τότε ἡ ἀκολουθία (1) εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

373. Ἐὰν S_ν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\alpha = -5$ καὶ ὁ λόγος $\omega = -3/4$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\left(\forall\ \varepsilon > 0 \text{ καὶ } \forall\ \nu \in \mathbf{N}, \text{ μὲ } \nu > 3\left(\frac{20}{7\varepsilon} - 1\right)\right) \Longrightarrow \left|-\frac{20}{7} - S_\nu\right| < \varepsilon .$$

Ποῖον τὸ $\lim\limits_{\nu \to \infty} S_\nu$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΕΙΡΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 175. Συμβολισμὸς ἀθροισμάτων.— Ἐπειδὴ συχνότατα συναντῶμεν ἀθροίσματα τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu$$

χρησιμοποιοῦμεν, διὰ τὴν συντομωτέραν καὶ ἁπλουστέραν γραφήν, τὸ ἑλληνικὸν γράμμα Σ πρὸς συμβολισμὸν τῶν ἐν λόγῳ ἀθροισμάτων. Οὕτω γράφομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_\nu \equiv \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k .$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος, δηλαδὴ ἡ συμβολικὴ ἔκφρασις $\sum\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_k$ ἀναγιγνώσκεται : *«ἄθροισμα τῶν (ἀριθμῶν)* α_k *ἀπὸ* $k=1$ *ἕως* $k=\nu$*»*. Ὁ συμβολισμὸς $k=1$ κάτωθεν τοῦ συμβόλου Σ σημαίνει ὅτι 1 εἶναι ἡ πρώτη τιμή, τὴν ὁποίαν λαμβάνει ὁ δείκτης k, ἐνῷ ὁ συμβολισμὸς $k=\nu$ ἄνωθεν τοῦ συμβόλου Σ σημαίνει ὅτι ὁ δείκτης k θὰ διατρέξῃ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς μέχρι καὶ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν. Τέλος τὸ σύμβολον Σ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ προσθέσωμεν ὅλους τοὺς ὅρους ποὺ ἐλάβομεν θέτοντες διαδοχικῶς $k=1$, $k=2$, $k=3, \ldots, k=\nu$.

Συμβατικῶς κατωτέρω θὰ θέτωμεν : $\sum\limits_{k=1}^{1} \alpha_k \equiv \alpha_1$.

Δυνάμει τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν τώρα :

α). $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \equiv \sum\limits_{k=1}^{10} k$

β). $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2 \equiv \sum\limits_{k=1}^{9} k^2$

γ). $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}+x_{12} \equiv \sum\limits_{k=3}^{12} x_k$

δ). $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_9 = (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_5)+(\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9) =$

$$= \sum_{k=1}^{5} \alpha_k + \sum_{k=6}^{9} \alpha_k$$

ἤτοι :
$$\sum_{k=1}^{9} \alpha_k = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k + \sum_{k=6}^{9} \alpha_k .$$

Γενικώτερον ἔχομεν :

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_k + \sum_{k=\rho+1}^{\nu} \alpha_k , \quad \rho \in \mathbf{N} \text{ καὶ } \rho < \nu .$$

Δίδομεν κατωτέρω μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ συμβόλου Σ.

Παράδειγμα 1ον : Εἰς τὴν παράγραφον 28 ἔχομεν ἀποδείξει, ὅτι :

$$1+2+3+\cdots+\nu=\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Τὴν σχέσιν ταύτην γράφομεν, τῇ βοηθείᾳ τοῦ συμβούλου Σ, συντόμως οὕτω :

$$\sum_{k=1}^{\nu} k=\frac{\nu(\nu+1)}{2}.$$

Παρατήρησις. Ἄλλα ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα, τὰ ὁποῖα συναντᾷ κανεὶς εἰς τὰς ἐφαρμογάς, εἶναι καὶ τὰ ἑξῆς :

α). $1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2\equiv\sum_{k=1}^{\nu}k^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$

β). $1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3\equiv\sum_{k=1}^{\nu}k^3=\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$, ἤτοι ἰσχύει : $\sum_{k=1}^{\nu}k^3=\left[\sum_{k=1}^{\nu}k\right]^2$

γ). $1^4+2^4+3^4+\cdots+\nu^4\equiv\sum_{k=1}^{\nu}k^4=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)(3\nu^2+3\nu-1)}{30}.$

Ἄσκησις : Ἀποδείξατε τὴν ἀλήθειαν τῶν (α), (β), (γ) διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Παράδειγμα 2ον : Εἰς τὴν § 50 ὡρίσαμεν, ὅτι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς x, βαθμοῦ ν, εἶναι μία ἀλγεβρικὴ παράστασις τῆς μορφῆς :

$$f(x)\equiv\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_\nu x^\nu. \qquad (1)$$

Ἤδη δυνάμεθα νὰ γράφωμεν τὸ πολυώνυμον (1) συντόμως οὕτω :

$$f(x)\equiv\sum_{k=0}^{\nu}\alpha_k x^k,\quad \alpha_k\in\mathbf{R},\quad k=0,1,2,\ldots,\nu \text{ καὶ } \alpha_\nu\neq 0.$$

§ 176. Βασικαὶ ἰδιότητες τοῦ συμβόλου Σ.

— Αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες ἐπιτρέπουν ἕνα ἄνετον λογισμὸν τῇ βοηθείᾳ τοῦ συμβόλου Σ.

i). Ἐὰν $\alpha_k=\alpha$ διὰ κάθε $k=1,2,\ldots\nu$, τότε ἰσχύει : $\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k=\nu\alpha$.

Εἰδικῶς, ἐὰν $\alpha=1$ ἔχομεν : $\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k\equiv\sum_{k=1}^{\nu}1=\nu$.

ii). Ἰσχύει ἡ *προσθετικὴ ἰδιότης*, ἤτοι :

$$\sum_{k=1}^{\nu}(\alpha_k+\beta_k)=\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k+\sum_{k=1}^{\nu}\beta_k \quad\text{καὶ}\quad \sum_{k=1}^{\nu}(\alpha_k-\beta_k)=\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k-\sum_{k=1}^{\nu}\beta_k.$$

iii). Ἐὰν λ σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς (μὴ ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ δείκτου k), τότε ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^{\nu}\lambda\alpha_k=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k \qquad (\textit{ἰδιότης ὁμογενείας}).$$

iv). Ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^{\nu}(\lambda\alpha_k+\mu\beta_k)=\lambda\cdot\sum_{k=1}^{\nu}\alpha_k+\mu\cdot\sum_{k=1}^{\nu}\beta_k,\quad\forall\ \lambda,\mu\in\mathbf{R}.$$

v). Ἰσχύει :

$$\sum_{k=1}^{\nu} (\alpha_k - \alpha_{k-1}) = \alpha_\nu - \alpha_0 \qquad \textit{(ἰδιότης συμπτύξεως).}$$

Ἄ σ κ η σ ι ς : Ἀποδείξατε τὰς ἀνωτέρω πέντε ἰδιότητας τοῦ συμβόλου Σ.

Παρατήρησις. Μέχρι τώρα ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς δείκτην τὸ γράμμα k. Τοῦτο εἶναι αὐθαίρετον καὶ οὐδένα ρόλον παίζει, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ χρησιμοποιήσωμεν διὰ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα καὶ ἄλλο γράμμα, ὡς δείκτην. Οὕτως ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \equiv \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum_{\rho=1}^{\nu} \alpha_\rho = \sum_{\nu=1}^{\nu} \alpha_\nu .$$

Ἐπίσης αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ δείκτης δύνανται νὰ μεταβάλλωνται, τότε ὅμως θὰ μεταβάλλεται συγχρόνως καὶ ὁ ὑπὸ τὸ σύμβολον Σ δείκτης, οὕτω λ.χ. ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_5 = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k = \sum_{k=0}^{4} \alpha_{k+1} = \sum_{k=11}^{15} \alpha_{k-10},$$

δηλαδή : **δυνάμεθα νὰ αὐξήσωμεν (ἢ νὰ ἐλαττώσωμεν) τὸν δείκτην ὑπὸ τὸ σύμβολον Σ, ἀρκεῖ νὰ ἐλαττώσωμεν (ἢ νὰ αὐξήσωμεν) κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὰ ὅρια** (τὰς ἄκρας τιμὰς) τοῦ **συμβόλου Σ.**

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 1η : *Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν.*

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν :

$$\sum_{k=1}^{\nu} (2k-1) = \sum_{k=1}^{\nu} 2k - \sum_{k=1}^{\nu} 1 = 2\sum_{k=1}^{\nu} k - \sum_{k=1}^{\nu} 1 = 2 \cdot \frac{\nu(\nu+1)}{2} - \nu = \nu^2.$$

Ὥστε :

$$\sum_{k=1}^{\nu} (2k-1) = \nu^2.$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 2α : Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα : $\dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} (3\nu^2+5\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} (3\nu^2-3\nu)}$.

Λ ύ σ ι ς. Ἔχομεν :

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} (3\nu^2+5\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} (3\nu^2-3\nu)} = \frac{3\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} \nu^2 + 5\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} \nu}{3\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} \nu^2 - 3\sum\limits_{\nu=1}^{\nu} \nu} = \frac{3\,\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + 5\,\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}}{3\,\dfrac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 3\,\dfrac{\nu(\nu+1)}{2}} =$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)(\nu+3)}{\nu(\nu+1)(\nu-1)} = \frac{\nu+3}{\nu-1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

374. Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

α) $\sum\limits_{k=1}^{\nu} k(k+1)$, β) $\sum\limits_{k=1}^{\nu} \dfrac{1}{k(k+1)}$, γ) $\sum\limits_{k=1}^{\nu} (k^2+5k+3)$,

δ) $\sum\limits_{k=1}^{\nu} (k^3+7k^2+12k)$, ε) $\sum\limits_{k=1}^{\nu} k(k+2)(k+4)$, στ) $\sum\limits_{k=1}^{\nu} (k^4+3k^3+4k^2)$.

375. Τὰ κάτωθι ἀθροίσματα νὰ γραφοῦν διὰ χρήσεως τοῦ συμβόλου **Σ** καὶ ἀκολούθως νὰ ὑπολογισθοῦν :

α) $1\cdot4 + 2\cdot5 + 3\cdot6 + \cdots + \nu\cdot(\nu+3)$, β) $2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + 32x^5$,

γ) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3\nu-2)^2$, δ) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2\nu-1)^2$.

376. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\sum\limits_{k=1}^{\nu} k^3 = \dfrac{\nu^4}{4} + \dfrac{\nu^3}{2} + \dfrac{\nu^2}{4}$

377. Νὰ ἀπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα :

$$\alpha)\ \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{k} (\nu^4 + 6\nu^3 + 5\nu^2)}{\sum\limits_{\nu=1}^{k} (\nu^4 + 2\nu^3 + \nu^2)}, \qquad \beta)\ \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{k} (2\nu^3 - \nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{k} (\nu^2 - \nu)}, \qquad \gamma)\ \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{k} (\nu^3 + 3\nu^2 + 2\nu)}{k^2 + 5k + 6}.$$

378. Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ καὶ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί, νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης τῶν Cauchy – Schwarz.

$$\left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k\right)^2 \leqq \left(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k^2\right).$$

379. Ἐὰν $\nu \in \mathbf{N}$ δείξατε ὅτι εἶναι :

$$\left[\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}\right]^2 \leqq \nu \left(2 - \frac{1}{\nu}\right).$$

380. Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὅτι, διὰ $\nu \geqq 1$, εἶναι :

$$\alpha).\quad \frac{\nu^3}{3} < \sum_{k=1}^{\nu} k^2 < \frac{(\nu+1)^3}{3}, \qquad \beta).\quad \left\{\sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k}\right\}^2 < 2\nu.$$

§. 177. Ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς.– Ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς ἔχει δοθῆ μία ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ τῆς ὁποίας οἱ ὅροι :

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_\nu,\ \ldots \tag{1}$$

εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί. Διὰ κάθε $\nu \in \mathbf{N}$, ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα :

$$\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \tag{2}$$

τῶν πρώτων ν ὅρων τῆς (1). Οὕτως ἔχομεν :

$$\sigma_1 = \alpha_1, \quad \sigma_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \sigma_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \ldots$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μορφώνομεν μία νέαν ἀκολουθίαν σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ ὅρους

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3, \ldots,\ \sigma_\nu,\ \ldots \tag{3}$$

οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀθροίσματα τῶν ὅρων τῆς (1).

Τὴν ἀκολουθίαν (3) συμφωνοῦμεν νὰ τὴν συμβολίζωμεν οὕτω :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots \quad \text{ἢ συντόμως} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$$

ἢ συντομώτερα καὶ ἀκριβέστερα : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$. (4)

Τὸ συμβολικὸν ἄθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots$ *ἢ* $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ *καλεῖται* **σειρὰ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν** $\boldsymbol{\alpha_\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$. Κάθε ὅρος τῆς (3), δηλ. κάθε ἄθροισμα $\sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$ καλεῖται «**μερικὸν ἄθροισμα**» ἢ καὶ «**τμῆμα τῆς σειρᾶς**» (4). Οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (1), δηλαδὴ οἱ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ καλοῦνται «**ὅροι τῆς σειρᾶς**», ὁ δὲ α_ν εἰδικώτερον καλεῖται «**γενικὸς ὅρος**» τῆς σειρᾶς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τώρα ὅτι: διὰ τοῦ ὅρου **σειρὰ** ἐννοοῦμεν ἓν μαθηματικὸν σύμβολον, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν ἀκολουθίαν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1).

Σημείωσις : Δὲν πρέπει νὰ γίνεται σύγχυσις τῆς ἐννοίας τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α_ν μὲ τὴν ὁρισθεῖσαν ἀνωτέρω ἔννοιαν τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ τῶν αὐτῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Αὗται καίτοι σχηματίζονται μὲ τοὺς αὐτοὺς ὅρους εἶναι δύο ἔννοιαι ἐντελῶς διάφοροι.

Παραδείγματα σειρῶν :

1ον. Ἔστω ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + \nu + \cdots$

Διὰ τὴν ὡς ἄνω σειρὰν ἔχομεν :

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 3, \quad \sigma_3 = 6, \ldots, \sigma_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}, \ldots$$

2ον. Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^{\nu-1}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, ἐκτενῶς ἡ :

$$1, \quad \omega, \quad \omega^2, \quad \omega^3, \ldots, \omega^{\nu-1}, \ldots \tag{1}$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν μὲ πρῶτον ὅρον τὸ 1 καὶ λόγον τὸ ω. Τὴν ἀκολουθίαν τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1), ἤτοι τήν :

$$\sigma_\nu \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

καλοῦμεν «**γεωμετρικὴν σειρὰν**» καὶ τὴν συμβολίζομεν, κατὰ τὰ λεχθέντα, οὕτω :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \omega^{\nu-1} \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{\nu-1} + \cdots \tag{2}$$

Σημείωσις : Ἐνίοτε ἡ ἀρίθμησις τῶν ὅρων μιᾶς σειρᾶς ἄρχεται μὲ δείκτην $\nu = 0$, τότε γράφομεν :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \equiv \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots$$

Οὕτως ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ (2) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \omega^\nu \equiv 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^\nu + \cdots$$

3ον. Ἡ σειρά : $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^\nu} + \cdots$, (γεωμετρικὴ σειρὰ μὲ λόγον $\omega = \frac{1}{2}$) μὲ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\sigma_\nu \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu-1}} = 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}}.$$

4ον. Ἡ σειρά : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu(\nu+1) \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + \nu(\nu+1) + \cdots$ μὲ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\sigma_\nu \equiv 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + \nu \cdot (\nu+1) = \sum_{k=1}^{\nu} k(k+1) = \sum_{k=1}^{\nu} k^2 + \sum_{k=1}^{\nu} k =$$

$$= \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} + \frac{\nu(\nu+1)}{2} = \frac{1}{3}\nu(\nu+1)(\nu+2).$$

Παρατήρησις : Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας τὴν ὁποίαν εἴδομεν εἰς προηγούμενον κεφάλαιον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως καὶ ἡ ἔννοια τῆς σειρᾶς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ ὁλοκληρώματος, ἔννοιαν τὴν ὁποίαν θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἕκτην τάξιν.

§ 178. Σύγκλισις σειρᾶς. – Θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν τοῦ παραδείγματος 3 τῆς προηγουμένης παραγράφου, ἤτοι τὴν σειράν :

$\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^\nu} + \cdots$, μὲ μερικὸν ἄθροισμα $\sigma_\nu \equiv 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}}$.

Ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων :

$$\sigma_\nu = 2 - \frac{1}{2^{\nu-1}}, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

εὐκόλως διαπιστοῦμεν, ὅτι συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν 2, ἤτοι $\lim \sigma_\nu = 2$, καθόσον $\lim \frac{1}{2^{\nu-1}} = 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2 καὶ γράφομεν : $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} = 2$.

Ὁμοίως ἔστω ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$ μὲ μερικὸν ἄθροισμα (§ 98) $\sigma_\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right)$. Ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων :

$$\sigma_\nu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\nu+1}\right), \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

βλέπομεν ὅτι συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν $1/2$, ἤτοι εἶναι $\lim \sigma_\nu = 1/2$, καθόσον $\lim \frac{1}{2\nu+1} = 0$. Ἄρα ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)}$ συγκλίνει εἰς τὸν ἀριθμὸν $1/2$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{1}{2}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν :

Θὰ λέγωμεν ὅτι : **ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν σ** καὶ θὰ γράφωμεν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma$, **τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $\sigma_\nu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \cdots$ συγκλίνῃ πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν σ.**

Συντόμως :

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \sigma_\nu = \lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu) \equiv \lim \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sigma}$$

Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς σ, πρὸς τὸν ὁποῖον συγκλίνει ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καλεῖται «**ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$**». Δηλαδὴ καλοῦμεν ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς.

Ὅθεν ὁσάκις γράφομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu + \cdots = \sigma \quad \text{ἤ} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \sigma$$

ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι συγκλίνουσα καὶ τὸ ἄθροισμά της εἶναι σ.

Ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι θετικοί, ἡ ἀκολουθία σ_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ διὰ νὰ συγκλίνῃ θὰ πρέπει νὰ εἶναι φραγμένη, ἄλλως ἡ σ_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ ὡς αὔξουσα καὶ μὴ φραγμένη (βλ. § 150, παρατ.) ἀπειρίζεται θετικῶς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι «**ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικῶς**» καὶ γράφομεν συμβολικῶς : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = +\infty$.

Ὥστε :

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_\nu = +\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \sigma_\nu \equiv \lim(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_\nu) \equiv \lim \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{\alpha}_k = +\infty}$$

Οὕτως ἡ γεωμετρικὴ σειρά :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^\nu = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$$

μὲ μερικὸν ἄθροισμα :

$$\sigma_\nu \equiv 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{\nu-1} = 2^\nu - 1$$

ἀπειρίζεται θετικῶς, διότι $\lim \sigma_\nu = \lim(2^\nu - 1) = +\infty$, καθόσον ἡ ἀκολουθία σ_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ μὴ φραγμένη.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν :

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty} \boldsymbol{\alpha}_\nu = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \sigma_\nu \equiv \lim(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_\nu) \equiv \lim \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{\alpha}_k = -\infty}$$

Εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις λέγομεν ὅτι *«ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει κατ' ἐκδοχήν»*.

Τέλος ὑπάρχουν σειραί, αἱ ὁποῖαι δὲν συγκλίνουν, οὔτε πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, οὔτε πρὸς ἓν τῶν συμβόλων $+\infty$ ἢ $-\infty$. Μία τοιαύτη σειρὰ καλεῖται «**ἀποκλίνουσα**» ἢ «**κυμαινομένη**». Οὕτως, ἐὰν $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε ἡ σειρά, ἡ ὁποία μορφώνεται ἐκ τῆς ἀκολουθίας α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ ἀποκλίνει. Πράγματι, ἡ ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ δύναται νὰ γραφῇ :

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν :

$$\sigma_1 = 1, \ \sigma_2 = 1 + (-1) = 0, \ \sigma_3 = 1 + (-1) + 1 = 1, \ \sigma_4 = 0, \ldots,$$

ἤτοι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι :

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

Αὕτη ὅμως ἀ π ο κ λ ί ν ε ι ($\equiv$ δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν ἢ πρὸς ἓν τῶν συμβόλων $+\infty$, $-\infty$). Κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ σειρά, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀποκλίνει.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν συνάγομεν τώρα ὅτι :

Διὰ κάθε σειρὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἀκριβῶς μία ἐκ τῶν κάτωθι προτάσεων :

α). Ἡ σειρὰ ἔχει ἄθροισμα $\Longleftrightarrow$ *συγκλίνῃ πρὸς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν.*

β). Ἡ σειρὰ ἀπειρίζεται θετικῶς εἴτε ἀρνητικῶς $\Longleftrightarrow$ *ἡ σειρὰ συγκλίνῃ κατ' ἐξοχήν.*

γ). Ἡ σειρὰ ἀποκλίνει (κυμαίνεται).

Παρατήρησις 1η : Ἐκ τῶν προηγουμένων εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἔννοια : *σειρὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν* ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἀλγεβρικῆς ἐννοίας : *ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν* (μὲ δύο, τρεῖς, κτλ. ὅρους). Διὰ τοῦτο ἡ σειρὰ ὀνομάζεται ἐνίοτε καὶ *«ἄθροισμα μὲ ἀπείρους ὅρους»*. Δὲν πρέπει ὅμως νὰ γίνεται σύγχυσις μεταξὺ τῶν δύο ἐννοιῶν (ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ σειρὰ πραγματικῶν ἀριθμῶν), διότι τὸ μὲν ἄθροισμα πεπερασμένου πλήθους πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι εἷς μ ο ν ο σ η μ ά ν τ ω ς ὡρισμένος πραγματικὸς ἀριθμός, ἐνῷ διὰ μίαν σειρὰν δὲν ὑπάρχει πάντοτε τὸ ἄθροισμα, καθ' ὅτι ἡ σειρὰ ἠμπορεῖ νὰ συγκλίνῃ πρὸς τὸ $+\infty$ ἢ πρὸς τὸ $-\infty$ ἢ ἀκόμη καὶ νὰ μὴν συγκλίνῃ. Ἀλλὰ καὶ ὅταν ἡ σειρὰ συγκλίνῃ πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, τὸ ἄθροισμα αὐτῆς δὲν ὁρίζεται ἀλγεβρικῶς, ἀλλὰ μέσῳ τῆς ἐννοίας τῆς συγκλίσεως ἀκολουθίας, δηλαδὴ τὸ ἄθροισμα μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς δὲν λαμβάνομεν μὲ τὴν συνηθισμένην πρόσθεσιν, ἀλλὰ ὡς τὸ *ὅριον τῆς ἀκολουθίας τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων*· κατὰ ταῦτα ἡ λέξις *«ἄθροισμα»* χρησιμοποιεῖται ἐδῶ μὲ μίαν πολὺ εἰδικὴν σημασίαν. Ἐπίσης ἀξίζει νὰ τονισθῇ ἐδῶ ὅτι τὸ σύμβολον $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ διὰ μίαν συγκλίνουσαν σειρὰν σημαίνει καὶ τὴν *σειρὰν* καὶ τὸ *ἄθροισμά της*, ἂν καὶ αἱ δυὸ αὗται ἔννοιαι εἶναι , ὡς ἐλέχθη, διάφοροι.

Παρατήρησις 2α : Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ συγκλίσεως σειρᾶς, συνάγομεν ὅτι : προκειμένου νὰ ἐξετάσωμεν ἐὰν μία σειρὰ συγκλίνῃ ἢ ὄχι καὶ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά της, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : *Εὑρίσκομεν συναρτήσει τοῦ ν τὸ ἄθροισμα* σ_ν *τῶν ν πρώτων ὅρων της (μερικὸν ἄθροισμα)* — ἐὰν τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ — *καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὸ* $\lim \sigma_\nu$. Ἐὰν τὸ $\lim \sigma_\nu$ εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς σ, τότε ἡ σειρὰ συγκλίνει καὶ ἔχει ἄθροισμα τὸ σ, ἐὰν τὸ $\lim \sigma_\nu = +\infty$ ἢ $-\infty$, τότε ἡ σειρὰ ἀπειρίζεται θετικῶς ἢ ἀρνητικῶς (ἀντιστοίχως) καὶ τέλος ἐὰν τὸ $\lim \sigma_\nu$ δὲν ὑπάρχῃ, τότε ἡ σειρὰ ἀποκλίνει.

Ἂς ἴδωμεν πῶς θὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ ἀνωτέρω εἰς συγκεκριμένα παραδείγματα.

§ 179. Παραδείγματα σειρῶν συγκλινουσῶν καὶ μή.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ «δεκαδικὴ σειρὰ»

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{3}{10^\nu} \equiv \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^\nu} + \cdots$$

συγκλίνει καὶ μάλιστα ἰσχύει :

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^\nu} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\sigma_\nu = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \cdots + \frac{3}{10^\nu} = \frac{3}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{\nu-1}}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^\nu.$$

Ὅθεν :

$$\lim \sigma_\nu = \frac{1}{3}, \qquad \text{διότι} \quad \lim \frac{1}{10^\nu} = 0.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ μελετηθῇ ἡ σειρά :

$$\alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \cdots + [\alpha + (\nu - 1)\omega] + \cdots \qquad (\alpha \neq 0)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Λύσις. Ὡς γνωστὸν (§ 157) ἔχομεν :

$$\sigma_\nu = \alpha + (\alpha + \omega) + (\alpha + 2\omega) + \cdots + [\alpha + (\nu - 1)\omega] = \frac{2\alpha + (\nu - 1)\omega}{2} \cdot \nu$$

Ἄρα :

$$\lim \sigma_\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{ἐὰν } \omega > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \omega < 0. \end{cases}$$

Ὅθεν : **Κάθε σειρὰ τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον συγκλίνει κατ' ἐκδοχήν,** ἀκριβέστερον : **ἀπειρίζεται θετικῶς μέν, ἐὰν ἡ ἀντίστοιχος πρόοδος εἶναι αὔξουσα ($\omega > o$), ἀρνητικῶς δέ, ἐὰν ἡ πρόοδος εἶναι φθίνουσα ($\omega < 0$).**

Παράδειγμα 3ον : Νὰ μελετηθῇ ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν ἡ γεωμετρικὴ σειρά :

$$\alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} + \cdots \qquad (\alpha \neq 0) \tag{1}$$

διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λόγου ω.

Λύσις : Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (1) εἶναι :

$$\sigma_\nu = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^{\nu-1} = \alpha \cdot \frac{\omega^\nu - 1}{\omega - 1} = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}.$$

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α'). **Ἐὰν $|\omega| < 1$, δηλ. $-1 < \omega < 1$,** τότε, ὡς δείχθη εἰς τὴν § 174, εἶναι $\lim \sigma_\nu = \dfrac{\alpha}{1-\omega}$ καὶ ἑπομένως ἡ γεωμετρικὴ σειρὰ συγκλίνει (ἐν **R**).

β'). **Ἐὰν $\omega > 1$,** τότε ἡ ἀκολουθία ω^ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ μὴ φραγμένη, ἄρα $\lim \omega^\nu = +\infty$, ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου $\sigma_\nu = \dfrac{\alpha(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1} = \dfrac{\alpha}{\omega - 1} \cdot (\omega^\nu - 1)$, ἔχομεν :

$$\lim \sigma_\nu = \begin{cases} +\infty, & \text{ἐὰν } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \alpha < 0. \end{cases}$$

γ'). **Ἐὰν $\omega = 1$,** τότε ἡ σειρὰ εἶναι : $\alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ καὶ ἐπειδὴ $\sigma_\nu = \nu\alpha$, ἔχομεν :

$\lim \sigma_\nu = +\infty$ ἢ $-\infty$, καθόσον $\alpha > 0$ ἢ $\alpha < 0$ (ἀντιστοίχως).

δ'). **Ἐὰν $\omega = -1$,** τότε ἡ σειρὰ εἶναι : $\alpha - \alpha + \alpha - \alpha + \cdots$, ὁπότε :

$$\sigma_1 = \alpha, \quad \sigma_2 = \alpha + (-\alpha) = 0, \quad \sigma_3 = \alpha + (-\alpha) + \alpha = \alpha, \quad \sigma_4 = 0, \cdots$$

καὶ γενικῶς :

$$\sigma_\nu = \begin{cases} \alpha, & \text{ἐὰν } \nu \text{ περιττὸς} \\ 0, & \text{ἐὰν } \nu \text{ ἄρτιος.} \end{cases}$$

Ἤτοι, ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι : $\alpha, 0, \alpha, 0, \ldots$

Αὐτὴ ὅμως δὲν συγκλίνει. Ὅθεν διὰ $\omega = -1$, ἡ σειρὰ (1) ἀποκλίνει.

ε'). **Ἐὰν $\omega < -1$,** τότε ἡ σειρὰ (1) γίνεται : $\alpha - \alpha\omega + \alpha\omega^2 - \alpha\omega^3 + \cdots \pm \alpha\omega^k \mp \cdots$

Ἐπειδὴ $\omega < -1$, ὁπότε $|\omega| > 1$, ἕπεται $\lim \omega^\nu = +\infty$ ἢ $-\infty$, καθόσον ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀντιστοίχως, ὅθεν τὸ $\sigma_\nu = \frac{\alpha}{\omega - 1}(\omega^\nu - 1)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ οὐδὲν ὅριον ἔχει καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ (1) ἀποκλίνει. Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha\omega^\nu \equiv \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \cdots + \alpha\omega^\nu + \cdots = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-\omega}, & \text{ἐὰν } |\omega| < 1 \\ +\infty, & \text{ἐὰν } \omega \geqq 1 \text{ καὶ } \alpha > 0 \\ -\infty, & \text{ἐὰν } \omega \geqq 1 \text{ καὶ } \alpha < 0 \\ \text{ἀποκλίνει}, & \text{ἐὰν } \omega \leqq -1. \end{cases}$$

Οὕτως ἡ σειρά : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{3^\nu} \equiv \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$, συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμόν.

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}, \quad \text{διότι} \quad |\omega| = \frac{1}{3} < 1.$$

Ἀντιθέτως ἡ σειρά :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu = 1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots, \quad \text{ἀποκλίνει, διότι } \omega = -1.$$

Ἂς ἴδωμεν τώρα καὶ ἓν παράδειγμα σειρᾶς τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων της.

Παράδειγμα 4ον. Ἡ σειρά :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\nu} + \cdots \tag{1}$$

καλεῖται ἁ ρ μ ο ν ι κ ή, διότι ἕκαστος ὅρος της (ἐκτὸς τοῦ πρώτου) εἶναι μέσος ἁρμονικὸς ἐκείνων ποὺ τὸν περιέχουν.

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ὡς ἄνω σειρὰ **ἀπειρίζεται θετικῶς**.

Ἔστω $S_\nu \equiv 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς (1). Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι ἡ S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία θετικῶν ὅρων, ἤτοι ἰσχύει : $S_\nu < S_{\nu+1}$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη ἐν $\mathbf{R}$. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα (§ 150), ἡ S_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὡς αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία συγκλίνει· ἔστω δὲ ὅτι :

$$\lim S_\nu = S.$$

Ἐπειδὴ $S_\nu \to S$ ἕπεται ὅτι : διὰ κάθε $\varepsilon > 0$ $\left(\text{ἄρα καὶ διὰ } \varepsilon = \frac{1}{4}\right)$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 \in \mathbf{N}$ τοιοῦτος, ὥστε :

$$|S_\nu - S| \leqq \frac{1}{4} \text{ διὰ κάθε } \nu \geqq \nu_0.$$

Ὅθεν, ἐὰν $m \geqq \nu_0$ καὶ $\nu \geqq \nu_0$ ἔχομεν :

$$|S_m - S_\nu| = |(S_m - S) + (S - S_\nu)| \leqq |S_m - S| + |S_\nu - S| \leqq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Εἰδικῶς ἐὰν $\nu \geqq \nu_0$ καὶ $m = 2\nu$ ἔχομεν :

$$|S_{2\nu} - S_\nu| \leqq \frac{1}{2} \tag{2}$$

Ἐξ ἄλλου, ἐὰν $\nu > 1$ ἔχομεν :

$$S_{2\nu} - S_\nu = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{2\nu}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu}\right) =$$

$$= \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{2\nu}.$$

'Αλλά : $\frac{1}{\nu+1} > \frac{1}{2\nu}, \quad \frac{1}{\nu+2} > \frac{1}{2\nu}, \ldots, \frac{1}{2\nu} \geqq \frac{1}{2\nu}$ διὰ κάθε $\nu > 1$.

Ὅθεν :

$$S_{2\nu} - S_\nu = \frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \cdots + \frac{1}{2\nu} > \frac{1}{2\nu} + \frac{1}{2\nu} + \cdots + \frac{1}{2\nu} = \nu \cdot \frac{1}{2\nu} = \frac{1}{2},$$

ὁπότε συνάγεται ὅτι :

$$|S_{2\nu} - S_\nu| = S_{2\nu} - S_\nu > \frac{1}{2}, \tag{3}$$

τὸ ὁποῖον ἀντιφάσκει πρὸς τὴν (2). Ἑπομένως ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ ἀκολουθία S_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη ὁδηγεῖ εἰς ἄτοπον. Συνεπῶς, ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς ἁρμονικῆς σειρᾶς, ὡς αὔξουσα καὶ μὴ φραγμένη, ἀπειρίζεται θετικῶς, ἤτοι $\lim S_\nu = +\infty$ ὁπότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, ἔχομεν :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} = +\infty.$$

§ 180. Μέθοδοι εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων σειρᾶς.

— Ὑπάρχουν διάφοροι μέθοδοι εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων σειρᾶς τινος ἀναλόγως τῆς μορφῆς τοῦ γενικοῦ ὅρου αὐτῆς. Ὑπάρχουν ὅμως καὶ σειραὶ τῶν ὁποίων δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων, λ.χ. ἡ ἁρμονικὴ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$. Παραδείγματα ἀθροίσεως σειρῶν, δηλ. εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων των, συναρτήσει τοῦ ν, ἔχομεν ἤδη γνωστὰ τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῶν καὶ γεωμετρικῶν προόδων. Δὲν ὑπάρχει ὅμως γενικὴ μέθοδος διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων οἱασδήποτε σειρᾶς. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἐξετάσωμεν μόνον ὡρισμένας περιπτώσεις εἰς τὰς ὁποίας εἶναι δυνατὴ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων σειρῶν μὲ γενικὸν ὅρον α_ν εἰδικῆς μορφῆς.

Περίπτωσις I. Ἐὰν ὁ γενικὸς ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)$ (1), ὅπου $\varphi(\nu)$ συνάρτησις τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν (ἀκολουθία), τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς σ_ν εἶναι :

$$\boxed{\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1)} \tag{2}$$

Πράγματι, ἐὰν θέσωμεν εἰς τὴν $\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)$, $\nu = 1, 2, \ldots \nu$, ἔχομεν :

$$\alpha_1 = \varphi(1) - \varphi(2)$$
$$\alpha_2 = \varphi(2) - \varphi(3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1).$$

Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, ἔχομεν :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1)$$

ἢ

$$\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1).$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ὑπάρχῃ τὸ $\lim \varphi(\nu)$ καὶ εἶναι k, τότε ἐκ τῆς (2) ἔχομεν :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \lim \sigma_\nu = \varphi(1) - k.$$

Ἐφαρμογὴ 1η : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$$

καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς.

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὅρος αὐτῆς εἶναι : $\alpha_\nu = \dfrac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2}$.

Ἐπειδὴ $2\nu + 1 = (\nu+1)^2 - \nu^2$ θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha_\nu = \frac{(\nu+1)^2-\nu^2}{\nu^2(\nu+1)^2} = \frac{1}{\nu^2} - \frac{1}{(\nu+1)^2} = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1), \quad \text{ὅπου } \varphi(\nu) = \frac{1}{\nu^2}$$

τότε ὅμως, συμφώνως πρὸς τὴν (2), θὰ εἶναι :

$$\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1) = 1 - \frac{1}{(\nu+1)^2}$$

καὶ
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{\nu^2(\nu+1)^2} = \lim \sigma_\nu = 1, \quad \text{διότι } \lim \frac{1}{(\nu+1)^2} = 0.$$

Ἐφαρμογὴ 2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς :

$$\frac{4}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{2\cdot 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{6}{3\cdot 4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu + \cdots \qquad (\Sigma)$$

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς (Σ) εἶναι : $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^\nu$.

Πρὸς μετασχηματισμὸν τοῦ γενικοῦ ὅρου, ἀναλύομεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\dfrac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}$ εἰς ἄθροισμα δύο ἁπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτομεν :

$$\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \equiv \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu+1}.$$

Ἐξ αὐτῆς, ἐργαζόμενοι κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 98), εὑρίσκομεν $A = 3$, $B = -2$, ὅτε ἔχομεν :

$$\frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)} \equiv \frac{3}{\nu} - \frac{2}{\nu+1}.$$

Τότε ὁ γενικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς γίνεται :

$$\alpha_\nu = \frac{\nu+3}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = \frac{3}{\nu}\cdot\frac{2^\nu}{3^\nu} - \frac{2}{\nu+1}\cdot\frac{2^\nu}{3^\nu} = \frac{2^\nu}{\nu\cdot 3^{\nu-1}} - \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu},$$

ἤτοι ὁ α_ν ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha_\nu = \varphi(\nu) - \varphi(\nu+1)$, ὅπου $\varphi(\nu) = \dfrac{2^\nu}{\nu\cdot 3^{\nu-1}}$.

Τότε, κατὰ τὸν τύπον (2), θὰ εἶναι :

$$\sigma_\nu = \varphi(1) - \varphi(\nu+1) = 2 - \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu}, \quad \text{διότι } \varphi(1) = 2.$$

Ὅθεν :

$$\lim \sigma_\nu = 2 - \lim \frac{2^{\nu+1}}{(\nu+1)\cdot 3^\nu} = 2 - \lim \frac{2}{\nu+1}\cdot \lim\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = 2 - 0 = 2.$$

Ἤτοι ἡ σειρὰ (Σ) συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν 2.

Περίπτωσις II. Ἐὰν ὁ γενικὸς ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\boxed{\alpha_\nu = A\,\varphi(\nu) + B\,\varphi(\nu+1) + \Gamma\,\varphi(\nu+2), \text{ ὅπου } A + B + \Gamma = 0} \qquad (3)$$

τότε τὸ ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι :

$$\boxed{\sigma_\nu = A\,\varphi(1) - \Gamma\,\varphi(2) - A\,\varphi(\nu+1) + \Gamma\,\varphi(\nu+2)} \qquad (4)$$

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\sigma_\nu = \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\nu} \{ A\varphi(k) + B\varphi(k+1) + \Gamma\varphi(k+2) \} = A\sum_{k=1}^{\nu} \varphi(k) + B\sum_{k=1}^{\nu} \varphi(k+1) +$$
$$+ \Gamma \sum_{k=1}^{\nu} \varphi(k+2) = A \sum_{k=-1}^{\nu-2} \varphi(k+2) + B \sum_{k=0}^{\nu-1} \varphi(k+2) + \Gamma \sum_{k=1}^{\nu} \varphi(k+2) =$$
$$= A\{\varphi(1) + \varphi(2)\} + A\sum_{k=1}^{\nu-2} \varphi(k+2) + B\,\varphi(2) + B\sum_{k=1}^{\nu-2} \varphi(k+2) + B\,\varphi(\nu+1) +$$
$$+ \Gamma \sum_{k=1}^{\nu-2} \varphi(k+2) + \Gamma\{\varphi(\nu+1) + \varphi(\nu+2)\} = A\,\varphi(1) + (A+B)\,\varphi(2) +$$
$$+ (B+\Gamma)\,\varphi(\nu+1) + \Gamma\,\varphi(\nu+2) + (A+B+\Gamma) \sum_{k=1}^{\nu-2} \varphi(k+2).$$

Ἐπειδὴ $A + B + \Gamma = 0$, ὅτε $A + B = -\Gamma$, $B + \Gamma = -A$, ἔχομεν :

$$\sigma_\nu = A\varphi(1) - \Gamma\varphi(2) - A\varphi(\nu+1) + \Gamma\varphi(\nu+2).$$

Ἐφαρμογή : Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{8}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{3\nu+2}{\nu(\nu+1)\cdot(\nu+2)} + \cdots \qquad (5)$$

Λύσις : Ἀναλύομεν τὸν γενικὸν ὅρον $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)}$ εἰς ἄθροισμα τριῶν ἁπλῶν κλασμάτων. Πρὸς τοῦτο θέτοντες :

$$\frac{3\nu+2}{\nu(\nu+1)(\nu+2)} \equiv \frac{A}{\nu} + \frac{B}{\nu+1} + \frac{\Gamma}{\nu+2}$$

εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, $A = B = 1$ καὶ $\Gamma = -2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι : $A + B + \Gamma = 0$ καὶ ὁ γενικὸς ὅρος τῆς σειρᾶς (5) ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\alpha_\nu = A\,\varphi(\nu) + B\,\varphi(\nu+1) + \Gamma\,\varphi(\nu+2), \text{ ὅπου } \varphi(\nu) = \frac{1}{\nu}.$$

Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (4) εὑρίσκομεν :

$$\sigma_\nu = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+1} - 2\,\frac{1}{\nu+2} = 2 - \frac{1}{\nu+1} - \frac{2}{\nu+2}.$$

Παρατήρησις. Γενικῶς, ἐὰν $\alpha_\nu = A\varphi(\nu) + B\varphi(\nu+k) + \Gamma\varphi(\nu+\lambda)$ μὲ $A + B + \Gamma = 0$, τότε τὸ σ_ν ὑπολογίζεται.

Περίπτωσις III. Ἐὰν ὁ γενικὸς ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\alpha_\nu = f(\nu) + \varphi(\nu) + g(\nu),$$

ὅπου $f(\nu)$, $\varphi(\nu)$, $g(\nu)$ εἶναι οἱ γενικοὶ ὅροι σειρῶν, τῶν ὁποίων εἶναι γνωστὴ ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς ὑπολογίζεται.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον $\alpha_\nu = \frac{2^\nu - 1}{2^{2\nu-2}}$, καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῆς ($\equiv$ ἄθροισμα ἀπείρων ὅρων της).

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὅρος γράφεται :

$$\alpha_\nu = \frac{2^\nu - 1}{2^{2\nu-2}} = \frac{2^\nu}{2^{2\nu-2}} - \frac{1}{2^{2\nu-2}} = \frac{4}{2^\nu} - \frac{4}{4^\nu},$$

ἤτοι ὁ α_ν ἐτέθη ὑπὸ τὴν μορφήν : $\alpha_\nu = f(\nu) + \varphi(\nu)$, ὅπου $\varphi(\nu) = \frac{4}{2^\nu}$ καὶ $\varphi(\nu) = -\frac{4}{4^\nu}$, δηλαδὴ ὁ α_ν ἀνελύθη εἰς διαφορὰν δύο ὅρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ τὸν νιοστὸν ὅρον φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου.

Τότε : διὰ $\nu = 1$ ἔχομεν : $\alpha_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{4}$

διὰ $\nu = 2$ » : $\alpha_2 = 4 \cdot \frac{1}{2^2} - 4 \cdot \frac{1}{4^2}$

. . . .

διὰ $\nu = \nu$ » : $\alpha_\nu = 4 \cdot \frac{1}{2^\nu} - 4 \cdot \frac{1}{4^\nu}$.

Ὅθεν :

$$\sigma_\nu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu}\right) - 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^\nu}\right) =$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{1}{2^{\nu+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} - 4 \cdot \frac{\frac{1}{4^{\nu+1}} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = 4\left(1 - \frac{1}{2^\nu}\right) - \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^\nu}\right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{\nu-1}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{\nu-1}}$$

καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \lim \sigma_\nu = \frac{8}{3}.$$

Περίπτωσις IV : Ἐὰν ὁ γενικὸς ὅρος α_ν τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ εἶναι τῆς μορφῆς:

$\alpha_\nu = f(\nu) \cdot x^\nu$, ὅπου $f(\nu)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ ν,

τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς ὑπολογίζεται.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu x^{\nu-1} \equiv 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + \nu x^{\nu-1} + \cdots$$

Λύσις. Ἔστω :

$$\Sigma_\nu \equiv 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + \nu x^{\nu-1}. \tag{1}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ x λαμβάνομεν :

$$x\,\Sigma_\nu = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + \nu x^\nu. \tag{2}$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$(1 - x)\,\Sigma_\nu = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} - \nu x^\nu.$$

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι $1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu-1} = \frac{x^\nu - 1}{x - 1}$, γίνεται :

$$(1 - x) \cdot \Sigma_\nu = \frac{x^\nu - 1}{x - 1} - \nu x^\nu$$

ἢ

$$\Sigma_\nu = \frac{1 - x^\nu}{(1 - x)^2} - \frac{\nu x^\nu}{1 - x}.$$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς:

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{\nu+1}{3^\nu}+\cdots \qquad (1)$$

εἶναι: $\quad \frac{5}{4}-\frac{2\nu+5}{4\cdot 3^\nu}.$

Λύσις. Ὁ γενικὸς ὅρος τῆς (1), δηλ. ὁ $\frac{\nu+1}{3^\nu}$ εἶναι γινόμενον τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (τῆς: $2, 3, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots$) καὶ τοῦ νιοστοῦ ὅρου μιᾶς γεωμετρικῆς $\left(\text{τῆς}: \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^\nu}, \ldots\right)$, ἤτοι εἶναι ὁ νιοστὸς ὅρος μιᾶς **μικτῆς προόδου** *).

Θέτομεν:

$$\Sigma_\nu=\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\cdots+\frac{\nu+1}{3^\nu}. \qquad (2)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς προόδου λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{3}\Sigma_\nu=\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\cdots+\frac{\nu+1}{3^{\nu+1}}. \qquad (3)$$

Δι' ἀφαιρέσεως τῶν (2) καὶ (3) προκύπτει:

$$\frac{2}{3}\Sigma_\nu=\frac{2}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^\nu}-\frac{\nu+1}{3^{\nu+1}}=\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{3^\nu}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}-\frac{\nu+1}{3^{\nu+1}}$$

καὶ τελικῶς:

$$\Sigma_\nu=\frac{5}{4}-\frac{2\nu+5}{4\cdot 3^\nu}.$$

Περίπτωσις V: Ἐὰν ὁ γενικὸς ὅρος μιᾶς σειρᾶς εἶναι ἀκεραία ρητὴ συνάρτησις τοῦ ν, δηλαδὴ $\alpha_\nu=\varphi(\nu)$, $\nu\in\mathbf{N}$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς, τῆς ὁποίας ὁ γενικὸς ὅρος εἶναι: $\alpha_\nu = 12\nu^2-6\nu+1$.

Λύσις: Ἔστω $\sigma_\nu \equiv \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}\alpha_\nu\equiv\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}(12\nu^2-6\nu+1)$, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Λόγῳ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ συμβόλου Σ (βλ. § 176) ἔχομεν:

$$\sigma_\nu=\sum_{\nu=1}^{\nu}(12\nu^2-6\nu+1)=\sum_{\nu=1}^{\nu}12\nu^2-\sum_{\nu=1}^{\nu}6\nu+\sum_{\nu=1}^{\nu}1$$

ἢ $\quad \sigma_\nu=12\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}\nu^2-6\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{\nu}1=12\cdot\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-6\frac{\nu(\nu+1)}{2}+\nu=\nu^2(4\nu+3).$

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς:

$$1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+\cdots \qquad (\Sigma)$$

---

* **Μικτὴ πρόοδος** καλεῖται μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, ἕκαστος ὅρος τῆς ὁποίας προκύπτει ἀπὸ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν ἀντιστοίχων (ὁμοταξίων) ὅρων δύο προόδων, μιᾶς ἀριθμητικῆς καὶ μιᾶς γεωμετρικῆς.

Λύσις. Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν τὸν γενικὸν ὅρον τῆς σειρᾶς (Σ). Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν γινομένων τῆς δοθείσης σειρᾶς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1,3,5,..., οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον λόγου 2, συνεπῶς ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ γινομένου τοῦ γενικοῦ ὅρου τῆς σειρᾶς θὰ εἶναι ὁ: $1+(\nu-1)\cdot 2 = 2\nu-1$.

Ὁμοίως: ὁ γενικὸς ὅρος τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 3, 5, 7,... εἶναι $2\nu+1$

» » » » » 5, 7, 9,... » $2\nu+3$.

Ὁ γενικὸς ὅθεν ὅρος τῆς δοθείσης σειρᾶς εἶναι: $(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3)$.

Τότε τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς (Σ) εἶναι:

$$\sigma_\nu \equiv 1\cdot 3\cdot 5 + 3\cdot 5\cdot 7 + \cdots + (2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3) = \sum_{\nu=1}^{\nu}(2\nu-1)(2\nu+1)(2\nu+3) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\nu}(8\nu^3+12\nu^2-2\nu-3) = 8\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu^3 + 12\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu^2 - 2\sum_{\nu=1}^{\nu}\nu - 3\sum_{\nu=1}^{\nu}1 =$$

$$= 8\cdot\frac{\nu^2(\nu+1)^2}{4} + 12\,\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 2\,\frac{\nu(\nu+1)}{2} - 3\nu$$

καὶ τελικῶς:

$$\sigma_\nu = \nu(2\nu^3+8\nu^2+7\nu-2).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

381. Νὰ γραφοῦν οἱ ἑπτὰ πρῶτοι ὅροι τῶν ἀκολούθων σειρῶν:

α). $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu}{\nu^2+1}$, β). $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\nu}}$, γ). $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1+\nu}{1+\nu^2}$, δ). $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu^2}\cdot\frac{\nu}{\nu(\nu+1)}$.

382. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκολούθων σειρῶν:

α) $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{3^\nu}$, β) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^\nu$, γ) $\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^\nu$.

383. Νὰ εὑρεθῇ μία σειρὰ τῆς ὁποίας ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι:

α). $\left(1-\frac{1}{2^\nu}\right)$, $\nu=1,2,\ldots$, β). $\frac{\nu}{\nu+1}$, $\nu=1,2,\ldots$

384. Δείξατε ὅτι ἡ σειρά: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu(\nu+2)}$ εἶναι συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα $\frac{3}{4}$.

385. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$, ὅπου $\alpha_\nu = \frac{1}{(3\nu-2)(3\nu+1)}$.

386. Ὁμοίως τῆς σειρᾶς: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)}+\cdots$

387. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον:

$\alpha_\nu = \frac{\nu+2}{\nu(\nu+1)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^\nu$ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμά της.

388. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον:

$\alpha_\nu = \frac{2^\nu-1}{3^{\nu+1}}$ καὶ ἀκολούθως νὰ δειχθῇ ὅτι: $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \frac{1}{2}$.

389. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῶν σειρῶν, τῶν ὁποίων οἱ γενικοὶ ὅροι εἶναι:

α) $3\nu^2-\nu$, β) $8\nu^3-1$, γ) $8\nu^3-3\nu^2$, δ) $\nu^2+3\nu+2$.

390. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γενικοὶ ὅροι τῶν κάτωθι σειρῶν καὶ ἀκολούθως τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῶν.

α). $1\cdot 4\cdot 7+2\cdot 5\cdot 8+\ldots$ β). $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\ldots$

391. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων τῶν ἀκολούθων σειρῶν.

α) $1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + \cdots + \nu(\nu+1)(\nu+3) + \cdots$

β) $1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) + \cdots$

γ) $4\alpha + 5\alpha^2 + 6\alpha^3 + \cdots + (\nu+3)\,\alpha^\nu + \cdots$

392. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{\nu}{2^\nu} + \cdots$$

εἶναι :
$$1 - \frac{1}{2^\nu} - \frac{\nu}{2^{\nu+1}}.$$

393. Νὰ δειχθῇ ὅτι : $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \cdots + \frac{\nu}{5^{\nu-1}} = \frac{5^{\nu+1} - 4\nu - 5}{16 \cdot 5^{\nu-1}}$.

394. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$1 + 2\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) + 3\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^2 + \cdots + \nu\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu-1} = \nu^2.$$

395. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+2)(\nu+3)} = \frac{5}{36}$.

396. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots + \frac{\nu}{2^{\nu-1}} = 2 - \frac{\nu+2}{2^{\nu-1}}$.

Ἰδιότητες συγκλίσεως σειρῶν

Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ ἀποδείξωμεν μερικὰς βασικὰς ἰδιότητας συγκλινουσῶν σειρῶν, ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ὁποίων δύναταί τις νὰ συνδυάσῃ συγκλινούσας σειρὰς κατὰ ποικίλους τρόπους. Θὰ ἀναφέρωμεν ἐπίσης μίαν πολὺ ἁπλῆ συνθήκην, ἡ ὁποία εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν σύγκλισιν, ἐπὶ πλέον δὲ κατάλληλος, εἰς πολλὰς περιπτώσεις, προκειμένου νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μία σειρὰ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

§ 181. Ἰδιότης Ι.— ***Ἐὰν μία σειρὰ $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu + \ldots$ (1) εἶναι συγκλίνουσα μὲ ἄθροισμα $\alpha \in \mathbf{R}$, τότε καὶ ἡ σειρὰ : $\alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \ldots$ (2), ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν διὰ παραλείψεως τῶν k πρώτων ὅρων της, εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα.***

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν σ_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ t_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) ἀντιστοίχως, ἤτοι :

$$\sigma_\nu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \qquad (3)$$

$$t_\nu \equiv \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_{k+\nu} \qquad (4)$$

Τὸ (πεπερασμένον) ἄθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$ εἶναι εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, τὸν ὁποῖον ἂς καλέσωμεν s, ἤτοι : $s \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$.

Θέτομεν : $\sigma_{k+\nu} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+\nu}$, ὅτε ἔχομεν :

$$\sigma_{k+\nu} = s + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_{k+\nu}$$

ἢ
$$\sigma_{k+\nu} - s = \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \cdots + \alpha_{k+\nu}. \qquad (5)$$

Ἡ (5), δυνάμει τῆς (4), γίνεται:

$$\sigma_{k+\nu} - s = t_\nu\,, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν: $\lim \sigma_{k+\nu} - s = \lim t_\nu\,.$ (6)

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\lim \sigma_\nu = \alpha$, ἄρα καὶ $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma_{k+\nu} = \alpha$, ἡ ἰσότης (6) δίδει:

$$\lim t_\nu = \alpha - s.$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς σειρᾶς (2) συγκλίνει ὅτε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, καὶ ἡ σειρὰ (2) συγκλίνει.

Παρατήρησις. Παρατηροῦμεν ὅτι παραλείποντες τοὺς k πρώτους ὅρους μιᾶς συγκλινούσης σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, τὸ ἄθροισμα αὐτῆς α ἐλαττοῦται κατὰ τὸ ἄθροισμα s τῶν παραλειπομένων ὅρων. Προφανῶς ἐὰν ἡ (1) δὲν συγκλίνῃ ἐν $\mathbf{R}$, τότε καὶ ἡ (2) ἐπίσης δὲν συγκλίνει. Οὕτως αἱ σειραὶ (1) καὶ (2) εἶναι πάντοτε *τῆς αὐτῆς φύσεως*, δηλαδὴ ἢ καὶ αἱ δύο συγκλίνουσαι ἐν $\mathbf{R}$ (ἀσχέτως ἐὰν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα) ἢ καὶ αἱ δύο μὴ συγκλίνουσαι. Ἀντιστρέφοντες τοὺς ρόλους τῶν (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἡ σύγκλισις ἢ μὴ μιᾶς σειρᾶς δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτῆς προσθέσωμεν ἓν πεπερασμένον πλῆθος ὅρων. Οὕτως ἡ σειρά:

$$\sum_{\nu=11}^{\infty} \frac{1}{\nu} = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \ldots,$$

ὡς προκύπτουσα ἐκ τῆς ἁρμονικῆς σειρᾶς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ διὰ παραλείψεως τῶν δέκα πρώτων ὅρων της, ἀπειρίζεται θετικῶς.

§ 182. Ἰδιότης II.– Ἔστωσαν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \alpha$ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu = \beta$ δύο συγκλίνουσαι σειραί. Τότε:

1). Ἐὰν $\lambda \in \mathbf{R}$, ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\lambda\alpha_\nu)$ εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα λα,

ἤτοι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda\alpha_\nu) = \lambda\alpha = \lambda \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu\,,$$

δηλαδὴ διὰ τὰς συγκλινούσας σειράς, ὅπως καὶ διὰ τὰ συνήθη ἀθροίσματα, ἰσχύει ὁ *ἐπιμεριστικὸς νόμος*.

2). Ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)$ εἶναι συγκλίνουσα ἔχουσα ἄθροισμα τὸν ἀριθμὸν $\alpha + \beta$,

ἤτοι:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu\,.$$

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν s_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ t_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν σειρῶν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀντιστοίχως, τότε:

$$\left.\begin{aligned} s_\nu &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \\ t_\nu &= \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu \end{aligned}\right\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

1). Ἐὰν s'_ν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda\alpha_\nu)$, ἔχομεν :

$$s'_\nu = \lambda\alpha_1 + \lambda\alpha_2 + \cdots + \lambda\alpha_\nu = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu) = \lambda \cdot s_\nu .$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν : $\lim s'_\nu = \lim(\lambda \cdot s_\nu) = \lambda \cdot \lim s_\nu = \lambda\alpha$, διότι $\lim s_\nu = \alpha$.

Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda\alpha_\nu)$ συγκλίνει καὶ μάλιστα πρὸς τὸ $\lambda \cdot \alpha$.

2). Ἐὰν σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῆς $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$, θὰ εἶναι :

$$\sigma_\nu \equiv (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \cdots + (\alpha_\nu + \beta_\nu) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu) +$$
$$+ (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu) = s_\nu + t_\nu, \quad \forall \ \nu = 1, 2, \ldots$$

Ὅτε : $\lim \sigma_\nu = \lim(s_\nu + \lim t_\nu) = \lim s_\nu + \lim t_\nu = \alpha + \beta$, διότι ἐξ ὑποθέσεως

$$\lim s_\nu = \alpha, \ \lim t_\nu = \beta.$$

Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ συγκλίνει εἰς τὸ $\alpha + \beta$.

Ἐκ τῶν συμπερασμάτων (1) καὶ (2) τῆς ἰδιότητος II ἕπεται ἡ γενικωτέρα ἰδιότης :

§ 183. Ἰδιότης III.— Ἐὰν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \alpha$ καὶ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu = \beta$ μὲ $\alpha, \beta \in R$, ἐπὶ πλέον δὲ ξ καὶ η τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi\alpha + \eta\beta.$$

Εἰδικῶς διὰ $\xi = 1$, $\eta = -1$ ἔχομεν :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu - \beta_\nu) = \alpha - \beta = \sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu .$$

Ἐφαρμογή : Ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{3 \cdot 2^\nu}$ συγκλίνει, διότι : $\frac{1}{3 \cdot 2^\nu} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^\nu}$, ἐπὶ πλέον δὲ ἡ $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει καὶ μάλιστα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 1 § 178 ἰσχύει $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu} = 2$,

ὅθεν :
$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{3 \cdot 2^\nu} = \frac{1}{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu} = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}.$$

§ 184. Ἰδιότης IV.— Ἐὰν ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνῃ (ἐν R), τότε :

α΄). ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων εἶναι φραγμένη,
β΄). ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μηδενική.

Ἀπόδειξις. α΄). Ἐὰν $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = \alpha$, τότε $\lim \sigma_\nu = \alpha$ καὶ ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ ὡς συγκλίνουσα εἶναι φραγμένη (βλ. § 138).

β΄). Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον συμπέρασμα, παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\alpha_\nu = \sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 2, 3, \ldots$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν : $\lim \alpha_\nu = \lim (\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) = \lim \sigma_\nu - \lim \sigma_{\nu-1} = \alpha - \alpha = 0$.

Αἱ συνθῆκαι (α) καὶ (β) τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος εἶναι **ἀναγκαῖαι**, ἀλλ' οὐχὶ καὶ **ἱκαναί**. Οὕτως ὑπάρχουν μὴ συγκλίνουσαι σειραὶ διὰ τὰς ὁποίας ἡ (α) ἢ ἡ (β) ἰσχύει : Π.χ. ἡ σειρά : $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu$ ἀποκλίνει (βλ. § 178), ἐν τούτοις ὅμως ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων της εἶναι φραγμένη.

Ἐπίσης ἡ ἁρμονικὴ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικῶς, ἐν τούτοις ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

Πόρισμα.— Ἔστω α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ $\lim \alpha_\nu \neq 0$, τότε ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

Παράδειγμα : Ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+1}{3\nu+5}$ δὲν συγκλίνει πρὸς πραγματικὸν ἀριθμόν, διότι :

$$\lim \frac{2\nu+1}{3\nu+5} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Συμπέρασμα : Θὰ προχωρῶμεν εἰς τὴν μελέτην μιᾶς σειρᾶς ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, μόνον ἐφ' ὅσον ὁ γενικός της ὅρος συγκλίνει εἰς τὸ μηδέν.

§ 185. **Ἰδιότης V.— Ἐὰν ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνῃ καὶ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ δὲν συγκλίνῃ ἐν $\mathbf{R}$, τότε ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.**

Ἀπόδειξις : Ἐπειδὴ $\beta_\nu = (\alpha_\nu + \beta_\nu) - \alpha_\nu$ καὶ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ συγκλίνει, κατὰ τὴν ἰδιότητα III ἡ σύγκλισις τῆς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ συνεπάγεται τὴν σύγκλισιν τῆς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$. Ἀποκλείεται συνεπῶς ἡ σύγκλισις τῆς $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$, ἐφ' ὅσον ἐξ ὑποθέσεως ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ δὲν συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

Παράδειγμα : Ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{2^\nu}\right)$ δὲν συγκλίνει (ἐν $\mathbf{R}$), διότι ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικῶς καὶ ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει.

Παρατήρησις : Ἐὰν αἱ σειραὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ ἀμφότεραι δὲν συγκλίνουν ἐν $\mathbf{R}$, τότε ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}(\alpha_\nu + \beta_\nu)$ δυνατὸν νὰ συγκλίνῃ, δυνατὸν ὅμως καὶ νὰ μὴν συγκλίνῃ ἐν $\mathbf{R}$.

Παράδειγμα : Ἐὰν $\alpha_\nu = \beta_\nu = 1 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$,

ἐὰν ὅμως $\alpha_\nu = 1$ καὶ $\beta_\nu = -1 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$, τότε ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\alpha_\nu + \beta_\nu)$ συγκλίνει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

397. Ποῖαι σειραὶ μὲ γενικοὺς ὅρους τοὺς κάτωθι εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποῖαι ὄχι :

$$1).\ \alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{-\nu}, \qquad 2).\ \alpha_\nu = \frac{1}{\dfrac{\nu}{\sqrt{\nu}}}, \qquad 3).\ \alpha_\nu = \frac{\sqrt{\nu+1} - \sqrt{\nu}}{\nu}.$$

398. Ἐὰν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ καὶ β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι δύο ἀκολουθίαι τοιαῦται, ὥστε :

$$\alpha_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1} \quad \forall\ \nu = 1,2,\ldots,$$

τότε ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ ἀκολουθία β_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνῃ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \beta_1 - l, \text{ ὅπου } l = \lim \beta_\nu .$$

(**Ὑπόδειξις :** $\sigma_\nu \equiv \sum\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \sum\limits_{k=1}^{\nu} (\beta_k - \beta_{k+1}) = \beta_1 - \beta_{\nu+1}$ κ.τ.λ.).

399. Δείξατε ὅτι :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2 + \nu} = 1$$

(**Ὑπόδειξις :** Παρατηρήσατε ὅτι : $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu^2 + \nu} = \dfrac{1}{\nu(\nu+1)} = \dfrac{1}{\nu} - \dfrac{1}{\nu+1} \equiv \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$ καὶ ἀκολούθως λάβετε ὑπ' ὄψιν τὸ συμπέρασμα τῇ προηγουμένης ἀσκήσεως).

§ 186. Σειραὶ μὲ θετικοὺς ὅρους.— Εἰς τὴν παράγραφον ταύτην θὰ θεωρήσωμεν σειρὰς μὲ ὅρους θετικούς, δηλ. σειρὰς αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐξ ἀκολουθιῶν α_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, ὅπου $\alpha_\nu \geqq 0$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$ Τότε ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $\sigma_\nu \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι πάντοτε αὔξουσα καὶ ἑπομένως ἡ σειρά : **α') συγκλίνει** πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη, **β') ἀπειρίζεται θετικῶς** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ **δὲν** εἶναι φραγμένη.

Ἀποδεικνύομεν κατωτέρω μίαν βασικὴν πρότασιν, δυνάμει τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ ἐξακριβώνωμεν εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἐὰν μία σειρὰ μὲ θετικοὺς ὅρους συγκλίνῃ ἢ ἀπειρίζεται θετικῶς **συγκρίνοντες** αὐτὴν πρὸς μίαν ἄλλην γνωστὴν σειράν, δι' ὃ καὶ ἡ πρότασις αὕτη καλεῖται **«κριτήριον συγκρίσεως σειρῶν»**.

§ 187. Κριτήριον συγκρίσεως.— **Ἐὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ εἶναι δύο σειραὶ τοιαῦται, ὥστε :**

$$0 \leqq \alpha_\nu \leqq \beta_\nu, \quad \text{διὰ κάθε } \nu = 1,2,\ldots$$

Τότε : (1) Ἐὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνῃ, τότε καὶ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.

(2) Ἐὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικῶς, τότε καὶ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀπειρίζεται θετικῶς.

'Απόδειξις τῆς (1). Ἔστωσαν s_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ αἱ ἀκολουθίαι τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων τῶν $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ καὶ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ ἀντιστοίχως.

Λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $\alpha_\nu \leqq \beta_\nu$ διὰ κάθε $\nu = 1,2,\ldots$ ἔχομεν, ὅτι :

$$s_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\nu \leqq \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_\nu \equiv t_\nu . \qquad (1)$$

Ἐφ' ὅσον ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει, ἡ ἀκολουθία t_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι φραγμένη (βλ. § 184), τότε ὅμως, ὡς εὐκόλως φαίνεται ἐκ τῆς (1), καὶ ἡ s_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη ἄνωθεν καὶ ἐπειδὴ $\alpha_\nu \geqq 0$ $\forall$ $\nu = 1, 2, \ldots$, ἡ ἀκολουθία σ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ φραγμένη, ἄρα συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$. Τότε, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν συγκλίσεως σειρᾶς, καὶ ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν : $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$.

'Απόδειξις τῆς (2). Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει. Τότε, συμφώνως πρὸς τὴν (1), ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, ἄτοπον, διότι ἐξ ὑποθέσεως ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ ἀπειρίζεται θετικῶς. Ἄρα ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ **ὡς** σειρὰ θετικῶν ὅρων καὶ μὴ συγκλίνουσα ἐν $\mathbf{R}$ ἀπειρίζεται θετικῶς.

Ἐφαρμογὴ 1η : Ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{2^\nu(\nu+1)}$ συγκλίνει, διότι : $\frac{\nu}{2^\nu(\nu+1)} < \frac{1}{2^\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παράδειγμα 1 τῆς § 178.

Ἐφαρμογὴ 2α : Ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$ ἀπειρίζεται θετικῶς διὰ $\rho \in \mathbf{R}$ μὲ $\rho \leqq 1$.

Πράγματι, ἐὰν $\rho \leqq 1$, τότε $\nu^\rho \leqq \nu$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$. Ὅθεν $\frac{1}{\nu} \leqq \frac{1}{\nu^\rho}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ Ἀλλὰ ἡ ἁρμονικὴ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ἀπειρίζεται θετικῶς καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$, $\rho \leqq 1$, ἀπειρίζεται θετικῶς, συμφώνως πρὸς τὸ δεύτερον συμπέρασμα τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως σειρῶν.

Οὕτω διὰ $\rho = \frac{1}{2} < 1$ ἔχομεν ὅτι :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \equiv 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{\nu}} + \cdots = +\infty .$$

Ἐφαρμογὴ 3η : Ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\rho}$ συγκλίνει διὰ $\rho \in \mathbf{R}$ μὲ $\rho > 1$.

Πράγματι, αὐτὴ γράφεται :

$$\frac{1}{1^\rho} + \left(\frac{1}{2^\rho} + \frac{1}{3^\rho}\right) + \left(\frac{1}{4^\rho} + \frac{1}{5^\rho} + \frac{1}{6^\rho} + \frac{1}{7^\rho}\right) + \left(\frac{1}{8^\rho} + \frac{1}{9^\rho} + \cdots + \frac{1}{15^\rho}\right) + \\ + \left(\frac{1}{16^\rho} + \frac{1}{17^\rho} + \cdots + \frac{1}{31^\rho}\right) + \cdots \qquad (1)$$

'Επειδὴ εἶναι :

$$\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{3^\rho}<\frac{1}{2^\rho}+\frac{1}{2^\rho}=\frac{2}{2^\rho}=\frac{1}{2^{\rho-1}},$$

$$\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{5^\rho}+\frac{1}{6^\rho}+\frac{1}{7^\rho}<\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{4^\rho}+\frac{1}{4^\rho}=\frac{4}{4^\rho}=\frac{1}{4^{\rho-1}}=\frac{1}{2^{2\rho-2}},$$

$$\frac{1}{8^\rho}+\frac{1}{9^\rho}+\cdots+\frac{1}{15^\rho}<\frac{1}{8^\rho}+\frac{1}{8^\rho}+\cdots+\frac{1}{8^\rho}=\frac{8}{8^\rho}=\frac{1}{8^{\rho-1}}=\frac{1}{2^{3\rho-3}},\ \ldots,$$

ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς (1), (ἤτοι αἱ παρενθέσεις) εἶναι μικρότεροι τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{1^\rho}+\frac{1}{2^{\rho-1}}+\frac{1}{2^{2\rho-2}}+\frac{1}{2^{3\rho-3}}+\cdots \tag{2}$$

'Η σειρὰ (2), ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{2^{\rho-1}}<1$, συγκλίνει (διατί;). Τότε ὅμως, συμφώνως πρὸς τὸ πρῶτον συμπέρασμα τοῦ κριτηρίου συγκρίσεως, θὰ συγκλίνῃ καὶ ἡ (1).

Ὥστε, διὰ $\rho \in \mathbf{R}$, $\rho>1$ ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho}$ συγκλίνει (ἐν $\mathbf{R}$).

Παρατήρησις : 'Η σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho}$, ὅπου ρ τυχὼν πραγματικὸς ἀριθμός, καλεῖται **ἁρμονικὴ σειρὰ ρ—τάξεως** καὶ ὡς ἐδείχθη εἰς τὰς ἐφαρμογὰς 2 καὶ 3 ἰσχύει :

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^\rho}=\begin{cases}+\infty, & \textbf{ἂν}\ \rho\leqq 1\\ \textbf{συγκλίνει}, & \textbf{ἂν}\ \rho>1.\end{cases}}$$

Διὰ $\rho=1$ ἔχομεν τὴν ἁρμονικὴν σειρὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}$ (βλ. πρδ. 4, § 179).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

400. Νὰ εὑρεθῇ ποῖαι ἐκ τῶν κατωτέρω σειρῶν εἶναι συγκλίνουσαι καὶ ποῖαι ὄχι :

1. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2+1}{\nu^4}$,   2. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+1}{2\nu}$,   3. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu^2-3\nu+2}{\nu^4}$,

4. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu-1}{\nu^2}$,   5. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu}+1}{\nu^3}$,   6. $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\frac{\sqrt{\nu}}{\nu+\sqrt{\nu}}$.

401. 'Αποδείξατε ὅτι : 'Εὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\beta_\nu$ εἶναι δύο σειραὶ θετικῶν ὅρων καὶ

$$\lim\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=A,$$

ὅπου $A>0$, τότε ἢ καὶ αἱ δύο σειραὶ εἶναι συγκλίνουσαι ἢ καὶ αἱ δύο ὄχι.

(**'Υπόδειξις :** Δείξατε ὅτι : $\frac{1}{2}A\leqq\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\leqq\frac{3}{2}A$ τελικῶς διὰ κάθε $\nu\in\mathbf{N}$).

402. Στηριζόμενοι εἰς τὸ συμπέρασμα τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως ἐξετάσατε ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν τὰς ἀκολούθους σειράς :

1) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-2\nu-1}$ (**'Υπόδειξις :** Θεωρήσατε ὡς $\beta_\nu=\frac{1}{\nu^2}$)

2) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{\nu+3}{2\nu^2-1}$,   3) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\nu+2}{2\nu^3+\nu^2-1}$,   4) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{3\nu-1}{\nu^4+1}$.

§ **188. Σειραὶ ἀπολύτως συγκλίνουσαι.**—Θὰ λέγωμεν ὅτι:

Ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει ἀπολύτως τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων της, δηλαδὴ ἡ:

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_\nu| + \cdots$$

συγκλίνῃ πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν $\alpha_\nu \geqq 0 \ \forall \nu = 1, 2, \ldots$, τότε $|\alpha_\nu| = \alpha_\nu$ καὶ ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, συγκλίνῃ ἀπολύτως. Ἐὰν ὅμως μερικοὶ ἐκ τῶν ὅρων α_ν εἶναι θετικοὶ καὶ μερικοὶ ἀρνητικοί, τότε ἁπλῆ σύγκλισις καὶ ἀπόλυτος σύγκλισις δὲν εἶναι τὸ αὐτό.

Ἀκριβέστερον ἰσχύει τὸ κάτωθι θεώρημα:

§ **189. Θεώρημα: Ἐὰν μία σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνῃ ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἁπλῶς. Τὸ ἀντίστροφον δὲν ἰσχύει πάντοτε.**

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει ἀπολύτως.

Θέτομεν: $\beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu$ διὰ κάθε $\nu = 1, 2, \ldots$

Τότε ἔχομεν:

$$0 \leqq \beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu \leqq |\alpha_\nu| + |\alpha_\nu| \leqq 2 \cdot |\alpha_\nu| \quad \forall \nu = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Ἔχομεν δεχθῆ ὅτι ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ συγκλίνει. Τότε ὅμως ἐκ τῆς (1) προκύπτει, συμφώνως πρὸς τὸ γνωστὸν κριτήριον συγκρίσεως, ὅτι καὶ ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$ συγκλίνει.

Κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνει, διότι ἐκ τῆς $\beta_\nu = |\alpha_\nu| - \alpha_\nu$ ἔχομεν:

$\alpha_\nu = |\alpha_\nu| - \beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots$ καὶ αἱ σειραὶ $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu$, συγκλίνουν.

Παράδειγμα: Ἡ σειρὰ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \equiv -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \cdots$ συγκλίνει.

Πράγματι, ἔχομεν: $\left| \frac{(-1)^\nu}{\nu^2} \right| = \frac{1}{\nu^2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots$

Ἀλλὰ ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ συγκλίνει, ὅθεν καὶ ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2}$ συγκλίνει ἀπολύτως, ὁπότε, κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, αὕτη συγκλίνει καὶ ἁπλῶς.

Παρατηρήσεις: *α'*). Ἐὰν ἡ $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ συγκλίνῃ ἀπολύτως, τότε αὕτη συγκλίνει καὶ ἰσχύει:

$$\left| \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \right| \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|.$$

β'). Τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δὲν ἀληθεύει πάντοτε. Δηλαδή, δυνατὸν μία σειρὰ νὰ συγκλίνῃ, ἐνῷ ἡ σειρὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων της νὰ μὴν συγκλίνῃ.

Συμπέρασμα. Ἡ ἔννοια ὅθεν τῆς ἀπολύτου συγκλίσεως εἶναι «*ἰσχυροτέρα*» τῆς ἐννοίας τῆς ἁπλῆς συγκλίσεως.

Παράδειγμα 2ον : Δείξατε ὅτι ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\eta\mu\nu}{2^\nu}$ συγκλίνει.

Πράγματι, ἔχομεν :

$$\left|\frac{\eta\mu\nu}{2^\nu}\right| \leqq \frac{1}{2^\nu} \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}.$$

Ἀλλά, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ παρδ. 1 § 178, ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu}$ συγκλίνει, ὅθεν καὶ ἡ

$\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \left|\frac{\eta\mu\nu}{2^\nu}\right|$ συγκλίνει, δηλαδὴ ἡ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\eta\mu\nu}{2^\nu}$ συγκλίνει ἀπολύτως. Τότε ὅμως αὕτη θὰ συγκλίνῃ καὶ ἁπλῶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

403. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων σειρῶν εἶναι ἀπολύτως συγκλίνουσαι; Ποῖαι εἶναι συγκλίνουσαι; Ποῖαι δὲν συγκλίνουν ἐν $\mathbf{R}$;

1. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu-2}{\nu^3+1}$, 2. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{1}{(2\nu)^2}$, 3. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu\ \nu}{1+\nu^2}$,

4. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \eta\mu\left(\nu^{-\frac{3}{2}}\right)$, 5. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu}{\nu+1}$, 6. $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt[\nu]{\nu}}$.

404. Ἐὰν $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu|$ συγκλίνῃ, δείξατε ὅτι καὶ ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2$ συγκλίνει. Δώσατε ἀκολούθως ἓν παράδειγμα ἐκ τοῦ ὁποίου νὰ ἐμφαίνηται ὅτι δὲν ἰσχύει πάντοτε τὸ ἀντίστροφον.

405. Ἔστω $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_\nu| = \alpha$ καὶ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu^2 = \beta$, $\alpha_\nu > 0\ \forall\ \nu = 1, 2, \ldots$, δείξατε ὅτι :

$$\alpha^2 > \beta.$$

§ 190. Παράστασις πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ δεκαδικὰς σειράς.

Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, ἐκτενῶς ἡ :

$$\psi_0, \frac{\psi_1}{10}, \frac{\psi_2}{10^2}, \frac{\psi_3}{10^3}, \ldots, \frac{\psi_\nu}{10^\nu}, \ldots$$

ὅπου ψ_0 εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots, \psi_\nu, \ldots$ εἶναι ψηφία, δηλαδὴ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μέ : $\quad 0 \leqq \psi_\nu \leqq 9 \quad \forall\ \nu \in \mathbf{N}$.

Θεωρήσωμεν τὴν ἀντίστοιχον σειρὰν $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu$, ἤτοι τήν :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \cdots \qquad (1)$$

τὴν ὁποίαν καλοῦμεν «*δεκαδικὴν σειρὰν*» ἢ καὶ ἄλλως «*δεκαδικὸν ἀριθμὸν*» μὲ ἀκέραιον μέρος ψ_0 καὶ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία $\psi_1, \psi_2, \ldots$ Ταύτην συμβολίζομεν συντόμως καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \cdots \psi_\nu \cdots$$

Ἂς μελετήσωμεν τώρα, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὴν δεκαδικὴν σειρὰν (1).

Τὸ ἄθροισμα σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων (μερικὸν ἄθροισμα) εἶναι :

$$\sigma_\nu = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_{\nu-1}}{10^{\nu-1}}, \ \nu = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

ἀναλυτικώτερον ἔχομεν :

$$\sigma_1 = \psi_0\,,\ \sigma_2 = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10},\ \sigma_3 = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2},\ \text{καὶ γενικῶς}$$

$$\sigma_{\nu+1} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \cdots + \frac{\psi_{\nu-1}}{10^{\nu-1}} + \frac{\psi_\nu}{10^\nu}, \ \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι :

$$\psi_0 \leqq \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} \leqq \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} \leqq \cdots$$

δηλαδὴ ἰσχύει :

$$\sigma_\nu \leqq \sigma_{\nu+1} \qquad \text{καὶ τοῦτο διὰ κάθε } \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

ἤτοι ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι αὔξουσα. Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ

$$\frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} < 1 \ \forall\, \nu \in \mathbf{N} \ (\text{διατί;})$$

ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν $\psi_0 + 1$. Ἑπομένως, κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς § 150, Κεφ. V, ἡ ἀκολουθία (2), ὡς αὔξουσα καὶ φραγμένη συγκλίνει πρὸς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν $\xi \leqq \psi_0 + 1$, ἤτοι : $\lim \sigma_\nu = \xi$. Τότε ὅμως καὶ ἡ δεκαδικὴ σειρὰ (1) συγκλίνει, ἐξ ὁρισμοῦ, καὶ ἰσχύει :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \cdots \equiv \psi_0, \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_\nu \cdots =$$

$$= \lim \sigma_\nu = \xi.$$

Ἐδείχθη ὅθεν τὸ ἑξῆς :

§ 191. Θεώρημα.— Μία δεκαδικὴ σειρὰ $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu} \equiv \psi_0, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu \ldots$ συγκλίνει πάντοτε καὶ ὁρίζει ἀκριβῶς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν ξ.

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὁρισμόν :

§ 192. Ὁρισμός.— Θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς ξ παρίσταται ὡς μία δεκαδικὴ σειρὰ ἢ ἔχει δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα $\psi_0, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu \ldots$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ὑπάρχῃ μία δεκαδικὴ σειρὰ $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu}$ τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$\xi = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu \ldots \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

Σημ. Τὸ ψ_0 καλεῖται τὸ *«ἀκέραιον μέρος»*, τὰ δὲ $\psi_1, \psi_2 \ldots$ τὰ *«δεκαδικὰ ψηφία»* τοῦ ἀναπτύγματος.

Ἀποδεικνύεται εἰς τὰ μαθηματικὰ τὸ κάτωθι βασικὸν θεώρημα :

§ 193. Θεώρημα παραστάσεως πραγματικοῦ ἀριθμοῦ διὰ δεκαδικῆς σειρᾶς.— Διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν ξ ὑπάρχει ἀκριβῶς μία παράστασις αὐτοῦ διὰ δεκαδικῆς σειρᾶς, ἤτοι :

$$\xi = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \ldots \psi_\nu \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\psi_\nu}{10^\nu},$$

εἰς τὴν ὁποίαν τὰ δεκαδικὰ ψηφία δὲν εἶναι ὅλα ἐννέα, ἀπό τινος θέσεως καὶ πέραν.

Οὕτω, π.χ.

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots \qquad \frac{1}{2} = 0{,}5000\ldots$$

$$3{,}27 = 3{,}27000\ldots \qquad \sqrt{2} = 1{,}414213564\ldots$$

$$\frac{29}{4} = 7 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \cdots = 7{,}2500\ldots$$

Παρατήρησις : Διὰ τὸ 3,27 ἀντιστοίχως τὸ 1/2 ὑπάρχουν καὶ αἱ παραστάσεις $3{,}27 = 3{,}269999\ldots$ ἀντιστοίχως $1/2 = 0{,}4999\ldots$

Αὗται ὅμως ἀποκλείονται, διότι ἐπαναλαμβάνεται ἀπό τινος θέσεως καὶ πέραν τὸ ψηφίον 9.

Ἐφαρμογή : Νὰ εὑρεθῇ τὸ δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα τοῦ ἀριθμοῦ 7/11.

Λύσις : Ἔστω ὅτι εἶναι : $\frac{7}{11} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \cdots$ (1)

Ἡ (1) γράφεται καὶ οὕτω :

$$0 + \frac{7}{11} = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \cdots$$

ἄρα $\psi_0 = \mathbf{0}$ καὶ ἑπομένως :

$$\frac{7}{11} = \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \frac{\psi_3}{10^3} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \cdots \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει :

$$\frac{70}{11} = \psi_1 + \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^{\nu-1}} + \cdots$$

ἢ

$$6 + \frac{4}{11} = \psi_1 + \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \cdots$$

ἄρα $\psi_1 = \mathbf{6}$ καὶ ἑπομένως :

$$\frac{4}{11} = \frac{\psi_2}{10} + \frac{\psi_3}{10^2} + \frac{\psi_4}{10^3} + \cdots \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) προκύπτει :

$$\frac{40}{11} = \psi_2 + \frac{\psi_3}{10} + \frac{\psi_4}{10^2} + \cdots$$

ἢ

$$3 + \frac{7}{11} = \psi_2 + \frac{\psi_3}{10} + \frac{\psi_4}{10^2} + \cdots$$

ἄρα $\psi_2 = \mathbf{3}$ κ.ο.κ.

Οὕτω τελικῶς θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{7}{11} = \psi_0, \psi_1 \psi_2 \psi_3 \ldots = 0{,}6363\ldots$$

*** § 194. Γινόμενα πραγματικῶν ἀριθμῶν μὲ πεπερασμένους τὸ πλῆθος παράγοντας.**— Πολλάκις παρουσιάζονται γινόμενα τῆς μορφῆς :

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_\nu .$$

Διὰ τὴν συντομωτέραν γραφὴν χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἑλληνικὸν γράμμα Π διὰ τὸν συμβολισμὸν τῶν γινομένων τούτων. Γράφομεν :

$$\prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots \alpha_\nu .$$

Τὸ πρῶτον μέλος ἀναγιγνώσκεται : *Γινόμενον τῶν (ἀριθμῶν)* α_k *ἀπὸ* $k=1$ *ἕως* $k=\nu$. Τὸ σύμβολον Π σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν, θέτοντες διαδοχικῶς $k=1,\ k=2, \ldots, k=\nu$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου, ἕπεται ὅτι :

$$\alpha').\ \prod_{k=1}^{\nu} k = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots \nu, \qquad \beta').\ \prod_{k=1}^{\nu+1} \alpha_k = \alpha_{k+1} \cdot \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k , \qquad \gamma').\ \prod_{k=1}^{\nu} \alpha = \alpha^\nu .$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ κάτωθι ἰδιότητες γινομένων :

1). $\prod_{k=1}^{\nu} (\alpha_k \beta_k) = \left(\prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\nu} \beta_k\right)$

2). $\prod_{k=1}^{\nu} (\lambda \cdot \alpha_k) = \lambda^\nu \cdot \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k$

3). $\prod_{k=1}^{\nu} \frac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}} = \frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}, \quad \alpha_k \neq 0 \quad \forall \ k = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$

Παράδειγμα : Δείξατε ὅτι : $\prod_{k=2}^{\nu}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\nu}$.

Πράγματι εἶναι :

$$\prod_{k=2}^{\nu}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{\nu-1}{\nu} = \frac{1}{\nu}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

406. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\prod_{k=2}^{\nu}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{\nu+1}{2\nu}$.

407. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\lim \left(\prod_{k=2}^{\nu} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \right) = \frac{1}{2}$.

408. Ἐὰν $x \neq 1$, δείξατε ὅτι :

$$\prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + x^{2^{k-1}}\right) = \frac{1 - x^{2^\nu}}{1 - x}.$$

Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου αὐτοῦ ὅταν $x = 1$;

409. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\lim \prod_{\nu=2}^{\nu} \frac{\nu^3 - 1}{\nu^3 + 1}$.

410. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης : $\prod_{k=0}^{\nu}\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right) > (2\nu + 3)^{1/2}$.

*** § 195. Ἀπειρογινόμενα.**– Ἔστω α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ μία ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν. Καλοῦμεν **ἀπειρογινόμενον** μὲ ὅρους (εἴτε ἄλλως *παράγοντας*) τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ τὴν παράστασιν :

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu \cdots,$$

δηλαδὴ γινόμενον μὲ ἀπείρους παράγοντας.

Ἓν τοιοῦτον γινόμενον συμβολίζομεν διὰ τοῦ συμβόλου : $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$, ἤτοι :

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \equiv \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu \cdots \tag{1}$$

Ἕκαστον γινόμενον

$$\gamma_\nu = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_\nu \equiv \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k, \quad \nu = 1, 2, \ldots$$

καλεῖται **μερικὸν γινόμενον** τοῦ ἀπειρογινομένου (1).

Τὰ πρῶτα ἀπειρογινόμενα ἐδόθησαν ὑπὸ τῶν μεγάλων μαθηματικῶν Viète (1646) καὶ Wallis (Οὐώλλις).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἑνὸς ἀπειρογινομένου, ἕπεται ὅτι :

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k) = \prod_{k=1}^{\nu} (1 + \alpha_k) \cdot \prod_{k=\nu+1}^{\infty} (1 + \alpha_k).$$

*** § 196. Σύγκλισις ἑνὸς ἀπειρογινομένου (πραγματ. ἀριθμῶν).** Θὰ λέγωμεν : **τὸ ἀπειρογινόμενον $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu$ μὲ $\alpha_\nu \neq 0$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρὸς ἕνα ἀριθμὸν γ καὶ θὰ γράφωμεν $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \gamma$ τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\gamma \neq 0$, $\gamma \neq \pm\infty$ καὶ ἐπὶ πλέον ἰσχύῃ : $\lim \prod\limits_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \gamma$.**

Συντόμως :

$$\boxed{\prod_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu = \gamma \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim \prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \gamma, \quad \gamma \neq 0, \ \pm\infty}$$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $\prod\limits_{\nu=2}^{\infty} \left[1 - \dfrac{2}{\nu(\nu+1)}\right]$.

Λύσις : Ἔχομεν :

$$1 - \frac{2}{k(k+1)} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}.$$

Κατὰ ταῦτα :

$$\prod_{k=2}^{\nu} \left[1 - \frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\nu} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \, \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(\nu-1) \cdot (\nu+2)}{\nu \cdot (\nu+1)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu-1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \nu} \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (\nu+1) \cdot (\nu+2)}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots \nu \cdot (\nu+1)} = \frac{\nu+2}{3\nu}.$$

Ὅθεν :

$$\lim \prod_{k=2}^{\nu} \left[1 - \frac{2}{k(k+1)}\right] = \frac{1}{3}, \text{ καὶ συνεπῶς } \prod_{\nu=2}^{\infty} \left[1 - \frac{2}{\nu(\nu+1)}\right] = \frac{1}{3}.$$

Παράδειγμα 2ον : Τὰ ἀπειρογινόμενα $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)$ καὶ $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)$ δὲν συγκλίνουν πρὸς πεπερασμένον ἀριθμόν.

Πράγματι, διὰ τὸ πρῶτον ἔχομεν :

$$\gamma_\nu \equiv \prod_{k=1}^{\nu}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\nu+1, \quad \text{ἄρα} \ \lim \gamma_\nu = +\infty,$$

ἐνῷ διὰ τὸ δεύτερον :

$$\gamma'_\nu \equiv \prod_{k=1}^{\nu}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{\nu+1}, \quad \text{ἄρα} \ \lim \gamma'_\nu = 0.$$

Διὰ τὸ πρῶτον θὰ λέγωμεν ὅτι **συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν πρὸς τὸ** $+\infty$.

Διὰ τὸ δεύτερον θὰ λέγωμεν ὅτι **συγκλίνει κατ' ἐκδοχὴν πρὸς τὸ 0**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

411. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\prod\limits_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{\nu^3+1}\right)=\frac{2}{3}$.

412. Νὰ μελετηθοῦν ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν τὰ κάτωθι ἀπειρογινόμενα :

$$1. \ \prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\nu}\right), \qquad 2. \ \prod_{\nu=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{\nu^2-1}\right).$$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ ΤΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

413. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^{\nu}(k^3+3k^2-k+1)=\frac{\nu}{4}(\nu^3+6\nu^2+5\nu+4).$$

414. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-1}$ συγκλίνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{3}{4}$.

