ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Β. ΣΤΑΪΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1982

Λ. Αδαμόπουλος

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

## Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΥΛΗ ΕΠΙΛΟΓΗΣ**

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ ΣΤΑΪΚΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1982

*Τό βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπό τό συγγραφέα σέ συνεργασία μέ τούς Γ. Καρακώστα βοηθό τῆς Φυσικομαθηματικῆς Σχολῆς τοῦ Πανεπιστημίου Ἰωαννίνων καί Β. Θεοδωρακόπουλο Εἰσηγητή τοῦ ΚΕΜΕ.*

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ I

# ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

### 1. ΟΡΟΛΟΓΙΑ - ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

**1.1 Σύμβολα.** Κάθε λέξη πού μεταχειριζόμαστε εἶναι τό *σύμβολο* μιᾶς ἔννοιας. Τίς διάφορες μαθηματικές ἔννοιες τίς παριστάνουμε ὄχι μόνο μέ *λέξεις* ἀλλά καί μέ ἄλλα *σύμβολα* π.χ. μέ ἁπλά γράμματα ἤ μέ διάφορα γραφικά σήματα ἤ καί μέ συνδυασμούς τους. Π.χ. «ἡ εὐθεία ΑΒ», «ὁ ἀριθμός 5», «$\overrightarrow{AB}$», «$\alpha x + \beta = 0$», «$\sqrt{\alpha}$».

**1.2 Ἰσότητα.** Δυό σύμβολα x καί y μποροῦν νά παριστάνουν τήν ἴδια ἔννοια ἤ καί ἔννοιες, πού θεωροῦνται ἀπό μιά ὁρισμένη σκοπιά ταυτόσημες. Στήν περίπτωση αὐτή γράφουμε $x = y$, χρησιμοποιώντας τό σύμβολο $=$ *τῆς ἰσότητας*. Ἡ ἄρνηση τοῦ $x = y$ παριστάνεται μέ $x \neq y$ (τό σύμβολο $\neq$ διαβάζεται «διάφορο τοῦ»). Λ.χ.

$$5 = 5, \quad 5 = 2 + 3, \quad \text{ημ}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3} = \frac{20}{30}, \quad 3 \neq 4.$$

**1.3 Σύνολα - Στοιχεῖα.** Σέ μερικές περιπτώσεις μιά ἔννοια μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς *σύνολο* ὁρισμένων καί διακεκριμένων ἄλλων ἐννοιῶν, τῶν *στοιχείων* του. Π.χ. μιά εὐθεία μπορεῖ νά θεωρεῖται ὡς σύνολο τῶν σημείων της, μιά τάξη ὡς σύνολο τῶν μαθητῶν της κ.ο.κ. Ἀλλά καί ἕνα σύνολο μπορεῖ νά εἶναι στοιχεῖο ἑνός ἄλλου συνόλου. Π.χ. μιά εὐθεία μπορεῖ νά εἶναι στοιχεῖο μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφάνειας, μιά τάξη στοιχεῖο κάποιου σχολείου *πού θεωρεῖται* ὡς σύνολο τάξεων κτλ. Ἀξιοσημείωτα σύνολα ἀριθμῶν, μέ τά ὁποῖα ἔχουμε ἤδη ἀσχοληθεῖ, εἶναι τά σύνολα:

| | |
|---|---|
| $N$ | τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν |
| $N_0$ | τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς |
| $Z$ | τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (σχετικῶν ἀκεραίων) |
| $Q$ | τῶν ρητῶν ἀριθμῶν |
| $R$ | τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν |
| $R^+$ | τῶν θετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν |
| $R_0^+$ | τῶν μή ἀρνητικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν |
| $C$ | τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. |

Τήν ἔκφραση «τό x εἶναι στοιχεῖο τοῦ E» γράφουμε $x \in E$ (ἤ $E \ni x$ καί διαβάζουμε «ἀπό τό σύνολο E τό στοιχεῖο x») χρησιμοποιώντας τό σύμβολο $\in$. Τήν ἄρνηση αὐτῆς θά συμβολίζουμε μέ $x \notin E$ (ἤ: $E \not\ni x$) καί γενικά τήν ἄρνηση τῆς ἔννοιας πού παριστάνει ἕνα σύμβολο θά τή σημειώνουμε διαγράφοντας τό σύμβολο αὐτό μέ μιά γραμμή.

**Παρατήρηση.** Ἀντί τοῦ ὅρου στοιχεῖο χρησιμοποιεῖται καί ὁ ὅρος σημεῖο πού εἶναι μάλιστα καί πιό κατάλληλος στήν περίπτωση τοῦ συνόλου R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τοῦ συνόλου C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ὅπου, ὅπως ξέρουμε, τά στοιχεῖα τους παριστάνονται μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἤ ἑνός ἐπιπέδου ἀντίστοιχα.

**1.4 Προτασιακός τύπος - Συνθήκη.** Στά μαθηματικά χρησιμοποιοῦνται συχνά ἐκφράσεις ὅπως:

«x εἶναι ἀκέραιος»
«x εἶναι ἰσοσκελές τρίγωνο»
«x διαιρεῖ τόν ἀριθμό 10»
«$x \in E$»,

οἱ ὁποῖες καί ἀποδίδουν ὁρισμένες ἰδιότητες στό x.

Μία ἔκφαση πού περιέχει ἕνα σύμβολο x, σάν τίς παραπάνω, χαρακτηρίζεται, ὅπως εἶναι γνωστό ἀπ' τά μαθήματα τῶν προηγουμένων τάξεων, μέ τόν ὅρο *προτασιακός τύπος (ἀνοικτή πρόταση, ἤ συνθήκη) πού περιέχει ἕνα σύμβολο* x. Ἄν σέ ἕναν προτασιακό τύπο P(x) πού περιέχει ἕνα σύμβολο x, ἀντικαταστήσουμε τό σύμβολο x μέ ἕνα συγκεκριμένο στοιχεῖο α, ἤ ἄν, ὅπως λέμε, τό x λάβει ὡς τιμή τό α, τότε, ἀπ' τόν ὁρισμό, ὁ προτασιακός τύπος γίνεται πρόταση τήν ὁποία συμβολίζουμε μέ P(α). Π.χ.

P(x) : Ὁ x εἶναι φυσικός ἀριθμός
P(2) : Ὁ 2 εἶναι φυσικός ἀριθμός (ἀληθής)
$P\left(\frac{3}{4}\right)$ : Ὁ $\frac{3}{4}$ εἶναι φυσικός ἀριθμός (ψευδής).

Συνήθως σέ ἕνα προτασιακό τύπο P(x) ὑποθέτουμε ὅτι τό x παίρνει ὡς τιμές τά στοιχεῖα ἑνός συγκεκριμένου συνόλου E, δηλαδή, ὅπως λέμε, τό x διατρέχει τό E. Τότε τό x ὀνομάζεται *μεταβλητή* καί ὁ P(x) *προτασιακός τύπος (ἀνοικτή πρόταση ἤ συνθήκη) στό* E. Ἔτσι ἡ ἐξίσωση

$$x^2 - x + 2 = 0$$

πού εἶναι ἕνας προτασιακός τύπος, γράφεται μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τό x εἶναι ἀριθμός. Εἶναι λοιπόν ἡ ἐξίσωση αὐτή μιά συνθήκη σέ ἕνα σύνολο ἀριθμῶν π.χ. τό R ἤ τό C.

Ἄν P(x) εἶναι μιά συνθήκη στό E, τότε θά λέμε ὅτι *ἕνα στοιχεῖο* α *τοῦ E ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη αὐτή,* ἤ *ἡ συνθήκη* P(x) *ἰσχύει στό* α, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ πρόταση P(α) εἶναι ἀληθής. Οἱ ἐκφράσεις:

«γιά κάθε $x \in E$ ἰσχύει P(x)»

καί

«ὑπάρχει $x \in E$ τέτοιο ὥστε ἡ $P(x)$ νά ἰσχύει»
γράφονται ἀντίστοιχα:

$$(\forall\ x \in E)\ P(x) \quad \text{ἤ} \quad P(x)\ \ \forall\ x \in E$$

καί

$$(\exists\ x \in E)\ P(x),$$

ὅπου τά σύμβολα $\forall$ καί $\exists$ διαβάζονται ἀντίστοιχα «γιά κάθε» καί «ὑπάρχει» καί ὀνομάζονται ἀντίστοιχα *καθολικός* καί *ὑπαρξιακός ποσοδείκτης*. Πολλές φορές στίς παραπάνω ἐκφράσεις τό σύνολο E παραλείπεται καί τότε γράφουμε ἀντίστοιχα

$$(\forall\ x)\ P(x) \quad \text{ἤ} \quad P(x)\ \forall x$$

καί

$$(\exists\ x)\ \ P(x).$$

Ἐπίσης, ἄν κάθε στοιχεῖο τοῦ E ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη $P(x)$, δηλαδή, ἄν ἰσχύει $(\forall x \in E)\ P(x)$, τότε ἡ συνθήκη $P(x)$ ὀνομάζεται *ταυτότητα* στό E. Ἔτσι

«Ὁ x εἶναι φυσικός ἀριθμός» εἶναι ταυτότητα στό **N**.
«$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$» εἶναι ταυτότητα σέ κάθε σύνολο ἀριθμῶν
«$x^2 + 1 \geq 1$» εἶναι ταυτότητα στό **R**.

Ἄν $P(x)$ καί $Q(x)$ εἶναι συνθῆκες στό σύνολο E, θά γράφουμε

$$P(x) \Rightarrow Q(x) \quad \text{γιά κάθε } x \in E$$

καί θά διαβάζουμε «$P(x)$ συνεπάγεται $Q(x)$» ἤ «ἄν $P(x)$, τότε ἰσχύει $Q(x)$», τότε καί μόνο τότε, ἄν κάθε στοιχεῖο τοῦ E, πού ἱκανοποιεῖ τήν $P(x)$, ἱκανοποιεῖ καί τήν $Q(x)$.

Οἱ συνθῆκες $P(x)$ καί $Q(x)$ ὀνομάζονται ἰσοδύναμες, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ μιά συνεπάγεται τήν ἄλλη. Θά γράφουμε τότε

$$P(x) \Leftrightarrow Q(x) \quad \text{γιά κάθε } x \in E$$

καί θά διαβάζουμε «ἰσχύει $P(x)$ τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ $Q(x)$ ἰσχύει».

Ἄν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι μιά ἰσοδυναμία ὑπάρχει ἐξ ὁρισμοῦ, χρησιμοποιοῦμε τό σύμβολο $\underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow}$. Ἔτσι γιά τίς δυό συνθῆκες $P(x)$ καί $Q(x)$ πού εἶναι ἰσοδύναμες ἐξ ὁρισμοῦ γράφουμε:

$$P(x) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} Q(x) \quad \text{γιά κάθε } x \in E.$$

**1.5 Ἄλγεβρα συνόλων.** Κατά τήν ἐπεξεργασία ἑνός μαθηματικοῦ θέματος, γενικά, ὑπεισέρχονται ἀποκλειστικά τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου Ω, τό ὁποῖο ὀνομάζεται *βασικό σύνολο*. Π.χ. σέ διάφορα προβλήματα τῆς ἄλγεβρας θεωρήσαμε ὡς βασικό σύνολο τό σύνολο **R** τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐνῶ στήν ἐπεξεργασία ὁρισμένων γεωμετρικῶν προβλημάτων ὡς βασικό σύνολο Ω θεωρήσαμε τό σύνολο ὅλων τῶν ἐπιπέδων σχημάτων.

Ἔστω ὅτι A καί B εἶναι δυό σύνολα μέ στοιχεῖα ἀπ' τό βασικό σύνολο Ω. Ὅπως εἶναι γνωστό, λέμε ὅτι *τό σύνολο A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ B* καί συμβολίζουμε τοῦτο μέ $A \subseteq B$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *ἡ συνθήκη* $x \in A$ *συνεπάγεται τήν* $x \in B$. Γιά συντομία:

$$A \subseteq B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in B \text{ γιά κάθε } x \in \Omega).$$

Ἐπίσης ἡ *ἰσότητα* δυό συνόλων καί ἡ ἔννοια τοῦ *γνήσιου ὑποσυνόλου* (πού συμβολίζεται μέ $\subset$), ὅπως ξέρουμε, ὁρίζονται:

$$A = B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \text{ καὶ } B \subseteq A$$

$$A \subset B \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \text{ καὶ } A \neq B.$$

Μιά συνθήκη $P(x)$ στό βασικό σύνολο $\Omega$ ὁρίζει τό σύνολο $S$ ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ $\Omega$, πού τήν ἱκανοποιοῦν. Αὐτό παριστάνεται μέ $\{x \in \Omega: P(x)\}$, δηλαδή $S = \{x \in \Omega: P(x)\}$. Π.χ. ἄν $\Omega = R$, ἡ συνθήκη $x^2-1 = 0$ ὁρίζει τό σύνολο $S = \{x \in R: x^2-1 = 0\} = \{-1,1\}$. Ἄλλα ἀξιοσημείωτα ὑποσύνολα τοῦ $R$ πού ὁρίζονται ἀπό συνθῆκες εἶναι τά ἀκόλουθα, γνωστά ὡς διαστήματα τοῦ $R$:

1. *Ἀνοικτὸ διάστημα μὲ ἄκρα* $\alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$):
$(\alpha, \beta) = \{x \in R: \alpha < x < \beta\}$
2. *Κλειστὸ διάστημα μὲ ἄκρα* $\alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$):
$[\alpha, \beta] = \{x \in R: \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$
3. *Ἀνοικτὸ ἀριστερά, κλειστὸ δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα* $\alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$):
$(\alpha, \beta] = \{x \in R: \alpha < x \leqslant \beta\}$
4. *Κλειστὸ ἀριστερά, ἀνοικτὸ δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρα* $\alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$):
$[\alpha, \beta) = \{x \in R: \alpha \leqslant x < \beta\}$
5. *Ἀπέραντο ἀριστερά, ἀνοικτὸ δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρο* $\beta$:
$(-\infty, \beta) = \{x \in R: x < \beta\}$
6. *Ἀπέραντο ἀριστερά, κλειστὸ δεξιὰ διάστημα μὲ ἄκρο* $\beta$:
$(-\infty, \beta] = \{x \in R: x \leqslant \beta\}$
7. *Ἀπέραντο δεξιά, ἀνοικτὸ ἀριστερὰ διάστημα μὲ ἄκρο* $\alpha$:
$(\alpha, +\infty) = \{x \in R: \alpha < x\}$
8. *Ἀπέραντο δεξιά, κλειστὸ ἀριστερὰ διάστημα μὲ ἄκρο* $\alpha$:
$[\alpha, +\infty) = \{x \in R: \alpha \leqslant x\}$.

Ἐπίσης παρατηροῦμε ὅτι καί κάθε ὑποσύνολο $S$ ἑνός βασικοῦ συνόλου $\Omega$ μπορεῖ νά παρασταθεῖ, ὅπως παραπάνω, μέ μιά συνθήκη, τή συνθήκη $x \in S$ Ἔτσι ἔχουμε $S = \{x \in \Omega: x \in S\}$.

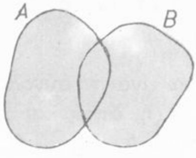
Τό σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων ἑνός βασικοῦ συνόλου $\Omega$ συμβολίζεται μέ $\mathscr{P}(\Omega)$. Πάνω σ' αὐτό ὁρίζονται, ὅπως γνωρίζουμε, οἱ πράξεις $\cup, \cap, -$ ἀπό τούς τύπους:

$$A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ἤ } x \in B\}$$

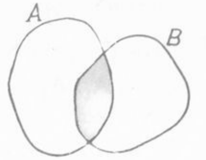
$$A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ καὶ } x \in B\}$$

$$A - B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ καὶ } x \notin B\}.$$

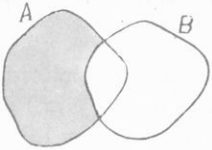
Μιά ἐποπτική ἑρμηνεία αὐτῶν τῶν πράξεων μᾶς δίνουν τά παρακάτω σχήματα:




*Σχ. 1* A∪B




*Σχ. 2* A∩B




*Σχ. 3* A − B

Τό κενό σύνολο $\varnothing$ εἶναι, ὅπως ξέρουμε, ἡ διαφορά A–A, ὅπου A εἶναι ὁποιοδήποτε ὑποσύνολο τοῦ Ω. Ἐπίσης τό συμπλήρωμα $A^c$ ἑνός συνόλου A, ὑποσυνόλου τοῦ βασικοῦ συνόλου Ω, ὅπως ξέρουμε, ὁρίζεται, νά εἶναι ἡ διαφορά Ω − A, δηλαδή

$$A^c = \Omega - A = \{\, x \in \Omega : x \notin A \,\}.$$

Μεταξύ τῶν πράξεων ∪, ∩, − ἀληθεύουν οἱ παρακάτω τύποι (ταυτότητες στό $\mathscr{P}(\Omega)$), πού μᾶς εἶναι γνωστοί ἀπ' τά μαθήματα τῶν προηγούμενων τάξεων:

| | |
|---|---|
| $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ |
| $A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$ | $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$ |
| $A \cup \varnothing = A$ | $A \cap \Omega = A$ |
| $A \cup (A \cap B) = A$ | $A \cap (A \cup B) = A$ |
| $(A - B) \cup B = A \cup B$ | $(A - B) \cap B = \varnothing$ |

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$

**1.6 Ζεῦγος - Καρτεσιανό γινόμενο.** Ἕνα στοιχεῖο α πού χαρακτηρίζεται ὡς *πρῶτο* καί ἕνα στοιχεῖο β πού χαρακτηρίζεται ὡς *δεύτερο* σχηματίζουν ἕνα νέο στοιχεῖο, τό ὁποῖο γράφεται (α,β) καί ὀνομάζεται (διατεταγμένο) *ζεῦγος*. Τά στοιχεῖα α καί β τοῦ ζεύγους ὀνομάζονται *πρώτη* καί *δεύτερη*, ἀντίστοιχα *προβολή* τοῦ ζεύγους. Ἄν οἱ προβολές τοῦ ζεύγους εἶναι ἀριθμοί, ὀνομάζονται καί συντεταγμένες τοῦ ζεύγους.

Ἀπ' τόν παραπάνω ὁρισμό τοῦ ζεύγους συμπεραίνουμε ὅτι δυό ζεύγη εἶναι *ἴσα*, ὅταν ὄχι μόνο σχηματίζονται ἀπό τά ἴδια στοιχεῖα, ἀλλά καί ὅταν τά στοιχεῖα αὐτά παρουσιάζονται μέ τήν ἴδια διαδοχή, δηλαδή

$$(\alpha,\beta) = (\gamma,\delta) \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ καί } \beta = \delta.$$

Μέ ὅμοιο τρόπο ὁρίζεται καί μιά (διατεταγμένη) τριάδα $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ἤ μιά (διατεταγμένη) νιάδα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$.

**Παραδείγματα:**

**1.** Ἕνα κλάσμα μέ ἀριθμητή α καί παρονομαστή β μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς ζεῦγος (α,β).

**2.** Ἕνας μιγαδικός ἀριθμός α+βi μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς ζεῦγος (α,β).

**3.** Ἕνας ἀγώνας μεταξύ δύο ὁμάδων α καί β μπορεῖ νά παρασταθεῖ ὡς ζεῦγος (α,β) ἤ (β,α) ἐφόσον διεξάγεται στήν ἕδρα τῆς α ἤ τῆς β ὁμάδας, ἀντίστοιχα.

Ἔστω A καί B δυό σύνολα. Τό σύνολο τῶν ζευγῶν (α,β) μέ $\alpha \in A$ καί $\beta \in B$

γράφεται $A\times B$ καί ὀνομάζεται *καρτεσιανό γινόμενο τοῦ* Α *ἐπί τοῦ* Β. Δηλαδή :

$$A \times B = \{(x,y):\ x\in A \text{ καί } y\in B\}.$$

Παρόμοια ὁρίζεται τό γινόμενο $A_1\times A_2\times\ldots\times A_\nu$ νά εἶναι τό σύνολο τῶν νιάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu)$ μέ $\alpha_\kappa \in A_\kappa$, γιά κάθε $\kappa\in\{1,2,\ldots,\nu\}$ (ἤ, ὅπως καί ἀλλιῶς λέμε: γιά κάθε $\kappa = 1,2,\ldots,\nu$). Ἄν ἕνα τουλάχιστο ἀπό τά $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ εἶναι τό κενό σύνολο, τότε προκύπτει εὔκολα ὅτι καί τό καρτεσιανό γινόμενο $A_1\times A_2\times\ldots\times A_\nu$ εἶναι πάλι τό κενό σύνολο.

Γιά συντομία, τό $A\times A$ συμβολίζεται μέ $A^2$, τό $A\times A\times A$ μέ $A^3$ κ.ο.κ.

Τό σύνολο Δ τῶν ζευγῶν $(\alpha,\alpha)$ μέ $\alpha\in A$ ὀνομάζεται *διαγώνιος τοῦ* $A^2$ καί εἶναι φανερό ὅτι $\Delta \subseteq A^2$.

**Παραδείγματα :**

1. $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{1, 2\}$
   $A\times B = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2)\}$
   $B\times A = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma)\} \neq A\times B$.

2. Ἄν Α εἶναι τό σύνολο τῶν ποδοσφαιρικῶν ὁμάδων πού παίρνουν μέρος σ' ἕνα πρωτάθλημα, τότε, τό σύνολο τῶν ἀγώνων τοῦ πρωταθλήματος εἶναι $A^2-\Delta$, ἐφόσον σέ κάθε ἀγώνα συμμετέχουν διαφορετικές ὁμάδες καί τό πρωτάθλημα γίνεται σέ δυό γύρους.

**Παρατήρηση.** Μιά ἔκφραση πού περιέχει δυό σύμβολα x καί y μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι περιέχει ἕνα σύμβολο, δηλαδή τό ζεῦγος (x,y). Π.χ. οἱ ἐκφράσεις:

« Τὸ κλάσμα $\frac{x}{y}$ εἶναι ἀνάγωγο »
« Ὁ x διαιρεῖ τὸν y »
« $x^2 + 2y^2 = 2$ »

ὀνομάζονται *προτασιακοί τύποι (ἀνοικτές προτάσεις* ἤ *συνθῆκες)* πού περιέχουν δυό σύμβολα x καί y καί συμβολίζονται μέ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ κ.λ.π. Τέτοιοι προτασιακοί τύποι μποροῦν νά θεωρηθοῦν ὡς προτασιακοί τύποι πού περιέχουν ἕνα σύμβολο, τό ζεῦγος (x,y). Ἔτσι, ἐκφράσεις σάν τίς

$$(\forall x, y)\ P(x, y) \quad \text{καί} \quad (\exists x, y)\ P(x,y)$$

ἔχουν ἀντίστοιχα τήν ἴδια ἔννοια μέ τίς

$$(\forall (x, y))\ P(x, y) \quad \text{καί} \quad (\exists (x, y))\ P(x, y).$$

Ἀνάλογα ὁρίζονται καί προτασιακοί τύποι πού περιέχουν τρία ἤ καί περισσότερα (πεπερασμένου πλήθους) σύμβολα.

## 2. ΣΧΕΣΕΙΣ (ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΕΣ) - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

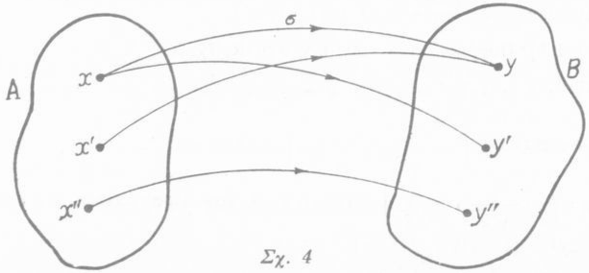
**2.1 Σχέση.** Δυό στοιχεῖα πού ἀνήκουν στό ἴδιο ἤ σέ διαφορετικά σύνολα μπορεῖ νά συνδέονται λογικά, δηλαδή νά συσχετίζονται. Π.χ. ὅταν λέμε «τό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει ἐμβαδόν 100 m²» συσχετίζουμε *ἕνα τρίγωνο μέ ἕναν ἀριθμό*, ἤ ὅταν λέμε «ὁ ἀριθμός 25 εἶναι τό τετράγωνο τοῦ ἀριθμοῦ 5» συσχετίζουμε *δυό ἀριθμούς* κτλ. Παρακάτω ἐξετάζουμε τέτοιες συσχετίσεις στοιχείων δυό συνόλων, τά ὁποῖα (σύνολα) δέν εἶναι ἀπαραίτητο νά εἶναι διαφορετικά.

Ἔστω Α καί Β δυό μή κενά σύνολα καί ἕνας συγκεκριμένος τρόπος (π.χ. ἕνας κανόνας ἤ μιά διαδικασία) μέ τόν ὁποῖο μπορεῖ τουλάχιστον ἕνα $x\in A$ νά συσχετίζεται μέ ἕνα ἤ περισσότερα $y \in B$. Θά λέμε τότε ὅτι ὁρίζεται μιά *σχέση (ἀντιστοιχία)* $\sigma$ ἀπό τό $A$ στό $B$ καί θά σημειώνουμε

$x\sigma y$ ἤ $x \overset{\sigma}{\longmapsto} y$ γιά τά στοιχεῖα πού συσχετίζονται

ἀνάλογα μέ τό ἄν χρησιμοποιεῖται, ἀντίστοιχα, ὁ ὅρος *σχέση* ἤ *ἀντιστοιχία*

Τό παρακάτω σχῆμα μᾶς δίνει μιά ἐποπτική ἑρμηνεία τῆς σχέσεως $\sigma$




*Σχ. 4*

Τό σύνολο $A$ ὀνομάζεται *σύνολο ἀφετηρίας* τῆς $\sigma$. Τό σύνολο $B$ ὀνομάζεται *σύνολο ἀφίξεως* τῆς $\sigma$, ἐνῶ ἡ ἔκφραση $x\sigma y$ ἤ $x \overset{\sigma}{\longmapsto} y$ (πού εἶναι ἡ συμβολική μορφή τοῦ τρόπου, μέ τόν ὁποῖο καθορίζονται τά στοιχεῖα ἐκεῖνα πού συσχετίζονται) ὀνομάζεται *τύπος* τῆς $\sigma$. Ἡ ἔκφραση $x\sigma y$ διαβάζεται «τό $x$ βρίσκεται στή σχέση $\sigma$ μέ τό $y$», ἐνῶ ἡ $x \overset{\sigma}{\longmapsto} y$ διαβάζεται «τό $x$ ἀντιστοιχίζεται μέ τή $\sigma$ στό $y$», ἤ «τό $y$ εἶναι τό ἀντίστοιχο τοῦ $x$ μέ τή $\sigma$».

Ὅλα τά ζεύγη $(x,y)$ γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $x\sigma y$ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο $S_\sigma$ (ὑποσύνολο τοῦ $A\times B$), τό ὁποῖο ὀνομάζεται *γράφημα (graph)* τῆς σχέσεως $\sigma$. Εἶναι λοιπόν

$$S_\sigma = \{(x,y) \in A\times B:\ x\sigma y\} \neq \varnothing .$$

Ὥστε κάθε σχέση $\sigma$ ἀπό τό $A$ στό $B$ ἔχει ἕνα γράφημα $S_\sigma \subseteq A\times B$. Ἀλλά καί ἀντίστροφα: κάθε μή κενό σύνολο $S$, ὑποσύνολο τοῦ $A\times B$ ὁρίζει μιά σχέση $\sigma_s$ μέ τύπο:

$$x\sigma_s y \Leftrightarrow (x,y) \in S$$

καί ἡ ὁποία ἔχει γράφημα τό $S$, ἤτοι $S_{\sigma_s} = S$.

Ὅλα τά στοιχεῖα $x \in A$, πού βρίσκονται στή σχέση $\sigma$ μέ ἕνα (τουλάχιστο) $y \in B$, ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο $\mathscr{D}(\sigma)$ τό ὁποῖο ὀνομάζεται *πεδίο ὁρισμοῦ (domain)* τῆς σχέσεως $\sigma$. Εἶναι λοιπόν

$$\mathscr{D}(\sigma) = \{x \in A : \exists\, y \in B \text{ μέ } x\sigma y\} \subseteq A$$

Ὅλα τά στοιχεῖα $y \in B$ πού βρίσκονται στή σχέση $\sigma$ μέ ἕνα (τουλάχιστο) $x \in A$ ἀποτελοῦν ἕνα σύνολο $\mathscr{R}(\sigma)$, τό ὁποῖο ὀνομάζεται *πεδίο τιμῶν (range)* τῆς σχέσεως $\sigma$. Εἶναι λοιπόν

$$\mathscr{R}(\sigma) = \{y \in B : \exists\, x \in A \text{ μέ } x\sigma y\} \subseteq B.$$

**Παραδείγματα:**

**1.** $A = B = R$, $(\forall x,y)\ x\sigma y \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 1$.

Γιά κάθε x,y στό R, ἔχουμε

$$x\sigma y \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 1-x^2 = 2y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leqslant 1$$

πού σημαίνει ὅτι $\mathscr{D}(\sigma) \subseteq [-1,1]$. Ἀλλά καί $[-1,1] \subseteq \mathscr{D}(\sigma)$, γιατί γιά κάθε $x \in [-1,1]$, ὑπάρχει y μέ xσy. Πραγματικά γιά $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{2}}$, ἔχουμε

$$x^2 + 2y^2 = x^2 + 2\,\frac{1-x^2}{2} = x^2 + (1-x^2) = 1.$$

Ἄρα $\mathscr{D}(\sigma) = [-1,1]$. Παρόμοια γιά κάθε x,y στό R, ἔχουμε

$$x^2 + 2y^2 = 1 \Rightarrow 1-2y^2 = x^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leqslant \frac{1}{2}$$

πού σημαίνει ὅτι $\mathscr{R}(\sigma) \subseteq \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Ἀλλά καί $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \subseteq \mathscr{R}(\sigma)$, γιατί γιά κάθε $y \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ ὑπάρχει x μέ xσy. Πραγματικά γιά $x = \sqrt{1-2y^2}$, ἔχουμε $x^2 + 2y^2 = (1-2y^2) + 2y^2 = 1$.

Ἄρα $\mathscr{R}(\sigma) = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

**2.** $A = B = R$, $(\forall x,y)\ x\sigma y \Leftrightarrow (x^2+1)y^2 - x^2 = 0$.

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $x \in R$, ὑπάρχει y μέ xσy. Πραγματικά γιά $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ἔχουμε

$$(x^2+1)y^2 - x^2 = (x^2+1)\,\frac{x^2}{x^2+1} - x^2 = x^2 - x^2 = 0.$$

Ἄρα $\mathscr{D}(\sigma) = R$. Ἐπίσης γιά κάθε x,y στό R ἔχουμε

$$(x^2+1)y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2+1} < 1$$

πού σημαίνει ὅτι $\mathscr{R}(\sigma) \subseteq (-1,1)$. Ἀλλά καί $(-1,1) \subseteq \mathscr{R}(\sigma)$, γιατί γιά κάθε $y \in (-1,1)$ ὑπάρχει x μέ xσy. Πραγματικά γιά $x = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, ἔχουμε

$$(x^2+1)y^2 - x^2 = \left(\frac{y^2}{1-y^2}+1\right)y^2 - \frac{y^2}{1-y^2} = \frac{1}{1-y^2}\,y^2 - \frac{y^2}{1-y^2} = 0.$$

Ἄρα τό πεδίο τιμῶν εἶναι $\mathscr{R}(\sigma) = (-1,1)$.

**3.** $A = B = R$, $(\forall x,y)\ x\sigma y \Leftrightarrow (y^2+1)x^2 - 4y^2 = 0$.

Γιά κάθε x,y στό R ἔχουμε

$$(y^2+1)\,x^2 - 4y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4y^2}{y^2+1} < 4$$

πού σημαίνει ὅτι $\mathscr{D}(\sigma) \subseteq (-2,2)$. Ἀλλά καί $(-2,2) \subseteq \mathscr{D}(\sigma)$, γιατί γιά ὁποιοδήποτε $x \in (-2,2)$ ὑπάρχει y μέ xσy. Πραγματικά γιά $y = \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, ἔχουμε :

$$(y^2+1)x^2 - 4y^2 = \left(\frac{x^2}{4-x^2}+1\right)x^2 - 4\,\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}\,x^2 - 4\,\frac{x^2}{4-x^2} = 0.$$

Ἄρα τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς σ εἶναι

$$\mathscr{D}(\sigma) = (-2,2).$$

'Επίσης παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $y \in R$ ὑπάρχει $x$ μέ $x\sigma y$. Πραγματικά γιά $x = \frac{2y}{\sqrt{y^2+1}}$, ἔχουμε:

$$(y^2+1)x^2 - 4y^2 = (y^2+1) \cdot \frac{4y^2}{y^2+1} - 4y^2 = 4y^2 - 4y^2 = 0$$

καί ἄρα

$$\mathcal{R}(\sigma) = R.$$

**4.** $A = B = R$, $(\forall\, x,y)\quad x\sigma y \Leftrightarrow x + y < 1.$

Πρῶτα ἀπ' ὅλα παρατηροῦμε ὅτι γιά κάθε $x \in R$ ὑπάρχει $y$ μέ $x\sigma y$. Πραγματικά γιά $y = -x$, ἔχουμε

$$x + y = x + (-x) = 0 < 1.$$

Ἄρα $\mathcal{D}(\sigma) = R$. 'Επίσης γιά κάθε $y \in R$ ὑπάρχει $x$ μέ $x\sigma y$. Πραγματικά γιά $x = -y$ ἔχουμε

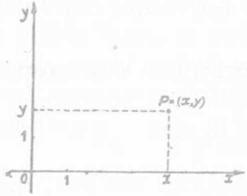
$$x + y = (-y) + y = 0 < 1$$

καί ἄρα $\mathcal{R}(\sigma) = R$.

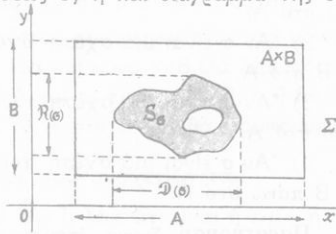
'Επειδή $\mathcal{D}(\sigma) \subseteq A$ καί $\mathcal{R}(\sigma) \subseteq B$ μεταχειριζόμαστε εἰδικότερα τίς ἐκφράσεις «σχέση *τοῦ* Α...» (ἀντί *ἀπό τό*), ὅταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι $\mathcal{D}(\sigma) = A$ καί «σχέση... *πάνω στό* Β», ὅταν θέλουμε νά δηλώσουμε ὅτι $\mathcal{R}(\sigma) = B$. Ἔτσι ἡ σχέση

τοῦ παραδείγματος 2 εἶναι *τοῦ* R *στό* R
τοῦ παραδείγματος 3 εἶναι *ἀπό τό* R *πάνω στό* R
τοῦ παραδείγματος 4 εἶναι *τοῦ* R *πάνω στό* R

**Γεωμετρική (ἤ γραφική) παράσταση σχέσεως.** Στήν περίπτωση ὅπου τά σύνολα ἀφετηρίας καί ἀφίξεως μιᾶς σχέσεως σ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό γράφημα $S_\sigma$ τῆς σχέσεως αὐτῆς ἀποτελεῖται ἀπό ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν $(x,y)$, τά ὁποῖα, ὅπως ξέρουμε, παριστάνονται στό ἐπίπεδο μέ σημεῖα P, ὅπως φαίνεται στό σχ. 5. Ἔτσι τό γράφημα $S_\sigma$ παριστάνεται μέ ἕνα σημειοσύνολο τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 6) καί ὀνομάζεται *γεωμετρική (ἤ γραφική) παράσταση* τῆς σχέσεως σ, ἤ καί *διάγραμμα* τῆς σ.

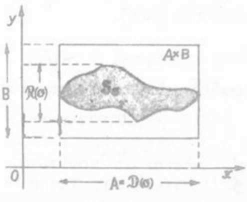



Σχ. 5



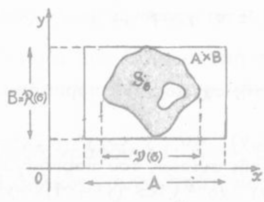

Σχ. 6

σχέση σ ἀπὸ τὸ Α στὸ Β



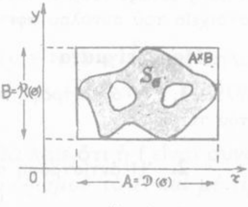

Σχ. 7

σχέση σ τοῦ Α στό Β




Σχ. 8

σχέση σ ἀπό τό Α πάνω στό Β




Σχ. 9

σχέση σ τοῦ Α πάνω στό Β

**Ἀντίστροφη σχέση.** Ἄς θεωρήσουμε μιά σχέση $\sigma$ ἀπό τό A στό B τῆς ὁποίας τό γράφημα εἶναι

$$S_\sigma = \{(x,y) \in A \times B : x\sigma y\} \neq \varnothing.$$

Μέ ἐναλλαγή τῆς διαδοχῆς τῶν στοιχείων τοῦ ζεύγους $(x,y)$ ἔχουμε τό ἀκόλουθο ὑποσύνολο τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $B \times A$.

$$S^* = \{(y,x) \in B \times A : (x,y) \in S_\sigma\}$$

πού εἶναι, βέβαια, σύνολο ἐπίσης μή κενό.

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, τό σύνολο $S^*$ ὁρίζει μιά σχέση ἀπό τό B στό A μέ τύπο

$$y\sigma_{s^*}x \Leftrightarrow (y,x) \in S^*, \text{ γιά κάθε } x,y.$$

Ἐπειδή $(y,x) \in S^* \Leftrightarrow (x,y) \in S_\sigma \Leftrightarrow x\sigma y$, θά ἔχουμε καί

$$y\sigma_{s^*}x \Leftrightarrow x\sigma y, \text{ γιά κάθε } x,y.$$

Ἄν λοιπόν ἕνα σημεῖο x βρίσκεται στή σχέση $\sigma$ μέ τό y, τότε τό y βρίσκεται στή σχέση $\sigma_{s^*}$ πάλι μέ τό x. Ἡ σχέση $\sigma_{s^*}$ ὀνομάζεται *ἀντίστροφη σχέση* τῆς $\sigma$ καί συμβολίζεται μέ $\sigma^{-1}$. Ὥστε

$$x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma^{-1}x, \text{ γιά κάθε } x,y.$$

Ἄρα ἡ σχέση $\sigma^{-1}$ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό πεδίο τιμῶν τῆς $\sigma$ καί πεδίο τιμῶν τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\sigma$, δηλαδή ἰσχύουν

$$\mathscr{D}(\sigma^{-1}) = \mathfrak{R}(\sigma) \text{ καί } \mathfrak{R}(\sigma^{-1}) = \mathscr{D}(\sigma).$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι:

1) Ἄν $\sigma$ εἶναι μιά σχέση *ἀπό τό* A *στό* B, τότε ἡ $\sigma^{-1}$ εἶναι σχέση *ἀπό τό* B *στό* A.

2) Ἄν $\sigma$ εἶναι μιά σχέση *ἀπό τό* A *πάνω στό* B, τότε ἡ $\sigma^{-1}$ εἶναι σχέση *τοῦ* B *στό* A.

3) Ἄν $\sigma$ εἶναι μιά σχέση *τοῦ* A *στό* B, τότε ἡ $\sigma^{-1}$ εἶναι σχέση *ἀπό τό* B *πάνω στό* A.

4) Ἄν $\sigma$ εἶναι μιά σχέση *τοῦ* A *πάνω στό* B, τότε ἡ $\sigma^{-1}$ εἶναι σχέση *τοῦ* B *πάνω στό* A.

**Παρατήρηση.** Συχνά, ὅταν πρόκειται νά μελετηθεῖ μόνη της ἡ $\sigma^{-1}$, ἀλλάζουμε τά x καί y μεταξύ τους, δηλαδή θεωροῦμε $x \in B$ καί $y \in A$, ὥστε τό x νά συμβολίζει πάντα ἕνα στοιχεῖο τοῦ συνόλου ἀφετηρίας. Ἔτσι γράφουμε $x\sigma^{-1}y$ (καί ἰσοδύναμα $y\sigma x$).

**Παραδείγματα:**

**1.** Ἡ ἀντίστροφη σχέση τῆς σχέσεως τοῦ παραπάνω παραδείγματος 1 δίδεται ἀπ' τόν τύπο

$$(\forall x,y) \quad x\,\sigma^{-1}\,y \Leftrightarrow y^2 + 2x^2 = 1.$$

**2.** Ἡ ἀντίστροφη σχέση τῆς σχέσεως τοῦ παραδείγματος 2 δίδεται ἀπ' τόν τύπο

$$(\forall x,y) \quad x\sigma^{-1}\,y \Leftrightarrow (y^2+1)x^2 - y^2 = 0.$$

**3.** Ἡ ἀντίστροφη σχέση τῆς σχέσεως τοῦ παραδείγματος 4 εἶναι ἡ ἴδια σχέση.

Ἐπειδή, ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἀντίστροφης σχέσεως, ἔχουμε ὅτι

$$(x,y) \in S_\sigma \Leftrightarrow (y,x) \in S_{\sigma^{-1}}$$

καί ἐπειδή, ὅταν πρόκειται γιά γραφήματα στό $R^2$, τά σημεῖα $P=(x,y)$ καί $P^*=(y,x)$ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν πρώτη διχοτόμο d τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων (βλ. σχ. 10), τά διαγράμματα τῶν σχέσεων σ καί $\sigma^{-1}$ θά εἶναι ἐπίσης *συμμετρικά* ὡς πρός τήν d.

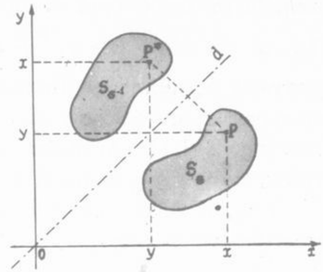
Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, γιά κάθε σχέση σ ἰσχύει

$$(\forall\ x,y)\ x\sigma y \Leftrightarrow y\,\sigma^{-1}x$$

καί ἄρα γιά τήν ἀντίστροφη σχέση $\sigma^{-1}$ τῆς σ θά ἰσχύει

$$(\forall\ x,y)\ y\,\sigma^{-1}\,x \Leftrightarrow x(\sigma^{-1})^{-1}y,$$

ὅπου $(\sigma^{-1})^{-1}$ εἶναι ἡ ἀντίστροφη σχέση τῆς $\sigma^{-1}$. Ἄρα ἰσχύει καί



*Σχ. 10.*

$$(\forall\ x,y)\quad x\sigma y \Leftrightarrow x(\sigma^{-1})^{-1}y,$$

δηλαδή ἡ ἀντίστροφη τῆς ἀντίστροφης μιᾶς σχέσεως σ εἶναι ἡ ἴδια ἡ σ. Γιά συντομία γράφουμε

$$(\sigma^{-1})^{-1}=\sigma.$$

Ἡ ἰδιότητα αὐτή γεωμετρικά ἑρμηνεύεται μέ τή βοήθεια τῆς συμμετρίας ὡς πρός τή διχοτόμο d (βλ. σχ. 10) τῶν διαγραμμάτων τῶν σχέσεων σ καί $\sigma^{-1}$.

**2.2 Συνάρτηση**. Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι μιά ἀπ' τίς πιό θεμελιώδεις μαθηματικές ἔννοιες. Αὐτή τήν ὁρίζουμε σά μιά εἰδική σχέση.

Μιά σχέση f ἀπό τό Α στό Β ὀνομάζεται *συνάρτηση* τότε καί μόνο τότε, ἄν κάθε $x \in \mathscr{D}(f)$ βρίσκεται στή σχέση f μέ ἕνα καί μόνο $y \in B$. Θά λέμε τότε ὅτι ἡ f *εἶναι συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ* $\mathscr{D}(f) \subseteq A$ *καί μέ τιμές* στό Β, ἤ *ἡ* f *εἶναι μονοσήμαντη ἀντιστοιχία (ἤ ἀπεικόνιση) ἀπό τό* Α *στό* Β καί θά γράφουμε

$$x \overset{f}{\longmapsto} y \text{ γιά τά στοιχεῖα πού συσχετίζονται.}$$

Τό y, πού εἶναι ἀντίστοιχο τοῦ x μέ τήν f, λέμε ὅτι εἶναι ἡ *τιμή* ἤ ἡ *εἰκόνα τῆς* f *στό* x καί συμβολίζεται μέ f(x). Τότε γράφουμε

$$y=f(x), \text{ ἤ καί } y=f[x].$$

Ἄρα ἡ ἔκφραση $y=f(x)$ εἶναι μιά ἄλλη μορφή τοῦ xfy ἤ τοῦ $x \overset{f}{\longmapsto} y$, δηλαδή *ὁ τύπος τῆς* f. Τό x ὀνομάζεται *ἀνεξάρτητη μεταβλητή* τῆς f καί τό y *ἐξαρτημένη μεταβλητή* τῆς f.

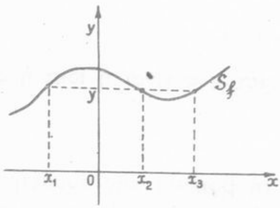
Ἄν $\mathscr{D}(f)=A$, τότε θά γράφουμε $f: A \to B$ καί θά λέμε ὅτι ἡ f εἶναι συνάρτηση *τοῦ* Α *στό* Β ἤ καί ἀλλιῶς, συνάρτηση *μέ πεδίο ὁρισμοῦ* τό Α *καί μέ τιμές στό* Β.

Ἄν $\mathscr{D}(f) = A$ καί $\mathscr{R}(f) = B$, τότε θά γράφουμε $f\colon A \xrightarrow{\text{πάνω}} B$ καί θά λέμε ὅτι ἡ f εἶναι συνάρτηση *τοῦ* A *πάνω στό* B.

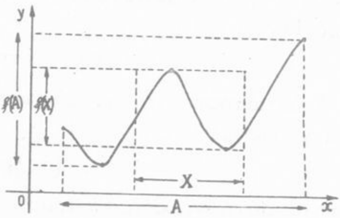
Ἄν $\mathscr{R}(f) \subseteq R$, τότε λέμε ὅτι ἡ f εἶναι *πραγματική συνάρτηση*. Ἐπίσης, ἄν καί $\mathscr{D}(f) \subseteq R$, τότε λέμε ὅτι αὐτή εἶναι *πραγματική συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς* (γιά τό διάγραμμα μιᾶς τέτοιας συναρτήσεως βλ. σχ. 11). Π.χ. μέ τόν τύπο $R \ni x \overset{f}{\longmapsto} x^2$ ὁρίζεται μιά πραγματική συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Παρόμοια καί μέ τόν τύπο $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{1-x^2}$ ὁρίζεται μιά πραγματική συνάρτηση μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $[-1,1]$. Ἀντίθετα, παρατηροῦμε ὅτι ἀπό τίς σχέσεις τῶν παραδειγμάτων τῆς προηγούμενης § 2.1 καμιά δέν εἶναι συνάρτηση.

Γιά μιά συνάρτηση f ἀπό τό A στό B, τό σύνολο τῶν τιμῶν της, δηλαδή τό πεδίο τιμῶν της $\mathscr{R}(f)$ συμβολίζεται καί μέ $f(A)$. Ἔτσι ἔχουμε

$$f(A) = \{\, y \in B :\ \exists\, x \in A \ \text{ μέ } y = f(x)\}.$$




*Σχ. 11* $\quad x \xrightarrow{f} y$




*Σχ. 12*

Γενικότερα, ἄν $X \subseteq A$, τότε μέ $f(X)$ συμβολίζουμε τό σύνολο τῶν τιμῶν τῆς f στά διάφορα στοιχεῖα τοῦ X (βλ. σχ. 12), δηλαδή

$$f(X) = \{y \in B :\ \exists\, x \in X \ \text{ μέ } \ f(x) = y\}.$$

**Ἀντίστροφη συνάρτηση.** Ἄς θεωρήσουμε μιά συνάρτηση f ἀπό τό A στό B. Ἐπειδή ἡ f εἶναι σχέση ἀπό τό A στό B, ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφη σχέση $f^{-1}$ ἀπό τό B στό A καί μάλιστα, ὅπως εἴδαμε καί παραπάνω, ἰσχύουν

$$\mathscr{D}(f^{-1}) = \mathscr{R}(f) \quad \text{καί} \quad \mathscr{R}(f^{-1}) = \mathscr{D}(f).$$

Ἄν ἡ σχέση $f^{-1}$ εἶναι ἐπίσης συνάρτηση, τότε αὐτή ὀνομάζεται *ἀντίστροφη συνάρτηση* τῆς f. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, μάλιστα, τό x ἀπεικονίζεται μέ τήν f μόνο στό $f(x)$ καί τό $f(x)$ μέ τήν $f^{-1}$ μόνο στό x. Ἔτσι ἔχουμε

$$(\forall\ x \in \mathscr{D}(f)) \quad f^{-1}[f(x)] = x$$

καί ἀνάλογα

$$(\forall\ y \in \mathscr{R}(f)) \quad f[f^{-1}(y)] = y.$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ἄν $f(x_1) = f(x_2)$, τότε καί $f^{-1}[f(x_1)] = f^{-1}[f(x_2)]$ δηλαδή $x_1 = x_2$. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι, ἄν καί ἡ $f^{-1}$ εἶναι μιά συνάρτηση, τότε ἔχουμε

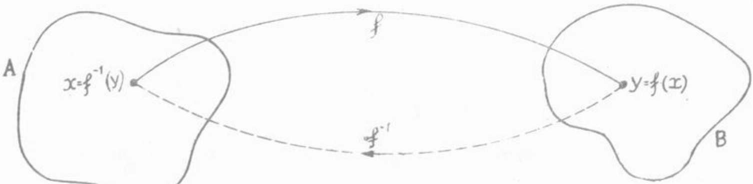
$$(\forall\ x_1, x_2 \text{ στό } \mathscr{D}(f))\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

ἢ ἰσοδύναμα

$$(\forall\ x_1, x_2 \text{ στό } \mathscr{D}(f))\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Μιά συνάρτηση f ἀπό τό A στό B πού ἱκανοποιεῖ τήν παραπάνω συνθήκη ὀνομάζεται *ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση* (ἤ *ἕνα πρός ἕνα*). Τότε, βέβαια, καί ἡ $f^{-1}$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση καί ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

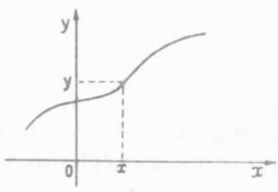
$$(\forall\ x,y)\quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$




*Σχ. 13*

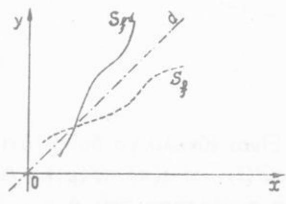
Ἔτσι ἔχει ἀποδειχθεῖ τό παρακάτω θεώρημα.

**2.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ἡ συνάρτηση* f *ἔχει ἀντίστροφη συνάρτηση, δηλαδή ἡ σχέση* $f^{-1}$ *εἶναι ἐπίσης συνάρτηση, τότε καί μόνον τότε, ἄν αὐτή (δηλαδή ἡ f)* εἶναι *ἀμφιμονοσήμαντη.*




*Σχ. 14*

*ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση*




*Σχ. 15*

*ἀντίστροφη συνάρτηση*

**Σύνθεση συναρτήσεων.** Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις f καί g. Ὁ τύπος

$$y = g\,[f(x)]$$

ἔχει ἔννοια γιά ἐκεῖνα τά x καί μόνο, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $x \in \mathscr{D}(f)$ καί $f(x) \in \mathscr{D}(g)$. Ἔτσι, ἄν τό σύνολο

$$\{x : x \in \mathscr{D}(f) \quad \text{καί} \quad f(x) \in \mathscr{D}(g)\}$$

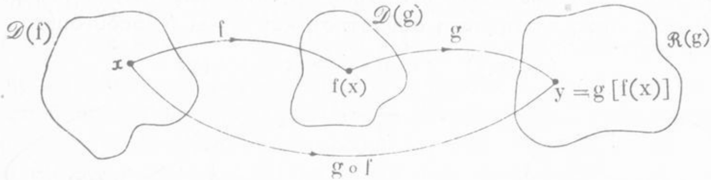
εἶναι μή κενό, ὁ παραπάνω τύπος ὁρίζει μιά συνάρτηση πού ὀνομάζεται *σύνθεση τῶν συναρτήσεων* f *καί* g καί συμβολίζεται μέ $g \circ f$. Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι

$$\mathscr{D}(g \circ f) = \{x : x \in \mathscr{D}(f) \text{ καί } f(x) \in \mathscr{D}(g)\} \subseteq \mathscr{D}(f)$$

καί

$$\mathcal{R}(g \circ f) \subseteq \mathcal{R}(g)$$

Ἡ σύνθεση $g \circ f$ εἶναι λοιπόν μιά συνάρτηση ἀπό τό $\mathcal{D}(f)$ στό $\mathcal{R}(g)$ καί ἑρμηνεύεται ἐποπτικά στό παρακάτω σχῆμα

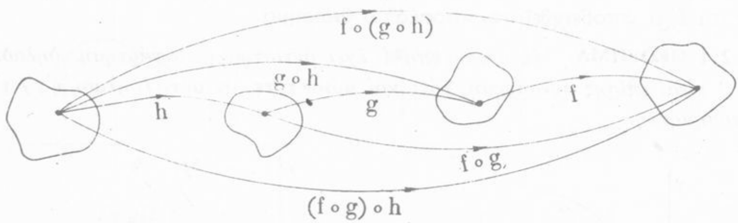



*Σχ. 16*

Ἡ πράξη τῆς συνθέσεως συναρτήσεων εἶναι *προσεταιριστική*, δηλαδή ἰσχύει

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ὅπως προκύπτει ἀπό τό παρακάτω σχῆμα.




*Σχ. 17*

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἄν $f: A \to B$ καί $g: B \to \Gamma$ τότε τό σύνολο $\{x: x \in \mathcal{D}(f)$ καί $f(x) \in \mathcal{D}(g)\} = A$ καί ἄρα καί ἡ σύνθεση $g \circ f$ ὁρίζεται πάντοτε ὡς μιά συνάρτηση τοῦ Α στό Γ, δηλαδή

$$g \circ f : A \to \Gamma$$

**Παραδείγματα:**

1. Ἡ σύνθεση τῶν συναρτήσεων f καί g μέ

$$f(x) = 2x + 3 \quad \text{καί} \quad g(x) = \text{ημ}x$$

εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο

$$y = \text{ημ}(2x + 3) \quad \text{ἤ} \quad g \circ f\,(x) = \text{ημ}(2x + 3).$$

Ἐδῶ ἔχουμε

$$\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{R}(f) = \mathbf{R},\ \mathcal{R}(g) = [-1,1],\ \mathcal{R}(g \circ f) = [-1,1].$$

2. Ἡ σύνθεση τῶν συναρτήσεων f καί g μέ

$$f(x) = x^2 + 1 \quad \text{καί} \quad g(x) = \sqrt{x}$$

εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο

'Εδῶ ἔχουμε

$$y = \sqrt{x^2+1} \quad ἤ \quad g∘f(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}, \quad \mathcal{D}(g) = [0, +\infty), \quad \mathcal{D}(g∘f) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{R}(f) = [1, +\infty), \quad \mathcal{R}(g) = [0, +\infty), \quad \mathcal{R}(g∘f) = [1, +\infty).$$

3. Ἡ σύνθεση τῶν συναρτήσεων f καί g μέ

$$f(x) = |x| \quad καί \quad g(x) = \sqrt{x}$$

εἶναι ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο

$$y = \sqrt{|x|} \quad ἤ \quad g∘f(x) = \sqrt{|x|}.$$

'Εδῶ ἔχουμε

$$\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}, \ \mathcal{D}(g) = [0, +\infty), \ \mathcal{D}(g∘f) = \mathbf{R}$$

$$\mathcal{R}(f) = [0, +\infty), \quad \mathcal{R}(g) = [0, +\infty), \quad \mathcal{R}(g∘f) = [0, +\infty).$$

**2.3 Πράξεις.** Θεωροῦμε ἕνα μή κενό σύνολο E καί μιά συνάρτηση ἀπό τό $E^2$ στό E. Μιά τέτοια συνάρτηση ὀνομάζεται *πράξη μέσα στό* σύνολο E. Ἄν $*$ εἶναι μιά *πράξη μέσα στό* σύνολο E, θά γράφουμε

$$x * y \text{ ἀντί τοῦ } *(x,y)$$

καί θά τό ὀνομάζουμε *ἀποτέλεσμα* τῆς πράξεως $*$ πάνω στά $x,y$.

Εἰδικότερα ἄν $E = \mathbf{R}$, τότε γνωρίζουμε ὅτι ἡ πρόσθεση $+$ καί ὁ πολλαπλασιασμός, καθώς καί ἡ ἀφαίρεση $-$ καί ἡ διαίρεση: εἶναι πράξεις στό $\mathbf{R}$, ἤ, μέ ἄλλα λόγια, πράξεις πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἀπό αὐτές ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός, εἶναι οἱ βασικότερες ἀφοῦ οἱ ἄλλες δύο ὁρίζονται, ὅπως ξέρουμε, ἀπό τούς τύπους

$$x - y = x + (-y) \quad καί \quad x : y = x \cdot \frac{1}{y}, \ y \neq 0.$$

Στίς περιπτώσεις αὐτές τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως $+$ πάνω στά $x,y$ ὀνομάζεται καί *ἄθροισμα τῶν* $x,y$ καί τῆς $\cdot$ *γινόμενο τῶν* $x,y$. Ἐπίσης οἱ ἀριθμοί $x,y$ ὀνομάζονται στήν πρώτη περίπτωση *προσθετέοι* καί στή δεύτερη *παράγοντες*. Γιά τίς δυό αὐτές βασικές πράξεις ξέρουμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

$$\begin{array}{lll} x + (y+z) = (x+y) + z, & x(yz) = (xy)z & \text{(προσεταιριστική)} \\ x + y = y + x, & xy = yx & \text{(ἀντιμεταθετική)} \\ x + 0 = x = 0 + x, & x1 = x = 1x & \\ x + (-x) = 0 = (-x) + x, & x\frac{1}{x} = 1 = \frac{1}{x}x, \ x \neq 0 & \\ x(y+z) = xy + xz & & \text{(ἐπιμεριστική)} \end{array}$$

Γενικότερα, ἄν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, τότε ὁρίζουμε

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\nu = \begin{cases} x_1, & ἄν\ \nu = 1 \\ (x_1 + x_2 + \ldots + x_{\nu-1}) + x_\nu, & ἄν\ \nu > 1 \end{cases}$$

καί τό ὀνομάζουμε *γενικευμένο ἄθροισμα τῶν* $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ καί

$$x_1\ x_2 \ldots x_\nu = \begin{cases} x_1, & \text{ἄν } \nu = 1 \\ (x_1\ x_2 \ldots x_{\nu-1})x_\nu, & \text{ἄν } \nu > 1 \end{cases}$$

καί τό ὀνομάζουμε *γενικευμένο γινόμενο* τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$. Γιά συντομία τό γενικευμένο ἄθροισμα τῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ παριστάνεται μέ $\sum\limits_{k=1}^{\nu} x_k$ καί τό γενικευμένο γινόμενο $\prod\limits_{k=1}^{\nu} x_k$, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\nu} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu \quad \text{καί} \quad \prod_{k=1}^{\nu} x_k = x_1\ x_2 \cdots x_\nu.$$

Τώρα παρατηροῦμε ὅτι μιά γενίκευση τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητας εἶναι

$$\sum_{k=1}^{\nu} x_k = \sum_{k=1}^{\rho} x_k + \sum_{k=\rho+1}^{\nu} x_k \quad , \quad \prod_{k=1}^{\nu} x_k = \prod_{k=1}^{\rho} x_k \prod_{k=\rho+1}^{\nu} x_k$$

γιά κάθε $\rho = 1, 2, \ldots, \nu-1$ ἐνῶ μιά γενίκευση τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητας εἶναι

$$\sum_{k=1}^{\nu} (\xi x_k + \eta y_k) = \xi \sum_{k=1}^{\nu} x_k + \eta \sum_{k=1}^{\nu} y_k$$

ὅπου $\xi$ καί $\eta$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

Εἰδικά τό

$$\underbrace{\alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{\nu \text{ φορές}} \quad \text{γράφεται } \nu\alpha$$

καί ὀνομάζεται *νιοστό πολλαπλάσιο τοῦ* α, ἐνῶ

$$\underbrace{\alpha\ \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ φορές}} \quad \text{γράφεται } \alpha^\nu$$

καί ὀνομάζεται *νιοστή δύναμη τοῦ* α. Τό ν στήν πρώτη περίπτωση ὀνομάζεται *πολλαπλασιαστής τοῦ* α καί στή δεύτερη *ἐκθέτης τοῦ* α.

Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες

$$\alpha^\mu\ \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}, \ (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu} \quad \text{καί} \quad (\alpha\beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu.$$

Τέλος, παρατηροῦμε ὅτι μιά ἄλλη ἰδιότητα πού ἰσχύει γιά τούς πραγματικούς ἀριθμούς εἶναι καί ἡ παρακάτω *ἀνισότητα τοῦ Bernoulli* :

$$(1 + \alpha)^\nu \geq 1 + \nu\alpha \quad \forall\ \nu \in N_0 \quad \text{καί} \quad \alpha > -1$$

ὅπου ἡ ἰσότητα ἰσχύει μόνο γιά $\alpha = 0$ ἤ $\nu = 0$, $\nu = 1$.

Γιά νά τήν ἀποδείξουμε θά στηριχθοῦμε πάνω σέ μιά ἀποδεικτική μέθοδο πού ὀνομάζεται *ἐπαγωγική μέθοδος* καί πού ἔχει ὡς ἑξῆς:

Θεωροῦμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό μ καί ἕναν προτασιακό τύπο $P(x)$ στό σύνολο $\{x \in Z: x \geq \mu\}$ πού περιέχει τό μ καί ὅλους τούς μεγαλύτερους ἀπ' αὐτόν ἀκεραίους. Ἄν ἡ πρόταση $P(\mu)$ εἶναι ἀληθής καί γιά κάθε ἀκέραιο $k \geq \mu$ ἰσχύει

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

τότε ἡ πρόταση $P(\nu)$ εἶναι ἀληθής γιά ὁποιοδήποτε ἀκέραιο $\nu \geq \mu$.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι γιά $\nu=0$, $\nu=1$ ἤ $\alpha=0$ ἡ ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli* ἰσχύει ἀφοῦ

$$(1+\alpha)^0 = 1 = 1 + 0\alpha, \qquad (1+\alpha)^1 = 1 + \alpha = 1 + 1\alpha$$
$$(1+0)^\nu = 1^\nu = 1 = 1 + \nu 0.$$

Ἀπομένει ν' ἀποδείξουμε ὅτι

$$(1+\alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha \quad \forall\, \nu \geq 2 \quad \text{καί} \quad \alpha > -1 \text{ μέ } \alpha \neq 0.$$

Θέτουμε

$$P(\nu) : (1+\alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha,\ \nu \geq 2$$

καί ἐφαρμόζουμε τήν ἐπαγωγική μέθοδο γιά $\mu = 2$. Ἔτσι ἔχουμε

$$(1+\alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha$$

δηλαδή ἡ πρόταση $P(2)$ εἶναι ἀληθής.

Ἐπίσης γιά κάθε $k \geq 2$ ἔχουμε

$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^k\,(1+\alpha) \geq (1+\kappa\alpha)\,(1+\alpha) = 1 + (k+1)\alpha + \kappa\alpha^2 > 1 + (k+1)\alpha$$

δηλαδή

$$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha$$

καί ἑπομένως ἡ πρόταση $P(\nu)$ εἶναι ἀληθής γιά κάθε ἀκέραιο $\nu \geq 2$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι στό $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν:
   1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ 2) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
2. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι στό $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν:
   1) $\Omega^c = \varnothing$ 2) $\varnothing^c = \Omega$ 3) $(A^c)^c = A$ 4) $A \cup A^c = \Omega$ 5) $A \cap A^c = \varnothing$.
3. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι στό $\mathcal{P}(\Omega)$ ἰσχύουν (τῦποι τοῦ de Morgan):
   $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{καί} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
4. Νά βρεθεῖ τό πεδίο ὁρισμοῦ καί τό πεδίο τιμῶν τῶν σχέσεων σ ἀπό τό R στό R πού ὁρίζονται ἀπό τούς τύπους:
   1) $y^2 = x$ 2) $y = x^3$ 3) $y = x^2 + 1$ 4) $3x + 2y = 1$
   5) $x^2 + y^3 = 1$ 6) $x < y$ 7) $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 8) $x^2 < y < x^2 + 1$.
5. Ποιές εἶναι οἱ ἀντίστροφες σχέσεις τῶν σχέσεων τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως 4;
6. Ποιές ἀπό τίς σχέσεις τῆς ἀσκήσεως 4 εἶναι συναρτήσεις καί ποιές δέν εἶναι;
7. Ποιές ἀπό τίς συναρτήσεις τῆς ἀσκήσεως 4 ἔχουν ἀντίστροφες συναρτήσεις;

8*. Μιά πράξη $*$ μέσα σ' ἕνα σύνολο E ὀνομάζεται *ὁλική* ἄν $\mathcal{D}(*) = E^2$ καί *μερική* ἄν $\mathcal{D}(*) \subset E^2$. Ποιές ἀπό τίς πράξεις $+, -, \cdot\,, :$ στό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁλικές καί ποιές μερικές;

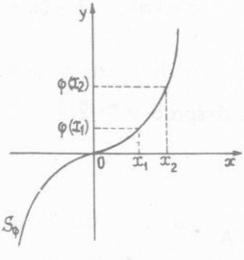
ΚΕΦΑΛΑΙΟ II

# ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

## 1. ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**1.1 Αὔξουσες καί φθίνουσες συναρτήσεις.** Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση φ μέ $\varphi(x) = x^3$ διατηρεῖ τή φυσική διάταξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή γιά κάθε $x_1, x_2$ ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$




*Σχ. 18* $\varphi : y = x^3$

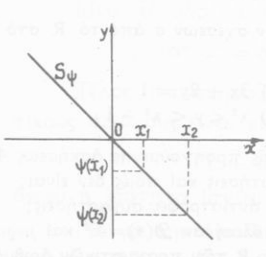
Γενικά μιά πραγματική συνάρτηση f μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς πού διατηρεῖ, ὅπως καί ἡ φ, τή φυσική διάταξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὀνομάζεται *γνησίως αὔξουσα*. Ἀκριβέστερα, γιά μιά συνάρτηση $f : A \rightarrow R$ μέ $A \subseteq R$ δίδουμε τόν παρακάτω ὁρισμό:

Ἡ συνάρτηση f ὀνομάζεται *γνησίως αὔξουσα* τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $x_1, x_2$ στό A ἰσχύει

(1) $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$

Παρόμοια, ἡ συνάρτηση f ὀνομάζεται *γνησίως φθίνουσα* τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $x_1$, $x_2$ στό A ἰσχύει

(2) $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$




*Σχ. 19* $\psi : y = -x$

Π.χ. ἡ συνάρτηση ψ μέ $\psi(x) = -x$ εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Ἄν οἱ (1) καί (2) ἀντικατασταθοῦν ἀντίστοιχα ἀπό τίς

(1′) $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(2′) $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$

τότε λέμε στήν περίπτωση τῆς (1′) ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι *αὔξουσα* καί στήν περίπτωση τῆς (2′) ὅτι ἡ f εἶναι *φθίνουσα*, δηλαδή:

Ἡ συνάρτηση f ὀνομάζεται *αὔξουσα* τότε καί μόνο τότε ἄν γιά κάθε $x_1$, $x_2$ στό A ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Ἡ συνάρτηση f ὀνομάζεται *φθίνουσα* τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε $x_1, x_2$ στό A ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Ἐπίσης λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f εἶναι *γνησίως μονότονη* τότε καί μόνο τότε, ἄν αὐτή εἶναι γνησίως αὔξουσα ἤ γνησίως φθίνουσα. Ἀντίστοιχα λέμε ὅτι ἡ f εἶναι *μονότονη*, ἄν αὐτή εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα. Γιά νά δηλώσουμε τό εἶδος τῆς μονοτονίας μιᾶς συναρτήσεως χρησιμοποιοῦμε τά παρακάτω σύμβολα:

$f \overset{\wedge}{\uparrow}$ ἤ $f \nearrow$ $\Leftrightarrow$ f εἶναι γνησίως αὔξουσα
$f \overset{\vee}{\downarrow}$ ἤ $f \searrow$ $\Leftrightarrow$ f εἶναι γνησίως φθίνουσα
$f \uparrow$ ἤ $f \nearrow$ $\Leftrightarrow$ f εἶναι αὔξουσα
$f \downarrow$ ἤ $f \searrow$ $\Leftrightarrow$ f εἶναι φθίνουσα.

Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι σταθερή, δηλαδή κάθε $x \in A$ ἀπεικονίζεται μέ τήν f στόν ἴδιο πάντοτε πραγματικό ἀριθμό, ἤ μέ ἄλλα λόγια, τό πεδίο τιμῶν $\mathcal{R}(f)$ εἶναι ἕνα μονομελές σύνολο, τότε ἡ f εἶναι ταυτόχρονα αὔξουσα καί φθίνουσα. Ἀλλά καί ἀντίστροφα, ἄν ἡ f εἶναι ταυτόχρονα αὔξουσα καί φθίνουσα θά ἔχουμε γιά ὁποιαδήποτε $x_1, x_2$ στό A ($x_1 \neq x_2$) ὅτι $f(x_1) = f(x_2)$, δηλαδή ὅτι ἡ f εἶναι σταθερή συνάρτηση. Πραγματικά· γιά $x_1 < x_2$ ἔχουμε

$$f(x_1) \leq f(x_2) \text{ (γιατί } f\uparrow) \text{ καί } f(x_1) \geq f(x_2) \text{ (γιατί } f\downarrow)$$

δηλαδή $f(x_1) = f(x_2)$. Παρόμοια, γιά $x_2 < x_1$ ἔχουμε

$$f(x_2) \leq f(x_1) \text{ (γιατί } f\uparrow) \text{ καί } f(x_2) \geq f(x_1) \text{ (γιατί } f\downarrow)$$

δηλαδή πάλι $f(x_1) = f(x_2)$. Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

1.1.1. *Ἡ συνάρτηση* $f: A \to R$ ($A \subseteq R$) *εἶναι σταθερή τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ* f *εἶναι ταυτόχρονα αὔξουσα καί φθίνουσα.*

Ἄς μελετήσουμε τώρα ὡς πρός τή μονοτονία τήν πραγματική συνάρτηση ω μέ $\omega(x) = \frac{1}{x}$, πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο $R - \{0\}$.

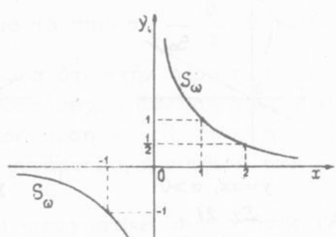
Ἄν δεχθοῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση ω εἶναι φθίνουσα, δηλαδή ὅτι γιά κάθε $x_1, x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \omega(x_1) \geq \omega(x_2),$$

τότε γιά $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ καταλήγουμε στό ἄτοπο $-1 = \omega(-1) \geq \omega(1) = 1$.

Ἐπίσης, ἄν δεχθοῦμε ὅτι ἡ ω εἶναι αὔξουσα, δηλαδή ὅτι γιά κάθε $x_1, x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \omega(x_1) \leq \omega(x_2),$$



*Σχ. 20* $\omega$: $y = \frac{1}{x}$

τότε γιά $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ καταλήγουμε στό ἄτοπο $1 = \omega(1) \leq \omega(2) = \frac{1}{2}$.

Ὥστε ἡ συνάρτηση ω δέν εἶναι μονότονη. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι, ἄν περιορισθοῦμε γιά $x_1, x_2$ στό $(-\infty, 0)$, ἰσχύει

$$(3) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow \omega(x_1) = \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} = \omega(x_2),$$

δηλαδή στό $(-\infty, 0)$ βλέπουμε ὅτι ἡ συνθήκη νά εἶναι ἡ ω γνησίως φθίνουσα πληροῦται. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση ω εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $(-\infty, 0)$.

Παρόμοια καί γιά $x_1, x_2$ στό $(0, +\infty)$ ἰσχύει ἡ (3) καί ἀνάλογα λέμε ὅτι ἡ ω εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $(0, +\infty)$.

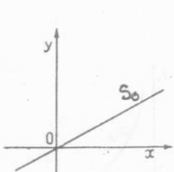
Γενικά, ἄν γιά τή συνάρτηση f ἰσχύει ἡ (2) γιά κάθε $x_1, x_2$ στό B, (ὅπου B εἶναι ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ της A) τότε λέμε ὅτι ἡ f εἶναι *γνησίως φθίνουσα στό* B καί συμβολίζουμε αὐτό μέ $f \,\overline{\downarrow}\, B$.

Ἀνάλογα λέμε ὅτι ἡ f εἶναι *γνησίως αὔξουσα* στό B, ἄν ἡ (1) ἰσχύει γιά κάθε $x_1$, $x_2$ στό B καθώς ἐπίσης καί ὅτι ἡ f εἶναι *αὔξουσα στό* B ἤ *φθίνουσα στό* B, ἄν ἡ (1′) ἤ (2′) ἀντίστοιχα ἰσχύει γιά κάθε $x_1$, $x_2$ στό B. Γιά νά δηλώσουμε ἀντίστοιχα ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα *στό* B, αὔξουσα στό B καί φθίνουσα στό B, χρησιμοποιοῦμε τούς συμβολισμούς $f \,\underline{\uparrow}\, B$, $f \uparrow B$ καί $f \downarrow B$.

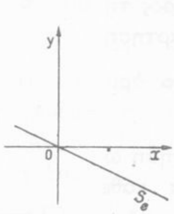
Π.χ. ἡ συνάρτηση ἡμίτονο, πού ὅπως γνωρίζουμε παριστάνεται καί μέ τό σύμβολο ημ, εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ καί γνησίως φθίνουσα στό $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Γενικότερα, ἄν κ εἶναι ἀκέραιος, ἰσχύει

$$\text{ημ} \,\underline{\uparrow}\, \left[2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right] \text{ καί ημ } \overline{\downarrow}\, \left[2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, (2\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

**1.2 Ἡ μονοτονία καί ἡ σύνθεση συναρτήσεων.** Ἡ πραγματική συνάρτηση σ μέ $\sigma(x) = \alpha x$, ὅπου α εἶναι ἕνας σταθερός πραγματικός ἀριθμός διάφορος τοῦ 0, εἶναι γνησίως μονότονη καί μάλιστα ἄν $\alpha > 0$, εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἀφοῦ γιά κάθε $x_1$, $x_2$ $x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \Rightarrow \sigma(x_1) < \sigma(x_2)$ ἐνῶ ἄν $\alpha < 0$, εἶναι γνησίως φθίνουσα ἀφοῦ γιά κάθε $x_1$, $x_2$



$y = \alpha x$, $\alpha > 0$
*Σχ. 21*



$y = \alpha x$, $\alpha < 0$
*Σχ. 22*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 > \alpha x_2 \Rightarrow \sigma(x_1) > \sigma(x_2).$$

Δηλαδή:

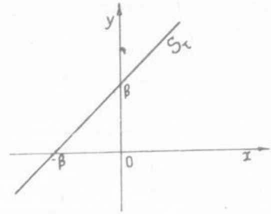
$$\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow \sigma \,\underline{\uparrow}} \qquad \boxed{\alpha < 0 \Rightarrow \sigma \,\overline{\downarrow}}$$

Γεωμετρικά ἡ συνάρτηση σ παριστάνεται μέ μιά εὐθεία, ὅπως φαίνεται στά σχήματα 21 καί 22.

Ἄς θεωρήσουμε ἐπίσης καί τήν πραγματική συνάρτηση τ μέ $\tau(x) = x + \beta$, ὅπου β εἶναι σταθερός πραγματικός ἀριθμός. Ἡ συνάρτηση τ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἐπειδή γιά κάθε $x_1$, $x_2$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + \beta < x_2 + \beta \Rightarrow \tau(x_1) < \tau(x_2).$$

Τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως τ εἶναι ἡ εὐθεία τοῦ σχήματος 23 πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $(-\beta, 0)$ καί $(0, \beta)$.



$y = x + \beta \ (\beta > 0)$

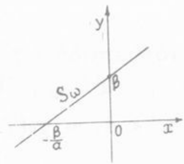
*Σχ. 23*

Ἄν τώρα $\omega = \tau \circ \sigma$ εἶναι ἡ σύνθεση τῶν συναρτήσεων σ καί τ, δηλαδή ἡ συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο

$$\omega(x) = \tau(\sigma(x)) = \alpha x + \beta,$$

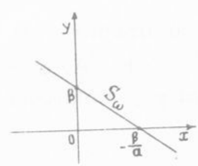
ὅπου α, β πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\alpha \neq 0$, τότε παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύουν :

$\boxed{\alpha > 0 \Rightarrow \omega \uparrow}$ $\boxed{\alpha < 0 \Rightarrow \omega \downarrow}$,



$\omega$: $y = \alpha x + \beta$, $\alpha > 0$

*Σχ. 24* $(\beta > 0)$



$\omega$: $y = \alpha x + \beta$, $\alpha < 0$

*Σχ. 25* $(\beta > 0)$

ἐπειδή γιά κάθε $x_1, x_2$ καί γιά $\alpha > 0$ ἔχουμε

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta \Rightarrow \omega(x_1) < \omega(x_2),$$

ἐνῶ γιά $\alpha < 0$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta > \alpha x_2 + \beta \Rightarrow \omega(x_1) > \omega(x_2).$$

Τό διάγραμμα τῆς συνθέσεως ω τῶν συναρτήσεων σ καί τ εἶναι ἡ εὐθεία τῶν σχημάτων 24 καί 25, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ καί $(0, \beta)$.

Ἀπό ὅλα τά παραπάνω παίρνουμε τώρα ὅτι στήν περίπτωση $\alpha > 0$, ὅπου οἱ σ καί τ εἶναι γνησίως αὔξουσες συναρτήσεις, ἡ σύνθεσή τους ω εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτηση, ἐνῶ στήν περίπτωση $\alpha < 0$, ὅπου ἡ σ εἶναι γνησίως φθίνουσα καί ἡ τ γνησίως αὔξουσα συνάρτηση, ἡ σύνθεσή τους ω εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

Γενικά, ἄν $f : A \to B$, $g : B \to R$ εἶναι πραγματικές συναρτήσεις (A, B ὑποσύνολα τοῦ R), τότε ὁρίζεται, ὅπως ξέρουμε, ἡ σύνθεσή τους $g \circ f : A \to R$ καί ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα.

**1.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι γνησίως μονότονες. Τότε, ἄν καί οἱ δυό εἶναι τοῦ ἴδιου εἴδους μονοτονίας, ἡ σύνθεσή τους* $g \circ f$ *εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτηση, ἐνῶ ἄν εἶναι διαφορετικοῦ εἴδους μονοτο-*

*νίας, ή σύνθεσή τους* $g \circ f$ *εἶναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Ἀκριβέστερα ἰσχύουν τά παρακάτω:*

| | |
|---|---|
| a) $\left.\begin{matrix} f\uparrow \\ g\uparrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow g\circ f\uparrow$ | b) $\left.\begin{matrix} f\downarrow \\ g\uparrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow g\circ f\downarrow$ |
| c) $\left.\begin{matrix} f\uparrow \\ g\downarrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow g\circ f\downarrow$ | d) $\left.\begin{matrix} f\downarrow \\ g\downarrow \end{matrix}\right\} \Rightarrow g\circ f\uparrow$ |

*Ἀπόδειξη.* Ἔστω $x_1, x_2$ δυό ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ A.

a) Ἄν $x_1 < x_2$, τότε ἐπειδή $f\uparrow$ ἔχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ καί ἄρα, ἐπειδή καί $g\uparrow$, παίρνουμε $g[f(x_1)] < g[f(x_2)]$. Ἔτσι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g\circ f(x_1) < g\circ f(x_2)$$

πού σημαίνει ὅτι $g\circ f\uparrow$.

b) Ἄν $x_1 < x_2$, τότε ἐπειδή $f\downarrow$ ἔχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ καί ἄρα, ἐπειδή καί $g\uparrow$ παίρνουμε $g[f(x_1)] > g[f(x_2)]$. Ἔτσι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g\circ f(x_1) > g\circ f(x_2)$$

πού σημαίνει ὅτι $g\circ f\downarrow$.

c) Ἄν $x_1 < x_2$, τότε ἐπειδή $f\uparrow$ ἔχουμε $f(x_1) < f(x_2)$ καί ἐπειδή $g\downarrow$ $g[f(x_1)] > g[f(x_2)]$. Ἔτσι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g\circ f(x_1) > g\circ f(x_2)$$

πού σημαίνει ὅτι $g\circ f\downarrow$.

d) Ἄν $x_1 < x_2$, τότε ἐπειδή $f\downarrow$ ἔχουμε $f(x_1) > f(x_2)$ καί ἐπειδή $g\downarrow$ ἰσχύει $g[f(x_1)] < g[f(x_2)]$. Ἔτσι

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g\circ f(x_1) < g\circ f(x_2)$$

πού σημαίνει ὅτι $g\circ f\uparrow$.

**1.2.2** Θά ἐφαρμόσουμε τώρα τό παραπάνω θεώρημα 1.2.1 γιά νά μελετήσουμε ὡς πρός τή μονοτονία τήν πραγματική συνάρτηση w μέ

$$w(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι σταθεροί πραγματικοί ἀριθμοί μέ $\gamma \neq 0$. Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς w εἶναι τό σύνολο $R - \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}$ καί ἀκόμη ὅτι ἰσχύει

$$w(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right) - \frac{\alpha\delta}{\gamma} + \beta}{\gamma\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2\left(x + \frac{\delta}{\gamma}\right)},$$

δηλαδή

$$(4) \qquad y = w(x) = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{c}{x + \frac{\delta}{\gamma}},$$

ὅπου θέσαμε $c = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} = -\frac{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}}{\gamma^2}$

Εἶναι φανερό ἀπό τόν τύπο (4), ὅτι γιά $c = 0$ (δηλαδή $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$) ἡ w εἶναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow w \text{ σταθερή}}$$

Γιά $c \neq 0$ παρατηροῦμε ὅτι ἡ w εἶναι σύνθεση μερικῶν ἁπλῶν συναρτήσεων $g_1, g_2, g_3, g_4$ μέ

$$g_1(x) = x + \frac{\delta}{\gamma}, \quad g_2(x) = \frac{1}{x}, \quad g_3(x) = cx \text{ καί } g_4(x) = \frac{\alpha}{\gamma} + x,$$

δηλαδή

$$w = g_4 \circ [g_3 \circ (g_2 \circ g_1)].$$

Ἀλλά οἱ συναρτήσεις $g_4$ καί $g_3$ εἶναι μονότονες καί ἔτσι ἡ μονοτονία τῆς w ἐπηρεάζεται ἀπό τή μονοτονία τῆς $g_2 \circ g_1$. Ἐπειδή ἡ $g_2$ εἶναι μονότονη στά διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί $(0, +\infty)$ θά πρέπει νά ἐξετάσουμε τή μονοτονία τῆς $g_2 \circ g_1$ σ' ἐκεῖνα τά διαστήματα τοῦ R, ὅπου ἡ $g_1$ παίρνει τιμές στά παραπάνω διαστήματα $(-\infty, 0)$ καί $(0, +\infty)$. Εἶναι φανερό ὅτι τά διαστήματα αὐτά εἶναι τά $\left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$ καί $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, +\infty\right)$. Ἔτσι ἀπό τό θεώρημα 1.2.1 παίρνουμε :

*περίπτωση* $c > 0$ :

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \overset{\uparrow}{\wedge} \\ g_2 \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow g_2 \circ g_1 \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2 \circ g_1 \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_3 \overset{\uparrow}{\wedge} \end{array}\right\} \Rightarrow g_3 \circ (g_2 \circ g_1) \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3 \circ (g_2 \circ g_1) \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_4 \overset{\uparrow}{\wedge} \end{array}\right\} \Rightarrow w \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

*περίπτωση* $c < 0$ :

$$\left.\begin{array}{l} g_1 \overset{\uparrow}{\wedge} \\ g_2 \overset{\vee}{\downarrow} (-\infty, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow g_2 \circ g_1 \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_2 \circ g_1 \overset{\vee}{\downarrow} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_3 \overset{\vee}{\downarrow} \end{array}\right\} \Rightarrow g_3 \circ (g_2 \circ g_1) \overset{\uparrow}{\wedge} \left(-\infty, -\frac{\delta}{\gamma}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} g_3\circ(g_2\circ g_1)\uparrow\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right) \\ g_4\uparrow \end{array}\right\} \Rightarrow w\uparrow\left(-\infty,-\dfrac{\delta}{\gamma}\right)$$

Έτσι βρήκαμε ὅτι:

$$\boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}<0 \Rightarrow w\downarrow\left(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma}\right)} \qquad \boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}>0 \Rightarrow w\uparrow\left(-\infty,-\frac{\delta}{\gamma}\right)}$$

Παρόμοια μποροῦμε νά βροῦμε καί ὅτι:

$$\boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}<0 \Rightarrow w\downarrow\left(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty\right)} \qquad \boxed{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}>0 \Rightarrow w\uparrow\left(-\frac{\delta}{\gamma},+\infty\right)}$$

Τά παραπάνω συμπεράσματα σχετικά μέ τή μονοτονία μποροῦν νά προκύψουν καί ἀμέσως ἀπό τούς ὁρισμούς τῆς μονοτονίας συναρτήσεως.

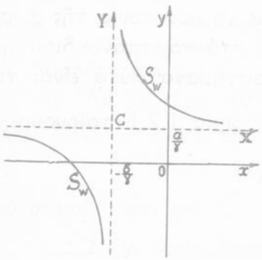
**Διάγραμμα τῆς συναρτήσεως** w. Ἄν θέσουμε

$$X=x+\frac{\delta}{\gamma},\quad Y=y-\frac{\alpha}{\gamma},$$

τότε ὁ τύπος (4) δίνει

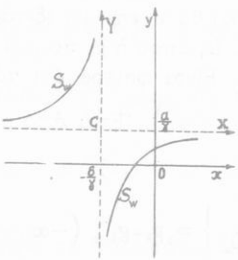
$$Y=\frac{c}{X},\quad c=-\frac{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}}{\gamma^2}.$$

Οἱ ἄξονες x,y μεταθέτονται παράλληλα στούς X, Y μέ ἀρχή τό σημεῖο $C=\left(-\dfrac{\delta}{\gamma},\ \dfrac{\alpha}{\gamma}\right)$. Τό διάγραμμα τῆς w δίδεται στά παρακάτω σχήματα :



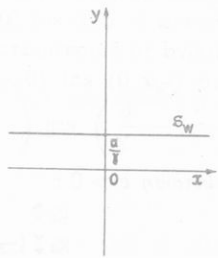

$y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}<0$

*Σχ. 26*




$y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}>0$

*Σχ. 27*




$y=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},\ \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=0$

*Σχ. 28*

**Παραδείγματα** :

**1.** $w(x)=\dfrac{2x+8}{x+3}$

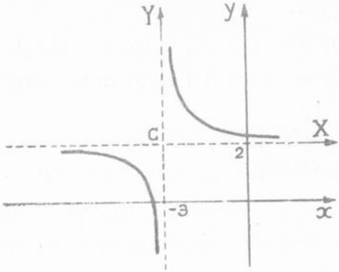
$y=w(x)=2+\dfrac{2}{x+3}$

$C=(-3,2)$

*Βοηθητικοί ὑπολογισμοί*

$$\frac{2x+8}{x+3}=\frac{2}{1}+\frac{c}{x+\frac{3}{1}}$$

$$x=0:\quad \frac{8}{3}=2+\frac{c}{3}\Rightarrow 8=6+c\Rightarrow c=2$$




$\Sigma\chi.\ 29 \qquad w:\ y = \dfrac{2x+8}{x+3}$

$$w \searrow (-\infty, -3) \ \textit{καί} \ w \searrow (-3, +\infty).$$

2. $\quad w(x) = \dfrac{5x+3}{2x+3}$

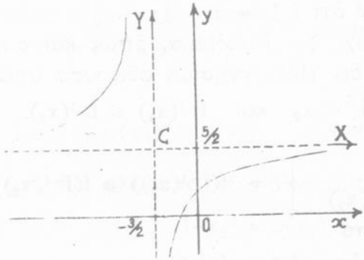
$$y = w(x) = \frac{5}{2} + \frac{-\frac{9}{4}}{x+\frac{3}{2}}$$

$$C = \left(-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

*Βοηθητικοί ὑπολογισμοί*

$$\frac{5x+3}{2x+3} = \frac{5}{2} + \frac{c}{x+\frac{3}{2}}$$

$$x = 0:\ \frac{3}{3} = \frac{5}{2} + \frac{c}{\frac{3}{2}} \Rightarrow 1 - \frac{5}{2} = \frac{2}{3}c \ \Rightarrow\ c = -\frac{9}{4}$$




$\Sigma\chi.\ 30 \quad w:\ y = \dfrac{5x+3}{2x+3}$

$$w \nearrow \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \ \textit{καί} \ w \nearrow \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

**1.3. Ἡ μονοτονία καί ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση.** Ἔστω $f: A \xrightarrow{\text{πάνω}} B$ (A, B ὑποσύνολα τοῦ R) μιά γνησίως μονότονη συνάρτηση τοῦ A πάνω στό B. Τότε αὐτή εἶναι καί ἀμφιμονοσήμαντη, δηλαδή γιά κάθε $x_1$, $x_2$ στό A ἰσχύουν

(5) $$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Πραγματικά· μποροῦμε νά ὑποθέσουμε, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας, ὅτι

$x_1 < x_2$ (στήν ἀντίθετη περίπτωση, δηλαδή $x_1 > x_2$ ἀλλάζουμε τό ρόλο τῶν $x_1, x_2$). Ἀλλά τότε θά ἰσχύει

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ ἄν } f \underset{\wedge}{\uparrow} \quad \text{ἤ} \quad f(x_1) > f(x_2), \text{ ἄν } f \overset{\vee}{\downarrow}.$$

Ἄρα πάντοτε ἰσχύει ἡ (5) καί ἔτσι ἡ f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση τοῦ A πάνω στό B.

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα 2.2.1 τοῦ κεφ. I ὑπάρχει καί ἡ ἀντίστροφη τῆς γνησίως μονότονης συναρτήσεως f. Ἀκριβέστερα ἰσχύει τό παρακάτω θεώρημα.

**1.3.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἄν* $f: A \to B$ *εἶναι μιά γνησίως μονότονη συνάρτηση τοῦ A ἐπί τοῦ B, τότε ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση* $f^{-1}$ *αὐτῆς καί μάλιστα ἰσχύουν.*

$$\boxed{f \underset{\wedge}{\uparrow} \Rightarrow f^{-1} \underset{\wedge}{\uparrow}} \qquad \boxed{f \overset{\vee}{\downarrow} \Rightarrow f^{-1} \overset{\vee}{\downarrow}}$$

*Ἀπόδειξη.* Ἡ ὕπαρξη τῆς ἀντίστροφης συναρτήσεως ἔχει ἀποδειχθεῖ παραπάνω. Γιά ν' ἀποδείξουμε καί τά ὑπόλοιπα συμπεράσματα τοῦ θεωρήματος διακρίνουμε τίς περιπτώσεις:

a) $f \underset{\wedge}{\uparrow}$ καί $f^{-1}$ ὄχι $\underset{\wedge}{\uparrow}$. Ἐπειδή ἡ $f^{-1}$ δέν εἶναι γνησίως αὔξουσα, ὑπάρχουν $x_1, x_2$ στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς B μέ

$$x_1 < x_2 \quad \text{καὶ} \quad f^{-1}(x_1) \geqslant f^{-1}(x_2).$$

Ἀλλά

$$\left.\begin{array}{l} f \underset{\wedge}{\uparrow} \\ f^{-1}(x_1) \geqslant f^{-1}(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) \geqslant f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 \geqslant x_2,$$

πού εἶναι ἄτοπο, γιατί $x_1 < x_2$.

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι $f \underset{\wedge}{\uparrow} \Rightarrow f^{-1} \underset{\wedge}{\uparrow}$.

b) $f \overset{\vee}{\downarrow}$ *καί* $f^{-1}$ *ὄχι* $\overset{\vee}{\downarrow}$. Παρόμοια, ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση, ἐπειδή ἡ $f^{-1}$ δέν εἶναι γνησίως φθίνουσα ὑπάρχουν $x_1, x_2$ στό B μέ

$$x_1 < x_2 \quad \text{καὶ} \quad f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2).$$

Ἀλλά

$$\left.\begin{array}{l} f \overset{\vee}{\downarrow} \\ f^{-1}(x_1) \leqslant f^{-1}(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow f(f^{-1}(x_1)) \geqslant f(f^{-1}(x_2)) \Rightarrow x_1 \geqslant x_2,$$

πού εἶναι ἐπίσης ἄτοπο.

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι $f \overset{\vee}{\downarrow} \Rightarrow f^{-1} \overset{\vee}{\downarrow}$.

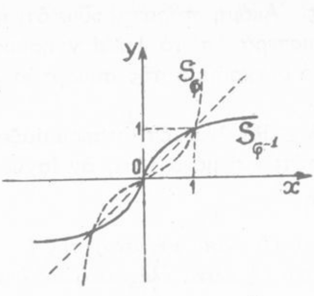
**Παραδείγματα:**

**1.** Ἡ πραγματική συνάρτηση φ μέ $\varphi(x) = x^3$ (βλ. Σχ. *18*) εἶναι, ὅπως γνωρίζουμε, γνησίως αὔξουσα, ἄρα καί ἡ ἀντίστροφη αὐτῆς συνάρτηση $\varphi^{-1}$ τῆς ὁποίας ὁ τύπος εἶναι $y = \sqrt[3]{x}$, εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα καί μάλιστα τό διάγραμμα αὐτῆς (βλ. Σχ. ***31***) εἶναι συμμετρικό, ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων, τοῦ διαγράμματος τῆς φ.

**2.** Γενικότερα, ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^{2\nu+1}$ (ν φυσικός ἀριθμός) εἶναι γνησίως αὔξουσα, γιατί γιά ὁποιαδήποτε $x_1, x_2$

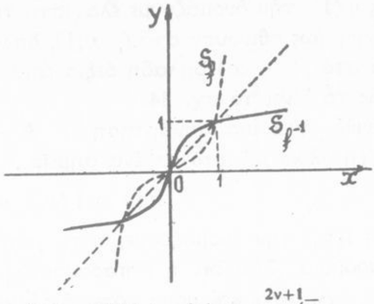
$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2\nu+1} < x_2^{2\nu+1} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Παρόμοια καί ἡ ἀντίστροφη $f^{-1}$ αὐτῆς, τῆς ὁποίας ὁ τύπος εἶναι $f^{-1}(x) = \sqrt[2\nu+1]{x}$, εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα. Τά διαγράμματα τῶν συναρτήσεων f καί $f^{-1}$ εἶναι βέβαια συμμετρικά ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων (βλ. Σχ. ***32'***).




φ: $y=x^3$ ; $\varphi^{-1}$: $y=\sqrt[3]{x}$.

*Σχ. 31*




f: $y = x^{2\nu+1}$ ; $f^{-1}$: $y = \sqrt[2\nu+1]{x}$.

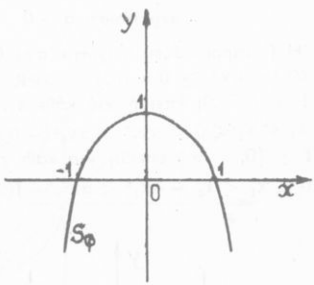
*Σχ. 32*

## 2. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

**2.1 Μέγιστο κι ἐλάχιστο συναρτήσεως.** Γιά τή συνάρτηση φ μέ $\varphi(x) = 1-x^2$ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$\varphi(x) = 1-x^2 \leq 1 = \varphi(0) \quad \forall \quad x \in R,$$

δηλαδή οἱ τιμές τῆς φ ποτέ δέν ξεπερνοῦν τήν τιμή της στό 0, δηλαδή τόν ἀριθμό φ(0). Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ φ παρουσιάζει μέγιστο στό σημεῖο 0, ἐνῶ τήν τιμή της φ(0) τήν ὀνομάζουμε μέγιστη τιμή τῆς φ. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ φ εἶναι γνησίως αὔξουσα ἀριστερά ἀπό τό 0 καί ἀκριβέστερα στό $(-\infty,0]$, γιατί γιά κάθε $x_1$, $x_2$ ἰσχύει




*Σχ. 33* $\varphi : y = 1 - x^2$

*φ παρουσιάζει μέγιστο στό* 0.

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow 1-x_1^2 < 1-x_2^2 \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2),$$

καί ἀκόμη ὅτι αὐτή εἶναι γνησίως φθίνουσα δεξιά ἀπό τό 0, γιατί γιά κάθε $x_1, x_2$

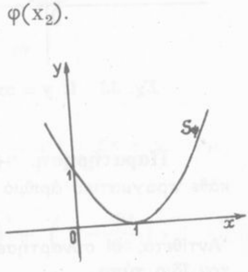
$$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow 1-x_1^2 > 1-x_2^2 \Rightarrow \varphi(x_1) > \varphi(x_2).$$

Τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως φ δίνεται στό σχ. 33.

Ἀνάλογα, γιά τή συνάρτηση ψ μέ $\psi(x) = (x-1)^2$ παρατηροῦμε ὅτι

$$\psi(x) = (x-1)^2 \geq 0 = \psi(1) \quad \forall \quad x \in R,$$

δηλαδή ὅλες οἱ τιμές τῆς συναρτήσεως ψ ξεπερνοῦν τήν τιμή της ψ(1).




*Σχ. 34* $\psi : y = (x-1)^2$

*ψ παρουσιάζει ἐλάχιστο στό* 1

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση ψ παρουσιάζει ἐλάχιστο στό σημεῖο 1, ἐνῶ τήν τιμή της $\psi(1)$ τήν ὀνομάζουμε ἐλάχιστη τιμή της. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ $\psi$ εἶναι γνησίως φθίνουσα στό $(-\infty, 1]$, δηλαδή ἀριστερά ἀπ' τό 1 καί γνησίως αὔξουσα στό $[1, +\infty)$ δηλαδή δεξιά ἀπό τό 1. Τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως $\psi$ μᾶς τό δίνει τό σχ. 34.

Γενικά, γιά μιά συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ $(A \subseteq \mathbf{R})$ λέμε ὅτι παρουσιάζει *μέγιστο* (ἤ *ὁλικό μέγιστο*) σ' ἕνα σημεῖο $x_0 \in A$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad \forall \ x \in A.$$

Τήν τιμή $f(x_0)$ τήν ὀνομάζουμε, τότε, *μεγίστη τιμή* (ἤ *ὁλικό μέγιστο*) τῆς f.

Παρόμοια, λέμε ὅτι ἡ f παρουσιάζει *ἐλάχιστο* (ἤ *ὁλικό ἐλάχιστο*) σ' ἕνα σημεῖο $x_0 \in A$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall \ x \in A.$$

Τήν τιμή $f(x_0)$ τήν ὀνομάζουμε, τότε, *ἐλάχιστη τιμή* (ἤ *ὁλικό ἐλάχιστο*) τῆς f.

**Ἐφαρμογές :**

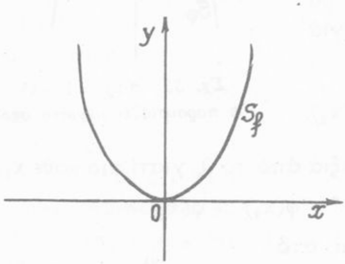
**1.** Ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \alpha x^2$ $(\alpha \in \mathbf{R} - \{0\})$. Διακρίνουμε τίς παρακάτω δυό περιπτώσεις:

*περίπτωση* $\alpha > 0$

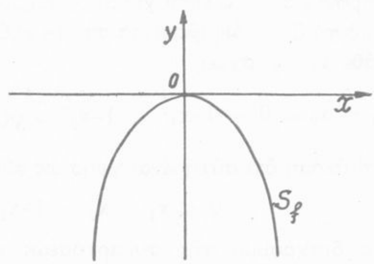
Ἡ f παρουσιάζει *ἐλάχιστο* στό 0, ἐπειδή
$f(x) = \alpha x^2 \geq 0 = f(0) \ \forall \ x \in \mathbf{R}$
$f \downarrow (-\infty, 0]$, ἐπειδή γιά κάθε $x_1$, $x_2$
$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow \alpha x_1^2 > \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
$f \uparrow [0, +\infty)$, ἐπειδή γιά κάθε $x_1$, $x_2$
$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1^2 < \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

*περίπτωση* $\alpha < 0$

Ἡ f παρουσιάζει *μέγιστο* στό 0, ἐπειδή
$f(x) = \alpha x^2 \leqslant 0 = f(0) \ \forall \ x \in \mathbf{R}$
$f \uparrow (-\infty, 0]$, ἐπειδή γιά κάθε $x_1$, $x_2$
$x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow \alpha x_1^2 < \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
$f \downarrow [0, +\infty)$, ἐπειδή γιά κάθε $x_1$, $x_2$
$0 \leqslant x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1^2 > \alpha x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.




*Σχ. 35* f: $y = \alpha x^2$, $\alpha > 0$




*Σχ. 36* f: $y = \alpha x^2$, $\alpha < 0$.

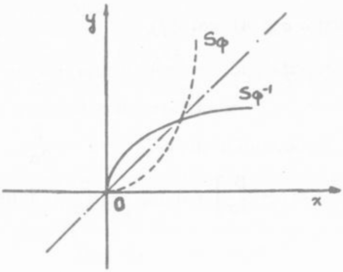
**Παρατήρηση.** Ἡ παραπάνω συνάρτηση f δέν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη, ἐπειδή γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό x ἰσχύει

$$f(x) = \alpha x^2 = \alpha(-x)^2 = f(-x).$$

Ἀντίθετα, οἱ συναρτήσεις $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ καί $\psi : (-\infty, 0] \to \mathbf{R}$, πού ὁρίζονται ἀπό τόν ἴδιο τύπο

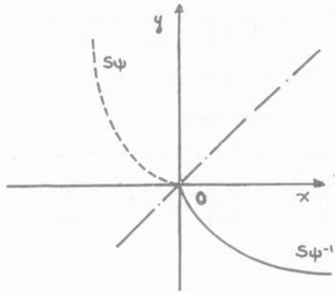
$$y = \alpha x^2$$

εἶναι γνησίως μονότονες καί ἑπομένως ἀμφιμονοσήμαντες συναρτήσεις. Ἄρα οἱ συναρτήσεις αὐτές ἔχουν ἀντίστροφες συναρτήσεις πού παριστάνονται γεωμετρικά στά παρακάτω σχήματα.



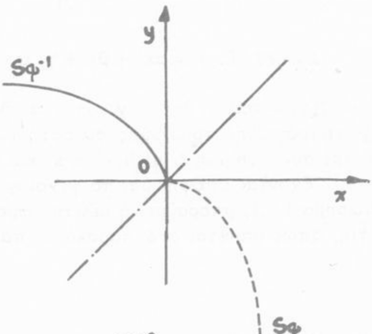

$\alpha > 0$

*Σχ. 37*



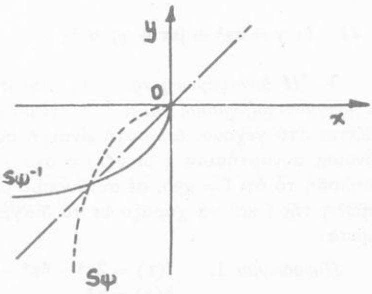

$\alpha > 0$

*Σχ. 38*




$\alpha < 0$

*Σχ. 39*




$\alpha < 0$

*Σχ. 40*

**2.** *Ἡ τριώνυμη συνάρτηση δευτέρου βαθμοῦ* f *μέ* $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, *ὅπου* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί* $\alpha \neq 0$.

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}\,x\right) + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right),$$

καί ἐπομένως, ἄν θέσουμε

$$X = x + \frac{\beta}{2\alpha} \text{ καί } Y = y - \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha},$$

θά ἔχουμε

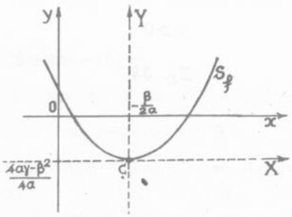
$$Y = \alpha X^2,$$

καί οἱ ἄξονες x,y θά μεταφερθοῦν παράλληλα στούς X,Y μέ ἀρχή τό σημεῖο

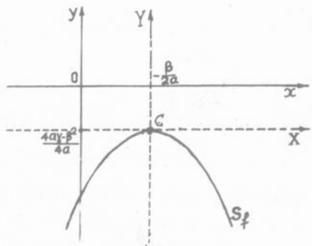
$$C = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}\right)$$ (βλ. παρακάτω σχ. 41 καί 42).

Τώρα, χρησιμοποιώντας τό προηγούμενο παράδειγμα, συμπεραίνουμε εὔκολα ὅτι:

| *περίπτωση* $\alpha > 0$ | *περίπτωση* $\alpha < 0$ |
|---|---|
| Ἡ f παρουσιάζει ἐλάχιστο στό $-\frac{\beta}{2\alpha}$ | Ἡ f παρουσιάζει μέγιστο στό $-\frac{\beta}{2\alpha}$ |
| $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί $f \uparrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ | $f \uparrow \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ καί $f \downarrow \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$. |



*Σχ. 41* f: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha > 0$



Σχ. *42* f: $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha < 0$.

3. *Ἡ διτετράγωνη τριώνυμη συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, *ὅπου* α, β, γ *εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί* $\alpha \neq 0$. Ἡ μελέτη τῆς διτετράγωνης τριώνυμης συναρτήσεως f βασίζεται στό γεγονός ὅτι αὐτή εἶναι ἡ σύνθεση τῆς συναρτήσεως h μέ $h(x) = x^2$ καί τῆς τριώνυμης συναρτήσεως g μέ $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Ἔχοντας ὑπόψη μας τό γεγονός αὐτό, δηλαδή τό ὅτι $f = g \circ h$, σέ συνδυασμό μέ τό θεώρημα 1.2.1, μποροῦμε νά μελετήσουμε τή μεταβολή τῆς f καί νά χαράξουμε τό διάγραμμά της, ὅπως φαίνεται στά παρακάτω παραδείγματα:

*Παράδειγμα* 1. $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$
$h(x) = x^2$
$g(x) = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x-1)^2 - 3.$

Ἀπό τά συμπεράσματα τῶν παραπάνω ἐφαρμογῶν 1 καί 2, ἡ μεταβολή τῶν συναρτήσεων h καί g δίδεται ἀπό τούς πίνακες:

| x | | 0 | |
|---|---|---|---|
| h(x) | ↘ | 0 | ↗ |

| x | | 1 | |
|---|---|---|---|
| g(x) | ↘ | −3 | ↗ |

Ἐπειδή $f(x) = g[h(x)]$ καί ἡ g ἔχει διαφορετικό εἶδος μονοτονίας στά διαστήματα $(-\infty, 1]$ καί $[1, +\infty)$, πρέπει νά μελετήσουμε τή συνάρτηση f, ὡς πρός τή μονοτονία, σ' ἐκεῖνα τά ὑποδιαστήματα τῶν $(-\infty, 0]$ καί $[0, +\infty)$ ὅπου ἡ h πληροῖ μιά ἀπό τίς συνθῆκες

$$h(x) = x^2 \leqslant 1 \quad \text{καί} \quad h(x) = x^2 \geq 1$$

δηλαδή στά διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$ καί $[1, +\infty)$.

(i) Στό διάστημα $(-\infty, -1]$, ὅπως φαίνεται ἀπό τόν πρῶτο πίνακα, ἡ συνάρτηση h εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἄρα

$$h(x) = x^2 \geq (-1)^2 = 1 \qquad \forall\, x \in (-\infty, -1],$$

δηλαδή οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς h ἀνήκουν στό διάστημα $[1, +\infty)$, ὅπου, ὅπως προκύπτει ἀπό τόν δεύτερο πίνακα, ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.2.1 ἡ σύνθεση $g \circ h$, δηλαδή ἡ συνάρτηση f, εἶναι *γνησίως φθίνουσα στό* $(-\infty, -1]$.

(ii) Στό διάστημα $[-1,0]$, ὅπως φαίνεται ἀπό τόν πρῶτο πίνακα, ἡ συνάρτηση h εἶναι γνησίως φθίνουσα, ἄρα

$$h(x) = x^2 \leqslant (-1)^2 = 1 \qquad \forall\, x \in [-1,0],$$

δηλαδή οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς h ἀνήκουν στό διάστημα $(-\infty, 1]$, ὅπου, ὅπως φαίνεται ἀπό τό δεύτερο πίνακα, ἡ g εἶναι ἐπίσης γνησίως φθίνουσα. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.2.1, ἡ σύνθεση $f = g \circ h$ εἶναι *γνησίως αὔξουσα στό* $[-1,0]$.

(iii) Παρόμοια, στό διάστημα $[0,1]$, ὅπως φαίνεται ἀπό τόν πρῶτο πίνακα ἡ συνάρτηση h εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἄρα

$$h(x) = x^2 \leqslant 1^2 = 1 \qquad \forall\, x \in [0,1],$$

δηλαδή οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς h ἀνήκουν στό διάστημα $(-\infty, 1]$, ὅπου ἡ g εἶναι γνησίως φθίνουσα. Ἄρα ἡ σύνθεση $f = g \circ h$ εἶναι *γνησίως φθίνουσα στό* $[0,1]$.

(iv) Τέλος, στό διάστημα $[1, +\infty)$, ἡ συνάρτηση h εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἄρα

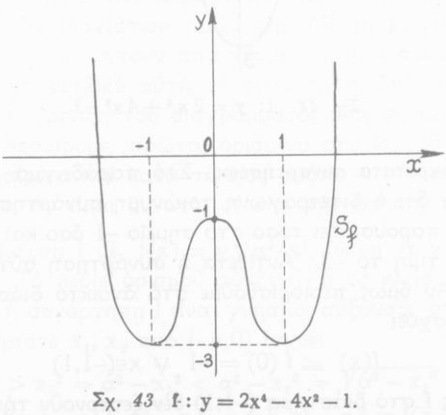
$$h(x) = x^2 \geq 1^2 = 1 \qquad \forall\, x \in [1, +\infty),$$

δηλαδή οἱ ἀντίστοιχες τιμές τῆς h ἀνήκουν στό διάστημα $[1, +\infty)$, ὅπου, ὅπως φαίνεται ἀπό τό δεύτερο πίνακα, ἡ g εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα. Ἄρα ἡ σύνθεση $f = g \circ h$ εἶναι γνησίως αὔξουσα στό $[1, +\infty)$.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει τώρα ὁ ἑξῆς πίνακας μεταβολῆς τῆς f.

| x | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | ↘ | $-3$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-3$ | ↗ |

***περίπτωση*** $\alpha\beta < 0$




Σχ. *43* $f: y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.

*Παράδειγμα* 2. $f(x) = 2x^4 + 4x^2 - 3$

$h(x) = x^2$

$g(x) = 2x^2 + 4x - 3 = 2(x+1)^2 - 5.$

Οἱ πίνακες μεταβολῆς τῶν συναρτήσεων h καὶ g εἶναι:

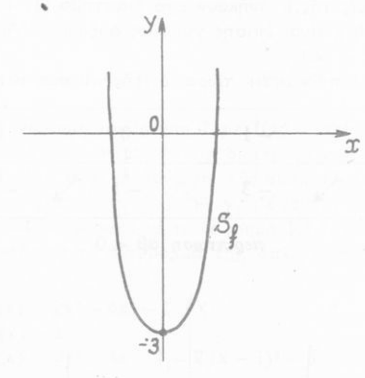
| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | ↘ | $0$ | ↗ |

| $x$ | | $-1$ | |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↘ | $-5$ | ↗ |

Ἀπό τούς παραπάνω πίνακες μεταβολῆς τῶν συναρτήσεων h καί g βλέπουμε ὅτι καί στά δυό διαστήματα $(-\infty, 0]$ καί $[0, +\infty)$ ἡ συνάρτηση h παίρνει τιμές στό $[0, +\infty)$, ὅπου ἡ g εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἄρα ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα 1.2.1 παίρνουμε τόν παρακάτω πίνακα μεταβολῆς τῆς διτετράγωνης τριώνυμης συναρτήσεως $f = g \circ h$.

| $x$ | | $0$ | |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | $-3$ | ↗ |

*περίπτωση* $\alpha\beta \geqslant 0$




*Σχ. 44* $f\colon\ y = 2x^4 + 4x^2 - 3.$

**2.2 Τοπικά ἀκρότατα συναρτήσεως.** Στό παράδειγμα 1 τῆς παραπάνω ἐφαρμογῆς 3 εἴδαμε ὅτι ἡ διτετράγωνη τριώνυμη συνάρτηση f μέ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$ (βλ. σχ. 43) παρουσιάζει τόσο στό σημεῖο $-1$ ὅσο καί στό 1 (ὁλικό) ἐλάχιστο μέ ἐλάχιστη τιμή τό $-3$. Ἀντίθετα ἡ συνάρτηση αὐτή δέν παρουσιάζει (ὁλικό) μέγιστο. Ἄν ὅμως περιορισθοῦμε στό ἀνοικτό διάστημα $(-1,1)$, τότε παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$f(x) \leqslant f(0) = -1 \quad \forall\ x \in (-1,1)$$

δηλαδή οἱ τιμές τῆς f στό διάστημα $(-1,1)$ δέν ξεπερνοῦν τήν τιμή της στό σημεῖο 0. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f παρουσιάζει στό σημεῖο 0 *τοπικό μέγιστο*.

Γενικά, λέμε ὅτι μιά συνάρτηση $f: A \to R$ $(A \subseteq R)$ παρουσιάζει *τοπικό μέγιστο* σ' ἕνα σημεῖο $x_0 \in A$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἕνα *ἀνοικτό* διάστημα $(a, b)$ πού περιέχει τό $x_0$ καί περιέχεται στό πεδίο ὁρισμοῦ A τῆς f, δηλαδή $x_0 \in (a, b) \subseteq A$, τέτοιο ὥστε νά ἰσχύει .

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall \quad x \in (a, b).$$

Τήν τιμή $f(x_0)$ ὀνομάζουμε τότε *τοπικά μέγιστη τιμή* (ἤ *τοπικό μέγιστο*) τῆς f.

Παρόμοια, λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f παρουσιάζει *τοπικό ἐλάχιστο* σ' ἕνα σημεῖο $x_0 \in A$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει ἕνα *ἀνοικτό* διάστημα $(a, b) \subseteq A$ πού νά περιέχει τό $x_0$ καί τέτοιο ὥστε νά ἰσχύει

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall \quad x \in (a,b).$$

Τήν τιμή $f(x_0)$ τήν ὀνομάζουμε τότε *τοπικά ἐλάχιστη τιμή* (ἤ *τοπικό ἐλάχιστο*) τῆς f.

Ὅταν μιά συνάρτηση f παρουσιάζει σ' ἕνα σημεῖο $x_0$ τοπικό μέγιστο ἤ τοπικό ἐλάχιστο, τότε λέμε ὅτι αὐτή παρουσιάζει στό σημεῖο $x_0$ *τοπικό ἀκρότατο*. Λ.χ. ἡ διτετράγωνη τριώνυμη συνάρτηση f μέ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$ (βλ. σχ. 43) παρουσιάζει στά σημεῖα $-1$, $0$, $1$ τοπικά ἀκρότατα. Ἀκριβέστερα αὐτή παρουσιάζει στά σημεῖα $-1,1$ (ὁλικό) ἐλάχιστο καί στό σημεῖο 0 τοπικό μέγιστο.

## 3. ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

**3.1** Ἡ μελέτη μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς ἀποτελεῖται ἀπό τήν τμηματική (κατά διαστήματα) μελέτη τῆς μονοτονίας της, τόν καθορισμό τῶν σημείων ὅπου αὐτή παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα καί τόν ὑπολογισμό τῶν ἀκροτάτων τιμῶν της, δηλαδή τῶν τοπικῶν μεγίστων καί τοπικῶν ἐλαχίστων τιμῶν της. Μέ τή βοήθεια τῶν παραπάνω στοιχείων, τά ὁποῖα προκύπτουν ἀπό τή μελέτη μιᾶς συναρτήσεως, μποροῦμε νά παραστήσουμε γεωμετρικά αὐτή τή συνάρτηση, δηλαδή νά χαράξουμε τό διάγραμμά της. Στή χάραξη τοῦ διαγράμματος μιᾶς συναρτήσεως διευκολυνόμαστε πολύ ἄν καθορίσουμε, πρῶτα, ὁρισμένα σημεῖα τοῦ διαγράμματος πού τά ἐκλέγουμε, αὐθαίρετα καί κατά τέτοιον τρόπο, ὥστε αὐτά νά χαρακτηρίζουν τό διάγραμμα, ἄν εἶναι δυνατό, σέ ὅλη τήν ἔκτασή του.

**3.2** *Ἡ συνάρτηση* f μέ $f(x) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, *ὅπου* $\alpha, \gamma$ *εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί* $\alpha > 0$. Τό πεδίο ὁρισμοῦ αὐτῆς εἶναι τό κλειστό διάστημα $[-\alpha,\alpha]$. Ἀκόμη γιά $\gamma > 0$ ἡ συνάρτηση f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό διάστημα $[-\alpha,0]$, γιατί γιά ὁποιαδήποτε $x_1$, $x_2$ στό $[-\alpha,0]$ ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow \alpha^2 - x_1^2 < \alpha^2 - x_2^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \sqrt{\alpha^2 - x_2^2} \Rightarrow$$
$$f(x_1) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_1^2} < \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_2^2} = f(x_2),$$

ἐνῶ αὐτή εἶναι γνησίως φθίνουσα στό διάστημα $[0, \alpha]$, γιατί γιά ὁποιαδήποτε $x_1, x_2$ στό $[0,\alpha]$ ἰσχύει

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow \alpha^2 - x_1^2 > \alpha^2 - x_2^2 \Rightarrow \sqrt{\alpha^2 - x_1^2} > \sqrt{\alpha^2 - x_2^2} \Rightarrow$$

$$f(x_1) = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_1^2} > \gamma\sqrt{\alpha^2 - x_2^2} = f(x_2).$$

Παρόμοια, γιά $\gamma < 0$ ἔχουμε $f \downarrow [-\alpha,0]$ καί $f \uparrow [0,\alpha]$.

Ἔτσι, ἡ μεταβολή τῆς συναρτήσεως f δίδεται ἀπό τούς πίνακες:

| $x$ | $-\alpha$ | | $0$ | | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\gamma\alpha$ | $\searrow$ | $0$ |

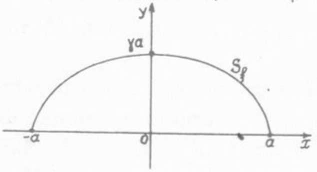
$\gamma > 0$

| $x$ | $-\alpha$ | | $0$ | | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $\gamma\alpha$ | $\nearrow$ | $0$ |

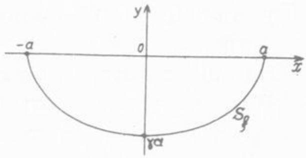
$\gamma < 0$

Ἀπό τούς πίνακες αὐτούς βλέπουμε ὅτι ἡ συνάρτηση f παρουσιάζει στό σημεῖο 0 μέγιστο μέ μέγιστη τιμή $\gamma\alpha$ ἄν $\gamma > 0$ καί ἐλάχιστο μέ ἐλάχιστη τιμή $\gamma\alpha$ ἄν $\gamma < 0$.

Τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως f δίνεται στά παρακάτω σχήματα:




*Σχ. 45* $f: y = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2}, \ \gamma > 0$



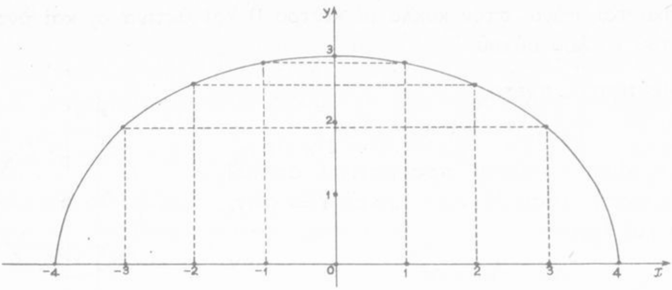

*Σχ. 46* $f: y = \gamma\sqrt{\alpha^2 - x^2}, \ \gamma < 0$

Γιά ἀκριβέστερη χάραξη τοῦ διαγράμματος μιᾶς συναρτήσεως σχεδιάζουμε πρῶτα ὁρισμένα σημεῖα τοῦ διαγράμματος, τά ὁποῖα τό χαρακτηρίζουν σέ ὅλη τήν ἔκτασή του. Ἔτσι π.χ. στήν παραπάνω περίπτωση γιά $\alpha = 4$, $\gamma = \dfrac{3}{4}$ χαράζουμε τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = \dfrac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$ μέ τή βοήθεια τοῦ πίνακα μεταβολῆς της

| $x$ | $-4$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ |

καί τοῦ παρακάτω πίνακα πού δίνει τίς συντεταγμένες ὁρισμένων σημείων τοῦ διαγράμματος.

| $x$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ | $3$ | $\frac{3\sqrt{15}}{4}$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ | $0$ |
| Μέ προσέγγιση | | | | | | | | | |
| $f(x)$ | 0 | 1,98 | 2,60 | 2,90 | 3 | 2,90 | 2,60 | 1,98 | 0 |

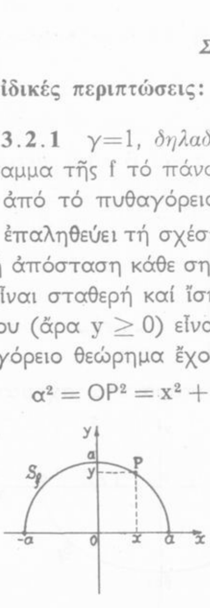



*Σχ. 47* $f: y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

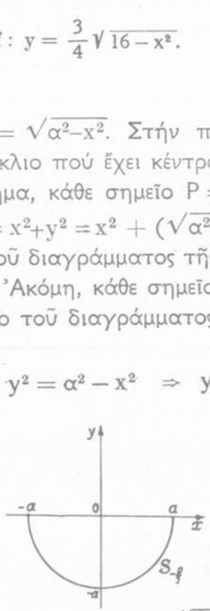
**Εἰδικές περιπτώσεις:**

**3.2.1** $\gamma=1$, *δηλαδή* $f(x) = \sqrt{\alpha^2-x^2}$. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε ὡς διάγραμμα τῆς f τό πάνω ἡμικύκλιο πού ἔχει κέντρο 0 καί ἀκτίνα α. Πραγματικά· ἀπό τό πυθαγόρειο θεώρημα, κάθε σημεῖο $P = (x,y)$ τοῦ διαγράμματος τῆς f ἐπαληθεύει τή σχέση $OP^2 = x^2+y^2 = x^2 + (\sqrt{\alpha^2-x^2})^2 = x^2 + (\alpha^2-x^2) = \alpha^2$, ἄρα ἡ ἀπόσταση κάθε σημείου τοῦ διαγράμματος τῆς f ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων εἶναι σταθερή καί ἴση μέ α. Ἀκόμη, κάθε σημεῖο $P = (x,y)$ τοῦ πάνω ἡμικυκλίου (ἄρα $y \geq 0$) εἶναι σημεῖο τοῦ διαγράμματος τῆς f, ἀφοῦ πάλι ἀπό τό πυθαγόρειο θεώρημα ἔχουμε

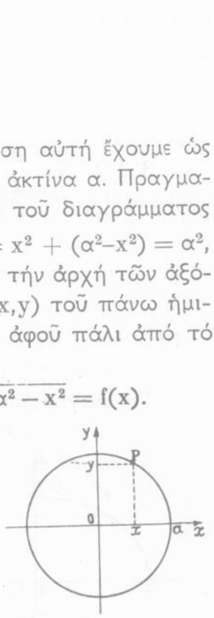
$$\alpha^2 = OP^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = \alpha^2 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{\alpha^2 - x^2} = f(x).$$




*Σχ. 48* $f: y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$




*Σχ. 49* $-f: y = -\sqrt{\alpha^2 - x^2}$




*Σχ. 50* $x^2 + y^2 = \alpha^2$

Εἶναι φανερό ὅτι τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως –f εἶναι τό κάτω ἡμικύκλιο πού ἔχει κέντρο τό 0 καί ἀκτίνα α (βλ. σχ. 49). Ἄρα ὁ κύκλος μέ κέντρο 0 καί ἀκτίνα α εἶναι ἡ ἕνωση τῶν διαγραμμάτων τῶν συναρτήσεων f καί –f. Κάθε σημεῖο $P = (x,y)$ τοῦ κύκλου μέ κέντρο 0 καί ἀκτίνα α ἐπαληθεύει τή σχέση

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \tag{6}$$

ὅπως, εὔκολα, μπορεῖ νά προκύψει, ἀπό τό πυθαγόρειο θεώρημα. Ἀλλά καί ἀντιστρόφως: κάθε σημεῖο $P = (x,y)$, πού ἐπαληθεύει τήν (6) βρίσκεται πάνω στόν κύκλο μέ κέντρο 0 καί ἀκτίνα α, ὅπως πάλι εὔκολα προκύπτει ἀπό τό πυθαγόρειο θεώρημα.

Ὥστε ἡ σχέση (6) χαρακτηρίζει τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, πού βρίσκονται πάνω στόν κύκλο μέ κέντρο 0 καί ἀκτίνα α, καί ὀνομάζεται *ἐξίσωση* τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

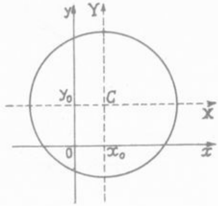
Γενικότερα ἡ σχέση

(7) $$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \alpha^2,$$

ὅπου $x_0, y_0$ εἶναι σταθεροί πραγματικοί ἀριθμοί, μέ τήν ἀντικατάσταση $X = x - x_0$ καί $Y = y - y_0$, γράφεται καί ἔτσι:

$$X^2 + Y^2 = \alpha^2$$

πού εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου μέ κέντρο τήν ἀρχή $C = (x_0, y_0)$ τῶν νέων ἀξόνων X, Y καί ἀκτίνα α (βλ. σχ. 51). Ἡ παραπάνω σχέση (7) ὀνομάζεται *ἐξίσωση* τοῦ κύκλου μέ κέντρο $C = (x_0, y_0)$ καί ἀκτίνα α.

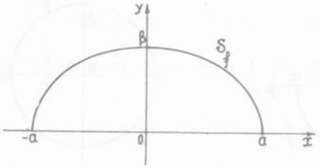



*Σχ. 51* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\alpha^2$

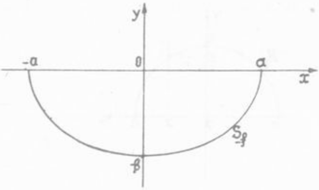
**3.2.2** $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$, *δηλαδή* $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$, *ὅπου* α *καί* β *εἶναι θετικοί ἀριθμοί*. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ πίνακας μεταβολῆς τῆς f εἶναι

| x | $-\alpha$ | | 0 | | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | ↗ | β | ↘ | 0 |

Τά διαγράμματα τῆς f καί τῆς −f δίδονται στά παρακάτω σχήματα:




*Σχ. 52* $f: y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$




*Σχ. 53* $-f: y = -\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}$

Τήν ἕνωση τῶν παραπάνω διαγραμμάτων τῶν συναρτήσεων f καί −f τήν ὀνομάζουμε *ἔλλειψη μέ κέντρο* 0 *καί ἡμιάξονες* α,β.

Κάθε σημεῖο $P = (x, y)$ τῆς ἐλλείψεως αὐτῆς ἐπαληθεύει τή σχέση

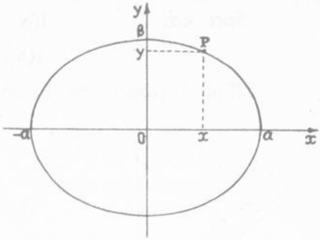
(8) $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

ἐπειδή, ἄν τό P ἀνήκει στό διάγραμμα τῆς f (πού ὀνομάζεται καί *πάνω ἡμιέλλειψη μέ κέντρο* 0 *καί ἡμιάξονες* α,β), ἔχουμε

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - x^2) \Rightarrow (8),$$

καί ἄν τό P ἀνήκει στό διάγραμμα τῆς $-f$ (πού ὀνομάζεται καί *κάτω ἡμιέλλειψη μέ κέντρο* 0 *καί ἡμιάξονες* α,β), πάλι ἔχουμε

$$y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} \Rightarrow y^2=\frac{\beta^2}{\alpha^2}(\alpha^2-x^2) \Rightarrow (8).$$




*Σχ. 54* $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$

*ἔλλειψη μὲ κέντρο* 0 *καὶ ἡμιάξονες* α, β

Ἀλλά καί ἀντιστρόφως : ἄν γιά ἕνα σημεῖο $P=(x, y)$ ἡ (8) ἐπαληθεύεται, τότε τό P εἶναι σημεῖο τῆς ἐλλείψεως, γιατί

$$\left.\begin{matrix}(8)\\ y\geqslant 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} \Rightarrow$$

P ἀνήκει στό διάγραμμα τῆς $-f$

$$\left.\begin{matrix}(8)\\ y\leqslant 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow y=-\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2} \Rightarrow \text{P ἀνήκει στό διάγραμμα τῆς } -f$$

Ἡ σχέση (8) χαρακτηρίζει τά σημεῖα τῆς ἐλλείψεως μέ κέντρο 0 καί ἡμιάξονες α,β καί ὀνομάζεται *ἐξίσωση* τῆς ἐλλείψεως αὐτῆς.

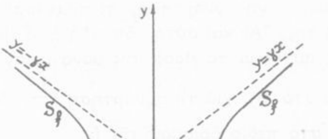
**3.3 Ἡ συνάρτηση** f μέ $f(x)=\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}$, *ὅπου* α, γ *εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί* $\alpha>0$. Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι ἡ ἕνωση τῶν διαστημάτων $(-\infty, -\alpha]$ καί $[\alpha, +\infty)$. Ὅπως καί στήν προηγούμενη § 3.2 προκύπτει καί ἐδῶ ὅτι ὁ πίνακας μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως f εἶναι:

| x | $-\alpha$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| f(x) | ↘ 0 | 0 ↗ |

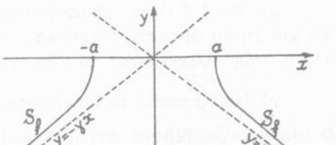
$\gamma>0$

| x | $-\alpha$ | $\alpha$ |
|---|---|---|
| f(x) | ↗ 0 | 0 ↘ |

$\gamma<0$




*Σχ. 55* $f: y=\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2},\ \gamma>0$




*Σχ. 56* $f: y=\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2},\ \gamma<0.$

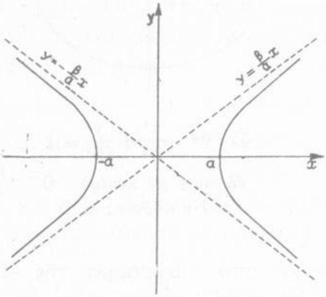
Γιά τή χάραξη τῶν διαγραμμάτων τῶν παραπάνω σχημάτων 55 καί 56 διευκολύνουν καί οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y=\gamma x$ καί $y=-\gamma x$, γιατί, π.χ. στήν περίπτωση $\gamma>0$, ἔχουμε

$$f(x)=\gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}=\gamma|x|\sqrt{1-\frac{\alpha^2}{x^2}}<\gamma|x|$$

ἄρα καί $\qquad f(x) < -\gamma x \ \forall \ x \in (-\infty, -\alpha]$

$\qquad\qquad f(x) < \gamma x \ \forall \ x \in [\alpha, +\infty).$

Εἰδικά, τώρα, ἄν θεωρήσουμε τά διαγράμματα τῶν συναρτήσεων, τά ὁποῖα ἀπεικονίζονται στίς τιμές $\gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$ καί $\gamma = -\dfrac{\beta}{\alpha}$, ὅπου, ἐκτός ἀπό τό α, καί τό β εἶναι θετικός ἀριθμός, τότε ἡ ἕνωση τῶν διαγραμμάτων αὐτῶν (βλ. σχ. 57) ὀνομάζεται *ὑπερβολή*.




*Σχ. 57* $\quad \dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$

*ὑπερβολή.*

Ἡ σχέση

$$(9) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

ὅπως μπορεῖ νά προκύψει εὔκολα, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς ἐλλείψεως, χαρακτηρίζει τά σημεῖα τῆς ὑπερβολῆς καί ὀνομάζεται *ἐξίσωση* τῆς *ὑπερβολῆς*.

Οἱ εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = \dfrac{\beta}{\alpha}x$ καί $y = -\dfrac{\beta}{\alpha}x$ πού διευκολύνουν τή χάραξη τῆς ὑπερβολῆς μέ ἐξίσωση τήν (9) ὀνομάζονται *ἀσύμπτωτες* τῆς ὑπερβολῆς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**9**. α) Νά μελετηθοῦν ὡς πρός τή μονοτονία οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς τύπους:

1) $f(x) = x^3 + 1$ $\qquad$ 2) $f(x) = -x^3 - 1$

3) $f(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$ $\qquad$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1},\ x \geq 0.$

β) Ἄν ἡ f εἶναι μιά μονότονη ἤ γνησίως μονότονη συνάρτηση, τί συμπεραίνετε γενικά γιά τή συνάρτηση –f σχετικά μέ τή μονοτονία της; Ἄν καί αὐτή, δηλαδή ἡ –f εἶναι μονότονη, πῶς συσχετίζεται τό εἶδος τῆς μονοτονίας αὐτῆς μέ τό εἶδος τῆς μονοτονίας τῆς f;

γ) Νά ἐξετασθεῖ τό ἴδιο ἐρώτημα, ὅπως καί στό β), γιά τή συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$, ὅπου ἐδῶ ὑποθέτουμε, βέβαια, ὅτι $f(x) \neq 0$ γιά κάθε x στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f.

**10**. Θεωροῦμε δυό πραγματικές συναρτήσεις f καί g μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ.

1) Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

α) ἄν $f \uparrow$ καί $g \uparrow$, τότε $f + g \uparrow$ $\qquad$ γ) ἄν $f \downarrow$ καί $g \downarrow$, τότε $f + g \downarrow$

β) ἄν $f \uparrow$ καί $g \underset{\smile}{\uparrow}$, τότε $f + g \underset{\smile}{\uparrow}$ $\qquad$ δ) ἄν $f \downarrow$ καί $g \overset{\smile}{\downarrow}$, τότε $f + g \overset{\smile}{\downarrow}$

ε) ἄν οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι μονότονες ἀλλά μέ διαφορετικό εἶδος μονοτονίας, τί συμπεραίνετε γιά τή μονοτονία τῆς $f + g$;

2) Ἄν $f(x) > 0$ καί $g(x) > 0$ γιά κάθε x, ν' ἀποδείξετε ὅτι

α) ἄν $f \uparrow$ καί $g \uparrow$, τότε $fg \uparrow$ $\qquad$ γ) ἄν $f \downarrow$ καί $g \downarrow$, τότε $fg \downarrow$

β) ἄν $f \uparrow$ καί $g \underset{\smile}{\uparrow}$, τότε $fg \underset{\smile}{\uparrow}$ $\qquad$ δ) ἄν $f \downarrow$ καί $g \overset{\smile}{\downarrow}$, τότε $fg \overset{\smile}{\downarrow}$

ε) ἄν **οἱ συναρτήσεις** f καί g εἶναι μονότονες ἀλλά μὲ **διαφορετικὸ** εἶδος μονοτονίας, τί συμπεραίνετε γιά τή μονοτονία τῆς fg;

3) Ἄν $f(x) > 0$ καί $g(x) < 0$ γιά κάθε x, ν' ἀποδείξετε ὅτι

α) ἄν $f \uparrow$ καί $g \downarrow$, τότε $fg \downarrow$ δ) ἄν $f \downarrow$ καί $g \uparrow$, τότε $fg \uparrow$

β) ἄν $f \uparrow$ καί $g \overset{\vee}{\downarrow}$, τότε $fg \overset{\vee}{\downarrow}$ ε) ἄν $f \downarrow$ καί $g \underset{\wedge}{\uparrow}$, τότε $fg \underset{\wedge}{\uparrow}$

γ) ἄν $f \underset{\wedge}{\uparrow}$ καί $g \downarrow$, τότε $fg \overset{\vee}{\downarrow}$ στ) ἄν $f \overset{\vee}{\downarrow}$ καί $g \underset{\wedge}{\uparrow}$, τότε $fg \underset{\wedge}{\uparrow}$

ζ) ἄν **οἱ συναρτήσεις** f καί g εἶναι μονότονες μέ τό ἴδιο εἶδος μονοτονίας τί συμπεραίνετε γιά τή μονοτονία τῆς fg;

4) Ἄν $f(x) < 0$ καί $g(x) < 0$ γιά κάθε x, ν' ἀποδείξετε ὅτι

α) ἄν $f \downarrow$ καί $g \downarrow$, τότε $fg \uparrow$ γ) ἄν $f \uparrow$ καί $g \uparrow$, τότε $fg \downarrow$

β) ἄν $f \downarrow$ καί $g \overset{\vee}{\downarrow}$, τότε $fg \underset{\wedge}{\uparrow}$ δ) ἄν $f \uparrow$ καί $g \underset{\wedge}{\uparrow}$, τότε $fg \overset{\vee}{\downarrow}$

ε) ἄν **οἱ** συναρτήσεις f καί g εἶναι μονότονες ἀλλά μὲ διαφορετικὸ εἶδος μονοτονίας, τί συμπεραίνετε γιά τή μονοτονία τῆς fg;

**11**. Νά μελετηθοῦν καί νά παρασταθοῦν γεωμετρικά οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς τύπους:

1) $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+5}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x+7}$ 3) $f(x) = \dfrac{x+2}{8x+1}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{3x+2}$ 5) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x}$ 6) $f(x) = \dfrac{7x+2}{5x+1}$

**12***. Νά μελετηθοῦν καί νά παρασταθοῦν γεωμετρικά οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς τύπους:

1) $f(x) = 3x^2 + 2$ 2) $f(x) = -4x^3 + 1$ 3) $f(x) = 2x^4 - 1$
4) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 5) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ 6) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$
7) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ 8) $f(x) = -2x^4 + 3x^2 + 5$

**13**. Νά χαραχθοῦν οἱ ἐλλείψεις μέ ἐξισώσεις:

1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ 2) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 3) $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$

4) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ 5) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 4$ 6) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{12} = 3$

**14**. Νά χαραχθοῦν οἱ ὑπερβολές μέ ἐξισώσεις:

1) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ 2) $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1$ 3) $\dfrac{x^2}{16} - y^2 = 1$

4) $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{8} = 8$ 5) $x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 4$ 6) $\dfrac{x^2}{16} - y^2 = 4$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

# ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

## 1. ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

**1.1 Ἡ ἔννοια τῆς ἀκολουθίας.** Ξέρουμε ἤδη (κεφ. Ι, § 2.2) τήν ἔννοια τῆς συναρτήσεως (ἀπεικονίσεως) $f : A \to B$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο Α καί μέ τιμές σ' ἕνα σύνολο Β (Α,Β ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι μή κενά). Ἐξ ἄλλου γιά τά στοιχεῖα x,y πού συσχετίζονται μέ τήν f γράφουμε

$$A \ni x \mapsto y = f(x) \in B.$$

Ἔτσι, γιά μιά συνάρτηση α μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μέ τιμές στό Β γράφουμε

$$\alpha : N \to B \text{ ἤ καί } N \ni \nu \mapsto \alpha(\nu) \in B.$$

Κάθε συνάρτηση, ὅπως ἡ παραπάνω α, ὀνομάζεται *μιά ἀκολουθία στοιχείων τοῦ συνόλου* Β. Εἰδικά, ἄν $B \subseteq R$ ἡ ἀκολουθία α ὀνομάζεται *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν.*

Ὥστε : *ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι κάθε συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο* N *τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μέ τιμές στό σύνολο* R *τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή μιά ἀπεικόνιση τοῦ* N *στό* R.

Στήν περίπτωση μιᾶς ἀκολουθίας α συνηθίζουμε νά συμβολίζουμε τήν τιμή της α(ν) μέ $\alpha_\nu$ γράφοντας τό φυσικό ἀριθμό ν ὡς κάτω δείκτη τοῦ α. Τίς τιμές μιᾶς ἀκολουθίας α τίς ὀνομάζουμε ὅρους της καί μποροῦμε νά τούς καταχωρήσουμε σέ ἕναν πίνακα μέ τόν ἑξῆς τρόπο:

| 1 | 2 | 3 | ... | ν | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | ... | $\alpha_\nu$ | ... |

Συνήθως ἡ πρώτη γραμμή τοῦ πίνακα παραλείπεται καί γράφονται μόνο οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας, δηλαδή:

$$(1) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$$

Ὁ ὅρος $\alpha_1$ ὀνομάζεται πρῶτος ὅρος τῆς ἀκολουθίας, ὁ $\alpha_2$ δεύτερος ὅρος καί γενικά ὁ $\alpha_\nu$ νιοστός ὅρος τῆς ἀκολουθίας.

Ἔχει ἐπικρατήσει μιά ἀκολουθία α νά παριστάνεται μέ τούς ὅρους της ὅπως στήν (1). Τότε λέμε «*ἡ ἀκολουθία* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu, \ldots$» ἤ καί ἀλλιῶς «*ἡ* *ἀκολουθία* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$». Συντομώτερα ἡ ἀκολουθία (1) παριστάνεται καί ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_\nu,\ \nu \in \mathrm{N} \quad ἤ \quad καί \quad \alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots$$

**Παραδείγματα :**

**1.** ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή ἡ ἀκολουθία

$$1,\ 2,\ 3, \ldots\ \nu, \ldots$$

τῆς ὁποίας νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός $\nu$, δηλαδή $\alpha_\nu = \nu$.

**2.** ἡ ἀκολουθία

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$$

τῆς ὁποίας ὁ νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{\nu}$, δηλαδή $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$.

**3.** ἡ ἀκολουθία

$$1,\ 4,\ 9, \ldots, \nu^2, \ldots$$

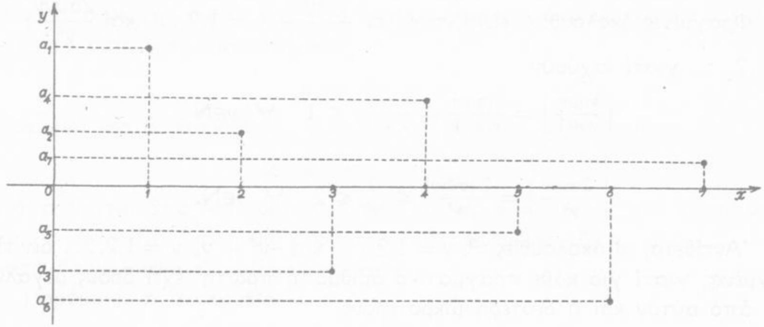
**4.** ἡ ἀκολουθία

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^\nu \frac{1}{\nu}, \ldots$$

**1.1.1** *Γεωμετρική παράσταση ἀκολουθίας.* Ἄν $\alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε τό διάγραμμά της $S_\alpha$ εἶναι τό σύνολο

$$\{(1,\alpha_1), (2,\alpha_2), \ldots, (\nu,\alpha_\nu), \ldots\}.$$

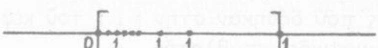
Ἡ γεωμετρική παράσταση (τό διάγραμμα) αὐτοῦ τοῦ συνόλου ἤ, ὅπως καί ἀλλιῶς λέμε, τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots$ ἀποτελεῖται ἀπό ἀπομονωμένα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ὅπως φαίνεται στό παρακάτω σχῆμα 58.




*Σχ. 58*

**1.1.2** *Φραγμένη ἀκολουθία.* Γιά τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$0 \leqslant \alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \leqslant 1 \quad \forall \quad \nu \in \mathrm{N}$$




*Σχ. 59*

δηλαδή ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας αὐτῆς βρίσκονται στό κλειστό διάστημα [0,1] καί τότε λέμε ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι *φραγμένη*.

Γενικά: *μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *ὀνομάζεται φραγμένη, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχουν πραγματικοί ἀριθμοί* $\gamma$ *καί* $\delta$ *τέτοιοι ὥστε νά ἰσχύει.*

$$(2) \qquad \gamma \leqq \alpha_\nu \leqq \delta \quad \forall \ \nu \in N$$

Τότε οἱ ἀριθμοί $\gamma$ καί $\delta$ ὀνομάζονται, ἀντίστοιχα, *κάτω* καί *ἄνω φράγμα* τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$.

Ἄν τώρα $\theta$ εἶναι ἀριθμός μεγαλύτερος ἤ ἴσος ἀπ' τούς ἀριθμούς $|\gamma|$ καί $|\delta|$, τότε ἀπό τή (2) προκύπτει ὅτι:

$$\alpha_\nu \leqslant \delta \leqslant |\delta| \leqslant \theta \quad \forall \ \nu \in N$$

καί ἀκόμη

$$\alpha_\nu \geqslant \gamma \geqslant -|\gamma| \geqslant -\theta \quad \forall \ \nu \in N.$$

Ἄρα, ἰσχύει τότε

$$(3) \qquad -\theta \leqslant \alpha_\nu \leqslant \theta \quad \forall \ \nu \in N$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$(4) \qquad |\alpha_\nu| \leqslant \theta \quad \forall \ \nu \in N.$$

Ἀλλά καί ἀντίστροφα, ἄν ἰσχύει ἡ (4), τότε ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη, ἀφοῦ ἡ (4) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν (3). Ἀποδείξαμε λοιπόν, ὅτι:

*Μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* $\alpha_\nu$, $\nu=1,2\ldots$ *εἶναι φραγμένη τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός* $\theta$ *τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει*

$$|\alpha_\nu| \leq \theta \quad \forall \ \nu \in N.$$

Στήν περίπτωση αὐτή ὁ ἀριθμός $\theta$ ὀνομάζεται *φράγμα* τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$

Φραγμένες ἀκολουθίες εἶναι, π.χ., οἱ $\dfrac{\nu \cdot \eta\mu\nu}{\nu+1}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\dfrac{2\sigma\upsilon\nu\nu}{\nu^3}$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιατί ἰσχύουν

$$\left|\frac{\nu\eta\mu\nu}{\nu+1}\right| = \frac{\nu|\eta\mu\nu|}{\nu+1} \leqslant \frac{\nu}{\nu+1} \leqslant 1 \quad \forall \ \nu \in N$$

καί

$$\left|\frac{2\sigma\upsilon\nu\nu}{\nu^3}\right| = \frac{2\,|\sigma\upsilon\nu\nu|}{\nu^3} \leqslant \frac{2}{\nu^3} \leqslant 2 \quad \forall \ \nu \in N.$$

Ἀντίθετα, οἱ ἀκολουθίες $\nu^3$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $-\nu^2 + \nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δέν εἶναι φραγμένες, γιατί γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό ἡ πρώτη ἔχει ὅρους μεγαλύτερους ἀπό αὐτόν καί ἡ δεύτερη μικρότερους.

**1.1.3 Μονότονη ἀκολουθία.** Ἐφόσον ἡ ἀκολουθία εἶναι μιά εἰδική περίπτωση συναρτήσεως, οἱ ἔννοιες *μονότονη* καί *γνησίως μονότονη ἀκολουθία* πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι γνωστές, σύμφωνα μέ τούς ἀντίστοιχους ὁρισμούς πού δόθηκαν στήν § 1.1 τοῦ κεφ. II, γιά πραγματικές συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Ἀκριβέστερα μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι *αὔξουσα* τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu \leqq \alpha_\mu.$$

Παρόμοια, ἡ $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι *φθίνουσα* τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu \geq \alpha_\mu.$$

Ἐπίσης, ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι *γνησίως αὔξουσα* ἄν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu < \alpha_\mu$$

καί *γνησίως φθίνουσα*, ἄν

$$\nu < \mu \Rightarrow \alpha_\nu > \alpha_\mu.$$

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, γιατί

$$\nu < \mu \Rightarrow \nu^2 < \mu^2$$

ἐνῶ ἡ ἀκολουθία $\frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, γιατί

$$\nu < \mu \Rightarrow \frac{1}{\nu} > \frac{1}{\mu}.$$

Τώρα, εἶναι εὔκολο νά διαπιστώσουμε ὅτι μιά ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι

αὔξουσα, τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_\nu \leq \alpha_{\nu+1}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$
φθίνουσα, τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_\nu \geq \alpha_{\nu+1}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$
γνησίως αὔξουσα, τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$
γνησίως φθίνουσα, τότε καί μόνο τότε, ἄν $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ $\forall$ $\nu \in \mathbf{N}$

**1.2 Ἡ ἔννοια τῆς ὑπακολουθίας.** Ἄν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ἀκολουθία καί θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν $2\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε μέ τή διαδοχική ἀντιστοίχιση

$$\nu \mapsto 2\nu \mapsto \alpha_{2\nu}$$

ὁρίζεται μιά νέα ἀκολουθία $\alpha_{2\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία

$$\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6, \ldots, \alpha_{2\nu}, \ldots$$

πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐκείνους τούς ὅρους τῆς $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού ἔχουν δείκτη ἄρτιο. Ἡ νέα αὐτή ἀκολουθία ὀνομάζεται *ὑπακολουθία* τῆς $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί μάλιστα *ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων δεικτῶν*.

Παρόμοια, ἡ ἀκολουθία

$$\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ \ldots, \alpha_{2\nu-1},\ \ldots$$

μπορεῖ νά ὁρισθεῖ ὡς ἡ *ὑπακολουθία τῶν περιττῶν δεικτῶν* τῆς $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$

Λ.χ. ἄν $\alpha_\nu = (-1)^\nu \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε ἡ ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων δεικτῶν εἶναι ἡ

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{2\nu}, \ldots$$

καί ἡ ὑπακολουθία τῶν περιττῶν δεικτῶν εἶναι ἡ

$$-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \ldots, -\frac{1}{2\nu-1}, \ldots$$

Γενικά, ἄν ἀντί γιά τήν ἀκολουθία τῶν ἄρτιων ἤ περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν θεωρήσουμε μιά γνησίως αὔξουσα ἀκολουθία φυσικῶν ἀριθμῶν $\kappa_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ (ἄρα $\kappa_\nu < \kappa_{\nu+1}$) τότε μέ τή διαδοχική ἀντιστοίχιση

$$\nu \mapsto \kappa_\nu \mapsto \alpha_{\kappa_\nu}$$

ὁρίζεται μιά νέα ἀκολουθία $\alpha_{\kappa_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ (ἡ σύνθεση $\alpha \circ \kappa$ τῶν ἀκολουθιῶν (συναρτήσεων) κ καί α), δηλαδή ἡ ἀκολουθία

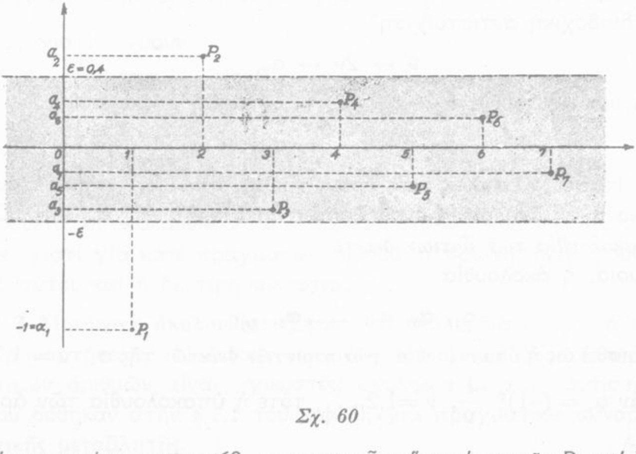
$$\alpha_{\kappa_1}, \alpha_{\kappa_2}, \alpha_{\kappa_3}, \ldots, \alpha_{\kappa_\nu}, \ldots$$

πού ὀνομάζεται *ὑπακολουθία* τῆς $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$

**1.3 Μηδενικές ἀκολουθίες.** Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\alpha_\nu = (-1)^\nu \dfrac{1}{\nu}$, δηλαδή τήν ἀκολουθία

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, (-1)^\nu \frac{1}{\nu}, \ldots$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τό διάγραμμα αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας (βλ. σχ. 60), ἕνα θετικό ἀριθμό ε π.χ. τόν ε=0,4 καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = \varepsilon$ καί $y = -\varepsilon$, οἱ ὁποῖες εἶναι παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν x καί ὁρίζουν πάνω στό ἐπίπεδο μιά *ταινία*.




*Σχ. 60*

Στό παραπάνω σχῆμα 60, παρατηροῦμε ὅτι τά σημεῖα $P_1$ καί $P_2$ βρίσκονται ἔξω ἀπό τήν ταινία, ἐνῶ ὅλα τά ἀντίστοιχα σημεῖα, μέ δείκτη $\nu \geq 3$ δηλαδή τά σημεῖα $P_3$, $P_4$, $P_5, \ldots$, βρίσκονται μέσα σ' αὐτή. Μέ ἄλλα λόγια, οἱ τεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν, δηλαδή οἱ ὅροι $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας μας, βρίσκονται στό ἀνοικτό διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$, δηλαδή

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0 = 3 \quad (\varepsilon = 0{,}4)$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0 = 3.$$

Ἄν τώρα πάρουμε ἕναν ἄλλο θετικό ἀριθμό ε, π.χ. τόν $\varepsilon = 0{,}16$ (μικρότερο τοῦ προηγούμενου) καί ἐπαναλάβουμε τά παραπάνω, τότε καταλήγουμε στό συμπέρασμα ὅτι τά σημεῖα $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ καί $P_6$ βρίσκονται ἔξω ἀπό τήν ἀντίστοιχη ταινία, ἐνῶ τά σημεῖα $P_7, P_8, P_9, \ldots$ βρίσκονται μέσα σ' αὐτή. Μέ ἄλλα λόγια, οἱ τεταγμένες τῶν σημείων αὐτῶν, δηλαδή οἱ ὅροι $\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \ldots$ τῆς ἀκολουθίας μας, βρίσκονται στό ἀνοικτό διάστημα $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Ἄρα ἰσχύει

$$-\varepsilon < \alpha_\nu < \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0 = 7 \quad (\varepsilon = 0{,}16)$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0 = 7.$$

Στό ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καί ἄν πάρουμε ὡς ε ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό, μόνο πού γιά κάθε ε ἀλλάζει ὁ δείκτης $\nu_0$ (παραπάνω εἴδαμε ὅτι γιά $\varepsilon = 0{,}4$ ἔχουμε ὡς $\nu_0$ τό 3, ἐνῶ γιά $\varepsilon = 0{,}16$, τό 7).

Τήν ἀκολουθία αὐτή, $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\alpha_\nu = (-1)^\nu \dfrac{1}{\nu}$ πού ἱκανοποιεῖ τά παραπάνω, τή χαρακτηρίζουμε ὡς *μηδενική ἀκολουθία*.

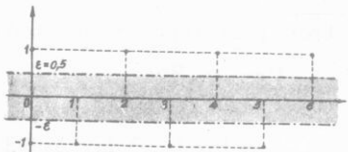
Ἀντίθετα, οἱ ἀκολουθίες $\beta_\nu = (-1)^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δηλαδή

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1, \ldots$$

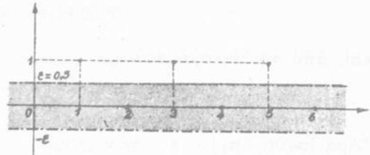
καί $\gamma_\nu = \dfrac{1-(-1)^\nu}{2}$, $\nu = 1,2,\ldots$ δηλαδή

$$0,\ 1,\ 0,\ 1, \ldots$$

δέν πληροῦν τά παραπάνω (βλ. σχ. 61 καί 62) καί ἔτσι αὐτές δέν μποροῦν νά χαρακτηρισθοῦν ὡς μηδενικές.




*Σχ. 61*




*Σχ. 62*

Ἀπό τά παραπάνω ὁδηγούμαστε στό νά δώσουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

*Μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *ὀνομάζεται μηδενική ἀκολουθία* καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ

$$\alpha_\nu \to 0 \quad \text{ἤ καί} \quad \lim \alpha_\nu = 0$$

*τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχει δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ *(πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ε) τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει.*

$$|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \quad \nu \geqslant \nu_0.$$

*Γιά συντομία:*

$$\boxed{\alpha_\nu \to 0 \underset{\text{ορσ}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \nu \geqslant \nu_0}$$

**Παραδείγματα:**

**1.** *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι μηδενική,* γιατί γιά κάθε θετικό ἀριθμό ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, $\left(\text{ἐδῶ μπορεῖ νά ληφθεῖ ἕνας φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ } \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, τέτοιος ὥστε

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu| = \frac{1}{\nu} \leqslant \frac{1}{\nu_0},$$

καί, ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ $\nu_0$,

$$\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{\nu_0} < \varepsilon.$$

Ἄρα ἰσχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0$. Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \left( \text{ἀρκεῖ νά ληφθεῖ } \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon}\right): \ |\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0$$

δηλαδή

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0.$$

**2.** *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}$, $\nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι μηδενική,* γιατί γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό ε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, $\left(\text{ἐδῶ μπορεῖ νά ληφθεῖ ἕνας φυσικός ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ } \dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$, τέτοιος ὥστε

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow |\alpha_\nu| = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu_0}},$$

καί, ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ $\nu_0$,

$$\nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} < \varepsilon.$$

Ἄρα ἰσχύει $|\alpha_\nu| < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0$.
Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon)\left(\text{ἀρκεῖ νά ληφθεῖ } \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon^2}\right): |\alpha_\nu| < \varepsilon \ \forall \nu \geq \nu_0,$$

δηλαδή

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \to 0.$$

**1.3.1 Ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν.** Ἐδῶ ἀναφέρονται οἱ βασικότερες ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν πού μάθαμε στή προηγούμενη τάξη.

**1.** $$\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow |\alpha_\nu| \to 0$$

Ἀπό αὐτή βρίσκουμε εὔκολα καί ὅτι

$$\alpha_\nu \to 0 \Leftrightarrow -\alpha_\nu \to 0.$$

**2.** $$\alpha_\nu \to 0 \Rightarrow \alpha_{\kappa_\nu} \to 0,$$

ὅπου $\alpha_{\kappa_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε ὑπακολουθία τῆς $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$. Αὐτό σημαίνει ὅτι *κάθε ὑπακολουθία μηδενικῆς ἀκολουθίας εἶναι ἐπίσης μηδενική ἀκολουθία.*

**3.** $$\alpha_\nu \to 0 \Rightarrow \alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots \textit{ εἶναι φραγμένη.}$$

Τό ἀντίστροφο, ὅμως, δέν ἰσχύει, ὅπως μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ μέ τό παράδειγμα $\alpha_\nu = (-1)^\nu$.

Πραγματικά· αὐτή εἶναι φραγμένη γιατί

$$|\alpha_\nu| = 1 \leq 1 \text{ γιά κάθε } \nu \in \mathrm{N}$$

ἀλλά δέν εἶναι μηδενική.

**4.** $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu + \beta_\nu \to 0.$$

**5.** $$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots \textit{ φραγμένη}\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \beta_\nu \to 0.$$

Αὐτή μέ τήν ἰδιότητα 3 μᾶς δίνουν τήν

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \beta_\nu \to 0$$

**6.** $$\left.\begin{array}{l}\xi \in \mathrm{R}\\ \alpha_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \xi\alpha_\nu \to 0.$$

Αὐτή μέ τήν ἰδιότητα 4 δίνουν τήν

$$\left.\begin{array}{l}\xi \in \mathrm{R},\ \alpha_\nu \to 0\\ \eta \in \mathrm{R},\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu \to 0$$

Εἰδικά γιά $\xi = 1$ καί $\eta = -1$, παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_\nu \to 0\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu - \beta_\nu \to 0.$$

**7.** $$\left.\begin{array}{l}|\alpha_\nu| \leq |\beta_\nu| \ \forall\ \nu \in \mathrm{N}\\ \beta_\nu \to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_\nu \to 0.$$

**8.** $$\alpha_\nu \to 0 \Rightarrow \sqrt[\kappa]{|\alpha_\nu|} \to 0,$$ κ σταθερός φυσικός ἀριθμός.

**Ἐφαρμογές :**

1. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^2+\nu+2}$, $\nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι μηδενική.* Πραγματικά.

$$|\alpha_\nu| = \frac{\nu}{\nu^2+\nu+2} \leqslant \frac{\nu}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \quad \forall\ \nu\in\mathbf{N}$$

καὶ ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\nu} \to 0$ ἀπό τήν ἰδιότητα 7 παίρνουμε ὅτι καὶ $\dfrac{\nu}{\nu^2+\nu+2} \to 0.$

2. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^3+2} - \sqrt{\nu^3+1}$, $\nu = 1, 2\ldots$ *εἶναι μηδενική.* Πραγματικά·

$$|\alpha_\nu| = \sqrt{\nu^3+2} - \sqrt{\nu^3+1} = \frac{1}{\sqrt{\nu^3+2}+\sqrt{\nu^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{\nu^3}+\sqrt{\nu^3}} = \frac{1}{2\nu\sqrt{\nu}} < \frac{1}{\nu}\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}$$

καί ἐπειδή $\dfrac{1}{\nu} \to 0$, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 7, καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \sqrt{\nu^3+2} - \sqrt{\nu^3+1}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

3. *Ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ ω *σταθερό πραγματικό ἀριθμό καί* $|\omega| < 1$ *εἶναι μηδενική.* Πραγματικά.

Ἄν $\omega = 0$, τότε $\alpha_\nu = 0$ $\forall\ \nu\in\mathbf{N}$ καί ἡ $\alpha_\nu = 0$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

Ἄν $\omega \neq 0$, ἔχουμε $0 < |\omega| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|\omega|} > 1$. Ἄρα $\dfrac{1}{|\omega|} = 1 + \theta$, $\theta > 0$ καί ἑπομένως

$$(5) \qquad |\alpha_\nu| = |\omega|^\nu = \frac{1}{(1+\theta)^\nu} \quad \forall\ \nu\in\mathbf{N}$$

Ἀλλά ἐπειδή $1+\theta > 0$, σύμφωνα μέ τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli* (§ 2.3 τοῦ κεφ. I)

$$(1+\theta)^\nu \geq 1 + \nu\theta$$

ἔχουμε

$$(1+\theta)^\nu > \nu\theta \quad \forall\ \nu\in\mathbf{N}$$

καί τότε ἡ (5) γίνεται

$$|\alpha_\nu| < \frac{1}{\nu\theta} = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\nu} \quad \forall\ \nu\in\mathbf{N}.$$

Ἄρα, ἐπειδή $\dfrac{1}{\nu} \to 0$, ἀπό τίς ἰδιότητες 6 καί 7, συμπεραίνουμε ὅτι καί ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = \omega^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ $(0 < |\omega| < 1)$ εἶναι μηδενική.

Π.χ. οἱ ἀκολουθίες $\dfrac{1}{2^\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$, $\dfrac{1}{3^\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$ καί $\dfrac{1}{10^\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὅλες μηδενικές ἀκολουθίες.

**1.4 Συγκλίνουσες ἀκολουθίες.** Γιά τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu = \dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει $\alpha_\nu - 1 = \dfrac{1}{\nu}$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - 1$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική ἀκολουθία. Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ ἀκολουθία $\dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό 1.

Γενικά, λέμε ὅτι *«μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *συγκλίνει πρός τόν πραγματικό ἀριθμό l»* ἤ καί ἀλλιῶς *«τείνει πρός τόν πραγμα-*

*τικό ἀριθμό l»* καί αὐτό τό συμβολίζουμε μέ $\lim \alpha_\nu = l$ ἤ $\alpha_\nu \to l$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *ἡ ἀκολουθία* $\alpha_\nu - l$, $\nu = 1,2,\ldots$ *δηλαδή ἡ ἀκολουθία*

$$\alpha_1 - l,\ \alpha_2 - l, \ldots, \alpha_\nu - l, \ldots$$

*εἶναι μηδενική*. Γιά συντομία γράφουμε:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = l \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \alpha_\nu - l \to 0}$$

Ὁ ἀριθμός $l$ εἶναι *μοναδικός* καί ὀνομάζεται *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή* τῆς ἀκολουθίας $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$

Τό μονοσήμαντο τῆς ὁριακῆς τιμῆς εἶναι φανερό γιά τίς σταθερές ἀκολουθίες, ἐνῶ γενικά προκύπτει ἀπό τήν ἰδιότητα

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \\ \lim \alpha_\nu = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow l_1 = l_2.$$

Πραγματικά· ἐπειδή $\lim \alpha_\nu = l_1$ καί $\lim \alpha_\nu = l_2$ θά ἔχουμε $\alpha_\nu - l_1 \to 0$ καί $\alpha_\nu - l_2 \to 0$ καί ἔτσι, ἀπό τήν ἰδιότητα 6 τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν $(\alpha_\nu - l_2) - (\alpha_\nu - l_1) = l_1 - l_2 \to 0$ πού σημαίνει ὅτι $l_1 - l_2 = 0$, ἤ $l_1 = l_2$, ἀφοῦ πρόκειται γιά σταθερή ἀκολουθία.

**1.4.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἄν $\alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι μιά ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε οἱ παρακάτω προτάσεις εἶναι ἰσοδύναμες:*

(i) $\lim \alpha_\nu = l$

(ii) *Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon$) τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει*

$$|\alpha_\nu - l| < \varepsilon \text{ γιά κάθε } \nu \geq \nu_0.$$

*Ἀπόδειξη*. (i) $\Rightarrow$ (ii). Πραγματικά· $\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim(\alpha_\nu - l) = 0$ καί ἔτσι ἀπό τόν ὁρισμό τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας παίρνουμε

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ |\alpha_\nu - l| < \varepsilon\ \forall\ \nu \geq \nu_0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Πραγματικά· ἀπό τόν ὁρισμό τῆς μηδενικῆς ἀκολουθίας ἡ πρόταση (ii) σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - l$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική καί αὐτό συνεπάγεται τήν (i).

**Παρατήρηση.** Ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία $\dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, πού ὅπως ξέρουμε συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό 1, τότε παρατηροῦμε ὅτι καί ἡ ἀκολουθία $\dfrac{\nu+11}{\nu+10}$, $\nu = 1,2,\ldots$ δηλαδή ἡ ἀκολουθία

$$\frac{12}{11},\ \frac{13}{12},\ \frac{14}{13}, \ldots$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν $\dfrac{\nu+1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ διαγραφή τῶν δέκα πρώτων ὅρων της ἐπίσης συγκλίνει καί μάλιστα πρός τόν ἀριθμό, 1, γιατί

$$\left|\frac{\nu+11}{\nu+10} - 1\right| = \frac{1}{\nu+10} < \frac{1}{\nu} \to 0.$$

Γενικά, ἀπό τόν ὁρισμό τῆς συγκλίνουσας ἀκολουθίας μποροῦμε νά συμπεράνουμε εὔκολα ὅτι ἡ ἰδιότητα νά εἶναι μιά ἀκολουθία συγκλίνουσα διατηρεῖται καί μετά ἀπό τή διαγραφή ἑνός *πεπερασμένου* πλήθους ὅρων της καί μάλιστα ἡ ὁριακή τιμή της παραμένει ἀμετάβλητη.

Ἄν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ἀκολουθία καί Μ ἕνα ἀπέραντο ὑποσύνολο τοῦ συνόλου $\mathbf{N}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, γιά ἕναν πραγματικό ἀριθμό $l$ θά γράφουμε

$$\lim_{\nu \in M} \alpha_\nu = l$$

τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\quad |\alpha_\nu - l| < \varepsilon \quad \forall\ \nu \in M \text{ μέ } \nu \geq \nu_0.$$

Ἔτσι εἶναι φανερό ὅτι γιά ὁποιοδήποτε τέτοιο σύνολο Μ ἰσχύει

$$\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim_{\nu \in M} \alpha_\nu = l. \tag{6}$$

καί ἀκόμη ὅτι

$$\lim \alpha_\nu = l \Leftrightarrow \lim_{\nu \in \mathbf{N}} \alpha_\nu = l.$$

Ἐπίσης, ἀπό τήν παραπάνω παρατήρηση, γιά ὁποιοδήποτε πεπερασμένο ὑποσύνολο Τ τοῦ συνόλου $\mathbf{N}$ ἰσχύει

$$\lim_{\nu \in M} \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim_{\nu \in M \cup T} \alpha_\nu = l \quad \text{καί} \quad \lim_{\nu \in M - T} \alpha_\nu = l.$$

Τέλος, ἄν Λ,Μ εἶναι ἀπέραντα σύνολα ὑποσύνολα τοῦ Ν, τότε

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu \in M} \alpha_\nu = l \\ \lim\limits_{\nu \in \Lambda} \alpha_\nu = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\nu \in M \cup \Lambda} \alpha_\nu = l.$$

Πραγματικά· ἄν ε εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός, τότε ἐπειδή $\lim\limits_{\nu \in M} \alpha_\nu = l$

$$\exists\ \nu_1 = \nu_1(\varepsilon):\quad |\alpha_\nu - l| < \varepsilon \quad \forall\ \nu \in M \text{ μέ } \nu \geq \nu_1$$

καί ἐπειδή $\lim\limits_{\nu \in \Lambda} \alpha_\nu = l$, πάλι

$$\exists\ \nu_2 = \nu_2(\varepsilon):\quad |\alpha_\nu - l| < \varepsilon \quad \forall\ \nu \in \Lambda \quad \text{μέ} \quad \nu \geq \nu_2$$

Ἔτσι γιά $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ ἔχουμε

$$\nu \geq \nu_0 \text{ καί } \nu \in \Lambda \cup M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nu \geq \nu_1 \text{ καί } \nu \in M \\ \text{ἤ} \\ \nu \geq \nu_2 \text{ καί } \nu \in \Lambda \end{array}\right\} \Rightarrow |\alpha_\nu - l| < \varepsilon$$

δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\quad |\alpha_\nu - l| < \varepsilon \quad \forall\ \nu \in \Lambda \cup M \text{ μέ } \nu \geq \nu_0$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{\nu \in \Lambda \cup M} \alpha_\nu = l.$

**1.4.2 Ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν.** Ἀπό τίς ἰδιότητες τῶν μηδενικῶν ἀκολουθιῶν προκύπτουν ἀμέσως καί οἱ παρακάτω ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, πού εἶναι ἄλλωστε γνωστές καί ἀπ' τά μαθήματα προηγουμένων τάξεων.

**1.** $\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim |\alpha_\nu| = |l|$

**2.** $\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim \alpha_{\kappa_\nu} = l$

ὅπου $\alpha_{\kappa_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὑπακολουθία τῆς $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδή *κάθε ὑπακολουθία συγκλίνουσας ἀκολουθίας εἶναι ἐπίσης συγκλίνουσα ἀκολουθία μέ τήν ἴδια ὁριακή τιμή.*

3. $\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \alpha_\nu,\ \nu = 1,2,\ldots$ *εἶναι φραγμένη.*

Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει, δηλαδή ὑπάρχουν φραγμένες ἀκολουθίες πού δέν εἶναι συγκλίνουσες $\left(\text{Λ.χ. ἡ } \alpha_\nu=(-1)^\nu + \dfrac{1}{\nu},\ \nu = 1,2,\ldots\right)$.

4. $$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \\ \lim \beta_\nu = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = l_1 + l_2.$$

5. $$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \\ \lim \beta_\nu = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu \beta_\nu) = l_1 l_2.$$

Αὐτή συνεπάγεται τήν

$$\left.\begin{array}{l}\xi \in R \\ \lim \alpha_\nu = l\end{array}\right\} \Rightarrow \lim(\xi \alpha_\nu) = \xi l.$$

ἡ ὁποία μαζί μέ τήν 4 συνεπάγεται τήν

$$\left.\begin{array}{l}\xi \in \mathbf{R},\ \lim \alpha_\nu = l_1 \\ \eta \in \mathbf{R},\ \lim \beta_\nu = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\xi\alpha_\nu + \eta\beta_\nu) = \xi l_1 + \eta l_2.$$

Εἰδικά, γιά $\xi = 1$ καί $\eta = -1$, παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \\ \lim \beta_\nu = l_2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu - \beta_\nu) = l_1 - l_2.$$

6. $$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l \neq 0 \\ \alpha_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{l}.$$

Αὐτή μαζί μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα 5 συνεπάγονται καί τήν

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \neq 0 \\ \lim \beta_\nu = l_2 \\ \alpha_\nu \neq 0\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{l_2}{l_1}$$

7. $$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = l_1 \\ \lim \beta_\nu = l_2 \\ \alpha_\nu \leq \beta_\nu\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}\end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \leq l_2.$$

8. $$\left.\begin{array}{l}\lim \beta_\nu = l \\ \lim \gamma_\nu = l \\ \beta_\nu \leq \alpha_\nu \leq \gamma_\nu,\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu = l$$

9. $\lim \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim \sqrt[k]{|\alpha_\nu|} = \sqrt[k]{|l|}$, k σταθερός φυσικός ἀριθμός.

**Παρατήρηση.** Οἱ παραπάνω ἰδιότητες διατυπώνονται ἀντίστοιχα καί μέ τό σύμβολο $\lim\limits_{\nu \in M}$ στή θέση τοῦ lim, ὅπου M εἶναι ἕνα ἀπέραντο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbf{N}$. Ἔτσι π.χ. ἡ ἀντίστοιχη μέ τήν παραπάνω ἰδιότητα 1 εἶναι ἡ

$$\lim_{\nu \in M} \alpha_\nu = l \Rightarrow \lim_{\nu \in M} |\alpha_\nu| = |l|$$

ἀντίστοιχη μέ τήν ἰδιότητα 2 εἶναι ἡ (6), ἀντίστοιχη μέ τήν 3 εἶναι ἡ

$$\lim_{\nu\in M} \alpha_\nu = l \Rightarrow \exists\ \theta > 0: \ |\alpha_\nu| \leq \theta \quad \forall\ \nu\in M$$

κ.ο.κ. ὅλες οἱ ὑπόλοιπες ἀπ' τίς παραπάνω ἰδιότητες ἰσχύουν ἀνάλογα ἄν ἀντικαταστήσουμε τό σύνολο **N** μέ τό M.

**Ἐφαρμογές :**

**1.** $\lim \dfrac{\nu^2+3\nu+5}{4\nu^2+1} = \dfrac{1}{4}$.

Πραγματικά·
$$\frac{\nu^2+3\nu+5}{4\nu^2+1} = \frac{\nu^2\left(1+\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}\right)}{\nu^2\left(4+\frac{1}{\nu^2}\right)} = \frac{1+\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}}{4+\frac{1}{\nu^2}}.$$

Οἱ ἀκολουθίες ὅμως $\dfrac{3}{\nu} = 3\cdot\dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, $\dfrac{1}{\nu^2} = \dfrac{1}{\nu}\cdot\dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\dfrac{5}{\nu^2} = 5\cdot\dfrac{1}{\nu^2}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὅλες μηδενικές ἀκολουθίες. Ἄρα

$$\lim\left(1+\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}\right) = 1+0+0 = 1 \text{ καὶ } \lim\left(4+\frac{1}{\nu^2}\right) = 4+0 = 4.$$

Ἔτσι, ἀπό τήν ἰδιότητα 6 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν ἔχουμε

$$\lim \frac{\nu^2+3\nu+5}{4\nu^2+1} = \lim \frac{1+\frac{3}{\nu}+\frac{5}{\nu^2}}{4+\frac{1}{\nu^2}} = \frac{1}{4}.$$

**2.** $\lim \sqrt[\nu]{\alpha} = 1$, *ὅπου α εἶναι σταθερός θετικός ἀριθμός.*

Διακρίνουμε τίς παρακάτω περιπτώσεις:

i) $\alpha = 1$. Εἶναι φανερό.

ii) $\alpha > 1$. Θέτουμε $\delta_\nu = \sqrt[\nu]{\alpha} - 1$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί τότε ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\delta_\nu \to 0$.

Πραγματικά· ἔχουμε $\sqrt[\nu]{\alpha} = 1 + \delta_\nu$, δηλαδή

(7) $$\alpha = (1+\delta_\nu)^\nu.$$

Ἐπειδή $\delta_\nu > 0\ \forall\ \nu\in$ **N**, ἀπ' τήν ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli,* θά ἔχουμε καί $(1+\delta_\nu)^\nu \geq 1 + \nu\delta_\nu$ καί ἔτσι ἡ (7) δίνει

$$\alpha \geq 1 + \nu\delta_\nu > \nu\delta_\nu.$$

Ἄρα

$$0 < \delta_\nu < \frac{\alpha}{\nu} \to 0,$$

τό ὁποῖο, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 8 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, συνεπάγεται ὅτι $\delta_\nu \to 0$.

iii) $\alpha < 1$. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε $\dfrac{1}{\alpha} > 1$ καί ἔτσι, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη περίπτωση, ἔχουμε $\sqrt[\nu]{\dfrac{1}{\alpha}} \to 1$, δηλαδή $\dfrac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}} \to 1$, τό ὁποῖο, μαζί μέ τήν ἰδιότητα 6 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, συνεπάγεται ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha} \to \dfrac{1}{1} = 1$.

**3.** Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu = (-1)^{3\nu} + \dfrac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ δέν εἶναι συγκλίνουσα. Μποροῦμε ὅμως νά βροῦμε μιά της ὑπακολουθία $\alpha_{\kappa_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί μάλιστα ἐκείνη μέ $\kappa_\nu = 2\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δηλαδή τήν $\alpha_{2\nu} = (-1)^{3(2\nu)} + \frac{1}{2\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, πού εἶναι ἡ ὑπακολουθία τῶν ἄρτιων ὅρων, γιά τήν ὁποία παρατηροῦμε ὅτι

$$\alpha_{2\nu} = (-1)^{6\nu} + \frac{1}{2\nu} = 1 + \frac{1}{2\nu} \to 1 + 0 = 1,$$

δηλαδή ὅτι συγκλίνει.

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι *ἐνῶ μιά ἀκολουθία μπορεῖ νά μήν εἶναι συγκλίνουσα, μπορεῖ νά ἔχει μιά συγκλίνουσα ὑπακολουθία της.*

**1.4.3 Ἡ μονοτονία καί ἡ σύγκλιση ἀκολουθίας — Ὁ ἀριθμός** e. Ἄς θεωρήσουμε πρῶτα τήν ἀκολουθία $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδή τήν

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{\nu-1}{\nu}, \ldots$$

καί ἔπειτα τήν ἀκολουθία $\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδή τήν ἀκολουθία

$$1, 4, 9, 16, \ldots, \nu^2, \ldots$$

Παρατηροῦμε ὅτι καί οἱ δυό εἶναι αὔξουσες καί μάλιστα γνησίως αὔξουσες ἀκολουθίες. Ἀπ' αὐτές ὅμως μόνο ἡ πρώτη, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη, ἀφοῦ $0 \leqslant \frac{\nu-1}{\nu} < 1 \ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτή συγκλίνει καί μάλιστα $\lim \frac{\nu-1}{\nu} = 1$, ἐνῶ ἀντίθετα ἡ $\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού δέν εἶναι φραγμένη, δέ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό.

Τό γεγονός ὅτι ἡ αὔξουσα καί φραγμένη ἀκολουθία $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό τό δεχόμαστε ὅτι ἰσχύει γενικά γιά κάθε αὔξουσα καί φραγμένη ἀκολουθία. Ἀκριβέστερα δεχόμαστε τό ἀκόλουθο ἀξίωμα:

**Ἀξίωμα.** *Ἄν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά μονότονη καί φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν, τότε αὐτή συγκλίνει πρός κάποιον πραγματικό ἀριθμό.*

**Ὁ ἀριθμὸς** e. Θεωροῦμε τίς ἀκολουθίες $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ ὅπου

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu \text{ καὶ } \beta_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

γιά τίς ὁποῖες πρῶτα θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι γνησίως μονότονες καί μάλιστα ἡ $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ (γνησίως) αὔξουσα καί ἡ $\beta_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ (γνησίως) φθίνουσα.

Γιά τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἔχουμε ὅτι

$$\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1}}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu} = \left(\frac{1+\frac{1}{\nu+1}}{1+\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu+1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = \left(\frac{\nu(\nu+2)}{(\nu+1)^2}\right)^{\nu+1}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)^{\nu+1}\left(1+\frac{1}{\nu}\right) > \left(1-(\nu+1)\frac{1}{(\nu+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = 1$$

ὅπου χρησιμοποιήθηκε ἡ ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli*.

$$(1+\omega)^{\nu+1} > 1+(\nu+1)\omega, \text{ μὲ } \omega=\frac{-1}{(\nu+1)^2} .$$

Ἄρα

$$\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \quad \forall\ \nu\in \mathbf{N}$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα. Ἐπίσης ἔχουμε

$$\frac{\beta_\nu}{\beta_{\nu+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}}{\left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+2}}=\left(1+\frac{1}{\nu^2+2\nu}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}>\left(1+(\nu+1).\frac{1}{\nu^2+2\nu}\right)\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}$$

$$>\left(1+\frac{\nu+1}{\nu^2+2\nu+1}\right)\cdot\frac{\nu+1}{\nu+2}=1$$

ὅπου χρησιμοποιήθηκε πάλι ἡ ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli*.

