Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1982

Λ. Αδαμόπουλος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

Μέ ἀπόφαση τῆς Ἑλληνικῆς Κυβερνήσεως τά διδακτικά βιβλία τοῦ Δημοτικοῦ, Γυμνασίου καί Λυκείου τυπώνονται ἀπό τόν Ὀργανισμό Ἐκδόσεως Διδακτικῶν Βιβλίων καί μοιράζονται ΔΩΡΕΑΝ.

Κ. ΙΟΡΔΑΝΙΔΗΣ - Δ. Λ. ΚΑΡΑΓΕΩΡΓΟΣ - Κ. ΚΩΣΤΑΚΗΣ
Α. ΜΑΚΡΙΔΗΣ - Β. ΝΑΣΟΠΟΥΛΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1982

ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ C ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1.1. Εἰσαγωγή

Στήν προηγούμενη τάξη μάθαμε ὅτι οἱ ρίζες τῆς δευτεροβάθμιας ἐξισώσεως

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \quad \alpha\neq 0, \quad \alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R} \tag{1}$$

δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \tag{2}$$

Ἄν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$, τότε οἱ ρίζες αὐτές εἶναι πραγματικές. Ἄν ὅμως εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, τότε ἡ (1) δέν ἔχει ρίζες στό **R**. Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση οἱ ρίζες τῆς (1) ἔχουν τή μορφή $\kappa\pm\lambda i$ καί προκύπτουν ἀπό τόν τύπο (2), ἄν αὐτός γραφτεῖ[1]

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\, i \tag{3}$$

Οἱ ἀριθμοί $\kappa\pm\lambda i$ ἀνήκουν σ' ἕνα σύνολο εὐρύτερο ἀπό τό **R**, στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Εἰδικότερα ἡ ἐξίσωση $x^2=-1 \Leftrightarrow x^2+1=0$ ἔχει ρίζες τίς $\pm i$, δηλαδή εἶναι $i^2=-1$ καί $(-i)^2=-1$.

Μετά τίς παραπάνω παραδοχές καί τή διαπίστωση ὅτι $i^2=-1$ καταλήξαμε στό συμπέρασμα ὅτι **οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί «συμπεριφέρονται» ὅπως καί τά διώνυμα $\alpha+\beta x$ μέ $x=i$.**

Ἄς θυμηθοῦμε μέ παραδείγματα πῶς ἐκτελοῦμε τίς βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Γιά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $3+2i$ καί $4+5i$ ἔχουμε:

1. $(3+2i)+(4+5i)=3+2i+4+5i=(3+4)+(2+5)i=7+7i$, καί γενικὰ

$$(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i \tag{4}$$

---

1. Ἡ μορφή αὐτή ὀφείλεται στόν Ἑλβετό μαθηματικό τοῦ 18ου αἰώνα Euler (1707-1783) ὁ ὁποῖος συμβόλισε τήν $\sqrt{-1}$ μέ τό i πού εἶναι τό ἀρχικό γράμμα τῆς λέξεως imaginare (φανταστικός). Προηγουμένως οἱ μαθηματικοί τοῦ 16ου αἰ. εἶχαν γράψει «τυπικά» $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}=\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}\cdot\sqrt{-1}$, ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$.

Τόν 19ο αἰ. ὁ Γερμανός μαθηματικός Gauss (1777-1855) παρέστησε γεωμετρικά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς μέ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί ἀπέδειξε ἔτσι ὅτι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι ἐξίσου συγκεκριμένοι (καί ὄχι φανταστικοί) ὅπως καί οἱ πραγματικοί ἀριθμοί.

2. $$\begin{aligned}(3+2i)\cdot(4+5i) &= (3\cdot 4)+(3\cdot 5)i+(2\cdot 4)i+(2\cdot 5)i^2\\ &= (3\cdot 4)+(3\cdot 5)i+(2\cdot 4)i+(2\cdot 5)(-1)\\ &= (3\cdot 4-2\cdot 5)+(3\cdot 5+2\cdot 4)i = 2+23i,\end{aligned}$$ καί γενικά

$$(\alpha_1+\beta_1 i).(\alpha_2+\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i \quad (5)$$

Ἀκόμα εἶναι φανερό ὅτι στό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$ μποροῦμε νά ἀντιστοιχίσουμε τό διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) καί ἀντίστροφα. Στήν ἑπόμενη παράγραφο θά ὁρίσουμε τίς βασικές πράξεις πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό στό σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ ἔτσι, ὥστε νά τό ταυτίσουμε μέ τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

1.2. Τό σύνολο C σάν σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ R×R.

Θεωροῦμε τό σύνολο

$$\mathbf{C} = \{z \mid z=(\alpha,\beta),\quad \alpha\in\mathbf{R},\quad \beta\in\mathbf{R}\}$$

καί τή γνωστή ἰσότητα τῶν στοιχείων του

$$(\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \quad \text{καί} \quad \beta_1=\beta_2. \quad (1)$$

Στό σύνολο **C** ὁρίζουμε δύο βασικές πράξεις, τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό, μέ τά συνήθη σύμβολα "+" καί "·". Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο στοιχείων (α_1,β_1) καί (α_2,β_2) τοῦ **C** ὁρίζονται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Τό ἄθροισμα: $$(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2) \quad (2)$$

Τό γινόμενο: $$(\alpha_1,\beta_1).(\alpha_2,\beta_2)=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2,\ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \quad (3)$$

(Δεῖτε τή σκοπιμότητα αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν παραβάλλοντάς τους μέ τούς τύπους (4) καί (5) τῆς παραγράφου 1.1.).

Ἄς πάρουμε τώρα τό ὑποσύνολο **R′** τοῦ **C**, πού ἔχει γιά στοιχεῖα του ὅλα τά στοιχεῖα τῆς μορφῆς $(\alpha,0)$, καί ἄς κάνουμε μεταξύ αὐτοῦ καί τοῦ **R** τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία

$$\mathbf{R}' \ni (\alpha,0) \leftrightarrow \alpha\in\mathbf{R}$$

Γιά δύο στοιχεῖα $(\alpha_1,0)$ καί $(\alpha_2,0)$ τοῦ **R′** εἶναι

$$(\alpha_1,0)+(\alpha_2,0)=(\alpha_1+\alpha_2,0) \leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2)\in\mathbf{R} \quad \text{καί}$$
$$(\alpha_1,0)\cdot(\alpha_2,0)=(\alpha_1\alpha_2,0) \leftrightarrow (\alpha_1\cdot\alpha_2)\in\mathbf{R}$$

Δηλαδή: α) Τό ἄθροισμα δύο στοιχείων τοῦ **R′** ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα στό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ **R**, καί

β) Τό γινόμενο δύο στοιχείων τοῦ **R′** ἀντιστοιχίζεται ἀμφιμονοσήμαντα στό γινόμενο τῶν ἀντίστοιχων στοιχείων τοῦ **R**.

Ἡ διαπίστωσή μας αὐτή μᾶς ἐπιτρέπει νά «ταυτίσουμε» τό **R′** μέ τό **R** καί νά θεωροῦμε ἔτσι ὅτι εἶναι $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$. Μετά ἀπό αὐτό μποροῦμε νά γράφουμε:

$$(\alpha, 0) = \alpha \tag{4}$$

Ἄν ὁρίσουμε $(\alpha,\beta)^2 = (\alpha,\beta)\cdot(\alpha,\beta)$ καί συμβολίσουμε μέ i τό στοιχεῖο $(0,1)$, τότε θά εἶναι:

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$$

καί σύμφωνα μέ τήν (4)

$$i^2 = -1 \tag{5}$$

Ἐπειδή ὅμως εἶναι $(\beta,0)i = (\beta,0)\cdot(0,1) = (0,\beta)$, θά ἔχουμε:

$$(\alpha,\beta) = (\alpha,0) + (0,\beta) = \alpha + (\beta,0)i = \alpha+\beta i \tag{6}$$

Ἄρα: **τό τυχόν στοιχεῖο (α,β) τοῦ C «ταυτίζεται» μέ τό γνωστό μας μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$.** Ἔτσι τό σύνολο C ἐφοδιασμένο μέ τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, πού τά ἐξαγόμενά τους δίνουν οἱ ἰσότητες (2) καί (3), εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τά διατεταγμένα ζεύγη-στοιχεῖα τοῦ C—ὀνομάζονται μιγαδικοί ἀριθμοί.

Στό λογισμό συνήθως οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί χρησιμοποιοῦνται μέ τή μορφή $\alpha+\beta i$ ἀντί (α,β). Ἡ χρησιμότητα τῆς μορφῆς (α,β) θά φανεῖ στή γεωμετρική τους παράσταση.

Ἡ παραπάνω «ταύτιση» $(\alpha,0) = \alpha$ μᾶς ἐπιτρέπει νά γράψουμε

$$\kappa.(\alpha,\beta) = (\kappa\alpha,\kappa\beta), \quad \kappa \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

1.3. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό C.

I. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ πρόσθεση, ὅπως ὁρίστηκε, ἔχει τίς ἰδιότητες

$$z_1+z_2 = z_2+z_1 \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$
$$(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

γιά ὅλα τά $z_1,z_2,z_3 \in \mathbf{C}$.

Ἀκόμα ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 1. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός ζ^* τέτοιος, ὥστε γιά ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z νά ἰσχύει:

$$z + \zeta^* = z \tag{1}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha+\beta i$ καί $\zeta^* = x+yi$, τότε ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha+\beta i) + (x+yi) = \alpha+\beta i \Leftrightarrow (\alpha+x) + (\beta+y)i = \alpha+\beta i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+x = \alpha \quad \text{καί} \quad \beta+y = \beta \Leftrightarrow x=0 \quad \text{καί} \quad y=0$$

Ἄρα τό στοιχεῖο $\zeta^* = 0+0i$ εἶναι τό μοναδικό πού ἱκανοποιεῖ τήν (1) γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$. **Τό στοιχεῖο $0 + 0i$ ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τήν πρόσθεση στό C** καί γιά εὐκολία τό λέμε **μηδέν** καί τό συμβολίζουμε μέ 0.

Πρόταση 2. Γιά κάθε μιγαδικό ἀριθμό z ὑπάρχει ἕνας καί μόνο μιγαδικός ἀριθμός z^* τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει:

$$z + z^* = 0 \tag{2}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha+\beta i$ καί $z^* = x+yi$, τότε ἡ (2) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha+\beta i) + (x+yi) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+x) + (\beta+y)i = 0+0i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha+x = 0 \quad \text{καί} \quad \beta+y = 0 \Leftrightarrow x = -\alpha \quad \text{καί} \quad y = -\beta$$

Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = (-\alpha) + (-\beta)i$ εἶναι ὁ μοναδικός γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha+\beta i$, πού ἱκανοποιεῖ τή σχέση (2).

Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $(-\alpha)+(-\beta)i$, πού γιά εὐκολία τόν γράφουμε $-\alpha-\beta i$ καί τόν συμβολίζουμε μέ $-z$, **ὀνομάζεται ἀντίθετος τοῦ $z = \alpha+\beta i$ ἤ τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $z = \alpha+\beta i$ γιά τήν πρόσθεση στό C.**

Πρόταση 3. Στό σύνολο C ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_1+z = z_2+z \tag{3}$$

Ἀπόδειξη. α) Ἡ συνεπαγωγή $z_1 = z_2 \Rightarrow z_1+z = z_2+z$ γιά ὅλα τά $z \in \mathbf{C}$ εἶναι φανερή ἀπό τόν ὁρισμό τῆς προσθέσεως.

β) Θά δείξουμε τήν συνεπαγωγή $z_1+z = z_2+z \Rightarrow z_1=z_2$, πού ἀποτελεῖ **τό νόμο τῆς διαγραφῆς στήν πρόσθεση στό C.**

Πράγματι:

$$\begin{aligned} z_1+z = z_2+z &\Rightarrow (z_1+z)+(-z) = (z_2+z)+(-z) \\ &\Leftrightarrow z_1+[z+(-z)] = z_2+[z+(-z)] \\ &\Leftrightarrow z_1+0 = z_2+0 \\ &\Leftrightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Πρόταση 4. Ἡ ἐξίσωση $z_1+z = z_2$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$ (4) ἔχει μοναδική λύση στό C τήν $z = z_2+(-z_1)$.

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} z_1+z = z_2 &\Leftrightarrow (z_1+z)+(-z_1) = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow (z+z_1)+(-z_1) = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow z+[z_1+(-z_1)] = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow z+0 = z_2+(-z_1) \\ &\Leftrightarrow z = z_2+(-z_1). \end{aligned}$$

Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως (4) ὀνομάζεται **διαφορά τοῦ z_1 ἀπό τό z_2** *καί συμβολίζεται μέ z_2-z_1. Δηλαδή εἶναι*

$$z_2-z_1 = z_2+(-z_1) \tag{5}$$

Ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τή διαφορά δυό μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὀνομάζεται **ἀφαίρεση.**

II. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Εἶναι φανερό ὅτι καί ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει τίς ἰδιότητες

$$z_1 . z_2 = z_2 . z_1 \qquad \text{(ἀντιμεταθετική)}$$
$$(z_1 . z_2) . z_3 = z_1 . (z_2 . z_3) \qquad \text{(προσεταιριστική)}$$

καί ἀκόμη εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση, δηλαδή

$$z_1 . (z_2 + z_3) = z_1 . z_2 + z_1 . z_3$$

γιά ὅλα τά $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$.
Θά δείξουμε ὅτι καί στόν πολλαπλασιασμό ἰσχύουν ἀντίστοιχες προτάσεις μέ ἐκεῖνες πού δείξαμε στήν πρόσθεση.

Πρόταση 1΄. Ὑπάρχει ἕνας καί μόνο $\zeta^* \in \mathbf{C}$ τέτοιος, ὥστε γιά ὅλα τά $z \in \mathbf{C}$ νά ἰσχύει:

$$z . \zeta^* = z \qquad (1')$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha + \beta i$ καί $\zeta^* = x + yi$, τότε ἡ (1΄) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha + \beta i)(x + yi) = \alpha + \beta i \Leftrightarrow (\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x)i = \alpha + \beta i \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha x - \beta y = \alpha$ καί $\alpha y + \beta x = \beta$. Ἄν ἐπιπλέον εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τότε ἔχουμε τή μοναδική λύση $x = 1$ καί $y = 0$, ἐνῶ, ἄν εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$, τότε τό σύστημα εἶναι ταυτοτικό καί συνεπῶς ἔχει καί τή λύση $x = 1$, $y = 0$.
Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\zeta^* = 1 + 0i$ εἶναι ὁ μοναδικός πού ἱκανοποιεῖ τήν (1΄) γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$. **Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1 + 0i$ ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τόν πολλαπλασιασμό στό C** καί γιά εὐκολία τόν λέμε **μονάδα** καί τόν συμβολίζουμε μέ 1.

Πρόταση 2΄. Γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$ μέ $z \neq 0$ ὑπάρχει ἕνα καί μόνο $z^* \in \mathbf{C}$, ὥστε νά ἰσχύει:

$$z . z^* = 1 \qquad (2')$$

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $z = \alpha + \beta i \neq 0$ καί $z^* = x + yi$, ἡ (2΄) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(\alpha x - \beta y) + (\alpha y + \beta x)i = 1 + 0i \Leftrightarrow \alpha x - \beta y = 1 \quad \text{καί} \quad \beta x + \alpha y = 0$$

καί, ἀφοῦ εἶναι $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τό σύστημα θά ἔχει τή μοναδική λύση $x = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$ καί $y = \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. Ἄρα ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z^* = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$ εἶναι ὁ μοναδικός γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + \beta i \neq 0$ πού ἱκανοποιεῖ τή (2΄).
Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} + \dfrac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} i$, πού συμβολίζεται z^{-1} ἤ $\dfrac{1}{z}$, ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ z ἤ καί τό συμμετρικό στοιχεῖο τοῦ $z = \alpha + \beta i \neq 0$ γιά τόν πολλαπλασιασμό στό C. Εἶναι λοιπόν

$$z^{-1} = (\alpha+\beta i)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}i, \quad z \neq 0$$

Πρόταση 3΄. Στό C ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: $z_1.z = z_2.z$ **καί** $z \neq 0 \Rightarrow z_1=z_2$ (3΄)
(Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι **ὁ νόμος τῆς διαγραφῆς στόν πολλαπλασιασμό στό C** καί ἡ ἀπόδειξη ἀφήνεται γιά ἄσκηση).

Πρόταση 4΄. Ἡ ἐξίσωση $z_1.z = z_2$, $z_1,z_2 \in C$, $z_1 \neq 0$ (4΄) **ἔχει μοναδική λύση στό C τήν** $z = z_2.z_1^{-1}$
(Ἡ ἀπόδειξη ἀφήνεται γιά ἄσκηση).

Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως (4΄) ὀνομάζεται πηλίκο τοῦ z_2 *διά* z_1 *καί συμβολίζεται* $z_2{:}z_1$ *ἤ* $\frac{z_2}{z_1}$. *Δηλαδή εἶναι*

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2.z_1^{-1} \quad , \quad z_1 \neq 0 \tag{5'}$$

Ἡ πράξη μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὀνομάζεται **διαίρεση.**

— **Σ' ἕνα μιγαδικό ἀριθμό** $z = \alpha+\beta i$ **τό** α **ὀνομάζεται πραγματικό μέρος καί τό** β **ὀνομάζεται φανταστικό μέρος**(1).

— Οἱ δυνάμεις $(\alpha+\beta i)^\kappa$, $\kappa \in \mathbf{Z}$ ὁρίζονται ὅπως καί στό **R** μέ $z^1=z$ γιά κάθε $z \in C$, $z^0=1$ ὅταν $z\neq 0$, καί $z\neq 0$ ὅταν $\kappa < 0$. Οἱ δυνάμεις ὑπολογίζονται ὅπως καί οἱ δυνάμεις $(\alpha+\beta x)^\nu$ μέ $x=i$ καί $i^2=-1$.

1.4. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε ὅτι: $i^0+i^1+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7 = 0$.
2. Προσδιορίστε τά $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$, ὥστε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί
   $(3\alpha+14\beta) + (2\alpha-\beta)i$ καί $7-i$ νά εἶναι ἴσοι.
3. Ἄν $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ καί $(\alpha+\beta)-\gamma i = 5\gamma+(\alpha-\beta)i$ δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $2\alpha-\beta=\gamma$.
4. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}-\{0\}$ καί $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{\gamma}$, δεῖξτε ὅτι:
   $$2(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma i = 5\alpha+i.$$
5. Νά φέρετε στή μορφή $\alpha+\beta i$ τίς παραστάσεις

   α) $3i+2i^3+i^{202}-5i^{-147}-2i^7+i^{12}$ β) $\frac{5-2i}{1-2i}$

   γ) $\frac{3}{2-i\sqrt{3}} - (5+i\sqrt{2})^{-2}$ δ) $\frac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2\,(2-3i)}$.
6. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^4+81 = 0$ ἱκανοποιεῖται ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς:

---

1. Τό πραγματικό μέρος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha+\beta i$ συμβολίζεται Rez καί τό φανταστικό Imz. Δηλαδή εἶναι Rez $= \alpha$ καί Imz $= \beta$. Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i$ μέ $\alpha\beta \neq 0$ ὀνομάζεται καθαρός ἤ γνήσιος μιγαδικός ἀριθμός.

$x_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $x_2=\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $x_3=\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1-i)$ καί $x_4=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

7. Δεῖξτε ὅτι στό σύνολο **C** α) ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική καί β) ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική καί ἀκόμη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση.

1.5. Συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί

I. Ὁρισμός

Ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\alpha-\beta i$ ὀνομάζεται συζυγής τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=\alpha+\beta i$ καί συμβολίζεται μέ $\bar{z}$, δηλαδή $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ἐπειδή εἶναι $\overline{(\bar{z})}=\alpha+\beta i=z$, **οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z καί $\bar{z}$ ὀνομάζονται συζυγεῖς μιγαδικοί ἀριθμοί.**

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι $z+\bar{z}=2\alpha$, καί $z\bar{z}=\alpha^2+\beta^2$, δηλαδή τό ἄθροισμα καί τό γινόμενο δύο συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

II. Ἰδιότητες τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

Γιά τούς συζυγεῖς μιγαδικούς ἀριθμούς ἀναφέρουμε μερικές χρήσιμες ἰδιότητες.

α) $\overline{(-z)}=-\bar{z}$ β) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$ γ) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$

δ) $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\nu}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ ε) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$

στ΄) $\overline{z_1\cdot z_2\ldots z_\nu}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\ldots\bar{z}_\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ ζ) $\overline{(z^\nu)}=(\bar{z})^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$

η) $\overline{(z^{-1})}=(\bar{z})^{-1}$, $z\neq0$ θ) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2\neq0$ καί ι) $\overline{\alpha z}=\alpha\bar{z}$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Ἀποδείξεις.

β) Ἄν εἶναι $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε θά εἶναι $z_1+z_2=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)i$ καί συνεπῶς $\overline{z_1+z_2}=(\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1+\beta_2)i=(\alpha_1-\beta_1 i)+(\alpha_2-\beta_2 i)=\bar{z}_1+\bar{z}_2$.

δ) Ἀπό τή β) καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι γιά $\nu=\kappa$ ἰσχύει $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\kappa$ παίρνουμε: $\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa+z_{\kappa+1}}=\overline{(z_1+z_2+\ldots+z_\kappa)+z_{\kappa+1}}=\overline{z_1+z_2+\ldots+z_\kappa}+\bar{z}_{\kappa+1}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\ldots+\bar{z}_\kappa+\bar{z}_{\kappa+1}$, πού ἀποδεικνύει ὅτι ἡ ἰδιότητα ἰσχύει γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$.

ε) Ἄν εἶναι $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$, τότε θά εἶναι

$$z_1\cdot z_2=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$$

καί συνεπῶς
$$\overline{z_1\cdot z_2}=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i \quad (1)$$

Ἐξάλλου $\bar{z}_1\,\bar{z}_2 = (\alpha_1-\beta_1 i)\cdot(\alpha_2-\beta_2 i) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)-(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)i$ (2)
Οἱ (1) καί (2) ἀποδεικνύουν τή ζητούμενη.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ὑπόλοιπων ἰδιοτήτων ἀφήνονται γιά ἄσκηση.

1.6. Ἐφαρμογές

1. **Οἱ μόνοι μή πραγματικοί μιγαδικοί ἀριθμοί, πού τό ἄθροισμα καί τό γινόμενό τους εἶναι πραγματικός ἀριθμός, εἶναι οἱ συζυγεῖς.**

Ἀπόδειξη: Ἄς εἶναι $z_1, z_2 \in \mathbf{C}-\mathbf{R}$ μέ τήν ἰδιότητα $(z_1+z_2)\in\mathbf{R}$ καί $(z_1 . z_2) \in\mathbf{R}$. Ἄν εἶναι $z_1 = x_1+y_1 i$ καί $z_2 = x_2+y_2 i$, τότε ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν δίνει τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + y_2 = 0 \\ x_1y_2 + x_2y_1 = 0 \\ y_1\cdot y_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y_2 = -y_1 \\ x_2 = x_1 \\ y_1\cdot y_2 \neq 0 \end{array}\right\},$$

ὁπότε ὁ $z_2 = x_2+y_2 i$ γράφεται $z_2 = x_1 - y_1 i$ καί συνεπῶς $z_2 = \bar{z}_1$.

2. **Ἄν ἕνας μιγαδικός ἀριθμός εἶναι ρίζα μιᾶς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως μέ πραγματικούς συντελεστές, τότε καί ὁ συζυγής του εἶναι ἐπίσης ρίζα αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως.**

Ἀπόδειξη: Ἔστω ὅτι ἔχουμε τήν πολυωνυμική ἐξίσωση

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x+\alpha_o = 0, \quad \alpha_\nu \neq 0$$

μέ πραγματικούς συντελεστές, ἡ ὁποία ἔχει γιά ρίζα της τό μιγαδικό ἀριθμό z, δηλαδή $f(z) = 0$. Θά δείξουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει γιά ρίζα της καί τόν $\bar{z}$, δηλαδή $f(\bar{z}) = 0$. Ἐπειδή ὁ συζυγής τοῦ $0+0i$ εἶναι ὁ ἑαυτός του, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Πράγματι·
$$\begin{aligned}
\overline{f(z)} &= \overline{\alpha_\nu z^\nu+\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1} + \ldots +\alpha_1 z+\alpha_o} \\
&= \overline{\alpha_\nu z^\nu} + \overline{\alpha_{\nu-1}z^{\nu-1}} +\ldots+\overline{\alpha_1 z}+\overline{\alpha_o} && \text{(Ἰδιότ. δ) τῆς 1.5.)} \\
&= \alpha_\nu\overline{z^\nu}+\alpha_{\nu-1}\,\overline{z^{\nu-1}}+\ldots+ \alpha_1\bar{z} + \alpha_o && \text{(Ἰδιότ. i) τῆς 1.5.)} \\
&= \alpha_\nu(\bar{z})^\nu+\alpha_{\nu-1}(\bar{z})^{\nu-1} + \ldots+ \alpha_1\bar{z} + \alpha_o && \text{(Ἰδιότ. ζ) τῆς 1.5.)} \\
&= f(\bar{z}).
\end{aligned}$$

Στή θεωρία τῶν πολυωνύμων ἡ πρόταση αὐτή ἀποδεικνύεται καί μέ ἄλλο τρόπο.

3. **Νά ἐπιλυθεῖ στό C ἡ ἐξίσωση $2-3z+\overline{(-z)} = 0$** (1)

Ἐπίλυση: Ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα $2-3z-\bar{z} = 0$, καί ἄν εἶναι $z = x+yi$, τότε ἡ τελευταία γίνεται:

$2-3(x+yi) - (x-yi) = 0 \Leftrightarrow (-4x+2) + (-2y)i = 0 \Leftrightarrow$

$$-4x+2 = 0 \text{ καί } -2y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ καί } y=0.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) ἔχει τή λύση $z = \frac{1}{2}+0i = \frac{1}{2}$.

Δίνουμε ἀκόμη μία ἐφαρμογή πού, ἄν καί δέν ἀποτελεῖ ἐφαρμογή τῶν ἰδιοτήτων τῶν συζυγῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, παρουσιάζει ἐνδιαφέρον.

4. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό **«Τετραγωνική ρίζα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi = \alpha+\beta i$ ὀνομάζουμε κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = x+yi$ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $z^2 = \xi$»**, νά βρεῖτε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ $\xi = 5-12i$.

Λύση: Ἄν ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = x + yi$ εἶναι ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ $\xi = 5-12i$, τότε ἔχουμε:

$$\begin{aligned} &(x + yi)^2 = 5-12i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & x^2-y^2+2xyi = 5-12i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & x^2-y^2 = 5 \quad \text{καί} \quad 2xy = -12 \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἄρα θά εἶναι καί $(x^2-y^2)^2 = 25$ καί $4x^2y^2 = 144$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς δυό τελευταῖες ἐξισώσεις ἔχουμε:

$$(x^2+y^2)^2 = 169 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 13.$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα $\left.\begin{matrix} x^2-y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{matrix}\right\}$

παίρνουμε $\left.\begin{matrix} x = \pm 3 \\ y = \pm 2 \end{matrix}\right\}$

Ἀφοῦ ὅμως εἶναι καί $2xy = -12$, τό σύστημα (1) θά ἔχει τίς λύσεις

$$x_1 = 3 \quad , \quad y_1 = -2 \quad \text{καί} \quad x_2 = -3, \quad y_2 = 2.$$

Ἄρα ὑπάρχουν δύο τετραγωνικές ρίζες

$$z_1 = 3-2i \quad \text{καί} \quad z_2 = -3+2i \quad \text{τοῦ} \quad \xi = 5-12i.$$

Γενικά δεῖξτε ὅτι **κάθε μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i \neq 0+0i$ ἔχει δύο διακεκριμένες τετραγωνικές ρίζες.**

1.7. Ἀσκήσεις

1. Ὑπολογίστε τούς $x, y \in \mathbf{R}$ ὥστε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1 = -3+i(2x-y)$ καί $z_2 = x-5y-3i$ νά εἶναι συζυγεῖς.
2. Ἐπιλύστε τίς παρακάτω ἐξισώσεις μέ ἄγνωστο τό μιγαδικό z
   α) $\bar{z} = -z$, β) $\bar{z} = -4z$ καί γ) $z^2+\bar{z} = 0$.
3. Ἄν $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, τότε: $z_1 . z_2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 = 0 \vee z_2 = 0)$.
4. Ἄν $z_1, z_2, z \in \mathbf{C}$ μέ $z_2 . z \neq 0$, δεῖξτε ὅτι $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 . z}{z_2 . z}$.
5. Ἄν $z^2 = \bar{z}^2$, τότε θά εἶναι μόνο $z \in \mathbf{R}$ ἤ $z \in \mathbf{I}$[1]
6. Ὑπολογίστε τούς $x, y \in \mathbf{R}$ ὥστε νά ἰσχύει:
   $(i-x)^2 - (i+x)^2 + y + 1 = \dfrac{1}{i}$.
7. Ὑπολογίστε τόν $x \in \mathbf{R}$ ὥστε νά ἰσχύει $1+2i\sqrt{2} = 3 . \dfrac{1+xi}{1-xi}$.
8. Βρεῖτε τίς τετραγωνικές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ $2+2i$.
9. Ὑπολογίστε τούς $x, y \in \mathbf{R}$, ὥστε νά ἰσχύει $\dfrac{x}{1+2i} + \dfrac{y}{3+2i} = \dfrac{5+6i}{8i-1}$.
10. Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν ν-ὅρων:
    $i+(2+3i)+(4+5i)+(6+7i) + \ldots + [2\nu-2 + (2\nu-1)i], \quad \nu \in \mathbf{N}$
11. Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $z^2-(3+i)z+4+3i = 0$, $z \in \mathbf{C}$.

---

1. Τό σύνολο **I** εἶναι τό ὑποσύνολο τοῦ **C** μέ στοιχεῖα τῆς μορφῆς $(0,\beta)$, $\beta \neq 0$ καί ὀνομάζεται σύνολο τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.

1.8. Μέτρο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

Ι. Ὁρισμός

Γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha+\beta i$ ὁ μή ἀρνητικός ἀριθμός $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ ὀνομάζεται ἀπόλυτη τιμή ἤ μέτρο του καί συμβολίζεται μέ $|z|$, δηλαδή

$$|z| = |\alpha+\beta i| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Ἐπειδή εἶναι $z\bar{z} = \alpha^2+\beta^2$, θά εἶναι

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι εἶναι $|z| \geq 0$ γιά κάθε $z \in \mathbf{C}$.

Ὅταν εἶναι $z = \alpha+0i$, ἔχουμε $|z| = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$. Ὅταν εἶναι $z = \alpha+\beta i$ καί $\beta \neq 0$, τότε ἰσχύει $|z|^2 \neq z^2$, γιατί ὁ $|z|^2$ εἶναι θετικός, ἐνῶ ὁ z^2 εἶναι ἀρνητικός ἤ εἶναι γνήσιος μιγαδικός ἀριθμός. Αὐτή εἶναι μία σπουδαία διαφορά μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ **R** καί τοῦ **C**–**R**.

ΙΙ. Ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἀναφέρουμε μερικές βασικές ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἄν $z, z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί, τότε θά εἶναι:

α) $|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (τριγωνική ἀνισότητα)

β) $|z_1+z_2+\ldots+z_\nu| \leq |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_\nu|$, $\nu \in \mathbf{N}$

γ) $||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

δ) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ε) $|z_1 \cdot z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| \cdot |z_2| \ldots |z_\nu|$, $\nu \in \mathbf{N}$

στ) $|z^\nu| = |z|^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ ζ) $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, $z \neq 0$

η) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

Ἀποδείξεις:

α) Ἄν $z_1 = \alpha_1+\beta_1 i$ καί $z_2 = \alpha_2+\beta_2 i$, ἡ ζητούμενη γίνεται

$|(\alpha_1+\alpha_2) + (\beta_1+\beta_2)i| \leq |\alpha_1+\beta_1 i| + |\alpha_2+\beta_2 i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2} + \sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}$ καί, ἀφοῦ τά μέλη εἶναι μή ἀρνητικοί πραγματικοί, παίρνουμε ἰσοδύναμα

$(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\beta_1+\beta_2)^2 \leq \alpha_1^2+\beta_1^2+\alpha_2^2+\beta_2^2+2\sqrt{(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2)} \Leftrightarrow$

$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 \leq \sqrt{\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2}$ (1), ὁπότε

i) Ἄν $\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2<0$, ἡ (1) ἀληθεύει σάν γνήσια ἀνισότητα.

ii) Ἄν $0 \leq \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2$, τότε ἡ (1) γίνεται ἰσοδύναμα:

$$\alpha_1^2\alpha_2^2+\beta_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \leq \alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_1^2\beta_2^2+\alpha_2^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2 \Leftrightarrow$$
$$0 \leq (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2,$$ ἡ ὁποία ἀληθεύει πάντα.

Ἡ ζητούμενη θά ἰσχύει σάν ἰσότητα, ὅταν εἶναι

$$0\leq\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2 \text{ καί } \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0 \qquad (2)$$

Ἀφοῦ $z_1\cdot\bar{z_2} = (\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i$, οἱ σχέσεις (2) ἰσοδυναμοῦν μέ τήν: $(z_1\cdot\bar{z_2})\geq0$. Ἄρα ἰσχύει $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ καί γίνεται ἰσότητα, ὅταν $(z_1\bar{z_2})\geq0$ ἤ ἰσοδύναμα ὅταν $(\bar{z_1}z_2)\geq0$.
Ἄς θυμηθοῦμε ὅτι ἡ ἴδια σχέση στούς πραγματικούς ἀριθμούς εἶναι $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ καί ἡ ἰσότητα ἰσχύει, ὅταν $\alpha\cdot\beta\geq0$.

δ) Ἔχουμε $|z_1\cdot z_2|^2 = (z_1\cdot z_2)\cdot(\overline{z_1z_2}) = (z_1z_2)\cdot(\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}) =$
$$= (z_1\cdot\bar{z_1})\cdot(z_2\cdot\bar{z_2}) = |z_1|^2\cdot|z_2|^2 = (|z_1|\cdot|z_2|)^2$$
$$\Leftrightarrow |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|.$$

1.9. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε τίς ὑπόλοιπες ἰδιότητες τῆς παραγράφου 1.8.
2. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$ ἰσχύει: $||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.
3. Βρεῖτε τά μέτρα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

   α) $\dfrac{4-5i}{2+i}$ β) $\dfrac{(\sqrt{2}+i)^3}{i(1-i\sqrt{3})^2}$ γ) $\left(\dfrac{3i(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})}{4-i\sqrt{3}}\right)^4$

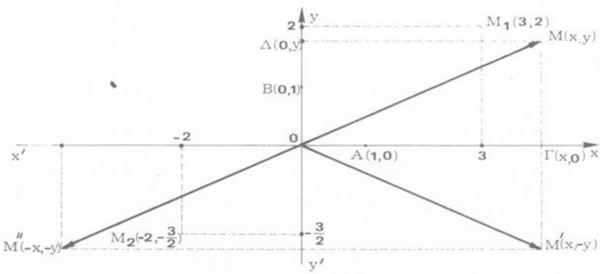
   i) φέρνοντας πρῶτα τούς μιγαδικούς στή μορφή $\alpha+\beta i$ καί
   ii) χρησιμοποιώντας τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου τῶν μιγαδικῶν.
4. Βρεῖτε τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$.
5. Βρεῖτε τό μιγαδικό z, γιά τόν ὁποῖο $|z-1| = |z-2| = |z-i|$.
6. Ἄν $z = x+yi$, βρεῖτε τή σχέση μεταξύ τῶν x καί y, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα $|z-i| = |z+2|$.
7. Ἐπιλύστε στό σύνολο $\mathbf{C}$ τήν ἐξίσωση $z^2+|z| = 0$.
8. Βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει:
   $$|z|^2-2iz+2\alpha(1+i) = 0, \quad \alpha \geqslant 0$$
   περιορίζοντας κατάλληλα τόν α.
9. Ἄν z_1,z_2,z_3,z_4 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί μέ $z_3.z_4 \neq 0$ καί
   $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leqslant 1$, δεῖξτε ὅτι $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\dfrac{z_2}{z_4}\right|^2 \geqslant |z_1+z_2|^2$.
10. Ἄν οἱ μιγαδικοί z_1, z_2 ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις
    $|z_1+z_2| = |z_1| = |z_2|$, $|z_1| \neq 0$, δεῖξτε ὅτι
    $|z_1-z_2| = \sqrt{3}|z_1|$.

2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

2.1. Ἡ ἀπεικόνιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν στά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση σέ κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = x+yi$ τοῦ ζεύγους $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ ὁδηγεῖ, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως(1), στή **γεωμετρική του παράσταση** μέ ἕνα σημεῖο ἑνός ἐπιπέδου. Ἄς πάρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων $x0y$ σ' αὐτό (Σχ. 1). Εἶναι φανερό ὅτι στό μιγαδικό ἀριθμό z ἀντιστοιχεῖ σάν **εἰκόνα του** τό σημεῖο $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καί ἀντίστροφα στό σημεῖο $M(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = (x,y)$.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί σημείων τοῦ (Π)



Σχ. 1

μᾶς ἐπιτρέπει νά χρησιμοποιοῦμε συχνά γλώσσα γεωμετρική καί ἀντί γιά τό μιγαδικό ἀριθμό z νά μιλᾶμε γιά τό σημεῖο Μ. Γι' αὐτό καί οἱ x,y ὀνομάζονται **καρτεσιανές συντεταγμένες** τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $x+yi$. Τό ἐπίπεδο (Π), πού χρησιμοποιεῖται γιά τήν παράσταση αὐτή, λέγεται **μιγαδικό ἐπίπεδο** ἤ **ἐπίπεδο τοῦ Gauss.**

Σύμφωνα μέ τήν παραπάνω παράσταση οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, πού τούς «ταυτίσαμε» μέ τά ζεύγη $(x,0)$, παριστάνονται μέ τά σημεῖα τοῦ ἄξονα τῶν τετμημένων $x'0x$, ὁ ὁποῖος γι' αὐτό ὀνομάζεται **πραγματικός ἄξονας** τοῦ συστήματος. Οἱ καθαρά φανταστικοί ἀριθμοί $(0,y)$ ἀντιστοιχοῦν στά σημεῖα τοῦ ἄξονα $y'0y$ τῶν τεταγμένων, ὁ ὁποῖος γι' αὐτό ὀνομάζεται **φανταστικός ἄξονας** τοῦ συστήματος.

Στό σχ. 1 παρατηροῦμε ὅτι στόν ἀντίθετο $-z$ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z ἀντιστοιχεῖ τό συμμετρικό M'' τοῦ σημείου M ὡς πρός τήν ἀρχή 0 τοῦ συστήματος καί στό συζυγή $\bar{z}$ τοῦ z τό συμμετρικό M' τοῦ σημείου M ὡς πρός τόν πραγματικό ἄξονα $x'0x$.

---

(1) Ὑποσημείωση τῆς παραγράφου 1.1.

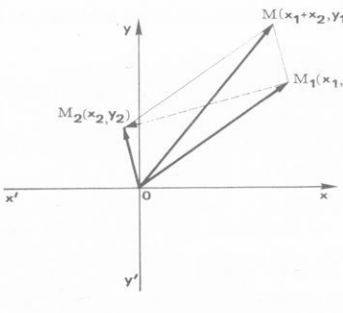
2.2. Γεωμετρική εἰκόνα τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου μᾶς ἐπιτρέπει τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἔτσι π.χ. στό μιγαδικό ἀριθμό $z=(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο $M(x,y)$ καί στό σημεῖο $M(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ (Σχ. 1) καί ἄρα στό $z=(x,y)$ ἀντιστοιχεῖ ἡ $\overrightarrow{OM}$. Τήν $\overrightarrow{OM}$ τήν ὀνομάζουμε **διανυσματική ἀκτίνα τοῦ μιγαδικοῦ** z.

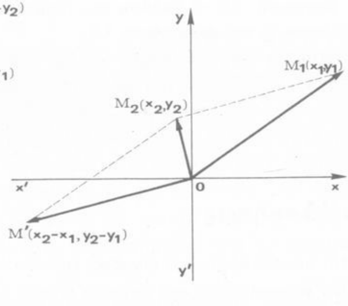
Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$, δηλαδή ὅτι τό μέτρο τῆς $\overrightarrow{OM}$ ἰσοῦται μέ τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z.

Μέ τή βοήθεια τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νά βροῦμε τίς διανυσματικές ἀκτίνες τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί νά ἑρμηνεύσουμε ἔτσι γεωμετρικά τήν πρόσθεση καί τήν ἀφαίρεση στό **C**.

Ἄς πάρουμε τούς μιγαδικούς ἀριθμούς $z_1=x_1+y_1i$ καί $z_2=x_2+y_2i$ καί τίς ἀντίστοιχες εἰκόνες τους $M_1(x_1,y_1)$ καί $M_2(x_2,y_2)$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο (Σχ.2). Οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν z_1 καί z_2 εἶναι οἱ $\overrightarrow{OM_1}$ καί $\overrightarrow{OM_2}$ ἀντίστοιχα καί τό ἄθροισμα z_1+z_2 ἔχει γιά διανυσματική του ἀκτίνα τή διαγώνιο $\overrightarrow{OM}$ τοῦ παραλληλογράμμου πού ὁρίζουν οἱ $\overrightarrow{OM_1}$ καί $\overrightarrow{OM_2}$.

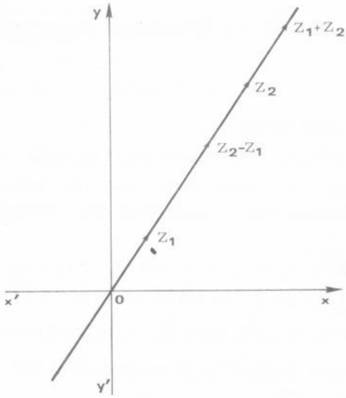


Σχ. 2

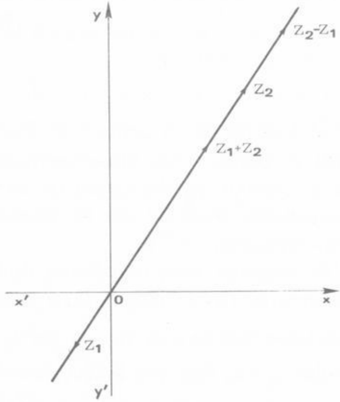


Σχ. 3

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἄλλη διαγώνιο τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, εἶναι ἴσο μέ τή διανυσματική ἀκτίνα τῆς διαφορᾶς z_2-z_1 τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἡ διαφορά παριστάνεται μέ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM'}$ (Σχ. 3), πού εἶναι ἡ ἄλλη πλευρά τοῦ παραλληλογράμμου πού κατασκευάζεται μέ πλευρά τήν $\overrightarrow{OM_1}$ καί διαγώνιο τήν $\overrightarrow{OM_2}$. Στά σχήματα 2 καί 3 ὑποθέτουμε ὅτι τό παραλληλόγραμμο τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ εἶναι κατασκευάσιμο, δηλαδή τά σημεῖα O, M_1, M_2 δέ βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία γραμμή. Ὅταν τά σημεῖα O, M_1, M_2 βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία, τότε ἔχουμε εὔκολα τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τῶν z_1 καί z_2. Αὐτό φαίνεται στά σχήματα 4 καί 5.



Σχ. 4



Σχ. 5

Ἐφαρμογή: Μέ τή βοήθεια τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν δεῖξτε τήν ἰδιότητα γ) τῆς παραγράφου 1.8.

Ἀπό τό τρίγωνο OM_1M τοῦ σχ. 2 παίρνουμε

$$|(OM_1)-(M_1M)| \leqslant (OM) \leqslant (OM_1)+(M_1M) \Leftrightarrow |(OM_1)-(OM_2)| \leqslant (OM) \leqslant (OM_1)+(OM_2) \Leftrightarrow$$

$$||\overrightarrow{OM_1}|-|\overrightarrow{OM_2}|| \leqslant |\overrightarrow{OM}| \leqslant |\overrightarrow{OM_1}| + |\overrightarrow{OM_2}| \Leftrightarrow$$

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

2.3. Ἀσκήσεις

1. Νά παρασταθοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $2+3i$, $2-3i$, $-2+3i$, $-2-3i$.
2. Νά παρασταθοῦν στό ἐπίπεδο Gauss τρεῖς μιγαδικοί z_1, z_2, z_3 καί ἔπειτα οἱ μιγαδικοί

$$z_1+z_2+z_3 \quad \text{καί} \quad z_1+z_2-z_3.$$

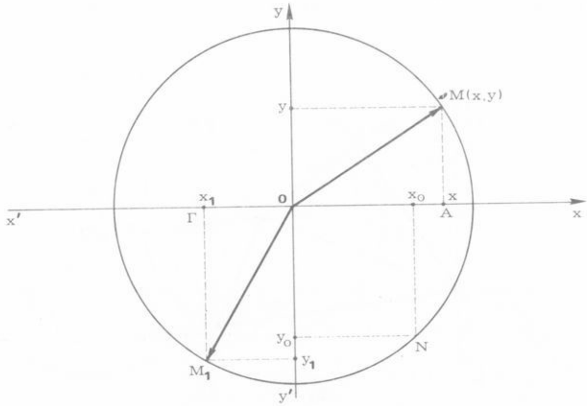
3. Δεῖξτε μέ τή βοήθεια τῆς γεωμετρικῆς παραστάσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν ὅτι ἰσχύει

$$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

3. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

3.1. Ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου

Ἄς εἶναι Ο ἡ ἀρχή τοῦ ὀρθοκανονικοῦ συστήματος στό ἐπίπεδο Gauss καί $M(x,y)$ ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πού ἀπέχει ἀπό τό Ο ἀπόσταση ἴση μέ α (Σχ. 6.).



Σχ. 6

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ ἔχουμε $(OA)^2+(AM)^2=(OM)^2$, δηλαδή

$$x^2+y^2=\alpha^2 \tag{1}$$

Ἄν μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα α γράψουμε τόν κύκλο (Ο,α), τότε τό τυχόν σημεῖο $M_1(x_1,y_1)$ αὐτοῦ τοῦ κύκλου ἱκανοποιεῖ τήν (1) καί ἀντίστροφα. Πράγματι α) εἶναι $(O\Gamma)^2+(\Gamma M_1)^2=(OM_1)^2$, δηλαδή $x_1^2+y_1^2=\alpha^2$. β) Ἄν $N(x_0,y_0)$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μέ $x_0^2+y_0^2=\alpha^2$, τότε, ἀφοῦ $x_0^2+y_0^2=(ON)^2$, θά ἔχουμε $(ON)^2=\alpha^2$ καί ἄρα $(ON)=\alpha$, πού σημαίνει ὅτι τό σημεῖο Ν εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (0,α).

Ἄρα ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (0,α). Ἐπειδή τό σημεῖο $M(x,y)$ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=x+yi$, δηλαδή ἡ $\overrightarrow{OM}$ εἶναι ἡ διανυσματική του ἀκτίνα, ἡ (1) γράφεται ἰσοδύναμα

$$|z|^2=\alpha^2 \text{ ἤ καί } |z|=\alpha, \quad \text{ἀφοῦ } \alpha>0.$$

Ἔτσι ἔχουμε τό σπουδαῖο συμπέρασμα ὅτι:

— **Στό μιγαδικό ἐπίπεδο τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανο-**

ποιοῦν τή σχέση $|z|=\alpha$, $\alpha>0$, εἶναι ὁ κύκλος μέ κέντρο τήν ἀρχή O καί ἀκτίνα ἴση μέ α.

Εἶναι εὔκολο τώρα νά δοῦμε ὅτι γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z=x+yi$ ἡ σχέση

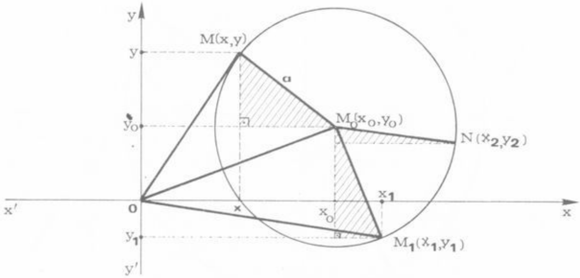
$$|z|<\alpha$$

ὁρίζει τό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου $(0,\alpha)$, ἐνῶ ἡ σχέση

$$|z|>\alpha$$

ὁρίζει τό ἐξωτερικό του.

Ἄς εἶναι τώρα $M_o(x_o,y_o)$ ἕνα σταθερό σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Gauss καί $M(x,y)$ τυχόν σημεῖο του, πού ἀπέχει ἀπό τό M_o σταθερή ἀπόσταση ἴση μέ α (Σχ. 7).



Σχ. 7

Γνωρίζουμε ὅτι ἡ ἀπόσταση (M_0M) δίνεται ἀπό τή σχέση

$$(M_oM)^2=(x-x_o)^2+(y-y_o)^2, \text{ δηλαδή}$$

$$\mathbf{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\alpha^2} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ἄν μέ κέντρο τό M_o καί ἀκτίνα α γράψουμε τόν κύκλο (M_o,α), τότε γιά τό τυχόν σημεῖο του $M_1(x_1,y_1)$ ἔχουμε: $(x_1-x_o)^2+(y_1-y_o{}^2)=\alpha^2$, δηλαδή οἱ συντεταγμένες κάθε σημείου τοῦ (M_o,α) ἱκανοποιοῦν τή (2).

Ἀντίστροφα: Ἄν $N(x_2,y_2)$ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει $(x_2-x_o)^2+(y_2-y_o)^2=\alpha^2$, τότε, ἀφοῦ $(x_2-x_o)^2+(y_2-y_o)^2=(M_oN)^2$, θά ἔχουμε $(M_oN)^2=\alpha^2$, δηλαδή $(M_oN)=\alpha$, πού σημαίνει ὅτι τό N εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (M_o,α).

Ἡ (2) λοιπόν εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (M_o,α). Ἄν τά σημεῖα $M(x,y)$ καί $M_o(x_o,y_o)$ εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z=x+yi$ καί $z_o=x_o+y_oi$ ἀντίστοιχα, τότε ἡ ἐξίσωση (2) γράφεται:

$$|z-z_o|^2=\alpha^2 \text{ ἤ } |z-z_o|=\alpha, \text{ ἀφοῦ } \alpha>0.$$

Εὔκολα βλέπουμε ὅτι ἡ σχέση $|z-z_o|<\alpha$ ὁρίζει τό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (M_o,α), ἐνῶ ἡ $|z-z_o|>\alpha$ ὁρίζει τό ἐξωτερικό του.

3.2. Ἐφαρμογές

1. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι: $|z| = |3-4i|$ (1).

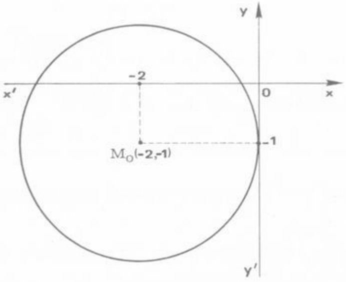
Λύση: Ἔχουμε $|z| = |3-4i| \Leftrightarrow |z| = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow |z| = 5$ (2)

Ἡ (2) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (0,5) στό μιγαδικό ἐπίπεδο καί ἄρα οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί, πού ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ κύκλου, εἶναι λύσεις τῆς (1).

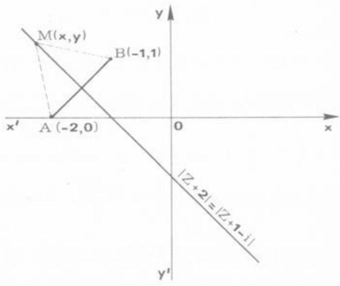
2. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$|z + 2+i| = 2.$$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $|z+2+i| = 2 \Leftrightarrow |z-(-2-i)|=2$ (1) καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ἡ (1) ἐπαληθεύεται ἀπό τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z, πού ἔχουν εἰκόνες στό μιγαδικό ἐπίπεδο τά σημεῖα τοῦ κύκλου μέ κέντρο τήν εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $-2-i$, δηλαδή τό σημεῖο $M_o(-2,-1)$ καί ἀκτίνα $\alpha = 2$. (Σχ. 8).



Σχ. 8



Σχ. 9

3. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι:

$$|z+2| = |z-(-1+i)|.$$

Λύση: Ἔχουμε $|z+2| = |z-(-1+i)| \Leftrightarrow |z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$ (1)

Ἄς εἶναι $A(-2,0)$ ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $-2+0i$ καί $B(-1,1)$ τοῦ μιγαδικοῦ $-1+i$ (Σχ. 9). Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα ἑνός μιγαδικοῦ z, τότε τό $|z-(-2+0i)|$ παριστάνει τήν ἀπόσταση (AM) καί τό $|z-(-1+i)|$ τήν ἀπόσταση (BM). Ἐπειδή θέλουμε $|z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$, θά πρέπει νά εἶναι (MA) = (MB). Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν λύσεων τῆς (1) ἰσαπέχουν ἀπό τά σταθερά σημεῖα A καί B καί ἄρα ἀνήκουν στή μεσοκάθετο τοῦ AB.

Ἀντίστροφα: Κάθε σημεῖο $M(x,y)$, εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z = x+yi$, πού ἰσαπέχει ἀπό τά A καί B, θά ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα $|z-(-2+0i)| = |z-(-1+i)|$, δηλ. τήν (1). Ἄρα τά ζητούμενα σημεῖα ἀποτελοῦν τή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος AB, μέ $A(-2,0)$ καί $B(-1,1)$.

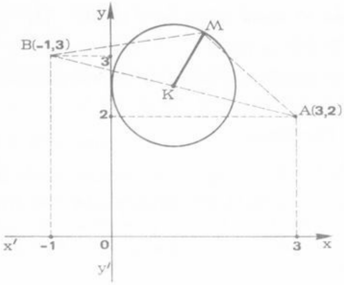
4. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε ποῦ ἀνήκουν οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, πού εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$2|z-3-2i|^2 + 2|z+1-3i|^2 = 21$$

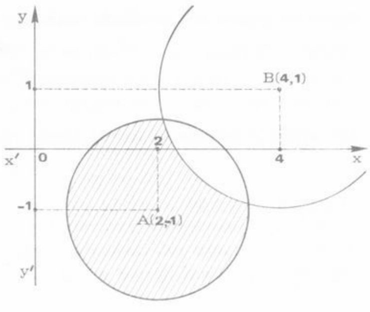
Λύση: Ἔχουμε $2|z-3-2i|^2 + 2|z+1-3i|^2 = 21 \Leftrightarrow$

$$|z-(3+2i)|^2 + |z-(-1+3i)|^2 = \frac{21}{2} \quad (1)$$

Στό μιγαδικό ἐπίπεδο παίρνουμε τά σημεῖα $A(3,2)$ καί $B(-1,3)$, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $3+2i$ καί $-1+3i$ ἀντίστοιχα (Σχ. 10).



Σχ. 10



Σχ. 11

Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα μιᾶς λύσεως τῆς (1), τότε ἡ (1) μᾶς λέει ὅτι $(MA)^2+(MB)^2 = \frac{21}{2}$.

Ἄν K εἶναι τό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB, τότε θά εἶναι $K\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{3+2}{2}\right) =$ $= K\left(1, \frac{5}{2}\right)$ καί ἀπό τό πρῶτο θεώρημα τῶν διαμέσων στό τρίγωνο MAB προκύπτει ὅτι $(MK)^2 = \frac{21}{4} - \frac{(AB)^2}{4}$. Ἀλλά $(AB) = \sqrt{17}$, ὁπότε $(MK)^2=1$, δηλαδή $(MK)=1$.

Ἄρα τό M ἀνήκει σέ κύκλο μέ κέντρο $K\left(1, \frac{5}{2}\right)$ καί ἀκτίνα $\alpha=1$. Ἔτσι οἱ λύσεις τῆς (1 ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα αὐτοῦ τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἐξίσωση

$$\left|z-\left(1+\frac{5}{2}i\right)\right| = 1.$$

5. **Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z, πού εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος:**

$$|z-2+i| < \frac{3}{2} \quad , \quad |z-4-i| > 2$$

Λύση: Στό σχῆμα 11 δίνουμε τή γεωμετρική εἰκόνα τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος. Ἀφήνουμε γιά ἄσκηση τή δικαιολόγηση τῶν ἀποτελεσμάτων.

3.3. Ἀσκήσεις

1. **Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου $|z-z_0| = \alpha$ παίρνει τή μορφή**

$$z\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_0)+\alpha^2-|z_0|^2$$

2. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $|z-2+3i| = 5$.
3. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $|z-i| = |z+2|$.
4. Βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $|z-2| < |z|$.
5. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρεῖτε τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν $|z-1| < |z+1|$.

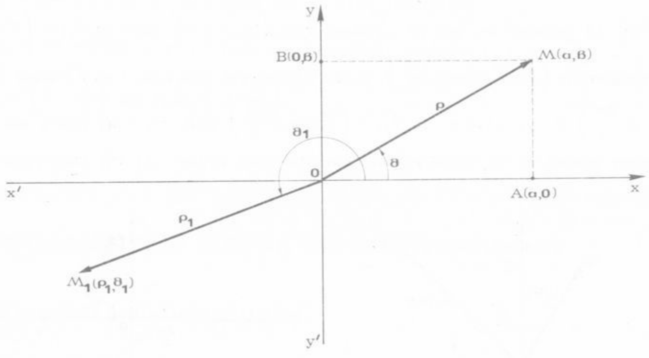
6. Ἄν εἶναι $|z-8| = 2|z-2|$, $z \in \mathbf{C}$, δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $|z| = 4$.
7. Ἄν $|z| = 3$, βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν (α) $-2z$, (β) $1-z$, (γ) $3z-1$.
8. Βρεῖτε ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους εἶναι: $3 \leqslant |z+i| \leqslant 4$.
9. Βρεῖτε ὅλους τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, γιά τούς ὁποίους εἶναι: $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4$.
10. Βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τίς ἐξισώσεις

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \quad \text{καί} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1.$$

4. ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

4.1. Ὁρισμός

Ἄς πάρουμε τό μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + \beta i \neq 0$ καί τή διανυσματική του ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ (Σχ. 12). Εἶναι $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \rho$.