415. Δείξατε ὅτι :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1/2)(\nu+3/2)(\nu+5/2)}=\frac{2}{3}.$$

416. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$$

417. Ἐὰν $\sum\limits_{k=1}^{\nu}\alpha_k=3\nu^2+4\nu$, νὰ εὑρεθῇ τὸ $\sum\limits_{k=1}^{\nu-1}\alpha_k$ καὶ ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ ὁ α_ν.

418. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῆς σειρᾶς : $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots$

419. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς :

$$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots$$

420. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}=\frac{1}{6}\pi^2, \text{ νὰ δειχθῇ ὅτι : } \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^3(\nu+1)^3}=10-\pi^2.$$

421. Δείξατε ὅτι ἡ σειρὰ $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu^{\nu+2}}$ συγκλίνει (ἐν $\mathbf{R}$), ἐνῷ δὲν συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὴν σειράν : $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[\nu]{\nu+1}}$.

422. Νὰ ἐξετασθῇ, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, ἡ σειρὰ μὲ γενικὸν ὅρον $\alpha_\nu = \dfrac{3\nu - 1}{\nu^4 + 1}$.

*** 423.** Ἐὰν α_k, $\beta_k \in \mathbf{R}^+$ $\forall$ $k = 1,2,\ldots,\nu$ καὶ $p, q \in \mathbf{R}^+$ μὲ $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k \beta_k \leqq \Big(\sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\nu} \beta_k^q\Big)^{\frac{1}{q}}. \quad \text{('Ανισότης τοῦ Hölder).}$$

*** 424.** Δείξατε ὅτι :

$$\sqrt[\nu]{\prod_{k=1}^{\nu} \alpha_k} \leqq \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k, \quad \alpha_k > 0,\ k = 1,2,\ldots,\nu.$$

425. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\prod\limits_{\mu=1}^{\nu-1} \mu \cdot \prod\limits_{\mu=2}^{\nu} (\mu^2 + \mu + 1)}{\prod\limits_{\mu=3}^{\nu+1} \mu \cdot \prod\limits_{\mu=1}^{\nu-1} (\mu^2 + \mu + 1)} = \frac{2}{\nu(\nu+1)} \cdot \frac{\nu^2 + \nu + 1}{3}.$$

426. Δείξατε ὅτι :

$$\prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 + \dfrac{m}{\nu + c}} = \prod_{\nu=m+1}^{n+m} \left(1 - \frac{m}{\nu + c}\right).$$

427. Δείξατε ὅτι :

$$\frac{\prod\limits_{k=2}^{\nu} (k-1) \cdot \prod\limits_{k=2}^{\nu} (k+1)}{\prod\limits_{k=2}^{\nu} k^2} = \frac{\nu + 1}{2\nu}.$$

428. Νὰ μελετηθῇ, ὡς πρὸς τὴν σύγκλισιν, τὸ ἀπειρογινόμενον :

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu+1)^2}{\nu(\nu+2)}.$$

429. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x) \equiv x^2 + \beta x - \gamma$ μὲ ρίζας $\rho_1 < \rho_2$, τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ πληροῦν τὴν σχέσιν $1 + 2\beta < 4\gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\rho_1 < \prod_{\nu=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) < \rho_2.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ – ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ι. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ. ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι

§ 197. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτην ἄρρητον ἀριθμόν.—Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν ὡρίσαμεν δυνάμεις μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον ἢ κλασματικόν, ἤτοι μὲ ἐκθέτην ρητὸν ἀριθμὸν καὶ ἀπεδείξαμεν τὰς κυριωτέρας ἰδιότητας αὐτῶν, τὰς ὁποίας καὶ ὑπενθυμίζομεν ἐνταῦθα :

Ἐὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ καὶ $x, y \in \mathbf{Q}$, ($\mathbf{Q}$ τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν), τότε ἰσχύουν αἱ κάτωθι ἰδιότητες :

1) $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$ 3) $(\alpha \cdot \beta)^x = \alpha^x \cdot \beta^x$

2) $\alpha^x : \alpha^y = \alpha^{x-y}$ 4) $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$.

Ἐπὶ πλέον :

5) Ἐὰν $x < y$, τότε ἰσχύει :

$$\alpha^x \begin{cases} < \alpha^y & \text{διὰ} \quad \alpha > 1 \\ = \alpha^y & \text{διὰ} \quad \alpha = 1 \\ > \alpha^y & \text{διὰ} \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Ὥστε : Διὰ $\alpha > 0$ τὸ σύμβολον α^x εἶναι τελείως ὡρισμένον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἐκθέτης x εἶναι τυχὼν ρητὸς ἀριθμός.

Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον γενικεύομεν, ἔστω καὶ στοιχειωδῶς, τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως μὲ ἐκθέτην τυχόντα πραγματικὸν ἀριθμόν. Πρὸς τοῦτο ὁρίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου α^x, ὅταν ὁ ἐκθέτης x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τοῦ θέματος, ἂς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ ἑξῆς συγκεκριμένον παράδειγμα :

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν δύναμιν $\alpha^{\sqrt{2}}$, $\alpha \in \mathbf{R}^+$. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν μίαν αὔξουσαν ἀκολουθίαν ρητῶν ἀριθμῶν ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ μὲ $\lim \rho_\nu = \sqrt{2}$, π.χ. τὴν ἀκολουθίαν :

$$1, \quad 1.4, \quad 1.41, \quad 1.414, \quad 1.4142, \quad 1.41421, \ldots, \tag{1}$$

ἡ ὁποία συγκλίνει πρὸς τὸν ἄρρητον $\sqrt{2}$.

Σχηματίζομεν ἀκολούθως τὴν ἀκολουθίαν α^{ρ_ν}, $\nu = 1, 2, \ldots$ τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας, ἐκτενῶς τὴν ἀκολουθίαν :

$$\alpha^1, \ \alpha^{1.4}, \ \alpha^{1.41}, \ \alpha^{1.414}, \ \alpha^{1.4142}, \ \alpha^{1.41421}, \ldots \tag{2}$$

'Εὰν $\alpha > 1$, τότε κατὰ τὴν ἰδιότητα 5, θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha^1 < \alpha^{1.4} < \alpha^{1.41} < \alpha^{1.414} < \alpha^{1.4142} < \cdots < \alpha^{1+1} = \alpha^2,$$

ἤτοι ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι αὔξουσα καὶ φραγμένη, συνεπῶς συγκλίνει (§ 150).

'Εὰν πάλιν $0 < \alpha < 1$ ἡ ἀκολουθία (2) εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη καὶ ὡς τοιαύτη πάλιν συγκλίνει.

Τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας (2), τὸ ὁποῖον ὡς ἐλέχθη ὑπάρχει $\forall \alpha \in \mathbf{R}^+$, ορίζομεν ὡς τὴν δύναμιν $\alpha^{\sqrt{2}}$.

Ἔστω τώρα x τυχὼν ἄρρητος ἀριθμός, ἔχων, δυνάμει τοῦ θεωρήματος (§ 193), δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα :

$$x = \psi_0, \ \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_\nu \cdots \equiv \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu} + \cdots$$

καὶ α εἷς θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμός.

Δεχόμεθα, ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος, ὅτι $\alpha > 1$ καὶ $x > 0$. Θέτομεν :

$$x_\nu = \psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2} + \cdots + \frac{\psi_\nu}{10^\nu}, \quad \nu = 0,\ 1,2,.. \tag{3}$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία (3) εἶναι μία αὔξουσα ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν, ἐπὶ πλέον δὲ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἄνω φράγμα τὸν ἀκέραιον $\psi_0 + 1$ (διατί;). 'Επειδὴ ἕκαστος ὅρος τῆς ἀκολουθίας x_ν, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ρητὸς ἀριθμός, ἡ δύναμις α^{x_ν} ἔχει μίαν ἐντελῶς καθωρισμένην ἔννοιαν. 'Εξ ἄλλου, ἐπειδὴ $\alpha > 1$, ἔχομεν :

$$\alpha^{\psi_0} < \alpha^{\psi_0 + \frac{\psi_1}{10}} < \alpha^{\psi_0 + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{10^2}} < \ldots < \alpha^{\psi_0 + 1}, \tag{4}$$

ἤτοι, ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας α^{x_ν}, $\nu = 0,1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα καὶ μάλιστα γνησίως, ἐπὶ πλέον δὲ φραγμένη πρὸς τὰ ἄνω ἀπὸ τὸν α^{ψ_0+1}, ἄρα θὰ συγκλίνῃ πρὸς πραγματικὸν ἀριθμὸν μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ α^{ψ_0+1} (§ 150).

'Εὰν πάλιν $0 < \alpha \leqq 1$ ἡ ἀκολουθία α^{x_ν}, $\nu = 0,\ 1,\ 2,\ldots$ εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη πρὸς τὰ κάτω καὶ ὡς τοιαύτη εἶναι πάλιν συγκλίνουσα.

Ὥστε, διὰ κάθε $\alpha \in \mathbf{R}^+$ ὑπάρχει τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας α^{x_ν}, $\nu = 0,1,2,\ldots$

'Εξ ὁρισμοῦ θέτομεν τώρα :

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha}^x = \underset{\text{ορσ}}{\mathbf{lim}}\, \boldsymbol{\alpha}^{x_\nu}}$$

Ἤτοι : *'Ορίζομεν ὡς δύναμιν τοῦ α εἰς τὸν ἄρρητον ἐκθέτην x, τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ὁποῖον τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας :*

$$\alpha^{\psi_0},\ \alpha^{\psi_0,\psi_1},\ \alpha^{\psi_0,\psi_1\psi_2},\ldots,\ \alpha^{\psi_0,\psi_1\psi_2\cdots\psi_\nu},\ldots$$

* **Σημείωσις.** 'Εν προκειμένῳ ἀποδεικνύονται τὰ ἑξῆς :

1). 'Εὰν δύο ἀκολουθίαι x_ν, x_ν^*, $\nu = 1,\ 2,\ldots$ ρητῶν ἀριθμῶν συγκλίνουν ἀμφότεραι εἰς τὸν ἄρρητον x, τότε αἱ ἀκολουθίαι α^{x_ν}, $\alpha^{x_\nu^*}$, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνουν ἐπίσης εἰς τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ α^x καὶ καλοῦμεν δύναμιν τοῦ α εἰς τὸν ἄρρητον ἐκθέτην x.

2). Αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ρητοὺς ἐκθέτας, τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς παρούσης παραγράφου, ἰσχύουν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀρρήτους ἀριθμούς, κατὰ συνέπειαν μὲ ἐκθέτας τυχόντας πραγματικοὺς ἀριθμούς.

Ἐν τῇ πράξει, ἡ δύναμις α^x, ὅπου x ἄρρητος, ἀντικαθίσταται διὰ τῆς προσεγγίσεώς της α^ρ, ὅπου ρ ρητὸς ἐπαρκῶς προσεγγίζων τὸν ἄρρητον ἀριθμὸν x.

Ἔννοια τοῦ λογαρίθμου

§ 198. Λογάριθμος μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $\alpha \neq 1$.— Ἀποδεικνύεται εἰς τὰ μαθηματικὰ ὅτι : *Διὰ κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α, διάφορον τῆς μονάδος ($0 < \alpha \neq 1$) καὶ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν $\theta > 0$, ὑπάρχει ἀκριβῶς εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς x (ρητὸς ἢ ἄρρητος), εἰς τὸν ὁποῖον ὑψούμενος ὁ α δίδει τὸν θ,*

ἤτοι :

$$\boxed{\alpha^x = \theta} \tag{1}$$

Ὁ μονοσημάντως ὁριζόμενος πραγματικὸς ἀριθμὸς x, ὅστις πληροῖ τὴν (1), καλεῖται **«λογάριθμος τοῦ θ ὡς πρὸς βάσιν α»** καὶ συμβολίζεται οὕτω :

$$\boxed{x = \lambda o\gamma_\alpha \theta} \tag{2}$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \theta = x \iff \alpha^x = \theta} \tag{3}$$

Δίδομεν τώρα τὸν κάτωθι ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $\alpha \neq 1$.

Λογάριθμος ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ θ, ὡς πρὸς βάσιν α ($0 < \alpha \neq 1$), καλεῖται ὁ ἐκθέτης εἰς τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις α διὰ νὰ δώσῃ τὸν θ.

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), δίδει :

$$\boxed{\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} = \theta} \tag{4}$$

Παραδείγματα :

1) $\lambda o\gamma_{10} 100 = 2$, διότι $10^2 = 100$

2) $\lambda o\gamma_2 8 = 3$, » $2^3 = 8$

3) $\lambda o\gamma_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$, » $2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$

4) $\lambda o\gamma_{1/3} 9 = -2$, » $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

5) $\lambda o\gamma_{10} 0{,}001 = -3$, διότι $10^{-3} = 0{,}001$

6) $\lambda o\gamma_{1/2} \left(\frac{1}{16}\right) = 4$, » $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

7) $\lambda o\gamma_{1/\sqrt{2}} 1 = 0$, » $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^0 = 1$

8) $\lambda o\gamma_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, » $(3)^{1/2} = \sqrt{3}$.

Γενικὴ παρατήρησις. Παντοῦ κατωτέρω, οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους, θὰ θεωροῦνται **θετικοί.** Λογαρίθμους ἀρνητικῶν ἀριθμῶν οὔτε ὁρίζομεν, οὔτε μεταχειριζόμεθα.

§ 199. Βάσις λογαρίθμων — λογαριθμικὰ συστήματα.— Ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς α, ὅστις εἶναι θετικὸς καὶ διάφορος τῆς μονάδος, καλεῖται **βάσις** τῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ ὡς βάσις α δύναται νὰ ληφθῇ οἱοσδήποτε θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ σχηματισθοῦν διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα. Τὰ χρησιμοποιούμενα ὅμως εἶναι τὰ ἑξῆς :

1ον. Τὸ δεκαδικὸν λογαριθμικὸν σύστημα. Οὕτω καλεῖται τὸ σύστημα ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις α εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10. Ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ θ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο καλεῖται **δεκαδικὸς λογάριθμος** καὶ συμβολίζεται ἁπλῶς λογθ ἀντὶ $λογ_{10}θ$.

Οἱ δεκαδικοὶ λογάριθμοι καλοῦνται καὶ «*κοινοὶ λογάριθμοι*» ἢ «*Briggs λογάριθμοι*»*) καὶ χρησιμοποιοῦνται εὐρέως εἰς τὰ στοιχειώδη μαθηματικὰ διὰ πρακτικοὺς κυρίως σκοπούς.

2ον. Τὸ Νεπέριον λογαριθμικὸν σύστημα**). Οὕτω καλεῖται τὸ σύστημα ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις α εἶναι ὁ ἄρρητος ἀριθμὸς $e = 2{,}71828\ldots$, ὅστις, ὡς θὰ ἴδωμεν εἰς ἑπόμενον κεφάλαιον, εἶναι τὸ ὅριον τῆς ἀκολουθίας $\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ θ εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ καλεῖται **«νεπέριος λογάριθμος»****) ἢ **«φυσικὸς λογάριθμος»** τοῦ θ καὶ συμβολίζεται διεθνῶς μὲ «logθ» εἴτε «lnθ» παραλειπομένου τοῦ δείκτου e, ἤτοι καὶ εἰς τὸ σύστημα αὐτὸ ἀντὶ $y = \log_e θ$ γράφομεν $y = \log θ$ ἢ $y = \ln θ$. Οἱ νεπέριοι λογάριθμοι χρησιμοποιοῦνται κυρίως εἰς θεωρητικὰς μελέτας καὶ ὡς ἐκ τούτου τὸ ὡς ἄνω σύστημα δεσπόζει τῶν ἄλλων συστημάτων κυρίως εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά.

Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου μὲ βάσιν τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν $α \neq 1$ προκύπτει ὅτι εἰς κάθε θετικὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν x ἀντιστοιχεῖ ἀκριβῶς εἷς πραγματικὸς ἀριθμὸς y, ὅστις ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν :

$$α^{y} = x.$$

Τοιουτοτρόπως ὁρίζεται μία συνάρτησις, ἡ $y = f(x) \equiv λογ_α x$ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\mathbf{R}^+$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\mathbf{R}$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι :

$$\mathbf{R}^+ \ni x \longrightarrow y = f(x) \equiv λογ_α x \in \mathbf{R}.$$

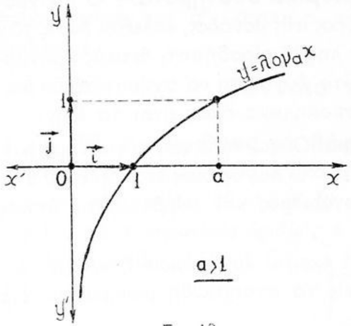
Ἡ ὡς ἄνω συνάρτησις $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ ὀνομάζεται **λογαριθμικὴ συνάρτησις** καὶ ὅπως θὰ μάθωμεν εἰς τὴν ἕκτην τάξιν αὐτὴ εἶναι «*ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως* $x = a^{y}$ ».

---

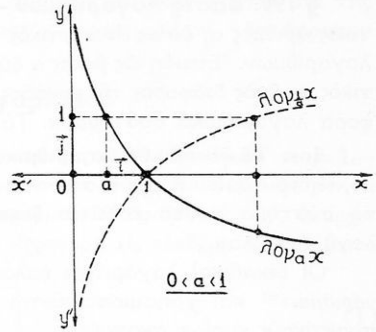
* Πρὸς τιμὴν τοῦ Ἄγγλου Μαθηματικοῦ Henry Briggs (1556–1630), ὅστις πρῶτος ἔλαβεν ὡς βάσιν τῶν λογαρίθμων τὸν ἀριθμὸν 10.

** Πρὸς τιμὴν τοῦ John Napier (1550—1617), ὅστις ἐπενόησε πρῶτος τοὺς λογαρίθμους καὶ ἔλαβεν ὡς βάσιν τὸν ἀριθμὸν $e = 2{,}7182\ldots$

Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως $y = \lambda o\gamma_{\alpha}\, x$ δίδεται, κατὰ πρόχειρον σχεδίασιν, εἰς τὰ κάτωθι σχήματα.



Σχ. 13



Σχ. 14

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε λεχθέντων καὶ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω γραφικῶν παραστάσεων ἐννοοῦμεν εὐκόλως τὰ ἑξῆς :

1). Ἕκαστος πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι λογάριθμος ἑνὸς καὶ μόνον θετικοῦ ἀριθμοῦ.

2). Ἕκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἕνα καὶ μόνον πραγματικὸν ἀριθμόν.

3). Ὅταν ἡ βάσις συστήματος τινὸς λογαρίθμων εἶναι > 1, οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους θετικούς, ἐνῷ οἱ μικρότεροι αὐτῆς ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς, τὸ ἀντίθετον δὲ συμβαίνει, ὅταν ἡ βάσις εἶναι < 1.

4). Ὅταν ἡ βάσις α εἶναι > 1, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ, αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δὲ $\alpha < 1$, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττοῦται ὁ λογάριθμος.

Σημείωσις. Εἰς τὴν ἕκτην τάξιν θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύουν τὰ κάτωθι :

$\alpha > 1$	$\lim\limits_{x\to+0} \lambda o\gamma_{\alpha}\, x = -\infty$ **καὶ** $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda o\gamma_{\alpha}\, x = +\infty$
$0 < \alpha < 1$	$\lim\limits_{x\to+0} \lambda o\gamma_{\alpha}\, x = +\infty$ **καὶ** $\lim\limits_{x\to+\infty} \lambda o\gamma_{\alpha}\, x = -\infty$

Πρὸς ἐπιβεβαίωσιν παρατηρήσατε καὶ τὰ ἀνωτέρω σχήματα (Σχ. 13 καὶ Σχ. 14).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

430. Προσδιορίσατε τὸν x ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

1) $\lambda o\gamma_4\, x = 3$, 2) $\lambda o\gamma\, x = -3$, 3) $\lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$, 4) $\lambda o\gamma_{\sqrt{3}}(9\sqrt{3}) = x$,

5) $\lambda o\gamma_{4/9}\frac{27}{8} = x$, 6) $\lambda o\gamma_8\, x = -\frac{7}{3}$, 7) $\lambda o\gamma_{2\alpha}\sqrt{2\alpha} = x$, 8) $\lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{\sqrt{32}}\right) = x$.

431. Εὕρετε τὴν ἄγνωστον βάσιν $x \in \mathbf{R}^+$, $x \neq 1$, ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων :

1) $\lambda o\gamma_x 25 = 2$, 2) $\lambda o\gamma_x 16 = \frac{2}{3}$, 3) $\lambda o\gamma_x 5 = -\frac{1}{3}$, 4) $\lambda o\gamma_x \left(\frac{81}{16}\right) = 4$.

432. Ὑπολογίσατε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

$$81, \quad 64, \quad \frac{1}{32}, \quad \sqrt{2}, \quad \frac{11}{125}, \quad 27, \quad 4\sqrt{2}, \quad 1000$$

ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστοίχως τάς :

$$3, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 5, \quad 3, \quad 2, \quad 0{,}01.$$

433. Ὑπολογίσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις :

α) $$\frac{\lambda o\gamma_3 81 - \lambda o\gamma_8 64}{\lambda o\gamma_{0,5} 64 + \lambda o\gamma_2 \frac{1}{32} + \lambda o\gamma_2 4\sqrt{2}}$$

β) $$\frac{\lambda o\gamma_3 9\sqrt{3} : \lambda o\gamma_{49} 7}{\lambda o\gamma_5 \frac{11}{125} - \lambda o\gamma_2 \frac{1}{32} + \lambda o\gamma_3 27 \cdot \lambda o\gamma_{1/2} 64}$$

γ) $$\frac{-5 + \lambda o\gamma_7 (\lambda o\gamma_{2\alpha} 2\alpha) - 4\lambda o\gamma_\alpha \sqrt{\alpha}}{\lambda o\gamma_3 27 + 7 \cdot \lambda o\gamma_{0,1} 10 + \lambda o\gamma\, 0{,}001}$$

434. Ἐὰν $\alpha \in \mathbf{R}^+$, $\alpha \neq 1$ καὶ καλέσωμεν : $x = \lambda o\gamma_{\sqrt{\alpha}} \alpha$, $y = \lambda o\gamma_\alpha \alpha^2$, $z = \lambda o\gamma_{\alpha^2} \alpha^4$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$x\psi z = x + y + z + 2.$$

435. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ $\lambda o\gamma 3$ εἶναι ἀριθμὸς ἄρρητος (= ἀσύμμετρος).

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων

§ 200. Ἰδιότης Ι.— Εἰς πᾶν σύστημα λογαρίθμων, ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι τὸ μηδέν, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάς, ἤτοι :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha 1 = 0} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1} \quad \forall\ \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ὡς ἐκθέτου, ἔχομεν :

$$\alpha^0 = 1 \Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^1 = \alpha \Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1 \quad \forall\ \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}.$$

§ 201. Ἰδιότης ΙΙ.— Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν ὡς πρὸς βάσιν α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν θ_1 καὶ θ_2 δύο (θετικοὶ) ἀριθμοὶ καὶ x, y ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \Longleftrightarrow x = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \Longleftrightarrow y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2. \qquad (1)$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{x+y} = \theta_1\theta_2.$$

'Αλλὰ ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι :

$$\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

Ὥστε :

$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2}$

Πόρισμα.—**Ἐὰν $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$ εἶναι θετικοὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει :**

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2 \cdots \theta_\nu) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 + \cdots + \lambda o\gamma_\alpha \theta_\nu}$$

ἢ ὅπερ τὸ αὐτό :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha\left(\prod_{k=1}^{\nu} \theta_k\right) = \sum_{k=1}^{\nu} \lambda o\gamma_\alpha \theta_k}$$

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Παράδειγμα. Ἔχομεν π.χ. $\lambda o\gamma\,(7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = \lambda o\gamma 7 + \lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 4 + \lambda o\gamma 3$
καὶ ἀντιστρόφως : $\lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 6 + \lambda o\gamma 2 = \lambda o\gamma\,(5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2) = \lambda o\gamma 180.$

§ 202. Ἰδιότης ΙΙΙ.—**Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν (θετικῶν) ὡς πρὸς βάσιν α $(0 < \alpha \neq 1)$, ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.**

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν θ_1 καὶ θ_2 δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ x, y ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \Longleftrightarrow x = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \Longleftrightarrow y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x : \alpha^y = \theta_1 : \theta_2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{x-y} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

'Αλλὰ ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι :

$$\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = x - y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

Ὥστε :

$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \boldsymbol{\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2}$

Οὕτως ἔχομεν π.χ. $\lambda o\gamma \dfrac{3}{5} = \lambda o\gamma\, 3 - \lambda o\gamma\, 5$

καὶ ἀντιστρόφως: $\lambda o\gamma\, 7 - \lambda o\gamma\, 13 = \lambda o\gamma\, 7/13.$

Πόρισμα Ι. – **Οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἀντιθέτους λογαρίθμους.**

Πράγματι :

$$\lambda o\gamma_\alpha\left(\frac{1}{\theta}\right) = \lambda o\gamma_\alpha 1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta = 0 - \lambda o\gamma_\alpha \theta = -\lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Πόρισμα ΙΙ.— **Δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν οἱ λογάριθμοι αὐτῶν, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν, εἶναι ἴσοι,** ἤτοι :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \theta_1 = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 \iff \theta_1 = \theta_2}$$

Ἡ ἀπόδειξις εὔκολος.

Ἀξιόλογος παρατήρησις. Δέον νὰ ἔχωμεν πάντοτε ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$\lambda o\gamma_\alpha (\theta_1 + \theta_2) \neq \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

$$\lambda o\gamma_\alpha (\theta_1 - \theta_2) \neq \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta_1 \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 \neq \lambda o\gamma_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta_1 : \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 \neq \lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

§ 203. Ἰδιότης IV.— **Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε δυνάμεως ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι εἶναι $\lambda o\gamma_\alpha \theta = x$, ἔνθα $\theta \in \mathbf{R}^+$ καὶ $0 < \alpha \neq 1$. Ἐὰν θ^k, $k \in \mathbf{R}$, εἶναι μία δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ θ, τότε, ἐπειδὴ $\theta = \alpha^x$, ἔχομεν $\theta^k = (\alpha^x)^k = \alpha^{kx}$.

Ἐκ ταύτης, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, προκύπτει :

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta^k = k \cdot x = k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Ὥστε :	$\forall\ \theta \in \mathbf{R}^+,\ k \in \mathbf{R}$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \theta^k = k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$

§ 204. Ἰδιότης V. — **Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε ῥίζης, μὲ ὑπόρριζον θετικόν, ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης.**

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἀποτελεῖ πόρισμα τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα $\lambda o\gamma_\alpha \theta^k = k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$, νὰ τεθῇ π.χ. $k = \frac{1}{\nu}$.

Λαμβάνομεν τότε :

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Ὥστε :	$\forall\ \theta \in \mathbf{R}^+,\ \nu \in \mathbf{N}$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$

Οὕτως ἔχομεν π.χ. $\lambda o\gamma \sqrt[3]{205} = \frac{1}{3} \lambda o\gamma\, 205$

καὶ ἀντιστρόφως : $\frac{1}{5} \lambda o\gamma\, 1014 = \lambda o\gamma \sqrt[5]{1014}$.

§ 205. Ἰδιότης VI.– **Ἐὰν ἡ βάσις α τῶν λογαρίθμων εἶναι >1, οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικοὺς λογαρίθμους, ἐνῷ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους**, ἤτοι :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad \alpha > 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0 \iff \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0 \iff 0 < \theta < 1 \end{cases}}$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha \theta > 0$· ἐκ τῆς $\alpha > 1$ προκύπτει :

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} > 1^{\lambda o\gamma_\alpha \theta}$$

Ἐξ οὗ : $$\theta > 1.$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω $\theta > 1$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ $\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} > 1^{\lambda o\gamma_\alpha \theta}$. Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ $\alpha > 1$, προκύπτει : $\lambda o\gamma_\alpha \theta > 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ δευτέρα ἰσοδυναμία.

Πόρισμα.–**Τῆς βάσεως α τῶν λογαρίθμων οὔσης >1, ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει μεγαλύτερον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως**, ἤτοι :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad \alpha > 1, \text{ τότε : } \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 \iff \theta_1 > \theta_2}$$

§ 206. Ἰδιότης VII.–**Ἐὰν ἡ βάσις α τῶν λογαρίθμων εἶναι : $0 < \alpha < 1$, οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους, ἐνῷ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικοὺς λογαρίθμους**, ἤτοι :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0 \iff \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0 \iff 0 < \theta < 1. \end{cases}}$$

Ὑπόδειξις. Παρατηρήσατε ὅτι : $\lambda o\gamma_\alpha \theta = -\lambda o\gamma_{1/\alpha} \theta$ καὶ ἐφαρμόσατε ἀκολούθως τὴν προηγουμένην ἰδιότητα.

Πόρισμα.–**Τῆς βάσεως α τῶν λογαρίθμων οὔσης θετικῆς καὶ μικροτέρας τῆς μονάδος, ὁ μεγαλύτερος ἐκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει μικρότερον λογάριθμον καὶ ἀντιστρόφως**, ἤτοι :

$$\boxed{\text{Ἐὰν}\quad 0 < \alpha < 1, \text{ τότε : } \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 > \lambda o\gamma_\alpha \theta_2 \iff \theta_1 < \theta_2}$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καθίσταται φανερόν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς «*λογαριθμικοῦ πίνακος*», περὶ τῶν ὁποίων θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτέρω, δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα ἀριθμητικὸν ὑπολογισμὸν καὶ τοῦτο διότι δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα γινόμενον μὲ ἕνα ἄθροισμα, ἕνα πηλίκον μὲ μίαν διαφοράν, μίαν ἐξαγωγὴν ρίζης μὲ μίαν διαίρεσιν κ.τ.λ.

Εἰς τὴν τελευταίαν μάλιστα περίπτωσιν ὁ λογαριθμικὸς ὑπολογισμὸς εἶναι ἀναπόφευκτος, ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ριζικοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων

1η. Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ $\lambda o\gamma_3\left(\dfrac{3\alpha^2}{5\beta\sqrt[4]{\gamma}}\right)$ **ὑπὸ μορφὴν ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος λογαρίθμων.**

Λύσις. Ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma_3\left(\frac{3\alpha^2}{5\beta\sqrt[4]{\gamma}}\right) = \lambda o\gamma_3(3\alpha^2) - \lambda o\gamma_3(5\beta\cdot\sqrt[4]{\gamma}) = \lambda o\gamma_3 3 + \lambda o\gamma_3 \alpha^2 - (\lambda o\gamma_3 5 + \lambda o\gamma_3\beta +$$
$$+ \lambda o\gamma_3\sqrt[4]{\gamma}) = 1 + 2\,\lambda o\gamma_3\alpha - \lambda o\gamma_3 5 - \lambda o\gamma_3\beta - \frac{1}{4}\lambda o\gamma_3\gamma.$$

2α. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τοῦ

$$\lambda o\gamma\frac{3\alpha^3\cdot\sqrt[4]{\beta^2\cdot\gamma}}{5\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\beta\cdot\gamma^2}}, \quad \text{ἔνθα } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+.$$

Λύσις. Ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\frac{3\alpha^3\cdot\sqrt[4]{\beta^2\cdot\gamma}}{5\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\beta\cdot\gamma^2}} = \lambda o\gamma(3\alpha^3\cdot\sqrt[4]{\beta^2\cdot\gamma}) - \lambda o\gamma(5\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\beta\cdot\gamma^2}) =$$
$$= \left[\lambda o\gamma 3 + 3\lambda o\gamma\alpha + \frac{1}{4}(2\lambda o\gamma\beta + \lambda o\gamma\gamma)\right] - \left[\lambda o\gamma 5 + 2\lambda o\gamma\beta + \frac{1}{3}(2\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta +\right.$$
$$\left.+ 2\lambda o\gamma\gamma)\right] = \lambda o\gamma 3 - \lambda o\gamma 5 + \frac{7}{3}\lambda o\gamma\alpha - \frac{11}{6}\lambda o\gamma\beta - \frac{5}{12}\lambda o\gamma\,\gamma.$$

3η. Ἐὰν $\lambda o\gamma_e\, i = -\dfrac{Rt}{L} + \lambda o\gamma_e\, I \implies i = I\cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$.

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα γράφεται :

$$\lambda o\gamma_e\, i - \lambda o\gamma_e\, I = -\frac{Rt}{L} \quad \text{ἢ} \quad \lambda o\gamma_e\frac{i}{I} = -\frac{Rt}{L}.$$

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου ἔχομεν ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος :

$$e^{-\frac{Rt}{L}} = \frac{i}{I}, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad i = I\cdot e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

4η. Ἐὰν $\alpha > \beta > 0$ **καὶ** $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$, **δείξατε ὅτι :**

$$\lambda o\gamma\frac{\alpha-\beta}{3} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta).$$

Ἀπόδειξις : Ἔχομεν :

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 9\alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad (\alpha-\beta)^2 = 9\alpha\beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha - \beta = 3\sqrt{\alpha\beta}$$

ἢ

$$\frac{\alpha-\beta}{3} = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Τότε ὅμως θὰ ἔχωμεν καί :

$$\lambda o\gamma\left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right) = \lambda o\gamma\sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\lambda o\gamma\alpha + \lambda o\gamma\beta).$$

5η. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος :

$$\frac{7}{16}\lambda o\gamma(3 + 2\sqrt{2}) - 4\lambda o\gamma(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\lambda o\gamma(\sqrt{2}-1).$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι: $3+2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+1)^2$.

Ἄρα: $\frac{7}{16}$ λογ $(3+2\sqrt{2})-4$ λογ $(\sqrt{2}+1)=\frac{7}{16}$ λογ $(\sqrt{2}+1)^2-4$ λογ $(\sqrt{2}+1)=$

$=\frac{7}{8}$ λογ $(\sqrt{2}+1)-4$ λογ $(\sqrt{2}+1)=-\frac{25}{8}$ λογ $(\sqrt{2}+1)$ (1)

Ἀλλὰ κατὰ τὸ πόρισμα Ι § 202 ἔχομεν:

$$-\text{λογ}\,(\sqrt{2}+1)=\text{λογ}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)=\text{λογ}\,(\sqrt{2}-1) \qquad (2)$$

Ἡ (1), λόγῳ τῆς (2), γίνεται:

$$\frac{7}{16}\,\text{λογ}\,(3+2\sqrt{2})-4\,\text{λογ}\,(\sqrt{2}+1)=\frac{25}{8}\,\text{λογ}\,(\sqrt{2}-1).$$

§ 207. Μετάβασις ἐξ ἑνὸς λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς ἕτερον (ἀλλαγὴ βάσεως λογαρίθμων).– Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ἀναφέρονται ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν. Πολλάκις ὅμως παρουσιάζονται, εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, λογάριθμοι ὡς πρὸς διαφορετικὰς βάσεις, ὅτε ὁ λογισμός, ἂν ὄχι ἀδύνατος, δὲν εἶναι εὔκολος καὶ διὰ τοῦτο ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἐπιδιώκομεν, εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς, εἶναι: πάντες οἱ λογάριθμοι νὰ ἀναφερθοῦν ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται δι' ἐφαρμογῆς τοῦ κάτωθι θεωρήματος:

Θεώρημα.– **Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς βάσιν τινὰ α, εὑρίσκομεν τὸν λογάριθμόν του, ὡς πρὸς νέαν βάσιν β, ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν γνωστὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν α) διὰ τοῦ λογαρίθμου τῆς νέας βάσεως β, ὡς πρὸς τὴν παλαιάν**, ἤτοι:

$\forall\ \theta\in\mathbf{R}^+$ $0<\alpha\neq 1$ $0<\beta\neq 1$	$\Longrightarrow\ \text{λογ}_\beta\,\theta=\dfrac{\text{λογ}_\alpha\,\theta}{\text{λογ}_\alpha\,\beta}$

(τ)

Ἀπόδειξις. Ἔστω x ὁ λογάριθμος τοῦ θ, ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν β, ἤτοι ἔστω ὅτι:

$$\text{λογ}_\beta\,\theta=x. \qquad (1)$$

Τότε, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, θὰ ἔχωμεν:

$$\beta^x=\theta. \qquad (2)$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (2), ὡς πρὸς βάσιν α, εὑρίσκομεν:

$$x\,\text{λογ}_\alpha\,\beta=\text{λογ}_\alpha\,\theta,\quad \text{ἐξ οὗ:}\quad x=\frac{\text{λογ}_\alpha\,\theta}{\text{λογ}_\alpha\,\beta}.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ (1), γράφεται:

$$\text{λογ}_\beta\,\theta=\frac{\text{λογ}_\alpha\,\theta}{\text{λογ}_\alpha\,\beta}. \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Παρατήρησις. Ὁ τύπος (τ) παρέχει τὸν κανόνα εὑρέσεως τῶν λογαρίθμων ὡς πρὸς τὸ λογαριθμικὸν σύστημα μὲ βάσιν β, ἐὰν φυσικὰ γνωρίζωμεν τοὺς λογαρίθμους ὡς πρὸς τὸ σύστημα μὲ βάσιν τὸ α. Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι ὑπάρχουν λογαριθμικοὶ πίνακες ὡς πρὸς βάσιν 10, δυνάμεθα, τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (τ) χωρὶς τὴν σύνταξιν νέων πινάκων, νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ὡς πρὸς οἱανδήποτε βάσιν θέλομεν.

Ὁ τύπος (τ), ἐὰν ληφθῇ $\alpha = 10$, διότι ὡς πρὸς βάσιν 10 ὑπάρχουν πίνακες, γράφεται :

$$\lambda o\gamma_\beta \theta = \frac{\lambda o\gamma\, \theta}{\lambda o\gamma\, \beta} \qquad (\tau')$$

Πόρισμα.— **Τὸ γινόμενον τῶν λογαρίθμων δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν διαφόρων τῆς μονάδος ἑκατέρου ἔχοντος βάσιν τὸν ἕτερον εἶναι ἡ μονάς.**

Πράγματι, διὰ $\theta = \alpha$ ὁ τύπος (τ) δίδει :

$$\lambda o\gamma_\beta \alpha = \frac{\lambda o\gamma_\alpha \alpha}{\lambda o\gamma_\alpha \beta} = \frac{1}{\lambda o\gamma_\alpha \beta}, \text{ καθ' ὅσον } \lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1.$$

Ὅθεν :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha \beta \times \lambda o\gamma_\beta \alpha = 1}$$

Ἀξιοσημείωτος ἰσότης.

Ὁ τύπος (τ), τῇ βοηθείᾳ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος, γράφεται :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\beta \theta = \lambda o\gamma_\alpha \theta \times \lambda o\gamma_\beta \alpha}$$

Σημ. Μνημονικὸς κανών : $\dfrac{\theta}{\beta} = \dfrac{\theta}{\alpha} \times \dfrac{\alpha}{\beta}$.

Ἐφαρμογαί : 1η. Ἐὰν $\lambda o\gamma 2 = 0{,}301$ καὶ $\lambda o\gamma 5 = 0{,}698$ νὰ εὑρεθῇ ὁ $\lambda o\gamma 250$ καὶ ὁ $\lambda o\gamma_2 250$.

Λύσις : α) $\lambda o\gamma 250 = \lambda o\gamma(2\cdot 5^3) = \lambda o\gamma 2 + 3\lambda o\gamma 5 = 0{,}301 + 3\cdot 0{,}698 = 0{,}301 + 2{,}094 = 2{,}395$.

β) $\lambda o\gamma_2 250 = \dfrac{\lambda o\gamma 250}{\lambda o\gamma 2} = \dfrac{2{,}395}{0{,}301} = 7{,}956$.

2α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$k = \frac{(\lambda o\gamma_2 5 + \lambda o\gamma_3 5)\cdot \lambda o\gamma_6 5}{\lambda o\gamma_2 5 \cdot \lambda o\gamma_3 5}.$$

Λύσις : Ἔχομεν, δυνάμει τοῦ πορίσματος τῆς § 207 :

$$k = \frac{\left(\dfrac{1}{\lambda o\gamma_5 2} + \dfrac{1}{\lambda o\gamma_5 3}\right)\cdot \dfrac{1}{\lambda o\gamma_5 6}}{\dfrac{1}{\lambda o\gamma_5 2 \cdot \lambda o\gamma_5 3}} = \frac{\lambda o\gamma_5 2 + \lambda o\gamma_5 3}{\lambda o\gamma_5 6} = \frac{\lambda o\gamma_5 (2\cdot 3)}{\lambda o\gamma_5 6} = 1.$$

§ 208. Συλλογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ.— Καλεῖται **συλλογάριθμος** ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ θ ὡς πρὸς βάσιν α, ὁ λογάριθμος τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ θ, ἤτοι τοῦ $\dfrac{1}{\theta}$ ὡς πρὸς τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ σημειοῦται οὕτω :

$$\sigma \upsilon \lambda\lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Ἔχομεν κατὰ ταῦτα:

$$\text{συλλογ}_\alpha\,\theta = \text{λογ}_\alpha \frac{1}{\theta} = \text{λογ}_\alpha 1 - \text{λογ}_\alpha \theta = -\,\text{λογ}_\alpha \theta.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ πρότασις:

Ὁ συλλογάριθμος θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ θ ἰσοῦται πρὸς τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ θ.

Ὥστε:

$$\boxed{\text{συλλογ}_\alpha\,\theta = \text{λογ}_\alpha \frac{1}{\theta} = -\,\text{λογ}_\alpha \theta} \qquad (1)$$

Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν συλλογαρίθμων ἐπιτρέπει νὰ ἀντικαθιστῶμεν μίαν διαφορὰν λογαρίθμων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των. Οὕτως ἔχομεν:

$$\text{λογ}_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \text{λογ}_\alpha \theta_1 - \text{λογ}_\alpha \theta_2 = \text{λογ}_\alpha \theta_1 + \text{συλλογ}_\alpha \theta_2.$$

Σημ. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ὅτι:

$$\boxed{\text{λογ}_\alpha\,\theta + \text{συλλογ}_\alpha\,\theta = 0} \qquad (2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

436. Νὰ ἐφαρμοσθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων ἐπὶ τῶν:

1) $\text{λογ}_3 3x \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2x}}$, 2) $\text{λογ} \dfrac{x^3\sqrt{y}}{4\sqrt{x}\cdot y^3}$, 3) $\text{λογ} \dfrac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18\sqrt{2}}}$,

4) $\text{λογ} \dfrac{3(x^2-y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$, 5) $\text{λογ} \dfrac{5x^3\sqrt[4]{y^2z}}{7y^2\cdot\sqrt{x^2yz^2}}$.

437. Εὕρετε τὴν τιμὴν τοῦ: $\text{λογ}_2 \sqrt{32\cdot\sqrt{16\cdot\sqrt[5]{2}}}.$

438. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων:

1. $\text{λογ}\,3 + 2\,\text{λογ}\,4 - \text{λογ}\,12 = 2\,\text{λογ}\,2$
2. $3\,\text{λογ}\,2 + \text{λογ}\,5 - \text{λογ}\,4 = 1$
3. $\frac{1}{2}\,\text{λογ}\,25 + \frac{1}{3}\,\text{λογ}\,8 + \frac{1}{5}\,\text{λογ}\,32 = 2\,\text{λογ}2 + \text{λογ}\,5$
4. $\text{λογ}_\beta \frac{\alpha}{\beta\gamma} = \text{λογ}_\beta\,\alpha + \text{συλλογ}_\beta\gamma - 1$, ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$, $\beta \neq 1$.

439. Ἐὰν λογ2 = 0,30103 νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$y = \frac{1}{2}\,\text{λογ}\,2 + \frac{1}{2}\,\text{λογ}\,(2+\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\,\text{λογ}\,\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\,\text{λογ}\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).$$

440. Δείξατε ὅτι: $x^{\text{λογ}y} = y^{\text{λογ}x}$.

441. Ἐὰν α, β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος, νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$y = \text{λογ}\,(\alpha^2-1) + \text{λογ}\,(\beta^2-1) - \text{λογ}\,[(\alpha\beta+1)^2-(\alpha+\beta)^2].$$

442. Ἐὰν $\lambda o\gamma 2 = 0{,}301$ καὶ $\lambda o\gamma 14 = 1{,}146$ εὕρετε τοὺς ἑπομένους λογαρίθμους:

$$\lambda o\gamma 28,\ \lambda o\gamma 8,\ \lambda o\gamma 5,\ \lambda o\gamma 56,\ \lambda o\gamma 32,\ \lambda o\gamma \frac{4}{7},\ \lambda o\gamma \sqrt[5]{64},\ \lambda o\gamma 35,\ \lambda o\gamma \sqrt[3]{70.000}.$$

443. Δείξατε ὅτι: $\lambda o\gamma_\alpha \beta \cdot \lambda o\gamma_\beta \gamma \cdot \lambda o\gamma_\gamma \alpha = 1$ διὰ κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$.

444. Ἐὰν ἰσχύῃ: $\lambda o\gamma_x y = \lambda o\gamma_y z \cdot \lambda o\gamma_z x$, τότε θὰ εἶναι: $x = y = z$.

445. Γνωρίζοντες, ὅτι $\lambda o\gamma\, 2 = \alpha$ καὶ $\lambda o\gamma\, 15 = \beta$, νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν α καὶ β αἱ παραστάσεις:

$$1)\ \lambda o\gamma_3 \sqrt[5]{7{,}2}, \qquad 2)\ \lambda o\gamma \sqrt[5]{\frac{5}{3}\sqrt[4]{6}}.$$

446. Ἐὰν $\lambda o\gamma(x^2y^3) = \alpha$ καὶ $\lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = \beta$ νὰ ἐκφρασθοῦν οἱ λογx καὶ λογy συναρτήσει τῶν α καὶ β.

447. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$ καὶ θέσωμεν: $x = \lambda o\gamma_\alpha(\beta\gamma)$, $y = \lambda o\gamma_\beta(\gamma\alpha)$, $z = \lambda o\gamma_\gamma(\alpha\beta)$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $xyz = x + y + z + 2$.

448. Ἐὰν εἶναι $\lambda o\gamma\alpha - \lambda o\gamma\beta > 0$, τί συνάγεται διὰ τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β;

449. Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης:

$$2\,(\lambda o\gamma_x 8)^2 + \lambda o\gamma_x 64 + \lambda o\gamma_x 8 = 9.$$

450. Ὁμοίως:

$$\lambda o\gamma_x \sqrt[3]{625} - \lambda o\gamma_x \sqrt{125} + \frac{1}{6} = 0.$$

451. Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$, διάφοροι ἀλλήλων καὶ $\dfrac{\lambda o\gamma\,\alpha}{\beta-\gamma} = \dfrac{\lambda o\gamma\,\beta}{\gamma-\alpha} = \dfrac{\lambda o\gamma\,\gamma}{\alpha-\beta}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1.$$

452. Ἐὰν οἱ α, β, γ εἶναι θετικοὶ καὶ κατέχουν ἀντιστοίχως τὰς τάξεις μ, ν, ρ εἰς μίαν γεωμετρικὴν καὶ μίαν ἁρμονικὴν πρόοδον, δείξατε ὅτι:

$$\alpha\,(\beta-\gamma)\,\lambda o\gamma\,\alpha + \beta\,(\gamma-\alpha)\,\lambda o\gamma\,\beta + \gamma\,(\alpha-\beta)\,\lambda o\gamma\,\gamma = 0.$$

453. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu, \text{ μὲ γενικὸν ὅρον: } \alpha_\nu = \lambda o\gamma\, 3^\nu.$$

454. Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ λογάριθμοι ἑνὸς ἀριθμοῦ (θετικοῦ) ὡς πρὸς βάσεις ἀντιστοίχως α, β, γ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου.

455. Ἐὰν $x, y, z \in \mathbf{R}^+$, διάφοροι τοῦ α, ὅπου $0 < \alpha \neq 1$, καὶ εἶναι:

$$y = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha x}}, \qquad z = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha y}}$$

τότε θὰ εἶναι:

$$x = \alpha^{\frac{1}{1-\lambda o\gamma_\alpha z}}.$$

456. Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ λογα καὶ ὁ δεύτερος ὅρος της ὁ λογβ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα Σ_ν τῶν ν πρώτων ὅρων της εἶναι:

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{2} \cdot \lambda o\gamma \frac{\beta^{\nu(\nu-1)}}{\alpha^{\nu(\nu-3)}}.$$

457. Ἐὰν $x, y \in \mathbf{R}^+$, δείξατε ὅτι ἰσχύει:

$$x^x \cdot y^y \geqq x^y \cdot y^x.$$

458. Ἐὰν $\alpha \in \mathbf{R}^+$ καὶ $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ τοιοῦτοι, ὥστε $\mu > \nu$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \lambda o\gamma\,(1 + \alpha^\mu) < \frac{1}{\nu} \cdot \lambda o\gamma\,(1 + \alpha^\nu).$$

Δεκαδικοὶ λογάριθμοι

§ 209. Ὁρισμός.— Καλεῖται **δεκαδικὸς λογάριθμος** ἀριθμοῦ τινὸς $\theta > 0$, ὁ $\lambda o\gamma_{10}\theta$, ἤτοι ὁ λογάριθμος αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10.

Συνήθως τὸν δεκαδικὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ $\theta > 0$ καλοῦμεν καὶ ἁπλῶς λογάριθμον τοῦ θ καὶ ἀντὶ τοῦ συμβόλου $\lambda o\gamma_{10}\theta$ χρησιμοποιοῦμεν τό : λογθ (ἄνευ δείκτου).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ συμβολισμοῦ ἔχομεν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\boxed{\lambda o\gamma\theta = x \iff 10^x = \theta} \qquad (1)$$

Οὕτως, ἔχομεν π.χ.

$$\lambda o\gamma 100 = \lambda o\gamma 10^2 = 2, \ \lambda o\gamma 1000 = \lambda o\gamma 10^3 = 3, \ \lambda o\gamma 0{,}01 = \lambda o\gamma 10^{-2} = -2,$$

$$\lambda o\gamma \sqrt[5]{10^3} = \lambda o\gamma\, 10^{3/5} = \frac{3}{5}.$$

Γενικῶς : *Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν ῥητὸν (σύμμετρον) ἔχει λογάριθμον τὸν ῥητὸν τοῦτον ἐκθέτην*, ἤτοι :

$$\lambda o\gamma\, 10^\rho = \rho, \qquad \forall \ \rho \in \mathbf{Q}.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\rho \in \mathbf{Z}$, ὁ λογάριθμος τοῦ 10^ρ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ρ. Οὕτως ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

x	...	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	...
λογ x	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	...

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι σύμμετροι δυνάμεις τοῦ 10, εἶναι ἀριθμοὶ ἀσύμμετροι. Πράγματι, ἂν θ εἶναι εἷς τοιοῦτος ἀριθμὸς καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι οὗτος ἔχει λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμὸν π.χ. τὸν $\frac{\mu}{\nu}$, ἔνθα $\mu \in \mathbf{Z}$, $\nu \in \mathbf{N}$, δηλ. ὅτι εἶναι $\lambda o\gamma\theta = \frac{\mu}{\nu}$, τότε $10^{\frac{\mu}{\nu}} = \theta$, ἄτοπον, λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως διὰ τὸν θ.

Οὕτω π.χ. ὁ λογ35 εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, διότι ἂν ἦτο : $\lambda o\gamma 35 = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου $\mu \in \mathbf{Z}$, $\nu \in \mathbf{N}$, τότε θὰ εἴχομεν : $10^{\frac{\mu}{\nu}} = 35$ ἢ $2^\mu \cdot 5^\mu = 5^\nu \cdot 7^\nu$.

Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης εἶναι ἀδύνατος (διατί;).

Ἄρα ὁ λογ35 εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος.

Ὥστε : *Οἱ λογάριθμοι ὅλων τῶν (θετικῶν) ἀριθμῶν, ἐκτὸς τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10, δὲν δύνανται νὰ ὑπολογισθοῦν ἀκριβῶς, ἀλλὰ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος* (συνήθως ὑπολογίζονται κατὰ προσέγγισιν 0,00001).

Γενικὴ παρατήρησις. Ἐν τοῖς ἑπομένοις γίνεται λόγος μόνον περὶ δεκαδικῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις $\alpha = 10 > 1$, προκύπτει ἐκ τῆς ἰδιότητος VI (§ 205) ὅτι: οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος ἔχουν θετικοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους, οἱ δὲ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους.

§ 210. Χαρακτηριστικὸν καὶ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογ 557.

Ἐπειδὴ
$$10^2 < 557 < 10^3$$
θὰ ἔχωμεν, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν τριῶν μελῶν:
$$2 < \text{λογ}\, 557 < 3.$$
Ἤτοι:
$$\text{λογ}\, 557 = 2, \ldots\ldots$$
Δηλαδή: λογ $557 = 2 + d$, ὅπου d θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

Τὸ ἀκέραιον μέρος (εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ὁ ἀριθμὸς 2) καλεῖται **«χαρακτηριστικὸν»** τοῦ λογαρίθμου, ὁ δὲ θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος δεκαδικὸς ἀριθμὸς d καλεῖται **«δεκαδικὸν μέρος»** τοῦ λογαρίθμου.

Τὸ χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου, π.χ. τοῦ λογθ, παρίσταται συμβολικῶς οὕτω: [λογθ].

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος καὶ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἑνὸς λογαρίθμου, καθίσταται φανερὸν ὅτι ὡς χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου ὁρίζομεν *τὸν μικρότερον ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ λογάριθμος αὐτός.*

Οὕτως, ἔχομεν:

Ἐὰν λογα $= 5{,}03426$, τότε [λογα] $= 5$ καὶ $d = 0{,}03426$.

Ἐὰν λογβ $= 0{,}63752$, τότε [λογβ] $= 0$ καὶ $d = 0{,}63752$.

Ἐὰν λογγ $= -2{,}32715$, τότε [λογγ] $= -3$, διότι: $-3 < -2{,}32715 < -2$.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι μηδὲν μόνον διὰ τὰς ἀκεραίας δυνάμεις τοῦ 10. Εἰς πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ δεκαδικὸν μέρος λαμβάνεται ὡς θετικόν. Ὥστε:

Τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἐὰν d εἶναι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογθ καὶ [λογθ] τὸ χαρακτηριστικόν, τότε ἐκ τῆς σχέσεως:
$$\text{λογθ} = [\text{λογθ}] + d$$
προκύπτει:
$$\boxed{d = \text{λογθ} - [\text{λογθ}]}$$
Οὕτως ἔχομεν:

Ἐὰν λογ $\theta = -3{,}45217$, τότε [λογ θ] $= -4$ καὶ $d = -3{,}45217 - (-4) =$
$= 0{,}54783$.

§ 211. Τροπὴ ἀρνητικοῦ λογαρίθμου εἰς ἡμιαρνητικόν.— Ἐλέχθη ἀνωτέρω ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ λογάριθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος εἶναι ἀρνητικοί, οἱ δὲ τοιοῦτοι λογάριθμοι δὲν εἶναι εὔχρηστοι εἰς τὸν λογισμόν, διὰ τοῦτο τρέπομεν τοὺς ἀρνητικοὺς λογαρίθμους εἰς **«ἡμιαρνητικούς»**, δηλαδὴ εἰς λογαρίθμους τῶν ὁποίων **μόνον** τὸ ἀκέραιον μέρος (χαρακτηριστικὸν) εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν.

Ἡ τροπὴ αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς :

Ἔστω π.χ. ὁ (ὅλως) ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινὸς

ὁ $-2{,}54327$ ἤτοι ὁ : $-2-0{,}54327$.

Ἐὰν εἰς αὐτὸν προσθέσωμεν -1 καὶ $+1$, ὅπερ δὲν τὸν μεταβάλλει, λαμβάνομεν:

$$-2-1+1-0{,}54327=-3+(1-0{,}54327)=-3+0{,}45673.$$

Ὥστε εἶναι : $$-2{,}54327=-3+0{,}45673.$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου ἀρνητικοῦ μέρους -3 καὶ τοῦ δεκαδικοῦ $0{,}45673$ συμφωνοῦμεν νὰ τὸ γράφωμεν, ὡς ἑξῆς : $\bar{3}{,}45673$· δηλαδὴ γράφομεν τὸ πλὴν ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν, ὅτι τοῦτο **μόνον** εἶναι ἀρνητικόν. Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν φαίνεται, ὅτι χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος -3, διότι ὁ λογάριθμος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -3 καὶ -2 καὶ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, τὸ ἀναγραφόμενον δεκαδικὸν μέρος, διότι τοῦτο εἶναι ἡ διαφορά, ἡ ὁποία προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὸν λογάριθμον $-3+0{,}45673$ ἀφαιρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ -3.

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$-3{,}75632=-3-0{,}75632=-3-1+1-0{,}75632=-4+(1-0{,}75632)=$$
$$=-4+0{,}24368=\bar{4}{,}24368.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν τὸν κάτωθι κανόνα :

Κανών. *Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀρνητικὸν λογάριθμον εἰς ἡμιαρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου κατὰ 1 καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ εὑρισκομένου ἀθροίσματος, δεξιὰ δὲ τούτου γράφομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία τὰς διαφορὰς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου (σημαντικοῦ) ἀπὸ τοῦ 10 τῶν δὲ ἄλλων ἀπὸ τὸ 9.*

Οὕτως, ἔχομεν π.χ.

Ἐὰν λογ $\theta=-3{,}85732$, θὰ ἔχωμεν : λογ $\theta=\bar{4}{,}14268$.

Ἐὰν λογ $\theta=-2{,}35724$, θὰ ἔχωμεν : λογ $\theta=\bar{3}{,}64276$.

§ 212. Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.— α′). Τὸ χαρακτηριστικὸν ἑνὸς λογαρίθμου εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλυτέρας ἀκεραίας δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμόν.

Ἀπόδειξις. Πράγματι· ἐὰν 10^k εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀκεραία δύναμις τοῦ 10 ἡ μὴ ὑπερβαίνουσα τὸν (θετικὸν) ἀριθμὸν θ, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$10^k \leqq \theta < 10^{k+1},\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ἐξ οὗ : $$k \leqq \text{λογ}\,\theta < k+1.$$

Ἄρα ὁ λογθ ἢ θὰ εἶναι ἴσος μὲ k ἢ μὲ $k+d$, ὅπου $0<d<1$.

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου θ εἶναι ἴσον πρὸς k.

β'). Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ, ἐλαττωθὲν κατὰ μονάδα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς θ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐὰν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ θ ἔχῃ k ψηφία, τότε ὁ θ θὰ περιέχεται μεταξὺ 10^{k-1} καὶ 10^k, ἤτοι θὰ ἔχωμεν :

$$10^{k-1} \leqq \theta < 10^k .$$

Ἐξ οὗ :
$$(k-1) \leqq \lambda o\gamma\, \theta < k.$$

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογθ εἶναι ἴσον πρὸς (k – 1).

Οὕτω π.χ.
$$\lambda o\gamma\, 235 = 2, \ldots\ldots$$
$$\lambda o\gamma\, 5378{,}4 = 3, \ldots\ldots$$
$$\lambda o\gamma\, 3{,}748 = 0, \ldots\ldots$$

γ'). Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος γεγραμμένου ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅση εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου του μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς θ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος $(0 < \theta < 1)$. Ἐὰν k εἶναι ἡ θέσις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν εἰς τὴν δεκαδικὴν μορφὴν τοῦ θ, θὰ εἶναι :

$$10^{-k} \leqq \theta < 10^{-k+1}$$

Ἐξ οὗ :
$$\lambda o\gamma\, 10^{-k} \leqq \lambda o\gamma\, \theta < \lambda o\gamma\, 10^{-k+1}$$

ἢ
$$-k \leqq \lambda o\gamma\, \theta < -k + 1.$$

Ὅθεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογθ εἶναι ἴσον πρὸς –k.

Οὕτω π.χ.
$$\lambda o\gamma\, 0{,}00729 = \overline{3}, \ldots\ldots$$
$$\lambda o\gamma\, 0{,}27508 = \overline{1}, \ldots\ldots$$
$$\lambda o\gamma\, 0{,}08473 = \overline{2}, \ldots\ldots$$

Παρατήρησις. Τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν νοερῶς (ἀπὸ μνήμης) τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ.

Ἀντιστρόφως τώρα ἐκ τῶν ἰδιοτήτων β' καὶ γ' ἕπεται ὅτι :

δ'). Ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ (θετικοῦ) x εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ μηδέν, τότε ὁ ἀριθμὸς x ἔχει τόσα ἀκέραια ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ ἓν ἀκόμη. Ἐὰν ὁ λογάριθμος τοῦ x εἶναι ἡμιαρνητικός, τότε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ x εἶναι τὸ μηδέν, τὸ δὲ πρῶτον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ x μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν κατέχει τάξιν ἴσην μὲ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ χαρακτηριστικοῦ.

Οὕτως, ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εἶναι 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἐὰν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι $\overline{2}$, ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς τῆς μορφῆς $0{,}0y_1y_2y_3y_4 \ldots$, ἔνθα $1 \leqq y_1 \leqq 9$.

ε΄). Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) ἕνα ἀριθμὸν ἐπὶ 10^{ν}, $\nu \in N$, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ ν μονάδας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὁ θετικὸς ἀριθμὸς θ μὲ $\lambda o\gamma\theta = y_0,\ y_1y_2y_3\ldots$

Πολλαπλασιάζοντες τὸν ἀριθμὸν θ ἐπὶ 10^{ν}, $\nu \in N$ ἔχομεν τότε :

$$\lambda o\gamma\,(10^{\nu}\cdot\theta) = \lambda o\gamma\,10^{\nu} + \lambda o\gamma\,\theta = \nu + \lambda o\gamma\,\theta = \nu + y_0,\ y_1y_2y_3\ldots =$$
$$= (y_0 + \nu),\ y_1y_2y_3\ldots \qquad (1)$$

Ὁμοίως, διαιροῦντες τὸν θ διὰ τοῦ 10^{ν}, $\nu \in N$ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\left(\frac{\theta}{10^{\nu}}\right) = \lambda o\gamma\,\theta - \lambda o\gamma\,10^{\nu} = -\nu + \lambda o\gamma\,\theta = -\nu + y_0,\ y_1y_2y_3\ldots =$$
$$= (y_0 - \nu),\ y_1y_2y_3\ldots \qquad (2)$$

Αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) δεικνύουν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ $\theta\cdot 10^{k}$, $k \in Z$, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογθ, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως τοῦ $\lambda o\gamma\,(\theta\cdot 10^{k})$ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται, ἂν k ἀρνητικὸς ἀκέραιος) κατὰ k μονάδος ἐν σχέσει πρὸς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογθ.

Δυνάμει τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος οἱ ἀριθμοὶ π.χ. 5, 50, 500, 5000,... ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος εἰς τὸν λογάριθμόν τους. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοί :

0,5· 0,05· 0,005· 0,0005...

Πόρισμα. – **Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοί των διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν των.**

Οὕτως, ἐὰν εἶναι π.χ. $\lambda o\gamma\,312{,}865 = 2{,}49536$,

τότε θὰ εἶναι :

$$\lambda o\gamma\,31{,}2865 = 1{,}49536$$
$$\lambda o\gamma\,0{,}312865 = \overline{1}{,}49536$$
$$\lambda o\gamma\,31286{,}5 = 4{,}49536$$
$$\lambda o\gamma\,3{,}12865 = 0{,}49536.$$

§ 213. Πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.

Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγάς τινας, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν. Ἐκτενέστερον ἔχομεν τὰ ἑξῆς :

α΄). Πρόσθεσις λογαρίθμων. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δεκαδικοὺς λογαρίθμους προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅλα θετικὰ καὶ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν τὸ προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων μερῶν τῶν λογαρίθμων.

Π.χ. **1) Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις : $\overline{5}{,}57834 + \overline{3}{,}67641$.** Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \overline{5}{,}57834 \\ \overline{3}{,}67641 \\ \hline \overline{7}{,}25475 \end{array}$$

Προσθέτομεν τὰ δεκαδικὰ μέρη των, ὡς συνήθως, καὶ ἔχομεν τελικὸν κρατούμενον 1, ὅτε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι :

$$1 + (-3) + (-5) = -7 = \overline{7}.$$

2) Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις : $\bar{2},85643 + 2,24482 + \bar{3},42105 + \bar{1},24207$. Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \bar{2},85643 \\ 2,24482 \\ \bar{3},42105 \\ \bar{1},24207 \\ \hline \bar{3},76437 \end{array}$$

Ἐνταῦθα τὸ ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν ἔχει μίαν ἀκεραίαν μονάδα καὶ συνεπῶς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι : $1 + (-1) + (-3) + 2 + (-2) = -3 = \bar{3}$.

β'). Ἀφαίρεσις λογαρίθμων. Ἡ ἀφαίρεσις λογαρίθμων γίνεται, ὅπως καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συνήθων δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δεκαδικῶν μερῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἐὰν ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν δεκαδικῶν μερῶν προκύψῃ τελικῶς κρατούμενον, τοῦτο εἶναι θετικὸν καὶ προστίθεται (ἀλγεβρικῶς) μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ἀφαιρετέου, ἀκολούθως δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ μειωτέου.

Π.χ. **1) Νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις : $\bar{2},83754 - \bar{5},32452$.** Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \bar{2},83754 \\ \bar{5},32452 \\ \hline 3,51302 \end{array}$$

Ἐνταῦθα δὲν ὑπάρχει κρατούμενον, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἰσοῦται πρός : $-2-(-5) = 3$.

2) Νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις : $\bar{3},48765 - \bar{2},75603$. Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \bar{3},48765 \\ \bar{2},75603 \\ \hline \bar{2},73162 \end{array}$$

Ἐνταῦθα τὸ τελικὸν κρατούμενον εἶναι 1, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν ἰσοῦται πρός : $-3-(-2+1) = -3-(-1) = -2 = \bar{2}$.

3) Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \bar{2},95842 \\ \bar{5},76923 \\ \hline 3,18919, \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{5},67835 \\ 0,85632 \\ \hline \bar{6},82203, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,35893 \\ \bar{3},44972 \\ \hline 2,90921, \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2,72125 \\ 5,28582 \\ \hline \bar{3},43543. \end{array}$$

Παρατήρησις. Ὡς γνωστὸν (§ 208) εἶναι :

$$\lambda o\gamma \alpha - \lambda o\gamma \beta = \lambda o\gamma \alpha + \sigma \upsilon \lambda \lambda o\gamma \beta,$$

ἤτοι ἡ ἀφαίρεσις ἑνὸς λογαρίθμου ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ συλλογαρίθμου του.

Ὑπολογισμὸς τοῦ συλλογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, γνωστοῦ ὄντος τοῦ λογαρίθμου του.

Ἔστω ὅτι εἶναι $\lambda o\gamma\beta = 2,54675$. Τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\beta = -\lambda o\gamma\beta = -2,54675. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ (§ 211)

$$-2,54675 = \bar{3},45325, \text{ ἡ ἰσότης (1) γίνεται :}$$

$$\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\beta = \bar{3},45325.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ ἑξῆς :

Κανών. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν συλλογάριθμον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν λογάριθμον, προσθέτομεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τὸ + 1 καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἀλλάσσομεν τὸ σημεῖον, ἀκολούθως ἀφαιροῦμεν τὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἀπὸ τοῦ 9, ἐκτὸς τελευταίου σημαντικοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.*

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν :

Ἐὰν $\quad$ λογ α $= \bar{1},37260 \Longrightarrow$ συλλογα $= 0,62740$

Ἐὰν $\quad$ λογ $0,06543 = \bar{2},81578 \Longrightarrow$ συλλογ $0,06543 = 1,18422$.

γ΄). Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς λογαρίθμου ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

i). Ἐὰν ὁ ἀκέραιος εἶναι θετικός, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀκέραιον καὶ γράφομεν μόνον τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ γινομένου, τὸ δὲ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου τὸ προσθέτομεν ἀλγεβρικῶς εἰς τὸ γινόμενον τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐπὶ τὸν θετικὸν ἀκέραιον.

Π.χ. **Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός : $\bar{2},65843 \times 4$.** Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \bar{2},65843 \\ 4 \\ \hline \bar{6},63372 \end{array}$$

Ἐνταῦθα τὸ τελικὸν κρατούμενον εἶναι 2, τὸ δὲ χαρακτηριστικὸν τοῦ γινομένου ἰσοῦται πρός : $(-2)\cdot 4 + 2 = -6 = \bar{6}$.

ii). Ἐὰν ὁ ἀκέραιος εἶναι ἀρνητικός, τότε πολλαπλασιάζομεν τὸν συλλογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀκεραίου καὶ οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν.

Π.χ. **Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός : $\bar{3},67942 \times (-4)$.**

Ἐὰν λογx $= \bar{3},67942 \Longrightarrow$ συλλογx $= 2,32058$ καὶ συνεπῶς :

$$\bar{3},67942 \times (-4) = 2,32058 \times 4 = 9,28232.$$

δ΄). Διαίρεσις ἑνὸς λογαρίθμου δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

1). Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογθ διὰ θετικοῦ ἀκεραίου (φυσικοῦ) ἀριθμοῦ k, ἐφ' ὅσον μὲν λογθ > 0 ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμούς· ἐὰν ὅμως ὁ λογθ εἶναι ἡμιαρνητικὸς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

1α). Ἐὰν ὁ k διαιρῇ (ἀκριβῶς) τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογθ, τότε διαιροῦμεν χωριστὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ χωριστὰ τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ προσθέτομεν τὰ πηλίκα.

1β). Ἐὰν ὁ k δὲν διαιρῇ τὸ χαρακτηριστικόν, τότε προσθέτομεν εἰς αὐτὸ τὸν μικρότερον ἀρνητικὸν ἀκέραιον $-\mu$ οὕτως, ὥστε νὰ καταστῇ διαιρετὸν διὰ τοῦ k, ἀκολούθως προσθέτομεν τὸν $+\mu$ εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος (τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μηδὲν) τοῦ δεκαδικοῦ μέρους καὶ εὑρίσκομεν χωριστὰ τὰ πηλίκα τῶν δύο αὐτῶν μερῶν διὰ τοῦ k, τὰ ὁποῖα καὶ προσθέτομεν τελικῶς.

Π.χ. **Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις : 1) $(\bar{6},54782) : 3$ καὶ 2) $(\bar{5},62891) : 3$:**

Αὗται γίνονται ὡς ἑξῆς :

1)
$$\begin{array}{r|l} \bar{6},54782 & \quad 3 \\ \bar{6} & \overline{\bar{2} + 0,18260 =} \\ \hline 0 + 0,54782 & = \bar{2},18260 \\ 24 & \\ 07 & \\ 18 & \\ 02 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l} \bar{5},62891 & \quad 3 \\ \bar{5}+\bar{1}+1+0,62891 & \overline{\bar{2} + 0,54297 =} \\ \bar{6}+1,62891 & = \bar{2},54297 \\ \bar{6} & \\ \hline 0+1,62891 & \\ 12 & \\ 08 & \\ 29 & \\ 21 & \\ 0 & \end{array}$$

2. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογθ διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ ἀκεραίου k διαιροῦμεν τὸν συλλογθ διὰ τοῦ $-k > 0$.

Π.χ. **Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις : (5,92158) : (–2).** Ἔχομεν :

Ἐὰν $λογx = 5{,}92158 \Longrightarrow συλλογx = \overline{6}{,}07842$, ὅτε θὰ ἔχωμεν :

$$(5{,}92158) : (-2) = (\overline{6}{,}07842) : 2 = \overline{3}{,}03921.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

459. Νὰ γίνουν ἡμιαρνητικοὶ οἱ λογάριθμοι :

1) –2,32254 2) –0,69834 3) –1,27218 4) –3,54642
5) –0,41203 6) –5,78952 7) –0,00208 8) –2,05024.

460. Γράψατε τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

1) 135 2) 2050 3) 9,5 4) 0,003 5) 382,27
6) 47,5 7) $\frac{17}{3}$ 8) 12,25 9) 0,56 10) 3041,7.

461. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν :

3, 5, 0, 1, 7, 4, 2 ;

462. Ποία εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικόν : –1, –2, –3, –4, –5, –7 ;

463. Ἐὰν $λογα = \overline{1}{,}63819$ καὶ $λογ\,4347 = 3{,}63819$, νὰ εὑρεθῇ ὁ α.

464. Δοθέντος ὅτι $λογ\,7 = 0{,}84510$, εὕρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

$$7\cdot 10^3,\quad 7\cdot 10^4,\quad \frac{7}{10^2},\quad \frac{7}{10^5}.$$

465. Ἐὰν $λογ\,7283 = 3{,}86231$, νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τῶν ἀριθμῶν :

0,7283, 7,283, 0,007283, 728300, 728,3.

466. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

λογ 724 – λογ 7,24, λογ 0,65 – λογ 6,5, λογ 17,62 – λογ 1,762.

467. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ συλλογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν μὲ τοὺς κάτωθι λογαρίθμους :

1. $\overline{3}{,}27284$ 2. $0{,}07257$ 3. $1{,}71824$,
4. $5{,}27203$ 5. $\overline{4}{,}75304$ 6. $\overline{1}{,}03275$.

468. Ἐὰν $λογα = \overline{2}{,}29814$ καὶ $λογβ = \overline{2}{,}84212$, ὑπολογίσατε τά :

1. λογα + λογβ, 2. λογα – λογβ, 3) 3 λογα + 5 λογβ,
4. $2\,λογβ - \frac{3}{4}\,λογα$, 5. $\frac{7}{5}\,(λογα + λογβ) - \frac{3}{4}\,(λογα - λογβ)$.

469. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα :

1. $\overline{5}{,}27214 + 3{,}4751 + \overline{1}{,}81523 + 0{,}47214$
2. $4{,}67471 + \overline{2}{,}14523 + 0{,}67215 + \overline{3}{,}04703$.

470. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων :

1. $\overline{3}{,}24518 + 1{,}41307 - \overline{2}{,}47503$
2. $0{,}03182 - \overline{4}{,}27513 + \overline{3}{,}82504 - \overline{1}{,}08507$.

471. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα :

1. $\overline{3}{,}82307 \times 5$, 2. $0{,}24507 \times (-2)$, 3. $\overline{1}{,}24513 \times 4$.

472. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις :

1. $\overline{4},89524 : 3,$ 2. $\overline{5},60106 : (-3),$ 3. $\overline{4},57424 : \left(-\frac{3}{7}\right),$

4. $\overline{1},42118 : 4,$ 5. $\overline{6},27508 : (-2),$ 6. $\overline{8},32403 : 4.$

473. Ἐὰν Κ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων οἱ λογάριθμοι ἔχουν χαρακτηριστικὸν k καὶ Λ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων, τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστροφοι ἔχουν λογαρίθμους μὲ χαρακτηριστικὸν $-\lambda$ ($\lambda > 0$), νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$\text{λογ}K - \text{λογ}\Lambda = k - \lambda + 1.$$

Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων

§ 214.—Εἴδομεν εἰς τὴν § 209 ὅτι, ἐκτὸς τῶν συμμέτρων δυνάμεων τοῦ 10, πάντων τῶν ἄλλων θετικῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουν διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Ἕνεκα τούτου εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ προσέγγισιν (συνήθως 0,00001). Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου $\text{λογ}\frac{1}{\alpha} = -\text{λογ}\,\alpha$, ἕπεται ὅτι, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τῶν >1, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τῶν <1.

Ἐξ ἄλλου εἴδομεν ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη : Ἀπὸ τὸ **χαρακτηριστικόν** του καὶ ἀπὸ τὸ **δεκαδικόν** του μέρους.

Τὸ χαρακτηριστικόν του ἐδείξαμεν εἰς τὴν § 212, πῶς ὑπολογίζεται ἀπὸ μνήμης.

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δύναται νὰ ὑπολογισθῇ εἰς οἱονδήποτε ἐπιθυμητὸν βαθμὸν προσεγγίσεως μὲ δεκαδικὰ ψηφία, τῇ βοηθείᾳ μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἀναπτύσσονται εἰς τὰ ἀνώτερα μαθηματικά. Τῇ βοηθείᾳ τῶν μεθόδων τούτων τὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς, συνήθως μέχρι τοῦ 10.000, εὑρέθη καὶ κατεγράφη εἰς πίνακας, οἱ ὁποῖοι λέγονται **λογαριθμικοὶ πίνακες** ἢ **«πίνακες τοῦ δεκαδικοῦ μέρους».**

Τοιοῦτοι πίνακες ὑπάρχουν διαφόρων εἰδῶν. Εἷς περιέχει τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 ἕως 10.000 μὲ 7 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 11 δεκαδικὰ ψηφία. Ἄλλος μὲ 14 δεκαδικὰ ψηφία καὶ ἄλλος μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία. Διὰ τὰς συνήθεις ὅμως ἐφαρμογὰς ἀρκεῖ ὁ πενταψήφιος πίναξ, τοῦ ὁποίου ὑπάρχουν καὶ Ἑλληνικαὶ ἐκδόσεις κατὰ τὸ σύστημα Dupuis.

Τοῦτον θὰ περιγράψωμεν συντόμως εἰς τὰ ἑπόμενα καὶ θὰ ἐκθέσωμεν καὶ τὸν τρόπον τῆς χρήσεως αὐτοῦ.

§ 215. Περιγραφὴ τῶν λογαριθμικῶυ πινάκων Dupuis.— Οἱ λογαριθμικοὶ πίνακες Dupuis περιέχουν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10.000. Ἡ διάταξις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων φαίνεται εἰς τὸν ἔναντι «πίνακα», ὅστις ἔχει ληφθῇ ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	236
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
...	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	.....	...	...	...	...	...	...	...	...	...
549	73957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, ἄνωθεν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres = ἀριθμοί), εἰς δὲ τὰς ἑλληνικὰς ἐκδόσεις τὸ γράμμα Α (ἀριθμοί), εἶναι γραμμέναι αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν, αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν ὁριζοντίαν γραμμὴν μετὰ τοῦ N. Εἰς τὰς ἄλλας στήλας εἶναι γραμμένα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Τὰ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν δευτέραν στήλην βλέπομεν ὅτι ἐξέχουν, νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα, μέχρις οὗ ἀλλάξουν. Καὶ τοῦτο, διότι πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία κοινά.

Ὁ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται ἐκεῖ ὅπου διασταυροῦνται αἱ δύο νοηταὶ γραμμαί, ἡ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ἀγομένη κατακόρυφος καὶ ἡ ἐκ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ ἀγομένη ὁριζοντία.

Ὁ ἀστερίσκος τὸν ὁποῖον βλέπομεν νὰ προτάσσεται τῶν τριῶν τελευταίων δεκαδικῶν ψηφίων εἴς τινας λογαρίθμους, φανερώνει ὅτι τὰ δύο παραλειπόμενα πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα καὶ βάσει τοῦ ἀνωτέρω «πίνακος», ἔχομεν ὅτι :

λογ 500 = 2,69897, λογ 5047 = 3,70303, λογ 5084 = 3,70621
λογ 503 = 2,70157, λογ 5128 = 3,70995, λογ 5017 = 3,70044
λογ 512 = 2,70927, λογ 5129 = 3,71003, λογ 5060 = 3,70415.

§ 216. Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.— Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας χρησιμοποιοῦμεν πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἀκολούθων προβλημάτων :

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

§ 217. Πρόβλημα Ι.– Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ὑποθέτομεν πρῶτον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε γεγραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, καὶ δεύτερον, ὅτι χρησιμοποιοῦμεν πενταψηφίους πίνακας. Οἱ πίνακες οὗτοι θὰ μᾶς δώσουν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ θὰ τὸ εὕρωμεν ἀπὸ μνήμης, συμφώνως πρὸς τὰς ἰδιότητας β΄ καὶ γ΄ τῆς § 212. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι :

Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν ἀκολουθίαν τῶν καλουμένων σημαντικῶν ψηφίων, ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται παραλείποντες τὴν τυχὸν ὑπάρχουσαν ὑποδιαστολὴν καὶ τὰ μηδενικὰ τὰ ὁποῖα τυχὸν ὑπάρχουν εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ.

Συνεπῶς κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ καθιστῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀκέραιον, ἤτοι θὰ παραλείπωμεν τὴν ὑποδιαστολήν. Τοῦτο, ὡς εἴδομεν (§ 212, ἰδ. ε΄), δὲν μεταβάλλει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν ἀριθμῶν :

50,87 0,05087 508,70 5087000 5,0870

εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ 5087.

Ἤδη πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ τεθέντος προβλήματος διακρίνομεν τὰς κάτωθι δύο περιπτώσεις :

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς α΄. **Ὁ ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων σημαντικῶν ψηφίων.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἀφοῦ εὕρωμεν κατ' ἀρχὴν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἐν λόγῳ ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν ἀκολούθως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου του ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ἐν λόγῳ ἀριθμὸν εἰς τοὺς πίνακας, ὡς ἐξετέθη εἰς προηγουμένην παράγραφον (§ 215).

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 56,82.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 1. Τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι τὸ αὐτὸ (§ 212) μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5682. Ἀλλὰ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογ 5682, ὡς εἰς τοὺς πίνακας φαίνεται, εἶναι τὸ 75450. Ἄρα λογ 56,82 = 1,75450.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\text{λογ } 568{,}2 = 2{,}75450 \qquad \text{λογ } 0{,}8703 = \bar{1}{,}93967$$
$$\text{λογ } 0{,}000507 = \bar{4}{,}70501 \qquad \text{λογ } 3{,}74 = 0{,}57287.$$

Π ε ρ ί π τ ω σ ι ς β΄.– **Ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας, ἤτοι οὗτος ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων.**

Εὑρίσκομεν πρῶτον, ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν α΄, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου. Κατόπιν, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, χωρίζομεν δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον γεγραμμένος πλέον ὁ ἀριθμός, περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων μὲ τέσσαρα ψηφία. Ἡ εὕρεσις ἐν συνεχείᾳ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους ἐπιτυγχάνεται ἔχοντες ὑπ' ὄψιν, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὴν γνωστὴν ἰδιότητα, καθ' ἥν :

Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}^+$ *καὶ εἶναι* $\alpha < \beta < \gamma \iff \lambda o\gamma\, \alpha < \lambda o\gamma\, \beta < \lambda o\gamma\, \gamma$
καὶ ἀφ' ἑτέρου τὴν παραδοχήν, καθ' ἥν :

Διὰ μικρὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν, αἱ μεταβολαὶ τοῦ δεκαδικοῦ μέρους εἶναι ἀνάλογοι τῶν μεταβολῶν τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεραι τῆς μονάδος) καὶ ἀντιστρόφως.

Ἡ ἀνωτέρω παραδοχὴ δὲν εἶναι τελείως ἀληθής, ἀκριβέστερον αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων δὲν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν.

Πράγματι, θεωρήσωμεν δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους α καὶ $\alpha+1$, $\alpha > 0$ καὶ καλέσωμεν δ τὴν διαφοράν : $\lambda o\gamma\,(\alpha+1) - \lambda o\gamma\, \alpha$, ἤτοι :

$$\delta = \lambda o\gamma\,(\alpha+1) - \lambda o\gamma\, \alpha \quad \text{ἢ} \quad \delta = \lambda o\gamma \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

ἢ
$$\delta = \lambda o\gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right).$$

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι : διὰ $\alpha \to \infty$, ὅτε $\frac{1}{\alpha} \to 0$, ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \to 0,$$

ἤτοι
$$\delta \to 0.$$

Ὥστε, ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων δὲν μένει πάντοτε ἡ αὐτή, ἀλλὰ ἐλαττοῦται καθ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ αὐξάνουν καὶ κατ' ἀκολουθίαν δὲν ἀληθεύει ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ διαφορὰ αὕτη μένει ἐπὶ πολλοὺς ἀριθμοὺς ἀμετάβλητος, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὡς ἔγγιστα, τὴν αὔξησιν τῶν λογαρίθμων ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν.

Κατόπιν τούτων, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα ἐμφαίνεται.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 17424.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 4. Χωρίζομεν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δι' ὑποδιαστολῆς τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία καὶ οὕτως ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 1742,4. Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ ὁ 1742,4 ἔχουν (§ 212) τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου των. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 1742,4.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐπειδή, προφανῶς, εἶναι :

$$1742 < 1742{,}4 < 1743,$$

ἔπεται ὅτι :

$$\lambda o\gamma\, 1742 < \lambda o\gamma\, 1742{,}4 < \lambda o\gamma\, 1743.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος ταύτης, ἐπειδή, ὡς ἐκ τῶν πινάκων φαίνεται, εἶναι :

$$\lambda o\gamma\, 1742 = 3{,}24105 \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma\, 1743 = 3{,}24130, \quad \text{προκύπτει :}$$
$$3{,}24105 < \lambda o\gamma\, 1742{,}4 < 3{,}24130.$$

Ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 3,24105 καὶ 3,24130, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ 25 μονάδας πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως (μ.ε'.δ.τ)

Ἐκ τῶν πινάκων βλέπομεν ἐπίσης ὅτι τοῦ ἀριθμοῦ αὐξανομένου κατὰ 2, 3, 4, 5, ... ἀκεραίας μονάδας ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται ἀντιστοίχως κατὰ 50, 75, 99, 125,... μ.ε'.δ.τ.

Δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρήσωμεν τὴν αὔξησιν τοῦ λογαρίθμου ὡς ἔγγιστα ἀνάλογον πρὸς τὴν αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ καὶ νὰ ὑπολογίσωμεν πόσον πρέπει νὰ αὐξηθῇ ὁ λογ1742 = 3,24105 διὰ νὰ προκύψῃ ὁ λογ1742,4 καὶ ἐξ αὐτοῦ ὁ λογ17424. Ὁ ὑπολογισμὸς γίνεται ὡς ἑξῆς :

Εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1 ἀντιστοιχεῖ αὔξ. τοῦ λογ. κατὰ 25 μ.ε΄.δ.τ

» » » 0,4 » » » » x ; »

Ἄρα : $x = 25 \cdot 0{,}4 = 10$ μ.ε΄.δ.τ.

Κατ᾽ ἀκολουθίαν :

$$\text{λογ } 1742{,}4 = 3{,}24105 + 0{,}00010 = 3{,}24115$$

καὶ συνεπῶς λογ 17424 = 4,24115.

Αἱ ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται καὶ ὡς ἑξῆς :

λογ 1742 = 3,24105	Αὔξησις ἀριθμῶν 1 αὔξησις λογαρίθμων 25 μ.ε΄.δ.τ.
λογ 1743 = 3,24130	» » 0,4 » » x ; »
Δ = 25	$x = 25 \cdot 0{,}4 = 10$ μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα : λογ 17424 = 4,24105 + 0,00010 = 4,24115.

Εὑρεθέντος ὅτι λογ 17424 = 4,24115 ἔχομεν :

λογ 17,424 = 1,24115, λογ 0,0017424 = $\bar{3}$,24115,

λογ 1,7424 = 0,24115, λογ 174,24 = 2,24115.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ ἀριθμοῦ 24,3527.

Λύσις : Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι προφανῶς 1. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 100, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου μένει (§ 212) ἀμετάβλητον. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 2435,27.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἤτοι :

λογ 2435 = 3,38650	Αὔξησις ἀριθμῶν 1 αὔξησις λογαρίθμων 18 μ.ε΄.δ.τ.
λογ 2436 = 3,38668	» » 0,27 » » x ; »
Δ = 18	$x = 18 \cdot 0{,}27 = 4{,}86 \simeq 5$ μ.ε΄.δ.τ.

Ἄρα : λογ 24,3527 = 1,38650 + 0,00005 = 1,38655.

Σημείωσις : Εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας ὑπάρχουν ἐκτὸς τοῦ πλαισίου πινακίδια, ἕκαστον τῶν ὁποίων φέρει ὡς ἐπικεφαλίδα μίαν τῶν ἐν τῇ αὐτῇ σελίδι διαφορῶν μεταξὺ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἕκαστον πινακίδιον διαιρεῖται δι᾽ εὐθείας γραμμῆς εἰς δύο στήλας. Τούτων ἡ πρώτη φέρει τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς 1,2, ..., 9, οἱ ὁποῖοι φανερώνουν δέκατα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἡ δὲ ἄλλη τὰς ἀντιστοίχους τῶν λογαρίθμων αὐξήσεις εἰς μονάδας τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως. Τῇ βοηθείᾳ τούτων ὑπολογίζομεν ἀμέσως τὰς αὐξήσεις τῶν λογαρίθμων, αἱ ὁποῖαι ὀφείλονται εἰς δοθεῖσας διαφορὰς (Δ) τῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦτο διότι ταῦτα δίδουν ἀπ᾽ εὐθείας, διὰ τὰς διαφόρους διαφορὰς Δ, τὰς τιμάς :

$$\frac{\Delta \times 1}{10}, \quad \frac{\Delta \times 2}{10}, \ldots, \frac{\Delta \times 9}{10}.$$

18	
1	1,8
2	3,6
3	5,4
4	7,2
5	9,0
6	10,8
7	12,6
8	14,4
9	16,2

Οὕτως, ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ λογαρίθμου τοῦ παραδείγματος 2 γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πινακιδίου, τὸ ὁποῖον φέρει ἐπικεφαλίδα τὴν διαφορὰν Δ = 18.

Εἰς τὸ πινακίδιον τοῦτο ἀπέναντι τοῦ 2 (στήλη α΄) εἶναι 3,6 καὶ ἀπέναντι τοῦ 7 εἶναι 12,6, ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ ψηφίον 7 παριστᾷ εἰς τὸν ἀριθμὸν 2435,27 ἑκατοστά, ἤτοι μονάδας 10 φορὰς μικροτέρας, πρέπει νὰ λάβωμεν 1,26. Ὥστε εἰς αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 0,27 ἀντιστοιχεῖ αὔξησις τοῦ λογαρίθμου κατὰ $3{,}6 + 1{,}26 = 4{,}86 \simeq 5$ μ.ε΄.δ.τ.

Διάταξις τῶν πράξεων.

	λογ 2435		= 3,38650	Δ = 18
Εἰς αὔξησιν	0,2	αὔξησις λογ	3,6	
» »	0,07	» »	1,26	
ἄρα	λογ 2435,27		= 3,3865486	

καὶ ἐπειδὴ τὸ 6ον ψηφίον τοῦ δεκ. μέρους εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5, αὐξάνομεν κατὰ μονάδα τὸ 5ον ψηφίον. Ἄρα θὰ εἶναι λογ 2435,27 = 3,38655 καὶ κατ' ἀκολουθίαν λογ 24,3527 = 1,38655.

