ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β', Γ', ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1977

Λ. Αδαμόπουλου

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τό βιβλίο μεταγλωττίστηκε ἀπό τό συγγραφέα σέ συνεργασία μέ τό φιλόλογο Καραμεσίνη Μενέλαο

ΣΠ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Β', Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ 1978

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ–ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Ὁρισμοί. α΄) **Ὀνομάζουμε κανονικό πολύγωνο κάθε κυρτό πολύγωνο, πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες μεταξύ τους καί ὅλες τίς γωνίες του ἴσες μεταξύ τους.**

β΄) Ὀνομάζουμε **κανονική πολυγωνική γραμμή** μιά τεθλασμένη γραμμή $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$, πού ἔχει $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{\nu-1}A_\nu$ καί γων. $(\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2A_3})$ = γων.$(\overrightarrow{A_3A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}) = \ldots =$ γων.$(\overrightarrow{A_{\nu-1}A_{\nu-2}}, \overrightarrow{A_{\nu-1}A_\nu})$.

2. Γενικές ἰδιότητες. Ι. **Ἄν μιά περιφέρεια διαιρεθεῖ σέ ν ἴσα τόξα, τά διαιρετικά σημεῖα εἶναι κορυφές κανονικοῦ πολυγώνου.**

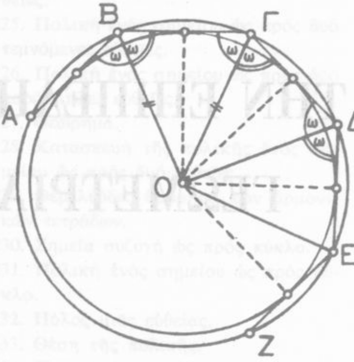
Ἔστω τ° τό μέτρο καθενός ἀπό τά ἴσα τόξα $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3} \ldots \widehat{A_\nu A_1}$ $(\nu \geq 3)$. Τότε ὅλες οἱ πλευρές τοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ εἶναι ἴσες, ἐπειδή εἶναι χορδές ἴσων τόξων καί ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἐπίσης ἴσες, ἐπειδή εἶναι ἐγγεγραμμένες καί βαίνουν ἡ καθεμιά τους σέ τόξο ἴσο μέ $(\nu-2)\cdot\tau^\circ$. Ἄρα τό κυρτό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ εἶναι κανονικό.

ΙΙ. Κάθε κανονικό πολύγωνο εἶναι ἐγγράψιμο καί περιγράψιμο σέ κύκλο.

᾿Απόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔΕ ... ἕνα κανονικό πολύγωνο (σχ. 1). Ἄν φέρουμε τίς διχοτόμους δύο διαδοχικῶν γωνιῶν του $\widehat{AB\Gamma}$ καί $\widehat{B\Gamma\Delta}$, αὐτές τέμνονται σέ κάποιο σημεῖο Ο (γιατί $\widehat{B}/2+\widehat{\Gamma}/2<2$ ορθ.).

Ἄν τώρα ἑνώσουμε τό Ο μέ τήν ἑπόμενη κορυφή Δ, τά τρίγωνα ΟΒΓ καί ΟΓΔ ἔχουν: $B\Gamma = \Gamma\Delta$, $OB = O\Gamma$ (γιατί τό τρίγωνο ΟΒΓ ἔχει τίς γωνίες τῆς βάσεως ΒΓ ἴσες) καί $\widehat{OB\Gamma} = \widehat{O\Gamma\Delta}$ (ὡς μισά ἴσων γωνιῶν). Δηλ. ἔχουν δύο πλευρές καί τήν περιεχόμενη γωνία ἴσες. Ἄρα: τρ.ΟΒΓ = τρ. ΟΓΔ. Ἑπομένως: $\widehat{O\Gamma B} = \widehat{O\Delta\Gamma}$ (γωνίες ἴσων τριγώνων πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό ἴσες πλευρές), δηλ.

$$\widehat{O\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}/2 = \widehat{\Gamma\Delta E}/2.$$



Σχ. 1

Ἑπομένως ἡ ΔΟ εἶναι καί αὐτή διχοτόμος τῆς $\widehat{\Gamma\Delta E}$ καί τό τρίγωνο ΟΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ὥστε οἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν $\widehat{B},\widehat{\Gamma},\widehat{\Delta}$ συντρέχουν στό Ο. Γιά τόν ἴδιο λόγο οἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν $\widehat{\Gamma}$, $\widehat{\Delta}$, $\widehat{E}$ συντρέχουν στό Ο κ.ο.κ. Ἑπομένως ἀποδείξαμε ὅτι οἱ διχοτόμοι ὅλων τῶν γωνιῶν τοῦ ΑΒΓΔΕ...συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο Ο τέτοιο, ὥστε $OB=O\Gamma=O\Delta=OE=\ldots=OA$. Ἄρα τό Ο εἶναι κέντρο μιᾶς περιφέρειας, πού περνάει ἀπ' ὅλες τίς κορυφές τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἐπειδή τά ἰσοσκελή τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ ... εἶναι ἴσα, ἔχουν καί ἴσα ὕψη ἀπό τό Ο, ἄρα τό Ο εἶναι καί κέντρο τῆς περιφέρειας, πού ἐφάπτεται σ' ὅλες τίς πλευρές τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Παρατήρηση. Καί κάθε κανονική πολυγωνική γραμμή εἶναι ἐγγράψιμη καί περιγράψιμη σέ κύκλο. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἐντελῶς ὅμοια.

ΙΙΙ. **Ἐπίκεντρη γωνία κανονικοῦ πολυγώνου.—Ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου στό κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές κάθε πλευρά φαίνεται ὑπό γωνία 360⁰/ν.**

Γιατί οἱ ν ἐπίκεντρες διαδοχικές γωνίες $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$... (σχ. 1) εἶναι ἴσες καί ἔχουν ἄθροισμα 360°

IV. **Ὁμοιότητα : Δύο κανονικά πολύγωνα μέ τόν ἴδιο ἀριθμό πλευρῶν εἶναι μεταξύ τους ὅμοια.**

V. **Ἄξονες συμμετρίας — Κάθε κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές ἔχει ν ἄξονες συμμετρίας.**

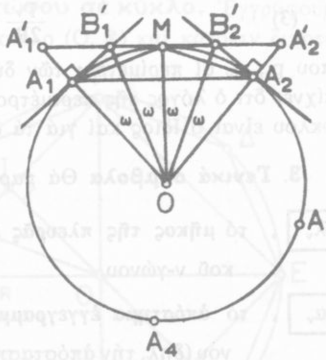
Ἔστω ὅτι ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός καί ἴσος μέ 2Κ. Ἄν περιγράψουμε κύκλο στό πολύγωνο αὐτό, τότε οἱ κορυφές του θά εἶναι ἀνά δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετες. Ἔτσι ἔχουμε Κ ζεύγη κορυφῶν, ὅπου κάθε ζεῦγος ὁρίζει μιά διάμετρο, ἡ ὁποία εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἀλλά καί ἡ μεσοκάθετος καθενός ζεύγους παράλληλων πλευρῶν εἶναι ἄξονας συμμετρίας.

Ἑπομένως ἔχουμε $2K = \nu$ ἄξονες συμμετρίας.

Ἄν ὁ ν εἶναι περιττός ἀριθμός, τότε ἡ μεσοκάθετος κάθε πλευρᾶς περνάει ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή καί εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Πάλι ἔχουμε ν ἄξονες συμμετρίας.

VI. **Περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα.** Ἄν $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ εἶναι κανονικό ν-γωνο ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (O, R) καί M τό μέσον τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\widehat{A_1A_2}$ (σχ. 2), τότε:

α΄) Ἡ ἐφαπτομένη στό M τέμνει τίς προεκτάσεις τῶν ἀκτίνων OA_1, OA_2 σέ σημεῖα A'_1 καί A'_2 τέτοια, ὥστε τό τμῆμα $A'_1A'_2$ εἶναι πλευρά τοῦ **περιγεγραμμένου** στόν ἴδιο κύκλο **ν-γώνου**. Γιατί τό τρίγωνο $OA'_1A'_2$ εἶναι ἰσοσκελές καί ἡ πλευρά $A'_1A'_2$ φαίνεται ἀπό τό κέντρο O ὑπό γωνία $360°/\nu$.



Σχ. 2

β΄) Οἱ ἐφαπτομένες στά A_1 καί A_2 τέμνουν τήν ἐφαπτομένη στό M σέ σημεῖα B'_1 καί B'_2 τέτοια, ὥστε ἡ $B'_1B'_2$ εἶναι πλευρά κανονικοῦ πολυγώνου **περιγεγραμμένου** στόν ἴδιο κύκλο, τό ὁποῖο ἔχει **διπλάσιο πλῆθος πλευρῶν,** δηλ. 2ν πλευρές. Γιατί ἡ ἡμιευθεία OB'_1 εἶναι διχοτόμος τῆς $A'_1\widehat{O}M$ καί ἡ OB'_2 διχοτόμος τῆς $M\widehat{O}A'_2$. Τό τρίγωνο $B'_1OB'_2$ εἶναι ἰσοσκελές καί ἡ $B'_1B'_2$ φαίνεται ἀπό τό O ὑπό γωνία $B'_1\widehat{O}B'_2$, πού εἶναι ἴση πρός τό μισό τῆς $A'_1\widehat{O}A'_2$, δηλ. ὑπό γωνία $360°/2\nu$. Ἑπομένως ἡ $B'_1B'_2$ ἀντιστοιχεῖ σέ μιά ἐπίκεντρη γωνία, πού εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ἐπίκεντρης γωνίας, στήν ὁποία ἀντιστοιχεῖ ἡ $A'_1A'_2$, γι' αὐτό εἶναι πλευρά ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου, πού ἔχει διπλάσιο πλῆθος πλευρῶν.

γ΄) Τέλος, ἡ χορδή A_1M εἶναι προφανῶς πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ 2ν-γώνου.

δ΄) Στό σχ. 2 ἔχουμε: $A_1A_2 < A_1M + MA_2 < A_1B'_1 + B'_1B'_2 + B'_2A_2 < A'_1B'_1 + B'_1B'_2 + B'_2A'_2$, δηλ.: $A_1A_2 < 2A_1M < 2B'_1B'_2 < A'_1A'_2$ καί πολλαπλασιάζοντας ἐπί ν:

$$\nu A_1A_2 < 2\nu A_1M < 2\nu B'_1B'_2 < \nu A'_1A'_2 \qquad (1)$$

Ἄν τώρα παραστήσουμε μέ $\boxed{p_k}$ τήν περίμετρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, πού ἔχει k πλευρές καί $\boxed{p'_k}$ τήν περίμετρο τοῦ ὁμοιού του περιγεγραμμένου, ἡ (1) γράφεται:

(2) $$\boxed{p_\nu < p_{2\nu} < p'_{2\nu} < p'_\nu}$$

VII.— **Σέ ὅλα τά ὅμοια κανονικά πολύγωνα ὁ λόγος τῆς περιμέτρου πρός τή διάμετρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ὁ ἴδιος,** δηλ. τό $p_\nu/2R$ εἶναι ἀνεξάρτητο τοῦ R.

Πράγματι ἄς εἶναι $A_1A_2 \ldots A_\nu$ καί $B_1B_2 \ldots B_\nu$ δύο κανονικά ν-γωνα ἐγγεγραμμένα, τό πρῶτο σέ κύκλο (O, R) καί τό δεύτερο σέ κύκλο (K, ρ). Τότε $A_1\widehat{O}A_2 = B_1\widehat{K}B_2 = 360°/\nu$ καί ἑπομένως τά ἰσοσκελή τρίγωνα, A_1OA_2 καί B_1KB_2 εἶναι ὅμοια. Ἄρα:
$A_1A_2/OA_1 = B_1B_2/KB_1$ ἤ $A_1A_2/R = B_1B_2/\rho \Rightarrow \nu \cdot A_1A_2/2R = \nu \cdot B_1B_2/2R$, δηλαδή:

(3) $$\frac{p_\nu}{2R} = \frac{q_\nu}{2\rho}$$

ὅπου p_ν, q_ν οἱ περίμετροι τῶν δύο παραπάνω κανονικῶν ν-γώνων. Ἡ (3) δείχνει ὅτι ὁ λόγος τῆς περιμέτρου πρός τή διάμετρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ὁ ἴδιος καί γιά τά δύο, ὅμοια, κανονικά πολύγωνα.

3. Γενικά σύμβολα Θά παριστάνουμε μέ:

$\boxed{\lambda_\nu}$, τό **μῆκος τῆς πλευρᾶς ἐγγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

$\boxed{\alpha_\nu}$, τό **ἀπόστημα ἐγγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου (δηλ. τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπό ὁποιαδήποτε πλευρά).

$\boxed{p_\nu}$, τήν **περίμετρο ἐγγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

$\boxed{E_\nu}$, τό **ἐμβαδόν ἐγγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

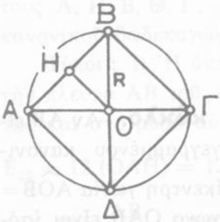
$\boxed{\lambda'_\nu}$, τό **μῆκος τῆς πλευρᾶς περιγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

$\boxed{p'_\nu}$, τήν **περίμετρο περιγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

$\boxed{E'_\nu}$, τό **ἐμβαδόν περιγεγραμμένου** σέ κύκλο (O, R) κανονικοῦ ν-γώνου.

ΕΓΓΡΑΦΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΣΕ ΔΕΔΟΜΕΝΟ ΚΥΚΛΟ

4. Ἐγγραφή τετραγώνου σέ κύκλο. Ἄς χαράξουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ καί ΒΔ τοῦ κύκλου (O, R) (σχ. 3). Τό ΑΒΓΔ εἶναι προφανῶς τετράγωνο καί ἡ πλευρά του εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ. Ἑπομένως:



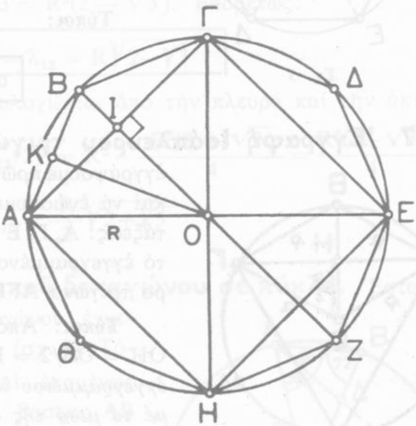
Σχ. 3

$$\boxed{AB = \lambda_4 = R\sqrt{2}}$$

Τό ἀπόστημα ΟΗ εἶναι τό μισό τῆς ΒΓ, δηλαδή:

$$\boxed{OH = \alpha_4 = R\sqrt{2}/2}$$

5. Ἐγγραφή κανονικοῦ ὀκταγώνου σέ κύκλο. Ἐγγράφουμε πρῶτα τετράγωνο ΑΓΕΗ στό δεδομένο κύκλο (O, R) καί κατόπιν διχοτομοῦμε τά τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma E}$, $\overset{\frown}{EH}$, $\overset{\frown}{HA}$, φέρνοντας τίς διχοτόμους τῶν ἐπίκεντρων γωνιῶν $A\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}E$ τοῦ τετραγώνου. Ἔτσι παίρνουμε κανονικό ὀκτάγωνο ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 4).



Σχ. 4

Ὑπολογισμός τῆς λ_8. Ἡ πλευρά ΑΓ τοῦ τετραγώνου τέμνει τήν ἀκτίνα ΟΒ καθέτως στό Ι καί τό γενικευμένο πυθαγόρειο θεώρημα στό τρίγωνο ΑΒΟ δίνει: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OB \cdot OI = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\sqrt{2}/2 = 2R^2 - R^2\sqrt{2} = R^2(2-\sqrt{2})$

Ἑπομένως:

$$\boxed{AB = \lambda_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Ὑπολογισμός τοῦ ἀποστήματος. Ἀπό τήν πλευρά καί τήν ἀκτίνα ὑπολογίζεται τό ἀπόστημα:

$$OK = \sqrt{OB^2 - BK^2} = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2(2-\sqrt{2})}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

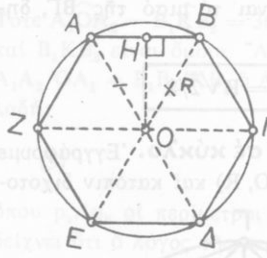
ὥστε : $\boxed{\alpha_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Ἐμβαδόν. Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ ἐμβαδοῦ δέ χρειάζεται ἡ πλευρά:

$$E_8 = 8(OAB) = 8\cdot\frac{1}{2}\cdot OB\cdot AI = 4\cdot OB\cdot\frac{A\Gamma}{2} = 2\cdot OB\cdot A\Gamma = 2R\cdot R\sqrt{2},$$

δηλ. $\boxed{E_8 = 2R^2\sqrt{2}}$

6. Ἐγγραφή κανονικοῦ ἑξαγώνου σέ κύκλο. Ἄν AB εἶναι μιά πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, τότε ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB} = 360°/6 = 60°$ καί τό τρίγωνο OAB εἶναι ἰσόπλευρο. Ἄρα: AB=R. Ἑπομένως χαράσσοντας 6 διαδοχικές χορδές ἴσες πρός τήν ἀκτίνα κατασκευάζουμε κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ἐγγεγραμμένο στό κύκλο.



Σχ. 5

Τύποι: $\boxed{\lambda_6 = AB = R}$

$\boxed{\alpha_6 = OH = R\sqrt{3}/2}$

7. Ἐγγραφή ἰσόπλευρου τριγώνου σέ κύκλο. Ἀρκεῖ νά ἐγγράψουμε πρῶτα κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ καί νά ἑνώσουμε κατόπιν τίς κορυφές περιττῆς τάξεως: Α, Γ, Ε ($1^η$, $3^η$, $5^η$). Λαμβάνουμε ἔτσι τό ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (O, R) ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΓΕ (σχ. 6).

Σχ. 6

Τύποι: Ἀπό τό ρόμβο ΟΑΒΓ ἔχουμε ὅτι $OH = OB/2 = R/2$, δηλ.: *τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσόπλευρου τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς ἀκτίνας:*

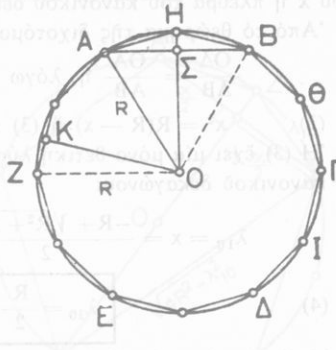
$\boxed{\alpha_3 = R/2}$

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΗ ἔχουμε:

$$AH = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2AH = R\sqrt{3} \Rightarrow A\Gamma = R\sqrt{3}.$$ Ὥστε:

$\boxed{\lambda_3 = R\sqrt{3}}$

8. Ἐγγραφή κανονικοῦ δωδεκαγώνου σέ κύκλο. Ἄν στόν κύκλο (O,R) ἐγγράψουμε κανονικό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ καί διχοτομήσουμε τά (ἐλάσσονα) τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$..., τά ὁποῖα ὑποτείνουν οἱ πλευρές του ΑΒ,ΒΓ, ..., τότε διαιρεῖται ἡ περιφέρεια σέ 12 ἴσα τόξα, πού τά ἄκρα τους Α, Η, Β, Θ, Γ... εἶναι κορυφές κανονικοῦ δωδεκαγώνου.



Σχ. 7

Τύποι : i) Ἡ ἀκτίνα ΟΗ τέμνει τήν πλευρά ΑΒ τοῦ ἑξαγώνου καθέτως καί στό μέσο αὐτῆς Σ. Ἔχουμε:

$$E_{12} = 12\,(OAH) = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot OH \cdot A\Sigma =$$

$$= 6 \cdot OH \cdot \frac{AB}{2} = 3 \cdot OH \cdot AB = 3R \cdot R$$

Ὥστε : $\boxed{E_{12} = 3R^2}$

ii) Ἀπό τό τρ. ΟΑΗ: $AH^2 = OA^2 + OH^2 - 2 \cdot OH \cdot O\Sigma = R^2 + R^2 - 2R \cdot R\sqrt{3}/2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3} = R^2(2 - \sqrt{3})$. Ἐπομένως:

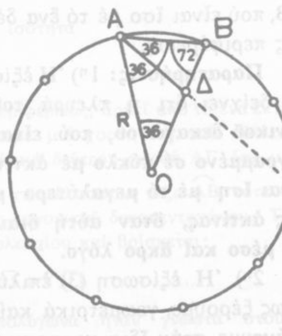
$$\boxed{AH = \lambda_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

iii) Τό ἀπόστημα ΟΚ ὑπολογίζεται ἀπό τήν πλευρά καί τήν ἀκτίνα:

$$OK^2 = OZ^2 - ZK^2 = R^2 - (\lambda_{12}/2)^2 = R^2 - \frac{R^2(2 - \sqrt{3})}{4} = \frac{R^2(2 + \sqrt{3})}{4} \Rightarrow$$

$$\alpha_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

9. Ἐγγραφή κανονικοῦ δεκαγώνου σέ κύκλο. Ἔστω ΑΒ μιά πλευρά κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (O, R) (σχ. 8). Τότε $\widehat{AOB} = 360°/10 = 36°$ καί ἐπομένως καθεμιά ἀπό τίς γωνίες τῆς βάσεως ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ εἶναι ἴση μέ 72°. Ἐπειδή, λοιπόν, ἡ γωνία $\widehat{OAB}$ εἶναι διπλάσια τῆς $\widehat{AOB}$, ἄν φέρουμε τήν ἐσωτερική διχοτόμο ΑΔ τῆς $\widehat{OAB}$, τό τρ. ΟΑΔ εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλά καί τό τρ. ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές, γιατί $\widehat{A\Delta B} = 36° + 36°$ (ἐξωτερική γωνία) $= 72° = \widehat{AB\Delta}$. Ἑπομένως ἔχουμε:



Σχ. 8

(1) $AB = A\Delta = \Delta O = x, \quad \Delta B = R - x$

ὅπου x ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἀπό τό θεώρημα τῆς διχοτόμου ἔχουμε:

$$\frac{O\Delta}{\Delta B} = \frac{OA}{AB} \text{ ἤ, λόγω τῶν (1), } \frac{x}{R - x} = \frac{R}{x} \Rightarrow$$

(2) $x^2 = R(R - x)$ ἤ (3) $x^2 + Rx - R^2 = 0 \ (x > 0)$

Ἡ (3) ἔχει μία μόνο θετική λύση, πού ἐκφράζει τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου:

$$\lambda_{10} = x = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{-R + R\sqrt{5}}{2} \text{ Ὥστε:}$$

(4) $$\boxed{\lambda_{10} = \frac{R}{2}\ (\sqrt{5} - 1)}$$

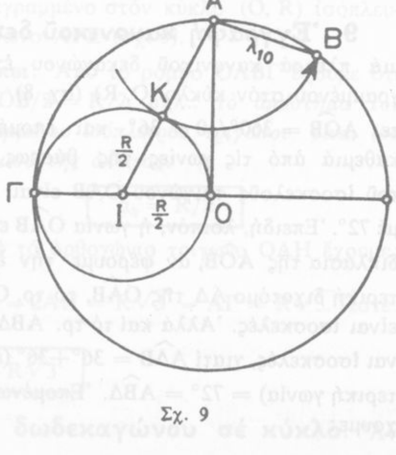
Ἀπό τήν πλευρά καί τήν ἀκτίνα ὑπολογίζεται τό ἀπόστημα:

$$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + \sqrt{5}}$$

Γεωμετρική κατασκευή. Ἀπό τόν τύπο (4) βλέπουμε ὅτι ἡ λ_{10} εἶναι διαφορά τῶν τμημάτων $\frac{R\sqrt{5}}{2}$ καί $\frac{R}{2}$, τά ὁποῖα εὔκολα κατασκευάζονται. Φέρνουμε δύο κάθετες ἀκτίνες ΟΑ, ΟΓ (σχ. 9) καί βρίσκουμε τό μέσο τῆς ΟΓ, ἔστω τό Ι. Τότε:

$$IA = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Ἀπό τό ΙΑ ἀφαιροῦμε τό ΙΚ = R/2, ὁπότε μένει τό $KA = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \lambda_{10}$. Μεταφέρουμε τό ΑΚ σέ χορδή ΑΒ τῆς περιφέρειας καί ἔχουμε ἔτσι κατασκευάσει ἕνα τόξο $\widehat{AB}$, πού εἶναι ἴσο μέ τό ἕνα δέκατο τῆς περιφέρειας.

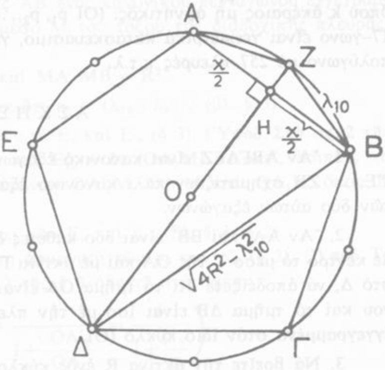


Σχ. 9

Παρατηρήσεις: 1η) Ἡ ἐξίσωση (2) δείχνει ὅτι **ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ ἀκτίνα R, εἶναι ἴση μέ τό μεγαλύτερο μέρος τῆς ἀκτίνας, ὅταν αὐτή διαιρεθεῖ σέ μέσο καί ἄκρο λόγο.**

2η) Ἡ ἐξίσωση (3) ἐπιλύεται, ὅπως ξέρουμε, γεωμετρικά καί ἔτσι φτάνουμε στήν ἴδια κατασκευή μέ τήν παραπάνω.

10. Ἐγγραφή κανονικοῦ πενταγώνου σέ κύκλο. Χωρίζουμε τήν περιφέρεια σέ 10 ἴσα μέρη (βλέπε προηγούμενο) καί τότε τά διαιρετικά σημεῖα περιττῆς τάξεως (1ο, 3ο, 5ο, ...) ὁρίζουν τίς κορυφές ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου (σχ. 10). Ἄν Z τό μέσο τοῦ $\overset{\frown}{AB}$, τότε ἡ OZ εἶναι μεσοκάθετος τῆς AB καί περνάει καί ἀπό τήν ἀπέναντι κορυφή Δ τοῦ πενταγώνου (γιατί τοξ $\widehat{ZB\Gamma\Delta} = 180°$). Ἐπίσης εἶναι $ZB = \lambda_{10}$. Τό μῆκος x = (AB) τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου μποροῦμε νά τό ὑπολογίσουμε ἀπό τό ὀρθογ. τρίγ. ZBΔ μέ βάση τή γνωστή σχέση:



Σχ. 10

$Z\Delta \cdot HB = ZB \cdot B\Delta$, πού γράφεται:

$$2R \cdot \frac{x}{2} = \lambda_{10} \cdot \sqrt{4R^2 - \lambda_{10}^2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{R}{4}\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(10+2\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{R}{4}\sqrt{(6-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})} = \frac{R}{4}\sqrt{40-8\sqrt{5}} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Δηλαδή: $$\boxed{\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

Τό ἀπόστημα α_5 βρίσκουμε ὅτι εἶναι ἴσο μέ $\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$.

11. Κανονικό δεκαπεντάγωνο.— Ἡ ἀριθμητική ἰσότητα

$$\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$$

δείχνει ὅτι, γιά νά βροῦμε τό ἕνα δέκατο πέμπτο τῆς περιφέρειας, ἀρκεῖ ἀπό τό ἕνα ἕκτο της νά ἀφαιρέσουμε τό ἕνα δέκατο. Ἄν, λοιπόν, λάβουμε μιά χορδή AB τοῦ κύκλου (O, R) ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου καί μιά δεύτερη χορδή AΓ ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, ὅπου τό Γ ἀνήκει στό «ἔλασσον» τόξο $\overset{\frown}{AB}$, τότε ἡ χορδή ΓB εἶναι ἴση μέ τήν πλευρά τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαπενταγώνου. Τό μῆκος λ_{15} ὑπολογίζεται μέ βάση τό θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου καί βρίσκεται:

$$\lambda_{15} = \frac{R}{4}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right)$$

12. Ἱστορικό. Ὅλα τά παραπάνω κανονικά πολύγωνα ἦταν γνωστά στούς ἀρχαίους Ἕλληνες. Στίς ἀρχές τοῦ 19ου αἰώνα ὁ μεγάλος Γερμανός Μαθηματικός Karl

Friedrich Gauss (1777 - 1855) ἀπέδειξε ὅτι εἶναι Γεωμετρικά κατασκευάσιμο (δηλ. μέ κανόνα καί διαβήτη) κάθε κανονικό πολύγωνο μέ πλῆθος πλευρῶν τῆς μορφῆς $\nu = 2^{\lambda}.p_1.p_2,\ldots p_\rho$, ὅπου $\lambda = 0,1,2\ldots$ καί $p_1, p_2\ldots p_\rho$ πρῶτοι ἀριθμοί τῆς μορφῆς $2^{2^k}+1$, ὅπου k ἀκέραιος μή ἀρνητικός. (Οἱ $p_1, p_2,\ldots p_\nu$ λέγονται ἀριθμοί τοῦ Fermat). Ἔτσι, τό 17–γωνο εἶναι γεωμετρικά κατασκευάσιμο, γιατί $17 = 2^0.(2^{2^2}+1)$. Ἐπίσης τό κανονικό πολύγωνο μέ 257 πλευρές κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄν ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικό ἑξάγωνο, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ, ΓΕ,... ΖΒ σχηματίζουν πάλι κανονικό ἑξάγωνο καί νά βρεῖτε τό λόγο τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο αὐτῶν ἑξαγώνων.

2. Ἄν ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ εἶναι δύο κάθετες διάμετροι κύκλου (Ο) καί ἄν γράψουμε τόξο μέ κέντρο τό μέσο Γ τῆς ΟΑ καί μέ ἀκτίνα ΓΒ, τό ὁποῖο τόξο νά τέμνει τήν ἀκτίνα ΟΑ΄ στό Δ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τμῆμα ΟΔ εἶναι ἴσο μέ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου καί τό τμῆμα ΔΒ εἶναι ἴσο μέ τήν πλευρά τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένα στόν ἴδιο κύκλο (Ο).

3. Νά βρεῖτε τήν ἀκτίνα R ἑνός κύκλου, στόν ὁποῖο εἶναι $E_8 - E_6 = 1$ (m²).

4. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε διαγώνιος ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι παράλληλη πρός μία πλευρά τοῦ πενταγώνου, ii) νά ἀποδείξετε ὅτι δύο διαγώνιοι ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου ἀλληλοτέμνονται σέ μέσο καί ἄκρο λόγο. iii) Ἄν α εἶναι τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου, νά βρεθοῦν τά μήκη τῶν τριῶν τμημάτων, στά ὁποῖα μία διαγώνιος χωρίζεται ἀπό τίς ἄλλες.

5. Ἔστω ἕνας κύκλος (Ο, R) καί δύο κάθετες ἀκτίνες του ΟΒ, ΟΒ΄. Ὁ κύκλος (Β, ΒΒ΄) τέμνει τήν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (Ο, R) στό Β σέ δύο σημεῖα καί ἔστω Α τό ἕνα ἀπ' αὐτά. Ἡ περιφέρεια (Α, R) τέμνει τήν (Ο, R) σέ δύο σημεῖα καί ἔστω Γ τό ἕνα ἀπ' αὐτά. Ἡ εὐθεία ΑΓ τέμνει τόν (Ο, R) σέ νέο σημεῖο Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι πλευρά κάποιου κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (Ο, R).

6. Νά ἀποδείξετε ὅτι $E_{2\nu} = \frac{1}{2}\nu.R.\lambda_\nu$ (**Ὑποδ.** βλ. πῶς βρίσκουμε τά E_8 καί E_{12} (§§ 5, 8), καθώς καί § 3).

7. Ἕνα πολύγωνο πού ἔχει συνολικά 252 διαγωνίους εἶναι ἐγγεγραμμένο σ' ἕναν κύκλο. Τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ εἶναι $54.\sqrt{2-\sqrt{3}}$ m². Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου. (**Ὑποδ.** Τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου μέ ν πλευρές γνωρίζουμε ὅτι εἶναι ἴσο μέ $\nu(\nu-3)/2$. Ἔχουμε καί τόν τύπο τῆς ἀσκήσεως 6).

8. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου εἶναι ἴση μέ 5 m καί μία ἀπό τίς ὀξεῖες γωνίες του εἶναι 18°. Νά ὑπολογίσετε τίς ἄλλες πλευρές μέ τή βοήθεια τῶν κανονικῶν πολυγώνων. Ὁμοίως στήν περίπτωση, πού ἡ μία κάθετη πλευρά εἶναι 1 m καί ἡ ἀπέναντί της γωνία 15°.

9. Σ' ἕνα κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ..., πού εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο), ἡ πλευρά ΑΒ, ἄν προεκταθεῖ, τέμνει τήν προέκταση τῆς ἀκτίνας ΟΓ σ' ἕνα σημεῖο Μ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΑΜ = ΑΔ (**Ὑποδ.** Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ: τρ. ΑΓΜ = τρ. ΑΓΔ ἤ ὅτι $\widehat{AM\Gamma} = 36°$. Ἄς λάβουμε ὑπόψη ὅτι ἡ εὐθ. ΜΓΟ περνάει ἀπό τήν κορυφή τοῦ δεκαγώνου, πού βρίσκεται ἀπέναντι στή Γ).

10. Ποιά εἶναι ἡ μικρότερη δυνατή γωνία, πού σχηματίζουν προεκτεινόμενες δύο πλευρές κανονικοῦ δεκαεπταγώνου; (**Ὑποδ.** ΑΒ καί ΓΔ ἄς εἶναι δύο πλευρές τοῦ δεκαεπταγώνου, πού προεκτεινόμενες σχηματίζουν γωνία ω. Ἡ ω περιέχει μεταξύ τῶν πλευ-

ρῶν της τόξα πού περιέχουν τό ἕνα ν καί τό ἄλλο 15 — ν πλευρές τοῦ δεκαεπταγώνου. Βρεῖτε γιά ποιό ν τό ω γίνεται min).

11. Ἄν τά ἄκρα Α καί Β τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνός κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας R ἑνωθοῦν μέ τό μέσο Μ τοῦ τόξου τῆς διαδοχικῆς πλευρᾶς, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$MA - MB = R \text{ καί } MA \cdot MB = R^2$$

12. Χωρίς ὑπολογισμούς νά ἀποδείξετε ὅτι $\alpha_5 = (\lambda_{10}+\lambda_6)/2$ (βλ. § 3).

13. Νά ὑπολογιστεῖ τό $E_{2\nu}$, ὅταν δοθοῦν τά E_ν καί E'_ν (§ 3). (Ὑποδ. Στό σχ. 2 τῆς § 2 εἶναι $E_\nu = \nu(OA_1A_2)$, $E'_\nu = \nu(OA'_1A'_2)$ καί $E_{2\nu} = 2\nu.(OA_1M)$. Ἀρκεῖ, λοιπόν, νά βρεθεῖ σχέση μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων OA'_1M, OA_1M καί OA_1N, ὅπου Ν τό μέσο τοῦ A_1A_2).

14. Νά ὑπολογιστεῖ τό $E'_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν E_ν καί E'_ν (βλ. § 3, § 2).

15. Ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ $p'_{2\nu}$ εἶναι μέση ἁρμονική τῶν p_ν καί p'_ν (§ 3). (Ὑποδ. Τό (Θ) τῆς διχοτόμου στό τρ. OMA_1' τοῦ σχ. 2 τῆς § 3 ὁδηγεῖ στή σχέση:

$$\frac{MB'_1}{MA'_1} = \frac{R}{R+OA'_1} = \frac{1}{1+\dfrac{OA'_1}{OA_1}} = \frac{1}{1+\dfrac{p'_\nu}{p_\nu}}\Bigg)$$

16. Ὑπολογίστε τήν $p_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν p_ν καί p'_ν.

ΛΗΜΜΑΤΑ

13. Ἄν σ' ἕνα σταθερό κύκλο (Ο) μιά μεταβλητή ἐπίκεντρη γωνία τείνει πρός τό μηδέν, τότε καί ἡ ἀντίστοιχη χορδή της τείνει πρός τό μηδέν.

Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ε ὁσοδήποτε μικρό θέλουμε (ὁπωσδήποτε $<2R$). Τότε ὑπάρχει χορδή $AB = \varepsilon$ καί ἡ μεταβαλλόμενη ἐπίκεντρη γωνία, ἀφοῦ τείνει πρός τό μηδέν, γίνεται μικρότερη ἀπό τήν ΑΟΒ, ἄρα καί ἡ χορδή της γίνεται μικρότερη ἀπό τή χορδή $AB = \varepsilon$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ χορδή τῆς μεταβλητῆς γωνίας τείνει πρός τό μηδέν.

14. Ἄν σ' ἕνα σταθερό κύκλο μία μεταβλητή χορδή ἔχει ὅριο τό μηδέν, τότε τό ἀπόστημά της ἔχει ὅριο τήν ἀκτίνα.

Ἔστω μιά μεταβλητή χορδή AA_ν τέτοια, ὥστε $\lim\limits_{\nu\to\infty} AA_\nu = 0$ καί KM_ν τό ἀπόστημά· της (σχ. 11). Τότε, ἄν δοθεῖ τμῆμα ε ὁσοδήποτε μικρό, ἡ ἀνισότητα $AA_\nu < \varepsilon$ θά ἰσχύει ἀπό μιά τιμή ν_0 τοῦ ν καί πέρα καί μαζί μέ αὐτή ἡ $AM_\nu < \varepsilon$. Ἐπειδή $|R - KM_\nu| < AM_\nu$, γι' αὐτό θά ἰσχύει γιά $\nu > \nu_0$ καί ἡ $|R - KM_\nu| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} KM_\nu = R$.

Σχ. 11

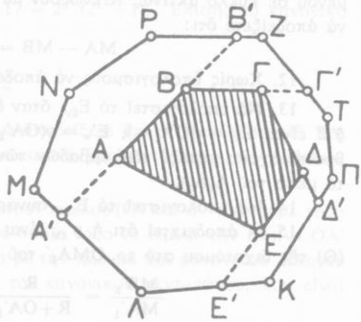
15. Ἀποδεικνύεται τό ἑξῆς θεώρημα:

«Ἀπό δυό κανονικά πολύγωνα ἐγγεγραμμένα στόν ἴδιο κύκλο αὐτό πού ἔχει περισσότερες πλευρές ἔχει καί μεγαλύτερη περίμετρο».

16. (Θ) — Ἄν ἕνα κυρτό πολύγωνο περικλείεται ἀπό ἕνα ἄλλο κυρτό

πολύγωνο, τότε τό περικλειόμενο ἔχει περίμετρο μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο αὐτοῦ, πού τό περικλείει.

Ἀπόδειξη. Λέμε ὅτι τό κυρτό πολύγωνο (Ρ) περικλείεται ἀπό τό κυρτό πολύγωνο (Ρ′), ὅταν οἱ κορυφές τοῦ (Ρ) βρίσκονται στό ἐσωτερικό ἤ καί στήν περίμετρο τοῦ (Ρ′), χωρίς τό (Ρ) νά ταυτίζεται μέ τό (Ρ′). Ἔστω τώρα τό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, πού περικλείεται ἀπό τό ΚΛΜ . . . ΤΠ (σχ. 12). Ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τήν περίμετρο τοῦ ΚΛΜ . . . ΤΠ σέ δύο σημεῖα Α′ καί Β′ καί τό χωρίζει σέ δύο κυρτά πολύγωνα, τά ὁποῖα βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθ. ΑΒ καί μάλιστα τό ἕνα, δηλ. τό Α′Β′ΖΤ . . . Λ περικλείει τό ΑΒΓΔΕ. Τό νέο τοῦτο κυρτό πολύγωνο Α′Β′Ζ . . . Λ, πού περικλείει τό ΑΒΓΔΕ, ἔχει περίμετρο μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ ἀρχικοῦ ΚΛΜ . . . ΤΠ, γιατί Α′Β′<Α′Μ+ΜΝ+ΝΡ+ΡΒ′. Ἡ ἡμιευθεία $\overrightarrow{\text{ΒΓ}}$ τέμνει τήν περίμετρο τοῦ Α′Β′ΖΤ . . . Λ στό Γ′ καί τό χωρίζει σέ δύο κυρτά πολύγωνα, ἀπό τά ὁποῖα τό ΒΓ′ΤΠΚΛΑ′ περικλείει τό ΑΒΓΔΕ καί ἔχει περίμετρο μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ Α′Β′ΖΤ. . . Λ, γιατί ΒΓ′<ΒΒ′+Β′Ζ′+ΖΓ′. Προεκτείνοντας τήν πλευρά ΓΔ πρός τό μέρος τοῦ Δ δημιουργοῦμε τό πολύγωνο Β′Γ′Δ′ΚΛΑ′, πού ἔχει ἀκόμη μικρότερη περίμετρο. Συνεχίζοντας ἔτσι ὥς τήν τελευταία πλευρά, φτάνουμε μέ διαδοχικές ἐλαττώσεις στήν περίμετρο τοῦ ΑΒΓΔΕ, ἡ ὁποία συνεπῶς εἶναι μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ ὁποιουδήποτε πολυγώνου, πού περικλείει τό ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 12

ΜΗΚΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ—ΑΡΙΘΜΟΣ π

17. Ὁρισμός τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας. Ἄς θεωρήσουμε μιά ἀπέραντη ἀκολουθία ἀπό κανονικά πολύγωνα ἐγγεγραμμένα σέ περιφέρεια (Κ, R), τά ὁποῖα ἔχουν 3, 4, 5, 6, . . . ν, . . . πλευρές. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τήν ἀκολουθία τῶν περιμέτρων τῶν πολυγώνων αὐτῶν:

(1) $$p_3, p_4, p_5, \ldots p_\nu, p_{\nu+1} \ldots$$

Ἡ (1) περιέχει ὅλες τίς δυνατές περιμέτρους κανονικῶν πολυγώνων ἐγγεγραμμένων στήν (Κ, R). Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμε (§ 15), εἶναι $p_\nu < p_{\nu+1}$ γιά $\nu = 3, 4, \ldots$ (ἐπ᾿ ἄπειρον), γιά τοῦτο ἡ (1) εἶναι **αὔξουσα ἀκολουθία** θετικῶν ἀριθμῶν:

$$p_3 < p_4 < p_5 < \ldots < p_\nu < p_{\nu+1} < \ldots$$

Ἡ (1) εἶναι φραγμένη ἀπό πάνω, γιατί ἡ περίμετρος τυχόντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο ὁποιουδήποτε περιγεγραμμένου (§ 16). Ἐπομένως ἡ (1) ἔχει ἄνω φράγμα τήν περίμετρο ὁποιουδήποτε περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου π.χ. τό p'_3, δηλ. ὅλοι οἱ ὅροι της εἶναι μικρότεροι τοῦ p'_3. Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι κάθε αὔξουσα ἀκολουθία φραγμένη ἀπό πάνω συγκλίνει πρός ἕνα ορισμένο ὅριο, μικρότερο ἤ ἴσο μέ τό ἄνω φράγμα. Ἐπομένως ἡ ἀκολουθία (1) τῶν περιμέτρων τείνει πρός ἕνα ὅριο.

Τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ ἀκολουθία ὅλων τῶν περιμέτρων: p_3, p_4,... p_ν ... τῶν ἐγγεγραμμένων στόν κύκλο (K,R) κανονικῶν πολυγώνων, εἶναι (ἀπό ὁρισμό) τό μῆκος τῆς περιφέρειας (K, R).

Δηλαδή: $$\boxed{\lim_{\nu\to\infty} p_\nu = L = \text{μῆκος τῆς περιφέρειας}}$$

Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, μήκους L, πού εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τήν περίμετρο ὁποιουδήποτε ἐγγεγραμμένου καί μικρότερο ἀπό τήν περίμετρο ὁποιουδήποτε περιγεγραμμένου σέ κύκλο κανονικοῦ πολυγώνου, λέγεται καί **ἀνάπτυγμα τῆς περιφέρειας.**

18. Ὁρισμός τοῦ ἀριθμοῦ π. Θεώρημα τοῦ Ἱπποκράτη τοῦ Χίου.

— Ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου της εἶναι ὁ ἴδιος σέ ὅλους τούς κύκλους. Ὁ σταθερός αὐτός λόγος λέγεται «ἀριθμός π».

Ἄς πάρουμε δυό περιφέρειες (K, R) καί (O, ρ), πού ἔχουν μήκη L καί l ἀντιστοίχως. Ἔστω p_ν ἡ περίμετρος κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου στόν πρῶτο κύκλο καί q_ν ἡ περίμετρος ἄλλου κανονικοῦ ν-γώνου (ὅμοιου μέ τό πρῶτο) ἐγγεγραμμένου στό δεύτερο κύκλο.

Ὅπως εἴδαμε πρίν, εἶναι $\lim_{\nu\to\infty} p_\nu = L$ καί $\lim_{\nu\to\infty} q_\nu = l$. Ἐπομένως:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{p_\nu}{2R} = \frac{L}{2R} \quad \text{καί} \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{q_\nu}{2\rho} = \frac{l}{2\rho}$$

Ἀλλά γνωρίζουμε (§ 2, VII) ὅτι:

$$\frac{p_\nu}{2R} = \frac{q_\nu}{2\rho}$$

δηλ. οἱ δυό ἀκολουθίες: $\left\{\frac{p_\nu}{2R}\right\}$ καί $\left\{\frac{q_\nu}{2\rho}\right\}$ $(\nu = 3, 4, 5, \ldots)$ εἶναι ἴσες·

ἄρα καί τά ὅριά τους εἶναι ἴσα. Δηλαδή: $\dfrac{L}{2R} = \dfrac{l}{2\rho}$.

Ὥστε ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας πρός τό μῆκος τῆς διαμέτρου εἶναι ὁ ἴδιος γιά δυό ὁποιουσδήποτε κύκλους, ἄρα ὁ ἴδιος γιά ὅλους τούς κύκλους. Ὁ σταθερός αὐτός λόγος παριστάνεται διεθνῶς μέ τό γράμμα **π** τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου.

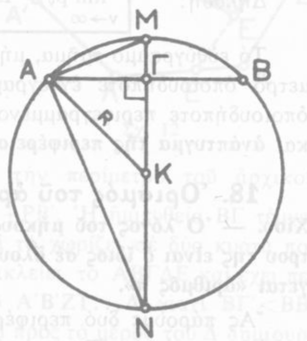
Ἀλλά ἀφοῦ $\frac{L}{2R} = \pi$, ἔπεται ὅτι:

(1) $\boxed{L = 2\pi R}$ (τύπος πού δίνει τό μῆκος τῆς περιφέρειας)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ π

19. α') ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ι. Νά ὑπολογιστεῖ τό $p_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν p_ν καί R.

Ἔστω $AB = \lambda_\nu$ ἡ πλευρά ἑνός κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο (K, R) (σχ. 13). Φέρνουμε τή διάμετρο MN, κάθετη στήν AB. Αὐτή θά περνᾶ ἀπό τό μέσο Γ τῆς χορδῆς AB καί τό μέσο M τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Ἐπομένως ἡ χορδή AM θά εἶναι πλευρά ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου μέ 2ν πλευρές, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο. Δηλαδή: $AM = \lambda_{2\nu}$.



Σχ. 13

Κατά σειρά ἔχουμε τίς σχέσεις:

$$AM^2 = MN \cdot M\Gamma = 2R(KM - K\Gamma) =$$
$$= 2R(R - \sqrt{R^2 - A\Gamma^2}) =$$
$$= R(2R - \sqrt{4R^2 - 4A\Gamma^2}) =$$
$$= R(2R - \sqrt{4R^2 - AB^2})$$

δηλαδή: $\lambda^2_{2\nu} = R(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda^2_\nu})$ καί τελικά

$$(1) \qquad \boxed{\lambda_{2\nu} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda^2_\nu})}} \qquad \text{(Τύπος τοῦ Ἀρχιμήδη)}$$

Ἡ (1) ἐκφράζει τήν πλευρά $\lambda_{2\nu}$ συναρτήσει τῶν λ_ν καί τῆς R. Ἐπειδή, ὅμως, $\lambda_{2\nu} = \frac{p_{2\nu}}{2\nu}$ καί $\lambda_\nu = \frac{p_\nu}{\nu}$, ἡ (1) γράφεται καί

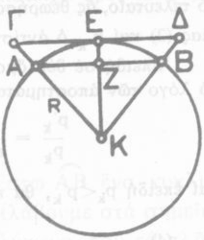
$$(2) \qquad \frac{p_{2\nu}}{2\nu} = \sqrt{R\left(2R - \sqrt{4R^2 - \frac{p^2_\nu}{\nu^2}}\right)}$$

Ἀπό τή (2) βρίσκεται ἡ $p_{2\nu}$, ἄν εἶναι γνωστή ἡ p_ν.

Γιά $R = \frac{1}{2}$ ἡ (2) μᾶς δίνει.

$$(3) \qquad \boxed{p_{2\nu} = \sqrt{2\nu(\nu - \sqrt{\nu^2 - p^2_\nu})}}$$

β') ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΙΙ. Νά ὑπολογιστεῖ τό p'_ν συναρτήσει τῶν p_ν καί R. Ἔστω $AB = \lambda_\nu$ ἡ πλευρά ἑνός ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ν-γώνου καί ΓΔ ἡ πλευρά λ'_ν τοῦ ἀντίστοιχου περιγεγραμμένου (σχ. 14). Τά τρίγωνα ΚΔΓ καί ΚΒΑ εἶναι ὅμοια καί ἑπομένως ὁ λόγος τῶν βάσεων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων ὑψῶν. Θά ἔχουμε:



Σχ. 14

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{KE}{KZ} \quad ἤ \quad \frac{\lambda'_\nu}{\lambda_\nu} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{\lambda_\nu^2}{4}}}$$

καί τελικά:

$$\lambda'_\nu = \frac{2R\lambda_\nu}{\sqrt{4R^2 - \lambda_\nu^2}} \tag{4}$$

Ἐπειδή $\lambda'_\nu = \frac{p'_\nu}{\nu}$, $\lambda_\nu = \frac{p_\nu}{\nu}$, ὁ τύπος (4) γίνεται:

$$p'_\nu = \frac{2\nu \cdot R \cdot p_\nu}{\sqrt{4\nu^2R^2 - p_\nu^2}} \tag{5}$$

Γιά $R = \frac{1}{2}$ ἡ (5) δίνει (6) $p'_\nu = \dfrac{\nu \cdot p_\nu}{\sqrt{\nu^2 - p_\nu^2}}$.

20. Ὑπολογισμός τοῦ π. Γιά νά ὑπολογίσουμε τόν ἀριθμό π, ἀρκεῖ νά ὑπολογίσουμε τό μῆκος L μιᾶς περιφέρειας μέ ἀκτίνα $R = \frac{1}{2}$. Γιατί $L = 2\pi R = 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$. Τό L ὅμως εἶναι (§ 17) τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν περιμέτρων ὅλων τῶν κανονικῶν πολυγώνων, πού εἶναι ἐγγεγραμμένα στόν κύκλο Ο, δηλαδή τό ὅριο τῆς ἀπέραντης ἀκολουθίας.

(1) $\quad p_3, p_4, p_5, \ldots p_\nu \ldots$

Τό ὅριο, λοιπόν, τῆς (1) εἶναι ὁ ἀριθμός π, ὅταν $R = \frac{1}{2}$.

Γιά νά βροῦμε τό ὅριο τῆς (1), ἀρκεῖ νά βροῦμε τό ὅριο, στό ὁποῖο τείνει μιά ὁποιαδήποτε ὑπακολουθία τῆς (1), ὅπως π.χ. ἡ:

(2) $\quad p_6, p_{12}, p_{24}, p_{48}, \ldots$

γιατί οἱ (1) καί (2) τείνουν πρός τό ἴδιο ὅριο. (Αὐτό συμβαίνει, γιατί, ἄν ἡ (1) ἔχει ὅριο τό l, τότε γιά κάποιο $\varepsilon > 0$, ὁποιοδήποτε, ὅλοι οἱ ὅροι τῆς (1) ἀπό κάποιο δείκτη Ν καί ἔπειτα, δηλαδή οἱ $p_N, p_{N+1} \ldots$, βρίσκονται μέσα στό διάστημα $]l-\varepsilon, l[$. Ἀλλά μέσα στούς $p_N, p_{N+1}, p_{N+2} \ldots$ ὑπάρχουν καί ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ὑπακολουθίας (2) ἀπό κάποιο δείκτη καί ἔπειτα, ἑπομένως καί ἡ (2) τείνει πρός τό ἴδιο ὅριο).

Ὥστε ὁ ἀριθμός π εἶναι τό ὅριο, στό ὁποῖο τείνει ἡ αὔξουσα ἀκολουθία (2).

Ἄν θεωρήσουμε καί τήν ἀκολουθία τῶν περιγεγραμμένων στόν ἴδιο κύκλο (μέ ἀκτίνα 1/2) κανονικῶν πολυγώνων, τήν ἀντίστοιχη στή (2), δηλαδή τήν:

(3) $\quad p'_6, p'_{12}, p'_{24}, p'_{48}, \ldots$

τότε παρατηροῦμε ὅτι ἡ (3) εἶναι φθίνουσα [§ 2, VI, (2)] καί ὅτι ἡ διαφορά δύο ἀντίστοιχων ὅρων τῶν (2) καί (3) τείνει πρός τό μηδέν, ὅταν $\nu \to \infty$. Γιά νά ἀποδείξουμε αὐτό τό τελευταῖο, ἄς θεωρήσουμε τίς περιμέτρους p_k καί p'_k, ὅπου p_k εἶναι ὅρος τῆς ἀκολουθίας (2) καί p'_k ὁ ἀντίστοιχος τῆς (3) (γιά $k = 6.2^\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$).

Ἐπειδή σέ δύο ὅμοια κανονικά πολύγωνα ὁ λόγος τῶν περιμέτρων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀποστημάτων (λόγος ὁμοιότητας), γι' αὐτό:

$$\frac{p'_k}{p_k} = \frac{R}{\alpha_k} \Rightarrow p'_k = \frac{Rp_k}{\alpha_k} \Rightarrow p'_k - p_k = p_k\left(\frac{R}{\alpha_k} - 1\right)$$

καί ἐπειδή $p_k < p'_k$, θά εἶναι:

$$(4) \qquad 0 < p'_k - p_k < p'_k \cdot \frac{R - \alpha_k}{\alpha_k}$$

Ἐπειδή $k \geqslant 6$, γι' αὐτό $p'_k \leqslant p'_6 = 4R\sqrt{3}$ καί $\alpha_k \geqslant \alpha_6 = R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἑπομένως ἀπό τήν (4) ἕπεται:

$$(5) \qquad 0 < p'_k - p_k \leqslant \frac{4R\sqrt{3}}{R\sqrt{3}/2}(R - \alpha_k) = 8(R - \alpha_k)$$

Ἐπειδή $\alpha_k \xrightarrow[k=\infty]{} R$ (§ 14), γι' αὐτό $R - \alpha_k \xrightarrow[k=\infty]{} 0$ καί ἑπομένως ἀπό τήν (5) ἕπεται $p'_k - p_k \xrightarrow[k=\infty]{} 0$.

Ἑπομένως οἱ ἀκολουθίες (2) καί (3) ἀποτελοῦν ἐγκιβωτισμό καί τείνουν πρός τό ἴδιο ὅριο π τέτοιο, ὥστε:

$$\boxed{p_k < \pi < p'_k} \qquad (k = 6, 12, 24, 48 \ldots)$$

Οἱ περίμετροι p_k καί p'_k ὑπολογίζονται κλιμακωτά γιά $k = 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$ ἀπό τούς τύπους (3) καί (6) τῆς § 19. Ἐκτελῶντας τούς ὑπολογισμούς βρίσκουμε:

ν		p		p′
6	...	3,00000	...	3,46411
12	...	3,10582	...	3,21540
24	...	3,13262	...	3,15967
48	...	3,13935	...	3,14609
96	...	3,14103	...	3,14272
192	...	3,14145	...	3,14188

Ἑπομένως: $3,14145 < \pi < 3,14188$. Τά πρῶτα ἀκριβῆ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π εἶναι τά κοινά ψηφία τῶν δύο προσεγγίσεων: $\pi = 3,141\ldots$

Προσεγγιστικές τιμές τοῦ π, πού χρησιμοποιοῦνται στήν πράξη: Στούς πρακτικούς ὑπολογισμούς μᾶς ἀρκοῦν συνήθως οἱ ἑξῆς κατά προσέγγιση τιμές τοῦ π: $\pi \simeq 3,1416$ (προσεγγιστική τιμή πού ὑπερέχει). $\pi \simeq \frac{22}{7}$ (προσεγγιστική τιμή, πού δόθηκε ἀπό τόν Ἀρχιμήδη). Ἄς σημειώσουμε ἀκόμη μιά τιμή πού προσεγγίζει τό π, τήν τιμή $\pi \simeq \sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq 3,1416$, πού μᾶς ἐπιτρέπει νά κατασκευάσουμε, κατά προσέγγιση, γεωμετρικά τό ἀνάπτυγμα μιᾶς περιφέρειας.

Ἡ μέγιστη προσέγγιση, πού ἔχει κατορθωθεῖ. Ὡς σήμερα ἔχουν βρεθεῖ 10.000 ψηφία (στό δεκαδικό σύστημα) τοῦ ἀριθμοῦ π. (Αὐτό κατορθώθηκε τό 1959 στό Παρίσι μέ τόν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή I.B.M. 704).

Γράφουμε τά 20 πρῶτα:

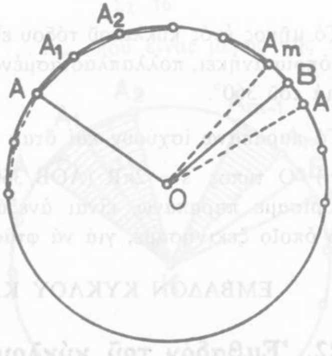
$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots$$

Σημειώνουμε ἀκόμη ὅτι ἡ προσέγγιση $\pi = 3{,}14159\ldots$ ἀντιστοιχεῖ πρός τά γράμματα τῶν λέξεων τῆς φράσεως:

ἀεί	ὁ	Θεός	ὁ	μέγας	γεωμετρεῖ
3	1	4	1	5	9

ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΞΟΥ

21. α΄) **Ὁρισμός τοῦ μήκους ἑνός τόξου**. Ἔστω $\widehat{AB}$ ἕνα κυκλικό τόξο μέ κέντρο Ο. Τά σημεῖα Α καί Β ἄς τά συμπεριλάβουμε στά σημεῖα τοῦ τόξου. Ἐγγράφουμε στόν κύκλο ἕνα κανονικό πολύγωνο, πού τό πλῆθος k τῶν πλευρῶν του εἶναι ἀρκετά μεγάλο, ἔστω τό $AA_1A_2A_3\ldots A_mA_{m+1}\ldots A$ (σχ. 15) καί θεωροῦμε ὅλες τίς κορυφές τοῦ πολυγώνου, πού βρίσκονται στό τόξο $\widehat{AB}$, τίς $A, A_1, A_2, \ldots A_m$. Ἡ κορυφή A_{m+1} δέν ἀνήκει στό τόξο $\widehat{AB}$. Ἄς ὀνομάσουμε S_m τό μῆκος τῆς κανονικῆς τεθλασμένης $AA_1A_2A_3\ldots A_m$, δηλαδή τό μῆκος ἐκείνου τοῦ μέρους τῆς περιμέτρου, πού ἀντιστοιχεῖ στό τόξο $\widehat{AB}$.



Σχ. 15

Παρατηροῦμε ὅτι, ἄν διπλασιάζουμε ἀκατάπαυστα τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, δηλαδή ἄν ἐγγράφουμε κανονικά πολύγωνα μέ $k, 2k, 2^2\cdot k, \ldots 2^\nu\cdot k, \ldots$ πλευρές, τότε τό μῆκος S_m τῆς καθεμιᾶς ἀντίστοιχης τεθλασμένης $AA_1A_2\ldots A_m$ θά μεγαλώνει συνεχῶς, καί τό A_m θά μετατοπίζεται πρός τό Β. Ἐπειδή μέ αὐτό τό συνεχή διπλασιασμό, τό S_m, ἄν καί συνεχῶς μεγαλώνει, ὡστόσο παραμένει πάντοτε μικρότερο ἀπό τήν περίμετρο ἑνός ὁποιουδήποτε περιγεγραμμένου πολυγώνου (δηλαδή ἔχει ἄνω φράγμα), γι᾽ αὐτό τό S_m τείνει πρός ἕνα ὅριο s. **Τό ὅριο αὐτό τοῦ $S_m = AA_1A_2\ldots A_m$ τό ὀνομάζουμε μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.**

β΄) **Ὑπολογισμός τοῦ μήκους ἑνός τόξου**. Ἔστω $N(=k\cdot 2^\nu)$ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου $AA_1A_2A_mA_{m+1}\ldots A$ καί $A_1A_2\ldots A_m$ τό μέρος (ἡ «ἀπόκομμα») τῆς περιμέτρου, πού ἀντιστοιχεῖ στό τόξο $\widehat{AB}$ (σχ. 15). Ἐπειδή $A_m\widehat{O}B < A_m\widehat{O}A_{m+1} = \dfrac{360}{N}$, ἕπεται ὅτι $\lim\limits_{N\to\infty} A_m\widehat{O}B = 0$ καί ἐπομένως $\lim\limits_{N\to\infty} A\widehat{O}A_m = A\widehat{O}B$. Μέ βάση τά παραπάνω, ὑπολογίζουμε ὡς ἑξῆς τό μῆκος s τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

$$s=\lim_{N\to\infty}(AA_1A_2\ldots A_m)=\lim_{N\to\infty}(m\lambda_N)=\lim_{N\to\infty}\left(m\cdot\frac{p_N}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}p_N\cdot\lim\frac{m}{N}$$

Ἀλλά: $\lim\limits_{N\to\infty}p_N=2\pi R$ (μῆκος τῆς περιφέρειας) καί

$$\frac{m}{N}=\frac{m\cdot\widehat{AA_1}}{N\cdot\widehat{AA_1}}=\frac{\widehat{AOA_m}}{360^\circ}$$

Ἑπομένως: $s=2\pi R\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\widehat{AOA_m}}{360^\circ}=\boxed{2\pi R\cdot\dfrac{\widehat{AOB}}{360^\circ}}$. Δηλαδή:

Τό μῆκος ἑνός κυκλικοῦ τόξου εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος τῆς περιφέρειας, στήν ὁποία ἀνήκει, πολλαπλασιασμένο ἐπί τό πηλίκο τῆς ἐπίκεντρης γωνίας του διά τοῦ 360°.

Τά παραπάνω ἰσχύουν καί ὅταν ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι μή κυρτή.

γ) Ὁ τύπος $s=2\pi R\cdot(\widehat{AOB}/360^\circ)$ δείχνει ὅτι τό μῆκος τοῦ τόξου, πού ὁρίσαμε παραπάνω, εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό κανονικό πολύγωνο, ἀπ' τό ὁποῖο ξεκινήσαμε, γιά νά φτάσουμε στό ὅριο.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΑ

22. *Ἐμβαδόν τοῦ κύκλου*. Εἶναι εὔκολο νά δοῦμε ὅτι τό ἐμβαδόν E_ν ἑνός κανονικοῦ ν-γώνου εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς περιμέτρου του ἐπί τό ἀπόστημά του: $E_\nu=\dfrac{p_\nu\alpha_\nu}{2}$.

Ἄν τώρα θεωρήσουμε τήν ἀκολουθία τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν δυνατῶν κανονικῶν πολυγώνων, πού εἶναι ἐγγράψιμα στόν κύκλο (K, R), δηλαδή τήν: $E_3, E_4, E_5, \ldots E_\nu, \ldots$, βλέπουμε ὅτι αὐτή τείνει πρός ἕνα ὅριο. Γιατί $E_\nu=\dfrac{p_\nu\alpha_\nu}{2}\Rightarrow$

$$\lim_{\nu\to\infty}E_\nu=\frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty}p_\nu\cdot\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\frac{1}{2}\,2\pi R\cdot R=\pi R^2$$

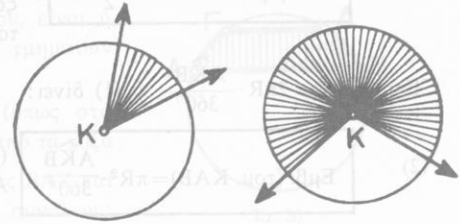
(βλ. § 14, § 17). **Τό ὅριο αὐτό τό ὀνομάζουμε ἐμβαδόν τοῦ κύκλου.** Ἄρα:

Τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἐκφράζεται, συναρτήσει τῆς ἀκτίνας του R, ἀπό τόν τύπο $\boxed{\pi R^2}$.

Συναρτήσει τῆς διαμέτρου d ἐκφράζεται μέ

$$\boxed{\frac{\pi d^2}{4}}$$

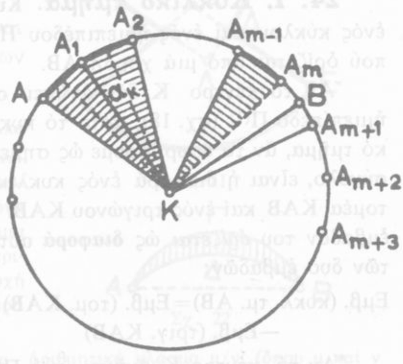
23. Κυκλικός τομέας λέγεται τό μέρος τοῦ κύκλου (δίσκου), πού **περιέχεται μέσα σέ μιά ἐπίκεντρη γωνία.** (σχ. 16), δηλ. ἡ «τομή» τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας καί τοῦ κύκλου (ἤ δίσκου).



Σχ. 16

Ὁρισμός τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνός κυκλικοῦ τομέα. Ἔστω τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ τοῦ τομέα ΚΑΒ (σχ. 17). Θεωροῦμε τήν κανονική τεθλασμένη γραμμή $AA_1A_2\ldots A_m$, πού εἶναι μέρος τῆς περιμέτρου ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου $AA_1\ldots A_mA_{m+1}\ldots A$. Τό ἄκρο A_m τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς εἶναι ἡ τελευταία κορυφή τοῦ πολυγώνου, ἡ ὁποία ἀνήκει στό τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Ἔστω k τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου $AA_1A_2\ldots A_m\ldots A$ καί α_κ τό ἀπόστημά του. Ὁρίζουμε ὡς ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ τομέα τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου (ἤ πολυγωνικοῦ τομέα) $KAA_1A_2\ldots A_{m-1}A_mK$, ὅταν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου $AA_1\ldots A_mA_{m+1}\ldots A$ διαπλασιάζεται ἀκατάπαυστα. Ἔχουμε:



Σχ. 17

$$\text{Εμβ.}\,(KAA_1\ldots A_{m-1}A_mK) = \frac{1}{2}AA_1\cdot\alpha_\kappa + \frac{1}{2}A_1A_2\cdot\alpha_\kappa + \ldots +$$

$$\frac{1}{2}A_{m-1}A_m\cdot\alpha_\kappa = \frac{1}{2}(AA_1 + A_1A_2 + \ldots A_{m-1}A_m)\cdot\alpha_\kappa, \text{ καί}$$

$$\lim_{k\to\infty}\text{Εμβ.}\,(KAA_1\ldots A_{m-1}A_mK) = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}(AA_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{m-1}A_m)\lim_{k\to\infty}\alpha_\kappa$$

$= \frac{1}{2}sR$, ὅπου s εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ (βλ. § 20,α΄) καί R ἡ ἀκτίνα τοῦ τομέα (βλ. § 14). Ὥστε τό ὅριο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέα $KAA_1\ldots A_mK$ ὑπάρχει καί εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ τομέα.

Τύποι, πού δίνουν τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ τομέα ΚΑΒ. Εἴδαμε παραπάνω ὅτι:

(1) $\boxed{\text{Εμβ. (τομ. ΚΑΒ)} = \frac{1}{2}\, sR}$, ὅπου s εἶναι τό μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καί R ἡ ἀκτίνα τοῦ τομέα.

Ἐπειδή $s = 2\pi R \cdot \dfrac{\widehat{AKB}}{360^\circ}$, ὁ (1) δίνει:

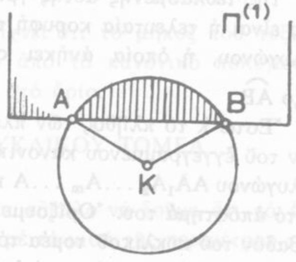
(2) $\boxed{\text{Εμβ. (τομ. ΚΑΒ)} = \pi R^2 \cdot \dfrac{\widehat{AKB}}{360^\circ}}$ (ὁ τύπος ἰσχύει καί ὅταν ἡ ΑΚΒ εἶναι μή κυρτή).

ΑΛΛΕΣ ΚΑΜΠΥΛΟΓΡΑΜΜΕΣ ΠΕΡΙΟΧΕΣ

24. Ι. Κυκλικό τμῆμα. **Κυκλικό τμῆμα** λέγεται τό κοινό μέρος ἑνός κύκλου καί ἑνός ἡμιεπιπέδου Π(1), πού ὁρίζεται ἀπό μιά χορδή ΑΒ.

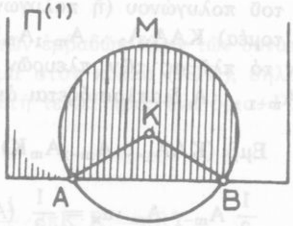
Ἄν τό κέντρο Κ δέν ἀνήκει στό ἡμιεπίπεδο Π(1) (σχ. 18), τότε τό κυκλικό τμῆμα, ἄν τό θεωρήσουμε ὡς σημειοσύνολο, εἶναι ἡ διαφορά ἑνός κυκλικοῦ τομέα ΚΑΒ καί ἑνός τριγώνου ΚΑΒ. Τό ἐμβαδόν του *ὁρίζεται* ὡς **διαφορά** αὐτῶν τῶν δυό ἐμβαδῶν:

Εμβ. (κυκλ. τμ. ΑΒ) = Εμβ. (τομ. ΚΑΒ) —
—Εμβ. (τριγ. ΚΑΒ)



Σχ. 18

Ἄν τό κέντρο Κ ἀνήκει στό Π(1), ὁπότε εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κυκλικοῦ τμήματος (σχ. 19), τότε τό τόξο $\widehat{AB}$ εἶναι «μεῖζον» τόξο καί τό κυκλικό τμῆμα εἶναι ἕνωση ἑνός κυκλικοῦ τομέα ΚΑΜΒ καί ἑνός τριγώνου ΚΑΒ, ὁπότε τό ἐμβαδόν του *ὁρίζεται* ὡς ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν τῶν δυό σχημάτων (σημειοσυνόλων).

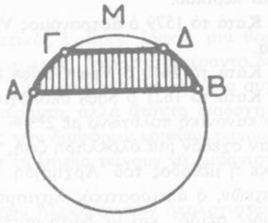


Σχ. 19

Ἄν ἡ χορδή ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἶναι πλευρά ἑνός γνωστοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου στόν κύκλο, τότε τό ἐμβαδόν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ὑπολογίζεται γεωμετρικά.

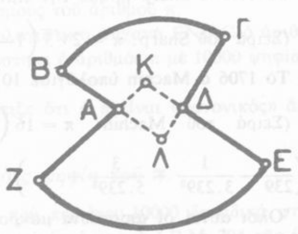
ΙΙ. Γενικά, ἄν ἕνα καμπυλόγραμμο ἐπίπεδο σχῆμα προκύπτει ἀπό ἑνώσεις καί ἀφαιρέσεις ἄλλων σημειοσυνόλων (σχημάτων), στά ὁποῖα ἔχει ὁρισθεῖ τό ἐμβαδόν, τότε ὡς ἐμβαδόν τοῦ F ἐννοεῖται τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τῶν ἐμβαδῶν τῶν σχημάτων, ἀπό τά ὁποῖα προκύπτει τό F.

Ἔτσι π.χ. τό μέρος τοῦ κύκλου, πού περιέχεται ἀνάμεσα σέ δυό παράλληλες χορδές ΑΒ καί ΓΔ (σχ. 20), δηλαδή ἡ τομή ταινίας καί κύκλου, εἶναι ἡ διαφορά τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΜΒ καί ΓΜΔ.



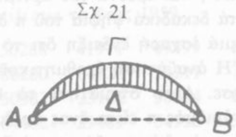
Σχ. 20

Τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου (ὅπως στό σχῆμα 21), πού περικλείεται ἀπό τά τόξα $\widehat{ΒΓ}$ καί $\widehat{ΕΖ}$ καί τίς τεθλασμένες ΒΑΖ καί ΕΔΓ, εἶναι ἕνωση δυό ξένων συνόλων: 1ο) τῆς διαφορᾶς τοῦ τομέα ΛΒΓ καί τοῦ τετραπλεύρου ΛΑΚΔ καί 2ο) τοῦ τομέα ΚΖΕ.



Σχ. 21

Ὁ *μηνίσκος* ΑΓΒΔΑ (σχ. 22) εἶναι διαφορά τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων ΑΓΒ καί ΑΔΒ κ.τ.λ.



Σχ. 22

25. Ἱστορικό τοῦ ἀριθμοῦ π. Ἀπό τό θεώρημα τοῦ Ἱπποκράτη (§ 18), πού χρονολογεῖται γύρω στό 430 π.Χ., φαίνεται ὅτι ὁ ἀριθμός π ἦταν γνωστός ἀπό τόν 5ο π.Χ. αἰώνα στούς ἀρχαίους Ἕλληνες, ὡς μιά παγκόσμια σταθερή ἴση μέ τό λόγο τοῦ μήκους κάθε περιφέρειας πρός τή διάμετρό της. Ἀπό τήν ἐποχή ἐκείνη ἄρχισε ἡ ἔρευνα πάνω σέ δυό καθαρά θεωρητικά ἐρωτήματα:

1ο) Εἶναι ὁ ἀριθμός π ἴσος μέ κάποιο ἀριθμητικό κλάσμα μ/ν; (ὅπου μ καί ν εἶναι φυσικοί ἀριθμοί). Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ὑποπτεύονταν ὅτι ὁ π δέν εἶναι ἀκριβῶς ἕνα ἀριθμητικό κλάσμα, ἀλλά κάποιος πολυπλοκότερος ἀριθμός, ὅμως δέν εἶχαν πετύχει νά τό ἀποδείξουν.

2ο) Εἶναι δυνατό μέ τόν κανόνα καί τό διαβήτη νά κατασκευαστεῖ ἕνα τμῆμα ἴσο μέ τό μῆκος μιᾶς περιφέρειας; (Αὐτό οἱ μεταγενέστεροι τό ὀνόμασαν «τετραγωνισμό τοῦ κύκλου»). Ἡ ἰδιότητα τῶν «μηνίσκων» (ἄσκ. 25), πού εἶχε βρεθεῖ ἀπό τόν Ἱπποκράτη, δείχνει τήν ὕπαρξη τῆς προσπάθειας γιά τή λύση τοῦ δεύτερου αὐτοῦ ἐρωτήματος.

Πάντως ἀπό τούς ἀρχαίους Ἕλληνες μαθηματικούς δέν κατορθώθηκε νά βρεθεῖ ἡ ἀπάντηση σ' αὐτά τά δύο ἐρωτήματα. Χρειάστηκε νά περάσουν πάνω ἀπό 2000 χρόνια, γιά νά δοθεῖ ἀπάντηση στά δυό αὐτά ἐρωτήματα ἀπό Γερμανούς μαθηματικούς (Lambert καί Lindemann), πού ἦταν ἀρνητική.

Ὁ μακρινός δρόμος τῶν ὑπολογισμῶν. — Ἡ πρώτη ἐκτίμηση τοῦ ἀριθμοῦ π ἔγινε ἀπό τόν Ἀρχιμήδη (287 - 212 π.Χ.), πού ἀπέδειξε ὅτι ἡ σταθερή π περιέχεται ἀνάμεσα στό $3+\frac{10}{71}$ καί στό $3+\frac{1}{7}$, ἀπ' ὅπου βγαίνει, π = 3,14. . . (μέ δυό ἀκριβῆ δεκαδικά ψηφία). Ὁ Ἀρχιμήδης μεταχειρίστηκε, γιά τήν ἀπόδειξη, τό κανονικό 96-γωνο. Ἡ μέθοδός του εἶναι μιά σύγχρονη μαθηματική μέθοδος.

Γύρω στό 150 π.Χ. ὁ ἀστρονόμος Πτολεμαῖος βρῆκε μιά πιό προσεγγίζουσα τιμή τοῦ π, τήν 3,1416.

Ἀπό τότε ὁ ὑπολογισμός καί ἡ ἔρευνα γιά τή φύση τοῦ ἀριθμοῦ π ἔπαψε γιά 1400 χρόνια περίπου.

Κατά τό 1579 ὁ ἀστρονόμος Vieta ὑπολόγισε τήν τιμή τοῦ π μέ 10 ἀκριβή δεκαδικά ψηφία.

Κατά τό 1610 ὁ Van Geulen ἔδωσε 33 δεκαδικά ψηφία.

Κατά τό 1621 ὁ Snell ὑπολόγισε τό π μέ 35 ψηφία. Γιά νά τό κατορθώσει, ἔφτασε ὡς τό κανονικό πολύγωνο μέ 2^{30}(= 1073741824) πλευρές. Βέβαια οἱ δυό τελευταῖοι χρειάστηκαν σχεδόν μιά ὁλόκληρη ζωή, γιά νά ὑπολογίσουν τά ψηφία αὐτά. Ὡς ἐδῶ ἀκολουθήθηκε ἡ μέθοδος τοῦ Ἀρχιμήδη. Στό μεταξύ ἐμφανίστηκε ἕνας νέος κλάδος τῶν μαθηματικῶν, ὁ ἀπειροστικός λογισμός καί οἱ ἀπέραντες σειρές καί ὁ π ἐκφράστηκε μέ διάφορες σειρές καί μέ βάση αὐτές ὑπολογίστηκε μέ περισσότερα ψηφία.

Τό 1699 ὁ Sharp βρῆκε τήν τιμή τοῦ π μέ 72 ψηφία.

(Σειρά τοῦ Sharp: $\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^5} + \ldots\right)$

Τό 1706 ὁ Machin ὑπολόγισε 101 ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π.

(Σειρά τοῦ Machin: $\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^2} + \frac{1}{5.5^2} - \frac{1}{7.5^7} + \ldots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^2} + \frac{3}{5.239^5} + \ldots\right)$.

Ὅλοι αὐτοί οἱ ἀπίστευτα μακροί ὑπολογισμοί ἔγιναν καί ἀπό τήν ἐπιθυμία γιά τή γνώση καί ἔρευνα τοῦ ἀριθμοῦ π καί μέ τήν ἐλπίδα, μήπως ἀπό κάποιο σημεῖο καί μετά τά δεκαδικά ψηφία τοῦ π ἄρχιζαν νά ἐπαναλαμβάνονται περιοδικά, ὁπότε αὐτό θά ἦταν μιά ἰσχυρή ἔνδειξη ὅτι τό π εἶναι ἴσο μέ ἕνα ἀριθμητικό κλάσμα.

Ἡ ἀναζήτηση ἀριθμητικοῦ κλάσματος, πού νά παριστάνει ἀκριβῶς τόν π, ἐξακολούθησε. Αὐτό σταμάτησε τό 1761, ὅταν ὁ Γερμανός μαθηματικός Lambert ἀπέδειξε ὅτι ὁ ἀριθμός π εἶναι ἕνας ἀριθμός ἀσύμμετρος καί ἑπομένως δέν εἶναι ἴσος μέ κανένα ἀριθμητικό κλάσμα. Ἄρα στό δεκαδικό του ἀνάπτυγμα τά ψηφία του δέν ἐπαναλαμβάνονται περιοδικά ἀπό κάποιο σημεῖο καί πέρα.

Ἔτσι δόθηκε ἀπάντηση στό πρῶτο ἐρώτημα, πού εἶχαν βάλει οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες μαθηματικοί.

Ἔμεινε ὅμως χωρίς ἀπάντηση τό δεύτερο ἐρώτημα, τό ἐρώτημα τῆς κατασκευῆς τοῦ ἀναπτύγματος τῆς περιφέρειας.

Γιά νά κατασκευαστεῖ γεωμετρικά ἕνα τμῆμα μέ μῆκος 2π.R, δέν εἶναι ἀνάγκη νά εἶναι σύμμετρος ὁ π. Ἀρκεῖ τό τμῆμα αὐτό νά εἶναι τετραγωνική ρίζα ἑνός σύμμετρου ἀριθμοῦ ἤ νά εἶναι συνδυασμός σύμμετρων καί τετραγωνικῶν ριζῶν σύμμετρων.

Γι᾿ αὐτό ὁ μακρινός δρόμος γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ π ἐξακολούθησε. Τό 1794 ὁ ἀστρονόμος Vega, πού κατασκεύασε περίφημους πίνακες λογαρίθμων, ὑπολόγισε τόν π μέ 147 ψηφία. Τό 1844 ὁ Dase, βοηθός τοῦ Gauss, ἔδωσε 201 ψηφία τοῦ π. Τό 1853 ὁ Ἄγγλος Rutherford ὑπολόγισε 441 ψηφία τοῦ π καί τό 1873 ἕνας ἄλλος Ἄγγλος, ὁ Stanks, ἔδωσε 527 ἀκριβή δεκαδικά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π.

Γύρω στά μέσα τοῦ 19ου αἰώνα ἔγινε γνωστή μιά νέα ἔννοια, ἡ ἔννοια τοῦ «ὑπερβατικοῦ» ἀριθμοῦ. Ἕνας ἀριθμός λέγεται ὑπερβατικός, ὅταν δέν εἶναι ρίζα καμιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως, $\alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu = 0$ ὁποιουδήποτε βαθμοῦ, μέ σύμμετρους (ἤ ἀκέραιους) συντελεστές.

Ἐξαιτίας αὐτοῦ ἔγινε σκέψη μήπως ὁ π εἶναι ὑπερβατικός, δηλαδή δέν ὑπάρχει ἀλγεβρική ἐξίσωση μέ ἀκέραιους συντελεστές, πού νά ἐπαληθεύεται ἀπό τόν ἀριθμό π. Ὁ Γερμανός μαθηματικός Lindemann ἀπέδειξε τελικά τό 1882 ὅτι ὁ π εἶναι ὑπερβατικός ἀριθμός καί μετά ἀπ᾿ αὐτό ἀποδείχτηκε ὁριστικά ὅτι τό πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατο.

Έτσι σταμάτησε ή πάρα πολύ δύσκολη πορεία γιά τήν άναζήτηση νέων ψηφίων τοῦ π.

Κανονικοί ἀριθμοί.— Τό 1909 ὁ Γάλλος μαθηματικός Ε. Borel ἔδωσε μιά θεωρία γιά «κανονικούς» ἀριθμούς. Ἕνας ἀριθμός λέγεται κανονικός, ὅταν στό ἀπέραντο δεκαδικό ἀνάπτυγμά του κάθε ἕνα ἀπό τά ψηφία 0, 1, 2, 3, . . . 9 ἐμφανίζεται μέ τήν ἴδια συχνότητα, πού εἶναι ἴση μέ 1/10. Δηλ. ὅταν μέσα στήν ἀπέραντη, ἀλλά ἄτακτη διαδοχή τῶν δεκαδικῶν ψηφίων του οἱ συχνότητες τῆς ἐμφανίσεως τῶν διαφόρων ψηφίων τείνουν νά γίνουν ἴσες, δηλαδή σέ μιά μακριά σειρά ψηφίων ὅλα τά ψηφία τείνουν νά ἐμφανιστοῦν ἴσες φορές.

Γύρω στό 1950, ἀπ' τό ἕνα μέρος ἡ ἐμφάνιση τῶν ἠλεκτρονικῶν ὑπολογιστῶν μέ μεγάλες ταχύτητες καί ἀπ' τ' ἄλλο ἡ ἐπιθυμία νά μελετηθεῖ στατιστικά ἡ κατανομή τῶν ψηφίων τοῦ π, ἔδωσαν ἀφορμή γιά νέους ὑπολογισμούς τοῦ ἀριθμοῦ π.

Τό 1949 ὑπολογίστηκε στήν Ἀμερική μέ ὑπολογιστική μηχανή ENIAC ὁ ἀριθμός π μέ 2036 ψηφία καί τό 1959, στό Παρίσι, ὑπολογίστηκε ὁ ἀριθμός π μέ 10000 ψηφία μέ τόν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή Ι.Β.Μ. 704.

Ἡ στατιστική μελέτη τῶν ψηφίων τοῦ π ἔδειξε ὅτι ὁ π εἶναι «κανονικός» ἀριθμός, μέ τήν παραπάνω ἔννοια.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι *Τέσσερις χιλιάδες ψηφία τοῦ π.*

Παρακάτω δίνουμε ἀπόσπασμα ἀπό πίνακα, πού περιέχει 10000 δεκαδικά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ π, πού ὑπολογίστηκε μέ τόν ἠλεκτρονικό ὑπολογιστή Ι.Β.Μ. 704 τῆς ἑταιρείας Ι.Β.Μ. στή Γαλλία, στό *Institut de Calcul Scientifique* τό ἔτος 1959.

3, 14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971	69399	37510
58209	74944	59230	78164	06286	20899	86280	34825	34211	70679
82148	08651	32823	06647	09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559	64462	29489	54930	38196
44288	10975	66593	34461	28475	64823	37867	83165	27120	19091
45648	56692	34603	48610	45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920	96282	92540	91715	36436
78925	90360	01133	05305	48820	46652	13841	46951	94151	16094
33057	27036	57595	91953	09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724	89122	79381	83011	94912
98336	73362	44065	66430	86021	39494	63952	24737	19070	21798
60943	70277	05392	17176	29317	67523	84674	81846	76694	05132
00056	81271	45263	56082	77857	71342	75778	96091	73637	17872
14684	40901	22495	34301	46549	58537	10507	92279	68925	89235
42019	95611	21290	21960	86403	44181	59813	62977	47713	09960
51870	72113	49999	99837	29780	49951	05973	17328	16096	31859
50244	59455	34690	83026	42522	30825	33446	85035	26193	11881
71010	00313	78387	52886	58753	32083	81420	61717	76691	47303
59825	34904	28755	46873	11595	62863	88235	37875	93751	95778
18577	80532	17122	68066	13001	92787	66111	95909	21642	01989
38095	25720	10654	85863	27886	59361	53381	82796	82303	01952
03530	18529	68995	77362	25994	13891	24972	17752	83479	13151
55748	57242	45415	06959	50829	53311	68617	27855	88907	50983
81754	63746	49393	19255	06040	09277	01671	13900	98488	24012
85836	16035	63707	66010	47101	81942	95559	61989	46767	83744

94482	55379	77472	68471	04047	53464	62080	46684	25906	94912
93313	67702	89891	52104	75216	20569	66024	05803	81501	93511
25338	24300	35587	64024	74964	73263	91419	92726	04269	92279
67823	54781	63600	93417	21641	21992	45863	15030	28618	29745
55706	74983	85054	94588	58692	69956	90927	21079	75093	02955
32116	53449	87202	75596	02364	80665	49911	98818	34797	75356
63698	07426	54252	78625	51818	41757	46728	90977	77279	38000
81647	06001	61452	49192	17321	72147	72350	14144	19735	68548
16136	11573	52552	13347	57418	49468	43852	33239	07394	14333
45477	62416	86251	89835	69485	56209	92192	22184	27255	02542
56887	67179	04946	01653	46680	49886	27232	79178	60857	84383
82796	79766	81454	10095	38837	86360	95068	00642	25125	20511
73929	84896	08412	84886	26945	60424	19652	85022	21066	11863
06744	27862	20391	94945	04712	37137	86960	95636	43719	17287
46776	46575	73962	41389	08658	32645	99581	33904	78027	59009
94657	64078	95126	94683	98352	59570	98258	22620	52248	94077
26719	47826	84826	01476	99090	26401	36394	43745	53050	68203
49625	24517	49399	65143	14298	09190	65925	09372	21696	46151
57098	58387	41059	78859	59772	97549	89301	61753	92846	81382
68683	86894	27741	55991	85592	52459	53959	43104	99725	24680
84598	72736	44695	84865	38367	36222	62609	91246	08051	24388
43904	51244	13654	97627	80797	71569	14359	97700	12961	60894
41694	86855	58484	06353	42207	22258	28488	64815	84560	28506
01684	27394	52267	46767	88952	52138	52254	99546	66727	82398
64565	96116	35488	62305	77456	49803	55936	34568	17432	41125
15076	06947	94510	96596	09402	52288	79710	89314	56691	36867
22874	89405	60101	50330	86179	28680	92087	47609	17824	93858
90097	14909	67590	52613	65549	78189	31297	84821	68299	89487
22658	80485	75640	14270	47755	51323	79641	45142	37462	34364
54285	84447	95265	86782	10511	41354	73573	95231	13427	16610
21359	69536	23144	29524	84937	18711	01457	65403	59027	99344
03742	00731	05785	39062	19838	74478	08478	48968	33214	45713
86875	19435	06430	21845	31910	48481	00537	06146	80674	91927
81911	97939	95206	14196	63428	75444	06437	45123	71819	21799
98391	01591	95618	14675	14269	12397	48940	90718	64942	31961
56794	52080	95146	55022	52316	03881	93014	20937	62137	85595
66389	37787	08303	90697	92077	34672	21825	62599	66150	14215
03068	03844	77345	49202	60541	46659	25201	49744	28507	32518
66600	21324	34088	19071	04863	31734	64965	14539	05796	26856
10055	08106	65879	69981	63574	73638	40525	71459	10289	70641
40110	97120	62804	39039	75951	56771	57700	42033	78699	36007
23055	87631	76359	42187	31251	47120	53292	81918	26186	12586
73215	79198	41484	88291	64470	60957	52706	95722	09175	67116
72291	09816	90915	28017	35067	12748	58322	28718	35209	35396
57251	21083	57915	13698	82091	44421	00675	10334	67110	31412

67111	36990	86585	16398	31501	97016	51511	68517	14376	57618
35155	65088	49099	89859	98238	73455	28331	63550	76479	18535
89322	61854	89632	13293	30898	57064	20467	52590	70915	48141
65498	59461	63718	02709	81994	30992	44889	57571	28289	05923
23326	09729	97120	84433	57326	54893	82391	19325	97463	66730
58360	41428	13883	03203	82490	37589	85243	74417	02913	27656
18093	77344	40307	07469	21120	19130	20330	38019	76211	01100
44929	32151	60842	44485	96376	69838	95228	68478	31235	52658
21314	49576	85726	24334	41893	03968	64262	43410	77322	69780
28073	18915	44110	10446	82325	27162	01052	65227	21116	60396

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄

17. Χωρίζουμε ἕναν κύκλο σέ δύο κυκλικά τμήματα, φέρνοντας τή μεσοκάθετο μιᾶς ἀκτίνας. Ὑπολογίστε τό λόγο τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο αὐτῶν κυκλικῶν τμημάτων.

18. Ἐπάνω στή διάμετρο ΑΒ ἑνός κύκλου νά βρεθεῖ σημεῖο Γ τέτοιο, ὥστε, ἄν γράψουμε δύο ἡμιπεριφέρειες μέ διαμέτρους ΑΓ καί ΓΒ ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ, ἡ (κυματοειδής) γραμμή, πού σχηματίζεται ἀπό αὐτές τίς ἡμιπεριφέρειες νά χωρίζει τόν κύκλο σέ δύο μέρη, πού ἔχουν λόγο $\mu : \nu$, ὅπου μ, ν εἶναι δεδομένα τμήματα.

19. Δύο περιφέρειες μέ ἀκτίνες ρ καί 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Φέρνουμε τήν κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τους ΒΓ. Ζητεῖται τό ἐμβαδόν τοῦ μικτόγραμμου τριγώνου, πού περικλείεται ἀπό τήν ΒΓ καί ἀπό τά τόξα $\overset{\frown}{\text{ΒΑ}}$ καί $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}}$.

20. Εὐθύγραμμο τμῆμα $\text{ΑΒ} = 3\alpha$ διαιρεῖται σέ τρία ἴσα μέρη $\text{ΑΓ} = \text{ΓΔ} = \text{ΔΒ}$ καί μέ κέντρα τά Γ καί Δ καί ἀκτίνα α γράφονται δύο περιφέρειες, πού τέμνονται ἔστω στά Κ καί Λ. Κατόπιν, μέ κέντρα τά Κ καί Λ, γράφονται τόξα ἐφαπτόμενα τό καθένα στίς δύο περιφέρειες, ἔστω τά $\overset{\frown}{\text{ΕΖ}}$ καί $\overset{\frown}{\text{ΗΘ}}$. Ζητεῖται τό ἐμβαδόν καί ἡ περίμετρος τοῦ «ὠοειδοῦς» σχήματος ΕΑΗΘΒΖΕ, πού σχηματίστηκε.

21. Δύο παράλληλες χορδές κύκλου ἀκτίνας ρ ἔχουν μήκη ρ καί $\rho\sqrt{3}$ καί τό κέντρο βρίσκεται ἔξω ἀπό τήν ταινία αὐτῶν τῶν δύο παραλλήλων. Ζητεῖται ὁ λόγος τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, πού περιέχεται μεταξύ τῶν δύο χορδῶν πρός ὁλόκληρο τόν κύκλο.

22. Σέ ἕναν κύκλο μέ ἀκτίνα $\rho = 1$ εἶναι ἐγγεγραμμένο ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τέσσερις εὐθεῖες πού ἑνώνουν τό Α μέ τό μέσον τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\text{ΑΒ}}$, τό Β μέ τό μέσο τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\text{ΒΓ}}$ κ.τ.λ. Δεῖξτε ὅτι οἱ τέσσερις αὐτές εὐθεῖες σχηματίζουν τετράγωνο καί ὅτι τό μέρος τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κύκλο, ἔχει ἐμβαδόν $2 - \dfrac{\pi}{2}$.

23. Διαιροῦμε τή διάμετρο ΑΒ ἑνός ἡμικυκλίου σέ τρία μέρη ΑΓ, ΓΔ, ΔΒ. Μέ διαμέτρους ΑΓ καί ΔΒ γράφουμε δύο ἡμιπεριφέρειες μέσα σ᾽ ἐκεῖνο τό ἡμικύκλιο, πού ἔχει διάμετρο ΑΒ καί, ἔξω ἀπό τό ἡμικύκλιο αὐτό, γράφουμε ἕνα ἄλλο ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΓΔ. Νά βρεῖτε τό λόγο τῆς ἐπιφάνειας, πού περικλείεται ἀπό τίς τέσσερις ἡμιπεριφέρειες πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρο τή μέση ἀνάλογο τῶν ΑΔ καί ΓΒ.

24. Ἔχουμε ἕνα τετράγωνο μέ πλευρά α. Μέ κέντρο τό κέντρο τοῦ τετραγώνου γράφουμε περιφέρεια, ἡ ὁποία ἀποτέμνει ἀπό τίς πλευρές τοῦ τετραγώνου τμήματα ἴσα πρός τήν ἀκτίνα της. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ μικτόγραμμου ὀκταγώνου, πού σχηματίζεται ἀπό τά τμήματα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου καί ἀπό τά τόξα, πού βρίσκονται μέσα στό τετράγωνο;

25. Μέ διάμετρο τήν ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου γράφουμε ἕνα ἡμικύκλιο, πού νά περιέχει τό τρίγωνο καί μέ διαμέτρους τίς κάθετες πλευρές γράφουμε δύο ἄλλα ἡμικύκλια ἔξω ἀπό τό τρίγωνο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέρη τῶν δύο ἡμικυκλίων, πού βρίσκονται ἔξω ἀπό τό πρῶτο ἡμικύκλιο (μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτη), ἔχουν ἄθροισμα ἐμβαδῶν ἴσο μέ τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου.

26. Πάνω σέ μιά εὐθεία βρίσκονται κατά σειρά τά σημεῖα Α, Γ, Β. Μέ διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ γράφουμε τώρα ἡμιπεριφέρειες πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἄν ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο μικρότερων ἡμιπεριφερειῶν ἔχει σημεῖα ἐπαφῆς Δ,Ε μέ αὐτές, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, πού περικλείεται μεταξύ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν (Ἄρβυλος) ἰσοδυναμεῖ μέ κύκλο διαμέτρου ΔΕ.

27. Ἔστω ἕνα τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ (Ο τό κέντρο). Μέ διάμετρο τήν ΟΑ γράφουμε ἡμικύκλιο μέσα στό τεταρτοκύκλιο καί στό μικτόγραμμο τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΒ εὐθύγραμμη πλευρά, $\overset{\frown}{ΒΑ}$, $\overset{\frown}{ΑΟ}$ καμπυλόγραμμες πλευρές), πού σχηματίζεται, ἐγγράφουμε κύκλο. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου αὐτοῦ καί τοῦ μικτόγραμμου τριγώνου.

Β′

28. i) Ἄν R εἶναι ἡ ἀκτίνα ἑνός κυκλικοῦ τομέα καί λ ἡ χορδή τοῦ τόξου του, νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου στόν κυκλικό τομέα, (δηλ. τοῦ κύκλου, πού ἐφάπτεται καί στό τόξο καί στίς ἀκραῖες ἀκτίνες τοῦ τομέα), ii) νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένος σέ κυκλικό τομέα πού ἔχει ἀκτίνα R καί γωνία 30° ἤ 45° ἤ 60° ἤ 90° ἤ 120°.

29. Ἔστω ΑΒ μιά χορδή ἴση μέ τήν ἀκτίνα, Ε τό μέσο τῆς ΑΒ, καί Ι τό μέσο τοῦ μικρότερου ἀπό τά δύο τόξα, πού ὁρίζει ἡ χορδή ΑΒ. Λαμβάνουμε τώρα τόξο $\overset{\frown}{ΙΔ} = 120°$ καί φέρνουμε τήν ΔΕ, ἡ ὁποία, ὅταν προεκταθεῖ, τέμνει τήν περιφέρεια στό Ζ. Ν'ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ΔΖ εἶναι κατά προσέγγιση ἴση μέ τήν πλευρά ἑνός τετραγώνου ἰσοδύναμου πρός τόν κύκλο. (**Ὑποδ.** Ἄν φέρουμε τή διάμετρο ΔΗ, ἡ ΑΗ καί κατόπιν ἡ ΔΑ ὑπολογίζονται· ἐπίσης ἡ ΔΒ καί ἡ διάμεσος ΔΕ τοῦ τριγώνου ΔΒΑ ὑπολογίζονται. Κατόπιν ἡ ΕΖ καί τέλος ἡ ΔΖ).

30. Οἱ πλευρές ἑνός τριγώνου ἔχουν μήκη ΒΓ = α, ΓΑ = β, $ΑΒ = \sqrt{α^2+β^2-αβ}$. Νά ὑπολογίσετε τά ἐμβαδά τῶν κυκλικῶν τμημάτων, στά ὁποῖα χωρίζεται ἀπό τήν ΑΒ ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος στό τρίγωνο ΑΒΓ. (**Ὑποδ.** Δεῖξτε πρῶτα ὅτι $\widehat{ΒΓΑ} = 60°$).

31. Ἔστω ΑΒ μία πλευρά κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο (Κ) καί ΚΓ μιά ἀκτίνα παράλληλη στήν ΑΒ. Ἄν ἀπό τό μέσο Δ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{ΑΒ}$ φέρουμε παράλληλη πρός τή ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέρος τοῦ κύκλου, πού περιέχεται μεταξύ τῶν δύο αὐτῶν παραλλήλων, ἔχει ἐμβαδόν ἴσο πρός τό 1/ν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

32. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε $\widehat{Α} = 105°$, $\widehat{Β} = 45°$ καί τό ὕψος υ ἀπό τήν κορυφή Α. Μέ κέντρα τίς κορυφές Β καί Γ καί ἀντίστοιχες ἀκτίνες ΒΑ, ΓΑ γράφουμε τόξα $\overset{\frown}{ΑΜ}$ καί $\overset{\frown}{ΑΝ}$ μέσα στό τρίγωνο. Νά ὑπολογίσετε τά ἐμβαδά τῶν τριῶν μερῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται τό τρίγωνο ἀπό τά τόξα αὐτά. (**Ὑποδ.** Τό μέρος ΑΒΝ εἶναι διαφορά τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί τοῦ τομέα ΓΑΝ).

33. Μέ κέντρα τίς κορυφές ἑνός τετραγώνου, πού ἔχει πλευρά α καί ἀκτίνες α γράφουμε τόξα μέσα στό τετράγωνο. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν τοῦ καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου, πού σχηματίζεται ἀπό τά τόξα αὐτά.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Α΄

34. Ἔχουμε δύο ὁμόκεντρες περιφέρειες (O, R) καί (O, 2R). Φέρνουμε τή χορδή AB τῆς μεγαλύτερης περιφέρειας ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ἐφαπτομένη τῆς μικρότερης περιφέρειας στό M καί ἀπό τό A ἐφαπτομένη AN τῆς μικρότερης περιφέρειας. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περιοχή, πού περικλείεται ἀπό τά «ἐλάσσονα» τόξα $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{NM}$ καί ἀπό τά τμήματα AN, MB, ἰσοδυναμεῖ πρός τό μικρότερο κύκλο (δηλ. ἔχει ἐμβαδόν ἴσο πρός τό ἐμβαδόν τοῦ μικρότερου κύκλου).

35. Ἕνα κανονικό δωδεκάγωνο ἔχει πλευρά α καί εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο ἄγνωστης ἀκτίνας. Νά βρεθεῖ συναρτήσει τοῦ α τό μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο.

36. Τρεῖς ἴσες περιφέρειες μέ ἀκτίνα R ἔχουν τά κέντρα τους στίς κορυφές τριγώνου καί ἕνα κοινό σημεῖο μέσα στό τρίγωνο. Τά κοινά μέρη τῶν τριῶν κύκλων σχηματίζουν ἕνα τρίφυλλο. i) Ὑπολογίστε συναρτήσει τῆς κοινῆς ἀκτίνας R τήν περίμετρο τοῦ τρίφυλλου. ii) Ὑπολογίστε τό ἐμβαδόν τοῦ τρίφυλλου συναρτήσει τῆς R καί τοῦ ἐμβαδοῦ S τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

37. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (O, R) καί ἕνα σημεῖο της A. Μέ κέντρο τό A γράφουμε δύο ὁμόκεντρες περιφέρειες (c) καί (c΄) μέ ἀκτίνες x καί 2x. Ἡ (c) τέμνει τήν (O, R) στά Γ καί Δ καί ἡ εὐθ. ΓΔ τέμνει τήν (c΄) στά M καί M΄. Ὅταν τό x παίρνει ὅλες τίς δυνατές τιμές του, τό σύνολο τῶν M καί M΄ σχηματίζει μιά γραμμή. Ζητεῖται τό μῆκος αὐτῆς τῆς γραμμῆς. (**Ὑποδ.** Ἔστω Π ἡ κοινή προβολή τῶν Γ καί M πάνω στήν AB. Τότε $x^2 = 2R.A\Pi \Rightarrow 4x^2 = 8R.A\Pi \Rightarrow AM^2 = 8R.A\Pi$. Ἀπ' αὐτό βρίσκεται ὁ τόπος τοῦ M, πού εἶναι ἕνα κυκλικό τόξο).

38. Ἔχουμε τήν περιφέρεια (O,R). Ζητεῖται τό ἐμβαδόν τῆς περιοχῆς, πού καλύπτεται ἀπό τά σημεῖα M, τά ὁποῖα ἔχουν τήν ἑξῆς ἰδιότητα: ἀπό τό M περνοῦν δύο κάθετες μεταξύ τους εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες τέμνουν τήν περιφέρεια (O, R) ἤ τουλάχιστον ἐφάπτονται σ' αὐτήν.

39. Ἔχουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα $AB = 2R\sqrt{3}$ καί ἕνα σταθερό κύκλο (O,R), πού ἐφάπτεται τοῦ AB στό A. Θεωροῦμε μιά μεταβλητή περιφέρεια (γ) ἐφαπτόμενη τοῦ AB στό B, πού τέμνει πάντοτε τήν (O,R), ἔστω, στά Γ καί Δ. Ζητεῖται τό μῆκος τῆς γραμμῆς, πού ἀπαρτίζεται ἀπό τά μέσα M ὅλων τῶν κοινῶν χορδῶν ΓΔ, ὅταν ἡ (γ) μεταβάλλεται. (**Ὑποδ.** Ἡ εὐθεία ΓΔ περνᾶ ἀπό τό μέσο I τοῦ AB καί τό M βλέπει τήν OI ὑπό γωνία ὀρθή).

40. Ἔστω ἕνα ἡμικύκλιο μέ διάμετρο $AB = 2R$. Μιά εὐθεία (ε), πού εἶναι κάθετη σ' ἕνα σημεῖο Π τῆς AB, τέμνει τήν ἡμιπεριφέρεια στό M. Ἐπάνω στήν (ε) θεωροῦμε ἕνα σημεῖο P τέτοιο, ὥστε $AP^2 = \frac{4}{3}AM^2$. Ὑπολογίστε τό μῆκος τῆς γραμμῆς (γ), πού σχηματίζει τό σύνολο τῶν M, ὅταν τό Π παίρνει ὅλες τίς δυνατές θέσεις πάνω στήν AB. (**Ὑποδ.** $AP^2 = \frac{4}{3}AM^2 = \frac{4}{3}AB.A\Pi = \frac{8R}{3}.A\Pi$. Ἀπό τή σχέση $AP^2 = \frac{8R}{3}.A\Pi$ βρίσκεται ὁ τόπος τῶν M μέ τή βοήθεια ἰδιότητας τοῦ ὀρθογ. τριγώνου).

Β΄

41. Σ' ἕναν κύκλο (O, R) εἶναι ἐγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΒΓ ἴση πρός τήν πλευρά ἰσόπλευρου τριγώνου ἐγγεγραμμένου στόν (O,R) καί ΓΑ ἴση πρός τήν πλευρά τετραγώνου ἐγγεγραμμένου στόν (O, R). Φέρνουμε ἀπό τό O παράλληλη πρός τήν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τίς AB καί ΑΓ στά M καί N.

i) Πόσο εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου ΒΜΝΓ;

ii) Πόσο εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ μέρους τοῦ κύκλου (Ο, R), πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο;

42. Δίνεται ἡ περιφέρεια (O,R). Ζητεῖται τό ἐμβαδόν τῆς περιοχῆς, πού καλύπτεται ἀπό τά σημεῖα Μ, πού ἔχουν τήν ἑξῆς ἰδιότητα: ὑπάρχει εὐθεία, πού περνάει ἀπό τό Μ καί τέμνει τήν περιφέρεια (Ο, R) σέ δύο σημεῖα Α, Β τέτοια, ὥστε: $ΜΑ^2+ΜΒ^2 = 2R^2$. (Ὑποδ. Πρέπει πρῶτα νά λυθεῖ τό πρόβλημα: ἀπό ἕνα σημεῖο Μ ν' ἀχθεῖ τέμνουσα ΜΑΒ τῆς (Ο, R), ὥστε νά εἶναι $ΜΑ^2+ΜΒ^2= 2R^2$. Ἀπό τή συνθήκη δυνατότητας τοῦ προβλήματος προκύπτει ὁ τόπος τοῦ Μ).

43. Ἔχουμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ μήκους l. Στήν προέκταση τοῦ ΑΒ πρός τό μέρος τοῦ Β παίρνουμε ἕνα σημεῖο Μ καί γράφουμε ἡμιπεριφέρεια μέ διάμετρο ΒΜ πάντοτε πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἀπό τό Α φέρνουμε ἐφαπτομένη ΑΓ τῆς ἡμιπεριφέρειας αὐτῆς (Γ τό σημεῖο ἐπαφῆς) καί τή διχοτόμο τῆς γωνίας ΓΑΒ. Ἡ διχοτόμος τέμνει τή ΒΓ στό σημεῖο Ρ. Ὅταν, τώρα, τό Μ διατρέχει τήν προέκταση τοῦ ΑΒ, τό Ρ διαγράφει μιά ὁρισμένη γραμμή, τῆς ὁποίας ζητεῖται νά βρεθεῖ τό μῆκος.

44. Μέσα σέ κύκλο (Ο, R) δίνεται σημεῖο Α τέτοιο, ὥστε $ΟΑ = R/2$. Χορδή ΒΓ τοῦ κύκλου μεταβάλλεται ἔτσι, ὥστε: $ΑΒ^2+ΑΓ^2 = R^2$. Τό μέσο Μ τῆς μεταβλητῆς χορδῆς ΒΓ διαγράφει μιά ὁρισμένη γραμμή, τῆς ὁποίας ζητεῖται νά βρεθεῖ τό μῆκος.

45. Πάνω στή διάμετρο ΑΒ μιᾶς ἡμιπεριφέρειας παίρνουμε δύο σημεῖα Γ καί Δ, ὅπου $ΑΓ<ΑΔ<ΑΒ$ καί γράφουμε μέ διαμέτρους τίς ΑΓ καί ΔΒ δύο ἡμιπεριφέρειες μέσα στό ἀρχικό ἡμικύκλιο καί τέλος μέ διάμετρο ΓΔ μιά ἡμιπεριφέρεια ἔξω ἀπό τό ἀρχικό ἡμικύκλιο. Ἄν ὁ ριζικός ἄξονας τῶν περιφερειῶν μέ διαμέτρους ΑΓ καί ΔΒ τέμνει τίς δύο ἄλλες ἡμιπεριφέρειες στά Ε καί Ζ, ν'ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, πού περικλείεται μεταξύ τῶν τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμη (ἔχει τό ἴδιο ἐμβαδόν) μέ κύκλο διαμέτρου ΕΖ.

46. Ἔστω ΑΒΓ ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο. Μέ διάμετρο τήν ὑποτείνουσα ΒΓ γράφουμε ἡμιπεριφέρεια ἔξω ἀπό τό τρίγωνο καθώς καί τόξο μέ κέντρο τό Α καί χορδή τήν ΒΓ. Ἀπό τό Α φέρνουμε μιά εὐθεία, πού τέμνει τήν ἡμιπεριφέρεια καί τό τόξο στά Δ καί Ε. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό μικτόγραμμο τρίγωνο ΒΔΕ (πού ἔχει ὡς δύο πλευρές του τά τόξα $\widehat{ΒΔ}$, $\widehat{ΒΕ}$ καί ὡς τρίτη πλευρά τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΔΕ) εἶναι τετραγωνίσιμο μέ κανόνα καί διαβήτη. Δηλαδή μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ τετράγωνο, πού νά ἔχει ἴσο ἐμβαδόν μέ τό μικτόγραμμο τρίγωνο καί νά κατασκευαστεῖ τό ἰσοδύναμο πρός αὐτό τετράγωνο.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΑΠΟ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

26. Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου. Γιά τό ἐπίπεδο καί τά ἀξιώματά του γνωρίζουμε ἀπό τήν ἐπίπεδη γεωμετρία. Ἐδῶ ἐπαναλαμβάνουμε τά ἀξιώματα τῆς συνδέσεως τοῦ ἐπιπέδου:

i) Ἄν δοθοῦν τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα Α, Β,Γ, τότε ὑπάρχει ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπ' αὐτά τά τρία σημεῖα· καί πάνω σέ κάθε ἐπίπεδο ὑπάρχει τουλάχιστο ἕνα σημεῖο.

ii) Ἄν δοθοῦν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, πού δέ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία, δέν ὑπάρχουν περισσότερα ἀπό ἕνα ἐπίπεδα, πού νά περνοῦν καί ἀπό τά τρία αὐτά σημεῖα.

iii) Ἄν δυό σημεῖα Α καί Β βρίσκονται σέ ἕνα ἐπίπεδο (Π), τότε ὁλόκληρη ἡ εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τά Α καί Β, βρίσκεται ἐπάνω στό (Π).

{Συμβολικά: $A \in (\Pi) \wedge B \in (\Pi) \Rightarrow$ εὐθ$AB \in (\Pi)$}.

iv) Ἄν δυό ἐπίπεδα ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο, τότε ἔχουν ἕνα ἀκόμη σημεῖο κοινό.

v) Ὑπάρχουν τουλάχιστο τέσσερα σημεῖα, πού δέ βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο. (Ἐπομένως : «Ἄν δοθεῖ ἕνα ἐπίπεδο (Π), τότε ὑπάρχει σημεῖο, πού δέ βρίσκεται πάνω στό (Π)».Γιατί, ἄν δέν ὑπῆρχε, τότε ὅλα τά σημεῖα τοῦ χώρου θά ἦταν πάνω στό (Π)· αὐτό ὅμως ἔρχεται σέ ἀντίφαση μέ τό ἀξίωμα v).

27. Καθορισμός ἑνός ἐπιπέδου στό χῶρο.

α΄) (Θ) — Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο στό χῶρο.

Γιατί, σύμφωνα μέ τό ἀξίωμα i (§ 26), ὑπάρχει ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τά Α, Β, Γ. Ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλο ἐπίπεδο, πού νά περνοῦσε ἀπό τά Α, Β, Γ, τότε θά περνοῦσαν ἀπό τά Α, Β, Γ δυό ἐπίπεδα, πράγμα πού ἔρχεται σέ ἀντίφαση μέ τό ἀξίωμα ii (§ 26).

Ἑπομένως ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο ὑπάρχει, πού νά περιέχει τά τρία σημεῖα Α, Β, Γ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Τό μοναδικό αὐτό ἐπίπεδο εἶναι τ ό ἐ π ί π ε δ ο, π ο ύ ὁ ρ ί ζ ο υ ν τ ά τ ρ ί α α ὐ τ ά σ η μ ε ῖ α.

Παρατήρηση. Ἐνῶ μιά εὐθεία ὁρίζεται στό χῶρο ἀπό δυό σημεῖα, τό ἐπίπεδο ὁρίζεται στό χῶρο ἀπό τρία σημεῖα (ὄχι «συνευθειακά»).

Πόρισμα. Δύο ἐπίπεδα πού ἔχουν κοινά τρία σημεῖα, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, ταυτίζονται. Δηλ. κάθε σημεῖο τοῦ ἑνός εἶναι καί σημεῖο τοῦ ἄλλου.

β΄) (Θ) — Μία εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Α, πού δέ βρίσκεται πάνω στήν (ε), ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο στό χῶρο.

Γιατί πάνω στήν (ε) ὑπάρχουν δυό σημεῖα Β, Γ, ἀπό δέ τά Β, Γ, Α περνᾶ ἕνα ἐπίπεδο, πού περιέχει τήν εὐθεία (ε) (ἀξίωμα iii §26). Ἄλλο ἐπίπεδο, πού νά περιέχει τήν (ε) καί τό Α δέν ὑπάρχει, γιατί, ἄν ὑπῆρχε, θά περνοῦσαν ἀπό τά Α, Β, Γ δυό ἐπίπεδα. Ἑπομένως ὑπάρχει ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τήν (ε) καί τό Α. Τό μοναδικό αὐτό ἐπίπεδο εἶναι τ ό ἐ π ί π ε δ ο, π ο ύ ὁ ρ ί ζ ε τ α ι ἀ π ό τ ή ν (ε) κ α ί τ ό Α.

γ΄) (Θ)—Δύο εὐθεῖες, πού τέμνονται, ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο στό χῶρο.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε δυό εὐθεῖες (ε) καί (η), πού τέμνονται στό Α. Πάνω στήν (ε) ὑπάρχει ἕνα σημεῖο Β διαφορετικό ἀπό τό Α καί στήν (η) ἕνα σημεῖο Γ διαφορετικό ἀπό τό Α. Τά τρία σημεῖα Α, Β, Γ δέ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία. Γιατί, ἄν βρίσκονταν πάνω σέ μιά εὐθεία (χ), τότε οἱ (ε) καί (η) θά συνέπιπταν μέ τή (χ) καί δέ θά ἦταν διαφορετικές.

Ἀπό τά Α, Β, Γ περνᾶ ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο (βλ. α΄), τό ὁποῖο περιέχει καί τίς δυό εὐθεῖες (ε) καί (η) (ἀξίωμα iii, § 26). Τό μοναδικό αὐτό ἐπίπεδο εἶναι τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζεται ἀπό τίς δυό **εὐθεῖες** πού τέμνονται.

δ΄) (Θ) — Δύο παράλληλες εὐθεῖες ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο στό χῶρο.

Ἄς θεωρήσουμε δυό παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (η). Ἀπό τόν ὁρισμό τῶν παραλλήλων, αὐτές βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο (Π). Ἄλλο ἐπίπεδο, π.χ. τό (Π΄), πού νά περιέχει καί τίς δυό παράλληλες, δέν ὑπάρχει· ἄν ὑπῆρχε, θά ἔπρεπε νά περιέχει δυό σημεῖα Α καί Β τῆς (ε) καί ἕνα σημεῖο Γ τῆς (η), τά ὁποῖα φυσικά δέ θά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καί ἑπομένως ἀπό τά Α, Β, Γ θά περνοῦσαν δυό ἐπίπεδα, (Π) καί (Π΄). Αὐτό ὅμως ἔρχεται σέ ἀντίθεση μέ τό ἀξίωμα ii τῆς § 26. Ἑπομένως ἕνα μόνο ἐπίπεδο ὑπάρχει, πού νά περιέχει τίς δυό παράλληλες εὐθεῖες. Τό μοναδικό αὐτό ἐπίπεδο, εἶναι τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζεται ἀπό τίς δυό παράλληλες.

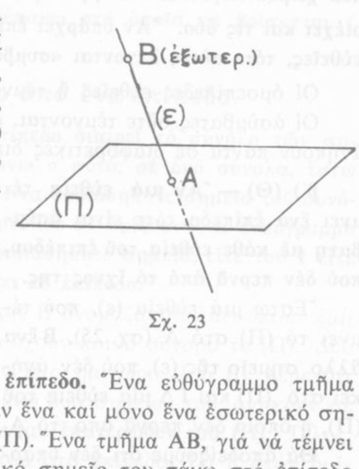
ε΄) Κατά τήν ἀναζήτηση ἑνός ἐπιπέδου στό χῶρο, εἶναι ἀρκετό νά προσδιοριστοῦν τρία σημεῖα ἀπό τό ζητούμενο ἐπίπεδο πού νά μή βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, ἤ δυό εὐθεῖες του πού νά τέμνονται κ.τ.λ. Τότε σύμφωνα μέ τά παραπάνω, τό ζητούμενο ἐπίπεδο θεωρεῖται ὅτι προσδιορίστηκε (ἤ βρέθηκε).

28. Εὐθεία πού τέμνει ἕνα ἐπίπεδο.

α΄) Ὁρισμός. — **Μία εὐθεία (ε) λέμε ὅτι τέμνει τό ἐπίπεδο (Π), ὅταν ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο κοινό μέ τό (Π).** Τό κοινό αὐτό σημεῖο λέγεται καί **ἴχνος** τῆς εὐθείας πάνω στό ἐπίπεδο.

β΄) (Θ) — Γιά νά τέμνει μιά εὐθεία ἕνα ἐπίπεδο, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχει ἕνα σημεῖο της πάνω στό ἐπίπεδο καί ἕνα ἄλλο ἔξω ἀπ᾽ αὐτό.

Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μιά εὐθεία ΑΒ τέτοια, ὥστε $A \in (\Pi)$ καί $B \notin (\Pi)$ (σχ. 23). Τότε ἡ εὐθεία ΑΒ ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο μέ τό (Π), τό Α καί κανένα ἄλλο. Ἄν εἶχε, ἐκτός ἀπό τό Α, καί ἕνα ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τό (Π), θά βρισκόταν ὁλόκληρη ἐπάνω στό (Π) καί τό σημεῖο της Β θά ἦταν καί αὐτό ἐπάνω στό (Π), πράγμα πού εἶναι ἀντίθετο μέ τήν ὑπόθεση: $B \notin (\Pi)$.



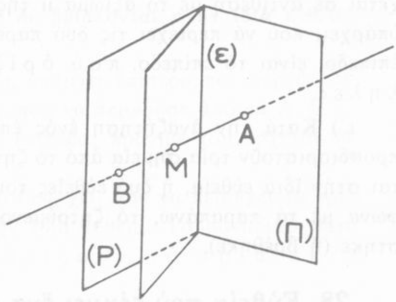
Σχ. 23

Ἀντιστρόφως, ἄν ἡ (ε) τέμνει τό (Π) στό Α, τότε ἔχει μέ τό (Π), μόνο τό Α κοινό. Ἑπομένως ἕνα σημεῖο Β τῆς (ε), διαφορετικό ἀπό τό Α, δέν ἀνήκει στό(Π).

γ΄) **Εὐθύγραμμο τμῆμα πού τέμνει ἐπίπεδο.** Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ λέμε ὅτι τέμνει ἕνα ἐπίπεδο (Π), ὅταν ἕνα καί μόνο ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τμήματος ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π). Ἕνα τμῆμα ΑΒ, γιά νά τέμνει ἕνα ἐπίπεδο, ἀρκεῖ νά ἔχει ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του πάνω στό ἐπίπεδο καί ταυτόχρονα νά ὑπάρχει καί κάποιο σημεῖο τῆς εὐθείας ΑΒ, πού νά μή ἀνήκει στό ἐπίπεδο.

δ΄) (Θ) — Ἀπό κάθε εὐθεία (ε) περνοῦν ἄπειρα ἐπίπεδα.

Ἔστω ἡ εὐθεία (ε) (σχ. 24). Τότε ὑπάρχει ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ᾽ αὐτή. (Ἀξίωμα τῆς εὐθείας). Ἀκόμη ἀπό τήν (ε) καί τό Α περνᾶ ἕνα ἐπίπεδο (Π) (§ 27, β΄). Ὑπάρχει ἐπίσης σημεῖο Β ἐκτός τοῦ (Π) (ἀξίωμα V, § 26) καί ἀπό τό Β καί τήν (ε) περνᾶ ἐπίπεδο (Ρ) διαφορετικό ἀπό τό (Π), ἀφοῦ Β ∉ (Π). Ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τό (Π) καθώς ἐπίσης καί τό (Ρ) (βλ. προηγούμενο θεώρημα)· ἄρα μέ τό (Π) ἔχει μόνο τό Α κοινό καί μέ τό (Ρ) μόνο τό Β κοινό.



Σχ. 24

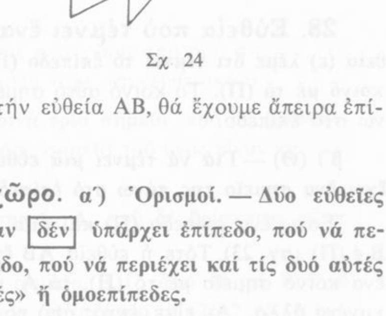
Ἑπομένως, ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ΑΒ, διαφορετικό ἀπό τά Α καί Β, δέν ἀνήκει οὔτε στό (Π) οὔτε στό (Ρ), ἄρα τό Μ μαζί μέ τήν (ε) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο {(ε), Μ} διαφορετικό ἀπό τά (Π) καί (Ρ). Ἐπειδή τό Μ μπορεῖ νά πάρει ἄπειρες θέσεις πάνω στήν εὐθεία ΑΒ, θά ἔχουμε ἄπειρα ἐπίπεδα, πού θά περνοῦν ἀπό τήν (ε).

29. Ζεῦγος εὐθειῶν στό χῶρο. α') **Ὁρισμοί. — Δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου λέγονται «ἀσύμβατες», ὅταν δέν ὑπάρχει ἐπίπεδο, πού νά περιέχει καί τίς δύο. Ἄν ὑπάρχει ἐπίπεδο, πού νά περιέχει καί τίς δυό αὐτές εὐθεῖες, τότε αὐτές λέγονται «συμβατές» ἤ ὁμοεπίπεδες.**

Οἱ ὁμοεπίπεδες εὐθεῖες ἤ τέμνονται ἤ εἶναι παράλληλες.

Οἱ ἀσύμβατες οὔτε τέμνονται, οὔτε εἶναι παράλληλες. (Δυό ἀσύμβατες ἀνήκουν πάντα σέ διαφορετικές διευθύνσεις).

β') (Θ) — Ἄν μιά εὐθεία τέμνει ἕνα ἐπίπεδο, τότε εἶναι ἀσύμβατη μέ κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου, πού δέν περνᾶ ἀπό τό ἴχνος της.



Σχ. 25

Ἔστω μιά εὐθεία (ε), πού τέμνει τό (Π) στό Α (σχ. 25), Β ἕνα ἄλλο σημεῖο τῆς (ε), πού δέν ἀνήκει στό (Π) καί ΓΔ μία εὐθεία τοῦ (Π), ἡ ὁποία δέν περνᾶ ἀπό τό Α.

Θά ἀποδείξουμε ὅτι δέν ὑπάρχει ἐπίπεδο, πού νά περιέχει καί τίς δυό εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), πού περιέχει τήν ΑΒ καί τή ΓΔ. Τότε τό (Ρ), ἐπειδή θά εἶχε τά σημεῖα Α, Γ, Δ (τά ὁποῖα δέ βρίσκονται σέ μιά εὐθεία) κοινά μέ τό (Π), θά ταυτιζόταν μέ τό (Π) καί κάθε σημεῖο τοῦ (Ρ) θά ἦταν καί σημεῖο τοῦ (Π). Ἄρα τό Β θά βρισκόταν πάνω στό (Π), πράγμα τό ὁποῖο εἶναι ἀντιθετο μέ τήν ὑπόθεση: Β $\notin$ (Π). Ὥστε δέν ὑπάρχει κανένα ἐπίπεδο, ἐπάνω στό ὁποῖο νά βρίσκονται οἱ ΑΒ καί ΓΔ. Αὐτές δηλαδή εἶναι εὐθεῖες ἀσύμβατες.

30. Τεμνόμενα ἐπίπεδα. **α΄) (Θ)—Ἄν δυό ἐπίπεδα, πού δέν ταυτίζονται, ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο, τότε ἔχουν κοινή καί μιά εὐθεία, πάνω στήν ὁποία βρίσκονται $\boxed{\text{ὅλα}}$ τά κοινά σημεῖα τῶν δύο ἐπιπέδων.**

Αὐτά τά δυό ἐπίπεδα λέγονται τεμνόμενα καί ἡ κοινή εὐθεία τους λέγεται **κοινή τομή** ἤ **ἀλληλοτομή** τους. Τά τεμνόμενα ἐπίπεδα δέν ἔχουν ἄλλο κοινό σημεῖο ἔξω ἀπό τήν κοινή τομή τους.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δυό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ὅπου (Π)$\not\equiv$(Ρ) καί ἕνα κοινό σημεῖο τους τό Α. Τότε τά (Π) καί (Ρ) ἔχουν καί ἄλλο σημεῖο κοινό, τό Β. (Ἀξίωμα iv, § 26). Ἀπό τά Α καί Β περνᾶ μιά εὐθεία, πού ἀνήκει καί στό (Π) καί στό (Ρ), γιατί ἔχει δυό κοινά σημεῖα μέ καθένα ἀπό αὐτά τά ἐπίπεδα. (Ἀξίωμα iii, § 26). Τά δυό ἐπίπεδα δέν μποροῦν νά ἔχουν κοινό σημεῖο, πού νά μή βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία ΑΒ, γιατί τότε δέ θά εἶναι ξεχωριστά ἐπίπεδα, δηλαδή θά ταυτίζονται (§ 27 α΄, πόρισμα).

β΄) Πόρισμα. Μιά εὐθεία εἶναι ὁρισμένη στό χῶρο, ἄν γνωρίζουμε δυό ἐπίπεδα διαφορετικά μεταξύ τους, ἐπάνω στά ὁποῖα νά βρίσκεται ἡ εὐθεία αὐτή.

31. Διαχωρισμός τοῦ χώρου ἀπό ἕνα ἐπίπεδο.

Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι: **Κάθε ἐπίπεδο διαιρεῖ τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού δέ βρίσκονται πάνω σ' αὐτό, σέ δυό σύνολα, ἔστω Ι καί ΙΙ, πού ἔχουν τίς ἑξῆς ἰδιότητες: Ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ συνόλου Ι καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ συνόλου ΙΙ ὁρίζουν ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, πού τέμνει τό ἐπίπεδο· ἐνῶ δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα, εἴτε τοῦ Ι εἴτε τοῦ ΙΙ, ὁρίζουν ἕνα τμῆμα, πού δέν τέμνει τό ἐπίπεδο.**

Τά δυό παραπάνω σημειοσύνολα Ι καί ΙΙ ὀνομάζονται *«ἀντίθετοι ἡμίχωροι»*, πού ὁρίζονται ἀπό τό (Π). Αὐτοί ἔχουν κοινό σύνορο τό (Π). Δυό σημεῖα τοῦ χώρου, πού βρίσκονται στόν ἴδιο ἡμίχωρο (Ι ἤ ΙΙ), λέμε ὅτι βρίσκονται **πρός τό αὐτό μέρος τοῦ (Π),** ἐνῶ δυό σημεῖα, πού ἀνήκουν σέ ἀντίθετους ἡμίχωρους, λέμε ὅτι βρίσκονται **ἑκατέρωθεν τοῦ (Π).** Τέλος, κάθε σημεῖο τοῦ χώρου βρίσκεται ἤ πάνω στό ἐπίπεδο (Π) ἤ στόν ἡμίχωρο Ι ἤ στόν ἀντίθετό του ἡμίχωρο ΙΙ.

32. Τόπος εὐθειῶν. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σύνολο εὐθειῶν τοῦ χώρου, πού ἔχουν μιά κοινή ἰδιότητα, ἔστω τήν (Α). Ἄν ὅλες οἱ εὐθεῖες τοῦ συνόλου βρίσκονται πάνω σέ ἕνα σταθερό ἐπίπεδο (Π) (ἤ σέ μιά ἐπίπεδη περιοχή) καί ἄν ἀπό καθένα σημεῖο τοῦ σταθεροῦ ἐπιπέδου (ἤ τῆς περιοχῆς) περνᾶ μιά εὐθεία, πού ἔχει τήν ἰδιότητα (Α), τότε τό σταθερό ἐπίπεδο (Π) (ἤ ἡ περιοχή) λέγεται **«τόπος τῶν εὐθειῶν πού ἔχουν τήν ἰδιότητα (Α)».**

33. Κανόνες σχεδιάσεως. Κατά τήν ἀπεικόνιση τῶν σχημάτων τοῦ χώρου πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο ἀκολουθεῖται πάντοτε ὁ ἑξῆς κανόνας: Παράλληλα διανύσματα τοῦ χώρου εἰκονίζονται πάνω στό ἐπίπεδο ὡς παράλληλα καί μάλιστα **μέ τόν ἴδιο λόγο.** (Τά ὁμόρροπα, φυσικά, εἰκονίζονται ὡς ὁμόρροπα καί τά ἀντίρροπα ὡς ἀντίρροπα).

Ἀποτέλεσμα αὐτοῦ τοῦ κανόνα εἶναι ὅτι ἕνα παραλληλόγραμμο σχεδιάζεται ὡς παραλληλόγραμμο, ἕνα τραπέζιο ὡς τραπέζιο, τό μέσο ἑνός τμήματος σχεδιάζεται στό μέσο τῆς εἰκόνας τοῦ τμήματος, τό βαρύκεντρο ἑνός τριγώνου τοῦ χώρου σχεδιάζεται ὡς βαρύκεντρο τῆς εἰκόνας τοῦ τριγώνου πάνω στό ἐπίπεδο καί γενικά ὁ λόγος τῶν συγγραμμικῶν τμημάτων διατηρεῖται κατά τή σχεδίαση.

34. Γεωμετρικές κατασκευές στό χῶρο. Στή θεωρητική στερεομετρία, οἱ γεωμετρικές κατασκευές στό χῶρο ἐννοοῦνται χωρίς φυσικά νά πραγματοποιοῦνται στό χῶρο. Εἰκονίζονται μόνο ἐνδεικτικά, πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο σχέδιο, πού δείχνει τά σημεῖα, τίς εὐθεῖες καί τά ἐπίπεδα, πού πρέπει νά κατασκευάσουμε στό χῶρο, γιά νά προκύψει τό γεωμετρικό σχῆμα, πού ζητεῖται. Τά ἐπίπεδα, πού χρειαζόμαστε, γιά νά ἐκτελέσουμε τήν κατασκευή, θεωροῦμε ὅτι ἔχουν κατασκευαστεῖ, ὅταν βροῦμε ἕναν τρόπο, μέ τόν ὁποῖο νά μποροῦμε νά τά ὁρίσουμε (βλ. § 27). Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τίς εὐθεῖες καί τά σημεῖα τοῦ χώρου. Μιά εὐθεία θεωροῦμε ὅτι ἔχει κατασκευαστεῖ, ὅταν π.χ. δείξουμε ὅτι βρίσκεται πάνω σέ δύο γνωστά ἐπίπεδα ἤ ἕνα σημεῖο τοῦ χώρου θεωρεῖται ὅτι κατασκευάστηκε, ἄν π.χ. εἶναι τομή ἑνός γνωστοῦ ἐπιπέδου καί μιᾶς γνωστῆς εὐθείας, κ.τ.λ.

(Στήν ἐφαρμοσμένη γεωμετρία ἡ πιστή ἀναπαράσταση τῶν σχημάτων τοῦ χώρου πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο σχέδιο, κατορθώνεται μέ εἰδικές μεθόδους, πού δίνονται ἀπό τήν «παραστατική Γεωμετρία»).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

47. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τρεῖς εὐθεῖες τέμνονται ἀνά δύο, χωρίς νά βρίσκονται καί οἱ τρεῖς ἐπάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, τότε οἱ τρεῖς αὐτές εὐθεῖες ἔχουν ἕνα σημεῖο κοινό.

48. Ἔχουμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ε'), δύο σημεῖα Α, Β τῆς (ε) καί δύο σημεῖα Α', Β' τῆς (ε'). Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΑ' καί ΒΒ' εἶναι ἀσύμβατες.

49. Νά ἀποδείξετε ὅτι δύο ἴσες περιφέρειες, πού ἔχουν τό ἴδιο κέντρο, ἀλλά βρίσκονται σέ διαφορετικά ἐπίπεδα, ἔχουν δύο σημεῖα κοινά.

50. Ἔχουμε μία εὐθεία (ε) καί δύο σημεῖα Α καί Β τοῦ χώρου, ἔξω ἀπό τήν εὐθεία. Ἄν ἕνα σημεῖο Γ διατρέχει τήν (ε), ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ βαρυκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ;

51. Ἔχουμε δύο εὐθεῖες $(ε_1)$ καί $(ε_2)$, πού τέμνονται καί μιά τρίτη εὐθεία $(ε_3)$, πού

τέμνει τό ἐπίπεδο τῶν δύο πρώτων στό Α. Νά βρεῖτε τό γ. τόπο τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου, οἱ ὁποῖες τέμνουν καί τίς τρεῖς εὐθεῖες.

52. Ἔχουμε δύο εὐθεῖες ΟΧ,ΟΨ, πού τέμνονται, ἕνα σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου ΧΟΨ διάφορο τοῦ Ο καί ἕνα σημεῖο Β ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο ΧΟΨ. Ἕνα ἄλλο σημεῖο Μ, τώρα, διατρέχει τήν εὐθεία ΑΒ. Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΜΟΧ καί ΜΟΨ.

53. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία, πού νά περνᾶ ἀπό δεδομένο σημεῖο τοῦ χώρου καί νά τέμνει μιά δεδομένη περιφέρεια καί μιά δεδομένη εὐθεία τοῦ χώρου.

54. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), μιά εὐθεία (ε), πού τέμνει τό (Π) καί ἕνα σημεῖο Α τοῦ χώρου.Νά κατασκευαστεῖ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, πού νά ἔχει μέσο τό Α καί τά ἄκρα του νά βρίσκονται ἐπάνω στό (Π) καί τήν (ε).

55. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό τό (Π) τέτοια, ὥστε ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τό (Π). Νά κατασκευαστοῦν ἐπίπεδα, πού περνοῦν ἀπό τήν ΑΒ καί τέμνουν τό (Π) κατά μιά εὐθεία, πού ἀπέχει ἀπόσταση λ ἀπό ἕνα δεδομένο σημεῖο τοῦ (Π).

56. Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) δίνεται ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, πού δέν εἶναι οὔτε παραλληλόγραμμο οὔτε τραπέζιο. Ἐπίσης ἔξω ἀπό τό (Π) δίνεται ἕνα σημεῖο S. Νά κατασκευαστοῦν, μέ χρησιμοποίηση εὐθειῶν μόνο: πρῶτα ἡ ἀλληλοτομή τῶν ἐπιπέδων SAB καί SΓΔ καί κατόπιν ἡ ἀλληλοτομή τῶν ἐπιπέδων SAΓ καί SBΔ.

Β΄.

57. Ἄν τρεῖς εὐθεῖες δέν εἶναι ὁμοεπίπεδες, ἐνῶ ἀνά δύο εἶναι ὁμοεπίπεδες, τότε ἤ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο ἤ εἶναι παράλληλες.

58. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ βρίσκονται σέ διαφορετικά ἐπίπεδα καί ταυτοχρόνως: ἡ εὐθεία ΑΒ καί ἡ εὐθεία Α΄Β΄ τέμνονται στό Κ, ἡ εὐθεία ΒΓ καί ἡ εὐθεία Β΄Γ΄ τέμνονται στό Λ καί τέλος οἱ εὐθεῖες ΓΑ καί Γ΄Α΄ τέμνονται στό Μ. Τότε:

i) Τά Κ, Λ, Μ βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία.

ii) Οἱ εὐθεῖες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο ἤ εἶναι παράλληλες.

59. Ἄν τέσσερις εὐθεῖες τέμνονται ἀνά δύο, χωρίς νά βρίσκονται καί οἱ τέσσερις στό ἴδιο ἐπίπεδο, τότε περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

60. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἑκατέρωθεν τοῦ (Π). Ἔστω Μ ἕνα μεταβλητό σημεῖο τοῦ χώρου καί ἔστω ὅτι οἱ εὐθεῖες ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τό (Π) στά Α΄ καί Β΄.

i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία Α΄Β΄ περνᾶ πάντοτε ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Ι.

ii) Ἔστω Γ ἕνα τρίτο σταθερό σημεῖο τοῦ χώρου, πού δέ βρίσκεται ἐπάνω στήν ἴδια εὐθεία μέ τά Α καί Β καί τέτοιο, ὥστε οἱ εὐθεῖες ΓΑ, ΓΒ νά τέμνουν τό (Π). Τέλος, ἔστω ὅτι ἡ εὐθεία ΜΓ τέμνει τό (Π) στό Γ΄. Ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες Α΄Γ΄ καί Β΄Γ΄ περνοῦν ἀντιστοίχως ἀπό δύο σταθερά σημεῖα Ι΄ καί Ι΄΄.

iii) Τά Ι, Ι΄, Ι΄΄ εἶναι συνευθειακά (βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία).

61. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἐπάνω σ' αὐτό δύο εὐθεῖες ΟΧ, ΟΨ καθώς καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό τό (Π) τέτοια, ὥστε ἡ ευθ ΑΒ τέμνει τό (Π) σέ σημεῖο Ι διάφορο τοῦ Ο.Ἕνα μεταβλητό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τήν ΑΒ, τέμνει τήν Οx στό Μ καί τήν ΟΨ στό Ν.

i) Νά βρεῖτε τόν τόπο τοῦ σημείου τομῆς Τ τῶν ΑΝ καί ΒΜ καί

ii) τόν τόπο τοῦ σημείου τομῆς Τ΄ τῶν ΑΜ καί ΒΝ.

iii) Ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΤΤ΄ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο.

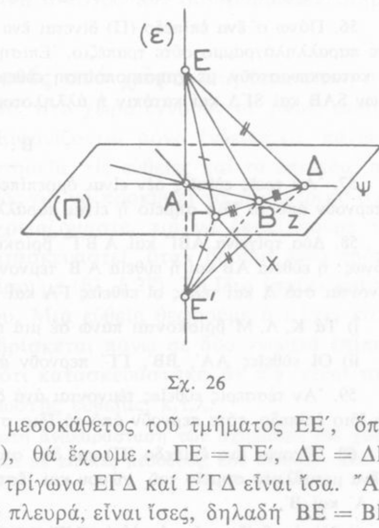
ΚΑΘΕΤΟΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

35. Ὁρισμός καί ὕπαρξη τῆς καθέτου. **α΄) Ὁρισμός. Μία εὐθεία λέγεται κάθετος σέ ἕνα ἐπίπεδο, ὅταν τέμνει τό ἐπίπεδο καί εἶναι κάθετη σέ ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού περνοῦν ἀπό τό ἴχνος της.**

Τό ὅτι ὁ ὁρισμός αὐτός δέν εἶναι κενός (σέ περιεχόμενο) φαίνεται ἀπό τά παρακάτω δυό θεωρήματα.

β΄) (Θ) —Ἄν μιά εὐθεία τέμνει ἕνα ἐπίπεδο καί εἶναι κάθετη σέ δυό εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού περνοῦν ἀπό τό ἴχνος της, τότε εἶναι κάθετη σέ ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού περνοῦν ἀπό τό ἴχνος της.

Ἔστω ἡ εὐθεία (ε), πού τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) στό Α καί εἶναι κάθετη πάνω σέ δυό εὐθεῖες τοῦ (Π), τίς ΑΧ καί ΑΨ (σχ. 26). Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι ⊥ σέ κάθε τρίτη εὐθεία ΑΖ τοῦ ἐπιπέδου, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τό Α. Γι᾿ αὐτό παίρνουμε πάνω στήν εὐθεία ΑΖ ἕνα σημεῖο Β, διαφορετικό ἀπό τό Α καί κατασκευάζουμε τό τμῆμα ΓΔ, ὥστε νά ἔχει τό Β ὡς μέσο του καί τά ἄκρα του Γ καί Δ ἐπάνω στίς ΑΧ καί ΑΨ. Παίρνουμε πάνω στήν (ε) δυό σημεῖα Ε καί Ε΄, πού νά ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό Α καί φέρνουμε τά τμήματα ΕΓ, ΕΒ, ΕΔ, Ε΄Γ, Ε΄Β, Ε΄Δ. Τότε, ἐπειδή ἡ ΑΧ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΕΕ΄, ὅπως ἐπίσης καί ἡ ΑΨ (ἀπ᾿τήν ὑπόθεση), θά ἔχουμε: ΓΕ = ΓΕ΄, ΔΕ = ΔΕ΄. Ἐπειδή καί ΓΔ = ΓΔ, ἕπεται ὅτι τά τρίγωνα ΕΓΔ καί Ε΄ΓΔ εἶναι ἴσα. Ἄρα καί οἱ διάμεσοί τους πρός τήν κοινή πλευρά, εἶναι ἴσες, δηλαδή ΒΕ = ΒΕ΄. Ἀπό τό ἰσοσκελές τρίγωνο ΕΒΕ΄ μέ ΒΕ = ΒΕ΄ ἕπεται ὅτι ἡ ΒΑ, πού εἶναι διάμεσός του, θά εἶναι καί ὕψος του. Δηλαδή ΒΑ ⊥ ΕΕ΄ ἤ ΑΖ ⊥ ΕΕ΄, πράγμα πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.



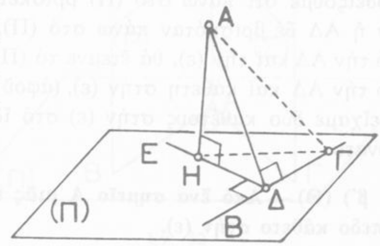
Σχ. 26

γ΄) Πόρισμα. Ἄν μιά εὐθεία εἶναι κάθετη σέ δύο εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου, τότε εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο.

δ΄) Κατασκευή μιᾶς εὐθείας κάθετης σέ ἐπίπεδο. (Θ) —Ἄν δοθεῖ ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό (Π), τότε μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία, πού νά περνᾶ ἀπό τό Α καί νά εἶναι κάθετη στό (Π)· ὡς ἑξῆς: Χαράζουμε μιά εὐθεία ΒΓ πάνω στό (Π), φέρνουμε ἀπό τό Α μιά εὐθεία ⊥ΒΓ, πού τέμνει τή ΒΓ ἔστω στό Δ, φέρνουμε ἀπό τό Δ μία εὐθεία ΔΕ κάθετη στή ΒΓ, ἡ ὁποία ν᾿ ἀνήκει στό (Π) καί τέλος φέρνουμε ἀπό τό Α

μιά εὐθεία ΑΗ $\perp$ ΔΕ (σχ. 27).Ἡ τρίτη αὐτή κάθετος ΑΗ εἶναι καί κάθετος στό ἐπίπεδο.Ἄλλη κάθετος στό (Π), πού νά περνᾶ ἀπό τό Α, δέν ὑπάρχει.

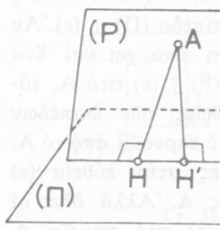
Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Γ τῆς εὐθείας ΒΓ, διαφορετικό ἀπό τό Δ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $\widehat{ΑΗΓ} = 1$ ὀρθή. Γιά τό σκοπό αὐτό χρησιμοποιοῦμε τό Πυθαγόρειο θεώρημα στά τρία ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ, ΗΔΓ καί ΑΗΔ.



Ἔχουμε: $ΑΓ^2 = ΑΔ^2+ΔΓ^2 =$
$= (ΑΗ^2+ΗΔ^2)+ΔΓ^2 =$
$= ΑΗ^2+ +(ΗΔ^2+ΔΓ^2) =$
$= ΑΗ^2+ΗΓ^2.$

Ἀπό τήν
$ΑΓ^2 = ΑΗ^2+ΗΓ^2 \Rightarrow ΑΗ \perp ΗΓ.$

Ἐπειδή εἶναι καί ΑΗ $\perp$ ΗΔ, ἄρα, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ἡ ΑΗ, πού εἶναι κάθετη σέ δύο, εἶναι κάθετη καί σέ ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ (Π), πού περνοῦν ἀπό τό ἴχνος της Η. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό ἡ ΑΗ εἶναι κάθετη στό (Π). Γράφουμε $\boxed{ΑΗ \perp (Π)}$



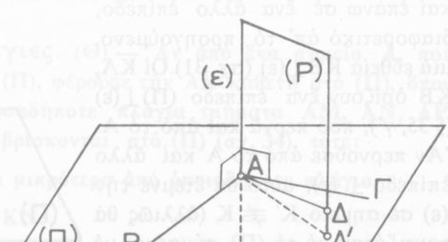
Σχ. 28

Ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλη κάθετος ΑΗ′ στό (Π) (σχ. 28), τότε τό ἐπίπεδο ΑΗΗ′ θά ἔτεμνε τό (Π) κατά τήν εὐθεία ΗΗ′ καί θά ἦταν:

ΑΗ $\perp$ ευθ ΗΗ′ (γιατί ΑΗ $\perp$ (Π)) καί ΑΗ′ $\perp$ ευθ ΗΗ′ (γιατί ΑΗ′ $\perp$ (Π)).
Ἀλλά τότε ἀπό τό σημεῖο Α θά εἴχαμε δύο καθέτους στήν εὐθεία ΗΗ′, πράγμα πού εἶναι ἄτοπο.

Ἑπομένως ἀπό τό Α μία καί μόνο κάθετο μποροῦμε νά φέρουμε στό (Π).

36. Κατασκευή ἑνός ἐπιπέδου κάθετου σέ μιά εὐθεία. **α′) (Θ) – Οἱ ἄπειρες κάθετες, πού ἄγονται σέ μιά εὐθεία (ε) στό σημεῖο της Α, βρίσκονται ὅλες στό ἐπίπεδο, πού εἶναι κάθετο στήν (ε) στό σημεῖο της Α.**



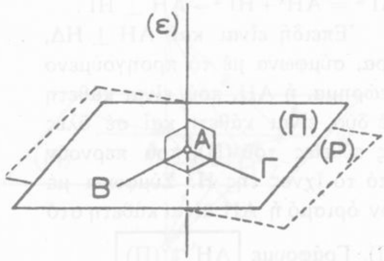
Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν (ε) περνοῦν ἄπειρα ἐπίπεδα (§28,

Σχ. 29

δ΄) καί σέ καθένα ἀπ' αὐτά ὑπάρχει μιά κάθετος στήν (ε) στό σημεῖο Α. Ἑπομένως στό Α φέρνονται ἄπειρες κάθετοι στήν (ε). Δύο ἀπ' αὐτές, οἱ ΑΒ καί ΑΓ (σχ. 29), ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Π), κάθετο στήν (ε) (§ 35, γ΄). Θά ἀποδείξουμε ὅτι πάνω στό (Π) βρίσκεται καί κάθε τρίτη εὐθεία ΑΔ ⊥ (ε). Ἄν ἡ ΑΔ δέ βρισκόταν πάνω στό (Π), τότε τό ἐπίπεδο (Ρ), πού ὁρίζεται ἀπό τήν ΑΔ καί τήν (ε), θά ἔτεμνε τό (Π) κατά μιά εὐθεία ΑΔ΄ διαφορετική ἀπό τήν ΑΔ καί κάθετη στήν (ε), (ἀφοῦ (ε) ⊥ (Π)). Ὥστε στό ἐπίπεδο (Ρ) θά εἴχαμε δύο καθέτους στήν (ε) στό ἴδιο σημεῖο Α, πράγμα πού εἶναι ἀδύνατο.

β΄) (Θ) — Ἀπό ἕνα σημεῖο Α μιᾶς εὐθείας (ε) διέρχεται ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε).

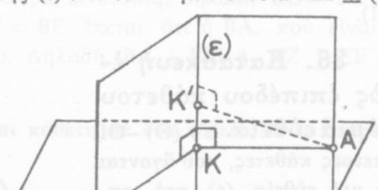
Μέσα σέ δυό ἐπίπεδα, πού περνοῦν ἀπό τήν (ε), φέρνουμε τίς ΑΒ, ΑΓ κάθετες στήν (ε) (σχ. 30). Αὐτές ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Π) ⊥ (ε). Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ὑπάρχει καί ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο (Ρ) ⊥ (ε) στό Α, τότε ὅλες οἱ εὐθεῖες τῶν ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), πού περνοῦν ἀπό τό Α, θά ἦταν κάθετες στήν εὐθεία (ε) στό σημεῖο της Α. Ἀλλά ὅλες οἱ κάθετες στήν (ε) στό σημεῖο Α βρίσκονται ἐπάνω σέ ἕνα μόνο ἐπίπεδο (προηγούμενο θεώρημα). Ἑπομένως τά δυό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ταυτίζονται.



Σχ. 30

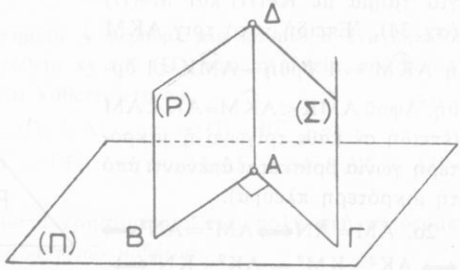
γ΄) (Θ) — Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, τό ὁποῖο βρίσκεται ἔξω ἀπό μιά εὐθεία (ε), διέρχεται ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε).

Ἀρκεῖ νά φέρουμε στό ἐπίπεδο τῆς (ε) καί τοῦ Α μιά εὐθεία ΑΚ ⊥ (ε) καί ἐπάνω σέ ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο, διαφορετικό ἀπ' τό προηγούμενο, μιά εὐθεία ΚΒ ⊥ (ε) (σχ. 31). Οἱ ΚΑ, ΚΒ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Π) ⊥ (ε) (§ 35, γ΄), πού περνᾶ καί ἀπό τό Α. Ἄν περνοῦσε ἀπό τό Α καί ἄλλο ἐπίπεδο ⊥ (ε), αὐτό θά ἔτεμνε τήν (ε) σέ σημεῖο Κ΄ ≢ Κ (ἀλλιῶς θά ταυτιζόταν μέ τό (Π) σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα) καί θά εἴχαμε ἀπ' τό Α δυό καθέτους στήν (ε), πράγμα ἀδύνατο.



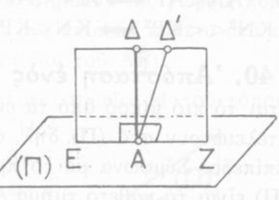
Σχ. 31

37. (Θ) —Ἀπό ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται πάνω σ'ἕνα ἐπίπεδο (Π), διέρχεται μία καί μόνο κάθετος στό (Π).



Σχ. 32

Ἄς φέρουμε στό ἐπίπεδο (Π) δυό εὐθεῖες ΑΒ,ΑΓ, πού νά περνοῦν ἀπό τό Α καί νά εἶναι κάθετες μεταξύ τους (σχ. 32). Τό ἐπίπεδο (Ρ), πού περνᾶ ἀπό τό Α καί εἶναι $\perp$ ΑΓ, θά περιέχει τήν ΑΒ (§36, α΄). Τό ἐπίπεδο (Σ), πού περνᾶ ἀπό τό Α καί εἶναι $\perp$ ΑΒ, θά περιέχει τήν ΑΓ. Τά (Ρ) καί (Σ) δέν ταυτίζονται, γιατί, ἄν ταυτίζονταν, θά ἔπρεπε νά συμπίπτουν μέ τό (Π).



Σχ. 33

Ἐπειδή, λοιπόν, ἔχουν καί τό σημεῖο Α κοινό, γι' αὐτό τέμνονται κατά κάποια εὐθεία ΑΔ. Ἡ ΑΔ εἶναι $\perp$ ΑΓ, γιατί ἀνήκει στό (Ρ) καί $\perp$ΑΒ, γιατί ἀνήκει στό (Σ). Ἑπομένως ἡ ΑΔ εἶναι $\perp$ (Π).

—Ἄν ὑπῆρχαν δυό κάθετοι ΑΔ, ΑΔ΄ στό (Π) (σχ. 33), τότε τό ἐπίπεδό τους ΔΑΔ΄ θά ἔτεμνε τό (Π) κατά τήν εὐθεία ΕΖ, πάνω στήν ὁποία καί ἡ ΑΔ καί ἡ ΑΔ΄ θά ἦταν κάθετες στό Α, πράγμα ἀδύνατο.

38. Εὐθεία πλάγια ὡς πρός ἐπίπεδο. Μία εὐθεία (ε) λέγεται πλάγια ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π), ὅταν τέμνει τό (Π) σ' ἕνα σημεῖο Α καί δέν εἶναι κάθετη στό (Π), δηλαδή εἶναι διαφορετική ἀπό τήν κάθετη στό ἐπίπεδο (Π), ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τό Α.

39. Κάθετος καί πλάγιες. (Θ) —Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο (Π), φέρουμε τήν ΑΚ κάθετη στό (Π), ὅπου Κ $\in$ (Π) καί ἀκόμη φέρουμε ὁσαδήποτε πλάγια τμήματα ΑΜ, ΑΝ, ΑΡ, τῶν ὁποίων τά ἴχνη Μ, Ν, Ρ βρίσκονται στό (Π) (σχ. 34), τότε:

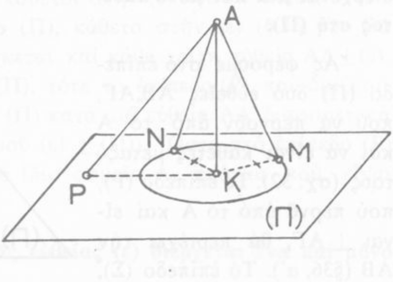
1ο. Τό κάθετο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό ὁποιοδήποτε πλάγιο.

2ο. ΑΜ = ΑΝ $\Longleftrightarrow$ ΚΜ = ΚΝ.

3ο. ΑΝ < ΑΡ $\Longleftrightarrow$ ΚΝ < ΚΡ.

(δηλ. *τό μῆκος πλάγιου τμήματος εἶναι αὔξουσα συνάρτηση τῆς ἀποστάσεως τοῦ ἴχνους τοῦ τμήματος ἀπό τό ἴχνος τῆς καθέτου*).