Σχ. 12

Ὅλοι οἱ μιγαδικοί, πού οἱ εἰκόνες τους εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου (O,ρ), ἔχουν τό ἴδιο μέτρο μέ τόν z. Γιά νά προσδιορίσουμε λοιπόν τή γεωμετρική εἰκόνα τοῦ z, δέν εἶναι ἀρκετό τό μέτρο του. Ἄν ὅμως ξέρουμε μαζί μέ τό μέτρο ρ καί τή γωνία $\theta \in [0,2\pi)$ πού σχηματίζει ὁ θετικός ἡμιάξονας Ox μέ τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ z, τότε ἡ εἰκόνα $M(\alpha,\beta)$ τοῦ z καθορίζεται πλήρως ἀπό τό ζεῦγος (ρ,θ).

Εἶναι φανερό (Σχ. 12) ὅτι τά στοιχεῖα τῶν ζευγῶν (α,β) καί (ρ,θ) συνδέονται μέ τίς σχέσεις:

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\[2mm] \sigma\upsilon\nu\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \;\; \kappa\alpha\acute{\iota}\;\; \eta\mu\theta=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad 0\leq\theta<2\pi \end{array}} \qquad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) βεβαιωνόμαστε ὅτι, ὅταν δοθοῦν τά α καί β, προσδιορίζονται μονοσήμαντα τά ρ καί θ καί ἀντίστροφα.

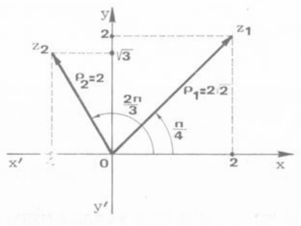
Ἄρα **κάθε μιγαδικός ἀριθμός (α,β) $\neq$ (0,0) μπορεῖ νά ὁριστεῖ καί μέ τό ζεῦγος (ρ,θ).**

Τά στοιχεῖα τοῦ ζεύγους (ρ,θ) ὀνομάζονται **πολικές συντεταγμένες** *τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z=\alpha+\beta i$. Εἰδικότερα τό ρ ὀνομάζεται* (ὅπως ξέρουμε) **μέτρο τοῦ z** *καί τό θ* **πρωτεῦον ὅρισμα** (Argument) **τοῦ z** *καί συμβολίζεται $Argz=\theta$* [1].

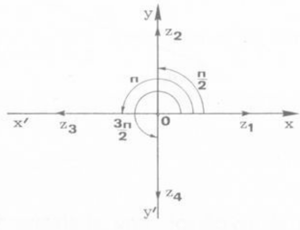
Τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, ἐκτός ἀπό τό ζεῦγος (ρ,θ) πού βρίσκουμε ἀπό τίς (1), τόν προσδιορίζει καί κάθε ζεῦγος $(\rho,\ \theta+2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Γι' αὐτό **κάθε γωνία ἀπό τίς $\theta+2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbf{Z}$ ὀνομάζεται** ἁπλῶς **ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z** καί συμβολίζεται **argz**.

4.2. Παραδείγματα

1. Στό σχ. 13 φαίνεται ὅτι γιά τό μιγαδικό ἀριθμό $z_1=2+2i$ εἶναι $(\rho_1,\theta_1)=\left(2\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ ἤ γενικότερα $\left(2\sqrt{2},\ 2\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Ὅμοια γιά τόν $z_2=-1+i\sqrt{3}$ εἶναι $(\rho_2,\theta_2)=\left(2,\frac{2\pi}{3}\right)$ ἤ γενικότερα $(\rho_2,\theta_2)=\left(2,2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}\right)$, $\kappa\in\mathbf{Z}$. Τίς τιμές τῶν ρ καί θ μπορούσαμε φυσικά νά τίς ὑπολογίσουμε καί ἀπό τούς τύπους (1) τῆς παραγράφου 4.1.



Σχ. 13



Σχ. 14

2. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1=(1,0)$, $z_2=(0,1)$, $z_3=(-1,0)$ καί $z_4=(0,-1)$ ἔχουν κοινό μέτρο $\rho=1$ καί ἀντίστοιχα πρωτεύοντα ὁρίσματα $Argz_1=Arg(1+0i)=0$, $Argz_2=Arg(0+i)=\frac{\pi}{2}$, $Arg\,z_3=\pi$ καί $Argz_4=\frac{3\pi}{2}$ (Σχ. 14).

1. Στή βιβλιογραφία μερικές φορές ὡς Argz θεωρεῖται ἡ γωνία θ μέ $\theta\in(-\pi,\pi]$.

3. Οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = 1-i\sqrt{3}$ εἶναι:

α) $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ καί β) $\theta = \frac{5\pi}{3}$. Ἡ τιμή $\theta = \frac{5\pi}{3}$ βρίσκεται εὔκολα ἀπό τό σύστημα $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in [0,2\pi)$.

4. Ἄν οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha+\beta i$ εἶναι $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$, τότε βάζοντας στούς τύπους (1) τῆς παραγράφου 4.1 $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2$ καί $\theta = \frac{4\pi}{3}$ βρίσκουμε ὅτι ὁ μιγαδικός αὐτός ἀριθμός εἶναι ὁ $z = -1-i\sqrt{3}$.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες (ρ,θ) τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν:

$$z_1 = 3+0i \quad , \quad z_2 = 3+3i \quad , \quad z_3 = (0,3),$$
$$z_4 = (-3,3) \quad , \quad z_5 = (-3,0) \quad , \quad z_6 = -3-3i$$
$$z_7 = (0,-3) \quad , \quad z_8 = (3,-3).$$

2. Γράψτε στή μορφή $z = \alpha+\beta i$ τούς μιγαδικούς ἀριθμούς

$$z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right), \quad z_2 = (2,\pi), \quad z_3 = \left(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad z_4 = \left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$$

καί ἀπεικονίστε τους γεωμετρικά στό ἐπίπεδο τοῦ Gauss.

3. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1 . z_2$ καί $\frac{z_1}{z_2}$, ἄν εἶναι $z_1 = \left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ καί $z_2 = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$.

5. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

5.1. Ὁρισμοί καί θεωρήματα

Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι, ἄν (ρ,θ) εἶναι οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha+\beta i \neq 0$, τότε θά εἶναι:

$$\boxed{\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha}{\rho} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\beta}{\rho} \quad \text{μέ } 0 \leq \theta < 2\pi} \quad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές παίρνουμε:

$$\alpha = \rho\sigma\upsilon\nu\theta \quad \text{καί} \quad \beta = \rho\,\eta\mu\,\theta,$$

ὁπότε ὁ μιγαδικός $z = \alpha + \beta i$ παίρνει τή μορφή:

$$\boxed{z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta), \quad \mu\acute{\varepsilon} \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \ \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \tag{2}$$

Ἡ μορφή αὐτή λέγεται τριγωνομετρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ $\alpha + \beta i$.

Φυσικά ἀντί γιά τό πρωτεῦον ὅρισμα θ μποροῦμε νά πάρουμε ὁποιοδήποτε ἄλλο ὅρισμα τῆς μορφῆς $\theta + 2\kappa\pi$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

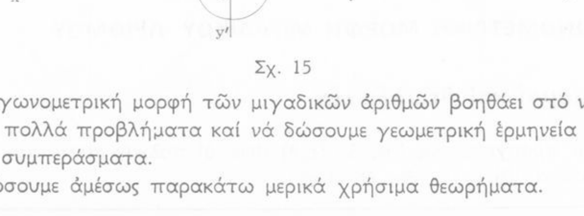
Δηλαδή:

$$\boxed{\begin{aligned} &\alpha+\beta i = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho[\sigma\upsilon\nu(\theta+2\kappa\pi) + i\eta\mu\,(\theta+2\kappa\pi)], \ \kappa \in \mathbf{Z}, \\ &\text{ὅπου} \quad \rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{καί} \quad \theta \in [0,2\pi) \ \text{μέ} \\ &\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\rho} \quad \text{καί} \quad \eta\mu\theta = \frac{\beta}{\rho} \end{aligned}} \tag{3}$$

Ὅπως φαίνεται ἀπό τό σχ. 15, γιά τό μιγαδικό $z = 1 + i$ εἶναι

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu\,\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\eta\mu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad \kappa \in \mathbf{Z}.$$



Σχ. 15

Ἡ τριγωνομετρική μορφή τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν βοηθάει στό νά ἀντιμετωπίσουμε πολλά προβλήματα καί νά δώσουμε γεωμετρική ἑρμηνεία σέ πολλά θεωρητικά συμπεράσματα.

Θά δώσουμε ἀμέσως παρακάτω μερικά χρήσιμα θεωρήματα.

Θεώρημα 1ο. Δυό μιγαδικοί ἀριθμοί $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ καί $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ εἶναι ἴσοι, ὅταν καί μόνο ὅταν

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_2 - \theta_1 = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbf{Z}$$

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ $z_1 = z_2$ συνεπάγεται ὅτι $\rho_1\,\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \rho_2\sigma\upsilon\nu\theta_2$ καί $\rho_1\eta\mu\theta_1 = \rho_2\eta\mu\theta_2$, τότε θά εἶναι $\rho^2_1(\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + \eta\mu^2\theta_1) = \rho^2_2(\sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \eta\mu^2\theta_2)$, ὁπότε $\rho_1 = \rho_2$. Ἄρα $\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_2$ καί $\eta\mu\theta_1 = \eta\mu\theta_2$, ὁπότε $\theta_2 = 2\kappa\pi + \theta_1$ ἤ $\theta_2 - \theta_1 = 2\kappa\pi$.

Θεώρημα 2ο. Τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τους καί ὅρισμα τό ἄθροισμα τῶν ορισμάτων τους.

Ἀπόδειξη. Ἄν $z_1=\rho_1$ (συνθ_1+iημθ_1) καί $z_2=\rho_2$ (συνθ_2+iημθ_2), ἔχουμε: $z_1z_2=\rho_1\rho_2[(\text{συν}\theta_1\text{συν}\theta_2-\text{ημ}\theta_1\text{ημ}\theta_2)+i(\text{συν}\theta_1\text{ημ}\theta_2+\text{ημ}\theta_1\text{συν}\theta_2)]$.

Ἄρα:

$$\boxed{z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2\,(\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2))} \tag{4}$$

Ἐπαγωγικά δεῖξτε ὅτι: **Ἄν $z_\kappa=\rho_\kappa$ (συνθ_κ+iημθ_κ), $\kappa=1,2,\ldots,\nu$, τότε :**

$$z_1.z_2\ldots z_\nu=\rho_1.\rho_2\ldots\rho_\nu\,[\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_\nu)] \tag{5}$$

Ἄν εἶναι $\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_\nu=\rho$ καί $\theta_1=\theta_2=\ldots=\theta_\nu=\theta$, τότε $z_1=z_2=\ldots=z_\nu=$ $=\rho$ (συνθ+iημθ) καί ἡ σχέση (5) γίνεται:

$$\boxed{z^\nu=[\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)]^\nu=\rho^\nu\,(\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta))} \tag{6}$$

Ἡ (6) μᾶς εἶναι χρήσιμη παρακάτω καί **ἀναφέρεται σάν Θεώρημα De Moivre.** Ἄμεση συνέπεια τῆς σχέσεως (5) εἶναι καί ἡ γνωστή μας ἰδιότητα τοῦ μέτρου τοῦ γινομένου πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή

$$\boxed{|z_1\cdot z_2\ldots z_\nu|=|z_1|\cdot|z_2|\ldots|z_\nu|} \tag{7}$$

Ἀπό τή σχέση (5) βλέπουμε ἀκόμη ὅτι:

$$\boxed{\begin{array}{l}2\kappa\pi+\text{Arg}(z_1\cdot z_2\ldots z_\nu)=\text{Arg}\,z_1+\text{Arg}z_2+\ldots+\text{Arg}\,z_\nu,\\ \text{ὅπου } \kappa \text{ κατάλληλος ἀκέραιος ἀριθμός}\end{array}}^{(1)} \tag{8}$$

Θεώρημα 3ο. Ὁ ἀντίστροφος ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z\neq0$ ἔχει μέτρο τό ἀντίστροφο τοῦ μέτρου του καί ὅρισμα τό ἀντίθετο τοῦ ὁρίσματός του.

Ἀπόδειξη. Ἄν $z=\rho$ (συνθ + iημθ), $\rho\neq0$, εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, τότε θά

$$\text{εἶναι}\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{\rho(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)}=\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta}{\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta}=$$

$$=\frac{1}{\rho}(\text{συν}\theta-i\text{ημ}\theta)=\frac{1}{\rho}\,[\text{συν}(-\theta)+i\text{ημ}(-\theta)].$$

Θεώρημα 4ο. Τό πηλίκο δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός πού ἔχει μέτρο τό λόγο τῶν μέτρων τους καί ὅρισμα τή διαφορά τῶν ὁρισμάτων τους. Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}z_1=\rho_1\,(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)\\ z_2=\rho_2\,(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)\neq0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)]$$

1. Γράφουμε $2\kappa\pi+\text{Arg}\,(z_1.z_2\ldots z_\nu)$, γιατί εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα στό β' μέλος τῆς (8) μπορεῖ νά μήν ἀνήκει στό $[0,2\pi)$.

$$\text{Πράγματι}\cdot\ \frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=[\rho_1(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)]\left[\frac{1}{\rho_2}(\text{συν}(-\theta_2)+i\text{ημ}(-\theta_2)\right]=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\text{συν}(\theta_1-\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1-\theta_2)].$$

Πόρισμα: Ἰσχύει $(\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta)^{-\nu}=\text{συν}(-\nu\theta)+i\text{ημ}(-\nu\theta),\quad \nu\in\mathbf{N}$.

5.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές

1. **Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\sqrt{3}+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.**

Λύση: Εἶναι $\alpha=\sqrt{3}$, $\beta=1$ καί ἄρα $\rho=\sqrt{3+1}=2$.

Ἐπίσης $\text{συν}\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ καί $\text{ημ}\theta=\dfrac{1}{2}$ μέ $0\leqslant\theta<2\pi$,

ἀπό τίς ὁποῖες παίρνουμε $\theta=\dfrac{\pi}{6}$.

Ἔτσι εἶναι $\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\dfrac{\pi}{6}+i\ \text{ημ}\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. **Τό ἴδιο γιά τό $z=-2-2i$.**

Λύση: Εἶναι $\alpha=-2$ καί $\beta=-2$ καί ἄρα $\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=2\sqrt{2}$,

$$\text{συν}\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ καί }\ \text{ημ}\theta=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{ μέ } 0\leqslant\theta<2\pi.$$

Ἀπό τίς τελευταῖες παίρνουμε $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$, ὁπότε

$$-2-2i=2\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{5\pi}{4}+i\ \text{ημ}\frac{5\pi}{4}\right).$$

3. **Γράψτε τό μιγαδικό ἀριθμό $z=4\left(\text{συν}\dfrac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\dfrac{11\pi}{6}\right)$ στή μορφή $\alpha+\beta i$.**

Λύση: Εἶναι $\rho=4$ καί $\theta=\dfrac{11\pi}{6}$, ἄρα

$$\alpha=4\text{συν}\frac{11\pi}{6}=4.\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\ \text{ καί }\ \beta=4\ \text{ημ}\frac{11\pi}{6}=4.\left(-\frac{1}{2}\right)=-2,\ \text{ ὁπότε}$$

$$z=2\sqrt{3}-2i.$$

4. **Βρεῖτε τά ἐξαγόμενα τῶν πράξεων:**

α) $6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ)\,.\,\dfrac{1}{3}\,(\text{συν}\ 40^\circ+i\text{ημ}\ 40^\circ)$ β) $\dfrac{6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ)}{1/3\ (\text{συν}\ 40^\circ+i\text{ημ}40^\circ)}$.

Λύση:

α) $6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ).\dfrac{1}{3}(\text{συν}40^\circ+i\text{ημ}40^\circ)=2(\text{συν}(20^\circ+40^\circ)+i\text{ημ}(20^\circ+40^\circ))=$

$$=2(\text{συν}60^\circ+i\text{ημ}60^\circ)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}.$$

β) $\dfrac{6(\text{συν}20^\circ+i\text{ημ}20^\circ)}{1/3\ (\text{συν}40^\circ+i\text{ημ}40^\circ)}=18(\text{συν}(20^\circ-40^\circ)+i\text{ημ}(20^\circ-40^\circ))=18(\text{συν}(-20^\circ)+i\text{ημ}(-20^\circ))$

$$=18\ (\text{συν}20^\circ-i\text{ημ}20^\circ).$$

5. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7$.

Λύση: Γράφουμε τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Εἶναι $\rho=\sqrt{\frac{2}{4}+\frac{6}{4}}=\sqrt{2}$ καί, ἀφοῦ τό σημεῖο $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ ἀνήκει στό (I) τεταρτημόριο, ἡ συνθ $=\frac{1}{2}$ δίνει $\theta=\frac{\pi}{3}$ (πρωτεῦον ὅρισμα) Ἄρα:

$\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$. Ἀπό τό Θεώρημα De Moivre βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7=\left[\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)\right]^7=(\sqrt{2})^7.\left(\text{συν}7.\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\,7.\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=8\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)=$$
$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{2}+4i\sqrt{6}.$$

6. Νά ἁπλοποιηθεῖ τό κλάσμα : $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3}-i)^3}$

Λύση: Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα ἔχουμε $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7=8\sqrt{2}\left(\text{συν}\frac{\pi}{3}+\right.$ $\left.+i\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right)$.

Βρίσκουμε τώρα τήν τριγωνομετρική μορφή τοῦ $\sqrt{3}-i$. Κατά τά γνωστά ἔχουμε

$$\sqrt{3}-i=2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right),\quad \text{ὁπότε}$$

$$(\sqrt{3}-i)^3=\left[2\left(\text{συν}\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{6}\right)\right]^3=2^3.\left(\text{συν}3.\frac{11\pi}{6}+i\text{ημ}\,3.\frac{11\pi}{6}\right)=$$
$$=2^3.\left(\text{συν}\frac{11\pi}{2}+i\text{ημ}\frac{11\pi}{2}\right)=8\,(\text{συν}270^\circ+i\text{ημ}270^\circ).\ \text{Ἄρα}$$

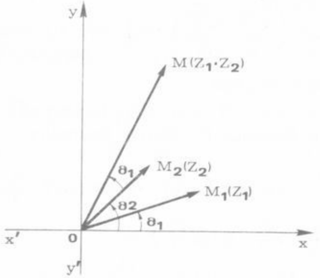
$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3}-i)^3}=\frac{8\sqrt{2}(\text{συν}60^\circ+i\text{ημ}60^\circ)}{8(\text{συν}270^\circ+i\text{ημ}270^\circ)}=\sqrt{2}\,(\text{συν}(60^\circ-270^\circ)+i\text{ημ}(60^\circ-270^\circ))$$
$$=\sqrt{2}(\text{συν}(-210^\circ)+i\text{ημ}(-210^\circ))=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Γεωμετρική παράσταση τοῦ γινομένου $z_1.z_2$ καί τοῦ πηλίκου $\frac{z_2}{z_1}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z_1=\rho_1$ (συνθ$_1$+iημθ$_1$) καί $z_2=\rho_2$(συνθ$_2$+iημθ$_2$) μέ $\rho_1\rho_2\neq 0$.

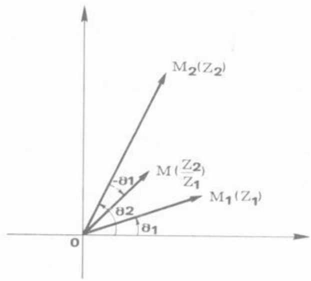
α) Εἶναι $z_1.z_2=\rho_1.\rho_2\,(\text{συν}(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2))$.

Στρέφουμε τή μιά ἀπό τίς διανυσματικές ἀκτίνες $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ (Σχ. 16) τῶν z_1 καί z_2, ἔστω τήν $\overrightarrow{OM_2}$, κατά γωνία ἴση μέ τό Arg z_1 καί πάνω στό φορέα τῆς τελικῆς ἀκτίνας παίρνουμε σημεῖο M, ὥστε νά εἶναι $|\overrightarrow{OM}|=\rho_1\rho_2$. Τό σημεῖο αὐτό M εἶναι φανερό ὅτι ὁρίζει τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ μιγαδικοῦ $z_1.z_2$.

β) Στρέφουμε τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM_2}$ τοῦ διαιρετέου z_2 (Σχ. 17) κατά γωνία ἴση μέ τό $-\mathrm{Arg}z_1$ καί ὅπως προηγουμένως βρίσκουμε τό σημεῖο Μ μέ $|\overrightarrow{OM}| = \frac{\rho_2}{\rho_1}$. Ἐπειδή



Σχ. 16



Σχ. 17

εἶναι $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ (συν$(\theta_2-\theta_1)+i$ημ$(\theta_2-\theta_1)$), γίνεται φανερό ὅτι τό σημεῖο Μ, ὅπως βρέθηκε, ὁρίζει τή διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{OM}$ τοῦ πηλίκου $\frac{z_2}{z_1}$.

8. **Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου 3θ, ἄν γνωρίζουμε τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου θ.**

Λύση: Ἀπό τό θεώρημα De Moivre ἔχουμε συν(νθ)+iημ(νθ) = (συνθ+iημθ)$^\nu$, $\nu \in \mathbf{N}$ (1)
Γιά $\nu = 3$ ἡ (1) γίνεται συν3θ + iημ3θ = (συνθ+iημθ)^3, δηλαδή
συν3θ+iημ3θ = συν^{3}θ+3iσυν^{2}θημθ−3συνθημ^{2}θ−iημ^{3}θ καί συνεπῶς
συν3θ = συν^{3}θ−3συνθημ^{2}θ = συν^{3}θ−3συνθ(1−συν^{2}θ) = 4συν^{3}θ−3συνθ καί
ημ3θ = 3συν^{2}θημθ−ημ^{3}θ = 3(1−ημ^{2}θ)ημθ−ημ^{3}θ = 3ημθ−4ημ^{3}θ.

5.3. Ἀσκήσεις

1. Νά γραφοῦν σέ τριγωνομετρική μορφή οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί:

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad 2+2\sqrt{3}i, \quad -\sqrt{3}+i,$$

2. Δεῖξτε ὅτι τό θεώρημα De Moivre

(ρ (συνθ+iημθ))$^\nu$ = ρ$^\nu$(συν(νθ)+iημ(νθ)) ἰσχύει καί ὅταν $\nu \in \{\ldots, -3, -2, -1\}$

3. Νά ἀποδείξετε ὅτι :

α) $(\sqrt{3}+i)^{150} = -2^{150}$,

β) $(1+i)^\nu+(1-i)^\nu = 2^{\frac{\nu+2}{2}}$ συν $\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in \mathbf{N}$, γ) $(1+i)^\nu-(1-i)^\nu = i2^{\frac{\nu+2}{2}}$ ημ$\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in \mathbf{N}$

δ) (συνθ+iημθ)$^\nu$+(συνθ+iημθ)$^{-\nu}$=2συν(νθ), (συνθ+iημθ)$^\nu$−(συνθ+iημθ)$^{-\nu}$=2iημ(νθ).

4. Νά ἐκφράσετε τά συν5θ καί ημ5θ σάν πολυώνυμα τῶν συνθ καί ημθ ἀντίστοιχα.

5. Ἄν z = συνθ+iημθ, δεῖξτε ὅτι 2συνθ = $z+\frac{1}{z}$ καί 2iημθ = $z-\frac{1}{z}$.

6. ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

6.1. Ὁρισμός—Θεώρημα

Ὁρισμός. Νιοστή ρίζα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi = \alpha+\beta i$ εἶναι κάθε μιγαδικός ἀριθμός $z = x+yi$ μέ τήν ἰδιότητα

$$(x+yi)^{\nu} = \alpha+\beta i.$$

Θά δείξουμε, μέ τό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ, ὅτι κάθε μή μηδενικός μιγαδικός ἀριθμός ξ ἔχει ν ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους νιοστές ρίζες.

Θεώρημα: Ἄν $\xi=\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός μέ $\rho\neq 0$, τότε οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right],\quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$$

εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους καί εἶναι οἱ μόνοι πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z^{\nu}=\xi$.

Ἀπόδειξη: Θά ἐξετάσουμε ἀρχικά ἄν ὑπάρχει μιγαδικός ἀριθμός $z = r(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)$, πού νά εἶναι νιοστή ρίζα τοῦ $\xi = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$.

Γιά νά συμβαίνει αὐτό, πρέπει νά ἰσχύει

$\rho(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta) = [r(\sigma\upsilon\nu\omega+i\eta\mu\omega)]^{\nu} = r^{\nu}(\sigma\upsilon\nu(\nu\omega)+i\eta\mu(\nu\omega))$ (1), δηλαδή

$$\rho = r^{\nu} \text{ καί } \nu\omega = \theta+2\kappa\pi,\ \kappa\in\mathbf{Z} \text{ ἤ } r = \sqrt[\nu]{\rho} \text{ καί } \omega=\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu},\ \kappa\in\mathbf{Z}$$

$$\text{Ἄρα } z = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\quad \kappa\in\mathbf{Z} \qquad (2).$$

Ἡ (2) φανερώνει τήν ὕπαρξη τοῦ z, δηλ. μιᾶς νιοστῆς ρίζας τοῦ ξ.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ (2) γιά $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$ δίνει ν διαφορετικές τιμές τῆς νιοστῆς ρίζας τοῦ ξ, μέ $\xi\neq 0+0i$, τίς ὁποῖες θά ὀνομάζουμε νιοστές ρίζες τοῦ ξ καί θά τίς συμβολίζουμε:

$$z_\kappa= \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}+i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\quad \kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1 \qquad (3)$$

Στή συνέχεια θά δείξουμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἄλλη τιμή τοῦ $\kappa\in\mathbf{Z}$ ὁ z_κ θά συμπίπτει μέ μία ἀπό τίς τιμές $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}$ πού δίνει ὁ τύπος (3).

Πράγματι· i) Ἄν ἦταν $z_\lambda = z_\mu$, $\lambda, \mu\in\mathbf{Z}$, $\lambda\neq\mu$ καί $0\leq\lambda, \mu<\nu$, τότε θά ἔπρεπε νά εἶναι $\dfrac{\theta+2\lambda\pi}{\nu}-\dfrac{\theta+2\mu\pi}{\nu} = 2\rho\pi$, $\rho\in\mathbf{Z}$, δηλαδή $\lambda-\mu = \rho\nu$, $\rho\in\mathbf{Z}$.

Εἶναι ὅμως $0<|\lambda-\mu|<\nu$ καί ἑπομένως $0<|\rho\nu|<\nu$, δηλ. $0<|\rho|<1$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί δέν ὑπάρχει $\rho\in\mathbf{Z}$ μέ $0<|\rho|<1$.

Ἄρα $z_\lambda \neq z_\mu$ γιά ὅλα τά $\lambda, \mu\in\{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, δηλαδή οἱ ν τιμές τῆς (3) εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους.

ii) Γιά $\kappa \in \mathbf{Z}$ μέ $\kappa \notin \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, δηλαδή γιά $\kappa \geq \nu$ ἤ $\kappa < 0$ θά ἔχουμε: $\kappa = \lambda\nu + \upsilon$, $\lambda \in \mathbf{Z}$ καί $\upsilon \in \{0,1,2,\ldots,\nu-1\}$, ὁπότε

$$
\begin{aligned}
z_\kappa &= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right] \\
&= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2(\lambda\nu+\upsilon)\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2(\lambda\nu+\upsilon)\pi}{\nu}\right] \\
&= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(2\lambda\pi+\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right)+i\eta\mu\left(2\lambda\pi+\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right)\right] \\
&= \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\upsilon\pi}{\nu}\right] \quad \text{μέ } \upsilon\in\{0,1,2,\ldots,\nu-1\}.
\end{aligned}
$$

Ἄρα ὁ z_κ συμπίπτει μέ μιά ἀπό τίς τιμές πού δίνει ὁ τύπος (3).

Ἔτσι δείξαμε ὅτι ὑπάρχουν ν ἀκριβῶς διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί z_κ, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τήν $z^\nu = \xi = \rho$ (συνθ+iημθ), ὅταν $\rho \neq 0$.

Τέλος, ἐπειδή ὅλοι οἱ z_κ, $\kappa = 0,1,2,\ldots,\nu-1$ εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους, θά ἔχουν καί διαφορετικές εἰκόνες, ὅταν ἀπεικονιστοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο. Αὐτό θά φανεῖ στά παραδείγματα 1 καί 2 πού ἀκολουθοῦν.

6.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές

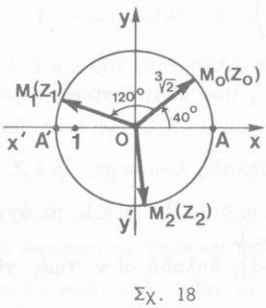
1. Βρεῖτε τίς τρεῖς κυβικές ρίζες τοῦ $-1+\sqrt{3}\,i$.

Λύση: Φέρνουμε ἀρχικά τόν $-1+\sqrt{3}\,i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

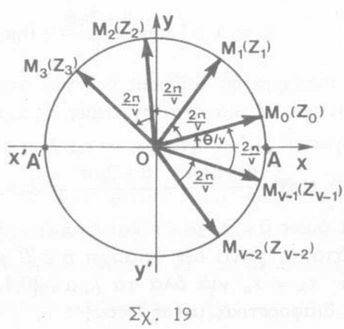
Εἶναι $-1+\sqrt{3}\,i = 2$ (συν120° + iημ120°) καί τότε

$$z_\kappa = \sqrt[3]{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{3}\right) + i\eta\mu\left(\frac{120^\circ+360^\circ\kappa}{3}\right)\right], \quad \kappa = 0,1,2$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}\ (\sigma\upsilon\nu 40^\circ + i\eta\mu 40^\circ), \qquad z_1 = \sqrt[3]{2}\,(\sigma\upsilon\nu\ 160^\circ + i\eta\mu\ 160^\circ),$$



Σχ. 18



Σχ. 19

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\,(\sigma\upsilon\nu 280^\circ + i\eta\mu 280^\circ)$$

Γεωμετρικά οἱ κυβικές ρίζες πού βρήκαμε ἀπεικονίζονται στίς κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας $\sqrt[3]{2}$ μέ πρώτη κορυφή τό M_0 ὅπου $(\widehat{OA, OM_0})=40^\circ$. (Σχ. 18).

2. Νά παραστήσετε γεωμετρικά τίς νιοστές ρίζες τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \rho\ (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$.

Λύση: Οἱ νιοστές ρίζες τοῦ z δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right],\ \kappa = 0,1,2,\ldots,(\nu-1),\ \text{καί εἶναι}$$

$$z_0 = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}\right)\right],$$

$$z_2 = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}\right)\right],$$

$$\vdots$$

$$z_{\nu-1} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}\right)\right]$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ νιοστές ρίζες τοῦ z ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, δηλαδή $|z_\kappa| = \sqrt[\nu]{\rho}$ καί ὅρισμα τέτοιο, ὥστε ἀπό κάποια ἀρχική τιμή $\frac{\theta}{\nu}$ νά αὐξάνει διαδοχικά κατά $\frac{2\pi}{\nu}$. Ὅπως εἴπαμε καί προηγούμενα οἱ μιγαδικοί αὐτοί ἀριθμοί z_κ ἀπεικονίζονται σέ σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπίπεδου, πού εἶναι σημεῖα τοῦ κύκλου $(O, \sqrt[\nu]{\rho})$. (Σχ. 19).

3. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^3 = -64i$

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $z^3 = -64i = 64(-i) = 64\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$,

ὁπότε παίρνουμε:

$$z_\kappa = \sqrt[3]{64}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{3} + i\eta\mu\frac{-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi}{3}\right],\quad \kappa = 0,1,2$$

Γιά $\kappa = 0$ εἶναι: $z_0 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} - i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right) = 4\,.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2}\right)$,

γιά $\kappa = 1$ εἶναι: $z_1 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) = 4\,(0+i) = 4i$,

γιά $\kappa = 2$ εἶναι: $z_2 = 4\left(\sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} + i\eta\mu\frac{7\pi}{6}\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i.\frac{1}{2}\right)$.

Παρατήρηση: Κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $z^\nu = \alpha$, ὅπου $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$ καί $\nu \in \mathbf{N}$ ὀνομάζεται **διώνυμη ἐξίσωση** καί ἐπιλύεται μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος τῆς παραγράφου 6.1. γιά τόν ὑπολογισμό τῶν ν νιοστῶν ριζῶν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

4. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^5 = -\sqrt{3} + i$.

Ἐπίλυση: Πρῶτα γράφουμε τόν $-\sqrt{3}+i$ σέ τριγωνομετρική μορφή.

Έτσι έχουμε: $z^5 = -\sqrt{3}+i = 2\,(\text{συν}\,150^\circ + i\text{ημ}150^\circ)$, οπότε οι ρίζες είναι

$$z_\kappa = \sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{150^\circ+360^\circ\kappa}{5} + i\text{ημ}\frac{150^\circ+360^\circ\kappa}{5}\right), \quad \kappa = 0,1,2,3,4.$$

$$z_o = \sqrt[5]{2}\,(\text{συν}30^\circ + i\text{ημ}30^\circ) = \sqrt[5]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,.\,\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[5]{2}\left(\text{συν}\frac{150^\circ+360^\circ}{5} + i\text{ημ}\frac{150^\circ+360^\circ}{5}\right), \quad \text{κ.τ.λ.}$$

5. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση: $z^\nu = 1$ (1) (Νιοστές ρίζες τῆς μονάδας).

Ἐπίλυση: Ἔχουμε $z^\nu = 1.(\text{συν}0^\circ + i\text{ημ}0^\circ)$, ὁπότε οἱ ν ρίζες εἶναι

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{1}\left(\text{συν}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{0+2\kappa\pi}{\nu}\right) = \text{συν}\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}, \quad \kappa = 0,1,2,\dots,\nu\text{-}1$$

Οἱ ν αὐτές ρίζες τῆς (1) λέγονται καί **νιοστές ρίζες τῆς μονάδας.**

Παρατηροῦμε ὅτι $z_\kappa = \text{συν}\,\frac{2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi}{\nu} = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}\right)^\kappa$, $\kappa = 0,1,2,\dots,\nu\text{-}1$

ὁπότε $z_o = 1$, $z_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{\nu}$, $\quad z_2 = \left(\text{συν}\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}\right)^2 = z^2{}_1$,

$z_3 = z_1{}^3$, $\;z_4 = z_1{}^4, \dots, z_{\nu-1} = z_1{}^{\nu-1}$.

Ἄρα οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας εἶναι οἱ:

$$1,\ z_1,\ z_1{}^2,\ z_1{}^3,\dots,z_1{}^{\nu-1} \quad \text{μέ } z_1 = \text{συν}\,\frac{2\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{2\pi}{\nu}.$$

Γιά ν=3, ἔχουμε τίς κυβικές ρίζες τῆς μονάδας πού εἶναι:

$$z_o = 1,\ z_1 = \text{συν}\frac{2\pi}{3} + i\text{ημ}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_2 = z^2{}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, ἄν ἀπεικονιστοῦν στόν κύκλο (O,1), εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου.

6.3. Ἀσκήσεις

1. Νά ἐπιλυθοῦν στό **C** οἱ ἐξισώσεις.

   α) $z^3 = 8$, β) $z^3 = 2+2i$ γ) $z^6+64 = 0$, δ) $z^3 = 1+i\sqrt{3}$, ε) $z^5+64i = 0$ καί στ) $3x^6+24x^3 = 0$

2. Δεῖξτε ὅτι τίς ρίζες τῆς ἐξισώσεως $(1+z)^{2\nu} + (1-z)^{2\nu} = 0$ μᾶς τίς δίνει ὁ τύπος:

$$z = i\,\text{εφ}\,\frac{2\kappa+1}{4\nu}\,\pi, \text{ ὅπου } \kappa = 0,1,2,\dots,(2\nu-1).$$

3. Νά ἀπεικονιστοῦν στό μιγαδικό ἐπίπεδο οἱ ρίζες τῆς ἐξισώσεως $z^5 = -\sqrt{3}+i$

4. Ἄν z_1, z_2 εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας δεῖξτε ὅτι:

   α) $z_1{}^2 = z_2$ καί $z^2{}_2 = z_1$,

   β) $1+z_1+z_1{}^2 = 0$ καί $1+z_2+z_2{}^2 = 0$,

   γ) $(1+2z_1+3z_2)\,.\,(1+2z_2+3z_1) = 3$,

   δ) $(1+z_1-z_2)^3 = (1-z_1+z_2)^3$.

5. Δεῖξτε ὅτι ὁ $z = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta \neq -1$ γράφεται καί

$$z = \frac{1+\kappa i}{1-\kappa i}, \quad \kappa \in \mathbf{R} \text{ κατάλληλος.}$$

6. Δεῖξτε ὅτι, ἄν $x, y, z \in \mathbf{R}$ καί $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, τότε θά εἶναι

α) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$,

β) $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = (x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$, καί

γ) $x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)$.

7. Ἄν εἶναι $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ δεῖξτε ὅτι τότε θά εἶναι:

α) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha\omega+\beta\omega^2)(\alpha\omega^2+\beta\omega)$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3 + (\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2)^3 + (\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega)^3 = 3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+6\alpha\beta\gamma)$.

8. Δεῖξτε ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς παραστάσεις

$z_1^* = \alpha+z\beta+z^2\gamma$, $z_2 = \alpha+z^2\beta+z\gamma$, ὅπου $z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, δέ μεταβάλλεται, ἄν ἀντικαταστήσουμε τούς α, β, γ μέ τούς $\alpha+\lambda$, $\beta+\lambda$, $\gamma+\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ ἀντίστοιχα.

9. Δεῖξτε ὅτι:

$(1-z+z^2) \cdot (1-z^2+z^4) \cdot (1-z^4+z^8) \ldots (1-z^{2^{\kappa-1}} + z^{2^\kappa}) = 2^\kappa$,

ὅπου κ ἄρτιος φυσικός καί z τυχοῦσα κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας.

10. Ἄν $\nu \in \mathbf{N}$ καί $z = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, δεῖξτε ὅτι οἱ μοναδικές τιμές τῆς παραστάσεως $K = z^{2\nu}+z^\nu$ εἶναι -1 καί 2.

7. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Τό σύνολο $\mathbf{C} = \{z | z = (\alpha,\beta), \quad \alpha \in \mathbf{R}, \quad \beta \in \mathbf{R}\}$ μέ

$$\boxed{\begin{array}{l} (\alpha_1,\beta_1) = (\alpha_2,\beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1=\alpha_2 \text{ καί } \beta_1=\beta_2 \\ (\alpha_1,\beta_1) + (\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1+\alpha_2, \ \beta_1+\beta_2) \\ (\alpha_1,\beta_1) \cdot (\alpha_2,\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2, \ \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) \end{array}}$$

εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

2. Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί μποροῦν νά ἀπεικονιστοῦν στά σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου (μιγαδικό ἐπίπεδο).

3. Στό μιγαδικό ἐπίπεδο ὁ κύκλος κέντρου (x_0,y_0) καί ἀκτίνας μέτρου α ἔχει ἐξίσωση

$$|z-z_0| = \alpha, \text{ ὅπου } z_0 = (x_0,y_0) \quad \text{καί} \quad z = (x,y).$$

4. Ἄλλες συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z= (\alpha,\beta) \neq (0,0)$ εἶναι οἱ πολικές (ρ,θ), ὅπου $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, $\theta \in [0,2\pi)$ μέ $\text{συν}\theta = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καί $\text{ημ}\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

5. Μέ τή βοήθεια τῶν πολικῶν συντεταγμένων τους οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί παίρνουν τήν τριγωνομετρική τους μορφή

$$\boxed{z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)}$$

Γιά τούς μιγαδικούς $z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, $z_1 = \rho_1 (\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1)$, $z_2 = \rho_2 (\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)$ ἰσχύουν:

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1=\rho_2 \quad \text{καί} \quad \theta_2-\theta_1 = 2\kappa\pi, \quad \kappa \in \mathbf{Z} \\ z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \, [\text{συν}\,(\theta_1+\theta_2)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2)] \\ z_1 : z_2 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \, [\text{συν}\,(\theta_1-\theta_2) + i\text{ημ}\,(\theta_1-\theta_2)], \quad \rho_2 \neq 0 \\ \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{\rho_2} \, [\text{συν}(-\theta_2)+i\text{ημ}(-\theta_2)], \quad \rho_2 \neq 0 \\ z^\nu = \rho^\nu \, [\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)], \quad \nu \in \mathbf{N} \end{array}}$$

6. Κάθε μή μηδενικός μιγαδικός ἀριθμός $\xi = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ ἔχει ν ἀκριβῶς διαφορετικές μεταξύ τους νιοστές ρίζες, τίς:

$$\boxed{z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\text{ημ}\,\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right), \quad \kappa = 0,1,2,\ldots, \nu-1}$$

8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $z \neq -1+0i$ καί $z \neq 1+0i$ δεῖξτε ὅτι:

   α) ὅταν $|z| = 1$, τότε ὁ ἀριθμός $\dfrac{z-1}{z+1}$ εἶναι καθαρός φανταστικός, καί

   β) ὅταν ὁ ἀριθμός $\dfrac{z-1}{z+1}$ εἶναι καθαρός φανταστικός, τότε $|z| = 1$.

2. Γιά κάθε $\alpha \in \mathbf{R}$ μέ $\alpha \geqslant 1$ βρεῖτε τούς μιγαδικούς z, πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z+\alpha|z+1|+i = 0$.

3. Γιά κάθε $\alpha \geqslant 0$ βρεῖτε τούς μιγαδικούς πού ἐπαληθεύουν τήν $2|z|-4\alpha z+1+i\alpha = 0$

4. Ἐπιλύστε τό σύστημα $z^3+\omega^5 = 0$
   $z^2 \cdot \overline{\omega}^4 = 1$, ἄν οἱ z,ω εἶναι μιγαδικοί.

5. Δεῖξτε ὅτι α) $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$, ἄν $\dfrac{z_1}{z_2} > 0$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$, καί

   β) $|z_1+z_2| = ||z_1|-|z_2||$, ἄν $\dfrac{z_1}{z_2} < 0$ καί $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$

6. Δεῖξτε ὅτι α) $|z_1-z_2| = ||z_1|-|z_2||$, ἄν $\dfrac{z_1}{z_2} > 0$, $z_1,z_2 \in \mathbf{C}$, καί

   β) $|z_1-z_2| = |z_1|+|z_2|$, ἄν $\dfrac{z_1}{z_2} < 0$, $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

7. **Ἀπολλώνιος Κύκλος:** Ἄν z_1 καί z_2 εἶναι δεδομένοι μιγαδικοί ἀριθμοί, βρεῖτε τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z μέ: $|z-z_1| = \lambda|z-z_2|$ καί $\lambda \neq 1$.
   Δεῖξτε ἀκόμη ὅτι τό κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ
   $$z_o = \frac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2} \text{ καί ἡ ἀκτίνα του εἶναι } \alpha = \frac{\lambda|z_1-z_2|}{|1-\lambda^2|}.$$

8. Ἄν $|z-10| = 3|z-2|$ δεῖξτε ὅτι $|z-1| = 3$.

9. Ὑπολογίστε τούς $x,y \in \mathbf{R}$, πού ἱκανοποιοῦν τήν $(x+2yi)^2 = xi$

10. Ἄν $|z|^2 = |z^2-1|$, δεῖξτε ὅτι $\mathrm{Re}z^2 = \dfrac{1}{2}$.

11. Ἄν $z = x+yi$, $x,y \in \mathbf{R}$ καί $z^2+z+1 = 0$, τότε θά εἶναι
    $|z| = |z+1| = 1$.

12. Βρεῖτε τό μέτρο καί τό ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ
    $$z = \text{συν}\alpha - i\text{ημ}\alpha + \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

13. Ἄν $|z+16| = 4|z+1|$, δεῖξτε ὅτι $|z| = 4$.

14. Ἄν $z = x+yi$, $z^{-1} = (\alpha+\beta i)^{-1} + (\alpha+\gamma i)^{-1}$ μέ $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$ καί $\alpha+\beta i$, $\alpha+\gamma i$ ὄχι μηδενικοί, ὑπολογίστε τίς τιμές τῶν παραστάσεων i) x^2+y^2, ii) $(x-\alpha)^2+y^2$ καί iii) $\mathrm{Re}z$ συναρτήσει τῶν α,β,γ.

15. Ἄν $z_1 = (z-\alpha) / (\overline{\alpha}z-1)$, $z \neq 1/\overline{\alpha}$, $0 < |\alpha| < 1$, δεῖξτε ὅτι $|z_1| \gtrless 1$, ὅταν, καί μόνο ὅταν, $|z| \gtrless 1$.

16. Ἄν $\zeta^2 = 1+z^2$, $\zeta = \xi+i\eta$, $z = x+yi$ καί $\xi, \eta, x, y \in \mathbf{R}$, δεῖξτε ὅτι:

i) $\dfrac{\xi+x}{\xi-x} = (\xi+x)^2 + (\eta+y)^2 = \dfrac{y+\eta}{y-\eta}$

ii) $2\xi^2 = \sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} + 1+x^2-y^2$

$2\eta^2 = \sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2} -1-x^2+y^2$

17. Δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$ καί ἔπειτα δεῖξτε ὅτι γιά τυχόντες μιγαδικούς z_3 καί z_4 θά ἰσχύει

$|z_3 - \sqrt{z_3^2-z_4^2}|+|z_3+\sqrt{z_3^2-z_4^2}| = |z_3+z_4| + |z_3-z_4|$

18. Δεῖξτε ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν διακεκριμένων μιγαδικῶν ἀριθμῶν z_1,z_2,z_3 στό μιγαδικό ἐπίπεδο βρίσκονται σέ εὐθεία γραμμή, ὅταν καί μόνο ὅταν $\dfrac{z_1-z_3}{z_3-z_2} = \lambda \in \mathbf{R}$.

19. Ἄν γιά τούς μιγαδικούς ἀριθμούς z_1 καί z_2 εἶναι $|z_1|<1$ καί $|z_2|<1$, δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2| < |1-\bar{z}_1z_2|$.

20. Ἄν z_1,z_2 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί καί $\lambda>0$, δεῖξτε ὅτι

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant (1+\lambda)|z_1|^2 + \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2.$$

21. Ἄν οἱ ἀριθμοί $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα

$$\left|\frac{z_1-i}{z_1+i}\right| + \left|\frac{z_2-i}{z_2+i}\right| + \ldots + \left|\frac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right| < 1,$$

τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τήν

$$\left|\frac{z_1+z_2+\ldots+z_\nu-i}{z_1+z_2+\ldots+z_\nu+i}\right|<1.$$

22. Βρεῖτε τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα:

$$\Sigma = 1+x\,\sigma\upsilon\nu\theta+x^2\sigma\upsilon\nu2\theta + \ldots + x^{\nu-1}\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\theta \quad \text{καί}$$

$$\Sigma' = x\eta\mu\theta + x^2\eta\mu2\theta + \ldots + x^{\nu-1}\eta\mu(\nu-1)\theta,$$

ἄν $x \in \mathbf{R}$ καί $0<\theta<\pi$.

23. Ὑπολογίστε τά ἀκόλουθα ἀθροίσματα.

$$\Sigma = 1+\nu\sigma\upsilon\nu\theta+ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\sigma\upsilon\nu2\theta + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\sigma\upsilon\nu\,3\theta + \ldots, \text{ καί}$$

$$\Sigma' = \nu\,\eta\mu\theta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\eta\mu\,2\theta + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\eta\mu\,3\theta+\ldots$$

24. Ἄν $\omega = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\dfrac{2\pi}{\nu}$, $\nu \in \mathbf{N}$ καί

$A_\kappa = x+y\omega^\kappa+z\omega^{2\kappa}+\ldots+\tau\omega^{(\nu-1)\kappa}$, $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$, μέ $x,y,z,\ldots,\tau$ τυχόντες μιγαδικούς ἀριθμούς, δεῖξτε ὅτι:

$|A_0|^2 + |A_1|^2 + \ldots + |A_{\nu-1}|^2 = \nu[|x|^2 + |y|^2 + \ldots + |\tau|^2]$.

25. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός $z = x+yi$ μπορεῖ νά γραφτεῖ μέ τή μορφή

$$|z|\cdot\left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}+i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right], \text{ ὅπου } x,y,\lambda \in \mathbf{R}.$$

26. Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z^2-1)^4 = 16(\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha).z^4$, $0\leqslant\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

1. Διμελεῖς πράξεις
2. Ἡμιομάδες-Ὁμάδες
3. Δακτύλιοι
4. Σώματα
5. Διανυσματικοί χῶροι
6. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
7. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΔΟΜΕΣ

Σέ προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε διάφορα σύνολα, ὅπως τό σύνολο **N** τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολο V τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου κ.ἄ. Στά σύνολα αὐτά εἴχαμε ὁρίσει διάφορες πράξεις, ὅπως πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό ἀριθμῶν, πρόσθεση διανυσμάτων κτλ. Εἴδαμε ἀκόμα ὅτι οἱ διάφορες πράξεις στά σύνολα αὐτά εἶχαν κοινές ἰδιότητες, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεση στό **R** καί ἡ πρόσθεση στό V ἦταν ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές κτλ.

Γεννιέται τώρα τό ἐρώτημα ἄν μποροῦμε νά ταξινομήσουμε τά διάφορα σύνολα μέ βάση τίς ἰδιότητες τῶν πράξεων, μέ τίς ὁποῖες εἶναι ἐφοδιασμένα, καί ἄν μιά τέτοια ταξινόμηση θά ἦταν χρήσιμη.

Γιά τήν ἀντιμετώπιση αὐτοῦ τοῦ θέματος ἡ γνωστή μας ἀξιωματική μέθοδος ἐφαρμόζεται μέ ἐπιτυχία καί μάλιστα μέ πολλά ὀφέλη (ἑνιαία γλώσσα, ἐπίλυση μαθηματικῶν προβλημάτων, ἐφαρμογές σέ ἄλλες ἐπιστῆμες κτλ.). Ἔτσι σέ ἕνα σύνολο θά ὁρίζουμε πράξεις, θά δεχόμαστε μερικά ἀξιώματα καί θά ἀποδεικνύουμε γενικές ἰδιότητες ἀνεξάρτητες ἀπό τή φύση τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

Στό κεφάλαιο αὐτό θά γνωρίσουμε μερικές τέτοιες βασικές ταξινομήσεις, προηγουμένως ὅμως θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς πράξεως πού, ὅπως ἀναφέραμε καί παραπάνω, ὁ ρόλος της εἶναι βασικός.

1. ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διμελοῦς πράξεως

Κοινό γνώρισμα τῶν διάφορων πράξεων πού ἔχουμε μάθει σέ προηγούμενες τάξεις, ὅπως π.χ. ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός ἀριθμῶν, ἡ πρόσθεση διανυσμάτων, ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός διανυσμάτων, ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ διάνυσμα, εἶναι ὅτι «συνθέτουμε» δύο στοιχεῖα, πού ἀνήκουν σέ δύο σύνολα, καί παίρνουμε ὡς ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς συνθέσεως ἀκριβῶς ἕνα στοιχεῖο ἑνός συνόλου, τό ὁποῖο εἶναι δυνατό νά εἶναι ἴσο μέ κάποιο ἀπό τά δύο προηγούμενα σύνολα.

Σέ πολλές πράξεις τό ἀποτέλεσμα ἐξαρτᾶται ἀπό τή διάταξη τῶν στοιχείων πού συνθέτουμε, ὅπως π.χ. στήν ἀφαίρεση πραγματικῶν ἀριθμῶν τά ἀποτελέσματα $x-y$ καί $y-x$ εἶναι γενικῶς διαφορετικά. Εἶναι ἀνάγκη λοιπόν νά θεωρήσουμε ὅτι τό ἀποτέλεσμα μιᾶς πράξεως προέρχεται ἀπό ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος. Ἔτσι, γενικά, μιά πράξη εἶναι μιά ἀπεικόνιση[1] ἑνός συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν σέ ἕνα ἄλλο σύνολο.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός 1. Ἄν Α,Β καί Γ εἶναι μή κενά σύνολα, τότε κάθε ἀπεικόνιση f ἑνός μή κενοῦ ὑποσυνόλου Δ τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ στό Γ ὀνομάζεται **(διμελής) πράξη** ἀπό τό $A \times B$ στό Γ.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν οἱ ἀκόλουθες εἰδικές περιπτώσεις πράξεων:

(i) **$A = B = \Gamma$ καί $\Delta = A \times B$.** Τότε ἡ πράξη εἶναι ἀπεικόνιση τῆς μορφῆς

$$f: \ A \times A \to A$$

καί ὀνομάζεται **ἐσωτερική πράξη στό Α.**

Γιά τό συμβολισμό μιᾶς ἐσωτερικῆς πράξεως θά χρησιμοποιοῦμε, ἀντί γιά τό f, ἕνα ἀπό τά σύμβολα $*$, o, $+$, $\cdot$. Ἔτσι, χρησιμοποιώντας τό σύμβολο $*$, τήν εἰκόνα $f((\alpha,\beta))$ τοῦ $(\alpha,\beta) \in A \times A$ θά τή συμβολίζουμε μέ $\alpha * \beta$ καί θά τήν ὀνομάζουμε **ἀποτέλεσμα** τῆς ἐσωτερικῆς πράξεως μεταξύ τοῦ α καί β.

Μέ $\alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3$ θά συμβολίζουμε τό $(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3$ καί γενικά μέ $\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_\nu$ τό $(\alpha_1 * \alpha_2 * \ldots * \alpha_{\nu-1}) * \alpha_\nu$.

(ii) **$B = \Gamma$ καί $\Delta = A \times B$.** Τότε ἡ πράξη εἶναι ἀπεικόνιση τῆς μορφῆς

$$f: \ A \times B \to B$$

καί ὀνομάζεται **ἐξωτερική πράξη στό Β.**

Γιά τό συμβολισμό μιᾶς ἐξωτερικῆς πράξεως θά χρησιμοποιοῦμε, ἀντί γιά τό f, τό σύμβολο $\cdot$ (ἐπί). Ἔτσι ἡ εἰκόνα $f((\alpha, x))$ τοῦ $(\alpha,x) \in A \times B$ θά συμβολίζεται μέ $\alpha \cdot x$ καί θά ὀνομάζεται **ἀποτέλεσμα** τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως μεταξύ τοῦ $\alpha \in A$ καί τοῦ $x \in B$. Τά στοιχεῖα τοῦ Α ὀνομάζονται **τελεστές**. Γι' αὐτό ἡ ἀκριβέστερη ὀνομασία τῆς πράξεως αὐτῆς εἶναι «ἐξωτερική πράξη στό Β μέ σύνολο τελεστῶν τό Α».

Παραδείγματα:

1. Ἡ πρόσθεση, ἡ ἀφαίρεση καί ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἐσωτερικές πράξεις στό **Z**, γιατί γιά κάθε διατεταγμένο ζεῦγος $(x,y) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ τά ἀποτελέσματα $x+y$, $x-y$, $x.y$ αὐτῶν τῶν πράξεων εἶναι ἀκέραιοι (μονοσήμαντα ὁρισμένοι).
2. Ἡ ἕνωση $\cup$ (ἀντ. ἡ τομή $\cap$) στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(A)$ ἑνός συνόλου Α εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό $\mathscr{P}(A)$.
3. Ἡ πρόσθεση στό σύνολο

$$A = \{\nu \mid \nu \in \mathbf{N} \ \text{ καί } \nu \text{ ἄρτιος}\}$$

εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό Α.

---

1. Μέ τόν ὅρο αὐτό ἐννοοῦμε «μονοσήμαντη ἀπεικόνιση».

4. Ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ διάνυσμα εἶναι μιά ἐξωτερική πράξη στό σύνολο τῶν διανυσμάτων (τοῦ ἐπιπέδου) μέ σύνολο τελεστῶν τό **R**.
5. Ἔστω $A = \mathbf{R}$ καί $B = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Γιά κάθε $\lambda \in A$ καί $(x,y) \in B$ ἡ ἰσότητα $\lambda \cdot (x,y)=(\lambda x,\lambda y)$ ὁρίζει μιά ἀπεικόνιση
$$\cdot : A \times B \rightarrow B,$$
πού εἶναι μιά ἐξωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μέ σύνολο τελεστῶν τό **R**.
Ἐκτός ἀπό αὐτή τήν ἐξωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί μιά ἐσωτερική πράξη στό σύνολο αὐτό μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
Γιά κάθε $(x_1, y_1), (x_2,y_2) \in B(= \mathbf{R} \times \mathbf{R})$ ἡ ἰσότητα
$$(x_1, y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, \quad y_1+y_2)$$
ὁρίζει μία ἀπεικόνιση
$$+ : B \times B \rightarrow B,$$
πού εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη στό $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (παραβ. μέ (2) τῆς 1.2, Κεφ. I).
6. Ὁ ἐσωτερικός πολλαπλασιασμός · στό σύνολο V τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μία πράξη τῆς μορφῆς
$$\cdot : V \times V \rightarrow \mathbf{R},$$
γιατί τό ἐσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων εἶναι, ὡς γνωστό, ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

Εἶναι γνωστό ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάλι ἕνας ἀρνητικός πραγματικός ἀριθμός. Γι' αὐτό τό λόγο θά λέμε ὅτι τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **R**.

Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός 2. Ἄν $*$ εἶναι μιά ἐσωτερική πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ καί Α ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ Σ, τότε θά λέμε ὅτι τό Α εἶναι **κλειστό ὡς πρός τήν πράξη** $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $(\alpha,\beta) \in A \times A$ τό ἀποτέλεσμα $\alpha*\beta$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ Α.

Ἔτσι τό σύνολο τῶν ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς ἀφαιρέσεως στό **R**, ἀφοῦ ἡ διαφορά δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι πάντοτε ἀρνητικός, ὅπως π.χ. $(-3) - (-8) = +5$

Σημείωση. Στά ἑπόμενα θά ἀσχοληθοῦμε μόνο μέ ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές πράξεις. Ἐπειδή μόνο στήν τελευταία παράγραφο αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου θά χρησιμοποιήσουμε τήν ἔννοια τῆς ἐξωτερικῆς πράξεως, τίς ἐσωτερικές πράξεις θά τίς λέμε ἁπλῶς πράξεις, ὅταν δέν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως.