Ἄρα

$$\beta_{\nu+1} < \beta_\nu \qquad \forall \nu\in \mathbf{N}$$

Ὕστερα ἀπ' αὐτά εἶναι φανερό ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu$ ἰσχύει

$$2=\alpha_1 \leqq \alpha_\nu < \beta_\nu \leqq \beta_1 = 4$$

καί ἑπομένως, ἀπό τή μονοτονία τῶν ἀκολουθιῶν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu$, $\nu = 1, 2,\ldots$ καί τό παραπάνω ἀξίωμα, συμπεραίνουμε ὅτι καί οἱ δυό αὐτές ἀκολουθίες συγκλίνουν. Ἄρα θά ἰσχύει καί $\quad 2 \leqslant \lim\alpha_\nu \leqslant \lim\beta_\nu \leqslant 4.$

Ἀλλά ἔχουμε $\dfrac{\lim \beta_\nu}{\lim \alpha_\nu} = \lim \dfrac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \lim\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right) = 1+\lim \dfrac{1}{\nu} = 1+0=1$

δηλαδή

$$\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu .$$

Τήν κοινή ὁριακή τιμή τῶν ἀκολουθιῶν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ τήν παριστάνουμε μέ e, δηλαδή

$$\mathrm{e}= \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

Ἐξ ἄλλου φαίνεται εὔκολα ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu$ ἰσχύει

$$\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

Ὁ ἀριθμός αὐτός e εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός καί ἡ παραπάνω ἀνισότητα μᾶς ἐπιτρέπει νά τόν προσεγγίσουμε ὅσο θέλουμε. Ἔτσι μιά προσέγγιση τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ μέ τρία δεκαδικά ψηφία εἶναι ἡ

$$\mathrm{e} \simeq 2{,}718$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἀπ' τήν παραπάνω ἀνισότητα γιά $\nu = 4837$. Ἡ ἐκτίμηση τοῦ ἀριθμοῦ e μέ τή βοήθεια τῆς διπλῆς αὐτῆς ἀνισότητας εἶναι πρακτικά ἐπίπονη καί δέν προσφέρεται. Γι' αὐτό ἔχουν δοθεῖ ταχύτεροι τρόποι προσεγγίσεως τοῦ ἀριθμοῦ e. Ἔτσι λ.χ. βρίσκεται ἡ προσέγγιση

$$\mathrm{e} \simeq 2{,}71828182845904523536$$

μέ 20 δεκαδικά ψηφία.

**2.1. Τά σύμβολα $+\infty$ καί $-\infty$.** Μιά μή φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δέ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό, γιατί ἀλλιῶς, δηλαδή ἄν αὐτή συνέκλινε πρός πραγματικό ἀριθμό, τότε, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 3 τῶν συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν, θά ἦταν φραγμένη, πράγμα ἄτοπο. Στήν περίπτωση πού ἡ μή φραγμένη ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι καί αὔξουσα, ὅπως π.χ. ἡ $\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$ λέμε ὅτι αὐτή *«ἀπειρίζεται θετικά»* ἤ *«συγκλίνει πρός τό $+\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει πρός τό $+\infty$»* (τό σύμβολο $+\infty$ διαβάζεται *«σύν ἄπειρο»*).

Στήν περίπτωση μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού εἶναι αὔξουσα καί μή φραγμένη, δηλαδή πού ἀπειρίζεται θετικά, ἄν $\varepsilon$ εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός, τότε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\alpha_{\nu_0} > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Πραγματικά· ἄν τοῦτο δέν ἦταν σωστό, τότε θά εἴχαμε

$$\alpha_\nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \in \mathbb{N}$$

καί ἐπειδή ἡ $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_\nu \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \in \mathbb{N},$$

πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ θά ἦταν φραγμένη, ἀλλ᾽ αὐτό εἶναι ἄτοπο.

Τώρα, ἐπειδή ἡ $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι αὔξουσα, ἔχουμε

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu \geq \alpha_{\nu_0}$$

καί ἔτσι

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ὥστε ἀποδείχθηκε ὅτι γιά τήν αὔξουσα καί μή φραγμένη ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἰσχύει ὅτι:

Γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό $\varepsilon$, δηλαδή γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \geq \nu_0.$$

Ὕστερα ἀπό τά παραπάνω εἶναι πιά φυσικό νά δώσουμε τόν ἑξῆς γενικό ὁρισμό γιά τή σύγκλιση ἀκολουθίας πραγματικῶν ἀριθμῶν πρός τό $+\infty$.

Θά λέμε ὅτι: ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *«ἀπειρίζεται θετικά»* ἤ ἀλλιῶς *«συγκλίνει πρός τό $+\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει πρός τό $+\infty$»* καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\lim \alpha_\nu = +\infty$ ἤ $\alpha_\nu \to +\infty$, τότε καί μόνο τότε, *ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon$) τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει* $\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ *γιά κάθε* $\nu \geq \nu_0$. Γιά συντομία:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0, \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \colon \ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \, \nu \geqslant \nu_0}$$

**Παραδείγματα:**

**1.** *Ἡ ἀκολουθία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν* $\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *ἀπειρίζεται θετικά,* δηλαδή $\nu \to +\infty$.

**2.** *Ἡ ἀκολουθία* $\nu^2 + 1$, $\nu = 1,2,\ldots$ *δηλαδή ἡ ἀκολουθία*

$$2,\ 5,\ 10,\ \ldots,\ \nu^2+1,\ldots$$

*ἀπειρίζεται θετικά.* Πραγματικά· γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό $\varepsilon > 0$ ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ ἕναν φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τό $\frac{1}{\varepsilon}$ καί τότε, ἀφοῦ $\nu^2 + 1 > \nu$, θά ἔχουμε

$$\nu^2 + 1 > \nu \geq \nu_0 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu \geq \nu_0.$$

Ὥστε: γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ (ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς τέτοιο δείκτη ἕνα φυσικό ἀριθμό μεγαλύτερο ἀπό τόν $\frac{1}{\varepsilon}$), τέτοιος ὥστε

$$\nu^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu \geqslant \nu_0,$$

δηλαδή $\nu^2 + 1 \to +\infty$.

Ἡ ἀκολουθία $-\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδή ἡ ἀκολουθία

$$-1,\ -4,\ -9,\ldots,\ -\nu^2,\ldots$$

εἶναι φθίνουσα καί μή φραγμένη. Ἀνάλογα πρός τά παραπάνω θά μπορούσαμε νά ποῦμε ὅτι αὐτή ἀπειρίζεται ἀρνητικά. Ἀξίζει νά παρατηρήσουμε ἐδῶ ὅτι ἡ ἀντίθετη ἀκολουθία, δηλαδή ἡ $-(-\nu^2) = \nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀπειρίζεται θετικά.

Γενικά θά λέμε ὅτι: ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *«ἀπειρίζεται ἀρνητικά»* ἤ ἀλλιῶς *«συγκλίνει πρός τό $-\infty$»* ἤ ἀκόμη *«τείνει πρός τό $-\infty$»* καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\lim \alpha_\nu = -\infty$ ἤ $\alpha_\nu \to -\infty$ (τό σύμβολο $-\infty$ διαβάζεται *«πλήν ἄπειρο»*) τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ *ἀντίθετη ἀκολουθία* $-\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *ἀπειρίζεται θετικά.* Γιά συντομία:

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = -\infty \iff \lim(-\alpha_\nu) = +\infty}$$

Ἰσχύουν τά παρακάτω θεωρήματα:

**2.1.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν* $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικά, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχει δείκτης* $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ *(πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ε) τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει*

$$\alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu \geqslant \nu_0.$$

*Ἀπόδειξη.* $\lim \alpha_\nu = -\infty \Leftrightarrow \lim(-\alpha_\nu) = +\infty \Leftrightarrow \Big(\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ -\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall \nu \geqslant \nu_0\Big) \Leftrightarrow \Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \alpha_\nu < -\frac{1}{\varepsilon}\ \ \forall\ \nu \geqslant \nu_0\Big)$.

**2.1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Θεωροῦμε δυό ἀκολουθίες* $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *καί* $\beta_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $\alpha_\nu \leqq \beta_\nu$ *γιά κάθε* $\nu \in \mathrm{N}$. *Τότε ἰσχύουν*

$$\boxed{\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty} \quad \textit{καί} \quad \boxed{\lim \beta_\nu = -\infty \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty}$$

*Ἀπόδειξη.* Ἐπειδή $\lim \alpha_\nu = +\infty$, ἔχουμε

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon}\quad \forall\ \nu \geq \nu_0$$

καί αὐτό μαζί μέ τήν ἀνισότητα $\alpha_\nu \leq \beta_\nu\ \forall\ \nu \in \mathbf{N}$ συνεπάγονται ὅτι

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}\quad \forall\ \nu \geq \nu_0$$

πού σημαίνει ὅτι

$$\lim \beta_\nu = +\infty.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$$\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \lim \beta_\nu = +\infty.$$

Ἀπ' αὐτό προκύπτει καί ὅτι

$$\lim \beta_\nu = -\infty \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty$$

ἀφοῦ ἰσχύει $-\beta_\nu \leq -\alpha_\nu\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$ καί ἑπομένως

$$\lim \beta_\nu = -\infty \Rightarrow \lim(-\beta_\nu) = +\infty \Rightarrow \lim(-\alpha_\nu) = +\infty \Rightarrow \lim \alpha_\nu = -\infty.$$

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω στό παράδειγμα 2, ἡ ἀκολουθία $\nu^2 + 1,\ \nu = 1, 2, \ldots$ ἀπειρίζεται θετικά. Αὐτό μποροῦμε νά τό συμπεράνουμε ἀμέσως μέ τή βοήθεια τοῦ παραπάνω θεωρήματος, γιατί ἰσχύει $\nu < \nu^2 + 1,\ \forall\ \nu \in \mathrm{N}$ καί $\lim \nu = +\infty$. Παρόμοια, ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτουν εὔκολα καί ὅτι $\lim(\nu^2 - \nu + 1) = +\infty$, $\lim(-\nu^3) = -\infty$ καί $\lim(-\nu^2 + 2\nu - 2) = -\infty$.

**2.1.3** *Τά σύμβολα $-\infty$, $+\infty$ καί ἡ διάταξη τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.* Ὅπως εἶναι γνωστό, γιά τίς συγκλίνουσες ἀκολουθίες πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει (§ 1.4.2 ἰδιότητα 7).

$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = l_1,\ l_1 \in \mathbf{R} \\ \lim \beta_\nu = l_2,\ l_2 \in \mathbf{R} \\ \alpha_\nu \leqslant \beta_\nu\ \forall\ \nu \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 \leqslant l_2,$$

πράγμα πού παίζει σπουδαῖο ρόλο στήν τεχνική τῶν ἀποδείξεων πολλῶν θεωρημάτων τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως. Γιά τό λόγο αὐτό θά ὁρίσουμε διάταξη στό σύνολο $\mathrm{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ κατά τέτοιον τρόπο, ὥστε νά ἰσχύει τό παραπάνω καί στίς περιπτώσεις, ὅπου ἡ μία ἤ καί οἱ δυό ὁριακές τιμές $l_1$, $l_2$ εἶναι ἕνα ἀπό τά σύμβολα $-\infty$ καί $+\infty$. Πραγματικά· ἄν δεχθοῦμε αὐτό, θά ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = l,\ l \in \mathbf{R} \\ \lim \beta_\nu = +\infty \\ \alpha_\nu \leqslant \beta_\nu\ \forall\ \nu \in \mathbf{N} \end{array}\right\} \Rightarrow l \leqslant +\infty$$

καί ἐπειδή, ἀπό τόν ὁρισμό, τό $+\infty$ δέν εἶναι πραγματικός ἀριθμός θά πρέπει νά ὁρίσουμε

$$\boxed{l < +\infty\quad \forall\ l \in \mathrm{R}}$$

Παρόμοια, ὁδηγούμαστε καί στό νά ὁρίσουμε

$$\boxed{-\infty < l \ \forall \ l \in R} \quad \text{καί} \quad \boxed{-\infty < +\infty}$$

Τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, πού, ὅπως ξέρουμε, τά στοιχεῖα του γεωμετρικά παριστάνονται μέ τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας, ὀνομάζεται καί *εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν* ἤ *πραγματική εὐθεία*. Τό εὐρύτερο σύνολο $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ πού θεωρεῖται ἐφοδιασμένο μέ τή διάταξη πού ὁρίσαμε παραπάνω ὀνομάζεται *ἐπεκτεταμένη εὐθεία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν* ἤ *ἐπεκτεταμένη πραγματική εὐθεία* καί παριστάνεται μέ $R^*$, δηλαδή

$$R^* = R \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

**2.2 Ἐπιτρεπές καί μή ἐπιτρεπτές πράξεις μεταξύ τῶν συμβόλων $-\infty$, $+\infty$ καί τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.** Στό σύνολο $R^*$ μπορεῖ νά ὁρισθοῦν, ὡς μερικές πράξεις, ἡ πρόσθεση καί ὁ πολλαπλασιασμός (καθώς ἐπίσης καί ἡ ἀφαίρεση καί ἡ διαίρεση) κατά τέτοιον τρόπο, ὥστε νά μήν ὁδηγούμαστε σέ ἀντιφάσεις στίς μέχρι τώρα γνωστές ἰδιότητες τῶν ὁριακῶν τιμῶν. Οἱ πράξεις αὐτές ὁρίζονται ὡς ἐπεκτάσεις τῶν ἀντιστοίχων πράξεων στό R. Πρίν προχωρήσουμε στόν ὁρισμό τῶν πράξεων αὐτῶν θά ἀποδείξουμε τίς παρακάτω ἰδιότητες:

**1.**
$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x, \ x \in R \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty.$$

Πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι, ἀπό τήν ἰδιότητα 3 τῆς § 1.4.2, ἡ ἀκολουθία $\beta_\nu$ εἶναι φραγμένη, δηλαδή ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός θ τέτοιος ὥστε $|\beta_\nu| \leq \theta$ γιά κάθε $\nu \in N$, δηλαδή

$$(8) \qquad -\theta \leq \beta_\nu \leq \theta \ \forall \ \nu \in N.$$

Ἔστω τώρα ἕνας (ὁποιοσδήποτε) θετικός ἀριθμός ε καί ἔστω $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{1+\theta\varepsilon}$.
Ἄρα τότε

$$\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \left(\exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon^*) : \ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} \quad \forall \ \nu \geq \nu_0\right).$$

Ἑπομένως, ἀπό τήν (8) θά ἔχουμε καί

$$\alpha_\nu + \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} - \theta = \frac{1+\theta\varepsilon}{\varepsilon} - \theta = \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \geq \nu_0.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists \ \nu_0$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon^*$, ἄρα καί ἀπό τό ε): $\alpha_\nu + \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall \ \nu \geq \nu_0$, δηλαδή ὅτι $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$.

**2.**
$$\left.\begin{array}{l} \lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x, \ x \in R \end{array}\right\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν $\lim \alpha_\nu = -\infty$, τότε $\lim(-\alpha_\nu) = +\infty$ καί, ἄν $\lim \beta_\nu = x$,

$x \in R$, τότε καί $\lim(-\beta_\nu) = -x$, $-x \in R$. Ἔτσι ἐφαρμόζουμε τήν ἰδιότητα 1 καί ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty\\ \lim \beta_\nu = x,\ x \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim(-\alpha_\nu) = +\infty\\ \lim(-\beta_\nu) = -x,\ -x \in R\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim(-(\alpha_\nu + \beta_\nu)) = \lim((-\alpha_\nu) + (-\beta_\nu)) = +\infty \Rightarrow \lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty.$$

**3.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty\\ \lim \beta_\nu = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty.$$

Πραγματικά· γιά ἕναν (ὁποιοδήποτε) $\varepsilon > 0$ θέτουμε $\varepsilon^* = 2\varepsilon$ καί τότε, ἀφοῦ $\lim \alpha_\nu = +\infty$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_1 = \nu_1(\varepsilon^*)$ τέτοιος, ὥστε $\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*}$ $\forall \nu \geq \nu_1$. Ἐπίσης, ἀφοῦ $\lim \beta_\nu = +\infty$, ὑπάρχει δείκτης $\nu_2 = \nu_2(\varepsilon^*)$ τέτοιος, ὥστε $\beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*}$ $\forall\ \nu \geq \nu_2$. Ἔτσι, ἄν $\nu_0$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς δυό δεῖκτες $\nu_1$ καί $\nu_2$, γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \geq \nu_0$ θά ἔχουμε τότε

$$\alpha_\nu + \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} + \frac{1}{\varepsilon^*} = \frac{2}{\varepsilon^*} = \frac{1}{\varepsilon}$$

δηλαδή $\alpha_\nu + \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ $\forall\ \nu \geq \nu_0$ πράγμα πού σημαίνει ὅτι $\lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$

**4.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty\\ \lim \beta_\nu = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty$$

Μέ τή βοήθεια τῆς ἰδιότητας 3 παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty\\ \lim \beta_\nu = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\lim(-\alpha_\nu) = +\infty\\ \lim(-\beta_\nu) = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim(-(\alpha_\nu + \beta_\nu)) = \lim((-\alpha_\nu) + (-\beta_\nu)) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim(\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty$$

**5.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty\\ \lim \beta_\nu = x,\ x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim(\alpha_\nu \beta_\nu) = +\infty.$$

Γιά νά τό ἀποδείξουμε αὐτό διακρίνουμε τίς ἑξῆς δυό περιπτώσεις:

(i) *περίπτωση* $x = +\infty$. Τότε, γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\varepsilon^* = \sqrt{\varepsilon}$ καί ἄρα

$$\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \exists\ \nu_1 = \nu_1(\varepsilon^*):\ \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*}\ \forall\ \nu \geq \nu_1$$

καί
$$\lim \beta_\nu = +\infty \Rightarrow \exists\ \nu_2 = \nu_2(\varepsilon^*):\ \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*}\ \forall\ \nu \geq \nu_2.$$

Ἔτσι γιά $\nu_0 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon^*$, ἄρα καί ἀπό τό $\varepsilon$), ἔχουμε

$$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow \alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} \text{ καί } \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} \Rightarrow \alpha_\nu\beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} \cdot \frac{1}{\varepsilon^*} = \frac{1}{\varepsilon}$$

δηλαδή

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ \alpha_\nu \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall\ \nu \geq \nu_0$$

πού σημαίνει ὅτι

$$\lim (\alpha_\nu \beta_\nu) = +\infty.$$

(ii) *περίπτωση* $x \in R$. Τότε, γιά ὁποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, θέτουμε $\varepsilon^* = \frac{x\varepsilon}{2}$. Ἐπειδή $\lim \alpha_\nu = +\infty$ καί $\lim \beta_\nu = x$, $x > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon^*$, ἄρα καί ἀπό τό $\varepsilon$) τέτοιος, ὥστε

$$\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*}\ \forall\ \nu \geq \nu_0 \quad \text{καί} \quad |\beta_\nu - x| < \frac{x}{2}\quad \forall\ \nu \geq \nu_0$$

δηλαδή

$$\alpha_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*}\ \text{καί}\ \beta_\nu > \frac{x}{2}\quad \forall\ \ \nu \geq \nu_0.$$

Ἄρα, τότε, γιά κάθε $\nu \geq \nu_0$ ἔχουμε

$$\alpha_\nu \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon^*} \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\quad \alpha_\nu \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon}\ \forall\ \nu \geq \nu_0$$

δηλαδή ὅτι $\lim (\alpha_\nu \beta_\nu) = +\infty$.

**6.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = -\infty$$

Μέ τή βοήθεια τῆς ἰδιότητας 5 παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x, x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim (-\alpha_\nu) = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (-\alpha_\nu \beta_\nu) = \lim (-\alpha_\nu)\beta_\nu = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = -\infty.$$

**7.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = -\infty.$$

Μέ τή βοήθεια τῆς ἰδιότητας 6 παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim (-\alpha_\nu) = -\infty \\ \lim (-\beta_\nu) = -x,\ -x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu\beta_\nu = \lim(-\alpha_\nu)(-\beta_\nu) = -\infty$$

**8.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = +\infty.$$

Μέ τή βοήθεια τῆς ἰδιότητας 5 παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim (-\alpha_\nu) = +\infty \\ \lim (-\beta_\nu) = -x,\ -x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu\beta_\nu = \lim(-\alpha_\nu)(-\beta_\nu) = +\infty$$

**9.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x \in R \\ \lim \beta_\nu = +\infty \\ \beta_\nu \neq 0\quad \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0.$$

Πραγματικά· παρατηροῦμε ὅτι

$$\left.\begin{array}{l}\lim \beta_\nu = +\infty \\ \beta_\nu \neq 0 \quad \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow (\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ \beta_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu \geq \nu_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon):\ \frac{1}{\beta_\nu} < \varepsilon \quad \forall\ \nu \geq \nu_0) \Rightarrow \lim \frac{1}{\beta_\nu} = 0.$$

Ἔτσι σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 5 τῆς § 1.4.2 ἔχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x \in R \\ \lim \beta_\nu = +\infty \\ \beta_\nu \neq 0 \quad \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x \in R \\ \lim \dfrac{1}{\beta_\nu} = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim \alpha_\nu \cdot \frac{1}{\beta_\nu} = x \cdot 0 = 0.$$

**10.**
$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x \in R \\ \lim \beta_\nu = -\infty \\ \beta_\nu \neq 0 \quad \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0.$$

Πραγματικά· ἀπό τήν ἰδιότητα 9 ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x \in R \\ \lim \beta_\nu = -\infty \\ \beta_\nu \neq 0 \quad \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim (-\alpha_\nu) = -x,\ -x \in R \\ \lim (-\beta_\nu) = +\infty \\ -\beta_\nu \neq 0 \quad \forall\ \nu \in N\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim \frac{-\alpha_\nu}{-\beta_\nu} = 0.$$

Μέ τή βοήθεια, τώρα, τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί ἀντίστοιχες *ἐπιτρεπτές πράξεις* στό σύνολο R*. Συγκεκριμένα οἱ πράξεις αὐτές, πού προέρχονται ἀπό τίς ἰδιότητες πού μόλις δείξαμε, παραθέτονται στόν παρακάτω πίνακα:

| *Ἰδιότητες* | *Ἐπιτρεπτές πράξεις* |
|---|---|
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$ | $+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty \quad \forall x \in R$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x \in R\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty$ | $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty \quad \forall x \in R$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = +\infty$ | $+\infty + (+\infty) = +\infty$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim (\alpha_\nu + \beta_\nu) = -\infty$ | $-\infty + (-\infty) = -\infty$ |
| $\lim \alpha_\nu = -\infty \Rightarrow \lim (-\alpha_\nu) = +\infty$ | $-(-\infty) = +\infty$ |
| $\lim \alpha_\nu = +\infty \Rightarrow \lim (-\alpha_\nu) = -\infty$ | $-(+\infty) = -\infty$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = +\infty$ | $(+\infty)x = x(+\infty) = +\infty \quad \forall\ x > 0,$ ἄρα $(+\infty)(+\infty) = +\infty$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = -\infty$ | $(-\infty)x = x(-\infty) = -\infty \quad \forall\ x > 0,$ ἄρα $(-\infty)(+\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$ |

| | |
|---|---|
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = +\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x<0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = -\infty$ | $(+\infty)x = x(+\infty) = -\infty \ \forall\ x<0,$ ἄρα $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = -\infty \\ \lim \beta_\nu = x,\ x<0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \alpha_\nu \beta_\nu = +\infty$ | $(-\infty)x = x(-\infty) = +\infty \ \forall\ x<0,$ ἄρα $(-\infty)(-\infty) = +\infty$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x\in R \\ \lim \beta_\nu = +\infty \\ \beta_\nu \neq 0\ \forall\ \nu\in N\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0$ | $\frac{x}{+\infty} = 0 \ \forall\ x\in R$ |
| $\left.\begin{array}{l}\lim \alpha_\nu = x,\ x\in R \\ \lim \beta_\nu = -\infty \\ \beta_\nu \neq 0\ \forall\ \nu\in N\end{array}\right\} \Rightarrow \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 0$ | $\frac{x}{-\infty} = 0 \ \forall\ x\in R.$ |

᾿Από τίς παραπάνω ἐπιτρεπτές πράξεις προκύπτει ἀμέσως ὅτι καί ἡ πράξη $+\infty - (-\infty)$, δηλαδή ἡ $+\infty + (-(-\infty))$ εἶναι ἐπιτρεπτή, γιατί $-(-\infty) = +\infty$ καί ἑπομένως $+\infty - (-\infty) = +\infty + (+\infty) = +\infty$. Ὥστε $+\infty - (-\infty) = +\infty$. Παρόμοια, προκύπτει καί ὅτι $-\infty - (+\infty) = -\infty + (-(+\infty)) = -\infty + (-\infty) = -\infty$, δηλαδή $-\infty - (+\infty) = -\infty$.

᾿Αντίθετα ἡ πράξη $+\infty - (+\infty)$ δέν ὁρίζεται ὡς ἐπιτρεπτή, γιατί ἄν $\lim \alpha_\nu = +\infty$ καί $\lim \beta_\nu = +\infty$, τότε ἡ ἀκολουθία $\alpha_\nu - \beta_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δέ συγκλίνει πάντοτε πρός τό μηδέν ἤ ἄλλο μονοσημάντως ὁρισμένο ἀριθμό, ἤ ἀκόμη πρός ἕνα ἀπό τά σύμβολα $-\infty$, $+\infty$. Πραγματικά· ἀρκεῖ νά λάβουμε ὡς $\alpha_\nu = \nu^2 + \nu \to +\infty$ καί $\beta_\nu = \nu^2 \to +\infty$ καί τότε $\alpha_\nu - \beta_\nu = \nu \to +\infty$ καί ὡς $\alpha_\nu = \nu^2 + \frac{1}{\nu} \to +\infty$ καί $\beta_\nu = \nu^2 \to +\infty$ καί τότε $\alpha_\nu - \beta_\nu = \frac{1}{\nu} \to 0$. ᾿Ανάλογα ἐργαζόμαστε γιά νά δοῦμε ὅτι καί ἡ $-\infty + (+\infty)$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτή πράξη.

᾿Επίσης ἡ πράξη $0(+\infty)$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτή, ἀφοῦ ἄν $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu = \nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε

$$\lim \alpha_\nu = 0, \quad \lim \beta_\nu = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim \alpha_\nu \beta_\nu = \lim 1 = 1$$

ἐνῶ ἄν $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu = \nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε

$$\lim \alpha_\nu = 0, \quad \lim \beta_\nu = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim \alpha_\nu \beta_\nu = \lim \frac{1}{\nu} = 0.$$

᾿Ανάλογα προκύπτει καί ὅτι οἱ πράξεις $0(-\infty)$, $(+\infty)0$ καί $(-\infty)0$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτές.

᾿Ακόμη ἡ πράξη $\frac{+\infty}{+\infty}$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτή, ἀφοῦ ἄν $\alpha_\nu = \beta_\nu = \nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ τότε

$$\lim \alpha_\nu = +\infty, \quad \lim \beta_\nu = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim 1 = 1$$

ἐνῶ ἄν $\alpha_\nu = \nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu = \nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε

$$\lim \alpha_\nu = +\infty, \ \lim \beta_\nu = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim \frac{1}{\nu} = 0.$$

Παρόμοια προκύπτει ὅτι καί οἱ πράξεις $\frac{-\infty}{-\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{0}$ καί $\frac{-\infty}{0}$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτές.

Ἡ πράξη $\frac{0}{0}$, πάλι, δέν εἶναι ἐπιτρεπτή, γιατί ἄν $\alpha_\nu = \beta_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu=1, 2,\ldots$ τότε

$$\lim \alpha_\nu = 0, \quad \lim \beta_\nu = 0 \quad \text{καί} \quad \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim 1 = 1$$

ἐνῶ ἄν $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\beta_\nu = \frac{1}{\nu^2}$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε

$$\lim \alpha_\nu = 0, \quad \lim \beta_\nu = 0 \quad \text{καί} \ \lim \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \lim \nu = +\infty.$$

Τέλος καί ἡ πράξη $\frac{\alpha}{0}$, $\alpha \in R$ δέν εἶναι ἐπιτρεπτή. Πραγματικά, γιά $\alpha = 0$ τό εἴδαμε παραπάνω, ἐνῶ γιά $\alpha \neq 0$ ἔχουμε ὅτι ἄν $\beta_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\nu = 1, 2,\ldots$, τότε

$$\lim \beta_\nu = 0 \quad \text{καί} \quad \lim \frac{\alpha}{\beta_\nu} = \lim \alpha\nu = \alpha(+\infty)$$

ἐνῶ ἄν $\beta_\nu = -\frac{1}{\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, τότε

$$\lim \beta_\nu = 0 \quad \text{καί} \quad \lim \frac{\alpha}{\beta_\nu} = \lim \alpha(-\nu) = \alpha(-\infty).$$

Ἀλλά $\alpha(+\infty) \neq \alpha(-\infty)$ ὅταν $\alpha \neq 0$.

Ἔτσι διαπιστώσαμε τίς παρακάτω μή ἐπιτρεπτές πράξεις σέ σχέση μέ τίς γνωστές ἰδιότητες τῶν ὁριακῶν τιμῶν.

*Μή ἐπιτρεπτές πράξεις*

$$+\infty-(+\infty), \ -\infty+(+\infty), \ 0(+\infty), \ 0(-\infty), \ (+\infty)0, \ (-\infty)0,$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \ \frac{-\infty}{-\infty}, \ \frac{+\infty}{-\infty}, \ \frac{-\infty}{+\infty}, \ \frac{+\infty}{0}, \ \frac{-\infty}{0}, \ \frac{0}{0} \ \text{καί} \ \frac{\alpha}{0}, \ \alpha \in R.$$

**2.3. Γενική παρατήρηση**. Ἡ παράσταση $\frac{\mu+1}{\mu\nu}$, ὅπου $\mu$ καί $\nu$ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, γιά $\mu$ σταθερό ὁρίζει μιά ἀκολουθία τήν $\alpha_\nu = \frac{\mu+1}{\mu\nu}$, $\nu = 1,2\ldots$ δηλαδή τήν

$$\frac{\mu+1}{\mu}, \ \frac{\mu+1}{2\mu}, \ \frac{\mu+1}{3\mu}, \ \ldots, \ \frac{\mu+1}{\nu\mu}, \ldots,$$

ἡ ὁποία συγκλίνει καί μάλιστα $\lim \alpha_\nu = \lim \frac{\mu+1}{\mu\nu} = 0$.

Ἄν ὅμως θεωρήσουμε τό $\nu$ σταθερό, τότε ἡ παράσταση $\frac{\mu+1}{\mu\nu}$ ὁρίζει μιά ἄλλη ἀκολουθία, τήν $\beta_\mu = \frac{\mu+1}{\mu\nu}$, $\mu = 1,2,\ldots$, δηλαδή τήν

$$\frac{2}{\nu}, \frac{3}{2\nu}, \frac{4}{3\nu}, \ldots, \frac{\mu+1}{\mu\nu}, \ldots,$$

πού ἐπίσης συγκλίνει καί μάλιστα $\lim \beta_\mu = \lim \frac{\mu+1}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu}$.

Γιά νά διακρίνουμε ποιά ἀπό τίς ἀκολουθίες $\alpha_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἤ $\beta_\mu$, $\mu = 1,2,\ldots$ θεωροῦμε στό $\lim \frac{\mu+1}{\mu\nu}$, γράφουμε $\lim\limits_{\nu} \frac{\mu+1}{\mu\nu}$ γιά τήν πρώτη περίπτωση, δηλαδή γιά τήν ἀκολουθία $\alpha_\nu$, $\nu = 1, 2,\ldots$ καί $\lim\limits_{\mu} \frac{\mu+1}{\mu\nu}$ γιά τήν περίπτωση τῆς ἀκολουθίας $\beta_\mu$, $\mu = 1,2,\ldots$ Ὥστε ἔχουμε

$$\lim_{\nu} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = 0 \quad \text{καί} \quad \lim_{\mu} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu}.$$

Γράφουμε ἐπίσης ἰσοδύναμα καί

$$\frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\nu]{} 0 \ , \ \frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\mu]{} \frac{1}{\nu}.$$

Ἀντί γιά τά σύμβολα $\lim\limits_{\nu}$ ἤ $\xrightarrow[\nu]{}$ χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης καί τά σύμβολα $\lim\limits_{\nu\to\infty}$ ἤ $\xrightarrow[\nu\to\infty]{}$. Ἑπομένως μποροῦμε νά γράψουμε ἰσοδύναμα

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = 0, \quad \lim_{\mu\to\infty} \frac{\mu+1}{\mu\nu} = \frac{1}{\nu}$$

ἤ ἀκόμη

$$\frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0 \ , \ \frac{\mu+1}{\mu\nu} \xrightarrow[\mu\to\infty]{} \frac{1}{\nu}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**15**. Ποιές ἀπό τίς ἀκολουθίες $\alpha_\nu$, $\nu=1, 2,\ldots$ πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους εἶναι φραγμένες καί ποιές δέν εἶναι ;

1) $\alpha_\nu = \frac{\nu+100}{\nu+10}$ 2) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2+20}{\nu+100}$ 3) $\alpha_\nu = \frac{\nu\eta\mu 5\nu}{\nu^2+1}$

4) $\alpha_\nu = \frac{\nu^3+\eta\mu\nu}{\nu}$ 5) $\alpha_\nu = \frac{\nu}{2^\nu}$ 6) $\alpha_\nu = \frac{\nu^2}{2\nu+\eta\mu^2\nu}$

**16**. Ποιές ἀπό τίς ἀκολουθίες τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι μονότονες καί ποιές δέν εἶναι ; Γιά τίς μονότονες νά καθορισθεῖ καί τό εἶδος μονοτονίας.

**17**. Νά δώσετε τρεῖς διαφορετικές ὑπακολουθίες γιά κάθε μιά ἀπό τῆς ἀκολουθίες τῆς ἀσκήσεως 15.

**18.** Ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκολουθίες $\alpha_\nu$, $\nu=1, 2,\ldots$ πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους εἶναι ὅλες μηδενικές :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu}{\nu^3 + 5\nu + 2}$ 2) $\alpha_\nu = \sqrt{\nu + 5} - \sqrt{\nu}$ 3) $\alpha_\nu = \dfrac{1 + \sqrt{\nu}}{\nu^2}$

4) $\alpha_\nu = \nu\left(\sqrt{\nu^3 + 2} - \nu^{\frac{3}{2}}\right)$ 5) $\alpha_\nu = \dfrac{\eta\mu\nu + \sigma\upsilon\nu\ 7\nu}{\sqrt{\nu}}$ 6) $\alpha_\nu = \nu^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{\nu^4 + 2} - \nu^2\right)$.

**19.** Νά ὑπολογίσετε τίς ὁριακές τιμές τῶν ἀκολουθιῶν $\alpha_\nu$, $\nu=1, 2,\ldots$ πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους :

1) $\alpha_\nu = \sqrt{1 + \dfrac{a}{\nu}}$, $a \in R^+$ 2) $\alpha_\nu = \dfrac{1 + 2 + \ldots + \nu}{\nu^2}$

3) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^2 - 3\nu + 2}{5\nu^2 + \nu + 4}$ 4) $\alpha_\nu = \sqrt{(\nu + a)(\nu + b)} - \nu$, $a \in R^+$, $b \in R^+$

5) $\alpha_\nu = \nu\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{a}{\nu}}\right)$, $a \in R^+$ 6) $\alpha_\nu = \dfrac{a^\nu}{\nu!}$, $a \in R^+$

**20.** Ἄν θεωρηθεῖ γνωστό ὅτι ἡ ἀκολουθία $\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}$, $\nu=1, 2,\ldots$ εἶναι γνησίως φθίνουσα, νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\left(1 + \dfrac{1}{\nu}\right)^{\nu}$, $\nu=1, 2,\ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.

**21.** Νά ὑπολογίσετε τίς ὁριακές τιμές τῶν ἀκολουθιῶν $\alpha_\nu$, $\nu=1, 2,\ldots$ πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους :

1) $\alpha_\nu = \dfrac{\nu^5 + 7\nu}{\nu^3 + 2\nu + 5}$ 2) $\alpha_\nu = -2^\nu \dfrac{\nu^3 + 7}{(\nu + 1)^3}$ 3) $\alpha_\nu = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{\nu}$

**22.** Νά ὑπολογίσετε τίς παρακάτω ὁριακές τιμές :

1) $\lim\limits_{\mu} \dfrac{\mu\nu^2}{\nu^2 + 1}$ 2) $\lim\limits_{\nu} \dfrac{\mu\nu^2}{\nu^2 + 1}$ 3) $\lim\limits_{\mu} \dfrac{\mu^3\nu^2}{\mu\nu^3 + \nu^2\mu^2}$

4) $\lim\limits_{\nu} \dfrac{\mu^3\nu^2}{\mu\nu^3 + \nu^2\mu^3}$ 5) $\lim\limits_{\mu} \dfrac{2^{\mu\nu}\,\mu\nu^2}{\mu\nu + \nu^2}$ 6) $\lim\limits_{\nu} \dfrac{2^{\mu\nu}\,\mu\nu^2}{\mu\nu + \nu^2}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

# ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

## 1. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΓΙΑ $x \to +\infty$

**1.1** Στό προηγούμενο κεφάλαιο ἀσχοληθήκαμε μέ τή σύγκλιση ἀκολουθιῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πού, ὅπως εἴδαμε, ἀποτελοῦν μιά πολύ ἁπλή περίπτωση πραγματικῶν συναρτήσεων. Στό κεφάλαιο τοῦτο θά ἐπεκτείνουμε τίς ἔννοιες τῆς συγκλίσεως καί τῆς ὁριακῆς τιμῆς γιά πραγματικές συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Αὐτό θά γίνει πρῶτα γιά πραγματικές συναρτήσεις ὁρισμένες τουλάχιστον σέ ἕνα ἀπέραντο διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$, ὅπου $\alpha$ εἶναι σταθερός πραγματικός ἀριθμός, δηλαδή γιά συναρτήσεις f μέ $(\alpha, +\infty) \subseteq \mathscr{D}(f)$.

**1.2 Μηδενικές συναρτήσεις γιά** $x \to +\infty$. Ὅπως εἶναι γνωστό, ἰσχύουν $\nu \to +\infty$ καί $\frac{1}{\nu} \to 0$ καί μάλιστα ἡ δεύτερη ἀπ' αὐτές εἶναι συνέπεια τῆς πρώτης. Ἄλλωστε καί γενικότερα γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu > 0 \ \forall \ \nu \in N$ ἰσχύει

$$(1) \qquad \lim x_\nu = +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_\nu} \to 0$$

ἐπειδή, ἀπό τήν $\lim x_\nu = +\infty$, ἔχουμε

$$\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \quad x_\nu > \frac{1}{\varepsilon} \ \forall \ \nu \geq \nu_0.$$

καί ἀφοῦ $x_\nu > 0 \ \forall \ \nu \in N$

$$\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ \nu_0 = \nu_0(\varepsilon): \left|\frac{1}{x_\nu}\right| = \frac{1}{x_\nu} < \varepsilon \quad \forall \ \nu \geq \nu_0, \text{ δηλαδή } \frac{1}{x_\nu} \to 0.$$

Τήν ἰδιότητα (1) τήν ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ εἶναι *μηδενική γιά* $x \to +\infty$ (τό σύμβολο $x \to +\infty$ διαβάζεται «x τείνει πρός τό $+\infty$») καί γράφουμε $\frac{1}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ ἤ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Γενικά, ἄν f εἶναι μιά συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$, θά λέμε ὅτι *«ἡ συνάρτηση* f *εἶναι μηδενική γιά* $x \to +\infty$» καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ ἤ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in(\alpha+\infty)$ $\forall \nu\in N$ *καί* $\lim x_\nu=+\infty$ *ἰσχύει* $f(x_\nu) \to 0$.

Δηλαδή

$$f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{Γιά κάθε ἀκολουθία } x_\nu, \nu=1,2,\ldots \text{μέ } x_\nu\in(\alpha,+\infty)\ \forall \nu\in N \\ \text{ἰσχύει} \quad \lim x_\nu=+\infty \Rightarrow \lim f(x_\nu)=0 \end{cases}$$

**Παραδείγματα:**

**1.** *Η συνάρτηση* f *μέ* $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3x}$, $x\in(0,+\infty)$ *εἶναι μηδενική γιά* $x \to +\infty$. Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ θετικούς ὅρους, τέτοια ὥστε $\lim x_\nu=+\infty$, τότε ἡ ἀντίστοιχη ἀκολουθία τιμῶν $f(x_\nu)=\dfrac{x_\nu+1}{x_\nu^2+3x_\nu}$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική, γιατί ἀπό τήν (1), ἔχουμε $\dfrac{1}{x_\nu}\to 0$, $\dfrac{3}{x_\nu}\to 0$ καί $\dfrac{1}{x_\nu^2}\to 0$ καί ἑπομένως

$$f(x_\nu)=\frac{\dfrac{1}{x_\nu}+\dfrac{1}{x_\nu^2}}{1+\dfrac{3}{x_\nu}} \to \frac{0+0}{1+0}=0.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι γιά κάθε ἀκολουθία μέ θετικούς ὅρους $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ καί μέ $\lim x_\nu=+\infty$ ἡ ἀντίστοιχη ἀκολουθία τιμῶν τῆς συναρτήσεως f, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu)$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική.

**2.** *Η συνάρτηση* f *μέ* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$ *εἶναι μηδενική γιά* $x\to+\infty$. Πραγματικά· ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ θετικούς ὅρους καί μέ $\lim x_\nu=+\infty$, ἡ ἀκολουθία τῶν τιμῶν $f(x_\nu)=\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}}$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική. Πρός τοῦτο, θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό ε· τότε ἀπό τήν $\lim x_\nu=+\infty$ θά ἔχουμε ὅτι γιά τό $\varepsilon^2$

$$\exists\ \nu_0=\nu_0(\varepsilon^2) : x_\nu > \frac{1}{\varepsilon^2} \quad \forall\ \nu\geq\nu_0$$

καί ἐπειδή $x_\nu>0 \quad \forall\ \nu\in\mathbf{N}$, ἔχουμε

$$\frac{1}{x_\nu}<\varepsilon^2 \quad \forall\ \nu\geq\nu_0, \text{ δηλαδή } \frac{1}{\sqrt{x_\nu}}<\varepsilon \quad \forall\ \nu\geq\nu_0.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό ε, δηλαδή γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό ε) τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$\frac{1}{\sqrt{x_\nu}}<\varepsilon \ \forall\ \nu\geq\nu_0$$

δηλαδή ὅτι $\dfrac{1}{\sqrt{x_\nu}}\to 0$.

**1.3 Συγκλίνουσες συναρτήσεις γιά** $x\to+\infty$. Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x)=\dfrac{3x+1}{x}$ παρατηροῦμε ὅτι $f(x)-3=\dfrac{1}{x}$ καί ἑπομένως ἡ συνάρτηση f–3 εἶναι μηδενική γιά $x\to+\infty$. Ἀνάλογα πρός τήν περίπτωση τῶν ἀκολουθιῶν λέμε καί ἐδῶ ὅτι ἡ συνάρτηση f συγκλίνει γιά $x\to+\infty$ πρός τόν ἀριθμό 3.

Γενικά, λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ *«συγκλίνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* $l$*».* ἤ ἀλλιῶς *«τείνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* $l$*»* καί τοῦτο τό συμβολίζουμε μέ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ ἤ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *ἡ συνάρτηση* $f-l$ *εἶναι μηδενική γιά* $x \to +\infty$. Γιά συντομία:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x) - l \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι γιά μιά συνάρτηση f ὁρισμένη σ' ἕνα τουλάχιστο διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ ἰσχύει τό ἑξῆς:

**1.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ συνάρτηση* f *συγκλίνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* $l$ *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in (\alpha, +\infty)$ $\forall$ $\nu \in N$ *ἰσχύει*

$$\lim x_\nu = +\infty \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

*Ἀπόδειξη.* Ἀπό τόν ὁρισμό ἔχουμε ὅτι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-l) = 0$.
Ὅμως, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-l) = 0$ σημαίνει ὅτι γιά κάθε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ ὅρους στό $(\alpha, +\infty)$ καί τέτοια ὥστε $\lim x_\nu = +\infty$, ἰσχύει $\lim (f(x_\nu)-l) = 0$, δηλαδή $\lim f(x_\nu) = l$.

Ἐπειδή τό ὅριο μιᾶς ἀκολουθίας εἶναι μοναδικό, ἀπό τό παραπάνω θεώρημα προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμός $l$ εἶναι ἐπίσης μονοσημάντως ὁρισμένος. Τόν ἀριθμό αὐτό τόν ὀνομάζουμε *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή* τῆς συναρτήσεως f γιά $x \to +\infty$.

**Παραδείγματα :**

**1.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \dfrac{x^2+8x+5}{5x^2+15x}$, $x \in (0, +\infty)$ ***συγκλίνει*** γιά $x \to +\infty$ ***πρός τόν ἀριθμό*** $\dfrac{1}{5}$. Πραγματικά:

$$f(x) - \frac{1}{5} = \frac{x^2+8x+5}{5x^2+15x} - \frac{1}{5} = \frac{x+1}{x^2+3x}.$$

Ἀλλά, ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 1 τῆς προηγουμένης § 1.2, ἰσχύει $\dfrac{x+1}{x^2+3x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$

Ἄρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+8x+5}{5x^2+15x} = \dfrac{1}{5}$.

**2.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}}{2\sqrt{x} + 5}$, $x \in (0, +\infty)$ *συγκλίνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* $\dfrac{1}{2}$. Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ θετικούς ὅρους καί μέ $\lim x_\nu = +\infty$, τότε ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu) = \dfrac{\sqrt{x_\nu} + \dfrac{3}{x_\nu}}{2\sqrt{x_\nu} + 5}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό $\dfrac{1}{2}$, γιατί ἔχουμε

$$f(x_\nu) = \frac{\sqrt{x_\nu} + \frac{3}{x_\nu}}{2\sqrt{x_\nu} + 5} = \frac{1 + \frac{3}{x_\nu} \frac{1}{\sqrt{x_\nu}}}{2 + \frac{5}{\sqrt{x_\nu}}}$$

καί ἀκόμη $\frac{3}{x_\nu} \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{x_\nu}} \to 0$, $\frac{5}{\sqrt{x_\nu}} \to 0$. Ἄρα

$$\lim f(x_\nu) = \frac{1 + 0.0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι γιά κάθε ἀκολουθία μέ θετικούς ὅρους καί μέ $\lim x_\nu = +\infty$, ἡ ἀντίστοιχη ἀκολουθία τιμῶν τῆς συναρτήσεως f, δηλαδή ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu)$, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρός τόν ἀριθμό $\frac{1}{2}$. Ἄρα, ἀπό τό παραπάνω θεώρημα 1.3.1, ἰσχύει

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{3}{x}}{2\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{2}.$$

## 1.3.2 Συναρτήσεις πού ἀπειρίζονται θετικά ἤ ἀρνητικά γιά $x \to +\infty$.

Γιά τή συνάρτηση f μέ $f(x) = x^2$ παρατηροῦμε ὅτι, ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ $\lim x_\nu = +\infty$, τότε καί ἡ ἀντίστοιχη ἀκολουθία τιμῶν $f(x_\nu) = x_\nu^2$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἀπειρίζεται θετικά, γιατί

$$f(x_\nu) = x_\nu^2 = x_\nu \cdot x_\nu \to (+\infty)(+\infty) = +\infty.$$

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^2$ ἀπειρίζεται θετικά γιά $x \to +\infty$.

Γενικά, λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f πού εἶναι ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$ «*ἀπειρίζεται θετικά γιά* $x \to +\infty$» ἤ ἀλλιῶς «*συγκλίνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τό* $+\infty$» ἤ ἀκόμη «*τείνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τό* $+\infty$» καί τοῦτο τό συμβολίζουμε μέ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ἤ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in (\alpha, +\infty)$ $\forall\ \nu \in \mathbf{N}$ *ἔχουμε*

$$\lim x_\nu = +\infty \Rightarrow \lim f(x_\nu) = +\infty.$$

Ἀνάλογα πρός τήν περίπτωση τῶν ἀκολουθιῶν θά λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f «*ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά* $x \to +\infty$» ἤ ἀλλιῶς «*συγκλίνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τό* $-\infty$» ἤ ἀκόμη «*τείνει γιά* $x \to +\infty$ *πρός τό* $-\infty$» καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ἤ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x)) = +\infty$. Γιά συντομία

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to+\infty} (-f(x)) = +\infty}$$

Π.χ. ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \frac{-x^2+x}{3x+1}$, $x \in (0, +\infty)$ ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά $x \to +\infty$. Πραγματικά·

$$-f(x)=\frac{x^2-x}{3x+1},\quad x\in(0,+\infty)$$

καί γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ θετικούς ὅρους καί μέ $\lim x_\nu=+\infty$ ἰσχύει

$$-f(x_\nu)=\frac{x_\nu^2-x_\nu}{3x_\nu+1}=\frac{x_\nu-1}{3+\frac{1}{x_\nu}}\to\frac{+\infty-1}{3+0}=+\infty,$$

ἄρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))=+\infty$ καὶ ἐπομένως $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+x}{3x+1}=-\infty$.

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει τώρα εὔκολα ὅτι τό θεώρημα 1.3.1 ἰσχύει καί στήν περίπτωση, πού ἡ ὁριακή τιμή $l$ εἶναι ἕνα ἀπό τά σύμβολα $+\infty$, $-\infty$. Πιό συγκεκριμένα ἰσχύει τό ἀκόλουθο θεώρημα:

**1.3.3 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ συνάρτηση* f *συγκλίνει γιά* $x\to+\infty$ *πρός τό* $l$ ($l\in R^*=R\cup\{-\infty,+\infty\}$) *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $x_\nu\in(\alpha,+\infty)$ $\forall$ $\nu\in N$ *ἔχουμε:*

$$\lim x_\nu=+\infty\Rightarrow\lim f(x_\nu)=l.$$

*Ἀπόδειξη.* Ἡ περίπτωση πού $l\in R$ προκύπτει ἀπό τό θεώρημα 1.3.1, ἐνῶ ἡ περίπτωση $l=+\infty$ ἀπό τόν ὁρισμό τῆς συναρτήσεως πού ἀπειρίζεται θετικά γιά $x\to+\infty$. Ἡ περίπτωση πού ἀπομένει εἶναι $l=-\infty$ καί προκύπτει κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἀπό τόν ὁρισμό ἔχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))=+\infty$. Ἀλλά $\lim\limits_{x\to+\infty}(-f(x))=+\infty$ σημαίνει ὅτι γιά κάθε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $x_\nu\in(0,+\infty)$ $\forall$ $\nu\in N$ τέτοια, ὥστε $\lim x_\nu=+\infty$, ἰσχύει $\lim(-f(x_\nu))=+\infty$ δηλαδή $\lim f(x_\nu)=-\infty$.

## 2. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΓΙΑ $x\to-\infty$

**2.1** Ἄς θεωρήσουμε τή συνάρτηση f μέ $f(x)=\frac{x+1}{3x-2}$, $x\in(-\infty,0)$ γιά τήν ὁποία παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$, μέ $x_\nu<0$ $\forall$ $\nu\in \mathbf{N}$ καί $\lim x_\nu=-\infty$ ἰσχύει

$$f(x_\nu)=\frac{x_\nu+1}{3x_\nu-2}=\frac{1+\frac{1}{x_\nu}}{3-\frac{2}{x_\nu}}\to\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}.$$

Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x)=\frac{x+1}{3x-2}$, $x\in(-\infty,0)$ συγκλίνει γιά $x\to-\infty$ πρός τόν ἀριθμό $\frac{1}{3}$ καί τό γράφουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{3x-2}=\frac{1}{3}.$$

Γενικά, λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f πού εἶναι ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty, \alpha)$, *«συγκλίνει γιά* $x \to -\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* $l$*»* ἤ ἀλλιῶς *«τείνει γιά* $x \to -\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* $l$*»* καί αὐτό τό συμβολίζουμε μέ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ ἤ $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} l$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in (-\infty,\alpha)$ $\forall$ $\nu \in N$ *ἔχουμε*

$$\lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμός $l$ εἶναι μονοσημάντως ὁρισμένος. Τόν ἀριθμό αὐτό τόν ὀνομάζουμε *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή* τῆς f γιά $x \to -\infty$.

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως πού ἀπειρίζεται θετικά ἤ ἀρνητικά γιά $x \to -\infty$, ὁρίζεται ἀνάλογα πρός τήν περίπτωση $x \to +\infty$. Πιό συγκεκριμένα, ἄν f εἶναι μιά συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty, \alpha)$, τότε ὁρίζουμε:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \underset{\text{ορσ}}{\iff} \begin{cases} \text{Γιά κάθε ἀκολουθία } x_\nu,\ \nu=1,2,\ldots \text{μέ } x_\nu \in(-\infty,\alpha)\ \forall \nu\in N \\ \text{ἰσχύει } \lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim f(x_\nu) = +\infty \end{cases}}$$

καί

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \underset{\text{ορσ}}{\iff} \lim_{x\to-\infty} (-f(x)) = +\infty}$$

Ἔτσι, ἀνάλογα πρός τό θεώρημα 1.3.3, ἔχουμε καί τό παρακάτω θεώρημα:

**2.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ συνάρτηση* f *συγκλίνει γιά* $x \to -\infty$ *πρός τό* $l$, $l \in R^*$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in (-\infty, \alpha)$ $\forall$ $\nu \in N$ ἔχουμε

$$\lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

**Παραδείγματα:**

**1.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+x}$, $x \in (-\infty, -1)$ *συγκλίνει γιά* $x \to -\infty$ *πρός τόν ἀριθμό* 3. Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ $x_\nu < -1$ $\forall$ $\nu \in N$ καί $\lim x_\nu = -\infty$, τότε

$$f(x_\nu) = \frac{3x_\nu^2+1}{x_\nu^2+x_\nu} = \frac{3+\dfrac{1}{x_\nu^2}}{1+\dfrac{1}{x_\nu}} \to \frac{3+0}{1+0} = 3,$$

γιατί $\dfrac{1}{x_\nu} \to 0$ καί $\dfrac{1}{x_\nu^2} = \dfrac{1}{x_\nu} \cdot \dfrac{1}{x_\nu} \to 0.0 = 0$. Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$$\lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim \frac{3x_\nu^2+1}{x_\nu^2+x_\nu} = 3,$$

δηλαδή ὅτι $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+x} = 3$.

**2.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \sqrt{x^2-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ *ἀπειρίζεται θετικά γιά* $x \to -\infty$. Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ ἀρνητικούς ὅρους καί μέ $\lim x_\nu = -\infty$, τότε

$$f(x_\nu) = \sqrt{x_\nu^2 - x_\nu} = \sqrt{x_\nu^2\left(1 - \frac{1}{x_\nu}\right)} = |x_\nu| \sqrt{1 - \frac{1}{x_\nu}} = -x_\nu \sqrt{1 - \frac{1}{x_\nu}} \to$$

$$\to -(-\infty)\sqrt{1-0} = -(-\infty)\,1 = +\infty,$$

δηλαδή

$$\lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim \sqrt{x_\nu^2 - x_\nu} = +\infty.$$

καί ἑπομένως $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x} = +\infty$.

**3.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = x\sqrt{x^2-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά* $x \to -\infty$. Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ ἀρνητικούς ὅρους καί μέ $\lim x_\nu = -\infty$, τότε

$$f(x_\nu) = x_\nu \sqrt{x_\nu^2 - x_\nu} \to (-\infty)(+\infty) = -\infty,$$

δηλαδή

$$\lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim x_\nu \sqrt{x_\nu^2 - x_\nu} = -\infty$$

καί ἑπομένως $\lim\limits_{x \to -\infty} x\sqrt{x^2-x} = -\infty$.

### 3. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΓΙΑ $x \to x_0$

**3.1 Σύγκλιση συναρτήσεως γιά** $x \to x_0 + 0$. Γιά τή συνάρτηση g μέ $g(x) = x + \sqrt{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu > 1$ $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim x_\nu = 1$, ἰσχύει

$$g(x_\nu) = x_\nu + \sqrt{x_\nu - 1} \to 1 + \sqrt{1-1} = 1. \tag{2}$$

Παρόμοια, γιά τή συνάρτηση h μέ $h(x) = \dfrac{1}{x-5}$, $x \in (5, +\infty)$ παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu > 5$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ καί $\lim x_\nu = 5$· ἰσχύει

$$h(x_\nu) = \frac{1}{x_\nu - 5} \to +\infty \tag{3}$$

γιατί, ἀπό τήν $x_\nu > 5$ $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}$ καί τήν $\lim x_\nu = 5$ προκύπτει ὅτι, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει δείκτης $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει $0 < x_\nu - 5 < \varepsilon$ $\forall$ $\nu \geq \nu_0$ καί ἄρα

$$h(x_\nu) = \frac{1}{x_\nu - 5} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu \geq \nu_0$$

δηλαδή ἔχουμε ὅτι $\lim h(x_\nu) = +\infty$.

Τήν ἰδιότητα (2) τήν ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση g μέ $g(x) = x + \sqrt{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$ συγκλίνει γιά $x \to 1 + 0$ πρός τόν ἀριθμό 1 καί γράφουμε $\lim\limits_{x\to 1+0}(x+\sqrt{x-1})=1$, ἐνῶ τήν ἰδιότητα (3) τήν ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση h μέ $h(x)=\frac{1}{x-5}$, $x\in(5,+\infty)$ ἀπειρίζεται θετικά γιά $x\to 5+0$, ἤ συγκλίνει γιά $x\to 5+0$ πρός τό $+\infty$ καί γράφουμε $\lim\limits_{x\to 5+0}\frac{1}{x-5}=+\infty$.

Γενικά, ἄν f εἶναι μιά συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(x_0, \beta)$, ὅπου $x_0\in R$, θά λέμε ὅτι αὐτή *«συγκλίνει γιά* $x\to x_0+0$ *πρός τό* $l$*»* ἤ ἀλλιῶς *«τείνει γιά* $x\to x_0+0$ *πρός τό* $l$*»*, ὅπου $l\in R^*$ καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=l$ ἤ $f(x)\xrightarrow[x\to x_0+0]{} l$, τότε καί μόνο τότε, *ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu=1,2,\dots$ μέ $x_\nu\in(x_0,\beta)$ $\forall$ $\nu\in N$ ἔχουμε

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim f(x_\nu)=l.$$

Τό $l$, πού εἶναι βέβαια μονοσημάντως ὁρισμένο, τό ὀνομάζουμε *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή* τῆς συναρτήσεως f γιά $x\to x_0+0$.

Ἄν $l=0$, τότε ἡ συνάρτηση f ὀνομάζεται *μηδενική γιά* $x\to x_0+0$. Ἐπίσης στήν περίπτωση, πού $l=-\infty$ λέμε καί ὅτι ἡ συνάρτηση f *ἀπειρίζεται ἀρνητικά* γιά $x\to x_0+0$, ἐνῶ στήν περίπτωση, πού $l=+\infty$ λέμε ὅτι αὐτή *ἀπειρίζεται θετικά γιά* $x\to x_0+0$.

**Παραδείγματα:**

**1.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x)=(x-1)^2+\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$, $x\in(0,+\infty)$ *συγκλίνει γιά* $x\to+0$ *πρός τόν ἀριθμό* 1 (+0 γράφεται ἀντί τοῦ 0 + 0). Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε μηδενική ἀκολουθία μέ θετικούς ὅρους, ἔχουμε

$$f(x_\nu)=(x_\nu-1)^2+\sqrt{\frac{x_\nu}{x_\nu^2+1}} \to (0-1)^2+\sqrt{\frac{0}{0^2+1}}=1.$$

Ἄρα $\lim\limits_{x\to+0}\left((x-1)^2+\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\right)=1.$

**2.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$, $x\in(1,+\infty)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικά* γιά $x\to 1+0$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ ὅρους μεγαλυτέρους τοῦ 1 τέτοια, ὥστε $\lim x_\nu=1$, τότε ἔχουμε

$$1-x_\nu^2<0 \quad \forall\ \nu\in N \text{ καί } \lim(1-x_\nu^2)=0$$

καί ἄρα $\lim\frac{1}{1-x_\nu^2}=-\infty$. Ἔτσι

$$f(x_\nu)=\frac{x_\nu}{1-x_\nu^2}=x_\nu\frac{1}{1-x_\nu^2}\to 1(-\infty)=-\infty$$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{1-x^2}=-\infty.$

**3.2 Σύγκλιση συναρτήσεως γιά** $x\to x_0-0$. Γιά τή συνάρτηση g μέ

$g(x)=x+\sqrt{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$, παρατηροῦμε, ὅπως καί στή (2), ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $x_\nu<1$ $\forall$ $\nu\in N$ ἰσχύει

$$\lim x_\nu = 1 \Rightarrow g(x_\nu) = x_\nu + \sqrt{1-x_\nu} \to 1+\sqrt{1-1}=1.$$

Παρόμοια, γιά τή συνάρτηση $h$ μέ $h(x)=\frac{1}{x-5}$, $x\in(-\infty, 5)$ παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $x_\nu<5$ $\forall$ $\nu\in N$ ἰσχύει

$$\lim x_\nu = 5 \Rightarrow g(x_\nu) = \frac{1}{x_\nu-5} \to -\infty.$$

Πραγματικά· ἀπό τό γεγονός ὅτι $\lim x_\nu=5$ καί $x_\nu<5$ $\forall$ $\nu\in N$ προκύπτει ὅτι γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $\nu_0=\nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος ὥστε νά ἰσχύει $0<5-x_\nu<\varepsilon$ $\forall$ $\nu\geq\nu_0$. Ἄρα ἰσχύει καί

$$\frac{1}{5-x_\nu} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu\geq\nu_0$$

δηλαδή $\lim \frac{1}{5-x_\nu}=+\infty$ καί ἔτσι $\lim \frac{1}{x_\nu-5}=-\infty$.