Απόδειξη. Έστω ΑΚ τό κάθετο τμῆμα καί ΑΜ ἕνα ὁποιοδήποτε πλάγιο τμῆμα μέ $K \in (\Pi)$ καί $M \in (\Pi)$ (σχ. 34). Ἐπειδή στό τριγ ΑΚΜ ἡ $A\widehat{K}M = 1$ ὀρθή $\Rightarrow A\widehat{M}K < 1$ ὀρθή. Ἀφοῦ $A\widehat{M}K < A\widehat{K}M \Rightarrow AK < AM$ (ἐπειδή σέ κάθε τρίγωνο ἡ μικρότερη γωνία βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τή μικρότερη πλευρά).



Σχ. 34

2ο. $AM = AN \Longleftrightarrow AM^2 = AN^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow AK^2 + KM^2 = AK^2 + KN^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow KM^2 = KN^2 \Longleftrightarrow KM = KN$
(σχ. 34).

3ο. $AN < AP \Longleftrightarrow AN^2 < AP^2 \Longleftrightarrow AK^2 + KN^2 < AK^2 + KP^2 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow KN^2 < < KP^2 \Longleftrightarrow KN < KP$.

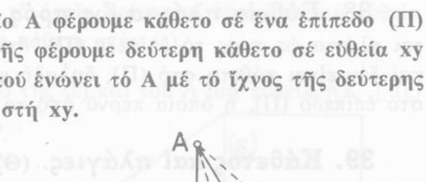
40. Ἀπόσταση ἑνός σημείου Α ἀπό ἕνα ἐπίπεδο (Π) λέγεται τό πιό μικρό ἀπό τά εὐθύγραμμα τμήματα, πού ἀρχίζουν ἀπό τό Α καί τελειώνουν στό (Π), δηλ. ὁ συντομότερος δρόμος ἀπό τό σημεῖο πρός τό ἐπίπεδο. Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό (Π) εἶναι τό κάθετο τμῆμα ΑΚ, πού ξεκινᾶ ἀπό τό Α καί τελειώνει στό (Π) (σχ. 34). Στή συνήθη γεωμετρική γλώσσα ὡς «ἀπόσταση» ΑΚ ἐννοεῖται τό μέτρο τοῦ ΑΚ, τό ὁποῖο συνοδεύεται (ἀπαραίτητα) ἀπό τή μονάδα, μέ τήν ὁποία ἔγινε ἡ μέτρησή του. (Π.χ. ΑΚ = 7 cm ἤ 7 m ἤ 7 km).

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ

41. (Θ) —Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α φέρουμε κάθετο σέ ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἀπό τό ἴχνος τῆς καθέτου αὐτῆς φέρουμε δεύτερη κάθετο σέ εὐθεία xy τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ εὐθεία, πού ἑνώνει τό Α μέ τό ἴχνος τῆς δεύτερης καθέτου, εἶναι μιά εὐθεία κάθετη στή xy.

Δηλ. (σχ. 35)
$AB \perp (\Pi) \wedge B\Gamma \perp xy \in (\Pi) \Rightarrow$
$\Rightarrow A\Gamma \perp xy$.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε πάνω στή xy δυό σημεῖα Δ καί Ε, πού νά ἰσαπέχουν ἀπό τό Γ. Τότε ΒΔ = ΒΕ, γιατί ἡ ΒΓ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΔΕ. Ἀλλά ΒΔ = ΒΕ ⇒ ΑΔ = ΑΕ, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς § 39. Ἀφοῦ, λοιπόν, τό τρί-



Σχ. 35

γωνο ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ διάμεσος ΑΓ τῆς βάσεως εἶναι καί ὕψος, δηλ. ΑΓ $\perp$ xy.

42. (Θ) —Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α φέρουμε μιά κάθετο σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μιά ἄλλη κάθετο σέ εὐθεία xy τοῦ (Π), τότε ἡ εὐθεία, πού ἑνώνει τά ἴχνη τῶν δύο καθέτων, εἶναι κάθετη στή xy.

Δηλ. (σχ. 35) $AB \perp (\Pi) \wedge A\Gamma \perp xy \in (\Pi) \Rightarrow B\Gamma \perp xy$.

Γιατί, ἄν πάρουμε πάλι: $\Delta\Gamma = \Gamma E$, τότε, ἐπειδή $A\Gamma \perp \Delta E \Rightarrow A\Delta = AE \Rightarrow$ $\Rightarrow B\Delta = BE \Rightarrow B\Gamma \perp \Delta E$.

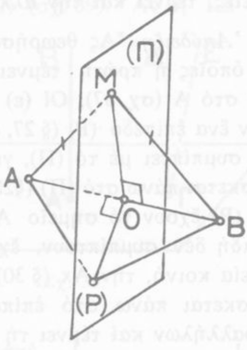
Τά παραπάνω δυό θεωρήματα χρησιμοποιοῦνται πολύ στή στερεομετρία καί λέγονται *θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων*.

ΤΟ ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

43. (Θ) — Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό δυό σημεῖα Α καί Β, εἶναι ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στό τμῆμα ΑΒ στό μέσο τοῦ ΑΒ. (Τό *«μεσοκάθετο ἐπίπεδο»* τοῦ ΑΒ).

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ τόπου καί ἔστω Ο τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 36). Ἡ ἰδιότητα τοῦ Μ: ΜΑ = ΜΒ συνεπάγεται ὅτι ΜΟ $\perp$ ΑΒ. Ὅλες ὅμως οἱ κάθετοι στήν εὐθεία ΑΒ στό σημεῖο Ο βρίσκονται πάνω σέ ἕνα ὁρισμένο ἐπίπεδο (Π), πού εἶναι κάθετο στήν ΑΒ στό Ο (§ 36), ἄρα καί ἡ ΟΜ βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Π) καί ἑπομένως καί τό Μ. Δηλαδή κάθε σημεῖο τοῦ τόπου ἀνήκει στό μεσοκάθετο ἐπίπεδο (Π).

Ἀντιστρόφως. Ἄς πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου (Π) (σχ. 36). Τότε ΡΟ $\perp$ ΑΒ, δηλαδή ἡ εὐθεία ΡΟ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ ΑΒ καί ἑπομένως ΡΑ = ΡΒ. Ἄρα καί κάθε σημεῖο τοῦ μεσοκάθετου ἐπιπέδου ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἰσαπέχει ἀπό τά Α καί Β.



Σχ. 36

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τίς τρεῖς κορυφές ἑνός τριγώνου;

63. Ἔχουμε μιά περιφέρεια καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδό της. Ζητεῖται νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας τέτοιο, πού ἡ ἀπόστασή του ἀπό τό Α νά εἶναι ἡ μέγιστη ἤ ἡ ἐλάχιστη δυνατή.

64. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν ἑνός σημείου Α ἐπάνω στίς διάφορες εὐθεῖες ἑνός ἐπιπέδου (Π), πού περνοῦν ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Β τοῦ (Π).

65. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου, ἀπό τά ὁποῖα ἕνα τμῆμα AB, πού δέ βρίσκεται πάνω στό (Π), φαίνεται ὑπό ὀρθή γωνία.

66. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τίς πλευρές ἑνός δεδομένου τριγώνου.

67. Ἄν μιά ἡμιευθεία OA μέ ἀρχή τό σημεῖο O ἑνός ἐπιπέδου (Π) σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τρεῖς ἡμιευθεῖες τοῦ (Π), πού περνοῦν ἀπό τό O, τότε OA⊥(Π).

68. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τά ἐπίπεδα τά κάθετα στά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου περνοῦν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία.

69. Ἔχουμε μιά εὐθεία (ε), πού εἶναι πλάγια πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π). Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία τοῦ (Π), πού νά περνᾶ ἀπό τό ἴχνος τῆς (ε) ἐπάνω στό (Π) καί νά εἶναι κάθετη στήν (ε).

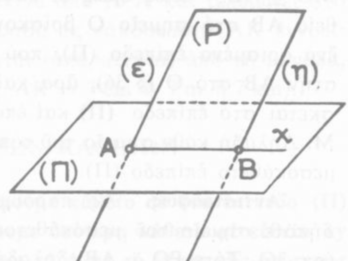
70. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία ἑνός ἐπιπέδου (Π), πού νά περνάει ἀπό δεδομένο σημεῖο O τοῦ (Π) καί νά ἀπέχει ἀπόσταση λ ἀπό ἕνα σημεῖο A, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό (Π).

71. Νά γράψετε μιά εὐθεία ἑνός ἐπιπέδου (Π), πού νά ἀπέχει ἀποστάσεις α καί β ἀπό δύο σημεῖα A καί B, τά ὁποῖα βρίσκονται ἔξω ἀπό τό (Π).

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

44. α΄) (Θ)— **Κάθε ἐπίπεδο, πού τέμνει τή μιά ἀπό δύο παράλληλες εὐθεῖες, τέμνει καί τήν ἄλλη.**

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δυό παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (η), ἀπό τίς ὁποῖες ἡ πρώτη τέμνει τό ἐπίπεδο (Π) στό A (σχ. 37). Οἱ (ε) καί (η) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (P) (§ 27, δ΄), τό ὁποῖο δέν συμπίπτει μέ τό (Π), γιατί ἡ (ε) **δέ βρίσκεται** πάνω στό (Π) (§28, β΄). Τά (Π) καί (P) ἔχουν τό σημεῖο A κοινό καί, ἐπειδή δέν συμπίπτουν, ἔχουν καί μιά εὐθεία κοινή, τήν Ax (§ 30). Ἡ Ax, ἀφοῦ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο τῶν δύο παραλλήλων καί τέμνει τή μία, δηλ. τήν (ε), θά τέμνει καί τήν παράλληλό της (η) στό σημεῖο B. Ἡ (η) ἔχει, λοιπόν, μέ τό (Π) κοινό τό σημεῖο B. Ἡ (η) πάλι, ἀφοῦ δέν ταυτίζεται μέ τήν Ax, δέν μπορεῖ νά βρίσκεται πάνω στό (Π), γιατί τότε τά (Π) καί (P) θά ἔπρεπε νά συμπίπτουν.



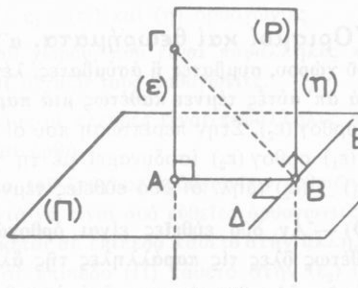
Σχ. 37

Ἄρα ἡ (η) τέμνει τό (Π) στό B, ἤ, μέ ἄλλα λόγια, τό (Π) τέμνει τήν (η) στό B.

β΄) (Θ) — **Κάθε ἐπίπεδο κάθετο σέ μιά ἀπό δυό παράλληλες εὐθεῖες εἶναι κάθετο καί στήν ἄλλη.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι (ε)||(η) ∧ (ε) ⊥ (Π) (σχ. 38). Θά ἀποδείξουμε ὅτι καί (η) ⊥ (Π). Τό (Π), ἀφοῦ τέμνει τήν (ε), ἔστω στό A, θά τέμνει καί τήν παράλληλή της (η), στό B, (σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα).

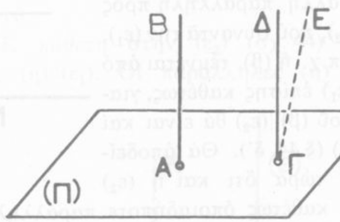
Ἡ ΑΒ, ἀφοῦ βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Ρ) τῶν δύο παραλλήλων καί εἶναι κάθετη στήν (ε), θά εἶναι κάθετη καί στήν (η), δηλ. (η) ⊥ ΑΒ. Ἀρκεῖ, λοιπόν, νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ (η) εἶναι κάθετη σέ μιά ἀκόμη εὐθεία τοῦ (Π). Ἄς φέρουμε μιά εὐθεία ΔΕ, στό ἐπίπεδο (Π), πού νά εἶναι κάθετη στήν ΑΒ στό σημεῖο Β καί ἄς ἑνώσουμε τό Β μέ κάποιο τυχαῖο σημεῖο Γ τῆς (ε). Τότε τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων δίνει: ΓΒ ⊥ ΔΕ. Ἀπό τά: ΔΕ ⊥ ΑΒ ∧ ΔΕ ⊥ ΓΒ ⇒ ΔΕ ⊥ Επιπ ΓΑΒ, δηλ. ΔΕ ⊥ (Ρ), ὁπότε ΔΕ ⊥ (η), ἤ καί (η) ⊥ ΔΕ. Ἀπό τά (η) ⊥ ΑΒ ∧ (η) ⊥ ΔΕ ⇒ (η) ⊥ (Π).



Σχ. 38

γ΄) (Θ) — Δυό εὐθεῖες κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο εἶναι παράλληλες.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι ΑΒ ⊥ (Π) ∧ ΓΔ ⊥ (Π) (σχ. 39). Ἄν ἡ ΓΔ δέν ἦταν παράλληλη πρός τήν ΑΒ, τότε θά ὑπῆρχε μιά ἄλλη εὐθεία ΓΕ, πού διέρχεται ἀπό τό Γ καί εἶναι ∥ ΑΒ. Τότε τό (Π), ἀφοῦ εἶναι κάθετο στήν ΑΒ, θά ἦταν κάθετο καί στήν παράλληλή της ΓΕ (προηγ. θεώρημα) καί θά εἴχαμε: ΓΔ ⊥ (Π) ∧ ΓΕ ⊥ (Π), πράγμα πού εἶναι ἀδύνατο. Ἑπομένως ἀναγκαστικά ΓΔ∥ΑΒ.



Σχ. 39

δ΄) Ἡ παραλληλία εὐθειῶν στό χῶρο εἶναι σχέση μεταβατική.

Δηλ. (ε)∥(ε΄) ∧ (ε΄)∥(ε΄΄) ⇒ (ε)∥(ε΄΄) (σχ. 40).

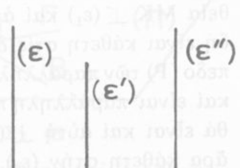
Ἀπόδειξη. Ἄς φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) ⊥ (ε΄).

Τότε (ε΄) ⊥ (Π) ∧ (ε΄) ∥ (ε) ⇒ (ε) ⊥ (Π).

Ἐπίσης (ε΄) ⊥ (Π) ∧ (ε΄)∥(ε΄΄) ⇒ (ε΄΄) ⊥ (Π).

Ἀπό τά (ε) ⊥ (Π) ∧ (ε΄΄) ⊥ (Π) ⇒ (ε)∥(ε΄΄).

(Οἱ παράλληλες πρός τρίτη εἶναι καί μεταξύ τους παράλληλες).



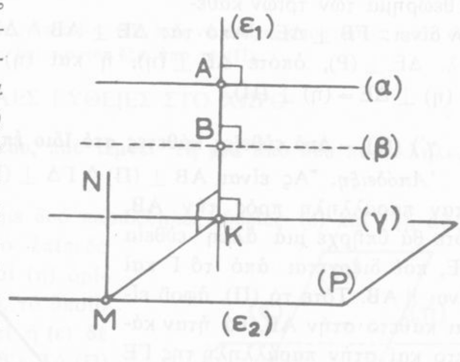
Σχ. 40

ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

45. Ὁρισμοί καί θεωρήματα. **α′) Ὁρισμός — Δυό εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) τοῦ χώρου, συμβατές ἤ ἀσύμβατες, λέγονται ὀρθογώνιες μεταξύ τους, ὅταν ἡ μιά ἀπ' αὐτές τέμνει καθέτως μιά παράλληλη τῆς ἄλλης.** Γράφουμε τότε: (ε_1) ορθογ (ε_2). Στήν περίπτωση πού οἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι συνεπίπεδες, ἡ σχέση (ε_1) ορθογ (ε_2) ἰσοδυναμεῖ μέ τή γνωστή ἀπ' τήν ἐπιπεδομετρία σχέση: $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$ (δηλ. οἱ δυό εὐθεῖες τέμνονται καθέτως).

β′) (Θ) — Ἄν δύο εὐθεῖες εἶναι ὀρθογώνιες, τότε καθεμιά ἀπ' αὐτές τέμνει καθέτως ὅλες τίς παράλληλες τῆς ἄλλης, τίς ὁποῖες συναντᾶ.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), πού εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους (σχ. 41). Τότε ἡ μία ἀπ' αὐτές, π.χ. ἡ (ε_1), τέμνει καθέτως, ἔστω στό Α, μία εὐθεία παράλληλη πρός τήν (ε_2) (σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τῶν ὀρθογωνίων). Ὁποιαδήποτε ἄλλη παράλληλη πρός τήν (ε_2), πού συναντᾶ τήν (ε_1), ὅπως π.χ. ἡ (β), τέμνεται ἀπό τήν (ε_1) ἐπίσης καθέτως, γιατί, ἀφοῦ $(\beta) \parallel (\varepsilon_2)$ θά εἶναι καί $(\beta) \parallel (\alpha)$ (§ 44, δ′). Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι καί ἡ (ε_2) τέμνει καθέτως ὁποιαδήποτε παράλληλη τῆς (ε_1), πού συναντᾶ, π.χ. τήν ΜΝ.

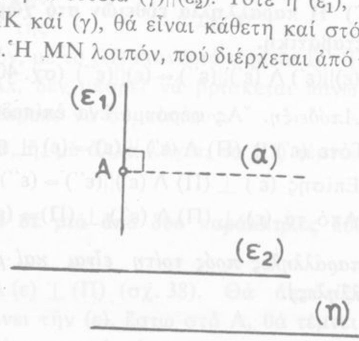


Σχ. 41

Γιά νά τό ἀποδείξουμε, ἄς φέρουμε ἀπό τό σημεῖο Μ τῆς (ε_2) τήν εὐθεία $MK \perp (\varepsilon_1)$ καί ἀπό τό ἴχνος Κ μιά εὐθεία $(\gamma) \parallel (\varepsilon_2)$. Τότε ἡ ($\varepsilon_1$), ἐπειδή εἶναι κάθετη στίς δύο εὐθεῖες ΜΚ καί (γ), θά εἶναι κάθετη καί στό ἐπίπεδο (P) τῶν παραλλήλων (ε_2) καί (γ). Ἡ ΜΝ λοιπόν, πού διέρχεται ἀπό τό Μ καί εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε_1), θά εἶναι καί αὐτή $\perp (P)$ (§44, β′), ἄρα κάθετη στήν (ε_2).

γ′) (Θ) — Ἄν μιά εὐθεία (ε_1) εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν (ε_2), τότε εἶναι ὀρθογώνια καί πρός κάθε παράλληλη τῆς (ε_2).

Ἔστω (ε_1) μιά ὀρθογώνια πρός τήν (ε_2) καί $(\eta) \parallel (\varepsilon_2)$ (σχ. 42). Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς (ε_1) φέρουμε



Σχ. 42

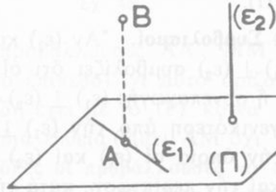
μιά εὐθεία $(\alpha)||(\varepsilon_2)$, τότε θά εἶναι $(\alpha) \perp (\varepsilon_1)$. Ἀλλά εἶναι ἐπίσης καί $(\alpha)||(\eta)$ (§ 44, δ΄) καί ἀφοῦ $(\alpha)||(\eta) \wedge (\alpha) \perp \varepsilon_1 \Rightarrow (\varepsilon_1)$ καί (η) ὀρθογώνιες.

Πόρισμα 1ο. Δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι παράλληλες πρός τὶς πλευρές μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι μεταξύ τους ὀρθογώνιες.

Πόρισμα 2ο. Ἄν μιᾶς γωνίας οἱ πλευρές εἶναι παράλληλες πρός δύο ὀρθογώνιες εὐθεῖες, ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.

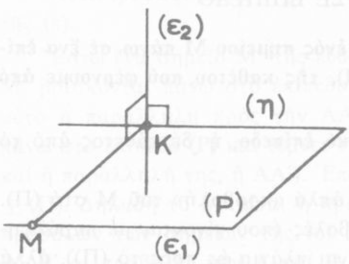
δ΄) Χαρακτηριστική ἰδιότητα τοῦ ζεύγους ὀρθογωνίων εὐθειῶν. (Θ) — Ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά εἶναι δυό εὐθεῖες ὀρθογώνιες μεταξύ τους, εἶναι μία ἀπ' αὐτές νά βρίσκεται σέ ἐπίπεδο κάθετο στήν ἄλλη.

i) Ἡ εὐθεία (ε_1) βρίσκεται σέ ἐπίπεδο (Π) κάθετο στήν (ε_2) (σχ. 43). Ἄν ἀπό τό σημεῖο Α τῆς (ε_1) φέρουμε μία εὐθεία $AB||(\varepsilon_2)$, τότε, ἀφοῦ $(\varepsilon_2) \perp (\Pi)$, θά εἶναι καί $AB \perp (\Pi)$. Ἑπομένως θά εἶναι $AB \perp (\varepsilon_1)$. Δηλ. ἡ (ε_1) τέμνει καθέτως μιά παράλληλη τῆς (ε_2). Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους.

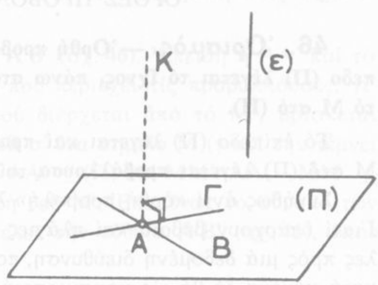


Σχ. 43

ii) Ἄς πάρουμε δυό ὀρθογώνιες καί ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Ἀπό τό σημεῖο Μ τῆς (ε_1) φέρνουμε τήν ΜΚ κάθετη στήν (ε_2) (σχ. 44) καί ἀπό τό ἴχνος Κ φέρνουμε μία εὐθεία $(\eta)||(\varepsilon_1)$. Οἱ παράλληλες (η) καί



Σχ. 44



Σχ. 45

(ε_1) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ). Ἔχουμε: $(\varepsilon_2) \perp (\eta)$, γιατί οἱ (ε_2) καί (ε_1) εἶναι ὀρθογώνιες (βλ. παραπάνω ἐδ. β΄), ἐπίσης καί $(\varepsilon_2) \perp MK$ (ἀπό τήν κατασκευή). Ἀπό αὐτά ἕπεται ὅτι $(\varepsilon_2) \perp (P)$. Δηλαδή ἀπό τήν (ε_1) περνᾶ ἐπίπεδο $(P) \perp (\varepsilon_2)$. Τέλος, ἄν οἱ ὀρθογώνιες (ε_1), (ε_2) εἶναι ὁμοεπίπεδες, πάλι ἰσχύει τό θεώρημα.

ε΄) Τό παραπάνω θεώρημα ἐκφράζεται καί ὡς ἑξῆς:

Ἄν μιά εὐθεία εἶναι κάθετη σ' ἕνα ἐπίπεδο, τότε εἶναι ὀρθογώνια πρός ὅλες τίς εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου καί

Ἄν δυό εὐθεῖες εἶναι ὀρθογώνιες, τότε ἀπό καθεμιά ἀπ' αὐτές περνᾶ ἕνα ἐπίπεδο, πού εἶναι κάθετο στήν ἄλλη.

ς΄) Καθετότητα μιᾶς εὐθείας καί ἑνός ἐπιπέδου. (Θ) — Μία εὐθεία εἶναι κάθετη σ'ἕνα ἐπίπεδο, ἄν εἶναι ὀρθογώνια πρός δύο $\boxed{\text{τεμνόμενες}}$ εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 45).

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι μία εὐθεία (ε) εἶναι ὀρθογώνια πρός τίς εὐθεῖες ΑΒ καί ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἄς φέρουμε ἀπό τό Α μία εὐθεία ΑΚ||(ε). Τότε: ΑΚ $\perp$ ΑΒ, γιατί ἡ ΑΒ εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν (ε) (βλ. ἐδ. β΄) καί ΑΚ $\perp$ ΑΓ, γιατί ἡ ΑΓ εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν (ε).

Ἀπ' αὐτά ἔπεται ΑΚ $\perp$ (Π) καί, ἐπειδή ΑΚ||(ε), ἔπεται (§ 44, β΄) ὅτι (ε) $\perp$ (Π).

ζ΄) **Συμβολισμοί.** Ἄν (ε_1) καί (ε_2) εἶναι δύο εὐθεῖες τοῦ χώρου, τότε τό: $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$ συμβολίζει ὅτι οἱ (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται κάθετα. Ἐπίσης, ἰσχύει ἡ συνεπαγωγή: $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \Rightarrow (\varepsilon')$ ορθογ (ε_2). Ἡ σχέση: (ε_1) ορθογ (ε_2) εἶναι γενικότερη ἀπό τήν $(\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2)$, γιατί περιέχει καί τήν περίπτωση, κατά τήν ὁποία οἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι ὁμοεπίπεδες-ὀρθογώνιες (κάθετες), ἀλλά καί τήν περίπτωση, κατά τήν ὁποία οἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι ἀσύμβατες-ὀρθογώνιες. Στή δεύτερη περίπτωση οἱ (ε_1) καί (ε_2) λέγονται ἀσύμβατα κάθετες. Πάντως, ὅταν ἐργαζόμαστε μέ ὀρθογώνιες εὐθεῖες, ἡ διάκριση αὐτή σέ κάθετες καί ἀσύμβατα κάθετες δέν ὠφελεῖ καί δέ χρειάζεται νά γίνεται.

ΟΡΘΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

46. Ὁρισμός. — Ὀρθή προβολή ἑνός σημείου Μ πάνω σέ ἕνα ἐπίπεδο (Π) λέγεται τό ἴχνος, πάνω στό (Π), τῆς καθέτου, πού φέρνουμε ἀπό τό Μ στό (Π).

Τό ἐπίπεδο (Π) λέγεται καί **προβολικό ἐπίπεδο**, ἡ δέ κάθετος ἀπό τό Μ στό (Π) λέγεται **προβάλλουσα** τοῦ Μ.

Συνήθως ἀντί «ὀρθή προβολή» λέμε ἁπλά «προβολή» τοῦ Μ στό (Π). Γιατί ὑπάρχουν βέβαια καί πλάγιες προβολές (πού γίνονται μέ παράλληλες πρός μιά δεδομένη διεύθυνση, πού εἶναι πλάγια ὡς πρός τό (Π)), ἀλλά κατά κανόνα δέ θά τίς χρησιμοποιήσουμε.

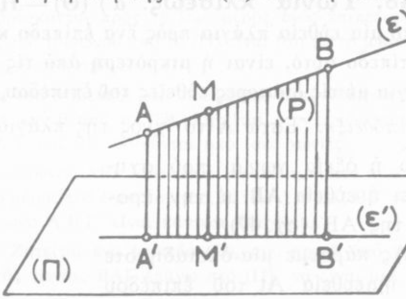
— Προβολή σχήματος (σημειοσυνόλου) F σέ ἐπίπεδο (Π) λέγεται τό σύνολο F΄ τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ F στό (Π). Τό F΄ εἶναι ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα πάνω στό προβολικό ἐπίπεδο.

47. Προβολή εὐθείας σέ ἐπίπεδο. α΄) Ἄν ἡ εὐθεία εἶναι κάθετη στό προβολικό ἐπίπεδο, τότε, φυσικά, ἡ προβολή της εἶναι ἕνα σημεῖο.

β΄) (Θ) — Ἡ προβολή μιᾶς εὐθείας μή κάθετης στό προβολικό ἐπίπεδο εἶναι εὐθεία.

Ἀπόδειξη. Ἔστω (ε) μιά εὐθεία καί (Π) ἕνα ἐπίπεδο τοῦ χώρου. Ἄν ἡ (ε) βρίσκεται πάνω στό (Π), ἡ προβολή της στό (Π) εἶναι ἡ ἴδια ἡ (ε).

Ἄν ἡ (ε) δέ βρίσκεται στό (Π), ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο της, τό Α (σχ. 46), τό ὁποῖο δέ βρίσκεται στό (Π) καί ἄς φέρουμε τήν προβολή του Α΄. Ἡ προβάλλουσα ΑΑ΄ καί ἡ εὐθεία (ε) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ)≡Επιπ Α΄ΑΒ, ὅπου τό Β εἶναι ἕνα δεύτερο σημεῖο τῆς (ε).



Σχ. 46

Ἔστω τώρα ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς (ε) καί Μ΄ ἡ προβολή του στό (Π). Ἐπειδή οἱ προβάλλουσες ΑΑ΄, ΜΜ΄ εἶναι παράλληλες (γιατί εἶναι κάθετες στό ἴδιο ἐπίπεδο), γι' αὐτό ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο Α΄ΑΜΜ΄. Τό ἐπίπεδο αὐτό, ἐπειδή ἔχει μέ τό (Ρ) κοινά τά σημεῖα Α΄, Α, Μ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (γιατί ΑΜ ὄχι $\perp$(Π)), συμπίπτει μέ τό (Ρ). Ὥστε ἡ ΜΜ΄ καί **ὅλες οἱ προβάλλουσες** τά σημεῖα τῆς (ε) βρίσκονται πάνω στό σταθερό ἐπίπεδο (Ρ)≡Επιπ Α΄ΑΒ≡Επιπ Α΄ΑΒΒ΄. Ἐπειδή $M' \in (P) \wedge M' \in (\Pi) \Rightarrow M' \in \{(P) \cap (\Pi)\}$. Ἡ τομή τῶν (Ρ) καί (Π) εἶναι ἡ εὐθεία Α΄Β΄, πάνω στήν ὁποία προβάλλονται ὅλα τά σημεῖα τῆς (ε).

Ἀντιστρόφως: Κάθε σημεῖο τῆς εὐθΑ΄Β΄ εἶναι προβολή ἑνός σημείου τῆς (ε).

Ἔστω ἕνα σημεῖο Μ΄ τῆς εὐθείας Α΄Β΄ (σχ. 46). Ἐπειδή ἡ ΑΑ΄ καί τό Μ΄ βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο (Ρ), πού περιέχει τίς προβάλλουσες, γι' αὐτό ἡ παράλληλη πρός τήν ΑΑ΄, πού διέρχεται ἀπό τό Μ΄, βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο (Ρ) καί τέμνει τήν ΑΒ σ' ἕνα σημεῖο Μ (γιατί τήν τέμνει καί ἡ παράλληλή της, ἡ ΑΑ΄). Ἐπειδή $AA' \perp (\Pi)$ καί $MM' \parallel AA' \Rightarrow MM' \perp$ $\perp (\Pi)$. Δηλαδή τό Μ΄ εἶναι ἡ προβολή τοῦ Μ. Ἑπομένως τό σύνολο τῶν προβολῶν τῶν σημείων τῆς (ε) ἀποτελεῖ τήν εὐθεία Α΄Β΄ (σχ. 46), ὅπου Α΄, Β΄ οἱ προβολές τῶν Α καί Β.

Παρατήρηση 1η. Ἡ προβολή ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ σέ ἐπίπεδο εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα Α΄Β΄.

Παρατήρηση 2η. Κατά τήν προβολή μιᾶς εὐθείας πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο ὁ λόγος τῶν διανυσμάτων πάνω στήν εὐθεία διατηρεῖται καί στήν προβολή καί εἰδικότερα τό μέσο ἑνός τμήματος προβάλλεται στό μέσο τῆς προβολῆς.

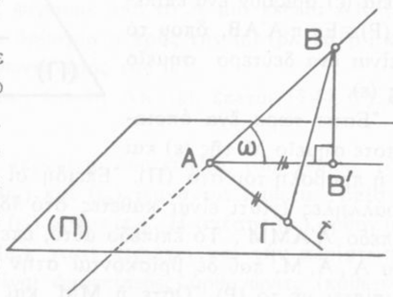
Γιατί μέ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ ἔχουμε (σχ. 46):

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overrightarrow{M'A'}}{\overrightarrow{M'B'}}$$

48. Γωνία κλίσεως. **α΄) (Θ) — Ἡ ὀξεία γωνία, πού σχηματίζεται ἀπό μία εὐθεία πλάγια πρός ἕνα ἐπίπεδο καί ἀπό τήν προβολή της πάνω στό ἐπίπεδο αὐτό, εἶναι ἡ μικρότερη ἀπό τίς γωνίες, τίς ὁποῖες σχηματίζει ἡ πλάγια μέ τίς διάφορες εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου, πού περνοῦν ἀπό τό ἴχνος της.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω Α τό ἴχνος τῆς πλάγιας ΑΒ πάνω στό ἐπίπεδο (Π) καί $\widehat{\omega}$ ἡ ὀξεία γωνία, πού σχηματίζει ἡ εὐθεία ΑΒ μέ τήν προβολή της ΑΒ΄ (σχ. 47).

Ἄς πάρουμε μία ὁποιαδήποτε ἄλλη ἡμιευθεία Αt τοῦ ἐπιπέδου (Π). Θά ἀποδείξουμε ὅτι $\widehat{\omega} < \widehat{tAB}$. Γι' αὐτό τό σκοπό ἄς πάρουμε πάνω στήν ἡμιευθεία Αt ἕνα τμῆμα ΑΓ = ΑΒ΄ καί ἄς δοῦμε τά τρίγωνα ΑΒΒ΄ καί ΑΒΓ. Γι' αὐτά ἰσχύουν: {ΑΒ = ΑΒ, ΑΒ΄ = ΑΓ (ἀπό τήν ὑπόθεση) καί ΒΒ΄ < ΒΓ (§ 39)}.



Σχ. 47

Ἑπομένως οἱ γωνίες, πού βρίσκονται ἀπέναντι στίς ἄνισες πλευρές ΒΒ΄ καί ΒΓ, εἶναι ὁμοίως ἄνισες, δηλ. $\widehat{B'AB} < \widehat{\Gamma AB}$ ἤ $\widehat{\omega} < \widehat{tAB}$.

β΄) Ὁρισμός. Ἄν δοθοῦν ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μιά εὐθεία (ε) πλάγια πρός τό (Π), τότε ὀνομάζεται «γωνία κλίσεως τῆς (ε) πρός τό (Π)» ἡ ὀξεία γωνία, τήν ὁποία σχηματίζει ἡ (ε) μέ τήν προβολή της στό (Π).

Ἡ γωνία κλίσεως λέγεται καί «γωνία τῆς εὐθείας μέ τό ἐπίπεδο» καί ἔχει μιά «ἐλαχιστική ἰδιότητα», ὅπως ἀποδείξαμε στό παραπάνω θεώρημα. Ἐπίσης ἡ γωνία κλίσεως τῆς (ε) εἶναι **συμπληρωματική** τῆς ὀξείας γωνίας, πού σχηματίζει ἡ (ε) μέ τήν κάθετο στό ἐπίπεδο, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τό ἴχνος τῆς (ε).

γ΄) Μία εὐθεία λέγεται **ἰσοκεκλιμένη** πρός δυό ἐπίπεδα, ὅταν ἔχει ἴσες γωνίες κλίσεως πρός τά δυό αὐτά ἐπίπεδα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72. Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν προβολῶν ἑνός σταθεροῦ σημείου πάνω στά διάφορα ἐπίπεδα, πού περνοῦν ἀπό δεδομένη εὐθεία.

73. Ἄν οἱ πλευρές μιᾶς ὀρθῆς γωνίας τέμνουν ἕνα ἐπίπεδο (Π), τότε ἡ προβολή της πάνω στό (Π) εἶναι ἀμβλεία γωνία (ἤ πεπλατυσμένη).

74. Ἔχουμε τρεῖς μή συνεπίπεδες ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή τό Ο. Νά κατασκευαστεῖ ἕνα ἐπίπεδο, πού νά τέμνει τίς ἡμιευθεῖες ἔτσι, ὥστε καί οἱ τρεῖς νά ἔχουν ἴσες γωνίες κλίσεως ὡς πρός τό ἐπίπεδο αὐτό.

75. Ἄν μία εὐθεία εἶναι πλάγια πρός ἕνα ἐπίπεδο καί τό τέμνει ὑπό γωνία ω, τότε καί κάθε παράλληλή της ἔχει πρός τό ἐπίπεδο αὐτό γωνία κλίσεως ἴση μέ ω.

76. Ἂν οἱ κορυφές τριγώνου βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος ἑνός ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπό τό (Π) εἶναι ἴση μέ τό μέσο ὅρο τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπό τό (Π).

77. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό αὐτό. Φέρνουμε τίς ἀποστάσεις ΑΑ′ = α, ΒΒ′ = β τῶν Α καί Β ἀπό τό (Π). Ζητεῖται ὁ γ. τ. τῶν σημείων τοῦ (Π), ἀπό τά ὁποῖα τά τμήματα ΑΑ′ καί ΒΒ′ φαίνονται ὑπό ἴσες γωνίες.

78. Στίς κορυφές Α, Β, Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὑψώνουμε κάθετα τμήματα πάνω στό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου καί πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου του, τά: ΑΑ′ = ΒΓ, ΒΒ′ = ΑΓ, ΓΓ′ = ΑΒ. Ν' ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο Α′Β′Γ′ εἶναι πάντοτε ὀξυγώνιο.

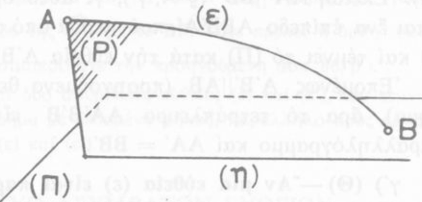
79. Ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ζητεῖται ἕνα ἐπίπεδο (Π), πού περνᾶ ἀπό τή ΒΓ καί εἶναι τέτοιο, ὥστε ἡ προβολή τῆς γωνίας ΒΑΓ ἐπάνω στό (Π) νά εἶναι μιά ὀρθή γωνία.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

49. Ὁρισμός καί θεώρημα. Ἂν μιά εὐθεία δέν ἔχει κανένα κοινό σημεῖο μέ ἕνα ἐπίπεδο, τότε λέγεται **παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο.** Ἡ ὕπαρξη εὐθειῶν παράλληλων πρός ἕνα δεδομένο ἐπίπεδο θά ἀποδειχτεῖ μέ τό παρακάτω θεώρημα.

(Θ) —Ἂν σέ ἕνα ἐπίπεδο (Π) χαράξουμε μία εὐθεία (η) καί ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού δέ βρίσκεται πάνω στό (Π), φέρουμε μία εὐθεία (ε) παράλληλη πρός τήν (η), τότε ἡ (ε) εἶναι παράλληλη καί πρός τό (Π).

Ἀπόδειξη. Οἱ δυό παράλληλες (ε) καί (η) (σχ. 48) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), τό ὁποῖο δέν συμπίπτει μέ τό (Π), γιατί $A \notin (\Pi)$. Ἡ (η), πού ἀνήκει καί στά δυό ἐπίπεδα, εἶναι ἡ κοινή τομή τους. Ἡ (ε) δέν μπορεῖ νά τέμνει τό (Π) σέ σημεῖο, πού νά βρίσκεται πάνω στήν (η), γιατί (ε)||(η). Οὔτε μπορεῖ ἡ (ε) νά τέμνει τό (Π) σέ σημεῖο $B \notin (\eta)$ (σχ. 48), γιατί τότε τά δυό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) θά εἶχαν καί ἄλλο κοινό σημεῖο Β, ἔξω ἀπό τήν εὐθεία τῆς τομῆς τους, πράγμα ἀδύνατο. Ἄρα ἡ (ε) δέ συναντᾶ πουθενά τό (Π).



Σχ. 48

Γράφουμε: $\boxed{\varepsilon \| (\Pi)}$

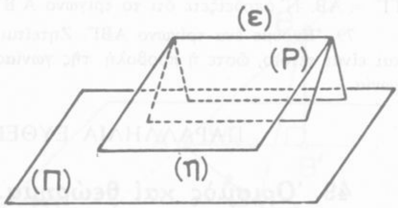
Βλέπουμε ὅτι **ἀπό τό Α διέρχονται ἄπειρες παράλληλες πρός τό (Π),** γιατί μποροῦμε νά χαράξουμε ἄπειρες εὐθεῖες (η) στό (Π).

Παρατήρηση. Ὅπως στήν παραλληλία τῶν εὐθειῶν, ὅπου θεωροῦμε *μέ γενικευμένη ἔννοια* ὅτι δυό εὐθεῖες, πού συμπίπτουν, εἶναι παράλληλες, ἔτσι καί ἐδῶ **ἐπεκτείνουμε τήν ἔννοια τῆς παραλληλίας,** θεωρώντας κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π) ὡς παράλληλη πρός τό (Π). Τότε μποροῦμε νά λέμε ὅτι:

Ἄν μία εὐθεία εἶναι παράλληλη πρός μία εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου, τότε εἶναι παράλληλη καί πρός τό ἐπίπεδο.

50. Ἄλλες ἰδιότητες. **α΄) (Θ) — Ἄν μία εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός τό ἐπίπεδο (Π), τότε κάθε ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τήν (ε) καί τέμνει τό (Π), τό τέμνει κατά εὐθεία παράλληλη πρός τήν (ε).**

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Ρ), πού περνᾶ ἀπό τήν (ε) καί τέμνει τό (Π) κατά τήν εὐθεία (η) (σχ. 49). Ἡ (ε) καί ἡ (η) εἶναι ὁμοεπίπεδες καί δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, γιατί (ε)||(Π), ἄρα οἱ (ε) καί (η) εἶναι παράλληλες.

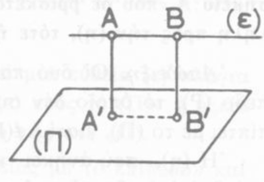


Σχ. 49

β΄) (Θ) — Ὅλα τά σημεῖα μιᾶς εὐθείας παράλληλης πρός ἕνα ἐπίπεδο ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τό ἐπίπεδο.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Β μιᾶς εὐθείας (ε)||(Π) (σχ. 50) καί τίς ἀποστάσεις τους ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ ἀπό τό (Π). Ἐπειδή ΑΑ΄||ΒΒ΄ (§ 44, γ΄), γι᾽ αὐτό ὁρίζεται ἕνα ἐπίπεδο ΑΒΒ΄Α΄, πού περνᾶ ἀπό τήν (ε) καί τέμνει τό (Π) κατά τήν εὐθεία Α΄Β΄.

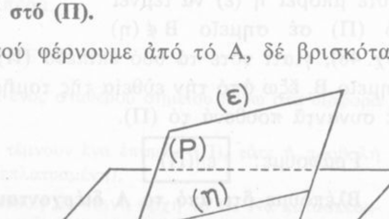
Ἑπομένως Α΄Β΄||ΑΒ (προηγούμενο θεώρημα), ἄρα τό τετράπλευρο ΑΑ΄Β΄Β εἶναι παραλληλόγραμμο καί ΑΑ΄ = ΒΒ΄.



Σχ. 50

γ΄) (Θ) — Ἄν μία εὐθεία (ε) εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἀπό ἕνα σημεῖο Α τοῦ (Π) φέρουμε μιά εὐθεία παράλληλη πρός τήν (ε), τότε ἡ εὐθεία αὐτή βρίσκεται πάνω στό (Π).

Ἀπόδειξη. Ἄν ἡ εὐθεία (η), πού φέρνουμε ἀπό τό Α, δέ βρισκόταν πάνω στό (Π), τότε τό ἐπίπεδο (Ρ) τῶν δύο παράλληλων θά ἔτεμνε τό (Π) κατά μιά εὐθεία (η΄) $\not\equiv$ (η) καί θά ἦταν (η΄)||(ε) σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα τοῦ ἐδ. α΄. Ὥστε θά εἴχαμε ἀπό τό Α δύο παράλληλες πρός τήν (ε), πράγμα πού ἀντιβαίνει στό ἀξίωμα τῶν παραλλήλων. Ἑπομένως (η) ∈ (Π).



Σχ. 51

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄

80. Ἄν δυό ἐπίπεδα, πού τέμνονται, εἶναι παράλληλα πρός μία εὐθεία (ε), τότε καί ἡ τομή τους εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε).

81. Ἀπό δεδομένη εὐθεία περνᾶ ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο, παράλληλο πρός μία ἄλλη ἀσύμβατη τῆς πρώτης.

82. Ἄν ἀπό δυό παράλληλες εὐθεῖες περνοῦν δυό ἐπίπεδα, πού τέμνονται, τότε καί ἡ τομή τους εἶναι παράλληλη πρός τίς δυό εὐθεῖες.

83. Ἔχουμε δύο εὐθεῖες ΟΧ, ΟΨ ἑνός ἐπιπέδου (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό τό (Π). Ζητεῖται νά ὁρίσουμε ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τήν ΑΒ καί τέμνει τήν ΟΧ στό Μ καί τήν ΟΨ στό Ν ἔτσι, ὥστε ΑΜ||ΒΝ. Σέ ποιά συνθήκη πρέπει νά ὑπόκειται ἡ εὐθεία ΑΒ, ὥστε τό τετράπλευρο ΑΜΝΒ νά εἶναι παραλληλόγραμμο;

84. Νά ὁριστεῖ ἕνα ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό μιά δεδομένη εὐθεία καί νά ἰσαπέχει ἀπό δυό δεδομένα σημεῖα.

85. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), μιά εὐθεία (ε)||Π καί ἕνα σημεῖο Α. Νά φέρετε ἀπό τό Α μιά εὐθεία, πού νά τέμνει τήν (ε) καί τό (Π) ἔτσι, ὥστε τό μέρος τῆς ζητουμένης εὐθείας, πού βρίσκεται μεταξύ (ε) καί (Π), νά εἶναι ἴσο πρός ἕνα δεδομένο τμῆμα.

Β΄

86. α΄) Ἄν μιά πλευρά ὀρθῆς γωνίας εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο, ν' ἀποδείξετε ὅτι ἡ προβολή τῆς γωνίας πάνω στό ἐπίπεδο αὐτό εἶναι ὀρθή γωνία (ἐφόσον ἡ προβολή εἶναι γωνία). β΄) Νά διατυπώσετε τά δύο ἀντίστροφα πρός τό προηγούμενο θεωρήματα καί ν' ἀποδείξετε ὅτι ἀληθεύουν.

87. Πότε ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται κατά τή διχοτόμο τῆς προβολῆς τῆς γωνίας; (Ὑποδ. Ἄς λάβουμε ἴσα τμήματα ΑΒ, ΑΓ πάνω στίς πλευρές τῆς γωνίας $x\widehat{A}y$ καί ἔστω Δ ἡ τομή τῆς διχοτόμου τῆς $x\widehat{A}y$ μέ τό ΒΓ. Τότε πρέπει ἡ ὀρθή γωνία $A\widehat{\Delta}B$ νά προβάλλεται ὡς ὀρθή. Χρησιμοποιῆστε τήν προηγούμενη ἄσκ. 86, β΄).

88. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ε΄), πού τέμνουν τό (Π). Ζητεῖται νά κατασκευαστεῖ τμῆμα μέ δεδομένο μῆκος, παράλληλο πρός τό (Π), πού νά ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς (ε) καί (ε΄).

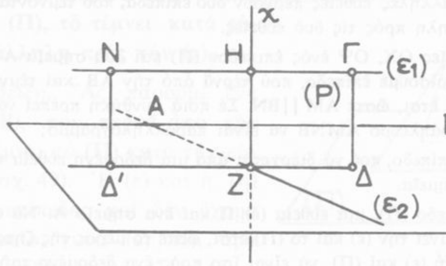
ΚΟΙΝΗ ΚΑΘΕΤΟΣ ΔΥΟ ΑΣΥΜΒΑΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

51. *Ὁρισμός καί θεώρημα.* —Ἄν δοθοῦν δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες, ὀνομάζεται «κοινή κάθετος» αὐτῶν μία εὐθεία, πού τέμνει καθέτως καί τίς δυό ἀσύμβατες.

Ἡ ὕπαρξη καί οἱ ἰδιότητες τῆς κοινῆς καθέτου φαίνονται ἀπό τό ἑπόμενο θεώρημα.

(Θ) —Ἄν δοθοῦν δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες. i) Ὑπάρχει κοινή κάθετος αὐτῶν. ii) Εἶναι μία καί μόνη. iii) Τό τμῆμα τῆς κοινῆς καθέτου, πού βρίσκεται ἀνάμεσα στίς δυό ἀσύμβατες, εἶναι τό μικρότερο ἀπό τά τμήματα, πού συνδέουν τίς δυό ἀσύμβατες καί λέγεται «ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν δυό ἀσύμβατων».

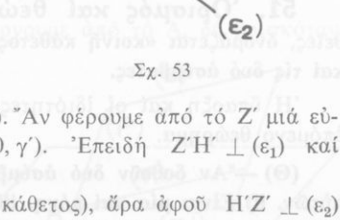
Ἀπόδειξη. i) Ἡ ὕπαρξη τῆς κοινῆς καθέτου δύο ἀσύμβατων (ε_1) καί (ε_2) μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ μέ κατασκευή. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς (ε_2) φέρνουμε ευθ $AB \parallel (\varepsilon_1)$ (σχ. 52). Ἡ ΑΒ καί ἡ (ε_2) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο $(\Pi) \parallel (\varepsilon_1)$ (§ 49). Ἀπό ἕνα σημεῖο Γ τῆς (ε_1) φέρνουμε τήν $\Gamma\Delta \perp (\Pi)$, ὅπου $\Delta \in (\Pi)$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε ευθ $\Delta\Delta' \parallel (\varepsilon_1)$. Ἡ ΔΔ′ βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Π) (§ 50, γ′) καί, ἐπειδή εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε_1), δέν εἶναι παράλληλη πρός τήν ἀσύμβατη (ε_2). Ἄρα ἡ ΔΔ′ τέμνει τήν (ε_2), ἔστω στό Ζ. Ἐπειδή τό Ζ καί



Σχ. 52

τό ΓΔ βρίσκονται στό ἐπίπεδο (Ρ) τῶν δύο παράλληλων, γι᾽ αὐτό, ἄν φέρουμε ἀπό τό Ζ μία εὐθεία Ζx παράλληλη πρός τή ΓΔ, θά βρίσκεται καί αὐτή στό ἐπίπεδο (Ρ) καί ἐπειδή τέμνει τήν ΔΔ′, θά τέμνει καί τήν παράλληλή της (ε_1), ἔστω στό Η. Ἡ εὐθεία, λοιπόν, ΖΗ τέμνει καί τίς δύο ἀσύμβατες (ε_1) καί (ε_2) καί μάλιστα καθέτως. Γιατί, $\Gamma\Delta \perp (\Pi) \wedge HZ \parallel \Gamma\Delta \Rightarrow HZ \perp (\Pi) \Rightarrow HZ \perp (\varepsilon_2)$. Ἐπίσης $HZ \perp (\Pi) \Rightarrow HZ \perp \Delta\Delta'$ καί ἐπειδή $\Delta\Delta' \parallel (\varepsilon_1) \Rightarrow HZ \perp (\varepsilon_1)$. Ὑπάρχει, λοιπόν, μιά κοινή κάθετος, ἀφοῦ κατασκευάστηκε.

ii) Ἐκτός ἀπό τήν κοινή κάθετο ΗΖ, πού κατασκευάστηκε (σχ. 52), δέν ὑπάρχει ἄλλη κοινή ⊥ τῶν ἀσύμβατων (ε_1) καί (ε_2). Ἄν ὑπῆρχε, δέν θά περνοῦσε ἀπό τό Η, γιατί τότε θά εἴχαμε δυό κάθετες ἀπό τό Η στήν (ε_2). Οὔτε θά περνοῦσε ἀπό τό Ζ. Ἐπομένως, ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλη κοινή κάθετος, ἔστω ἡ Η′Ζ′, αὐτή θά ἔτεμνε τίς (ε_1) καί (ε_2) στά σημεῖα Η′ καί Ζ′, ἀντιστοίχως, πού εἶναι διαφορετικά ἀπό τά Η καί Ζ (σχ. 53).

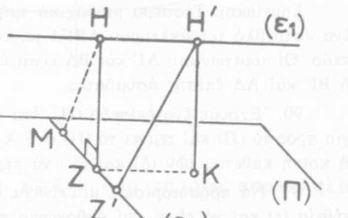


Σχ. 53

Ἄν φέρουμε ἀπό τό Ζ′ μιά εὐθεία $Z'K \parallel (\varepsilon_1)$, τότε ἡ $Z'K \in (\Pi)$ (§ 50, γ′). Ἐπειδή $Z'H' \perp (\varepsilon_1)$ καί $(\varepsilon_1) \parallel Z'K \Rightarrow Z'H' \perp Z'K$.

Ἐπίσης εἶναι $H'Z' \perp (\varepsilon_2)$ (ὡς κοινή κάθετος), ἄρα ἀφοῦ $H'Z' \perp (\varepsilon_2)$ καί $H'Z' \perp Z'K \Rightarrow H'Z' \perp (\Pi)$. Ἀφοῦ $HZ \perp (\Pi) \wedge H'Z' \perp (\Pi) \Rightarrow H'Z' \parallel HZ$. Δηλ. ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλη κοινή κάθετος, θά ἦταν παράλληλη πρός τήν πρώτη. Ἀλλά τότε καί οἱ δυό τους θά ὅριζαν ἕνα ἐπίπεδο πάνω στό ὁποῖο θά βρίσκονταν οἱ ΗΗ′ καί ΖΖ′, δηλ. οἱ ἀσύμβατες (ε_1) καί (ε_2) θά βρίσκονταν στό ἴδιο ἐπίπεδο, πράγμα ἄτοπο.

iii) Τό τμῆμα ΗΖ εἶναι μικρότερο ἀπό ὁποιοδήποτε ἄλλο τμῆμα, πού συνδέει ἕνα σημεῖο τῆς (ε_1) μέ ἕνα σημεῖο τῆς (ε_2). Τό τμῆμα ΗΖ εἶναι μικρότερο ἀπό ὁποιοδήποτε τμῆμα ΗΜ, πού συνδέει τό σημεῖο Η μέ ἕνα σημεῖο τῆς (ε_2) διαφορετικό ἀπό τό Ζ, γιατί τό ΗΖ εἶναι $\perp (\varepsilon_2)$, ἐνῶ τό ΗΜ εἶναι πλάγιο πρός τήν (ε_2) (σχ. 54). Γιά τόν ἴδιο λόγο τό ΗΖ εἶναι μικρότερο ἀπό ὁποιοδήποτε τμῆμα, πού συνδέει τό Ζ μέ ἕνα σημεῖο τῆς (ε_1) διαφορετικό ἀπό τό Η. Τέλος, ἄς πάρουμε ἕνα τμῆμα Η′Ζ′, πού συνδέει τό σημεῖο Η′ τῆς (ε_1) διαφορετικό ἀπό τό Η, μέ τό σημεῖο Ζ′ τῆς (ε_2) διαφορετικό ἀπ' τό Ζ. Τότε τό Η′Ζ′ εἶναι πλάγιο πρός τό ἐπίπεδο (Π), γιατί, ἄν ἦταν κάθετο, θά ὅριζε (ὅπως εἴδαμε πιό πάνω) μέ τό ΗΖ ἕνα ἐπίπεδο, πάνω στό ὁποῖο θά ἔπρεπε νά βρίσκονται οἱ ἀσύμβατες. Τό πλάγιο τμῆμα Η′Ζ′ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό κάθετο τμῆμα Η′Κ (§ 39). Ἐπειδή δέ Η′Κ = ΗΖ (§ 50, β′), γι' αὐτό Η′Ζ′ > ΗΖ. Δηλαδή ΗΖ < Η′Ζ′.



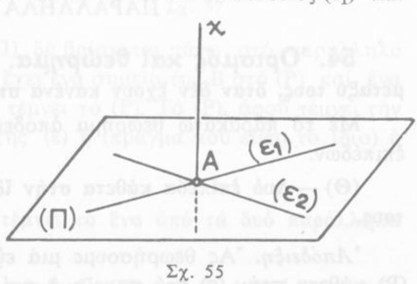
Σχ. 54

Τελικά, τό τμῆμα ΗΖ τῆς κοινῆς καθέτου εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε ἄλλο τμῆμα, πού συνδέει τίς δυό ἀσύμβατες.

52. Πόρισμα. **Ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση μεταξύ δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου τῆς μιᾶς ἀπό ἕνα ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τήν ἄλλη καί εἶναι παράλληλο πρός τήν πρώτη.**

(βλ. σχ. 52, ὅπου ΓΔ = ΗΖ = ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν (ε_1) καί (ε_2)).

53. Περίπτωση συμβατῶν εὐθειῶν. Ἄν δυό εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται σέ κάποιο σημεῖο Α, τότε ὑπάρχει καί πάλι μία καί μοναδική εὐθεία, πού τέμνει καθέτως καί τίς δύο εὐθεῖες (ἡ κοινή κάθετος αὐτῶν). Ἡ εὐθεία αὐτή εἶναι ἐκείνη, πού φέρνουμε κάθετα στό ἐπίπεδο (Π), τό ὁποῖο ὁρίζουν οἱ δυό εὐθεῖες καί μάλιστα στό σημεῖο Α (σχ. 55). Ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση στήν περίπτωση αὐτή εἶναι μηδενική.



Σχ. 55

Ἄν οἱ δυό εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες, τότε κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου τους, πού εἶναι κάθετη στή μία, θά εἶναι κάθετη καί στήν ἄλλη, δηλ. θά εἶναι κοινή κάθετός τους. Ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο παράλληλων εὐθειῶν εἶναι καί ἡ «ἐλάχιστη ἀπόστασή» τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

89. Ἄν οἱ ἀπέναντι πλευρές ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες (ΑΒ = = ΓΔ, ΒΓ = ΑΔ), τότε ἡ εὐθεία, πού ἑνώνει τά μέσα τῶν δύο διαγωνίων του, εἶναι κοινή κάθετος τῶν δύο διαγωνίων.

Σημείωση. Τέσσερα διαδοχικά τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ὄχι ὁμοεπίπεδα ὁρίζουν ἕνα «στρεβλό τετράπλευρο» ΑΒΓΔ μέ κορυφές Α, Β, Γ, Δ, πού δέ βρίσκονται σ' ἕνα ἐπίπεδο. Οἱ «διαγώνιοι» ΑΓ καί ΒΔ εἶναι ἀσύμβατες καί οἱ «ἀπέναντι πλευρές» ΑΒ καί ΓΔ ἤ ΒΓ καί ΑΔ ἐπίσης ἀσύμβατες.

90. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο του Β καί μιά εὐθεία (δ), πού εἶναι πλάγια πρός τό (Π) καί τέμνει τό (Π) στό Α. Νά ὁριστεῖ μιά εὐθεία (δ΄) τοῦ (Π) τέτοια, ὥστε ἡ κοινή κάθετος τῶν (δ) καί (δ΄) νά περνᾶ: i) ἀπό τό Α, ἤ ii) ἀπό τό Β.

91. Νά προσδιορίσετε μιά εὐθεία, πού νά περνᾶ ἀπό ἕνα σημεῖο Α, νά τέμνει τήν εὐθεία (ε) καί νά εἶναι καί ὀρθογώνια πρός μιά ἄλλη εὐθεία (η).

92. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\text{ΑΒ ορθογ ΓΔ} \Longleftrightarrow \text{ΑΓ}^2 - \text{ΑΔ}^2 = \text{ΒΓ}^2 - \text{ΒΔ}^2$$

(Δύο τμήματα λέγονται «ὀρθογώνια μεταξύ τους», ὅταν ἀνήκουν σέ ὀρθογώνιες εὐθεῖες).

93. Ἔχουμε τρία σημεῖα Α, Β, Γ καί μιά εὐθεία (ε), πού δέν ἀνήκει στό ἐπίπεδο ΑΒΓ. Νά ὁρίσετε πάνω στήν (ε) ἕνα σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε τό τετράπλευρο, πού ἔχει κορυφές τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ (γενικά) τετραπλεύρου ΑΒΓΔ νά εἶναι i) ὀρθογώνιο ἤ ii) ρόμβος.

94. Στό ἄκρο Α μιᾶς διαμέτρου ΑΒ μιᾶς περιφέρειας ὑψώνουμε ἕνα τμῆμα ΑΓ κάθετο στό ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας. Παίρνουμε ἕνα σημεῖο Μ τῆς περιφέρειας καί τήν προβολή Ρ τοῦ Α πάνω στήν εὐθεία ΓΜ. Ἔστω τώρα Κ ἡ προβολή τοῦ Α πάνω στήν εὐθεία ΓΒ: i) Νά δείξετε ὅτι ΑΡ ὀρθογ. ΜΒ ii) ΑΡ $\perp$Επιπ. ΓΜΒ iii) ΓΒ$\perp$Επιπ. ΑΡΚ iv) Νά ὁρίσετε τή γραμμή, πού διαγράφεται ἀπό τό Ρ, ὅταν τό Μ διατρέχει τήν περιφέρεια.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

54. Ὁρισμός καί θεώρημα. Δυό ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα μεταξύ τους, ὅταν δέν ἔχουν κανένα σημεῖο κοινό.

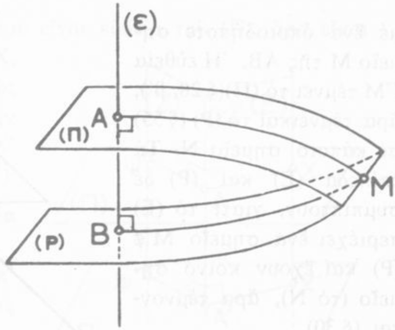
Μέ τό παρακάτω θεώρημα ἀποδεικνύουμε τήν ὕπαρξη παράλληλων ἐπιπέδων.

(Θ) — Δυό ἐπίπεδα κάθετα στήν ἴδια εὐθεία εἶναι παράλληλα μεταξύ τους.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθεία (ε) καί δυό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κάθετα στήν (ε) στά σημεῖα Α καί Β, ἀντιστοίχως, (σχ. 56). Ἄν αὐτά τά ἐπίπεδα εἶχαν κάποιο σημεῖο Μ κοινό, τότε ἡ εὐθεία ΜΑ θά βρισκόταν πάνω στό (Π) καί ἡ εὐθεία ΜΒ πάνω στό (Ρ).

Ἡ (ε), ὡς κάθετη στό (Π), θά ἦταν κάθετη καί στήν εὐθεία ΜΑ καί ἡ (ε), ὡς κάθετη στό (Ρ), θά ἦταν κάθετη καί στήν εὐθεία ΜΒ.

Δηλαδή ΜΑ $\perp$ (ε), ΜΒ $\perp$ (ε). Ὥστε θά εἴχαμε ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Μ δυό κάθετες στήν ἴδια εὐθεία, πράγμα ἀδύνατο. Ἑπομένως τά (Π) καί (Ρ) δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο, δηλ. σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, πού δόθηκε, εἶναι παράλληλα. Γράφουμε $\boxed{(\Pi) \parallel (P)}$



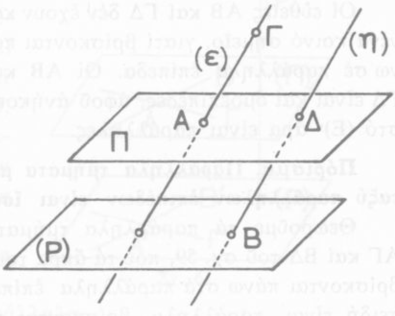
Σχ. 56

55. (Θ) — Κάθε εὐθεία, πού τέμνει τό ἕνα ἀπό τά δυό παράλληλα ἐπίπεδα, θά τέμνει καί τό ἄλλο.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δυό παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί μιά εὐθεία (ε), πού τέμνει τό (Π) στό Α (σχ. 57).

Παίρνουμε πάνω στό (Ρ) ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Β καί ἀπό τό Β φέρνουμε μιά εὐθεία (η) παράλληλη πρός τήν (ε). Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ (η) τέμνει τό (Ρ) στό Β.

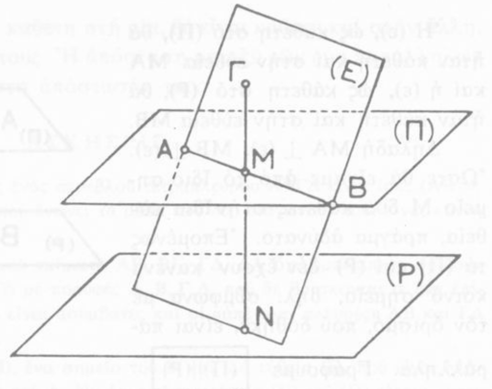
Γιά τό σκοπό αὐτό ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ (η) περιέχει ἕνα σημεῖο, πού δέ βρίσκεται πάνω στό (Ρ) (§ 28, β΄). Πράγματι τό ἐπίπεδο (Π), ἐπειδή τέμνει τήν (ε), τέμνει καί τήν παράλληλή της (η) (§ 44, α΄) στό Δ. Τό Δ, ἀφοῦ βρίσκεται στό (Π), δέ βρίσκεται πάνω στό παράλληλο πρός τό (Π) ἐπίπεδο (Ρ). Ἡ (η), πού ἔχει ἕνα σημεῖο της Β στό (Ρ) καί ἕνα ἄλλο σημεῖο της Δ ἔξω ἀπό τό (Ρ), τέμνει τό (Ρ). Τό (Ρ), ἀφοῦ τέμνει τήν (η), θά τέμνει καί τήν παράλληλή της (ε) ἤ (πράγμα πού εἶναι τό ἴδιο) ἡ (ε) τέμνει τό (Ρ).



Σχ. 57

56. (Θ) — Κάθε ἐπίπεδο, πού τέμνει τό ἕνα ἀπό τά δυό παράλληλα ἐπίπεδα, τέμνει καί τό ἄλλο.

Ἄς θεωρήσουμε δυό παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί ἕνα ἐπίπεδο (Ε), πού νά τέμνει τό (Π) κατά τήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 58). Ἄς πάρουμε πάνω στό (Ε) ἕνα σημεῖο Γ, πού δέν ἀνήκει στήν εὐθεία ΑΒ καί ἄς τό ἑνώσουμε με ένα οποιοδήποτε σημείο Μ τῆς ΑΒ. Ἡ εὐθεία ΓΜ τέμνει τό (Π)(§ 28, β΄), ἄρα τέμνεικαί τό (Ρ) (§ 55) σέ κάποιο σημεῖο Ν. Τά ἐπίπεδα (Ε) καί (Ρ) δέ συμπίπτουν, γιατί τό (Ε) περιέχει ἕνα σημεῖο Μ $\notin$ (Ρ) καί ἔχουν κοινό σημεῖο (τό Ν), ἄρα τέμνονται (§ 30).

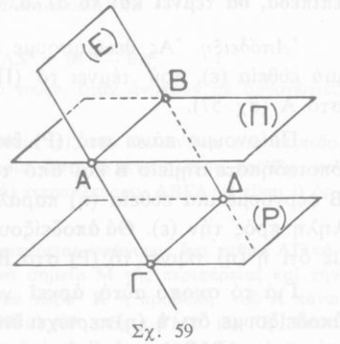


Σχ. 58

57. — Οἱ τομές παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό ἕνα τρίτο ἐπίπεδο εἶναι εὐθεῖες παράλληλες.

Θεωροῦμε δυό παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί τίς τομές τους ΑΒ καί ΓΔ ἀπό ἕνα τρίτο ἐπίπεδο (Ε) (σχ. 59).

Οἱ εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο, γιατί βρίσκονται πάνω σέ παράλληλα ἐπίπεδα. Οἱ ΑΒ καί ΓΔ εἶναι καί ὁμοεπίπεδες, ἀφοῦ ἀνήκουν στό (Ε)· ἄρα εἶναι παράλληλες.



Σχ. 59

Πόρισμα. Παράλληλα τμήματα μεταξύ παράλληλων ἐπιπέδων εἶναι ἴσα.

Θεωροῦμε τά παράλληλα τμήματα ΑΓ καί ΒΔ τοῦ σχ. 59, πού τά ἄκρα τους βρίσκονται πάνω στά παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Τά ΑΓ καί ΒΔ, ἐπειδή εἶναι παράλληλα, βρίσκονται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Ε), τό ὁποῖο σύμφωνα μέ τό θεώρημα τέμνει τά (Π) καί (Ρ) κατά τίς παράλληλες εὐθεῖες ΑΒ καί ΓΔ. Ἐπειδή ΑΓ//ΒΔ καί ΑΒ//ΓΔ, τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο καί ἄρα ΑΓ = ΒΔ.

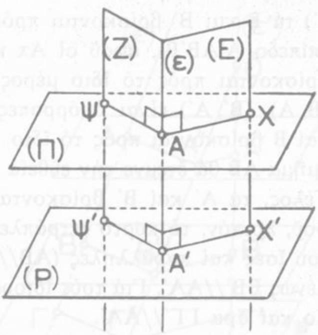
58. (Θ) — **Κάθε εὐθεία κάθετη στό ἕνα ἀπό τά δυό παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι κάθετη καί στό ἄλλο.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω (ε) ⊥(Π) καί (Π)//(Ρ) (σχ. 60). Ἡ (ε), ἀφοῦ τέμνει τό (Π) στό Α, θά τέμνει καί τό (Ρ) σ' ἕνα σημεῖο Α΄ (§ 55).

Ἄν φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο (Ε), πού νά περνᾶ ἀπό τήν (ε), αὐτό θά τέμνει τό (Π) κατά κάποια εὐθεία ΑΧ, ἄρα θά τέμνει καί τό παράλληλο ἐπίπεδο (§56) κατά μιά εὐθεία Α΄Χ΄ παράλληλη πρός τήν ΑΧ (§ 57). Ἕνα ἄλλο ἐπίπεδο (Ζ), πού περνᾶ ἀπό τήν (ε), θά τέμνει γιά τούς ἴδιους λόγους τά (Π) καί (Ρ) κατά εὐθεῖες ΑΨ καί Α΄Ψ΄ παράλληλες. Ἡ (ε), πού εἶναι κάθετη στό (Π), εἶναι κάθετη καί στήν ΑΧ, πού εἶναι εὐθεία τοῦ (Π), ἄρα εἶναι κάθετη καί στήν παράλληλη τῆς ΑΧ, τήν Α′Χ′. Γιά τόν ἴδιο λόγο ἡ (ε) ὡς κάθετη στήν ΑΨ εἶναι καί κάθετη στήν παράλληλή της Α′Ψ′. Ἀπό τά: (ε)$\perp$Α′Χ′ $\in$(Ρ), (ε) $\perp$ Α′Ψ′$\in$(Ρ) $\Rightarrow$ (ε)$\perp$ (Ρ) (§ 35, γ′).

Πόρισμα. Δυό παράλληλα ἐπίπεδα ἰσαπέχουν παντοῦ.

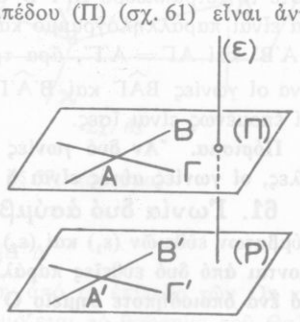
Δηλ. ὅλα τά σημεῖα τοῦ καθενός ἀπ' αὐτά τά ἐπίπεδα ἔχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τό ἄλλο (βλ. § 57, Πόρισμα).



Σχ. 60

59. Κριτήριο παραλληλίας δυό ἐπιπέδων. (Θ)— **Δυό ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ἤ συμπίπτουν, ἄν δυό τεμνόμενες εὐθεῖες τοῦ ἑνός εἶναι, ἀντιστοίχως, παράλληλες πρός δυό τεμνόμενες εὐθεῖες τοῦ ἄλλου.**

Ἀπόδειξη. Οἱ εὐθεῖες ΑΒ, ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 61) εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλες πρός τίς δυό εὐθεῖες Α′Β′, Α′Γ′ τοῦ (Ρ). Ἄν νοήσουμε μιά εὐθεία (ε) $\perp$ (Π), τότε (ε) ορθογ ΑΒ $\wedge$ (ε) ορθογ ΑΓ (§ 45, ε′). Αὐτά συνεπάγονται ὅτι (ε) ορθογ Α′Β′ $\wedge$ (ε) ορθογ Α′Γ′ (§ 45, γ′). Ἑπομένως (ε)$\perp$(Ρ) (§ 45, ς′). Ἐπειδή τά (Π) καί (Ρ) εἶναι κάθετα στήν ἴδια εὐθεία (ε), γι' αὐτό ἤ εἶναι παράλληλα ἤ συμπίπτουν.



Σχ. 61

Σημείωση. Γενικεύοντας τήν ἔννοια τῆς παραλληλίας τῶν ἐπιπέδων τά ἐπίπεδα, πού συμπίπτουν, τά θεωροῦμε παράλληλα.

60. (Θ) —**Ἄν δυό γωνίες τοῦ χώρου ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες καί ὁμόρροπες, τότε οἱ δυό γωνίες εἶναι ἴσες.**

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τίς γωνίες $x\widehat{A}y$ καί $x'\widehat{A'}y'$ (σχ. 62) μέ $Ax \nearrow\nearrow A'x'$, $Ay \nearrow\nearrow A'y'$. Τότε τά ἐπίπεδα τῶν δύο γωνιῶν ἤ εἶναι παράλληλα ἤ ταυτίζονται (§ 59). Ἄν τά δυό ἐπίπεδα συμπίπτουν, γνωρίζουμε ἀπό τήν ἐπιπεδομετρία ὅτι τό θεώρημα ἀληθεύει. Ἄν δέ συμπίπτουν, τότε ἄς πάρουμε πάνω στίς

Σχ. 62

παράλληλες ἡμιευθεῖες Αx καί Α΄x΄ ἴσα τμήματα ΑΒ καί Α΄Β΄καί πάνω στίς Αy καί Α΄y΄ ἴσα τμήματα ΑΓ καί Α΄Γ΄. Τό τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ εἶναι κυρτό, γιατί α΄) τά Β καί Β΄ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας ΑΑ΄ (μέσα στό ἐπίπεδο Α΄ΑΒ΄Β), ἀφοῦ οἱ Αx καί Α΄x΄ εἶναι ὁμόρροπες. β΄) Τά Α καί Α΄ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας ΒΒ΄, γιατί καί οἱ ἡμιευθεῖες (Β, Α), (Β΄, Α΄) εἶναι ὁμόρροπες (ἀντίρροπες πρός τίς Αx, Α΄x΄). γ΄) Τά Α καί Β βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας Α΄Β΄, γιατί ἀλλιῶς τό τμῆμα ΑΒ θά ἔτεμνε τήν εὐθεία Α΄Β΄, ἐνῶ εἶναι παράλληλο πρός αὐτή. δ΄) Τέλος, τά Α΄ καί Β΄ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἀφοῦ, λοιπόν, τό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΒ΄Α΄ ἔχει τίς δυό ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καί παράλληλες (ΑΒ//=Α΄Β΄), θά εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἑπομένως ΒΒ΄//ΑΑ΄. Γιά τούς ἴδιους λόγους τό ΑΓΓ΄Α΄ εἶναι παραλληλόγραμμο καί ἄρα ΓΓ΄//ΑΑ΄.

Ἐπειδή ἡ παραλληλία εἶναι μεταβατική σχέση, γι᾽ αὐτό ΒΒ΄||ΑΑ΄ $\wedge$ ΑΑ΄//ΓΓ΄ $\Rightarrow$ ΒΒ΄//ΓΓ΄. Ἄρα οἱ ΒΒ΄ καί ΓΓ΄ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, τό ὁποῖο τέμνει τά παράλληλα ἐπίπεδα κατά εὐθεῖες παράλληλες, δηλ. ΒΓ||Β΄Γ΄. Ὥστε τό τετράπλευρο ΒΓΓ΄Β΄ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες· ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμο καί ἑπομένως ΒΓ = Β΄Γ΄. Ἔχουμε καί ΑΒ = = Α΄Β΄ καί ΑΓ = Α΄Γ΄, ἄρα τριγ ΑΒΓ = τριγ Α΄Β΄Γ΄. Στά ἴσα αὐτά τρίγωνα οἱ γωνίες $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$ καί $\mathrm{B}'\widehat{\mathrm{A}'}\Gamma'$ βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό ἴσες πλευρές καί ἑπομένως εἶναι ἴσες.

Πόρισμα. Ἄν δυό γωνίες τοῦ χώρου ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες, οἱ γωνίες αὐτές εἶναι ἤ ἴσες ἤ παραπληρωματικές.

61. Γωνία δυό ἀσύμβατων εὐθειῶν.—Ὀνομάζεται γωνία δυό ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) ἡ μία ἀπό τίς τέσσερις γωνίες, πού σχηματίζονται ἀπό δυό εὐθεῖες παράλληλες πρός τίς (ε_1) καί (ε_2), πού διέρχονται ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο τοῦ χώρου.

Κατά κανόνα ἐκλέγουμε ἀπό τίς τέσσερις αὐτές γωνίες **τήν ὄχι μεγαλύτερη τῆς μιᾶς ὀρθῆς** (ἐκτός ἄν γίνεται ὑπόμνηση γιά τό ἀντίθετο).

Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα γίνεται φανερό ὅτι ἡ ἐκλογή τοῦ σημείου Ο δέν ἐπηρεάζει τή γωνία τῶν δυό εὐθειῶν· οὔτε ἡ ἀντικατάσταση τῆς μιᾶς ἀπ᾽ αὐτές ἀπό μιά παράλληλή της (§ 44, δ΄). Φυσικά ἡ γωνία δυό ἀσύμβατων ὀρθογώνιων εὐθειῶν εἶναι ἴση μέ μιά ὀρθή (§ 45, γ΄, 2ο).

—Μέ τόν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται ἡ γωνία δυό *ὁποιωνδήποτε εὐθειῶν* τοῦ χώρου.

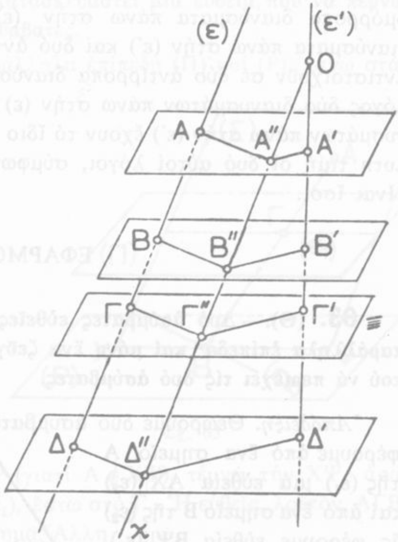
62. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ στό χῶρο. — Ἄν δυό εὐθεῖες (ε) καί (ε΄) τοῦ χώρου (ἀσύμβατες ἤ ὄχι) τέμνονται ἀπό ἐπίπεδα παράλληλα πρός ἕνα σταθερό ἐπίπεδο (Π_0) καί ἀντιστοιχίσουμε σέ κάθε σημεῖο Μ τῆς (ε) ἕνα σημεῖο Μ΄ τῆς (ε΄) τέτοιο, ὥστε τά Μ καί Μ΄ νά βρίσκονται πάνω στό ἴδιο παράλληλο πρός τό (Π_0) ἐπίπεδο, τότε κατά τήν ἀντιστοιχία αὐτή ὁ λόγος δυό ὁποιωνδήποτε τμημάτων, πού βρίσκονται πάνω στήν (ε), εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων τμημάτων τους πάνω στήν (ε΄).

Ἀπόδειξη. Ἄν οἱ εὐθεῖες (ε) καί (ε′) εἶναι ὁμοεπίπεδες, τό θεώρημα ἀνάγεται στό ἀντίστοιχο τῆς ἐπίπεδης γεωμετρίας, γιατί οἱ τομές τῶν παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό τό ἐπίπεδο τῶν (ε) καί (ε′) εἶναι παράλληλες.

Ἄς πάρουμε τώρα δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε) καί (ε′), πού τέμνονται ἀπό παράλληλα ἐπίπεδα στά Α, Β, Γ, Δ ἡ πρώτη καί στά Α′, Β′, Γ′, Δ′, ἀντιστοίχως, ἡ δεύτερη (σχ. 63). Θά ἀποδείξουμε ὅτι:

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$

Γιά τό σκοπό αὐτό ἄς φέρουμε ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο τῆς (ε′) μιά εὐθεία Οx παράλληλη πρός τήν (ε). Ἡ Οx θά τέμνει τά παράλληλα ἐπίπεδα στά Α″, Β″, Γ″, Δ″, γιατί καί ἡ παράλληλή της (ε) τά τέμνει. Θά ἔχουμε:



Σχ. 63

(1) $A''B'' = AB$ καί $\Gamma''\Delta'' = \Gamma\Delta$ (§ 57, πόρισμα).

Θά ἔχουμε ἐπίσης:

$$A''A' \| B''B' \| \Gamma''\Gamma' \| \Delta''\Delta'$$

γιατί εἶναι τομές τῶν παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό τό ἐπίπεδο τῶν Οx καί (ε′). Ἑπομένως στό ἐπίπεδο {Οx, (ε′)} ἐφαρμόζεται τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ τῆς ἐπιπεδομετρίας:

(2) $$\frac{A''B''}{\Gamma''\Delta''} = \frac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$$

Ἡ (2) ἐξαιτίας τῶν (1) γίνεται: $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta} = \dfrac{A'B'}{\Gamma'\Delta'}$

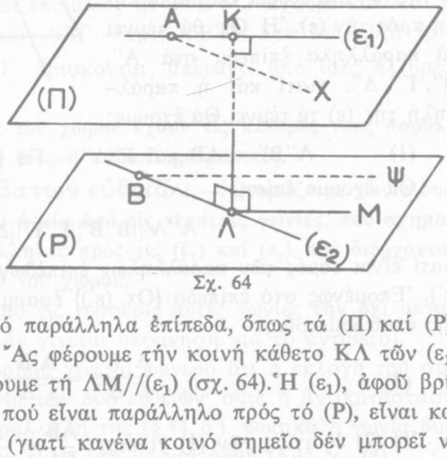
Πόρισμα. Ἄν δυό εὐθεῖες τοῦ χώρου τέμνονται ἀπό παράλληλα ἐπίπεδα, ὁ λόγος δυό διανυσμάτων, πού βρίσκονται πάνω στή μιά, εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων διανυσμάτων, πού βρίσκονται πάνω στην ἄλλη.

Γιατί τά ἀντίστοιχα σημεῖα πάνω στίς δυό εὐθεῖες ἔχουν τήν ἴδια διάταξη. Ἔτσι π.χ., ἄν τό Β βρίσκεται ἀνάμεσα στά Α καί Γ (σχ. 63), τότε, ἐπειδή οἱ ΑΑ″, ΒΒ″, ΓΓ″ εἶναι παρ/λες, τό Β″ θά βρίσκεται ἐπίσης ἀνάμεσα στά Α″ καί Γ″. Ἀφοῦ οἱ Α″Α′, Β″Β′, Γ″Γ′ εἶναι παρ/λες καί τό Β″ βρίσκεται ἀνάμεσα στά Α″ καί Γ″, γι' αὐτό καί τό Β′ θά βρίσκεται ἀνάμεσα στά Α΄ καί Γ΄. Ἔτσι, ἀφοῦ ἡ σχέση διατάξεως τῶν Α, Β, Γ, Δ, . . . εἶναι ἡ ἴδια μέ τή σχέση διατάξεως τῶν Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, . . . (σχ. 63), ἕπεται ὅτι δυό ὁμόρροπα διανύσματα πάνω στήν (ε) ἀντιστοιχοῦν σέ δύο ὁμόρροπα διανύσματα πάνω στήν (ε΄) καί δυό ἀντίρροπα διανύσματα πάνω στήν (ε) ἀντιστοιχοῦν σέ δύο ἀντίρροπα διανύσματα πάνω στήν (ε΄). Ἑπομένως ὁ λόγος δύο διανυσμάτων πάνω στήν (ε) καί ὁ λόγος τῶν ἀντίστοιχων διανυσμάτων πάνω στήν (ε΄) ἔχουν τό ἴδιο πρόσημο. Ἔχουν καί τήν ἴδια ἀπόλυτη τιμή οἱ δυό αὐτοί λόγοι, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα· ἄρα εἶναι ἴσοι.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

63. (Θ).— **Δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες βρίσκονται πάντοτε πάνω σέ δυό παράλληλα ἐπίπεδα· καί μόνο ἕνα ζεῦγος παράλληλων ἐπιπέδων ὑπάρχει, πού νά περιέχει τίς δυό ἀσύμβατες.**

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) (σχ. 64). Ἄς φέρουμε ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς (ε_1) μιά εὐθεία $ΑΧ \| (\varepsilon_2)$ καί ἀπό ἕνα σημεῖο Β τῆς (ε_2) ἄς φέρουμε εὐθεία $ΒΨ \| (\varepsilon_1)$. Ἡ (ε_1) καί ἡ ΑΧ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί οἱ (ε_2) καί ΒΨ ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Ρ). Τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα μεταξύ τους (§59) καί περιέχουν τίς ἀσύμβατες.

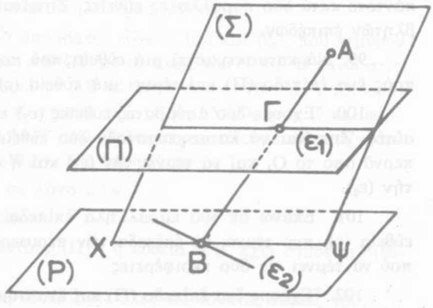


Σχ. 64

Ἄς θεωρήσουμε τώρα δυό παράλληλα ἐπίπεδα, ὅπως τά (Π) καί (Ρ), πού περιέχουν τίς ἀσύμβατες. Ἄς φέρουμε τήν κοινή κάθετο ΚΛ τῶν (ε_1) καί (ε_2) καί ἀπό τό Λ ἄς φέρουμε τή $ΛΜ // (\varepsilon_1)$ (σχ. 64). Ἡ (ε_1), ἀφοῦ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο (Π), πού εἶναι παράλληλο πρός τό (Ρ), εἶναι καί αὐτή παράλληλη πρός τό (Ρ) (γιατί κανένα κοινό σημεῖο δέν μπορεῖ νά ἔχει μέ τό (Ρ)). Ἄρα ἡ παράλληλή της ΛΜ ἀνήκει στό (Ρ) (§ 50, γ΄). Ἡ κοινή κάθετος ΚΛ, ἀφοῦ εἶναι κάθετη στήν (ε_1), εἶναι κάθετη καί στήν παράλληλή της ΛΜ. Εἶναι ἐπίσης κάθετη καί στήν (ε_2), ἄρα $ΚΛ \perp (Ρ)$ καί ἑπομένως $ΚΛ \perp (Π)$ (§ 58). Ὥστε, ἄν δυό παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) περιέχουν τίς (ε_1) καί (ε_2), τότε τά ἐπίπεδα αὐτά εἶναι κάθετα στήν κοινή κάθετο τῶν (ε_1) καί (ε_2). Ἐπειδή, τώρα, μιά μόνο κοινή κάθετος ὑπάρχει γι᾽ αὐτό ἕνα μόνο ζεῦγος παράλληλων ἐπιπέδων ὑπάρχει, πού νά περιέχει τίς ἀσύμβατες.

64. Πρόβλημα. Δίνονται δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Α τοῦ χώρου. Ζητεῖται νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία, πού νά περνᾶ ἀπό τό Α καί νά τέμνει τίς δυό ἀσύμβατες.

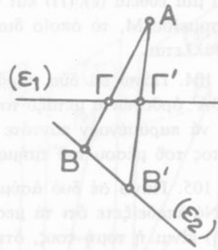
Λύση. Ἄς φέρουμε τά δυό παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πάνω στά ὁποῖα βρίσκονται ἀντιστοίχως οἱ δυό ἀσύμβατες (ε_1) καί (ε_2) (§ 63). Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις:



Σχ. 65

Ι. Τό $Α \notin (Π) \wedge Α \notin (Ρ)$. Τότε τό Α καί ἡ (ε_1) ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο (Σ). Τό (Σ), ἀφοῦ δέν ταυτίζεται μέ τό (Π), τέμνει τό (Π) κατά τήν (ε_1), ἄρα τέμνει καί τό παράλληλό του (Ρ) κατά μιά εὐθεία $ΧΨ \| (\varepsilon_1)$ (§ 56 καί § 57). Ἡ ΧΨ, ἐπειδή εἶναι $\| (\varepsilon_1)$, δέν εἶναι $\| (\varepsilon_2)$, ἄρα τέμνει τήν (ε_2) σέ κάποιο σημεῖο Β. Ἡ εὐθεία ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου (Σ), ἀφοῦ δέν ταυτίζεται μέ τήν ΧΨ (γιατί $Α \notin ΧΨ$), τέμνει τήν ΧΨ, ἄρα τέμνει καί τήν παράλληλή της (ε_1), ἔστω στό Γ. Ἡ εὐθεία, λοιπόν, ΑΓΒ ἱκανοποιεῖ αὐτά, πού ζητᾶ τό πρόβλημα. Ἄλλη εὐθεία ΑΓ′Β′, πού νά τέμνει τίς δυό ἀσύμβατες, δέν ὑπάρχει (σχ. 66). Γιατί θά ὅριζε μέ τήν ΑΓΒ ἕνα ἐπίπεδο, πάνω στό ὁποῖο θά βρίσκονταν καί οἱ δυό ἀσύμβατες.

ΙΙ. Τό $Α \in (Π) \wedge Α \notin (\varepsilon_1)$. Τότε τό πρόβλημα δέν ἔχει λύση, γιατί κάθε εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό Α καί τέμνει τήν (ε_1), βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο (Π), παρ/λο πρός τό (Ρ) καί ἑπομένως δέν ἔχει κοινό σημεῖο μέ τήν (ε_2).



Σχ. 66

ΙΙΙ. Τό $Α \in (\varepsilon_1)$. Τότε ὅλες οἱ εὐθεῖες, πού συνδέουν τό Α μέ τά σημεῖα τῆς (ε_2), εἶναι λύσεις τοῦ προβλήματος.

Συμπέρασμα. Ἄν τό Α δέν ἀνήκει σέ κανένα ἀπό τά παρ/λα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πού περιέχουν τίς δυό ἀσύμβατες, τό πρόβλημα ἔχει 1 λύση. Ἄν τό Α ἀνήκει στό (Π), χωρίς νά ἀνήκει στήν (ε_1) ἤ στό (Ρ), χωρίς νά ἀνήκει στήν (ε_2), τό πρόβλημα ἔχει 0 λύσεις. Ἄν, τέλος, τό Α ἀνήκει σέ μιά ἀπό τίς ἀσύμβατες, τό πρόβλημα ἔχει ἄπειρες λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α.

95. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, πού ἀπέχουν δεδομένη ἀπόσταση ἀπό δεδομένο ἐπίπεδο;

96. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό (Π). Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, πού περνοῦν ἀπό τό Α καί εἶναι παράλληλες πρός τό (Π);

97. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν δύο τμήματα εἶναι ἴσα καί παράλληλα, τότε ἔχουν ἴσες καί παράλληλες προβολές πάνω στό ἐπίπεδο.

98. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), δύο σημεῖα του Α, Β καί ἕνα σημεῖο Ο ἔξω ἀπό τό (Π). Ἀπό τίς εὐθεῖες ΟΑ, ΟΒ περνοῦν δύο μεταβλητά ἐπίπεδα, τά ὁποῖα τέμνουν τό (Π) πάντοτε κατά δύο παράλληλες εὐθεῖες. Ζητεῖται ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν μεταβλητῶν ἐπιπέδων.

99. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό ἕνα σημεῖο Α, εἶναι παράλληλη πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί τέμνει μιά εὐθεία (ε).

100. Ἔχουμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί δύο σημεῖα O_1 καί O_2 ἔξω ἀπ' αὐτές. Ζητεῖται νά κατασκευαστοῦν δύο εὐθεῖες παράλληλες, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μία νά περνᾶ ἀπό τό O_1 καί νά τέμνει τήν (ε_1) καί ἡ ἄλλη νά περνᾶ ἀπό τό O_2 καί νά τέμνει τήν (ε_2).

101. Ἐπάνω σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα δίνονται δύο περιφέρειες, καθώς καί μία εὐθεία (ε), πού τέμνει τά ἐπίπεδα τῶν περιφερειῶν. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία $\|$(ε), πού νά τέμνει τίς δύο περιφέρειες.

102. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό τό (Π). Θεωροῦμε ἕνα σημεῖο Ρ τοῦ (Π) καί ἐπάνω στό τμῆμα ΑΡ ἕνα δεύτερο σημεῖο Μ τέτοιο, ὥστε $AM/AP = \mu/\nu$ (δεδομένος λόγος). Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν:

i) Τό Ρ διατρέχει τό ἐπίπεδο (Π).

ii) Τό Ρ διατρέχει μιά περιφέρεια τοῦ (Π).

103. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπό τό (Π). Ἀπό τό Β περνᾶ μιά εὐθεία (ε)$\|$(Π) καί τό Α προβάλλεται πάνω στήν (ε) στό Γ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τ. τοῦ σημείου Μ, τό ὁποῖο διαιρεῖ τό τμῆμα ΒΓ σέ λόγο: $BM : M\Gamma = 2 : 5$, ὅταν ἡ (ε) μεταβάλλεται.

104. Πάνω σέ δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Π΄) θεωροῦμε δύο τμήματα ΟΑ καί Ο΄Α΄ ὀρθογώνια μεταξύ τους. Ἄν τά ΟΑ καί Ο΄Α΄ στρέφονται γύρω ἀπό τά Ο καί Ο΄, ὥστε νά παραμένουν πάντοτε ὀρθογώνια καί νά διατηροῦν τά μήκη τους, ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΑ΄;

105. Πάνω σέ δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) παίρνουμε ἴσα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν τμημάτων ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται· καί ἄν (η) εἶναι ἡ τομή τους, ὅτι κάθε σημεῖο τῆς (η) ἰσαπέχει ἀπό τίς (ε_1) καί (ε_2).

106. Ἔχουμε ἕνα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ καί ἕνα ἐπίπεδο (Π). Νά καθορίσετε τέσσερις εὐθεῖες ΑΧ, ΒΨ, ΓΖ, ΔΤ, πού νά εἶναι παράλληλες μεταξύ τους καί νά τέμνουν τό (Π) σέ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ τέτοια, ὥστε τό τετράπλευρο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ νά εἶναι παραλληλόγραμμο.

Β΄

107. Ἔχουμε τρεῖς εὐθεῖες ἀσύμβατες ἀνά δύο καί παράλληλες πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π). Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν μιά εὐθεία (x) τέμνει τίς τρεῖς ἀσύμβατες ὑπό ἴσες γωνίες, τότε (x) $\perp$ (Π). (**Ὑποδ.** Νά ἀποδείξετε πρῶτα ὅτι ἡ (x) τέμνει τό (Π) καί κατόπιν νά χρησιμοποιήσετε τήν ἄσκ. 67).

108. Ἔχουμε μιά περιφέρεια καί δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (δ) καί (δ΄), πού τέμνουν τό ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας στά ἄκρα Α, Β μιᾶς διαμέτρου. Θεωροῦμε τό σύνολο τῶν εὐθειῶν (x), πού εἶναι τέτοιες, ὥστε ἡ καθεμιά νά τέμνει καί τήν περιφέρεια καί τίς δυό εὐθεῖες (δ) καί (δ΄) χωρίς νά περνᾶ ἀπό τό Α ἤ τό Β. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῶν ἰχνῶν τῶν εὐθειῶν (x) πάνω σέ σταθερό ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας.

109. Ἄν ὁσεσδήποτε εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3) ... ἀποτέμνουν ἀπό δύο σταθερές ἀσύμβατες εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2) τμήματα ἀνάλογα, τότε οἱ εὐθεῖες αὐτές εἶναι ὅλες παράλληλες πρός ἕνα σταθερό ἐπίπεδο.

110. Ἔχουμε δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Ἕνα σημεῖο Μ τῆς (ε_1) προβάλλεται ἐπάνω στήν (ε_2) στό Κ. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΜΚ; (Ὑποδ. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινή $\perp$ τῶν (ε_1), (ε_2) ὅπου $B \in (\varepsilon_2)$. Ἄς προβληθεῖ τό σχῆμα πάνω στό ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τήν (ε_2) καί εἶναι παράλληλο πρός τήν (ε_1)).

111. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), πού τέμνουν τό (Π) στά O_1 καί O_2. Θεωροῦμε ἕνα τμῆμα $AB \| (\Pi)$ μέ τά ἄκρα του Α καί Β πάνω στίς (ε_1) καί (ε_2) καθώς καί σημεῖο Μ, πού διαιρεῖ τό ΑΒ σέ λόγο $AM : MB = \mu : \nu$ (δεδομένο). Διαιροῦμε καί τό O_1O_2 σέ λόγο μ/ν μέ τό σημεῖο M_0: $O_1M_0 : M_0O_2 = \mu : \nu$ καί φέρνουμε ἀπό τό M_0 τίς εὐθεῖες $M_0X \| (\varepsilon_1)$ καί $M_0\Psi \| (\varepsilon_2)$. Τέλος σχηματίζουμε τά παρ/γραμμα $O_1AA'M_0$ $(A' \in M_0x)$ καί $O_2BB'M_0$ $(B' \in M_0y)$. Νά ἀποδείξετε:

i) Ὅτι τό Μ διαιρεῖ τό τμῆμα Α΄Β΄ σέ λόγο $\mu : \nu$.

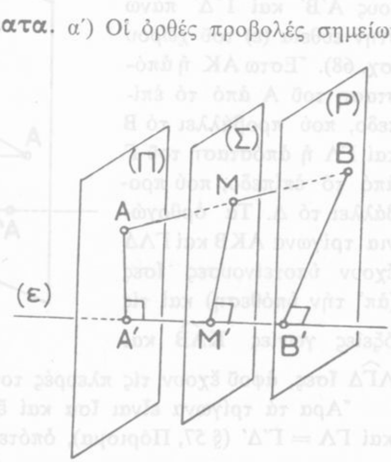
ii) Ὅτι τό ἐπίπεδο ΑΑ΄ΒΒ΄ εἶναι $\|(\Pi)$.

iii) Ὅτι, ἄν τό ΑΒ μετατοπίζεται (πάντοτε$\|(\Pi)$), ἡ εὐθεία Α΄Β΄ ἔχει σταθερή διεύθυνση.

iv) Ποιός ὁ γ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν τό ΑΒ παίρνει ὅλες τίς δυνατές θέσεις του;

ΠΡΟΒΟΛΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΠΑΝΩ ΣΕ ΜΙΑ ΕΥΘΕΙΑ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

65. Ὁρισμοί καί θεωρήματα. α΄) Οἱ ὀρθές προβολές σημείων καί τμημάτων πάνω σέ δεδομένη εὐθεία (ε) στό χῶρο ἐπιτελοῦνται μέ ἐπίπεδα κάθετα στήν εὐθεία (ε). Λέγεται ὀρθή προβολή ἑνός σημείου πάνω σέ δεδομένη εὐθεία (ε) τοῦ χώρου (σχ. 67) τό ἴχνος Α΄ τῆς (ε) πάνω στό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι κάθετο στήν (ε). (Εἶναι, βέβαια, $AA' \perp (\varepsilon)$). Ὑπάρχουν καί προβολές πάνω σέ εὐθεία (ε), πού πραγματοποιοῦνται μέ ἐπίπεδα πλάγια πρός τήν (ε) καί παράλληλα πρός δεδομένο ἐπίπεδο. Ἄν αὐτό δέ δηλώνεται, τότε μέ τή λέξη «προβολή» θά ἐννοοῦμε τήν ὀρθή προβολή.



Σχ. 67

Προβολή τμήματος ΑΒ πάνω σέ εὐθεία (ε) λέγεται τό τμῆμα Α΄Β΄, πού ἔχει ἄκρα τίς προβολές τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ πάνω στήν (ε) (σχ. 67).

β΄) (Θ) — Ὁ λόγος δυό τμημάτων μιᾶς εὐθείας εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν προβολῶν τους πάνω σέ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (ε).

Αὐτό εἶναι φανερή συνέπεια τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ στό χῶρο. Ἔτσι π.χ. στό σχ. 67, ἄν Α΄, Μ΄, Β΄ εἶναι προβολές τῶν σημείων Α, Μ, Β μιᾶς εὐθείας πάνω σέ ἄλλη εὐθεία (ε), τότε, ἐπειδή τά ἐπίπεδα (Π), (Σ), (Ρ), μέ τά ὁποῖα γίνεται ἡ προβολή («προβάλλοντα ἐπίπεδα»), εἶναι παράλληλα, τό θεώρημα τοῦ Θαλῆ μᾶς δίνει: $AM/MB = A'M'/M'B'$.

γ΄) Εἰδικότερα, κατά τήν προβολή πάνω σέ εὐθεία, **τό μέσο ἑνός τμήματος προβάλλεται στό μέσο τῆς προβολῆς του.**

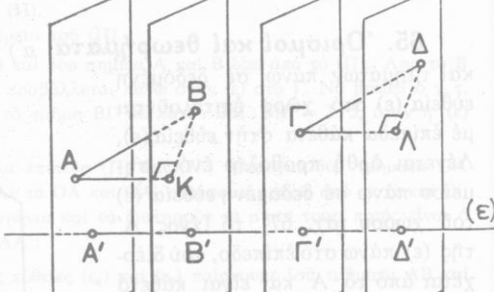
δ΄) **Παρατηρήσεις.** 1η) Οἱ προβάλλουσες AA', BB' (σχ. 67) γενικά δέν εἶναι παράλληλες, γιατί τό ΑΒ καί ἡ (ε) δέ βρίσκονται κατά κανόνα στό ἴδιο ἐπίπεδο (Δηλ. τό τετράπλευρο $AA'BB'$ εἶναι στή γενική περίπτωση «στρεβλό»).

2η) Ἄν ΑΒ ορθογ (ε), τότε ἡ προβολή τοῦ ΑΒ πάνω στήν (ε) εἶναι μηδενικό τμῆμα (σημεῖο).

3η) Τό παραπάνω θεώρημα ἰσχύει καί γιά πλάγιες προβολές.

ε΄) (Θ) — Παράλληλα καί ἴσα τμήματα ἔχουν ἴσες προβολές πάνω σέ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τά παράλληλα καί ἴσα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ καθώς καί τίς προβολές τους $A'B'$ καί $\Gamma'\Delta'$ πάνω στήν εὐθεία (ε) τοῦ χώρου (σχ. 68). Ἔστω ΑΚ ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό ἐπίπεδο, πού προβάλλει τό Β καί ΓΛ ἡ ἀπόσταση τοῦ Γ ἀπό τό ἐπίπεδο, πού προβάλλει τό Δ. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ ἔχουν ὑποτείνουσες ἴσες (ἀπ' τήν ὑπόθεση) καί τίς ὀξεῖες γωνίες $K\widehat{A}B$ καί $\Lambda\widehat{\Gamma}\Delta$ ἴσες, ἀφοῦ ἔχουν τίς πλευρές τους παρ/λες (§ 60, Πόρισμα).



Σχ. 68

Ἄρα τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί ἔχουν $AK = \Gamma\Lambda$. Ἀλλά $AK = A'B'$ καί $\Gamma\Lambda = \Gamma'\Delta'$ (§ 57, Πόρισμα), ὁπότε, ἀφοῦ $AK = \Gamma\Lambda \Rightarrow A'B' = \Gamma'\Delta'$.

ς΄) Γενικότερα, ὁ λόγος δύο παράλληλων τμημάτων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν προβολῶν τους πάνω σέ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία.

Γιατί, γενικά, τριγ ΑΒΚ ≈ τριγ ΓΔΛ (σχ. 68).

ζ΄) Τά παραπάνω ἰσχύουν καί γιά πλάγιες προβολές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

112. Ἔχουμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν μέσων τῶν τμημάτων, πού συνδέουν ἕνα σημεῖο τῆς (ε_1) μέ ἕνα σημεῖο τῆς (ε_2).

113. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ μέ σταθερό μῆκος 2λ ὀλισθαίνει μέ τά ἄκρα του ἐπάνω σέ δύο ὀρθογώνιες καί ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΓΔ.

114. Ἔχουμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά ἀποδείξετε ὅτι δύο σημεῖα τῆς (ε_1), πού εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν κοινή κάθετο τῶν ἀσύμβατων, ἰσαπέχουν ἀπό τήν (ε_2). Ἀντιστρόφως: Ἄν δύο σημεῖα τῆς (ε_1) ἰσαπέχουν ἀπό τήν (ε_2), τότε εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν κοινή κάθετο τῶν (ε_1) καί (ε_2).

115. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), δυό σημεῖα Α καί Β συμμετρικά ὡς πρός τό (Π) καί ἕνα τρίτο σημεῖο Σ ἔξω ἀπό τό (Π). Ἀπό τό Σ διέρχεται μία εὐθεία ΣΧ μεταβλητή, ὥστε τά Α καί Β νά ἰσαπέχουν πάντοτε ἀπό αὐτή. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῶν ἰχνῶν τῆς ΣΧ ἐπάνω στό ἐπίπεδο (Π). (**Ὑποδ.** Ἄν ΑΑ′ καί ΒΒ′ οἱ ἀποστάσεις τῶν Α καί Β ἀπό τήν ΣΧ, τότε τριγΜΑΑ′ = τριγΜΒΒ′ καί τό ἴχνος Μ εἶναι ἡ προβολή τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ ἐπάνω στήν ΣΧ. Βλέπε καί ἄσκ. 64).

116. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί ἕνα σημεῖο του Ο. Πότε δυό τμήματα ΟΑ, ΟΒ, πού δέ βρίσκονται πάνω στό (Π), ἔχουν ἴσες προβολές ἐπάνω σέ κάθε εὐθεία τοῦ (Π), πού περνᾶ ἀπό τό Ο; (ἤ δέν περνᾶ;)

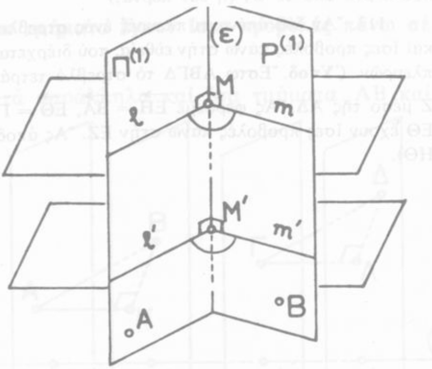
117. Ἄν δύο ἀπέναντι πλευρές ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσες, τότε ἔχουν καί ἴσες προβολές πάνω στήν εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τά μέσα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν. (**Ὑποδ.** Ἔστω ΑΒΓΔ τό στρεβλό τετράπλευρο μέ ΑΒ = ΓΔ, Ε μέσο τῆς ΒΓ, Ζ μέσο τῆς ΑΔ. Ἄς φέρουμε $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{E\Theta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ ΕΗ. ΕΘ ἔχουν ἴσες προβολές πάνω στήν ΕΖ. Ἄς ἀποδείξουμε πρῶτα ὅτι τό Ζ εἶναι μέσο τῆς ΗΘ).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III

ΔΙΕΔΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

66. Ὁρισμοί. Δίεδρη γωνία (ἤ ἁπλά «δίεδρη») λέγεται τό σχῆμα, πού ἀποτελεῖται ἀπό δυό ἡμιεπίπεδα, πού ἀρχίζουν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία (ε), πού λέγεται «ἀκμή» τῆς δίεδρης.

Τά δυό ἡμιεπίπεδα, πού ἔχουν κοινό σύνορο τήν ἀκμή, λέγονται **ἕδρες** τῆς δίεδρης. Κάθε σημεῖο, τό ὁποῖο ὡς πρός καθεμιά ἕδρα βρίσκεται στό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου μέ τήν ἄλλη ἕδρα, λέγεται **ἐσωτερικό σημεῖο τῆς δίεδρης.**



Σχ. 69

Μιά δίεδρη μέ ἕδρες $Π^{(1)}$ καί $P^{(1)}$ καί ἀκμή (ε) (σχ. 69) παριστάνεται μέ $Π^{(1)}$ —(ε)— $P^{(1)}$ ἤ μέ A —(ε)— B, ὅπου τό A εἶναι σημεῖο τῆς μιᾶς ἕδρας καί τό B εἶναι σημεῖο τῆς ἄλλης, ἤ τέλος μέ $(\widehat{Π^{(1)},P^{(1)}})$.

Ἀντίστοιχη ἐπίπεδη μιᾶς δίεδρης λέγεται ἡ γωνία, κατά τήν ὁποία ἡ δίεδρη τέμνεται ἀπό ἐπίπεδο κάθετο στήν ἀκμή. Δυό ἀντίστοιχες ἐπίπεδες τῆς ἴδιας δίεδρης, ὅπως οἱ $(\widehat{l, m})$ καί $(\widehat{l', m'})$ τοῦ σχήματος 69, πού σχηματίζονται σέ δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα M καί M′ τῆς ἀκμῆς, εἶναι ἴσες, γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες καί ὁμόρροπες.

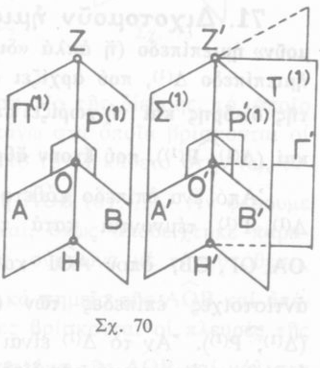
Ἡ δίεδρη, πού ὁρίστηκε παραπάνω, ἐννοεῖται σιωπηρά ὡς «κυρτή» καί ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη, ἐπίσης κυρτή. Τά σημεῖα τοῦ χώρου, **πού δέ βρίσκονται μέσα** στήν κυρτή δίεδρη $(\widehat{Π^{(1)},P^{(1)}})$ οὔτε καί πάνω στίς ἕδρες $Π^{(1)}$, $P^{(1)}$, ἀποτελοῦν μιά ἄλλη δίεδρη **μή κυρτή**, πού ἔχει τίς ἴδιες ἕδρες, $Π^{(1)}$, $P^{(1)}$ καί ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τή μή κυρτή γωνία $(\overset{\smile}{l, m})$.

Ἄν τά ἡμιεπίπεδα $Π^{(1)}$, $P^{(1)}$, (πού δέν ταυτίζονται), βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο (Π), ὁρίζουν μιά **πεπλατυσμένη δίεδρη**, πού ἔχει ἐσωτερικό, κατά σύμβαση, τόν ἕνα ἀπό τούς δύο ἡμίχωρους, τούς ὁποίους ὁρίζει τό (Π).

67. Ἴσες δίεδρες. Δύο δίεδρες λέγονται ἴσες, ὅταν ἔχουν ἴσες ἀντίστοιχες ἐπίπεδες γωνίες.

68. Κατ' ἀκμή δίεδρες λέγονται δύο δίεδρες, πού ἔχουν τήν ἴδια ἀκμή, ἐνῶ οἱ ἕδρες τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις (δηλ. ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα) τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης. Ἄν φέρουμε ἐπίπεδο κάθετο στήν κοινή ἀκμή, παίρνουμε τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες τῶν δύο κατ' ἀκμή διέδρων ὡς δύο κατά κορυφή γωνίες. Ἄρα **οἱ κατ' ἀκμή δίεδρες εἶναι ἴσες**, γιατί ἔχουν ἴσες ἀντίστοιχες ἐπίπεδες.

69. Ἄνισες δίεδρες. Ἄς θεωρήσουμε δύο δίεδρες $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$ καί $(\widehat{\Sigma^{(1)}, T^{(1)}})$ (σχ. 70) ὄχι ἴσες καί τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδές τους $A\widehat{O}B$ καί $A'\widehat{O'}\Gamma'$. Ἄν ἡ $A\widehat{O}B$ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν $A'\widehat{O'}\Gamma'$, δηλαδή εἶναι ἴση μέ μέρος $A'\widehat{O'}B'$ τῆς $A'\widehat{O'}\Gamma'$, τότε λέμε ὅτι ἡ δίεδρη $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$ εἶναι **μικρότερη** ἀπό τή $(\widehat{\Sigma^{(1)}, T^{(1)}})$. Ἡ $(\Sigma^{(1)}, T^{(1)})$, πού ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη $A'\widehat{O'}\Gamma'$ μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀντίστοιχη ἐπίπεδη $A\widehat{O}B$ τῆς $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ λέγεται **μεγαλύτερη** ἀπό τήν $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$.

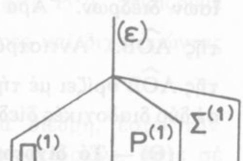


Σχ. 70

Τελικά: Ἄν οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες δύο διέδρων εἶναι ἄνισες, τότε καί οἱ δίεδρες εἶναι «ὁμοίως ἄνισες».

70. Ἄθροισμα καί διαφορά δύο διέδρων. Λέμε ὅτι δύο δίεδρες $\Pi^{(1)} - (\varepsilon) - P^{(1)}$ καί $P^{(1)} - (\varepsilon) - \Sigma^{(1)}$ εἶναι διαδοχικές, ὅταν ἔχουν κοινή ἀκμή, μιά ἕδρα κοινή καί βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς ἕδρας. Οἱ δύο διαδοχικές δίεδρες δέν ἔχουν κανένα ἐσωτερικό σημεῖο κοινό, γιατί τά ἐσωτερικά τους σημεῖα βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου (P) τῆς κοινῆς ἕδρας $P^{(1)}$ (σχ. 71).

Ἡ δίεδρη $(\widehat{\Pi^{(1)}, \Sigma^{(1)}})$, πού ἔχει ἐσωτερικά σημεῖα τήν ἕνωση τῶν ἐσωτερικῶν σημείων τῶν δύο διαδοχικῶν ἑδρῶν πλέον τά σημεῖα τῆς κοινῆς ἕδρας $P^{(1)}$ (σχ.71), λέγεται **ἄθροισμα** τῶν δύο διαδοχικῶν διέδρων. Αὐτή ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων τῶν δύο διαδοχικῶν διέδρων.



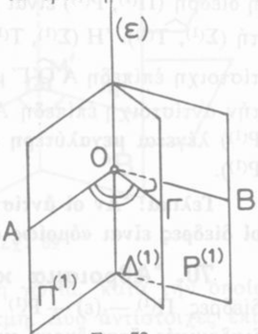
Σχ. 71

Ἐξάλλου ἡ δίεδρη $(\widehat{P^{(1)}, \Sigma^{(1)}})$ τοῦ σχήματος 71, ἡ ὁποία, ἄν προστεθεῖ μέ τήν $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$, δίνει ἄθροισμα τήν $(\widehat{\Pi^{(1)}, \Sigma^{(1)}})$, λέγεται **διαφορά** τῶν δύο διέδρων $(\widehat{\Pi^{(1)}, \Sigma^{(1)}})$ καί $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$. Γράφουμε: $(\widehat{P^{(1)}, \Sigma^{(1)}}) = (\widehat{\Pi^{(1)}, \Sigma^{(1)}})$ — — $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$. Ἡ ἴδια σχέση ἰσχύει καί γιά τίς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες.

Γενικότερα: *Ἄθροισμα* δύο ὁποιωνδήποτε διέδρων Α καί Β λέγεται κάθε δίεδρη, πού ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων τῶν δύο διέδρων Α καί Β· *διαφορά* λέγεται κάθε δίεδρη, πού ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη γωνία ἴση μέ τή διαφορά τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων τῶν δύο διέδρων Α καί Β.

71. Διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδο δίεδρης. — **α΄) Λέγεται «διχοτομοῦν» ἡμιεπίπεδο (ἤ ἁπλά «διχοτομοῦν») τῆς δίεδρης $\Pi^{(1)}$ — ε — $P^{(1)}$ ἕνα ἡμιεπίπεδο $\Delta^{(1)}$, πού ἀρχίζει ἀπό τήν ἀκμή (ε), βρίσκεται στό ἐσωτερικό τῆς δίεδρης καί τή χωρίζει σέ δυό $\boxed{\text{ἴσες}}$ διαδοχικές δίεδρες $(\widehat{\Pi^{(1)}, \Delta^{(1)}})$ καί $(\widehat{\Delta^{(1)}, P^{(1)}})$, πού ἔχουν ἄθροισμα τήν $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$.**

Ἀπό ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε) (σχ. 72) τά τρία ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$, $\Delta^{(1)}$, $P^{(1)}$ τέμνονται κατά τρεῖς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΓ, ΟΒ, ὅπου $\widehat{ΑΟΓ}$ καί $\widehat{ΓΟΒ}$ εἶναι οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες τῶν $(\widehat{\Pi^{(1)}, \Delta^{(1)}})$ καί $(\widehat{\Delta^{(1)}, P^{(1)}})$. Ἄν τό $\Delta^{(1)}$ εἶναι διχοτομοῦν καί ἑπομένως ἐσωτερικό τῆς δίεδρης, τότε ἡ ΟΓ εἶναι ἀκτίνα τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης $\widehat{ΑΟΒ}$ τῆς ὁλόκληρης δίεδρης καί οἱ γωνίες $\widehat{ΑΟΓ}$ καί $\widehat{ΓΟΒ}$ εἶναι ἴσες, ὡς ἀντίστοιχες ἐπίπεδες ἴσων διέδρων. Ἄρα ἡ ΟΓ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{ΑΟΒ}$. Ἀντιστρόφως, ἡ διχοτόμος ΟΓ τῆς $\widehat{ΑΟΒ}$ ὁρίζει μέ τήν ἀκμή (ε) ἕνα ἡμιεπίπεδο, πού χωρίζει τήν $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$ σέ δύο διαδοχικές δίεδρες ἴσες, δηλ. ὁρίζει τό διχοτομοῦν. Ἰσχύει, λοιπόν, τό:

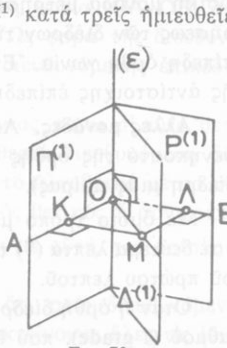


Σχ. 72

(Θ) — Τό διχοτομοῦν ἡμιεπίπεδο δίεδρης ὁρίζεται ἀπό τήν ἀκμή καί ἀπό τή διχοτόμο τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης.

β΄) Χαρακτηριστική ἰδιότητα. — Κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πού διχοτομεῖ μιά δίεδρη, ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς ἕδρες τῆς δίεδρης· καί κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τῆς δίεδρης, πού ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν, βρίσκεται πάνω στό διχοτομοῦν ἐπίπεδο.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ διχοτομοῦντος $\Delta^{(1)}$ τῆς δίεδρης $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$ (σχ. 73). Τό ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τό Μ καί εἶναι κάθετο στήν ἀκμή (ε), τέμνει τά $\Pi^{(1)}$, $\Delta^{(1)}$, $P^{(1)}$ κατά τρεῖς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΜ, ΟΒ, ὅπου ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$, γιατί τό $\Delta^{(1)}$ εἶναι τό διχοτομοῦν. Ἄρα οἱ ἀποστάσεις ΜΚ, ΜΛ τοῦ Μ ἀπό τίς εὐθεῖες ΟΑ, ΟΒ εἶναι ἴσες καί τά ἴχνη τους Κ, Λ βρίσκονται πάνω στίς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ ἀντιστοίχως. Ἐπειδή $MK \perp OA$ καί ΜΚ ορθογ (ε) (γιατί ἡ ΜΚ βρίσκεται σ' ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στήν (ε)), γι' αὐτό $MK \perp \Pi^{(1)}$ (§ 45, ς').



Σχ. 73

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε, $M\Lambda \perp P^{(1)}$. Δηλαδή τό Μ ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς ἕδρες $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$.

Ἀντίστροφο: Ἔστω Μ ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο τῆς δίεδρης, τό ὁποῖο ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πάνω στά ὁποῖα βρίσκονται οἱ ἕδρες $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$. Τό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τό Μ κάθετο στήν (ε), τέμνει τή δίεδρη κατά τήν ἀντίστοιχη ἐπίπεδη $\widehat{AOB}$ (σχ. 73). Ἄν φέρουμε τώρα $MK \perp$ ευθ ΟΑ, $M\Lambda \perp$ ευθ ΟΒ, θά εἶναι, ὅπως ἀποδείχτηκε παραπάνω, $MK \perp (\Pi)$ καί $M\Lambda \perp (P)$. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεση, εἶναι $MK = M\Lambda$. Ἀφοῦ τό Μ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς $\widehat{AOB}$ καί ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς εὐθεῖες, πάνω στίς ὁποῖες βρίσκονται οἱ πλευρές τῆς $\widehat{AOB}$, γι' αὐτό τό Μ βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο τῆς $\widehat{AOB}$ καί μάλιστα προβάλλεται πάνω στίς πλευρές ΟΑ, ΟΒ, δηλ. πάνω στά ἡμιεπίπεδα $\Pi^{(1)}$, $P^{(1)}$. Ἡ διχοτόμος ΟΜ μαζί μέ τήν (ε) ὁρίζει τό διχοτομοῦν ἐπίπεδο (βλέπε προηγούμενο θεώρημα), πάνω στό ὁποῖο βρίσκεται τό Μ.

γ') Διχοτομώντας τίς δίεδρες $(\widehat{\Pi^{(1)}, \Delta^{(1)}})$ καί $(\widehat{\Delta^{(1)}, P^{(1)}})$, χωρίζουμε τήν ἀρχική δίεδρη $(\widehat{\Pi^{(1)}, P^{(1)}})$ σέ τέσσερις ἴσες δίεδρες καί διχοτομώντας αὐτές τή χωρίζουμε σέ 2^3 δίεδρες κ.ο.κ.

72. Μέτρο δίεδρης.

α') Ἄς ἐκλέξουμε μιά δίεδρη, ἔστω τήν D_0 καί ἄς τήν ὁρίσουμε ὡς «μονάδα μετρήσεως τῶν διέδρων». Τότε σέ κάθε δίεδρη D ἀντιστοιχεῖ ἕνας ὁρισμένος θετικός ἀριθμός, πού ὀνομάζεται «μέτρο τῆς δίεδρης D μετρημένης μέ μονάδα D_0». Ὁ ἀριθμός αὐτός ὁρίζεται ὡς ἐξαγόμενο τῆς μετρήσεως τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης τῆς D μέ μονάδα τήν ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς D_0.

Ἑπομένως: Μέτρο δίεδρης D μέ μονάδα τήν D_0 λέγεται τό μέτρο τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης τῆς D μέ μονάδα τήν ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς D_0.

β') **Μονάδες μετρήσεως τῶν διέδρων.** Ἐπειδή ἡ ὀρθή γωνία εἶναι μιά φυσική μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν, γι' αὐτό παίρνουμε ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν διέδρων τήν **ὀρθή δίεδρη**, δηλαδή αὐτή πού ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη ὀρθή γωνία. Ἔτσι, ἡ μέτρηση τῆς διέδρης ἀνάγεται στή μέτρηση τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης γωνίας μέ μονάδα τήν ὀρθή γωνία.

Ἄλλες μονάδες. Λαμβάνεται ἐπίσης ὡς μονάδα μετρήσεως τό ἕνα ἐνενηκοστό τῆς ὀρθῆς διέδρης, δηλαδή δίεδρη μέ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη 1° (δίεδρη μιᾶς μοίρας).

Μέ ὅμοιο τρόπο μιά δίεδρη μπορεῖ νά μετρηθεῖ σέ πρῶτα λεπτά (′) ἤ σέ δεύτερα λεπτά (″) τῆς μοίρας, ὅπου 1′ = 1/60 τῆς μοίρας καί 1″ = 1/60 τοῦ πρώτου λεπτοῦ.

Ὅταν ἡ ὀρθή δίεδρη διαιρεθεῖ σέ 100 ἴσα μέρη, προκύπτει δίεδρη ἑνός βαθμοῦ (1 grade), πού ἔχει δηλαδή ἀντίστοιχη ἐπίπεδη ἑνός βαθμοῦ. Μέ αὐτή τή μονάδα οἱ δίεδρες μετροῦνται σέ βαθμούς.

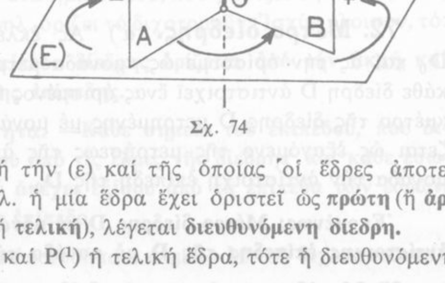
Γενικά, ὅλες οἱ μονάδες μετρήσεως γωνιῶν γίνονται καί μονάδες μετρήσεως τῶν διέδρων.

73. Λόγος δυό διέδρων. Ὀνομάζουμε λόγο τῆς διέδρης D_1 πρός τή δίεδρη D_2 τόν ἀριθμό λ, πού προκύπτει, ὅταν ἡ D_1 μετρηθεῖ μέ μονάδα τήν D_2. Ἀλλά, ὅπως εἴπαμε, ὁ ἀριθμός αὐτός λ προκύπτει, ὅταν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς D_1 μετρηθεῖ μέ μονάδα τήν ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς D_2. Ἑπομένως:

Ὁ λόγος δύο διέδρων εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀντίστοιχων ἐπίπεδων γωνιῶν τους.

74. Συμπληρωματικὲς καὶ παραπληρωματικὲς δίεδρες. **Δύο δίεδρες λέγονται συμπληρωματικές, ὅταν τό ἄθροισμά τους εἶναι ἴσο μέ μιά ὀρθή δίεδρη.**

Δύο δίεδρες λέγονται παραπληρωματικές, ὅταν τό ἄθροισμά τους εἶναι ἴσο μέ μιά πεπλατυσμένη δίεδρη.



Σχ. 74

75. Διευθυνόμενες δίεδρες.— Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθεία (ε) στό χῶρο. Τότε κάθε δίεδρη, πού ἔχει ἀκμή τήν (ε) καί τῆς ὁποίας οἱ ἕδρες ἀποτελοῦν διατεταγμένο ζεῦγος, δηλ. ἡ μία ἕδρα ἔχει ὁριστεῖ ὡς **πρώτη** (ἤ **ἀρχική**) καί ἡ ἄλλη ὡς **δεύτερη** (ἤ **τελική**), λέγεται **διευθυνόμενη δίεδρη.**

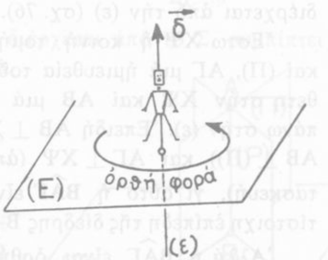
Ἄν ἡ $Π^{(1)}$ εἶναι ἡ ἀρχική καί $P^{(1)}$ ἡ τελική ἕδρα, τότε ἡ διευθυνόμενη δίεδρη παριστάνεται μέ $(Π^{(1)}, P^{(1)})$ (σχ. 74). Ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς διευθυνόμενης δίεδρης εἶναι καί αὐτή διευθυνόμενη γωνία $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ στό κάθετο, πάνω στήν ἀκμή (ε), ἐπίπεδο (Ε) (σχ. 74). Ὡς φορά τῆς διευθυνόμενης δίεδρης ἐννοεῖται ἡ φορά τῆς ἀντίστοιχης διευθυνόμενης ἐπίπεδης γωνίας πάνω στό ἐπίπεδο (Ε).

Ἄν προσανατολίσουμε τό ἐπίπεδο (Ε), ορίζοντας πάνω σ' αὐτό θετική καί ἀρνητική φορά περιστροφῆς, τότε σέ καθεμιά διευθυνόμενη δίεδρη μέ ἀκμή (ε) ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἀλγεβρικό μέτρο: τό ἀλγεβρικό μέτρο τῆς ἀντίστοιχης διευθυνόμενης ἐπίπεδης γωνίας (ἀριθμός θετικός ἤ ἀρνητικός, ἀνάλογα μέ τό ἄν ἡ φορά τῆς $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ συμπίπτει μέ αὐτή, πού ὁρίστηκε στό (Ε) ὡς θετική ἤ ἀρνητική φορά).

Ἀπό τήν παραπάνω ἀντιστοιχία προκύπτει ὅτι στίς διευθυνόμενες δίεδρες, πού ἔχουν τήν ἴδια ἀκμή, μποροῦμε νά ἐπεκτείνουμε ὅλες τίς ἰδιότητες τῶν διευθυνομένων γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου, ὅπως π.χ. μέτρα κατά προσέγγιση $k \cdot 360°$, τή σχέση τοῦ Chasles κ.τ.λ.

76. Δεξιόστροφες καὶ ἀριστερόστροφες διευθυνόμενες δίεδρες.

α′) Οἱ διευθυνόμενες δίεδρες μέ ἀκμή (ε) μποροῦν νά χωριστοῦν σέ *δεξιόστροφες* καί *ἀριστερόστροφες* μέ τή βοήθεια ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$ συγγραμμικοῦ μέ τήν (ε) (σχ. 75) (ἤ, πράγμα πού εἶναι τό ἴδιο, μέ τή βοήθεια μιᾶς ἀπό τίς δυό κατευθύνσεις (φορές) πάνω στήν (ε)), μέ τόν ἑξῆς (ἀνθρωπομετρικό) ὁρισμό: Φανταζόμαστε ἕναν παρατηρητή, πού νά στέκεται πάνω ἀπ' τό ἐπίπεδο (Ε) ὁμορρόπως πρός τό $\widehat{\delta}$ (σχ. 75). Αὐτός βλέπει πάνω στό (Ε) δύο ἀντίθετες φορές, μία πού πάει ἀπό δεξιά του πρός τ' ἀριστερά του, τήν ὁποία ὀνομάζουμε **ὀρθή φορά** καί τήν ἀντίθετη, πού πάει ἀπό ἀριστερά του πρός τά δεξιά του, τήν ὁποία ὀνομάζουμε **ἀνάδρομη φορά.** Ἄν ἡ φορά τῆς διευθυνόμενης δίεδρης $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ εἶναι ἡ ὀρθή φορά, τότε ἡ $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ λέγεται **δεξιόστροφη ὡς πρός τήν κατεύθυνση** *(φορά)* **τοῦ** $\vec{\delta}$. Ἄν ἡ φορά τῆς $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ (δηλ. ἡ φορά τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδής της) συμπίπτει μέ τήν ἀνάδρομη φορά, τότε ἡ διευθυνόμενη δίεδρη $(\Pi^{(1)}, P^{(1)})$ λέγεται **ἀριστερόστροφη ὡς πρός τήν κατεύθυνση** $\vec{\delta}$.



Σχ. 75

β′) **Συμβατικά** ἡ ὀρθή φορά πάνω στό (Ε) σέ σχέση μέ τό διάνυσμα $\vec{\delta}$ θεωρεῖται θετική καί ἡ ἀνάδρομη **ἀρνητική,** ὁπότε οἱ δεξιόστροφες ὡς πρός $\vec{\delta}$ δίεδρες θεωροῦνται θετικές καί οἱ ἀριστερόστροφες ἀρνητικές.

γ′) Τό διάνυσμα $\vec{\delta}$ πάνω στήν (ε) προσανατολίζει ὅλα τά κάθετα ἐπίπεδα στήν (ε). Γιατί πάνω σέ καθένα ἀπ' αὐτά τά ἐπίπεδα μπορεῖ νά ὁριστεῖ ὡς θετική φορά ἡ ὀρθή φορά ὡς πρός τό διάνυσμα $\vec{\delta}$ καί ὡς ἀρνητική φορά ἡ ἀνάδρομη φορά.

ΚΑΘΕΤΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

77. Ὁρισμός.— Δυό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πού τέμνονται, λέγονται κάθετα μεταξύ τους, ὅταν μιά ἀπό τίς τέσσερις δίεδρες, πού σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή δίεδρη. (Δηλ. ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη ὀρθή).

Εἶναι εὐκολονόητο ὅτι τότε, ὄχι μόνο ἡ μία, ἀλλά καί οἱ τέσσερις δίεδρες, πού σχηματίζονται ἀπό τά (Π) καί (Ρ), εἶναι ὀρθές.

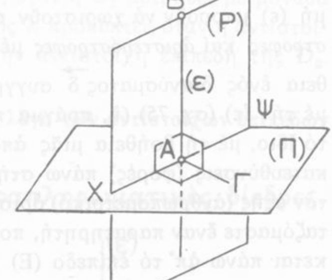
Ἡ σχέση καθετότητας ἐπιπέδων συμβολίζεται μέ τό $\perp$ καί, ἐπειδή εἶναι σχέση συμμετρική, γι' αὐτό (Π) $\perp$ (Ρ) $\Longleftrightarrow$ (Ρ) $\perp$ (Π).

78. Ἰδιότητες τῶν κάθετων ἐπιπέδων.

i) «Δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ τους, ἄν τό ἕνα διέρχεται ἀπό μιά εὐθεία κάθετη στό ἄλλο».

Ἄς πάρουμε μιά εὐθεία (ε) κάθετη στό ἐπίπεδο (Π) σ' ἕνα σημεῖο του Α καί ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο (Ρ), πού διέρχεται ἀπό τήν (ε) (σχ. 76).

Ἔστω ΧΨ ἡ κοινή τομή τῶν (Ρ) καί (Π), ΑΓ μιά ἡμιευθεία τοῦ (Π) κάθετη στήν ΧΨ καί ΑΒ μιά ἡμιευθεία πάνω στήν (ε). Ἐπειδή ΑΒ $\perp$ ΧΨ (γιατί ΑΒ $\perp$ (Π)) καί ΑΓ $\perp$ ΧΨ (ἀπ' τήν κατασκευή), γι' αὐτό ἡ $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης Β—ΧΨ—Γ.



Σχ. 76

Ἀλλά ἡ $\widehat{ΒΑΓ}$ εἶναι ὀρθή, γιατί ἡ ΒΑ ὡς $\perp$ (Π) εἶναι καί $\perp$ ΑΓ. Ἄρα καί ἡ δίεδρη Β — ΧΨ — Γ εἶναι ὀρθή (ἀφοῦ ἔχει ἀντίστοιχη ἐπίπεδη μιά ὀρθή) καί ἐπομένως τά (Ρ) καί (Π) εἶναι κάθετα μεταξύ τους μιά καί σχηματίζουν μιά ὀρθή δίεδρη.

Παρατήρηση. Τό παραπάνω θεώρημα ἀποτελεῖ κριτήριο καθετότητας δυό ἐπιπέδων· μπορεῖ νά διατυπωθεῖ καί ὡς ἑξῆς: Ἄν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κάθετο πάνω σέ μιά εὐθεία ἑνός ἄλλου, τότε εἶναι κάθετο καί στό ἄλλο.

ii) «Ἄν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ τους, κάθε εὐθεία τοῦ ἑνός, πού εἶναι κάθετη στήν κοινή τομή, εἶναι κάθετη καί στό ἄλλο».

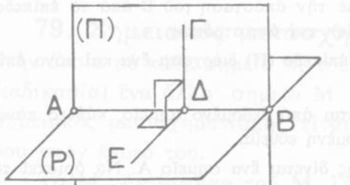
Ἄς πάρουμε δυό κάθετα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) (σχ. 77) καί ΓΔ μιά εὐθεία τοῦ (Π) κάθετη στήν κοινή τομή τους ΑΒ. Θ' ἀποδείξουμε ὅτι ΓΔ $\perp$ (Ρ).

Ἄς φέρουμε μέσα στό (Ρ) τήν εὐθεία ΔΕ $\perp$ ΑΒ. Τότε, ἀφοῦ ΓΔ $\perp$ ΑΒ καί ΔΕ $\perp$ ΑΒ, ἔπεται ὅτι ἡ $\widehat{ΓΔΕ}$ εἶναι ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης Γ — ΑΒ — Ε καί ἐπειδή ἡ δίεδρη Γ — ΑΒ — Ε εἶναι ὀρθή (γιατί (Π) $\perp$ (Ρ) ἀπ' τήν ὑπόθεση), θά ἔχει καί ἀντίστοιχη ἐπίπεδη ὀρθή, δηλ. $\widehat{\Gamma\Delta E} = 1$ ορθ. ἤ $\Gamma\Delta \perp \Delta E$. Ἀπό τά $\Gamma\Delta \perp AB \wedge \Gamma\Delta \perp \Delta E \Rightarrow \Gamma\Delta \perp (P)$.

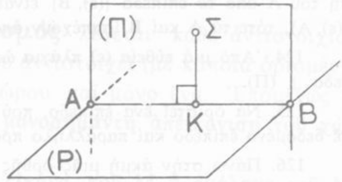
iii) «Ἄν ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι κάθετο σ' ἕνα ἐπίπεδο (Ρ) καί ἀπό ἕνα σημεῖο Σ τοῦ (Π) φέρουμε μιά κάθετη στό (Ρ), τότε ἡ κάθετη αὐτή περιέχεται στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 78)».

Ἔστω ΑΒ ἡ κοινή τομή τῶν (Π) καί (Ρ). Στό ἐπίπεδο (Π) ἄς φέρουμε ἀπό τό Σ τήν κάθετο ΣΚ πάνω στήν ΑΒ. Τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, θά εἶναι $\Sigma K \perp (P)$.

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι ἀπό τό Σ περνᾶ μιά μόνο κάθετος στό (Ρ).



Σχ. 77

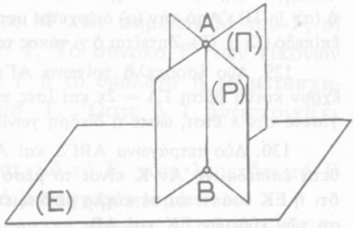


Σχ. 78

Ἐπομένως ἡ κάθετος στό (Ρ), πού διέρχεται ἀπό τό Σ, συμπίπτει μέ τήν κάθετη ΣΚ καί ἄρα βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Π).

iv) «Ἄν δυό ἐπίπεδα, πού τέμνονται, εἶναι κάθετα σ' ἕνα τρίτο, τότε καί ἡ τομή τους εἶναι κάθετη στό τρίτο».

Ἄς θεωρήσουμε τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κάθετα στό ἐπίπεδο (Ε) καί ἔστω ΑΒ ἡ κοινή τομή τῶν (Π) καί (Ρ) (σχ. 79). Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ἐπειδή $A \in (\Pi)$ καί $(\Pi) \perp (E)$, ἡ κάθετη



Σχ. 79

ἀπό τό Α στό (Ε) βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Π). Ἐπίσης, ἐπειδή $A \in (P)$ καί $(P) \perp (E)$, ἡ κάθετη ἀπ' τό Α στό (Ε) βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Ρ). Ἡ κάθετη, λοιπόν, ἀπό τό Α στό (Ε) ἀνήκει καί στό (Π) καί στό (Ρ), ἄρα συμπίπτει μέ τήν κοινή τομή ΑΒ τῶν (Π) καί (Ρ). Ὥστε, $AB \perp (E)$.

Παρατήρηση. Τό παραπάνω θεώρημα διατυπώνεται καί ὡς ἑξῆς: *Ἄν ἕνα ἐπίπεδο εἶναι κάθετο σέ δυό ἄλλα, τότε εἶναι κάθετο καί στήν κοινή τομή τους.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

118. Κάθε ἡμιευθεία τοῦ ἐπιπέδου, πού διχοτομεῖ μιά δίεδρη, ἔχει ἴσες γωνίες κλίσεως πρός τίς ἕδρες τῆς δίεδρης.

119. Κάθε ἡμιευθεία στό ἐσωτερικό μιᾶς δίεδρης, πού ξεκινᾶ ἀπό τήν ἀκμή καί πού ἔχει ἴσες γωνίες κλίσεως ὡς πρός τίς δυό ἕδρες, ἀνήκει στό ἐπίπεδο, πού διχοτομεῖ τή δίεδρη.

120. Κάθε εὐθεία παράλληλη πρός τό ἡμιεπίπεδο, πού διχοτομεῖ μία δίεδρη, ἔχει ἴσες γωνίες κλίσεως ὡς πρός τίς ἕδρες· καί ἀντιστρόφως.

121. Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν εὐθειῶν, πού διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο καί ἔχουν ἴσες γωνίες κλίσεως ὡς πρός τίς ἕδρες μιᾶς δίεδρης.

122. Ἄν μιά εὐθεία ἔχει ἴσες γωνίες κλίσεως ὡς πρός δύο ἐπίπεδα, πού τέμνονται, τότε τά ἴχνη της πάνω στά δύο αὐτά ἐπίπεδα ἰσαπέχουν ἀπό τήν κοινή τομή τῶν δύο ἐπιπέδων.

123. Ἔστω μιά εὐθεία (ε) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπ' αὐτήν. Ἄν ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τό ἐπίπεδο {(ε), Β} εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση τοῦ Β ἀπό τό ἐπίπεδο {(ε), Α}, τότε τά Α καί Β ἰσαπέχουν ἀπό τήν (ε)· καί ἀντιστρόφως.

124. Ἀπό μιά εὐθεία (ε) πλάγια ὡς πρός ἐπίπεδο (Π) διέρχεται ἕνα καί μόνο ἐπίπεδο $\perp$ (Π).

125. Νά ὁριστεῖ ἕνα ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο, κάθετο πάνω σέ δεδομένο ἐπίπεδο καί παράλληλο πρός δεδομένη εὐθεία.

126. Πάνω στήν ἀκμή μιᾶς ὀρθῆς δίεδρης δίνεται ἕνα σημεῖο Α. Νά ὁριστεῖ τό σύνολο τῶν ἐπιπέδων, πού διέρχονται ἀπό τό Α καί τέμνουν τή δίεδρη κατά ὀρθή γωνία.

127. Ἄν μιά εὐθεία εἶναι κάθετη σέ ἐπίπεδο, τότε ἡ προβολή της πάνω σέ ἄλλο ἐπίπεδο, πού τέμνει τό πρῶτο, εἶναι κάθετη στήν κοινή τομή τῶν δύο ἐπιπέδων.

128. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο εὐθεῖες (α) καί (β), πού τέμνουν τό (Π), ἐνῶ ἡ (α) $\perp$ (Π). Ἀπό τήν (α) διέρχεται μεταβλητό ἐπίπεδο (Ρ) καί ἀπό τή (β) διέρχεται ἄλλο ἐπίπεδο (Σ) $\perp$ (Ρ). Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν τριῶν ἐπιπέδων (Π), (Ρ), (Σ).

129. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΓΔ καί ΒΓΔ βρίσκονται σέ δύο κάθετα ἐπίπεδα, ἔχουν κοινή βάση ΓΔ = 2x καί ἴσες πλευρές ΑΓ = ΑΔ = α, ΒΓ = ΒΔ = α. Νά ὑπολογίσετε τήν x ἔτσι, ὥστε ἡ δίεδρη γωνία Γ — ΑΒ — Δ νά εἶναι ὀρθή.

130. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καί ΑΒΕΖ μέ πλευρά α βρίσκονται ἐπάνω σέ δύο κάθετα ἐπίπεδα. i) Ἄν Κ εἶναι τό μέσο τοῦ ΖΔ καί Λ τό μέσο τοῦ ΔΕ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΕΚ ἐφάπτεται σέ κύκλο μέ διάμετρο ΔΛ. ii) Νά ὑπολογίσετε τήν ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν εὐθειῶν ΕΚ καί ΑΒ.

Β'.

131. Ἔχουμε τρεῖς εὐθεῖες (α), (β), (γ) ἀσύμβατες ἀνά δύο καί ὄχι παράλληλες πρός τό ἴδιο ἐπίπεδο. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν (γ) καί (α) ἴση μέ τήν ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν (γ) καί (β), εἶναι: ἡ (γ) νά βρίσκεται ἐπάνω σέ ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες, πού σχηματίζονται, ὅταν φέρουμε ἀπό τίς (α) καί (β) ἐπίπεδα παράλληλα πρός τή (γ). (Ὑποδ· Ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν (γ) καί (α) εἶναι ἡ ἀπόσταση ὁποιουδήποτε σημείου τῆς (γ) ἀπό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τήν (α) καί εἶναι παράλληλο πρός τή (γ)).

132. Ἔχουμε τέσσερις εὐθεῖες (α), (β), (γ), (δ) ἀσύμβατες ἀνά δύο καί ὄχι παράλληλες πρός τό ἴδιο ἐπίπεδο. Ζητεῖται νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία (x)//(δ) καί τέτοια, ὥστε οἱ ἐλάχιστες ἀποστάσεις τῆς (x) ἀπό τίς (α), (β), (γ) νά εἶναι ἴσες.

133. Νά βρεθεῖ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, πού διέρχονται ἀπό δεδομένο σημεῖο καί ἔχουν δεδομένη ἐλάχιστη ἀπόσταση λ ἀπό μιά δεδομένη εὐθεία.

134. Ἔστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ ἄνισες πλευρές τίς ΑΒ, ΑΓ καί ΑΔ ἡ διάμεσός του. Ἄν μιά εὐθεία ΔΧ εἶναι τέτοια, ὥστε, ΕπιπΑΔΧ $\perp$ ΕπιπΒΔΧ, τότε τά ΑΒ καί ΑΓ ἔχουν ἴσες προβολές ἐπάνω σέ κάθε ἐπίπεδο, πού εἶναι κάθετο στή ΔΧ.

135. Πάνω σέ δυό κάθετα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) βρίσκονται ἀντιστοίχως ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ καί μιά ἡμιπεριφέρεια μέ διάμετρο ΑΒ. Σημεῖο Ε μεταβλητό διαγράφει τό τμῆμα ΑΒ = 2R. Σέ κάθε θέση τοῦ Ε θεωροῦμε καί τό συμμετρικό του Ζ ὡς πρός τό μέσο Ο τῆς ΑΒ καθώς καί τά σημεῖα, Η ἐπάνω στήν ἡμιπεριφέρεια καί Θ ἐπάνω στή διαγώνιο ΑΓ, πού προβάλλονται στήν ΑΒ ἀντιστοίχως στά Ε καί Ζ. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΗΘ. (**Ὑποδ.** Ἔστω Ι τό σημεῖο τῆς ΑΓ, πού προβάλλεται στή ΒΓ στό Ε καί Κ τό μέσο τῆς ΑΓ. Τότε τό Μ προβάλλεται στό μέσο Ν τοῦ ΕΘ καί τό Ν ἀνήκει στή ΚΟ ⊥ ΑΒ. Ἐπομένως ΕπιπΚΜΟ ⊥ ΑΒ. Ἐξάλλου ὑπάρχει ἡ σχέση $ΕΗ^2 = ΑΕ.ΕΒ$, ἡ ὁποία συνεπάγεται $ΜΝ^2 = ΚΝ.ΝΟ$, γιατί ΑΕ=ΕΙ = 2ΝΚ, ΕΒ = = ΖΑ = ΖΘ).

ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

79. Σημειακός μετασχηματισμός λέγεται κάθε ἀντιστοιχία, στήν ὁποία σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ (μέ κάποια ὁρισμένη διαδικασία) ἕνα ἄλλο σημεῖο Μ′ τοῦ χώρου καί μόνο ἕνα. Ἐπομένως ὁ σημειακός μετασχηματισμός εἶναι μία **μονοσήμαντη ἀπεικόνιση** τοῦ χώρου στόν ἑαυτό του.

Τό Μ′, ἀντίστοιχο τοῦ Μ, λέγεται **εἰκόνα** τοῦ Μ ἤ **ὁμόλογο** τοῦ Μ στό μετασχηματισμό, ἐνῶ τό Μ λέγεται **ἀρχέτυπο** τοῦ Μ′.

Ἐφόσον ὁριστεῖ ἕνας σημειακός μετασχηματισμός Τ, τότε σέ κάθε σημειοσύνολο (δηλ. σχῆμα) F τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄλλο σημειοσύνολο F′, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς εἰκόνες Μ′ τῶν σημείων Μ τοῦ F, οἱ ὁποῖες παρέχονται μέ τό μετασχηματισμό Τ. Τό σύνολο F′ τῶν εἰκόνων τῶν σημείων τοῦ F λέγεται ἡ **εἰκόνα** τοῦ F ἤ τό **ὁμόλογο** ἤ τό **μετασχηματισμένο** τοῦ F κατά τό μετασχηματισμό Τ. Ὥστε ὁ Τ ἀντιστοιχίζει καί κάθε σχῆμα F μέ ἕνα ἄλλο σχῆμα F′.

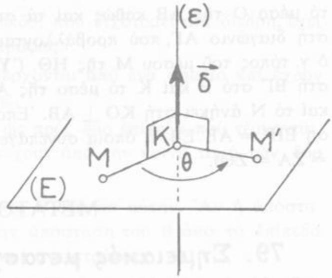
Ἄν συμβεῖ τό σχῆμα F′ νά ταυτίζεται μέ τό F, τότε λέμε ὅτι τό F μένει **ἀναλλοίωτο στό σύνολό του** κατά τό μετασχηματισμό Τ.

Ὅταν ἡ ἀπόσταση $Μ_1Μ_2$ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ χώρου εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση $Μ'_1Μ'_2$ τῶν εἰκόνων τους, τότε ὁ μετασχηματισμός λέγεται **ἰσομετρικός**. Ὁ ἰσομετρικός μετασχηματισμός διατηρεῖ τά μήκη καί κατά συνέπεια καί τίς γωνίες.

Ἔστω ἕνας μετασχηματισμός Τ. Ἄν ὑπάρχει ἕνας ἄλλος μετασχηματισμός Τ′, πού μεταφέρει τό Μ′ στό Μ, δηλ. κάθε εἰκόνα τήν πηγαίνει στό ἀρχέτυπό της, τότε ὁ Τ′, λέγεται **ἀντίστροφος μετασχηματισμός τοῦ Τ.**

80. Στροφή γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα. α′) **Ἄν δοθοῦν μιά εὐθεία (ε), ἕνα προσανατολιστικό διάνυσμα $\vec{δ}$ ἐπάνω στήν (ε) (σχ. 80) καί ἕνας πραγματικός ἀριθμός θ, ὀνομάζεται «στροφή γύρω ἀπό ἄξονα (ε) κατά γωνία θ» ὁ σημειακός μετασχηματισμός, κατά τόν ὁποῖο σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄλλο σημεῖο Μ′ τέτοιο, ὥστε: τά Μ καί Μ′ νά ἀνήκουν σέ ἕνα ἐπίπεδο (Ε) κάθετο στήν (ε) σέ ἕνα σημεῖο της Κ καί νά ἰσχύουν ἐπί πλέον οἱ ἰσότητες: ΚΜ = ΚΜ′ καί γωνία $(\vec{ΚΜ}, \vec{ΚΜ'}) = θ$.**

Τό ἐπίπεδο (Ε) προσανατολίζεται ἀπό τό $\vec{\delta}$, δηλ. θεωρεῖται ὡς θετική φορά περιστροφῆς μέσα στό (Ε) ἡ ὀρθή φορά ἀναφορικά πρός τό $\vec{\delta}$ (βλ. § 76).



Σχ. 80

Ἀλλά καί χωρίς τό $\vec{\delta}$ μποροῦμε νά καθορίσουμε ἐπάνω στό (Ε) ἕναν αὐθαίρετο προσανατολισμό (δηλ. νά ὁρίσουμε αὐθαίρετα τή θετική καί ἀρνητική φορά περιστροφῆς) καί ὁ προσανατολισμός αὐτός νά ἰσχύει γιά ὅλα τά ἐπίπεδα, πού εἶναι κάθετα στήν (ε). Ἡ στροφή γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα (ε) κατά γωνία θ παριστάνεται μέ:

$$\text{Στρ. } \{(\varepsilon), \theta\}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι:

1ο. Ὅλα τά σημεῖα τῆς (ε) παραμένουν ἀναλλοίωτα κατά τή στροφή (δηλ. ἔχουν ἀντίστοιχα τούς ἑαυτούς τους). Αὐτό εἶναι συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ.

2ο. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός εἶναι πάλι στροφή, ἀλλά κατά γωνία $-\theta$.

β′) Ἄξονας ἐπαναφορᾶς. Λέμε ὅτι μία εὐθεία (ε) εἶναι ἄξονας ἐπαναφορᾶς τάξεως ν τοῦ σχήματος F, ὅταν τό F μένει ἀναλλοίωτο στό σύνολό του κατά τή στροφή:

$$\textbf{Στρ.} \left\{(\varepsilon), \frac{360^0}{\nu}\right\}$$

Δηλαδή μέ στροφή γύρω ἀπό τήν (ε) κατά γωνία 360°/ν τό σχῆμα F ἐφαρμόζει στόν ἑαυτό του. Ἔτσι π.χ. μία εὐθεία (ε), πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο κανονικοῦ πενταγώνου καί πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο τοῦ πενταγώνου, εἶναι ἄξονας ἐπαναφορᾶς τάξεως 5 τοῦ πενταγώνου αὐτοῦ.

81. Μεταφορά. **Ἄν δοθεῖ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\delta}$, ὀνομάζεται μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$ ὁ σημειακός μετασχηματισμός, πού προσεταιρίζει σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ χώρου ἕνα ἄλλο σημεῖο Μ′ τέτοιο, ὥστε:**

$$\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}} \quad \text{(Διανυσματική ἰσότητα).}$$

Ἡ μεταφορά κατά $\vec{\delta}$ παριστάνεται: Μετ. $(\vec{\delta})$.

Κατά τή μεταφορά κανένα σημεῖο δέ μένει στή θέση του, ἐφόσον $\vec{\delta} \neq 0$. Ἄν πάλι $\vec{\delta} = 0$, ἡ μεταφορά καταντᾶ **ταυτοτικός μετασχηματισμός**, δηλ. ὅλα τά σημεῖα τοῦ χώρου μένουν ἀκίνητα (ἔχουν εἰκόνες τούς ἑαυτούς τους).

82. Μετατόπιση (ἤ «κίνηση»).—α΄) Παραδεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει ἕνα σύνολο σημειακῶν μετασχηματισμῶν, πού ἔχουν τήν κοινή ἰδιότητα: ὁ καθένας μεταφέρει (εἰκονίζει) κάθε σχῆμα F σέ $\boxed{\text{ἴσο}}$ (δηλ. ἐφαρμόσιμο) σχῆμα F΄. Οἱ μετασχηματισμοί αὐτοί λέγονται «μετατοπίσεις» ἤ «κινήσεις» (ἤ στερεές κινήσεις) καί περιγράφονται ἀπό μιά ὁμάδα ἀξιωμάτων, μέ τά ὁποῖα δέ θ᾽ ἀσχοληθοῦμε. Πάντως τ᾽ ἀξιώματα αὐτά ἐναρμονίζονται μέ τήν ἐμπειρία, πού ἔχουμε ἀπό τήν κίνηση τῶν φυσικῶν στερεῶν καί γι᾽ αὐτό οἱ ὀνομασίες «κίνηση» ἤ «μετατόπιση» ἤ ἀκόμη «στερεά κίνηση» ἁρμόζουν ἐξίσου.

β΄) Γιά τίς μετατοπίσεις (ἤ κινήσεις) ἀποδεικνύεται τό ἑξῆς θεώρημα:

«Κάθε μετατόπιση εἶναι ἤ μεταφορά ἤ στροφή γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα ἤ σύνθεση (δηλ. διαδοχική ἐκτέλεση) τῶν δύο αὐτῶν».

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος βγαίνει ἔξω ἀπό τά ὅρια τοῦ παρόντος βιβλίου. Εἴμαστε ὅμως ὑποχρεωμένοι νά τό χρησιμοποιήσουμε σέ μερικά ζητήματα τῆς στερεομετρίας.

γ΄) Οἱ μετασχηματισμοί: στροφή γύρω ἀπό ἄξονα (§ 80) καί μεταφορά (§ 81) εἶναι, σύμφωνα μέ τό παραπάνω θεώρημα, μετατοπίσεις τοῦ χώρου καί ἑπομένως τό σχῆμα, πού προκύπτει μέ στροφή ἤ μεταφορά τοῦ F, εἶναι ἴσο μέ τό F.