1.2. Ἐσωτερικές πράξεις σέ σύνολα μέ στοιχεῖα κλάσεις ἰσοδυναμίας

Ἀπό προηγούμενες τάξεις εἶναι γνωστό ὅτι κάθε σχέση μέσα σέ ἕνα σύνολο Α $(\neq \phi)$, πού εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, ὀνομάζεται **σχέ-**

ση ἰσοδυναμίας στό A καί συμβολίζεται συνήθως μέ τό σύμβολο $\sim$ (ἤ $\equiv$), πού διαβάζεται «ἰσοδύναμο».
Δηλαδή γιά μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό A ἰσχύουν:

(i) $\alpha \sim \alpha$, γιά ὅλα τά $\alpha \in A$ (ἀνακλαστική ἰδιότητα),

(ii) $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ (συμμετρική ἰδιότητα),

(iii) $\alpha \sim \beta$ καί $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ (μεταβατική ἰδιότητα).

Ἐξάλλου εἶναι γνωστό ὅτι, ἄν $\alpha \in A$, τό σύνολο ὅλων τῶν στοιχείων x τοῦ A μέ τήν ἰδιότητα $x \sim \alpha$ ὀνομάζεται **κλάση ἰσοδυναμίας** τοῦ α καί θά συμβολίζεται μέ $\widehat{\alpha}$, δηλαδή

$$\widehat{\alpha} = \{x \mid x \in A \quad \text{μέ} \quad x \sim \alpha\}$$

Κάθε $x \in \widehat{\alpha}$ θά ὀνομάζεται ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως ἰσοδυναμίας $\widehat{\alpha}$.

Εἶναι εὔκολο νά δειχτεῖ ὅτι γιά τίς κλάσεις ἰσοδυναμίας ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta}}$$

καί ὅτι, ἄν δύο κλάσεις δέν εἶναι ἴσες, τότε εἶναι ξένα σύνολα.

Ἄς συμβολίσουμε τώρα μέ K τό σύνολο ὅλων τῶν κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ μέ $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ καί $\beta \neq 0$, δηλαδή

$$K = \left\{\frac{\alpha}{\beta} \mid \alpha, \beta \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \beta \neq 0\right\}$$

Τότε ἡ σχέση, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\frac{\alpha}{\beta} \equiv \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma,$$

εἶναι μιά σχέση ἰσοδυναμίας στό K καί εἶναι γνωστό ὅτι ἡ κλάση ἰσοδυναμίας ἑνός στοιχείου τοῦ K ὀνομάζεται ρητός ἀριθμός. Ἔτσι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου **Q** τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Δίνουμε τώρα ἀκόμα ἕνα παράδειγμα συνόλου μέ στοιχεῖα κλάσεις ἰσοδυναμίας, πού θά τό χρησιμοποιήσουμε συχνά σ' αὐτό τό κεφάλαιο.

Παράδειγμα 1. Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ καί $\nu \in \mathbf{N}$, τότε μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ \nu) \Leftrightarrow x - y = \text{ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ } \nu,$$

ὁρίζεται μία σχέση «$\equiv (\mathrm{mod}\ \nu)$» μέσα στό **Z**. Τό $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ \nu)$ διαβάζεται «x ἰσοδύναμο (ἤ ἰσοϋπόλοιπο[1]) μέ τό y modulo ν». Ἔτσι $6 \equiv -2 \ (\mathrm{mod}\ 4)$, ἀφοῦ $6-(-2) = 8 = 2 \cdot 4$ καί $3 \equiv 42 \ (\mathrm{mod}\ 13)$, ἀφοῦ $3 - 42 = -39 = (-3) \cdot 13$.

Ἡ σχέση «$\equiv(\mathrm{mod}\ \nu)$» εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στό **Z**. Πράγματι, εἶναι

1. Γιατί, ἄν $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\nu)$, τότε οἱ διαιρέσεις τῶν x, y μέ τό ν δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο καί ἀντίστροφα (Κεφ. III 1.3, προτ. 2),

(i) ἀνακλαστική, γιατί γιά κάθε $x \in \mathbf{Z}$ εἶναι $x \equiv x(\text{mod } \nu)$, ἀφοῦ $x-x=0=0\cdot\nu$,

(ii) συμμετρική, γιατί, ἄν $x \equiv y\ (\text{mod } \nu)$, τότε ὑπάρχει $k \in \mathbf{Z}$ μέ $x-y=k\cdot\nu$, ὁπότε $y-x=(-k)\nu$, πού σημαίνει ὅτι $y \equiv x\ (\text{mod } \nu)$, ἀφοῦ $-k \in \mathbf{Z}$,

(iii) μεταβατική, γιατί, ἄν $x \equiv y\ (\text{mod } \nu)$ καί $y \equiv z\ (\text{mod } \nu)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι k_1 καί k_2 μέ $x-y=k_1\cdot\nu$ καί $y-z=k_2\cdot\nu$, ὁπότε
$$x-z=(x-y)+(y-z)=k_1\cdot\nu+k_2\cdot\nu=(k_1+k_2)\nu$$
καί ἑπομένως $x \equiv z\ (\text{mod } \nu)$, ἀφοῦ $(k_1+k_2) \in \mathbf{Z}$.

Οἱ κλάσεις ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων τοῦ $\mathbf{Z}$ ὡς πρός τήν παραπάνω σχέση ὀνομάζονται **κλάσεις ὑπολοίπου modulo ν**. Ἔτσι ἡ κλάση ὑπολοίπου modulo ν τοῦ $\alpha \in \mathbf{Z}$ περιέχει ὅλους τούς ἀκέραιους x, γιά τούς ὁποίους ἡ διαφορά $x-\alpha$ εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τοῦ ν, δηλαδή
$$\widehat{\alpha}=\{\alpha+k\cdot\nu \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv$ (mod 3)» ὁρίζει τίς ἀκόλουθες κλάσεις ὑπολοίπου modulo 3 στό $\mathbf{Z}$:
$$\widehat{0}=\{3k \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\widehat{1}=\{3k+1 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\widehat{2}=\{3k+2 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
γιατί τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκέραιου μέ τό 3 εἶναι 0,1,2.

Τό σύνολο τῶν κλάσεων ὑπολοίπου modulo ν θά τό συμβολίζουμε μέ $\mathbf{Z}_\nu$. Ἔτσι $Z_3=\{\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{2}\}$.

Σέ προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε ἐσωτερικές πράξεις στό $\mathbf{Q}$, πού στήν πραγματικότητα ἦταν πράξεις μεταξύ κλάσεων ἰσοδυναμίας. Ἄς δοῦμε πῶς μάθαμε τήν πρόσθεση στό $\mathbf{Q}$. Τά κλάσματα $x=\frac{1}{2}$ καί $y=\frac{1}{3}$ δημιουργοῦν, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, τούς ρητούς $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$. Ἄν μέ τή γνωστή πρόσθεση στό σύνολο K τῶν κλασμάτων προσθέσουμε δύο ἀντιπροσώπους τῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$, π.χ. τούς $\frac{1}{2}$ καί $\frac{1}{3}$, βρίσκουμε ἄθροισμα $z=\frac{5}{6}$. Δύο ἄλλοι ἀντιπρόσωποι τῶν ρητῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$, π.χ. οἱ $\frac{2}{4}$ καί $\frac{3}{9}$, δίνουν ἄθροισμα $\frac{30}{36}$, τό ὁποῖο ἀνήκει στήν κλάση $\widehat{z}$, ἀφοῦ $\frac{5}{6} \equiv \frac{30}{36}$. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ ὁποιουσδήποτε ἀντιπροσώπους τῶν ρητῶν $\widehat{x}$ καί $\widehat{y}$.

Ἄς ἀντιμετωπίσουμε τώρα τό θέμα αὐτό γενικά. Ἔστω A ἕνα σύνολο, στό ὁποῖο ἔχουν ὁριστεῖ μιά ἐσωτερική πράξη $*$ καί μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$. Ἄν $\widehat{A}$ εἶναι τό σύνολο τῶν κλάσεων ἰσοδυναμίας τῶν στοιχείων τοῦ A, τότε ὑπάρχουν διάφοροι τρόποι, γιά νά ὁριστοῦν ἐσωτερικές πράξεις στό $\widehat{A}$. Ἐπειδή κάθε στοιχεῖο τοῦ $\widehat{A}$ ἀποτελεῖται ἀπό στοιχεῖα τοῦ A, γεννιέται τό ἐρώτημα ἄν εἶναι δυνατό νά ὁριστεῖ ἐσωτερική πράξη στό $\widehat{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς πράξεως $*$ στό A. Γιά τό σκοπό αὐτό κάνουμε τούς ἑξῆς συλλογισμούς. Ἄν $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta} \in \widehat{A}$ καί πάρουμε $x \in \widehat{\alpha}$ καί $y \in \widehat{\beta}$, τότε τό ἀποτέλεσμα $x * y$ ἀνήκει σέ μιά κλάση ἰσοδυναμίας, ἔστω τή $\widehat{\gamma}$. Τό θέμα τώρα εἶναι ἄν δύο ἄλλοι ἀντιπρόσωποι x_1, y_1 τῶν κλάσεων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$ ἀντιστοίχως δίνουν ἀποτέλεσμα $x_1 * y_1$, τό ὁποῖο νά ἀνήκει στήν κλάση $\widehat{\gamma}$. Εἶναι φανερό ὅτι γιά νά μπορεῖ νά ὁριστεῖ μιά πράξη στό $\widehat{A}$ μέ τή βοήθεια τῆς πράξεως $*$, πού νά εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τῶν ἀντιπροσώπων τῶν κλάσεων $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$, πρέπει τά ἀποτελέσματα $x * y$ καί $x_1 * y_1$ νά ἀνήκουν πάντα στήν ἴδια κλάση ἰσοδυναμίας.

Ἔτσι δίνουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ στό A ὀνομάζεται **συμβιβαστή** μέ τήν ἐσωτερική πράξη $*$ στό A, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$x \sim x_1 \text{ καί } y \sim y_1 \Rightarrow (x * y) \sim (x_1 * y_1)$$

Στήν περίπτωση αὐτή μποροῦμε νά ὁρίσουμε μιά ἐσωτερική πράξη στό $\widehat{A}$, πού θά τή συμβολίζουμε ἐπίσης μέ $*$, μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\widehat{\alpha} * \widehat{\beta} = \widehat{\alpha * \beta}$$

Τό ἑπόμενο θεώρημα εἶναι χρήσιμο, γιά νά ἐλέγχουμε ἄν μιά σχέση ἰσοδυναμίας εἶναι συμβιβαστή μέ μία πράξη.

Θεώρημα. Μιά σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ σέ ἕνα σύνολο A εἶναι συμβιβαστή μέ μιά ἐσωτερική πράξη $*$ στό A, ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ἰσχύει

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow (\alpha * \gamma) \sim (\beta * \gamma) \text{ καί } (\gamma * \alpha) \sim (\gamma * \beta) \qquad (1)$$

Ἀπόδειξη. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ συνθήκη (1) ἰσχύει. Ἄν $\alpha \sim \alpha'$ καί $\beta \sim \beta'$, τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε $(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta)$ καί $(\alpha' * \beta) \sim (\alpha' * \beta')$ καί, ἀφοῦ ἡ $\sim$ εἶναι μεταβατική σχέση, ἔχουμε

$$(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta'),$$

δηλαδή ἡ $\sim$ εἶναι συμβιβαστή μέ τήν $*$.

Παραδείγματα:

2. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv (\mathrm{mod}\ 3)$» στό $\mathbf{Z}$ εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πρόσθεση στό $\mathbf{Z}$. Ἔτσι μποροῦμε νά ὁρίσουμε στό $\mathbf{Z}_3$ πρόσθεση μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο :

Ἄν $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, τότε σύμφωνα μέ ὅσα ἔχουμε ἀναφέρει προηγουμένως ἔχουμε

$$\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}.$$

Τά ἀποτελέσματα τῆς πράξεως $+$ στό $\mathbf{Z}_3$ δίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 1.

$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$

Σχ. 1

$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$
$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Σχ. 2

Τό πρῶτο μέλος $\widehat{x}$ τοῦ διατεταγμένου ζεύγους $(\widehat{x}, \widehat{y})$ ἀναγράφεται στήν πρώτη στήλη τοῦ πίνακα, ἐνῶ τό δεύτερο $\widehat{y}$ στήν πρώτη σειρά τοῦ πίνακα καί τό ἀποτέλεσμα $\widehat{x+y}$ στή διασταύρωση τῆς γραμμῆς, πού περιέχει τό $\widehat{x}$, καί τῆς στήλης, πού περιέχει τό $\widehat{y}$.

Π.χ. $\widehat{2}+\widehat{1}=\widehat{0}$

3. Ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv$ (mod 3)» στό **Z** εἶναι συμβιβαστή μέ τόν πολλαπλασιασμό στό **Z**.

Μποροῦμε λοιπόν νά ὁρίσουμε στό $\mathbf{Z}_3$ πολλαπλασιασμό μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο :

Ἄν $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$, τότε κατά τά γνωστά ἔχουμε

$$\widehat{x} \cdot \widehat{y} = \widehat{x \cdot y}$$

Τά ἀποτελέσματα τῆς πράξεως $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_3$ δίνονται στόν πίνακα τοῦ σχήματος 2.

Ἔτσι π.χ. $\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{1}$.

4. Ἡ σχέση «$\equiv$ (mod 7)» στό σύνολο **N** εἶναι μιά σχέση ἰσοδυναμίας. Ἄν ὁρίσουμε στό **N** τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$\alpha * \beta = \text{ΕΚΠ}\,(\alpha,\beta),$$

τότε ἡ σχέση «$\equiv$ (mod 7)» δέν εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πράξη $*$, γιατί

$$2 \equiv 9 \pmod 7, \qquad 4 \equiv 11 \pmod 7,$$
$$2 * 4 = 4 \quad , \qquad 9 * 11 = 99,$$

ἐνῶ τό 4 δέν εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό 99 modulo 7.

1.3. Ἰδιότητες τῶν ἐσωτερικῶν πράξεων

Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στό **N** εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική. Μέ τόν παρακάτω ὁρισμό γενικεύουμε τίς δύο αὐτές ἰδιότητες γιά μιά ὁποιαδήποτε πράξη.

Ὁρισμός 1. Μιά πράξη ο σέ ἕνα σύνολο Σ ὀνομάζεται

(i) ἀντιμεταθετική, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha}$$

(ii) προσεταιριστική, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)}$$

Παραδείγματα:

1. Ἡ γνωστή πράξη τῆς προσθέσεως στό σύνολο **Q** τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀντιμεταθετική, γιατί γιά κάθε $x, y \in \mathbf{Q}$ ἰσχύει
$$x + y = y + x,$$
καί προσεταιριστική, γιατί γιά κάθε $x, y, z \in \mathbf{Q}$ ἰσχύει
$$(x+y) + z = x + (y+z).$$
2. Ἡ πράξη τῆς ἀφαιρέσεως στό σύνολο **R** δέν εἶναι ἀντιμεταθετική, γιατί ὑπάρχουν $x, y \in \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε
$$x-y \neq y-x \quad (\text{π.χ. } 8-3 \neq 3-8),$$
οὔτε εἶναι προσεταιριστική, γιατί ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε
$$(x-y)-z \neq x-(y-z) \quad [\text{π.χ } (5-3)-1 \neq 5-(3-1)].$$
3. Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ πρόσθεση στό **R** εἶναι πράξεις ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές, ἐνῶ ἡ πράξη $*$ στό **R**, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$\alpha * \beta = |\alpha-\beta| \qquad (\alpha,\beta \in \mathbf{R}),$$
εἶναι ἀντιμεταθετική ἀλλά ὄχι προσεταιριστική. (Νά γίνει ἀπόδειξη ἀπό τούς μαθητές).

Ἡ γνωστή ἐπιμεριστική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **R** γενικεύεται μέ τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός 2. Ἄν $*$, $\circ$ εἶναι δύο πράξεις σέ ἕνα σύνολο Σ, τότε λέμε ὅτι ἡ **πράξη** $*$ **εἶναι**

(i) ἀπό ἀριστερά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει
$$\boxed{\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma)}$$

(ii) ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει
$$\boxed{(\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha)}$$

(iii) ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, ἄν καί μόνο ἄν εἶναι συγχρόνως ἀπό ἀριστερά καί ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν o, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύει
$$\boxed{\alpha * (\beta \circ \gamma) = (\alpha * \beta) \circ (\alpha * \gamma) \quad \text{καί} \quad (\beta \circ \gamma) * \alpha = (\beta * \alpha) \circ (\gamma * \alpha)}$$

Εἶναι φανερό ὅτι, ὅταν ἡ πρώτη πράξη $*$ στόν προηγούμενο ὁρισμό εἶναι ἀντιμεταθετική, οἱ τρεῖς ἔννοιες ἐπιμεριστικότητας τῆς $*$ ὡς πρός τήν o εἶναι ἰσοδύναμες.

Παραδείγματα:

4. Ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **N**, γιατί
(i) ὁ πολλαπλασιασμός εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη στό **N** καί
(ii) γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{N}$ ἰσχύει
$$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Ἡ πρόσθεση στό $\mathbf{N}$ ὅμως δέν εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό, γιατί ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{N}$ τέτοια, ὥστε

$$x + (y \cdot z) \neq (x+y) \cdot (x+z) \qquad [\pi.\chi.\ 3+(2\cdot 1) \neq (3+2)\cdot(3+1)]$$

5. Ἡ τομή $\cap$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν ἕνωση $\cup$ στό δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ ἑνός συνόλου X, γιατί
   (i) ἡ τομή εἶναι ἀντιμεταθετική πράξη στό $\mathcal{P}(X)$ καί
   (ii) γιά κάθε $A,B,\Gamma \in \mathcal{P}(X)$ ἰσχύει
   $$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$
   Ἐπίσης ἡ ἕνωση $\cup$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν τομή $\cap$ στό $\mathcal{P}(X)$.

6. Στό σύνολο $\mathbf{R}$ θεωροῦμε τή γνωστή πράξη τῆς προσθέσεως $+$ καί τήν πράξη $\circ$, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα
   $$x \circ y = x^3 \cdot y \qquad (x,y \in \mathbf{R}).$$
   Τότε
   (i) γιά κάθε $x,y,z \in \mathbf{R}$ ἰσχύει
   $$x \circ (y+z) = x^3 \cdot (y+z) = x^3 \cdot y + x^3 \cdot z = (x \circ y) + (x \circ z),$$
   δηλαδή ἡ $\circ$ εἶναι ἀπό ἀριστερά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν $+$,
   (ii) ὑπάρχουν $x,y,z \in \mathbf{R}$, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει
   $$(y+z) \circ x = (y+z)^3 \cdot x \neq y^3 \cdot x + z^3 \cdot x = (y \circ x) + (z \circ x),$$
   δηλαδή ἡ $\circ$ δέν εἶναι ἀπό δεξιά ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν $+$.

1.4. Οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Γνωρίζουμε ὅτι στό σύνολο $\mathbf{R}$ ὁ ἀριθμός 0 ἔχει τήν ἰδιότητα:

$$\forall\ x \in \mathbf{R}: \qquad x+0 = 0+x = x$$

καί γι' αὐτό ὀνομάζεται οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$.

Γενικεύοντας τήν ἰδιότητα αὐτή ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω $*$ μία πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ. Τότε ἕνα στοιχεῖο e τοῦ Σ ὀνομάζεται **οὐδέτερο στοιχεῖο** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $\alpha \in \Sigma$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * e = e * \alpha = \alpha}$$

Παρατήρηση. Ἄν στόν προηγούμενο ὁρισμό ἡ πράξη $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, εἶναι φανερό ὅτι ἕνα στοιχεῖο e τοῦ Σ εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν γιά κάθε $\alpha \in \Sigma$ ἰσχύει $\alpha * e = \alpha$.

Θεώρημα. Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ. Τότε, ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο στό Σ ὡς πρός τήν πράξη $*$, αὐτό εἶναι μοναδικό.

Ἀπόδειξη. Ἄν $e_1, e_2 \in \Sigma$ εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$, τότε θεωρώντας τό e_1 οὐδέτερο στοιχεῖο, λόγω τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχουμε

$$e_1 * e_2 = e_2,$$

ἐνῶ θεωρώντας τό e_2 οὐδέτερο στοιχεῖο, πάλι λόγω τοῦ ὁρισμοῦ, ἔχουμε

$$e_1 * e_2 = e_1,$$

ὁπότε, λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας στό Σ, παίρνουμε $e_1 = e_2$.

Στήν περίπτωση πού ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός μιά πράξη, θά ἐπιτρέπεται, λόγω τοῦ προηγούμενου θεωρήματος, νά λέμε ὅτι αὐτό εἶναι **τό** οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο (ἄν ὑπάρχει) ὡς πρός μιά πράξη, πού ὀνομάζεται «πρόσθεση», θά συμβολίζεται συνήθως μέ 0, ἐνῶ ὡς πρός μιά πράξη, πού ὀνομάζεται «πολλαπλασιασμός», θά συμβολίζεται μέ 1 ἤ I.

Παρατήρηση. Ἡ μοναδικότητα τοῦ οὐδέτερου στοιχείου ὡς πρός τήν πρόσθεση (ἀντ. τόν πολλαπλασιασμό) στό **C**, πού εἴδαμε στό Κεφ. I (Προτ. 1 καί 1' τῆς 1.3), εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ προηγούμενου θεωρήματος.

Παραδείγματα:

1. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό **C** εἶναι τό $0 = 0 + 0i$, ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό εἶναι τό $1 = 1 + 0i$ (Κεφ. I, Προτ. 1 καί 1' τῆς 1.3.)
2. Τό ϕ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}(A)$ ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς ἑνώσεως $\cup$, ἀφοῦ γιά κάθε $X \in \mathscr{P}(A)$ ἰσχύει $X \cup \phi = X$, καί τό A εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς τομῆς $\cap$, γιατί γιά κάθε $X \in \mathscr{P}(A)$ ἰσχύει $X \cap A = X$.
3. Ἡ ἰσότητα

$$x \circ y = x \qquad (x, y \in \mathbf{R})$$

ὁρίζει μιά πράξη $\circ$ στό **R**, ὡς πρός τήν ὁποία δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο, γιατί, ἄν ὑπῆρχε οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in \mathbf{R}$, τότε γιά $x, y \in \mathbf{R}$ μέ $x \neq y$ θά ἴσχυε $e \circ x = x$ καί $e \circ y = y$, ὁπότε λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τῆς πράξεως θά εἴχαμε $e = x$ καί $e = y$ καί ἐπομένως $x = y$, πού εἶναι ἄτοπο.

1.5. Συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Γνωρίζουμε ὅτι γιά ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό x ὑπάρχει ἕνας πραγματικός ἀριθμός, ὁ $-x$, τέτοιος, ὥστε

$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

Γενικεύοντας αὐτό γιά μιά ὁποιαδήποτε πράξη ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ, ὡς πρός τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in \Sigma$. Τότε δύο στοιχεῖα α καί α' τοῦ Σ ὀνομάζονται **συμμετρικά** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει

$$\boxed{\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e}$$

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό α εἶναι συμμετρικό τοῦ α' ὡς πρός τήν πράξη $*$ καί ἀντίστροφα τό α' συμμετρικό τοῦ α ὡς πρός τήν $*$.

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στόν προηγούμενο ὁρισμό ἡ πράξη $*$ εἶναι ἀντιμεταθετική, δύο στοιχεῖα α καί α' τοῦ Σ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν πράξη $*$, ὅταν καί μόνο ὅταν ἰσχύει $\alpha * \alpha' = e$.

Παραδείγματα:

1. Κάθε πραγματικός ἀριθμός $x \neq 0$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R** τόν ἀριθμό x^{-1} (πού ὡς γνωστό ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ x), γιατί $x \cdot x^{-1} = 1$, ὅπου τό 1 εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό **R**.
2. Οἱ ἀντίθετοι μιγαδικοί ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $-\alpha-\beta i$ εἶναι συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν (ἀντιμεταθετική) πράξη τῆς προσθέσεως στό **C**, γιατί $(\alpha+\beta i)+(-\alpha-\beta i) = 0$ (Κεφ. Ι, Προτ. 2 τῆς 1.3). Ἐξάλλου κάθε μιγαδικός $\alpha+\beta i \neq 0$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό **C** τόν ἀντίστροφό του:
$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} i,$$
ὅπως εἴδαμε στό Κεφ. Ι (Προτ. 2 τῆς 1.3).
3. Στό σύνολο $A = \{e, x, y\}$ ὁρίζουμε τήν πράξη $\circ$, τῆς ὁποίας ὁ πίνακας ἀποτελεσμάτων δίνεται στό σχῆμα 3. Εὔκολα διαπιστώνεται ὅτι τό e εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς πράξεως $\circ$. Τό στοιχεῖο x τοῦ A ἔχει δύο συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $\circ$, τόν ἑαυτό του καί τό y, γιατί
$$x \circ x = e \quad \text{καί} \quad x \circ y = y \circ x = e.$$

o	e	x	y
e	e	x	y
x	x	e	e
y	y	e	x

Σχ. 3

1.6. Ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός ἐσωτερική πράξη

Ὅλοι γνωρίζουμε τούς δύο νόμους τῆς διαγραφῆς στό σύνολο **N**:
$$\alpha+\beta = \alpha+\gamma \Rightarrow \beta = \gamma,$$
$$\alpha\beta = \alpha\gamma \Rightarrow \beta = \gamma.$$

Οἱ ἰδιότητες αὐτές γενικεύονται μέ τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω $*$ μιά πράξη σέ ἕνα σύνολο Σ. Τότε ἕνα στοιχεῖο α τοῦ Σ ὀνομάζεται **ἁπλοποιήσιμο** ὡς πρός τήν πράξη $*$, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $\beta, \gamma \in \Sigma$ ἰσχύουν
$$\boxed{\alpha * \beta = \alpha * \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad \text{καί} \quad \beta * \alpha = \gamma * \alpha \Rightarrow \beta = \gamma}$$

Παραδείγματα:

1. Κάθε πραγματικός ἀριθμός εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **R**. Ἐπίσης κάθε μιγαδικός ἀριθμός εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **C** (Κεφ. Ι, Προτ. 3 τῆς 1.3).
2. Κάθε πραγματικός ἀριθμός $\neq 0$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R**, γιατί, ἄν $x \neq 0$, τότε γιά κάθε $\alpha, \beta \in$ **R** ἰσχύουν
$$x \cdot \alpha = x \cdot \beta \Rightarrow \alpha = \beta \quad \text{καί} \quad \alpha \cdot x = \beta \cdot x \Rightarrow \alpha = \beta.$$
Ἐπίσης κάθε μιγαδικός ἀριθμός $\neq 0$ εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη

τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C** (Κεφ. I, Προτ. 3′ τῆς 1.3). Τό 0 (ἀντ. τό $0=0+0i$) δέν εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R** (ἀντ. **C**), γιατί π.χ. ἰσχύουν $0\cdot 3=0\cdot 4$ καί $3\neq 4$.

1.7. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγεβρικῆς δομῆς

Ὅπως εἴδαμε στά προηγούμενα, σέ ἕνα σύνολο $A\neq\emptyset$ μποροῦν νά ὁριστοῦν διάφορες πράξεις. Τότε τό σύνολο A μαζί μέ τίς πράξεις αὐτές θά λέμε ὅτι ἔχει μιά **ἀλγεβρική δομή**, ἡ ὁποία χαρακτηρίζεται ἀπό τίς ἰδιότητες αὐτῶν τῶν πράξεων. Στήν περίπτωση πού σέ ἕνα σύνολο A ἔχουν ὁριστεῖ μόνο ἐσωτερικές πράξεις, $\circ, *, \ldots, \oplus$, θά γράφουμε $(A, \circ, *, \ldots, \oplus)$, γιά νά ἐκφράσουμε τήν ἀλγεβρική δομή (ἤ ἁπλά δομή). Ἔτσι οἱ συμβολισμοί

$$(\mathbf{N},+),\ (\mathbf{N},\cdot),\ (\mathbf{Z},+),\ (\mathbf{R},+),\ (\mathbf{Z},+,\cdot),\ (\mathbf{Q},+,\cdot)$$

ἐκφράζουν δομές. Οἱ δομές $(\mathbf{N},+)$, $(\mathbf{N},\cdot)$, παρόλο πού ἀναφέρονται στό ἴδιο σύνολο **N**, εἶναι διαφορετικές, γιατί δέ χαρακτηρίζονται ἀπό τίς ἴδιες ἰδιότητες. Π.χ. στή δομή $(\mathbf{N},+)$ δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$, ἐνῶ στή δομή $(\mathbf{N},\cdot)$ ὑπάρχει καί εἶναι τό 1.

Μερικά παραδείγματα ἀλγεβρικῶν δομῶν θά γνωρίσουμε στίς ἑπόμενες παραγράφους.

1.8. Ἀσκήσεις

1. Νά ἐξετάσετε ἄν τό σύνολο
   (i) $\{1,-1\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **Z**,
   (ii) τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι κλειστό ὡς πρός τίς πράξεις τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως στό **Z**,
   (iii) $\{k+ki \mid k\in\mathbf{R}\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό **C**,
   (iv) $\{1,-1,i,-i\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C**.
2. Ἄν $\Sigma=\{A, B, \Gamma, \Delta\}$, ὅπου
   $$A=\emptyset,\quad B=\{\alpha,\beta\},\quad \Gamma=\{\alpha,\gamma\}\quad \text{καί}\quad \Delta=\{\alpha,\beta,\gamma\},$$
   δεῖξτε ὅτι ἡ ἕνωση $\cup$ εἶναι ἐσωτερική πράξη στό Σ. Εἶναι ἡ τομή $\cap$ ἐσωτερική πράξη στό Σ;
3. Δεῖξτε ὅτι ἡ σχέση ἰσοδυναμίας «$\equiv(\text{mod }\nu)$» εἶναι συμβιβαστή μέ τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό **Z**.
4. Κατασκευάστε τούς πίνακες ἀποτελεσμάτων γιά τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbf{Z}_4$. Οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές ἤ προσεταιριστικές; Εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση; Ὑπάρχουν οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις αὐτές; Ποιά στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{Z}_4$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις αὐτές;
5. Βρεῖτε γιά ποιές τιμές τῶν $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ εἶναι προσεταιριστική ἡ πράξη $*$ στό **R**, πού ὁρίζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
   $$x*y=\alpha x+\beta y.$$

6. Νά δείξετε ὅτι ἡ ἰσότητα

$$\alpha * \beta = \beta$$

ὁρίζει μιά πράξη $*$ στό **N**, ὡς πρός τήν ὁποία δέν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο στό **N**. Εἶναι προσεταιριστική αὐτή ἡ πράξη;

7. Ἡ ἰσότητα

$$\alpha * \beta = \alpha\beta + \alpha + \beta$$

ὁρίζει μιά πράξη $*$ στό **R**. Εἶναι ἡ πράξη αὐτή ἀντιμεταθετική ἤ προσεταιριστική; Ποιά στοιχεῖα τοῦ **R** ἔχουν συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

8. Ἡ ἰσότητα

$$x \circ y = x + y + x^2y^2$$

ὁρίζει μιά πράξη $\circ$ στό **R**. Νά δείξετε ὅτι κάθε $x \in \mathbf{R}-\{0\}$ μέ $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ἔχει δύο συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη αὐτή, ἐνῶ κάθε $x \in \mathbf{R}$ μέ $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ δέν ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο. Τά 0, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα καί ποιά;

9. Στό σύνολο **C** ὁρίζουμε μιά πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο

$$z_1 * z_2 = z_1 + z_2 - z_1z_2.$$

(i) Νά δείξετε ὅτι ἡ πράξη αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική.

(ii) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

(iii) Ποιά στοιχεῖα τοῦ **C** ἔχουν συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή;

10. Ἔστω $*$ μιά ἐσωτερική πράξη σέ ἕνα σύνολο Ε, ὡς πρός τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$ ἰσχύει

$$(\alpha * \beta) * (\gamma * \delta) = (\alpha * \gamma) * (\beta * \delta),$$

νά δείξετε ὅτι ἡ πράξη αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετική καί προσεταιριστική.

2. ΗΜΙΟΜΑΔΕΣ - ΟΜΑΔΕΣ

Οἱ δομές μέ μιά ἐσωτερική πράξη χωρίζονται, ἀνάλογα μέ τίς ἰδιότητες πού ἔχει ἡ πράξη αὐτή, σέ διάφορες κατηγορίες. Ἀπό τίς κατηγορίες αὐτές θά ἐξετάσουμε στήν παράγραφο αὐτή τίς *ἡμιομάδες* καί τίς *ὁμάδες*.

2.1. Ἡμιομάδες

Στήν κατηγορία αὐτή ὑπάγονται οἱ δομές ἐκεῖνες, στίς ὁποῖες ἡ πράξη εἶναι προσεταιριστική. Παράδειγμα τέτοιας δομῆς εἶναι τό (**N**, +), ὅπου ἡ πρόσθεση εἶναι, ὡς γνωστό, προσεταιριστική πράξη.

Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μία δομή (G, o) ὀνομάζεται **ἡμιομάδα,** ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη o εἶναι προσεταιριστική, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$ ἰσχύει

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$$

Ἄν ἐπιπλέον ἡ πράξη o εἶναι ἀντιμεταθετική, τότε ἡ δομή (G, o) ὀνομάζεται **ἀντιμεταθετική ἡμιομάδα**.

Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό οἱ δομές $(\mathbf{N}, +)$ καί $(\mathbf{N}, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετικές ἡμιομάδες.

Στά προηγούμενα εἴδαμε ὅτι ἕνα στοιχεῖο εἶναι δυνατό νά ἔχει περισσότερα ἀπό ἕνα συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός μία πράξη (Παραδ. 3 τῆς 1.5). Στίς ἡμιομάδες ὅμως αὐτό εἶναι ἀδύνατο, ὅπως δηλώνει τό ἀκόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα. Ἔστω (G, o) μιά ἡμιομάδα. Ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο e ὡς πρός τήν πράξη o, τότε κάθε $x \in G$ ἔχει τό πολύ ἕνα συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη αὐτή.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά στοιχεῖα x' καί x'' τοῦ G εἶναι συμμετρικά τοῦ $x \in G$ ὡς πρός τήν πράξη o. Τότε λόγω τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συμμετρικοῦ στοιχείου ἔχουμε

$$x \circ x' = e \quad \text{καί} \quad x'' \circ x = e,$$

ὁπότε ἀπό τήν προσεταιριστική ἰδιότητα τῆς πράξεως o παίρνουμε

$$x'' = x'' \circ e = x'' \circ (x \circ x') = (x'' \circ x) \circ x' = e \circ x' = x',$$

δηλαδή $x' = x''$.

2.2. Ὁμάδες

Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +)$ εἶναι μιά (ἀντιμεταθετική) ἡμιομάδα πού ἔχει καί ἄλλες ἰδιότητες, τίς ὁποῖες δέν ἔχει ἡ (ἀντιμεταθετική) ἡμιομάδα $(\mathbf{N}, +)$. Οἱ πρόσθετες αὐτές ἰδιότητες εἶναι οἱ ἀκόλουθες:

(i) ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση:

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{Z}: \qquad \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

(ii) κάθε στοιχεῖο α τοῦ **Z** ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο τό $-\alpha$:

$$\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0.$$

Θεωρώντας αὐτή τήν ἀλγεβρική δομή τοῦ **Z** σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μία δομή (G, o) ὀνομάζεται **ὁμάδα,** ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(O_1) Ἡ δομή (G, o) εἶναι ἡμιομάδα.

(O_2) Ὑπάρχει $e \in G$ τέτοιο, ὥστε γιά κάθε $\alpha \in G$ νά ἰσχύει

$$\alpha \circ e = e \circ \alpha = \alpha \qquad \text{(ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου).}$$

(O_3) Γιά κάθε $\alpha \in G$ ὑπάρχει $\alpha' \in G$ τέτοιο, ὥστε

$$\alpha \circ \alpha' = \alpha' \circ \alpha = e \qquad \text{(ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου).}$$

Ἡ ὁμάδα $(G, \circ)$ θά ὀνομάζεται **ἀβελιανή** ἤ **ἀντιμεταθετική**, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη $\circ$ εἶναι **ἀντιμεταθετική**.

Σημείωση. Ἄν σέ μιά ὁμάδα ἡ πράξη ὀνομάζεται «πρόσθεση», θά λέμε ὅτι εἶναι μιά **προσθετική ὁμάδα,** ἐνῶ, ἄν ἡ πράξη ὀνομάζεται «πολλαπλασιασμός», θά λέμε ὅτι εἶναι μιά **πολλαπλασιαστική ὁμάδα.**

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \cdot)$, σέ ἀντίθεση πρός τή δομή $(\mathbf{Z}, +)$, δέν εἶναι ὁμάδα, γιατί π.χ. τό 3 δέν ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο στό $\mathbf{Z}$ ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος α μέ $\alpha \cdot 3 = 1$.

2. Τό σύνολο $A = \{2^k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό $\mathbf{Q}$ καί ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $k, \lambda, \mu \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν

   (i) $2^k \cdot (2^\lambda \cdot 2^\mu) = (2^k \cdot 2^\lambda) \cdot 2^\mu$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

   (ii) $2^k \cdot 2^0 = 2^0 \cdot 2^k = 2^k$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου),

   (iii) $2^k \cdot 2^{-k} = 2^{-k} \cdot 2^k = 2^0$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου),

   (iv) $2^k \cdot 2^\lambda = 2^\lambda \cdot 2^k$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).

3. Ἡ συμμετρική διαφορά $\dotplus$ εἶναι μιά πράξη στό δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ ἑνός συνόλου X, πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A) \qquad (A, B \in \mathscr{P}(X))$$

   Ἡ δομή $(\mathscr{P}(X), \dotplus)$ εἶναι μιά ἀβελιανή ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $A, B, \Gamma \in \mathscr{P}(X)$ ἰσχύουν

   (i) $(A \dotplus B) \dotplus \Gamma = A \dotplus (B \dotplus \Gamma)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

   (ii) $A \dotplus \emptyset = \emptyset \dotplus A = A$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου),

   (iii) $A \dotplus A = \emptyset$ (ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου),

   (iv) $A \dotplus B = B \dotplus A$ (ἀντιμεταθετική ἰδιότητα).

2.3. Βασικές ἰδιότητες σέ μιά ὁμάδα

Σέ μιά ὁμάδα $(G, \circ)$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες.

Ἰδιότητα 1. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in G$ εἶναι μοναδικό.

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας (O_2) καί τοῦ θεωρήματος τῆς 1.4.

Ἰδιότητα 2. Κάθε $\alpha \in G$ ἔχει μοναδικό συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.

Αὐτό εἶναι συνέπεια τῶν ἰδιοτήτων (O_1), (O_3) καί τοῦ θεωρήματος τῆς 2.1.

Σημείωση. Σέ μιά προσθετική ὁμάδα **τό** συμμετρικό τοῦ α θά συμβολίζεται μέ $-\alpha$ καί θά ὀνομάζεται **ἀντίθετο** τοῦ α, ἐνῶ σέ μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα **αὐτό** θά συμβολίζεται μέ α^{-1} καί θά ὀνομάζεται **ἀντίστροφο** τοῦ α.

Ἰδιότητα 3. Κάθε στοιχεῖο α τοῦ G εἶναι ἁπλοποιήσιμο, δηλαδή γιά κάθε $\beta, \gamma \in G$ ἰσχύουν

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma \Rightarrow \beta = \gamma \quad \text{καί} \quad \beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha \Rightarrow \beta = \gamma.$$

'Απόδειξη. "Εστω $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$. Θά δείξουμε ὅτι $\beta = \gamma$. 'Από τίς ἰδιότητες τῆς ὁμάδας καί τήν ὑπόθεση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \beta &= e \circ \beta = (\alpha' \circ \alpha) \circ \beta = \alpha' \circ (\alpha \circ \beta) = \alpha' \circ (\alpha \circ \gamma) = \\ &= (\alpha' \circ \alpha) \circ \gamma = e \circ \gamma = \gamma. \end{aligned}$$

"Εστω $\beta \circ \alpha = \gamma \circ \alpha$. Θά δείξουμε ὅτι $\beta = \gamma$. "Ομοια παίρνουμε

$$\begin{aligned} \beta = \beta \circ e &= \beta \circ (\alpha \circ \alpha') = (\beta \circ \alpha) \circ \alpha' = (\gamma \circ \alpha) \circ \alpha' = \\ &= \gamma \circ (\alpha \circ \alpha') = \gamma \circ e = \gamma. \end{aligned}$$

'Ιδιότητα 4. "Αν $\alpha, \beta \in G$, τότε κάθε μιά ἀπό τίς ἐξισώσεις $\alpha \circ x = \beta$, $x \circ \alpha = \beta$ ἔχει μοναδική λύση στό G.

'Απόδειξη. "Εστω $\alpha' \in G$ **τό** συμμετρικό τοῦ α. Τότε

$$\begin{aligned} \alpha \circ x = \beta &\Leftrightarrow \alpha' \circ (\alpha \circ x) = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow (\alpha' \circ \alpha) \circ x = \alpha' \circ \beta \\ &\Leftrightarrow e \circ x = \alpha' \circ \beta \Leftrightarrow x = \alpha' \circ \beta. \end{aligned}$$

"Αρα ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha \circ x = \beta$ εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha' \circ \beta$. "Ομοια βρίσκουμε ὅτι ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως $x \circ \alpha = \beta$ εἶναι τό στοιχεῖο $\beta \circ \alpha'$.

Παρατήρηση. Σέ ἀβελιανές ὁμάδες οἱ δύο ἐξισώσεις στήν ἰδιότητα 4 εἶναι ἰσοδύναμες. Εἰδικότερα σέ προσθετικές ἀβελιανές ὁμάδες ἡ μοναδική λύση τῶν παραπάνω ἐξισώσεων θά συμβολίζεται μέ $\beta - \alpha$, δηλαδή $\beta - \alpha = \beta + (-\alpha)$.

2.4. 'Ασκήσεις

1. Ποιές ἀπό τίς δομές (A, o), (A, *), (A, ·) καί (A, ⊕) μέ $A = \{\alpha, \beta\}$ καί μέ πράξεις, πού οἱ πίνακές τους δίνονται στό σχῆμα 4,

o	α	β
α	α	β
β	β	α

*	α	β
α	α	β
β	α	β

.	α	β
α	α	α
β	α	α

⊕	α	β
α	α	β
β	β	β

Σχ. 4

εἶναι ἡμιομάδες καί ποιές ὁμάδες;

2. (i) "Αν (A, +) εἶναι μιά προσθετική ὁμάδα, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$
$$\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha.$$
(ii) "Αν (B, ·) εἶναι μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in B$
$$\alpha \cdot \beta = 1 \Rightarrow \beta = \alpha^{-1}.$$

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{Z}_6, +)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα. 'Επιλύστε στό $\mathbf{Z}_6$ τήν ἐξίσωση $\widehat{4} + x = \widehat{2}$.

4. Σέ μιά πολλαπλασιαστική ὁμάδα $(G, \cdot)$ δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in G$ καί $\mu, \nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύουν
(i) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$,
(ii) $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$

(iii) $\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$,

(iv) $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

ὅπου οἱ δυνάμεις ὁρίζονται κατά τό γνωστό τρόπο: $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \alpha . \alpha$ καί γενικά $\alpha^{\nu+1} = \alpha^{\nu} \cdot \alpha$ $(\nu \in \mathbf{N})$.

5. Ἄν εἶναι

$$\Sigma = \{\lambda + \lambda i \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

καί + ἡ πρόσθεση στό **C**, νά δείξετε ὅτι ἡ δομή $(\Sigma, +)$ εἶναι ὁμάδα.

6. Σέ μιά προσθετική ὁμάδα $(G, +)$ γιά κάθε $\alpha, \beta \in G$ ἰσχύουν

(i) $-(-\alpha) = \alpha$ (ii) $-(\alpha+\beta) = (-\beta) + (-\alpha)$.

7. Στό σύνολο

$$E = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in \mathbf{R}-\{0\} \quad \text{καί} \quad \beta \in \mathbf{R}\}$$

ἡ σχέση

$$(\alpha,\beta) * (\gamma,\delta) = (\alpha\gamma,\ \beta\gamma + \delta)$$

ὁρίζει μία πράξη $*$. Νά δείξετε ὅτι ἡ δομή $(E, *)$ εἶναι ὁμάδα.

8. Ἄν $(G, *)$ εἶναι μιά ἀβελιανή ὁμάδα, νά ἐπιλυθεῖ στό G τό σύστημα

$$\begin{cases} x * \alpha = y * y \\ x * \beta = y * \alpha' \end{cases}$$

ὅπου α' τό συμμετρικό τοῦ α.

3. ΔΑΚΤΥΛΙΟΙ

3.1. Ἡ ἔννοια τοῦ δακτυλίου

Στήν προηγούμενη παράγραφο εἴδαμε ἀλγεβρικές δομές μέ μία μόνο ἐσωτερική πράξη. Ἐδῶ θά γνωρίσουμε ἀλγεβρικές δομές μέ δύο ἐσωτερικές πράξεις. Ἡ μιά πράξη θά συμβολίζεται μέ + καί θά ὀνομάζεται πρόσθεση, ἐνῶ ἡ ἄλλη πράξη θά συμβολίζεται μέ · καί θά ὀνομάζεται πολλαπλασιασμός, χωρίς αὐτό νά σημαίνει ὅτι οἱ πράξεις αὐτές ταυτίζονται πάντοτε μέ τίς γνωστές μας πράξεις τῆς προσθέσεως καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **R**.

Προτοῦ δώσουμε τόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου, ἄς μελετήσουμε τή δομή $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$. Ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν:

   (i) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$,

   (ii) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$,

   (iii) $\alpha+0 = \alpha$,

   (iv) $\alpha + (-\alpha) = 0$.

2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in Z$ ἰσχύει:
$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
3. Ὁ πολλαπλασιασμός $\cdot$ εἶναι πράξη ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πρόσθεση $+$, γιατί γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{Z}$ ἰσχύουν:
$\alpha \cdot (\beta+\gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ καί $(\beta+\gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.

Ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα ὁδηγούμαστε στόν ὁρισμό μιᾶς γενικῆς δομῆς, πού θά ὀνομάζεται *δακτύλιος*.

Ὁρισμός. Μία δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **δακτύλιος**, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Δ_1) Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.
(Δ_2) Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.
(Δ_3) Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.

Ἔτσι γιά ἕνα δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$: $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$		(Δ_1)
2. Ὑπάρχει στό A οὐδέτερο στοιχεῖο (συμβ. 0) ὡς πρός τήν πρόσθεση		
3. Κάθε στοιχεῖο α τοῦ A ἔχει **ἀντίθετο** στοιχεῖο (συμβ. $-\alpha$)		
4. $\forall \alpha,\beta \in A$:	$\alpha+\beta = \beta+\alpha$	
5. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$	(Δ_2)
6. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in A$:	$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$ καί $(\beta+\gamma) \cdot \alpha = \beta\cdot\alpha + \gamma\cdot\alpha$	(Δ_3)

Ἰδιαίτερα, ἕνας δακτύλιος $(A, +, \cdot)$ θά ὀνομάζεται

(i) **ἀντιμεταθετικός,** ἄν καί μόνο ἄν ἡ ἡμιομάδα $(A, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετική, δηλαδή γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$:

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha,$$

(ii) **δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο,** ἄν καί μόνο ἄν ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\cdot$ (πού, ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει, συμβολίζεται μέ 1), δηλαδή γιά κάθε $\alpha \in A$:

$$\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha.$$

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{\alpha+\beta\sqrt{2} \mid \alpha,\beta \in \mathbf{Q}\}$ καί πράξεις $+$ καί $\cdot$ οἱ γνωστές μας πράξεις στό $\mathbf{R}$, εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.
Πράγματι, γιά κάθε $\alpha,\alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'' \in \mathbf{Q}$ ἰσχύουν:

(i) $[(\alpha+\beta\sqrt{2}) + (\alpha'+\beta'\sqrt{2})] + (\alpha'' + \beta''\sqrt{2}) = (\alpha+\beta\sqrt{2}) + [(\alpha'+\beta'\sqrt{2}) + (\alpha''+\beta''\sqrt{2})]$, γιατί κάθε ἕνα ἀπό τά μέλη της ἰσοῦται μέ $[(\alpha+\alpha'+\alpha'') + (\beta+\beta'+\beta'')\sqrt{2}]$,

(ii) $(\alpha+\beta\sqrt{2}) + (\alpha'+\beta'\sqrt{2}) = (\alpha'+\beta'\sqrt{2}) + (\alpha+\beta\sqrt{2})$, γιατί κάθε μέλος της ἰσοῦται μέ $[(\alpha+\alpha') + (\beta+\beta')\sqrt{2}]$,

(iii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+(0+0\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2}$,

(iv) $(\alpha+\beta\sqrt{2})+(-\alpha-\beta\sqrt{2})=0+0\sqrt{2}=0$,

(v) $[(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})]\cdot(\alpha''+\beta''\sqrt{2})=(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot[(\alpha'+\beta'\sqrt{2})\cdot(\alpha''+$
$+\beta''\sqrt{2})]$,

(vi) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})=(\alpha'+\beta'\sqrt{2})\cdot(\alpha+\beta\sqrt{2})$,

(vii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot[(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+(\alpha''+\beta''\sqrt{2})]=$
$=(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha'+\beta'\sqrt{2})+(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(\alpha''+\beta''\sqrt{2})$ καί

(viii) $(\alpha+\beta\sqrt{2})\cdot(1+0\sqrt{2})=\alpha+\beta\sqrt{2}$

2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Ἕνας εὔκολος τρόπος, γιά νά ἐξετάσουμε ἄν ἰσχύει ὁ ὁρισμός τοῦ δακτυλίου γιά τή δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$, εἶναι ἡ κατασκευή τῶν γνωστῶν πινάκων γιά τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_5$ (Σχ. 5).

Πράξεις στό Z_5											
Πρόσθεση						Πολλαπλασιασμός					
$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{4}$	$\widehat{1}$	$\widehat{3}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{1}$	$\widehat{4}$	$\widehat{2}$
$\widehat{4}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{4}$	$\widehat{0}$	$\widehat{4}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Σχ. 5

Ἄν $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ καί $\widehat{\gamma}$ εἶναι κλάσεις ὑπολοίπων modulo 5, ἐπαληθεῦστε τίς ἰδιότητες

(i) $(\widehat{\alpha}+\widehat{\beta})+\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}+(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})$,

(ii) $\widehat{\alpha}+\widehat{\beta}=\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}$,

(iii) $\widehat{\alpha}+\widehat{0}=\widehat{\alpha}$,

(iv) Γιά κάθε $\widehat{x}\in\mathbf{Z}_5$ ὑπάρχει $\widehat{y}\in\mathbf{Z}_5$ μέ τήν ἰδιότητα $\widehat{x}+\widehat{y}=\widehat{0}$
(π.χ. $\widehat{1}+\widehat{4}=\widehat{0}$),

(v) $(\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta})\cdot\widehat{\gamma}=\widehat{\alpha}\cdot(\widehat{\beta}\cdot\widehat{\gamma})$,

(vi) $\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta}=\widehat{\beta}\cdot\widehat{\alpha}$

(vii) $\widehat{\alpha}\cdot(\widehat{\beta}+\widehat{\gamma})=\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\beta}+\widehat{\alpha}\cdot\widehat{\gamma}$,

(viii) $\widehat{\alpha}\cdot\widehat{1}=\widehat{\alpha}$.

3. Κάθε μονοσύνολο $A=\{\alpha\}$ μαζί μέ τίς ἀκόλουθες πράξεις $\alpha+\alpha=\alpha$ καί $\alpha.\alpha=\alpha$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, πού ὀνομάζεται **μηδενικός δακτύλιος**.

II 3.2.

Παρατηρῆστε ὅτι τά δύο οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις + καί •, δηλ. τά 0 καί 1, ταυτίζονται μέ τό α. Ἔτσι μποροῦμε νά γράψουμε A = {0}, πού δικαιολογεῖ τήν παραπάνω ὀνομασία.

3.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα δακτύλιο

Οἱ βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα δακτύλιο εἶναι ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες ἐκεῖνες στό **Z**, πού δέν ἀναφέρονται στό ἀντίστροφο ἑνός στοιχείου καί τήν ἀντιμεταθετική ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἐδῶ θά ἀναφέρουμε μόνο δύο ἰδιότητες τῶν δακτυλίων.

Ἰδιότητα 1. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, τότε γιά κάθε $\alpha \in A$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\beta \in A$, τότε

$$\beta + 0 = \beta,$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta.$$

Ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, ἔχουμε

$$\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot \beta,$$

δηλαδή τό $\alpha \cdot 0$ εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση καί ἑπομένως

$$\alpha \cdot 0 = 0.$$

Μέ ἀνάλογο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι $0 \cdot \alpha = 0$.

Πόρισμα. Ἄν σέ ἕνα δακτύλιο μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τά δύο οὐδέτερα στοιχεῖα ταυτίζονται, δηλαδή $0 \equiv 1$, τότε ὁ δακτύλιος εἶναι ἕνας μηδενικός δακτύλιος.

Ἰδιότητα 2. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, τότε γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)}$$

Ἀπόδειξη. Γιά ὁποιοδήποτε $\beta \in A$ ἔχουμε τήν ἰσότητα

$$(-\beta) + \beta = 0.$$

Ἄν τώρα πολλαπλασιάσουμε ἀπό ἀριστερά καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha \in A$ καί ἐφαρμόσουμε τήν ἐπιμεριστική ἰδιότητα, παίρνουμε

$$\alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot 0.$$

Τό δεύτερο μέλος ὅμως εἶναι τό 0. Ἑπομένως

$$\alpha \cdot (-\beta) + \alpha \cdot \beta = 0,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot (-\beta)$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha \cdot \beta$, δηλαδή

$$\alpha \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta).$$

3.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀκέραιας περιοχῆς

Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Γιά ν' ἀποδείξουμε αὐτό, κατασκευάζουμε τούς πίνακες τοῦ σχήματος 6. (Τά οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς δύο πράξεις εἶναι τά $\widehat{0}$ καί $\widehat{1}$).

Πράξεις στό $\mathbf{Z}_4$									
Πρόσθεση					Πολλαπλασιασμός				
$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$
$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$
$\widehat{2}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$	$\widehat{0}$	$\widehat{2}$
$\widehat{3}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{2}$	$\widehat{3}$	$\widehat{0}$	$\widehat{3}$	$\widehat{2}$	$\widehat{1}$

Σχ. 6

Στό δακτύλιο αὐτό παρατηροῦμε ὅτι

$$\widehat{2} \cdot \widehat{2} = \widehat{0}.$$

Ἄρα, ἄν σέ ἕνα δακτύλιο $(A, +, \cdot)$ ἰσχύει

$$\alpha \cdot \beta = 0,$$

αὐτό δέ σημαίνει ὅτι θά εἶναι $\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$.

Ἔτσι, μέ τήν παρατήρηση αὐτή ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού τήν ὀνομάζουμε *ἀκέραια περιοχή*.

Ὁρισμός. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο τέτοιος, ὥστε

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } \beta = 0\text{(}^1\text{)} \qquad (\alpha, \beta \in A),$$

τότε ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **ἀκέραια περιοχή.**

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή, γιατί εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο καί μάλιστα ἄν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ εἴτε $\beta = 0$.
2. Ἡ δομή $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$ εἶναι μιά ἀκέραια περιοχή. Στό παράδειγμα 2 τῆς 3.1 εἴδαμε ὅτι ἡ δομή αὐτή εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο. Ἀπό τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ σχήματος 5 διαπιστῶστε ὅτι

$$\widehat{\alpha} \cdot \widehat{\beta} = \widehat{0} \Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{0} \text{ εἴτε } \widehat{\beta} = \widehat{0}$$

---

1. Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2, ἡ ἀντίστροφη συνεπαγωγή ἰσχύει πάντα σέ ἕνα δακτύλιο.

3.4. Ἀσκήσεις

1. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή (A, +, ·), ὅπου A = {1,2} καί +, · οἱ πράξεις πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 7,

+	1	2
1	1	2
2	2	1

.	1	2
1	1	1
2	1	2

Σχ. 7

εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο;

2. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές
   (i) (A, +, ·), ὅπου $A = \{2\nu | \nu \in \mathbf{Z}\}$,
   (ii) (A, +, ·), ὅπου A = {α,β,γ,δ} καί πράξεις πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 8,

+	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

.	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β	α	β
γ	α	γ	α	δ
δ	α	δ	α	δ

Σχ. 8

   (iii) $(\mathscr{P}(A), \dotplus, \cap)$,
   (iv) $(\mathscr{P}(A), \dotplus, \cup)$

   εἶναι δακτύλιοι; Στή συνέχεια νά βρεῖτε τούς ἀντιμεταθετικούς δακτυλίους.

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{Z}, \oplus, \odot)$, ὅπου οἱ πράξεις $\oplus$ καί $\odot$ ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:
$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta + 1 \qquad \text{καί} \qquad \alpha \odot \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta,$$
εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο ὁ δακτύλιος αὐτός;

4. Ἡ δομή (A, +, ·), ὅπου A = {α,β,γ,δ} καί πράξεις +, · πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 9,

+	α	β	γ	δ
α	α	β	γ	δ
β	β	α	δ	γ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	γ	β	α

.	α	β	γ	δ
α	α	α	α	α
β	α	β		
γ	α			α
δ	α	β	γ	

Σχ. 9

εἶναι ἕνας δακτύλιος. Νά συμπληρώσετε τόν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι αὐτός ὁ δακτύλιος ἀντιμεταθετικός; Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο;

5. Ἂν (A, +, ·) εἶναι ἕνας δακτύλιος, δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha,\beta \in A$ ἰσχύει

$$(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta.$$

6. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές

(i) (B, +, ·) μέ $B = \{2\nu \mid \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(ii) (E, +, ·) μέ $E = \{\mu + \nu\sqrt{5} \mid \mu, \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(iii) (H, +, ·) μέ $H = \{p + q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbf{Q}\}$.

εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

4. ΣΩΜΑΤΑ

4.1. Ἡ ἔννοια τοῦ σώματος

Ἂς ἐξετάσουμε τή δομή ($\mathbf{Q}$, +, ·). Ἡ δομή αὐτή εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, ἀφοῦ

α) οἱ πράξεις + καί · εἶναι ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές,

β) ἡ πράξη · εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη +,

γ) τά 0 καί 1 εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις +, καί · ἀντιστοίχως καί

δ) κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{Q}$ ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο.