Τά παραπάνω τά ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση $g$ μέ $g(x)=x+\sqrt{1-x}$, $x\in(-\infty,1)$ συγκλίνει γιά $x\to1-0$ πρός τόν ἀριθμό 1 καί γράφουμε $\lim\limits_{x\to1-0}(x+\sqrt{1-x})=1$, καί ὅτι ἡ συνάρτηση $h$ μέ $h(x)=\frac{1}{x-5}$, $x\in(-\infty,5)$ ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά $x\to5-0$ ἤ συγκλίνει γιά $x\to5-0$ πρός τό $-\infty$ καί γράφουμε $\lim\limits_{x\to5-0}\frac{1}{x-5}=-\infty$.

Γενικά, ἄν $f$ εἶναι μιά συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, x_0)$, ὅπου $x_0\in R$, θά λέμε ὅτι αὐτή *«συγκλίνει γιά* $x\to x_0-0$ *πρός τό* $l$*»* ἤ ἀλλιῶς *«τείνει γιά* $x\to x_0-0$ *πρός τό* $l$*»*, ὅπου $l\in R^*$ καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=l$ ἤ $f(x)\xrightarrow[x\to x_0-0]{} l$, τότε καί μόνο τότε, ἄν *γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $x_\nu\in(\alpha, x_0)$ $\forall$ $\nu\in N$ ἔχουμε

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim f(x_\nu)=l.$$

Τό $l$ πού εἶναι, βέβαια, μονοσήμαντα ὁρισμένο, τό ὀνομάζουμε *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή* τῆς συναρτήσεως $f$ γιά $x\to x_0+0$.

Ἄν $l=0$, τότε ἡ συνάρτηση $f$ ὀνομάζεται *μηδενική* *γιά* $x\to x_0-0$. Ἐπίσης στήν περίπτωση, πού $l=-\infty$ λέμε καί ὅτι ἡ συνάρτηση $f$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά* $x\to x_0-0$, ἐνῶ στήν περίπτωση, πού $l=+\infty$ λέμε ὅτι αὐτή *ἀπειρίζεται θετικά γιά* $x\to x_0-0$.

**Παραδείγματα:**

1. *Ἡ συνάρτηση* $f$ *μέ* $f(x)=(x+2)^2+\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$, $x\in(-1,0)$ *συγκλίνει γιά* $x\to-0$ πρός τόν ἀριθμό 4 ($-0$ γράφεται ἀντί τοῦ $0-0$). Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε μηδενική ἀκολουθία μέ $x_\nu\in(-1,0)$ $\forall$ $\nu\in N$, ἔχουμε

$$f(x_\nu) = (x_\nu + 2)^2 + \sqrt{\frac{-x_\nu}{1 - x_\nu^2}} \to (0+2)^2 + \sqrt{\frac{0}{1-0^2}} = 4$$

καί ἄρα $\lim\limits_{x \to -0} \left( (x+2)^2 + \sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \right) = 4.$

**2.** *Ἡ συνάρτηση* f μέ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά* $x \to -0$.

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε μηδενική ἀκολουθία μέ ἀρνητικούς ὅρους, τότε, γιά κάθε ε > 0 ὑπάρχει $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει $0 < -x_\nu < \varepsilon \quad \forall \nu \geq \nu_0$. Τότε ὅμως

$$-\frac{1}{x_\nu} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \ \nu \in N$$

δηλαδή $\lim \left( -\frac{1}{x_\nu} \right) = +\infty$ καί ἔτσι $\lim \frac{1}{x_\nu} = -\infty$. Ἄρα $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x} = -\infty$.

**3.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$ ἀπειρίζεται θετικά γιά $x \to 1-0$.

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ ὅρους στό διάστημα $(-1,1)$ καί τέτοια ὥστε $\lim x_\nu = 1$, τότε ἔχουμε

$$1 - x_\nu^2 > 0 \quad \forall \ \nu \in N \text{ καί } \lim(1 - x_\nu^2) = 0$$

ἀπ' ὅπου παίρνουμε $\lim \frac{1}{1-x_\nu^2} = +\infty$. Ἔτσι

$$f(x_\nu) = \frac{x_\nu}{1 - x_\nu^2} = x_\nu \frac{1}{1 - x_\nu^2} \to 1(+\infty) = +\infty.$$

καί ἄρα $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{x}{1-x^2} = +\infty$.

**3.3 Σύγκλιση συναρτήσεως γιά** $x \to x_0$. Ἄν θεωρήσουμε μιά συνάρτηση f ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε γι' αὐτή εἶναι δυνατό νά ὁρισθεῖ ἡ ἔννοια τῆς συγκλίσεως τόσο γιά $x \to x_0 + 0$ ὅσο καί γιά $x \to x_0 - 0$.

Π.χ. γιά $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ἔχουμε

$$\lim_{x \to +0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to +0} 1 = 1$$

καί

$$\lim_{x \to -0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to -0} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to -0} (-1) = -1.$$

Ἀκόμη, γιά $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ἔχουμε

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1+0} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

καί

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1-0} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1}$$

καί αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x\in(-\infty,1) \cup (1, +\infty)$ συγκλίνει γιά $x \to 1$ πρός τόν ἀριθμό 2.

Γενικά, ἄν f εἶναι μιά συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς $(\alpha, x_0) \cup (x_0,\beta)$ ὅπου $x_0 \in \mathbf{R}$, θά λέμε ὅτι αὐτή *«συγκλίνει γιά* $x \to x_0$ *πρός τό* $l$*»* ἤ ἀλλιῶς *«τείνει γιά* $x \to x_0$ *πρός τό* $l$*»*, ὅπου $l\in\mathbf{R}^*$ καί αὐτό θά τό συμβολίζουμε μέ $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ ἤ $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} l$ τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = l = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Ὀνομάζουμε τό $l$ *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή* τῆς συναρτήσεως f γιά $x \to x_0$.

Ἐπειδή οἱ ὁριακές τιμές τῆς f γιά $x \to x_0-0$ καί $x \to x_0 + 0$ εἶναι μοναδικές, ἀπό τά παραπάνω προκύπτει ὅτι καί ἡ ὁριακή τιμή τῆς f γιά $x \to x_0$ εἶναι ἐπίσης μοναδική.

Ἄν $l = 0$, τότε ἡ συνάρτηση f ὀνομάζεται *μηδενική γιά* $x \to x_0$. Ἀκόμη στήν περίπτωση, πού $l = -\infty$ λέμε καί ὅτι ἡ συνάρτηση f *ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά* $x \to x_0$, ἐνῶ στήν περίπτωση, ὅπου $l = +\infty$ λέμε ὅτι αὐτή *ἀπειρίζεται θετικά γιά* $x \to x_0$.

**Παραδείγματα:**

**1.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x\in(-\infty, 2)\cup(2,+\infty)$ *συγκλίνει γιά* $x\to 2$ *πρός τόν ἀριθμό* $-1$. Πραγματικά·

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3 \quad \forall\ x\in\mathbf{R}-\{2\}.$$

Ἀλλά τότε εὔκολα προκύπτει ὅτι $\lim_{x\to 2+0}(x-3) = -1 = \lim_{x\to 2-0}(x-3)$, δηλαδή

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = -1 = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2-5x+6}{x-2}, \text{ καί ἄρα } \lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = -1.$$

**2.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x\in(-\infty,0) \cup(0, +\infty)$ *ἀπειρίζεται θετικά* γιά $x \to 0$. Πραγματικά· γιά κάθε μηδενική ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ θετικούς ὅρους, ἔχουμε

$$\lim \frac{1}{x_\nu} = +\infty$$

καί ἄρα $\frac{1}{x_\nu^2} = \frac{1}{x_\nu} \cdot \frac{1}{x_\nu} \to (+\infty)(+\infty) = +\infty$, δήλαδή $\lim_{x\to+0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Ἐπίσης, γιά κάθε μηδενική ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ ἀρνητικούς ὅρους, ἔχουμε

$$\lim \frac{1}{x_\nu} = -\infty$$

καί ἄρα $\frac{1}{x_\nu^2} = \frac{1}{x_\nu} \cdot \frac{1}{x_\nu} = (-\infty)(-\infty) = +\infty$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to -0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

**3.** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *ἀπειρίζεται ἀρνητικά γιά* $x \to 0$. Πραγματικά· γιά κάθε μηδενική ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ θετικούς ὅρους, ἔχουμε

$$\frac{x_\nu - 1}{x_\nu^2} = \frac{1}{x_\nu}\left(1 - \frac{1}{x_\nu}\right) \to (+\infty)(1-(+\infty)) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

καί ἄρα $\lim\limits_{x \to +0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$.

Ἐπίσης, γιά κάθε μηδενική ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ ἀρνητικούς ὅρους, ἔχουμε

$$\frac{x_\nu - 1}{x_\nu^2} = \frac{1}{x_\nu}\left(1 - \frac{1}{x_\nu}\right) \to (-\infty)(1-(-\infty)) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

καί ἄρα $\lim\limits_{x \to -0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$.

Ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$.

Σχετικά μέ τή σύγκλιση γιά $x \to x_0$, $x_0 \in R$ ἰσχύει τό παρακάτω βασικό θεώρημα, πού εἶναι ἀνάλογο μέ τό θεώρημα 1.3.3 πού ἀναφέρεται στή σύγκλιση γιά $x \to +\infty$.

**3.3.1 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Θεωροῦμε μιά συνάρτηση* f *ὁρισμένη τουλάχιστο σέ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς* $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, $x_0 \in R$. *Ἡ συνάρτηση* f *συγκλίνει γιά* $x \to x_0$ *πρός τό* $l$ ($l \in R^*$), *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ $\forall\, \nu \in N$ *ἔχουμε.*

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

*Ἀπόδειξη.* Α) Ὑποθέτουμε ὅτι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ καί θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ $\forall \nu \in N$ καί $\lim x_\nu = x_0$. Διακρίνουμε, τώρα, τίς παρακάτω τρεῖς περιπτώσεις:

1. *Ἰσχύει* $x_\nu < x_0$ *γιά ἕνα πεπερασμένο πλῆθος δεικτῶν.* Στήν περίπτωση αὐτή, διαγράφοντας τούς ὅρους τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $x_\nu < x_0$ ἔχουμε μιά ἀκολουθία $y_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τήν ὁποία, βέβαια, ἰσχύει $y_\nu \in (x_0, \beta)$ $\forall$ $\nu \in N$ καί ἀκόμη, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς § 1.4 τοῦ κεφ. III, ὅτι $\lim y_\nu = x_0$. Ἄρα, ἀφοῦ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, ἔχουμε $\lim f(y_\nu) = l$, πού, σύμφωνα πάλι μέ τήν ἴδια παρατήρηση, σημαίνει ὅτι $\lim f(x_\nu) = l$.

2. *Ἰσχύει* $x_\nu > x_0$ *γιά ἕνα πεπερασμένο πλῆθος δεικτῶν.* Ὅπως καί στήν πρώτη περίπτωση, ἔτσι καί ἐδῶ συμπεραίνουμε μέ ἀνάλογο τρόπο ὅπ $\lim f(x_\nu) = l$.

3. *Δέν ἰσχύει καμιά ἀπ' τίς περιπτώσεις* 1 *καί* 2. Τότε, διαγράφοντας

τούς ὅρους τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $x_\nu < x_0$ ἔχουμε μιά ὑπακολουθία $x_{\lambda_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει $x_{\lambda_\nu} \in (x_0, \beta)$ $\forall$ $\nu \in N$ καί ἀκόμη $\lim x_{\lambda_\nu} = x_0$ (Ἰδιότητα 2, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III). Ἀλλά ἀφοῦ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, ἔχουμε

$$(4) \qquad \lim f(x_{\lambda_\nu}) = l.$$

Παρόμοια, διαγράφοντας τούς ὅρους τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $x_\nu > x_0$ ἔχουμε μιά ὑπακολουθία $x_{\mu_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει $x_{\mu_\nu} \in (\alpha, x_0)$ $\forall$ $\nu \in N$ καί $\lim x_{\mu_\nu} = x_0$. Ἀλλά, ἀφοῦ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, ἔχουμε

$$(5) \qquad \lim f(x_{\mu_\nu}) = l.$$

Παραπάνω διασπάσαμε τήν ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ σέ δυό ὑπακολουθίες της, τίς $x_{\lambda_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $x_{\mu_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$, γιά τίς ὁποῖες ἰσχύουν ἀντίστοιχα οἱ (4) καί (5). Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές προκύπτει ὅτι ἰσχύει καί $\lim f(x_\nu) = l$. Πραγματικά· θέτοντας $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ καί $M = \{\mu_1, \mu_2, \ldots\}$ οἱ (4) καί (5) μποροῦν νά γραφοῦν ἀντίστοιχα

$$\lim_{\nu \in \Lambda} f(x_\nu) = l \quad \text{καί} \quad \lim_{\nu \in M} f(x_\nu) = l.$$

Ἀλλά, ὅπως εἴδαμε στήν παράγραφο 1.4 τοῦ κεφ. III, ἰσχύει

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu \in \Lambda} f(x_\nu) = l \\ \lim\limits_{\nu \in M} f(x_\nu) = l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{\nu \in \Lambda \cup M = N} f(x_\nu) = l \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

Ὥστε καί στίς τρεῖς παραπάνω περιπτώσεις ἀποδείξαμε ὅτι $\lim f(x_\nu) = l$.

Β. Ὑποθέτουμε, τώρα, ὅτι γιά κάθε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ $\forall$ $\nu \in N$ ἰσχύει

$$(6) \qquad \lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

Εἶναι φανερό ὅτι αὐτό ἰσχύει καί γιά ἐκεῖνες τίς ἀκολουθίες $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τίς ὁποῖες $x_\nu \in (\alpha, x_0)$ $\forall$ $\nu \in N$ πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = l$. Ἀκόμη ἡ (6) ἰσχύει καί γιά ἐκεῖνες τίς ἀκολουθίες $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu \in (x_0, \beta)$ $\forall$ $\nu \in N$, πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = l$. Ἔτσι ἔχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

## 4. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

**4.1** Ἔστω $\sigma \in R^* = R \cup \{-\infty, \infty\}$ καί f μιά συνάρτηση ὁρισμένη τουλάχιστο σ' ἕνα σύνολο $U(\sigma)$ πού ἔχει τή μορφή

$$\begin{array}{l} (\alpha, \sigma) \cup (\sigma, \beta), \text{ ἄν } \sigma \in R \\ (\alpha, +\infty), \text{ ἄν } \sigma = +\infty \\ (-\infty, \alpha), \text{ ἄν } \sigma = -\infty. \end{array}$$

Παραπάνω ἔχουμε ὁρίσει τήν ἔννοια τοῦ $\lim\limits_{x \to \sigma} f(x) = l$ καί μάλιστα σέ ὅλες τίς περιπτώσεις, ὅπου $l \in R^*$. Ἀκόμη τό $l$ τό ὀνομάσαμε *ὅριο* ἤ *ὁριακή τιμή τῆς συναρτήσεως* f γιά $x \to \sigma$.

Ὅπως εἴδαμε, ἡ σύγκλιση μιᾶς συναρτήσεως γιά $x \to \sigma$ χαρακτηρίζεται πάντοτε ἀπό τίς συγκλίνουσες πρός τό σ ἀκολουθίες καί τοῦτο ἄλλοτε ἀπό τόν ὁρισμό (βλ. π.χ. § 1.2) καί ἄλλοτε ἀπό θεωρήματα (βλ. π.χ. θεωρήματα 1.3.3 καί 3.3.1). Γιά ὅλες ὅμως τίς περιπτώσεις ἰσχύει, τό ἀκόλουθο θεώρημα.

**4.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ συνάρτηση* f *συγκλίνει γιά* $x \to \sigma$ *πρός τό* $l$, $l \in R^*$, *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in U(\sigma)$ $\forall$ $\nu \in N$ *ἰσχύει*

$$\lim x_\nu = \sigma \Rightarrow \lim f(x_\nu) = l.$$

*Ἀπόδειξη.* Γιά $\sigma = +\infty$, τό θεώρημα αὐτό συμπίπτει μέ τό θεώρημα 1.3.3. Παρόμοια, καί γιά $\sigma = -\infty$, τό θεώρημα πάλι ἰσχύει (βλ. § 2.1). Τέλος γιά $\sigma \in R$, τό θεώρημα συμπίπτει μέ τό θεώρημα 3.3.1.

Μέ τή βοήθεια τοῦ παραπάνω θεωρήματος ἀποδεικνύονται εὔκολα καί γιά τίς συγκλίνουσες συναρτήσεις ἰδιότητες ἀνάλογες μέ τίς ἰδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν. Πρίν ὅμως διατυπώσουμε τίς ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν συναρτήσεων θά ὁρίσουμε πρῶτα τήν ἔννοια τῆς *φραγμένης συναρτήσεως*, ἡ ὁποία συνδέεται μέ τήν ἔννοια τῆς συγκλίσεως συναρτήσεως, ὅπως ἀκριβῶς συμβαίνει καί μέ τίς ἀκολουθίες (βλ. ἰδιότητες 3 καί 5 τῆς § 1.3.1, καί ἰδιότητα 3 τῆς § 1.4.2 τοῦ κεφ. III).

Μιά συνάρτηση f, ὀνομάζεται *φραγμένη στή γειτονιά τοῦ* σ, τότε καί μόνο τότε, ἄν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός θ καί σύνολο τῆς μορφῆς $U(\sigma)$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει

$$|f(x)| \leqslant \theta \quad \forall \ x \in U(\sigma).$$

Τό θ ὀνομάζεται τότε *φράγμα τῆς* f *πάνω στό* $U(\sigma)$.

Π.χ. ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ εἶναι φραγμένη στή γειτονιά τοῦ $+\infty$ καί τοῦ $-\infty$, γιατί ἰσχύει

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \quad \forall \ x \in (1, +\infty),$$

καί

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \quad \forall \ x \in (-\infty, -1).$$

Παρόμοια, αὐτή εἶναι φραγμένη καί στή γειτονιά τοῦ 2, γιατί ἰσχύει

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 \quad \forall \ x \in (1,2) \cup (2, +\infty).$$

Ἀντίθετα, αὐτή δέν εἶναι φραγμένη στή γειτονιά τοῦ 0, γιατί ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει $\theta > 0$ καί σύνολο τῆς μορφῆς $U(0)$ μέ

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leq \theta \quad \forall\ x \in U(0)$$

τότε γιά κάθε $x \in \left[\left(-\frac{1}{\theta}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\theta}\right)\right] \cap U(0)$ ἔχουμε $\left|\frac{1}{x}\right| > \theta$, πράγμα πού εἶναι ἄτοπο.

**4.1.2.** *Μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 4.1.1. προκύπτουν οἱ παρακάτω ἰδιότητες τῶν συγκλινουσῶν συναρτήσεων μέ τήν προϋπόθεση, βέβαια, ὅτι οἱ πράξεις πού σημειώνονται στίς ὁριακές τιμές εἶναι ἐπιτρεπτές.*

Ὑποθέτουμε ὅτι f καί g εἶναι συναρτήσεις ὁρισμένες τουλάχιστο πάνω σέ ἕνα συγκεκριμένο σύνολο U(σ), τῆς μορφῆς πού καθορίσθηκε παραπάνω.

**1.** $\left.\begin{array}{l} f \text{ φραγμένη στή γειτονιά τοῦ } \sigma \\ g(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\,g(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0$

Πραγματικά· θεωροῦμε ἕνα φράγμα θ τῆς f πάνω στό U(σ) καί μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = \sigma$. Ἀλλά τότε ἔχουμε ὅτι $x_\nu \in U(\sigma)$ γιά ὅλους τούς δεῖκτες ν ἐκτός ἀπό ἕνα πεπερασμένο πλῆθος καί ἔτσι γιά τούς ἴδιους δεῖκτες προκύπτει ὅτι $|f(x_\nu)| \leq \theta$. Ἀπ' αὐτό προκύπτει ἀμέσως ὅτι ἡ ἀκολουθία $f(x_\nu)$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι φραγμένη. Τώρα παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει καί $g(x_\nu) \to 0$, ἀφοῦ ἀπό τήν ὑπόθεση ἔχουμε ὅτι $g(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0$. Ἄρα σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 5, § 1.3.1 τοῦ κεφ. III, προκύπτει ὅτι καί $f(x_\nu)g(x_\nu) \to 0$, δηλαδή $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0$.

**2.** $f(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0 \Leftrightarrow -f(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0.$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu = \sigma$, τότε σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 1, § 1.3.1 τοῦ κεφ. III, ἔχουμε

$$f(x_\nu) \to 0 \Leftrightarrow |f(x_\nu)| \to 0 \Leftrightarrow -f(x_\nu) \to 0$$

καί ἄρα ἰσχύει ἡ 2.

**3.** $\left.\begin{array}{l} g(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0 \\ |f(x)| \leq |g(x)| \ \ \forall\ x \in U(\sigma) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0.$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu = \sigma$, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτουμε ὅτι $x_\nu \in U(\sigma)\ \forall\ \nu \in N$. Ἔτσι ἔχουμε $g(x_\nu) \to 0$ καί $|f(x_\nu)| \leq |g(x_\nu)|\ \forall\ \nu \in N$ καί ἄρα, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 7, § 1.3.1 τοῦ κεφ. III, ἰσχύει καί $f(x_\nu) \to 0$, πού σημαίνει ὅτι $f(x) \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0$.

**4.** $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} |f(x)| = \begin{cases} |l|, & \text{ἄν } l \in R \\ +\infty, & \text{ἄν } l = +\infty \text{ ἤ } -\infty. \end{cases}$

Πραγματικά· ἄν $l \in R$, τότε ἔχουμε $f(x) - l \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0$. Ἀλλά ἰσχύει $\big||f(x)| - |l|\big| \leq |f(x) - l|\ \ \forall\ x \in U(\sigma)$ καί ἄρα, ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα 3, προκύπτει ὅτι καί $\big||f(x)| - |l|\big| \xrightarrow[x\to\sigma]{} 0$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to\sigma} |f(x)| = l$.

Ἂν $l = +\infty$, ἤ $-\infty$, θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = \sigma$. Ἀλλά ἰσχύει $-|f(x_\nu)| \leq f(x_\nu) \leq |f(x_\nu)|$ καί ἔτσι ἔχουμε

$$\lim(-|f(x_\nu)|) \leq \lim f(x_\nu) \leq \lim |f(x_\nu)|.$$

Ἄρα, ἄν $l = +\infty$, τότε καί $\lim |f(x_\nu)| = +\infty$, ἐνῶ ἄν $\lim f(x_\nu) = -\infty$, τότε καί $\lim(-|f(x_\nu)|) = -\infty$ καί ἄρα $\lim |f(x_\nu)| = +\infty$. Ἔτσι πάντοτε ἔχουμε $\lim |f(x_\nu)| = +\infty$ πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to\sigma} |f(x)| = +\infty$.

**5.** $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = l$, $l \in R \Rightarrow$ f *εἶναι φραγμένη στή γειτονιά τοῦ σ.*

Ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι ἡ f δέν εἶναι φραγμένη, ἔχουμε:

1) ἄν $\sigma \in R$, τότε σέ κάθε σύνολο τῆς μορφῆς $\left(\sigma - \frac{1}{\nu}, \sigma\right) \cup \left(\sigma, \sigma + \frac{1}{\nu}\right)$ ὑπάρχει $x_\nu$ μέ $f(x_\nu) \geq \nu \quad \forall\ \nu \in N$.

2) ἄν $\sigma = -\infty$, τότε σέ κάθε σύνολο τῆς μορφῆς $(-\infty, -\nu)$ ὑπάρχει $x_\nu$ μέ $f(x_\nu) \geq \nu \quad \forall\ \nu \in N$.

3) ἄν $\sigma = +\infty$, τότε σέ κάθε σύνολο τῆς μορφῆς $(\nu, +\infty)$ ὑπάρχει $x_\nu$ μέ $f(x_\nu) \geq \nu \quad \forall\ \nu \in N$.

Παρατηροῦμε ὅτι καί στίς τρεῖς παραπάνω περιπτώσεις ἡ ἀκολουθία πού ὁρίζεται εἶναι τέτοια ὥστε

$$\lim x_\nu = \sigma \quad \text{καί} \quad f(x_\nu) \geq \nu \ \forall\ \nu \in N$$

Ἄρα $\lim f(x_\nu) = l$ καί ἀκόμη $\lim f(x_\nu) \geq \lim \nu$, δηλαδή $l \geq +\infty$, πρᾶγμα πού εἶναι ἄτοπο.

**6.**
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2$$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu = \sigma$, τότε ἔχουμε καί $\lim f(x_\nu) = l_1$, $\lim g(x_\nu) = l_2$ καί ἔτσι, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 4, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III, προκύπτει

$$\lim [f(x_\nu) + g(x_\nu)] = l_1 + l_2$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to\sigma} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$.

**7.**
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} f(x)g(x) = l_1\, l_2.$$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu = \sigma$, τότε ἔχουμε καί $\lim f(x_\nu) = l_1$, $\lim g(x_\nu) = l_2$ καί ἔτσι, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 5, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III, προκύπτει

$$\lim f(x_\nu)\, g(x_\nu) = l_1\, l_2$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)g(x) = l_1\, l_2$.

Αὐτή μαζί μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα 6 συνεπάγονται καί τήν

$$\left.\begin{array}{l} \xi\in R,\ \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \eta\in R,\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma}(\xi f(x)+\eta g(x))=\xi l_1+\eta l_2.$$

Εἰδικά, γιά $\xi=1$ καί $\eta=-1$, προκύπτει

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma}(f(x)-g(x))=l_1-l_2.$$

**8.** $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l\neq 0 \\ f(x)\neq 0\ \forall\ x\in U(\sigma) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{l}.$$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu=\sigma$, τότε $\lim f(x_\nu)=l$. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτουμε ὅτι $x_\nu\in U(\sigma)$ γιά κάθε $\nu\in N$ Τότε ὅμως ἔχουμε $\lim f(x_\nu)=l$ καί $f(x_\nu)\neq 0\ \ \forall\ \nu\in N$ καί ἔτσι ἀπό τήν ἰδιότητα 6, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III παίρνουμε

$$\lim\frac{1}{f(x_\nu)}=\frac{1}{l}$$

πού σημαίνει ὅτι καί $\lim\limits_{x\to\sigma}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{l}$.

Αὐτή μαζί μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα 7 συνεπάγονται καί τήν

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1\neq 0 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2 \\ f(x)\neq 0\ \forall\ x\in U(\sigma) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\sigma}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{l_2}{l_1}.$$

**9.** $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l_1 \\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l_2 \\ f(x)\leqslant g(x)\ \forall\ x\in U(\sigma) \end{array}\right\} \Rightarrow l_1\leqslant l_2.$$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu=\sigma$ καί $x_\nu\in U(\sigma)\ \forall\ \nu\in N$, θά πρέπει ν' ἀποδείξουμε τήν παρακάτω ἰδιότητα

$$\left.\begin{array}{l} \lim f(x_\nu)=l_1 \\ \lim g(x_\nu)=l_2 \\ f(x_\nu)\leqslant g(x_\nu)\ \forall\ \nu\in N \end{array}\right\} \Rightarrow l_1\leqslant l_2.$$

Αὐτή ὅμως προκύπτει ἀπό τόν ὁρισμό τῆς διατάξεως στό σύνολο $R^*$ πού δόθηκε στήν § 2.1.3 τοῦ κεφ. III.

**10.** $$\left.\begin{array}{l} f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)\ \ \forall\ x\in U(\sigma) \\ \lim\limits_{x\to\sigma} f(x)=l,\ \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)=l \end{array}\right\} \Rightarrow \lim h(x)=l.$$

Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu=\sigma$

θά ἔχουμε $\lim f(x_\nu)=l$ καί $\lim g(x_\nu)=l$. Χωρίς, ὅμως, βλάβη τῆς γενικότητας ὑποθέτουμε ὅτι $x_\nu \in U(\sigma)\ \forall\ \nu\in N$ καί ἄρα

$$f(x_\nu)\leq h(x_\nu)\leq g(x_\nu)\ \forall\ \nu\in N$$

Αὐτό, σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα 8, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III, μᾶς δίνει ὅτι καί $\lim h(x_\nu)=l$ πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to\sigma} h(x)=l$.

**11.** $$\lim_{x\to\sigma} f(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to\sigma} \sqrt[\kappa]{|f(x)|}=\begin{cases}\sqrt[\kappa]{|l|}, & \text{ἄν } l\in R\\ +\infty, & \text{ἄν } l=+\infty \text{ ἤ } -\infty.\end{cases}$$

Πραγματικά· ὑποθέτουμε ὅτι $l\in R$ καί θεωροῦμε μια ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu=\sigma$. Τότε ὅμως $\lim f(x_\nu)=l$ καί ἀπό τήν ἰδιότητα 9, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III ἔχουμε

$$\lim \sqrt[\kappa]{|f(x_\nu)|}=\sqrt[\kappa]{|l|},$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[\kappa]{|f(x)|}=\sqrt[\kappa]{|l|}$.

Ἄν $l=+\infty$, ἤ $-\infty$, τότε, ἀπό τήν παραπάνω ἰδιότητα 4 ἔχουμε καί $\lim\limits_{x\to\sigma}|f(x)|=+\infty$. Ἄρα, γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu=\sigma$, ἔχουμε $\lim|f(x_\nu)|=+\infty$. Ἔτσι γιά κάθε $\varepsilon>0$, θέτουμε $\varepsilon^*=\varepsilon^\kappa$ καί τότε ὑπάρχει δείκτης $\nu_0$ (πού ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon^*$, ἄρα καί ἀπό τό $\varepsilon$) τέτοιος ὥστε

$$|f(x_\nu)|\geq\frac{1}{\varepsilon^*}\quad\forall\ \nu\geq\nu_0$$

Ἀλλά τότε ἔχουμε καί

$$\sqrt[\kappa]{|f(x_\nu)|}>\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon^*}}=\frac{1}{\sqrt[\kappa]{\varepsilon^\kappa}}=\frac{1}{\varepsilon}\quad\forall\ \nu\geq\nu_0$$

δηλαδή $\lim\sqrt[\kappa]{|f(x_\nu)|}=+\infty$, πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x\to\sigma}\sqrt[\kappa]{|f(x)|}=+\infty$.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**23.** Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^5+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 5x}{x^3+7}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\eta\mu x}{x^2+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

**24.** Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+7}{x^4-x^2+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+\alpha)}-x)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+5x+2}-2x)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+7x}{3x^2+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-x^3}{5x^2+1}$ 6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^9-x^8}{x^4+8x^3+7}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^7}{x^6+7}$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-x^2}{x^2+2}$ 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-x^5}{7x^2+2}$

**25.** Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 \eta\mu x}{x^3+1}$  2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3+2x}{-x^3+8}$  3) $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

**26.** Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{2x+4}$  2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x+7}$  3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^7}{x^4+2}$  4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-x^3}{x^2+3x+4}$

**27.** Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ὁριακές τιμές:

1) $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{x^2-2x+4}{x-1}$  2) $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x^2-2x+4}{x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to2+0} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$  4) $\lim\limits_{x\to2-0} \dfrac{|x-2|+x^2-3x+2}{x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x^2+2}{|x|x}$  6) $\lim\limits_{x\to-0} \dfrac{x^2+2}{|x|x}$

**28.** Παρόμοια, νά ὑπολογισθοῦν οἱ ὁριακές τιμές:

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{x^4-4}{x^2-2}$  2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+2x-3}{x-1}$  3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x^2-5x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^\lambda-1}{x^\mu-1}$ (λ,μ φυσικοί ἀριθμοί)  5) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \dfrac{5x^3-3\sqrt{2}x^2-4x}{x^2-2}$

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^3+1}{x^2}$  7) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{3x^2+6x}{x^2+2x+1}$  8) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-1}{|x|}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

# ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

## 1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

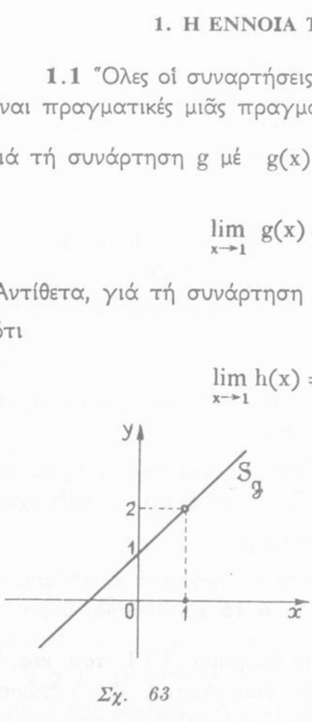
**1.1** Ὅλες οἱ συναρτήσεις μέ τίς ὁποῖες ἀσχολούμαστε στό κεφάλαιο αὐτό εἶναι πραγματικές μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Γιά τή συνάρτηση g μέ $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ἄν } x \neq 1 \\ 0, & \text{ἄν } x = 1 \end{cases}$ παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \neq 0 = g(1).$$

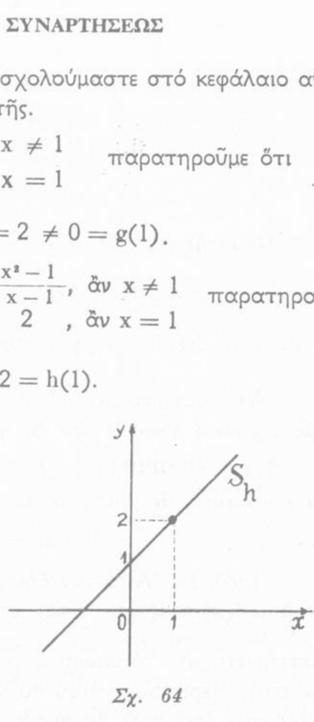
Ἀντίθετα, γιά τή συνάρτηση h μέ $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ἄν } x \neq 1 \\ 2, & \text{ἄν } x = 1 \end{cases}$ παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim_{x \to 1} h(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 = h(1).$$




*Σχ. 63*

g *εἶναι ἀσυνεχής στό* 1




*Σχ. 64*

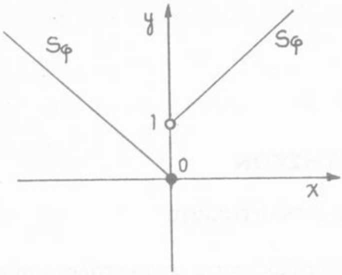
h *εἶναι συνεχής στό* 1

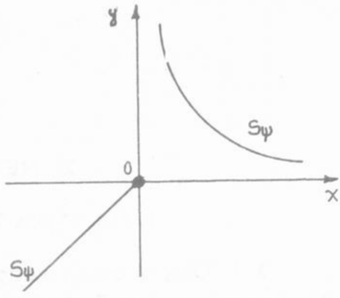
Στή δεύτερη περίπτωση λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση h εἶναι συνεχής στό σημεῖο 1 (σχ. 64), ἐνῶ στήν πρώτη περίπτωση λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση g εἶναι ἀσυνεχής στό σημεῖο 1 (σχ. 63).

Ἐπίσης γιά τίς συναρτήσεις φ καί ψ μέ

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ἄν } x \leq 0 \\ x+1, & \text{ἄν } x > 0 \end{cases} \quad \text{καί} \quad \psi(x) = \begin{cases} x, & \text{ἄν } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ἄν } x > 0 \end{cases}$$

παρατηροῦμε ὅτι εἶναι ἀσυνεχεῖς στό σημεῖο 0, ὅπως φαίνεται καί στίς παρακάτω γεωμετρικές παραστάσεις τους:




Γενικά, γιά μιά συνάρτηση f μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα Δ λέμε ὅτι εἶναι *συνεχής στό σημεῖο* $x_0 \in \Delta$, τότε καί μόνο τότε, ἄν

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Παρατήρηση.** Στόν παραπάνω ὁρισμό γράφοντας $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, ἄν τό $x_0$ εἶναι τό ἀριστερό ἄκρο τοῦ διαστήματος Δ, ἐννοοῦμε τό $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, ἐνῶ ἄν τό $x_0$ εἶναι τό δεξιό ἄκρο, ἐννοοῦμε τό $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$.

Ἄν ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής σέ κάθε σημεῖο τοῦ διαστήματος Δ, τότε λέμε ὅτι *εἶναι συνεχής στό* Δ, ἤ καί, ἁπλά, *συνεχής*.

**1.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἡ συνάρτηση* f *εἶναι συνεχής στό σημεῖο* $x_0 \in \Delta$ *τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά κάθε ἀκολουθία* $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N$ *ἔχουμε*

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim f(x_\nu) = f(x_0).$$

*Ἀπόδειξη.* Ἀπό τόν ὁρισμό, τό ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής στό $x_0 \in \Delta$ σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ἔτσι, στήν περίπτωση πού τό $x_0$ δέν εἶναι ἄκρο τοῦ διαστήματος Δ, τό θεώρημα προκύπτει ἀπό τό θεώρημα 3.3.1 τοῦ κεφ. IV, ἐνῶ στήν περίπτωση πού τό $x_0$ εἶναι ἄκρο τοῦ διαστήματος Δ τό θεώρημα προκύπτει ἀπό τούς ὁρισμούς πού δόθηκαν στήν § 3.1 καί § 3.2 τοῦ κεφ. IV.

**Σημείωση.** Θεωροῦμε μιά συνάρτηση f ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα Δ, ἡ ὁποία εἶναι συνεχής σέ ἕνα σημεῖο $x_0 \in \Delta$. Τότε γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N$ καί γιά ἕνα ἀπέραντο σύνολο $M \subseteq N$ μέ $\lim\limits_{\nu \in M} x_\nu = x_0$ θέτουμε

$$y_\nu = \begin{cases} x_\nu, & \text{ἄν } \nu \in M \\ x_0, & \text{ἄν } \nu \notin M \end{cases}$$

καί παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim_{\nu \in M} x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim y_\nu = x_0 \Rightarrow \lim f(y_\nu) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{\nu \in M} f(x_\nu) = f(x_0)$$

δηλαδή ὅτι

$$\lim_{\nu \in M} x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim_{\nu \in M} f(x_\nu) = f(x_0).$$

**Παραδείγματα:**

**1**. *Κάθε σταθερή συνάρτηση εἶναι συνεχής.*

**2**. *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = x$ *εἶναι συνεχής.* Πραγματικά· γιά κάθε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = x_0$ ἔχουμε

$$\lim f(x_\nu) = \lim x_\nu = x_0 = f(x_0).$$

Ἄρα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0$.

**3**. *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \alpha x^\kappa$ (κ *φυσικός ἀριθμός*) *εἶναι συνεχής.* Πραγματικά· γιά κάθε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = x_0$ ἔχουμε

$$\lim f(x_\nu) = \lim \alpha x_\nu^\kappa = \lim \alpha \underbrace{x_\nu x_\nu \ldots x_\nu}_{\kappa \text{ φορές}} = \alpha \underbrace{x_0 x_0 \ldots x_0}_{\kappa \text{ φορές}} = \alpha x_0^\kappa$$

ὅπου χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά τήν ἰδιότητα 5 τῆς § 1.4.2 τοῦ κεφ. III. Ἔτσι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0$.

**4**. *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = |x|$ *εἶναι συνεχής.* Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu = x_0$, τότε ἀπό τήν ἰδιότητα 1, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III ἔχουμε

$$\lim f(x_\nu) = \lim |x_\nu| = |x_0| = f(x_0).$$

Ἄρα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0$.

**5**. *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \sqrt[\kappa]{x}$, $x \geq 0$ *εἶναι συνεχής.* Πραγματικά· ἄν $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ εἶναι μιά ἀκολουθία μέ $x_\nu \geqq 0$ $\forall$ $\nu \in N$ καί $\lim x_\nu = x_0$, ὅπου $x_0 \geqq 0$, ἀπό τήν ἰδιότητα 9, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III, ἔχουμε

$$\lim f(x_\nu) = \lim \sqrt[\kappa]{x_\nu} = \sqrt[\kappa]{x_0} = f(x_0).$$

Ἄρα $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0$.

**1.2 Ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων**. Στά παρακάτω θεωρήματα ἀναφέρονται μερικές βασικές ἰδιότητες τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

**1.2.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ὑποθέτουμε ὅτι* f *καί* g *εἶναι συναρτήσεις μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα* Δ. *Ἄν οἱ* f *καί* g *εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, τότε καί τό ἄθροισμά τους* f+g *καί τό γινόμενό τους* fg *εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις. Ἄν ἀκόμη* $g(x) \neq 0$ $\forall$ $x \in \Delta$, *τότε καί τό πηλίκο τους* $\frac{f}{g}$ *εἶναι συνεχής συνάρτηση.*

*Ἀπόδειξη.* Ἐπειδή οἱ συναρτήσεις f καί g εἶναι συνεχεῖς σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο $x_0$ τοῦ διαστήματος Δ, θά ἰσχύει

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{καί} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Ἔτσι καί γιά μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu \in \Delta$ $\forall$ $\nu \in N$ καί $\lim x_\nu = x_0$ θά ἰσχύει

$$(1) \qquad \lim f(x_\nu) = f(x_0) \quad \text{καί} \quad \lim g(x_\nu) = g(x_0).$$

Ἄρα

$$\lim [f(x_\nu) + g(x_\nu)] = f(x_0) + g(x_0) \text{ καί } \lim f(x_\nu)\, g(x_\nu) = f(x_0)\, g(x_0)$$

δηλαδή ἀποδείξαμε ὅτι

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow$$
$$\lim (f+g)(x_\nu) = \lim [f(x_\nu) + g(x_\nu)] = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

καί ἀκόμη

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow$$
$$\lim (f\,g)(x_\nu) = \lim f(x_\nu)\, g(x_\nu) = f(x_0)\, g(x_0) = (fg)(x_0).$$

Ἔτσι, μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 1.1.1, προκύπτει ὅτι οἱ συναρτήσεις $f + g$ καί $fg$ εἶναι συνεχεῖς στό $x_0$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0 \in \Delta$.

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ἰσχύει καί $g(x) \neq 0 \ \forall \ x \in \Delta$, τότε ἀπό τήν (1) καί ἀπό τό γεγονός ὅτι $g(x_\nu) \neq 0 \ \forall \ \nu \in N$ προκύπτει ὅτι

$$\lim \frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

δηλαδή

$$\lim x_\nu = x_0 \ \Rightarrow \ \left(\frac{f}{g}\right)(x_\nu) = \frac{f(x_\nu)}{g(x_\nu)} \rightarrow \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Ἄρα, μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 1.1.1, προκύπτει ὅτι καί ἡ συνάρτηση $\frac{f}{g}$ εἶναι συνεχής στό $x_0$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0 \in \Delta$.

**Ἐφαρμογή**. Ὡς μιά ἁπλή ἐφαρμογή αὐτοῦ τοῦ θεωρήματος προκύπτει ὅτι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση εἶναι συνεχής, ἀφοῦ εἶναι ἄθροισμα μονωνυμικῶν συναρτήσεων, πού, ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 3, εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις. Ἀκόμα καί οἱ ρητές συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς, γιατί μιά ρητή συνάρτηση εἶναι πηλίκο πολυωνυμικῶν συναρτήσεων, δηλαδή συνεχῶν συναρτήσεων.

**1.2.2 ΘΕΩΡΗΜΑ**. *Ὑποθέτουμε ὅτι* $f: \Delta \rightarrow A$ *καί* $g: A \rightarrow R$ *εἶναι δυό συναρτήσεις, ὅπου* A *καί* Δ *εἶναι διαστήματα. Τότε, ὅπως ξέρουμε, ἡ σύνθεσή τους* $h = g \circ f$ *ὁρίζεται μέ τόν τύπο* $h(x) = g[f(x)],\ x \in \Delta$ *καί μάλιστα ἰσχύει*

$$\left.\begin{array}{l} f \ \textit{συνεχής} \\ g \ \textit{συνεχής} \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \ \textit{συνεχής}.$$

*Ἀπόδειξη*. Ἔστω σημεῖο $x_0 \in \Delta$ καί $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $x_\nu \in \Delta \ \forall \ \nu \in N$ καί $\lim x_\nu = x_0$. Τότε, ἐπειδή ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής, ἔχουμε $\lim f(x_\nu) = f(x_0)$ καί ἀφοῦ καί ἡ g εἶναι συνεχής θά ἔχουμε

$$\lim g[f(x_\nu)] = g[f(x_0)].$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι ἄν f καί g εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις, τότε

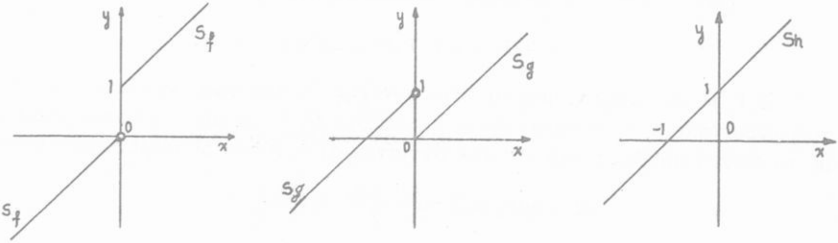
$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim h(x_\nu) = h(x_0),$$

δηλαδή ὅτι ἡ σύνθεση $h = g \circ f$ τῶν f καί g εἶναι συνεχής στό σημεῖο $x_0$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0 \in \Delta$.

**Σημείωση**. Ἡ σύνθεση $h = g \circ f$ μπορεῖ νά εἶναι συνεχής, χωρίς οἱ συναρτήσεις f καί g νά εἶναι συνεχεῖς. Ἔτσι γιά

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ἄν } x<0 \\ x+1, & \text{ἄν } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{καὶ } g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ἄν } x<0 \\ x, & \text{ἄν } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ἔχουμε $h(x) = g[f(x)] = x + 1$, δηλαδή ἡ σύνθεση $h = g \circ f$ τῶν ἀσυνεχῶν συναρτήσεων f καί g εἶναι συνεχής συνάρτηση.




**Παραδείγματα:**

1. *Ἡ συνάρτηση* h *μέ* $h(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$ *(α θετικός ἀριθμός) εἶναι συνεχής*. Αὐτό προκύπτει εὔκολα ἀπό τό παραπάνω θεώρημα 1.2.2, γιατί ἡ συνάρτηση h μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σύνθεση δυό συναρτήσεων f καί g μέ $f(x) = \alpha^2 - x^2$, $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ καί $g(x) = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x < +\infty$, πού εἶναι συνεχεῖς.

2. *Ἡ συνάρτηση* h *μέ* $h(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{x^2+1}}$ *εἶναι συνεχής*. Πραγματικά· ἡ συνάρτηση h μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σύνθεση δυό συναρτήσεων f καί g μέ $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$ καί $g(x) = \sqrt[3]{x}$ πού εἶναι συνεχεῖς.

3. *Ἡ συνάρτηση* h *μέ* $h(x) = x^{\rho}$, $x > 0$, *ὅπου* ρ *ρητός, εἶναι συνεχής*. Πραγματικά· ἄν $\rho = \dfrac{\lambda}{\kappa}$ ὅπου $\lambda \in Z$ καί $\kappa \in N$, τότε ἡ συνάρτηση h μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σύνθεση τῶν συναρτήσεων f καί g μέ $f(x) = x^{\lambda}$, $x > 0$ καί $g(x) = \sqrt[\kappa]{x}$, $x > 0$ πού εἶναι συνεχεῖς.

**1.2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἄν* f *εἶναι μιά συνάρτηση ὁρισμένη καί συνεχής σ' ἕνα διάστημα* Δ *καί γιά ἕνα σημεῖο* $x_0 \in \Delta$ *ἰσχύει* $f(x_0) \neq 0$, *τότε ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα* (a,b) *τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει*

$$f(x) \neq 0 \quad \forall \ x \in \Delta \cap (a,b)$$

*καί μάλιστα:*

i) *ἄν* $f(x_0) > 0$, *τότε καὶ* $f(x) > 0 \quad \forall \ x \in \Delta \cap (a, b)$

ii) *ἄν* $f(x_0) < 0$, *τότε καί* $f(x) < 0 \quad \forall \ x \in \Delta \cap (a,b)$.

*Ἀπόδειξη*. i) Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι δέν ἰσχύει ἡ i), τότε σέ κάθε σύνολο τῆς μορφῆς $\Delta \cap \left( x_0 - \dfrac{1}{\nu}, x_0 + \dfrac{1}{\nu} \right)$ μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα $x_\nu$ μέ $f(x_\nu) \leqslant 0$. Γιά τήν ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ ἔχουμε ὅτι

$$x_\nu \in \left(x_0 - \frac{1}{\nu},\ x_0 + \frac{1}{\nu}\right) \text{ δηλαδή } |x_\nu - x_0| < \frac{1}{\nu}$$

γιά κάθε $\nu \in N$. Ἄρα $\lim x_\nu = x_0$ καί, ἀπό τή συνέχεια τῆς f καί τή σχέση $f(x_\nu) \leq 0$ $\forall\ \nu \in N$, παίρνουμε

$$f(x_0) = \lim f(x_\nu) \leqslant 0$$

πού εἶναι ἄτοπο.

ii) Αὐτή προκύπτει ἐντελῶς ἀνάλογα μέ τήν i).

## 2. ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**2.1 Ἡ συνάρτηση ἡμίτονο εἶναι συνεχής.** Ὅπως εἶναι γνωστό ἀπό τήν τριγωνομετρία, γιά τίς συναρτήσεις ημ καί συν (ἤ ὅπως ἀλλιῶς παριστάνονται μέ τά διεθνή σύμβολα, sin καί cos ἀντίστοιχα) ἰσχύουν οἱ παρακάτω τύποι:

$$\eta\mu x - \eta\mu x_0 = 2\,\eta\mu\,\frac{x - x_0}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{x + x_0}{2}$$

καί

$$|\eta\mu t| \leqslant |t| \quad \text{καὶ} \quad |\sigma\upsilon\nu t| \leqslant 1 \quad \forall\ t \in \mathbf{R}.$$

Ἑπομένως θά ἔχουμε

$$(2) \qquad |\eta\mu x - \eta\mu x_0| = 2\left|\eta\mu\,\frac{x - x_0}{2}\right| \left|\sigma\upsilon\nu\,\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\,\frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0|.$$

Ἄν τώρα $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ $\lim x_\nu = x_0$, ὅπου $x_0 \in R$, τότε ἡ (2) δίνει

$$|\eta\mu x_\nu - \eta\mu x_0| \leq |x_\nu - x_0| \to 0$$

δηλαδή $\lim(\eta\mu x_\nu - \eta\mu x_0) = 0$, ἤ $\lim \eta\mu x_\nu = \eta\mu x_0$.
Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι $\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim \eta\mu x_\nu = \eta\mu x_0$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0$ καί ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, δηλαδή ἡ συνάρτηση ημ εἶναι συνεχής.

Ἄς μελετήσουμε τώρα τή συνάρτηση ἡμίτονο. Ἀπό τήν τριγωνομετρία εἶναι γνωστό ὅτι εἶναι *περιοδική μέ περίοδο* $2\pi$, δηλαδή ἰσχύει

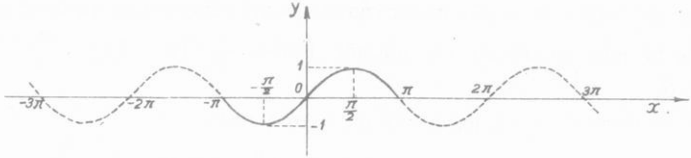
$$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x \quad \forall\ x \in R.$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά τή μελετήσουμε σ' ἕνα διάστημα μέ μῆκος $2\pi$, π.χ. στό διάστημα $[-\pi,\pi]$. Ἡ μεταβολή τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως ημ στό διάστημα $[-\pi,\pi]$ περιγράφεται στόν παρακάτω πίνακα.

| x | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ημx | 0 | ↘ | −1 | ↗ | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 |

Ἀπό τόν πίνακα αὐτό φαίνεται ὅτι στό σημεῖο $-\frac{\pi}{2}$ ἡ συνάρτηση ημ παρουσιάζει ἐλάχιστο ἴσο μέ $-1$, ἐνῶ στό σημεῖο $\frac{\pi}{2}$ παρουσιάζει μέγιστο ἴσο μέ 1.

Γενικά ἡ συνάρτηση αὐτή παρουσιάζει στά σημεῖα $2κπ - \frac{π}{2}$, $κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ἐλάχιστο ἴσο μέ $-1$ καί στά σημεῖα $2κπ + \frac{π}{2}$, $κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ μέγιστο ἴσο μέ 1.




*Σχ. 65* **y = ημx.**

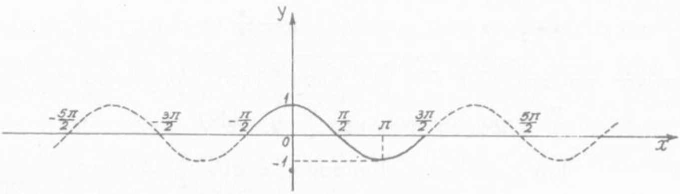
**2.2 Ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι συνεχής.** Ὅπως ξέρουμε ἀπό τήν τριγωνομετρία ἰσχύει

$$(3) \qquad συν\, x = ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) \quad \forall\ x \in R$$

καί ἑπομένως ἡ συνάρτηση συνημίτονο μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σύνθεση τῶν συνεχῶν συναρτήσεων f μέ $f(x) = \frac{π}{2} - x$ καί ημ, καί ἔτσι ἀπό τό θεώρημα 1.2.2 προκύπτει ὅτι ἡ συνάρτηση συν εἶναι συνεχής.

Ἡ συνάρτηση συνημίτονο εἶναι περιοδική μέ περίοδο 2π, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τόν τύπο (3), ἀπ' ὅπου προκύπτει καί ὁ παρακάτω πίνακας μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως αὐτῆς στό διάστημα $\left[-\frac{π}{2}, \frac{3π}{2}\right]$.

| x | $-\frac{π}{2}$ | | 0 | | $\frac{π}{2}$ | | π | | $\frac{3π}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| συνx | 0 | ↗ | 1 | ↘ | 0 | ↘ | −1 | ↗ | 0 |




*Σχ. 66* **y = συνx.**

Ἡ συνάρτηση συνημίτονο παρουσιάζει στό σημεῖο 0 μέγιστο ἴσο μέ 1, ἐνῶ στό σημεῖο π παρουσιάζει ἐλάχιστο ἴσο μέ $-1$. Γενικά, στά σημεῖα $2κπ$, $κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ παρουσιάζει μέγιστο ἴσο μέ 1 καί στά σημεῖα $(2κ + 1)π$, $κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ παρουσιάζει ἐλάχιστο ἴσο μέ $-1$.

**2.3 Ἡ συνάρτηση ἐφαπτομένη εἶναι συνεχής.** Ἡ συνάρτηση εφ (ἤ καί tg ἤ tan) ὅπως ξέρουμε, ὁρίζεται, ἀπό τόν τύπο $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ καί ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τίς ρίζες τῆς συναρτήσεως συνημίτονο, δηλαδή τούς ἀριθμούς $κπ + \frac{π}{2}$, $κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ἡ συνάρτηση εφ ὡς πηλίκο συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.2.1, συνεχής σέ κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $\left(κπ + \frac{π}{2}, (κ+1)π + \frac{π}{2}\right)$, $κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Γιά τή συνάρτηση αὐτή ἰσχύει, ὅπως εἶναι γνωστό:

$$εφ(x + π) = εφx \quad \forall\ x \neq κπ + \frac{π}{2},\ κ = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

καί ἑπομένως ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$.

*Ἡ συνάρτηση εφ εἶναι γνησίως αὔξουσα στό* $\left(-\frac{π}{2}, \frac{π}{2}\right)$. Πραγματικά· ἀπό τίς σχέσεις ὅτι ημ $\uparrow \left[0, \frac{π}{2}\right)$ καί συν $\downarrow \left[0, \frac{π}{2}\right)$ ἔχουμε

$$0 \leqslant x_1 < x_2 < \frac{π}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant ημx_1 < ημx_2 \\ 0 < συνx_2 < συνx_1 \end{array}\right\} \Rightarrow εφx_1 < εφx_2,$$

δηλαδή ὅτι εφ $\uparrow \left[0, \frac{π}{2}\right)$. Ἀλλά ἡ εφ εἶναι περιττή συνάρτηση, δηλαδή ἰσχύει $εφx = -εφ(-x)$ καί ἄρα ἔχουμε

$$-\frac{π}{2} < x_1 < x_2 \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant -x_2 < -x_1 < \frac{π}{2} \Rightarrow εφ(-x_2) < εφ(-x_1)$$

$$\Rightarrow εφx_1 < εφx_2 \text{ δηλαδή εφ } \uparrow \left(-\frac{π}{2}, 0\right].$$

Ἐπίσης γιά τή συνάρτηση εφ ἰσχύουν

$$\boxed{\lim_{x \to \frac{π}{2} - 0} εφx = +\infty \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to -\frac{π}{2} + 0} εφx = -\infty}$$

Πραγματικά· παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_ν$, $ν = 1, 2, \ldots$, μέ $-\frac{π}{2} < x_ν < \frac{π}{2}$ (ἄρα καί $συν\, x_ν > 0 \ \forall\ ν \in N$)

$$\lim x_ν = \frac{π}{2} \Rightarrow \lim συν\, x_ν = συν \frac{π}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$(\forall\ ε > 0,\ \exists\ ν_0 = ν_0(ε):\ 0 < συν\, x_ν < ε \quad \forall\ ν \geq ν_0) \Rightarrow$$

$$(\forall\ ε > 0,\ \exists\ ν_0 = ν_0(ε):\ \frac{1}{συνx_ν} > \frac{1}{ε} \quad \forall\ ν \geq ν_0) \Rightarrow \lim \frac{1}{συνx_ν} = +\infty$$

Ὥστε ἰσχύει

$$\lim x_ν = \frac{π}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim ημx_ν = ημ\frac{π}{2} = 1 \\ \lim \frac{1}{συνx_ν} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

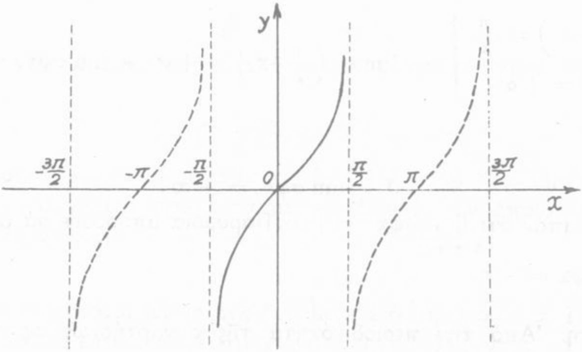
$\Rightarrow \lim \varepsilon\varphi\, x_\nu = \lim \eta\mu x_\nu \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x_\nu} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$, δηλαδή $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \varepsilon\varphi x = +\infty$.

Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \varepsilon\varphi x = +\infty$. Παρόμοια μποροῦμε νά ἀποδείξουμε καί ὅτι $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2} + 0} \varepsilon\varphi x = -\infty$.

**Σημείωση**. Ἀπό τήν περιοδικότητα τῆς συναρτήσεως εφ προκύπτει, τώρα, εὔκολα ὅτι ἰσχύουν

$$\lim_{x \to \kappa\pi + \frac{\pi}{2} - 0} \varepsilon\varphi x = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x \to \kappa\pi - \frac{\pi}{2} + 0} \varepsilon\varphi x = -\infty$$

γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό κ.




*Σχ. 67* y = εφx.

**2.4 Ἡ συνάρτηση συνεφαπτομένη εἶναι συνεχής.** Ἡ συνάρτηση σφ (ἤ καί ἀλλιῶς ctg ἤ ctan) ὅπως ξέρουμε, ὁρίζεται, ἀπό τόν τύπο $\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ καί ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἐκτός ἀπό τίς ρίζες τῆς συναρτήσεως ημ, δηλαδή τούς ἀριθμούς κπ, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Ἡ συνάρτηση σφ ὡς πηλίκο συνεχῶν συναρτήσεων εἶναι, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.2.1, συνεχής σέ κάθε διάστημα τῆς μορφῆς $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$, $\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Γιά τή συνάρτηση αὐτή ὅπως ξέρουμε, ἰσχύει,

$$\sigma\varphi(x + \pi) = \sigma\varphi x \quad \forall\ x \neq \kappa\pi,\ \kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

καί ἔτσι ἀρκεῖ νά τή μελετήσουμε στό διάστημα $(0,\pi)$. Εἶναι ἀκόμη γνωστό ἀπό τήν τριγωνομετρία ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος

$$\sigma\varphi x = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

ὁ ὁποῖος μᾶς βοηθᾶ στό νά μελετήσουμε τή σφ χρησιμοποιώντας τά συμπεράσματα πού ἔχουμε γιά τήν εφ. Ἔτσι π.χ. ἡ σφ, ὡς σύνθεση τῆς γνησίως φθίνουσας συναρτήσεως f μέ $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in (0,\pi)$ καί τῆς γνησίως αὔξουσας στό $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ συναρτήσεως εφ, εἶναι, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.2.1 τοῦ κεφ. II, γνησίως φθίνουσα στό $(0,\pi)$. Ἀκόμη παρατηροῦμε ὅτι

$$\boxed{\lim_{x \to +0} \sigma\varphi x = +\infty \quad \text{καὶ} \quad \lim_{x \to \pi - 0} \sigma\varphi x = -\infty}$$

Πραγματικά· παρατηροῦμε ὅτι γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $0 < x_\nu < \pi \ \forall\ \nu \in N$ $\left(\text{ἄρα καί } -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - x_\nu < \frac{\pi}{2} \ \forall\ \nu \in N\right)$ ἔχουμε

$$x_\nu \to 0 \Rightarrow \lim\left(\frac{\pi}{2} - x_\nu\right) = \frac{\pi}{2}$$

καί ἀκόμη

$$\left.\begin{array}{l} \lim\left(\frac{\pi}{2} - x_\nu\right) = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \varepsilon\varphi x = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x_\nu\right) = +\infty \Rightarrow \lim \sigma\varphi x_\nu = +\infty.$$

Ὥστε ἰσχύει

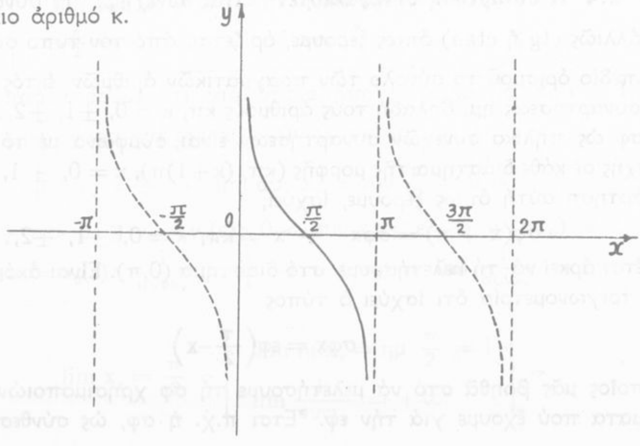
$$x_\nu \to 0 \Rightarrow \lim \sigma\varphi x_\nu = +\infty.$$

Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι $\lim\limits_{x \to +0} \sigma\varphi x = +\infty$. Παρόμοια μποροῦμε νά ἀποδείξουμε καί ὅτι $\lim\limits_{x \to \pi - 0} \sigma\varphi x = -\infty$.