δ΄) Τέλος ἄς ἔχουμε ὑπόψη μας καί τό ἑξῆς θεώρημα:

«Ἄν σέ μιά μετατόπιση τοῦ χώρου ἕνα σημεῖο Ο παραμένει ἀκίνητο, τότε ἡ μετατόπιση εἶναι στροφή γύρω ἀπό ἄξονα, πού διέρχεται ἀπό τό Ο».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Ι. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΑΞΟΝΑ

83. Ἀξονική συμμετρία. **α΄)—Δύο σημεῖα M καί M΄ λέγονται συμμετρικά ὡς πρός μία εὐθεία (ε), ὅταν ἡ (ε) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος MM΄.**

β΄) «Ἀξονική συμμετρία», ὡς πρός μία εὐθεία (ε) στό χῶρο, λέγεται ὁ σημειακός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος σέ κάθε σημεῖο M ἀντιστοιχίζει τό συμμετρικό του M΄ ὡς πρός τήν εὐθεία (ε).

(Σημειώνεται: Συμμ. {(ε)}).

Ἡ (ε) λέγεται **ἄξονας συμμετρίας.**

γ΄) Δυό σχήματα F καί F΄ λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα, ὅταν τό ἕνα εἶναι ὁμόλογο τοῦ ἄλλου σέ μιά ἀξονική συμμετρία (τό F΄ εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων, πού εἶναι συμμετρικά τῶν σημείων τοῦ F).

δ΄) Ἡ ἀξονική συμμετρία συμπίπτει μέ στροφή γύρω ἀπό τόν ἄξονα συμμετρίας κατά γωνία 180° ἤ —180° (βλέπε ὁρισμό τῆς στροφῆς § 80). Ἀλλά ἐπειδή ἡ στροφή εἶναι κίνηση (§ 82, β΄), γι᾿ αὐτό **δυό σχήματα τοῦ χώρου, πού εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα, εἶναι ἴσα** (ἐφαρμόσιμα).

ε΄) **Ἄξονας συμμετρίας ἑνός σχήματος.** Λέμε ὅτι **μιά εὐθεία (ε) εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος F, ὅταν κάθε σημεῖο τοῦ F ἔχει τό συμμετρικό του ὡς πρός τήν (ε) πάλι ἐπάνω στό F.** Δηλαδή, ὅταν τό σχῆμα F μένει ἀναλλοίωτο κατά τήν ἀξονική συμμετρία ὡς πρός (ε), τότε ἡ (ε) εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ F. Ἤ ἀλλιῶς: Ὅταν τό F ταυτίζεται μέ τό συμμετρικό του ὡς πρός (ε), ἡ (ε) εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ F.

ς΄) Ὁ ἄξονας συμμετρίας ἑνός σχήματος (ἄν ὑπάρχει τέτοιος) εἶναι **ἄξονας ἐπαναφορᾶς τάξεως 2** (βλ. § 80, β΄).

ΙΙ. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟ

84. Ὁρισμοί καί ἰδιότητες. **α΄) Δυό σημεῖα M καί M΄ λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο (Π), ὅταν τό (Π) εἶναι μεσοκάθετο τοῦ τμήματος MM΄.**

β΄) Ἄν δοθεῖ ἕνα ἐπίπεδο (Π), τότε λέγεται συμμετρία ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π) ἕνας σημειακός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος σέ κάθε σημεῖο M

τοῦ χώρου προσεταιρίζει τό συμμετρικό του Μ΄ ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π). (Σημειώνεται: Συμμ. {(Π)}).

Κατά τό μετασχηματισμό αὐτό καί τό Μ εἶναι τό ἀντίστοιχο τοῦ Μ΄ καί ὅλα τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι διπλά σημεῖα (ἀντιστοιχοῦν καθένα στόν ἑαυτό του).

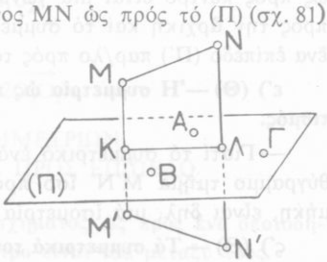
γ΄) Δυό σχήματα F καί F΄ λέγονται **συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο (Π),** ὅταν τό ἕνα εἶναι τό σύνολο τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ ἄλλου ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π). (Τό ἕνα εἶναι τό ὁμόλογο τοῦ ἄλλου κατά τή συμμετρία ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π)).

Τό συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός (Π) λέγεται καί *«κατοπτρικό»* τοῦ σχήματος F ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π).

δ΄) **Ἐπίπεδο συμμετρίας ἑνός σχήματος.** Ἄν γιά ἕνα σχῆμα F ὑπάρχει ἐπίπεδο (Π) τέτοιο, ὥστε τό συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός (Π) νά εἶναι πάλι τό F, τότε τό (Π) λέγεται **ἐπίπεδο συμμετρίας τοῦ σχήματος F.**

ε΄) (Θ) —Ἡ συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο εἶναι ἰσομετρικός μετασχηματισμός.

Ἀπόδειξη. Τό συμμετρικό ἑνός τμήματος ΜΝ ὡς πρός τό (Π) (σχ. 81) εἶναι ἕνα τμῆμα Μ΄Ν΄ ἴσο μέ τό ΜΝ (γιατί ΜΝ καί Μ΄Ν΄ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν εὐθεία ΚΛ, πού συνδέει τά μέσα τῶν ΜΜ΄ καί ΝΝ΄). Δηλ. κατά τή συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο τά μήκη διατηροῦνται. Αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ μετασχηματισμός αὐτός εἶναι ἰσομετρικός («ισομετρία»). Ἀφοῦ διατηροῦνται τά μήκη, διατηροῦνται καί οἱ γωνίες.



Σχ. 81

ς΄) **Παρατήρηση.** Στό σχ.81 βλέπουμε ὅτι τό συμμετρικό τῆς εὐθείας ΜΝ ὡς πρός (Π) συμπίπτει μέ τό συμμετρικό τῆς εὐθείας ΜΝ ὡς πρός τήν εὐθεία ΚΛ. Ἄρα τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας ὡς πρός ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι μία εὐθεία (μέ τήν ἴδια κλίση ὡς πρός τό (Π)). Συνεπῶς καί τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου (Ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδο (Π) εἶναι ἐπίπεδο (Ε΄). Τέλος, ἀφοῦ οἱ γωνίες διατηροῦνται, ἕπεται ὅτι καί τό συμμετρικό μιᾶς δίεδρης γωνίας ὡς πρός ἐπίπεδο (Π) εἶναι μιά ἴση δίεδρη.

III. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟ

85. Ὁρισμοί καί ἰδιότητες. — α΄) Δυό σημεῖα Μ καί Μ΄ τοῦ χώρου λέγονται συμμετρικά ὡς πρός ἕνα τρίτο σημεῖο Ο, ὅταν τό Ο εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΜΜ΄.

β΄) Ἄν δοθεῖ ἕνα σταθερό σημεῖο Ο στό χῶρο, τότε λέμε συμμετρία ὡς πρός κέντρο Ο ἕνα σημειακό μετασχηματισμό, ὁ ὁποῖος σέ κάθε σημεῖο

Μ τοῦ χώρου προσεταιρίζει τό συμμετρικό Μ′ τοῦ Μ ὡς πρός τό Ο. (Σημειώνεται: Συμμ. (Ο)).

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός ἔχει **ἕνα μόνο διπλό σημεῖο,** τό Ο (δηλ. τό *«κέντρο συμμετρίας»*). Μόνο τό Ο ἔχει ἀντίστοιχο τόν ἑαυτό του. Κάθε ἄλλο σημεῖο Μ ἔχει ἀντίστοιχο (συμμετρικό) ἕνα σημεῖο Μ′ διαφορετικό ἀπό τό Μ. Σέ κάθε σχῆμα F τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄλλο σχῆμα F′, πού λέγεται συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός Ο.

γ′) **Κέντρο συμμετρίας ἑνός σχήματος.** Ἄν γιά ἕνα σχῆμα F ὑπάρχει σημεῖο Ο τέτοιο, ὥστε τό συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός Ο νά εἶναι ἀκριβῶς τό ἴδιο τό F, τότε τό Ο λέγεται **κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος F.**

(Κάθε σημεῖο τοῦ F ἔχει τότε τό συμμετρικό του ὡς πρός Ο πάλι πάνω στό F ἤ ἀλλιῶς τό F μένει ἀναλλοίωτο κατά τή συμμετρία ὡς πρός Ο).

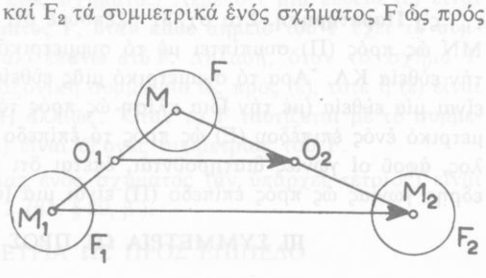
δ′) Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας (ε) ὡς πρός κέντρο Ο εἶναι μιά εὐθεία (ε′) παράλληλη πρός τήν (ε)· οἱ (ε) καί (ε′) ἰσαπέχουν ἀπ᾽ τό Ο. Τό συμμετρικό ἑνός διανύσματος ὡς πρός Ο εἶναι διάνυσμα ἀντίθετο. (Γνωστά ἀπ᾽ τήν ἐπιπεδομετρία). Ἀπ᾽ αὐτά ἕπεται ὅτι τό συμμετρικό μιᾶς γωνίας ὡς πρός κέντρο εἶναι μιά γωνία ἴση μέ πλευρές παρ/λες καί ἀντίρροπες πρός τήν ἀρχική καί τό συμμετρικό ἑνός ἐπιπέδου (Π) ὡς πρός Ο εἶναι ἕνα ἐπίπεδο (Π′) παρ/λο πρός τό (Π), πού ἀπέχει ἀπ᾽ τό Ο ὅσο καί τό (Π).

ε′) **(Θ) — Ἡ συμμετρία ὡς πρός κέντρο εἶναι ἰσομετρικός μετασχηματισμός.**

— Γιατί τό συμμετρικό ἑνός τμήματος ΜΝ ὡς πρός Ο εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα Μ′Ν′ ἴσο πρός ΜΝ. Συνεπῶς ἡ Συμμ. (Ο) διατηρεῖ τά μήκη, εἶναι δηλ. μιά ἰσομετρία (ἤ ἰσομετρικός μετασχηματισμός).

ς′) **(Θ) — Τά συμμετρικά τοῦ ἴδιου σχήματος ὡς πρός δυό διαφορετικά κέντρα εἶναι ἴσα μεταξύ τους.**

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι F_1 καί F_2 τά συμμετρικά ἑνός σχήματος F ὡς πρός κέντρα O_1, O_2 ἀντιστοίχως (σχ. 82) καί M_1 ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ F_1. Τότε τό συμμετρικό Μ τοῦ M_1 ὡς πρός O_1 ἀνήκει στό σχῆμα F, συμμετρικό τοῦ F_1 καί τό συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός O_2 ἀνήκει στό σχῆμα F_2, συμμετρικό τοῦ F_1. Ἐπειδή τά O_1, O_2 εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου MM_1M_2, ἔχουμε:



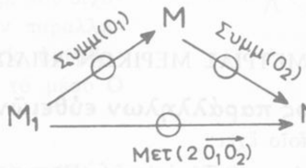
Σχ. 82

$$\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{O_1O_2} \quad (1)$$

Ἡ (1) δείχνει ὅτι κάθε σημεῖο M_1 τοῦ F_1 ἔρχεται μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$ σέ ἕνα σημεῖο τοῦ F_2. Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο M_2 τοῦ F_2, ὅπως βλέπουμε μέ ἀντίστροφη πορεία, προέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο M_1 τοῦ F_1 μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$. Ἑπομένως τό F_2 εἶναι ὁμόλογο τοῦ F_1 σέ μιά μεταφορά μέ «διευθύνον» διάνυσμα $2\cdot\overrightarrow{O_1O_2}$. Ἐπειδή ἡ μεταφορά εἶναι μετατόπιση (κίνηση), γι' αὐτό $F_1 = F_2$ (§ 82, γ').

ζ') Τό γινόμενο δυό κεντρικῶν συμμετριῶν. Τό σχ. 82 δείχνει ὅτι «**ἡ ἀλλεπάλληλη ἐκτέλεση (γινόμενο) δυό συμμετριῶν ὡς πρός κέντρα O_1 καί O_2 ἰσοδυναμεῖ μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $2\overrightarrow{O_1O_2}$**».

Σχηματικά:



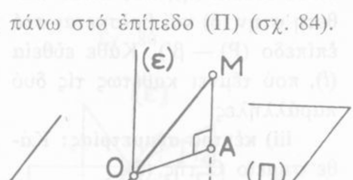
Σχ. 83

Συμβολικά: Συμμ. $(O_2)\circ$ Συμμ. $(O_1)=$ Μετ. $(2\overrightarrow{O_1O_2})$.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΕΝΤΡΟ ΚΑΙ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟ

86. (Θ) — Τά συμμετρικά τοῦ ἴδιου σχήματος ὡς πρός ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο καί ὡς πρός ὁποιοδήποτε κέντρο εἶναι ἴσα μεταξύ τους.

Ἀπόδειξη. Ι. Τό κέντρο O βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο (Π) (σχ. 84). Ἄς θεωρήσουμε ἕνα σημεῖο M, πού διατρέχει ἕνα σχῆμα F. Τότε τό συμμετρικό M_1 τοῦ M ὡς πρός τό (Π) διαγράφει ἕνα σχῆμα F_1, συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός τό (Π) καί τό συμμετρικό M_2 τοῦ M ὡς πρός O διαγράφει ἕνα σχῆμα F_2, συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός O. Θά ἀποδείξουμε ὅτι $F_1 = F_2$. Γιά τό σκοπό αὐτό φέρνουμε στό O μιά εὐθεία (ε) $\perp$(Π), ἡ ὁποία, ἐπειδή περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς πλευρᾶς MM_2 τοῦ τριγώνου M_1M_2M καί ἐπειδή εἶναι παρ/λη πρός τή MM_1, περνᾶ καί ἀπό τό μέσο τοῦ τμήματος M_1M_2. Ἄν A εἶναι τό μέσο τοῦ MM_1, τότε $A \in (П)$ καί $OA \parallel M_1M_2$.



Σχ. 84

Ἐπειδή (ε) $\perp$ OA $\Rightarrow$ (ε) $\perp M_1M_2$. Ἑπομένως ἡ σταθερή εὐθεία (ε) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ M_1M_2, δηλαδή τά M_1 καί M_2 εἶναι συμμετρικά πάντοτε ὡς πρός τήν (ε), ἄρα καί τά σχήματα, πού διαγράφονται ἀπ' αὐτά, τά F_1, F_2, εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα (ε), ἄρα εἶναι ἴσα (§ 83).

II. Τό κέντρο O βρίσκεται ἔξω ἀπ' τό ἐπίπεδο (Π). Ἄς πάρουμε ἕνα σταθερό σημεῖο O_1 πάνω στό (Π). Τότε σύμφωνα μέ τό προηγούμενο:

(1) Τό συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός (Π) = συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός τό O_1. Ἀλλά γνωρίζουμε (§ 85, ς'), ὅτι:

(2) Τό συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός O_1 = συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός O. Ἀπό τίς (1) καί (2) ἕπεται ὅτι:

Τό συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός (Π) = συμμετρικό τοῦ F ὡς πρός O.

Παρατήρηση. Ἀπό τό παραπάνω θεώρημα βλέπουμε ὅτι τό συμμετρικό ἑνός σχήματος F ὡς πρός κέντρο εἶναι τό «κατοπτρικό» τοῦ F (§ 84, γ') σέ ἄλλη θέση.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΠΛΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

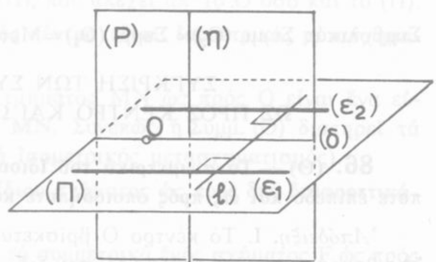
87. Ἕνα ζεῦγος παράλληλων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) (σχ. 85) ἀποτελεῖ σχῆμα, τό ὁποῖο ἔχει:

i) **ἐπίπεδα συμμετρίας:** α') Τό ἐπίπεδο (Π), πού ὁρίζεται ἀπό τίς δυό παράλληλες.

— β') Κάθε ἐπίπεδο κάθετο στίς (ε_1) καί (ε_2). — γ') Τό ἐπίπεδο (Ρ), πού διέρχεται ἀπό τή μεσοπαράλληλη (δ) καί εἶναι κάθετο στό (Π)·

ii) **ἄξονες συμμετρίας:** α') Κάθε εὐθεία (η), πού εἶναι κάθετη στήν (δ) καί βρίσκεται στό ἐπίπεδο (Ρ) — β') Κάθε εὐθεία (*l*), πού τέμνει καθέτως τίς δυό παράλληλες·

iii) **κέντρα συμμετρίας:** Κάθε σημεῖο O τῆς (δ).

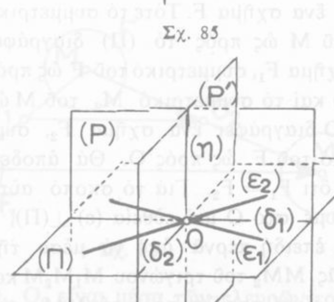


Σχ. 85

88. Ἕνα ζεῦγος εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), πού τέμνονται (σχ. 86) ἀποτελεῖ σχῆμα, πού ἔχει:

i) **ἐπίπεδα συμμετρίας:** α') Τό ἐπίπεδο (Π), πού ὁρίζεται ἀπό τίς δυό εὐθεῖες πού τέμνονται.

— β') Τά ἐπίπεδα (Ρ) καί



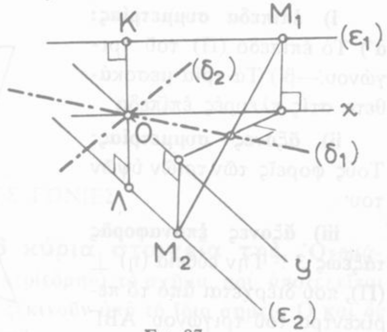
Σχ. 86

(Ρ′), πού εἶναι κάθετα στό (Π) καί διέρχονται ἀπό τίς εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2), πού διχοτομοῦν τίς γωνίες τῶν (ε_1), (ε_2)·

ii) ἄξονες συμμετρίας: α′) Τίς εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2).— β′) Τήν κοινή κάθετο (η) τῶν (ε_1) καί (ε_2)·

iii) κέντρο συμμετρίας: Τήν τομή τους Ο.

89. Ἕνα ζεῦγος ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) (σχ. 87) ἀποτελεῖ σχῆμα, πού ἔχει **ἄξονες συμμετρίας:** α′) Τήν κοινή κάθετο ΚΛ τῶν δυό ἀσύμβατων. — β′) Τίς εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2), πού διχοτομοῦν τίς γωνίες τῶν παραλλήλων Οx καί Οy πρός τίς ἀσύμβατες, πού ἄγονται ἀπό τό μέσο Ο τοῦ ΚΛ.



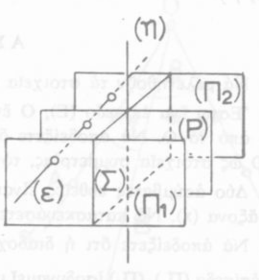
Σχ. 87

90. Ἕνα ζεῦγος παράλληλων ἐπιπέδων (Π_1), (Π_2) (σχ. 88) ἀποτελεῖ σχῆμα, πού ἔχει:

i) ἐπίπεδα συμμετρίας : α′) Τό μεσοπαράλληλο ἐπίπεδο (Ρ).— β′) Κάθε ἐπίπεδο (Σ) κάθετο στό (Ρ)·

ii) ἄξονες συμμετρίας: α′) Κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).— β′) Κάθε εὐθεία, πού τέμνει καθέτως τά δυό ἐπίπεδα·

iii) κέντρα συμμετρίας : Ὅλα τά σημεῖα τοῦ (Ρ).

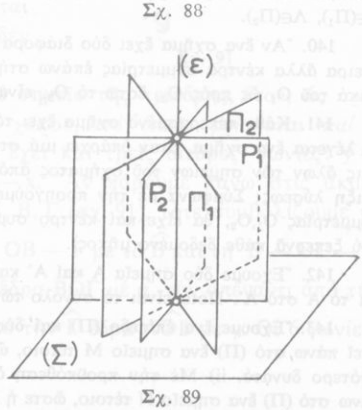


Σχ. 88

91. Ἕνα ζεῦγος ἐπιπέδων (Π_1),(Π_2), πού τέμνονται (σχ. 89), ἀποτελεῖ σχῆμα, πού ἔχει:

i) ἐπίπεδα συμμετρίας: α′) Τά ἐπίπεδα (P_1), (P_2), πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες γωνίες, τίς ὁποῖες σχηματίζουν τά ἐπίπεδα (Π_1), (Π_2), πού τέμνονται.

β′) Κάθε ἐπίπεδο (Σ) κάθετο στήν κοινή τομή τους (ε)·



Σχ. 89

ii) ἄξονες συμμετρίας: α΄) Τήν τομή τους (ε).—β΄) Κάθε εὐθεία, πού βρίσκεται μέσα στό (P_1) ἤ στό (P_2) καί εἶναι κάθετη στήν (ε)·

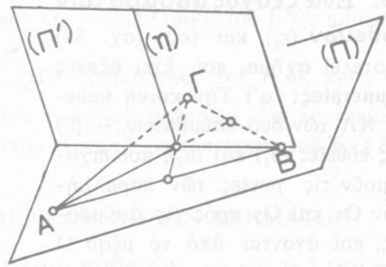
iii) κέντρα συμμετρίας: Τά σημεῖα τῆς (ε).

92. Τό ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 90) ἔχει:

i) ἐπίπεδα συμμετρίας: α΄) Τό ἐπίπεδο (Π) τοῦ τριγώνου.—β΄) Τά τρία μεσοκάθετα στίς πλευρές ἐπίπεδα·

ii) ἄξονες συμμετρίας: Τούς φορεῖς τῶν τριῶν ὑψῶν του·

iii) ἄξονες ἐπαναφορᾶς τάξεως 3 : Τήν εὐθεία (η) ⊥ (Π), πού διέρχεται ἀπό τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (βλ. § 82, γ΄).



Σχ. 90

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

136. Νά μελετηθοῦν τά στοιχεῖα συμμετρίας ἑνός τετραγώνου.

137. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Ε), Ο ἕνα σημεῖο του καί (ε) μιά εὐθεία ⊥(Ε), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό Ο. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἕνα σχῆμα F ἔχει δύο ἀπό τά στοιχεῖα: (Ε), (ε), Ο ὡς στοιχεῖα συμμετρίας, τότε θά ἔχει καί τό τρίτο ὡς στοιχεῖο συμμετρίας.

138. Δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες εἶναι πάντοτε συμμετρικές μεταξύ τους ὡς πρός κατάλληλο ἄξονα (x). Νά κατασκευάσετε τόν ἄξονα ἤ τούς ἄξονες (x).

139. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διαδοχική ἐκτέλεση δύο συμμετριῶν ὡς πρός δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π_1), (Π_2) ἰσοδυναμεῖ μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $2\overrightarrow{K\Lambda}$, ὅπου $K\Lambda \perp (\Pi_1)$, $K \in (\Pi_1)$, $\Lambda \in (\Pi_2)$.

140. Ἄν ἕνα σχῆμα ἔχει δύο διάφορα κέντρα συμμετρίας O_1 καί O_2, τότε ἔχει καί ἄπειρα ἄλλα κέντρα συμμετρίας ἐπάνω στήν εὐθεία O_1O_2. (**Ὑποδ.** Δεῖξτε ὅτι τό συμμετρικό τοῦ O_1 ὡς πρός O_2, ἔστω τό O_3, εἶναι πάλι κέντρο συμμετρίας).

141. Κάθε πεπερασμένο σχῆμα ἔχει τό πολύ ἕνα κέντρο συμμετρίας. (Πεπερασμένο λέγεται ἕνα σχῆμα, ὅταν ὑπάρχει μιά σταθερή ἀπόσταση c τέτοια, ὥστε οἱ ἀποστάσεις ὅλων τῶν σημείων τοῦ σχήματος ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο νά εἶναι $\leqslant c$). (Ὑπόδειξη λύσεως: Σύμφωνα μέ τήν προηγούμενη ἄσκηση, ἄν τό σχῆμα εἶχε δύο κέντρα συμμετρίας O_1, O_2, θά εἶχε καί κέντρο συμμετρίας, πού ἀπέχει ἀπό τό O_1 ἀπόσταση, πού ξεπερνᾶ κάθε δεδομένο μῆκος).

142. Ἔχουμε δύο σημεῖα Α καί Α΄ καί ἔστω (x) ὁ ἄξονας στροφῆς, ἡ ὁποία φέρνει τό Α στό Α΄. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν (x);

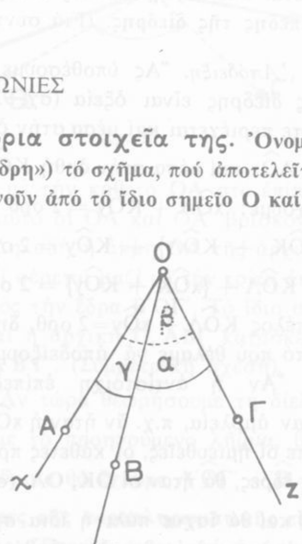
143. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπ᾽ αὐτό. i) Νά ὁριστεῖ πάνω στό (Π) ἕνα σημεῖο Μ τέτοιο, ὥστε τό ἄθροισμα ΜΑ+ΜΒ νά εἶναι τό μικρότερο δυνατό. ii) Μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τό (Π), νά ὁριστεῖ πάνω στό (Π) ἕνα σημεῖο Ν τέτοιο, ὥστε ἡ διαφορά |ΝΑ — ΝΒ| νά εἶναι ἡ μεγαλύτερη δυνατή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V

ΣΤΕΡΕΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Ι. ΤΡΙΕΔΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

93. Ἡ τρίεδρη καί τά 6 κύρια στοιχεῖα της. **Ὀνομάζεται τρίεδρη στερεά γωνία (ἤ ἁπλά «τρίεδρη») τό σχῆμα, πού ἀποτελεῖται ἀπό τρεῖς ἡμιευθεῖες Ox, Oy, Oz, πού ξεκινοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο O καί δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, καθώς καί ἀπό τίς ἀκτίνες τῶν κυρτῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$, καί $z\widehat{O}x$.**



Σχ. 91

Οἱ Ox, Oy, Oz λέγονται **ἀκμές**, οἱ τρεῖς γωνίες $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}z$ καί $z\widehat{O}x$ λέγονται **ἔδρες** καί τό O λέγεται **κορυφή** τῆς τρίεδρης, ἡ ὁποία συμβολίζεται μέ O, xyz. Ὅσες φορές δέν ὑπάρχει φόβος συγχύσεως, θά λέμε ἐπίσης **ἔδρες** τά ἐπίπεδα xOy, yOz, zOx.

Καθεμιά ἀκμή λέμε ὅτι βρίσκεται **ἀπέναντι** ἀπό τήν ἔδρα, στήν ὁποία δέν ἀνήκει.

Ἕνα σημεῖο M λέγεται **ἐσωτερικό σημεῖο τῆς τρίεδρης**, *ὅταν, ὡς πρός καθεμιά ἔδρα, βρίσκεται στό μέρος τοῦ χώρου, στό ὁποῖο βρίσκεται καί ἡ ἀπέναντι ἀκμή.* — Ἡ τρίεδρη O, xyz ἔχει καί τρεῖς δίεδρες γωνίες: y — Ox — z, x — Oz — y καί z — Oy — x. Ἄν πάρουμε πάνω στίς ἀκμές Ox, Oy, Oz, ἀντιστοίχως, τά σημεῖα A, B, Γ (σχ. 91), τότε συμβολίζουμε τή δίεδρη B — OA — Γ μέ τό $\widehat{A}$, τήν A — OB — Γ μέ τό $\widehat{B}$ καί τή B — OΓ — A μέ τό $\widehat{\Gamma}$, ἐνῶ τήν ἀπέναντι ἀπό τήν $\widehat{A}$ ἔδρα $B\widehat{O}\Gamma$ μέ α, τήν ἀπέναντι ἀπό τήν $\widehat{B}$ ἔδρα $A\widehat{O}\Gamma$ μέ β καί τήν ἀπέναντι ἀπό τήν $\widehat{\Gamma}$ ἔδρα $A\widehat{O}B$ μέ γ. Οἱ 6 γωνίες:

$$\begin{cases} \widehat{\alpha},\ \widehat{\beta},\ \widehat{\gamma} \text{ (ἔδρες)} \\ \widehat{A},\ \widehat{B},\ \widehat{\Gamma} \text{ (ἀπέναντι δίεδρες)} \end{cases}$$

ἀποτελοῦν τά **6 κύρια στοιχεῖα τῆς τρίεδρης.** Τά μέτρα τους, ἄν μετρηθοῦν μέ τήν ἴδια μονάδα, παριστάνονται μέ:

$$\{\alpha, \beta, \gamma, A, B, \Gamma\}$$

94. Παραπληρωματικές τρίεδρες. α΄) Λῆμμα.—**Ἄν σέ ἕνα σημεῖο Ο τῆς ἀκμῆς μιᾶς δίεδρης γωνίας φέρουμε ἡμιευθεῖες Οx, Oy κάθετες στίς ἕδρες τῆς δίεδρης καί οἱ ὁποῖες νά βρίσκονται ἡ καθεμιά πρός τό μέρος τοῦ χώρου, στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ ἄλλη ἕδρα, τότε ἡ γωνία, πού σχηματίζεται ἀπό τίς ἡμιευθεῖες αὐτές, εἶναι παραπληρωματική τῆς ἀντίστοιχης ἐπίπεδης τῆς δίεδρης.** (Γιά συντομία: «παραπληρωματική τῆς δίεδρης»).

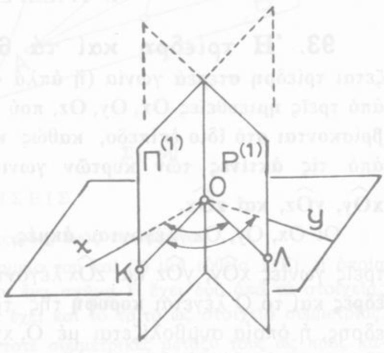
Ἀπόδειξη. Ἄς ὑποθέσουμε πρῶτα ὅτι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη $K\widehat{O}\Lambda$ τῆς δίεδρης εἶναι ὀξεία (σχ. 92). Τότε περιέχεται καί μέσα στήν ὀρθή $\Lambda\widehat{O}x$ καί μέσα στήν ὀρθή $K\widehat{O}y$. Ἔχουμε: $x\widehat{O}\Lambda + K\widehat{O}y = 2$ ορθ ἤ

$\{x\widehat{O}K + K\widehat{O}\Lambda\} + K\widehat{O}y = 2$ ορθ

ἤ $K\widehat{O}\Lambda + \{x\widehat{O}K + K\widehat{O}y\} = 2$ ορθ

ἤ τέλος $K\widehat{O}\Lambda + x\widehat{O}y = 2$ ορθ, δηλ. αὐτό πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

Ἄν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη ἦταν ἀμβλεία, π.χ. ἄν ἦταν ἡ $x\widehat{O}y$, τότε οἱ ἡμιευθεῖες, οἱ κάθετες πρός τίς ἕδρες, θά ἦταν οἱ ΟΚ, ΟΛ (σχ. 92) καί θά ἴσχυε πάλι ἡ ἴδια σχέση $K\widehat{O}\Lambda + x\widehat{O}y = 2$ ορθ. Τέλος, ἄν ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη εἶναι ὀρθή, πάλι, ὅπως εἶναι φανερό, τό θεώρημα ἰσχύει.



Σχ. 92

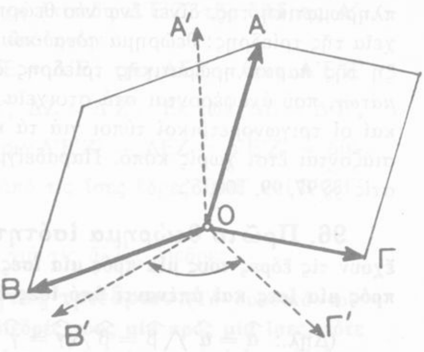
β΄) Θεώρημα τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων.—**Ἄν δοθεῖ μιά τρίεδρη στερεά γωνία μέ στοιχεῖα α, β, γ (ἕδρες) καί Α, Β, Γ (ἀπέναντι δίεδρες), τότε ὑπάρχει πάντοτε μιά δεύτερη στερεή γωνία, μέ στοιχεῖα $2_{ορ}$— — Α, $2_{ορ}$ — Β, $2_{ορ}$ — Γ (ἕδρες) καί $2_{ορ}$ — α, $2_{ορ}$ — β, $2_{ορ}$—γ (ἀπέναντι δίεδρες), ἡ ὁποία λέγεται «παραπληρωματική» τῆς πρώτης. Ἡ σχέση ἀνάμεσα στίς δύο αὐτές τρίεδρες εἶναι συμμετρική σχέση.**

Ι. Κατασκευή τῆς παραπληρωματικῆς. Ἀπό τήν κορυφή Ο τῆς τρίεδρης Ο,ΑΒΓ (σχ.93) ἄς φέρουμε ἡμιευθεῖες ΟΑ΄,ΟΒ΄,ΟΓ΄, πού νά εἶναι κάθετες, ἀντιστοίχως, στά ἐπίπεδα ΒΟΓ, ΓΟΑ, ΑΟΒ τῶν ἑδρῶν τῆς Ο, ΑΒΓ καί νά βρίσκονται καθεμιά στό μέρος τοῦ χώρου, στόν ὁποῖο βρίσκεται καί ἡ τρίτη ἀκμή. Θά ἔχουμε τότε:

(1) $0 \leqq A\widehat{O}A' < 90°$, $0 \leqq B\widehat{O}B' < 90°$, $0 \leqq \Gamma\widehat{O}\Gamma' < 90°$

Ἡ τρίεδρη Ο, Α΄Β΄Γ΄, πού ὁρίζεται ἀπό τίς ΟΑ΄, ΟΒ΄, ΟΓ΄, εἶναι ἡ **παραπληρωματική** τῆς Ο, ΑΒΓ.

ΙΙ. Συμμετρία τῆς σχέσεως. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι καί ἡ Ο, ΑΒΓ προκύπτει ἀπό τήν Ο, Α΄Β΄Γ΄ κατά τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο (δηλ. εἶναι παραπληρωματική τῆς Ο, Α΄Β΄Γ΄).



Σχ. 93

Ἄς θεωρήσουμε μιά ἀκμή τῆς Ο, ΑΒΓ, ἔστω τήν ΟΑ. Ἐπειδή ΟΓ΄ ⊥ Επιπ ΒΟΑ ⇒ ΟΑ ⊥ ΟΓ΄ καί ἐπειδή ΟΒ΄ ⊥ Επιπ ΑΟΓ ⇒ ΟΑ ⊥ ⊥ ΟΒ΄. Ἄρα ΟΑ ⊥ Επιπ Β΄ΟΓ΄.

Ἀλλά, ἐπειδή καί ἡ γωνία τῆς ΟΑ΄ μέ τήν κάθετο ΟΑ στό ἐπίπεδο Β΄ΟΓ΄ εἶναι $< 90°$ (ἐξαιτίας τῶν (1)), γι' αὐτό οἱ ΟΑ καί ΟΑ΄ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου Β΄ΟΓ΄. Δηλαδή ἡ ἀκμή ΟΑ τῆς ἀρχικῆς εἶναι κάθετη στήν ἕδρα Β΄ΟΓ΄ τῆς νέας καί φέρεται μαζί μέ τήν τρίτη ἀκμή ΟΑ΄ πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου ὡς πρός τήν ἕδρα Β΄ΟΓ΄. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τίς ἀκμές ΟΒ, ΟΓ. Ἄρα καί ἡ ἀρχική Ο, ΑΒΓ κατασκευάζεται ὡς παραπληρωματική τῆς νέας Ο, Α΄Β΄Γ΄. (Συμμετρική σχέση).

ΙΙΙ. Σχέσεις ἀνάμεσα στά στοιχεῖα. Ἄν τώρα θεωρήσουμε τή δίεδρη γωνία Β — ΟΑ — Γ $\equiv \widehat{A}$ καί ἐφαρμόσουμε τό προηγούμενο λῆμμα, βλέπουμε ὅτι: $B'\widehat{O}\Gamma' + \widehat{A} = 2$ ορθ. Ἐντελῶς ὅμοια θά ἔχουμε $A'\widehat{O}\Gamma' + \widehat{B} = 2$ ορθ. καί $A'\widehat{O}B' + \widehat{\Gamma} = 2$ ορθ. Δηλ. **Οἱ ἕδρες τῆς παραπληρωματικῆς εἶναι παραπληρώματα τῶν διέδρων τῆς ἀρχικῆς.** Ἐπειδή ὅμως καί ἡ ἀρχική Ο, ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματική τῆς Ο, Α΄Β΄Γ΄, γι' αὐτό οἱ ἕδρες της ὀφείλουν νά εἶναι παραπληρωματικές τῶν διέδρων τῆς Ο, Α΄Β΄Γ΄, δηλ. $B\widehat{O}\Gamma + \widehat{A'} = 2$ ορθ., $\Gamma\widehat{O}A + \widehat{B'} = 2$ ορθ., $A\widehat{O}B + \widehat{\Gamma'} = 2$ ορθ. Ὥστε **οἱ δίεδρες τῆς παραπληρωματικῆς εἶναι παραπληρώματα τῶν ἑδρῶν τῆς ἀρχικῆς.** Τελικά, ἄν μιά τρίεδρη Ο, ΑΒΓ ἔχει κύρια στοιχεῖα:

$$\left.\begin{array}{r} \text{ἕδρες: } \alpha, \beta, \gamma \\ \text{ἀπέναντι δίεδρες: } A, B, \Gamma \end{array}\right\},$$

ἡ παραπληρωματική της Ο, Α΄Β΄Γ΄ ἔχει κύρια στοιχεῖα:

$$\left.\begin{array}{r} \text{ἕδρες } 2_{\text{ορ}} - A,\ 2_{\text{ορ}} - B,\ 2_{\text{ορ}} - \Gamma \\ \text{ἀπέναντι δίεδρες: } 2_{\text{ορ}} - \alpha,\ 2_{\text{ορ}} - \beta,\ 2_{\text{ορ}} - \gamma \end{array}\right\}$$

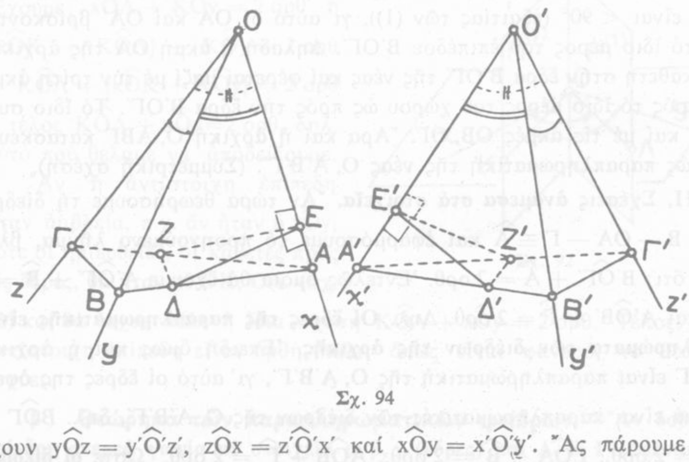
95. Δυασμός τῶν θεωρημάτων.

Κάθε θεώρημα, πού ἰσχύει γιά τά κύρια στοιχεῖα ὁποιασδήποτε τρίεδρης, ὅταν ἐφαρμοστεῖ στήν παραπληρωματική της, δίνει ένα νέο θεώρημα, πού ἀναφέρεται πάλι στά στοιχεῖα τῆς τρίεδρης: θεώρημα *«δυαδικό»* τοῦ πρώτου. Ἔτσι λέμε ὅτι ἡ ὕπαρξη τῆς παραπληρωματικῆς τρίεδρης δημιουργεῖ ἕνα *δυασμό τῶν θεωρημάτων*, πού ἀναφέρονται στά στοιχεῖα τῆς τρίεδρης γωνίας. Τὰ θεωρήματα καί οἱ τριγωνομετρικοί τύποι γιά τά κύρια στοιχεῖα τῶν τριέδρων διπλασιάζονται ἔτσι χωρίς κόπο. Παραδείγματα δυαδικῶν θεωρημάτων δίνονται στίς §§ 97, 99, 100, δ΄.

96. Πρῶτο θεώρημα ἰσότητας τριέδρων. **Ἄν δυό τρίεδρες ἔχουν τίς ἕδρες τους μία πρός μία ἴσες, τότε ἔχουν καί τίς δίεδρές τους μία πρός μία ἴσες καί ἀπέναντι ἀπό ἴσες ἕδρες βρίσκονται ἴσες δίεδρες.**

(Δηλ.: $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}' \wedge \widehat{\beta} = \widehat{\beta}' \wedge \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}' \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A}' \wedge \widehat{B} = \widehat{B}' \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}'$).

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε τίς τρίεδρες Ο, xyz καί Ο΄, x΄y΄z΄ (σχ.94), πού



Σχ. 94

ἔχουν $y\widehat{O}z = y'\widehat{O}'z'$, $z\widehat{O}x = z'\widehat{O}'x'$ καί $x\widehat{O}y = x'\widehat{O}'y'$. Ἄς πάρουμε πάνω στίς ἀκμές τους 6 ἴσα τμήματα ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=Ο΄Α΄=Ο΄Β΄=Ο΄Γ΄, ὁπότε δημιουργοῦνται 4 ζεύγη ἀπό ἴσα τρίγωνα: τριγ ΑΟΒ = τριγ Ο΄Α΄Β΄, τριγ ΟΒΓ = τριγ Ο΄Β΄Γ΄, τριγ ΟΓΑ = τριγ Ο΄Γ΄Α΄, τριγ ΑΒΓ = τριγ Α΄Β΄Γ΄. Ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Δ πάνω στή βάση ΑΒ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΟΑΒ. Ἡ προβολή Ε τοῦ Δ στήν εὐθεία ΟΑ θά βρίσκεται πάνω στήν ἡμιευθεία (Α, Ο), γιατί ἡ $\Gamma\widehat{A}O$ (ἐπειδή εἶναι γωνία τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου) εἶναι ὀξεία. Ἡ εὐθεία, πού εἶναι ⊥ΟΑ στό Ε καί βρίσκεται μέσα στό ἐπίπεδο ΑΟΓ, τέμνει τήν ἡμιευθεία (Α,Γ) (γιατί ἡ $\Gamma\widehat{A}O$ εἶναι ὀξεία), ἔστω στό Ζ. Ἡ ΔΕΖ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη ἐπίπεδη τῆς δίεδρης $\widehat{A}$.

Παίρνουμε τώρα πάνω στό Α΄Β΄ ἕνα τμῆμα Α΄Δ΄= ΑΔ καί παρουσιάζουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο τήν ἀντίστοιχη ἐπίπεδη $\Delta'\widehat{E'}Z'$ τῆς δίεδρης $\widehat{A'}$. Εὔκολα συμπεραίνουμε κατά σειρά τίς ἰσότητες: τριγ $\Delta EA =$ τριγ $\Delta'E'A'$, $\Delta E = \Delta'E'$, $AE = A'E'$, τριγ $AEZ =$ τριγ $A'E'Z'$ $EZ = E'Z'$, $AZ = A'Z'$, $\Delta\widehat{A}Z = \Delta'\widehat{A'}Z'$, $\Delta Z = \Delta'Z'$. Ἐκ τῶν $\Delta E = \Delta'E'$, $EZ = E'Z'$, $\Delta Z = \Delta'Z' \Rightarrow$ τριγ $\Delta EZ =$ τριγ $\Delta'E'Z' \Rightarrow \Delta\widehat{E}Z = \Delta'\widehat{E'}Z' \Rightarrow$ δίεδρη $\widehat{A} =$ δίεδρη $\widehat{A'}$ Δηλαδή ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες ἕδρες $B\widehat{O}\Gamma$ καί $B'\widehat{O'}\Gamma'$ βρίσκονται ἴσες δίεδρες, $\widehat{A}$ καί $\widehat{A'}$.

Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη ἰσχύει καί γιά τίς ἄλλες δίεδρες.

97. Δεύτερο θεώρημα ἰσότητας τριέδρων. **(Τό δυαδικό τοῦ πρώτου).—Ἄν δυό τρίεδρες ἔχουν τίς δίεδρές τους μία πρός μία ἴσες, τότε ἔχουν καί τίς ἕδρες τους μία πρός μία ἴσες καί ἀπέναντι ἀπό ἴσες δίεδρες βρίσκονται ἴσες ἕδρες.**

(Δηλ.: $\widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \Rightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'} \wedge \widehat{\beta} = \widehat{\beta'} \wedge \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma'}$).

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τίς τρίεδρες Τ καί Τ', πού ἔχουν ἡ πρώτη ἕδρες α, β, γ καί δίεδρες Α, Β, Γ καί ἡ δεύτερη ἕδρες α', β', γ' καί δίεδρες πάλι Α, Β, Γ. Ἡ παραπληρωματική τῆς πρώτης τρίεδρης, ἔστω ἡ T_1, ἔχει ἕδρες: $2_{op} - A$, $2_{op} - B$, $2_{op} - \Gamma$ καί δίεδρες $2_{op} - \alpha$, $2_{op} - \beta$, $2_{op} - \gamma$ (§ 94). Ἡ παραπληρωματική τῆς δεύτερης τρίεδρης, ἔστω ἡ T'_1 ἔχει ἕδρες: $2_{op} - A$, $2_{op} - B$, $2_{op} - \Gamma$ καί δίεδρες $2_{op} - \alpha'$, $2_{op} - \beta'$, $2_{op} - \gamma'$.

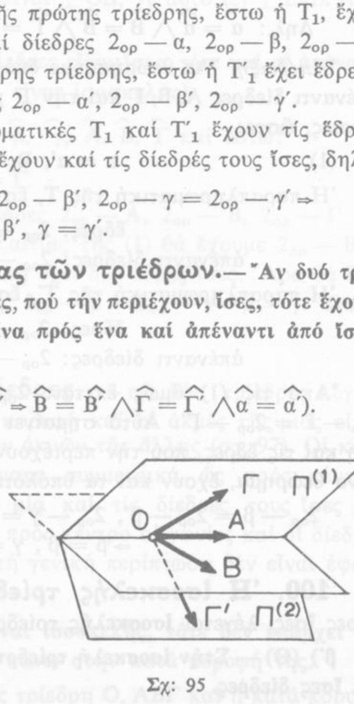
Βλέπουμε ὅτι οἱ δυό παραπληρωματικές T_1 καί T'_1 ἔχουν τίς ἕδρες τους μία πρός μία ἴσες. Ἄρα (§ 96) θά ἔχουν καί τίς δίεδρές τους ἴσες, δηλ.:

$$2_{op} - \alpha = 2_{op} - \alpha',\ 2_{op} - \beta = 2_{op} - \beta',\ 2_{op} - \gamma = 2_{op} - \gamma' \Rightarrow$$
$$\alpha = \alpha',\ \beta = \beta',\ \gamma = \gamma'$$

98. Τρίτο θεώρημα ἰσότητας τῶν τριέδρων.—Ἄν δυό τρίεδρες ἔχουν μιά δίεδρη ἴση καί τίς ἕδρες, πού τήν περιέχουν, ἴσες, τότε ἔχουν καί τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τους ἴσα ἕνα πρός ἕνα καί ἀπέναντι ἀπό ἴσες ἕδρες βρίσκονται ἴσες δίεδρες.

(Δηλ.: $\widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{\beta} = \widehat{\beta'} \wedge \widehat{\gamma} = \widehat{\gamma'} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'} \wedge \widehat{\alpha} = \widehat{\alpha'}$).

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τήν τρίεδρη Ο, ΑΒΓ τοῦ σχ. 95 καί μιά ἄλλη τρίεδρη $O_1, A_1B_1\Gamma_1$ (πού δέν ἐμφανίζεται στό σχῆμα) τέτοιες, ὥστε: $B_1\widehat{O_1}A_1 = B\widehat{O}A$, $A_1\widehat{O_1}\Gamma_1 = A\widehat{O}\Gamma$ καί $B_1 - O_1A_1 - \Gamma_1 = B - OA - \Gamma$. Φέρνουμε μέ κίνηση τήν $B_1\widehat{O_1}A_1$ πάνω στήν ἴση της $B\widehat{O}A$ ἔτσι, ὥστε νά ἔρθει



Σχ: 95

ἡ O_1A_1 πάνω στήν ΟΑ καί ἡ O_1B_1 πάνω στήν ΟΒ. Τότε ἡ δίεδρη $B_1 — O_1A_1 — Γ_1$ ἤ θά ἐφαρμόσει πάνω στήν ἴση της δίεδρη Β — ΟΑ — Γ ἤ θά πάρει θέση Β — ΟΑ — Γ′ συμμετρική τῆς Β — ΟΑ — Γ ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΟΑΒ. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ $O_1Γ_1$ θά ἔρθει πάνω στό ἡμιεπίπεδο $Π^{(1)}$ καί, ἐπειδή $A_1\widehat{O_1}Γ_1 = A\widehat{O}Γ$, ἡ $O_1Γ_1$ θά πέσει πάνω στήν ΟΓ καί οἱ τρίεδρες ἐφαρμόζουν, ἄρα ἔχουν τά στοιχεῖα τους ἕνα πρός ἕνα ἴσα.

Στή δεύτερη περίπτωση ἡ $O_1Γ_1$ θά ἔρθει πάνω στό ἡμιεπίπεδο $Π^{(2)}$ (σχ. 95) συμμετρικό τοῦ $Π^{(1)}$ ὡς πρός τό Επιπ ΒΟΑ, σέ κάποια θέση ΟΓ′ καί θά εἶναι $Γ'\widehat{O}A = A\widehat{O}Γ$. Ἐπειδή κατά τή συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδο οἱ γωνίες διατηροῦνται, γι' αὐτό ἡ γωνία $A\widehat{O}Γ$ θά ἔχει συμμετρική ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΒΟΑ τήν ἴση της $Γ'\widehat{O}A$. Οἱ δυό τρίεδρες Ο, ΑΒΓ καί Ο, ΑΒΓ′ εἶναι, λοιπόν, συμμετρικές ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΑΟΒ, ἄρα καί πάλι ἔχουν ὅλα τά στοιχεῖα τους ἴσα ἕνα πρός ἕνα (§ 84, ς′).

99. Τέταρτο θεώρημα ἰσότητας τῶν τριέδρων. (Δυαδικό τοῦ τρίτου)

— Ἄν δυό τρίεδρες ἔχουν μιά ἕδρα ἴση καί τίς προσκείμενες σ' αὐτή δίεδρες ἴσες, τότε ἔχουν καί τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τους ἴσα ἕνα πρός ἕνα.

Δηλ.: $\widehat{α} = \widehat{α'} \wedge \widehat{B} = \widehat{B'} \wedge \widehat{Γ} = \widehat{Γ'} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{A'} \wedge \widehat{β} = \widehat{β'} \wedge \widehat{γ} = \widehat{γ'}$)

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δυό τρίεδρες: τήν Τ μέ ἕδρες α, β, γ καί ἀπέναντι δίεδρες Α, Β, Γ καί τήν Τ′ μέ ἕδρες α′, β′, γ′ καί δίεδρες Α′, Β′, Γ′ τέτοιες, ὥστε:

(1) $α = α',\ B = B',\ Γ = Γ'$.

Ἡ παραπληρωματική τῆς Τ, ἔστω ἡ T_1, ἔχει:

ἕδρες: $2_{ορ} — A,\ 2_{ορ} — B,\ 2_{ορ} — Γ$,

ἀπέναντι δίεδρες: $2_{ορ} — α,\ 2_{ορ} — β,\ 2_{ορ} — γ$,

Ἡ παραπληρωματική τῆς Τ′, ἔστω ἡ T'_1, ἔχει:

ἕδρες: $2_{ορ} — A',\ 2_{ορ} — B',\ 2_{ορ} — Γ'$,

ἀπέναντι δίεδρες: $2_{ορ} — α',\ 2_{ορ} — β',\ 2_{ορ} — γ'$,

Ἀπό τίς (1) ὅμως ἕπεται: $2_{ορ} — α = 2_{ορ} — α',\ 2_{ορ} — B = 2_{ορ} — B'$ $2_{ορ} — Γ = 2_{ορ} — Γ'$. Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ T_1 καί T'_1 ἔχουν μιά δίεδρη ἴση καί τίς ἕδρες, πού τήν περιέχουν ἴσες. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ἔχουν καί τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα ἴσα:

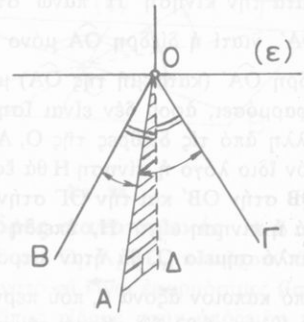
$$2_{ορ} — β = 2_{ορ} — β',\ 2_{ορ} — γ = 2_{ορ} — γ',\ 2_{ορ} — A = 2_{ορ} — A' \Rightarrow$$
$$\Rightarrow β = β',\ γ = γ',\ A = A'.$$

100. Ἡ ἰσοσκελής τρίεδρη.

— α′) Ἄν μιά τρίεδρη ἔχει δυό ἕδρες ἴσες, λέγεται **ἰσοσκελής** τρίεδρη.

β′) (Θ) — Στήν ἰσοσκελή τρίεδρη ἀπέναντι ἀπό τίς ἴσες ἕδρες βρίσκονται ἴσες δίεδρες.

Ἄς θεωρήσουμε τήν τρίεδρη Ο, ΒΑΓ μέ $\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma}$. Ἄν φέρουμε τή διχοτόμο ΟΔ τῆς $\widehat{BO\Gamma}$, τότε οἱ δυό τρίεδρες Ο, ΑΒΔ καί Ο, ΓΑΔ ἔχουν τίς ἕδρες τους ἴσες μία πρός μία. Ἄρα (§ 96) θά ἔχουν καί τίς διέδρές τους ἴσες μία πρός μία· ἐπίσης θά εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, γιατί βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τήν κοινή ἕδρα $\widehat{AO\Delta}$.



Σχ. 96

γ') (Θ) — Στήν ἰσοσκελή τρίεδρη Ο, ΑΒΓ, μέ $\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma}$, ἡ ἀκμή ΟΑ εἶναι κάθετη στήν ἐξωτερική διχοτόμο τῆς ἀπέναντι ἕδρας $\widehat{BO\Gamma}$.

Στό σχ. 96 οἱ δίεδρες Α — ΟΔ — Β καί Α — ΟΔ — Γ εἶναι ἴσες, ἐπειδή βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό ἴσες ἕδρες. Ἄρα Επιπ ΑΟΔ ⊥ Επιπ ΒΟΓ. Ἐπειδή ἡ ἐξωτερική διχοτόμος (ε) τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι ⊥ ΟΔ, γι' αὐτό (ε) ⊥ Επιπ ΑΟΔ (§ 78 ii), ἄρα (ε) ⊥ ΟΑ.

δ') (Θ) — Ἄν μιᾶς τρίεδρης δύο δίεδρες εἶναι ἴσες, τότε καί οἱ ἀπέναντι ἀπ' αὐτές ἕδρες εἶναι ἴσες (ἡ τρίεδρη εἶναι ἰσοσκελής).

Ἔστω τρίεδρη Τ μέ στοιχεῖα $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}, \widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ καί ἔστω:

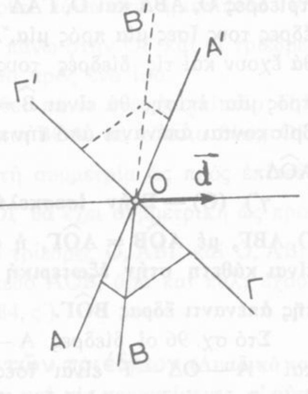
(1) $$\widehat{B} = \widehat{\Gamma}.$$

Ἡ παραπληρωματική της ἔχει ἕδρες $2_{\text{ορ}} - A$, $2_{\text{ορ}} - B$, $2_{\text{ορ}} - \Gamma$ καί δίεδρες $2_{\text{ορ}} - \alpha$, $2_{\text{ορ}} - \beta$, $2_{\text{ορ}} - \gamma$. Ἐξαιτίας τῆς (1) θά ἔχουμε $2_{\text{ορ}} - B = 2_{\text{ορ}} - \Gamma$, δηλαδή ἡ παραπληρωματική ἔχει δύο ἕδρες ἴσες. Ἄρα θά ἔχει καί τίς ἀπέναντι δίεδρες ἴσες, δηλαδή: $2_{\text{ορ}} - \beta = 2_{\text{ορ}} - \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$. Ὥστε: $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{\beta} = \widehat{\gamma}$.

101. Οἱ κατά κορυφή τρίεδρες. — α') Δύο τρίεδρες λέγονται κατά κορυφή, ὅταν ἔχουν κοινή κορυφή καί οἱ ἀκμές τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις (ἀντίθετες ἡμιευθεῖες) τῶν ἀκμῶν τῆς ἄλλης (σχ. 97). Οἱ κατά κορυφή τρίεδρες, ἐπειδή εἶναι σχήματα συμμετρικά ὡς πρός κέντρο, ἔχουν τίς ἕδρες τους ἴσες μία πρός μία καί τίς διέδρές τους ἴσες μία πρός μία, γιατί κατά τή συμμετρία ὡς πρός κέντρο οἱ γωνίες καί οἱ δίεδρες διατηροῦν τό μέγεθός τους. Ὅμως στή γενική περίπτωση δέν εἶναι ἐφαρμόσιμες.

β') (Θ) — Ἄν μιά τρίεδρη δέν εἶναι ἰσοσκελής, τότε δέν ὑπάρχει κίνηση (μετατόπιση), πού νά τή φέρνει πάνω στήν κατά κορυφή της.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἡ μή ἰσοσκελής τρίεδρη Ο, ΑΒΓ καί ἡ κατά κορυφή της Ο, Α′Β′Γ′. Ἄν ὑπῆρχε κίνηση Η, πού νά φέρνει τήν πρώτη πάνω στή δεύτερη, τότε ἡ ἀκμή ΟΑ ἔπρεπε νά ρθεῖ κατά τήν κίνηση Η πάνω στήν ἀκμή ΟΑ′, γιατί ἡ δίεδρη $\widehat{ΟΑ}$ μόνο μέ τή δίεδρη $\widehat{ΟΑ'}$ (κατακμή τῆς $\widehat{ΟΑ}$) μπορεῖ νά ἐφαρμόσει, ἀφοῦ δέν εἶναι ἴση μέ καμιά ἄλλη ἀπό τίς δίεδρες τῆς Ο, Α′Β′Γ′. Γιά τόν ἴδιο λόγο ἡ κίνηση Η θά ἔφερνε τήν ΟΒ στήν ΟΒ′ καί τήν ΟΓ στήν ΟΓ′. Ἀλλά ἡ κίνηση αὐτή Η, ἐπειδή ἔχει ἕνα διπλό σημεῖο Ο, θά ἦταν στροφή γύρω ἀπό κάποιον ἄξονα $\vec{d}$, πού περνᾶ ἀπό τό Ο (βλέπε § 82, δ′). Κατά τή στροφή αὐτή ἡ (Ο, Α) ἔρχεται, ὅπως εἴδαμε, πάνω στήν (Ο, Α′), ὁ $\vec{d}$ πάνω στόν $\vec{d}$ καί ἡ γωνία $(\widehat{\overrightarrow{ΟΑ}, \vec{d}})$ πάνω στήν $(\widehat{\overrightarrow{ΟΑ'}, \vec{d}})$.



Σχ. 97

Ἐπειδή κατά τή στροφή οἱ γωνίες διατηροῦνται: $(\widehat{\overrightarrow{ΟΑ}, \vec{d}}) = (\widehat{\overrightarrow{ΟΑ'} \vec{d}})$ καί ἐπειδή οἱ ΟΑ, ΟΑ′ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία $\Rightarrow \vec{d} \perp \overrightarrow{ΟΑ}$.

Γιά τόν ἴδιο λόγο, ἔπρεπε $\vec{d} \perp \overrightarrow{ΟΒ}$, $\vec{d} \perp \overrightarrow{ΟΓ}$. Δηλ. θά ἔπρεπε νά ὑπάρχει ἄξονας, πού νά περνᾶ ἀπό τό Ο καί νά εἶναι κάθετος καί στίς τρεῖς ἀκμές ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ἄρα κάθετος καί στίς τρεῖς ἕδρες, πράγμα πού εἶναι ἀδύνατο. Ὥστε δύο μή ἰσοσκελεῖς κατά κορυφή τρίεδρες μέ κανέναν τρόπο δέν μποροῦν μέ κάποια κίνηση νά ἐφαρμόσουν ἡ μία πάνω στήν ἄλλη.

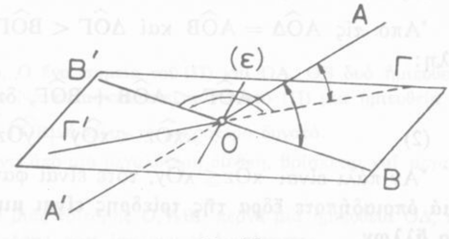
Πόρισμα. —Κάθε μή ἰσοσκελής τρίεδρη δέν μπορεῖ μέ κάποια κίνηση νά ἐφαρμόσει πάνω στήν κατοπτρική της (δηλ. στή συμμετρική της ὡς πρός ἐπίπεδο).

Γιατί ἡ κατοπτρική εἶναι ἴση μέ τήν κατά κορυφή (§ 86).

γ′) (Θ) — **Κάθε ἰσοσκελής τρίεδρη μπορεῖ μέ κίνηση νά ἐφαρμόσει πάνω στήν κατά κορυφή της.**

Ἄς θεωρήσουμε μιά ἰσοσκελή τρίεδρη Ο, ΑΒΓ μέ $Α\widehat{Ο}Β = Α\widehat{Ο}Γ$ (σχ. 98). Ἡ κατά κορυφή της Ο, Α′Β′Γ′ εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελής μέ $Α'\widehat{Ο}Β' = Α'\widehat{Ο}Γ'$ καί ἡ ἐξωτερική διχοτόμος (ε) τῆς $Β\widehat{Ο}Γ$ εἶναι συνάμα καί ἐξωτερική διχοτόμος τῆς $Β'\widehat{Ο}Γ'$. Γνωρίζουμε (§ 100, γ′) ὅτι ΟΑ $\perp$ (ε) καί ΟΑ′ $\perp$ (ε), δηλ. (ε) $\perp$ ΑΑ′. Ἄρα οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΑ′ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τήν (ε).

Ἡ (ε) ὡς ἐξωτερική διχοτόμος τῶν $Β\widehat{Ο}Γ$ καί $Β'\widehat{Ο}Γ'$ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῶν γωνιῶν αὐτῶν, δηλαδή ἡ ΟΒ′ εἶναι συμμετρική τῆς ΟΓ ὡς πρός (ε) καί ἡ ΟΓ′ εἶναι συμμετρική τῆς ΟΒ ὡς πρός (ε). Ἐπομένως οἱ ἰσοσκελεῖς τρίεδρες Ο,ΑΒΓ καί Ο′,Α′Β′Γ′ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός ἄξονα καί ἐπομένως ἡ μιά ἐφαρμόζει πάνω στήν ἄλλη μέ στροφή 180° γύρω ἀπό τόν ἄξονα (ε).



Σχ. 98

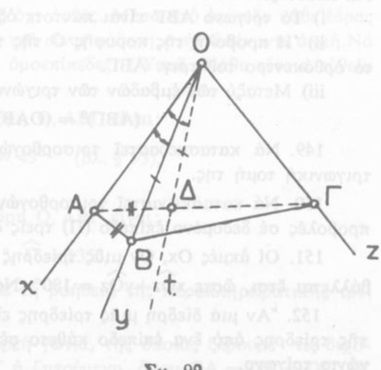
102. Τρίεδρες ἴσες καί τρίεδρες κατοπτρικές. Δυό μή ἰσοσκελεῖς («σκαληνές») τρίεδρες Ο, ΑΒΓ καί $Ο_1$, $Α_1Β_1Γ_1$, πού ἔχουν ὅλα τους τά στοιχεῖα ἴσα, ἕνα πρός ἕνα, εἶναι δυνατό νά εἶναι ἐφαρμόσιμες (ἴσες) ἤ μή ἐφαρμόσιμες (κατοπτρικές). Γιατί, ὅπως εἴδαμε στήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τῆς § 98, ὅταν φέρουμε τήν $Β_1\widehat{Ο_1}Α_1$ πάνω στήν ἴση της $Β\widehat{Ο}Α$, εἶναι δυνατόν ἡ τρίτη ἀκμή $Ο_1Γ_1$ νά πέσει μέ τήν ΟΓ πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΑ ἤ ἡ $Ο_1Γ_1$ νά ἔρθει σέ θέση ΟΓ′ τέτοια, ὥστε οἱ ΟΓ καί ΟΓ′ νά βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου ΒΟΑ. Στήν πρώτη περίπτωση ἡ τρίεδρη $Ο_1$, $Α_1Β_1Γ_1$ ἐφαρμόζει πάνω στήν Ο, ΑΒΓ, δηλ. οἱ δυό τρίεδρες εἶναι ἴσες. Στή δεύτερη, ἡ $Ο_1$, $Α_1Β_1Γ_1$ ἔρχεται σέ θέση Ο, ΑΒΓ′ συμμετρική τῆς Ο, ΑΒΓ ὡς πρός τό ἐπίπεδο ΒΟΑ καί συνεπῶς εἶναι κατοπτρική τῆς Ο, ΑΒΓ καί μή ἐφαρμόσιμη πρός τήν Ο, ΑΒΓ (§ 101, β′ Πόρισμα).

103. Ἡ «τριγωνική συνθήκη» μεταξύ τῶν ἑδρῶν μιᾶς τρίεδρης.

(Θ) — Οἱ τρεῖς ἕδρες $\widehat{α}, \widehat{β}, \widehat{γ}$ ὁποιασδήποτε τρίεδρης ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις: (1) $\widehat{α} < \widehat{β} + \widehat{γ}$, $\widehat{β} < \widehat{γ} + \widehat{α}$, $\widehat{γ} < \widehat{α} + \widehat{β}$ (τριγωνική συνθήκη)

Ἀπόδειξη. Ἔστω τρίεδρη Ο, xyz, στήν ὁποία xOz > xOy. Τότε ὑπάρχει μιά ἀκτίνα Οt τῆς $x\widehat{O}z$, ἡ ὁποία ἀποχωρίζει ἀπό αὐτή μιά γωνία xOt = $x\widehat{O}y$ (σχ. 99). Ἡ Οt θά τέμνει τότε ἕνα ὁποιοδήποτε τμῆμα ΑΓ, πού ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς Οx, Οz, σ'ἕνα σημεῖο Δ. Ἄς πάρουμε πάνω στήν Οy ἕνα τμῆμα ΟΒ = ΟΔ.

Τότε κατά σειρά θά εἶναι: τριγ ΟΑΔ = τριγ ΑΟΒ, ΑΔ = ΑΒ, ΔΓ = = ΑΓ — ΑΒ καί, ἐπειδή ΑΓ—ΑΒ < < ΒΓ, ἔπεται ΔΓ < ΒΓ. Ἐπειδή στά τρίγωνα ΟΔΓ καί ΟΒΓ ἔχουμε ΟΔ=



Σχ. 99

$= OB,\ O\Gamma = O\Gamma,\ \Delta\Gamma < B\Gamma \Rightarrow \Delta\widehat{O}\Gamma < B\widehat{O}\Gamma.$

Ἀπό τίς $A\widehat{O}\Delta = A\widehat{O}B$ καί $\Delta\widehat{O}\Gamma < B\widehat{O}\Gamma$ ἕπεται, μὲ πρόσθεση κατά μέλη:

$$A\widehat{O}\Gamma < A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma, \text{ δηλαδή:}$$

$$x\widehat{O}z < x\widehat{O}y + y\widehat{O}z \qquad (2)$$

Ἄν πάλι εἶναι $x\widehat{O}z \leqq x\widehat{O}y$, τότε εἶναι φανερό ὅτι ἡ (2) ἰσχύει. Ὥστε: **Μιά ὁποιαδήποτε ἕδρα τῆς τρίεδρης εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.**

104. **α΄) Τρισορθογώνια τρίεδρη** λέγεται ἡ τρίεδρη, πού ἔχει καί τίς τρεῖς δίεδρές της ὀρθές. Αὐτή ἔχει καί τίς τρεῖς ἕδρες της ὀρθές· δηλ. οἱ ἀκμές της εἶναι ἀνά δύο κάθετες.

β΄) Δισορθογώνια τρίεδρη λέγεται ἡ τρίεδρη, πού ἔχει δυό δίεδρες ὀρθές. Αὐτή ἔχει καί τίς ἕδρες, πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς ὀρθές δίεδρες, ἐπίσης ὀρθές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

144. Σέ κάθε τρίεδρη γωνία οἱ διχοτόμοι δύο ἑδρῶν καί ἡ ἐξωτερική διχοτόμος τῆς τρίτης ἕδρας βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο.

145. Σέ κάθε τρίεδρη τά ἐπίπεδα, πού ὁρίζονται ἀπό κάθε ἀκμή καί ἀπό τή διχοτόμο τῆς ἀπέναντι ἕδρας, περνοῦν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία. (Ὑποδ. Ἀρχίζοντας ἀπό τήν κορυφή ἄς πάρουμε ἴσα τμήματα ἐπάνω στίς ἀκμές).

146. Σέ κάθε τρίεδρη τά ἐπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς τρεῖς δίεδρες, περνοῦν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία (ἔχουν μία εὐθεία κοινή).

147. Σέ κάθε τρίεδρη τά τρία ἐπίπεδα, πού τό καθένα περνᾶ ἀπό τή διχοτόμο μιᾶς ἕδρας καί εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο τῆς ἕδρας αὐτῆς, συντρέχουν στήν ἴδια εὐθεία (ἔχουν μιά εὐθεία κοινή). (Ὑποδ. Ἄς ληφθοῦν ἴσα τμήματα, ὅπως στήν ἄσκ. 145).

148. Τρισορθογώνια στερεά γωνία τέμνεται ἀπό ἐπίπεδο κατά ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) Τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι πάντοτε ὀξυγώνιο.

ii) Ἡ προβολή τῆς κορυφῆς Ο τῆς τρισορθογώνιας πάνω στό ἐπίπεδο ΑΒΓ εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγ. ΑΒΓ.

iii) Μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ὑπάρχει ἡ σχέση:

$$(AB\Gamma)^2 = (OAB)^2 + (OB\Gamma)^2 + (O\Gamma A)^2$$

149. Νά κατασκευαστεῖ τρισορθογώνια στερεά γωνία, τῆς ὁποίας ξέρουμε μιά τριγωνική τομή της.

150. Νά κατασκευαστεῖ τρισορθογώνια στερεά γωνία, τῆς ὁποίας οἱ ἀκμές ἔχουν προβολές σέ δεδομένο ἐπίπεδο (Π) τρεῖς δεδομένες ἡμιευθεῖες Ηx, Ηy, Ηz.

151. Οἱ ἀκμές Ox, Oy μιᾶς τρίεδρης O, xyz εἶναι σταθερές, ἐνῶ ἡ τρίτη Oz μεταβάλλεται ἔτσι, ὥστε $x\widehat{O}z + y\widehat{O}z = 180°$. Νά βρεθεῖ ὁ τόπος τῆς Oz.

152. Ἄν μιά δίεδρη μιᾶς τρίεδρης εἶναι ὀρθή καί οἱ ἕδρες $< 90°$, τότε ἡ τομή τῆς τρίεδρης ἀπό ἕνα ἐπίπεδο κάθετο σέ ὁποιαδήποτε ἀκμή της εἶναι πάντοτε ὀρθογώνιο τρίγωνο.

153. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τήν κορυφή μιᾶς τρίεδρης καί εἶναι ἰσοκεκλιμένη:

i) πρός τίς τρεῖς ἀκμές

ii) πρός τίς τρεῖς ἕδρες.

154. Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Π), Ο ἕνα σημεῖο τοῦ (Π) καί ΟΑ, ΟΒ δυό ἡμιευθεῖες, πού δέ βρίσκονται πάνω στό (Π). Νά κατασκευαστεῖ πάνω στό (Π) μιά ἡμιευθεία ΟΓ τέτοια, ὥστε τό ἄθροισμα $\widehat{\Gamma O A}+\widehat{\Gamma O B}$ νά εἶναι τό μικρότερο δυνατό.

155. Σέ κάθε τρίεδρη, ἀπέναντι ἀπό μιά μεγαλύτερη διεδρη, βρίσκεται καί μεγαλύτερη ἕδρα. Καί ἀντιστρόφως.

156. Ἄν ἀπό τήν κορυφή Ο μιᾶς τρίεδρης Ο, ΑΒΓ περνᾶ μιά ἡμιευθεία ΟΔ, πού περιέχεται στό ἐσωτερικό τῆς τρίεδρης, τότε ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες:

i) $\widehat{AOB}<\widehat{A O \Delta}+\widehat{B O \Delta}<\widehat{A O \Gamma}+\widehat{B O \Gamma}$

ii) $S/2<\widehat{A O \Delta}+\widehat{B O \Delta}+\widehat{\Gamma O \Delta}<S$, ὅπου S περιστάνει τό ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς τρίεδρης. (**Ὑποδ.** γιά τό i) Ἄν Δ εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῆς ΟΔ μέ τό ἐπίπεδο ΑΒΓ καί ἡ ΑΔ προεκτεινόμενη τέμνει τή ΓΒ στό Ε, ἅς ἐφαρμοστεῖ γιά τίς τρίεδρες Ο, ΔΒΕ, Ο, ΑΕΓ τό (Θ): Κάθε ἕδρα εἶναι < ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων).

157. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερο ἀπό 4 ὀρθές.

158. Ἔχουμε μιά ὀξεία γωνία $\widehat{xOy}$. Μιά εὐθεία Oz μεταβάλλεται ἔτσι, ὥστε νά εἶναι πάντοτε Επιπ xOz ⊥ Επιπ yOz. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῆς Oz καί τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού εἶναι κάθετο σέ μιά πλευρά τῆς $\widehat{xOy}$ καί σέ ὁρισμένο σημεῖο της Α διάφορο τοῦ Ο; (**Ὑποδ.** Ἔστω τό Α πάνω στήν Ox καί Μ σημεῖο τοῦ τόπου. Ἄς παρατηρήσουμε ὅτι τό Επιπ ΟΑΜ εἶναι κάθετο πάνω σέ δύο ἄλλα: ΟΜΒ καί (Π) ἄρα καί στήν τομή τους).

159. Ἄν πάνω στίς ἀκμές Ox, Oy, Oz τρίεδρης ὑπάρχουν σημεῖα Α,Β, Γ τέτοια, ὥστε: ΑΒ ορθογ ΟΓ καί ΒΓ ορθογ ΟΑ, τότε θά εἶναι καί ΓΑ ορθογ ΟΒ. (**Ὑποδ.** Μποροῦμε νά λάβουμε ὑπόψη τή συνθήκη τῆς ἄσκ. 92).

160. **Ὑψοεπίπεδα.** Τά τρία ἐπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό κάθε ἀκμή μιᾶς τρίεδρης καί εἶναι κάθετα στήν ἀπέναντι ἕδρα (*ὑψοεπίπεδα*), περνοῦν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία (ἔχουν μιά εὐθεία κοινή). (**Ὑποδ.** Στό σχῆμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως τά ὑψοεπίπεδα τέμνουν τό ἐπίπεδο ΑΒΓ κατά τά ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ).

161. Ἔστω μιά τρίεδρη Ο, ΑΒΓ μέ ἕδρες ὄχι ὀρθές. Μέσα στό ἐπίπεδο κάθε ἕδρας φέρνουμε μιά εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό τό Ο καί εἶναι κάθετη στήν ἀπέναντι ἀκμή.Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ τρεῖς αὐτές εὐθεῖες εἶναι ὁμοεπίπεδες. (**Ὑποδ.** Κάθε τέτοια εὐθεία εἶναι ⊥ σέ ἕνα ὑψοεπίπεδο (βλ. ἄσκ. 160)).

162. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν σέ μία τρίεδρη Ο, ΑΒΓ εἶναι:

$$\widehat{A}=90^\circ,\ \beta=45^\circ,\ \gamma=45^\circ \quad (\text{βλ. § 93}),$$

τότε θά εἶναι καί $\alpha=60^\circ$.

163. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν σέ μιά τρίεδρη Ο, ΑΒΓ εἶναι:

$$\alpha=90^\circ,\ \widehat{B}=135^\circ,\ \widehat{\Gamma}=135^\circ,$$

τότε $\widehat{A}=120^\circ$. (**Ὑποδ.** Τό πρόβλημα αὐτό, μέ τή βοήθεια τῆς παραπληρωματικῆς τρίεδρης, ἀνάγεται στό προηγούμενο).

164. Νά κατασκευαστεῖ μιά τρίεδρη στερεή γωνία, τῆς ὁποίας ξέρουμε τίς διχοτόμους τῶν ἑδρῶν της. (**Ὑποδ.** Ἔστω ΟΑΒΓ ἡ ζητούμενη, ὅπου ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Οἱ

διχοτόμοι $Ο\Delta_1$, $Ο\Delta_2$, $Ο\Delta_3$ τῶν ἑδρῶν τῆς Ο, ΑΒΓ περνοῦν ἀπό τά μέσα Ε, Ζ, Η τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί εἶναι ΟΕ ορθογ ΗΖ, ΟΖ ορθογ ΕΗ, ΟΗ ορθογ ΕΖ. Παίρνουμε τό Ε αὐθαίρετα πάνω στήν $Ο\Delta_1$, κατασκευάζουμε τό τρίγωνο ΕΗΖ φέρνοντας τήν ΕΖ ορθογ $Ο\Delta_3$ κ.τ.λ. Ἀπό τό μεσοτρίγωνο ΕΗΖ κατασκευάζεται τό ΑΒΓ).

II ΠΟΛΥΕΔΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

105. Ὁρισμοί. α') Ἄς θεωρήσουμε στό χῶρο μιά διαδοχή ἀπό ν ἀκτίνες $ΟΑ_1, ΟΑ_2, ΟΑ_3, \ldots ΟΑ_ν$ (ὅπου $ν \geqq 3$), οἱ ὁποῖες ἀνά τρεῖς διαδοχικές δέν εἶναι ὁμοεπίπεδες καί οἱ ὁποῖες σχηματίζουν ν διαδοχικές γωνίες $Α_1\widehat{Ο}Α_2$, $Α_2\widehat{Ο}Α_3$, $\ldots Α_ν\widehat{Ο}Α_1$, πού δέν ἔχουν, ἀνά δύο, κοινή κάποια ἐσωτερική ἀκτίνα. Τότε τό σχῆμα, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς ἡμιευθεῖες $ΟΑ_1$, $ΟΑ_2 \ldots ΟΑ_ν$ καί ἀπό τίς ἀκτίνες τῶν κυρτῶν γωνιῶν $Α_1\widehat{Ο}Α_2$, $Α_2\widehat{Ο}Α_3 \ldots Α_ν\widehat{Ο}Α_1$, λέγεται ν-εδρη στερεά γωνία.

Οἱ ἀκτίνες $ΟΑ_1, ΟΑ_2, \ldots ΟΑ_ν$ λέγονται **ἀκμές**, οἱ κυρτές γωνίες $Α_1\widehat{Ο}Α_2$, $Α_2\widehat{Ο}Α_3$, $\ldots Α_ν\widehat{Ο}Α_1$ λέγονται **ἕδρες** καί ἡ κοινή ἀρχή Ο τῶν ἀκμῶν **κορυφή** τῆς ν-εδρης γωνίας, ἡ ὁποία συμβολίζεται Ο, $Α_1Α_2Α_3 \ldots Α_ν$.

Ἡ ν-εδρη στερεά γωνία ἔχει ν δίεδρες γωνίες $Α_ν-ΟΑ_1-Α_2$, $Α_1-ΟΑ_2-Α_3, \ldots Α_{ν-1}-ΟΑ_ν-Α_1$, τίς ὁποῖες συμβολίζουμε μέ $\widehat{Α}_1, \widehat{Α}_2, \ldots \widehat{Α}_ν$.

β') Κυρτές στερεές γωνίες.— Μία ν-εδρη στερεή γωνία λέγεται κυρτή, ὅταν ὡς πρός τό ἐπίπεδο καθεμιᾶς ἕδρας οἱ ὑπόλοιπες ν — 2 ἀκμές βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου.

γ') Τό ἐσωτερικό κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.—Ἕνα σημεῖο Μ λέγεται ἐσωτερικό σημεῖο τῆς κυρτῆς ν-εδρης Ο, $Α_1Α_2 \ldots Α_ν$, ὅταν ὡς πρός καθεμιά ἕδρα βρίσκεται στό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου, στό ὁποῖο βρίσκονται καί οἱ ὑπόλοιπες ν — 2 ἀκμές.

Τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ τό **ἐσωτερικό τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.**

106. Μπορεῖ ν' ἀποδειχτεῖ τό ἑξῆς θεώρημα:

(Θ)—Ἄν δοθεῖ μιά ὁποιαδήποτε κυρτή, πολύεδρη, στερεά γωνία, τότε ὑπάρχει ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει ὅλες τίς ἀκμές της. Ἡ τομή τῆς στερεᾶς γωνίας ἀπό τό ἐπίπεδο αὐτό εἶναι κυρτό πολύγωνο.

107. (Θ) — Τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἑδρῶν μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερο ἀπό τέσσερις ὀρθές.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε s τό ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν τῆς κυρτῆς στερεῆς γωνίας Ο, $Α_1Α_2 \ldots Α_ν$ (σχ. 100), δηλ.:

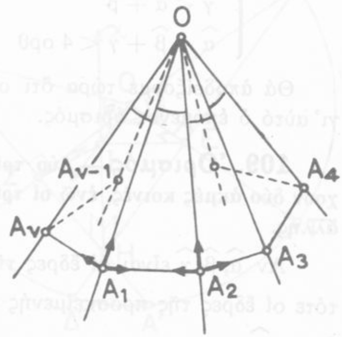
$$s = Α_1\widehat{Ο}Α_2 + Α_2\widehat{Ο}Α_3 + \ldots + Α_ν\widehat{Ο}Α_1.$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι $s < 4$ ορθ.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει ὅλες τίς ἀκμές τῆς ν-εδρης αὐτῆς γωνίας κατά σειρά στά σημεῖα $A_1, A_2, \ldots A_\nu$ (§ 106). Ἡ τομή τῆς ν-εδρης εἶναι τότε τό κυρτό πολύγωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ (§ 106).

Θεωρώντας κατά σειρά τίς τρίεδρες $A_1, A_\nu OA_2, A_2, A_1OA_3, \ldots, A_\nu, A_{\nu-1}OA_1$ καί ἐφαρμόζοντας τό θεώρημα τῆς § 103 παίρνουμε τίς ν ἀνισότητες:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
&A_\nu\widehat{A_1}A_2 < A_\nu\widehat{A_1}O + A_2\widehat{A_1}O\\
&A_1\widehat{A_2}A_3 < A_1\widehat{A_2}O + A_3\widehat{A_2}O\\
&A_2\widehat{A_3}A_4 < A_2\widehat{A_3}O + A_4\widehat{A_3}O\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}A_1 < A_{\nu-1}\widehat{A_\nu}O + A_1\widehat{A_\nu}O
\end{aligned}
$$



Σχ. 100

Τό ἄθροισμα τῶν πρώτων μελῶν τῶν (1) εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου $A_1A_2 \ldots A_\nu$ καί συνεπῶς εἶναι ἴσο μέ 2ν—4 ορθ. Ἐξάλλου τά δεύτερα μέλη περιέχουν ὅλες τίς γωνίες τῶν βάσεων τῶν ν παράπλευρων τριγώνων OA_1A_2, OA_2A_3, $OA_3A_4, \ldots OA_\nu A_1$. Τό ἄθροισμα ὅμως ὅλων τῶν γωνιῶν τῶν βάσεων $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_\nu A_1$ τῶν τριγώνων αὐτῶν σύν τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, πού ἔχουν κορυφή τό O, ἀποτελεῖ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν παράπλευρων τριγώνων, πού εἶναι σέ πλῆθος ν, δηλ εἶναι 2ν ὀρθές. Ἑπομένως τό ἄθροισμα μόνο τῶν γωνιῶν τῶν βάσεων εἶναι ἴσο μέ 2ν ορθ.— (ἄθροισμα τῶν γύρω ἀπό τό O γωνιῶν) = 2ν ορθ — s. Μετά ἀπ' αὐτά προσθέτοντας κατά μέλη τίς (1) παίρνουμε:

$$2\nu - 4\ \text{ορθ} < 2\nu\ \text{ορθ} - s \Rightarrow s < 4\ \text{ορθ}.$$

III. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΕΔΡΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΙΣ ΔΙΕΔΡΕΣ ΜΙΑΣ ΤΡΙΕΔΡΗΣ ΣΤΕΡΕΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

108. Ἀναγκαῖες συνθῆκες ἀνάμεσα στίς τρεῖς ἕδρες μιᾶς τρίεδρης. Τό γενικό θεώρημα γιά τίς ἕδρες μιᾶς ν-εδρης στερεᾶς γωνίας (§ 107) ἰσχύει φυσικά καί γιά τίς ἕδρες μιᾶς τρίεδρης. Ἄν, λοιπόν, εἶναι α, β, γ οἱ ἕδρες μιᾶς ὁποιασδήποτε τρίεδρης, αὐτές ὑπακούουν στή συνθήκη: $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} < 4$ ορθ.

Οἱ $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ ὅμως ὑπακούουν καί στήν «τριγωνική συνθήκη» (§103): $\widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}$, $\widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma}$, $\widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}$.

Ἑπομένως οἱ τρεῖς ἕδρες $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ μιᾶς ὁποιασδήποτε τρίεδρης ἱκανοποιοῦν τίς τέσσερις σχέσεις:

$$(1) \quad \begin{cases} \widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} \\ \widehat{\beta} < \widehat{\alpha} + \widehat{\gamma} & \text{(Ἀναγκαῖες συνθῆκες)} \\ \widehat{\gamma} < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} \\ \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} < 4\,\text{ορθ} \end{cases}$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι οἱ (1) εἶναι καί ἱκανές. Θά μᾶς χρειαστεῖ γι' αὐτό ὁ ἑπόμενος ὁρισμός.

109. Ὁρισμός.—Δύο τρίεδρες λέγονται «προσκείμενες», ὅταν ἔχουν δύο ἀκμές κοινές, ἐνῶ οἱ τρίτες ἀκμές τους εἶναι ἡ μία προέκταση τῆς ἄλλης.

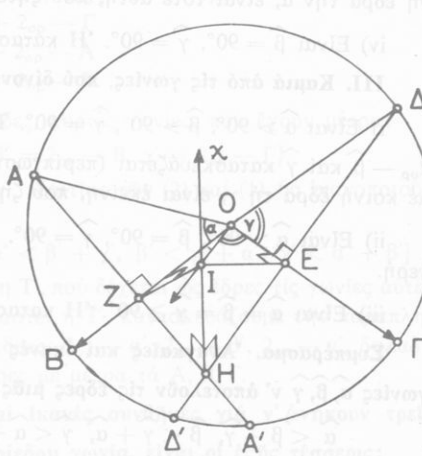
Ἄν $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ εἶναι οἱ ἕδρες τῆς μιᾶς καί $\widehat{\alpha}$ ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἀκμῶν, τότε οἱ ἕδρες τῆς προσκείμενής της φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι $\widehat{\alpha}$, $2_{ορ} - \widehat{\beta}$, $2_{ορ} - \widehat{\gamma}$.

110. Κατασκευή μιᾶς τρίεδρης ἀπό τίς τρεῖς ἕδρες της.

(Θ)—Ἄν δοθοῦν τρεῖς γωνίες, πού ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο ἀπό τέσσερις ὀρθές καί καθεμιά ἀπ' αὐτές εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, τότε ὑπάρχει (κατασκευάζεται) μιά τρίεδρη, πού δέχεται ὡς ἕδρες της τίς τρεῖς δεδομένες γωνίες.

Ἀπόδειξη **I. Δύο ἀπό τίς δεδομένες γωνίες εἶναι ὀξεῖες καί ἡ τρίτη ὁποιαδήποτε κυρτή γωνία.** Κάνουμε τίς δεδομένες γωνίες διαδοχικές καί ἐπίκεντρες σέ ἕναν ὁποιοδήποτε κύκλο (Ο) μέ μεσαία γωνία ἐκείνη, πού δέν εἶναι μικρότερη ἀπ' τίς δύο ἄλλες (σχ. 101). Ἔτσι παίρνουμε τίς γωνίες $\mathrm{A\widehat{O}B}$, $\mathrm{B\widehat{O}\Gamma}$, $\mathrm{\Gamma\widehat{O}\Delta}$ ἴσες, ἀντιστοίχως, μέ τίς τρεῖς δεδομένες $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ καί εἶναι: $\widehat{\mathrm{AB}} \leq \widehat{\mathrm{B\Gamma}}$, $\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}} \leq \widehat{\mathrm{B\Gamma}}$ καί $\widehat{\mathrm{B\Gamma}} - \widehat{\mathrm{AB}} < \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ (ἐπειδή $\widehat{\mathrm{B\Gamma}} < \widehat{\mathrm{AB}} + \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ ἀπ' τήν ὑπόθεση). Ἐξάλλου τό ἄθροισμα τῶν τριῶν τόξων $\widehat{\mathrm{AB}}, \widehat{\mathrm{B\Gamma}}, \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ δέν καλύπτει τήν περιφέρεια καί ἐπομένως τό Α βρίσκεται πάνω στό τόξο $\widehat{\mathrm{B\Delta}}$, πού δέν περιέχει τό Γ.

Φέρνουμε μιά χορδή $\Delta\Delta' \perp \mathrm{O\Gamma}$ καί ἄλλη χορδή $\mathrm{AA'} \perp \mathrm{OB}$. Τότε, ἐπειδή $\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta'}} = \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}}$ καί $\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}} \leq \widehat{\mathrm{\Gamma B}} \Rightarrow \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta'}} \leq \widehat{\mathrm{\Gamma B}}$, ἄρα τό Δ′ βρίσκεται πάνω στό τόξο $\widehat{\mathrm{\Gamma B}}$ (ἤ, τό πολύ, στό ἄκρο Β). Μέ τόν ἴδιο τρόπο βρίσκουμε ὅτι τό Α′ βρίσκεται πάνω στό τόξο $\widehat{\mathrm{\Gamma B}}$ (ἤ, τό πολύ, στό Γ). Ἔχουμε ἐπίσης: $\widehat{\mathrm{\Gamma A'}} = \widehat{\mathrm{\Gamma B}} - \widehat{\mathrm{A'B}} = \widehat{\mathrm{\Gamma B}} - \widehat{\mathrm{AB}} < \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta}} = \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta'}}$, δηλαδή $\widehat{\mathrm{\Gamma A'}} < \widehat{\mathrm{\Gamma\Delta'}}$ καί συνεπῶς τό Α′ βρίσκεται πάνω στό τόξο $\widehat{\mathrm{\Gamma\Delta'}}$, ἄρα τό Α′ βρίσκεται καί πάνω στό ἔλασσον τόξο $\widehat{ΔΓΔ'}$, τό ὁποῖο περιέχει τό Γ. Τό Α βρίσκεται πάνω στό μεῖζον τόξο $\widehat{Δ'ΒΔ}$, τό ὁποῖο δέν περιέχει τό Γ. Ἐπομένως τά Α καί Α′ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΔΔ′, ἄρα ἡ χορδή ΑΑ′ τέμνει τήν εὐθεία ΔΔ′ σέ κάποιο σημεῖο Η. Τό Η, ἀφοῦ ἀνήκει στή χορδή ΑΑ′, εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου, ἄρα καί ἐσωτερικό σημεῖο τῆς χορδῆς ΔΔ′.



Σχ. 101

Στό Η ὑψώνουμε μιά ἡμιευθεία Ηx, κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου Ο καί στό ἐπίπεδο xΗΔ γράφουμε περιφέρεια μέ κέντρο τό Ε (μέσο τῆς ΔΔ′) καί ἀκτίνα ἴση μέ ΕΔ. Ἡ περιφέρεια αὐτή τέμνει τήν ἡμιευθεία Ηx, γιατί $ΕΔ = ΕΔ' > ΕΗ$. Ἔστω Ι τό σημεῖο τομῆς τῆς Ηx καί τῆς (Ε, ΕΔ). Εἶναι τότε $ΙΕ \perp ΟΕ$ καί $ΙΖ \perp ΟΖ$ (θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων). Ἡ τρίεδρη γωνία Ο, ΒΙΓ ἔχει ἕδρες ἴσες πρός τίς δεδομένες γωνίες $\widehat{α}, \widehat{β}, \widehat{γ}$. Γιατί $\widehat{ΒΟΓ} = \widehat{β}$ ἀπ' τήν κατασκευή. Ἡ $\widehat{ΙΟΕ} = \widehat{ΕΟΔ} = \widehat{γ}$, γιατί τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΕΟ καί ΔΕΟ εἶναι ἴσα, ἀφοῦ ἔχουν τήν ΟΕ κοινή καί $ΕΙ = ΕΔ$. Εἶναι ἐπίσης $ΟΙ = ΟΔ = ΟΑ \Rightarrow ΟΙ = ΟΑ$ καί συνεπῶς τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΙΖΟ καί ΑΖΟ εἶναι ἐπίσης ἴσα, γιατί ἔχουν $ΟΖ = ΟΖ$, $ΟΙ = ΟΑ$. Ἄρα $\widehat{ΖΟΙ} = \widehat{ΒΟΙ} = \widehat{ΑΟΒ} = \widehat{α}$. Ἡ κατασκευή τῆς τρίεδρης ἀποδεικνύει καί τήν ὕπαρξή της.

ΙΙ. Μιά ἀπό τίς δεδομένες γωνίες εἶναι ὀξεία καί οἱ ἄλλες εἶναι ὁποιεσδήποτε κυρτές γωνίες. Ἔστω $α < 90°$. Διακρίνουμε ὑποπεριπτώσεις:

i) Μία ἀπό τίς δύο ἄλλες $\widehat{β}, \widehat{γ}$ εἶναι ὀξεία. Τότε βρισκόμαστε στήν προηγούμενη περίπτωση.

ii) Οἱ δύο ἄλλες $\widehat{β}, \widehat{γ}$ εἶναι ἀμβλεῖες. Τότε ἡ τρίεδρη μέ ἕδρες $2_{ορ} - \widehat{β}$, $2_{ορ} - \widehat{γ}$ καί $\widehat{α}$ κατασκευάζεται (περίπτωση Ι). Ἡ προσκείμενή της, μέ κοινή ἕδρα τήν $\widehat{α}$, εἶναι αὐτή, πού ζητοῦμε (§ 109).

iii) Εἶναι $\widehat{β} > 90°$ καί $\widehat{γ} \geqq 90°$. Τότε ἡ τρίεδρη μέ ἕδρες α, $2_{ορ} - \widehat{β}$

καί $2_{ορ} - \widehat{γ}$ κατασκευάζεται (περίπτωση Ι). Ἡ προσκείμενη σ' αὐτή, μέ κοινή ἕδρα τήν α, εἶναι τότε αὐτή, πού ζητοῦμε.

iv) Εἶναι $\widehat{β} = 90°$, $\widehat{γ} = 90°$. Ἡ κατασκευή εἶναι ἀμέσως φανερή.

III. Καμιά ἀπό τίς γωνίες, πού δίνονται, δέν εἶναι ὀξεία.

i) Εἶναι $\widehat{α} > 90°$, $\widehat{β} > 90°$, $\widehat{γ} = 90°$. Τότε ἡ τρίεδρη μέ ἕδρες $2_{ορ} - \widehat{α}$, $2_{ορ} - \widehat{β}$ καί $\widehat{γ}$ κατασκευάζεται (περίπτωση Ι) καί ἡ προσκείμενη σ' αὐτή, μέ κοινή ἕδρα τή γ, εἶναι ἐκείνη, πού ζητοῦμε.

ii) Εἶναι $\widehat{α} > 90°$, $\widehat{β} = 90°$, $\widehat{γ} = 90°$. Ἡ κατασκευή εἶναι ἀμέσως φανερή.

iii) Εἶναι $\widehat{α} = \widehat{β} = \widehat{γ} \geqq 90°$. Ἡ κατασκευή εἶναι ἀμέσως φανερή.

Συμπέρασμα. Ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες, γιά νά μποροῦν τρεῖς γωνίες $\widehat{α}, \widehat{β}, \widehat{γ}$ ν' ἀποτελοῦν τίς ἕδρες μιᾶς τρίεδρης εἶναι οἱ ἑξῆς τέσσερις:

$$\widehat{α} < \widehat{β} + \widehat{γ},\quad \widehat{β} < \widehat{γ} + \widehat{α},\quad \widehat{γ} < \widehat{α} + \widehat{β},\quad \widehat{α} + \widehat{β} + \widehat{γ} < 4\,\text{ορθ.}$$

111. Ἀναγκαῖες συνθῆκες ἀνάμεσα στὶς 3 δίεδρες μιᾶς ὁποιασδήποτε τρίεδρης.

(Θ)—Σέ κάθε τρίεδρη τό ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων εἶναι μεγαλύτερο ἀπό δύο καί μικρότερο ἀπό ἕξι ὀρθές. Κάθε μιά δίεδρη, ὅταν αὐξηθεῖ κατά δύο ὀρθές, ὑπερβαίνει τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Τό θεώρημα αὐτό εἶναι τό δυαδικό τοῦ θεωρήματος τῆς § 108. Πράγματι ἄς εἶναι Α, Β, Γ τά μέτρα τῶν διέδρων μιᾶς ὁποιασδήποτε τρίεδρης, Τ. Ἡ παραπληρωματική τῆς Τ ἔχει ἕδρες: $2_{ορ} - Α$, $2_{ορ} - Β$, $2_{ορ} - Γ$. Οἱ ἕδρες αὐτές $2_{ορ} - Α$, $2_{ορ} - Β$, $2_{ορ} - Γ$, ἀφοῦ ἀνήκουν σέ μιά τρίεδρη, θά ἱκανοποιοῦν τίς συνθῆκες (1) τῆς § 108:

$$\begin{array}{lcl}
0 < 2_{ορ} - Α + 2_{ορ} - Β + 2_{ορ} - Γ < 4\,\text{ορθ.} & \iff & 2_{ορ} < Α + Β + Γ < 6_{ορ} \\
2_{ορ} - Α < 2_{ορ} - Β + 2_{ορ} - Γ & \iff & Α + 2_{ορ} > Β + Γ \\
2_{ορ} - Β < 2_{ορ} - Γ + 2_{ορ} - Α & \iff & Β + 2_{ορ} > Α + Γ \\
2_{ορ} - Γ < 2_{ορ} - Α + 2_{ορ} - Β & \iff & Γ + 2_{ορ} > Α + Β
\end{array}$$

112. Κατασκευή μιᾶς τρίεδρης ἀπό τὶς τρεῖς διεδρές της.

(Θ)—Ἄν δοθοῦν τρεῖς κυρτές δίεδρες, τῶν ὁποίων τά μέτρα Α, Β, Γ ἱκανοποιοῦν τίς τέσσερις σχέσεις τῆς § 111, τότε ὑπάρχει (κατασκευάζεται) τρίεδρη, πού νά ἔχει ὡς δίεδρες, τίς δίεδρες, πού δίνονται.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τρεῖς δίεδρες γωνίες, τῶν ὁποίων τά μέτρα Α, Β, Γ ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις:

$$\{2_{ορ} < Α + Β + Γ < 6_{ορ},\ Α + 2_{ορ} > Β + Γ,\ Β + 2_{ορ} > Α + Γ,\ Γ + 2_{ορ} > Α + Β\}$$

Τότε τά Α, Β, Γ θά ἱκανοποιοῦν καί τίς ἰσοδύναμες σχέσεις (βλ. § 111):

$$(1)\quad \begin{cases} 0 < 2_{o\rho} - A + 2_{o\rho} - B + 2_{o\rho} - \Gamma < 4 \text{ ορθ} \\ 2_{o\rho} - A < 2_{o\rho} - B + 2_{o\rho} - \Gamma \\ 2_{o\rho} - B < 2_{o\rho} - \Gamma + 2_{o\rho} - A \\ 2_{o\rho} - \Gamma < 2_{o\rho} - A + 2_{o\rho} - B. \end{cases}$$

Ἄς θεωρήσουμε τρεῖς ἐπίπεδες, κυρτές γωνίες, πού ἔχουν μέτρα:

$$(2)\quad \{\alpha' = 2_{o\rho} - A,\ \beta' = 2_{o\rho} - B,\ \gamma' = 2_{o\rho} - \Gamma\}$$

Τότε οἱ γωνίες αὐτές α΄, β΄, γ΄, ἐξαιτίας τῶν (2) καί (1), θά ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις:

$$(3)\quad \{\alpha' + \beta' + \gamma' < 4 \text{ ορθ},\ \alpha' < \beta' + \gamma',\ \beta' < \gamma' + \alpha',\ \gamma' < \alpha' + \beta'\}$$

Ἄρα κατασκευάζεται τρίεδρη Τ΄, πού δέχεται ὡς ἕδρες τίς γωνίες αὐτές α΄, β΄, γ΄ (§ 110). Ὅταν κατασκευαστεῖ ἡ Τ΄, κατασκευάζουμε τήν παραπληρωματική της Τ, πού θά ἔχει δίεδρες: $2_{o\rho} - \alpha'$, $2_{o\rho} - \beta'$, $2_{o\rho} - \gamma'$, δηλαδή (βλέπε τίς (2)) ἡ Τ θά ἔχει δίεδρες μέ μέτρα τά Α, Β, Γ.

Συμπέρασμα. Ἀναγκαῖες καί ἱκανές συνθῆκες, γιά ν' ἀνήκουν τρεῖς δίεδρες γωνίες $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$ σέ μιά τρίεδρη γωνία, εἶναι οἱ ἑξῆς τέσσερις:

$$\{2_{o\rho} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6 \text{ ορθ},\ \widehat{A} + 2_{o\rho} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma},\ \widehat{B} + 2_{o\rho} > \widehat{\Gamma} + \widehat{A},$$
$$\widehat{\Gamma} + 2_{o\rho} > \widehat{A} + \widehat{B}\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

165. Σέ κάθε τρίεδρη τουλάχιστον μία ἕδρα εἶναι μικρότερη ἀπό 120° καί μία δίεδρη εἶναι μεγαλύτερη ἀπό 60°.

166. Δύο ἕδρες μιᾶς τρίεδρης εἶναι 68° καί 119°. Μεταξύ ποίων ὁρίων περιέχεται ἡ τρίτη ἕδρα;

167. Δύο δίεδρες μιᾶς τρίεδρης εἶναι 115° καί 75°. Μεταξύ ποίων ὁρίων περιέχεται ἡ τρίτη δίεδρη;

168. Μία τρίεδρη ἔχει δύο ἕδρες ἴσες καί τήν τρίτη 135°. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ παραπληρωματική της ἔχει ὅλες τίς δίεδρες μικρότερες ἀπό 117,5°.

169. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διέδρων κυρτῆς ν-εδρης στερεᾶς γωνίας περιέχεται μεταξύ 2ν - 4 ορθ. καί 6ν - 12 ορθ.

170. Ἔχουμε μιά τετράεδρη στερεά κυρτή γωνία.

i) Νά ὁριστεῖ ἕνα ἐπίπεδο, πού τήν τέμνει κατά παραλληλόγραμμο.

ii) Πότε τέμνεται κατά ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο;

iii) Ἄν ἡ τετράεδρη ὁρίζεται ἀπό τήν κορυφή της Ο καί ἀπό μιά ἐπίπεδη τομή της ΑΒΓΔ, πού δέν εἶναι οὔτε παραλληλόγραμμο οὔτε τραπέζιο, νά σχεδιαστεῖ ἡ τομή της ἀπό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο A_1 τῆς ἀκμῆς ΟΑ, τό ὁποῖο τήν τέμνει κατά παραλληλόγραμμο. (**Ὑποδ.** Ἄν (ε_1) ἡ κοινή τομή τῶν ἐπιπέδων δύο ἀπέναντι ἑδρῶν τῆς τετράεδρης καί (ε_2) ἡ κοινή τομή τῶν ἐπιπέδων τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἑδρῶν, τότε οἱ (ε_1) καί (ε_2) ἔχουν τίς διευθύνσεις τῶν πλευρῶν τῆς παραλληλόγραμμης τομῆς).

171. Ἄν μιά τετράεδρη κυρτή στερεά γωνία τέμνεται ἀπό ἐπίπεδο (Π) κατά τετράπλευρο περιγράψιμο καί ἄν ἡ κορυφή της προβάλλεται στό (Π) στό κέντρο τοῦ ἐγ-

γεγραμμένου κύκλου τῆς τομῆς, νά ἀποδείξετε ὅτι, τότε, τό ἄθροισμα δύο ἀπέναντι ἑδρῶν τῆς τετράεδρης εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἑδρῶν.

172. Ἐπάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) γράφουμε ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις (ΑΒ) = = (ΓΔ) = α, (ΒΓ) = (ΑΔ) = β. Στό Α ὑψώνουμε τμῆμα AS = h κάθετο στό ἐπίπεδο (Π). Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ τομή τῆς στερεᾶς γωνίας S, ΑΒΓΔ ἀπό ἕνα ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τό Α καί εἶναι κάθετο στήν ἀκμή SΓ, εἶναι τετράπλευρο ἐγγράψιμο. Νά ὑπολογιστεῖ συναρτήσει τῶν α, β, h ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου του κύκλου.

173. Ἕνα μεταβλητό ἐπίπεδο τέμνει τίς ἀκμές ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ μιᾶς τετράεδρης στερεᾶς γωνίας Ο, ΑΒΓΔ στά Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως. Ἄν τά Κ καί Λ μένουν σταθερά: i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΜΝ περνᾶ ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο. ii) Νά βρεῖτε τόν τόπο τῆς κοινῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν ΚΝ καί ΛΜ.

174. Ἔχουμε μιά πεντάεδρη στερεά γωνία, πού ὁρίζεται ἀπό τήν κορυφή της Ο καί ἀπό τήν τομή της ΑΒΓΔΕ μέ ἕνα ἐπίπεδο (Π). Ἐπάνω στό (Π) ὑπάρχει μιά εὐθεία (δ) καί ἕνα σημεῖο Ι καί ἐπάνω στό τμῆμα ΟΙ δίνεται ἕνα σημεῖο Ι΄. Ζητεῖται νά σχεδιαστεῖ μέ χρήση εὐθειῶν μόνο ἡ τομή τῆς στερεᾶς γωνίας ἀπό τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζουν ἡ (δ) καί τό Ι΄.

175. Νά κατασκευαστοῦν γεωμετρικά οἱ ἀντίστοιχες τῶν διέδρων μιᾶς τρίεδρης, πού ἔχει ἕδρες τρεῖς δεδομένες ὀξεῖες γωνίες ἤ δύο ὀξεῖες καί μία ἀμβλεία. (Ὑπόδ. Ἔστω Ο, xyz ἡ ζητούμενη καί $\widehat{xOy}$, $\widehat{xOz}$ ὀξεῖες. Ἄς λάβουμε ἐπάνω στήν Οx ἕνα τμῆμα ΟΑ γνωστοῦ (αὐθαίρετου) μήκους καί ἄς θεωρήσουμε τήν τομή ΑΒΓ τῆς τρίεδρης, ὅπου Επιπ ΑΒΓ $\perp$ ΟΑ. Τότε τά τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΒΓ, ΑΒΓ κατά σειρά κατασκευάζονται καί ἡ $\widehat{BA\Gamma}$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχη τῆς διέδρης Β–ΑΟ–Γ).

176. Νά κατασκευαστοῦν οἱ ἀντίστοιχες ἐπίπεδες τῶν διέδρων μιᾶς τρίεδρης γωνίας, πού ἔχει μιά ἕδρα 90° καί τίς δυό ἄλλες δεδομένες ὀξεῖες γωνίες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI

ΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

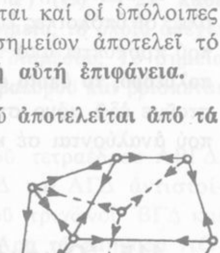
ΚΥΡΤΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

113. Ὁρισμοί.— α΄) Λέγεται **κυρτή, κλειστή, πολυεδρική ἐπιφάνεια τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό ν κυρτά πολύγωνα (ν>3), μή ὁμοεπίπεδα ἀνά δύο καί σέ διάταξη τέτοια, ὥστε 1ο) Κάθε πλευρά τοῦ καθενός νά εἶναι ταυτόχρονα καί πλευρά ἑνός καί μόνο ἄλλου ἀπό τά ν - 1 ὑπόλοιπα καί 2ο) ὡς πρός τό ἐπίπεδο τοῦ καθενός τά ν - 1 ἄλλα πολύγωνα νά βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου.**

Τά ν αὐτά πολύγωνα θεωροῦνται ὡς ἐπίπεδες περιοχές (τμήματα ἐπιπέδου) καί λέγονται **ἕδρες**, οἱ πλευρές τους λέγονται **ἀκμές** καί οἱ κορυφές τους **κορυφές** τῆς παραπάνω κυρτῆς πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας.

β΄) Ἕνα σημεῖο Μ λέγεται **ἐσωτερικό σημεῖο** τῆς κυρτῆς κλειστῆς πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας, ὅταν βρίσκεται ὡς πρός τό ἐπίπεδο **καθεμιᾶς** ἕδρας πρός τό μέρος τοῦ χώρου, στό ὁποῖο βρίσκονται καί οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες (καί κορυφές). Τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἀποτελεῖ τό μέρος τοῦ χώρου, πού **περικλείεται ἀπό τήν κλειστή αὐτή ἐπιφάνεια.**

γ΄) **Κυρτό πολύεδρο λέγεται τό σημειοσύνολο, πού ἀποτελεῖται ἀπό τά σημεῖα μιᾶς κυρτῆς κλειστῆς πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας καί ἀπό τά ἐσωτερικά της σημεῖα.** Ἔτσι κάθε κυρτό πολύεδρο ἔχει μιά **ἐπιφάνεια** καί ἕνα **ἐσωτερικό.**



Σχ. 102

Οἱ ἕδρες, ἀκμές καί κορυφές τῆς ἐπιφάνειας, πού περικλείει τό πολύεδρο, λέγονται ἐπίσης **ἕδρες, ἀκμές καί κορυφές τοῦ πολυέδρου.** Ἔτσι, π.χ. τό κυρτό πολύεδρο πού φαίνεται στό σχ. 102 ἔχει 7 ἕδρες, 14 ἀκμές καί 9 κορυφές.

Χαρακτηριστική ἰδιότητα τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι ὅτι, ὡς πρός τό ἐπίπεδο **καθεμιᾶς** ἕδρας του, ὅλες οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες καί κορυφές του βρίσκονται **πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου.**

δ΄) Κάθε ἀκμή τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι καί ἀκμή μιᾶς μόνο διέδρης γωνίας, πού ὁρίζεται ἀπό τά ἡμιεπίπεδα, πάνω στά ὁποῖα βρίσκονται οἱ δυό ἕδρες, πού συντρέχουν πρός τήν ἀκμή αὐτή. Κάθε κορυφή τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι καί κορυφή μιᾶς καί μόνο κυρτῆς **στερεᾶς** γωνίας, πού ὁρίζεται ἀπό τίς ἀκμές, πού συντρέχουν πρός τήν κορυφή αὐτή (βλ. Σχ. 102).

ε΄) Ἡ **τομή** τῆς ἐπιφάνειας ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου ἀπό ἕνα ἐπίπεδο εἶναι ἀναγκαστικά **κυρτό πολύγωνο**, γιατί ὡς πρός κάθε πλευρά του οἱ ὑπόλοιπες κορυφές βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος της.

ς΄) **Διαγώνιος** ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου λέγεται κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει δυό κορυφές, πού **δέ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια ἕδρα.** Κάθε διαγώνιος $A_\kappa A_\lambda$ βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ πολυέδρου, γιατί τά A_κ, A_λ βρίσκονται, ὡς πρός τό ἐπίπεδο κάθε ἕδρας, πού δέν περιέχει τά A_κ,A_λ, πρός τό μέρος τῶν ὑπόλοιπων κορυφῶν. Ἀλλά καί πρός κάθε ἕδρα, πού περιέχει τό A_κ ἤ τό A_λ, πάλι βρίσκεται τό τμῆμα $A_\kappa A_\lambda$ πρός τό μέρος τῶν ὑπόλοιπων κορυφῶν.

114. Μή κυρτό πολύεδρο. Ἄν θεωρήσουμε μιά διαδοχή ἀπό κυρτά πολύεδρα $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_\rho$, ἀπό τά ὁποῖα τό καθένα συνέχεται μέ τό ἑπόμενό του μέ μιά κοινή ἕδρα ἤ ἀκμή ἤ κορυφή, ἐνῶ τά ἐσωτερικά τους εἶναι ξένα μεταξύ τους ἀνά δύο, τότε ἡ ἕνωση τῶν ἐσωτερικῶν ὅλων αὐτῶν τῶν πολυέδρων μαζί μέ τά ἐσωτερικά σημεῖα τῶν κοινῶν ἑδρῶν ἀποτελεῖ τό ἐσωτερικό ἑνός νέου πολυέδρου, πού ἔχει ἐπιφάνεια τό σύνολο τῶν μή κοινῶν ἑδρῶν τῶν πολυέδρων $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_\rho$. Ἄν ἡ νέα αὐτή ἐπιφάνεια δέν εἶναι κυρτή, δηλ. ὡς πρός τό ἐπίπεδο κάποιας ἕδρας δέ βρίσκονται ὅλες οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου, τότε τό πολύεδρο, πού προκύπτει ἀπό τήν ἕνωση τῶν κυρτῶν πολυέδρων, εἶναι **ἕνα μή κυρτό πολύεδρο, τό ὁποῖο ἀναλύεται σέ κυρτά** (στά $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_\rho$). Θά περιοριστοῦμε ἐδῶ μόνο στό εἶδος αὐτό τῶν μή κυρτῶν πολυέδρων (δηλ. αὐτῶν πού ἀναλύονται σέ κυρτά).

ΤΟ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟ

115. Ὁρισμός καί στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. — α΄) **Τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ, πού δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, ὁρίζουν τέσσερα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΔΓ, ΒΓΔ, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν μιά κλειστή κυρτή πολυεδρική ἐπιφάνεια (§ 113), ἡ ὁποία μαζί μέ τό ἐσωτερικό της (§ 113) ὁρίζει ἕνα κυρτό πολύεδρο, ΑΒΓΔ, πού ὀνομάζεται «τετράεδρο» (σχ. 103).**

Τό τετράεδρο εἶναι τό πιό ἁπλό ἀπό τά πολύεδρα, ὅπως τό τρίγωνο εἶναι τό πιό ἁπλό ἀπό τά πολύγωνα. Πολύεδρο μέ λιγότερες ἀπό τέσσερις ἕδρες δέν ὑπάρχει.

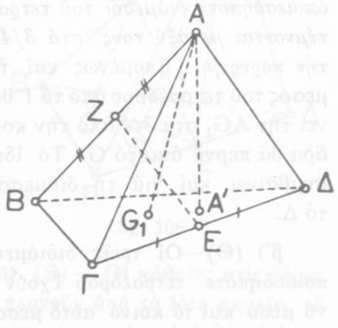
Σέ κάθε κορυφή τοῦ τετραέδρου ἀντιστοιχεῖ μιά **ἀπέναντι ἕδρα,** πού ὁρίζεται ἀπό τίς τρεῖς ἄλλες κορυφές.

Ἀπέναντι ἀκμές τοῦ τετραέδρου λέγονται δυό ἀσύμβατες ἀκμές του.

Τό τετράεδρο ΑΒΓΔ ἔχει τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν: (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΒΔ), (ΑΔ, ΒΓ).

Ὕψος ἑνός τετραέδρου λέγεται ἡ ἀπόσταση μιᾶς κορυφῆς ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τό τετράεδρο ἔχει τέσσερα ὕψη, τά ὁποῖα κατά κανόνα δέν περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Μόνο σέ μιά ὁρισμένη κατηγορία τετραέδρων τά τέσσερα ὕψη περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο (βλ. § 121, γ΄).

Διάμεσος ἑνός τετραέδρου λέγεται κάθε τμῆμα, πού συνδέει μιά κορυφή μέ τό βαρύκεντρο τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τό τετράεδρο ἔχει, φυσικά, τέσσερις διαμέσους. Αὐτές περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο (§ 117, α΄).



Σχ. 103

Διδιάμεσος ἑνός τετραέδρου λέγεται τό τμῆμα, πού συνδέει τά μέσα δυό ἀπέναντι ἀκμῶν. Τό τετράεδρο ἔχει τρεῖς διδιαμέσους, οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο (§ 116, β΄).

ΑΞΙΟΛΟΓΑ ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

116. Κέντρο βάρους τοῦ τετραέδρου. α΄) (Θ) — **Σέ κάθε τετράεδρο οἱ τέσσερις διάμεσοι συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο, τό ὁποῖο ἀπέχει ἀπό κάθε κορυφή, τά τρία τέταρτα τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου. Τό σημεῖο αὐτό λέγεται «βαρύκεντρο» ἤ «κέντρο βάρους» τοῦ τετραέδρου καί βρίσκεται πάντοτε στό ἐσωτερικό τοῦ τετραέδρου.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω AG_1 καί AG_2 δυό διάμεσοι τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Τά G_1 καί G_2, ὡς κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΒΓΔ καί ΑΓΔ ἀντιστοίχως, βρίσκονται τό G_1 πάνω στή διάμεσο ΒΜ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ καί τό G_2 πάνω στή διάμεσο ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ. Ἄρα τά τμήματα AG_1 καί BG_2, ἀφοῦ βρίσκονται μέσα στό τρίγωνο ΑΒΜ, τέμνονται σέ κάποιο σημεῖο G, πού βρίσκεται μέσα στό τρίγωνο ΑΒΜ καί μέσα στό τετράεδρο ΑΒΓΔ (σχ. 104).

Ἐπειδή: $MG_1 : MB = MG_2 : MA = 1 : 3 \Rightarrow G_1G_2 \| AB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ τριγ $MG_1G_2 \approx$ τριγ ΜΒΑ καί τριγ $GG_1G_2 \approx$ τριγ GAB.

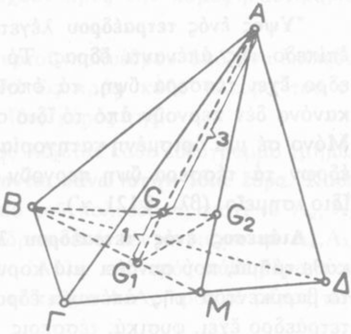
Ἀπό τά δύο αὐτά ζεύγη ὅμοιων τριγώνων παίρνουμε:

$$\frac{GG_1}{GA} = \frac{GG_2}{GB} = \frac{G_1G_2}{BA} = \frac{MG_1}{MB} = \frac{1}{3}$$

Δηλ.: $\dfrac{GG_1}{GA} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{GG_2}{GB} = \dfrac{1}{3}$ ἤ

$$\frac{AG}{AG_1} = \frac{BG}{BG_2} = \frac{3}{4}.$$

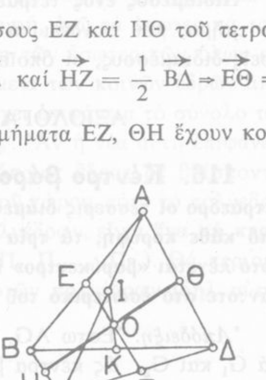
Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι *«δυό ὁποιεσδήποτε διάμεσοι τοῦ τετραέδρου τέμνονται μεταξύ τους στά 3/4 ἀπό τήν κορυφή»*. Ἑπομένως καί ἡ διάμεσος τοῦ τετραέδρου ἀπό τό Γ θά τέμνει τήν AG_1 στά 3/4 ἀπό τήν κορυφή, ἄρα θά περνᾶ ἀπό τό G. Τό ἴδιο θά συμβαίνει καί γιά τή διάμεσο ἀπό τό Δ.



Σχ. 104

β΄) (Θ)—**Οἱ τρεῖς διδιάμεσοι ὁποιουδήποτε τετραέδρου ἔχουν κοινό μέσο καί τό κοινό αὐτό μέσο τους εἶναι τό κέντρο βάρους τοῦ τετραέδρου.**

Ἀπόδειξη. i) Ἄς θεωρήσουμε δυό διδιαμέσους ΕΖ καί ΗΘ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 105). Ἐπειδή $\overrightarrow{E\Theta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Delta}$ καί $\overrightarrow{HZ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{E\Theta} = \overrightarrow{HZ} \Rightarrow$ ΕΘΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμο ⇒ τά τμήματα ΕΖ, ΘΗ ἔχουν κοινό μέσο Ο. Γιά τόν ἴδιο λόγο καί ἡ τρίτη διδιάμεσος ΙΚ ἔχει κοινό μέσο μέ τήν ΗΘ καί τήν ΕΖ.



Σχ. 105

Σημείωση. Τό ὅτι δυό διανύσματα τοῦ χώρου, πού εἶναι ὁμόρροπα πρός ἕνα τρίτο, εἶναι καί μεταξύ τους ὁμόρροπα ἔχει οὐσιαστικά ἀποδειχτεῖ στό θεώρημα τῆς § 60.

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι μέ τά μέσα Ε, Ι, Θ, Η, Κ, Ζ τῶν ἀκμῶν δημιουργοῦνται **τρία παραλληλόγραμμα, ΕΘΖΗ, ΙΘΚΗ, ΕΙΖΚ, καθένα ἀπό τά ὁποῖα βρίσκεται πάνω σέ ἐπίπεδο παρ/λο πρός δύο ἀπέναντι ἀκμές τοῦ τετραέδρου.**

ii) Μιά διάμεσος AG_1 καί μιά διδιάμεσος ΕΖ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 106) τέμνονται σ᾽ ἕνα σημεῖο Ι, γιατί ἡ εὐθεία ΕΖ, ἀφοῦ τέμνει τήν πλευρά ΑΒ τοῦ τριγώνου ABG_1 καί δέν τέμνει τή BG_1, τέμνει τήν πλευρά AG_1. (Ἀξίωμα Pasch). Ἄν Ο εἶναι τό μέσο τοῦ BG_1, θά ἔχουμε:

$$BO = OG_1 = G_1E$$

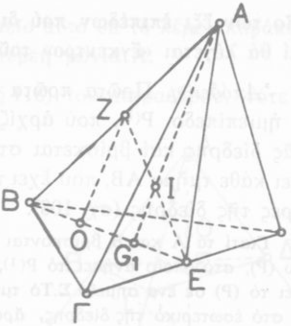
Ἑπομένως, $G_1A \| OZ$ καί, ἐπειδή ἡ G_1A περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς πλευρᾶς

ΟΕ τοῦ τριγώνου ΖΟΕ, περνᾶ καί ἀπό τό μέσο τῆς ΖΕ. Ὥστε τό Ι εἶναι μέσο τῆς διδιαμέσου ΕΖ.

Ἐξάλλου $G_1I = \frac{1}{2}OZ =$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AG_1\right) \Rightarrow IG_1 = \frac{1}{4}AG_1.$$

Ὥστε τό Ι εἶναι καί κέντρο βάρους τοῦ τετραέδρου (προηγούμενο θεώρημα).

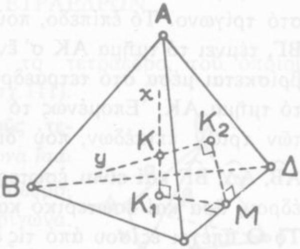


Σχ. 106

117. Περίκεντρο τοῦ τετραέδρου. **(Θ) — Οἱ κάθετες στίς ἕδρες ἑνός τετραέδρου στά περίκεντρα τῶν ἑδρῶν περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό ὁποῖο ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς τέσσερις κορυφές· τό σημεῖο αὐτό θά τό λέμε «περίκεντρο τοῦ τετραέδρου».**

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε τά περίκεντρα K_1 καί K_2 τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καί ΑΓΔ ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ, $K_1x \perp$ ΒΓΔ, $K_2y \perp$ ΑΓΔ (σχ. 107).

Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ἀκμῆς ΓΔ, τότε $K_1M \perp$ ΓΔ καί $K_2M \perp$ ΓΔ. Ἐπειδή K_1x ορθογ ΓΔ καί $K_1M \perp$ ΓΔ $\Rightarrow$ Επιπ $MK_1x \perp$ ΓΔ (βλ. § 45, ς΄). Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἔχουμε K_2y ορθογ ΓΔ καί $K_2M \perp$ ΓΔ $\Rightarrow$ Επιπ $MK_2y \perp$ ΓΔ. Ἄρα τά ἐπίπεδα MK_1x καί MK_2y ταυτίζονται, ἐπειδή καί τά δυό εἶναι μεσοκάθετα τῆς ΓΔ. Συνεπῶς οἱ K_1x καί K_2y εἶναι ὁμοεπίπεδες καί, ἐπειδή εἶναι κάθετες στά δυό τεμνόμενα ἐπίπεδα ΒΓΔ, ΑΓΔ, δέν εἶναι παράλληλες. Ἑπομένως τέμνονται σέ κάποιο σημεῖο Κ. Τό Κ ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς τρεῖς κορυφές Β, Γ, Δ, γιατί $K_1B = K_1\Gamma = K_2\Delta$. Τό Κ ἀπέχει ἐξίσου καί ἀπό τίς κορυφές Α, Γ, Δ, γιατί $K_2A = K_2\Gamma = K_2\Delta$ (§ 39). Ἑπομένως τό Κ ἀπέχει ἐξίσου καί ἀπό τίς τέσσερις κορυφές. Ἀφοῦ, τώρα, ΚΑ = ΚΒ = ΚΔ, ἔπεται ὅτι τό Κ προβάλλεται στό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΔ καί, ἀφοῦ ΚΑ = ΚΓ = ΚΒ, ἔπεται ὅτι τό Κ προβάλλεται στό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΓΒ.



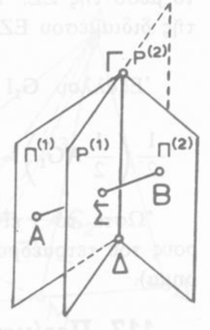
Σχ. 107

118. Ἔγκεντρο τοῦ τετραέδρου. **(Θ) — Στό ἐσωτερικό τοῦ τετραέδρου ὑπάρχει ἕνα σημεῖο, πού ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά ἐπίπεδα τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου καί τό ὁποῖο προβάλλεται στίς ἕδρες τοῦ τετραέδρου σέ ἐσωτερικά σημεῖα τῶν ἑδρῶν. Τό σημεῖο αὐτό εἶναι κοινό ση-**

μεῖο τῶν ἕξι ἐπιπέδων, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες γωνίες τοῦ τετραέδρου καί θά λέγεται «ἔγκεντρο» τοῦ τετραέδρου.

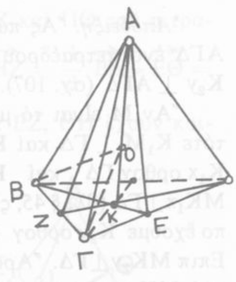
Ἀπόδειξη. Πρῶτα πρῶτα παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἡμιεπίπεδο $P^{(1)}$, πού ἀρχίζει ἀπό τήν ἀκμή ΓΔ μιᾶς δίεδρης καί βρίσκεται στό ἐσωτερικό της, τέμνει κάθε τμῆμα ΑΒ, πού ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς ἕδρες τῆς δίεδρης (σχ. 108).

Γιατί τά Α καί Β βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου (P), στό ὁποῖο ἀνήκει τό $P^{(1)}$, ἄρα τό τμῆμα ΑΒ τέμνει τό (P) σέ ἕνα σημεῖο Σ. Τό τμῆμα ΑΒ ἀνήκει ὁλόκληρο στό ἐσωτερικό τῆς δίεδρης, ἄρα καί τό σημεῖο του Σ εἶναι ἐσωτερικό τῆς δίεδρης. Τό Σ, ἐπειδή εἶναι ἐσωτερικό τῆς δίεδρης καί ἀνήκει στό (P), θά ἀνήκει στό μέρος τοῦ (P), πού εἶναι μέσα στή δίεδρη, δηλαδή στό ἡμιεπίπεδο $P^{(1)}$.



Σχ. 108

Ἄς θεωρήσουμε, τώρα, τό τετράεδρο ΑΒΓΔ (σχ.109). Τά ἡμιεπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες $\widehat{ΑΒ}$ καί $\widehat{ΑΔ}$, τέμνουν, ἀντιστοίχως, τίς ἀπέναντι ἀκμές, ΓΔ καί ΒΓ στά Ε καί Ζ. Τά τμήματα ΒΕ, ΔΖ, πού βρίσκονται μέσα στό τρίγωνο ΒΓΔ, τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Κ μέσα στό τρίγωνο. Τό ἐπίπεδο, πού διχοτομεῖ τή δίεδρη ΒΓ, τέμνει τό τμῆμα ΑΚ σ' ἕνα σημεῖο Ο, τό ὁποῖο βρίσκεται μέσα στό τετράεδρο, ἀφοῦ βρίσκεται καί τό τμῆμα ΑΚ. Ἑπομένως τό Ο εἶναι κοινό σημεῖο τῶν τριῶν ἐπιπέδων, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες $\widehat{ΑΒ}$, $\widehat{ΑΔ}$, $\widehat{ΒΓ}$ καί εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τετραέδρου, ἄρα καί ἐσωτερικό καί τῶν ἕξι διέδρων του. Τό Ο ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς ἕδρες ΒΑΔ, ΒΔΓ, ΑΓΔ, ΑΒΓ, ἐπειδή βρίσκεται πάνω στά διχοτομοῦντα ἡμιεπίπεδα (§ 71, β΄). Ἄρα τό Ο, ἐπειδή ἀπέχει ἐξίσου ἀπό ὅλες τίς ἕδρες καί εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο ὅλων τῶν διέδρων τοῦ τετραέδρου, θά ἀνήκει καί στά 6 διχοτομοῦντα ἡμιεπίπεδα.



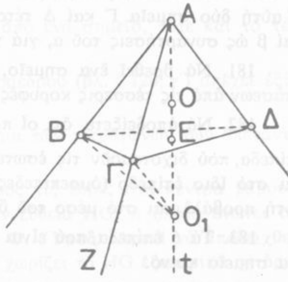
Σχ. 109

Τέλος τό Ο, ἐπειδή ἀνήκει στό ἡμιεπίπεδο, πού διχοτομεῖ τήν $\widehat{ΒΓ}$, προβάλλεται πάνω στό ἡμιεπίπεδο {ΒΓ — Α} (§ 71, β΄, σχ. 73), δηλαδή ἡ προβολή του πάνω στό ἐπίπεδο ΑΒΓ βρίσκεται ὡς πρός τή ΒΓ πρός τό μέρος τοῦ Α. Γιά ὅμοιο λόγο ἡ ἴδια προβολή βρίσκεται ὡς πρός τήν ΑΓ πρός τό μέρος τοῦ Β καί ὡς πρός τήν ΑΒ πρός τό μέρος τοῦ Γ. Δηλ. ἡ προβολή του εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

119. Παράκεντρο τοῦ τετραέδρου. **(Θ) — Ἄν δοθεῖ ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ, τότε ὑπάρχει ἕνα σημεῖο μέσα στή στερεή γωνία Α, ΒΓΔ καί ἔξω ἀπό τό τετράεδρο ΑΒΓΔ, τό ὁποῖο ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά ἐπίπεδα**

τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου. Τό σημεῖο αὐτό θά τό λέμε «παράκεντρο» τοῦ τετραέδρου, πού ἀντιστοιχεῖ στή στερεή γωνία Α.

Ἀπόδειξη. Ἄν Ο εἶναι τό ἔγκεντρο (§ 118) τοῦ τετραέδρου, τότε ἡ ἡμιευθεία (Α,Ο) βρίσκεται πάνω καί στά τρία ἡμιεπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες $\widehat{AB}, \widehat{A\Gamma}, \widehat{A\Delta}$ καί ἑπομένως κάθε σημεῖο της ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς ἕδρες ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΒΔ. Ἔστω Εt τό μέρος τῆς ἡμιευθείας (Α, Ο), πού εἶναι ἔξω ἀπ' τό τετράεδρο (σχ. 110). Τό ἡμιεπίπεδο, πού διχοτομεῖ τήν ἐξωτερική δίεδρη Δ — ΒΓ — Ζ τοῦ τετραέδρου βρίσκεται ἔξω ἀπ' τό τετράεδρο, τέμνει τήν ἡμιευθεία Εt, σέ κάποιο σημεῖο O_1, τό ὁποῖο εἶναι φανερό ὅτι ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς τέσσερις ἕδρες, βρίσκεται μέσα στή στερεή γωνία Α, ΒΓΔ καί ἔξω ἀπό τό τετράεδρο ΑΒΓΔ.



Σχ. 110

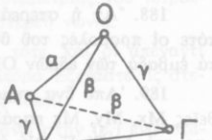
ΜΕΡΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΤΕΤΡΑΕΔΡΩΝ

120. α΄) **Ἰσοσκελές τετράεδρο** λέγεται τό τετράεδρο, τοῦ ὁποίου κάθε ἀκμή εἶναι ἴση μέ τήν ἀπέναντί της (σχ.111).

Χαρακτηριστική ἰδιότητα τοῦ ἰσοσκελοῦς τετραέδρου: *Οἱ τέσσερις ἕδρες του εἶναι τρίγωνα ἴσα.*

β΄) **Κανονικό τετράεδρο** λέγεται τό τετράεδρο, πού περικλείεται ἀπό τέσσερα ἰσόπλευρα τρίγωνα. **Αὐτό ἔχει τίς 6 ἀκμές του ἴσες.**

γ΄) **Ὀρθοκεντρικό τετράεδρο** λέγεται τό τετράεδρο, τοῦ ὁποίου **κάθε ἀκμή εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν ἀπέναντί της.** Στά τετράεδρα τῆς κατηγορίας αὐτῆς — καί μόνο αὐτῆς — τά τέσσερα ὕψη συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο, δηλ. τά τετράεδρα αὐτά ἔχουν ὀρθόκεντρο.



Σχ. 111

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

177. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ὕψος ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου μέ ἀκμή α εἶναι ἴσο μέ $\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$.

178. Σέ κάθε κανονικό τετράεδρο ΑΒΓΔ οἱ ἡμιευθεῖες, πού ἔχουν ἀρχή τό μέσο τοῦ ὕψους ἀπό τό Α καί πού διέρχονται ἀπό τίς τρεῖς κορυφές Β, Γ, Δ, εἶναι ἀκμές τρισορθογώνιας στερεᾶς γωνίας.

179. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό κανονικό τετράεδρο ἔχει: ἐπίπεδα συμμετρίας τά 6 μεσοκάθετα στίς ἀκμές του, ἄξονες συμμετρίας τίς τρεῖς κοινές καθέτους μεταξύ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του. Κάθε ὕψος του εἶναι ἄξονας ἐπαναφορᾶς τάξεως 3.

180. Στό μέσο Ι ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ = 2α φέρνουμε ἕνα κάθετο τμῆμα ΙΖ = h. Στό Ζ φέρνουμε μιά εὐθεία κάθετη στό ἐπίπεδο ΖΑΒ καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτή δύο σημεῖα Γ καί Δ τέτοια, ὥστε ΖΓ = ΖΔ = β. Ζητεῖται νά ὁριστοῦν τά h καί β ὡς συναρτήσεις τοῦ α, γιά νά εἶναι τό τετράεδρο ΑΒΓΔ κανονικό.

181. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο, τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπό τίς τέσσερις κορυφές δεδομένου τετραέδρου νά εἶναι τό μικρότερο δυνατό.

182. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ προβολές τῆς κορυφῆς Α ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ στά ἐπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς ἐσωτερικές καί ἐξωτερικές δίεδρες $\widehat{Β\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta B}$, βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο (ὁμοεπίπεδες). (**Ὑποδ.** Ἐξετάστε μιά ἀπό τίς προβολές. Μήπως αὐτή προβάλλεται στό μέσο τοῦ ὕψους ΑΑ΄;).

183. Τά 6 ἐπίπεδα, πού εἶναι κάθετα στά μέσα τῶν ἀκμῶν ἑνός τετραέδρου, ἔχουν ἕνα σημεῖο κοινό.

184. Νά ὁριστεῖ ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός δύο ἀπέναντι ἀκμές ἑνός τετραέδρου, τό ὁποῖο τέμνει τό τετράεδρο κατά ρόμβο.

185. Ἄν σ' ἕνα τετράεδρο δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ὀρθογώνια, τότε καί τό τρίτο ζεῦγος τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ὀρθογώνιο ζεῦγος.

186. Σέ κάθε τετράεδρο τά ἕξι ἐπίπεδα, πού τό καθένα τους διέρχεται ἀπό μία ἀκμή καί ἀπό τό μέσο τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, ἔχουν ἕνα σημεῖο κοινό.

187. Ἄν ἡ στερεά γωνία Ο, ΑΒΓ ἑνός τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνια, τότε τό ὕψος ΟΗ τοῦ ΟΑΒΓ ἱκανοποιεῖ τή σχέση:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{O\Gamma^2}.$$

188. Ἄν ἡ στερεά γωνία Ο, ΑΒΓ ἑνός τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνια, τότε οἱ προβολές τοῦ ὕψους ΟΗ πάνω στίς ἀκμές ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀνάλογες πρός τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ.

189. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς ἕδρας ΑΒΓ ἑνός τετραέδρου ΟΑΒΓ διέρχονται εὐθεῖες Mx, My, Mz παράλληλες πρός τίς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, πού τέμνουν τίς ἕδρες ἀντιστοίχως στά Α΄, Β΄, Γ΄. Νά ἀποδείξετε τή σχέση:

$$\frac{MA'}{OA} + \frac{MB'}{OB} + \frac{M\Gamma'}{O\Gamma} = 1$$

Πῶς πρέπει νά ἐκλέξουμε τό Μ, ὥστε οἱ τρεῖς λόγοι νά εἶναι ἴσοι; (**Ὑποδ.** Ἄν ἡ ΑΜ προεκτεινόμενη τέμνει τήν ΒΓ στό Δ, τό Α΄ εἶναι τομή τῆς Mx καί ΟΔ, ὁ λόγος ΜΑ΄/ ΟΑ μεταφέρεται στόν ΜΔ/ΑΔ καί αὐτός σέ λόγο ἐμβαδῶν ΜΒΓ/ΑΒΓ).

190. Ἄν σ' ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ τά ἀθροίσματα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσα: ΑΒ+ΓΔ = ΒΓ+ΑΔ = ΑΓ+ΒΔ, τότε οἱ τέσσερις εὐθεῖες, πού διέρχονται ἀπό τά ἔγκεντρα τῶν τεσσάρων ἑδρῶν καί εἶναι κάθετες στίς ἀντίστοιχες ἕδρες, διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο, τό ὁποῖο ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς 6 ἀκμές. (**Ὑποδ.** Γιά νά συντρέχουν οἱ τέσσερις αὐτές, ἀρκεῖ ἀνά δύο νά τέμνονται. Ἡ σχέση ΑΒ — ΑΓ = ΔΒ — ΔΓ ὁδηγεῖ στό ὅτι οἱ ἐγγεγραμμένοι στά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΒΓ κύκλοι (O_1) καί (O_2) ἐφάπτονται στή ΒΓ στό ἴδιο σημεῖο Ε καί τοῦτο ὁδηγεῖ στό ὅτι ἡ $O_1x \perp$ ΑΒΓ καί ἡ $O_2y \perp$ ΒΓΔ εἶναι ὁμοεπίπεδες).

191. Ἄν οἱ ἀπέναντι ἀκμές ἑνός τετραέδρου εἶναι ἀνά δύο ὀρθογώνιες, τότε τά τέσσερα ὕψη τοῦ τετραέδρου διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο (ὀρθόκεντρο τοῦ τετραέδρου). Ἀπό τό ἴδιο σημεῖο διέρχονται καί οἱ κοινές κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

Ἀντιστρόφως : Ἂν τά ὕψη ἑνός τετραέδρου συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο, τότε τά τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ὀρθογώνια ζεύγη. (**Ὑποδ.** Γιά νά συντρέχουν τά ὕψη, ἀρκεῖ νά τέμνονται ἀνά δύο.Τά ὕψη π.χ. ΑΑ′ καί ΒΒ′ βρίσκονται στό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τήν ΑΒ καί εἶναι ⊥ ΓΔ).

Β′.

192. Ἂν τρία ὕψη ἑνός τετραέδρου διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο, τότε καί τό τέταρτο ὕψος διέρχεται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

193. Τό κέντρο βάρους κάθε ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου (βλ. § 120, γ′) ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τά μέσα ὅλων τῶν ἀκμῶν.

194. Σέ κάθε ὀρθοκεντρικό τετράεδρο τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι καί γιά τά τρία ζεύγη τό ἴδιο.

195. Στό ὀρθοκεντρικό τετράεδρο οἱ κάθετοι πρός τίς ἕδρες στά κέντρα βάρους τους διέρχονται ἀπό ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται στήν εὐθεία HG, ἡ ὁποία ἑνώνει τό ὀρθόκεντρο H τοῦ τετραέδρου μέ τό βαρύκεντρό του G. (**Ὑποδ.** Ἀρκεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε μιά ἀπό τίς καθέτους, μόνη της ἐξεταζόμενη, χωρίζει τό HG ἐξωτερικά σέ ὁρισμένο ἀριθμητικό λόγο).

196. Σέ κάθε ὀρθοκεντρικό τετράεδρο τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ἑδρῶν εἶναι ἴσο μέ τό 1/4 τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

197. Ἔστω ΜΑΒΓ ἕνα τετράεδρο, στό ὁποῖο ἡ βάση ΑΒΓ μένει σταθερή, ἐνῶ ἡ κορυφή Μ εἶναι μεταβλητή. Ἂν Δ, Ε, Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καί Η Θ, Ι τῶν ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ Μ, ὅταν τά τετράπλευρα ΗΘΕΖ καί ΙΘΔΖ εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα; Ποιό εἶναι τότε τό εἶδος τοῦ τετραπλεύρου ΗΙΔΕ;

198. Σέ κάθε ἰσοσκελές τετράεδρο (βλ. § 120 α′) κάθε διδιάμεσος εἶναι κοινή κάθετος τῶν δύο ἀκμῶν, τίς ὁποῖες συνδέει καί εἶναι καί ἄξονας συμμετρίας τοῦ τετραέδρου. Ἐπίσης οἱ τρεῖς διδιάμεσοι σχηματίζουν τρισορθογώνια στερεή γωνία.

199. Ἂν οἱ ἀπέναντι δίεδρες ἑνός τετραέδρου εἶναι ἴσες, τότε καί οἱ ἀπέναντι ἀκμές εἶναι ἴσες καί ἀντιστρόφως. (**Ὑποδ.** Ἔστω ΑΒΓΔ τό τετράεδρο. Ἐξετάστε τίς στερεές γωνίες Β, ΓΔΑ καί Δ, ΓΑΒ, ἄν ἔχουν ὅλα τά στοιχεῖα τους ἴσα).

200. i) Ἔχουμε δυό ἀσύμβατες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί ἐπάνω στήν (ε_1) ἕνα σταθερό τμῆμα ΑΒ. Ἂν ἐπάνω στή δεύτερη ὀλισθαίνει ἕνα τμῆμα ΓΔ σταθεροῦ μήκους, νά βρεθεῖ σέ ποιά θέση τοῦ ΓΔ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν (ΓΑΒ)+(ΔΑΒ) γίνεται ἐλάχιστο;

ii) Ἂν οἱ δύο ἀπέναντι ἀκμές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ κινοῦνται ἐπάνω στούς φορεῖς τους (ε_1) καί (ε_2), χωρίς ν'ἀλλάζουν μήκη, νά βρεθεῖ ἡ θέση τους, κατά τήν ὁποία ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου γίνεται ἐλάχιστη. (**Ὑποδ.** Γιά τό i) Ἂς εἶναι υ_γ, υ_δ οἱ ἀποστάσεις τῶν Γ καί Δ ἀπό τήν (ε_1). Ἀρκεῖ τό $\upsilon_\gamma+\upsilon_\delta$ νά γίνει ἐλάχιστο. Ἔστω ΛΚ ἡ κοινή ⊥ τῶν (ε_1), καί (ε_2) ὅπου $K\in(\varepsilon_2)$ καί ἄς προβάλλουμε τό ὅλο σχῆμα, ἐπάνω σέ ἐπίπεδο (Π) ⊥ (ε_1). Ἂν Ο ἡ τομή (Π) καί (ε_1), Γ′, Δ′, Κ′ οἱ προβολές τῶν Γ, Δ, Κ, τότε τό Γ′Δ′ σταθεροῦ μήκους ὀλισθαίνει ἐπάνω σέ σταθερή εὐθεία xy (προβολή τῆς (ε_2)) καί τό $\upsilon_\gamma+\upsilon_\delta = ΟΓ' + ΟΔ'$. Πηγαίνουμε σέ πρόβλημα ἐπιπεδομετρίας: σέ ποιά θέση τοῦ Γ′Δ′ ἐπάνω στή xy εἶναι τό ΟΓ′+ΟΔ′ ἐλάχιστο).

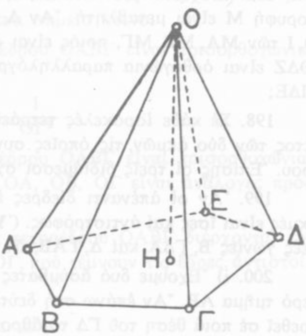
201. Ἔστω ἕνα τετράεδρο ΟΑΒΓ, τοῦ ὁποίου οἱ ἕδρες τῆς στερεῆς γωνίας Ο, ΑΒΓ δέν εἶναι ὀρθές.Νά ἀποδείξετε ὅτι τά ἐπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό τό Ο καί εἶναι κάθετα στίς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τέμνουν τούς φορεῖς τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ σέ σημεῖα $Α_1$, $Β_1$, $Γ_1$ συνευθειακά. (**Ὑποδ.** Ἡ $ΟΑ_1$ βρίσκεται στό ἐπίπεδο τῆς ΒΟΓ καί εἶναι ⊥ ΟΑ, ἀνάλογα καί οἱ $ΟΒ_1$, $ΟΓ_1$. Σύμφωνα μέ τήν ἄσκ. 161 οἱ $ΟΑ_1$, $ΟΒ_1$, $ΟΓ_1$ εἶναι ὁμοεπίπεδες).

202. Ἄν οἱ εὐθεῖες $ΑΑ_1$, $ΒΒ_1$, $ΓΓ_1$, $ΔΔ_1$, πού διέρχονται ἀπό τίς κορυφές Α,Β, Γ Δ ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ καί εἶναι κάθετες ἀντιστοίχως πρός τίς ἕδρες $Β'Γ'Δ'$, $Γ'Δ'Α'$, $Δ'Α'Β'$, $Α'Β'Γ'$ ἑνός δεύτερου τετραέδρου $Α'Β'Γ'Δ'$, διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τίς εὐθεῖες $Α'Α_1'$, $Β'Β_1'$, $Γ'Γ_1'$, $Δ'Δ_1'$, πού διέρχονται ἀπό τίς κορυφές τοῦ δεύτερου καί εἶναι κάθετες ἀντιστοίχως πρός τίς ἕδρες ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ τοῦ πρώτου. (Ὑποδ. Ἀρκεῖ οἱ τέσσερις δεύτερες νά τέμνονται ἀνά δύο (ἄσκ. 59). Ἄς περιοριστοῦμε στίς $Γ'Γ_1'$ καί $Δ'Δ_1'$. Ἀπό τό γεγονός ὅτι οἱ $ΑΑ_1$ καί $ΒΒ_1$ τέμνονται ⇒ ΑΒ ορθογ $Γ'Δ'$. Εἶναι καί $Γ'Γ'_1$ ορθογ ΑΒ, ὁπότε Επιπ $Δ'Γ'Γ'_1 \perp$ ΑΒ. Ὁμοίως Επιπ $Γ'Δ'Δ'_1 \perp$ ⊥ ΑΒ. Ἔπεται $Γ'Γ'_1$ καί $Δ'Δ'_1$ ὁμοεπίπεδες).

Η ΠΥΡΑΜΙΔΑ

121. Ὁρισμοί. — α') Πυραμίδα λέγεται ἕνα κυρτό πολύεδρο, τοῦ ὁποίου μιά ἕδρα εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε κυρτό πολύγωνο, πού λέγεται «βάση» τῆς πυραμίδας καί οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες εἶναι τρίγωνα, πού ὅλα ἔχουν μιά κοινή κορυφή, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως καί λέγεται «κορυφή» τῆς πυραμίδας (σχ. 112).

Οἱ ἀκμές τῆς πυραμίδας, πού συντρέχουν στήν κορυφή, λέγονται **παράπλευρες ἀκμές** τῆς πυραμίδας. Οἱ τριγωνικές ἕδρες, πού συντρέχουν στήν κορυφή, λέγονται **παράπλευρες ἕδρες τῆς πυραμίδας**. Ἡ πολυεδρική ἀνοικτή ἐπιφάνεια, πού σχηματίζεται ἀπό τίς παράπλευρες ἕδρες, λέγεται **παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας**. Συνήθως ἡ ἐπιφάνεια, πού περικλείει τήν πυραμίδα, λέγεται **«ὁλική ἐπιφάνεια»**. Τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παράπλευρων ἑδρῶν σύν τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως λέγεται **ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τῆς πυραμίδας.**



Σχ. 112

Ἡ πυραμίδα παίρνει τήν ὀνομασία της ἀπό τή βάση της: **τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική**,... ἀνάλογα μέ τό ἄν ἡ βάση της εἶναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο, ... Ἡ τριγωνική πυραμίδα ταυτίζεται μέ τό τετράεδρο.

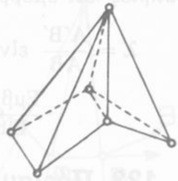
Ὕψος τῆς πυραμίδας λέγεται ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς της ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως.

β) Κανονική πυραμίδα λέγεται κάθε πυραμίδα, πού ἔχει βάση κανονικό πολύγωνο καί ἡ κορυφή της προβάλλεται στό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τῆς βάσεως.

Τά ὕψη τῶν παράπλευρων ἑδρῶν, πού ἄγονται ἀπό τήν κορυφή τῆς κανονικῆς πυραμίδας, ἔχουν ἕνα κοινό μῆκος l, πού λέγεται **παράπλευρο ὕψος** τῆς κανονικῆς πυραμίδας.

Θεώρημα. Τό ἐμβαδόν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπί τό παράπλευρο ὕψος.

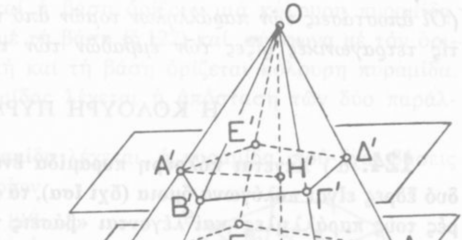
γ΄) Ἄν χρησιμοποιήσουμε ὡς βάση ἕνα μή κυρτό πολύγωνο, πού ἀναλύεται σέ κυρτά, παίρνουμε μιά **μή κυρτή πυραμίδα**, πού ἀναλύεται σέ κυρτές (σχ. 113).



Σχ. 113

122. Θεώρημα τῶν παράλληλων τομῶν. Ἄν μιά πυραμίδα κοπεῖ ἀπό ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση, οἱ παράπλευρες ἀκμές καί τό ὕψος τέμνονται σέ μέρη ἀνάλογα, ἡ τομή εἶναι ὅμοια μέ τή βάση καί τά ἐμβαδά τῆς τομῆς καί τῆς βάσεως εἶναι ἀνάλογα πρός τά τετράγωνα τῶν ἀποστάσεών τους, ἀντιστοίχως, ἀπό τήν κορυφή.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε π. χ. τήν πυραμίδα ΟΑΒΓΔΕ καί τήν τομή της Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ἀπό ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση (σχ. 114). Ἔστω Η΄ ἡ τομή τοῦ ὕψους ΟΗ ἀπό τό ἐπίπεδο, μέ τό ὁποῖο γίνεται ἡ τομή. Ἔχουμε ὅτι: Η΄Α΄||ΗΑ, Α΄Β΄||ΑΒ, Β΄Γ΄||ΒΓ, ... (τομές παράλληλων ἐπιπέδων ἀπό ἕνα τρίτο) καί ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΗ΄Α΄ μέ ΟΗΑ, ΟΑ΄Β΄ μέ ΟΑΒ, ... παίρνουμε:



Σχ. 114

$$(1)\quad \frac{OH'}{OH}=\frac{OA'}{OA}=\frac{A'B'}{AB}=\frac{OB'}{OB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{O\Gamma'}{O\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\ldots$$

Οἱ ἰσότητες, πού προκύπτουν ἀπό τίς (1): $\dfrac{OH'}{OH}=\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{O\Gamma'}{O\Gamma}=\ldots,$

δείχνουν ὅτι οἱ ἀκμές καί τό ὕψος τέμνονται σέ μέρη ἀνάλογα. Ἐπίσης ἀπό τίς (1) ἔχουμε ὅτι: $\dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\dfrac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\ldots$, οἱ ὁποῖες δείχνουν ὅτι τά δυό πολύγωνα Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ καί ΑΒΓΔΕ ἔχουν τίς πλευρές τους ἀνάλογες.

Ἔχουν ὅμως καί τίς γωνίες τους ἴσες, ἀφοῦ ἔχουν τίς πλευρές τους παράλληλες καί ὁμόρροπες, ἄρα εἶναι ὅμοια. Τέλος, ὁ λόγος ὁμοιότητας:

$\lambda = \frac{A'B'}{AB}$ εἶναι ἴσος (σύμφωνα μέ τήν (1)) μέ $\frac{OH'}{OH}$. Ἄρα:

$$\frac{\text{Εμβ}\,(A'B'\Gamma'\Delta'E')}{\text{Εμβ}\,(AB\Gamma\Delta E)} = \lambda^2 = \frac{(OH')^2}{(OH)^2} = \frac{(OA')^2}{(OA)^2}$$

123. Πόρισμα τοῦ προηγούμενου. **«Ἄν θεωρήσουμε μιά σειρά ἀπό παράλληλες πολυγωνικές τομές μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας, πού ἔχει κορυφή O καί ὀνομάσουμε μέ T_1, T_2, T_3 ... τά ἐμβαδά τῶν τομῶν καί A_1, A_2, A_3 ... τίς ἀντίστοιχες κορυφές τους, πού βρίσκονται πάνω σέ μιά ἀκμή, τότε ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:**

$$(1) \qquad \frac{T_1}{(OA_1)^2} = \frac{T_2}{(OA_2)^2} = \frac{T_3}{(OA_3)^2} = \ldots$$

$$(2) \qquad \frac{OA_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{OA_2}{\sqrt{T_2}} = \frac{OA_3}{\sqrt{T_3}} = \ldots »$$

(Οἱ ἀποστάσεις τῶν παράλληλων τομῶν ἀπό τήν κορυφή εἶναι ἀνάλογες πρός τίς τετραγωνικές ρίζες τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν).