Εἶναι γνωστό ὅμως ὅτι κάθε στοιχεῖο α τοῦ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τό α^{-1}, δηλαδή

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1,$$

ἰδιότητα πού δέν ἀπαιτεῖται στόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ δομή ($\mathbf{Q}$, +, ·) ὀνομάζεται *σῶμα*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μιά δομή (A, +, ·) ὀνομάζεται **σῶμα,** ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Σ_1) Ἡ δομή (A, +, ·) εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

(Σ_2) Ἡ δομή (A^*, ·) εἶναι μία ὁμάδα, ὅπου $A^* = A - \{0\}$.

Ἔτσι σέ ἕνα σῶμα (A, +, ·) γιά κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in A$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1.\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\\ 2.\ \alpha+0=0+\alpha=\alpha\\ 3.\ \alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0\\ 4.\ \alpha+\beta=\beta+\alpha\\ 5.\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha\\ 6.\ \alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\\ 7.\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\end{array}\right\}(\Sigma_1)\\ \left.\begin{array}{l}8.\ \alpha\cdot 1=\alpha\\ 9.\ \alpha\cdot\alpha^{-1}=1,\quad \text{γιά}\quad \alpha\neq 0\end{array}\right\}(\Sigma_2)\end{array}\right.$$

Σημείωση. Τό ὅτι ἡ ἰδιότητα 8 ἰσχύει καί γιά $\alpha=0$, εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2.

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή ($\mathbf{R}$, $+$, $\cdot$) εἶναι σῶμα, γιατί στό $\mathbf{R}$ ἰσχύουν, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ παραπάνω ἰδιότητες 1.—9. Ὁμοίως ἡ δομή ($\mathbf{C}$, $+$, $\cdot$) εἶναι σῶμα.
2. Τό σύνολο $A=\{1,1\}$ μαζί μέ τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$, πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 10, εἶναι ἐπίσης ἕνα παράδειγμα σώματος.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Σχ. 10

4.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα σῶμα

Εἶναι γνωστό ὅτι στό σῶμα ($\mathbf{R}$, $+$, $\cdot$) τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει

$$\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0.$$

Αὐτή εἶναι μιά ἰδιότητα, πού τήν ἔχουν ὅλα τά σώματα.

Ἰδιότητα 1. Ἄν (A, $+$, $\cdot$) εἶναι σῶμα, τότε γιά $\alpha,\beta\in A$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha=0$, τότε λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3·2 ἡ συνεπαγωγή ἰσχύει.

Ἔστω $\alpha\cdot\beta=0$ καί $\alpha\neq 0$. Τότε ὑπάρχει τό ἀντίστροφο α^{-1} τοῦ $\alpha\neq 0$, ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας $\alpha\cdot\beta=0$ μέ α^{-1} παίρνουμε

$$\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot\beta)=\alpha^{-1}\cdot 0.$$

Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2 τό δεύτερο μέλος εἶναι τό στοιχεῖο 0. Ἔτσι ἔχουμε

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = 0$$

καί ἐπομένως

$$1 \cdot \beta = 0,$$

δηλαδή $\beta = 0$.

Πόρισμα. Κάθε σῶμα εἶναι ἀκέραια περιοχή.

Εἶναι γνωστό ἀκόμα ὅτι στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ ἐξίσωση

$$\alpha x = \beta$$

μέ $\alpha \neq 0$ ἔχει μοναδική λύση στό **R**. Αὐτό ἀποτελεῖ γενική ἰδιότητα τῶν σωμάτων.

Ἰδιότητα 2. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα καί $\alpha, \beta \in A$ μέ $\alpha \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωση

$$\alpha \cdot x = \beta$$

ἔχει μοναδική λύση στό A.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἴδια μέ ἐκείνη τῆς ἰδιότητας 4 τῆς 2·3. Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha^{-1} \cdot \beta \, (= \beta \cdot \alpha^{-1})$, πού τό συμβολίζουμε μέ $\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \alpha^{-1}$.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές εἶναι σώματα:
   (i) $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$,
   (ii) $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$,
   (iii) $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$,
   (iv) $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$ καί $+, \cdot$ οἱ γνωστές πράξεις στό **R**.
2. Ἔστω $A = \{\alpha = (x,y) \mid x,y \in \mathbf{Q}\}$.
   (i) Ἄν $\alpha + \alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha \,.\, \alpha' = (xx' + 2yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
   (ii) Ἄν $\alpha + \alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha \cdot \alpha' = (xx' - yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
3. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Δεῖξτε ὅτι
   (i) ἄν $\alpha, \beta \in A^*$, τότε $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$,
   (ii) ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, τότε
   $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}.$$
4. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα
   $$\widehat{2} \cdot x + \widehat{3} \cdot y = \widehat{2}$$
   $$\widehat{1} \cdot x + \widehat{2} \cdot y = \widehat{4}$$
   στό σῶμα $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$.

5. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

5.1. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου

Ἄς συμβολίσουμε μέ Δ τό σύνολο τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πρόσθεση στό Δ ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Γιά τρία ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ καί $\vec{z}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

2. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

3. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}.$$

4. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

Λόγω τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων ἡ δομή (Δ, +) εἶναι μιά ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

Ἐξάλλου ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ διανύσματα τοῦ Δ ἔχει, ὡς γνωστό, τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

α. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ καί γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό λ ἰσχύει

$$\lambda . (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$$

β. Γιά κάθε $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ καί γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύουν

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x},$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{x}$$

γ. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$1 \cdot \vec{x} = \vec{x},$$

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού ὀνομάζεται *διανυσματικός* ἤ *γραμμικός χῶρος*. Ἔτσι ἔχουμε τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ορισμός. Ένα μή κενό σύνολο V θά ὀνομάζεται **διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα** K[1], ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Γ_1) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

(Γ_2) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha, \beta \in K$ νά ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (πρώτη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (δεύτερη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

(iv) $1 \cdot x = x$,

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος K.

Ἡ πρόσθεση στό V θά ὀνομάζεται **διανυσματική πρόσθεση** καί ἡ ἐξωτερική πράξη $\cdot$ στό V (μέ σύνολο τελεστῶν τό K) **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** στό V.

Εἰδικότερα, ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα $\mathbf{R}$ θά ὀνομάζεται **πραγματικός διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **χῶρος**.

Παρατήρηση. Στόν παραπάνω ὁρισμό βλέπουμε ὅτι τό ἴδιο σύμβολο $+$ χρησιμοποιεῖται τόσο γιά τήν πρόσθεση στό K, ὅπως π.χ. στό πρῶτο μέλος τῆς (ii), ὅσο καί γιά τή διανυσματική πρόσθεση, ὅπως π.χ. στό δεύτερο μέλος τῆς (ii). Γι' αὐτό δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυση ἀνάμεσα στίς δύο αὐτές πράξεις. Ἀνάλογη παρατήρηση ἰσχύει γιά τό σύμβολο $\cdot$.

Σημείωση. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση θά συμβολίζεται μέ $\mathbf{0}$ (μηδενικό στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου), ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό K μέ 0.

Παραδείγματα:

1. Στό παράδειγμα 5 τῆς 1.1 ἔχουν ὁριστεῖ οἱ ἀκόλουθες πράξεις στό σύνολο $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

(i) μιά ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

καί

(ii) μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$ ὡς ἑξῆς:

$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Μέ τίς παραπάνω πράξεις τό σύνολο V εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Πράγματι,

α) ἡ δομή $(V, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$ τό $(0,0)$ καί ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ (x,y) τό $(-x, -y)$,

β) γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα (x_1,y_1), (x_2,y_2) τοῦ V καί $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ἰσχύουν

(i) $\alpha \cdot [(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = \alpha \cdot (x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (\alpha \cdot x_1+\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1+\alpha \cdot y_2) =$
$= (\alpha \cdot x_1,\ \alpha \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_2) = \alpha \cdot (x_1,y_1) + \alpha \cdot (x_2,y_2)$,

1. Γιά λόγους συντομίας θά γράφουμε «σῶμα K» ἀντί «σῶμα (K, +, .)»

(ii) $(\alpha+\beta)\cdot(x_1, y_1) = (\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1 + \beta\cdot y_1) = (\alpha\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1) +$
$+ (\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1) = \alpha\cdot(x_1,y_1) + \beta\cdot(x_1,y_1)$,

(iii) $(\alpha\cdot\beta)\cdot(x_1,y_1) = (\alpha\cdot\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot\beta\cdot y_1) = \alpha\cdot(\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1) =$
$= \alpha\cdot[\beta\cdot(x_1, y_1)]$,

(iv) $1\cdot(x_1,y_1) = (1\cdot x_1,\ 1\cdot y_1) = (x_1,y_1)$.

Γενικά, τό σύνολο

$$\mathbf{R}^{\nu} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \mid x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \mathbf{R}\}$$

μέ ἰσότητα

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (y_1, y_2, \ldots, y_\nu) \Leftrightarrow x_k = y_k \quad \text{γιά κάθε } \kappa \in \{1,2,\ldots,\nu\}$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) + (y_1, y_2, \ldots, y_\nu) = (x_1+y_1,\ x_2+y_2, \ldots, x_\nu+y_\nu),$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_\nu) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $(0,0,\ldots,0)$ καί ἀντίθετο τοῦ $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ τό $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_\nu)$.

2. Τό σύνολο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R})$$

μέ ἰσότητα

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' \Leftrightarrow \alpha = \alpha' \quad \text{καί} \quad \beta = \beta' \quad \text{καί} \quad \gamma = \gamma'$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma) + (\alpha' x^2+\beta' x^2+\gamma') \equiv (\alpha+\alpha')x^2 + (\beta+\beta')x + (\gamma+\gamma')$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma) \equiv (\lambda\alpha)x^2 + (\lambda\beta)x + (\lambda\gamma)$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $0x^2+0x+0$ καί ἀντίθετο τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τό $(-\alpha)x^2+(-\beta)x + (-\gamma)$.

3. Τό σύνολο $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ τή γνωστή πρόσθεση καί τήν ἐξωτερική πράξη, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\lambda\cdot(\alpha+\beta i) = (\lambda\alpha) + (\lambda\beta)i \qquad (\lambda \in \mathbf{R}),$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος, γιατί ἡ δομή $(\mathbf{C}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα καί εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ ἰδιότητες (i) – (iv) τοῦ ὁρισμοῦ.

5.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα διανυσματικό χῶρο

Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς παρακάτω ἰδιότητες .

Ἰδιότητα 1. Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha\cdot 0 = 0}$$

Ἀπόδειξη. Γιά ἕνα στοιχεῖο x τοῦ V ἰσχύει

$$x + \mathbf{0} = x,$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (x + \mathbf{0}) = \alpha \cdot x$$

ἤ λόγω τῆς πρώτης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot x + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot x,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot \mathbf{0}$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ἰδιότητα 2. Γιά κάθε $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{0 \cdot x = \mathbf{0}}$$

Ἀπόδειξη. Γιά ἕνα στοιχεῖο α τοῦ K ἰσχύει

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

ὁπότε

$$(\alpha + 0) \cdot x = \alpha \cdot x$$

ἤ λόγω τῆς δεύτερης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot x + 0 \cdot x = \alpha \cdot x,$$

πού σημαίνει ὅτι τό $0 \cdot x$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

Ἰδιότητα 3. Γιά $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \cdot x = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } x = \mathbf{0}}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha = 0$, ἡ συνεπαγωγή προφανῶς ἰσχύει. Ἔστω $\alpha \cdot x = \mathbf{0}$ καί $\alpha \neq 0$. Τότε, ἐπειδή τό K εἶναι σῶμα, ὑπάρχει τό ἀντίστροφο α^{-1} τοῦ $\alpha \neq 0$. Ἔτσι ἔχουμε

$$x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Πόρισμα. Γιά $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \neq 0 \quad \text{καί} \quad x \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot x \neq \mathbf{0}}$$

Ἰδιότητα 4. Γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x)}$$

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ ἕνα στοιχεῖο x τοῦ V ἔχουμε

$$(\alpha+(-\alpha))\cdot x = 0\cdot x$$

ἤ

$$\alpha\cdot x + (-\alpha)\cdot x = \mathbf{0},$$

πού σημαίνει ὅτι τό $(-\alpha)\cdot x$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha\cdot x$ ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση, δηλαδή

$$(-\alpha)\cdot x = -(\alpha\cdot x).$$

Πόρισμα. Γιά κάθε $x \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-1)x = -x}\,.$$

Παρατηρῆστε ὅτι τίς παραπάνω ἰδιότητες τίς γνωρίσαμε καί στό διανυσματικό λογισμό.

5.3. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ (γραμμικοῦ) ὑπόχωρου

Στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1 εἴδαμε ὅτι τό $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ μέ κατάλληλες πράξεις εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Ἄς πάρουμε τώρα τό ἀκόλουθο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$:

$$A = \{(\alpha,0) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι

α) ἡ διανυσματική πρόσθεση δύο στοιχείων τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα ἕνα στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

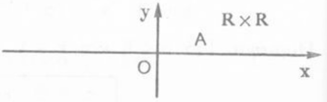
$$(\alpha,0) + (\beta,0) = (\alpha+\beta,\ 0+0) = (\alpha+\beta,\ 0) \in A,$$

β) ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα πάλι στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

$$\lambda\cdot(\alpha,0) = (\lambda\cdot\alpha,\ \lambda\cdot 0) = (\lambda\cdot\alpha,\ 0) \in A.$$

Γι᾽ αὐτές τίς δύο ἰδιότητες λέμε ὅτι τό A εἶναι ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Ἄν ταυτίσουμε τό $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ μέ ἕνα καρτεσιανό ἐπίπεδο, τότε τό παραπάνω σύνολο A ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα τῶν τετμημένων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 11).



Σχ. 11

Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνα μή κενό ὑποσύνολο A ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K ὀνομάζεται **διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **ὑπόχωρος** τοῦ V, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $x, y \in A$ καί $\alpha \in K$ ἰσχύουν

$$x+y \in A \quad \text{καί} \quad \alpha\cdot x \in A.$$

Παρατήρηση. Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος A τοῦ V περιέχει πάντα τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ V, γιατί τό A μαζί μέ ἕνα στοιχεῖο του x θά περιέχει καί τό $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

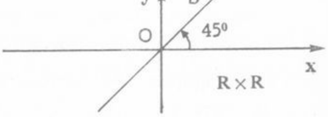
Σημείωση. Μέ τή βοήθεια τοῦ προηγούμενου ὁρισμοῦ ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι κάθε διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V εἶναι γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K.

Παραδείγματα:

1. Τό σύνολο $B = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Σχ. 12).
2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο

$$\Gamma = \{\mathbf{0}\}$$

εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V, ἀφοῦ $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \Gamma$ καί $\alpha.\mathbf{0}=\mathbf{0} \in \Gamma$ γιά ὅλα τά στοιχεῖα α τοῦ K.



Σχ. 12

5.4. Γραμμική ἀνεξαρτησία - Γραμμική ἐξάρτηση

Ἄν V εἶναι ἕνας γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε κάθε παράσταση

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$$

μέ $\lambda_i \in K$ καί $x_i \in V$ $(i \in \{1,2,\ldots,\nu\})$ εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V, πού ὀνομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ καί τά $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu$ λέγονται **συντελεστές** του.

Ἄς πάρουμε τώρα τά στοιχεῖα (1,0) καί (0,1) τοῦ γνωστοῦ μας πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Θά ἐξετάσουμε σέ ποιά περίπτωση ἕνας γραμμικός συνδυασμός αὐτῶν τῶν στοιχείων εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄν $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, ἔχουμε

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1,0) + (0,\lambda_2)=(0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{καί} \quad \lambda_2 = 0.$$

Ἄρα ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν (1,0) καί (0,1) εἶναι ἴσος μέ τό (0, 0) μόνο στήν περίπτωση: $\lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$. Γιά τό λόγο αὐτό τά (1,0) καί (0,1) λέμε ὅτι εἶναι *γραμμικῶς ἀνεξάρτητα* στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Τότε τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τοῦ V ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**, ἄν καί μόνο ἄν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$$

Ἄν τά $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V, τότε αὐτά ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἐξαρτημένα**.

Ἔτσι, ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα τοῦ V, τότε μπορεῖ ἕνας γραμμικός συνδυασμός τους $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$ νά εἶναι ἴσος μέ **0** χωρίς ὅλοι οἱ συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ νά εἶναι ἴσοι μέ 0. Ἄς ὑποθέσουμε χάρη εὐκολίας ὅτι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0}$ ἕπεται ὅτι

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - \ldots - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_1} x_\nu.$$

Ἑπομένως ἔχουμε ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα.

Ἰδιότητα. Ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου, τότε ἕνα τουλάχιστον ἀπό αὐτά ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν ὑπόλοιπων στοιχείων.

Παρατήρηση. Ἄν κάποιο ἀπό τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι τό **0**, π.χ. $x_1 = \mathbf{0}$, τότε τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί γιά $\lambda_1 \neq 0$ ἰσχύει

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_\nu = \mathbf{0}.$$

Παραδείγματα:

1. Τά στοιχεῖα (1,1) καί (–1,–1) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί ὁ γραμμικός συνδυασμός τους

$$3 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,-1)$$

εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ καί οἱ συντελεστές του εἶναι $\neq 0$.

2. Στόν πραγματικό γραμμικό χῶρο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})$$

(πού εἴδαμε στό παράδειγμα 2 τῆς 5.1) τά $1x^2 + 0x + 0 \equiv x^2$, $0x^2 + 1x + 0 \equiv x$ καί $0x^2 + 0x + 1 \equiv 1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$$\lambda_1 (x^2) + \lambda_2 (x) + \lambda_3 (1) \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ καί } \lambda_2 = 0 \text{ καί } \lambda_3 = 0.$$

5.5. Βάση καί διάσταση ἑνός διανυσματικοῦ χώρου

Στήν 5.4. εἴδαμε ὅτι τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ εἶναι δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα στοιχεῖο (α,β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τό στοιχεῖο αὐτό μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν e_1 καί e_2 μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$(\alpha,\beta) = (\alpha+0,\ 0+\beta) = (\alpha,0) + (0,\beta) = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1) =$$
$$= \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2.$$

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν γραμμικῶς ἀνεξάρτητων στοιχείων e_1, e_2. Γιά τό λόγο αὐτό τά e_1, e_2 λέμε ὅτι ἀποτελοῦν μιά *βάση* τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε ἡ νιάδα $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ ἀπό στοιχεῖα τοῦ V ὀνομάζεται **βάση τοῦ V,** ἄν καί μόνο ἄν

(i) τά $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα,

(ii) κάθε στοιχεῖο x τοῦ V γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, δηλαδή

$$x = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu \tag{1}$$

Παρατήρηση. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, τά στοιχεῖα $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι ἀρκετά γιά νά «κατασκευάσουν» ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ V καί γι' αὐτό ἡ ἔννοια τῆς βάσεως ἑνός διανυσματικοῦ χώρου εἶναι πολύ σημαντική.

Ἡ γραμμική ἀνεξαρτησία τῶν στοιχείων τῆς βάσεως ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ γραφή ἑνός στοιχείου x τοῦ V μέ τή μορφή (1) εἶναι μοναδική. Πράγματι, ἄν

$$x = \lambda'_1 b_1 + \lambda'_2 b_2 + \ldots + \lambda'_\nu b_\nu,$$

τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu = \lambda_1 . b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu$$

ἤ

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + (-\lambda_1) \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + (-\lambda_2) \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu + (-\lambda_\nu) \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$[\lambda'_1 - \lambda_1] \cdot b_1 + [\lambda'_2 - \lambda_2] \cdot b_2 + \ldots + [\lambda'_\nu - \lambda_\nu] \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = \lambda'_2 - \lambda_2 = \ldots = \lambda'_\nu - \lambda_\nu = 0$$

ἤ

$$\lambda'_i = \lambda_i \quad , \text{ γιά κάθε } i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Οἱ συντελεστές στό δεύτερο μέλος τῆς (1) ὀνομάζονται συντεταγμένες τοῦ x ὡς πρός τή βάση $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ καί γράφονται σάν νιάδα

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu).$$

Παραδείγματα:

1. Τά στοιχεῖα $b_1 = (1,2)$ καί $b_2 = (-1,1)$ σχηματίζουν μιά βάση (b_1, b_2) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Πράγματι

α) τά b_1, b_2 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$,

β) κάθε στοιχεῖο (α, β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν b_1, b_2, γιατί

$(\alpha, \beta) = \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = \beta \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{\alpha + \beta}{3}$ καί $\lambda_2 = \dfrac{-2\alpha + \beta}{3}$.

Ἔτσι οἱ συντεταγμένες τοῦ (α, β) ὡς πρός τή βάση αὐτή εἶναι

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{-2\alpha+\beta}{3}\right).$$

2. Όπως είδαμε στήν ἀρχή, τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ σχηματίζουν μιά βάση (e_1,e_2) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες ἑνός στοιχείου (α,β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι (α,β). Γιά τό λόγο αὐτό ἡ βάση αὐτή ὀνομάζεται **κανονική βάση** τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

3. Στό παράδειγμα 2 τῆς 5.4 εἴδαμε ὅτι τά $x^2,x,1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ πραγματικοῦ γραμμικοῦ χώρου

$$V = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}\}$$

Ἐξάλλου κάθε στοιχεῖο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τοῦ V γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $x^2,x,1$ μέ συντελεστές α,β,γ καί ἑπομένως τά $x^2,x,1$ σχηματίζουν μιά βάση $(x^2,x,1)$ τοῦ V, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι (α,β,γ).

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα 1 καί 2 διαπιστώνουμε ὅτι τά (b_1,b_2) καί (e_1, e_2) εἶναι δύο βάσεις τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε ἄλλη βάση τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο στοιχεῖα καί γι' αὐτό τό λόγο λέμε ὅτι ἡ *διάσταση* τοῦ γραμμικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι **δύο**. Γενικά ὁ γραμμικός χῶρος $\mathbf{R}^\nu$ ἔχει διάσταση ν καί ἡ κανονική βάση του ἀποτελεῖται ἀπό τά διανύσματα

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \quad \ldots, \quad e_\nu = (0,0,0,\ldots,0,1).$$

Ἀποδεικνύεται γενικά ὅτι, ἄν ἕνας διανυσματικός χῶρος ἔχει μιά βάση ἀπό μ στοιχεῖα, τότε κάθε ἄλλη βάση του θά ἔχει μ ἀκριβῶς στοιχεῖα καί τόν ἀριθμό μ θά τόν ὀνομάζουμε **διάσταση**[1] αὐτοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\mu x_\mu \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu \in K\}$$

ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι προφανῶς ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος A τοῦ V. Ὁ A ὀνομάζεται **ὑπόχωρος πού γεννιέται ἀπό τά x_1, x_2, …, x_μ**. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς βάσεως τά $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ A καί ἑπομένως ὁ A εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος μέ διάσταση μ.

5.6. Ἀσκήσεις

1. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$\mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

(μέ ἰσότητα καί πράξεις ὅπως ὁρίστηκαν στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1) εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος.

2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει

$$\alpha\cdot(-x) = -(\alpha\cdot x)$$

---

1. Ὑπάρχουν διανυσματικοί χῶροι μέ μή πεπερασμένη διάσταση. Οἱ ἔννοιες πού ἔχουμε ἀναφέρει στίς 5.4 καί 5.5 γενικεύονται καί γιά τέτοιους χώρους. Ἡ παρουσίαση ὅμως αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν ξεφεύγει ἀπό τό σκοπό αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

3. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$A = \{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

4. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ μέ } 2x+3y = 0\}$$

εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

5. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $(2,1)$, $(1,2)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

6. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $b_1 = (1,0,1)$, $b_2 = (0,1,1)$, $b_3 = (1,1,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τῆς ἀσκήσεως 1.

7. Νά δείξετε ὅτι τά $z_1 = 1+0i$ καί $z_2 = 0+1i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1. Τί διάσταση ἔχει ὁ χῶρος αὐτός;

8. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Ἄν A, B εἶναι δύο διανυσματικοί ὑπόχωροι τοῦ V, νά δείξετε ὅτι ἡ τομή $A \cap B$ δέν εἶναι τό κενό σύνολο καί μάλιστα εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V.

6. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Ἡ δομή $(G,\circ)$ ὀνομάζεται ἡμιομάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη $\circ$ εἶναι προσεταιριστική.
2. Ἡ δομή $(G,\circ)$ ὀνομάζεται ὁμάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (O_1) Ἡ δομή $(G,\circ)$ εἶναι ἡμιομάδα.

   (O_2) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.

   (O_3) Κάθε στοιχεῖο τοῦ G ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.
3. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται δακτύλιος, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Δ_1) Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

   (Δ_2) Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.

   (Δ_3) Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.
4. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται σῶμα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Σ_1) Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

   (Σ_2) Ἡ δομή $(A^*, \cdot)$ εἶναι ὁμάδα, ὅπου $A^* = A - \{0\}$.
5. Ἕνα μή κενό σύνολο V ὀνομάζεται διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Γ_1) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

   (Γ_2) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha,\beta \in K$ νά ἰσχύουν:

   (i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

   (ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

   (iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,

   (iv) $1 \cdot x = x$.

7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $x = (\alpha, \alpha')$ καί $y = (\beta, \beta')$ εἶναι δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$, τότε ὁρίζουμε δύο ἐσωτερικές πράξεις $*$ καί $\circ$ στο A μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$x * y = (\alpha+\beta,\ \alpha'\beta'), \quad x \circ y = (\alpha\beta,\ \alpha'+\beta').$$
Δεῖξτε ὅτι
(i) οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές καί ὑπάρχει γι' αὐτές οὐδέτερο στοιχεῖο στό A,
(ii) τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς $(1, \alpha')$ καί $(-1, \alpha')$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $\circ$,
(iii)* τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς (α, α') μέ $\alpha' \neq 0$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$.

2. Ἔστω $(E, *)$ μιά ἡμιομάδα, γιά τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά τά στοιχεῖα $\alpha, \alpha', \alpha''$ τοῦ E ἰσχύουν $\alpha' * \alpha = e$ καί $\alpha'' * \alpha' = e$, δεῖξτε ὅτι $\alpha = \alpha''$. Τί συμπεραίνετε γιά τά στοιχεῖα α καί α';

3. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά ὁμάδα. Ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta \in G$ ἰσχύει
$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2,$$
δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα αὐτή εἶναι ἀβελιανή καί γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$.

4. Στό σύνολο $\mathbf{R}$ ὁρίζουμε τίς πράξεις $\circ$ καί $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha \circ \beta = \alpha+\beta-1 \quad , \quad \alpha * \beta = \alpha\beta - \alpha - \beta + 2.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{R}, \circ, *)$ εἶναι σῶμα.

5. Στό $\mathbf{R}$ ἡ σχέση
$$x * y = \alpha x + \beta y + \gamma \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\})$$
ὁρίζει μιά πράξη $*$. Νά προσδιορίσετε τά α, β, ὥστε ἡ πράξη αὐτή νά εἶναι προσεταιριστική. Νά ὑπολογίσετε τό γ συναρτήσει ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ e, ὥστε ἡ δομή $(\mathbf{R}, *)$ νά εἶναι ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο τό e ὡς πρός τήν πράξη $*$.

6. Ἄν ν εἶναι σταθερός φυσικός ἀριθμός, νά δείξετε ὅτι τό σύνολο
$$A_\nu = \{z \in \mathbf{C} \mid z^\nu = 1\}$$
εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό $\mathbf{C}$ καί στή συνέχεια ὅτι ἡ δομή $(A_\nu, .)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

7. Ἔστω $(A, \circ)$ μιά ἡμιομάδα μέ τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:
(i) ὑπάρχει $e \in A$ μέ $e \circ \alpha = \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in A$,
(ii) γιά κάθε $\alpha \in A$ ὑπάρχει $\alpha' \in A$ μέ $\alpha' \circ \alpha = e$.
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, \circ)$ εἶναι ὁμάδα.

8. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα. Ἄν κ εἶναι ἕνα σταθερό στοιχεῖο τοῦ G, τότε ὁρίζουμε στό G τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta \cdot \kappa.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(G, *)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα.

9. Ἔστω $(A, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, ὅπου
$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}.$$
(i) Ἄν x εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ A, δεῖξτε ὅτι τό A περιέχει ἀκριβῶς τά στοιχεῖα
$$x \cdot \alpha_1, \ x \cdot \alpha_2, \ \ldots, \ x \cdot \alpha_\nu.$$

(ii) Γιά κάθε $x \in A$ ἰσχύει

$$x^{\nu} = 1.$$

10. Δεῖξτε ὅτι τά $b_1 = (3, 1,5)$, $b_2 = (3,6,2)$, $b_3 = (-1,0,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ $\mathbf{R}^3$. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν $x = (1,0,2)$ καί $y = (2,0,5)$ ὡς πρός τή βάση αὐτή;

11. Σέ ποιά περίπτωση τά $\alpha+\beta i$ καί $\gamma+\delta i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1 ;

12. Ἄν τά x,y,z εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, δεῖξτε ὅτι καί τά $x+y$, $x-y$, $x-2y+z$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V.

13. Γράψτε τό στοιχεῖο (α, β, γ) τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$ σάν γραμμικό συνδυασμό τῶν $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ καί $(1,0,0)$.

14. Δίνεται τό σύστημα

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+2z=0 \\ 2x+y+5z=0 \end{array}\right\} \quad (\Sigma)$$

Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ (Σ) εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος V τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$. Βρεῖτε μιά βάση τοῦ V.

15. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, δεῖξτε τήν ἰσοδυναμία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma.$$

16. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(M, +, \cdot)$ μέ $M = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Q}\}$ καί

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha+\varepsilon, \beta+\zeta, \gamma+\eta, \delta+\theta)$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha\varepsilon+\beta\eta, \alpha\zeta+\beta\theta, \gamma\varepsilon+\delta\eta, \gamma\zeta+\delta\theta)$

εἶναι δακτύλιος. Ποιά στοιχεῖα τοῦ M ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα;

17. Δεῖξτε ὅτι

(i) ἡ δομή $(\mathbf{Z}_{15}, +, \cdot)$ εἶναι δακτύλιος,

(ii) τά ὑποσύνολα $A = \{\widehat{0}, \widehat{5}, \widehat{10}\}$ καί $B = \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{12}\}$ εἶναι κλειστά ὡς πρός τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$ στό $\mathbf{Z}_{15}$.

18. Οἱ δομές $(A, +, \cdot)$ καί $(B, +, \cdot)$ εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

Ἄν $(G, +)$ εἶναι ὁμάδα καί A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ G μέ τήν ἰδιότητα

$$x, y \in A \Rightarrow x-y \in A,$$

δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ὁμάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Διαιρετότητα στό σύνολο Z
2. Ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in Z)$
3. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
4. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, πού ἡ ἱστορία του ἀρχίζει τήν ἐποχή πού τά μυστικά τῶν ἀριθμῶν ἀπασχόλησαν γιά πρώτη φορά τούς ἀνθρώπους.

Γνωστότερος ἀπό τούς ἀρχαίους πού ἀσχολήθηκαν μέ τούς ἀριθμούς εἶναι ὁ Πυθαγόρας (500 π.Χ.). Κατά τούς χρόνους τοῦ Εὐκλείδη (300 π.Χ.) ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν ἔγινε περισσότερο συστηματική καί ἡ βασική θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀναφέρεται στό ἔνατο βιβλίο τῶν «Στοιχείων» του. Ἀργότερα ὁ Ἐρατοσθένης (230 π.Χ.) ἔδωσε μέθοδο εὑρέσεως πρώτων ἀριθμῶν (κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη).

Ὁ Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρινός (350 μ.Χ.) στό ἔργο του «Ἀριθμητικά», πού ἀπό τούς 13 τόμους σώζονται μόνο οἱ ἕξη, ἀσχολήθηκε μέ προβλήματα ἐξισώσεων.

Ἡ σύγχρονη θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀρχίζει μέ τίς ἐργασίες τοῦ P. Fermat (1601-1665 μ.Χ.), πού μέ τό φωτεινό μυαλό του πρόσφερε πολλά στή μαθηματική ἐπιστήμη καί ἰδιαίτερα στόν κλάδο τῆς θεωρίας ἀριθμῶν.

Οἱ μεγαλύτεροι μαθηματικοί τῶν τελευταίων αἰώνων ἐκτός τῶν ἄλλων ἀσχολήθηκαν καί μέ τή θεωρία ἀριθμῶν, ὅπως π.χ. ὁ L. Euler (1707-1783), ὁ K. Gauss (1777-1855) κ.ἄ.

1. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Z.

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό σύνολο τῶν ἀκεραίων:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Συχνά θά χρησιμοποιοῦμε καί τά παρακάτω ὑποσύνολα τοῦ $\mathbf{Z}$:

τό σύνολο τῶν μή μηδενικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$

τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+ = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ μέ } x \geq 0\}$

τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}^*_+ = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ μέ } x > 0\}$

Ἐπιπλέον θά χρησιμοποιήσουμε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα.

Ἀξίωμα. Κάθε μή κενό ὑποσύνολο A τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, δηλαδή ὑπάρχει στό A μοναδικό στοιχεῖο, πού εἶναι μικρότερο ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ A.

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό Z.

Ἡ ἐξίσωση $-3x = 11$ δέν ἔχει ρίζα στό **Z**, γιατί δέν ὑπάρχει ἀκέραιος πού, ἄν πολλαπλασιαστεῖ μέ τό -3, νά δίνει γινόμενο 11. Ἡ ἐξίσωση ὅμως $-3x = 12$ ἔχει ρίζα στό σύνολο **Z** τόν ἀκέραιο -4, γιατί $-3(-4) = 12$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ 12 *διαιρεῖται* μέ τό -3 ἤ ὅτι ὁ -3 *διαιρεῖ* τό 12.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, τότε θά λέμε ὅτι ὁ α **διαιρεῖται** μέ τό β ἤ ὅτι ὁ β **διαιρεῖ** τόν α καί θά γράφουμε $\beta|\alpha$, ὅταν καί μόνο ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιος γ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\alpha = \beta\gamma.$$

Στήν περίπτωση αὐτή θά λεμε ἐπίσης ὅτι

(i) ὁ α εἶναι **πολλαπλάσιο** τοῦ β καί

(ii) ὁ β εἶναι **διαιρέτης** ἤ **παράγοντας τοῦ α.**

Παραδείγματα:

1. Ἀπό τήν ἰσότητα $-35 = 7.(-5)$ ἔπεται ὅτι

$$7|-35 \quad \text{καί} \quad -5|-35.$$

2. Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 εἶναι

$$\{5.\gamma \mid \gamma \in \mathbf{Z}\},$$

δηλαδή

$$\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$$

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή γιά κάθε $\beta \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $0 = \beta \,.\, 0$, ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος διαιρεῖ τό μηδέν.

2. Ἄν $0|\alpha$, τότε ὑπάρχει $\gamma \in \mathbf{Z}$ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = 0.\gamma$, δηλαδή $\alpha = 0$. Ἄρα:

τό μηδέν εἶναι διαιρέτης μόνο τοῦ ἑαυτοῦ του.

3. Ἀπό τίς προφανεῖς ἰσότητες

$$\alpha = (+1)\cdot\alpha \quad \text{καί} \quad \alpha = (-1)\,(-\alpha)$$

ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος α διαιρεῖται πάντα μέ τούς ± 1 καί $\pm\alpha$.

4. Ἄν γιά τρεῖς ἀκέραιους α,β καί γ ἰσχύει $\alpha = \beta\gamma$, τότε προφανῶς ἰσχύουν καί οἱ σχέσεις

$$-\alpha = \beta(-\gamma)\,, \quad \alpha = (-\beta)\,(-\gamma) \quad \text{καί} \quad -\alpha = (-\beta)\gamma.$$

Ἄρα:

ἄν $\beta|\alpha$, τότε $\beta|-\alpha$, $-\beta|\alpha$ καί $-\beta|-\alpha$.

5. Ἐπειδή, λόγω τῆς προηγούμενης παρατηρήσεως, ἰσχύει

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow -\beta|\alpha,$$

τό σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ α καθορίζεται πλήρως, ὅταν εἶναι γνωστό τό σύνολο τῶν **θετικῶν** διαιρετῶν του, πού θά τό συμβολίζουμε μέ $\Delta(\alpha)$.

6. Ἀπό τήν παρατήρηση 4 συμπεραίνουμε ἐπίσης ὅτι

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow \beta|-\alpha,$$

δηλαδή **δύο ἀντίθετοι ἀκέραιοι α καί −α ἔχουν τούς ἴδιους διαιρέτες** καί ἐπομένως

$$\Delta(\alpha) = \Delta(-\alpha) = \Delta(|\alpha|).$$

Ἔτσι

$\Delta(-8) = \Delta(8) = \{1,2,4,8\}$, $\Delta(-9) = \Delta(9) = \{1,3,9\}$ καί

$\Delta(0) = \{x \mid x \in \mathbf{Z}$ μέ $x > 0\} = \mathbf{Z}^*_+$.

Στή συνέχεια θά ἀποδείξουμε δύο χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε γιά κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $\alpha|\kappa\beta$.

(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.

(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|\beta+\gamma$.

(iv) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

Ἀπόδειξη.

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \lambda$ καί ἐπομένως $\kappa\beta = \alpha(\lambda\kappa)$, πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\kappa\beta$.

(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι μ,ν τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha \cdot \mu \quad \text{καί} \quad \gamma = \beta \cdot \nu,$$

ὁπότε

$$\gamma = \beta \cdot \nu = (\alpha \cdot \mu) \cdot \nu = \alpha(\mu \cdot \nu),$$

δηλαδή $\alpha|\gamma$.

(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι λ,μ τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha\lambda \quad \text{καί} \quad \gamma = \alpha \cdot \mu,$$

ὁπότε

$$\beta + \gamma = \alpha(\lambda + \mu),$$

πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\beta+\gamma$.

(iv) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \lambda$. Ἐξάλλου, ἀφοῦ $\beta \neq 0$, θά εἶναι $\lambda \neq 0$ καί ἐπομένως

$$|\lambda| \geq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἀνισότητας μέ $|\alpha|$ παίρνουμε

$$|\alpha\lambda| \geq |\alpha|$$

καί ἄρα $|\beta| \geq |\alpha|$.

Λόγω τῆς ἰδιότητας (iv) τῆς προτάσεως κάθε θετικός διαιρέτης x τοῦ $\beta \in \mathbf{Z}^*$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $1 \leq x \leq |\beta|$, δηλαδή

$$\boxed{x \in \Delta(\beta) \Rightarrow 1 \leq x \leq |\beta|} \qquad (1)$$

Ἀπό τήν (1) καί τήν παρατήρηση 4 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1. Οἱ μοναδικοί διαιρέτες τοῦ 1 εἶναι οἱ ± 1.

Ἐξάλλου λόγω τῆς προτάσεως 1 καί τῆς παρατηρήσεως 3 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2. Ἡ σχέση "|" μέσα στό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι σχέση μερικῆς διατάξεως (δηλαδή ἀνακλαστική, μεταβατική καί ἀντισυμμετρική).

Τέλος ἀπό τήν (1) ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3. Τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν ἑνός ἀκεραίου $\beta \in \mathbf{Z}^*$ εἶναι πεπερασμένο.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha \in Z$, $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε ὑπάρχει μοναδικός ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = \beta \cdot \gamma$.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν $\gamma, \gamma_1 \in \mathbf{Z}$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\gamma \quad \text{καί} \quad \alpha = \beta\gamma_1.$$

Τότε λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας παίρνουμε

$$\beta\gamma = \beta\gamma_1$$

καί ἑπομένως $\gamma = \gamma_1$, ἀφοῦ $\beta \neq 0$.

Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκεται ὁ μοναδικός (λόγω τῆς προτ. 2) ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = \beta\gamma$, εἶναι ἡ γνωστή μας τέλεια διαίρεση καί ὁ ἀκέραιος γ εἶναι τό ἀκέραιο πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

1.2. Πρῶτοι καί σύνθετοι ἀριθμοί.

Μιά ἀπό τίς πιό βασικές ἔννοιες στή θεωρία ἀριθμῶν εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ *πρώτου ἀριθμοῦ*. Γιά νά κατανοήσουμε τήν ἔννοια αὐτή, ἄς πάρουμε τό σύνολο

$$A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}.$$

Κάθε στοιχεῖο α τοῦ συνόλου Α ἔχει, λόγω τῆς παρατηρήσεως 3 τῆς 1.1, τουλάχιστον δύο θετικούς διαιρέτες, τούς 1 καί $|\alpha|$. Π.χ.

$\Delta(3) = \{1,3\}$, $\Delta(-4) = \{1,2,4\}$, $\Delta(-5) = \{1,5\}$

$\Delta(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $\Delta(7) = \{1,7\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς 3, –5, 7 ἔχει σύνολο θετικῶν διαιρετῶν μέ *δύο ἀκριβῶς* στοιχεῖα. Τέτοιοι ἀριθμοί, ὅπως οἱ 3, –5 καί 7, ὀνομάζονται *πρῶτοι ἀριθμοί*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνας ἀκέραιος $p \neq 0$ ὀνομάζεται **πρῶτος ἀριθμός**, ὅταν καί μόνο ὅταν $p \neq \pm 1$ καί οἱ μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του εἶναι οἱ ἀριθμοί $|p|$ καί 1, δηλαδή $\Delta(p) = \{1, |p|\}$.

Κάθε ἀκέραιος $\alpha \in \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$, πού δέν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὀνομάζεται **σύνθετος ἀριθμός.**

Ἔτσι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$ εἶναι ἤ πρῶτος ἀριθμός ἤ σύνθετος. Οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ (πού δέν ἀνήκουν στό A) εἶναι οἱ μόνοι ἀκέραιοι, πού τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν τους εἶναι μονομελές. (Πόρισμα 1 τῆς 1.1). Μέ βάση τόν προηγούμενο ὁρισμό οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ οὔτε πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι οὔτε σύνθετοι.

Παρατηρήσεις

1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p) = \Delta(-p)$, θά εἶναι καί ὁ $-p$ πρῶτος ἀριθμός.
2. Ἄν p_1, p_2 εἶναι **θετικοί** πρῶτοι ἀριθμοί καί $p_1 | p_2$, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p_2) = \{1, p_2\}$, θά εἶναι $p_1 = p_2$.

Παραδείγματα.

1. Ὁ ἀκέραιος 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(2) = \{1,2\}$.
2. Ὁ ἀκέραιος -9 εἶναι σύνθετος ἀριθμός, γιατί $\Delta(-9) = \{1,3,9\}$.
3. Ὁ ἀκέραιος 5 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(5) = \{1,5\}$.

1.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε τούς ἀκέραιους 32 καί 5. Τό 5 δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 32, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος α μέ τήν ἰδιότητα $32 = 5 \cdot \alpha$. Ὁ ἀκέραιος ὅμως 32 μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ κατά πολλούς τρόπους σέ ἄθροισμα ἑνός πολλαπλασίου τοῦ 5 καί ἑνός *θετικοῦ* ἀκεραίου, ὅπως δείχνουν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

$$\begin{array}{ll}
32 = 5 \cdot 6 + 2 & 32 = 5 \cdot 2 + 22 \\
32 = 5 \cdot 5 + 7 & 32 = 5 \cdot 1 + 27 \\
32 = 5 \cdot 4 + 12 & 32 = 5 \cdot 0 + 32 \\
32 = 5 \cdot 3 + 17 & 32 = 5 \cdot (-1) + 37 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Γράφουμε τώρα τίς προηγούμενες ἰσότητες μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\begin{array}{ll}
32 - 5 \cdot 6 = 2 & 32 - 5 \cdot 2 = 22 \\
32 - 5 \cdot 5 = 7 & 32 - 5 \cdot 1 = 27 \\
32 - 5 \cdot 4 = 12 & 32 - 5 \cdot 0 = 32 \\
32 - 5 \cdot 3 = 17 & 32 - 5(-1) = 37 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Τά δεύτερα μέλη στίς προηγούμενες ἰσότητες σχηματίζουν ἕνα σύνολο ἀπό μή ἀρνητικούς ἀκεραίους, καί ὁ *ἐλάχιστος* ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι καί ὁ *μοναδικός* πού περιέχεται μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 5.

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ ὕπαρξη καί ἡ μοναδικότητα ἑνός τέτοιου ἀριθμοῦ, ὅπως τοῦ 2 στό προηγούμενο παράδειγμα, ἰσχύει γενικά.

Θεώρημα. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}$ καί $\beta \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὑπάρχουν μοναδικοί ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ καί $\beta > 0$. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο A ὅλων τῶν ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha - \beta x$, ὅπου x εἶναι ἕνας ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha - \beta x \geq 0$, δηλαδή

$$A = \{\alpha - \beta x \mid x \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha - \beta x \geq 0\}.$$

Τό σύνολο αὐτό δέν εἶναι τό κενό. Πράγματι, ἀφοῦ εἶναι $\beta \geq 1$, πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ βρίσκουμε $\alpha\beta \geq \alpha$ καί ἑπομένως $\alpha + \alpha\beta \geq \geq \alpha + \alpha \geq 0$, δηλαδή $\alpha + \alpha\beta \geq 0$. Ἔτσι, ἄν πάρουμε $x = -\alpha$, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ μή ἀρνητικός ἀκέραιος $\alpha + \alpha\beta$ ἀνήκει στό σύνολο A. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 τό σύνολο A ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω υ. Ἀφοῦ $\upsilon \in A$, θά ὑπάρχει ἀκέραιος π τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha - \beta\pi = \upsilon$. Ἑπομένως

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι $\upsilon < \beta$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\upsilon \geq \beta$. Τότε εἶναι $\upsilon - \beta \geq 0$ καί, ἐπειδή ἰσχύει

$$\upsilon - \beta = (\alpha - \pi\beta) - \beta = \alpha - (\pi + 1)\beta,$$

συμπεραίνουμε ὅτι τό $\upsilon - \beta$ ἀνήκει στό A. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τό $\upsilon - \beta$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό υ, ἐνῶ συγχρόνως τό υ εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως $\upsilon < \beta$ καί ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \beta \qquad (1)$$

Μένει ν' ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ἀκέραιοι π καί υ εἶναι μοναδικοί. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π' καί υ' τέτοιοι, ὥστε $\alpha = \beta\pi' + \upsilon'$ καί $0 \leq \upsilon' < \beta$. Χωρίς νά βλάψουμε τή γενικότητα μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $\pi' \leq \pi$. Ἐπειδή εἶναι $\alpha = \beta\pi + \upsilon$, ἔχουμε $\beta\pi + \upsilon = \beta\pi' + \upsilon'$ ἤ

$$\beta\,(\pi - \pi') = \upsilon' - \upsilon. \qquad (2)$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τίς σχέσεις $0 \leq \upsilon$ καί $\upsilon' < \beta$ βρίσκουμε $\upsilon' < \beta + \upsilon$ ἤ $\upsilon' - \upsilon < \beta$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\beta\,(\pi - \pi') < \beta$$

ἤ, ἀφοῦ $\beta > 0$,

$$\pi - \pi' < 1.$$

Ἔτσι γιά τόν **ἀκέραιο** $\pi - \pi'$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$0 \leq \pi - \pi' \quad \text{καί} \quad \pi - \pi' < 1$$

καί ἑπομένως $\pi - \pi' = 0$, δηλαδή $\pi = \pi'$. Τώρα ἡ (2) δίνει $\upsilon' = \upsilon$. Ἄρα τό θεώρημα ἰσχύει στήν περίπτωση αὐτή.

II. $\alpha<0$ καί $\beta>0$. Ἡ ἀπόδειξη στήν περίπτωση αὐτή γίνεται, ὅπως στήν περίπτωση Ι, ἀρκεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό $\alpha-\beta\alpha$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α·

III. $\alpha\in\mathbf{Z}$ καί $\beta<0$. Στήν περίπτωση αὐτή θέτουμε στίς σχέσεις (1) ὅπου β τό $|\beta|$, ὁπότε παίρνουμε

$$\alpha=|\beta|\pi+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$
ἤ
$$\alpha=\beta(-\pi)+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$
ἤ
$$\alpha=\beta\pi'+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|,$$
ὅπου $\pi'=-\pi$.

Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ ἀντιστοιχεῖ μοναδικό διατεταγμένο ζεῦγος (π,υ) τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_+$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ καί $0\leq\upsilon<|\beta|$.

Δηλαδή ἔχουμε μία πράξη τοῦ $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}^*$ στό $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}_+$. Ἡ πράξη αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική διαίρεση.** Οἱ ἀριθμοί α, $\beta(\neq0)$, π καί υ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** καί **ὑπόλοιπο τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.** Ἡ σχέση $\alpha=\beta\pi+\upsilon$ (ὅπου $0\leq\upsilon<|\beta|$) ὀνομάζεται **ἰσότητα τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.**

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β εἶναι $\upsilon=0$, τότε ὁ β εἶναι παράγοντας τοῦ α.

Παραδείγματα.

1. Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ -35 μέ τό 6 δίνει πηλίκο $\pi=-6$ καί ὑπόλοιπο $\upsilon=1$:
$$-35=6(-6)+1$$
2. Ἡ σχέση $-14=4(-5)+5$ δέν εἶναι ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό 4 οὔτε τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό -5, γιατί εἶναι $5>4$ καί $5\geq|-5|$.
3. Ἄν $\alpha\in\mathbf{Z}$, τότε τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό 5 εἶναι 0,1,2,3 ἤ 4, γιατί τό ὑπόλοιπο υ αὐτῆς τῆς διαιρέσεως ἱκανοποιεῖ τή σχέση $0\leq\upsilon<5$.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση ἑνός ἀκεραίου μέ τό 2 εἶναι δυνατό νά δώσει ὑπόλοιπο 0 ἤ 1. Εἶναι γνωστό ὅτι στήν πρώτη περίπτωση ὁ ἀκέραιος ὀνομάζεται *ἄρτιος*, ἐνῶ στή δεύτερη *περιττός*. Ἔτσι ἕνας ἄρτιος ἀκέραιος ἔχει τή μορφή $2k$, ἐνῶ ἕνας περιττός τή μορφή $2k+1$, ὅπου $k\in\mathbf{Z}$.

Οἱ ἀκέραιοι -8, 4, -6, 10 εἶναι ἄρτιοι, ἐνῶ οἱ 5, -7, 9, -15 περιττοί.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ 32 μέ τό 12 δίνει ὑπόλοιπο 8. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν 32 καί 12, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ὑπόλοιπου 8 καί ἐπιπλέον ὁ ἀκέραιος 4, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 12 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ διαιρετέου 32. Οἱ ἰδιότητες αὐτές ἰσχύουν γενικά, ὅπως δείχνει ἡ παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β καί $\delta\in\mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν

(i) $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta\Rightarrow\delta|\upsilon$,

(ii) $\delta|\beta$ καί $\delta|\upsilon\Rightarrow\delta|\alpha$.

'Απόδειξη. (i) 'Από τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β παίρνουμε

$$\alpha - \beta\pi = \upsilon \qquad (1)$$

'Αφοῦ $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$, λόγω τῆς προτάσεως 1 τῆς 1.1 ὁ δ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $\delta|\upsilon$.

(ii) 'Αποδεικνύεται ὅμοια.

Παρατήρηση. Στό παράδειγμα πού ἀναφέραμε πρίν ἀπό τήν πρόταση 1 ὁ ἀκέραιος 8 εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 32 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, ἀλλά δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 12. Ἔτσι στήν πρόταση 1 **δέν** ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$$\delta|\alpha \text{ καί } \delta|\upsilon \Rightarrow \delta|\beta.$$

Πρόταση 2. Ἔστω $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ καί $\gamma \in \mathbf{Z}^*$. Τότε οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ.

'Απόδειξη. Ἄν οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, τότε ἔχουμε

$$\alpha = \gamma\pi_1 + \upsilon \quad \text{καί} \quad \beta = \gamma\pi_2 + \upsilon \quad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\gamma|),$$

ὁπότε μέ ἀφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\alpha - \beta = \gamma\,(\pi_1 - \pi_2),$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha-\beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ, ἀφοῦ $\pi_1 - \pi_2 \in \mathbf{Z}$.

'Αντίστροφα, ἄν εἶναι $\alpha - \beta = \gamma.\lambda$, τότε ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ β μέ τό γ, δηλαδή τήν

$$\beta = \gamma\pi + \upsilon \qquad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\gamma|),$$

βρίσκουμε

$$\alpha - (\gamma\pi + \upsilon) = \gamma \cdot \lambda$$

ἤ

$$\alpha = \gamma\,(\lambda + \pi) + \upsilon.$$

'Επειδή εἶναι $0 \leq \upsilon < |\gamma|$, ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό γ καί ἑπομένως τό ὑπόλοιπό της εἶναι υ.

1.4. 'Ασκήσεις.

1. Ἄν $\alpha \equiv \beta \pmod 2$, δεῖξτε ὅτι ὁ ἀκέραιος $\alpha+\beta$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2.
2. Ἄν $\nu = 4\kappa+1$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $4 \mid \nu^3 + 2\nu + 1$.
3. Ἄν $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod \nu$ καί $\beta_1 \equiv \beta_2 \pmod \nu$, δεῖξτε ὅτι $\alpha_1+\beta_1 \equiv \alpha_2+\beta_2 \pmod \nu$ καί $\alpha_1\beta_1 \equiv \alpha_2\beta_2 \pmod \nu$.
4. Δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός καί ἔπειτα ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς $8\kappa+1$, ὅπου $\kappa \in \mathbf{Z}$.
5. Ἄν α, β, x εἶναι ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε $\alpha \equiv \beta \pmod 2$ καί $x = \alpha^2 + \beta^2$, δεῖξτε ὅτι τό $\frac{x}{2}$ εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

6. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\lambda \in \mathbf{Z}$ ὁ ἀκέραιος $\lambda(\lambda^2+2)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.
7. Ἄν δύο ἀκέραιοι δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τους διαιρεῖται μέ τό 3.
8. Ἄν ἕνας ἀκέραιος δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό τετράγωνό του εἶναι τῆς μορφῆς $3\lambda+1$, ὅπου $\lambda \in \mathbf{Z}$.
9. Ἄν $\kappa \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $6 \mid \kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)$.
10. Ἄν ἕνας ἀκέραιος α δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, δεῖξτε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ α^2 μέ τό 5 δίνει ὑπόλοιπο 1 ἤ 4. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι, ἄν οἱ ἀκέραιοι x καί y δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, τότε $5 \mid x^4-y^4$.
11. Ἡ διαίρεση ἑνός ἀκεραίου α μέ τό 65 δίνει πηλίκο ἕναν ἄρτιο ἀριθμό λ καί ὑπόλοιπο λ^3. Προσδιορίστε τούς ἀκεραίους α.
12. Ἄν ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι $9 \mid 2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$.
13. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύουν

    α) $5 \mid 3^{3\nu+2}+2^{\nu+4}$ β) $7 \mid 3^{2\nu+1}+2^{\nu+2}$

    γ) $11 \mid 3^{2\nu+2}+2^{6\nu+1}$ δ) $17 \mid 3.5^{2\nu-1}+2^{3\nu-2}$.
14. Ἄν $\alpha,\beta,\rho \in \mathbf{Z}$ καί οἱ ἀκέραιοι $\alpha^2-\beta$ καί $\beta^2-\alpha$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ρ, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2$ μέ τό ρ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο.
15. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $9^{30}+17^{10}$ μέ τό 8.
16. Ἄν ρ,λ εἶναι ἀκέραιοι μέ $4\rho+1=3\lambda$, βρεῖτε τό γενικό τύπο τοῦ ρ.

1.5. Μέγιστος κοινός διαιρέτης ἀκεραίων. — Ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη.

Ἄν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι, τότε τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ περιέχει ὅλους τούς κοινούς θετικούς διαιρέτες τῶν α καί β, ἕνας ἀπό τούς ὁποίους εἶναι καί ὁ ἀκέραιος 1. Στήν περίπτωση πού ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς α καί β εἶναι $\neq 0$, τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ εἶναι πεπερασμένο (Πορ. 3 τῆς 1.1.) καί ἑπομένως ἔχει μέγιστο στοιχεῖο. Τό μέγιστο αὐτό στοιχεῖο τοῦ $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) τῶν α καί β** καί συμβολίζεται μέ (α,β).

Ἔτσι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ἀκεραίων α καί β (πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$) εἶναι ὁ μοναδικός **θετικός** ἀκέραιος δ, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

(i) $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$,

(i)) $\gamma|\alpha$ καί $\gamma|\beta \Rightarrow \gamma \leq \delta$.

Ἐπειδή τό σύνολο

$$\Delta(0) \cap \Delta(0) = \mathrm{Z}_+^*$$

δέν ἔχει μέγιστο στοιχεῖο, μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $\alpha=0$ καί $\beta=0$ δέν ὁρίζεται. Ἔτσι, ὅταν στά ἑπόμενα ἀναφερόμαστε στό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ἀκεραίων, θά ὑποθέτουμε ὅτι ἕνας τουλάχιστον ἀπό αὐτούς εἶναι $\neq 0$.

Παραδείγματα.

1. Ἐπειδή $\Delta(-8)=\{1,2,4,8\}$ καί $\Delta(20)=\{1,2,4,5,10,20\}$, ἔχουμε $\Delta(-8) \cap \Delta(20)=\{1,2,4\}$ καί ἑπομένως $(-8, 20)=4$.

2. Ἐπειδή ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν 4 καί 9 εἶναι ἡ μονάδα, ἔχουμε $(4,9) = 1$.

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή $\Delta(\alpha) = \Delta(|\alpha|)$ καί $\Delta(\beta) = \Delta(|\beta|)$ (Παρατ. 6 τῆς 1.1), ἔχουμε
$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) = \Delta(|\alpha|) \cap \Delta(|\beta|)$$
καί ἐπομένως
$$\boxed{(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)}$$
2. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ $|\alpha|$ εἶναι ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ α (Προτ. 1 (iv) τῆς 1.1). Ἐπειδή ἐπιπλέον ἰσχύει $\Delta(\alpha) \cap \Delta(0) = \Delta(\alpha)$, ἔχουμε
$$(\alpha,0) = |\alpha|$$
3. Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta|\alpha$, τότε, ἀφοῦ ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ β εἶναι ὁ ἀκέραιος $|\beta|$ καί $|\beta| \in \Delta(\alpha)$, ἔχουμε $(\alpha,\beta) = |\beta|$.