§ 218. Πρόβλημα II. *(ἀντίστροφον)*.– **Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.**

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου. Ἕνεκα τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος ἀναγράφεται ἢ μὴ εἰς τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἐπιτρέπει τὸν καθορισμόν, συμφώνως πρὸς τὴν ἰδιότητα δ' τῆς § 212, τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Ἀκριβέστερον ἐργαζόμεθα ὡς κάτωθι :

Περίπτωσις α'.– **Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν x, διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι:

$$\text{λογ}x = 2{,}62716.$$

Λύσις : Χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ χαρακτηριστικὸν 2 ἀναζητοῦμεν πρῶτον εἰς τὴν στήλην Ο τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὸν ἀριθμὸν 62, ποὺ ἀποτελοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου, ἀκολούθως ἀναζητοῦμεν εἰς τὸν πίνακα τὰ ἕτερα τρία ψηφία 716. Οὕτω βλέπομεν ὅτι ταῦτα κεῖνται εἰς τὴν 423ην ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ στήλην 8· τὰ ψηφία λοιπόν, μὲ τὰ ὁποῖα γράφεται ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ ἡ διαδοχὴ αὐτῶν εἶναι ἡ ἀκόλουθος 4, 2, 3, 8. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λοιπὸν θὰ εἶναι ὁ ἔχων 423 δεκάδας καὶ 8 μονάδας, ἤτοι ὁ 4238. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λογάριθμός του ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ἕπεται (§ 212, δ') ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα ἔχομεν :

$$\mathbf{x = 423{,}8.}$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον π.χ. $\overline{3},75343$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,005668. Τὸ χαρακτηριστικόν του $\overline{3} = -3$ φανερώνει ὅτι ὑπάρχουν τρία μηδενικὰ πρὸ τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου 5 τοῦ 5668 (βλ. § 212, δ').

Σημείωσις: Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν x, διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι λογx = 2,63022. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ 022 δὲν εὑρίσκεται εἰς τὰς σειρὰς τοῦ 63. Τότε ἀναζητοῦμεν αὐτὸ εἰς τὰς σειρὰς τοῦ 62 φέρον ἔμπροσθέν του ἀστερίσκον (*). Πράγματι τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ 022 μετ' ἀστερίσκου εὑρίσκεται εἰς τὴν τελευταίαν σειρὰν τοῦ 62. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x εἶναι συνεπῶς ὁ 426,8. Ὁμοίως εὑρίσκομεν :

Ἐὰν λογ x = 2,63003, τότε x = 426,9
» λογ x = 2,63002, » x = 426,6.

Περίπτωσις β'.– **Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας.**

1ον : Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν θετικὸν ἀριθμὸν x, διὰ τὸν ὁποῖον εἶναι :

$$\text{λογ}x = 1{,}25357.$$

Λύσις: Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἀναζητούμενον, ὡς προηγουμένως, εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 0,25334 καὶ τοῦ 0,25358, εἰς τοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 1792 καὶ 1793 ἀντιστοίχως. Ἤτοι ἔχομεν:

$$1{,}25334 < 1{,}25357 < 1{,}25358$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$17{,}92 < x < 17{,}93.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\Delta = 1{,}25358 - 1{,}25334 = 24 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}$$

καὶ

$$\delta = 1{,}25357 - 1{,}25334 = 23 \text{ μ.ε΄.δ.τ.}$$

Λαμβανομένου δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι κατὰ προσέγγισιν ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν καὶ καταρτίζοντες τὴν ἀκόλουθον διάταξιν, ἔχομεν:

Αὔξησις λογαρίθμου κατὰ 24 μ.ε΄.δ.τ. φέρει αὔξησιν τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ 1
» » » 23 » » » » » » y;

$$y = 1 \cdot \frac{23}{24} = \frac{23}{24} = 0{,}958.$$

Προσθέτοντες εἰς τὸν 1792 τὸν 0,958 εὑρίσκομεν 1792,958, δηλαδὴ τὸ 958 τὸ προσαρτῶμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 1792. Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς 1792,958 ἔχει προφανῶς τὰ αὐτὰ μὲ τὸν x ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν σειράν, πλὴν ὅμως ἡ θέσις τῆς ὑποδιαστολῆς ἐν τῷ x κανονίζεται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογx, ὅπερ ἐν προκειμένῳ εἶναι 1.

Θὰ εἶναι λοιπόν: $x = 17{,}92958.$

Συντομώτερον ἡ ἐργασία αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

1,25357	1,25358	$\Longrightarrow$ 1793	‖	24	1
1,25334	1,25334	$\Longrightarrow$ 1792	‖	23	y;
Διαφοραί: δ = 23	Δ = 24	1	‖	$y = 1 \times \frac{23}{24} = 0{,}958.$	

Ἄρα: $x = 17{,}92958.$

Σημείωσις: Ἡ διαφορὰ **Δ** τῶν ἄκρων τῶν λογαρίθμων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ δοθεὶς λογάριθμος, καλεῖται **μεγάλη διαφορά**· ἡ δὲ διαφορὰ **δ** τοῦ μικροτέρου τούτων ἀπὸ τοῦ δοθέντος καλεῖται **μικρὰ διαφορά.**

2ον: Δίδεται ὅτι: λογx = $\overline{3}$,47647 καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ὁ x.

Λύσις: Ἐκ τῶν πινάκων παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\overline{3},47640 < \overline{3},47647 < \overline{3},47654$$

καὶ ἄρα

$$0{,}002995 < x < 0{,}002996.$$

Ἤδη, πρὸς εὕρεσιν τοῦ x, κάμνομεν τὴν ἀκόλουθον διάταξιν:

$\overline{3},47647$	$\overline{3},47654$	$\Longrightarrow$ 2996	‖	14	1
$\overline{3},47640$	$\overline{3},47640$	$\Longrightarrow$ 2995	‖	7	y;
Διαφοραί: δ = 7	Δ = 14	1	‖	$y = 1 \times \frac{7}{14} = 0{,}5.$	

Οὕτω τὰ σημαντικὰ ψηφία τοῦ x εἶναι κατὰ σειρὰν 2, 9, 9, 5, 5. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς x εἶναι ὁ 0,0029955, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι $\overline{3}$. Ὁμοίως θὰ ἔχωμεν:

Ἐὰν λογ x = 0,47647, τότε x = 2,9955
» λογ x = 5,47647, » x = 299550.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται τώρα ὁ ἀκόλουθος :

Κανών. *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ἀριθμὸν ἐκ τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ, εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ λογάριθμος (ἐνν. τὸ δεκαδικόν του μέρος) δὲν εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, παραθέτομεν δεξιὰ τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν μικρότερον τῶν λογαρίθμων τοῦ πίνακος μεταξὺ τῶν ὁποίων ὁ δοθεὶς λογάριθμος περιέχεται, πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δ : Δ, ἔνθα δ ἡ μικρὰ καὶ Δ ἡ μεγάλη διαφορά. Μετὰ ταῦτα καθορίζομεν τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου.*

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων

§ 219. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων δυνάμεθα νὰ ἀνάγωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας, ἤτοι τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ριζῶν εἰς διαίρεσιν. Οὕτω μὲ χρῆσιν τῶν λογαρίθμων ἐκτελοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἄλλως θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ δυσχερεῖς, ἂν μὴ δυναταί.

Τὰ ἑπόμενα παραδείγματα θὰ καταστήσουν περισσότερον σαφὲς πόσον μεγάλως ἁπλοποιεῖ τὴν ἐκτέλεσιν διαφόρων πράξεων ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ γινόμενον :

$$x = 180{,}2 \times 35{,}32 \times 0{,}724.$$

Λύσις : Ἔχομεν :

$$\text{λογ}\, x = \text{λογ}\, 180{,}2 + \text{λογ}\, 35{,}32 + \text{λογ}\, 0{,}724.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι :

$$\begin{aligned} \text{λογ}\, 180{,}2 &= 2{,}25575 \\ \text{λογ}\, 35{,}32 &= 1{,}54802 \\ \text{λογ}\, 0{,}724 &= \bar{1}{,}85974 \\ \hline \text{λογ}\, x &= 3{,}66351 \end{aligned}$$

Ἄρα :

$$x = 4608.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἐὰν εἶναι $x = \dfrac{7{,}56 \times 4667 \times 567}{899{,}1 \times 0{,}00337 \times 23435}$.

Λύσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης παραστάσεως ἔχομεν :

$$\text{λογ}\, x = \text{λογ}\, 7{,}56 + \text{λογ}\, 4667 + \text{λογ}\, 567 - (\text{λογ}\, 899{,}1 + \text{λογ}\, 0{,}00337 + \text{λογ}\, 23435).$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν :

$$\begin{array}{rcl||rcl} \text{λογ}\ 7{,}56 &=& 0{,}87852 & \text{λογ}\ 899{,}1 &=& 2{,}95381 \\ \text{λογ}\ 4667 &=& 3{,}66904 & \text{λογ}\ 0{,}00337 &=& \bar{3}{,}52763 \\ \text{λογ}\ 567 &=& 2{,}75358 & \text{λογ}\ 23435 &=& 4{,}36986 \\ \hline & & 7{,}30114 & & & 4{,}85130. \end{array}$$

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκύπτει :

$$\text{λογ}\, x = 2{,}44984$$

Ἄρα :

$$x = 281{,}73\,.$$

Παράδειγμα 3ον : Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ $8^{(8^8)}$.

Λύσις : Θέτοντες $x = 8^{(8^8)}$ καὶ $y = 8^8$ εὑρίσκομεν ὅτι :

$$x = 8^y \quad \text{καὶ} \quad \text{λογ}x = y \cdot \text{λογ}\, 8.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\text{λογ}y = 8\,\text{λογ}8 = 7{,}22472$, ἕπεται ὅτι $y = 16777300$ περίπου καὶ

$$\text{λογ}x = 16777300 \cdot \text{λογ}\, 8 = 15151412.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι ὁ x θὰ ἔχῃ περίπου 15151413 ἀκέραια ψηφία.

Σημ. Ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων ἔπρεπε πρὸς εὕρεσιν τοῦ y νὰ κάμωμεν 7 πολλαπλασιασμοὺς καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ x ἄλλους 16777300 περίπου πολλαπλασιασμούς.

Παράδειγμα 4ον : Νὰ ὑπολογισθῇ, κατὰ προσέγγισιν, ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$x = \frac{27{,}32 \times (1{,}04)^{20} \times \sqrt[5]{0{,}003}}{\sqrt[4]{0{,}0042} \times (345{,}6)^2}.$$

Λύσις : Λαμβάνοντες λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔχομεν συμφώνως πρὸς τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων :

$$\text{λογ}\, x = \left(\text{λογ}\, 27{,}32 + 20 \cdot \text{λογ}\, 1{,}04 + \frac{1}{5}\,\text{λογ}\, 0{,}003\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot \text{λογ}\, 0{,}0042 + 2\,\text{λογ}\, 345{,}6\right).$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν :

Βοηθητικαὶ πράξεις

$$\text{λογ}\,(1{,}04) = 0{,}01703$$
$$\times 20$$
$$0{,}34060$$

$$\text{λογ}\, 0{,}003 = \bar{3}{,}47712$$

$$\frac{1}{5}\,\text{λογ}\, 0{,}003 = \frac{\bar{3}{,}47712}{5} = \frac{\bar{5} + 2{,}47712}{5} = $$
$$= \bar{1} + 0{,}49542 = \bar{1}{,}49542$$

$$\text{λογ}\, 0{,}0042 = \bar{3}{,}62325$$

$$\frac{1}{4}\,\text{λογ}\, 0{,}0042 = \frac{\bar{3}{,}62325}{4} = \frac{\bar{4} + 1{,}62325}{4} =$$
$$= \bar{1} + 0{,}40581 = \bar{1}{,}40581$$

$$\text{λογ}\, 345{,}6 = 2{,}53857$$
$$\times 2$$
$$5{,}07714$$

Τελικαὶ πράξεις

$$\text{λογ}\, 27{,}32 = 1{,}43648$$
$$20 \cdot \text{λογ}\,(1{,}04) = 0{,}34060$$
$$\frac{1}{5} \cdot \text{λογ}\,(0{,}003) = \bar{1}{,}49542$$
$$\text{Ἄθροισμα} = 1{,}27250$$

$$\frac{1}{4}\,\text{λογ}\,(0{,}0042) = \bar{1}{,}40581$$
$$2 \cdot \text{λογ}\, 345{,}6 = 5{,}07714$$
$$\text{Ἄθροισμα} = 4{,}48295$$

Ὥστε εἶναι :

$$\text{λογ}\, x = 1{,}27250 - 4{,}48295 =$$
$$= -3{,}21045 = \bar{4}{,}78955.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν : $x = 0{,}000615957.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

474. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος ἑκάστου ἐκ τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

1.	0,2507	5.	6,8372	9.	85,007
2.	45,72	6.	5278,37	10.	0,C004124
3.	0,003817	7.	63,347	11.	326,537
4.	107,3	8.	25234	12.	14,1606

13.	0,00643598	15.	31,2865	17.	$524\frac{3}{8}$
14.	0,0682947	16.	5378,92	18.	$4{,}72+\frac{6}{7}$.

475. Νὰ εὑρεθῇ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς x, γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

1.	$\lambda o\gamma\, x = 2{,}48001$	5.	$\lambda o\gamma\, x = 4{,}87622$	9.	$\lambda o\gamma\, x = 0{,}70020$
2.	$\lambda o\gamma\, x = \overline{1}{,}96895$	6.	$\lambda o\gamma\, x = 2{,}99348$	10.	$\lambda o\gamma\, x = 1{,}66325$
3.	$\lambda o\gamma\, x = 4{,}97534$	7.	$\lambda o\gamma\, x = \overline{1}{,}79100$	11.	$\lambda o\gamma\, x = \overline{4}{,}15050$
4.	$\lambda o\gamma\, x = \overline{3}{,}69636$	8.	$\lambda o\gamma\, x = \overline{2}{,}78000$	12.	$\lambda o\gamma\, x = 5{,}25865$.

476. Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

1.	$82{,}75 \times 0{,}3974$	2.	$25200 \times 3{,}1416$	3.	$437 \times 0{,}5223$		
4.	$4{,}25 \times 308 \times 0{,}295$	5.	$3{,}72 \times 7{,}8 \times 9312$	6.	$3{,}14 \times 25{,}2 \times 395$		
7.	$56314 : 9$	8.	$0{,}8276 : 25{,}2$	9.	$10025 : 4{,}35$		
10.	$4{,}36^3$	11.	$0{,}895^5$	12.	$10{,}25^4$	13.	$3{,}02^{10}$
14.	$\sqrt[5]{2{,}8314}$	15.	$\sqrt[10]{2}$	16.	$\sqrt{1{,}414}$	17.	$\sqrt{\pi}$
18.	$9{,}35^2 \times 3{,}1416$	19.	$18{,}2^3 \times 1{,}33$	20.	$0{,}45^2 \times 2{,}25 \times \sqrt{3}$		
21.	$\sqrt{\frac{27{,}3 \times 0{,}139}{4{,}5}}$	22.	$\sqrt[3]{\frac{1258 \times 0{,}824}{2{,}5^2}}$	23.	$\sqrt[4]{\frac{25{,}6 \times 0{,}312}{0{,}85}}$.		

477. Ἐπιλύσατε τὰς κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $x^4 = 5\,832{,}6$ 2. $x^5 = 0{,}0247$.

478. Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον :

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

ὑπολογίσατε τὸ ἐμβαδὸν E ἑνὸς τριγώνου, εὗ αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶναι :

$$\alpha = 202{,}5\ \text{m}, \quad \beta = 180{,}2\ \text{m} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 75{,}3\ \text{m} \quad (\tau = \frac{1}{2}\ \text{περιμέτρου}).$$

479. Ὑπολογίσατε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ x, ὅστις ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}},$$

ὅπου $\alpha = 0{,}27355, \quad \beta = 29{,}534, \quad \gamma = 44{,}340.$

480. Τρεῖς ἀριθμοὶ α, x, y συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$\alpha x y^2 = \sqrt[3]{x}.$$

1ον. Ὑπολογίσατε τὸ y, ἂν εἶναι $\alpha = 0{,}3$ καὶ $x = 1{,}8215$

2ον. Ὑπολογίσατε τὸ x, ἂν εἶναι $\alpha = 10$ καὶ $y = 0{,}5242$.

481. Γεωμετρικῆς προόδου δίδονται $\alpha_1 = 3$, $\omega = 8$ καὶ $\nu = 13$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 13ος ὅρος της καὶ τὸ ἄθροισμα Σ_{13} τῶν ὅρων αὐτῆς.

482. Ἐπαληθεύσατε διὰ τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τὰς ἀκολούθους ἰσότητας:

1. $\sqrt{\frac{577{,}8 \times 69}{0{,}75 \times 3{,}107}} = 6{,}431,$ 2. $\sqrt{8{,}5273 \times \sqrt[3]{51{,}3388}} = 5{,}62962$

3. $\sqrt[3]{\frac{4{,}632 \times (2{,}96)^2}{81{,}3 \times 32{,}41}} = 0{,}225855,$ 4. $\frac{312{,}415 \times \sqrt[3]{3{,}5781^2}}{17{,}1826^2 \times \sqrt[10]{0{,}002987^3}} = 14{,}1606.$

483. Νὰ ὑπολογισθῇ διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$y = \frac{4{,}3^7 \times \sqrt[5]{0{,}0004975}}{\sqrt[4]{0{,}312}} + \sqrt[3]{\frac{217^2 \times \sqrt{595}}{137 \times \sqrt[3]{0{,}03}}}.$$

(**Ὑπόδ.** Ὑπολογίσατε χωριστὰ ἕκαστον ὅρον τῆς παραστάσεως καὶ προσθέσατε ἀκολούθως τὰ ἐξαγόμενα).

II. ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις

§ 220. Ὁρισμοί.– Καλεῖται **ἐκθετικὴ ἐξίσωσις** πᾶσα ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει μίαν τοὐλάχιστον δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν ἄγνωστον ἢ συνάρτησίν τινα τοῦ ἀγνώστου.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις :

$$3^x = 81, \qquad 2^{3x+1} - 5 \cdot 4^x + 3 = 0, \qquad 5^{x^2-2x+3} = 1$$

εἶναι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.

Ἐπίλυσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Αἱ συνηθέστεραι ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις ἔχουσιν ἢ δύνανται νὰ λάβωσι μίαν τῶν ἀκολούθων μορφῶν :

α′). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\boxed{\alpha^x = \beta} \qquad (1)$$

ἔνθα $\alpha, \beta \in R^+$ καὶ $\alpha \neq 1$.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἐκθετικῆς ἐξισώσεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

Περίπτωσις I.–**Ὁ β εἶναι δύναμις τοῦ α ἢ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ α.** Τότε, ἐὰν εἶναι $\beta = \alpha^k$ θὰ ἔχωμεν : $\alpha^x = \alpha^k$ καὶ συνεπῶς $x = k$.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $3^x = 729$.

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ $729 = 3^6$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^x = 3^6 \quad \text{καὶ δίδει} \quad x = 6.$$

Περίπτωσις II.–**Ὁ β δὲν δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ α.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἔχομεν :

$$x \cdot \text{λογ}\,\alpha = \text{λογ}\,\beta \ \text{καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι} \ x = \frac{\text{λογ}\,\beta}{\text{λογ}\,\alpha}.$$

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $2^x = \frac{5}{6}$.

Ἐπίλυσις : Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν :

$$x \cdot \text{λογ}\,2 = \text{λογ}\,5 - \text{λογ}\,6 \quad \text{ἢ} \quad x = \frac{\text{λογ}\,5 - \text{λογ}\,6}{\text{λογ}\,2} = \frac{-0{,}07918}{0{,}30103} = -0{,}26303.$$

β΄). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\boxed{\alpha^{g(x)} = \beta} \qquad (2)$$

ἔνθα g(x) εἶναι δεδομένη συνάρτησις τοῦ ἀγνώστου καὶ $\alpha, \beta \in R^+$ μὲ $\alpha \neq 1$.

Προφανῶς διὰ $g(x) = x$ ἔχομεν ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν τῆς προηγουμένης μορφῆς.

Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (2) διακρίνομεν, ὡς καὶ προηγουμένως, δύο περιπτώσεις, *καθ' ὅσον οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἢ μὴ δυνάμεις ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3^{x^2-5x+11} = 243$.

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ $243 = 3^5$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^{x^2-5x+11} = 3^5 \text{ καὶ δίδει } x^2 - 5x + 11 = 5 \quad \text{ἢ} \quad x^2 - 5x + 6 = 0. \qquad (1)$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι $x = 2$ καὶ $x = 3$, αἱ ὁποῖαι εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $[3^{(x-1)}]^{(x^2-9)} = 1$.

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3^{(x-1)(x^2-9)} = 3^0 \text{ καὶ δίδει } (x-1)(x^2-9) = 0 \quad \text{ἢ} \quad (x-1)(x-3)(x+3) = 0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι $x = 1$, $x = 3$, $x = -3$. Αὗται δὲ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Παράδειγμα 3ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5^{3x-2} = 437$.

Ἐπίλυσις : Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ ἔχομεν :

$$(3x-2) \cdot \text{λογ}\, 5 = \text{λογ}\, 437 \quad \text{ἢ} \quad 3x - 2 = \frac{\text{λογ}\, 437}{\text{λογ}\, 5} \quad \text{ἢ} \quad 3x - 2 = \frac{2{,}64048}{0{,}69897}$$

$$\text{ἢ} \qquad 3x - 2 = 3{,}77767 \quad \text{καὶ ἐξ αὐτῆς :} \quad \mathbf{x = 1{,}92589.}$$

Παράδειγμα 4ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha^{\beta^x} = \gamma, \qquad (1)$$

ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma \in R^+$ καὶ $\alpha \neq 1$, $\beta \neq 1$.

Ἐπίλυσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) ἔχομεν :

$$\beta^x \cdot \text{λογ}\, \alpha = \text{λογ}\, \gamma \quad \text{ἢ} \quad \beta^x = \frac{\text{λογ}\, \gamma}{\text{λογ}\, \alpha} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2), λαμβάνοντες ἐκ νέου τοὺς λογαρίθμους, εὑρίσκομεν :

$$x \cdot \text{λογ}\, \beta = \text{λογ}\left(\frac{\text{λογ}\, \gamma}{\text{λογ}\, \alpha}\right)$$

$$\text{ἢ} \qquad \boxed{x = \frac{1}{\text{λογ}\, \beta} \cdot \text{λογ}\left(\frac{\text{λογ}\, \gamma}{\text{λογ}\, \alpha}\right)} \qquad (3)$$

Διὰ νὰ ἔχῃ νόημα τὸ δεύτερον μέλος τῆς (3) πρέπει νὰ εἶναι $\dfrac{\text{λογ}\, \gamma}{\text{λογ}\, \alpha} > 0$. Τοῦτο ὑφίσταται ὅταν οἱ λογγ καὶ λογα εἶναι **ὁμόσημοι,** δηλ. ἢ ἀμφότεροι οἱ α καὶ γ νὰ εἶναι > 1 ἢ ἀμφότεροι < 1.

γ′). **Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :**

$$\boxed{f(\alpha^x) = g(\alpha^x)} \qquad (3)$$

ἔνθα $\alpha \in \mathbf{R}^+$.

Εἰδικῶς κατωτέρω θὰ μελετήσωμεν ἐξισώσεις τῶν μορφῶν :

$$\gamma_1 : \ A\alpha^{2x} + B\alpha^x + \Gamma = 0$$

$$\gamma_2 : \ A_1\alpha^{\mu_1 x+\nu_1} + A_2\alpha^{\mu_2 x+\nu_2} + \cdots + A_k\,\alpha^{\mu_k x+\nu_k} = 0,$$

ἔνθα μ_i, $\nu_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1,2,\ldots,k$.

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀνάγονται εἰς τὴν μορφὴν (1) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως :

$$\boxed{\alpha^x = y}$$

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$.

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται : $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ καὶ ἐὰν τεθῇ : $2^x = y$, ἔχομεν :

$$y^2 - 7y - 8 = 0.$$

Αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι : $y_1 = 8$ καὶ $y_2 = -1$.

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$2^x = 8 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad 2^x = -1 \quad (2).$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται $2^x = 2^3$ καὶ δίδει : $x = 3$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἀδύνατος, διότι $2^x > 0$ διὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Ὥστε ἡ ῥίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $\mathbf{x = 3}$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\mathbf{3^{x+2} + 5 \cdot 3^x + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 128.}$$

Ἐπίλυσις : Αὕτη γράφεται :

$$3^x \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} - \frac{3^x}{9} = 128.$$

Θέτομεν $3^x = y$ καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$9y + 5y + \frac{y}{3} - \frac{y}{9} = 128$$

ἢ

$$128\,y = 1152,$$

ἐξ ἧς :

$$y = 9.$$

Τότε ἔχομεν : $3^x = 9$ ἢ $3^x = 3^2$ καὶ ἄρα $\mathbf{x = 2}$.

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $5^{2x-1} + 3 \cdot 5^{x+1} = 80$.

Ἐπίλυσις : Αὕτη γράφεται :

$$\frac{(5^x)^2}{5} + 3 \cdot 5^x \cdot 5 - 80 = 0$$

ἢ

$$(5^x)^2 + 75 \cdot 5^x - 400 = 0. \qquad (1)$$

Θέτομεν $5^x = y$ καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$y^2 + 75 \cdot y - 400 = 0.$$

Αὕτη λυομένη δίδει : $y_1 = 5$ καὶ $y_2 = -80$.

Ὅθεν ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$5^x = 5 \quad \text{καὶ} \quad 5^x = -80.$$

Ἡ πρώτη δίδει : $\mathbf{x = 1}$.

Ἡ δευτέρα εἶναι ἀδύνατος, διότι $5^x > 0$ διὰ κάθε $x \in \mathbf{R}$.

δ΄). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\boxed{f(\alpha^x) = g(\beta^x)} \tag{4}$$

Συνήθεις περιπτώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς εἶναι αἱ κάτωθι :

$$\delta_1: \quad A \cdot \alpha^x = B \cdot \beta^x$$
$$\delta_2: \quad A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται ἀνάγονται εἰς τὴν μορφὴν (1) διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως:

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y}$$

Πράγματι, διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως δ_2 διὰ β^{2x} αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τήν :

$$\delta_2': \quad A \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$$

καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = y$ (1), ἡ ἐξίσωσις δ_2' γίνεται :

$$Ay^2 + B\,y + \Gamma = 0.$$

Λυομένη αὕτη καὶ ἐφ' ὅσον $B^2 - 4A\Gamma \geqslant 0$, θὰ δώσῃ δύο πραγματικὰς ρίζας y_1 καὶ y_2. Διὰ τὰς τιμὰς $y = y_1$ καὶ $y = y_2$ ἡ (1) δίδει τὰς ἐκθετικὰς ἐξισώσεις : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_1$ καὶ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y_2$, αἱ ὁποῖαι λύονται κατὰ τὰ γνωστά.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\mathbf{3 \cdot 2^{x-4} - 2^{x-1} = 5^{x-2} - 6 \cdot 5^{x-3}}.$$

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$3 \cdot \frac{2^x}{2^4} - \frac{2^x}{2} = \frac{5^x}{5^2} - 6 \cdot \frac{5^x}{5^3}$$

ἢ
$$2^x \cdot \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{2}\right) = 5^x \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{6}{125}\right)$$

ἢ
$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{16}{625}$$

ἢ
$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^4.$$

Ἄρα εἶναι : $\mathbf{x = 4}$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\mathbf{3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0}$.

Ἐπίλυσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 3^{2x} λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν :

$$2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x} + 3 = 0. \qquad (1)$$

Θέτομεν $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = y$ καὶ ἡ (1) γράφεται : $2y^2 - 5y + 3 = 0$.

Αὕτη ἔχει ρίζας : $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = 1$ καὶ ἑπομένως ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{3}{2} \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 1.$$

Αὗται γραφόμεναι :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad \text{καὶ} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

δίδουν ἀντιστοίχως : $\mathbf{x = -1}$ καὶ $\mathbf{x = 0}$.

ε΄). Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς :

$$\boxed{\{f(x)\}^{g(x)} = 1} \qquad (5)$$

ἔνθα f (x), g (x) πολυωνυμικαὶ συναρτήσεις τοῦ x.

Αἱ ἐξισώσεις τῆς ἀνωτέρω μορφῆς ἔχουν προφανῶς λύσεις τὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων : **(i)** $f(x) = 1$

(ii) $g(x) = 0$ καὶ $f(x) \neq 0$.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\mathbf{(x^2 - 3x + 2)^{x^2 - 2x} = 1.}$$

Ἐπίλυσις : (i). Αἱ ρίζαι τῆς $x^2 - 3x + 2 = 1$ εἶναι προφανῶς λύσεις τῆς δοθείσης. Αὕτη γράφεται $x^2 - 3x + 1 = 0$ καὶ λυομένη δίδει :

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

(ii). Αἱ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$x^2 - 2x = 0$$
$$x^2 - 3x + 2 \neq 0$$

προφανῶς ἱκανοποιοῦν τὴν δοθεῖσαν.

Εἶναι δὲ $x(x-2) = 0$ καὶ $(x-1)(x-2) \neq 0$.

Ἄρα : $x = 0$.

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας :

$$\mathbf{x = 0, \quad x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.}$$

Παρατήρησις : Ἡ ἐξίσωσις $\{f(x)\}^{f(x)} = \beta$, ἔνθα $f(x)$ πολυωνυμικὴ συνάρτησις τοῦ x, ἐπιλύεται, ὅταν τὸ β δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\beta = \alpha^{\alpha}$. Θὰ ἔχωμεν τότε : $\{f(x)\}^{f(x)} = \alpha^{\alpha}$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $f(x) = \alpha$.

Παράδειγμα : Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

(i). $\mathbf{x^x = 4}$, **(ii).** $\mathbf{x^x = -1}$, **(iii).** $\mathbf{(x^2 - 7x + 15)^{x^2 - 7x + 15} = 27}$.

(i) Ἔχομεν $4 = 2^2$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $x^x = 2^2$. Ἐκ ταύτης προκύπτει $\mathbf{x = 2}$.

(ii) Ἔχομεν $-1 = (-1)^{-1}$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $x^x = (-1)^{-1}$, ὅτε $\mathbf{x = -1}$.

(iii). Ἔχομεν $27 = 3^3$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $(x^2 - 7x + 15)^{x^2-7x+15} = 3^3$. Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν: $x^2 - 7x + 15 = 3$ ἢ $x^2 - 7x + 12 = 0$, ἡ ὁποία λυομένη δίδει:

$$\mathbf{x = 3} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x = 4}.$$

Ἐκθετικὰ Συστήματα

§ 221. Ὁρισμοί.— Καλεῖται **σύστημα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων** μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, πᾶν σύστημα ἐξισώσεων ἐκ τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶναι ἐκθετική.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος συνιστοῦν **λύσιν** αὐτοῦ.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν ἐκθετικῶν συστημάτων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων καὶ τῶν λογαρίθμων καὶ τῆς εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον ἐκτεθείσης θεωρίας ἐπιλύσεως τῶν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

Παραδείγματα : 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$4^x \cdot 2^{y-2} = 32$$
$$3^{x+2} \cdot 3^{y-4} = 27.$$

Ἐπίλυσις : Τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$2^{2x+y-2} = 2^5$$
$$3^{x+y-2} = 3^3.$$

Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν : $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + y = 5. \end{cases}$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν λύσιν : $\mathbf{x = 2}$, $\mathbf{y = 3}$.

2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$3^x \cdot 4^y = 3981312 \qquad (1)$$
$$2^y \cdot 5^x = 400000. \qquad (2)$$

Ἐπίλυσις : Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν σύστημα :

$$x \cdot \text{λογ}\, 3 + y \cdot \text{λογ}\, 4 = \text{λογ}\, 3981312 \qquad (1')$$
$$y \cdot \text{λογ}\, 2 + x \cdot \text{λογ}\, 5 = \text{λογ}\, 400000. \qquad (2')$$

Θέτοντες λογ $4 =$ λογ $2^2 = 2$ λογ 2 καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς (2′) ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν :

$$x\, \text{λογ}\, 3 + 2y \cdot \text{λογ}\, 2 = \text{λογ}\, 3981312 \qquad (1'')$$
$$2x\, \text{λογ}\, 5 + 2y \cdot \text{λογ}\, 2 = \text{λογ}\, 400000. \qquad (2'')$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1″) καὶ (2″) εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{2\, \text{λογ}\, 400000 - \text{λογ}\, 3981312}{2\, \text{λογ}\, 5 - \text{λογ}\, 3} = \frac{2 \cdot \text{λογ}\, (2^2 \cdot 10^5) - \text{λογ}\, (2^{14} \cdot 3^5)}{2\, \text{λογ}\, 5 - \text{λογ}\, 3} =$$
$$= \frac{10 - 10\, \text{λογ}\, 2 - 5\, \text{λογ}\, 3}{2 - 2\, \text{λογ}\, 2 - \text{λογ}\, 3} = 5.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν :

$$2^y = \frac{400000}{5^5} = \frac{4 \cdot 10^5}{5^5} = \frac{2^2 \cdot 2^5 \cdot 5^5}{5^5} = 2^7,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $y = 7$.

Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι : $\mathbf{x = 5,\ \ y = 7}$.

3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^y = y^x \tag{1}$$

$$x^3 = y^2 \tag{2}$$

Ἐπίλυσις : Προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος εἶναι : $x = y = 1$. Ὑποθέτοντες τώρα ὅτι : $x > 0,\ y > 0$ καὶ $x \neq 1 \neq y$ εὑρίσκομεν, ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$y \cdot \text{λογ}\, x = x \cdot \text{λογ}\, y \tag{1'}$$

$$3 \cdot \text{λογ}\, x = 2 \cdot \text{λογ}\, y. \tag{2'}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1′) καὶ (2′) ἔχομεν : $\dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{2}$,

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $\quad y = \dfrac{3x}{2}$. $\hfill (3)$

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἔχομεν :

$$x^3 = \left(\frac{3x}{2}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad x^3 = \frac{9}{4}\, x^2$$

ἢ $\quad x^2 \left[x - \dfrac{9}{4}\right] = 0$, καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη $x > 0$, ἕπεται : $x = \dfrac{9}{4}$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν (3) λαμβάνομεν :

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{27}{8}.$$

Ἑπομένως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη :

$$(\mathbf{x = 1,\ \ y = 1}) \quad \text{καὶ} \quad \left(\mathbf{x = \frac{9}{4},\ \ y = \frac{27}{8}}\right).$$

Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις καὶ λογαριθμικὰ συστήματα

§ **222. Ὁρισμοί. – α′).** Καλεῖται **λογαριθμικὴ ἐξίσωσις** πᾶσα ἐξίσωσις, ἡ ὁποία περιέχει τὸν λογάριθμον ἀγνώστου ἢ ἀγνώστων αὐτῆς ἢ καὶ συναρτήσεων αὐτῶν. Π. χ. αἱ κάτωθι ἐξισώσεις εἶναι λογαριθμικαί :

$$3\,\text{λογ}x - \frac{1}{2}\,\text{λογ}\,(2x + 1) = \text{λογ}\,\sqrt{2x - 1} + 2$$

$$\text{λογ}\, x + 3\,\text{λογ}\, y = 7$$

$$\text{λογ}_2\,(3x + 1) - \text{λογ}\, x = \text{λογ}_x\,(2x - 3).$$

Ἡ ἐπίλυσις τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων. Πολλάκις ὅμως ἡ ἐπίλυσις μιᾶς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς ἐπίλυσιν ἐξισώσεων τῶν κάτωθι μορφῶν :

$$\text{(i)}\ \ \text{λογ}x = \gamma, \quad \text{(ii)}\ \ \text{λογ}x = \text{λογ}\alpha, \quad \text{(iii)}\ \ \text{λογ}f(x) = \text{λογ}\alpha,$$

$$\text{(iv)}\ \ \text{λογ}_\beta\, f(x) = \text{λογ}_\beta\, g(x),$$

ἔνθα α γνωστὸς θετικὸς ἀριθμός, $f(x)$ δὲ καὶ $g(x)$ γνωσταὶ συναρτήσεις τοῦ ἀγνώστου, αἱ ὁποῖαι ὑπόκεινται εἰς τὸν περιορισμὸν $f(x),\ g(x) > 0$ καὶ β ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος $(0 < \beta \neq 1)$.

'Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου καὶ τοῦ πορίσματος II, ἰδ. III τῆς § 202 προκύπτει τώρα ὅτι :

(i) Ἡ ἐξίσωσις $\lambda o\gamma\ x = \gamma$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν : $x = 10^{\gamma}$

(ii) Ἡ » $\lambda o\gamma\ x = \lambda o\gamma\ \alpha$ » μὲ τὸ σύστημα : $x = \alpha,\ \alpha > 0$

(iii) Ἡ » $\lambda o\gamma\ f(x) = \lambda o\gamma\ \alpha$ » » » » : $f(x) = \alpha,\ \alpha > 0$

(iv) Ἡ » $\lambda o\gamma_{\beta}\ f(x) = \lambda o\gamma_{\beta}\ g(x)$ » » » : $f(x) = g(x),\ g(x) > 0$.

Σημείωσις : Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ληφθῆ ὡς πρὸς διαφόρους βάσεις, θὰ μετατρέπωνται πάντες ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

β'). Καλεῖται **σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων** πᾶν σύστημα ἐξισώσεων ἐκ τῶν ὁποίων μία τοὐλάχιστον εἶναι λογαριθμική.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος συνιστοῦν λύσιν αὐτοῦ.

Ἡ ἐπίλυσις τῶν λογαριθμικῶν συστημάτων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων καὶ τῆς ἀνωτέρω ἐκτεθείσης θεωρίας ἐπιλύσεως λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ὡς παραδείγματα ἔστωσαν τὰ ἀκόλουθα :

Παράδειγμα 1ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{1}{2}\lambda o\gamma\,(x+2) + \lambda o\gamma\sqrt{x-3} = 1 + \lambda o\gamma\sqrt{3}.$$

Ἐπίλυσις : Ἐν πρώτοις πρέπει νὰ εἶναι $x + 2 > 0$, $x - 3 > 0$, ὅτε $x > 3$.
Ἐπειδὴ $1 = \lambda o\gamma\ 10$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$\lambda o\gamma\sqrt{x+2} + \lambda o\gamma\sqrt{x-3} = \lambda o\gamma\ 10 + \lambda o\gamma\sqrt{3}$$

ἢ
$$\lambda o\gamma\left(\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{x-3}\right) = \lambda o\gamma \cdot 10\sqrt{3}$$

ἢ
$$\sqrt{(x+2)\cdot(x-3)} = 10\sqrt{3}$$

ἢ
$$(x+2)\cdot(x-3) = 300$$

ἢ
$$x^2 - x - 306 = 0.$$

Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν : $x = 18$ καὶ $x = -17$.
Ἡ $x = -17$ ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα τὸν περιορισμὸν $x > 3$.

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\sqrt{x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}}} = 10. \qquad (1)$$

Ἐπίλυσις : *Περιορισμός :* πρέπει νὰ εἶναι $x > 0$.
Ὑψώνομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν :

$$x^{\lambda o\gamma\sqrt{x}} = 100. \qquad (2)$$

Λαμβάνομεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (2) καὶ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\sqrt{x}\cdot\lambda o\gamma\ x = \lambda o\gamma\ 100$$

ἢ
$$\frac{1}{2}(\lambda o\gamma\ x)^2 = 2$$

ἢ
$$(\lambda o\gamma\ x)^2 = 4$$

καὶ ἄρα :
$$\lambda o\gamma\ x = \pm 2.$$

'Εὰν λάβωμεν $\lambda o\gamma\, x = 2$ ἔχομεν $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, 100$, ἄρα : $x = 100$.

'Εὰν λάβωμεν $\lambda o\gamma\, x = -2$ ἔχομεν $\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, 0{,}01$, ἄρα : $x = 0{,}01$.

Παράδειγμα 3ον : Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\lambda o\gamma_{\sqrt{2}}\,(2 \cdot \lambda o\gamma_4 x \cdot \lambda o\gamma_2 x + \lambda o\gamma_{\sqrt{2}}\, x) = 6. \qquad (1)$$

'Επίλυσις : 'Η δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τήν :

$$2\,\lambda o\gamma_4 x \cdot \lambda o\gamma_2 x + \lambda o\gamma_{\sqrt{2}}\, x = (\sqrt{2})^6 = 8. \qquad (2)$$

'Ως γνωστὸν (§ 207) εἶναι :

$$\lambda o\gamma_\alpha x = \frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, \alpha},$$ ἔνθα οἱ λογx καὶ λογα εἶναι ὡς πρὸς βάσιν 10.

Λόγῳ αὐτοῦ ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma_4 x = \frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 4} = \frac{\lambda o\gamma\, x}{2\,\lambda o\gamma\, 2},\quad \lambda o\gamma_2 x = \frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2},\quad \lambda o\gamma_{\sqrt{2}}\, x = \frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma \sqrt{2}} = \frac{2\,\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2}.$$

Δυνάμει αὐτῶν ἡ (2) γίνεται :

$$2\,\frac{\lambda o\gamma\, x}{2\,\lambda o\gamma\, 2} \cdot \frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2} + \frac{2\,\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2} = 8$$

ἢ
$$\left(\frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2}\right) - 8 = 0.$$

'Εξ αὐτῆς εὑρίσκομεν :

$$\frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2} = 2 \quad \text{καὶ} \quad \frac{\lambda o\gamma\, x}{\lambda o\gamma\, 2} = -4.$$

'Εκ τῆς πρώτης ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\, x = 2\,\lambda o\gamma\, 2 = \lambda o\gamma\, 4, \quad \text{ἄρα} \quad x = 4$$

καὶ ἐκ τῆς δευτέρας ὁμοίως ἔχομεν :

$$\lambda o\gamma\, x = -4\,\lambda o\gamma\, 2 = \lambda o\gamma\, 2^{-4} = \lambda o\gamma \frac{1}{16}, \quad \text{ἄρα} \quad x = \frac{1}{16}.$$

Παράδειγμα 4ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\lambda o\gamma\, x + \lambda o\gamma\, y = \lambda o\gamma\, 14$$
$$3x - y = 1.$$

'Επίλυσις : *Περιορισμός :* $x > 0,\ y > 0$. 'Η πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γράφεται:

$$\lambda o\gamma\, (xy) = \lambda o\gamma\, 14 \quad \text{καὶ} \quad \text{δίδει} : \quad xy = 14.$$

Ἔχομεν οὕτω νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα :

$$3x - y = 1$$
$$xy = 14.$$

Λύομεν τὸ σύστημα τοῦτο καὶ ἐπειδὴ πρέπει $x > 0$, $y > 0$ εὑρίσκομεν :

$$x = 7/3 \quad \text{καὶ} \quad y = 6.$$

Παράδειγμα 5ον : Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$x^{\lambda o\gamma y + 1} = y^{\lambda o\gamma x + 2}$$
$$y^{\sqrt{x+2}} = x^{y-2}.$$

'Επίλυσις : Προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος εἶναι : $x = y = 1$. 'Υποθέτομεν τώρα ὅτι: $x > 0$, $y > 0$ καθὼς καὶ $x \neq 1 \neq y$.

'Εκ τῆς πρώτης, λογαριθμίζοντες, λαμβάνομεν :

$$(\lambda o\gamma\, y + 1) \cdot \lambda o\gamma\, x = (\lambda o\gamma\, x + 2) \cdot \lambda o\gamma\, y$$

ἢ
$$\lambda o\gamma\, x\, \lambda o\gamma\, y + \lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, x\, \lambda o\gamma\, y + 2\,\lambda o\gamma\, y$$

ἢ
$$\lambda o\gamma\, x = \lambda o\gamma\, y^2$$

καὶ συνεπῶς :
$$x = y^2. \qquad (1)$$

Λόγῳ ταύτης ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γράφεται :

$$y^{\sqrt{y^2+2}} = y^{2(y-2)} .$$

Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ $y \neq 1$, λαμβάνομεν :

$$\sqrt{y^2 + 2} = 2\,(y - 2), \qquad \text{ἐξ ἧς :} \qquad y = 6.$$

Διὰ $y = 6$ ἡ (1) δίδει : $x = 36$.

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὰς λύσεις :

$$(\mathbf{x = 1,\ y = 1}), \qquad (\mathbf{x = 36,\ y = 6}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

484. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $5^{\sqrt{x}} = 625$, **2.** $3^{x^2-9x+11} = 27$, **3.** $\sqrt[x-2]{27^{x+1}} = 3^{2x-4}$,

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$, **5.** $2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3 = 0$, **6.** $3^x - 4\sqrt{3^x} + 3 = 0$,

7. $5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$, **8.** $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$, **9.** $2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$,

10. $(x^2 - 5x + 6)^{x^2-2x} = 1$, **11.** $3^{x+1} - 2^x = 3^{x-1} + 2^{x+3}$, **12.** $x^{x^4-26x^2+25} = 1$.

485. Ὁμοίως :

1. $18^{8-4x} = (54\sqrt{2})^{3x-2}$, **2.** $\sqrt[\frac{x+1}{3}]{\frac{8}{5}} \cdot \frac{5}{8} = 2 \cdot \sqrt[x]{5}$, **3.** $x^x - x^{-x} = 3\,(1 + x^{-x})$,

4. $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}\,(\sqrt[4]{3})^{3x-4}$, **5.** $3^{x-1} - \frac{15}{3^{x+1}} + 3^x - \frac{21}{3^{x+1}} = 0$,

6. $5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x$, **7.** $\sqrt{2^{6x-13}} - 3^{2(x-2)} = \sqrt{8^{2x-3}} - 3^{2x-3}$.

486. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 4^{2x-9} \cdot 2^{3y-2} = 1024 \\ 3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = 3^{-2} . \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 3^{x^y - y^x} = 1 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 2^x = 3y \\ 3^x = 2y . \end{cases}$

487. Ὁμοίως :

1. $\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^3 \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^{x+y} = y^{8/3} \\ y^{x+y} = x^{8/3} . \end{cases}$

488. Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases} \alpha^x = \beta^y \\ x^y = y^x \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \alpha^x = \beta^y \\ x^\alpha = y^\beta \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} x^\alpha = y^\beta \\ x^y = y^x . \end{cases}$

489. Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

1. $\lambda o\gamma\,(x+1) + 2\,\lambda o\gamma\,\sqrt{5x} = 2$, **2.** $\frac{1}{3}\,\lambda o\gamma\,(x-2) + \lambda o\gamma\,\sqrt[3]{4x+3} = \frac{2}{3}$,

3. $\lambda o\gamma\,\frac{2x}{3} + \lambda o\gamma\left(\frac{5x}{4}+2\right) = 2\,\lambda o\gamma\,(x-1)$, **4.** $\lambda o\gamma\,[\lambda o\gamma\,(2x^2+x-11)] = 0$,

5. $x^{\lambda o\gamma 3x - \lambda o\gamma 5x} = 0{,}01$, **6.** $(4x)^{\lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma \sqrt{x}} = 100$, **7.** $2^{\lambda o\gamma x} + 2^{5-\lambda o\gamma x} = 12$,

8. $\frac{\lambda o\gamma\,x}{\lambda o\gamma\,x+2} + \frac{\lambda o\gamma\,x+3}{\lambda o\gamma\,x-1} = \frac{11}{2}$, **9.** $\lambda o\gamma_2\,(\lambda o\gamma_2 x) = \lambda o\gamma_4\,(\lambda o\gamma_4 x)$.

490. ῾Ομοίως :

1. $\lambda o\gamma\,(2^x + 2\cdot 3^x) + \lambda o\gamma\,81 = x\cdot\lambda o\gamma\,3 + \lambda o\gamma\,178$

2. $(\lambda o\gamma_3 x)^2 - 3^{\lambda o\gamma_3 5 + (\lambda o\gamma_2 3)^{-1}} = \lambda o\gamma_3\,(x^6) - 9^{\lambda o\gamma_3 \sqrt{3}}$, **3.** $10\cdot x^{\lambda o\gamma x} = x^2\cdot\sqrt{x}$,

4. $x^{\lambda o\gamma\frac{3x}{10}} = 9\cdot(3x)^{\lambda o\gamma 9x^2}$, **5.** $\lambda o\gamma_{\sqrt{2}}x\;\lambda o\gamma_2 x\;\lambda o\gamma_{2\sqrt{2}}x\;\lambda o\gamma_4 x = 54$.

491. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ θ ἡ ἐξίσωσις : $x^2 - 2\,(1+\lambda o\gamma\theta)\,x + 1 - (\lambda o\gamma\theta)^2 = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας ;

492. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

1. $\begin{cases}\lambda o\gamma x - \lambda o\gamma y = 1\\ \lambda o\gamma x^2 + \lambda o\gamma y^2 = \lambda o\gamma 32\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}x + \lambda o\gamma y = 1\\ \sqrt[x]{y^2} + 10 = 11\sqrt[x]{y}\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}\left(\frac{x}{5}\right)^{\lambda o\gamma 5} = \left(\frac{y}{7}\right)^{\lambda o\gamma 7}\\ 7^{\lambda o\gamma x} = 5^{\lambda o\gamma y}\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma x} = 20\\ \lambda o\gamma\sqrt{xy} = 1\end{cases}$ **5.** $\begin{cases}x^{\lambda o\gamma x} + y^{\lambda o\gamma x} = 200\\ \sqrt{x^{\lambda o\gamma y}\cdot y^{\lambda o\gamma x}} = y^2\end{cases}$ **6.** $\begin{cases}(3x)^{\lambda o\gamma 3} = (5y)^{\lambda o\gamma 5}\\ 5^{\lambda o\gamma x} = 3^{\lambda o\gamma y}\end{cases}$

493. ῾Ομοίως :

1. $\begin{cases}x^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma x} = 200\\ \sqrt[x]{(\lambda o\gamma x)^y\cdot(\lambda o\gamma y)^y} = 1024\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}\sqrt[\lambda o\gamma y]{5^{4x}} = 25\\ \sqrt[x+2]{y^{\lambda o\gamma y}} = 10.000\end{cases}$ **3.** $\begin{cases}y^x\,(1+y^x) = 10100\\ \lambda o\gamma\sqrt{xy} - \lambda o\gamma\sqrt{\frac{x}{y}} = 3.\end{cases}$

4. $\begin{cases}(2x)^{\lambda o\gamma y} + y^{\lambda o\gamma(2x)} = 8x^2\\ y = 4x^2\cdot y^{\lambda o\gamma(2x)}\end{cases}$ **5.** $\begin{cases}(3x)^{\lambda o\gamma 3} = (5y)^{\lambda o\gamma 5}\\ x^{\lambda o\gamma 5} = y^{\lambda o\gamma 3}\end{cases}$ **6.** $\begin{cases}\sqrt{y^{\lambda o\gamma\sqrt{x}}} = 10\\ y\lambda o\gamma x = \frac{1}{10}\cdot x\sqrt{x}.\end{cases}$

494. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ λύσεις τοῦ συστήματος :

$$z^x = y^{2x}, \quad 2^{z-1} = 4^x, \quad x + y + z = 16.$$

495. ᾿Εὰν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+ - \{1\}$, νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα :

$$\lambda o\gamma_\alpha x\cdot\lambda o\gamma_\beta y = \lambda o\gamma_\alpha \beta, \qquad \alpha^{\lambda o\gamma_\alpha^2 y} = \sqrt{x}.$$

496. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\lambda o\gamma\,(21^{\lambda o\gamma x+1} - 42) + \lambda o\gamma\,4 = \lambda o\gamma\,21\cdot\lambda o\gamma x + \lambda o\gamma\,76.$$

497. ῾Ομοίως :

$$\left[\lambda o\gamma\,(16x - 5 - x^2) + \lambda o\gamma_x 2\right]\cdot\lambda o\gamma_{x+5}x\cdot\lambda o\gamma_x x = 2.$$

498. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ θ, $\theta\in\mathbf{R}^+$, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$\lambda o\gamma\,[\lambda o\gamma\,(x^2 + x\,\lambda o\gamma\theta + 110)] = 0,$$

ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ συστήματος :

$$y^{\lambda o\gamma z} + z^{\lambda o\gamma y} = 20, \qquad \lambda o\gamma\sqrt{yz} = 1.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

I. Ἀνατοκισμὸς

§ 223. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι — Ὁρισμοί.— Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι **τόκος** λέγεται τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον λαμβάνει τις δανείζων εἰς ἄλλον χρήματα, ἐπὶ πλέον τοῦ δανειζομένου ποσοῦ. Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον δανείζει τις, λέγεται **κεφάλαιον**, ὁ δὲ τόκος εἶναι ἡ ἀμοιβὴ τὴν ὁποίαν καταβάλλει ὁ δανειζόμενος διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ κεφαλαίου. Ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ὁ τόκος λέγεται **ἁπλοῦς**· λέγομεν δὲ τότε ὅτι τὰ χρήματα τοκίζονται **ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ**, ὁ δὲ τόκος τῶν 100 δρχ. εἰς μίαν χρονικὴν περίοδον καλεῖται **ἐπιτόκιον.** Πολλάκις ὅμως ὁ τόκος ἑκάστης χρονικῆς περιόδου προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖ μαζὺ μὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς περιόδου. Οὕτως ὁ τόκος κεφαλαιοποιεῖται καὶ τοκίζεται ἐν συνεχείᾳ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον. Ἡ πρόσθεσις αὕτη τοῦ τόκου εἰς τὸ κεφάλαιον, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου λέγεται ἀ ν α τ ο κ ι σ μ ό ς, ὁ δὲ τόκος, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμόν, λέγεται **σύνθετος.**

Εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν καλεῖται «**ἐπιτόκιον**» ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν περίοδον. Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐπιτόκιον εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ 1/100 τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἁπλοῦ τόκου. Τοῦτο παρίσταται κατωτέρω μὲ τ (τ = τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐπιτοκίου τοῦ ἁπλοῦ τόκου).

Κεφάλαιόν τι λέγομεν ὅτι **ἀνατοκίζεται** ὅταν ὁ δανεισμός του γίνεται ἐπὶ ἀνατοκισμῷ.

Συνήθως ἡ χρονικὴ περίοδος κατὰ τὴν ὁποίαν ἀνατοκίζεται ἓν κεφάλαιον, εἶναι τὸ ἔτος ἢ ἡ ἑξαμηνία.

Εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν διακρίνομεν **ἀρχικὸν** καὶ **τελικὸν** ἢ **σύνθετον κεφάλαιον.** Τὸ τελικὸν κεφάλαιον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ηὐξημένον κατὰ τοὺς τόκους τοῦ δανειζομένου (ἀρχικοῦ) κεφαλαίου κατὰ τὸ χρονικὸν διάστημα κατὰ τὸ ὁποῖον διήρκεσε ὁ δανεισμός.

Τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ λύομεν διὰ τύπων, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολούθου γενικοῦ προβλήματος.

§ 224. Πρόβλημα.— Κεφάλαιον k_0 δραχμῶν ἀνατοκίζεται διὰ ν ἔτη μὲ ἐπιτόκιον τ δραχμῶν. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ τελικὸν κεφάλαιον k_ν.

Λύσις. Ἡ μία δραχμὴ θὰ φέρῃ μετὰ ἓν ἔτος τόκον τ, ἄρα αἱ k_0 δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους $k_0\tau$ δρχ. καὶ συνεπῶς τὸ κεφάλαιον k_0 δρχ. εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνῃ :

$$k_0 + k_0\tau = k_0\,(1+\tau)$$

ἤτοι: *τὸ κεφάλαιον* k_0 *πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν (σταθερὸν) συντελεστὴν* $(1+\tau)$, *ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους.*

Δι' ὁμοίου συλλογισμοῦ εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ $k_0\ (1+\tau)$ δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους θὰ γίνουν (μὲ τοὺς τόκους των): $k_0\ (1+\tau)\cdot(1+\tau)$, ἤτοι $k_0\ (1+\tau)^2$ δραχμαί. Οὕτω μετὰ δύο ἔτη τὸ κεφάλαιον k_0 θὰ ἀνέλθῃ εἰς:

$$k_0\ (1+\tau)^2.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι αἱ k_0 δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους θὰ γίνουν:

$$k_0\ (1+\tau)^3.$$

Τέλος, προχωροῦντες καθ' ὅμοιον τρόπον, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ k_0 δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους θὰ γίνουν: $k_0\ (1+\tau)^\nu$.

Ἄρα τὸ τελικὸν κεφάλαιον k_ν δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\boxed{\mathbf{k_\nu = k_0\cdot(1+\tau)^\nu}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ** καὶ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ k_0, τ, ν, k_ν. Ἂν δίδωνται τὰ τρία ἐξ αὐτῶν, τότε λύομεν λογαριθμικῶς τοῦτον, ὡς πρὸς τὸν ἀπομένοντα ἄγνωστον.

Ἐνίοτε ὅμως ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται διὰ ν ἔτη καὶ ἡμέρας τινὰς λ.χ. η ἡμέρας, $(\eta<360)$, τότε πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ τελικοῦ κεφαλαίου k σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Μετὰ παρέλευσιν ν ἐτῶν αἱ k_0 δραχμαὶ θὰ γίνουν: $k_0(1+\tau)^\nu$. Τὸ ποσὸν τοῦτο θὰ μείνῃ ἀκόμη ἐπὶ ἁπλῷ τόκῳ η ἡμέρας $(\eta<360)$ καὶ τοῦτο διότι αἱ η ἡμέραι δὲν συνιστοῦν μίαν χρονικὴν περίοδον, ἤτοι ἓν ἔτος. Ἐπειδὴ εἰς τὸν ἁπλοῦν τόκον τὸ ἐπιτόκιον εἶναι: $\varepsilon=100\cdot\tau$, τὸ ποσὸν $k_0\ (1+\tau)^\nu$ θὰ δώσῃ εἰς η ἡμέρας τόκον:

$$\frac{k_0\ (1+\tau)^\nu\cdot 100\,\tau\cdot\eta}{36000}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{k_0\ (1+\tau)^\nu\cdot\tau\eta}{360}.$$

Ἐπομένως τὸ τελικὸν κεφάλαιον μετὰ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας θὰ εἶναι:

$$k=k_0\,(1+\tau)^\nu+\frac{k_0\ (1+\tau)^\nu\cdot\tau\eta}{360}.$$

Ὅθεν:

$$\boxed{\mathbf{k=k_0\,(1+\tau)^\nu\cdot\left(1+\frac{\tau\eta}{360}\right)}} \qquad (\eta<360) \qquad (2)$$

Σημ. Εἰς τὴν πρᾶξιν ἀντὶ τοῦ τύπου (2) χρησιμοποιοῦμεν (συνήθως) τὴν κατὰ προσέγγισιν ἰσότητα (τύπον):

$$k=k_0\,(1+\tau)^{\nu+\frac{\eta}{360}} \qquad (2')$$

Ὁ (2') δίδει σχεδὸν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον μὲ τὸν (2) καὶ εἶναι πλέον εὔχρηστος διὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς δὲν γίνεται κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, ἤτοι καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα κλπ. δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν εὑρεθέντα τύπον $k_\nu=k_0\ (1+\tau)^\nu$ μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ τ παριστᾷ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἓν ἐκ τῶν διαστημάτων τούτων καὶ τὸ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν τούτων διαστημάτων.

Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα, τότε τὸ ἐπιτόκιον δὲν εἶναι τὸ ἥμισυ ἢ τὸ τέταρτον ἢ τὸ δωδέκατον ἀντιστοίχως τοῦ ἐτησίου ἐπιτοκίου, ἀλλὰ ἄλλο, τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Ἔστω τ_1 τὸ ἐπιτόκιον μὲ χρονικὴν περίοδον τὴν ἑξαμηνίαν καὶ τ τὸ ἐπιτόκιον μὲ χρονικὴν περίοδον τὸ ἔτος. Σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω (§ 224), εὑρίσκομεν ὅτι ἡ 1 δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης ἑξαμηνίας θὰ γίνῃ $(1+\tau_1)$ καὶ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας ἑξαμηνίας θὰ γίνῃ $(1+\tau_1)^2$. Ἐπίσης ἡ μία δραχμὴ εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἀνατοκιζομένη θὰ γίνῃ $(1+\tau)$. Ἐπειδὴ ἡ μία δραχμὴ εἴτε καθ' ἑξαμηνίαν ἀνατοκισθῇ εἴτε κατ' ἔτος πρέπει νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν χρημάτων, θὰ ἔχωμεν : $(1+\tau_1)^2=(1+\tau)$ καὶ συνεπῶς εἶναι :

$$\boxed{\tau_1=\sqrt{1+\tau}-1} \qquad (3)$$

Ὁ τύπος (3) συνδέει **τὸ ἑξαμηνιαῖον** καὶ **τὸ ἐτήσιον** ἐπιτόκιον.

Ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν, ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 4 τριμηνίας, ἂν τ_2 εἶναι τὸ τριμηνιαῖον ἐπιτόκιον, θὰ ἔχωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω :

$(1+\tau_2)^4=1+\tau$ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι :

$$\boxed{\tau_2=\sqrt[4]{1+\tau}-1} \qquad (4)$$

Ὁ τύπος (4) συνδέει **τὸ τριμηνιαῖον** καὶ **τὸ ἐτήσιον** ἐπιτόκιον.

Παραδείγματα ἐπὶ τοῦ ἀνατοκισμοῦ

Παράδειγμα 1ον : Δανείζει τις 5.000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 6 % κατ' ἔτος. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 8 ἔτη;

Λύσις : Ἔχομεν : $k_0=5000,\ \tau=0{,}06,\ \nu=8,\ 1+\tau=1{,}06.$

Ὅθεν ὁ τύπος (1) τῆς § 224 γίνεται :

$$k_8=5000\cdot(1{,}06)^8.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν :

$$\text{λογ}\ k_8=\text{λογ}\ 5000+8\cdot\text{λογ}\ (1{,}06).$$

Ἐξ αὐτοῦ, ἐπειδὴ εἶναι λογ 5000 = 3,69897 καὶ λογ (1,06) = 0,02531, λαμβάνομεν :

$$\text{λογ}\ k_8=3{,}90145.$$

Ἐξ οὗ : $$k_8=7969{,}83.$$

Ἦτοι ὁ τοκίσας τὰς 5000 μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6 % θὰ λάβῃ μετὰ 8 ἔτη ἐν ὅλῳ 7969,83 δραχμάς.

Σημ. Ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς ἐγίνετο ἐπὶ 8 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω π.χ. 72, τότε εἰς τὸν τύπον

$$k=k_0\,(1+\tau)^\nu\cdot\left(1+\frac{\tau\eta}{360}\right)$$

τὸ μὲν $k_0 (1+\tau)^\nu$ εἶναι 7969,83, τὸ δὲ

$$1+\frac{\tau\eta}{360} \quad \text{εἶναι :} \quad 1+\frac{72\times 0,06}{360}=1,012.$$

Ἄρα : $$k = 7969,83 \times 1,012 = 8065,46.$$

Παράδειγμα 2ον : Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ ἀνατοκίσῃ τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς γεννήσεως τῆς θυγατρός του πρὸς 6 % κατ' ἔτος, διὰ νὰ ἔχῃ προῖκα δι' αὐτὴν 300.000 δρχ. ἅμα συμπληρώσῃ τὸ 20ον ἔτος;

Λύσις : Ἔχομεν $\nu = 20$, $k_\nu = 300000$, $\tau = 0,06$, $1+\tau = 1,06$.

Ὁ τύπος (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ λυόμενος ὡς πρὸς k_0 γίνεται :

$$k_0 = \frac{k_\nu}{(1+\tau)^\nu}. \qquad (\alpha)$$

Ἡ (α) λογαριθμιζομένη δίδει :

$$\lambda o\gamma\, k_0 = \lambda o\gamma\, k_\nu - \nu \cdot \lambda o\gamma\,(1+\tau) \qquad (\beta)$$

ἢ $$\lambda o\gamma\, k_0 = \lambda o\gamma\, 300000 - 20 \cdot \lambda o\gamma\,(1,06).$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης, ἐπειδὴ εἶναι $\lambda o\gamma 300000 = 5,47712$ καὶ $\lambda o\gamma(1,06) = 0,02531$ λαμβάνομεν :

$$\lambda o\gamma\, k_0 = 4,97092.$$

Ἐξ οὗ : $$k_0 = 93524.$$

Παράδειγμα 3ον : Ἀνατοκίζει τις 80.000 δραχμὰς πρὸς 6 %₀ ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 9 ἔτη, ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν;

Λύσις : Τὸ ἑξαμηνιαῖον ἐπιτόκιον τ_1 εὑρισκόμενον ἐκ τοῦ τύπου

$$\tau_1 = \sqrt{1+\tau} - 1 \quad \text{εἶναι :} \quad \tau_1 = \sqrt{1,06} - 1 = 0,0295.$$

Ἔχομεν δὲ ἐν προκειμένῳ :

$$k_0 = 80000, \quad \tau_1 = 0,0295, \quad \nu = 9 \times 2 = 18.$$

Ὅθεν ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$k_{18} = 80000\,(1,0295)^{18}.$$

Ἐξ αὐτοῦ, ἐργαζόμενοι ὡς καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 1, εὑρίσκομεν :

$$k = 135140,6 \text{ δραχμάς.}$$

Παράδειγμα 4ον : Μετὰ πόσον χρόνον 12589 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 45818 δρχ.;

Λύσις : Ὁ τύπος (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ λυόμενος ὡς πρὸς ν δίδει :

$$\boxed{\nu = \frac{\lambda o\gamma k_\nu - \lambda o\gamma k_0}{\lambda o\gamma\,(1+\tau)}} \qquad (1)$$

Ἔχομεν : $$k_\nu = 45818,\ k_0 = 12589,\ \tau = 0,05,\ 1+\tau = 1,05.$$

Ἐξ ἄλλου ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν :

$$\begin{array}{rl} \lambda o\gamma\, k_\nu = \lambda o\gamma\, 45818 = & 4,66104 \\ \lambda o\gamma\, k_0 = \lambda o\gamma\, 12589 = & 4,09999 \\ \hline \text{Διαφορὰ} \quad = & 0,56105 \end{array} \qquad \lambda o\gamma\,(1+\tau) = \lambda o\gamma\,(1,05) = 0,02119.$$

καὶ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma\, 45818 - \lambda o\gamma\, 12589}{\lambda o\gamma\, 1,05} = \frac{0,56105}{0,02119} = \frac{56105}{2119}. \qquad (2)$$

Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν πηλίκον 26 καὶ ὑπόλοιπον 0,01011. Τοῦτο σημαίνει ὅτι, διὰ νὰ συμβῇ τὸ ζητούμενον πρέπει τὸ δάνειον νὰ διαρκέσῃ 26 ἔτη καὶ ἡμέρας τινάς, ἔστω η.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ἡμέρας αὐτὰς ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ τύπος τοῦ ἀνατοκισμοῦ, ὅταν ὁ χρόνος ἀποτελεῖται ἀπὸ ἔτη καὶ ἡμέρας εἶναι :

$$k = k_0 (1+\tau)^\nu \cdot \left(1 + \frac{\eta \cdot \tau}{360}\right).$$

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν θέσωμεν :

$$k = 45818,\ k_0 = 12589,\ \tau = 0{,}05,\ \nu = 26$$

εὑρίσκομεν :

$$45818 = 12589 \cdot (1{,}05)^{26} \cdot \left(1 + \frac{0{,}05 \cdot \eta}{360}\right).$$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων ἔχομεν :

$$\text{λογ}\, 45818 = \text{λογ}\, 12589 + 26 \cdot \text{λογ}\, (1{,}05) + \text{λογ}\left(1 + \frac{0{,}05 \cdot \eta}{360}\right)$$

ἢ

$$\text{λογ}\, 45818 - \text{λογ}\, 12589 - 26 \cdot \text{λογ}\, (1{,}05) = \text{λογ}\left(1 + \frac{0{,}05 \cdot \eta}{360}\right). \qquad (3)$$

Ἔχομεν ἐξ ἄλλου ἐκ τῆς (2) ὅτι :

$$\text{λογ}\, 45818 - \text{λογ}\, 12589 - 26 \cdot \text{λογ}\, (1{,}05) = 0{,}01011.$$

Παραβάλλοντες ταύτην πρὸς τὴν (3) συμπεραίνομεν ὅτι :

$$\text{λογ}\left(1 + \frac{0{,}05\, \eta}{360}\right) = 0{,}01011$$

ἢ

$$\text{λογ}\left(1 + \frac{\eta}{7200}\right) = 0{,}01011.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης εὑρίσκομεν διαδοχικῶς ὅτι :

$$1 + \frac{\eta}{7200} = 1{,}02355 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\eta}{7200} = 0{,}02355.$$

Ἐξ οὗ : $\eta = 169{,}56$ ἢ $\eta \simeq 170$ ἡμέραι.

Ὥστε ὁ ζητούμενος χρόνος εἶναι 26 ἔτη καὶ 170 ἡμέραι, τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμέρας.

Παρατήρησις. Γενικῶς εἶναι :

$$\nu = \frac{\text{λογ}\, k_\nu - \text{λογ}\, k_0}{\text{λογ}\, (1+\tau)}.$$

Ἂν δὲ υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης, θὰ εἶναι :

$$\boxed{\upsilon = \text{λογ}\left(1 + \frac{\tau\eta}{360}\right)}$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὸ $1 + \frac{\tau\eta}{360}$ καὶ συνεπῶς τὸ η.

Εἰς τὰ προβλήματα τοῦ ἀνατοκισμοῦ ὑπάγονται καὶ προβλήματα τινὰ σχέσιν ἔχοντα πρὸς τὴν αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν τοῦ πληθυσμοῦ πόλεως ἢ χώρας, οἷον τὸ κάτωθι:

Παράδειγμα 5ον : Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι Π κάτοικοι· παρετηρήθη δὲ ὅτι οὗτος αὐξάνει κατ' ἔτος κατὰ τὸ $\frac{1}{\mu}$ τοῦ προηγουμένου ἔτους. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ πόσος θὰ εἶναι ὁ πληθυσμός της μετὰ ν ἔτη ;

Λύσις : Μετὰ ἓν ἔτος ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi + \Pi \cdot \frac{1}{\mu} \quad ἤ \quad \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right).$$

Μετὰ ἓν ἀκόμη ἔτος, δηλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\Pi\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) + \Pi\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \cdot \frac{1}{\mu} \quad ἤ \quad \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^2.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ εἶναι :

$$\boxed{\Pi_\nu = \Pi \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^\nu}$$

Σημ. Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς Π **ἐλαττοῦται** κατὰ τὸ 1/μ τοῦ προηγουμένου ἔτους, τότε ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται :

$$\boxed{\Pi_\nu = \Pi \cdot \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^\nu}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

499. Καταθέτει τις εἰς τὸ ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον 7200 δραχμὰς αἱ ὁποῖαι ἀνατοκίζονται καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4,5 % ἐτησίως. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 15 ἔτη ;

500. Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4 %, ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 200.000 δρχ.;

501. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 24850 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος γίνονται μετὰ 12 ἔτη 50000 δραχμαί;

502. Μετὰ πόσον χρόνον 40000 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 68524 δρχ.;

503. Κατέθεσέ τις εἰς τὸ ταχυδρομικὸν ταμιευτήριον ποσὸν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἀνατοκίζεται κατ' ἑξαμηνίαν πρὸς 6% ἐτησίως. Μετὰ 5 ἔτη ἔλαβε 26000 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχε καταθέσει;

504. Κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος γίνεται μετὰ 3 ἔτη 5625 δρχ., μετ' ἄλλα δὲ δύο ἀκόμη γίνεται 6084 δρχ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινε ὁ ἀνατοκισμός;

505. Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τριπλασιάζεται ἀνατοκιζόμενον καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 6% ἐτησίως;

506. Δύο κεφάλαια τὸ ἓν ἐκ 5000 δρχ. καὶ τὸ ἕτερον ἐξ 8000 δραχμῶν ἀνατοκίζονται ἀντιστοίχως μὲ ἐπιτόκια 5 % καὶ 3 % ἐτησίως. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο κεφάλαια θὰ καταστοῦν ἴσα;

507. Νὰ ἐξετασθῇ τί εἶναι συμφερώτερον νὰ ἀνατοκίσῃ τις 60.000 δρχ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 5 % ἐτησίως ἢ νὰ δανείσῃ τὸ αὐτὸ ποσὸν μὲ ἁπλοῦν τόκον πρὸς 7 % καὶ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον;

508. Ποσόν τι α δραχμῶν ἀνατοκίζεται ἐπί τι χρονικὸν διάστημα. Ἐὰν ἀνετοκίζετο τοῦτο ρ ἔτη ὀλιγώτερον, τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ β δραχμὰς ὀλιγώτερον, ἐὰν ὅμως ἀνετοκίζετο ρ ἔτη περισσότερον, τότε τὸ τελικὸν κεφάλαιον θὰ ἦτο κατὰ γ δραχμὰς περισσότερον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἡ διάρκεια τοῦ ἀνατοκισμοῦ.

509. Ὁ πληθυσμὸς ἑνὸς κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ θὰ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

510. Μία πόλις ἔχει 8.000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐτησίως κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη ἡ πόλις αὕτη θὰ ἔχῃ 5.000 κατοίκους;

511. Εἰς μίαν πόλιν ἡ θνησιμότης εἶναι τὸ $\frac{1}{42}$ τοῦ πληθυσμοῦ της, αἱ δὲ γεννήσεις τὸ $\frac{1}{35}$ τοῦ πληθυσμοῦ. Ἐπὶ τῇ παραδοχῇ ὅτι ἡ ἀναλογία αὕτη θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς τὰ ἑπόμενα ἔτη, νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον θὰ διπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός της.

2. Ἴσαι καταθέσεις

§ **225**.— Συχνὰ οἱ ἄνθρωποι ἀπὸ τὰς οἰκονομίας των καταθέτουν ἕνα σταθερὸν χρηματικὸν ποσὸν εἴτε εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους (ἢ συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος) πρὸς σχηματισμὸν ἑνὸς κεφαλαίου, εἴτε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους (ἢ συμπεφωνημένης χρονικῆς μονάδος) πρὸς ἐξόφλησιν ἑνὸς χρέους.

Τὸ σταθερὸν αὐτὸ χρηματικὸν ποσὸν καλεῖται **κατάθεσις.**

Εἰς ζητήματα ἴσων καταθέσεων διακρίνομεν ἑκάστοτε δύο περιπτώσεις:

α'). Αἱ καταθέσεις γίνονται εἰς τὴν **ἀρχὴν** ἑκάστου ἔτους, καὶ

β'). Αἱ καταθέσεις γίνονται εἰς τὸ **τέλος** ἑκάστου ἔτους.

Αἱ ἴσαι καταθέσεις δύνανται νὰ γίνωνται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ κατὰ τριμηνίαν καὶ ἐπὶ ἕνα ὡρισμένον χρόνον.

Τὰ προβλήματα τῶν ἴσων καταθέσεων λύομεν διὰ δύο τύπων, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν διὰ τῆς λύσεως τῶν ἀκολούθων δύο προβλημάτων.

§ **226. Πρόβλημα Ι.— Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους α δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται τί ποσὸν θὰ σχηματίσῃ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων μετὰ ν ἔτη;**

Λύσις : Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δραχμῶν θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ν ἔτη καὶ συνεπῶς ἀνατοκιζομένη θὰ γίνῃ : $\alpha\,(1+\tau)^{\nu}$.

Ἡ δευτέρα κατάθεσις, ὡς ἀνατοκιζομένη ἐπὶ ἓν ἔτος ὀλιγώτερον, θὰ γίνῃ ἴση πρὸς $\alpha\,(1+\tau)^{\nu-1}$, ἡ τρίτη θὰ γίνῃ : $\alpha\,(1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ τελευταία κατάθεσις α δραχμῶν θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμὸν ἓν ἔτος καὶ συνεπῶς θὰ γίνῃ ἴση πρός :

$$\alpha\,(1+\tau)^1 = \alpha\,(1+\tau).$$

Ἐὰν συνεπῶς παραστήσωμεν διὰ **Σ** τὸ ποσόν, ὅπερ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, θὰ ἔχωμεν :

$$\Sigma = \alpha\,(1+\tau)^{\nu} + \alpha\,(1+\tau)^{\nu-1} + \cdots + \alpha\,(1+\tau)$$

ἢ $$\Sigma = \alpha\,(1+\tau) + \alpha\,(1+\tau)^2 + \cdots + \alpha\,(1+\tau)^{\nu-1} + \alpha\,(1+\tau)^{\nu}.$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος εἶναι ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, μὲ λόγον $(1+\tau)$, ἄρα κατὰ τὸν τύπον (1), § 169 θὰ ἰσοῦται μέ:

$$\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}(1+\tau)-\alpha(1+\tau)}{1+\tau-1}.$$

Ὥστε:

$$\boxed{\Sigma=\alpha\cdot(1+\tau)\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) καλεῖται **τύπος τῶν ἴσων καταθέσεων**, ἑκάστης καταβαλλομένης **εἰς τὴν ἀρχὴν** τῆς ἑκάστοτε χρονικῆς περιόδου.

Σημ. Αἱ δυνάμεις $(1+\tau)^{\nu}$ διὰ $\tau = 0.03, 0.04, \ldots, 0.06$ καὶ διὰ $\nu = 1,2,\ldots, 50$ παρέχονται ἀπὸ εἰδικοὺς πίνακας καὶ οὕτω διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ Σ.

Παράδειγμα : Καταθέτει τις εἰς τὴν Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος 5 % ποσὸν 2.500 δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ 10 ἔτη;

Λύσις : Ἔχομεν $\alpha = 2500$, $\tau = 0{,}05$, $\nu = 10$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται :

$$\Sigma = 2500 \times 1{,}05 \times \frac{(1{,}05)^{10}-1}{0{,}05}.$$

Ἡ παράστασις $(1{,}05)^{10}$ ὑπολογιζομένη χωριστὰ εἶναι ἴση πρός : 1,628.

Ἄρα $(1{,}05)^{10} - 1 = 0{,}628$ καὶ ἑπομένως :

$$\Sigma = 2500 \times 1{,}05 \times \frac{0{,}628}{0{,}05}.$$

Ἐκ ταύτης, διὰ τῶν λογαρίθμων ἢ δι' ἀπ' εὐθείας ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, εὑρίσκομεν :

$$\Sigma = 33016{,}97 \text{ δρχ.}$$

§ **227. Πρόβλημα ΙΙ.— Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους α δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται, τί ποσὸν θὰ σχηματισθῇ εἰς τὸ τέλος τοῦ νιοστοῦ ἔτους, ἤτοι ἅμα τῇ νιοστῇ καταθέσει ;**

Λύσις : Αἱ α δραχμαί, αἱ ὁποῖαι κατατίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ μείνουν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ $(\nu - 1)$ ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ γίνουν : $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$. Αἱ α δραχμαὶ αἱ ὁποῖαι κατατίθενται εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ μείνουν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ἐπὶ $(\nu - 2)$ ἔτη καὶ συνεπῶς θὰ γίνουν : $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$.

Δι' ὅμοιον λόγον αἱ α δραχμαὶ τῆς τρίτης καταθέσεως θὰ γίνουν: $\alpha(1+\tau)^{\nu-3}$.

Προχωροῦντες ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ α δραχμαὶ τῆς προτελευταίας καταθέσεως, αἱ ὁποῖαι θὰ μείνουν ἐπ' ἀνατοκισμῷ μόνον ἓν ἔτος, θὰ γίνουν : $\alpha(1+\tau)$. Τέλος ἡ τελευταία κατάθεσις **δὲν τοκίζεται,** καθ' ὅσον θὰ γίνῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ τελευταίου ἔτους καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι α. Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν κατατεθέντων ποσῶν (μετὰ τῶν τόκων των) θὰ εἶναι :

$$\Sigma = \alpha(1+\tau)^{\nu-1} + \alpha(1+\tau)^{\nu-2} + \cdots + \alpha(1+\tau) + \alpha$$

ἢ (§ 170, τύπος 1) :

$$\boxed{\Sigma = \alpha\cdot\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) καλεῖται **τύπος τῶν χρεωλυτικῶν καταταθέσεων** καὶ συνδέει τὰ τέσσαρα ποσὰ Σ, α, τ, ν.

Παράδειγμα. Εἷς καπνιστὴς ἐξοδεύει διὰ τὸ κάπνισμά του 12 δρχ. ἡμερησίως κατὰ μέσον ὅρον. Νὰ ὑπολογισθῇ τί ποσὸν θὰ εἰσέπραττεν εἰς τὸ 60ον ἔτος τῆς ἡλικίας του, ἐὰν κατέθετε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους τὰ χρήματα ποὺ διέθετε διὰ τὴν ἀγορὰν σιγαρέττων εἰς μίαν Τράπεζαν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οὗτος ἤρχισε καπνίζων ἀπὸ τοῦ 20οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας του;

Λύσις: Τὰ ἐτήσια ἔξοδα τοῦ καπνιστοῦ ἀνέρχονται εἰς $12 \cdot 365 = 4.380$ δρχ.

Ἔχομεν τότε: $\alpha = 4380, \quad \tau = 0{,}06, \quad \nu = 40.$

Ὅθεν ὁ τύπος (2) γίνεται:

$$\Sigma = 4380 \cdot \frac{(1{,}06)^{40} - 1}{0{,}06}. \tag{1}$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $(1{,}06)^{40}$. Πρὸς τοῦτο θέτομεν: $y = (1{,}06)^{40}$ καὶ ἔχομεν:

$$\lambda o \gamma\, y = 40 \cdot \lambda o \gamma\,(1{,}06) = 1{,}0124.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν: $y = 10{,}2895.$

Ἄρα $(1{,}06)^{40} - 1 = 9{,}2895$ καὶ συνεπῶς

$$\Sigma = 4380 \cdot \frac{9{,}2895}{0{,}06}.$$

Ἐκ ταύτης λογαριθμίζοντες εὑρίσκομεν:

$$\lambda o \gamma\, \Sigma = \lambda o \gamma\, 4380 + \lambda o \gamma\, 9{,}2895 - \lambda o \gamma\, 0{,}06.$$

Ἡ ἰσότης αὐτή, ἐπειδὴ εἶναι: $\lambda o \gamma 4380 = 3{,}64147$, $\lambda o \gamma 9{,}2895 = 0{,}96800$ καὶ $\lambda o \gamma 0{,}06 = \bar{2}{,}77815$ γίνεται: $\lambda o \gamma\, \Sigma = 5{,}83132.$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν: $\Sigma = 678142{,}86.$

Ὥστε θὰ εἰσέπραττεν 678142,86 δραχμάς (!).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

512. Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 8050 δραχμῶν πρὸς 4,5 % εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ μετὰ πάροδον 18 ἐτῶν;

513. Πατήρ τις ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσόν τι ὡρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα τοῦτο ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνῃ μετὰ 21 ἔτη 250.000 δρχ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτησία κατάθεσις;

514. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 10.000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % ἐτησίως. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ λάβῃ 150.000 δραχμάς;

515. Καταθέτει τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 2050 δραχμῶν πρὸς 4,5 % εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Μετὰ πάροδον δεκαπενταετίας ἔπαυσε νὰ καταθέτῃ, ἀλλ' ἀφῆκε τὸ σχηματισθὲν κεφάλαιον ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 5 % ἐτησίως. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 24 ἐτῶν ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως;

516. Καταθέτει τις κατὰ τὴν ἡμέραν τῶν γενεθλίων τῆς κόρης του εἰς τὸ ταμιευτήριον τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης 5000 δρχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 4,5 %. Ζητεῖται, τί ποσὸν θὰ ἔχῃ σχηματισθῆ κατὰ τὴν εἰκοστὴν πρώτην ἐπέτειον τῶν γενεθλίων τῆς κόρης του;

3. Χρεωλυσία

§ 228. Ὁρισμοί.— **Χρεωλυσία** καλεῖται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι καταβάλλονται εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς περιόδου, π.χ. εἰς τὸ τέλος τοῦ ἔτους ἢ τοῦ ἑξαμήνου κλπ.

Τὸ ποσὸν ἑκάστης τῶν ἴσων δόσεων, τὸ ὁποῖον καταβάλλεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς περιόδου διὰ τὴν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους, καλεῖται **χρεωλύσιον**.

Εἶναι φανερὸν ὅτι μέρος μὲν τοῦ χρεωλυσίου χρησιμεύει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν δεδουλευμένων τόκων τοῦ χρέους, τὸ ὑπόλοιπον δὲ συντελεῖ εἰς τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Ἀποσβέννυται δὲ τὸ χρέος, ὅταν τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελεῖ ποσὸν ἴσον πρὸς τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

Τὰ συνηθέστερα προβλήματα τῆς χρεωλυσίας λύομεν διὰ τοῦ τύπου, τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀκολούθου γενικοῦ προβλήματος.

§ 229. Πρόβλημα.—**Ἐδανείσθη τις α δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του διὰ ν ἴσων ἐτησίων δόσεων καταβαλλομένων εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους. Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ποσὸν ἑκάστης δόσεως (χρεωλύσιον), γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἑκάστη δραχμὴ φέρει εἰς ἓν ἔτος τόκον τ δραχμάς.**

Λύσις : Τὸ δανεισθὲν ποσὸν α, ἀνατοκιζόμενον, μετὰ ν ἔτη θὰ ἔχῃ ἀνέλθη εἰς : $\alpha(1+\tau)^\nu$, ὅπερ καὶ ὀφείλει νὰ πληρώσῃ ὁ δανειστής.

Οὗτος ὅμως πληρώνει εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἕνα χρεωλύσιον, ἔστω δὲ τοῦτο x δρχ. Δικαιοῦται λοιπὸν νὰ ζητήσῃ καὶ αὐτὸς τοὺς τόκους τῶν ἐτησίων δόσεων, τοὺς ὁποίους ἄλλως τε θὰ ἐλάμβανε, ἐὰν ἀνετόκιζε ἑκάστην δόσιν. Αἱ δόσεις αὗται (μὲ τοὺς τόκους των) θ' ἀποτελέσουν, κατὰ τὸν τύπον (2) τῶν χρεωλυτικῶν καταθέσεων (§ 227), ποσὸν ἴσον πρός :

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}.$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον : $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν **ἐξίσωσιν τῆς χρεωλυσίας :**

$$\boxed{x \cdot \frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^\nu} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προσδιορίζομεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον x. Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς x ἢ α δίδει τοὺς τύπους :

$$\boxed{x = \frac{\alpha\tau(1+\tau)^\nu}{(1+\tau)^\nu - 1}} \quad (1') \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\alpha = \frac{x \cdot [(1+\tau)^\nu - 1]}{\tau(1+\tau)^\nu}} \quad (1'')$$

Ἐνίοτε ἡ πρώτη καταβολὴ τοῦ χρεωλυσίου γίνεται ἔτη τινὰ μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου, λ.χ. μετὰ μ ἔτη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀντίστοιχος **ἐξίσωσις τῆς χρεωλυσίας** εἶναι :

$$\boxed{x \cdot \frac{(1+\tau)^{\nu-\mu+1} - 1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^\nu} \qquad (\text{διατί;})$$

Παραδείγματα ἐπὶ τῆς χρεωλυσίας

Παράδειγμα 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ χρεωλύσιον τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ πληρώνῃ μία κοινότης, ἡ ὁποία ἐδανείσθη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ ποσὸν 300.000 δραχμῶν πρὸς 5 %, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἐτησίων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐντὸς 50 ἐτῶν.

Λύσις : Κατὰ τὸν τύπον (1') εἶναι

$$x = \frac{300.000 \cdot (1{,}05)^{50} \cdot 0{,}05}{(1{,}05)^{50} - 1}.$$

Ἐπειδὴ $(1{,}05)^{50} = 11{,}4674$ (διατί;), ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται

$$x = \frac{300.000 \times 11{,}4674 \times 0{,}05}{10{,}4674}$$

ἢ $\quad \lambda o\gamma\, x = (\lambda o\gamma\, 300.000 + \lambda o\gamma\, 11{,}4674 + \lambda o\gamma\, 0{,}05) - \lambda o\gamma\, 10{,}4674.$

Ἡ ἰσότης αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι : $\lambda o\gamma\, 300.000 = 5{,}47712$, $\lambda o\gamma\, 11{,}4674 = 1{,}05946$, $\lambda o\gamma\, 0{,}05 = \overline{2},69897$ καὶ $\lambda o\gamma 10{,}4674 = 1{,}01984$, γίνεται :

$$\lambda o\gamma\, x = 4{,}21571.$$

Ἐξ οὗ :

$$x = 16432{,}69.$$

Παράδειγμα 2ον : Ποῖον ποσὸν δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 20 ἔτη δι' ἐτησίου χρεωλυσίου 5000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4 %;

Λύσις : Ἔχομεν ἐνταῦθα $x = 5000$, $\tau = 0{,}04$, $\nu = 20$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1'') γίνεται :

$$\alpha = \frac{5000\,[(1{,}04)^{20} - 1]}{0{,}04 \cdot (1{,}04)^{20}}.$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $(1{,}04)^{20}$ καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων :

$$\alpha = 67953 \text{ δραχμάς.}$$

Παράδειγμα 3ον : Δανείζεταί τις ποσὸν 120000 δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 8 %. Πόσας ἐτησίας χρεωλυτικὰς δόσεις τῶν 15000 δραχμῶν πρέπει νὰ πληρώσῃ διὰ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ δάνειον;

Λύσις : Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν :

$$x\,(1 + \tau)^{\nu} - x = \alpha\tau\,(1 + \tau)^{\nu},$$

ὅθεν

$$(1 + \tau)^{\nu} = \frac{x}{x - \alpha\tau}, \qquad (2)$$

ἐξ οὗ :

$$\nu \cdot \lambda o\gamma\,(1 + \tau) = \lambda o\gamma\, x - \lambda o\gamma\,(x - \alpha\tau)$$

καὶ

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma x - \lambda o\gamma\,(x - \alpha\tau)}{\lambda o\gamma\,(1 + \tau)}. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ εἶναι $x = 15000$, $\alpha = 120000$, $\tau = 0{,}08$ καὶ συνεπῶς $x - \alpha\tau = 5400$, ὁ τύπος (3) δίδει :

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma\, 15000 - \lambda o\gamma\, 5400}{\lambda o\gamma\, 1{,}08}.$$

Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ $\lambda o\gamma\, 15000 = 4{,}17609$, $\lambda o\gamma\, 5400 = 3{,}73239$ καὶ $\lambda o\gamma 1{,}08 = 0{,}03342$, λαμβάνομεν :

$$\nu = \frac{0{,}44370}{0{,}0342} = 13 \text{ ἔτη}\ldots, \text{ ἤτοι } 13 < \nu < 14.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δεικνύει, ὅτι πρέπει νὰ πληρώσῃ 13 δόσεις τῶν 15000 δρχ. καὶ μίαν ἀκόμη, ἡ ὁποία θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 15000 δρχ., ἥτις ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς :

Ὑπολογίζομεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον τῶν 120000 εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἤτοι ὑπολογίζομεν τό : $K = 120000 \cdot (1{,}08)^{14}$. Μετὰ ταῦτα ὑπολογίζομεν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἔχει πληρώσει μὲ τὰς 13 δόσεις τῶν 15000 ἑκάστη εἰς τὸ τέλος τῶν αὐτῶν ἐτῶν, ἤτοι τό:

$$\Sigma = \frac{15000\,[(1{,}08)^{14} - 1]}{0{,}08},$$

ὅτε ἡ διαφορὰ Κ – Σ δίδει τὴν τελευταίαν δόσιν. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ δόσις αὕτη ἀνέρχεται εἰς 4252 δραχμάς.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς παρδ. 3, ἵνα τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν, πρέπει νὰ εἶναι $x > \alpha\tau$, δηλαδὴ τὸ χρεωλύσιον πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ὅπερ καὶ προφανές, διότι ἄλλως δὲν θὰ ἐγίνετο ποτὲ ἡ ἐξόφλησις τοῦ χρέους. Ἂν $x = \alpha\tau$, τότε ἡ ἐξίσωσις (2) δὲν ἔχει λύσιν, διότι ὁ παρονομαστὴς τοῦ β΄ μέλους μηδενίζεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ δάνειον λέγεται **πάγιον**, διότι οὐδέποτε ἐξοφλεῖται, τὸ δὲ καταβαλλόμενον ποσὸν x χρησιμεύει διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν ἐτησίων τόκων τοῦ κεφαλαίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

517. Κοινότης ἐδανείσθη δι᾿ ἀνέγερσιν σχολικοῦ κτηρίου 120.000 δραχμὰς πρὸς 6% ἐτησίως ἐξοφλητέας χρεωλυτικῶς εἰς 25 ἐτησίας δόσεις. Πόσον χρεωλύσιον θὰ πληρώνῃ ἐτησίως;

518. Ἔμπορος ὑπολογίζει ὅτι δύναται νὰ διαθέτῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 8.650 δραχμῶν ἐπὶ 20 ἔτη. Πόσον δάνειον δύναται νὰ συνάψῃ διὰ τὴν προαγωγὴν τῶν ἐμπορικῶν του ἐπιχειρήσεων πρὸς 6% ἐτησίως;

519. Δανείζεταί τις χρεωλυτικῶς ποσὸν α δραχμῶν ἐπὶ ἀνατοκισμῷ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κατ᾿ ἔτος χρεωλύσιον, ἵνα μετὰ ν ἔτη τὸ χρέος του ἐλαττωθῇ κατὰ τὸ ἥμισυ.