Η ΚΟΛΟΥΡΗ ΠΥΡΑΜΙΔΑ

124. α΄) **Λέγεται κόλουρη πυραμίδα ἕνα κυρτό πολύεδρο, τοῦ ὁποίου δυό ἕδρες εἶναι πολύγωνα ὅμοια (ὄχι ἴσα), τά ὁποῖα ἔχουν τίς ὁμόλογες πλευρές τους παράλληλες καί λέγονται «βάσεις τῆς κόλουρης πυραμίδας», ἐνῶ οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες τοῦ πολυέδρου εἶναι τραπέζια, τά ὁποῖα ἔχουν τό καθένα ὡς παράλληλες πλευρές δυό ὁμόλογες πλευρές τῶν βάσεων.**

Τά τραπέζια λέγονται **παράπλευρες ἕδρες** καί ὅλα μαζί ἀποτελοῦν τήν **παράπλευρη ἐπιφάνεια** τῆς κόλουρης πυραμίδας. Οἱ ἀκμές, πού συνδέουν δυό ὁμόλογες κορυφές τῶν βάσεων, λέγονται **παράπλευρες ἀκμές** τῆς κόλουρης πυραμίδας.

Ἡ κόλουρη πυραμίδα λέγεται τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική, ... ἀνάλογα μέ τό ἄν οἱ βάσεις της εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, ...

β΄) (Θ) **— Οἱ προεκτάσεις τῶν παράπλευρων ἀκμῶν ὁποιασδήποτε κόλουρης πυραμίδας συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο.**

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι $A_1A_2A_3 \ldots$, $B_1B_2B_3 \ldots$ οἱ βάσεις μιᾶς κόλουρης πυραμίδας. Ἀπό τόν ὁρισμό, ἔχουμε:

$$(1) \qquad \frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \ldots$$

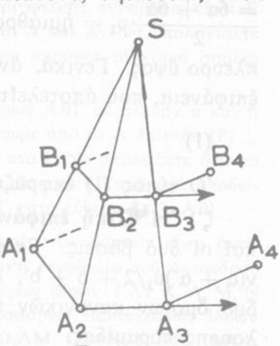
Δυό διαδοχικές ἀκμές A_1B_1, A_2B_2, ἄν προεκταθοῦν, τέμνονται, ἔστω στό S. Ἡ ἀκτίνα SB_3, πού τέμνει τήν ἡμιευθεία (B_2, B_3) (σχ. 115), τέμνει καί τήν ὁμόρροπή της (A_2,A_3) σέ κάποιο σημεῖο A'_3, πού ταυτίζεται μέ τό A_3. Γιατί:

$$\frac{A_2A'_3}{B_2B_3} = \frac{SA_2}{SB_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2} =$$

$$= \text{λόγω τῶν (1)} \ \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_2A'_3}{B_2B_3} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2A'_3 = A_2A_3 \Rightarrow A'_3 \equiv A_3.$$



Σχ. 115

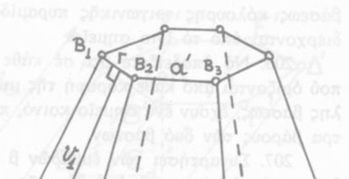
Ἑπομένως οἱ τρεῖς διαδοχικές ἀκμές A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 συντρέχουν στό S. Γιά τόν ἴδιο λόγο οἱ A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 συντρέχουν στό S ... καί τελικά ὅλες συντρέχουν στό S.

γ') Ἀντιστρόφως, ἄν μιά πυραμίδα κοπεῖ ἀπό ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση, τότε ἡ τομή καί ἡ βάση ὁρίζουν μιά κόλουρη πυραμίδα.

Γιατί ἡ τομή εἶναι ὅμοια μέ τή βάση (§ 122) καί, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό τοῦ ἐδαφ. α', ἀπό τήν τομή καί τή βάση ὁρίζεται κόλουρη πυραμίδα.

δ') **Ὕψος** κόλουρης πυραμίδας λέγεται ἡ ἀπόσταση τῶν δύο παράλληλων βάσεών της.

ε') **Κανονική κόλουρη πυραμίδα** λέγεται ἡ πυραμίδα, πού ἔχει βάσεις κανονικά πολύγωνα, τῶν ὁποίων τά κέντρα βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία κάθετη στίς βάσεις. Αὐτή προκύπτει μέ τομή μιᾶς κανονικῆς πυραμίδας (§ 121, β') καί οἱ παράπλευρες ἕδρες της εἶναι ἰσοσκελή τραπέζια.



Σχ. 116

ς') (Θ) — **Τό ἐμβαδόν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας μιᾶς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας εἶναι ἴσο μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπί τό παράπλευρο ὕψος.**

Ἔστω, π.χ. ἡ κόλουρη κανονική ἑξαγωνική πυραμίδα $A_1A_2 \ldots, B_1B_2 \ldots$ τοῦ σχ. 116 καί $\Gamma\Delta = \upsilon_1$ τό ὕψος τοῦ παράπλευρου τραπεζίου $A_1A_2B_1B_2$ (παράπλευρο ὕψος). Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς κόλουρης αὐτῆς πυραμίδας ἔχει ἐμβαδόν, ἔστω E_π, ἴσο μέ τό ἑξαπλάσιο τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου $A_1A_2B_2B_1$, δηλ. $E_\pi = 6(A_1A_2B_2B_1) = 6 \cdot \frac{1}{2}(\alpha + \alpha')\upsilon_1$ (σχ. 116) =

$= \dfrac{6\alpha + 6\alpha'}{2} \cdot \upsilon_1 =$ ἡμιάθροισμα τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων ἐπί τό παράπλευρο ὕψος. Γενικά, ἄν οἱ βάσεις εἶναι κανονικά ν-γωνα, ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια, πού ἀποτελεῖται ἀπό ν ἰσοσκελῆ τραπέζια, ἔχει ἐμβαδόν:

$$(1) \qquad E_\pi = \frac{\nu\alpha + \nu\alpha'}{2} \cdot \upsilon_1$$

Ὁ τύπος (1) ἐκφράζει τό θεώρημα, πού θέλαμε ν' ἀποδείξουμε.

ζ') **Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια** βρίσκεται, ἄν στήν παράπλευρη προστεθοῦν καί οἱ δυό βάσεις. Ἑπομένως τό ἐμβαδόν της, ἔστω $E_{o\lambda}$, εἶναι ἴσο μέ $\nu(\alpha + \alpha')\upsilon_1/2 + b + b'$, ὅπου α, α′ οἱ πλευρές καί b, b′ τά ἐμβαδά τῶν δυό ὅμοιων κανονικῶν πολυγώνων, πού εἶναι βάσεις τῆς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

203. Οἱ κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ἔχουν μήκη γ, β. Στό Γ ὑψώνουμε τμῆμα $ΓΔ = h$ κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου καί σέ ἕνα σημεῖο Ε τῆς πλευρᾶς ΓΑ φέρνουμε ἐπίπεδο $\perp$ ΓΑ. Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδας ΔΓΑΒ ἀπό τό ἐπίπεδο αὐτό συναρτήσει τῶν h, β, γ καί $ΓΕ = x$ καί τή θέση τοῦ Ε, στήν ὁποία ἡ τομή ἔχει τό μέγιστο ἐμβαδόν.

204. Ἡ βάση μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας ἔχει πλευρά α καί τό ὕψος τῆς πυραμίδας εἶναι 2α. Σέ ποιά ἀπόσταση ἀπό τήν κορυφή πρέπει νά φέρουμε ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση, ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τῆς τομῆς νά εἶναι ἴση μέ τήν παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς κόλουρης πυραμίδας, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπό τήν τομή καί τή βάση;

205. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες, πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κόλουρης τριγωνικῆς πυραμίδας μέ τίς ἀπέναντι κορυφές τῆς ἄλλης βάσεως, διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

206. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε κόλουρη τριγωνική πυραμίδα τά τρία ἐπίπεδα, πού ὁρίζονται ἀπό κάθε κορυφή τῆς μιᾶς βάσεως καί ἀπό τήν ἀπέναντι πλευρά τῆς ἄλλης βάσεως, ἔχουν ἕνα σημεῖο κοινό, πού βρίσκεται στήν εὐθεία, ἡ ὁποία ἑνώνει τά κέντρα βάρους τῶν δυό βάσεων.

207. Συναρτήσει τῶν ἐμβαδῶν β καί β′ τῶν δύο βάσεων μιᾶς κόλουρης πυραμίδας νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς μεσαίας τομῆς της. Γενικότερα: Νά ὑπολογίσετε τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς ἀπό ἐπίπεδο, πού εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις καί διαιρεῖ τό ὕψος σέ λόγο μ : ν. (**Ὑποδ.** Ἔστω S τό κοινό σημεῖο τῶν προεκτάσεων τῶν παράπλευρων ἀκμῶν, ΑΒ μία παράπλευρος ἀκμή (τό Α στή μικρότερη βάση), Γ ἕνα σημεῖο τῆς ΑΒ τέτοιο, ὥστε: ΑΓ : ΓΒ = μ : ν, Τ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς. Τό θεώρημα τῶν παράλληλων τομῶν δίνει:

$$\frac{SB}{\sqrt{\beta}} = \frac{S\Gamma}{\sqrt{T}} = \frac{SA}{\sqrt{\beta'}} = \frac{S\Gamma - SA}{\sqrt{T} - \sqrt{\beta'}} = \frac{SB - S\Gamma}{\sqrt{\beta} - \sqrt{T}} \Rightarrow \frac{A\Gamma}{\sqrt{T} - \sqrt{\beta'}} = \frac{\Gamma B}{\sqrt{\beta} - \sqrt{T}}).$$

208. Φέρνουμε δυό ἐπίπεδα παράλληλα πρός τίς βάσεις μιᾶς ὁποιασδήποτε κόλουρης πυραμίδας, πού διαιροῦν τό ὕψος της σέ τρία ἴσα μέρη. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τομῶν πρός τή διαφορά τῶν δύο βάσεων.

209. Νά ὁρίσετε ἕνα ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό τήν πλευρά ΑΒ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας ΟΑΒΓΔ καί νά χωρίζει τήν ὁλική ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδας σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη. Δίνεται $ΑΒ = α$, $ΟΑ = λ$. Τό ζητούμενο ἐπίπεδο νά ὁριστεῖ ἀπό τήν ἀπόσταση x τοῦ σημείου τομῆς του μέ τήν ΟΔ ἀπό τό Ο.

210. Τό ἐμβαδόν τῆς κάτω βάσεως μιᾶς κόλουρης τριγωνικῆς πυραμίδας εἶναι Ε καί τά μήκη δύο ὁμόλογων πλευρῶν τῶν δύο βάσεων εἶναι α καί α΄. Νά ὑπολογίσετε συναρτήσει τῶν Ε, α,α΄ τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου, πού ἔχει κορυφές τά κοινά σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν παράπλευρων ἑδρῶν.

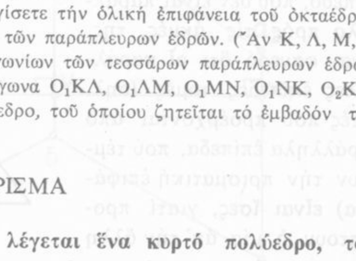
211. Μιά πυραμίδα ΟΑΒΓ ἔχει βάση ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρά α καί ἡ ἀκμή της ΟΑ εἶναι ⊥ Επιπ ΑΒΓ καί ἔχει μῆκος α/2. Φέρνουμε ἀπό τό Α ἐπίπεδο (Ρ) ⊥ ⊥ ΟΒ, τό ὁποῖο τέμνει τήν ΟΒ στό Η καί τήν εὐθεία ΒΓ στό Ι. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΗΙ εἶναι ὀρθογώνιο καί νά ὑπολογίσετε τίς πλευρές του. (**Ὑποδ.** Νά ἀποδείξετε πρῶτα ὅτι τό (Ρ) τέμνει τό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κατά εὐθεία Αx ⊥ ΑΒ).

212. Σέ μιά κόλουρη τετραγωνική πυραμίδα οἱ πλευρές τῶν βάσεων εἶναι ἀντιστοίχως α καί β καί τό ὕψος h. Νά ὑπολογίσετε τήν ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ ὀκταέδρου μέ κορυφές τά κοινά σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν παράπλευρων ἑδρῶν. (Ἄν Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι κατά σειρά τά σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν τεσσάρων παράπλευρων ἑδρῶν καί $Ο_1$, $Ο_2$ τά κέντρα τῶν βάσεων, τά 8 τρίγωνα $Ο_1ΚΛ$, $Ο_1ΛΜ$, $Ο_1ΜΝ$, $Ο_1ΝΚ$, $Ο_2ΚΛ$, $Ο_2ΛΜ$, $Ο_2ΜΝ$, $Ο_2ΝΚ$ περικλείουν ἕνα ὀκτάεδρο, τοῦ ὁποίου ζητεῖται τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας).

ΤΟ ΠΡΙΣΜΑ

125. Ὁρισμοί.— α΄) Πρίσμα λέγεται ἕνα κυρτό πολύεδρο, τοῦ ὁποίου δυό ἕδρες, πού τίς λέμε «βάσεις», προκύπτουν ἡ μιά ἀπό τήν ἄλλη μέ μεταφορά (σχ. 117), ἐνῶ ὅλες οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες, πού τίς λέμε «παράπλευρες ἕδρες», εἶναι παραλληλόγραμμα, πού τό καθένα ἔχει ὡς δυό ἀπέναντι πλευρές δυό ὁμόλογες πλευρές τῶν βάσεων.

Οἱ παράπλευρες ἕδρες ὅλες μαζί ἀποτελοῦν τήν **«παράπλευρη ἐπιφάνεια»** τοῦ πρίσματος. Οἱ ἀκμές, πού συνδέουν δυό ὁμόλογες κορυφές τῶν βάσεων (παράλληλες πρός τό διάνυσμα μεταφορᾶς), λέγονται **«παράπλευρες ἀκμές»** τοῦ πρίσματος.



Σχ. 117

β΄) Τό πρίσμα παίρνει τήν ὀνομασία του ἀπό τίς βάσεις του: *τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό...*

γ΄) Τό πρίσμα λέγεται **πλάγιο** ἤ **ὀρθό,** ἀνάλογα μέ τό ἄν οἱ παράπλευρες ἀκμές του εἶναι πλάγιες πρός τά ἐπίπεδα τῶν βάσεων ἤ κάθετες σ' αὐτά.

δ΄) **Ὕψος** πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν δυό παράλληλων ἐπιπέδων, πάνω στά ὁποῖα βρίσκονται οἱ βάσεις.

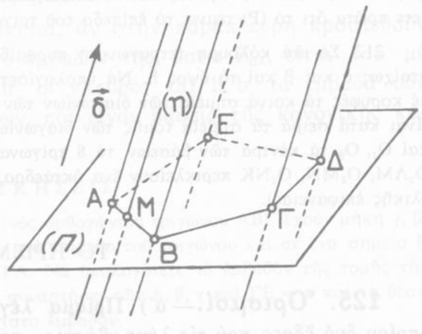
ε΄) **Κανονικό πρίσμα** λέγεται τό ὀρθό πρίσμα, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι κανονικά πολύγωνα.

126. Ἀπέραντη πρισματική ἐπιφάνεια λέγεται τό σύνολο

τῶν παράλληλων εὐθειῶν, πού τέμνουν τό περίγραμμα ἑνός ἐπίπεδου πολυγώνου καί δέ βρίσκονται στό ἐπίπεδο τοῦ πολυγώνου.

Οἱ παράλληλες, πού περνοῦν ἀπό τίς κορυφές Α, Β, Γ, Δ, Ε, λέγονται **ἀκμές** τῆς ἐπιφάνειας, ἐνῶ οἱ «ταινίες», πού ὁρίζονται ἀπό δυό διαδοχικές ἀκμές, λέγονται ἕδρες τῆς ἀπέραντης πρισματικῆς ἐπιφάνειας.

Ἐπίπεδη τομή μιᾶς ἀπέραντης πρισματικῆς ἐπιφάνειας λέγεται τό πολύγωνο, πού προκύπτει, ὅταν ἡ ἐπιφάνεια κοπεῖ ἀπό ἐπίπεδο, πού δέν εἶναι παράλληλο πρός τίς ἀκμές της. Εἶναι φανερό ὅτι οἱ παράλληλες ἐπίπεδες τομές (δηλ. αὐτές πού προέρχονται ἀπό παράλληλα ἐπίπεδα, πού τέμνουν τήν πρισματική ἐπιφάνεια) εἶναι ἴσες, γιατί προκύπτουν ἡ μία ἀπ' τήν ἄλλη μέ μεταφορά.



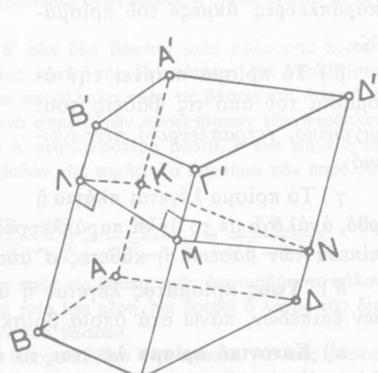
Σχ. 118

Κάθετη τομή μιᾶς ἀπέραντης πρισματικῆς ἐπιφάνειας λέγεται κάθε τομή της ἀπό ἐπίπεδο κάθετο στίς ἀκμές.

Σημείωση. Συνήθως λέμε ὅτι ἡ ἀπέραντη πρισματική ἐπιφάνεια *σχηματίζεται ἀπό μιά εὐθεία (η) μεταβλητή (σχ. 118) παράλληλη πρός μιά δεδομένη διεύθυνση $\vec{\delta}$ καί ἡ ὁποία τέμνει στὸ Μ τό περίγραμμα ἑνός ἐπίπεδου πολυγώνου.* ($\vec{\delta}$ ὄχι παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τοῦ ΑΒΓΔΕ).

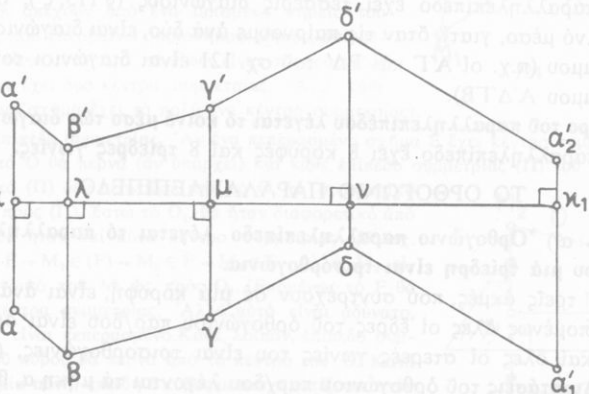
127. Κάθετη τομή πρίσματος

σματος λέγεται ἡ κάθετη τομή τῆς ἀπέραντης πρισματικῆς ἐπιφάνειας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκμές τίς εὐθεῖες, πάνω στίς ὁποῖες βρίσκονται οἱ παράπλευρες ἀκμές τοῦ πρίσματος. Ἐπειδή οἱ πλευρές τῆς κάθετης τομῆς εἶναι ὕψη τῶν παράπλευρων ἑδρῶν (σχ. 119), συμπεραίνουμε εὔκολα ὅτι **«τό ἐμβαδόν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός πρίσματος εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο μιᾶς παράπλευρης ἀκμῆς ἐπί τήν περίμετρο μιᾶς κάθετης τομῆς».**



Σχ. 119

128. Ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας ἑνός πρίσματος.—Ἄς θεωρήσουμε ἕνα πρίσμα ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ καί μιά κάθετη τομή του ΚΛΜΝ (σχ. 119). Ἄς κατασκευάσουμε τό παραλληλόγραμμο αββ΄α΄ (σχ. 120) ἴσο μέ ΑΒΒ΄Α΄ καί στή συνέχεια τά διαδοχικά παραλληλόγραμμα βγγ΄β΄, γδδ΄γ΄, $\delta\alpha'_1\alpha'_2\delta'$ ἴσα ἀντιστοίχως μέ τά ΒΓΓ΄Β΄, ΓΔΔ΄Γ΄, ΔΑΑ΄Δ΄. Παίρνουμε ἔτσι ἕνα πολύγωνο, τό $\alpha\alpha'\beta'\gamma'\delta'\alpha'_2\alpha'_1\delta\gamma\beta$, τό

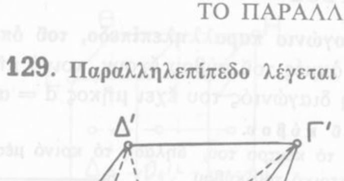


Σχ. 120

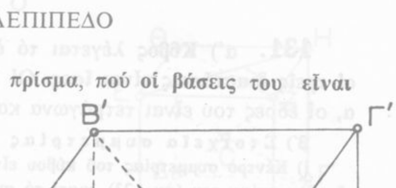
ὁποῖο λέγεται «ἀνάπτυγμα τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ πρίσματος». Στίς κορυφές Λ, Μ, Ν τῆς κάθετης τομῆς ἀντιστοιχοῦν πάνω στό ἀνάπτυγμα τά σημεῖα λ, μ, ν τέτοια, ὥστε: βλ = ΒΛ, γμ = ΓΜ, δν = ΔΝ καί στά τμήματα ΛΜ, ΜΝ ἀντιστοιχοῦν τά ὕψη λμ, μν τῶν παραλληλογράμμων βγγ΄β΄, γδδ΄γ΄. Στό Κ ἀντιστοιχοῦν δυό σημεῖα κ, κ_1 τοῦ ἀναπτύγματος, πού βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία μέ τά λ, μ, ν. Τέλος, οἱ δυό ἀκραῖες πλευρές αα΄, $\alpha'_1\alpha'_2$ τοῦ ἀναπτύγματος ὁρίζουν ἕνα **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο,** γιατί εἶναι $\alpha\alpha' = \alpha'_1\alpha'_2$ καί $\kappa\alpha = \kappa_1\alpha'_1$, $\kappa\alpha' = \kappa_1\alpha'_2$.

ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

129. Παραλληλεπίπεδο λέγεται τό πρίσμα, πού οἱ βάσεις του εἶναι



Σχ. 121



Σχ. 122

παραλληλόγραμμα. Συνεπῶς ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ. 121) καί ἀπ' αὐτό προκύπτουν τά ἑξῆς:

i) Ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου μποροῦμε νά πάρουμε δυό ὁποιεσδήποτε ἀπέναντι ἕδρες του.

ii) Τό παραλληλεπίπεδο ἔχει τρία ὕψη.

Τό παραλληλεπίπεδο ἔχει τέσσερις διαγωνίους (§ 113, ζ'), οἱ ὁποῖες ἔχουν κοινό μέσο, γιατί, ὅταν τίς παίρνουμε ἀνά δύο, εἶναι διαγώνιοι παραλληλογράμμου (π.χ. οἱ Α'Γ καί ΒΔ' τοῦ σχ. 121 εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου Α'Δ'ΓΒ).

Κέντρο τοῦ παραλληλεπιπέδου λέγεται τό κοινό μέσο τῶν διαγωνίων του.

Τό παραλληλεπίπεδο ἔχει 8 κορυφές καί 8 **τρίεδρες γωνίες.**

ΤΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

130. α') **Ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγεται τό παραλληλεπίπεδο, τοῦ ὁποίου μιά τρίεδρη εἶναι τρισορθογώνια.**

Δηλ. τρεῖς ἀκμές, πού συντρέχουν σέ μιά κορυφή, εἶναι ἀνά δύο κάθετες. Ἑπομένως ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ ὀρθογώνιου παρ/δου εἶναι ὀρθογώνια παρ/μα καί ὅλες οἱ στερεές γωνίες του εἶναι τρισορθογώνιες, (σχ. 122).

β') **Διαστάσεις** τοῦ ὀρθογώνιου παρ/δου λέγονται τά μήκη α, β, γ τριῶν ἀκμῶν, πού συντρέχουν σέ μιά κορυφή.

γ') Ὅλες οἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογ. παρ/δου εἶναι ἴσες μεταξύ τους, γιατί, ἄν τίς πάρουμε ἀνά δύο, εἶναι διαγώνιοι ὀρθογ. παρ/μου. Ἄν d τό μῆκος τῆς διαγωνίου, ἔχουμε ὅτι (σχ. 122):

$$d^2 = B'\Delta^2 + \Delta B^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2$$

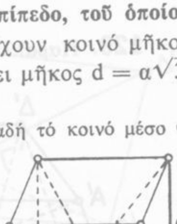
(1) $$\boxed{d^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,}\ , d = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Ο ΚΥΒΟΣ

131. α') **Κύβος λέγεται τό ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο, τοῦ ὁποίου οἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσες.** Οἱ 12 ἀκμές τοῦ κύβου ἔχουν κοινό μῆκος α, οἱ ἕδρες του εἶναι τετράγωνα καί ἡ διαγώνιός του ἔχει μῆκος $d = \alpha\sqrt{3}$.

β') **Στοιχεῖα συμμετρίας τοῦ κύβου.**

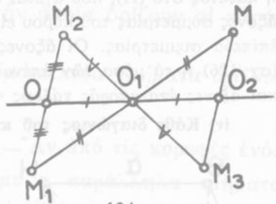
i) **Κέντρο συμμετρίας τοῦ κύβου** εἶναι τό κέντρο του, δηλαδή τό κοινό μέσο Ο τῶν διαγωνίων του (σχ. 123), γιατί τό συμμετρικό τοῦ κύβου ὡς πρός Ο εἶναι πάλι ὁ ἴδιος κύβος (§ 85), γ'). Ἐπειδή ὁ κύβος εἶναι, ὅπως εἶναι φανερό, πεπερασμένο σχῆμα (βλ. ἄσκ. 141), γι' αὐτό δέν μπορεῖ νά ἔχει κέντρα συμμετρίας περισσότερα ἀπό ἕνα. Ἑπομένως τό Ο εἶναι τό μόνο κέντρο συμμετρίας τοῦ κύβου.



Σχ. 123

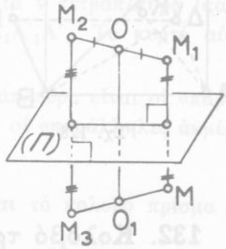
(Πράγματι, ἄς πάρουμε ἕνα σχῆμα F, πού ἔχει κέντρα συμμετρίας Ο καί O_1. Ἄς θεωρήσουμε καί ἕνα τρίτο σημεῖο O_2, συμμετρικό τοῦ Ο ὡς πρός O_1 καί ἔστω Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ σχήματος F. Στό σχ. 124 βλέπουμε ὅτι $M \in F \Rightarrow M_1 \in F \Rightarrow M_2 \in F \Rightarrow M_3 \in F$. Δηλ. ἄν $M \in F$, τότε καί

$M_3 \in F$. Ἀλλά τό M_3 εἶναι τό συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός O_2. Ἑπομένως τό F ἔχει καί τρίτο κέντρο συμμετρίας, τό O_2. Γιά τόν ἴδιο λόγο θά ἔχει καί τέταρτο κέντρο συμμετρίας, συμμετρικό τοῦ O_1 ὡς πρός O_2 καί κατά τόν ἴδιο τρόπο ἐπ' ἄπειρο. Δηλαδή τό F θά ἔχει ἄπειρα κέντρα συμμετρίας πάνω στήν εὐθεία OO_1, πού ἀπέχουν ἀπό τό O κατά OO_1, $2OO_1$, $3OO_1$, ... $\nu \cdot OO_1$, ... Συνεπῶς τό F θά ἔχει σημεῖα, πού ἀπέχουν ἀπό ἕνα ὁρισμένο σημεῖο του ἀπόσταση, πού ὑπερβαίνει ὁποιοδήποτε μῆκος, ὅσο μεγάλο κι ἄν εἶναι αὐτό. Δηλ. τό F δέν εἶναι πεπερασμένο σχῆμα, ὅταν ἔχει δυό κέντρα συμμετρίας. Ἄρα κάθε πεπερασμένο σχῆμα ἔχει τό πολύ ἕνα κέντρο συμμετρίας).



124

ii) **Ἐπίπεδα συμμετρίας.** Ἄν ἕνα πεπερασμένο σχῆμα F ἔχει κέντρο συμμετρίας O, τότε ἀπό τό O θά περνᾶ (ἄν ὑπάρχει) καί κάθε ἐπίπεδο συμμετρίας (Π) τοῦ σχήματος. Γιατί, ἄν τό (Π) δέν περνοῦσε ἀπό τό O, τό συμμετρικό τοῦ O ὡς πρός (Π), ἔστω τό O_1, θά ἦταν διαφορετικό ἀπό τό O καί θά ἦταν καί αὐτό κέντρο συμμετρίας (βλ. σχ. 125): $M \in F \Rightarrow M_1 \in (F) \Rightarrow M_2 \in F \Rightarrow M_3 \in F$, ἀλλά M_3 εἶναι συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός O_1. Ἑπομένως τό F θά εἶχε δυό κέντρα συμμετρίας. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἀδύνατο, ἀφοῦ τό F εἶναι πεπερασμένο. Κάθε, λοιπόν, ἐπίπεδο συμμετρίας τοῦ κύβου θά περνᾶ ἀπό τό κέντρο του O. Κατά τή συμμετρία αὐτή, ἐπειδή ὁ κύβος μετασχηματίζεται στόν ἑαυτό του, γι' αὐτό κάθε ἕδρα θά μετασχηματίζεται σέ μιά ἄλλη ἕδρα ἤ **παράλληλη** ἤ **κάθετη** σ' αὐτή.

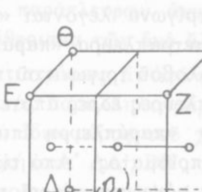


Σχ. 125

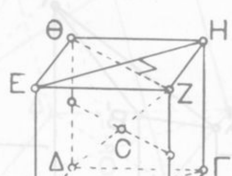
Ἀλλά ἀπό τό κέντρο O ἕνα μόνο ἐπίπεδο περνᾶ, ὡς πρός τό ὁποῖο δυό παράλληλες ἕδρες εἶναι συμμετρικές: τό μεσοπαράλληλο ἐπίπεδο τῶν ἑδρῶν.

Ἔτσι ἔχουμε ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας τά ἐπίπεδα (P_1), (P_2), (P_3) (σχ. 126), πού εἶναι ἀντιστοίχως μεσοκάθετα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, ΑΕ.

Ἐπίσης ἀπό τό κέντρο O περνᾶ ἕνα ἐπίπεδο, ὡς πρός τό ὁποῖο δυό κάθετες ἕδρες εἶναι συμμετρικές: τό ἐπίπεδο, πού διχοτομεῖ τή δίεδρη γωνία τῶν καθέτων αὐτῶν ἑδρῶν.



Σχ. 126



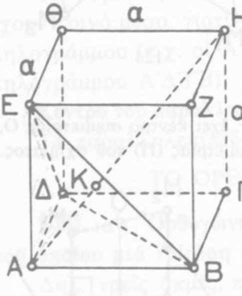
Σχ. 127

Ἔχουμε, λοιπόν, ἀκόμη ὡς ἐπίπεδα συμμετρίας τοῦ κύβου τά ἐπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες τοῦ κύβου, ὅπως τό ΑΕΗΓ τοῦ σχ. 127, τά ὁποῖα περιέχουν δυό ἀπέναντι παράλληλες ἀκμές (διαγώνια ἐπίπεδα).

Αὐτά εἶναι 6.

iii) **Ἄξονες συμμετρίας.** Ἄν ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας ἑνός σχήματος καί Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος, πού βρίσκεται πάνω στό (Π), τότε ἡ κάθετος στό (Π), πού ἄγεται στό Ο, εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἑπομένως ἄξονες συμμετρίας τοῦ κύβου εἶναι οἱ κάθετες, πού ἄγονται στό Ο πάνω στά παραπάνω 9 ἐπίπεδα συμμετρίας. Οἱ ἄξονες συμμετρίας συνδέουν τά κέντρα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν (σχ. 126) ἤ τά μέσα τῶν ἀπέναντι παράλληλων ἀκμῶν (σχ. 127). Οἱ τρεῖς πρῶτοι εἶναι καί *ἄξονες ἐπαναφορᾶς τάξεως* 4 τοῦ κύβου.

iv) Κάθε διαγώνιος τοῦ κύβου εἶναι ἄξονας ἐπαναφορᾶς, τάξεως 3 (§ 80 γ΄).

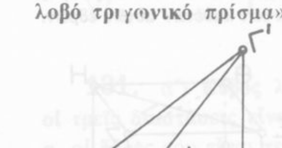


Σχ. 128

—Ἄς πάρουμε ἕναν κύβο ΑΒΓΔΕΖΗΘ μέ ἀκμή α (σχ. 128). Τό τρίγωνο ΕΔΒ εἶναι ἰσόπλευρο, μέ πλευρές $\alpha\sqrt{2}$. Τό Η ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς κορυφές Ε, Δ, Β ($ΗΕ = ΗΔ = ΗΒ = \alpha\sqrt{2}$) καί προβάλλεται στό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΕΔΒ. Ἑπομένως ἡ διαγώνιος ΑΗ εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου ΕΔΒ καί στό περίκεντρό του Κ. Ἄρα ἡ ΗΑ εἶναι ἄξονας ἐπαναφορᾶς τοῦ ἰσόπλευρου τριγώνου ΕΔΒ, τάξεως 3 (§ 92). Μέ στροφή 120° γύρω ἀπό τήν ΗΑ, τά Η καί Α μένουν ἀκίνητα, τό Δ ἔρχεται στό Β, τό Β στό Ε καί τό Ε στό Δ. Ἑπομένως οἱ κορυφές Η, Α, Ε, Δ, Β τοῦ κύβου παραμένουν, ὅπως εἶναι καί ὁ κύβος ἐφαρμόζει στόν ἑαυτό του.

ΤΟ ΚΟΛΟΒΟ ΠΡΙΣΜΑ

132. Κολοβό τριγωνικό πρίσμα.—Ἄν ἀπό τίς κορυφές ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τρία παράλληλα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, πού νά μήν εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ τους, ἀλλά νά βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου ὡς πρός τό Επιπ ΑΒΓ, τότε ὁρίζεται ἕνα κυρτό πολύεδρο, πού ἔχει ἕδρες τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ καί τά τρία τετράπλευρα (κατά κανόνα τραπέζια) ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ΑΓΓ΄Α΄. Τό κυρτό αὐτό πολύεδρο λέγεται «κολοβό τριγωνικό πρίσμα» (Σχ. 129).



Σχ. 129

Τά δυό τρίγωνα λέγονται **«βάσεις»** καί τά τρία τετράπλευρα **«παράπλευρες ἕδρες»** τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Οἱ παράπλευρες ἕδρες ἀποτελοῦν ὅλες μαζί τήν **«παράπλευρη ἐπιφάνεια»** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Ἀπό τίς παράπλευρες ἕδρες **μόνο μιά** μπορεῖ νά εἶναι παραλληλόγραμμο.

Τά τρία παράλληλα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ λέγονται **παράπλευρες ἀκμές**. Ὅταν οἱ παράπλευρες ἀκμές εἶναι κάθετες στό ἐπίπεδο τῆς μιᾶς ἀπό τίς βάσεις, τό κολοβό τριγωνικό πρίσμα λέγεται **ὀρθό**.

Κάθετη τομή τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος λέγεται ἡ κάθετη τομή τῆς ἀπέραντης πρισματικῆς ἐπιφάνειας, τήν ὁποία ὁρίζουν οἱ παράπλευρες ἀκμές του, ὅταν προεκταθοῦν.

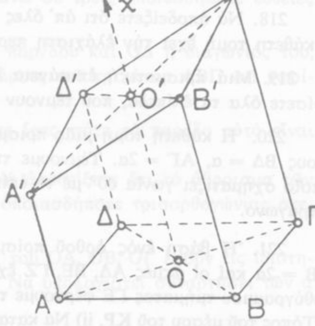
Παρατήρηση. *Τρία παράλληλα, ἄνισα, μή ὁμοεπίπεδα τμήματα ὁρίζουν στό χῶρο ἕνα κολοβό πρίσμα.*

133. Κολοβό πολυγωνικό πρίσμα.—Ἄν ἀπό τίς κορυφές ἑνός κυρτοῦ ἐπιπέδου ν-γώνου $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ φέρουμε ν παράλληλα τμήματα $A_1A'_1$, $A_2A'_2\ldots A_\nu A'_\nu$, πού νά βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου ὡς πρός τό ἐπίπεδο τοῦ ν-γώνου καί τά ἄκρα τους $A'_1, A'_2, A'_3,\ldots A'_\nu$ νά βρίσκονται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο, πού δέν εἶναι παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο τοῦ $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$, τότε ὁρίζεται ἕνα κυρτό πολύεδρο, πού ἔχει ἕδρες τά δυό πολύγωνα $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ καί $A'_1A'_2A'_3\ldots A'_\nu$ καί τά ν τετράπλευρα (κατά κανόνα τραπέζια) $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2, \ldots A_\nu A_1A'_1A'_\nu$. Τό κυρτό αὐτό πολύεδρο λέγεται «κολοβό ν-γωνικό πρίσμα».

Τά δυό πολύγωνα εἶναι οἱ «βάσεις», τά ν τετράπλευρα εἶναι οἱ «παράπλευρες ἕδρες» καί τά ν παράλληλα τμήματα εἶναι οἱ **«παράλληλες ἀκμές»** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.

134. Κολοβό παραλληλεπίπεδο λέγεται τό κολοβό πρίσμα (§ 133), πού ἔχει βάσεις παραλληλόγραμμα

Ἄν εἶναι Ο καί Ο΄ τά κέντρα τῶν δύο βάσεων, τότε ἡ ΟΟ΄ εἶναι κοινή διάμεσος τῶν τραπεζίων ΑΓΓ΄Α΄ καί ΔΒΒ΄Δ΄ (σχ. 130), ἐπομένως 2ΟΟ΄=ΑΑ΄ +ΓΓ΄=ΒΒ΄+ΔΔ΄. Δηλαδή (1) ΑΑ΄ + ΓΓ΄ = ΒΒ΄ + ΔΔ΄, δηλ. **στό κολοβό παραλληλεπίπεδο τό ἄθροισμα τῶν δυό ἀπέναντι παράπλευρων ἀκμῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν δυό ἄλλων.**



Σχ. 130

Ἀντιστρόφως, ἄν ἀπό τίς κορυφές Α, Β,Γ,Δ ἑνός παραλληλογράμμου φέρουμε πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου παράλληλα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ (σχ. 130) τέτοια, ὥστε: ΑΑ΄ +ΓΓ΄=ΒΒ΄ + ΔΔ΄, τότε σχηματίζεται ἕνα κολοβό παρ/δο μέ βάσεις ΑΒΓΔ καί Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Ἀρκεῖ ν' ἀποδείξουμε ὅτι τά Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ εἶναι ὁμοεπίπεδα. Πράγματι ἡ παράλληλος, πού ἄγεται ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ παρ/μου ΑΒΓΔ πρός τίς παράπλευρες ἀκμές τέμνει τήν Α΄Γ΄ στό μέσο της Ο΄ καί τήν Δ΄Β΄ στό μέσο της Ο΄΄. Τά Ο΄ καί Ο΄΄ ὅμως συμπίπτουν, γιατί ΟΟ΄= (ΑΑ΄ + ΓΓ΄)/2 καί ΟΟ΄΄ = (ΒΒ΄ + ΔΔ΄)/2. Ἄρα ἀπ' τήν ὑπόθεση προκύπτει: ΟΟ΄ = ΟΟ΄΄. Ἐπειδή τό Ο΄ καί Ο΄΄ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια ἡμιευθεία Οx (στό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου μέ τά Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄) καί ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τήν ἀρχή της Ο, γι' αὐτό συμπίπτουν. Ἀφοῦ τά τμήματα Α΄Γ΄ καί Δ΄Β΄ ἔχουν κοινό μέσο, ὁρίζουν τό παρ/μο Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πρίσματα καί πρισματικές ἐπιφάνειες.

213. Νά ἀποδείξετε ὅτι δυό τριγωνικά πρίσματα, πού ἔχουν τίς παράπλευρες ἕδρες ἴσες μία πρός μία καί κατά τήν ἴδια φορά τοποθετημένες, εἶναι ἴσα (ἐφαρμόσιμα).

214. Ἄν ἡ βάση ἑνός πρίσματος εἶναι κυρτό πολύγωνο μέ ν πλευρές, νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα ὅλων τῶν διέδρων γωνιῶν τοῦ πρίσματος.

215. Στό πρίσμα τῆς προηγούμενης ἀσκήσεως νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διέδρων, πού σχηματίζονται ἀπό τίς παράπλευρες ἕδρες μέ τό ἐπίπεδο τῆς μιᾶς βάσεως, περιέχεται μεταξύ 2 ὀρθῶν καί 2(ν — 1) ὀρθῶν. (**Ὑποδ.** Ἔστω $Α_1Α_2Α_3 \ldots Α_ν$ ἡ μία βάση, $Α_1Α'_1$, $Α_2Α'_2$, $\ldots$ $Α_νΑ'_ν$ οἱ παράπλευρες ἀκμές καί $S =$ διεδ $\widehat{Α_1Α_2} +$ διεδ $\widehat{Α_2Α_3} + \ldots +$ διεδ $\widehat{Α_{ν-1}Α_ν}$. Γιά νά δειχτεῖ ὅτι $S > 2$ ορθ., ἄς ἐφαρμοστεῖ στίς στερεές γωνίες $Α_1$, $Α'_1Α_2Α_ν$, $Α_2$, $Α'_2Α_3Α_1 \ldots$ τό θεώρημα: τό ἄθροισμα τῶν διέδρων > 2 ορθ. καί γιά τό $S < 2(ν—1)$ ορθ. τό θεώρημα: κάθε δίεδρη, πού αὐξήθηκε κατά 2 ορθ., ὑπερβαίνει τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων).

216. Ἡ κάθετη τομή μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφάνειας εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Νά ὁριστοῦν πάνω στίς ἀκμές, πού διέρχονται ἀπό τά Β καί Γ, δύο σημεῖα Μ καί Ν τέτοια, ὥστε τό τρίγωνο ΑΜΝ νά εἶναι ἰσοσκελές καί ὀρθογώνιο στό Α.

217. Ἔχουμε μιά πρισματική ἐπιφάνεια, μιά ἐπίπεδη τομή της ΑΒΓΔ (τετράπλευρο), μιά εὐθεία (ε) μέσα στό ἐπίπεδο ΑΒΓΔ καί ἕνα σημεῖο Α΄ πάνω στήν ἀκμή, πού διέρχεται ἀπό τό Α. Ζητεῖται νά σχεδιαστεῖ ἡ τομή τῆς πρισματικῆς ἐπιφάνειας ἀπό τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζεται ἀπό τήν (ε) καί τό Α΄ μέ χρήση εὐθειῶν μόνο.

218. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἀπ' ὅλες τίς ἐπίπεδες τομές μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφάνειας ἡ κάθετη τομή ἔχει τήν ἐλάχιστη περίμετρο.

219. Μιά πρισματική ἐπιφάνεια ἔχει ὡς κάθετη τομή ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Νά ὁρίσετε ὅλα τά ἐπίπεδα, πού τέμνουν τήν ἐπιφάνεια κατά ρόμβο.

220. Ἡ κάθετη τομή μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφάνειας εἶναι ρόμβος ΑΒΓΔ μέ διαγωνίους $ΒΔ = α$, $ΑΓ = 2α$. Τέμνουμε τήν πρισματική ἐπιφάνεια μέ ἐπίπεδο $(Π)||ΑΓ$, τό ὁποῖο σχηματίζει γωνία 60° μέ τό ἐπίπεδο τοῦ ρόμβου. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ τομή εἶναι τετράγωνο.

221. Ἡ βάση ἑνός ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{Α} = 90°$, $ΑΓ = α$, $ΑΒ = 2α$ καί οἱ ἀκμές ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ἔχουν μήκη 2α ἡ καθεμιά. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΓΕ φέρνουμε τή $ΜΚ \perp ΒΓ$ $(Κ \in ΒΓ)$ καί τή $ΜΡ \perp ΑΔ$ $(Ρ \in ΑΔ)$. i) Τόπος τοῦ μέσου τοῦ ΚΡ. ii) Νά κατασκευάσετε τό Μ, ὥστε νά εἶναι $ΜΡ = λ$ (δεδομένο). iii) Νά κατασκευάσετε τό Μ, ὥστε νά εἶναι $ΜΡ = ΜΓ$. Νά ὑπολογίσετε στήν περίπτωση αὐτή τό ΜΓ. (**Ὑποδ.** Γιά τό i) Δεῖξτε πρῶτα ὅτι τό ΜΚΑΡ εἶναι ὀρθογ. παρ/μο, ὅτι $ΕΔ \perp$ Επιπ ΔΑΓΖ καί ὅτι τό μέσο τοῦ ΚΡ εἶναι καί μέσο τοῦ ΑΜ. Γιά τό iii) Ἡ προβολή Μ΄ τοῦ Μ στό ἐπίπεδο ΑΓΖΔ βρίσκεται πάνω στήν ΓΔ (προβολή τοῦ ΓΕ στό ἐπίπεδο ΑΓΖΔ) καί $ΜΡ = ΜΓ \Rightarrow Μ'Ρ = Μ'Γ$. Νά συμπεράνετε ὅτι ἡ ΓΡ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{ΑΓΔ}$, ἑπομένως κατασκευάσιμη).

222. Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ τομή μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφάνειας εἶναι τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ: $ΑΒ||ΓΔ$, $ΑΒ = 6$, $ΓΔ = 9$ (μονάδες μήκους). Ἐπάνω στίς ἀκμές, πού διέρχονται ἀπό τά Α, Β, Γ, παίρνουμε ἀντιστοίχως τρία σημεῖα Κ, Λ, Μ πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἐπιπέδου

ΑΒΓΔ τέτοια, ὥστε: ΑΚ = 9, ΒΛ = 7, ΓΜ = 5. Τό ἐπίπεδο ΚΛΜ τέμνει τήν τέταρτη ἀκμή σέ σημεῖο Ν. Ζητεῖται: i) Νά κατασκευαστεῖ τό Ν μέ χρήση εὐθειῶν μόνο. ii) Νά ὑπολογιστεῖ τό μῆκος ΔΝ.

223. Ἕνα πρίσμα ἔχει βάσεις τά τετράπλευρα ΑΒΓΔ καί Α΄Β΄Γ΄Δ΄. Ἄν Κ εἶναι ἡ τομή τῶν διαγωνίων ΑΓ΄ καί Α΄Γ καί Λ ἡ τομή τῶν ΒΔ΄ καί Β΄Δ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ἀκμῶν τοῦ πρίσματος ὑπερβαίνει τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του κατά $8.ΚΛ^2$.

Παραλληλεπίπεδα, κύβοι.

224. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἑνός παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ἀκμῶν του.

225. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαγώνιων τομῶν παρ/δου (δηλ. τομῶν πού περιέχουν δύο ἀπέναντι παρ/λες ἀκμές) εἶναι ἴσο μέ τό διπλάσιο ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν ὅλων τῶν ἑδρῶν του. (**Ὑποδ.** Ἄς εἶναι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ κατά σειρά τέσσερις παρ/λες καί ἴσες ἀκμές (μήκους λ). Αὐτές ὁρίζουν δυό διαγώνιες τομές ΑΓΓ΄Α΄ καί ΒΔΔ΄Β΄. Ἄς φέρουμε ἐπίπεδο $\perp$ στίς τέσσερις αὐτές ἀκμές, πού νά τίς τέμνει ἔστω στά Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως. Ὅπως γνωρίζουμε ἀπό τήν ἐπιπεδομετρία, $ΚΜ^2 + ΝΛ^2 = ΚΛ^2 + ΛΜ^2 + ΜΝ^2 + ΝΚ^2 \Rightarrow λ^2.ΚΜ^2 + λ^2.ΝΛ^2 = λ^2.ΚΛ^2 + λ^2.ΛΜ^2 + λ^2.ΜΝ^2 + λ^2.ΝΚ^2 \Rightarrow (ΑΓΓ΄Α΄)^2 + (ΒΔΔ΄Β΄)^2 = (ΑΑ΄Δ΄Δ)^2 + (ΔΔ΄Γ΄Γ)^2 + (Γ΄ΓΒΒ΄)^2 + (ΒΒ΄Α΄Α)^2$. Τό μερικό αὐτό ἐξαγόμενο ἐφαρμόζεται καί στά ἄλλα ζεύγη διαγώνιων τομῶν).

226. Θεωροῦμε τρεῖς συντρέχουσες ἀκμές ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἑνός παρ/δου καί τή διαγώνιό του ΟΔ. Ἔστω (Π) ἕνα ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τό Ο καί πού ἀφήνει τά Α, Β, Γ, Δ πρός τό ἴδιο μέρος. Ἄν $υ_Α$, $υ_Β$, $υ_Γ$, $υ_Δ$ εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν Α,Β,Γ,Δ ἀπό τό (Π), νά ἀποδείξετε ὅτι $υ_Δ = υ_Α + υ_Β + υ_Γ$.

227. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράγωνο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του πάνω σέ τρεῖς ὁποιεσδήποτε εὐθεῖες τοῦ χώρου, πού εἶναι ὀρθογώνιες ἀνά δύο.

228. Ἄν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι τρεῖς ἀκμές ἑνός παρ/δου καί ΟΔ ἡ διαγώνιός του, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΟΔ διέρχεται ἀπό τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί χωρίζεται ἀπό αὐτό σέ λόγο 1 : 2.

229. Ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός παρ/δου εἶναι ὅλες ἴσες, τότε τό παρ/δο αὐτό εἶναι τρισορθογώνιο.

230. Ἔχουμε δυό σταθερά σημεῖα Ο καί Α. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Α ἀπό τίς ἕδρες ὁποιασδήποτε τρισορθογώνιας στερεῆς γωνίας μέ κορυφή τό Ο εἶναι σταθερό.

231. Σέ ἕνα παρ/δο τρεῖς συντρέχουσες ἀκμές του ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἔχουν τίς ἰδιότητες: ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = α καί ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ = β. Νά ὑπολογιστεῖ συναρτήσει τῶν α καί β ἡ διαγώνιος ΟΔ τοῦ παρ/δου.

232. Ἄν ξέρετε τίς τρεῖς διαστάσεις α, β, γ ἑνός ὀρθογώνιου παρ/δου, νά ὑπολογίσετε τίς ἐλάχιστες ἀποστάσεις μιᾶς διαγωνίου τοῦ παρ/δου ἀπό τίς ἀσύμβατες πρός τή διαγώνιο αὐτή ἀκμές τοῦ παρ/δου.

233. Ἔχουμε τρεῖς εὐθεῖες ἀσύμβατες ἀνά δύο καί ὄχι παρ/λες πρός τό ἴδιο ἐπίπεδο. Ζητεῖται νά κατασκευαστεῖ ἕνα παρ/δο, πού νά ἔχει τρεῖς ἀκμές του πάνω στίς δεδομένες εὐθεῖες.

234. Ἔστω ἕνα ὀρθογώνιο παρ/δο $ΑΒΓΔΑ_1Β_1Γ_1Δ_1$ (ὅπου $ΑΑ_1 \| ΒΒ_1 \ldots$) καί τρία σημεῖα Κ, Λ, Μ ἐπάνω στίς ἀκμές $ΑΑ_1$, ΒΓ, $Γ_1Δ_1$ τέτοια, ὥστε $ΑΚ/ΚΑ_1 = 1/1$, $ΒΛ/ΛΓ = 1/2$, $Γ_1Μ/ΜΔ_1 = 1/3$. Νά βρεθεῖ ποιές ἄλλες ἀκμές τοῦ παρ/δου τέμνει τό ἐπί-

πεδο ΚΛΜ καί σέ ποιούς λόγους τίς χωρίζει. (Ὑποδ. Ἔστω (Π) τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως ΑΒΓΔ καί Ε ἡ τομή τῆς ευθ. ΜΚ μέ τό (Π). Ἡ εὐθεία ΕΛ τέμνει τήν ἀκμή ΑΒ στό Ζ καί τήν προέκταση τῆς ΔΓ στό Η. Ἡ εὐθεία ΗΜ τέμνει τήν ἀκμή $ΓΓ_1$ στό Ι καί τήν προέκταση τῆς ἀκμῆς $ΔΔ_1$ στό Θ. Τέλος ἡ εὐθεία ΘΚ τέμνει τήν ἀκμή $Α_1Δ_1$ στό Ο. Ἔτσι βρίσκουμε ποιές ἀκμές τέμνει τό ἐπίπεδο ΚΛΜ).

235. Τά δύο ἐπίπεδα, πού ὁρίζονται ἀπό μιά διαγώνιο κύβου καί ἀπό δύο διαδοχικές ἀκμές, σχηματίζουν δίεδρη γωνία 120°.

236. Ἕνας κύβος νά τμηθεῖ ἀπό ἕνα ἐπίπεδο ἔτσι, ὥστε ἡ τομή νά εἶναι κανονικό ἑξάγωνο.

237. Θεωροῦμε τρεῖς διαδοχικές ἀκμές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ἑνός κύβου, πού δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο καί τά μέσα τους Μ, Ν, Ρ. Ζητεῖται νά σχεδιαστεῖ ἡ τομή τοῦ κύβου ἀπό τό ἐπίπεδο ΜΝΡ μέ χρήση εὐθειῶν μόνο καί ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ τομή αὐτή εἶναι κανονικό ἑξάγωνο.

Κολοβά πρίσματα.

238. Σέ κάθε κολοβό τριγωνικό πρίσμα ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων εἶναι ἴση μέ τό μέσο ὅρο τῶν τριῶν παράπλευρων ἀκμῶν.

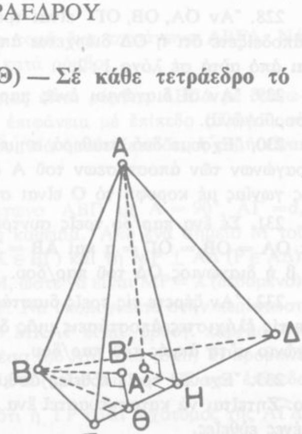
239. Σέ κάθε κολοβό παρ/δο ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων εἶναι ἴση μέ τό μέσο ὅρο τῶν παράλληλων ἀκμῶν.

240. Ἔστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί Αx, Βy, Γz ἡμιευθεῖες κάθετες στό ἐπίπεδο ΑΒΓ καί ὁμόρροπες μεταξύ τους. i) Ποιές συνθῆκες πρέπει νά ἱκανοποιοῦνται ἀπό τίς πλευρές α, β, γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, γιά νά ὑπάρχουν πάνω στίς Αx, Βy, Γz σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τέτοια, ὥστε οἱ παράπλευρες ἕδρες τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ νά εἶναι ἰσοδύναμες; ii) Ἄν οἱ συνθῆκες ἱκανοποιοῦνται, νά ἀποδείξετε ὅτι, ὅταν τό ἐπίπεδο Α΄Β΄Γ΄ μετατοπίζεται ἔτσι, ὥστε οἱ παράπλευρες ἕδρες τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ νά μένουν ἰσοδύναμες, τότε τό ἐπίπεδο Α΄Β΄Γ΄ διέρχεται ἀπό μιά σταθερή εὐθεία.

ΟΓΚΟΣ ΤΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΟΥ

135. Ὄγκος τετραέδρου. α΄) (Θ) — Σέ κάθε τετράεδρο τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας ἐπί τό ὕψος, πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή, εἶναι σταθερό, δηλαδή εἶναι τό ἴδιο γιά ὅλες τίς ἕδρες.

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τά δυό ὕψη ἑνός ὁποιουδήποτε τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 131) καί φέρουμε τό ὕψος ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΓΔ καί τό ὕψος ΒΘ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ, τότε θά εἶναι Α΄Η ⊥ ΓΔ καί Β΄Θ ⊥ ΓΔ (θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων) καί ἑπομένως οἱ γωνίες $\widehat{ΑΗΑ΄}$ καί $\widehat{ΒΘΒ΄}$ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΗΑ΄ καί ΒΘΒ΄, πού ἔχουν τίς πλευρές τους παρ/λες, εἶναι ἴσες. Ἄρα,



Σχ. 131

$\text{τριγ } \mathrm{AH A'} \approx \text{τριγ } \mathrm{B\Theta B'} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{B\Theta}}$. Ἀλλά $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{B\Theta}} = \dfrac{\text{εμβ } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{εμβ } \mathrm{B\Gamma\Delta}}$ καί συνεπῶς : $\dfrac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}} = \dfrac{\text{εμβ } \mathrm{A\Gamma\Delta}}{\text{εμβ } \mathrm{B\Gamma\Delta}}$ ἤ εμβ $\mathrm{B\Gamma\Delta} \times \mathrm{AA'} =$ εμβ $\mathrm{A\Gamma\Delta} \times \mathrm{BB'}$.

Μέ τόν ἴδιο ἀκριβῶς τρόπο, ἄν ΓΓ′ καί ΔΔ′ εἶναι τά δυό ἄλλα ὕψη τοῦ τετραέδρου, βρίσκουμε ὅτι $\mathrm{\Gamma\Gamma'} \times$ εμβ $\mathrm{AB\Delta} = \mathrm{\Delta\Delta'} \times$ εμβ $\mathrm{AB\Gamma} = \mathrm{AA'} \times$ $\times$ εμβ ΒΓΔ. Γράφοντας γιά συντομία (ΑΒΓ) ἀντί εμβ ΑΒΓ ἔχουμε τελικά.

(1) $(\mathrm{B\Gamma\Delta}) \times \mathrm{AA'} = (\mathrm{\Gamma\Delta A}) \times \mathrm{BB'} = (\mathrm{\Delta AB}) \times \mathrm{\Gamma\Gamma'} = (\mathrm{AB\Gamma}) \times \mathrm{\Delta\Delta'}$.

β′) Ὄγκος τετραέδρου λέγεται τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ὁποιασδήποτε ἕδρας του ἐπί τό ὕψος, πού ἄγεται πάνω σ' αὐτή, ἐπί ἕναν ἀκόμη αὐθαίρετο σταθερό ἀριθμητικό συντελεστή k.

Ὁ σταθερός συντελεστής k μπορεῖ νά προσδιοριστεῖ, ἄν ἐκλέξουμε αὐθαίρετα μιά μονάδα τῶν ὄγκων, δηλ. ἄν ἐκλέξουμε ἕνα πολύεδρο, τό ὁποῖο θέλουμε νά ἔχει ὄγκο 1. Συνήθως ἐκλέγεται ὁ κύβος μέ ἀκμή τή μονάδα τῶν μηκῶν ὡς μονάδα τῶν ὄγκων· δηλ. δίνουμε στό μοναδιαῖο αὐτό κύβο (αὐθαίρετα) ὄγκο 1. Τότε (ὅπως θ' ἀποδείξουμε στήν § 157) πρέπει $k = 1/3$.

Τελικά θά χρησιμοποιοῦμε τόν παρακάτω πρακτικό ὁρισμό:

Ὄγκος τετραέδρου λέγεται τό ἕνα τρίτο τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας ἐπί τό ἀντίστοιχο ὕψος. Τόν ὄγκο τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ παριστάνουμε μέ: Ογκ ΑΒΓΔ ἤ $V_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}}$ ἤ ἁπλά (ΑΒΓΔ). Θά ἰσχύει ἀπό τόν ὁρισμό:

$$\text{Ογκ } \mathrm{AB\Gamma\Delta} = V_{\mathrm{AB\Gamma\Delta}} = (\mathrm{AB\Gamma\Delta}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma})\upsilon_{\Delta} = \frac{1}{3}(\mathrm{B\Gamma\Delta})\upsilon_{A} = \frac{1}{3}(\mathrm{\Gamma\Delta A})\upsilon_{B} = \frac{1}{3}(\mathrm{\Delta AB})\upsilon_{\Gamma},$$

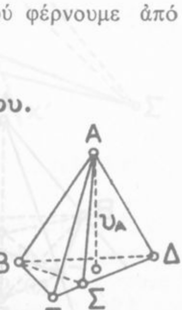
ὅπου $\upsilon_A, \upsilon_B, \upsilon_\Gamma, \upsilon_\Delta$ τά ὕψη τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, πού φέρνουμε ἀπό τίς κορυφές Α, Β, Γ, Δ.

136. Ἰδιότητες τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

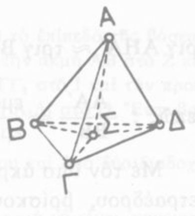
(i) — Ἄν ἕνα σημεῖο Σ βρίσκεται πάνω σέ μιά ἀκμή, ἔστω τή ΓΔ, ἑνός τετραέδρου: ΑΒΓΔ (σχ. 132), τότε:

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = (\mathrm{\Sigma AB\Gamma}) + (\mathrm{\Sigma AB\Delta}).$$

Γιατί: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \frac{1}{3}(\mathrm{B\Gamma\Delta})\times\upsilon_A = \frac{1}{3}\{(\mathrm{B\Gamma\Sigma}) + (\mathrm{B\Sigma\Delta})\}$ $\times\, \upsilon_A = \frac{1}{3}(\mathrm{B\Gamma\Sigma})\times\upsilon_A + \frac{1}{3}(\mathrm{B\Sigma\Delta})\upsilon_A = (\mathrm{\Sigma AB\Gamma}) + (\mathrm{\Sigma AB\Delta})$.



Σχ. 132



(ii)—Ἂν ἕνα σημεῖο Σ βρίσκεται μέσα σέ μιά ἕδρα, π.χ. τήν ΒΓΔ, τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ (σχ. 133), τότε:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΔΒ).$$

Γιατί $(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{3}(ΒΓΔ)υ_Α = \frac{1}{3}\{(ΒΓΣ) + (ΓΣΔ)\} +$

$+ (ΔΣΒ)\}υ_Α = \frac{1}{3}(ΒΓΣ)υ_Α + \frac{1}{3}(ΓΣΔ)υ_Α + \frac{1}{3}(ΔΣΒ)υ_Α =$

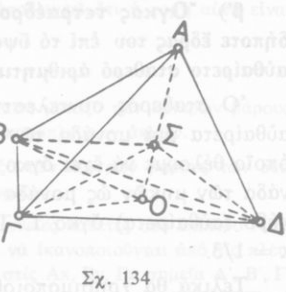
$= (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΔΒ).$

Σχ. 133

(iii)—Ἂν ἕνα σημεῖο Σ βρίσκεται μέσα σέ ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ (σχ. 134), τότε:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΒΓΔ) + (ΣΓΔΑ) + (ΣΔΑΒ)$$

Γιατί ἡ ἀκτίνα (Α, Σ) τέμνει, τότε, τήν ἕδρα ΒΓΔ σ' ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο της Ο καί θά εἶναι:



$(ΑΒΓΔ) = $ (βλ. (ii)) $(ΟΑΒΓ) +$
$+ (ΟΑΓΔ) + (ΟΑΒΔ) = $ (βλ. (i))
$= \{(ΣΑΒΓ) + (ΣΒΓΟ)\} +$
$+ \{(ΣΑΓΔ) + (ΣΓΔΟ)\} +$
$+ \{(ΣΑΒΔ) + (ΣΒΔΟ)\} =$
$= (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΒΔ) +$
$+ \{(ΣΒΓΟ) + (ΣΓΔΟ) + (ΣΒΔΟ)\} = (ΣΑΒΓ) +$
$(ΣΑΓΔ) + (ΣΑΒΔ) + (ΣΒΓΔ)$ (ἐξαιτίας τοῦ (ii)).

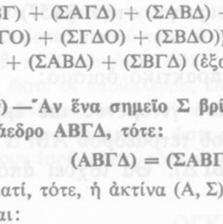
Σχ. 134

(iv)—Ἂν ἕνα σημεῖο Σ βρίσκεται μέσα στή στερεή γωνία Α, ΒΓΔ, ἀλλά ἔξω ἀπό τό τετράεδρο ΑΒΓΔ, τότε:

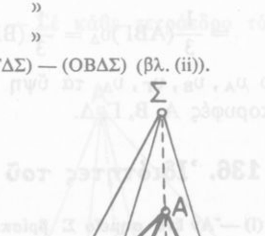
$$(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΔΒ) - (ΣΒΓΔ) \text{ (Σχ. 135).}$$

Γιατί, τότε, ἡ ἀκτίνα (Α, Σ) τέμνει τήν ἕδρα (ΒΓΔ) σ' ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο της Ο καί εἶναι:

$(ΣΑΒΓ) = (ΟΑΒΓ) + (ΟΒΓΣ)$ (βλ. (i))
$(ΣΑΓΔ) = (ΟΑΓΔ) + (ΟΓΔΣ)$ »
$(ΣΑΒΔ) = (ΟΑΒΔ) + (ΟΒΔΣ)$ »
$-(ΣΒΓΔ) = -(ΟΒΓΣ) - (ΟΓΔΣ) - (ΟΒΔΣ)$ (βλ. (ii)).



Σχ. 135



Σχ. 136

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς παραπάνω σχέσεις καί μέ βάση τό (ii) βρίσκουμε τή σχέση, πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

(v) —Ἄν τό σημεῖο Σ βρίσκεται μέσα στή στερεή γωνία, ἡ ὁποία εἶναι κατακορυφή τῆς Α, ΒΓΔ, τότε:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΣΒΓΔ) - (ΣΑΒΓ) - (ΣΑΓΔ) - (ΣΑΒΔ) \quad (σχ.\ 136)$$

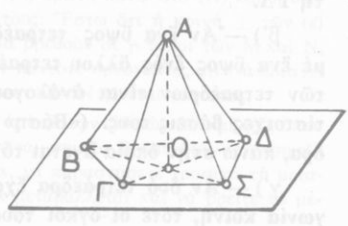
Γιατί ἡ ἀντίθετη προέκταση τῆς ἀκτίνας (Α, Σ) τέμνει τότε τήν ἕδρα ΒΓΔ σ' ἕνα ἐσωτερικό της σημεῖο Ο καί εἶναι:

$$(ΣΒΓΔ) = (ΣΟΒΓ) + (ΣΟΓΔ) + (ΣΟΔΒ)$$

$(βλ.\ (ii)) = \{(ΣΑΒΓ) + (ΑΒΓΟ)\} + \{(ΣΑΓΔ) + (ΑΓΔΟ)\} + \{(ΣΑΒΔ) + (ΑΔΒΟ)\}\ (βλ.\ (i)) =$
$= (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΒΔ) + \{(ΑΒΓΟ) + (ΑΓΔΟ) + (ΑΔΒΟ)\} = (ΣΑΒΓ) +$
$+ (ΣΑΓΔ) + (ΣΑΒΔ) + (ΑΒΓΔ)$ (βλ. (ii)). Απ' αὐτές προκύπτει ἡ σχέση, πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

(vi)—Ἄν τό σημεῖο Σ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο ΒΓΔ, ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ΒΓΔ καί μέσα στή γωνία $\widehat{ΓΒΔ}$, τότε: $(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΒΔ) - (ΣΑΓΔ)$ (σχ. 137)

Αὐτό διαπιστώνεται εὔκολα, μέ ἀνάλογους συλλογισμούς.

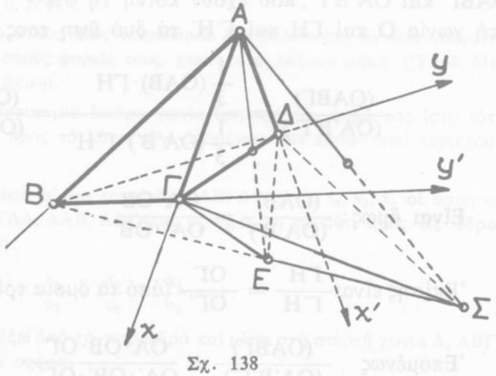


Σχ. 137

(vii) —Ἄν ἕνα σημεῖο Σ βρίσκεται μέσα στή δίεδρη $\widehat{ΑΒ}$ τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ καί μέσα στή δίεδρη, πού εἶναι κατ' ἀκμή τῆς ΓΔ (Σχ. 138), τότε: $(ΑΒΓΔ) = (ΣΑΒΓ) + (ΣΑΒΔ) - (ΣΓΔΑ) - (ΣΓΔΒ)$.

Πράγματι τό Σ, πού ἀνήκει στή δίεδρη x — ΓΔ — y, βρίσκεται μέ τό Β ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου xΑx', ἄρα τό τμῆμα ΒΣ τέμνει τό ἐπίπεδο xΑx' σ' ἕνα σημεῖο Ε. Τό Ε εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς δίεδρης $\widehat{ΑΒ}$, γιατί καί τό τμῆμα ΒΣ εἶναι ἐπίσης ἐσωτερικό.

Ἄρα τό Ε βρίσκεται μέσα στή γωνία $x\widehat{Α}x'$, γιατί ἀλλιῶς θά ἦταν ἐξωτερικό τῆς δίεδρης ΑΒ. Τό Ε δέ βρίσκεται μέσα στό τρίγωνο ΑΓΔ, γιατί τότε τό ΒΕ καί συνεπῶς καί τό ΒΣ θά βρίσκονταν ἔξω ἀπό τή δίεδρη xΓΔy.



Σχ. 138

Ἑπομένως τό Ε βρίσκεται στήν περιοχή xΓΔx'.

Τώρα ἔχουμε:

$$(ΑΒΓΔ) = (ΕΑΒΓ) + (ΕΑΒΔ) - (ΕΒΓΔ) \quad (βλ.\ (vi))$$

$$\begin{array}{r} +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} (ΣΑΒΓ) = (ΕΑΒΓ) + (ΕΑΓΣ) & (βλ.\ (i)) \\ (ΣΑΒΔ) = (ΕΑΔΣ) + (ΕΑΒΔ) & » \\ (ΣΓΔΑ) = (ΕΑΓΣ) + (ΕΑΔΣ) - (ΕΓΔΣ) & (βλ.\ (vi)) \\ (ΣΓΔΒ) = (ΕΓΔΣ) + (ΕΒΓΔ) & \end{array} \right.$$

Ἀπό τό γραμμικό συνδυασμό (μέ τούς σημειούμενους συντελεστές) τῶν τεσσάρων τελευταίων ἰσοτήτων προκύπτει ἡ σχέση τῶν ὄγκων, πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

137. Σύγκριση ὄγκων δύο τετραέδρων.

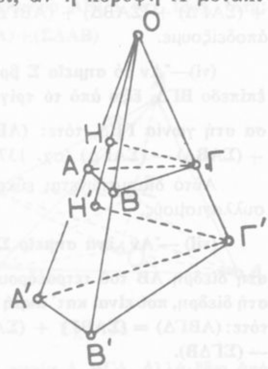
α΄) —**Ὁ ὄγκος κάθε τετραέδρου δέν ἀλλάζει, ἄν μιά κορυφή του μετακινηθεῖ πάνω σέ εὐθεία παράλληλη πρός τήν ἀπέναντι ἕδρα.**

Εἰδικότερα:

Ὁ ὄγκος κάθε τετραέδρου ΑΒΓΔ δέν ἀλλάζει, ἄν ἡ κορυφή Α μετακινηθεῖ παράλληλα πρός τή ΒΓ ἤ τή ΒΔ ἤ τή ΓΔ.

β΄) —**Ἄν ἕνα ὕψος τετραέδρου εἶναι ἴσο μέ ἕνα ὕψος ἑνός ἄλλου τετραέδρου, οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων εἶναι ἀνάλογοι πρός τίς ἀντίστοιχες βάσεις τους. («Βάση» ἐννοεῖται ἡ ἕδρα, πάνω στήν ὁποία ἄγεται τό ὕψος).**

γ΄) —**Ἄν δυό τετράεδρα ἔχουν μιά στερεή γωνία κοινή, τότε οἱ ὄγκοι τους εἶναι ἀνάλογοι πρός τά γινόμενα τῶν ἀκμῶν πού, περιέχουν τήν κοινή στερεή γωνία.**



Σχ. 139

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τά τετράεδρα ΟΑΒΓ καί ΟΑ΄Β΄Γ΄, πού ἔχουν κοινή τή στερεή γωνία Ο καί ΓΗ καί Γ΄Η΄ τά δυό ὕψη τους (σχ. 139). Ἔχουμε:

$$\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄Γ΄})} = \frac{\frac{1}{3}(\text{ΟΑΒ})\cdot\text{ΓΗ}}{\frac{1}{3}(\text{ΟΑ΄Β΄})\cdot\text{Γ΄Η΄}} = \frac{(\text{ΟΑΒ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄})}\cdot\frac{\text{ΓΗ}}{\text{Γ΄Η΄}}$$

Εἶναι ὅμως: $\frac{(\text{ΟΑΒ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄})} = \frac{\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΒ}}{\text{ΟΑ΄}\cdot\text{ΟΒ΄}}$

Ἐπίσης εἶναι $\frac{\text{ΓΗ}}{\text{Γ΄Η}} = \frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΓ΄}}$ (ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΗΓ, ΟΗ΄Γ΄).

Ἑπομένως $\frac{(\text{ΟΑΒΓ})}{(\text{ΟΑ΄Β΄Γ΄})} = \frac{\text{ΟΑ}\cdot\text{ΟΒ}\cdot\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ΄}\cdot\text{ΟΒ΄}\cdot\text{ΟΓ΄}}$.

Πόρισμα. Ἄν Δ, Ε, Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἑνός τετραέδρου ΟΑΒΓ, τό τετράεδρο ΟΔΕΖ ἔχει ὄγκο τό 1/8 τοῦ ὄγκου τοῦ ΟΑΒΓ.

138. Ἰσοδύναμα τετράεδρα λέγονται δυό τετράεδρα, πού ἔχουν τόν ἴδιο ὄγκο. Ἕνα τετράεδρο λέμε ὅτι ἰσοδυναμεῖ πρός τά μ/ν ἑνός ἄλλου, ὅταν ἔχει ὄγκο ἴσο πρός τά μ/ν τοῦ ὄγκου τοῦ ἄλλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

241. Μέσα σ' ἕνα τετράεδρο νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο τέτοιο, ὥστε, ἄν ἑνωθεῖ μέ τίς τέσσερις κορυφές, νά χωρίζεται τό τετράεδρο σέ 4 ἄλλα ἰσοδύναμα τετράεδρα.

242. Ἡ πλευρά τῆς βάσεως μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδας εἶναι α μέτρα καί ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια διπλάσια ἀπό τή βάση. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τῆς πυραμίδας.

243. Τρεῖς ἀκμές ἑνός τετραέδρου, πού συντρέχουν στήν ἴδια κορυφή, ἔχουν μῆκος λ ἡ καθεμιά, ἐνῶ οἱ τρεῖς ἄλλες ἀκμές ἔχουν μήκη α, β, γ. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ τετραέδρου.

244. Πάνω σέ δυό παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Κ) δίνονται ἀντιστοίχως δυό (σταθερά) σημεῖα Α καί Β τέτοια, ὥστε ἡ ΑΒ νά εἶναι πλάγια πρός τά (Π) καί (Κ). Ἀπό τά Α καί Β διέρχονται δυό εὐθεῖες (ε) καί (ε′), ἡ πρώτη πάνω στό (Π) καί ἡ δεύτερη πάνω στό (Κ), πού εἶναι ὀρθογώνιες μεταξύ τους. Ἔστω ὅτι ἡ κοινή $\perp$ τῶν (ε) καί (ε′) τίς τέμνει στά Μ καί Ν ἀντιστοίχως. i) Νά βρεθοῦν οἱ γ. τόποι τῶν Μ καί Ν, ὅταν οἱ (ε) καί (ε′) μεταβάλλονται, ἀλλά παραμένουν πάντοτε ὀρθογώνιες. ii) Νά ὁριστεῖ ἡ θέση τῆς (ε′), στήν ὁποία ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΜΝ γίνεται μέγιστος.

245. Ἔστω ΑΑ′ ἡ κοινή $\perp$ δύο ὀρθογώνιων ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε) καί (ε′), ὅπου $A \in (\varepsilon)$, $A' \in (\varepsilon')$ καί $AA' = 2\alpha$. Πάνω στήν (ε) κινεῖται σημεῖο Ρ καί στήν (ε′) σημεῖο Ρ′ ἔτσι, ὥστε $AP + A'P' = 2\alpha$. Ἄν θέσουμε $AP = x$, νά παραστήσετε γραφικά τή μεταβολή τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΑΑ′ΡΡ′, ὅταν τό x μεταβάλλεται καί νά βρεῖτε τό μέγιστο ὄγκο.

246. Παίρνουμε τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνός τετραέδρου ΟΑΒΓ, ἔστω τά Α′, Β′, Γ′ καί σχηματίζουμε νέο τετράεδρο ΟΑ′Β′Γ′. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τό ἀρχικό εἶναι τρισορθογώνιο στό Ο, τότε τό νέο εἶναι ἰσοσκελές· καί ἀντιστρόφως. ii) Μέ χρήση τῆς προηγούμενης προτάσεως ὑπολογίστε τόν ὄγκο ἑνός ἰσοσκελοῦς τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ξέρουμε τίς 6 ἀκμές: α, α, β, β, γ, γ.

247. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος ἑνός τετραέδρου δέν βλάπτεται, ἄν δύο ἀπέναντι ἀκμές του μετακινηθοῦν πάνω στούς φορεῖς τους, χωρίς ν' ἀλλάξουν μήκη. (Ὑποδ. Μετακινῆστε πρῶτα τή μία μόνο ἀκμή).

248. Ἄν δυό τετράεδρα ἔχουν μιά δίεδρη γωνία ἴση καί τήν ἀκμή της ἴση, τότε οἱ ὄγκοι τους ἔχουν λόγο ἴσο πρός τό λόγο τῶν γινομένων τῶν ἑδρῶν, πού περιέχουν τίς δυό αὐτές ἴσες δίεδρες.

249. Ἔστω ἕνα σημεῖο μέσα σ' ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ καί x_1, x_2, x_3, x_4 οἱ ἀποστάσεις του ἀπό τίς ἕδρες ΒΓΔ, ΓΔΑ, ΔΑΒ, ΑΒΓ καί $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3, \upsilon_4$ τά ὕψη πρός τίς ἕδρες αὐτές. Νά ἀποδείξετε τή σχέση:

$$\frac{x_1}{\upsilon_1} + \frac{x_2}{\upsilon_2} + \frac{x_3}{\upsilon_3} + \frac{x_4}{\upsilon_4} = 1 .$$

Ἄν τό σημεῖο βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τετράεδρο καί μέσα στή στερεή γωνία Δ, ΑΒΓ, πῶς τροποποιεῖται ἡ παραπάνω σχέση;

250. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος κάθε τετραέδρου εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 μιᾶς ἀκμῆς του ἐπί τήν προβολή τοῦ τετραέδρου σέ ἐπίπεδο κάθετο στήν ἀκμή αὐτή.

251. Ἄν δύο ἀπέναντι ἀκμές ἑνός τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιες, τότε ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μέ τό 1/6 τοῦ γινομένου τῶν δύο αὐτῶν ἀκμῶν ἐπί τήν ἐλάχιστη ἀπόστασή τους.

252. Θεωροῦμε δύο ὀρθογώνιες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί τήν κοινή κάθετό τους ΑΒ, ὅπου $A \in (\varepsilon_1)$ καί $B \in (\varepsilon_2)$. Δύο σημεῖα P_1, P_2 κινοῦνται ἐπάνω στίς (ε_1) καί (ε_2) ἀντιστοί-

χως ἔτσι, ὥστε: $AP_1 + BP_2 = P_1P_2$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ABP_2P_1 μένει σταθερός.

253. Ἄν Ο εἶναι τό ἔγκεντρο ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ καί ἡ εὐθεία ΑΟ τέμνει τήν ἕδρα ΒΓΔ στό Κ, νά ἀποδείξετε ὅτι τά ἐμβαδά (ΚΒΓ), (ΚΓΔ), (ΚΔΒ) εἶναι ἀνάλογα πρός τά (ΑΒΓ), (ΑΓΔ), (ΑΔΒ).

254. Ἄν τρεῖς ἕδρες ἑνός τετραέδρου εἶναι ἰσοδύναμες, τότε ἡ εὐθεία, πού συνδέει τό κέντρο βάρους τοῦ τετραέδρου μέ τό ἔγκεντρό του, διέρχεται ἀπό τήν κοινή κορυφή τῶν ἰσοδύναμων ἑδρῶν (Ὑποδ. Βλέπε προηγούμενη ἄσκηση).

255. Τό ἡμιεπίπεδο, πού διχοτομεῖ μία δίεδρη γωνία ἑνός τετραέδρου, χωρίζει τήν ἀπέναντι ἀκμή σέ δυό τμήματα ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἑδρῶν, στίς ὁποῖες καταλήγουν τά δύο τμήματα. (Ὑποδ. Ἔστω ΟΑΒΓ τό τετράεδρο καί Δ τό σημεῖο τῆς ΒΓ, πού βρίσκεται στό διχοτομοῦν ἐπίπεδο τῆς δίεδρης $\widehat{OA}$. Ἄς ἐκφραστεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων ΟΑΒΔ καί ΟΑΔΓ μέ δύο τρόπους).

256. Ἐπάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) παίρνουμε ἕνα τμῆμα $AB = 2\alpha$. Ἀπό τά Α καί Β διέρχονται δυό ἡμιευθεῖες Αυ καί Bt, πού ἔχουν γωνίες κλίσεως 45° πρός τό (Π) καί πού προβάλλονται στό (Π) κατά δύο ἀντίρροπες ἡμιευθεῖες (δ) καί (δ΄), οἱ ὁποῖες ἀπέχουν μεταξύ τους ἀπόσταση α. Πάνω στήν Αυ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Μ καί στή Bt ἕνα σημεῖο Ν τέτοια, ὥστε $AM = BN = x$. i) Τόπος τοῦ μέσου Ρ τῆς ΜΝ, ὅταν τό x μεταβάλλεται. ii) Ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΜΝ συναρτήσει τῶν x καί α. iii) Γιά ποιά τιμή τοῦ x τό ΑΒΜΝ εἶναι ἰσοσκελές τετράεδρο; iv) Γιά ποιά τιμή τοῦ x τό ΑΒΜΝ εἶναι ὀρθοκεντρικό τετράεδρο;

(Ὑποδ. Γιά τό i) Ἄν προβάλουμε τά Μ καί Ν στό (Π), οἱ προβολές Μ΄ καί Ν΄ βρίσκονται πάνω στίς εὐθεῖες (δ) καί (δ΄) καί τό Ρ προβάλλεται στό μέσο τοῦ Μ΄Ν΄. Ἀποδεῖξτε ὅτι τό ΑΜ΄ΒΝ΄ εἶναι παρ/μο, ὁπότε τό μέσο τοῦ Μ΄Ν΄ εἶναι καί μέσο τοῦ ΑΒ, ἄρα σταθερό. Γιά τό ii) Ἄν μεταφέρουμε τήν κορυφή Μ παράλληλα πρός τήν ἀκμή ΝΒ στό σημεῖο Μ΄΄ τῆς (δ), ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου δέν ἀλλάζει. Ὥστε ἀρκεῖ νά βροῦμε τόν ὄγκο τοῦ $ABM''N = \frac{1}{3}$ εμβ $ABM'' . NN'$. Γιά τό iii) Γιά νά εἶναι ἰσοσκελές τετράεδρο, ἀρκεῖ $NM = AB$ ἤ $M'N' = AB$, δηλ. τό παρ/μο ΑΜ΄ΒΝ΄ νά εἶναι ὀρθογώνιο, ὁπότε $N'A \perp AM' \Rightarrow AM'^2 = N'M'^2 - N'A^2 = 3\alpha^2$. Γιά τό iv) Ἀρκεῖ νά εἶναι ΜΝ ορθογ ΑΒ. Γι' αὐτό ἀρκεῖ $N'M' \perp AB$).

ΟΓΚΟΣ ΚΥΡΤΟΥ ΠΟΛΥΕΔΡΟΥ

139. Ἀλγεβρικές ἀποστάσεις ἑνός σημείου ἀπό τίς ἕδρες ἑνός τετραέδρου.—**Ἄν δοθεῖ ἕνα τετράεδρο, τότε λέγεται «ἀλγεβρική ἀπόσταση ἑνός σημείου Σ ἀπό μιά ἕδρα» τοῦ τετραέδρου, ἡ ἀπόσταση τοῦ Σ ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς ἕδρας, ἐφοδιασμένη μέ τό πρόσημο + ἤ —, ἀνάλογα μέ τό ἄν τό Σ βρίσκεται ὡς πρός τήν ἕδρα αὐτή στό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου μέ τήν τέταρτη κορυφή ἤ στό ἀντίθετο. Ἄν τό Σ ἀνήκει στό ἐπίπεδο μιᾶς ἕδρας, τότε ὡς ἀλγεβρική του ἀπόσταση ἀπό τήν ἕδρα αὐτή ἐννοεῖται τό μηδέν.**

140. Θά λέμε, γιά συντομία, **«γινόμενο μιᾶς ἕδρας ἐπί τήν ἀλγεβρική της ἀπόσταση ἀπό ἕνα σημεῖο Σ» τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἕδρας ἐπί τήν ἀλγεβρική της ἀπόσταση ἀπό τό Σ.**

141. Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ὀγκομετρίας.—**Ὁ ὄγκος κάθε τετραέδρου εἶναι ἴσος μέ τό ἕνα τρίτο τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἑδρῶν του ἐπί τίς ἀντίστοιχες ἀλγεβρικές ἀποστάσεις τους ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου (βλ. §§ 139, 140).**

Ἀπόδειξη. Ἔστω τετράεδρο ΑΒΓΔ καί Σ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου. Ἄς ὀνομάσουμε:

a τήν ἀλγεβρική ἀπόσταση τοῦ Σ ἀπό τήν ἕδρα ΒΓΔ
b » » » » Σ » » » ΓΔΑ
c » » » » Σ » » » ΔΑΒ
d » » » » Σ » » » ΑΒΓ.

Θά ἀποδείξουμε ὅτι:

(1) $$\boxed{(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}).\text{d} + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ}).\text{a} + \frac{1}{3}(\text{ΓΔΑ}).\text{b} + \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ}).\text{c}}$$

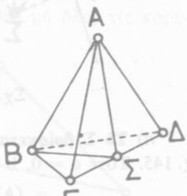
Διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις, ἀνάλογα μέ τή θέση τοῦ Σ ὡς πρός τό τετράεδρο.

i) Τό Σ βρίσκεται πάνω σέ μιά ἀκμή, ἔστω τή ΓΔ (σχ. 140). Τότε $\text{d} > 0$, $\text{c} > 0$, $\text{a} = 0$, $\text{b} = 0$. Ἑπομένως ἡ σχέση (§ 136, (i)):

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΒΔ}) \text{ δίνει:}$$

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\text{d} + \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ})\text{c} =$$

$$= \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\,\text{d} + \frac{1}{3}(\text{ΔΑΒ})\text{c} + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\text{a} + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})\text{b}.$$



Σχ. 140

Ἄν τό Σ βρίσκεται πάνω στήν προέκταση τῆς ἀκμῆς ΓΔ, εὔκολα συμπεραίνουμε πάλι ὅτι ἡ σχέση (1) ἰσχύει.

ii) Τό Σ βρίσκεται μέσα σέ μιά ἕδρα, ἔστω τή (ΒΓΔ) (σχ. 141).

Τότε $\text{a} = 0$, $\text{b} > 0$, $\text{c} > 0$, $\text{d} > 0$ καί ἡ σχέση (§ 136, (ii)):

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΓΔ}) + (\text{ΣΑΔΒ}) \text{ δίνει:}$$

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\text{d} + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})\text{b} + \frac{1}{3}(\text{ΑΔΒ})\text{c} + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\text{a}$$

Σχ. 141

iii) Τό Σ βρίσκεται μέσα στό τετράεδρο (σχ. 142).

Τότε $\text{a} > 0$, $\text{b} > 0$, $\text{c} > 0$, $\text{d} > 0$ καί ἡ σχέση (§ 137, (iii)):

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΒΓΔ}) + (\text{ΣΓΔΑ}) + (\text{ΣΔΑΒ})$$

δίνει ἀμέσως τόν τύπο (1).

iv) Τό Σ βρίσκεται μέσα στή στερεή γωνία Α, ἀλλά ἔξω ἀπ' τό τετράεδρο (Σχ. 143).

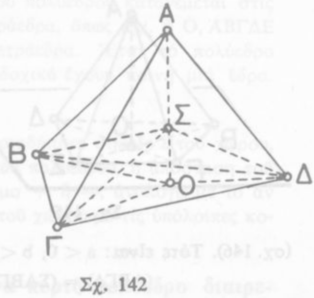
Τότε $\text{a} < 0$, $\text{b} > 0$, $\text{c} > 0$, $\text{d} > 0$ καί ἡ σχέση (§ 137, (iv)):

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΓΔ}) + (\text{ΣΑΔΒ}) - (\text{ΣΒΓΔ})$$

δίνει:

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})\text{d} + \frac{1}{3}(\text{ΑΓΔ})\text{b} +$$

$$\frac{1}{3}(\text{ΑΒΔ})\text{c} + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})\text{a}.$$



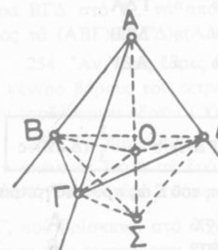
Σχ. 142

v) Τό Σ βρίσκεται μέσα στήν κατά κορυφή τῆς στερεῆς γωνίας Α, ΒΓΔ (Σχ. 144)

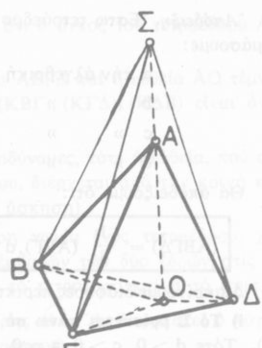
Τότε $\text{a} > 0$, $\text{b} < 0$, $\text{c} < 0$, $\text{d} < 0$ καί ἡ σχέση (§ 136, (v)):

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΒΓΔ}) - (\text{ΣΑΒΓ}) - (\text{ΣΑΓΔ}) - (\text{ΣΑΒΔ})$$

παίρνει τή μορφή τοῦ τύπου (1).



Σχ. 143



Σχ. 144

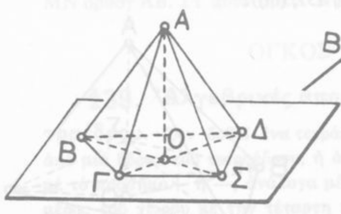
vi) Τό Σ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο ΒΓΔ, ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ΒΓΔ, ὅπως στό σχ. 145. Τότε $a = 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$ καί ἡ σχέση (§ 136, vi):

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΒΔ}) - (\text{ΣΑΓΔ}) \text{ δίνει:}$$

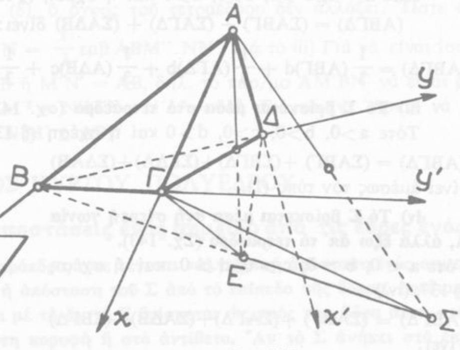
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΑΒΔ})c + \frac{1}{3}(\text{ΓΔΑ})b + \frac{1}{3}(\text{ΒΓΔ})a.$$

Καί γιά τίς ἄλλες θέσεις τοῦ Σ ὡς πρός τό τρίγωνο ΒΓΔ μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ, μέ ὅμοιους συλλογισμούς, ὅτι ὁ τύπος (1) ἰσχύει.

vii) Τό Σ βρίσκεται μέσα στή δίεδρη $\widehat{\text{ΑΒ}}$ καί μέσα στήν κατ' ἀκμή τῆς δίεδρης $\widehat{\text{ΓΔ}}$



Σχ. 145



Σχ. 146

(σχ. 146). Τότε εἶναι: $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$, $d > 0$ καί ἡ σχέση (§ 136, vii)) :

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{ΣΑΒΓ}) + (\text{ΣΑΒΔ}) - (\text{ΣΓΔΑ}) - (\text{ΣΓΔΒ}) \text{ δίνει:}$$

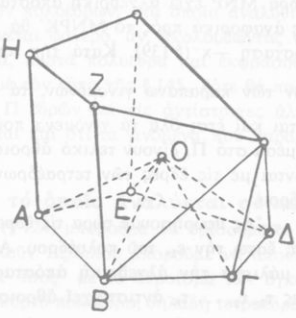
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})d + \frac{1}{3}(\text{ΑΒΔ})c + \frac{1}{3}(\text{ΓΔΑ})b + \frac{1}{3}(\text{ΓΔΒ})a.$$

— Μποροῦμε νά διαπιστώσουμε ὅτι τό Σ δέν μπορεῖ νά ἔχει ἄλλη θέση, ὡς πρός τό τετράεδρο ΑΒΓΔ, μέ τόν ἑξῆς τρόπο. Τό Σ θά βρίσκεται ἤ πάνω στό φορέα μιᾶς ἀκμῆς ἤ πάνω στό ἐπίπεδο μιᾶς ἕδρας ἤ στό ἐσωτερικό μιᾶς ἀπό τίς 8 στερεές γωνίες, τίς ὁποῖες σχηματίζουν οἱ φορεῖς τῶν ἀκμῶν, πού περνοῦν ἀπό τό Α. Στίς δυό πρῶτες περιπτώσεις εἴδαμε ὅτι ὁ τύπος (1) ἰσχύει. Στήν τρίτη περίπτωση εἴδαμε ὅτι ὁ (1) ἰσχύει, ὅταν τό Σ βρίσκεται μέσα στή στερεή γωνία Α, ΒΓΔ ἤ μέσα στήν κατά κορυφή της. Μένουν ἑπομένως ἀκόμη ἕξι περιοχές: οἱ τρεῖς προσκείμενες στήν Α, ΒΓΔ στερεές γωνίες (§ 113) καί οἱ τρεῖς προσκείμενες στήν κατά κορυφή της. Ἄν πάρουμε τό Σ μέσα στή μιά ἀπ' τίς 6 αὐτές στερεές γωνίες, βλέπουμε ὅτι τοτε τό Σ ἤ θά βρίσκεται καί στό ἐσωτερικό μιᾶς ἀπό τίς ἄλλες στερεές γωνίες τοῦ τετραέδρου ἤ θά ἔχει τή θέση, πού ἔχει στήν περίπτωση (vii).

Ἑπομένως ὁ τύπος (1) ἔχει γενική ἰσχύ.

142. Διαίρεση κυρτοῦ πολυέδρου σέ τετράεδρα.

—Ἄν ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Ο ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου ἑνωθεῖ μέ ὅλες τίς κορυφές, τότε τό πολύεδρο χωρίζεται σέ πυραμίδες, πού ἔχουν κοινή κορυφή τό Ο καί βάσεις τίς ἕδρες τοῦ πολυέδρου (σχ. 147). Γιατί 1ο. Ὅλες οἱ πυραμίδες αὐτές βρίσκονται στό ἐσωτερικό τοῦ πολυέδρου. Πράγματι, ἄν ἕνα σημεῖο Μ εἶναι ἐσωτερικό τῆς πυραμίδας, π.χ. Ο, ΑΒΓΔΕ, τότε τό τμῆμα ΟΜ, ὅταν προεκταθεῖ πρός τό μέρος τοῦ Μ, τέμνει τή βάση ΑΒΓΔΕ τῆς πυραμίδας σ' ἕνα σημεῖο Ι. Τό τμῆμα ΙΟ βρίσκεται τότε στό ἐσωτερικό τοῦ πολυέδρου, ἄρα καί τό πάνω σ' αὐτό σημεῖο Μ. 2ο) Κάθε ἐσωτερικό σημεῖο Ν τοῦ πολυέδρου, ἄν δέν ἀνήκει σέ μιά παράπλευρη ἀκμή ἤ ἕδρα μιᾶς πυραμίδας, τότε θά εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο μιᾶς ἀπό τίς παραπάνω πυραμίδες. Γιατί, ἄν θεωρήσουμε τήν ἀκτίνα (Ο, Ν), αὐτή θά τέμνει μιά ἕδρα π.χ. τήν ΒΑΗΖ, γιατί, ἄν δέν ἔκοβε καμμιά ἕδρα, τότε θά βρισκόταν ὁλόκληρη μέσα στό πολύεδρο, τό ὁποῖο ἔτσι δέ θά ἦταν πεπερασμένο σχῆμα. Ἀφοῦ, λοιπόν, ἡ ἀκτίνα (Ο, Ν) τέμνει π.χ. τήν ἕδρα ΑΒΖΗ, ἕπεται ὅτι τό Ν εἶναι ἐσωτερικό τῆς πυραμίδας ΟΑΒΖΗ. Ἑπομένως τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου κατανέμεται στίς πυραμίδες αὐτές. Κάθε πυραμίδα ὅμως ἀναλύεται σέ τετράεδρα, ὅπως π.χ. ἡ Ο, ΑΒΓΔΕ ἀναλύεται μέ τά διαγώνια ἐπίπεδα ΟΕΒ, ΟΕΓ σέ τρία τετράεδρα. Ἔτσι τό πολύεδρο μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ τετράεδρα, τά ὁποῖα ἀνά δύο διαδοχικά ἔχουν κοινή μιά ἕδρα. (*Ἀνάλυση τοῦ πολυέδρου σέ «συνεχόμενα» τετράεδρα*).



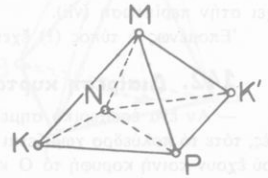
Σχ. 147

143. Ἄν δοθεῖ ἕνα κυρτό πολύεδρο καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Σ τοῦ χώρου, τότε λέγεται **ἀλγεβρική ἀπόσταση τοῦ Σ ἀπό μιά ἕδρα τοῦ πολυέδρου**, ἡ ἀπόσταση τοῦ Σ ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς ἕδρας, ἐφοδιασμένη μέ τό πρόσημο + ἤ —, ἀνάλογα μέ τό ἄν τό Σ βρίσκεται, ὡς πρός τήν ἕδρα αὐτή, στό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου μέ τίς ὑπόλοιπες κορυφές τοῦ πολυέδρου ἤ στό ἀντίθετο.

144. Θεώρημα καί ὁρισμός.—Ἄν ἕνα κυρτό πολύεδρο διαιρεθεῖ μέ ὁποιοδήποτε τρόπο σέ «συνεχόμενα τετράεδρα» τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων αὐτῶν εἶναι σταθερό, δηλ. πάντοτε τό ἴδιο, ἀνεξάρτητα ἀπό τόν τρόπο τῆς ὑποδιαιρέσεως. Τό σταθερό αὐτό ἄθροισμα λέγεται «ὄγκος» τοῦ κυρτοῦ πολυέδρου.

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ τίς ἕδρες τοῦ πολυέδρου Π. Ἄς πάρουμε ἕνα σταθερό σημεῖο Σ τοῦ χώρου καί ἄς ὀνομάσουμε $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ τίς ἀντίστοιχες ἀλγεβρικές ἀποστάσεις τοῦ Σ ἀπό τίς ἕδρες αὐτές. Τέλος, ἄς θεωρήσουμε τό Π ὅτι διαιρεῖται, κατά κάποιο τρόπο, σέ «συνεχόμενα τετράεδρα» (§ 142). Ἀπό τά τετράεδρα, στά ὁποῖα ἀναλύθηκε τό Π, ἄλλα ἀπ᾽ αὐτά ἔχουν ὅλες τίς ἕδρες τους στό ἐσωτερικό τοῦ Π καί ἄλλα ἔχουν μιά ἕδρα τους πάνω σέ μιά ἕδρα τοῦ Π.

Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς § 141, τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὅλων τῶν τετραέδρων, πού ἀποτελοῦν τό Π εἶναι ἴσο μέ τό 1/3 τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἑδρῶν τῶν τετραέδρων ἐπί τίς ἀντίστοιχες ἀλγεβρικές ἀποστάσεις τους ἀπό τό Σ. Ἄν ὅμως μιά ἕδρα MNP (σχ. 148) εἶναι ἐσωτερική τοῦ πολυέδρου, τότε θά ἀνήκει σέ δυό τετράεδρα KNMP καί K΄MNP, ὅπου τό K βρίσκεται ἀπό τό ἕνα μέρος καί τό K΄ ἀπό τό ἄλλο τῆς MNP καί ἑπομένως, ἄν ἀναφορικά πρός τό MNPK ἡ ἕδρα MNP ἔχει ἀλγεβρική ἀπόσταση x ἀπό τό Σ, τότε ἀναφορικά πρός τό MNPK΄ θά ἔχει ἀλγεβρική ἀπόσταση —x (§ 139). Κατά τήν πρόσθεση, λοιπόν,



Σχ. 148

ὅλων τῶν παραπάνω γινομένων, τά γινόμενα $\frac{1}{3}(MNP)x$ καί $\frac{1}{3}(MNP)(-x)$ ἐξαλείφονται καί ἔτσι ὅλα τά γινόμενα, πού σχετίζονται μέ τίς ἕδρες τῶν τετραέδρων, πού εἶναι μέσα στό Π, δίνουν τελικό ἄθροισμα μηδέν καί μένουν μόνο τά γινόμενα, πού σχετίζονται μέ τίς ἕδρες τῶν τετραέδρων, οἱ ὁποῖες βρίσκονται πάνω στίς ἕδρες τοῦ πολυέδρου.

—Ἄς θεωρήσουμε τώρα τίς ἕδρες $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\kappa$ τῶν τετραέδρων, πού καλύπτουν μιά ἕδρα, ἔστω τήν ε_1, τοῦ πολυέδρου. Αὐτές ἔχουν κοινή ἀλγεβρική ἀπόσταση ἀπό τό Σ καί μάλιστα τήν ἀλγεβρική ἀπόσταση h_1 τῆς ἕδρας ε_1 ἀπό τό Σ. Ἑπομένως γιά τίς ἕδρες $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_\kappa$ ἀντιστοιχεῖ ἄθροισμα γινομένων:

$$\frac{1}{3}\tau_1 h_1 + \frac{1}{3}\tau_2 h_1 + \ldots + \frac{1}{3}\tau_\kappa h_1 = \frac{1}{3}(\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\kappa)h_1 = \frac{1}{3}E_1 h_1.$$

ὅπου $\tau_1, \ldots, \tau_\kappa$ σημαίνουν τά ἐμβαδά τῶν $\tau_1, \ldots \tau^\kappa$ καί E_1 τό ἐμβαδόν τῆς ἕδρας ε_1, ἡ ὁποία καλύπτεται ἀπό τά $\tau_1, \ldots, \tau_\kappa$.

—Ὁμοίως γιά τίς ἕδρες τῶν τετραέδρων, οἱ ὁποῖες καλύπτουν τήν ἕδρα ε_2, τό ἀντίστοιχο ἄθροισμα γινομένων εἶναι $\frac{1}{3}E_2 h_2$ κ.ο.κ. καί γι᾽ αὐτές, πού καλύπτουν τήν ἕδρα ε_ν, ἀντιστοιχεῖ τό $\frac{1}{3}E_\nu h_\nu$. Ἑπομένως τό 1/3 τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων ὅλων τῶν ἑδρῶν ὅλων τῶν τετραέδρων ἐπί τίς ἀλγεβρικές τους ἀποστάσεις ἀπό τό Σ, μᾶς δίνει τό ἄθροισμα.

$$(1) \qquad \frac{1}{3}E_1 . h_1 + \frac{1}{3}E_2 . h_2 + \ldots + \frac{1}{3}E_\nu . h_\nu .$$

Δηλαδή τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, στά ὁποῖα ἀναλύθηκε τό πολύεδρο, εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα (1). Ἀλλά τό ἄθροισμα αὐτό εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητο ἀπό τόν τρόπο, πού ἔγινε ἡ ὑποδιαίρεση τοῦ Π, δηλ. παραμένει τό ἴδιο, ἄν τό πολύεδρο ἀναλυθεῖ σέ «συνεχόμενα τετράεδρα» μέ ἄλλο τρόπο.

Ταυτοχρόνως ὅμως καί τό ἄθροισμα (1) εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τήν ἐκλογή τοῦ σημείου Σ, γιατί ἐκφράζει τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, πού ἀποτελοῦν τό πολύεδρο, δηλ. τόν ὄγκο τοῦ πολυέδρου.

145. Πόρισμα. —Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα $\frac{1}{3}\varepsilon_1 h_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 h_2 + \ldots + \frac{1}{3}\varepsilon_\nu h_\nu$, ὅπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ εἶναι τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν του καί $h_1, h_2, \ldots h_\nu$ οἱ ἀλγεβρικές ἀποστάσεις (§ 143) τους ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου.

146. (Θ)—**Ἄν ἕνα κυρτό πολύεδρο Π ἀναλυθεῖ σέ κυρτά «συνεχόμενα πολύεδρα» (ἀνά δύο διαδοχικά νά ἔχουν μιά μόνο κοινή ἕδρα), τότε ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου Π εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πολυέδρων, πού τό ἀποτελοῦν.**

Ἀπόδειξη. Ἄν εἶναι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu$ τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν τοῦ Π, Σ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου καί $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ οἱ ἀλγεβρικές ἀποστάσεις τῶν ἑδρῶν τοῦ Π ἀπό τό Σ, τότε, κατά τήν § 145, ὁ ὄγκος τοῦ Π εἶναι ἴσος μέ:

$$\frac{1}{3}\varepsilon_1 h_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 h_2 + \ldots + \frac{1}{3}\varepsilon_\nu h_\nu. \tag{1}$$

Ἀλλά καί τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν κυρτῶν πολυέδρων, στά ὁποῖα ἀναλύθηκε τό Π, εἶναι ἴσο πάλι μέ τό ἄθροισμα (1). Αὐτό γίνεται φανερό, ἄν, ἀκολουθώντας τήν πορεία τῆς § 144, θεωρήσουμε, ἀντί γιά τετράεδρα, κυρτά πολύεδρα καί ἐκφράσουμε τούς ὄγκους τῶν πολυέδρων, πού ἀποτελοῦν τό Π, μέ τόν τύπο τῆς § 145. Τότε θά παρατηρήσουμε ὅτι τά γινόμενα τῶν ἐσωτερικῶν στό Π ἑδρῶν ἐπί τίς ἀντίστοιχες ἀλγεβρικές ἀποστάσεις τους ἀπό τό Σ ἀλληλοαναιροῦνται καί ὅτι τά γινόμενα, πού παραμένουν, ἀποτελοῦν τό ἄθροισμα (1).

147. Ὄγκος μή κυρτοῦ πολυέδρου, τό ὁποῖο ἀναλύεται σέ κυρτά. Ὡς ὄγκο ἑνός τέτοιου μή κυρτοῦ πολυέδρου (§ 124) μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν πολυέδρων, πού τό ἀποτελοῦν. Ἐξάλλου μποροῦμε νά ἀποδείξουμε εὔκολα ὅτι ὁ ὄγκος, πού ὁρίζεται ἔτσι, εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, στά ὁποῖα ἀναλύεται αὐτό τό μή κυρτό πολύεδρο, δηλαδή τετραέδρων, πού βρίσκονται στό ἐσωτερικό του καί εἶναι «συνεχόμενα μέ μιά κοινή ἕδρα» (βλ. § 142).

148. Ἰσοδύναμα πολύεδρα. Δυό πολύεδρα λέγονται **ἰσοδύναμα**, ὅταν ἔχουν τόν ἴδιο ὄγκο. Ἐξάλλου, ἄν ἀπό δύο πολύεδρα τό ἕνα ἔχει ὄγκο ἴσο πρός τά μ/ν τοῦ ὄγκου τοῦ ἄλλου, λέμε, γιά συντομία, ὅτι αὐτό ἰσοδυναμεῖ πρός τά μ/ν τοῦ ἄλλου.

Τέλος τά **ἴσα πολύεδρα εἶναι καί ἰσοδύναμα**. Γιατί, ἄν τό ἕνα διαιρεθεῖ σέ τετράεδρα **καί κατόπιν** ἐφαρμόσει μέ μιά κίνηση πάνω στό δεύτερο (τό ἴσο του), τότε καί τό δεύτερο ἀναλύεται αὐτόματα σέ ἴσο πλῆθος τετραέδρων, ἀντιστοίχως ἴσων πρός τά τετράεδρα τοῦ πρώτου. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ δεύτερου εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν ὄγκο τοῦ πρώτου.

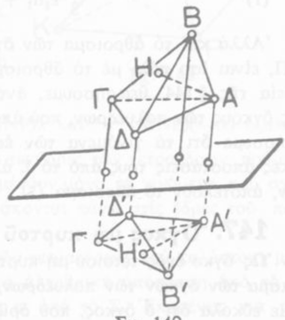
149. Πολύεδρα «κατά τεμάχια ἴσα» (ἤ «ἰσοδιαμερίσιμα») λέγονται δυό πολύεδρα, πού μποροῦν νά ἀναλυθοῦν σέ ἴσο πλῆθος, ἀντιστοίχως ἴσων, τετραέδρων ἤ, γενικότερα, σέ ἴσο πλῆθος, ἀντιστοίχως ἴσων, κυρτῶν πολυέδρων. Μέ ἄλλες λέξεις δυό ἰσοδιαμερίσιμα πολύεδρα ἀποτελοῦνται ἀπό τά ἴδια κομμάτια, ἀλλά κατά διαφορετικό τρόπο διατεταγμένα.

Δυό ἰσοδιαμερίσιμα πολύεδρα εἶναι, ὅπως εἶναι φανερό καί ἰσοδύναμα, ἐξαιτίας τῆς ἀθροιστικότητας τοῦ ὄγκου.

Τό ἀντίστροφο ὅμως δέν ἀληθεύει. Δηλαδή, ἄν δυό πολύεδρα ἔχουν ἴσους ὄγκους, τότε δέν ἕπεται ὅτι μποροῦν νά ἀναλυθοῦν σέ ἴσο πλῆθος ἀπό ἀντίστοιχα ἴσα πολύεδρα, δηλ. *«δυό ἰσοδύναμα πολύεδρα δέν εἶναι* *πάντοτε ἰσοδιαμερίσιμα»*. Τό γεγονός αὐτό ἀπέδειξε πρῶτος ὁ Γερμανός μαθηματικός Dehn κατά τό ἔτος 1902 μέ τό ἑξῆς θεώρημα *(Dehn, M., «Ueber den Rauminhalt»)*, Mathematische Annalen, τόμος 55 (1902), σελ. 465-478): *«Ἕνας κύβος καί ἕνα ἰσοδύναμό του κανονικό τετράεδρο δέν εἶναι ἰσοδιαμερίσιμα»*. Δηλ. εἶναι ἀδύνατο νά χωριστοῦν σέ ἴσο πλῆθος ἀπό ἀντίστοιχα ἴσα κομμάτια.

150. Πολύεδρα κατοπτρικά. (Θ)— **Δυό κυρτά πολύεδρα, συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο (ἤ ὡς πρός κέντρο), εἶναι ἰσοδύναμα.**

Γιατί, ἄν τό ἕνα πολύεδρο ἀναλυθεῖ σέ τετράεδρα $T_1, T_2, \ldots T_\nu$ (§ 142), τότε καί τό συμμετρικό του ἀναλύεται αὐτόματα σέ τετράεδρα συμμετρικά πρός τά πρῶτα: $T_1', T_2', \ldots, T_\nu'$. Ἀλλά δυό τετράεδρα, συμμετρικά ὡς πρός ἐπίπεδο (ἤ κέντρο), εἶναι ἰσοδύναμα. Γιατί, ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράεδρο (σχ. 149) καί Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄ τά συμμετρικά τῶν κορυφῶν του. Ἐπειδή κατά τή συμμετρία τά μήκη καί οἱ γωνίες διατηροῦνται, γι' αὐτό τριγ ΑΒΓ = τριγ Α΄Β΄Γ΄, ἀλλά καί τά ἀντίστοιχα ὕψη ΑΗ καί Α΄Η΄ τῶν δυό συμμετρικῶν τετραέδρων εἶναι, γιά τόν ἴδιο λόγο, ἴσα. Ἑπομένως (ΑΒΓΔ) = = (Α΄Β΄Γ΄Δ΄). Ἄρα τά δυό συμμετρικά πολύεδρα, ἀφοῦ ἀναλύονται σέ ἴσο πλῆθος ἀπό ἀντίστοιχα ἰσοδύναμα τετράεδρα, εἶναι ἰσοδύναμα, ἀφοῦ εἶναι γνωστό, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων, στά ὁποῖα ἀναλύεται.



Σχ. 149

ΟΓΚΟΙ ΣΥΝΗΘΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

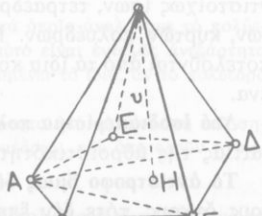
ΟΓΚΟΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

151. (Θ).—**Ὁ ὄγκος κάθε πυραμίδας εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος τῆς πυραμίδας.**

Γιατί κάθε πυραμίδα ἀναλύεται μέ τά διαγώνια ἐπίπεδα (πού ὁρίζονται ἀπό τήν κορυφή Ο καί τίς διαγωνίους τῆς βάσεως) σέ τετράεδρα. Ἔτσι π.χ. ἡ πυραμίδα Ο, ΑΒΓΔΕ (σχ. 150) ἀναλύεται στά «συνεχόμενα» τετράεδρα ΟΑΒΓ, ΟΑΓΔ, ΟΔΕΑ, πού ἔχουν κοινό ὕψος υ τό ὕψος τῆς πυραμίδας. Ἑπομένως, σύμφωνα μέ τό γενικό ὁρισμό (§ 144),

Ογκ ΟΑΒΓΔΕ = Ογκ ΟΑΒΓ + Ογκ ΟΑΓΔ +

Ογκ ΟΑΔΕ $= \frac{1}{3}$ (ΑΒΓ)$\cdot$ υ $+ \frac{1}{3}$ (ΑΓΔ)$\cdot$υ +



Σχ. 150

$$+\frac{1}{3}(A\Delta E)\cdot\upsilon = \frac{1}{3}\{(AB\Gamma)+(A\Gamma\Delta)+(A\Delta E)\}\,\upsilon = \frac{1}{3}(AB\Gamma\Delta E)\upsilon = \boxed{\frac{1}{3}b\cdot\upsilon},$$

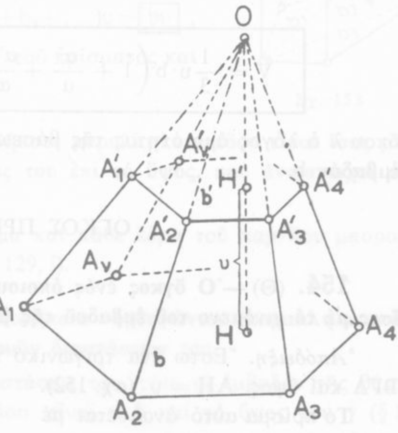
ὅπου b παριστάνει τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως.

ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΥΡΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

152. (Θ) — **Κάθε κόλουρη πυραμίδα ἰσοδυναμεῖ μέ τό ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, πού ἔχουν ὕψος τό ὕψος τῆς κόλουρης, καί βάσεις, ἡ μιά τή μιά βάση, ἡ ἄλλη τήν ἄλλη βάση τῆς κόλουρης καί ἡ τρίτη τή μέση ἀνάλογη τῶν δυό βάσεων.**

Ἤ ἀλλιῶς : $V = \frac{1}{3}\upsilon(b+b' + \sqrt{bb'})$, ὅπου V ὁ ὄγκος τῆς κόλουρης, υ τό ὕψος της καί b καί b′ τά ἐμβαδά τῶν βάσεων τῆς κόλουρης.

Ἀπόδειξη. Ἔστω μιά κόλουρη πυραμίδα μέ βάσεις τά ὅμοια πολύγωνα $A_1A_2A_3\ldots A_\nu$ καί $A_1'A_2'A_3'\ldots A_\nu'$ (σχ. 151). Γνωρίζουμε ὅτι οἱ παράπλευρες ἀκμές τῆς κόλουρης, ὅταν προεκταθοῦν, συντρέχουν σέ ἕνα σημεῖο O (§124, β′). Ἑπομένως ἡ κόλουρη πυραμίδα, ὅταν ἑνωθεῖ μέ τήν πυραμίδα, $OA_1'A_2'\ldots A_\nu'$, πού ἔχει ὡς βάση τή μικρότερη βάση, ἀποτελεῖ τήν πυραμίδα $OA_1A_2\ldots A_\nu$, πού ἔχει ὡς βάση τή μεγαλύτερη βάση τῆς κόλουρης. Ἑπομένως (§ 146): Ὄγκος τῆς κόλουρης + Ὄγκος τῆς πυραμίδας $OA_1'A_2'\ldots A_\nu'$ = Ὄγκος τῆς πυραμίδας $OA_1A_2\ldots A_\nu$ ⇒ (1) Ὄγκος V τῆς κόλουρης = = Ογκ $OA_1A_2\ldots A_\nu$ — Ογκ $OA_1'A_2'\ldots A_\nu'$.



Σχ. 151

Ἄν εἶναι OH καί OH′ τά ὕψη τῶν δυό πυραμίδων, τότε OH — OH′ = υ = ὕψος τῆς κόλουρης. Ἀπό τό θεώρημα τῶν παρ/λων τομῶν (§ 123) ἔχουμε:

$$\frac{OH}{\sqrt{b}} = \frac{OH'}{\sqrt{b'}} = \frac{OH-OH'}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} = \frac{\upsilon}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OH = \frac{\upsilon\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}},\quad OH' = \frac{\upsilon\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$$ καί ἡ σχέση (1), δίνει:

$$V = \frac{1}{3}b\cdot(OH) - \frac{1}{3}b'\cdot(OH') = \frac{1}{3}b\cdot\frac{\upsilon\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} - \frac{1}{3}b'\frac{\upsilon\sqrt{b'}}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}}$$

$$= \frac{1}{3}\upsilon\frac{(\sqrt{b})^3-(\sqrt{b'})^3}{\sqrt{b}-\sqrt{b'}} = \frac{1}{3}\upsilon\{(\sqrt{b})^2+\sqrt{b}\cdot\sqrt{b'}+(\sqrt{b'})^2\}$$ καί τέλος

$$V = \frac{1}{3}\upsilon(b+\sqrt{bb'}+b').$$

153. Δεύτερος τύπος τοῦ ὄγκου τῆς κόλουρης πυραμίδας. Ἄς εἶναι α καί α′ δυό ὁμόλογες πλευρές τῶν δύο βάσεων τῆς κόλουρης. Ἐπειδή οἱ δυό βάσεις εἶναι ὅμοια πολύγωνα, γι' αὐτό $b'/b = \alpha'^2/\alpha^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow b' = b\alpha'^2/\alpha^2$, ὁπότε, μέ ἀντικατάσταση τοῦ b′, ὁ παραπάνω τύπος τοῦ ὄγκου γίνεται:

$$V = \frac{1}{3}\upsilon\left(b+\sqrt{b^2\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}}+b\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right),$$ Δηλαδή:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\upsilon\cdot b\left(1+\frac{\alpha'}{\alpha}+\frac{\alpha'^2}{\alpha^2}\right)} = \frac{1}{3}\upsilon b(1+\lambda+\lambda^2),$$

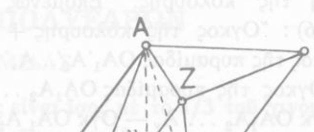
ὅπου λ ὁ λόγος ὁμοιότητας τῆς βάσεως μέ ἐμβαδόν b′ πρός τή βάση μέ ἐμβαδόν b.

ΟΓΚΟΣ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

154. (Θ) —**Ὁ ὄγκος ἑνός ὁποιουδήποτε τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα τριγωνικό πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ μέ βάση τρίγωνο ΒΓΔ καί ὕψος ΑΗ = υ (σχ. 152).

Τό πρίσμα αὐτό ἀναλύεται μέ τό ἐπίπεδο ΑΓΔ σέ δυό πυραμίδες, ΑΒΓΔ καί Α ΓΔΕΖ καί μέ τό ἐπίπεδο ΑΖΔ σέ τρεῖς πυραμίδες ΑΒΓΔ, ΑΖΓΔ, ΑΖΕΔ. Ἀπ' αὐτές ἡ πρώτη ΑΒΓΔ καί ἡ τρίτη ΑΖΕΔ≡ ΔΑΖΕ εἶναι ἰσοδύναμες, γιατί ἔχουν ἴσες βάσεις ΒΓΔ καί ΑΖΕ καί ἴσα ὕψη. Ἐπίσης ἡ δεύτερη ΑΖΓΔ καί ἡ τρίτη ΑΖΕΔ εἶναι ἰσοδύναμες, γιατί ἔχουν ἴσες βάσεις ΖΓΔ καί ΖΕΔ καί τό ἴδιο ἀπό τό Α ὕψος. Ἑπομένως τό πρίσμα ἀναλύεται σέ τρεῖς πυραμίδες ἰσοδύναμες πρός τήν ΑΒΓΔ. Ἄρα, κατά τό γενικό ὁρισμό (§ 144), ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι τριπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς τριγωνικῆς πυραμίδας ΑΒΓΔ. Ὥστε:



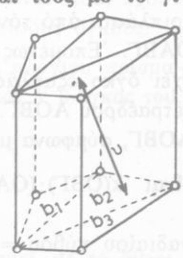
Σχ. 152

$$V_{\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau o\varsigma} = 3V_{AB\Gamma\Delta} = 3\cdot\frac{1}{3}(B\Gamma\Delta)\cdot\upsilon = (B\Gamma\Delta)\upsilon = b\cdot\upsilon,$$

ὅπου b τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

Πόρισμα. Κάθε τριγωνική πυραμίδα ἰσοδυναμεῖ πρός τό ἕνα τρίτο τοῦ πρίσματος, πού ἔχει τήν ἴδια βάση καί τό ἴδιο ὕψος μέ τήν πυραμίδα.

155. (Θ) —Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπί τό ὕψος του.



Σχ. 153

Γιατί μέ διαγώνια ἐπίπεδα χωρίζεται σέ τριγωνικά πρίσματα ἰσοϋψή πρός αὐτό (σχ. 153) καί συνεπῶς ὁ ὄγκος του εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν τριγωνικῶν αὐτῶν πρισμάτων (§ 146), δηλ.:

$$b_1\upsilon + b_2\upsilon + b_3\upsilon + \ldots = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)\upsilon = \boxed{b\upsilon},$$

ὅπου b τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καί υ τό ὕψος του.

Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του ἐπί τό ὕψος, πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἕδρα αὐτή.

Γιατί τό παρ/δο εἶναι πρίσμα καί κάθε ἕδρα τοῦ παρ/δου μποροῦμε νά τήν πάρουμε ὡς βάση του (§ 129, i).

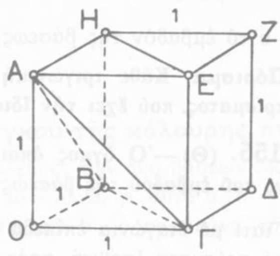
156. (Θ) —Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῶν τριῶν διαστάσεών του.

Γιατί, ἄν α, β, γ οἱ τρεῖς διαστάσεις του, τότε τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογώνιου παραλληλεπιπέδου εἶναι $\alpha\cdot\beta$ καί τό ὕψος του γ (§ 130, σχ. 122).

Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ἑνός κύβου μέ ἀκμή α εἶναι ἴσος μέ α^3.

157. Καθορισμός τῆς σταθερᾶς Κ. Εἶναι φανερό ὅτι ὅλα τά γενικά θεωρήματα γιά τούς ὄγκους, πού ἀποδείξαμε, ἰσχύουν καί ὅταν ὡς ὄγκο τοῦ τετραέδρου, ἀντί νά πάρουμε τό γινόμενο $(1/3)\, b\cdot\upsilon$, ὅπου b τό ἐμβαδόν μιᾶς ἕδρας του καί υ τό πάνω σ᾽αὐτήν ὕψος, πάρουμε τό kbυ, ὅπου k μιά **αὐθαίρετη σταθερά**. Δηλαδή τά θεωρήματα τῶν §§ 136, 137, 141, 144, 145, 146 ἰσχύουν καί ὅταν ὁ παράγοντας 1/3 ἀντικατασταθεῖ μέ τόν αὐθαίρετο σταθερό παράγοντα k, πού ἀναφέρεται στόν τυπικό ὁρισμό τοῦ ὄγκου, πού δόθηκε στήν § 135, β′. Πρακτικά εἴπαμε (§ 135, β′) ὅτι τό k τό παίρνουμε ἴσο πρός 1/3. Αὐτό διαφωτίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τετράεδρο ΟΑΒΓ, μέ τή στερεά γωνία Ο τρισορθογώνια καί ἀκμές ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = 1 (μονάδα μήκους). Ἄς σχηματίσουμε καί τό μοναδιαῖο κύβο ΟΒΔΓΑΕΖΗ (σχ. 154). Αὐτός ἀποτελεῖται ἀπό δυό ἴσα ὀρθά τριγωνικά πρίσματα ΟΒΓΑΕΗ καί ΒΓΔΗΕΖ, ἄρα ἔχει ὄγκο διπλάσιο ἀπό τόν ὄγκο τοῦ ΟΒΓΕΗΑ.

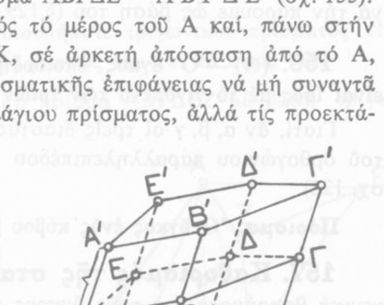


Σχ. 154

Ἐξάλλου τό ΟΒΓΕΗΑ ἀναλύεται σέ τρεῖς πυραμίδες ἰσοδύναμες πρός τήν ΑΟΒΓ (§ 154, Πόρισμα), ἄρα ἔχει ὄγκο τριπλάσιο ἀπό τόν ὄγκο τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ. Ἑπομένως ὁ μοναδιαῖος κύβος ἔχει ὄγκο ἑξαπλάσιο ἀπό τόν ὄγκο τοῦ τετραέδρου ΑΟΒΓ. Ὁ ὄγκος ὅμως τοῦ ΑΟΒΓ, σύμφωνα μέ τόν τυπικό ὁρισμό, εἶναι $k(ΟΒΓ)\cdot(ΟΑ) = k\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot1 = \frac{k}{2}$. Πρέπει λοιπόν: Ὄγκος τοῦ μοναδιαίου κύβου $= 6\cdot\frac{k}{2} = 3k$. Ἄν ὅμως ἐπιθυμοῦμε ὁ μοναδιαῖος κύβος νά ἔχει ὄγκο 1, τότε πρέπει $1 = 3k$, δηλ. $k = 1/3$.

158. **(Θ) —Κάθε πλάγιο πρίσμα ἰσοδυναμεῖ μέ ὀρθό, πού ἔχει βάση μιά κάθετη τομή τοῦ πλάγιου καί ὕψος ἴσο μέ μιά παράπλευρη ἀκμή τοῦ πλάγιου.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα πλάγιο πρίσμα ΑΒΓΔΕ — Α′Β′Γ′Δ′Ε′ (σχ. 155). Ἄς προεκτείνουμε τήν ἀκμή Α′Α πρός τό μέρος τοῦ Α καί, πάνω στήν προέκταση, ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Κ, σέ ἀρκετή ἀπόσταση ἀπό τό Α, ὥστε ἡ κάθετη τομή ΚΛΜΝΡ τῆς πρισματικῆς ἐπιφάνειας νά μή συναντᾶ καμιά ἀπό τίς ὑπόλοιπες ἀκμές τοῦ πλάγιου πρίσματος, ἀλλά τίς προεκτάσεις τους. Ἄν πάρουμε τώρα πάνω στούς φορεῖς τῶν παράπλευρων ἀκμῶν σημεῖα Κ′, Λ′, Μ′, Ν′, Ρ′ τέτοια, ὥστε $\overrightarrow{Α'Α} = \overrightarrow{ΚΚ'} = \overrightarrow{ΛΛ'} = \overrightarrow{ΜΜ'} = \overrightarrow{ΝΝ'} = \overrightarrow{ΡΡ'}$, τότε σχηματίζουμε τό ὀρθό πρίσμα ΚΛΜΝΡ — Κ′Λ′Μ′Ν′Ρ′, πού ἀναφέρεται στήν ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματος.



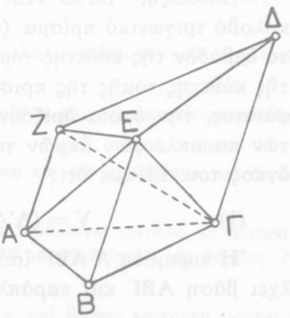
Σχ. 155

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι τό πλάγιο πρίσμα Α′ . . . Γ, ὅταν ἑνωθεῖ μέ τό πολύεδρο (κολοβό πρίσμα) ΚΛΜΝΡΑΒΓΔΕ, δίνει τό πολύεδρο ΚΛΜΝΡΑ′Β′Γ′Δ′Ε′ (γιά συντομία: τό Α′ . . . Μ), ἐνῶ τό ὀρθό πρίσμα Κ . . . Μ′, ὅταν ἑνωθεῖ μέ τό ἴδιο πολύεδρο, δίνει τό πολύεδρο Κ΄Λ΄Μ΄Ν΄Ρ΄ΑΒΓΔΕ (Γιά συντομία: τό Α ... Μ΄). Ἑπομένως ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι τά πολύεδρα Α΄... Μ καί Α ... Μ΄ ἔχουν ἴσους ὄγκους. Ἀλλά τά δυό τελευταῖα πολύεδρα εἶναι ἴσα, γιατί, ἀφοῦ Α΄Κ = ΑΚ΄, Β΄Λ = ΒΛ΄, Γ΄Μ = ΓΜ΄, Δ΄Ν = ΔΝ΄, Ε΄Ρ = = ΕΡ΄, γι' αὐτό ἐφαρμόζει τό Α΄ ... Μ πάνω στό Α ... Μ΄ μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{Α΄Κ}$. Ἀφοῦ τά Α΄ ... Μ καί Α ... Μ΄ εἶναι ἴσα, ἔχουν ἴσους ὄγκους· ἄρα καί τά Α΄ ... Γ καί Κ ... Μ΄ ἔχουν ἴσους ὄγκους.

Πόρισμα. Ἄν Τ τό ἐμβαδόν τῆς κάθετης τομῆς ἑνός πλάγιου πρίσματος, *l* τό μῆκος καθεμιᾶς ἀπό τίς παράπλευρες ἀκμές του καί V ὁ ὄγκος του, τότε ἰσχύει: V=T.*l*.

ΟΓΚΟΣ ΚΟΛΟΒΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

159. (Θ) — Κάθε κολοβό τριγωνικό πρίσμα ἰσοδυναμεῖ μέ τό ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, πού ἔχουν ὡς κοινή βάση τή μιά ἀπό τίς βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καί κορυφές τίς τρεῖς κορυφές τῆς ἄλλης βάσεως τοῦ κολοβοῦ πρίσματος.



Σχ. 156

Ἀπόδειξη. Τό κολοβό πρίσμα ΑΒΓ — — ΔΕΖ τοῦ σχ. 156 χωρίζεται μέ τό ἐπίπεδο ΕΑΓ στήν τριγωνική πυραμίδα ΕΑΒΓ καί στήν τετραπλευρική ΕΑΓΔΖ. Ἡ δεύτερη χωρίζεται πάλι ἀπό τό διαγώνιο ἐπίπεδο ΕΖΓ σέ δυό τριγωνικές: τήν ΕΑΓΖ καί τήν ΕΓΔΖ. Ἔτσι, λοιπόν, ὁλόκληρο τό στερεό (δηλ. τό κολοβό τριγωνικό πρίσμα) εἶναι ἕνωση τριῶν πυραμίδων: τῆς ΕΑΒΓ, τῆς ΕΑΓΖ καί τῆς ΕΓΔΖ.

Ἄν V ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ πρίσματος, ἔχουμε V = (ΕΑΒΓ) + + (ΕΑΓΖ) + (ΕΓΔΖ), σύμφωνα πρός τό γενικό ὁρισμό τοῦ ὄγκου τοῦ πολυέδρου (§ 134).

Ἡ πρώτη πυραμίδα ΕΑΒΓ ἔχει ὡς βάση τή βάση ΑΒΓ τοῦ κολοβοῦ καί ὡς κορυφή μιά κορυφή Ε τῆς ἄλλης βάσεως. Ἡ δεύτερη δέν ἀλλάζει ὄγκο, ἄν ἡ κορυφή της Ε μεταφερθεῖ παράλληλα πρός τή ΖΑ καί ἔρθει στό Β (§ 137, α΄). Ἑπομένως: (ΕΑΓΖ) = (ΒΑΓΖ) ≡ (ΖΑΒΓ), δηλ. ἡ δεύτερη, ΕΑΓΖ, ἰσοδυναμεῖ μέ πυραμίδα, πού ἔχει ὡς βάση τήν ΑΒΓ καί ὡς κορυφή τήν κορυφή Ζ τῆς πάνω βάσεως. Ἡ τρίτη, ΕΓΔΖ, δέν ἀλλάζει ὄγκο, ἄν πρῶτα ἡ κορυφή της Ζ μεταφερθεῖ στό Α (παράλληλα πρός τήν ΔΓ) καί κατόπιν ἡ Ε στό Β. Δηλ. ἔχουμε (ΕΓΔΖ) = (ΕΓΔΑ) = (ΒΓΔΑ) ≡ (ΔΑΒΓ). Δηλαδή καί ἡ τρίτη ἰσοδυναμεῖ μέ πυραμίδα, πού ἔχει ὡς βάση τή βάση ΑΒΓ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καί ὡς κορυφή τήν τρίτη κορυφή Δ τῆς πάνω βάσεως. Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι:

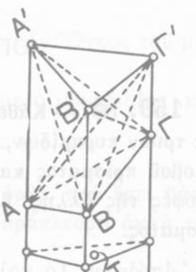
$$V = (ΕΑΒΓ) + (ΔΑΒΓ) + (ΖΑΒΓ).$$

Πόρισμα. Ἄν b τό ἐμβαδόν τῆς μιᾶς βάσεως ἑνός κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καί $υ_1$, $υ_2$, $υ_3$ οἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τῆς ἄλλης βάσεως ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς πρώτης, ὁ ὄγκος V τοῦ κολοβοῦ πρίσματος προκύπτει ἀπό τόν τύπο:

$$(1) \qquad \boxed{V = \frac{1}{3} b(υ_1 + υ_2 + υ_3)}$$

160. **(Θ) —Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῆς κάθετης τομῆς του ἐπί τόν μέσο ὅρο τῶν τριῶν παράπλευρων ἀκμῶν του.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ ἕνα κολοβό τριγωνικό πρίσμα (σχ. 157), Τ τό ἐμβαδόν τῆς κάθετης τομῆς του (δηλ. τῆς κάθετης τομῆς τῆς πρισματικῆς ἐπιφάνειας, τήν ὁποία ὁρίζουν οἱ φορεῖς τῶν παράπλευρων ἀκμῶν του) καί V ὁ ὄγκος του. Εἴδαμε ὅτι:



Σχ. 157

$$(1) \qquad V = (Α΄ΑΒΓ) + (Β΄ΑΒΓ) + (Γ΄ΑΒΓ)$$

Ἡ πυραμίδα Α΄ΑΒΓ ἰσοδυναμεῖ πρός τό ἕνα τρίτο ἑνός πρίσματος, πού ἔχει βάση ΑΒΓ καί παράπλευρη ἀκμή ΑΑ΄ (§ 154, Πόρισμα). Τό πρίσμα αὐτό ἔχει ὄγκο Τ·(ΑΑ΄) (§ 158). Ἑπομένως: $(Α΄ΑΒΓ) = \frac{1}{3} Τ \cdot ΑΑ΄$.

Ὁμοίως καί γιά τίς ἄλλες δυό πυραμίδες: $(Β΄ΑΒΓ) = \frac{1}{3} Τ \cdot ΒΒ΄$ καί $(Γ΄ΑΒΓ) = \frac{1}{3} Τ \cdot ΓΓ΄$. Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται:

$$(2) \qquad \boxed{V = Τ \, \frac{ΑΑ΄ + ΒΒ΄ + ΓΓ΄}{3}}$$

Σημείωση. Στήν πράξη ἐφαρμόζεται περισσότερο ὁ τύπος (2) παρά ὁ (1) τῆς § 159.

161. — Γιά τόν ὄγκο ἑνός **πολυγωνικοῦ** κολοβοῦ πρίσματος (μέ πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως > 3) δέν ἰσχύουν γενικῶς τά θεωρήματα τῶν δυό προηγούμενων παραγράφων (ἐκτός ἀπό μερικές ἐξαιρέσεις). Γιά νά ὑπολογιστεῖ, λοιπόν, ὁ ὄγκος κολοβοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος, πρέπει αὐτό νά διαιρεθεῖ μέ διαγώνια ἐπίπεδα σέ τριγωνικά κολοβά πρίσματα, νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος καθενός ἀπ' αὐτά καί μετά νά προστεθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων, στά ὁποῖα διαιρέθηκε τό ἀρχικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄

257. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας μέ πλευρά βάσεως α καί παράπλευρη ἀκμή μήκους β.

258. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδας, πού ἔχει πλευρά βάσεως 4 μέτρα καί παράπλευρη ἐπιφάνεια 15-πλάσια τῆς βάσεως ;

259. Μιά κανονική ἑξαγωνική πυραμίδα ἔχει ὁλική ἐπιφάνεια 10 τετρ. μέτρα καί οἱ παράπλευρες ἕδρες της σχηματίζουν δίεδρες γωνίες 60° μέ τή βάση. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας.

260. Νά διαιρεθεῖ ἕνα παραλληλεπίπεδο σέ τρία ἰσοδύναμα μέρη μέ ἐπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό μία ἀκμή του.

261. Ἔχουμε ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά 2. Ὑψώνουμε τά τμήματα ΔΕ = 6 καί ΒΖ = 9 κάθετα στό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου καί ὁμόρροπα. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΓΕΖ.

262. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ἑνός παραλληλεπίπεδου καί τοῦ ὀκταέδρου, πού ἔχει κορυφές τά κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παρ/δου.

263. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ἑνός τετραέδρου καί τοῦ ὀκταέδρου, πού ἔχει κορυφές τά μέσα τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

264. Νά βρεθεῖ ὁ λόγος τῶν ὄγκων ἑνός παρ/δου καί τοῦ τετραέδρου, τοῦ ὁποίου οἱ ἀκμές εἶναι διαγώνιοι τῶν ἑδρῶν τοῦ παρ/δου.

265. Ἕνα πλάγιο τριγωνικό πρίσμα ἔχει βάση ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α καί παράλληλες ἀκμές, πού ἔχουν γωνίες κλίσεως 60° μέ τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἐμβαδόν τῆς κάθετης τομῆς του.

266. Δύο κανονικά πρίσματα ἔχουν ὕψη υ καί υ΄ καί βάσεις κανονικά ν-γωνα μέ ἀποστήματα α καί α΄. Δεδομένου ὅτι οἱ ὄγκοι τους εἶναι ἀνάλογοι πρός τίς ὁλικές ἐπιφάνειές τους, δεῖξτε ὅτι: $1/υ + 1/α = 1/υ' + 1/α'$.

267. Μιᾶς κόλουρης τριγωνικῆς πυραμίδας ἡ μία βάση εἶναι ὀρθογώνιο τρίγωνο μέ κάθετες πλευρές 12 καί 5 μέτρα, ἡ μεσαία τομή της ἔχει ἐμβαδόν 2430/169 τετρ. μέτρα καί τό ὕψος της εἶναι 6 μέτρα. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τῆς κόλουρης πυραμίδας σέ κυβικά μέτρα.

268. Ἔστω μιά πυραμίδα μέ ἐμβαδόν βάσεως b. Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση καί σέ ἀπόσταση h ἀπό τή βάση τέμνει τίς πρός τό μέρος τῆς κορυφῆς προεκτάσεις τῶν παράπλευρων ἀκμῶν σέ σημεῖα, πού ὁρίζουν πολύγωνο ἐμβαδοῦ b΄. Νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού σχηματίζεται μέ τήν ἕνωση τῶν δύο πυραμίδων.

269. Ἐπάνω στίς δύο παράπλευρες ἀκμές ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ ἑνός τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ ὑπάρχουν τά σημεῖα Δ καί Ε τέτοια, ὥστε ΔΑ = 15 καί ΕΒ = 20 (μονάδες μήκους). Εἶναι ἐπίσης ΑΑ΄ = ΒΒ΄ = ΓΓ΄ = 38. Νά ὁριστεῖ ἐπάνω στήν τρίτη παράπλευρη ἀκμή ἕνα σημεῖο Ζ τέτοιο, ὥστε τό ἐπίπεδο ΔΕΖ νά διαιρεῖ τό πρίσμα σέ δυό ἰσοδύναμα μέρη.

270. Μιᾶς κανονικῆς κόλουρης ἑξαγωνικῆς πυραμίδας οἱ πλευρές τῆς μεγαλύτερης βάσεως εἶναι ἴσες μέ τίς παράπλευρες ἀκμές καί ἴσες ἀκόμη μέ τή μεγαλύτερη διαγώνιο τῆς μικρότερης βάσεως. Δεδομένου ὅτι ὁ ὄγκος της εἶναι 672 m^3, νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀκμές τῆς κόλουρης καί τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς της ἐπιφάνειας.

271. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος κάθε κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῆς μιᾶς βάσεως ἐπί τήν ἀπόστασή της ἀπό τό κέντρο βάρους τῆς ἄλλης βάσεως.

272. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ παρ/δου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῆς κάθετης τομῆς του ἐπί τήν ἀπόσταση μεταξύ τῶν κέντρων τῶν δύο βάσεων.

273. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ παρ/δου εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῆς μιᾶς βάσεως ἐπί τήν ἀπόστασή της ἀπό τό κέντρο τῆς ἄλλης.

274. Ἡ βάση ΑΒΓ καί ἡ διεύθυνση τῶν παράπλευρων ἀκμῶν ἑνός κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος μένουν σταθερά, ἐνῶ οἱ κορυφές Α΄, Β΄, Γ΄ τῆς ἄλλης βάσεως μετατοπίζονται ἔτσι, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ πρίσματος νά μένει σταθερός. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐπίπεδο Α΄Β΄Γ΄ διέρχεται ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο καί νά βρεῖτε πότε τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ γίνεται ἐλάχιστο.

275. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ βρίσκονται πάνω σέ δυό παράλληλα ἐπίπεδα, πού ἀπέχουν μεταξύ τους ἀπόσταση υ, ἐνῶ οἱ προβολές τῶν Ε, Ζ, Η, Θ στό ἐπίπεδο τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τοῦ δεκαέδρου, πού ἔχει ἕδρες τά δύο τετράγωνα καί τά ὀκτώ τρίγωνα, ὅπως τά ΑΕΒ, ΕΒΖ, ΖΒΓ, ..., ἄν ΑΒ = α.

Β΄

276. Ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΟΑΒ μέ πλευρά α ἔχει τήν κορυφή του Ο ἐπάνω σέ ἐπίπεδο (Π) καί τίς δύο ἄλλες κορυφές του πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ (Π) καί προβάλλεται στό (Π) κατά ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑ΄Β΄ μέ ὑποτείνουσα Α΄Β΄ = β. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τῆς πυραμίδας ΟΑΒΒ΄Α΄ συναρτήσει τῶν α καί β.

277. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Μ τέτοιων, ὥστε οἱ πυραμίδες μέ κορυφή τό Μ καί βάσεις τίς παράπλευρες ἕδρες δεδομένου τριγωνικοῦ πρίσματος νά εἶναι ἰσοδύναμες. (**Ὑποδ.** Μέ μετατόπιση τοῦ Μ παράλληλα πρός τίς παράπλευρες ἀκμές οἱ ὄγκοι τῶν πυραμίδων δέν ἀλλάζουν.)

278. Δεῖξτε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσος μέ τό 1/6 τοῦ παραλληλογράμμου, πού ἔχει πλευρές ἴσες καί παράλληλες πρός δύο ἀπέναντι ἀκμές τοῦ τετραέδρου, ἐπί τήν ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν ἀκμῶν αὐτῶν.

279. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας, πού ἔχει κορυφές τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν μιᾶς κανονικῆς δωδεκαγωνικῆς πυραμίδας, τῆς ὁποίας γνωρίζουμε τήν πλευρά α τῆς βάσεως καί τό ὕψος υ.

280. Νά βρεθεῖ ὁ ὄγκος μιᾶς κόλουρης κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδας, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος υ, παράπλευρη ἐπιφάνεια $4k^2$ καί μεσαία τομή μέ ἐμβαδόν c^2.

281. Νά προσδιορίσετε μιά τομή δεδομένης κόλουρης πυραμίδας, πού νά εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις καί μέση ἀνάλογη τῶν δύο βάσεων. Κατόπιν νά βρεῖτε τό λόγο τῶν δύο μερῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται ἡ κόλουρη πυραμίδα ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς τομῆς, ἄν ξέρετε τά ἐμβαδά b καί b΄ τῶν βάσεων τῆς κόλουρης.

282. Ἀπό τήν κορυφή Α΄ μιᾶς κόλουρης τριγωνικῆς πυραμίδας Α΄Β΄Γ΄ΑΒΓ διέρχεται ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τήν ἕδρα Β΄Γ΄ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέρος τῆς κόλουρης, πού περιέχεται μεταξύ τῶν δύο τούτων παράλληλων ἐπιπέδων, ἰσοδυναμεῖ μέ πρίσμα, πού ἔχει ὡς ὕψος τό ὕψος τῆς κόλουρης καί ὡς βάση τή μέση ἀνάλογη τῶν δύο βάσεών της.

283. Ἕνα στερεό περικλείεται ἀπό δύο ὀρθογώνια παρ/μα καί τέσσερα τραπέζια. Οἱ πλευρές α, β τοῦ ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές α΄, β΄ τοῦ ἄλλου καί ἡ ἀπόσταση τῶν δύο παράλληλων ἐπιπέδων εἶναι h. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ συναρτήσει τῶν α, β, α΄, β΄, h.

284. Ἔχουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, ὅπου $\alpha > \beta$. Ἀπό τίς τέσσερις πλευρές του διέρχονται ἡμιεπίπεδα, πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ΑΒΓΔ, πού σχηματίζουν μέ τό ἐπίπεδο τοῦ ὀρθογωνίου δίεδρες γωνίες $\varphi = 30°$. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ, πού σχηματίζεται. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος, ἄν $\varphi = 45°$ ἤ $\varphi = 60°$; (**Ὑποδ.** Τά ἐπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό τίς ΑΒ καί ΓΔ, τέμνονται κατά εὐθεία $xy \| AB \| \Gamma\Delta$ καί τά δύο ἄλλα, πού διέρχονται ἀπό τίς ΑΔ καί ΒΓ τέμνουν τή xy σέ Ε καί Ζ. Ἄν εἶναι Η, Θ οἱ προβολές τῶν Ε, Ζ στό ἐπίπεδο ΑΒΓΔ καί ΕΛΜ ἡ $\perp$ τομή τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, τότε ἡ ΗΘ διέρχεται ἀπό τά μέσα Ι, Κ τῶν ΑΔ καί ΒΓ καί εἶναι τριγ $EH\Lambda =$ τριγ $EHI \Rightarrow IH = H\Lambda = \beta/2$).

285. Νά ὁρίσετε ἕνα ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό μία παράλληλη ἀκμή ἑνός κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καί νά χωρίζει τό στερεό σέ δύο ἰσοδύναμα μέρη.

286. Ἄς θεωρήσουμε τίς ἀκμές ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἑνός παραλληλεπίπεδου, ΟΔ τή διαγώνιό του καί ΜΝ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τέτοιο, ὥστε τό ἐπίπεδο ΟΜΝ νά ἔχει πρός τό ἕνα μέρος του τά τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Νά ἀποδείξετε τή σχέση ὄγκων:

$$(MNOA) + (MNOB) + (MNO\Gamma) = (MNO\Delta).$$

287. Μία ἕδρα ἑνός πολυέδρου εἶναι τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ πλευρά α, μία ἄλλη εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο ΗΕΖ τέτοιο, ὥστε ἡ κορυφή Η προβάλλεται στό ἐπίπεδο ΑΒΓΔ στό Α, ἐνῶ οἱ Ε καί Ζ προβάλλονται ἀντιστοίχως πάνω στίς πλευρές ΒΓ καί ΓΔ. Τά σημεῖα Ε, Ζ, Η βρίσκονται σέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τό ΑΒΓΔ καί ἀπέχουν h ἀπό τό ἐπίπεδο ΑΒΓΔ. Τέλος οἱ λοιπές ἕδρες τοῦ πολυέδρου εἶναι τά τρίγωνα ΗΑΒ, ΗΒΕ, ΕΒΓ, ΕΓΖ, ΖΓΔ, ΖΔΗ καί ΗΔΑ. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ πολυέδρου αὐτοῦ.

288. Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ βρίσκονται σέ παράλληλα ἐπίπεδα καί οἱ κορυφές τοῦ καθενός προβάλλονται στό ἐπίπεδο τοῦ ἄλλου ἔτσι, ὥστε μέ τίς κορυφές τοῦ ἄλλου νά ὁρίζουν κανονικό ἑξάγωνο. Ἄν Ο καί Ο΄ εἶναι τά περίκεντρα τῶν δύο ἰσόπλευρων τριγώνων, νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο τετραέδρων ΟΑ΄Β΄Γ΄ καί Ο΄ΑΒΓ συναρτήσει τῶν μηκῶν $(AB) = \alpha$ καί $(OO') = h$.

289. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἕνα ἐπίπεδο (Π) τέμνει τά τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΓΔ στά σημεῖα Μ, Ρ, Ν ἀντιστοίχως, τότε τέμνει καί τό τμῆμα ΒΔ σέ ἕνα σημεῖο Σ, ἐνῶ τίς ἀκμές ΒΓ καί ΑΔ δέν τίς τέμνει ii). Νά ἀποδείξετε ἐπίσης τήν ἰσότητα: $\dfrac{BM}{MA} \cdot \dfrac{AP}{P\Gamma} \cdot \dfrac{\Gamma N}{N\Delta} \cdot \dfrac{\Delta\Sigma}{\Sigma B} = 1$. iii) Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τά Μ καί Ν εἶναι μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ, τότε τό ἐπίπεδο ΜΡΝΣ χωρίζει τό τετράεδρο σέ δύο μέρη ἰσοδύναμα. (**Ὑποδ.** Γιά τό i) Τό (Π) χωρίζει τό χῶρο σέ δύο ἡμίχωρους (§ 31) ἔστω τούς X_1 καί X_2. Ἔστω ὅτι $A \in X_1$, τότε ἀναγκαστικά $B \in X_2$ καί τό $\Gamma \in X_2$. Ἀφοῦ $\Gamma \in X_2$ καί τό τμῆμα ΓΔ τέμνει τό $(\Pi) \Rightarrow \Delta \in X_1$. Γιά τό ii) Ἄς ὀνομάσουμε α, β, γ, δ τίς ἀποστάσεις τῶν Α,Β,Γ,Δ ἀπό τό (Π). Τότε $BM : MA = \beta : \alpha$ κ.τ.λ. Γιά τό iii) Τά δύο μέρη, στά ὁποῖα χωρίζεται τό τετράεδρο ἀπό τό (Π), εἶναι τό καθένα συνένωμα μιᾶς τετραπλευρικῆς πυραμίδας καί ἑνός τετραέδρου. Ἡ σχέση, πού πρέπει νά ἀποδείξουμε, γράφεται διαδοχικά: $(A, MPN\Sigma) + (A, N\Sigma\Delta) = (B, MPN\Sigma) + (B, PN\Gamma)$ ἤ $(A, N\Sigma\Delta) = (B, PN\Gamma)$ ἤ $\dfrac{(A, N\Sigma\Delta)}{(A, B\Gamma\Delta)} = \dfrac{(B, PN\Gamma)}{(B, A\Gamma\Delta)}$. Ἐφαρμόζουμε τό (Θ) τῆς § 137 (καί τή σχέση τοῦ ii).

ΤΟ ΠΡΙΣΜΑΤΟΕΙΔΕΣ

162. Πρισματοειδές λέγεται ἕνα κυρτό πολύεδρο, τοῦ ὁποίου δυό ἕδρες, πού τίς λέμε «βάσεις», βρίσκονται πάνω σέ παράλληλα ἐπίπεδα καί τό ὁποῖο δέν ἔχει ἄλλες κορυφές, παρά μόνο τίς κορυφές, πού εἶναι στίς βάσεις του. Οἱ ὑπόλοιπες ἕδρες τοῦ πρισματοειδοῦς **(παράπλευρες ἕδρες)** εἶναι τρίγωνα ἤ τραπέζια (σχ. 158), πού ἀποτελοῦν ὅλα μαζί μιά ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ τομή ἀπό ἕνα ἐπίπεδο παρ/λο πρός τίς βάσεις εἶναι πολύγωνο, πού μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ τρίγωνα μέ βάσεις τίς πλευρές του καί κορυφή ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο του.

Ὕψος τοῦ πρισματοειδοῦς λέγεται ἡ ἀπόσταση τῶν ἐπιπέδων τῶν δυό βάσεων καί **μεσαία τομή** τό πολύγωνο, πού προκύπτει, ὅταν τό στερεό κοπεῖ ἀπό ἐπίπεδο, πού εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις καί ἀπέχει ἐξίσου ἀπ' αὐτές.

Ἄν μιά ἀπό τίς βάσεις καταντήσει εὐθύγραμμο τμῆμα (παράλληλο πρός τήν ἄλλη) καί πάλι τό στερεό θεωρεῖται πρισματοειδές· ἐπίσης ἀκόμη καί ὅταν ἡ μιά βάση καταντήσει σημεῖο (πυραμίδα). Τό κολοβό πρίσμα τοῦ σχ.156 (§ 159) μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς πρισματοειδές, τοῦ ὁποίου ἡ μιά βάση εἶναι τό ΑΒΕΖ καί ἡ ἄλλη τό τμῆμα ΓΔ.

163. **(Θ) — Ὁ ὄγκος τοῦ πρισματοειδοῦς εἶναι ἴσος μέ τό ἕνα ἕκτο τοῦ ὕψους του ἐπί τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν βάσεών του σύν τό τετραπλάσιο ἐμβαδόν τῆς μεσαίας τομῆς του. Δηλαδή:**

$$\mathbf{V = \frac{1}{6}\,\upsilon(b + b' + 4\,m),}$$

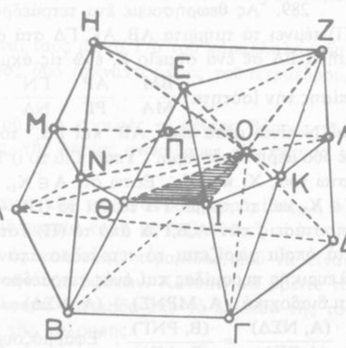
ὅπου V ὁ ὄγκος, υ τό ὕψος, b, b′, m τά ἐμβαδά τῶν βάσεων καί τῆς μεσαίας τομῆς.

Γιά τήν ἀπόδειξη συνδέουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ο τῆς μεσαίας τομῆς (σχ. 158) μέ ὅλες τίς κορυφές τῶν βάσεων, ὁπότε τό πρισματοειδές ἀναλύεται σέ πυραμίδες, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι, ὅταν ἀθροιστοῦν, δίνουν τόν ὄγκο τοῦ πρισματοειδοῦς.