**Σημείωση**. Ἀπό τήν περιοδικότητα τῆς συναρτήσεως σφ προκύπτει, τώρα, εὔκολα ὅτι ἰσχύουν

$$\lim_{x \to \kappa\pi + 0} \sigma\varphi x = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x \to \kappa\pi - 0} \sigma\varphi x = -\infty$$

γιά κάθε ἀκέραιο ἀριθμό κ.




*Σχ. 68* y = σφx

**3.1 Ἡ ἐκθετική συνάρτηση.** Ὅπως ξέρουμε, κάθε πραγματικός ἀριθμός x ἔχει μιά δεκαδική παράσταση $x = \psi_0, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu\ldots$, ὅπου $\psi_0$ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός καί $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu, \ldots$ εἶναι ψηφία, δηλαδή ἀκέραιοι ἀριθμοί μέ $0 \leqq \psi_\nu \leqq 9$ $\forall$ $\nu \in N$. Ἡ ἀκολουθία $r_\nu = \psi_0, \psi_1\psi_2\ldots\psi_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά αὔξουσα ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν, πού συγκλίνει πρός τόν πραγματικό ἀριθμό x. Ὅπως, πάλι, ξέρουμε

$$(4) \qquad \psi_0 \leqq r_\nu \leqq \psi_0 + 1 \quad \forall \ \nu \in N.$$

Ἄν θεωρήσουμε, τώρα, καί ἕνα θετικό ἀριθμό $a > 1$, τότε, ἐπειδή ἡ ἔννοια τῆς δυνάμεώς του μέ ἐκθέτη ἕνα ρητό ἀριθμό εἶναι γνωστή, ορίζεται ἡ ἀκολουθία

$$a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots, a^{r_\nu}, \ldots,$$

πού, μάλιστα, εἶναι αὔξουσα καί ἐπιπλέον φραγμένη, γιατί ἀπό τήν (4) ἰσχύει

$$a^{\psi_0} \leqq a^{r_\nu} \leqq a^{\psi_0+1} \quad \forall \ \nu \in N.$$

Ἔτσι, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα τῆς § 1.4.3 τοῦ Κεφ. III, ἡ ἀκολουθία $a^{r_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ συγκλίνει πρός πραγματικό ἀριθμό, τόν ὁποῖο παριστάνουμε μέ $a^x$· δηλαδή ὁρίζουμε

$$a^x = \lim a^{r_\nu}.$$

Τήν παραπάνω ἔννοια τῆς δυνάμεως ἑνός ἀριθμοῦ $a > 1$ μέ ἐκθέτη πραγματικό ἀριθμό· ἐπεκτείνουμε καί γιά $0 < a \leqq 1$ ὁρίζοντας, τά ἑξῆς :

$$\text{Γιά } a = 1: \qquad 1^x = 1$$

$$\text{Γιά } 0 < a < 1: \qquad a^x = 1/\left(\frac{1}{a}\right)^x.$$

*Ἐκθετική (exponential) συνάρτηση μέ βάση τό θετικό ἀριθμό* a ὀνομάζουμε, τώρα, τή συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y = a^x$. Αὐτή τή συμβολίζουμε μέ $\exp_a$, δηλαδή $\exp_a(x) = a^x$. Τήν τιμή $\exp_a(x)$ γράφουμε ἁπλούστερα καί $\exp_a x$. Εἰδικά τήν ἐκθετική συνάρτηση μέ βάση τόν ἀριθμό e (§ 1.4.3, κεφ. III), δηλαδή τή συνάρτηση $\exp_e$, τή συμβολίζουμε ἁπλούστερα μέ exp καί τήν ὀνομάζουμε ἁπλά *ἐκθετική συνάρτηση*.

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως $\exp_a$ προκύπτει εὔκολα ὅτι αὐτή ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί παίρνει τιμές στό σύνολο $R^+$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν· δηλαδή ἰσχύει

$$a^x > 0 \quad \forall \ x \in R.$$

Ἡ ἐκθετική συνάρτηση $\exp_a$ ἔχει τίς παρακάτω ἰδιότητες:

1. *Ἡ συνάρτηση* $\exp_a$ *εἶναι μονότονη καί μάλιστα γιά* $a > 1$ ***γνησίως αὔξουσα**, ἐνῶ γιά* $0 < a < 1$ ***γνησίως φθίνουσα.***

*'Απόδειξη*. Γιά $a = 1$ ή συνάρτηση $\exp_a$ συμπίπτει μέ τή σταθερή συνάρτηση 1, ή όποία, βέβαια, είναι μονότονη. Γιά $a \neq 1$ θεωροῦμε δυό όποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς x, y μέ $x < y$. Ἔτσι ἀπό τόν ὁρισμό τῆς $\exp_a$ ἔχουμε

$$a^x = \lim a^{u_\nu} \quad \text{καί} \quad a^y = \lim a^{\upsilon_\nu}$$

ὅπου $u_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\upsilon_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ἀκολουθίες ρητῶν ἀριθμῶν μέ

$$\lim u_\nu = x \quad \text{καί} \quad \lim \upsilon_\nu = y.$$

'Εκλέγουμε τώρα δυό ρητούς ἀριθμούς z, w μέ

$$x < z < w < y$$

καί τότε εὔκολα προκύπτει ὅτι ὑπάρχει δείκτης n τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$u_\nu < z < w < \upsilon_\nu \quad \forall\ \nu = n,\ n+1, \ldots$$

Ἄρα, ἐπειδή τά $u_\nu$, z, w, $\upsilon_\nu$ εἶναι ρητοί ἀριθμοί, ὅπως ξέρουμε, θά ἰσχύει

$$a^{u_\nu} < a^z < a^w < a^{\upsilon_\nu}, \text{ ἄν } a > 1$$

καί

$$a^{u_\nu} > a^z > a^w > a^{\upsilon_\nu}, \text{ ἄν } 0 < a < 1$$

γιά κάθε $\nu = n,\ n+1, \ldots$ Ὥστε γιά $a > 1$ ἔχουμε

$$a^x = \lim a^{u_\nu} \leqq a^z < a^w \leqq \lim a^{\upsilon_\nu} = a^y$$

καί γιά $0 < a < 1$

$$a^x = \lim a^{u_\nu} \geq a^z > a^w \geq \lim a^{\upsilon_\nu} = a^y.$$

**2.** *Ἄν $z_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε μηδενική ἀκολουθία, τότε*

$$\lim a^{z_\nu} = 1.$$

*'Απόδειξη*. 'Από τόν ὁρισμό γιά $0 < a < 1$ ἔχουμε

$$a^{z_\nu} = 1 \Big/ \left(\frac{1}{a}\right)^{z_\nu}, \quad \text{ὅπου } \frac{1}{\alpha} > 1$$

πού σημαίνει ὅτι ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ή παραπάνω ἰδιότητα στήν περίπτωση ὅπου $a \geq 1$. Ὑποθέτουμε λοιπόν ὅτι $a \geq 1$ καί θεωροῦμε ἕναν θετικό ἀριθμό $\varepsilon > 0$. Τότε, ἐπειδή $\lim \sqrt[\nu]{a} = 1$ (ἐφαρμογή 2 τῆς § 1.4, κεφ. III), ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός κ τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$a^{\frac{1}{\kappa}} - 1 = \sqrt[\kappa]{a} - 1 < \varepsilon \text{ καὶ } a^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[\kappa]{a}} - 1 > -\varepsilon.$$

'Ακόμη, ἐπειδή $\lim z_\nu = 0$, ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός n τέτοιος, ὥστε γιά κάθε δείκτη ν μέ $\nu > n$ νά ἰσχύει

$$-\frac{1}{\kappa} < z_\nu < \frac{1}{\kappa}$$

καί ἑπομένως, ἐπειδή ή συνάρτηση $\exp_a$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, ἔχουμε καί

$$a^{-\frac{1}{\kappa}} < a' < a^{\frac{1}{\kappa}}.$$

Ἄρα γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu$ μέ $\nu > n$ ἰσχύει

$$-\varepsilon < a^{-\frac{1}{\kappa}} - 1 < a^{z_\nu} - 1 < a^{\frac{1}{\kappa}} - 1 < \varepsilon$$

δηλαδή

$$|a^{z_\nu} - 1| < \varepsilon$$

τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι $\lim a^{z_\nu} = 1$.

3. *Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό* x *καί ὁποιαδήποτε ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν* $u_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ *μέ* $\lim u_\nu = x$ *ἰσχύει*

$$a^x = \lim a^{u_\nu}.$$

*Ἀπόδειξη*. Στήν περίπτωση ὅπου $a = 1$, ἡ ἰδιότητα αὐτή εἶναι φανερή. Γιά $a > 1$ θεωροῦμε καί τήν ἀκολουθία $r_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δυνάμεως $a^x$. Βέβαια τά $u_\nu$, $r_\nu$ εἶναι ρητοί ἀριθμοί καί ἰσχύει

$$a^{u_\nu} = a^{u_\nu - r_\nu} \cdot a^{r_\nu}$$

ὅπου $\lim (u_\nu - r_\nu) = \lim u_\nu - \lim r_\nu = x - x = 0$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα 2, ἰσχύει

$$\lim a^{u_\nu - r_\nu} = 1$$

ἀπό ὅπου παίρνουμε

$$\lim a^{u_\nu} = (\lim a^{u_\nu - r_\nu})\ (\lim a^{r_\nu}) = 1\ a^x = a^x.$$

Τέλος γιά $0 < a < 1$, ἔχομεν $\frac{1}{a} > 1$ καὶ ἑπομένως

$$\lim a^{u_\nu} = \frac{1}{\lim\left(\frac{1}{a}\right)^{u_\nu}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x}} = a^x.$$

4. *Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς* x *καί* y *ἰσχύει*

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

*Ἀπόδειξη*. Θεωροῦμε δυό ἀκολουθίες ρητῶν ἀριθμῶν $u_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\upsilon_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ

$$\lim u_\nu = x \quad \text{καί} \quad \lim \upsilon_\nu = y.$$

Ἀλλά τότε ἔχουμε

$$a^{u_\nu}\ a^{\upsilon_\nu} = a^{u_\nu + \upsilon_\nu} \quad \forall\ \nu \in N$$

καί ἔτσι, ἀπό τήν προηγούμενη ἰδιότητα 3, παίρνουμε

$$a^x\ a^y = (\lim a^{u_\nu})\ (\lim a^{\upsilon_\nu}) = \lim (a^{u_\nu}\ a^{\upsilon_\nu}) = \lim a^{u_\nu + \upsilon_\nu} = a^{x+y},$$

ἐπειδή $\lim (u_\nu + \upsilon_\nu) = \lim u_\nu + \lim \upsilon_\nu = x + y$.

5. *Ἡ συνάρτηση* $\exp_a$ *εἶναι συνεχής*.

*Ἀπόδειξη*. Θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό $x_0$ καί ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = x_0$. Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα 4, ἔχουμε

$$a^{x_\nu} = a^{(x_\nu - x_0)+x_0} = a^{x_\nu - x_0}\, a^{x_0} \quad \forall\ \nu\in N$$

καί ἔτσι, ἐπειδή $\lim (x_\nu - x_0) = 0$, ἀπό τήν ἰδιότητα 2 παίρνουμε

$$\lim a^{x_\nu} = (\lim a^{x_\nu - x_0})\, a^{x_0} = 1\cdot a^{x_0} = a^{x_0}$$

πού σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτηση $\exp_a$ εἶναι συνεχής στό $x_0$ καί τοῦτο ἰσχύει γιά κάθε σημεῖο $x_0$.

**6**. *Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς* x *καί* y *ἰσχύει.*

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

*Ἀπόδειξη*. Θεωροῦμε δυό ἀκολουθίες ρητῶν ἀριθμῶν $u_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ καί $\upsilon_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ

$$\lim u_\nu = x \quad \text{καί} \quad \lim \upsilon_\nu = y.$$

Ἄν r εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ρητός ἀριθμός, τότε θά ἔχουμε

$$(a^{u_\nu})^r = a^{u_\nu r} \quad \forall\ \nu\in N$$

καί ἔτσι, ἀπό τή συνέχεια τῶν συναρτήσεων $\exp_a$ καί $f(x) = x^r$, παίρνουμε

$$(a^x)^r = (\lim a^{u_\nu})^r = \lim (a^{u_\nu})^r = \lim a^{u_\nu r} = a^{\lim(u_\nu r)} = a^{xr}$$

δηλαδή

$$(a^x)^r = a^{xr}.$$

Ἄρα ἰσχύει καί

$$(a^x)^{\upsilon_\nu} = a^{x\upsilon_\nu} \quad \forall\ \nu\in N$$

καί ἑπομένως, χρησιμοποιώντας πάλι τή συνέχεια τῆς $\exp_a$, τελικά, παίρνουμε

$$(a^x)^y = \lim (a^x)^{\upsilon_\nu} = \lim a^{x\upsilon_\nu} = a^{\lim (x\upsilon_\nu)} = a^{xy}.$$

**7**. *Ἄν* $a > 1$, *τότε ἰσχύει.*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

*Ἀπόδειξη*. Θεωροῦμε ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = +\infty$ καί ἕνα θετικό ἀριθμό ε. Ἐπειδή ἡ ἀκολουθία $a^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ δέν εἶναι φραγμένη, ὑπάρχει δείκτης κ μέ

$$a^\kappa > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Ἐπίσης, ἀπό τό ὅτι $\lim x_\nu = +\infty$, προκύπτει ὅτι ὑπάρχει δείκτης n τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$x_\nu \geq \kappa \quad \forall\ \nu = n, n+1, \ldots$$

Ἔτσι, ἐπειδή ἡ συνάρτηση $\exp_a$ εἶναι γνησίως αὔξουσα, θά ἔχουμε καί

$$a^{x_\nu} \geq a^\kappa > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu = n, n+1, \ldots$$

'Επειδή τό ε εἶναι ὁποιοσδήποτε θετικός ἀριθμός, θά ἰσχύει

$$\lim a^{x_\nu} = +\infty$$

καί ἄρα, ἐπειδή καί ἡ $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu = +\infty$, θά ἰσχύει καί

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

Γιά ν' ἀποδείξουμε τήν $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = -\infty$. Τότε ἔχουμε

$$\lim x_\nu = -\infty \Rightarrow \lim(-x_\nu) = +\infty \Rightarrow \lim a^{-x_\nu} = +\infty$$

καί ἔτσι

$$\lim a^{x_\nu} = \lim \frac{1}{a^{-x_\nu}} = \frac{1}{\lim a^{-x_\nu}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Ὥστε γιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = -\infty$ ἰσχύει $\lim a^{x_\nu} = 0$, πού σημαίνει ὅτι

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

8. *Ἄν* $0 < a < 1$, *τότε ἰσχύει*

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \textit{καί} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty.$$

*Ἀπόδειξη*. Ἔχουμε $\frac{1}{a} > 1$ καί, ἐπειδή ἀπό τόν ὁρισμό

$$a^x = 1 \Big/ \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

μέ τή βοήθεια τῆς παραπάνω ἰδιότητας 7 ἔχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Γιά ν' ἀποδείξουμε τήν $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$, θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = -\infty$ καί ἕνα θετικό ἀριθμό ε. Ἐπειδή ἡ ἀκολουθία $a^\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι μηδενική (ἐφαρμογή 3 τῆς §1.3, κεφ. III), ὑπάρχει δείκτης κ μέ

$$a^\kappa < \varepsilon.$$

Ἀκόμη, ἐπειδή $\lim x_\nu = -\infty$, ὑπάρχει δείκτης n τέτοιος, ὥστε νά ἰσχύει

$$x_\nu \leq -\kappa \quad \forall\ \nu = n, n+1, \ldots$$

καί ἄρα, ἀφοῦ ἡ συνάρτηση $\exp_a$ εἶναι (γνησίως) φθίνουσα,

$$a^{x_\nu} \geq a^{-\kappa} = \frac{1}{a^\kappa} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\ \nu = n, n+1, \ldots$$

Ἐπειδή τό ε εἶναι ὁποιοδήποτε, θά ἰσχύει

$$\lim a^{x_\nu} = +\infty$$

καί ἔτσι, ἐπειδή καί ἡ $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $\lim x_\nu=-\infty$, θά ἔχουμε

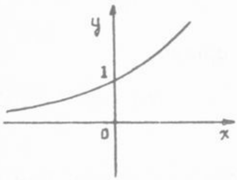
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty .$$

Ἡ μελέτη τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως $\exp_a$ περιγράφεται, βασικά, στόν παρακάτω πίνακα καί ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία της στά σχήματα 69, 70.

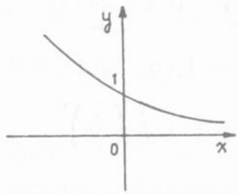
| | |
|---|---|
| $a>1$ | $\exp_a$ ↗ , $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ *καί* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ |
| $a=1$ | $\exp_a$ *σταθερή ἴση μέ* 1 |
| $0<a<1$ | $\exp_a$ ↘ , $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ *καί* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ |

Εἰδικά, ἐπειδή $e>1$, ἡ ἐκθετική συνάρτηση exp εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτηση μέ

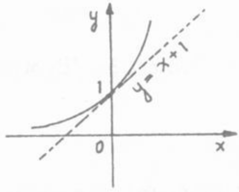
$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \text{ καί } \lim_{x\to-\infty} e^x=0 \qquad (\text{σχ. } 71).$$




*Σχ. 69* $y=a^x$, $a>1$




*Σχ. 70* $y=a^x$, $0<a<1$




*Σχ. 71* $y=e^x$

Ἀπό τά παραπάνω σχήματα καί τό συνοπτικό πίνακα τῆς συμπεριφορᾶς τῆς συνεχοῦς συναρτήσεως $\exp_a$ παραστατικά προκύπτει ὅτι τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως αὐτῆς εἶναι ὁλόκληρο τό σύνολο $R^+$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, δηλαδή

$$\mathcal{R}(\exp_a) = R^+.$$

**3.2 Ἡ λογαριθμική συνάρτηση**. Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἡ ἐκθετική συνάρτηση $\exp_a$ γιά $a \neq 1$ εἶναι γνησίως μονότονη. Ἑπομένως (θεώρημα 1.3.1 τοῦ κεφ. ΙΙ) ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφή της, πού ὀνομάζεται *λογάριθμος ὡς πρός βάση τόν ἀριθμό* a καί συμβολίζεται μέ $\log_a$. Ἡ συνάρτηση $\log_a$ ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό πεδίο τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\exp_a$, δηλαδή τό σύνολο $R^+$ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, καί πεδίο τιμῶν τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\exp_a$, δηλαδή τό σύνολο R τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Συγκεκριμένα ἰσχύει

$$\mathcal{D}(\log_a) = R^+ \quad \text{καί} \quad \mathcal{R}(\log_a) = R.$$

Τήν τιμή $\log_a(x)$ τή γράφουμε πιό άπλά καί μέ $\log_a x$. Άπό τόν όρισμό τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως προκύπτει ἀμέσως ὅτι

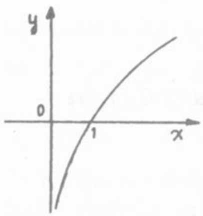
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

Ἐπειδή $a^0 = 1$ καί $a^1 = a$, ἔχουμε τίς ἑξῆς ἀξιοσημείωτες τιμές τῆς συναρτήσεως $\log_a$:

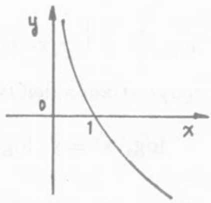
$$\text{(5)} \qquad \log_a 1 = 0 \quad \text{καί} \quad \log_a a = 1 \quad (a \neq 1).$$

Εἰδικά ἡ συνάρτηση $\log_e$ ὀνομάζεται *φυσικός λογάριθμος* καί συμβολίζεται πιό ἁπλά μέ log ἤ καί ln.

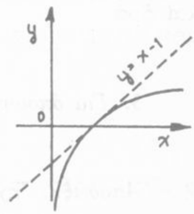
Ἡ συνάρτηση $\log_a$, ὡς ἀντίστροφη γνησίως μονότονης συναρτήσεως, εἶναι ἐπίσης γνησίως μονότονη καί μάλιστα γιά $a > 1$ εἶναι *γνησίως αὔξουσα*, ἐνῶ γιά $0 < a < 1$ εἶναι *γνησίως φθίνουσα* (θεώρημα 1.3.1 τοῦ κεφ. II). Ἐπίσης τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως $\log_a$ εἶναι συμμετρικό τοῦ διαγράμματος τῆς $\exp_a$ ὡς πρός τή διχοτόμο τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων. Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως παρέχεται στά παρακάτω σχήματα 72, 73 καί 74 (ὅπου παριστάνεται ἡ log).



*Σχ. 72* $y = \log_a x,\ a > 1$



*Σχ. 73* $y = \log_a x,\ 0 < a < 1$




*Σχ. 74* $y = \log x$

Ἀπό τά παραπάνω προκύπτει εὔκολα ὁ ἀκόλουθος συνοπτικός πίνακας βασικῶν ἰδιοτήτων τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως.

| | |
|---|---|
| $a > 1$ | $\log_a \uparrow$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ *καί* $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = -\infty$ |
| $0 < a < 1$ | $\log_a \downarrow$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ *καί* $\lim\limits_{x\to+0} \log_a x = +\infty$ |

Εἰδικά, ἐπειδή $e > 1$, ὁ φυσικός λογάριθμος εἶναι γνησίως αὔξουσα συνάρτηση μέ

$$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x\to+0} \log x = -\infty.$$

Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως $\log_a$, ὡς ἀντίστροφης τῆς $\exp_a$, προκύπτουν ἀμέσως καί οἱ τύποι:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{καί} \quad \log_a a^x = x$$

καί εἰδικά

$$e^{\log x} = x \quad \text{καί} \quad \log e^x = x.$$

'Επίσης ἡ λογαριθμική συνάρτηση ἔχει τίς παρακάτω ἰδιότητες:

**1.** *Γιά ὁποιουσδήποτε θετικούς ἀριθμούς* x, y *ἰσχύει.*

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

*'Απόδειξη.* Ἔχουμε

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x}\, a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}.$$

'Αλλά ἀφοῦ $a \neq 1$, ἡ ἐκθετική συνάρτηση $\exp_a$ ὡς γνησίως μονότονη εἶναι καί ἀμφιμονοσήμαντη συνάρτηση. Ἔτσι παίρνουμε

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

**2.** *Γιά ὁποιουσδήποτε θετικούς ἀριθμούς* x, y *ἰσχύει*

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

*'Απόδειξη.* Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἰδιότητα ἔχουμε

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{y} \cdot y = \log_a \frac{x}{y} + \log_a y$$

καί ἄρα

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

**3.** *Γιά ὁποιουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς* x,y *μέ* $x > 0$ *ἰσχύει*

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

*'Απόδειξη.* Ἔχουμε

$$a^{\log_a x^y} = x^y = [a^{\log_a x}]^y = a^{y \log_a x}$$

καί ἔτσι

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

**4.** *'Ισχύει ὁ τύπος*

$$a^x = e^{x \log a}. \qquad (6)$$

*'Απόδειξη.* Ἔχουμε

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

**5.** *'Ισχύει ὁ τύπος*

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}. \qquad (7)$$

*'Απόδειξη.* 'Από τήν παραπάνω ἰδιότητα 3 ἔχουμε.

$$\log x = \log a^{\log_a x} = (\log_a x)\ (\log a)$$

καί ἔτσι

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

**3.3 Ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες.** Ἐδῶ θά συμπληρώσουμε τά συμπεράσματα τῶν προηγουμένων παραγράφων 3.1 καί 3.2 μέ τίς παρακάτω ἀξιοσημείωτες ἰδιότητες τῶν συναρτήσεων $\exp_a$ καί $\log_a$.

1. *Γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό* x *ἰσχύει*

$$e^x \geq 1 + x \tag{8}$$

*καί γενικότερα*

$$a^x \geq 1 + x\log a \quad (a \neq 1).$$

*Ἀπόδειξη·* Ἐδῶ θά χρησιμοποιήσουμε τή γνωστή ἀνισότητα τοῦ *Bernoulli*

$$(1 + \omega)^\nu \geq 1 + \nu\omega$$

ὅπου ν εἶναι μή ἀρνητικός ἀκέραιος καί $\omega > -1$.

Γιά ν' ἀποδείξουμε τόν τύπο (8), θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε ρητό ἀριθμό u καί ἀκόμη δυό ἀκεραίους μ,ν μέ $u = \frac{\mu}{\nu}$, $\nu \in N$. Ἔτσι διακρίνουμε τίς παρακάτω δυό περιπτώσεις:

(i) $u \geq 0$, *δηλαδή* $\mu \geq 0$. Θέτουμε

$$K = \left\{\kappa : \frac{\kappa}{\nu} \in N\right\}.$$

Τό K εἶναι ἕνα ἀπέραντο (μή πεπερασμένο) ὑποσύνολο τοῦ συνόλου N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μάλιστα γιά κάθε $\kappa \in K$ ἰσχύει

$$\kappa u = \kappa\frac{\mu}{\nu} = \frac{\kappa}{\nu}\mu \quad \text{δηλαδή} \quad \kappa u \in N_0.$$

Ἄρα

$$\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa u} \geqslant 1 + (\kappa u)\frac{1}{\kappa} = 1 + u$$

καί ἐπειδή ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^u$ εἶναι συνεχής, παίρνουμε

$$\lim_{\kappa \in K}\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa u} = \lim_{\kappa \in K}\left[\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}\right]^u = \left[\lim_{\kappa \in K}\left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)^{\kappa}\right]^u = e^u$$

καί ἔτσι

$$e^u \geqslant 1 + u.$$

(ii) $u < 0$, *δηλαδή* $\mu < 0$. Θέτουμε

$$\Lambda = \{\lambda : \lambda > 0 \text{ καί } \frac{\lambda + 1}{\nu} \in N\}.$$

Τό Λ εἶναι ἕνα ἀπέραντο ὑποσύνολο τοῦ συνόλου N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί μάλιστα γιά κάθε $\lambda \in \Lambda$ ἰσχύει

$$-(\lambda+1)\,u=-(\lambda+1)\,\frac{\mu}{\nu}=\frac{\lambda+1}{\nu}\,(-\mu)\quad \text{δηλαδή}\quad -(\lambda+1)\,u\in N.$$

Ἄρα

$$\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda u}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda u}}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{\lambda}}\right)^{-\lambda u}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{-\lambda u}=\left(1-\frac{1}{\lambda+1}\right)^{-\lambda u}$$

$$\geqslant\left(1-\frac{1}{\lambda+1}\right)^{-(\lambda+1)u}\geqslant 1+[-(\lambda+1)u]\left(-\frac{1}{\lambda+1}\right)=1+u$$

καί ἐπειδή, ὅπως στήν περίπτωση (i), ἔχουμε

$$\lim_{\lambda\in\Lambda}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{\lambda u}=e^{u},$$

παίρνουμε

$$e^{u}\geq 1+u.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι γιά ὁποιοδήποτε ρητό ἀριθμό $u$ ἰσχύει

$$e^{u}\geq 1+u$$

καί ἔτσι, ἄν γιά ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό $x$ θεωρήσουμε μιά ἀκολουθία ρητῶν ἀριθμῶν $u_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $\lim u_\nu=x$, τότε ἀπό τή συνέχεια τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως θά ἔχουμε

$$e^{x}=\lim e^{u_\nu}\geq \lim\,(1+u_\nu)=1+\lim u_\nu=1+x\quad (\text{βλ. σχ. } 71)$$

Τέλος, ἀπό τούς τύπους (6) καί (8) ἔχουμε

$$a^{x}=e^{x\log a}\geq 1+x\log a.$$

**2.** *Γιά κάθε θετικό ἀριθμό x ἰσχύει*

(9) $$\log x\leq x-1$$

*καί γενικότερα* $$\log_a x\leq\frac{x-1}{\log a},\quad \text{ἄν } a>1$$

*καί* $$\log_a x\geq\frac{x-1}{\log a},\quad \text{ἄν } 0<a<1.$$

*Ἀπόδειξη.* Θέτοντας $y=\log x$ ἔχουμε $e^{y}=x$. Ἄρα ἀπό τόν τύπο (8), ἔχουμε

$$x=e^{y}\geq 1+y=1+\log x$$

καί ἔτσι

$$\log x\leq x-1\quad (\text{βλ. καί σχ. } 74)$$

Τέλος, ἀπό τόν τύπο (7), παίρνουμε

$$\log_a x=\frac{\log x}{\log a}\leq\frac{x-1}{\log a},\quad \text{ἄν } a>1$$

ἀφοῦ $\log a>0$ καί

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \geq \frac{x-1}{\log a}, \text{ ἄν } 0 < a < 1$$

ἀφοῦ τότε $\log a < 0$.

3. *Ἡ λογαριθμική συνάρτηση* $\log_a$ *εἶναι συνεχής.*

*Ἀπόδειξη.* Σύμφωνα μέ τόν τύπο (7) ἔχουμε

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

καί ἔτσι ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε τή συνέχεια τοῦ φυσικοῦ λογαρίθμου log. Γιά τό σκοπό αὐτό θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό $x_0$ καί μιά ἀκολουθία θετικῶν ἀριθμῶν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $\lim x_\nu = x_0$. Ἀπό τίς ἰδιότητες 1 καί 2 τῆς προηγούμενης § 3.2 καί τοῦ τύπου (9), γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu$, ἔχουμε

$$\log x_\nu = \log\left(x_0 \frac{x_\nu}{x_0}\right) = \log x_0 + \log\frac{x_\nu}{x_0} \leqslant \log x_0 + \frac{x_\nu}{x_0} - 1$$

καί

$$\log x_\nu = \log\left(x_0 \Big/ \frac{x_0}{x_\nu}\right) = \log x_0 - \log\frac{x_0}{x_\nu}$$

$$\geqslant \log x_0 - \left(\frac{x_0}{x_\nu} - 1\right) = \log x_0 + 1 - \frac{x_0}{x_\nu}.$$

Ἄρα γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu$ ἰσχύει

$$\log x_0 + 1 - \frac{x_0}{x_\nu} \leqslant \log x_\nu \leqslant \log x_0 + \frac{x_\nu}{x_0} - 1.$$

Ἀλλά

$$\lim\left(\log x_0 + 1 - \frac{x_0}{x_\nu}\right) = \log x_0 + 1 - \frac{x_0}{x_0} = \log x_0$$

καί

$$\lim\left(\log x_0 + \frac{x_\nu}{x_0} - 1\right) = \log x_0 + \frac{x_0}{x_0} - 1 = \log x_0.$$

Ὥστε ἰσχύει καί

$$\lim \log x_\nu = \log x_0$$

τό ὁποῖο, ἐπειδή ἡ $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία θετικῶν ἀριθμῶν μέ $\lim x_\nu = x_0$, σημαίνει ὅτι ὁ φυσικός λογάριθμος εἶναι συνεχής συνάρτηση στό $x_0$ γιά ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό $x_0$.

4. *Ἰσχύει:*

(10) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

*Ἀπόδειξη.* Πρῶτα θ' ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει

$$1 \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x \;\; \forall x \in (0, +\infty)$$

καί
$$e^x \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant 1 \;\forall x \in (-\infty, 0).$$

Πραγματικά· γιά $x \in (0, +\infty)$, ἀπό τόν τύπο (9), ἔχουμε

$$e^x - 1 \geqslant (1 + x) - 1 = x, \text{ ὁπότε } \frac{e^x - 1}{x} \geqslant 1$$

καί

$$\frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x} \leqslant 1 - [1 + (-x)] = x, \text{ ὁπότε } \frac{e^x - 1}{x} \leqslant e^x$$

Γιά $x \in (-\infty, 0)$, ἔχουμε $-x \in (0, +\infty)$ καί ἔτσι παίρνουμε

$$1 \leqslant \frac{e^{-x} - 1}{-x} \leqslant e^{-x}, \text{ ὁπότε } e^x \leqslant e^x \frac{e^{-x} - 1}{-x} \leqslant 1.$$

Ἀλλὰ

$$e^x \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \frac{1 - e^x}{-x} = \frac{e^x - 1}{x} \text{ καὶ ἑπομένως } e^x \leqslant \frac{e^x - 1}{x} \leqslant 1.$$

Θά ἀποδείξουμε, τώρα, ὅτι $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Πραγματικά· θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $x_\nu > 0 \;\forall \nu \in N$ καί $x_\nu \to 0$. Ἀλλά τότε, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ἰσχύει

$$1 \leqslant \frac{e^{x_\nu} - 1}{x_\nu} \leqslant e^{x_\nu} \quad \forall \;\; \nu \in N$$

καί ἔτσι
$$\lim \frac{e^{x_\nu} - 1}{x_\nu} = 1.$$

ἀφοῦ, ἀπό τή συνέχεια τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως, ἔχουμε $\lim e^{x_\nu} = e^0 = 1$. Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι

$$x_\nu \to 0 \Rightarrow \lim \frac{e^{x_\nu} - 1}{x_\nu} = 1$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Παρόμοια ἰσχύει καί $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Πραγματικά· θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ μέ $x_\nu < 0 \;\forall \nu \in N$ καί $x_\nu \to 0$. Ἀλλά τότε, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ἰσχύει

$$e^{x_\nu} \leqslant \frac{e^{x_\nu} - 1}{x_\nu} \leqslant 1 \;\forall \nu \in N$$

καί ἔτσι

$$\lim \frac{e^{x_\nu}-1}{x_\nu} = 1.$$

ἀφοῦ, ἀπό τή συνέχεια τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως, ἔχουμε $\lim e^{x_\nu} = e^0 = 1$. Ἀποδείξαμε λοιπόν ὅτι

$$x_\nu \to 0 \Rightarrow \lim \frac{e^{x_\nu}-1}{x_\nu} = 1$$

πού σημαίνει ὅτι $\lim\limits_{x \to -0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Ὥστε ἰσχύει

$$\lim_{x \to +0} \frac{e^x-1}{x} = 1 = \lim_{x \to -0} \frac{e^x-1}{x}$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

**5.** *Ἰσχύει*

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1. \tag{11}$$

*Ἀπόδειξη.* Πρῶτα θά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{\log x}{x-1} \leqslant 1 \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

καί

$$1 \leqslant \frac{\log x}{x-1} \leqslant \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, 1).$$

Πραγματικά· γιά $x \in (1, +\infty)$, σύμφωνα μέ τόν τύπο (9), ἔχουμε

$$\log x \leqslant x-1, \text{ ὁπότε } \frac{\log x}{x-1} \leqslant 1$$

καί

$$\frac{\log x}{x-1} = \frac{-\log \frac{1}{x}}{x-1} \geqslant \frac{-\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x-1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{x-1} = \frac{1}{x}.$$

Γιά $x \in (0,1)$ ἔχουμε $\frac{1}{x} \in (1, +\infty)$ καί ἔτσι παίρνουμε

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} \leqslant \frac{\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} \leqslant 1, \text{ ἀπ' ὅπου } 1 \leqslant \frac{1}{x} \frac{\log \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1} \leqslant \frac{1}{x}.$$

Ἀλλά

$$\frac{1}{x}\,\frac{\log\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-1}=\frac{1}{x}\,\frac{-\log x}{\dfrac{1-x}{x}}=\frac{-\log x}{1-x}=\frac{\log x}{x-1}$$

καί ἔτσι
$$1\leqslant\frac{\log x}{x-1}\leqslant\frac{1}{x}.$$

Θά ἀποδείξουμε, τώρα, ὅτι $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\log x}{x-1}=1$. Πραγματικά· θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $x_\nu>1\ \forall\ \nu\in N$ καί $\lim x_\nu=1$. Ἀλλά τότε σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἰσχύει
$$\frac{1}{x_\nu}\leqslant\frac{\log x_\nu}{x_\nu-1}\leqslant 1\quad\forall\ \nu\in N$$

καί ἔτσι
$$\lim\frac{\log x_\nu}{x_\nu-1}=1$$

ἀφοῦ $\lim\dfrac{1}{x_\nu}=\dfrac{1}{1}=1$. Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι
$$\lim x_\nu=1\Rightarrow\lim\frac{\log x_\nu}{x_\nu-1}=1$$

καί ἄρα $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\log x}{x-1}=1$.

Παρόμοια ἰσχύει καί $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\log x}{x-1}=1$. Πραγματικά· θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ μέ $0<x_\nu<1\ \forall\ \nu\in N$ καί $\lim x_\nu=1$. Ἀλλά τότε, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ἰσχύει
$$1\leqslant\frac{\log x_\nu}{x_\nu-1}\leqslant\frac{1}{x_\nu}\ \forall\ \nu\in N$$

καί ἔτσι
$$\lim\frac{\log x_\nu}{x_\nu-1}=1$$

ἀφοῦ $\lim\dfrac{1}{x_\nu}=\dfrac{1}{1}=1$. Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι
$$\lim x_\nu=1\Rightarrow\lim\frac{\log x_\nu}{x_\nu-1}=1$$

καί ἄρα $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{\log x}{x-1}=1$.

Ὥστε ἰσχύει

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{\log x}{x-1} = 1 = \lim_{x \to 1-0} \frac{\log x}{x-1}$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**29.** Νά μελετηθοῦν ὡς πρός τή συνέχεια οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους καί νά παρασταθοῦν γεωμετρικά οἱ τρεῖς πρῶτες:

1) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ἂν } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \frac{1}{2} + x, & \text{ἂν } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 0, & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 0, & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$

4)* $f(x) = \begin{cases} \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{ἂν } x > 0 \\ x, & \text{ἂν } x \leqslant 0 \end{cases}$

5)* $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 0, & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$

6)* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{ἂν } x \neq 0 \\ 0, & \text{ἂν } x = 0 \end{cases}$

**30.** Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους εἶναι συνεχεῖς:

1) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 + 3x)$ 2) $f(x) = \sigma\upsilon\nu \sqrt{1 - x^2}$ 3) $f(x) = \eta\mu(\sigma\upsilon\nu 3x)$

4) $f(x) = \eta\mu \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$ 5) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{2 + \eta\mu x^3}$ 6) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2 + \varepsilon\varphi 3x)$

7) $f(x) = 2^{5x + \eta\mu x}(1 + \varepsilon\varphi x)$ 8) $f(x) = \log(1 + x^2 \eta\mu^4 x)$ 9) $f(x) = 3^{x\varepsilon\varphi(x^2 + 1)}$

**31*.** Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια ἡ συνάρτηση f μέ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{ἂν } x \neq 0 \text{ καί } |x| \leqslant 1 \\ 0, & \text{ἂν } x = 0 \\ \eta\mu x, & \text{ἂν } |x| > 1 \end{cases}$$

**32*.** Νά μελετηθεῖ ὡς πρός τή συνέχεια καί νά παρασταθεῖ γεωμετρικά ἡ συνάρτηση f μέ

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{ἂν } x > 2 \\ x - 2 + \log x, & \text{ἂν } 1 < x \leqslant 2 \\ 1 - x, & \text{ἂν } x \leqslant 1 \end{cases}$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

# ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

### 1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

**1.1** Οἱ συναρτήσεις τίς ὁποῖες θά θεωροῦμε στό κεφάλαιο τοῦτο εἶναι ὅλες πραγματικές συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως εἶναι, ὅπως καί ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας συναρτήσεως, ἄμεσα δεμένη μέ τήν ἔννοια τῆς συγκλίσεως.

Ἔστω f μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα Δ καί ἔστω $x_0 \in \Delta$. Τότε μέ τόν τύπο

$$g_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in \Delta - \{x_0\}$$

ὁρίζεται μιά συνάρτηση $g_{x_0}$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *πηλίκο διαφορῶν τῆς* f *στό σημεῖο* $x_0$. Ἄν ὑπάρχει τό $\lim\limits_{x \to x_0} g_{x_0}(x)$, δηλαδή τό

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

καί τοῦτο εἶναι πραγματικός ἀριθμός, τότε λέμε ὅτι «*ἡ συνάρτηση* f *παραγωγίζεται στό σημεῖο* $x_0$» ἤ ἀλλιῶς «*ὑπάρχει ἡ παράγωγος* (ἀκριβέστερα *ἡ πρώτη παράγωγος*) *τῆς* f *στό σημεῖο* $x_0$». Τήν ὁριακή αὐτή τιμή τήν ὀνομάζουμε τότε *παράγωγο* (ἀκριβέστερα *πρώτη παράγωγο*) τῆς f στό σημεῖο $x_0$ καί μάλιστα τή συμβολίζουμε μέ

$$f'(x_0), \text{ ἤ } (f(x))'_{x=x_0}, \text{ ἤ } \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=x_0}$$

Γιά συντομία

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Παρατηρήσεις.** 1) Ἄν τό $x_0$ εἶναι τό ἀριστερό ἄκρο τοῦ διαστήματος Δ, τότε στόν παραπάνω ὁρισμό ἐννοοῦμε τήν ὁριακή τιμή γιά $x \to x_0 + 0$, ἐνῶ ἄν τό $x_0$ εἶναι τό δεξιό ἄκρο τοῦ διαστήματος Δ, τήν ὁριακή τιμή τήν ἐννοοῦμε γιά $x \to x_0 - 0$.

2) Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ὕπαρξη τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτή-

σεως σ' ἕνα σημεῖο συνεπάγεται τή συνέχεια τῆς συναρτήσεως αὐτῆς στό σημεῖο τοῦτο (βλ. παρακάτω ἰδιότητα 1.5.1).

**Παραδείγματα:**

**1.** *Στήν περίπτωση σταθερῆς συναρτήσεως* c, δηλαδή $f(x) = c$, ἔχουμε

$$(c)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 0 = 0,$$

δηλαδή

$$(c)'_{x=x_0} = 0.$$

Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x_0$ καί μάλιστα γράφουμε

$$(c)' = 0.$$

**2.** *Στήν περίπτωση ὅπου* $f(x) = x$, ἔχουμε

$$(x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή

$$(x)'_{x=x_0} = 1$$

Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x_0$ καί μάλιστα γράφουμε

$$(x)' = 1.$$

**3.** *Στήν περίπτωση ὅπου* $f(x) = x^2$, ἔχουμε

$$(x^2)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0,$$

δηλαδή

$$(x^2)'_{x=x_0} = 2x_0$$

καί μάλιστα ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x_0$. Τότε γράφουμε

$$(x^2)' = 2x$$

καί λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^2$ παραγωγίζεται στό πεδίο ὁρισμοῦ της καί μάλιστα, στήν περίπτωση αὐτή, τή συνάρτηση g μέ $g(x) = 2x$ τήν ὀνομάζουμε παράγωγο τῆς f.

Γενικά, ἄν γιά μιά συνάρτηση f μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα Δ, ὑπάρχει ἡ (πρώτη) παράγωγός της γιά κάθε $x \in \Delta$, τότε ὁ τύπος

$$y = f'(x)$$

ὁρίζει μιά συνάρτηση f', πού ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἐπίσης τό διάστημα Δ. Τήν συνάρτηση f' τήν ὀνομάζουμε *παράγωγο* (ἀκριβέστερα *πρώτη παράγωγο*) τῆς f στό Δ ἤ ἁπλά *(πρώτη) παράγωγο τῆς* f. Αὐτή τή συμβολίζουμε καί μέ $\frac{df}{dx}$. Στήν περίπτωση πού ὁρίζεται ἡ (πρώτη) παράγωγος f' τῆς συναρτήσεως f, λέμε ὅτι «*ἡ συνάρτηση* f *παραγωγίζεται στό* Δ» ἤ ἁπλά «*ἡ συνάρτηση* f *παραγωγίζεται*».

Ἄν ἡ συνάρτηση f παραγωγίζεται, τότε μπορεῖ νά παραγωγίζεται καί ἡ συνάρτηση f' σ' ἕνα σημεῖο $x_0 \in \Delta$ καί στήν περίπτωση αὐτή, τήν παράγωγο $(f'(x))'_{x=x_0}$ τήν ὀνομάζουμε δεύτερη παράγωγο τῆς f στό σημεῖο $x_0$ καί τή συμβολίζουμε μέ $f''(x_0)$ ἤ $(f(x))''_{x=x_0}$ ἤ ἀκόμη καί $\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=x_0}$. Ἄν τώρα ὑπάρχει ἡ δεύτερη παράγωγος τῆς f σέ κάθε σημεῖο $x \in \Delta$, τότε ὁ τύπος

$$y = f''(x)$$

ὁρίζει μιά συνάρτηση $f''$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἐπίσης τό διάστημα $\Delta$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *δεύτερη παράγωγος τῆς* f *στό* $\Delta$ ἤ ἁπλά *δεύτερη παράγωγος τῆς* f. Αὐτή τή συμβολίζουμε καί μέ $\frac{d^2f}{dx^2}$. Π.χ.

$$(x^2)''_{x=x_0} = (2x)'_{x=x_0} = 2,$$

γιατί

$$(2x)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2x - 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 2 = 2.$$

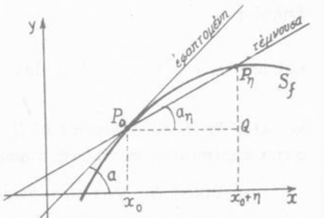
Ἄρα ὑπάρχει ἡ δεύτερη παράγωγος τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = x^2$ καί αὐτή εἶναι ἡ σταθερή συνάρτηση 2.

Ἀνάλογα ὁρίζουμε τήν τρίτη παράγωγο μιᾶς συναρτήσεως f νά εἶναι ἡ παράγωγος τῆς δεύτερης παραγώγου της καί ἐπαγωγικά τή νιοστή παράγωγο $f^{(\nu)}$ τῆς f μέ τόν τύπο

$$f^{(\nu)} = (f^{(\nu-1)})', \; \nu = 2, 3, \ldots,$$

ὅπου μέ $f^{(\mu)}$ συμβολίζουμε τή μιοστή παράγωγο τῆς f. Ἀκόμα γιά τήν νιοστή παράγωγο $f^{(\nu)}$ χρησιμοποιεῖται καί τό σύμβολο $\frac{d^\nu f}{dx^\nu}$.

**1.2 Γεωμετρική σημασία τῆς παραγώγου.** Ἔστω ὅτι f εἶναι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα $\Delta$ καί $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ἕνα σημεῖο τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως αὐτῆς. Ἄν θεωρήσουμε καί ἕνα ἄλλο σημεῖο $P_\eta = (x_0 + \eta, f(x_0 + \eta))$ τοῦ διαγράμματος καθώς καί τήν εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα $P_0, P_\eta$, (ἡ εὐθεία αὐτή ὀνομάζεται τέμνουσα τοῦ διαγράμματος στό $P_0$), τότε ὁ συντελεστής κατευθύνσεώς της, δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας $\alpha_\eta$, δίδεται ἀπό τόν τύπο



*Σχ. 75*

$$\text{εφ } \alpha_\eta = \frac{QP_\eta}{P_0Q} = \frac{f(x_0+\eta) - (fx_0)}{\eta},$$

ἐνῶ ἡ ἐξίσωση γιά τήν τέμνουσα εἶναι

$$(\tau) \qquad y - f(x_0) = \frac{f(x_0+\eta) - f(x_0)}{\eta}(x - x_0).$$

Ἄν τώρα ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει τό $\lim\limits_{\eta \to 0} \frac{f(x_0+\eta) - f(x_0)}{\eta}$, δηλαδή ὅτι ὑπάρχει ἡ παράγωγος $f'(x_0)$ τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο $x_0$, τότε ὁρίζεται ὡς ὁριακή ἐξίσωση τῆς (τ) γιά $\eta \to 0$ ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας

$$(\varepsilon) \qquad y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο $P_0=(x_0, f(x_0))$ καί ἔχει συντελεστή κατευθύνσεως τήν $f'(x_0)$, δηλαδή (βλ. σχ. 75)

$$\varepsilon\varphi\ \alpha = f'(x_0).$$

Ὁρίζουμε τήν εὐθεία αὐτή νά εἶναι *ἡ ἐφαπτομένη εὐθεία τοῦ διαγράμματος τῆς f στό σημεῖο $P_0$*.

**1.3 Κινηματική σημασία τῆς παραγώγου.** Ἔστω ὅτι ἡ θέση x ἑνός ὑλικοῦ σημείου πού κινεῖται πάνω σέ μιά εὐθεία ἐκφράζεται ὡς μιά συνάρτηση τοῦ χρόνου t. Δηλαδή

$$x = f(t),\ t\in\Delta = [t_0, t_1] \text{ (ἕνα χρονικό διάστημα).}$$

Τό πηλίκο διαφορῶν $\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}$ στή χρονική στιγμή $\tau\in[t_0, t_1]$ ἐκφράζει τή *μέση ταχύτητα τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατά τό χρονικό διάστημα μεταξύ τῶν στιγμῶν τ καί t*. Τήν ὁριακή τιμή τῆς μέσης αὐτῆς ταχύτητας γιά $t\to\tau$ τήν ὁρίζουμε ὡς τή *(στιγμιαία) ταχύτητα* $\upsilon(\tau)$ *τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατά τή χρονική στιγμή τ*, δηλαδή ὁρίζουμε

$$\upsilon(\tau) = \lim_{t\to\tau} \frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau} = f'(\tau).$$

Ἄν τώρα ἡ στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon(t)$ ὁρίζεται γιά κάθε χρονική στιγμή $t\in[t_0, t_1]$, τότε τό πηλίκο διαφορῶν $\frac{\upsilon(t)-\upsilon(\tau)}{t-\tau}$ ἐκφράζει τή *μέση ἐπιτάχυνση τοῦ ὑλικοῦ σημείου κατά τό χρονικό διάστημα μεταξύ τῶν στιγμῶν τ καί t*. Τήν ὁριακή αὐτή τιμή τῆς μέσης ἐπιταχύνσεως γιά $t\to\tau$ τήν ὁρίζουμε ὡς τή *(στιγμιαία) ἐπιτάχυνση* $\gamma(\tau)$ *κατά τή χρονική στιγμή τ*, δηλαδή

$$\gamma(\tau) = \lim_{t\to\tau} \frac{\upsilon(t)-\upsilon(\tau)}{t-\tau} = \upsilon'(\tau) = f''(\tau).$$

**1.4* Διαφορικό συναρτήσεως.** Ἔστω ὅτι f εἶναι μιά συνάρτηση πού παραγωγίζεται σ' ἕνα διάστημα Δ. Ἄν $x_0$ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ διαστήματος Δ, τότε μέ τόν τύπο $Y = f'(x_0)\,X$ ὁρίζεται μιά (γραμμική) συνάρτηση, ἡ ὁποία ὀνομάζεται *διαφορικό τῆς συναρτήσεως f στό σημεῖο $x_0$* καί συμβολίζεται μέ $df(x_0)$, δηλαδή

$$X \xmapsto{df(x_0)} Y = f'(x_0)\,X.$$

Εἰδικά, ἄν θεωρήσουμε τήν ταυτοτική συνάρτηση, δηλαδή τή συνάρτηση τ μέ $\tau(x) = x$, τότε τό διαφορικό $d\tau(x) = dx$ αὐτῆς τῆς συναρτήσεως στό σημεῖο x, ὁρίζεται, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, ὡς ἡ συνάρτηση πού δίδεται ἀπό τόν τύπο $Y = \tau'(x)X = 1\cdot X = X$, δηλαδή

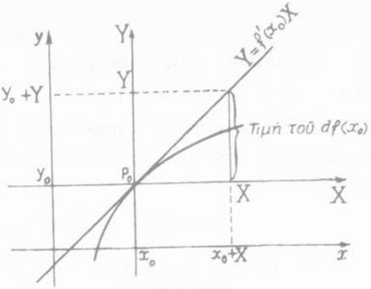
$$X \xmapsto{dx} Y = X$$

καί ἄρα ἡ συνάρτηση $f'(x_0)dx$ ἔχει τύπο $Y = f'(x_0)X$, δηλαδή συμπίπτει μέ τό διαφορικό $df(x_0)$. Ἄρα ἰσχύει ὁ τύπος

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\,dx}$$

ὁ ὁποῖος καί δικαιολογεῖ τό συμβολισμό $f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx_0}$ τῆς παραγώγου σάν πηλίκο διαφορικῶν.

Ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ διαφορικοῦ $df(x_0)$ τῆς συναρτήσεως f στό $x_0$, δίδεται στό διπλανό σχ. 75α, ὅπου ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων X, Y εἶναι τό σημεῖο $P_0 = (x_0, f(x_0))$.



Σχ. 75α.

Ὅπως εἴδαμε παραπάνω, σέ κάθε σημεῖο $x_0 \in \Delta$ ὁρίζεται τό διαφορικό $df(x_0)$ τῆς f στό $x_0$ δηλαδή ὁρίζεται μιά μονοσήμαντη ἀπεικόνιση μέ τύπο

$$\Delta \ni x \mapsto df(x),$$

ἡ ὁποία στό σημεῖο $x \in \Delta$ ἀπεικονίζει μιά συνάρτηση, τό διαφορικό $df(x)$ τῆς f στό σημεῖο x. Τήν ἀπεικόνιση αὐτή τήν ὀνομάζουμε *διαφορικό τῆς συναρτήσεως* f καί τή συμβολίζουμε μέ df, δηλαδή:

$$\Delta \ni x \xmapsto{df} df(x).$$

**1.5 Ἰδιότητες τῶν παραγώγων.** Θεωροῦμε δυό συναρτήσεις f καί g μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα Δ. Τότε ἰσχύουν τά ἑξῆς:

**1.5.1.** *Ἄν ἡ συνάρτηση* f *παραγωγίζεται στό* Δ, *τότε αὐτή εἶναι συνεχής συνάρτηση.*

*Ἀπόδειξη.* Ἔστω $x_0$ ἕνα σημεῖο τοῦ Δ. Τότε ἔχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \quad \forall \quad x \in \Delta - \{x_0\}$$

καί ἄρα

$$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

δηλαδή $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι ἡ συνάρτηση f εἶναι συνεχής στό σημεῖο $x_0$ τοῦ διαστήματος Δ.

*Παρατήρηση.* Τό ἀντίστροφο τῆς ἰδιότητας αὐτῆς δέν ἰσχύει, δηλαδή μιά συνάρτηση μπορεῖ νά εἶναι συνεχής, ἀλλά νά μήν παραγωγίζεται. Αὐτό μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ μέ τό παράδειγμα τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x) = |x|$, πού, ὅπως εἴδαμε στό παράδειγμα 4 τῆς § 1.1 τοῦ κεφ. V, εἶναι συνεχής. Αὐτή ὅμως δέν παραγωγίζεται στό σημεῖο 0, γιατί

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ἄν } x > 0 \\ -1, & \text{ἄν } x < 0 \end{cases}$$

καί ἄρα

$$\lim_{x \to +0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1, \quad \lim_{x \to -0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1.$$

῎Αρα δέν ὑπάρχει τό $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, δηλαδή ἡ συνάρτηση f δέν παραγωγίζεται στό σημεῖο 0.

**1.5.2.** *῎Αν οἱ συναρτήσεις* f *καί* g *παραγωγίζονται στό* Δ, *τότε παραγωγίζονται καί οἱ συναρτήσεις* f+g *καί* f–g *καί μάλιστα ἰσχύουν*

$$(f+g)' = f' + g' \quad \textit{καί} \quad (f-g)' = f' - g'.$$

*᾿Απόδειξη.* ῎Αν $x_0$ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ διαστήματος Δ, τότε ἔχουμε

$$\frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

καί ἄρα

$$(f(x)+g(x))'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(f(x)+g(x))-(f(x_0)+g(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$+\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή $(f(x)+g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$ καί τοῦτο γιά κάθε $x_0 \in Δ$, πράγμα τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι $(f+g)' = f'+g'$.
Παρόμοια μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ καί ὁ ἀντίστοιχος τύπος γιά τή διαφορά.

Εἰδικά, ἄν g εἶναι ἡ σταθερή συνάρτηση c, τότε ἰσχύει

$$(f+c)' = f'.$$

**1.5.3.** *῎Αν οἱ συναρτήσεις* f *καί* g *παραγωγίζονται στό* Δ, *τότε παραγωγίζεται καί τό γινόμενο* fg *καί μάλιστα ἰσχύει.*

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

*᾿Απόδειξη.* ῎Αν $x_0$ εἶναι ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ διαστήματος Δ, τότε ἔχουμε

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{[f(x)g(x)-f(x_0)g(x)]+[f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)]}{x-x_0} =$$

$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\, g(x) + f(x_0)\, \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

᾿Επειδή ὅμως ἡ g παραγωγίζεται στό Δ, σύμφωνα μέ τήν 1.5.1, αὐτή εἶναι συνεχής καί ἄρα $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$. ῎Ετσι παίρνουμε

$$(f(x)g(x))'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

καί τοῦτο γιά κάθε $x_0 \in Δ$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Είδικά, ἄν g εἶναι ἡ σταθερή συνάρτηση c, τότε ἰσχύει

$$(cf)' = cf'.$$

**1.5.4.** *Ἄν οἱ συναρτήσεις* f *καί* g *παραγωγίζονται στό* Δ *καί ἰσχύει* $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Delta$, *τότε παραγωγίζεται καί τό πηλίκο* $\frac{f}{g}$ *καί μάλιστα ἰσχύει*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

*Εἰδικά, ἄν* f *εἶναι ἡ σταθερή συνάρτηση* 1, *ἰσχύει*

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}. \tag{1}$$

*Ἀπόδειξη*. Θά ἀποδείξουμε πρῶτα τήν (1). Ἄν τό $x_0$ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ διαστήματος Δ, ἔχουμε

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)}\frac{1}{g(x)}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ g παραγωγίζεται στό Δ, σύμφωνα μέ τήν 1.5.1 αὐτή εἶναι συνεχής καί ἄρα $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Ἔτσι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0)}$ καί

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)'_{x \to x_0} = -\frac{1}{g(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x_0)}\frac{1}{g(x_0)} g'(x_0) =$$

$$= -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Τοῦτο ὅμως ἰσχύει γιά κάθε $x_0 \in \Delta$ πού σημαίνει ὅτι ἰσχύει ἡ (1).

Τώρα, ἀπό τήν (1) καί τήν 1.5.3 ἔχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\,\frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} + f\left(\frac{1}{g}\right)' = f'\,\frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

## 1.6 Οἱ παράγωγοι μερικῶν στοιχειωδῶν συναρτήσεων.

**1.6.1** $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1} \quad (\nu = 2,3,\ldots)$.

Γιά $\nu = 2$ ἔχουμε ἤδη ὑπολογίσει ὅτι $(x^2)' = 2x = 2x^{2-1}$, δηλαδή ὁ τύπος ἰσχύει. Ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου αὐτοῦ στή γενική περίπτωση γίνεται μέ τήν ἐπαγωγική μέθοδο ὡς ἑξῆς:

Ἔστω ὅτι ἰσχύει $(x^\kappa)' = \kappa x^{\kappa-1}$· τότε, ἀπό τήν 1.5.3 θά ἰσχύει $(x^{\kappa+1})' = (x \cdot x^\kappa)' = (x)'\,x^\kappa + x(x^\kappa)' = 1 \cdot x^\kappa + x\kappa x^{\kappa-1} = (\kappa+1)x^\kappa$.