(Ἐφαρμογή: $\alpha = 40000$, $\tau = 0{,}05$, $\nu = 12$).

520. Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Ἑκάστη δόσις (ἐτησία) θὰ εἶναι 46130 δρχ., θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικῶς δανεισθὲν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5%;

521. Συνῆψε τις δάνειον χρεωλυτικὸν 250.0000 δρχ. πρὸς 7% ἐξοφλητέον ἐντὸς 8 ἐτῶν. Τρεῖς μῆνας μετὰ τὴν κατάθεσιν τῆς πέμπτης χρεωλυτικῆς δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὁλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ;

522. Διὰ πόσων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 25.000 δρχ. ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 6%, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 3000 δραχμῶν.

523. Συμφωνεῖ τις νὰ πληρώσῃ εἰς ἕνα ἀσφαλιστικὸν ὀργανισμὸν ν ἐτησίας δόσεις πρὸς α δρχ. ἑκάστην ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι ὁ ὀργανισμὸς θὰ τοῦ ἐξασφαλίσῃ διὰ τὰ ἑπόμενα 2ν ἔτη ἐτήσιον εἰσόδημα ἐκ β δραχμῶν. Τὸ πρῶτον εἰσόδημα τῶν β δραχμῶν θὰ καταβληθῇ μετὰ τὴν τελευταίαν κατάθεσιν αὐτοῦ. Οἱ τόκοι εἶναι σύνθετοι καὶ τὸ ἐπιτόκιον εἶναι τ διὰ μίαν δραχμὴν εἰς ἓν ἔτος. Ζητεῖται:

1ον: Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$, καὶ

2ον: Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ν, ἐὰν εἶναι $\beta = 2\alpha$ καὶ $\tau = 0{,}05$.

524. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20.000 δραχμῶν διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,30 δρχ. ἑκάστην;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 230. Εἰσαγωγή.– Εἰς τὴν προηγουμένην τάξιν (βλ. Μαθηματικὰ Δ' Γυμνασίου, τόμος Α, κεφ. IX) εἴδομεν πῶς ἐπιλύονται προβλήματα ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως πρώτου βαθμοῦ, ἀκριβέστερον ἠσχολήθημεν μὲ τὴν ἐπίλυσιν, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{Z}$, ἐξισώσεων τῆς μορφῆς :

$$\alpha x + \beta y = \gamma, \quad \text{ὅπου } \alpha, \beta, \gamma \text{ ἐν } \mathbf{Z}.$$

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν μελέτην εἰδικῶν τινων περιπτώσεων τοῦ κάτωθι γενικοῦ προβλήματος ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως β' βαθμοῦ, τῆς γενικῆς περιπτώσεως μὴ ὑπαγομένης ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος βιβλίου.

§ 231. Πρόβλημα.– Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z, ἡ ἐξίσωσις :

$$f(x,y,\ldots) = 0, \tag{1}$$

ὅπου $f(x, y,\ldots)$ ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς $x, y, \ldots$, δευτέρου βαθμοῦ, ἔχον πάντας τοὺς συντελεστάς του ἀκεραίους.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δὲν ἐπιλύεται πάντοτε. Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν εἰδικάς τινας περιπτώσεις καθ' ἃς ἐπιτυγχάνεται ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος, ἀσχολούμενοι κυρίως μὲ ἐπίλυσιν εἰδικῶν τινων ἐξισώσεων, δευτέρου βαθμοῦ, μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἡ γενικὴ (πλήρης) μορφὴ μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y εἶναι ἡ κάτωθι :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0. \tag{2}$$

Δεχόμεθα, χωρὶς τοῦτο νὰ περιορίζῃ τὴν γενικότητα, ὅτι οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ καὶ η εἶναι ἀκέραιοι καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει τοὺς καθιστῶμεν τοιούτους (πῶς;).

Ἤδη θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὴν ἐπίλυσιν τῶν κάτωθι μερικῶν περιπτώσεων τῆς (2) :

Περίπτωσις I. Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0$, $\beta \neq 0$. (Δηλ. *ἐλλείπει τὸ* y^2). Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0. \tag{3}$$

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν :

$$(\beta x + \varepsilon)\, y = -\alpha x^2 - \delta x - \eta. \tag{4}$$

Διακρίνομεν ἤδη δύο περιπτώσεις :

Ια. Ἐὰν $\beta x+\varepsilon / -\alpha x^2-\delta x-\eta$, τότε: $-\alpha x^2-\delta x-\eta \equiv (\beta x+\varepsilon)\cdot(kx+\lambda)$ καὶ ἡ (4) γίνεται:

$$(\beta x+\varepsilon)\, y-(\beta x+\varepsilon)\,(kx+\lambda)=0 \quad \text{ἢ} \quad (\beta x+\varepsilon)\cdot(y-kx-\lambda)=0.$$

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων:

$$\{\beta x+\varepsilon=0 \ \text{(i)}, \quad y-kx-\lambda=0 \ \text{(ii)}\}.$$

Ἡ (i) ἔχει ἀκεραίαν λύσιν τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν $\beta | \varepsilon$, δηλ. ἂν $\frac{\varepsilon}{\beta} \in \mathbf{Z}$. Τότε ὅμως ἡ (3) ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις τάς:

$$x=-\frac{\varepsilon}{\beta}, \quad y=h, \quad (\text{ἔνθα } h \text{ τυχὼν ἀκέραιος}).$$

Ἡ (ii), πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x καὶ y, λυομένη κατὰ τὰ γνωστὰ (ἀπροσδ. ἀνάλυσις πρώτου βαθμοῦ) δίδει ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$x=x_0+h, \ y=y_0+kh,$$

ἔνθα $h \in \mathbf{Z}$ καὶ (x_0, y_0) μία ἀκεραία λύσις τῆς (ii).

Ιβ. Ἐὰν $\beta x+\varepsilon \nmid -\alpha x^2-\delta x-\eta$, τότε, ἂν $kx+\lambda$ εἶναι τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(-\alpha x^2-\delta x-\eta):(\beta x+\varepsilon)$, ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν:

$$y=(kx+\lambda)+\frac{\upsilon}{\beta x+\varepsilon} \tag{5}$$

καὶ ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ k, λ καὶ υ δὲν εἶναι πάντες ἀκέραιοι, ἀλλὰ κλασματικοί, ἔστω μὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν τὸν ρ, πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (5) ἐπὶ ρ καὶ ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τήν:

$$\rho y=(k_1x+\lambda_1)+\frac{\upsilon_1}{\beta x+\varepsilon}, \tag{5'}$$

ἔνθα οἱ ρ, $k_1=k\rho$, $\lambda_1=\lambda\rho$, $\upsilon_1=\upsilon\rho$ εἶναι πάντες ἀκέραιοι.

Ἤδη παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Διὰ νὰ ἔχῃ ἀκεραίαν λύσιν ἡ (5') πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχῃ ἀκέραιος x τοιοῦτος, ὥστε ὁ $\beta x+\varepsilon$ νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ υ_1. Ἐξισοῦμεν λοιπὸν τὸν $\beta x+\varepsilon$ μὲ ὅλους τοὺς διαιρέτας $\delta_1, \delta_2, \ldots$ τοῦ υ_1 καὶ ἐκ τῶν προκυπτουσῶν ἐξισώσεων $\beta x+\varepsilon=\delta_1$, $\beta x+\varepsilon=\delta_2, \ldots$ εὑρίσκομεν (ἂν ὑπάρχουν) τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x. Ἀκολούθως, τὰς εὑρεθείσας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (5') καὶ ἐξετάζομεν διὰ ποίας ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ y. Κατὰ ταῦτα διατηροῦμεν τελικῶς μόνον ἐκείνας (ἂν ὑπάρχουν), αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ β' μέλος τῆς (5') πολλαπλάσιον τοῦ ρ.

Παρατήρησις. Ὁμοίως ἐξετάζεται καὶ ἡ περίπτωσις $\alpha=0, \ \beta \neq 0$.

Ἐφαρμογαί: 1η: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z, ἡ ἐξίσωσις:

$$\mathbf{2x^2-7xy-3x+14y-2=0.}$$

Λύσις: Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν:

$$(7x-14)\,y=2x^2-3x-2.$$

Τὸ $7x-14 / 2x^2-3x-2$ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(2x^2-3x-2):(7x-14)$ εἶναι τὸ $\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}$, ὅθεν: $2x^2-3x-2 \equiv (7x-14)\cdot\left(\frac{2}{7}x+\frac{1}{7}\right) \equiv (x-2)\cdot(2x+1)$.

Τότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται :

$$(x-2)(2x+1)-7y(x-2)=0 \text{ ἢ } (x-2)(2x-7y+1)=\mathbf{0}.$$

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων :

$$\{\, x-2=0 \text{ (i)}, \quad 2x-7y+1=0 \text{ (ii)} \,\}.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (i) εἶναι αἱ $x=2$, $y=h$, ἔνθα h τυχὼν ἀκέραιος.

Ἡ (ii), λυομένη κατὰ τὰ γνωστά, δίδει τὰς λύσεις :

$$x=3+7h, \quad y=1+2h, \quad h\in\mathbf{Z}.$$

2α : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z, ἡ ἐξίσωσις :

$$\mathbf{3x^2+2xy+x+y+1=0}.$$

Λύσις : Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :

$$(2x+1)\,y=-3x^2-x-1. \tag{α'}$$

Τὸ $2x+1 \nmid -3x^2-x-1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν $(-3x^2-x-1):(2x+1)$ εὑρίσκομεν πηλίκον $-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ καὶ ὑπόλοιπον $υ=-\frac{5}{4}$, καὶ ἡ (α') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν :

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{5/4}{2x+1}. \tag{β'}$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (β') ἐπὶ 4 (δηλ. ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων 3/2, 1/4, 5/4) λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν :

$$4y=-6x+1-\frac{5}{2x+1}. \tag{γ'}$$

Οἱ διαιρέται τοῦ 5 εἶναι οἱ $\pm 1, \pm 5$.

Ἐξισοῦντες τὸ $2x+1$ πρὸς τοὺς διαιρέτας αὐτοὺς λαμβάνομεν τὰς ἐξισώσεις :

$$2x+1=1, \quad 2x+1=-1, \quad 2x+1=5, \quad 2x+1=-5.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως : $x=0$, $x=-1$, $x=2$, $x=-3$.

Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ x τιθέμεναι διαδοχικῶς εἰς τὴν (γ') δίδουν ἀντιστοίχως :

$$y=-1, \quad y=3, \quad y=-3, \quad y=5.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει 4 ἀκεραίας λύσεις τάς :

$$(x=0, y=-1), \quad (x=-1, y=3), \quad (x=2, y=-3), \quad (x=-3, y=5).$$

Περίπτωσις II. Ἐὰν εἶναι $\beta=\gamma=0$. (Δηλ. *ἐλλείπει τὸ* y^2 *καὶ τὸ* xy). Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\alpha x^2+\delta x+\varepsilon y+\eta=0. \tag{6}$$

Αὕτη λυομένη ὡς πρὸς y δίδει :

$$y=-\frac{\alpha x^2+\delta x+\eta}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Ἤδη ἀποδεικνύομεν τὰς κάτωθι προτάσεις :

1η: Ἐὰν ἡ (6) δέχεται ἀκεραίαν τινα λύσιν $(x_0,\ y_0)$, *θὰ δέχεται ὡς ἀκεραίας λύσεις καὶ τάς :*

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+\varepsilon h\\ y&=y_0-(2\alpha x_0+\delta)\,h-\alpha\varepsilon h^2 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ἔνθα $h\in\mathbf{Z}$.

Πράγματι, ἂν εἰς τὴν (7) θέσωμεν ὅπου $x = x_0 + \varepsilon h$, $h \in \mathbf{Z}$, ἔχομεν :

$$y = -\frac{\alpha(x_0+\varepsilon h)^2 + \delta(x_0+\varepsilon h) + \eta}{\varepsilon} = -\frac{\alpha x_0^2 + \delta x_0 + \eta}{\varepsilon} - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha\varepsilon h^2.$$

Ἀλλά :

$$-\frac{\alpha x_0^2 + \delta x_0 + h}{\varepsilon} = y_0.$$

Ὅθεν : $y = y_0 - (2\alpha x_0 + \delta)h - \alpha\varepsilon h^2$, δηλ. ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω προτάσεως συνάγομεν τώρα τὸ ἑξῆς : ἂν ἡ ἐξίσωσις (6) ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν μίαν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν καὶ ἀκολούθως ἐκ τῶν τύπων (8) θὰ ἔχωμεν ἀπείρους τὸ πλῆθος ἀκεραίας λύσεις. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς ἀνάγεται εἰς τὴν ἀναζήτησιν μιᾶς ἀκεραίας λύσεως τῆς (6). Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν τὴν κάτωθι πρότασιν :

2α: Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (6) δέχεται ἀκεραίας λύσεις, τότε ὑπάρχει ἀκεραία λύσις αὐτῆς (x'_0, y'_0) τοιαύτη, ὥστε νὰ ἰσχύῃ :

$$0 \leqq x'_0 < |\varepsilon|. \qquad (9)$$

Πράγματι, ἔστω (x_0, y_0) μία ἀκεραία λύσις τῆς (6). Τότε, ἂν ὁ x_0 πληροῖ τὴν (9) ἡ πρότασις ἐδείχθη, ἂν ὄχι, ἐπειδή, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν προηγουμένην πρότασιν, ὁ $x_0 + \varepsilon h$, $h \in \mathbf{Z}$, τιθέμενος εἰς τὴν (6) ἀντὶ τοῦ x δίδει διὰ τὸ y ἀκεραίαν τιμήν, ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος h, ὥστε νὰ εἶναι :

$$0 \leqq x_0 + \varepsilon h < |\varepsilon|$$

ἤτοι :

$$-\frac{x_0}{\varepsilon} \leqq h < 1 - \frac{x_0}{\varepsilon} \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad -\frac{x_0}{\varepsilon} \geqq h > -1 - \frac{x_0}{\varepsilon},$$

καθ' ὅσον εἶναι $\varepsilon > 0$ ἀντιστοίχως $\varepsilon < 0$.

Ὥστε, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἀκέραιος h τοιοῦτος, ὥστε :

$$h \in \left[-\frac{x_0}{\varepsilon}, 1 - \frac{x_0}{\varepsilon}\right) \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad h \in \left(-1 - \frac{x_0}{\varepsilon}, -\frac{x_0}{\varepsilon}\right].$$

Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, διότι τὸ μῆκος τοῦ διαστήματος (§ 114,δ')

$$\left[-\frac{x_0}{\varepsilon}, 1 - \frac{x_0}{\varepsilon}\right) \quad \text{ἀντιστοίχως} \quad \left(-1 - \frac{x_0}{\varepsilon}, -\frac{x_0}{\varepsilon}\right]$$

εἶναι 1. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι ὑπάρχει ἀκεραία τιμὴ τοῦ x, θετικὴ ἢ μηδὲν καὶ μικροτέρα τοῦ $|\varepsilon|$, δίδουσα, ἐκ τῆς (7), διὰ τὸ y ἀκεραίαν τιμήν.

Κατόπιν τούτου διὰ τὴν εὕρεσιν ἀκεραίας λύσεως τῆς (6) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : Δίδομεν εἰς τὸ x διαδοχικῶς τὰς ἀκεραίας τιμάς : 0, 1, 2, 3, . . . , ($|\varepsilon| - 1$), ὅτε, ἐὰν ἡ (6) ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις, ὁ τύπος (7) θὰ δώσῃ, διὰ μίαν τοὐλάχιστον τῶν τιμῶν αὐτῶν τοῦ x, ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸ y. Ἐὰν δι' οὐδεμίαν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ x ὁ τύπος (7) δὲν δώσῃ ἀκεραίαν τιμὴν διὰ τὸ y, τοῦτο θὰ σημαίνῃ ὅτι ἡ (6) δὲν ἐπιδέχεται ἀκεραίας λύσεις.

Σημείωσις : Ἐὰν εὕρωμεν διὰ τὸ x τιμὰς τοῦ διαστήματος $[0, |\varepsilon|)$ π.χ. τάς : $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ ὥστε δι' αὐτὰς ἐκ τῆς (7) νὰ λαμβάνωμεν ἀκεραίας τιμὰς τοῦ y, τὰς $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\rho$ ἀντιστοίχως, τότε θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν (6) τὰς ἀκεραίας λύσεις : $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_\rho, y_\rho)$. Ἐφαρμόζοντες δι' ἑκάστην τῶν λύσεων τούτων τοὺς τύπους (8) εὑρίσκομεν ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (6), αἱ ὁποῖαι ὅμως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην πᾶσαι αἱ λύσεις αὐτῆς.

Παρατήρησις. Ὁμοίως ἐξετάζεται καὶ ἡ περίπτωσις $\alpha = \beta = 0$.

Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$3x^2 + 2x - 5y - 1 = 0. \qquad (\alpha')$$

Λύσις : Λύοντες τὴν (α') ὡς πρὸς y λαμβάνομεν :

$$y = \frac{3x^2 + 2x - 1}{5} \qquad (\beta')$$

Ἐνταῦθα εἶναι $\varepsilon = -5$. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἀκεραίαν λύσιν τῆς (α'), δίδομεν εἰς τὸ x τὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ διαστήματος $[0, |\varepsilon|) \equiv [0, 5)$, ἤτοι τὰς τιμάς : 0, 1, 2, 3, 4 καὶ λαμβάνομεν ἐκ τῆς (β') ἀντιστοίχως τὰς τιμάς :

$$y_0 = -\frac{1}{5}, \quad y_1 = \frac{4}{5}, \quad y_2 = 3, \quad y_3 = \frac{32}{5}, \quad y_4 = 11.$$

Οὕτως ἔχομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις :

$$(x = 2,\ y = 3) \quad \text{καὶ} \quad (x = 4,\ y = 11).$$

Τότε ὅμως ἡ (α') θὰ δέχεται ἀπείρους ἀκεραίας λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς τύπους (8). Οὕτω διὰ τὴν λύσιν $(x = 2, y = 3)$ οἱ τύποι (8) δίδουν :

$$x = 2 - 5h, \qquad y = 3 - 14h + 15h^2, \qquad h \in \mathbf{Z}$$

καὶ διὰ τὴν λύσιν $(x = 4, y = 11)$ οἱ αὐτοὶ τύποι δίδουν :

$$x = 4 - 5h, \qquad y = 11 - 26h + 15h^2, \qquad h \in \mathbf{Z}.$$

Περίπτωσις III. Ἐὰν εἶναι $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ καὶ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2$, $k \in \mathbf{Z}$. *(Δηλ. ἡ ποσότης* **$\beta^2 - 4\alpha\gamma$** *εἶναι* **τέλειον τετράγωνον** *ἀκεραίου ἀριθμοῦ).*

Εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν, ἐντὸς τοῦ $\mathbf{Z}$, τὴν ἐξίσωσιν (1) : $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta = 0$, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς κάτωθι δύο προτάσεις :

1η : Ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$ καὶ $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς $k \neq 0$, τότε ἡ (1) τίθεται ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$(px + qy + r) \cdot (p'x + q'y + r') = d, \qquad (10)$$

ὅπου p, q, r, p', q', r' καὶ d ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Πράγματι, θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι δυνατὸν προσθέτοντες εἰς τὰ μέλη τῆς (1) κατάλληλον ἀριθμὸν λ νὰ φέρωμεν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν (10).

Ἔστω λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \eta + \lambda = \lambda. \qquad (11)$$

Ἡ (11) γράφεται ὡς τριώνυμον τοῦ x οὕτω :

$$\alpha x^2 + (\beta y + \delta)\, x + (\gamma y^2 + \varepsilon y + \eta + \lambda) = \lambda. \qquad (12)$$

Διὰ νὰ φέρωμεν τώρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (12) εἰς τὴν μορφὴν τοῦ πρώτου μέλους τῆς (10), ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ ὥστε ἡ διακρίνουσα $\Delta(y)$ τοῦ τριωνύμου :

$$\alpha x^2 + (\beta y + \delta)\, x + (\gamma y^2 + \varepsilon y + \eta + \lambda) \qquad (13)$$

νὰ εἶναι τετράγωνον πρωτοβαθμίου πολυωνύμου ὡς πρὸς y μὲ συντελεστὰς συμμέτρους ἀριθμούς. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν — καὶ μάλιστα τὸ πρωτοβάθμιον πολυώνυμον θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $ky+\sigma$, ὅπου σ σύμμετρος ἀριθμὸς — διότι ἔχομεν :

$$\begin{aligned}\Delta(y) &\equiv (\beta y+\delta)^2-4\alpha(\gamma y^2+\varepsilon y+\eta+\lambda)\\ &=(\beta^2-4\alpha\gamma)\,y^2-2\,(2\alpha\varepsilon-\beta\delta)\,y+(\delta^2-4\alpha\eta-4\alpha\lambda)\end{aligned} \tag{14}$$

καὶ τὸ τριώνυμον (14), ἐφ' ὅσον εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $\beta^2-4\alpha\gamma=k^2$ (k ἀκέραιος $\neq 0$), δύναται νὰ τεθῇ, ὡς γνωστόν, ὑπὸ τὴν μορφὴν $(ky+\sigma)^2$, ἔνθα σ σύμμετρος ἀριθμός.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ $\Delta(y)$ τέλειον τετράγωνον ἀρκεῖ νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ ὥστε ἡ διακρίνουσα Δ τοῦ $\Delta(y)$ νὰ εἶναι μηδὲν (διατί;), δηλ. νὰ εἶναι :

$$(2\alpha\varepsilon-\beta\delta)^2-k^2\,(\delta^2-4\alpha\eta-4\alpha\lambda)=0. \tag{15}$$

Ἐκ τῆς (15) ὅμως προσδιορίζεται τὸ λ, διότι ἔχομεν :

$$\lambda=\frac{k^2\,(\delta^2-4\alpha\eta)-(2\alpha\varepsilon-\beta\delta)^2}{4\alpha k^2}. \tag{16}$$

Οὕτως, ὁριζομένου τοῦ λ, ἡ (12) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha\left[x-\frac{-(\beta y+\delta)+(ky+\sigma)}{2\alpha}\right]\cdot\left[x-\frac{-(\beta y+\delta)-(ky+\sigma)}{2\alpha}\right]=\lambda$$

ἢ

$$[2\alpha x+(\beta-k)y+(\delta-\sigma)]\cdot[2\alpha x+(\beta+k)y+(\delta+\sigma)]=4\alpha\lambda. \tag{17}$$

Ὥστε, πράγματι ἡ (1) τίθεται, ὑπὸ τὰς τεθείσας ὑποθέσεις, ὑπὸ τὴν μορφὴν (10). Ἀποδεικνύομεν τώρα καὶ τὴν ἑξῆς πρότασιν :

2α : Ἐὰν ὁ ἀκέραιος $d\neq 0$ ἔχῃ ν θετικοὺς διαιρέτας : $1=\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_\nu=|d|$, τότε ἡ ἐξίσωσις : $(px+qy+r)\cdot(p'x+q'y+r')=d$ (10′)
καὶ τὰ 2ν συστήματα :

$$\left\{px+qy+r=\varepsilon\delta_i\,,\qquad p'x+q'y+r'=\varepsilon\,\frac{d}{\delta_i}\right\} \tag{18}$$

ὅπου $\varepsilon=1$ ἢ -1 καὶ $i=1,2,\ldots,\nu$, ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκεραίας λύσεις.

Πράγματι, ἂν (x_0,y_0) εἶναι ἀκεραία λύσις τῆς (10′), τότε: $px_0+qy_0+r=k$ καὶ $p'x_0+q'y_0+r'=\lambda$, ὅπου $k,\lambda\in\mathbf{Z}$ καὶ $k\cdot\lambda=d$. Ἄρα $k\mid d$ καὶ $\lambda\mid d$, ἑπομένως $k=\varepsilon\delta_i$, ὅπου $\varepsilon=\pm1$ καὶ δ_i, $i=1,2,\ldots,\nu$ εἶναι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι διαιροῦν τὸν d καὶ $\lambda=\dfrac{d}{k}=\dfrac{d}{\varepsilon\delta_i}=\dfrac{\varepsilon\delta}{\varepsilon^2\delta_i}=\varepsilon\,\dfrac{d}{\delta_i}$, διότι $\varepsilon^2=1$, ἤτοι ἡ τυχοῦσα ἀκεραία λύσις (x_0,y_0) τῆς (10′) εἶναι καὶ λύσις ἑνὸς ἐκ τῶν συστημάτων (18).

Ἀντιστρόφως, ἂν (x_0,y_0) εἶναι ἀκεραία λύσις ἑνὸς ἐκ τῶν συστημάτων (18) ἔχομεν :

$$px_0+qy_0+r=\varepsilon\,\delta_i\quad\text{καὶ}\quad p'x_0+q'y_0+r'=\varepsilon\,\frac{d}{\delta_i}.$$

Τότε ὅμως ἐξ αὐτῶν προκύπτει :

$$(px_0 + qy_0 + r) \cdot (p'x_0 + q'y_0 + r') = (\,\varepsilon\delta_i\,) \cdot \left(\varepsilon \frac{d}{\delta_i}\right) = \varepsilon^2\delta_i \frac{d}{\delta_i} = d,$$

ἤτοι ἡ (x_0, y_0) εἶναι λύσις καὶ τῆς (10'). Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Ἤδη, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰς ἀνωτέρω προτάσεις 1 καὶ 2, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν ἐντὸς τοῦ $\mathbf{Z}$ τὴν (1) εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι : $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = k^2 \neq 0$, $k \in \mathbf{Z}$ ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς : Φέρομεν ἐν πρώτοις τὴν (1) ὑπὸ τὴν μορφὴν (10) καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν πρότασιν 2.

Ἐφαρμογαί : 1η : Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως : $y^2 = 9x^2 - 11$.

Λύσις : Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται : $9x^2 - y^2 = 11$. (α')

Ἐνταῦθα ἔχομεν : $\alpha = 9$, $\beta = 0$, $\gamma = -1$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 36 = 6^2$.

Ἡ (α') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν : $(3x + y) \cdot (3x - y) = 11$. (β')

Οἱ διαιρέται τοῦ 11 εἶναι : ± 1, ± 11. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ τὰ τέσσαρα συστήματα :

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 3x - y = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = 11 \\ 3x - y = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 3x - y = -11, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + y = -11 \\ 3x - y = -1, \end{cases}$$

ἔχουν τὰς αὐτὰς ἀκεραίας λύσεις. Ἡ ἐπίλυσις τούτων εἶναι πολὺ ἁπλῆ.

2α : Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z, ἡ ἐξίσωσις :

$$\mathbf{2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5x + y + 2 = 0.} \qquad (\gamma')$$

Ἐπίλυσις : Ἐπειδὴ $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 4 = 2^2$ προσδιορίζομεν κατάλληλον ἀριθμὸν λ ὥστε τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως : $2x^2 + 6xy + 4y^2 + 5x + y + 2 + \lambda = \lambda$ νὰ τίθεται ὑπὸ μορφὴν γινομένου δύο πρωτοβαθμίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x καὶ y.

Ἐκ τοῦ τύπου (16) ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{4\,(25 - 4 \cdot 2 \cdot 2) - (2 \cdot 2 \cdot 1 - 6 \cdot 5)^2}{4 \cdot 2 . 4} = -20.$$

Ὁ -20 εἶναι λοιπὸν ὁ κατάλληλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὰ μέλη τῆς (γ') ὥστε τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς νὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (10). Πράγματι, ἐκ τῆς (γ') ἔχομεν:

$$2x^2 + (6y + 5)\,x + 4y^2 + y - 18 = -20, \qquad (\delta')$$

ὁπότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (δ') θεωρούμενον τριώνυμον ὡς πρὸς x ἔχει ῥίζας τοὺς ἀριθμούς :

$$\rho_{1,2} = \frac{-(6y + 5) \pm \sqrt{(6y + 5)^2 - 8\,(4y^2 + y - 18)}}{4} = \frac{-(6y + 5) \pm (2y + 13)}{4},$$

ἤτοι : $\rho_1 = -y + 2$, $\quad \rho_2 = -2y - \frac{9}{2}$.

Τότε ὅμως ἡ ἐξίσωσις (δ') λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha\,(x - \rho_1)\,(x - \rho_2) \equiv 2\,(x + y - 2) \cdot \left(x + 2y + \frac{9}{2}\right) = -20$$

ἤ $\qquad (x + y - 2) \cdot (2x + 4y + 9) = -20. \qquad$ (ε')

Οἱ θετικοὶ διαιρέται τοῦ -20 εἶναι οἱ : 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Τότε ἡ (ε') εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰ $2 \cdot 6 = 12$ συστήματα :

$$\left\{ x + y - 2 = \varepsilon\delta_i\,, \qquad 2x + 4y + 9 = \varepsilon\,\frac{-20}{\delta_i} \right\}$$

ὅπου $\varepsilon = +1$ ἢ -1 καὶ $\delta_i \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Οὕτω, π.χ., διὰ $\varepsilon = 1$, $\delta_i = 4$ ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$\left.\begin{matrix} x + y - 2 = 4 \\ 2x + 4y + 9 = -5, \end{matrix}\right\}, \quad \text{ἤτοι :} \quad \left.\begin{matrix} x + y = 6 \\ x + 2y = -7 \end{matrix}\right\}$$

τὸ ὁποῖον δέχεται τὴν λύσιν $(x = 19,\ y = -13)$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ λύσις τῆς δοθείσης.

Περίπτωσις IV. Ἐὰν εἶναι $\alpha=\gamma=0$ καὶ $\beta\delta\varepsilon\eta\neq0$. Τότε ἡ (2) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $\beta xy+\delta x+\varepsilon y+\eta=0$.

Αὕτη γράφεται διαδοχικῶς:

$$\beta^2xy+\beta\delta x+\beta\varepsilon y+\beta\eta=0$$

ἤ

$$\beta^2xy+\beta\delta x+\beta\varepsilon y+\delta\varepsilon=\delta\varepsilon-\beta\eta$$

ἤ

$$(\beta y+\delta)(\beta x+\varepsilon)=\delta\varepsilon-\beta\eta. \qquad (19)$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (19) εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν συστημάτων:

$$\left\{\beta x+\varepsilon=k,\quad \beta y+\delta=\frac{\delta\varepsilon-\beta\eta}{k}\right\},$$

ὅπου $k\mid\delta\varepsilon-\beta\eta$.

Ἐφαρμογή: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z, ἡ ἐξίσωσις:

$$\mathbf{2xy-3x+y+1=0.} \qquad (\zeta')$$

Ἐπίλυσις: Ἔχομεν $\alpha=\gamma=0$, $\beta\delta\varepsilon\eta=-6\neq0$.

Ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν: $4xy-6x+2y+2=0$ καὶ αὐτὴ πρὸς τήν: $(2x+1)(2y-3)=-5$.

Οἱ θετικοὶ διαιρέται τοῦ -5 εἶναι οἱ: 1 καὶ 5. Ἡ ἐπίλυσις συνεπῶς τῆς (ζ') ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν τεσσάρων συστημάτων:

$$\begin{cases}2x+1=1\\2y-3=-5,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+1=-5\\2y-3=+1,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+1=-1\\2y-3=5,\end{cases}\quad\begin{cases}2x+1=5\\2y-3=-1.\end{cases}$$

Αἱ λύσεις τῶν συστημάτων αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$(x=0,\ y=-1),\quad (x=-3,\ y=2),\quad (x=-1,\ y=4),\quad (x=2,\ y=1).$$

Αὗται εἶναι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Περίπτωσις V. (Γενικὴ περίπτωσις). **Ἐὰν εἶναι $\alpha\neq0$, $\gamma\neq0$ καὶ $\beta^2-4\alpha\gamma\neq k^2$, $k\in Z$** *(δηλ. τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου)*. Τότε ἡ ἐξίσωσις (2) (σελὶς 285) λυομένη ὡς πρὸς x δίδει:

$$x=\frac{-(\beta y+\delta)\pm\sqrt{(\beta^2-4\alpha\gamma)y^2-2(2\alpha\varepsilon-\beta\delta)y+(\delta^2-4\alpha\eta)}}{2\alpha}. \qquad (20)$$

Ἵνα ἡ (1) ἐπιλύεται ἐντὸς τοῦ **Z** θὰ πρέπει νὰ συμβαίνουν τὰ ἑξῆς: πρῶτον νὰ εἶναι: $\Delta\equiv(\beta^2-4\alpha\gamma)y^2-2(2\alpha\varepsilon-\beta\delta)y+(\delta^2-4\alpha\eta)=k^2$, ἔνθα y, k ἐν **Z** καὶ δεύτερον πρέπει: $2\alpha\mid-(\beta y+\delta)\pm k$. Ζητοῦμεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον ποῖαι τιμαὶ τοῦ y καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον **θετικόν**. Ἐὰν εἰς τὸ δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς y τριώνυμον Δ, ὁ συντελεστὴς $\beta^2-4\alpha\gamma$ τοῦ y^2 εἶναι ἀρνητικὸς καὶ αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 πραγματικαί, τότε πρέπει ὁ y νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, διὰ νὰ καθίσταται τοῦτο θετικόν. Ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν *περιοριζόμεθα εἰς τὰς ἀκεραίας τιμὰς y τὰς πληρούσας τήν:*

$$\rho_1\leqq y\leqq\rho_2.$$

Ἐκ τῶν ἀκεραίων τούτων τιμῶν τοῦ y ἐκλέγομεν μόνον ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον Δ τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου καὶ τέλος, ἐξ αὐτῶν ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τιθέμεναι εἰς τὴν (20) καθιστοῦν τὸ x ἀκέραιον.

Ἐφαρμογή: Νὰ ἐπιλυθῇ, ἐντὸς τοῦ Z, ἡ ἐξίσωσις:

$$\mathbf{2x^2+2xy+2y^2-2x-7y-9=0} \qquad (\alpha')$$

Ἐπίλυσις. Αὕτη γράφεται: $2x^2 + 2(y-1)x + (2y^2 - 7y - 9) = 0.$
Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς x ἔχομεν:

$$x = \frac{-(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - 2(2y^2 - 7y - 9)}}{2} = \frac{-y + 1 \pm \sqrt{-3y^2 + 12y + 19}}{2} \quad (\beta')$$

Ἐν πρώτοις πρέπει:

$-3y^2 + 12y + 19 \geqq 0$, δηλ. $-1 \leqq y \leqq 5$ καὶ ἐπειδὴ $y \in \mathbf{Z}$, ἔχομεν: $y = -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν λαμβάνομεν μόνον ἐκείνας αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον τέλειον τετράγωνον. Αὗται εἶναι αἱ $y = -1$ καὶ $y = 5$.

Διὰ τὴν τιμὴν $y = -1$ ἡ (β') δίδει: $x = 2, x = 0$.

Διὰ τὴν τιμὴν $y = 5$ ἡ (β') δίδει: $x = -1, x = -3$.

Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τέσσαρας ἀκεραίας λύσεις τάς:

$(x = 2, y = -1)$, $(x = 0, y = -1)$, $(x = -1, y = 5)$, $(x = -3, y = 5)$.

§ 232. Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως:

$$\mathbf{x^2 + ky^2 = z^2, \quad k \in Z}. \qquad (1)$$

Ἄνευ βλάβης τῆς γενικότητος δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν τὸν ἀκέραιον k πάντοτε θετικόν, διότι ἄλλως ἡ (1) θὰ ἠδύνατο νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $z^2 + (-k)y^2 = x^2$, εἰς ἣν ὁ $(-k)$ θὰ ἦτο πάλιν θετικός.

Ἡ (1) ἐπιδέχεται προφανῶς τὴν λύσιν: $x = y = z = 0$. Ἐπίσης διὰ $y = 0$ ἔχομεν: $x = \pm z$, ὅτε ἡ (1) ἐπιδέχεται τὰς ἀκεραίας λύσεις: $x = z, y = 0$ καὶ $x = -z, y = 0$. Θὰ ζητήσωμεν τώρα ἀκεραίας λύσεις τῆς (1) μὲ $y \neq 0$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ y^2, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{x^2}{y^2} + k = \frac{z^2}{y^2}. \qquad (2)$$

Θέτομεν $\frac{z}{y} = \frac{x}{y} + \frac{n}{m}$ (3), ἔνθα οἱ m, n ἀκέραιοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$\frac{z^2}{y^2} = \frac{x^2}{y^2} + \frac{n^2}{m^2} + \frac{2nx}{my}. \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) ἔχομεν:

$$k = \frac{n^2}{m^2} + \frac{2nx}{my} \qquad (5)$$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν:

$$\frac{x}{y} = \frac{km^2 - n^2}{2mn}. \qquad (6)$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἡ (6) ἀληθεύει, ἐὰν εἶναι $x = (km^2 - n^2)h$ καὶ $y = 2mnh$, ἔνθα $h \in \mathbf{Z}$. Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν x καὶ y: $z = (km^2 + n^2)h$. Ἄρα αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς (1) δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$\mathbf{x = (km^2 - n^2)h}$	$\mathbf{y = 2mnh}$	$\mathbf{z = (km^2 + n^2)h}$	(7)

ἔνθα οἱ m, n, h εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ὁμοίως ἐπιλύεται ἡ ἐξίσωσις $kx^2 + y^2 = z^2$.

Σημείωσις. Ἡ (1) διὰ $k = 1$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν : $\mathbf{x^2 + y^2 = z^2}$, ἡ ὁποία καλεῖται καὶ **πυθαγόρειος ἐξίσωσις,** διότι δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι συνδέει τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου. Αἱ ἀκέραιαι λύσεις αὐτῆς θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν τύπων (7), ἂν θέσωμεν $k = 1$, ἤτοι :

$$x = (m^2 - n^2)h, \quad y = 2mnh, \quad z = (m^2 + n^2)h, \quad h \in \mathbf{Z}. \tag{8}$$

Οἱ θετικοὶ ἀκέραιοι οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν $x^2 + y^2 = z^2$ καλοῦνται **πυθαγόρειοι ἀριθμοί.** Ἡ ἁπλουστέρα τριὰς πυθαγορείων ἀριθμῶν εἶναι : 3, 4, 5.

Διὰ $n = h = 1$ οἱ τύποι (8) γίνονται :

$$x = m^2 - 1, \quad y = 2m, \quad z = m^2 + 1 \quad (m \in \mathbf{N}, \quad m \neq 1)$$

καὶ καλοῦνται **πυθαγόρειοι τύποι,** ἂν καὶ ὡς πυθαγόρειοι τύποι φέρονται οἱ γνωστοὶ εἰς τοὺς Πυθαγορείους :

$$x = \frac{m^2 - 1}{2}, \quad y = m, \quad z = \frac{m^2 + 1}{2},$$

ἔνθα m τυχὼν περιττὸς φυσικὸς ἀριθμὸς $\neq 1$.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$\mathbf{x^2 + 4y^2 = z^2}.$$

Λύσις : Αὐτὴ προφανῶς ἐπιδέχεται τὴν λύσιν : $x = y = z = 0$, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰς λύσεις : $x = z$, $y = 0$ καὶ $x = -z$, $y = 0$. Αἱ λοιπαὶ ἀκέραιαι λύσεις εὑρίσκονται ἐκ τῶν τύπων (7) διὰ $k = 4$ καὶ εἶναι αἱ κάτωθι :

$$x = (4m^2 - n^2)h, \quad y = 2mnh, \quad z = (4m^2 + n^2)h, \quad \text{ἔνθα } m, n, h \in \mathbf{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

525. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων :

1. $2x^2 - 2xy - 5x - y - 3 = 0$, **2.** $3xy - 2y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$,
3. $3y^2 - 2y - 5x - 1 = 0$, **4.** $5xy - 2x - 3y - 18 = 0$.

526. Νὰ ἐπιλυθοῦν, ἐντὸς τοῦ **Z**, αἱ ἐξισώσεις :

1. $2x^2 - xy - 3y^2 - 13x + 17y + 6 = 0$, **2.** $(x + 7)(y + 8) = 5xy$,
3. $2x^2 + 5xy - 12y^2 - 28 = 0$, **4.** $2x^2 + 7xy + 3y^2 - 5y - 2 = 0$.

527. Ὁμοίως αἱ ἐξισώσεις :

1. $3x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$, **2.** $x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 3y - 4 = 0$,
3. $3x^2 - 6xy + 4x - 5y - 31 = 0$, **4.** $x^2 + 2xy + y^2 - x + y - 4 = 0$,
5. $x^2 - 3y^2 = z^2$, **6.** $5x^2 + y^2 = z^2$, **7.** $z^2 - y^2 = 2x^2$.

528. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :

$$x(3 - |y|) + y(3 - |x|) + |xy| = 6.$$

529. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του δίδει γινόμενον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ψηφίων του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

§ 233. Εἰσαγωγικαὶ ἔννοιαι – συμβολισμοί.—Ἡ Συνδυαστικὴ Ἀνάλυσις ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα εἰς ἐργασίας τῶν Fermat καὶ Pascal διὰ τὴν συστηματικὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὰ «*τυχηρὰ παιγνίδια*». Ἔκτοτε ἡ ἀνάλυσις αὕτη εὗρε πλείστας ἐφαρμογάς. Ἡ ἐφαρμογή της εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων, περὶ τῆς ὁποίας γίνεται λόγος εἰς τὸ ἑπόμενον κεφάλαιον, εἶναι ὄχι μόνον ἡ ἀρχαιοτέρα, ἀλλὰ καὶ μία ἀπὸ τὰς πλέον σημαντικάς.

Διὰ τὴν συντομωτέραν καὶ αὐστηροτέραν διατύπωσιν τῶν ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ διαπραγματευομένων θεμάτων, ὁρίζομεν τὰ κάτωθι :

α΄). Καλοῦμεν **τμῆμα** T_ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μέχρι καὶ τοῦ φυσικοῦ ν τὸ ὑποσύνολον : $T_\nu \equiv \{ k \in \mathbf{N} : \text{μὲ } k \leqq \nu \}$ τοῦ $\mathbf{N}$.

Τὸ T_ν συμβολίζεται, συνήθως, καὶ μέ : $T_\nu \equiv \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$.

Παράδειγμα : $T_5 \equiv \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

β΄). Τὸ γινόμενον τῶν θετικῶν ἀκεραίων (φυσικῶν) ἀπὸ 1 ἕως ν θὰ τὸ παριστῶμεν συντόμως μὲ $\boldsymbol{\nu!}$ (Τὸ σύμβολον $\nu!$ ἀναγιγνώσκεται «*ν παραγοντικόν*»). Τὸ σύμβολον $\nu!$ ὁρίζεται ὡς κάτωθι :

$1! = 1, \quad 2! = (1!)\,2 = 1\cdot 2, \quad 3! = (2!)\,3 = 1\cdot 2\cdot 3$ καὶ ἐπαγωγικῶς

$$\boxed{\boldsymbol{\nu! = (\nu-1)!\,\nu = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\nu-2)\cdot(\nu-1)\cdot\nu}} \tag{1}$$

Διὰ τὴν πληρότητα τοῦ συμβόλου $\nu!$ δεχόμεθα ὅτι : $\mathbf{0! = 1}$.

Διὰ τὸ σύμβολον $\nu!$ ἰσχύει ἡ ἰδιότης :

$$\nu! = (\nu-k)!\,(\nu-k+1)\,(\nu-k+2)\cdots(\nu-1)\,\nu, \quad k \leqq \nu.$$

Οὕτω : $10! = 7!\,8\cdot 9\cdot 10.$

Ἡ χρησιμοποίησις τοῦ θαυμαστικοῦ (!) εἰς τὸν συμβολισμὸν τῶν παραγοντικῶν σχετίζεται μὲ τὴν καταπληκτικὴν αὔξησιν αὐτῶν. Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸν κάτωθι πίνακα :

$1! = 1$	$4! = 24$	$7! = 5040$	$10! = 3628800$
$2! = 2$	$5! = 120$	$8! = 40320$	$11! = 39916800$
$3! = 6$	$6! = 720$	$9! = 362880$	$12! = 479001600.$

I. ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

§ 234. Ἁπλαῖ μεταθέσεις.— Ἔστω τὸ πεπερασμένον σύνολον :

$$E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}.$$

Καλοῦμεν **μετάθεσιν** τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου E κάθε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ E ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἤτοι :

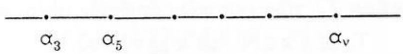
$$M: \quad E \longleftrightarrow E.$$

Καλοῦμεν **ἀπαρίθμησιν** τοῦ συνόλου E κάθε ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $T_\nu \equiv \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$ ἐπὶ τοῦ E, ἤτοι :

$$T_\nu \ni k \longleftrightarrow \alpha_i \in E, \quad i \in T_\nu .$$

Ἑκάστη ἀπαρίθμησις, ὡς καὶ ἡ μετάθεσις, παρίσταται συμβολικῶς (§ 87) δι' ἑνὸς ὀρθογωνίου σχήματος (πίνακος) ἐκ δύο γραμμῶν, π.χ. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & \nu \\ \alpha_3 & \alpha_5 & \ldots & \alpha_\nu \end{pmatrix}$.

Εἰς τὴν πρώτην γραμμὴν τοῦ πίνακος γράφονται τὰ πρότυπα καὶ εἰς τὴν δευτέραν κάτωθεν ἑκάστου προτύπου ἡ εἰκὼν αὐτοῦ. Συνήθως ὅμως ἡ πρώτη γραμμὴ παραλείπεται καὶ γράφονται (παρατάσσονται) μόνον αἱ εἰκόνες κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας, π.χ. ὡς κάτωθι :



εἰς τρόπον ὥστε τὸ πρῶτον στοιχεῖον τῆς παρατάξεως νὰ εἶναι εἰκὼν τοῦ 1, τὸ δεύτερον εἰκὼν τοῦ 2, τὸ τρίτον εἰκὼν τοῦ 3, κ.ο.κ. Ἕνεκα τούτου καὶ διὰ παιδαγωγικοὺς κυρίως σκοποὺς πολλοὶ συγγραφεῖς ὁρίζουν ὡς μετάθεσιν ν πραγμάτων (στοιχείων) κάθε κατάταξιν αὐτῶν εἰς μίαν σειράν. Εἶναι φανερὸν ὅτι δύο μεταθέσεις ν πραγμάτων εἶναι διάφοροι μεταξύ των, ἂν καὶ μόνον, ἂν ἓν (ἑπομένως τοὐλάχιστον δύο) ἐκ τῶν ν πραγμάτων εὑρίσκεται τοποθετημένον εἰς διαφορετικὴν θέσιν ἐντὸς αὐτῶν.

Ἐπειδὴ τὸ T_ν καὶ τὸ E ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ E ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἀπαριθμήσεων αὐτοῦ. Εἶναι ἐπίσης φανερὸν ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν φύσιν τῶν στοιχείων τοῦ E, ἀλλὰ μόνον ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων αὐτοῦ. Ἄρα τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τοῦ T_ν . Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πολλάκις ν διακεκριμένα πράγματα, διὰ τὰ ὁποῖα δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ φύσις, τὰ σημειώνομεν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, . . . , ν. Κατόπιν τούτου αἱ ἔννοιαι ἀπαρίθμησις καὶ μετάθεσις θὰ χρησιμοποιῶνται κατωτέρω ἀδιακρίτως.

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος ὅλων τῶν μεταθέσεων τῶν ν διαφόρων μεταξύ των στοιχείων. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πλῆθος τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων τῶν ν στοιχείων (πραγμάτων) εἰς μίαν σειράν. Τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μεταθέσεων τῶν ν στοιχείων θὰ παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον M_ν .

Εἶναι φανερὸν ὅτι δι' ἓν πρᾶγμα ὑπάρχει μία μόνον μετάθεσις, ἤτοι :

$$M_1 = 1 = 1!$$

Αἱ δυναταὶ μεταθέσεις δύο πραγμάτων, π.χ. τῶν α_1, α_2 εἶναι δύο, αἱ :

$$\alpha_1\alpha_2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2\alpha_1,$$

διότι τὸ α_1 ἢ θὰ εἶναι πρῶτον ἢ θὰ εἶναι δεύτερον. Συνεπῶς ἔχομεν :

$$M_2 = 2 = 1 \cdot 2 = 2!$$

Αἱ μεταθέσεις τριῶν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ εἶναι αἱ ἀκόλουθοι ἕξ :

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \alpha_1\alpha_3\alpha_2, \quad \alpha_3\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2\alpha_1\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3\alpha_1, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1.$$

Δηλαδή : $$M_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$$

Γενικῶς ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

Πρότασις.— Τὸ πλῆθος M_ν τῶν μεταθέσεων ν στοιχείων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$, ἤτοι :

$$\boxed{M_\nu = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu = \nu! = \prod_{k=1}^{\nu} k} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς (1) θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν ἀποδεικτικὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = 1$ (ἐπίσης, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = 2, 3$).

Ἔστω ὅτι αὕτη ἰσχύει διὰ $\nu = k$, ἤτοι :

$$M_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k! \qquad (k \geqq 1) \qquad (2)$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k + 1$, ἤτοι :

$$M_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdots k\,(k+1) = (k+1)! \qquad (3)$$

Πράγματι, ἂς θεωρήσωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν $(k+1)$ στοιχείων καὶ χωρίσωμεν αὐτὰς εἰς ὁμάδας θέτοντες εἰς τὴν πρώτην ὁμάδα ὅλας τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν π.χ. ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α_1, εἰς μίαν δευτέραν ὁμάδα ὅλας τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α_2, κ.ο.κ. καὶ τέλος εἰς μίαν $k+1$ τάξεως ὁμάδα τὰς μεταθέσεις αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ στοιχεῖον α_{k+1}.

Εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ διάφοροι ἀλλήλων μεταθέσεις ἑκάστης ὁμάδος εἶναι $k!$, διότι αὗται λαμβάνονται ἂν μετὰ τὸ πρῶτον στοιχεῖον, μὲ τὸ ὁποῖον ἀρχίζουν, γράψωμεν ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν λοιπῶν k στοιχείων, αἱ ὁποῖαι λόγῳ τῆς γενομένης ὑποθέσεως (2) τῆς τελείας ἐπαγωγῆς εἶναι : $M_k = 1 \cdot 2 \cdots k = k!$ Ἑπομένως τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν $(k+1)$ στοιχείων εἶναι :

$$M_{k+1} = (k+1)\,M_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k\,(k+1) = (k+1)!$$

δηλ. ἡ πρότασις (1) ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k + 1$, ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

Ἐφαρμογαί: 1η : Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παραταχθοῦν ἐφ' ἑνὸς ζυγοῦ 10 μαθηταί ;

Λύσις: Τὸ πλῆθος ὅλων τῶν δυνατῶν παρατάξεων θὰ εἶναι ἀκριβῶς ὅσαι αἱ ἁπλαῖ μεταθέσεις τῶν 10 πραγμάτων, ἤτοι :

$$M_{10} = 10! = 3\,628\,800.$$

2α : Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 1000, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται μὲ ὅλα τὰ ψηφία 5, 3, 0, 9 μὴ ἐπιτρεπομένης τῆς ἐπαναλήψεως ψηφίου τινός.

Λύσις: Κάθε ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1000 ἀντιστοιχεῖ εἰς κάποιαν μετάθεσιν τῶν ψηφίων 5, 3, 0, 9 ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι τὸ ψηφίον 0 δὲν κατέχει τὴν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν. Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως εἰς τοὺς ὁποίους προηγεῖται τὸ μηδὲν (π.χ. 0395, 0539,...) εἶναι τόσοι τὸ πλῆθος, ὅσαι καὶ αἱ μεταθέσεις τῶν τριῶν ψηφίων 5, 3, 9, ἤτοι $M_3 = 3! = 6$. Οἱ τετραψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι $M_4 = 4! = 24$. Ἄρα τὸ ζητούμενον πλῆθος εἶναι:

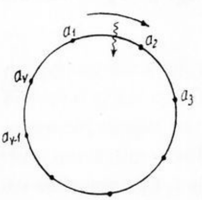
$$M_4 - M_3 = 4! - 3! = 18.$$

§ 235. Κυκλικαὶ μεταθέσεις.— Μία εἰδικὴ περίπτωσις μεταθέσεως εἶναι ἐκείνη καθ' ἣν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου Ε ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἑπόμενόν του τὸ δὲ «τελευταῖον» στοιχεῖον α_ν εἰς τὸ «πρῶτον» α_1. Δηλαδὴ ἡ μετάθεσις:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{\nu-1} & \alpha_\nu \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_\nu & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Μία τοιαύτη μετάθεσις καλεῖται **κυκλικὴ** (§ 87).

Ἡ ὀνομασία αὕτη ἐξηγεῖται ἀμέσως, ἂν τὰ ν διάφορα στοιχεῖα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ φαντασθῶμεν ὅτι εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ ἑνὸς κύκλου, ὡς δεικνύει καὶ τὸ κάτωθι σχῆμα (Σχ. 15). Κατὰ ταῦτα μία κυκλικὴ μετάθεσις εἶναι ἡ παράταξις τῶν ν στοιχείων κατὰ μῆκος ἑνὸς κύκλου. Οὕτω θεωρουμένη μία κυκλικὴ μετάθεσις ν στοιχείων δὲν ἔχει οὔτε ἀρχὴν οὔτε πέρας, δυνάμεθα ὅθεν νὰ θεωρῶμεν οἱονδήποτε ἐκ τῶν ν στοιχείων ὡς πρῶτον κατὰ τὴν ἐν λόγῳ μετάθεσιν. Εἶναι τώρα φανερὸν ὅτι: *τὸ πλῆθος ὅλων τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων ν στοιχείων, τὸ ὁποῖον συμβολίζεται μὲ k_ν, εἶναι ἴσον πρός: $(\nu-1)!$*, ἤτοι:



Σχ. 15

$$k_\nu = (\nu-1)! = 1 \cdot 2 \cdots (\nu-2)\,(\nu-1) = \prod_{k=1}^{\nu-1} k.$$

Πράγματι, ἂς φαντασθῶμεν ὅλας τὰς κυκλικὰς μεταθέσεις τῶν ν στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ ἀναγεγραμμένας εἰς ἕνα πίνακα. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐξ ἑκάστης κυκλικῆς μεταθέσεως τῶν ν στοιχείων, π.χ. τὴν $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu$ προκύπτουν ν ἁπλαῖ μεταθέσεις, αἱ κάτωθι:

$$\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu\,\alpha_1, \quad \alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_\nu\,\alpha_1\alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu\,.$$

Κατόπιν τούτου, ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε κυκλικὴν μετάθεσιν τῶν ν στοιχείων προκύπτουν ν ἁπλαῖ μεταθέσεις τῶν ν στοιχείων, ἕπεται ὅτι ἐξ ὅλων τῶν κυκλικῶν μεταθέσεων, αἱ ὁποῖαι εἶναι k_ν τὸ πλῆθος, θὰ προκύψουν $\nu \cdot k_\nu$ ἁπλαῖ μεταθέσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ ἰσοῦνται μὲ τὸν συνολικὸν ἀριθμὸν τῶν ἁπλῶν μεταθέσεων ν στοιχείων δηλ. $\nu!$ Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$\nu \cdot k_\nu = M_\nu = \nu!$$

Ἐξ οὗ:

$$\boxed{\mathbf{k_\nu = \frac{M_\nu}{\nu} = (\nu-1)!}} \qquad (1)$$

Ἐφαρμογή. Κατὰ πόσους τρόπους τὰ μέλη μιᾶς ἑπταμελοῦς οἰκογενείας δύνανται νὰ καθήσουν πέριξ μιᾶς κυκλικῆς τραπέζης;

Λύσις: Κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς τρόπους αὐτοὺς εἶναι μία κυκλικὴ μετάθεσις τῶν 7 ἀτόμων. Ἄρα:
$$k_7 = 6! = 720.$$

§ 236. Ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις.

– Ἔστω ἓν πλῆθος ν πραγμάτων

$$\underbrace{\alpha, \alpha, \ldots, \alpha}_{k_1}, \quad \underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\theta, \theta, \ldots, \theta}_{k_\rho},$$

ὅπου τὰ k_1 συμπίπτουν μὲ α, τὰ k_2 μὲ $\beta, \ldots$, τὰ k_ρ μὲ θ, ὁπότε φυσικὰ θὰ εἶναι

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_\rho = \nu.$$

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὴν μετάθεσιν** τῶν ν αὐτῶν πραγμάτων μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος $T_\nu \equiv \{1, 2, \ldots, \nu\}$ ἐπὶ τοῦ συνόλου $E \equiv \{\alpha, \beta, \ldots, \theta\}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ διάφορα ἀλλήλων πράγματα $\alpha, \beta, \ldots, \theta$, τοιαύτη ὥστε αἱ k_1 εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ α, αἱ k_2 εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ $\beta, \ldots$, αἱ k_ρ εἰκόνες νὰ συμπίπτουν μὲ θ.

Ἐὰν ρ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ E, τότε: $\rho \leqq \nu$.

Οὕτω π.χ. αἱ ἐπαναληπτικαὶ μεταθέσεις τῶν τριῶν πραγμάτων α, α, β εἶναι αἱ:
$$\alpha\alpha\beta, \quad \alpha\beta\alpha, \quad \beta\alpha\alpha.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ τὸ σύμβολον M_ν^ε τὸ πλῆθος ὅλων τῶν ἐπαναληπτικῶν μεταθέσεων ν πραγμάτων, ἐξ ὧν k_1 τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ α, k_2 τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ $\beta, \ldots$, k_ρ τὸ πλῆθος συμπίπτουν μὲ τὸ θ, τότε ἰσχύει:

$$\boxed{\mathbf{M}_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{k_1!\,k_2!\ldots k_\rho!} = \frac{(k_1 + k_2 + \cdots + k_\rho)!}{k_1!\,k_2!\ldots k_\rho!}} \tag{1}$$

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν πρὸς στιγμήν, ὅτι τὰ ν πράγματα εἶναι διάφορα μεταξύ των καὶ ὅτι σχηματίζομεν τὰς $\nu!$ μεταθέσεις των. Θεωροῦμεν τὰς ἐν λόγῳ μεταθέσεις χωρισμένας εἰς ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Θέτομεν εἰς τὴν αὐτὴν ὁμάδα μίαν μετάθεσιν μαζὶ μὲ ὅλας ὅσαι προκύπτουν ἀπὸ αὐτήν, ὅταν διατηρήσωμεν τὴν τάξιν ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀρχικῶς διέφερον τοῦ α κατατάξωμεν δὲ τὰ λοιπὰ (δηλ. τὰ ταυτιζόμενα ἀρχικῶς μὲ τὸ α) καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Εἶναι φανερὸν ὅτι μετὰ τὸ πέρας τῆς τοιαύτης διαδικασίας θὰ προκύψουν $k_1!$ μεταθέσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ παριστοῦν (ἐὰν ἐπαναθέσωμεν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k_1} = \alpha$) τὴν αὐτὴν ἐπαναληπτικὴν μετάθεσιν. Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων ν πραγμάτων, ὅπου μεταξύ των ὑπάρχουν μόνον k_1 τὸ πλῆθος ταυτιζόμενα μὲ τὸ α, τὰ δὲ ἄλλα διαφέρουν μεταξύ των καὶ ἀπὸ τὸ α, εἶναι $\dfrac{\nu!}{k_1!}$.

Ἂν τώρα εἰς τὰ μέχρι τοῦδε ὡς διάφορα θεωρηθέντα $\nu - k_1$ λοιπὰ πράγματα ταυτοποιήσωμεν k_2 τὸ πλῆθος μὲ τὸ β, τότε, κατὰ τὸν αὐτὸν συλλογισμόν, $k_2!$ τὸ πλῆθος διαφέρουσαι πρὶν μεταθέσεις θὰ παριστοῦν τὴν αὐτὴν ἐπαναληπτικὴν μετάθεσιν καὶ ἑπομένως τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων ν πραγμάτων ὅταν μεταξὺ των ὑπάρχουν k_1 τὸ πλῆθος συμπίπτοντα μὲ τὸ α καὶ k_2 τὸ πλῆθος συμπίπτοντα μὲ τὸ β ($\alpha \neq \beta$), τὰ δὲ λοιπὰ διαφέρουν μεταξύ των καθὼς ἐπίσης καὶ ἀπὸ τὰ α καὶ β εἶναι:
$$\frac{\nu!}{k_1!\,k_2!}.$$

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον σκεπτόμενοι, μετὰ ρ βήματα, φθάνομεν εἰς τὴν (1).

Ἐφαρμογαί: 1η: Πόσας λέξεις* (ἀναγραμματισμοὺς) σχηματίζομεν μεταθέτοντες τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Ἑλλάς»;

Λύσις: Εἰς τὴν λέξιν «Ἑλλὰς» τὸ γράμμα λ ἐπαναλαμβάνεται 2 φοράς. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$M_5^\varepsilon = \frac{5!}{2!} = 60 \quad \text{λέξεις.}$$

2α: Πόσας λέξεις δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μεταθέτοντες τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Πανεπιστήμιον».

Λύσις: Ἡ λέξις «Πανεπιστήμιον» περιέχει 13 γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων 2 εἶναι π, 2 εἶναι ν καὶ 2 εἶναι ι, ἄρα πρόκειται περὶ μεταθέσεων 13 γραμμάτων μετ' ἐπαναλήψεως ὡρισμένων ἐξ αὐτῶν. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον πλῆθος ἰσοῦται πρός:

$$M_{13}^\varepsilon = \frac{13!}{2!\,2!\,2!} = 778\,377\,600 \quad \text{λέξεις.}$$

Σημείωσις: Διὰ νὰ ἴδωμεν πόσα γράμματα θὰ χρειασθοῦν διὰ νὰ γραφοῦν αἱ λέξεις αὗται θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν εὑρεθέντα ἀριθμὸν ἐπὶ 13, ἤτοι:

$$778\,377\,600 \times 13 = 10\,118\,908\,800 \quad \text{γράμματα.}$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀποκτήσωμεν μίαν ἰδέαν περὶ τοῦ μεγέθους τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς: Μία σελὶς ἑνὸς κανονικοῦ βιβλίου χρειάζεται περίπου 2000 γράμματα. Μὲ τὰ ἀνωτέρω γράμματα θὰ τυπωθοῦν:

$$10\,118\,908\,800 : 2\,000 = 5.059.454 \quad \text{σελίδες.}$$

Ἂν λάβωμεν τόμους τῶν 300 σελίδων, θὰ γίνουν: 5059454 : 300 = 16865 τόμοι.

Τέλος, ἂν εἰς μίαν κανονικὴν βιβλιοθήκην δύνανται νὰ τοποθετηθοῦν 100 τόμοι, θὰ ἀπαιτηθοῦν 16865 : 100 $\simeq$ 169 βιβλιοθῆκαι διὰ νὰ τοποθετηθοῦν οἱ ἐν λόγῳ τόμοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

530. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:

α) $\dfrac{7!\,5!}{6!\,4!}$, β) $\dfrac{\nu!}{(\nu-1)!}$, γ) $\dfrac{(\nu+2)!}{\nu!}$, δ) $\dfrac{(\nu+1)!}{(\nu-1)!}$, ε) $\dfrac{(\nu-1)!}{(\nu+2)!}$.

531. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\frac{(\nu+1)!}{(\nu+1)^{\nu+1}} : \frac{\nu!}{\nu^\nu}.$$

532. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες:

α) $(\nu+2)! + (\nu+1)! + \nu! = \nu!\,(\nu+2)^2$

β) $\nu! + 2\,(\nu-1)! = (\nu-1)!\,(\nu+2)$.

γ) $(\nu-1)! - (\nu-2)! = (\nu-2)!\,(\nu-2)$.

δ) $2M_\nu - (\nu-1)\,M_{\nu-1} = M_\nu + M_{\nu-1}$.

533. Ἂν ὑπάρχουν 3 δρόμοι ἀπὸ τὴν πόλιν Α πρὸς τὴν πόλιν Β καὶ 4 δρόμοι ἀπὸ τὴν Β πρὸς τὴν Γ, κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Γ διὰ μέσου τῆς Β; Πόσαι εἶναι αἱ δυναταὶ διαδρομαὶ διὰ ταξείδιον μετ' ἐπιστροφῆς ἐκ τῆς Α εἰς τὴν Γ;

534. Κατὰ πόσους τρόπους 6 μαθηταὶ δύνανται νὰ παραταχθοῦν ἐφ' ἑνὸς ζυγοῦ; Ἐὰν ἑκάστη παράταξις ἀπαιτῇ χρόνον 15 sec, πόσος εἶναι ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος δι' ὅλας τὰς δυνατὰς παρατάξεις.

535. Πόσοι ἀναγραμματισμοὶ τῆς λέξεως «γραφεῖον» ὑπάρχουν; Πόσοι ἐξ αὐτῶν ἀρχίζουν μὲ φ; Πόσοι ἀρχίζουν μὲ α καὶ τελειώνουν μὲ ο;

---

* Αἱ λέξεις δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ ἔχουν νόημα.

536. Πόσαι διαφορετικαὶ λέξεις δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ ὅλα τὰ γράμματα τῆς λέξεως «Mississippis».

537. Πόσοι ἀριθμοὶ μεγαλύτεροι τοῦ 10 000 γράφονται μὲ τὰ ψηφία 8, 5, 8, 0, 8.

538. Κατὰ πόσους τρόπους 15 βιβλία δύνανται νὰ διανεμηθοῦν εἰς 3 μαθητάς, ὥστε ὁ πρῶτος (α) νὰ λάβῃ 4 βιβλία, ὁ δεύτερος (β) νὰ λάβῃ 5 βιβλία καὶ ὁ τρίτος (γ) νὰ λάβῃ 6 βιβλία;

II. ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

§ 237. Ἁπλαῖ διατάξεις.— Ἔστωσαν ν τὸ πλῆθος διάφορα μεταξύ των στοιχεῖα (πράγματα) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu, \ldots, \alpha_\nu$ τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Ε.

Καλεῖται **διάταξις** τῶν ν αὐτῶν στοιχείων ἀνὰ μ, ὅπου $1 \leqq \mu \leqq \nu$, κάθε ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ τμήματος $T_\mu \equiv \{1, 2, \ldots, \mu\}$ ἐν τῷ συνόλῳ $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Οὕτω μία διάταξις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ εἶναι μία παράταξις εἰς σειρὰν μ πραγμάτων ἀπὸ τὰ δοθέντα ν. Ἑπομένως δύο διατάξεις τῶν ν στοιχείων ἀνὰ μ θεωροῦνται διάφοροι ὅταν ἢ δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα ἢ ἀποτελοῦνται μὲν ἀπὸ τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ἀλλὰ διαφέρουν ὡς πρὸς τὴν σειρὰν τῶν στοιχείων. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἁπλῆς διατάξεως ἕκαστον πρᾶγμα περιέχεται εἰς αὐτὴν ἅπαξ. Ἐπὶ πλέον εἰς ἑκάστην διάταξιν, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, παίζει ρόλον ὄχι μόνον ποῖα μ πράγματα θὰ λάβωμεν ἐκ τῶν ν, ἀλλὰ καὶ πῶς θὰ τὰ τοποθετήσωμεν εἰς σειρὰν ἐπὶ ἀνοικτῆς γραμμῆς (π.χ. εὐθείας). Οὕτως ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ 5 στοιχεῖα α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 ἡ μετάθεσις $\alpha_3\alpha_2\alpha_5$ εἶναι μία διάταξις τῶν 5 τούτων πραγμάτων ἀνὰ 3, ἡ δὲ μετάθεσις $\alpha_3\alpha_2\alpha_5$ εἶναι μία ἄλλη διάταξις τῶν αὐτῶν 5 πραγμάτων ἀνὰ 3. Εἶναι φανερὸν τώρα ὅτι αἱ διατάξεις εἶναι καὶ αὐταὶ μεταθέσεις, ἀλλὰ ὄχι συγχρόνως ὅλων τῶν πραγμάτων.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων μεταξύ των διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ. Τὸ πλῆθος τοῦτο θὰ τὸ παριστῶμεν μὲ τὸ σύμβολον Δ_μ^ν, τὸ ὁποῖον ἀναγιγνώσκεται «*διατάξεις τῶν ν ἀνὰ μ*». Πρὸς τοῦτο ἀποδεικνύομεν τὴν ἀκόλουθον πρότασιν :

Πρότασις.— Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\Delta_\mu^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1).} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐσχηματίσαμεν πάσας τὰς διατάξεις τῶν ν πραγμάτων : α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_ν ἀνὰ $(\mu-1)$, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι : $\Delta_{\mu-1}^\nu$. Ἂν θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἐξ αὐτῶν, π.χ. τὴν $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}$, αὕτη θὰ περιέχῃ $(\mu-1)$ ἐκ τῶν πραγμάτων α_1, $\alpha_2, \ldots$, α_ν καὶ συνεπῶς ὑπάρχουν $\nu-(\mu-1) = (\nu-\mu+1)$ ἀκόμη στοιχεῖα (πράγματα) μὴ ἀνήκοντα εἰς τὴν ἐν λόγῳ διάταξιν. Ἐὰν δὲ εἰς τὸ τέλος τῆς ἐν λόγῳ διατάξεως ἐπισυνάψωμεν ἓν οἱονδήποτε ἀπὸ τὰ $(\nu-\mu+1)$ ὑπόλοιπα στοιχεῖα θὰ προκύψῃ μία διάταξις τῶν ν ἀνὰ μ. Οὕτως ἀπὸ τὴν διάταξιν $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}$ θὰ προκύψουν αἱ $(\nu-\mu+1)$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ μ:

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\,\alpha_\mu\,,\quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\,\alpha_{\mu+1},\quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\,\alpha_{\mu+2},\ldots,\quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\mu-1}\alpha_\nu\,.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἑκάστην διάταξιν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ $(\mu-1)$ προκύπτουν $(\nu-\mu+1)$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ μ, ἕπεται ὅτι ἀπὸ τὰς $\Delta^{\nu}_{\mu-1}$ διατάξεις θὰ προκύψουν $(\nu-\mu+1)\cdot\Delta^{\nu}_{\mu-1}$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ μ. Αὗται δὲ εἶναι π ᾶ σ α ι αἱ διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ καὶ δ ι ά φ ο ρ ο ι μεταξύ των (διατί;).

Κατὰ ταῦτα ἰσχύει ὁ ἀναγωγικὸς τύπος:

$$\Delta^{\nu}_{\mu}=(\nu-\mu+1)\cdot\Delta^{\nu}_{\mu-1} \tag{2}$$

Ἐφαρμόζοντες τὴν (2) διὰ $\mu=2,3,\ldots,\mu$ καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι αἱ διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ ἓν εἶναι, προφανῶς, ν λαμβάνομεν τὰς μ ἰσότητας:

$$\begin{aligned}
&\Delta^{\nu}_{1}=\nu\\
&\Delta^{\nu}_{2}=(\nu-1)\cdot\Delta^{\nu}_{1}\\
&\Delta^{\nu}_{3}=(\nu-2)\cdot\Delta^{\nu}_{2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Delta^{\nu}_{\mu}=(\nu-\mu+1)\cdot\Delta^{\nu}_{\mu-1}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ παραλείποντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας εὑρίσκομεν:

$$\Delta^{\nu}_{\mu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1).$$

Ἤτοι: **τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον μ διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἠλαττουμένων κατὰ μονάδα μὲ πρῶτον παράγοντα τὸ ν.**

Κατὰ ταῦτα εἶναι: $\Delta^{7}_{3}=7\cdot6\cdot5=210.$

Εὐκόλως τώρα διαπιστοῦμεν ὅτι:

$$\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1)=\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-\mu+1)(\nu-\mu)!}{(\nu-\mu)!}=$$

$$=\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}$$

Μὲ ἄλλας λέξεις:

Π ό ρ ι σ μ α Ι.—Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμάτων ἀνὰ μ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{\Delta^{\nu}_{\mu}=\frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}} \tag{4}$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\mu=\nu$, ἔχομεν:

$$\Delta^{\nu}_{\nu}=\nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots3\cdot2\cdot1=\nu!$$

Μὲ ἄλλας λέξεις:

Π ό ρ ι σ μ α ΙΙ.—Τὸ πλῆθος τῶν διατάξεων ν πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν μεταθέσεων τῶν ν πραγμάτων, ἤτοι:

$$\boxed{\Delta^{\nu}_{\nu}=\nu!=M_{\nu}} \tag{5}$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί: 1η: Ἐὰν εἷς μαθητὴς ἔχῃ 9 βιβλία καὶ θέλῃ νὰ τοποθετήσῃ 5 τυχόντα ἐξ αὐτῶν εἰς ἕνα ράφι, κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ πράξῃ τοῦτο;

Λύσις: Οἱ διάφοροι τρόποι εἶναι τόσοι, ὅσαι καὶ αἱ διατάξεις τῶν 9 ἀνὰ 5, ἤτοι :

$$\Delta_5^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120.$$

2α : Πόσοι πενταψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν, ἔχοντες πάντα τὰ ψηφία διάφορα μεταξύ των;

Λύσις: Ἕκαστος πενταψήφιος ἀριθμὸς (π.χ. ὁ 38906, 72925,...) εἶναι μία διάταξις τῶν 10 ψηφίων : 0, 1, 2, 3,...,8, 9 ἀνὰ 5, μὲ μόνην τὴν διαφορὰν τὸ ψηφίον 0 δὲν πρέπει νὰ κατέχῃ τὴν πρώτην πρὸς τὰ ἀριστερὰ θέσιν (π.χ. 05382, 03948,...). Ἀλλὰ αἱ διατάξεις αἱ ἔχουσαι ὡς πρῶτον στοιχεῖον τὸ 0 εἶναι ὅσαι καὶ αἱ διατάξεις τῶν 9 ψηφίων 1, 2, 3, ..., 9 ἀνὰ **4**. Ἄρα τὸ ζητούμενον πλῆθος x εἶναι :

$$x = \Delta_5^{10} - \Delta_4^9 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6\,(10 - 1) = 9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216.$$

§ 238. Ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις.— Ἔστωσαν ν τὸ πλῆθος διάφορα μεταξύ των πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Ε.

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὴν διάταξιν** τῶν ν αὐτῶν πραγμάτων ἀνὰ μ, μίαν τυχοῦσαν ἀπεικόνισιν τοῦ τμήματος $T_\mu \equiv \{1, 2, \ldots, \mu\}$ εἰς τὸ σύνολον Ε. Οὕτω μία ἐπαναληπτικὴ διάταξις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ εἶναι μία παράταξις κατὰ μῆκος μιᾶς εὐθείας μ πραγμάτων ληφθέντων ἐκ τῶν ν, ἀλλὰ εἰς τὰ ὁποῖα ἕκαστον πρᾶγμα δυνατὸν νὰ ἐπαναλαμβάνεται τὸ πολὺ μ φοράς. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἐν προκειμένῳ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἢ $\mu \leqq \nu$ ἢ $\mu > \nu$.

Θὰ ὑπολογίσωμεν τώρα τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ. Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου δ_μ^ν, ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

Πρότασις.— Τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν διατάξεων τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ μ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\delta_\mu^\nu = \nu^\mu} \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις. Διὰ $\mu = 1$ ἰσχύει, διότι αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ ἓν εἶναι ὅσαι καὶ τὰ πράγματα, ἤτοι $\delta_1^\nu = \nu = \nu^1$.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει διὰ $\mu = k$, ἤτοι ἔστω ὅτι $\delta_k^\nu = \nu^k$ καὶ ἔστω μία τυχοῦσα ἐπαναληπτικὴ διάταξις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k, π.χ. ἡ $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$. Ἐὰν εἰς τὸ τέλος τῆς ἐν λόγῳ ἐπαναληπτικῆς διατάξεως ἐπισυνάψωμεν ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν ν πραγμάτων θὰ προκύψῃ μία ἐπαναληπτικὴ διάταξις τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ $(k+1)$. Οὕτως ἀπὸ τὴν διάταξιν $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$ θὰ προκύψουν ν ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ $k+1$ αἱ ἑξῆς :

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,\alpha_1,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,\alpha_2, \ldots,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,\alpha_k, \ldots,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\,\alpha_\nu .$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἑκάστην διάταξιν (ἐπαναληπτικὴν) τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ **k** προκύπτουν ν ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ $k+1$, ἕπεται ὅτι ἀπὸ τὰς δ_k^ν ἐπαναληπτικὰς διατάξεις θὰ προκύψουν $\nu \cdot \delta_k^\nu$ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ $k+1$.

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν : $\delta_{k+1}^\nu = \nu \cdot \delta_k^\nu$ καὶ λόγῳ τῆς ὑποθέσεως τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, καθ' ἣν $\delta_k^\nu = \nu^k$, ἔχομεν : $\delta_k^\nu = \nu \cdot \nu^k = \nu^{k+1}$, ἤτοι ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ διὰ $\nu = k+1$, ἄρα ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

Ἐφαρμογὴ 1η : Πόσοι πενταψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ἔχοντες ὡς ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς 2, 5, 7;

Λύσις: Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν (π.χ. 52752, 77522, 55555,...) εἶναι μία ἐπαναληπτικὴ διάταξις τῶν 3 ψηφίων 2, 5, 7 ἀνὰ 5.

Ἄρα τὸ ζητούμενον πλῆθος εἶναι ἴσον πρός :

$$\delta_5^3 = 3^5 = 243.$$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ 2α : *(Τὸ πρόβλημα τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ).* **Νὰ εὑρεθῇ πόσα δελτία τῶν δύο στηλῶν τοῦ ΠΡΟ-ΠΟ πρέπει νὰ συμπληρώσῃ εἷς παίκτης διὰ νὰ ἐπιτύχῃ ἕνα 13—άρι ;**

Λ ύ σ ι ς : Ἐὰν ὁ ἀγὼν ἦτο μοναδικός, θὰ ὑπῆρχον τρία προγνωστικά, τὰ ὁποῖα σημειοῦνται μὲ τὰ στοιχεῖα : 1, 2, x καὶ ἑπομένως θὰ ἔπρεπεν ὁ παίκτης νὰ συμπληρώσῃ 3 στήλας. Ἐὰν οἱ ἀγῶνες ἦσαν δύο θὰ ἔπρεπεν νὰ συμπληρώσῃ 9 στήλας, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράψῃ τὰ ἑξῆς στοιχεῖα :

I	1	1	1	2	2	2	x	x	x
II	1	2	x	1	2	x	1	2	x

(1)

Αἱ ὡς ἄνω 9 στῆλαι εἶναι αἱ ἐ π α ν α λ η π τ ι κ α ὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων 1, 2, x ἀνὰ δύο, δηλ. εἶναι : $\delta_2^3 = 3^2 = 9$.

Ἐὰν οἱ ἀγῶνες ἦσαν τρεῖς θὰ ἔπρεπεν ὁ παίκτης νὰ συμπληρώσῃ 27 στήλας, εἰς τὰς ὁποίας θὰ ἀναγράψῃ τὰ ἑξῆς στοιχεῖα :

$$(1, 1, 1), \quad (1, 1, 2), \quad (1, 1, x), \quad (1, 2, 1), \quad \ldots, \quad (x, x, x).$$

Αἱ 27 στῆλαι προκύπτουν ἀπὸ τὰ 9 στοιχεῖα τοῦ πίνακος (1), ἐὰν παραπλεύρως ἑκάστης δυάδος τοῦ πίνακος θέσωμεν τὰς ἐνδείξεις : 1, 2, x. Εἶναι δὲ ἐπίσης αἱ 27 στῆλαι, αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων (ἐνδείξεων) 1, 2, x ἀνὰ 3, ἤτοι εἶναι : $\delta_3^3 = 3^3 = 27$. Ἑπομένως διὰ νὰ ἐπιτύχῃ ὁ παίκτης ἕνα 13—άρι πρέπει νὰ συμπληρώσῃ τόσας στήλας, ὅσαι καὶ αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν τριῶν στοιχείων 1, 2, x ἀνὰ 13, ἤτοι :

$$\delta_{13}^3 = 3^{13} = 1\,594\,323 \quad \text{στήλας.}$$

Ἄρα : 1 594 323 : 2 = 797 162 δελτία ΠΡΟ-ΠΟ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

539. Ὑπολογίσατε τάς : Δ_3^6, Δ_4^8, Δ_4^{10} καὶ δείξατε ὅτι : $\Delta_4^{10} = M_7$.

540. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν εἰς τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

α) $\Delta_5^\nu = 12 \cdot \Delta_3^\nu$, β) $\Delta_4^{2\nu} = 2 \cdot \Delta_4^\nu$

γ) $\Delta_4^\nu = 18 \cdot \Delta_2^{\nu-1}$, δ) $3\Delta_4^\nu = \Delta_5^{\nu-1}$.

541. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\Delta_\mu^{\nu+1} = \Delta_\mu^\nu + \mu \cdot \Delta_{\mu-1}^\nu$.

542. Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις :

$$\Delta_\nu^\nu - 2 \cdot \Delta_{\nu-1}^{\nu-1} - (\nu - 1)!\,(\nu - 2).$$

543. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ : $\Delta_1^5 + \Delta_2^5 + \Delta_3^5 + \Delta_4^5 + \Delta_5^5$.

544. Πόσοι τετραψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ἔχοντες διαφορετικὰ ψηφία καὶ μὴ περιέχοντες τὸ 0 καὶ τὸ 9;

545. Δύο πόλεις Α καὶ Β συνδέονται μὲ 6 ἁμαξοστοιχίας. Κατὰ πόσους τρόπους δυνάμεθα νὰ ταξιδεύσωμεν ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β καὶ ἀντιστρόφως, χρησιμοποιοῦντες κατὰ τὴν ἐπιστροφήν :

α) διαφορετικὴν ἁμαξοστοιχίαν, β) ἔστω καὶ τὴν αὐτὴν ἁμαξοστοιχίαν.

III. ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

§ 239. Ἁπλοῖ συνδυασμοί.–Ἔστω Ε ἓν σύνολον μὲ ν στοιχεῖα: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Προτιθέμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ πλῆθος τῶν διαφόρων μεταξύ των ὑποσυνόλων τοῦ Ε, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν k στοιχεῖα, ἔνθα $k \leqq \nu$. Ἂς ἐξετάσωμεν κατ' ἀρχὴν μερικὰ παραδείγματα. Ἐὰν $\nu = 1$, τότε τὸ σύνολον Ε ἔχει δύο ὑποσύνολα: $\varnothing$ καὶ Ε. Ἐὰν $\nu = 2$, τότε τὸ σύνολον $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ἔχει τέσσαρα ὑποσύνολα:

$k=0$	$k=1$	$k=2$
$\varnothing$	$\{\alpha_1\}, \{\alpha_2\}$	$\{\alpha_1, \alpha_2\} \equiv E.$

Ἐὰν $\nu = 3$, τότε τὸ σύνολον $E \equiv \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ ἔχει ὀκτὼ ὑποσύνολα:

$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$\varnothing$	$\{\alpha_1\}$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$	$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} \equiv E$
	$\{\alpha_2\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3\}$	
	$\{\alpha_3\}$	$\{\alpha_2, \alpha_3\}$	

Οὕτω π.χ. ἀπὸ τὸ σύνολον μὲ τρία στοιχεῖα δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τρία ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα. Ἕκαστον δὲ τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν καλεῖται καὶ **«εἷς συνδυασμὸς τῶν τριῶν στοιχείων (πραγμάτων) ἀνὰ δύο».**

Γενικῶς: Καλοῦμεν **συνδυασμὸν** τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k, ἔνθα $k \leqq \nu$, κάθε ὑποσύνολον τοῦ Ε μὲ k στοιχεῖα.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου εἶναι φανερὸν ὅτι εἰς ἕνα συνδυασμὸν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k, ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν φύσιν τῶν ληφθέντων πραγμάτων, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τὴν θέσιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν μεταξύ των, ὅπως εἰς τὰς διατάξεις. Συνεπῶς δύο συνδυασμοὶ τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k εἶναι διαφορετικοὶ μόνον ὅταν δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ αὐτὰ πράγματα.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν διαφορετικῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k. Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\binom{\nu}{k}$ ἢ Σ_k^ν ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος:

Πρότασις.– Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!}} \tag{1}$$

Ἀπόδειξις: Ἂς καλέσωμεν x τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν ἀνὰ k. Ἐὰν εἰς ἕνα τυχόντα συνδυασμὸν τῶν ν ἀνὰ k, δηλ. ἐὰν εἰς ἓν τυχὸν ὑποσύνολον μὲ k στοιχεῖα τοῦ Ε ἐκτελέσωμεν πάσας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν στοιχείων του, αἱ ὁποῖαι, ὡς γνωστόν, εἶναι $k!$, θὰ προκύψουν $k!$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ k (διότι ἑκάστη ἐκ τῶν μεταθέσεων αὐτῶν περιέχει k στοιχεῖα ἐκ τῶν ν). Ἐὰν τοῦτο γίνῃ εἰς ὅλους τοὺς συνδυασμοὺς τῶν ν ἀνὰ k, ὧν τὸ πλῆθος ἐκαλέσαμεν x, θὰ προκύψουν: $x \cdot k!$ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ k.

Εἶναι δὲ αὗται πᾶσαι αἱ διατάξεις τῶν ν ἀνὰ k, διότι ἡ τυχοῦσα ἐξ αὐτῶν προέκυψεν ἀπὸ τὸν συνδυασμὸν τὸν ἔχοντα τὰ ἴδια πράγματα. Αἱ διατάξεις αὗται ἐξ ἄλλου εἶναι διάφοροι μεταξύ των, διότι ὅσαι μὲν προέκυψαν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουν κατὰ τὴν τάξιν τῶν πραγμάτων αὐτοῦ, ὅσαι δὲ προέκυψαν ἐκ διαφόρων συνδυασμῶν διαφέρουν κατὰ ἓν τοὐλάχιστον πρᾶγμα.

Συνεπῶς ἔχομεν : $\quad x \cdot k! = \Delta_k^\nu$

Ἀλλὰ (§ 237) : $\quad \Delta_k^\nu = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1).$

Ἄρα : $$x = \frac{\Delta_k^\nu}{k!} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} \qquad (2)$$

ἢ ἂν τεθῇ $x = \binom{\nu}{k}$ προκύπτει ὁ τύπος (1).

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10, \quad \binom{7}{4} = \Sigma_4^7 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ δεχόμεθα ὅτι :

$$\boxed{\binom{\nu}{0} = \binom{\nu}{\nu} = 1} \qquad (3)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τῆς (2) ἐπὶ τὸν ἀριθμόν : $(\nu-k)(\nu-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1$, ὅστις γράφεται καί : $(\nu-k)!$ ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$x = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)(\nu-k)(\nu-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1}{k!\,(\nu-k)(\nu-k-1)\cdots3\cdot2\cdot1} =$$
$$= \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}.$$

Μὲ ἄλλας λέξεις :

Πόρισμα.— Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!}} \qquad (4)$$

Ἐφαρμογαί : 1η : Δίδονται ἑπτὰ σημεῖα μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ εὐθείας. Πόσα τρίγωνα εἶναι δυνατὸν νὰ κατασκευασθοῦν, ἂν ἑνώσωμεν ταῦτα δι' εὐθειῶν.

Λύσις: Προφανῶς κατασκευάζονται τόσα τρίγωνα, ὅσοι εἶναι οἱ συνδυασμοὶ τῶν 7 πραγμάτων ἀνὰ 3. Οὕτως ἔχομεν :

$$\binom{7}{3} = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35 \text{ τρίγωνα.}$$

2α : Μία ἐκπαιδευτικὴ περιφέρεια πρόκειται νὰ συμμετάσχῃ εἰς μίαν ἑορταστικὴν ἐκδήλωσιν διὰ πενταμελοῦς ἀντιπροσωπείας. Ἐπελέγησαν ἀρχικῶς 4 μαθήτριοι καὶ 7 μαθηταί. Ἐκ τῶν 11 αὐτῶν ἀτόμων πόσας διαφορετικὰς πενταμελεῖς ὁμάδος δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν ὥστε νὰ περιέχωνται : α) 2 μαθήτριαι, β) τοὐλάχιστον δύο μαθήτριαι, γ) τὸ πολὺ δύο μαθήτριαι;

Λύσις: α). Αἱ δύο μαθήτριαι δύνανται νὰ ληφθοῦν ἀπὸ τὰς 4 ἐκλεγείσας κατὰ $\binom{4}{2}$ τρόπους, ἐνῷ οἱ 3 μαθηταί, οἱ ὁποῖοι θὰ συμπληρώσουν τὴν ὁμάδα, δύνανται νὰ ληφθοῦν ἀπὸ τοὺς 7 ἐκλεγέντας κατὰ $\binom{7}{3}$ τρόπους. Ἐὰν ἕκαστος τῶν πρώτων συνδυασμῶν συνδυασθῇ μὲ ἕκαστον τῶν δευτέρων θὰ ἔχωμεν :

$$x = \binom{4}{2}\binom{7}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 210.$$

β). Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἡ ὁμὰς θὰ περιέχῃ ἢ 2 μαθητρίας καὶ 3 μαθητὰς (ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι : $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3} = 210$), ἢ 3 μαθητρίας καὶ 2 μαθητὰς (ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι : $\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{2} = 4$), ἢ 4 μαθητρίας καὶ 1 μαθητὴν (ὅτε οἱ τρόποι σχηματισμοῦ εἶναι : $\binom{4}{4} \cdot \binom{7}{1} = 7$).