Πρῶτα πρῶτα οἱ πυραμίδες μέ βάσεις τίς δυό βάσεις τοῦ πρισματοειδοῦς ἔχουν ἄθροισμα ὄγκων:

$$\frac{1}{3}\,b\,\frac{\upsilon}{2} + \frac{1}{3}\,b'\,\frac{\upsilon}{2} = \frac{\upsilon}{6}\,(b + b').$$

Μένει, λοιπόν, νά ἀθροίσουμε τίς ὑπόλοιπες πυραμίδες, οἱ ὁποῖες ἔχουν ὡς βάσεις τίς παράπλευρες ἕδρες καί κορυφή τό Ο. Αὐτές μπορούμε νά τίς θεωρήσουμε ὡς τριγωνικές, γιατί, ἄν μιά ἀπ' αὐτές, π.χ. ἡ ΟΗΖΔΑ, δέν εἶναι τριγωνική, ἀναλύεται σέ τριγωνικές μέ ἕνα διαγώνιο ἐπίπεδο (π.χ. τό ΟΖΑ).



Σχ. 158

Ἄς θεωρήσουμε μιά ὁποιαδήποτε ἀπ᾽αὐτές, π.χ. τήν ΟΕΒΓ. Παρατηροῦμε ὅτι τό μεσοπαράλληλο ἐπίπεδο περνᾶ ἀπό τά μέσα Θ καί Ι τῶν ἀκμῶν ΕΒ, ΕΓ καί συνεπῶς τό τρίγωνο ΕΘΙ εἶναι τό ἕνα τέταρτο τοῦ τριγώνου ΕΒΓ. Ἄρα ἡ πυραμίδα ΟΕΒΓ εἶναι τετραπλάσια τῆς πυραμίδας ΟΕΘΙ. Αὐτή πάλι μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὅτι ἔχει βάση τό μέρος ΟΘΙ τῆς μεσαίας τομῆς καί ὕψος υ/2. Ὥστε:

$$(\mathrm{OEB\Gamma}) = 4(\mathrm{OE\Theta I}) = 4(\mathrm{EO\Theta I}) = \frac{4}{3}(\mathrm{O\Theta I})\cdot\frac{\upsilon}{2} = 4\frac{\upsilon}{6}(\mathrm{O\Theta I}).$$

Σέ καθεμιά παράπλευρη πυραμίδα ἀντιστοιχεῖ ἕνα τριγωνικό τμῆμα τῆς μεσαίας τομῆς, ὅπως ἀντιστοιχεῖ στήν ΟΕΒΓ τό ΟΘΙ. Ἔτσι π.χ. γιά τήν ΟΑΗΒ θά ἔχουμε ὅτι (ΟΑΗΒ) = 4υ(ΟΝΜ)/6 κ.ο.κ.

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο τῆς μεσαίας τομῆς $\not\equiv$ Ο, ἐπειδή εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ πολυέδρου, ἀνήκει στό ἐσωτερικό μιᾶς παράπλευρης πυραμίδας (ἄν δέ βρίσκεται πάνω σέ ἕδρα κάποιας παράπλευρης πυραμίδας). Ἑπομένως οἱ παράπλευρες πυραμίδες τέμνουν τή μεσαία τομή καί τήν ἀναλύουν σέ τρίγωνα ΟΜΝ, ΟΝΘ, ΟΘΙ, . . ., πού τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τους εἶναι m. Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὅλων τῶν παράπλευρων πυραμίδων εἶναι:

$$4\cdot\frac{\upsilon}{6}\,((\mathrm{O\Theta I}) + (\mathrm{OIK}) + (\mathrm{OK\Lambda}) + \ldots + (\mathrm{ON\Theta})) = 4\cdot\frac{\upsilon}{6}\mathrm{m}.$$

Συνεπῶς ὁ ὄγκος ὅλου τοῦ στερεοῦ εἶναι:

$$\mathrm{V} = \frac{\upsilon}{6}\,(\mathrm{b} + \mathrm{b}') + 4\,\frac{\upsilon}{6}\,\mathrm{m} = \frac{\upsilon}{6}\cdot(\mathrm{b} + \mathrm{b}' + 4\mathrm{m}).$$

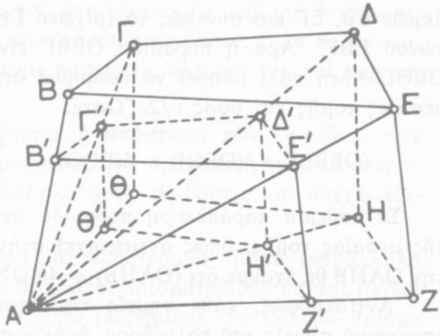
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

164. Ἴσα πολύεδρα. Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ τό ἑξῆς θεώρημα. (Θ)— Ἄν δυό πολύεδρα ἔχουν τίς ἕδρες τους ἴσες μία πρός μία, τίς στερεές γωνίες τους ἴσες μία πρός μία καί ὅλα αὐτά ὁμοίως διατεταγμένα, τότε τά δυό πολύεδρα εἶναι ἴσα. Μέ τό «ὁμοίως διατεταγμένα» ἐννοοῦμε ὅτι τά παραπάνω στοιχεῖα, ἕδρες καί στερεές γωνίες, ἀντιστοιχοῦν στά δύο πολύεδρα ἔτσι, ὥστε δυό συνεχόμενες ἕδρες τοῦ πρώτου νά ἀντιστοιχοῦν σέ δυό ἀντιστοίχως ἴσες καί ὅμοια συνεχόμενες ἕδρες τοῦ δεύτερου καί ὅτι στίς ἕδρες τοῦ πρώτου, πού ὁρίζουν μιά στερεά γωνία του, ἀντιστοιχοῦν ἕδρες τοῦ δεύτερου (ἀντιστοίχως ἴσες πρός τίς ἕδρες τοῦ πρώτου), πού ὁρίζουν ἴση στερεά γωνία καί τέλος ὅτι οἱ ἀντίστοιχες δίεδρες αὐτῶν τῶν δυό ἴσων στερεῶν γωνιῶν ἔχουν ἴσες ἀκμές τῶν πολυέδρων.

165. Ὅμοια πολύεδρα. — α΄) Δυό πολύεδρα λέγονται ὅμοια, ὅταν ἔχουν τίς ἕδρες τους ὅμοιες μία πρός μία, μέ τόν ἴδιο λόγο ὁμοιότητας, πού

τόν λέμε «λόγο ὁμοιότητας τῶν δυό ὅμοιων πολυέδρων», τίς στερεές γωνίες τους ἴσες μία πρός μία καί ὅλα αὐτά τά στοιχεῖα ὁμοίως διατεταγμένα.

Δηλαδή ἀντιστοιχοῦν μεταξύ τους κατά τρόπο ἐντελῶς ἀνάλογο μέ ἐκεῖνον, πού ἀντιστοιχοῦν τά στοιχεῖα δυό ἴσων πολυέδρων (βλ. § 164).



Σχ. 160

β′) Ἄν δοθεῖ ἕνα πολύεδρο **Π**, τότε μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕνα πολύεδρο **Ρ**, ὅμοιο πρός αὐτό πού δόθηκε, μέ ὅποιο λόγο ὁμοιότητας μᾶς δοθεῖ. Ἔστω π.χ. τό πολύεδρο ΑΒΓΔΕΖΗΘ (γιά συντομία: (Α ... Θ)), (σχ. 160) καί k ἕνας θετικός ἀριθμός. Ἄς πάρουμε πάνω στίς ἀκτίνες (Α, Β), (Α, Γ), (Α, Δ)... (Α, Θ) ἀντιστοίχως σημεῖα Β′, Γ′, Δ′, ... Θ′ τέτοια, ὥστε:

$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΑΓ'}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ'}{ΑΔ} = \ldots = \frac{ΑΘ'}{ΑΘ} = k$$

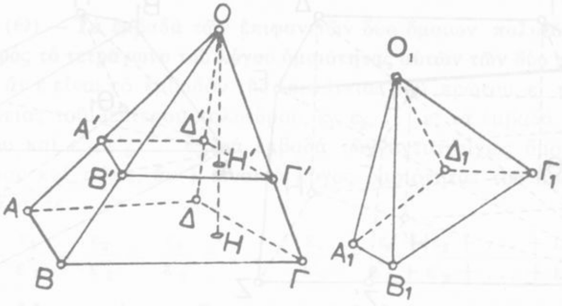
καί ἄς σχηματίσουμε τό πολύεδρο ΑΒ′Γ′Δ′Ε′Ζ′Η′Θ′ (γιά συντομία: (Α ... Θ′)). Εἶναι φανερό ὅτι οἱ ἀκμές τοῦ (Α...Θ′) εἶναι παράλληλες πρός τίς ἀκμές τοῦ (Α ... Θ), οἱ ἕδρες του εἶναι ὅμοιες μέ τίς ἕδρες τοῦ (Α ... Θ) μέ λόγο ὁμοιότητας k καί οἱ στερεές γωνίες του ἴσες μία πρός μία μέ τίς στερεές γωνίες τοῦ (Α...Θ), γιατί ἔχουν τίς ἀκμές τους παρ/λες καί ὁμόρροπες (ἄρα ἐφαρμόζουν μέ μιά μεταφορά). Ὅλα αὐτά τά στοιχεῖα τῶν δυό πολυέδρων εἶναι ὅμοια διατεταγμένα. Ἄρα τό (Α ... Θ′) εἶναι ὅμοιο μέ τό (Α ... Θ) μέ λόγο ὁμοιότητας k. Ἔτσι ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξη πολυέδρων, πού εἶναι ὅμοια πρός ἕνα δεδομένο.

166. Ὅμοιες πυραμίδες. **(Θ)—Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δυό ὅμοιων πυραμίδων εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.**

Ἄς θεωρήσουμε π.χ. τίς ὅμοιες πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καί $Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ (σχ. 161) μέ λόγο ὁμοιότητας $k = \frac{Ο_1Α_1}{ΟΑ} = \frac{Ο_1Β_1}{ΟΒ} = \frac{Ο_1Γ_1}{ΟΓ} = \frac{Ο_1Δ_1}{ΟΔ}$.

Ἄς κατασκευάσουμε μιά πυραμίδα ΟΑ′Β′Γ′Δ′, ὅμοια μέ τήν ΟΑΒΓΔ μέ λόγο ὁμοιότητας k, παίρνοντας πάνω στίς ἀκτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ τέτοια, ὥστε: $k = \frac{ΟΑ'}{ΟΑ} = \frac{ΟΒ'}{ΟΒ} = \frac{ΟΓ'}{ΟΓ} = \frac{ΟΔ'}{ΟΔ}$ (βλ. § 165, β′).

Τότε οἱ ἕδρες τῆς πυραμίδας ΟΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι ὅμοιες πρός τίς ἕδρες τῆς ΟΑΒΓΔ μέ λόγο ὁμοιότητας k, ἀλλά καί οἱ ἕδρες τῆς $Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι



Σχ. 161

(ἀπ' τήν ὑπόθεση) ὅμοιες πρός τίς ἕδρες τῆς ΟΑΒΓΔ μέ τόν ἴδιο λόγο ὁμοιότητας. Ἄρα οἱ ἕδρες τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι μία πρός μία ἴσες πρός τίς ἕδρες τῆς $Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1$. Ἐπίσης οἱ στερεές γωνίες τῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι γιά τόν ἴδιο λόγο ἴσες πρός τίς στερεές γωνίες τῆς $Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1$. Τέλος τά στοιχεῖα αὐτῶν τῶν δυό πυραμίδων ΟΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ καί $Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα μέ τά στοιχεῖα τῆς ΟΑΒΓΔ, ἄρα εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα καί μεταξύ τους. Ἑπομένως οἱ πυραμίδες ΟΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ καί $Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ εἶναι πολύεδρα ἴσα.

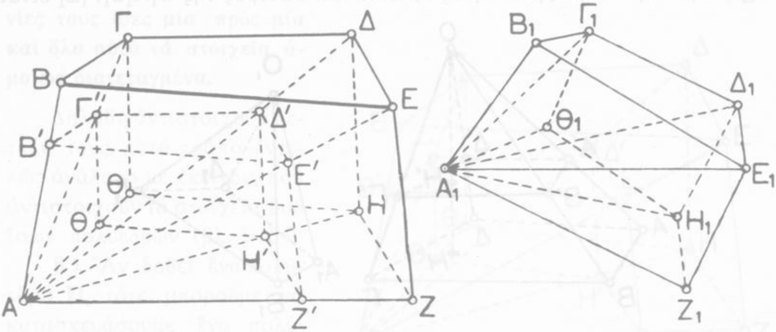
Ἄν φέρουμε τώρα τά ὕψη ΑΗ΄ καί ΑΗ τῶν πυραμίδων ΟΑ΄Β΄Γ΄Δ΄ καί ΟΑΒΓΔ, τότε σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῶν παράλληλων τομῶν (§ 122), θά ἔχουμε ὅτι:

$$\frac{\text{Ογκ}\,ΟΑ'Β'Γ'Δ'}{\text{Ογκ}\,ΟΑΒΓΔ}=\frac{\frac{1}{3}(Α'Β'Γ'Δ')\cdot ΟΗ'}{\frac{1}{3}(ΑΒΓΔ)\cdot ΟΗ}=\frac{(Α'Β'Γ'Δ')}{(ΑΒΓΔ)}\cdot\frac{ΟΗ'}{ΟΗ}=k^2\cdot k=k^3$$

καί, ἐπειδή $\text{Ογκ}\,Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1=\text{Ογκ}\,ΟΑ'Β'Γ'Δ'$ (γιατί εἶναι ἴσα πολύεδρα), ἔχουμε: $\dfrac{\text{Ογκ}\,Ο_1Α_1Β_1Γ_1Δ_1}{\text{Ογκ}\,ΟΑΒΓΔ}=k^3$.

167. **(Θ) — Δυό ὅμοια πολύεδρα μποροῦν νά διαιρεθοῦν σέ ἴσο πλῆθος πυραμίδων πού εἶναι, ἀντιστοίχως, ὅμοιες.**

Ἄς θεωρήσουμε π.χ. (σχ. 162) τά ὅμοια πολύεδρα $\mathbf{Π}\equiv(Α\ldotsΘ)$ καί $\mathbf{P}\equiv(Α_1\ldotsΘ_1)$ (§ 165, α΄) μέ ὁμόλογες κορυφές Α καί $Α_1$ καί λόγο ὁμοιότητας $k=Α_1Β_1/ΑΒ=\ldots=Α_1Θ_1/ΑΘ$. Ἄς κατασκευάσουμε ἕνα πολύεδρο (Α . . . Θ΄) ὅμοιο πρός τό (Α . . . Θ) μέ λόγο ὁμοιότητας k, παίρνοντας πάνω στίς ἀκτίνες ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ . . . ΑΘ σημεῖα Β΄, Γ΄, Δ΄, . . . Θ΄ τέτοια, ὥστε $k=ΑΒ'/ΑΒ=ΑΓ'/ΑΓ=\ldots=ΑΘ'/ΑΘ$ (§ 165, β΄). Τόσο οἱ ἕδρες τοῦ πολυέδρου (Α ... Θ′), ὅσο καί τοῦ ($Α_1 \ldots Θ_1$) εἶναι ὅμοιες



Σχ. 162

πρός τίς ἕδρες τοῦ (Α ... Θ) καί μέ τόν ἴδιο λόγο ὁμοιότητας. Ἄρα οἱ ἕδρες τοῦ (Α ... Θ′) εἶναι ἴσες πρός τίς ἕδρες τοῦ ($Α_1 \ldots Θ_1$). Ἐπίσης καί οἱ στερεές γωνίες τοῦ (Α ... Θ′) εἶναι ἴσες μέ τίς στερεές γωνίες τοῦ (Α ... Θ) καί αὐτές πάλι ἴσες μέ τίς στερεές γωνίες τοῦ ὁμοιού του ($Α_1 \ldots Θ_1$). Ἄρα τά (Α ... Θ′) καί ($Α_1 \ldots Θ_1$) ἔχουν καί τίς στερεές γωνίες τους ἴσες μία πρός μία. Τέλος τά στοιχεῖα τῶν δυό πολυέδρων (Α ... Θ′) καί ($Α_1 \ldots Θ_1$) εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα μέ τά στοιχεῖα τοῦ (Α ... Θ), ἄρα καί μεταξύ τους. Ἑπομένως εἶναι πολύεδρα ἴσα: (Α ... Θ′) = ($Α_1 \ldots Θ_1$). Ἀλλά τό (Α ... Θ′) καί τό (Α ... Θ) ἔχουν διαιρεθεῖ σέ ὅμοιες πυραμίδες: ΑΒ′Γ′Δ′Ε′ ὅμοια μέ τήν ΑΒΓΔΕ (βλ. § 165, β′), ΑΓ′Δ′Η′Θ′ ὅμοια μέ τήν ΑΓΔΗΘ καί ΑΔ′Ε′Ζ′Η′ ὅμοια μέ τήν ΑΔΕΖΗ. Ἄν, λοιπόν, τό ($Α_1 \ldots Θ_1$) ἐφαρμόσει μέ τό ἴσο του (Α...Θ′), διαιρεῖται καί αὐτό σέ πυραμίδες ἴσες πρός τίς ΑΒ′Γ′Δ′Ε′, ΑΔ′Ε′Ζ′Η′, ΑΓ′Δ′Η′Θ′, ἄρα ὅμοιες πρός τίς πυραμίδες τοῦ πολυέδρου (Α ... Θ).

168. (Θ) — Οἱ ὄγκοι δυό ὅμοιων πολυέδρων ἔχουν λόγο ἴσο μέ τόν κύβο τοῦ λόγου ὁμοιότητας τῶν πολυέδρων αὐτῶν.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι V καί V′ οἱ ὄγκοι δυό ὅμοιων πολυέδρων **Π** καί **Ρ** καί λ ὁ λόγος ὁμοιότητας τοῦ **Π** πρός τό **Ρ**, δηλ. $λ = α/α'$, ὅπου α καί α′ δυό ὁμόλογες ἀκμές τῶν **Π** καί **Ρ** ἀντιστοίχως. Ἄς χωρίσουμε τά πολύεδρα **Π** καί **Ρ** σέ ἰσάριθμες πυραμίδες, ἀντιστοίχως ὅμοιες (§ 167) καί ἄς συμβολίσουμε μέ $V_1, V_2, V_3, \ldots V_ν$ τούς ὄγκους τῶν πυραμίδων, στίς ὁποῖες ἀναλύεται τό πρῶτο καί $V'_1, V'_2, V'_3, \ldots V'_ν$ τούς ὄγκους τῶν ἀντιστοίχως ὅμοιων πυραμίδων, στίς ὁποῖες ἀναλύεται τό δεύτερο. Θά ἔχουμε τότε (§ 166) : $V_1/V'_1 = λ^3$, $V_2/V'_2 = λ^3 \ldots$, $V_ν/V'_ν = λ^3$ καί $V = V_1 + V_2 + \ldots V_ν$, $V' = V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_ν$. Ἐφαρμόζοντας τήν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων παίρνουμε:

$$\lambda^3=\frac{V_1}{V'_1}=\frac{V_2}{V'_2}=\dots=\frac{V_\nu}{V'_\nu}=\frac{V_1+V_2+\dots+V_\nu}{V'_1+V'_2+\dots+V'_\nu}=\frac{V}{V'}\Rightarrow\frac{V}{V'}=\lambda^3.$$

169. **(Θ) — Τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὅμοιων πολυέδρων ἔχουν λόγο ἴσο πρός τό τετράγωνο τοῦ λόγου ὁμοιότητας αὐτῶν τῶν δύο πολυέδρων.**

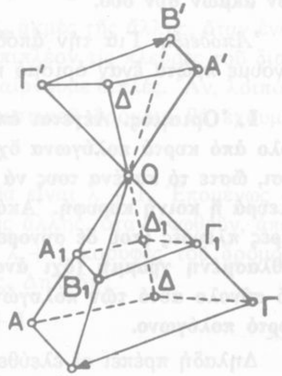
Γιατί, ἄν ε εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ πρώτου, ε′ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας τοῦ δεύτερου πολυέδρου, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_\nu$ τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν τοῦ πρώτου καί $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots \varepsilon'_\nu$ τά ἐμβαδά τῶν ἀντιστοίχως ὅμοιων ἑδρῶν τοῦ δεύτερου καί τέλος, ἄν λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητας τοῦ πρώτου πρός τό δεύτερο, τότε:

$$\lambda^2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon'_2}=\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon'_3}=\dots=\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon'_\nu}=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\dots+\varepsilon_\nu}{\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\dots+\varepsilon'_\nu}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

170. «Ἀντιρρόπως ὅμοια» πολύεδρα.—Δυό πολύεδρα Π καί Ρ λέγονται «ἀντιρρόπως ὅμοια», ὅταν τό ἕνα εἶναι ὅμοιο πρός τό κατοπτρικό (§ 84, γ′) **τοῦ ἄλλου.** Ἄν **Ρ′** εἶναι τό κατοπτρικό τοῦ **Ρ**, τότε τά δυό πολύεδρα **Ρ** καί **Ρ′** ἔχουν τίς ἀκμές τους καί τίς ἕδρες τους ἴσες μία πρός μία καί τίς στερεές γωνίες τους κατά κανόνα ὄχι ἴσες, ἀλλά κατοπτρικές (ἤ «συμμετρικές»).

Ἐπειδή τό Ρ′ εἶναι (ἀπ' τήν ὑπόθεση) ὅμοιο πρός τό **Π**, ἕπεται ὅτι τά ἀντιρρόπως ὅμοια πολύεδρα **Ρ** καί **Π** ἔχουν τίς ἕδρες τους ὅμοιες μία πρός μία καί τίς στερεές τους γωνίες συμμετρικές μία πρός μία. Ἔχουν ἐπομένως ἕνα λόγο ὁμοιότητας k, ἴσο πρός τό λόγο ὁμοιότητας τοῦ **Ρ′** καί τοῦ **Π**. Γνωρίζουμε ὅτι Ὄγκος τοῦ **Ρ** = Ὄγκος τοῦ **Ρ′** (§ 150). Ἐπειδή ὅμως $\frac{\text{Ὄγκος τοῦ } \mathbf{P}'}{\text{Ὄγκος τοῦ } \mathbf{\Pi}}=k^3\Rightarrow\frac{\text{Ὄγκος τοῦ } \mathbf{P}}{\text{Ὄγκος τοῦ } \mathbf{\Pi}}=k^3$, δηλ. *ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ἀντιρρόπως ὅμοιων πολυέδρων εἶναι ἴσος μέ τόν κύβο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητάς τους.*

Παράδειγμα. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση ΑΒΓΔ μιᾶς πυραμίδας ΟΑΒΓΔ (σχ. 163), τό ὁποῖο τέμνει τίς *προεκτάσεις* τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ στά Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἀντιστοίχως. Οἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καί ΟΑ′Β′Γ′Δ′ ἔχουν τίς ἕδρες τους ὅμοιες μία πρός μία, ἀλλά τίς στερεές γωνίες τους ὄχι (πάντα) ἴσες, ἀλλά κατοπτρικές. Γιατί ἡ στερεή γωνία Ο, Α′Β′Γ′Δ′ εἶναι συμμετρική τῆς Ο, ΑΒΓΔ ὡς πρός Ο, ἄρα κατοπτρική της. Ἡ στερεή γωνία Γ′,Β′Δ′Ο ἔχει τίς ἀκμές της παράλληλες καί ἀντίρροπες πρός τίς ἀκμές τῆς Γ, ΒΔΟ καί ἐπομένως, μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma'\Gamma}$, πηγαίνει στήν κατά κορυφή τῆς Γ, ΒΔΟ, δηλ. γίνεται κατοπτρική τῆς Γ, ΒΔΟ. Ὁμοίως καί οἱ ἄλλες στερεές γωνίες τῆς Ο, Α′Β′Γ′Δ′. Οἱ πυραμίδες Ο, Α′Β′Γ′Δ′ καί Ο,ΑΒΓΔ εἶναι ἀντιρ-



Σχ. 163

ρόπως ὅμοιες, γιατί ἡ Ο, ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια μέ τή συμμετρική (κατοπτρική) τῆς Ο,Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ὡς πρός Ο, δηλ. τήν Ο,$A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ τοῦ σχήματος 163.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

290. Νά ὁριστεῖ ἕνα ἐπίπεδο παρ/λο πρός τή βάση μιᾶς πυραμίδας, πού νά διαιρεῖ τήν πυραμίδα σέ δύο μέρη, ἀπό τά ὁποῖα ἐκεῖνο τό μέρος, πού βρίσκεται πρός τήν κορυφή τῆς πυραμίδας, νά εἶναι τό 1/7 τοῦ ἄλλου.

291. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τετράγωνα τῶν ὄγκων δυό ὅμοιων πολυέδρων ἔχουν λόγο ἴσο μέ τό λόγο τῶν κύβων τῶν ἐπιφανειῶν τους.

292. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράεδρο, πού ἔχει κορυφές τά βαρύκεντρα τῶν ἑδρῶν ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ, εἶναι «ἀντιστρόφως ὅμοιο» πρός τό ΑΒΓΔ. Νά ὑπολογίσετε τό λόγο τῶν ὄγκων αὐτῶν τῶν δύο τετραέδρων.

293. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν δύο τετράεδρα ἔχουν τίς ἀκμές τους παράλληλες μία πρός μία, τότε θά τίς ἔχουν καί ἀνάλογες καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τους θά εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν κύβων δύο παράλληλων ἀκμῶν τους.

294. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε κόλουρη πυραμίδα μπορεῖ νά διαιρεθεῖ σέ δύο ὅμοιες κόλουρες πυραμίδες ἀπό ἕνα ἐπίπεδο, πού νά εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις της.

295. Ἀπό δεδομένο τετράεδρο σχηματίζουμε ἄλλο, παίρνοντας τά συμμετρικά τῶν ἐπιπέδων τῶν ἑδρῶν του ὡς πρός τίς ἀπέναντι κορυφές. Νά βρεῖτε τό λόγο τῶν ὄγκων τοῦ νέου τετραέδρου καί τοῦ ἀρχικοῦ.

296. Ἔστω G τό βαρύκεντρο ἑνός τετραέδρου ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τά διανύσματα $\overrightarrow{GB'} = 3\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{G\Gamma'} = 3\overrightarrow{\Gamma G}$, $\overrightarrow{G\Delta'} = 3\overrightarrow{\Delta G}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐπίπεδο Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι παράλληλο πρός τό ΒΓΔ καί ὅτι τό Α εἶναι βαρύκεντρο τοῦ τριγώνου Β΄Γ΄Δ΄. Ἄν φέρουμε καί τό $\overrightarrow{GA'} = 3\overrightarrow{AG}$, ποιός θά εἶναι ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν Α΄Β΄Γ΄Δ΄ καί ΑΒΓΔ;

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ EULER

171. Θεώρημα τοῦ Euler. — Σέ κάθε κυρτό πολύεδρο τό πλῆθος Κ τῶν κορυφῶν σύν τό πλῆθος Ε τῶν ἑδρῶν εἶναι ἴσο μέ τό πλῆθος Α τῶν ἀκμῶν σύν δύο.

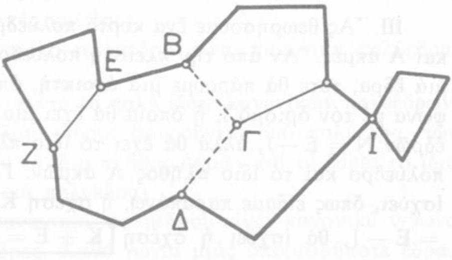
Ἀπόδειξη. Γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ ἀξιοσημείωτου αὐτοῦ θεωρήματος δίνουμε πρῶτα ἕναν ὁρισμό καί ἕνα λῆμμα.

Ι. Ὁρισμός. Λέγεται ἁπλή, ἀνοικτή, πολυεδρική ἐπιφάνεια ἕνα σύνολο ἀπό κυρτά πολύγωνα ὄχι ὁμοεπίπεδα ἀνά δύο, πού εἶναι διατεταγμένα ἔτσι, ὥστε τό καθένα τους νά ἔχει μέ ἕνα τουλάχιστο ἀπ' τ' ἄλλα μιά κοινή πλευρά ἤ κοινή κορυφή. Ἀκόμη, τά πολύγωνα αὐτά πρέπει νά ἔχουν ἐλεύθερες πλευρές (πού δέ συνορεύουν), οἱ ὁποῖες νά σχηματίζουν μιά κλειστή τεθλασμένη γραμμή (ὄχι ἀναγκαστικά ἐπίπεδη), πού δέ διασταυρώνεται. Τό σύνολο αὐτό τῶν πολυγώνων μπορεῖ νά ἀποτελεῖται καί μόνο ἀπό ἕνα κυρτό πολύγωνο.

Δηλαδή πρέπει οἱ ἐλεύθερες πλευρές νά εἶναι διαδοχικές καί ἀνά δύο νά μήν τέμνονται. Ἡ κλειστή τεθλασμένη γραμμή, τήν ὁποία σχηματίζουν, εἶναι τό «χεῖλος» τῆς ἀνοικτῆς πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας.

ΙΙ. Λῆμμα. Ἄν Ν εἶναι τό πλῆθος τῶν ἑδρῶν, Κ τό πλῆθος τῶν κορυφῶν καί Α τό πλῆθος τῶν ἀκμῶν μιᾶς ἀνοικτῆς, ἁπλῆς, πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας, τότε ἰσχύει: $K+N=A+1$.

Ἀπόδειξη. Γιά $N=1$ ἡ πρόταση ἰσχύει, γιατί τότε $K=A$, ὁπότε $K+1=A+1$, δηλαδή $K+N=A+1$. Ἔστω, τώρα, ἕνας φυσικός ἀριθμός $N>1$ καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά ὅλες τίς ἁπλές ἀνοικτές πολυεδρικές ἐπιφάνειες, πού ἔχουν πλῆθος ἑδρῶν μικρότερο ἀπό τό Ν (ὑπόθεση τῆς ἐπαγωγῆς). Θά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει καί γιά πλῆθος ἑδρῶν Ν. Γιά νά τό ἀποδείξουμε, θεωροῦμε μιά ἁπλή ἀνοικτή πολυεδρική ἐπιφάνεια μέ Ν ἕδρες, Κ κορυφές καί Α ἀκμές καί τή χωρίζουμε σέ δυό ἐπιφάνειες τοῦ ἴδιου εἴδους, συνδέοντας δυό κορυφές A_ρ καί A_τ τοῦ χείλους μέ ἕνα δρόμο, πού περιέχει μόνο ἐσωτερικές ἀκμές (σχ. 164) καί ἑπομένως δέν ἔχει κοινή πλευρά μέ τό χεῖλος. Ὁ δρόμος αὐτός (ὅπως π.χ. ὁ ΒΓΔ) χωρίζει τήν ἀρχική ἐπιφάνεια σέ δυό (ἐπίσης ἀνοικτές) πολυεδρικές ἐπιφάνειες, ἀπ' τίς ὁποῖες ἡ μιά ἔστω ὅτι ἔχει N_1 ἕδρες, K_1 κορυφές καί A_1 ἀκμές καί ἡ ἄλλη ἔχει N_2 ἕδρες, K_2 κορυφές καί A_2 ἀκμές. Ἐπειδή $N_1<N$ καί $N_2<N$, τό θεώρημα ἰσχύει γιά τίς δυό αὐτές μερικές ἐπιφάνειες σύμφωνα μέ τήν ὑπόθεσή μας. Ὥστε:



Σχ. 164

(1) $\{K_1+N_1=A_1+1,\ K_2+N_2=A_2+1\}$.

Οἱ A_1 ἀκμές τῆς μιᾶς ἐπιφάνειας καί οἱ A_2 ἀκμές τῆς ἄλλης, ὅταν ἑνωθοῦν, ἀποτελοῦν τίς Α ἀκμές τῆς ὁλικῆς μέ ἐπιπλέον τίς πλευρές τοῦ διαιρετικοῦ δρόμου, πού κατά τήν πρόσθεση τίς παίρνουμε διπλές. Ἄν, λοιπόν, εἶναι λ τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ διαχωριστικοῦ δρόμου, θά ἔχουμε:

(2) $$A_1+A_2=A+\lambda.$$

Οἱ κορυφές τοῦ διαχωριστικοῦ δρόμου θά εἶναι $\lambda+1$. Ἑπομένως οἱ K_1 κορυφές τῆς μιᾶς ἐπιφάνειας καί οἱ K_2 τῆς ἄλλης, ὅταν ἑνωθοῦν, ἀποτελοῦν τίς Κ κορυφές τῆς ἀρχικῆς, σύν τίς $\lambda+1$ κορυφές τοῦ δρόμου, πού τίς παίρνουμε κατά τήν πρόσθεση διπλές. Δηλαδή:

(3) $$K_1+K_2=K+\lambda+1.$$

Τέλος ἔχουμε ἀκόμα:

(4) $$N_1+N_2=N$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (1) παίρνουμε τήν:

$(K_1 + K_2) + (N_1 + N_2) = (A_1 + A_2) + 2$, ἡ ὁποία μέ βάση τίς (2), (3) καί (4) γίνεται:

$$K + \lambda + 1 + N = A + \lambda + 2 \Rightarrow K + N = A + 1$$

Σύμφωνα, τώρα, μέ τό νόμο τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς τό θεώρημα ἰσχύει γιά ὁποιοδήποτε πλῆθος ἑδρῶν N.

Συμπληρωματικές παρατηρήσεις. Ὁ διαχωριστικός δρόμος μπορεῖ νά ἀποτελεῖται ἀπό μία μόνο πλευρά (ὅπως π.χ. ἡ ΕΖ τοῦ σχ. 164) ἤ νά ἐκφυλίζεται σέ ἕνα σημεῖο (ὅπως π.χ. τό Ι τοῦ σχ. 164), δηλ. εἶναι δυνατό $\lambda = 1$ ἤ $\lambda = 0$. Θά ὑπάρχει ὅμως πάντοτε διαχωριστικός δρόμος, ὅταν $N > 1$. Γιατί, ἄν ὑπάρχει πολύγωνο, πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές ἐλεύθερες, αὐτό θά ἐπικοινωνεῖ μέ ἕνα ἄλλο ἄλλο μέ μιά κορυφή (ἀφοῦ $N > 1$), τήν ὁποία θά πάρουμε ὡς σημεῖο διαχωριστικό τῶν δυό μερικῶν ἐπιφανειῶν. Ἄν πάλι δέ συμβαίνει τό παραπάνω, τότε θά ὑπάρχει ἕνα πολύγωνο ἤ πολύγωνα μέ πλευρά ἤ πλευρές ὄχι ἐλεύθερες (ἀφοῦ $N > 1$), οἱ ὁποῖες δίνουν τό διαχωριστικό δρόμο.

ΙΙΙ. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα κυρτό πολύεδρο, πού ἔχει K κορυφές, E ἕδρες καί A ἀκμές. Ἄν ἀπό τήν κλειστή πολυεδρική ἐπιφάνειά του ἀφαιρέσουμε μιά ἕδρα, τότε θά πάρουμε μιά **ἀνοικτή**, ἁπλή, πολυεδρική ἐπιφάνεια σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό Ι, ἡ ὁποία θά ἔχει μιά ἕδρα λιγότερη, δηλαδή πλῆθος ἑδρῶν $N = E - 1$, ἀλλά θά ἔχει τό ἴδιο πλῆθος κορυφῶν K μέ τό ἀρχικό πολύεδρο καί τό ἴδιο πλῆθος A ἀκμῶν. Γι' αὐτήν τήν ἀνοικτή ἐπιφάνεια ἰσχύει, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἡ σχέση $K + N = A + 1$ καί, ἐπειδή $N = E - 1$, θά ἰσχύει ἡ σχέση $\boxed{K + E = A + 2}$ γιά τό κυρτό πολύεδρο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πάνω στό θεώρημα τοῦ Euler

297. Ἄν E_3 εἶναι τό πλῆθος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν, E_4 τῶν τετραπλευρικῶν, E_5 τῶν πενταγωνικῶν ... ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου, πού ἔχει A ἀκμές καί ἄν K_3 εἶναι τό πλῆθος τῶν τρίεδρων γωνιῶν, K_4 τῶν τετράεδρων (στερεῶν) γωνιῶν, K_5 τῶν πεντάεδρων..., τίς ὁποῖες ἔχει τό πολύεδρο, τότε ἰσχύει ἡ σχέση: $2A = 3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + \ldots = 3K_3 + 4K_4 + 5K_5 + \ldots$ (Ἡ πρόταση αὐτή εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό (Θ) Euler, χρησιμεύει ὅμως γιά τήν ἀπόδειξη τῶν ἑπόμενων προτάσεων τῆς ὁμάδας αὐτῆς).

298. Σέ κάθε κυρτό πολύεδρο μέ K κορυφές, E ἕδρες καί A ἀκμές ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

i) $3E \leqslant 2A$, ii) $3K \leqslant 2A$, iii) $A + 6 \leqslant 3E$, iv) $A + 6 \leqslant 3K$

(**Ὑποδ.** i) $3E \leqslant 2A \Longleftrightarrow 3(E_3 + E_4 + E_5 + \ldots) \leqslant 3E_3 + 4E_4 + 5E_5 + \ldots$ (ἄσκ. 297 ἡ ὁποία εἶναι ἀληθινή. ii) $3K \leqslant 2A \Longleftrightarrow 3(K_3 + K_4 + \ldots) \leqslant 3K_3 + 4K_4 + \ldots$ iii) Τό (Θ) Euler δίνει $3K + 3E = 3A + 6$. Ἀλλά $3K \leqslant 2A$ (σχέση ii). Ἄρα $2A + 3E \geqslant 3A + 6$).

299. Σέ κάθε κυρτό πολύεδρο τό πλῆθος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν σύν τό πλῆθος τῶν τρίεδρων (στερεῶν) γωνιῶν εἶναι τουλάχιστον ἴσο μέ 8. Συνεπῶς ὑπάρχει τουλάχιστον ἤ μία τριγωνική ἕδρα ἤ μία τρίεδρη γωνία. (**Ὑποδ.** $K + E = A + 2 \Rightarrow 4K + 4E = 2A + 2A + 8 \Rightarrow 4(K_3 + K_4 + \ldots) + 4(E_3 + E_4 + \ldots) = 2A + 2A + 8$. Χρησιμοποιῆστε τήν ἄσκηση 297).

300. Δέν ὑπάρχει κυρτό πολύεδρο, στό ὁποῖο ὅλες οἱ ἕδρες νά ἔχουν περισσότερες ἀπό 5 πλευρές ἤ ὅλες οἱ στερεές γωνίες νά ἔχουν περισσότερες ἀπό 5 ἀκμές. (**Ὑποδ.** Κατά τήν ἄσκ. 298 εἶναι $A + 6 \leqslant 3E \Rightarrow 2A + 12 \leqslant 6E \Rightarrow 6E - 2A \geqslant 12$, ἀλλά $E = E_3 + E_4 +$

$+ \ldots$ καί $2A = 3E_3 + 4E_4 + \ldots$(ἄσκ. 297). Φτάνουμε ἔτσι στήν $3E_3 + 2E_4 + E_5 > 12$).

301. Νά ἀποδείξετε ὅτι δέν ὑπάρχει κυρτό πολύεδρο μέ 7 ἀκμές.

302. Ἕνα κυρτό πολύεδρο ἔχει 5 ἕδρες. Πόσες κορυφές μπορεῖ νά ἔχει; Πόσες ἀκμές μπορεῖ νά ἔχει;

303. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν πολυγώνων (ἑδρῶν), πού περικλείουν κυρτό πολύεδρο, εἶναι διπλάσιο τοῦ ἄθροισματος τῶν γωνιῶν ἑνός ἐπίπεδου κυρτοῦ πολυγώνου, πού ἔχει τό ἴδιο πλῆθος κορυφῶν μέ τό πολύεδρο.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

172. α΄) Ὀνομάζουμε **κανονική στερεά γωνία**, μιά κυρτή στερεά γωνία, πού ἔχει ὅλες τίς ἕδρες της ἴσες καί ὅλες τίς δίεδρές της ἴσες.

β΄) **Κανονικό πολύεδρο.** Ὀνομάζουμε κανονικό πολύεδρο ἕνα κυρτό πολύεδρο, τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ ἕδρες εἶναι ἴσα κανονικά πολύγωνα καί ὅλες οἱ στερεές γωνίες εἶναι κανονικές καί ἴσες.

Ὁ κύβος, π.χ. καί τό κανονικό τετράεδρο εἶναι κανονικά πολύεδρα.

173. α΄) (Θ) —**Ὑπάρχουν πέντε τό πολύ εἴδη κανονικῶν πολυέδρων·** Ὡς κανονικά πολύεδρα τοῦ ἴδιου εἴδους θεωροῦνται δυό πολύεδρα, τῶν ὁποίων οἱ στερεές γωνίες ἔχουν τό ἴδιο πλῆθος ἀκμῶν καί οἱ ἕδρες τό ἴδιο πλῆθος πλευρῶν (ὅμοια κανονικά πολύεδρα).

Ἔστω ὅτι οἱ ἕδρες ἑνός κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι κανονικά ν-γωνα καί οἱ στερεές γωνίες του μ-εδρες. Κάθε γωνία μιᾶς ὁποιασδήποτε ἕδρας τοῦ πολυέδρου θά εἶναι τότε $\omega = 2 - \frac{4}{\nu}$ ορθ. Τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἐπίπεδων γωνιῶν μιᾶς στερεῆς γωνίας τοῦ πολυέδρου θά εἶναι μω. Ἀλλά $\mu\omega < 4$ ορθ. καί ἐπομένως $\omega < \frac{4}{\mu}$ ορθ.

Συμπεραίνουμε ὅτι: $2 - \frac{4}{\nu} < \frac{4}{\mu}$ δηλαδή:

$$(1) \qquad \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} > \frac{1}{2}.$$

Οἱ φυσικοί ἀριθμοί μ καί ν εἶναι τουλάχιστον ἴσοι μέ τό 3. Δέν μποροῦν ὅμως νά εἶναι καί οἱ δυό μεγαλύτεροι ἀπό τό 3, γιατί $\mu \geqq 4 \wedge \nu \geqq 4 \Rightarrow 1/\mu + 1/\nu \leqq 1/2$, δηλ. ἡ (1) δέν ἐπαληθεύεται. Ἐπομένως μόνο ὁ ἕνας ἀπ' αὐτούς πρέπει νά ἔχει τήν τιμή 3. Ἔστω ὅτι $\mu = 3$. Τότε ἡ (1) δίνει: $\frac{1}{\nu} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2} \Rightarrow \nu < 6$. Ἐπομένως, ἄν $\mu = 3$, τότε $\nu = 5$ ἤ 4 ἤ 3. Ἔχουμε, λοιπόν, γιά τήν (1) τρεῖς λύσεις. ($\mu = 3$, $\nu = 3$), ($\mu = 3$, $\nu = 4$), ($\mu = 3$, $\nu = 5$).

Ἐξαιτίας τῆς συμμετρίας τῆς (1) θά ἔχουμε καί δυό ἀκόμη λύσεις:

($\mu = 4$, $\nu = 3$) καί ($\mu = 5$, $\nu = 3$).

Ὥστε ὑπάρχουν μόνο 5 δυνατότητες:

$(\nu = 3, \mu = 3)$, $(\nu = 3, \mu = 4)$, $(\nu = 4, \mu = 3)$, $(\nu = 3, \mu = 5)$, $(\nu = 5, \mu = 3)$.

β΄) **Προσδιορισμός τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν.** Ἄς συμβολίσουμε μέ Ε τό πλῆθος τῶν ἑδρῶν, μέ Κ τό πλῆθος τῶν κορυφῶν (καί τῶν στερεῶν γωνιῶν) καί μέ Α τό πλῆθος τῶν ἀκμῶν ἑνός κανονικοῦ πολυέδρου, τοῦ ὁποίου οἱ ἕδρες εἶναι κανονικά ν-γωνα καί οἱ στερεές γωνίες κανονικές μ-εδρες. Τότε ἔχουμε:

(2) $\nu E = 2A$ (καθεμιά ἀκμή ἀνήκει σέ δυό ἕδρες).

(3) $\mu K = 2A$ (καθεμιά ἀκμή ἀνήκει σέ δυό στερεές γωνίες).

(4) $K + E = A + 2$ (Θεώρημα τοῦ Euler, § 171).

Ἡ (4) ἐξαιτίας τῶν (2) καί (3) γίνεται:

$$\frac{2A}{\mu} + \frac{2A}{\nu} = A + 2 \Rightarrow (5) \quad \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}$$

Γνωρίζοντας τά ν καί μ βρίσκουμε ἀπό τήν (5) τό Α καί ἀπό τίς (2) καί (3) βρίσκουμε τά Ε καί Κ.

Βρίσκουμε ἔτσι:

i) Γιά $\nu = \mu = 3$: $A = 6$, $E = 4$, $K = 4$ (κανον. τετράεδρο)

ii) » $\nu = 3, \mu = 4$: $A = 12$, $E = 8$, $K = 6$ (κανον. 8-εδρο)

iii) » $\nu = 4, \mu = 3$: $A = 12$, $E = 6$, $K = 8$ (κανον. 6-εδρο)

iv) » $\nu = 3, \mu = 5$: $A = 30$, $E = 20$, $K = 12$ (κανον. 20-εδρο)

v) » $\nu = 5, \mu = 3$: $A = 30$, $E = 12$, $K = 20$ (κανον. 12-εδρο)

174. Τά 5 Πλατωνικά στερεά. Οἱ 5 λύσεις τῆς ἀνισότητας (1) τῆς προηγούμενης παραγράφου ἀντιστοιχοῦν στήν πραγματικότητα σέ πέντε εἴδη κανονικῶν πολυέδρων, τά ὁποῖα λέγονται *«τά 5 Πλατωνικά στερεά»* καί τά ὁποῖα πράγματι κατασκευάζονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VII

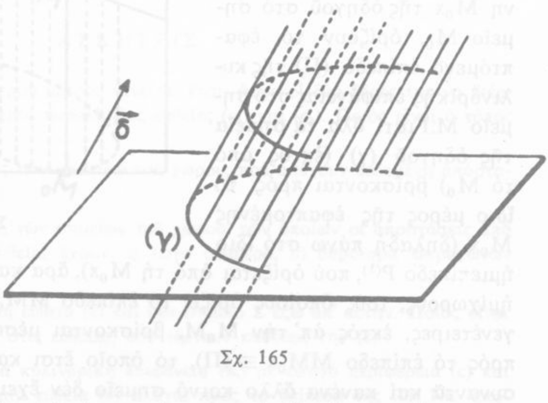
ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

175. Γενικός ὁρισμός τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας.— Ὀνομάζουμε κυλινδρική ἐπιφάνεια τό σύνολο (ἤ «τόπο») τῶν εὐθειῶν, οἱ ὁποῖες εἶναι παράλληλες πρός μιά σταθερή διεύθυνση $\vec{\delta}$ καί ταυτοχρόνως τέμνουν μιά σταθερή γραμμή (γ), πού βρίσκεται πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο, ὄχι παράλληλο πρός τή $\vec{\delta}$. (Σχ. 165).

Ἡ γραμμή (γ) λέγεται **ὁδηγός**. Καθεμιά ἀπ' τίς εὐθεῖες τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται **γενέτειρα**.

Συνήθως λέμε ὅτι ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια σχηματίζεται «ἀπό μιά μεταβλητή εὐθεία, πού κινεῖται παράλληλα πρός μιά δεδομένη εὐθεία καί τέμνει πάντοτε μιά ὁδηγό γραμμή».



Σχ. 165

Ἡ ὁδηγός μπορεῖ νά ἀντικατασταθεῖ καί ἀπό μιά γραμμή ὄχι ἐπίπεδη.

Ἐπίπεδη τομή μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται τό σύνολο τῶν κοινῶν σημείων τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καί ἑνός ἐπιπέδου, πού τέμνει τίς γενέτειρες. **Οἱ παράλληλες τομές μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας εἶναι ἴσες μεταξύ τους,** γιατί προκύπτουν ἡ μιά ἀπό τήν ἄλλη μέ μεταφορά κατά ἕνα διάνυσμα.

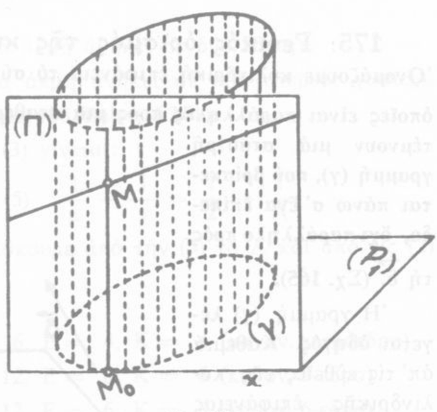
Κάθετη τομή τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας λέγεται κάθε τομή της ἀπό ἕνα ἐπίπεδο κάθετο πρός τίς γενέτειρες.

176. Κυλινδρικές ἐπιφάνειες μέ ὁδηγό μιά περιφέρεια.

α') Στά ἑπόμενα μόνο τέτοιες κυλινδρικές ἐπιφάνειες θά ἐξετάσουμε. Γι' αὐτό, ὅταν θά λέμε κυλινδρική ἐπιφάνεια, θά ἐξυπακούεται ὅτι αὐτή ἔχει ὁδηγό μιά περιφέρεια.

β΄) Ἕνα σημεῖο Ρ λέγεται **ἐσωτερικό σημεῖο** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας, ὅταν ἡ παράλληλη πρός τίς γενέτειρες, πού περνᾶ ἀπό τό Ρ, τέμνει τό ἐπίπεδο τῆς ὁδηγοῦ περιφέρειας σ' ἕνα ἐσωτερικό της σημεῖο. Τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ἀποτελεῖ τό **ἐσωτερικό** της.

γ΄) **Ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο** μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας σ' ἕνα σημεῖο της Μ λέγεται τό ἐπίπεδο, πού περιέχει τή γενέτειρα, πού περνᾶ ἀπό τό Μ καί πού δέν ἔχει, ἐκτός ἀπό τή γενέτειρα, ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια. Ἄν ἡ γενέτειρα, πού περνᾶ ἀπό τό Μ, τέμνει τήν ὁδηγό στό M_0 (σχ. 166), τότε ἡ MM_0 καί ἡ ἐφαπτομένη M_0x τῆς ὁδηγοῦ στό σημεῖο M_0, ὁρίζουν τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο (Π) τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας στό σημεῖο Μ. Γιατί ὅλα τά σημεῖα τῆς ὁδηγοῦ (γ) (ἐκτός ἀπό τό M_0) βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς ἐφαπτομένης M_0x (δηλαδή πάνω στό ἴδιο ἡμιεπίπεδο Ρ[1], πού ὁρίζεται ἀπό τή M_0x), ἄρα καί μέσα στόν ἕνα ἀπό τούς ἡμίχωρους, τούς ὁποίους ὁρίζει τό ἐπίπεδο MM_0x. Συνεπῶς καί ὅλες οἱ γενέτειρες, ἐκτός ἀπ' τήν M_0M, βρίσκονται μέσα στόν ἴδιο ἡμίχωρο ὡς πρός τό ἐπίπεδο $MM_0x \equiv (\Pi)$, τό ὁποῖο ἔτσι καμιά ἄλλη γενέτειρα δέν συναντᾶ καί κανένα ἄλλο κοινό σημεῖο δέν ἔχει μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια, ἐκτός ἀπό τά σημεῖα τῆς εὐθείας MM_0.

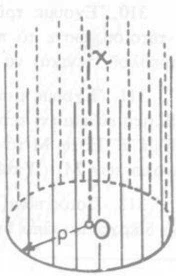


Σχ. 166

Ὁποιοδήποτε ἄλλο ἐπίπεδο, πού περιέχει τήν MM_0 καί εἶναι διαφορετικό ἀπό τό (Π), τέμνει τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια καί κατά μιά δεύτερη γενέτειρα, διαφορετική ἀπό τή MM_0, γιατί τό ἴχνος του πάνω στό ἐπίπεδο τῆς ὁδηγοῦ τέμνει τήν ὁδηγό περιφέρεια καί σέ ἄλλο σημεῖο, διαφορετικό ἀπό τό M_0. Ἑπομένως σέ κάθε σημεῖο Μ τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας **ἕνα μόνο ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο ὑπάρχει. Κατά μῆκος μιᾶς γενέτειρας τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο, παραμένει τό ἴδιο.**

δ΄) **Εὐθεία ἐφαπτόμενη σέ κυλινδρική ἐπιφάνεια.** Κάθε εὐθεία τοῦ ἐφαπτόμενου ἐπιπέδου (Π), πού περνᾶ ἀπό τό Μ, δέν ἔχει ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τήν κυλινδρική ἐπιφάνεια, ἀφοῦ ὅλες οἱ γενέτειρες (ἐκτός ἀπό τήν MM_0) βρίσκονται, ὅπως εἴδαμε ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο (Π). Κάθε τέτοια εὐθεία λέμε ὅτι **ἐφάπτεται** στήν κυλινδρική ἐπιφάνεια στό Μ (σχ. 166).

177. Κυλινδρικές ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς. **Μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγό περιφέρεια καί μέ γενέτειρες κάθετες στό ἐπίπεδο τῆς ὁδηγοῦ περιφέρειας λέγεται «κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς».** Γιατί, ἄν ὀνομάσουμε **ἄξονα** τῆς κυλινδρικῆς αὐτῆς ἐπιφάνειας τήν κάθετο στό ἐπίπεδο τῆς ὁδηγοῦ στό κέντρο της (σχ. 167), τότε μιά ὁποιαδήποτε γενέτειρα προκύπτει ἀπό μιά ἄλλη σταθερή γενέτειρα, ἄν αὐτή ἡ τελευταία στραφεῖ γύρω ἀπό τόν ἄξονα Ox κατά μιά κατάλληλη γωνία θ (§ 80). Μεταβάλλοντας τήν θ ἀπό 0 ἕως 360° παίρνουμε ὅλες τίς γενέτειρες μέ στροφή μιᾶς ὁρισμένης ἀπ' αὐτές.



Σχ. 167

— Οἱ κάθετες τομές τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς εἶναι περιφέρειες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

304. Δίεδρη γωνία σταθεροῦ μέτρου κινεῖται ἔτσι, ὥστε οἱ δύο ἕδρες της νά διέρχονται πάντοτε ἀπό δύο σταθερές παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῆς ἀκμῆς της;

305. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού ἀπέχουν δεδομένη ἀπόσταση α ἀπό δεδομένη εὐθεία (ε) ;

306. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων οἱ ἀποστάσεις ἀπό δύο δεδομένες παράλληλες εὐθεῖες ἔχουν: i) λόγο σταθερό, ii) ἄθροισμα τετραγώνων σταθερό ;

307. Ἔχουμε μιά σταθερή εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο Σ ἔξω ἀπ' αὐτήν. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Σ στίς εὐθεῖες, πού τέμνουν καθέτως τήν (ε) ;

308. Ἄς θεωρήσουμε μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια (Κ) μέ ὁδηγό περιφέρεια (c) καί γενέτειρες παράλληλες πρός μιά εὐθεία (δ) πλάγια πρός τό ἐπίπεδο τῆς (c). Νά ἀποδείξετε: i) Ὅτι κάθε ἐπίπεδο (Π) $\perp$ (δ) εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας τῆς (Κ). ii) Ὅτι ἐπάνω στήν (Κ), ἐκτός ἀπό τήν οἰκογένεια κυκλικῶν τομῶν παράλληλων πρός τόν (c), ὑπάρχει καί δεύτερη οἰκογένεια παράλληλων κυκλικῶν τομῶν. iii) Ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδο συμμετρίας τῆς (Κ) διαφορετικό ἀπό τά ἐπίπεδα συμμετρίας, πού βρέθηκαν στό ἐρώτημα i). (**Ὑποδ.** Γιά τό ii). Ἀφοῦ τό (Π) εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας καί ἡ (c) βρίσκεται πάνω στήν (Κ) $\Rightarrow$ τό συμμετρικό τῆς (c) ὡς πρός τό (Π) εἶναι πάλι περιφέρεια πάνω στήν (Κ). Γιά τό iii). Ἔστω (η) εὐθεία$\parallel$(δ), πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο O τῆς (c) καί (Σ) ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό τήν (η) καί $\perp$ στό ἐπίπεδο (Ρ) τῆς (c). Δεῖξτε ὅτι, ἄν $N \in (c)$, τότε καί τό συμμετρικό τοῦ Ν ὡς πρός (Σ) ἀνήκει στήν (Κ)).

309. i) Ἔχουμε δύο κυλινδρικές ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς μέ παράλληλους ἄξονες. Νά ὁρίσετε ἐπίπεδο, πού ἐφάπτεται καί στίς δύο. Διερεύνηση. ii) Κάθε εὐθεία ἐπάνω σέ ἐπίπεδο, πού ἐφάπτεται σέ μιά κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἔχει μέ τόν ἄξονα τῆς ἐπιφάνειας ἐλάχιστη ἀπόσταση ἴση μέ τήν ἀκτίνα τῆς ὁδηγοῦ περιφέρειας. iii) Ἄν δοθοῦν δύο παράλληλες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, πού ἔχουν ἐλάχιστη ἀπόσταση α μέ τήν (ε_1) καί ταυτοχρόνως ἐλάχιστη ἀπόσταση β μέ τήν (ε_2). (α, β δεδομένα τμήματα).

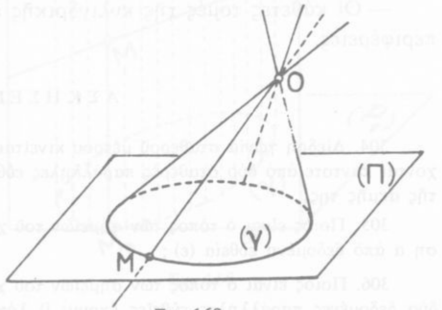
310. Ἔχουμε τρία σημεῖα Α, Β, Γ ὄχι συνευθειακά. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος σημείου Μ τέτοιου, ὥστε τό παραλληλόγραμμο μέ κορυφές τά μέσα τοῦ τετραπλεύρου ΜΑΒΓ (στρεβλοῦ, γενικά) νά ἔχει σταθερό ἐμβαδόν.

311. Ἔχουμε μιά σταθερή εὐθεία (ε) καί ἕνα σταθερό τμῆμα α. Θεωροῦμε μιά μεταβλητή εὐθεία (χ) τέτοια, ὥστε ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση μεταξύ (χ) καί (ε) νά εἶναι πάντοτε ἴση μέ α. Ἔστω Μ τό σημεῖο, ὅπου ἡ κοινή $\perp$ τῶν (χ) καί (ε) τέμνει τήν (χ). Ζητεῖται τό σύνολο τῶν Μ. (**Ὑποδ.** Νά προβληθεῖ τό σχῆμα σέ ἕνα ἐπίπεδο (Π) $\perp$ (ε)).

312. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, πού διέρχονται ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Α καί ἔχουν μιά σταθερή γενέτειρα (ε).

ΚΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

178. Γενικός ὁρισμός τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας. **Ὀνομάζουμε κωνική ἐπιφάνεια τό σύνολο (ἤ τόν τόπο) τῶν εὐθειῶν, οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Ο καί τέμνουν μιά σταθερή γραμμή (γ), ἡ ὁποία βρίσκεται πάνω σ᾿ ἕνα ἐπίπεδο, πού δέν περιέχει τό Ο** (σχ. 168).



Σχ. 168

Τό σημεῖο Ο λέγεται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας.

Ἡ γραμμή (γ) λέγεται **ὁδηγός**.

Κάθε εὐθεία τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας λέγεται **γενέτειρα**.

Συνήθως λέμε ὅτι ἡ κωνική ἐπιφάνεια παράγεται «ἀπό μιά μεταβλητή εὐθεία, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο καί τέμνει πάντοτε μιά ὁδηγό γραμμή».

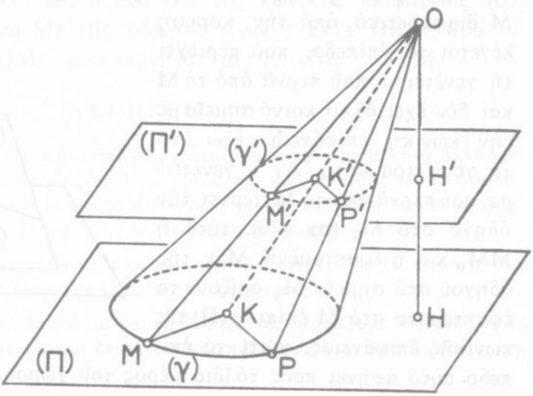
Ἡ κωνική ἐπιφάνεια ἔχει δυό **χῶνες**. Ἡ μιά χώνη ἀποτελεῖται ἀπό τίς ἡμιευθεῖες, πού ξεκινοῦν ἀπό τό Ο καί τέμνουν τήν ὁδηγό (γ), τήν ὁποία ὑποθέτουμε ὡς κλειστή γραμμή καί ἡ ἄλλη ἀπό τίς προεκτάσεις τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν.

Ἐπίπεδη τομή μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας λέγεται ἡ γραμμή, πού εἶναι τό σύνολο τῶν κοινῶν σημείων τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας καί ἑνός ἐπιπέδου, πού τέμνει τίς γενέτειρες.

179. Κωνικές ἐπιφάνειες μέ ὁδηγό μιά περιφέρεια.

α΄) Στά ἑπόμενα μόνο τέτοιες κωνικές ἐπιφάνειες θά ἐξετάζουμε. Γι᾿ αὐτό, λέγοντας «κωνική ἐπιφάνεια», θά ὑπονοοῦμε κωνική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγό μιά περιφέρεια.

β΄) **Παράλληλες τομές. (Θ) — Κάθε τομή μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας,**



Σχ. 169

παράλληλη πρός τήν ὁδηγό περιφέρεια, εἶναι ἐπίσης περιφέρεια.

Ἔστω (γ′) ἡ τομή μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἀπό ἕνα ἐπίπεδο (Π′)|| πρός τό ἐπίπεδο (Π) τῆς ὁδηγοῦ (γ). Ἡ εὐθεία ΟΚ, πού συνδέει τήν κορυφή Ο μέ τό κέντρο Κ τῆς ὁδηγοῦ, τέμνει τό (Π′) σέ ἕνα σταθερό σημεῖο Κ′ (σχ. 169).

Ἄς πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ′ τῆς (γ′). Ἡ γενέτειρα, πού περνᾶ ἀπό τό Μ′, τέμνει τήν ὁδηγό περιφέρεια στό Μ καί εἶναι Κ′Μ′||ΚΜ (τομές παρ/λων ἐπιπέδων ἀπό ἕνα τρίτο). Ἀπ' τήν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΟΚ′Μ′ καί ΟΚΜ παίρνουμε:

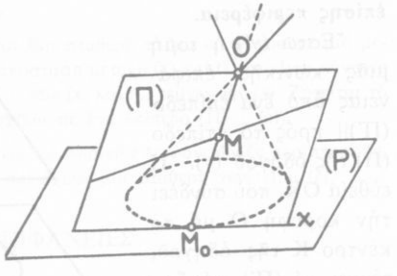
(1) $\frac{K'M'}{KM} = \frac{OK'}{OK} = \frac{OH'}{OH}$, ὅπου ΟΗ′ καί ΟΗ οἱ ἀποστάσεις τῶν σταθερῶν ἐπιπέδων (Π′) καί (Π) ἀπό τό Ο. Ἐπειδή $KM = R =$ ἀκτίνα τῆς ὁδηγοῦ, συμπεραίνουμε ἀπό τίς (1) ὅτι $K'M' = R \cdot \frac{OH'}{OH} =$ σταθερό μῆκος. Ἑπομένως κάθε σημεῖο τῆς γραμμῆς (γ′) ἀπέχει ἀπό τό Κ′ σταθερή ἀπόσταση $M'K' = R \cdot \frac{OH'}{OH} = R'$, δηλ. ὅλα τά σημεῖα τῆς γραμμῆς (γ′) βρίσκονται πάνω στήν περιφέρεια (Κ′, R′) πού βρίσκεται πάνω στό (Π′). **Ἀντιστρόφως** κάθε σημεῖο Ρ′ τῆς περιφέρειας (Κ′, R′) ἀνήκει στήν τομή (γ′). Γιατί ἡ εὐθεία ΟΡ′ τέμνει τό (Π) σ'ἕνα σημεῖο Ρ τέτοιο, ὥστε $KP/K'P' = OK/OK' = OH/OH'$, δηλ.:

$KP = K'P' \cdot \frac{OH}{OH'} = R \cdot \frac{OH'}{OH} \cdot \frac{OH}{OH'} = R$. Ἄρα τό Ρ ἀνήκει στήν ὁδηγό καί συνεπῶς τό Ρ′ ἀνήκει σέ μιά γενέτειρα ΟΡ, ἀλλά ἀνήκει καί στό (Π′), ἄρα ἀνήκει καί στήν τομή (γ′). Ἑπομένως (γ′) ≡ (Κ, R′).

Τά ἴδια ἰσχύουν καί ὅταν τό (Π′) τέμνει τήν ἄλλη χώνη, ὁπότε ἡ τομή μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ὁδηγός τῆς ἄλλης χώνης.

γ′) Ἕνα σημεῖο Ν λέγεται **ἐσωτερικό σημεῖο** μιᾶς χώνης τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας, ὅταν ἡ εὐθεία ΟΝ, πού συνδέει τό Ν μέ τήν κορυφή Ο, τέμνει τό ἐπίπεδο τῆς ὁδηγοῦ τῆς χώνης σ' ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο τῆς ὁδηγοῦ (πού ἀντιστοιχεῖ στή χώνη, πού ἐξετάζουμε).

δ΄) **Ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο** μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας σ' ἕνα σημεῖο της Μ διαφορετικό ἀπό τήν κορυφή λέγεται τό ἐπίπεδο, πού περιέχει τή γενέτειρα, πού περνᾶ ἀπό τό Μ καί δέν ἔχει ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τήν κωνική ἐπιφάνεια, ἔξω ἀπό τή γενέτειρα αὐτή. Ἄν ἡ γενέτειρα, πού περνᾶ ἀπό τό Μ, τέμνει τήν ὁδηγό στό M_0 (σχ. 170), τότε ἡ MM_0 καί ἡ ἐφαπτομένη M_0x τῆς ὁδηγοῦ στό σημεῖο M_0 ὁρίζουν τό ἐφαπτόμενο στό Μ ἐπίπεδο (Π) τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας, γιατί τό ἐπίπεδο αὐτό ἀφήνει πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου κάθε χώνη (ἐκτός ἀπ' τή γενέτειρα MM_0) καί ἑπομένως δέν ἔχει ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τήν κωνική ἐπιφάνεια. Αὐτό εἶναι καί τό μοναδικό ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τή MM_0 καί δέν τέμνει καμιά ἄλλη γενέτειρα. Αὐτά ἀποδεικνύονται μέ συλλογισμούς παρόμοιους μέ ἐκείνους, πού κάναμε στήν περίπτωση τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας (§ 176, γ΄).



Σχ. 170

Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι, **κατά μῆκος μιᾶς γενέτειρας, τό ἐφαπτόμενο στήν κωνική ἐπιφάνεια ἐπίπεδο παραμένει τό ἴδιο.** Ἡ σταθερή γενέτειρα, τήν ὁποία περιέχει, λέγεται *«γενέτειρα ἐπαφῆς»*.

Κάθε εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό Μ (διαφορετική ἀπό τή MM_0) καί βρίσκεται πάνω στό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο (Π) (σχ. 170), δέν ἔχει ἄλλο κοινό σημεῖο μέ τήν κωνική ἐπιφάνεια, γιατί οὔτε τό (Π) ἔχει. Μιά τέτοια εὐθεία λέγεται **ἐφαπτομένη τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας** στό σημεῖο Μ.

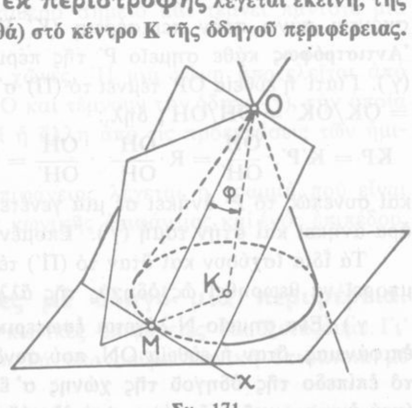
180. Κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς **λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή Ο προβάλλεται (ὀρθά) στό κέντρο Κ τῆς ὁδηγοῦ περιφέρειας.** (Κάνετε παραβολή μέ § 177.)

Ἡ εὐθεία ΟΚ λέγεται **ἄξονας** τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς (σχ. 171).

Ἡ γωνία κάθε γενέτειρας μέ τόν ἄξονα ἔχει σταθερό μέτρο φ (γιατί τό τρίγωνο ΟΜΚ ἔχει πλευρές μέ σταθερό μῆκος, ὅταν ἡ γενέτειρα ΟΜ μετατοπίζεται).

Ἡ γωνία 2φ λέγεται **«ἄνοιγμα τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας»**.

Τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστρο-



Σχ. 171

φῆς, σ' ἕνα σημεῖο της Μ, εἶναι κάθετο στό ἐπίπεδο, πού περιέχει τή γενέτειρα ἐπαφῆς ΟΜ καί τόν ἄξονα ΟΚ τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας (σχ. 171). Γιατί ἡ ἐφαπτομένη Μx τῆς ὁδηγοῦ εἶναι ⊥ Επιπ ΟΚΜ, ἄρα καί τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο ΟΜx, πού περνᾶ ἀπ' αὐτήν, εἶναι ⊥ΟΚΜ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

313. Ἀπό δύο εὐθεῖες, πού τέμνονται, διέρχονται δύο ἐπίπεδα μεταβλητά, ἀλλά πάντοτε κάθετα μεταξύ τους. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ τόπος τῆς κοινῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν ἐπιπέδων εἶναι κωνική ἐπιφάνεια μέ ὁδηγό περιφέρεια καί ὅτι ὑπάρχουν δύο οἰκογένειες παράλληλων κυκλικῶν τομῶν ἐπάνω στήν κωνική αὐτή ἐπιφάνεια.

314. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κωνικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, οἱ ὁποῖες ἐφάπτονται μέ δύο δεδομένα ἐπίπεδα πού τέμνονται ;

315. Ἔχουμε μιά κωνική ἐπιφάνεια καί τήν ὁδηγό της περιφέρεια. Νά ὁρίσετε τά ἐπίπεδα, πού ἐφάπτονται στήν κωνική ἐπιφάνεια καί πού διέρχονται ἀπό δεδομένο σημεῖο τοῦ χώρου. Διερεύνηση.

316. Μιά κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς περιέχει τρεῖς γενέτειρες κάθετες μεταξύ τους ἀνά δύο. Νά ὑπολογίσετε τό συνημίτονο τοῦ ἀνοίγματός της.

ΣΧΗΜΑΤΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

181. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἡμιεπίπεδο $\Pi^{(1)}$, πού ἔχει σύνορο (δ) καί ἕνα ἐπίπεδο σχῆμα F, τοῦ ὁποίου τά σημεῖα βρίσκονται πάνω στό $\Pi^{(1)}$ ἤ καί πάνω στό σύνορο (δ). Τότε **τό σύνολο Σ τῶν σημείων τοῦ χώρου, πού τό καθένα τους προκύπτει ἀπό στροφή ἑνός σημείου τοῦ F γύρω ἀπό τήν εὐθεία (δ) κατά ὁποιαδήποτε γωνία ἀπό 0^0 ἕως 360^0 (§ 80), λέγεται σχῆμα, πού παράγεται ἀπό τό F, ὅταν τό F στρέφεται γύρω ἀπό τή (δ).**

Ἡ εὐθεία (δ) λέγεται «ἄξονας» τοῦ σχήματος ἐκ περιστροφῆς.

Ἄν τό F εἶναι γραμμή, τότε τό Σ λέγεται *ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς* καί ἄν τό F εἶναι ἐπίπεδη περιοχή, τό Σ λέγεται *στερεό ἐκ περιστροφῆς*. Τά σημεῖα τοῦ Σ, πού προκύπτουν ἀπό τά σημεῖα τοῦ F μέ στροφή κατά μία καί τήν ἴδια γωνία, θ' ἀποτελοῦν ἕνα **μεσημβρινό** τοῦ Σ. Ἐπειδή ἡ θ μπορεῖ νά πάρει ἄπειρες τιμές, ἔχουμε ἄπειρο πλῆθος μεσημβρινῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ὅλοι ἴσοι πρός τό σχῆμα F (§ 80, β').

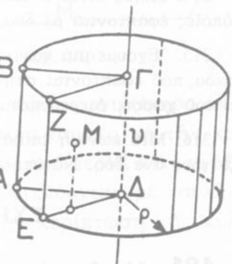
Ἄν τό F εἶναι εὐθεία || (δ), τότε παράγεται κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς καί ἄν εἶναι ἡμιευθεία, πού ἀρχίζει ἀπό ἕνα σημεῖο τῆς (δ), τότε παράγεται ἡ μιά χώνη μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς.

182. Ἡ περιοχή τοῦ χώρου μεταξύ δύο παράλληλων ἐπιπέδων. Ἄν δοθοῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), τότε ὅλα τά σημεῖα τοῦ καθενός βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ἄλλου. Γιατί, ἄν δυό σημεῖα Μ καί Ν τοῦ (Ρ) βρίσκονταν ἑκατέρωθεν τοῦ (Π), τότε τό τμῆμα ΜΝ καί συνεπῶς καί τό (Ρ) θά εἶχε κοινό σημεῖο μέ τό (Π).

Ἕνα σημεῖο Α λέμε ὅτι βρίσκεται μεταξύ τῶν (Π) καί (Ρ), ὅταν ὡς πρός τό (Π) βρίσκεται στό μέρος τοῦ χώρου, πού περιέχει τό (Ρ) καί ὡς πρός τό (Ρ) βρίσκεται στό μέρος τοῦ χώρου, πού περιέχει τό (Π). Τό σύνολο τῶν Α εἶναι ἡ περιοχή τοῦ χώρου μεταξύ τῶν παρ/λων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ).

ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

183. α΄) **Ὀρθός κυκλικός κύλινδρος ἤ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς λέγεται τό στερεό, πού παράγεται ἀπό ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ὅταν τοῦτο στρέφεται γύρω ἀπό τό φορέα τῆς μιᾶς ἀπό τίς πλευρές του (§ 181)** (σχ. 172). Ἡ πλευρά ΓΔ, πού μένει ἀκίνητη, εἶναι τό **ὕψος** τοῦ κυλίνδρου καί ὁ φορέας της εἶναι ὁ **ἄξονας** τοῦ κυλίνδρου.



Σχ. 172

Οἱ κύκλοι, πού γράφονται ἀπό τίς πλευρές ΑΔ καί ΒΓ, πού εἶναι κάθετες στόν ἄξονα, λέγονται **«βάσεις»** τοῦ κυλίνδρου καί τέλος ἡ ἐπιφάνεια, πού γράφεται ἀπό τήν πλευρά ΑΒ, πού εἶναι παρ/λη πρός τόν ἄξονα, λέγεται **παράπλευρη** (ἤ **κυρτή**) **ἐπιφάνεια** τοῦ κυλίνδρου. Αὐτή εἶναι τμῆμα τῆς ἀπέραντης κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας, τήν ὁποία διαγράφει ἡ εὐθεία ΑΒ. Οἱ διάφορες θέσεις, πού παίρνει τό ΑΒ κατά τή στροφή, λέγονται **γενέτειρες** τοῦ κυλίνδρου.

Ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου λέγεται ἡ ἕνωση τῶν δυό βάσεων καί τῆς κυρτῆς του ἐπιφάνειας, δηλ. ἡ ἐπιφάνεια, πού περικλείει τόν κύλινδρο.

Ὁ κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς εἶναι ὁρισμένος, ὡς πρός τό μέγεθος, ἀπό τά στοιχεῖα ρ καί υ: **ἀκτίνα βάσεως καί ὕψος**.

β΄) **Ἐσωτερικό.** Κάθε σημεῖο Μ τοῦ στερεοῦ κυλίνδρου, πού ἀνήκει στό ἐσωτερικό ἑνός μεσημβρινοῦ ΓΔΕΖ (σχ. 172), λέγεται ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κυλίνδρου. Βλέπουμε ὅτι κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κυλίνδρου (ὅπως τό Μ) βρίσκεται μεταξύ τῶν παρ/λων ἐπιπέδων, πού περιέχουν τίς βάσεις καί προβάλλεται (ὀρθά) πάνω στίς βάσεις, σέ ἐσωτερικά τους σημεῖα.

Ἀντιστρόφως, ἄν ἕνα σημεῖο (π.χ. τό Μ τοῦ σχ. 172) ἔχει τίς δυό αὐτές ἰδιότητες, τότε βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ μεσημβρινοῦ, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδο περνᾶ ἀπό τό σημεῖο αὐτό (καί ἀπό τόν ἄξονα ΓΔ). Ἀπ' αὐτά συμπεραίνουμε ὅτι τό ἐσωτερικό τοῦ κυλίνδρου (δηλ. τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν του σημείων) εἶναι τομή τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἀντίστοιχης κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας (§176, β΄) καί τοῦ μέρους τοῦ χώρου, πού βρίσκεται ἀνάμεσα στά παράλληλα ἐπίπεδα, πού περιέχουν τίς βάσεις (§ 182).

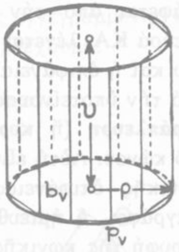
γ΄) **Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου ἐκ περιστροφῆς**. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα κανονικό πρίσμα *ἐγγεγραμμένο* στόν κύλινδρο (ρ, υ) (σχ. 173), δηλ. ἕνα πρίσμα, τοῦ ὁποίου οἱ βάσεις εἶναι κανονικά πολύγωνα μέ ν πλευρές ἐγγεγραμμένα στίς βάσεις τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ ὁποίου οἱ παράπλευρες ἀκμές εἶναι γενέτειρες τοῦ κυλίνδρου. Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ θεωρεῖται ὡς μιά «κατ᾽ ἔλλειψη» προσέγγιση τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, τόσο καλύτερη, ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό ν. Ὡς ἀκριβής τιμή τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου ὁρίζεται τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ὁ ὄγκος τοῦ κανονικοῦ πρίσματος, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύλινδρο, ὅταν τό πλῆθος ν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος αὐτοῦ τείνει πρός τό ἄπειρο. Ἄν δηλ. b_ν εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πρίσματος, ἔχουμε:

$$(1) \qquad V_{\text{κύλινδρου}} = (\text{ἀπό τόν ὁρισμό}) \lim_{\nu\to\infty} (b_\nu \cdot \upsilon)$$

Ἀλλά $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = \pi\rho^2$, συνεπῶς

$$(2) \qquad V_{\text{κυλίνδρου}}\,(\rho, \upsilon) = \boxed{\pi\rho^2\upsilon} \ (=\text{ἐμβαδόν βάσεως} \times \text{ὕψος}).$$

δ΄) **Ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφάνειας**: Τό ἐμβαδόν τῆς **παράπλευρης** ἐπιφάνειας ἑνός ὁποιουδήποτε κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου στόν κύλινδρο ἐκ περιστροφῆς θεωρεῖται ὡς μιά «κατ᾽ ἔλλειψη» προσέγγιση τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου, τόσο καλύτερη, ὅσο περισσότερες πλευρές ἔχει ἡ βάση τοῦ πρίσματος.



Σχ. 173

Ἄν p_ν εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, τότε ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδόν $p_\nu \cdot \upsilon$. Ὡς ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου ὁρίζεται **τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει τό ἐμβαδόν $p_\nu . \upsilon$ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πρίσματος, ὅταν $\nu \to \infty$.**

Δηλαδή: $E_{\text{κυρτῆς ἐπιφ.}} = (\text{ἀπό ὁρισμό}) \lim\limits_{\nu\to\infty} (p_\nu \cdot \upsilon)$.

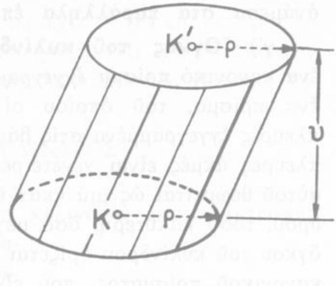
Ἐπειδή $\lim p_\nu = 2\pi\rho$, γι᾽ αὐτό:

$$E_{\text{κυρτῆς ἐπιφ.}} = E_{\text{κυρτ.}} = \boxed{2\pi\rho\upsilon} \ (=\text{περιφέρεια βάσεως} \times \text{ὕψος})$$

ε΄) **Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας** τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δυό βάσεων καί τῆς παράπλευρης (ἤ κυρτῆς) ἐπιφάνειας : $\boxed{2\pi\rho^2 + 2\pi\rho\upsilon}$.

184. Πλάγιος κυκλικός κύλινδρος. Δυό παράλληλες κυκλικές τομές μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας ὄχι ἐκ περιστροφῆς καί τό μεταξύ τους μέρος τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας περικλείουν ἕνα στερεό, πού τό λέμε *«πλάγιο κυκλικό κύλινδρο»*. **Βάσεις** του εἶναι οἱ δυό κυκλικές τομές καί **ὕψος** του ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν ἐπιπέδων τῶν βάσεων (σχ. 174). Ὁ ὄγκος του ὁρίζεται ὡς τό ὅριο τοῦ ὄγκου ἑνός ἐγγεγραμμένου **πλάγιου** πρίσματος μέ βάσεις κανονικά πολύγωνα. Μέ τήν ἴδια διαδικασία (τῆς § 183) βρίσκεται ὅτι:

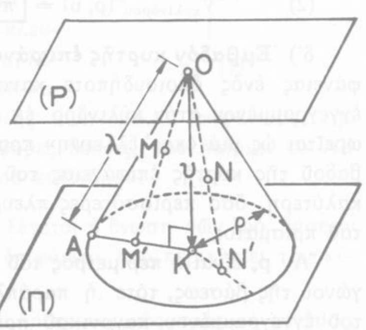
Ὄγκος πλάγιου κυκλικοῦ κυλίνδρου $=\pi\rho^2 \upsilon$(= ἐμβαδόν βάσεως × ὕψος).



Σχ. 174

ΟΡΘΟΣ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΚΩΝΟΣ

185. α′) **Ὀρθός κυκλικός κῶνος ἤ κῶνος ἐκ περιστροφῆς λέγεται τό στερεό, πού παράγεται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού στρέφεται (§ 181) γύρω ἀπό μιά κάθετη πλευρά του** (σχ. 175). Ἡ πλευρά ΟΚ, πού μένει ἀκίνητη, εἶναι τό **ὕψος** τοῦ κώνου καί ὁ φορέας της εἶναι ὁ **ἄξονας** τοῦ κώνου. Ὁ κύκλος, πού γράφεται ἀπό τήν ἄλλη κάθετη πλευρά ΚΑ, λέγεται **βάση** τοῦ κώνου καί ἡ ἐπιφάνεια, πού γράφεται ἀπό τήν ὑποτείνουσα ΟΑ, λέγεται **παράπλευρη** (ἤ **κυρτή**) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου. Αὐτή εἶναι τμῆμα τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας, τήν ὁποία διαγράφει ἡ ἡμιευθεία (Ο, Α)· ἡ κορυφή τῆς κωνικῆς αὐτῆς ἐπιφάνειας λέγεται καί **«κορυφή τοῦ κώνου»**. Οἱ διάφορες θέσεις, πού παίρνει ἡ ὑποτείνουσα ΟΑ = λ κατά τήν περιστροφή, λέγονται **γενέτειρες** τοῦ κώνου. **Ὁλική ἐπιφάνεια** τοῦ κώνου λέγεται ἡ ἕνωση τῆς βάσεως καί τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας.



Σχ. 175

Ὁ κῶνος ἐκ περιστροφῆς εἶναι ὁρισμένος, ὡς πρός τό μέγεθος, ἀπό τά στοιχεῖα ρ, υ: ἀκτίνα βάσεως καί ὕψος. Τρίτο στοιχεῖο τοῦ κώνου εἶναι ἡ **πλευρά** ἤ **γενέτειρα** λ πού συνδέεται μέ τά ρ καί υ μέ τή σχέση $\lambda = \sqrt{\rho^2 + \upsilon^2}$.

β′) **Ἐσωτερικό** σημεῖο τοῦ κώνου εἶναι κάθε σημεῖο, τό ὁποῖο προέρχεται ἀπό τή στροφή ἑνός ἐσωτερικοῦ σημείου τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου ΟΚΑ πού παράγει τόν κῶνο, δηλαδή κάθε σημεῖο πού βρίσκεται στό ἐσωτερικό ἑνός μεσημβρινοῦ. Ἄν ὀνομάσουμε (Ρ) τό ἐπίπεδο πού περνᾶ ἀπό τήν κορυφή Ο καί εἶναι παράλληλο πρός τό ἐπίπεδο (Π) τῆς βάσεως, τότε κάθε ἐσωτερικό σημεῖο Μ τοῦ μεσημβρινοῦ ΟΚΑ βρίσκεται μεταξύ τῶν (Π) καί (Ρ) **καί** στό ἐσωτερικό τῆς ἀντίστοιχης κωνικῆς ἐπιφάνειας (§ 179, γ′), ὅπως τό βλέπουμε ἀμέσως ἀπό τό σχ. 175.

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο Ν, πού ἱκανοποιεῖ τίς δυό αὐτές προϋποθέσεις, εἶναι ἐσωτερικό τοῦ κώνου, γιατί θά βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ μεσημβρινοῦ, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδο ὁρίζεται ἀπό τό Ν καί τόν ἄξονα ΟΚ (σχ. 175). Ἀπ' αὐτά συμπεραίνουμε, ὅτι τό ἐσωτερικό τοῦ κώνου (δηλ. τό σύνολο τῶν ἐσωτερικῶν σημείων του) εἶναι τομή τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς ἀντίστοιχης κωνικῆς ἐπιφάνειας καί τοῦ μέρους τοῦ χώρου πού περιέχεται ἀνάμεσα στά παρ/λα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

γ′) **Ὄγκος τοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς.** Ἄν θεωρήσουμε μιά κανονική πυραμίδα *ἐγγεγραμμένη* στόν κῶνο, δηλ. πού ἔχει βάση ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ ν πλευρές ἐγγεγραμμένο στή βάση τοῦ κώνου καί παράπλευρες ἀκμές γενέτειρες (σχ. 176), τότε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας αὐτῆς θεωρεῖται ὡς μιά «κατ' ἔλλειψη» προσέγγιση τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου καί μάλιστα, τόσο καλύτερη, ὅσο μεγαλύτερο εἶναι τό ν. Ὡς ἀκριβής τιμή τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου **ὁρίζεται τό ὅριο τοῦ ὄγκου τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς πυραμίδας γιά ν→+∞, ὅπου ν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας αὐτῆς.**

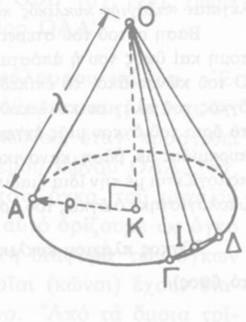
Ἄν, λοιπόν, b_ν εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς βάσεως τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς πυραμίδας καί υ τό ὕψος της (καί τοῦ κώνου), ἔχουμε:

$$(1)\qquad V_{\text{κώνου}} = (\text{ἀπό ὁρισμό}) \lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{3}\cdot b_\nu \upsilon\right\}.$$

Ἀλλά $\lim\limits_{\nu\to\infty} b_\nu = \pi\rho^2$ καί συνεπῶς:

$$(2)\qquad V_{\text{κώνου}} = \boxed{\frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon}$$ (= τό ἕνα τρίτο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως×ὕψος).

δ′) **Ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς.** Τό ἐμβαδόν αὐτό ὁρίζεται ὡς τό **ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει τό ἐμβαδόν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς ἐγγεγραμμένης κανονικῆς πυραμίδας (βλ. γ′), ὅταν τό πλῆθος ν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδας αὐτῆς αὐξάνεται ἀπεριόριστα.** Γιά νά βροῦμε τό ὅριο αὐτό, λαμβάνουμε ὑπόψη μας ὅτι ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια τῆς



Σχ. 176

κανονικῆς πυραμίδας εἶναι ἴση μέ $\frac{1}{2}p_\nu$·ΟΙ, ὅπου p_ν ἡ περίμετρος τῆς βάσεως καί ΟΙ τό παράπλευρο ὕψος (§ 121, β΄). Ἀπό τό σχῆμα 176 βλέπουμε ὅτι, ἄν ΓΔ εἶναι μιά πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, θά ἔχουμε $|ΟΔ - ΟΙ| < ΙΔ$ ἤ $|\lambda - ΟΙ| < ΓΔ/2$.

Ἐπειδή, ὅταν τό ν αὐξάνει, τό $|ΓΔ|/2$ γίνεται μικρότερο ἀπό ὁποιοδήποτε θετικό ἀριθμό ε ὁσοδήποτε μικρό, ἔπεται ὅτι γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ἀπό κάποια τιμή τοῦ ν καί πέρα, ἰσχύει $|\lambda - ΟΙ| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{\nu\to\infty} ΟΙ = \lambda$. Εἶναι ἐπίσης $\lim p_\nu = 2\pi\rho$ καί ἐπομένως:

$$\text{Ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφάνειας} = (\text{ἀπό ὁρισμό}) \lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{2}p_\nu \cdot ΟΙ\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\nu\to\infty} p_\nu \cdot \lim_{\nu\to\infty} ΟΙ = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\rho\cdot\lambda = \pi\rho\lambda.$$

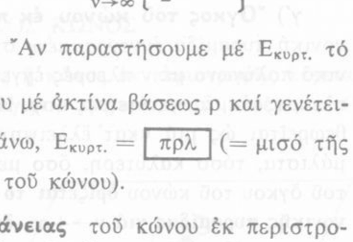
Ἄν παραστήσουμε μέ $E_{κυρτ.}$ τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κώνου μέ ἀκτίνα βάσεως ρ καί γενέτειρα λ, θά ἔχουμε, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, $E_{κυρτ.} = \boxed{\pi\rho\lambda}$ (= μισό τῆς περιφέρειας τῆς βάσεως ἐπί τήν πλευρά τοῦ κώνου).

ε΄) **Τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας** τοῦ κώνου ἐκ περιστροφῆς μέ στοιχεῖα ρ, υ, λ (ἀκτίνα, ὕψος, πλευρά) εἶναι:

$$\boxed{E_{ολ} = \pi\rho^2 + \pi\rho\lambda}$$

186. Πλάγιος κυκλικός κῶνος. Μιά κυκλική τομή μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας ὄχι ἐκ περιστροφῆς καί τό μέρος τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας μεταξύ τῆς κορυφῆς καί τῆς τομῆς (σχ. 177) περικλείουν ἕνα στερεό, πού λέγεται «*πλάγιος κυκλικός κῶνος*».

Βάση αὐτοῦ τοῦ στερεοῦ εἶναι ἡ κυκλική τομή καί ὕψος του ἡ ἀπόσταση υ τῆς κορυφῆς Ο τοῦ κώνου ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς βάσεως. Ὁ ὄγκος τοῦ πλάγιου κυκλικοῦ κώνου ὁρίζεται ὡς τό ὅριο τοῦ ὄγκου μιᾶς ἐγγεγραμμένης σ' αὐτόν πυραμίδας μέ βάση κανονικό πολύγωνο καί ὑπολογίζεται μέ τήν ἴδια διαδικασία, μέ τήν ὁποία ὑπολογίστηκε ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κώνου (§183,γ΄):



Σχ. 177

Ὄγκος πλάγιου κυκλικοῦ κώνου $= \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$ (δηλ. 1/3 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος).

ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

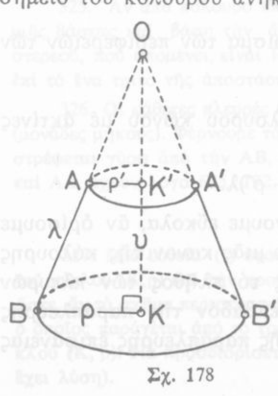
187. α΄) **Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς λέγεται τό στερεό, πού παράγεται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο τραπέζιο, πού στρέφεται γύρω ἀπό τήν πλευρά, ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στίς βάσεις τοῦ τραπεζίου.**

Γιά συντομία, ὅταν στά ἑπόμενα λέμε «κόλουρος κῶνος», θά ἐννοοῦμε «κόλουρο κῶνο ἐκ περιστροφῆς». Ἡ πλευρά ΚΚ΄ $= \upsilon$ τοῦ τραπεζίου ΚΚ΄ΑΒ, τό ὁποῖο διαγράφει τόν κόλουρο κῶνο (σχ. 178), ἡ ὁποία (πλευρά) μένει ἀκίνητη κατά τή περιστροφή, εἶναι τό **ὕψος** τοῦ κόλουρου κώνου καί ὁ φορέας της εἶναι ὁ **ἄξονας** τοῦ κόλουρου κώνου. Οἱ κύκλοι, πού διαγράφονται ἀπό τίς δυό βάσεις ΚΒ $= \rho$, Κ΄Α΄ $= \rho'$ τοῦ τραπεζίου ΚΚ΄ΑΒ, εἶναι οἱ δυό **βάσεις** τοῦ κόλουρου κώνου. Ἡ ἐπιφάνεια, πού γράφεται ἀπό τήν ἄλλη ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές ΑΒ$=\lambda$, λέγεται **παράπλευρη** ἤ **κυρτή** ἐπιφάνεια τοῦ κόλουρου κώνου. Οἱ διάφορες θέσεις, πού παίρνει ἡ ΑΒ κατά τήν περιστροφή, λέγονται **γενέτειρες** ἤ **πλευρές** τοῦ κόλουρου κώνου. **Ὁλική ἐπιφάνεια** τοῦ κόλουρου κώνου λέγεται ἡ ἕνωση τῶν δυό βάσεων μέ τήν κυρτή ἐπιφάνεια.

Τά τρία στοιχεῖα: ρ, ρ', υ καθορίζουν, ὡς πρός τό μέγεθος, τόν κόλουρο κῶνο. Τό τέταρτο στοιχεῖο λ συνδέεται μέ τά τρία προηγούμενα μέ τή σχέση $\lambda = \sqrt{\upsilon^2 + (\rho - \rho')^2}$.

β΄) **Ἐσωτερικό** σημεῖο τοῦ κόλουρου κώνου εἶναι κάθε σημεῖο, πού προέρχεται ἀπό στροφή (γύρω ἀπό τήν ΚΚ΄) ἑνός ἐσωτερικοῦ σημείου τοῦ τραπεζίου ΚΚ΄ΑΒ, πού τόν παράγει ἤ, μ᾽ ἄλλα λόγια, κάθε σημεῖο, πού βρίσκεται στό ἐσωτερικό ἑνός μεσημβρινοῦ.

Ἄν Ο εἶναι ἡ τομή τῶν εὐθειῶν ΒΑ καί ΚΚ΄, τότε τό τραπέζιο εἶναι διαφορά τῶν δύο τριγώνων ΟΒΚ καί ΟΑΚ΄ καί ὁ κόλουρος κῶνος διαφορά τῶν δύο κώνων, πού γράφονται ἀπό τά τρίγωνα αὐτά. Δηλ. κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κόλουρου ἀνήκει στό μεγαλύτερο κῶνο ΟΒΒ΄ (σχ. 178), χωρίς νά ἀνήκει στό μικρότερο ΟΑΑ΄.



Σχ. 178

γ΄) **Ὄγκος τοῦ κόλουρου κώνου**. Ἐπειδή ὁ ὄγκος εἶναι ἀθροιστικός, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κόλουρου κώνου, ὅταν προστεθεῖ στόν ὄγκο τοῦ μικρότερου κώνου ΟΑΑ΄ (σχ. 178), **πρέπει** νά δίνει τόν ὄγκο τοῦ μεγαλύτερου κώνου ΟΒΒ΄. Γι᾽ αὐτό ὁρίζουμε ὡς ὄγκο τοῦ κόλουρου κώνου τή διαφορά τῶν ὄγκων τῶν δυό κώνων, οἱ ὁποῖοι (κῶνοι) ἔχουν διαφορά τόν κόλουρο κῶνο. Ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΑΚ΄ καί ΟΒΚ ὑπολογίζουμε τά ὕψη τῶν δυό αὐτῶν κώνων:

$$\frac{OK'}{\rho'} = \frac{OK}{\rho} = \frac{OK - OK'}{\rho - \rho'} = \frac{\upsilon}{\rho - \rho'} \Rightarrow OK' = \frac{\upsilon\rho'}{\rho - \rho'},\ OK = \frac{\upsilon\rho}{\rho - \rho'}$$

Ἑπομένως ἔχουμε:

Ὄγκος τοῦ κόλουρου κώνου = (ἀπό τόν ὁρισμό) Ογκ τοῦ ΟΒΒ′ — Ογκ τοῦ ΟΑΑ′ $= \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot OK - \frac{1}{3}\pi\rho'^2 OK' = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\rho^2 \cdot \frac{\upsilon\rho}{\rho - \rho'} - \rho'^2 \frac{\upsilon\rho'}{\rho - \rho'}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\pi\upsilon \frac{\rho^3 - \rho'^3}{\rho - \rho'} = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2).$$

Τελικά ὁ τύπος:

(1) $$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2)}$$

μᾶς δίνει τόν ὄγκο V κόλουρου κώνου μέ ἀκτίνες βάσεων ρ καί ρ′ καί ὕψος υ.

δ′) **Ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας.** Ἐπειδή ἡ κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κόλουρου κώνου ΑΑ′Β′Β (σχ. 178) εἶναι διαφορά τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δυό κώνων ΟΑΑ′ καί ΟΒΒ′, ὁρίζουμε ὡς ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς του ἐπιφάνειας τή διαφορά τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δυό αὐτῶν κώνων:

Ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ΑΑ′Β′Β = (ἀπό ὁρισμό) ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ΟΒΒ′ — ἐμβαδόν κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ ΟΑΑ′ $= \pi\rho \cdot OB - \pi\rho' \cdot OA$. Ἀλλά ἔχουμε: $\frac{OA}{\rho'} = \frac{OB}{\rho} = \frac{OB - OA}{\rho - \rho'} = \frac{\lambda}{\rho - \rho'}$

καί συνεπῶς $OA = \frac{\lambda\rho'}{\rho - \rho'}$, $OB = \frac{\lambda\rho}{\rho - \rho'}$. Ἑπομένως γιά τήν κυρτή ἐπιφάνεια $E_{\text{κυρτ.}}$ τοῦ κόλουρου κώνου ἰσχύει ὅτι:

$E_{\text{κυρτ.}} = \pi\rho \cdot \frac{\lambda\rho}{\rho - \rho'} - \pi\rho' \frac{\lambda\rho'}{\rho - \rho'} = \pi\lambda \frac{\rho^2 - \rho'^2}{\rho - \rho'} = \pi\lambda\ (\rho + \rho')$. Ἑπομένως:

(2) $\boxed{E_{\text{κυρτ.}} = \pi(\rho + \rho')\lambda}$ (= τό ἡμιάθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν δυό βάσεων ἐπί τήν πλευρά).

ε′) **Ἐμβαδόν ὁλικῆς ἐπιφάνειας** τοῦ κόλουρου κώνου μέ ἀκτίνες βάσεων ρ καί ρ′ καί πλευρά λ:

(3) $$E_{\text{ολ}} = \pi\rho^2 + \pi\rho'^2 + \pi(\rho + \rho')\lambda.$$

ϛ′) Στούς ἴδιους τύπους (1) καί (2) καταλήγουμε εὔκολα, ἄν ὁρίσουμε ὡς ὄγκο τοῦ κόλουρου κώνου τό ὅριο τοῦ ὄγκου μιᾶς κανονικῆς κόλουρης πυραμίδας ἐγγεγραμμένης σ᾿ αὐτόν, τῆς ὁποίας τό πλῆθος τῶν πλευρῶν κάθε βάσεως αὐξάνεται ἀπεριόριστα· καί ὡς ἐμβαδόν τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του ὁρίσουμε τό ὅριο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειας τῆς παραπάνω κόλουρης πυραμίδας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

316α. Ὁ ὄγκος ἑνός κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι $3\sqrt{3}$ κυβ. μέτρα. Ποιός εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου στό πρίσμα κυλίνδρου;

317. Ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἑνός κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἔχει ἐμβαδόν $3\sqrt{3}$. Ποιό εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κυλίνδρου τοῦ περιγεγραμμένου στό πρίσμα;

318. Ἡ ἀκτίνα βάσεως ρ καί τό ὕψος υ ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ἱκανοποιοῦν τή σχέση $1/\rho + 1/\upsilon = 1/2$. Νά βρεῖτε τό πηλίκο τοῦ ὄγκου του διά τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας.

319. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού διαγράφεται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιπαρ/μο, τό ὁποῖο στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ὁ ὁποῖος εἶναι παράλληλος πρός μία πλευρά τοῦ ὀρθογώνιου αὐτοῦ καί βρίσκεται στό ἐπίπεδο τοῦ ὀρθογώνιου, ἀλλά ἔξω ἀπό τό ὀρθογώνιο, εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογώνιου ἐπί τό μῆκος τῆς περιφέρειας, πού διαγράφει τό κέντρο τοῦ ὀρθογώνιου κατά τήν περιστροφή.

Διατυπῶστε καί ἀποδεῖξτε ὅμοια πρόταση γιά τήν ἐπιφάνεια, πού διαγράφει ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου.

320. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο ἑνός κώνου, πού ἔχει κυρτή ἐπιφάνεια 15 π τετρ. μέτρα καί ἀκτίνα βάσεως 3 μέτρα.

321. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο ἑνός κώνου περιγεγραμμένου σέ κανονική τετραγωνική πυραμίδα, ἡ ὁποία ἔχει ὄγκο 2 κυβ. μέτρα.

322. Στή βάση ἑνός κυκλικοῦ κώνου μέ ὕψος υ γράφουμε χορδή ἴση μέ τήν ἀκτίνα ρ τῆς βάσεως. Νά ὑπολογίσετε τούς ὄγκους τῶν δύο στερεῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται ὁ κῶνος ἀπό τό ἐπίπεδο, πού ὁρίζεται ἀπό τήν κορυφή τοῦ κώνου καί ἀπό τή χορδή. Ἐπίσης, ὅταν τό μῆκος τῆς χορδῆς εἶναι $\rho\sqrt{2}$ ἤ $\rho\sqrt{3}$.

323. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 τῆς παράπλευρης ἐπιφάνειάς του ἐπί τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπό μία γενέτειρα. Ἐπίσης ὅτι εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογώνιου τριγώνου, ἀπό τό ὁποῖο παράγεται, ἐπί τήν περιφέρεια, πού διαγράφει κατά τήν περιστροφή τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

324. Νά κατασκευάσετε κῶνο (ἐκ περιστροφῆς), τοῦ ὁποίου ξέρουμε τό ὕψος υ καί τοῦ ὁποίου ἡ παράπλευρη ἐπιφάνεια ἰσοδυναμεῖ μέ κύκλο ἀκτίνας ἴσης πρός τό ὕψος υ.

325. Ἄν ἀπό κόλουρο κῶνο ἀφαιρεθεῖ ὁ κῶνος, πού ἔχει κορυφή τό κέντρο Κ τῆς μιᾶς βάσεως καί βάση τήν ἄλλη βάση τοῦ κόλουρου, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού ἀπομένει, εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας τοῦ κόλουρου ἐπί τό ἕνα τρίτο τῆς ἀποστάσεως τοῦ Κ ἀπό μία γενέτειρα.

326. Οἱ κάθετες πλευρές ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ = 4 καί ΑΓ = 3 (μονάδες μήκους). Φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τό τρίγωνο στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ, τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν, πού γράφουν τά τμήματα ΒΓ καί ΑΔ, ἔχουν λόγο 625 : 192.

Β΄.

327. Μιά εὐθεία (ε) ἐφάπτεται μέ περιφέρεια (Κ, ρ). Θεωροῦμε τή διάμετρο ΒΓ τοῦ κύκλου (Κ,ρ) καί τήν προβολή της Β΄Γ΄ στήν (ε). Νά ὁρίσετε τή θέση τῆς ΒΓ ἔτσι, ὥστε, ἄν τό σχῆμα περιστραφεῖ γύρω ἀπό τήν (ε), ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κόλουρου κώνου, ὁ ὁποῖος παράγεται ἀπό τό τραπέζιο ΒΓΓ΄Β΄, νά ἔχει λόγο λ πρός τήν ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου (Κ, ρ). Νά προσδιορίσετε καί τίς δυνατές τιμές τοῦ λ (γιά τίς ὁποῖες τό πρόβλημα ἔχει λύση).

328. i) Ἕνας κύλινδρος ἐκ περιστροφῆς λέγεται ἐγγεγραμμένος σέ κῶνο ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἡ μία βάση τοῦ κυλίνδρου εἶναι τομή τοῦ κώνου μέ ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση τοῦ κώνου καί ἡ ἄλλη βάση του βρίσκεται στό ἐπίπεδο τῆς βάσεως τοῦ κώνου. ii) Νά ὑπολογιστοῦν οἱ διαστάσεις ἑνός κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου σέ κῶνο μέ πλευρά λ καί ὕψος υ, ὅταν ἡ κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἔχει λόγο μ : ν πρός τήν κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ μικρότερου κώνου, ὁ ὁποῖος βασίζεται ἐπάνω στόν κύλινδρο.

329. Γνωρίζουμε τίς διαστάσεις κυλίνδρου ἐγγεγραμμένου σέ δεδομένο κῶνο ἐκ περιστροφῆς. Ζητεῖται νά ἐγγραφεῖ στόν κῶνο καί δεύτερος κύλινδρος ἰσοδύναμος μέ τόν πρῶτο (δηλ. νά ἔχει τόν ἴδιο ὄγκο μέ τόν πρῶτο).

330. Σέ ἕναν κύλινδρο νά περιγραφεῖ κῶνος μέ τόν ἐλάχιστο δυνατό ὄγκο.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ ΠΟΥ ΣΤΡΕΦΕΤΑΙ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΞΟΝΑ

188. (Θ) — Ἔστω ὅτι ἔχουμε σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού δέν τέμνει τήν (ε). Τότε τό ἐμβαδόν E_{AB} τῆς ἐπιφάνειας, τήν ὁποία γράφει τό τμῆμα ΑΒ, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τήν εὐθεία (ε), ἐκφράζεται μέ τούς παρακάτω τρεῖς διαφορετικούς τρόπους:

i) $E_{AB} = \pi(\alpha+\beta).(AB)$, ὅπου α καί β οἱ ἀποστάσεις τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς.

ii) Τό E_{AB} εἶναι ἴσο μέ τό μῆκος τοῦ ΑΒ ἐπί τήν περιφέρεια, πού διαγράφει τό μέσο τοῦ ΑΒ κατά τήν περιστροφή.

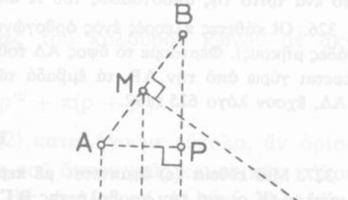
iii) Τό E_{AB} εἶναι ἴσο μέ τήν περιφέρεια, πού ἔχει ἀκτίνα τό μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ τμῆμα ἕως τόν ἄξονα (δηλ. ἀκτίνα ΜΚ, ὅπου Μ τό μέσο τοῦ ΑΒ, $MK \perp AB$, $K \in (\varepsilon)$) ἐπί τήν προβολή τοῦ ΑΒ πάνω στόν ἄξονα περιστροφῆς. (Στήν περίπτωση αὐτή ὑποτίθεται ὅτι τό ΑΒ δέν εἶναι $\perp$ (ε)).

Ἀπόδειξη. i) — Ἄν τό ΑΒ δέν εἶναι $\|$(ε) καί ἄν κανένα ἀπό τά ἄκρα του δέ βρίσκεται πάνω στήν (ε), τότε τό ΑΒ διαγράφει κολουροκωνική ἐπιφάνεια μέ ἀκτίνες βάσεων α καί β καί γενέτειρα ΑΒ. Ἑπομένως ἐφαρμόζεται ὁ τύπος (2) τῆς § 187, δ΄.

— Ἄν τό ἄκρο Α τοῦ ΑΒ βρίσκεται πάνω στήν (ε), τότε τό ΑΒ γράφει κυρτή ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς, ὁπότε $E_{AB} = \pi\beta \cdot AB = \pi(\alpha+\beta)AB$ (γιατί $\alpha = 0$).

— Ἄν ΑΒ$\|$(ε), ὁπότε $\alpha = \beta$, τότε ἐφαρμόζεται ὁ τύπος τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας κυλίνδρου (§ 183, δ΄) καί ὁ τύπος (1) ἰσχύει.

— Ἄν ΑΒ$\perp$(ε), τότε ἡ ἐπιφάνεια, τήν ὁποία διαγράφει τό ΑΒ, εἶναι κυκλικός δακτύλιος, δηλ. διαφορά δυό κύκλων μέ ἀκτίνες α καί β· ἔτσι εὔκολα βρίσκουμε ὅτι πάλι ὁ τύπος (i) ἰσχύει.



Σχ. 179

ii) —Ἂν MN ἡ ἀπόσταση τοῦ μέσου M τοῦ AB ἀπό τήν (ε) (σχ. 179), τότε $MN = (\alpha + \beta)/2$ σέ κάθε περίπτωση καί ὁ τύπος $E_{AB} = \pi(\alpha+\beta)AB$ γίνεται $E_{AB} = \pi \cdot 2MN \cdot AB = AB\,(2\pi \cdot MN)$ καί ἐκφράζει αὐτό, πού πρέπει νά ἀποδείξουμε.

iii) —Ἔστω ΓΔ ἡ προβολή τοῦ AB πάνω στήν (ε) (σχ. 179) καί MK τό μεσοκάθετο τμῆμα τοῦ AB ἕως τόν ἄξονα (ε). Ἂν φέρουμε τήν $AP \perp B\Delta$, τά τρίγωνα MNK καί ABP εἶναι ὅμοια, γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους μία πρός μία κάθετες. Ἐπομένως: $\dfrac{MN}{AP} = \dfrac{MK}{AB}$ καί, ἐπειδή $AP = \Gamma\Delta$, ἔχουμε $\dfrac{MN}{\Gamma\Delta} = \dfrac{MK}{AB} \Rightarrow MN \cdot AB = MK \cdot \Gamma\Delta$. Ἀπ' αὐτή ὁ προηγούμενος τύπος $E_{AB} = 2\pi(MN)\cdot(AB)$ γίνεται $E_{AB} = (2\pi MK)\cdot\Gamma\Delta =$ μῆκος περιφέρειας μέ ἀκτίνα MK ἐπί τήν προβολή τοῦ AB στόν ἄξονα.

—Ἂν AB||(ε), βλέπουμε ἀμέσως ὅτι ἡ πρόταση iii) πάλι ἰσχύει.

189. Ἐπιφάνεια, πού γράφεται ἀπό μιά τεθλασμένη γραμμή πού στρέφεται, γύρω ἀπό ἄξονα. Ἔστω ὅτι δίνεται στό ἐπίπεδο ἕνας ἄξονας περιστροφῆς (ε) καί μιά τεθλασμένη γραμμή $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ ἀνοικτή ἤ κλειστή, τῆς ὁποίας καμιά πλευρά δέν τέμνει τόν ἄξονα.

Ἐπειδή ἡ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, πού γράφεται ἀπό τήν $A_1A_2 \ldots A_\nu$, εἶναι ἕνωση τῶν ἐπιφανειῶν, τίς ὁποῖες διαγράφουν τά διαδοχικά τμήματα A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$ $A_{\nu-1}A_\nu$, γι' αὐτό ὁρίζουμε ὡς ἐμβαδόν της τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν, πού διαγράφονται ἀπό τά τμήματα. Δηλαδή:

$$E_{A_1A_2A_3 \ldots A_\nu} = E_{A_1A_2} + E_{A_2A_3} + \ldots + E_{A_{\nu-1}A_\nu},$$

ὅπου οἱ ἐπιφάνειες στό δεύτερο μέλος ὑπολογίζονται μέ ἕναν ὁποιοδήποτε ἀπό τούς τρεῖς τύπους τῆς § 188.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

331. Ἂν ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, ὁ ὁποῖος βρίσκεται στό ἐπίπεδό του καί δέν τέμνει τό τρίγωνο, ἡ ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, πού διαγράφεται ἀπό τήν τριγωνική περίμετρο, ἔχει ἐμβαδόν ἴσο πρός τήν περίμετρο τοῦ τριγώνου ἐπί τό μῆκος τῆς περιφέρειας, πού γράφει τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου κατά τήν περιστροφή.

332. Δυό κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικά. Ἂν ΒΓ εἶναι ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τους καί τό ὅλο σχῆμα στραφεῖ γύρω ἀπό τήν ΚΛ, νά ὑπολογίσετε συναρτήσει τῶν R καί ρ τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, πού διαγράφει τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΒΓ. (Β, Γ, σημεῖα ἐπαφῆς).

333. Θεωροῦμε ἕνα κανονικό πολύγωνο, πού ἔχει ἀπόστημα ρ καί εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο ἀκτίνας R, μία διάμετρο τοῦ κύκλου, πού διέρχεται ἀπό μία κορυφή καί τό ἕνα ἀπό τά δύο μέρη, στά ὁποῖα χωρίζει ἡ διάμετρος αὐτή τήν ὅλη περίμετρο τοῦ πολυγώνου. Ἂν τό μέρος αὐτό τῆς περιμέτρου στραφεῖ γύρω ἀπό τή διάμετρο, δεῖξτε ὅτι παράγει ἐπιφάνεια ἐμβαδοῦ $4\pi R\rho$ ἤ $\pi(R+\rho)^2$ ἀνάλογα μέ τό ἄν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἄρτιο ἤ περιττό.

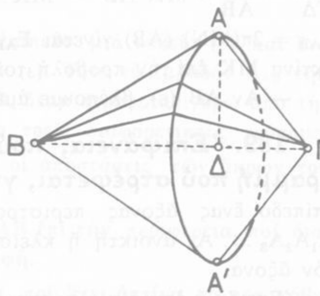
334. Ἂν ἕνα πολύγωνο ἔχει ἄξονα συμμετρίας μιά εὐθεία xy καί στραφεῖ γύρω ἀπό ἄλλον ἄξονα x΄y΄, ὁ ὁποῖος βρίσκεται μέσα στό ἐπίπεδο τοῦ πολυγώνου, εἶναι ∥xy καί δέν τέμνει τό πολύγωνο, τότε ἡ ἐπιφάνεια, πού διαγράφει ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῆς περιμέτρου ἐπί τήν περιφέρεια, πού διαγράφει τυχόν σημεῖο τῆς xy. (Ὑποδ. Ἂν AB, A΄B΄ ἕνα ζεῦγος πλευρῶν συμμετρικῶν πρός τόν xy, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $E_{A'B'} + E_{AB} = (AB + A'B')2\pi h$, ὅπου h ἡ ἀπόσταση τῶν παράλληλων ἀξόνων xy καί x΄y΄).

190. Τρίγωνο πού στρέφεται γύρω ἀπό μιά πλευρά του.

α΄) (Θ)—Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού παράγεται ἀπό ἕνα τρίγωνο μέ βάση ΒΓ = α καί ὕψος ΑΔ=υ, τό ὁποῖο (τρίγωνο) στρέφεται γύρω ἀπό τή βάση του ΒΓ, εἶναι ἴσος μέ:

$$\boxed{\frac{1}{3}\pi\upsilon^2\alpha}$$

Ἀπόδειξη. Ἂν τό ἴχνος Δ τοῦ ὕψους βρίσκεται μεταξύ Β καί Γ, τότε τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἕνωση δυό ὀρθογώνιων τριγώνων ΑΒΔ καί ΑΓΔ (σχ. 180) καί τό στερεό ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἡ ἕνωση τῶν δυό κώνων, πού διαγράφονται ἀπό τά τρίγωνα αὐτά. Γιά νά διατηρηθεῖ ἡ ἀθροιστικότητα τοῦ ὄγκου, ὁ ὄγκος, πού ζητεῖται, πρέπει νά εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δυό αὐτῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινή ἀκτίνα βάσεως ΑΔ καί ὕψη ΒΔ, ΓΔ. Ἂν παραστήσουμε μέ $V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma}$ τόν ὄγκο, πού προκύπτει ἀπό τήν περιστροφή τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μποροῦμε νά γράψουμε:



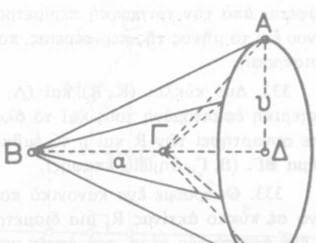
Σχ. 180

$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Delta} + V_{\sigma\tau\rho.\,A\Gamma\Delta}.$$ Ἑπομένως:

$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = \frac{1}{3}\pi A\Delta^2\cdot B\Delta + \frac{1}{3}\pi A\Delta^2 \Delta\Gamma = \frac{1}{3}\pi\cdot A\Delta^2\cdot(B\Delta + \Delta\Gamma) =$$

$$\frac{1}{3}\pi\cdot A\Delta^2\cdot B\Gamma, \text{ δηλ.: } V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2\alpha.$$

Ἂν τό Δ βρίσκεται στήν προέκταση τῆς βάσεως ΒΓ (σχ. 181), τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι διαφορά τῶν τριγώνων ΒΑΔ καί ΑΓΔ καί θά ἔχουμε:



$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = V_{\sigma\tau\rho.\,BA\Delta} - V_{\sigma\tau\rho.\,\Gamma A\Delta} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi A\Delta^2\cdot B\Delta - \frac{1}{3}\pi A\Delta^2\cdot\Gamma\Delta =$$

$$= \frac{1}{3}\pi A\Delta^2\cdot(B\Delta - \Gamma\Delta) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi A\Delta^2\cdot B\Gamma = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2\alpha.$$

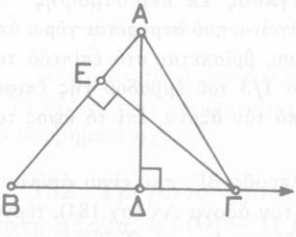
Σχ. 181

β΄) (Θ) — Ἄν ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ στρέφεται γύρω ἀπό τήν πλευρά του ΒΓ, τότε:

$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = \frac{1}{3}\,E_{AB}\,.\,\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{A\Gamma}.\upsilon_\beta$$

ὅπου E_{AB} εἶναι τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, πού διαγράφει ἡ πλευρά ΑΒ καί υ_γ τό ὕψος τοῦ τριγώνου πρός τήν πλευρά αὐτή.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἡ $\widehat{B}$ ὀξεία. Ἄν φέρουμε τά ὕψη ΑΔ καί ΓΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε ἀπό τή σχέση πλευρῶν καί ὑψῶν ἔχουμε:



Σχ. 182

$$(1)\qquad A\Delta\cdot B\Gamma = \Gamma E\cdot AB$$

Ἐξάλλου, ὅπως ἀποδείχτηκε προηγουμένως, ἔχουμε:

$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = \frac{1}{3}\,\pi A\Delta^2\cdot B\Gamma =$$

$$= \frac{1}{3}\,\pi\cdot A\Delta\cdot B\Gamma\cdot A\Delta = (\text{ἀπό τήν } (1))$$

$$\frac{1}{3}\,\pi\Gamma E\cdot AB\cdot A\Delta = \frac{1}{3}\,\{\pi A\Delta\cdot AB\}\cdot\Gamma E = \frac{1}{3}\,E_{AB}\cdot\Gamma E\ (\text{γιατί } E_{AB} = \pi\cdot A\Delta\cdot AB$$

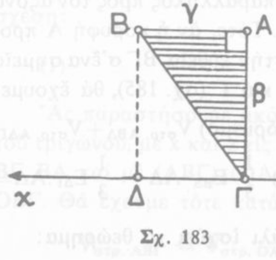
σύμφωνα μέ τήν § 185, δ΄) δηλ. τό (Θ) σ' αὐτήν τήν περίπτωση ($\widehat{B}$ ὀξεία) ἀληθεύει.

— Ἄν ἡ $\widehat{B}$ εἶναι ἀμβλεία, βρίσκουμε μέ τόν ἴδιο τρόπο ὅτι ἡ πρόταση ἀληθεύει.

— Ἄν ἡ $\widehat{B}$ εἶναι ὀρθή, πάλι εὔκολα ἐλέγχουμε τήν ἀλήθεια τῆς προτάσεως.

191. Τρίγωνο πού στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ὁ ὁποῖος περνᾶ ἀπό μιά κορυφή του.

α΄.) *Λῆμμα*. **Ἄν ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\widehat{A}=90^0$ στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα Γx//ΑΒ (σχ. 183), τότε ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού παράγεται, εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 τῆς ἐπιφάνειας, πού διαγράφει ἡ πλευρά ΑΒ ἡ ἀπέναντι ἀπό τόν ἄξονα Γx, ἐπί τό ὕψος τοῦ τριγώνου πρός τήν ΑΒ.**



Σχ. 183

Ἀπόδειξη. Ἄν φέρουμε τήν ΒΔ⊥Γx (σχ.183) καί θεωρήσουμε ὅτι τό ἡμιεπίπεδο στρέφεται γύρω ἀπό τή ΓΔ, τότε τό ὀρθογώνιο ΑΒΔΓ διαγράφει κύλινδρο, τό τρίγωνο ΒΔΓ κῶνο καί τό ΑΒΓ διαγράφει ἕνα στερεό, πού προκύπτει ἀπό τήν ἀφαίρεση τοῦ κώνου ἀπό τόν κύλινδρο. Συνεπῶς καί γιά τούς ὄγκους τῶν τριῶν στερεῶν πρέπει νά ἰσχύει ἡ ἴδια σχέση. Θά ἔχουμε λοιπόν:

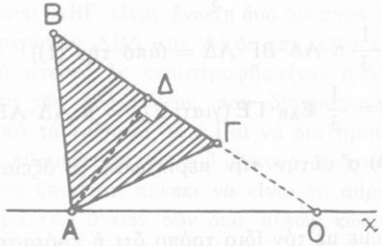
$$V_{\sigma\tau\rho.\ AB\Gamma} = (\text{ἀπό ὁρισμό})\ V_{\sigma\tau\rho.\ AB\Delta\Gamma} - V_{\sigma\tau\rho.\ \Gamma B\Delta} =$$

$$= \pi A\Gamma^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi B\Delta^2 \cdot \Delta\Gamma = \pi\beta^2\gamma - \frac{1}{3}\pi\beta^2\gamma = \frac{2}{3}\pi\beta^2\gamma =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(2\pi\beta\gamma)\cdot\beta = \frac{1}{3}E_{AB}\cdot\Gamma A.$$

β′) **Θεμελιῶδες θεώρημα γιά τούς ὄγκους ἐκ περιστροφῆς: Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τό ὁποῖο διαγράφει ἕνα τρίγωνο, πού στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ὁ ὁποῖος περνᾶ ἀπό μιά κορυφή του, βρίσκεται στό ἐπίπεδό του καί δέν τέμνει τό τρίγωνο, εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφάνειας, πού διαγράφει ἡ πλευρά ἡ ἀπέναντι ἀπό τόν ἄξονα, ἐπί τό ὕψος τοῦ τριγώνου πρός τήν πλευρά αὐτή.**

Ἀπόδειξη. i) Ἔστω ὅτι ὁ φορέας τῆς πλευρᾶς ΒΓ, πού εἶναι ἀπέναντι ἀπό τόν ἄξονα Αx (σχ.184), τέμνει τόν ἄξονα Αx στό Ο. Τότε τό τρίγωνο ΑΒΓ γίνεται διαφορά δυό τριγώνων ΟΑΒ καί ΟΓΑ. Ὁρίζουμε ὡς ὄγκο τοῦ στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς γύρω ἀπό τό Αx, πού παράγεται ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ, τή διαφορά τῶν ὄγκων, πού γράφονται ἀπό τά δυό αὐτά τρίγωνα: ΟΑΒ καί ΟΑΓ. Θά ἔχουμε, λοιπόν, κατά σειρά



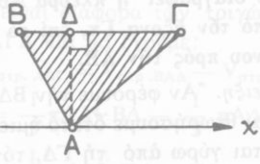
Σχ. 184

$$V_{\sigma\tau\rho.\ AB\Gamma} = (\text{ἀπό ὁρισμό})\ V_{\sigma\tau\rho.\ OAB} - V_{\sigma\tau\rho.\ OA\Gamma} = (\text{βλ. § 190, β′})$$

$$= \frac{1}{3}E_{OB}\cdot A\Delta - \frac{1}{3}E_{O\Gamma}\cdot A\Delta = \frac{1}{3}\{E_{OB} - E_{O\Gamma}\}.A\Delta = \frac{1}{3}E_{B\Gamma}\cdot A\Delta.$$

Ὥστε ἰσχύει, $V_{\sigma\tau\rho.\ AB\Gamma} = \frac{1}{3}E_{B\Gamma}\cdot A\Delta$, δηλ. αὐτό, πού θέλαμε ν' ἀποδείξουμε.

ii) Ἔστω ὅτι ὁ φορέας τῆς πλευρᾶς ΒΓ, πού βρίσκεται ἀπέναντι ἀπό τόν ἄξονα, εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς Αx. Τότε, ἄν ἡ κορυφή Α προβάλλεται πάνω στήν εὐθεία ΒΓ σ' ἕνα σημεῖο Δ μεταξύ τῶν Β καί Γ (σχ. 185), θά ἔχουμε:



Σχ. 185

$$V_{\sigma\tau\rho.\ AB\Gamma} = (\text{ἀπό ὁρισμό})\ V_{\sigma\tau\rho.\ AB\Delta} + V_{\sigma\tau\rho.\ A\Delta\Gamma}$$

$$= (\text{βλέπε λῆμμα})\ \frac{1}{3}E_{B\Delta}\cdot A\Delta + \frac{1}{3}E_{\Delta\Gamma}.A\Delta =$$

$$= \frac{1}{3}(E_{B\Delta} + E_{\Delta\Gamma})\cdot A\Delta = \frac{1}{3}E_{B\Gamma}\cdot A\Delta\cdot$$ Ὥστε πάλι ἰσχύει τό θεώρημα:

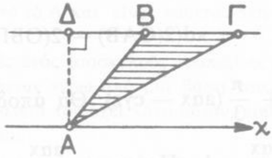
$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = \frac{1}{3} E_{B\Gamma} \cdot A\Delta.$$

—Ἂν τό Α προβάλλεται στήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ὅπως στό σχῆμα 186, θά ἔχουμε πάλι:

$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = (\text{ἀπό ὁρισμό})\ V_{\sigma\tau\rho.\,A\Delta\Gamma} -$$

$$- V_{\sigma\tau\rho.\,A\Delta B} = \frac{1}{3} E_{\Delta\Gamma} \cdot A\Delta -$$

$$- \frac{1}{3} E_{\Delta B} \cdot A\Delta = \frac{1}{3} E_{B\Gamma} \cdot A\Delta.$$

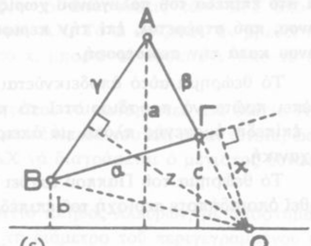


Σχ. 186

Τέλος, ἄν τό Α προβάλλεται στό Β ἤ Γ, ἔχουμε τήν περίπτωση τοῦ παραπάνω λήμματος, κατά τήν ὁποία πάλι τό θεώρημα ἰσχύ.

192. Τρίγωνο πού στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ὁποιοδήποτε ἄξονα. α΄) (Θ) — **Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τό ὁποῖο διαγράφει ἕνα τρίγωνο, πού στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ὁ ὁποῖος βρίσκεται στό ἐπίπεδό του καί δέν ἔχει κανένα κοινό σημεῖο μέ τό τρίγωνο, εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ἐπί τήν περιφέρεια, πού διαγράφει τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου κατά τήν περιστροφή.**

Ἀπόδειξη. Ἂν (ε) ὁ ἄξονας καί Ο τό σημεῖο τομῆς τοῦ (ε) μέ τόν φορέα κάποιας πλευρᾶς, π.χ. τῆς ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 187), τότε ὁρίζουμε πρός τό παρόν ὡς ὄγκο τοῦ στερεοῦ, πού διαγράφεται ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ, τή διαφορά τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, πού διαγράφονται ἀπό τά δυό τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΓΒ. Ἂς παραστήσουμε μέ a, b, c τίς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπό τόν ἄξονα καί d τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπό τόν ἴδιο ἄξονα. Εὔκολα βρίσκουμε τή σχέση:



Σχ. 187

$$(1) \qquad d = \frac{a+b+c}{3}$$

Ἂς παραστήσουμε ἀκόμα μέ α, β, γ τά μήκη τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, μέ x καί z τίς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τούς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΒΑ καί μέ (ΑΒΓ), (ΟΑΒ), (ΟΒΓ) τά ἐμβαδά τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ΟΑΒ, ΟΒΓ. Θά ἔχουμε τότε κατά σειρά:

$$V_{\sigma\tau\rho.\,AB\Gamma} = V_{\sigma\tau\rho.\,OAB} - V_{\sigma\tau\rho.\,OB\Gamma} = \frac{1}{3} E_{AB} \cdot z - \frac{1}{3} E_{B\Gamma} \cdot x =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(a+b)\gamma z - \frac{1}{3}\pi(b+c)\alpha x = (\text{ἐξαιτίας τῆς (1)})\, \pi\left(d-\frac{c}{3}\right)\gamma z -$$

$$-\pi\left(d-\frac{a}{3}\right)\alpha x = \pi d(\gamma z - \alpha x) + \frac{\pi}{3}\{a\alpha x - c\gamma z\} =$$

$$= \pi d(2(\text{ΟΑΒ}) - 2(\text{ΟΒΓ})) + \frac{\pi}{3}(a\alpha x - c\gamma z) = 2\pi d\cdot(\text{ΑΒΓ}) +$$

$+ \frac{\pi}{3}(a\alpha x - c\gamma z)$. Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι $a\alpha x - c\gamma z = 0$ ἤ ὅτι

$\frac{a\alpha x}{c\gamma z} = 1$. Πράγματι $\frac{a\alpha x}{c\gamma z} = \frac{a}{c}\cdot\frac{\alpha x}{\gamma z} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΓ}}\cdot\frac{(\text{ΟΒΓ})}{(\text{ΟΒΑ})} = \frac{\text{ΟΑ}}{\text{ΟΓ}}\cdot\frac{\text{ΟΓ}}{\text{ΟΑ}} = 1.$

Ἑπομένως μένει: $V_{\text{στρ. ΑΒΓ}} = (\text{ΑΒΓ})\cdot 2\pi d$.

β) Ἀποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι, ἄν τό παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ ἀναλυθεῖ σέ ἀλγεβρικό ἄθροισμα τριγώνων, πού ἔχουν ὡς μιά κορυφή ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ρ τοῦ ἄξονα (ε), τότε τό ἀντίστοιχο ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ὄγκων, πού παράγονται ἀπό τά τρίγωνα αὐτά, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπό τόν (ε), εἶναι σταθερό καί ἴσο μέ (ΑΒΓ).2πd.

Τό σταθερό αὐτό ἄθροισμα ὁρίζει τόν $V_{\text{στρ.ΑΒΓ}}$. Ἔτσι π.χ., ἄν τό Ρ βρίσκεται μέσα στή γωνία $\widehat{A}$ (σχ. 187), ὁπότε:

$$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{ΡΑΒ}) + (\text{ΡΑΓ}) - (\text{ΡΒΓ}),\ \text{τότε}\ V_{\text{στρ. ΡΑΒ}} + V_{\text{στρ. ΡΑΓ}} - V_{\text{στρ. ΡΒΓ}} = (\text{ΑΒΓ}).2\pi d = V_{\text{στρ. ΑΒΓ}}$$

γ) Γενίκευση. Θεώρημα Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τό ὁποῖο διαγράφει ἕνα πολύγωνο, πού στρέφεται γύρω ἀπό ἄξονα, ὁ ὁποῖος βρίσκεται στό ἐπίπεδο τοῦ πολυγώνου χωρίς νά τό τέμνει, εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου, πού στρέφεται, ἐπί τήν περιφέρεια, πού διαγράφει τό κέντρο βάρους τοῦ πολυγώνου κατά τήν περιστροφή.

Τό θεώρημα αὐτό ἀποδεικνύεται στή θεωρητική μηχανική καί γιά νά ἐφαρμοστεῖ, πρέπει πρῶτα νά προσδιοριστεῖ τό κέντρο βάρους τοῦ πολυγώνου, ἄν αὐτό θεωρηθεῖ ὡς ἐπίπεδη ὁμογενής πλάκα μέ ἀπειροελάχιστο πάχος, μέ τόν τρόπο, πού διδάσκει ἡ μηχανική.

Τό θεώρημα τοῦ Πάππου ἰσχύει καί ὅταν στή θέση τοῦ παραπάνω πολυγώνου θεωρηθεῖ ὁποιαδήποτε περιοχή τοῦ ἐπιπέδου, πού περικλείεται ἀπό μιά ἁπλή κλειστή γραμμή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'

335. Ποιά σχέση συνδέει τούς ὄγκους, πού διαγράφονται ἀπό ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο, πού στρέφεται διαδοχικά γύρω ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του;

336. Ἐπάνω στήν πλευρά ΒΓ ἑνός ἰσόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Ρ τέτοιο, ὥστε, ἄν φέρουμε τίς ΡΔ,ΡΕ ἀντιστοίχως παράλληλες πρός τίς δύο ἄλλες πλευρές καί νοήσουμε τό σχῆμα στρεφόμενο γύρω ἀπό τήν ΒΓ, ὁ ὄγκος, πού διαγράφεται ἀπό τό σχηματιζόμενο παρ/μο ΡΔΑΕ, νά εἶναι τά 2/3 τοῦ ὄγκου, πού διαγράφεται ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ.

337. Ἐπάνω στά διαδοχικά τμήματα ΑΒ = α, ΒΓ = β μιᾶς εὐθείας κατασκευάζονται ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ καί ΒΕΓ πρός τό ἴδιο μερος τῆς εὐθείας. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού παράγεται, ὅταν τό τετράπλευρο ΑΔΕΓ στρέφεται γύρω ἀπό τήν εὐθεία ΑΒΓ.

338. Ἀπό τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου διέρχεται μιά εὐθεία xy παράλληλη πρός μιά πλευρά τοῦ τριγώνου. Νά συγκριθοῦν οἱ ὄγκοι, πού διαγράφονται ἀπό τά δύο μέρη, στά ὁποῖα ἡ xy χωρίζει τό τρίγωνο, ὅταν τά μέρη αὐτά στρέφονται γύρω ἀπό τήν xy.

339. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ οἱ γωνίες τῆς βάσεως ΑΒ εἶναι 60° καί ἀκόμη: ΑΔ = ΒΓ = ΓΔ = α. Ὑπολογίστε τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ, πού διαγράφει τό τραπέζιο, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, πού διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι κάθετος στή διαγώνιο ΑΓ.

340. Βρεῖτε ποιά σχέση ἱκανοποιοῦν οἱ πλευρές ἑνός ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ὅταν τό στερεό, πού παράγεται, καθώς τό τραπέζιο στρέφεται γύρω ἀπό μιά βάση του, ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: ὁ ὄγκος του πρός τήν ὁλική ἐπιφάνειά του ἔχει λόγο αὐτόν, πού ἔχει καί τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου πρός τήν περίμετρό του.

341. Οἱ πλευρές ΑΒ, ΒΓ ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ἔχουν μήκη 4 καί 7 μέτρα Ὑπολογίστε τόν ὄγκο, πού διαγράφει τό ὀρθογώνιο, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπό τό Α καί εἶναι $\perp$ ΑΓ.

342. Δύο περιφέρειες μέ ἀκτίνες R καί ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Ἄν φέρουμε τήν κοινή ἐφαπτομένη τους ΒΓ καί ὑποθέσουμε ὅτι τό σχῆμα στρέφεται γύρω ἀπό τή διάκεντρο, ποιός εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, πού παράγει τότε τό τρίγωνο ΑΒΓ;

343. Ἄν M, N, P εἶναι τά μέσα τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νά συγκρίνετε τούς ὄγκους, πού παράγονται ἀπό τά τρίγωνα MNP καί ΑΒΓ, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπό μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (ε) τοῦ ἐπιπέδου τους, ἡ ὁποία δέν τέμνει τά τρίγωνα. (Ὑποδ. Βλ. θεωρ. τῆς § 192).

B'

344. Ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί μιά εὐθεία ΑΧ, πού εἶναι ἐξωτερική τοῦ τριγώνου καί βρίσκεται μέσα στό ἐπίπεδό του. Ζητεῖται νά βρεθεῖ πάνω στήν πλευρά ΒΓ ἕνα σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε τά δύο τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ νά διαγράφουν ἴσους ὄγκους, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπό τήν ΑΧ. (**Ὑποδ.** Ἄς εἶναι β, γ οἱ ἀποστάσεις τῶν Β, Γ ἀπό τή δεδομένη εὐθεία ΑΧ καί x ἡ ἀπόσταση τοῦ Δ ἀπό τήν ΑΧ. Τό Δ ὁρίζεται, ἄν βρεθεῖ ἡ x συναρτήσει τῶν β, γ. Ἡ ἐξίσωση, πού παρέχει τό x, μπορεῖ νά προκύψει ἀπό τό ὅτι $E_{ΒΔ} = E_{ΔΓ}$).

345. Ἔχουμε ἕνα ὀξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Ζητεῖται νά καθοριστεῖ μιά εὐθεία ΑΧ, πού εἶναι ἐξωτερική τοῦ τριγώνου, βρίσκεται μέσα στό ἐπίπεδό του καί εἶναι τέτοια, ὥστε μέ περιστροφή τοῦ τριγώνου ΑΒΓ γύρω ἀπό τήν ΑΧ νά διαγράφεται ὁ μέγιστος δυνατός ὄγκος.

346. Ἔχουμε ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ περιττό πλῆθος πλευρῶν, μέ ἀπόστημα ρ καί ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο ἀκτίνας R. Φέρνουμε τή διάμετρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, πού διέρχεται ἀπό μιά κορυφή, ἡ ὁποία χωρίζει τό πολύγωνο σέ δύο μέρη καί ἔστω Π τό ἕνα ἀπό αὐτά. Δεῖξτε ὅτι ὁ ὄγκος, πού παράγεται ἀπό τό Π, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρο, εἶναι ἴσος μέ $\pi\rho(R + \rho)^2/3$. Νά βρεθεῖ ὁ τύπος, πού ἰσχύει γιά τήν περίπτωση κανονικοῦ πολυγώνου μέ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν.

347. Ἔστω ἕνα πολύγωνο μέ ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία xy καί δεύτερος ἄξονας x'y' μέσα στό ἐπίπεδό του, ὁ ὁποῖος δέν τέμνει τό πολύγωνο καί εἶναι $\parallel$xy. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀπό τό πολύγωνο, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τόν x'y', εἶναι ἴσος μέ τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου ἐπί τήν περιφέρεια, πού γράφει ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς xy.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VIII

Η ΣΦΑΙΡΑ

Α΄. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

193. α΄) **Ὁρισμοί. — Ἄν δοθεῖ ἕνα σταθερό σημεῖο K καί ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα R, τότε ὀνομάζουμε: «στερεό-σφαίρα» τό σύνολο τῶν σημείων M τοῦ χώρου, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει: $MK \leq R$ καί «ἐπιφάνεια-σφαίρα» (ἤ «σφαιρική ἐπιφάνεια») ὀνομάζουμε τό σύνολο τῶν σημείων M τοῦ χώρου, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει $MK = R$.**

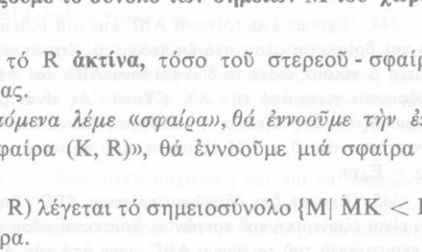
Τό K λέγεται **κέντρο** καί τό R **ἀκτίνα**, τόσο τοῦ στερεοῦ - σφαίρα, ὅσο καί τῆς ἐπιφάνειας - σφαίρας.

Γιά συντομία, *ὅταν στά ἑπόμενα λέμε «σφαίρα», θά ἐννοοῦμε τήν ἐπιφάνεια - σφαίρα.* Ὅταν λέμε «σφαίρα (K, R)», θά ἐννοοῦμε μιά σφαίρα μέ κέντρο K καί ἀκτίνα R.

Ἐσωτερικό τῆς σφαίρας (K, R) λέγεται τό σημειοσύνολο $\{M | MK < R\}$. Αὐτό ἀνήκει στό στερεό - σφαίρα.

Ἕνα σημεῖο N λέγεται **ἐξωτερικό σημεῖο** ὡς πρός τή σφαίρα (K, R), ὅταν $NK > R$.

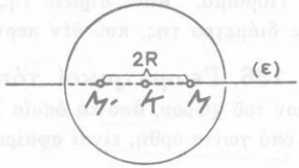
β΄) **Ἄμεσες συνέπειες τοῦ ὁρισμοῦ.** i) Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο (Π), πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο K μιᾶς σφαίρας (K, R) (σχ. 188). Τά σημεῖα M τῆς σφαίρας, τά ὁποῖα βρίσκονται πάνω στό ἐπίπεδο (Π), ἀποτελοῦν τόν τόπο τῶν σημείων τοῦ (Π), πού ἀπέχουν ἀπό τό K μιά σταθερή ἀπόσταση R, δηλ. περιφέρεια μέ κέντρο K καί ἀκτίνα R.



Σχ. 188

Τό ἐπίπεδο (Π) λέγεται **διαμετρικό** ἐπίπεδο τῆς σφαίρας καί ὁ ἐπάνω σ' αὐτό κύκλος (K, R) λέγεται **μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.**

ii) Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθεία (ε), πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο K τῆς σφαίρας (K, R) (σχ. 189). Πάνω σ' αὐτή ὑπάρχουν δυό σημεῖα M καί M΄, πού ἀπέχουν ἀπό τό K ἀποστάσεις KM = = KM΄ = R· ἑπομένως αὐτά εἶναι καί σημεῖα τῆς σφαίρας. Ἡ ἀπόσταση MM΄ = 2R λέγεται **διάμετρος** τῆς σφαίρας καί τά σημεῖα M καί M΄, **ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα** (συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρο). Τό εὐθύγραμμο τμῆμα MM΄, τό ὁποῖο ἀποτελεῖται ἀπό σημεῖα, πού ἀπέχουν ἀπό τό κέντρο λιγότερο ἀπό τήν ἀκτίνα, βρίσκεται στό ἐσωτερικό τῆς σφαίρας, ἐνῶ οἱ προεκτάσεις του βρίσκονται στό ἐξωτερικό τῆς σφαίρας.



Σχ. 189

194. Συμμετρίες. (Θ) — **Σέ κάθε σφαίρα τό κέντρο εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς σφαίρας, κάθε διάμετρος εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς σφαίρας καί κάθε διαμετρικό ἐπίπεδο εἶναι ἐπίπεδο συμμετρίας τῆς σφαίρας.**

Μέ βάση τούς προηγούμενους ὁρισμούς ἡ πρόταση εἶναι φανερή.

195. Ἡ σφαίρα ὡς σχῆμα ἐκ περιστροφῆς. — **Ἡ σφαίρα παράγεται ἀπό μιά ἡμιπεριφέρεια, πού στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρό της. Τό στερεό-σφαίρα παράγεται ἀπό ἕνα ἡμικύκλιο, πού στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρό του.**

Ἀπόδειξη. Ἔστω σφαίρα (K, R) (σχ. 190), μιά ὁποιαδήποτε διάμετρός της AB καί Π(1) ἕνα ἡμιεπίπεδο, πού ἔχει σύνορο τήν εὐθεία AB. Τό Π(1) τέμνει τή σφαίρα κατά μιά ἡμιπεριφέρεια $\overset{\frown}{A\Gamma B}$, μέγιστου κύκλου. Ἄν ἡ $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ στραφεῖ κατά ὁποιαδήποτε γωνία γύρω ἀπό τήν εὐθεία AB, θά βρεθεῖ πάλι πάνω στή σφαίρα (K, R), γιατί οἱ ἀποστάσεις ἀπό τό K διατηροῦνται κατά τή στροφή. **Ἀντιστρόφως:** Ἀπό κάθε σημεῖο M τῆς σφαίρας περνᾶ μιά ἡμιπεριφέρεια $\overset{\frown}{AMB}$, πού εἶναι τομή τῆς σφαίρας καί τοῦ ἡμιεπιπέδου ABM. Ἡ $\overset{\frown}{AMB}$ καί ἡ $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ ἔχουν κοινή διάμετρο AB, ἄρα ἡ $\overset{\frown}{AMB}$ προέρχεται ἀπό στροφή τῆς $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ γύρω ἀπό τήν AB.

Σχ. 190

Μέ τόν ἴδιο τρόπο βλέπουμε ὅτι κάθε ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΒ, ἐπειδή ἀπέχει ἀπό τό Κ λιγότερο ἀπό τό R, ἔρχεται μέ τή στροφή γύρω ἀπό τήν ΑΒ σ' ἕνα σημεῖο ἐσωτερικό τῆς σφαίρας· ἀντιστρόφως, κάθε ἐσωτερικό σημεῖο Ν τῆς σφαίρας εἶναι καί ἐσωτερικό σημεῖο ἑνός ἡμικυκλίου μέ διάμετρο ΑΒ.

Πόρισμα. Κάθε σημεῖο τῆς σφαίρας βλέπει ὑπό ὀρθή γωνία ὁποιαδήποτε διάμετρό της, πού δέν περνᾶ ἀπ' αὐτό (βλ. σχ. 190).

196. Γεωμετρικοί τόποι. α΄) (Θ)—**Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπό τά ὁποῖα ἕνα δεδομένο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό γωνία ὀρθή, εἶναι σφαίρα μέ διάμετρο ΑΒ** (ἐξαιροῦνται τά Α καί Β).

Γιατί, ἄν τό Μ εἶναι σημεῖο τῆς σφαίρας μέ διάμετρο ΑΒ, τότε $\widehat{AMB} = 1$ ορθ. (σχ. 190). **Ἀντιστρόφως**, ἄν $\widehat{AMB} = 1$ ορθ. καί Κ τό μέσο τοῦ ΑΒ, τότε $MK = AB/2$, ἄρα τό Μ ἀνήκει στή σφαίρα.

β΄) (Θ) —**Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων οἱ ἀποστάσεις ΜΑ, ΜΒ ἀπό δυό σταθερά σημεῖα Α καί Β ἔχουν σταθερό λόγο $MA/MB = \lambda \neq 1$, εἶναι σφαίρα μέ ἄκρα διαμέτρου τά σημεῖα, πού διαιροῦν τό διάνυσμα $\vec{AB}$ ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά σέ ἀριθμητικό λόγο λ** *(ἀπολλώνια σφαίρα)*.

Γιατί, ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου, τότε μέσα στό ἐπίπεδο, πού ὁρίζεται ἀπό τό Μ καί τήν εὐθεία ΑΒ, τό Μ θά βρίσκεται πάνω σ' ἕνα ὁρισμένο ἀπολλώνιο κύκλο μέ διάμετρο ΓΔ, ὅπου τά Γ καί Δ εἶναι σταθερά σημεῖα τῆς εὐθείας ΑΒ, πού διαιροῦν τό ΑΒ σέ λόγο λ. Ἄρα θά βρίσκεται καί πάνω στή σφαίρα μέ διάμετρο ΓΔ. Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο Ν τῆς σφαίρας αὐτῆς θά βρίσκεται πάνω στήν περιφέρεια ἑνός μέγιστου κύκλου, πού ὁρίζεται ἀπό τό ἐπίπεδο ΝΓΔ, δηλ. πάνω στήν ἀπολλώνια περιφέρεια, ἄρα $NA/NB = \lambda$.

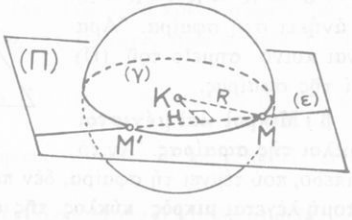
197. Σχετικές θέσεις εὐθείας καί σφαίρας. Ἄς θεωρήσουμε μιά σφαίρα (K, R) καί μιά εὐθεία (ε) τοῦ χώρου, πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο Κ τῆς σφαίρας ἀπόσταση ΚΗ (ὅπου $H \in (\varepsilon)$). Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

i) Ἄν $KH > R$, τότε τό Η εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τῆς σφαίρας. Ἀλλά καί κάθε ἄλλο σημεῖο Ν τῆς (ε) εἶναι ἐξωτερικό, γιατί $KN > KH > R \Rightarrow KN > R$. Ἄρα ὁλόκληρη ἡ (ε) **εἶναι ἐξωτερική τῆς σφαίρας** καί δέν ἔχει κανένα κοινό σημεῖο μαζί της.

ii) Ἄν $KH = R$, τότε τό Η, **πού ἀνήκει στήν εὐθεία** (ε), θά ἀνήκει ἐπίσης καί στή σφαίρα. Κάθε ἄλλο ὅμως σημεῖο Ν τῆς (ε) εἶναι ἐξωτερικό τῆς σφαίρας, γιατί $KN > KH = R \Rightarrow KN > R$. **Ἑπομένως ἡ** (ε) **ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο** μέ τή σφαίρα. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ (ε) λέγεται **ἐφα-**

πτομένη τῆς σφαίρας καί τό Η **σημεῖο ἐπαφῆς** τῆς (ε) μέ τή σφαίρα.

iii) Ἄν ΚΗ $<$R (σχ. 191), τότε θεωροῦμε τό διαμετρικό ἐπίπεδο (Π), πού ὁρίζεται ἀπό τό κέντρο Κ καί τήν (ε). Τό (Π) τέμνει τή σφαίρα κατά μέγιστη περιφέρεια (γ) καί ἐπειδή ΚΗ $<$ R, ἕπεται ὅτι ἡ (ε) τέμνει τήν περιφέρεια (γ), ἄρα καί τή σφαίρα, σέ δυό σημεῖα Μ καί Μ΄. Ἡ (ε) καί ἡ σφαίρα ἔχουν τότε **δύο κοινά σημεῖα** Μ καί Μ΄. Τό τμῆμα ΜΜ΄ λέγεται **χορδή** τῆς σφαίρας, βρίσκεται στό ἐσωτερικό της καί εἶναι ΜΜ΄ $\leq$ 2R (τό = ἀντιστοιχεῖ στήν περίπτωση ΚΗ = 0, δηλ. ἡ (ε) περνᾶ ἀπό τό κέντρο Κ).



Σχ. 191

Τά ἀντίστροφα ἀληθεύουν, γιατί οἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικές. Ἔχουμε δηλ.:

ΚΗ $>$ R $\Longleftrightarrow$ Ἡ σφαίρα καί ἡ εὐθεία ἔχουν 0 κοινά σημεῖα
ΚΗ = R $\Longleftrightarrow$ » » » » » » 1 κοινό σημεῖο
ΚΗ $<$ R $\Longleftrightarrow$ » » » » » » 2 κοινά σημεῖα

Πορίσματα. **1ο) Κάθε εὐθεία, πού ἐφάπτεται σέ μιά σφαίρα, εἶναι κάθετη στό ἄκρο μιᾶς ἀκτίνας.**

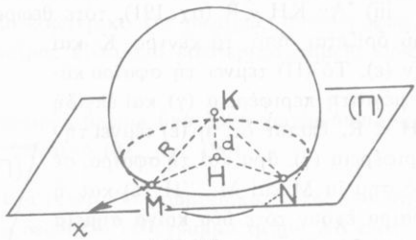
2ο) Τρία σημεῖα μιᾶς σφαίρας δέν μποροῦν νά βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία.

Γιατί εὐθεία καί σφαίρα ἔχουν, τό πολύ, δύο κοινά σημεῖα.

198. Ἐπίπεδες τομές σφαίρας. **α΄) (Θ) — Ἄν ἕνα ἐπίπεδο (Π) ἀπέχει ἀπό τό κέντρο Κ μιᾶς σφαίρας (Κ, R) ἀπόσταση d, μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα R, τότε τό σύνολο τῶν κοινῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καί τῆς σφαίρας εἶναι μιά περιφέρεια, πού ἔχει κέντρο τήν προβολή τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πάνω στό ἐπίπεδο (Π) καί ἀκτίνα $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$. Ἡ περιφέρεια αὐτή λέγεται «τομή» τῆς σφαίρας ἀπό τό ἐπίπεδο.**

Ἀπόδειξη. Ἄς ὀνομάσουμε Η τήν προβολή τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας πάνω στό (Π) (σχ. 192). Ἄς φέρουμε μέσα στό ἐπίπεδο (Π) μιά ὁποιαδήποτε ἡμιευθεία Ηx, πού ἀρχίζει ἀπό τό Η. Τότε πάνω στήν Ηx ὑπάρχει ἕνα καί μόνο σημεῖο Μ τέτοιο, ὥστε ΜΚ = R, γιατί R $>$ ΚΗ ἀπ᾿ τήν ὑπόθεση. Ἑπομένως πάνω σέ κάθε ἡμιευθεία Ηx ὑπάρχει ἕνα σημεῖο τῆς σφαίρας. Ἐπειδή ἀπό τό Η ἀναχωροῦν ἄπειρες ἡμιευθεῖες μέσα στό ἐπίπεδο (Π), γι᾿ αὐτό τό (Π) ἔχει ἄπειρα κοινά σημεῖα μέ τή σφαίρα. Ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπ᾿ αὐτά, ἔστω τό Μ, ἀπέχει ἀπό τό Η σταθερή ἀπόσταση: $MH = \sqrt{KM^2 - KH^2} = \sqrt{R^2 - d^2}$. Ἄρα ὅλα τά κοινά σημεῖα τοῦ (Π) καί τῆς σφαίρας βρίσκονται πάνω σέ μιά περιφέρεια (γ) μέ κέντρο Η καί ἀκτίνα

$\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$. **Ἀντιστρόφως:** Ἔστω Ν, ἕνα σημεῖο τῆς περιφέρειας (γ) Τότε $HN = \sqrt{R^2 - d^2} \Rightarrow HN^2 = R^2 - d^2$. Ἀπό τήν $KN^2 = KH^2 + HN^2 \Rightarrow KN^2 = d^2 + R^2 - d^2 = R^2 \Rightarrow KN = R \Rightarrow$ τό Ν ἀνήκει στή σφαίρα. Ἄρα εἶναι κοινό σημεῖο τοῦ (Π) καί τῆς σφαίρας.