Ὥστε, μέ τό νά δεχθοῦμε ὅτι ὁ τύπος 1.6.1 ἰσχύει γιά τό φυσικό ἀριθμό $\kappa (\kappa \geq 2)$, δείξαμε ὅτι αὐτός ἰσχύει καί γιά τόν ἑπόμενό του φυσικό ἀριθμό $\kappa + 1$. Ἄρα ὁ τύπος 1.6.1 ἰσχύει καί γιά κάθε φυσικό ἀριθμό $\nu \geq 2$.

**1.6.1′** $\left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}$, $x \neq 0$ (*ν φυσικός ἀριθμός*).

Γιά $\nu = 1$ ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει, γιατί ἀπό τήν (1) ἔχουμε

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{(x)'}{x^2} = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^{1+1}}.$$

Γιά $\nu \geq 2$, ἀπό τήν (1) καί τόν τύπο 1.6.1, ἔχουμε

$$\left(\frac{1}{x^\nu}\right)' = -\frac{(x^\nu)'}{(x^\nu)^2} = -\frac{\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}}.$$

**1.6.2** $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Πρῶτα θά ἀποδείξουμε τόν τύπο $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$. Ἀπό τήν τριγωνομετρία εἶναι γνωστή ἡ ἀνισότητα

$$\eta\mu y < y < \varepsilon\varphi y \quad \forall y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

ἡ ὁποία γράφεται ἰσοδύναμα καί ὡς ἑξῆς:

$$\sigma\upsilon\nu y < \frac{\eta\mu y}{y} < 1 \quad \forall\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ἡ τελευταία αὐτή ἀνισότητα ἰσχύει καί γιά $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, γιατί

$$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow -y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(-y) < \frac{\eta\mu(-y)}{-y} < 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu y < \frac{\eta\mu y}{y} < 1.$$

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$$\text{(2)} \qquad \sigma\upsilon\nu\, y < \frac{\eta\mu y}{y} < 1 \quad \forall\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Ἐπειδή τό συνημίτονο εἶναι συνεχής συνάρτηση, ἔχουμε $\lim\limits_{y\to 0} \sigma\upsilon\nu y = \sigma\upsilon\nu\, 0 = 1$ καί ὁ τύπος (2) δίνει $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\eta\mu y}{y} = 1$.

Γιά νά ἀποδείξουμε τώρα τόν τύπο 1.6.2 θεωροῦμε ἕναν ὁποιοδήποτε πραγματικό ἀριθμό $x_0$· τότε ἔχουμε

$$\frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \frac{2\eta\mu \frac{x - x_0}{2}\ \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} = \frac{\eta\mu \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}}\ \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2}$$

καί ἐπειδή, ὅπως παραπάνω δείξαμε, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\eta\mu \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} = 1$ καί (ἀπό τή συνέχεια τοῦ συνημιτόνου) $\lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu \frac{x + x_0}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{x_0 + x_0}{2} = \sigma\upsilon\nu\, x_0$, θά ἔχουμε

$$(\eta\mu x)'_{x=x_0} = 1 \cdot \sigma\upsilon\nu x_0 = \sigma\upsilon\nu\, x_0$$

καί αὐτό γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x_0$, πού σημαίνει ὅτι $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu\, x$.

**1.6.3** $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.

Ἀνάλογα μέ τήν προηγούμενη περίπτωση ἔχουμε

$$(\sigma\upsilon\nu x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\eta\mu \frac{x - x_0}{2}\ \eta\mu \frac{x + x_0}{2}}{x - x_0} =$$

$$= -\lim_{x \to x_0} \frac{\eta\mu \dfrac{x - x_0}{2}}{\dfrac{x - x_0}{2}} \lim_{x \to x_0} \eta\mu \frac{x + x_0}{2} = -1 . \eta\mu \frac{x_0 + x_0}{2} = -\eta\mu x_0.$$

**1.6.4.** $(\varepsilon\varphi x)' = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 + \varepsilon\varphi^2 x, \ x \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2} \quad (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ τύπου αὐτοῦ γίνεται μέ ἐφαρμογή τῆς ἰδιότητας 1.5.4

$$(\varepsilon\varphi x)' = \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x\,(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

**1.6.5.** $(\sigma\varphi x)' = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x} = -(1 + \sigma\varphi^2 x), \ x \neq \kappa\pi \ (\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

$$(\sigma\varphi x)' = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}\right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x\,(\eta\mu x)'}{\eta\mu^2 x} = \frac{(-\eta\mu x)\,\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} =$$

$$= -\frac{\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}.$$

**1.6.6.** $(e^x)' = e^x.$

Ἔχουμε

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \frac{e^{(x - x_0) + x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0},$$

καί ἐπομένως, ἐπειδή σύμφωνα μέ τόν τύπο (10) τῆς § 3.3 τοῦ κεφ. V ἰσχύει

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} = 1$, θά ἔχουμε καί

$$(e^x)'_{x = x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} . 1 = e^{x_0}$$

καί αὐτό ἰσχύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x_0$, πού σημαίνει ὅτι $(e^x)' = e^x$.

**1.6.7** $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \ x \in (0, +\infty).$

Ἔχουμε

$$\frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{\log \dfrac{x}{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \ \frac{\log \dfrac{x}{x_0}}{\dfrac{x}{x_0} - 1},$$

καί ἔτσι, ἐπειδή σύμφωνα μέ τόν τύπο (11) τῆς § 3.3 τοῦ κεφ. V ἰσχύει

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\log \dfrac{x}{x_0}}{\dfrac{x}{x_0} - 1} = 1$, θά ἔχουμε καί

$$(\log x)'_{x = x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot 1 = \frac{1}{x_0}$$

καί αὐτό ἰσχύει γιά κάθε θετικό ἀριθμό $x_0$, πού σημαίνει ὅτι $(\log x)' = \dfrac{1}{x}$

Ἐπειδή, σύμφωνα μέ τόν τύπο (7) τῆς § 3.2 τοῦ κεφ. V ἰσχύει $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$ $(a \neq 1)$, θά ἔχουμε

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\log a}\ (\log x)' = \frac{1}{\log a}\ \frac{1}{x} = \frac{1}{x\log a}$$

Ὥστε ἰσχύει, γενικότερα, ὁ παρακάτω τύπος

$$\mathbf{1.6.7'}\quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\log a},\ x \in (0, +\infty)\ (a \neq 1).$$

**1.7 Παραγώγιση σύνθετης συναρτήσεως.** Ὁ ὑπολογισμός τῆς παραγώγου μιᾶς συναρτήσεως μέ τή βοήθεια τοῦ ὁρισμοῦ της εἶναι γενικά κουραστικός καί πολλές φορές πρακτικά ἀδύνατος. Οἱ ἰδιότητες τῶν παραγώγων καί οἱ τύποι πού δόθηκαν στίς προηγούμενες παραγράφους 1.5 καί 1.6 μποροῦν νά ἐφαρμοσθοῦν κατάλληλα γιά τόν ὑπολογισμό τῶν παραγώγων καί ἄλλων στοιχειωδῶν συναρτήσεων, ὅπως π.χ.

$$(\log x + \varepsilon\varphi x)' = (\log x)' + (\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x},\ x \in R^+ \text{ καί } x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$(\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ἀλλά αὐτό σέ πολλές περιπτώσεις στοιχειωδῶν συναρτήσεων δέν εἶναι δυνατό ὅπως π.χ. γιά τή συνάρτηση πού ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο $y = \sigma\upsilon\nu\,(2x + 3)$, τῆς ὁποίας ὅμως μποροῦμε σχετικά εὔκολα νά ὑπολογίσουμε τήν παράγωγο μέ ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ, ὡς ἑξῆς :

$$(\sigma\upsilon\nu(2x+3))'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sigma\upsilon\nu\,(2x+3) - \sigma\upsilon\nu\,(2x_0+3)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{-2\eta\mu\,(x-x_0)\,\eta\mu\,(x+x_0+3)}{x - x_0} =$$
$$= -2\lim_{x\to x_0} \frac{\eta\mu\,(x-x_0)}{x-x_0}\ \lim_{x\to x_0} \eta\mu(x + x_0 + 3) =$$
$$= -2\cdot 1\ \eta\mu(x_0 + x_0 + 3) = -2\eta\mu\,(2x_0 + 3)$$

καί αὐτό ἰσχύει γιά κάθε πραγματικό ἀριθμό $x_0$. Ἄρα

$$(\sigma\upsilon\nu\,(2x+3))' = -2\eta\mu\,(2x+3).$$

Ἡ παραπάνω συνάρτηση, τῆς ὁποίας ὑπολογίσαμε τήν παράγωγο, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σύνθεση δυό συναρτήσεων, τῆς συναρτήσεως f μέ $f(x)=2x+3$ καί τοῦ συνημιτόνου, οἱ παράγωγοι τῶν ὁποίων ὑπολογίζονται εὔκολα μέ τή βοήθεια τῶν τύπων καί ἰδιοτήτων τῶν παραγράφων 1.5 καί 1.6. Εἶναι λοιπόν φυσικό νά ἀναζητηθεῖ κάποια σχέση μεταξύ τῆς παραγώγου τῆς σύνθετης συναρτήσεως καί τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων, οἱ ὁποῖες τήν συνθέτουν. Ἡ σχέση αὐτή δίδεται στό ἑπόμενο θεώρημα.

**1.7.1 ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἔστω ὅτι* $f: \Delta \to A$ *καί* $g: A \to R$ *εἶναι δυό συναρτήσεις, ὅπου* A *καί* Δ *εἶναι διαστήματα, γιά τίς ὁποῖες ὑποθέτουμε ὅτι παραγωγίζονται. Τότε ἡ σύνθεσή τους* $h = g\circ f$ *(ἡ ὁποία, ὅπως ξέρουμε, ὁρίζεται ἀπό τόν τύπο* $h(x) = g[f(x)]$, $x\in\Delta$*) παραγωγίζεται ἐπίσης καί μάλιστα ἰσχύει*

$$h'(x) = g'[f(x)]f'(x).$$

*Ἀπόδειξη.**. Ἔστω $x_0 \in \Delta$. Ἄς θεωρήσουμε μιά ὁποιαδήποτε ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ μέ $x_\nu \in \Delta - \{x_0\}$ $\forall$ $\nu \in N$ καί $x_\nu \to x_0$, γιά τήν ὁποία διακρίνουμε τίς παρακάτω τρεῖς περιπτώσεις:

1. $f(x_\nu) = f(x_0)$ *γιά ἕνα πεπερασμένο πλῆθος δεικτῶν*. Στήν περίπτωση αὐτή, μέ διαγραφή τῶν ὅρων τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού πληροῦν τή σχέση $f(x_\nu) = f(x_0)$ προκύπτει μιά ἀκολουθία $y_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει $y_\nu \to x_0$ (βλ. παρατήρηση τῆς § 1.4 τοῦ κεφ. III) καί

$$f(y_\nu) \neq f(x_0) \quad \forall \; \nu \in N.$$

Τότε θά ἔχουμε

$$\frac{h(y_\nu) - h(x_0)}{y_\nu - x_0} = \frac{h(y_\nu) - h(x_0)}{f(y_\nu) - f(x_0)} \cdot \frac{f(y_\nu) - f(x_0)}{y_\nu - x_0} =$$

$$= \frac{g[f(y_\nu)] - g[f(x_0)]}{f(y_\nu) - f(x_0)} \cdot \frac{f(y_\nu) - f(x_0)}{y_\nu - x_0}.$$

Ἐπειδή ἀπό τήν ὑπόθεση ὑπάρχουν οἱ παράγωγοι $g'(f(x_0))$ καί $f'(x_0)$, εὔκολα διαπιστώνεται ὅτι ἰσχύουν καί

$$\lim \frac{g[f(y_\nu)] - g[f(x_0)]}{f(y_\nu) - f(x_0)} = g'[f(x_0)], \; \lim \frac{f(y_\nu) - f(x_0)}{y_\nu - x_0} = f'(x_0).$$

Ἑπομένως $\lim \dfrac{h(y_\nu) - h(x_0)}{y_\nu - x_0} = g'[f(x_0)]f'(x_0)$ καί, ἀπό τήν παρατήρηση τῆς § 1.4. τοῦ κεφ. III, ἰσχύει ἐπίσης

$$(3) \qquad \lim \frac{h(x_\nu) - h(x_0)}{x_\nu - x_0} = g'[f(x_0)]f'(x_0).$$

2. $f(x_\nu) \neq f(x_0)$ *γιά ἕνα πεπερασμένο πλῆθος δεικτῶν*. Στήν περίπτωση αὐτή, μέ διαγραφή τῶν ὅρων τῆς $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ πού πληροῦν τή σχέση $f(x_\nu) \neq f(x_0)$ προκύπτει μιά ἀκολουθία $y_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει $y_\nu \to x_0$ καί

$$f(y_\nu) = f(x_0) \quad \forall \; \nu \in N.$$

Τότε θά ἔχουμε

$$f'(x_0) = \lim \frac{f(y_\nu) - f(x_0)}{y_\nu - x_0} = \lim \frac{0}{y_\nu - x_0} = 0,$$

καί ἐπίσης

$$\lim \frac{h(y_\nu) - h(x_0)}{y_\nu - x_0} = \lim \frac{g[f(y_\nu)] - g[f(x_0)]}{y_\nu - x_0} = \lim \frac{g[f(x_0)] - g[f(x_0)]}{y_\nu - x_0} = 0$$

καί ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν παρατήρηση τῆς § 1.4 τοῦ κεφ. III, ἰσχύει ἐπίσης

$$\lim \frac{h(x_\nu) - h(x_0)}{x_\nu - x_0} = 0.$$

Ἄρα καί στήν περίπτωση αὐτή ἰσχύει ὁ τύπος (3), γιατί τότε διαπιστώνεται ὅτι $f'(x_0) = 0$.

3. *Καμιά ἀπό τίς περιπτώσεις 1 ἤ 2 δέν ἰσχύει*. Μέ διαγραφή τῶν ὅρων τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού πληροῦν τή σχέση $f(x_\nu) = f(x_0)$ προκύπτει μιά ὑπακολουθία $x_{\kappa_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς $x_\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει $x_{\kappa_\nu} \to x_0$ (ἰδιότητα 2, § 1.4.2 τοῦ κεφ. III) καί $f(x_{\kappa_\nu}) \neq f(x_0)$ $\forall$ $\nu \in N$.

Γιά τήν ὑπακολουθία αὐτή, ἀκριβῶς ὅπως καί στήν περίπτωση 1, προκύπτει ὅτι

$$(4) \qquad \lim \frac{h(x_{\kappa_\nu})-h(x_0)}{x_{\kappa_\nu}-x_0} = g'[f(x_0)]f'(x_0).$$

Παρόμοια, μέ διαγραφή τῶν ὅρων τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ πού πληροῦν τή σχέση $f(x_\nu) \neq f(x_0)$, προκύπτει μιά ὑπακολουθία $x_{\mu_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ τῆς $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, γιά τήν ὁποία ἰσχύει $x_{\mu_\nu} \to x_0$ καί $f(x_{\mu_\nu}) = f(x_0)$ $\forall$ $\nu \in N$. Γιά τήν ὑπακολουθία αὐτή ἀκριβῶς, ὅπως καί στήν περίπτωση 2, προκύπτει ὅτι

$$(5) \qquad \lim \frac{h(x_{\mu_\nu})-h(x_0)}{x_{\mu_\nu}-x_0} = g'[f(x_0)]f'(x_0).$$

Παραπάνω διασπάσαμε τήν ἀκολουθία $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ σέ δυό ὑπακολουθίες της τίς $x_{\kappa_\nu}$, $\nu = 1,2\ldots$ καί $x_{\mu_\nu}$, $\nu = 1,2,\ldots$ γιά τίς ὁποῖες ἰσχύουν οἱ (4) καί (5). Ἀπό τίς σχέσεις αὐτές ἀποδεικνύεται ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος (3).

Ὥστε καί στίς τρεῖς παραπάνω περιπτώσεις ἀποδείξαμε ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος (3), δηλαδή ὅτι ἄν $x_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὁποιαδήποτε ἀκολουθία μέ $x_\nu \in \Delta - \{x_0\}$ $\forall$ $\nu \in N$ τότε

$$\lim x_\nu = x_0 \Rightarrow \lim \frac{h(x_\nu)-h(x_0)}{x_\nu - x_0} = g'[f(x_0)]\, f'(x_0),$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)-h(x_0)}{x-x_0} = g'[f(x_0)]f'(x_0) \quad \text{ἤ} \quad h'(x_0) = g'[f(x_0)] \cdot f'(x_0)$$

καί αὐτό ἰσχύει γιά ὁποιοδήποτε $x_0 \in \Delta$, πού σημαίνει ὅτι

$$h'(x) = g'[f(x)]\, f'(x) \quad \forall \; x \in \Delta.$$

**Παρατήρηση.** Στήν τελευταία περίπτωση, ὅπου ἰσχύουν ταυτόχρονα οἱ τύποι (4) καί (5), ἔχουμε, ὅπως καί στή δεύτερη περίπτωση, $f'(x_0) = 0$.

**Ἐφαρμογές:**

1. $(\sigma\upsilon\nu(2x+3))' = [-\eta\mu(2x+3)]\,(2x+3)' = -\eta\mu(2x+3)\cdot 2 = -2\eta\mu(2x+3)$.

Στό ἀποτέλεσμα αὐτό εἴχαμε καταλήξει καί προηγουμένως μέ ἀπ' εὐθείας ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου.

2. $(a^x)' = a^x \log a$.

Σύμφωνα μέ τόν τύπο (8) τῆς § 3.3 τοῦ κεφ. V ἔχουμε $a^x = e^{x\log a}$ καί ἑπομένως

$$(a^x)' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}\,(x \log a)' = e^{x\log a} \log a = a^x \log a.$$

3. $(x^a)' = ax^{a-1}$, $x \in (0, +\infty)$.

Παρόμοια, ἔχουμε $x^a = e^{a\log x}$ καί ἑπομένως

$$(x^a)' = (e^{a\log x})' = e^{a\log x}\,(a \log x)' = e^{a\log x}\, a(\log x)' = x^a\, a\frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

Εἰδικά γιά $a = \frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\, x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \text{ ἤτοι } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Πραγματικά: $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Γενικότερα ἰσχύει ὁ τύπος

$$(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

ὅπως εὔκολα προκύπτει ἀπό τό θεώρημα 1.7.1.

*Πίνακας τῶν παραγώγων τῶν κυριωτέρων στοιχειωδῶν συναρτήσεων*

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x^\nu$ | $\nu x^{\nu-1}$ | $x^a$ | $ax^{a-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $a^x$ | $a^x \log a$ |
| $\log x$ | $\dfrac{1}{x}$ | $\log_a x$ | $\dfrac{1}{x \log a}$ |
| ημx | συνx | συνx | − ημx |
| εφx | $\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$ | σφx | $-\dfrac{1}{\text{ημ}^2 x}$ |

## 2. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

**2.1** Ἡ ἔννοια τῆς παραγώγου μᾶς ἐξυπηρετεῖ σέ μεγάλο βαθμό στή μελέτη μιᾶς συναρτήσεως, ὄχι μόνο γιατί μποροῦμε νά καταρτίσουμε ταχύτερα τόν πίνακα μεταβολῆς της, ἀλλά καί γιατί μέ τή βοήθεια τῆς παραγώγου μποροῦμε νά ἔχουμε πιό λεπτομερή στοιχεῖα γιά τή συμπεριφορά τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως σέ ὅλη τήν ἔκτασή της. Τά θεωρήματα πού ἀκολουθοῦν ἑρμηνεύουν τό ρόλο τῆς παραγώγου στή μελέτη συναρτήσεως.

**2.1.1** ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἄν ἡ συνάρτηση f παραγωγίζεται σέ ἕνα σημεῖο $x_0$ καί παρουσιάζει τοπικό ἀκρότατο στό σημεῖο αὐτό, τότε ἰσχύει $f'(x_0) = 0$.*

*Ἀπόδειξη.* Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στό σημεῖο $x_0$ (στήν περίπτωση τοπικοῦ ἐλάχιστου ἐργαζόμαστε ἀνάλογα). Τότε θά ὑπάρχει ἕνα ἀνοικτό διάστημα (a,b) μέ $x_0 \in (a,b) \subseteq \mathscr{D}(f)$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\ x \in (a,b).$$

Ἔτσι

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \quad \forall\ x \in (x_0,b) \quad \text{καί} \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,x_0)$$

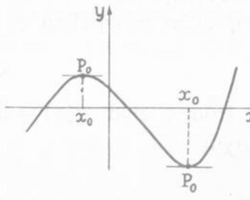
καί ἄρα, ἐπειδή ἡ f παραγωγίζεται στό σημεῖο $x_0$, θά ἔχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \text{ καί } f'(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,$$

δηλαδή $f'(x_0) = 0$.

Τό ἀντίστροφο τοῦ παραπάνω θεωρήματος δέν ἰσχύει. Ἡ ἰσότητα $f'(x_0)=0$ μπορεῖ νά ἰσχύει, χωρίς ἡ συνάρτηση f νά παρουσιάζει ἕνα τοπικό ἀκρότατο στό σημεῖο $x_0$. Αὐτό π.χ. συμβαίνει στήν περίπτωση πού $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$, ἀφοῦ, ἐνῶ $f'(0) = (3x^2)_{x=0} = 0$, γιά κάθε $x > 0$ ἔχουμε $f(-x) = -x^3 < 0 < x^3 = f(x)$. (βλ. καί σχ. 18 κεφ. II).

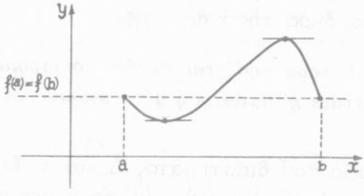
Γεωμετρικά ἡ ὕπαρξη ἑνός τοπικοῦ ἀκροτάτου τῆς συναρτήσεως στό σημεῖο $x_0$ σημαίνει (στήν περίπτωση πού ἡ συνάρτηση παραγωγίζεται στό $x_0$) ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ διαγράμματος τῆς f στό σημεῖο $P_0 = (x_0, f(x_0))$ εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν x (βλ. σχ. 76).



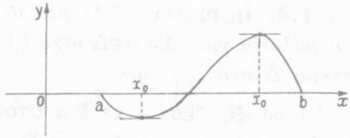

*Σχ. 76*

**2.1.2.** ΘΕΩΡΗΜΑ (*τοῦ Rolle*). *Ἔστω* f *μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα κλειστό διάστημα* [a, b], *ἡ ὁποία εἶναι συνεχής καί ἐπιπλέον παραγωγίζεται στό ἀνοικτό διάστημα* (a, b). *Τότε, ἄν* $f(a) = f(b)$, *ὑπάρχει* $x_0 \in (a,b)$ *τέτοιο, ὥστε* $f'(x_0) = 0$.

Τό θεώρημα αὐτό ἑρμηνεύεται γεωμετρικά (βλ. σχ. 77α) ὡς ἑξῆς: ἄν




*Σχ. 77α*




*Σχ. 77β.*

μιά καμπύλη (δηλαδή τό διάγραμμα μιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως), πού ἔχει ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο της, τέμνεται ἀπό μιά εὐθεία παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν x σέ δυό τουλάχιστο σημεῖα, τότε σέ ἕνα τουλάχιστο σημεῖο ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης αὐτῆς εἶναι παράλληλη πρός τόν ἄξονα τῶν x. Εἰδικά στήν περίπτωση πού $f(a) = f(b) = 0$, ἡ γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ δίδεται στό σχ. 77β.

Τό θεώρημα πού ἀκολουθεῖ ἀποτελεῖ μιά γενίκευση τοῦ θεωρήματος τοῦ *Rolle* καί εἶναι γνωστό ὡς *θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ* ἤ καί ὡς *θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων*.

**2.1.3.** ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ἔστω ὅτι* f *εἶναι μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα κλειστό διάστημα* [a, b], *ἡ ὁποία εἶναι συνεχής καί ἐπιπλέον παραγωγίζεται στό ἀνοικτό διάστημα* (a, b). *Τότε ὑπάρχει* $x_0 \in (a,b)$ *τέτοιο, ὥστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

*Ἀπόδειξη*. Τό θεώρημα αὐτό προκύπτει ἄμεσα ἀπό τό θεώρημα τοῦ Rolle ἄν ἐφαρμοσθεῖ γιά τή συνάρτηση g μέ

$$g(x) = f(a) - f(x) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

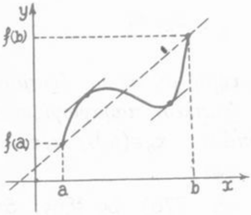
Ἡ συνάρτηση g ἱκανοποιεῖ, πραγματικά, τίς ὑποθέσεις τοῦ θεωρήματος τοῦ Rolle, γιατί αὐτή εἶναι συνεχής, παραγωγίζεται στό (a, b) καί μάλιστα

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

ἐνῶ, ἐπίσης, εἶναι $g(a) = 0 = g(b)$. Ἑπομένως ὑπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει

$$g'(x_0) = -f'(x_0) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

δηλαδή $f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.




*Σχ. 78*

Ἡ γεωμετρική σημασία τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ (βλ. σχ. 78) εἶναι ἡ ἑξῆς: ἄν μιά καμπύλη ἔχει ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο της, τότε σέ ἕνα τουλάχιστο σημεῖο ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης αὐτῆς εἶναι παράλληλη πρός τήν τέμνουσα εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τά ἄκρα τῆς καμπύλης.

**2.1.4. ΠΟΡΙΣΜΑ.** *Ἄν μιά συνάρτηση f παραγωγίζεται σέ ἕνα διάστημα Δ καί μάλιστα γιά κάθε $x \in \Delta$ ἰσχύει $f'(x) = 0$, τότε ἡ συνάρτηση αὐτή παίρνει στό διάστημα Δ σταθερή τιμή.*

*Ἀπόδειξη*. Ἔστω $x^*$ ἕνα σταθερό σημεῖο τοῦ διαστήματος Δ καί x ἕνα ἄλλο ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ διαστήματος αὐτοῦ. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ὑπάρχει σημεῖο $x_0$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει

$$\frac{f(x)-f(x^*)}{x-x^*} = f'(x_0) = 0, \text{ ἄρα } f(x) = f(x^*) \quad \forall\ x \in \Delta.$$

**2.1.5. ΠΟΡΙΣΜΑ.** *Ἄν οἱ συναρτήσεις f καί g παραγωγίζονται στό διάστημα Δ καί μάλιστα γιά κάθε $x \in \Delta$ ἰσχύει $f'(x) = g'(x)$, τότε οἱ συναρτήσεις f καί g διαφέρουν κατά μιά σταθερή συνάρτηση, δηλαδή γιά κάθε $x \in \Delta$ ἰσχύει $f(x) = g(x) + c$.*

*Ἀπόδειξη*. Γιά τή συνάρτηση $h = f - g$ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall\ x \in \Delta$$

καί ἑπομένως, σύμφωνα μέ τό πόρισμα 2.1.4, ἡ h παίρνει στό διάστημα Δ σταθερή τιμή, ἔστω c. Ἄρα $f(x) = g(x) + c \quad \forall\ x \in \Delta$.

**2.1.6. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἄν ἡ συνάρτηση* f *παραγωγίζεται στό διάστημα* Δ, *τότε ἰσχύουν τά παρακάτω*

| | |
|---|---|
| $f'(x) > 0 \;\forall\, x\in\Delta \Rightarrow f \underset{\wedge}{\uparrow} \Delta$ | $f'(x) < 0 \;\forall\, x\in\Delta \Rightarrow f \overset{\vee}{\downarrow} \Delta$ |
| $f'(x) \geqslant 0 \;\forall\, x\in\Delta \Rightarrow f \uparrow \Delta$ | $f'(x) \leqslant 0 \;\forall\, x\in\Delta \Rightarrow f \downarrow \Delta$ |

*Ἀπόδειξη.* Ἄς εἶναι $f'(x) > 0$ γιά κάθε $x\in\Delta$. Τότε, ἄν $x_1, x_2$ εἶναι δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ διαστήματος Δ μέ $x_1 < x_2$, θά ἔχουμε, ἀπό τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ, ὅτι ὑπάρχει $x_0\in(x_1,x_2) \subseteq \Delta$ τέτοιο, ὥστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

ἄρα $f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2-x_1) > 0$, δηλαδή $f(x_1) < f(x_2)$, πού σημαίνει ὅτι ἡ f εἶναι γνησίως αὔξουσα στό Δ. Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$$f'(x) > 0 \quad \forall\; x\in\Delta \Rightarrow f \underset{\wedge}{\uparrow} \Delta.$$

Τά ὑπόλοιπα συμπεράσματα τοῦ θεωρήματος ἐξάγονται μέ ἀνάλογο τρόπο.

**2.1.7. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἔστω* f *μιά συνάρτηση γιά τήν ὁποία ὑπάρχει ἡ δεύτερη παράγωγος στό διάστημα* (a,b) *πού εἶναι καί συνεχής. Τότε, ἄν* $x_0\in(a,b)$ *μέ* $f'(x_0) = 0$, *ἰσχύουν:*

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ ἡ f *παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στό* $x_0$

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ ἡ f *παρουσιάζει τοπικό ἐλάχιστο στό* $x_0$.

*Ἀπόδειξη.* Ἡ συνέχεια τῆς δεύτερης παραγώγου f″ καί ἡ ἀνισότητα $f''(x_0) < 0$ συνεπάγονται ἀπό τό θεώρημα 1.2.3 τοῦ κεφ. V ὅτι ὑπάρχει διάστημα $(a_1, b_1)$ μέ $x_0 \in (a_1, b_1) \subseteq (a, b)$ καί $f''(x) < 0 \;\forall\; x\in(a_1, b_1)$. Ἄρα ἀπό τό θεώρημα 2.1.6 παίρνουμε ὅτι $f' \overset{\vee}{\downarrow} (a_1, b_1)$ καί ἑπομένως

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f' \overset{\vee}{\downarrow} (a_1, x_0] \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) \geqslant f'(x_0) = 0 \;\forall\; x\in(a_1,x_0] \Rightarrow f \uparrow (a_1, x_0]$$

$$\Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0) \;\forall\; x\in(a_1, x_0].$$

Παρόμοια

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0 \\ f' \overset{\vee}{\downarrow} [x_0, b_1) \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) \leqslant f'(x_0) = 0 \;\forall\; x\in[x_0, b_1) \Rightarrow f \downarrow [x_0, b_1)$$

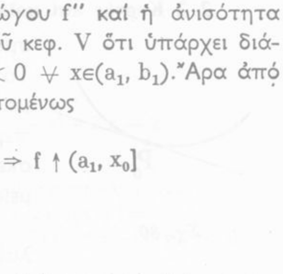
$$\Rightarrow f(x_0) \geqslant f(x) \;\forall\; x\in[x_0, b_1).$$

Ὥστε ἀποδείξαμε (βλ. σχ. 79) ὅτι ἰσχύει

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall\; x\in(a_1, b_1),$$

δηλαδή ὅτι ἡ f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στό σημεῖο $x_0$.

Ἄν $f''(x_0) > 0$, τότε μέ ἐφαρμογή τοῦ παραπάνω συμπεράσματος γιά τή συνάρτηση −f (γιά τήν ὁποία ἰσχύει $(-f)'(x_0) = -f'(x_0) = 0$ καί $(-f)''(x_0) = -f''(x_0) < 0$) προκύπτει ὅτι



*Σχ. 79*

αὐτή (ἡ $-f$) παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στό σημεῖο $x_0$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι ἡ $f$ παρουσιάζει τοπικό ἐλάχιστο στό $x_0$.

**Ἐφαρμογή.** Γιά μιά ἐφαρμογή τῶν παραπάνω, ἄς μελετήσουμε τώρα τή διτετράγωνη τριώνυμη συνάρτηση $f$ μέ $f(x) = 2x^4 - 4x^2 - 1$, τήν ὁποία μελετήσαμε καί στήν § 2.1 (ἐφαρμογή 3, παράδ. 1) τοῦ κεφ. II (βλ. σχ. 43).

Πρῶτα ὑπολογίζουμε τήν πρώτη καί δεύτερη παράγωγο τῆς $f$. Ἔτσι ἔχουμε

$$f'(x) = (2x^4)' - (4x^2)' - 0 = 8x^3 - 8x = 8x\,(x^2-1)$$
$$f''(x) = (8x^3)' - (8x)' = 24x^2 - 8.$$

Οἱ ρίζες τῆς πρώτης παραγώγου $f'$ εἶναι $-1, 0, 1$ γιά τίς ὁποῖες ἰσχύουν

$$f''(-1) = 24 - 8 = 16 > 0,\ f''(0) = -8 < 0 \ \text{καί}\ f''(1) = 16 > 0$$

καί ἑπομένως, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 2.1.7, ἡ $f$ παρουσιάζει τοπικό ἐλάχιστο στά σημεῖα $-1$ καί $1$ καί τοπικό μέγιστο στό σημεῖο $0$.

Ἐπίσης, εὔκολα προκύπτουν καί τά παρακάτω:

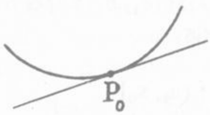
$$f'(x) < 0 \ \forall\ x \in (-\infty, -1) \ \text{καί}\ \forall\ x \in (0,1)$$
$$f'(x) > 0 \ \forall\ x \in (-1,0) \ \text{καί}\ \forall\ x \in (1, +\infty),$$

τά ὁποῖα, ἀπό τό θεώρημα 2.1.6, συνεπάγονται τά ἑξῆς:

$$f \downarrow (-\infty, -1),\ f \uparrow (-1,0),\ f \downarrow (0,1) \ \text{καί}\ f \uparrow (1, +\infty),$$

δηλαδή τά συμπεράσματα τοῦ πίνακα μεταβολῆς τῆς $f$ τῆς § 2.1 τοῦ κεφ. II.

**2.2 Κυρτές καί κοῖλες συναρτήσεις.** Ἔστω $f$ μιά συνάρτηση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα $\Delta$, ἡ ὁποία παραγωγίζεται στό $\Delta$. Τότε, ὅπως ξέρουμε, ὑπάρχει ἡ ἐφαπτομένη σέ κάθε σημεῖο τοῦ διαγράμματός της. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τήν περίπτωση ὅπου τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως $f$ βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐφαπτομένη στό ὁποιοδήποτε σημεῖο του $P_0$ (βλ. σχ. 80).




*Σχ. 80*

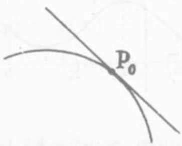
Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε στήν § 1.2 αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου, ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τοῦ διαγράμματος τῆς $f$ στό σημεῖο $P_0 = (x_0, f(x_0))$ εἶναι ἡ

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0),$$

τό διάγραμμα τῆς $f$ βρίσκεται πάνω ἀπό τήν ἐφαπτομένη του στό σημεῖο $P_0$, τότε καί μόνο τότε, ἄν ἰσχύει

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) > 0 \ \forall\ x \in \Delta - \{x_0\}.$$

Στήν παραπάνω περίπτωση, ὅπου ἡ τελευταία σχέση ἰσχύει γιά ὁποιοδήποτε $x_0 \in \Delta$, λέμε ὅτι ἡ συνάρτηση $f$ εἶναι *κυρτή* στό $\Delta$, ἤ καί ἁπλά *κυρτή*.




*Σχ. 81*

Ἀνάλογα, ἄν δεχθοῦμε ὅτι τό διάγραμμα τῆς $f$ βρίσκεται κάτω ἀπό τήν ἐφαπτομένη του σέ ἕνα σημεῖο του $P_0$ (βλ. σχ. 81), θά καταλήξουμε, παρόμοια, στό συμπέρασμα ὅτι αὐτό συμβαίνει, τότε καί μόνο τότε, ἄν γιά ὁποιοδήποτε σημεῖο $x_0 \in \Delta$ ἰσχύει

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < 0 \quad \forall \; x \in \Delta - \{x_0\}.$$

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι ἡ f εἶναι *κοίλη* στό Δ ἤ ἁπλά *κοίλη*.

Ὥστε

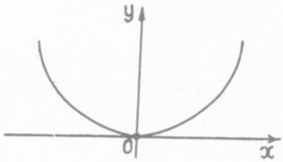
$$\boxed{f \text{ κυρτή στό } \Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) > 0 \;\; \forall \; x,y \text{ στό } \Delta \text{ μέ } x \neq y}$$

$$\boxed{f \text{ κοίλη στό } \Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) < 0 \;\; \forall \; x,y \text{ στό } \Delta \text{ μέ } x \neq y}$$

**Παραδείγματα:**

1. *Ἡ συνάρτηση* f μέ $f(x) = x^2$ *εἶναι κυρτή*. Πραγματικά· ἔχουμε

$f(x) - f(y) - f'(y)(x - y) = x^2 - y^2 - 2y(x - y) = x^2 - y^2 - 2xy + 2y^2 = x^2 - 2xy + y^2 =$
$= (x - y)^2 > 0 \;\; \forall \; x \neq y$ (βλ. σχ. 82).

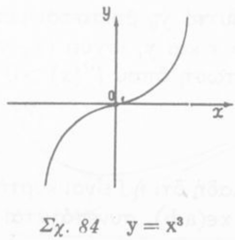



*Σχ. 82* $y = x^2$


*Σχ. 83* $y = -x^2 + 2x - 2$.

2. *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = -x^2 + 2x-2$ *εἶναι κοίλη*. Πραγματικά· ἔχουμε
$f(x)-f(y)-f'(y)(x-y) = -x^2 + 2x-2-(-y^2 + 2y-2)-(-2y + 2)(x-y) =$
$= -x^2 + 2x-2 + y^2-2y + 2 + 2yx-2x-2y^2 + 2y = -x^2 + 2xy-y^2 = -(x-y)^2 < 0$
$\forall \; x \neq y$ (βλ. σχ. 83).

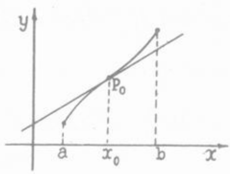
3. *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = x^3$ *εἶναι κοίλη στό* $(-\infty,0)$ *καί κυρτή στό* $(0, +\infty)$. Πραγματικά· ἔχουμε
$f(x)-f(y)-f'(y)(x-y) = x^3-y^3-3y^2(x-y) =$
$=(x-y)(x^2 + xy + y^2) -3y^2(x-y) = (x-y)(x^2+xy-2y^2) =$
$= (x-y)^2 (x + 2y)$
καί ἑπομένως
$f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) < 0 \;\; \forall x, y$ στό $(-\infty,0)$ μέ $x \neq y$
καί
$f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) > 0 \;\; \forall \; x,y$ στό $(0, +\infty)$ μέ $x \neq y$.



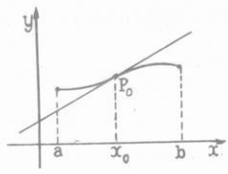

*Σχ. 84* $y = x^3$

Στό τελευταῖο ἀπό τά παραπάνω παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι ἡ συνάρτηση f μέ $f(x) = x^3$ εἶναι κοίλη ἀριστερά τοῦ 0 καί κυρτή δεξιά τοῦ 0 (βλ. σχ. 84). Αὐτό τό ἐκφράζουμε λέγοντας ὅτι ἡ συνάρτηση *παρουσιάζει καμπή στό* 0.

Γενικά, λέμε ὅτι μιά συνάρτηση f πού εἶναι παραγωγίσιμη σέ ἕνα ἀνοικτό διάστημα (a,b) *παρουσιάζει καμπή στό σημεῖο* $x_0 \in (a,b)$ τότε καί μόνο τότε, ἄν αὐτή εἶναι κοίλη στό $(a, x_0)$ καί κυρτή στό $(x_0,b)$ ἤ ἄν εἶναι κυρτή στό $(a,x_0)$ καί κοίλη στό $(x_0,b)$ (βλ. σχ. 85 καί 86). Τό ἀντίστοιχο σημεῖο $P_0 = (x_0, f(x_0))$ τοῦ διαγράμματος τῆς συναρτήσεως ὀνομάζεται τότε *σημεῖο καμπῆς* τοῦ διαγράμματος αὐτοῦ. Στήν περίπτωση πού τό σημεῖο $P_0$ εἶναι σημεῖο καμπῆς, ἡ ἐφαπτομένη τοῦ γραφήματος τῆς f στό σημεῖο αὐτό διαπερνᾶ τό γράφημα, ὅπως φαίνεται καί στά σχήματα 85 καί 86.




*Σχ. 85*




*Σχ. 86*

**2.2.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἔστω* f *μιά συνάρτηση γιά τήν ὁποία ὑπάρχει ἡ δεύτερη παράγωγος στό διάστημα* (a,b). *Τότε ἰσχύουν:*

$$f''(x) > 0 \;\forall\; x \in (a,b) \Rightarrow f \text{ κυρτή στό } (a,b)$$
$$f''(x) < 0 \;\forall\; x \in (a,b) \Rightarrow f \text{ κοίλη στό } (a,b).$$

*Ἀπόδειξη.* Ἄν x,y εἶναι δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ διαστήματος (a,b) μέ $x \neq y$, τότε, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ὑπάρχει σημεῖο $x_0$ μεταξύ τῶν x καί y τέτοιο, ὥστε

$$f(x) - f(y) = f'(x_0)(x-y).$$

Ἄρα ἰσχύει καί

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) = [f'(x_0) - f'(y)](x-y),$$

τό ὁποῖο, μέ ἐφαρμογή πάλι τοῦ θεωρήματος τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ γιά τήν f', μᾶς δίνει

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) = f''(y_0)(x_0-y)(x-y), \tag{6}$$

ὅπου τό $y_0$ βρίσκεται μεταξύ τῶν $x_0$ καί y. Ἐπειδή τό $x_0$ βρίσκεται μεταξύ τῶν x καί y, ἰσχύει $(x_0-y)(x-y) > 0$. Ἑπομένως ἡ σχέση (6) στήν πρώτη περίπτωση ὅπου $f''(x) > 0 \;\forall\; x \in (a,b)$, συνεπάγεται ὅτι

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) > 0$$

δηλαδή ὅτι ἡ f εἶναι κυρτή στό (a,b), ἐνῶ στή δεύτερη περίπτωση ὅπου $f''(x) < 0$ $\forall\; x \in (a,b)$, συνεπάγεται ὅτι

$$f(x) - f(y) - f'(y)(x-y) < 0,$$

δηλαδή ὅτι ἡ f εἶναι κοίλη στό (a,b).

**'Εφαρμογές:**

1. *'Η συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \gamma\sqrt{\alpha^2-x^2}$, $\alpha > 0$ *εἶναι κοίλη γιά* $\gamma > 0$ *καί κυρτή γιά* $\gamma < 0$. Πραγματικά· ἔχουμε

$$f'(x) = \gamma \frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}(\alpha^2-x^2)' = \gamma\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}(-2x) = -\gamma\frac{x}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

καί

$$f''(x) = -\gamma\frac{(x)'\sqrt{\alpha^2-x^2} - x\left(\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)'}{\alpha^2-x^2} = -\gamma\frac{\sqrt{\alpha^2-x^2} - x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{\alpha^2-x^2}}}{\alpha^2-x^2} =$$

$$= -\gamma\frac{\alpha^2}{(\alpha^2-x^2)\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

'Επομένως γιά $\gamma > 0$, ἔχουμε

$$f''(x) < 0 \ \forall\ x\in(-\alpha, \alpha), \text{ ἄρα f κοίλη στό } (-\alpha, \alpha),$$

*ἐνῶ* γιά $\gamma < 0$, ἔχουμε

$$f''(x) > 0 \ \forall\ x\in(-\alpha, \alpha), \text{ ἄρα f κυρτή στό } (-\alpha, \alpha)$$

(βλ. σχ. 45 καί 46, § 3.2 τοῦ κεφ. ΙΙ).

2. *'Η συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \gamma\sqrt{x^2-\alpha^2}$, $\alpha > 0$, *γιά* $\gamma > 0$ *εἶναι κοίλη στά διαστήματα* $(-\infty, -\alpha)$ *καί* $(\alpha, +\infty)$, *ἐνῶ γιά* $\gamma < 0$ *εἶναι κυρτή στά* $(-\infty, -\alpha)$ *καί* $(\alpha, +\infty)$, (βλ. σχ. 55 καί 56, § 3.3 τοῦ κεφ. ΙΙ). Πραγματικά· ἔχουμε

$$f'(x) = \gamma\frac{(x^2-\alpha^2)'}{2\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \gamma\frac{2x}{2\sqrt{x^2-\alpha^2}} = \gamma\frac{x}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

καί

$$f''(x) = \gamma\frac{(x)'\sqrt{x^2-\alpha^2} - x\left(\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)'}{x^2-\alpha^2} = \gamma\frac{\sqrt{x^2-\alpha^2} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2-\alpha^2}}}{x^2-\alpha^2} =$$

$$= -\gamma\frac{\alpha^2}{(x^2-\alpha^2)\sqrt{x^2-\alpha^2}}.$$

'Επομένως γιά $\gamma > 0$, ἔχουμε

$$f''(x) < 0 \ \forall\ x\in(-\infty, -\alpha) \text{ καί } \forall\ x\in(\alpha, +\infty)$$

καί γιά $\gamma < 0$, ἔχουμε

$$f''(x) > 0 \ \forall\ x\in(-\infty, -\alpha) \text{ καί } \forall\ x\in(\alpha, +\infty).$$

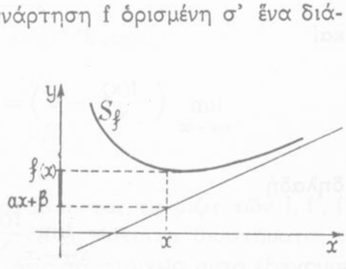
**2.3. 'Ασύμπτωτες.** Ἄς θεωρήσουμε μιά συνάρτηση f ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(\alpha, +\infty)$. Μιά εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = \alpha x + \beta$ ὀνομάζεται *ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος τῆς* f (βλ. σχ. 87), ἄν ἰσχύει

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x - \beta] = 0.$$

'Από τή σχέση αὐτή προκύπτουν οἱ τύποι:

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ καί } \beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x].$$

Πραγματικά· ὁ τύπος $\beta = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - \alpha x]$



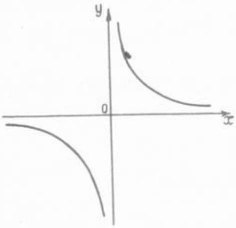

*Σχ. 87*

εἶναι φανερός, ἐνῶ ὁ ἄλλος προκύπτει ὡς ἑξῆς:

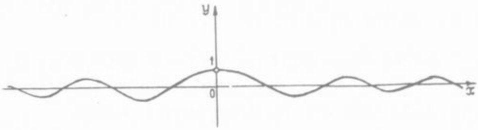
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\alpha\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-\alpha x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\frac{\beta}{+\infty}=0$$

δηλαδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\alpha.$

Ἀπό τά παραπάνω φαίνεται ὅτι ὁ ἄξονας τῶν x, δηλαδή ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y=0$ ($\alpha=\beta=0$), εἶναι ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος ὁποιασδήποτε μηδενικῆς συναρτήσεως γιά $x\to+\infty$. Π.χ. τοῦτο φαίνεται στά σχ. 88 καί 89 γιά τίς συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπ' τούς τύπους $y=\frac{1}{x}$ καί $y=\frac{1}{x}$ ημx, οἱ ὁποῖες, ὅπως γνωρίζουμε, εἶναι μηδενικές γιά $x\to+\infty$.




*Σχ. 88* $y=\frac{1}{x}$




*Σχ. 89* $y=\frac{1}{x}$ ημx

Παρόμοια, στήν περίπτωση πού παίρνουμε τή συνάρτηση f ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα τῆς μορφῆς $(-\infty,\alpha)$, λέμε ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y=\alpha x+\beta$ *εἶναι ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος τῆς* f, ἄν ἰσχύει

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x-\beta]=0.$$

Παρόμοια τότε, ἔχουμε

$$\beta=\beta+0=\beta+\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x-\beta]=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]$$

καί

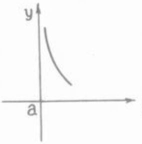
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-\alpha\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)-\alpha x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\alpha x)}{\lim\limits_{x\to-\infty}x}=\frac{\beta}{-\infty}=0$$

δηλαδή

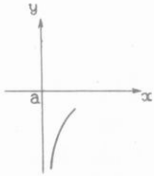
$$\alpha=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\ \text{καί}\ \beta=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]$$

Εἶναι λοιπόν φανερό ὅτι ὁ ἄξονας τῶν x εἶναι ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος ὁποιασδήποτε μηδενικῆς συναρτήσεως γιά $x\to-\infty$. Αὐτό, π.χ., φαίνεται στά σχ. 88 καί 89, ὅπου οἱ ἀντίστοιχες συναρτήσεις εἶναι μηδενικές γιά $x \to -\infty$.

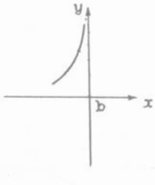
Τέλος, ἄν γιά τή συνάρτηση f ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι ὁρισμένη σ' ἕνα τοὐλάχιστο ἀνοικτό διάστημα $(a,b)$ ($a,b$ πραγματικοί ἀριθμοί), τότε λέμε ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $x=a$ εἶναι (κατακόρυφη) *ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος τῆς* f, ἄν ἰσχύει $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$ ἤ $-\infty$ (βλ. σχ. 90 καί 91), ἐνῶ λέμε ὅτι ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $x=b$ εἶναι (κατακόρυφη) *ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος τῆς* f ἄν ἰσχύει $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$ ἤ $-\infty$ (βλ. σχ. 93 καί 94).



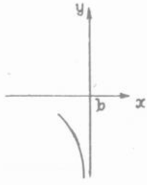

*Σχ. 90*




*Σχ. 91*




*Σχ. 92*




*Σχ. 93*

Π.χ. στό σχ. 88 ὁ ἄξονας τῶν y εἶναι εὐθεία ἀσύμπτωτη τοῦ διαγράμματος, ἐνῶ, ἀντίθετα, στό σχ. 89 δέν συμβαίνει αὐτό.

**2.4 Ἐφαρμογές στή μελέτη συναρτήσεως.** Τά συμπεράσματα πού βγάλαμε παραπάνω μᾶς ἐπιτρέπουν νά μελετήσουμε μιά συνάρτηση μέ τή βοήθεια τῆς πρώτης καί δεύτερης παραγώγου της ἐξετάζοντας μόνο τή μεταβολή τοῦ προσήμου τους. Ἔτσι, ὄχι μόνο μποροῦμε νά καθορίσουμε τοπικά (κατά διαστήματα) τό εἶδος τῆς μονοτονίας (ἀπό τό πρόσημο τῆς πρώτης παραγώγου, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 2.1.6), ἀλλά καί τό ἄν ἡ συνάρτηση εἶναι κυρτή ἤ κοίλη (ἀπό τό πρόσημο τῆς δεύτερης παραγώγου, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 2.2.1). Ἐπίσης ὁ καθορισμός τῶν σημείων, ὅπου ἡ συνάρτηση παρουσιάζει τοπικά ἀκρότατα ἤ καμπή, εἶναι εὐχερής, ἐνῶ ὁ καθορισμός τῶν ἀσυμπτώτων διευκολύνει στή χάραξη τοῦ γραφήματός της. Στά παραδείγματα πού ἀκολουθοῦν γίνεται σαφής ἡ τεχνική τῆς μελέτης μιᾶς συναρτήσεως

**2.4.1** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-3)$. Ἔχουμε

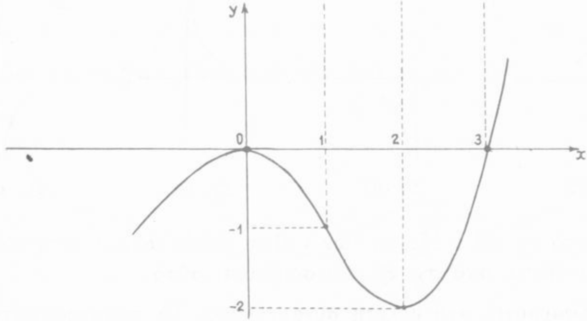
$f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-3)\cdot$ ρίζες τῆς f : 0,3

$f'(x) = \frac{3}{2}x(x-2)\cdot$ ρίζες τῆς f' : 0,2

$f''(x) = 3(x-1)\cdot$ ρίζα τῆς f'' : 1.

Σχηματίζουμε τόν παρακάτω πίνακα διατάσσοντας τίς ρίζες τῶν f, f', f'' πάνω σ' ἕναν ἄξονα καί σημειώνουμε πάνω στά ἀντίστοιχα διαστήματα τό πρόσημο τῶν συναρτήσεων f', f'' καί f. Τέλος, ἀπό τά στοιχεῖα αὐτά ἐξάγουμε, στήν τελευταία γραμμή τοῦ πίνακα, τά συμπεράσματά μας γιά τή μονοτονία τῆς f καί γιά τό ἄν αὐτή εἶναι κυρτή ἤ κοίλη. Ἀκόμη, σημειώνουμε καί τά σημεῖα, ὅπου ἡ συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή (κ), τοπικό μέγιστο (τ.μ.) καί τοπικό ἐλάχιστο (τ.ε). Κάτω ἀκριβῶς ἀπό τόν πίνακα αὐτό χαράζουμε τό διάγραμμα τῆς συναρτήσεως (βλ. σχ. 94).

| $x$ | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | | − | 0 | + | | + |
| $f''(x)$ | − | | − | 0 | + | | + | | + |
| $f(x)$ | − | 0 | − | −1 | − | −2 | − | 0 | + |
| | ↗ Κοίλη | τ.μ | ↘ Κοίλη | κ | ↘ Κυρτή | τ.ε | ↗ Κυρτή | | ↗ Κυρτή |




*Σχ. 94* $\quad y=\frac{1}{2}x^2(x-3)$

Στήν περίπτωση τῆς παραπάνω συναρτήσεως, εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι δέν ὑπάρχουν ἀσύμπτωτες, γιατί $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x(x-3)=+\infty$.

**2.4.2** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$. Ἔχουμε

$$f'(x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \quad \text{καὶ} \quad f''(x)=\frac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$$

Ἐπίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=\frac{1}{+\infty}=0 \quad \text{καὶ}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}e^{-\frac{1}{x}}=1.$$

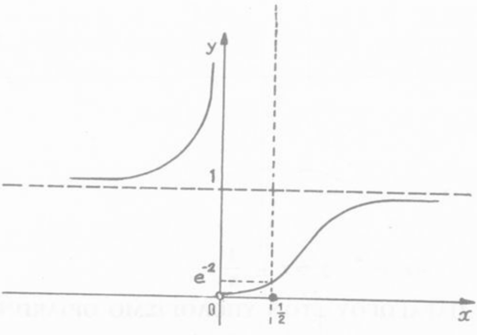
Ἄρα ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y=0x+1=1$ εἶναι (ὁριζόντια) ἀσύμπτωτη (γιά $x\to-\infty$, βρίσκουμε πάλι τήν ἴδια ἀσύμπτωτη).

Ἐπειδή ἡ συνάρτηση f δέν εἶναι ὁρισμένη στό σημεῖο 0, ἡ εὕρεση τῶν ὁριακῶν τιμῶν $\lim\limits_{x\to-0}f(x)$ καί $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$ μᾶς διευκολύνει στή χάραξη τοῦ διαγράμματος. Στήν προκειμένη περίπτωση ὑπολογίζεται ὅτι

$$\lim_{x\to -0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{x\to +0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

καί ἄρα ὁ ἄξονας τῶν y εἶναι (κατακόρυφη) ἀσύμπτωτη (βλ. σχ. 95).

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| | | Κυρτή | | Κυρτή | K | Κοίλη | |




*Σχ. 95* $\quad y = e^{-\frac{1}{x}}$

**2.4.3** *Ἡ συνάρτηση* f *μέ* $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Ἔχουμε:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\cdot \quad \text{ρίζες τῆς } f' : -1, 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Ἐπίσης

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 \quad \text{καί} \quad \lim_{x\to +\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Ἄρα, ἡ εὐθεία μέ ἐξίσωση $y = 1\cdot x + 0 = x$ εἶναι ἀσύμπτωτη (γιά $x \to -\infty$ βρίσκουμε πάλι τήν ἴδια ἀσύμπτωτη). Ἐπειδή ἡ συνάρτηση f δέν εἶναι ὁρισμένη στό 0, ὑπολογίζουμε τίς ὁριακές τιμές

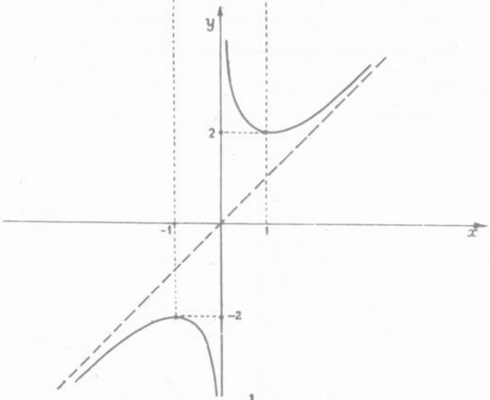
$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to -0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 + (-\infty) = -\infty$$

καί

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0} \left( x + \frac{1}{x}\right) = 0 + (+\infty) = +\infty.$$

Ἄρα καί ὁ ἄξονας τῶν y εἶναι (κατακόρυφη) ἀσύμπτωτη.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $-2$ | $-$ | | $+$ | $2$ | $+$ |
| | ↗ Κοίλη | τ.μ | ↘ Κοίλη | | Κυρτή ↘ | τ.ε | ↗ Κυρτή |




*Σχ. 96* $\quad y = x + \dfrac{1}{x}$

## 3. Ο ΡΟΛΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

**3.1 Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$** . Γιά τή συνάρτηση h μέ $h(x) = \dfrac{\log(1+x)}{e^x-1}$ παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει $\lim\limits_{x\to 0} \log(1+x) = \log 1 = 0$ καί $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1) = e^0-1 = 0$ καί ἐπομένως γιά νά ὑπολογίσουμε τήν ὁριακή τιμή $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{e^x-1}$ δέν μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τόν τύπο

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0} g(x)}$$

(ἡ πράξη $\frac{0}{0}$, ὅπως ξέρουμε, δέν εἶναι ἐπιτρεπτή). Ὅμως, μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε τήν ὁριακή αὐτή τιμή ὡς ἑξῆς:

$$\frac{\log(1+x)}{e^x-1} = \frac{\log(1+x)-\log 1}{e^x-e^0} = \frac{\dfrac{\log(1+x)-\log 1}{x}}{\dfrac{e^x-e^0}{x}} \quad \forall\ x > -1 \text{ μὲ } x \neq 0$$

καί ἐπομένως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{e^x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)-\log 1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^0}{x}} = \frac{(\log(1+x))'_{x=0}}{(e^x)'_{x=0}} = \frac{\dfrac{1}{1+0}}{e^0} = 1.$$

Ὁριακές τιμές ὅπως ἡ παραπάνω, δηλαδή ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ὀνομάζονται *ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $\frac{0}{0}$. Ἀκολουθώντας τήν ἴδια τεχνική, ὅπως παραπάνω γιά τόν ὑπολογισμό τῆς ὁριακῆς τιμῆς $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{e^x-1}$ μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τό ἑξῆς θεώρημα:

**3.1.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἔστω ὅτι* f *καί* g *εἶναι συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς* $(a, x_0]$ *ἤ* $[x_0,b)$ *ἤ* $(a, x_0] \cup [x_0, b) = (a,b)$ *οἱ ὁποῖες παραγωγίζονται στό σημεῖο* $x_0$ *καί μάλιστα* $g'(x_0) \neq 0$. *Τότε, ἄν* $f(x_0)= 0 = g(x_0)$, *ἰσχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

*Ἀπόδειξη.* Ἔχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} \qquad x \neq x_0,$$

καί ἄρα ἰσχύει καί

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

*Σημείωση.* Παραπάνω, στήν περίπτωση πού τό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f καί g εἶναι τῆς μορφῆς $(a, x_0]$, μέ τό σύμβολο $\lim\limits_{x\to x_0}$ ἐννοοῦμε τό $\lim\limits_{x\to x_0-0}$. Παρόμοια, στήν περίπτωση πού τό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f καί g εἶναι τῆς μορφῆς $[x_0,b)$, μέ τό $\lim\limits_{x\to x_0}$ ἐννοοῦμε τό $\lim\limits_{x\to x_0+0}$

**Ἐφαρμογές:**

**1.** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἔχουμε $(x)' = 1$ καί $(1-e^{-x})' = 0-e^{-x}(-x)' = -e^{-x}(-1)=e^{-x}$, καί ἄρα ἀπό τό παραπάνω θεώρημα παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = \frac{(x)'_{x=0}}{(1-e^{-x})'_{x=0}} = \frac{1}{e^{-0}} = \frac{1}{1} = 1.$$

**2.** $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1+\text{συν}x}{x-\pi} = 0$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἔχουμε $(1 + \text{συν}x)' = 0 + (-\text{ημ}x) = -\text{ημ}x$ καί $(x-\pi)' =1-0 = 1$. Ἄρα, ἀπό τό παραπάνω θεώρημα παίρνουμε

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi}=\frac{(1+\sigma\upsilon\nu x)'_{x=\pi}}{(x-\pi)'_{x=\pi}}=\frac{-\eta\mu\pi}{1}=\frac{-0}{1}=0.$$

Ἐκτός ἀπό τό θεώρημα 3.1.1, πού εἶναι γνωστό στή βιβλιογραφία ὡς κανόνας τοῦ *de l' Hospital*, ἰσχύει καί τό παρακάτω θεώρημα.