Ἔστω
$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \qquad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\beta|)$$
ἡ ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta (\neq 0)$.
Ἔχουμε μάθει (Προτ. 1 τῆς 1.3) ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι διαιρέτης τοῦ υ καί κάθε κοινός διαιρέτης τῶν β καί υ εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Ἑπομένως τά σύνολα $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ καί $\Delta(\beta) \cap \Delta(\upsilon)$ ταυτίζονται, πού σημαίνει ὅτι $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta\ (\neq 0)$, τότε
$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon).$$

Μέ τή βοήθεια τῆς προηγούμενης προτάσεως θά ἐξηγήσουμε μιά μέθοδο, μέ τήν ὁποία θά μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο θετικῶν ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη**.

Ἄς δοῦμε πρῶτα τή μέθοδο αὐτή μέ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό ΜΚΔ τῶν 306 καί 108. Γράφουμε τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ 306 μέ τό 108:
$$306 = 108 \,.\, 2 + 90,$$
ἔπειτα τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 108 μέ τό 90:
$$108 = 90 \,.\, 1 + 18$$
καί τέλος τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 90 μέ τό 18:
$$90 = 18 . 5 + 0.$$
Λόγω τῆς προηγούμενης προτάσεως ἔχουμε
$$(306, 108) = (108, 90) = (90, 18) = (18,0) = 18.$$

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τή μέθοδο αὐτή γενικά. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουν δοθεῖ δύο μή μηδενικοί ἀκέραιοι α καί β καί θέλουμε νά βροῦμε τό (α,β). Ἐπειδή $(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)$ (Παρατ. 1) μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ α,β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι.

Γιά τή διαίρεση τοῦ α μέ τό β ἔχουμε:

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \beta.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon = 0$, τότε $\beta|\alpha$, καί ἑπομένως $(\alpha,\beta) = \beta$ (Παρατ. 3).
Ἄν εἶναι $\upsilon \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ β μέ τό υ ἔχουμε:

$$\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_1 < \upsilon.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon_1 \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ υ μέ τό υ_1 ὅμοια ἔχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_2 < \upsilon_1$$

καί συνεχίζουμε αὐτή τή διαδικασία μέχρι νά βροῦμε ὑπόλοιπο μηδέν· τοῦτο συμβαίνει, γιατί γιά τούς μή ἀρνητικούς ἀκεραίους υ, υ_1, $\upsilon_2, \ldots$ ἰσχύει

$$\beta > \upsilon > \upsilon_1 > \upsilon_2 > \ldots$$

καί τό πλῆθος τους εἶναι τό πολύ β. Ἔστω $\upsilon_{\nu+1} = 0$. Τότε ἔχουμε τίς ἀκόλουθες ἰσότητες

$$\begin{array}{ll} \alpha = \beta\pi + \upsilon & (\mathrm{I}_\circ) \\ \beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 & (\mathrm{I}_1) \\ \upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 & (\mathrm{I}_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \upsilon_{\nu-2} = \upsilon_{\nu-1}\pi_\nu + \upsilon_\nu & (\mathrm{I}_\nu) \\ \upsilon_{\nu-1} = \upsilon_\nu\pi_{\nu+1} + 0 & (\mathrm{I}_{\nu+1}) \end{array}$$

Τό τελευταῖο μή μηδενικό ὑπόλοιπο υ_ν εἶναι ὁ ΜΚΔ τῶν α καί β, γιατί σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε

$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon) = (\upsilon,\upsilon_1) = \ldots = (\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1}) = (\upsilon_{\nu-1},\upsilon_\nu) = (\upsilon_\nu,0) = \upsilon_\nu$$

Ἄν χρησιμοποιήσει κανείς τίς ἰσότητες $(\mathrm{I}_\circ) - (\mathrm{I}_{\nu+1})$ τοῦ παραπάνω ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, μπορεῖ νά ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2. Ἄν δύο ἀκέραιοι διαιρεθοῦν μέ ἕνα θετικό κοινό διαιρέτη τους γ, τότε ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τους διαιρεῖται μέ τό γ.

Πόρισμα. Ἄν $(\alpha,\beta) = \delta$, τότε

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1.$$

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν ἐκεῖνοι οἱ ἀκέραιοι α καί β, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει $(\alpha,\beta) = 1$. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ μόνος θετικός κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἡ μονάδα .Δύο ἀκέραιοι, πού ἔχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τή μονάδα, ὀνομάζονται **πρῶτοι μεταξύ τους** ἤ **σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.** Π.χ. οἱ ἀκέραιοι 6 καί 5 εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί ,γιατί $(6,5) = 1$.

Τό προηγούμενο πόρισμα μπορεῖ τώρα νά διατυπωθεῖ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἄν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί διαιρεθοῦν μέ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, γίνονται σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.

Θά δοῦμε τώρα ὅτι ὁ ΜΚΔ δ δύο ἀκεραίων α καί β μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β, δηλαδή

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta' \qquad (1),$$

ὅπου $\alpha', \beta' \in \mathbf{Z}$.

Ἄς δοῦμε πρῶτα ἕνα παράδειγμα προσδιορισμοῦ ἑνός ζεύγους ἀκεραίων α' καί β', ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση (1).

Παράδειγμα 4. Στό παράδειγμα 3 βρήκαμε ὅτι $(306,108) = 18$. Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη ἔδωσε ἐκεῖ τίς ἀκόλουθες ἰσότητες:

$$306 = 108\,.\,2 + 90, \quad 108 = 90.1 + 18, \quad 90 = 18.5$$

Ἡ πρώτη ἀπό αὐτές δίνει $90 = 306 - 108.2$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη βρίσκουμε

$$18 = 108 - 90.1 = 108 - (306 - 108.2).1 = 306.(-1) + 108.3,$$

δηλαδή $18 = 306\,(-1) + 108.3$. Ἄρα $\alpha' = -1$ καί $\beta' = 3$.

Ἄν ἐργαστεῖ κανείς ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, μπορεῖ, χρησιμοποιώντας τίς ἰσότητες (I_0)–(I_ν) τοῦ ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, νά ἀποδείξει τήν προηγούμενη σχέση (1) γενικά.

Στή συνέχεια ὅμως θά ἀποδείξουμε, ἀνεξάρτητα ἀπό τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη, τήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

καί ὁ δ εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀκέραιος, πού μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τό σύνολο Α ὅλων τῶν *θετικῶν* ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta y$ μέ $x, y \in \mathbf{Z}$, δηλαδή

$$A = \{\alpha x + \beta y \mid x, y \in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha x + \beta y > 0\}$$

Ἄν πάρουμε $x = \alpha$ καί $y = \beta$, τότε ἔχουμε $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2 > 0$ (ἀφοῦ ἕνας ἀπό τούς α,β εἶναι $\neq 0$). Ἔτσι τό σύνολο Α εἶναι $\neq \emptyset$, ὁπότε σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω δ'. Ἀφοῦ $\delta' \in A$, θά ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \delta' \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ *θετικός* ἀκέραιος δ' εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς 1.3 ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \delta'\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \delta'.$$

Τότε ἔχουμε

$$\upsilon = \alpha - \delta'\pi = \alpha - \pi\,(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \alpha\,(1 - \pi\alpha') + \beta(-\pi\beta'),$$

δηλαδή

$$\upsilon = \alpha\,(1 - \pi\alpha') + \beta\,(-\pi\beta').$$

Ἄν εἶναι $υ > 0$, τότε ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι $υ \in A$. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ ἰσχύει $υ < δ'$ καί τό $δ'$ εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως εἶναι $υ = 0$ καί ἄρα $α = δ'π$, πού σημαίνει ὅτι $δ'|α$. Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι $δ'|β$. Ἄρα ὁ $δ'$ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α καί β. Ἄν τώρα γ εἶναι ἕνας κοινός διαιρέτης τῶν α καί β, τότε ἀπό τήν ἰσότητα (1) καί τήν πρόταση 1 τῆς 1.1 συμπεραίνουμε ὅτι ὁ γ εἶναι διαιρέτης τοῦ $δ'$ καί ἑπομένως $γ \leq δ'$. Ἄρα $δ' = δ = (α,β)$.

Στήν ἀπόδειξη τῆς προηγούμενης προτάσεως εἴδαμε ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $δ' = δ$ καί ἑπομένως.

$$Δ(α) \cap Δ\,(β) \subseteq Δ\,(δ).$$

Ἀντίστροφα, ἄν $x \in Δ(δ)$, τότε $x|δ$ καί, ἀφοῦ $δ|α$ καί $δ|β$, λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας ἔχουμε $x|α$ καί $x|β$, ὁπότε $x \in Δ(α) \cap Δ(β)$ καί ἄρα $Δ(δ) \subseteq Δ(α) \cap Δ(β)$
Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4. Ἄν $δ = (α,β)$, τότε

$$Δ(δ) = Δ(α) \cap Δ(β).$$

Σημείωση. Ἀξίζει νά τονίσουμε ὅτι ἡ πρόταση 3 δέ δηλώνει ὅτι οἱ ἀκέραιοι $α'$ καί $β'$ εἶναι μοναδικοί. Στό παράδειγμα 1 εἴδαμε ὅτι $(-8, 20) = 4$. Ἡ πρόταση 3 ἐξασφαλίζει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι $α'$ καί $β'$ τέτοιοι, ὥστε

$$-8α' + 20β' = 4.$$

Εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐπαληθεύεται γιά $α' = 2$ καί $β' = 1$ ἤ γιά $α' = -3$ καί $β' = -1$. Στήν παράγραφο 2 θά μάθουμε ὅτι ὑπάρχουν καί ἄλλα ζεύγη ἀκεραίων ἀριθμῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν παραπάνω ἐξίσωση.

Ἡ ἔννοια τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτη γενικεύεται καί γιά περισσότερους ἀπό δύο ἀκεραίους. Ἐδῶ θά ἐνδιαφερθοῦμε μόνο γιά τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τριῶν ἀκεραίων. Ἄν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι, πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$, τότε τό μέγιστο στοιχεῖο τοῦ (πεπερασμένου) συνόλου $Δ(α) \cap Δ(β) \cap Δ(γ)$ τῶν κοινῶν θετικῶν διαιρετῶν τους ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν α,β καί γ** καί συμβολίζεται μέ $(α,β,γ)$. Στήν περίπτωση πού εἶναι $(α,β,γ) = 1$, οἱ ἀκέραιοι α,β καί γ θά ὀνομάζονται ἐπίσης *πρῶτοι μεταξύ τους* ἤ *σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί*.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνας ἀπό τούς β,γ εἶναι $\neq 0$ καί ὀνομάσουμε δ τό ΜΚΔ τους, δηλαδή $δ = (β,γ)$, τότε λόγω τῆς προτάσεως 4 ἔχουμε

$$Δ(α) \cap Δ(β) \cap Δ(γ) = Δ(α) \cap [Δ(β) \cap Δ(γ)] = Δ(α) \cap Δ(δ)$$

καί ἑπομένως

$$(α,β,γ) = (α,\, δ)$$

Ἄρα

$$\boxed{(α,\, β,\, γ) = (α,\, (β,γ))} \qquad (2)$$

Ἔτσι ἔχουμε

$$(12, 4, -8) = (12, (4, -8)) = (12, 4) = 4,$$
$$(-3, 5, 9) = (-3, (5, 9)) = (-3, 1) = 1,$$
$$(-8, 0, 0) = (0, -8, 0) = (0, (-8, 0)) = (0,8) = 8$$

Μέ τή βοήθεια τῆς (2) καί τῆς προτάσεως 2 μπορεῖ νά ἀποδείξει κανείς ὅτι

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \delta \;\Rightarrow\; \left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = 1}$$

1.6. Προτάσεις μέ πρώτους καί σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός 3 δέ διαιρεῖ τό 10. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί εἶναι σχετικῶς πρῶτοι, δηλαδή $(3,10) = 1$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γενικά, ὅπως φαίνεται στήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, ὅταν καί μόνο ὅταν $(\alpha, p) = 1$.

Ἀπόδειξη. Ἄν ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, τότε καί ὁ $|p|$ δέν διαιρεῖ τόν α καί ἀφοῦ $\Delta(p) = \{1, |p|\}$, ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν α καί p εἶναι τό 1. Ἄρα $(\alpha, p) = 1$. Ἀντιστρόφως, ἄν $(\alpha, p) = 1$, τότε ὁ p δέν μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης τοῦ α, γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση θά ἔπρεπε νά διαιρεῖ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους 1, πού εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ $p \neq \pm 1$.

Θά ἀποδείξουμε τώρα μιά πολύ χρήσιμη πρόταση, πού σχετίζεται μέ σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha, \beta, \kappa \in \mathbf{Z}^*$ μέ $(\alpha, \beta) = 1$ καί $\alpha | \beta\kappa$, τότε $\alpha | \kappa$.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $(\alpha, \beta) = 1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\kappa \neq 0$ βρίσκουμε

$$\alpha\kappa\alpha' + \beta\kappa\beta' = \kappa. \qquad (1)$$

Ἀφοῦ ὁ α εἶναι διαιρέτης τοῦ $\beta\kappa$, θά διαιρεῖ καί τούς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $\alpha | \kappa$.

Παράδειγμα. Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ μέ $3x = 8y$, τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 2 ἔχουμε $3 | y$ καί $8 | x$, ἀφοῦ $(3,8) = 1$.

Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}^*$ καί ὁ πρῶτος ἀριθμός p διαιρεῖ τό γινόμενο $\alpha . \beta$, τότε ὁ p διαιρεῖ ἕναν ἀπό τούς α, β.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α. Τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε $(\alpha, p) = 1$ καί ἑπομένως λόγω τῆς προτάσεως 2 ὁ p εἶναι διαιρέτης τοῦ β.

5. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας δακτύλιος, δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\alpha, \beta \in A$ ἰσχύει

$$(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta.$$

6. Ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές

(i) $(B, +, \cdot)$, μέ $B = \{2\nu \mid \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(ii) $(E, +, \cdot)$ μέ $E = \{\mu + \nu\sqrt{5} \mid \mu, \nu \in \mathbf{Z}\}$,

(iii) $(H, +, \cdot)$ μέ $H = \{p + q\sqrt{5} \mid p, q \in \mathbf{Q}\}$.

εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

4. ΣΩΜΑΤΑ

4.1. Ἡ ἔννοια τοῦ σώματος

Ἄς ἐξετάσουμε τή δομή $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$. Ἡ δομή αὐτή εἶναι ἕνας ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο, ἀφοῦ

α) οἱ πράξεις $+$ καί $\cdot$ εἶναι ἀντιμεταθετικές καί προσεταιριστικές,

β) ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$,

γ) τά 0 καί 1 εἶναι οὐδέτερα στοιχεῖα ὡς πρός τίς πράξεις $+$, καί $\cdot$ ἀντιστοίχως καί

δ) κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathbf{Q}$ ἔχει ἀντίθετο στοιχεῖο.

Εἶναι γνωστό ὅμως ὅτι κάθε στοιχεῖο α τοῦ $\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} - \{0\}$ ἔχει ἀντίστροφο στοιχεῖο τό α^{-1}, δηλαδή

$$\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1,$$

ἰδιότητα πού δέν ἀπαιτεῖται στόν ὁρισμό τοῦ δακτυλίου. Γιά τό λόγο αὐτό ἡ δομή $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ ὀνομάζεται *σῶμα*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Μιά δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται **σῶμα**, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(Σ_1) Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

(Σ_2) Ἡ δομή $(A^*, \cdot)$ εἶναι μία ὁμάδα, ὅπου $A^* = A - \{0\}$.

Ἔτσι σέ ἕνα σῶμα $(A, +, \cdot)$ γιά κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)\\ 2.\ \alpha+0=0+\alpha=\alpha\\ 3.\ \alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0\\ 4.\ \alpha+\beta=\beta+\alpha\\ 5.\ \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha\\ 6.\ \alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma\\ 7.\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)\\ 8.\ \alpha\cdot 1=\alpha\\ 9.\ \alpha\cdot\alpha^{-1}=1,\quad \text{γιά}\quad \alpha\neq 0 \end{array}\right\} (\Sigma_1)\ (\Sigma_2)$$

Σημείωση. Τό ὅτι ἡ ἰδιότητα 8 ἰσχύει καί γιά $\alpha=0$, εἶναι συνέπεια τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2.

Παραδείγματα:

1. Ἡ δομή ($\mathbf{R}$, $+$, $\cdot$) εἶναι σῶμα, γιατί στό $\mathbf{R}$ ἰσχύουν, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ παραπάνω ἰδιότητες 1.—9. Ὁμοίως ἡ δομή ($\mathbf{C}$, $+$, $\cdot$) εἶναι σῶμα.
2. Τό σύνολο $A=\{1,1\}$ μαζί μέ τίς πράξεις $+$ καί $\cdot$, πού ὁρίζονται στούς πίνακες τοῦ σχήματος 10, εἶναι ἐπίσης ἕνα παράδειγμα σώματος.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

.	0	1
0	0	0
1	0	1

Σχ. 10

4.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα σῶμα

Εἶναι γνωστό ὅτι στό σῶμα ($\mathbf{R}$, $+$, $\cdot$) τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει

$$\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0.$$

Αὐτή εἶναι μιά ἰδιότητα, πού τήν ἔχουν ὅλα τά σώματα.

Ἰδιότητα 1. Ἄν (A, $+$, $\cdot$) εἶναι σῶμα, τότε γιά $\alpha,\beta\in A$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha\cdot\beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \text{ εἴτε } \beta=0}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha=0$, τότε λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3·2 ἡ συνεπαγωγή ἰσχύει.

Ἔστω $\alpha\cdot\beta=0$ καί $\alpha\neq 0$. Τότε ὑπάρχει τό ἀντίστροφο α^{-1} τοῦ $\alpha\neq 0$, ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητας $\alpha\cdot\beta=0$ μέ α^{-1} παίρνουμε

$$\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot\beta)=\alpha^{-1}\cdot 0.$$

Λόγω τῆς ἰδιότητας 1 τῆς 3.2 τό δεύτερο μέλος εἶναι τό στοιχεῖο 0. Ἔτσι ἔχουμε

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \beta = 0$$

καί ἑπομένως

$$1 \cdot \beta = 0,$$

δηλαδή $\beta = 0$.

Πόρισμα. Κάθε σῶμα εἶναι ἀκέραια περιοχή.

Εἶναι γνωστό ἀκόμα ὅτι στό σῶμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ ἐξίσωση

$$\alpha x = \beta$$

μέ $\alpha \neq 0$ ἔχει μοναδική λύση στό **R**.Αὐτό ἀποτελεῖ γενική ἰδιότητα τῶν σωμάτων.

Ἰδιότητα 2. Ἄν $(A, +, \cdot)$ εἶναι σῶμα καί $\alpha, \beta \in A$ μέ $\alpha \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωση

$$\alpha \cdot x = \beta$$

ἔχει μοναδική λύση στό A.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἴδια μέ ἐκείνη τῆς ἰδιότητας 4 τῆς 2·3. Ἡ μοναδική λύση τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι τό στοιχεῖο $\alpha^{-1} \cdot \beta \; (= \beta \cdot \alpha^{-1})$, πού τό συμβολίζουμε μέ $\frac{\beta}{\alpha}$, δηλαδή $\frac{\beta}{\alpha} = \beta \cdot \alpha^{-1}$.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Βρεῖτε ποιές ἀπό τίς παρακάτω δομές εἶναι σώματα:
   (i) $(\mathbf{Z}_4, +, \cdot)$,
   (ii) $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$,
   (iii) $(\mathbf{Z}_7, +, \cdot)$,
   (iv) $(A, +, \cdot)$, ὅπου $A = \{x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}$ καί $+, \cdot$ οἱ γνωστές πράξεις στό **R**.
2. Ἔστω $A = \{\alpha = (x,y) \mid x,y \in \mathbf{Q}\}$.
   (i) Ἄν $\alpha + \alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha \,.\, \alpha' = (xx' + 2yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
   (ii) Ἄν $\alpha + \alpha' = (x+x', y+y')$ καί $\alpha \cdot \alpha' = (xx' - yy', xy' + x'y)$, εἶναι σῶμα ἡ δομή $(A, +, \cdot)$;
3. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Δεῖξτε ὅτι
   (i) ἄν $\alpha, \beta \in A^*$, τότε $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$,
   (ii) ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, τότε
   $$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}.$$
4. Νά ἐπιλυθεῖ τό σύστημα
   $$\widehat{2} \cdot x + \widehat{3} \cdot y = \widehat{2}$$
   $$\widehat{1} \cdot x + \widehat{2} \cdot y = \widehat{4}$$
   στό σῶμα $(\mathbf{Z}_5, +, \cdot)$.

5. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

5.1. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ χώρου

Ἄς συμβολίσουμε μέ Δ τό σύνολο τῶν διανυσμάτων ἑνός ἐπιπέδου. Εἶναι γνωστό ὅτι ἡ πρόσθεση στό Δ ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Γιά τρία ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ καί $\vec{z}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z}).$$

2. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{x}=\vec{x}.$$

3. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x}+(-\vec{x})=(-\vec{x})+\vec{x}=\vec{0}.$$

4. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}.$$

Λόγω τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων ἡ δομή $(\Delta,+)$ εἶναι μιά ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

Ἐξάλλου ὁ πολλαπλασιασμός πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ διανύσματα τοῦ Δ ἔχει, ὡς γνωστό, τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

α. Γιά δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα $\vec{x}$ καί $\vec{y}$ τοῦ Δ καί γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό λ ἰσχύει

$$\lambda\,.\,(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\cdot\vec{x}+\lambda\cdot\vec{y}$$

β. Γιά κάθε $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$ καί γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύουν

$$(\lambda+\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}+\mu\cdot\vec{x},$$

$$\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}$$

γ. Γιά κάθε διάνυσμα $\vec{x}$ τοῦ Δ ἰσχύει

$$1\cdot\vec{x}=\vec{x},$$

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀπό τίς παραπάνω ἰδιότητες ὁδηγούμαστε στή θεώρηση μιᾶς νέας ἀλγεβρικῆς δομῆς, πού ὀνομάζεται *διανυσματικός* ἤ *γραμμικός χῶρος*. Ἔτσι ἔχουμε τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνα μή κενό σύνολο V θά ὀνομάζεται **διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K**(1), ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

($Γ_1$) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

($Γ_2$) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha,\beta \in K$ νά ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ (πρώτη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ (δεύτερη ἐπιμεριστική ἰδιότητα),

(iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ (προσεταιριστική ἰδιότητα),

(iv) $1 \cdot x = x$,

ὅπου 1 εἶναι τό μοναδιαῖο στοιχεῖο τοῦ σώματος K.

Ἡ πρόσθεση στό V θά ὀνομάζεται **διανυσματική πρόσθεση** καί ἡ ἐξωτερική πράξη $\cdot$ στό V (μέ σύνολο τελεστῶν τό K) **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** στό V.

Εἰδικότερα, ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα **R** θά ὀνομάζεται **πραγματικός διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **χῶρος.**

Παρατήρηση. Στόν παραπάνω ὁρισμό βλέπουμε ὅτι τό ἴδιο σύμβολο $+$ χρησιμοποιεῖται τόσο γιά τήν πρόσθεση στό K, ὅπως π.χ. στό πρῶτο μέλος τῆς (ii), ὅσο καί γιά τή διανυσματική πρόσθεση, ὅπως π.χ. στό δεύτερο μέλος τῆς (ii). Γι' αὐτό δέν πρέπει νά γίνεται σύγχυση ἀνάμεσα στίς δύο αὐτές πράξεις. Ἀνάλογη παρατήρηση ἰσχύει γιά τό σύμβολο $\cdot$.

Σημείωση. Τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση θά συμβολίζεται μέ $\mathbf{0}$ (μηδενικό στοιχεῖο τοῦ διανυσματικοῦ χώρου), ἐνῶ τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πρόσθεση στό K μέ 0.

Παραδείγματα:

1. Στό παράδειγμα 5 τῆς 1.1 ἔχουν ὁριστεῖ οἱ ἀκόλουθες πράξεις στό σύνολο $V = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$:

(i) μιά ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

καί

(ii) μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό **R** ὡς ἑξῆς:

$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) \qquad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Μέ τίς παραπάνω πράξεις τό σύνολο V εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Πράγματι,

α) ἡ δομή $(V, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $+$ τό $(0,0)$ καί ἀντίθετο στοιχεῖο τοῦ (x,y) τό $(-x, -y)$,

β) γιά δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα (x_1,y_1), (x_2,y_2) τοῦ V καί $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ἰσχύουν

(i) $\alpha \cdot [(x_1,y_1)+(x_2,y_2)] = \alpha \cdot (x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (\alpha \cdot x_1+\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_1+\alpha \cdot y_2) =$
$= (\alpha \cdot x_1,\ \alpha \cdot y_1) + (\alpha \cdot x_2,\ \alpha \cdot y_2) = \alpha \cdot (x_1,y_1) + \alpha \cdot (x_2,y_2)$,

1. Γιά λόγους συντομίας θά γράφουμε «σῶμα K» ἀντί «σῶμα (K, +, .)»

(ii) $(\alpha+\beta)\cdot(x_1, y_1)=(\alpha\cdot x_1+\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1+\beta\cdot y_1)=(\alpha\cdot x_1,\ \alpha\cdot y_1)+$
$+\ (\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1)=\alpha\cdot(x_1,y_1)+\beta\cdot(x_1,y_1)$,

(iii) $(\alpha\cdot\beta)\cdot(x_1,y_1)=(\alpha\cdot\beta\cdot x_1,\ \alpha\cdot\beta\cdot y_1)=\alpha\cdot(\beta\cdot x_1, \beta\cdot y_1)=$
$=\ \alpha\cdot[\beta\cdot(x_1, y_1)]$,

(iv) $1\cdot(x_1,y_1)=(1\cdot x_1,\ 1\cdot y_1)=(x_1,y_1)$.

Γενικά, τό σύνολο

$$\mathbf{R}^{\nu}=\{(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \mid x_1, x_2, \ldots, x_\nu \in \mathbf{R}\}$$

μέ ἰσότητα

$$(x_1, x_2,\ldots,x_\nu)=(y_1,y_2,\ldots,y_\nu) \Leftrightarrow x_k=y_k \quad \text{γιά κάθε } \kappa\in\{1,2,\ldots,\nu\}$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(x_1, x_2,\ldots,x_\nu)+(y_1,y_2,\ldots,y_\nu)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots,x_\nu+y_\nu),$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_\nu) \qquad (\lambda\in\mathbf{R})$$

εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $(0,0,\ldots,0)$ καί ἀντίθετο τοῦ $(x_1,x_2,\ldots,x_\nu)$ τό $(-x_1,-x_2,\ldots,-x_\nu)$.

2. Τό σύνολο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R})$$

μέ ἰσότητα

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma \equiv \alpha' x^2+\beta' x+\gamma' \Leftrightarrow \alpha=\alpha' \text{ καί } \beta=\beta' \text{ καί } \gamma=\gamma'$$

καί μέ

α) ἐσωτερική πράξη $+$:

$$(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(\alpha' x^2+\beta' x^2+\gamma')\equiv(\alpha+\alpha')x^2+(\beta+\beta')x+(\gamma+\gamma')$$

β) ἐξωτερική πράξη (μέ σύνολο τελεστῶν τό $\mathbf{R}$):

$$\lambda\cdot(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\equiv(\lambda\alpha)x^2+(\lambda\beta)x+(\lambda\gamma)$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος μέ μηδενικό στοιχεῖο τό $0x^2+0x+0$ καί ἀντίθετο τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τό $(-\alpha)x^2+(-\beta)x+(-\gamma)$.

3. Τό σύνολο $\mathbf{C}$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μέ τή γνωστή πρόσθεση καί τήν ἐξωτερική πράξη, πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$\lambda\cdot(\alpha+\beta i)=(\lambda\alpha)+(\lambda\beta)i \qquad (\lambda\in\mathbf{R}),$$

εἶναι ἕνας πραγματικός γραμμικός χῶρος, γιατί ἡ δομή $(\mathbf{C}, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα καί εὔκολα μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἱκανοποιοῦνται οἱ ἰδιότητες (i) – (iv) τοῦ ὁρισμοῦ.

5.2. Βασικές ἰδιότητες σέ ἕνα διανυσματικό χῶρο

Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τίς παρακάτω ἰδιότητες .

Ἰδιότητα 1. Γιά κάθε $\alpha\in K$ ἰσχύει

$$\boxed{\alpha\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}}$$

Ἀπόδειξη. Γιά ἕνα στοιχεῖο x τοῦ V ἰσχύει

$$\mathrm{x} + \mathbf{0} = \mathrm{x},$$

ὁπότε

$$\alpha \cdot (\mathrm{x} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathrm{x}$$

ἤ λόγω τῆς πρώτης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot \mathrm{x} + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathrm{x},$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\alpha \cdot \mathbf{0}$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Ἰδιότητα 2. Γιά κάθε $\mathrm{x} \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{0 \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0}}$$

Ἀπόδειξη. Γιά ἕνα στοιχεῖο α τοῦ K ἰσχύει

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

ὁπότε

$$(\alpha + 0) \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathrm{x}$$

ἤ λόγω τῆς δεύτερης ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας

$$\alpha \cdot \mathrm{x} + 0 \cdot \mathrm{x} = \alpha \cdot \mathrm{x},$$

πού σημαίνει ὅτι τό $0 \cdot \mathrm{x}$ εἶναι τό μηδενικό στοιχεῖο $\mathbf{0}$ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου, δηλαδή

$$0 \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0}.$$

Ἰδιότητα 3. Γιά $\alpha \in K$ καί $\mathrm{x} \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ εἴτε } \mathrm{x} = \mathbf{0}}$$

Ἀπόδειξη. Ἄν $\alpha = 0$, ἡ συνεπαγωγή προφανῶς ἰσχύει. Ἔστω $\alpha \cdot \mathrm{x} = \mathbf{0}$ καί $\alpha \neq 0$. Τότε, ἐπειδή τό K εἶναι σῶμα, ὑπάρχει τό ἀντίστροφο α^{-1} τοῦ $\alpha \neq 0$. Ἔτσι ἔχουμε

$$\mathrm{x} = 1 \cdot \mathrm{x} = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot \mathrm{x} = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot \mathrm{x}) = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Πόρισμα. Γιά $\alpha \in K$ καί $\mathrm{x} \in V$ ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή

$$\boxed{\alpha \neq 0 \quad \text{καί} \quad \mathrm{x} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \mathrm{x} \neq \mathbf{0}}$$

Ἰδιότητα 4. Γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $\mathrm{x} \in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-\alpha) \cdot \mathrm{x} = -(\alpha \cdot \mathrm{x})}$$

Ἀπόδειξη. Γιά κάθε $\alpha \in K$ ἰσχύει

$$\alpha + (-\alpha) = 0,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη μέ ἕνα στοιχεῖο x τοῦ V ἔχουμε

$$(\alpha+(-\alpha))\cdot x=0\cdot x$$

ἤ

$$\alpha\cdot x+(-\alpha)\cdot x=\mathbf{0},$$

πού σημαίνει ὅτι τό $(-\alpha)\cdot x$ εἶναι τό ἀντίθετο τοῦ $\alpha\cdot x$ ὡς πρός τή διανυσματική πρόσθεση, δηλαδή

$$(-\alpha)\cdot x=-(\alpha\cdot x).$$

Πόρισμα. Γιά κάθε $x\in V$ ἰσχύει

$$\boxed{(-1)x=-x}\,.$$

Παρατηρῆστε ὅτι τίς παραπάνω ἰδιότητες τίς γνωρίσαμε καί στό διανυσματικό λογισμό.

5.3. Ἡ ἔννοια τοῦ διανυσματικοῦ (γραμμικοῦ) ὑπόχωρου

Στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1 εἴδαμε ὅτι τό $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ μέ κατάλληλες πράξεις εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος. Ἄς πάρουμε τώρα τό ἀκόλουθο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$:

$$A=\{(\alpha,0)\mid\alpha\in\mathbf{R}\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι

α) ἡ διανυσματική πρόσθεση δύο στοιχείων τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα ἕνα στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

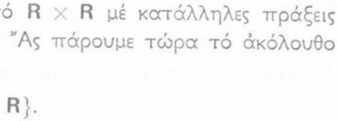
$$(\alpha,0)+(\beta,0)=(\alpha+\beta,\ 0+0)=(\alpha+\beta,\ 0)\in A,$$

β) ὁ πολλαπλασιασμός ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἕνα στοιχεῖο τοῦ A δίνει ἀποτέλεσμα πάλι στοιχεῖο τοῦ A· πράγματι,

$$\lambda\cdot(\alpha,0)=(\lambda\cdot\alpha,\ \lambda\cdot 0)=(\lambda\cdot\alpha,\ 0)\in A.$$

Γι' αὐτές τίς δύο ἰδιότητες λέμε ὅτι τό A εἶναι ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$.

Ἄν ταυτίσουμε τό $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ μέ ἕνα καρτεσιανό ἐπίπεδο, τότε τό παραπάνω σύνολο A ταυτίζεται μέ τόν ἄξονα τῶν τετμημένων τοῦ καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 11).



Σχ. 11

Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνα μή κενό ὑποσύνολο A ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K ὀνομάζεται **διανυσματικός** (ἤ **γραμμικός**) **ὑπόχωρος** τοῦ V, ἄν καί μόνο ἄν γιά κάθε $x, y\in A$ καί $\alpha\in K$ ἰσχύουν

$$x+y\in A \qquad \text{καί} \qquad \alpha\cdot x\in A.$$

Παρατήρηση. Σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό ἕνας διανυσματικός ὑπόχωρος A τοῦ V περιέχει πάντα τό μηδενικό στοιχεῖο **0** τοῦ V, γιατί τό A μαζί μέ ἕνα στοιχεῖο του x θά περιέχει καί τό $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

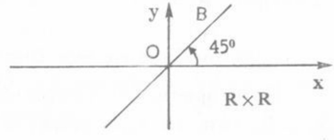
Σημείωση. Μέ τή βοήθεια τοῦ προηγούμενου ὁρισμοῦ ἀποδεικνύεται εὔκολα ὅτι κάθε διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V εἶναι γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K.

Παραδείγματα:

1. Τό σύνολο $B = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ (Σχ. 12).
2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο

$$\Gamma = \{\mathbf{0}\}$$

εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V, ἀφοῦ $\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0} \in \Gamma$ καί $\alpha.\mathbf{0}=\mathbf{0} \in \Gamma$ γιά ὅλα τά στοιχεῖα α τοῦ K.



Σχ. 12

5.4. Γραμμική ἀνεξαρτησία - Γραμμική ἐξάρτηση

Ἄν V εἶναι ἕνας γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε κάθε παράσταση

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$$

μέ $\lambda_i \in K$ καί $x_i \in V$ ($i \in \{1,2,\ldots,\nu\}$) εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ V, πού ὀνομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ καί τά $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu$ λέγονται **συντελεστές** του.

Ἄς πάρουμε τώρα τά στοιχεῖα (1,0) καί (0,1) τοῦ γνωστοῦ μας πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Θά ἐξετάσουμε σέ ποιά περίπτωση ἕνας γραμμικός συνδυασμός αὐτῶν τῶν στοιχείων εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἄν $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, ἔχουμε

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1,0) + (0,\lambda_2)=(0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{καί} \quad \lambda_2 = 0.$$

Ἄρα ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν (1,0) καί (0,1) εἶναι ἴσος μέ τό (0, 0) μόνο στήν περίπτωση: $\lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$. Γιά τό λόγο αὐτό τά (1,0) καί (0,1) λέμε ὅτι εἶναι *γραμμικῶς ἀνεξάρτητα* στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Τότε τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ τοῦ V ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἀνεξάρτητα**, ἄν καί μόνο ἄν

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\nu = 0$$

Ἄν τά $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V, τότε αὐτά ὀνομάζονται **γραμμικῶς ἐξαρτημένα**.

Έτσι, άν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ είναι γραμμικώς έξαρτημένα στοιχεία τοῦ V, τότε μπορεῖ ἕνας γραμμικός συνδυασμός τους $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu$ νά εἶναι ἴσος μέ **0** χωρίς ὅλοι οἱ συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ νά εἶναι ἴσοι μέ 0. Ἄς ὑποθέσουμε χάρη εὐκολίας ὅτι $\lambda_1 \neq 0$. Τότε ἀπό τήν ἰσότητα $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\nu x_\nu = \mathbf{0}$ ἕπεται ὅτι

$$x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} x_3 - \ldots - \frac{\lambda_\nu}{\lambda_1} x_\nu.$$

Ἑπομένως ἔχουμε ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα.

Ἰδιότητα. Ἄν τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου, τότε ἕνα τουλάχιστον ἀπό αὐτά ἐκφράζεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν ὑπόλοιπων στοιχείων.

Παρατήρηση. Ἄν κάποιο ἀπό τά στοιχεῖα $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι τό **0**, π.χ. $x_1 = \mathbf{0}$, τότε τά $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί γιά $\lambda_1 \neq 0$ ἰσχύει

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_\nu = \mathbf{0}.$$

Παραδείγματα:

1. Τά στοιχεῖα (1,1) καί (−1,−1) τοῦ **R** × **R** εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα, γιατί ὁ γραμμικός συνδυασμός τους

$$3 \cdot (1,1) + 3 \cdot (-1,-1)$$

εἶναι ἴσος μέ τό μηδενικό στοιχεῖο (0,0) τοῦ **R** × **R** καί οἱ συντελεστές του εἶναι ≠ 0.

2. Στόν πραγματικό γραμμικό χῶρο V ὅλων τῶν τριωνύμων

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R})$$

(πού εἴδαμε στό παράδειγμα 2 τῆς 5.1) τά $1x^2 + 0x + 0 \equiv x^2$, $0x^2 + 1x + 0 \equiv x$ καί $0x^2 + 0x + 1 \equiv 1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$$\lambda_1 (x^2) + \lambda_2 (x) + \lambda_3 (1) \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3 \equiv 0x^2 + 0x + 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \text{ καί } \lambda_2 = 0 \text{ καί } \lambda_3 = 0.$$

5.5. Βάση καί διάσταση ἑνός διανυσματικοῦ χώρου

Στήν 5.4. εἴδαμε ὅτι τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ εἶναι δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ **R** × **R**. Ἄς πάρουμε τώρα ἕνα στοιχεῖο (α,β) τοῦ **R** × **R**. Τό στοιχεῖο αὐτό μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν e_1 καί e_2 μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha + 0, 0 + \beta) = (\alpha, 0) + (0, \beta) = \alpha \cdot (1,0) + \beta \cdot (0,1) =$$
$$= \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2.$$

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ **R** × **R** μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν γραμμικῶς ἀνεξάρτητων στοιχείων e_1, e_2. Γιά τό λόγο αὐτό τά e_1, e_2 λέμε ὅτι ἀποτελοῦν μιά *βάση* τοῦ **R** × **R**. Δίνουμε τώρα τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, τότε ἡ νιάδα $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ ἀπό στοιχεῖα τοῦ V ὀνομάζεται **βάση τοῦ V**, ἄν καί μόνο ἄν

(i) τά $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα,

(ii) κάθε στοιχεῖο x τοῦ V γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$, δηλαδή

$$x = \lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu \qquad (1)$$

Παρατήρηση. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό αὐτό, τά στοιχεῖα $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$ εἶναι ἀρκετά γιά νά «κατασκευάσουν» ὅλα τά στοιχεῖα τοῦ V καί γι' αὐτό ἡ ἔννοια τῆς βάσεως ἑνός διανυσματικοῦ χώρου εἶναι πολύ σημαντική.

Ἡ γραμμική ἀνεξαρτησία τῶν στοιχείων τῆς βάσεως ἐξασφαλίζει ὅτι ἡ γραφή ἑνός στοιχείου x τοῦ V μέ τή μορφή (1) εἶναι μοναδική. Πράγματι, ἄν

$$x = \lambda'_1 b_1 + \lambda'_2 b_2 + \ldots + \lambda'_\nu b_\nu,$$

τότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu = \lambda_1 . b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 + \ldots + \lambda_\nu \cdot b_\nu$$

ἤ

$$\lambda'_1 \cdot b_1 + (-\lambda_1) \cdot b_1 + \lambda'_2 \cdot b_2 + (-\lambda_2) \cdot b_2 + \ldots + \lambda'_\nu \cdot b_\nu + (-\lambda_\nu) \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$[\lambda'_1 - \lambda_1] \cdot b_1 + [\lambda'_2 - \lambda_2] \cdot b_2 + \ldots + [\lambda'_\nu - \lambda_\nu] \cdot b_\nu = \mathbf{0}$$

ἤ

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = \lambda'_2 - \lambda_2 = \ldots = \lambda'_\nu - \lambda_\nu = 0$$

ἤ

$$\lambda'_i = \lambda_i \quad , \text{ γιά κάθε } \ i \in \{1, 2, \ldots, \nu\}.$$

Οἱ συντελεστές στό δεύτερο μέλος τῆς (1) ὀνομάζονται συντεταγμένες τοῦ x ὡς πρός τή βάση $(b_1, b_2, \ldots, b_\nu)$ καί γράφονται σάν νιάδα

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu).$$

Παραδείγματα:

1. Τά στοιχεῖα $b_1 = (1,2)$ καί $b_2 = (-1,1)$ σχηματίζουν μιά βάση (b_1,b_2) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Πράγματι

α) τά b_1, b_2 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα, γιατί

$\lambda_1 \cdot b_1 + \lambda_2 \cdot b_2 = (0,0) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda_1, 2\lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0$ καί $\lambda_2 = 0$,

β) κάθε στοιχεῖο (α,β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν b_1, b_2, γιατί

$(\alpha,\beta) = \lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (-1,1) \Leftrightarrow (\alpha,\beta) = (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$ καί $2\lambda_1 + \lambda_2 = \beta \Leftrightarrow \lambda_1 = \dfrac{\alpha+\beta}{3}$ καί $\lambda_2 = \dfrac{-2\alpha+\beta}{3}$.

Ἔτσι οἱ συντεταγμένες τοῦ (α, β) ὡς πρός τή βάση αὐτή εἶναι

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{-2\alpha+\beta}{3}\right).$$

2. Ὅπως εἴδαμε στήν ἀρχή, τά $e_1 = (1,0)$ καί $e_2 = (0,1)$ σχηματίζουν μιά βάση (e_1,e_2) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες ἑνός στοιχείου (α,β) τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι (α,β). Γιά τό λόγο αὐτό ἡ βάση αὐτή ὀνομάζεται **κανονική βάση** τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

3. Στό παράδειγμα 2 τῆς 5.4 εἴδαμε ὅτι τά $x^2,x,1$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ πραγματικοῦ γραμμικοῦ χώρου

$$V = \{\alpha x^2 + \beta x + \gamma \mid \alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}\}$$

Ἐξάλλου κάθε στοιχεῖο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τοῦ V γράφεται σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν $x^2,x,1$ μέ συντελεστές α,β,γ καί ἑπομένως τά $x^2,x,1$ σχηματίζουν μιά βάση $(x^2,x,1)$ τοῦ V, ὡς πρός τήν ὁποία οἱ συντεταγμένες τοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι (α,β,γ).

Ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα 1 καί 2 διαπιστώνουμε ὅτι τά (b_1,b_2) καί (e_1, e_2) εἶναι δύο βάσεις τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι κάθε ἄλλη βάση τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο στοιχεῖα καί γι᾿ αὐτό τό λόγο λέμε ὅτι ἡ *διάσταση* τοῦ γραμμικοῦ χώρου $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ εἶναι **δύο**. Γενικά ὁ γραμμικός χῶρος $\mathbf{R}^\nu$ ἔχει διάσταση ν καί ἡ κανονική βάση του ἀποτελεῖται ἀπό τά διανύσματα

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0),\quad e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ \ldots,\ e_\nu = (0,0,0,\ldots,0,1).$$

Ἀποδεικνύεται γενικά ὅτι, ἄν ἕνας διανυσματικός χῶρος ἔχει μιά βάση ἀπό μ στοιχεῖα, τότε κάθε ἄλλη βάση του θά ἔχει μ ἀκριβῶς στοιχεῖα καί τόν ἀριθμό μ θά τόν ὀνομάζουμε **διάσταση**(1) αὐτοῦ τοῦ διανυσματικοῦ χώρου.

Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, τότε τό σύνολο

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\mu x_\mu \mid \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\mu \in K\}$$

ὅλων τῶν γραμμικῶν συνδυασμῶν τῶν $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ εἶναι προφανῶς ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος A τοῦ V. Ὁ A ὀνομάζεται **ὑπόχωρος πού γεννιέται ἀπό τά x_1, x_2, ..., x_μ**. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῆς βάσεως τά $x_1,x_2,\ldots,x_\mu$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ A καί ἑπομένως ὁ A εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος μέ διάσταση μ.

5.6. Ἀσκήσεις

1. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$\mathbf{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}$$

(μέ ἰσότητα καί πράξεις ὅπως ὁρίστηκαν στό παράδειγμα 1 τῆς 5.1) εἶναι ἕνας πραγματικός διανυσματικός χῶρος.

2. Ἄν V εἶναι ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, νά δείξετε ὅτι γιά κάθε $\alpha \in K$ καί $x \in V$ ἰσχύει

$$\alpha\cdot(-x) = -(\alpha\cdot x)$$

1. Ὑπάρχουν διανυσματικοί χῶροι μέ μή πεπερασμένη διάσταση. Οἱ ἔννοιες πού ἔχουμε ἀναφέρει στίς 5.4 καί 5.5 γενικεύονται καί γιά τέτοιους χώρους. Ἡ παρουσίαση ὅμως αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν ξεφεύγει ἀπό τό σκοπό αὐτοῦ τοῦ βιβλίου.

3. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$A = \{(\lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$$

εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

4. Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ μέ } 2x+3y = 0\}$$

εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Τί διάσταση ἔχει;

5. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $(2,1)$, $(1,2)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

6. Νά ἐξετάσετε ἄν τά $b_1 = (1,0,1)$, $b_2 = (0,1,1)$, $b_3 = (1,1,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τῆς ἀσκήσεως 1.

7. Νά δείξετε ὅτι τά $z_1 = 1+0i$ καί $z_2 = 0+1i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1. Τί διάσταση ἔχει ὁ χῶρος αὐτός;

8. Ἔστω V ἕνας διανυσματικός χῶρος πάνω στό σῶμα K. Ἄν A, B εἶναι δύο διανυσματικοί ὑπόχωροι τοῦ V, νά δείξετε ὅτι ἡ τομή $A \cap B$ δέν εἶναι τό κενό σύνολο καί μάλιστα εἶναι διανυσματικός ὑπόχωρος τοῦ V.

6. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Ἡ δομή $(G,\circ)$ ὀνομάζεται ἡμιομάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἡ πράξη $\circ$ εἶναι προσεταιριστική.
2. Ἡ δομή $(G,\circ)$ ὀνομάζεται ὁμάδα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (O_1) Ἡ δομή $(G,\circ)$ εἶναι ἡμιομάδα.

   (O_2) Ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.

   (O_3) Κάθε στοιχεῖο τοῦ G ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$.
3. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται δακτύλιος, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Δ_1) Ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

   (Δ_2) Ἡ δομή $(A, \cdot)$ εἶναι ἡμιομάδα.

   (Δ_3) Ἡ πράξη $\cdot$ εἶναι ἐπιμεριστική ὡς πρός τήν πράξη $+$.
4. Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ ὀνομάζεται σῶμα, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Σ_1) Ἡ δομή $(A, +, \cdot)$ εἶναι ἕνας μή μηδενικός ἀντιμεταθετικός δακτύλιος.

   (Σ_2) Ἡ δομή $(A^*, \cdot)$ εἶναι ὁμάδα, ὅπου $A^* = A-\{0\}$.
5. Ἕνα μή κενό σύνολο V ὀνομάζεται διανυσματικός ἤ γραμμικός χῶρος πάνω στό σῶμα K, ἄν καί μόνο ἄν ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

   (Γ_1) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐσωτερική πράξη $+$ τέτοια, ὥστε ἡ δομή $(V, +)$ νά εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

   (Γ_2) Στό V εἶναι ὁρισμένη μιά ἐξωτερική πράξη $\cdot$ μέ σύνολο τελεστῶν τό K τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x, y \in V$ καί $\alpha,\beta \in K$ νά ἰσχύουν:

   (i) $\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$,

   (ii) $(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$,

   (iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$,

   (iv) $1 \cdot x = x$.

7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. Ἄν $x = (\alpha, \alpha')$ καί $y = (\beta, \beta')$ εἶναι δύο στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$, τότε ὁρίζουμε δύο ἐσωτερικές πράξεις $*$ καί $\circ$ στο A μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο
$$x * y = (\alpha+\beta,\ \alpha'\beta') \quad , \quad x \circ y = (\alpha\beta,\ \alpha'+\beta').$$
Δεῖξτε ὅτι
(i) οἱ πράξεις αὐτές εἶναι ἀντιμεταθετικές, προσεταιριστικές καί ὑπάρχει γι' αὐτές οὐδέτερο στοιχεῖο στό A,
(ii) τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς $(1, \alpha')$ καί $(-1, \alpha')$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $\circ$,
(iii)* τά στοιχεῖα τοῦ A τῆς μορφῆς (α, α') μέ $\alpha' \neq 0$ ἔχουν συμμετρικά στοιχεῖα ὡς πρός τήν πράξη $*$.

2. Ἔστω $(E, *)$ μιά ἡμιομάδα, γιά τήν ὁποία ὑπάρχει οὐδέτερο στοιχεῖο $e \in E$. Ἄν γιά τά στοιχεῖα $\alpha, \alpha', \alpha''$ τοῦ E ἰσχύουν $\alpha' * \alpha = e$ καί $\alpha'' * \alpha' = e$, δεῖξτε ὅτι $\alpha = \alpha''$. Τί συμπεραίνετε γιά τά στοιχεῖα α καί α';

3. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά ὁμάδα. Ἄν γιά κάθε $\alpha, \beta \in G$ ἰσχύει
$$(\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2,$$
δεῖξτε ὅτι ἡ ὁμάδα αὐτή εἶναι ἀβελιανή καί γιά κάθε $\nu \in \mathbf{N}$ ἰσχύει $(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$.

4. Στό σύνολο **R** ὁρίζουμε τίς πράξεις $\circ$ καί $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha \circ \beta = \alpha+\beta-1 \quad , \quad \alpha * \beta = \alpha\beta - \alpha - \beta + 2.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(\mathbf{R}, \circ, *)$ εἶναι σῶμα.

5. Στό **R** ἡ σχέση
$$x * y = \alpha x + \beta y + \gamma \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R} - \{0\})$$
ὁρίζει μιά πράξη $*$. Νά προσδιορίσετε τά α, β, ὥστε ἡ πράξη αὐτή νά εἶναι προσεταιριστική. Νά ὑπολογίσετε τό γ συναρτήσει ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ e, ὥστε ἡ δομή $(\mathbf{R}, *)$ νά εἶναι ὁμάδα μέ οὐδέτερο στοιχεῖο τό e ὡς πρός τήν πράξη $*$.

6. Ἄν ν εἶναι σταθερός φυσικός ἀριθμός, νά δείξετε ὅτι τό σύνολο
$$A_\nu = \{z \in \mathbf{C} \mid z^\nu = 1\}$$
εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στό **C** καί στή συνέχεια ὅτι ἡ δομή $(A_\nu, \cdot)$ εἶναι ἀντιμεταθετική ὁμάδα.

7. Ἔστω $(A, \circ)$ μιά ἡμιομάδα μέ τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:
(i) ὑπάρχει $e \in A$ μέ $e \circ \alpha = \alpha$ γιά κάθε $\alpha \in A$,
(ii) γιά κάθε $\alpha \in A$ ὑπάρχει $\alpha' \in A$ μέ $\alpha' \circ \alpha = e$.
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, \circ)$ εἶναι ὁμάδα.

8. Ἔστω $(G, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα. Ἄν κ εἶναι ἕνα σταθερό στοιχεῖο τοῦ G, τότε ὁρίζουμε στό G τήν πράξη $*$ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:
$$\alpha * \beta = \alpha \cdot \beta \cdot \kappa.$$
Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(G, *)$ εἶναι ἀβελιανή ὁμάδα.

9. Ἔστω $(A, \cdot)$ μιά πολλαπλασιαστική ἀβελιανή ὁμάδα, ὅπου
$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}.$$
(i) Ἄν x εἶναι ἕνα στοιχεῖο τοῦ A, δεῖξτε ὅτι τό A περιέχει ἀκριβῶς τά στοιχεῖα
$$x \cdot \alpha_1,\ \ x \cdot \alpha_2,\ \ldots,\ x \cdot \alpha_\nu.$$

(ii) Γιά κάθε $x \in A$ ἰσχύει

$$x^{\nu} = 1.$$

10. Δεῖξτε ὅτι τά $b_1 = (3, 1,5)$, $b_2 = (3,6,2)$, $b_3 = (-1,0,1)$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ $\mathbf{R}^3$. Ποιές εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν $x = (1,0,2)$ καί $y = (2,0,5)$ ὡς πρός τή βάση αὐτή;

11. Σέ ποιά περίπτωση τά $\alpha+\beta i$ καί $\gamma+\delta i$ ἀποτελοῦν μιά βάση τοῦ διανυσματικοῦ χώρου τοῦ παραδείγματος 3 τῆς 5.1 ;

12. Ἄν τά x,y,z εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα ἑνός διανυσματικοῦ χώρου V πάνω στό σῶμα K, δεῖξτε ὅτι καί τά $x+y$, $x-y$, $x-2y+z$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα στοιχεῖα τοῦ V.

13. Γράψτε τό στοιχεῖο (α, β, γ) τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$ σάν γραμμικό συνδυασμό τῶν $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ καί $(1,0,0)$.

14. Δίνεται τό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} x+4y+2z&=0 \\ 2x+y+5z&=0 \end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

Νά δείξετε ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ (Σ) εἶναι ἕνας γραμμικός ὑπόχωρος V τοῦ πραγματικοῦ διανυσματικοῦ χώρου $\mathbf{R}^3$. Βρεῖτε μιά βάση τοῦ V.

15. Ἔστω $(A, +, \cdot)$ ἕνα σῶμα. Ἄν $\alpha, \gamma \in A$ καί $\beta, \delta \in A^*$, δεῖξτε τήν ἰσοδυναμία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma.$$

16. Δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(M, +, \cdot)$ μέ $M = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{Q}\}$ καί

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) + (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha+\varepsilon, \beta+\zeta, \gamma+\eta, \delta+\theta)$$
$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \cdot (\varepsilon, \zeta, \eta, \theta) = (\alpha\varepsilon+\beta\eta, \alpha\zeta+\beta\theta, \gamma\varepsilon+\delta\eta, \gamma\zeta+\delta\theta)$$

εἶναι δακτύλιος. Ποιά στοιχεῖα τοῦ M ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα;

17. Δεῖξτε ὅτι

(i) ἡ δομή $(\mathbf{Z}_{15}, +, \cdot)$ εἶναι δακτύλιος,

(ii) τά ὑποσύνολα $A = \{\widehat{0}, \widehat{5}, \widehat{10}\}$ καί $B = \{\widehat{0}, \widehat{3}, \widehat{6}, \widehat{9}, \widehat{12}\}$ εἶναι κλειστά ὡς πρός τίς πράξεις + καί · στό $\mathbf{Z}_{15}$.

18. Οἱ δομές $(A, +, \cdot)$ καί $(B, +, \cdot)$ εἶναι ἀκέραιες περιοχές;

Ἄν $(G, +)$ εἶναι ὁμάδα καί A ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ G μέ τήν ἰδιότητα

$$x, y \in A \Rightarrow x - y \in A,$$

δεῖξτε ὅτι ἡ δομή $(A, +)$ εἶναι ὁμάδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Διαιρετότητα στό σύνολο Z
2. Ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y=\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in Z)$
3. Σύντομη ἀνακεφαλαίωση
4. Ἀσκήσεις γιά ἐπανάληψη

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἡ θεωρία τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, πού ἡ ἱστορία του ἀρχίζει τήν ἐποχή πού τά μυστικά τῶν ἀριθμῶν ἀπασχόλησαν γιά πρώτη φορά τούς ἀνθρώπους.

Γνωστότερος ἀπό τούς ἀρχαίους πού ἀσχολήθηκαν μέ τούς ἀριθμούς εἶναι ὁ Πυθαγόρας (500 π.Χ.). Κατά τούς χρόνους τοῦ Εὐκλείδη (300 π.Χ.) ἡ μελέτη τῶν ἀριθμῶν ἔγινε περισσότερο συστηματική καί ἡ βασική θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀναφέρεται στό ἔνατο βιβλίο τῶν «Στοιχείων» του. Ἀργότερα ὁ Ἐρατοσθένης (230 π.Χ.) ἔδωσε μέθοδο εὑρέσεως πρώτων ἀριθμῶν (κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένη).

Ὁ Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρινός (350 μ.Χ.) στό ἔργο του «Ἀριθμητικά», πού ἀπό τούς 13 τόμους σώζονται μόνο οἱ ἔξη, ἀσχολήθηκε μέ προβλήματα ἐξισώσεων.

Ἡ σύγχρονη θεωρία τῶν ἀριθμῶν ἀρχίζει μέ τίς ἐργασίες τοῦ P. Fermat (1601-1665 μ.Χ.), πού μέ τό φωτεινό μυαλό του πρόσφερε πολλά στή μαθηματική ἐπιστήμη καί ἰδιαίτερα στόν κλάδο τῆς θεωρίας ἀριθμῶν.

Οἱ μεγαλύτεροι μαθηματικοί τῶν τελευταίων αἰώνων ἐκτός τῶν ἄλλων ἀσχολήθηκαν καί μέ τή θεωρία ἀριθμῶν, ὅπως π.χ. ὁ L. Euler (1707-1783), ὁ K. Gauss (1777-1855) κ.ἄ.

1. ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ Z.

Στήν παράγραφο αὐτή θά μελετήσουμε τήν ἔννοια τῆς διαιρετότητας στό σύνολο τῶν ἀκεραίων:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Συχνά θά χρησιμοποιοῦμε καί τά παρακάτω ὑποσύνολα τοῦ $\mathbf{Z}$:

τό σύνολο τῶν μή μηδενικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z} - \{0\}$
τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+ = \{x | x \in \mathbf{Z}$ μέ $x \geq 0\}$
τό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων: $\mathbf{Z}_+^* = \{x | x \in \mathbf{Z}$ μέ $x > 0\}$

Ἐπιπλέον θά χρησιμοποιήσουμε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα.