Ἄρα :

$$x = \binom{4}{2}\binom{7}{3} + \binom{4}{3}\binom{7}{2} + \binom{4}{4}\binom{7}{1} = 210 + 4 + 7 = 221.$$

γ). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἑκάστη ὁμὰς θὰ περιέχῃ ἢ 0 μαθητρίας καὶ 5 μαθητάς, ἢ 1 μαθήτριαν καὶ 4 μαθητὰς ἢ 2 μαθητρίας καὶ 3 μαθητάς. Σκεπτόμενοι ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν β) ἔχομεν :

$$x = \binom{4}{0}\binom{7}{5} + \binom{4}{1}\binom{7}{4} + \binom{4}{2}\binom{7}{3} = 1 \cdot 21 + 4 \cdot 35 + 210 = 371.$$

§ 240. Ἀξιοσημείωτοι ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν.— Ἐὰν εἰς ἓν ὑποσύνολον Α τοῦ Ε ἀνήκουν k στοιχεῖα, εἰς τὸ συμπληρωματικόν του Α' θὰ ἀνήκουν $\nu - k$ στοιχεῖα. Ἑπομένως εἰς ἑκάστην ἐκλογὴν ἑνὸς ὑποσυνόλου μὲ k στοιχεῖα ἀντιστοιχεῖ καὶ μία ἐκλογὴ τοῦ συμπληρωματικοῦ του συνόλου μὲ $(\nu - k)$ στοιχεῖα καὶ ἀντιστρόφως. Κατ' ἀκολουθίαν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὑποσυνόλων μὲ k στοιχεῖα ἐντὸς τοῦ Ε εἶναι ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν ὑποσυνόλων μὲ $\nu - k$ στοιχεῖα. Τοῦτο δὲ διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς :

Ἰδιότης I.—Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν ἀνὰ ν — k.

Ἤτοι :

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu - k}} \qquad (1)$$

Ἡ ἀλγεβρικὴ ἀπόδειξις εἶναι ἐπίσης εὔκολος.

Πράγματι :

$$\binom{\nu}{\nu - k} = \frac{\nu!}{(\nu - k)!\ [\nu - (\nu - k)]!} = \frac{\nu!}{(\nu - k)!\, k!} = \binom{\nu}{k}.$$

Παρατηρήσεις : α'). Ἐκ τοῦ τύπου $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu - k}$, $\begin{matrix} k = 0,1,2,\ldots,\nu \\ \nu - k = \nu,\ \ldots,1,0 \end{matrix}$

ἔχομεν προφανῶς : $(\nu - k) + k = \nu$ διὰ κάθε ν καὶ διὰ κάθε k. Μὲ ἄλλας λέξεις ἐὰν $\alpha + \beta = \nu$, τότε $\binom{\nu}{\alpha} = \binom{\nu}{\beta}$.

Οὕτως ἐκ τῆς $\binom{20}{k} = \binom{20}{k + 2}$, ἕπεται $k = 9$.

β'). Εἰς τὴν πρᾶξιν ἡ ἰδιότης I μᾶς δίδει τὴν δυνατότητα νὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ $\binom{\nu}{k}$ μόνον διὰ $k \leqq \frac{\nu}{2}$, διότι, ἂν $k > \frac{\nu}{2}$, τότε ὑπολογίζομεν τὸ $\binom{\nu}{\nu-k}$ ἀντὶ τοῦ $\binom{\nu}{k}$, καθόσον εἶναι τότε: $\nu - k < \frac{\nu}{2}$.

Οὕτω π.χ. $\binom{50}{46} = \binom{50}{4} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 230\,300.$

Ἰδιότης II.–Τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν — 1 πραγμάτων ἀνὰ k, ηὐξημένον κατὰ τὸ πλῆθος τῶν συνδυασμῶν τῶν ν — 1 πραγμάτων ἀνὰ k — 1.

Ἤτοι:
$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1}} \qquad (2)$$

Ἀπόδειξις. Ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς (2) ἔχομεν:

$$\binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1} = \frac{(\nu-1)!}{k!\,(\nu-1-k)!} + \frac{(\nu-1)!}{(k-1)!\,(\nu-1-k+1)!} =$$
$$= \frac{(\nu-1)!}{(k-1)!\,(\nu-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\nu-k}\right) =$$
$$= \frac{(\nu-1)!}{(k-1)!\,(\nu-k-1)!} \cdot \frac{\nu}{k(\nu-k)} = \frac{\nu!}{k!\,(\nu-k)!} = \binom{\nu}{k}. \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἰδιότης III.– Ἰσχύει:

$$\boxed{\binom{\nu}{k+1} = \binom{\nu}{k} \cdot \frac{\nu-k}{k+1}} \qquad (3)$$

Πράγματι:
$$\binom{\nu}{k+1} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)\,(\nu-k)}{1\cdot 2\cdots k\cdot(k+1)} = \binom{\nu}{k} \cdot \frac{(\nu-k)}{k+1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

546. Ὑπολογίσατε τούς: $\binom{12}{7}$, $\binom{15}{5}$, $\binom{11}{8}$, $\binom{13}{9}$, $\binom{9}{7}$.

547. Δείξατε ὅτι: $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$.

548. Ἐὰν $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ $\binom{k}{5}$.

549. Ἐὰν $\binom{2\nu}{3} : \binom{\nu}{2} = 44 : 3$, νὰ εὑρεθῇ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν.

550. Ἐὰν $\Delta_k^\nu = 3024$ καὶ $\binom{\nu}{k} = 126$, νὰ εὑρεθῇ ὁ k.

551. Πόσα ὑποσύνολα μὲ k στοιχεῖα, ἐξ ὧν 2 στοιχεῖα εἶναι ὡρισμένα, ὑπάρχουν εἰς ἕνα σύνολον μὲ ν στοιχεῖα ($\nu \geqq 5$); Ὁμοίως μὲ 3 ὡρισμένα στοιχεῖα; Ὁμοίως μὲ 4;

552. Πόσαι 5–αδες χαρτιῶν ἀπὸ μίαν δέσμην 52 παιγνιοχάρτων δύνανται νὰ περιέχουν 4 ἄσσους;

(**Ὑπόδειξις**: Λάβετε ὑπ' ὄψιν τὴν προηγουμένην ἄσκησιν).

§ 241. Ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοί.— Ἔστωσαν ν διαφορετικὰ πράγματα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ τὰ ὁποῖα θεωροῦνται στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου Ε.

Καλοῦμεν **ἐπαναληπτικὸν συνδυασμὸν** τῶν ν αὐτῶν πραγμάτων ἀνὰ k κάθε συνδυασμὸν εἰς τὸν ὁποῖον ἕκαστον στοιχεῖον (πρᾶγμα) δύναται νὰ ἐπαναλαμβάνεται τὸ πολὺ k φοράς.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τώρα δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἢ $k \leqq \nu$ ἢ $k > \nu$.

Ὅπως εἰς τοὺς ἁπλοὺς συνδυασμοὺς οὕτω καὶ εἰς τοὺς ἐπαναληπτικοὺς ἐνδιαφερόμεθα μόνον διὰ τὴν φύσιν τῶν ληφθέντων στοιχείων εἰς ἕκαστον συνδυασμόν, οὐχὶ δὲ διὰ τὰς θέσεις, ἃς ἔχουν ταῦτα μεταξύ των. Ἑπομένως δύο ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ θὰ θεωροῦνται διαφορετικοὶ ἐφ' ὅσον διαφέρουν κατὰ τὴν φύσιν ἑνὸς τοὐλάχιστον στοιχείου ποὺ περιέχουν. Οὕτως οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἀνὰ δύο εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\begin{array}{lll} \alpha_1\alpha_1, & \alpha_1\alpha_2, & \alpha_1\alpha_3 \\ & \alpha_2\alpha_2, & \alpha_2\alpha_3 \\ & & \alpha_3\alpha_3. \end{array}$$

Ὁμοίως, οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν α_1, α_2 ἀνὰ τρία εἶναι οἱ ἑξῆς :

$$\alpha_1\alpha_1\alpha_1, \qquad \alpha_1\alpha_1\alpha_2, \qquad \alpha_1\alpha_2\alpha_2, \qquad \alpha_2\alpha_2\alpha_2,$$

δηλ. κάθε συνδυασμὸς (ἐπαναληπτικὸς) ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 στοιχεῖα, ἐκ τῶν ὁποίων τὰ δύο ἢ καὶ τὰ τρία δύνανται νὰ εἶναι τὰ αὐτά.

Θὰ ὑπολογίσωμεν ἤδη τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ k. Διὰ τὸ πλῆθος τοῦτο, ὅπερ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $\mathscr{E}_k^\nu$, ἰσχύει ἡ ἀκόλουθος :

Π ρ ό τ α σ ι ς.— Τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν ν διαφόρων μεταξύ των πραγμάτων ἀνὰ k, ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν συνδυασμῶν τῶν ν + k − 1 πραγμάτων ἀνὰ k.

Ἤτοι :

$$\boxed{\mathscr{E}_k^\nu = \Sigma_k^{\nu+k-1} = \binom{\nu+k-1}{k}} \tag{1}$$

Ἀπόδειξις. Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν ν ἀνὰ ἓν εἶναι ὅσα καὶ τὰ πράγματα, ἤτοι: $\mathscr{E}_1^\nu = \nu$.

Ὑποθέσωμεν ὅλους τοὺς ἐπαναληπτικοὺς συνδυασμοὺς τῶν ν ἀνὰ k, γεγραμμένους εἰς ἕνα πίνακα. Εἰς αὐτὸν θὰ εὕρωμεν, κατὰ δύο τρόπους, πόσας φορὰς ἐμφανίζεται τὸ ἓν ἐκ τῶν δοθέντων πραγμάτων, π.χ. τὸ α_1.

α'). Ἕκαστος ἐπαναληπτικὸς συνδυασμὸς περιέχει k πράγματα, ὅλοι οἱ ὑπ' ὄψιν συνδυασμοὶ θὰ περιέχουν $k \cdot \mathscr{E}_k^\nu$ πράγματα. Δοθέντος δὲ ὅτι τὰ ν διαφορετικὰ πράγματα ἐμφανίζονται ἰσάκις εἰς τὸν πίνακα, ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ἄρα καὶ τὸ α_1, ἐμφανίζεται :

$$\frac{k \cdot \mathscr{E}_k^\nu}{\nu} = \frac{k}{\nu} \mathscr{E}_k^\nu \text{ φοράς.} \tag{2}$$

β'). Τοὺς συνδυασμοὺς τοῦ πίνακος διακρίνομεν εἰς δύο κατηγορίας: εἰς τοὺς περιέχοντας τὸ στοιχεῖον α_1 καὶ εἰς τοὺς μὴ περιέχοντας αὐτό. Θὰ εὕρωμεν τώρα καὶ κατ' ἄλλον τρόπον πόσας φορὰς τὸ α_1 περιέχεται εἰς τὸν πίνακα τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν. Θεωροῦμεν τοὺς ἐπαναληπτικοὺς συνδυασμοὺς οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ α_1. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτοὺς ἕνα μόνον ἀπὸ τὰ α_1, τὰ ὁποῖα περιέχουν, τότε αὐτοὶ θὰ περιέχουν $k-1$ πράγματα καὶ θὰ εἶναι ὅλοι οἱ ἐπαναληπτικοὶ συνδυασμοὶ τῶν ν πραγμάτων ἀνὰ $k-1$, ἤτοι θὰ εἶναι πλήθους $\mathscr{E}_k^\nu$ καὶ συνεπῶς κατὰ τὴν α΄) τὸ στοιχεῖον α_1 θὰ ἐμφανίζεται : $\dfrac{k-1}{\nu}\mathscr{E}_{k-1}^\nu$ φοράς. Ἐὰν τώρα εἰς τὸ πλῆθος $\dfrac{k-1}{\nu}\mathscr{E}_{k-1}^\nu$ τῶν α_1 προσθέσωμεν τὸ πλῆθος τῶν ἀφαιρεθέντων α_1, τὸ ὁποῖον εἶναι $\mathscr{E}_{k-1}^\nu$ (διότι ἑκάστη ἀφαίρεσις τοῦ α_1 ἔδωσε ἕνα ἐπαναληπτικὸν συνδυασμὸν τῶν ν ἀνὰ $k-1$), εὑρίσκομεν πόσας φορὰς ἐμφανίζεται τὸ α_1 εἰς τὸν πίνακα, ἤτοι ἐπανευρίσκομεν τὸν ἀριθμόν, ὅστις παρέχεται ὑπὸ τῆς ἐκφράσεως (2).

Ἐξισοῦντες τὰς δύο ἐκφράσεις ἔχομεν :

$$\frac{k}{\nu}\mathscr{E}_k^\nu = \frac{k-1}{\nu}\mathscr{E}_{k-1}^\nu + \mathscr{E}_{k-1}^\nu.$$

Ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὁ ἀναγωγικὸς τύπος :

$$\mathscr{E}_k^\nu = \frac{\nu+k-1}{k}\cdot\mathscr{E}_{k-1}^\nu. \tag{3}$$

Ἐφαρμόζοντες αὐτὸν διὰ $k = 2, 3, \dots, k$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς προκυπτούσας ἰσότητας κατὰ μέλη, μετὰ τὰς ἁπλοποιήσεις εὑρίσκομεν :

$$\mathscr{E}_k^\nu = \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}. \tag{4}$$

Ἐὰν εἰς τὴν (4) θέσωμεν : $\nu+k-1=\mu$, ὅτε εἶναι $\nu=\mu-k+1$, εὑρίσκομεν :

$$\mathscr{E}_k^\nu = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k} = \Sigma_k^\mu.$$

ἢ

$$\mathscr{E}_k^\nu = \Sigma_k^{\nu+k-1} = \binom{\nu+k-1}{k}.$$

Ἡ πρότασις ὅθεν ἀπεδείχθη.

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$\mathscr{E}_3^6 = \Sigma_3^{6+3-1} = \binom{8}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = 56.$$

Ἐφαρμογή: Πόσους ὅρους ἔχει ἓν πλῆρες ὁμογενὲς πολυώνυμον πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y, z;

Λύσις: Οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου θὰ εἶναι τῆς μορφῆς : $x^k y^\lambda z^\mu$, ἔνθα $k+\lambda+\mu=5$. Ἀλλὰ ἕκαστος ὅρος εἶναι εἷς ἐπαναληπτικὸς συνδυασμὸς τῶν τριῶν γραμμάτων x, y, z ἀνὰ 5 (π.χ. $xy^3z = xyyyz$, $x^3y^2 = xxxyy, \dots$)

Ἄρα τὸ ζητούμενον πλῆθος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἐπαναληπτικῶν συνδυασμῶν τῶν 3 πραγμάτων ἀνὰ 5, ἤτοι :

$$\mathscr{E}_5^3 = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7\cdot6}{1\cdot2} = 21.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

553. Πόσα ἀκέραια μονώνυμα τῆς μορφῆς $\alpha^k\beta^\lambda\gamma^\mu$ τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς ὅλα ὁμοῦ τὰ γράμματα α, β, γ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν;

554. Ἐὰν $\Delta_4^\nu = 840$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ἀριθμός : $\mathscr{E}_3^\nu$.

555. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+2}$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ Σ_5^ν καὶ $\mathscr{E}_5^\nu$.

556. Νὰ ἀποδειχθῇ, διὰ τῆς θεωρίας τῶν συνδυασμῶν, ὅτι τὸ γινόμενον ν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου : $1\cdot2\cdot3\cdots\nu$.

557. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος ν κορυφάς.

558. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $\binom{\nu}{k} + 2\binom{\nu}{k-1} + \binom{\nu}{k-2} = \binom{\nu+2}{k}$, β) $\left(\frac{\nu+1}{k} - 1\right)\binom{\nu}{k-1} = \binom{\nu}{k}$.

559. Δείξατε ὅτι :

$$1 + \sum_{k=1}^{5} \binom{5}{k} = 2^5.$$

560. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α) $\binom{\nu}{\rho+1} - \binom{\nu}{\rho-1} = \dfrac{(\nu+1)!\,(\nu-2\rho)}{(\rho+1)!\,(\nu-\rho+1)!}$,

β) $\binom{\nu}{\rho} + 2\binom{\nu}{\rho-1}\binom{\nu}{\rho-2} = \binom{\nu+2}{\rho}$.

§ 242. Τὸ διωνυμικὸν θεώρημα.— Ἡ ἑπομένη πρότασις φέρουσα τὸ ὄνομα τοῦ Newton(*) ἀποτελεῖ τὸ διωνυμικὸν θεώρημα, τὸ ὁποῖον δίδει τὴν γενικὴν ἔκφρασιν τοῦ ἀναπτύγματος $(x+\alpha)^\nu$.

Π ρ ό τ α σ ι ς.— Διὰ κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x, α καὶ διὰ κάθε $\nu \in N$, ἰσχύει ὁ τύπος (τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος) :

$$\boxed{\begin{aligned}(x+\alpha)^\nu = \binom{\nu}{0}x^\nu + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 + \cdots + \binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^k + \cdots\\ \cdots + \binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu\end{aligned}} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις. Ἡ πρότασις προφανῶς ἀληθεύει διὰ $\nu = 1$.

Ἔστω ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = k$, τότε :

$$(x+\alpha)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}\alpha + \binom{k}{2}x^{k-2}\alpha^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}x\alpha^{k-1} + \binom{k}{k}\alpha^k$$

καὶ $(x+\alpha)^{k+1} = (x+\alpha)^k \cdot (x+\alpha) = \left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}\alpha + \cdots + \binom{k}{k-1}x\alpha^{k-1} +\right.$

$$\left.+\binom{k}{k}\alpha^k\right]\cdot(x+\alpha) = \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k\cdot\alpha + \cdots + \binom{k}{k-1}x^2\alpha^{k-1} + \binom{k}{k}x\alpha^k +$$

$$+\binom{k}{0}x^k\alpha + \cdots + \binom{k}{k-2}x^2\alpha^{k-1} + \binom{k}{k-1}x\alpha^k + \binom{k}{k}\alpha^{k+1} =$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]x^k\alpha + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]x\alpha^k + \binom{k}{k}\alpha^{k+1}.$$

Ἐπειδὴ ὅμως (§ 240, β) :

$$\binom{\nu-1}{k} + \binom{\nu-1}{k-1} = \binom{\nu}{k}, \text{ διὰ κάθε } k \text{ μέ : } 0 \leqq k \leqq \nu$$

καὶ (§ 239) :

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}, \quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1},$$

ἔχομεν τελικῶς :

$$(x+\alpha)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k\alpha + \binom{k+1}{2}x^{k-1}\alpha^2 + \cdots +$$

$$+ \binom{k+1}{k}x\alpha^k + \binom{k+1}{k+1}\alpha^{k+1}.$$

---

* Isaak Newton (1642 - 1727) διάσημος Ἄγγλος μαθηματικός, φυσικὸς καὶ φιλόσοφος.

ἤτοι ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ διὰ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν $k+1$, ἑπομένως, δυνάμει τῆς ἀρχῆς τῆς τελείας ἐπαγωγῆς, αὐτὴ ἰσχύει διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν.

Ὁ τύπος (1) τοῦ διωνύμου γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{(x+\alpha)^{\nu}=\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^{k}} \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ (§ 239) εἶναι : $\binom{\nu}{1}=\nu,\quad \binom{\nu}{2}=\dfrac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2},\ldots,$

$$\binom{\nu}{k}=\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{1\cdot 2\cdots k},$$

ὁ τύπος (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω:

$$\boxed{(x+\alpha)^{\nu}=x^{\nu}+\nu x^{\nu-1}\alpha+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}x^{\nu-2}\alpha^{2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{\nu-3}\alpha^{3}+\cdots+\alpha^{\nu}} \tag{3}$$

Κατὰ ταῦτα εἶναι :

$$(x+\alpha)^6=x^6+6x^5\alpha+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4\cdot\alpha^2+\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\alpha^3+\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^2\alpha^4+6x\alpha^5+\alpha^6=$$

$$=x^6+6x^5\alpha+15x^4\alpha^2+20x^3\alpha^3+15x^2\alpha^4+6x\alpha^5+\alpha^6.$$

Παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου : α΄). *Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ* $(x+\alpha)^{\nu}$ *εἶναι ἓν πλῆρες ὁμογενὲς πολυώνυμον, ν βαθμοῦ, διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καὶ τὰς ἀνιούσας τοῦ α. Εἰς ἕκαστον ὅρον τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ x καὶ α εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς ν.*

β΄). *Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι* $\nu+1$, διότι ὑπάρχουν πᾶσαι αἱ δυνάμεις τοῦ x ἀπὸ τῆς μηδενικῆς μέχρι τῆς ν—οστῆς.

γ΄). *Οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ* $(x+\alpha)^{\nu}$ *, οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες τῶν ἄκρων, ἔχουν ἴσους συντελεστάς.* Τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἀπὸ τὸν τύπον (1) τῆς § 240, δεδομένου ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι κατὰ σειράν :

$$\binom{\nu}{0}\binom{\nu}{1}\binom{\nu}{2}\cdots\binom{\nu}{k}\cdots\binom{\nu}{\nu-k}\cdots\binom{\nu}{\nu-2}\binom{\nu}{\nu-1}\binom{\nu}{\nu}.$$

δ΄). *Ὁ ὅρος τάξεως λ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ* $(x+\alpha)^{\nu}$ *εἶναι ὁ :*

$$\binom{\nu}{\lambda-1}x^{\nu-\lambda+1}\cdot\alpha^{\lambda-1}.$$

Τοῦτο προκύπτει ἀπὸ τὴν διάταξιν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος, καθ' ἣν βλέπομεν ὅτι ὁ 1ος ὅρος ἔχει συντελεστὴν $\binom{\nu}{0}$, ὁ 2ος: $\binom{\nu}{1}$, ὁ 3ος: $\binom{\nu}{2}$ καὶ ὁ λ^ος^ ἔχει συντελεστὴν $\binom{\nu}{\lambda-1}$.

ε΄). *Ἐὰν ν ἄρτιος, ἴσος πρὸς 2μ, τότε τὸ πλῆθος ν + 1 τῶν ὅρων εἶναι περιττὸν καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ὅρος μὲ μέγιστον συντελεστήν. Ὁ ὅρος οὗτος καλεῖται* **μεσαῖος ὅρος** *καὶ εἶναι τάξεως* $\frac{\nu}{2} + 1 = \mu + 1$, *εἶναι δὲ ὁ :* $\binom{\nu}{\mu} x^{\mu} \cdot \alpha^{\mu}$.

στ΄). *Ἐὰν ν περιττὸς καὶ ἴσος πρὸς 2μ + 1, τότε τὸ πλῆθος ν + 1 τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος* $(x+\alpha)^{\nu}$ *εἶναι ἄρτιον καὶ συνεπῶς* **ὑπάρχουν δύο «μεσαῖοι» ὅροι** *(οἱ ἔχοντες μεγίστους συντελεστάς). Οὗτοι εἶναι οἱ :*

$$\binom{\nu}{\mu} x^{\mu+1}\alpha^{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \binom{\nu}{\mu+1} x^{\mu}\alpha^{\mu+1}$$

καὶ ἔχουν ἴσους συντελεστάς.

Ἐφαρμογαί : 1η : Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεσαῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(2x - x^2)^{12}$.

Λύσις : Τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι : $12 + 1 = 13$, ἑπομένως ὁ μεσαῖος ὅρος εἶναι ὁ $\frac{\nu}{2} + 1 = 7$ος, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι :

$$\binom{12}{6}(2x)^6 \cdot (-x^2)^6 = 59136\, x^{18}.$$

2α : Νὰ εὑρεθῇ, ἐὰν ὑπάρχῃ, ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος εἰς τὸ ἀνάπτυγμα :

$$\left(2x^3 + \frac{3}{x}\right)^{16}.$$

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ ὡς ἄνω ἀναπτύγματος εἶναι :

$$\binom{16}{k}(2x^3)^{16-k} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^k = \binom{16}{k} 2^{16-k} \cdot 3^k \cdot x^{48-4k}$$

Διὰ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x θὰ πρέπει : $48 - 4k = 0$, ἐξ οὗ : $k = 12$.
Ἄρα ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι ὁ 13ος, ὅστις εἶναι :

$$\binom{16}{12} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \binom{16}{4} \cdot 2^4 \cdot 3^{12} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 2^4 \cdot 3^{12} = 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 2^6 \cdot 3^{12}.$$

3η : Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ x^{12} εἰς τὸ ἀνάπτυγμα : $(2x^3 + \alpha)^{17}$.

Λύσις : Ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι :

$$\binom{17}{k}(2x^3)^{17-k} \cdot \alpha^k = \binom{17}{k} 2^{17-k} \cdot x^{3(17-k)} \cdot \alpha^k.$$

Ἵνα ὁ x εὑρίσκεται ὑψωμένος εἰς τὴν 12ην πρέπει : $3(17 - k) = 12$ ἢ $k = 13$.
Ἄρα ὁ συντελεστὴς τοῦ x^{12} εἶναι :

$$\binom{17}{13} \cdot 2^4 = \binom{17}{4} \cdot 2^4 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16 = 38080.$$

§ 243. Ἰδιότητες τῶν διωνυμικῶν συντελεστῶν.– α΄). Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου § 242 θέσωμεν $x = 1$, $\alpha = 1$, λαμβάνομεν :

$$\boxed{\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \cdots + \binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu}} \qquad (1)$$

Ὁ τύπος (1) γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} = 2^{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \sum_{k=1}^{\nu} \binom{\nu}{k} = 2^{\nu} - 1. \qquad (2)$$

Πόρισμα.— Ἀπὸ κάθε σύνολον τὸ ὁποῖον περιέχει ν στοιχεῖα, σχηματίζονται 2^ν ἀκριβῶς ὑποσύνολα.

Πράγματι, ὑπάρχουν $\binom{\nu}{0}$ ὑποσύνολα μὲ 0 στοιχεῖα, $\binom{\nu}{1}$ ὑποσύνολα μὲ ἓν στοιχεῖον, $\binom{\nu}{2}$ ὑποσύνολα μὲ δύο στοιχεῖα, κ.ο.κ. Τὸ ὁλικὸν πλῆθος τῶν ὑποσυνόλων αὐτῶν εἶναι, λόγῳ καὶ τῆς 1 :

$$\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}=2^\nu .$$

β′). Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 242 θέσωμεν $x=1$, $\alpha=-1$, λαμβάνομεν :

$$\boxed{\binom{\nu}{1}+\binom{\nu}{3}+\binom{\nu}{5}+\cdots=\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{2}+\binom{\nu}{4}+\cdots=2^{\nu-1}} \tag{3}$$

γ′). Ἐὰν τὴν ταυτότητα : $(1+x)^{2\nu}\equiv(1+x)^\nu\cdot(x+1)^\nu$ γράψωμεν ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$\binom{2\nu}{0}+\binom{2\nu}{1}x+\binom{2\nu}{2}x^2+\cdots+\binom{2\nu}{\nu}x^2+\cdots+\binom{2\nu}{2\nu}x^{2\nu}\equiv$$

$$\equiv\left\{\binom{\nu}{0}+\binom{\nu}{1}x+\binom{\nu}{2}x^2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}x^\nu\right\}\cdot\left\{\binom{\nu}{0}x^\nu+\binom{\nu}{1}x^{\nu-1}+\right.$$

$$\left.+\binom{\nu}{2}x^{\nu-2}+\cdots+\binom{\nu}{\nu}\right\}$$

καὶ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x^ν εἰς τὰ δύο μέλη, λαμβάνομεν :

$$\boxed{\binom{\nu}{0}^2+\binom{\nu}{1}^2+\binom{\nu}{2}^2+\cdots+\binom{\nu}{\nu}^2=\binom{2\nu}{\nu}} \tag{4}$$

Ἡ (4) γράφεται συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}^2=\binom{2\nu}{\nu}.$$

* § 244. Μία ἀξιόλογος ἐφαρμογὴ τοῦ διωνυμικοῦ τύπου.

Ἔστω ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$, $\nu=1,2,\ldots$

Αὐτή, ὡς θὰ δείξωμεν, εἶναι γνησίως αὔξουσα καὶ φραγμένη, ὁπότε κατὰ τὸ ἀξίωμα (§ 150) συγκλίνει ἐν $\mathbf{R}$.

Πράγματι, ἐὰν εἰς τὸν τύπον (1) τῆς § 242 θέσωμεν $x=1$, $\alpha=\frac{1}{\nu}$, τότε ἔχομεν :

$$\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu=1+\frac{\nu}{1}\,\frac{1}{\nu}+\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot2}\,\frac{1}{\nu^2}+\cdots+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\cdot\frac{1}{\nu^k}+$$

$$+\cdots+\frac{1}{\nu^\nu}.$$

Ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος γράφεται :

$$\frac{\nu(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}\cdot\frac{1}{\nu^k}=\frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right).$$

Ὅθεν :

$$\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right)+\cdots+\frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

καὶ

$$\alpha_{\nu+1}=\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\left(1-\frac{2}{\nu+1}\right)+$$

$$\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu+1}\right)+\cdots+\frac{1}{(\nu+1)!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\left(1-\frac{2}{\nu+1}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{\nu}{\nu+1}\right),$$

ὅπου οἱ ὅροι εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\alpha_{\nu+1}$ εἶναι κατὰ μονάδα περισσότεροι ἐκείνων τοῦ α_ν. Ἂν συγκρίνωμεν εἰς τὰ ἀναπτύγματα τῶν α_ν, $\alpha_{\nu+1}$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἔπειτα τοὺς δύο δευτέρους κ.ο.κ. βλέπομεν, ὅτι διὰ $2\leqq k\leqq\nu$ οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλύτεροι, διότι :

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right)<\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu+1}\right).$$

Ἐξ ἄλλου ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\alpha_{\nu+1}$, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἀντίστοιχον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ α_ν, δηλ. ὁ $\dfrac{1}{(\nu+1)^{\nu+1}}$ εἶναι >0.

Ὥστε εἶναι :

$$\alpha_\nu<\alpha_{\nu+1}\quad\text{διὰ}\quad\nu=1,2,3,\ldots$$

ἤτοι : ἡ ἀκολουθία α_ν, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Αὐτὴ εἶναι καὶ φραγμένη. Ἓν ἄνω φράγμα διὰ τὴν ἀκολουθίαν α_ν, $\nu=1,2\ldots$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, διότι :

$$\alpha_\nu=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)+\cdots+\frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)\leqq 1+$$

$$+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}.$$

Ἰσχύει ὅμως :

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots k}<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^{k-2}}=\frac{1}{2^{k-1}}\quad\text{διὰ}\quad k=3,4,\ldots$$

ὅθεν :

$$\alpha_\nu\leqq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{\nu!}<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{\nu-1}}\right)=$$

$$=1+\frac{1-2^{-\nu}}{1-\dfrac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2}}=3.$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli ἔχομεν :

$$\alpha_\nu=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu\geqq 1+\nu\cdot\frac{1}{\nu}=1+1=2\quad\forall\quad\nu=1,2,\ldots$$

Ἤτοι τελικῶς :

$$2 < \alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu < 3$$

(διότι τὸ 2 εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς αὐξούσης ἀκολουθίας α_ν , ἤτοι $\alpha_1 = 2$).

Ἡ α_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὅθεν γνησίως αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία, συνεπῶς συγκλίνει. Καλοῦμεν :

$$e = \underset{\text{ορσ}}{\lim}\, \alpha_\nu \equiv \lim \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu.$$

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισθεὶς ἀριθμὸς e παίζει σπουδαῖον ρόλον εἰς τὴν Ἀνάλυσιν καὶ γενικῶς τὰ Μαθηματικά, σπουδαιότερον ἀκόμη καὶ αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ π (σταθεροῦ λόγου τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ), συνδέονται δὲ μεταξύ των διὰ σχέσεως, ὥστε, ἂν ὁρισθῇ ὁ εἷς νὰ ὁρίζεται καὶ ὁ ἄλλος· ὁ συμβολισμὸς μὲ τὸ λατινικὸν γράμμα «e» εἰσήχθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Euler (1707 – 1783) τὸ 1736.

Δίδομεν κατωτέρω τὰ 20 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ e κατὰ τὴν παράστασιν τούτου ὡς δεκαδικῆς σειρᾶς :

$$e = 2,\ 71828\ 1828\ 4590\ 4523\ 536\ldots$$

Ὁ ἀριθμὸς e *δὲν εἶναι ρητός*· εἶναι δὲ εἷς *ὑπερβατικὸς* ἀριθμὸς (§ 55).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

561. Ἀναπτύξατε τὴν παράστασιν $(x + 3y)^6$ καὶ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ ἀναπτύγματος ὑπολογίσατε τὸ $(1{,}03)^6$ μὲ ἀκρίβειαν 5 δεκαδικῶν ψηφίων.

562. Δείξατε ὅτι :

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4.$$

563. Εὕρετε τὸν ὅρον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\left(2x^2 - \frac{1}{2}y^3\right)^8$, ὁ ὁποῖος περιέχει τὸ x^8.

564. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀνεξάρτητος τοῦ x ὅρος τῶν κάτωθι ἀναπτυγμάτων :

$$\alpha)\ \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^{12}, \qquad \beta)\ \left(\frac{9x^3 - 2}{6x}\right)^9.$$

565. Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου x^{18} εἰς τὸ ἀνάπτυγμα : $(x + 2x^2)^{10}$.

566. Ὑπάρχει εἰς τὸ ἀνάπτυγμα $\left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3x}\right)^9$ ὅρος ἀνεξάρτητος τοῦ x καὶ ποῖος;

567. Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες :

$$\alpha).\ \binom{\nu}{0} + 2\binom{\nu}{1} + 2^2\binom{\nu}{2} + \cdots + 2^\nu\binom{\nu}{\nu} = 3^\nu$$

$$\beta).\ \binom{\nu}{1} + 2\binom{\nu}{2} + 3\binom{\nu}{3} + \cdots + \nu\binom{\nu}{\nu} = \nu \cdot 2^{\nu-1}$$

$$\gamma).\ 1 + 2\binom{\nu}{1} + 3\binom{\nu}{2} + \cdots + (\nu+1)\binom{\nu}{\nu} = 2^\nu + \nu \cdot 2^{\nu-1}$$

$$\delta).\ 1 + \frac{1}{2}\cdot\binom{\nu}{1} + \frac{1}{3}\cdot\binom{\nu}{2} + \cdots + \frac{1}{\nu+1}\binom{\nu}{\nu} = \frac{1}{\nu+1}\cdot(2^{\nu+1} - 1).$$

568. Ἐὰν $\nu \in \mathbf{N}$ καὶ $\nu > 1$, δείξατε ὅτι :

$$\binom{2\nu}{\nu} > \frac{4^\nu}{2\sqrt{\nu}}.$$

(**Ὑπόδειξις :** Ἐφαρμόσατε τὴν μέθοδον τῆς τελείας ἐπαγωγῆς).

569. Ἐὰν $\nu \in \mathbf{N}$, $\nu \neq 1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^\nu > \nu! > (\nu+1)^{\frac{\nu-1}{2}}.$$

§ 245. Εἰσαγωγικαὶ Ἔννοιαι – Ὁρισμοί.– Θεωροῦμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 &= \beta_2, \end{aligned} \qquad (\Sigma)$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ α_{ij} τῶν ἀγνώστων x_j , ὡς καὶ οἱ γνωστοὶ ὅροι β_i , εἶναι τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $(i, j = 1, 2)$. Ἂς φαντασθῶμεν τώρα τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων ἀναγεγραμμένους εἰς ὀρθογώνιον παράταξιν τῆς μορφῆς :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Τὴν ὀρθογώνιον ταύτην παράταξιν καλοῦμεν **πίνακα** *τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων*. Ἐὰν εἰς τὴν ὀρθογώνιον παράταξιν (1) συμπεριλάβωμεν καὶ τοὺς σταθεροὺς ὅρους, τότε θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{pmatrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

τὸν ὁποῖον καλοῦμεν *πίνακα ὅλων τῶν συντελεστῶν* ἢ *ἐπηυξημένον πίνακα.*

Ὁ πίναξ (2) ἔχει δύο *γραμμὰς* καὶ 3 *στήλας*, εἶναι, ὡς λέγομεν, εἷς 2×3 πίναξ.

Κατόπιν τῆς ἐνορατικῆς ταύτης εἰσαγωγῆς εἰς τὴν ἔννοιαν τοῦ πίνακος δίδομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμόν :

Καλοῦμεν **πίνακα** ἢ **μήτρα (matrix)** *μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας, καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ* $A_{\mu\times\nu}$ *ἢ ἁπλῶς μὲ A, μίαν ὀρθογώνιον (εἴτε τετραγωνικὴν) παράταξιν ἀριθμῶν* α_{ij} $(i = 1,2, \ldots, \mu,\ j = 1,2, \ldots, \nu)$, $\alpha_{ij} \in \mathbf{R}$ *ἢ γενικώτερον* $\alpha_{ij} \in \mathbf{C}$, ἤτοι :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Ὁ ἀνωτέρω πίναξ συμβολίζεται ἐπίσης καὶ ὡς $[\ \alpha_{ij}\ ]$, $i = 1,2,\ldots,\mu$, $j = 1,2, \ldots, \nu$ ἢ $[\ \alpha_{ij}\ ]_{\mu,\nu}$ ἢ ἁπλῶς $[\ \alpha_{ij}\ ]$.

Αἱ μ ὁριζόντιαι ν–άδες :

$$(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1\nu}),\ (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2\nu}),\ \ldots,\ (\alpha_{\mu 1}, \alpha_{\mu 2}, \ldots, \alpha_{\mu\nu})$$

εἶναι αἱ *γραμμαὶ* τοῦ πίνακος, καὶ αἱ ν κατακόρυφοι μ–άδες :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 1} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu 2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \vdots \\ \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

εἶναι αἱ *στῆλαι* αὐτοῦ.

Οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν καλοῦνται *διαστάσεις τοῦ πίνακος* καὶ εἰδικώτερον ὁ μὲν ἀριθμὸς μ, ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν γραμμῶν, καλεῖται «*ὕψος*» τοῦ πίνακος, ὁ δὲ ἀριθμὸς ν, ὅστις φανερώνει τὸ πλῆθος ὅλων τῶν στηλῶν, καλεῖται «*μῆκος*» αὐτοῦ. Εἷς πίναξ μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας καλεῖται εἷς μ *ἐπὶ* ν πίναξ ἢ πίναξ διαστάσεων $\mu \times \nu$. Οὕτως, ὁ πίναξ (1) εἶναι διαστάσεων 2×2, ἐνῷ ὁ πίναξ (2) εἶναι διαστάσεων 2×3. Οἱ ἀριθμοὶ α_{ij} καλοῦνται *στοιχεῖα* τοῦ πίνακος. Τὸ στοιχεῖον α_{ij} καλεῖται ἡ «*ij—συντεταγμένη*» καὶ ἐμφανίζεται εἰς τὴν i—γραμμὴν καὶ j—στήλην. Ὁ πρῶτος δείκτης **i** τοῦ στοιχείου α_{ij}, ἐπειδὴ φανερώνει τὴν γραμμήν, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ στοιχεῖον καλεῖται *δείκτης γραμμῆς*, ὁ δὲ δεύτερος δείκτης j, ἐπειδὴ φανερώνει τὴν στήλην καλεῖται *δείκτης στήλης*. Ἐὰν εἶναι $\mu = 1$, δηλαδὴ ἂν ὁ πίναξ (3) ἔχῃ μίαν μόνον γραμμήν, τότε λέγεται «*πίναξ—γραμμή*», ἐνῷ ἐὰν εἶναι $\nu = 1$, δηλ. ἂν ὁ πίναξ ἔχῃ μίαν μόνον στήλην, τότε λέγεται «*πίναξ—στήλη*». Εἰς τοιούτους πίνακας γράφομεν τὰ στοιχεῖα των συνήθως μὲ ἕνα δείκτην, ὅστις δηλοῖ ἀντιστοίχως τὴν στήλην ἢ τὴν γραμμήν, ἤτοι γράφομεν :

$$A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \quad \text{ἢ} \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_\mu \end{bmatrix} \tag{4}$$

Ἐὰν εἶναι $\mu = \nu$, δηλαδὴ ὅταν τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν συμπίπτῃ μὲ τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν ἑνὸς πίνακος, τότε οὗτος καλεῖται **τετραγωνικὸς πίναξ διαστάσεως ν.**

Τὰ στοιχεῖα : $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{\nu\nu}$ τοῦ τετραγωνικοῦ πίνακος

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \ldots & \alpha_{\nu\nu} \end{bmatrix} \tag{5}$$

λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὴν *πρωτεύουσαν διαγώνιον* αὐτοῦ, καὶ τὰ στοιχεῖα : $\alpha_{1\nu}, \alpha_{2,\nu-1}, \ldots, \alpha_{\nu 1}$, τὴν *δευτερεύουσαν διαγώνιον* αὐτοῦ.

Ἐὰν $\mu = \nu = 1$, δηλαδὴ ἂν ὁ πίναξ ἔχῃ ἓν μόνον στοιχεῖον, τότε γράφεται (α_{11}) ἢ ἁπλούστερον α_{11}, ἐφ' ὅσον δὲν ὑπάρχει φόβος συγχύσεως.

Εἷς τετραγωνικὸς πίναξ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα τὰ κείμενα ἐκτὸς τῆς πρωτευούσης διαγωνίου εἶναι μηδὲν καλεῖται **διαγώνιος.**

Ὅταν εἰς ἕνα διαγώνιον πίνακα ὅλα τὰ στοιχεῖα τῆς πρωτευούσης διαγωνίου ἰσοῦνται μὲ 1, τότε οὗτος καλεῖται **μοναδιαῖος** ἢ **πίναξ μονὰς** καὶ παρίσταται συνήθως μὲ τὰ γράμματα Ε ἢ Ι. Οὕτως, ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι διαγώνιος καὶ ὁ δεύτερος μοναδιαῖος.

Εἷς πίναξ τοῦ ὁποίου ὅλα τὰ στοιχεῖα εἶναι μηδέν, καλεῖται **μηδενικὸς** πίναξ, καὶ παρίσταται μὲ **O**, ἤτοι :

$$\mathbf{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Ἐὰν εἷς τετραγωνικὸς πίναξ ἔχῃ τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν πρωτεύουσαν διαγώνιον στοιχεῖα ἴσα, δηλ. ἂν $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, καλεῖται **συμμετρικός.**

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τετραγωνικοῦ πίνακος τὰ συμμετρικὰ πρὸς τὴν πρωτεύουσαν διαγώνιον εἶναι ἀντίθετα, ἤτοι ἂν $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, ὁπότε $\alpha_{ii} = 0$, τότε καλεῖται **ἀντισυμμετρικός.**

Οὕτως, ἐκ τῶν κάτωθι πινάκων :

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ὁ πρῶτος εἶναι συμμετρικὸς καὶ ὁ δεύτερος ἀντισυμμετρικός.

Οἱ πίνακες δὲν σημαίνουν πρᾶξιν τινα μεταξὺ τῶν στοιχείων αὐτῶν, τοῦτο ὅμως δὲν ἐμποδίζει νὰ ἔχουν οὗτοι μίαν μαθηματικὴν ἔννοιαν. Οὕτως, π,χ. ὁ πίναξ (α, β), ὅπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, εἶναι ἓν διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν καὶ παριστᾷ, ὡς γνωρίζομεν, ἕνα μιγαδικὸν ἀριθμόν. Οἱ πίνακες δὲν ἀποτελοῦν μόνον νέα μαθηματικὰ σύμβολα, εἰσάγονται καὶ ὡς νέα στοιχεῖα ἐπὶ τῶν ὁποίων δίδεται ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος καὶ ὁρίζονται πράξεις, ὡς ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν πινάκων μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας, θὰ παρίσταται μὲ $\mathcal{M}_{\mu\times\nu}$.

Μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ $\mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ ὁρίζομεν τὰ ἑξῆς :

§ 246. Ἰσότης πινάκων.— Δύο πίνακες $A \equiv [\alpha_{ij}]$ καὶ $B \equiv [\beta_{ij}]$ τῶν αὐτῶν διαστάσεων θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι ἴσοι, καὶ θὰ γράφωμεν : $A = B$, τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα αὐτῶν εἶναι ἴσα, ἤτοι :

$$\boxed{\mathbf{A}_{\mu\times\nu} = \mathbf{B}_{\mu\times\nu} \iff \alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, \mu \\ j = 1, 2, \dots, \nu \end{matrix}} \tag{1}$$

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι προφανῶς *αὐτοπαθής*, *συμμετρικὴ* καὶ *μεταβατικὴ* (διατί ;). Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι ἡ ἰσότης δύο μχν πινάκων εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς ἓν σύστημα $\mu\cdot\nu$ ἰσοτήτων μίαν δ' ἕκαστον ζεῦγος στοιχείων. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος πινάκων, μεταξὺ ἄλλων πλεονεκτημάτων, μᾶς παρέχει καὶ μίαν διευκόλυνσιν εἰς τὴν σύντομον γραφὴν διαφόρων σχέσεων, ὡς π.χ. διὰ τὴν σύντομον ἔκφρασιν συστημάτων. Κατὰ ταῦτα ἡ ἔκφρασις :

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : $\begin{pmatrix} x+y & 2z+\omega \\ x-y & z-\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ εἶναι ἰσοδύναμος, συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν (1), μὲ τὸ κάτωθι σύστημα :

$$x+y=3, \quad x-y=1, \quad 2z+\omega=5, \quad z-\omega=4.$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου εἶναι : $x=2, \ y=1, \ z=3, \ \omega=-1.$

§ 247. Πρόσθεσις πινάκων καὶ ἀριθμητικὸς πολλαπλασιασμός.— Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο πινάκων, θεωροῦμεν ἀναγκαῖον, ὅπως οἱ δύο πίνακες ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν γραμμῶν καὶ στηλῶν. Κατόπιν τούτου, ἂν οἱ πίνακες $A \equiv [\alpha_{ij}]$ καὶ $B \equiv [\beta_{ij}]$ εἶναι τῶν αὐτῶν διαστάσεων $\mu\chi\nu$, τότε ὡς **ἄθροισμα** αὐτῶν ὁρίζεται ὁ $\mu\chi\nu$ πίναξ $\Gamma \equiv [\gamma_{ij}]$, τοῦ ὁποίου τυχὸν στοιχεῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῶν πινάκων Α καὶ Β, ἤτοι :

$$\boxed{\mathbf{\Gamma = A + B \iff \gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}} \quad \forall \quad \begin{matrix} \mathbf{i = 1, 2, \ldots, \mu} \\ \mathbf{j = 1, 2, \ldots, \nu} \end{matrix}} \qquad (1)$$

Ἀναλυτικώτερον, ἐάν :

$$A \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad \text{καὶ} \quad B \equiv \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1\nu} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{\mu1} & \beta_{\mu2} & \ldots & \beta_{\mu\nu} \end{bmatrix},$$

τότε ὡς ἄθροισμα αὐτῶν ὁρίζεται ὁ πίναξ :

$$A + B \equiv \begin{bmatrix} \alpha_{11}+\beta_{11} & \alpha_{12}+\beta_{12} & \ldots & \alpha_{1\nu}+\beta_{1\nu} \\ \alpha_{21}+\beta_{21} & \alpha_{22}+\beta_{22} & \ldots & \alpha_{2\nu}+\beta_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{\mu1}+\beta_{\mu1} & \alpha_{\mu2}+\beta_{\mu2} & \ldots & \alpha_{\mu\nu}+\beta_{\mu\nu} \end{bmatrix}.$$

Ὡς **γινόμενον ἑνὸς ἀριθμοῦ $\lambda \in \mathbf{R}$ ἐπὶ πίνακα Α** ὁρίζεται εἷς πίναξ, ὅστις σημειοῦται μὲ $\lambda \cdot A$ ἢ ἁπλῶς λA, καὶ προκύπτει ἐκ τοῦ Α ἂν ὅλα τὰ στοιχεῖα του πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ λ, ἤτοι :

$$\lambda A \equiv \begin{bmatrix} \lambda\alpha_{11} & \lambda\alpha_{12} & \ldots & \lambda\alpha_{1\nu} \\ \lambda\alpha_{21} & \lambda\alpha_{22} & \ldots & \lambda\alpha_{2\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda\alpha_{\mu1} & \lambda\alpha_{\mu2} & \ldots & \lambda\alpha_{\mu\nu} \end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λA εἶναι ἐπίσης εἷς $\mu\chi\nu$ πίναξ.

Ἐπίσης ὁρίζομεν :

$$-A = (-1) \cdot A \quad \text{καὶ} \quad A - B = A + (-B).$$

Ὁ πίναξ $-A$ τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι τὰ ἀντίθετα τῶν στοιχείων τοῦ Α καλεῖται **ἀντίθετος** τοῦ Α.

Ἐφαρμογή. Ἔστω $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}$ καὶ $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{pmatrix}$. Τότε:

$$A+B=\begin{pmatrix}1+3 & -2+0 & 3+2\\ 4-7 & 5+1 & -6+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 5\\ -3 & 6 & 2\end{pmatrix}$$

$$3A=\begin{pmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -6 & 9\\ 12 & 15 & -18\end{pmatrix}$$

$$2A-3B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 8 & 10 & -12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9 & 0 & -6\\ 21 & -3 & -24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{pmatrix}.$$

*** § 248. Ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.**— Τὸ σύνολον $\mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ τῶν πινάκων μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας ἔχει ἐφωδιασθῆ μὲ δύο πράξεις: τὴν πρόσθεσιν πινάκων καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἑνὸς πίνακος ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμόν. Αἱ πράξεις αὗται ἔχουν τὰς ἀκολούθους βασικὰς ἰδιότητας, ὡς δύναταί τις νὰ ἀποδείξῃ εὐκόλως:

Διὰ τυχόντας πίνακας $A, B, \Gamma \in \mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ καὶ τυχόντας πραγματικοὺς ἀριθμοὺς k, λ ἰσχύουν:

Πρόσθεσις	*Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀριθμὸν*
(i) $A+B=B+A$	$k(A+B)=kA+kB$
(ii) $A+(B+\Gamma)=(A+B)+\Gamma$	$(k+\lambda)A=kA+\lambda A$
(iii) $A+\mathbf{O}=\mathbf{O}+A=A$	$k(\lambda A)=(k\lambda)A$
(iv) $A+(-A)=(-A)+A=\mathbf{O}$	$1A=A$

Σύνολα, ὡς τὸ σύνολον τῶν πινάκων $\mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ μὲ μ γραμμὰς καὶ ν στήλας, ἐφωδιασμένα μὲ δύο πράξεις τὴν πρόσθεσιν καὶ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ ἀριθμὸν (συντελεστὴν) καὶ διὰ τὰς ὁποίας ἰσχύουν αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες, καλοῦνται **διανυσματικοὶ χῶροι.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ στοιχεῖα τοῦ $\mathcal{M}_{\mu\times\nu}$ καλοῦνται *διανύσματα*, τὰ δὲ στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R}$ καλοῦνται *βαθμωτὰ* (ἢ *ἐκτελεσταί*). Οἱ πίνακες λοιπὸν εἶναι τὰ διανύσματα ἑνὸς διανυσματικοῦ χώρου. Περὶ τῆς θεμελιώδους ἐννοίας τοῦ διανυσματικοῦ χώρου θὰ γνωρίσωμεν περισσότερα εἰς τὴν ἕκτην τάξιν.

§ 249. Πολλαπλασιασμὸς πινάκων.— Ἔστω $\mathcal{M}$ τὸ σύνολον ὅλων τῶν πινάκων· τότε μεταξὺ ὡρισμένων ζευγῶν ἐξ αὐτῶν ὁρίζεται μία πρᾶξις καλουμένη **πολλαπλασιασμὸς** ὡς ἑξῆς:

α΄). Πολλαπλασιασμὸς «γραμμὴ ἐπὶ στήλην»: Ἔστωσαν $A\equiv(\alpha_i)$ καὶ $B\equiv[\beta_j]$ δύο πίνακες, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι εἷς πίναξ—γραμμὴ μὲ ν στήλας καὶ ὁ δεύτερος πίναξ-στήλη μὲ ν γραμμάς· τότε ὁρίζομεν ὡς γινόμενον αὐτῶν $A\cdot B$ ἕνα πίνακα μὲ ἕνα στοιχεῖον οὕτω:

$$A\cdot B=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)\cdot\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_\nu\end{bmatrix}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_\nu\beta_\nu) \qquad (1)$$

β΄). Πολλαπλασιασμὸς πινάκων: Ἔστωσαν τώρα δύο πίνακες $A_{\mu\nu}\equiv[\alpha_{ij}]\in\mathcal{M}$ καὶ $B_{\nu\rho}\equiv[\beta_{jk}]\in\mathcal{M}$, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν συνθήκην: *Τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ (πρώτου) A ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ (δευτέρου) B.* Τότε ὁρίζομεν ὡς γινόμενον $A_{\mu\nu}\cdot B_{\nu\rho}$ τῶν πινάκων τούτων, ἕνα πίνακα $\Gamma_{\mu\rho}\equiv[\gamma_{ik}]$, τοῦ ὁποίου τὸ τυχὸν στοιχεῖον γ_{ik} προέρχεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῆς i γραμμῆς τοῦ πίνακος A ἐπὶ τὴν k στήλην τοῦ B, εἶναι δηλαδή :

$$A_{\mu\nu}\cdot B_{\nu\rho}\equiv\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1\rho}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2\rho}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \beta_{\nu1} & \beta_{\nu2} & \dots & \beta_{\nu\rho}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1\rho}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2\rho}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \gamma_{\mu1} & \gamma_{\mu2} & \dots & \gamma_{\mu\rho}\end{bmatrix}=\Gamma,$$

ὅπου $\gamma_{ik}=\alpha_{i1}\beta_{1k}+\alpha_{i2}\beta_{2k}+\dots+\alpha_{i\nu}\beta_{\nu k}=\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{ij}\beta_{jk}$.

Προφανῶς ὁ πίναξ Γ ἔχει μ γραμμὰς (ὅσας ὁ A) καὶ ρ στήλας (ὅσας ὁ B), δηλ. θὰ ἔχωμεν : $A_{\mu\nu}\cdot B_{\nu\rho}=\Gamma_{\mu\rho}$.

Τονίζομεν ὅτι : τὸ γινόμενον AB δὲν ὁρίζεται, ἂν ὁ A εἶναι εἷς μxk πίναξ καὶ ὁ B εἶναι εἷς λxρ πίναξ, ὅπου $k\neq\lambda$.

Παράδειγμα 1ον :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 4\\ 1 & 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot1 & 1\cdot0+2\cdot3 & 1\cdot4+2\cdot(-6)\\ -1\cdot(-2)+3\cdot1 & -1\cdot0+3\cdot3 & -1\cdot4+3\cdot(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6 & -8\\ 5 & 9 & -22\end{pmatrix}$$

2ον :

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+2\cdot2\\ 3\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 3 & 11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot3 & 1\cdot2+1\cdot4\\ 0\cdot1+2\cdot3 & 0\cdot2+2\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}.$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου παραδείγματος συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ δὲν ἰσχύει γενικῶς ἐπὶ τῶν πινάκων.

Ὁπωσδήποτε ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς πινάκων ἱκανοποιεῖ τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας, ἐφ᾽ ὅσον βεβαίως αἱ σημειούμεναι κάτωθεν πράξεις εἶναι ἐκτελεσταί, ἤτοι ἐφ᾽ ὅσον κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο πινάκων AB τὸ πλῆθος τῶν στηλῶν τοῦ A συμφωνεῖ μὲ τὸ πλῆθος τῶν γραμμῶν τοῦ B :

1) $A(B\Gamma)=(AB)\Gamma$ *(προσεταιριστικὴ ἰδιότης)*
2) $A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma$ *(ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἐξ ἀριστερῶν)*
3) $(B+\Gamma)A=BA+\Gamma A$ *(ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἐκ δεξιῶν)*
4) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$, ὅπου $k\in\mathbf{R}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\mathbf{O}A=A\mathbf{O}=\mathbf{O}$, ὅπου $\mathbf{O}$ εἶναι ὁ μηδενικὸς πίναξ.

§ 250. Ὁ ἀνάστροφος ἑνὸς πίνακος.— Δοθέντος ἑνὸς πίνακος $A_{\mu\nu}\equiv[\alpha_{ij}]$ καλοῦμεν **ἀνάστροφον** αὐτοῦ καὶ τὸν συμβολίζομεν μὲ A^t, τὸν πίνακα, ὅστις προκύπτει ἐκ τοῦ $A_{\mu\nu}$, ἂν αἱ γραμμαί του γραφοῦν, κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, ὡς στῆλαι (καὶ αἱ στῆλαι του ὡς γραμμαί), ἤτοι :

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1\nu}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2\nu}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \dots & \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{\mu1}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{\mu2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{1\nu} & \alpha_{2\nu} & \dots & \alpha_{\mu\nu}\end{bmatrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἀνάστροφος τοῦ $A_{\mu\nu}$ εἶναι εἷς νxμ πίναξ.

Παράδειγμα : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Διὰ τοὺς ἀναστρόφους πίνακας ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἀκόλουθοι ἰδιότητες :

1) $(A^t)^t = A$, 2) $\mathbf{O}^t = \mathbf{O}$, 3) $(-A)^t = -A^t$, 4) $(A + B)^t = A^t + B^t$, 5) $(A - B)^t = A^t - B^t$, 6) $(kA)^t = kA^t$, $\forall k \in \mathbf{R}$, 7) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

§ 251. Ὁ ἀντίστροφος τετραγωνικοῦ πίνακος.— Ἔστωσαν δύο τετραγωνικοὶ πίνακες $A_\nu \equiv A$ καὶ $B_\nu \equiv B$. Τότε, ὡς γνωστόν, ὁρίζεται ὁ πίναξ $A \cdot B$ ὡς καὶ ὁ πίναξ $B \cdot A$. Ἂν συμβῇ : $A \cdot B = B \cdot A = E$, ἔνθα E εἶναι ὁ μοναδιαῖος πίναξ, τότε λέγομεν ὅτι ὁ πίναξ B εἶναι **ἀντίστροφος** τοῦ πίνακος A καὶ γράφομεν : $B = A^{-1}$. Λόγῳ τῆς συμμετρίας καὶ ὁ πίναξ A εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος B, ἤτοι : $A = B^{-1}$.

Παράδειγμα. Ἔστω :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ἔχομεν :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ὅθεν οἱ A καὶ B εἶναι ἀντίστροφοι.

§ 252. Πίνακες καὶ συστήματα γραμμικῶν ἐξισώσεων.— Τὸ κάτωθι σύστημα γραμμικῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 7 \\ x - 2y - 5z &= 3 \end{aligned} \qquad (1)$$

εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὴν *«ἐξίσωσιν πίνακος»*:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ ἢ συντόμως } AX = B, \qquad (2)$$

ὅπου $A \equiv \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$, $X \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ καὶ $B \equiv \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ἤτοι πᾶσα λύσις τοῦ συστήματος (1) εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) καὶ ἀντιστρόφως. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀντίστοιχον ὁμογενὲς σύστημα τοῦ (1) εἶναι τότε ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἐξίσωσιν πίνακος : $AX = \mathbf{O}$. Ὁ πίναξ A τῶν συντελεστῶν καλεῖται *πίναξ τῶν συντελεστῶν τοῦ συστήματος*, ἐνῷ ὁ πίναξ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

καλεῖται *ἐπηυξημένος πίναξ* τοῦ (1). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύστημα (1) ὁρίζεται πλήρως ἐκ τοῦ ἐπηυξημένου πίνακος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

570. Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι :

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad 3)\ -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

571. Δίδονται :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Εὕρετε : 1) $3A + 4B - 2\Gamma$, 2) $A + 2B - 4\Gamma$, 3) $A^t + B^t - \Gamma^t$, 4) AA^t, 5) A^tA.

572. Εὕρετε τὰ x, y, z, ω ἐάν :

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2\omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+\omega & 3 \end{pmatrix}.$$

573. Δίδεται : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Εὕρετε : 1) A^2, 2) A^3, 3) $f(A)$, ὅπου $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$.

574. Δείξατε ὅτι ὁ πίναξ A τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου :

$$g(x) = x^2 + 2x - 11.$$

575. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ -\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{συν}\alpha & \text{ημ}\alpha \\ -\text{ημ}\alpha & \text{συν}\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{συν}2\alpha & \text{ημ}2\alpha \\ -\text{ημ}2\alpha & \text{συν}2\alpha \end{bmatrix}.$$

576. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^{\nu} & \nu\alpha^{\nu-1} \\ 0 & \alpha^{\nu} \end{pmatrix}.$$

577. Προσδιορίσατε τοὺς πίνακας $X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι :

$$3\cdot X + 4\cdot Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}$$

$$-2\cdot X + 3\cdot Y = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}.$$

578. Ἐὰν $X = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, νὰ ὁρισθοῦν οἱ k καὶ λ εἰς τὴν ἐξίσωσιν :

$$X^2 - kX + \lambda E = \mathbf{O}, \quad (E = \text{μοναδιαῖος πίναξ}, \ \mathbf{O} = \text{μηδενικὸς πίναξ}).$$

579. Δίδεται ὁ τετραγωνικὸς πίναξ :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι ὑπάρξεως τοῦ ἀντιστρόφου πίνακος καὶ νὰ ὑπολογισθῇ οὗτος.

580. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀντίστροφος τοῦ πίνακος.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

581. Νὰ λυθῇ ἡ «ἐξίσωσις» :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

582. Δείξατε ὅτι : ὁ ἀνάστροφος τοῦ ἀντιστρόφου ἑνὸς πίνακος A ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἀναστρόφου τοῦ A, ἤτοι : $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

I. ΕΝΟΡΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

§ 253. Ἱστορικὴ εἰσαγωγή.—Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ὀφείλει τὴν γένεσίν της εἰς τὰ τυχηρὰ παιγνίδια καὶ συγκεκριμένως εἰς τὰ παιγνίδια τῶν κύβων (ζάρια). Πρὸ τριακοσίων περίπου ἐτῶν ὁ Γάλλος ἱππότης Chevalier de Méré (1654), διάσημος παίκτης, ἐνδιεφέρετο διὰ τὰς περιπτώσεις ἐπιτυχίας εἰς ἕνα τυχηρὸν παιγνίδιον πολὺ διαδεδομένον κατὰ τὸν 17ον αἰῶνα. Ἐπειδὴ εἶχε τὴν ἐντύπωσιν ὅτι οἱ ὑπολογισμοί του ἦσαν λανθασμένοι, συνεβουλεύθη τὸν Blaise Pascal (1623 - 1662), τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλοφυΐα κατεγίνετο μὲ τὴν θεολογίαν, τὰ μαθηματικὰ καὶ τὰς φυσικὰς ἐπιστήμας. Ἐνῷ εἰργάζετο ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ de Méré, ὁ Pascal ἀντιμετώπισε καὶ ἄλλα ἐνδιαφέροντα ἐρωτήματα ἐπὶ τῶν πιθανοτήτων. Τὰ ἐρωτήματα αὐτὰ ἔδωσαν ἀφορμὴν διὰ μίαν καρποφόρον ἀλληλογραφίαν μεταξὺ Pascal καὶ Fermat (1608 - 1665), ἑνὸς ἄλλου ἐπίσης μεγάλου μαθηματικοῦ. Ὁ Fermat ἐμελέτησεν τόσον τὰ ἐν λόγῳ προβλήματα, ὅσον καὶ τὰς λύσεις τὰς δοθείσας ὑπὸ τοῦ Pascal, πολλὰς τῶν ὁποίων καὶ ἐγενίκευσεν. Τοιουτοτρόπως, εἰς τὴν ἀλληλογραφίαν τῶν δύο αὐτῶν σοφῶν ἐτέθησαν οὐσιαστικῶς αἱ πρῶται βάσεις τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ Pascal ἐπρότεινεν τὸ ὄνομα *«Γεωμετρία τῆς τύχης»*.

Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀπησχόλησεν ἐν συνεχείᾳ πλείστους μεγάλους μαθηματικούς, ὡς τὸν J. Bernoulli, τὸν Leibnitz, τὸν De Moivre, τὸν Euler, τὸν Lagrange, τὸν Gauss. Ἐπεφυλάσσετο ὅμως εἰς τὸν Laplace (1749 - 1827) ἡ τιμὴ νὰ συστηματοποιήσῃ ὅλας τὰς μέχρι αὐτοῦ γνώσεις, νὰ ἐπεκτείνῃ αὐτάς, χρησιμοποιῶν τὰς πλέον προηγμένας μεθόδους τῆς Ἀναλύσεως καὶ νὰ δώσῃ εἰς τὴν θεωρίαν αὐτὴν τὴν κλασσικήν της μαθηματικὴν μορφήν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν μᾶς εἶναι γνωστὴ σήμερον.

Ἐπὶ ἑβδομήκοντα καὶ πλέον ἔτη αἱ ἰδέαι τοῦ Laplace ἐκυριάρχησαν καὶ ἐδέσμευσαν τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων. Περὶ τὰ τέλη τοῦ παρελθόντος αἰῶνος δύο μεγάλοι μαθηματικοὶ ὁ J. Bertrand καὶ ὁ H. Poincaré ἐσημείωσαν νέαν ἐποχήν. Οὗτοι μὲ τὴν αὐστηρὰν κριτικήν των κατὰ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πιθανότητος τοῦ υἱοθετηθέντος ὑπὸ τοῦ Laplace ἐδημιούργησαν περίοδον κρίσεως διὰ τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων, περίοδον ἥτις κατὰ τὴν διαρρεύσασαν πεντηκονταετίαν ὑπῆρξεν ἐξαιρετικὰ γόνιμος ἀπὸ πάσης ἀπόψεως.

Ἡ νεωτέρα ἀνάπτυξις τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων χαρακτηρίζεται τόσον ἀπὸ ἐνδιαφέρον πρὸς αὐτὴν ταύτην τὴν θεωρίαν ὅσον καὶ πρὸς τὴν κατεύθυνσιν διευρύνσεως τῶν ἐφαρμογῶν αὐτῆς. Σημαντικὴ εἶναι ἡ συμβολὴ τῆς Μαθηματικῶν τοῦ τρέχοντος αἰῶνος Lindeberg, S. Bernstein, A. Kolmogorov, P. Lévy καὶ Emile Borel.

Ἡ Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων, δημιουργηθεῖσα ἀρχικῶς, ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω, διὰ νὰ ἱκανοποιήσῃ ἀπορίας, αἱ ὁποῖαι προέκυψαν ἀπὸ τὰ τυχηρὰ παιγνίδια, κατέστη σήμερον τόσον σημαντική, ὥστε νὰ ἀποτελῇ βασικὴν συμβολὴν εἰς τὸ ἔργον τῶν κοινωνικῶν καὶ φυσικῶν ἐπιστημῶν καὶ εἰς τὴν ἀντιμετώπισιν τῶν πρακτικῶν προβλημάτων τῆς διοικήσεως καὶ τῆς βιομηχανίας. Τοιουτοτρόπως, εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων προστρέχουν οἱ Φυσικοὶ διὰ νὰ ἐπεκτείνουν τὰ ὅρια τῆς κλασσικῆς Φυσικῆς. Δι' αὐτῆς οἱ Βιολόγοι κατορθώνουν νὰ ἀντιμετωπίζουν τοὺς ποσοτικοὺς νόμους τῆς κληρονομικότητος. Οἱ Μετεωρολόγοι, οἱ Ἀστρονόμοι δι' αὐτῆς ἐπεξεργάζονται τὰς παρητηρήσεις των καὶ εἰς τὴν θεωρίαν αὐτὴν βασίζουν μέγαν ἀριθμὸν τῶν προβλέψεών των. Οἱ Οἰκονομολόγοι δι' αὐτῆς προσπαθοῦν νὰ ἀνακαλύψουν τοὺς νόμους τῶν οἰκονομικῶν φαινομένων. Εἰς τὴν Βιομηχανίαν ἡ ἐν σειρᾷ παραγωγὴ ὑπόκειται εἰς τοὺς νόμους τῶν Πιθανοτήτων. Ὅλαι ἄλλως τε αἱ παρατηρήσεις, ὅλαι αἱ μετρήσεις τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν ὀφείλουν τελικῶς νὰ ὑποστοῦν ἐπεξεργασίαν διὰ τῶν μεθόδων τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων. Τέλος ἡ Στατιστική, τῆς ὁποίας ἡ σημασία ἀποδεικνύεται διαρκῶς μεγαλυτέρα εἰς ὅλας τὰς περιοχὰς τῆς ἀνθρωπίνης γνώσεως, ἀποτελεῖ τὴν σπουδαιοτέραν ἐφαρμογὴν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἐφαρμογῶν δεικνύουν τὴν εὐρύτητα τῶν ἐφαρμογῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων, καὶ συνεπῶς τὴν χρησιμότητα ταύτης, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἐνδιαφέροντος καὶ τῆς ὡραιότητος τὴν ὁποίαν παρουσιάζει αὕτη ὡς κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης μὲ ἰδίας μεθόδους καὶ προβλήματα.

§ 254. Ἀρχικαὶ ἔννοιαι τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων.— Ὡς γνωστόν, κάθε κλάδος τῶν Μαθηματικῶν θεμελιοῦται ἐπὶ ἐλαχίστων ἁπλῶν ἐννοιῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἔμφυτοι εἰς τὸν ἀνθρώπινον νοῦν καὶ αἱ ὁποῖαι δὲν δύνανται νὰ ὁρισθοῦν τῇ βοηθείᾳ ἄλλων ἐννοιῶν, δι' ὃ καὶ καλοῦνται **ἀρχικαὶ ἔννοιαι.** Οὕτω, π.χ. εἰς τὰ δύο πρῶτα κεφάλαια τοῦ παρόντος βιβλίου ἐγνωρίσαμεν τοιαύτας ἐννοίας, ὡς τὴν ἔννοιαν τῆς «λογικῆς προτάσεως», τὴν ἔννοιαν τοῦ «συνόλου» κ.ἄ. Ἐπίσης εἰς τὴν Γεωμετρίαν ἔχομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ σημείου, τῆς εὐθείας, τοῦ χώρου κλπ. ὡς ἀρχικὰς ἐννοίας.

Εἰς τὴν Θεωρίαν τῶν Πιθανοτήτων ὡς ἀρχικαὶ ἔννοιαι εἶναι αἱ ἑξῆς δύο :

α') Ἡ ἔννοια τοῦ **«πειράματος τύχης»**, καὶ

β') Ἡ ἔννοια τοῦ **«ἁπλοῦ συμβάντος** ἢ **ἐνδεχόμενου»**, ἢ ἄλλως τοῦ **«στοιχειώδους γεγονότος»**

Θὰ κάμωμεν μίαν πρώτην γνωριμίαν μὲ τὰς ἐννοίας αὐτὰς μὲ μερικὰ παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον : Ὅλοι γνωρίζομεν ὅτι κάθε μεταλλικὸν νόμισμα (κέρμα) ἔχει δύο ὄψεις, ἐκ τῶν ὁποίων τὴν μίαν καλοῦμεν συνήθως **«κορώνα»** καὶ τὴν ἄλλην **«γράμματα»**. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα ἓν κέρμα καὶ ἀκολούθως ἂς κατευθύνωμεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὴν ἔνδειξιν, ἥτις φέρεται ἐπὶ τῆς ὁρατῆς ὄψεως τοῦ κέρματος, ὅταν τοῦτο καταπέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἠρεμήσῃ (Ἡ ρίψις δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν ἂν τὸ κέρμα σταθῇ ὄρθιον). Ἡ ρίψις τοῦ κέρματος εἰς τὸν ἀέρα ἀποτελεῖ ἕνα «πείραμα». Λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἐκτελοῦμεν ἕνα **«πείραμα τύχης»** ἀκριβέστερον ἓν **«ἁπλοῦν πείραμα τύχης».** Τὸ νόμισμα πίπτον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θὰ ἐμφανίσῃ (ἐπὶ τῆς ὁρατῆς ὄψεως) τὴν ἔνδειξιν «κορώνα» ἢ τὴν ἔνδειξιν «γράμματα». Τὸ ἀποτέλεσμα δηλαδὴ τοῦ ἀνωτέρω πειράματος εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἐπὶ τῆς ἄνω ὄψεως τοῦ νομίσματος ἀκριβῶς μιᾶς τῶν δύο ἐνδείξεων : «κορώνα», «γράμματα». Κάθε δὲ τοιαύτη ἐμφάνισις καλεῖται ἕνα **«ἁπλοῦν συμβάν»**, ἢ ἄλλως ἕνα **«στοιχειῶδες γεγονός»**.

Ὥστε, εἰς τὸ πείραμα *«κορώνα—γράμματα»* ἔχομεν δύο ἁπλᾶ συμβάντα :

1ον). Τὸ ἁπλοῦν συμβάν : *«Τὸ νόμισμα δεικνύει τὴν ὄψιν κορώνα»* (συμβολ. «Κ»).

2ον). Τὸ ἁπλοῦν συμβάν : *«Τὸ νόμισμα δεικνύει τὴν ὄψιν γράμματα»* (συμβολ. «Γ»).

Ἔχομεν λοιπὸν ἐν προκειμένῳ ἕνα πείραμα τύχης καὶ δύο ἁπλᾶ συμβάντα συνηρτημένα μὲ τὸ πείραμα.

Παράδειγμα 2ον : *(Πείραμα μὲ κύβον).*

Ὅλοι γνωρίζομεν ἐπίσης τὸν κύβον (ζάρι), ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖται εἰς τὰ τυχηρὰ παιγνίδια. Οὗτος εἶναι μικρὸς κύβος, κατὰ τὸ δυνατὸν συμμετρικός, ἐπὶ τῶν 6 ὄψεων (ἑδρῶν) τοῦ ὁποίου εἶναι ἀναγεγραμμένοι (συνήθως μὲ κοκκίδας) ἀνὰ εἷς τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Αἱ ἐνδείξεις αὗται εἶναι διατεταγμέναι οὕτως ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων δύο παραλλήλων ὄψεων εἶναι πάντοτε 7.

Ρίπτομεν τώρα ἕνα τοιοῦτον κύβον εἰς τὸν ἀέρα καὶ κατευθύνομεν τὴν προσοχήν μας εἰς τὸν ἀριθμόν, ὅστις φέρεται ἐπὶ τῆς ἄνω ἕδρας, ὅταν ὁ κύβος ἠρεμήσῃ. Καὶ αὐτὸ εἶναι ἕνα πείραμα τύχης. Τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος τούτου εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἐπὶ τῆς ἄνω ἕδρας τοῦ κύβου, ἑνὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Κάθε τοιαύτη ἐμφάνισις καλεῖται, ὡς καὶ προηγουμένως ἐλέχθη, ἓν ἁπλοῦν συμβάν. Φανερὸν εἶναι ὅτι εἰς τὸ πείραμα μὲ κύβον ἔχομεν τὰ ἑξῆς 6 ἁπλᾶ συμβάντα :

1ον) *«Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἕδραν τὸ 1».*
2ον) *«Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἕδραν τὸ 2».*
. . . .
6ον) *«Ὁ κύβος δεικνύει εἰς τὴν ἄνω ἕδραν τὸ 6».*

Ἔχομεν λοιπὸν εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ἕνα πείραμα τύχης καὶ 6 ἁπλᾶ συμβάντα.

Ἐὰν ρίψωμεν διὰ δευτέραν φορὰν τὸν κύβον εἰς τὸν ἀέρα ἐκτελοῦντες τὴν αὐτὴν διαδικασίαν, τότε λέγομεν ὅτι ἐπαναλαμβάνομεν τὸ πείραμα τύχης. Κατὰ τὴν ἐπανειλημμένην ἐκτέλεσιν τοῦ ἰδίου πειράματος θὰ προκύψῃ μία «ἀκολουθία» ἁπλῶν συμβάντων. Αὕτη δύναται νὰ παρασταθῇ ἀπὸ μίαν ἀκολουθίαν ψηφίων εἰλημμένων ἐκ τοῦ συνόλου τῶν ἐνδείξεων τοῦ κύβου, δηλ. ἐκ τοῦ συνόλου $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καὶ διαδεχομένων ἀτάκτως ἄλληλα. Οὕτως, ἐπαναλαμβάνοντες τὸ πείραμα μὲ κύβον εἴκοσι φορὰς δὲν ἀποκλείεται νὰ ἔχωμεν τὴν «πεπερασμένην ἀκολουθίαν» :

$$3, 5, 2, 2, 6, 1, 6, 3, 4, 4, 4, 2, 1, 5, 3, 5, 6, 4, 2, 5.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι τὰ **χαρακτηριστικὰ ἑνὸς πειράματος τύχης** εἶναι :

α). *Τὸ ἀποτέλεσμά του δὲν δύναται μὲ κανέναν τρόπον νὰ προβλεφθῇ.*

β). *Τὸ πείραμα δύναται νὰ ἐπαναληφθῇ πολλάκις ὑπὸ τὰς αὐτὰς συνθήκας (δηλ. τηρουμένης τῆς αὐτῆς διαδικασίας).*

§ 255. Δειγματικὸς χῶρος – Δεῖγμα.– Εἰς τὸ πείραμα τῆς ρίψεως ἑνὸς νομίσματος ὑπάρχουν δύο δυνατὰ ἀποτελέσματα τὰ ὁποῖα συμβολίζομεν ὡς

$$K, \quad \Gamma, \tag{1}$$

ὅπου Κ σημαίνει «κορώνα» καὶ Γ «γράμματα».

Ἐὰν ρίψωμεν ἕνα ζάρι ὑπάρχουν 6 δυνατὰ ἀποτελέσματα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ παρασταθοῦν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἑδρῶν :

$$1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Ἀναγράφοντες ὅλα τὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα ἑνὸς πειράματος, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν ἕνα **δειγματικὸν χῶρον.** Κατὰ ταῦτα :

Δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἁπλῶν συμβάντων, ἤτοι τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἕνα πείραμα τύχης.

Ἕκαστον δὲ ἁπλοῦν συμβάν, ἤτοι ἀτομικὸν (ἀδιαίρετον) ἀποτέλεσμα, καλεῖται **δεῖγμα.**

Οὕτω, π.χ. εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον $\Omega \equiv \{K, \Gamma\}$, ἐνῷ εἰς τὸ δεύτερον παράδειγμα ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι τὸ σύνολον : $\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Πρὸς πληρεστέραν κατανόησιν τῆς ἐννοίας τοῦ δειγματικοῦ χώρου ἀναφέρομεν καὶ τὰ ἑξῆς παραδείγματα :

α'). *Λῆψις σφαιριδίου (βώλου) ἐξ ἑνὸς σάκκου.* Ἐντὸς σάκκου ὑπάρχει ἀριθμὸς σφαιριδίων ὁμοίων ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἐκτὸς τοῦ χρώματος. Ἔστω ὅτι μερικὰ εἶναι κυανᾶ (κ), ἄλλα λευκὰ (λ) καὶ ἄλλα ἐρυθρὰ (ε). Λαμβάνομεν *«τυχαίως»* (δηλ. μὲ τὴν γνωστὴν διαδικασίαν ἀνακατεύματος τῶν σφαιριδίων κ.τ.λ.) ἕνα σφαιρίδιον καὶ χωρὶς νὰ τὸ ἐπανατοποθετήσωμεν ἐντὸς τοῦ σάκκου ἀνασύρομεν καὶ δεύτερον, προσέχοντες ποίου χρώματος σφαιρίδιον ἐξήχθη πρῶτον καὶ ποίου δεύτερον. Λέγομεν τότε ὅτι ἐκτελοῦμεν ἕνα πείραμα τύχης, ἀκριβέστερον ἕνα **σύνθετον πείραμα τύχης,** τὸ δὲ ἐξαγόμενον τοῦ πειράματος τούτου εἶναι ἓν διατεταγμένον ζεῦγος ἐνδείξεων π.χ. (λ, ε).

Ἂς ἴδωμεν τώρα ποῖος εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος αὐτοῦ τοῦ «συνθέτου πειράματος». Ἐπειδὴ αἱ μόναι δυναταὶ ἐκβάσεις (ἀποτελέσματα), τὰς ὁποίας δύναται νὰ παρουσιάσῃ ἡ λῆψις ἑνὸς σφαιριδίου ἐκ τοῦ σάκκου εἶναι ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς ἐκ τῶν τριῶν γραμμάτων κ, λ, ε ἡ τυχαία ἐξαγωγὴ ἑκάστου σφαιριδίου κεχωρισμένως ἔχει ὡς δειγματικὸν χῶρον τὸ σύνολον $\Sigma \equiv \{\kappa, \lambda, \varepsilon\}$. Ἑπομένως αἱ διάφοροι ἐκβάσεις τῆς λήψεως τῶν δύο σφαιριδίων ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσημάντως εἰς τὰ διάφορα διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ $x \in \Sigma$ καὶ $y \in \Sigma$. Ὅθεν κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος τοῦ ἀνωτέρω συνθέτου πειράματος τύχης εἶναι τὸ σύνολον :

$$\Omega \equiv \Sigma \times \Sigma = \{(x, y) : x \in \Sigma, y \in \Sigma\} = \left\{ \begin{matrix} (\kappa,\kappa), & (\kappa,\lambda), & (\kappa,\varepsilon) \\ (\lambda,\kappa), & (\lambda,\lambda), & (\lambda,\varepsilon) \\ (\varepsilon,\kappa), & (\varepsilon,\lambda), & (\varepsilon,\varepsilon) \end{matrix} \right\}.$$

Κάθε στοιχεῖον τοῦ Ω, δηλ. κάθε διατεταγμένον ζεῦγος ἐνδείξεων εἶναι ἓν **ἁπλοῦν συμβάν.**

β'). *Ρίψις δύο κύβων.* Ἔστω ὅτι ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα δύο κύβους (ζάρια), ἕνα λευκὸν καὶ ἕνα ἐρυθρὸν καὶ ὅτι σημειώνομεν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἄνω ἑδρῶν. Ὁ λευκὸς κύβος ἔχει ἓξ (6) δυνατὰ ἀποτελέσματα : 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ὁμοίως καὶ ὁ ἐρυθρός. Ἂς συμβολίσωμεν μὲ λ τὴν ἔνδειξιν τῆς ἄνω ἕδρας, τὴν ὁποίαν θὰ παρουσιάσῃ ὁ λευκὸς κύβος καὶ μὲ ε τὴν ἀντίστοιχον διὰ τὸν ἐρυθρὸν, τότε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συνδυασμένης ρίψεως τῶν δύο κύβων παρίσταται διὰ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (λ, ε). Πόσα τοιαῦτα διατεταγμένα ζεύγη ὑπάρχουν;

Δηλαδὴ πόσα εἶναι τὰ ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος : *Ρίψις δύο κύβων* ; Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὰ ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη :

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\ldots,\ (5,6),\ (6,5),\ (6,6).$$

(ὅσαι δηλ. καὶ αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν 6 στοιχείων 1, 2, 3,. . ., 6 ἀνὰ δύο, § 238).

Εἶναι πολλάκις χρήσιμον νὰ γράψωμεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν εἰς ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου ὡς κάτωθι :

		Ἀποτέλεσμα ἐρυθροῦ κύβου					
	λ \ ε	1	2	3	4	5	6
Ἀποτέλεσμα λευκοῦ κύβου	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Ὁ πίναξ οὗτος παρέχει τὸ σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν ἀποτελεσμάτων (ἁπλῶν συμβάντων) τοῦ πειράματος τῆς ρίψεως δύο κύβων. Τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος Ω τοῦ πειράματος. Γράφομεν δὲ συντόμως ἐν προκειμένῳ :

$$\Omega = \Sigma \times \Sigma = \{\, (\lambda,\varepsilon) : \lambda \in \Sigma,\ \varepsilon \in \Sigma \,\},$$

ὅπου Σ τὸ σύνολον $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη (λ,ε) εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου, δηλ. τὰ ἁπλᾶ συμβάντα.

Γενικεύοντες τώρα ὅσα ἐξετέθησαν εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν κάτωθι ὁρισμὸν τοῦ δειγματικοῦ χώρου :

Δειγματικὸς χῶρος Ω ἑνὸς πειράματος τύχης εἶναι ἓν σύνολον, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εὑρίσκονται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν ἐκβάσεων (ἀποτελεσμάτων) τοῦ πειράματος.

Ἐπειδὴ κάθε στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου καλεῖται καὶ σημεῖον τοῦ συνόλου, διὰ τοῦτο τὰ ἁπλᾶ συμβάντα καλοῦνται καὶ **δειγματικὰ σημεῖα** ἢ ἁπλῶς **σημεῖα** (σημεῖα — δείγματα). Ὁ δειγματικὸς χῶρος καλεῖται καὶ **βασικὸν σύνολον** (ἢ **σύνολον ἀναφορᾶς)** δι' ἓν πείραμα.

Σημείωσις. Τὸ βασικὸν σύνολον, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὸ δεύτερον κεφάλαιον, διὰ καθαρῶς ἐποπτικοὺς λόγους, παρίσταται μὲ ἓν ὀρθογώνιον, οὕτω καὶ ὁ δειγματικὸς χῶρος παρίσταται ὁμοίως, δηλ. μὲ ὀρθογώνιον ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὰ ἁπλᾶ συμβάντα σημειοῦνται μὲ στιγμάς.

Γενικὴ παρατήρησις. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ πεπερασμένους δειγματικοὺς χώρους, δηλ. τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν συμβάντων θὰ εἶναι πεπερασμένος ἀριθμός.

Παντοῦ κατωτέρω μὲ τὸ γράμμα Ω συμβολίζομεν τὸν δειγματικὸν χῶρον τοῦ ἑκάστοτε πειράματος τύχης.

§ 256. Συμβάν.– Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα τῆς ρίψεως δύο κύβων. Ὡς ἐλέχθη εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον τὰ ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι τὰ 36 διατεταγμένα ζεύγη τοῦ πίνακος τῆς προηγουμένης σελίδος. Ἐὰν τώρα ἐνδιαφερώμεθα διὰ τὰς περιπτώσεις ἐκείνας, καθ' ἃς π.χ. **τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων ἰσοῦται μὲ 7** θὰ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν τὸ ὑποσύνολον :

$$A \equiv \{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$$

τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω. Τὸ ὑποσύνολον Α καλεῖται **συμβὰν** ἢ **γεγονός.**

Γενικῶς: **Συμβὰν ἢ γεγονὸς καλεῖται κάθε ὑποσύνολον τοῦ δειγματικοῦ χώρου.**

Ἐὰν τὸ Α εἶναι μονομελὲς σύνολον, δηλ. ἔχει ἓν μόνον στοιχεῖον, τὸ συμβὰν καλεῖται **ἁπλοῦν**.

Ὅταν ἓν συμβὰν ἔχῃ δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα, δηλ. σύγκειται ἐκ δύο ἢ περισσοτέρων ἁπλῶν συμβάντων, τότε καλεῖται πολλάκις, πρὸς διάκρισιν, **ὁλικὸν συμβάν**.

Κατωτέρω διὰ τοῦ ὅρου συμβὰν θὰ ἐννοῶμεν τὸ ὁλικὸν συμβάν.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἓν συμβὰν Α πραγματοποιεῖται (ἢ ἄλλως ἐμφανίζεται) εἰς ἕνα πείραμα τύχης τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἐκτέλεσις τοῦ πειράματος δίδει ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἓν στοιχεῖον τοῦ ὑποσυνόλου Α.

Συγκεκριμένως : Ἐὰν $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_\nu$ εἶναι ὅλα τὰ ἁπλᾶ συμβάντα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ ἐμφανισθοῦν εἰς ἕνα πείραμα τύχης καὶ ἀπὸ τὰ ν αὐτὰ ἁπλᾶ συμβάντα θεωρήσωμεν k ὡρισμένα, ἔστω τὰ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ $(k \leqq \nu)$, τότε τὸ ὑποσύνολον $A \equiv \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ τοῦ δειγματικοῦ χώρου $\Omega \equiv \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu\}$ ἀντιπροσωπεύει ἓν συμβάν, τὸ ὁποῖον ἔγκειται εἰς τὴν ἐμφάνισιν εἴτε τοῦ θ_1, εἴτε τοῦ $\theta_2, \ldots$, εἴτε τοῦ θ_k καὶ **μόνον** αὐτῶν.

Ἐπειδὴ $\{\theta_1\} \cup \{\theta_2\} \cup \ldots \cup \{\theta_k\} \equiv \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ λέγομεν ὅτι τὸ συμβὰν Α εἶναι **ἕνωσις ἁπλῶν συμβάντων** ἢ ἄλλως τὸ Α *«ἀναλύεται»* εἰς k ἁπλᾶ συμβάντα. Τὸ Α πραγματοποιεῖται κάθε φορὰν ποὺ παρουσιάζεται ἓν τῶν ἁπλῶν συμβάντων $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ καὶ ἀντιστρόφως, πραγματοποιουμένου τοῦ Α πραγματοποιεῖται ἀναγκαστικῶς ἓν τῶν ἁπλῶν συμβάντων $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$.

Τὰ ἁπλᾶ συμβάντα $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ $(k \leqq \nu)$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὰς **«εὐνοϊκὰς περιπτώσεις»** τοῦ συμβάντος Α, ἐνῷ τὰ $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu$, δηλ. τὰ στοιχεῖα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν τὰς **«δυνατὰς περιπτώσεις»** τοῦ πειράματος τύχης.

Τέλος, ἐπειδὴ ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι : $\Omega \subseteq \Omega$ καὶ $\varnothing \subseteq \Omega$ ἕπεται ὅτι ὁ δειγματικὸς χῶρος Ω καὶ τὸ κενὸν σύνολον εἶναι συμβάντα.

Τὸ συμβὰν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸν δειγματικὸν χῶρον λέγομεν ὅτι εἶναι **«βέβαιον συμβὰν»** ἢ **«βέβαιον γεγονός»**, ἐνῷ τὸ συμβὰν τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ κενὸν σύνολον, λέγομεν ὅτι εἶναι **«ἀδύνατον ἐνδεχόμενον»** ἢ **«κενὸν συμβὰν»** καὶ συμβολίζεται μὲ $\varnothing$.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

1). Ἐκτελοῦμεν τὸ πείραμα διπλῆς ρίψεως ἑνὸς κέρματος καὶ ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὰς ἐνδείξεις του. Ὁ κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος θὰ εἶναι τὸ σύνολον :

$\Omega = \{ (K,K,), (K,\Gamma,), (\Gamma,K), (\Gamma,\Gamma) \}$ ἢ ἁπλούστερον $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$,

ὅπου Κ (= κορῶνα) καὶ Γ (= γράμματα).

Τὸ ὑποσύνολον $A = \{KK, K\Gamma, \Gamma K\}$ ὁρίζει τὸ συμβάν :

Α : *«Τὸ νόμισμα εἰς τὰς δύο ρίψεις παρουσιάζει τοὐλάχιστον μίαν φορὰν κορώνα»*.

Ἐξ ἄλλου τὸ ὑποσύνολον $B = \{KK, \Gamma\Gamma\}$ ὁρίζει τὸ συμβάν.