**3.1.2. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἔστω ὅτι* f *καί* g *εἶναι συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς* $(a,x_0)$ *ἤ* $(x_0,b)$ *ἤ* $(a,x_0)\cup(x_0,b)$, *οἱ ὁποῖες παραγωγίζονται. Τότε, ἄν* $\lim_{x\to x_0}f(x)=0=\lim_{x\to x_0}g(x)$, *ἰσχύει*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\Rightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Στό θεώρημα αὐτό τό $x_0$ μπορεῖ νά εἶναι καί ἕνα ἀπό τά σύμβολα $+\infty$ ἤ $-\infty$ καί ἄρα, τότε, τό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν f καί g θά εἶναι τῆς μορφῆς $(a,+\infty)$ ἤ $(-\infty,b)$ ἀντίστοιχα, ἐνῶ ἡ τρίτη περίπτωση φυσικά ἀποκλείεται.

**Ἐφαρμογές:**

**1.** $\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-x}+x-1}=2$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἔχουμε $(x^2)'=2x$, $(e^{-x}+x-1)'=e^{-x}(-x)'+1-0=e^{-x}(-1)+1=1-e^{-x}$ καί παρατηροῦμε ὅτι ἡ ὁριακή τιμή $\lim_{x\to0}\frac{(x^2)'}{(e^{-x}+x-1)'}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{1-e^{-x}}=2\lim\frac{x}{1-e^{-x}}$ εἶναι ἐπίσης μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Αὐτή μάλιστα ὑπολογίσθηκε στήν παραπάνω ἐφαρμογή 1 καί ἄρα, ἀπό τό παραπάνω θεώρημα 3.1.2, ἰσχύει

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{e^{-x}+x-1}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2)'}{(e^{-x}+x-1)'}=2\lim_{x\to0}\frac{x}{1-e^{-x}}=2\cdot1=2.$$

**2.** $\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^2}=0$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἔχουμε $(x-\eta\mu x)'=1-\sigma\upsilon\nu x$, $(x^2)'=2x$ καί παρατηροῦμε ὅτι ἡ ὁριακή τιμή $\lim_{x\to0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{2x}$ εἶναι ἐπίσης μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Αὐτή, ἀπό τό θεώρημα 3.3.1, ὑπολογίζεται ὅτι εἶναι ἴση μέ $\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)'_{x=0}}{(2x)'_{x=0}}=\frac{\eta\mu0}{2}=\frac{0}{2}=0$, δηλαδή ἰσχύει $\lim_{x\to0}\frac{(x-\eta\mu x)'}{(x^2)'}=0$. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό θεώρημα 3.1.2 παίρνουμε καί

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^2}=0.$$

**3.** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\log\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}=-1$. Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει $\lim_{x\to+\infty}\log\frac{x-1}{x}=\log\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}\right)=$

$= \log 1 = 0$ καί ἐπίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, δηλαδή ὅτι ἡ ὁριακή τιμή $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log \frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}$ εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$. Ἑπομένως, μέ τή βοήθεια τοῦ θεωρήματος 3.1.2 ἔχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log \frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\log \frac{x-1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x-1}\left(\frac{x-1}{x}\right)'}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1}{0-1} = -1.$$

**3.2 Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$.** Ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

ὀνομάζονται *ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $\frac{+\infty}{+\infty}$. Τίς ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου αὐτοῦ μποροῦμε νά τίς ὑπολογίσουμε μέ τή βοήθεια τοῦ παρακάτω θεωρήματος, πού εἶναι ἀνάλογο πρός τό θεώρημα 3.1.2.

**3.2.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἔστω ὅτι* f *καί* g *εἶναι συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα σύνολο τῆς μορφῆς* $(a, x_0)$ *ἤ* $(x_0, b)$ *ἤ* $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, *καί ὅτι παραγωγίζονται. Τότε ἄν* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$, *ἰσχύει*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Στό θεώρημα αὐτό μπορεῖ, ἐπίσης, τό $x_0$ νά εἶναι ἕνα ἀπό τά σύμβολα $+\infty$ ἤ $-\infty$.

**Ἐφαρμογές:**

**1.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = 0$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty} \log x = +\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} x$. Ἄρα, ἀπό τό θεώρημα 3.2.1 ἔχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

**2.** $\lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x} = -\infty$. Παρατηροῦμε ὅτι $\lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x} = -\lim\limits_{x\to+0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}$ καί ἀκόμη ὅτι ἡ ὁριακή τιμή $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}$ εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Ἄρα ἔχουμε

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}=\lim_{x\to+0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'}{(-\log x)'}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

καί ἐπομένως

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x}=-\lim_{x\to+0}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{-\log x}=-(+\infty)=-\infty\,.$$

## 3.3 Ἀπροσδιόριστες μορφές τῶν τύπων $+\infty-(+\infty)$ καί $0(+\infty)$.

**3.3.1** *Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $+\infty-(+\infty)$ εἶναι ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)],\ \text{ὅπου}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty=\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Οἱ ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου αὐτοῦ ἀνάγονται σέ ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$. Πραγματικά· ἄν $F=\dfrac{1}{f}$ καί $G=\dfrac{1}{g}$, τότε παρατηροῦμε ὅτι

$$\lim_{x\to x_0}\Big[f(x)-g(x)\Big]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{F(x)}-\frac{1}{G(x)}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{G(x)-F(x)}{F(x)G(x)}$$

Ἄρα, ἐπειδή

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}=\frac{1}{+\infty}=0\ \text{καὶ}\ \lim_{x\to x_0}=G(x)=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{1}{+\infty}=0,$$

συμπεραίνουμε ὅτι ἡ ὁριακή τιμή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{G(x)-F(x)}{F(x)\,G(x)}$ εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$.

**Παράδειγμα :** $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\log(1+x^2)}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}$. Πραγματικά·

Ἄρα

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\log(1+x^2)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\log(1+x^2)}{x^2\log(1+x^2)}$$ καί ἡ τελευταία αὐτή

ὁριακή τιμή εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\dfrac{0}{0}$, γιατί

$$\lim_{x\to0}\big(x^2-\log(1+x^2)\big)=0=\lim_{x\to0}\big(x^2\log(1+x^2)\big).$$

Ἄρα

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\log(1+x^2)}{x^2\log(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{(x^2-\log(1+x^2))'}{(x^2\log(1+x^2))'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}x^2}{\frac{2x}{1+x^2}\big(x^2+(1+x^2)\log(1+x^2)\big)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+(1+x^2)\log(1+x^2)}\ \left(\text{ἀπροσδιόριστη μορφή }\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x^2)'}{(x^2+(1+x^2)\log(1+x^2))'}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{2x(2+\log(1+x^2))}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\log(1+x^2)}=$$

$$=\frac{1}{2+0}=\frac{1}{2}\,.$$

**3.3.2** *Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $0(+\infty)$ εἶναι ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x),\ \text{ὅπου}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = 0\ \text{καί}\ \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

Οἱ ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου αὐτοῦ ἀνάγονται σέ ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$ καί μερικές φορές σ' ἐκεῖνες τοῦ τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Πραγματικά· παρατηροῦμε ὅτι

$$f(x)\,g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

ὅπου

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{g(x)}\ \text{καί}\ \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)}$$

**Παραδείγματα: 1.** $\lim\limits_{x\to+0} x\log x = 0$. Πραγματικά· $\lim\limits_{x\to+0} x\log x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\log x}{\frac{1}{x}} =$

$= -\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{-\log x}{\frac{1}{x}}$, ὅπου ἡ τελευταία ὁριακή τιμή εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου

$\frac{+\infty}{+\infty}$ καί ἑπομένως $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{-\log x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{(-\log x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+0} x = 0.$

Ἄρα καί $\lim\limits_{x\to+0} x\log x = -\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{-\log x}{\frac{1}{x}} = -0 = 0.$

**2.** $\lim\limits_{x\to+0} x\sigma\varphi x = 1$. Πραγματικά· $\lim\limits_{x\to+0} x\,\sigma\varphi x = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x}{\varepsilon\varphi x}$, ὅπου ἡ τελευταία ὁριακή τιμή εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $\frac{0}{0}$ καί ἑπομένως

$\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{x}{\varepsilon\varphi x} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{(x)'}{(\varepsilon\varphi x)'} = \lim\limits_{x\to+0} \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x} = \dfrac{1}{1} = 1.$ Ἄρα καί $\lim\limits_{x\to+0} x\sigma\varphi x = 1.$

### 3.4 Ἀπροσδιόριστες μορφές τῶν τύπων, $0^0$, $(+\infty)^0$ καί $1^{+\infty}$.

**3.4.1** *Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $0^0$ εἶναι ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)},\quad \text{ὅπου}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

**3.4.2** *Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $(+\infty)^0$ εἶναι ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^{g(x)},\quad \text{ὅπου}\ \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ \text{καί}\ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

**3.4.3** *Ἀπροσδιόριστες μορφές τοῦ τύπου* $1^{+\infty}$ εἶναι ὁριακές τιμές τῆς μορφῆς:

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}, \text{ ὅπου } \lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \text{ καί } \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

Ὅλες οἱ παραπάνω ἀπροσδιόριστες μορφές ἀνάγονται σέ ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $0(+\infty)$. Πραγματικά, ὅπως ξέρουμε (βλ. τύπο (6), § 3.2 τοῦ κεφ. V), ἰσχύει

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

καί ἀπό τή συνέχεια τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως ἐφαρμόζεται ὁ τύπος

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\log f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x)}$$

καί ἐπομένως ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τήν ὁριακή τιμή $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\log f(x)$, πού σέ ὅλες τίς παραπάνω περιπτώσεις εἶναι (ἤ ἀνάγεται εὔκολα σέ ) μία ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $0(+\infty)$.

**Παραδείγματα:**

**1.** $\lim\limits_{x\to+0} x^x = 1$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $0^0$. Ἔχουμε

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\log x} = e^{\lim\limits_{x\to+0} x\log x} = e^0 = 1,$$

γιατί, ὅπως ὑπολογίσαμε στήν § 3.3.2, $\lim\limits_{x\to+0} x\log x = 0$.

**2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $(+\infty)^0$. Ἔχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1,$$

γιατί, ὅπως ὑπολογίσαμε στήν § 3.2, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x} = 0$.

**3.** $\lim\limits_{x\to+0} (\text{συν}x)^{\frac{1}{x}} = 1$. Παρατηροῦμε ὅτι αὐτό εἶναι μιά ἀπροσδιόριστη μορφή τοῦ τύπου $1^{+\infty}$ Ἔχουμε

$$\lim_{x\to+0} (\text{συν}x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}\log \text{συν}x} = e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\text{συν}x} = e^0 = 1,$$

γιατί

$$\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}\log\text{συν}x = \lim_{x\to+0}\frac{\log\text{συν}x}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{(\log\text{συν}x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\text{συν}x}(\text{συν}x)'}{1} =$$

$$= -\lim_{x\to+0}\text{εφ}x = -\text{εφ}0 = 0.$$

**33.** Νά ὑπολογισθοῦν οἱ (πρῶτες) παράγωγοι τῶν συναρτήσεων πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους.

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 2) $f(x) = x^2(x+1)^3$ 3) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$

4) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+1}$ 5) $f(x) = \dfrac{x^2+2x+5}{x^4-1}$ 6) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x + \log x$

7) $f(x) = \dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ 8) $f(x) = x^2\,\varepsilon\varphi x + \dfrac{1}{x}$ 9) $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x + \dfrac{x}{x^2+1}$

**34.** Παρόμοια, νά ὑπολογισθοῦν οἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

3) $f(x) = \sqrt{x^4+3x^2+1}$ 4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ 6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

7) $f(x) = \sigma\upsilon\nu(3x+2)$ 8) $f(x) = \eta\mu(3x+2)$

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu 3x}$ 10) $f(x) = \dfrac{\varepsilon\varphi^2 x - 1}{\varepsilon\varphi^2 x + 1}$

11) $f(x) = 3\eta\mu^4 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1$ 12) $f(x) = \sqrt{\varepsilon\varphi^2 x + 1}$

13) $f(x) = \dfrac{2\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu(2x+3)}$ 14) $f(x) = \log \eta\mu x + x^x$

15) $f(x) = (x^3+x)^x + \log(x^2+1)$ 16) $f(x) = (\eta\mu x)^{\log x}$

17) $f(x) = x^{x^2+1} + 2^{\sqrt{x}}$ 18) $f(x) = \varepsilon\varphi x^x$.

**35.** Νά βρεθοῦν τά τοπικά ἀκρότατα τῶν συναρτήσεων πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους.

1) $f(x) = \eta\mu(2x+3)$ 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 3) $f(x) = \eta\mu\,\dfrac{1}{x}$.

**36*.** Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι μεταξύ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων μέ σταθερή περίμετρο, τό τετράγωνο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τό μεγαλύτερο ἐμβαδό.

**37*.** Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι μεταξύ ὅλων τῶν τριγώνων μέ σταθερή περίμετρο καί σταθερή βάση, τό ἰσοσκελές τρίγωνο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τό μεγαλύτερο ἐμβαδό.

**38*.** Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι μεταξύ ὅλων τῶν τριγώνων μέ σταθερή περίμετρο, τό ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τό μεγαλύτερο ἐμβαδό.

**39.** Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$f \text{ κυρτή στό } \Delta \Leftrightarrow -f \text{ κοίλη στό } \Delta$$

καὶ

$$f \text{ κοίλη στὸ } \Delta \Leftrightarrow -f \text{ κυρτὴ στὸ } \Delta.$$

**40.** Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι οἱ ἀσύμπτωτες τῆς ὑπερβολῆς μέ ἐξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ (βλ. § 3.3 τοῦ κεφ. II) εἶναι καί ἀσύμπτωτες τῶν συναρτήσεων $f_1$, $f_2$ πού ὁρίζονται ἀπό τούς τύπους $f_1(x) = \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$ καί $f_2(x) = -\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{x^2-\alpha^2}$.

41. Νά μελετηθοῦν καί νά παρασταθοῦν γεωμετρικά οἱ συναρτήσεις πού ὁρίζονται ἀπό τούς παρακάτω τύπους:

1) $f(x)=3x^4-2x^2+3$ 2) $f(x)=x(x^2-4)$

3) $f(x)=2x^4+3x^2+2$ 4) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$

42. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ἀπροσδιόριστες μορφές:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^\alpha-1}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\log x}{x^2-1}$ 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{\eta\mu\beta x}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha x}{\varepsilon\varphi\beta x}$ 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\eta\mu x}$ 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}$

43. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ἀπροσδιόριστες μορφές:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+\log x}$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-2x}}{x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\log(x-1)}{x^3+x-10}$ 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\log(x^2-8)}{x^2+x-12}$

44*. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ἀπροσδιόριστες μορφές:

1) $\lim\limits_{x\to+0}\sqrt{x}\log x$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\varepsilon\varphi x$ 3) $\lim\limits_{x\to1+0}\left(\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

45*. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ παρακάτω ἀπροσδιόριστες μορφές:

1) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\eta\mu x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\log x)^{2^{-x}}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

# ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

## 1. ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**1.1 Ἀρχική συνάρτηση καί ἀόριστο ὁλοκλήρωμα.** Ἔστω ὅτι f καί F εἶναι συναρτήσεις μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα Δ. Θά λέμε ὅτι ἡ F εἶναι μιά *ἀρχική* (ἤ *παράγουσα*) συνάρτηση, ἤ ἀλλιῶς *ἕνα ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς* f *στό* Δ τότε καί μόνο τότε, ἄν ἡ F παραγωγίζεται καί ἰσχύει

$$F'(x) = f(x) \quad \forall \; x \in \Delta.$$

Ἄν F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f στό Δ, τότε αὐτό τό συμβολίζουμε γράφοντας

$$\int f(x)\,dx = F(x), \; x \in \Delta$$

(τό σύμβολο $\int f(x)dx$ διαβάζεται «ὁλοκλήρωμα f(x)dx»).

Ὥστε, λοιπόν

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \forall \; x\in\Delta \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} F'(x) = f(x) \quad \forall \; x\in\Delta.$$

Π.χ. ἡ συνάρτηση συν ἔχει ἀρχική συνάρτηση τήν ημ, γιατί, ὅπως εἶναι ἤδη γνωστό, $(\text{ημ}x)' = \text{συν}x$. Ἄρα $\int \text{συν}x\,dx = \text{ημ}x$, καθώς ἐπίσης καί $\int \text{συν}x\,dx = \text{ημ}x + c$, ὅπου c σταθερός ἀριθμός, γιατί καί ἡ ημ + c εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς συναρτήσεως συν, ἀφοῦ $(c)' = 0$. Οἱ συναρτήσεις τῆς μορφῆς ημx + c εἶναι καί οἱ μοναδικές ἀρχικές συναρτήσεις τῆς συν, γιατί ἰσχύει τό ἀκόλουθο θεώρημα.

**1.1.1. ΘΕΩΡΗΜΑ.** *Ἄν F καί G εἶναι δυό ἀρχικές συναρτήσεις τῆς συναρτήσεως f στό Δ, τότε αὐτές διαφέρουν κατά σταθερή συνάρτηση.*

*Ἀπόδειξη.* Σύμφωνα πρός τόν ὁρισμό τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως ἔχουμε

$$F'(x) = f(x) \quad \forall \; x\in\Delta \text{ καί } G'(x) = f(x) \quad \forall \; x\in\Delta.$$

Ἄρα $F'(x)=G'(x) \; \forall \; x\in\Delta$ καί ἔτσι, ἀπό τό πόρισμα 2.1.5 τοῦ κεφ. VI, ἰσχύει $F = G + c$.

**Παραδείγματα:**

Μέ ἐφαρμογή τῶν τύπων τῶν παραγώγων παίρνουμε τούς παρακάτω τύπους:

**1.** $\int 0dx = c$. Πραγματικά· τοῦτο ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό $(c)' = 0$, πού, ὅπως γνωρίζουμε, ἰσχύει.

2. $\int a dx = ax$. Πραγματικά· τοῦτο ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό γνωστό τύπο $(ax)' = a$.

3. $\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ $(\nu = 1,2,\cdots)$. Πραγματικά· $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' = \frac{(x^{\nu+1})'}{\nu+1} = \frac{(\nu+1)x^\nu}{\nu+1} = x^\nu$.

Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι $\left(\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\right)' = x^\nu$ πού ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ἰσοδύναμο μέ $\int x^\nu dx = \frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$.

4. $\int \frac{dx}{x^\nu} = -\frac{1}{(\nu-1)x^{\nu-1}}$ $(\nu = 2,3,\ldots)$. Πραγματικά· $\left(-\frac{1}{(\nu-1)x^{\nu-1}}\right)' =$

$$= -\frac{1}{\nu-1}\left(\frac{1}{x^{\nu-1}}\right)' = -\frac{1}{\nu-1}\left(-\frac{(x^{\nu-1})'}{(x^{\nu-1})^2}\right) = \frac{(\nu-1)x^{\nu-2}}{(\nu-1)x^{2(\nu-1)}} = \frac{1}{x^{2(\nu-1)-(\nu-2)}} = \frac{1}{x^\nu}.$$

5. $\int \frac{dx}{x} = \log x$ $(x > 0)$. Πραγματικά· $(\log x)' = \frac{1}{x}$.

6. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$ $(a \neq -1)$. Πραγματικά·

$$\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = \frac{(x^{a+1})'}{a+1} = \frac{(a+1)x^a}{a+1} = x^a.$$

7. $\int$ συνx$dx$ = ημx (τό ἀποδείξαμε παραπάνω).

8. $\int$ ημx$dx$ = − συνx. Πραγματικά· (− συνx)′ = − (− ημx) = ημx.

9. $\int \frac{dx}{\text{συν}^2 x}$ = εφx. Πραγματικά· (εφx)′ = $\frac{1}{\text{συν}^2 x}$.

10. $\int \frac{dx}{\text{ημ}^2 x}$ = − σφx. Πραγματικά· (− σφx)′ = $-\left(-\frac{1}{\text{ημ}^2 x}\right) = \frac{1}{\text{ημ}^2 x}$.

11. $\int e^x dx = e^x$. Πραγματικά· $(e^x)' = e^x$.

12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a}$ $(a \neq 1)$. Πραγματικά· $\left(\frac{a^x}{\log a}\right)' = \frac{(a^x)'}{\log a} = \frac{a^x \log a}{\log a} = a^x$.

*Πίνακας ἀόριστων ὁλοκληρωμάτων τῶν κυριότερων στοιχειωδῶν συναρτήσεων*

| $f(x)$ | $\int f(x)dx$ | $f(x)$ | $\int f(x)dx$ |
|---|---|---|---|
| $x^\nu$ | $\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}$ | $\frac{1}{x^\nu}$ $(\nu \geqslant 2)$ | $-\frac{1}{(\nu-1)x^{\nu-1}}$ |
| $x^a$ $(a \neq -1)$ | $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ | $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$ | $\log x$ |
| ημx | − συνx | συνx | ημx |
| $\frac{1}{\text{ημ}^2 x}$ | − σφx | $\frac{1}{\text{συν}^2 x}$ | εφx |
| $e^x$ | $e^x$ | $a^x$ | $\frac{a^x}{\log a}$ |

**1.2 Γενικοί τύποι ὁλοκληρώσεως**. Ὑποθέτουμε, ὅπου χρειάζεται, ὅτι οἱ συναρτήσεις πού θεωροῦνται στήν παράγραφο αὐτή ἔχουν παράγωγο.

**1.2.1** $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Πραγματικά· ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ἀόριστου ὁλοκληρώματος ἔχουμε

$$\left(\int[f(x)+g(x)]dx\right)'=f(x)+g(x)=\left(\int f(x)dx\right)'+\left(\int g(x)dx\right)',$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὁ παραπάνω τύπος.

**Παράδειγμα** :

$$\int(x+e^x)dx=\int xdx+\int e^x dx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+e^x=\frac{x^2}{2}+e^x.$$

**1.2.2** $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$.

Πραγματικά· $\left(\int af(x)dx\right)'=af(x)=a\left(\int f(x)dx\right)'=\left(a\int f(x)dx\right)'$.

**Παραδείγματα** :

1. $\int ax^\nu dx=a\int x^\nu dx=a\,\dfrac{x^{\nu+1}}{\nu+1}=\dfrac{a}{\nu+1}\,x^{\nu+1}$.

2. (σέ συνδυασμό μέ τόν τύπο 1.2.1) $\int(a_0+a_1x+\ldots+a_\kappa x^\kappa)dx=$

$$=\int a_0dx+\int a_1xdx+\ldots+\int a_\kappa x^\kappa dx=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\ldots+\frac{a_\kappa}{\kappa+1}x^{\kappa+1}.$$

**1.2.3**. *Ὁ τύπος ὁλοκληρώσεως κατά παράγοντες:*

$$\int f(x)\,g'(x)dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)dx.$$

Πραγματικά· $\left(\int f(x)g'(x)dx\right)'=f(x)\,g'(x)=[f(x)g'(x)+f'(x)\,g(x)]-f'(x)g(x)$ $=(f(x)\,g\,(x))'-\left(\int f'(x)\,g(x)dx\right)'$.

Εἰδικά γιά $g(x)=x$ ἔχουμε τόν τύπο

**1.2.3′** $\int f(x)\,dx=x\,f(x)-\int x\,f'(x)\,dx$.

**Παραδείγματα** :

1. $\int\log xdx=x\log x-\int x(\log x)'dx=x\log x-\int x\frac{1}{x}dx=x\log x-\int dx=x\log x-x=$ $=x(\log x-1)$.

2. $\int x\log xdx=\int\left(\frac{x^2}{2}\right)'\log xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}(\log x)'dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=$

$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{4}(2\log x-1)=\frac{x^2}{4}(\log x^2-1)$, δηλαδή

$$\int x\log xdx=\frac{x^2}{4}(\log x^2-1).$$

3. $\int e^x\eta\mu xdx=\int(e^x)'\eta\mu xdx=e^x\eta\mu x-\int e^x(\eta\mu x)'dx=e^x\eta\mu x-\int e^x\sigma\upsilon\nu xdx=$
$=e^x\eta\mu x-\int(e^x)'\sigma\upsilon\nu xdx=e^x\eta\mu x-[\,e^x\sigma\upsilon\nu x-\int e^x(\sigma\upsilon\nu x)'dx\,]=e^x\eta\mu x-e^x\sigma\upsilon\nu x+$
$+\int e^x(-\eta\mu x)dx=e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-\int e^x\eta\mu xdx$. Ὥστε ἀποδείξαμε ὅτι

$$\int e^x\eta\mu xdx=e^x(\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x)-\int e^x\eta\mu xdx,$$

ἀπό ὅπου προκύπτει εὔκολα ὅτι:

$$\int e^x\eta\mu xdx=e^x\,\frac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{2}$$

**1.2.4**. *Ὁ τύπος ὁλοκληρώσεως μέ ἀντικατάσταση:*

$$\int g\,[f(x)]\,f'\,(x)\,dx=\left[\int g(y)dy\right]_{y=f(x)}$$

ὅπου στό δεξιό μέλος τοῦ τύπου ἐννοοῦμε ὅτι ὕστερα ἀπό τόν ὑπολογισμό τοῦ $\int g(y)dy$ ὀφείλουμε νά ἀντικαταστήσουμε τό y μέ τό $f(x)$.

Γιά ν' ἀποδείξουμε τόν τύπο αὐτό, θέτουμε $F(y) = \int g(y)dy$ (ἄρα $F'(y) = g(y)$) καί τότε ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι

$$F[f(x)] = \int g[f(x)]f'(x)\,dx.$$

Αὐτό πραγματικά ἰσχύει, γιατί σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.7.1 τοῦ κεφ. VI (παραγώγιση σύνθετης συναρτήσεως) ἔχουμε

$$(F[f(x)])' = F'[f(x)]f'(x) = g[f(x)]f'(x).$$

**Παραδείγματα**:

**1.** $\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha}\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x + \beta)\cdot \alpha dx = \frac{1}{\alpha}\int \sigma\upsilon\nu(\alpha x+\beta)\cdot(\alpha x+\beta)'dx =$

$= \frac{1}{\alpha}[\int \sigma\upsilon\nu y dy]_{y=\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}[\eta\mu y]_{y=\alpha x+\beta} = \frac{1}{\alpha}\eta\mu(\alpha x + \beta)$, $(\alpha \neq 0)$.

**2.** $\int \frac{dx}{x} = \log|x|$. Ὅπως ξέρουμε ἰσχύει $\int \frac{dx}{x} = \log x$, $x \in (0, +\infty)$. Γιά $x \in (-\infty, 0)$, τό ὁλοκλήρωμα αὐτό ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς:

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{-x}(-1)dx = \int \frac{1}{-x}(-x)'dx = \left[\int \frac{1}{y}dy\right]_{y=-x} = [\log y]_{y=-x} =$
$= \log(-x)$, $x \in (-\infty, 0)$.

Οἱ δύο τύποι ὁλοκληρώσεως

$$\int \frac{dx}{x} = \log x,\ x \in (0, +\infty) \text{ καί } \int \frac{dx}{x} = \log(-x),\ x \in (-\infty, 0)$$

ἑνοποιοῦνται στόν $\int \frac{dx}{x} = \log|x|$

**3.** $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{y}dy\right]_{y=1+x^2} = \frac{1}{2}[\log|y|]_{y=1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2) = \log\sqrt{1+x^2}.$

**4.** $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. Γιά νά ὑπολογίσουμε τό ὁλοκλήρωμα αὐτό θέτουμε

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + \frac{\gamma}{x-2}$$

καί ὑπολογίζουμε τά α,β,γ ὡς ἑξῆς:

Μέ πολλαπλασιασμό καί τῶν δυό μελῶν της ἐπί $(x-1)^2(x-2)$ βρίσκουμε

$$1 = \alpha(x-1)(x-2) + \beta(x-2) + \gamma(x-1)^2$$

καί μετά τίς πράξεις

$$1 = (\alpha + \gamma)x^2 + (-3\alpha + \beta - 2\gamma)x + (2\alpha - 2\beta + \gamma)$$

καί αὐτό ἰσχύει γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, πράγμα πού σημαίνει ὅτι

$$(\alpha + \gamma = 0,\quad -3\alpha + \beta - 2\gamma = 0,\quad 2\alpha - 2\beta + \gamma = 1).$$

Ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ συστήματος αὐτοῦ βρίσκουμε $(\alpha = -1,\ \beta = -1,\ \gamma = 1)$ καί ἐπομένως ἰσχύει

$$\frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}.$$

Ἄρα

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = -\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-2}.$$

Ἀλλά

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{1}{x-1}(x-1)'\,dx = \left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=x-1} = \Big[\log|y|\Big]_{y=-x} = \log|x-1|$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int \frac{1}{(x-1)^2}(x-1)'\,dx = \left[\int \frac{dy}{y^2}\right]_{y=x-1} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=x-1} = -\frac{1}{x-1}$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{1}{x-2}(x-2)'\,dx = \left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=x-2} = \Big[\log|y|\Big]_{y=x-2} = \log|x-2|.$$

Θά ἔχουμε λοιπόν

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = -\log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \log|x-2| = \frac{1}{x-1} + \log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|.$$

Ὁ παραπάνω τύπος ἰσχύει σέ καθένα ἀπό τά διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,2)$ καί $(2,+\infty)$.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \int \frac{1}{\sqrt{x+2}}(x+2)'dx = \left[\int \frac{dy}{\sqrt{y}}\right]_{y=x+2} = \left[\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy\right]_{y=x+2} =$

$$= \left[\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_{y=x+2} = \left[2\sqrt{y}\right]_{y=x+2} = 2\sqrt{x+2}.$$

6. $\displaystyle\int \varepsilon\varphi x\,dx = \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\,dx = -\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}(\sigma\upsilon\nu x)'dx = -\left[\int \frac{dy}{y}\right]_{y=\sigma\upsilon\nu x} =$

$$= -\Big[\log|y|\Big]_{y=\sigma\upsilon\nu x} = -\log|\sigma\upsilon\nu x|.$$

7. $\displaystyle\int \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx = \int \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}dx = \int \frac{1}{2}dx + \int \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \sigma\upsilon\nu 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[\int \sigma\upsilon\nu y\,dy\right]_{y=2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}[\eta\mu y]_{y=2x} =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\eta\mu 2x}{4} = \frac{x+\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x}{2}.$$

8. $\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}(-1)\,dx = -\int e^{-x}\,(-x)'\,dx = -[\int e^{y}dy]_{y=-x} = -[e^{y}]_{y=-x} = -e^{-x}$.

9. $\displaystyle\int e^{-x}x^{\nu}\,dx = -\nu!\,e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{\nu}}{\nu!}\right)$ $(\nu = 0,1,2,\ldots)$. Τό ὁλοκλήρωμα αὐτό τό ὑπολογίζουμε μέ τήν ἀναγωγική μέθοδο, ὡς ἐξῆς:

Γιά $\kappa > 0$ ἔχουμε:

$$I_{\kappa}(x) = \int e^{-x}x^{\kappa}dx = -\int x^{\kappa}(e^{-x})'dx = -x^{\kappa}e^{-x} + \int e^{-x}(x^{\kappa})'dx = -x^{\kappa}e^{-x} + \kappa\int e^{-x}x^{\kappa-1}\,dx =$$
$$= -x^{\kappa}e^{-x} + \kappa I_{\kappa-1}(x),$$

δηλαδή

$$I_{\kappa}(x) = -x^{\kappa}e^{-x} + \kappa I_{\kappa-1}(x),$$

Ἔτσι γιά $\kappa = 1,2,\ldots,\nu$ ἔχουμε

$$(\sigma_1) \qquad I_1(x) = -xe^{-x} + I_0(x) \qquad \Big| \ \frac{1}{1!}$$

$$(\sigma_2) \qquad I_2(x) = -x^2e^{-x} + 2I_1(x) \qquad \Big| \ \frac{1}{2!}$$

$$(\sigma_3) \qquad I_3(x) = -x^3e^{-x} + 3I_2(x) \qquad \Big| \ \frac{1}{3!}$$

$$\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \vdots$$

$$(\sigma_\kappa) \qquad I_\kappa(x) = -x^\kappa e^{-x} + \kappa\, I_{\kappa-1}(x) \qquad \Big| \ \frac{1}{\kappa!}$$

$$\vdots \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \vdots$$

$$(\sigma_\nu) \qquad I_\nu(x) = -x^\nu e^{-x} + \nu I_{\nu-1}(x) \qquad \Big| \ \frac{1}{\nu!}$$

Ἄν πολλαπλασιάσουμε καί τά δυό μέλη τῶν παραπάνω σχέσεων μέ τόν ἀντίστοιχο ἀριθμό πού εἶναι γραμμένος δεξιά $\left(\text{π.χ. τῆς σχέσεως } (\sigma_\kappa) \text{ ἐπί τόν } \frac{1}{\kappa!}\right)$ καί προσθέσουμε ὕστερα κατά μέλη προκύπτει (ἀφοῦ γίνουν οἱ κατάλληλες ἀναγωγές) ὅτι

$$\frac{1}{\nu!} I_\nu(x) = I_0(x) - \frac{x}{1!} e^{-x} - \frac{x^2}{2!} e^{-x} - \ldots - \frac{x^\nu}{\nu!} e^{-x}$$

Ἔτσι ἐπειδή, ὅπως ὑπολογίσαμε στό προηγούμενο παράδειγμα, $I_0(x) = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$ θά ἔχουμε

$$I_\nu(x) = \int e^{-x} x^\nu dx = -\nu!\, e^{-x}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!}\right)$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**46.** Νά ὑπολογισθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

1) $\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$ 2) $\int \frac{x^2 - x + 4}{(x^2-1)(x+2)} dx$ 3) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{(x-1)(x+3)} dx.$

**47.** Νά ὑπολογισθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

1) $\int \sqrt{2x+3}\, dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ 3) $\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}} dx.$

**48*.** Νά ὑπολογισθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

1) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} dx$ 2) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}} dx$ 3) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+2}\, dx$

**49.** Νά ὑπολογισθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

1) $\int \text{σφ}x dx$ 2) $\int e^{-5x}dx$ 3) $\int xe^{-5x}dx$

4) $\int e^x \text{συν}x dx$ 5) $\int \text{ημ}^2 x dx$ 6) $\int \text{εφ}^2 x dx$

**50*.** Νά ὑπολογισθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

1) $\int \text{ημ}\kappa x\, \text{ημ}\nu x dx$ 2) $\int \text{ημ}\kappa x\, \text{συν}\nu x dx$ 3) $\int \text{συν}\kappa x\, \text{συν}\nu x dx,$

ὅπου κ,ν φυσικοί ἀριθμοί.

(Νά χρησιμοποιηθοῦν ἀντίστοιχα οἱ τύποι:

$$\eta\mu\kappa x\ \eta\mu\nu x = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\kappa-\nu)x - \sigma\upsilon\nu(\kappa+\nu)x\right],$$

$$\eta\mu\kappa x\ \sigma\upsilon\nu\nu x = \frac{1}{2}\left[\eta\mu(\kappa+\nu)x + \eta\mu(\kappa-\nu)x\right],$$

$$\sigma\upsilon\nu\kappa x\ \sigma\upsilon\nu\nu x = \frac{1}{2}\left[\sigma\upsilon\nu(\kappa+\nu)x + \sigma\upsilon\nu(\kappa-\nu)x\right]).$$

**51***. Νά ὑπολογισθοῦν τά παρακάτω ἀόριστα ὁλοκληρώματα:

1) $\int(\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x)\sqrt{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}\,dx$  2) $\int\frac{\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$  3) $\int\frac{x\sigma\upsilon\nu x}{(x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$

4) $\int\frac{x\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}dx$  5) $\int\left(\frac{x}{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}\right)^2dx$

**52***. Νά βρεθοῦν ἀναγωγικοί τύποι γιά τά ὁλοκληρώματα:

1) $\int\eta\mu^\nu x dx$  2) $\int\sigma\upsilon\nu^\nu x dx$ ($\nu$ φυσικός ἀριθμός).

Μέ τή βοήθεια αὐτῶν τῶν τύπων νά ὑπολογισθοῦν τά ὁλοκληρώματα $\int\eta\mu^4 x dx$ καί $\int\sigma\upsilon\nu^3 x dx$.

**53***. Νά βρεθεῖ ἀναγωγικός τύπος γιά τό ὁλοκλήρωμα $\int\log^\nu x dx$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ καί μέ τή βοήθειά του νά ὑπολογισθεῖ τό ὁλοκλήρωμα $\int\log^3 x dx$.

## 2. ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

**2.1 Ὁρισμός καί ἰδιότητες.** Ἄς θεωρήσουμε μιά συνάρτηση f ὁρισμένη σ' ἕνα διάστημα Δ, ἡ ὁποία εἶναι συνεχής καί, ὅπως ἔχει ἀποδειχθεῖ στή Μαθηματική Ἀνάλυση, ἔχει ἀρχική συνάρτηση στό Δ. Ἄν α,β εἶναι δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ Δ, τότε ἡ διαφορά

$$F(\beta)-F(\alpha),$$

ὅπου F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f, εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ἐκλογή τῆς F. Πραγματικά· σύμφωνα μέ τό θεώρημα 1.1.1, ὁποιαδήποτε ἀρχική συνάρτηση G τῆς f διαφέρει ἀπό τήν F κατά μία σταθερή συνάρτηση, δηλαδή $G=F+c$. Ἑπομένως

$$G(\beta)-G(\alpha)=(F(\beta)+c)-(F(\alpha)+c)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Τή διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ τήν ὀνομάζουμε *ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα τῆς* f *ἀπό* α *μέχρι* β καί τό παριστάνουμε μέ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, δηλαδή

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$$

(τό σύμβολο $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ διαβάζεται «ὁλοκλήρωμα f(x)dx ἀπό α μέχρι β»).

Ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος προκύπτουν ἀμέσως τά ἑξῆς:

$$\int_\alpha^\alpha f(x)dx=0$$

καί

$$\int_\beta^\alpha f(x)dx=-\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Τή διαφορά $F(\beta)-F(\alpha)$ τήν παριστάνουμε συνήθως καί μέ $[F(x)]_{\alpha}^{\beta}$, δηλαδή $[F(x)]_{\alpha}^{\beta}=F(\beta)-F(\alpha)$. Ἔτσι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [F(x)]_{\alpha}^{\beta} = [\int f(x)dx]_{\alpha}^{\beta}.$$

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ ἐξαρτᾶται τόσο ἀπό τή συνάρτηση f, ὅσο καί ἀπό τούς ἀριθμούς α,β, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται *ἄκρα ὁλοκληρώσεως*. Ἀντίθετα τό ὁλοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή μεταβλητή x, δηλαδή δέν ἀλλάζει ἄν ἀντικαταστήσουμε τή μεταβλητή x ἀπό μιά ἄλλη. Ἔτσι ἰσχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt.$$

**Παραδείγματα** :

**1.** $\int_{\alpha}^{\beta} adx \triangleq a(\beta-\alpha)$.

Πραγματικά· $\int_{\alpha}^{\beta} adx = [\int adx]_{\alpha}^{\beta} = [ax]_{\alpha}^{\beta} = a\beta - a\alpha = a(\beta-\alpha)$.

**2.** $\int_{0}^{1} xdx = \frac{1}{2}$.

Πραγματικά· $\int_{0}^{1} xdx = [\int xdx]_{0}^{1} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$.

**3.** $\int_{0}^{1} x^2dx = \frac{1}{3}$.

Πραγματικά· $\int_{0}^{1} x^2dx = [\int x^2dx]_{0}^{1} = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

**4.** $\int_{0}^{\pi/2} ημxdx = 1$.

Πραγματικά· $\int_{0}^{\pi/2} ημxdx = [\int ημxdx]_{0}^{\pi/2} = [-συνx]_{0}^{\pi/2} = -συν\frac{\pi}{2} + συν0 = -0+1 = 1$.

**5.** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2xdx = \frac{\pi}{2}$.

Πραγματικά· ἀπό τό παράδειγμα 7 τῆς § 1.2.4 ἔχουμε:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} συν^2xdx = [\int συν^2xdx]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{x+ημxσυνx}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}+0}{2} - \frac{-\frac{\pi}{2}+0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

**6.** $\int_{1}^{2} \log x dx = \log 4 - 1$.

Πραγματικά· ἀπό τό παράδειγμα 1 τῆς § 1.2.3, ἔχουμε:

$$\int_1^2 \log x dx = \left[\int \log x dx\right]_1^2 = \left[x(\log x - 1)\right]_1^2 = 2(\log 2 - 1) - 1(\log 1 - 1) =$$
$$= 2\log 2 - 2 + 1 = \log 4 - 1.$$

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \log\sqrt{2}$.

Πραγματικά· ἀπό τό παράδειγμα 3 τῆς § 1.2.4 ἔχουμε:

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\int \frac{x}{1+x^2} dx\right]_0^1 = \left[\log\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \log\sqrt{1+1^2} - \log\sqrt{1+0^2} = \log\sqrt{2}.$$

**2.1.1.** *Ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ ὁρισμένου ὁλοκληρώματος προκύπτουν οἱ παρακάτω τύποι:*

$$\int_\alpha^\beta [f(x) + g(x)]\, dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$$
$$\int_\alpha^\beta a f(x)dx = a\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Πραγματικά· ἄν F καί G εἶναι δυό ἀρχικές συναρτήσεις τῶν f καί g ἀντίστοιχα, τότε ἔχουμε

$$\int_\alpha^\beta [f(x)+g(x)]dx = \left[\int [f(x)+g(x)]dx\right]_\alpha^\beta = \left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right]_\alpha^\beta =$$
$$= \left[F(x)+G(x)\right]_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha) + G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Ἀνάλογα προκύπτει καί ὁ δεύτερος τύπος.

**2.1.2.** *Ἄν* α,β,γ *εἶναι σημεῖα τοῦ διαστήματος* Δ, *τότε ἰσχύει ὁ τύπος*

$$\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Πραγματικά· ἄν F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f, τότε ἔχουμε

$$[F(\gamma) - F(\alpha)] + [F(\beta) - F(\gamma)] = F(\beta) - F(\alpha)$$

δηλαδή τόν παραπάνω τύπο.

**2.1.3.** *Ἰσχύει ὁ τύπος (τῆς μέσης τιμῆς τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ)*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(x_0)(\beta - \alpha),$$

*ὅπου* $x_0$ *εἶναι ἕνα κατάλληλο σημεῖο τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος* (α, β).

Πραγματικά· ἄν F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f (δηλαδή $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in \Delta$), τότε, ἀπό τό θεώρημα τῆς μέσης τιμῆς τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ (θεώρημα 2.1.3 τοῦ κεφ. VI), ὑπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ὥστε νά ἰσχύει

$$F(\beta) - F(\alpha) = F'(x_0)(\beta - \alpha) = f(x_0)(\beta - \alpha),$$

δηλαδή

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = f(x_0)(\beta - \alpha).$$

*Ἂν ἐφαρμόσουμε τόν παραπάνω τύπο τῆς μέσης τιμῆς ἔχουμε τά ἑξῆς:*

$$\left.\begin{array}{l}\alpha < \beta \\ f(x) \geqslant 0 \ \forall \ x \in [\alpha, \beta]\end{array}\right\} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha < \beta \\ f(x) \geqslant g(x) \ \forall \ x \in [\alpha,\beta]\end{array}\right\} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Πραγματικά· ἐπειδή $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [\alpha,\beta]$ καί γιά τό $x_0$ τοῦ τύπου τῆς μέσης τιμῆς, θά ἔχουμε καί $f(x_0) \geq 0$. Ἄρα.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = f(x_0)\,(\beta-\alpha) \geq 0(\beta-\alpha) = 0.$$

Ἐπίσης, ἐπειδή $f(x) \geq g(x) \ \forall \ x \in [\alpha,\beta]$, ἔχουμε $f(x)-g(x) \geq 0 \quad \forall \ x \in [\alpha,\beta]$.
Ἄρα

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta [f(x) - g(x)]dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx \geq 0 + \int_\alpha^\beta g(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

**2.1.4.** *Ἰσχύει ἐπίσης καί ὁ τύπος*

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(y)dy.$$

Πραγματικά· ἄν F εἶναι μιά ἀρχική συνάρτηση τῆς f, τότε, σύμφωνα μέ τόν τύπο τῆς ὁλοκληρώσεως μέ ἀντικατάσταση, παίρνουμε

$$\int_\beta^\alpha f(\psi(x))\psi'(x)dx = \left[\int f(\psi(x))\psi'(x)dx\right]_\alpha^\beta = \left[\left[\int f(y)dy\right]_{y=\psi(x)}\right]_\alpha^\beta =$$

$$= \left[[F(y)]_{y=\psi(x)}\right]_\alpha^\beta = \left[F[\psi(x)]\right]_\alpha^\beta = F[\psi(\beta)] - F[\psi(\alpha)] = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(y)dy.$$

**Ἐφαρμογή:** $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$,

Πραγματικά· πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\eta\mu^2 x}\,(\eta\mu x)' dx =$$

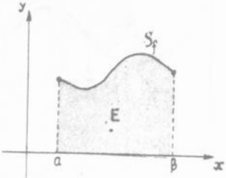
$$= \int_{\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)}^{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Ἔτσι, ἀνατρέχοντας στό παράδειγμα 5 τῆς § 2.1, παίρνουμε

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

**2.2 Τό ὁρισμένο ὁλοκλήρωμα ὡς ἐμβαδόν.** Ἔστω f μιά συνάρτηση ὁρισμένη καί συνεχής στό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ μέ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$. Ἔστω, ἀκόμη, E τό χωρίο τοῦ ἐπιπέδου πού ὁρίζεται ἀπ' τό διάγραμμα τῆς f, τόν ἄξονα τῶν x καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = \alpha$ καί $x = \beta$ (βλ. σχ. 97) δηλαδή

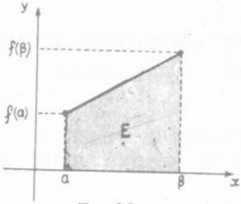
$$E = \text{διάγραμμα } \{(x,y) : \alpha \leq x \leq \beta,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$




Σχ. 97

Ἄς θεωρήσουμε πρῶτα τήν περίπτωση, πού ἡ f εἶναι γραμμική συνάρτηση, δηλαδή $f(x) = \gamma x + \delta$. Τότε τό χωρίο E εἶναι ἕνα τραπέζιο (βλ. σχ. 98) μέ βάσεις (παράλληλες πρός τόν ἄξονα τῶν y καί) πού ἔχουν μήκη $f(\alpha)$ καί $f(\beta)$ καί μέ ὕψος πού ἔχει μῆκος $\beta$-$\alpha$. Ἔτσι ἡ τιμή (E) τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου E εἶναι

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha).$$




Σχ. 98

Ἐξ ἄλλου ἔχουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta (\gamma x + \delta)dx = \left[\frac{1}{2}\gamma x^2 + \delta x\right]_\alpha^\beta =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma\beta^2 + \delta\beta - \left(\frac{1}{2}\gamma\alpha^2 + \delta\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\gamma(\beta^2 - \alpha^2) + \delta(\beta - \alpha) = \left(\frac{1}{2}\gamma(\beta + \alpha) + \delta\right)(\beta - \alpha) = \frac{\gamma\beta + \gamma\alpha + 2\delta}{2}(\beta - \alpha) =$$

$$= \frac{(\gamma\alpha + \delta) + (\gamma\beta + \delta)}{2}(\beta - \alpha) = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha), \text{ δηλαδή}$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (E).$$

Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει γενικότερα καί στήν περίπτωση ὅπου ἡ f εἶναι μιά *πολυγωνική συνάρτηση*, δηλαδή μιά συνάρτηση τῆς ὁποίας τό διάγραμμα εἶναι μιά πολυγωνική γραμμή π.χ. ἡ $A_1A_2A_3A_4$ τοῦ σχ. 99. Τότε ἔχουμε

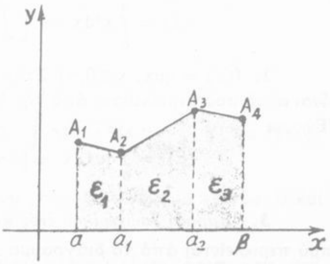
$$(E) = (\varepsilon_1) + (\varepsilon_2) + (\varepsilon_3)$$

καί

$$\int_\alpha^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx,$$

δηλαδή πάλι

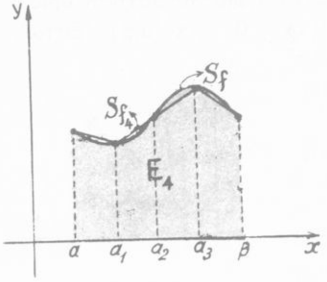
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (E).$$




Σχ. 99

Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει βέβαια καί γιά πολυγωνικές γραμμές μέ ὁσεσδήποτε πλευρές.

Ἄς ξαναγυρίσουμε τώρα στήν περίπτωση τῆς ὁποιασδήποτε συναρτή-




*Σχ. 100*

σεως f. Ἄν διαμερίσουμε τό κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ σέ $\nu$ ἴσα μέρη ὁρίζεται μιά πολυγωνική συνάρτηση $f_\nu$ πού προσεγγίζει τήν f, ὅπως φαίνεται στό σχ. 100 γιά $\nu = 4$. Ἄν ὀνομάσουμε $E_\nu$ τό ἀντίστοιχο χωρίο τοῦ ἐπιπέδου πού ὁρίζει ἡ $f_\nu$ (δηλαδή $E_\nu$ = διάγραμμα $\{(x,y): \alpha \leq x \leq \beta,\ 0 \leq y \leq f_\nu(x)\}$), τότε ὀνομάζουμε τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου E τό $\lim(E_\nu)$ (ἄν, βέβαια, τοῦτο ὑπάρχει καί εἶναι πραγματικός ἀριθμός), δηλαδή

$$(E) = \lim(E_\nu) = \lim \int_\alpha^\beta f_\nu(x)dx.$$

Στή μαθηματική ἀνάλυση ἀποδεικνύεται ὅτι, κάτω ἀπό τίς ὑποθέσεις αὐτές πού κάναμε, ἰσχύει

$$\lim \int_\alpha^\beta f_\nu(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

Ὥστε καί στή γενική περίπτωση ἰσχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = (E).$$

*Παρατήρηση.* Ἡ παραπάνω μέθοδος στηρίζεται στήν ἰδέα τῆς προσεγγίσεως τοῦ ἐμβαδοῦ, πού περικλείει μιά καμπύλη, ἀπό τό ἐμβαδό πού περικλείει μιά ἐγγεγραμμένη σ' αὐτή πολυγωνική γραμμή. Ἡ ἰδέα αὐτή ὀφείλεται στόν Ἀρχιμήδη, ὁ ὁποῖος τήν ἐφάρμοσε γιά τόν ὑπολογισμό τῆς τιμῆς τοῦ ἐμβαδοῦ παραβολικοῦ χωρίου.

**Παραδείγματα:**

1. $f(x) = x^2$, $x \in [0,\alpha]$. Στήν περίπτωση αὐτή τό ἀντίστοιχο χωρίο E τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἐκεῖνο πού περιέχεται μεταξύ τοῦ διαγράμματος τῆς f, τοῦ ἄξονα τῶν x καί τῆς εὐθείας μέ ἐξίσωση $x = \alpha$ (βλ. σχ. 101). Ἔχουμε

$$(E) = \int_0^\alpha x^2 dx = \left[\int x^2 dx\right]_0^\alpha = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\alpha = \frac{\alpha^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{\alpha^3}{3}$$

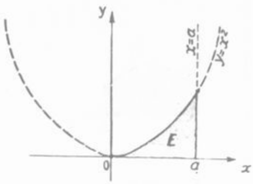
2. $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0,\pi]$. Στήν περίπτωση αὐτή τό ἀντίστοιχο χωρίο E τοῦ ἐπιπέδου εἶναι αὐτό πού περικλείεται ἀπό τήν ἡμιτονοειδή καμπύλη καί τό διάστημα $[0,\pi]$ (βλ. σχ. 102). Ἔχουμε

$$(E) = \int_0^\pi \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = -(-1) + 1 = 2.$$

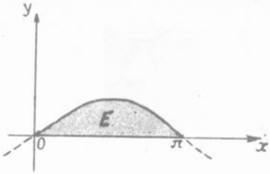
3. *Ἐμβαδό ἐσωτερικοῦ ἑνός κύκλου μέ ἀκτίνα* α. Ἄς θεωρήσουμε τό ἐπίπεδο χωρίο E πού περικλείεται ἀπό τό διάγραμμα τῆς f μέ $f(x) = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$, $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ καί τόν ἄξονα τῶν x (βλ. σχ. 103). Ἔχουμε

$$(E) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - x^2}\, dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} \alpha \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\, dx = \alpha^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \left(\frac{x}{\alpha}\right) dx =$$

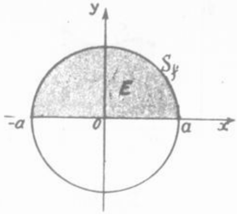
$$= \alpha^2 \int_{-\frac{\alpha}{\alpha}}^{\frac{\alpha}{\alpha}} \sqrt{1 - y^2}\, dy = \alpha^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$




$\Sigma\chi.\ 101$



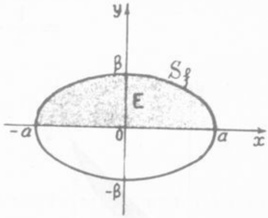

$\Sigma\chi.\ 102$




$\Sigma\chi.\ 103$

καί ἐπειδή, ὅπως ὑπολογίσθηκε στήν § 2.1.4 (ἐφαρμογή) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$, θά ἔχουμε $(E) = \frac{\pi\alpha^2}{2}$. Ἑπομένως ἡ τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου μέ ἀκτίνα α θά εἶναι $2\,(E) = 2\,\frac{\pi\alpha^2}{2} = \pi\alpha^2$.

**4.** *Ἐμβαδὸν ἐσωτερικοῦ μιᾶς ἐλλείψεως.* Ἄς θεωρήσουμε τήν ἔλλειψη μέ ἐξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, δηλαδή τήν ἔλλειψη μέ κέντρο 0 καί ἡμιάξονες α,β. Ἔστω Ε τό χωρίο τοῦ ἐπιπέδου πού περικλείεται ἀπό τό διάγραμμα τῆς f μέ $f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$, $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ καί ἀπό τόν ἄξονα τῶν x (βλ. σχ. 104). Τότε ἔχουμε




$\Sigma\chi.\ 104 \quad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

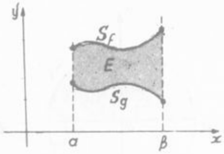
$$(E) = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2}\,dx = \beta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\,dx =$$

$$= \alpha\beta \int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)' dx = \alpha\beta \int_{-\alpha/\alpha}^{\alpha/\alpha} \sqrt{1 - y^2}\,dy =$$

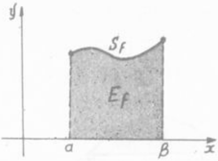
$$\alpha\beta \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

καί ἐπειδή, ὅπως ὑπολογίσθηκε στήν § 2.1.4 (ἐφαρμογή), $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$, θά ἔχουμε $(E) = \frac{\pi\alpha\beta}{2}$. Ἑπομένως ἡ τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἐλλείψεως μέ κέντρο 0 καί ἡμιάξονες α,β εἶναι παβ.

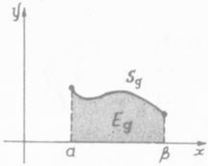
Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό συναρτήσεις f καί g πού εἶναι ὁρισμένες καί συνεχεῖς στό $[\alpha,\beta]$ μέ $f(x) \geq g(x)\ \forall\ x \in [\alpha,\beta]$. Ἄν Ε παριστάνει τό χωρίο τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 105), πού περικλείεται ἀπό τά διαγράμματα τῶν συναρτήσεων f καί g καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $x = \alpha$ καί $x = \beta$, τότε τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου αὐτοῦ εἶναι ἡ διαφορά τῶν ἐμβαδῶν τῶν χωρίων $E_f$ καί $E_g$ (βλ. σχ. 106 καί 107). Ὥστε ἔχουμε δηλαδή




Σχ. 105




Σχ. 106




Σχ. 107

$$(E) = (E_f) - (E_g) = \int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx,$$

δηλαδή

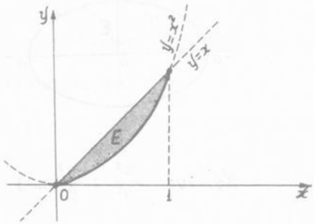
$$(E) = \int_\alpha^\beta [\, f(x) - g(x) \,]\, dx.$$

**Παραδείγματα :**

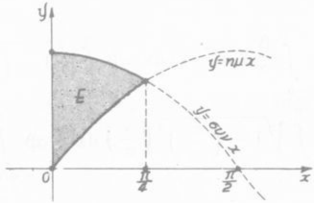
**1**. $f(x) = x$ *καί* $g(x) = x^2$. Τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου (βλ. σχ. 108) εἶναι

$$(E) = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[ \int (x - x^2)dx \right]_0^1 = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} - \left( \frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$




Σχ. 108




Σχ. 109

**2**. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ *καί* $g(x) = \eta\mu x$. Τό ἐμβαδό τοῦ χωρίου Ε πού περικλείεται ἀπ' τή συνημιτονοειδή καμπύλη, τήν ἡμιτονοειδή καμπύλη καί τόν ἄξονα τῶν y (βλ. σχ. 109) εἶναι

$$(E) = \int_0^{\pi/4} (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)dx = \left[ \int (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)dx \right]_0^{\pi/4} = \left[ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \eta\mu \frac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} - (\eta\mu 0 + \sigma\upsilon\nu 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - (0 + 1) = \sqrt{2} - 1,$$

δηλαδή

$$(E) = \sqrt{2} - 1.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**54**. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι

1) $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu\kappa x \ \eta\mu\nu x dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu\kappa x \ \sigma\upsilon\nu\nu x dx$ (κ,ν φυσικοί, $\kappa \neq \nu$)

2) $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu\kappa x \ \sigma\upsilon\nu\nu x dx = 0$ (κ, ν φυσικοί)

3) $\int_{-\pi}^{\pi} \eta\mu^2\kappa x dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2\kappa x dx$ (κ φυσικός)

**55***. Ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε φυσικό ἀριθμό ν ἰσχύουν :

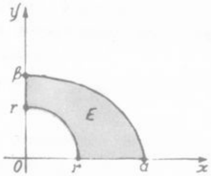
1) $\int_{0}^{\pi/2} \eta\mu^{2\nu} x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2\nu - 1)}{2 \cdot 4 \cdots (2\nu)} \cdot \frac{\pi}{2}$ 2) $\int_{0}^{\pi/2} \eta\mu^{2\nu+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2\nu)}{3 \cdot 5 \cdots (2\nu + 1)}$ .

**56***. Νά ὑπολογισθοῦν τά ὁρισμένα ὁλοκληρώματα:

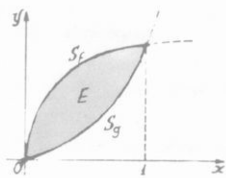
1) $\int_{0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^{2\nu} x dx$ 2) $\int_{0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^{2\nu+1} x dx$,

ὅπου ν εἶναι φυσικός ἀριθμός

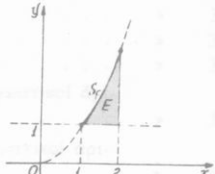
**57**. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, πού περικλείεται ἀπό τήν ἔλλειψη μέ ἐξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, τόν κύκλο μέ κέντρο 0 καί ἀκτίνα $r$ ($r \leqslant \alpha$ καί $r \leqslant \beta$) καί τούς θετικούς ἡμιάξονες (βλ. σχ. 110).




*Σχ. 110*




*Σχ. 111*




*Σχ. 112*

**58**. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου, πού περικλείεται ἀπό τά διαγράμματα τῶν συναρτήσεων f καί g μέ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ καί $g(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (βλ. σχ. 111).

**59**. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ χωρίου Ε τοῦ ἐπιπέδου πού περικλείεται ἀπό τό διάγραμμα τῆς f μέ $f(x) = x^{3/2}$ καί τίς εὐθεῖες μέ ἐξισώσεις $y = 1$, $x = 2$ (βλ. σχ. 112).

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

## ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΑΠΟ ΤΑ ΣΥΝΟΛΑ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

## ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ

## ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

## ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

## ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

## ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

## ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ



ΕΞΩΦΥΛΛΟ: ΤΑΣΟΥ ΜΟΥΣΤΑΦΕΛΛΟΥ

024000025114

ΕΚΔΟΣΗ ΙΓ΄ 1982 (IV) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 20.000 ΣΥΜΒΑΣΗ 3748/2-2-82

ΕΚΤΥΠΩΣΗ – ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ: Κ. ΑΔΑΚΤΥΛΟΣ ΚΑΙ ΣΙΑ Ο.Ε. ΛΙΘΟ-ΟΦΣΕΤ ΕΛΛΑΣ

ΟΕ
ΔΒ