Ἀξίωμα. Κάθε μή κενό ὑποσύνολο Α τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, δηλαδή ὑπάρχει στό Α μοναδικό στοιχεῖο, πού εἶναι μικρότερο ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ Α.

1.1. Ἡ ἔννοια τῆς διαιρετότητας στὸ Z.

Ἡ ἐξίσωση $-3x = 11$ δέν ἔχει ρίζα στό **Z**, γιατί δέν ὑπάρχει ἀκέραιος πού, ἄν πολλαπλασιαστεῖ μέ τό -3, νά δίνει γινόμενο 11. Ἡ ἐξίσωση ὅμως $-3x = 12$ ἔχει ρίζα στό σύνολο **Z** τόν ἀκέραιο -4, γιατί $-3(-4) = 12$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ὁ 12 *διαιρεῖται* μέ τό -3 ἤ ὅτι ὁ -3 *διαιρεῖ* τό 12.

Δίνουμε τώρα τόν παρακάτω ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἄν $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, τότε θά λέμε ὅτι ὁ α **διαιρεῖται** μέ τό β ἤ ὅτι ὁ β **διαιρεῖ** τόν α καί θά γράφουμε $\beta|\alpha$, ὅταν καί μόνο ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιος γ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\alpha = \beta\gamma.$$

Στήν περίπτωση αὐτή θά λεμε ἐπίσης ὅτι

(i) ὁ α εἶναι **πολλαπλάσιο** τοῦ β καί

(ii) ὁ β εἶναι **διαιρέτης** ἤ **παράγοντας τοῦ α.**

Παραδείγματα:

1. Ἀπό τήν ἰσότητα $-35 = 7.(-5)$ ἔπεται ὅτι

$$7|-35 \quad \text{καί} \quad -5|-35.$$

2. Τό σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 εἶναι

$$\{5.\gamma \mid \gamma \in \mathbf{Z}\},$$

δηλαδή

$$\{\ldots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \ldots\}$$

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή γιά κάθε $\beta \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $0 = \beta\ .\ 0$, ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος διαιρεῖ τό μηδέν.

2. Ἄν $0|\alpha$, τότε ὑπάρχει $\gamma \in \mathbf{Z}$ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = 0.\gamma$, δηλαδή $\alpha = 0$. Ἄρα:

τό μηδέν εἶναι διαιρέτης μόνο τοῦ ἑαυτοῦ του.

3. Ἀπό τίς προφανεῖς ἰσότητες

$$\alpha = (+1)\cdot\alpha \quad \text{καί} \quad \alpha = (-1)(-\alpha)$$

ἔπεται ὅτι:

κάθε ἀκέραιος α διαιρεῖται πάντα μέ τούς ± 1 καί $\pm \alpha$.

4. Ἄν γιά τρεῖς ἀκέραιους α,β καί γ ἰσχύει $\alpha = \beta\gamma$, τότε προφανῶς ἰσχύουν καί οἱ σχέσεις

$$-\alpha = \beta(-\gamma)\ , \quad \alpha = (-\beta)(-\gamma) \quad \text{καί} \quad -\alpha = (-\beta)\gamma.$$

Ἄρα:

ἄν $\beta|\alpha$, τότε $\beta|-\alpha$, $-\beta|\alpha$ καί $-\beta|-\alpha$.

5. Ἐπειδή, λόγω τῆς προηγούμενης παρατηρήσεως, ἰσχύει

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow -\beta|\alpha,$$

τό σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ α καθορίζεται πλήρως, ὅταν εἶναι γνωστό τό σύνολο τῶν **θετικῶν** διαιρετῶν του, πού θά τό συμβολίζουμε μέ $\Delta(\alpha)$.

6. Ἀπό τήν παρατήρηση 4 συμπεραίνουμε ἐπίσης ὅτι

$$\beta|\alpha \Leftrightarrow \beta|-\alpha,$$

δηλαδή **δύο ἀντίθετοι ἀκέραιοι α καί –α ἔχουν τούς ἴδιους διαιρέτες** καί ἐπομένως

$$\Delta(\alpha) = \Delta(-\alpha) = \Delta(|\alpha|).$$

Ἔτσι

$\Delta(-8) = \Delta(8) = \{1,2,4,8\}$, $\Delta(-9) = \Delta(9) = \{1,3,9\}$ καί

$\Delta(0) = \{x \mid x \in \mathbf{Z} \text{ μέ } x > 0\} = \mathbf{Z}^*_+$.

Στή συνέχεια θά ἀποδείξουμε δύο χρήσιμες προτάσεις.

Πρόταση 1. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{Z}$, τότε ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε γιά κάθε $\kappa \in \mathbf{Z}$ ἰσχύει $\alpha|\kappa\beta$.
(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε $\alpha|\gamma$.
(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε $\alpha|\beta+\gamma$.
(iv) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta \neq 0$, τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.

Ἀπόδειξη.

(i) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \lambda$ καί ἐπομένως $\kappa\beta = \alpha(\lambda\kappa)$, πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\kappa\beta$.

(ii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\beta|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι μ,ν τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha \cdot \mu \quad \text{καί} \quad \gamma = \beta \cdot \nu,$$

ὁπότε

$$\gamma = \beta \cdot \nu = (\alpha \cdot \mu) \cdot \nu = \alpha(\mu \cdot \nu),$$

δηλαδή $\alpha|\gamma$.

(iii) Ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι λ,μ τέτοιοι, ὥστε

$$\beta = \alpha\lambda \quad \text{καί} \quad \gamma = \alpha \cdot \mu,$$

ὁπότε

$$\beta + \gamma = \alpha(\lambda + \mu),$$

πού σημαίνει ὅτι $\alpha|\beta+\gamma$.

(iv) Ἄν $\alpha|\beta$, τότε ὑπάρχει ἀκέραιος λ τέτοιος, ὥστε $\beta = \alpha \cdot \lambda$. Ἐξάλλου, ἀφοῦ $\beta \neq 0$, θά εἶναι $\lambda \neq 0$ καί ἐπομένως

$$|\lambda| \geq 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἀνισότητας μέ $|\alpha|$ παίρνουμε

$$|\alpha\lambda| \geq |\alpha|$$

καί ἄρα $|\beta| \geq |\alpha|$.

Λόγω τῆς ἰδιότητας (iv) τῆς προτάσεως κάθε θετικός διαιρέτης x τοῦ $\beta \in \mathbf{Z}^*$ ἱκανοποιεῖ τή σχέση $1 \leq x \leq |\beta|$, δηλαδή

$$\boxed{x \in \Delta(\beta) \Rightarrow 1 \leq x \leq |\beta|} \quad (1)$$

Ἀπό τήν (1) καί τήν παρατήρηση 4 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 1. Οἱ μοναδικοί διαιρέτες τοῦ 1 εἶναι οἱ ± 1.

Ἐξάλλου λόγω τῆς προτάσεως 1 καί τῆς παρατηρήσεως 3 ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2. Ἡ σχέση "|" μέσα στό σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων εἶναι σχέση μερικῆς διατάξεως (δηλαδή ἀνακλαστική, μεταβατική καί ἀντισυμμετρική).

Τέλος ἀπό τήν (1) ἔχουμε τό ἀκόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 3. Τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν ἑνός ἀκεραίου $\beta \in \mathbf{Z}^*$ εἶναι πεπερασμένο.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε ὑπάρχει μοναδικός ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = \beta \cdot \gamma$.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν $\gamma, \gamma_1 \in \mathbf{Z}$ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \beta\gamma \quad \text{καί} \quad \alpha = \beta\gamma_1.$$

Τότε λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας τῆς ἰσότητας παίρνουμε

$$\beta\gamma = \beta\gamma_1$$

καί ἑπομένως $\gamma = \gamma_1$, ἀφοῦ $\beta \neq 0$.

Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε ἡ πράξη, μέ τήν ὁποία βρίσκεται ὁ μοναδικός (λόγω τῆς προτ. 2) ἀκέραιος γ μέ τήν ἰδιότητα $\alpha = \beta\gamma$, εἶναι ἡ γνωστή μας τέλεια διαίρεση καί ὁ ἀκέραιος γ εἶναι τό ἀκέραιο πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

1.2. Πρῶτοι καί σύνθετοι ἀριθμοί.

Μιά ἀπό τίς πιό βασικές ἔννοιες στή θεωρία ἀριθμῶν εἶναι ἡ ἔννοια τοῦ *πρώτου ἀριθμοῦ*. Γιά νά κατανοήσουμε τήν ἔννοια αὐτή, ἄς πάρουμε τό σύνολο

$$A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}.$$

Κάθε στοιχεῖο α τοῦ συνόλου Α ἔχει, λόγω τῆς παρατηρήσεως 3 τῆς 1.1, τουλάχιστον δύο θετικούς διαιρέτες, τούς 1 καί $|\alpha|$. Π.χ.

$\Delta(3) = \{1,3\}$, $\Delta(-4) = \{1,2,4\}$, $\Delta(-5) = \{1,5\}$

$\Delta(6) = \{1, 2, 3, 6\}$, $\Delta(7) = \{1,7\}$.

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς 3, –5, 7 ἔχει σύνολο θετικῶν διαιρετῶν μέ *δύο ἀκριβῶς* στοιχεῖα. Τέτοιοι ἀριθμοί, ὅπως οἱ 3, –5 καί 7, ὀνομάζονται *πρῶτοι ἀριθμοί*. Ἔτσι ἔχουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό.

Ὁρισμός. Ἕνας ἀκέραιος $p \neq 0$ ὀνομάζεται **πρῶτος ἀριθμός**, ὅταν καί μόνο ὅταν $p \neq \pm 1$ καί οἱ μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του εἶναι οἱ ἀριθμοί $|p|$ καί 1, δηλαδή $\Delta(p) = \{1, |p|\}$.

Κάθε ἀκέραιος $\alpha \in \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$, πού δέν εἶναι πρῶτος ἀριθμός, ὀνομάζεται **σύνθετος ἀριθμός**.

Ἔτσι κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $A = \mathbf{Z} - \{-1, +1\}$ εἶναι ἤ πρῶτος ἀριθμός ἤ σύνθετος. Οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ (πού δέν ἀνήκουν στό A) εἶναι οἱ μόνοι ἀκέραιοι, πού τό σύνολο τῶν θετικῶν διαιρετῶν τους εἶναι μονομελές. (Πόρισμα 1 τῆς 1.1). Μέ βάση τόν προηγούμενο ὁρισμό οἱ ἀριθμοί -1 καί $+1$ οὔτε πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι οὔτε σύνθετοι.

Παρατηρήσεις

1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p) = \Delta(-p)$, θά εἶναι καί ὁ $-p$ πρῶτος ἀριθμός.
2. Ἄν p_1, p_2 εἶναι **θετικοί** πρῶτοι ἀριθμοί καί $p_1 | p_2$, τότε, ἀφοῦ $\Delta(p_2) = \{1, p_2\}$, θά εἶναι $p_1 = p_2$.

Παραδείγματα.

1. Ὁ ἀκέραιος 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(2) = \{1,2\}$.
2. Ὁ ἀκέραιος -9 εἶναι σύνθετος ἀριθμός, γιατί $\Delta(-9) = \{1,3,9\}$.
3. Ὁ ἀκέραιος 5 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, γιατί $\Delta(5) = \{1,5\}$.

1.3. Ἡ ἔννοια τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε τούς ἀκέραιους 32 καί 5. Τό 5 δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 32, ἀφοῦ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος α μέ τήν ἰδιότητα $32 = 5 \cdot \alpha$. Ὁ ἀκέραιος ὅμως 32 μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ κατά πολλούς τρόπους σέ ἄθροισμα ἑνός πολλαπλασίου τοῦ 5 καί ἑνός *θετικοῦ* ἀκεραίου, ὅπως δείχνουν οἱ παρακάτω ἰσότητες:

$$
\begin{array}{ll}
32 = 5\cdot 6 + 2 & 32 = 5\cdot 2 + 22 \\
32 = 5\cdot 5 + 7 & 32 = 5\cdot 1 + 27 \\
32 = 5\cdot 4 + 12 & 32 = 5\cdot 0 + 32 \\
32 = 5\cdot 3 + 17 & 32 = 5\cdot(-1) + 37 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Γράφουμε τώρα τίς προηγούμενες ἰσότητες μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$
\begin{array}{ll}
32 - 5\cdot 6 = 2 & 32 - 5\cdot 2 = 22 \\
32 - 5\cdot 5 = 7 & 32 - 5\cdot 1 = 27 \\
32 - 5\cdot 4 = 12 & 32 - 5\cdot 0 = 32 \\
32 - 5\cdot 3 = 17 & 32 - 5(-1) = 37 \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Τά δεύτερα μέλη στίς προηγούμενες ἰσότητες σχηματίζουν ἕνα σύνολο ἀπό μή ἀρνητικούς ἀκεραίους, καί ὁ *ἐλάχιστος* ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι καί ὁ *μοναδικός* πού περιέχεται μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 5.

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ ὕπαρξη καί ἡ μοναδικότητα ἑνός τέτοιου ἀριθμοῦ, ὅπως τοῦ 2 στό προηγούμενο παράδειγμα, ἰσχύει γενικά.

Θεώρημα. Ἄν $\alpha\in\mathbf{Z}$ καί $\beta\in\mathbf{Z}^*$, τότε ὑπάρχουν μοναδικοί ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha=\beta\pi+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<|\beta|$$

Ἀπόδειξη. Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

I. $\alpha\in\mathbf{Z}_+$ **καί** $\beta>0$. Ἄς θεωρήσουμε τό σύνολο A ὅλων τῶν ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha-\beta x$, ὅπου x εἶναι ἕνας ἀκέραιος τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha-\beta x\geq 0$, δηλαδή

$$A=\{\alpha-\beta x \mid x\in\mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha-\beta x\geq 0\}.$$

Τό σύνολο αὐτό δέν εἶναι τό κενό. Πράγματι, ἀφοῦ εἶναι $\beta\geq 1$, πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\alpha\in\mathbf{Z}_+$ βρίσκουμε $\alpha\beta\geq\alpha$ καί ἐπομένως $\alpha+\alpha\beta\geq$ $\geq\alpha+\alpha\geq 0$, δηλαδή $\alpha+\alpha\beta\geq 0$. Ἔτσι, ἄν πάρουμε $x=-\alpha$, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ μή ἀρνητικός ἀκέραιος $\alpha+\alpha\beta$ ἀνήκει στό σύνολο A. Σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 τό σύνολο A ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω υ. Ἀφοῦ $\upsilon\in A$, θά ὑπάρχει ἀκέραιος π τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $\alpha-\beta\pi=\upsilon$. Ἑπομένως

$$\alpha=\beta\pi+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon.$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι $\upsilon<\beta$. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\upsilon\geq\beta$. Τότε εἶναι $\upsilon-\beta\geq 0$ καί, ἐπειδή ἰσχύει

$$\upsilon-\beta=(\alpha-\pi\beta)-\beta=\alpha-(\pi+1)\beta,$$

συμπεραίνουμε ὅτι τό $\upsilon-\beta$ ἀνήκει στό A. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τό $\upsilon-\beta$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό υ, ἐνῶ συγχρόνως τό υ εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως $\upsilon<\beta$ καί ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha=\beta\pi+\upsilon \quad \text{καί} \quad 0\leq\upsilon<\beta \tag{1}$$

Μένει ν' ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ἀκέραιοι π καί υ εἶναι μοναδικοί. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι π' καί υ' τέτοιοι, ὥστε $\alpha=\beta\pi'+\upsilon'$ καί $0\leq\upsilon'<\beta$. Χωρίς νά βλάψουμε τή γενικότητα μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $\pi'\leq\pi$. Ἐπειδή εἶναι $\alpha=\beta\pi+\upsilon$, ἔχουμε $\beta\pi+\upsilon=\beta\pi'+\upsilon'$ ἤ

$$\beta(\pi-\pi')=\upsilon'-\upsilon. \tag{2}$$

Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη τίς σχέσεις $0\leq\upsilon$ καί $\upsilon'<\beta$ βρίσκουμε $\upsilon'<\beta+\upsilon$ ἤ $\upsilon'-\upsilon<\beta$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\beta(\pi-\pi')<\beta$$

ἤ, ἀφοῦ $\beta>0$,

$$\pi-\pi'<1.$$

Ἔτσι γιά τόν **ἀκέραιο** $\pi-\pi'$ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$0\leq\pi-\pi' \quad \text{καί} \quad \pi-\pi'<1$$

καί ἐπομένως $\pi-\pi'=0$, δηλαδή $\pi=\pi'$. Τώρα ἡ (2) δίνει $\upsilon'=\upsilon$. Ἄρα τό θεώρημα ἰσχύει στήν περίπτωση αὐτή.

II. $\alpha<0$ καί $\beta>0$. Ἡ ἀπόδειξη στήν περίπτωση αὐτή γίνεται, ὅπως στήν περίπτωση I, ἀρκεῖ νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό $\alpha-\beta\alpha$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου A·

III. $\alpha\in Z$ καί $\beta<0$. Στήν περίπτωση αὐτή θέτουμε στίς σχέσεις (1) ὅπου β τό $|\beta|$, ὁπότε παίρνουμε

$$\alpha = |\beta|\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

ἤ

$$\alpha = \beta(-\pi) + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|$$

ἤ

$$\alpha = \beta\pi' + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < |\beta|,$$

ὅπου $\pi' = -\pi$.

Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα σέ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος (α,β) τοῦ $Z \times Z^*$ ἀντιστοιχεῖ μοναδικό διατεταγμένο ζεῦγος (π,υ) τοῦ $Z \times Z_+$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $\alpha = \beta\pi+\upsilon$ καί $0 \leq \upsilon < |\beta|$.

Δηλαδή ἔχουμε μία πράξη τοῦ $Z \times Z^*$ στό $Z \times Z_+$. Ἡ πράξη αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγοριθμική διαίρεση.** Οἱ ἀριθμοί α, $\beta(\neq 0)$, π καί υ ὀνομάζονται ἀντιστοίχως **διαιρετέος, διαιρέτης, πηλίκο** καί **ὑπόλοιπο τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.** Ἡ σχέση $\alpha = \beta\pi+\upsilon$ (ὅπου $0 \leq \upsilon < |\beta|$) ὀνομάζεται **ἰσότητα τῆς (ἀλγοριθμικῆς) διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β.**

Παρατήρηση. Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν στήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β εἶναι $\upsilon = 0$, τότε ὁ β εἶναι παράγοντας τοῦ α.

Παραδείγματα.

1. Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ -35 μέ τό 6 δίνει πηλίκο $\pi = -6$ καί ὑπόλοιπο $\upsilon = 1$:
$$-35 = 6(-6)+1$$
2. Ἡ σχέση $-14 = 4(-5) + 5$ δέν εἶναι ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό 4 οὔτε τῆς διαιρέσεως τοῦ -14 μέ τό -5, γιατί εἶναι $5>4$ καί $5 \geq |-5|$.
3. Ἄν $\alpha\in Z$, τότε τά δυνατά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό 5 εἶναι 0,1,2,3 ἤ 4, γιατί τό ὑπόλοιπο υ αὐτῆς τῆς διαιρέσεως ἱκανοποιεῖ τή σχέση $0 \leq \upsilon < 5$.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση ἑνός ἀκεραίου μέ τό 2 εἶναι δυνατό νά δώσει ὑπόλοιπο 0 ἤ 1. Εἶναι γνωστό ὅτι στήν πρώτη περίπτωση ὁ ἀκέραιος ὀνομάζεται *ἄρτιος*, ἐνῶ στή δεύτερη *περιττός*. Ἔτσι ἕνας ἄρτιος ἀκέραιος ἔχει τή μορφή $2k$, ἐνῶ ἕνας περιττός τή μορφή $2k+1$, ὅπου $k \in Z$.

Οἱ ἀκέραιοι -8, 4, -6, 10 εἶναι ἄρτιοι, ἐνῶ οἱ 5, -7, 9, -15 περιττοί.

Ἡ ἀλγοριθμική διαίρεση τοῦ 32 μέ τό 12 δίνει ὑπόλοιπο 8. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀκέραιος 2, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν 32 καί 12, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ ὑπόλοιπου 8 καί ἐπιπλέον ὁ ἀκέραιος 4, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 12 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, εἶναι διαιρέτης καί τοῦ διαιρετέου 32. Οἱ ἰδιότητες αὐτές ἰσχύουν γενικά, ὅπως δείχνει ἡ παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β καί $\delta\in Z$, τότε ἰσχύουν

(i) $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta \Rightarrow \delta|\upsilon$,

(ii) $\delta|\beta$ καί $\delta|\upsilon \Rightarrow \delta|\alpha$.

'Απόδειξη. (i) 'Από τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό β παίρνουμε

$$α-βπ = υ \qquad (1)$$

'Αφοῦ $δ|α$ καί $δ|β$, λόγω τῆς προτάσεως 1 τῆς 1.1 ὁ δ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $δ|υ$.

(ii) 'Αποδεικνύεται ὅμοια.

Παρατήρηση. Στό παράδειγμα πού ἀναφέραμε πρίν ἀπό τήν πρόταση 1 ὁ ἀκέραιος 8 εἶναι κοινός διαιρέτης τοῦ 32 καί τοῦ ὑπόλοιπου 8, ἀλλά δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 12. Ἔτσι στήν πρόταση 1 **δέν** ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή:

$$δ|α \text{ καί } δ\,|\,υ \Rightarrow δ\,|\,β.$$

Πρόταση 2. Ἔστω $α, β \in \mathbf{Z}$ καί $γ \in \mathbf{Z}^*$. Τότε οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $α-β$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ.

'Απόδειξη. Ἄν οἱ διαιρέσεις τῶν α καί β μέ τό γ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, τότε ἔχουμε

$$α = γπ_1 + υ \quad \text{καί} \quad β = γπ_2 + υ \quad (\text{ὅπου } 0 \le υ < |γ|),$$

ὁπότε μέ ἀφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$α-β = γ\,(π_1-π_2),$$

πού σημαίνει ὅτι τό $α-β$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ γ, ἀφοῦ $π_1-π_2 \in \mathbf{Z}$.

'Αντίστροφα, ἄν εἶναι $α-β = γ.λ$, τότε ἔχοντας ὑπόψη τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ β μέ τό γ, δηλαδή τήν

$$β = γπ + υ \qquad (\text{ὅπου } 0 \le υ < |γ|),$$

βρίσκουμε

$$α-(γπ+υ) = γ\cdot λ$$

ἤ

$$α = γ\,(λ+π) + υ.$$

'Επειδή εἶναι $0 \le υ < |γ|$, ἡ τελευταία σχέση εἶναι ἡ ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό γ καί ἑπομένως τό ὑπόλοιπό της εἶναι υ.

1.4. 'Ασκήσεις.

1. Ἄν $α \equiv β \pmod 2$, δεῖξτε ὅτι ὁ ἀκέραιος $α+β$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 2.
2. Ἄν $ν = 4κ+1$, ὅπου $κ \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $4\,|\,ν^3+2ν+1$.
3. Ἄν $α_1 \equiv α_2 \pmod ν$ καί $β_1 \equiv β_2 \pmod ν$, δεῖξτε ὅτι $α_1+β_1 \equiv α_2+β_2 \pmod ν$ καί $α_1β_1 \equiv α_2β_2 \pmod ν$.
4. Δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός καί ἔπειτα ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς $8κ+1$, ὅπου $κ \in \mathbf{Z}$.
5. Ἄν $α,β,x$ εἶναι ἀκέραιοι τέτοιοι, ὥστε $α \equiv β \pmod 2$ καί $x = α^2+β^2$, δεῖξτε ὅτι τό $\frac{x}{2}$ εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

6. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\lambda \in \mathbf{Z}$ ὁ ἀκέραιος $\lambda(\lambda^2+2)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.
7. Ἄν δύο ἀκέραιοι δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τους διαιρεῖται μέ τό 3.
8. Ἄν ἕνας ἀκέραιος δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3, δεῖξτε ὅτι τό τετράγωνό του εἶναι τῆς μορφῆς $3\lambda+1$, ὅπου $\lambda \in \mathbf{Z}$.
9. Ἄν $\kappa \in \mathbf{Z}$, δεῖξτε ὅτι $6 \mid \kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)$.
10. Ἄν ἕνας ἀκέραιος α δέν εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 5, δεῖξτε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ α^2 μέ τό 5 δίνει ὑπόλοιπο 1 ἤ 4. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι, ἄν οἱ ἀκέραιοι x καί y δέν εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, τότε $5 \mid x^4-y^4$.
11. Ἡ διαίρεση ἑνός ἀκεραίου α μέ τό 65 δίνει πηλίκο ἕναν ἄρτιο ἀριθμό λ καί ὑπόλοιπο λ^3. Προσδιορίστε τούς ἀκεραίους α.
12. Ἄν ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι $9 \mid 2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$.
13. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύουν

    α) $5 \mid 3^{3\nu+2} + 2^{\nu+4}$ β) $7 \mid 3^{2\nu+1} + 2^{\nu+2}$

    γ) $11 \mid 3^{2\nu+2} + 2^{6\nu+1}$ δ) $17 \mid 3.5^{2\nu-1} + 2^{3\nu-2}$.
14. Ἄν $\alpha,\beta,\rho \in \mathbf{Z}$ καί οἱ ἀκέραιοι $\alpha^2-\beta$ καί $\beta^2-\alpha$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ρ, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $\alpha\beta^2+\alpha^2\beta$ καί $\alpha^2+\beta^2$ μέ τό ρ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο.
15. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $9^{30} + 17^{10}$ μέ τό 8.
16. Ἄν ρ,λ εἶναι ἀκέραιοι μέ $4\rho+1 = 3\lambda$, βρεῖτε τό γενικό τύπο τοῦ ρ.

1.5. Μέγιστος κοινός διαιρέτης ἀκεραίων. — Ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη.

Ἄν α καί β εἶναι δύο ἀκέραιοι, τότε τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ περιέχει ὅλους τούς κοινούς θετικούς διαιρέτες τῶν α καί β, ἕνας ἀπό τούς ὁποίους εἶναι καί ὁ ἀκέραιος 1. Στήν περίπτωση πού ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς α καί β εἶναι $\neq 0$, τό σύνολο $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ εἶναι πεπερασμένο (Πορ. 3 τῆς 1.1.) καί ἑπομένως ἔχει μέγιστο στοιχεῖο. Τό μέγιστο αὐτό στοιχεῖο τοῦ $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης (ΜΚΔ) τῶν α καί β** καί συμβολίζεται μέ (α,β).

Ἔτσι ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ἀκεραίων α καί β (πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$) εἶναι ὁ μοναδικός **θετικός** ἀκέραιος δ, πού ἱκανοποιεῖ τίς ἰδιότητες:

(i) $\delta | \alpha$ καί $\delta | \beta$,

(i)) $\gamma | \alpha$ καί $\gamma | \beta \Rightarrow \gamma \leq \delta$.

Ἐπειδή τό σύνολο

$$\Delta(0) \cap \Delta(0) = Z_+^*$$

δέν ἔχει μέγιστο στοιχεῖο, μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$ δέν ὁρίζεται. Ἔτσι, ὅταν στά ἑπόμενα ἀναφερόμαστε στό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο ἀκεραίων, θά ὑποθέτουμε ὅτι ἕνας τουλάχιστον ἀπό αὐτούς εἶναι $\neq 0$.

Παραδείγματα.

1. Ἐπειδή $\Delta(-8) = \{1,2,4,8\}$ καί $\Delta(20) = \{1,2,4,5,10,20\}$, ἔχουμε $\Delta(-8) \cap \Delta(20) = \{1,2,4\}$ καί ἑπομένως $(-8, 20) = 4$.

2. Ἐπειδή ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν 4 καί 9 εἶναι ἡ μονάδα, ἔχουμε $(4,9) = 1$.

Παρατηρήσεις

1. Ἐπειδή $\Delta(\alpha) = \Delta(|\alpha|)$ καί $\Delta(\beta) = \Delta(|\beta|)$ (Παρατ. 6 τῆς 1.1), ἔχουμε
$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) = \Delta(|\alpha|) \cap \Delta(|\beta|)$$
καί ἑπομένως
$$\boxed{(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)}$$

2. Ἄν $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ $|\alpha|$ εἶναι ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ α (Προτ. 1 (iv) τῆς 1.1). Ἐπειδή ἐπιπλέον ἰσχύει $\Delta(\alpha) \cap \Delta(0) = \Delta(\alpha)$, ἔχουμε
$$(\alpha,0) = |\alpha|$$

3. Ἄν $\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί $\beta | \alpha$, τότε, ἀφοῦ ὁ μέγιστος διαιρέτης τοῦ β εἶναι ὁ ἀκέραιος $|\beta|$ καί $|\beta| \in \Delta(\alpha)$, ἔχουμε $(\alpha,\beta) = |\beta|$.

Ἔστω
$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \qquad (\text{ὅπου } 0 \leq \upsilon < |\beta|)$$
ἡ ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta(\neq 0)$.
Ἔχουμε μάθει (Προτ. 1 τῆς 1.3) ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι διαιρέτης τοῦ υ καί κάθε κοινός διαιρέτης τῶν β καί υ εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Ἑπομένως τά σύνολα $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ καί $\Delta(\beta) \cap \Delta(\upsilon)$ ταυτίζονται, πού σημαίνει ὅτι $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν υ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ α μέ τό $\beta\ (\neq 0)$, τότε
$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon).$$

Μέ τή βοήθεια τῆς προηγούμενης προτάσεως θά ἐξηγήσουμε μιά μέθοδο, μέ τήν ὁποία θά μποροῦμε νά ὑπολογίζουμε τό μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο θετικῶν ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὐτή ὀνομάζεται **ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη**.

Ἄς δοῦμε πρῶτα τή μέθοδο αὐτή μέ ἕνα παράδειγμα.

Παράδειγμα 3. Θέλουμε νά ὑπολογίσουμε τό ΜΚΔ τῶν 306 καί 108. Γράφουμε τήν ἰσότητα τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ 306 μέ τό 108:
$$306 = 108 \,.\, 2 + 90,$$
ἔπειτα τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 108 μέ τό 90:
$$108 = 90 \,.\, 1 + 18$$
καί τέλος τήν ἰσότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ 90 μέ τό 18:
$$90 = 18 . 5 + 0.$$
Λόγω τῆς προηγούμενης προτάσεως ἔχουμε
$$(306, 108) = (108, 90) = (90, 18) = (18,0) = 18.$$

Ἄς ἐξετάσουμε τώρα τή μέθοδο αὐτή γενικά. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουν δοθεῖ δύο μή μηδενικοί ἀκέραιοι α καί β καί θέλουμε νά βροῦμε τό (α,β). Ἐπειδή $(\alpha,\beta) = (|\alpha|, |\beta|)$ (Παρατ. 1) μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι οἱ α,β εἶναι θετικοί ἀκέραιοι.

Γιά τή διαίρεση τοῦ α μέ τό β ἔχουμε:

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \beta.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon = 0$, τότε $\beta|\alpha$, καί ἑπομένως $(\alpha,\beta) = \beta$ (Παρατ. 3).
Ἄν εἶναι $\upsilon \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ β μέ τό υ ἔχουμε:

$$\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_1 < \upsilon.$$

Ἄν εἶναι $\upsilon_1 \neq 0$, τότε γιά τή διαίρεση τοῦ υ μέ τό υ_1 ὅμοια ἔχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon_2 < \upsilon_1$$

καί συνεχίζουμε αὐτή τή διαδικασία μέχρι νά βροῦμε ὑπόλοιπο μηδέν· τοῦτο συμβαίνει, γιατί γιά τούς μή ἀρνητικούς ἀκεραίους $\upsilon, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots$ ἰσχύει

$$\beta > \upsilon > \upsilon_1 > \upsilon_2 > \ldots$$

καί τό πλῆθος τους εἶναι τό πολύ β. Ἔστω $\upsilon_{\nu+1} = 0$. Τότε ἔχουμε τίς ἀκόλουθες ἰσότητες

$$\begin{array}{ll}
\alpha = \beta\pi + \upsilon & (\mathrm{I}_\circ) \\
\beta = \upsilon\pi_1 + \upsilon_1 & (\mathrm{I}_1) \\
\upsilon = \upsilon_1\pi_2 + \upsilon_2 & (\mathrm{I}_2) \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
\upsilon_{\nu-2} = \upsilon_{\nu-1}\pi_\nu + \upsilon_\nu & (\mathrm{I}_\nu) \\
\upsilon_{\nu-1} = \upsilon_\nu\pi_{\nu+1} + 0 & (\mathrm{I}_{\nu+1})
\end{array}$$

Τό τελευταῖο μή μηδενικό ὑπόλοιπο υ_ν εἶναι ὁ ΜΚΔ τῶν α καί β, γιατί σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε

$$(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon) = (\upsilon,\upsilon_1) = \ldots = (\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1}) = (\upsilon_{\nu-1},\upsilon_\nu) = (\upsilon_\nu,0) = \upsilon_\nu$$

Ἄν χρησιμοποιήσει κανείς τίς ἰσότητες $(\mathrm{I}_\circ) - (\mathrm{I}_{\nu+1})$ τοῦ παραπάνω ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, μπορεῖ νά ἀποδείξει τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2. Ἄν δύο ἀκέραιοι διαιρεθοῦν μέ ἕνα θετικό κοινό διαιρέτη τους γ, τότε ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τους διαιρεῖται μέ τό γ.

Πόρισμα. Ἄν $(\alpha,\beta) = \delta$, τότε

$$\left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}\right) = 1.$$

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν ἐκεῖνοι οἱ ἀκέραιοι α καί β, γιά τούς ὁποίους ἰσχύει $(\alpha,\beta) = 1$. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ μόνος θετικός κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἡ μονάδα. Δύο ἀκέραιοι, πού ἔχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τή μονάδα, ὀνομάζονται **πρῶτοι μεταξύ τους** ἤ **σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.** Π.χ. οἱ ἀκέραιοι 6 καί 5 εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί, γιατί $(6,5) = 1$.

Τό προηγούμενο πόρισμα μπορεῖ τώρα νά διατυπωθεῖ μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἄν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί διαιρεθοῦν μέ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους, γίνονται σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί.

Θά δοῦμε τώρα ὅτι ὁ ΜΚΔ δ δύο ἀκεραίων α καί β μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β, δηλαδή

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta' \qquad (1),$$

ὅπου $\alpha', \beta' \in \mathbf{Z}$.

Ἄς δοῦμε πρῶτα ἕνα παράδειγμα προσδιορισμοῦ ἑνός ζεύγους ἀκεραίων α' καί β', ὥστε νά ἱκανοποιεῖται ἡ σχέση (1).

Παράδειγμα 4. Στό παράδειγμα 3 βρήκαμε ὅτι $(306,108) = 18$. Ὁ ἀλγόριθμος τοῦ Εὐκλείδη ἔδωσε ἐκεῖ τίς ἀκόλουθες ἰσότητες:

$$306 = 108\,.\,2 + 90, \quad 108 = 90.1 + 18, \quad 90 = 18.5$$

Ἡ πρώτη ἀπό αὐτές δίνει $90 = 306-108.2$, ὁπότε ἀπό τή δεύτερη βρίσκουμε

$$18 = 108-90.1 = 108-(306-108.2).1 = 306.(-1) + 108.3,$$

δηλαδή $18 = 306\,(-1) + 108.3$. Ἄρα $\alpha' = -1$ καί $\beta' = 3$.

Ἄν ἐργαστεῖ κανείς ὅπως στό προηγούμενο παράδειγμα, μπορεῖ, χρησιμοποιώντας τίς ἰσότητες (I_0)–(I_ν) τοῦ ἀλγόριθμου τοῦ Εὐκλείδη, νά ἀποδείξει τήν προηγούμενη σχέση (1) γενικά.

Στή συνέχεια ὅμως θά ἀποδείξουμε, ἀνεξάρτητα ἀπό τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη, τήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\delta = (\alpha, \beta)$, τότε ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει:

$$\delta = \alpha\alpha' + \beta\beta'$$

καί ὁ δ εἶναι ὁ μικρότερος θετικός ἀκέραιος, πού μπορεῖ νά γραφτεῖ σάν γραμμικός συνδυασμός τῶν α καί β.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τό σύνολο Α ὅλων τῶν *θετικῶν* ἀκεραίων τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta y$ μέ $x,y \in \mathbf{Z}$, δηλαδή

$$A = \{\alpha x+\beta y \mid x,\, y\in \mathbf{Z} \quad \text{καί} \quad \alpha x+\beta y > 0\}$$

Ἄν πάρουμε $x = \alpha$ καί $y = \beta$, τότε ἔχουμε $\alpha x+\beta y = \alpha^2+\beta^2>0$ (ἀφοῦ ἕνας ἀπό τούς α,β εἶναι $\neq 0$). Ἔτσι τό σύνολο Α εἶναι $\neq \phi$, ὁπότε σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς παραγράφου 1 ἔχει ἐλάχιστο στοιχεῖο, ἔστω δ'. Ἀφοῦ $\delta' \in A$, θά ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = \delta' \qquad (1)$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι ὁ *θετικός* ἀκέραιος δ' εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς 1.3 ὑπάρχουν ἀκέραιοι π καί υ τέτοιοι, ὥστε

$$\alpha = \delta'\pi + \upsilon \quad \text{καί} \quad 0 \leq \upsilon < \delta'.$$

Τότε ἔχουμε

$$\upsilon = \alpha-\delta'\pi = \alpha-\pi\,(\alpha\alpha' + \beta\beta') = \alpha\,(1-\pi\alpha') + \beta(-\pi\beta'),$$

δηλαδή

$$\upsilon = \alpha\,(1-\pi\alpha') + \beta\,(-\pi\beta').$$

Ἄν εἶναι $\upsilon > 0$, τότε ἀπό τήν τελευταία ἰσότητα συμπεραίνουμε ὅτι $\upsilon \in A$. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ ἰσχύει $\upsilon < \delta'$ καί τό δ' εἶναι τό ἐλάχιστο στοιχεῖο τοῦ A. Ἑπομένως εἶναι $\upsilon = 0$ καί ἄρα $\alpha = \delta'\pi$, πού σημαίνει ὅτι $\delta'|\alpha$. Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι $\delta'|\beta$. Ἄρα ὁ δ' εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α καί β. Ἄν τώρα γ εἶναι ἕνας κοινός διαιρέτης τῶν α καί β, τότε ἀπό τήν ἰσότητα (1) καί τήν πρόταση 1 τῆς 1.1 συμπεραίνουμε ὅτι ὁ γ εἶναι διαιρέτης τοῦ δ' καί ἑπομένως $\gamma \leq \delta'$. Ἄρα $\delta' = \delta = (\alpha,\beta)$.

Στήν ἀπόδειξη τῆς προηγούμενης προτάσεως εἴδαμε ὅτι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν α καί β εἶναι ἐπίσης διαιρέτης τοῦ $\delta' = \delta$ καί ἑπομένως.

$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \subseteq \Delta(\delta).$$

Ἀντίστροφα, ἄν $x \in \Delta(\delta)$, τότε $x|\delta$ καί, ἀφοῦ $\delta|\alpha$ καί $\delta|\beta$, λόγω τῆς μεταβατικῆς ἰδιότητας ἔχουμε $x|\alpha$ καί $x|\beta$, ὁπότε $x \in \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ καί ἄρα $\Delta(\delta) \subseteq \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta)$ Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4. Ἄν $\delta = (\alpha,\beta)$, τότε

$$\Delta(\delta) = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta).$$

Σημείωση. Ἀξίζει νά τονίσουμε ὅτι ἡ πρόταση 3 δέ δηλώνει ὅτι οἱ ἀκέραιοι α' καί β' εἶναι μοναδικοί. Στό παράδειγμα 1 εἴδαμε ὅτι $(-8, 20) = 4$. Ἡ πρόταση 3 ἐξασφαλίζει ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε

$$-8\alpha' + 20\beta' = 4.$$

Εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἐπαληθεύεται γιά $\alpha' = 2$ καί $\beta' = 1$ ἤ γιά $\alpha' = -3$ καί $\beta' = -1$. Στήν παράγραφο 2 θά μάθουμε ὅτι ὑπάρχουν καί ἄλλα ζεύγη ἀκεραίων ἀριθμῶν, πού ἐπαληθεύουν τήν παραπάνω ἐξίσωση.

Ἡ ἔννοια τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτη γενικεύεται καί γιά περισσότερους ἀπό δύο ἀκεραίους. Ἐδῶ θά ἐνδιαφερθοῦμε μόνο γιά τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τριῶν ἀκεραίων. Ἄν α,β,γ εἶναι τρεῖς ἀκέραιοι, πού ἕνας τουλάχιστον εἶναι $\neq 0$, τότε τό μέγιστο στοιχεῖο τοῦ (πεπερασμένου) συνόλου $\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma)$ τῶν κοινῶν θετικῶν διαιρετῶν τους ὀνομάζεται **ὁ μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν α,β καί γ** καί συμβολίζεται μέ (α,β,γ). Στήν περίπτωση πού εἶναι $(\alpha,\beta,\gamma) = 1$, οἱ ἀκέραιοι α,β καί γ θά ὀνομάζονται ἐπίσης *πρῶτοι μεταξύ τους* ἤ *σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί*.

Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἕνας ἀπό τούς β,γ εἶναι $\neq 0$ καί ὀνομάσουμε δ τό ΜΚΔ τους, δηλαδή $\delta = (\beta,\gamma)$, τότε λόγω τῆς προτάσεως 4 ἔχουμε

$$\Delta(\alpha) \cap \Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma) = \Delta(\alpha) \cap [\Delta(\beta) \cap \Delta(\gamma)] = \Delta(\alpha) \cap \Delta(\delta)$$

καί ἑπομένως

$$(\alpha,\beta,\gamma) = (\alpha, \delta)$$

Ἄρα

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, (\beta,\gamma))} \qquad (2)$$

Ἔτσι ἔχουμε

$$(12, 4, -8) = (12, (4, -8)) = (12, 4) = 4,$$
$$(-3, 5, 9) = (-3, (5, 9)) = (-3, 1) = 1,$$
$$(-8, 0, 0) = (0, -8, 0) = (0, (-8, 0)) = (0,8) = 8$$

Μέ τή βοήθεια τῆς (2) καί τῆς προτάσεως 2 μπορεῖ νά ἀποδείξει κανείς ὅτι

$$\boxed{(\alpha, \beta, \gamma) = \delta \;\Rightarrow\; \left(\frac{\alpha}{\delta}, \frac{\beta}{\delta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) = 1}$$

1.6. Προτάσεις μέ πρώτους καί σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Ὁ πρῶτος ἀριθμός 3 δέ διαιρεῖ τό 10. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀριθμοί αὐτοί εἶναι σχετικῶς πρῶτοι, δηλαδή $(3,10) = 1$. Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἰσχύει γενικά, ὅπως φαίνεται στήν παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1. Ἄν p εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί $\alpha \in \mathbf{Z}^*$, τότε ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, ὅταν καί μόνο ὅταν $(\alpha,p) = 1$.

Ἀπόδειξη. Ἄν ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α, τότε καί ὁ $|p|$ δέν διαιρεῖ τόν α καί ἀφοῦ $\Delta(p) = \{1, |p|\}$, ὁ μόνος κοινός θετικός διαιρέτης τῶν α καί p εἶναι τό 1. Ἄρα $(\alpha,p) = 1$. Ἀντιστρόφως, ἄν $(\alpha,p) = 1$, τότε ὁ p δέν μπορεῖ νά εἶναι διαιρέτης τοῦ α, γιατί στήν ἀντίθετη περίπτωση θά ἔπρεπε νά διαιρεῖ τό μέγιστο κοινό διαιρέτη τους 1, πού εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ $p \neq \pm 1$.

Θά ἀποδείξουμε τώρα μιά πολύ χρήσιμη πρόταση, πού σχετίζεται μέ σχετικῶς πρώτους ἀριθμούς.

Πρόταση 2. Ἄν $\alpha,\beta,\kappa \in \mathbf{Z}^*$ μέ $(\alpha,\beta) = 1$ καί $\alpha | \beta\kappa$, τότε $\alpha | \kappa$.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ $(\alpha,\beta) = 1$, ὑπάρχουν ἀκέραιοι α' καί β' τέτοιοι, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1,$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη της μέ $\kappa \neq 0$ βρίσκουμε

$$\alpha\kappa\alpha' + \beta\kappa\beta' = \kappa. \qquad (1)$$

Ἀφοῦ ὁ α εἶναι διαιρέτης τοῦ βκ, θά διαιρεῖ καί τούς δύο ὅρους τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) καί ἑπομένως $\alpha | \kappa$.

Παράδειγμα. Ἄν $x, y \in \mathbf{Z}$ μέ $3x = 8y$, τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 2 ἔχουμε $3 | y$ καί $8 | x$, ἀφοῦ $(3,8) = 1$.

Μποροῦμε τώρα νά ἀποδείξουμε τήν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3. Ἄν $\alpha,\beta \in \mathbf{Z}^*$ καί ὁ πρῶτος ἀριθμός p διαιρεῖ τό γινόμενο $\alpha.\beta$, τότε ὁ p διαιρεῖ ἕναν ἀπό τούς α,β.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ p δέ διαιρεῖ τόν α. Τότε σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1 ἔχουμε $(\alpha,p) = 1$ καί ἑπομένως λόγω τῆς προτάσεως 2 ὁ p εἶναι διαιρέτης τοῦ β.

$$f(x)\cdot A(x)+\varphi(x)B(x)=1 \Leftrightarrow f(x)\cdot[A(x)\cdot\psi(x)]+[\varphi(x)\cdot\psi(x)]B(x)=\psi(x).$$

Ἄν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ εἶχαν καί κοινό διαιρέτη ὄχι μηδενικοῦ βαθμοῦ, τότε αὐτός θά ἦταν καί διαιρέτης τοῦ $\psi(x)$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο, γιατί $\langle f(x), \psi(x)\rangle=1$. Ἄρα τό $f(x)$ εἶναι πρῶτο πρός τό $\varphi(x)\cdot\psi(x)$.

4. **Ἄν τό $\varphi(x)$ διαιρεῖ τό γινόμενο τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ καί εἶναι πρῶτο πρός τό $f(x)$, τότε θά διαιρεῖ τό $g(x)$.**

Ἀπόδειξη: Ἄν $g(x)=\mathbf{0}$, τότε τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $g(x)$. Ἔστω τώρα $g(x)\neq\mathbf{0}$, τότε ὅπως καί προηγουμένως ἔχουμε

$$f(x)\cdot A(x)+\varphi(x)\cdot B(x)=1 \Leftrightarrow [f(x)g(x)]\cdot A(x)+\varphi(x)\cdot[B(x)\cdot g(x)]=g(x).$$

Τό ἀριστερό μέλος διαιρεῖται μέ τό $\varphi(x)$, ἄρα $\varphi(x)\mid g(x)$.

5. **Ἄν δύο πολυώνυμα $\varphi(x)$ καί $\psi(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ τους καί καθένα τους διαιρεῖ ἕνα τρίτο πολυώνυμο $f(x)$, τότε καί τό γινόμενό τους θά διαιρεῖ τό πολυώνυμο $f(x)$.**

Ἀπόδειξη: Εἶναι $f(x)=\varphi(x)\pi(x)$ καί ἐπειδή $\psi(x)\mid f(x)$, συμπεραίνουμε ὅτι $\psi(x)\mid\varphi(x)\cdot\pi(x)$, πού σημαίνει ὅτι $\psi(x)\mid\pi(x)$, ἀφοῦ $\psi(x)$ πρῶτο πρός τό $\varphi(x)$. Ἔτσι $\pi(x)=\psi(x)\cdot\pi_1(x)$, ὁπότε $f(x)=[\varphi(x)\cdot\psi(x)]\pi_1(x)$, πού ἀποδεικνύει τήν πρόταση.

2.6. Ἀσκήσεις

1. Ἄν $g_1(x)\mid f_1(x)$ καί $g_2(x)\mid f_2(x)$, δεῖξτε ὅτι $g_1(x)\cdot g_2(x)\mid f_1(x)\cdot f_2(x)$.
2. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ ἕνα ἀπό τά πολυώνυμα $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_\nu(x)$, δεῖξτε ὅτι θά διαιρεῖ καί τό γινόμενό τους.
3. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ τό $f(x)$, τότε θά διαιρεῖ καί τό $[f(x)]^\nu$, $\nu\in N$.
4. Ἄν τό $g(x)$ διαιρεῖ τό $f_1(x)+f_2(x)$ καί ἕνα ἀπό τά $f_1(x), f_2(x)$, δεῖξτε ὅτι θά διαιρεῖ καί τό ἄλλο.
5. Βρεῖτε τό Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων $f(x)=2x^4+3x^3+x^2-3x-3$ καί $g(x)=x^3-1$.
6. Νά ἐκτελεστεῖ ἡ διαίρεση τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^4+3x^3-7x^2+\kappa x+\lambda$ μέ τό $g(x)=x^2-3x+5$ καί ἔπειτα νά ὁριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί κ καί λ, ὥστε ἡ διαίρεση αὐτή νά εἶναι τέλεια.
7. Νά ἐκτελεστεῖ ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)=x^4+1$ μέ τό $g(x)=x^2-\sqrt{2}x+\kappa$ καί στή συνέχεια νά προσδιοριστεῖ ἡ πραγματική τιμή τοῦ κ, ὥστε ἡ διαίρεση νά εἶναι τέλεια.
8. Νά ὁριστεῖ ὁ πραγματικός ἀριθμός $\lambda\neq0$, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-5x^2+\dfrac{6}{\lambda}$ νά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\lambda x-1$.
9. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=x^{\nu\alpha_{\nu-1}+\nu-1}+x^{\nu\alpha_{\nu-2}+\nu-2}+\ldots+x^{\nu\alpha_1+1}+1$$

διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο

$$\varphi(x)=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\ldots+x+1,$$

ὅπου ν, $\alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu-2},\ldots,\alpha_1$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

10. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=(x^{\rho-1}+\alpha x^{\rho-2}+\ldots+\alpha^{\rho-1})x^{(\rho+1)\nu+1}+\alpha^{(\rho+1)\nu+\rho}$$

διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο

$$g(x)=x^\rho+\alpha x^{\rho-1}+\ldots+\alpha^{\rho-1}x+\alpha^\rho,$$

ὅπου α εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός καί ρ,ν φυσικοί ἀριθμοί.

2.7. Προτάσεις γιά τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Δίνουμε ἐδῶ δύο χρήσιμες προτάσεις, πού ἀναφέρονται στά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων πολυωνύμων τοῦ $C_{[x]}$.

Πρόταση 1. Ἄν $f_1(x)$, $f_2(x)$ καί $\delta(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ $C_{[x]}$ μέ $\delta(x)\neq 0$, τότε οἱ διαιρέσεις τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μέ τό $\delta(x)$ δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο, ὅταν καί μόνο ὅταν ἡ διαφορά $f_1(x)-f_2(x)$ εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ $\delta(x)$.

Ἡ ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς εἶναι ὅμοια μέ τήν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως 2 τῆς 1.3 τοῦ Κεφ. III.

Πρόταση 2. Ἄν ὁ διαιρετέος $f(x)$ καί ὁ διαιρέτης $\varphi(x)$ μιᾶς διαιρέσεως πολλαπλασιαστοῦν μέ τό ἴδιο μή μηδενικό πολυώνυμο $g(x)$, τότε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως παραμένει τό ἴδιο, ἐνῶ τό ὑπόλοιπο πολλαπλασιάζεται μέ τό $g(x)$.

Ἀπόδειξη: Ἔχουμε $f(x) = \varphi(x)\cdot\pi(x) + \upsilon(x)$, μέ $\upsilon(x) = \mathbf{0}$ ἤ βαθμ $\upsilon(x) <$ $<$ βαθμ $\varphi(x)$, ὁπότε $f(x)\cdot g(x) = [\varphi(x)\,\pi(x)]g(x) + \upsilon(x)\cdot g(x) \Leftrightarrow$ $f(x)\cdot g(x) = [\varphi(x)\cdot g(x)]\cdot\pi(x) + \upsilon(x)\cdot g(x)$, ὅπου $\upsilon(x)\cdot g(x) = \mathbf{0}$, ἄν $\upsilon(x) = \mathbf{0}$ ἤ βαθμ $[\upsilon(x)\cdot g(x)] =$ βαθμ $\upsilon(x)$ + βαθμ $g(x) <$ βαθμ $\varphi(x)$ + βαθμ $g(x)$, δηλ. βαθμ $[\upsilon(x)\cdot g(x)] <$ βαθμ $[\varphi(x)\cdot g(x)]$.

Ἄρα ἡ πρόταση ἀποδείχτηκε.

2.8. Ἐφαρμογές.

1. **Ἄν $\upsilon_1(x),\upsilon_2(x),\ldots,\upsilon_\nu(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν $f_1(x), f_2(x),\ldots,f_\nu(x)$ μέ τό $\delta(x)$, ($\delta(x)\neq 0$), ἀντιστοίχως, τότε τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν $[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]$ καί $[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)\,.+\ldots+\upsilon_\nu(x)]$ μέ τό $\delta(x)$ εἶναι ἴσα.**

Λύση: Ἄν $\pi_1(x)$, $\pi_2(x)\ldots,\pi_\nu(x)$ εἶναι τά ἀντίστοιχα πηλίκα τῶν διαιρέσεων τῶν $f_1(x)$, $f_2(x),\ldots,f_\nu(x)$ μέ τό $\delta(x)$, τότε ἔχουμε:

$$
\begin{aligned}
f_1(x)&=\delta(x)\,\pi_1(x)+\upsilon_1(x)\\
f_2(x)&=\delta(x)\pi_2(x)+\upsilon_2(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
f_\nu(x)&=\delta(x)\pi_\nu(x)+\upsilon_\nu(x).
\end{aligned}
$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς ἰσότητες αὐτές παίρνουμε:

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)=\delta(x)[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_\nu(x)]+[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]$$

$$\Leftrightarrow[f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_\nu(x)]-[\upsilon_1(x)+\upsilon_2(x)+\ldots+\upsilon_\nu(x)]=\delta(x)[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\ldots+\pi_\nu(x)]$$

πού σημαίνει ὅτι τό $\delta(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου μελους. Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν πρόταση 1, ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

2. **Ἡ διαίρεση ἑνός πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο x^2+x+1 δίνει ὑπόλοιπο $2x+1$, ἐνῶ μέ τό x^2+1 δίνει ὑπόλοιπο $x+2$. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό γινόμενο $(x^2+x+1).(x^2+1)$.**

Λύση: Ἄν $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ εἶναι τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $[(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)]$, τότε ἔχουμε

$f(x)=(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)\pi(x)+\upsilon(x)$ (1) ἤ $f(x)-\upsilon(x)=(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)\pi(x)$,

δηλαδή τά πολυώνυμα x^2+x+1 καί x^2+1 εἶναι διαιρέτες τοῦ πολυωνύμου $[f(x)-\upsilon(x)]$. Αὐτό πάλι σημαίνει (πρόταση 1) ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν $f(x)$ καί $\upsilon(x)$ μέ τό x^2+x+1 δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τίς διαιρέσεις τῶν $f(x)$ καί $\upsilon(x)$ μέ τό x^2+1.

Ἔτσι ὅμως ἡ διαίρεση τοῦ $υ(x)$ μέ τό x^2+x+1 δίνει ὑπόλοιπο $2x+1$ καί ἡ διαίρεση τοῦ $υ(x)$ μέ τό x^2+1 δίνει ὑπόλοιπο $x+2$.
Ἀπό τήν (1) ὅμως ἔχουμε ὅτι τό $υ(x)$ εἶναι τό πολύ 3ου βαθμοῦ, δηλ.
$υ(x)=αx^3+βx^2+γx+δ$
ὁπότε θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$αx^3+βx^2+γx+δ=(x^2+x+1)π_1(x)+2x+1$$
$$αx^3+βx^2+γx+δ=(x^2+1)π_2(x)+x+2$$

ὅπου $π_1(x)=αx+κ$ καί $π_2(x)=αx+λ$.
Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές παίρνουμε τό σύστημα

$$α+κ=β,\ α+κ+2=γ,\ κ+1=δ,\ β=λ,\ α+1=γ,\ λ+2=δ,$$

πού ἡ ἐπίλυσή του δίνει $α=-1$, $β=-2$ καί $γ=0$. Ἑπομένως $υ(x)=-x^3-2x^2$.

2.9. Ἀσκήσεις.

1. Ἄν $υ_1(x)$ καί $υ_2(x)$ εἶναι τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν πολυωνύμων $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μέ τό $g(x)$ ἀντιστοίχως, δεῖξτε ὅτι οἱ διαιρέσεις τῶν πολυωνύμων $f_1(x)\,υ_2(x)$ καί $f_2(x)υ_1(x)$, μέ τό $g(x)$ ἔχουν ἴσα ὑπόλοιπα.
2. Ἄν οἱ διαιρέσεις τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ μέ τά $x-α$ καί $x-β$, $α\neq β$, δίνουν τό ἴδιο ὑπόλοιπο $υ$, δεῖξτε ὅτι καί ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο $(x-α)(x-β)$ δίνει ἐπίσης τό ἴδιο ὑπόλοιπο $υ$.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

3.1. Ἀριθμητική τιμή καί ρίζα πολυωνύμου.

Κάθε συνάρτηση $f\colon A\to A$ μέ τύπο

$$f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0, \qquad (1)$$

ὅπου $α_0,α_1,\ldots α_ν\in A$ καί A ἕνα ἀπό τά $\mathbf{R},\mathbf{C}$, **ὀνομάζεται πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x.**

Ὁ ἀριθμός

$$f(ρ)=α_νρ^ν+α_{ν-1}ρ^{ν-1}+\ldots+α_1ρ+α_0 \qquad (2)$$

πού εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ ἀριθμοῦ ρ μέσω τῆς f, εἶναι **ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως γιά $x=ρ$.**

Στά ἑπόμενα θά λέμε ἐπίσης ὅτι **ὁ ἀριθμός $f(ρ)$ εἶναι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0\in C_{[x]}$ γιά $x=ρ$.**

Σημείωση: Μποροῦμε νά δοῦμε ἀμέσως τή βασική διαφορά πού ὑπάρχει στό ρόλο τοῦ x στό $f(x)\in\mathbf{C}_{[x]}$ καί στήν πολυωνυμική συνάρτηση μέ τύπο $f(x)$. Στήν πρώτη περίπτωση τό x εἶναι τό πολυώνυμο τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ $α_1=1$ καί $α_0=α_2=\ldots=α_ν=0$, ἐνῶ στή δεύτερη εἶναι ἡ μεταβλητή τῆς συναρτήσεως πού ἀπεικονίζεται στόν ἀριθμό $f(x)$.