Β : *«Τὸ νόμισμα καὶ εἰς τὰς δύο ρίψεις παρουσιάζει τὴν αὐτὴν ἔνδειξιν»*.

2ον. Ἔστω ὅτι εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα 1 ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὸ πλῆθος τῶν ἐμφανισθέντων Κ (καὶ εἰς τὰς δύο ρίψεις). Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι 0, 1, 2.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τώρα νέον δειγματικὸν χῶρον : $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

Τὸ ὑποσύνολον $A = \{ 1, 2 \}$ ὁρίζει τὸ συμβάν :

Α : *«Ἐμφάνισις τοὐλάχιστον μιᾶς Κ»*.

Ἀξιόλογος παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων γίνεται καταφανὲς ὅτι : εἰς ἕνα πείραμα τύχης δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν, ἀναλόγως τοῦ σκοποῦ τῆς μελέτης μας, πλείονας τοῦ ἑνὸς δειγματικοὺς χώρους, ὁρίζοντες ἑκάστοτε διαφορετικὰ ἁπλᾶ συμβάντα. Χαρακτηριστικὸν εἶναι ὅμως ὅτι : **τὰ ἁπλᾶ συμβάντα εἶναι τὰ μονοσύνολα τοῦ δειγματικοῦ χώρου.**

3ον. Εἰς ἓν κυτίον ἔχομεν τέσσαρα σφαιρίδια : Κυανοῦν, λευκόν, ἐρυθρὸν καὶ πράσινον. Ἔχομεν κατὰ συνέπειαν τὰ ἑξῆς 4 ἁπλᾶ συμβάντα :

θ_k : *«Κυανοῦν σφαιρίδιον»*

θ_λ : *«Λευκὸν σφαιρίδιον»*

θ_ε : *«Ἐρυθρὸν σφαιρίδιον»*

θ_π : *«Πράσινον σφαιρίδιον»*.

Ἐν προκειμένῳ ὁ δειγματικὸς χῶρος εἶναι : $\Omega \equiv \{ \theta_k , \theta_\lambda , \theta_\varepsilon , \theta_\pi \}$.

Τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ $E \equiv \{ \theta_k , \theta_\varepsilon , \theta_\pi \}$ ὁρίζει τὸ συμβάν :

Ε : *«Ἐξάγεται ἔγχρωμον σφαιρίδιον»*.

Τὸ Ε πραγματοποιεῖται, μόνον ὅταν ἓν οἱονδήποτε ἐκ τῶν τριῶν στοιχείων του θ_k, θ_ε, θ_π πραγματοποιηθῇ καὶ ἀντιστρόφως, ἄν τις ἀναγγείλῃ ὅτι ἐξήχθη ἔγχρωμον σφαιρίδιον, συνάγομεν ὅτι κάποιο ἐκ τῶν τριῶν ἁπλῶν συμβάντων θ_k, θ_ε, θ_π ἔχει πραγματοποιηθῇ.

§ 257. Θεμελειώδεις ὁρισμοὶ καὶ πράξεις μεταξὺ συμβάντων.

α'). Δύο συμβάντα θὰ λέγωνται **ξένα πρὸς ἄλληλα** ἢ **ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα**, ἄλλως **ἀσυμβίβαστα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς ἀποκλείῃ τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Κατόπιν τούτου τὰ ξένα συμβάντα ἀντιστοιχοῦν εἰς ὑποσύνολα τοῦ Ω μὴ ἔχοντα κοινὰ ἁπλᾶ συμβάντα.

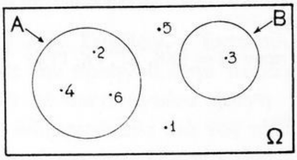
Προφανῶς δύο ἁπλᾶ συμβάντα εἶναι πάντοτε ξένα μεταξύ των.

Παράδειγμα. Τὰ συμβάντα :

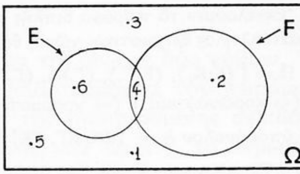
A : *«Ὁ κύβος δεικνύει ἄρτιον ἀριθμόν»*

B : *«Ὁ κύβος δεικνύει 3»*

εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, διότι τὸ ἓν ἀποκλείει τὸ ἄλλο.



Σχ. 16



Σχ. 17

Τοὐναντίον τὰ συμβάντα :

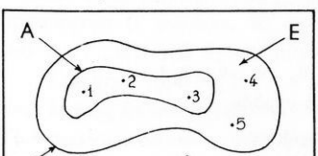
E : *«Ὁ κύβος δεικνύει ἄρτιον $>$ 2»*.

F : *«Ὁ κύβος δεικνύει ἄρτιον $<$ 5»*.

δὲν εἶναι ξένα μεταξύ των.

Παρατήρησις : Εἰς τὴν περίπτωσιν δύο ξένων συμβάντων ἡ μὴ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς δὲν συνεπάγεται ἀναγκαίως τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Οὕτως, εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα, ἐὰν ὁ κύβος δὲν φέρῃ ἄρτιον ἀριθμόν, δὲν ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι οὗτος θὰ φέρῃ 3, καθόσον δύναται νὰ φέρῃ τὸν ἀριθμὸν 5 ἢ τὸν 1.

β'). Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο μὴ ξένα συμβάντα ἑνὸς πειράματος τύχης, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ **A περιέχεται εἰς τὸ B** (ἢ ὅτι τὸ B περιέχει τὸ A) ἄλλως τὸ **A συνεπάγεται τὸ B** καὶ θὰ γράφωμεν $A \subseteq B$ (ἢ $B \supseteq A$) τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιουμένου τοῦ A πραγματοποιῆται καὶ τὸ B. Ἐὰν $A \subset B$, τότε ἡ πραγματοποίησις τοῦ B δὲν συνεπάγεται ὑποχρεωτικῶς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ A. Ἡ πραγματοποίησις τοῦ B χωρὶς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ A ἀποτελεῖ τὸ συμβὰν $B - A$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **διαφορὰ** τῶν συμβάντων B καὶ A.



Σχ. 18

Παράδειγμα. Θεωρήσωμεν τὰ συμβάντα :

A : *«Ὁ κύβος δεικνύει ἀριθμὸν $\leqq$ 3»*.

B : *«Ὁ κύβος δεικνύει ἀριθμὸν $\leqq$ 5»*.

Προφανῶς $A \subset B$. Ἡ διαφορὰ $B - A$ παριστᾷ τὸ συμβάν :

E : *«Ὁ κύβος δεικνύει 4 ἢ 5»*.

γ'). Ἕνωσις συμβάντων. Καλεῖται **ἕνωσις** συμβάντων $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ὑπαγομένων εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης, ἓν νέον συμβὰν A, τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιηθῇ **τοὐλάχιστον** ἓν τῶν $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Γράφομεν τότε :

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \equiv \bigcup_{i=1}^{k} A_i.$$

Ἐὰν τὰ θεωρηθέντα συμβάντα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ εἶναι ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο, τότε τὸ Α λέγεται **«ἄθροισμα»** αὐτῶν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ γράφωμεν :

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_k = \sum_{i=1}^{k} A_i \,.$$

Εἰς τὴν τελευταίαν περίπτωσιν ἡ ἐμφάνισις (πραγματοποίησις) τοῦ Α συνεπάγεται τὴν ἐμφάνισιν **ἑνὸς καὶ μόνον** ἐκ τῶν $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

Παραδείγματα:

1ον. Τὸ συμβὰν Α : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν»* εἶναι ἕνωσις τῶν συμβάντων :

A_1 : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν* < 5*»*.

A_2 : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἄρτιον ἀριθμὸν* > 3*»*.

2ον. Τὸ συμβάν : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ 3»* εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν ἁπλῶν συμβάντων : *«Ὁ κύβος δεικνύει 4», «ὁ κύβος δεικνύει 5», «ὁ κύβος δεικνύει 6».*

δ΄). Τομὴ ἢ γινόμενον συμβάντων. Καλεῖται **τομὴ** συμβάντων $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ὑπαγομένων εἰς τὸ αὐτὸ πείραμα τύχης, ἓν νέον συμβὰν Α, τὸ ὁποῖον πραγματοποιεῖται τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν πραγματοποιοῦνται **ὅλα συγχρόνως** τὰ συμβάντα $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Γράφομεν δὲ τότε :

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i \,.$$

Εἶναι προφανὲς ὅτι, ἐὰν δύο συμβάντα A_1, A_2 εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Παράδειγμα. Τὸ συμβάν :

Α : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει 4 ἢ 5»*

εἶναι τομὴ τῶν συμβάντων :

A_1 : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν* $\leqq 5$*»*

A_2 : *«Ὁ κύβος παρουσιάζει ἀριθμὸν* > 3*»*.

ε΄). Συμπληρωματικὸν ἑνὸς συμβάντος. Δύο συμβάντα ξένα πρὸς ἄλληλα, ἔχοντα ἄθροισμα τὸ «βέβαιον γεγονὸς» καλοῦνται **συμπληρωματικὰ** ἢ **ἀντίθετα** συμβάντα.

Τὸ συμπληρωματικὸν ἑνὸς συμβάντος Α παρίσταται μὲ A' (ἢ A^c).

Ὡς συμπληρωματικὸν τοῦ «βεβαίου συμβάντος» λαμβάνεται τὸ «κενὸν συμβὰν» καὶ ἀντιστρόφως. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά, τότε ἡ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς **ἀποκλείει** τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου καὶ ἡ μὴ πραγματοποίησις τοῦ ἑνὸς σ υ ν ε π ά γ ε τ α ι ἀ ν α γ κ α ί ω ς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἄλλου. Συνεπῶς πᾶσα **εὐνοϊκὴ** περίπτωσις διὰ τὸ ἓν εἶναι **«δυσμενὴς»** (μὴ εὐνοϊκὴ) διὰ τὸ ἕτερον καὶ πᾶσα δυσμενὴς περίπτωσις διὰ τὸ ἓν εἶναι εὐνοϊκὴ διὰ τὸ ἕτερον.

Κατὰ ταῦτα τὸ A' σημαίνει ὅτι τὸ συμβὰν Α δὲν συμβαίνει (δὲν πραγματοποιεῖται).

Παραδείγματα:

1ον. Τὰ συμβάντα :

Α : *«Ὁ κύβος δεικνύει ἄρτιον ἀριθμόν»*

Α΄: *«Ὁ κύβος δεικνύει περιττὸν ἀριθμόν»*

εἶναι συμπληρωματικά.

2ον. Εἰς τὸ γνωστὸν πείραμα τῆς ρίψεως δύο νομισμάτων, τὸ συμβὰν Α = { ΚΚ }, ἤτοι Α : *«Τὰ δύο νομίσματα δεικνύουν κορώνα»* εἶναι συμπληρηρωματικὸν τοῦ συμβάντος Α′ ≡ { ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ }, ἤτοι τοῦ συμβάντος :

Α′ : *«Παρουσιάζονται τοὐλάχιστον μία φορὰ γράμματα»,* ἢ ἄλλως
Α′ : *«Δὲν παρουσιάζεται κορώνα καὶ τὰς δύο ρίψεις».*

§ 258. Στοιχειώδης ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος.

— Ὁ ὁρισμὸς αὐτός, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ εὑρίσκεται εἰς τὰ τυχηρὰ παιγνίδια, εἶναι ὁ εἰσαχθεὶς ὑπὸ τῶν θεμελιωτῶν τῆς Θεωρίας τῶν Πιθανοτήτων καὶ διατυπωθεὶς σαφῶς ὑπὸ τοῦ Laplace ὡς ἑξῆς :

Πιθανότης ἑνὸς συμβάντος καλεῖται ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν δι' αὐτὸ περιπτώσεων πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταί.

Ἤτοι, ἐὰν Α εἶναι ἓν συμβὰν ὑπαγόμενον εἰς ἓν πείραμα τύχης καὶ παραστήσωμεν διὰ τοῦ Ρ(Α) *) τὴν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ Α, θὰ ἔχωμεν :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων τοῦ Α}}{\text{Ἀριθμὸς ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος}}} \quad (1)$$

Εἰς τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὑπονοεῖται ἡ **ὑπόθεσις τοῦ ἰσαπιθάνου** τῶν περιπτώσεων ἢ ἁπλῶν συμβάντων.

Ἐκ τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ ἕπονται ἀμέσως αἱ προτάσεις :

α′). *Ἡ πιθανότης συμβάντος Α εἶναι ἀριθμὸς μὴ ἀρνητικὸς καὶ μικρότερος ἢ ἴσος πρὸς τὴν μονάδα,* ἤτοι :

$$\boxed{0 \leqq P(A) \leqq 1}$$

β′). *Ἡ πιθανότης τοῦ βεβαίου συμβάντος ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα,* ἤτοι :

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

γ′). *Ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν συμβάντων ἑνὸς πειράματος τύχης εἶναι ν, τότε ἡ πιθανότης ἑκάστου ἁπλοῦ συμβάντος εἶναι* $\frac{1}{\nu}$.

Πράγματι, ἐὰν $\Omega \equiv \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu\}$ εἶναι ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ πειράματος, τότε εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις διὰ τὸ ἁπλοῦν συμβὰν $\{\theta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ εἶναι μόνον μία, ἐπειδὴ τὸ $\{\theta_i\}$ κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον δύναται νὰ ἐμφανισθῇ. Ἐξ ἄλλου τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων τοῦ πειράματος εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ (βλ. § 256), ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἁπλῶν συμβάντων, δηλ. ν. Ἄρα ὁ τύπος (1) δίδει :

$$P(\{\theta_i\}) = \frac{1}{\nu}, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

* Τὸ Ρ εἶναι τὸ ἀρχικὸν γράμμα τῆς λέξεως Probability (ἀγγλ.) — Probabilité (γαλ.) = Πιθανότης.

δ'). *Τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων δύο συμπληρωματικῶν συμβάντων ἰσοῦται μὲ 1.*

Πράγματι, ἐὰν k εἶναι τὸ πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων διὰ τὸ Α καὶ ν τῶν δυνατῶν, τότε τὸ πλῆθος τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων διὰ τὸ Α' θὰ εἶναι $\nu - k$, διότι (§ 257) πᾶσα εὐνοϊκὴ περίπτωσις διὰ τὸ Α εἶναι δυσμενὴς διὰ τὸ Α' καὶ πᾶσα δυσμενὴς διὰ τὸ Α εἶναι εὐνοϊκὴ διὰ τὸ Α'. Ἐὰν συνεπῶς P (A) καὶ P (A') εἶναι ἀντιστοίχως αἱ πιθανότητες τῶν συμβάντων Α καὶ Α' θὰ ἔχωμεν :

$$P(A) = \frac{k}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad P(A') = \frac{\nu - k}{\nu}.$$

Ἐξ αὐτῶν διὰ προσθέσεως λαμβάνομεν :

$$\boxed{\mathbf{P(A) + P(A') = 1}}$$

Ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ συμπληρωματικοῦ συμβάντος εἶναι :

$$\boxed{\mathbf{P(A') = 1 - P(A)}}$$

§ 259. Ἐφαρμογαὶ ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων.

1η : Εἰς τὸ παιγνίδιον **«κορώνα – γράμματα»**, τὰ ἁπλᾶ συμβάντα εἶναι δύο, αἱ δύο ὄψεις: «κορώνα», «γράμματα», τὰς ὁποίας ἂς συμβολίσωμεν, ὡς καὶ πρότερον Κ, Γ ἀντιστοίχως. Συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν (γ') αἱ πιθανότητες αὐτῶν εἶναι : $P(K) = \frac{1}{2}$, $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Αὐτὸ δὲν σημαίνει βεβαίως ὅτι, ἐὰν ρίψωμεν δύο φορὰς κατ' ἐπανάληψιν τὸ νόμισμα, τὴν μίαν φορὰν θὰ ἐμφανίσῃ «κορώνα» καὶ τὴν ἄλλην «γράμματα». Οὔτε ὅτι εἰς 10 ρίψεις θὰ ἔχωμεν 5 «κορώνας» καὶ 5 «γράμματα». Ἡ στοιχειώδης πιθανότης τὴν ὁποίαν ὑπελογίσαμεν ἰσχύει δι' ἓν πλῆθος ρίψεων, δηλαδὴ δι' ἕνα πολὺ μεγάλον ἀριθμὸν ρίψεων.

Ἐξ ἄλλου ἔχομεν : $P(K) + P(\Gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Τοῦτο προφανῶς τὸ ἀνεμέναμεν, διότι τὰ δύο συμβάντα εἶναι συμπληρωματικά.

2α : Εἰς τὸ παιγνίδιον **τῆς ρίψεως ἑνὸς κύβου,** τὰ ἁπλᾶ συμβάντα εἶναι ἐν ὅλῳ 6, αἱ ἓξ ὄψεις (ἕδραι) τοῦ κύβου. Ἐὰν στοιχηματίσωμεν διὰ τὴν ἐμφάνισιν μιᾶς συγκεκριμένης ἐνδείξεως, ἡ στοιχειώδης πιθανότης εἶναι $\frac{1}{6}$, ἀφοῦ τὸ πλῆθος τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι 6, ἡ δὲ εὐνοϊκὴ περίπτωσις εἶναι μόνον μία. Ὥστε :

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6},$$

ὅπου $P(x)$ = πιθανότης τοῦ ἁπλοῦ συμβάντος : «Ὁ κύβος παρουσιάζει τὸν ἀριθμὸν x».

Ἐὰν ἀντὶ ἑνὸς χρησιμοποιήσωμεν ν ὁμοίους κύβους, τὰ συμβάντα θὰ εἶναι αἱ ἐπαναληπτικαὶ διατάξεις τῶν 6 ἐνδείξεων ἀνὰ ν. Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων αὐτῶν εἶναι :

$$6^\nu$$

Ἡ στοιχειώδης πιθανότης μιᾶς συγκεκριμένης διατάξεως, δηλ. ἑνὸς ὡρισμένου συμβάντος, θὰ εἶναι : $\frac{1}{6^\nu}$.

Οὕτως, εἰς τὴν περίπτωσιν ρίψεως δύο κύβων (§ 255), ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : *«ὁ λευκὸς κύβος νὰ φέρῃ 2 καὶ ὁ ἐρυθρὸς 3»* εἶναι $\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$, ἤτοι :

$$P((2,3))=\frac{1}{36}, \text{ ἢ ἁπλούστερον } P(2,3)=\frac{1}{36}.$$

3η : Εἰς τὰ παιγνίδια **τῶν παιγνιοχάρτων** χρησιμοποιοῦνται ἄλλοτε $4 \times 13 = 52$ παιγνιόχαρτα καὶ ἄλλοτε $4 \times 8 = 32$ (πρέφα). Εἰς τὰ παιγνίδια τῶν 52 παιγνιοχάρτων, ὑπάρχουν δι' ἕκαστον τῶν τεσσάρων *«χρωμάτων» («σπαθί», «καρρό», «κούπα», «μπαστούνι»)*, ἀνὰ 10 ἀριθμοὶ (1 — 10) καὶ 3 φιγοῦραι.

Ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ τις ἐκ μιᾶς δέσμης, καλῶς ἀναμεμιγμένης ἓν ὡρισμένον παιγνιόχαρτον εἶναι κατὰ ταῦτα $\frac{1}{52}$, ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ ἓν ὡρισμένον χρῶμα εἶναι $\frac{1}{4}$, ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ φιγούραν (γενικῶς) εἶναι $\frac{12}{52}$, ἡ πιθανότης νὰ ἀνασύρῃ ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν, π.χ. ἄσσον, ἀνεξαρτήτου χρώματος εἶναι $\frac{4}{52}$ (ὑπάρχουν 4 ἄσσοι, ἤτοι 4 εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις καὶ 52 παιγνιόχαρτα, ἤτοι 52 δυναταὶ περιπτώσεις).

4η : Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων ἐξάγονται συγχρόνως δύο παιγνιόχαρτα. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι καὶ τὰ δύο ἄσσοι ;

Λ ύ σ ι ς : Ἔστω Α τὸ συμβάν : *«Ἀμφότερα νὰ εἶναι ἄσσοι».*

Αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι $\binom{52}{2}$. Αἱ εὐνοϊκαὶ εἶναι τόσαι, ὅσοι καὶ οἱ διάφοροι τρόποι, καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀπὸ τοὺς 4 ἄσσους τοὺς 2, δηλ. $\binom{4}{2}$.

$$\text{Ἄρα : } P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}=\binom{4}{2}:\binom{52}{2}=\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}:\frac{52\cdot 51}{1\cdot 2}=\frac{4\cdot 3}{52\cdot 51}=\frac{1}{221}\simeq 45\,‰.$$

5η : Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴ παρουσιασθῇ τὸ 3, ὅταν ρίψωμεν ἕνα κύβον εἰς τὸν ἀέρα;

Λ ύ σ ι ς : Τὸ συμβὰν *«νὰ φέρῃ ὁ κύβος 3»* εἶναι συμπληρωματικὸν τοῦ συμβάντος *«νὰ μὴ φέρῃ ὁ κύβος 3»*. Ἡ πιθανότης τοῦ πρώτου συμβάντος εἶναι $\frac{1}{6}$, ἄρα ἡ πιθανότης τοῦ δευτέρου εἶναι :

$$1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

583. Ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα δύο κύβους καὶ μᾶς ἐνδιαφέρει τὸ συμβάν Α : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἑδρῶν εἶναι $\leqq 7$» καὶ τὸ συμβὰν Β : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἑδρῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός». Ζητοῦνται :

α) Νὰ σχηματισθῇ ὁ κατάλληλος δειγματικὸς χῶρος καὶ νὰ καθορισθοῦν ἐν αὐτῷ τὰ Α καὶ Β.

β) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ A', B', $A\cup B$, $A\cap B$, $A'\cup B'$, $A'\cap B'$, $(A\cup B')\cap A'$.

γ) Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν ἄνω ἑδρῶν εἶναι ἀκριβῶς 7;».

584. Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Ποία ἡ πιθανότης ἑκάστου τῶν κάτωθι συμβάντων :

α) Νὰ φέρωμεν 6,6.

β) Ὁ εἷς κύβος νὰ φέρῃ 3 καὶ ὁ ἄλλος 5.

γ) Οἱ δύο κύβοι νὰ φέρουν διαδοχικοὺς ἀριθμούς.

δ) Οἱ κύβοι νὰ φέρουν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 9.

585. Ρίπτει τις δύο κύβους καὶ φέρει ἄθροισμα 9. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα ὁ συμπαίκτης του φέρῃ μεγαλύτερον ἄθροισμα ;

586. Εἰς ἓν δοχεῖον ὑπάρχουν 5 σφαῖραι λευκαί, 7 κυαναὶ καὶ 4 ἐρυθραί. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν τυχαίαν λῆψιν 3 σφαιρῶν. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι καὶ αἱ τρεῖς σφαῖραι λευκαί;

587. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων ἐξάγομεν τυχαίως 5 χαρτιά. Ζητοῦνται :

α) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθοῦν μόνον κόκκινα; (Τὰ 26 ἔχουν χρῶμα κόκκινον καὶ τὰ λοιπὰ 26 μαῦρο).

β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθοῦν 3 μαῦρα καὶ 2 κόκκινα;

588. Εἰς μίαν τάξιν 43 μαθητῶν εἶναι 24 ἀγόρια καὶ 19 κορίτσια. Ἂν λάβωμεν τυχαίως πέντε κλήρους τῆς τάξεως : α) Ποία ἡ πιθανότης νὰ κληθοῦν μόνον ἀγόρια. β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ κληθοῦν 3 ἀγόρια καὶ 2 κορίτσια;

589. Ρίπτομεν τρεῖς κύβους, ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ εἰς τοὐλάχιστον ἄσσος;

590. Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Ποία ἡ πιθανότης ἑκάστου τῶν κάτωθι συμβάντων :

α) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι μικρότερον τοῦ 5.

β) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι ἴσον μὲ 8.

γ) » » » » εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 9.

δ) » » » » εἶναι διάφορον τοῦ 4.

591. Ὑποθέσωμεν ὅτι σκοπεύομεν νὰ κάμωμεν μίαν μελέτην ἐπὶ τῶν οἰκογενειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τρία παιδιὰ καὶ ὅτι θέλομεν νὰ καταγράψωμεν τὸ φύλον ἑκάστου παιδιοῦ κατὰ σειρὰν γεννήσεως. Γράψατε τὸν κατάλληλον δειγματικὸν χῶρον. Ὑποθέτοντες ἀκολούθως ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ δειγματικοῦ χώρου ἔχει τὴν αὐτὴν πιθανότητα, νὰ εὑρεθῇ :

α) Ἡ πιθανότης ἵνα μία οἰκογένεια μὲ τρία παιδιὰ τὰ δύο πρῶτα εἶναι ἀγόρια καὶ τὸ τρίτο κορίτσι.

β) Ἡ πιθανότης ἵνα ἔχῃ ἕνα τοὐλάχιστον ἀγόρι.

γ) Ἡ πιθανότης ἵνα ἔχῃ μόνον ἕνα κορίτσι.

δ) Ἡ πιθανότης ἵνα ἔχῃ δύο κορίτσια καὶ ἕνα ἀγόρι.

592. Ἔχομεν μίαν δέσμην παιγνιοχάρτων τῶν 52 φύλλων. Ζητεῖται ἡ πιθανότης τῶν ἑξῆς συμβάντων :

α) Λαμβάνοντες τυχαίως ἕνα χαρτί, τοῦτο νὰ εἶναι ἄσσος μπαστούνι.

β) Λαμβάνοντες τυχαίως ἕνα χαρτί, τοῦτο νὰ εἶναι ἄσσος.

γ) Λαμβάνοντες 6 χαρτιὰ συγχρόνως, νὰ περιέχωνται εἰς αὐτὰ οἱ 4 ἄσσοι.

593. Ποία ἡ πιθανότης ρίπτοντες τρεῖς κύβους, νὰ φέρωμεν ἄθροισμα μεγαλύτερον τοῦ 15;

594. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν ἄνω τὰ παιγνιόχαρτα, ἕως ὅτου εὕρωμεν διὰ πρώτην φορὰν ἄσσον. Ποία ἡ πιθανότης ἵνα τὸ τέταρτον χαρτὶ εἶναι ἄσσος;

II. ΔΙΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗ ΠΡΟΣΠΕΛΑΣΙΣ ΕΙΣ ΤΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

§ 260. Ὁ ὁρισμὸς τῆς πιθανότητος, τὸν ὁποῖον διετυπώσαμεν εἰς τὴν § 258 παρουσιάζει δύο βασικὰ μειονεκτήματα :

1ον) Δὲν εἶναι εὐχερής, ἂν μὴ δυνατός, ὁ ἀκριβὴς καθορισμὸς ἀφ' ἑνὸς τῶν δυνατῶν καὶ ἀφ' ἑτέρου τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων, ἰδίως ὅταν ὁ δειγματικὸς χῶρος δὲν εἶναι πεπερασμένος.

2ον) Ἡ περικοπὴ αὐτοῦ *«... ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου δυναταὶ»* εἶναι ταυτόσημος μὲ τὴν *«ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί»*, τοιουτοτρόπως ὅμως ἡ πιθανότης ὁρίζεται ἐκ νέου διὰ τῆς πιθανότητος, διαπράττεται δηλαδὴ φαῦλος κύκλος.

Ἡ τοιαύτη θεώρησις τῆς ἐννοίας τῆς πιθανότητος, μολονότι χρησιμωτάτη εἰς τὴν ἐφαρμογήν, παρουσιάζει δυσχερείας ἀπὸ λογικῆς πλευρᾶς, δι' ὃ καὶ ἡ νεωτέρα Θεωρία τῶν Πιθανοτήτων ἀναπτύσσεται κατὰ τρόπον **τυπικῶς ἀξιωματικόν**, διὰ τοῦ καθορισμοῦ ἑνὸς πλήρους συστήματος προτάσεων (ἀξιωμάτων) τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων ἐξάγονται, διὰ τῆς παραγωγικῆς πλέον ὁδοῦ ὅλαι αἱ ἔννοιαι καὶ προτάσεις τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Κατόπιν τούτων, θὰ ἀρχίσωμεν τὴν συστηματικωτέραν ἐξέτασιν τῶν πιθανοτήτων μὲ τὴν ἤδη γνωστὴν ἔννοιαν τοῦ δειγματικοῦ χώρου ἑνὸς πειράματος.

§ 261. Πιθανότης ἁπλῶν συμβάντων.— Ἔστω ὁ δειγματικὸς χῶρος $\Omega = \{ \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu \}$. Εἰς ἕκαστον ἁπλοῦν συμβὰν (θ_k), $k = 1,2,\ldots,\nu$ ἐκχωροῦμεν ἕνα πραγματικὸν ἀριθμὸν $P(\{\theta_k\})$, τὸν ὁποῖον ὀνομάζομεν **πιθανότητα** τοῦ συμβάντος $\{\theta_k\}$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι μία ἐκχώρησις πιθανοτήτων πρὸς τὰ ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, δηλαδὴ πρὸς τὰ $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \ldots, \{\theta_\nu\}$ εἶναι δεκτή, ἐὰν ἱκανοποιῇ τὰς δύο συνθήκας :

$\mathbf{P}_1$: *Ἡ πιθανότης ἑκάστου ἁπλοῦ συμβάντος εἶναι θετικὸς ἀριθμός*, ἤτοι :

$$P(\{\theta_k\}) > 0, \quad k = 1,2,\ldots,\nu.$$

$\mathbf{P}_2$: *Τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν ἐκχωρουμένων εἰς ὅλα τὰ ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα*, ἤτοι :

$$P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \cdots + P(\{\theta_\nu\}) = 1,$$

συντόμως :

$$\sum_{k=1}^{\nu} P(\{\theta_k\}) = 1.$$

Ἕνα σύστημα τοιούτων ἀριθμῶν $P(\{\theta_k\})$ πληρούντων τὰς $\mathbf{P}_1$ καὶ $\mathbf{P}_2$ εἶναι τό :

$$P(\{\theta_1\}) = P(\{\theta_2\}) = P(\{\theta_3\}) = \cdots = P(\{\theta_\nu\}) = \frac{1}{\nu}.$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν αὐτὴν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι τὰ ἁπλᾶ συμβάντα εἶναι **ἰσοπίθανα**.

§ 262. Πιθανότης συμβάντος (ὁλικοῦ).— Κάθε συμβὰν $A \neq \varnothing$ εἶναι, ὡς ἐλέχθη, ἕνωσις, ἀκριβέστερον ἄθροισμα ἁπλῶν συμβάντων, ἤτοι :

$$A = \{\theta_1\} + \{\theta_2\} + \cdots + \{\theta_k\}, \quad (k \leqq \nu).$$

Ὁρίζομεν ὡς **πιθανότητα τοῦ A, $A \neq \varnothing$, τὸν ἀριθμὸν P (A), ὅστις εἶναι ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \ldots, \{\theta_k\}$**, ἤτοι :

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\theta_1\}) + \mathbf{P}(\{\theta_2\}) + \cdots + \mathbf{P}(\{\theta_k\}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\{\theta_i\})}$$

Ἐὰν A εἶναι τὸ κενὸν συμβάν, ἤτοι ἂν $A = \varnothing$, τότε δεχόμεθα ἐξ ὁρισμοῦ ὅτι :

$$\boxed{\mathbf{P}(\varnothing) = 0}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπονται τώρα αἱ κάτωθι προτάσεις:

α'). *Ἡ πιθανότης τοῦ «βεβαίου συμβάντος» εἶναι μονάς, ἤτοι $P(\Omega) = 1$.*

Πράγματι, ἔχομεν:

$$P(\Omega) = \sum_{i=1}^{\nu} P(\{\theta_i\}) = (\text{λόγω τῆς συνθήκης } \mathbf{P}_2, \S\ 261) = 1.$$

β'). *Ἐὰν A καὶ B εἶναι συμβάντα ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Πράγματι, ἐὰν $A = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$, $B = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho\}$ καὶ $A \cap B = \varnothing$, τότε: $A + B = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\rho\}$.

Ἔχομεν ὅμως:

$$P(A) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \cdots + P(\{\theta_k\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{\theta_i\})$$

$$P(B) = P(\{\varepsilon_1\}) + P(\{\varepsilon_2\}) + \cdots + P(\{\varepsilon_\rho\}) = \sum_{j=1}^{\rho} P(\{\varepsilon_j\})$$

$$P(A + B) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + \cdots + P(\{\theta_k\}) + P(\{\varepsilon_1\}) + (\{\varepsilon_2\}) + $$
$$+ \cdots + P(\{\varepsilon_\rho\}) = \sum_{i=1}^{k} P(\{\theta_i\}) + \sum_{j=1}^{\rho} P(\{\varepsilon_j\}) = P(A) + P(B).$$

Γενικώτερον ἰσχύει ἡ κάτωθι πρότασις:

γ'). *Ἐὰν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ εἶναι συμβάντα ἀνὰ δύο ξένα πρὸς ἄλληλα καὶ εἶναι:*

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu,$$

τότε: $$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_\nu).$$

Ὑπόδειξις: Ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $\nu = 2$. Ὑποθέσατε ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = k$ καὶ δείξατε ὅτι ἰσχύει διὰ $\nu = k + 1$.

Σημείωσις: Ἡ ἀνωτέρω πρότασις καλεῖται: **Ἀθροιστικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων**, διατυποῦται δὲ συντόμως, οὕτω:

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{A}_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbf{P}(\mathbf{A}_i)}$$

δ'). *Δι' οἱονδήποτε συμβὰν A, ἰσχύει:* $\quad 0 \leqq P(A) \leqq 1.$

Πράγματι, ἐπειδὴ $P(A) \geqq 0$ διὰ κάθε συμβὰν A, ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $P(A) \leqq 1$. Τοῦτο ὅμως ἰσχύει, διότι, ἂν θεωρήσωμεν καὶ τὸ συμπληρωματικὸν A' τοῦ A, ὅτε $A \cup A' = \Omega$ καὶ $A \cap A' = \varnothing$, θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῶν προτάσεων β' καὶ α', ὅτι:

$$P(A \cup A') = P(A) + P(A') = P(\Omega) = 1.$$

Ὅθεν: $P(A) = 1 - P(A') \leqq 1$, διότι, ὡς ἀνωτέρω ἐλέχθη, $P(A') \geqq 0$.

ε'). *Ἐὰν A καὶ B εἶναι δύο οἱαδήποτε συμβάντα, τότε:*

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ἢ ὅπερ τὸ αὐτό:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B).$$

Πράγματι, ἐπειδὴ $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ καὶ $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$ θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῆς ἀνωτέρω προτάσεως β', ὅτι :

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cup B),$$

ἐξ οὗ :
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Ἐφαρμογαὶ

1η : Ἐὰν τὰ ν ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\nu\}$ εἶναι ἰσοπίθανα, τότε :

$$P\left(\sum_{i=1}^{\nu}\{\theta_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\nu} P(\{\theta_i\}) = \nu \cdot P(\{\theta_i\}). \quad (1)$$

Ἀλλὰ
$$P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^{\nu}\{\theta_i\}\right) = 1. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι : $P(\{\theta_i\}) = \dfrac{1}{\nu}, \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, \nu.$

Δηλαδὴ ἐπανευρίσκομεν τὴν πρότασιν (γ') τῆς § 258.

2α : Ἐὰν τὰ k ἁπλᾶ συμβάντα ἑνὸς γεγονότος $A = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k\}$ εἶναι ἰσοπίθανα πιθανότητος $\dfrac{1}{\nu}$, τότε :

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{k}\{\theta_i\}\right) = \sum_{i=1}^{k} P(\{\theta_i\}) = k \cdot P(\{\theta_i\}) = k \cdot \frac{1}{\nu} = \frac{k}{\nu} = \frac{\text{ἀριθμὸς εὐνοϊκῶν περιπτώσεων}}{\text{ἀριθμὸς δυνατῶν περιπτώσεων}}.$$

Δηλαδὴ τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀνωτέρω προτάσεων καὶ ὁρισμῶν εὑρίσκομεν ὡς συνέπειαν τὸν στοιχειώδη ὁρισμὸν τῆς πιθανότητος κατὰ Laplace (βλ. § 258).

3η : Ἐὰν E καὶ E′ εἶναι δύο συμπληρωματικὰ συμβάντα ἑνὸς δειγματικοῦ χώρου Ω καὶ εἶναι $P(E) = p$, τότε $P(E') = 1 - p$.

Ἀπόδειξις. Ἀφ' οὗ $E + E' = \Omega$, τότε, συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν β', θὰ ἔχωμεν :

$$P(E + E') = P(E) + P(E') = P(\Omega), \quad \text{ἀλλὰ} \quad P(\Omega) = 1,$$

ἄρα
$$p + P(E') = 1,$$

ἐξ οὗ:
$$P(E') = 1 - p.$$

4η : Ἐὰν A καὶ B συμβάντα καὶ $A \subset B$, τότε $P(A) < P(B)$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω Δ τὸ συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς B, ἤτοι $\Delta = C_B A \equiv B - A$.

Προφανῶς ἔχομεν :

$$A \cup \Delta = B \quad \text{καὶ} \quad A \cap \Delta = \varnothing.$$

Ὁπότε :

$$P(A \cup \Delta) = P(A + \Delta) = P(A) + P(\Delta) = P(B).$$

Ἄρα :
$$P(A) < P(B), \quad \text{καθόσον} \quad P(\Delta) > 0.$$

5η : Ποία ἡ πιθανότης ἵνα εἷς κύβος ριπτόμενος εἰς τὸν ἀέρα φέρῃ ἄρτιον ἀριθμόν;

Λύσις : Τὸ συμβὰν A : *«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ ἄρτιον ἀριθμὸν»* εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς τριῶν ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων συμβάντων :

A_1 : *«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 2».*
A_2 : *«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 4».*
A_3 : *«Ὁ κύβος νὰ φέρῃ 6».*

ἤτοι :
$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

Ἄρα :
$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

6η: Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότης ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων νὰ εἶναι 3 ἢ 7;

Λύσις: Ὡς γνωστὸν (§ 255) τὰ ἁπλᾶ συμβάντα τοῦ πειράματος εἶναι 36 διατεταγμένα ζεύγη : (1,1), (1,2), (2,1), . . . , (6,6) εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἐκχωροῦμεν πιθανότητα $\frac{1}{36}$.

Τὸ συμβὰν Α : *«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 3 ἢ 7»,* εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς δύο ξένων ἀλλήλων συμβάντων :

A_1 : *«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδ ίξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 3».*

A_2 : *«Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων τῶν δύο κύβων εἶναι 7».*

Τὸ συμβὰν A_1 εἶναι τὸ σύνολον $\{ (1,2), (2,1) \}$, μὲ $P(A_1) = \frac{2}{36}$.

Τὸ συμβὰν A_2 εἶναι $\{ (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) \}$, μὲ $P(A_2) = \frac{6}{36}$.

Ἄρα : $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{2}{36} + \frac{6}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

7η : Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο συμβάντα μὲ $P(B) = \frac{1}{2}$ καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ $P(B \cap A')$.

Λύσις: Ἔχομεν, δυνάμει τῆς προτάσεως ε΄ :

$$P(B \cap A') = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

595. Ἓν δοχεῖον περιέχει 3 λευκὰ σφαιρίδια, 4 κυανᾶ καὶ 6 μαῦρα. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν τυχαίαν λῆψιν 2 σφαιριδίων ἐκ τῶν 13. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφότερα τοῦ ἰδίου χρώματος;

596. Ἓν κυτίον περιέχει λευκὰ καὶ μαῦρα σφαιρίδια, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν λευκῶν εἶναι δεκαπλάσιος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαύρων. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ληφθῇ ἓν λευκὸν σφαιρίδιον;

597. Ἐὰν ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ ἓν συμβὰν εἶναι τριπλασία τῆς πιθανότητος νὰ μὴν ἐμφανισθῇ, ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανισθῇ τοῦτο;

598. Ρίπτει τις δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότης νὰ δείξουν ἀμφότεροι τὴν ἰδίαν ὄψιν;

599. Εἰς μίαν γραπτὴν ἐξέτασιν εἰς τὸ μάθημα τῆς ἱστορίας δίδονται τρία ἱστορικὰ γεγονότα ($\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$) καὶ τρεῖς χρονολογίαι (x_1, x_2, x_3), ζητεῖται δὲ ὅπως ἕκαστος μαθητὴς συσχετίσῃ τὰ τρία γεγονότα πρὸς τὰς τρεῖς χρονολογίας. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἷς μαθητὴς δὲν κατέχει τὸ θέμα καὶ κάμνει τυχαίαν συσχέτισιν, εἰς τρόπον ὥστε ὅλαι αἱ δυναταὶ συσχετίσεις νὰ εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί.

α) Σχηματίσατε τὸν δειγματικὸν χῶρον διὰ τὰ δυνατὰ ἀποτελέσματα.

β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴν ὑπάρχουν τρεῖς ὀρθαὶ συσχετίσεις εἰς τὴν ἀπάντησιν τοῦ μαθητοῦ.

γ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν ἀκριβῶς δύο ὀρθαὶ συσχετίσεις;

δ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ὅλαι αἱ συσχετίσεις ὀρθαί;

ε) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν περισσότεραι τῆς μιᾶς ὀρθαὶ συσχετίσεις;

στ) Ἡ πιθανότης νὰ περιέχῃ ἡ ἀπάντησις τρεῖς ὀρθὰς συσχετίσεις εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πιθανότητος νὰ περιέχῃ μόνον δύο;

600. Ρίπτομεν τρεῖς κύβους συγχρόνως. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «Αἱ ἐνδείξεις τῶν τριῶν κύβων εἶναι διαδοχικοὶ ἀριθμοί».

601. Δοχεῖον περιέχει 6 λευκάς, 8 ἐρυθρὰς καὶ 10 μαύρας σφαίρας, ὁμοίας ἀπὸ πάσης ἀπόψεως ἐκτὸς τοῦ χρώματος. Τὸ πείραμα ἔγκειται εἰς τὴν τυχαίαν ἐξαγωγὴν δύο ἐκ τῶν 24 σφαιρῶν. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφότεραι αἱ ἐξαγόμεναι σφαῖραι τοῦ αὐτοῦ χρώματος;

602. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τυχαίως ὀκτὼ χαρτιά.

α) Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι τοῦ αὐτοῦ χρώματος; (Ὑπάρχουν 26 «κόκκινα» καὶ 26 «μαῦρα»).

β) Ποία ἡ πιθανότης νὰ μὴν εὑρίσκεται «ἄσσος» μεταξὺ αὐτῶν;

γ) Ποία ἡ πιθανότης νὰ ὑπάρχουν δύο τοὐλάχιστον ἄσσοι;

§ 263. Πιθανόνητες ὑπὸ συνθήκην.— Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο συμβάντα τοῦ αὐτοῦ πειράματος τύχης καὶ ὅτι $P(A) > 0$. Τότε: **Ἡ πιθανότης τοῦ Β ὑπὸ συνθήκην Α,** ἢ ἄλλως **ἡ ὑπὸ συνθήκην πιθανότης τοῦ Β δοθέντος ὅτι τὸ Α συνέβη ἢ ὅτι θὰ συμβῇ,** συμβολιζομένη διὰ τοῦ $P(B|A)$, **ὁρίζεται ὑπὸ τῆς σχέσεως:**

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad (P(A) > 0).$$

Ἤτοι: **Πιθανότης τοῦ Β ὑπὸ συνθήκην Α καλεῖται ὁ λόγος τῆς πιθανότητος τοῦ Α καὶ Β πρὸς τὴν πιθανότητα τοῦ Α.**

Παράδειγμα: Δοθέντος ὅτι εἰς μίαν οἰκογένειαν μὲ δύο τέκνα τὸ ἓν εἶναι ἀγόρι, ποία ἡ πιθανότης ἵνα ἀμφότερα τὰ τέκνα εἶναι ἀγόρια;

Λύσις: Ἔχομεν ἐν πρώτοις τὸν δειγματικὸν χῶρον:

$$\Omega = \{\alpha\alpha, \alpha\kappa, \kappa\alpha, \kappa\kappa\},$$

ὅπου «α» σημαίνει ἀγόρι καὶ «κ» κορίτσι.

Θεωροῦμεν τὰ συμβάντα:

Α: *«Ἡ οἰκογένεια ἔχει ἓν τοὐλάχιστον ἀγόρι»,* ἤτοι $A = \{\alpha\alpha, \alpha\kappa, \kappa\alpha\}$.

Β: *«Ἡ οἰκογένεια ἔχει καὶ τὰ δύο τέκνα ἀγόρια»,* ἤτοι $B = \{\alpha\alpha\}$.

Τότε τὸ συμβὰν $B|A$: *«Ἀμφότερα τὰ τέκνα εἶναι ἀγόρια δοθέντος ὅτι τὸ ἓν εἶναι ἀγόρι»* ἔχει πιθανότητα:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P\,[\text{ἀκριβῶς δύο ἀγόρια}]}{P\,[\text{ἓν τοὐλάχιστον ἀγόρι}]} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Σημείωσις. Ἡ $P(B|A)$ ὀνομάζεται καὶ **δεσμευμένη πιθανότης** ἐν ἀντιδιαστολῇ πρὸς τὴν $P(B)$, ἥτις καλεῖται καὶ **ἀδέσμευτος** ἢ **ἄνευ συνθήκης πιθανότης.**

Οὕτως, εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἡ ἀδέσμευτος πιθανότης εἶναι: $P(B) = 1/4$.

§ 264. Πιθανότης τομῆς δύο συμβάντων (νόμος τῶν συνθέτων πιθανοτήτων).— Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πιθανότητος τῆς τομῆς δύο συμβάντων Α καὶ Β δύναται νὰ γίνῃ διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου τῆς ὑπὸ συνθήκην πιθανότητος.

Πράγματι, ἐκ τῆς σχέσεως $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$, (ὅπου $P(A) > 0$) προκύπτει: $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A)$. Ἐὰν δὲ καὶ $P(B) > 0$, τότε δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν γραμμάτων Α καὶ Β ἔχομεν:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

'Αλλὰ $A \cap B) = B \cap A$ καὶ ἑπομένως:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)} \quad (1)$$

Ἤτοι: **Ἡ πιθανότης πραγματοποιήσεως συγχρόνως δύο συμβάντων ἰσοῦται μὲ τὴν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἑνός, ἐπὶ τὴν πιθανότητα πραγματοποιήσεως τοῦ ἑτέρου ὑπὸ τὴν συνθήκην ὅμως ὅτι συνέβη τὸ πρῶτον.**

Παράδειγμα: Ἓν κυτίον περιέχει 15 λευκὰ καὶ 10 πράσινα σφαιρίδια. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν δύο σφαιριδίων ἀλληλοδιαδόχως, χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον σφαιρίδιον νὰ ἐπανατίθεται. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐξαχθῇ πρῶτα λευκὸν καὶ κατόπιν πράσινον σφαιρίδιον;

Λύσις: 'Εὰν Λ σημαίνῃ λευκὸν σφαιρίδιον καὶ Π πράσινον, θὰ ἔχωμεν:

$$P(\Lambda \cap \Pi) = P(\Lambda) \cdot P(\Pi | \Lambda).$$

'Αλλὰ $P(\Lambda) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ καὶ $P(\Pi | \Lambda) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ (διότι τὸ ἐξαχθὲν δὲν ἐπανατίθεται).

Ἄρα: $$P(\Lambda \cap \Pi) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}.$$

§ 265. Συμβάντα ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.— Ἔστωσαν δύο συμβάντα Α καὶ Β, μὴ κενά, ἀναφερόμενα εἰς ἕνα πείραμα τύχης. Θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ συμβὰν Β εἶναι **στατιστικῶς ἢ στοχαστικῶς ἀνεξάρτητον**, συντόμως **ἀνεξάρτητον** τοῦ Α τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$\boxed{P(B|A) = P(B)}$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἔχει ὡς ἄμεσον συνέπειαν ἕνα σημαντικὸν κανόνα πολλαπλασιασμοῦ πιθανοτήτων ἀνεξαρτήτων συμβάντων. Ὁ κανὼν οὗτος δίδεται διὰ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος:

§ 266. Θεώρημα.— **'Εὰν τὸ συμβὰν Β εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ Α, τότε ἡ πιθανότης τῆς τομῆς των ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν πιθανοτήτων των.**

Ἤτοι: $$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)} \quad (1)$$

'Απόδειξις: Πράγματι, δυνάμει τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἀνεξαρτήτων συμβάντων καὶ τῆς σχέσεως (1) τῆς § 264, ἔχομεν:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B).$$

Παρατήρησις. 'Εὰν ἐναλλάξωμεν τοὺς ρόλους τῶν Α καὶ Β τόσον εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅσον καὶ εἰς τὸ συμπέρασμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ἔχομεν πάλιν τὴν (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι, ἂν ἓν ἐκ τῶν συμβάντων εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἄλλου, τότε ἰσχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ὅταν ἰσχύῃ ἡ σχέσις αὕτη λέγομεν ὅτι τὰ δύο συμβάντα εἶναι **ἀνεξάρτητα ἀλλήλων.**

'Εὰν δύο συμβάντα δὲν εἶναι ἀνεξάρτητα, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι **ἐξηρτημένα.**

Παράδειγμα: Ρίπτομεν εἰς τὸν ἀέρα ἕνα κύβον καὶ ἓν νόμισμα. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συνθέτου συμβάντος : «ὁ κύβος νὰ φέρῃ 5 ἢ 6 καὶ τὸ νόμισμα κορώνα»;

Λύσις: Ἔστω A τὸ συμβάν : *«Ὁ κύβος φέρει 5 ἢ 6»* καὶ B τὸ συμβάν : *«Τὸ νόμισμα φέρει κορώνα (K)»*

Ὁ δειγματικὸς χῶρος τοῦ συνθέτου πειράματος εἶναι :

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{K,\Gamma\} =$$

$$= \{(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K),(1,\Gamma),(2,\Gamma),(3,\Gamma),(4,\Gamma),(5,\Gamma),(6,\Gamma)\}.$$

Εἶναι : $A = \{(5,K),(6,K)(5,\Gamma),(6,\Gamma)\}$

$B = \{(1,K),(2,K),(3,K),(4,K),(5,K),(6,K)\}$

$A \cap B = \{(5,K),(6,K)\}$.

Ἐπίσης $P(A) = \frac{4}{12}$, $P(B) = \frac{6}{12}$, $P(A\cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι : $P(A)\cdot P(B) = \frac{4}{12}\cdot\frac{6}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ καὶ $P(A\cap B) = \frac{1}{6}$.

Ἄρα : $$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{6}.$$

Τοῦτο τὸ ἀνεμέναμεν, διότι τὸ ἀποτέλεσμα τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δώσῃ ὁ κύβος εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ ἀποτελέσματος τὸ ὁποῖον θὰ μᾶς δώσῃ τὸ νόμισμα.

§ 267. Ἰδιότητες ἀνεξαρτήτων συμβάντων.

1η : Ἐὰν A καὶ B ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καὶ τὰ A καὶ B′.

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστὸν (§ 262, ε′) $P(A\cap B') = P(A) - P(A\cap B)$, καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, θὰ ἔχωμεν :

$$P(A\cap B') = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\,[1 - P(B)] = P(A)\cdot P(B'),$$

διότι $P(B) + P(B') = 1$.

2α : Ἐὰν A καὶ B ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ τὰ A′ καὶ B.

Ἤτοι : $$\mathbf{P(A'\cap B) = P(A')\cdot P(B)}.$$

Ὑπόδειξις. Παρατηρήσατε ὅτι $(A\cap B)\cup(A'\cap B) = B$ καὶ ἐργασθῆτε ὡς καὶ προηγουμένως.

3η : Ἐὰν A καὶ B ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα καὶ τὰ A′ καὶ B′.

Ἤτοι : $$\mathbf{P(A'\cap B') = P(A')\cdot P(B')}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ $(A'\cap B)\cup(A'\cap B') = A'$ καὶ $(A'\cap B)\cap(A'\cap B') = \varnothing$, ἔχομεν :

$$P(A'\cap B) + P(A'\cap B') = P(A')$$

ἢ

$$\begin{aligned} P(A'\cap B') &= P(A') - P(A'\cap B) = \quad (\text{λόγῳ τῆς 2ας}) \\ &= P(A') - P(A')\cdot P(B) = \\ &= P(A')\cdot[1 - P(B)] = P(A')\cdot P(B'). \end{aligned}$$

Ἐφαρμογή: Ἡ πιθανότης νὰ λυθῇ ἓν πρόβλημα ἀπὸ ἕνα μαθητὴν x εἶναι $\frac{3}{5}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ λυθῇ ἀπὸ ἕνα ἄλλον μαθητὴν y εἶναι $\frac{2}{3}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ τὸν ἕνα καὶ νὰ μὴ λυθῇ ἀπὸ τὸν ἄλλον;

Λύσις: Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ συμβὰν : «*Ὁ μαθητὴς x λύει τὸ πρόβλημα*» καὶ B τὸ συμβάν : «*Ὁ μαθητὴς y λύει τὸ πρόβλημα*», τότε :

$A\cap B'$ σημαίνει : *Ὁ x θὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλ' ὄχι ὁ y.*

$A'\cap B$ σημαίνει : *Ὁ x δὲν θὰ λύσῃ τὸ πρόβλημα, ἀλλὰ ὁ y θὰ τὸ λύσῃ.*

$(A\cap B')\cup(A'\cap B)$ σημαίνει : *Νὰ λυθῇ ἀπὸ τὸν ἕνα καὶ νὰ μὴν λυθῇ ἀπὸ τὸν ἄλλον.*

Ἄρα, ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶναι, ἂν ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι $A\cap B'$ καὶ $A'\cap B$ εἶναι ξένα συμβάντα

$$P[(A\cap B')\cup(A'\cap B)] = P(A\cap B') + P(A'\cap B) = P(A)\cdot P(B') + P(A')\cdot P(B) =$$
$$= \frac{3}{5}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

603. Ἡ πιθανότης λύσεως ἑνὸς προβλήματος ἀπὸ τὸν μαθητὴν α εἶναι $\frac{2}{3}$ καὶ ἀπὸ τὸν συμμαθητήν του β εἶναι $\frac{4}{5}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἀπὸ ἀμφοτέρους ;

604. Δείξατε ὅτι :

α) $P(A|B) + P(A'|B) = 1$

β) $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι $A\subset B$ καὶ $P(B) > 0$.

605. Κατὰ τὴν ρίψιν ἑνὸς κύβου, ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ παρουσιασθῇ τὸ «6» διὰ πρώτην φορὰν κατὰ τὴν τετάρτην ρίψιν;

606. Ἐκ μιᾶς κληρωτίδος περιεχούσης 30 κλήρους, ἠριθμημένους ἀπὸ 1 ἕως 30 ἀνασύρομεν «τυχαίως» ἕνα κλῆρον. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὁ ἀνασυρθεὶς κλῆρος νὰ φέρῃ ἀριθμὸν περιττὸν καὶ διαιρετὸν διὰ τοῦ ἐννέα ;

607. Ἐὰν A καὶ B συμβάντα ξένα πρὸς ἄλληλα μὲ $P(A\cup B) > 0$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$P(A|A\cup B) = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)}.$$

608. Ρίπτομεν δύο κύβους εἰς τὸν ἀέρα. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ 1ος κύβος ἔφερε τὸν ἀριθμὸν 5, ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «τὸ ἄθροισμα τῶν ἐνδείξεων εἶναι $\geqq 10$» ;

609. Ἐκ δέσμης 52 παιγνιοχάρτων λαμβάνομεν τρία παιγνιόχαρτα. Ποία ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος : «Οὐδὲν ἐκ τῶν τριῶν παιγνιοχάρτων εἶναι φιγούρα».

610. Ἐκλέγομεν τυχαίως δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἐκ τοῦ τμήματος $T_{10} \equiv \{1,2,3 \ldots 9,10\}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ὁ εἷς ἄρτιος καὶ ὁ ἕτερος περιττός;

611. Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία ἡ πιθανότης νὰ φέρωμεν διπλοῦν ἕξ ; Ποία δὲ ἡ πιθανότης νὰ φέρωμεν τοὐλάχιστον ἕνα ἕξ ;

612. Πόσας φορὰς πρέπει νὰ ρίψωμεν ἕνα κύβον, ὥστε ἡ ἐμφάνισις ἑνὸς τοὐλάχιστον ἓξ νὰ ἔχῃ πιθανότητα 0,5 ;

§ 268. Πιθανότης τομῆς τριῶν συμβάντων.– Ἐὰν A, B, Γ συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε ἰσχύει :

$$\boxed{P(A\cap B\cap \Gamma) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(\Gamma|A\cap B)}, \quad (P(A\cap B) > 0)$$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν $A \cap B = E$, ἔχομεν :

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(E \cap \Gamma) = P(E)\, P(\Gamma \mid E) = P(A \cap B) \cdot P(\Gamma \mid A \cap B) =$$
$$= P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(\Gamma \mid A \cap B), \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι :

$$P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) = P(A) \cdot P(B \mid A) \cdot P(\Gamma \mid A \cap B) \cdot P(\Delta \mid A \cap B \cap \Gamma).$$

Γενικῶς :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_\nu) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_\nu \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{\nu-1})}$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α : Ἓν δοχεῖον περιέχει 3 λευκὰ σφαιρίδια, 4 κυανᾶ καὶ 6 μαῦρα. Τὸ πείραμα συνίσταται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τριῶν σφαιριδίων, τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου, χωρὶς τὸ ἐξαγόμενον σφαιρίδιον νὰ ἐπανατίθεται. Ποία ἡ πιθανότης τὰ ἐξαγόμενα σφαιρίδια νὰ εἶναι κατὰ σειράν : 1) λευκόν, 2) κυανοῦν, 3) μαῦρον.

Λ ύ σ ι ς : Ἐὰν Λ σημαίνῃ λευκὸν σφαιρίδιον, Κ κυανοῦν καὶ Μ μαῦρον, θὰ ἔχωμεν :

$$P(\Lambda \cap K \cap M) = P(\Lambda) \cdot P(K \mid \Lambda) \cdot P(M \mid \Lambda \cap K).$$

Ἀλλὰ $P(\Lambda) = \frac{3}{13}$, $P(K \mid \Lambda) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (διότι τὸ ἐξαχθὲν δὲν ἐπανατίθεται) καὶ $P(M \mid \Lambda \cap K) = \frac{6}{11}$ (διότι τὰ ἐξαχθέντα δὲν ἐπανατίθενται).

Ὅθεν :

$$P(\Lambda \cap K \cap M) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{143}.$$

§ 269. Ἀνεξαρτησία ν συμβάντων. — Τρία ἢ περισσότερα συμβάντα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ καλοῦνται **ἀμοιβαίως** ἢ **τελείως ἀνεξάρτητα** τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ὑπὸ συνθήκη (δεσμευμένη) πιθανότης οἱουδήποτε τούτων, δοθέντων οἱωνδήποτε τῶν λοιπῶν, ἰσοῦται πρὸς τὴν συνήθη (ἀδέσμευτον) πιθανότητα.

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὰς ἑξῆς σχέσεις :

$P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, \nu$ (ἀνεξάρτητα ἀνὰ ζεύγη).

$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\, P(A_j)\, P(A_k)$, (ἀνεξάρτητα ἀνὰ τρία), κ.ο.κ.

. . . .

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_\nu) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_\nu)$.

Οὕτω, π.χ., τρία συμβάντα τοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, ἔστω τὰ Α, Β, Γ θὰ λέγωνται τελείως ἀνεξάρτητα ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἰσχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις :

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ 2.\ P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma) \\ 3.\ P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma) \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

$$4.\ P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \qquad (\mathrm{II})$$

Δέον νὰ σημειωθῇ ὅτι ἡ ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων ἀνὰ δύο λαμβανομένων δὲν ἐξασφαλίζει τὴν τελείαν ἀνεξαρτησίαν αὐτῶν. Ἑπομένως διὰ νὰ εἶναι τρία συμβάντα τελείως ἀνεξάρτητα πρέπει νὰ ἰσχύουν συγχρόνως αἱ (I) καὶ (II).

Παρατήρησις. Ὅταν ἔχωμεν ν ἀνεξάρτητα συμβάντα, τότε :

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{A}_1 \cap \mathbf{A}_2 \cap \cdots \cap \mathbf{A}_\nu) = \mathbf{P}(\mathbf{A}_1) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A}_2) \cdots \mathbf{P}(\mathbf{A}_\nu)} \quad (1)$$

Ἡ σχέσις ὅμως (1) **δὲν εἶναι ἱκανὴ συνθήκη** διὰ τὴν τελείαν ἀνεξαρτησίαν τῶν $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.

Παραδείγματα: 1ον. Κατὰ τρόπους ἀνεξαρτήτους, ρίπτομεν ἕνα νόμισμα, λαμβάνομεν ἕνα παιγνιόχαρτον ἀπὸ μίαν δέσμην καὶ ρίπτομεν ἕνα κύβον. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ἐμφανίσουν τὸ νόμισμα «κορώνα», τὸ παιγνιόχαρτον «ἄσσον» καὶ ὁ κύβος «6»;

Λύσις: Ἐὰν Α σημαίνῃ : *«Τὸ νόμισμα δεικνύει κορώνα»*, Β : *«Τὸ παιγνιόχαρτον εἶναι ἄσσος»* καὶ Γ : *«Ὁ κύβος φέρει 6»*, θὰ ἔχωμεν :

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma),$$

διότι τὰ συμβάντα εἶναι ἀνεξάρτητα.

Ἀλλὰ $\quad P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(\Gamma) = \frac{1}{6}.$

Ἄρα : $\quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{156}.$

Θὰ δώσωμεν τώρα καὶ ἓν χαρακτηριστικὸν παράδειγμα, δι' οὗ ἐμφαίνεται ὅτι ἡ ἀνεξαρτησία τριῶν συμβάντων ἀνὰ δύο λαμβανομένων δὲν ἐξασφαλίζει τὴν πλήρη ἀνεξαρτησίαν αὐτῶν.

2ον : Αἱ ἕδραι κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι χρωματισμέναι ὡς ἑξῆς: Μαύρη, λευκή, ἐρυθρὰ καὶ ἡ τετάρτη ἕδρα ἔχει καὶ τὰ τρία χρώματα. Ρίπτομεν τὸ τετράεδρον καὶ παρατηροῦμεν τὸ χρῶμα τῆς ἕδρας ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται. Καλοῦμεν :

Α τὸ συμβάν : «Ὁ κύβος στηρίζεται ἐπὶ ἕδρας, ἡ ὁποία εἶναι χρωματισμένη μαύρη»
Β τὸ συμβάν : «Ὁ » » » » » » » » λευκή»
Γ τὸ συμβάν : «Ὁ » » » » » » » » ἐρυθρά».

Τότε : $\quad P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(\Gamma) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (PA) \cdot P(\Gamma).$$

$$P(B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(\Gamma).$$

Ἑπομένως τὰ Α, Β, Γ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀνὰ δύο.

Ἀλλὰ $\quad P(A \cap B \cap \Gamma) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) = \frac{1}{8}.$

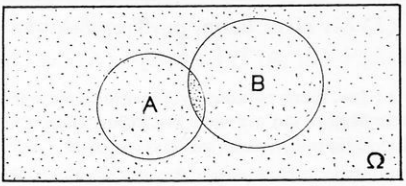
§ 270. Προσθετικὸν θεώρημα τῶν πιθανοτήτων.— Ἐὰν Α καὶ Β δύο συμβάντα ἑνὸς δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε ἰσχύει :

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}$$

Ἤτοι : **ἡ πιθανότης ὅτι συμβαίνει ἓν τοὐλάχιστον ἐκ τῶν Α καὶ Β εὑρίσκεται διὰ τῆς προσθέσεως τῆς πιθανότητος ὅτι συμβαίνει τὸ Α μὲ τὴν πιθανότητα ὅτι συμβαί-**

νει τὸ Β καὶ ἀκολούθως διὰ τῆς ἀφαιρέσεως τῆς πιθανότητος ὅτι συμβαίνουν ἀμφότερα.

Ἀπόδειξις. Ἂς παρατηρήσωμεν τὸ κατωτέρω διάγραμμα τοῦ Venn (Σχ. 19).



Σχ. 19

$A \cup B$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἴτε εἰς τὸ A, εἴτε εἰς τὸ B, εἴτε εἰς ἀμφότερα. Πιθανότης αὐτοῦ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν στοιχείων του (δηλ. τῶν ἁπλῶν συμβάντων). Ἐπειδὴ $P(A) + P(B)$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων τῶν στοιχείων τοῦ A καὶ τῶν στοιχείων τοῦ B, ἕπεται ὅτι αἱ πιθανότητες τῶν στοιχείων τῆς τομῆς $A \cap B$ ἔχουν ληφθῆ δύο φοράς. Ἐὰν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν τὴν $P(A \cap B)$, θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πιθανοτήτων ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ $A \cap B$, ὅπου ἕκαστον ἔχει ληφθῆ μίαν φοράν. Ὥστε :

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B). \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Θὰ δώσωμεν ὅμως μίαν αὐστηροτέραν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος :

Εὐκόλως διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ συμβὰν $A \cup B$ δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς ἕνωσις (ἄθροισμα) τῶν ἀμοιβαίως ἀποκλειομένων συμβάντων $A - B$ καὶ B,

ἤτοι : $\quad A \cup B = (A - B) \cup B$, ἔνθα $(A - B) \cap B = \varnothing$.

Τότε ὅμως, δυνάμει τῶν προτάσεων β′ καὶ ε′ τῆς § 262, ἔχομεν :

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) =$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Πόρισμα I. – **Ἐὰν A καὶ B εἶναι ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα (ξένα μεταξύ των) συμβάντα, θὰ εἶναι :** $\quad \mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$ (βλ. καὶ § 262, β)

Πόρισμα II. – **Ἐὰν A καὶ A′ εἶναι δύο συμπληρωματικὰ συμβάντα ἑνὸς δειγματικοῦ χώρου Ω θὰ εἶναι :** $\quad \mathbf{P(A) + P(A') = 1.}$ (βλ. καὶ § 258, δ)

Πόρισμα III. – $\mathbf{P(A \cup B) \leqq P(A) + P(B)}$ *(ὑποπροσθετικὴ ἰδιότης τῆς P).*

Ἐφαρμογὴ 1η : Ἐκ δέσμης 32 παιγνιοχάρτων (πρέφα) λαμβάνομεν τυχαίως δύο ἐξ αὐτῶν συγχρόνως. Ποία ἡ πιθανότης νὰ εἶναι τὸ ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν ἄσσος;

Λύσις : Ὀνομάζομεν A τὸ συμβάν : *«Τὸ ἓν νὰ εἶναι ἄσσος»* καὶ B τὸ συμβάν : *«Τὸ ἕτερον νὰ εἶναι ἄσσος».* Τότε $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ εἶναι ἀμφότερα ἄσσος εἶναι : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} = \frac{3}{248}$.

Τότε ἡ πιθανότης τοῦ συμβάντος $A \cup B$: *«Τὸ ἓν τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι ἄσσος»* εἶναι : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{248} = \frac{59}{248}$.

Ἐφαρμογὴ 2α: Ἔστωσαν δύο συμβάντα A καὶ B μὲ $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A') = \frac{2}{3}$ καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ: (i) $P(A)$, (ii) $P(B)$.

Λύσις: (i). Ὡς γνωστὸν (§ 258, δ') ἔχομεν:

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

(ii). Ἐκ τῆς σχέσεως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ λαμβάνομεν:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}, \quad \text{ἐξ ἧς:} \quad P(B) = \frac{2}{3}.$$

§ 271. Ἐὰν A,B,Γ συμβάντα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, θὰ εἶναι:

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) - P(B \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)}}$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\Delta = B \cup \Gamma$. Τότε ἔχομεν $A \cap \Delta = A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ καὶ $P(A \cap \Delta) = P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)$, καθ' ὅσον $(A \cap B) \cap (A \cap \Gamma) = (A \cap B \cap \Gamma)$.

Ὅθεν:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup \Gamma) &= P(A \cup \Delta) = P(A) + P(\Delta) - P(A \cap \Delta) = \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - [P(A \cap B) + P(A \cap \Gamma) - P(A \cap B \cap \Gamma)] \\ &= P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap B) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma). \end{aligned}$$

Πόρισμα. — Ἐὰν A, B, Γ εἶναι συμβάντα ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα (ξένα μεταξύ των) **ἀνὰ δύο, τότε ἰσχύει:**

$$\mathbf{P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma).}$$

Ἐφαρμογαὶ

1η: Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{4}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{9}{10}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ζῇ τοὐλάχιστον εἷς τούτων μετὰ 20 ἔτη;

Λύσις: Ἔστω A τὸ συμβάν: *«Ὁ σύζυγος ζῇ μετὰ 20 ἔτη»* καὶ B τὸ συμβάν: *«Ἡ σύζυγος ζῇ μετὰ 20 ἔτη».* Τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{9}{10} - \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} = \frac{39}{40}.$$

2α: Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 40 ἔτη εἶναι $\frac{8}{10}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 40 ἔτη εἶναι $\frac{7}{10}$. Ποία ἡ πιθανότης νὰ ζῇ μόνον ὁ σύζυγος μετὰ 40 ἔτη;

Λύσις: Ἐὰν καλέσωμεν A τὸ συμβάν: *«Ὁ σύζυγος νὰ ζῇ μετὰ 40 ἔτη»* καὶ B τὸ συμβάν: *«Νὰ ζῇ ἡ σύζυγος μετὰ 40 ἔτη»*, τότε ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν $P(A \cap B')$.

Ἀλλὰ $\quad P(A \cap B') = P(A) \cdot P(B') = P(A) \cdot [1 - P(B)]$,

ὅθεν: $\quad P(A \cap B') = P(A) \cdot [1 - P(B)] = \frac{8}{10} \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{8}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{24}{100}.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

613. Ἐὰν $A \subset B$, τότε δείξατε ὅτι: $P(B \mid A) = 1$.

614. Δείξατε χρησιμοποιοῦντες τὸν νόμον τοῦ De Morgan $A' \cap B' = (A \cup B)'$, ὅτι ἐὰν τὰ A καὶ B εἶναι ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ τὰ A' καὶ B'.

615. Εἷς ἀκέραιος περιλαμβάνεται κατὰ τύχην μεταξὺ τῶν πρώτων 200 θετικῶν ἀκεραίων. Ποία ἡ πιθανότης ὅτι ὁ λαμβανόμενος ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς εἴτε διὰ 6 εἴτε διὰ 8;

616. Ἡ πιθανότης νὰ ζῇ κάποιος μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{4}$ καὶ ἡ πιθανότης νὰ ζῇ ἡ σύζυγός του μετὰ 20 ἔτη εἶναι $\frac{3}{5}$. Ποία ἡ πιθανότης:

α) Νὰ ζοῦν ἀμφότεροι, β) Νὰ ζῇ μόνον ὁ σύζυγος,
γ) Νὰ ζῇ μόνον ἡ σύζυγος, δ) Νὰ ζῇ τοὐλάχιστον εἷς τούτων.

617. Ἐὰν A καὶ B εἶναι συμβάντα μὲ $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$ καὶ $P(B') = \frac{1}{2}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ: $P(A \cap B)$, $P(A' \cap B')$, $P(A' \cup B')$ καὶ $P(B \cap A')$.

618. Ἐὰν A καὶ B εἶναι συμβάντα μὲ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ καὶ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ: $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$, $P(A \cup B)$, $P(A' \mid B')$, $P(B' \mid A')$.

619. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$P[(A \cup A') \mid B] = P(A \mid B) + P(A' \mid B).$$

620. Δοθέντος ὅτι $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{5}{8}$ καὶ $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πιθανότητες: $P(A \mid B)$ καὶ $P(B \mid A)$.

621. Ἐὰν E καὶ F ἀνεξάρτητα συμβάντα, θὰ εἶναι:

$$P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F), \qquad (P(F) > 0).$$

622. Ἐὰν E καὶ F εἶναι συμβάντα τοῦ αὐτοῦ δειγματικοῦ χώρου Ω, τότε:

1) $O \leqq P(E/F) \leqq 1$

2) $P(\Omega \mid F) = 1$

3) $P(E) = P(F) \cdot P(E \mid F) + P(F') \cdot P(E \mid F')$.

623. Ἐὰν A καὶ B εἶναι συμβάντα ἀμοιβαίως ἀποκλειόμενα, τότε:

$$P(A \cup B \mid E) = P(A \mid E) + P(B \mid E), \quad (P(E) > 0).$$

624. Δείξατε ὅτι: Ἐὰν $A \subset B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_\nu$, ἔνθα $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$, τότε ἰσχύει:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) + \cdots + P(B_\nu) \cdot P(A \mid B_\nu).$$

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΕΚ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ
ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ *

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ

1ον : Ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.— Καλοῦμεν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἓν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σημείων, Α καὶ Β.

Τὸ συμβολίζομεν δὲ ὡς ἑξῆς : $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

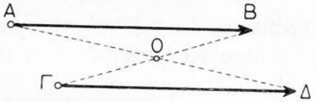
2ον : Μηδενικὸν διάνυσμα.— Μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι τὸ διάνυσμα, τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχή, Α, καὶ τὸ τέλος, Β, συμπίπτουν.

Τοῦτο τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς : $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Ὁ φορεὺς τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι **ἀκαθόριστος.**

3ον : Ἰσοδύναμα ἐφαρμοστὰ διανύσματα.— Δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα, $\overrightarrow{ΑΒ}$ καὶ $\overrightarrow{ΓΔ}$, εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν τὰ τμήματα ΑΔ καὶ ΒΓ (σχ. 1) ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.

Ἄρα : $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{ΓΔ}} \Longleftrightarrow$ **ΑΔ καὶ ΒΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.**



Σχ. 1

Συνέπειαι : Θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{ΓΔ}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{AΓ}} = \overrightarrow{\mathbf{BΔ}}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{AΓ}} \Longleftrightarrow \textbf{Β καὶ Γ συμπίπτουν.}$$

Παρατήρησις : Εἰς τὸ Σύνολον τῶν διανυσμάτων (ἐφαρμοστῶν) θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ ἀνωτέρω διανύσματα ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας. Αἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας καλοῦνται **ἐλεύθερα διανύσματα.**

4ον : Ἐλεύθερον διάνυσμα.— Ἐλεύθερον διάνυσμα καλεῖται τὸ Σύνολον τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, ἰσοδυνάμων πρὸς δοθὲν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα. Ἓν τοιοῦτον διάνυσμα τὸ συμβολίζομεν εἴτε δι' ἑνὸς γράμματος ($\overrightarrow{u}$, π.χ), εἴτε

* Ὑπὸ Ἰωάννου Πανάκη

δι' ἑνὸς τυχόντος ἐκ τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, τὸ ὁποῖον παριστᾷ αὐτὸ (ἀντιπρόσωπος). Π.χ. $\overrightarrow{AB}$:

5ον : Ἴσα ἐλεύθερα διανύσματα.— Δύο ἐλεύθερα διανύσματα, $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$, λέγονται ἴσα, ὅταν ἐπιδέχωνται ὡς ἀντιπροσώπους τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἢ δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἰσοδύναμα, δηλ. ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ φοράν. Συμβολίζομεν δὲ ταῦτα ὡς ἑξῆς :

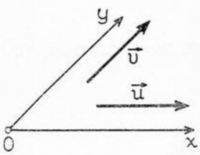
$$\vec{u} = \vec{\upsilon}.$$

6ον : Μῆκος ἐλευθέρου διανύσματος.— Μῆκος ἐλευθέρου διανύσματος καλεῖται τὸ μῆκος, ΑΒ, ἑνὸς ἀντιπροσώπου $\overrightarrow{AB}$ τοῦ διανύσματος τούτου.

Τὸ συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς :

$$|\vec{u}| = u \quad \text{ἢ} \quad |\overrightarrow{AB}| = AB$$

7ον : Γωνία δύο διανυσμάτων, $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$, προσανατολισμένου ἐπιπέδου.— Καλοῦμεν γωνίαν δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$, κειμένων ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου, τὴν **προσανατολισμένην γωνίαν** τὴν σχηματιζομένην ὑπὸ δύο ἡμιευθειῶν, Ox καὶ Oy, τῆς αὐτῆς ἀρχῆς, ἀντιστοίχως παραλλήλων πρὸς τὰ διανύσματα $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ (σχ. 2) καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.



Σχ. 2

Μία τοιαύτη γωνία παρίσταται ὡς ἑξῆς : $(\vec{u}, \vec{\upsilon})$. Ἡ δὲ ἀλγεβρικὴ τιμὴ αὐτῆς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = \pm \vartheta + 2k\pi, \text{ μὲ } 0 \leqq \vartheta \leqslant \pi \text{ (}\vartheta\text{ κυρτὴ γωνία ἡμιεπιπέδου), } k \in Z.$$

8ον : Συγγραμμικὰ διανύσματα. — Δύο διανύσματα, $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ λέγονται συγγραμμικά, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = 0, \text{ ὅταν τὰ διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα}$$

καὶ

$$(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = \pi, \text{ ὅταν ταῦτα εἶναι ἀντίρροπα.}$$

9ον : Συνεπίπεδα διανύσματα. — Δύο διανύσματα λέγονται συνεπίπεδα, ὅταν αἱ διευθύνσεις των εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

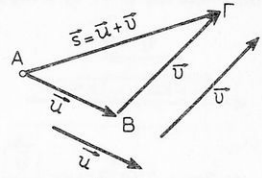
Παρατήρησις : Δύο διανύσματα εἶναι πάντοτε συνεπίπεδα ;

ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1ον : Πρόσθεσις διανυσμάτων.— Ἔστωσαν $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα μὲ ἀντιπροσώπους ἀντιστοίχως τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ (σχ. 3).

Καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν δύο τούτων διανυσμάτων τὸ διάνυσμα $\vec{s}$, τοῦ ὁποίου ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$. Τὸ συμβολίζομεν δὲ ὡς ἑξῆς :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{\upsilon}.$$



Σχ. 3

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος γενικεύεται καὶ διὰ πλείονα τῶν δύο διανυσμάτων.

2ον : Ἀντίθετα διανύσματα. — Δύο διανύσματα λέγονται ἀντίθετα, ὅταν τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα.

Ἐὰν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ διανύσματος $\vec{u}$, τότε ὁ ἀντιπρόσωπος τοῦ ἄλλου θὰ εἶναι ὁ $\overrightarrow{BA}$. Τὸ ἀντίθετον τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ εἶναι τὸ $-\vec{u}$.

3ον : Τριγωνικὴ ἀνισότης δύο διανυσμάτων.— Μεταξὺ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν τριῶν διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{\upsilon}$ καὶ $\vec{u} + \vec{\upsilon}$ ἔχομεν τὴν ἀκόλουθον ἀνισοτικὴν σχέσιν :

$$|\vec{u} + \vec{\upsilon}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{\upsilon}|,$$

προκύπτουσαν ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τοῦ (σχ. 3), ὅπου τὸ = λαμβάνει χώραν, ὅταν τὰ $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ εἶναι συνευθειακὰ καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Γενικώτερον, διὰ τὰ διανύσματα : $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_\nu$ ἰσχύει :

$$|\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \ldots + \vec{u}_\nu| \leqslant |\vec{u}_1| + |\vec{u}_2| + \ldots + |\vec{u}_\nu|$$

4ον : Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.— Αὗται συνοψίζονται εἰς τάς :

α) $\vec{u} + \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} + \vec{u}$ **(ἀντιμεταθετική),**

β) $(\vec{u} + \vec{\upsilon}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{\upsilon} + \vec{w})$ **(προσεταιριστική),**

γ) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ ($\vec{0}$ = **οὐδέτερον στοιχεῖον**),

δ) $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ ($-\vec{u}$ = **ἀντίθετον τοῦ** $\vec{u}$).

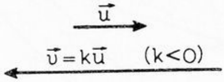
5ον : Ἀφαίρεσις δύο διανυσμάτων.— Οἱωνδήποτε ὄντων τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$, ἡ ἐξίσωσις : $\vec{u} + \vec{x} = \vec{\upsilon}$, ἐπιδέχεται πάντοτε μίαν, καὶ μίαν μόνον, λύσιν, τήν :

$\vec{x} = \vec{\upsilon} + (-\vec{u})$, τὴν ὁποίαν γράφομεν : $\vec{x} = \vec{\upsilon} - \vec{u}$.

Τὸ διάνυσμα $\vec{x}$ καλεῖται **διαφορὰ** τῶν διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ καὶ $\vec{u}$.

6ον : Γινόμενον διανύσματος $\vec{u}$ ἐπὶ πραγματικὸν ἀριθμὸν k.

ΑΞΙΩΜΑ : Δεχόμεθα ὅτι : « **Δοθέντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $k \neq 0$ καὶ διανύσματος $\vec{u} \neq \vec{0}$, ὑπάρχει διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ ἐπὶ τοῦ φορέως τοῦ $\vec{u}$, τοιοῦτον ὥστε :**



Σχ. 4

1ον : Τὸ $\vec{\upsilon}$ νὰ ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ $\vec{u}$.

2ον : Τὸ $\vec{\upsilon}$ νὰ εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς μὲ τὸ $\vec{u}$, ἐὰν $k > 0$, ἀντιθέτου δὲ φορᾶς μὲ τὸ $\vec{u}$, ὅταν $k < 0$.

3ον : Ὁ λόγος $\dfrac{|\vec{\upsilon}|}{|\vec{u}|}$, δηλαδὴ τὸ μῆκος τοῦ $\vec{\upsilon}$ πρὸς τὸ μῆκος τοῦ $\vec{u}$ νὰ εἶναι ἴσος πρὸς τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ k· ἤτοι :

$$\frac{|\vec{\upsilon}|}{|\vec{u}|} = |k| \iff |\vec{\upsilon}| = |k| \cdot |\vec{u}|.$$

Παρατηρήσεις : α΄) Ἐὰν $k = 0$, τότε $\vec{\upsilon} = \vec{0}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ $\vec{u}$.

β΄) Ἐὰν $\vec{u} = \vec{0}$, τότε $\vec{\upsilon} = \vec{0}$, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ k.

γ΄) Ἐὰν $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$, τότε ἢ $k = 0$, ἢ $\vec{u} = \vec{0}$ ἢ $k = 0$ καὶ $\vec{u} = \vec{0}$.

δ΄) Θὰ εἶναι : $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ καὶ $(-1)\,\vec{u} = -\vec{u}$.

Σημείωσις : Διὰ τοῦ ἀνωτέρω ἀξιώματος ἀπεικονίζεται τὸ Σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας κατὰ τὸν μέχρι τοῦδε γνωστὸν τρόπον. Τὸ ἀξίωμα τοῦτο εἶναι θεμελιῶδες διὰ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν καὶ συνδέει τὴν Ἄλγεβραν μὲ τὴν Γεωμετρίαν.

Θεμελιωτὴς εἶναι ὁ Γάλλος Μαθηματικὸς καὶ φιλόσοφος Καρτέσιος.

Ἀπὸ τοῦδε καὶ εἰς τὸ ἑξῆς τὰ διανύσματα θεωροῦνται ὡς διατεταγμένα ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν : τῶν συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν (13). Ἡ τοιαύτη θεώρησις ἀποτελεῖ τὴν Ἀναλυτικὴν Γεωμετρίαν.

7ον : Ἰδιότητες τοῦ γινομένου διανύσματος ἐπὶ ἀριθμὸν $k \in \mathbb{R}$.— Αὗται συνοψίζονται ὡς ἀκολούθως

α΄) $\vec{u} = \vec{\upsilon} \Longrightarrow k\vec{u} = k\vec{\upsilon}$, καὶ ἂν $k \neq 0$, $k\vec{u} = k\vec{\upsilon} \Longrightarrow \vec{u} = \vec{\upsilon}$.

β΄) Ἐὰν $\vec{u} \neq \vec{0}$, τότε $k\vec{u} = k_1\vec{u} \Longrightarrow k = k_1$.

γ΄) Εἶναι : $k\,(k_1\vec{u}) = k_1\,(k\,\vec{u}) = k_1\,k_2\vec{u}$.

δ΄) Εἶναι $k\,(\vec{u} + \vec{\upsilon}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{\upsilon}$.

Γενικώτερα : $k \cdot \Sigma\vec{u_i} = \Sigma k\,\vec{u_i} \quad (i = 1,2,3,\ldots,\nu)$

ε΄) Εἶναι : $(k + k_1)\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k_1\vec{u}$.

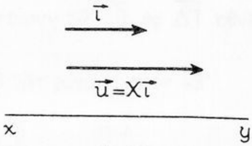
Γενικώτερα :

$$(k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu)\,\vec{u} = k_1\vec{u} + k_2\vec{u} + \ldots + k_\nu\,\vec{u} \quad ἢ \quad \vec{u} \cdot \Sigma k_i = \Sigma k_i\vec{u}$$

μὲ $i = 1,2,3,\ldots,\nu$

3. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΒΑΣΙΣ ΜΙΑΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.– Ἔστω εὐθεῖα xy καὶ διάνυσμα $\vec{\imath} \neq \vec{0}$, παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ταύτην (σχ. 5). Πᾶν ἄλλο διάνσμα, $\vec{u}$, παράλληλον πρὸς τὴν xy εἶναι τῆς μορφῆς : $\vec{u} = X\,\vec{\imath}$.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, πᾶς ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\imath}$ φερόμενος ὑπὸ τῆς xy καλεῖται **διανυσματικὴ βάσις τῆς εὐθείας ταύτης.**



Σχ. 5

Ὁ ἀριθμὸς X καλεῖται **τετμημένη** τοῦ διανύσματος $\vec{u}$ εἰς τὴν βάσιν $\vec{\imath}$.

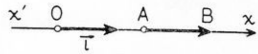
Ἀποκαθίσταται οὕτω μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ Συνόλου τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρὸς τὴν xy καὶ τοῦ συνόλου, R, τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

4. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΒΑΣΙΣ (ἢ **ΦΥΣΙΚΗ**).– Ἡ βάσις $\vec{\imath}$ καλεῖται **κανονική,** ὅταν τὸ διάνυσμα $\vec{\imath}$ ἐκλεγῇ ὡς τὸ **μοναδιαῖον διάνυσμα.** Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὁ ἀριθμὸς X καλεῖται **ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{u}$.**

Ὁ ἀριθμὸς $|X|$ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ διανύσματος τούτου.

5. ΑΞΩΝ.–Ἄξων εἶναι ἡ εὐθεῖα ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὁρισθῆ ἡ θετικὴ φορά, ἡ ἀρχὴ τοῦ ἄξονος καὶ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα, $\vec{\imath}$, τοῦ ὁποίου φορὰ εἶναι ἡ τοῦ ἄξονος.

Εἰς τὸ (σχ. 6) εἰκονίζεται ὁ ἄξων x′Ox, μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον O, θετικὴν φορὰν τὴν Ox καὶ μὲ μονάδα μήκους : $|\vec{\imath}|=1$.



Σχ. 6

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\vec{u}$, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα x′Ox, παρίσταται πολλάκις καὶ διὰ τοῦ $\overline{u}$.

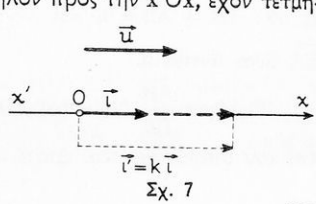
Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 6), ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′Ox, ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\vec{\imath}} = \overline{AB}$ εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$. Ἄρα :

$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\cdot\vec{\imath} \quad ἢ \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overline{AB}|\cdot|\vec{\imath}| = AB\cdot 1 = AB.$$

6. ΑΛΛΑΓΗ ΒΑΣΕΩΣ.– Ἔστω $\vec{\imath}$ μία βάσις (κανονικὴ ἢ οὔ) εὐθείας x′Ox καὶ $\vec{\imath}\,'$ δευτέρα βάσις, ὁριζομένη, ὡς πρὸς τὴν πρώτην, ὑπὸ τῆς σχέσεως $\vec{\imath}\,' = k\,\vec{\imath}$. Ἔστω τέλος τὸ διάνυσμα $\vec{u}$ παράλληλον πρὸς τὴν x′Ox, ἔχον τετμημένην X εἰς τὴν πρώτην βάσιν καὶ X′ εἰς τὴν δευτέραν. Θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{u} = X\,\vec{\imath} \quad καὶ \quad \vec{u} = X'\cdot\vec{\imath}\,' = k\,X'\,\vec{\imath}\,',$$

ἐξ οὗ : $\quad \mathbf{X = kX'} \quad$ καὶ ὅθεν : $\quad \mathbf{X' = \dfrac{X}{k}}$.

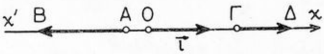


Σχ. 7

7. ΘΕΩΡΗΜΑ.– Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν αὐτῶν ἀντιστοίχως.

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'Ox θεωροῦμεν τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{\Gamma\Delta}$ (σχ. 8), ἔνθα $\vec{\Gamma\Delta} \neq \vec{0}$. Ὡς γνωστόν, ὑπάρχει ἀριθμὸς k, τοιοῦτος ὥστε : $\mathbf{k} = \dfrac{|\vec{AB}|}{|\vec{\Gamma\Delta}|}$ (1)

Ἐκ τοῦ κανόνος τῆς διαιρέσεως δύο πραγμ. ἀριθμῶν ἔχομεν :



Σχ. 8

$$\left|\frac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}\right| = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{\Gamma\Delta}|} = \frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{|\vec{AB}|}{|\vec{\Gamma\Delta}|} = \left|\frac{\vec{AB}}{\vec{\Gamma\Delta}}\right| = |\mathbf{k}| \quad (2)$$

Ἀλλά : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}} > 0$, ἐὰν $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ **ὁμόσημοι** $\Longleftrightarrow$ $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ **ὁμόρροπα,**

καὶ $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}} < 0$, ἐὰν $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ **ἑτερόσημοι** $\Longleftrightarrow$ $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ **ἀντίρροπα.**

Κατ' ἀκολουθίαν ὁ λόγος $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}$ ἔχει τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τὸ αὐτὸ πρόσημον μὲ τὸν ἀριθμὸν k.

Ἄρα :
$$\frac{|\vec{\mathbf{AB}}|}{|\vec{\mathbf{\Gamma\Delta}}|} = \frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{\Gamma\Delta}}} \quad (3)$$

Παρατηρήσεις : Δὲν πρέπει νὰ συγχέωνται τὰ σύμβολα :

$$|\mathbf{AB}|, \quad \overline{\mathbf{AB}}, \quad \vec{\mathbf{AB}}$$

Τὸ σύμβολον $\vec{\mathbf{AB}}$ παριστᾷ διάνυσμα, ἤτοι γεωμετρικὸν μέγεθος.

Τὸ σύμβολον $\overline{AB}$ παριστᾷ τὴν **ἀλγεβρικὴν τιμὴν** τοῦ $\vec{AB}$. Δηλαδὴ $\overline{AB}$ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, **θετικός, ἀρνητικὸς** ἢ **μηδέν.**

Τὸ σύμβολον $|\mathbf{AB}|$ ἢ $|\vec{\mathbf{AB}}|$ παριστᾷ τὸ μέτρον (module) τοῦ $\vec{AB}$. Τοῦτο εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός, **θετικὸς** ἢ **μηδέν.**

Αἱ τιμαὶ τῶν $\vec{AB}$ καὶ $\vec{BA}$ εἶναι **ἀντίθετοι.** Γράφομεν δὲ τότε : $\overline{BA} = -\overline{AB}$, ἐξ οὗ : $\overline{\mathbf{BA}} + \overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{0}$, καὶ λέγομεν ὅτι τὰ συγγραμμικὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{BA}$ εἶναι **ἀντίθετα.**

Ὁ λόγος $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}$ δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος x'Ox, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται. Διότι οἱ δύο ὅροι ἀλλάσσουν πρόσημον ἀμοιβαίως.

8. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ.– Ἐπὶ ἄξονος x΄Ox (σχ. 9) θεωροῦμεν σημεῖον A.

Ὁ λόγος : $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{\iota}} = \overline{OA} = X_A$ εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ καὶ καλεῖται **τετμημένη** τοῦ σημείου A. Συμβολίζεται δὲ μὲ X_A. Τὸ O καλεῖται **ἀρχὴ** τῶν τετμημένων. Τὸ O ἔχει τετμημένην **μηδέν.**

Σχ. 9

Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος x΄Ox ἀντιστοιχεῖ μία, καὶ μόνον μία, τετμημένη.

9. ΕΚΦΡΑΣΙΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ.– Ἐπὶ ἄξονος x΄Ox (σχ. 10) θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.

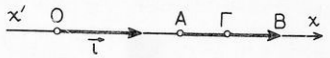
Θὰ εἶναι :

$$\overline{OA} = X_A \quad \text{καὶ} \quad \overline{OB} = X_B .$$

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Chasles θὰ εἶναι :

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} + \overline{AO} \ \text{ἢ}\ \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\text{ἢ} \quad \overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{X_B - X_A}. \qquad (1)$$



Σχ. 10

Δηλαδή : **Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος ἰσοῦται πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ πέρατος μεῖον τὴν τῆς ἀρχῆς.**

Ἄρα :

$$\mathbf{AB} = |\, x_B - x_A \,| \qquad (2)$$

Παράδειγμα : Ἐὰν $x_A = +3$ καὶ $x_B = -5$, τότε :

$$\overline{AB} = (-5) - (+3) = -5-3 = -8 \quad \text{καὶ} \quad AB = |-8| = 8.$$

10. ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.– Ἐὰν Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 10), θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{\Gamma A} + \overline{\Gamma B} = 0 \ \text{ἢ}\ (\overline{OA} - \overline{O\Gamma}) + (\overline{OB} - \overline{O\Gamma}) = 0 \ \text{ἢ}\ 2\overline{O\Gamma} = \overline{OA} + \overline{OB} \ \text{ἢ}$$

$$2x_\Gamma = x_A + x_B , \qquad \text{ἐξ οὗ:} \quad x_\Gamma = \frac{x_A + x_B}{2}.$$

Δηλαδή : **Ἡ τετμημένη τοῦ μέσου διανύσματος κειμένου ἐπὶ ἄξονος, ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων του.**

Παράδειγμα : Ἐὰν $x_A = +6$ καὶ $x_B = -10$, τότε ἡ τετμημένη x_Γ τοῦ μέσου Γ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ θὰ εἶναι :

$$x_\Gamma = \frac{1}{2}(+6-10) = -2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄Ox θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A,B,Γ μὲ ἀντιστοίχους τετμημένας +6, –2 +8. 1ον) Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$. 2ον) Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν τὸ σημεῖον O΄, τοιοῦτον ὥστε $\overline{OO'} = -3$. Ποῖαι εἶναι αἱ νέαι τετμημέναι τῶν σημείων A,B,Γ καὶ ποῖαι αἱ τιμαὶ τῶν $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$;

2. Έστωσαν Α,Β δύο σημεῖα ἑνὸς ἄξονος x'Ox μὲ τετμημένας -2 καὶ 4 ἀντιστοίχως. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{MA} = 2 \cdot \overline{MB}$.

3. Ἐὰν Α,Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ ἄξονος x'Ox μὲ τετμημένας ἀντιστοίχως -1 καὶ $2{,}5$, νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{MA} + 3\overline{MB} = \overline{AB}$ καὶ νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος $\overline{MA} : \overline{MB}$.

4. Ἐὰν x_A, x_B εἶναι ἀντιστοίχως αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Α, Β ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x'Ox, νὰ ὁρισθοῦν αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Γ καὶ Δ τοῦ ἄξονος, οὕτως ὥστε:

$$\overline{A\Gamma} = \overline{\Gamma\Delta} = \overline{\Delta B}.$$

5. Αἱ τετμημέναι τῶν σημείων Α,Β,Γ, ἑνὸς ἄξονος x'Ox εἶναι ἀντιστοίχως -2, $+8$, $+3$. Ὑπάρχει σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{M\Gamma} = 0$;

6. Τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ ὁπωσδήποτε κειμένων ἐπὶ ἄξονος x'Ox, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1ον: $\overline{\Delta A} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{\Delta B} \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{\Delta\Gamma} \cdot \overline{AB} = 0$.

2ον: $\Delta A^2 \cdot \overline{B\Gamma} + \Delta B^2 \cdot \Gamma A + \Delta\Gamma^2 \cdot \overline{AB} + \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} \cdot \overline{AB} = 0$.

3ον: $\overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Delta B} - \overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Delta A} \cdot \overline{A\Gamma} + \overline{\Delta A} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{B\Delta} - \overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = 0$.

7. Ἐπὶ ἄξονος x'Ox δίδονται τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος τούτου ἓν μοναδικὸν σημεῖον Ι, τοιοῦτον ὥστε: $\overline{IA}^3 + \overline{IB}^3 + \overline{I\Gamma}^3 - 3 \cdot \overline{IA} \cdot \overline{IB} \cdot \overline{I\Gamma} = 0$.

Ἐὰν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐν λόγῳ ἄξονος, τότε:

$$\overline{MA}^3 + \overline{MB}^3 + \overline{M\Gamma}^3 - 3\,\overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{M\Gamma} = \frac{3}{2}\,\overline{MI}(AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma A^2)$$

καὶ $$\overline{MA}^3 \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{MB}^3 \cdot \overline{\Gamma A} + \overline{M\Gamma}^3 \cdot \overline{AB} + 3\,\overline{MI} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} = 0 \quad \text{(Euler)}$$

11. ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— Καλοῦμεν γραμμικὸν συνδυασμὸν τῶν ν διανυσμάτων, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_\nu$, πᾶν διάνυσμα $\vec{u}$ τῆς μορφῆς:

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \ldots + \lambda_\nu \vec{u}_\nu \qquad \text{ἤ} \qquad \left(\vec{u} = \sum_1^\nu \lambda_i \vec{u}_i\right)$$

ἔνθα $\lambda_i \in R$.

Α) **Γραμμικὴ ἐξάρτησις δύο διανυσμάτων:** Δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ λέγονται γραμμικῶς ἐξηρτημένα (ἢ ὅτι ἀποτελοῦν ἐφαρμοστὸν σύστημα), ὅταν ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ_1 καὶ λ_2, ὄχι μηδὲν καὶ οἱ δύο, οὕτως ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0}. \tag{1}$$

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται ὅτι: $\lambda_1\vec{u}_1 = -\lambda_2\vec{u}_2$. Ἐὰν δὲ $\lambda_1 \neq 0$, τότε $\vec{u}_1 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{u}_2$, ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ εἶναι συγγραμμικά.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὥστε:

Δύο διανύσματα, ὄχι ἀμφότερα μηδενικά, εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα ὅταν εἶναι συγγραμμικά.

Παρατηρήσεις: $\vec{u}_2 = \vec{0}$ καὶ $\lambda_2 \neq 0 \Longrightarrow \vec{u}_1 = \vec{0}$ (ἢ $\lambda_1 = 0$),

$\vec{u}_2 \neq \vec{0}$ καὶ $\lambda_2 = 0 \Longrightarrow \vec{u}_1 = \vec{0}$ (διότι $\lambda_1 \neq 0$).

Β) **Δύο διανύσματα γραμμικῶς ἀνεξάρτητα :** Δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα (συνιστοῦν ἐλεύθερον σύστημα), ἐάν :

$$\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = \vec{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \tag{1}$$

1ον : Παρατηροῦμεν : α) $\vec{u}_2 = \vec{0}$ καὶ $\vec{u}_1 = \vec{0}$ εἶναι ἀδύνατον, διότι οἱ λ_1 καὶ λ_2 δύνανται νὰ ἐκλεγοῦν διάφοροι τοῦ μηδενός.

β) $\vec{u}_2 = \vec{0}$ εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ (1) δύναται νὰ ἐπαληθευθῇ διὰ $\lambda_1 = 0$ καὶ $\lambda_2 = 1$, ὅπερ ἀδύνατον. Ἄρα.

Ἐὰν δύο διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, οὐδὲν ἐξ αὐτῶν εἶναι μηδέν.

2ον : Τὰ δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ **δὲν εἶναι παράλληλα** (διότι ἄλλως θὰ ἦσαν γραμμικῶς ἐξηρτημένα). Ὁ φορεὺς των ὁρίζει μίαν διεύθυνσιν ἐπιπέδων.

Γ) **Τρία διανύσματα γραμμικῶς ἐξηρτημένα :** Τρία διανύσματα, μὴ μηδενικά, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα (σχηματίζουν σύστημα ἐφαρμοστόν), ἐὰν ὑπάρχουν τρεῖς πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ_1, λ_2, λ_3, ὄχι ὅλοι μηδέν, εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχωμεν :

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \lambda_3 \vec{u}_3 = \vec{0}.$$

Ὑποθέτομεν τὰ $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ὁπότε δὲν θὰ εἶναι $\lambda_3 = 0$ (διότι, ἄλλως, θὰ εἴχομεν $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν :

$$\lambda_3 \vec{u}_3 = -\lambda_1\vec{u}_1 - \lambda_2 \vec{u}_2 \quad \text{ἢ} \quad \vec{u}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\vec{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3}\vec{u}_2.$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\quad -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_3} = x_1$ καὶ $-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_3} = x_2$, $\quad$ τότε :

$$\vec{u}_3 = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 \tag{1}$$

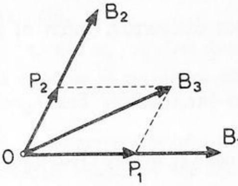
Ὥστε : Ἐὰν δύο διανύσματα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ (οὔτε παράλληλα, οὔτε μηδενικὰ) εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, καὶ ἐὰν μετὰ τρίτου εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Ὑπάρχουν δὲ δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x_1 καὶ x_2, τοιοῦτοι ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν τρία διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ εἶναι παράλληλα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, τῶν $\vec{u}_1$ καὶ $\vec{u}_2$ ὄντων γραμμικῶς ἀνεξαρτήτων, τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB_1} = \vec{u}_1$, $\overrightarrow{AB_2} = \vec{u}_2$, $\overrightarrow{AB_3} = \vec{u}_3$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ Α καὶ παραλλήλου πρὸς τοὺς φορεῖς τῶν $\vec{u}_2$ καὶ $\vec{u}_3$.

Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $AP_1B_3P_2$ (σχ. 11), τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ φέρονται ὑπὸ τῶν $\overrightarrow{AB_1}$ καὶ $\overrightarrow{AB_2}$. Θὰ ἔχωμεν : $\overrightarrow{AB_3} = \overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2}$.

'Αλλὰ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $\overrightarrow{AP_1} = x_1 . \overrightarrow{AB_1} = x_1 \overrightarrow{u_1}$ καὶ $\overrightarrow{AP_2} = x_2 \overrightarrow{AB_2} = x_2 \overrightarrow{u_2}$.

"Αρα : $\overrightarrow{AB_3} = x_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + x_2 \overrightarrow{u_2}$ ἢ $\overrightarrow{u_3} = x_1 \overrightarrow{u_1} + x_2 \overrightarrow{u_2}$ (1)



Σχ. 11

Οἱ x_1, καὶ x_2 εἶναι μοναδικοί. Πράγματι· ἐὰν ὑπῆρχον δύο ἄλλοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, x_1' καὶ x_2', τοιοῦτοι ὥστε $\overrightarrow{u_3} = x_1' \overrightarrow{u_1} + x_2' \overrightarrow{u_2}$ (2), τότε ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2), θὰ ἔχωμεν :

$$\overrightarrow{0} = (x_1 - x_1') \overrightarrow{u_1} + (x_2 - x_2') \overrightarrow{u_2}.$$

"Αρα (§ 11, Β) θὰ εἶναι $x_1 - x_1' = 0$, ἐξ οὗ $x_1 = x_1'$ καὶ $x_2 - x_2' = 0$, ἐξοῦ $x_2 = x_2'$.

"Ωστε : **Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τρία διανύσματα $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$, ὧν δύο $\overrightarrow{u_1}$ καὶ $\overrightarrow{u_2}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἀποτελοῦν σύστημα ἐφαρμοστόν, εἶναι νὰ ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x_1 καὶ x_2, τοιοῦτοι ὥστε**

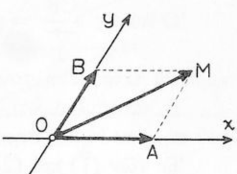
$$\overrightarrow{u_3} = x_1 \overrightarrow{u_1} + x_2 \overrightarrow{u_2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

12. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑΙ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΙ.– Ἐπὶ ἐπιπέδου (Π) θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ καὶ δύο διακεκριμένας διευθύνσεις Ox καὶ Oy (σχ. 12). Αἱ ἐκ τοῦ Μ ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς Oy καὶ Ox τέμνουν τὴν Ox εἰς τὸ Α καὶ τὴν Oy εἰς τὸ σημεῖον Β. Σχηματίζεται οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον ΒΟΑΜ. Θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 12

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

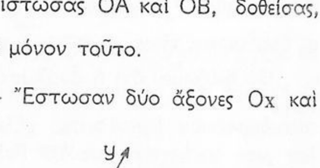
Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ ἀνελύθη κατὰ τὰς διευθύνσεις Ox καὶ Oy εἰς τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$.

Τὰ δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ καλοῦνται διανυσματικαὶ συνιστῶσαι τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy.

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ λέγονται καὶ **προβολαὶ** τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα Oy καὶ Ox.

Ἀντιστρόφως, εἰς δύο διανυσματικὰς συνιστώσας $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$, δοθείσας, ἀντιστοιχεῖ τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, καὶ μόνον τοῦτο.

13. ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ.– Ἔστωσαν δύο ἄξονες Ox καὶ Oy (σχ. 13), τῶν ὁποίων τὰ μοναδιαῖα διανύσματα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ διανύσματα $\vec{\imath}$ καὶ $\vec{\jmath}$ ἀντιστοίχως, κοινῆς ἀρχῆς Ο.



Σχ. 13

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(\vec{\imath}, \ \vec{\jmath})$ θὰ λέγωμεν ὅτι ἀποτελεῖ μετὰ τοῦ Ο ἐπί-πεδον **βάσεως** καὶ θὰ συμβολίζεται οὕτως : $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Ὁ ἄξων Ox καλεῖται ἄξων τῶν **τετμημένων** καὶ ὁ ἄξων Oy καλεῖται ἄξων τῶν **τεταγμένων**. Τὸ σημεῖον Ο καλεῖται **ἀρχὴ** τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy, οἱ ὁποῖοι καλοῦνται καὶ ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

Τὸ σύστημα τῶν συντεταγμένων θὰ λέγεται **κανονικόν,** ὅταν τὰ $\vec{\imath}$ καὶ $\vec{j}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος. Θὰ λέγεται δὲ **ὀρθογώνιον,** ἐὰν τὰ $\vec{\imath}$ καὶ $\vec{j}$ εἶναι κάθετα, καὶ **ὀρθοκανονικόν,** ὅταν τὰ $\vec{\imath}$ καὶ $\vec{j}$ εἶναι κάθετα καὶ τοῦ αὐτοῦ μήκους.

Ἤδη, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$. Ἐὰν ἀχθοῦν αἱ παράλληλοι ΜΑ καὶ ΜΒ πρὸς τοὺς ἄξονας Oy καὶ Ox ἀντιστοίχως, προκύπτουν τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ συνιστῶσαι τοῦ $\overrightarrow{OM}$.

Ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\vec{\imath}} = x$ (1) εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ καὶ καλεῖται **τετμημένη** τοῦ σημείου Μ.

Ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\vec{j}} = y$ (2) εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ καὶ καλεῖται **τεταγμένη** τοῦ σημείου Μ.

Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Μ καλοῦνται **συντεταγμέναι** τοῦ σημείου Μ καὶ σημειώνομεν $M(x,y)$.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} \quad \text{καὶ} \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ἕπεται ὅτι : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{j}$, καὶ ἂν $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, τότε :

$$\boxed{\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{j}} \tag{3}$$

καὶ θὰ λέγωμεν ὅτι ἀνελύσαμεν τὸ διάνυσμα $\vec{u}$ εἰς δύο διανύσματα, τῶν ὁποίων αἱ διευθύνσεις εἶναι αἱ τῶν $\vec{\imath}$ καὶ $\vec{j}$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀνάλυσις (3) εἶναι **μοναδική.** Διότι, ἐὰν εἴχομεν συγχρόνως :

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{j} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{j}$$

τότε :
$$(x - x_1)\vec{\imath} = (y_1 - y)\vec{j}$$

Ἐὰν δὲ $x \neq x_1$, τότε :

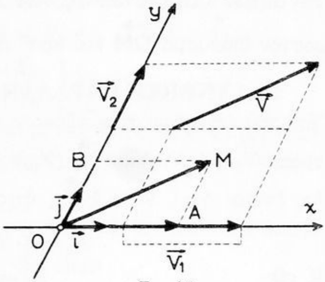
$$\vec{\imath} = \frac{y_1 - y}{x - x_1} \cdot \vec{j} \tag{4}$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{\imath}$ καὶ $\vec{j}$ εἶναι συγγραμμικά, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα : $\quad x = x_1$ καὶ $y = y_1$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι : πᾶν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\vec{u}$ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων **χαρακτηρίζεται** ὑπὸ τῶν δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν x καὶ y (**τῶν συντεταγμένων του**).

14. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΕΛΕΥΘΕΡΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ.– Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων x'Ox καὶ y'Oy θεωροῦμεν τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{V}$, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαὶ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy εἶναι τὰ διανύσματα $\vec{V_1}$ καὶ $\vec{V_2}$ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν δὲ καὶ τὸν ἀντιπρόσωπον τοῦ $\vec{V}$, τὸ διάνυσμα $\vec{OM}$. Ἐὰν $\vec{OA}$ καὶ $\vec{OB}$ εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ $\vec{OM}$ ἐπὶ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἀντιστοίχως, τότε, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι:

$$\vec{V_1} = \vec{OA} \text{ καὶ } \vec{V_2} = \vec{OB} \text{ καὶ } \vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} \quad (1)$$



Σχ. 14

Ἐὰν δὲ X καὶ Y εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ M, τότε:

$$\vec{OA} = X\vec{i} \text{ καὶ } \vec{OB} = Y\vec{j},$$

ὁπότε: $\vec{V_1} = X\vec{i}$ καὶ $\vec{V_2} = Y\vec{j}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$\boxed{\vec{V} = X\vec{i} + Y\vec{j}} \quad (2)$$

Οἱ ἀριθμοὶ X καὶ Y καλοῦνται **συντεταγμέναι προβολαὶ** τοῦ διανύσματος $\vec{V}$ καὶ σημειώνομεν: $\vec{V}$ **(X,Y)**.

Τὰ διανύσματα $X\vec{i}$ καὶ $Y\vec{j}$ ὀνομάζονται **συνιστῶσαι** τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{V}$ κατὰ τοὺς ἄξονας Ox καὶ Oy.

Ἀντιστρόφως, δοθεισῶν τῶν συντεταγμένων προβολῶν X καὶ Y ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{V}$, ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox διάνυσμα $\vec{V_1}$, τοιοῦτον ὥστε $\overline{V_1} = X$, καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy διάνυσμα $\vec{V_2}$, τοιοῦτον ὥστε $\overline{V_2} = Y$. Πᾶν δὲ διάνυσμα $\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2}$ ἔχει συνιστώσας ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων ἴσας πρὸς X,Y.

Ὥστε: Εἰς πᾶν διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου xOy ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως ἓν διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν: αἱ συντεταγμέναι του, καὶ ἀντιστρόφως: Πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος (X,Y) πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς καὶ μόνον διανύσματος εἰς τὸ ἐπίπεδον μὲ συντεταγμένας τοὺς ἐν λόγῳ ἀριθμούς.

Σημείωσις: Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μηδενικοῦ διανύσματος εἶναι (0,0).

Ἄρα: **Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (X, Y) ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων OX καὶ Oy ἕν, καὶ μόνον ἕν, ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{V}$.**

Παρατηρήσεις: Ἐὰν $\vec{V} = \vec{0}$, τότε $X = Y = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

'Εὰν τὸ $\vec{V}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x'Ox, τότε $Y = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

'Εὰν τὸ $\vec{V}$ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y'Oy, τότε $X = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

Αἱ καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Μ εἶναι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν συνιστωσῶν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ (O ἡ ἀρχὴ τῶν ἀξόνων).

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι : 'Εὰν δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων (Ox, Oy) κείμενα, ἔχουν τὰς διανυσματικὰς συνιστώσας αὐτῶν ἴσας ἐπὶ τῶν ἀξόνων x'Ox καὶ y'Oy, θὰ εἶναι ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἴσα μεταξύ των.

15. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.— 'Επὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy θεωροῦμεν δύο παράλληλα διανύσματα $\vec{V}_1$ (X_1, Y_1) καὶ $\vec{V}_2$ (X_2, Y_2) ἐλεύθερα. 'Αφοῦ τὰ $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα, ἕπεται ὅτι : $\vec{V}_1 = k\,\vec{V}_2$, ὅπου $k \in R$ ἢ

$$X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} = k\,(X_2\vec{i} + Y_2\vec{j})$$

ἐξ οὗ $$X_1 = kX_2 \text{ καὶ } Y_1 = kY_2$$

ἢ $$X_1Y_2 = kX_2Y_2 \text{ καὶ } X_2Y_1 = kX_2Y_2$$

"Αρα : $$X_1Y_2 = X_2Y_1 \text{ ἢ } \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}. \qquad (1)$$

'Αντιστρόφως, ἐὰν $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ καὶ τεθῇ $\dfrac{X_1}{X_2} = \dfrac{Y_1}{Y_2} = \lambda \in R$, τότε

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \lambda X_2 \\ Y_1 = \lambda Y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} X_1\vec{i} = \lambda X_2\vec{i} \\ Y_1\vec{j} = \lambda Y_2\vec{j} \end{array}\right\} \Longrightarrow X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} = \lambda\,(X_2\vec{j} + Y_2\vec{j}) \text{ ἢ }$$
$$\vec{V}_1 = \lambda\,\vec{V}_2$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα. "Ωστε :

'Η ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι παράλληλα, εἶναι ἡ :

$$X_1Y_2 = X_2Y_1 \quad \text{ἢ} \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2}}$$

'Εὰν $X_1Y_2 \neq X_2Y_1$ τὰ διανύσματα εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

'Εὰν $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$, τότε $k = 1$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 \Longleftrightarrow X_1 = X_2$ καὶ $Y_1 = Y_2$, ἐφ' ὅσον εἶναι ἴσα πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (σχ. 14).

"Ωστε : **"Ινα δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι ἴσα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ὁμώνυμοι συντεταγμέναι προβολαί των νὰ εἶναι ἴσαι.**

16. ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ ἀθροίσματος ἐλευθέρων διανυσμάτων ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Ἔστω $\vec{\Sigma}(X,Y)$ τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων :

$\vec{V}_1\ (X_1, Y_1),\ \vec{V}_2\ (X_2, Y_2), \ldots,\ \vec{V}_\nu\ (X_\nu, Y_\nu)$

Θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν $\vec{\Sigma} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \ldots + \vec{V}_\nu$, ἀφ' ἑτέρου δέ : $\vec{\Sigma} = X\vec{\imath} + Y\vec{j}$

καὶ $\vec{V}_1 = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{j},\quad \vec{V}_2 = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{j}, \ldots,\quad \vec{V}_\nu = X_\nu\vec{\imath} + Y_\nu\vec{j}$

ἢ $X\vec{\imath} + Y\vec{j} = (X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{j}) + (X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{j}) + \ldots + (X_\nu\vec{\imath} + Y_\nu\vec{j})$

$$= (X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu)\vec{\imath} + (Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu)\vec{j}$$

ἐξ οὗ :
$$\left.\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \ldots + X_\nu \\ Y &= Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu \end{aligned}\right\}$$

17. ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῆς διαφορᾶς δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.

Ἔστωσαν $\vec{V}_1 = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{j}$ καὶ $\vec{V}_2 = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{j}$ τὰ δύο ἐλεύθερα διανύσματα καὶ $\vec{W} = X\vec{\imath} + Y\vec{j}$ ἡ διαφορὰ αὐτῶν. Θὰ εἶναι :

$$\vec{W} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

ἢ
$$X\vec{\imath} + Y\vec{j} = (X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{j}) - (X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{j})$$
$$= (X_1 - X_2)\vec{\imath} + (Y_1 - Y_2)\vec{j}$$

ἐξ οὗ :
$$\left.\begin{aligned} X &= X_1 - X_2 \\ Y &= Y_1 - Y_2 \end{aligned}\right\}$$

Παρατήρησις : Ἐὰν $\lambda \in R$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{j} \Longrightarrow \lambda\vec{V} = \lambda X\vec{\imath} + \lambda Y\vec{j}.$$

18. ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΤΩΝ ΑΚΡΩΝ ΤΟΥ.— Ἔστω $\vec{AB}$ διάνυσμα ἀρχῆς $A\,(x_1, y_1)$ καὶ πέρατος $B\,(x_2, y_2)$.

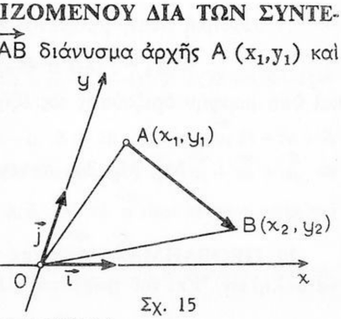
Κατὰ τὰ γνωστὰ θὰ εἶναι :

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \qquad (1)$$

Ἀλλά : $\vec{OB} = X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{j}$ καὶ

$\vec{OA} = X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{j}$ καὶ ἡ (1) γίνεται :

$\vec{AB} = (X_2\vec{\imath} + Y_2\vec{j}) - (X_1\vec{\imath} + Y_1\vec{j})$



Σχ. 15

ἐξ οὗ :
$$\boxed{\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{j}} \qquad (2)$$

'Εὰν δὲ X καὶ Y εἶναι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ $\overrightarrow{AB}$, τότε :

$$\overrightarrow{AB} = X\vec{\imath} + Y\vec{j},$$

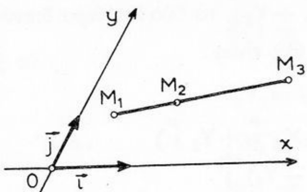
καὶ ἡ (2) γίνεται : $X\vec{\imath} + Y\vec{j} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

ἐξ οὗ :
$$\boxed{\begin{aligned} X &= x_2 - x_1 \\ Y &= y_2 - y_1 \end{aligned}} \qquad (3)$$

Δηλαδή : **Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ διανύσματος ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του** (τοῦ πέρατος μεῖον τῆς ἀρχῆς).

19. ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΤΡΙΑ ΣΗΜΕΙΑ ΚΕΙΝΤΑΙ ΕΠ' ΕΥΘΕΙΑΣ.– Ἔστωσαν $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ τρία σημεῖα (σχ. 16).

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ τρία ταῦτα σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι τὰ διανύσματα $\vec{V} = \overrightarrow{M_1M_2}$ καὶ $\vec{V'} = \overrightarrow{M_1M_3}$, μὴ μηδενικὰ ἐξ ὑποθέσεως, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. 'Αλλά :



Σχ. 16

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{j},$$

καὶ
$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1)\vec{\imath} + (y_3 - y_1)\vec{j}.$$

Ἄρα κατὰ τὴν (§ 15) εἶναι :

$$\boxed{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0.}$$

Ἡ συνθήκη αὕτη γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) = 0$$

καὶ ὑπὸ μορφὴν ὁριζούσης ὡς ἑξῆς :

$$\mathbf{M_1, M_2, M_3} \text{ συνευθειακὰ} \iff \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

20. ΠΡΟΒΛΗΜΑ.– Δίδονται τὰ σημεῖα A (x_1, y_1) καὶ B (x_2, y_2) διακεκριμένα ἀλλήλων. Ἐπὶ τοῦ τμήματος AB νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M, τοιοῦτον ὥστε :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -k \neq -1, \text{ ὅπου } k \in R$$

Ἐκ τῆς δοθείσης ἰσότητος ἕπεται ὅτι: $\overrightarrow{MA} = -k \cdot \overrightarrow{MB}$ (σχ. 17).

ἢ $\quad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} = -k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})$

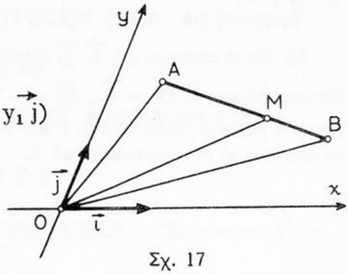
ἢ $\quad \overrightarrow{OM}(k+1) = k \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$

ἢ $(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(k+1) = k(x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}) + (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath})$

$= (kx_2 + x_1)\vec{\imath} + (ky_2 + y_1)\vec{\jmath}$

ἐξ οὗ:

$$x = \frac{kx_2 + x_1}{k+1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{ky_2 + y_1}{k+1}. \quad (2)$$



Σχ. 17

21. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ. — Αὗται συνάγονται ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2) τῆς (§ 20) διὰ $k = 1$. Ἄρα:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Δηλαδή: **Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἑνὸς διανύσματος ἰσοῦνται ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8. Δείξατε ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{V}_1\,(2, -1)$ καὶ $\vec{V}_2\,(6, -3)$ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα.

9. Δείξατε ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{V}_1\,(2, 1)$ καὶ $\vec{V}_2\,(3, 1)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.

10. Δίδονται τὰ διανύσματα: $\vec{u}_1\,(-1, 2)$, $\vec{u}_2\,(2, 3)$, $\vec{u}_3\,(-5, -4)$.
Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ διανύσματα:

$$\vec{x} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{y} = \vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3, \quad \vec{z} = -\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

11. Νὰ ὁρισθῇ ὁ α, ὥστε τὰ διανύσματα $\vec{u}_1\,(\alpha, 4)$ καὶ $\vec{u}_2\,(3, \alpha-1)$ νὰ εἶναι παράλληλα.

12. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ διανύσματα $\vec{u}_1\,(\lambda+3, \lambda+1)$ καὶ $\vec{u}_2\,(-3, \lambda-1)$ συνιστοῦν ἐπίπεδον βάσεως;

13. α) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν λ καὶ μ τὰ διανύσματα $\vec{u}\,(\lambda-4, \mu-4)$ καὶ $\vec{v}\,(3\lambda+8, 4\mu-1)$ εἶναι ἴσα;

β) Δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{u}_1\,(3, -2)$, $\vec{u}_2\,(2\lambda-\mu, \lambda+2\mu-4)$ καὶ $\vec{u}_3\,(\lambda-3\mu+2, -3\lambda+3\mu-2)$ καὶ ζητοῦνται αἱ συνιστῶσαι (X, Y) τοῦ διανύσματος $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$, ὡς καὶ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν λ, μ ἵνα τὸ $\vec{u}$ εἶναι συγγραμμικὸν τοῦ $\vec{v}\,(-3, 4)$. Ἀκολούθως νὰ εὕρητε διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ εἶναι $\vec{u} = \vec{0}$.

γ) Δίδονται τὰ σημεῖα Α(–1,2), Β(3,–1) καὶ Γ(5,1) καὶ ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς Δ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

14. Δίδονται Α (3,2) καὶ $\overrightarrow{AB}\,(5, -3)$ εἰς τὸ σύστημα βάσεως $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ Β καὶ νὰ ὁρισθῇ ἡ θέσις τοῦ ΑΒ.

15. Δίδονται τὰ διακεκριμένα σημεῖα $A(x_1 y_1)$, $B(x_2, y_2)$ καὶ $\Gamma(x_3, y_3)$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου Μ τοῦ ΒΓ καὶ ἀκολούθως αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους Ζ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐφαρμογὴ διά: Α(1,2), Β(5,3), Γ(3,5).

16. Εἰς τὸ σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j})$ δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{V}_1\,(1,1)$, $\vec{V}_2\,(-3,2)$ καὶ $\vec{V}_3\,(2,1)$. Κατασκευάζομεν τὸ $\overrightarrow{OA} = \vec{V}_1$, $\overrightarrow{AB} = -\vec{V}_2$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{V}_3$. 1ον) Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα, 2ον) Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν Β, Γ καὶ τοῦ μέσου Μ τοῦ ΒΓ, 3ον) Κατασκευάζομεν τὸ $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$, νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ Δ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

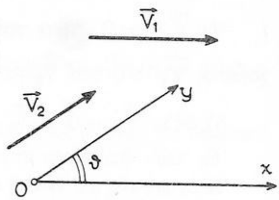
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

22. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΛΕΥΘΕΡΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.– Ἔστωσαν $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα (σχ. 18).

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ χώρου ἄγομεν δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Oy παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$. Ἡ προκύπτουσα γωνία xOy εἶναι :

α) **Ἀνεξάρτητος** τῆς θέσεως τοῦ σημείου Ο, καθόσον αἱ γωνίαι μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους εἶναι ἴσαι.

β) Εἶναι **μηδέν,** ἂν τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι παράλληλα καὶ ὁμόρροπα· **ἴση δὲ πρὸς 2 ὀρθάς,** ἂν τὰ διανύσματα ταῦτα εἶναι παράλληλα καὶ ἀντίρροπα.



Σχ. 18

γ) **Ἀνεξάρτητος τῆς τάξεως** τῶν διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$.

Ὥστε : **Δοθέντων δύο διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$, ἀντιστοιχίζομεν εἰς αὐτὰ τὴν γωνίαν θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2$ ὀρθῶν), ἡ ὁποία καλεῖται γωνία τῶν δύο ἐλευθέρων διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$.**

Παρατήρησις : Μία τοιαύτη γωνία θ **δὲν εἶναι προσανατολισμένη.**

23. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΝ ἢ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.– Καλοῦμεν ἐσωτερικὸν ἢ ἀριθμητικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων τὸν πραγματικὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν δύο διανυσμάτων ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς γωνίας αὐτῶν.

Ἔστωσαν δύο διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ (σχ. 18) καὶ θ ἡ γωνία αὐτῶν. Ἐὰν $|\vec{V}_1|$ καὶ $|\vec{V}_2|$ εἶναι τὰ μήκη τῶν διανυσμάτων τούτων, τότε τὸ γινόμενον :

$$|\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|\ \text{συνθ} \in R$$

εἶναι τὸ **ἐσωτερικὸν γινόμενον** τῶν διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ καὶ σημειώνεται ὡς ἑξῆς :

$$\vec{V}_1\ \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|\ \text{συνθ} = |\overline{V}_1|\,|\overline{V}_2|\ \text{συνθ} \in R \qquad (1)$$

Συνέπειαι : **1ον.** Ἔστω $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, καὶ $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$, ὁπότε :

α) Ἐὰν $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ συνθ > 0, καὶ ἄρα $\vec{V}_1 . \vec{V}_2$ **θετικὸν**

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 > 0$, τότε $|\vec{V}_1| \, |\vec{V}_2|$ συνθ > 0 ἢ συνθ > 0, ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$.

β) Ἐὰν $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \Longrightarrow$ συνθ < 0 καὶ $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ **ἀρνητικόν.**

Ἀντιστρόφως : Ἐὰν $\vec{V}_1 \vec{V}_2 < 0$, τότε $|\vec{V}_1| \, |\vec{V}_2|$ συνθ < 0 ἢ συνθ < 0, ἐξ οὗ

$$\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi.$$

γ) Ἐὰν $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow$ συνθ $= 0$ καὶ ἄρα $\vec{V}_1 \vec{V}_2 = 0$.

Ἄν $\vec{V}_1 \vec{V}_2 = 0$, τότε τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ εἶναι κάθετα (ἢ ἐνδεχομένως $\vec{V}_1 = \vec{0}$ καὶ $\vec{V}_2 \neq \vec{0}$ ἢ $\vec{V}_1 \neq \vec{0}$ καὶ $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ἢ $\vec{V}_1 = \vec{0}$ καὶ $\vec{V}_2 = \vec{0}$).

δ) Ἐὰν $\vec{V}_1 = \vec{0}$ ἢ $\vec{V}_2 = \vec{0}$ ἢ $\vec{V}_1 = \vec{0}$ καὶ $\vec{V}_2 = \vec{0}$, τότε $\vec{V}_1 \vec{V}_2 = 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο διανύσματα εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, ἐκφράζεται διὰ τοῦ μηδενισμοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου αὐτῶν.

Δύο τοιαῦτα διανύσματα θὰ καλοῦνται **ὀρθογώνια.**

Τὸ μηδενικὸν διάνυσμα εἶναι κάθετον πρὸς πᾶν διάνυσμα (μὴ ἐξαιρουμένου τοῦ ἑαυτοῦ του).

2ον : Ἐπειδὴ $|\vec{\imath}| = 1$ καὶ $|\vec{\jmath}| = 1 \Longrightarrow \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} =$ συνθ

3ον : Ἐπειδὴ ἡ γωνία θ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς τάξεως τῶν διανυσμάτων $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$, ἕπεται ὅτι :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \, |\vec{V}_2| \text{ συνθ} = |\vec{V}_2| \, |\vec{V}_1| \text{ συνθ} = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$$

ἤτοι :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1.$$

Ὥστε : **Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.**

4ον : Ἔστω τυχὸν διάνυσμα $\vec{V}$. Τοῦτο μὲ τὸν ἑαυτόν του σχηματίζει γωνίαν $\theta = 0$. Ἄρα συνθ $= 1$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}| \cdot |\vec{V}| \text{ συνθ} = |\vec{V}|^2 \cdot 1 = |\vec{V}|^2$$

ἤτοι :

$$\vec{V}^2 = |\vec{V}|^2.$$

5ον : Θεωροῦμεν δύο διανύσματα $\vec{u} \neq \vec{0}$ καὶ $\vec{\upsilon} \neq \vec{0}$ γραμμικῶς ἐξηρτημένα. Θέτομεν $\vec{u} = k \cdot \vec{\upsilon}$.

Ἐὰν $\mathbf{k} > 0$, δύο ἀντιπρόσωποι $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A_1B_1}$ τῶν διανυσμάτων τούτων εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἄρα :

$$\overline{\gamma\omega\nu}\,(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = 0 \quad \text{καὶ} \quad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon} = |\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\upsilon}|.$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν ἄξονα **παράλληλον** πρὸς τὸ $\vec{u}$ ἢ πρὸς τὸ $\vec{\upsilon}$, εἶναι προφανὲς ὅτι : $|\vec{u}| = \overline{u}$ ἢ $|\vec{u}| = -\overline{u}$. Ὁμοίως καὶ διὰ τὸ $\vec{\upsilon}$. Ἄρα :

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\upsilon}.$$

Ἐὰν $\mathbf{k} < 0$, τότε $\overline{\gamma\omega\nu}\,(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = \pi$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\,(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = -1$.

Κατ' ἀκολουθίαν : $$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon} = -|\vec{\mathbf{u}}|\,|\vec{\upsilon}|.$$

Ἐργαζόμενοι δὲ ὅπως προηγουμένως, εὑρίσκομεν ὅτι :

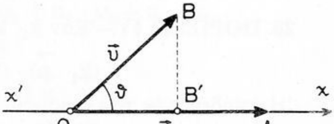
$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{\mathbf{u}} \cdot \overline{\upsilon}.$$

Ὥστε : **Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο συγγραμμικῶν διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν αὐτῶν.**

Σημείωσις : Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν ἑνὸς τῶν διανυσμάτων, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον ἀλλάσσει πρόσημον.

24. ΘΕΩΡΗΜΑ I.—Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ὀρθογώνιον προβολὴν τοῦ ἄλλου διανύσματος ἐπὶ ἄξονα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ φορᾶς μὲ τὸ πρῶτον.

Ἔστωσαν $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ καὶ $\overrightarrow{OB} = \vec{\upsilon}$ οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ (σχ.19).



Σχ. 19

Ἔστω B′ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τοῦ B ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν OA. Ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τοῦ ὁποίου φορεὺς εἶναι ἡ εὐθεῖα OA καὶ φορὰ εἶναι ἡ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$, ἔχομεν :

$$\overline{OB'} = OB\,\sigma\upsilon\nu\theta = \upsilon\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

ἔνθα θ ἡ γωνία τῶν δύο διανυσμάτων. Ἄρα :

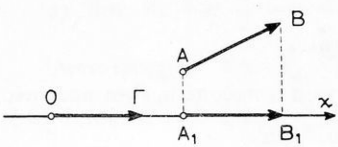
$$\overline{OA} \cdot \overline{OB'} = u \cdot \upsilon \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}.$$

Ὥστε : $$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OB'}}.$$

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν φορὰν τοῦ ἄξονος x′Ox, τὸ γινόμενον $\overline{OA} \cdot \overline{OB'}$ μένει ἀμετάβλητον. Ἄρα, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ φορὰ τοῦ ἄξονος x′Ox, θὰ ἔχωμεν :

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon} = \overline{\mathbf{OA}} \cdot \overline{\mathbf{OB'}} = \overline{\mathbf{OB}} \cdot \overline{\mathbf{OA'}}.$$

25. ΠΟΡΙΣΜΑ Ι.–Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἓν τῶν διανυσμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς ὀρθῆς προβολῆς του ἐπὶ τὸν φορέα τοῦ ἄλλου.



Σχ. 20

Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 20) ἔχομεν :

$$\vec{AB} \cdot \vec{O\Gamma} = \overline{A_1B_1} \cdot \overline{O\Gamma} = \vec{A_1B_1} \cdot \vec{O\Gamma}.$$

Ἐὰν τὸ Α (ἢ Β) μετατίθεται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{O\Gamma}$, τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον $\vec{AB} \cdot \vec{O\Gamma}$ μένει ἀμετάβλητον, διότι τὰ A_1 καὶ B_1 μένουν σταθερά.

26. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ.– Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνὸς διανύσματος ἐπὶ ἄξονα εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τοῦ διανύσματος τούτου καὶ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος τοῦ ἄξονος τούτου.

Οὕτως, ἐὰν εἰς τὸ (σχ. 20) εἶναι $|\vec{O\Gamma}| = 1$, τότε :

$$\vec{\mathbf{AB}} \cdot \vec{\mathbf{O\Gamma}} = \overline{\mathbf{A_1B_1}} \cdot \overline{\mathbf{O\Gamma}} = \overline{\mathbf{A_1B_1}}$$

27. ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ.–Ἐὰν τὸ ἓν τῶν διανυσμάτων ἐσωτερικοῦ γινομένου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν k, τότε τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν δύο διανυσμάτων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k.

Δηλαδή : $(\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{u}})\vec{\upsilon} = \mathbf{k}(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon})$ (Προσεταιριστικὴ ὡς πρὸς τὸν k).

Ἡ ἀπόδειξις ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ.

28. ΠΟΡΙΣΜΑ IV.–Ἐὰν $\mathbf{k_1}, \mathbf{k_2} \in \mathbf{R}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$(\mathbf{k_1} \cdot \vec{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{k_2} \cdot \vec{\upsilon}) = \mathbf{k_1} \cdot \mathbf{k_2}(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon})$$

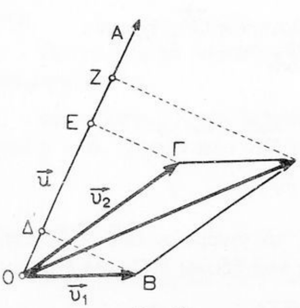
Ἡ ἀπόδειξις ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ.

29. ΘΕΩΡΗΜΑ.– Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $\vec{\mathbf{u}}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\upsilon}_2$

Ἀπόδειξις : Ἔστωσαν $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{\upsilon}_1$ καὶ $\vec{O\Gamma} = \vec{\upsilon}_2$ οἱ ἀντιπρόσωποι τῶν διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{\upsilon}_1$ καὶ $\vec{\upsilon}_2$ ἀντιστοίχως. Ἔστω ὅτι :

$$\vec{O\Sigma} = \vec{OB} + \vec{O\Gamma}$$

Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τῶν Β, Γ καὶ Σ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΟΑ, τῆς ὁποίας φορὰ εἶναι ἡ φορὰ τοῦ διανύσματος $\vec{OA}$, θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 21

$$\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \vec{OA} \cdot \vec{O\Sigma} = \overline{OA} \cdot \overline{OZ} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\overline{OZ} = \overline{O\Delta} + \overline{OE}$, ἡ (1) γίνεται:

$$\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \overline{OA} \cdot (\overline{O\Delta} + \overline{OE}) = \overline{OA} \cdot \overline{O\Delta} + \overline{OA} \cdot \overline{OE} = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2$$

ἤτοι: $$\vec{u} \cdot (\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2) = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2 .$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται **ἐπιμεριστική.**

Γενίκευσις: Εἶναι: $\vec{u} \cdot \sum_{1}^{\nu} \vec{\upsilon}_i = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2 + \cdots + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_\nu .$

Γενικώτερον ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἐὰν $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \cdots + \vec{u}_\mu$ καὶ $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \cdots + \vec{\upsilon}_\nu$

τότε: $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = \Sigma\, \vec{u}_i\, \vec{\upsilon}_j$, ἔνθα $i = 1, 2, 3, \ldots, \mu$ καὶ $j = 1, 2, 3, \ldots, \nu$.

1ον: Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\vec{u}(\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3) = \vec{u} \cdot [\vec{\upsilon}_1 + (\vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3)] = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot (\vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3) =$$
$$= \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_3$$

2ον: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον:

$$P = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3)$$

θέτομεν $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$P = \vec{u} \cdot (\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \vec{\upsilon}_3) = \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u} \cdot \vec{\upsilon}_3 =$$
$$= (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\, \vec{\upsilon}_1 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\, \vec{\upsilon}_2 + (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)\, \vec{\upsilon}_3 =$$
$$= \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 + \vec{u}_1 \cdot \vec{\upsilon}_3 + \vec{u}_2 \cdot \vec{\upsilon}_3 .$$

3ον: Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἰσότητες:

$$(\vec{u} + \vec{\upsilon})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{\upsilon}|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$$
$$(\vec{u} - \vec{\upsilon})^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{\upsilon}|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$$
$$(\vec{u} + \vec{\upsilon})\,(\vec{u} - \vec{\upsilon}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{\upsilon}|^2 .$$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

I. — Τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς του ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

Πράγματι, ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 22). Θὰ εἶναι:

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} \Longrightarrow \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB}.$$

Ἄρα: $$(\vec{B\Gamma})^2 = (\vec{A\Gamma} - \vec{AB})^2 = (\vec{A\Gamma})^2 + (\vec{AB})^2 - 2\,\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB}$$

ἢ $$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 - 2\,\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB}. \qquad (1)$$

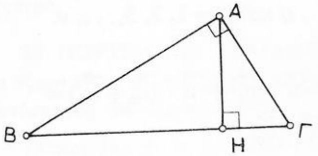
α) Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, τότε: $\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0$ καὶ ἡ (1) γίνεται: $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$.

β) Ἐὰν τὸ ΑΒΓ εἶναι τοιοῦτον ὥστε $B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$, ἡ (1) γράφεται:

$$2\vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \vec{A\Gamma} \cdot \vec{AB} = 0 \Longrightarrow A\Gamma \perp AB.$$

ΙΙ.– Ἡ σχέσις $AH^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{H\Gamma}$ (εἰς τὴν ὁποίαν Η εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους ΑΗ τριγώνου ΑΒΓ) **χαρακτηρίζει τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.**

Πράγματι, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐπειδὴ $AH \perp H\Gamma$ εἶναι:



Σχ. 22

$$\vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = 0$$

καὶ
$$\begin{aligned} \vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} &= (\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{H\Gamma} \\ &= \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} + \vec{AH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{H\Gamma} \\ &= \vec{BA} \cdot (\vec{HA} + \vec{A\Gamma}) = \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} \end{aligned}$$

ἤτοι: $$\mathbf{\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} + \vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma}} \qquad (1)$$

α) Ἐὰν $A = 90^0$, τότε $\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2$$

Ἀλλὰ $\vec{BH} \perp \vec{HA}$, ἄρα $\vec{BH} \cdot \vec{HA} = 0$, ὁπότε

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2$$

καὶ ἐπειδὴ τὰ $\vec{BH}$ καὶ $\vec{H\Gamma}$ εἶναι συγγραμμικά, ἕπεται:

$$HA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{H\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \mathbf{HA^2 = -\overline{HB} \cdot \overline{H\Gamma}.}$$

β) Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $HA^2 = \overline{BH} \cdot \overline{H\Gamma}$. Ἡ ἰσότης αὕτη ἰσοδυναμεῖ πρὸς τήν:

$$\vec{BH} \cdot \vec{H\Gamma} = (\vec{HA})^2 = \vec{BH} \cdot \vec{HA} + (\vec{HA})^2 = (\vec{BH} + \vec{HA}) \cdot \vec{HA} = \vec{BA} \cdot \vec{HA} \qquad (2)$$

Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$\vec{BA} \cdot \vec{A\Gamma} = 0 \Longrightarrow AB \perp A\Gamma.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17. Εἰς τυχὸν σύστημα ἀξόνων εἶναι:

$\vec{u}\,(4,3)$	$\vec{u}\,(-3,5)$	$\vec{u}\,(3,7)$
$\vec{\upsilon}\,(1,-4)$	$\vec{\upsilon}\,(-4,-2)$	$\vec{\upsilon}\,(-2,-7)$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ ἀθροίσματος $\vec{W} = \vec{u} + \vec{\upsilon}$.

18. Εἰς τυχὸν σύστημα ἀξόνων δίδονται :

$\vec{u}(5,-2)$	$\vec{u}(2,6)$	$\vec{u}(-7,4)$	καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμένα.
$\vec{\upsilon}(-1,4)$	$\vec{\upsilon}(1,8)$	$\vec{\upsilon}(-5,4)$	τῆς διαφορᾶς $\vec{W} = \vec{u} - \vec{\upsilon}$.

19. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1ον : $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{\Gamma A} \cdot \overrightarrow{B\Delta} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0$ (θέσατε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}$)

2ον : Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ ΒΓ, ΑΔ εἶναι ὀρθογώνιοι καὶ ΓΑ ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΒΔ, τότε καὶ ἡ ΑΒ θὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓΔ.

20. Τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, μία διάμεσός του εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς.

21. Ἐὰν ΑΗ εἶναι τὸ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ, αἱ σχέσεις :

$$\overline{B\Gamma} \cdot \overline{BH} = BA^2 \quad \text{ἤ} \quad \overline{\Gamma B} \cdot \overline{\Gamma H} = \Gamma A^2$$

χαρακτηρίζουν τὸ τρίγωνον ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

22. Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (ἔνθα ΑΗ ὕψος) νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1ον : $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot AH$, 2ον : $\dfrac{\overline{HB}}{\overline{H\Gamma}} = -\dfrac{AB^2}{A\Gamma^2}$, 3ον : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{A\Gamma^2} = \dfrac{1}{AH^2}$ (αἱ ἀποδείξεις νὰ γίνουν διανυσματικῶς).

23. Ἐὰν ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε :

1ον : $$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \quad \text{(διανυσματικῶς).}$$

2ον : $$AB^2 - A\Gamma^2 = 2\overline{B\Gamma} \cdot \overline{MH} \quad \text{(ΑΗ ὕψος).}$$

24. Εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ διανυσματικῶς ὅτι :

α') $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A$, β') $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\text{συν}B$ καὶ

$$\gamma')\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{συν}\Gamma.$$

25. Ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τὰ ὕψη αὐτοῦ :

1ον) Ποία ἡ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$; 2ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι : $\overrightarrow{A'A} \cdot \overrightarrow{A'H} = -\overline{A'B} \cdot \overline{A'\Gamma}$,

3ον) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma'} = \overline{AH} \cdot \overline{AA'}$ καὶ $\overline{AB'} \cdot \overline{A\Gamma} = \overline{AB} \cdot \overline{A\Gamma'}$, 4ον) Νὰ δειχθῇ ὅτι :

$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overline{HA} \cdot \overline{AA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'}$ καὶ $\overline{HA} \cdot \overline{HA'} = \overline{HB} \cdot \overline{HB'} = \overline{H\Gamma} \cdot \overline{H\Gamma'}$.

26. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας δίδονται τὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Μ ἄλλο τυχὸν σημεῖον, τοῦ ὁποίου ἔστω Η ἡ προβολὴ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

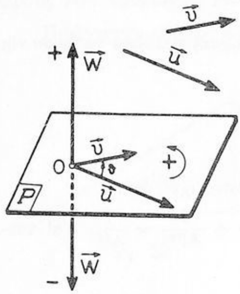
$MA^2 \cdot \overline{B\Gamma} + MB^2 \cdot \overline{\Gamma A} + M\Gamma^2 \cdot \overline{AB} + \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Gamma A} \cdot \overline{AB} = 0$ (Stewart).

27. Ἐὰν $|\vec{u}| = u$, $|\vec{\upsilon}| = \upsilon$ καὶ $(\vec{u}, \vec{\upsilon}) = \theta$, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$ εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

1ον : $u = 5$, $\upsilon = 7$, $\theta = 30^0$	2ον : $u = 12$, $\upsilon = 18$, $\theta = 60^0$	3ον : $u = \sqrt{5}$, $\upsilon = \dfrac{2}{3}$, $\theta = 150^0$	4ον : $u = \sqrt{17}$, $\upsilon = 7\sqrt{2}$, $\theta = 135^0$

28. Εἰς τυχὸν σύστημα $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διανύσματα $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ καὶ $\vec{\upsilon} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$. Ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon}$. Ποίαν ἰδιότητα τῶν διχοτόμων γωνίας ἐπαληθεύομεν ἐνταῦθα ;

30*. ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.– Καλοῦμεν ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ (προσανατολισμένων) τὸ ὀρθογώνιον διάνυσμα $\vec{w}$ πρὸς τὰς **διευθύνσεις τῶν δοθέντων, τοιοῦτον ὥστε ἡ τρίεδρος $(\vec{u}, \vec{\upsilon}, \vec{w})$** νὰ ἔχῃ τὸν θετικὸν **προσανατολισμόν, ἐφ' ὅσον $(\vec{u}, \vec{\upsilon})$ = θετική, τὸν ἀρνητικὸν δέ,** ἂν $(\vec{u}, \vec{\upsilon})$ = **ἀρνητικὴ καὶ μέτρον $|\vec{w}| = |\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|$ ημθ (1), ἔνθα θ ἡ γωνία τῶν $\vec{u}, \vec{\upsilon}$ καὶ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.**



Σχ. 23

Ἐὰν $\theta = 0$ ἢ $\theta = \pi$, τότε ημθ $= 0$ καὶ ὁ τύπος (1) δίδει $\vec{w} = \vec{0}$.

α) Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν εἶναι : $\vec{u} \cdot \vec{\upsilon} = -\vec{\upsilon} \cdot \vec{u}$. Δηλαδὴ εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων **δὲν ἰσχύει** ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως.

β) Ἐὰν $\theta = 0$ ἢ $\theta = \pi$, τότε ημθ $= 0$ καὶ ἄρα $\vec{w} = \vec{0}$ καὶ ἀντιστρόφως. Ἂν $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{\upsilon} \neq \vec{0}$ καὶ $\vec{w} = \vec{0}$, τότε ημθ $= 0$ καὶ ἄρα $\theta = 0$ ἢ $\theta = \pi$. Ὥστε :

Ἵνα δύο μὴ μηδενικὰ διανύσματα εἶναι συγγραμμικά, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον **αὐτῶν νὰ εἶναι τὸ μή μηδενικὸν διάνυσμα.**

γ) Ἐὰν $\theta = \frac{\pi}{2}$, τότε ημθ $= 1$ καὶ ἄρα $|\vec{w}| = |\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|$.

Δηλαδή: **Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου δύο καθέτων διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν δοθέντων διανυσμάτων.**

δ) Ἐὰν $\vec{u} = \vec{0}$ ἢ $\vec{\upsilon} = \vec{0}$ ἢ ημθ $= 0$, τότε $\vec{w} = \vec{0}$ καὶ ἄρα $|\vec{w}| = 0$.

Ἄρα: **Τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι μηδὲν ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἓν τοὐλάχιστον τῶν διανυσμάτων εἶναι τὸ μηδενικὸν διάνυσμα ἢ ὅταν τὰ δύο διανύσματα εἶναι συγγραμμικά.**

ε) Εἰς τὸ ἐξωτερικὸν γινόμενον διανυσμάτων ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν διανυσμάτων. Ἀποδεικνύομεν τὸν νόμον τοῦτον διὰ τρία τυχόντα διανύσματα $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$.

Χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ γενικότης, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ διανύσματα $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}$ ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν Ο, καὶ ὅτι τὸ διάνυσμα $\vec{V_1}$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον.

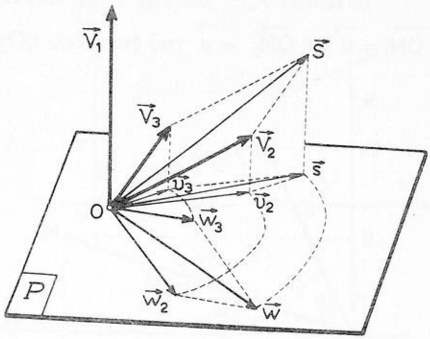
Θέτομεν $\vec{S} = \vec{V_2} + \vec{V_3}$ καὶ $\vec{W} = \vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} + \vec{V_3})$, (σχ. 24).

Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον (P) κάθετον ἐπὶ τὸ $\vec{V_1}$ εἰς τὸ Ο καὶ ἔστωσαν $\vec{\upsilon_2}, \vec{\upsilon_3}, \vec{s}$ αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ τὸ (P) τῶν $\vec{V_2}, \vec{V_3}, \vec{S}$ ἀντιστοίχως.

1ον : Κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\vec{W_2} = \vec{V_1} \cdot \vec{V_2}$. Τοῦτο ἔχει, ὡς γνωστόν, διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὰ $\vec{V_1}$ καὶ $\vec{V_2}$. Ἄρα τὸ $\vec{W_2}$ θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὰ $\vec{V_1}$ καὶ $\vec{\upsilon_2}$. Κατ' ἀκολουθίαν :

$$|\vec{W_2}| = |\vec{V_1}|\ |\vec{V_2}|\ \eta\mu\ (\vec{V_1}, \vec{V_2})$$

Ἀλλὰ $|\vec{V_1}| = 1$ καὶ $\vec{\upsilon_2}$ εἶναι ἡ ὀρθογώνιος προβολὴ τοῦ $\vec{V_2}$ ἐπὶ τὸ (P). Συνεπῶς : $|\vec{W_2}| = |\vec{\upsilon_2}|$ καὶ τὸ $\vec{W_2}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\vec{\upsilon_2}$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.



Σχ. 24

2ον : Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\vec{W_3} = \vec{V_1} \cdot \vec{V_3}$ καὶ τὸ $\vec{W_3}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\vec{\upsilon_3}$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ O καὶ κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.

3ον : Κατασκευάζομεν τὸ διάνυσμα $\vec{W} = \vec{V_1} \cdot \vec{S}$ κατὰ τὸν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον. Τὸ $\vec{W}$ προκύπτει ἐκ τοῦ $\vec{s}$ διὰ στροφῆς περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{2}$.

Ἀλλὰ τὸ $\vec{s} = \vec{w_2} + \vec{w_3}$. Ἄρα $\vec{W} = \vec{w_2} + \vec{w_3} = \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \vec{V_3}$

ἢ
$$\vec{V_1} \cdot (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \cdot \vec{V_2} + \vec{V_1} \cdot \vec{V_3}.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης γενικεύεται : Οὕτω, θὰ εἶναι :

$$(\vec{V_1}+\vec{V_2})(\vec{V_3}+\vec{V_4}+\vec{V_5}) = \vec{V_1}\cdot\vec{V_3}+\vec{V_1}\cdot\vec{V_4}+\vec{V_1}\cdot\vec{V_5}+\vec{V_2}\cdot\vec{V_3}+\vec{V_2}\cdot\vec{V_4}+\vec{V_2}\cdot\vec{V_5}$$

Χρῆσις τοῦ ἐξωτερικοῦ γινομένου γίνεται εἰς τὴν Φυσικήν, καὶ δὴ εἰς τὸ Κεφάλαιον « περὶ ῥοπῆς δυνάμεων ».

Σημείωσις : Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός. Ἐνῷ τὸ ἐξωτερικὸν εἶναι διάνυσμα.

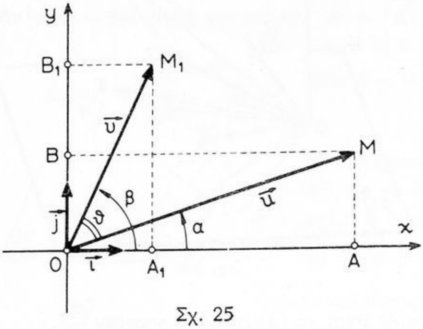
Ἐπειδὴ $|\vec{u}|\ |\vec{\upsilon}|\ \eta\mu\theta$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει πλευρὰς $\vec{u}$, $\vec{\upsilon}$ καὶ περιεχομένην γωνίαν θ, ἕπεται ὅτι τὸ $|\vec{W}|$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου τούτου.

31. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΙΣ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.– Ἔστω xOy (σχ. 25) ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων. Δηλαδὴ τὰ μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{i}$ καὶ $\vec{j}$ τῶν ἀξόνων Ox καὶ Oy ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος 1 καὶ εἶναι κάθετα.

Κατὰ τὰ γνωστά :

$$\vec{\imath}^{\,2}=1,\quad \vec{j}^{\,2}=1\quad \text{καὶ}\quad \vec{j}\cdot\vec{\imath}=0.$$

Ἔστωσαν X, Y καὶ X_1, Y_1 αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ καὶ $\overrightarrow{OM_1}=\vec{\upsilon}$ τοῦ ἐπιπέδου xOy εἰς τὸ θεωρηθὲν σύστημα.



Σχ. 25

Γνωρίζομεν ὅτι :

$$\vec{u}=X\vec{\imath}+Y\vec{j}\quad \text{καὶ}\quad \vec{\upsilon}=X_1\vec{\imath}+Y_1\vec{j}.$$

Ἄρα :

$$\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}=(X\vec{\imath}+Y\vec{j})\,(X_1\vec{\imath}+Y_1\vec{j})=$$

$$=XX_1\vec{\imath}^{\,2}+(XY_1+YX_1)(\vec{\imath}\cdot\vec{j})+YY_1\vec{j}^{\,2}$$

ἐξ οὗ :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}=XX_1+YY_1}\qquad(1)$$

Δηλαδή : **Τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον δύο διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν αὐτῶν.**

Συνέπειαι : Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

1ον : $\quad |\vec{u}|^2=XX+YY=X^2+Y^2,\quad$ ἐξ οὗ : $\quad |\vec{u}|=\sqrt{X^2+Y^2}\qquad(2)$

2ον : Ἐπειδὴ $\quad \vec{u}\cdot\vec{\upsilon}=|\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|\,$συνθ, ἕπεται ὅτι :

$$\text{συνθ}=\frac{\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}}{|\vec{u}|\,|\vec{\upsilon}|}=\frac{XX_1+YY_1}{\sqrt{X^2+Y^2}\cdot\sqrt{X_1^2+Y_1^2}}\qquad(3)$$

32. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.– Ἐὰν τὰ διανύσματα εἶναι κάθετα, τότε $\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}=0$ καὶ ἡ (1) τῆς (§ 31) γίνεται :

$$XX_1+YY_1=0.$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν $XX_1+YY_1=0$, τότε, ἂν $\vec{u}\neq 0$ καὶ $\vec{\upsilon}\neq 0$

$$\vec{u}\cdot\vec{\upsilon}=0\quad \text{ἢ}\quad u\cdot\upsilon\,\text{συνθ}=0\quad \text{ἢ}\quad \text{συνθ}=0,\quad \text{ἐξ οὗ :}\quad \theta=\frac{\pi}{2}.$$

Ὥστε : **Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων, ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα δύο μὴ μηδενικὰ διανύσματα $\vec{u}\,(X,Y)$ καὶ $\vec{\upsilon}\,(X_1,Y_1)$ εἶναι κάθετα εἶναι ἡ :**

$$\boxed{XX_1+YY_1=0}$$

33. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ.– Εἰς ἕνα ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy (σχ. 26) θεωροῦμεν δύο σημεῖα $A\,(x_1,\,y_1)$ καὶ $B\,(x_2,\,y_2)$. Αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι

$$X = x_2 - x_1 \quad \text{καὶ} \quad Y = y_2 - y_1.$$

Ἐπειδὴ δέ :

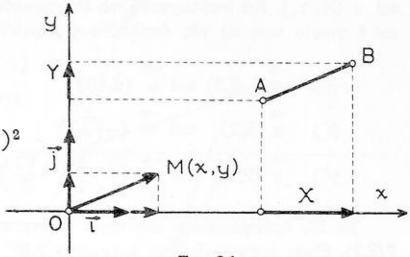
$$\overrightarrow{AB}^2 = \overline{AB}^2 = X^2 + Y^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ἕπεται ὅτι :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ἐὰν τεθῇ $|\overrightarrow{AB}| = AB = d$, τότε :

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



Σχ. 26

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου $M\,(x,\,y)$ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν $O\,(0,\,0)$ εἶναι :

$$\mathbf{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

34. ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ (προσανατολισμένης) **ΔΥΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.**– Ὑποθέτομεν τὸ σύστημα τῶν ἀξόνων ὀρθοκανονικὸν καὶ τοῦ προσανατολισμοῦ : $(\vec{i},\,\vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$. Ἔστωσαν α, β, θ αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ τῶν γωνιῶν $(\overrightarrow{Ox},\,\vec{u})$, $(\overrightarrow{Ox},\,\vec{\upsilon})$ καὶ $(\vec{u},\,\vec{\upsilon})$. Θὰ εἶναι (σχ. 25)

$$\theta = \beta - \alpha \quad \text{καὶ} \quad \text{ημ}\theta = \text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha - \text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta \qquad (1)$$

Ἀλλά : $X = OM\,\text{συν}\,\alpha$, $Y = OM\,\text{ημ}\,\alpha$ | $X_1 = OM_1\,\text{συν}\,\beta$, $Y_1 = OM_1\,\text{ημ}\,\beta$ | ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$\text{ημ}\,\theta = \frac{XY_1 - X_1Y}{OM \cdot OM_1} \quad \text{ἢ} \quad \textbf{ημ}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{XY_1 - X_1Y}}{\sqrt{\mathbf{X^2 + Y^2}} \cdot \sqrt{\mathbf{X_1^2 + Y_1^2}}} \qquad (2)$$

Εὐκόλως τώρα ἀποδεικνύεται ὅτι :

$$\text{ημ}^2\,\theta + \text{συν}^2\,\theta = \frac{(XX_1 + YY_1)^2 + (XY_1 - X_1Y)^2}{(X^2 + Y^2)\,(X_1^2 + Y_1^2)} = \frac{(X^2 + Y^2)\,(X_1^2 + Y_1^2)}{(X^2 + Y^2)\,(X_1^2 + Y_1^2)} = 1$$

καὶ

$$\textbf{εφ}\,\boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{XY_1 - X_1Y}}{\mathbf{XX_1 + YY_1}} \qquad \mathbf{(3)}$$

Ἵνα δὲ τὰ διανύσματα $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ εἶναι παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ημθ νὰ εἶναι μηδέν. Δηλαδὴ

$$XY_1 - X_1Y = 0 \iff \frac{X_1}{X} = \frac{Y_1}{Y}$$

τοῦτο ὅμως ἀπεδείχθη καὶ εἰς τὴν (§ 15).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

29. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{u}$ (X, Y) καὶ $\vec{v}$ (X_1, Y_1). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον αὐτῶν, τὸ συνημίτονον, τὸ ἡμίτονον καὶ ἡ γωνία των εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

α′) $\vec{u}(-5,3)$ καὶ $\vec{v}(6,10)$

β′) $\vec{u}(0,2)$ καὶ $\vec{v}(-\sqrt{3},1)$

γ′) $\vec{u}(2,3)$ καὶ $\vec{v}\left(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

δ′) $\vec{u}(2,4)$ καὶ $\vec{v}(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})$

ε′) $\vec{u}(\alpha,\beta)$ καὶ $\vec{v}(-\kappa\beta, \kappa\alpha)$

στ) $\vec{u}(3,4)$ καὶ $\vec{v}(5,13)$.

30. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων δίδονται τὰ σημεῖα Α(0,–2), Β(–2,–1), Γ(2,2). Εἶναι ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ;

31. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ σημεῖα Α(4,0), Β(–1,0) Γ(0,2).

32. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α(4,0), Β(7,8), Γ(0,10) καὶ Δ(–3,2) εἶναι κορυφαὶ παραλ/μου (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

33. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α(8,0), Β(6,6), Γ(–3,3) καὶ Δ(–1,–3) εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου. Ποῖα τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ; (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

34. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α(10,8), Β(–3,9), Γ(–4,–4). καὶ Δ(9,–5) εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, τῶν διαγωνίων του, αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦν τὰς γωνίας του (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

35. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α(–3,–7), Β(0,–2), Γ(6,8) κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

36. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα Α(–1,–3), Β(8,3), Γ(3,4), Δ(0,2) εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

37. Νὰ ὁρισθῇ ὁ x, ὥστε τὰ σημεῖα Α(x,–3), Β(1,1), Γ(–4,3) νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σύστημα ὀρθοκανονικόν).

38. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy δίδονται τὰ σημεῖα Α(3,8) καὶ Β(2,–3). Ἵνα σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ κύκλου διαμέτρου ΑΒ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

39. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων δίδονται τὰ σημεῖα Α(0,3), Β(5,2) καὶ Γ (–3,7). Ἵνα σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους AH_1, πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} = 0$.

40. Δίδονται τὰ σημεῖα Α(–2,–2), Β(2,1), Γ(0,2). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης, καθὼς καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

ΑΛΛΑΓΗ ΑΞΟΝΩΝ

35. ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.— Θεωροῦμεν δύο συστήματα παραλλήλων ἀξόνων xOy καὶ $x_1O_1y_1$ καὶ ὑποθέτομεν ὅτι τὰ μοναδιαῖα διανύσματα τῶν ἀξόνων Ox καὶ O_1x_1 εἶναι ἰσοδύναμα, καθὼς καὶ τὰ τῶν ἀξόνων Oy καὶ O_1y_1.

Ὑποθέτομεν ἐπίσης γνωστὰς τὰς συντεταγμένας (x_0, y_0) τοῦ O_1.

Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$\overrightarrow{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \tag{1}$$

Ἔστωσαν (x, y) αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς ἄξονας Ox, Oy καὶ (X, Y) αἱ συντεταγμέναι του Μ ὡς πρὸς ἄξονας Ox_1 καὶ Oy_1.

Θὰ εἶναι :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{j}$ (2), $\overrightarrow{O_1M} = X\vec{\imath} + Y\vec{j}$ (3).

Ἀλλὰ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ (4)

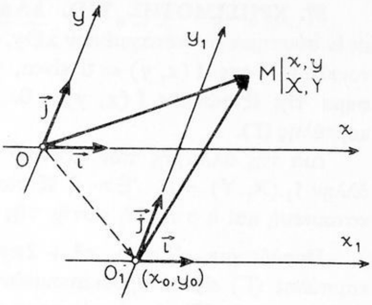
Ἡ (4), βάσει τῶν (1), (2) καὶ (3), γίνεται:

$$x\vec{\imath} + y\vec{j} = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{j} + X\vec{\imath} + Y\vec{j} =$$
$$= (x_0 + X)\vec{\imath} + (y_0 + Y)\vec{j}$$

ἐξ οὗ : $x = x_0 + X$ καὶ $y = y_0 + Y$,

ἐξ οὗ πάλιν :

$$\boxed{\begin{aligned} X &= x - x_0 \\ Y &= y - y_0 \end{aligned}} \iff \boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \end{aligned}}$$

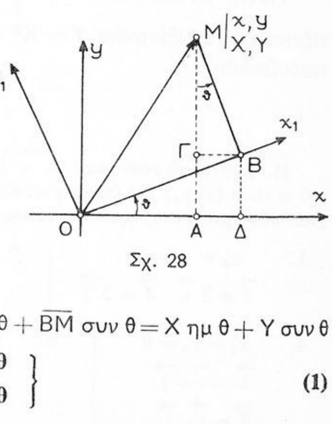


Σχ. 27

36. ΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΕΡΙ ΤΗΝ ΑΡΧΗΝ Ο.– Ἔστω xOy ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων (σχ. 28) καὶ Μ (x, y) τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Τὸ σύστημα xOy στρέφεται περὶ τὸ Ο κατὰ γωνίαν θ καὶ λαμβάνει τὴν θέσιν x_1Oy_1. Ἔστωσαν (X, Y) αἱ συντεταγμέναι τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ σύστημα x_1Oy_1.

Ἄγομεν τὴν ΒΔ κάθετον πρὸς τὴν Ox καὶ τὴν ΒΓ κάθετον πρὸς τὴν ΜΑ. Θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma M B} = \theta$ καὶ



Σχ. 28

$$x = \overline{OA} = \overline{O\Delta} - \overline{A\Delta} = \overline{O\Delta} - \overline{\Gamma B} =$$
$$= \overline{OB}\ \text{συν}\ \theta - \overline{BM}\ \text{ημ}\ \theta = X\ \text{συν}\ \theta - Y\ \text{ημ}\ \theta$$

καὶ $y = \overline{AM} = \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma M} = \overline{\Delta B} + \overline{\Gamma M} = \overline{OB} \cdot \text{ημ}\ \theta + \overline{BM}\ \text{συν}\ \theta = X\ \text{ημ}\ \theta + Y\ \text{συν}\ \theta$

Ἄρα :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X\ συν\ \theta - Y\ ημ\ \theta} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{X\ ημ\ \theta + Y\ συν\ \theta} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο ὡς πρὸς Χ καὶ Υ εὑρίσκομεν :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{x\ συν\ \theta + y\ ημ\ \theta} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{-\ x\ ημ\ \theta + y\ συν\ \theta} \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(2)}$$

Παράδειγμα : Διὰ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, οἱ τύποι (1) δίδουν

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \text{ καὶ } y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

καὶ οἱ (2) δίδουν : $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ καὶ $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$.

37. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΗΣ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ.– Γνωρίζομεν ὅτι, εἰς ἓν σύστημα συντεταγμένων xOy, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων $M(x, y)$, τοιούτων ὥστε $f(x, y) = 0$ εἶναι, γενικῶς, μία καμπύλη (Γ), καλουμένη **γράφημα** τῆς ἐξισώσεως $f(x, y) = 0$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ὀνομάζεται **ἐξίσωσις τῆς καμπύλης (Γ).**

Διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν ἀξόνων ἡ ἐξίσωσις αὕτη μετασχηματίζεται εἰς μίαν ἄλλην $f_1(X, Y) = 0$. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἁπλουστέρα τῆς πρώτης, ἡ κατασκευὴ καὶ ἡ σπουδὴ αὐτῆς τῆς καμπύλης (Γ) θὰ εἶναι εὐκολωτέρα.

Παράδειγμα.– Ἔστω $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$ ἡ ἐξίσωσις μιᾶς καμπύλης (Γ) εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς (Γ) εἰς τὸ σύστημα x_1Oy_1, ὁμολόγου τοῦ πρώτου, διὰ στροφῆς περὶ τὸ O, κατὰ γωνίαν $\frac{\pi}{4}$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται : $(x + y)^2 + \sqrt{2}(x - y) = 0$.

Αὕτη, βάσει τῶν $X = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$ καὶ $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)$, μετασχηματίζεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Y = X^2$ εἰς τὸ νέον σύστημα, καὶ παριστᾷ, ὡς γνωστόν, παραβολήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

41. Δίδεται τὸ σύστημα $(O, \vec{\imath}, \vec{j})$ καὶ τὸ $(\omega, \vec{\imath}, \vec{j})$, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι τοῦ ω εἶναι (x_0, y_0). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι (x,y) ἑνὸς σημείου M, ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα, συναρτήσει τῶν νέων συντεταγμένων (X,Y), εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

1. $x_0 = y_0 = 0$, $\vec{I} = 2\vec{\imath}$, $\vec{J} = 3\vec{j}$
2. $x_0 = y_0 = 0$, $\vec{I} = -4\vec{\imath}$, $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{j}$
3. $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $\vec{I} = \vec{\imath}$, $\vec{J} = \vec{j}$
4. $x_0 = y_0 = 0$, $\vec{I} = \vec{\imath} + \vec{j}$, $\vec{J} = \vec{\imath} - \vec{j}$
5. $x_0 = 0$, $y_0 = 3$, $\vec{I} = \vec{\imath}$, $\vec{J} = 2\vec{\imath} - 3\vec{j}$
6. $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $\vec{I} = \vec{\imath} - 2\vec{j}$, $\vec{J} = 2\vec{\imath} - 5\vec{j}$.

42. Ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων xOy στρέφεται κατὰ τὴν ὀρθὴν φορὰν καὶ κατὰ γωνίαν θ περὶ τὸ O. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι (x,y) ἑνὸς σημείου εἰς τὸ παλαιὸν σύστημα συναρτήσει τῶν νέων (X,Y), εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

1. $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$
2. $\theta = -\frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$
3. $\theta = \frac{3\pi}{4}$, $\theta = -\frac{2\pi}{3}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

43. Μία καμπύλη $f(x,y) = 0$ δίδεται εἰς τὸ σύστημα xOy. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς καμπύλης ταύτης εἰς τὸ νέον σύστημα x_1Oy_1, εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

1. $2x + 3y - 6 = 0,\qquad \theta = \frac{\pi}{3}$ ἢ $\theta = \frac{\pi}{6}$ ἢ $\theta = -\frac{\pi}{4}$

2. $x^2 - y^2 - 6xy + 4y + 5 = 0,\qquad \theta = \frac{\pi}{4}$ ἢ $\theta = \frac{\pi}{8}$ ἢ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Η ΕΥΘΕΙΑ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

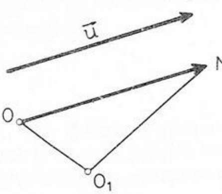
38. Εἰς τὸ κεφάλαιον τοῦτο θὰ ἀναζητήσωμεν τὴν ἀναγκαίαν καὶ ἱκανὴν συνθήκην, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἱκανοποιοῦν αἱ συντεταγμέναι μεταβλητοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου xOy, ἵνα τὸ Σύνολον τῶν σημείων τούτων εἶναι εὐθεῖα.

Ἡ συνθήκη αὕτη ὀνομάζεται **ἐξίσωσις τῆς εὐθείας εἰς τὸ Καρτεσιανὸν τοῦτο ἐπίπεδον.**

Μία εὐθεῖα εἶναι ὡρισμένη δι᾽ ἑνὸς τῶν σημείων της καὶ ἑνὸς διανύσματος **παραλλήλου** πρὸς τὴν εὐθεῖαν **(διευθῦνον διάνυσμα)** ἢ καὶ διὰ **δύο διακεκριμένων** σημείων της.

39. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ. — Δοθέντος σταθεροῦ σημείου, O, τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀρχή,** εἰς πᾶν σημεῖον M τοῦ χώρου δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν :

1ον : Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}$, τοῦ ὁποίου εἷς ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ $(\overrightarrow{OM} = \vec{u})$ (σχ. 29).


Σχ. 29

2ον : Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ πρὸς τὸν ἑαυτόν του.

Ἀντιστρόφως : Εἰς πᾶν ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{u}$, ἢ εἰς πᾶν σημεῖον M, ἀντιστοιχεῖ ἓν ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, $\overrightarrow{OM}$, καὶ ἓν μόνον. Οὕτως, ὁρίζομεν :

1ον : Μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ Συνόλου τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων του.

2ον : Μίαν ἀπεικόνισιν ἀμφιμονοσήμαντον τοῦ Συνόλου τῶν σημείων τοῦ χώρου ἐπὶ τοῦ Συνόλου τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων, ἀρχῆς O.

Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ καλεῖται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** τοῦ σημείου M.

Ἀλλαγὴ τῆς ἀρχῆς : Ἔστω O_1 μία νέα ἀρχὴ (σχ. 29), ὁριζομένη, ὡς πρὸς τὸ O, ὑπὸ τῆς διανυσματικῆς της ἀκτῖνος $\overrightarrow{OO_1}$. Ἡ νέα διανυσματικὴ ἀκτὶς $\overrightarrow{O_1M}$ τοῦ σημείου M συνδέεται μετὰ τῆς παλαιᾶς διανυσματικῆς ἀκτῖνος $\overrightarrow{OM}$ διὰ τῆς σχέσεως :

$$\boxed{\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}} \iff \boxed{\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO_1}}$$

Διανυσματική ἐξίσωσις εὐθείας (δ).— Παριστῶμεν διὰ τοῦ O τὴν ἀρχὴν τῶν διανυσμάτων καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

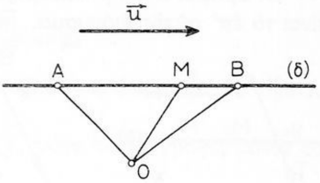
Πρώτη περίπτωσις: Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ὡρισμένη δι' ἑνὸς σημείου A καὶ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος $\vec{u}$.

Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι τὸ Σύνολον τῶν σημείων M, τοιούτων ὥστε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ καὶ $\vec{u}$ νὰ εἶναι συγγραμμικά. Δηλαδὴ τοιαῦτα ὥστε:

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \qquad (\lambda \in R)$$

$$\text{ἢ} \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} \quad \text{ἢ}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u} \qquad (1) \qquad (\lambda \in R)$$



Σχ. 30

Ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται **διανυσματικὴ παραμετρικὴ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ).**

Ἐὰν τὸ σημεῖον A συμπίπτῃ μὲ τὸ O, ἡ (1) γίνεται:

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{u} \qquad (1')$$

Δευτέρα περίπτωσις.— Εὐθεῖα ὁριζομένη ὑπὸ δύο σημείων: Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι ὡρισμένη διὰ δύο σημείων, A καὶ B (σχ. 30).

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ εἶναι τὸ διευθῦνον διάνυσμα τῆς (δ). Ἄρα ἔχει διανυσματικὴν ἐξίσωσιν:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \quad \text{ἢ} \quad \overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB} \qquad (2) \qquad (\lambda \in R)$$

Ἡ (2) δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ συμμετρικωτέραν μορφήν:

$$(2') \qquad \overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}, \quad \text{μὲ} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2), ἐπειδὴ εἶναι γραμμικὴ συνάρτησις τοῦ λ προκύπτει ἀμέσως ὅτι τὸ Σύνολον τῶν σημείων M τοῦ τμήματος AB ἀντιστοιχεῖ εἰς τιμὰς τοῦ λ, τοιαύτας ὥστε: $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$M \in AB \iff \lambda \in [0, +1].$$

40. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ. — A') Ἡ εὐθεῖα (δ) ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$ καὶ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος $\vec{u}(\alpha, \beta)$.

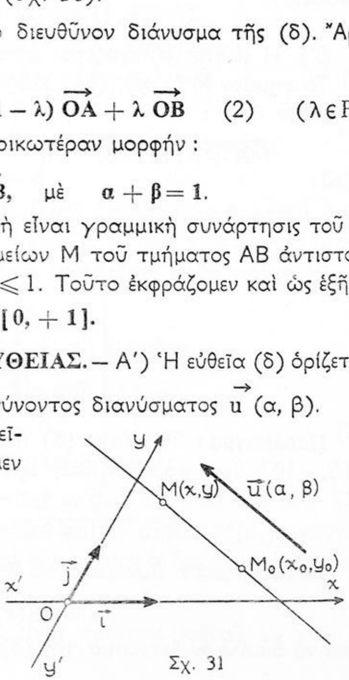
Ἓν σημεῖον $M(x, y)$ τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς (δ), ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχωμεν

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{u}, \quad \text{δηλαδή:}$$

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} = \lambda(\alpha \vec{i} + \beta \vec{j}),$$

ἐξ οὗ:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\lambda \\ y = y_0 + \beta\lambda \end{cases} \qquad (\lambda \in R)$$



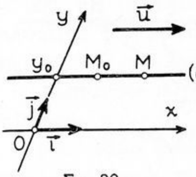
Σχ. 31

Αἱ ἐξισώσεις (I) καλοῦνται **παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας (δ).**

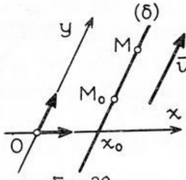
Μερικαὶ περιπτώσεις : Ἐὰν $\alpha = 0$, τότε $x = x_0$, καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oy (σχ. 32α).

Ἐὰν $\beta = 0$, τότε $y = y_0$ καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ox (σχ. 32).

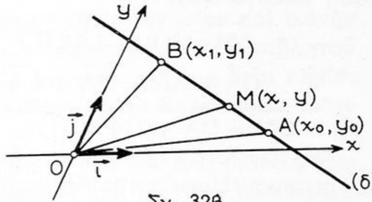
Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β καθορίζουν τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθείας καὶ τὸ $\vec{u}\,(\alpha, \beta)$ εἶναι τὸ ἐπ' αὐτῆς διάνυσμα.



Σχ. 32



Σχ. 32α



Σχ. 32β

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα (δ) ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $M_0\,(-4, +7)$ καὶ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ διευθύνοντος διανύσματος $\vec{u}\,(-2, 3)$ ἔχει παραμετρικὰς ἐξισώσεις :

$$x = -4 - 2\lambda \quad \text{καὶ} \quad y = 7 + 3\lambda.$$

Β') Ἡ εὐθεῖα (δ) ὁρίζεται ἀπὸ δύο σημεῖα $A\,(x_0, y_0)$ καὶ $B\,(x_1, y_1)$.

Τὸ σημεῖον $M\,(x, y)$, (σχ. 32β) θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ) τῶν A, B ὅταν, καὶ μόνον ὅταν :

$$\overrightarrow{MA} + \lambda\,\overrightarrow{MB} = 0, \qquad \text{ἢ} \qquad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \lambda\,(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) = 0,$$

ἐξ οὗ :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB}}{1 + \lambda}$$

Ἡ σχέσις αὕτη ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸ Σύνολον τῶν δύο ἐξισώσεων :

$$(\mathrm{II}) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda} \\ y &= \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda} \end{aligned} \right. \qquad \text{μὲ} \quad (\lambda \neq -1).$$

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα (δ) ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων $A\,(-2{,}5)$ καὶ $B\,(3, -10)$ ἔχει παραμετρικὰς ἐξισώσεις :

$$x = \frac{-2 + 3\lambda}{1 + \lambda} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{5 - 10\lambda}{1 + \lambda}$$

Παρατήρησις : Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὅτι τὸ διάνυσμα :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}(x_1 - x_0,\; y_1 - y_0)$$

εἶναι τὸ διευθῦνον διάνυσμα τῆς (δ) καὶ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν παραμετρικὴν παράστασιν τῆς εὐθείας (δ), διερχομένης διὰ τοῦ $A(x_0,y_0)$ καὶ διευθύνσεως $\vec{u}$. Λαμβάνομεν τότε :

(III)	$x = x_0 + \mu(x_1 - x_0)$	$y = y_0 + \mu(y_1 - y_0)$

ἔνθα **μ** μεταβλητὴ παράμετρος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην δὲν θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\lambda, \quad \text{ἀλλὰ} \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \mu.$$

Ἐὰν εἰς τοὺς τύπους (III) τὸ μ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, τὸ σημεῖον $M(x,y)$ διαγράφει ὁλόκληρον τὴν εὐθεῖαν AB.

Ἀλλ' ὅταν τὸ μ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 1, τότε τὸ M γράφει μόνον τὸ τμῆμα AB.

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

41. ΘΕΩΡΗΜΑ.—Σύνολον σημείων ἀποτελεῖ εὐθεῖαν ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, αἱ συντεταγμέναι (x, y) τῶν σημείων τούτων ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν: $Ax + By + \Gamma = 0$, ἔνθα οἱ συντελεσταὶ A καὶ B δὲν εἶναι συγχρόνως μηδὲν (A,B,Γ ἀνεξάρτητοι τῶν x,y).

Πράγματι, ἂν μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων (I) τῆς (§ 40, A).

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha\lambda \\ y &= y_0 + \beta\lambda \end{aligned}\right\} \quad \text{ἀπαλείψωμεν τὸν λ, εὑρίσκομεν :} \quad \beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0 \qquad (1)$$

ἤ

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0.$$

Ἂν δὲ τεθῇ : $A = \beta, \ B = -\alpha, \ \Gamma = \alpha y_0 - \beta x_0$, λαμβάνομεν :

$$Ax + By + \Gamma = 0. \qquad (2)$$

Ἀντιστρόφως : Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $A \neq 0$, τὸ ὁποῖον εἶναι δυνατόν, ἀφοῦ οἱ A καὶ B δὲν δύνανται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν. Ἐὰν τεθῇ $y = k$, τότε ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $x = -\dfrac{Bk + \Gamma}{A}$.

Ἄρα, τὸ σημεῖον $\left(-\dfrac{Bk + \Gamma}{A}, k\right)$ ἀνήκει εἰς τὸ Σύνολον.

Ἔστω λοιπὸν $P(x_0,y_0)$ ἓν σημεῖον τοῦ Συνόλου : Ἄρα :

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0. \qquad (3)$$

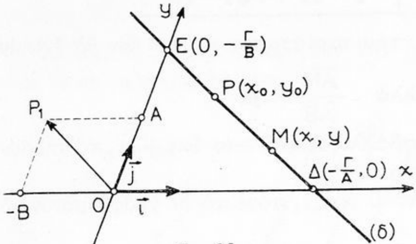
Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (3), λαμβάνομεν :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (4)$$

Ἡ (4), συγκρινομένη μὲ τὴν (1), ἐκφράζει ὅτι τὰ σημεῖα $M(x,y)$ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ P, καὶ τῆς ὁποίας ἓν διευθῦνον διάνυσμα εἶναι τὸ $\vec{u}\,(-B, A)$.

Ἡ ἐξίσωσις (2) καλεῖται **γραμμικὴ** καὶ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Παρατηρήσεις* : Ἀφοῦ ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, δέχεται ὡς διευθῦνον διάνυσμα $\overrightarrow{OP_1}$, τὸ ἔχον συντεταγμένας προβολὰς $-B$ (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων) καὶ A (ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων), (σχ. 33), ἕπεται ὅτι :

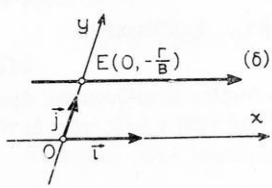


Σχ. 33

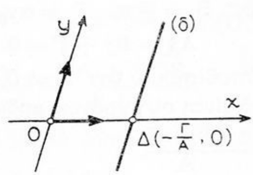
α′) **Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως** $Ax + By + \Gamma = 0$ **εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ox ὅταν, καὶ μόνον ὅταν,** $\boxed{A = 0}$ (σχ. 33α), ὁπότε κατ' ἀνάγκην $B \neq 0$, διότι τὰ A,B δὲν δύνανται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν. Ἡ (δ) τέμνει τὸν ἄξονα Oy εἰς τὸ σημεῖον $E\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$.