Σχ. 192

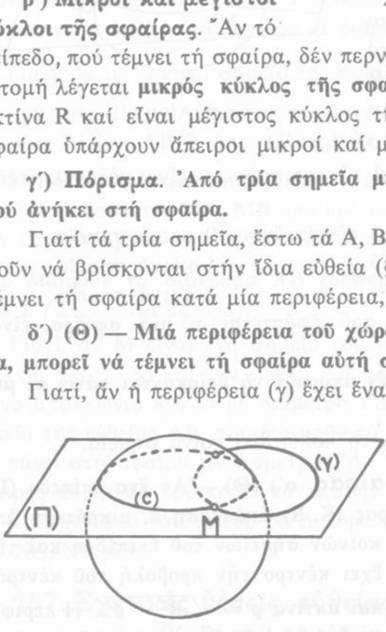
β΄) Μικροί καί μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας. Ἄν τό ἐπίπεδο, πού τέμνει τή σφαίρα, δέν περνᾶ ἀπό τό κέντρο Κ (δηλ. $d \neq 0$), τότε ἡ τομή λέγεται **μικρός κύκλος τῆς σφαίρας.** Ἄν $d = 0$, τότε ἡ τομή ἔχει ἀκτίνα R καί εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας.Πάνω, λοιπόν, σέ κάθε σφαίρα ὑπάρχουν ἄπειροι μικροί καί μέγιστοι κύκλοι.

γ΄) Πόρισμα. Ἀπό τρία σημεῖα μιᾶς σφαίρας περνᾶ μιά περιφέρεια, πού ἀνήκει στή σφαίρα.

Γιατί τά τρία σημεῖα, ἔστω τά Α, Β, Γ, τά ὁποῖα, ὅπως εἴδαμε, δέν μποροῦν νά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (§ 197, 2ο), ὁρίζουν ἕνα ἐπίπεδο, πού τέμνει τή σφαίρα κατά μία περιφέρεια, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τά Α, Β, Γ.

δ΄) (Θ) — Μιά περιφέρεια τοῦ χώρου, πού δέ βρίσκεται πάνω σέ σφαίρα, μπορεῖ νά τέμνει τή σφαίρα αὐτή σέ δυό τό πολύ σημεῖα.

Γιατί, ἄν ἡ περιφέρεια (γ) ἔχει ἕνα κοινό σημεῖο Μ μέ τή σφαίρα (σχ. 193), αὐτό σημαίνει ὅτι τό ἐπίπεδο (Π), πάνω στό ὁποῖο βρίσκεται ἡ (γ), ἐνδέχεται νά τέμνει τή σφαίρα κατά μία περιφέρεια (c). Τά κοινά σημεῖα τῆς (γ) καί τῆς (c) εἶναι καί κοινά σημεῖα τῆς (γ) καί τῆς σφαίρας· καί **ἀντιστρόφως**: κάθε κοινό σημεῖο τῆς (γ) καί τῆς σφαίρας εἶναι καί κοινό σημεῖο τῆς (γ) καί τῆς περιφέρειας (c). Ἀλλά τά κοινά σημεῖα δύο περιφερειῶν, πού δέ συμπίπτουν, εἶναι τό πολύ δύο.



Σχ. 193

ε΄) Πόρισμα. Μιά περιφέρεια, πού ἔχει τρία κοινά σημεῖα μέ μιά σφαίρα, βρίσκεται ὁλόκληρη πάνω στή σφαίρα.

199. Σχετικές θέσεις μιᾶς σφαίρας καί ἑνός ἐπιπέδου.

Ἄς θεωρήσουμε μιά σφαίρα (Κ, R) καί ἕνα ἐπίπεδο (Π), πού ἀπέχει ἀπό τό κέντρο Κ τῆς σφαίρας ἀπόσταση ΚΗ, ὅπου $H \in (\Pi)$. Διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις:

i) Ἄν $KH > R$, τότε τόσο τό Η, ὅσο καί ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τοῦ (Π), εἶναι ἐξωτερικά τῆς σφαίρας (βλ. § 197, i). Ἑπομένως τό (Π) δέν ἔχει **κανένα κοινό σημεῖο** μέ τή σφαίρα.

ii) Ἄν ΚΗ=R, τότε τό Η, τό ὁποῖο ἀνήκει στό ἐπίπεδο (Π), ἀνήκει τώρα καί στή σφαίρα. Ἄρα τό Η εἶναι κοινό σημεῖο τοῦ (Π) καί τῆς σφαίρας. Ὅλα τά ὑπόλοιπα σημεῖα τοῦ (Π) εἶναι ἐξωτερικά τῆς σφαίρας (βλ. § 197, ii). Στήν περίπτωση αὐτή τό (Π) ἔχει **ἕνα μόνο** κοινό σημεῖο μέ τή σφαίρα καί λέγεται **ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο** τῆς σφαίρας στό σημεῖο Η. Τό Η εἶναι τό **σημεῖο ἐπαφῆς**.

iii) Ἄν ΚΗ < R, τότε τό ἐπίπεδο (Π) τέμνει τή σφαίρα (§ 198) καί ἔχει μέ αὐτή ἄπειρα κοινά σημεῖα.

Τά ἀντίστροφα τῶν παραπάνω ἀληθεύουν, γιατί οἱ περιπτώσεις εἶναι ἐξαντλητικές. Ἔχουμε δηλ.:

ΚΗ > R $\Longleftrightarrow$ Ἡ σφαίρα καί τό ἐπίπεδο ἔχουν 0 κοινά σημεῖα
ΚΗ = R $\Longleftrightarrow$ » » » » » » 1 κοινό σημεῖο
ΚΗ < R $\Longleftrightarrow$ » » » » » » ἄπειρα κοινά σημεῖα.

Πόρισμα. Κάθε ἐπίπεδο, πού εἶναι ἐφαπτόμενο μιᾶς σφαίρας, εἶναι κάθετο στό ἄκρο μιᾶς ἀκτίνας.

200. Ὁρισμός. Ἄξονας μιᾶς περιφέρειας (ἤ κύκλου) λέγεται ἡ εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς περιφέρειας καί εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας.

201. Προσδιορισμός μιᾶς σφαίρας. Ἀπό τόν ὁρισμό της μιά σφαίρα εἶναι καθορισμένη, ὅταν γνωρίζουμε τό κέντρο καί τήν ἀκτίνα της. Ἐπίσης εἶναι ὁρισμένη, ὅταν γνωρίζουμε τό κέντρο Κ καί ἕνα σημεῖο Α τῆς σφαίρας, γιατί τότε ἡ ἀκτίνα της εἶναι τό ΚΑ. Ἐπίσης εἶναι ὁρισμένη, ἄν γνωρίζουμε τό κέντρο της Κ καί ἕνα ἐπίπεδο (Π), πού ἐφάπτεται σ' αὐτή· γιατί τότε ἡ ἀκτίνα εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ Κ ἀπό τό (Π).

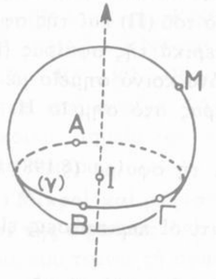
Μιά σφαίρα ὁρίζεται ἐπίσης μέ βάση τίς παρακάτω προτάσεις:

i) Ἀπό τέσσερα σημεῖα, πού δέ βρίσκονται πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, περνᾶ μία καί μόνο μία σφαίρα.

Γιατί τά τέσσερα αὐτά σημεῖα, ἔστω τά Α, Β, Γ, Δ, ὁρίζουν ἕνα τετράεδρο. Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι ὑπάρχει ἕνα μόνο σημεῖο Κ (τό «περίκεντρο» τοῦ τετραέδρου), τό ὁποῖο ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς τέσσερις κορυφές τοῦ τετραέδρου καί τό ὁποῖο, μάλιστα, προβάλλεται στά περίκεντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου (§ 117). Τό Κ εἶναι, λοιπόν, τό κέντρο μιᾶς σφαίρας, πού περνᾶ ἀπό τά Α, Β, Γ, Δ καί ἔχει ἀκτίνα R = ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ = ΚΔ. Ἡ σφαίρα αὐτή λέγεται **περιγεγραμμένη στό τετράεδρο** καί τό τετράεδρο λέγεται **ἐγγεγραμμένο στή σφαίρα.**

ii) Μιά περιφέρεια (γ) καί ἕνα σημεῖο Μ, πού εἶναι ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο τῆς (γ), ὁρίζουν μιά σφαίρα (σχ. 194).

Ἀρκεῖ νά πάρουμε τρία σημεῖα Α, Β, Γ πάνω στή (γ) καί νά θεωρήσουμε τή σφαίρα, πού περνᾶ ἀπό τά Α, Β, Γ, Μ. Αὐτή θά περιέχει ὁλόκληρη τήν περιφέρεια (γ) (§ 198, ε΄) καί τό σημεῖο Μ. Τό κέντρο τῆς σφαίρας αὐτῆς θά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα τῆς (γ) (βλ. § 200) καί πάνω στό μεσοκάθετο ἐπίπεδο μιᾶς ἀπό τίς ἀκμές ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ.



Σχ. 194

iii) Σέ κάθε τετράεδρο, ὑπάρχει μία καί μόνο μία σφαίρα, πού βρίσκεται στό ἐσωτερικό του καί ἐφάπτεται στίς τέσσερις ἕδρες.

Πράγματι τό **ἔγκεντρο** Ο τοῦ τετραέδρου (§ 118) εἶναι τό μόνο σημεῖο μέσα σ᾽αὐτό, πού ἀπέχει ἐξίσου ἀπό τίς ἕδρες. Ἑπομένως ἡ σφαίρα μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα μιά ἀπό τίς ἴσες ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τίς ἕδρες ἐφάπτεται στίς ἕδρες καί εἶναι μοναδική. Ἡ σφαίρα αὐτή λέγεται **ἐγγεγραμμένη** στό τετράεδρο καί τό τετράεδρο λέγεται **περιγεγραμμένο** στή σφαίρα.

iv) Κάθε **παράκεντρο** (§ 119) ἑνός τετραέδρου ὁρίζει, μέ ὅμοιο τρόπο, μιά **παρεγγεγραμμένη σφαίρα** τοῦ τετραέδρου.

Τέλος γιά τόν προσδιορισμό μιᾶς σφαίρας χρησιμεύουν οἱ ἑπόμενες παρατηρήσεις.

v) Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, πού περνοῦν ἀπό τρία δεδομένα σημεῖα Α, Β, Γ, εἶναι ὁ ἄξονας (§ 200) τῆς περιγεγραμμένης στό τρίγωνο ΑΒΓ περιφέρειας.

vi) Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, πού περνοῦν ἀπό δυό δεδομένα σημεῖα Α καί Β, εἶναι τό μεσοκάθετο ἐπίπεδο τοῦ τμήματος ΑΒ.

vii) Γιά νά εἶναι ἕνα σημεῖο Κ κέντρο μιᾶς σφαίρας, πού ἐφάπτεται σέ δυό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), πρέπει καί ἀρκεῖ τό σημεῖο αὐτό νά βρίσκεται πάνω σ᾽ ἕνα ἀπό τά ἐπίπεδα, πού διχοτομοῦν τίς δίεδρες, τίς ὁποῖες σχηματίζουν τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἤ, ἄν τά (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, νά βρίσκεται πάνω στό μεσοπαράλληλο ἐπίπεδο τῶν (Π) καί (Ρ).

202. Πόλοι κύκλων μιᾶς σφαίρας.

α΄) **Ὁρισμός.—Λέγονται «πόλοι» μιᾶς περιφέρειας (γ), ἡ ὁποία βρίσκεται πάνω σέ σφαίρα, τά σημεῖα τομῆς τῆς σφαίρας μέ τόν ἄξονα τῆς περιφέρειας (γ).**

Ἐπειδή κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονα μιᾶς περιφέρειας (§ 200) ἀπέχει ἐξίσου ἀπό ὅλα τά σημεῖα τῆς περιφέρειας, γι᾽αὐτό τά σημεῖα τῆς (γ) ἀπέχουν μιά σταθερή ἀπόσταση ἀπό κάθε πόλο: τήν *πολική ἀπόσταση* τῆς (γ) *ἀπ᾽ τόν πόλο*. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ὁ ἄξονας τῆς περιφέρειας περνᾶ καί ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας καί, ἑπομένως, οἱ δυό πόλοι τῆς περιφέρειας (γ) εἶναι τά ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τῆς σφαίρας, πού εἶναι κάθετη στό ἐπίπεδο τῆς (γ).

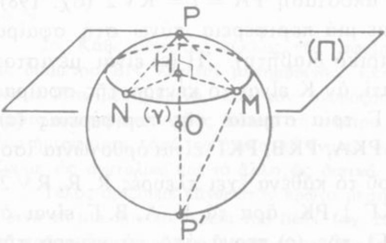
β′) (Θ) — Ὁ τόπος τῶν σημείων μιᾶς σφαίρας, πού ἀπέχουν μιά δεδομένη ἀπόσταση ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο P τῆς σφαίρας, εἶναι περιφέρεια, πού ἔχει τό σημεῖο P ὡς ἕναν ἀπό τούς πόλους της.

Ἀπόδειξη. Ἔστω M ἕνα σημεῖο τῆς σφαίρας (O, R), πού ἀπέχει ἀπό ἕνα δεδομένο σημεῖο P μιά δεδομένη ἀπόσταση $l < 2R$ (σχ. 195).

Ἂν P′ εἶναι τό ἀντιδιαμετρικό τοῦ P, τότε τό τρίγωνο PMP′ εἶναι ὀρθογώνιο στό M. Φέρνουμε τό ὕψος MH τοῦ τριγώνου PMP′. Θά ἔχουμε $PH \cdot PP' = PM^2 \Rightarrow PH \cdot 2R = l^2 \Rightarrow PH = l^2/2R$ (σταθερό). Ἑπομένως τό H εἶναι σταθερό σημεῖο καί, ἐπειδή $HM \perp PP'$, τό M θά βρίσκεται πάνω σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο (Π), κάθετο στήν PP′ στό σταθερό σημεῖο της H. Ἄρα τό M βρίσκεται πάνω στήν τομή τῆς σφαίρας καί τοῦ ἐπιπέδου (Π), δηλαδή πάνω σέ μιά περιφέρεια (γ). Ἡ (γ) ἔχει τό P ὡς πόλο, γιατί ἡ εὐθεία PP′ εἶναι ἄξονας τῆς (γ). **Ἀντιστρόφως:** Κάθε σημεῖο N τῆς (γ) ἀπέχει ἀπό τό P ἀπόσταση l, γιατί $NP^2 = PP' \cdot PH = 2R \cdot (l^2/2R) = l^2 \Rightarrow NP = l$.

203. Πρακτικές ἐφαρμογές. α′) Σφαιρικός διαβήτης (σχ. 196).

Γιά νά χαράξουμε περιφέρεια πάνω σέ μιά δεδομένη σφαίρα, χρησιμο-

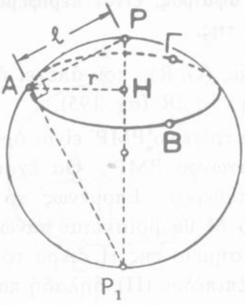


Σχ. 195

Σχ. 196

ποιοῦμε διαβήτη, τοῦ ὁποίου τά σκέλη εἶναι καμπυλωμένα κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε οἱ ἀκίδες, στίς ὁποῖες καταλήγουν, νά εἶναι περίπου κάθετες στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας (δηλ. κάθετες στό ἐπίπεδο, πού ἐφάπτεται στό σημεῖο, στό ὁποῖο στηρίζεται ἡ ἀκίδα). Ἂν τό ἄκρο τῆς μιᾶς ἀκίδας στηριχτεῖ σ᾽ ἕνα σημεῖο P τῆς σφαίρας καί τό ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη παραμένει ἀμετάβλητο, τότε τό ἄκρο τῆς ἄλλης ἀκίδας (ἄν ἐφοδιαστεῖ μέ γραφίδα) χαράζει, καθώς γλιστρᾶ πάνω στή σφαίρα, μιά περιφέρεια μέ πόλο P.

β′) Προσδιορισμός τῆς ἀκτίνας μιᾶς δεδομένης σφαίρας. Μέ τή βοήθεια ἑνός σφαιρικοῦ διαβήτη, ἄς χαράξουμε πάνω στή σφαίρα μιά περιφέρεια μέ πόλο P, τῆς ὁποίας τά σημεῖα νά ἀπέχουν ἀπό τό P μιά γνωστή ἀπόσταση l (ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη) (σχ. 197).



Σχ. 197

Ἄς πάρουμε πάνω στή χαραγμένη περιφέρεια τρία σημεῖα A, B, Γ. Μποροῦμε τότε, μέ τή βοήθεια τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτη, νά προσδιορίσουμε τίς ἀποστάσεις AB, BΓ, ΓA καί νά κατασκευάσουμε τρίγωνο A΄B΄Γ΄ ἴσο πρός τό τρίγωνο ABΓ. Βρίσκουμε τήν ἀκτίνα r τῆς περιφέρειας τῆς περιγεγραμμένης στό τρίγωνο A΄B΄Γ΄ καί ἔτσι ἔχουμε τήν ἀκτίνα r τῆς περιγεγραμμένης στό τρίγωνο ABΓ περιφέρειας, δηλ. τήν AHΣ. χεδιάζουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο A΄P΄H΄ ἴσο πρός τό APH (μέ ὑποτείνουσα l καί κάθετη πλευρά AH = r). Φέρνοντας μιά κάθετο στήν A΄P΄ στό A΄, παίρνουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἴσο μέ τό APP_1. Ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τελευταίου εἶναι ἴση μέ τή διάμετρο PP_1 τῆς σφαίρας, πού μᾶς δόθηκε.

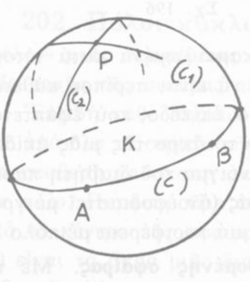
γ΄) Πάνω σέ δεδομένη σφαίρα νά γραφεῖ ἕνας μέγιστος κύκλος.

Λύση. Ἀφοῦ προσδιορίσουμε τήν ἀκτίνα R τῆς σφαίρας, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο, ἀρκεῖ, μέ πόλο ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο P τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας καί μέ πολική ἀπόσταση $PA = l = R\sqrt{2}$ (σχ. 198), νά γράψουμε μιά περιφέρεια πάνω στή σφαίρα (μέ τό σφαιρικό διαβήτη). Ἡ (c) εἶναι μέγιστος κύκλος, γιατί, ἄν K εἶναι τό κέντρο τῆς σφαίρας καί A, B, Γ τρία σημεῖα τῆς περιφέρειας (c), τά τρίγωνα PKA, PKB, PKΓ εἶναι ὀρθογώνια ἰσοσκελή, ἀφοῦ τό καθένα ἔχει πλευρές R, R, $R\sqrt{2}$.

Σχ. 198

Ἐπομένως $KA \perp PK$, $KB \perp PK$, $K\Gamma \perp PK$, ἄρα τά K, A, B, Γ εἶναι ὁμοεπίπεδα. Δηλαδή τό ἐπίπεδο (ABΓ) τῆς (c) περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας. Συνεπῶς ἡ (c) εἶναι μέγιστος κύκλος.

δ΄) Πάνω σέ μιά δεδομένη σφαίρα νά γραφεῖ μέγιστος κύκλος, πού νά περνᾶ ἀπό δύο δεδομένα σημεῖα A καί B τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας.



Σχ. 199

Λύση. Ἡ ἀκτίνα R τῆς σφαίρας προσδιορίζεται (ἐδαφ. β΄) α΄). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $AB < 2R$. Μέ πόλους A καί B καί πολικές ἀποστάσεις $R\sqrt{2}$, ἄς γράψουμε δύο μέγιστους κύκλους (c_1) καί (c_2) πάνω στή σφαίρα (σχ. 199). Οἱ (c_1) καί (c_2) δέν ταυτίζονται, γιατί τά ἐπίπεδά τους εἶναι κάθετα στίς τεμνόμενες εὐθεῖες ΚΑ, ΚΒ (Κ εἶναι τό κέντρο τῆς σφαίρας). Ἄρα τέμνονται σέ δύο ἀντιδιαμετρικά σημεῖα. Ἔστω Ρ ἕνα ἀπό τά κοινά σημεῖα τῶν περιφερειῶν (c_1) καί (c_2). Μέ πόλο τό Ρ καί πολική ἀπόσταση $PA = PB (= R\sqrt{2})$ γράφουμε (μέγιστο) κύκλο (c), πού εἶναι, ὅπως εἶναι φανερό, αὐτός πού ζητᾶμε. β΄) Ἄν $AB = 2R$, τότε τά Α καί Β εἶναι ἀντιδιαμετρικά καί ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, πού περνοῦν ἀπό τά Α, Β. Ἕναν ὁποιοδήποτε ἀπ' αὐτούς τούς κύκλους μποροῦμε νά τόν γράψουμε, ἐκλέγοντας ἕνα ὁποιοδήποτε τρίτο σημεῖο Γ τῆς σφαίρας καί γράφοντας τό μέγιστο κύκλο, πού περνᾶ ἀπό τά Α καί Γ.

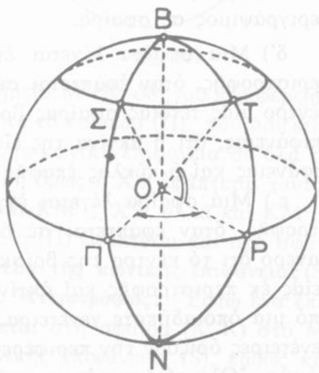
204. Γεωγραφικές συντεταγμένες. Πάνω στή σφαιρική ἐπιφάνεια μποροῦμε νά καθορίσουμε ἕνα σύστημα συντεταγμένων, μέ τή βοήθεια τοῦ ὁποίου σέ κάθε σημεῖο τῆς σφαίρας νά ἀντιστοιχεῖ ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἀριθμῶν, πού προσδιορίζει πλήρως τή θέση τοῦ σημείου πάνω στή σφαίρα. Γιά τό σκοπό αὐτό ἐκλέγουμε πάνω στή σφαίρα δύο ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα Β καί Ν, πού λέγονται ἀντιστοίχως βόρειος καί νότιος πόλος. Ὡς πρός τά σημεῖα αὐτά:

1ο. Ὁ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδο εἶναι κάθετο στή ΒΝ, λέγεται **ἰσημερινός,** ἐνῶ κάθε μικρός κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδο εἶναι κάθετο στή ΒΝ, λέγεται **παράλληλος.**

Τό ἐπίπεδο τοῦ ἰσημερινοῦ χωρίζει τή σφαίρα σέ δύο ἡμισφαίρια: *βόρειο,* αὐτό πού περιέχει τό Β καί *νότιο,* αὐτό πού περιέχει τό Ν.

2ο. Κάθε μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας μέ διάμετρο ΒΝ λέγεται **μεσημβρινός.** Ἐκλέγουμε ἕνα μεσημβρινό, πού τόν ὀνομάζουμε **πρῶτο μεσημβρινό.** Αὐτός διαιρεῖ τή σφαίρα σέ δύο ἡμισφαίρια, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα τό ὁρίζουμε ὡς *ἀνατολικό* καί τό ἄλλο ὡς *δυτικό.*

Τέλος ὁρίζουμε πάνω στόν πρῶτο μεσημβρινό τή μία ἡμιπεριφέρειά του ΒΣΝ (σχ. 200) ὡς **πρωτο-ἡμιμεσημβρινό.** Αὐτός τέμνει τόν ἰσημερινό σέ κάποιο σημεῖο Π.



Σχ. 200

Ἔστω τώρα Τ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς σφαίρας. Ὁ ἡμιμεσημβρινός ΒΤΝ, πού περνᾶ ἀπό τό Τ, τέμνει τόν ἰσημερινό σέ ἕνα σημεῖο Ρ, ἐνῶ ὁ παράλληλος, πού περνᾶ ἀπό τό Τ, τέμνει τόν πρῶτο ἡμιμεσημβρινό σ' ἕνα σημεῖο Σ. Τό σημεῖο Ρ ὁρίζεται πάνω στόν ἰσημερινό ἀπό τή γωνία $\widehat{ΠΟΡ}$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται **γεωγραφικό μῆκος** τοῦ Τ καί μετριέται ἀπό 0° ἕως 180° καί χαρακτηρίζεται ὡς *ἀνατολικό μῆκος* ἤ *δυτικό μῆκος,* ἀνάλογα μέ τό ἄν τό Τ (καί τό Ρ) βρίσκεται στό ἀνατολικό ἤ δυτικό ἡμισφαίριο ὡς πρός τόν πρῶτο μεσημβρινό. Τό σημεῖο Σ, πού, ὅταν βρεθεῖ, καθορίζει τόν παράλληλο πάνω στόν ὁποῖο βρίσκεται τό Τ, ὁρίζεται ἀπό τή γωνία $\widehat{ΠΟΣ}$, πού ὀνομάζεται **γεωγραφικό πλάτος** τοῦ Τ. Αὐτή μετριέται ἀπό 0° ἕως 90° καί χαρακτηρίζεται ὡς *βόρειο πλάτος* ἤ *νότιο πλάτος,* ἀνάλογα μέ τό ἄν τό Τ (καί τό Σ) βρίσκεται στό βόρειο ἤ τό νότιο ἡμισφαίριο.

Οἱ δύο αὐτές γωνίες (μῆκος καί πλάτος) λέγονται **γεωγραφικές συντεταγμένες** τοῦ

Τ καί καθορίζουν τή θέση τοῦ Τ πάνω στή σφαίρα. Αὐτές δίνονται ἐπίσης ἀπό τά μέτρα τῶν τόξων $\widehat{\Pi P}$ (= μέτρο τῆς δίεδρης γωνίας Σ — ΒΝ — Τ) καί $\widehat{\Sigma\Pi}$ (= $\widehat{TP}$ = **σφαιρική ἀπόσταση τοῦ Τ ἀπό τόν ἰσημερινό,** πού μετριέται σέ μοῖρες).

Πάνω στή γήϊνη σφαίρα, ὡς πρῶτος ἡμιμεσημβρινός λαμβάνεται αὐτός, πού περνᾶ ἀπό τό ἀστεροσκοπεῖο Greenwich (Ἀγγλία) καί ὡς Β καί Ν ὁ βόρειος καί νότιος πόλος τῆς γῆς.

205. Σφαίρα περιγεγραμμένη, σφαίρα ἐγγεγραμμένη.

α΄) Ἄν ὑπάρχει σφαίρα, πού νά περνᾶ ἀπό ὅλες τίς κορυφές ἑνός πολυέδρου, τότε τό πολύεδρο λέγεται **ἐγγράψιμο σέ σφαίρα** καί ἡ σφαίρα **περιγεγραμμένη στό πολύεδρο.**

β΄) Ἄν ὑπάρχει σφαίρα, πού βρίσκεται στό ἐσωτερικό ἑνός κυρτοῦ πολυέδρου καί ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς ἕδρες του, τό πολύεδρο λέγεται **περιγράψιμο σέ σφαίρα** καί ἡ σφαίρα **ἐγγεγραμμένη στό πολύεδρο.**

γ΄) Κάθε τετράεδρο εἶναι καί ἐγγράψιμο καί περιγράψιμο σέ σφαίρα. Τό ἴδιο καί κάθε κανονική πυραμίδα.

Τό ὀρθογώνιο παρ/δο εἶναι ἐγγράψιμο καί ὁ κύβος ἐγγράψιμος καί περιγράψιμος σέ σφαίρα.

δ΄) Μιά σφαίρα λέγεται ἐγγεγραμμένη σέ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς γενέτειρες. Εἶναι φανερό ὅτι τό κέντρο μιᾶς τέτοιας σφαίρας βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας, ὅτι ἡ ἀκτίνα της εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφάνειας καί ὁ κύκλος ἐπαφῆς εἶναι ἴσος μέ τήν ὁδηγό.

ε΄) Μιά σφαίρα λέγεται ἐγγεγραμμένη σέ κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ὅταν ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς γενέτειρες τῆς ἐπιφάνειας. Εἶναι φανερό ὅτι τό κέντρο της βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς καί ἀκτίνα της εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου της ἀπό μιά ὁποιαδήποτε γενέτειρα. Οἱ προβολές τοῦ κέντρου της πάνω στίς γενέτειρες ὁρίζουν τήν περιφέρεια ἐπαφῆς τῆς σφαίρας μέ τήν κωνική ἐπιφάνεια. **Ὅλα τά ἐφαπτόμενα τμήματα, ἀπό τήν κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας ὥς τή σφαίρα, εἶναι ἴσα.**

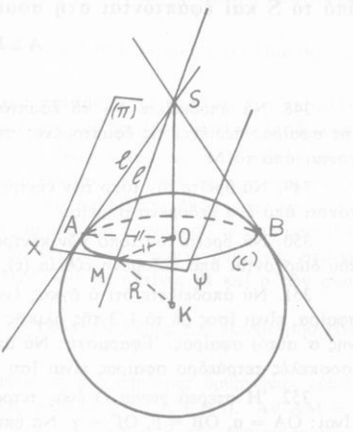
ς΄) Μιά σφαίρα λέγεται ἐγγεγραμμένη σέ ὀρθό κυκλικό κῶνο, ὅταν βρίσκεται μέσα σ' αὐτόν καί ἐφάπτεται στή βάση καί στήν κωνική ἐπιφάνεια. Ἄν ὁ κῶνος κοπεῖ ἀπό ἕνα ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τόν ἄξονά του, ὁ κύκλος, πού εἶναι ἐγγεγραμμένος στό ἰσοσκελές τρίγωνο, πού προκύπτει, εἶναι μέγιστος κύκλος τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

ζ΄) Ἀνάλογα ὁρίζουμε τή σφαίρα, πού εἶναι περιγεγραμμένη γύρω ἀπό ὀρθό κυκλικό κῶνο, καθώς καί τή σφαίρα, πού εἶναι περιγεγραμμένη γύρω ἀπό κύλινδρο ἤ κόλουρο κῶνο (ἐκ περιστροφῆς).

206. Τόπος τῶν εὐθειῶν, πού περνοῦν ἀπό ἕνα σημεῖο καί ἐφάπτονται σέ μιά σφαίρα. Περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέ-

δων, πού περνοῦν ἀπό ἕνα σημεῖο καί ἐφάπτονται σέ μιά σφαίρα.

Ἔστω S ἕνα σημεῖο, ἐξωτερικό μιᾶς σφαίρας (K, R) (σχ. 201). Ἀπό τήν SK περνοῦν ἄπειρα ἐπίπεδα καί σέ καθένα ἀπ' αὐτά ὑπάρχουν δύο ἐφαπτομένες στήν (K, R). Ἑπομένως ἀπό τό S διέρχονται ἄπειρες ἐφαπτομένες στήν (K, R). Τά ἐφαπτόμενα τμήματα SA, SM, SB, ... ἔχουν ὅλα κοινό μῆκος $l = \sqrt{SK^2 - R^2}$ καί κοινή προβολή SO πάνω στήν KS, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τή σχέση $\overline{SO} \cdot \overline{SK} = l^2$. Ἄρα τά σημεῖα ἐπαφῆς A, M, B ... βρίσκονται πάνω σέ μιά περιφέρεια (c) μέ κέντρο O καί συνεπῶς **τό σύνολο τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας (K, R), πού περνοῦν ἀπό τό S, ἀποτελεῖ κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς μέ ὁδηγό τήν περιφέρεια ἐπαφῆς (c)** (§ 180). Ἄν σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο M τῆς ὁδηγοῦ περιφέρειας (c) φέρουμε μία ἐφαπτομένη XΨ τῆς (c), τότε τό ἐπίπεδο (Π), πού ὁρίζεται ἀπό τή XΨ καί SM (σχ. 201), ἐφάπτεται στήν κωνική ἐπιφάνεια σέ ὅλα τά σημεῖα τῆς γενέτειρας SM (§ 179, δ΄). Ἐπειδή ὅμως ἡ XΨ ἐφάπτεται ταυτοχρόνως καί στή σφαίρα (K, R), γι' αὐτό εἶναι KM ⊥ XΨ, ἀλλά καί KM ⊥ ⊥ SM, ἑπομένως KM ⊥ (Π), δηλ. τό ἐπίπεδο (Π) ἐφάπτεται καί στή σφαίρα (K, R). Ἄρα, **ὅλα τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας (S) εἶναι καί ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας. Ἀντιστρόφως:** Ἔστω ἕνα ἐπίπεδο (Π), πού περνᾶ ἀπό τό S καί ἐφάπτεται στή σφαίρα (K, R) στό M. Αὐτό περιέχει μία γενέτειρα SM τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας (S), καθώς καί τήν ἐφαπτομένη XΨ τοῦ κύκλου (c), ἡ ὁποία ἄγεται στό M. Γιατί XΨ ⊥ OM, XΨ ορθογ SK (γιατί ἡ XΨ βρίσκεται στό ἐπίπεδο τῆς (c), τό ὁποῖο εἶναι ⊥ SK) ⇒ XΨ ⊥ Επιπ SMK ⇒ XΨ ⊥ KM ⇒ XΨ ἀνήκει στό ἐπίπεδο, πού ἐφάπτεται στή σφαίρα στό σημεῖο M. Ἑπομένως τό (Π), ἐπειδή περιέχει τήν SM καί τήν ἐφαπτομένη τῆς ὁδηγοῦ (c) στό σημεῖο M, θά ἐφάπτεται καί στήν κωνική ἐπιφάνεια (S). Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι **ὅλα τά ἐπίπεδα, πού περνοῦν ἀπό τό S καί ἐφάπτονται στή σφαίρα, ἐφάπτονται καί στήν κωνική ἐπιφάνεια, τήν ὁποία ὁρίζει τό S καί ἡ σφαίρα.**



Σχ. 201

Ὁρισμός. Μία ἐπιφάνεια (E) λέγεται **περιβάλλουσα** μιᾶς οἰκογένειας (συνόλου) ἐπιπέδων, ὅταν ἡ (E) ἐφάπτεται σέ ὅλα τά ἐπίπεδα τῆς οἰκογένειας καί ὅταν κάθε σημεῖο τῆς (E) εἶναι σημεῖο ἐπαφῆς τῆς (E) μέ ἕνα ἐπίπεδο τῆς οἰκογένειας.

Μέ βάση τόν ὁρισμό αὐτό, αὐτά, πού ἀποδείξαμε προηγουμένως, ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς: **Τό σύνολο τῶν εὐθειῶν, πού περνοῦν ἀπό τό S καί ἐφάπτονται σέ μιά σφαίρα (K, R), ἀποτελεῖ κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς, ἡ ὁποία εἶναι περιβάλλουσα τῆς οἰκογένειας τῶν ἐπιπέδων, πού περνοῦν ἀπό τό S καί ἐφάπτονται στή σφαίρα (K, R).**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

348. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο μιᾶς σφαίρας σ' ἕνα σημεῖο M τῆς σφαίρας περιέχει τίς ἐφαπτομένες στό M ὅλων τῶν κύκλων τῆς σφαίρας πού διέρχονται ἀπό τό M.

349. Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν κέντρων τῶν τομῶν μιᾶς σφαίρας μέ ἐπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό ἕνα δεδομένο σημεῖο.

350. Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν κέντρων τῶν τομῶν μιᾶς σφαίρας (K, R) μέ ἐπίπεδα, πού διέρχονται ἀπό δεδομένη εὐθεία (ε), πού ἀπέχει ἀπόσταση d ἀπό τό κέντρο K.

351. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος ἑνός πολυέδρου, πού εἶναι περιγεγραμμένο σέ μιά σφαίρα, εἶναι ἴσος μέ τό 1/3 τῆς ὁλικῆς του ἐπιφάνειας ἐπί τήν ἀκτίνα τῆς (ἐγγεγραμμένης σ' αὐτό) σφαίρας. Ἐφαρμογή: Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀκτίνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης σέ ἰσοσκελές τετράεδρο σφαίρας εἶναι ἴση μέ τό 1/4 τοῦ ὕψους του.

352. Ἡ στερεά γωνία O ἑνός τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνια καί ἀκόμη εἶναι: $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $O\Gamma = \gamma$. Νά ὑπολογίσετε συναρτήσει τῶν α, β, γ i) τήν ἀκτίνα R τῆς περιγεγραμμένης στό τετράεδρο σφαίρας, ii) τήν ἀκτίνα ρ τῆς ἐγγεγραμμένης στό τετράεδρο σφαίρας. (**Ὑποδ.** i) Θεωρῆστε τό ὀρθογ. παρ/δο μέ διαστάσεις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. ii) Λάβετε ὑπόψη τή σχέση $(AB\Gamma)^2 = (OAB)^2 + (OB\Gamma)^2 + (O\Gamma A)^2$).

353. Νά ὑπολογίσετε τήν ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου, πού εἶναι περιγεγραμμένο σέ σφαίρα ἀκτίνας ρ.

354. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας συναρτήσει τῆς ἀκτίνας ρ ἑνός κύκλου της καί τῆς πολικῆς ἀποστάσεώς του λ. Ποιά εἶναι ἡ ἄλλη πολική ἀπόσταση;

355. Ἕνας μικρός κύκλος μιᾶς σφαίρας ἔχει ἀκτίνα ρ καί τό ἐπίπεδό του ἀπέχει d ἀπό τόν πόλο του. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

356. Νά ὁρίσετε ἕνα ἐπίπεδο, πού εἶναι ἐφαπτόμενο μιᾶς σφαίρας καί i) εἶναι παράλληλο πρός δεδομένο ἐπίπεδο, ii) διέρχεται ἀπό δεδομένη εὐθεία.

357. Ἔχουμε μιά σφαίρα καί μιά εὐθεία. Νά ὁρίσετε ἕνα ἐπίπεδο, πού νά διέρχεται ἀπό τήν εὐθεία καί νά τέμνει τή σφαίρα κατά ἕναν κύκλο μέ δεδομένη ἀκτίνα.

358. Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός ἰσόπλευρου κώνου (δηλ. μέ ἄνοιγμα τῆς κωνικῆς ἐπιφάνειας 60°) εἶναι πk^2. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα τῆς περιγεγραμμένης, καθώς καί τῆς ἐγγεγραμμένης, στόν κῶνο σφαίρας.

359. Ἄν ρ, λ, h εἶναι ἡ ἀκτίνα, ἡ πλευρά καί τό ὕψος ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου καί r ἡ ἀκτίνα τῆς ἐγγεγραμμένης σ' αὐτόν σφαίρας, δείξτε: $\rho = \dfrac{\rho h}{\lambda + \rho} = \rho\sqrt{\dfrac{\lambda - \rho}{\lambda + \rho}}$

360. Ἔχουμε ἕναν ὀρθό κυκλικό κῶνο μέ κορυφή O καί μιά σταθερή γενέτειρά του ΟΑ. Ἄν ΟΜ εἶναι μεταβλητή γενέτειρα τοῦ κώνου, νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο ΟΑΜ κύκλου, ὅταν τό M διατρέχει τήν περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου. (**Ὑποδ.** Ἄν K εἶναι τό κέντρο τῆς περιγεγραμμένης στόν κῶνο σφαίρας, τότε τό K προβάλλεται στό ἐπίπεδο ΟΑΜ στό σημεῖο τοῦ τόπου).

361. Θεωροῦμε δύο ἀσύμβατες εὐθεῖες καί τό ἐπίπεδο, πού ἰσαπέχει ἀπ' αὐτές. Νά βρεθεῖ πάνω στό ἐπίπεδο αὐτό ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου σφαίρας, πού ἐφάπτεται καί στίς δύο ἀσύμβατες.

362. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε κανονική πυραμίδα εἶναι ἐγγράψιμη καί περιγράψιμη σέ σφαίρα.

363. Ἕνα πολύεδρο ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ περικλείεται ἀπό δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ καί ἀπό τρία τετράπλευρα ΑΒΒ΄Α΄, ΒΓΓ΄Β΄, ΓΑΑ΄Γ΄. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν δύο ἀπό τά τετράπλευρα εἶναι ἐγγράψιμα, τότε τό πολύεδρο εἶναι ἐγγράψιμο σέ σφαίρα καί ὅτι καί τό τρίτο τετράπλευρο εἶναι ἐγγράψιμο.

364. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἕνα παραλληλεπίπεδο εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ μιά σφαίρα, τότε εἶναι ὀρθογώνιο παρ/δο.

365. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνα παραλληλεπίπεδο περιγράψιμο σέ σφαίρα, εἶναι: ὅλες οἱ ἕδρες τοῦ παρ/δου νά εἶναι ἰσοδύναμες.

366. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχει μιά σφαίρα, πού ἐφάπτεται καί στίς 6 ἀκμές ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου σέ ἐσωτερικά σημεῖα τῶν ἀκμῶν. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα της r, ἄν ἡ ἀκμή τοῦ τετραέδρου εἶναι α. Νά ἀποδείξετε ἀκόμη ὅτι τό κέντρο τῆς σφαίρας αὐτῆς, πού ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς ἀκμές τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ταυτοχρόνως καί κέντρο τῆς ἐγγεγραμμένης καί κέντρο τῆς περιγεγραμμένης στό κανονικό τετράεδρο σφαίρας. Νά ὑπολογίσετε, τέλος, καί τίς ἀκτίνες R καί ρ τῶν σφαιρῶν αὐτῶν.

Ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξύ τῶν r, ρ, R; (**Ὑποδ.** Οἱ ἀκμές τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴσες χορδές τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας).

367. Δύο σημεῖα Μ καί Μ΄ κινοῦνται πάνω σέ δύο σταθερές ὀρθογώνιες εὐθεῖες (ε) καί (ε΄), πού ἔχουν ἐλάχιστη ἀπόσταση $ΑΑ' = 2h$ ($Α \in (ε)$, $Α' \in (ε')$). Ἄν $ΑΜ = x$, $Α'Μ' = x'$, νά ὑπολογίσετε συναρτήσει τῶν h, x, x΄ τήν ἀκτίνα R τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας στό τετράεδρο ΑΜΜ΄Α΄. Κατόπιν βρεῖτε τόν γ. τόπο τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας αὐτῆς, ὅταν τά Μ καί Μ΄ κινοῦνται ἔτσι, ὥστε $x^2 + x'^2 = c^2$ (c δεδομένο τμῆμα).

368. Θεωροῦμε τά σημεῖα τῆς ὑδρόγειας σφαίρας, πού ἔχουν γεωγραφικό πλάτος ἴσο μέ τό γεωγραφικό μῆκος. Νά βρεῖτε τό γ. τόπο τῶν προβολῶν τῶν σημείων αὐτῶν στό ἐπίπεδο τοῦ Ἰσημερινοῦ.

Β΄.

369. Σέ μιά σφαίρα ἀκτίνας ρ νά περιγραφεῖ κόλουρος κῶνος πού ἔχει ὄγκο $κπρ^3/3$ (k δεδομένος ἀριθμός). Νά ὑπολογίσετε τήν ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ κόλουρου αὐτοῦ κώνου καί νά βρεθοῦν τά ὅρια τοῦ k, γιά νά εἶναι τό πρόβλημα δυνατό.

(Σημείωση. Στά προβλήματα, πού ζητεῖται «νά κατασκευαστεῖ» κῶνος ἤ κόλουρος κῶνος ἤ κύλινδρος, ἡ φράση «νά κατασκευαστεῖ» ἔχει τό νόημα «νά ὑπολογιστοῦν καί, ἐφόσον εἶναι δυνατό, νά κατασκευαστοῦν γεωμετρικά οἱ διαστάσεις τοῦ στερεοῦ, δηλ. τά στοιχεῖα, πού τό προσδιορίζουν»).

370. Ἔστω μιά σφαίρα ἀκτίνας R. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι γιά ὅλους τούς κώνους, πού εἶναι περιγεγραμμένοι στή σφαίρα αὐτή καί ἔχουν ἀκτίνα βάσεως x καί ὕψος h, ἰσχύει ἡ σχέση:

$$x^2 = \frac{R^2 y}{y - 2R}$$

ii) Σέ μιά σφαίρα ἀκτίνας R νά περιγραφεῖ ἕνας κῶνος, πού νά ἔχει ὄγκο $πk^3/3$. Συνθῆκες δυνατότητας. Ποιά εἶναι ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ ὄγκου τοῦ περιγεγραμμένου κώνου; (**Ὑποδ.** Ἀπό τήν ἐλάχιστη δυνατή τιμή τοῦ k προκύπτει ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ ὄγκου).

371. Σέ μιά σφαίρα ἀκτίνας R νά περιγραφεῖ κῶνος τέτοιος, ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς τοῦ ἐπιφάνειας νά εἶναι $πk^2$. Νά βρεῖτε τίς δυνατές τιμές τοῦ k, γιά νά ἔχει τό πρόβλημα λύση. Νά βρεῖτε τό ἐλάχιστο τῆς κυρτῆς ἐπιφάνειας.

372. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινή κάθετος δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν καί Αx, Βy δύο ἡμιευ-

θεῖες πάνω στίς ἀσύμβατες. Πάνω στίς Ax, By παίρνουμε ἀντιστοίχως σημεῖα A′, B′ τέτοια, ὥστε AA′ = BB′ = λ. Νά βρεῖτε τό γ. τόπο τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, πού διέρχεται ἀπό τά A, B, A′, B′, ὅταν τό λ μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως ∞. (**Ὑποδ.** Τό κέντρο K τῆς σφαίρας προβάλλεται στό μέσο τῆς (χορδῆς) AB καί ἰσαπέχει ἀπό τίς ἴσες χορδές AA′, BB′).

373. Πάνω σέ δυό παράλληλα ἐπίπεδα ἐφαπτόμενα σέ δεδομένη σφαίρα παίρνουμε δύο σταθερά ἀσύμβατα τμήματα AB καί ΓΔ. Ἄν μέ ὁποιοδήποτε ἐπίπεδο, παράλληλο πρός τά δύο πρῶτα, κόψουμε τή σφαίρα καί τό τετράεδρο ΑΒΓΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν εἶναι σταθερός.

374. Ἔχουμε τρία σημεῖα A, B, Γ μή συνευθειακά. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, πού εἶναι τέτοια, ὥστε: ὁ λόγος τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου, πού ἔχει κορυφές τά μέσα τοῦ (στρεβλοῦ, γενικά) τετραπλεύρου ΜΑΒΓ, νά εἶναι σταθερός. (**Ὑποδ.** Ἄς εἶναι E, Θ, Z, H τά μέσα τῶν MA, AB, ΒΓ, ΓΜ. Προεκτείνουμε τίς AZ κατά ZA_1 = AZ καί ΓΘ κατά $ΘΓ_1$ = ΓΘ καί ἑνώνουμε τό M μέ τά A_1 καί $Γ_1$).

375. Ἔχουμε ἕνα κανονικό τετράεδρο ΑΒΓΔ μέ ἀκμή α. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας, πού ἔχει τό κέντρο της μέσα στό τετράεδρο καί ἐφάπτεται στήν ἕδρα ΒΓΔ καί στίς ἀκμές AB, ΑΓ, ΑΔ.

376. Σέ κάθε κανονικό τετράεδρο ΑΒΓΔ τό κέντρο καθεμιᾶς παρεγγεγραμμένης σφαίρας βρίσκεται πάνω στήν περιγεγραμμένη στό τετράεδρο σφαίρα. Τό σημεῖο ἐπαφῆς τῆς παρεγγεγραμμένης μέ τήν προέκταση τῆς ἕδρας ΑΒΓ βρίσκεται πάνω στή περιγεγραμμένη περιφέρεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

377. Ἀπό δύο σταθερά σημεῖα A καί B διέρχονται δύο μεταβλητές εὐθεῖες AX, BΨ πάντοτε ὀρθογώνιες μεταξύ τους. Ἄν ΚΛ εἶναι ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν AX, BΨ (K ∈ AX, Λ ∈ BΨ), ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ καθενός ἀπό τά σημεῖα K καί Λ;

378. Μιά κόλουρη κανονική ἑξαγωνική πυραμίδα ἔχει βάσεις μέ ἀποστήματα α καί α′ καί εἶναι περιγεγραμμένη σέ μιά σφαίρα.

i) Ποιά εἶναι ἡ ἀκτίνα R τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας;

ii) Ποιά εἶναι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ;

iii) Ἄν $α + α' = 4R$ ἤ $α - α' = 2R$, ποιά εἶναι κάθε φορά ἡ κλίση τῶν παράπλευρων ἑδρῶν πρός τή μεγάλη βάση;

379. Ἔστω ΔΑΒΓ ἕνα τετράεδρο τρισορθογώνιο στό Δ μέ ΔΑ = α, ΔΒ = β, ΔΓ = γ καί ἐγγεγραμμένο σέ μιά σφαίρα ἀκτίνας R. i) Νά ὑπολογίσετε τήν R συναρτήσει τῶν α, β, γ. ii) Νά ὑπολογίσετε τίς ἀποστάσεις a, b, d τῶν κορυφῶν A, B, Δ ἀπό τη διάμετρο τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό Γ. iii) Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ a, b, d μποροῦν νά χρησιμεύσουν ὡς πλευρές τριγώνου. iv) Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου μέ πλευρές a, b, d εἶναι ἴσο μέ αβγ/4R. (**Ὑποδ.** Ἔστω ΓΓ′ ἡ διάμετρος, πού διέρχεται ἀπό τό Γ. Τά a, b, d εἶναι ὕψη τῶν ὀρθογ. τριγώνων ΓΑΓ′, ΓΒΓ′, ΓΔΓ′).

380. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (c), μιά σταθερή εὐθεία (δ), πού τέμνει τό ἐπίπεδο τῆς (c) σ' ἕνα σημεῖο A, πού ἀνήκει στή (c) καί ἕνα σημεῖο B ἐπάνω στή (δ). Ἄν ἕνα σημεῖο Γ διαγράφει τή (c), νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ γ. τόπος τοῦ περικέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι περιφέρεια. Ἄν P εἶναι τό κέντρο τῆς περιφέρειας αὐτῆς (δηλ. τό κέντρο τοῦ τόπου), νά βρεῖτε καί τό γ. τόπο τοῦ P, ὅταν τό B διατρέχει τήν (δ). (**Ὑποδ.** Ἔστω K τό κέντρο τῆς σφαίρας, πού ὁρίζει ἡ (c) καί τό B. Τό K προβάλλεται στό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΒΑΓ (βλ. ἄσκ. 72). Ὅταν τό B κινεῖται, τό K διαγράφει τόν ἄξονα τῆς (c) καί τό P εἶναι μέσο τῆς ἀποστάσεως τοῦ K ἀπό τήν (δ) (βλ. ἄσκ. 110)).

381. Ἔστω ἕνας κύβος ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ ἀκμῆς α. Πάνω στίς ἀσύμβατες ἀκμές ΔΓ′ καί ΒΓ (ὅπου Δ′Β εἶναι διαγώνιος τοῦ κύβου) κινοῦνται δύο σημεῖα M καί N ἔτσι, ὥστε ἡ σφαίρα μέ διάμετρο MN νά ἐφάπτεται πάντοτε στήν ἀκμή AA′. i) Ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξύ τῶν ἀποστάσεων Δ′M = x καί BN = y; ii) Ποιά εἶναι ἡ ἐλάχιστη τιμή τῆς ἀκτίνας τῆς σφαίρας αὐτῆς;

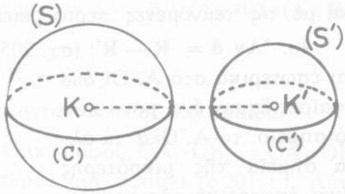
ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΟΥΣ

207. Ἂς θεωρήσουμε δύο σφαῖρες (S) καί (S′) μέ κέντρα K καί K′ καί ἀκτίνες R καί R′. Τό τμῆμα $KK' = d$ λέγεται **διάκεντρος** τῶν δύο σφαιρῶν.

α′) Ἂν τά K καί K′ συμπίπτουν, οἱ σφαῖρες λέγονται **ὁμόκεντρες.** Αὐτές διακρίνονται μεταξύ τους, ἄν $R \neq R'$ ἤ συμπίπτουν, ἄν $R = R'$.

β′) Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τά K καί K′ εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε ἡ εὐθεία KK′ τῶν κέντρων εἶναι κοινός ἄξονας συμμετρίας τῶν δύο σφαιρῶν καί κάθε ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τήν εὐθεία KK′, τέμνει τίς σφαῖρες κατά δύο περιφέρειες μέγιστων κύκλων (c) καί (c′), οἱ ὁποῖοι, ὅταν στραφοῦν γύρω ἀπό τήν KK′, παράγουν τίς σφαῖρες.

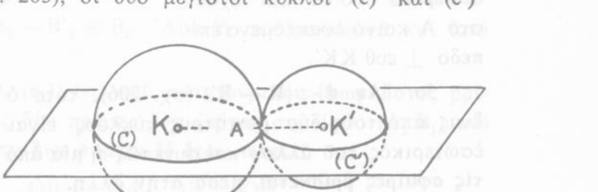
1ο. **Ἂν $d > R + R'$** (σχ. 202), οἱ δύο περιφέρειες (c) καί (c′) εἶναι ἐξωτερικές μεταξύ τους. Κάθε σημεῖο τῆς (c) ἀπέχει ἀπό τό K′ ἀπόσταση μεγαλύτερη ἀπό τήν R′ καί, ἐπειδή κατά τήν περιστροφή γύρω ἀπό τήν εὐθεία KK′ οἱ ἀποστάσεις διατηροῦνται, ὅλα τά σημεῖα τῆς σφαίρας (S) εἶναι ἐξωτερικά τῆς (S′).



Σχ. 202

Ὁμοίως τά σημεῖα τῆς (S′) εἶναι ἐξωτερικά τῆς (S). **Οἱ σφαῖρες εἶναι ἐξωτερικές μεταξύ τους.**

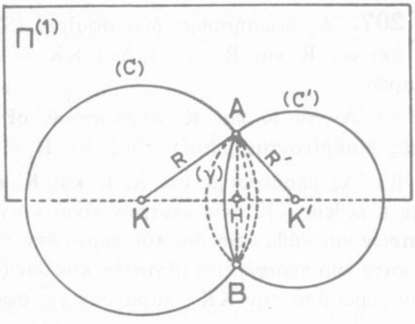
2ο. **Ἂν $d = R+R'$** (σχ. 203), οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι (c) καί (c′) ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό A. Οἱ δύο σφαῖρες ἔχουν ὡς μόνο κοινό σημεῖο τό A. Ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τῆς μιᾶς εἶναι ἐξωτερικό τῆς ἄλλης. Οἱ σφαῖρες **ἐφάπτονται ἐξωτερικά** καί ἔχουν στό σημεῖο ἐπαφῆς τους A ἕνα κοινό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο, κάθετο στή διάκεντρο.



Σχ. 203

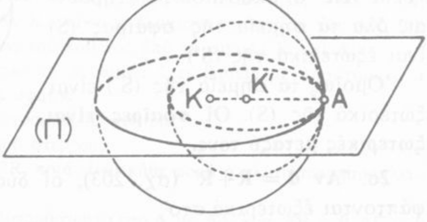
3ο. **Ἂν $|R - R'| < d < R+R'$** (σχ. 204), οἱ δύο περιφέρειες μέγιστων κύκλων (c) καί (c′) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα A καί B συμμετρικά ὡς πρός τήν KK′. Τό μέσο H τῆς AB βρίσκεται πάνω στήν KK′ καί εἶναι $AH \perp KK'$. Ἔστω $\Pi^{(1)}$ ἕνα ἀπό τά ἡμιεπίπεδα, στά ὁποῖα χωρίζει τό (Π) ἡ εὐθεία KK′. Ὅταν τό $\Pi^{(1)}$ στρέφεται γύρω ἀπό τήν KK′, οἱ ἡμιπεριφέρειες τῶν (c) καί (c′), πού βρίσκονται πάνω σ᾽ αὐτό, διαγράφουν τίς δύο σφαῖρες. Τό A διαγράφει μιά περιφέρεια (γ) μέ κέντρο H καί ἀκτίνα HA.

Ἡ (γ) ἀνήκει καί στή σφαίρα (S) καί στή σφαίρα (S′). **Οἱ δύο σφαῖρες ἔχουν μιά περιφέρεια κοινή,** τήν (γ) καί λέγονται **τεμνόμενες.** Τό ἐπίπεδο τοῦ κοινοῦ κύκλου **(κύκλος τομῆς)** εἶναι ⊥ ευθ ΚΚ′. Τό κέντρο του βρίσκεται πάνω στήν ΚΚ′ καί ἡ ἀκτίνα του εἶναι ἴση μέ τό ὕψος τοῦ τριγώνου ΚΑΚ′, πού ἄγεται ἀπό τό Α. Ἡ σφαίρα (S) χωρίζει τήν (S′) σέ δύο μέρη, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα βρίσκεται ὁλόκληρο μέσα στήν (S) καί τό ἄλλο ὁλόκληρο ἔξω ἀπό τήν (S), ὅπως συμβαίνει καί μέ τίς τεμνόμενες περιφέρειες.



Σχ. 204

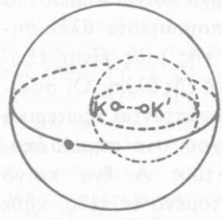
4ο. Ἄν $d = |R - R'|$ (σχ. 205), τότε οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά στό Α. Οἱ δύο σφαῖρες ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, τό Α. Ὅλα τά ἄλλα σημεῖα τῆς μικρότερης εἶναι ἐσωτερικά τῆς μεγαλύτερης. Οἱ δύο σφαῖρες λέγονται τότε **ἐφαπτόμενες ἐσωτερικά** στό Α καί ἔχουν στό Α κοινό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο ⊥ ευθ ΚΚ′.



Σχ. 205

5ο. Ἄν $d < |R - R'|$ (σχ. 206), τότε ὁ ἕνας ἀπό τούς δύο μέγιστους κύκλους εἶναι ἐσωτερικός τοῦ ἄλλου καί συνεπῶς **ἡ μία ἀπό τίς σφαῖρες βρίσκεται μέσα στήν ἄλλη.**

γ′) **Τά ἀντίστροφα ἀληθεύουν** καί μποροῦν νά ἀποδειχτοῦν μέ τήν ἀπαγωγή στό ἄτοπο, ὅπως γίνεται καί γιά τίς θέσεις δύο περιφερειῶν. Ἔτσι π.χ., ἄν ἡ μία σφαίρα βρίσκεται μέσα στήν ἄλλη $\Rightarrow d < |R - R'|$ κ.τ.λ.



Σχ. 206

ΔΥΝΑΜΗ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΦΑΙΡΑ

208. α′) Θεώρημα καί ὁρισμός. Ἄν ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Ρ περνᾶ μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία, πού τέμνει μιά δεδομένη σφαίρα (Κ,R) σέ δύο σημεῖα Α καί Β, τότε τό γινόμενο $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ εἶναι ἕνας πραγματικός

ἀριθμός, σταθερός, πού λέγεται «δύναμη τοῦ P ὡς πρός τή σφαίρα». Τό πρόσημο τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ χαρακτηρίζει τή θέση τοῦ P ὡς πρός τή σφαίρα. Ἄν τό P εἶναι ἐξωτερικό σημεῖο τῆς σφαίρας, ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ἴσος μέ τό τετράγωνο τοῦ τμήματος PE, πού ἐφάπτεται στή σφαίρα στό E.

Γιατί ἡ τέμνουσα PAB ὁρίζει μέ τό κέντρο K ἕνα ἐπίπεδο (Π), τό ὁποῖο τέμνει τή σφαίρα κατά περιφέρεια μέγιστου κύκλου (K, R), ὁ ὁποῖος βρίσκεται πάνω στό (Π) καί περνᾶ ἀπό τά A καί B. Ἑπομένως ἐφαρμόζονται τά γνωστά ἀπό τήν ἐπιπεδομετρία:

Δύναμη τοῦ P ὡς πρός τήν (K, R) $=$ Δυν $P/(K, R) = \overline{PA}\cdot\overline{PB} = \boxed{PK^2 - R^2}$

Ἄν Δυν $P/(K, R) > 0 \Rightarrow P$ εἶναι ἐξωτερικό τῆς σφαίρας.
Ἄν Δυν $P/(K, R) = 0 \Rightarrow P$ βρίσκεται πάνω στή σφαίρα.
Ἄν Δυν $P/(K, R) < 0 \Rightarrow P$ βρίσκεται μέσα στή σφαίρα.

β΄) Ἀντίστροφα Θεωρήματα. I. ***Ἄν πάνω σέ τρεῖς εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3), πού περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο O καί δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο, βρίσκονται ἀντιστοίχως τά ζεύγη τῶν σημείων (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) τέτοια, ὥστε:***

$$\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1} = \overline{OA_2}\cdot\overline{OB_2} = \overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3},$$

τότε τά σημεῖα A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3 βρίσκονται πάνω σέ μιά σφαίρα.

Γιατί τά A_1, B_1, A_2, B_2 εἶναι ὁμοκυκλικά, ἀφοῦ $\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1} = \overline{OA_2}\cdot\overline{OB_2}$ καί ἑπομένως ἀπ᾿ αὐτά καί ἀπ᾿ τό A_3 περνᾶ μιά σφαίρα (§ 201, ii). Αὐτή ξανακόβει τήν (ε_3) σ᾿ ἕνα σημεῖο B'_3, τό ὁποῖο συμπίπτει μέ τό B_3, γιατί εἶναι $\overline{OA_3}\cdot\overline{OB'_3} = \overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$ (σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα) καί $\overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3} = \overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$ (ἀπ᾿ τήν ὑπόθεση). Ἀπ᾿ αὐτά ἕπεται: $\overline{OA_3}\cdot\overline{OB'_3} = \overline{OA_3}\cdot\overline{OB_3} \Rightarrow \overline{OB'_3} = \overline{OB_3} \Rightarrow B'_3 \equiv B_3$. Ἄρα ἡ σφαίρα περνᾶ καί ἀπό τό ἕκτο σημεῖο B_3.

II. ***Ἄν πάνω στίς (ε_1), (ε_2), (ε_3) τοῦ προηγούμενου θεωρήματος βρίσκονται σέ καθεμιά ἀπό τίς δύο πρῶτες ἕνα ζεῦγος σημείων: $(A_1\ B_1)$ καί (A_2, B_2) καί πάνω στήν τρίτη ἕνα σημεῖο H ἔτσι, ὥστε:***

$$\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1} = \overline{OA_2}\cdot\overline{OB_2} = \overline{OH}^2,$$

τότε ἀπό τά 5 αὐτά σημεῖα περνᾶ μιά σφαίρα, πού ἐφάπτεται στήν (ε_3) στό H.

Γιατί ἡ περιφέρεια, πού περνᾶ ἀπό τά A_1, B_1, A_2, B_2 ὁρίζει μέ τό H μία σφαίρα, πού δέν ἔχει μέ τήν (ε_3) κανένα ἄλλο κοινό σημεῖο ἐκτός ἀπό τό H. Γιατί, ἄν ξανάκοβε τήν (ε_3) στό H΄, θά εἴχαμε $\overline{OH}\cdot\overline{OH'} = \overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$. Ἔχουμε ὅμως ἀπό τήν ὑπόθεση $\overline{OH}^2 = \overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$. Ἄρα θά ἦταν $\overline{OH}\cdot\overline{OH'} = \overline{OH}^2 \Rightarrow \overline{OH} = \overline{OH'}$, πράγμα ἀδύνατο, ἄν τά H καί H΄ ἦταν διαφορετικά μεταξύ τους.

III. ***Ἄν πάνω στίς παραπάνω εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3) βρίσκονται: στήν (ε_1) δύο σημεῖα A_1, B_1 καί σέ καθεμιά ἀπό τίς (ε_2) καί (ε_3) μόνο ἀπό ἕνα ση-***

μεῖο A_2, A_3 ἔτσι, ὥστε $\overline{OA_1}.\overline{OB_1} = \overline{OA_2}^2 = \overline{OA_3}^2$, τότε ἡ σφαίρα, πού εἶναι περιγεγραμμένη στό τετράεδρο $A_1B_1A_2A_3$, ἐφάπτεται στίς (ε_2) καί (ε_3) στά A_2 καί A_3.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἐντελῶς ὅμοια μέ τήν προηγούμενη.

ΡΙΖΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ

209. α΄) Θεώρημα καὶ ὁρισμός. —Τό σύνολο τῶν σημείων, πού ἔχουν ἴσες δυνάμεις ὡς πρός δύο σφαῖρες (K, R) καί (K΄, R΄), εἶναι ἕνα ἐπίπεδο κάθετο στή διάκεντρο KK΄ σ᾽ ἕνα σημεῖο Π, τό ὁποῖο ἀπέχει ἀπό τό μέσο O τῆς διακέντρου ἀλγεβρική ἀπόσταση $\overline{O\Pi}$, πού δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$2.\overline{KK'}\ \overline{O\Pi} = R^2 - R'^2$$

Τό ἐπίπεδο αὐτό λέγεται «ριζικό ἐπίπεδο» τῶν δύο σφαιρῶν.

Ἔστω M ἕνα σημεῖο τοῦ τόπου, (E) τό ἐπίπεδο, πού περνᾶ ἀπό τό M καί εἶναι ⊥ KK΄ καί Π τό σημεῖο τομῆς τοῦ (E) μέ τήν εὐθεία KK΄. Τότε:

$$\Delta\upsilon\nu\ M/(K) = \Delta\upsilon\nu\ M/(K') \Longleftrightarrow MK^2 - R^2 = MK'^2 - R'^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow MK^2 - MK'^2 = R^2 - R'^2 \Longleftrightarrow 2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi} = R^2 - R'^2$$ (2ο θεώρημα τῆς διαμέσου).

Ἀπ᾽ τήν τελευταία σχέση ἕπεται ὅτι τό Π εἶναι σταθερό καί ἑπομένως καί τό ἐπίπεδο (E), πάνω στό ὁποῖο βρίσκεται τό M, εἶναι σταθερό. Κάθε σημεῖο P τοῦ (E) ἔχει ἴσες δυνάμεις ὡς πρός τίς δύο σφαῖρες, γιατί προβάλλεται στό Π καί ἑπομένως:

$$PK^2 - PK'^2 = 2\overline{KK'}\cdot\overline{O\Pi} = R^2 - R'^2 \Rightarrow PK^2 - R^2 = PK'^2 - R'^2$$

β΄) Εἰδικές περιπτώσεις: 1ο. Ἄν δύο σφαῖρες τέμνονται, τό ἐπίπεδο τῆς τομῆς τους εἶναι τό ριζικό τους ἐπίπεδο. Γιατί κάθε κοινό σημεῖο τῶν δύο σφαιρῶν ἔχει μηδενική δύναμη ὡς πρός καθεμιά ἀπό τίς σφαῖρες καί ἑπομένως ἡ κοινή περιφέρεια τῶν δύο σφαιρῶν ἀνήκει στό ριζικό τους ἐπίπεδο καί τό ἐπίπεδό της ταυτίζεται μέ τό ριζικό ἐπίπεδο.

2ο Ἄν δύο σφαῖρες ἐφάπτονται, τό ριζικό ἐπίπεδο εἶναι τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδό τους, πού ἄγεται στό κοινό σημεῖο.

3ο. Ἄν οἱ σφαῖρες ἔχουν κοινές ἐφαπτομένες, τό ριζικό ἐπίπεδο περνᾶ ἀπό τά μέσα τῶν κοινῶν ἐφαπτόμενων τμημάτων.

ΡΙΖΙΚΟΣ ΑΞΟΝΑΣ ΤΡΙΩΝ ΣΦΑΙΡΩΝ

210. Ἄς θεωρήσουμε 3 σφαῖρες (Σ_1),(Σ_2), (Σ_3), πού ἔχουν κέντρα K_1, K_2, K_3, τά ὁποῖα δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Τότε:

Τό ριζικό ἐπίπεδο τῶν (Σ_1), (Σ_2) εἶναι τό $(E_3) \perp K_1K_2$
Τό » » τῶν (Σ_2), (Σ_3) εἶναι τό $(E_1) \perp K_2K_3$
Τό » » τῶν (Σ_3), (Σ_1) εἶναι τό $(E_2) \perp K_1K_3$

Τά δύο ἐπίπεδα (E_3) καί (E_1) τέμνονται κατά μία εὐθεία (δ) $\perp$ Επιπ $K_1K_2K_3$ καί κάθε σημεῖο τῆς (δ) ἔχει ἴσες δυνάμεις καί ὡς πρός τίς τρεῖς σφαῖρες. Ἑπομένως τό (E_2) περνᾶ ἀπό τή (δ). Τά τρία, λοιπόν, ριζικά ἐπίπεδα περνοῦν ἀπό τήν ἴδια εὐθεία (δ), ἡ ὁποία λέγεται **«ριζικός ἄξονας τῶν τριῶν σφαιρῶν»**. Κάθε σημεῖο τῆς εὐθείας αὐτῆς ἔχει ἴσες δυνάμεις καί ὡς πρός τίς τρεῖς σφαῖρες (ἑπομένως τήν ἴδια σχετική θέση καί ὡς πρός τίς τρεῖς).

Ἄν τά κέντρα K_1, K_2, K_3 εἶναι στήν ἴδια εὐθεία, τότε ἤ τά (E_3) καί (E_1) εἶναι παράλληλα, ὁπότε δέν ὑπάρχει ριζικός ἄξονας ἤ τά (E_3) καί (E_1) ταυτίζονται καί ἀποτελοῦν ἕνα ἐπίπεδο, τοῦ ὁποίου κάθε σημεῖο ἔχει ἴσες δυνάμεις καί ὡς πρός τίς τρεῖς σφαῖρες. Τότε καί τό (E_2) ταυτίζεται μέ αὐτά καί οἱ τρεῖς σφαῖρες ἔχουν, ἀνά δύο, τό ἴδιο ριζικό ἐπίπεδο. (Κάθε εὐθεία του μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς ριζικός ἄξονας τῶν τριῶν σφαιρῶν).

ΡΙΖΙΚΟ ΚΕΝΤΡΟ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΦΑΙΡΩΝ

211. Ἄς θεωρήσουμε 4 σφαῖρες (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3), (Σ_4) μέ κέντρα K_1, K_2, K_3, K_4, τά ὁποῖα δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο. Ὁ ριζικός ἄξονας τῶν τριῶν σφαιρῶν (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) εἶναι μία εὐθεία (δ) $\perp$ Επιπ $K_1K_2K_3$. Τό ριζικό ἐπίπεδο (Ε) τῶν (Σ_4) καί (Σ_1) εἶναι $\perp$ K_4K_1, ἡ ὁποία δέ βρίσκεται πάνω στό ἐπίπεδο $K_1K_2K_3$. Ἑπομένως τό (Ε) δέν εἶναι $\perp$ Επιπ $K_1K_2K_3$. Ἄρα τέμνει τή (δ) σέ ἕνα σημεῖο Ο, τό ὁποῖο ἔχει ἴσες δυνάμεις καί ὡς πρός τίς τέσσερις σφαῖρες καί λέγεται **ριζικό κέντρο τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.**

Τό Ο ἔχει τήν ἴδια σχετική θέση καί ὡς πρός τίς 4 σφαῖρες.

Ἄν τά K_1, K_2, K_3, K_4 εἶναι ὁμοεπίπεδα, τότε καί ἡ (δ) καί τό (Ε) εἶναι κάθετα στό ἐπίπεδο $K_1K_2K_3K_4$. Ἑπομένως $\Big\}$ ἤ ἡ (δ) καί τό (Ε) εἶναι παράλληλα, ὁπότε δέν ὑπάρχει ριζικό κέντρο ἤ ἡ (δ) περιέχεται στό (Ε), ὁπότε κάθε σημεῖο της εἶναι ριζικό κέντρο τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.

ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΣΦΑΙΡΕΣ

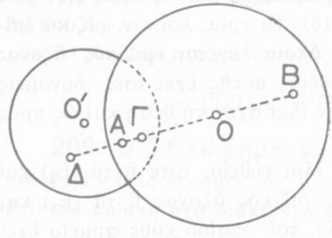
212. Δυό σφαῖρες, πού τέμνονται, λέγονται ὀρθογώνιες, ἄν τά ἐφαπτόμενα σ' αὐτές ἐπίπεδα, τά ὁποῖα ἄγονται σ' ἕνα σημεῖο τῆς κοινῆς τους τομῆς (δηλ. τῆς κοινῆς περιφέρειας), εἶναι κάθετα μεταξύ τους.

Γιά νά συμβαίνει αὐτό, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ ἀκτίνες τῶν σφαιρῶν, πού καταλήγουν σ' ἕνα κοινό σημεῖο τῶν σφαιρῶν, νά εἶναι κάθετες μεταξύ τους. Μποροῦμε ἀπ' αὐτό νά βγάλουμε τά δυό ἑπόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα Ι.— Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά τέμνονται ὀρθογώνια δυό σφαῖρες, εἶναι τό τετράγωνο τῆς διακέντρου νά εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων τους.

Θεώρημα ΙΙ.— Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά τέμνονται

δυό σφαῖρες ὀρθογώνια, εἶναι ἡ δύναμη τοῦ κέντρου τῆς πρώτης ὡς πρός τή δεύτερη νά εἶναι ἴση μέ τό τετράγωνο τῆς ἀκτίνας τῆς πρώτης.



Σχ. 207

—Ἄς φέρουμε τώρα ἀπό τό κέντρο Ο τῆς μιᾶς σφαίρας μιά εὐθεία, πού τέμνει τή σφαίρα (Ο) στά ἀντιδιαμετρικά σημεῖα Α καί Β καί τήν ἄλλη σφαίρα (Ο΄) στά σημεῖα Γ καί Δ (σχ. 207). Ἡ παραπάνω ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη παίρνει τή μορφή:

$\Delta\upsilon\nu\, O/(O') = OA^2 = OB^2 \Longleftrightarrow \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Delta} = OA^2 = OB^2 \Longleftrightarrow (A, B, \Gamma, \Delta) = -1$. Ἰσχύει δηλ. τό

Θεώρημα III. Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι δυό σφαῖρες ὀρθογώνιες εἶναι μιά διάμετρος τῆς μιᾶς νά διαιρεῖται ἁρμονικά ἀπό τήν ἄλλη.

213. Μιά σφαίρα (Κ, R) λέμε ὅτι **τέμνεται ψευδορθογώνια** ἀπό μιά ἄλλη σφαίρα (Κ΄, R΄), ὅταν τό ἐπίπεδο τῆς τομῆς αὐτῶν τῶν δύο σφαιρῶν περνᾶ ἀπό τό κέντρο Κ τῆς (Κ, R). Ὅταν αὐτό συμβαίνει, ἡ (Κ΄, R΄) τέμνει τήν (Κ, R) κατά μέγιστο κύκλο, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδο εἶναι $\perp$ ΚΚ΄ καί τό Κ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τῆς (Κ΄, R΄). Εὔκολα συμπεραίνουμε ὅτι: **ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά τέμνεται ἡ σφαίρα (Κ, R) ψευδορθογώνια ἀπό τήν (Κ΄, R΄), εἶναι: $KK'^2 = R'^2 - R^2$.**

Ἡ συνθήκη αὐτή ἰσοδυναμεῖ μέ τήν: $KK'^2 - R'^2 = -R^2$, δηλαδή:

$$\boxed{\Delta\upsilon\nu\, K/(K', R') = -R^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

382. Νά ἐκφράσετε τήν ἀκτίνα τοῦ κοινοῦ κύκλου δύο τεμνόμενων σφαιρῶν συναρτήσει τῶν ἀκτίνων R, R΄ καί τῆς διακέντρου δ.

383. Ἄν τά κέντρα δύο περιφερειῶν τοῦ χώρου εἶναι προβολές τοῦ ἴδιου σημείου Α στά ἐπίπεδά τους καί ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Β τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τους ξεκινοῦν ἴσα ἐφαπτόμενα τμήματα πρός τίς δύο περιφέρειες, τότε οἱ δύο περιφέρειες ἀνήκουν στήν ἴδια σφαίρα. (Ὁμοσφαιρικές περιφέρειες).

384. Ἄν δύο περιφέρειες ὄχι ὁμοεπίπεδες ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α καί Β, τότε εἶναι ὁμοσφαιρικές.

385. Ἄν δύο περιφέρειες ὄχι ὁμοεπίπεδες ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο Α καί τήν ἴδια ἐφαπτομένη στό Α, τότε εἶναι ὁμοσφαιρικές.

386. Ἄν δύο περιφέρειες βρίσκονται σέ ἐπίπεδα τεμνόμενα κατά μιά εὐθεία xy καί ἄν δύο σημεῖα τῆς xy ἔχουν ἴσες δυνάμεις πρός τίς δύο περιφέρειες, τότε οἱ δύο περιφέρειες εἶναι ὁμοσφαιρικές.

387. Ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ πλευρές α, β, γ. Νά ὑπολογίσετε τίς ἀκτίνες τριῶν σφαιρῶν, οἱ ὁποῖες ἐφάπτονται μεταξύ τους ἀνά δύο καί ἐφάπτονται ἐπίσης στό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου στά Α, Β, Γ.

388. Ἔστω μιά σφαίρα (Κ, R) καί ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἐξωτερικό της. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε σφαίρα, πού ἔχει τό κέντρο της πάνω στό (Π) καί τέμνει ὀρθογώνια τήν (Κ, R), τέμνει καί τήν κάθετο ἀπό τό Κ στό (Π) καί μάλιστα σέ δύο σταθερά σημεῖα.

389. Πάνω σέ μιά εὐθεία βρίσκονται τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τέτοια, ὥστε: (Α, Β, Γ, Δ)=−1. Θεωροῦμε δύο περιφέρειες, τήν (c_1) μέ διάμετρο ΑΒ καί τήν (c_2) μέ διάμετρο ΓΔ, πού βρίσκονται πάνω σέ ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ τους. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε σφαίρα, πού διέρχεται ἀπό τήν (c_1), τέμνει ὀρθογώνια κάθε σφαίρα, πού διέρχεται ἀπό τήν (c_2).

390. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα κινεῖται ἔτσι, ὥστε νά παραμένει παράλληλο καί ἴσο πρός ἕνα δεδομένο τμῆμα, ἐνῶ τά ἄκρα του μένουν πάντοτε πάνω σέ δυό δεδομένες σφαῖρες. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ καθενός ἄκρου;

391. i) Μιά μεταβλητή σφαίρα περνάει ἀπό δυό δεδομένα σημεῖα καί ἐφάπτεται σέ σταθερό ἐπίπεδο. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς; ii) Νά ὁρίσετε μιά σφαίρα, πού διέρχεται ἀπό τρία δεδομένα σημεῖα καί ἐφάπτεται σέ δεδομένο ἐπίπεδο. (**Ὑποδ.** Ἀρκεῖ νά ὁριστεῖ γεωμετρικά τό σημεῖο ἐπαφῆς. Μέ τέσσερα σημεῖα της, ὄχι ὁμοεπίπεδα, ἡ σφαίρα εἶναι ὁρισμένη).

392. Νά ἀποδείξετε ὅτι μιά σφαίρα, πού ἐφάπτεται στίς ἕδρες δίεδρης γωνίας καί διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Α, διέρχεται καί ἀπό τό συμμετρικό τοῦ Α πρός τό ἐπίπεδο, πού διχοτομεῖ τή δίεδρη.

393. Στό ἐσωτερικό μιᾶς δίεδρης γωνίας ὁρίζουμε δύο σημεῖα Α καί Β. Νά ὁρίσετε τή σφαίρα, πού διέρχεται ἀπό τά Α καί Β καί ἐφάπτεται στίς ἕδρες τῆς δίεδρης. (**Ὑποδ.** Χρησιμοποιῆστε τίς ἀσκ. 392, 391).

394. Στό ἐσωτερικό μιᾶς τρίεδρης γωνίας δίνεται σημεῖο Α. Νά κατασκευάσετε (δηλ. νά ὁρίσετε) μιά σφαίρα, πού νά διέρχεται ἀπό τό Α καί νά ἐφάπτεται στίς τρεῖς ἕδρες τῆς τρίεδρης.

395. Ἄν ἡ βάση μιᾶς πυραμίδας εἶναι πολύγωνο ἐγγράψιμο σέ κύκλο, τότε κάθε σφαίρα, πού διέρχεται ἀπό τίς κορυφές τῆς βάσεως, τέμνει τίς παράπλευρες ἀκμές σέ σημεῖα, τά ὁποῖα εἶναι κορυφές ἐπιπέδου ἐγγράψιμου πολυγώνου. (**Ὑποδ.** Ἔστω Ο ἡ κορυφή, ΑΒΓΔ ... ἡ βάση τῆς πυραμίδας καί Α΄, Β΄, Γ΄ ... τά σημεῖα τομῆς τῶν παράπλευρων ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... Ἄν πάρουμε πάνω στό ὕψος ΟΗ τῆς πυραμίδας σημεῖο Σ τέτοιο, ὥστε $\overline{O\Sigma}.\overline{OH} = \overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = \ldots$, τά τετράπλευρα ΑΑ΄ΣΗ, ΒΒ΄ΣΗ, ΓΓ΄ΣΗ ... εἶναι ἐγγράψιμα καί $\widehat{OA'\Sigma} = \widehat{OB'\Sigma} = \ldots = 1$ ὀρθ.).

396. Ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Ο μέσα σέ σφαίρα (Κ, R) διέρχονται τρία ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ τους ἀνά δύο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῆς σφαίρας μέ τά ἐπίπεδα αὐτά εἶναι σταθερό. (**Ὑποδ.** Ἄν KK_1, KK_2, KK_3 οἱ ἀποστάσεις τοῦ Κ ἀπό τά τρία ἐπίπεδα, τότε $KK_1^2 + KK_2^2 + KK_3^2 = KO^2$ = σταθερό (βλ. ἀσκ. 230)).

397. Ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο μέσα σέ σφαίρα (Κ, R) διέρχονται τρεῖς χορδές τῆς σφαίρας, πού εἶναι κάθετες μεταξύ τους ἀνά δύο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἕξι τμημάτων, στά ὁποῖα διαιροῦνται οἱ χορδές ἀπό τό Ο, εἶναι σταθερό.

398. Ἔχουμε δύο σφαῖρες (Κ, R) καί (Κ΄, R΄). Μιά τρίτη σφαίρα (Μ, x) μεταβλητή τέμνει ὀρθογώνια τήν (Κ, R) καί κατά περιφέρεια μέγιστου κύκλου (δηλ. ψευδορθογώνια) τήν (Κ΄, R΄). Νά βρεῖτε τό γ. τόπο τοῦ Μ.

399. i) Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, πού τέμνουν δύο δεδομένες σφαῖρες κατά μέγιστο κύκλο τήν καθεμιά. (Ψευδορθογώνια). ii). Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν

κέντρων τῶν σφαιρῶν, πού τέμνουν τρεῖς δεδομένες σφαῖρες κατά μέγιστο κύκλο τήν καθεμιά.

400. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν μιά μεταβλητή σφαίρα (σ) τέμνει δύο δεδομένες σφαῖρες (K, R), (Λ, ρ) κατά μέγιστο κύκλο, τότε ἡ εὐθεία ΚΛ τέμνει τή(σ) σέ δύο σταθερά σημεῖα.

401. Ἄν μιά μεταβλητή σφαίρα (σ) τέμνει τρεῖς δεδομένες σφαῖρες κατά μέγιστο κύκλο τήν καθεμιά, τότε ἡ (σ) διέρχεται πάντοτε ἀπό μιά σταθερή περιφέρεια. (Ὑποδ. Ἐφαρμόστε τήν προηγούμενη ἄσκηση).

402. Τρεῖς ἴσες σφαῖρες (Α), (Β), (Γ) μέ ἀκτίνα R ἔχουν τά κέντρα τους Α, Β, Γ στίς κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου καί ἐφάπτονται σέ ἕνα ὁριζόντιο ἐπίπεδο (Η). Μιά τέταρτη σφαίρα (Δ) μέ κέντρο Δ εἶναι τοποθετημένη πάνω στίς τρεῖς πρῶτες. i) Ἄν οἱ σφαῖρες (Α), (Β), (Γ) ἐφάπτονται μεταξύ τους ἀνά δύο, νά ὑπολογίσετε τό ὁλικό ὕψος (ἀπό τό (Η) καί πάνω) τοῦ σωροῦ, πού ἀποτελεῖται ἀπό τίς τέσσερις σφαῖρες.

ii) Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι οἱ τρεῖς σφαῖρες (Α), (Β), (Γ) εἶναι ἀνά δύο ἐξωτερικές μεταξύ τους. Πόση πρέπει νά εἶναι τότε ἡ πλευρά x τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὥστε ἡ σφαίρα (Δ) νά ἐφάπτεται καί στό ἐπίπεδο ΑΒΓ; Καί πόση θά εἶναι στήν περίπτωση αὐτή ἡ ἀκτίνα τῆς περιφέρειας, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα ἐπαφῆς τῆς σφαίρας (Δ) μέ τίς τρεῖς ἄλλες;

iii) Ἄν τό x ἔχει τήν παραπάνω τιμή, νά ὁρίσετε τό κέντρο Ο καί τήν ἀκτίνα r τῆς σφαίρας, πού εἶναι περιγεγραμμένη στό τετράεδρο ΑΒΓΔ. Νά ἀποδείξετε ἀκόμη ὅτι ὑπάρχουν δύο σφαῖρες, πού ἔχουν κέντρο Ο καί εἶναι ἐφαπτόμενες πρός τίς τέσσερις σφαῖρες (Α), (Β), (Γ), (Δ).

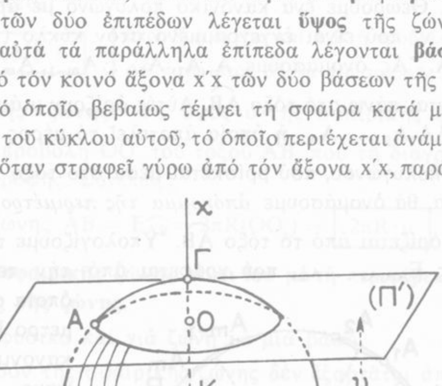
403. Τρεῖς ἴσες σφαῖρες (Α, x), (Β, x), (Γ, x) ἐφάπτονται μεταξύ τους ἐξωτερικά ἀνά δύο καί ἐφάπτονται καί ἐσωτερικά σέ κοῖλο ἡμισφαίριο περατούμενο ἀπό περιφέρεια (c) μέγιστου κύκλου καί ἀκτίνας R. i) Νά ὑπολογίσετε τό x ἔτσι, ὥστε οἱ τρεῖς ἴσες σφαῖρες νά ἐφάπτονται καί στό ἐπίπεδο τῆς περιφέρειας (c). ii) Νά ὑπολογίσετε κατόπιν τήν ἀκτίνα τῆς περιφέρειας, πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν σφαιρῶν μέ τό ἡμισφαίριο.

404. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν μιά μεταβλητή σφαίρα (σ) τέμνει ὀρθογώνια μιά σφαίρα (K, R) καί ψευδορθογώνια ἄλλη σφαίρα (Λ, ρ), τότε ἡ (σ) διέρχεται ἀπό δύο σταθερά σημεῖα τῆς εὐθείας ΚΛ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IX

ΜΕΤΡΗΣΗ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

214. Ἐμβαδόν σφαιρικῆς ζώνης καί σφαίρας. **α΄) Ὁρισμοί.— «Σφαιρική ζώνη» λέγεται τό μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, πού περιέχεται ἀνάμεσα σέ δυό παράλληλα ἐπίπεδα, τά ὁποῖα τέμνουν τή σφαίρα.** Ἡ ἀπόσταση υ μεταξύ αὐτῶν τῶν δύο ἐπιπέδων λέγεται **ὕψος** τῆς ζώνης. Οἱ τομές τῆς σφαίρας ἀπ᾿ αὐτά τά παράλληλα ἐπίπεδα λέγονται **βάσεις** τῆς ζώνης (σχ. 208). Ἄν ἀπό τόν κοινό ἄξονα x΄x τῶν δύο βάσεων τῆς ζώνης φέρουμε ἕνα ἐπίπεδο, τό ὁποῖο βεβαίως τέμνει τή σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο, τότε τό τόξο ΑΒ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, τό ὁποῖο περιέχεται ἀνάμεσα στίς δυό βάσεις τῆς ζώνης, ὅταν στραφεῖ γύρω ἀπό τόν ἄξονα x΄x, παράγει τή ζώνη. Τό Α, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τήν x΄x, διαγράφει τή μιά βάση, τό Β διαγράφει τήν ἄλλη βάση τῆς ζώνης καί κάθε ἄλλο σημεῖο τῆς ζώνης προέρχεται ἀπό τή στροφή γύρω ἀπό τήν x΄x κάποιου σημείου τοῦ $\widehat{AB}$.



Σχ. 208

Ἡ σφαιρική, λοιπόν, ζώνη εἶναι ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς (§ 181), ἡ ὁποία παράγεται ἀπό τό τόξο $\widehat{AB}$ ἑνός μέγιστου κύκλου, ὁ ὁποῖος στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρό του ΓΔ, ἡ ὁποία δέν τέμνει τό τόξο $\widehat{AB}$.

Ζώνη μέ μία βάση λέγεται τό μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς σφαίρας, πού περιέχεται μεταξύ ἑνός ἐπιπέδου, πού τέμνει τή σφαίρα καί ἑνός ἐπιπέδου, πού ἐφάπτεται στή σφαίρα καί εἶναι παράλληλο πρός τό πρῶτο. Ἡ ἀπόσταση αὐτῶν τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι τό ὕψος τῆς ζώνης. Ἡ ζώνη μέ μιά βάση παράγεται ἀπό τόξο μέγιστου κύκλου, π.χ. τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma A}$, πού στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρο τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία περνᾶ ἀπό τό ἕνα ἄκρο του (π.χ. γύρω ἀπό τή ΓΔ τοῦ σχ. 208).

Κάθε ἐπίπεδο, πού τέμνει μιά σφαίρα, διαιρεῖ τή σφαιρική ἐπιφάνεια σέ δυό ζῶνες μέ μία βάση.

Γιά νά ὁρίσουμε καί νά ὑπολογίσουμε τό **ἐμβαδόν** τῆς σφαιρικῆς ζώνης, ἀρκεῖ νά ὁρίσουμε καί νά ὑπολογίσουμε τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, πού γράφεται ἀπό κυκλικό τόξο, πού στρέφεται γύρω ἀπό μιά διάμετρο τοῦ κύκλου του, ἡ ὁποία δέν τό τέμνει.

β΄) Στρεφόμενο τόξο. Ἔστω ΓΔ μιά διάμετρος κύκλου (K, R) καί ἕνα τόξο AB, τό ὁποῖο βρίσκεται σ' ἕνα ἀπό τά ἡμιεπίπεδα, τά ὁποῖα ὁρίζει ἡ ΓΔ. Ἔστω ἀκόμη A΄B΄ ἡ προβολή τοῦ τόξου $\overset{\frown}{AB}$ πάνω στή ΓΔ (σχ. 209). Θεωροῦμε ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ ἀρκετά μεγάλο πλῆθος πλευρῶν, ν, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στόν κύκλο (K, R) καί ἔχει μιά κορυφή τό A. Ἄς ὀνομάσουμε $A, A_1, A_2, \ldots A_{m-1}, A_m$ τίς κορυφές του, πού βρίσκονται πάνω στό τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Αὐτές ὁρίζουν μιά κανονική τεθλασμένη γραμμή $AA_1A_2 \ldots A_m$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τό μέρος τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πού βρίσκεται μέσα στό τόξο $\overset{\frown}{AB}$ καί τήν ὁποία, γιά συντομία, θά ὀνομάσουμε *ἀπόκομμα τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου*, πού ὁρίζεται ἀπό τό τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Ὑπολογίζουμε τώρα τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας $E_{AA_1A_2\ldots A_m}$, πού γράφεται ἀπό τήν τεθλασμένη $AA_1A_2\ldots A_m$, ἡ ὁποία στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρο ΓΔ. Ἄν α τό ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πού ἐγγράψαμε, τότε ἔχουμε (§ 189 καί § 188, iii).

Σχ. 209

$$E_{AA_1A_2\ldots A_m} = E_{AA_1} + E_{A_1A_2} + \ldots + E_{A_{m-1}A_m} = 2\pi\alpha \cdot \pi\rho o\beta\, AA_1 + 2\pi\alpha \cdot \pi\rho o\beta A_1A_2 + \ldots\, 2\pi\alpha \cdot \pi\rho o\beta A_{m-1}A_m = 2\pi\alpha \cdot A'H,$$

ὅπου H ἡ προβολή τοῦ A_m πάνω στή ΓΔ.

Ζητᾶμε τώρα τό ὅριο, πρός τό ὁποῖο τείνει ἡ ἐπιφάνεια, πού ὑπολογίστηκε παραπάνω, $E_{AA_1A_2\ldots A_m}$, **ὅταν τό πλῆθος ν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, πού ἐγγράψαμε αὐξάνει ἀπεριόριστα**, δηλαδή ὅταν $\nu \to \infty$.

Σύμφωνα μέ τά παραπάνω, θά ἔχουμε: $E_{AA_1A_2\cdots A_m} = 2\pi\alpha\cdot A'H$ καί ἑπομένως $\lim\limits_{\nu\to\infty} E_{AA_1\cdots A_m} = \lim\limits_{\nu\to\infty}\{2\pi\alpha\cdot A'H\} = 2\pi\cdot(\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha)\cdot(\lim\limits_{\nu\to\infty} A'H)$.

Ἀλλά ἔχουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\alpha = R$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} HB' = 0$, γιατί $A_mB\to 0$ καί ἑπομένως: $\lim\limits_{\nu\to\infty} A'H = A'B'$. Τό ὅριο, λοιπόν, πού ζητᾶμε εἶναι:

(1) $$\lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1A_2\cdots A_m} = 2\pi R\cdot(A'B').$$

Ὁρίζουμε τώρα ὡς ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, πού γράφεται ἀπό τό τόξο $\widehat{AB}$, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τή διάμετρο ΓΔ, τό ὅριο, στό ὁποῖο τείνει τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, πού γράφεται ἀπό τό ἀπόκομμα $AA_1A_2\ldots A_m$ τῆς περιμέτρου ἑνός κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τό πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐξάνεται ἀπεριόριστα. Δηλαδή:

(2) $$E_{\widehat{AB}} = \lim_{\nu\to\infty} E_{AA_1A_2\cdots A_m}.$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) ἕπεται:

(3) $$\boxed{E_{\widehat{AB}} = 2\pi R\cdot(A'B')}$$ ὅπου R ἡ ἀκτίνα καί A΄B΄ ἡ προβολή τοῦ $\widehat{AB}$ πάνω στόν ἄξονα περιστροφῆς.

γ΄) **Ἐμβαδόν σφαιρικῆς ζώνης.** Τό ὕψος υ τῆς σφαιρικῆς ζώνης (σχ. 208) εἶναι ἴσο μέ τήν προβολή ΟΟ΄ τοῦ τόξου $\widehat{AB}$, πού τή διαγράφει, πάνω στή διάμετρο περιστροφῆς. Συνεπῶς:

(4) Ἐμβαδόν τῆς ζώνης $\widehat{AB} = E_{\widehat{AB}} = 2\pi R(OO') = \boxed{2\pi R\cdot\upsilon}$

Δηλαδή: **Τό ἐμβαδόν σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσο μέ τή περιφέρεια μέγιστου κύκλου ἐπί τό ὕψος τῆς ζώνης.**

Τό παραπάνω ἰσχύει, φυσικά καί γιά ζώνη μέ μιά βάση.

Βλέπουμε ὅτι τό ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τίς βάσεις της, ἀλλά μόνο ἀπό τό ὕψος της καί τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας. Δηλ. δυό ζῶνες τῆς ἴδιας σφαίρας, πού ἔχουν τό ἴδιο ὕψος, εἶναι ἰσοδύναμες (δηλ. ἔχουν τό ἴδιο ἐμβαδόν). Γενικότερα:

Τά ἐμβαδά δύο ζωνῶν τῆς ἴδιας σφαίρας εἶναι ἀνάλογα πρός τά ὕψη τῶν ζωνῶν.

δ΄) **Ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας.** Ἡ σφαίρα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σφαιρική ζώνη μέ ὕψος ἴσο μέ τή διάμετρο 2R τῆς σφαίρας.

Συνεπῶς ἔχει ἐμβαδόν ἴσο μέ $2\pi R\cdot 2R = \boxed{4\pi R^2}$. Δηλαδή τό ἐμβαδόν τῆς σφαίρας εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τεσσάρων μέγιστων κύκλων της.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

405. i) Τό ἐμβαδόν ζώνης μέ μία βάση εἶναι ἴσο μέ τό ἐμβαδόν ἑνός κύκλου, πού ἔχει ἀκτίνα τή χορδή τοῦ τόξου, τό ὁποῖο διαγράφει τή ζώνη. ii) Ἔστω S τό ἐμβαδόν κύκλου μιᾶς σφαίρας καί S_1, S_2 τά ἐμβαδά τῶν δύο ζωνῶν, στίς ὁποῖες ὁ κύκλος χωρίζει τή σφαίρα. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2}$$

406. Ἄν ἀπό τό κέντρο μιᾶς σφαίρας (Κ) διέρχεται μεταβλητή σφαίρα (Μ), ἡ ὁποία τέμνει τήν (Κ), τότε τό μέρος τῆς ἐπιφάνειας τῆς μεταβλητῆς σφαίρας (Μ), πού βρίσκεται μέσα στήν (Κ), ἔχει σταθερό ἐμβαδόν.

407. Τό ἐμβαδόν ζώνης μέ μία βάση εἶναι $25\pi\alpha^2$ καί ἡ κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένος στή ζώνη, εἶναι $20\pi\alpha^2$. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

408. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α καί ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τους εἶναι ΒΓ (Β, Γ τά σημεῖα ἐπαφῆς). Ἄν νοήσουμε τό σχῆμα νά στρέφεται γύρω ἀπό τή διάκεντρο, ποιός εἶναι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν, πού διαγράφουν τό ΒΓ καί ἡ καμπύλη ΒΑΓ, πού ἀποτελεῖται ἀπό τά δύο «ἐλάσσονα» τόξα $\widehat{BA}$ καί $\widehat{A\Gamma}$;

409. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου τοῦ περιγεγραμμένου σέ σφαίρα (Σ) εἶναι μέση ἀνάλογη τῆς ἐπιφάνειας τῆς (Σ) καί τῆς ὁλικῆς ἐπιφάνειας τοῦ περιγεγραμμένου ἰσόπλευρου κώνου στήν (Σ) (δηλ. κώνου μέ ἄνοιγμα 60°).

410. Μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα β ἔχει τό κέντρο της πάνω στήν ἐπιφάνεια μιᾶς ἄλλης σφαίρας μέ ἀκτίνα α, ὅπου $\beta < \alpha$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μερῶν τῶν σφαιρῶν, πού τό καθένα βρίσκεται ἔξω ἀπό τήν ἄλλη σφαίρα, εἶναι ἴσο μέ $\pi(2\alpha + \beta)(2\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)/\alpha$.

411. Σέ δεδομένη σφαίρα νά ἐγγραφεῖ ὀρθός κυκλικός κῶνος, πού νά ἔχει κυρτή ἐπιφάνεια ἰσοδύναμη μέ τήν ἀπέναντί του ζώνη.

412. Ἔχουμε ἕνα ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΒ. Νά ὁρίσετε πάνω στήν ἡμιπεριφέρεια ἕνα σημεῖο τέτοιο, ὥστε, ἄν φέρουμε στό Μ ἐφαπτομένη τῆς ἡμιπεριφέρειας, πού νά τέμνει τήν προέκταση τῆς ΑΒ πρός τό μέρος τοῦ Β στό σημεῖο Τ καί ἄν περιστρέψουμε τό ὅλο σχῆμα γύρω ἀπό τήν ΑΒ, τότε τό τόξο $\widehat{AM}$ καί τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΜΤ νά διαγράφουν ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες. (**Ὑποδ.** Νά ἐκλέξετε ὡς ἄγνωστο τοῦ προβλήματος τήν ἀπόσταση τῆς προβολῆς τοῦ Μ στή διάμετρο ΑΒ ἀπό τό μέσο Ο τῆς ΑΒ).

413. Ἔχουμε μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα R, πού ὁ μικρός της κύκλος (c) εἶναι τέτοιος, ὥστε τό ἐμβαδόν τοῦ (c) νά εἶναι ἴσο πρός τή διαφορά τῶν δύο ζωνῶν, στίς ὁποῖες χωρίζεται ἡ σφαίρα ἀπό τό ἐπίπεδο τοῦ (c). i) Νά ὑπολογίσετε τήν ἀπόσταση τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπό τό ἐπίπεδο τοῦ (c). ii) Νά ὑπολογίσετε τό ὕψος ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου περιγεγραμμένου στή σφαίρα, ὅταν ὁ κύκλος ἐπαφῆς σφαίρας καί κώνου εἶναι ὁ (c).

Β΄

414. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μέση ἀνάλογη τῶν ἐπιφανειῶν, πού διαγράφονται ἀπό τίς ἡμιπεριμέτρους δύο κανονικῶν πολυγώνων μέ ἄρτιο πλῆθος πλευρῶν, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα εἶναι ἐγγεγραμμένο καί τό ἄλλο περιγεγραμμένο σέ μέγιστο κύκλο τῆς σφαίρας, ὅταν τά πολύγωνα στρέφονται γύρω ἀπό διάμετρο, πού διέρχεται ἀπό δύο ἀπέναντι κορυφές τους.

415. Νά διαιρεθεῖ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας σέ ν ἰσοδύναμα μέρη μέ ἐπίπεδα i) παράλληλα πρός δεδομένο, ii) διερχόμενα ἀπό δεδομένη εὐθεία.

416. Ἔχουμε δύο σταθερά σημεῖα Ο καί Ο΄ ὅπου ΟΟ΄=2α. Θεωροῦμε δυό μετα-

βλητές σφαῖρες (S) καί (S΄) μέ κέντρα O καί O΄ καί ἀκτίνες R καί R΄. i) Ἂν οἱ ἀκτίνες R καί R΄ μεταβάλλονται ἔτσι, ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σφαιρῶν νά διατηρεῖ σταθερή τιμή, k^2, ποιός εἶναι ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν δύο σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν; Γιά ποιές τιμές τοῦ k ὑπάρχει ὁ τόπος αὐτός; ii) Ἂν $k^2 = 16\pi\alpha^2$, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ τόπος εἶναι σφαίρα διαμέτρου OO΄, ἔστω ἡ (Σ) καί ὅτι τό ἐφαπτόμενο ἐπίπεδο τῆς (Σ) σέ ἕνα σημεῖο της M, τέμνει τίς σφαῖρες (S) καί (S΄), πού διέρχονται ἀπό τό M, κατά ἴσους κύκλους.

417. Ἔχουμε μιά ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου AB = 2R μέσα σέ ἕνα ἐπίπεδο (Π). Παίρνουμε ἕνα σημεῖο M τῆς ἡμιπεριφέρειας καί μέ διάμετρο AM γράφουμε ἡμιπεριφέρεια, ἔστω τήν (AM), μέσα σέ ἄλλο ἐπίπεδο κάθετο στό (Π) καί πάντοτε πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ (Π).

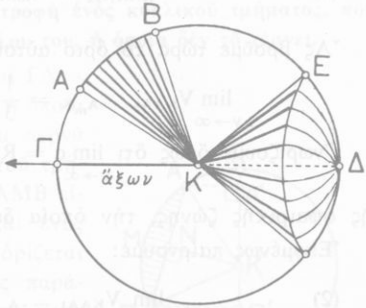
i) Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῆς μεταβλητῆς ἡμιπεριφέρειας (AM), ὅταν τό M διατρέχει τήν ἡμιπεριφέρεια (AB);

ii) Ἂν τό M ὁριστεῖ ἔτσι, ὥστε AM = c καί ἡ ἡμιπεριφέρεια (AM) στρέφεται γύρω ἀπό τήν AB, νά βρεῖτε τό ἐμβαδόν τῆς ἐπιφάνειας, πού διαγράφει ἡ (AM).

ΣΤΕΡΕΑ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΣΕ ΜΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

215. Ὄγκος σφαιρικοῦ τομέα καί σφαίρας. α΄) **Ὁρισμοί. «Σφαιρικός τομέας» λέγεται τό στερεό, πού παράγεται ἀπό ἕναν κυκλικό τομέα, πού στρέφεται γύρω ἀπό διάμετρο, τοῦ κύκλου του, ἡ ὁποία δέν τόν τέμνει.**

Ἔστω π.χ. ὁ κυκλικός τομέας KAB (σχ. 210). Ἂν καμιά ἀπό τίς ἀκραῖες ἀκτίνες του KA, KB δέ βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα περιστροφῆς ΓΔ, τότε ὁ σφαιρικός τομέας, πού παράγεται ἀπ' αὐτόν τόν κυκλικό τομέα, περικλείεται μεταξύ μιᾶς ζώνης, πού γράφεται ἀπό τό τόξο $\widehat{AB}$ καί δυό κωνικῶν ἐπιφανειῶν, πού γράφονται ἀπό τίς ἀκραῖες ἀκτίνες KA καί KB. Ἐξάλλου εἶναι δυνατό μιά ἀπό τίς ἀκραῖες ἀκτίνες τοῦ κυκλικοῦ τομέα νά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα περιστροφῆς· τότε ὁ σφαιρικός τομέας, πού παράγεται, περικλείεται ἀπό μιά σφαιρική ζώνη μέ μιά βάση καί ἀπό μιά κωνική ἐπιφάνεια, ὅπως π.χ. ὁ σφαιρικός τομέας, πού γράφεται ἀπό τόν τομέα KΔE τοῦ σχ. 210. Ἡ σφαιρική ζώνη, πού ἀνήκει στήν ἐπιφάνεια τοῦ σφαιρικοῦ τομέα, λέγεται **βάση** του.

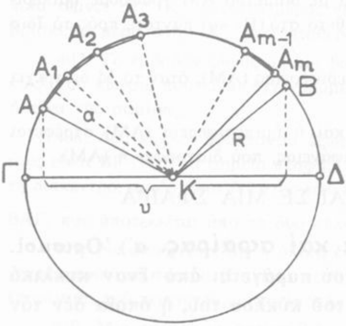


Σχ. 210

Εἶναι φανερό ὅτι κάθε σφαιρικός τομέας, ἀνήκει σέ μιά σφαίρα καί ἀποτελεῖ μέρος τοῦ στερεοῦ - σφαίρα.

β΄) Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέα ὁρίζεται καί ὑπολογίζεται μέ τή μέθοδο τῶν ὁρίων. Ἂς θεωρήσουμε ἕναν κυκλικό τομέα KAB (σχ. 211).

Ἂς ἐγγράψουμε στόν κύκλο (Κ, R) ἕνα κανονικό πολύγωνο μέ μεγάλο πλῆθος πλευρῶν, ν, πού ἔχει μιά κορυφή τό Α καί ἔστω $AA_1A_2 \ldots A_{m-1}A_m$ τό ἀπόκομμα τῆς περιμέτρου του, πού βρίσκεται μέσα στό τόξο $\widehat{AB}$ (βλ. § 214, β΄). Ὁ κυκλικός τομέας προσεγγίζεται ἀπό τόν πολυγωνικό τομέα (πολύγωνο) $KAA_1 \ldots A_mK$ καί ὁ σφαιρικός τομέας προσεγγίζεται ἀπό τό στερεό, πού γράφεται ἀπό τόν πολυγωνικό τομέα $KAA_1A_2 \ldots A_mK$, ὅταν στρέφεται γύρω ἀπό τή ΓΔ. Ἂς ὑπολογίσουμε τόν ὄγκο $V_{KAA_1 \ldots A_mK}$, πού γράφεται μέ τήν περιστροφή τοῦ πολυγωνικοῦ τομέα. Ἂν α εἶναι τό ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, θά ἔχουμε:



Σχ. 211

$$V_{KAA_1A_2 \ldots A_mK} = V_{KAA_1} + V_{KA_1A_2} + V_{KA_2A_3} \ldots + V_{KA_{m-1}A_m} = (\text{βλ. § 191, β΄})$$

$$\frac{1}{3} E_{AA_1} \cdot \alpha + \frac{1}{3} E_{A_1A_2} \cdot \alpha + \ldots + \frac{1}{3} E_{A_{m-1}A_m} \cdot \alpha =$$

$$= \frac{1}{3} \{ E_{AA_1} + E_{A_1A_2} \ldots + E_{A_{m-1}A_m} \} \cdot \alpha$$

ἤ τελικά:

$$(1) \qquad V_{KAA_1A_2 \ldots A_mK} = \frac{1}{3} \alpha \cdot E_{AA_1A_2A_3 \ldots A_m}$$

Ἂς βροῦμε τώρα τό ὅριο αὐτοῦ τοῦ ὄγκου, ὅταν $\nu \to \infty$. Ἔχουμε:

$$\lim_{\nu \to \infty} V_{KAA_1 \ldots A_mK} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{\nu \to \infty} \alpha \cdot \lim_{\nu \to \infty} E_{AA_1A_2 \ldots A_m}$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι $\lim_{\nu \to \infty} \alpha = R$ καί ὅτι $\lim_{\nu \to \infty} E_{AA_1A_2 \ldots A_m}$ = ἐμβαδόν τῆς σφαιρικῆς ζώνης, τήν ὁποία διαγράφει τό τόξο $\widehat{AB}$ (§ 214, β΄, (2)). Ἑπομένως παίρνουμε:

$$(2) \qquad \lim_{\nu \to \infty} V_{KAA_1 \ldots A_mK} = \frac{1}{3} R \cdot E_{\widehat{AB}}.$$

Ὁρίζουμε ὡς ὄγκο τοῦ σφαιρικοῦ τομέα τό ὅριο τοῦ ὄγκου, πού γράφεται ἀπό τόν παραπάνω πολυγωνικό τομέα, δηλαδή:

$$(3) \qquad V_{\text{σφ. τομ. } KAB} = (\text{ἀπό ὁρισμό}) \lim_{\nu \to \infty} V_{AA_1A_2 \ldots A_mK}.$$

Ἀπό τίς (2) καί (3) παίρνουμε:

$$(4) \qquad \boxed{V_{\text{σφ. τομ. } KAB} = \frac{1}{3} E_{\widehat{AB}} \cdot R}$$

Δηλαδή: **Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέα εἶναι ἴσος μέ τό ἕνα τρίτο τῆς ζώνης, πού εἶναι βάση του, ἐπί τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.**

γ΄) **Τελικός τύπος τοῦ ὄγκου.** Ἄν στόν τύπο (4) ἀντικατασταθεῖ τό ἐμβαδόν $E_{\widehat{AB}}$ τῆς σφαιρικῆς ζώνης μέ τόν τύπο τῆς § 214, δηλαδή $E_{\widehat{AB}} = 2\pi R\cdot\upsilon$, τότε παίρνουμε:

(5) $$\boxed{V_{\sigma\varphi.\ \tau o\mu.\ KAB} = \frac{2}{3}\pi R^2 \upsilon}$$ ὅπου υ τό ὕψος τῆς ζώνης τοῦ τομέα.

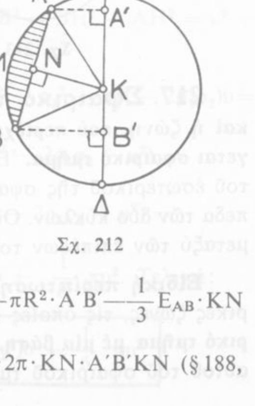
δ΄) **Ὄγκος σφαίρας.** Ὅταν ὁ κυκλικός τομέας ΚΑΒ τοῦ σχ. 211 γίνει ἡμικύκλιο, τότε, μέ τή στροφή του γύρω ἀπό τή διάμετρο ΓΔ, παράγει τή σφαίρα. Ἑπομένως ὁ τύπος (5) γίνεται τότε: $V = \frac{2}{3}\pi R^2\cdot 2R$, γιατί τό τόξο τοῦ τομέα γίνεται ἡμιπεριφέρεια $\widehat{\Gamma\Delta}$ καί ἡ προβολή του υ πάνω στή διάμετρο γίνεται ἴση μέ 2R. Ἄρα:

(6) $$\boxed{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$ (ὅπου R ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας)

(7) $$\boxed{V_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{1}{6}\pi d^3}$$ (ὅπου d ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας)

216. Σφαιρικός δακτύλιος.— **Σφαιρικός δακτύλιος λέγεται τό στερεό, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή ἑνός κυκλικοῦ τμήματος, πού στρέφεται γύρω ἀπό διάμετρο τοῦ κύκλου του, ἡ ὁποία δέν τό τέμνει.**

Ἔστω τό κυκλικό τμῆμα ΑΜΒ καί ΓΔ = = 2R μία διάμετρος τοῦ κύκλου του, ἡ ὁποία δέν τό τέμνει. (Ἡ διάμετρος μπορεῖ νά περνᾶ ἀπό τό ἕνα ἄκρο Α ἤ Β τῆς χορδῆς τοῦ τμήματος). Ἐπειδή τό κυκλικό τμῆμα ΑΜΒ εἶναι διαφορά ἑνός τομέα ΚΑΜΒ καί ἑνός τριγώνου ΚΑΒ, γι᾽ αὐτό ὁ ὄγκος του ὁρίζεται ὡς διαφορά τῶν ὄγκων, τούς ὁποίους παράγουν ὁ κυκλικός τομέας καί τό τρίγωνο, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπό τή ΓΔ. Ἄν εἶναι Α΄Β΄ ἡ προβολή τῆς χορδῆς ΑΒ πάνω στή διάμετρο περιστροφῆς (σχ. 212), τότε κατά σειρά θά ἔχουμε:



Σχ. 212

$$V_{\sigma\tau\rho\varepsilon\varphi.\ AMB} = V_{\sigma\tau\rho\varepsilon\varphi.\ \tau o\mu.\ KAMB} - V_{\sigma\tau\rho\varepsilon\varphi.\ \tau\rho\iota\gamma.\ KAB} = \frac{2}{3}\pi R^2\cdot A'B' - \frac{1}{3}E_{AB}\cdot KN$$

(βλ. § 215 (5) καί § 191, β΄) $= \frac{2}{3}\pi R^2\cdot A'B' - \frac{1}{3}\cdot 2\pi\cdot KN\cdot A'B'KN$ (§ 188,

$$\text{iii)} = \frac{2}{3}\pi\cdot A'B'\{R^2 - KN^2\} = \frac{2}{3}\pi\cdot A'B'(KA^2 - KN^2) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot A'B'\cdot AN^2 = \frac{2}{3}\pi\cdot A'B'\cdot\frac{AB^2}{4} = \frac{1}{6}\pi\cdot AB^2\cdot A'B'.$$ Ὥστε:

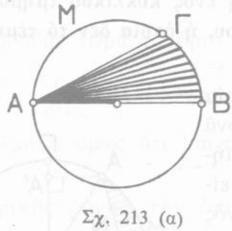
(1) $$\boxed{V_{\sigma\tau\rho\varepsilon\varphi.}\ AMB = \frac{1}{6}\pi AB^2\cdot A'B'}$$ Αὐτό μᾶς λέει ὅτι:

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μέ τό 1/6 τοῦ π ἐπί τό τετράγωνο τῆς χορδῆς τοῦ τμήματος ἐπί τήν προβολή τῆς χορδῆς πάνω στή διάμετρο περιστροφῆς.

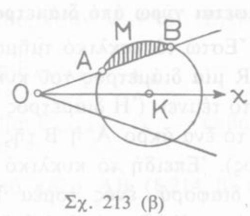
Ὅταν $AB \parallel \Gamma\Delta$ (ὁπότε τό στερεό μοιάζει πράγματι μέ δακτυλίδι), τότε $A'B' = AB$ καί ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου $= \pi(AB)^2/6$. Ἄρα εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπό τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας σ' αὐτή τήν περίπτωση ὁ ὄγκος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ἔστω ΑΓ ἡ χορδή ἑνός ἡμικυκλίου ΑΓΒ (σχ. 213 (α)). Τό μικρόγραμμο τρίγωνο ΑΓΒ, ὅταν περιστρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ, παράγει ὄγκο ἴσο μέ τόν ὄγκο μιᾶς σφαίρας, πού ἔχει διάμετρο ΑΒ, μεῖον τόν ὄγκο τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου, πού παράγεται ἀπό τό κυκλ. τμῆμα ΑΜΓ.

Γενικότερα, ἔστω (Κ) μιά σφαίρα, πού ἔχει τό κέντρο της πάνω στόν ἄξονα μιᾶς κωνικῆς ἐπιφάνειας ἐκ περιστροφῆς καί τέμνει τήν ἐπιφάνεια αὐτή, ὅπως στό σχῆμα 213 (β). Τό μέρος τῆς στερεᾶς σφαίρας, πού βρίσκεται μέσα στήν κωνική ἐπιφάνεια, ἔχει ὄγκο ἴσο μέ τόν ὄγκο τῆς σφαίρας μεῖον τόν ὄγκο ἑνός σφαιρικοῦ δακτυλίου, πού γράφεται ἀπό τό κυκλ. τμῆμα ΑΜΒ, ὅπως φαίνεται στό σχ. 213 (β).



Σχ. 213 (α)



Σχ. 213 (β)

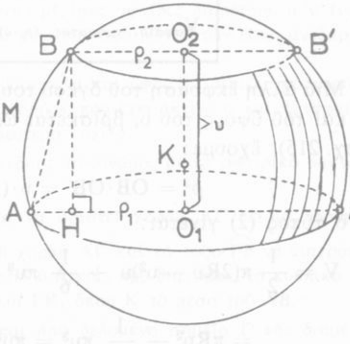
217. Σφαιρικό τμῆμα. α΄) **Δυό παράλληλοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας καί ἡ ζώνη, πού περιέχεται ἀνάμεσά τους, περικλείουν ἕνα στερεό, πού λέγεται σφαιρικό τμῆμα.** Ἐσωτερικό τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι τό μέρος τοῦ ἐσωτερικοῦ τῆς σφαίρας, πού βρίσκεται ἀνάμεσα στά παράλληλα ἐπίπεδα τῶν δύο κύκλων. Οἱ δυό αὐτοί κύκλοι λέγονται **βάσεις** καί ἡ ἀπόσταση μεταξύ τῶν ἐπιπέδων τους λέγεται **ὕψος** τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Εἰδική περίπτωση. Ἕνας κύκλος σφαίρας καί μιά ἀπό τίς δυό σφαιρικές ζῶνες, τίς ὁποῖες ὁρίζει, περικλείουν ἕνα στερεό, πού τό λέμε **σφαιρικό τμῆμα μέ μία βάση.** Τό ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι καί ὕψος αὐτοῦ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Κάθε ἐπίπεδο, πού τέμνει μιά σφαίρα, χωρίζει τό στερεό-σφαίρα σέ δυό σφαιρικά τμήματα μέ μία βάση τό καθένα.

Ἕνα σφαιρικό τμῆμα εἶναι καθορισμένο, ὡς πρός τό μέγεθος, ἀπό τά στοιχεῖα $(\rho_1, \rho_2, \upsilon)$: ἀκτίνες βάσεων καί ὕψος, ὅπου ἡ μιά ἀπό τίς ἀκτίνες ρ_1, ρ_2 μπορεῖ νά εἶναι καί μηδενική.

β΄) Ἔστω τώρα ἕνα σφαιρικό τμῆμα μέ βάσεις τούς κύκλους (O_1, ρ_1) καί (O_2, ρ_2) καί ὕψος $O_1O_2 = \upsilon$ (σχ. 214). Ἄς θεωρήσουμε δυό παράλληλες καί ὁμόρροπες ἀκτίνες O_1A καί O_2B τῶν δυό αὐτῶν κύκλων καθώς καί τό τόξο $\widehat{AB}$ μέγιστου κύκλου, πού εἶναι ἀνάμεσά τους. Ἄν τό μικτόγραμμο τραπέζιο O_1AMBO_2 (τοῦ ὁποίου μιά πλευρά εἶναι τό τόξο $\widehat{AMB}$) στρέφεται γύρω ἀπό τήν O_1O_2, τότε οἱ O_1A, O_2B παράγουν τίς βάσεις καί τό τόξο $\widehat{AMB}$ παράγει τή σφαιρική ζώνη, πού περικλείει τό σφαιρικό τμῆμα. Ἑπομένως τό μικτόγραμμο τραπέζιο παράγει τό σφαιρικό τμῆμα. Ὥστε τό σφαιρικό τμῆμα εἶναι στερεό ἐκ περιστροφῆς καί μάλιστα εἶναι ἕνωση ἑνός κόλουρου κώνου, πού παράγεται ἀπό τό ὀρθογώνιο τραπέζιο O_1ABO_2 καί ἑνός σφαιρικοῦ δακτυλίου, πού παράγεται ἀπό τό κυκλικό τμῆμα AMB. Ἑπομένως ὁ ὄγκος του εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων αὐτῶν τῶν δυό στερεῶν:



Σχ. 214

$$V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.\ \tau\mu\acute{\eta}\mu.} = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho^2{}_1 + \rho_2{}^2 + \rho_1\rho_2) + \frac{1}{6}\pi AB^2 \cdot O_1O_2 \quad (\beta\lambda.\ \S\S\ 187\ \gamma',\ 216).$$

Ἄν φέρουμε τή $BH \perp AO_1 (H \in AO_1)$, τότε $AB^2 = BH^2 + AH^2 = \upsilon^2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 = \upsilon^2 + \rho_1{}^2 + \rho^2{}_2 - 2\rho_1\rho_2$. Ἑπομένως:

$$V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = \frac{1}{3}\pi\upsilon(\rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 + \rho_1\rho_2) + \frac{1}{6}\pi(\upsilon^2 + \rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2)\upsilon =$$

$$= \frac{2}{6}\pi\upsilon(\rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 + \rho_1\rho_2) + \frac{1}{6}\pi\upsilon(\rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2 + \upsilon^2) =$$

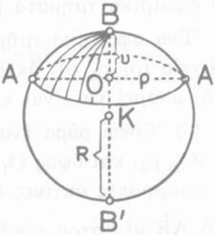
$$= \frac{1}{6}\pi\upsilon(2\rho_1{}^2 + 2\rho_2{}^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_1{}^2 + \rho_2{}^2 - 2\rho_1\rho_2 + \upsilon^2) =$$

$$= \frac{1}{6}\pi\upsilon(3\rho_1{}^2 + 3\rho_2{}^2 + \upsilon^2) = \frac{1}{6}\pi(3\rho_1{}^2 + 3\rho_2{}^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3.$$ Τελικά:

$$(1) \qquad \boxed{V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma\ (\rho_1,\rho_2,\upsilon)} = \frac{1}{2}\pi(\rho_1{}^2 + \rho_2{}^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3}$$

Αὐτό ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁ ὄγκος ὁποιουδήποτε σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, πού ἔχουν βάσεις τίς βάσεις του καί ὕψος τό ὕψος του, σύν τόν ὄγκο μιᾶς σφαίρας, πού ἔχει διάμετρο τό ὕψος του.



Σχ. 215

γ΄) **Σφαιρικό τμῆμα μέ μία βάση.** Ἔστω ρ ἡ ἀκτίνα τῆς βάσεως καί $\upsilon = OB$ τό ὕψος σφαιρ. τμήματος μέ μιά βάση (σχ. 215). Ὁ ὄγκος του δίδεται ἀπό τόν τύπο (1), ὅπου $\rho_1 = \rho$ καί $\rho_2 = 0$, δηλαδή:

$$\boxed{V_{\text{σφαιρ. τμήματος } (\rho,\, \upsilon)} = \frac{1}{2}\pi\rho^2\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3} \tag{2}$$

Μιά ἄλλη ἔκφραση τοῦ ὄγκου του, συναρτήσει τῆς ἀκτίνας R τῆς σφαίρας καί τοῦ ὕψους του υ, βρίσκεται ὡς ἑξῆς: Ἄν B΄ τό ἀντιδιαμετρικό τοῦ B (σχ. 215), ἔχουμε:

$$\rho^2 = OB \cdot OB' = \upsilon \cdot (2R - \upsilon) = 2R\upsilon - \upsilon^2$$

καί ὁ τύπος (2) γίνεται:

$$V = \frac{1}{2}\pi(2R\upsilon - \upsilon^2)\upsilon + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 = \pi R \cdot \upsilon^2 - \frac{1}{2}\pi\upsilon^3 + \frac{1}{6}\pi\upsilon^3 =$$

$$= \pi R\upsilon^2 - \frac{1}{3}\pi\upsilon^3 = \pi\upsilon^2\left(R - \frac{\upsilon}{3}\right).$$ Ὥστε:

$$V_{\text{σφαιρ. τμήματος μονοβασικοῦ}} = \pi\upsilon^2\left(R - \frac{\upsilon}{3}\right), \tag{3}$$ ὅπου R ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας καί υ τό ὕψος τοῦ τμήματος.

218. Σφαιρικός ὄνυχας. Τό μέρος τοῦ στερεοῦ - σφαίρα, πού περιέχεται μέσα σέ μιά δίεδρη γωνία, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμή περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς σφαίρας, λέγεται «σφαιρικός ὄνυχας». Ἡ γωνία $\widehat{\varphi}$, πού εἶναι ἀντίστοιχη τῆς δίεδρης, ἡ ὁποία περιέχει τόν ὄνυχα, λέγεται **γωνία τοῦ ὄνυχα**. Ἐπομένως ὁ σφαιρικός ὄνυχας εἶναι στερεό, πού περικλείεται ἀπό δυό ἡμικύκλια καί ἀπό τό μέρος τῆς σφαιρικῆς ἐπιφάνειας, πού βρίσκεται μεταξύ αὐτῶν. Δυό σφαιρικοί ὄνυχες τῆς ἴδιας σφαίρας ἤ δυό ἴσων σφαιρῶν εἶναι **ἴσοι**, ὅταν οἱ γωνίες τους εἶναι ἴσες καί ἀντιστρόφως. Γιατί ὑπάρχει τότε κίνηση, πού φέρνει τόν ἕνα πάνω στόν ἄλλο.

Γι᾽ αὐτό μποροῦμε νά συγκρίνουμε δύο σφαιρικούς ὄνυχες τῆς ἴδιας σφαίρας, συγκρίνοντας τίς γωνίες φ καί φ_1 τῶν ὀνύχων. Ὁρίζουμε δηλ. ὡς λόγο τοῦ σφαιρ. ὄνυχα (φ) πρός τό σφαιρικό ὄνυχα (φ_1) τό λόγο φ/φ_1.

Ἐπειδή τό στερεό - σφαίρα μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς σφαιρικός ὄνυχας 360°, γι᾽ αὐτό ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχα (φ°) πρός τόν ὄγκο V τῆς σφαίρας, στήν ὁποία ἀνήκει, εἶναι ἴσος μέ φ°/360°. Ἀπ᾽ αὐτό ὁρίζεται καί ὁ ὄγκος τοῦ ὄνυχα μέ τή σχέση:

$$\frac{V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.\ \text{ὄνυχα}\ (\varphi^\circ)}}{V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.}} = \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} \Longleftrightarrow V_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho.\ \text{ὄνυχα}\ (\varphi^\circ)} = \frac{\varphi^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ ὅπου } R$$

ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

418. Ἕνας κυκλικός τομέας μέ γωνία 45° καί ἀκτίνα ρ στρέφεται γύρω ἀπό μία ἀκραία ἀκτίνα του. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο καί τήν ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ, πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφή.

419. Ἄν ἕνας κύβος μέ ἀκμή α γεμίσει μέ ἴσες σφαῖρες διαμέτρου α/ν (ν φυσικός), νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό πλῆθος τους.

420. Ἕνα κωνικό δοχεῖο μέ ἀκτίνα βάσεως α καί ὕψος 3α γεμίζει μέ νερό· τό περιεχόμενό του μεταγγίζεται σέ δοχεῖο κυλινδρικό, πού ἔχει ἀκτίνα α καί ἡμισφαιρικό πυθμένα. Ζητεῖται τό ὕψος τοῦ νεροῦ στό δεύτερο δοχεῖο.

421. Νά ἐγγραφεῖ σέ σφαίρα ἕνας κύλινδρος ἰσοδύναμος μέ τό σφαιρικό δακτύλιο, πού τόν περιβάλλει.

422. Σέ ἡμικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2α νά ὁριστεῖ χορδή ΑΓ τέτοια, ὥστε, ἄν τό ἡμικύκλιο στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ, ἡ χορδή ΑΓ καί τό τόξο $\widehat{\Gamma B}$ νά διαγράφουν ἰσοδύναμες ἐπιφάνειες. Κατόπιν νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος, πού διαγράφει τό κυκλικό τμῆμα ΑΓ, καθώς στρέφεται γύρω ἀπό τήν εὐθεία ΓΚ, ὅπου Κ τό μέσο τοῦ ΑΒ.

423. Νά ὁριστεῖ ἡ εὐθεία, πού διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο Γ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἑνός ἡμικυκλίου καί χωρίζει τό ἡμικύκλιο σέ δύο μέρη, πού διαγράφουν ἴσους ὄγκους, ὅταν στρέφονται γύρω ἀπό τήν ΑΒ. (**Ὑποδ.** Ἔστω Ο τό μέσο τῆς ΑΒ. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό Γ βρίσκεται πάνω στήν ἀκτίνα ΟΑ = R, ὅτι ΟΓ = α καί ὅτι ἡ ζητούμενη εὐθεία τέμνει τήν ἡμιπεριφέρεια σέ σημεῖο Δ, πού προβάλλεται πάνω στήν ΑΒ, στό σημεῖο Ε, πού ἀνήκει στήν ΟΒ. Δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι τό R καί τό α καί ἄγνωστος ἡ ἀπόσταση ΟΕ = x, ἡ ὁποία καθορίζει τό Δ, ἄρα καί τήν εὐθεία ΓΔ).

424. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, ἐξωτερικό τοῦ κύκλου (Ο, ρ), φέρνουμε ἐφαπτόμενα τμήματα ΑΒ, ΑΓ πρός τόν (Ο, ρ). Ἡ ἐπίπεδη περιοχή, πού περικλείεται ἀπό τά ΑΒ, ΑΓ καί ἀπό τό μεγάλο τόξο $\widehat{B\Gamma}$, διαιρεῖται ἀπό τήν εὐθεία ΟΑ σέ δύο συμμετρικά μέρη, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα, καθώς στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΟΑ, διαγράφει ἕνα (σφαιροκωνικό) στερεό. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο V τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ συναρτήσει τῶν ρ καί ΟΑ = α. Ἄν S εἶναι ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του, νά ἀποδείξετε ὅτι $V = \frac{1}{3} S \cdot \rho$.

425. Ἄν μέ κέντρα τίς κορυφές ἑνός παραλληλεπιπέδου γράψουμε ἴσες σφαῖρες μέ διάμετρο μικρότερη ἀπό τή μικρότερη ἀκμή, νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν μερῶν τῶν σφαιρῶν αὐτῶν, τά ὁποῖα βρίσκονται μέσα στό παρ/δο, εἶναι ἴσο μέ τόν ὄγκο μιᾶς ἀπό τίς σφαῖρες.

426. Ἄν μέ διάμετρο τήν ὑποτείνουσα ΒΓ ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ γράψουμε ἡμιπεριφέρεια καί νοήσουμε τό σχῆμα νά στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΒΓ, νά βρεθεῖ ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξύ τῶν τριῶν ὄγκων, πού διαγράφονται ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ καί ἀπό τά κυκλικά τμήματα ΑΒ, ΑΓ.

427. Μιά σφαίρα μέ ἀκτίνα α ἔχει τό κέντρο της πάνω στήν ἐπιφάνεια ἄλλης σφαίρας μέ ἀκτίνα 2α. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο (στερεῶν) σφαιρῶν.

Β′

428. Ἡ ἀκτίνα βάσεως ἑνός ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι ρ καί τό ὕψος του 3ρ. Νά ὑπολογίσετε τούς ὄγκους τῶν δύο μερῶν, στά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος ἀπό τήν ἐπιφάνεια σφαίρας, πού ἔχει μέγιστο κύκλο τή βάση τοῦ κώνου. (**Ὑποδ.** Τό ἕνα μέρος εἶναι διαφορά ἑνός ἡμισφαιρίου καί τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κῶνο).

429. Οἱ κάθετες πλευρές ἑνός ὀρθογώνιου τριγώνου ἔχουν μήκη 6α καί 8α. Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο τοῦ κοινοῦ στερεοῦ τῶν δύο σφαιρῶν, πού γράφονται μέ διαμέτρους τίς κάθετες αὐτές πλευρές.

430. Ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ ὄγκοι τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καί τῆς κόλουρης πυραμίδας δίνονται ἀπό τόν ἴδιο τύπο: $V = \frac{h}{6}(b_1 + b_2 + 4m)$, ὅπου b_1, b_2 τά ἐμβαδά τῶν βάσεων, m τό ἐμβαδόν τῆς μεσαίας τομῆς καί h τό ὕψος τοῦ στερεοῦ.

431. Ἔστω S ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ἑνός ἀμφίκυρτου φακοῦ, d τό πάχος τοῦ φακοῦ καί V ὁ ὄγκος του. Νά ἀποδείξετε ὅτι $12V = 3dS - \pi d^3$.

432. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μέ τά 2/3 τοῦ ὕψους του ἐπί τό ἐμβαδόν τῆς μεσαίας τομῆς του.

433. Σέ μία κωνική ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς εἶναι ἐγγεγραμμένες δύο σφαῖρες, πού ἐφάπτονται καί μεταξύ τους. Ἄν (c_1) καί (c_2) εἶναι οἱ περιφέρειες ἐπαφῆς τῶν σφαιρῶν μέ τήν κωνική, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μέρους μιᾶς τρίτης σφαίρας, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τήν κωνική ἐπιφάνεια καί διέρχεται ἀπό τίς (c_1) καί (c_2), εἶναι διπλάσιος ἀπό τόν ὄγκο, πού περικλείεται μεταξύ τῶν δύο ἀρχικῶν σφαιρῶν καί τῆς κωνικῆς.

434. Μιά στερεά-σφαίρα ἐφάπτεται σέ ὅλες τίς ἀκμές ἑνός κύβου. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο στερεῶν, ἄν τό μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ κύβου εἶναι α.

435. Σέ ἡμικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2R χαράσσουμε χορδή ΑΓ = R καί μέ διάμετρο ΑΓ γράφουμε δεύτερο ἡμικύκλιο, ἔστω τό (ΑΓ) σέ ἐπίπεδο κάθετο στό ἐπίπεδο τοῦ πρώτου. Νά βρεῖτε τόν ὄγκο τοῦ στερεοῦ, πού παράγεται, ὅταν τό ἡμικύκλιο (ΑΓ) στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

Εὐθεῖες καί ἐπίπεδα στό χῶρο. Στερεές γωνίες.

436. Ἄν $M_1, M_2, \ldots M_6$ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ ἑξαγώνου, νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρίγωνα $M_1M_3M_5$ καί $M_2M_4M_6$ ἔχουν τό ἴδιο κέντρο βάρους.

437. Μέσα σέ ἐπίπεδο (Π) δίνονται δύο κάθετες εὐθεῖες Οx, Οy καί ἔξω ἀπό τό (Π) ἕνα σημεῖο Γ. Νά βρεθοῦν πάνω στίς Οx, Οy δύο ἀντίστοιχα σημεῖα Α καί Β ἔτσι, ὥστε τό τρίγωνο ΓΑΒ νά εἶναι ὀρθογώνιο στό Γ καί τό τμῆμα ΑΒ νά ἔχει τό ἐλάχιστο δυνατό μῆκος.

438. Ἔχουμε τρεῖς εὐθεῖες ἀσύμβατες ἀνά δύο (α), (β), (γ), πού δέν εἶναι παράλληλες πρός τό ἴδιο ἐπίπεδο. Νά κατασκευαστεῖ μιά εὐθεία, πού νά τέμνει τίς τρεῖς ἀσύμβατες στά Α, Β, Γ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΑΒ : ΒΓ = μ : ν (μ, ν δεδομένα τμήματα).

439. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα στρεβλό τετράπλευρο καί ΕΖΗΘ ἕνα παραλληλόγραμμο, πού ἔχει τίς κορυφές του πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ στρεβλοῦ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλες πρός τίς διαγώνιες τοῦ στρεβλοῦ καί νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν.

440. Ἔχουμε μιά εὐθεία (ε) καί δυό σημεῖα Α καί Β, πού δέ βρίσκονται στό ἴδιο

ἐπίπεδο μέ τήν (ε). Νά κατασκευάσετε πάνω στήν εὐθεία (ε) τό σημεῖο Μ, γιά τό ὁποῖο ἰσχύει: $MA + MB =$ ἐλάχιστο δυνατό.

441. Ἀπό τό σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τό ἐπίπεδο (Π), φέρνουμε κάθετο ΑΒ στό (Π) καί μιά σταθερή πλάγια ΑΓ ($B \in (\Pi)$, $\Gamma \in (\Pi)$). Θεωροῦμε μεταβλητή πλάγια ΑΜ ($M \in (\Pi)$), πού ἔχει σταθερό μῆκος μεγαλύτερο ἀπό τό ΑΓ. Νά βρεῖτε τίς θέσεις τῆς ΑΜ, στίς ὁποῖες i) ἡ $\widehat{BM\Gamma}$ γίνεται μέγιστη, ii) ἡ $\widehat{AM\Gamma}$ γίνεται μέγιστη.

442. Ἔχουμε δυό εὐθεῖες Ox καί Oy καί μιά τρίτη εὐθεία (ε) τοῦ χώρου. Νά κατασκευάσετε μιά εὐθεία ΟΜ, πού νά εἶναι ὀρθογώνια πρός τήν (ε), καί τέτοια, ὥστε Επιπ ΟΜx $\perp$ Επιπ ΟΜy (Ὑποδ. βλ. ἄσκ. 313).

443. Ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ $AB \neq A\Gamma$ καί μιά εὐθεία (ε) τοῦ χώρου. Νά ὁρίσετε ἕνα ἐπίπεδο (Π), πού νά διέρχεται ἀπό τήν (ε) καί τέτοιο, ὥστε οἱ ΑΒ καί ΑΓ νά ἔχουν ἴσες προβολές πάνω σ' αὐτό.

444. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), ἕνα σημεῖο του Β καί μιά εὐθεία $\perp$ (Π). Ἕνα μεταβλητό τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει τήν κορυφή Β σταθερή, τήν Α πάνω στήν (ε), τή Γ πάνω στό (Π) καί μένει πάντοτε ὅμοιο πρός δεδομένο τρίγωνο. Νά βρεθεῖ ὁ τόπος τοῦ Γ.

445. Ἔχουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π), μιά εὐθεία $(\varepsilon_1) \parallel (\Pi)$ σέ ἀπόσταση h ἀπό τό (Π) καί μιά εὐθεία (ε_2) πάνω στό (Π), ὀρθογώνια πρός τήν (ε_1). Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν σημείων τοῦ (Π), πού τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών τους ἀπό τίς (ε_1) καί (ε_2) εἶναι σταθερό, ἴσο μέ c^2.

446. Δυό ἐπίπεδα (Ρ) καί (Σ) εἶναι κάθετα σέ μιά εὐθεία στά (σταθερά) σημεῖα της Α καί Β. Ἕνα σημεῖο Μ κινεῖται πάνω στό (Ρ) καί ἕνα ἄλλο σημεῖο Ν κινεῖται πάνω στό (Σ) ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{NMA}$ νά εἶναι πάντοτε ὀρθή καί ἡ εὐθεία ΜΝ νά περνάει ἀπό σταθερό σημεῖο Ο. Νά βρεῖτε τόν τόπο τοῦ Ν.

447. Ἔχουμε δύο εὐθεῖες Ox,Oy. Νά βρεῖτε τόν τόπο τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, γιά τά ὁποῖα ἰσχύει: $\pi\rho o\beta_{ox} OM + \pi\rho o\beta_{oy} OM = \lambda$, ὅπου λ δεδομένο τμῆμα.

448. Ἔστω ΑΒ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, (Π) τό μεσοκάθετο ἐπίπεδο τοῦ ΑΒ καί Γ ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται μαζί μέ τό Α πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ (Π). Νά βρεθεῖ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ (Π), πού εἶναι τέτοια, ὥστε: $\widehat{AM\Gamma} + \widehat{BM\Gamma} = 180^\circ$.

449. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινή κάθετος δύο ἀσύμβατων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), ὅπου $A \in (\varepsilon_1)$ καί $B \in (\varepsilon_2)$. Μιά μεταβλητή εὐθεία τέμνει τίς (ε_1) καί (ε_2) στά Γ καί Δ ἔτσι, ὥστε $A\Gamma : B\Delta = \mu : \nu$ (σταθερός λόγος). Ἄν ἡ κοινή $\perp$ τῶν ΑΒ καί ΓΔ τέμνει τή ΓΔ στό Μ, νά βρεθεῖ ὁ τόπος τοῦ Μ.

450. Ἔστω ἕνα στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Ἄν τά σημεῖα Μ καί Ν βρίσκονται πάνω στίς ἀπέναντι πλευρές ΑΒ καί ΓΔ καί εἶναι: $\frac{AM}{MB} = \frac{\Delta N}{N\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$, τότε ἡ εὐθεία ΜΝ σχηματίζει ἴσες γωνίες μέ τίς ΑΔ καί ΒΓ.

451. Νά βρεθεῖ ὁ τόπος τῶν σημείων, πού οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό δύο δεδομένα τεμνόμενα ἐπίπεδα ἔχουν ἄθροισμα σταθερό.

452. Ἔστω Ο τό μέσο τῆς ἐλάχιστης ἀποστάσεως ΑΒ δύο ὀρθογώνιων ἀσύμβατων εὐθειῶν ΑΧ καί ΒΨ καί ΚΛ μιά εὐθεία μεταβλητή, πού τέμνει τίς ΑΧ καί ΒΨ στά Κ καί Λ ἔτσι, ὥστε $O\Pi = AB/2$, ὅπου ΟΠ ἡ ἀπόσταση τοῦ Ο ἀπό τήν εὐθεία ΚΛ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\Pi K \cdot \Pi \Lambda =$ σταθερό καί ὅτι τό Π ἰσαπέχει ἀπό τά ἐπίπεδα ΒΑΧ καί ΑΒΨ.

453. **(Θ) Μενελάου γιά στρεβλό τετράπλευρο** : Ἄν ἕνα ἐπίπεδο, πού δέν διέρχεται ἀπό κορυφή στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τέμνει τούς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ,ΔΑ στά σημεῖα Μ,Ν,Ρ,Σ, τότε ἰσχύει ἡ σχέση: (1) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{N\Gamma}} \cdot \frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{P\Delta}} \cdot \frac{\overline{\Sigma\Delta}}{\overline{\Sigma A}} = 1.$

Ἀντιστρόφως: Ἡ (1) συνεπάγεται ὅτι τά M, N, P, Σ εἶναι ὁμοεπίπεδα.

454. Ἄν μιά εὐθεία κινεῖται, ὥστε νά τέμνει στά A, B, Γ τρεῖς ἄλλες σταθερές εὐθεῖες ἀνά δύο ἀσύμβατες καί παράλληλες πρός ἕνα ἐπίπεδο, τότε ὁ λόγος AB : BΓ μένει σταθερός καί ἡ εὐθεία ABΓ μένει πάντοτε παράλληλη πρός ἕνα σταθερό ἐπίπεδο.

455. Ἔχουμε μιά εὐθεία, πού διαιρεῖ σέ μέρη ἀνάλογα τίς δύο ἀπέναντι πλευρές ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου. Νά κατασκευάσετε μιά δεύτερη εὐθεία, πού νά τέμνει καθέτως τήν πρώτη καί νά διαιρεῖ τίς δυό ἄλλες πλευρές τοῦ τετραπλεύρου σέ μέρη ἀνάλογα.

456. Ἀπό τά ἄκρα A, B μιᾶς διαμέτρου AB ἑνός κύκλου διέρχονται δύο εὐθεῖες AX καί BΨ, πού εἶναι καθετες στήν AB, δέν εἶναι παράλληλες μεταξύ τους καί ἔχουν γωνίες κλίσεως $\theta^\circ < 90^\circ$ ἡ καθεμιά πρός τό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου. Ἄν μιά τρίτη εὐθεία (ε) τέμνει τίς AX, BΨ καί τήν περιφέρεια, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ προβολή τῆς (ε) στό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καί ὅτι ἡ γωνία κλίσεως τῆς (ε) πρός τό ἐπίπεδο τοῦ κύκλου εἶναι πάλι θ°.

457. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν μιά φωτεινή ἀκτίνα ἀνακλαστεῖ διαδοχικά πάνω σέ τρία ἐπίπεδα κάτοπτρα κάθετα ἀνά δύο, τότε ἐξέρχεται παράλληλη πρός τήν ἀρχική της διεύθυνση.

458. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, πού βρίσκονται στό ἐσωτερικό μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας καί οἱ ἀποστάσεις τους ἀπό τίς ἕδρες ἔχουν σταθερό ἄθροισμα;

459. Ἄν σέ τρίεδρη στερεά γωνία O, ABΓ εἶναι: διεδρ $\widehat{O\Gamma}$ = διεδρ $\widehat{OA}$ + διεδρ $\widehat{OB}$ καί ἄν OΔ ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$, νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{AOB}/2$.

460. Στό ἐσωτερικό μιᾶς ὀξείας δίεδρης γωνίας ὁρίζουμε ἕνα σημεῖο A. Νά βρεῖτε δύο σημεῖα Γ καί B, τό ἕνα πάνω στή μία ἕδρα καί τό ἄλλο πάνω στήν ἄλλη, ἔτσι, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ABΓ νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη δυνατή.

461. Ἔχουμε ἕνα κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ, πού δέν εἶναι οὔτε παρ/μο οὔτε τραπέζιο. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν M τῶν τετράεδρων στερεῶν γωνιῶν M,ABΓΔ, οἱ ὁποῖες μποροῦν νά τμηθοῦν ἀπό ἐπίπεδο i) κατά ὀρθογώνιο παρ/μο, ii) κατά ρόμβο.

Πολύεδρα

462. Πάνω σέ δυό διαδοχικές ἕδρες ἑνός κύβου φέρνουμε δυό διαγωνίους, ἀσύμβατες μεταξύ τους. Ὑπολογίστε τήν ἐλάχιστη ἀπόστασή τους, ἄν ἡ ἀκμή τοῦ κύβου εἶναι α.

463. Ἄν ἡ ἀκμή ἑνός κύβου εἶναι α, νά ὑπολογίσετε τήν ἐλάχιστη ἀπόσταση μιᾶς διαγωνίου τοῦ κύβου καί τῆς διαγωνίου μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου, πού εἶναι ἀσύμβατη πρός τή διαγώνιο τοῦ κύβου.

464. Δύο σημεῖα A καί B ἰσαπέχουν ἀπό μιά εὐθεία (ε) καί δέ βρίσκονται στό ἴδιο ἐπίπεδο μέ τήν (ε). Ἄν Γ καί Δ εἶναι τά συμμετρικά τῶν A καί B ὡς πρός τήν (ε), νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράεδρο ABΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

465. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν μιᾶς τρίεδρης στερεᾶς γωνίας, πού ἀνήκει σ' ἕνα ἰσοσκελές τετράεδρο.

466. Ἔχουμε ἕνα τραπέζιο ABΓΔ μέ AB||ΓΔ, AΔ = ΔΓ = ΓB = α καί AB = 2α. Στίς κορυφές τοῦ τραπεζίου ὑψώνουμε κάθετα τμήματα στό ἐπίπεδο τοῦ τραπεζίου πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ χώρου, τά: AA′ = 2x, BB′ = 2y, ΓΓ′ = y, ΔΔ′ = x. Νά βρεθεῖ τό εἶδος τοῦ στερεοῦ ABΓΔA′B′Γ′Δ′ καί ὁ ὄγκος του.

467. Σ' ἕνα τετράεδρο OABΓ τό O προβάλλεται στό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ABΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $OA^2 - OB^2 = (A\Gamma^2 - B\Gamma^2)/3$.

468. Πάνω στό ὕψος OK μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδας O, ABΓ ὁρίζεται

ἕνα σταθερό σημεῖο Σ. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν ἕνα μεταβλητό ἐπίπεδο διέρχεται ἀπό τό Σ καί τέμνει τίς ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ στά Α΄, Β΄, Γ΄, τό ἄθροισμα:

$$\frac{1}{ΟΑ'}+\frac{1}{ΟΒ'}+\frac{1}{ΟΓ'}$$

μένει σταθερό. Ἀνάλογο θεώρημα ἰσχύει καί γιά κανονική τετραγωνική πυραμίδα.

469. Ἡ διαγώνιος ΒΔ ἑνός ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι ὁριζόντια καί ἔχει μῆκος 2α. Ἡ ἄλλη διαγώνιος, μήκους 4α, σχηματίζει γωνία 60° μέ ἕνα σταθερό ὁριζόντιο ἐπίπεδο (Π), πού βρίσκεται κάτω ἀπό τό τμῆμα ΑΓ καί ἀπέχει α ἀπό τό Α. Ἔστω ὅτι Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ εἶναι οἱ προβολές τῶν Α, Β, Γ,Δ στό (Π) καί ὅτι (Κ) εἶναι τό κολοβό πρίσμα ΑΒΓΔΑ΄Β΄Γ΄Δ΄. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι τό Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι τετράγωνο καί ὅτι τό (Κ) ἔχει ἐπίπεδο συμμετρίας. ii) Νά ὑπολογίσετε τόν ὄγκο καί τήν ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ (Κ).

470. Στίς κορυφές Α καί Γ ἑνός τετραγώνου ΑΒΓΔ μέ πλευρά α ὑψώνουμε κάθετα τμήματα στό ἐπίπεδο τοῦ τετραγώνου, τά ΑΑ΄ καί ΓΓ΄, τέτοια, ὥστε Α΄Γ΄ = 2α καί Α΄Γ΄ ⊥ ⊥ Επιπ Α΄ΒΔ.Νά ὑπολογιστοῦν: Ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου Α΄Γ΄ΒΔ καί ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση τῶν εὐθειῶν Α΄Γ΄ καί ΒΔ.

471. Ἄν σ᾽ ἕνα τετράεδρο ΑΒΓΔ οἱ ἕδρες ΑΒΓ καί ΑΓΔ εἶναι ἰσοδύναμες, τότε ἡ κοινή κάθετος τῶν ΑΓ καί ΒΔ διέρχεται ἀπό τό μέσο τῆς ἀκμῆς ΒΔ.

472. Νά διαιρεθεῖ ἕνας κύβος σέ μέσο καί ἄκρο λόγο ἀπό ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό μία ἀκμή του.

473. Νά ὑπολογίσετε τούς ὄγκους τῶν δύο μερῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα, πού ἔχει πλευρά βάσεως α καί ὕψος $α\sqrt{3}/2$ ἀπό ἕνα ἐπίπεδο, πού διχοτομεῖ μία ἀπό τίς δίεδρες τῆς βάσεως.

474. Ἐπίπεδο διέρχεται ἀπό τά μέσα Μ καί Ν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνός τετραέδρου καί τέμνει δύο ἄλλες ἀπέναντι ἀκμές στά Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τμῆμα ΕΖ διχοτομεῖται ἀπό τή ΜΝ.

475. Ἕνα ἐπίπεδο παράλληλο πρός δύο ἀπέναντι ἀκμές κανονικοῦ τετραέδρου ἀπέχει ἀπ᾽ αὐτές ἀποστάσεις μ καί ν καί τέμνει το τετράεδρο. Νά ὑπολογίσετε τό λόγο τῶν ὄγκων τῶν δύο μερῶν, στά ὁποῖα χωρίζεται τό τετράεδρο ἀπό τό ἐπίπεδο αὐτό.

476. Ἕνα τετράεδρο SΑΒΓ ἔχει τή στερεά γωνία S τρισορθογώνια καί ὕψος ἀπό τήν κορυφή S ἴσο μέ h, ἐνῶ ἡ ἀπόσταση τοῦ S ἀπό τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι λ. Νά ὑπολογίσετε, συναρτήσει τῶν h,λ, τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, πού εἶναι περιγεγραμμένος στό τρίγωνο ΑΒΓ.

477. i) Ὅλες οἱ ἕδρες ὁποιουδήποτε ἰσοσκελοῦς τετραέδρου εἶναι ὀξυγώνια τρίγωνα. ii) Κάθε κορυφή τοῦ ἰσοσκελοῦς τετραέδρου προβάλλεται στό ἐπίπεδο τῆς ἀπέναντι ἕδρας στό συμμετρικό τοῦ ὀρθοκέντρου τῆς ἕδρας ὡς πρός τό περίκεντρο τῆς ἕδρας. Ἀντιστρόφως: Ἄν δύο κορυφές ἑνός τετραέδρου ἔχουν αὐτή τήν ἰδιότητα, τό τετράεδρο εἶναι ἰσοσκελές.

478. Ἔστω ΟΑΒΓ ἕνα τετράεδρο καί Κ ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀπό τά Α, Β, Γ φέρνουμε παράλληλες πρός τήν ΟΚ, οἱ ὁποῖες τέμνουν τά ἐπίπεδα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ στά ἀντίστοιχα σημεῖα Ι, Θ, Η. Ἀποδεῖξτε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΚΙΘΗ εἶναι τριπλάσιος ἀπό τόν ὄγκο τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

Σφαίρα

479. Ἄν μιά τρισορθογώνια στερεά γωνία ἔχει τήν κορυφά της σέ σταθερό σημεῖο, πού βρίσκεται πάνω στήν ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας καί ἄν οἱ ἀκμές της τέμνουν τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας στά Α, Β, Γ, τότε τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερό, ὅταν ἡ στερεά γωνία στρέφεται γύρω ἀπό τήν κορυφή της.

480. Δύο ἴσες σφαῖρες ἀκτίνας α τέμνονται καί ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους των εἶναι ἴσος μέ τό μισό τοῦ ὄγκου μιᾶς σφαίρας, πού ἔχει διάμετρο τή διάκεντρο. Νά βρεῖτε τό μῆκος τῆς διακέντρου (δηλ. τήν ἀπόσταση μεταξύ τῶν δύο κέντρων).

481. Ἕνα ἐπίπεδο διαιρεῖ μιά σφαίρα σέ δύο μέρη μέ ὄγκους V καί V΄ καί ὁρίζει δύο σφαιρικές ζῶνες μέ ἐμβαδά Ε καί Ε΄. Ἄν ὁ λόγος $E/E' = \lambda$, νά βρεθεῖ ὁ λόγος V/V'.

482. Νά ὑπολογίσετε τήν ἀπόσταση τῶν κέντρων μιᾶς σφαίρας, πού εἶναι ἐγγεγραμμένη καί μιᾶς ἄλλης, πού εἶναι περιγεγραμμένη σέ κανονική πυραμίδα, ἡ ὁποία ἔχει βάση ἰσόπλευρο τρίγωνο μέ πλευρά α καί ὕψος 2α.

483. Σέ μιά κανονική τριγωνική πυραμίδα τό ὕψος εἶναι $\alpha\sqrt{105}/6$ καί ἡ πλευρά τῆς βάσεως εἶναι α. Νά ὑπολογίσετε τό λόγο τῶν δύο ζωνῶν, στίς ὁποῖες χωρίζεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, πού εἶναι περιγεγραμμένη στήν πυραμίδα, ἀπό τό ἐπίπεδο μιᾶς παράπλευρης ἕδρας.

484. Ἔχουμε μιά σφαίρα καί ἕναν κῶνο ἐκ περιστροφῆς, πού εἶναι ἐγγεγραμμένος σ' αὐτήν. Νά βρεῖτε πότε ἡ διαφορά τῶν τομῶν τῆς σφαίρας καί τοῦ κώνου ἀπό ἐπίπεδο παράλληλο πρός τή βάση τοῦ κώνου γίνεται μέγιστη.

485. Ἕνα ἐπίπεδο (Π) ἐφάπτεται σέ σφαίρα (O, R) στό σημεῖο της A. Θεωροῦμε σημεῖο P τοῦ (Π) καί ἀπό τό A φέρνουμε ἐπίπεδο $\perp$ OP, τό ὁποῖο τέμνει τή σφαίρα κατά περιφέρεια (c). Ἄν M εἶναι τό κέντρο μιᾶς σφαίρας, πού διέρχεται ἀπό τή (c) καί ἀπό τό P, νά βρεθεῖ ὁ τόπος τοῦ M, ὅταν τό P διαγράφει μιά εὐθεία ἤ μιά περιφέρεια πάνω στό (Π) ἤ ὁλόκληρο τό (Π).