Ἕνα σπουδαῖο πρόβλημα στίς πολυωνυμικές συναρτήσεις εἶναι νά βροῦμε τίς τιμές τῆς μεταβλητῆς x, οἱ ὁποῖες ἀπεικονίζονται στόν ἀριθμό μηδέν. Δηλαδή ἄν

$$f(x)=α_νx^ν+α_{ν-1}x^{ν-1}+\ldots+α_1x+α_0$$

εἶναι ὁ τύπος μιᾶς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως, νά βροῦμε τίς τιμές $x\in\mathbf{C}$ γιά τίς ὁποῖες εἶναι

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0 \qquad (3)$$

Ἡ (3) ὀνομάζεται **πολυωνυμική ἐξίσωση.**

Κάθε ἀριθμός ρ πού ἐπαληθεύει τήν (3) ὀνομάζεται **ρίζα τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως.** Θά ὀνομάζουμε **ρίζα τοῦ πολυωνύμου f(x)** κάθε ρίζα τῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$. Ἡ εὕρεση ὅλων τῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, ἀνάγεται στήν ἐπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ καί θά μᾶς ἀπασχολήσει στά ἑπόμενα. Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου $f(x) \neq \mathbf{0}$ ὀνομάζεται καί βαθμός τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως $f(x) = 0$.

3.2. Σχῆμα Horner (Χόρνερ).

Ὁ σύντομος ὑπολογισμός τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, δηλ. τῆς τιμῆς τῆς συναρτήσεως f γιά $x=\rho$, παρουσιάζει ἐνδιαφέρον, γιατί τά πολυώνυμα ἀξιοποιοῦνται γιά τίς διάφορες μαθηματικές ἀνάγκες. Ἐπίσης ἡ ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων γίνεται πολλές φορές, ὅπως θά δοῦμε παρακάτω, μέ τόν ὑπολογισμό ἀριθμητικῶν τιμῶν πολυωνύμων.

Ἐδῶ θά δοῦμε μία σύντομη μέθοδο νά ὑπολογίζουμε τίς ἀριθμητικές τιμές πολυωνύμων.

Ἔστω ὅτι ἔχουμε νά βροῦμε τήν τιμή τῆς συναρτήσεως f μέ τύπο

$$f(x) = \alpha_5 x^5 + \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{γιά } x=\rho.$$

Ἡ τιμή αὐτή θά εἶναι $f(\rho) = \alpha_5\rho^5 + \alpha_4\rho^4 + \alpha_3\rho^3 + \alpha_2\rho^2 + \alpha_1\rho + \alpha_0$, ἡ ὁποία μπορεῖ νά γραφεῖ

$$f(\rho) = [[((\alpha_5\rho+\alpha_4)\cdot\rho+\alpha_3)\rho+\alpha_2]\rho+\alpha_1]\rho+\alpha_0 \qquad (1)$$

Δηλαδή γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ $f(\rho)$ μποροῦμε νά ἀκολουθήσουμε τήν ἀκόλουθη σειρά ὑπολογισμῶν, πού ὑποδεικνύει ἡ (1).

1. Πολλαπλασιάζουμε τόν α_5 μέ τόν ρ — $\alpha_5\cdot\rho$
2. Στό γινόμενο προσθέτουμε τόν α_4 — $\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4$
3. Πολλαπλασιάζουμε τό ἄθροισμα αὐτό μέ τόν ρ — $(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\cdot\rho$
4. Στό γινόμενο αὐτό προσθέτουμε τόν α_3 — $(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\cdot\rho+\alpha_3$
5. Πολλαπλασιάζουμε τό ἀποτέλεσμα μέ τόν ρ — $((\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\cdot\rho+\alpha_3)\cdot\rho$ κ.τ.λ.

Ἡ διαδικασία αὐτή τῶν ὑπολογισμῶν φαίνεται καλύτερα στό παρακάτω σχῆμα, πού εἶναι γνωστό σάν σχῆμα Horner.

Συντελεστές τοῦ f(x)	α_5	α_4	α_3	α_2	α_1	α_0
ρ	$\downarrow$	$\alpha_5\cdot\rho$	$(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\rho$	.		
	$\underbrace{\alpha_5}_{\gamma_4}$	$\underbrace{\alpha_5\rho+\alpha_4}_{\gamma_3}$	$\underbrace{(\alpha_5\cdot\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3}_{\gamma_2}$	...		$f(\rho)=[[((\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3)\rho+\alpha_2]\rho+\alpha_1]\rho+\alpha_0$

Πρίν δώσουμε ἕνα ἀριθμητικό παράδειγμα, θά δοῦμε ἀκόμα ὅτι τό σχῆμα Horner χρησιμεύει στήν εὕρεση τοῦ πηλίκου καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$.

Ἄν ἔχουμε νά διαιρέσουμε τό προηγούμενο πολυώνυμο $f(x)$ μέ τό διώνυμο $x-\rho$ (ὅπου ρ ὁ προηγούμενος ἀριθμός), τότε τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)$ θά εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο $\upsilon(x) = \upsilon \in \mathbf{C}_{[x]}$, ὁπότε

$$f(x) = (x-\rho)\,\pi(x) + \upsilon \qquad (2)$$

Γιά $x=\rho$ ἡ (2) δίνει $f(\rho)=\upsilon\in\mathbf{C}$, δηλαδή **τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$ εἶναι τό σταθερό πολυώνυμο πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ γιά $x=\rho$** καί μ' αὐτόν τόν τρόπο τό βρίσκαμε καί σέ προηγούμενες τάξεις. **Ἄν** λοιπόν **εἶναι $f(\rho)=0$, τότε $(x-\rho)|f(x)$,** δηλαδή $f(x)=(x-\rho)\pi(x)$ **καί ἀντιστρόφως.** Αὐτό σημαίνει ὅτι, **ἄν ρ εἶναι μία ρίζα ἑνός πολυωνύμου $f(x)$, τότε τό $x-\rho$ εἶναι ἕνας παράγοντας τοῦ $f(x)$ καί ἀντιστρόφως.**

Σημειώνουμε ἐδῶ ὅτι ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, πού ἔχει ρίζα τό ρ, εἶναι δυνατό νά διαιρεῖται, ἐκτός ἀπό τό $x-\rho$, καί ἀπό μία δύναμη κ τοῦ $x-\rho$. Γενικά εἶναι δυνατό ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ νά διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)^\kappa$ καί νά μή διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)^{\kappa+1}$. Δηλαδή εἶναι δυνατό νά εἶναι

$$f(x) = (x-\rho)^\kappa \cdot \pi(x)$$

καί τό $\pi(x)$ νά μή διαιρεῖται μέ τό $(x-\rho)$ (δηλ. τό $\pi(x)$ νά μήν ἔχει ρίζα τό ρ). Σ' αὐτή τήν περίπτωση λέμε ὅτι **τό ρ εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ βαθμό πολλαπλότητας κ ἤ ὅτι τό ρ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ μέ πολλαπλότητα κ.**

Ὅταν εἶναι $\kappa=1$, τότε τό ρ λέγεται καί **ἁπλή ρίζα τοῦ $f(x)$.**

Τό πηλίκο $\pi(x)$ τῆς προηγούμενης διαιρέσεως εἶναι ἕνα πολυώνυμο 4ου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\gamma_4 x^4+\gamma_3 x^3+\gamma_2 x^2+\gamma_1 x+\gamma_0$ καί βρίσκεται, ἄν ἐκτελέσουμε τή διαίρεση κατά τά γνωστά:

$$\begin{array}{r|l}
\alpha_5 x^5+\alpha_4 x^4+\alpha_3 x^3+\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0 & x-\rho \\ \hline
-\alpha_5 x^5+\alpha_5 \rho x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \underbrace{\alpha_5}_{\gamma^4} x^4+\underbrace{(\alpha_5\rho+\alpha_4)}_{\gamma^3}x^3+[\underbrace{(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3}_{\gamma_2}]x^2+\dots \\ \cline{1-1}
(\alpha_5\rho+\alpha_4)x^4+\alpha_3 x^3 \qquad\qquad & \\
-(\alpha_5\rho+\alpha_4)x^4+(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho x^3 & \\ \cline{1-1}
[(\alpha_5\rho+\alpha_4)\rho+\alpha_3]x^3+\alpha_2 x^2 & \\
\dots\dots\dots &
\end{array}$$

Διαπιστώνουμε ἀμέσως ὅτι οἱ συντελεστές τοῦ πηλίκου εἶναι οἱ ἀριθμοί τῆς τρίτης σειρᾶς τοῦ σχήματος Horner, ἐκτός τοῦ τελευταίου ἀριθμοῦ πού εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως, ὅπως εἴπαμε.

Στήν πράξη ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι θέλουμε νά βροῦμε τό πηλίκο, $\pi(x)$, καί τό ὑπόλοιπο, $\upsilon(x)$, τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x) = -2x^5+3x^4-2x^2+5x-1$ μέ τό $g(x) = x+3=x-(-3)$.

Οἱ συντελεστές τοῦ $f(x)$ (διαιρετέου) γράφονται σέ μία σειρά (φροντίζοντας νά γράψουμε καί τό συντελεστή τοῦ x^3 πού εἶναι τό μηδέν), στή δεύτερη σειρά καί ἀριστερά γράφουμε τόν ἀριθμό $\rho=-3$ καί στήν τρίτη σειρά σχηματίζουμε τούς συντελεστές τοῦ πηλίκου, ὅπως εἴπαμε προηγουμένως, καθώς καί τό ὑπόλοιπο. Ἔτσι ἔχουμε τό ἀκόλουθο σχῆμα Horner.

IV 3.3.

Συντελεστές τοῦ f(x)	-2	3	0	-2	5	-1
$\rho=-3$	$\downarrow$	$(-2)\cdot(-3)$ $\}+$	-27	81	-237	696
	$\underbrace{-2}_{\gamma_4}$	$\underbrace{9}_{\gamma_3}$	$\underbrace{-27}_{\gamma_2}$	$\underbrace{79}_{\gamma_1}$	$\underbrace{-232}_{\gamma_0}$	$\underbrace{695}_{\upsilon(x)=\upsilon}$

Τό πηλίκο εἶναι $\pi(x)=\gamma_4x^4+\gamma_3x^3+\gamma_2x^2+\gamma_1x+\gamma_0$, δηλ.

$\pi(x)=-2x^4+9x^3-27x^2+79x-232$ καί τό ὑπόλοιπο $\upsilon(x)=695$, πού φυσικά εἶναι καί ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ f(x) γιά $x=-3$.

3.3. Ἐφαρμογές.

1. Δίνεται ἡ πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $z\in R$ νά ἰσχύει $f(z)=\alpha z+\beta$ μέ α,β πραγματικούς ἀριθμούς καί $\beta\neq 0$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν x,y ἰσχύει: $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τόν τύπο τῆς συναρτήσεως ἔχουμε:

$$f(x)=\alpha x+\beta,\quad f(y)=\alpha y+\beta \text{ καί } f(x+y)=\alpha(x+y)+\beta,$$

ὁπότε $f(x)+f(y)=\alpha(x+y)+2\beta$. Ἀλλά ἐπειδή $\beta\neq 0$, θά εἶναι

$$\alpha(x+y)+\beta\neq\alpha(x+y)+2\beta, \text{ δηλ. } f(x+y)\neq f(x)+f(y).$$

2. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x\in R$ καί κάθε φυσικό ἀριθμό ρ νά ἰσχύει:

$$f(\rho x)=f(x)$$

Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $\nu\in N$ ἰσχύει: $f(\rho^\nu)=f(1)$ (1)

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ἰσχύει $f(\rho x)=f(x)$ γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ καί $\rho\in\mathbf{N}$, ἄν πάρουμε $x=1$, τότε γιά κάθε $\rho\in\mathbf{N}$ ἰσχύει $f(\rho\cdot 1)=f(1)$, δηλαδή $f(\rho)=f(1)$.

Θά ἀποδείξουμε τό ζητούμενο μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

Πράγματι· γιά $\nu=1$ ἔχουμε: $f(\rho^1)=f(\rho)=f(1)$, δηλ. ἰσχύει ἡ (1).

Ἔστω ὅτι ἡ (1) ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa$, δηλ. ὅτι $f(\rho^\kappa)=f(1)$.

Θά δείξουμε τότε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu=\kappa+1$, δηλ. ὅτι $f(\rho^{\kappa+1})=f(1)$.

Πράγματι· ἔχουμε $f(\rho^{\kappa+1})=f(\rho\cdot\rho^\kappa)=f(\rho^\kappa)=f(1)$. Ἑπομένως ἰσχύει $f(\rho^\nu)=f(1)$ γιά κάθε $\nu\in\mathbf{N}$, δηλαδή ἀποδείχτηκε τό ζητούμενο.

3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου f(x) μέ τό $x^2-\rho^2$, $\rho\neq 0$, εἶναι

$$\upsilon(x)=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}x+\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}.$$

Ἀπόδειξη: Ἐπειδή ὁ διαιρέτης $x^2-\rho^2$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως θά εἶναι τό πολύ 1ου βαθμοῦ, δηλ. θά εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$.

Ἔτσι θά ἔχουμε: $$f(x)=(x^2-\rho^2)\,\pi(x)+\kappa x+\lambda, \qquad (1)$$

ὅπου π(x) εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως.

Ἀπό τήν (1) γιά $x=\rho$ καί $x=-\rho$ παίρνουμε ἀντιστοίχως:

$$f(\rho)=\kappa\rho+\lambda \quad\text{καί}\quad f(-\rho)=-\kappa\rho+\lambda.$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων ὡς πρός κ καί λ βρίσκουμε

$$\kappa=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho} \text{ καί } \lambda=\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2},$$ ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι

$$\upsilon(x)=\frac{f(\rho)-f(-\rho)}{2\rho}\cdot x+\frac{f(\rho)+f(-\rho)}{2}.$$

4. Πολυώνυμο f(x) διαιρούμενο μέ τό x+1 δίνει ὑπόλοιπο 2 καί διαιρούμενο μέ τό x—2 δίνει ὑπόλοιπο —1. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό $g(x)=(x+1)(x-2)$.

Λύση: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $f(-1)=2$ καί $f(2)=-1$.

Τό πολυώνυμο f(x) ὅταν διαιρεῖται μέ τό g(x), τό ὁποῖο εἶναι δευτέρου βαθμοῦ, δίνει πηλίκο π(x) καί ὑπόλοιπο τό πολύ πρώτου βαθμοῦ. Ἔστω ὅτι εἶναι $υ(x)=κx+λ$. Τότε θά ἰσχύει:

$$f(x)=(x+1)\cdot(x-2)\cdot π(x)+(κx+λ). \tag{1}$$

Ἀπό τήν (1) παίρνουμε: $f(-1)=-κ+λ$ καί $f(2)=2κ+λ$, δηλαδή

$$-κ+λ=2 \quad καί \quad 2κ+λ=-1$$

Ἐπιλύοντας τό σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων βρίσκουμε $κ=-1$ καί $λ=1$, ὁπότε τό ὑπόλοιπο εἶναι: $υ(x)=-x+1$.

5. Βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)=ix^3-(2+i)x^2+4x-3-i$ μέ τό $g(x)=x-(1-i)$.

Λύση: Χρησιμοποιώντας τό σχῆμα Horner βρίσκουμε:

Συντελεστές τοῦ f(x)	i	−(2+i)	4	−3−i
ρ=1−i		1+i	−1+i	4−2i
	i	−1	3+i	1−3i

$π(x)=ix^2-x+3+i$ καί $υ(x)=1-3i$.

3.4. Ἀσκήσεις.

1. Μέ τό σχῆμα Horner νά ὑπολογίσετε τίς ζητούμενες τιμές τῶν πολυωνυμικῶν συναρτήσεων μέ τούς παρακάτω τύπους.

   α) $f(x)=-2x^4+3x^2+2x+1$, $f(-2)=;$ $f(5)=;$

   β) $φ(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-1$, $φ(-\sqrt{2})=;$

   γ) $g(x)=x^3-ix^2+1$ $g(1-i)=;$

2. Ἄν $f(x)=3x^2-λx+2$, βρεῖτε τό λ, ὥστε $f(-1)=-3-λ$

3. Ἄν $f(x)=2x^4-3x^2+κx+λ$, βρεῖτε τά κ καί λ, ὥστε $f(-2)=-25$ καί $f(2)=-18$.

4. Νά προσδιορίσετε τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμο $f(x)=αx^3-βx^2-5x+4$ διαιρούμενο μέ $x+2$ καί $x-1$ νά δίνει ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα 6 καί 2.

5. Βρεῖτε τό πηλίκο καί τό ὑπόλοιπο τῶν διαιρέσεων:

   α) τοῦ $5x^3-x^2+2x$ μέ τό $x-3$, β) τοῦ x^5+32 μέ τό $x+2$,

   γ) τοῦ $x^3-3ix^2+4x+1-2i$ μέ τό $x+2$, δ) τοῦ $x^4+(1+i)x^3+ix^2+(-9+7i)x-1+3i$ μέ τό $x-2+i$ καί ε) τοῦ $4x^4+5x^3-12x-40$ μέ τό $x+\dfrac{1}{2}$.

6. Ἄν ἕνα πολυώνυμο f(x) διαιρούμενο μέ $x-α$ καί $x-β$ δίνει ἀντιστοίχως πηλίκα $π_1(x)$ καί $π_2(x)$, δεῖξτε ὅτι $π_1(β)=π_2(α)$, ὅταν $α\neq β$.

7. Ἕνα πολυώνυμο f(x) διαιρούμενο μέ τό $x+1$ δίνει ὑπόλοιπο 2, μέ τό $x-2$ δίνει ὑπόλοιπο 11 καί μέ τό $x+3$ δίνει ὑπόλοιπο 6. Βρεῖτε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$.

8. Δεῖξτε ὅτι: i) ἄν $α\neq β$, τότε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου f(x), βαθμ. $f(x)\geq 2$, μέ τό $φ(x)=(x-α)\cdot(x-β)$ εἶναι:

$$υ(x)=\frac{f(α)-f(β)}{α-β}\cdot x+\frac{βf(α)-αf(β)}{β-α}.$$

ii) Ἄν $\alpha=\beta$, τότε $\upsilon(x)=x\pi(\alpha)+f(\alpha)-\alpha\pi(\alpha)$

9. Δίνεται μία πολυωνυμική συνάρτηση: $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ τέτοια, ὥστε γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ νά ἰσχύει: $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$. Δεῖξτε ὅτι γιά κάθε $x\in\mathbf{R}$ και κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ ἰσχύει $f(x)=f\left(\frac{x}{2^\nu}\right)$.

10. Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τρίτου βαθμοῦ $f(x)$ τέτοιο, ὥστε: $f(0)=0$ καί $f(x)-f(x-1)=x^2$. Στή συνέχεια ὑπολογίστε τό ἄθροισμα $\sigma_\nu=1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2$, $\nu\in\mathbf{N}$.

11. Ἄν $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, δεῖξτε ὅτι τό

$$P(x)=\frac{x^\nu}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{x^{\nu-1}}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{x^2}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}-\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$$

διαιρεῖται μέ τό $x-1$. Στή συνέχεια βρεῖτε τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $P(x)$ μέ τό $x-1$.

4. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΙΣ ΡΙΖΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Ἐδῶ θά δοῦμε μερικά θεωρήματα σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, τά ὁποῖα εἶναι πολύ χρήσιμα γιά τήν ἐπίλυση πολυωνυμικῶν ἐξισώσεων. Τά θεωρήματα αὐτά θά τά ξεχωρίσουμε σέ δύο ὁμάδες. Σέ *γενικά* καί σέ *εἰδικά*. Τά πρῶτα ἀναφέρονται σέ ὅλα τά πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, ἐνῶ τά δεύτερα σέ πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{R}_{[x]}$ καί τοῦ $\mathbf{Q}_{[x]}$.

4.1. Γενικά Θεωρήματα.

Τό βασικό θεώρημα, σχετικά μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων, τό ὁποῖο ἀποδεικνύεται στήν Ἀνώτερη Ἄλγεβρα εἶναι τό ἀκόλουθο:

Θεώρημα 1. (Θεώρημα D'Alembert ἤ Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ἄλγεβρας).
Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in C_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἔχει μία τουλάχιστον μιγαδική ρίζα.

Τό θεώρημα αὐτό μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ρίζας γιά κάθε πολυώνυμο βαθμοῦ $\nu\geq1$, ἀλλά δέ μᾶς λέει τίποτε γιά τό πλῆθος τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου. Ἔτσι γιά τήν ἐξίσωση:

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0 \qquad (1)$$

τό μόνο πού ξέρουμε εἶναι ὅτι ἔχει μία τουλάχιστο ρίζα.

Θά ἀποδείξουμε τώρα τό ἀκόλουθο θεώρημα, πού μᾶς ἐξασφαλίζει τό πλῆθος τῶν ριζῶν τῆς (1).

Θεώρημα 2. Κάθε πολυώνυμο $f(x)\in C_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu\geq 1$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες, ὅπου κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητάς της.

Ἀπόδειξη: Ἔστω $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$, $\alpha_\nu\neq0$ μέ $\nu\geq1$. Κατά τό θεώρημα D'Alembert ὑπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho_1\in\mathbf{C}$ τοῦ $f(x)$, δηλαδή $f(\rho_1)=0$, ὁπότε ἰσχύει

$$f(x)=(x-\rho_1)f_{\nu-1}(x) \qquad (2)$$

ὅπου $f_{\nu-1}(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho_1$ καί βαθμ. $f_{\nu-1}(x) = \nu-1$. Κατά τό Θ. D'Alembert καί πάλι, τό πολυώνυμο $f_{\nu-1}(x)$, μέ $\nu-1 \geq 1$, ἔχει τουλάχιστον μία ρίζα, ἔστω τόν $\rho_2 \in \mathbf{C}$. Τότε ἔχουμε:

$$f_{\nu-1}(x) = (x-\rho_2) f_{\nu-2}(x) \tag{3}$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$f(x) = (x-\rho_1)(x-\rho_2) f_{\nu-2}(x) \tag{4}$$

μέ βαθμ $f_{\nu-2}(x) = \nu-2$.

Ἀπό τήν (4) βλέπουμε ὅτι $f(\rho_2)=0$, δηλ. ὁ ἀριθμός ρ_2 εἶναι καί ρίζα τοῦ $f(x)$. Συνεχίζοντας κατά τόν ἴδιο τρόπο, κάθε νέο πηλίκο θά ἔχει βαθμό κατά μονάδα μικρότερο ἀπό τό προηγούμενό του καί κάθε φορά θά ὑπάρχει γι' αὐτό μία ρίζα, πού θά εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.

Ἔτσι ὅμως θά φθάσουμε νά ἔχουμε:

$$f(x)=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1}) \cdot f_1(x) \tag{5}$$

ὅπου $f_1(x)$ πολυώνυμο 1ου βαθμοῦ, ἔστω $f_1(x) = \beta_1 x + \beta_0$, $\beta_1 \neq 0$. Ἐπειδή $f_1(x) = \beta_1\left(x + \frac{\beta_0}{\beta_1}\right)$, ὁ ἀριθμός $\rho_\nu = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$ θά εἶναι ρίζα τοῦ $f_1(x)$, δηλ. μία ἀκόμη ρίζα τοῦ $f(x)$, ὁπότε ἡ (5) γίνεται:

$$f(x) = \beta_1(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu-1})(x-\rho_\nu) \tag{6}$$

Ἄν κάνουμε τίς πράξεις στό β' μέλος τῆς (6), τότε εἶναι φανερό ὅτι ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος θά εἶναι ὁ $\beta_1 x^\nu$, ὁπότε $\beta_1 = \alpha_\nu$, καί ἄρα ἡ (6) γράφεται:

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_\nu) \tag{7}$$

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ $f(x)$ εἶναι μοναδική, ὅταν δέ μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ διάταξη τῶν παραγόντων $(x-\rho_1), (x-\rho_2), \ldots, (x-\rho_\nu)$. Ἄς ὑποθέσουμε κατ' ἀρχήν ὅτι μέ τήν ἴδια διαδικασία βρήκαμε ὅτι εἶναι καί

$$f(x) = \alpha_\nu(x-\rho'_1)(x-\rho'_2)\ldots(x-\rho'_\nu) \tag{8}$$

Ἀπό τίς (7) καί (8) ἔχουμε τότε

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)=(x-\rho'_1)(x-\rho'_2)\ldots(x-\rho'_\nu) \tag{9}$$

Ἄν ἔστω καί μία ἀπό τίς ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$ τοῦ $f(x)$, π.χ. ἡ ρ_κ, δέν εἶναι ἴση μέ κάποια ἀπό τίς $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_\nu$, τότε βάζοντας στήν (9) τήν τιμή $x=\rho_\kappa$ ὁδηγούμαστε σέ ἄτοπο, ἀφοῦ τό πρῶτο μέλος της μηδενίζεται καί τό δεύτερο εἶναι διαφορετικό ἀπό τό μηδέν. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι δέν ὑπάρχει ἄλλη τιμή, ἐκτός ἀπό τίς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, πού νά εἶναι ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$. Αὐτό ὅμως δέν μᾶς ἀποδεικνύει ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μοναδική, γιατί εἶναι δυνατό μία ρίζα ρ_j, ἀπό τίς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu$, νά ἐπαναλαμβάνεται κ φορές στή μορφή (7) καί λ φορές στή μορφή (5) μέ $\kappa \neq \lambda$. Θά δείξουμε ὅτι καί αὐτό εἶναι ἄτοπο. Πράγματι· ἄν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $\kappa \neq \lambda$, τότε, ἐπειδή κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο εἶναι ἁπλοποιήσιμο στοιχεῖο ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμό στό $C_{[x]}$, ἁπλοποιώντας τήν (9), θά ἔχουμε τόν παράγοντα $x-\rho$ στό ἕνα μέλος της χωρίς νά ὑπάρχει ἴσος παράγοντας στό ἄλλο. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, ὅπως ἀποδείχτηκε προηγουμένως. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι ἡ μορφή (7) τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι μοναδική, ὅταν ἀδιαφοροῦμε γιά τή διάταξη τῶν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$, καί μάλιστα τό $f(x)$ μπορεῖ νά γραφεῖ καί μέ τή μορφή

$$f(x) = \alpha_\nu(x-\rho_1)^{\kappa_1}(x-\rho_2)^{\kappa_2}\ldots(x-\rho_\mu)^{\kappa_\mu} \qquad (10)$$

ὅταν οἱ ἴσοι παράγοντες γραφοῦν μέ δυνάμεις. Στήν (10) εἶναι φανερό ὅτι εἶναι $\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_\mu=\nu$ καί ἀκόμα ὅτι τά $\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_\mu$ εἶναι οἱ πολλαπλότητες τῶν ἀντίστοιχων ριζῶν $\rho_1, \rho_2,\ldots,\rho_\mu$.
Μέ τήν παραπάνω διαδικασία ἀποδείχτηκε πλέον τό ζητούμενο.

Ἀπό τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος προκύπτουν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα.

1. Ἄν οἱ $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, νιοστοῦ βαθμοῦ, τότε αὐτό σύμφωνα μέ τήν (7) γράφεται $f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ τήν ἀνάλυσή του σέ γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
2. Ἐπειδή εἶναι φανερό ὅτι ἕνα πολυώνυμο μηδενικοῦ βαθμοῦ δέν ἔχει καμιά ρίζα (ἔχει δηλαδή μηδέν σέ πλῆθος ρίζες), συμπεραίνουμε ὅτι **κάθε μή μηδενικό πολυώνυμο δέν μπορεῖ νά ἔχει ρίζες περισσότερες ἀπό τό βαθμό του, ἐνῶ τό μηδενικό πολυώνυμο ἔχει ρίζες ὅλα τά $x\in C$.** Ἔτσι ἄν **ἕνα πολυώνυμο τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ μηδενίζεται γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε αὐτό εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.**
3. Μετά τό προηγούμενο συμπέρασμα 2 ἔχουμε τώρα καί τό ἀκόλουθο:
Ἄν δύο πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι καί τά δύο τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ καί παίρνουν ἴσες τιμές γιά $\nu+1$ διαφορετικές τιμές τοῦ x, τότε θά εἶναι ἴσα.

Πράγματι· Ἄν πάρουμε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-g(x)$, τότε τό $F(x)$, ἐνῶ εἶναι τό πολύ νιοστοῦ βαθμοῦ, ἔχει $\nu+1$ διαφορετικές ρίζες, δηλ. εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο. Αὐτό σημαίνει ὅτι $f(x)-g(x)=\mathbf{0}$, δηλ. εἶναι $f(x)=g(x)$.

4. **Τύποι τοῦ Vieta. Ἄν $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\ldots,\rho_\nu$ εἶναι οἱ ν ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ μέ $\alpha_\nu\neq 0$, τότε ἰσχύουν οἱ σχέσεις:**

$$S_1=\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}+\rho_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_1\rho_\nu+\rho_2\rho_3+\ldots+\rho_2\rho_\nu+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu=\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$S_3=\rho_1\rho_2\rho_3+\rho_1\rho_2\rho_4+\ldots+\rho_1\rho_2\rho_\nu+\rho_1\rho_3\rho_4+\ldots\rho_1\rho_3\rho_\nu+\ldots+\rho_{\nu-2}\rho_{\nu-1}\rho_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-3}}{\alpha_\nu}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_\nu=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\rho_3\cdots\rho_{\nu-1}\cdot\rho_\nu=(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Πράγματι· ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu), \text{ δηλαδή}$$

$$\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}x^{\nu-2}+\dots+\alpha_1 x+\alpha_0=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)$$

Διαιρώντας καί τά δύο μέλη τῆς τελευταίας μέ τό $\alpha_\nu \neq 0$ παίρνουμε

$$x^\nu+\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}x^{\nu-2}+\dots+\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}x+\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}=$$

$$x^\nu-\underbrace{(\rho_1+\rho_2+\dots\rho_\nu)}_{S_1}x^{\nu-1}+\underbrace{(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\dots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu)}_{S_2}x^{\nu-2}-\dots+(-1)^\nu\underbrace{\rho_1\rho_2\dots\rho_\nu}_{S_\nu}$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἰσότητας τῶν πολυωνύμων βρίσκουμε πλέον τίς ζητούμενες σχέσεις. Οἱ σχέσεις αὐτές, οἱ ὁποῖες συνδέουν τίς ρίζες καί τούς συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ ὀνομάζονται **τύποι τοῦ Vieta.**

Δίνουμε τώρα καί μία πρόταση σχετική μέ τίς ρίζες τῶν πολυωνύμων.

Πρόταση. Ἄν τά πολυώνυμα $x-\rho_1, x-\rho_2, \dots, x-\rho_\kappa$ διαιροῦν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ καί οἱ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\kappa$ εἶναι ὅλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, τότε τό πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\kappa)$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$.

Ἀπόδειξη: α) Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)$ εἶναι τό πολύ $\kappa-1$ βαθμοῦ, τότε ἀφοῦ οἱ ἀριθμοί $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_\kappa$ εἶναι ρίζες του, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 2 θά εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο, δηλ. $f(x) = \mathbf{0}$ καί φυσικά θά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\kappa)$.

β) Ἄν εἶναι βαθμ $f(x) = \nu \geq \kappa$, τότε, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1, αὐτό θά γράφεται

$$f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\kappa)(x-\sigma_1)(x-\sigma_2)\dots(x-\sigma_{\nu-\kappa}),$$

ὅπου $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\nu-\kappa}$ εἶναι οἱ ὑπόλοιπες ρίζες του. Ἡ τελευταία σχέση ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

4.2. Παραδείγματα—Ἐφαρμογὲς

1. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(1-x)$, δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $g(x)=f(x)-f(0)$ διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $x(x-1)$.**

Ἀπόδειξη:

Γιά νά διαιρεῖται τό πολυώνυμο $g(x)$ μέ τό $x(x-1)$, ἀρκεῖ νά διαιρεῖται χωριστά μέ τό x καί τό $x-1$, δηλαδή πρέπει νά εἶναι $g(0)=0$ καί $g(1)=0$. Οἱ ἰσότητες αὐτές ἰσχύουν, γιατί εἶναι $f(x)=f(1-x)$.

2. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)$ ἔχει τήν ἰδιότητα $f(x)=f(x-1)$, τότε τό πολυώνυμο αὐτό εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.**

Ἀπόδειξη:

Θά δείξουμε μέ τή μαθηματική ἐπαγωγή ὅτι γιά ὅλα τά $\nu \in \mathbb{N}$ ἰσχύει $f(\nu)=f(0)$. Πράγματι· γιά $\nu=1$, ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε $f(1)=f(0)$. Ἄν δεχθοῦμε τώρα ὅτι $f(\kappa)=f(0)$,

$\kappa \in N$, ἐπειδή ἔχουμε καί $f(\kappa+1)=f(\kappa)$ ἐξ ὑποθέσεως, θά εἶναι καί $f(\kappa+1)=f(0)$. Δηλαδή τό πολυώνυμο $f(x)$ παίρνει τήν ἴδια τιμή $f(0)$ γιά ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Ἄρα θά εἶναι: $\quad f(x)-f(0)=0 \quad$ ἤ $\quad f(x)=f(0)=$σταθερό.

3. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$f(x)=\frac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{x(x-\beta)(x-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{x(x-\gamma)(x-\alpha)}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)},$$

στό ὁποῖο εἶναι $\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$, μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$f(x)=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+1.$$

Προσδιορίστε κατόπιν τήν τιμή τοῦ λ.

Ἀπόδειξη:

Ἐπειδή εἶναι $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=1$ ἤ $f(\alpha)-1=f(\beta)-1=f(\gamma)-1=0$, τό πολυώνυμο $f(x)-1$ θά ἔχει ρίζες τά α,β,γ καί συνεπῶς τό πολυώνυμο $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)-1$. Ἄρα θά εἶναι

$$f(x)-1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\pi(x) \qquad (1)$$

Ἀλλά τά πολυώνυμα $f(x)-1$ καί $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ εἶναι 3ου βαθμου καί συνεπῶς τό πηλίκο $\pi(x)$ θά εἶναι σταθερό πολυώνυμο. Ἄν $\pi(x)=\lambda$, τότε ἡ (1) γράφεται

$$f(x)=\lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)+1 \qquad (2)$$

καί ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

Ἐπειδή ἀπό τήν ἀρχική μορφή τοῦ $f(x)$ βρίσκουμε $f(0)=0$, ἐνῶ ἀπό τή (2) εἶναι $f(0)=$ $=-\alpha\beta\gamma\lambda+1$, τελικά θά εἶναι

$$\lambda=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$$

4. Ἐξετάστε ἄν τό 3 εἶναι πολλαπλή ρίζα τοῦ $f(x)=2x^3-11x^2+12x+9$.

Λύση: Θά ἐξετάσουμε ἄν τό $x-3$ εἶναι παράγοντας τοῦ $f(x)$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $f(3)=0$. Ἀλλά αὐτό ἰσχύει. Ἔτσι ἔχουμε $f(x)=(x-3)\pi(x)$. Μέ τό σχῆμα Horner βρίσκουμε

$$\pi(x)=2x^2-5x-3, \quad \text{ὁπότε} \quad f(x)=(x-3)(2x^2-5x-3).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι $\pi(3)=0$, δηλ. τό $x-3$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\pi(x)$, ὁπότε $\pi(x)=$ $=(x-3)(2x+1)$ καί ἄρα $f(x)=(x-3)\cdot(x-3)\cdot(2x+1)=(x-3)^2\cdot(2x+1)$.

Ἡ τελευταία σχέση μᾶς λέει ὅτι τό 3 εἶναι διπλή ρίζα τοῦ $f(x)$.

Στό παράδειγμα αὐτό δίνεται καί ἕνας τρόπος νά ἐλέγχουμε ἄν ἕνας ἀριθμός ρ εἶναι πολλαπλή ρίζα ἑνός πολυωνύμου. Γενικά ἀποδεικνύεται ὅτι:

Ἕνα πολυώνυμο $f(x)$, βαθμοῦ $\nu\geq\kappa$, $\kappa\in N$ ἔχει τόν ἀριθμό ρ ρίζα πολλαπλότητας κ, ἄν $f(\rho)=0$, $\pi_1(\rho)=0$, $\pi_2(\rho)=0,\cdots,\pi_{\kappa-1}(\rho)=0$, ὅπου τά $\pi_1(x)$, $\pi_2(x),\cdots,\pi_{\kappa-1}(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων τοῦ $f(x)$ μέ τό $x-\rho$, τοῦ $\pi_1(x)$ μέ τό $x-\rho$, τοῦ $\pi_2(x)$ μέ τό $x-\rho$ κ.ο.κ. καί συγχρόνως $\pi_\kappa(\rho)\neq 0$, ὅπου $\pi_\kappa(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $\pi_{\kappa-1}(x)$ μέ τό $x-\rho$.

Ἕνας ὅμως πιό πρακτικός τρόπος γιά νά ἐλέγχουμε τήν πολλαπλότητα μιᾶς ρίζας ἑνός πολυωνύμου φαίνεται στό ἀκόλουθο παράδειγμα.

5. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=2x^4-5x^3+3x^2+x-1$ ἔχει τόν ἀριθμό 1 ρίζα μέ πολλαπλότητα 3.

Λύση: Ἄν κάνουμε τό μετασχηματισμό

$$x-1=y \quad \text{ἤ} \quad x=y+1,$$

τότε τό $f(x)$ γίνεται $f(y+1)=2(y+1)^4-5(y+1)^3+3(y+1)^2+(y+1)-1$ ἤ

$$g(y)=f(y+1)=2y^4+y^3=y^3(2y+1).$$

Δηλαδή τό $g(y)$ ἔχει παράγοντα τό y^3 καί δέν ἔχει παράγοντα δύναμη τοῦ y μεγαλύτερη ἀπό 3, δηλ. τό $f(x)$ ἔχει παράγοντα τό $(x-1)^3$, ἀλλά ὄχι δύναμη τοῦ x-1 μεγαλύτερη ἀπό 3.

6. Βρεῖτε τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καί τῶν κύβων τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου

$$f(x)=2x^3-6x^2+x-10$$

Λύση: Ἄν ρ_1,ρ_2,ρ_3 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$, τότε ἀπό τούς τύπους Vieta ἔχουμε

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=\frac{6}{2}=3, \quad \rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\frac{1}{2}, \quad \rho_1\rho_2\rho_3=\frac{10}{2}=5$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι: $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^2-2(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)$,

ὁπότε $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=3^2-2\cdot\frac{1}{2}=8$ καί

$$(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3+3\rho_1^2(\rho_2+\rho_3)+3\rho_2^2(\rho_3+\rho_1)+3\rho_3^2(\rho_1+\rho_2)+6\rho_1\rho_2\rho_3 \text{ ἤ}$$

$$(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^3=\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3+3\rho_1^2(3-\rho_1)+3\rho_2^2(3-\rho_2)+3\rho_3^2(3-\rho_3)+6\rho_1\rho_2\rho_3.$$

Ἀπό τήν τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$\rho_1^3+\rho_2^3+\rho_3^3=\frac{75}{2}$$

7. Νά κατασκευαστεῖ πολυώνυμο $g(x)$, τοῦ ὁποίου οἱ ρίζες νά εἶναι τά ἀντίστροφα τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου

$$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0, \quad \alpha_\nu.\alpha_0\neq 0.$$

Λύση: Ἄν $x_1,x_2,\ldots,x_\nu$ εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$, τότε οἱ ρίζες τοῦ $g(x)$ θέλουμε νά εἶναι οἱ

$$\rho_1=\frac{1}{x_1},\ \rho_2=\frac{1}{x_2},\ldots,\rho_\nu=\frac{1}{x_\nu}$$

Σύμφωνα μέ τούς τύπους Vieta ἔχουμε:

$$S_1=x_1+x_2+\ldots+x_\nu=-\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}$$

$$S_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{\nu-1}x_\nu=\frac{\alpha_{\nu-2}}{\alpha_\nu}$$

$$\vdots$$

$$S_\nu=x_1\cdot x_2\ldots x_\nu=(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}$$

Τό πολυώνυμο $g(x)$ θά εἶναι τό

$$g(x)=x^\nu-S'_1x^{\nu-1}+S'_2x^{\nu-2}+\ldots+(-1)^\nu S'_\nu$$

ὅπου

$$S_1'=\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_\nu=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_\nu}=$$

$$=\frac{x_2\cdot x_3\ldots x_\nu+x_1\cdot x_3\ldots x_\nu+\ldots+x_1x_2\ldots x_{\nu-1}}{x_1x_2\cdots x_\nu}=\frac{(-1)^{\nu-1}\frac{\alpha_1}{\alpha_\nu}}{(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}$$

$$S'_2=\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_{\nu-1}\rho_\nu=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\ldots+\frac{1}{x_{\nu-1}x_\nu}=$$

$$=\frac{x_3x_4\ldots x_\nu+\ldots+x_1x_2\ldots x_{\nu-2}}{x_1x_2\ldots x_\nu}=\frac{(-1)^{\nu-2}\frac{\alpha_2}{\alpha_\nu}}{(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=\frac{\alpha_2}{\alpha_0}$$

. . . .

$$S'_\nu=\rho_1\rho_2\cdots\rho_\nu=\frac{1}{x_1x_2\ldots x_\nu}=\frac{1}{(-1)^\nu\frac{\alpha_0}{\alpha_\nu}}=(-1)^\nu\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$$

Έτσι έχουμε $g(x)=x^{\nu}+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{\nu-1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_0}x^{\nu-2}+\ldots+\frac{\alpha_\nu}{\alpha_0}$ ή

$$g(x)=\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_0x^{\nu}+\alpha_1x^{\nu-1}+\alpha_2x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_\nu).$$

8. **Άν τά πολυώνυμα $f(x)$, $g(x)$ είναι πρώτα μεταξύ τους, τότε καί τά πολυώνυμα $(f(x))^{\kappa}$ καί $(g(x))^{\lambda}$, όπου $\kappa, \lambda \in N$, είναι πρώτα μεταξύ τους.**

Απόδειξη: Άς υποθέσουμε ότι τό μή σταθερό πολυώνυμο $\sigma(x)$ είναι κοινός διαιρέτης τών $(f(x))^{\kappa}$ καί $(g(x))^{\lambda}$. Τότε $(f(x))^{\kappa}=\sigma(x)\,\pi_1(x)$ καί $(g(x))^{\lambda}=\sigma(x)\,\pi_2(x)$.
Άν τώρα ρ είναι ρίζα τοῦ $\sigma(x)$, όπότε $\sigma(\rho)=0$, θά είναι καί $(f(\rho))^{\kappa}=(g(\rho))^{\lambda}=0$, δηλ. $f(\rho)=g(\rho)=0$, πού σημαίνει ότι τά $f(x)$, $g(x)$ θά έχουν κοινό διαιρέτη τό μή σταθερό πολυώνυμο $x-\rho$. Αὐτό όμως είναι άτοπο, γιατί τά $f(x)$ καί $g(x)$ είναι πρῶτα μεταξύ τους.

4.3. Ἀσκήσεις

1. Άν ένα πολυώνυμο $f(x)\in \mathbf{C}_{[x]}$, παίρνει τήν ἀριθμητική τιμή λ γιά ἄπειρες μιγαδικές τιμές τοῦ x, τότε δεῖξτε ότι τό πολυώνυμο αὐτό είναι τό σταθερό πολυώνυμο $\lambda\in\mathbf{C}_{[x]}$.
2. Δεῖξτε ότι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ μέ τό $x^2-2\rho x+\rho^2$ είναι τό $\pi(\rho)x+f(\rho)-\rho\pi(\rho)$, όπου $\pi(x)$ είναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $[f(x)-f(\rho)]$ μέ τό $(x-\rho)$.
3. Άν τά πολυώνυμα $f(x)$ καί $g(x)$ έχουν τόν ἀριθμό ρ ρίζα μέ πολλαπλότητα κ καί λ ἀντιστοίχως, τότε ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $f(x)$ καί $g(x)$ έχει ἐπίσης ρίζα τόν ἀριθμό ρ μέ πολλαπλότητα $\nu=\min(\kappa,\lambda)$.
4. Δεῖξτε ότι τό πολυώνυμο $f(x)=\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$ μέ $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0$ είναι τό σταθερό πολυώνυμο $f(x)=1$.
5. Δεῖξτε ότι τό πολυώνυμο x^2-4x+4 είναι παράγοντας τοῦ πολυωνύμου
$$f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4.$$
6. Νά ἐξετάσετε ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^5-11x^4+43x^3-74x^2+52x-8$ έχει τόν 2 ρίζα μέ πολλαπλότητα 3.
7. Δίνεται ή ἐξίσωση $(\lambda+1)x^3-(\lambda^2+5\lambda-5)x^2+(\lambda^2+5\lambda-5)x-(\lambda+1)=0$ μέ $\lambda\neq-1$
   α) Δεῖξτε ότι γιά κάθε τιμή τοῦ $\lambda(\lambda\neq-1)$ ή ἐξίσωση έχει ρίζες πού ἀποτελοῦν γεωμετρική πρόοδο. β) Άν ρ_2 είναι ή ρίζα της πού δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό λ, νά προσδιορίσετε τό λ, ὥστε οἱ ρίζες ρ_1,ρ_2,ρ_3 νά ἀποτελοῦν ἀριθμητική πρόοδο.
   γ) Δεῖξτε ότι γιά όλες τίς τιμές λ πού βρήκατε στήν προηγουμένη περίπτωση ή ἐξίσωση έχει τρεῖς ρίζες ἴσες.
8. Νά κατασκευάσετε ἐξίσωση τρίτου βαθμοῦ μέ ρίζες τούς ἀριθμούς $1,-2,3$.
9. Βρεῖτε ἐξίσωση πού έχει ρίζες τά τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^3+\alpha_1x^2+\alpha_2x+\alpha_3=0$.
10. Δίνονται τά πολυώνυμα $f(x)=x^3+\alpha x-\beta$ καί $g(x)=\beta x^3-\alpha x-1$, μέ $\alpha>0$, $\beta>0$. Άν ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι οἱ ρίζες τοῦ $f(x)$ καί τά $f(x)$ καί $g(x)$ έχουν μιά κοινή πραγματική ρίζα, τότε δεῖξτε ότι i) $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=-2\alpha$ καί ii) $|\rho_1|+|\rho_2|+|\rho_3|>2$
11. Άν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu>1$, είναι ν διακεκριμένοι ἀριθμοί καί θέσουμε

$P_1(x)=(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_\nu)$
$P_2(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\ldots(x-\alpha_\nu)$
. . . .
$P_\kappa(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{\kappa-1})(x-\alpha_{\kappa+1})\ldots(x-\alpha_\nu)$, $\kappa=2,3,\ldots,\nu-1$
. . . .
$P_\nu(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{\nu-1})$,

τότε ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση

$$\alpha_1 \cdot \frac{P_1(x)}{P_1(\alpha_1)} + \alpha_2 \cdot \frac{P_2(x)}{P_2(\alpha_2)} + \ldots + \alpha_\nu \cdot \frac{P_\nu(x)}{P_\nu(\alpha_\nu)} = \beta, \text{ μέ } \beta \text{ σταθερό ἀριθμό.}$$

12. Δίνεται τό πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha\beta(\alpha-\gamma)x^3+(\alpha^3-\alpha^2\gamma+2\alpha\beta^2-\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma)x^2+(2\alpha^2\beta+\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma+\beta^3-\alpha\beta\gamma)x+\alpha\beta(\beta+\gamma)$$

ὅπου $\alpha,\beta,\gamma \neq 0$, $\alpha \neq \gamma$ καί $\alpha \neq \beta$.

Δεῖξτε ὅτι τό $P(x)$ διαιρεῖται ἀπό τό $Q(x)=\alpha\beta x^2+(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta$ καί στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $P(x_0)$ διαιρεῖται μέ τό $(\alpha+\beta)^3$, ὅπου $x_0=(\alpha+\beta+1)^\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$.

13. Ἄν γιά ἕνα πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}[x]$ ἰσχύει $f(x)=f(x+1)$ γιά κάθε $x\in\mathbf{C}$, δεῖξτε ὅτι εἶναι ἕνα σταθερό πολυώνυμο.

4.4. Εἰδικά θεωρήματα.

Θεώρημα 1. Ἄν ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, $(\beta\neq 0)$, τότε ἔχει ρίζα καί τόν συζυγή του, $\bar{z}=\alpha-\beta i$.

Ἀπόδειξη:

Ἄν τό $f(x)$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ, τότε τό $f(x)$ δέν ἔχει μιγαδική ρίζα, ἀφοῦ ἔχει πραγματικούς συντελεστές. Ἄρα τό $f(x)$ εἶναι τουλάχιστον β' βαθμοῦ. Γιά νά δείξουμε ὅτι καί ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\bar{z}=\alpha-\beta i$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι ἡ διαίρεση τοῦ $f(x)$ μέ τό πολυώνυμο $g(x)=(x-z)(x-\bar{z})=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ εἶναι τέλεια. Ἀλλά τό $g(x)$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καί ἄρα τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ μέ τό $g(x)$ θά εἶναι τό πολύ πρώτου βαθμοῦ. Ἄν λοιπόν εἶναι $\upsilon(x)=\kappa x+\lambda$ τό ὑπόλοιπο καί $\pi(x)$ τό πηλίκο αὐτῆς τῆς διαιρέσεως, τότε ἰσχύει:

$$f(x)=g(x)\cdot\pi(x)+\kappa x+\lambda \qquad (1)$$

Εἶναι ὅμως $f(\alpha+\beta i)=g(\alpha+\beta i)=0$ καί ἑπομένως γιά τήν τιμή $\alpha+\beta i$ τοῦ x ἡ ἰσότητα (1) δίνει

$$(\kappa+\alpha\beta i)+\lambda=0 \text{ ἤ } (\kappa\alpha+\lambda)+\kappa\beta i=0, \text{ ἤ } \kappa\alpha+\lambda=0 \text{ καί } \kappa\beta=0,$$

ἀφοῦ $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$ σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση 1 τῆς 2.4.

Ἐπειδή εἶναι $\beta\neq 0$ θά ἔχουμε $\kappa=0$, ὁπότε καί $\lambda=0$, δηλαδή ἡ (1) γίνεται

$$f(x)=g(x)\cdot\pi(x) \qquad (2)$$

πού ἀποδεικνύει τό ζητούμενο.

Πορίσματα.

1. **Ἄν ἕνα πολυώνυμο τοῦ $\mathbf{R}_{[x]}$, ἔχει ρίζα τό μιγαδικό ἀριθμό $z=\alpha+\beta i$, $\beta\neq 0$ μέ πολλαπλότητα κ, τότε καί ὁ $\bar{z}=\alpha-\beta i$ θά εἶναι ρίζα του μέ τήν ἴδια πολλαπλότητα.**
2. **Τό πλῆθος τῶν μιγαδικῶν ριζῶν ἑνός πολυωνύμου μέ πραγματικούς συντελεστές εἶναι ἄρτιο.**
3. **Κάθε πολυώνυμο περιττοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές ἔχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.**

Θεώρημα 2. Ἄν ἕνα μή μηδενικό πολυώνυμο μέ ρητούς συντελεστές ἔχει ρίζα τόν ἄρρητο $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha,\beta\in Q$, $\beta>0$, $\sqrt{\beta}\in R-Q$, τότε θά ἔχει ρίζα καί τόν $\alpha-\sqrt{\beta}$.

Τό θεώρημα αὐτό ἀποδεικνύεται ὅπως τό προηγούμενο καί συνάγονται ἀνάλογα πορίσματα μέ ἐκεῖνα τοῦ θεωρήματος 1.

Θεώρημα 3. Ἄν ἕνα πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_\nu.\alpha_0\neq 0$, μέ ἀκέραιους συντελεστές, ἔχει γιά ρίζα του τό ρητό $\frac{\kappa}{\lambda}\neq 0$, $(\kappa,\lambda)=1$, τότε ὁ κ θά εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ ὅρου α_0 τοῦ f(x) καί ὁ λ τοῦ συντελεστῆ α_ν τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου του.

Ἀπόδειξη: Ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε:

$$f\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)=0 \Leftrightarrow \alpha_\nu\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^\nu+\alpha_{\nu-1}\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)+\alpha_0=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}\lambda+\ldots+\alpha_1\kappa\lambda^{\nu-1}+\alpha_0\lambda^\nu=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_\nu\kappa^\nu=-\lambda(\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\kappa\lambda^{\nu-2}+\alpha_0\lambda^{\nu-1}) \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0\lambda^\nu=-\kappa(\alpha_\nu\kappa^{\nu-1}+\alpha_{\nu-1}\kappa^{\nu-2}\lambda+\ldots+\alpha_1\lambda^{\nu-1}) \qquad (2)$$

Ἐπειδή οἱ παρενθέσεις στά δεύτερα μέλη τῶν (1) καί (2) εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ λ καί κ θά εἶναι ἀντιστοίχως διαιρέτες τῶν $\alpha_\nu\kappa^\nu$ καί $\alpha_0\lambda^\nu$. Εἶναι ὅμως $(\kappa,\lambda)=1$, ὁπότε θά εἶναι $(\kappa^\nu,\lambda)=1$ καί $(\kappa,\lambda^\nu)=1$[1]. Ἀφοῦ λοιπόν εἶναι $\lambda \mid \alpha_\nu\kappa^\nu$ καί $(\kappa^\nu,\lambda)=1$, θά εἶναι καί $\lambda\mid\alpha_\nu$. Ὅμοια καί $\kappa\mid\alpha_0$.

Πόρισμα. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1x+\alpha_0$, $\alpha_0\neq 0$ μέ ἀκέραιους συντελεστές, ἔχει ρητές ρίζες, τότε αὐτές θά εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί καί διαιρέτες τοῦ α_0.

4 5. Παραδείγματα—Ἐφαρμογές.

1. **Βρεῖτε ἕνα πολυώνυμο τετάρτου βαθμοῦ μέ ρητούς συντελεστές, τό ὁποῖο νά ἔχει δύο ρίζες του τούς ἀριθμούς i καί $1-\sqrt{3}$.**

Λύση: Ἀφοῦ τό ζητούμενο πολυώνυμο ἔχει ρητούς συντελεστές, θά ἰσχύουν γιά τίς μιγαδικές καί τίς ἄρρητες ρίζες του τά θεωρήματα 1. καί 2. καί συνεπῶς οἱ ἀριθμοί $-i$ καί $1+\sqrt{3}$ θά εἶναι δύο ἀκόμα ρίζες του. Ἄρα τό f(x) θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$f(x)=\kappa(x-i)(x+i)[(x-1)+\sqrt{3}][(x-1)-\sqrt{3}], \quad \kappa\in\mathbf{Q},\ \kappa\neq 0$$

ἤ $f(x)=\kappa(x^2+1)(x^2-2x-2)$. Ἕνα ἀπό τά ζητούμενα πολυώνυμα εἶναι π.χ. τό

$$(x^2+1)(x^2-2x-2)=x^4-2x^3-x^2-2x-2$$

2. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $x^3-4x^2+9x-10=0$, ἄν εἶναι γνωστό ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1+2i$ εἶναι ρίζα της.**

Ἐπίλυση: Ἀφοῦ τό πολυώνυμο τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἐξισώσεως ἔχει πραγματικούς συντελεστές, τότε ἡ ἐξίσωση θά ἔχει ρίζα καί τόν ἀριθμό $1-2i$, ὁπότε τό πολυώνυμο αὐτό θά διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $[x-(1+2i)]([x-(1-2i)]=x^2-2x+5$. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς τους βρίσκουμε ὅτι εἶναι τό $x-2$ καί ἄρα ἡ τρίτη ρίζα τῆς ἐξισώσεως εἶναι τό 2.

1. Βλέπε ἄσκηση 16 τῆς 1.9. τοῦ Κεφαλαίου III.

3. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$**

Ἐπίλυση: Ἐπειδή οἱ συντελεστές τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἀκέραιοι καί ὁ συντελεστής τοῦ x^4 τό 1, ἄν ὑπάρχουν ρητές ρίζες, αὐτές θά εἶναι ἀκέραιες καί συγχρόνως διαιρέτες τοῦ σταθεροῦ ὅρου $+6$. Εὔκολα βρίσκουμε ὅτι οἱ ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $-3, -1, 1, 2$. (Χρησιμοποιῆστε π.χ. διαδοχικά τό σχῆμα Horner).

4. **Ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση $2x^3+3x^2+8x+12=0$.**

Ἐπίλυση: Ἄν ὑπάρχουν ρητές ρίζες, αὐτές θά εἶναι ἀνάγωγα κλάσματα μέ ἀριθμητή διαιρέτη τοῦ 12 καί παρονομαστή διαιρέτη τοῦ 2. Βρίσκουμε ἔτσι ὅτι ὁ ἀριθμός $-\frac{3}{2}$ εἶναι μία ρίζα καί ἡ ἐξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)(2x^2+8)=0 \Leftrightarrow (2x+3)(x^2+4)=0 \Leftrightarrow (2x+3)(x+2i)(x-2i)=0.$$

Ἄρα οἱ ρίζες εἶναι $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=-2i$ καί $x_3=2i$.