β) **Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως** $Ax + By + \Gamma = 0$, **εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Oy ὅταν, καὶ μόνον ὅταν,** $\boxed{B = 0}$ (σχ. 34), καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα Ox εἰς τὸ σημεῖον $\Delta\left(-\dfrac{\Gamma}{A}, 0\right)$.

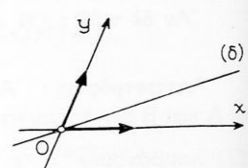
γ′) **Πᾶσα εὐθεῖα, ἐξισώσεως** $Ax + By + \Gamma = 0$ **διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων ὅταν, καὶ μόνον ὅταν,** $\boxed{\Gamma = 0}$, (σχ. 35), διότι αἱ συντεταγμέναι (0,0) τοῦ O ἱκανοποιοῦν τὴν $Ax + By + \Gamma = 0$, ὅπερ ἰσοδυναμεῖ μὲ $\Gamma = 0$.



Σχ. 33α



Σχ. 34



Σχ. 35

Εἰς τὸ (σχ. 33) ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν (δ) ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, ἡ ὁποία τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς τὰ σημεῖα $\Delta\left(-\dfrac{\Gamma}{A}, 0\right)$ καὶ $E\left(0, -\dfrac{\Gamma}{B}\right)$, τὰ ὁποῖα προκύπτουν, ὅταν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $Ax + By + \Gamma = 0$ θέσωμεν $y = 0$, $x = 0$ ἀντιστοίχως καὶ ἐξ ἀρχῆς ὑποτεθῇ $A \cdot B \neq 0$.

Ἡ τετμημένη $\left(-\dfrac{\Gamma}{A}\right)$ τοῦ Δ καλεῖται **τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας (δ), καὶ ἡ τεταγμένη $\left(-\dfrac{\Gamma}{B}\right)$ τοῦ E καλεῖται **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας (δ). Ἀμφότεραι δὲ **συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** τῆς εὐθείας ταύτης.

Παράδειγμα 1ον: Ἡ ἐξίσωσις $2x + 10 = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Oy μὲ τετμημένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $x = -\frac{10}{2} = -5$.

Παράδειγμα 2ον: Ἡ ἐξίσωσις $4y - 24 = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Ox μὲ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $y = \frac{24}{4} = 6$.

Παράδειγμα 3ον: Ἡ ἐξίσωσις $2x + 3y = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς 0 τῶν ἀξόνων, καθόσον $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ ἢ $0 = 0$.

Παράδειγμα 4ον: Ἡ ἐξίσωσις $4x + 3y - 12 = 0$ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-3,4)$ καὶ ἔχουσαν συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν

$$x = -\frac{\Gamma}{A} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = -\frac{\Gamma}{B} = \frac{12}{3} = 4.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων προκύπτει ὅτι: **Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν αὐτῆς $x = -\frac{\Gamma}{A}$ καὶ $y = -\frac{\Gamma}{B}$ καὶ νὰ χαράξωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων τούτων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

44. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον M καὶ παραλλήλου πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{V}$, ἄν:

1)	M(−2,2)	$\vec{V}(2,3)$	5)	M(0,−5)	$\vec{V}(0,1)$
2)	M(−2,3)	$\vec{V}(0,1)$	6)	M(−3,0)	$\vec{V}(0,2)$
3)	M(4,0)	$\vec{V}(2,0)$	7)	M(4,−5)	$\vec{V}(-1,1)$
4)	M(0,0)	$\vec{V}(2,5)$	8)	M(1,2)	$\vec{V}(2,-3)$,

καὶ ἀκολούθως νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν.

45. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διευθύνοντα διανύσματα τῶν εὐθειῶν:

1) $x + 2y = 1$	3) $4x - 3y + 8 = 0$	5) $5x + 10y = 0$
2) $2x - y = 3$	4) $2x + 7y - 5 = 0$	6) $2x - 8y = 0$.

46. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῶν εὐθειῶν:

1) $3x - 4y - 12 = 0$	3) $2x - 6y = -3$
2) $3x - y + 5 = 0$	4) $4x + 6y + 3 = 0$.

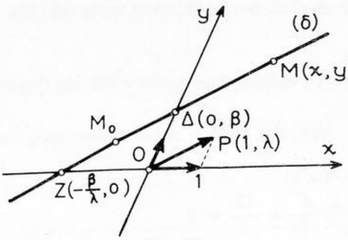
42. ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $Ax + By + \Gamma = 0$, μὴ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Oy$(B \neq 0)$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$$\psi = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

καὶ ἂν τεθῇ $\lambda = -\frac{A}{B}$, $\beta = -\frac{\Gamma}{B}$, τότε: $\boxed{y = \lambda x + \beta}$ (1)

Ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται **ἀνηγμένη μορφὴ τῆς ἐξισώσεως τῆς εὐθείας (δ).** Ἡ (δ) τέμνει τὸν ἄξονα Oy εἰς τὸ σημεῖον $\Delta(0,\beta)$ καὶ εἶναι παράλληλος



Σχ. 36

πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(1,\lambda)$, καθόσον ἡ (1) γράφεται

$$\frac{x}{1}=\frac{\psi-\beta}{\lambda}.$$

Ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ συντελεστὴς β καλεῖται **τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν** καί ὁ συντελεστὴς λ εἶναι **ὁ συντελεστὴς* διευθύνσεως τῆς (δ).**

Νέα ἔκφρασις τοῦ συντελεστοῦ διευθύνσεως εὐθείας (δ).— Ἔστωσαν δύο σημεῖα $A_1(x_1,y_1)$ καὶ $A_2(x_2,y_2)$, μὲ $(x_2 \neq x_1)$, τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως $y=\lambda x+\beta$. Θὰ εἶναι :

$$\left.\begin{array}{l} y_1=\lambda x_1+\beta \\ y_2=\lambda x_2+\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow y_2-y_1=\lambda(x_2-x_1) \Longrightarrow \boxed{\lambda=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

43. ΠΡΟΒΛΗΜΑ. — Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $M_1(x_1, y_1)$ καὶ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως δοθέντα ἀριθμὸν ($\lambda \in \mathbf{R}$).

Ἐὰν M(x,y) εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, τότε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M}(x-x_1, y-y_1)$ θὰ ἔχῃ συντελεστὴν διευθύνσεως

$$\lambda=\frac{y-y_1}{x-x_1}, \qquad \text{ἐξ οὗ :} \qquad \boxed{y-y_1=\lambda(x-x_1)} \tag{1}$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἐὰν τὸ M_1 κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy, τότε $x_1=0$ καὶ $y_1=\beta$, καὶ ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφήν : $y=\lambda x+\beta$.

Μεταβαλλομένου τοῦ λ, ἡ (1) ὁρίζει τὴν **οἰκογένειαν** τῶν εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ $M_1(x_1, y_1)$, **ἐξαιρουμένης τῆς εὐθείας τῆς παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy.**

Παράδειγμα : Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ) τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου M(3,5) καὶ ἐχούσης συντελεστὴν διευθύνσεως $\lambda=-\frac{3}{4}$ εἶναι :

$$y-5=-\frac{3}{4}(x-3) \iff 3x+4y-29=0.$$

---

* Καλοῦμεν συντελεστὴν διευθύνσεως εὐθείας τὸν συντελεστὴν διευθύνσεως διανύσματος (μὴ μηδενικοῦ), παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Συντελεστὴς διευθύνσεως ἢ κλίσις ἑνὸς μὴ μηδενικοῦ διανύσματος $\vec{u}(\alpha, \beta)$ καλεῖται τὸ πηλίκον $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$, ὅπου $\alpha \neq 0$.

44. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ $A_1(x_1, y_1)$ ΚΑΙ $A_2(x_2, y_2)$.— Εἰς τὴν (§ 40, Β) εὕρομεν ὅτι αἱ παραμετρικαὶ ἐξισώσεις τῆς εὐθείας A_1A_2, ἂν $(x_2 \neq x_1)$, εἶναι :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x - x_1 &= \lambda(x_2 - x) \\ y - y_1 &= \lambda(y_2 - y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{x-x_1}{y-y_1} = \frac{x_2 - x}{y_2 - y}$$

ἡ ὁποία, βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν, γράφεται :

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \tag{1}$$

καὶ ὑπὸ μορφὴν ὁριζούσης :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Παράδειγμα : Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $A_1(3, -2)$ καὶ $A_2(0, -1)$ εἶναι :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 3y + 3 = 0.$$

45. Η ΕΥΘΕΙΑ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΑΠΟ ΤΑ ΣΗΜΕΙΑ $A_1(\alpha, 0)$, $A_2(0, \beta)$ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ Οx ΚΑΙ Οy ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΣ.—Ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου θέσωμεν $x_1 = \alpha$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = \beta$, λαμβάνομεν :

$$\frac{x - \alpha}{y - 0} = \frac{0 - \alpha}{\beta - 0} \Longleftrightarrow \beta x + \alpha y = \alpha\beta. \tag{1}$$

Ἐπειδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑποθέσωμεν $\alpha\beta \neq 0$ (διότι ἄλλως τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος, καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς A_1A_2 θὰ ἦτο ἢ $x = 0$ ἢ $y = 0$), ἡ (1) γράφεται :

$$\boxed{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1} \tag{1'}$$

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων $A_1(5,0)$ καὶ $A_2(0,3)$ ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1 \Longleftrightarrow 3x + 5y - 15 = 0.$$

46. ΣΥΝΘΗΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ (δ_1) ΚΑΙ (δ_2).

Ἔστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο εὐθεῖαι, ὧν αἱ Καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις, εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων, εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\begin{aligned} &(1) \quad \left\{\begin{aligned} A_1x + B_1y + \Gamma_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left.\begin{aligned} &\text{μὲ } |A_1| + |B_1| > 0 \\ &\text{μὲ } |A_2| + |B_2| > 0 \end{aligned}\right\} \\ &(2) \end{aligned}$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-B_1, A_1)$

καὶ ἡ (2) παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{\upsilon}(-B_2, A_2)$. Ἵνα αἱ εὐθεῖαι (1) καὶ (2) εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ $\vec{u}$ καὶ $\vec{\upsilon}$ νὰ εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένα. Ἄρα (§ 15), πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$(-B_1)\cdot A_2-(A_1)\cdot(-B_2)=0 \iff \boxed{A_1\cdot B_2 - A_2\cdot B_1 = 0} \qquad (3)$$

Ὥστε : **Ἵνα δύο εὐθεῖαι, ἐξισώσεων $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ καὶ $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$ εἶναι παράλληλοι** (ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν σημασίαν), **πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης (3).**

Ἡ (3) γράφεται καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν : $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$. (3′)

Παρατήρησις : Ἡ συνθήκη παραλληλίας δύο εὐθειῶν, τῶν ὁποίων αἱ Καρτεσιαναὶ ἐξισώσεις εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ἀξόνων εἶναι :

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1=0\ , \qquad |A_1|+|B_1|>0$$

καὶ

$$A_2x+B_2y+\Gamma_2=0\ , \qquad |A_2|+|B_2|>0,$$

δύναται νὰ γραφῇ :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0, \text{ ἀλλὰ μία τοὐλάχιστον τῶν } \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}$$

νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.

Μερικὴ περίπτωσις : Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) ἔχουν ἐξισώσεις ἀντιστοίχως :

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda_1x+\beta_1 \\ y=\lambda_2x+\beta_2 \end{array}\right\} \text{ ἡ συνθήκη (3) γίνεται : } \lambda_1-\lambda_2=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda_1=\lambda_2}$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει ὅτι :

Ἵνα δύο εὐθεῖαι, μὴ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα Oy, εἶναι παράλληλοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσοι.

Παράδειγμα 1ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων $3x-4y+1=0$ καὶ $9x-12y+7=0$ ἀντιστοίχως, εἶναι παράλληλοι, διότι :

$$A_1B_2-A_2B_1=3(-12)-(-4).\ 9=-36+36=0.$$

Παράδειγμα 2ον: Αἱ ἐξισώσεις $y=5x-3$ καὶ $y=5x+7$ παριστάνουν εὐθείας παραλλήλους καὶ πρὸς τὴν εὐθεῖαν, ἐξισώσεως $y=5x$, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς O(0,0).

47. ΕΥΘΕΙΑ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗ ΔΙΑ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ M_0 (x_0, y_0) ΚΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΠΡΟΣ ΔΟΘΕΙΣΑΝ ΕΥΘΕΙΑΝ.— Ἔστω (δ) εὐθεῖα, ἐξισώσεως $Ax+By+\Gamma=0$ καὶ (δ_1) εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ $M_0(x_0,y_0)$ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν (δ).

Ἐπειδὴ ἡ (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(-B,A)$, ἐὰν $M(x,y)$

εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (δ_1), τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,\ y-y_0)$ θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ $\vec{u}$. Ἄρα

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$$

Παράδειγμα : Ἡ εὐθεῖα (δ) ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου $M_0(3,-2)$ καὶ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ_1), ἐξισώσεως $2x-3y-4=0$, ἔχει ἐξίσωσιν :

$$2(x-3)+(-3)\ (y+2)=0 \iff 2x-3y-12=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47. Νὰ μορφωθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου $(3,-4)$ καὶ ἔχει συντελεστὴν διευθύνσεως :

1) $\lambda=-2$	3) $\lambda=-\frac{3}{4}$	5) $\lambda=4{,}25$
2) $\lambda=5$	4) $\lambda=\frac{5}{8}$	6) $\lambda=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

48. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων A_1, A_2, εἰς τὰς ἀκολούθους περιπτώσεις :

1) $A_1(1,2)$, $A_2(-2,3)$,	5) $A_1(-3,2)$, $A_2(5,2)$,
2) $A_1(-1,-2)$, $A_2(-3,-6)$,	6) $A_1(0,0)$, $A_2(0,1)$,
3) $A_1(3,0)$, $A_2(0,4)$,	7) $A_1(-4,5)$, $A_2(2,1)$,
4) $A_1(4,5)$, $A_2(4,7)$,	8) $A_1(-1,2)$, $A_2(3,2)$.

49. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα $(-3,2)$, $(3,-2)$ καὶ $(0,1)$.

50. Τοῦ προηγουμένου τριγώνου νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του.

51. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα $(10,8)$, $(-3,9)$, $(-4,-4)$, $(9,-5)$.

52. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $(-3,-7)$, $(0,-2)$, $(6,8)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

53. Νὰ ὁρισθῇ ὁ x, εἰς τρόπον ὥστε τὰ σημεῖα $(x,-3)$, $(1,1)$ καὶ $(-4,3)$ νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

54. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς ὁποίας αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι :

1) 4 καὶ 5	3) -5 καὶ -3
2) -6 καὶ 8	4) 7 καὶ -2.

55. Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἑκάστης τῶν εὐθειῶν :

1) $2x+5y-10=0$	3) $5x-4y-20=0$
2) $3x-4y+24=0$	4) $x-3y+9=0$.

48. ΕΥΘΕΙΑΙ ΣΥΜΠΙΠΤΟΥΣΑΙ. — Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1=0 \quad \text{καὶ} \quad A_2x+B_2y+\Gamma_2=0,$$

μὴ παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα Oy.

Οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως $\lambda_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$ καὶ $\lambda_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$. Αἱ δὲ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\beta_1 = -\frac{\Gamma_1}{B_1} \quad \text{καὶ} \quad \beta_2 = -\frac{\Gamma_2}{B_2}.$$

Ἀφοῦ αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) συμπίπτουν, ἕπεται ὅτι :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad \text{καὶ} \quad \beta_1 = \beta_2 \quad \text{ἢ} \quad -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2} \quad \text{καὶ} \quad -\frac{\Gamma_1}{B_1} = -\frac{\Gamma_2}{B_2},$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν :

$$\frac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{A_2}} = \frac{\mathbf{B_1}}{\mathbf{B_2}} = \frac{\mathbf{\Gamma_1}}{\mathbf{\Gamma_2}} \tag{1}$$

Παρατήρησις : Ἡ συνθήκη (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως. Ὥστε :

Ἵνα δύο εὐθεῖαι συμπίπτουν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ὁμώνυμοι συντελεσταὶ τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν νὰ εἶναι ἀνάλογοι.

Παράδειγμα 1ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $3x + 5y - 12 = 0$ καὶ $6x + 10y - 24 = 0$ συμπίπτουν, καθόσον εἶναι :

$$\frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{-12}{-24}.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $2\alpha x + 2y - 5 = 0$ καὶ $4x - 3y + 7\beta = 0$ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\frac{2\alpha}{4} = \frac{2}{-3} = \frac{-5}{7\beta} \implies \frac{2\alpha}{4} = -\frac{2}{3} \quad \text{καὶ} \quad \frac{-2}{3} = \frac{-5}{7\beta}$$

ἐξ ὧν προκύπτει : $\quad \alpha = -\dfrac{4}{3} \quad$ καὶ $\quad \beta = \dfrac{15}{14}$.

49. ΕΥΘΕΙΑΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΑΙ.– Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 & (1) \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ἐὰν αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχουν διαφόρους συντελεστὰς διευθύνσεως. Δηλαδή :

$$-\frac{A_1}{B_1} \neq -\frac{A_2}{B_2} \iff \boxed{\mathbf{A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0}}$$

καὶ θὰ τέμνωνται εἰς σημεῖον $M(x,y)$, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι θὰ ἱκανοποιοῦν ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων (1), (2).

Ἄρα τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (x,y) θὰ εἶναι ἡ κοινὴ λύσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τούτων.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ὥστε :

Ἵνα δύο εὐθεῖαι τέμνωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι διάφοροι (νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη $\mathbf{A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0}$).

Παράδειγμα: Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x + 4y - 26 = 0$ καὶ $4x - 3y + 3 = 0$, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι (x, y) εἶναι λύσις τοῦ συστήματος

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 4y - 26 = 0 \\ 4x - 3y + \ \ 3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = 3 \quad \text{καὶ} \quad y = 5$$

καὶ καθόσον εἶναι $A_1B_2 - A_2B_1 = 2(-3) - 4 \cdot 4 = -6 - 16 = -22 \neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τομῆς $M(x,y)$ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

1) $x - y = 1, \quad x + y = 1.$
2) $6x - 2y - 8 = 0, \quad 3x + y = 14.$
3) $4x - 5y + 20 = 0, \quad 12x - 15y + 6 = 0.$
4) $2x + 3y - 6 = 0, \quad 4x + 6y + 9 = 0.$
5) $2 - 3x = y, \quad 6x + 2y = 4.$

57. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του εἶναι: $2x + 3y = 0, \quad x + 3y + 3 = 0, \quad x + y + 1 = 0.$

58. Τοῦ προηγουμένου τριγώνου νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων του καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ.

59. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν εἶναι $2x+3y = 0$, $x+3y+3 = 0$, $x + y + 1 = 0$, τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τούτου.

60. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι (δ_1), (δ_2), (δ_3), (δ_4), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x-3y+5=0$, $6x + 10y + 15 = 0$, $6x - 9y - 20 = 0$, $3x + 5y - 20 = 0$, σχηματίζουν παραλληλόγραμμον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του.

61. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (δ_1), ἐξισώσεως $3x+4y - 2 = 0$, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ_2) ἐξισώσεως $9x + 12y + 7 = 0$, καὶ συμπίπτει μετὰ τῆς εὐθείας (δ_3), ἐξισώσεως $15x + 20y - 10 = 0$.

50. ΣΥΝΘΗΚΗ ΙΝΑ ΤΡΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΙ ΕΧΟΥΝ ΚΟΙΝΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ.—

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι (δ_1), (δ_2), (δ_3), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$ (1), $A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ (2) καὶ $A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0$ (3).

Ἵνα αὗται ἔχουν κοινὸν σημεῖον $M_0(x_0,y_0)$, πρέπει αἱ συντεταγμέναι:

$$x_0 = \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \quad \text{καὶ} \quad y_0 = \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} \qquad (k)$$

τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ (2) νὰ ἐπαληθεύουν τὴν (3). Ἤτοι:

$$A_3 \cdot \frac{B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1}{A_1B_2 - A_2B_1} + B_3 \cdot \frac{A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2}{A_1B_2 - A_2B_1} + \Gamma_3 = 0$$

ἢ

$$A_3(B_1\Gamma_2 - B_2\Gamma_1) + B_3(A_2\Gamma_1 - A_1\Gamma_2) + \Gamma_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0 \qquad (k_1)$$

καὶ ὑπὸ μορφὴν ὁριζούσης:

$$\mathbf{\Delta} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Ἐὰν καλέσωμεν χάριν συντομίας.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_2 & \Gamma_2 \\ B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Gamma_2 & A_2 \\ \Gamma_3 & A_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$$

τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας τῆς Δ, τότε ἡ Δ γράφεται :

$$\Delta = A_1\Delta_1 + B_1\Delta_2 + \Gamma_1\Delta_3 \qquad (5)$$

καὶ διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

α) **Αἱ τρεῖς ἐλάσσονες εἶναι μηδέν.** Τοῦτο σημαίνει ὅτι οἱ συντελεσταὶ A_2, B_2, Γ_2 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς A_3, B_3, Γ_3 καὶ αἱ εὐθεῖαι (2) καὶ (3) ταυτίζονται. Οἱ A_1, B_1, Γ_1 δύνανται νὰ εἶναι ἢ οὔ ἀνάλογοι πρὸς τοὺς A_2, B_2, Γ_2. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ταυτίζονται, εἰς τὴν δευτέραν, ἡ πρώτη ἔχει κοινὸν σημεῖον μετὰ τῶν δύο τελευταίων, αἱ ὁποῖαι ταυτίζονται.

Εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις ἔχομεν : $\Delta = A_1\Delta_1 + B_1\Delta_2 + \Gamma_1\Delta_3 = 0$.

β) **Ἐκ τῶν τριῶν ὁριζουσῶν Δ_1, Δ_2, Δ_3 ἡ μία, ἔστω ἡ $\Delta_3 \neq 0$.** Τότε αἱ (2) καὶ (3) ἔχουν μίαν κοινὴν λύσιν x_0, y_0, πεπερασμένην, τὴν (k). Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν (k_1).

γ) **Ἐκ τῶν τριῶν ὁριζουσῶν Δ_1, Δ_2, Δ_3 αἱ δύο, ἔστω $\Delta_1 \neq 0$, $\Delta_2 \neq 0$.**

Τότε $\Delta_3 = 0$ ἢ $\dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{A_3}{B_3}$ καὶ αἱ (2), (3) εἶναι παράλληλοι.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, διὰ νὰ ἔχουν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κοινὸν σημεῖον (τὸ ∞), θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι παράλληλοι.

Ἄρα : $$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Ὅταν ὅμως συμβαίνῃ τοῦτο, ἡ Δ εἶναι πάλιν μηδέν.

Ἡ συνθήκη $\Delta = 0$ εἶναι, ἑπομένως : **ἀναγκαία, ἵνα εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις αἱ εὐθεῖαι (δ_1), (δ_2), (δ_3) ἔχουν κοινὸν σημεῖον.**

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι καὶ ἐπαρκής.

Παράδειγμα : Αἱ εὐθεῖαι (δ_1), (δ_2), (δ_3), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$3x - 5y - 10 = 0, \quad x + y + 1 = 0, \quad 21x - 11y - 31 = 0,$$

ἔχουν κοινὸν σημεῖον, διότι ἡ ὁρίζουσα :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 21 & -11 & -31 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -11 & -31 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 21 & -31 \end{vmatrix} + (-10) \begin{vmatrix} 1 & 21 \\ 21 & -11 \end{vmatrix} = 0$$

51. ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ.— Θεωροῦμεν δύο εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0, \qquad (2)$$

τεμνομένας εἴς τι σημεῖον $M(x_1,y_1)$. Πᾶσα εὐθεῖα (δ_3) διερχομένη διὰ τῆς τομῆς τῶν (1) καὶ (2) θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν :

$$(\delta_3): \quad A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0, \qquad (3)$$

διότι, ἀφοῦ τὸ $M(x_1,y_1)$ εἶναι τομὴ τῶν (1) καὶ (2), ἕπεται ὅτι :

$$(4) \quad A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 = 0 \text{ καὶ } A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2 = 0 \qquad (5)$$

Ἐὰν $k \neq 0$, τότε $k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0$ (6)

ὁπότε διὰ προσθέσεως τῶν (4) καὶ (6), λαμβάνομεν :

$$\mathbf{A_1x_1 + B_1y_1 + \Gamma_1 + k(A_2x_1 + B_2y_1 + \Gamma_2) = 0} \qquad (7)$$

Ἡ (7) ἐκφράζει ὅτι τὸ σημεῖον $M(x_1,y_1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας :

$$\mathbf{A_1x + B_1y + \Gamma_1 + k(A_2x + B_2y + \Gamma_2) = 0} \qquad (8)$$

Παρατήρησις : Ἐὰν αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι παράλληλοι, τότε ἡ (8) παριστᾷ σύστημα παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς (δ_1) καὶ (δ_2). Διότι τότε θὰ εἶναι :

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \Longrightarrow \frac{A_1}{kA_2}=\frac{B_1}{kB_2} \Longrightarrow \frac{A_1+kA_2}{A_1}=\frac{B_1+kB_2}{B_1},$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι αἱ (δ_1) καὶ (δ_3) εἶναι παράλληλοι.

Παράδειγμα 1ον : Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον M_1 (2,1) καὶ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1), (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως: $3x-5y-10=0$ καὶ $x+y+1=0$.

Λύσις : Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$3x-5y-10+k(x+y+1)=0 \tag{9}$$

Ἐπειδὴ τὸ M_1 (2, 1) κεῖται ἐπ' αὐτῆς, ἕπεται :

$$3\cdot 2-5\cdot 1-10+k(2+1+1)=0 \Longrightarrow k=\frac{9}{4},$$ ὅτε ἡ (9) γίνεται :

$$21x-11y-31=0.$$

Παράδειγμα 2ον : Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1), (δ_2), ἐξισώσεων :

$$2x+y+1=0 \text{ καὶ } x-2y+1=0$$

καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ_3), ἐξισώσεως $4x-3y-7=0$.

Λύσις : Ἡ ζητουμένη θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν :

$$2x+y+1+k(x-2y+1)=0$$

ἢ

$$(2+k)x+(1-2k)y+(1+k)=0 \tag{10}$$

Ἐὰν αὕτη εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν (δ_3), θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{2+k}{4}=\frac{1-2k}{-3} \Longrightarrow k=2$$

καὶ ἡ (10) γίνεται :

$$4x-3y+3=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν (δ_1), (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x-3y+2=0$, $3x-4y-2=0$ καὶ τοῦ σημείου O (0, 0).

63. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου τοῦ σχηματιζομένου ὑπὸ τῶν εὐθειῶν (δ_1), (δ_2), (δ_3), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $2x-3y+1=0$, $x-y=0$, $3x+4y-2=0$ καὶ παραλλήλων πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς του.

64. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $2x+5y-3=0$, $3x-2y-1=0$ καὶ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $x-y=0$, $x+3y-6=0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

52. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ. — Θεωροῦμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma & (1) \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 & (2) \end{cases}$$

Ἔστωσαν (δ) καὶ (δ_1) αἱ εὐθεῖαι, ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εἰς τυχὸν σύστημα συντεταγμένων. Τὸ σημεῖον M(x,y), ἐὰν ὑπάρχῃ, κοινὸν τῶν δύο εὐθειῶν, ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι εἶναι λύσις τοῦ συστήματος (I). Ἀντιστρόφως, πᾶσα λύσις (x,y) τοῦ συστήματος (Ι), δίδει σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν (δ) καὶ (δ_1).

1ον : Ἐὰν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$, αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ ($\delta_1$) δὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Θὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον, Μ, καὶ ἓν μόνον. Τὸ σύστημα (Ι) ἐπιδέχεται μίαν μοναδικὴν λύσιν, ἡ ὁποία παρέχεται ὑπὸ τῶν τύπων τοῦ Gramer :

$$x = \frac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta} \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}.$$

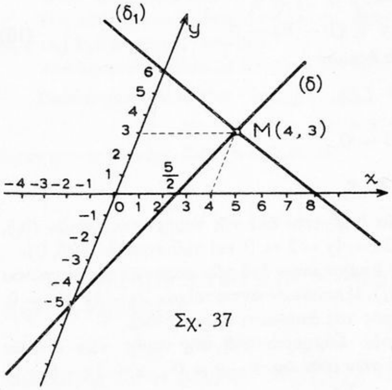
2ον : Ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} \neq \frac{\gamma}{\gamma_1}$, αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ ($\delta_1$) εἶναι παράλληλοι ὑπὸ τὴν στενὴν σημασίαν, δηλαδὴ δὲν ἔχουν κοινὸν σημεῖον. Τὸ σύστημα εἶναι **ἀδύνατον.**

3ον : Ἐὰν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$, αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ ($\delta_1$) συμπίπτουν. Τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις. Εἶναι **ἀόριστον.**

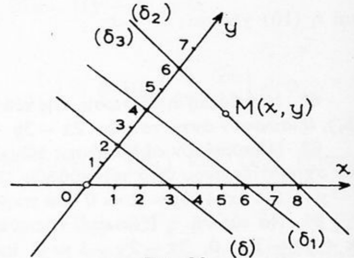
Παράδειγμα 1ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως : $2x - y = 5$ καὶ $3x + 4y = 24$, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι λύσις τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 3x + 4y = 24 \end{cases} \Longrightarrow \quad x = 4, \ y = 3.$$

Αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς μὲν (δ) εἶναι $\frac{5}{2}$ καὶ -5, τῆς δὲ (δ_1) εἶναι αἱ 8 καὶ 6, ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 37).



Σχ. 37



Σχ. 38

Παράδειγμα 2ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ_1), ἐξισώσεων $2x + 3y - 6 = 0$ καὶ $4x + 6y - 24 = 0$ εἶναι παράλληλοι, διότι $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{6}{24}$, αἱ δὲ σχετικαὶ θέσεις αὐτῶν παρέχονται ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω (σχ. 38).

Τὸ σύστημα λοιπὸν $\left.\begin{matrix} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 24 \end{matrix}\right\}$ εἶναι ἀδύνατον.

Παράδειγμα 3ον : Αἱ εὐθεῖαι (δ_2) καὶ (δ_3) ἐξισώσεων $3x + 4y - 24 = 0$ καὶ $6x + 8y = 48$ ἀντιστοίχως, συμπίπτουν, ὡς δεικνύει τὸ (σχ. 38).

Ἄρα, πᾶν σημεῖον Μ (x, y) τῆς μιᾶς ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν **ἀμφοτέρας** τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} 3x + 4y - 24 = 0 & (1) \\ 6x + 8y - 48 = 0 & (2) \end{cases}$$

Διότι, διὰ τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς (1), ἔστω $y = 0$, εὑρίσκομεν $x = 8$. Τὸ ζεῦγος $(x = 8,\ y = 0)$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2). Ἤτοι $6 \cdot 8 + 8 \cdot 0 - 48 = 0$ ἢ $48 - 48 = 0$.

Ὁμοίως, διὰ $y = 3$, ἡ (1) δίδει $x = 4$. Τὸ ζεῦγος τοῦτο $(x = 4,\ y = 3)$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν (2), ἤτοι: $6 \cdot 4 + 8 \cdot 3 - 48 = 24 + 24 - 48 = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

1) $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 4x - 10y = -27 \\ 2x - 14y = -36 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 6x - 3y = -26 \\ 15x + 2y = -27 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x - 3y = 17 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 6y = -17 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = -31. \end{cases}$

66. Νὰ ὁρισθῇ ὁ k, ἵνα αἱ εὐθεῖαι αἱ παριστώμεναι ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων: $3x - 4y + 15 = 0$, $5x + 2y - 1 = 0$, $kx - (2k - 1)y + 9k - 13 = 0$ ἔχουν κοινὸν σημεῖον.

67. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ, αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου, τοῦ ὁποίου νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι:

1) $3x - 2y + 5 + \mu(x - 2y + 4) = 0$,

2) $(2\mu - 3)x + (7 - 2\mu)y + 4 = 0$,

3) $\mu x + (5\mu - 3)y + 9 - 3\mu = 0$,

4) $(\mu^2 - 1)x + (3\mu^2 - 2\mu + 1)y - 5\mu^2 + 4\mu - 3 = 0$.

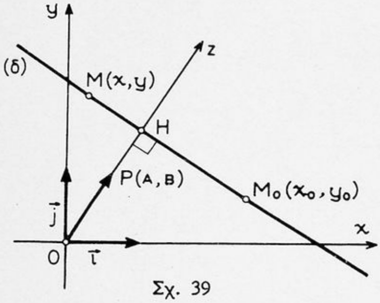
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΣΠΟΥΔΗ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΕΙΣ ΤΟ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

53. Η ΕΥΘΕΙΑ ΕΙΣ ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΟΥΣ ΑΞΟΝΑΣ.– Εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐξητάσαμεν τὴν εὐθεῖαν καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῆς, ἀναφερομένην εἰς τυχόντας ἄξονας συντεταγμένων.

Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον θὰ ἐξετάσωμεν τὴν εὐθεῖαν εἰς **ὀρθοκανονικοὺς ἄξονας συντεταγμένων.** Ἅπαντα τὰ προηγουμένως ἐκτεθέντα ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Πέραν δὲ τούτων καὶ τὰ ἀκόλουθα.

54. ΘΕΩΡΗΜΑ.– Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων, ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $Ax+By+\Gamma=0$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ (A, B).



Σχ. 39

Ἀπόδειξις : Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων xOy (σχ. 39) θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως :

$$Ax + By + \Gamma = 0 \qquad (1)$$

Ἔστωσαν $M_0(\chi_0,\psi_0)$ σταθερὸν σημεῖον τῆς (δ), καὶ M(x,y) μεταβλητὸν σημεῖον αὐτῆς. Θὰ εἶναι :

$$Ax_0 + By_0 + \Gamma = 0 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἕπεται :

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0. \qquad (3)$$

Θεωροῦμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(A,B)$. Ἐπειδὴ $x-x_0$, καὶ $y-y_0$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι προβολαὶ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_0M}$, καὶ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) εἶναι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{M_0M}$, ἕπεται ὅτι :

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0.$$

Ἄρα τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}$ καὶ ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι κάθετα πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$.

Παράδειγμα 1ον : Ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $5x+8y-10=0$ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ (5, 8).

Παράδειγμα 2ον : Ἐὰν ἡ (δ) ἔχῃ ἐξίσωσιν $y = \lambda x + \beta$, τότε :

$$(\delta) \perp \overrightarrow{OP}\,(\lambda, -1).$$

55. ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.— Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ (A, B) ἔχει ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς : $Ax+By+\Gamma=0$.

Ἀπόδειξις : Ἔστω $M_0(x_0,y_0)$ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας (δ). Ἵνα σημεῖον τι $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου κεῖται ἐπὶ τῆς (δ), πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$, ἤτοι

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

ἢ

$$Ax+By-(Ax_0+By_0)=0 \qquad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ $\Gamma=-(Ax_0+By_0)$, ἡ (1) γίνεται : $Ax+By+\Gamma=0$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι : πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $Ax+By+k=0$, $(k\in R)$ εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OP}(A,B)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $Ax+By+\Gamma=0$.

Παρατήρησις : Ἡ παράστασις $E=Ax+By$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OP}(A,B)$ καὶ $\overrightarrow{OM}(x,y)$. Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ) γράφεται :

$$Ax+By=-\Gamma \iff \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=-\Gamma.$$

Ἐὰν H εἶναι ἡ τομὴ τῶν (δ) καὶ OP, τότε :

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=\overline{OP}\cdot\overline{OH} \implies \boxed{\Gamma=-\overline{OP}\cdot\overline{OH}}$$

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου εὐθυγράμμου τμήματος.

Λύσις : Ἔστωσαν $A_1(x_1,y_1)$, $A_2(x_2,y_2)$ αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος A_1A_2. Ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$ καὶ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου $M_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ τοῦ τμήματος A_1A_2.

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος A_1A_2 εἶναι :

$$(x_2-x_1)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)=0.$$

56. ΣΥΝΘΗΚΗ ΚΑΘΕΤΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ. — Γνωρίζομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $A_1x+B_1y+\Gamma_1=0$ καὶ $A_2x+B_2y+\Gamma_2=0$, εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι πρὸς τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OP_1}(A_1,B_1)$ καὶ $\overrightarrow{OP_2}(A_2,B_2)$. Ἵνα αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OP_1}$ καὶ $\overrightarrow{OP_2}$ νὰ εἶναι κάθετα. Ἄρα (§ 32).

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=0 \iff \boxed{A_1A_2+B_1B_2=0} \qquad (1)$$

Παράδειγμα : Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $4x+8y-7=0$ καὶ $6x-3y+11=0$ εἶναι κάθετοι, διότι :

$$A_1A_2+B_1B_2=4\cdot 6+8(-3)=24-24=0.$$

Ἡ συνθήκη: $A_1A_2+B_1B_2=0$ γράφεται: $\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)=-1$, ἂν $B_1B_2\neq 0$.

Ἐπειδὴ δὲ $-\frac{A_1}{B_1}=\lambda_1$ εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς (δ_1), καὶ $-\frac{A_2}{B_2}=\lambda_2$ εἶναι ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς (δ_2), ἕπεται:

$$\boxed{\lambda_1\cdot\lambda_2=-1} \tag{2}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Ἵνα δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα) **τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν διευθύνσεως αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον πρὸς —1.**

Παράδειγμα: Αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως: $y=7x+4$ καὶ $y=-\frac{1}{7}x+15$ εἶναι κάθετοι, διότι:

$$\lambda_1\lambda_2=7\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)=-1.$$

57. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΔΟΘΕΝΤΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{u}(A, B)$.— Ἐὰν $M(x,y)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας, τότε:

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0 \iff \boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \tag{1}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

58. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΔΙΕΡΧΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ (δ) ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ: $Ax+By+\Gamma=0$.

Ἂν $M(x,y)$ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς ζητουμένης εὐθείας (δ_1), τότε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,\ y-y_0)$ θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ), ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ διάνυσμα $\vec{u}(A,B)$. Ἄρα τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_0M}$ καὶ $\vec{u}$ θὰ εἶναι παράλληλα. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B} \iff \boxed{B(x-x_0)+A(y-y_0)=0} \tag{1}$$

Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις.

Παράδειγμα: Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ_1) τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου M_0 (3,5) καὶ καθέτου πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $4x-9y+7=0$, εἶναι:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{-9} \iff 9x+4y-47=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

68. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα $3x + 4y - 2 = 0$ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν
$$8x - 6y + 5 = 0.$$

69. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :
$$x - 3y + 2 = 0, \quad 12x + 4y + 31 = 0, \quad 2x - 6y - 7 = 0, \quad 9x + 3y - 40 = 0$$
εἶναι αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου. Νὰ κατασκευασθῇ τοῦτο.

70. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον :

1) $(-1, 2)$ καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $3x - 4y + 1 = 0$

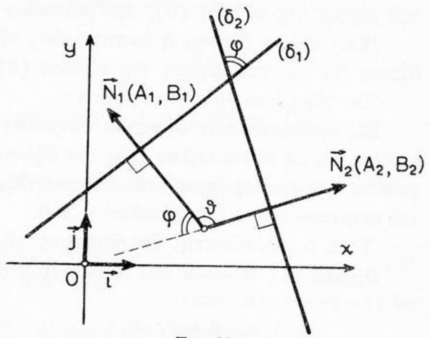
2) $(-7, 2)$ καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν $x - 3y + 4 = 0$.

71. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α $(-3, 2)$, Β $(3, -2)$ καὶ Γ $(0, -1)$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν ὑψῶν αὐτοῦ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ὕψη ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

72. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τοῦ προηγουμένου προβλήματος καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

59. ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.— Εἰς τὸ ὀρθοκανονικὸν σύστημα ἀξόνων xOy (σχ. 40) θεωροῦμεν δύο εὐθείας (δ_1) καὶ (δ_2) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :
$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \qquad (1)$$
καὶ
$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \qquad (2)$$

Ἂν αὗται τέμνωνται, αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τῶν ἐπ' αὐτῶν καθέτων διανυσμάτων $\overrightarrow{N_1}(A_1, B_1)$ καὶ $\overrightarrow{N_2}(A_2, B_2)$ ἢ παραπληρωματικαὶ τούτων.



Σχ. 40

Ἔστω θ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων τούτων, τοιαύτη ὥστε $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Κατὰ τὴν (§ 31) θὰ εἶναι :
$$\textbf{συν}\theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (3)$$

Ἐὰν φ εἶναι ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν (δ_1) καὶ (δ_2), τότε $\theta + \varphi = \pi$ καὶ ἄρα συνφ $= \pm$ συνθ. Ἐπειδὴ ὑπετέθη $\varphi < \frac{\pi}{2}$, ἕπεται συνφ > 0. Καὶ ἄρα:
$$\textbf{συν}\varphi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (4)$$

Παρατηρήσεις : Α) Ἐὰν $(\delta_1) \perp (\delta_2)$, τότε συνφ $= 0$, καὶ ὁ τύπος (4) δίδει :
$$\mathbf{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0}$$
σχέσις εὑρεθεῖσα καὶ εἰς τὴν (§ 56).

Β) Γνωρίζομεν ὅτι :

$$1+\varepsilon\varphi^2\varphi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi} \Longleftrightarrow \varepsilon\varphi^2\varphi=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi}-1=\frac{(A_1^2+B_1^2)\,(A_2^2+B_2^2)-(A_1A_2+B_1B_2)^2}{(A_1A_2+B_1B_2)^2}$$

ἐξ οὗ :

$$\varepsilon\varphi\ \varphi=\frac{|\,\mathbf{A_1}\cdot\mathbf{B_2}-\mathbf{A_2}\cdot\mathbf{B_1}\,|}{|\,\mathbf{A_1}\cdot\mathbf{A_2}+\mathbf{B_1}\cdot\mathbf{B_2}\,|}=\frac{|\,\lambda_2-\lambda_1\,|}{|\,1+\lambda_1\lambda_2\,|} \qquad (5)$$

καθόσον εφ φ >0, διότι $\varphi<90^0$ καὶ λ_1, λ_2 αἱ συντελεσταὶ διευθύνσεως τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2).

Ἂν αἱ (δ_1) καὶ (δ_2) εἶναι παράλληλοι, τότε :

$$\varphi=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{A_1}\cdot\mathbf{B_2}-\mathbf{A_2}\cdot\mathbf{B_1}=0 \qquad (6)$$

σχέσις εὑρεθεῖσα καὶ εἰς τὴν (§ 46).

Γ) Ἐὰν ὁ τύπος (5) ἐφαρμοσθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν (Ox), ἐξισώσεως $(y=0)$, καὶ τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως $y=\lambda x+\beta$, τότε :

$$\varepsilon\varphi\ \varphi=|\,\lambda\,|$$

Ἐὰν $\lambda>0$, ἡ ὀξεῖα γωνία φ εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς (δ), τοῦ **ἄνωθεν** τοῦ ἄξονος Ox κειμένου.

Ἐὰν $\lambda<0$, ἡ ὀξεῖα γωνία φ εἶναι ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας (δ), τοῦ **κάτωθεν** τοῦ ἄξονος Ox κειμένου.

Ἐπὶ πλέον λ εἶναι ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας, ἥτις σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας (δ), τοῦ **ἄνωθεν** τοῦ ἄξονος Ox κειμένου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντεταγμένων ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως μιᾶς εὐθείας (δ), μὴ παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy, ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τοῦ ἄξονος Ox καὶ τοῦ μέρους τῆς εὐθείας (δ) τοῦ κειμένου εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον $y\geqslant 0$.

Τότε ὁ συντελεστὴς διευθύνσεως τῆς (δ) καλεῖται **κλίσις** αὐτῆς.

Παράδειγμα : Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν (δ_1), (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $7x-3y+6=0$ καὶ $2x-5y-4=0$, εἶναι :

$$\varepsilon\varphi\ \varphi=\frac{|\,A_1\cdot B_2-A_2\cdot B_1\,|}{|\,A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2\,|}=|-1|=1 \Longrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4} \quad \text{ἤ} \quad \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

73. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία (ὀξεῖα) τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως

$$7x+3y+6=0 \text{ καὶ } 2x+5y-4=0.$$

74. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α(10,8), Β(–3,9), Γ(–4,–4), Δ(9,–5) καὶ τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

75. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τῶν εὐθειῶν, ἐξισώσεων ἀντιστοίχως :

1) $2x-5y+1=0$ καὶ $x-2y+3=0$
2) $x+y+1=0$ καὶ $x-y+1=0$
3) $6x-3y+3=0$ καὶ $x=6$.

76. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ_1), τῆς διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Α(3,5) καὶ σχηματιζούσης γωνίαν $\frac{\pi}{3}$ μετὰ τῆς εὐθείας (δ_2), ἐξισώσεως $x-y+6=0$.

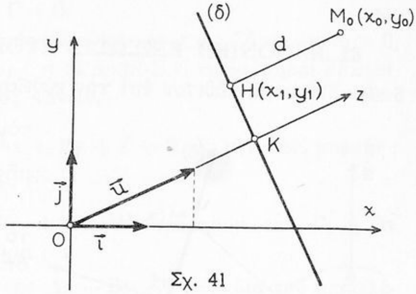
77. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν εὐθεῖαν τὴν διερχομένην διὰ τοῦ $A(1,-3)$ καὶ τέμνουσαν τὴν (δ_2), ἐξισώσεως $x + 2y + 4 = 0$ ὑπὸ γωνίαν 135^o.

78. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅπερ ἔχει κορυφὰς $A(0,0)$, $B(-4,4)$ καὶ $\Gamma(2\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

60. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑΝ (δ), ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ : $Ax + By + \Gamma = 0$, ἂν $|A| + |B| > 0$.

Ἔστω $\overrightarrow{OZ}$ ὁ ἄξων ὁ ἀγόμενος ἐκ τοῦ Ο καθέτως πρὸς τὴν εὐθεῖαν (δ) καὶ προσανατολισμένος κατὰ τὴν φορὰν τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{u}(A,B)$ καὶ ἔστω $H(x_1,y_1)$ ἡ προβολὴ τοῦ M_0 ἐπὶ τὴν (δ).

Θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 41

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{HM_0} = u \cdot \overline{HM}_0 = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM}_0,$$

δηλαδή :

$$A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \overline{HM}_0$$

ἐξ οὗ :

$$\overline{HM}_0 = \frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς (δ), θὰ εἶναι $Ax_1 + By_1 = -\Gamma$ καὶ ἡ (1) γίνεται:

$$\overline{HM}_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + \Gamma}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (\overline{HM}_0 \text{ μετρεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος } \overrightarrow{OZ}).$$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις τοῦ M_0 (κατὰ τὴν ἀντίθετον φορὰν) ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (δ) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\mathbf{d} = |\mathbf{M_0H}| = \frac{|\mathbf{Ax_0 + By_0 + \Gamma}|}{\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2}}} \quad (2)$$

Ἡ ἀπόστασις ΟΚ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν ἀξόνων ἀπὸ τὴν (δ) εἶναι :

$$\mathbf{OK} = \frac{|\Gamma|}{\sqrt{\mathbf{A^2 + B^2}}}\,. \quad (3)$$

Παράδειγμα 1ον : Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_0(2,5)$ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $3x + 4y - 10 = 0$ εἶναι :

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|6 + 20 - 10|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

Παράδειγμα 2ον : Ἡ ἀπόστασις τῆς ἀρχῆς $O(0,0)$ τῶν ἀξόνων ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $6x + 8y - 9 = 0$ εἶναι :

$$d = \frac{|-9|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{|-9|}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

79. Δίδονται τὰ σημεῖα Α(1,5), Β(–3,3) καὶ Γ(6,2). Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

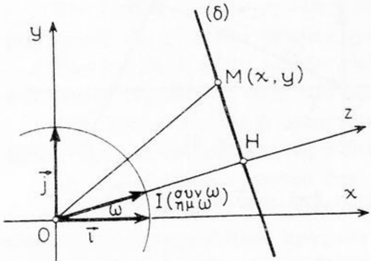
80. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα 1) Α(2,3), Β(–4,0), Γ(–1,–4) καὶ 2) Α(3,5), Β(1,–2), Γ(6,–5).

81. Δίδεται τὸ σημεῖον Α(4,6) καὶ αἱ εὐθεῖαι (δ), ἐξισώσεων :
$(\mu-1)\,x-(2\mu-3)\,\psi-4\mu+1=0$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ὁ μ, εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τὴν (δ) νὰ εἶναι 3.

82. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ), ἡ ὁποία ἀπέχει ἰσάκις τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως : $3x+4y-5=0$ καὶ $3x+4y+7=0$.

83. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τῆς ἀρχῆς Ο(0,0) ἀπὸ τῶν εὐθειῶν (δ) καὶ (δ_1) ἐξισώσεων ἀντιστοίχως $x+2y-1=0$, $\sqrt{3}x+\sqrt{2}y-1=0$. Ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν ;

61. ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— Ἔστω $\overrightarrow{OI}$ (συνω, ημω) μοναδιαῖον διάνυσμα κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (δ), $\overrightarrow{OZ}$ ὁ ἄξων τοῦ μοναδιαίου τούτου διανύσματος $\overrightarrow{OI}$ καὶ Η τὸ σημεῖον τομῆς τῆς (δ) καὶ τοῦ $\overrightarrow{OZ}$.



Σχ. 42

Θέτομεν $\overline{OH}=p$. Ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι τὸ Σύνολον τῶν σημείων Μ(x,y), διὰ τὰ ὁποῖα :

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{HM}=0 \text{ ἢ } (\S\ 55 \text{ παρατήρησις})$$

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH}=p \quad \text{ἢ}$$

$$\boxed{x\,\text{συν}\omega+y\,\text{ημ}\omega=p} \qquad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἡ **κανονικὴ ἐξίσωσις** τῆς (δ) καὶ ὀφείλεται εἰς τὸν **Hesse**.

Προφανῶς, ἡ θέσις τῆς εὐθείας (δ) ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἀποστάσεως $\overline{OH}=p$, θεωρουμένης πάντοτε θετικῆς, καὶ τῆς γωνίας ω, θεωρουμένης καὶ ταύτης θετικῆς, εἰς τρόπον ὥστε : $\mathbf{0\leqslant\omega\leqslant 2\pi}$.

Παράδειγμα : Ἐὰν $\omega=\frac{\pi}{3}$ καὶ $OH=\frac{5}{2}$, ἡ ἐξίσωσις τῆς (δ) εἶναι :

$$x\cdot\text{συν}\frac{\pi}{3}+y\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{3}=\frac{5}{2} \iff \frac{x}{2}+y\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}=0 \iff x+\sqrt{3}\cdot y-5=0.$$

62. ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΗΣ $Ax+By+\Gamma=0$ ΕΙΣ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΝ ΜΟΡΦΗΝ ΑΥΤΗΣ.– Ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὴν γωνίαν ω καὶ τὸ p, εἰς τρόπον ὥστε αἱ ἐξισώσεις :

$$(1) \quad x\,\text{συν}\,\omega+y\,\text{ημ}\,\omega-p=0 \quad \text{καὶ} \quad Ax+By+\Gamma=0 \quad (2)$$

νὰ παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Πρὸς τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\frac{\text{συν}\,\omega}{A}=\frac{\text{ημ}\,\omega}{B}=\frac{-p}{\Gamma}=\rho \implies \text{συν}\,\omega=\rho A,\ \ \text{ημ}\,\omega=\rho B,\ \ -p=\rho\Gamma$$

Όθεν: $\rho^2(A^2+B^2)=\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1 \Longrightarrow \rho=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (3)

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

(4) $\sigma\upsilon\nu\,\omega=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ καὶ $\eta\mu\,\omega=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ (5)

Ἄρα ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{\Gamma}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (6)$$

Σημείωσις: Ἐὰν $p>0$, ἐκ τῆς σχέσεως $-p=\rho\Gamma$ ἕπεται ὅτι οἱ ρ καὶ Γ θὰ εἶναι **ἑτερόσημοι** ἀριθμοί, ἐκτὸς ἐὰν $\Gamma=0$.

Ἐὰν $\Gamma=0$, τότε $p=0$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\omega<\pi$. Ἄρα $\eta\mu\,\omega>0$, ὁπότε ἐκ τῆς σχέσεως $\eta\mu\,\omega=\rho B$, ἕπεται ὅτι οἱ ρ καὶ B εἶναι **ὁμόσημοι** ἀριθμοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ **χρήσιμος κανών.**

ΚΑΝΩΝ: Διὰ νὰ ἀναγάγωμεν τὴν $Ax+By+\Gamma=0$ εἰς τὴν καν. μορφήν:

1ον: Εὑρίσκομεν τὴν τιμήν: $\sqrt{A^2+B^2}$,

2ον: Δίδομεν εἰς τὴν τιμὴν $\sqrt{A^2+B^2}$ ἀντίθετον πρόσημον τοῦ Γ, ἢ ἂν $\Gamma=0$, τὸ αὐτὸ πρόσημον μὲ τὸ τοῦ B, καί:

3ον: Διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $Ax+By+\Gamma=0$ διὰ τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ 2ον:

Προκύπτει οὕτως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις:

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $4x-3y+15=0$. Εἶναι: $\rho=-\sqrt{A^2+B^2}=-\sqrt{16+9}=-5$, διότι πρέπει $\rho\Gamma<0$. Διαιροῦντες διὰ -5, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν: $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη, μὲ $\sigma\upsilon\nu\,\omega=-\frac{4}{5}$, $\eta\mu\,\omega=\frac{3}{5}$ καὶ $p=3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

84. Νὰ μορφωθοῦν αἱ ἐξισώσεις καὶ νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, διὰ τὰς ὁποίας εἶναι:

1. $\omega=0$, $p=5$	5. $\omega=\frac{\pi}{2}$, $p=10$
2. $\omega=\frac{3\pi}{2}$, $p=3$	6. $\omega=\frac{2\pi}{3}$, $p=2$
3. $\omega=\frac{\pi}{4}$, $p=3$	7. $\omega=\pi$, $p=5$
4. $\omega=\frac{7\pi}{4}$, $p=4$	8. $\omega=\frac{5\pi}{4}$, $p=1$

85. Νὰ ἀναχθοῦν ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν αἱ ἐξισώσεις:

1. $3x+4y-10=0$	3. $x+y+8=0$
2. $5x-12y+39=0$	4. $\sqrt{3}-y=0$.

63. ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ $M_0(x_0, y_0)$ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑΣ (δ) ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ x συν $\omega + y$ ημ $\omega - p = 0$.

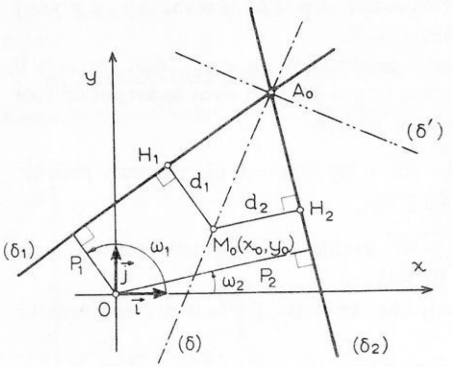
Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην (σχ. 41) εἶναι $u = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\text{συν}^2\omega + \text{ημ}^2\omega} = 1$ καὶ ὁ τύπος (2) τῆς (§ 60) γίνεται :

$$d = |x_0 \text{ συν } \omega + y_0 \text{ ημ } \omega - p| \tag{1}$$

Ἐὰν τὸ M_0 ἔχῃ τὴν θέσιν $O(0, 0)$ τῶν ἀξόνων, τότε ἡ (1) γίνεται :

$$d = |p|. \tag{2}$$

64. ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ.–



Σχ. 43

Ἔστωσαν (δ_1) καὶ (δ_2) δύο εὐθεῖαι ἐξισώσεων :

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0 \tag{1}$$

καὶ

$$A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \tag{2}$$

Θὰ ζητήσωμεν νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον $M_0(x_0, y_0)$ κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας A_0 τῶν εὐθειῶν (δ_1) καὶ (δ_2). Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη εἶναι : αἱ ἀποστάσεις τοῦ $M_0(x_0, y_0)$ ἀπὸ τὰς (δ_1) καὶ (δ_2) νὰ εἶναι ἴσαι : Δηλαδή : $MH_1 = MH_2$

ἢ
$$\frac{|A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ μία τῶν διχοτόμων ἔχει ἐξίσωσιν :

$$\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \tag{3}$$

καὶ ἡ ἄλλη διχοτόμος θὰ ἔχῃ ἐξίσωσιν :

$$\frac{A_1x_0 + B_1y_0 + \Gamma_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2x_0 + B_2y_0 + \Gamma_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0. \tag{4}$$

Σημείωσις : Διὰ νὰ εὕρωμεν ποία ἐκ τῶν ἐξισώσεων (3) καὶ (4) παριστᾷ τὴν ἐσωτερικὴν καὶ ποία τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας A_0, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Θεωροῦμεν τὰς ἐξισώσεις τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν αὐτῶν :

(δ_1) : x συνω_1 + ψημ$\omega_1 - p_1 = 0$ καὶ (δ_2) : x συν$\omega_2 + y$ ημ$\omega_2 - p_2 = 0$.

Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων αὐτῶν ἀπὸ σημεῖον τῆς εὐθείας :

(δ) : x συν$\omega_1 + y$ ημ$\omega_1 - p_1 + k(x$συν$\omega_2 + y$ ημ$\omega_2 - p_2) = 0$

εἶναι $-k$, $(k \in R)$.

Πράγματι, ἔστω $M_0(x_0, y_0)$ τυχὸν σημεῖον τῆς (δ). Θὰ ἔχωμεν:

$$x_0\,\sigma\upsilon\nu\omega_1 + y_0\,\eta\mu\omega_1 - p_1 + k\,(x_0\,\sigma\upsilon\nu\omega_2 + y_0\,\eta\mu\omega_2 - p_2) = 0,$$

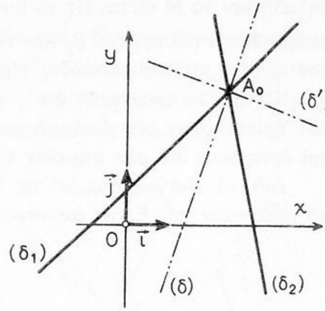
ἐξ οὗ:

$$-k = \frac{x_0\,\sigma\upsilon\nu\omega_1 + y_0\,\eta\mu\omega_1 - p_1}{x_0\,\sigma\upsilon\nu\omega_2 + y_0\,\eta\mu\omega_2 - p_2} \qquad (5)$$

Ὁ ἀριθμητὴς τῆς (5) εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς (δ_1) ἀπὸ τὸ M_0, καὶ ὁ παρονομαστὴς ἡ ἀπόστασις τῆς (δ_2) ἀπὸ τὸ M_0. Κατ' ἀκολουθίαν, $-k$ εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τῶν (δ_1) καὶ (δ_2) ἀπὸ τὸ M_0 τῆς εὐθείας (δ).

Ἐὰν $k = \pm 1$, ἡ (δ) εἶναι μία ἢ ἡ ἄλλη τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας τῶν (δ_1) καὶ (δ_2).

Ἡ γωνία τῶν (δ_1) καὶ (δ_2), ἐντὸς τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ ἀρχὴ Ο τῶν ἀξόνων, ἢ ἡ κατακορυφήν της, εἶναι ἡ **ἐσωτερικὴ** γωνία τῶν (δ_1) καὶ (δ_2). Αἱ ἄλλαι εἶναι **ἐξωτερικαὶ** τῶν εὐθειῶν τούτων.



Σχ. 44

Κατὰ τὸν κανόνα τῆς (§ 64) ἔπεται ὅτι ἡ (δ) κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας τῶν (δ_1) καὶ (δ_2), ὅταν $k < 0$ καὶ εἰς τὸ ἐξωτερικόν, ὅταν $k > 0$.

Ἐὰν ἡ ἀρχὴ Ο κεῖται ἐπὶ τῆς (δ_1) ἢ τῆς (δ_2), θὰ πρέπῃ νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι (δ_1) καὶ (δ_2) καὶ αἱ γωνίαι εἰς τὰς ὁποίας $k > 0$ ἀντιστοιχοῦν αἱ διχοτόμοι (ἐσωτερικὴ – ἐξωτερικὴ) κατὰ τὸ σχῆμα.

ΑΣΚΗΣΙΣ

86. Νὰ μορφωθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν εἶναι:

$$4x - 3y - 12 = 0, \quad 5x - 12y - 4 = 0, \quad 12x - 5y - 13 = 0$$

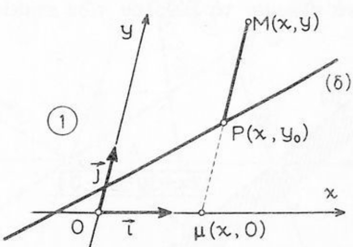
καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

65. ΣΗΜΕΙΟΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x + \beta y + \gamma$.— Τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως $E = \alpha x + \beta y + \gamma$ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y, δηλαδὴ ἐκ τῆς θέσεως τοῦ σημείου M (x, y) τοῦ Καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου xOy (σχ. 45).

Ἵνα ἡ παράστασις Ε εἶναι μηδέν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ M (x, y) νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0.$$

Ὥστε: $E = 0 \iff M \in (\delta)$.



Σχ. 45

Ἐὰν $M \notin (\delta)$, παριστῶμεν διὰ τοῦ P τὴν τομὴν τῆς (δ) μετὰ τῆς ἐκ τοῦ M παραλλήλου Mμ πρὸς τὸν ἄξονα Oy. Τὸ p ἔχει συντεταγμένας, προφανῶς, (x, y_0).

Ἄρα:

$$\alpha x + \beta y_0 + \gamma = 0 \qquad (1)$$

Διὰ τὸ σημεῖον Μ (x, y) θὰ ἔχωμεν :

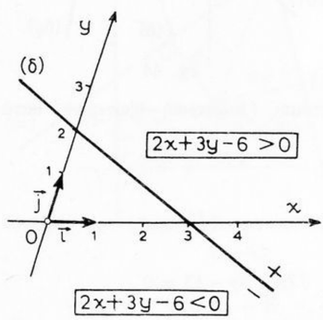
$$E = \alpha x + \beta y + \gamma = (\alpha x + \beta y + \gamma) - (\alpha x + \beta y_0 + \gamma) = \beta y - \beta y_0$$

ἤ
$$\mathbf{E = \beta\,(y - y_0) = \beta \cdot \overline{PM}}. \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (2) φαίνεται ὅτι ἡ παράστασις Ε ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ β, ἐὰν τὸ $\overline{PM} > 0$, δηλαδὴ ἐὰν τὸ Μ κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον (1), κειμένου ἄνωθεν τῆς (δ). Θὰ ἔχῃ δὲ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ β, ἐὰν τὸ $\overline{PM} < 0$, δηλαδὴ τὸ Μ κεῖται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον (2), τὸ κείμενον κάτωθεν τῆς εὐθείας (δ).

Ὥστε : Τὸ τριώνυμον $\alpha x + \beta y + \gamma$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἑνὸς τῶν ἡμιεπιπέδων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῆς εὐθείας, ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ πᾶν σημεῖον τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου.

Διὰ νὰ διαχωρίσωμεν τὰ δύο ταῦτα **ἀνοικτὰ** ἡμιεπίπεδα, ἀναζητοῦμεν τὸ πρόσημον τῆς Ε, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἀρχὴν Ο(0,0) τῶν ἀξόνων, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\gamma \neq 0$. Εἰς τοῦτο εἶναι $E = \gamma$. Ἄρα :



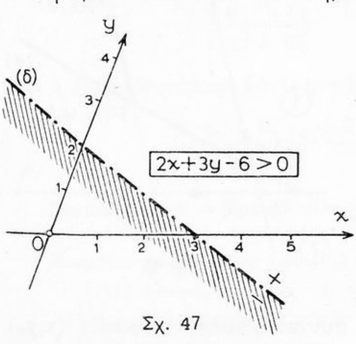
Σχ. 46

Τὸ σημεῖον τῆς $E = \alpha x + \beta y + \gamma$ εἶναι τὸ τοῦ γ εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον, εἰς ὃ κεῖται ἡ ἀρχὴ Ο(0,0) τῶν συντεταγμένων.

Παράδειγμα : Τὸ τριώνυμον $2x + 3y - 6$ εἶναι ἀρνητικὸν εἰς τὸ ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον, τὸ περιέχον τὴν ἀρχὴν Ο(0,0), εἰς τὸ ὁποῖον χωρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας (δ), ἐξισώσεως $2x + 3y - 6 = 0$ (σχ. 46) καὶ θετικὸν εἰς τὸ ἄλλο ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον. Πρὸς διάκρισιν τοποθετοῦμεν τὸ σημεῖον + καὶ τὸ σημεῖον − ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας (δ) διὰ νὰ δείξωμεν τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν πρόσημον τοῦ τριωνύμου $\alpha x + \beta y + \gamma$.

66. ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΑΝΙΣΩΣΕΩΣ : $\alpha x + \beta y + \gamma > 0$.— Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ Σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι x καὶ y ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν

$$\alpha x + \beta y + \gamma > 0.$$



Σχ. 47

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ καὶ προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τῆς παραστάσεως $\alpha x + \beta y + \gamma$ εἰς ἕκαστον τῶν ἀνοικτῶν ἡμιεπιπέδων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ ἐπίπεδον xOy ὑπὸ τῆς εὐθείας (δ). Καλύπτομεν ἀκολούθως διὰ παραλλήλων γραμμῶν (γραμμοσκίασμα) τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον δὲν ἁρμόζει εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Οὕτω, διὰ νὰ λάβωμεν τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 47), τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν

$2x + 3y - 6 > 0$, γραμμοσκιάζομεν τὸ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὴν ἀρχὴν $O(0,0)$ τῶν συντεταγμένων.

Ἡ εὐθεῖα (δ) παρίσταται δι' ἐστιγμένης γραμμῆς, διὰ νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων αὐτῆς μηδενίζουν τὸ τριώνυμον $2x + 3y - 6$, ἐκτὸς ἐὰν εἴχομεν πρὸς λύσιν τὴν $2x + 3y - 6 \geqslant 0$, ὁπότε ἡ (δ) θὰ πρέπῃ νὰ γραφῇ συνεχὴς γραμμή.

67. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ.– Βάσει τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων, δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν σύστημα ἀνισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἢ νὰ εὕρωμεν τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου (ἐπίλυσις ἀνισώσεως) πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x, y.

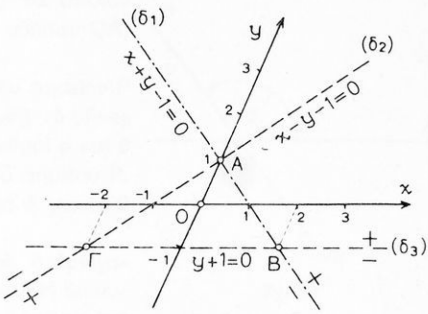
Παράδειγμα 1ον: Διὰ ποίας τιμὰς τῶν x, y συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις;

$x + y - 1 < 0$ (1), $x - y + 1 > 0$ (2), $y + 1 > 0$ (3).

Κατασκευάζομεν (σχ. 48) τὰς εὐθείας (δ_1), (δ_2), (δ_3), ἐξισώσεων:

$$x + y - 1 = 0, \quad x - y + 1 = 0, \quad y + 1 = 0.$$

Ἐὰν γραμμοσκιάσωμεν ἕκαστον ἡμιεπίπεδον, εἰς ὃ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων του δὲν ἐπαληθεύουν τὴν ἀντίστοιχον ἀνίσωσιν, καταλήγωμεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι μόνον τὰ ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθευούσας συγχρόνως καὶ τὰς τρεῖς ἀνισώσεις.



Σχ. 48

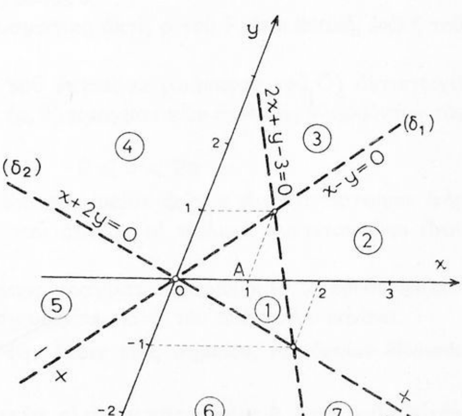
Παράδειγμα 2ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις:

$(x - y)(x + 2y)(2x + y - 3) < 0$, (1)

Κατασκευάζομεν (σχ. 49) τὰς εὐθείας (δ_1), (δ_2), (δ_3), ἐξισώσεων ἀντιστοίχως:

$$x - y = 0, \quad x + 2y = 0, \quad 2x + y - 3 = 0.$$

Αἱ εὐθεῖαι αὗται χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων xOy εἰς ἑπτὰ ἐπίπεδα χωρία. Εἰς ἕκαστον τῶν χωρίων τούτων, τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) λαμβάνει ἕνα ὡρισμένον πρόσημον. Προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ παραλείπομεν τὸ χωρίον ἐκεῖνο, εἰς τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον τοῦτο γίνεται θετικόν. Παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ ἀνίσωσις (1) ἀληθεύει διὰ τὰς συντεταγμένας τῶν σημείων τῶν κειμένων εἰς τὰ ἐπίπεδα χωρία 1, 3, 5 καὶ 7, ἐξαιρουμένων τῶν σημείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν εὐθειῶν (δ_1), (δ_2) καὶ (δ_3).



Σχ. 49

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

87. Νά γίνῃ γραφική ἐπίλυσις τῶν συστημάτων :

1) $x + y - 3 > 0, \quad x - y + 4 < 0, \quad x - 4 > 0$

2) $2x - 3y + 6 > 0, \quad 4x - y - 4 < 0, \quad 4x + 3y + 12 > 0$

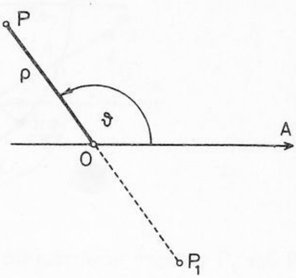
3) $2x - y + 5 < 0, \quad 2x + y + 7 < 0, \quad 3 - y > 0$

4) $5x - 2y + 10 < 0, \quad 7x - 2y + 14 > 0, \quad 2x + y - 5 < 0.$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ

68. ΠΟΛΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ.– Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ θεωρήσωμεν νέαν μέθοδον προσδιορισμοῦ τῆς θέσεως τῶν σημείων ἐπιπέδου, τῇ βοηθείᾳ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὑποθέτομεν δεδομένα τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν **πόλον**, καὶ μίαν σταθερὰν εὐθεῖαν ΟΑ, καλουμένην **πολικὸν ἄξονα** (σχ. 50).



Σχ. 50

Ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας, τυχὸν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὡρισμένον, ἂν δοθῇ τὸ μῆκος ΟΡ $=$ ρ καὶ ἡ γωνία ΑΟΡ $=$ θ. Οἱ ἀριθμοὶ ρ καὶ θ καλοῦνται **πολικαὶ συντεταγμέναι** τοῦ σημείου Ρ. Τὸ ρ καλεῖται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** καὶ ἡ γωνία θ καλεῖται **πολικὴ γωνία.**

Ἡ πολικὴ γωνία θ εἶναι **θετικὴ** ἢ **ἀρνητική,** ὅπως καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν. Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ρ εἶναι θετική, ἐὰν τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ, καὶ ἀρνητική, ὅταν τὸ Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ.

Οὕτως, εἰς τὸ (σχ. 50) ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ρ τοῦ Ρ εἶναι θετική, ἐνῷ ἡ τοῦ P_1 εἶναι ἀρνητική.

Σημείωσις : Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (διάφορον τοῦ Ο) ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον διατεταγμένον ζεῦγος (ρ, θ) πραγματικῶν ἀριθμῶν, πληρούντων τὰς σχέσεις :

$$0 < \rho \quad \text{καὶ} \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

καὶ ἀντιστρόφως : Πᾶν τοιοῦτον διατεταγμένον ζεῦγος εἶναι ἀντίστοιχον ἑνὸς καὶ μόνον σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι εἶναι τὸ δοθὲν ζεῦγος.

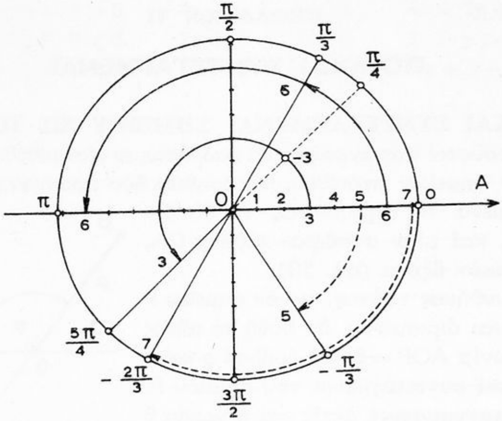
Εἶναι προφανὲς ὅτι : δύο τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοὶ (ρ, θ) **προσδιορίζουν ἓν μόνον σημεῖον,** τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται κατὰ τὸν ἀκόλουθον κανόνα.

ΚΑΝΩΝ.— Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι (ρ, θ) :

1ον : Κατασκευάζομεν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς γωνίας θ, ὅπως καὶ εἰς τὴν Τριγωνομετρίαν.

2ον : Ἐὰν ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς ρ εἶναι θετική, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς τῆς γωνίας θ τὸ τμῆμα ΟΡ $=$ ρ. Ἐὰν δὲ ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς εἶναι ἀρ-

νητική, προεκτείνομεν τὴν τελικὴν πλευρὰν τῆς γωνίας θ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως, ἐκ τοῦ πόλου, τμῆμα **OP** ἴσον πρὸς τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν (ἢ ἀπόλυτον) τοῦ ρ. Τὸ σημεῖον **P** θὰ εἶναι τότε τὸ ζητούμενον.



Σχ. 51

Εἰς τὸ (σχ. 51) ἔχομεν προσδιορίσει τὴν θέσιν τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι εἶναι :

$$\left(6, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(3, \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(-3, \frac{5\pi}{4}\right), \quad (6, \pi), \quad \left(7, -\frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{καὶ} \quad \left(5, -\frac{\pi}{3}\right).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων ἕπεται ὅτι :

Πᾶν σημεῖον P ὁρίζει ἀπειρίαν διατεταγμένων ζευγῶν (ρ,θ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

88. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι εἶναι :

$$\left(4, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(-2, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \left(4, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right), \quad (5, \pi).$$

89. Ὁμοίως τὰ σημεῖα :

$$\left(6, \pm\frac{\pi}{4}\right), \quad \left(-2, \pm\frac{\pi}{2}\right), \quad (3, \pi), \quad (-4, \pi), \quad (6, 0), \quad (-6, 0).$$

90. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα (ρ,θ) καὶ (ρ,—θ) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα.

91. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα (ρ,θ) καὶ (—ρ,θ) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πόλον.

92. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα (—ρ, π—θ) καὶ (ρ,θ) εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα.

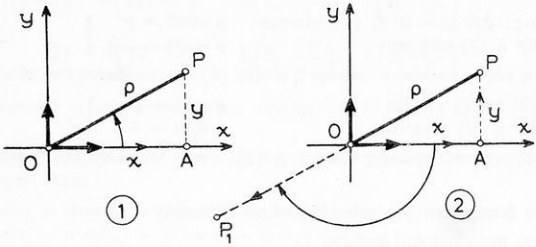
69. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΣΗΜΕΙΟΥ ΕΙΣ ΠΟΛΙΚΑΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΣ.– Ἔστωσαν Ox καὶ Oy οἱ ἄξονες τῶν ὀρθοκανονικῶν συντεταγμένων, O ὁ πόλος, καὶ Ox ὁ πολικὸς ἄξων ἑνὸς συστήματος πολικῶν συντεταγμένων (σχ. 52).

Ἔστωσαν (x, y) αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι καὶ (ρ, θ) αἱ πολικαὶ τοιαῦται ἑνὸς σημείου P. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον εἶναι $\rho > 0$ καὶ $\rho < 0$.

1ον : Ἐὰν $\boldsymbol{\rho > 0}$ (σχ. 52–1), ἐκ τοῦ τριγώνου OAP θὰ ἔχωμεν :

$$\mathbf{x = \rho \;\text{συν}\theta} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{y = \rho \;\text{ημ}\theta} \qquad (1)$$

εἰς οἱονδήποτε τεταρτημόριον καὶ ἂν εὑρίσκεται τὸ σημεῖον P.



Σχ. 52

2ον : Ἐὰν $\boldsymbol{\rho < 0}$ (σχ. 52–2), θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον P_1 τοῦ P ὡς πρὸς τὸν πόλον O, τοῦ ὁποίου αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι θὰ εἶναι (–x, –y) καὶ αἱ πολικαὶ (–ρ, θ). Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ P_1,(–ρ) εἶναι θετική, διότι $\rho < 0$ ἐξ ὑποθέσεως. Δυνάμεθα, κατὰ συνέπειαν, νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὰς ἐξισώσεις (1). Διὰ τὸ P_1 θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$\left.\begin{aligned} -\mathbf{x} &= -\rho\;\text{συν}\theta \\ -\mathbf{y} &= -\rho\;\text{ημ}\theta \end{aligned}\right\}, \ \text{ὁπότε διὰ τὸ P θὰ εἶναι :} \quad \left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \rho\;\text{συν}\theta \\ \mathbf{y} &= \rho\;\text{ημ}\theta \end{aligned}\right\}.$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει τὸ ἀκόλουθον θεώρημα :

70. ΘΕΩΡΗΜΑ : Ἐὰν ὁ πόλος συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν O τῶν συντεταγμένων καὶ ὁ πολικὸς ἄξων μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα Ox, θὰ ἔχωμεν :

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &= \rho\;\text{συν}\theta \\ \mathbf{y} &= \rho\;\text{ημ}\theta \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(I)}$$

ἔνθα (x,y) αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ τυχόντος σημείου P τοῦ ἐπιπέδου καὶ (ρ,θ) αἱ πολικαὶ συντεταγμέναι αὐτοῦ.

Αἱ ἐξισώσεις (I) φέρουν τὸ ὄνομα **ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ τῶν ὀρθογωνίων συντεταγμένων εἰς πολικὰς τοιαύτας.**

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (I) λαμβάνομεν εὐκόλως τάς :

$$\left.\begin{aligned} &\rho^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 \quad \text{καὶ} \quad \theta = \text{τοξ εφ}\left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{x}}\right), \ \mathbf{x} \neq 0 \\ &\text{ημ}\theta = \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}} \quad \text{καὶ} \quad \text{συν}\theta = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\mathbf{y}^2}} \end{aligned}\right| . \qquad \textbf{(II)}$$

Σημείωσις: Ἡ γωνία θ ὑπολογίζεται ἀπὸ τοὺς δύο τελευταίους τύπους μαζί.

71.* ΠΟΛΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ.— 1ον: Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (δ) ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $Ax + By + \Gamma = 0$, τότε διὰ τῶν τύπων (I) αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τήν :

$$\boxed{\rho\,(A\,\text{συν}\theta + B\,\text{ημ}\theta) + \Gamma = 0} \qquad (1)$$

2ον: Ἐὰν ἡ εὐθεῖα (δ) ἔχῃ ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς :

$$x\,\text{συν}\omega + y\,\text{ημ}\omega = p,$$

τότε αὕτη διὰ τῶν (1) γίνεται :

$$\rho\,\text{συν}\theta\,\text{συν}\omega + \rho\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\omega = p, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad \boxed{\rho\,\text{συν}(\theta - \omega) = p} \qquad (2)$$

Παρατηρήσεις : Διὰ $\omega = 0^0$ ἡ (2) γίνεται : $\rho\,\text{συν}\theta = p$
Διὰ $\omega = 180^0$ ἡ (2) γίνεται : $\rho\,\text{συν}\theta = -p$.

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ἡ εὐθεῖα (δ) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν πολικὸν ἄξονα Ox.

Διὰ $\omega = 90^0$ ἡ (2) γίνεται : $\rho\,\text{ημ}\theta = p$
καὶ διὰ $\omega = 270^0$ ἡ (2) γίνεται : $\rho\,\text{ημ}\theta = -p$

Εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ἡ (δ) εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν πολικὸν ἄξονα Ox.

Πᾶσα εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ πόλου ἔχει ἐξίσωσιν : $\theta = k$
ὅπου k ὡρισμένος πραγματικὸς ἀριθμός.

72. ΕΦΑΡΜΟΓΗ.— Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων $A_1(\rho_1, \theta_1)$ καὶ $A_2(\rho_2, \theta_2)$.

Λύσις : Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων A_1, A_2 εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας εἶναι :

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $\left.\begin{array}{l} x_1 = \rho_1\,\text{συν}\theta_1 \\ y_1 = \rho_1\,\text{ημ}\theta_1 \end{array}\right\}$ καὶ $\left.\begin{array}{l} x_2 = \rho_2\,\text{συν}\theta_2 \\ y_2 = \rho_2\,\text{ημ}\theta_2 \end{array}\right\}$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$d^2 = (\rho_2\,\text{συν}\theta_2 - \rho_1\,\text{συν}\theta_1)^2 + (\rho_2\text{ημ}\theta_2 - \rho_1\,\text{ημ}\theta_1)^2$$

καὶ μετὰ τὰς καταλλήλους πράξεις λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$\boxed{d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\,\text{συν}\,(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (2)$$

Διὰ $\theta_1 = \theta_2$ ἔχομεν τὴν **ἐπέκτασιν τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

93. Αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς πολικάς :

1) $x - 3y = 0$	4) $x^2 + y^2 - \alpha x = 0$	ἄξονες ὀρθοκανονικοί
2) $y + 5 = 0$	5) $x^2 - y^2 = \alpha^2$	
3) $x^2 + y^2 = 16$	6) $2xy = 7$	

94. Αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς Καρτεσιανὰς καὶ ὀρθογωνίους συντεταγμένας καὶ κανονικάς.

1) $\rho = 10$	5) $\rho^2\text{συν}^2 2\theta = \alpha^2$	9) $\rho = \alpha(1 - \text{συν}\theta)$
2) $\rho = 16\,\text{συν}\theta$	6) $\rho = \alpha\,\text{ημ}2\theta$	10) $\rho^2\text{ημ}2\theta = 16$
3) $\rho\,\text{ημ}\theta = 4$	7) $\rho = \alpha\,\text{συν}2\theta$	11) $\rho^2 = 16\,\text{ημ}2\theta$
4) $\rho = \alpha\,\text{ημ}\theta$	8) $\rho\text{συν}\theta = \alpha\text{ημ}^2\theta$	12) $\rho = \alpha\text{ημ}3\theta$.

95. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τῶν σημείων:

$$\left(5, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(-2, \frac{3\pi}{4}\right), \quad (3, \pi).$$

96. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει τῶν συντεταγμένων τῶν κορυφῶν του εἰς ὀρθοκανονικοὺς ἄξονας, πρῶτον εἰς Καρτεσιανὰς συντεταγμένας καὶ δεύτερον εἰς πολικάς.

97. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(12 - 4\sqrt{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(12, \frac{\pi}{3}\right)$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

98. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα:

$$1)\quad A\left(4, \frac{\pi}{3}\right), \quad B\left(6, \frac{2\pi}{3}\right), \quad \Gamma\left(8, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$2)\quad A\left(12, \frac{\pi}{6}\right), \quad B\left(8, \frac{5\pi}{6}\right), \quad \Gamma\left(5, \frac{5\pi}{6}\right).$$

99. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$, $B\left(8, \frac{\pi}{3}\right)$.

100. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων γωνίας δύο τεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τὴν κανονικὴν μορφὴν εἶναι:

$$\left.\begin{array}{ll} & x(\text{συν}\omega_1 + \text{συν}\omega_2) + \beta(\text{ημ}\omega_1 + \text{ημ}\omega_2) - (p_1 + p_2) = 0 \\ \text{καὶ} & x(\text{συν}\omega_1 - \text{συν}\omega_2) + y(\text{ημ}\omega_1 - \text{ημ}\omega_2) + (p_2 - p_1) = 0 \end{array}\right\}.$$

101. Εἰς ὀρθοκανονικὸν σύστημα συντενταγμένων θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α(1,6), Β(–4,2), Γ(3,–1). Νὰ ὑπολογισθῇ:

1) Τὸ μῆκος ΒΓ.
2) Τὸ ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
3) Αἱ ἐξισώσεις τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.
4) Αἱ ἐξισώσεις καὶ τὰ μήκη τῶν διαμέσων του καὶ τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων του.
5) Αἱ ἐξισώσεις τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του.
6) Αἱ ἐξισώσεις τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ.

102. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς εὐθείας (δ) ἐξισώσεως $3x - 5y + 6 = 0$, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον τῶν σημείων (3,–4), (2,1).

103. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (2,5) καὶ τοιαύτης ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν ἀξόνων τμῆμα αὐτῆς νὰ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ σημείου τούτου εἰς δύο ἴσα μέρη.

104. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $y = \lambda x + \beta$, ὅπου $\lambda = \beta$, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ποῖαι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τούτου;

105. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $E = \alpha x + \beta y$ εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν γινόμενον τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OB}(\alpha,\beta)$ καὶ $\overrightarrow{OM}(x,y)$.

106. Πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι $Ax + By + \Gamma = 0$, διὰ τὰς ὁποίας $A + B + \Gamma = 0$, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ ὁποίου ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι.

107. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος, εἰς τὸν ὁποῖον ἡ εὐθεῖα $x + 3y - 6 = 0$ διαιρεῖ τὸ τμῆμα, τὸ ἔχον συντεταγμένας τῶν ἄκρων (–3,2), (6,1).

108. Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ, οὕτως ὥστε ἡ εὐθεῖα $y = \mu x - 7$ νὰ διαιρῇ τὸ τμῆμα $A_1(3,2)$, $A_2(1,4)$ εἰς λόγον $\frac{3}{2}$.

109. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν εὐθειῶν $4x - 3y - 1 = 0$ καὶ $3x - 4y + 2 = 0$ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὗται εἶναι κάθετοι.

110. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, ὧν ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας, ἐξισώσεων: $4x-3y+4=0$ καὶ $5x+12y-8=0$ εἶναι $\frac{13}{5}$.

111. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν ἐξισώσεις:

$$3x+4y-12=0,\quad 3x-4y=0,\quad 4x+3y+24=0.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς Α καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β,Γ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τοῦ ὁποίου ζητοῦνται αἱ συντεταγμέναι.

112. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας (δ), συντελεστοῦ διευθύνσεως $\lambda=\frac{3}{4}$, καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ σημεῖον (2,4) εἶναι 2.

113. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν ἐξισώσεις $3x+2y-4=0$, $x-3y+6=0$, $4x-3y-10=0$, καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\text{εφ}A+\text{εφ}B+\text{εφ}\Gamma=\text{εφ}A\cdot\text{εφ}B\cdot\text{εφ}\Gamma,\ \text{καὶ}\ A+B+\Gamma=180^\circ.$$

114. Δίδεται ἐπίπεδον (Ρ), μία εὐθεῖα (δ) ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἓν σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου. Ἔστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Ρ) καὶ Κ ἡ προβολὴ τοῦ Η ἐπὶ τὴν (δ). Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ Κ εἶναι προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν (δ).

115. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων (Ox,Oy) δίδονται τὰ σημεῖα Α(–2, 1), Β(4,–1), Γ(7, 2). Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῆς κορυφῆς Δ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

116. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων (Ox,Oy) θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (δ), ἐξισώσεως: $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ καὶ τὰ σημεῖα $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς (δ). Ἐὰν Ι εἶναι ἡ τομὴ τῆς (δ) καὶ τοῦ τμήματος M_1M_2, νὰ ὁρισθῇ ὁ λόγος $\overrightarrow{IM_1}:\overrightarrow{IM_2}$.

117. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Μ,Ν,Ρ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, ἔχωμεν:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{M\Gamma}}\cdot\frac{\overline{N\Gamma}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1.$$

118. Δίδονται τὰ σημεῖα Α(2,1) καὶ (Β(6,4). Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν Γ,Δ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν ΑΒ.

119. Δίδονται τὰ σημεῖα Α(1,0) καὶ Β(3,6). Νὰ ὁρισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ, οὕτως ὥστε $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A\Delta})=\frac{2\pi}{3}$.

120. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία $(\vec{u},\ \vec{\upsilon})$ τῶν διανυσμάτων:

$$\vec{u}(\sqrt{2},\,-\sqrt{3})\quad\text{καὶ}\quad\vec{\upsilon}(3-\sqrt{2},\ \sqrt{3}+\sqrt{6}).$$

121. Δίδονται τὰ διανύσματα $\vec{u}(4\sqrt{3}-3,\ 3\sqrt{3}+4)$, $\vec{\upsilon}(4,3)$ καὶ ζητοῦνται τά:

$$\text{συν}(\vec{u},\ \vec{\upsilon})\quad\text{καὶ ημ}(\vec{u},\ \vec{\upsilon})\quad\text{καὶ}\quad(\vec{u},\ \vec{\upsilon}).$$

122. Θεωροῦμεν τὰ διανύσματα: $\vec{u}(-0{,}5,\ 6)$, $\vec{\upsilon}(2{,}5,\ -1)$.

Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διανυσμάτων $\left\{\vec{u}+\vec{\upsilon},\ \vec{u}-\vec{\upsilon}\right\}$.

123. Ἐπιλύσατε γραφικῶς τὰς ἀνισώσεις:

$$0\leqslant\frac{(x-1)\ (y-1)}{x+y-3}\leqslant 1.$$

124. Δίδεται ἡ εὐθεῖα (δ), ἐξισώσεως $x\,\text{συν}\omega+y\,\text{ημ}\omega=p$.
Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου $M_1(x_1,y_1)$ ἀπὸ τὴν (δ) εἶναι:

$$d=x_1\,\text{συν}\omega+y_1\,\text{ημ}\omega-p.$$

Ἐφαρμογή (δ): $7x+y-10=0$ καὶ $M_1(3,4)$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΟΥ ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Σελίς

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΣΕΙΡΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ — ΕΚΘΕΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ — ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΙΣΑΙ ΚΑΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Σελίς

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΕΚΔΟΣΙΣ Α', 1968 — ΑΝΤΙΤΥΠΑ 32.500 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ 1795/17/12/1968

'Εκτύπωσις — Βιβλιοδεσία 'Α/φῶν Γ. ΡΟΔΗ — 'Αμαρουσίου 59 — 'Αμαρούσιον

ΟΕ
ΔΒ