486. Μία τρισορθογώνια στερεά γωνία ἔχει τήν κορυφή της σέ σταθερό σημεῖο Σ τοῦ ἐσωτερικοῦ μιᾶς σφαίρας (K, R) καί οἱ ἀκμές της τέμνουν τήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας στά A, B, Γ. Ἄν ἡ τρισορθογώνια στρέφεται γύρω ἀπό τήν κορυφή της, τότε τό κέντρο βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κινεῖται πάνω σέ κάποια σφαίρα.

Στερεά καί ἐπιφάνειες ἐκ περιστροφῆς

487. Σ' ἕναν ὀρθό κυκλικό κύλινδρο λείπει ἡ ἐπάνω βάση καί ἡ ὑπόλοιπη ἐπιφάνειά του εἶναι $\pi\alpha^2$. Νά ὑπολογίσετε τίς διαστάσεις του ἔτσι, ὥστε νά ἔχει τή μέγιστη χωρητικότητα.

489. Νά κατασκευαστεῖ ὀρθός κυκλικός κῶνος μέ δεδομένη γενέτειρα λ ἔτσι, ὥστε νά ἔχει τό μέγιστο ὄγκο.

490. Σ' ἕναν κύκλο εἶναι περιγεγραμμένα ἕνα κανονικό πεντάγωνο καί ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τό καθένα ἀπό τά δύο πολύγωνα στρέφεται γύρω ἀπό μιά διάμετρο τοῦ κύκλου κάθετη σέ μία πλευρά του, ἡ διαφορά τῶν ὄγκων, πού παράγονται ἀπ' αὐτά, εἶναι ἴση μέ τόν ὄγκο τῆς σφαίρας, πού παράγει ὁ κύκλος.

491. Σέ δεδομένο κῶνο νά ἐγγραφεῖ κύλινδρος, πού νά ἔχει δεδομένη κυρτή ἐπιφάνεια. Ἀπ' ὅλους τούς ἐγγεγραμμένους κυλίνδρους ποιός ἔχει τή μεγαλύτερη δυνατή κυρτή ἐπιφάνεια;

492. Ἕνας κόλουρος κῶνος εἶναι περιγεγραμμένος σέ σφαίρα μέ ἀκτίνα $\rho = 1$ καί ἐγγεγραμμένος σέ ἄλλη σφαίρα, πού ἔχει ἐπιφάνεια 7-πλάσια ἀπό τήν ἐπιφάνεια τῆς πρώτης. Νά ὑπολογίσετε τίς ἀκτίνες τῶν βάσεων τοῦ κόλουρου κώνου.

493. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, οἱ ὁποῖες ἐφάπτονται στίς τέσσερις πλευρές παρ/μου ΑΒΓΔ;

494. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν ἀξόνων τῶν κυλινδρικῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, οἱ ὁποῖες διέρχονται ἀπό τίς τέσσερις κορυφές δεδομένου παρ/μου ΑΒΓΔ;

495. Ἔχουμε ἕνα ἡμικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ καί δύο χορδές του ΑΓ καί ΒΔ, πού τέμνονται στό Ε καί εἶναι τέτοιες, ὥστε $\widehat{BA\Gamma} = 30°$, $\widehat{AB\Delta} = 45°$. Ἄν τό σχῆμα

στρέφεται γύρω ἀπό τήν ΑΒ, νά ὑπολογιστεῖ ὁ ὄγκος, πού διαγράφει τό μικτόγραμμο τρίγωνο ΕΔΓ, στό ὁποῖο καμπύλη πλευρά εἶναι τό τόξο $\widehat{ΓΔ}$.

Ἀσκήσεις ἀνάμικτες

496. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινή κάθετος τῶν ἀσύμβατων εὐθειῶν $(ε_1)$ καί $(ε_2)$, ὅπου $Α \in (ε_1)$ καί $Β \in (ε_2)$. Ἕνα τμῆμα ΓΔ μέ σταθερό μῆκος κινεῖται ἔτσι, ὥστε τά ἄκρα του νά βρίσκονται πάντοτε στίς $(ε_1)$ καί $(ε_2)$. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ ἀκτίνα τῆς σφαίρας, πού εἶναι περιγεγραμμένη στό τετράεδρο ΑΒΓΔ μένει σταθερή.

497. Στήν κορυφή Δ ἑνός τριγώνου ΔΒΓ ὑψώνουμε εὐθεία $Δx \perp$ Επιπ ΔΒΓ καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτήν ἕνα σημεῖο Α. Ἄν ΔΕ, ΒΚ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, Ν τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΔΒΓ, ΒΖ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, Η τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τότε: 1ο) νά ἀποδείξετε ὅτι Επιπ ΒΖΚ $\perp$ Επιπ ΑΒΓ. 2ο) Τό Η εἶναι προβολή τοῦ Ν πάνω στό Επιπ ΑΒΓ. 3ο) Νά βρεῖτε τόν τόπο τοῦ Η, ὅταν τό Α διατρέχει τήν εὐθεία ΔΧ. 4ο) Τά Γ, Ε, Η, Ζ, Κ, Ν βρίσκονται σέ μιά σφαίρα.

498. Ἄν τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι σκαληνό (ἀνισόπλευρο), νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα τετράεδρα ΔΑΒΓ τέτοια, ὥστε $ΔΑ \cdot ΒΓ = ΔΒ \cdot ΑΓ = ΔΓ \cdot ΑΒ$. Στά τετράεδρα αὐτά οἱ εὐθεῖες, πού ἑνώνουν τίς κορυφές μέ τά ἔγκεντρα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο. Ἐπίσης σέ κάθε τετράεδρο τῆς παραπάνω κατηγορίας κάθε σφαίρα, πού διέρχεται ἀπό τά Α, Β, Γ, τέμνει τίς ἀκμές ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ στά σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄, πού εἶναι κορυφές ἰσόπλευρου τριγώνου.

499. i) Ὑπολογίστε τήν ἀκτίνα τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας ἑνός ἰσοσκελοῦς τετραέδρου, ἄν σᾶς δοθοῦν οἱ 6 ἀκμές του α,α, β,β, γ,γ. ii) Ὑπολογίστε τίς ἀκμές ἑνός ἰσοσκελοῦς τετραέδρου, ἄν σᾶς δοθεῖ ὅτι τά μήκη τῶν ἀκμῶν εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὅτι ἡ διάμετρος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι 23 μέτρα καί ὅτι κάθε ἕδρα του ἔχει μιά γωνία 60°.

500. Σ' ἕνα τετράεδρο ΔΑΒΓ ἡ στερεά γωνία στό Α εἶναι τρισορθογώνια καί $ΑΔ = ΑΒ = ΑΓ = α$. Παίρνουμε πάνω στήν ἀκμή ΑΒ ἕνα σημεῖο Μ καί ἔστω $ΑΜ = x$. Ἀπό τό Μ φέρνουμε ἐπίπεδο παράλληλο πρός τίς ΑΔ καί ΒΓ, τό ὁποῖο τέμνει τήν ΑΓ στό Ν, τήν ΔΓ στό Π καί τήν ΔΒ στό Κ. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἀπό τά Α, Μ, Ν, Π, Κ διέρχεται μιά σφαίρα καί νά ὑπολογίσετε τήν ἀκτίνα της συναρτήσει τῶν x, α. ii) Νά βρεῖτε τόν τόπο τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας αὐτῆς, ὅταν μεταβάλλεται τό x.

501. Νά κατασκευάσετε ἐπίπεδο, πού διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο καί τέμνει δεδομένο κῶνο ἐκ περιστροφῆς κατά δυό γενέτειρες, οἱ ὁποῖες σχηματίζουν δεδομένη γωνία.

502. Οἱ τρεῖς ἕδρες τρίεδρης γωνίας εἶναι 60° ἡ καθεμιά. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς τῆς τρίεδρης, i) ὅταν οἱ ἀκμές της ἐφάπτονται σέ δεδομένη σφαίρα, ii) ὅταν οἱ ἕδρες της ἐφάπτονται σέ δεδομένη σφαίρα.

503. Στό κέντρο Ο ἑνός τετραγώνου ΑΒΓΔ, πού ἔχει πλευρά α φέρνουμε μιά εὐθεία $\perp$ Επιπ ΑΒΓΔ καί παίρνουμε πάνω σ' αὐτή δυό σημεῖα Ε καί Ζ τέτοια, ὥστε $ΕΟ = ΟΖ = ΟΑ$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό πολύεδρο ΕΑΒΓΔΖ εἶναι κανονικό ὀκτάεδρο καί ὅτι τό Ο εἶναι τό κέντρο τριῶν σφαιρῶν: περιγεγραμμένης, ἐγγεγραμμένης καί ἐφαπτομένης ὅλων τῶν ἀκμῶν τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου. Ὑπολογίστε τίς ἀκτίνες R, ρ, r τῶν σφαιρῶν αὐτῶν.

504. i) Σέ κάθε ὀρθοκεντρικό τετράεδρο τό ὀρθόκεντρο ἔχει ἴσες δυνάμεις καί πρός τίς σφαῖρες, πού ἔχουν διαμέτρους τίς ἀκμές καί πρός τίς σφαῖρες, πού ἔχουν διαμέτρους τά ὕψη τῶν ἑδρῶν. ii) Σ' ἕνα ὀρθοκεντρικό τετράεδρο ΑΒΓΔ ὑποθέτουμε ὅτι οἱ κορυφές Α, Β εἶναι σταθερές καί ὅτι ὁ φορέας (ε) τῆς ΓΔ εἶναι σταθερός. Ἄν τά Γ καί Δ κινοῦνται πάνω στήν (ε) ἔτσι, ὥστε τό τετράεδρο ΑΒΓΔ νά παραμένει ὀρθοκεντρικό, ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ περιγεγραμμένη στό τετράεδρο σφαίρα διέρχεται ἀπό μία σταθερή περιφέρεια.

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Χ

ΔΙΠΛΟΣ ΛΟΓΟΣ

219. Ἁπλός ἤ μερικός λόγος μιᾶς διατεταγμένης τριάδας σημείων ἑνός ἄξονα.

α') Ἔστω (A, B, M) μιά διατεταγμένη τριάδα σημείων ἑνός ἄξονα. (Τό A θεωρεῖται πρῶτο, τό B δεύτερο, τό M τρίτο). Ὁ ἀλγεβρικός λόγος $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ λέγεται καί **ἁπλός λόγος** ἤ **μερικός λόγος** τῆς τριάδας (A,B,M) καί παριστάνεται μέ (ABM). Ὥστε : $(ABM) = \lambda$ σημαίνει: $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \lambda$.

Ἔτσι π.χ., ἄν $(ABM) = \lambda(\neq 0)$, τότε $(BAM) = \overline{MB}/\overline{MA} = 1/\lambda$,

$$(AMB) = \frac{\overline{BA}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{BM} + \overline{MA}}{\overline{BM}} = 1 + \frac{\overline{MA}}{\overline{BM}} = 1 - \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = 1 - \lambda, \text{ κ.τλ.}$$

β') **Συμβατικές τιμές τοῦ μερικοῦ λόγου.** Ἄν τό M συμπίπτει μέ τό A, τότε ὁ $(ABM) = 0$. Ἄν $M \equiv B$, ὁ μερικός λόγος (ABM) δέν ὁρίζεται. Ἄν τό M γίνει τό «εἰς ἄπειρο σημεῖο» τῆς εὐθείας AB, τότε βάζουμε $(ABM) = +1$. Ἀπ' αὐτό καί τό γνωστό θεώρημα τῆς διαιρέσεως ἑνός διανύσματος σέ ἀλγεβρικό λόγο λ, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ (ABM) διατρέχει ὅλες τίς πραγματικές τιμές, ὅταν τό M διατρέχει τήν εὐθεία AB στερημένη ἀπό τό B.

220. Διπλός λόγος μιᾶς τετράδας σημείων μιᾶς εὐθείας.

α΄) Θεωροῦμε τέσσερα ὁποιαδήποτε σημεῖα, πάνω σέ μιά εὐθεία καί τά τακτοποιοῦμε κατά μιά ὁρισμένη τάξη, παίρνοντας ἕνα ἀπ᾽ αὐτά, τό Α, ὡς πρῶτο, ἕνα ἄλλο, τό Β, ὡς δεύτερο, ἕνα ἀπ᾽ τά ὑπόλοιπα δυό, τό Γ, ὡς τρίτο καί τό ἄλλο, Δ, ὡς τέταρτο. Τό $\overrightarrow{AB}$ διαιρεῖται ἀπό τό Γ σέ κάποιο ἀλγεβρικό λόγο $\overline{\Gamma A}/\overline{\Gamma B}$ καί ἀπό τό Δ σ᾽ ἕναν ἄλλο ἀλγεβρικό λόγο $\overline{\Delta A}/\overline{\Delta B}$.

Λέγεται διπλός λόγος (ἤ ἀναρμονικός λόγος) τῆς διατεταγμένης τετράδας σημείων Α, Β, Γ, Δ καί παριστάνεται μέ (Α, Β, Γ, Δ) τό πηλίκο τῶν ἀλγεβρικῶν λόγων $\overline{\Gamma A}/\overline{\Gamma B}$ διά τοῦ $\overline{\Delta A}/\overline{\Delta B}$.

$$(1) \qquad (A, B, \Gamma, \Delta) = \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = \frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)}$$

Ὁ διπλός λόγος (Α, Β, Γ, Δ) ἔχει νόημα καί ὅταν τό ἕνα ἀπό τά σημεῖα εἶναι τό εἰς ἄπειρο σημεῖο τῆς εὐθείας.

Γνωρίζουμε ὅτι τέσσερα ἀντικείμενα Α,Β,Γ,Δ μποροῦν νά διαταχθοῦν σέ μιά σειρά κατά 24 διαφορετικούς τρόπους (μεταθέσεις τεσσάρων πραγμάτων)· ἑπομένως σέ 4 σημεῖα μιᾶς εὐθείας ἀντιστοιχοῦν 24 διπλοί λόγοι. Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι οἱ 24 αὐτοί διπλοί λόγοι εἶναι ἀνά τέσσερις ἴσοι καί αὐτό βγαίνει εὔκολα ἀπό τό ἑπόμενο θεώρημα.

β΄) (Θ) — **Ὁ διπλός λόγος δέν ἀλλάζει, ὅταν ἐναλλάξουμε δυό σημεῖα καί ταυτοχρόνως ἐναλλάξουμε καί τά δυό ἄλλα.**

Δηλ. θά εἶναι: (Α, Β, Γ, Δ) = (Β, Α, Δ, Γ) = (Γ, Δ, Α, Β) = (Δ, Γ, Β, Α).

Ἔχουμε π.χ.: $(B, A, \Delta, \Gamma) = \dfrac{\overline{\Delta B}}{\overline{\Delta A}} : \dfrac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Gamma A}} = \dfrac{\overline{\Delta B}\cdot\overline{\Gamma A}}{\overline{\Delta A}\cdot\overline{\Gamma B}} =$

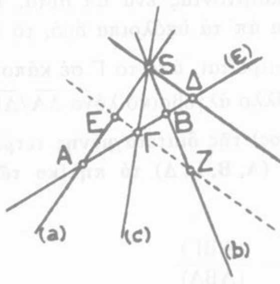
$$= \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = (A, B, \Gamma, \Delta).$$

γ΄) Ὅταν τά τρία (διαφορετικά μεταξύ τους) σημεῖα Α, Β, Γ παραμένουν σταθερά καί τό τέταρτο Δ διατρέχει τήν εὐθεία στερημένη ἀπό τό Β, ὁ λόγος $\overline{\Gamma A} : \overline{\Gamma B}$ εἶναι μιά σταθερά, ἐνῶ ὁ λόγος $\overline{\Delta A} : \overline{\Delta B}$ διατρέχει ὅλες τίς πραγματικές τιμές, ὅπως γνωρίζουμε. Ἀπ᾽ αὐτό ἕπεται ὅτι ὁ διπλός λόγος (Α, Β, Γ, Δ) μπορεῖ νά πάρει ὅλες τίς πραγματικές τιμές μεταξύ $-\infty$ καί $+\infty$ (τήν τιμή 1 τήν παίρνει ὁ (Α, Β, Γ, Δ) μόνο, ὅταν $\Delta \equiv \Gamma$).

δ΄) Ἄν γνωρίζουμε τό διπλό λόγο (Α, Β, Γ, Δ) = λ καί τά τρία σημεῖα Α, Β, Γ, τότε τό τέταρτο σημεῖο Δ εἶναι μονοσήμαντα ὁρισμένο, γιατί γνωρίζουμε τόν ἀλγεβρικό λόγο $\overline{\Delta A}/\overline{\Delta B}$. Γενικότερα, ἄν γνωρίζουμε τό διπλό λόγο καί τρία σημεῖα ἀπ᾽ τά τέσσερα, τό τέταρτο εἶναι ὁρισμένο.

ε΄) Ἄν (Α, Β, Γ, Δ) = —1, τότε τά Γ καί Δ διαιροῦν ἁρμονικά τό τμῆμα ΑΒ.

221. Διπλός λόγος τεσσάρων ἀ κ τ ί ν ω ν. α΄) (Θ)— **Μιά διατεταγμένη τετράδα ἀκτίνων μιᾶς ἐπίπεδης δέσμης ὁρίζει, πάνω σέ μιά ὁποιαδήποτε τέμνουσα, τέσσερα σημεῖα, πού ἔχουν σταθερό διπλό λόγο,**



Σχ. 216

Ἔστω (a), (b), (c), (d) μιά διατεταγμένη τετράδα ἀκτίνων, πού περνοῦν ἀπό τό S (σχ. 216) καί A, B, Γ, Δ τά ἀντίστοιχα σημεῖα τῆς τομῆς τους ἀπό μιά ὁποιαδήποτε τέμνουσα (ε). Ἄς φέρουμε ἀπό τό Γ μιά εὐθεία ΕΓΖ παράλληλη πρό τή (d), ὅπως στό σχῆμα.

Χρησιμοποιώντας ὅμοια τρίγωνα (τριγ ΑΕΓ ≈ τριγ ΑSΔ, τριγ ΓΒΖ ≈ ≈ τριγ SΒΔ) παίρνουμε κατά σειρά:

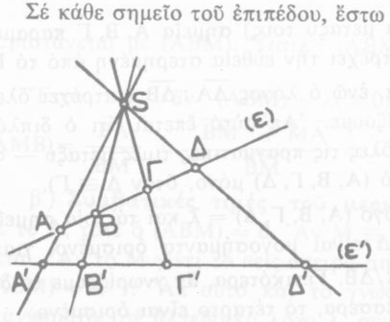
$$(A, B, \Gamma, \Delta) = \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{\Delta A}}{\overline{\Delta B}} = \frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{\Delta A}} : \frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{\Delta B}} = \frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{\Delta S}} : \frac{\overline{\Gamma Z}}{\overline{\Delta S}} = -\frac{\overline{\Gamma E}}{\overline{\Gamma Z}}.$$

Ὁ λόγος ὅμως $-\dfrac{\overline{\Gamma E}}{\overline{\Gamma Z}}$ εἶναι ἐντελῶς ἀνεξάρτητος ἀπό τήν τέμνουσα (ε). Γιατί ὁποιαδήποτε θέση καί νά ἔχει τό Γ πάνω στήν (c), ἐπειδή ἡ διεύθυνση τῆς ΕΖ εἶναι σταθερή, ὁ λόγος $\overline{\Gamma E} : \overline{\Gamma Z}$ εἶναι, σύμφωνα μέ τό θεώρημα τῆς δέσμης, σταθερός. Ἄν τό S εἶναι σημεῖο σέ ἄπειρη ἀπόσταση, πάλι τό θεώρημα ἰσχύει. (Θεώρημα τοῦ Θαλῆ).

β΄) Διπλός λόγος μιᾶς τετράδας ἀκτίνων: (a), (b), (c), (d) λέγεται ὁ σταθερός διπλός λόγος (Α, Β, Γ, Δ), τόν ὁποῖο ὁρίζει ἡ τετράδα, πάνω σέ ὁποιαδήποτε εὐθεία (ε), ἡ ὁποία τήν τέμνει (σχ. 217).

γ΄) **Ἡ θεμελιώδης ἰδιότητα τοῦ διπλοῦ λόγου**. Ἄς πάρουμε σ ἕνα ἐπίπεδο ἕνα σταθερό σημεῖο S καί μιά εὐθεία (ε΄).

Σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, ἔστω τό Α, (≢ S) ἀντιστοιχεῖ πάνω στήν (ε΄) ἕνα σημεῖο Α΄, τό ὁποῖο εἶναι τό ἴχνος τῆς ἀκτίνας SA πάνω στήν (ε΄). Τό Α΄ εἶναι ἡ **κεντρική προβολή** τοῦ Α πάνω στήν (ε΄), ὡς πρός κέντρο τό S.



Σχ. 217

Ἄς πάρουμε τώρα μιά τετράδα σημείων Α, Β, Γ, Δ πάνω στήν εὐθεία (ε). Ἡ κεντρική προβολή τῆς τετράδας Α, Β, Γ, Δ στήν εὐθεία (ε΄) εἶναι μιά ἄλλη τετράδα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ (σχ. 217). Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε (Α, Β, Γ, Δ) = (Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄), δηλαδή:

Κατά τήν κεντρική προβολή, ὁ διπλός λόγος διατηρεῖται.

δ') Πόρισμα 1ο. Ἄν πάνω σέ δυό εὐθεῖες (ε) καί (ε') βρίσκονται ἀντιστοίχως οἱ τετράδες τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ καί Α', Β', Γ', Δ' τέτοιες, ὥστε:

$$(A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta')$$

κι ἄν οἱ εὐθεῖες ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο S, τότε καί ἡ εὐθεία ΔΔ' περνᾶ ἀπό τό S.

Γιατί ἡ SΔ τέμνει τήν (ε') σ' ἕνα σημεῖο Δ'', τό ὁποῖο ταυτίζεται μέ τό Δ', ἀφοῦ $(A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta'') \wedge (A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta') \Rightarrow$ $\Rightarrow (A', B', \Gamma', \Delta'') = (A', B', \Gamma', \Delta') \Rightarrow \Delta'' \equiv \Delta'$.

Πόρισμα 2ο. Ἄν δυό εὐθεῖες (ε) καί (ε') τέμνονται στό Ο καί ὑπάρχουν πάνω στή μιά τρία σημεῖα Α, Β, Γ καί πάνω στήν ἄλλη ἄλλα τρία Α', Β', Γ' τέτοια, ὥστε (Ο, Α, Β, Γ) = (Ο, Α', Β', Γ'), τότε οἱ εὐθεῖες ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο.

Αὐτό συμβαίνει, γιατί οἱ ΑΑ' καί ΒΒ' ὁρίζουν ἕνα σημεῖο S, (σέ πεπερασμένη ἤ ἄπειρη ἀπόσταση). Ἡ εὐθεία SΓ τέμνει τήν (ε') σ' ἕνα σημεῖο Γ'', πού συμπίπτει μέ τό Γ', γιατί ἀπ' τή δέσμη (SO, SA, SB, SΓ), πού τέμνεται ἀπό τήν (ε'), παίρνουμε $(O, A, B, \Gamma) = (O, A', B', \Gamma'')$. Ἔχουμε καί $(O, A, B, \Gamma) = (O, A', B', \Gamma')$ ἀπ' τήν ὑπόθεση, ἄρα $(O, A', B', \Gamma'') = (O, A', B', \Gamma') \Rightarrow \Gamma' \equiv \Gamma''$.

Παρατήρηση. Τό παραπάνω 2ο πόρισμα συμπληρώνεται ὡς ἑξῆς: «Ἄν $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (B_1, B_2, B_3, B_4)$, τότε, ἄν $A_2 \equiv B_2$, οἱ εὐθεῖες A_1B_1, A_3B_3, A_4B_4 συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο. Ἄν $A_3 \equiv B_3$, τότε οἱ A_1B_1, A_2B_2, A_4B_4 συντρέχουν. Ὁμοίως, ἄν $A_4 \equiv B_4$, οἱ A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 συντρέχουν». Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἐντελῶς ὅμοια μέ αὐτήν, πού δόθηκε στό 2ο πόρισμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

505. Δύο ἄξονες ἔχουν κοινή ἀρχή Ο. Πάνω στόν ἕναν παίρνουμε τέσσερα τυχαῖα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καί στόν ἄλλο ἀντίστοιχα σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' τέτοια, ὥστε $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB'} = \overline{O\Gamma}\cdot\overline{O\Gamma'} = \overline{O\Delta}\cdot\overline{O\Delta'}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι $(A, B, \Gamma, \Delta) = (A', B', \Gamma', \Delta')$.

506. Πάνω σ' ἕναν ἄξονα θεωροῦμε ἕνα μεταβλητό σημεῖο Μ(x) καί πάνω σέ ἄλλον ἄξονα τό ἀντίστοιχό του σημεῖο Μ'(x') τέτοιο, ὥστε μεταξύ τῶν τετμημένων x, x' νά ἰσχύει ἡ σχέση:

$$xx' + \alpha x + \beta x' + \gamma^2 = 0$$

ὅπου α, β, γ σταθερές. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν M_1, M_2, M_3, M_4 εἶναι τέσσερις θέσεις τοῦ Μ καί M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 εἶναι οἱ ἀντίστοιχες θέσεις τοῦ Μ', τότε $(M_1, M_2, M_3, M_4) = (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4)$.

507. Μιά δέσμη ἀπό τέσσερις εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4), πού διέρχονται ἀπό τό Ο, τέμνεται ἀπό μιά εὐθεία στά Α, Β, Γ, Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$((\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)) = \frac{\eta\mu(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OA})}{\eta\mu(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})} : \frac{\eta\mu(\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OA})}{\eta\mu(\overrightarrow{O\Delta}, \overrightarrow{OB})}$$

508. i) Πάνω στήν Οx βρίσκονται τά σημεῖα Α καί A_1 καί στήν Οy τά Β καί B_1.

Θεωροῦμε τά παραλληλόγραμμα ΒΟΑΓ καί $B_1OA_1\Gamma_1$. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες AB_1, A_1B, $\Gamma\Gamma_1$ διέρχονται ἀπ' τό ἴδιο σημεῖο. ii) Μέ βάση τό προηγούμενο (ἤ καί μέ ἄλλο τρόπο) δεῖξτε ὅτι, ἄν ΑΒΓΔ εἶναι ὁποιοδήποτε τετράπλευρο, Η τό κοινό σημεῖο τῶν εὐθειῶν ΑΒ καί ΓΔ καί Θ τό κοινό σημεῖο τῶν ΒΓ, ΑΔ, τότε τά μέσα τῶν ΑΓ, ΒΔ, ΗΘ βρίσκονται σέ εὐθεία. (**Ὑποδ.** γιά τό i). Ἔστω ὅτι ἡ $\Gamma\Gamma_1$ τέμνει τήν εὐθεία Ox στό N καί τήν Oy στό M. Τότε ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ εὐθεῖες AB_1, A_1B καί NM συντρέχουν σέ ἕνα σημεῖο καί γι' αὐτό ἀρκεῖ: $(O, N, A, A_1) = (O, M, B_1, B)$. Οἱ δύο διπλοί λόγοι ὑπολογίζονται ἀπό ὅμοια τρίγωνα).

509. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ: ἡ εὐθεία, πού συνδέει τίς ἐπαφές Ε,Ε΄ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μέ τίς πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ἡ εὐθεία, πού συνδέει τά σημεῖα Δ,Δ΄, στά ὁποῖα οἱ διχοτόμοι τῶν $\widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{B}$ τέμνουν τίς ΑΒ, ΑΓ καί ἡ εὐθεία, πού περνάει ἀπό τά ἴχνη Η καί Η΄ τῶν ὑψῶν ΓΗ, ΒΗ΄, συντρέχουν σέ ἕνα σημεῖο. (**Ὑποδ.** Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ διπλοί λόγοι (Η, Ε, Α, Δ) καί (Η΄, Ε΄, Α, Δ΄) εἶναι ἴσοι ἤ ὅτι τό πηλίκο τους εἶναι 1. Νά χρησιμοποιηθοῦν ὅμοια τρίγωνα).

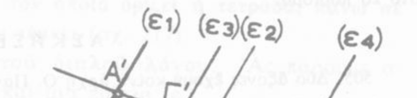
ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

222. α΄) **Ὁρισμός.—Ἁρμονική δέσμη λέγεται ἕνα σύνολο ἀπό τέσσερις εὐθεῖες, πού συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο ἤ εἶναι παράλληλες καί οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀντιστοίχως ἀπό τά τέσσερα σημεῖα μιᾶς ἁρμονικῆς διαιρέσεως.**

Οἱ εὐθεῖες λέγονται καί *ἀκτίνες τῆς δέσμης.*

β΄) Θεμελιώδης ἰδιότητα: Ἄν τέσσερις εὐθεῖες ἀποτελοῦν ἁρμονική δέσμη, τότε τά τέσσερα σημεῖα τῆς τομῆς τους ἀπό μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου ἀποτελοῦν ἁρμονική τετράδα.

Ἀπόδειξη: Ἔστω ἕνα σύνολο τεσσάρων εὐθειῶν (ε_1),(ε_2), (ε_3), (ε_4), πού συντρέχουν στό Ο καί περνοῦν ἀντιστοίχως ἀπό τά τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μιᾶς ἁρμονικῆς διαιρέσεως.



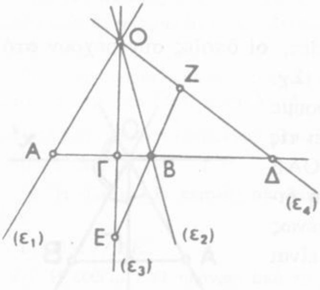
Σχ. 218

Ὁ διπλός λόγος (Α,Β,Γ,Δ) εἶναι ἴσος μέ -1.

Ἔστω (η) μιά εὐθεία (πού δέν περνᾶ ἀπό τό Ο), ἡ ὁποία τέμνει στά Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄ τίς ἀκτίνες (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4) τῆς δέσμης. Τότε σύμφωνα μέ τό (Θ) τῆς § 221 α΄ οἱ διπλοί λόγοι (Α,Β,Γ, Δ) καί (Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄) εἶναι ἴσοι. Ἐπειδή $(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$, ἕπεται καί $(A', B', \Gamma', \Delta') = -1$, δηλαδή ἡ τετράδα (Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄) εἶναι ἁρμονική τετράδα.

Ἄν πάλι οἱ τέσσερις ἀκτίνες τῆς δέσμης εἶναι παράλληλες καί ἡ τετράδα Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἁρμονική (σχ. 218), τότε καί ἡ Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄ εἶναι ἐπίσης ἁρμονική, ὅπως βγαίνει ἀμέσως μέ ἐφαρμογή τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ.

γ') Χαρακτηριστική ἰδιότητα: Μιά ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά ἀποτελοῦν ἁρμονική δέσμη τέσσερις εὐθεῖες, πού συντρέχουν στό ἴδιο σημεῖο, εἶναι ἡ παράλληλη, πρός μιά ἀπ' τίς εὐθεῖες αὐτές, νά τέμνει τίς ἄλλες τρεῖς σέ τρία σημεῖα, ἀπ' τά ὁποῖα τό ἕνα εἶναι τό μέσο τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 219

Ἄς θεωρήσουμε τέσσερις εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4), πού συντρέχουν στό O καί περνοῦν ἀπό τά τέσσερα σημεῖα A, B, Γ, Δ μιᾶς ἁρμονικῆς διαιρέσεως. Τότε θά ἔχουμε:

$$(1) \qquad \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

Ἡ παράλληλη πρός τήν (ε_1), πού περνάει ἀπό τό B, τέμνει τίς (ε_3) καί (ε_4) στά E καί Z καί δημιουργεῖ δυό ζεύγη ὅμοιων τριγώνων. Τρίγωνο ΓΑΟ μέ τρίγωνο ΓΒΕ καί τρίγωνο ΔΟΑ μέ τρίγωνο ΔΖΒ, ἀπό τά ὁποῖα ἔχουμε:

$$(2) \qquad \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{OA}{EB} \text{ καί } \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{OA}{ZB}$$

Οἱ ἰσότητες (1) καί (2) συνεπάγονται:

$$\frac{OA}{EB} = \frac{OA}{ZB} \Rightarrow EB = ZB \Longleftrightarrow \text{τό B εἶναι μέσο τοῦ EZ.}$$

• **Ἀντιστρόφως:** Ἄν EB = ZB, οἱ ἰσότητες (2) δίνουν: $\dfrac{\Gamma A}{\Gamma B} = \dfrac{\Delta A}{\Delta B}$, ἄρα ἡ τετράδα (A, B, Γ, Δ) εἶναι ἁρμονική καί ἑπομένως ἡ δέσμη τῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4) εἶναι (ἀπό ὁρισμό) ἁρμονική.

δ') Συζυγεῖς ἁρμονικές ἀκτίνες. Στό σχ. 219 οἱ δυό εὐθεῖες (ε_3) καί (ε_4), πού περνοῦν ἀπό τά συζυγή ἁρμονικά Γ καί Δ, λέγονται **συζυγεῖς ἁρμονικές** τῶν (ε_1) καί (ε_2), πού περνοῦν ἀπό τά A καί B καί ἀντιστρόφως. Ἀφοῦ ἡ δέσμη (ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4) εἶναι ἁρμονική, ὁ διπλός λόγος τῶν τεσσάρων ἀκτίνων της εἶναι ἴσος μέ -1 (βλ. § 221, β'). Γι' αὐτό τήν ἁρμονική δέσμη παριστάνουμε γράφοντας:

$$(3) \qquad ((\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\varepsilon_4)) = -1 \text{ ἤ}$$

$$(4) \qquad (OA, OB, O\Gamma, O\Delta) = -1 \text{ (σχ. 219) ἤ}$$

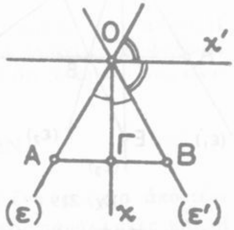
$$(5) \qquad O(A, B, \Gamma, \Delta) = -1$$

ε') Παρατήρηση. Στήν ἁρμονική δέσμη ἕνα τμῆμα, πού περιέχεται μεταξύ δύο συζυγῶν ἀκτίνων καί εἶναι παράλληλο πρός μιά τρίτη ἀκτίνα (ε) τῆς δέσμης, διχοτομεῖται ἀπό τήν ἀκτίνα, πού εἶναι συζυγής τῆς (ε). Αὐτό φαίνεται ἀπ' τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου γ').

223. Ἀξιοσημείωτη περίπτωση ἁρμονικῆς δέσμης.

(Θ) —Δυό εὐθεῖες, πού συντρέχουν καί οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τίς ὁποῖες σχηματίζουν, ἀποτελοῦν ἁρμονική δέσμη. Ἀντιστρόφως, ἄν σέ μιά ἁρμονική δέσμη εὐθειῶν, δυό συζυγεῖς ἀκτίνες εἶναι κάθετες μεταξύ τους, τότε αὐτές εἶναι καί διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τίς ὁποῖες σχηματίζουν οἱ δυό ἄλλες ἀκτίνες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω (ε) καί (ε΄) δυό εὐθεῖες, οἱ ὁποῖες συντρέχουν στό O καί Ox,Ox΄ οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τους. (Σχ. 220). Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Γ τῆς Ox φέρουμε μιά παράλληλη πρός τήν Ox΄, πού τέμνει τίς (ε) καί (ε΄) στά A καί B, τότε τό τρίγωνο OAB εἶναι ἰσοσκελές, γιατί ἡ AB εἶναι ⊥ στή διχοτόμο Ox. Συνεπῶς AΓ = ΓB. Ἑπομένως (§ 222, γ΄) ἡ δέσμη {(ε), Ox, (ε΄), Ox΄} εἶναι ἁρμονική.



Σχ. 220

Ἀντιστρόφως: Ἄς θεωρήσουμε τήν ἁρμονική δέσμη {(ε), Ox, (ε΄), Ox΄} (σχ. 220), στήν ὁποία δυό συζυγεῖς ἀκτίνες (βλ. § 222, δ΄) Ox, Ox΄ εἶναι κάθετες μεταξύ τους. Μιά παράλληλη πρός τήν ἀκτίνα Ox΄ τέμνει τότε τίς τρεῖς ἄλλες: (ε), Ox, (ε΄) στά A, Γ, B καί εἶναι AΓ=ΓB, ἀφοῦ ἡ δέσμη εἶναι ἁρμονική (§ 222, γ΄). Ἀλλά τότε ἡ OΓ στό τρίγωνο OAB εἶναι καί διάμεσος καί ὕψος, ἄρα εἶναι καί διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου OAB. Ἡ ἀκτίνα Ox΄, πού εἶναι κάθετη σ᾽ αὐτήν εἶναι ἡ ἄλλη διχοτόμος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

510. Ἔχουμε τρεῖς ἀκτίνες (α), (β), (γ) μιᾶς δέσμης. Νά κατασκευάσετε τή συζυγή ἁρμονική τῆς (γ) ὡς πρός τίς (α) καί (β).

511. i) Ἄν δυό ἁρμονικές δέσμες ((ε_1), (ε_2), (ε_3), (ε_4)) καί ((η_1), (η_2), (η_3), (η_4)) ἔχουν μιά ὁμώνυμη ἀκτίνα κοινή π.χ. $(\varepsilon_1) \equiv (\eta_1)$, τότε οἱ τομές: τῆς (η_2) μέ (ε_2), τῆς (η_3) μέ (ε_3) καί τῆς (η_4) μέ (ε_4) βρίσκονται σέ εὐθεία.

ii) Ἄν οἱ τρεῖς παραπάνω τομές βρίσκονται σέ εὐθεία, τότε καί ἡ τομή τῆς (η_1) μέ (ε_1) βρίσκεται στήν ἴδια εὐθεία, ἐφόσον οἱ (η_1) καί (ε_1) δέν συμπίπτουν.

Σημείωση. Στίς παραπάνω δέσμες οἱ (ε_1) καί (η_1) (πρῶτες), ἡ (ε_2) καί (η_2) (δεύτερες), ἡ (ε_3) καί (η_3) (τρίτες) καί τέλος (ε_4) καί (η_4) λέγονται ὁμώνυμες ἀκτίνες.

512. Ἄν δύο ἁρμονικές δέσμες ἔχουν τρεῖς ὁμώνυμες ἀκτίνες ἀντιστοίχως παράλληλες, θά ἔχουν καί τίς τέταρτες ἀκτίνες παράλληλες. Ἄν ἔχουν τρεῖς ὁμώνυμες ἀκτίνες ἀντιστοίχως κάθετες, θά ἔχουν καί τίς ὑπόλοιπες δύο ἀκτίνες κάθετες.

513. Σ᾽ ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ οἱ διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ καί οἱ εὐθεῖες, πού διέρχονται ἀπό τό κέντρο O καί εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές, ἀποτελοῦν ἁρμονική τετράδα.

514. Φέρνουμε τή διάμεσο AM ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί πάνω στήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{BA}$

παίρνουμε σημεῖα Ι καί Κ τέτοια, ὥστε $BI = 2 \cdot IA$ καί $BK = 2 \cdot BA$. Τά τμήματα ΑΜ καί ΓΙ τέμνονται στό Ο. Νά ἀποδείξετε: i) Ὅτι ἡ δέσμη (ΓΑ, ΓΒ, ΓΙ, ΓΚ) εἶναι ἁρμονική. ii) Ὅτι τό Ο εἶναι μέσο τοῦ ΑΜ καί $IO = I\Gamma/4$.

515. Ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί σημεῖο Ρ μέσα στό ἐπίπεδό του. Νά κατασκευάσετε μιά εὐθεία, πού νά διέρχεται ἀπό τό Ρ καί νά τέμνει τούς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ στ' ἀντίστοιχα σημεῖα Γ΄, Α΄, Β΄ ἔτσι, ὥστε $(A', B', \Gamma', P) = -1$.

516. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων, πού ἔχουν λόγο ἀποστάσεων $\mu : \nu$ ἀπό δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), εἶναι ζεῦγος εὐθειῶν, πού εἶναι συζυγεῖς ἁρμονικές πρός τίς (ε_1) καί (ε_2).

517. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, τό ὕψος του ΑΑ΄, τήν ἐσωτερική διχοτόμο ΑΔ, τό ἔγκεντρό του Ο, τό μέσο Μ τῆς ΒΓ καί τά σημεῖα ἐπαφῆς Ε καί Ε΄ τοῦ ἐγγεγραμμένου καί τοῦ παρεγγεγραμμένου μέσα στήν $\widehat{A}$ μέ τήν πλευρά ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) $(A', \Delta, E, E') = -1$.

ii) Ἡ εὐθεία ΑΕ΄ περνάει ἀπό τό ἀντιδιαμετρικό τοῦ Ε ὡς πρός τόν ἐγγεγραμμένο κύκλο.

iii) ΟΜ // ΑΕ΄.

iv) Ἡ εὐθεία Ε΄Ο περνάει ἀπό τό μέσο τοῦ ὕψους ΑΑ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XI

ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΕΣ

ΠΟΛΙΚΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΕΣ

224. Σημεῖα συζυγή ὡς πρός δύο εὐθεῖες

Ἄς πάρουμε ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), τό ὁποῖο δέ βρίσκεται πάνω σέ καμιά ἀπ' αὐτές. Ἄς φέρουμε ἀπό τό Μ μιά εὐθεία, πού τέμνει τίς (ε_1) καί (ε_2) στά A_1 καί A_2, ἀντιστοίχως καί ἔστω Ν τό συζυγές ἁρμονικό τοῦ Μ ὡς πρός τά A_1, A_2, δηλ.

$$(A_1, A_2, M, N) = -1$$

Λέμε τότε ὅτι τό Ν εἶναι συζυγές τοῦ Μ ὡς πρός τίς εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2).

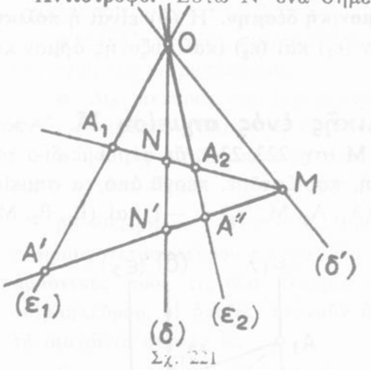
Ἄν οἱ (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται, ἔστω στό Ο (σχ. 221), τότε συμβατικά μποροῦμε νά δεχτοῦμε καί τό Ο ὡς συζυγές τοῦ Μ.

225. Πολική ἑνός σημείου ὡς πρός δύο τεμνόμενες εὐθεῖες. Ἄς ἀναζητήσουμε τό γ.τ. τῶν συζυγῶν ἑνός σταθεροῦ σημείου Μ, ὡς πρός δύο εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), πού τέμνονται στό Ο.

Ἔστω Ν ἕνα σημεῖο, πού εἶναι συζυγές τοῦ Μ ὡς πρός τίς (ε_1) καί (ε_2) (σχ. 221). Τότε θά εἶναι $(A_1, A_2, N, M) = -1$ καί, συνεπῶς, ἄν φέρουμε τίς εὐθεῖες ΟΜ, ΟΝ, ἡ δέσμη (OA_1, OA_2, ON, OM) εἶναι ἁρμονική.

Ἐπειδή οἱ τρεῖς ἀκτίνες της εἶναι σταθερές, ἡ τέταρτη, δηλ. ευθ ΟΝ ≡ ≡ (δ), εἶναι καί αὐτή σταθερή, γιατί εἶναι συζυγής ἁρμονική τῆς εὐθείας ΟΜ ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2).

Ἀντίστροφο. Ἔστω N′ ἕνα σημεῖο τῆς (δ) καί ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἡ εὐθεία MN′ τέμνει τίς (ε_1) καί (ε_2) στά A′ καί A″. Τότε, ἐπειδή ἡ δέσμη τῶν εὐθειῶν εἶναι ἁρμονική, θά ἔχουμε $(A', A'', N', M) = -1 \Rightarrow$ τό N′ εἶναι συζυγές τοῦ M ὡς πρός τίς (ε_1) καί (ε_2). Ἀλλά καί ἄν ἡ εὐθεία MN′ εἶναι παρ/λη πρός μία ἀπό τίς (ε_1) ἤ (ε_2), π.χ. πρός τήν (ε_1), τότε τό A″ θά εἶναι τό μέσο τοῦ N′M (§ 222, γ′), ἐνῶ τό A′ θά εἶναι «τό εἰς ἄπειρο» σημεῖο τῆς (ε_1), ἔστω τό A_∞ καί ἡ τετράδα (A_∞, A'', N', M) εἶναι πάλι ἁρμονική.

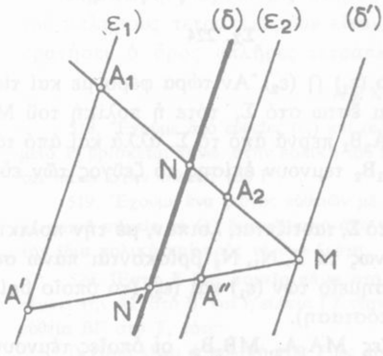


Σχ. 221

Ὁ τόπος τῶν συζυγῶν N εἶναι ἡ εὐθεία (δ), πού εἶναι συζυγής τῆς OM ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2). Ἡ (δ) λέγεται **«πολική τοῦ M ὡς πρός τίς δυό τεμνόμενες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2)».**

226. Πολική ἑνός σημείου ὡς πρός δύο παράλληλες εὐθεῖες.

(Σχ. 222). Ἄν φέρουμε ἀπό τό N, πού εἶναι συζυγές τοῦ M, μία παρ/λη πρός τίς (ε_1) καί (ε_2), ἔστω τή (δ) καί ἀπό τό M μιά παρ/λη πρός τίς (ε_1) καί (ε_2), ἔστω τή (δ′), τότε ἡ δέσμη τῶν τεσσάρων παραλλήλων εἶναι ἁρμονική· καί ἀφοῦ οἱ τρεῖς ἀκτίνες της εἶναι σταθερές καί ἡ τέταρτη, (δ), θά εἶναι ἐπίσης ὁρισμένη.



Σχ. 222

Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο N′ τῆς (δ) εἶναι συζυγές τοῦ M, γιατί, ἄν φέρουμε τήν εὐθεία MN′, αὐτή θά τέμνει τίς (ε_1) καί (ε_2) στά A′, A″ καί θά εἶναι $(A', A'', N', M) = -1$, ἀφοῦ ἡ δέσμη εἶναι ἁρμονική.

Ὁ τόπος τῶν N εἶναι ἡ εὐθεία (δ), ἡ ὁποία λέγεται **«πολική τοῦ M ὡς πρός τίς παρ/λες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2)».**

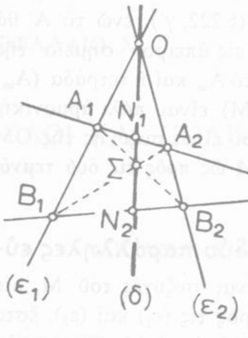
Παρατήρηση. Ἄν τό M μετατοπίζεται πάνω στή (δ′), ἡ πολική του (δ) παραμένει ἀμετάβλητη.

227. Ἀπό τίς §§ 225, 226 προκύπτει τό θεώρημα:

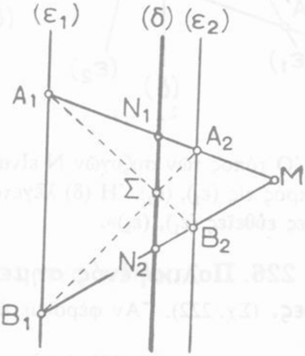
«Ὁ γ.τ. τῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν ἑνός σταθεροῦ σημείου M ὡς πρός δύο δεδομένες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2), οἱ ὁποῖες τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο, πού βρί-

σκεται σέ «πεπερασμένη» ἤ ἄπειρη ἀπόσταση, εἶναι μιά εὐθεία (δ), πού σχηματίζει μέ τίς (ε_1), (ε_2) καί ΟΜ ἁρμονική δέσμη». Ἡ (δ) εἶναι ἡ πολική τοῦ Μ ὡς πρός τό ζεῦγος τῶν εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) (καί συζυγής ἁρμονική τῆς ΟΜ ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2)).

228. Κατασκευή τῆς πολικῆς ἑνός σημείου Μ. Ἀφοῦ δοθοῦν οἱ (ε_1) καί (ε_2) καί τό σημεῖο Μ (σχ. 223, 224), ἄς φέρουμε δύο τέμνουσες MA_1A_2 καί MB_1B_2. Ἡ πολική, πού ζητᾶμε, περνᾶ ἀπό τά σημεῖα N_1 καί N_2, πού εἶναι τέτοια, ὥστε: $(A_1, A_2, M, N_1) = -1$ καί $(B_1, B_2, M,$



Σχ. 223



Σχ. 224

$N_2) = -1$, καθώς καί ἀπό τό σημεῖο $(\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)$. Ἄν τώρα φέρουμε καί τίς εὐθεῖες A_1B_2 καί A_2B_1, πού τέμνονται ἔστω στό Σ, τότε ἡ πολική τοῦ Μ ὡς πρός αὐτές τίς δυό εὐθεῖες A_1B_2, A_2B_1 περνᾶ ἀπό τό Σ, ἀλλά καί ἀπό τά N_1 καί N_2, γιατί οἱ MA_1A_2 καί MB_1B_2 τέμνουν ἐπίσης τό ζεῦγος τῶν εὐθειῶν A_1B_2, A_2B_1.

Ἡ πολική αὐτή, πού περνᾶ ἀπό τό Σ, ταυτίζεται, λοιπόν, μέ τήν πολική τοῦ Μ ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2). Ἑπομένως τά Σ, N_1, N_2 βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό κοινό σημεῖο τῶν (ε_1) καί (ε_2) (τό ὁποῖο βρίσκεται σέ πεπερασμένη ἤ ἄπειρη ἀπόσταση).

Κατασκευή. Φέρνουμε δύο εὐθεῖες MA_1A_2, MB_1B_2, οἱ ὁποῖες τέμνουν τό ζεῦγος (ε_1), (ε_2) καί συνδέουμε τό σημεῖο τομῆς Σ τῶν A_1B_2 καί A_2B_1 μέ τό κοινό σημεῖο Ο τῶν (ε_1), (ε_2).

Ἡ εὐθεία ΟΣ εἶναι ἡ πολική τοῦ Μ ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2) καί συνεπῶς ἡ ΟΣ εἶναι **συζυγής ἁρμονική** τῆς ΟΜ ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2).

229. Θεμελιῶδες θεώρημα τῶν ἁρμονικῶν τετράδων. α΄) **Ὁρισμοί. Πλῆρες τετράπλευρο λέγεται τό ἐπίπεδο σχῆμα, πού ἀποτελεῖται ἀπό τέσσερα σημεῖα — τά ὁποῖα ἀνά τρία δέ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία — καί ἀπό ἕξι εὐθεῖες, πού συνδέουν τά σημεῖα αὐτά ἀνά δύο.**

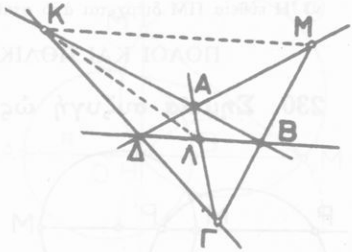
● Τά παραπάνω τέσσερα σημεῖα λέγονται **κορυφές** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

● Οἱ ἔξι εὐθεῖες, πού συνδέουν ἀνά δύο τίς κορυφές, λέγονται **πλευρές** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου.

● Δύο πλευρές, πού δέν περνοῦν ἀπό τήν ἴδια κορυφή, λέγονται **ἀπέναντι πλευρές.** (Ὑπάρχουν, λοιπόν, τρία ζεύγη ἀπέναντι πλευρῶν).

● Ἡ τομή δύο ἀπέναντι πλευρῶν λέγεται **διαγώνιο σημεῖο** τοῦ πλήρους τετραπλεύρου. Ἄρα ὑπάρχουν τρία διαγώνια σημεῖα.

β΄) Θεώρημα.— Οἱ εὐθεῖες, πού ἑνώνουν ἕνα διαγώνιο σημεῖο Κ τοῦ πλήρους τετραπλεύρου μέ τά δύο ἄλλα διαγώνια σημεῖα, εἶναι συζυγεῖς ἁρμονικές πρός τίς δύο πλευρές τοῦ τετραπλεύρου, οἱ ὁποῖες περνοῦν ἀπό τό διαγώνιο σημεῖο Κ.



Σχ. 225

Στό σχ. 225, τά Κ,Λ,Μ εἶναι τά διαγώνια σημεῖα τοῦ πλήρους τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Οἱ ΚΛ καί ΚΜ εἶναι συζυγεῖς ἁρμονικές τῶν ΚΓ,ΚΒ, γιατί ἡ ΚΛ εἶναι ἡ πολική τοῦ Μ ὡς πρός τίς εὐθεῖες ΚΓ, ΚΒ, σύμφωνα μέ τήν κατασκευή τῆς πολικῆς (§ 223).

Σημείωση. Ὀρθότερη ὀνομασία τοῦ «πλήρους τετραπλεύρου» εἶναι *«πλῆρες τετρακόρυφο»*. Ἔχει ὅμως ἐπικρατήσει ὁ ὅρος «πλῆρες τετράπλευρο», ἴσως γιατί εἶναι συντομότερος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

518. Ἔχουμε δυό εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) καί σημεῖο Ρ. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἕνα σημεῖο Ρ΄ βρίσκεται πάνω στήν πολική τοῦ Ρ ὡς πρός τίς (ε_1), (ε_2), τότε καί τό Ρ βρίσκεται πάνω στήν πολική τοῦ Ρ΄.

519. Ἔχουμε ἕνα ζεῦγος εὐθειῶν μέ κοινό σημεῖο τό Ο καί ἄλλο ζεῦγος εὐθειῶν μέ κοινό σημεῖο τό Ο΄, διαφορετικό ἀπό τό Ο. Νά κατασκευάσετε ἕνα σημεῖο, πού ἔχει τήν ἴδια πολική καί πρός τά δύο ζεύγη.

520. Ἔστω Σ ἕνα σημεῖο πάνω στό ὕψος ΑΑ΄ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἡ εὐθεία ΒΣ τέμνει τήν ΑΓ στό Β΄ καί ἡ εὐθεία ΓΣ τέμνει τήν ΑΒ στό Γ΄. Ἄν ἡ εὐθεία Β΄Γ΄ τέμνει τήν εὐθεία ΒΓ στό Τ, τότε:

i) Ποιά εἶναι ἡ πολική τοῦ Τ ὡς πρός τίς εὐθεῖες ΑΒ, ΑΓ;

ii) Ἀποδεῖξτε ὅτι ἡ ΑΑ΄ εἶναι μιά διχοτόμος τῆς $\widehat{Γ΄Α΄Β΄}$.

521. Ἄν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι ὕψη τριγώνου ΑΒΓ καί ἄν ἡ ΓΓ΄ τέμνει τήν Α΄Β΄ στό Ε, ἡ ΒΒ΄ τέμνει τήν Α΄Γ΄ στό Δ καί τέλος ἄν ἡ εὐθεία Β΄Γ΄ τέμνει τήν εὐθεία ΒΓ στό $Α_1$, νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) Ἡ εὐθεία ΔΕ διέρχεται ἀπό τό $Α_1$.

ii) Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ ΑΒΓ, τότε ἡ $ΗΑ_1$ εἶναι κάθετη στή διάμεσο ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

522. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα παραλληλόγραμμο μέ κέντρο Ο. Ἀπό τό κ. β. τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεία, πού τέμνει τίς εὐθεῖες ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στά ἀντίστοιχα σημεῖα α,β, γ.

16

Φέρνουμε καί τήν εὐθεία αΔ, ἡ ὁποία τέμνει τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ στά β΄ καί γ΄. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες βγ΄ καί γβ΄ τέμνονται πάνω στή ΒΓ.

523. Τρία σημεῖα Α, Β, Γ βρίσκονται πάνω σέ μιά εὐθεία ἔτσι, ὥστε ΑΒ = ΒΓ. Γράφουμε περιφέρεια μέ διάμετρο ΑΒ καί φέρνουμε τήν εὐθεία (ε) κάθετη στήν ΑΓ στό σημεῖο Γ. Ἕνα ἄλλο σημεῖο Η διατρέχει τήν περιφέρεια, πού γράψαμε. Οἱ εὐθεῖες ΑΗ καί ΒΗ τέμνουν τήν (ε) στά Ρ καί Κ. Οἱ κάθετες Ρx καί Κy στήν (ε) τέμνουν ἡ πρώτη τήν εὐθεία ΚΒ στό Μ καί ἡ δεύτερη τήν εὐθεία ΡΒ στό Ν. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

i) (Μ, Β, Η, Κ) = — 1.

ii) Τά Μ, Α, Ν εἶναι συνευθειακά.

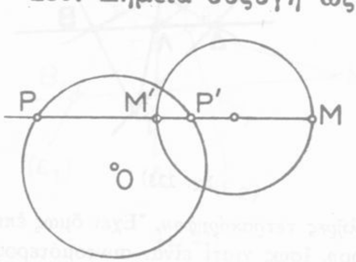
iii) Οἱ ΚΑ καί ΡΝ τέμνονται σέ σημεῖο Π τῆς παραπάνω περιφέρειας.

iv) Ἡ εὐθεία ΠΗ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο.

v) Ἡ εὐθεία ΠΜ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο.

ΠΟΛΟΙ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΕΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟ

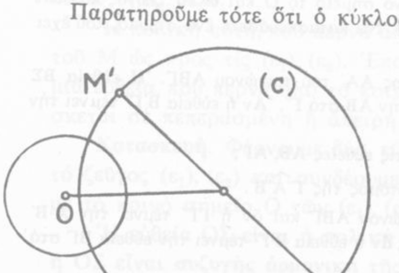
230. Σημεῖα συζυγή ὡς πρός κύκλο. Ἄς θεωρήσουμε ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο καί ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου. Ἄς θεωρήσουμε ἀκόμη μιά εὐθεία, πού νά περνᾶ ἀπό τό Μ καί νά τέμνει τήν περιφέρεια σέ δύο σημεῖα Ρ καί Ρ΄. Τό συζυγές ἁρμονικό, Μ΄, τοῦ Μ ὡς πρός τά Ρ καί Ρ΄ λέγεται *συζυγές τοῦ Μ ὡς πρός τόν κύκλο* (σχ. 226). Ἀπ' αὐτό προκύπτει ἕνας πρῶτος ὁρισμός:



Σχ. 226

Εἰδικός ὁρισμός. Δύο σημεῖα Μ καί Μ΄ λέγονται συζυγή ὡς πρός ἕνα δεδομένο κύκλο (Ο), ἄν ἡ εὐθεία ΜΜ΄ τέμνει τήν περιφέρεια σέ δύο σημεῖα Ρ καί Ρ΄ τέτοια, ὥστε ἡ τετράδα (Μ, Μ΄, Ρ, Ρ΄) νά εἶναι ἁρμονική.

Παρατηροῦμε τότε ὅτι ὁ κύκλος μέ διάμετρο ΜΜ΄ τέμνει ὀρθογώνια τόν κύκλο (Ο). (Γνωστό ἀπ' τή θεωρία τῶν κύκλων, πού τέμνονται ὀρθογωνίως).



Σχ. 227

Ἀντιστρόφως, ἄν μιά περιφέρεια μέ διάμετρο ΜΜ΄ τέμνει ὀρθογώνια τόν κύκλο (Ο), διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

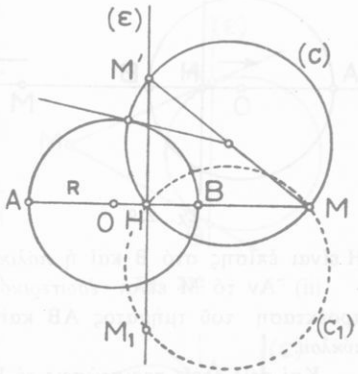
i) Ἄν ἡ εὐθεία ΜΜ΄ τέμνει τήν περιφέρεια (Ο) σέ δυό σημεῖα Ρ, Ρ΄ (σχ. 226), τότε εἶναι γνωστό ὅτι τά Μ καί Μ΄ εἶναι συζυγή ἁρμονικά τῶν Ρ, Ρ΄ καί συνεπῶς, σύμφωνα μέ τόν παραπάνω ὁρισμό, τά Μ καί Μ΄ εἶναι συζυγή ὡς πρός τόν κύκλο (Ο).

ii) Ἂν ἡ εὐθεία ΜΜ′ **δέν τέμνει** τήν περιφέρεια (Ο) (σχ. 227), τότε συμφωνοῦμε νά λέμε ὅτι καί πάλι τά Μ καί Μ′ εἶναι συζυγή ὡς πρός τόν κύκλο (Ο). Ἀπ' αὐτό βγαίνει ὁ *δεύτερος* γενικότερος *ὁρισμός*.

Γενικός ὁρισμός. Δύο σημεῖα Μ καί Μ′ λέγονται συζυγή ὡς πρός κύκλο (Ο), ὅταν ὁ κύκλος μέ διάμετρο ΜΜ′ εἶναι ὀρθογώνιος πρός τόν (Ο).

231. Πολική ἑνός σημείου ὡς πρός κύκλο.

Ἔστω ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ἕνα σταθερό σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου. Ἂς ἀναζητήσουμε τό σύνολο τῶν συζυγῶν, Μ′, τοῦ Μ ὡς πρός τόν (Ο, R). Ἂς ὑποθέσουμε πρῶτα πρῶτα ὅτι ὑπάρχει ἕνα σημεῖο Μ′ τοῦ συνόλου, πού ζητᾶμε. Τότε, ἀφοῦ τά Μ καί Μ′ εἶναι συζυγή ὡς πρός τόν (Ο), ἡ περιφέρεια (c), μέ διάμετρο ΜΜ′, τέμνει ὀρθογώνια τήν περιφέρεια (Ο). Ἡ εὐθεία ΟΜ ξανακόβει τήν (c) στό Η καί τήν (Ο) στά Α καί Β. Τό Η, ἐπειδή εἶναι συζυγές ἁρμονικό τοῦ Μ ὡς πρός Α καί Β, εἶναι ἕνα σταθερό σημεῖο καί $M'\widehat{H}M = 1$ορθ. Συνεπῶς τό Μ′ βρίσκεται πάνω σέ μιά σταθερή εὐθεία (ε) κάθετη στήν ΟΜ, σ' ἕνα σημεῖο Η τέτοιο, ὥστε: $\overline{OM}\cdot\overline{OH} = R^2$.



Σχ. 228

Ἀντιστρόφως: Ἂς πάρουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο M_1 τῆς εὐθείας αὐτῆς (ε), ἡ ὁποία ὑπάρχει, ἐφ' ὅσον τό $M \not\equiv O$. Ἡ περιφέρεια (c_1) μέ διάμετρο MM_1 περνᾶ ἀπό τό Η, ἐπειδή ἡ $\widehat{M_1HM} = 1$ ορθ. Ἡ διαίρεση (Μ, Η, Α, Β) εἶναι ἁρμονική, ἀπ' τήν κατασκευή τοῦ Η. Ἑπομένως ἡ περιφέρεια (c_1) τέμνει ὀρθογώνια τήν (Ο) καί γι' αὐτό τό λόγο τό M_1 εἶναι συζυγές τοῦ Μ ὡς πρός τήν (Ο). Ἰσχύει λοιπόν τό:

(Θ) — Ἂν δοθεῖ ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ἕνα σημεῖο Μ (διαφορετικό ἀπό τό Ο), τό σύνολο τῶν συζυγῶν σημείων τοῦ Μ ὡς πρός τόν κύκλο εἶναι μία εὐθεία κάθετη στήν ΟΜ σ' ἕνα σημεῖο της Η τέτοιο, ὥστε:

$$\overline{OH}\cdot\overline{OM} = R^2$$

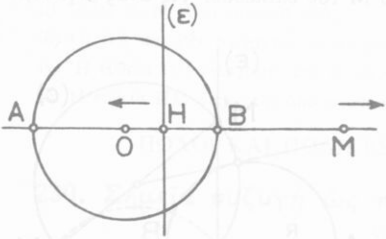
Ὁρισμός. Ἡ παραπάνω εὐθεία λέγεται **πολική τοῦ Μ ὡς πρός τόν κύκλο** (Ο, R).

232. Πόλος μιᾶς εὐθείας.

(Θ) — Κάθε εὐθεία, πού δέν περνᾶ ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου, μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς πολική ἑνός σημείου. Τό σημεῖο αὐτό εἶναι ὁ «πόλος» τῆς εὐθείας.

Πράγματι, ἔστω Η ἡ προβολή τοῦ κέντρου Ο τοῦ κύκλου (Ο, R) πάνω στή δεδομένη εὐθεία (ε) (σχ. 228). Τώρα, ἕνα σημεῖο Μ, γιά νά ἔχει πολική τήν (ε), πρέπει καί ἀρκεῖ (§ 231, (Θ)) νά βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία ΟΗ καί νά ἱκανοποιεῖ τή σχέση: $\overline{OM} \cdot \overline{OH} = R^2$. Ἡ σχέση αὐτή προσδιορίζει ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο Μ, ἀφοῦ τό Η δέ συμπίπτει μέ τό Ο.

233. Θέση τῆς πολικῆς. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τό Μ μετατοπίζεται πάνω στήν εὐθεία ΑΒ (σχ. 229). Τό σημεῖο Η εἶναι τό συζυγές ἁρμονικό τοῦ Μ ὡς πρός τά Α καί Β. Συνεπῶς:



Σχ. 229

i) Ἄν τό Μ εἶναι *ἐξωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου*, τό Η ἀνήκει στό τμῆμα ΑΒ καί *ἡ πολική τέμνει τήν περιφέρεια.*

ii) Ἄν τό Μ εἶναι πάνω στήν περιφέρεια, π.χ. στό Β, τότε καί τό Η εἶναι ἐπίσης στό Β καί ἡ *πολική ἐφάπτεται στόν κύκλο στό σημεῖο Β.*

iii) Ἄν τό Μ εἶναι *ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου*, τό Η εἶναι στήν προέκταση τοῦ τμήματος ΑΒ καί ἡ *πολική εἶναι ἐξωτερική εὐθεία τοῦ κύκλου.*

Καί στίς τρεῖς περιπτώσεις τά Η καί Μ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ κέντρου.

Ἄν τό Μ τείνει πρός τό Ο, τό Η ἀπομακρύνεται ἀπό τό Ο ἀπεριόριστα. Ἄν τό Μ ἀπομακρύνεται ἀπό τό Ο ἀπεριόριστα, τό Η τείνει πρός τό Ο καί ἡ πολική τείνει νά γίνει διάμετρος τοῦ κύκλου.

234. Θεμελιώδης ἰδιότητα: πολική ἀντιστοιχία. α΄) (Θ)– **Ἄν ἡ πολική ἑνός σημείου Μ ὡς πρός ἕνα κύκλο περνᾶ ἀπό τό σημεῖο Μ΄, τότε καί ἡ πολική τοῦ Μ΄ περνᾶ ἀπό τό Μ.**

Γιατί, ἄν ἡ πολική τοῦ Μ περνᾶ ἀπό τό Μ΄, τότε τό Μ΄ εἶναι συζυγές τοῦ Μ ὡς πρός τόν κύκλο. Ἑπομένως καί τό Μ εἶναι συζυγές τοῦ Μ΄ ὡς πρός κύκλο (§ 230). Ἄρα ἡ πολική τοῦ Μ΄ περνᾶ ἀπό τό Μ.

β΄) Συνέπειες : i) Ἄν ἕνα σημεῖο βρίσκεται πάνω σέ μιά εὐθεία (ε), τότε ἡ πολική του περνᾶ ἀπό τόν πόλο τῆς (ε).

ii) Ἄν μιά εὐθεία περνᾶ ἀπό ἕνα σημεῖο Α, ὁ πόλος της βρίσκεται πάνω στήν πολική τοῦ Α.

iii) Ἡ πολική ἑνός σημείου, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο, εἶναι ἡ εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, τίς ὁποῖες μποροῦμε νά φέρουμε ἀπ᾿ αὐτό τό σημεῖο στόν κύκλο.

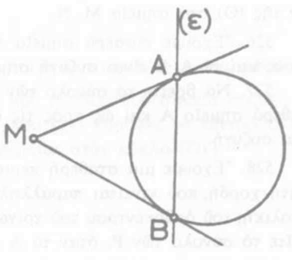
Γιατί, ἄν Α καί Β εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων στόν κύ-

κλο, τίς ὁποῖες φέρνουμε ἀπό τό Μ, ἡ πολική τοῦ Α εἶναι ἡ ἐφαπτομένη ΑΜ καί ἡ πολική τοῦ Β ἡ ἐφαπτομένη ΒΜ. Ἐπειδή τά Α καί Β βρίσκονται πάνω στήν εὐθεία ΑΒ, οἱ πολικές τους περνοῦν ἀπό τόν πόλο τῆς εὐθείας ΑΒ, δηλαδή ἡ τομή τῶν πολικῶν ΑΜ καί ΒΜ τῶν Α καί Β εἶναι ὁ πόλος τῆς εὐθείας ΑΒ.

γ΄) **Ὁρισμός**. Δύο εὐθεῖες λέγονται *συζυγεῖς ὡς πρός κύκλο*, ὅταν καθεμιά περνᾶ ἀπό τόν πόλο τῆς ἄλλης.

235. Κατασκευή τῆς πολικῆς. α΄) Ἄν τό σημεῖο Μ βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κύκλο (Ο), ἀρκεῖ νά ἑνώσουμε μέ μιά εὐθεία τά σημεῖα ἐπαφῆς Α καί Β τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου (Ο), πού ἄγονται ἀπό τό Μ (σχ. 230). Ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι ἡ πολική τοῦ Μ (§ 234, iii).

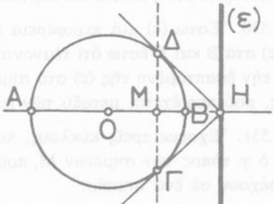
Ἄν τό Μ βρίσκεται πάνω στήν περιφέρεια (Ο), τότε ἡ ἐφαπτομένη στό Μ εἶναι ἡ πολική τοῦ Μ.



Σχ. 230

β΄) Ἄν τό σημεῖο Μ βρίσκεται στό ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (Ο), ἡ κάθετος στό Μ πάνω στήν ΟΜ τέμνει τήν περιφέρεια στά Γ καί Δ (σχ. 231). Οἱ ἐφαπτόμενες στά Γ καί Δ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Η, πού βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία ΟΜ. Ἡ εὐθεία ΓΔ εἶναι ἡ πολική τοῦ Η καί, ἐπειδή τό Μ βρίσκεται πάνω στή ΓΔ, πού εἶναι πολική τοῦ Η, ἡ πολική τοῦ Μ περνᾶ ἀπό τό Η.

Ἡ πολική, λοιπόν, τοῦ Μ εἶναι ἡ κάθετος στήν ΟΗ στό σημεῖο Η.

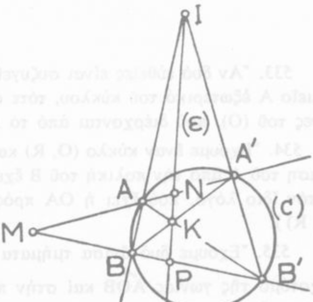


Σχ. 231

γ΄) **Γενική κατασκευή** (σχ. 232)· Φέρνουμε ἀπό τό Μ δύο τέμνουσες ΜΑΑ΄ καί ΜΒΒ΄.

Ἡ πολική (ε) τοῦ Μ περνᾶ ἀπό τά σημεῖα Ν καί Ρ, πού εἶναι τέτοια, ὥστε: (Μ, Ν, Α, Α΄) = −1 καί (Μ,Ρ,Β,Β΄) = −1.

Ἐπομένως ἡ (ε) εἶναι καί πολική τοῦ Μ ὡς πρός τίς εὐθεῖες ΑΒ καί Α΄Β΄ καί κατασκευάζεται εὔκολα μόνο μέ τό χάρακα: συνδέει τά σημεῖα Κ (τομή τῶν ΑΒ΄, Α΄Β) καί Ι (τομή τῶν ΑΒ, Α΄Β΄, § 228).



Σχ. 232

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

524. Ἔστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ ≠ ΑΓ, Δ,Ε, Ζ τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένος στό τρίγωνο μέ τίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καί Η τό σημεῖο τομῆς τῆς εὐθείας ΕΖ μέ τήν εὐθεία ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΑΔ εἶναι ἡ πολική

i) τοῦ Η ὡς πρός τόν ἐγγεγραμμένο κύκλο καί

ii) τοῦ Η ὡς πρός τίς εὐθεῖες ΑΒ, ΑΓ.

525. Ἔστω (Ο) μιά σταθερή περιφέρεια, Α ἕνα σημεῖο στό ἐξωτερικό της καί ΑΜΝ μιά μεταβλητή τέμνουσα τῆς (Ο). Νά βρεῖτε τόν τόπο τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς (Ο) στά σημεῖα Μ, Ν.

526. Ἔχουμε τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ,Δ. Νά βρεθοῦν οἱ κύκλοι, ὡς πρός τούς ὁποίους καί τά Α, Β εἶναι συζυγή σημεῖα καί τά Γ, Δ ἐπίσης.

527. Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, πού διέρχονται ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Α καί ὡς πρός τίς ὁποῖες δύο δεδομένα σταθερά σημεῖα Μ καί Μ΄ εἶναι συζυγή.

528. Ἔχουμε μιά σταθερή περιφέρεια καί ἕνα σημεῖο της Α. Θεωροῦμε μιά μεταβλητή χορδή, πού κινεῖται παράλληλα πρός δεδομένη διεύθυνση. i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ πολική, τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο Ρ. ii) Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν Ρ, ὅταν τό Α μετατοπίζεται πάνω στήν περιφέρεια.

529. Τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ περιφέρεια (Ο). Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς (Ο) καί οἱ εὐθεῖες ΜΒ καί ΜΓ τέμνουν τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ στά Δ καί Ε, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΔΕ περνάει ἀπό σταθερό σημεῖο, ὅταν τό Μ διατρέχει τήν (Ο).

530. Ἔστω (c) μιά περιφέρεια περιγεγραμμένη στό τρίγωνο ΑΒΓ. Οἱ ἐφαπτόμενες τῆς (c) στά Β καί Γ ἔστω ὅτι τέμνονται στό Δ. Ἀπό τό Δ φέρνουμε μιά εὐθεία παράλληλη πρός τήν ἐφαπτομένη τῆς (c) στό σημεῖο Α. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέρος τῆς παράλληλης αὐτῆς, πού περιέχεται μεταξύ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΓ, διχοτομεῖται ἀπό τό Δ.

531. Ἔχουμε τρεῖς κύκλους, πού τά κέντρα τους δέ βρίσκονται σέ εὐθεία. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, πού οἱ τρεῖς πολικές τους ὡς πρός τούς τρεῖς κύκλους συντρέχουν σέ ἕνα σημεῖο.

532. Ἄν Σ εἶναι τό κοινό σημεῖο τῶν δύο πολικῶν ἑνός σημείου Ρ ὡς πρός δύο δεδομένους κύκλους, τότε ὁ κύκλος μέ διάμετρο ΡΣ τέμνει ὀρθογωνίως τούς δύο δεδομένους κύκλους.

Β΄.

533. Ἄν δυό εὐθεῖες εἶναι συζυγεῖς ὡς πρός κύκλο (Ο) (§ 234, γ΄) καί τέμνονται σέ σημεῖο Α ἐξωτερικό τοῦ κύκλου, τότε σχηματίζουν ἁρμονική δέσμη μέ τίς δύο ἐφαπτόμενες τοῦ (Ο), πού διέρχονται ἀπό τό Α.

534. Ἔχουμε ἕναν κύκλο (Ο, R) καί δυό σημεῖα Α καί Β. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν πολική τοῦ Β ἔχει πρός τήν ἀπόσταση τοῦ Β ἀπό τήν πολική τοῦ Α τόν ἴδιο λόγο, πού ἔχει ἡ ΟΑ πρός τήν ΟΒ. (Οἱ πολικές ἀναφέρονται στόν κύκλο (Ο, R)).

535. Ἔχουμε δυό ἄνισα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, πού δέν εἶναι συνευθειακά. Πάνω στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{AOB}$ καί στήν προέκτασή της παίρνουμε δυό σημεῖα Μ καί Μ΄ τέτοια, ὥστε:

$$OM^2 = OM'^2 = OA \cdot OB$$

Νά ἀποδείξετε: i) Ὅτι τά σημεῖα Α, Β, Μ, Μ΄ βρίσκονται πάνω σέ περιφέρεια, ἔστω τή (γ), ii) Ὅτι οἱ εὐθεῖες ΜΜ΄ καί ΑΒ εἶναι συζυγεῖς πρός τή (γ).

536. Μιά μεταβλητή περιφέρεια διέρχεται ἀπό δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β. Ἔστω Γ ἕνα σταθερό σημεῖο τῆς χορδῆς ΑΒ καί Δ ἡ ἀλληλοτομή τῶν ἐφαπτομένων τῆς (γ) στά Α καί Β. Ἄν Μ εἶναι κοινό σημεῖο τῆς εὐθείας ΓΔ καί τῆς περιφέρειας (γ), ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν Μ, ὅταν ἡ περιφέρεια (γ) μεταβάλλεται;

537. Ἔστω Σ ἕνα σταθερό σημεῖο πάνω στή διάκεντρο K_1K_2 δύο δεδομένων κύκλων (K_1, R_1), (K_2, R_2). Ἀπό τό Σ διέρχεται μεταβλητή εὐθεία (x). Ἄν οἱ πόλοι τῆς (x) ὡς πρός τούς δεδομένους κύκλους εἶναι Ε καί Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΕΖ διέρχεται ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο τῆς διακέντρου K_1K_2.

538. ΑΒ καί ΓΔ εἶναι δύο χορδές κύκλου καί Ρ καί Κ εἶναι τά μέσα τους. Ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν ἡ ΑΒ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{ΓΡΔ}$, τότε ἡ ΓΔ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{ΑΚΒ}$.

539. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ πόλος μιᾶς εὐθείας, πού συνδέει δυό σημεῖα συζυγή ὡς πρός κύκλο (Ο), εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου, πού ἔχει κορυφές τό κέντρο Ο καί τά δυό αὐτά συζυγή σημεῖα. (Φυσικά ὁ πόλος ἀναφέρεται στόν κύκλο (Ο)).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XII

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

236. Προσανατολισμένες γωνίες

α΄) Προσανατολισμένο ἐπίπεδο. Πάνω σέ κάθε ἐπίπεδο ὑπάρχουν δύο ἀντίθετες φορές περιστροφῆς. Ὅταν ἡ μία ἀπ᾽ αὐτές ὁριστεῖ ὡς θετική καί ἡ ἀντίθετή της ὡς ἀρνητική, τότε τό ἐπίπεδο λέγεται «προσανατολισμένο». (Δηλ. προσανατολισμένο ἐπίπεδο εἶναι ἐκεῖνο, πάνω στό ὁποῖο ἔχει ἐκλεγεῖ ἡ θετική καί ἡ ἀρνητική φορά περιστροφῆς).

β΄) Γενίκευση τῆς ἔννοιας τῆς γωνίας. Ἄς θεωρήσουμε στό ἐπίπεδο ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἡμιευθειῶν (ἤ «ἀκτίνων»), $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ὅπου ἡ $\overrightarrow{OA}$ θεωρεῖται ὡς πρώτη ἤ ἀρχική καί ἡ $\overrightarrow{OB}$ ὡς δεύτερη ἤ τελική. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ἀρχική ἡμιευθεία $\overrightarrow{OA}$ στρέφεται γύρω ἀπό τό O, κατά τήν ἴδια πάντοτε φορά, ἕως ὅτου συμπέσει γιά νιοστή φορά μέ τήν τελική $\overrightarrow{OB}$, τό σύνολο τῶν ἀκτίνων, τίς ὁποῖες διατρέχει ἡ ἡμιευθεία, πού στρέφεται, λέγεται **διευθυνόμενη** ἤ **προσανατολισμένη γωνία ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$) μέ ἀρχική πλευρά $\overrightarrow{OA}$ καί τελική πλευρά $\overrightarrow{OB}$. Τό περιεχόμενο τῆς ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$)** εἶναι τό σύνολο τῶν ἀκτίνων, ἀπό τίς ὁποῖες πέρασε ἡ ἀρχική πλευρά κατά τή στροφή της. Αὐτό τό σύνολο ἀποτελεῖται ἀπό τίς ἀκτίνες, πού βρίσκονται μέσα στή γεωμετρική γωνία AOB, κυρτή ἤ ὄχι, ὅταν τίς πάρουμε ν φορές τήν καθεμιά ($\nu = 1, 2, \ldots$) (ν-πλές) καί ἀπό τίς ἀκτίνες, πού εἶναι ἔξω ἀπό τήν AOB, ὅταν τίς πάρουμε $\nu - 1$ φορές τήν καθεμιά. Δηλαδή οἱ ἀκτίνες (ἡμιευθεῖες), πού συγκροτοῦν τή διευθυνόμενη γωνία ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$), ἔχουν βαθμούς πολλαπλότητας ν καί $\nu - 1$.

γ΄) Προσημασμένες διευθυνόμενες γωνίες. Ἄν προσανατολίσουμε τό ἐπίπεδο τῆς διευθυνόμενης γωνίας $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, τότε ἡ γωνία θεωρεῖται θετική ἤ ἀρνητική, ἀνάλογα μέ τό ἄν ἡ φορά τῆς διαγραφῆς της συμπίπτει μέ τή φορά, πού ὁρίστηκε ὡς θετική ἤ ἀρνητική (ἔχει μέτρο α, πού εἶναι θετικός ἀριθμός, ἄν εἶναι θετική ἤ ἀρνητικός ἀριθμός, ἄν εἶναι ἀρνητική).

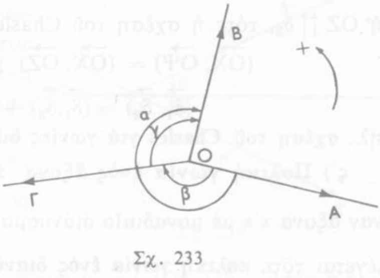
Τό διατεταγμένο ζεῦγος τῶν ἡμιευθειῶν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ ὁρίζει ἄπειρες γωνίες μέ ἀρχική πλευρά $\overrightarrow{OA}$ καί τελική $\overrightarrow{OB}$, πού διαφέρουν μεταξύ τους, ἀνά δύο, κατά ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ 2π (ἤ $360°$). Ἄν α εἶναι τό μέτρο μιᾶς καθορισμένης διευθυνόμενης γωνίας μέ ἀρχική πλευρά $\overrightarrow{OA}$ καί τελική $\overrightarrow{OB}$, τότε τά μέτρα τῶν ἄπειρων γωνιῶν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\alpha + 2k\pi, \text{ ὅπου } k \text{ ἀκέραιος}$$

Γράφουμε, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k\pi$ ἤ τήν ἰσοδύναμη γραφή:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha \ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

δ΄) **Σχέση τοῦ Chasles γιά γωνίες**. Ἄς πάρουμε τρεῖς ἀκτίνες $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{O\Gamma}$ σ' ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο (σχ. 233). Ἄς θεωρήσουμε τή διευθυνόμενη γωνία $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ μέ μέτρο α τέτοιο, ὥστε $|\alpha| < 360°$, ἡ ὁποία περιέχει ὡς ἀκτίνα τήν $\overrightarrow{O\Gamma}$. (Στό σχῆμα ἡ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ εἶναι μιά ὄχι κυρτή ἀρνητική γωνία). Ἡ $\overrightarrow{O\Gamma}$ χωρίζει τότε τήν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ σέ δύο διευθυνόμενες γωνίες $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$ καί $(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})$, πού ἔχουν μέτρα β καί γ, μέ ἀπόλυτη τιμή μικρότερη ἀπό τό $|\alpha|$. Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί β, γ, α εἶναι ὁμόσημοι (στό σχ. 233 ὅλοι εἶναι ἀρνητικοί), βλέπουμε ὅτι:



Σχ. 233

(1) $$\alpha = \beta + \gamma$$

Ἄς πάρουμε τώρα τρεῖς ὁποιεσδήποτε διευθυνόμενες γωνίες: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma})$ καί $(\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB})$. Γι' αὐτές, μέ βάση τό προηγούμενο ἐδάφιο γ΄, θά ἔχουμε:

(2) $$\begin{cases} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha + 2k_1\pi & k_1, k_2, k_3 \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) = \beta + 2k_2\pi & \text{ἀκέραιοι} \\ (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) = \gamma + 2k_3\pi & \end{cases}$$

Μέ βάση τίς (2) ἡ (1) γράφεται:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) - 2k_1\pi = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) - 2k_2\pi + (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) - 2k_3\pi \Longleftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) + (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) + 2(k_1 - k_2 - k_3)\pi$$

καί ἐπειδή $k_1 - k_2 - k_3$ εἶναι ἴσο μέ ἕνα ἀκέραιο $k \Rightarrow$

(3) $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) + (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) + 2k\pi \text{ ἤ}$$

(4) $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}) + (\overrightarrow{O\Gamma}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$

Ἡ σχέση (4) (ἤ (3)) εἶναι ἡ σχέση τοῦ Chasles γιά τρεῖς ὁποιεσδήποτε ἀκτίνες τοῦ ἐπιπέδου, οἱ ὁποῖες ἔχουν κοινή ἀρχή.

ε΄) **Διευθυνόμενη γωνία δύο διανυσμάτων.** Ἄς θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{\delta}_1$ καί $\vec{\delta}_2$ σ᾿ ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο. Γωνία τοῦ διανύσματος $\vec{\delta}_1$ πρός τό διάνυσμα $\vec{\delta}_2$ λέγεται κάθε διευθυνόμενη γωνία, πού ἔχει ἀρχική πλευρά παράλληλη καί ὁμόρροπη πρός τό $\vec{\delta}_1$ καί τελική πλευρά παρ/λη καί ὁμόρροπη πρός τό $\vec{\delta}_2$. Δηλαδή ἀπό ὁρισμό ἔχουμε:

$$(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\Psi}) \qquad \overrightarrow{OX} \uparrow\uparrow \vec{\delta}_1,\ \overrightarrow{O\Psi} \uparrow\uparrow \vec{\delta}_2.$$

Ἔστω καί ἕνα τρίτο διάνυσμα $\vec{\delta}_3$ στό ἐπίπεδο. Ἄν ἀπό τό O φέρουμε τή $OZ \uparrow\uparrow \vec{\delta}_3$, τότε ἡ σχέση τοῦ Chasles γιά τίς γωνίες:

$$(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{O\Psi}) = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OZ}) + (\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{O\Psi}) \pmod{2\pi} \Rightarrow$$

$$(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = (\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_3) + (\vec{\delta}_3, \vec{\delta}_2) \pmod{2\pi}.$$

δηλ. **σχέση τοῦ Chasles γιά γωνίες διανυσμάτων.**

ς΄) **Πολική γωνία ἑνός ἄξονα καί ἑνός** διανύσματος. Ἐκλέγουμε ἕναν ἄξονα x΄x μέ μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{i}$ καί τόν ὀνομάζουμε **πολικό ἄξονα.** Λέγεται τότε **πολική γωνία ἑνός διανύσματος** $\vec{\delta}$ ἡ γωνία:

$$(\vec{i}, \vec{\delta}).$$

Ἡ πολική γωνία τοῦ $\vec{\delta}$ λέγεται καί **«γωνία τοῦ ἄξονα x΄x καί τοῦ διανύσματος $\vec{\delta}$»** καί συμβολίζεται:

$$(x'x, \vec{\delta}).$$

ζ΄) **Γωνία δύο ἀξόνων.** Ἄς πάρουμε δύο ἄξονες, x΄x καί y΄y, σ᾿ ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο. Ἔστω $\vec{i}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{x'x}$ καί $\vec{j}$ τό μοναδιαῖο διάνυσμα τοῦ $\overrightarrow{y'y}$.

Ἀπό ὁρισμό ἡ γωνία $(\vec{i}, \vec{j})$ εἶναι ἴση μέ τή γενικευμένη γωνία τῶν δύο ἀξόνων, τοῦ $\overrightarrow{x'x}$ πρός τόν $\overrightarrow{y'y}$:

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}).$$

Ἂν α εἶναι ἕνα ἀπό τά μέτρα τῆς $(\vec{i}, \vec{j})$, μποροῦμε νά γράψουμε:

$$(\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = \alpha \pmod{2\pi}$$

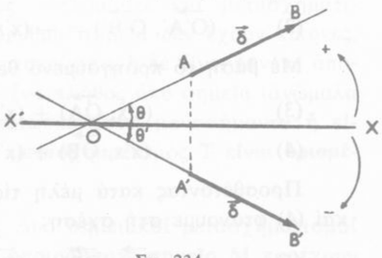
Ἂν $\overrightarrow{z'z}$ ἕνας τρίτος ἄξονας στό ἐπίπεδο, μέ μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{k}$, ἔχουμε:

$$(\vec{i}, \vec{j}) = (\vec{i}, \vec{k}) + (\vec{k}, \vec{j}) \pmod{2\pi}$$
$$\Longleftrightarrow (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{y'y}) = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{z'z}) + (\overrightarrow{z'z}, \overrightarrow{y'y}) \pmod{2\pi}.$$

η΄) Τέλος **ὡς γωνία τοῦ ἄξονα x΄x καί τῆς ἡμιευθείας $\overrightarrow{AB}$** θεωρεῖται ἡ γωνία τοῦ μοναδιαίου διανύσματος $\vec{i}$ τοῦ ἄξονα καί ἑνός διανύσματος $\vec{\delta}$, πού εἶναι ὁμόρροπο πρός τήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{AB}$. (Δηλαδή $(x'x, \overrightarrow{AB}) \equiv (\vec{i}, \vec{\delta})$).

237. (Θ) — Δύο ἡμιευθεῖες συμμετρικές ὡς πρός ἄξονα σχηματίζουν μέ τόν ἄξονα γωνίες ἀντίθετες (mod 2π).

Ἔστω ὅτι $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι δυό ἡμιευθεῖες συμμετρικές ὡς πρός τόν ἄξονα x΄x (σχ. 234). Οἱ φορεῖς τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν τέμνονται, ὅπως εἶναι γνωστό, πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας, ἔστω στό Ο. Ἔστω θ ἡ κυρτή διευθυνόμενη γωνία (πού ἔχει μέτρο μέ ἀπόλυτη τιμή $<\pi$), τήν ὁποία διαγράφει ὁ θετικός ἡμιάξονας Οx, ὡσότου νά συμπέσει μέ τήν ἡμιευθεία $\overrightarrow{OB}$, ἡ ὁποία ἔχει τή φορά τῆς $\overrightarrow{AB}$.



Σχ. 234

Ἔστω, ἀκόμη, θ΄ ἡ κυρτή διευθυνόμενη γωνία $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB'})$, ὅπου ἡ ἡμιευθεία $\overrightarrow{OB'}$ ἔχει τή φορά τῆς $\overrightarrow{A'B'}$. Οἱ γωνίες θ καί θ΄ εἶναι ἀπόλυτα ἴσες, γιατί ἡ Ox εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Β΄ΟΒ, ἀλλά ἔχουν καί ἀντίθετες φορές, γιατί οἱ τελικές τους πλευρές $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB'}$ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Οx (σέ ἀντίθετα ἡμιεπίπεδα). Ἑπομένως:

(1) $$\theta' = -\theta.$$

Γιά δύο ὁποιεσδήποτε διευθυνόμενες γωνίες $(x'x, \overrightarrow{AB})$ καί $(x'x, \overrightarrow{A'B'})$ ἰσχύει:

(2) $$(x'x, \overrightarrow{AB}) = (x'x, \overrightarrow{OB}) = \theta + 2k'\pi \text{ καί}$$
$$(x'x, \overrightarrow{A'B'}) = (x'x, \overrightarrow{OB'}) = \theta' + 2k''\pi$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) παίρνουμε:

$$(x'x, \overrightarrow{AB}) + (x'x, \overrightarrow{A'B'}) = 0 + 2(k' + k'')\pi$$

καί, ἐπειδή k΄, k΄΄ εἶναι ἀκέραιοι, θά εἶναι καί $k' + k'' = k$ ἀκέραιος.

Ἄρα $(x'x, \overrightarrow{AB}) + (x'x, \overrightarrow{A'B'}) = 0 + 2k\pi$ ἤ ἀκόμα $(x'x, \overrightarrow{AB}) = -(x'x, \overrightarrow{A'B'}) + 2k\pi$ ἤ, ἐπειδή ὁ k εἶναι ἀκέραιος, γράφουμε τήν ταυτόσημη ἰσότητα $(x'x, \overrightarrow{AB}) = -(x'x, \overrightarrow{A'B'}) \pmod{2\pi}$.

238. (Θ) —**Ἄν οἱ ὁμώνυμες πλευρές δύο διευθυνόμενων γωνιῶν εἶναι συμμετρικές πρός ἄξονα, τότε οἱ δύο γωνίες εἶναι ἀντίθετες (mod 2π).**

Ἄς πάρουμε τίς δύο διευθυνόμενες γωνίες $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ καί $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$, πού ἔχουν τίς ἀρχικές τους πλευρές $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{O'A'}$ συμμετρικές πρός ἕναν ἄξονα x΄x καί τίς τελικές τους πλευρές $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'B'}$ ἐπίσης συμμετρικές ὡς πρός τόν x΄x. Κατά Chasles ἰσχύει:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, x'x) + (x'x, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}, \text{ ἐπομένως:}$$

(1) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(x'x, \overrightarrow{OA}) + (x'x, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}$

Ὁμοίως ἰσχύει ἡ

(2) $(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = -(x'x, \overrightarrow{O'A'}) + (x'x, \overrightarrow{O'B'}) \pmod{2\pi}$

Μέ βάση τό προηγούμενο θεώρημα ἰσχύουν:

(3) $(x'x, \overrightarrow{OA}) + (x'x, \overrightarrow{O'A'}) = 0 \pmod{2\pi}$

(4) $(x'x, \overrightarrow{OB}) + (x'x, \overrightarrow{O'B'}) = 0 \pmod{2\pi}$

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (1) καί (2) καί ἔχοντας ὑπόψη τίς (3) καί (4) φτάνουμε στή σχέση:

(5) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = 0 \pmod{2\pi}$

Αὐτή γράφεται καί:

(6) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) \pmod{2\pi}$.

Ἡ (6) εἶναι ἡ σχέση, πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

Ἄν καί οἱ δυό συμμετρικές διευθυνόμενες γωνίες εἶναι κυρτές (μέ μέτρα ἀπόλυτα $< \pi$), τότε εἶναι ἀκριβῶς ἀντίθετες. Γι' αὐτό λέμε ὅτι **ἡ συμμετρία ὡς πρός ἄξονα ἀντιστρέφει τή φορά τῆς γωνίας.**

ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΠΑΝΩ ΣΤΟΥΣ ΣΗΜΕΙΑΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ

239. Ὁρισμοί.— **α΄) Σημειακός μετασχηματισμός** λέγεται κάθε ἀντιστοιχία, σύμφωνα μέ τήν ὁποία σέ κάθε σημεῖο M τοῦ χώρου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄλλο σημεῖο M΄ τοῦ χώρου καί μόνο ἕνα. Ἑπομένως, ὁ σημειακός μετασχηματισμός εἶναι μιά **μονοσήμαντη ἀπεικόνιση** τοῦ χώρου στόν ἑαυτό του. Ἄν παραστήσουμε μέ τό T τήν ἀπεικόνιση αὐτή (δηλ.

τόν τρόπο, μέ τόν όποιο μεταβαίνουμε άπό τό M στό M΄), τότε γράφουμε $M \xrightarrow{T} M'$, τό όποιο διαβάζεται : τό M, μέ τό μετασχηματισμό T, έχει ώς **εικόνα** τό M΄. Τό M λέγεται **άρχέτυπο** τοῦ M΄ (δέν άποκλείεται ένα σημεῖο M΄ νά έχει περισσότερα άπό ένα άρχέτυπο ή, μ' άλλα λόγια, διαφορετικά σημεῖα νά έχουν τήν ϊδια εικόνα).

Όταν όριστεῖ ένας σημειακός μετασχηματισμός T, τότε σέ κάθε σημειοσύνολο (δηλ. σχῆμα) F τοῦ χώρου άντιστοιχεῖ ένα άλλο σημειοσύνολο F΄, πού άποτελεῖται άπό τίς εικόνες M΄ τῶν σημείων M τοῦ F, πού παρέχονται μέ τό μετασχηματισμό T. Μποροῦμε νά γράψουμε:

$$\underset{\in F}{M} \xrightarrow{T} \underset{\in F'}{M'}$$

Τό σύνολο F΄ τῶν εικόνων τῶν σημείων τοῦ F λέγεται: τό *όμόλογο* πρός τό F σχῆμα· ή τό *μετασχηματισμένο* τοῦ F σχῆμα μέ τό μετασχηματισμό T ή καί ή *εικόνα* τοῦ F κατά τό μετασχηματισμό T.

β΄) Σημεῖα πού δέν έχουν εικόνες. Δεχόμαστε καί μετασχηματισμούς, κατά τούς όποίους μερικά ιδιόρρυθμα σημεῖα δέν έχουν εικόνες, δηλ. ό τρόπος, μέ τόν όποιο γίνεται ή άντιστοίχιση, ή δέ δίνει κανένα άποτέλεσμα ή δέ δίνει όρισμένη εικόνα γιά ένα πλῆθος άπό σημεῖα (άνώμαλα σημεῖα). Άντιθέτως, όταν μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ μονοσήμαντα ή εικόνα ένός σημείου M, τότε λέμε ότι ό μετασχηματισμός T είναι **όρισμένος γιά τό σημεῖο M.**

γ΄) Μετασχηματισμοί ισοδύναμοι. Δυό σημειακοί μετασχηματισμοί T καί T΄ λέγονται ισοδύναμοι, όταν σέ όποιοδήποτε σημεῖο M παρέχουν εικόνες πού ταυτίζονται. Γράφουμε:

$$T = T'$$

δ΄) Ταυτοτικός μετασχηματισμός. Ένας μετασχηματισμός, κατά τόν όποιο σέ κ ά θ ε σημεῖο M άντιστοιχεῖ τό ϊδιο τό M, λέγεται ταυτοτικός καί παριστάνεται μέ H°.

ε΄) Διπλό σημεῖο. Άν σέ κάποιο μετασχηματισμό T ένα σημεῖο M ταυτίζεται μέ τήν εικόνα του M΄, τότε λέμε ότι τό M είναι **διπλό σημεῖο** ή **σημεῖο άναλλοίωτο** κατά τό μετασχηματισμό T.

ς΄) Σχῆμα άναλλοίωτο. Ένα σχῆμα F λέγεται **άναλλοίωτο μέ τό μετασχηματισμό T,** όταν ή εικόνα M΄ όποιουδήποτε σημείου M τοῦ F είναι πάλι σημεῖο τοῦ F. Δηλ.:

$$\underset{\in F}{M} \xrightarrow{T} \underset{\in F}{M}$$

Γενικά τό M′, ἄν καί ἀνήκει στό ἴδιο σχῆμα F, εἶναι διάφορο τοῦ M καί τό σχῆμα λέγεται τότε **ἀναλλοίωτο στό σύνολό του**.

Ἄν $\forall$ $M \in F$ τό M′ ταυτίζεται μέ τό M, τότε τό σχῆμα F λέγεται **ἀναλλοίωτο σημεῖο πρός σημεῖο.** Εἶναι φανερό ὅτι τό σχῆμα τό ἀναλλοίωτο σημεῖο πρός σημεῖο ἀποτελεῖται ἀπό διπλά σημεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ.

ζ′) **Ἀμφιμονοσήμαντος σημειακός μετασχηματισμός.** Ἕνας μετασχηματισμός T, πού ἀπεικονίζει ἕνα σχῆμα F πάνω σ᾽ ἕνα ἄλλο σχῆμα F′ λέγεται ἀμφιμονοσήμαντος, ἄν κάθε σημεῖο τοῦ F ἔχει ὡς εἰκόνα ἕνα σημεῖο τοῦ F′ καί ἄν κάθε σημεῖο τοῦ F′ εἶναι εἰκόνα **ἑνός καί μόνου** σημείου τοῦ F.

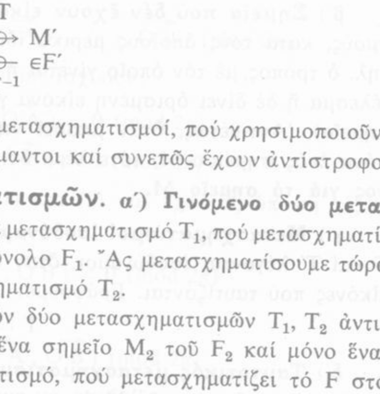
Στήν περίπτωση αὐτή σέ κάθε σημεῖο M′ τοῦ F′ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καί μόνο σημεῖο M τοῦ F (τό ἀρχέτυπο τοῦ M′), δηλ. ὑπάρχει σημειακός μετασχηματισμός, πού μετασχηματίζει τό F′ στό F. Ὁ μετασχηματισμός αὐτός, στόν ὁποῖο οἱ εἰκόνες χρησιμεύουν ὡς ἀρχέτυπα καί τά ἀρχέτυπα ὡς εἰκόνες, λέγεται **μετασχηματισμός ἀντίστροφος** τοῦ T καί παριστάνεται μέ T^{-1}. Ὁ T^{-1} ὑπάρχει μόνο, ὅταν ὁ T εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Γράφουμε:

$$\begin{array}{c} M \xrightarrow{\ T\ } M' \\ \in F \xleftarrow[T^{-1}]{} \in F' \end{array}$$

Οὐσιαστικά ὅλοι οἱ σημειακοί μετασχηματισμοί, πού χρησιμοποιοῦνται στή γεωμετρία, εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι καί συνεπῶς ἔχουν ἀντίστροφο.

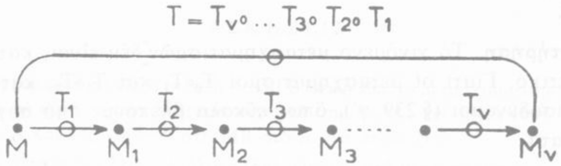
240. Γινόμενο μετασχηματισμῶν. α′) **Γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν.** Ἄς θεωρήσουμε ἕνα μετασχηματισμό T_1, πού μετασχηματίζει τό σημειοσύνολο F στό σημειοσύνολο F_1. Ἄς μετασχηματίσουμε τώρα τό F_1 στό F_2 μέ ἕνα δεύτερο μετασχηματισμό T_2.

Ἡ διαδοχική αὐτή ἐκτέλεση τῶν δύο μετασχηματισμῶν T_1, T_2 ἀντιστοιχίζει κάθε σημεῖο M τοῦ F μέ ἕνα σημεῖο M_2 τοῦ F_2 καί μόνο ἕνα, δηλ. δημιουργεῖ ἕνα νέο μετασχηματισμό, πού μετασχηματίζει τό F στό F_2. Ὁ μετασχηματισμός αὐτός T, $M \xrightarrow{T} M_2$ πού μετασχηματίζει ἀπ᾽ εὐθείας τό F στό F_2 λέγεται γινόμενο τῶν T_1 καί T_2 καί παριστάνεται μέ T_2T_1 ἤ $T_2 \circ T_1$ (διαβάζεται, T_2 κύκλος, T_1). Γράφουμε ἐπίσης (βλ. σχ. 235): $M_1 = T_1(M)$, $M_2 = T_2(M_1) = T_2\{T_1(M)\}$. Ἡ τελευταία αὐτή γραφή δικαιολογεῖ τή διάταξη $T_2 \circ T_1$, δηλ. ὅτι γράφουμε τό T_2 ἀριστερά καί τό T_1 δεξιά, ἐνῶ οἱ μετασχηματισμοί ἐκτελοῦνται κατά τήν τάξη T_1, T_2.



Σχ. 235

β´) **Γινόμενο δσωνδήποτε μετασχηματισμῶν.** Ἄς πάρουμε ν μετασχηματισμούς $T_1, T_2, \ldots T_\nu$. Ἄς σχηματίσουμε τό γινόμενο $T_2 \circ T_1$, κατόπιν τό γινόμενο τοῦ μετασχηματισμοῦ $T_2 \circ T_1$, πού προέκυψε καί τοῦ T_3,



Σχ. 236

δηλ. τό $T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$ κ.ο.κ., ὥσότου συμπεριλάβουμε καί τόν T_ν. Τότε φτάνουμε τελικά σ' ἕνα μετασχηματισμό T, πού λέγεται **γινόμενο τῶν ν μετασχηματισμῶν** καί ὁ ὁποῖος παριστάνεται συμβολικά.

$$T = T_\nu \circ T_{\nu-1} \circ \ldots \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1 \quad (\sigma\chi.\ 236).$$

γ´) **Εἰδικές περιπτώσεις.** i) Ἄν ὁ μετασχηματισμός T ἔχει ἕναν ἀντίστροφο, T^{-1}, τότε τό γινόμενο $T^{-1} \circ T$ εἶναι, ὅπως εἶναι φανερό, ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός H^0. Δηλαδή:

$$T^{-1} \circ T = H^\circ = T \circ T^{-1}$$

ii) Ἄν ὁ μετασχηματισμός T ἐκτελεστεῖ ν διαδοχικές φορές, τότε γράφουμε:

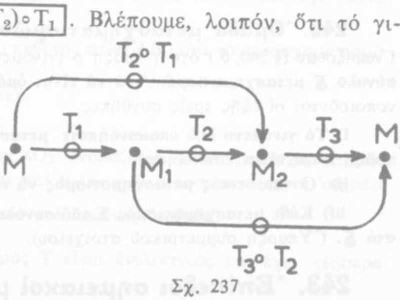
$$T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T = T^\nu.$$

iii) Σέ ἕνα γινόμενο μετασχηματισμῶν ὁ «παράγοντας» H° παραλείπεται χωρίς νά μεταβληθεῖ τό ἀποτέλεσμα.

δ´) **Προσεταιριστικότητα.** Ἄς πάρουμε τρεῖς μετασχηματισμούς T_1 T_2, T_3. Ὅπως βλέπουμε ἀπό τό σχ. 237, τό M_3 εἶναι εἰκόνα τοῦ M:

- εἴτε μέ τόν $T_3 \circ (T_2 \circ T_1)$
- εἴτε μέ τόν $(T_3 \circ T_2) \circ T_1$

Ἑπομένως $\boxed{T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ὅτι τό γινόμενο τριῶν σημειακῶν μετασχηματισμῶν ἔχει τήν προσεταιριστική ἰδιότητα. Δηλ. στό γινόμενο $T_3 \circ T_2 \circ T_1$ **μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς μέ τό γινόμενό τους ἤ, ἀντιστρόφως, μποροῦμε σέ ἕνα γινόμενο δύο μετασχηματισμῶν νά ἀντικαταστήσουμε τόν ἕνα μέ δύο ἄλλους, πού ἔχουν αὐτόν ὡς γινόμενο.**



Σχ. 237

Ἡ ἰδιότητα αὐτή ἐπεκτείνεται στό γινόμενο ὁσωνδήποτε μετασχηματισμῶν, ὅπως γίνεται στά γινόμενα τῆς ἀριθμητικῆς. Ἑπομένως ἰσχύει τό:

Θεώρημα. Τό γινόμενο ὁσωνδήποτε μετασχηματισμῶν εἶναι προσεταιριστικό.

Παρατήρηση. Τό γινόμενο μετασχηματισμῶν δέν εἶναι, κατά κανόνα, ἀντιμεταθετικό. Γιατί οἱ μετασχηματισμοί $T_2 \circ T_1$ καί $T_1 \circ T_2$, κατά κανόνα, δέν εἶναι ἰσοδύναμοι (§ 239, γ΄), ὅπως εὔκολα βλέπουμε ἀπό συγκεκριμένα παραδείγματα.

241. Ἐνελικτικός μετασχηματισμός. **Ἕνας ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός λέγεται ἐνελικτικός, ὅταν εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν ἀντίστροφό του.** Δηλαδή, ὅταν **μέ τήν ἴδια μέθοδο,** μέ τήν ὁποία πᾶμε ἀπό τό ἀρχέτυπο Μ στήν εἰκόνα Μ΄, πηγαίνουμε καί ἀπό τό Μ΄ στό Μ.

Π.χ. ἄν Τ σημαίνει συμμετρία ὡς πρός εὐθεία (ε), τό T^{-1} σημαίνει πάλι συμμετρία ὡς πρός τήν ἴδια εὐθεία (ε). Οἱ Τ καί T^{-1} ἐκφράζουν στήν περίπτωση αὐτή τόν ἴδιο μετασχηματισμό, ἄρα ὁ Τ εἶναι ἐνελικτικός.

Ἀπεναντίας, ἄν ὁ Τ σημαίνει ἐπίπεδη στροφή κατά μιά προσημασμένη γωνία θ, τότε ὁ T^{-1}, δηλ. ὁ μετασχηματισμός πού ξαναφέρνει τήν εἰκόνα στό ἀρχέτυπο, σημαίνει στροφή κατά — θ, ἄρα στήν περίπτωση αὐτή δέν εἶναι ὁ T^{-1} ὁ ἴδιος (δηλ. ἰσοδύναμος) μετασχηματισμός μέ τόν Τ. Ἄρα ὁ Τ (ἡ στροφή) δέν εἶναι στή γενική περίπτωση ἐνελικτικός. Τελικά:

(1) $\boxed{T \text{ ἐνελικτικός} \iff T = T^{-1}}$

Ὅταν ὅμως $T = T^{-1}$, τότε $T^2 = T^{-1} \circ T = H^\circ$ (ταυτοτικός). Ἀντιστρόφως: $T^2 = H^\circ$ σημαίνει $T \circ T = H^\circ$, δηλ. ὁ Τ εἶναι ταυτοχρόνως καί ἀντίστροφος τοῦ Τ, ἄρα Τ ἐνελικτικός. Ἑπομένως: Ἐνελικτικός μετασχηματισμός εἶναι ἐκεῖνος, πού, ὅταν ἐκτελεστεῖ δυό φορές διαδοχικά, ξαναφέρνει τό σημεῖο στήν ἀρχική του θέση.

(2) $\boxed{T \text{ ἐνελικτικός} \iff T^2 = H^\circ \text{ (ταυτοτικός)}}$

242. Ὁμάδα μετασχηματισμῶν. Ἔστω $\mathfrak{S}$ ἕνα σύνολο μετασχηματισμῶν. Γνωρίζουμε (§ 240, δ΄) ὅτι ἡ πράξη ο (γινόμενο) εἶναι προσεταιριστική. Ἑπομένως **ἕνα σύνολο $\mathfrak{S}$ μετασχηματισμῶν, γιά νά εἶναι ὁμάδα** ὡς πρός τήν πράξη αὐτή, ἀρκεῖ νά ἱκανοποιοῦνται οἱ ἑξῆς τρεῖς συνθῆκες.

i) Τό γινόμενο δυό ὁποιωνδήποτε μετασχηματισμῶν τοῦ $\mathfrak{S}$ νά ἀνήκει στό $\mathfrak{S}$ (ἡ πράξη ο νά εἶναι ἐσωτερική).

ii) Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός νά ἀνήκει στό $\mathfrak{S}$ (ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου).

iii) Κάθε μετασχηματισμός Τ τοῦ συνόλου $\mathfrak{S}$ νά ἔχει ἀντίστροφο T^{-1}, πού νά ἀνήκει στό $\mathfrak{S}$. (Ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου).

243. Ἐπίπεδοι σημειακοί μετασχηματισμοί. Στήν ἐπίπεδη γεωμετρία ἐξετάζουμε, φυσικά, ἐπίπεδους σημειακούς μετασχηματισμούς.

Μέ αὐτούς τό ἐπίπεδο ἀπεικονίζεται στόν ἑαυτό του, δηλ. ἀρχέτυπο καί εἰκόνα βρίσκονται πάντοτε πάνω στό ἴδιο ἐπίπεδο, τό ὁποῖο εἶναι καί ὁ χῶρος τῆς ἔρευνας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

540. Ἔχουμε δυό σταθερά σημεῖα Α καί Β. Θεωροῦμε τό μετασχηματισμό $M \xrightarrow{T} M'$, μέ τόν ὁποῖο σέ κάθε σημεῖο Μ ἀντιστοιχεῖ τό σημεῖο Μ΄, πού εἶναι τομή τῆς καθέτου στή ΜΑ στό Α καί τῆς καθέτου στή ΜΒ στό Β. Νά ἀποδείξετε:

i) Ποιά σημεῖα δέν ἔχουν ὁμόλογο (δηλ. εἰκόνα) στό μετασχηματισμό αὐτό; Ποιῶν οἱ εἰκόνες εἶναι ἀόριστες;

ii) Ποιά εἶναι ἡ εἰκόνα (δηλ. τό ὁμόλογο σχῆμα) μιᾶς εὐθείας, πού διέρχεται ἀπό τό Α;

iii) Ποιά εἶναι ἡ εἰκόνα μιᾶς περιφέρειας πού διέρχεται ἀπό τά Α καί Β;

iv) Ποιό εἶναι τό μετασχηματισμένο (ἤ ὁμόλογο) σχῆμα εὐθείας (δ) κάθετης στήν ΑΒ; Μπορεῖ ἡ (δ) νά μένει ἀναλλοίωτη κατά τό μετασχηματισμό;

541. Ἔχουμε: δυό σταθερά σημεῖα Ο καί Α, μιά εὐθεία (ε) κάθετη στήν ΟΑ στό Ο, μιά εὐθεία (ε΄) κάθετη στήν ΟΑ στό Α καί (η) τή μεσοκάθετο τοῦ ΟΑ. Σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζουμε τό σημεῖο Μ΄, πού εἶναι συζυγές ἁρμονικό τοῦ Μ ὡς πρός τά Α καί Ρ, ὅπου Ρ τό κοινό σημεῖο τῶν εὐθειῶν ΑΜ καί (ε).

i) Στό μετασχηματισμό Τ, πού ὁρίσαμε παραπάνω, ἔχουν ὅλα τά σημεῖα εἰκόνες; Εἶναι ὁ Τ ἐνελικτικός; Ποιά εἶναι τά διπλά σημεῖα;

ii) Ποιό εἶναι τό μετασχηματισμένο μιᾶς περιφέρειας (γ) διαμέτρου ΣΣ΄, ὅπου Σ καί Σ΄ εἶναι συζυγή ἁρμονικά τῶν Ο καί Α;

542. Ἔχουμε δυό σταθερά σημεῖα Α καί Β μέσα στό ἐπίπεδο. Θεωροῦμε τό μετασχηματισμό $M' = T(M)$, μέ τόν ὁποῖο σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου, πού δέ βρίσκεται στήν εὐθεία ΑΒ, ἀντιστοιχεῖ τό ὀρθόκεντρο Μ΄ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ.

i) Εἶναι ὁ Τ ἐνελικτικός;

ii) Ποιά γραμμή τοῦ ἐπιπέδου μένει ἀναλλοίωτη σημεῖο πρός σημεῖο κατά τό μετασχηματισμό αὐτό;

iii) Θεωροῦμε καί δεύτερο μετασχηματισμό T_1, πού σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζει τό συμμετρικό του ὡς πρός τό μέσο Ο τοῦ ΑΒ. Ἀποδεῖξτε ὅτι μέ τό μετασχηματισμό $T_1 \circ T$ κάθε περιφέρεια, πού διέρχεται ἀπό τά Α καί Β (ἀπό τήν ὁποία ἐξαιροῦνται τά Α καί Β) μένει ἀναλλοίωτη.

iv) Ποιά εἶναι ἡ εἰκόνα μιᾶς εὐθείας (ε) κάθετης στήν ΑΒ κατά τό μετασχηματισμό $T_1 \circ T$;

v) Εἶναι τό γινόμενο $T_1 \circ T$ ἀντιμεταθετικό;

vi) Εἶναι τό γινόμενο $T_1 \circ T$ ἐνελικτικό;

543. Σέ ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων xOy ὀνομάζουμε Τ τό μετασχηματισμό, ὁ ὁποῖος στό σημεῖο Μ μέ συντεταγμένες x καί y ($xy \neq 0$) προσεταιρίζει τό σημεῖο Μ΄ μέ συντεταγμένες $X = \frac{\alpha^2}{x}$, $\Psi = \frac{\alpha^2}{y}$, ὅπου α δεδομένος ἀριθμός.

i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ μετασχηματισμός Τ εἶναι ἐνελικτικός καί ἔχει τέσσερα διπλά σημεῖα.

ii) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ καμπύλη ρ μέ ἐξίσωση $\alpha y = x^2$ (παραβολή) μένει ἀναλλοίωτη κατά τό μετασχηματισμό.

iii) Ἔστω T_1 ἕνας δεύτερος μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος στό $M(x, y)$ προσεταιρίζει τό $M'\left(\frac{\beta^2}{x}, \frac{\beta^2}{y}\right)$, ὅπου β δεδομένος ἀριθμός. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ μετασχηματισμός $T_1 \circ T$ μεταφέρει τό σημεῖο M σ' ἕνα σημεῖο M_1 συνευθειακό μέ τά O καί M.

544. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν T_1, T_2 καί a εἶναι σημειακοί μετασχηματισμοί καί ὁ a εἶναι ἐνελικτικός, τότε:

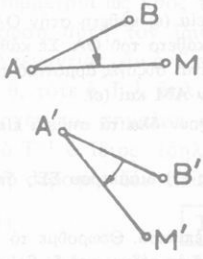
$$T_2 \circ T_1 = T_2 \circ a \circ a \circ T_1$$

545. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό γινόμενο δύο ἐνελικτικῶν μετασχηματισμῶν δέν εἶναι γενικά ἐνελικτικός μετασχηματισμός. Σέ ποιά περίπτωση τό γινόμενο αὐτό εἶναι ἐνελικτικό;

546. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ὁ μετασχηματισμός T εἶναι ἐνελικτικός καί ὁ a ἀμφιμονοσήμαντος, τότε ὁ μετασχηματισμός $a^{-1} \circ T \circ a$ εἶναι ἐνελικτικός.

ΟΜΟΡΡΟΠΩΣ ΙΣΑ ΚΑΙ ΑΝΤΙΡΡΟΠΩΣ ΙΣΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

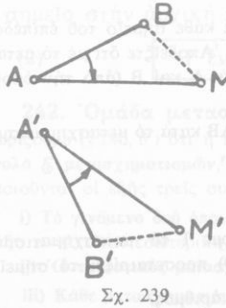
244. Ἐπίπεδες καί μή ἐπίπεδες μετατοπίσεις. α΄) **«Ὁμορρόπως ἴσα» σχήματα στό ἐπίπεδο.** Δυό σχήματα F καί F΄ τοῦ ἐπιπέδου λέγονται ὁμορρόπως ἴσα, ὅταν ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα σημεῖο πρός σημεῖο κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ἀπόσταση δυό ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ F νά εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση τῶν ὁμολόγων τους στό F΄ καί ὅταν σέ κάθε τριάδα σημείων A, B, M τοῦ F ἀντιστοιχεῖ μιά τριάδα σημείων A΄,B΄,M΄ τοῦ F΄ τέτοια, ὥστε $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ (mod 2π).



Σχ. 238

Ὁ ἀμφιμονοσήμαντος σημειακός μετασχηματισμός, πού φέρνει τό σχῆμα F πάνω στό F΄, λέγεται τότε **ἐπίπεδη μετατόπιση** ἤ **ἐπίπεδη κίνηση** ἤ **ὁμόρροπη ἰσότητα.** Ὁ μετασχηματισμός αὐτός διατηρεῖ τά μήκη καί τίς διευθυνόμενες γωνίες (mod 2π), (σχ. 238).

β΄) **«Ἀντιρρόπως ἴσα» σχήματα στό ἐπίπεδο.** Δυό σχήματα F καί F΄ τοῦ ἐπιπέδου λέγονται **ἀντιρρόπως ἴσα,** ὅταν ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα σημεῖο πρός σημεῖο κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε ἡ ἀπόσταση δυό ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ F νά εἶναι ἴση μέ τήν ἀπόσταση τῶν ὁμολόγων τους στό F΄ καί ὅταν σέ κάθε τριάδα σημείων A, B, M τοῦ F ἀντιστοιχεῖ μιά τριάδα σημείων A΄, B΄, M΄ τοῦ F΄ τέτοια, ὥστε $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'})$ (mod 2π).



Σχ. 239

Ὁ μετασχηματισμός, πού ἀπεικονίζει τό F πάνω στό F΄ λέγεται τότε **μή ἐπίπεδη μετατόπιση** ἤ **μή ἐπίπεδη κίνηση** ἤ **ἀντίρροπη ἰσότητα.** Αὐτός διατηρεῖ τά μήκη, ἀλλά ἀντιστρέφει τίς φορές τῶν διευθυνόμενων κυρτῶν γωνιῶν (σχ. 239).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ XIII

Η ΕΞΑΔΑ ΤΩΝ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

(Δηλαδή τῶν σημειακῶν μετασχηματισμῶν, πού ἀπεικονίζουν τήν περιφέρεια σέ περιφέρεια ἤ σέ εὐθεία)

Ι. ΜΕΤΑΦΟΡΑ

245. **α΄) Ὁρισμός.—Ἄν δοθεῖ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\delta}$, τότε λέμε μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}$ τό σημειακό μετασχηματισμό, ὁ ὁποῖος σέ κάθε σημεῖο Μ προσεταιρίζει ἕνα σημεῖο Μ΄ τέτοιο, ὥστε:**

(1) $\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}}$ (Διανυσματική ἰσότητα).

Τό μετασχηματισμό αὐτό θά τόν παριστάνουμε μέ Μετ(δ).

β΄) Διπλά σημεῖα.—Ἀναλλοίωτες.—Ἡ σχέση $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$ δείχνει ὅτι δέν ὑπάρχει κανένα διπλό σημεῖο, ὅταν $\vec{\delta} \neq \vec{0}$. Ἄν τό διάνυσμα $\vec{\delta}$ εἶναι μηδενικό, τότε τά Μ καί Μ΄ συμπίπτουν καί ὁ μετασχηματισμός γίνεται ταυτοτικός.

Ἀλλά ἀναλλοίωτες στό σύνολό τους γραμμές ὑπάρχουν κατά τή Μετ($\vec{\delta}$) καί εἶναι ὅλες οἱ εὐθεῖες οἱ // $\vec{\delta}$.

γ΄) Ἀντίστροφος μετασχηματισμός. Ἡ ἰσοδυναμία: $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{\delta}$ δείχνει ὅτι ἡ Μετ($\vec{\delta}$) ἔχει ἀντίστροφο μετασχηματισμό τή Μετ($-\vec{\delta}$).

δ΄) Λῆμμα.— Στή διανυσματική ἰσότητα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μποροῦμε νά ἐναλλάξουμε τά ἀκραῖα γράμματα ἤ τά μεσαῖα γράμματα.

Δηλ.: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$. Αὐτό προκύπτει, ἄν προσθέσουμε (διανυσματικά) καί στά δυό μέλη τῆς ἰσότητας $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta A}$. Ὁμοίως ἰσχύει: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$.

ε΄) **Χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς μεταφορᾶς.—Κάθε μεταφορά μετασχηματίζει δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Μ σέ δυό σημεῖα Α΄ καί Μ΄, ἀντιστοίχως, τέτοια, ὥστε $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. Ἀντιστρόφως, ἄν σ' ἕνα σημειακό μετασχηματισμό δυό σημεῖα: Α σταθερό καί Μ ἕνα ὁποιοδήποτε, ἔχουν εἰκόνες τά Α΄ καί Μ΄ τέτοιες, ὥστε: $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, τότε ὁ μετασχηματισμός εἶναι μεταφορά κατά $\overrightarrow{AA'}$.**

Ἀπόδειξη. i) Κατά τή Μετ($\vec{\delta}$) θά εἶναι $\overrightarrow{AA'} = \vec{\delta}$ καί $\overrightarrow{MM'} = \vec{\delta}$, ὅπου Α΄ καί Μ΄ οἱ εἰκόνες τῶν Α καί Μ. Ἐπομένως $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$ καί, ἐφαρμόζοντας τό προηγούμενο λῆμμα, παίρνουμε: $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

ii) Ἔστω μετασχηματισμός Τ, πού ἀπεικονίζει τό σταθερό σημεῖο Α στό σταθερό Α΄ καί τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στό Μ΄ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι πάντοτε: $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$. Τότε, σύμφωνα μέ τό λῆμμα, θά εἶναι ἐπίσης $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι Τ = Μετ($\overrightarrow{AA'}$).

ς΄) Εἶναι φανερό ὅτι **μέ τή μεταφορά μιᾶς εὐθείας κατά ἕνα διάνυσμα $\vec{\delta}$ προκύπτει μιά εὐθεία παράλληλη καί μέ τή μεταφορά μιᾶς ἡμιευθείας προκύπτει ἡμιευθεία ὁμόρροπη πρός τήν ἀρχική.**

ζ΄) Ἔστω περιφέρεια (Κ, R) καί ἕνα διάνυσμα $\vec{\delta}$. Μέ τή Μετ($\vec{\delta}$) τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς (Κ, R) ἔρχεται στό Μ΄ καί τό κέντρο Κ στό Κ΄. Θά εἶναι $\overrightarrow{K'M'} = \overrightarrow{KM} \Rightarrow K'M' = R$, δηλ. τό Μ΄ ἀνήκει στήν περιφέρεια (Κ΄, R). Ἀντιστρόφως, ἄν Ρ΄ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς (Κ, R΄) καί φέρουμε μιά ἀκτίνα ΚΡ τῆς (Κ, R) ὁμόρροπη πρός τήν Κ΄Ρ΄, θά εἶναι $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{K'P'}$ καί συνεπῶς $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{KK'} = \delta$. Δηλαδή καί κάθε σημεῖο τῆς (Κ΄, R) εἶναι τό ὁμόλογο ἑνός σημείου τῆς (Κ, R) κατά τή Μετ($\vec{\delta}$). Ἄρα: **Τό σχῆμα, στό ὁποῖο μετασχηματίζεται μιά περιφέρεια μέ μεταφορά, εἶναι περιφέρεια ἴση, πού ἔχει κέντρο τό ὁμόλογο τοῦ κέντρου.**

η΄) **Ἡ μεταφορά εἶναι ἐπίπεδη μετατόπιση**. Γιατί, ἄν Α καί Β εἶναι δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα ἑνός σχήματος F καί Α΄, Β΄ τά ὁμόλογά τους κατά τή Μετ($\vec{\delta}$), θά εἶναι $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow A'B' = AB$. Ἄν Μ ἕνα τρίτο σημεῖο τοῦ F καί Μ΄ τό ὁμόλογό του, τότε ἰσχύουν (ἐδαφ. ε΄):

$\{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ καί $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}\} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) \pmod{2\pi}$ (διευθυνόμενες γωνίες, πού ἔχουν τίς ὁμώνυμες πλευρές τους παρ/λες καί ὁμόρροπες). Ὥστε κατά τή μεταφορά διατηροῦνται τά μήκη καί οἱ γωνίες (mod 2π): Ἐπομένως ἡ μεταφορά εἶναι ἐπίπεδη μετατόπιση (§ 244).

θ΄) (Θ) — Τό σύνολο τῶν μεταφορῶν στό ἐπίπεδο ἔχει τή δομή ὁμάδας (ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο»).

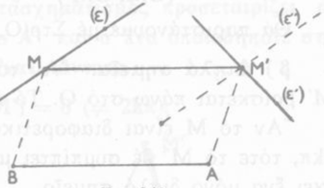
Γιά νά ἀποδειχτεῖ αὐτό, ἀρκεῖ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι στό σύνολο $\mathfrak{S}$ τῶν μεταφορῶν ἱκανοποιοῦνται οἱ τρεῖς συνθῆκες τῆς § 242. Πράγματι: i) **Τό γινόμενο δυό μεταφορῶν κατά διανύσματα $\vec{\delta}_1$ καί $\vec{\delta}_2$ εἶναι πάλι μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2$.** Γιατί ἡ $\text{Μετ}(\vec{\delta}_1)$ μεταφέρει τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στό Μ΄ τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{ΜΜ'} = \vec{\delta}_1$ καί στή συνέχεια ἡ $\text{Μετ}(\vec{\delta}_2)$ μεταφέρει τό Μ΄ στό Μ΄΄ τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{Μ'Μ''} = \vec{\delta}_2$. Συνεπῶς τό γινόμενο $\text{Μετ}(\vec{\delta}_2)\,{}_0\,\text{Μετ}(\vec{\delta}_1)$ μεταφέρει τό Μ στό Μ΄΄, ὅπου: $\overrightarrow{ΜΜ''} = \overrightarrow{ΜΜ'} + \overrightarrow{Μ'Μ''} = \vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2$. Δηλ. $\text{Μετ}(\vec{\delta}_2)\,{}_0\,\text{Μετ}(\vec{\delta}_1) = \text{Μετ}(\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2)$. Ὥστε ἡ πράξη ο (γινόμενο) εἶναι ἐσωτερική, δηλ.. δίνει ἀποτέλεσμα, πού ἀνήκει στό σύνολο $\mathfrak{S}$.

ii) **Ὕπαρξη οὐδέτερου στοιχείου:** Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός ἀνήκει στό σύνολο $\mathfrak{S}$ τῶν μεταφορῶν, γιατί ἡ $\text{Μετ}(\vec{0})$ εἶναι ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός.

iii) **Ὕπαρξη συμμετρικοῦ στοιχείου.** Κάθε $\text{Μετ}(\vec{\delta})$ ἔχει ὡς ἀντίστροφο μετασχηματισμό πάλι μεταφορά, τή $\text{Μετ}(-\vec{\delta})$, δηλ.: $\text{Μετ}(\vec{\delta})\,{}_0\,\text{Μετ}(-\vec{\delta}) = Η^0$ (ταυτοτικός μετασχηματισμός). Ὥστε σέ κάθε στοιχεῖο τοῦ $\mathfrak{S}$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ἄλλο στοιχεῖο τοῦ $\mathfrak{S}$, πού ἔχει μέ τό δεδομένο γινόμενο τό οὐδέτερο στοιχεῖο $Η^0$ τοῦ συνόλου $\mathfrak{S}$.(Δηλ. κάθε στοιχεῖο ἔχει ἕνα συμμετρικό). Ἑπομένως τό σύνολο $\mathfrak{S}$ τῶν μεταφορῶν ἔχει ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο» δομή ὁμάδας καί μάλιστα ἀβελιανῆς, γιατί ἡ πράξη ο («κύκλος» ἤ «γινόμενο») εἶναι ἀντιμεταθετική.

Πράγματι: $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 = \vec{\delta}_2 + \vec{\delta}_1 \Rightarrow \text{Μετ}(\vec{\delta}_2)\,{}_0\,\text{Μετ}(\vec{\delta}_1) = \text{Μετ}(\vec{\delta}_1)\,{}_0\,\text{Μετ}(\vec{\delta}_2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : **(Κατασκευή μέ τομή δυό γραμμῶν, ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μιά προκύπτει ἀπό μεταφορά). Σ΄ ἕνα ἐπίπεδο ἔχουμε δυό τεμνόμενες εὐθεῖες (ε) καί (ε΄) καί ἕνα τμῆμα ΑΒ. Νά βρεθεῖ ἕνα σημεῖο Μ πάνω στήν (ε) καί ἕνα σημεῖο Μ΄ πάνω στήν (ε΄) τέτοια, ὥστε τό τετράπλευρο ΑΒΜΜ΄ νά εἶναι παραλληλόγραμμο (σχ. 240).**



Σχ. 240

Λύση. Στό παρ/μο ΑΒΜΜ΄ πρέπει νά εἶναι:

$$\overrightarrow{ΜΜ'} = \overrightarrow{ΒΑ},$$

δηλ. τό Μ΄ προκύπτει ἀπό τό Μ μέ μεταφορά κατά διάνυσμα ΒΑ καί, ἐπειδή τό Μ ἀνήκει στήν (ε), τό Μ΄ ἀνήκει στήν εὐθεία (ε΄΄), πού προκύπτει ἀπό τήν (ε) μέ $\text{Μετ}(\overrightarrow{ΒΑ})$. Τό Μ΄ προσδιορίζεται ὡς τομή τῶν (ε΄΄) καί (ε΄) καί τό Μ ὁρίζεται ἀπό τή $\overrightarrow{Μ'Μ} = \overrightarrow{ΑΒ}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

547. Ἔχουμε μιά εὐθεία (ε) καί μιά περιφέρεια (c). Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα, πού νά εἶναι ἴσο καί παράλληλο πρός δεδομένο τμῆμα καί νά ἔχει τά ἄκρα του στήν (ε) καί στή (c).

548. Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα, πού νά εἶναι ἴσο καί παράλληλο πρός δεδομένο τμῆμα καί νά ἔχει τά ἄκρα του πάνω σέ δυό δεδομένες περιφέρειες.

549. Νά κατασκευαστεῖ τετράπλευρο, τοῦ ὁποίου ξέρουμε τρεῖς πλευρές καί τίς γωνίες τίς προσκείμενες στήν τέταρτη πλευρά.

550. Ἔχουμε δυό περιφέρειες καί μιά εὐθεία (ε). Νά κατασκευαστεῖ εὐθεία ∥ (ε), πού νά ὁρίζει στίς δυό περιφέρειες ἴσες χορδές.

551. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (γ) καί ἕνα τμῆμα ΑΒ. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τοῦ Ρ, ὅταν τό τετράπλευρο ΑΒΜΡ εἶναι παρ/μο γιά κάθε $M \in (\gamma)$.

552. Μιά περιφέρεια (γ) μεταβλητῆς θέσεως, ἀλλά σταθερῆς ἀκτίνας, διέρχεται πάντοτε ἀπό σταθερό σημεῖο Α. Σέ κάθε θέση της φέρνουμε ἐφαπτόμενες παράλληλες πρός σταθερή εὐθεία. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς;

553. Νά κατασκευαστεῖ περιφέρεια μέ δεδομένη ἀκτίνα, πού νά διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο καί νά ἀποκόπτει ἀπό δεδομένη εὐθεία μιά χορδή ἴση πρός δεδομένο τμῆμα.

554. Ἔχουμε δυό παράλληλες (ε_1), (ε_2) καί δυό σημεῖα Α, Β ἑκατέρωθεν τῆς ταινίας τους. Ἑνώνουμε τό Α μέ ἕνα σημεῖο Μ τῆς (ε_1) καί τό Β μέ ἕνα σημεῖο Μ΄ τῆς (ε_2). i) Νά ὁριστοῦν τά Μ καί Μ΄ ἔτσι, ὥστε ἡ ΜΜ΄ νά ἔχει δεδομένη διεύθυνση καί νά εἶναι ΑΜ = ΒΜ΄. ii) Ἐφόσον ἡ ΜΜ΄ ἔχει δεδομένη διεύθυνση, νά ὁριστοῦν τά Μ καί Μ΄ ἔτσι, ὥστε τό ΑΜ + ΜΜ΄ + Μ΄Β νά εἶναι τό ἐλάχιστο δυνατό. (Ὑποδ.. Νά γίνει μεταφορά τοῦ Β καί τῆς (ε_2) κατά διάνυσμα $\overrightarrow{M'M}$).

II. ΕΠΙΠΕΔΗ ΣΤΡΟΦΗ

246. α΄) Ὁρισμός. — Ἔστω ἕνα σημεῖο Ο, πού βρίσκεται πάνω σέ προσανατολισμένο ἐπίπεδο καί μιά διευθυνόμενη γωνία θ, ὁρισμένη κατά προσέγγιση 2kπ (k ἀκέραιος). Στροφή μέ κέντρο Ο καί γωνία θ λέγεται ἕνας σημειακός μετασχηματισμός, πού προσεταιρίζει σέ ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἄλλο σημεῖο Μ΄ τέτοιο, ὥστε:

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) \text{ καί } OM = OM'.$$

Θά παριστάνουμε μέ Στρ(Ο, θ) τό μετασχηματισμό αὐτό.

β΄) Διπλά σημεῖα. Ἄν τό Μ βρίσκεται πάνω στό Ο, τότε καί τό Μ΄ βρίσκεται πάνω στό Ο. Τό κέντρο Ο εἶναι *διπλό σημεῖο*.

Ἄν τό Μ εἶναι διαφορετικό ἀπό τό Ο καί, ἡ θ διαφορετική ἀπό τό 2kπ, τότε τό Μ΄ δέ συμπίπτει μέ τό Μ. Στήν περίπτωση αὐτή ἡ στροφή ἔχει ἕνα μόνο διπλό σημεῖο.

—Ἄν θ = 2kπ, τά Μ καί Μ΄ ταυτίζονται καί, στήν περίπτωση αὐτή, ἡ στροφή γίνεται ταυτοτικός μετασχηματισμός.

γ΄) Ἀντίστροφος μετασχηματισμός. Ἡ Στρ(Ο, θ) ἔχει ἀντίστροφο μετασχηματισμό τή Στρ(Ο, — θ). Οἱ δυό αὐτές στροφές εἶναι ἰσοδύναμες, ὅταν καί μόνο ὅταν θ = πολλαπλάσιο τοῦ π. Ἑπομένως ἡ στροφή εἶναι ἐνελικτική (§ 241) μόνο, ὅταν θ=kπ (δηλ. ὅταν γίνεται συμμετρία ὡς πρός κέντρο Ο).

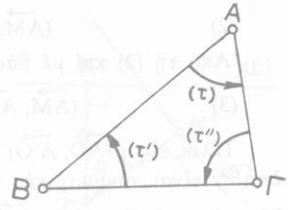
δ΄) Λῆμμα. Σέ μιά ἰσότητα διευθυνόμενων γωνιῶν διανυσμάτων μποροῦμε νά ἐναλλάξουμε τά ἀκραῖα διανύσματα ἤ τά μεσαῖα διανύσματα.

Δηλ.

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{\Gamma'\Delta'}) \ (\mathrm{mod}\ 2\pi) \Rightarrow (\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \ (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

Αὐτό προκύπτει, ἄν στά δύο μέλη τῆς ἰσοδυναμίας $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}) = (\overrightarrow{A'B'},$

$\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$) (mod 2π) προσθέσουμε τή γωνία ($\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$, $\overrightarrow{AB}$) καί ἐφαρμόσουμε τή σχέση τοῦ Chasles § 236, ε΄). Μέ ὅμοιο τρόπο ἀποδεικνύεται ἡ πρόταση γιά τά δυό μεσαῖα διανύσματα.



Σχ. 241

ε΄) **Κανόνας τῶν βελῶν**. Μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ ἡ ἑξῆς (ἐποπτικά ὁλοφάνερη) πρόταση, τήν ὁποία ὀνομάζουμε «κανόνα τῶν βελῶν»: οἱ τρεῖς γωνίες ἑνός τριγώνου προσανατολίζονται ὁμορρόπως μέ κυρτά βέλη, ἀπ' τά ὁποῖα τό καθένα καταλήγει στήν πλευρά, ἀπ' τήν ὁποία ἀρχίζει τό ἄλλο. Ἔτσι π.χ. στό σχ. 241, ἄν μέ τό βέλος (τ) ἡ $\widehat{A}$ γίνεται κυρτή διευθυνόμενη γωνία ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$), τότε μέ τό (τ΄) ἡ $\widehat{B}$ γίνεται διευθυνόμενη γωνία ($\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{BA}$) ὁμόρροπη πρός τήν ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$) καί ἡ $\widehat{\Gamma}$ προσανατολίζεται μέ τό (τ΄΄) ὁμορρόπως πρός τίς δυό ἄλλες.

ς΄) **Χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς στροφῆς.—Κάθε στροφή (Ο,θ) μετασχηματίζει δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Μ σέ δυό σημεῖα Α΄ καί Μ΄ τέτοια, ὥστε:**

$$\mathbf{A'M' = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \ (mod\ 2\pi)}$$

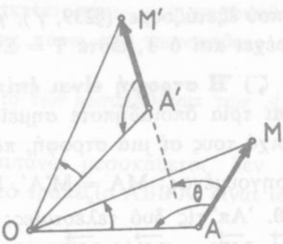
Ἀντιστρόφως, ἄν ἕνας σημειακός μετασχηματισμός προσεταιρίζει σέ ἕνα σταθερό σημεῖο Α ἕνα σταθερό σημεῖο Α΄ καί σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ ἕνα σημεῖο Μ΄ τέτοια, ὥστε νά εἶναι πάντοτε

$$\mathbf{A'M' = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \ (\neq 2k\pi),}$$

τότε ὁ μετασχηματισμός αὐτός εἶναι στροφή μέ γωνία θ.

Ἀπόδειξη. i) Κατά τή Στρ(Ο, θ) εἶναι ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA'}$) = ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$)=θ (mod 2π) καί σύμφωνα μέ τό λῆμμα τοῦ ἐδαφ. δ΄ θά εἶναι:

(1) ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) = ($\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OM'}$) (σχ. 242).



Σχ. 242

Ἐπειδή ἀκόμη ΟΑ = ΟΑ΄, ΟΜ= = ΟΜ΄, συμπεραίνουμε ὅτι τριγ ΟΑΜ= τριγ ΟΑ΄Μ΄. Ἑπομένως ΑΜ = Α΄Μ΄ καί οἱ κυρτές διευθυνόμενες γωνίες ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$) καί ($\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{A'O}$) εἶναι, σέ ἀπόλυτη τιμή, ἴσες. Θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ δυό τελευταῖες γωνίες εἶναι καί ὁμόρροπες. Σ' αὐτό μᾶς βοηθᾶ ὁ κανόνας τῶν βελῶν (ἐδαφ. ε΄). Μέ βάση τόν κανόνα αὐτόν εἶναι: ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$) ὁμόρροπη ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) = (σύμφωνα μέ τήν (1)) ($\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OM'}$) ὁμόρροπη ($\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{A'O}$) ⇒ ($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$) ὁμόρροπη ($\overrightarrow{A'M'}$, $\overrightarrow{A'O}$).

Ἑπομένως εἶναι:

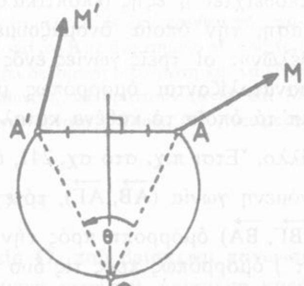
(2) $$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{AO})$$

Ἀπό τή (2) καί μέ βάση τό λῆμμα ἕπεται:

(3) $$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) \pmod{2\pi}$$

Τέλος εἶναι $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'})$, ἐπειδή εἶναι συμμετρικές ὡς πρός O.

Ἑπομένως ἡ (3) δίνει: $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \pmod{2\pi}$.



Σχ. 243

ii) **Ἀντίστροφο** (σχ. 243). Ὑπάρχει στροφή (O, θ), πού φέρνει τό A στό A'. Τό κέντρο της O ὁρίζεται ὡς τομή τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AA' καί τοῦ μοναδικοῦ τόξου, πού βλέπει τό AA' μέ διευθυνόμενη γωνία θ (mod 2π).

(Ἄν θ=π, τό O εἶναι τό μέσο τοῦ AA'). Ἡ στροφή αὐτή φέρνει τό $\overrightarrow{AM}$ στό $\overrightarrow{A'M''}$ ἔτσι, ὥστε (σύμφωνα μέ τό εὐθύ θεώρημα i):

$$A'M'' = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M''}) = \theta.$$

Εἶναι ὅμως καί $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ ἀπ' τήν ὑπόθεση. Ἑπομένως $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M''}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) \wedge A'M'' = A'M'$, ἀπ' τά ὁποῖα προκύπτει ὅτι τό $M'' \equiv M'$. Ἑπομένως ὑπάρχει στροφή ἰσοδύναμη πρός τό μετασχηματισμό T, πού ἐξετάζουμε, (§239, γ΄), γιατί σέ κάθε M παρέχει τήν ἴδια εἰκόνα, πού παρέχει καί ὁ T, ὥστε T = Στρ(O, θ).

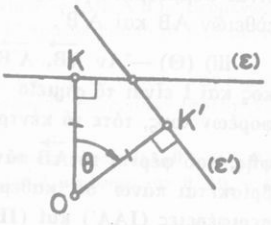
ζ΄) **Ἡ στροφή εἶναι ἐπίπεδη μετατόπιση.** Πράγματι, ἄν A, B, M εἶναι τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα ἑνός σχήματος F καί A΄, B΄, M΄ τά ἀντίστοιχά τους σέ μιά στροφή, πού φέρνει τό F στό F΄, ἰσχύουν, ὅπως εἴδαμε προηγουμένως: MA = M΄A΄, MB = M΄B΄, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A'}) = \theta$ $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'B'}) = \theta$. Ἀπ' τίς δυό τελευταῖες: $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'A'}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{M'B'}) \Rightarrow$ (βλέπε λῆμμα) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{M'A'}, \overrightarrow{M'B'})$, δηλαδή ἡ διευθυνόμενη γωνία $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ στό F εἶναι ἴση μέ τήν εἰκόνα της $(\overrightarrow{M'A'}, \overrightarrow{M'B'})$ στό F΄ (βλ. § 244, α΄).

Συνέπεια: Κάθε εὐθεία μέ τή στροφή (O,θ) μετασχηματίζεται σέ εὐθεία.

η΄) Γιά νά στρέψουμε μιά εὐθεία (ε), πού **δέν** περνᾶ ἀπό τό κέντρο O, ἀρκεῖ νά στρέψουμε τό τμῆμα OK ⊥ (ε), ὅπως στό σχ. 244.

Γιατί τό σχῆμα, πού προκύπτει ἀπό τή στροφή τῆς (ε), θά εἶναι πάλι μιά εὐθεία (σχῆμα ἴσο), ἔστω ἡ (ε΄). Ἐπειδή ἡ (ε) περιέχει τό K, ἡ (ε΄) θά περιέχει τήν εἰκόνα Κ΄ τοῦ Κ. Τέλος, ἐπειδή κατά τή στροφή οἱ γωνίες διατηροῦνται, γι᾽ αὐτό ἡ (ε΄) εἶναι κάθετη στήν ΟΚ΄ στό Κ΄.

θ΄) Ἄν στό σχ. 244 εἶναι $\theta = \pm 90°$, τότε $ΟΚ \perp ΟΚ' \Rightarrow (ε') \perp (ε)$.



Σχ. 244

ι΄) *Κάθε περιφέρεια μέ τή στροφή μετασχηματίζεται σέ περιφέρεια ἴση. Τά κέντρα αὐτῶν τῶν δύο ἴσων περιφερειῶν εἶναι ὁμόλογα κατά τή στροφή.* (Γιά νά στρέψουμε μιά περιφέρεια κατά γωνία θ, στρέφουμε τό κέντρο της κατά θ καί διατηροῦμε τήν ἀκτίνα της).

247. Προσδιορισμός τοῦ κέντρου στροφῆς. **i) Μιά στροφή εἶναι ὁρισμένη, ὅταν γνωρίζουμε δυό ὁμόλογα σημεῖα Α καί Α΄ καί τή γωνία στροφῆς θ.** Γιατί, ἄν δοθεῖ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ, τό ὁμόλογό του Μ΄ εἶναι ὁρισμένο, ἀφοῦ: ἡ σχέση $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ (βλ. § 246, ς΄) ὁρίζει τήν ἡμιευθεία (Α΄, Μ΄) καί ἡ σχέση $A'M' = AM$ ὁρίζει τό Μ΄ πάνω στήν ἡμιευθεία αὐτή. Τό κέντρο τῆς στροφῆς αὐτῆς ἔχει ἤδη προσδιοριστεῖ προηγουμένως στό σχ. 243.

ii) Μιά στροφή εἶναι ὁρισμένη, ὅταν γνωρίζουμε δυό ὁμόλογα δεσμευμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$, ἰσομήκη καί ὄχι παρ/λα καί ὁμόρροπα.

Γιατί τότε γνωρίζουμε δυό ὁμόλογα σημεῖα Α καί Α΄ καί τη γωνία στροφῆς $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$ καί ἐπομένως ἀναγόμαστε στήν περίπτωση i).

Τό κέντρο Ο τῆς στροφῆς αὐτῆς βρίσκεται πάνω στή μεσοκάθετο τοῦ ΑΑ΄, γιατί πρέπει $ΟΑ = ΟΑ'$ καί ἐπίσης πάνω στή μεσοκάθετο τοῦ ΒΒ΄, γιατί πρέπει $ΟΒ = ΟΒ'$. Ἑπομένως:

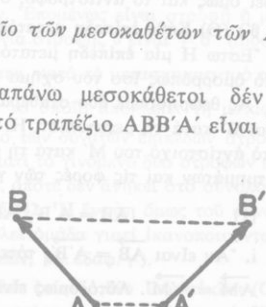
Τό κέντρο στροφῆς εἶναι τό κοινό σημεῖο τῶν μεσοκαθέτων τῶν ΑΑ΄ καί ΒΒ΄.

Ἐξαιρετική περίπτωση. Οἱ δυό παραπάνω μεσοκάθετοι δέν τέμνονται, ἄν $ΑΑ' \parallel ΒΒ'$ (σχ. 245). Τότε ὅμως τό τραπέζιο ΑΒΒ΄Α΄ εἶναι ἰσοσκελές καί οἱ εὐθεῖες ΒΑ, Β΄Α΄ τέμνονται στό σημεῖο Ο, πού εἶναι τέτοιο, ὥστε:

$$ΟΑ = ΟΑ', \quad ΟΒ = ΟΒ',$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = \theta$$

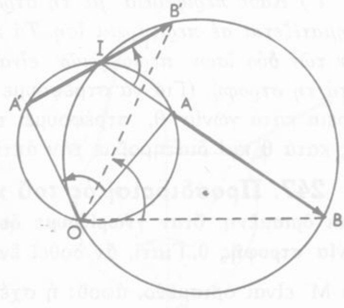
Ἑπομένως ἡ στροφή μέ κέντρο Ο καί γωνία $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$ φέρνει τό $\overrightarrow{AB}$ πάνω στό $\overrightarrow{A'B'}$. Τό κέντρο στροφῆς, σ᾽ αὐτή τήν περίπτωση, (ὅπου τά $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}$



Σχ. 245

εἶναι συμμετρικά μεταξύ τους ὡς πρός ἄξονα) εἶναι τό κοινό σημεῖο τῶν εὐθειῶν AB καί A′B′.

iii) (Θ) —Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι δύο δεσμευμένα διανύσματα μέ ἴσο μῆκος καί I εἶναι τό σημεῖο τομῆς τῶν φορέων τους, τότε τό κέντρο τῆς στροφῆς, πού φέρνει τό $\overrightarrow{AB}$ πάνω στό $\overrightarrow{A'B'}$ βρίσκεται πάνω σέ καθεμιά ἀπό τίς περιφέρειες (IAA′) καί (IBB′).



Σχ. 246

Θά περιορίσουμε τήν ἀπόδειξη στό συγκεκριμένο σχῆμα 246.

Ἂν O τό κέντρο τῆς στροφῆς, τότε εἶναι γνωστό ὅτι $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) =$ γωνία στροφῆς (§246, ς′). Ἀλλά $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB'})$ (σύμφωνα μέ τό σχῆμα 246), ἑπομένως $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB'}) \Rightarrow$ O, A′, I, A ὁμοκυκλικά. Ὁμοίως: $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) =$ (σύμφωνα μέ τό σχῆμα 246) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'})$. Ἀπό τήν $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}) \Rightarrow$ ὅτι τά O, B′, B, I εἶναι ὁμοκυκλικά. Ὥστε τό O ἀνήκει καί στίς δύο περιφέρειες (IAA′) καί (IBB′). Ἑπομένως εἶναι τό κοινό σημεῖο τους τό διαφορετικό ἀπό τό I.

248. Ἡ ὁμάδα τῶν στροφῶν - μεταφορῶν **(ἡ ὁμάδα τῶν ἐπίπεδων μετατοπίσεων ἤ ὁμάδα τῶν ὁμορρόπων ἰσοτήτων).**

α′) Εἴδαμε ὅτι τόσο ἡ μεταφορά, ὅσο καί ἡ στροφή, εἶναι ἐπίπεδες μετατοπίσεις, δηλ. διατηροῦν τά μήκη τῶν τμημάτων καί τίς φορές τῶν διευθυνόμενων κυρτῶν γωνιῶν. Ἰσχύει ὅμως καί τό ἀντίστροφο, ὅπως φαίνεται ἀπό τό ἑπόμενο θεώρημα.

β′) (Θ) Κάθε ἐπίπεδη μετατόπιση εἶναι στροφή ἤ μεταφορά.

Ἔστω H μία ἐπίπεδη μετατόπιση. Αὐτή μετασχηματίζει ἕνα ὁποιοδήποτε σχῆμα F στό ὁμορρόπως ἴσο του σχῆμα F′ (§ 244).

Ἂς θεωρήσουμε δύο σταθερά σημεῖα A καί B τοῦ ἐπιπέδου καί τά ὁμόλογά τους A′ καί B′ κατά τή μετατόπιση H. Ἂς θεωρήσουμε καί τυχαῖο σημεῖο M τοῦ ἐπιπέδου καί τό ἀντίστοιχό του M′ κατά τή μετατόπιση H. Ἐπειδή ἡ κίνηση H διατηρεῖ τά μήκη τῶν τμημάτων καί τίς φορές τῶν γωνιῶν, γι᾽ αὐτό θά εἶναι:

(1) $$AB = A'B', \; AM = A'M', \; (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}).$$

i. Ἂν εἶναι $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, τότε ἀπό τίς (1) ἕπεται:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. Αὐτό ὅμως εἶναι χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς μεταφορᾶς (§ 245, ε′) καί ἄρα ἡ κίνηση H εἶναι μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AA'}$.

ii. Ἂν εἶναι $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, τότε οἱ (1) μέ βάση τό λῆμμα τῆς § 246, δ′, δίνουν:

(2) $$A'M' = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta.$$

Οἱ (2), ἐξαιτίας τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῆς στροφῆς, (§ 246, ϛ΄), δηλώνουν ὅτι ὁ μετασχηματισμός Η εἶναι στροφή κατά γωνία $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. Ἑπομένως, ἄν F καί F΄ εἶναι δύο ὁμορρόπως ἴσα σχήματα (§ 244), τό F΄ προκύπτει ἀπό τό F μέ μεταφορά ἤ στροφή.

γ΄) Ἀπό τά παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι, εἴτε μιλᾶμε γιά τό σύνολο τῶν στροφῶν - μεταφορῶν, εἴτε γιά τό σύνολο τῶν ἐπίπεδων κινήσεων (ἤ ὁμόρροπων ἰσοτήτων), ἐκφράζουμε ἕνα καί τό αὐτό πράγμα.

δ΄) Γινόμενο δύο στροφῶν. (Θ).— Τό γινόμενο δύο στροφῶν (O_1, θ_1), (O_2, θ_2) εἶναι ἡ στροφή κατά γωνία $\theta_1+\theta_2$, ἄν $\theta_1+\theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$ ἤ μεταφορά, ἄν $\theta_1+\theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω Α ἕνα σταθερό σημεῖο καί Μ ἕνα ὁποιοδήποτε. Τότε μέ τή Στρ (O_1, θ_1) τό Α ἔρχεται στό A_1 καί τό Μ στό M_1, ὅπου:

(1) $$A_1M_1 = AM \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) = \theta_1 \quad (\S\, 246, ϛ΄).$$

Μέ τή Στρ(O_2, θ_2) τό A_1 ἔρχεται στό A_2 καί τό M_1 στό M_2, ὅπου:

(2) $$A_2M_2 = A_1M_1 \wedge (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A_2M_2}) = \theta_2.$$

Ἐπειδή (θεώρ. Chasles):

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) + (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A_2M_2}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2M_2}) \pmod{2\pi},$$

ἕπεται ἀπό τίς (1) καί (2) ὅτι, μέ τή διαδοχική ἐκτέλεση τῶν δύο στροφῶν, τό Α ἔρχεται στό A_2 καί τό Μ στό M_2 ἔτσι, ὥστε νά εἶναι:

(3) $$AM = A_2M_2 \wedge (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2M_2}) = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Ἄν $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (mod 25), οἱ (3) δείχνουν ὅτι τό γινόμενο τῶν δύο στροφῶν εἶναι στροφή μέ γωνία $\theta_1 + \theta_2$ (§ 248, ϛ΄).