5. **Ἄν οἱ συντελεστές τοῦ πολυωνύμου $f_2(x)\in C_{[x]}$, εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν ἀντίστοιχων συντελεσστῶν τοῦ πολυωνύμου $f_1(x)\in C_{[x]}$ καί ὁ βαθμός τῶν $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ εἶναι ν, δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ ἑνός εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν ριζῶν τοῦ ἄλλου.**

Ἀπόδειξη: Τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ μποροῦν νά πάρουν τή μορφή $f_1(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$ καί $f_2(x)=\varphi_1(x)-i\varphi_2(x)$, ὅπου τά πολυώνυμα $\varphi_1(x)$ καί $\varphi_2(x)$ ἔχουν πραγματικούς συντελεστές. Ἄν λοιπόν ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\kappa+\lambda i$ εἶναι μία ρίζα τοῦ $f_1(x)$, τότε θά εἶναι $f_1(\kappa+\lambda i)=0$ ἤ $\varphi_1(\kappa+\lambda i)+i\varphi_2(\kappa+\lambda i)=0$ ἤ μετά τίς πράξεις $(A+Bi)+i(\Gamma+\Delta i)=0$ ἤ τέλος $(A-\Delta)+(B+\Gamma)i=0$. (1)

Στήν ἐφαρμογή 2 τῆς 1.6. τοῦ Κεφαλαίου Ι, δείξαμε ὅτι $\overline{\varphi(z)}=\varphi(\bar{z})$ καί ἑπομένως ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ $f_2(x)$ γιά $x=\kappa-\lambda i$ εἶναι:

$f_2(\kappa-\lambda i)=\varphi_1(\kappa-\lambda i)-i\varphi_2(\kappa-\lambda i)=(A-Bi)-i(\Gamma-\Delta i)=(A-\Delta)-(B+\Gamma)i$, ὁπότε λόγω τῆς (1) ἔχουμε $f_2(\kappa-\lambda i)=0$. Τό $f_2(x)$ ἔχει ἑπομένως ρίζες τίς συζυγεῖς τῶν ριζῶν τοῦ $f_1(x)$.

4.6. Ἀσκήσεις

1. Ἐπιλύστε τίς παρακάτω ἐξισώσεις

α) $4x^4-4x^3-25x^2+x+6=0$ β) $x^3+x^2-x-10=0$

γ) $x^3-4x^2+x+6=0$ δ) $2x^3-9x^2+7x+6=0$

ε) $3x^3+x^2-6x+8=0$ στ) $2x^5-11x^4+14x^3-2x^2+12x+9=0$

2. Προσδιορίστε τούς ἀκέραιους κ, ὥστε ἡ ἐξίσωση

$$x^3-x^2+\kappa x+4=0$$

νά ἔχει μία τουλάχιστον ρητή ρίζα.

3. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$x^\nu-1=0, \quad \nu\in\mathbf{N}$$

ἔχει ἀκριβῶς δύο ρητές ρίζες, ἄν ν ἄρτιος, καί ἀκριβῶς μία ρητή ρίζα, ἄν ν περιττός.

4. Ἔστω ὅτι ὁ ἀκέραιος λ εἶναι πρῶτος ἀριθμός καί διαιρέτης τῶν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbf{Z}$. Δεῖξτε ὅτι ὁ λ εἶναι διαιρέτης κάθε ἀκέραιας ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$x^3+\kappa_1x^2+\kappa_2x+\kappa_3=0$$

Μέ τή βοήθεια αὐτοῦ τοῦ συμπεράσματος ἐπιλύστε τήν ἐξίσωση

$$x^3-4x^2-4x+16=0$$

5. Ἄν μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^3-8x^2+\kappa x+\lambda=0$$

εἶναι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $3-i$, προσδιορίστε τούς πραγματικούς ἀριθμούς κ καί λ καί τίς ἄλλες ρίζες της.

6. Δεῖξτε ὅτι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $1+i$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως

$$x^4-3x^3+3x^2-2=0$$

καί στή συνέχεια βρεῖτε τίς ἄλλες ρίζες της.

7. Ἄν $f(x)$ εἶναι πολυώνυμο μέ πραγματικούς συντελεστές καί συντελεστή τοῦ μεγιστοβάθμιου ὅρου τό 1, τότε προσδιορίστε τό $f(x)$ στίς ἀκόλουθες περιπτώσεις
α) Τό $f(x)$ ἔχει τρεῖς ρίζες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι τό 1 καί τό $2i$.
β) Τό $f(x)$ ἔχει τέσσερις ρίζες ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι τό i καί τό $1+i$

8. Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων καθένα ἀπό τά παρακάτω πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}[x]$
α) $f(x)=x^4-x^3-x-1$, ἄν ἕνας παράγοντάς του εἶναι τά $x-i$.
β) $g(x)=x^4+4x^3+10x^2+12x+21$ ἄν ὁ ἕνας παράγοντας εἶναι τό $(x+2-\sqrt{3}i)$.

9. Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων τό πολυώνυμο $f(x)=2x^3-9x^2+7x+6$ τοῦ $\mathbf{C}[x]$.

10. Ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ $\varphi(x)=x^2+\alpha x+\beta$, $\beta\neq 0$ καί ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)=x^{2\nu}+$ $+\alpha^\nu x^\nu+\beta^\nu$, ὅπου ν ἄρτιος φυσικός ἀριθμός, δεῖξτε ὅτι οἱ ἀριθμοί $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ εἶναι ρίζες τοῦ πολυωνύμου $P(x)=x^\nu+1+(1+x)^\nu$.

11. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι $f(x)=(f_1(x))^2+(f_2(x))^2$, ὅπου $f_1(x)$, $f_2(x)$ πολυώνυμα νιοστοῦ βαθμοῦ μέ πραγματικούς συντελεστές, δεῖξτε ὅτι τό $f(x)$ μπορεῖ νά γραφεῖ ὡς γινόμενο ν δευτεροβάθμιων πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές.

12. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu\,\eta\mu\alpha-x\eta\mu(\nu\alpha)+\eta\mu(\nu-1)\alpha$, ὅπου $\alpha\in\mathbf{R}$ καί $\nu\in\mathbf{N}$ μέ $\nu\geq 2$, διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\varphi(x)=x^2-2x\sigma\upsilon\nu\alpha+1$.

13. Ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ ἔχει ρίζα τόν ἀριθμό ρ καί εἶναι $f(\alpha_0)=0$, δεῖξτε ὅτι ὁ ρ εἶναι καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $g(x)=f(f(f(x)))$.

14. Ἄς εἶναι $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Καλοῦμε $g(x)$ τό πολυώνυμο πού προκύπτει ἄν στό $f(x)$ θέσουμε ὅπου x τό $f(x)$. Δεῖξτε ὅτι ἄν ρ_1, ρ_2 εἶναι οἱ ρίζες τοῦ πολυωνύμου $f(x)-x$, τότε αὐτές εἶναι καί ρίζες τοῦ $g(x)-x$.

15. Νά ἐξετάσετε ἄν τό πολυώνυμο $f(x)=27x^3+26x^2+9x-2$ ἔχει ρίζες τῆς μορφῆς $\sqrt{\rho}$, ὅπου ρ θετικός ρητός καί $\sqrt{\rho}\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$.

16. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^3-x-1$ ἔχει μία ἄρρητη ρίζα ρ_1 καί δύο συζυγεῖς μιγαδικές. Δεῖξτε ἀκόμα ὅτι $1<\rho_1<\sqrt{2}$.

17. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)=x^\nu+2\lambda x+2$, μέ $\nu\in\mathbf{N}$, $\nu\geq 2$ καί λ ἀκέραιο ἀριθμό, δέν ἔχει ρητές ρίζες.

18. Ἄν ἕνα πολυώνυμο νιοστοῦ βαθμοῦ, μέ $\nu>4$ καί ἀκέραιους συντελεστές, λαμβάνει τήν τιμή 7 γιά τέσσερις διαφορετικές μεταξύ τους ἀκέραιες τιμές τοῦ x, δεῖξτε ὅτι γιά καμιά ἀκέραια τιμή τοῦ x τό πολυώνυμο δέ λαμβάνει τήν τιμή 14.

5. ΣΥΝΤΟΜΗ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

1. Κάθε παράσταση τῆς μορφῆς

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

μέ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in \mathbf{C}$ καί $\nu \in \mathbf{N}_0$ ὀνομάζεται **πολυώνυμο τοῦ x** καί συμβολίζεται μέ $f(x)$, $g(x)$, κ.ἄ.

2. Στό σύνολο $\mathbf{C}_{[x]}$ τῶν πολυωνύμων ὁρίζουμε δυό πράξεις, τήν πρόσθεση «+» καί τόν πολλαπλασιασμό «·». **Ἡ δομή ($\mathbf{C}_{[x]}$, +, ·) εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος μέ μοναδιαῖο στοιχεῖο.**

3. Ἄν $f(x)$ καί $g(x)$ εἶναι πολυώνυμα τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$ μέ $g(x) \neq \mathbf{0}$, τότε ὑπάρχει μοναδικό ζεῦγος πολυωνύμων $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$ τοῦ $\mathbf{C}_{[x]}$, μέ $\upsilon(x) = \mathbf{0}$ ἤ βαθμ. $\upsilon(x) <$ $<$ βαθμ. $g(x)$ τέτοιο, ὥστε

$$f(x) = g(x)\pi(x) + \upsilon(x) \qquad (1)$$

4. Ἄν στήν (1) εἶναι $\upsilon(x) = \mathbf{0}$, τότε τό $g(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$.

5. Κάθε συνάρτηση

$$f : A \to A$$

μέ τύπο

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu \in A$ καί A ἕνα ἀπό τά $\mathbf{R}, \mathbf{C}$, ὀνομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση τοῦ x.**

Ὁ ἀριθμός

$$f(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0,$$

πού εἶναι εἰκόνα τοῦ ρ μέσω τῆς f, ὀνομάζεται **ἀριθμητική τιμή τῆς πολυωνυμικῆς συναρτήσεως f γιά x=ρ** ἤ καί **ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου**

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ γιά } x = \rho.$$

Ἄν $f(\rho) = 0$, τότε λέμε ὅτι ὁ ρ εἶναι **ρίζα τοῦ πολυωνύμου f(x).**

Ἡ εὕρεση ὅλων τῶν ἀριθμῶν ρ γιά τούς ὁποίους εἶναι

$$f(\rho) = \alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1} \rho^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0$$

ὀνομάζεται **ἐπίλυση τῆς πολυωνυμικῆς ἐξισώσεως**

$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0.$$

6. **Κάθε πολυώνυμο $f(x) \in \mathbf{C}_{[x]}$, βαθμοῦ $\nu \in \mathbf{N}_0$, ἔχει ν ἀκριβῶς ρίζες, ὅταν κάθε ρίζα μετριέται τόσες φορές ὅσος εἶναι ὁ βαθμός πολλαπλότητάς της.**

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ὑποδείξεις γιά τή λύση τῶν ἀσκήσεων-Ἀπαντήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

(Ὑπ.=Ὑπόδειξη Ἀπ.=Ἀπάντηση)

1.4. **1**. Ὑπ. $i^0=1$, $i^1=i$, $i^2=-1$ κ.τ.λ. **2**. Ὑπ. Ἀρκεῖ $3\alpha+14\beta=7$ καί $2\alpha-\beta=-1$. Ἀπ. $\alpha=-\frac{7}{31}$ $\beta=+\frac{17}{31}$. **3**. Ὑπ. Πρέπει $\alpha+\beta=5\gamma$ καί $-\gamma=\alpha-\beta$. **4**. Ὑπ. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι $2(\alpha+\beta)=$ $=5\alpha$ καί $(\beta-\alpha)\gamma=1$. **5**. Ἀπ. α) $-2i$, β) $\frac{9}{5}+\frac{8}{5}i$, γ) $\frac{4213}{5103}+\frac{2187\sqrt{3}+70\sqrt{2}}{5103}i$ καί δ) $\frac{586}{1300}-\frac{252}{1300}i$ **6**. Ὑπ. $\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{81}{4}$ καί $(1+i)^4=(-1+i)^4=\ldots=-4$. **7**. Ὑπ. Νά πάρετε $z_1=\alpha_1+\beta_1 i$, $z_2=\alpha_2+\beta_2 i$ καί $z_3=\alpha_3+\beta_3 i$.

1.7. **1**. Ὑπ. Πρέπει $z_1=\bar{z}_2$. Ἀπ. $x=2$, $y=1$. **2**. Ἀπ. α) $z=0+yi$, $y\in\mathbf{R}$, β) $z=0$ καί γ) $z\in\left\{0, -1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. **3**. Ὑπ. Ἄν $z_1=x_1+y_1 i$ καί $z_2=x_2+y_2 i$, τότε δεῖξτε ὅτι $x_1=y_1=0 \vee x_2=y_2=0$. **4**. Ὑπ. Θέστε $\frac{z_1}{z_2}=z_3\in\mathbf{C}$, δηλ. $z_1=z_2z_3$ κτλ. **5**. Ὑπ. Ἄν $z=x+yi$, τότε ἡ δοθείσα δίνει $xy=0$. **6**. Ἀπ. $x=\frac{1}{4}$ καί $y=-1$. **7**. Ἀπ. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **8**. Ἀπ. $\pm[\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}.i]$. **9**. Ἀπ. $x=1$, $y=2$. **10**. Ὑπ. Ἡ δοθείσα γίνεται: $[2+4+6+\ldots+2(\nu-1)]+[1+3+5+\ldots+(2\nu-1)]i$. **11**. Ἀπ. $z_1=2-i$ καί $z_2=1+2i$.

1.9. **1**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε ἕνα ἀπό τούς ὑποδειχθέντες τρόπους ἤ τή μαθηματική ἐπαγωγή. **2**. Ὑπ. Νά θέσετε στήν ἰδιότητα (γ) ὅπου z_2 τό $-z_2$. **3**. Ἀπ. α) $\sqrt{\frac{41}{5}}$ β) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, γ) $\frac{3^4.2^{10}}{19^2}$. **4**. Ἀπ. 1. **5**. Ἀπ. $z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i$. **6**. Ἀπ. $4x+2y+3=0$. **7**. Ὑπ. Νά πάρετε $z=x+yi$ καί νά ἐκτελέσετε πράξεις. Ἀπ. $z_1=0+0i$, $z_2=0+i$, $z_3=0-i$. **8**. Ὑπ. Νά θέσετε $z=x+yi$, $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$ καί νά ἐπιλύσετε σύστημα ὡς πρός x καί y. Ἀπ. $z_{1,2}=\alpha+(-1\pm$ $\pm\sqrt{1-\alpha^2-2\alpha})i$ μέ $0\leq\alpha\leq-1+\sqrt{2}$. **9**. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $|z_1+z_2|^2\leq(|z_1|+$ $+|z_2|)^2$ καί $|z_4|^2\leq1-|z_3|^2$ κ.τ.λ. **10**. Ὑπ. Ἡ $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$ γίνεται $\left|1+\frac{z_2}{z_1}\right|=1=$ $=\left|\frac{z_2}{z_1}\right|$. Θέστε $\frac{z_2}{z_1}=x+yi$ καί ὑπολογίστε τά x,y.

2.3. **1**. Ὑπ. Ἀπεικονίστε τά ζεύγη (2,3), (2,–3) κ.τ.λ. **2**. Ὑπ. Βρεῖτε τίς εἰκόνες τῶν $(z_1+z_2)+$ $+z_3$ καί $(z_1+z_2)-z_3$. **3**. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή τῆς παραγράφου 2.2.

3.3. **1**. Ὑπ. $|z-z_0|^2=\alpha^2 \Leftrightarrow (z-z_0).(\overline{z-z_0})=\alpha^2$ κ.τ.λ. **2**. Ἀπ. Εἶναι τά σημεῖα τοῦ κύκλου κέντρου (2,–3) καί ἀκτίνας 5. **3**. Ὑπ. Ἐργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 3. **4**. Ὑπ. Βρεῖτε z, τέτοια ὥστε $|z-2|=|z|$ καί ἔπειτα τά z μέ $|z-2|<|z|$. **5**. Ὑπ. Βρεῖτε τά z μέ $|z-1|=|z+1|$ καί ἔπειτα τά z μέ $|z-1|<|z+1|$. **6**. Ὑπ. $|z-8|^2=4|z-2|^2\Leftrightarrow(\overline{z-8})(z-8)=4(z-2).(\overline{z-2})$ κ.τ.λ.

7. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι οἱ διανυσματικές ἀκτίνες τῶν z, γιά τά ὁποῖα $|z|=3$, πολλαπλασιάζονται ἐπί -2 κ.τ.λ. **8**. 'Υπ. Βρεῖτε τά z: $|z+i|=3$ καί $|z+i|=4$ κ.τ.λ. **9**. 'Υπ. 'Εργαστεῖτε ὅπως στήν ἐφαρμογή 4. **10**. 'Υπ. 'Επιλύστε τό σύστημα $9\cdot|z-12|^2=25\cdot|z-8i|^2$, $|z-4|^2=|z-8|^2$ κ.τ.λ. 'Απ. $z_1=6+17i$, $z_2=6+8i$.

4.3. **1**. 'Απ. $(3,0)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $(3,\pi)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$. **2**. 'Απ. $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $-2+0i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $0-i$. **3**. 'Απ. Ἄν $z_1=\alpha+\beta i$, τότε $\alpha=\rho$ συνθ καί $\beta=\rho$ημθ, ὁπότε $z_1=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Ὅμοια βρίσκουμε $z_2=1+\sqrt{3}i$. 'Υπολογίστε τά $z_1 . z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ καί ἔπειτα βρεῖτε τά μέτρα καί τά ὀρίσματά τους. 'Απ. $\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

5.3. **1**. 'Απ. συν $\frac{5\pi}{3}$ + iημ $\frac{5\pi}{3}$, $4\left(\text{συν}\,\frac{\pi}{3}+i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{3}\right)$, $2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+i\,\text{ημ}\,\frac{5\pi}{6}\right)$.

2. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $(\text{συνθ}+i\text{ημθ})^{-\kappa}=\frac{1}{(\text{συνθ}+i\text{ημθ})^{\kappa}}=(\text{συνθ}-i\text{ημθ})^{\kappa}=$ $\text{συν}(-\kappa\theta)+i\text{ημ}(-\kappa\theta)$. **3**. 'Υπ. $\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{\pi}{6}+i\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}\right)$, $1+i=$ $\sqrt{2}\left[\text{συν}\frac{\pi}{4}+i\text{ημ}\,\frac{\pi}{4}\right]$, $1-i=\sqrt{2}\left[\text{συν}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$κτλ.

4. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τό Θ. De Moivre $\text{συν}(\nu\theta)+i\text{ημ}(\nu\theta)=(\text{συνθ}+i\text{ημθ})^{\nu}$ γιά $\nu=5$.

5. 'Υπ. Σχηματίστε τό $\frac{1}{z}$ καί ἔπειτα τά $z+\frac{1}{z}$, $z-\frac{1}{z}$.

6.3. **1**. $(\alpha) z^3=8 \Leftrightarrow z^3=8\ (\text{συν}0+i\text{ημ}0) \Rightarrow z_\kappa=\sqrt[3]{2}\left(\text{συν}\frac{2\kappa\pi}{3}+i\text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{3}\right)$, $\kappa=0,1,2$.

Παρόμοια ἐπιλύονται καί οἱ ὑπόλοιπες. **2**. 'Υπ. $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\nu}=-1$, δηλ. $\frac{1+z}{1-z}=$ $\text{συν}\frac{2\kappa\pi+\pi}{2\nu}+i\text{ημ}\,\frac{2\kappa\pi+\pi}{2\nu}$, $\kappa=0,1,2,\ldots,2\nu-1$ **3**. 'Υπ. $z^5=-\sqrt{3}+i=2\left(\text{συν}\frac{5\pi}{6}+\right.$ $\left.+\,i\text{ημ}\,\frac{5\pi}{6}\right)$ κ.τ.λ. **4**. (β) Παρατηρῆστε ὅτι $z^3_1-1=0 \Leftrightarrow (z_1-1)\ (z^2_1+z_1+1)=0$ κ.τ.λ., (δ) $z^2_1+z_1+1=0 \Leftrightarrow 1+z_1=-z^2_1$ κ.τ.λ. **5**. 'Υπ. $\kappa=\text{εφ}\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{2}\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. **6**. 'Υπ. (α) 'Εκτελέστε πράξεις καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$ κ.τ.λ. (β) 'Εργαστεῖτε παρόμοια. (γ) Χρησιμοποιῆστε τή (β). **7**. 'Υπ. 'Εκτελέστε πράξεις καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $1+\omega+\omega^2=0$. **8**. 'Υπ. Τά z εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, δηλ. $z^3=1$, $1+z+z^2=0$ κ.τ.λ. **9**. 'Υπ. Ἄν $\kappa=2\nu$, $\nu\in\mathbf{N}$, τότε δεῖξτε ὅτι $2^{2\nu}=$πολ. $3+1$, $\nu\in\mathbf{N}$, ὅτι $1-\theta^{2^{2\nu-2}}+\theta^{2^{2\nu-1}}=-2\theta$ καί $1-\theta^{2^{2\nu-1}}+\theta^{2^{2\nu}}=-2\theta^2$ κ.τ.λ. **10**. 'Υπ. Τά z εἶναι οἱ μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας καί $\nu=3\lambda+\upsilon$, $\upsilon=0,1,2$.

8. **1**. 'Υπ. Νά θέσετε $z=x+yi$ καί νά φέρετε τόν $\frac{z-1}{z+1}$ στή μορφή $\alpha+\beta i$. **2**. 'Υπ. Νά θέσετε $z=x+yi$ καί νά ἐπιλύσετε σύστημα ὡς πρός x καί y. 'Απ. Γιά $\alpha=1$ εἶναι $z=-1-i$.

Γιά $\alpha=\sqrt{2}$ εἶναι $z=-2-i$. Γιά $1<\alpha<\sqrt{2}$ εἶναι $z=\dfrac{-\alpha^2-\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha^2-1}-i \vee z=\dfrac{-\alpha^2+\alpha\sqrt{2-\alpha^2}}{\alpha^2-1}-i$. Γιά $\alpha>\sqrt{2}$ δέν ἔχει λύσεις. **3**. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση. **4**. Ὑπ. $z^3=-\omega^5$ καί $z^2=\dfrac{1}{\omega^4}$. Παίρνουμε $\omega^{10}\cdot\bar{\omega}^{12}=1$, ἀπό ὅπου $|\omega|=1$ καί $\bar{\omega}^2=1$ κ.τ.λ. **5**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου. **6**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου. **7**. Ὑπ. Εἶναι $|z-z_1|^2=\lambda^2|z-z_2|^2 \Leftrightarrow (z-z_1)(\bar{z}-\bar{z}_1)=\lambda^2(\bar{z}-\bar{z}_2).(z-z_2)$. Στή συνέχεια συμβουλευθεῖτε τά παραδείγματα καί τήν ἄσκηση 1 τῆς 3.3. **8**. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς 3.3. **9**. Ἀπ. $(0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$ $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$. **10**. Ὑπ. Θέστε $z=x+yi$ καί ἐκτελέστε πράξεις. **11**. Ὑπ. Ἄν $z^2+z+1=0$, τότε $(\alpha^2+\alpha-\beta^2+1)+\beta(1+2\alpha)i=0$ κ.τ.λ. **12**. Ὑπ. Εἶναι $z=2$ συν $\dfrac{\theta+\alpha}{2}\left[\text{συν}\dfrac{\theta-\alpha}{2}+i\text{ημ}\dfrac{\theta-\alpha}{2}\right]$ καί $|z|=\left|2\text{συν}\dfrac{\theta+\alpha}{2}\right|$. **13**. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 6 τῆς 3.3. **14**. Ἀπ. $x^2+y^2=\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$, $(x-\alpha)^2+y^2=\dfrac{(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$, $\mathrm{Re}z=\dfrac{x(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$. **15**. Ὑπ. Σχηματίστε $|\zeta|^2-1=\zeta\bar{\zeta}-1$ καί λάβετε ὑπόψη ὅτι $|\alpha|<1$ κ.τ.λ. **16**. Ὑπ. $\zeta^2=1+z^2$, τότε $\zeta^2-z^2=1$, δηλ. $(\zeta-z).(\zeta+z)=1$, ἔτσι $\zeta-z=\dfrac{1}{\zeta+z}$ κ.τ.λ. **17**. Ὑπ. $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ κ.τ.λ. **18**. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$, ὅπου $z_1=x_1+iy_1$, κ.τ.λ. **19**. Ὑπ. $|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2).(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$ καί $|1-\bar{z}_1z_2|^2=(1-\bar{z}_1z_2).(1-z_1.\bar{z}_2)$ κ.τ.λ. **20**. Ὑπ. Θέστε $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, καί ἐκτελέστε πράξεις. **21**. Ὑπ. Ἄν $z_\nu=x_\nu+y_\nu i$, τότε $\left|\dfrac{z_\nu-i}{z_\nu+i}\right|<1 \Rightarrow \sqrt{x_\nu^2+(y_\nu-1)^2}<\sqrt{x_\nu^2+(y_\nu+1)^2}$ κ.τ.λ. **22**. Ὑπ. Θέστε $z=\text{συν}\theta+i\text{ημ}\theta$, σχηματίστε τό μιγαδικό $\Sigma+i\Sigma'$ κ.τ.λ. **23**. Ὑπ. Σχηματίστε τό μιγαδικό $\Sigma+i\Sigma'$. **24**. Ὑπ. Εἶναι $|A_\circ|^2+|A_1|^2+\ldots+|A_{\nu-1}|^2=A_\circ\bar{A}_\circ+A_1\bar{A}_1+\ldots+A_{\nu-1}\bar{A}_{\nu-1}$. **25**. Ὑπ. Θέστε $\lambda=\text{εφ}\,\dfrac{\theta}{2}$ μέ $\theta=\mathrm{Arg}z$. **26**. Ὑπ. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $\left(\dfrac{z^2-1}{2z}\right)^4=\text{συν}\alpha+i\text{ημ}\alpha$ κ.τ.λ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

1.8. **1**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό 2 τῆς 1.1. **2**. Ἁπλή. Ἀπ. Ὄχι. **3**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς 1.2. **4**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ὁρισμό: $\widehat{\alpha}*\widehat{\beta}=\widehat{\alpha*\beta}$. **5**. Ἀπ. (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). **6**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τήν εἰς ἄτοπο ἀπαγωγή. **7**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς. **8**. Ὑπ. Θεωρῆστε τήν ἐξίσωση $x^2x'^2+x'+x=0$. **9**. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς Ἀπ. (ii) Ναί τό 0 (iii) Κάθε $z\neq\neq 1$ ἔχει συμμετρικό στοιχεῖο. **10**. Ὑπ. Στή δοθεῖσα σχέση νά ἀντικαταστήσετε μερικά ἀπό τά α,β,γ,δ μέ κατάλληλα στοιχεῖα.

2.4. **1**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε σέ κάθε περίπτωση τόν ἀντίστοιχο ὁρισμό. **2**. Ἁπλή. **3**. Ἁπλή. Ἀπ. $x=\widehat{4}$. **4**. Ὑπ. (i) Θεωρῆστε τήν ἰσότητα $\alpha^{-1}.(\alpha^{-1})^{-1}=e$ καί ἐφαρμόστε τήν ἰδιότητα 2 τῆς 2.3. (ii) Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 1.5. (iii) καί (iv) Λάβετε ὑπόψη ὅτι ἡ πράξη εἶναι προσεταιριστική. **5**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **6**. Ἁπλή. **7**. Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **8**. Ἀπ. $x=\alpha'*\beta'*\beta'$, $y=\beta'$.

3.4. **1.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. Ἀπ. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο. **2.** Ἀπ. (i) Εἶναι ἀντιμεταθετικός δακτύλιος. (ii) καί (iv) Δέν εἶναι δακτύλιοι (iii) Εἶναι ἀντιμεταθετικοί δακτύλιοι. **3.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. Ἀπ. Ἔχει μοναδιαῖο στοιχεῖο. **4.** Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $\gamma\cdot\beta=(\beta+\delta)\cdot\beta$ κ.τ.λ. **5.** Ὑπ. Λάβετε τήν παράσταση $(-\alpha)[\beta+(-\beta)]$. **6.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε σέ κάθε περίπτωση τόν ὁρισμό τῆς 3.3.

4.3. **1.** Ἀπ. (i) Ὄχι, (ii) Ναί, (iii) Ναί, (iv) Ναί. **2.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 4.1. **3.** Ἁπλή. **4.** Ἀπ. $x=\widehat{2}$, $y=\widehat{1}$.

5.6. **1.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.1. **2.** Ὑπ. Πάρτε τήν παράσταση $\alpha\cdot[x+(-x)]$. **3.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.3. Ἀπ. Ἔχει διάσταση 1. **4.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.3. Ἀπ. Ἔχει διάσταση 1. **5.** Ἀπ. Εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. **6.** Ἀπ. Ναί. **7.** Ἀπ. Ἔχει διάσταση 2. **8.** Ὑπ. Πάρτε $x,y\in A\cap B$ καί δεῖξτε ὅτι $\alpha\cdot x+\beta\cdot y\in A\cap B$.

7. **1.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς Ἀπ. (ii) Ἔχουν ἀντίστοιχα συμμετρικά στοιχεῖα τά $(1,-\alpha')$ καί $(-1,-\alpha')$. (iii) Τό συμμετρικό στοιχεῖο εἶναι $\left(-\alpha,\frac{1}{\alpha'}\right)$. **2.** Ὑπ. Λάβετε ὑπόψη καί τήν ἰσότητα $\alpha''=\alpha''*e$. **3.** Ὑπ. α) Ἡ ἰσότητα $(\alpha\cdot\beta)^2=\alpha^2\cdot\beta^2$ γράφεται $(\alpha\cdot\beta)\cdot(\alpha\cdot\beta)=(\alpha\cdot\alpha)\cdot(\beta\cdot\beta)$. β) Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς. **4.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 4.1. **5.** Ἀπ. $\alpha=\beta=1$, $\gamma=-e$. **6.** Ἀπ. Ἄν $x,y\in A_\nu$, τότε $x^\nu=1$, $y^\nu=1$, ὁπότε $(xy)^\nu=1$ καί $y^{-\nu}=1$ κτλ. **7.** Ὑπ. Δεῖξτε ἀρχικά ὅτι $\alpha \circ \alpha'=e$ καί ἔπειτα ὅτι τό e εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο ὡς πρός τήν πράξη $\circ$. **8.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2. **9.** Ὑπ. i) Ὑποθέστε ὅτι $x\cdot\alpha_\lambda=x\cdot\alpha_\mu$ μέ $\lambda\neq\mu$ καί καταλῆξτε σέ ἄτοπο. ii) Θεωρῆστε τήν $x\alpha_1.x\alpha_2\ldots x\alpha_\nu=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_\nu$. **10.** Ἀπ. $x=\frac{1}{43}(18,-3,2)$, $y=\frac{1}{43}(42,-7,19)$.

11. Ἀπ. $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. **12.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.4.

13. Ἀπ. $\gamma(1,1,1)+(\beta-\gamma)(1,1,0)+(\alpha-\beta)(1,0,0)$. **14.** Ὑπ. Βρεῖτε τίς λύσεις τοῦ (Σ) καί ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 5.3. Ἀπ. Μιά βάση τοῦ V ἀποτελεῖται μόνο ἀπό ἕνα διάνυσμα, π.χ. τό $(18,-1,-7)$. **15.** Ὑπ. Λάβετε ὑπόψη ὅτι τά β καί δ ἔχουν ἀντίστροφα στοιχεῖα. **16.** Ὑπ. Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. Ἀπ. $\frac{1}{\alpha\delta-\beta\gamma}(\delta,-\beta,-\gamma,\alpha)$ μέ $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$. **17.** Ὑπ. (i) Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 3.1. (ii) Ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό 2 τῆς 1.1. Ἀπ. Καί οἱ δύο δομές εἶναι ἀκέραιες περιοχές. **18.** Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $x-x\in A$ καί ἐφαρμόστε τόν ὁρισμό τῆς 2.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

1.4. **1**. 'Υπ. Στό ἄθροισμα $\alpha+\beta$ προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό β.

2. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι τό $\nu^3+2\nu+1$ ἔχει παράγοντα τό 4.

3. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ διαφορές $(\alpha_1+\beta_1)-(\alpha_2+\beta_2)$ καί $\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν.

4. 'Υπ. α) Λάβετε ὑπόψη σας ὅτι ἕνας ἀκέραιος εἶναι ἄρτιος ἤ περιττός. β) 'Αναπτύξτε τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ $2\lambda+1$ καί χρησιμοποιῆστε τό α).

5. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τίς ταυτότητες πού δίνουν τά ἀναπτύγματα τῶν $(\alpha+\beta)^2$ καί $(\alpha-\beta)^2$ καί λάβετε ὑπόψη σας ὅτι οἱ $\alpha+\beta$ καί $\alpha-\beta$ εἶναι ἄρτιοι.

6. 'Υπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\lambda=3\kappa$, $\lambda=3\kappa+1$, $\lambda=3\kappa+2$.

7. 'Υπ. Νά συνδυάσετε τίς περιπτώσεις $x=3\kappa+1$, $x=3\kappa+2$ μέ τίς $y=3\lambda+1$, $y=3\lambda+2$ καί νά ἀποδείξετε τό ζητούμενο.

8. 'Υπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $x=3\kappa+1$, $x=3\kappa+2$.

9. 'Υπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\kappa=6\lambda$, $\kappa=6\lambda+1,\ldots,\kappa=6\lambda+5$.

10. 'Υπ. α) Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\alpha=5\kappa+1,\ldots,\alpha=5\kappa+4$. β) Νά παραγοντοποιήσετε κατάλληλα τό x^4-y^4 καί νά χρησιμοποιήσετε τό α).

11. 'Υπ. Βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τοῦ ὑπολοίπου λ^3 καί προσδιορίστε τό λ. 'Απ. $\alpha=0$ ἤ $\alpha=138$ ἤ $\alpha=324$.

12. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι $2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1=2^{4\nu}-2^{2\nu}+2^{4\nu}-1$ καί ἔπειτα παραγοντοποιῆστε τό δεύτερο μέλος. Τό ζητούμενο θά προκύψει ἄν θυμηθεῖτε πῶς παραγοντοποιοῦνται τά $\alpha^{\kappa}-1$ καί $\alpha^{2\kappa+1}+1$ $(\kappa\in N)$.

13. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

14. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση 2 τῆς 1.3.

15. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι $9^{30}\equiv 1 \pmod 8$ καί $17^{10}\equiv 1 \pmod 8$ καί χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 3. 'Απ. 2.

16. 'Υπ. Παρατηρῆστε ὅτι τό $\frac{3}{4}\lambda-\frac{1}{4}$ πρέπει νά εἶναι ἀκέραιος. 'Απ. $\rho=3\kappa+2$, $\kappa\in Z$.

1.9. **1**. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη. 'Απ. $(27,20)=1$, $1=27.3+$ $+20.(-4)$.

2. 'Υπ. Νά γράψετε τίς δύο ἰσότητες τῆς διαιρέσεως καί νά συμπεράνετε ὅτι $\alpha|(238,510)$ καί $\alpha>15$. 'Απ. $\alpha=17$ ἤ $\alpha=34$.

3. 'Υπ. 'Εργαστεῖτε ὅπως στήν ἄσκηση 2. 'Απ. 21, 35, 105.

4. 'Υπ. Γράψτε τίς ἰσότητες τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων. 'Απ. $\alpha=1344$, $\beta=1004$.

5. 'Υπ. Ἄν α,β εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀκέραιοι, τότε $\alpha=24\alpha'$, $\beta=24\beta'$, $(\alpha',\beta')=1$ καί $\alpha'+\beta'=12$. 'Απ. 24,264 ἤ 120,168.

6. 'Απ. 2, 10080.

7. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε τή σχέση (2) καί τήν πρόταση 3 τῆς 1.5. Μπορεῖτε νά προσδιορίσετε μιά τριάδα (x,y,z), ἄν γράψετε $(32,48,72)=(32,(48,72))$ καί χρησιμοποιήσετε τόν ἀλγόριθμο τοῦ Εὐκλείδη. 'Απ. $(32,48,72)=8=32.1+48.1+72.(-1)$.

8. 'Υπ. 'Αναλύστε τό 120 σέ γινόμενο (θετικῶν) πρώτων παραγόντων. 'Απ. 1, 2, 2.3, 2.5, 2.3.5, 2^2, $2^2.3$, $2^2.5$, $2^2.3.5$, 2^3, $2^3.3$, $2^3.5$, $2^3.5$, $2^3.3.5$, 3,5, 3.5 (16 διαιρέτες).

9. 'Υπ. Παραγοντοποιῆστε τό πρῶτο μέλος τῆς ἐξισώσεως, βρεῖτε τό Δ (36) καί παρατηρῆστε ὅτι $x+y \equiv x-y \pmod 2$. 'Απ. $x = 10$, $y=8$.

10. 'Υπ. (i) Νά θέσετε $(\alpha,\beta) = \delta$ καί $(5\alpha+4\beta,\ \alpha+\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε μέ τή βοήθεια τῆς προτάσεως 4 τῆς 1.5 ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$. Στίς (ii) (iii) καί (iv) νά ἐργαστῆτε μέ ὅμοιο τρόπο.

11. 'Υπ. Πάρτε ἕνα κοινό διαιρέτη λ τῶν x καί y καί δεῖξτε ὅτι $\lambda = \pm 1$.

12. 'Υπ. (i) Νά θέσετε $(\alpha,\beta)=\delta$, $(\kappa\alpha,\kappa\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta'|\kappa\delta$ καί $\kappa\delta|\delta'$. (ii) Χρησιμοποιῆστε τήν πρόταση 2 τῆς 1.7 καί τήν (i).

13. 'Υπ. Πολλαπλασιάστε καί τά δύο μέλη τῆς $\alpha\alpha'+\beta\beta'=1$ μέ γ καί δεῖξτε ὅτι τό πρῶτο μέλος της διαιρεῖται μέ τό $\alpha\cdot\beta$.

14. 'Υπ. Νά θέστε $(\alpha,\beta)=\delta$, $[\alpha,\beta]=\mu$, ὁπότε $\alpha=\alpha_1\delta$, $\beta=\beta_1\delta$, $(\alpha_1,\beta_1)=1$ καί $\alpha\beta=\mu.\delta$. 'Απ. (i) $\alpha=10$, $\beta=240$ ἤ $\alpha=30$, $\beta=80$ ἤ $\alpha=80$, $\beta=30$ ἤ $\alpha=240$, $\beta=10$. (ii) $\alpha=154$, $\beta=350$ ἤ $\alpha=350$, $\beta=154$ ἤ $\alpha=110$, $\beta=3850$ ἤ $\alpha=3850$, $\beta = 110$. (iii) $\alpha=208$, $\beta=598$ ἤ $\alpha=598$, $\beta=208$ ἤ $\alpha=26$, $\beta=4784$ ἤ $\alpha=4784$, $\beta=26$.

15. 'Υπ. α) 'Αποδεῖξτε τό ζητούμενο μέ τήν εἰς ἄτοπο ἀπαγωγή.β) Νά θέσετε $(\alpha,\beta)=\delta$ καί $(\alpha,\ \kappa\beta)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$ χρησιμοποιώντας τό πρῶτο μέρος τῆς ἀσκήσεως καί τήν πρόταση 2 τῆς 1·6.

16. 'Υπ. Λάβετε ὑπόψη σας ὅτι κάθε παράγοντας ἑνός γινομένου ἀκεραίων εἶναι διαιρέτης τοῦ γινόμενου καί χρησιμοποιῆστε τό πρῶτο μέρος τῆς ἀσκήσεως 15. 'Αποδεῖξτε τό ἀντίστροφο χρησιμοποιώντας τή συνεπαγωγή τῆς ἀσκήσεως 15. 'Η ἐφαρμογή (i) εἶναι ἄμεση συνέπεια τοῦ πρώτου μέρους τῆς ἀσκήσεως, ἐνῶ ἡ (ii) ἀποδεικνύεται μέ τή βοήθεια τῆς (i).

17. 'Υπ. Γιά τίς (i) καί (ii) δεῖξτε ὅτι $(\alpha\pm\beta,\alpha) = (\alpha,\beta)$, $(\alpha\pm\beta,\beta)=(\alpha,\beta)$. Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς (iii) χρησιμοποιῆστε τίς (i) καί (ii) καί τήν ἄσκηση 16.

18. 'Υπ. Νά θέσετε $(\alpha,\beta,\gamma) = \delta$, $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha+\gamma}{2},\ \frac{\beta+\gamma}{2}\right)=\delta'$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|\delta'$ καί $\delta'|\delta$.

2.4. **1**. 'Απ $x=4-5\kappa$, $y=1-2\kappa$, $\kappa\in Z$.

2. 'Υπ. 'Εργαστεῖτε ὅπως στό παράδειγμα 2 τῆς 2.3 'Απ. Οἱ (i) καί (ii) ἔχουν μόνο ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις.

3. 'Υπ. Βρεῖτε τίς μή ἀρνητικές ἀκέραιες λύσεις τῆς $2x+5y=100$. 'Απ. Μέ 11 τρόπους.

4. 'Απ. (i) (10,1), (6,4), (2,7), (ii) (5,11), (10,2). (iii) (6,8) (iv) (3,6).

5. 'Απ. 4 μολ. καί 8 τετρ. ἤ 13 μολ. καί 1 τετρ.

6. 'Απ. α) (6,13), (14,8), (22,3) β) Μέγιστο κέρδος θά ἔχει, ἄν κατασκευάσει 22 κοσμήματα α' εἴδους καί 3 κοσμήματα β' εἴδους (μέγιστο κέρδος =15.450 δρχ.).

7. 'Υπ. 'Από τίς $x+y=37$, $x=5\pi+2$, $y=7\pi'+4$, προκύπτει $5\pi+7\pi'=31$. 'Απ. $x=12$, $y=25$.

4. **1**. 'Υπ. Θεωρῆστε τήν ἰσότητα $(\nu+7)(\nu-4)+33=\nu^2+3\nu+5$ καί δεῖξτε ὅτι $\nu+7 \equiv \nu-4 \pmod{11}$.

2. 'Απλή.

3. 'Υπ. 'Ονομάστε $\nu-2$, $\nu-1$, ν, $\nu+1$, $\nu+2$ τούς διαδοχικούς ἀκεραίους καί δεῖξτε ὅτι ὁ ν^2+2 δέ διαιρεῖται μέ τό 5.

4. 'Υπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\rho=6\kappa+1,\ldots, \rho=6\kappa+5$.

5. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι $p\geq 3$ καί συνεχίστε κατάλληλα.

6. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι πάντα ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς διαιρεῖται μέ τό 3.

7. 'Υπ. Παραγοντοποιῆστε τήν παράσταση.

8. 'Υπ. Προσθέστε καί ἀφαιρέστε τό $4^{5555}+4^{2222}$.

9. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι $\beta^2-4\alpha\gamma = 8\kappa+5$, $\kappa\in Z$, καί στή συνέχεια ὅτι τό $8\kappa+5$ δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

10. Ἀπ. $x=3$, $y=4$ καί $z=2$.

11. Ὑπ. Χρησιμοποιῆστε τό θεώρημα τῆς 1.3.

12. Ὑπ. Θεωρῆστε τή διαφορά $(\alpha+\beta)(\nu+\rho)-2(\nu\alpha+\rho\beta)$.

13. Ὑπ. Γράψτε τό κλάσμα στή μορφή

$$\frac{(5\nu+1)(3\nu+1)+5}{2(15\nu^2+8\nu+6)+5\nu+1}$$

14. Ὑπ. Παρατηρῆστε ὅτι $A = \frac{2}{9}(10^{\nu}-1)$ καί $B=\frac{8}{9}(10^{\mu}-1)$.

15. Ὑπ. Δεῖξτε ὅτι ἕνας τουλάχιστον εἶναι μικρότερος ἀπό 4. Ἀπ. 2,4,4 ἤ 2,3,6 ἤ 3,3,3.

16. Ὑπ. α) Δεῖξτε ὅτι ἕνας γραμμικός συνδυασμός τῶν $3\kappa+1$ καί $14\kappa+5$ εἶναι ἴσος μέ μονάδα. β) Λάβετε ὑπόψη τίς ἰσότητες $14\kappa+5 = 5(3\kappa-1)-(\kappa-10)$ καί $3\kappa-1=3(\kappa-10)+29$.

17. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\nu=4\kappa$, $\nu=4\kappa+1$, $\nu=4\kappa+2$, $\nu=4\kappa+3^{\kappa}$ καί παρατηρῆστε ὅτι $5^{4\kappa}=(26-1)^{2\kappa}=(24+1)^{2\kappa}$. Ἀπ. $\nu=4\kappa$.

18. Ὑπ. Νά θέσετε $(2\alpha-1, \beta)=\delta$ καί νά δείξετε ὅτι $\delta|1$.

19. Ὑπ. Εἶναι $(\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B) = ((\alpha A, \alpha B), (\beta A, \beta B))$ καί $[\alpha A, \alpha B, \beta A, \beta B]=[[\alpha A, \alpha B], [\beta A, \beta B]]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

1.7. 1. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$ καί $g(x)=\beta_\mu x^\mu+\ldots+\beta_0$ εἶναι τά δύο πολυώνυμα καί σχηματίστε τή διαφορά τους.

2. Ὑπ. Νά διακρίνετε τίς περιπτώσεις $\nu>\mu$ καί $\nu=\mu$.

3. Ἀπ. $\alpha=1$, $\beta=1$.

4. Ἀπ. i) $\alpha_3\neq 3$, ii) $\alpha_3=3$, iii) $\alpha_3=3$, $\alpha_2=-2$ καί $\alpha_1\neq 7$, iv) $\alpha_3=3$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_1=7$ καί $\alpha_0\neq -6$ καί v) $\alpha_3=3$, $\alpha_2=-2$, $\alpha_1=7$ καί $\alpha_0=-6$.

5. Ἀπ. $\alpha=2$, $\beta=7$, $\gamma=6$, $\delta=3$ ἤ $\alpha=2$, $\beta=-5$, $\gamma=-6$, $\delta=-3$.

6. Ὑπ. Τό $g(x)$ θά εἶναι: $g(x)=x^2+\mu x+\nu, \mu,\nu\in \mathbf{R}$, ὁπότε ἀπό τήν ἰσότητα $f(x)=(g(x))^2$ ἀποδεικνύουμε τό ζητούμενο.

7. Ὑπ. Νά πάρετε $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ καί $\pi(x)=\delta x+\varepsilon$ μέ $\delta\neq 0$. Ἀπ. $g(x)=3x^2-5x+2$ καί $\pi(x)=6x-5$ ἤ $g(x)=-3x^2+5x-2$ καί $\pi(x)=6x-5$.

8. Ὑπ. Τό $g(x)$ θά εἶναι τό πολύ 2ου βαθμοῦ, δηλ. $g(x)=kx^2+\lambda x+\mu$. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $f(x)-(g(x))^2$. Ἀπ. $g(x)=2x^2-2x-1$ ἤ $g(x)=-2x^2+2x+1$.

9. Ὑπ. Νά λάβετε ὑπόψη σας τήν ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$.

10. Ἀπ. $f(x)=\alpha x^2-\alpha x+\gamma$, μέ $\alpha, \gamma\in \mathbf{C}$.

2.6. 1. Ὑπ. Εἶναι $f_1(x)=g_1(x)\pi_1(x)$ καί $f_2(x)=g_2(x)\pi_2(x)$

2. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $g(x) \mid f_\kappa^\kappa(x)$, δηλ. $f_\kappa(x)=g(x)\cdot\pi(x)$.

3. Ὑπ. Ἐργασθεῖτε ὅπως στήν προηγούμενη ἄσκηση.

4. Ὑπ. Ὑποθέστε ὅτι $g(x) \mid f_1(x)$, ὁπότε $f_1(x)+f_2(x)=g(x)\pi(x)$ καί $f_1(x)=g(x)\pi_1(x)$.

5. Ἀπ. $x-1$.

6. Ἀπ. $\kappa=12$ καί $\lambda=30$.

7. 'Απ. $\kappa=1$.

8. 'Απ. $\lambda=\frac{1}{2}$ ἤ $\lambda=\frac{1}{3}$.

9. 'Υπ. Σχηματίστε τή διαφορά $f(x)-\varphi(x)$ καί δεῖξτε ὅτι $\varphi(x) \mid f(x)-\varphi(x)$.

10. 'Υπ. Στό $f(x)$ νά προσθέσετε καί νά ἀφαιρέσετε τόν ὅρο $\alpha^{\rho}x^{(\rho+1)\nu}$, ὥστε νά μπορέσετε νά τό κάμετε γινόμενο παραγόντων τοῦ $g(x)$ ἐπί κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$.

2.9. 1. 'Υπ. 'Αρκεῖ $g(x) \mid [f_1(x)\,\upsilon_2(x)-f_2(x)\upsilon_1(x)]$

2. 'Υπ. Εἶναι $(x-\alpha) \mid [f(x)-\upsilon]$ καί $(x-\beta) \mid [f(x)-\upsilon]$.

3.4. 1. 'Απ. α) $f(-2)=-23$, $f(5)=-1164$, β) $\varphi(-\sqrt{2})=-1-4\sqrt{2}$, γ) $g(1-i)=-3-2i$.

2. 'Απ. $\lambda=4$.

3. 'Απ. $\kappa=\frac{13}{4}$ καί $\lambda=-\frac{83}{2}$.

4. 'Υπ. πρέπει $f(-2)=6$ καί $f(1)=2$. 'Απ. $\alpha=\frac{5}{3}$ καί $\beta=-\frac{4}{3}$.

5. 'Απ. α) $\pi(x)=5x^2+14x+44$ καί $\upsilon=132$
β) $\pi(x)=x^4-2x^3+4x^2-8x+16$ καί $\upsilon=0$
γ) $\pi(x)=x^2-(2+3i)x+8+6i$ καί $\upsilon=-15-14i$
δ) $\pi(x)=x^3+3x^2+(6-2i)x+1-3i$ καί $\upsilon=-2-4i$
ε) $\pi(x)=4x^3+3x^2-\frac{3}{2}x-\frac{45}{4}$ καί $\upsilon=-\frac{275}{8}$

6. 'Υπ. Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\cdot\pi_1(x)+f(\alpha)$, ἡ ὁποία γιά $x=\beta$ δίνει $f(\beta)=(\beta-\alpha)\pi_1(\beta)+$ $+f(\alpha)$ κ.τ.λ.

7. 'Υπ. Τό ὑπόλοιπο εἶναι τό πολύ 2ου βαθμοῦ, δηλ. τῆς μορφῆς $\upsilon(x)=\kappa x^2+\lambda x+\mu$. Ἔτσι ἔχουμε $f(x)=[(x+1)\,(x-2)\,(x+3)]\pi(x)+\kappa x^2+\lambda x+\mu$, ἀλλά $f(-1)=2$ κ.τ.λ. 'Απ. $\upsilon(x)=x^2+2x+3$.

8. 'Υπ. i) Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\,(x-\beta)\,\pi(x)+\kappa x+\lambda$, ὁπότε $f(\alpha)=k\alpha+\lambda$ κ.τ.λ.
ii) Ἔχουμε $f(x)=(x-\alpha)\,\pi(x)+f(\alpha)$ καί $\pi(x)=(x-\alpha)\,\pi_1(x)+\pi(\alpha)$.

9. 'Υπ. Δεῖξτε τό ζητούμενο μέ τή μέθοδο τῆς μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.

10. 'Υπ. Νά πάρετε τό πολυώνυμο $f(x)=\kappa x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu$ καί νά ὑπολογίσετε τά κ,λ,μ,ν, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ ὑποθέσεις. 'Απ. $\kappa=\frac{1}{3}$, $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{6}$.

11. 'Υπ. 'Αρκεῖ νά δείξετε ὅτι $P(1)=0$. Νά σχηματίσετε τό $P(1)$ καί νά πάρετε τό $S_\nu=$ $=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu}$. Σχηματίστε τό γινόμενο ωS_ν(ω διαφορά τῆς ἀριθμ. προόδου) καί δεῖξτε ὅτι $S_\nu=\frac{\nu-1}{\alpha_1\alpha_\nu}$.

4.3. 1. 'Υπ. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-\lambda$ εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

2. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $x^2-2\rho x+\rho^2=(x-\rho)^2$.

3. 'Υπ. Νά λάβετε ὑπόψη σας ὅτι $f(x)=(x-\rho)^\kappa\pi_1(x)$, μέ $\pi_1(\rho)\neq 0$, $g(x)=(x-\rho)^\lambda\pi_2(x)$, μέ $\pi_2(\rho)\neq 0$ καθώς καί τόν ὁρισμό τοῦ Μ.Κ.Δ.

4. 'Υπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-1$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

5. 'Υπ. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τό σχῆμα Horner δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός 2 εἶναι ρίζα μέ βαθμό πολλαπλότητας 2.

6. 'Υπ. Χρησιμοποιῆστε διαδοχικά τό σχῆμα Horner.

7. Ύπ. Ἡ ἐξίσωση γράφεται: $(\lambda+1)(x^3-1)-(\lambda^2+5\lambda-5)x(x-1)=0$. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι μία ρίζα της εἶναι τό 1.

8. Ἀπ. $x^3-2x^2-5x+6=0$.

9. Ύπ. Ἄν x_1,x_2,x_3 εἶναι οἱ ρίζες τῆς ζητούμενης ἐξισώσεως καί ρ_1,ρ_2,ρ_3 οἱ ρίζες τῆς δοθείσας τότε $x_1=\rho_1^2$, $x_2=\rho_2^2$, $x_3=\rho_3^2$, ὁπότε $x_1+x_2+x_3=\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2$ κ.τ.λ.
Ἀπ. $x^3-(\alpha_1^2-2\alpha_2)x^2+(\alpha_2^2-2\alpha_1\alpha_3)x-\alpha_3^2=0$.

10. Ύπ. i) Χρησιμοποιῆστε τούς τύπους Vieta. ii) Ἀφοῦ $\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2=-2\alpha<0$, ἔχουμε ὅτι οἱ ρ_1,ρ_2,ρ_3 δέν εἶναι ὅλες πραγματικές, ὁπότε, ἄν ρ_1 εἶναι ἡ κοινή πραγματική ρίζα, τότε $\rho_2,\rho_3\in \mathbf{C}$ μέ $|\rho_2|=|\rho_3|$.

11. Ύπ. Ἄν P(x) εἶναι τό α' μέλος τῆς ἐξισώσεως τότε $P(\alpha_1)=\alpha_1$, $P(\alpha_2)=\alpha_2,\dots,P(\alpha_\nu)=\alpha_\nu$ Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=P(x)-x$. Ἀπ. $x=\beta$.

12. Ύπ. Δεῖξτε πρῶτα ὅτι οἱ ρίζες τοῦ Q(x) εἶναι καί ρίζες τοῦ P(x). Ὑπολογίστε ἔπειτα καί τήν τρίτη ρίζα τοῦ P(x) καί γράψτε τό P(x) μέ μορφή γινομένου.

13. Ύπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $F(x)=f(x)-f(0)$ καί δεῖξτε ὅτι εἶναι τό μηδενικό πολυώνυμο.

4.6. 1. Ἀπ. α) $-2,3,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2}$, β) $2,\frac{-3\pm i\sqrt{11}}{2}$, γ) $-1,2,3$

δ) $2,3,-\frac{1}{2}$, ε) $-2,\ \frac{5\pm i\sqrt{23}}{6}$, στ) 3(διπλῆ), $-\frac{1}{2}$, i, –i.

2. Ύπ. Πιθανές ρητές ρίζες εἶναι οἱ διαιρέτες τοῦ 4. Ἀπ. $\kappa=2,-4,-13,-19$.

3. Ύπ. Πιθανές ρητές ρίζες εἶναι οἱ ἀριθμοί $+1$ καί -1.

4. Ύπ. Ἄν ρ εἶναι ἀκέραια ρίζα, τότε $\rho^3+k_1\rho^2+k_2\rho+k_3=0$ ἤ $k_1\rho^2+k_2\rho+k_3=-\rho^3$.

5. Ἀπ. $\rho_1=3-i$, $\rho_2=3+i$, $\rho_3=2$, $k=22$ καί $\lambda=-20$.

6. Ἀπ. $1+i$, $1-i$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

7. Ἀπ. α) $f(x)=x^3-x^2+4x-4$, β) $f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+2$

8. Ἀπ. α) $f(x)=(x-i)(x+i)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

β) $f(x)=(x+2-\sqrt{3}i)(x+2+\sqrt{3}i)(x+i\sqrt{3})(x-i\sqrt{3})$

9. Ἀπ. $f(x)=(x-2)(x-3)(2x+1)$.

10. Ύπ. Νά λάβετε ὑπόψη ὅτι $\rho_1^{2\nu}+\alpha^\nu\rho_1^\nu+\beta^\nu=0$, $\rho_2^{2\nu}+\alpha^\nu\rho_2^\nu+\beta^\nu=0$, $\rho_1+\rho_2=-\alpha$ καί $\rho_1\rho_2=\beta$.

11. Ύπ. Τό $f(x)=(f_1(x)+if_2(x))\cdot(f_1(x)-if_2(x))$ κ.τ.λ.

12. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες τοῦ φ(x) εἶναι καί ρίζες τοῦ f(x).

13. Ύπ. Ἀπό τά $f(\rho)=0$, $f(\alpha_0)=0$ καί $f(0)=\alpha_0$, ὑπολογίστε τό $g(\rho)$.

14. Ύπ. Σχηματίστε τά $g(x)$, $f(x)-x$ καί $g(x)-x$ καί δεῖξτε ὅτι $g(\rho_1)-\rho_1=0$ κ.τ.λ.

15. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι δέν ὑπάρχει ρ, μέ $\rho\in Q^+$ καί $\sqrt{\rho}\in R-Q$: $f(\sqrt{\rho})=0$.

16. Ύπ. Χρησιμοποιώντας τούς τύπους Vieta, δεῖξτε ὅτι τό γινόμενο $(\rho_1-\rho_2)^2\cdot(\rho_2-\rho_3)^2\cdot(\rho_3-\rho_1)^2<0$, ὁπότε τά ρ_1,ρ_2,ρ_3 δέν μπορεῖ νἆναι πραγματικοί ἀριθμοί. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι τό $1-\rho_1<0$ καί $\sqrt{2}-\rho_1>0$.

17. Ύπ. Δεῖξτε ὅτι τό f(x) δέν ἔχει ρίζες τίς πιθανές ρητές ρίζες $\pm1,\pm2$, γιά $\lambda\in Z$.

18. Ύπ. Σχηματίστε τό πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-7$ καί δεῖξτε ὅτι μηδενίζεται γιά τέσσερις διαφορετικούς μεταξύ τους ἀκέραιους ἀριθμούς. Ἄν γιά $x=\tau$ ἰσχύει $P(\tau)=14$, δεῖξτε ὅτι δέν ἰσχύει ἡ σχέση $P(\tau)-7=7$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ. Στοιχεῖα θεωρίας ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV Πολυώνυμα

024000025147

ΕΚΔΟΣΗ Ε΄ 1982 (V) - ΑΝΤΙΤΥΠΑ 65.000 - ΣΥΜΒΑΣΗ 3763/12.2.82

ΕΚΤΥΠΩΣΗ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Χ. ΧΡΟΝΟΠΟΥΛΟΣ

ΟΕ
ΔΒ