(Ἄν $O_1 \equiv O_2$, εἶναι φανερό ὅτι τό παραπάνω συμπέρασμα ἰσχύει).

Ἄν $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$, οἱ (3) δίνουν: $AM = A_2M_2 \wedge \overrightarrow{AM} // \overrightarrow{A_2M_2}$, δηλαδή:

(4) $$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_2M_2}$$

Ἡ (4), ἐξαιτίας τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητας τῆς μεταφορᾶς, (§ 245,ε΄), δείχνει ὅτι τό Μ ἔρχεται στό M_2 μέ μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{AA_2}$, δηλαδή τό γινόμενο Στρ(O_2, θ_2) ο Στρ(O_1, θ_1) εἶναι μεταφορά, ὅταν $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$.

ε΄) Τό γινόμενο στροφῆς καί μεταφορᾶς εἶναι ἐπίπεδη μετατόπιση, γιατί διατηρεῖ καί τά μήκη τῶν τμημάτων καί τίς φορές τῶν γωνιῶν. Ἑπομένως εἶναι στροφή ἤ μεταφορά. Ἀλλά μεταφορά δέν μπορεῖ νά εἶναι, ὅταν ἡ γωνία στροφῆς θ εἶναι $\neq 0 \pmod{2\pi}$. Γιατί, ἄν $\overrightarrow{AM}$ καί $\overrightarrow{A''M''}$ εἶναι δύο ὁμόλογα διανύσματα, κατά τό μετασχηματισμό αὐτό, θά ἔχουμε $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A''M''}) = \theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, πράγμα τό ὁποῖο ἀποκλείει τή μεταφορά

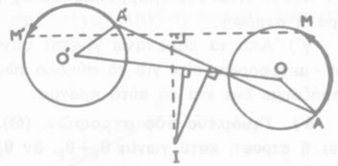
ϛ΄) Τό σύνολο στροφῶν - μεταφορῶν. Τό σύνολο τῶν δυνατῶν ἐπίπεδων στροφῶν. δέν ἀποτελεῖ ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο». Γιατί τό γινόμενο δύο στροφῶν εἶναι δυνατό νά μήν εἶναι στροφή, ἀλλά μεταφορά (ἐδαφ. δ΄), ὁπότε δέν ἀνήκει στό σύνολο τῶν στροφῶν. Ἑπομένως δέν ἱκανοποιεῖται ὁ ὅρος i) τῆς § 242. Ἡ ἕνωση ὅμως τοῦ συνόλου τῶν στροφῶν καί τοῦ συνόλου τῶν μεταφορῶν ἀποτελεῖ ὁμάδα γιατί ἱκανοποιοῦνται οἱ τρεῖς ὅροι τῆς § 242 (ὁμάδα τῶν ἐπίπεδων μετατοπίσεων, βλ. ἐδάφ. γ΄).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΤΡΟΦΗΣ **i) Δίνονται σ' ἕνα ἐπίπεδο δύο ἴσοι κύκλοι (Ο, R) καί (Ο΄, R), οἱ ὁποῖοι ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι προσανατολισμένοι κατά τήν ἴδια φορά. Ἔστω Α ἕνα σταθερό σημεῖο τοῦ (Ο, R) καί Α΄ ἕνα σταθερό σημεῖο τοῦ (Ο΄, R). Ἔστω ἀκόμη Μ ἕνα μεταβλητό σημεῖο τοῦ (Ο, R) καί Μ΄ ἕνα σημεῖο τοῦ (Ο΄, R) τέτοιο, ὥστε:**

$$\overset{\frown}{A'M'} = \overset{\frown}{AM}$$

Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο.

Ἀπόδειξη. Ἂν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) \neq 0 \pmod{2\pi}$, τότε ὑπάρχει μία στροφή, πού μεταφέρει τό $\overrightarrow{OA}$ πάνω στό $\overrightarrow{O'A'}$. Ἡ στροφή αὐτή μεταφέρει τόν κύκλο (O, R) πάνω στόν (O΄,R) καί τό σημεῖο Μ σέ ἕνα σημεῖο M_1 τοῦ (O΄, R) τέτοιο, ὥστε $\overset{\frown}{A'M_1} = \overset{\frown}{AM}$. Ἄρα τό σημεῖο M_1 ταυτίζεται μέ τό Μ΄. Ἀφοῦ, λοιπόν, μέ τή στροφή αὐτή τό Μ ἔρχεται στό Μ΄, γι' αὐτό ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ περνᾶ ἀπό τό κέντρο Ι αὐτῆς τῆς στροφῆς. Τό Ι εἶναι σταθερό σημεῖο, ἀφοῦ εἶναι τομή τῶν μεσοκαθέτων τῶν ΟΟ΄ καί ΑΑ΄.



Σχ. 247

Ἂν $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O'A'}) = 0$, τά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καί $\overrightarrow{O'A'}$ εἶναι παρ/λα καί ὁμόρροπα καί ἀντιστοιχοῦν σέ μιά μεταφορά κατά $\overrightarrow{OO'}$, ἡ ὁποία φέρνει τό Μ στό Μ΄. Ἑπομένως, σ' αὐτή τήν περίπτωση, ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ ἔχει σταθερή διεύθυνση, κάθετη στήν ΟΟ΄.

ii) Ἔχουμε δύο ὁμόκεντρες περιφέρειες (γ) καί (γ΄) καί ἕνα σταθερό σημεῖο Α τῆς μικρότερης περιφέρειας, ἔστω τῆς (γ). Νά κατασκευαστεῖ ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφή Β νά βρίσκεται πάνω στή (γ) καί οἱ δύο ἄλλες κορυφές Γ καί Δ νά βρίσκονται πάνω στή (γ΄).

Λύση. Ἂς προσανατολίσουμε τό ἐπίπεδο (§ 236, α΄) καί ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τό πρόβλημα εἶναι δυνατό καί ὅτι τό τετράγωνο ΑΒΓΔ, πού ζητᾶμε, εἶναι κατασκευασμένο. Τότε θά εἶναι:

$$\text{i) } A\Delta = AB \wedge (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}) = \frac{\pi}{2} \text{ ἤ ii) } A\Delta = AB \wedge (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Στήν περίπτωση i) τό Δ προκύπτει ἀπό τό Β μέ τή $\Sigma\tau\rho\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$ καί, ἐπειδή τό $B \in (\gamma)$, γι' αὐτό τό ὁμόλογό του Δ ἀνήκει σέ μιά περιφέρεια (γ΄΄), ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τή (γ) μέ τή $\Sigma\tau\rho\left(A, \frac{\pi}{2}\right)$. Τό Δ ἀνήκει καί στήν περιφέρεια (γ΄), ἄρα ὁρίζεται ὡς κοινό σημεῖο τῶν περιφερειῶν (γ΄) καί (γ΄΄). Τό Β προκύπτει ἀπό τό Δ μέ τήν ἀντίθετη στροφή $\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ καί τό Γ ὁρίζεται ὡς συμμετρικό τοῦ Δ ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ. Ἐπειδή οἱ (γ΄) καί (γ΄΄) ἔχουν δύο τό πολύ κοινά σημεῖα, γι' αὐτό ὑπάρχουν δύο τό πολύ θέσεις τοῦ Δ, οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν τίς ἀντίστοιχες λύσεις.

Στήν περίπτωση ii) τό Δ προκύπτει ἀπό τό Β μέ τή στροφή $\left(A, -\frac{\pi}{2}\right)$ καί ἡ λύση ἀκολουθεῖ τόν ἴδιο δρόμο.

Μέγιστο πλῆθος λύσεων: 4.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

555. Ἔχουμε τήν περιφέρεια (O, R) καί ἕνα σταθερό σημεῖο Α τοῦ ἐπιπέδου της. Παίρνουμε ἕνα τυχαῖο σημεῖο Μ τῆς (O, R) καί κατασκευάζουμε τρίγωνο ΑΜΜ΄ ἰσοσκελές καί ὀρθογώνιο στό Α. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων Μ΄;

556. Ἔχουμε δυό ἴσες περιφέρειες (Κ) καί (Λ), ἕνα σημεῖο Α τῆς (Κ) καί ἕνα σημεῖο Β στή (Λ). Νά κατασκευαστεῖ τμῆμα ΜΝ μήκους λ, τό ὁποῖο νά ἔχει τά ἄκρα του πάνω στίς περιφέρειες (Κ) καί (Λ) κατά τρόπο, ὥστε τά τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{BN}$ νά εἶναι ὁμόρροπα καί ἴσα.

557. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε ἐπίπεδη μετατόπιση, πού ἔχει ἕνα μόνο διπλό σημεῖο Α, εἶναι στροφή κέντρου Α.

558. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο ἡ κυρτή διευθυνόμενη γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ ἔχει τή θετική φορά. Πάνω στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καί ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζουμε ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ περίκεντρα τά Ζ, Η, Θ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό γινόμενο τῶν τριῶν στροφῶν:

$\left(Z, -\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(H, -\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\Theta, -\frac{2\pi}{3}\right)$ εἶναι ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός.

559. Ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ σταθερό κέντρο Ο μεταβάλλεται ἔτσι, ὥστε ἡ εὐθεία ΑΒ νά ἐφάπτεται πάντοτε σέ δεδομένη περιφέρεια (Κ). Νά βρεθοῦν οἱ περιβάλλουσες τῶν λοιπῶν πλευρῶν του.

560. Νά κατασκευαστεῖ τετράγωνο ΑΒΓΔ μέ δεδομένο κέντρο Ο καί τέτοιο, ὥστε ἡ εὐθεία ΑΒ νά ἐφάπτεται σέ δεδομένο κύκλο (Κ), ἐνῶ ἡ εὐθεία ΒΓ νά διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο Σ. (Ὑπόδ. Βλέπε προηγούμενη ἄσκηση).

561. Ἔχουμε δυό παράλληλες (ε_1) καί (ε_2) καί ἕνα σημεῖο Α. Νά κατασκευαστεῖ ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ μέ $B \in (\varepsilon_1)$ καί $\Gamma \in (\varepsilon_2)$. (Ὑποδ. Τό Γ προκύπτει ἀπό τό Β μέ στροφή κέντρου Α καί γωνίας $\pm 60°$).

562. Δίνεται εὐθεία (ε), περιφέρεια (Κ) καί σημεῖο Α. Νά κατασκευαστεῖ ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ὥστε $B \in (\varepsilon) \wedge \Gamma \in (K)$.

563. i) Πάνω στήν πλευρά ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΒΓ΄Κ πρός τά ἔξω τοῦ τριγώνου καί στήν προέκταση τοῦ ὕψους ΑΔ πρός τό μέρος τοῦ Α παίρνουμε τμῆμα ΑΣ = ΒΓ. Δεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο Γ΄ΒΓ ἐφαρμόζει πάνω στό τρίγωνο ΒΑΣ μέ μιά μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ καί σέ συνέχεια μέ στροφή γύρω ἀπό τό Α καί συμπεράνετε ὅτι ΒΣ ⊥ Γ΄Γ. ii) Ἄν κατασκευάσουμε καί πάνω στήν ΑΓ τετράγωνο ΑΓΒ΄Λ ἔξω ἀπό τό τρίγωνο, δεῖξτε ὅτι ἡ διερχόμενη ἀπό τό Β ⊥ΓΓ΄ καί ἡ διερχόμενη ἀπό τό Γ ⊥ ΒΒ΄ τέμνονται πάνω στό φορέα τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. (Ὑποδ. Ἄν εὐθεία περιστραφεῖ γύρω ἀπό ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου κατά $\pm 90°$, γίνεται ⊥ στήν ἀρχική της θέση).

Β΄

564. Σέ δεδομένο παραλληλόγραμμο νά ἐγγραφεῖ τετράγωνο.(Δηλ. τετράγωνο, πού ἔχει τίς κορυφές του πάνω στίς πλευρές ἤ στίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τοῦ παρ/μου).

565. Ἔχουμε δυό ἄξονες xOx΄ καί yOy΄ (τεμνόμενους στό Ο) μέ ἰσομήκη μοναδιαῖα διανύσματα, σημεῖο Α πάνω στόν πρῶτο καί σημεῖο Β πάνω στό δεύτερο. Θεωροῦμε δυό μεταβλητά σημεῖα Α΄ καί Β΄ πάνω στούς ἄξονες (Α΄ ∈ xOx΄, Β΄ ∈ yOy΄) τέτοια, ὥστε: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Δεῖξτε ὅτι ἡ περιφέρεια (ΟΒΒ΄) διέρχεται καί ἀπό δεύτερο σταθερό σημεῖο, πού βρίσκεται πάνω σέ μιά ἀπό τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, πού σχηματίζουν οἱ ἄξονες.

566. Πάνω σέ δυό ἴσες περιφέρειες (γ) καί (γ΄), μέ κέντρα Ο καί Ο΄, παίρνουμε τά σταθερά σημεῖα Α καί Α΄ (Α ∈ (γ), Α΄ ∈ (γ΄)). Θεωροῦμε καί δυό μεταβλητά σημεῖα, Μ πάνω στή (γ) καί Μ΄ πάνω στή (γ΄), τέτοια, ὥστε τά διευθυνόμενα τόξα $\overset{\frown}{AM}$ καί $\overset{\frown}{A'M'}$ νά εἶναι ὁμόρροπα καί ἴσα.

i) Νά οριστεῖ τό κέντρο στροφῆς, ἡ ὁποία φέρνει τό $\overset{\frown}{AM}$ πάνω στό $\overset{\frown}{A'M'}$.
ii) Ν' ἀναλυθεῖ ἡ στροφή αὐτή σέ μιά μεταφορά καί σέ μιά στροφή γύρω ἀπό τό Ο΄.
iii) Νά βρεθεῖ, ὡς συνέπεια, ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ ΜΜ΄.

III. ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

249. Ἀξονική συμμετρία ὡς πρός μία εὐθεία (ε) λέγεται ὁ σημειακός μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος σέ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου προσεταιρίζει ἕνα σημεῖο Μ′ τέτοιο, ὥστε ἡ (ε) νά εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΜ′. Σύμβολο: Συμμ (ε).

Ὁ μετασχηματισμός αὐτός εἶναι **ἐνελικτικός** (§ 241) καί τό σύνολο **τῶν διπλῶν σημείων του** εἶναι ἡ εὐθεία (ε).

Ἡ ἀξονική συμμετρία διατηρεῖ τά μήκη τῶν τμημάτων, **ἀλλ᾽ ἀντιστρέφει τή φορά τῶν διευθυνόμενων κυρτῶν γωνιῶν (§ 238).**

Ἑπομένως: **Ἡ ἀξονική συμμετρία στό ἐπίπεδο εἶναι μιά μή ἐπίπεδη μετατόπιση** (ἤ κίνηση) (§ 244).

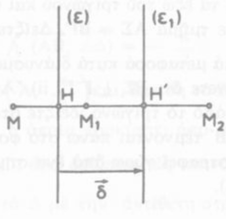
Σχέση τμήματος ΑΒ καί τῆς εἰκόνας του Α′Β′:

ΑΒ = Α′Β′ καί {Α, Β, Α′, Β′ ὁμοκυκλικά ἤ συνευθειακά}.

250. Γινόμενο ἀξονικῶν συμμετριῶν. α′) (Θ) —**Τό γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μέ ἄξονες παράλληλους εἶναι μεταφορά.**

Ἄς εἶναι (ε) καί (ε_1) οἱ δυό παράλληλοι ἄξονες συμμετρίας. Ἡ Συμμ(ε) φέρνει τό Μ στό M_1 καί στή συνέχεια ἡ Συμμ(ε_1) φέρνει τό M_1 στό M_2. Ἑπομένως τό γινόμενο Συμμ(ε_1) ο Συμμ(ε) φέρνει τό Μ στό M_2, τέτοιο, ὥστε: (σχ 248).

$$\overline{MM_2} = \overline{MM_1} + \overline{M_1M_2} = 2\overline{HM_1} + 2\overline{M_1H'} =$$
$$= 2HH' \Rightarrow MM_2 = 2HH'.$$



Σχ. 248

Τό διάνυσμα $\overrightarrow{HH'}$ εἶναι σταθερό $= \vec{\delta}$ (ἀνεξάρτητο τοῦ Μ) καί συνεπῶς τό Μ παθαίνει μιά μεταφορά κατά $2\vec{\delta}$:

$$\text{Συμμ}(\varepsilon_1) \circ \text{Συμμ}(\varepsilon) = \text{Μετ}(2\vec{\delta}).$$

Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι τό γινόμενο αὐτό *δέν εἶναι ἀντιμεταθετικό.*

β′) (Θ) — **Κάθε μεταφορά μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ μέ ἄπειρους τρόπους σέ γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μέ παράλληλους ἄξονες.**

Ὁ ἕνας ἀπό τούς ἄξονες μπορεῖ νά ἐκλεγεῖ αὐθαίρετα ἀνάμεσα στίς καθέτους πρός τό διάνυσμα μεταφορᾶς.

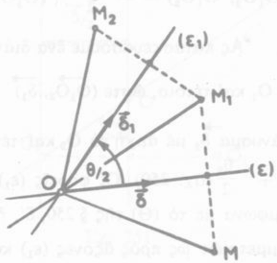
Ἄς πάρουμε μία αὐθαίρετη εὐθεία (ε) κάθετη στό διάνυσμα μεταφορᾶς $\vec{\delta}$ καί ἔστω (ε_1) ἡ εὐθεία, πού προκύπτει ἀπό τήν (ε) μέ μεταφορά κατά $\vec{\delta}/2$. Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, θά ἔχουμε:

$$(1) \qquad \text{Συμμ}(\varepsilon_1) \circ \text{Συμμ}(\varepsilon) = \text{Μετ}\left(2\frac{\vec{\delta}}{2}\right) = \text{Μετ}(\vec{\delta}).$$

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι μποροῦμε νά ἐκλέξουμε πρῶτα τήν (ε_1) ἀνάμεσα στίς καθέτους στό δ καί νά πάρουμε τήν (ε) μέ μεταφορά τῆς (ε_1) κατά $-\vec{\delta}/2$, ὁπότε πάλι ἡ (1) ἰσχύει.

γ΄) Τό γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μέ ἄξονες (ε) καί (ε_1), οἱ ὁποῖοι τέμνονται στό Ο, εἶναι στροφή μέ κέντρο Ο καί γωνία $2(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1)$, ὅπου $\vec{\delta}, \vec{\delta}_1$ διανύσματα, ἀντιστοίχως παράλληλα πρός τούς ἄξονες συμμετρίας (ε) καί (ε_1).

Ἡ πρώτη συμμετρία (ὡς πρός (ε)) φέρνει τό Μ στό M_1 καί ἡ δεύτερη (ὡς πρός (ε_1)) φέρνει τό M_1 στό M_2 (σχ. 249). Τό γινόμενο αὐτῶν τῶν δύο φέρνει τό Μ στό M_2. Ἔχουμε $OM = OM_1 \wedge OM_1 = OM_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OM = OM_2$.



Σχ. 249

Ἔχουμε ἀποδείξει ὅτι

$(\overrightarrow{OM}, \vec{\delta}) = -(\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta}) \pmod{2\pi} \Rightarrow$

(1) $(\overrightarrow{OM}, \vec{\delta}) = (\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) \pmod{2\pi}$ (§ 237)

Ὁμοίως:

(2) $(\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta}_1) = (\vec{\delta}_1, \overrightarrow{OM_2}) \pmod{2\pi}$

Χρησιμοποιώντας τό (Θ) τοῦ Chasles καί ἔχοντας ὑπόψη τίς (1) καί (2) παίρνουμε κατά σειρά:

$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \vec{\delta}) + (\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta}_1) + (\vec{\delta}_1, \overrightarrow{OM_2}) \pmod{2\pi} =$
$= 2(\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta}_1) = 2\{(\vec{\delta}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \vec{\delta}_1)\} \pmod{2\pi} = 2(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) \pmod{2\pi} \Rightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = 2(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) \pmod{2\pi}$. Αὐτή μαζί μέ τήν $OM = OM_2$ δείχνει ὅτι τό M_2 προκύπτει ἀπό στροφή τοῦ Μ γύρω ἀπό τό Ο κατά γωνία $2(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) \pmod{2\pi}$. Ἀποδείξαμε, λοιπόν, ὅτι $\Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon) = \Sigma\tau\rho(O, 2(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1)) \pmod{2\pi}$.

Πρέπει νά σημειωθεῖ ὅτι τό γινόμενο αὐτό εἶναι ἀντιμεταθετικό μόνο στήν περίπτωση, κατά τήν ὁποία $(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) = \pi/2 \pmod{2\pi}$.

δ΄) (Θ) — Κάθε στροφή (Ο, θ) μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ μέ ἄπειρους τρόπους σέ γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μέ ἄξονες, πού περνοῦν ἀπό τό Ο καί ἔχουν διανύσματα $\vec{\delta}$ καί $\vec{\delta}_1$ τέτοια, ὥστε $(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) = \theta/2$.

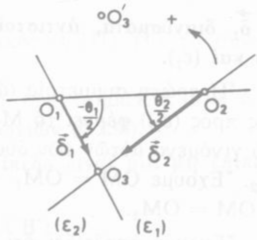
Ἄς θεωρήσουμε δύο εὐθεῖες (ε) καί (ε_1), πού περνοῦν ἀπό τό Ο καί φέρουν τά διανύσματα $\vec{\delta}$ καί $\vec{\delta}_1$ τέτοια, ὥστε $(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) = \theta/2$ (σχ. 249). Τότε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα:

$$\Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon) = \Sigma\tau\rho\left(O, 2\,\frac{\theta}{2}\right) = \Sigma\tau\rho(O, \theta).$$

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι, ὅταν ὁριστεῖ αὐθαίρετα ἡ (ε) καί τό $\vec{\delta}$ πάνω σ' αὐτή, τότε ἡ (ε_1) ὁρίζεται ἀπό τό διάνυσμα $\vec{\delta}_1$, πού εἶναι τέτοιο, ὥστε $(\vec{\delta}, \vec{\delta}_1) = \theta/2$.

251. Κέντρο τοῦ γινομένου δύο στροφῶν ἤ στροφῆς καί μεταφορᾶς. α') (Θ) — **Τό γινόμενο δύο στροφῶν μέ διαφορετικά κέντρα O_1, O_2 καί μέ ἀντίστοιχες γωνίες θ_1 καί θ_2, ὄχι ἀντίθετες, εἶναι στροφή μέ γωνία $\theta_1+\theta_2$ καί κέντρο O_3, πού ὁρίζεται ἀπό τίς σχέσεις:**

$$(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_1O_3}) = -\frac{\theta_1}{2} \wedge (\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_3}) = +\frac{\theta_2}{2}$$



Σχ. 250

Ἄς κατασκευάσουμε ἕνα διάνυσμα $\vec{\delta}_1$ μέ ἀρχή τό O_1 καί τέτοιο, ὥστε $(\overrightarrow{O_1O_2}, \vec{\delta}_1) = -\frac{\theta_1}{2}$ καί ἕνα διάνυσμα $\vec{\delta}_2$ μέ ἀρχή τό O_2 καί τέτοιο, ὥστε $(\overrightarrow{O_2O_1}, \vec{\delta}_2) = +\frac{\theta_2}{2}$ (σχ. 250). Οἱ φορεῖς (ε_1) καί (ε_2) τῶν διανυσμάτων αὐτῶν τέμνονται στό O_3. Σύμφωνα μέ τό (Θ) τῆς § 250, δ', ἡ $\Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1)$ ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν ὡς πρός ἄξονες (ε_1) καί O_1O_2, πού ἔχουν τά διανύσματα $\vec{\delta}_1$ καί $\overrightarrow{O_1O_2}$, τά ὁποῖα σχηματίζουν γωνία $\frac{\theta_1}{2}$.

Ὁμοίως καί ἡ $\Sigma\tau\rho(O, \theta_2)$ ἀναλύεται σέ γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν ὡς πρός ἄξονες O_2O_1 καί (ε_2), πού ἔχουν τά διανύσματα $\overrightarrow{O_2O_1}$ καί $\vec{\delta}_2$, τά ὁποῖα σχηματίζουν γωνία $(\overrightarrow{O_2O_1}, \vec{\delta}_2) = \frac{\theta_2}{2}$.

Ἔτσι ἔχουμε: $\Sigma\tau\rho(O_2, \theta_2) \circ \Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1) =$

$$= \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_2) \circ \underbrace{\Sigma\upsilon\mu\mu(O_2O_1) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(O_2O_1)}_{\text{ταυτοτικός μετασχηματισμός}} \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1) =$$

$$= \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_2) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1) = (\beta\lambda.\ (\Theta)\ \S\, 250,\ \gamma')\ \Sigma\tau\rho(O_3, 2(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2)).$$

Ἀλλά $2(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2) = 2\{(\vec{\delta}_1, \overrightarrow{O_1O_2}) + (\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{O_2O_1}) + (\overrightarrow{O_2O_1}, \vec{\delta}_2)\} =$

$$= 2\left\{\frac{\theta_1}{2} + \pi + \frac{\theta_2}{2}\right\} = \theta_1 + \theta_2 + 2\pi = \theta_1 + \theta_2 \pmod{2\pi}$$

Ἐπομένως ἡ παραπάνω ἰσότητα: $\Sigma\tau\rho(O_2, \theta_2) \circ \Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1) = \Sigma\tau\rho(O_3, 2(\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2))$, γράφεται: $\Sigma\tau\rho(O_2, \theta_2) \circ \Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1) = \Sigma\tau\rho(O_3, \theta_1 + \theta_2)$. Αὐτό ἐκφράζει τό (Θ), πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

Παρατήρηση. Τό γινόμενο $\Sigma\tau\rho(O_2, \theta_2) \circ \Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1)$ *δέν εἶναι ἀντιμεταθετικό*. Γιατί, ἄν κατασκευάσουμε τό κέντρο τῆς στροφῆς: $\Sigma\tau\rho(O_1, \theta_1) \circ \Sigma\tau\rho(O_2, \theta_2)$, βρίσκουμε ὅτι αὐτό εἶναι τό O'_3, πού εἶναι συμμετρικό τοῦ O_3, ὡς πρός τήν εὐθεία O_1O_2 (σχ. 250).

β') Ἄν $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$, τότε ἡ γωνία τῶν δύο προηγουμένων διανυσμάτων $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2$ εἶναι $(\theta_1 + \theta_2)/2 = 0 \pmod{\pi}$, $\vec{\delta}_1 \parallel \vec{\delta}_2 \Rightarrow (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2)$. Τό γινόμενο τῶν δύο στροφῶν ἰσοδυναμεῖ πρός τό γινόμενο τῶν δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν: $\Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_2) \circ \Sigma\upsilon\mu\mu(\varepsilon_1)$, ὅπως εἴδαμε, ἀλλά μέ παρ/λους ἄξονες. Ἐπομένως εἶναι μία μεταφορά (§ 250) καλά προσδιοριζόμενη, ἄν χαράξουμε τούς δύο παραπάνω ἄξονες (ε_1) καί (ε_2) μέ τόν ἴδιο κανόνα.

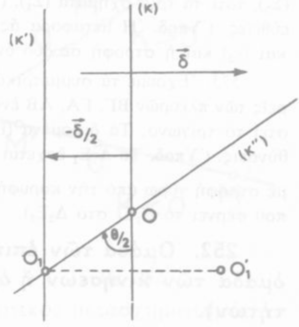
γ΄) Γιά νά βροῦμε τό κέντρο μιᾶς στροφῆς, πού εἶναι ἰσοδύναμη πρός τό γινόμενο $\text{Στρ}(O, \theta) \circ \text{Μετ}(\vec{\delta})$, φέρνουμε ἀπό τό O μιά εὐθεία $(\kappa) \perp \vec{\delta}$ καί

1ο) μεταφέρουμε τήν (κ) κατά $-\vec{\delta}/2$,

2ο) στρέφουμε τήν (κ) γύρω ἀπό τό O κατά $\theta/2$.

Τό κοινό σημεῖο O_1 αὐτῶν τῶν δύο εἰκόνων τῆς (κ) εἶναι τό κέντρο τῆς στροφῆς, πού εἶναι ἰσοδύναμη πρός τό γινόμενο $\sigma\,\text{τρ}(O, \theta) \circ \text{Μετ}(\vec{\delta})$.

Γιατί τό O_1, ὅταν μεταφερθεῖ κατά $\vec{\delta}$, ἔρχεται στό συμμετρικό, ὡς πρός τήν (κ), σημεῖο O_1' (σχ. 251) καί μετά, ὅταν στραφεῖ γύρω ἀπό τό O κατά θ, ξανάρχεται στήν ἀρχική του θέση O_1. Ἄρα τό O_1 εἶναι διπλό σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ $\text{Στρ}(O, \theta) \circ \text{Μετ}(\vec{\delta})$, ὁ ὁποῖος, ὅπως εἶναι γνωστό, εἶναι στροφή μέ γωνία θ (§ 240, ε΄), δηλ. τό O_1 εἶναι τό κέντρο τῆς στροφῆς - γινόμενο.



Σχ. 251

Σημείωση. Τό O_1' εἶναι διπλό σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ $\text{Μετ}(\vec{\delta}) \circ \text{Στρ}(O, \theta)$. Ἄρα τό γινόμενο στροφῆς - μεταφορᾶς *δέν εἶναι ἀντιμεταθετικό.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

567. Νά ἀποδείξετε ὅτι: i) Τό γινόμενο τριῶν ἀξονικῶν συμμετριῶν δέν εἶναι οὔτε στροφή οὔτε μεταφορά. ii) Ἄν οἱ τρεῖς ἄξονες συμμετρίας διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο O, τότε τό γινόμενο τῶν τριῶν ἀξονικῶν συμμετριῶν εἶναι ἀξονική συμμετρία. iii) Ἄν δύο ἀπό τούς τρεῖς ἄξονες τέμνονται στό O, ἐνῶ ὁ τρίτος δέ διέρχεται ἀπό τό O, τότε τό παραπάνω γινόμενο δέν εἶναι ἀξονική συμμετρία. (Ἀπό τό τελευταῖο αὐτό συμπεραίνουμε ὅτι δυό ἀντιρρόπως ἴσα σχήματα δέν εἶναι κατ' ἀνάγκη συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα).

568. Ἄν δυό σχήματα (Σ) καί (Σ΄) εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα καί ἔχουν ἕνα διπλό σημεῖο A, τότε εἶναι συμμετρικά πρός ἄξονα. (Ὑποδ. Ἔστω B σταθερό σημεῖο τοῦ (Σ) καί B΄ τό ἀντίστοιχό του στό (Σ΄). Φέρνουμε τή διχοτόμο (ε) τῆς $\widehat{BAB'}$. Ἄν $M \in (\Sigma')$ καί ἔχει ἀντίστοιχο τό $M' \in (\Sigma')$, τότε ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι τό M΄ συμπίπτει μέ τό συμμετρικό τοῦ M ὡς πρός (ε)).

569. Κάθε ἐπίπεδη μετατόπιση μπορεῖ μέ ἄπειρους τρόπους νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο δυό ἀξονικῶν συμμετριῶν.

570. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ ἔχει τή θετική φορά. Κατασκευάζουμε στό ἐξωτερικό τοῦ τριγώνου τά τρίγωνα AOB καί AO΄Γ ἰσοσκελή καί ὀρθογώνια στά O καί O΄. Νά ἀποδείξετε ὅτι στό γινόμενο τῶν στροφῶν $(O, \pi/2)$ καί $(O', \pi/2)$ τά B καί Γ εἶναι ὁμόλογα. Νά συμπεράνετε ὅτι τό κέντρο τῆς στροφῆς - γινόμενο εἶναι τό μέσο M τοῦ ΒΓ. Ἀπό τή κατασκευή τοῦ κέντρου τῆς στροφῆς - γινόμενο νά συμπεράνετε ὅτι τό τρίγωνο MOO΄ εἶναι ἰσοσκελές καί ὀρθογώνιο στό M.

571. Ἄν τό σχῆμα (Σ_2) προκύπτει ἀπό στροφή τοῦ (Σ_1) γύρω ἀπό τό O καί τό σχῆμα (Σ_3) προκύπτει ἀπό στροφή τοῦ (Σ_2) γύρω ἀπό τό O΄, τότε τά τρία σχήματα (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) εἶναι συμμετρικά ἑνός σχήματος ὡς πρός τρεῖς εὐθεῖες. (Ὑποδ. Ἔστω (ε_2) ἡ εὐθεία OO΄. Ἐκλέγουμε μιά εὐθεία (ε_1), πού διέρχεται ἀπό τό O ἔτσι, ὥστε ἡ πρώτη στροφή (γύρω ἀπό τό O) νά ἀναλύεται σέ δυό διαδοχικές συμμετρίες ὡς πρός τίς (ε_1) καί

(ε_2). Ἐκλέγουμε καί τρίτη εὐθεία (ε_3), πού διέρχεται ἀπό τό O΄ ἔτσι, ὥστε ἡ δεύτερη στροφή (γύρω ἀπό τό O΄) νά ἀναλύεται σέ δυό διαδοχικές συμμετρίες ὡς πρός τίς (ε_2) καί (ε_3). Ἔτσι ἀπό τό $M_1 \in (\Sigma_1)$ μεταβαίνουμε στό M μέ Συμμ(ε_1), ἀπό τό M στό $M_2 \in (\Sigma_2)$ μέ Συμμ (ε_2), ἀπό τό $M_2 \in (\Sigma_2)$ στό M μέ Συμμ(ε_2) καί ἀπό τό M στό $M_3 \in (\Sigma_3)$ μέ Συμμ(ε_3). Τά M_1, M_2, M_3 εἶναι, λοιπόν, συμμετρικά τοῦ M ὡς πρός τρεῖς εὐθεῖες).

572. Ἄν τό σχῆμα (Σ_1) δίνει μέ μεταφορά τό (Σ_2) καί τό (Σ_2) δίνει μέ στροφή τό (Σ_3), τότε τά τρία σχήματα (Σ_1), (Σ_2), (Σ_3) εἶναι συμμετρικά ἑνός σχήματος ὡς πρός τρεῖς εὐθεῖες. (**Ὑποδ.** Ἡ μεταφορά ἄς ἀναλυθεῖ σέ δυό διαδοχικές συμμετρίες ὡς πρός (ε_1) καί (ε_2) καί ἡ στροφή σέ δυό διαδοχικές συμμετρίες ὡς πρός (ε_2) καί (ε_3)).

573. Ἔχουμε τά συμμετρικά Δ_1E_1, Δ_2E_2, Δ_3E_3 ἑνός τμήματος ΔΕ ὡς πρός τούς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνόςτριγώνου ΑΒΓχωρίς νά δίνεται τό ΔΕ. Νά κατασκευαστεῖ τό τρίγωνο. Τά δεδομένα (ἴσα) τμήματα Δ_1E_1, Δ_2E_2, Δ_3E_3 ἔχουν διαφορετικές διευθύνσεις. (**Ὑποδ.** Τό Δ_1E_1 ἔρχεται στό Δ_2E_2 μέ δυό ἀξονικές συμμετρίες, πού ἰσοδυναμοῦν μέ στροφή γύρω ἀπό τήν κορυφή Γ, γωνίας $2\widehat{\Gamma}$. Ἔτσι ὁρίζεται τό Γ ὡς κέντρο στροφῆς, πού φέρνει τό Δ_1E_1 στό Δ_2E_2).

252. Ὁμάδα τῶν ἐπιπέδων ⋃ μή ἐπίπεδων μετατοπίσεων (ἤ ὁμάδα τῶν κινήσεων ἤ ὁμάδα τῶν ὁμορρόπων ⋃ ἀντιρρόπων ἰσοτήτων).

—Ἡ ἀξονική συμμετρία στό ἐπίπεδο εἶναι μή ἐπίπεδη μετατόπιση (§ 249). Ἐπίσης τό γινόμενο ἀξονικῆς συμμετρίας καί μεταφορᾶς ἤ στροφῆς εἶναι μή ἐπίπεδη μετατόπιση, γιατί διατηρεῖ τά μήκη καί ἀντιστρέφει τή φορά τῶν διευθυνόμενων κυρτῶν γωνιῶν.

Ἀντιστρόφως, κάθε **μή** ἐπίπεδη μετατόπιση T εἶναι γινόμενο μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας καί μιᾶς μεταφορᾶς ἤ στροφῆς. Γιατί μέ τήν T κάθε σχῆμα F μετασχηματίζεται σέ ἀντιρρόπως ἴσο σχῆμα F΄. Ἀλλά τό F μέ μιά ἀξονική συμμετρία μετασχηματίζεται σέ ἀντιρρόπως ἴσο σχῆμα F΄΄. Τό F΄΄ καί τό F΄, ἐπειδή εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα πρός τό F, εἶναι μεταξύ τους ὁμορρόπως ἴσα. Ἄρα τό F΄΄ μετασχηματίζεται στό F΄ μέ μεταφορά ἤ στροφή. Ὥστε τό F μετασχηματίζεται στό F΄ μέ μιά ἀξονική συμμετρία καί στή συνέχεια μέ μεταφορά ἤ στροφή. Ἄρα ἡ T ἰσοδυναμεῖ μέ τό γινόμενο μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας καί μιᾶς μεταφορᾶς ἤ στροφῆς (ἐπίπεδης κινήσεως).

Ὥστε τό σύνολο τῶν μή ἐπίπεδων μετατοπίσεων ταυτίζεται μέ τό σύνολο τῶν ἀξονικῶν συμμετριῶν U σύνολο γινομένων ἀξονικῶν συμμετριῶν καί ἐπίπεδων μετατοπίσεων.

— Τό σύνολο τῶν μή ἐπίπεδων μετατοπίσεων δέν ἀποτελεῖ ὁμάδα. Γιατί, π.χ., τό γινόμενο δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν (δηλ. μή ἐπίπεδων μετατοπίσεων) εἶναι στροφή ἤ μεταφορά, δηλ. ἐπίπεδη μετατόπιση. Ἄρα δέν ἀνήκει στό σύνολο τῶν μή ἐπίπεδων μετατοπίσεων. Ἄν ὅμως στό σύνολο τῶν μή ἐπίπεδων μετατοπίσεων ἐπισυνάψουμε καί τό σύνολο τῶν ἐπίπεδων μετατοπίσεων (μεταφορῶν - στροφῶν), τότε παίρνουμε ὡς ἕνωση ἕνα σύνολο $\mathfrak{S}$ μετασχηματισμῶν, πού διατηροῦν τά μήκη (ἰσομετρικοί μετασχηματισμοί) καί ἀποτελοῦν ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο», γιατί ἱκανοποιοῦνται οἱ τρεῖς ὅροι τῆς § 242.

IV. ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ

253. Ὁρισμός καί ἁπλές ἰδιότητες τῆς ὁμοιοθεσίας.

α΄) Ἄν δοθεῖ ἕνα σταθερό σημεῖο O καί ἕνας σχετικός ἀριθμός $k \neq 0$, τότε λέμε ὁμοιοθεσία (ἤ ὁμοθεσία) ἕνα σημειακό μετασχηματισμό, ὁ ὁποῖος σέ κάθε σημεῖο M προσεταιρίζει ἕνα καί μόνο σημεῖο M΄ τέτοιο, ὥστε:

(1) $$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}.$$

Τό O λέγεται κέντρο καί ὁ k λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας.

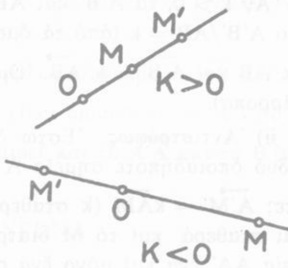
(Ἀπό τόν (1) προκύπτει ὅτι τά O, M, M′ εἶναι συνευθειακά).

Μποροῦμε νά παριστάνουμε τό μετασχηματισμό αὐτό μέ Ὁμ(O, k).

Ἄν $k>0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται *θετική* καί τά σημεῖα M καί M′ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ O.

Ἄν $k<0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται *ἀρνητική* καί τά σημεῖα M καί M′ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ O (σχ. 252).

Ἄν $k=-1$, τά M καί M′ εἶναι **συμμετρικά ὡς πρός τό O** καί ἡ ὁμοιοθεσία ἰσοδυναμεῖ μέ συμμετρία ὡς πρός τό κέντρο O.



Σχ. 252

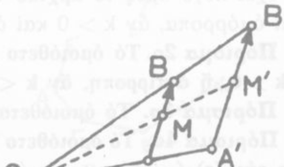
Ἄν $k=1$, τό M′ ταυτίζεται πάντοτε μέ τό M καί ὅλα τά σημεῖα εἶναι διπλά (ταυτοτικός μετασχηματισμός).

β′) Ἀναλλοίωτες. Ὅταν $k \neq 1$, τό κέντρο O εἶναι τό μόνο ἀναλλοίωτο (διπλό) σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ καί εἶναι φανερό ὅτι, **κάθε εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο O, εἶναι στό σύνολό της ἀναλλοίωτη. Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο: ἄν μιά εὐθεία παραμένει ἀναλλοίωτη κατά τήν ὁμοιοθεσία ($k \neq 1$), τότε περνᾶ ἀπό τό κέντρο O.** Γιατί, ἄν M εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας, τό M′ θά βρίσκεται πάλι πάνω στήν εὐθεία, ἀφοῦ αὐτή εἶναι ἀναλλοίωτη (βλ. § 239, ς′). Ἀλλά τά O, M, M′ εἶναι συνευθειακά. Ἄρα ἡ εὐθεία MM′ περνᾶ ἀπό τό κέντρο O.

γ′) Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός τῆς Ὁμ(O, k) ὑπάρχει καί εἶναι, ὅπως εἶναι φανερό, ἡ ὁμοιοθεσία $\left(O, \frac{1}{k}\right)$. Ἡ ὁμοιοθεσία δέν εἶναι ἐνελικτική, ἐκτός ἄν $k=\frac{1}{k}$, δηλαδή $k=\pm 1$. Δηλ. μόνο, ἄν εἶναι ταυτοτική ἤ συμμετρία ὡς πρός κέντρο.

254. Χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς ὁμοιοθεσίας.

(Θ)—**Μία ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνας μετασχηματισμός ὁμοιοθεσία, εἶναι νά μετασχηματίζει ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος σημείων A καί B σέ ἕνα ζεῦγος σημείων A′ καί B′ τέτοιων, ὥστε $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (k σταθ $\neq 1$).**



Σχ. 253

Ἀπόδειξη. i) Ἔστω (O, k) μιά ὁμοιοθεσία, Α καί Β δύο όποιαδήποτε σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί Α΄ καί Β΄ οἱ εἰκόνες τους (σχ. 253). Τότε, ἐπειδή $OA'/OA = OB'/OB = |k| \Rightarrow AB // A'B'$, εἴτε $k > 0$ εἴτε $k < 0$.

Ἄν $k > 0$, τά $\overrightarrow{A'B'}$ καί $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπα καί τά μέτρα τους ἔχουν λόγο $A'B'/AB = k$ (ἀπό τά ὅμοια τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΑ΄Β΄). Ἄρα $A'B' = k \cdot AB$ καί $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$. Ὁμοίως, ἄν $k < 0$ (τότε τά $\overrightarrow{A'B'}$ καί $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντίρροπα).

ii) **Ἀντιστρόφως:** Ἔστω ὅτι σέ κάποιο σημειακό μετασχηματισμό, σέ δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα Α καί Μ ἀντιστοιχοῦν τά Α΄ καί Μ΄ τέτοια, ὥστε: $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$ (k σταθερά $\neq 1$). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι τά Α καί Α΄ εἶναι σταθερά καί τό Μ διατρέχει τό ἐπίπεδο. Τότε ὑπάρχει πάνω στήν εὐθεία ΑΑ΄ ἕνα καί μόνο ἕνα σημεῖο Ο τέτοιο, ὥστε:

$$\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = k \Longleftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A'O} = k \cdot \overrightarrow{AO}.$$

Ἡ ἰσότητα $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM}$, πού ἀπ' τήν ὑπόθεση, πού κάναμε, ἰσχύει, γράφεται:

$$\overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM'} = k\{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OM}$$

Ἔχουμε λοιπόν:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{AO} + k \cdot \overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{A'O} = k \cdot \overrightarrow{AO} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM},$$

Δηλαδή ὁ μετασχηματισμός τοῦ Μ σέ Μ΄ εἶναι ὁμοιοθεσία (Ο, k).

Πόρισμα 1ο.—Ὅταν ἕνα σημεῖο Μ διατρέχει ἕνα δεσμευμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 253), τό ὁμοιόθετο (εἰκόνα) Μ΄ τοῦ Μ θά ἱκανοποιεῖ πάντοτε τή σχέση: $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow A'M' \parallel AM$. Ἑπομένως τό Μ΄ διαγράφει τό διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$. Ὥστε:

Τό ὁμοιόθετο (εἰκόνα) ἑνός δεσμευμένου διανύσματος εἶναι διάνυσμα, πού ἔχει λόγο πρός τό ἀρχικό τό λόγο τῆς ὁμοιοθεσίας. Τά δύο διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα, ἄν $k > 0$ καί ἀντίρροπα, ἄν $k < 0$.

Πόρισμα 2ο. Τό ὁμοιόθετο μιᾶς ἡμιευθείας εἶναι ἡμιευθεία ὁμόρροπη, ἄν $k > 0$, ἤ ἀντίρροπη, ἄν $k < 0$.

Πόρισμα 3ο. Τό ὁμοιόθετο μιᾶς γωνίας εἶναι μιά γωνία ἴση.

Πόρισμα 4ο. Τό ὁμοιόθετο μιᾶς εὐθείας (ε) εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη πρός τήν (ε) *(μέ τή γενικευμένη ἔννοια τῆς παραλληλίας).*

Πόρισμα 5ο. Τό ὁμοιόθετο μιᾶς περιφέρειας (Α, R) εἶναι περιφέρεια (Α΄, R΄), πού ἔχει κέντρο Α΄ τό ὁμοιόθετο τοῦ κέντρου Α καί ἀκτίνα $R' = R \cdot |k|$, ὅπου k ὁ λόγος ὁμοιοθεσίας.

Γιατί κάθε ἀκτίνα $\overrightarrow{AM}$ τῆς (A, R) μετασχηματίζεται σέ $\overrightarrow{A'M'} = k \cdot \overrightarrow{AM} \Rightarrow$ $\Rightarrow A'M' = |k| \cdot AM = |k| \cdot R = R'$.

Παρατήρηση. Ἀπό τό παραπάνω γίνεται φανερό ὅτι, *ἄν τό κέντρο ὁμοιοθεσίας O εἶναι σημεῖο τῆς (A, R), τότε τό ὁμοιόθετο τῆς (A,R) εἶναι μιά περιφέρεια, πού ἐφάπτεται στήν (A,R) στό O.*

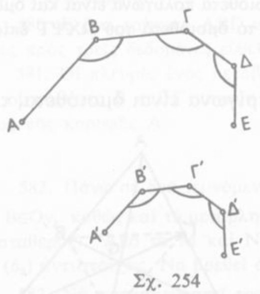
Πόρισμα 6ο. Ἄν δύο παράλληλα δεσμευμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχουν λόγο $\overrightarrow{A'B'} : \overrightarrow{AB} = k \neq 1$, τότε τό $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$ σέ μιά ὁμοιοθεσία μέ λόγο k καί κέντρο O, πού διαιρεῖ καί τό $\overrightarrow{A'A}$ καί τό $\overrightarrow{B'B}$ σέ ἀλγεβρικό λόγο k.

ΟΜΟΙΟΘΕΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

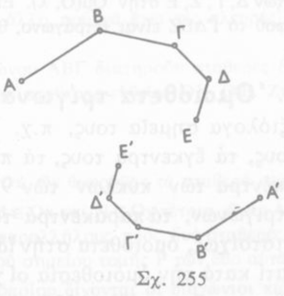
255. α΄) Δύο πολύγωνα λέγονται *ὁμοιόθετα μεταξύ τους*, ὅταν οἱ κορυφές τοῦ ἑνός εἶναι τά ὁμόλογα τῶν κορυφῶν τοῦ ἄλλου σέ μιά ὁμοιοθεσία. Εἶναι φανερό ὅτι τά ὁμοιόθετα πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ἔχουν τίς ὁμόλογες πλευρές τους παράλληλες καί ἔχουν λόγο ὁμοιότητας τό λόγο τῆς ὁμοιοθεσίας, ἄν τόν πάρουμε μέ ἀπόλυτη τιμή. (Ἔτσι μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία δημιουργεῖ πιστή εἰκόνα ἑνός σχήματος σέ μεγέθυνση ἤ σέ σμίκρυνση, ἀνάλογα μέ τό ἄν $k > 1$ ἤ $|k| < 1$).

β΄) Θά ἀποδείξουμε καί τό ἀντίστροφο:

Ἄν δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ... καί Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄... ἔχουν τίς ὁμόλογες πλευρές τους παρ/λες καί ὁμόρροπες, δηλαδή ἄν ἰσχύει : $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'} = k\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'} = k\overrightarrow{\Gamma\Delta}$..., ὅπου $k > 0$ καί $\neq 1$ (σχ. 254) ἤ τίς ἔχουν παράλληλες καί ἀντίρροπες, δηλ. $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'\Gamma'} = \lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$..., ὅπου $\lambda < 0$ (σχ. 255), τότε τά δύο πολύγωνα εἶναι ὁμοιόθετα μεταξύ τους. (Οἱ εὐθεῖες AA΄, BB΄, ΓΓ΄... συντρέχουν στό κέντρο ὁμοιοθεσίας).



Σχ. 254



Σχ. 255

Γιατί, σύμφωνα μέ τό 6ο πόρισμα τῆς § 254, τό $\overrightarrow{A'B'}$ τοῦ σχ. 254 εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας τήν τομή τῶν εὐθειῶν AA΄

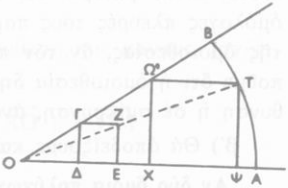
καί ΒΒ', ἡ ὁποία (τομή) εἶναι ἕνα σημεῖο Ο τέτοιο, ὥστε $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = k$

Ἀλλά εἶναι καί $\overrightarrow{B'\Gamma'}/\overrightarrow{B\Gamma} = k$. Γι' αὐτό τό $\overrightarrow{B'\Gamma'}$ εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma}$ ὡς πρός ἕνα κέντρο ὁμοιοθεσίας, πού διαιρεῖ τό Β'Β σέ ἀλγεβρικό λόγο k καί ἑπομένως συμπίπτει μέ τό Ο. Ὥστε τά Α', Β', Γ' εἶναι ὁμοιόθετα τῶν Α, Β, Γ στήν Ὁμ(Ο, k). Ὁμοίως τό $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ στήν ἴδια ὁμοιοθεσία κ.τ.λ. Γιά τήν περίπτωση τοῦ σχ. 255 ἰσχύουν τά ἴδια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Σέ ἕνα δεδομένο κυκλικό τομέα ΑΟΒ, μέ γωνία* $\widehat{AOB} < 90^\circ$, *νά ἐγγραφεῖ ἕνα τετράγωνο, πού ἔχει δύο κορυφές πάνω στήν ἀκτίνα ΟΑ, μία πάνω στό τόξο* $\widehat{AB}$ *καί μία πάνω στήν ἀκτίνα ΟΒ.*

Ἀνάλυση. Ἔστω ΧΨΤΩ τό τετράγωνο, πού ζητᾶμε (σχ. 256) καί πού ἔχει $\overrightarrow{X\Psi} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα τετράγωνο ΓΔΕΖ, πού εἶναι ὁμοιόθετο πρός αὐτό, πού ζητᾶμε, ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας Ο, τοῦ ὁποίου τήν κορυφή Γ, ὁμόλογη τῆς Ω, τήν ἐκλέγουμε αὐθαίρετα. Τότε παρατηροῦμε ὅτι τό ΓΔΕΖ εἶναι γνωστό τετράγωνο (Γ γνωστή, ΓΔ ⊥ ΟΑ, ΓΖ ⊥ καί = ΓΔ, $\overrightarrow{\Gamma Z} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OA}$). Ἀπό τό γνωστό πηγαίνουμε σ' αὐτό, πού ζητᾶμε, μέ μιά ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Ο.

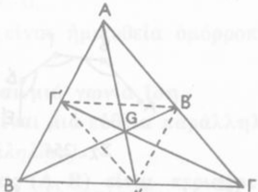
Σύνθεση. Κατασκευάζουμε τό τετράγωνο ΓΔΕΖ, ὅπως δείξαμε παραπάνω, φέρνουμε τήν εὐθεία ΟΖ καί ὁρίζουμε τό Τ πάνω στό τόξο $\widehat{AB}$. Φέρνουμε τήν ΤΩ ∥ ΟΑ, ΩΧ ⊥ ΟΑ, ΤΨ ⊥ ΟΑ καί ὁρίζουμε τό τετράγωνο ΤΩΧΨ, πού ζητᾶμε.



Σχ. 256

Ἀπόδειξη. Ἔχουμε (ἀλγεβρική διατύπωση τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ): $\frac{\overline{OX}}{\overline{O\Delta}} = \frac{\overline{O\Omega}}{\overline{O\Gamma}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OZ}} = \frac{\overline{O\Psi}}{\overline{OE}} = \lambda$ ἀπό τά ὁποῖα τά Χ, Ω, Τ, Ψ εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοιόθετα τῶν Δ, Γ, Ζ, Ε στήν Ὁμ(Ο, λ). Ἐπειδή τά ὁμοιόθετα πολύγωνα εἶναι καί ὅμοια, γι' αὐτό, ἀφοῦ τό ΓΔΕΖ εἶναι τετράγωνο, θά εἶναι καί τό ὁμοιόθετό του ΩΧΨΤ ἐπίσης τετράγωνο.

256. Ὁμοιόθετα τρίγωνα. Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι ὁμοιόθετα, τότε καί τά ἀξιόλογα σημεῖα τους, π.χ. τά ὀρθόκεντρά τους, τά ἔγκεντρά τους, τά περίκεντρά τους, τά κέντρα τῶν κύκλων τῶν 9 σημείων τῶν δύο τριγώνων, τά παράκεντρά τους κ.τ.λ., εἶναι, ἀντιστοίχως, ὁμοιόθετα στήν ἴδια ὁμοιοθεσία, γιατί κατά τήν ὁμοιοθεσία οἱ γωνίες καί οἱ λόγοι διατηροῦνται (βλ. § 225, α'). Π.χ. τό μεσοτρίγωνο Α'Β'Γ' ἑνός τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 257) εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς



Σχ. 257

πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας τό κέντρο βάρους G τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί μέ λόγο $-\frac{1}{2}=\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{G\Gamma'}}{\overline{G\Gamma}}$.

Ἀπ' αὐτό προκύπτουν διάφορα θεωρήματα.Π.χ. τό ὀρθόκεντρο Κ τοῦ μεσοτριγώνου Α΄Β΄Γ΄, δηλ. τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι τό ὁμοιόθετο τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στήν ὁμοιοθεσία$\left(G,-\frac{1}{2}\right)$. Ἑπομένως, ἄν H, G, K τό ὀρθόκεντρο, βαρύκεντρο, περίκεντρο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, ἰσχύει: $\overrightarrow{GK}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ (εὐθεία Euler).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

574. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νά ἐγγραφεῖ τετράγωνο, πού νά ἔχει δύο διαδοχικές κορυφές του πάνω στήν εὐθεία ΒΓ καί τίς δυό ἄλλες πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΑΓ. (Ὑποδ. Τό ζητούμενο εἶναι ὁμοιόθετο μέ κέντρο ὁμοιοθεσίας Α πρός τό γνωστό τετράγωνο, πού κατασκευάζουμε μέ πλευρά ΒΓ ἔξω ἀπό τό τρίγωνο).

575. Ἔχουμε δυό εὐθεῖες (δ_1), (δ_2) καί ἕνα σημεῖο Α. Μιά μεταβλητή εὐθεία μέ σταθερή διεύθυνση τέμνει τίς (δ_1) καί (δ_2) στά Β καί Γ. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν βαρυκέντρων τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

576. Σέ ἕναν κυκλικό τομέα νά ἐγγραφεῖ τετράγωνο, πού νά ἔχει δυό διαδοχικές κορυφές πάνω στό τόξο τοῦ τομέα καί τίς δυό ἄλλες πάνω στίς ἀκραῖες ἀκτίνες τοῦ τομέα.

577. Σέ ἕνα κυκλικό τμῆμα μικρότερο ἀπό ἡμικύκλιο νά ἐγγραφεῖ τετράγωνο, πού νά ἔχει δυό διαδοχικές κορυφές πάνω στό τόξο καί τίς ἄλλες δυό πάνω στή χορδή τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

578. Ἔχουμε δυό τεμνόμενες εὐθεῖες Οx, Οy, ἕνα σημεῖο Σ, μιά διεύθυνση (ε) καί μιά γωνία θ. Νά κατασκευάσετε τμῆμα ΑΒ || (ε), πού νά τελειώνει πάνω στίς Οx, Οy καί νά φαίνεται ἀπό τό Σ ὑπό γωνία θ.

579. Στό ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ δίνεται σημεῖο Ρ. Ἀπό τό μέσο Α΄ τῆς ΒΓ φέρνουμε παρ/λο πρός τή ΡΑ, ἀπό τό μέσο Β΄ τῆς ΓΑ παρ/λο πρός τή ΡΒ καί ἀπό τό μέσο Γ΄ τῆς ΑΒ παρ/λο πρός τή ΡΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ τρεῖς αὐτές παρ/λοι συντρέχουν σέ ἕνα σημεῖο.

580. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νά ἐγγραφεῖ ἄλλο, πού νά ἔχει τίς πλευρές του παράλληλες πρός τρεῖς δεδομένες εὐθεῖες.

581. Οἱ πλευρές ἑνός μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΒΓ διατηροῦν σταθερές διευθύνσεις, ἐνῶ οἱ κορυφές Β καί Γ μένουν πάνω σέ δυό σταθερές εὐθεῖες ΟΧ, ΟΨ. Ζητεῖται ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Α.

Β΄

582. Πάνω σέ δυό τεμνόμενους ἄξονες Οx, Οy θεωροῦμε τά σταθερά σημεῖα $A \in Ox$ καί $B \in Oy$, καθώς καί τά μεταβλητά σημεῖα $M \in Ox$ καί $N \in Oy$ τέτοια, ὥστε $\overline{AM}=k\cdot\overline{BN}$ (k σταθερός). Ἀπό τά Μ καί Ν φέρνουμε παραλλήλους πρός δυό σταθερές εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2) ἀντιστοίχως. Νά βρεθεῖ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς Ρ τῶν δύο αὐτῶν παρ/λων·

583. Νά κατασκευαστεῖ τραπέζιο, τοῦ ὁποίου δίνονται οἱ διαγώνιοι καί οἱ γωνίες·

584. Δίνονται δυό εὐθεῖες (δ_1), (δ_2) καί ἕνα σημεῖο Α. Νά κατασκευαστεῖ πάνω στή (δ_1) σημεῖο τέτοιο, ὥστε ἡ ἀπόστασή του ἀπό τό Α καί ἡ ἀπόστασή του ἀπό τή (δ_2) νά ἔχουν λόγο μ/ν (μ, ν δεδομένα τμήματα).

585. Νά κατασκευαστεῖ ἰσοσκελές τρίγωνο ΜΑΒ μέ ΜΑ = ΜΒ, στό ὁποῖο: ἡ κορυφή Α νά εἶναι δεδομένο σημεῖο, ἡ Μ νά βρίσκεται πάνω σέ δεδομένη εὐθεία (δ_1), ἡ Β νά βρίσκεται πάνω σέ ἄλλη δεδομένη εὐθεία (δ_2) καί ἡ πλευρά ΜΒ νά ἔχει δεδομένη διεύθυνση.

586. Ἕνα σημεῖο Ρ προβάλλεται πάνω στούς φορεῖς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ στά σημεῖα Α′, Β′, Γ′. Ἀπό τά μέσα Α″, Β″, Γ″ τῶν τμημάτων Β′Γ′, Γ′Α′, Α′Β′ φέρνουμε καθέτους στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ τρεῖς αὐτές κάθετοι συντρέχουν σ' ἕνα σημεῖο.

587. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μέ τίς πλευρές εἶναι τά Δ, Ε, Ζ καί οἱ ἀκτίνες ἐγγεγραμμένου καί περιγεγραμμένου στό τρίγωνο κύκλου εἶναι ἀντιστοίχως ρ καί R. Νά ἀποδείξετε, ὅτι:

i) Τό ἔγκεντρο Ο καί τό περίκεντρο Κ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ βρίσκονται σέ μιά εὐθεία μέ τό ὀρθόκεντρο Η′ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.

ii) Ἰσχύει ἡ σχέση $\overline{OK}/\overline{OH'} = -R/\rho$. (Ὑποδ. Νά ἀποδειχτεῖ πρῶτα ὅτι οἱ εὐθεῖες Euler τῶν τριγώνων ΔΕΖ καί $O_1O_2O_3$ ταυτίζονται, ὅπου O_1, O_2, O_3 τά παράκεντρα τοῦ ΑΒΓ).

ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΥΟ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΩΝ

257. Περίπτωση : $k_1 k_2 \neq 1$. Ἄς πάρουμε δυό ὁμοιοθεσίες: Ὁμ(O_1, k_1) καί Ὁμ(O_2, k_2). Ζητᾶμε νά προσδιορίσουμε ἕνα σημειακό μετασχηματισμό ἰσοδύναμο πρός τό γινόμενο αὐτῶν τῶν δυό ὁμοιοθεσιῶν.

Ἡ ὁμοιοθεσία (O_1, k_1) μετασχηματίζει ἕνα κάποιο σχῆμα F στό F_1 καί στή συνέχεια ἡ (O_2, k_2) μετασχηματίζει τό F_1 στό F_2. Ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος σημείων (Α, Β) τοῦ F μετατρέπεται διαδοχικά σέ (A_1, B_1) καί (A_2, B_2). Θά ἔχουμε (§ 254):

$$\overrightarrow{A_1B_1} = k_1 \cdot \overrightarrow{AB} \text{ καί } \overrightarrow{A_2B_2} = k_2 \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$$

ὁπότε: $$\overrightarrow{A_2B_2} = k_2(k_1\overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} = k_1k_2 \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Ἄν $\boxed{k_1k_2 \neq 1}$, ἡ τελευταία σχέση εἶναι χαρακτηριστική μιᾶς ὁμοιοθεσίας μέ λόγο k_1k_2 (§ 254). Δηλαδή, ἡ ἀλλεπάλληλη ἐκτέλεση δυό ὁμοιοθεσιῶν μέ λόγους k_1, k_2 ἰσοδυναμεῖ μέ μιά ὁμοιοθεσία, πού ἔχει λόγο k_1k_2.

Ἄν τά O_1 καί O_2 εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους, ἡ εὐθεία O_1O_2 εἶναι ἀναλλοίωτη στήν ὁμοιοθεσία (O_1, k_1) καί μετά στήν ὁμοιοθεσία (O_2, k_2), ἄρα καί στό γινόμενο τῶν δυό. Ἄρα περνᾶ ἀπό τό κέντρο O_3 τῆς ὁμοιοθεσίας - γινόμενο. Συμπεραίνουμε ὅτι **τά κέντρα τῶν τριῶν ὁμοιοθεσιῶν εἶναι συνευθειακά.**

Ἄν τά O_1 καί O_2 συμπίπτουν σέ ἕνα σημεῖο Ο, τό Ο μένει ἀναλλοίωτο καί στό γινόμενο τῶν δυό ὁμοιοθεσιῶν, ἄρα εἶναι τό κέντρο τῆς ὁμοιοθεσίας - γινόμενο.

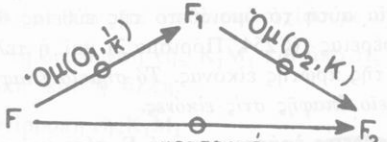
Τέλος, ἄν συμβολίσουμε μέ k τό λόγο τῆς τρίτης ὁμοιοθεσίας, (ἡ ὁποία προκύπτει ὡς γινόμενο τῶν δυό πρώτων), ἔχουμε:

$$k = k_1k_2 \Rightarrow k^2 = k_1k_2k \Rightarrow k_1k_2k > 0.$$

Ἡ τελευταία ἀνισότητα δείχνει ὅτι ἢ κανένας ἢ δυό ἀπ' τούς τρεῖς λόγους εἶναι ἀρνητικοί, δηλαδή μεταξύ τῶν τριῶν ὁμοιοθεσιῶν: Ὁμ(O_1, k_1), Ὁμ(O_2, k_2), Ὁμ(O_3, k) ὑπάρχουν ἤ δυό ἀρνητικές ἤ καμιά. Ἀπ' αὐτά συμπεραίνουμε τό:

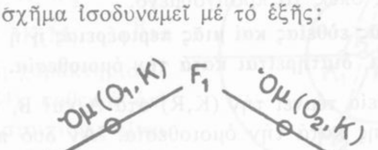
Θεώρημα.—Τό γινόμενο δύο ὁμοιοθεσιῶν μέ λόγους k_1 καί k_2 εἶναι μιά ὁμοιοθεσία μέ λόγο k_1k_2, ὅταν $k_1k_2 \neq 1$. Τό κέντρο αὐτῆς τῆς τρίτης ὁμοιοθεσίας βρίσκεται στήν ἴδια εὐθεία μέ τά κέντρα τῶν δυό πρώτων, ἄν αὐτά εἶναι διακεκριμένα μεταξύ τους, ἤ συμπίπτει μέ αὐτά, ἄν καί αὐτά συμπίπτουν. Τέλος ἀπό τίς παραπάνω τρεῖς ὁμοιοθεσίες μπορεῖ νά εἶναι ἀρνητικές μόνο δύο ἤ καμία.

258. Εἰδική περίπτωση: $k_1k_2 = 1$. Εἴδαμε στήν § 257 ὅτι ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος σημείων (A, B) μετασχηματίζεται, μέ τό γινόμενο τῶν δυό ὁμοιοθεσιῶν (O_1, k_1) καί (O_2, k_2), σ' ἕνα ζεῦγος σημείων (A_2, B_2) τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{A_2B_2}=k_1k_2\overrightarrow{AB}$. Ἄν $\boxed{k_1k_2=1}$, τότε $\boxed{\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB}}$ καί αὐτό χαρακτηρίζει μεταφορά (γιατί συνεπάγεται $\overrightarrow{AA_2}=\overrightarrow{BB_2}$). Δηλ. **Τό γινόμενο δυό ὁμοιοθεσιῶν μέ ἀντίστροφους λόγους εἶναι μεταφορά (ἤ ταυτοτικός μετασχηματισμός, ἄν τά κέντρα συμπίπτουν).** Τό γεγονός αὐτό διατυπώνεται σχηματικά ὡς ἑξῆς:



Σχ. 258

Τό παραπάνω σχῆμα ἰσοδυναμεῖ μέ τό ἑξῆς:



Σχ. 259

καί ἐκφράζει ὅτι τά δυό ἴσα σχήματα F καί F_2 εἶναι τά μετασχηματισμένα ἑνός καί τοῦ ἴδιου σχήματος F_1 σέ δυό ὁμοιοθεσίες μέ διαφορετικά κέντρα καί τόν ἴδιο λόγο k.

Ἀπό τίς παραπάνω δυό σχηματικές παραστάσεις προκύπτει τό:

Θεώρημα.—Δυό σχήματα ὁμοιόθετα ἑνός καί τοῦ ἴδιου σχήματος, ὡς πρός δυό διαφορετικά κέντρα, ἀλλά μέ τόν ἴδιο λόγο, προκύπτουν τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο μέ μεταφορά.

259. Συνέπειες. Τό παραπάνω θεώρημα δείχνει ὅτι, **γιά νά βροῦμε τό ὁμοιόθετο ἑνός σχήματος σέ μιά δεδομένη ὁμοιοθεσία (O_2, k), μποροῦμε νά βροῦμε πρῶτα τό ὁμοιόθετο τοῦ σχήματος ὡς πρός ἕνα αὐθαίρετο κέντρο O_1 (μέ τόν ἴδιο λόγο k) καί μετά νά ἐκτελέσουμε μιά μεταφορά** (βλ. σχ. 259). Αὐτό ἔχει διάφορες συνέπειες (μερικές γνωστές ὡς τώρα ἀπό τήν § 254).

i) Τό ὁμοιόθετο μιᾶς εὐθείας, πού δέν περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς ὁμοιοθεσίας, εἶναι εὐθεία παράλληλη.

Γιατί, ἄν ἐκλέξουμε ἕνα αὐθαίρετο κέντρο ὁμοιοθεσίας πάνω στήν εὐθεία, ἡ εὐθεία μένει στήν ἀρχή ἀναλλοίωτη κατά τήν ὁμοιοθεσία καί ἔπειτα ὑφίσταται μιά μεταφορά.

ii) Τό ὁμοιόθετο μιᾶς γωνίας εἶναι μιά γωνία ἴση.

Γιατί, ἄν ἐκλέξουμε ὡς αὐθαίρετο κέντρο ὁμοιοθεσίας τήν κορυφή τῆς γωνίας, τό ὁμοιόθετο τῆς γωνίας εἶναι ἡ ἴδια γωνία (ἄν $k > 0$) ἤ ἡ κατά κορυφή της (ἄν $k < 0$). Στή συνέχεια μέ μιά μεταφορά προκύπτει γωνία ἴση. Τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά μιά προσανατολισμένη γωνία.

iii) Ἄν μιά περιφέρεια καί μιά εὐθεία ἐφάπτονται, τότε καί τά ὁμοιόθετά τους ἐφάπτονται.

Γιατί, ἄν πάρουμε ὡς αὐθαίρετο κέντρο ὁμοιοθεσίας τό σημεῖο ἐπαφῆς, τότε στήν ὁμοιοθεσία αὐτή τό ὁμοιόθετο τῆς εὐθείας θά ἐφάπτεται στό ὁμοιόθετο τῆς περιφέρειας (§ 254, Πόρισμα 2) καί ἡ τελική εἰκόνα προκύπτει μέ μεταφορά τῆς πρώτης εἰκόνας. *Τό σημεῖο ἐπαφῆς στά ἀρχέτυπα ἔχει ὁμόλογο τό σημεῖο ἐπαφῆς στίς εἰκόνες.*

iv) Ἄν δυό περιφέρειες ἐφάπτονται στό Ε, τότε καί τά ὁμοιόθετά τους ἐφάπτονται στό Ε΄, πού εἶναι ἀκριβῶς τό ὁμόλογο τοῦ Ε.

Ἀποδεικνύεται, ὅπως τό προηγούμενο.

v΄) Ἡ γωνία μιᾶς εὐθείας καί μιᾶς περιφέρειας ἤ ἡ γωνία δυό περιφερειῶν, πού τέμνονται, διατηρεῖται κατά τήν ὁμοιοθεσία.

Γιατί, ἄν ἡ εὐθεία τέμνει τήν (K,R) στά Α καί Β, ἡ γωνία $\widehat{KAB}$ διατηρεῖ τό μέγεθός της κατά τήν ὁμοιοθεσία. Ἄν δυό περιφέρειες (K, R), (Λ, ρ) τέμνονται στό Μ, ἡ γωνία $\widehat{K M \Lambda}$ διατηρεῖ τό μέγεθός της κατά τήν ὁμοιοθεσία (ἀφοῦ τά ὁμοιόθετα τῶν κέντρων εἶναι τά κέντρα τῶν ὁμοιόθετων περιφερειῶν καί τό ὁμοιόθετο τοῦ Μ εἶναι κοινό σημεῖο τῶν δυό εἰκόνων).

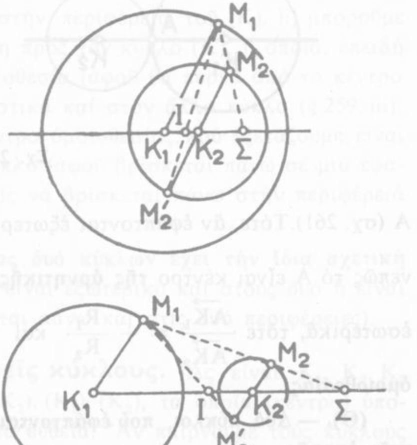
260. Τό σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν. Ἐπειδή τό γινόμενο δυό ὁμοιοθεσιῶν εἶναι δυνατό νά εἶναι μεταφορά (§ 258), δηλ. νά μήν ἀνήκει στό σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν, γι' αὐτό τό σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν δέν εἶναι ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη ο (κύκλος) (μέ τήν ὁποία σχηματίζεται τό γινόμενο). Ἄν ὅμως ἑνώσουμε τό σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν μέ τό σύνολο τῶν μεταφορῶν, τότε παίρνουμε ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη ο (κύκλος). Γιατί τό γινόμενο: Μετ($\overrightarrow{\delta}$) ο Ὁμ(O, k) μετασχηματίζει τό ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ πρῶτα στό $\overrightarrow{A'B'} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (§ 254) καί στή συνέχεια τό $\overrightarrow{A'B'}$ στό $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A'B'}$. Ὥστε τό γινόμενο τῶν δυό αὐτῶν μετασχηματισμῶν μετασχηματίζει τό ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σέ διάνυσμα $\overrightarrow{A''B''} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, ἄρα εἶναι ὁμοιοθεσία (§ 254). Ὁμοίως τό γινόμενο Ὁμ(O, k) ο Μετ($\overrightarrow{\delta}$) εἶναι ὁμοιοθεσία. Ἐπειδή καί τό γινόμενο δυό μεταφορῶν εἶναι μεταφορά καί τό γινόμενο δυό ὁμοιοθεσιῶν εἶναι ὁμοιοθεσία ἤ μεταφορά, ἔπεται ὅτι τό γινόμενο δυό μετασχηματισμῶν, πού ἀνήκουν στό σύνολο {ὁμοιοθεσιῶν ∪ μεταφορῶν}, εἶναι μετασχηματισμός, πού ἀνήκει στό ἴδιο σύνολο. Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός ἀνήκει ἐπίσης στό σύνολο (γιατί εἶναι ὁμοιοθεσία μέ $k = 1$) καί τό ἀντίστροφο κάθε μετασχηματισμοῦ αὐτοῦ τοῦ συνόλου ἀνήκει στό σύνολο· γι᾽ αὐτό τό σύνολο τῶν ὁμοιοθεσιῶν-μεταφορῶν εἶναι ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο» (§ 242).

ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ

261. Τά δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας. Ἄς πάρουμε στό ἐπίπεδο δύο περιφέρειες (K_1, R_1) καί (K_2, R_2). Σέ μιά ὁποιαδήποτε ἀκτίνα $\overrightarrow{K_1M_1}$ τῆς πρώτης μποροῦμε πάντοτε νά ἀντιστοιχίσουμε δυό ἀκτίνες τῆς δεύτερης, πού ἔχουν τή διεύθυνση τῆς $\overrightarrow{K_1M_1}$ καί ἀπό τίς ὁποῖες ἡ μιά, $\overrightarrow{K_2M_2}$, νά εἶναι ὁμόρροπη καί ἡ ἄλλη, $\overrightarrow{K_2M'_2}$, νά εἶναι ἀντίρροπη τῆς $\overrightarrow{K_1M_1}$ (σχ. 260). Θά ἔχουμε δηλ.:

$$\frac{\overrightarrow{K_2M_2}}{\overrightarrow{K_1M_1}} = \frac{R_2}{R_1} \quad \text{καί} \quad \frac{\overrightarrow{K_2M'_2}}{\overrightarrow{K_1M_1}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Σύμφωνα μέ τή χαρακτηριστική ἰδιότητα (§ 254), καθεμιά ἀπ᾽ αὐτές τίς δυό ἀντιστοιχίσεις εἶναι μιά ὁμοιοθεσία, ἄν $R_2/R_1 \neq 1$. Τό M_2 ἀντιστοιχεῖ πρός τό M_1 σέ μιά θετική ὁμοιοθεσία, τῆς ὁποίας κέντρο εἶναι ἡ τομή Σ τῆς εὐθείας, πού ἑνώνει τά ἄκρα τῶν παρ/λων καί ὁμόρροπων ἀκτίνων $\overrightarrow{K_1M_1}$, $\overrightarrow{K_2M_2}$ μέ τήν εὐθεία τῶν κέντρων. Τό M'_2 ἀντιστοιχεῖ πρός τό M_1 σέ μιά ἀρνητική ὁμοιοθεσία, τῆς ὁποίας κέντρο εἶναι ἡ τομή I τῆς



Σχ. 260

εὐθείας, πού ἑνώνει τά ἄκρα τῶν ἀντίρροπων ἀκτίνων μέ τή διάκεντρο.

Τά σταθερά σημεῖα Σ καί Ι ὁρίζονται ἀπό τίς σχέσεις:

$$\frac{\overline{\Sigma K_1}}{\overline{\Sigma K_2}} = \frac{R_1}{R_2} \text{ καί } \frac{\overline{IK_1}}{\overline{IK_2}} = -\frac{R_1}{R_2}.$$

Ἑπομένως ἰσχύει τό:

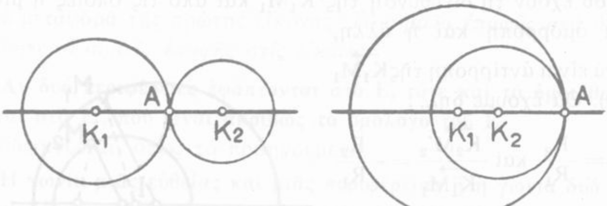
Θεώρημα.— Ἄν $R_1 \neq R_2$, οἱ δυό ὁμοεπίπεδοι κύκλοι (K_1, R_1) καί (K_2, R_2) εἶναι ὁμοιόθετοι μεταξύ τους κατά δυό τρόπους: σέ μιά θετική ὁμοιοθεσία καί σέ μιά ἀρνητική. Τά κέντρα Σ καί Ι αὐτῶν τῶν δυό ὁμοιοθεσιῶν διαιροῦν τή διάκεντρο $\overrightarrow{K_1K_2}$ ἐξωτερικά καί ἐσωτερικά σέ λόγο R_1/R_2.

Ἑπομένως $(K_1, K_2, I, \Sigma) = -1$ (ἁρμονική τετράδα).

262. Διάφορες παρατηρήσεις. 1ο) Ἄν $R_1 = R_2$, ἡ θετική ὁμοιοθεσία ἀντικαθίσταται μέ μιά μεταφορά κατά διάνυσμα $\overrightarrow{K_1K_2}$, ἐνῶ ἡ ἀρνητική ὁμοιοθεσία μέ λόγο -1 γίνεται συμμετρία ὡς πρός τό μέσο Ι τῆς διακέντρου.

2ο) Ἄν οἱ δυό κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι, τά δυό κέντρα ὁμοιοθεσίας συμπίπτουν μέ τό κοινό κέντρο τῶν κύκλων.

3ο) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ δυό κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ τους στό

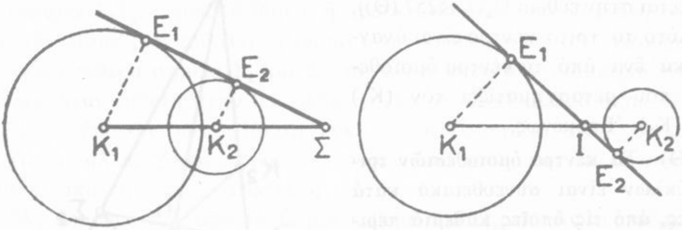


Σχ. 261

Α (σχ. 261). Τότε, ἄν ἐφάπτονται ἐξωτερικά, ἔχουμε: $\frac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{AK_2}} = -\frac{R_1}{R_2}$ καί συνεπῶς τό Α εἶναι κέντρο **τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας**. Ἄν ὅμως ἐφάπτονται ἐσωτερικά, τότε $\frac{\overrightarrow{AK_1}}{\overrightarrow{AK_2}} = +\frac{R_1}{R_2}$ καί τό Α εἶναι κέντρο **τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας.**

(Θ). — Δυό κύκλοι, πού ἐφάπτονται, ἔχουν κέντρο ὁμοιοθεσίας τό σημεῖο ἐπαφῆς.

4ο) Ἄς θεωρήσουμε δυό κύκλους, πού ἔχουν κοινές ἐφαπτόμενες. Ἄν E_1, E_2 εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς, τότε οἱ ἀκτίνες K_1E_1 καί K_2E_2 εἶναι παρ/λες καί συνεπῶς τά σημεῖα E_1 καί E_2 εἶναι ὁμοιόθετα μεταξύ τους. Ἄρα ἡ εὐθεία E_1E_2 περνᾶ ἀπό τό κέντρο ὁμοιοθεσίας (σχ. 262).



Σχ. 262

Ἄν ἡ κοινή ἐφαπτομένη εἶναι *ἐξωτερική*, οἱ ἀκτίνες $\overrightarrow{K_1E_1}$ καί $\overrightarrow{K_2E_2}$ εἶναι ὁμόρροπες καί ἡ εὐθεία E_1E_2 περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας. Ἄν ἡ κοινή ἐφαπτομένη εἶναι *ἐσωτερική*, οἱ ἀκτίνες εἶναι ἀντίρροπες καί ἡ εὐθεία E_1E_2 περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας. Δηλαδή:

Οἱ κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες, ἄν ὑπάρχουν, περνοῦν ἀπό τό κέντρο τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας.

Οἱ κοινές ἐσωτερικές ἐφαπτόμενες, ἄν ὑπάρχουν, περνοῦν ἀπό τό κέντρο τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας.

5ο) Ἄν ἕνα κέντρο ὁμοιοθεσίας δυό κύκλων εἶναι ἐξωτερικό ὡς πρός τόν ἕναν κύκλο (K), τότε i) δέ βρίσκεται πάνω στήν περιφέρεια τοῦ ἄλλου, γιατί τότε θά βρισκόταν καί πάνω στήν περιφέρεια τοῦ (K), ii) μποροῦμε νά φέρουμε ἀπ᾽ αὐτό μιά ἐφαπτομένη πρός τόν κύκλο (K), ἡ ὁποία, ἐπειδή θά εἶναι ἀναλλοίωτη κατά τήν ὁμοιοθεσία (ἀφοῦ θά περνᾶ ἀπό τό κέντρο ὁμοιοθεσίας), θά ἐφάπτεται ἀναγκαστικά καί στόν ἄλλο κύκλο (§ 259, iii). Ἀπ᾽ αὐτά συμπεραίνουμε ὅτι τό κέντρο ὁμοιοθεσίας, πού ἐξετάζουμε, εἶναι ἐξωτερικό καί ὡς πρός τόν ἄλλο κύκλο (ἀφοῦ βρίσκεται πάνω σέ μιά ἐφαπτομένη τοῦ δεύτερου κύκλου, χωρίς νά βρίσκεται πάνω στήν περιφέρειά του). Ἄρα ἰσχύει τό

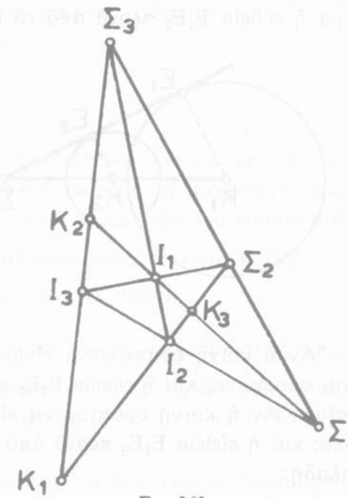
(Θ). — Κάθε κέντρο ὁμοιοθεσίας δυό κύκλων ἔχει τήν ἴδια σχετική θέση ὡς πρός τούς δυό κύκλους (ἤ εἶναι ἐξωτερικό καί στούς δυό ἤ εἶναι ἐσωτερικό καί στούς δυό ἤ βρίσκεται πάνω καί στίς δυό περιφέρειες).

263. Ὁμοιοθεσίες σέ τρεῖς κύκλους. Ἄς εἶναι K_1, K_2, K_3 τά κέντρα τριῶν ἄνισων κύκλων (K_1), (K_2), (K_3), τά ὁποῖα (κέντρα) ὑποθέτουμε ὅτι δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Ἄν παίρνουμε τούς κύκλους ἀνά δύο, τότε ὑπάρχουν 6 κέντρα ὁμοιοθεσίας. Μποροῦμε νά πᾶμε ἀπό τόν (K_1) στόν (K_2) μέ μιά ὁμοιοθεσία, μέ κέντρο O_1. Μποροῦμε ἐπίσης νά πᾶμε ἀπό τόν (K_2) στόν (K_3) μέ μιά δεύτερη ὁμοιοθεσία, πού ἔχει κέντρο

O_2. Ἔτσι πηγαίνουμε ἀπό τόν (K_1) στόν (K_3) μέ τό γινόμενο τῶν δυό προηγούμενων ὁμοιοθεσιῶν, τό ὁποῖο εἶναι πάλι ὁμοιοθεσία πού τό κέντρο της βρίσκεται στήν εὐθεία O_1O_2 (§257 (Θ)).

Αὐτό τό τρίτο κέντρο εἶναι ἀναγκαστικά ἕνα ἀπό τά κέντρα ὁμοιοθεσίας, πού μετασχηματίζει τόν (K_1) στόν (K_3). Ἑπομένως.

(Θ)—Τά κέντρα ὁμοιοθεσιῶν τριῶν κύκλων εἶναι συνευθειακά κατά τριάδες, ἀπό τίς ὁποῖες καθεμιά περιέχει ἤ δυό κέντρα ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας ἤ κανένα (§ 257, θεώρημα).



Σχ. 263

Δηλ. δυό κέντρα ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι συνευθειακά μέ ἕνα κέντρο θετικῆς ὁμοιοθεσίας. Ἔτσι στό σχ. 263, ἄν τά I_1, I_2, I_3 εἶναι κέντρα ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας καί τά Σ_1, Σ_2, Σ_3 θετικῆς, ἔχουμε τίς εὐθεῖες:

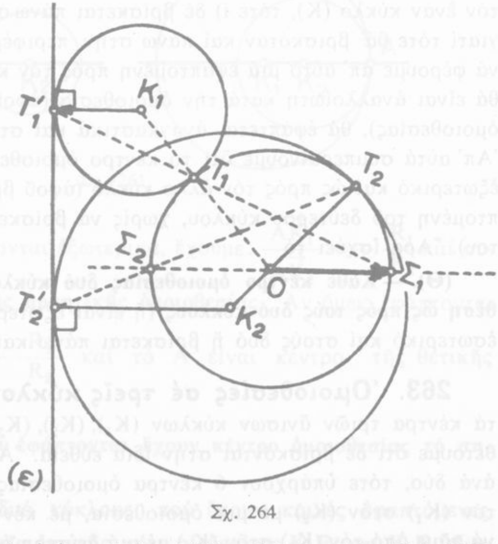
$$I_2I_3\Sigma_1,\ I_3I_1\Sigma_2,\ I_1I_2\Sigma_3$$
(ἄξονες ὁμοιοθεσιῶν)

Τά τρία κέντρα θετικῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι συνευθειακά καί ἔτσι ἔχουμε τήν εὐθεία $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ (ἄξονας ὁμοιοθεσιῶν).

Μιά ἄλλη ἀπόδειξη τοῦ παραπάνω (Θ) γίνεται μέ τό (Θ) τοῦ Μενελάου καί χωρίς τή χρήση τῆς § 257.

264. Κύκλοι, πού ἐφάπτονται σέ δεδομένο κύκλο καί δεδομένη εὐθεία.

Ἔχουμε ἕνα σταθερό κύκλο (O) καί μιά σταθερή εὐθεία (ε). Θεωροῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε κύκλο (K_1), πού ἐφάπτεται καί στόν (O) καί στήν (ε) στά σημεῖα T_1 καί T_1', ἀντίστοιχως. Τό T_1 εἶναι κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν δυό κύκλων (K_1) καί (O), γι᾽ αὐτό καί ἡ εὐθεία T_1T_1'



Σχ. 264

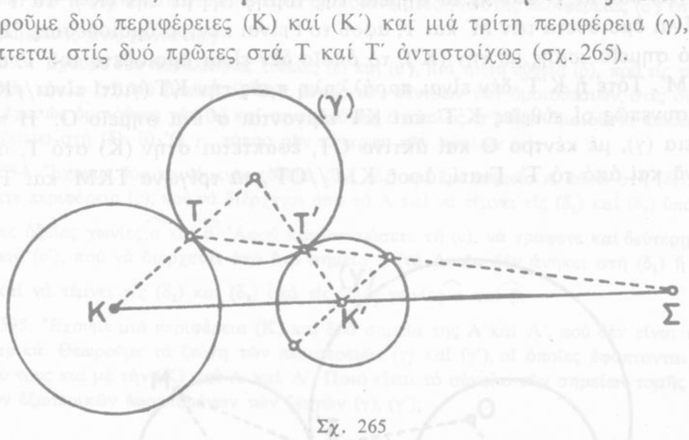
ξανακόβει τήν περιφέρεια (Ο) σέ κάποιο σημεῖο $Σ_1$, πού εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ T_1', ἄρα τέτοιο, ὥστε: $OΣ_1 // K_1T_1'$, δηλαδή $OΣ_1 \perp (ε)$. Δηλαδή ἡ χορδή τῶν ἐπαφῶν T_1T_1' περνᾶ (ἡ ἴδια ἤ ἡ προέκτασή της) ἀπό τό ἕνα ἤ τό ἄλλο ἄκρο τῆς διαμέτρου τοῦ (Ο), ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στήν (ε). Ἔχουμε, λοιπόν, δυό σταθερά σημεῖα $Σ_1$ καί $Σ_2$, πού εἶναι ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τοῦ (Ο), ἡ ὁποία εἶναι κάθετη στήν (ε). Ἀπό τό ἕνα ἀπ' αὐτά τά δυό ἄκρα περνᾶ ἡ χορδή τῶν ἐπαφῶν ὁποιουδήποτε κύκλου, πού ἐφάπτεται στόν (Ο) καί τῆν (ε). Τό ὅτι ἄλλες χορδές ἐπαφῶν περνοῦν ἀπό τό $Σ_1$ καί ἄλλες ἀπό τό $Σ_2$ φαίνεται ἀπό τήν ἑξῆς κατασκευή:

Ἄς φέρουμε π.χ. ἀπό τό $Σ_2$ μιά εὐθεία, πού τέμνει τήν περιφέρεια (Ο) στό T_2 καί τήν (ε) καί T_2'. Ἡ κάθετος στήν (ε) στό T_2' τέμνει τήν εὐθεία T_2O σ' ἕνα σημεῖο K_2. Τά K_2 καί T_2' εἶναι ὁμοιόθετα τῶν Ο καί $Σ_2$ σέ μιά ὁμοιοθεσία μέ κέντρο T_2 (γιατί $K_2T_2' // OΣ_2$). Ἄρα ὁ κύκλος μέ κέντρο K_2 καί ἀκτίνα K_2T_2' εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ (Ο) ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας T_2 καί μέ λόγο ὁμοιοθεσίας $\overline{K_2T'}_2/\overline{OΣ}_2$. Συνεπῶς ὁ κύκλος αὐτός (K_2, K_2T_2') ἐφάπτεται στόν (Ο) στό T_2 (§ 254 παρατ.).

Ἐπίσης ἐφάπτεται καί στήν (ε) καί ἡ χορδή τῶν ἐπαφῶν $T_2'T_2$ περνᾶ ἀπό τό $Σ_2$. Κατά τόν ἴδιο τρόπο σκεπτόμαστε καί γιά τό $Σ_1$. Ὑπάρχουν, λοιπόν, δυό οἰκογένειες κύκλων, πού ἐφάπτονται στήν (ε) καί στόν (Ο). (Ἐκτός ἄν ὁ (Ο) ἐφάπτεται στήν (ε), ὁπότε ὑπάρχει μόνο ἡ μιά οἰκογένεια)·

265. Κύκλοι, πού ἐφάπτονται σέ δυό δεδομένους κύκλους.

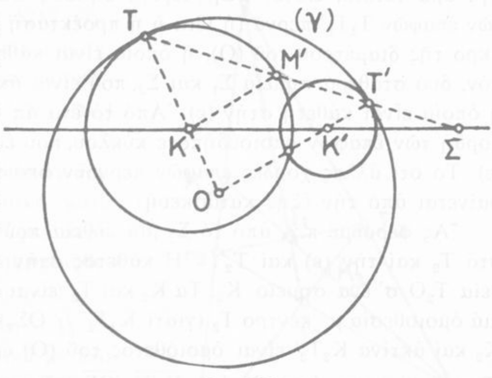
Θεωροῦμε δυό περιφέρειες (Κ) καί (Κ′) καί μιά τρίτη περιφέρεια (γ), πού ἐφάπτεται στίς δυό πρῶτες στά Τ καί Τ′ ἀντιστοίχως (σχ. 265).



Σχ. 265

Ἐπειδή τό Τ εἶναι κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν (Κ) καί (γ) καί τό Τ′ εἶναι κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν (γ) καί (Κ′) (§ 262, 3ο), γι' αὐτό ἡ εὐθεία ΤΤ′ περνᾶ ἀπό τό ἕνα ἀπ' τά κέντρα ὁμοιοθεσίας τῶν (Κ) καί (Κ′) (βλ. § 263).

Ἄν οἱ ἐπαφές τῆς (γ) μέ τίς (Κ) καί (Κ′) εἶναι τῆς ἴδιας φύσεως (δηλ. ἄν ἡ (γ) ἐφάπτεται καί στίς δυό ἐξωτερικά ἤ καί στίς δυό ἐσωτερικά), τότε τά Τ καί Τ΄ εἶναι κέντρα ὁμόσημων ὁμοιοθεσιῶν καί ἡ εὐθεία ΤΤ΄ περνᾶ ἀπό τό κέντρο τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας τῶν (Κ) καί (Κ΄), ὅπως στά σχ. 265, 266, (βλ. § 263).

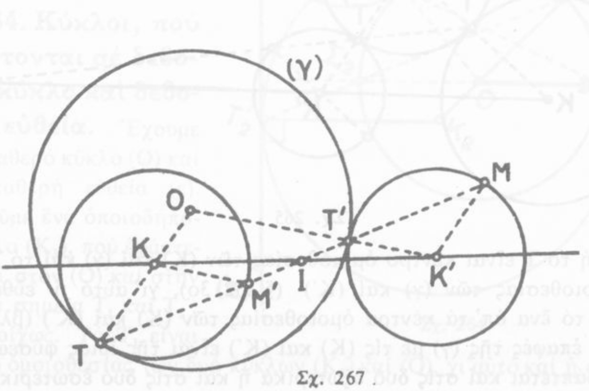


Σχ. 266

Ἄν οἱ ἐπαφές τῆς (γ) μέ τίς (Κ) καί (Κ΄) εἶναι διαφορετικῆς φύσεως, τότε τά Τ καί Τ΄ εἶναι κέντρα ἑτερόσημων ὁμοιοθεσιῶν και ἡ εὐθεία ΤΤ΄ περνᾶ ἀπό τό κέντρο Ι τῆς ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας τῶν δυό κύκλων (Κ) καί (Κ΄), ὅπως στό σχῆμα 267 (βλ. § 263).

Ἀντιστρόφως, μποροῦμε νά κατασκευάσουμε ἕναν κύκλο, πού νά ἐφάπτεται στούς (Κ) καί (Κ΄), φέρνοντας ἀπό τό ἕνα κέντρο δμοιοθεσίας, Ι, τῶν (Κ) καί (Κ΄) τό διαφορετικό ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς τους (ἄν τυχόν οἱ Κ καί Κ΄ ἐφάπτονται), μιά κοινή τέμνουσα (σχ. 267).

Ἄς εἶναι τά Τ καί Μ΄ τά σημεῖα τῆς τομῆς τῆς κοινῆς τέμνουσας μέ τήν (Κ) καί τά Τ΄ καί Μ τά σημεῖα τῆς τομῆς της μέ τήν (Κ΄). Τά Τ΄ καί Μ εἶναι ὁμοιόθετα τῶν Μ΄ καί Τ, ἀφοῦ τό Ι εἶναι κέντρο ὁμοιοθεσίας. Ἔστω Τ΄ τό σημεῖο τομῆς μέ τήν (Κ΄), τό ὁποῖο δέν εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ Τ, ἀλλά τοῦ Μ΄. Τότε ἡ Κ΄Τ΄ δέν εἶναι παράλληλη πρός τήν ΚΤ (γιατί εἶναι//ΚΜ΄) καί συνεπῶς οἱ εὐθεῖες Κ΄Τ΄ καί ΚΤ τέμνονται σ᾽ ἕνα σημεῖο Ο. Ἡ περιφέρεια (γ), μέ κέντρο Ο καί ἀκτίνα ΟΤ, ἐφάπτεται στήν (Κ) στό Τ, ἀλλά περνᾶ καί ἀπό τό Τ΄. Γιατί, ἀφοῦ ΚΜ΄//ΟΤ΄, τά τρίγωνα ΤΚΜ΄ καί ΤΟΤ΄



Σχ. 267

εἶναι ὅμοια καί, ἐπειδή τό τρίγωνο ΚΤΜ′ εἶναι ἰσοσκελές, θά εἶναι καί τό ὅμοιό του ΟΤΤ′ ἰσοσκελές, ἄρα ΟΤ = ΟΤ′. Ἡ (γ) λοιπόν ἐφάπτεται καί στούς δύο κύκλους (Κ) καί (Κ′).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

588. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (Ο, R) καί ἕνα σημεῖο Α, πού δέν ἀνήκει στήν (Ο, R)· Θεωροῦμε ἕνα μεταβλητό σημεῖο Μ τῆς (Ο, R) καί ζητοῦμε τό γ. τόπο τῆς τομῆς τῆς εὐθείας ΑΜ μέ τίς διχοτόμους τῆς $\widehat{AOM}$.

589. Ἔχουμε δυό ὁμόκεντρες περιφέρειες. Ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο Σ τῆς μικρότερης φέρνουμε μιά χορδή ΣΑ αὐτῆς τῆς μικρότερης καί κατόπιν μιά χορδή ΒΣΓ τῆς μεγαλύτερης ⊥ ΣΑ. Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ, ἀφοῦ πρῶτα ἀποδείξετε ὅτι τό κ. βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερό, ὅταν ἡ ΣΑ στρέφεται γύρω ἀπό τό Σ.

590. Δυό περιφέρειες ἐφάπτονται στό Α. Μιά εὐθεία τέμνει τήν πρώτη στό Μ καί Ν. Οἱ εὐθεῖες ΑΜ, ΑΝ ξανατέμνουν τή δεύτερη στά Μ′ καί Ν′. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἡ εὐθεία ΜΝ μεταβάλλεται, ὥστε νά διέρχεται πάντοτε ἀπό σταθερό σημεῖο Σ, τότε καί ἡ εὐθεία Μ′Ν′ διέρχεται ἐπίσης ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο.

591. Ἔχουμε δυό κύκλους καί ἕνα σημεῖο Α. Νά κατασκευάσετε δυό ἐφαπτόμενες τῶν κύκλων, πού νά εἶναι παράλληλες μεταξύ τους καί νά ἀπέχουν ἀπό τό Α ἀποστάσεις, πού ἔχουν λόγο μ : ν (δεδομένο).

592. Στό ἐσωτερικό μιᾶς γωνίας $\widehat{xOy}$ ἔχουμε ἕνα σημεῖο Σ. Νά κατασκευάσετε περιφέρεια (c), πού διέρχεται ἀπό τό Σ καί εἶναι ἐφαπτόμενη στίς δυό πλευρές τῆς γωνίας, μέ βάση τήν παρατήρηση ὅτι ἡ (c) εἶναι ὁμοιόθετη μιᾶς γνωστῆς περιφέρειας (c′) ἐπίσης ἐγγεγραμμένης στή γωνία $\widehat{xOy}$.

593. Ἔχουμε δυό παράλληλες εὐθεῖες (ε) καί (ε′), μιά τρίτη εὐθεία (δ), πού τίς τέμνει καί ἕναν κύκλο (γ′). Νά βρεθεῖ: i) Ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοθεσιῶν, στίς ὁποῖες ἡ (ε′) ἔχει ὡς ὁμοιόθετη τήν (ε) καί ταυτοχρόνως ὁ κύκλος (γ′) ἔχει ὁμοιόθετο κύκλο (γ) ἐφαπτόμενο στή (δ). ii) Ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων (γ);

594. Ἔχουμε δύο τεμνόμενες εὐθεῖες (δ_1), (δ_2) καί ἕνα σημεῖο Α πάνω στή (δ_1). Νά γράψετε περιφέρεια (c), πού νά διέρχεται ἀπό τό Α καί νά τέμνει τίς (δ_1) καί (δ_2) ὑπό δεδομένες ὀξεῖες γωνίες $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$. Ἀφοῦ κατασκευάσετε τή (c), νά γράψετε καί δεύτερη περιφέρεια (c′), πού νά διέρχεται ἀπό ἕνα σημεῖο Σ (τό ὁποῖο δέν ἀνήκει στή (δ_1) ἤ στή (δ_2)) καί νά τέμνει τίς (δ_1) καί (δ_2) ὑπό τίς ἴδιες γωνίες $\widehat{\alpha}$ καί $\widehat{\beta}$.

595. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (Κ) καί δυό σημεῖα της Α καί Α′, πού δέν εἶναι ἀντιδιαμετρικά. Θεωροῦμε τά ζεύγη τῶν περιφερειῶν (γ) καί (γ′), οἱ ὁποῖες ἐφάπτονται καί μεταξύ τους καί μέ τήν (Κ) στά Α καί Α′. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων τομῆς τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων τῶν ζευγῶν (γ), (γ′);

Β′.

596. Ἔχουμε μιά εὐθεία (ε) καί δυό σημεῖα Α καί Β ἔξω ἀπ' αὐτήν. Νά βρεῖτε σημεῖο Μ τῆς (ε) τέτοιο, ὥστε $|\widehat{MAB} - \widehat{MBA}| = \theta$ (δεδομένη γωνία κυρτή). (Ὑποδ. Ἄν Μ′ τό συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ ΑΒ, τότε εἶναι $\widehat{M'BM} = \theta$, τό Μ′

βρίσκεται σέ γνωστή εὐθεία συμμετρική τῆς (ε) ὡς πρός τή μεσοκάθετο καί ΜΜ΄ || ΑΒ. Ἀναγόμαστε στήν ἄσκ. 577).

597. Ἔχουμε δυό περιφέρειες (Κ) καί (Κ΄) ἐξωτερικές μεταξύ τους καί ἕνα σημεῖο Σ, πού δέ βρίσκεται στή διάκεντρο ἤ στίς περιφέρειες. Νά κατασκευαστοῦν δυό παράλληλες καί ὁμόρροπες ἀκτίνες τῶν (Κ) καί (Κ΄), ἔστω οἱ $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{K'A'}$, πού νά φαίνονται ἀπό τό Σ ὑπό ἴσες διευθυνόμενες γωνίες: $(\overrightarrow{\Sigma K}, \overrightarrow{\Sigma A}) = (\overrightarrow{\Sigma K'}, \overrightarrow{\Sigma A'})$.

598. Πάνω στήν πλευρά Οx μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$ παίρνουμε τά σταθερά σημεῖα Β καί Γ. Ἕνα μεταβλητό σημεῖο Α διατρέχει τήν Οy. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ τετραγώνου, πού εἶναι ἐγγεγραμμένο στό τρίγωνο ΑΒΓ καί ἔχει μιά πλευρά πάνω στή ΒΓ;

V. ΕΠΙΠΕΔΗ ΟΜΟΡΡΟΠΗ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

266. α΄) Γινόμενο μιᾶς ὁμοιοθεσίας καὶ μιᾶς ἐπίπεδης μετατοπίσεως. Ἄς ἐξετάσουμε τό γινόμενο μιᾶς ὁμοιοθεσίας Ὁμ(Ο,k) καί μιᾶς ἐπίπεδης μετατοπίσεως Η στό ἴδιο ἐπίπεδο. Ἡ μετατόπιση Η εἶναι ἤ στροφή μέ γωνία θ καί ἕνα ὁποιοδήποτε κέντρο ἤ μεταφορά.

Γενικά λέμε ὅτι ἡ θ εἶναι ἡ γωνία τῆς ἐπίπεδης μετατοπίσεως Η καί βάζουμε $\theta = 0 \pmod{2\pi}$ μόνο, ὅταν ἡ Η εἶναι μεταφορά.

Ἄν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀρνητική, δηλ. $k = -k' < 0$, τότε ἰσοδυναμεῖ μέ τό γινόμενο τῆς θετικῆς ὁμοιοθεσίας Ὁμ(Ο, k΄) καί τῆς στροφῆς Στρ(Ο, π). Ἑπομένως:
Η ∘ Ὁμ(Ο, k) = Η ∘ Ὁμ(Ο, — k΄) (ὅπου $k' > 0$) = Η ∘ {Στρ(Ο, π) ∘ Ὁμ(Ο,k΄)} = (ἐξαιτίας τῆς προσεταιριστικότητας τοῦ γινομένου) {Η ∘ Στρ(Ο, π)} ∘ Ὁμ(Ο, k΄) = Η΄ ∘ Ὁμ(Ο, k΄), γιατί τό γινόμενο Η ∘ Στρ(Ο, π) εἶναι μιά ἐπίπεδη μετατόπιση Η΄. Δηλαδή τό γινόμενο ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας καί ἐπίπεδης μετατοπίσεως ἀνάγεται σέ γινόμενο θετικῆς ὁμοιοθεσίας καί ἐπίπεδης μετατοπίσεως. Γι᾽ αὐτό μποροῦμε νά ἀρκεστοῦμε σέ θετικές ὁμοιοθεσίες.

β΄) Ὁρισμός. Ἐπίπεδη ὁμόρροπη ὁμοιότητα λέγεται τό γινόμενο μιᾶς θετικῆς ὁμοιοθεσίας καί μιᾶς ἐπίπεδης μετατοπίσεως στό ἴδιο ἐπίπεδο (Γιά συντομία: *«ὁμοιότητα»*).

γ΄) Μιά εὐθεία μετασχηματίζεται μέ τήν ὁμοιοθεσία σέ εὐθεία καί μέ τήν ἐπίπεδη μετατόπιση πάλι σέ εὐθεία. Ἑπομένως *μιά ὁμοιότητα μετασχηματίζει μιά εὐθεία σέ ἄλλη εὐθεία.*

Ὁμοίως *ἕνα διάνυσμα μετασχηματίζεται μέ μιά ὁμοιότητα :* Η ∘ Ομ(Ο, k *σέ ἄλλο διάνυσμα, ἕνας κύκλος (Ο, R) σέ ἄλλο κύκλο* (Ο΄, R΄), ὅπου τό Ο. εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Ο καί ὁ λόγος $R'/R = k$.

Ἡ ὁμοιότητα διατηρεῖ τίς γωνίες κατά μέγεθος καί φορά, γιατί αὐτό συμβαίνει καί στήν ὁμοιοθεσία καί στήν ἐπίπεδη μετατόπιση.

δ΄) Τό σχῆμα, πού ἔχει προκύψει ἀπό μιά ὁμοιότητα, λέγεται **ὅμοιο** πρός τό ἀρχικό.

267. Χαρακτηριστική ἰδιότητα. Ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ μετασχηματίζεται μέ τήν ὁμοιοθεσία (O, k) σέ διάνυσμα $\overrightarrow{A_1M_1}$ τέτοιο, ὥστε $\overrightarrow{A_1M_1} = k\cdot\overrightarrow{AM}$ (σχ. 268). Ἐπειδή $k > 0$, τά $\overrightarrow{AM}$ καί $\overrightarrow{A_1M_1}$, εἶναι ὁμόρροπα καί συνεπῶς:

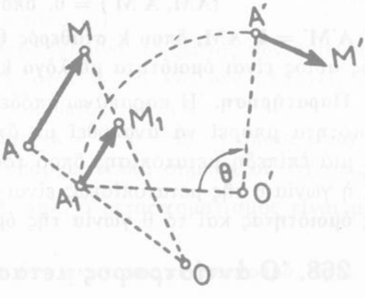
(1) $A_1M_1 = k\cdot AM$ καί

$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) = 0$

Κατόπιν μέ στροφή (O′, θ) (ἤ μεταφορά) τό $\overrightarrow{A_1M_1}$ μετασχηματίζεται στό $\overrightarrow{A'M'}$ τέτοιο, ὥστε:

(2) $A'M' = A_1M_1$ καί

$(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}$.



Σχ. 268

Ἀπό τίς (1) καί (2) συμπεραίνουμε ὅτι:

$$A'M' = k\cdot AM \text{ καί } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

(Τό θ = 0, ἄν ἀντί γιά στροφή ἐκτελεστεῖ μεταφορά). Ἔχουμε, λοιπόν:

ΘΕΩΡΗΜΑ I. — Μιά ὁμοιότητα μέ λόγο k καί γωνία θ μετασχηματίζει ἕνα ὁποιοδήποτε ζεῦγος σημείων A,M σέ ἕνα ζεῦγος σημείων A′,M′ τέτοιων, ὥστε:

$$\mathbf{A'M' = k\cdot AM \text{ καί } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta \pmod{2\pi}}$$

Ἀντίστροφο. Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα σημειακό μετασχηματισμό, πού προσεταιρίζει σέ ἕνα σταθερό σημεῖο A τό σημεῖο A′ καί σέ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο M τό σημεῖο M′ ἔτσι, ὥστε: $A'M' = k\cdot AM$ καί $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$, ὅπου k θετικός ἀριθμός καί θ μιά δεδομένη γωνία.

Ἄς ἐκτελέσουμε τώρα μιά ὁμοιοθεσία μέ λόγο k καί ἕνα ὁποιοδήποτε κέντρο. Θά πάρουμε ὡς εἰκόνα τοῦ $\overrightarrow{AM}$ ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{A_1M_1}$ τέτοιο, ὥστε:

(3) $\qquad A_1M_1 = k\cdot AM$ καί $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) = 0$.

Ἀλλά ἀπ' τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $A'M' = k\cdot AM$ καί $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$. Ἀπ' αὐτά καί τίς (3) παίρνουμε:

(4) $\qquad A_1M_1 = A'M'$ καί $(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$.

Οἱ δυό σχέσεις (4) δείχνουν ὅτι τό A′M′ προκύπτει ἀπό τό A_1M_1 μέ μιά στροφή κατά (διευθυνόμενη) γωνία θ, ἄν $\theta \neq 0$ ἤ μέ μεταφορά, ἄν $\theta = 0$, δηλ. προκύπτει μέ ἐπίπεδη μετατόπιση. Ὥστε τελικά ὁ μετασχηματισμός τοῦ $\overrightarrow{AM}$ σέ $\overrightarrow{A'M'}$ κατορθώνεται μέ τή διαδοχική ἐκτέλεση μιᾶς ὁμοιοθεσίας καί μιᾶς ἐπίπεδης μετατοπίσεως. Ἄρα εἶναι ὁμοιότητα. Δηλ. ἰσχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ. — Ἂν ἕνας σημειακός μετασχηματισμός προσεταιρίζει σέ ἕνα σταθερό σημεῖο Α ἕνα σημεῖο Α΄ καί σ᾽ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ ἕνα σημεῖο Μ΄ ἔτσι, ὥστε:

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta, \text{ ὅπου } \theta \text{ σταθερή γωνία}$$

καί $A'M' = k \cdot AM$, ὅπου k σταθερός θετικός ἀριθμός, τότε ὁ μετασχηματισμός αὐτός εἶναι ὁμοιότητα μέ λόγο k καί γωνία θ.

Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη τοῦ ἀντίστροφου δείχνει ὅτι μιά ὁμοιότητα μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ μέ ἄπειρους τρόπους σέ μιά ὁμοιοθεσία καί μιά ἐπίπεδη μετατόπιση, ὅπου τόσο ὁ λόγος k τῆς ὁμοιοθεσίας, ὅσο καί ἡ γωνία θ τῆς μετατοπίσεως εἶναι πάντοτε τά ἴδια. Τό k λέγεται **λόγος τῆς ὁμοιότητας** καί τό θ **γωνία τῆς ὁμοιότητας.**

268. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός. Οἱ χαρακτηριστικές συνθῆκες τῆς ὁμοιότητας, πού βρήκαμε παραπάνω: $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ καί $A'M' = k \cdot AM$, ὅταν τίς γράψουμε:

$$(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{AM}) = -\theta, \quad AM = \frac{1}{k} A'M',$$

δείχνουν ὅτι ἡ μετάβαση ἀπό τό Α΄Μ΄ στό ΑΜ, δηλ. ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός ὑπάρχει καί εἶναι ὁμοιότητα μέ λόγο $1/k$ καί γωνία $-\theta$.

269. Διπλό σημεῖο (ἤ «κέντρο») μιᾶς ὁμοιότητας.

Μιά ὁμοιότητα ὁρίζεται, *ἄν δοθοῦν δυό ὁμόλογα σημεῖα Α καί Α΄, ὁ λόγος* k *καί ἡ γωνία θ.* Πράγματι ἡ σχέση (§ 267)

(1) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$ ὁρίζει τήν ἡμιευθεία (Α΄, Μ΄) καί ἡ

(2) $A'M' = k \cdot AM$ ὁρίζει τό Μ΄ πάνω σ᾽ αὐτή τήν ἡμιευθεία, δηλ.

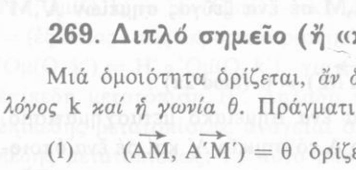
ἡ εἰκόνα ὁποιουδήποτε σημείου Μ μπορεῖ νά κατασκευαστεῖ.

Γιά νά εἶναι ἕνα σημεῖο Ο διπλό σ᾽ αὐτή τήν ὁμοιότητα, πρέπει καί ἀρκεῖ νά συμπίπτει μέ τήν εἰκόνα του· ὁπότε οἱ (1) καί (2) δίνουν:

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) = \theta \text{ καί } A'O = k \cdot AO \text{ ἤ}$$

(3) $$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \text{ καί } OA' = k \cdot OA$$

Δηλαδή τό Ο πρέπει καί ἀρκεῖ, ἐξαιτίας τῶν (3), νά βρίσκεται πάνω στό γ. τόπο (γ) τῶν σημείων, τά ὁποῖα βλέπουν τό ΑΑ΄ ὑπό διευθυνόμενη γωνία θ καί πάνω στήν ἀπολλώνια περιφέρεια (α), πού ἀναφέρεται στά σημεῖα Α΄ καί Α μέ λόγο k (σχ. 269).



Σχ. 269

Ὥστε **τό διπλό σημεῖο Ο εἶναι ἡ τομή τῶν δυό τόπων (γ) καί (α)**

—Ἄν $\theta \neq \nu\pi$ ($\nu \in \mathbb{N}$), τότε ὁ τόπος (γ) εἶναι ἕνα ὁρισμένο τόξο, τό ὁποῖο τέμνεται ἀπό τόν τόπο (α), ἀκόμη καί ἄν $k = 1$, ὁπότε ὁ τόπος (α) γίνεται μεσοκάθετος τοῦ ΑΑ΄.

—Ἄν $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, τότε ὁ τόπος (γ) εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΑ΄, πού καί πάλι τέμνεται ἀπό τόν τόπο (α).

—Ἄν $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, τότε ὁ τόπος (γ) εἶναι τό ζεῦγος τῶν ἡμιευθειῶν Ax, A΄y΄(σχ. 269) καί τό Ο ὑπάρχει, ὅταν $k \neq 1$ καί δέν ὑπάρχει, ὅταν $k = 1$, ὁπότε ὁ τόπος (α) γίνεται μεσοκάθετος τοῦ ΑΑ΄.

Σ᾽ αὐτήν τήν τελευταία περίπτωση ($k = 1$, $\theta = 0$), ἡ ὁποία εἶναι καί ἡ μοναδική, κατά τήν ὁποία δέν ὑπάρχει διπλό σημεῖο, οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἰσοδυναμοῦν μέ $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$, δηλ. ὁ μετασχηματισμός εἶναι μεταφορά. Ἀποδείξαμε, λοιπόν, τό:

(Θ) — Κάθε ὁμοιότητα, ἡ ὁποία δέν ἀνάγεται σέ μεταφορά, ἔχει ἕνα διπλό σημεῖο καί μόνο ἕνα.

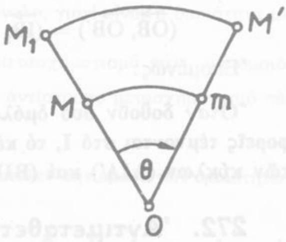
Τό σημεῖο αὐτό λέγεται **κέντρο τῆς ὁμοιότητας.**

270. Ἰδιότητα τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιότητας. Ἔστω Ο τό κέντρο (διπλό σημεῖο) μιᾶς ὁμοιότητας, Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο καί Μ΄ τό ὁμόλογο του. Σύμφωνα μέ τή χαρακτηριστική ἰδιότητα τῆς ὁμοιότητας (§ 267, I) τό ζεῦγος Ο, Μ μετασχηματίζεται μέ τήν ὁμοιότητα στό ζεῦγος Ο, Μ΄ τέτοιο, ὥστε:

(1) $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ καί $OM' = k \cdot OM$

Ἡ ὁμοιοθεσία (Ο, k) μετασχηματίζει τό Μ στό M_1 τέτοιο, ὥστε: $\overrightarrow{OM_1} = k \cdot \overrightarrow{OM}$ καί ἐπειδή

$k > 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OM}$, $OM_1 = k \cdot OM$.



Σχ. 270

Οἱ δυό τελευταῖες σχέσεις μέ βάση τίς (1) δίνουν:

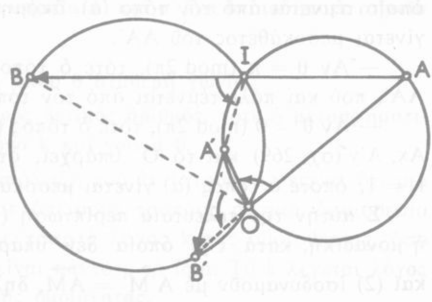
(2) $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$ καί $OM' = OM_1$.

Οἱ (2) δείχνουν ὅτι τό M_1 πηγαίνει στό Μ΄ μέ μιά στροφή (Ο, θ). Ἑπομένως τό Μ μεταβαίνει στό Μ΄ μέ μιά ὁμοιοθεσία (Ο, k) καί στή συνέχεια μέ μιά στροφή (Ο, θ). Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι τό Μ πηγαίνει στό Μ΄, ἄν πρῶτα ἐκτελεστεῖ ἡ στροφή (Ο, θ) (μέ τήν ὁποία πηγαίνει στό m) καί κατόπιν ἡ ὁμοιοθεσία (Ο, k). Ἑπομένως ἰσχύει τό:

(Θ) — Κάθε ὁμοιότητα, ἡ ὁποία δέν ἀνάγεται σέ μεταφορά, εἶναι τό ἀντιμεταθετικό γινόμενο μιᾶς ὁμοιοθεσίας καί μιᾶς στροφῆς, πού ἔχουν τό ἴδιο κέντρο. Τό κέντρο αὐτό, διπλό σημεῖο τοῦ μετασχηματισμοῦ, εἶναι τό κέντρο τῆς ὁμοιότητας.

271. Κατασκευή τοῦ κέντρου μιᾶς ὁμοιότητας. Γνωρίζουμε νά κατασκευάζουμε τό κέντρο Ο, ὅταν ἡ ὁμοιότητα ὁρίζεται ἀπό δυό ὁμόλογα σημεῖα Α καί Α′, ἀπό τό λόγο k καί ἀπό τή γωνία θ (§ 269).

Μία ὅμως ὁμοιότητα ὁρίζεται ἀκόμη ἀπό δύο ὁμόλογα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$, γιατί τότε ὁ λόγος k εἶναι ὁ Α′Β′/ΑΒ καί ἡ γωνία θ εἶναι ἡ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.



Σχ. 271

Ἔστω Ο τό κέντρο ὁμοιότητας, πού φέρνει τό $\overrightarrow{AB}$ στό $\overrightarrow{A'B'}$ (σχ. 271) καί Ι τό σημεῖο τῆς τομῆς τῶν φορέων τῶν $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$. Θά εἶναι τότε:

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta,\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$$

Μέ βάση τό σχ. 271 οἱ ἰσότητες αὐτές, ὅταν γραφοῦν:

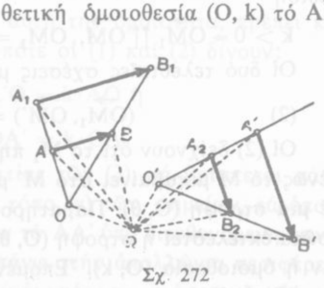
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA'}) \Rightarrow O, A, I, A' \text{ εἶναι ὁμοκυκλικά καί}$$

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IB'}) \Rightarrow O, B', B, I \text{ εἶναι ὁμοκυκλικά.}$$

Ἑπομένως:

Ὅταν δοθοῦν δυό ὁμόλογα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{A'B'}$, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς τέμνονται στό Ι, τό κέντρο ὁμοιότητας εἶναι τό δεύτερο κοινό σημεῖο τῶν κύκλων (ΑΙΑ′) καί (ΒΙΒ′).

272. Ἀντιμεταθετικότητα μιᾶς ὁμοιοθεσίας καί μιᾶς στροφῆς. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι μέ μιά θετική ὁμοιοθεσία (Ο, k) τό $\overrightarrow{AB}$ ἔρχεται στό $\overrightarrow{A_1B_1}$ καί στή συνέχεια μέ μιά στροφή (Ω, θ) τό $\overrightarrow{A_1B_1}$ ἔρχεται στό $\overrightarrow{A'B'}$. Μέ τή στροφή ὅμως (Ω, θ), ἄς φανταστοῦμε καί τό Ο καί τό ΑΒ νά στρέφονται καί νά ἔρχονται στά Ο′ καί A_2B_2. Τότε, ἐπειδή κατά τή στροφή ἡ σχετική θέση τῶν σημείων μεταξύ τους δέν ἀλλάζει, γι᾽ αὐτό, ὅπως τό $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἔτσι καί τό $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι ὁμοιόθετο τοῦ $\overrightarrow{A_2B_2}$ ὡς πρός τήν ὁμοιοθεσία (Ο′, k). Βλέπουμε ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία (Ο, k), καί στή συνέχεια ἡ στροφή (Ω, θ), φέρνει πάνω στό ΑΒ τό ἴδιο ἀποτέλεσμα, τό ὁποῖο φέρ-



Σχ. 272

νει ἡ στροφή (Ω, θ) καί στή συνέχεια μιά ὁμοιοθεσία, ὄχι ἡ (O, k), ἀλλά ἡ (O', k). Δηλαδή $\text{Ὁμ}(O, k) \circ \text{Στρ}(\Omega, \theta) \equiv \text{Στρ}(\Omega, \theta) \circ \text{Ὁμ}(O', k)$. Γιά νά εἶναι, λοιπόν, τό γινόμενο ἀντιμεταθετικό, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ δυό ὁμοιοθεσίες νά ταυτίζονται, δηλ. τό O νά συμπίπτει μέ τό O′, δηλαδή τό O νά μένει ἀναλλοίωτο κατά τή στροφή (Ω, θ). Ἄρα τό O νά συμπίπτει μέ τό Ω. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ὅτι:

«Τό γινόμενο μιᾶς ὁμοιοθεσίας καί μιᾶς στροφῆς δέν εἶναι ἀντιμεταθετικό παρά μόνο, ὅταν τά κέντρα αὐτῶν τῶν δυό μετασχηματισμῶν ταυτίζονται».

273. Ὁμάδα τῶν ὁμοιοτήτων. Ἄν τό σύνολο τῶν ὁμοιοτήτων τοῦ ἐπιπέδου τό ἑνώσουμε μέ τό σύνολο τῶν μεταφορῶν τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου, παίρνουμε ἕνα σύνολο μετασχηματισμῶν, ἔστω T, τό ὁποῖο εἶναι ὁμάδα ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο». Γιατί διαπιστώνουμε ὅτι:

i) Τό γινόμενο δυό μετασχηματισμῶν τοῦ συνόλου T ἀνήκει πάλι στό σύνολο αὐτό.

ii) Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός ἀνήκει στό σύνολο T.

iii) Κάθε μετασχηματισμός, πού ἀνήκει στό σύνολο T, ἔχει ἕναν ἀντίστροφο, πού ἀνήκει στό ἴδιο σύνολο.

Τό (i) μπορεῖ νά ἀποδειχτεῖ μέ βάση τόν προσεταιριστικό νόμο (§ 240, δ′), π.χ.: Ὁμοιότητα ∘ Μεταφορά = (Ὁμοιοθεσία ∘ Ἐπιπ. μετατόπιση) ∘ Μεταφορά = Ὁμοιοθ ∘ (Ἐπιπ. μετατόπιση ∘ Μεταφορά) = Ὁμοιοθ ∘ Ἐπιπ. μετατόπιση = Ὁμοιότητα.

Ἀνάλογα ἀποδεικνύουμε ὅτι Μεταφορά ∘ Ὁμοιότητα ≡ Ὁμοιότητα καί Ὁμοιότητα ∘ Ὁμοιότητα ≡ Ὁμοιότητα.

ii) Ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός ἀνήκει στό σύνολο, γιατί εἶναι ἡ ὁμοιότητα μέ κέντρο O, λόγο 1 καί γωνία 0.

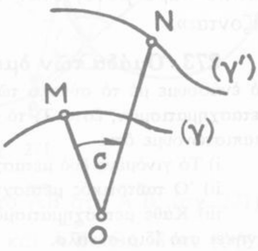
iii) Ἡ ὁμοιότητα (O, k, θ) ἔχει ὡς ἀντίστροφο μετασχηματισμό πάλι μιά ὁμοιότητα, τήν $\left(O, \frac{1}{k}\,-\theta\right)$, καί ἡ μεταφορά $(\vec{\delta})$ ἔχει ὡς ἀντίστροφο μετασχηματισμό πάλι μιά μεταφορά, τήν $(-\vec{\delta})$. Ἑπομένως:

Τό σύνολο τῶν ὁμοιοτήτων καί τῶν μεταφορῶν ἀποτελεῖ τήν ὁμάδα τῶν ὁμοιοτήτων (ὡς πρός τήν πράξη «γινόμενο»).

274. Μεταβαλλόμενο σχῆμα καί σταθερό κέντρο ὁμοιότητας. Ἡ παρακάτω παρατήρηση μᾶς βοηθᾶ στή λύση διάφορων προβλημάτων πάνω στήν ὁμοιότητα.

Ἄν δυό τρίγωνα OAB καί OA′B′ εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια (ἤ, μ' ἄλλα λόγια, εἶναι ὁμόλογα σέ μιά ὁποιαδήποτε ὁμοιότητα μέ κέντρο O), τότε καί τά τρίγωνα OAA′ καί OBB′ εἶναι ὁμόλογα σέ μιά ὁμοιότητα μέ κέντρο O, μέ γωνία $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ καί μέ λόγο OB : OA. Γιατί ἀπ' τήν ὑπόθεση ἔχουμε: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}) = \theta$ καί $OB/OA = OB'/OA' = k$, τά ὁποῖα δείχνουν ὅτι ἀπό τό A πηγαίνουμε στό B μέ ὁμοιότητα, πού ἔχει κέντρο O, γωνία θ καί λόγο k καί ἀπό τό A′ πηγαίνουμε στό B′ **μέ τήν ἴδια** ὁμοιότητα (O, θ, k). Ἄρα τό ὁμόλογο τοῦ τριγώνου OAA′, σ' αὐτήν τήν ὁμοιότητα (O, θ, k), εἶναι τό τρίγωνο OBB′.

Ἔτσι, π.χ., ἄς θεωρήσουμε ἕνα μεταβλητό σχῆμα F, τό ὁποῖο παραμένει πάντοτε ὅμοιο πρός τό σταθερό σχῆμα Σ ὡς πρός ἕνα σταθερό κέντρο ὁμοιότητας Ο. Σέ κάθε θέση τοῦ F, κάθε σημεῖο του εἶναι ὁμόλογο ἑνός ὁρισμένου (πάντοτε τοῦ ἴδιου) σημείου τοῦ Σ σέ μιά ὁμοιότητα μέ κέντρο Ο. Ἄν γνωρίζουμε τό γ. τ. ἑνός σημείου Μ τοῦ F, πού ἀντιστοιχεῖ σ' ἕνα σταθερό σημεῖο M_0 τοῦ Σ, τότε μποροῦμε νά βροῦμε τό γ. τ. ὁποιουδήποτε ἄλλου σημείου Ν τοῦ F, πού ἀντιστοιχεῖ σ' ἕνα ἄλλο γνωστό σημεῖο N_0 τοῦ Σ. Γιατί τό F σέ μιά ὁποιαδήποτε θέση του, εἶναι ὅμοιο μέ τό Σ σέ μιά ὁμοιότητα μέ κέντρο Ο, τά τρίγωνα OM_0N_0 καί OMN εἶναι ὁμορρόπως ὅμοια καί, συνεπῶς, σύμφωνα μέ τήν παραπάνω παρατήρηση καί τά τρίγωνα OM_0M καί ON_0N εἶναι ὁμόλογα σέ μιά ὁμοιότητα μέ κέντρο Ο, μέ γωνία $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{ON_0}) = c$ (σταθ.) καί μέ λόγο ON_0/OM_0, σταθερό. Ἑπομένως πηγαίνουμε ἀπό τό Μ στό Ν, μέ μιά ὁρισμένη ὁμοιότητα: $\left\{O, \dfrac{ON_0}{OM_0}, c\right\}$



Σχ. 273

Ἄρα τό Ν διαγράφει μιά γραμμή (γ') ὅμοια μέ τή γραμμή, πού διαγράφεται ἀπό τό Μ, ὡς πρός κέντρο ὁμοιότητας Ο, γωνία ὁμοιότητας $(\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{ON_0})$ καί μέ λόγο ὁμοιότητας ON_0/OM_0 (σχ. 273).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

599. Ἔχουμε δυό τεμνόμενες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2). Νά βρεῖτε τό γ. τόπο τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων λόγου μ/ν, οἱ ὁποῖες μετασχηματίζουν τήν (ε_1) στήν (ε_2).

600. Ἔχουμε δυό περιφέρειες (πάντοτε σέ ἕνα ἐπίπεδο) (K_1, R_1) καί (K_2, R_2). Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων, πού μεταφέρουν τήν πρώτη πάνω στή δεύτερη.

601. Πάνω σέ προσανατολισμένο ἐπίπεδο ὁρίζουμε ἕνα σημεῖο Ο καί μιά εὐθεία (ε). Παίρνουμε πάνω στήν (ε) ἕνα σημεῖο Α καί θεωροῦμε τό τρίγωνο ΟΑΑ' ὀρθογώνιο στό Α καί ἰσοσκελές τέτοιο, ὥστε $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = +\pi/4$. Νά βρεῖτε τούς γεωμετρικούς τόπους: i) τοῦ Α', ii) τοῦ κ. βάρους G τοῦ τριγώνου ΟΑΑ'.

602. Ἔχουμε δυό εὐθεῖες (ε) καί (ε') καί ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου τους. Νά κατασκευάσετε ἕνα σημεῖο Μ πάνω στήν (ε) καί ἕνα σημεῖο Μ' πάνω στήν (ε') ἔτσι, ὥστε τό τρίγωνο ΟΜΜ' νά εἶναι ὀρθογώνιο στό Μ καί ἰσοσκελές.

603. Ἡ κορυφή Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ μένει σταθερή, ἡ κορυφή Β διαγράφει δεδομένη εὐθεία ἤ δεδομένη περιφέρεια, ἐνῶ τό τρίγωνο μένει ὁμορρόπως ὅμοιο πρός ἕνα σταθερό τρίγωνο Α'Β'Γ'. Νά βρεῖτε καί στίς δυό περιπτώσεις τούς γ. τόπους: i) τῆς κορυφῆς Γ, ii) τοῦ βαρυκέντρου, iii) τοῦ ὀρθοκέντρου καί iv) τοῦ περικέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

604. Ἔχουμε δυό μεταβλητές ἀκτίνες ΚΑ, ΟΒ δυό δεδομένων περιφερειῶν (Κ, R), (Ο, ρ) τέτοιες, ὥστε $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$ (σταθερή γωνία). Ἄν οἱ εὐθεῖες ΚΑ, ΟΒ τέμνονται στό Ν, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περιφέρεια (ΝΑΒ) διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο.

605. Σ' ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο θεωροῦμε δυό περιφέρειες (Ο, R) καί (Ο', R'), πάνω στίς ὁποῖες μετατοπίζονται δυό σημεῖα Μ καί Μ' κατά τρόπο, ὥστε: $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = \theta$, ὅπου θ σταθερή γωνία. Ἡ εὐθεία ΜΜ' ξανατέμνει τίς περιφέρειες (Ο, R), (Ο', R') σέ ἀντίστοιχα σημεῖα Ν καί Ν'. Νά ἀποδείξετε: i) Ὅτι (ΟΝ, Ο'Ν') = — θ. ii) Τό Ν' εἶναι ὁμόλογο τοῦ Ν σέ μιά ὁμοιότητα (νά καθορίσετε καί τήν ὁμοιότητα αὐτή).

606. Ἔστω (ε) μιά σταθερή εὐθεία, Ο ἕνα σταθερό σημεῖο καί Η ἡ προβολή τοῦ Ο πάνω στήν (ε). Θεωροῦμε ὅλες τίς ὁμοιότητες μέ κέντρο Ο, στίς ὁποῖες τό Η ἔχει ὁμόλογο κάποιο σημεῖο τῆς (ε).

i) Νά ἀποδείξετε ὅτι στίς παραπάνω ὁμοιότητες ἡ γωνία ὁμοιότητας προσδιορίζει καί τό λόγο ὁμοιότητας.

ii) Νά βρεῖτε ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν ὁμολόγων Μ' ἑνός δεδομένου σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου στίς ὁμοιότητες αὐτές.

iii) Νά βρεῖτε ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν σημείων Μ, τά ὁποῖα στίς ὁμοιότητες αὐτές ἔχουν τήν ἴδια εἰκόνα Μ'.

iv) Νά ἀποδείξετε ὅτι ὅλες οἱ εὐθεῖες (η), πού ἔχουν στίς ὁμοιότητες αὐτές ὡς ὁμόλογο μιά δεδομένη εὐθεία (η'), διέρχονται ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο.

Β'.

607. Θεωροῦμε δυό τεμνόμενους ἄξονες Οx, Οy μέ ἰσομήκη μοναδιαῖα διανύσματα καί πάνω σ' αὐτούς τά σταθερά σημεῖα $A \in Ox$ καί $A' \in Oy$, καθώς καί τά μεταβλητά $M \in Ox$ καί $M' \in Oy$. Τά Μ, Μ' κινοῦνται ἔτσι, ὥστε πάντοτε νά εἶναι $\overline{AM} = k \cdot \overline{A'M'}$ (k σταθερό). i) Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ περιφέρειες, πού εἶναι περιγεγραμμένες στά τρίγωνα ΟΜΜ'. διέρχονται ἀπό σταθερό σημεῖο Ι διαφορετικό, γενικά, ἀπό τό Ο.

ii) Ποιός εἶναι ὁ τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Ι πάνω στίς εὐθεῖες ΜΜ';

608. **Ἐπίπεδη ὁμοιότητα ἀντίρροπη.** Ὀνομάζεται «ἐπίπεδη ὁμοιότητα ἀντίρροπη» τό γινόμενο μιᾶς θετικῆς ὁμοιοθεσίας καί μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας. Πρώτη ἄς ἐκτελεῖται ἡ συμμετρία.

i) Νά ἀποδείξετε ὅτι στήν ἀντίρροπη ὁμοιότητα μιά γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})$ μετασχηματίζεται σέ ἀντιρρόπως ἴση γωνία. Ποιές εἶναι οἱ εἰκόνες εὐθειῶν παρ/λων ἤ κάθετων στόν ἄξονα συμμετρίας;

ii) Νά ἀποδείξετε ὅτι μιά ἀντίρροπη ὁμοιότητα μέ ἄξονα (ε) μπορεῖ ν' ἀναλυθεῖ μέ ἄπειρους τρόπους σέ γινόμενο μιᾶς ἀξονικῆς συμμετρίας μέ ἄξονα (ε') || (ε) καί μιᾶς ὁμοιοθεσίας.

609. «**Ἀντιρρόπως ὅμοια» πολύγωνα** λέγονται δυό ὅμοια πολύγωνα $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ καί $B_1B_2B_3 \ldots B_\nu$, στά ὁποῖα οἱ ἀντίστοιχες διευθυνόμενες γωνίες $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_\nu})$ μέ $(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1B_\nu})$ καί $(\overrightarrow{A_2A_3}, \overrightarrow{A_2A_1})$ μέ $(\overrightarrow{B_2B_3}, \overrightarrow{B_2B_1})$ κ.τ.λ. εἶναι ἀντιρρόπως ἴσες. Νά βρεῖτε τήν ἀντίρροπη ὁμοιότητα, πού μετασχηματίζει τό πρῶτο στό δεύτερο.

610. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό κέντρο ἀρνητικῆς ὁμοιοθεσίας δύο κύκλων εἶναι καί κέντρο ἀντίρροπης ὁμοιότητας αὐτῶν.

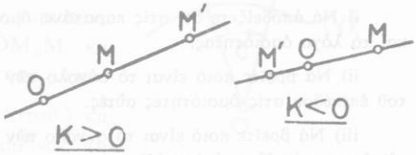
VI. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

275. Ὁρισμοί. **Ἄν δοθεῖ ἕνα σταθερό σημεῖο O καί ἕνας πραγματικός ἀριθμός k, διαφορετικός ἀπό τό μηδέν, τότε λέμε ἀντιστροφή τό σημειακό μετασχηματισμό, κατά τόν ὁποῖο σέ κάθε σημεῖο M ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο M′ τῆς εὐθείας OM τέτοιο, ὥστε:**

$$\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM'}} = k.$$

Τό O λέγεται **πόλος** (ἤ κέντρο) τῆς ἀντιστροφῆς καί ὁ k **δύναμη τῆς ἀντιστροφῆς.** Τό ὁμόλογο F′ ἑνός σχήματος F σέ μιά ἀντιστροφή λέγεται καί *ἀντίστροφο* τοῦ F.

Ἄν $k > 0$, ἡ ἀντιστροφή λέγεται **θετική** καί τά ὁμόλογα σημεῖα M καί M′ βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ O (σχ. 274), ἐνῶ, ἄν $k < 0$, ἡ ἀντιστροφή λέγεται **ἀρνητική** καί τά ὁμόλογα σημεῖα M καί M′ βρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ O (σχ. 274).



Σχ. 274

Κάθε σημεῖο M, διαφορετικό ἀπό τό O, ἔχει ἕνα ἀντίστροφο, ἐνῶ ὁ π ό λ ο ς O δ έ ν ἔ χ ε ι ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο.

Ἡ ἰσοδυναμία $\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM'}} = k \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{OM'}} \cdot \overline{\mathrm{OM}} = k$ δείχνει ὅτι ἡ ἀντιστροφή εἶναι **ἐνελικτική** (§ 241).

Ἄν τό M διαγράφει μιά εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τόν πόλο O, τό M′ διαγράφει τήν ἴδια εὐθεία, ἡ ὁποία, συνεπῶς, εἶναι ἀναλλοίωτη στό σύνολό της (§ 239, ς′) κατά τήν ἀντιστροφή. (Ἄν τό M συμπέσει μέ τό O, μποροῦμε συμβατικά νά δεχτοῦμε ὅτι τό M′ γίνεται τό «εἰς ἄπειρο» σημεῖο τῆς εὐθείας).

Ἀντιστρόφως, ἄν μιά εὐθεία (ε) μένει ἀναλλοίωτη σέ μιά ἀντιστροφή, τότε, ἐπειδή τό M εἶναι σημεῖο τῆς (ε) καί τό M′ εἶναι πάλι σημεῖο τῆς (ε) καί ἐπειδή ἡ MM′ περνᾶ ἀπό τό O, γι᾽ αὐτό ἡ (ε) περνᾶ ἀπό τό O. Ὥστε: **Γιά νά παραμένει μιά εὐθεία ἀναλλοίωτη σέ μιά ἀντιστροφή, πρέπει καί ἀρκεῖ νά περνᾶ ἀπό τόν πόλο.**

Τέλος, ἐπειδή ἡ ἀντιστροφή εἶναι ὁρισμένη ἀπό τόν πόλο O καί τή δύναμη k, γι᾽ αὐτό τήν παριστάνουμε: Αντ(O, k).

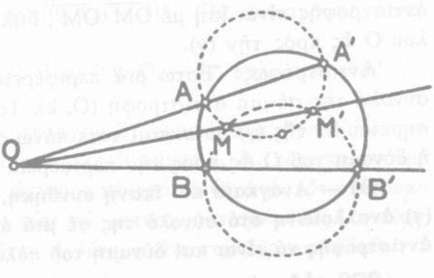
Παρατήρηση. Ἐπειδή $\mathrm{OM'} = \dfrac{|k|}{\mathrm{OM}}$, οἱ ἀποστάσεις δυό ὁμόλογων σημείων ἀπό τόν πόλο εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογες καί συνεπῶς, ὅταν τό M ἀπομακρύνεται ἀπό τόν πόλο, τότε τό M′ πλησιάζει πρός αὐτόν.

276. Χαρακτηριστική ἰδιότητα. Ἄς θεωρήσουμε δυό σημεῖα A καί M καί τά ὁμόλογά τους (ἤ ἀντίστροφά τους) A′, M′ στήν Αντ(O, k). Τότε $\overline{\mathrm{OA}} \cdot \overline{\mathrm{OA'}} = \overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM'}} = k$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι τά τέσσερα σημεῖα

Α, Μ, Α΄, Μ΄, ἐφόσον δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, εἶναι *ὁμοκυκλικά*.

Ἀντιστρόφως: Ἄς θεωρήσουμε δυό σχήματα F καί F΄, πού ἀντιστοιχοῦν σημεῖο πρός σημεῖο κατά τέτοιο τρόπο, ὥστε δυό ὁποιαδήποτε ζεύγη ὁμόλογων σημείων τους νά εἶναι ὁμοκυκλικά.

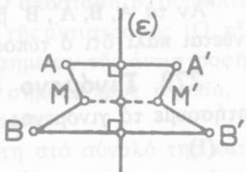
Ἄς πάρουμε δυό σταθερά ζεύγη (Α, Α΄) καί (Β, Β΄) ὁμόλογων σημείων καί ἕνα ὁποιοδήποτε τρίτο ζεῦγος (Μ, Μ΄) ὁμόλογων σημείων τῶν δυό σχημάτων. Ἀπ᾽ τήν ὑπόθεση οἱ τετράδες (Α, Α΄, Β, Β΄), (Α, Α΄, Μ, Μ΄), (Β, Β΄, Μ, Μ΄), εἶναι ὁμοκυκλικές (σχ. 275).



Σχ. 275

i) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ τέμνονται στό Ο καί ἄς θεωρήσουμε μιά ἀντιστροφή, μέ πόλο Ο καί δύναμη $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = \overline{OB}\cdot\overline{OB}$. Στήν ἀντιστροφή αὐτή τό ὁμόλογο τοῦ Μ θά εἶναι ἕνα σημεῖο, πού ἀνήκει καί στήν περιφέρεια (Α, Α΄, Μ) καί στήν περιφέρεια (Β, Β΄, Μ). Ἑπομένως εἶναι τό δεύτερο κοινό σημεῖο αὐτῶν τῶν περιφερειῶν, δηλ. τό Μ΄. Δηλαδή δυό ὁποιαδήποτε ἀντίστοιχα σημεῖα Μ, Μ΄ τῶν δυό σχημάτων εἶναι ὁμόλογα σέ μιά ἀντιστροφή, ἄρα καί τά σχήματα.

ii) **Σύμβαση.** Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι οἱ ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ εἶναι παράλληλες (σχ. 276). Τότε τό ΑΑ΄Β΄Β εἶναι τραπέζιο ἐγγράψιμο σέ κύκλο, ἄρα ἰσοσκελές καί ἔχει ἄξονα συμμετρίας (ε). Καθεμιά ἀπ᾽ τίς δυό περιφέρειες ΑΜΜ΄Α΄ καί ΒΜΜ΄Β΄ ἔχει, τότε, ἄξονα συμμετρίας τήν (ε). Ἄρα τά δυό σημεῖα τομῆς τους εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν (ε). Δηλ. τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ F καί τό ἀντίστοιχό του Μ΄ τοῦ F΄ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν (ε). Ἄρα τά δυό σχήματα F καί F΄ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός ἄξονα (ε).



Σχ. 276

Ἄν δεχτοῦμε **συμβατικά** ὅτι ἡ *συμμετρία ὡς πρός ἄξονα εἶναι μία ἰδιάζουσα ἀντιστροφή μέ πόλο σέ ἄπειρη ἀπόσταση*, τότε μποροῦμε νά διατυπώσουμε τό ἑξῆς θεώρημα:

«Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι δυό σχήματα ὁμόλογα σέ μιά ἀντιστροφή εἶναι: δυό ὁποιαδήποτε ζεύγη ἀντίστοιχων σημείων τους, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, νά εἶναι πάντοτε ὁμοκυκλικά».

277. Περιφέρεια ἀναλλοίωτη στό σύνολό της. Ἔστω μιά περιφέρεια (γ), πού περνᾶ ἀπό δυό ὁμόλογα σημεῖα Μ καί Μ′ μιᾶς ἀντιστροφῆς μέ πόλο Ο. Τότε καί κάθε ἄλλο σημεῖο Ν τῆς (γ) ἔχει τό ὁμόλογό του Ν′ πάνω στήν (γ), γιατί $\overline{ON}\cdot\overline{ON'} = \overline{OM}\cdot\overline{OM'}$. Ἄρα ἡ (γ) εἶναι ἀναλλοίωτη στό σύνολό της κατά τήν ἀντιστροφή αὐτή καί ἡ δύναμη τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι ἴση μέ $\overline{OM}\cdot\overline{OM'}$, δηλ. εἶναι ἴση μέ τή δύναμη τοῦ πόλου Ο ὡς πρός τήν (γ).

Ἀντιστρόφως: Ἔστω μιά περιφέρεια (γ), πού εἶναι ἀναλλοίωτη στό σύνολό της σέ μιά ἀντιστροφή (O, k). Τό ὁμόλογο Μ′ ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου Μ τῆς (γ) βρίσκεται τότε πάνω στήν (γ)· ἄρα $\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = k$, δηλ. ἡ δύναμη τοῦ Ο ὡς πρός τήν περιφέρεια εἶναι k. Ἄρα ἰσχύει τό:

(Θ) — Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά παραμένει μιά περιφέρεια (γ) ἀναλλοίωτη στό σύνολό της σέ μιά ἀντιστροφή (O,k) εἶναι: ἡ δύναμη ἀντιστροφῆς νά εἶναι καί δύναμη τοῦ πόλου Ο ὡς πρός τήν περιφέρεια (γ).

278. Ἀπόσταση μεταξὺ δύο σημείων, πού εἶναι ἀντίστροφα πρὸς δύο δεδομένα. Ἄς θεωρήσουμε δύο σημεῖα Α καί Β καί τά ὁμόλογά τους Α′ καί Β′ σέ μιά ἀντιστροφή (O, k). Τότε ἔχουμε: $OA\cdot OA' = OB\cdot OB' = |k|$ καί συνεπῶς $OA/OB' = OB/OA'$.

Τά τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΑ′Β′, ἐπειδή ἐπί πλέον ἔχουν καί τή γωνία $\widehat{O}$ κοινή (ἤ κατά κορυφή), εἶναι ὅμοια καί ἑπομένως:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} \Rightarrow A'B' = AB\cdot\frac{OA'}{OB} = AB\cdot\frac{OA'\cdot OA}{OA\cdot OB} = AB\cdot\frac{|k|}{OA\cdot OB}.$$

Ὥστε: (1) $$\boxed{A'B' = AB\cdot\frac{|k|}{OA\cdot OB}}$$

Ἄν τά Α, Β, Α′, Β′ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, τότε εὔκολα ἀποδεικνύεται πάλι ὅτι ὁ τύπος (1), πού δίνει τήν ἀπόσταση Α′Β′, ἰσχύει.

279. Γινόμενο δύο ἀντιστροφῶν τοῦ ἴδιου πόλου. Ἄς ζητήσουμε τό γινόμενο:

(1) $$\text{Αντ}(O, k_2) \circ \text{Αντ}(O, k_1).$$

Μέ τό μετασχηματισμό (1) τό ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ μετασχηματίζεται πρῶτα στό M_1, τέτοιο, ὥστε $\overline{OM}\cdot\overline{OM_1} = k_1$ καί τό M_1 στή συνέχεια μετασχηματίζεται στό Μ′ τέτοιο, ὥστε $\overline{OM_1}\cdot\overline{OM'} = k_2$. Διαιρώντας κατά μέλη ἔχουμε:

$$\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = \frac{k_2}{k_1}$$

Δηλαδή τό Μ′ εἶναι τό ὁμοιόθετο τοῦ Μ στήν $\text{Ομ}\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right)$.

Ἑπομένως: **τό γινόμενο δυό ἀντιστροφῶν τοῦ ἴδιου πόλου εἶναι μιά ὁμοιοθεσία.**

Παρατηρήσεις. Τό παραπάνω γινόμενο (1) δέν εἶναι ἀντιμεταθετικό παρά μόνο, ὅταν $\frac{k_2}{k_1} = \frac{k_1}{k_2}$, δηλ. ὅταν $k_2 = \pm k_1$.

Ἂν $k_1 = k_2$, τό γινόμενο (1) εἶναι ὁ ταυτοτικός μετασχηματισμός (Ὁμ(Ο, 1)). Δηλαδή $Αντ(O, k_2) \circ Αντ(O, k_2) = H^0$. (Ἡ ἀντιστροφή εἶναι **ἐνελικτική**).

Ἂν $k_1 = -k_2$, τό γινόμενο (1) εἶναι Ὁμ(Ο, — 1), δηλ. συμμετρία ὡς πρός κέντρο Ο.

Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι, ἄν μετασχηματίσουμε ἕνα σχῆμα F μέ δυό ἀντιστροφές, μέ πόλο Ο καί μέ διαφορετικές δυνάμεις k_1, k_2, τότε παίρνουμε δυό σχήματα F_1 καί F_2 ὁμοιόθετα ὡς πρός κέντρο τό Ο. Δηλ.: *ὅταν ἔχουμε ἐκλέξει ἕναν πόλο ἀντιστροφῆς Ο, τότε τό μετασχηματισμένο σχῆμα ὑφίσταται ὁμοιοθεσία μέ κέντρο Ο, ὅταν ἡ δύναμη ἀντιστροφῆς μεταβληθεῖ.*

Τέλος ἀπό τήν ἰσότητα $Ἀντ(O, k_2) \circ Ἀντ(O, k_1) = Ὁμ\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow Ἀντ(O, k_2) \circ Ἀντ(O, k_2) \circ Ἀντ(O, k_1) = Ἀντ(O, k_2) \circ Ὁμ\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ἀντ(O, k_2) \circ Ὁμ\left(O, \frac{k_2}{k_1}\right) = Ἀντ(O, k_1).$$

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε $Ὁμ\left(O, \frac{k_1}{k_2}\right) \circ Ἀντ(O, k_2) = Ἀντ(O, k_1)$.

280. Διευθύνουσα περιφέρεια. α΄) Ἂς θεωρήσουμε μιά θετική ἀντιστροφή μέ δύναμη $k=\rho^2$, ὅπου τό ρ ἄς θεωρηθεῖ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα. Τότε, ἄν ἕνα σημεῖο Μ ἀπέχει ἀπό τόν πόλο Ο ἀπόσταση ρ, συμπίπτει μέ τό ἀντίστροφό του, δηλαδή εἶναι διπλό σημεῖο τῆς ἀντιστροφῆς (O, ρ^2), καί ἀντιστρόφως. Δηλαδή τό σύνολο τῶν διπλῶν σημείων τῆς ἀντιστροφῆς (O, ρ^2) εἶναι μιά περιφέρεια (Ο, ρ) ἀναλλοίωτη σημεῖο πρός σημεῖο, ἡ ὁποία λέγεται **διευθύνουσα περιφέρεια τῆς ἀντιστροφῆς.**

Ἂν τώρα μιά περιφέρεια (γ) μένει ἀναλλοίωτη στό σύνολό της κατά τήν ἀντιστροφή, γνωρίζουμε ὅτι τότε Δυν Ο/(γ) = δύναμη ἀντιστροφῆς = $= \rho^2$ (§ 277), τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι ἡ διευθύνουσα περιφέρεια τέμνει ὀρθογώνια τή (γ). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ὅτι:

«ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά μένει μιά περιφέρεια ἀναλλοίωτη στό σύνολό της κατά τήν ἀντιστροφή, εἶναι νά τέμνει ὀρθογώνια τή διευθύνουσα περιφέρεια».

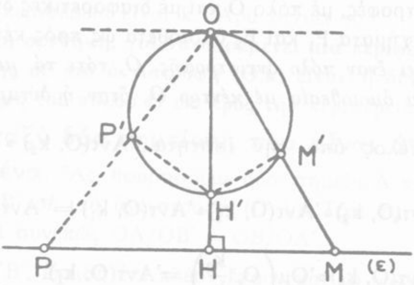
β΄) Ἂς θεωρήσουμε μιά ἀρνητική ἀντιστροφή $(O, -\rho^2)$. Σ' αὐτή διπλά σημεῖα δέν ὑπάρχουν, γιατί τότε θά ἔπρεπε $\overline{OM} \cdot \overline{OM} = -\rho^2$. Μιά περιφέρεια (γ) μένει ἀναλλοίωτη στό σύνολό της κατά τήν ἀντιστροφή αὐτή, ὅταν Δυν Ο/(γ) = δύναμη ἀντιστροφῆς $= -\rho^2$ δηλ. ὅταν τέμνει «ψευδορθογωνίως» τόν κύκλο (Ο, ρ).

ΤΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

281. Τὸ ἀντίστροφο μιᾶς εὐθείας. α΄) Ἄν ἡ εὐθεία περνᾶ ἀπό τόν πόλο, τότε εἶναι ἀναλλοίωτη κατά τήν ἀντιστροφή (§ 275).

β΄) **(Θ) — Τό ἀντίστροφο μιᾶς εὐθείας, πού δέν περνᾶ ἀπό τόν πόλο Ο τῆς ἀντιστροφῆς, εἶναι μιά περιφέρεια, πού περνᾶ ἀπό τόν πόλο Ο, ἀπό τήν ὁποία ὅμως ἐξαιρεῖται τό Ο καί ἡ ὁποία ἔχει στό Ο ἐφαπτομένη παρ/λη πρός τήν εὐθεία** (βλ. σχ. 277)

Ἀπόδειξη. Ἔστω Η ἡ προβολή τοῦ Ο πάνω στήν εὐθεία (ε) καί Η΄ τό ἀντίστροφο τοῦ Η, ὁπότε $\overline{OH}\cdot\overline{OH'} = k$. Ἔστω Μ ἕνα ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖο τῆς (ε) (ὁπότε $HH' \perp HM$) καί Μ΄ τό ἀντίστροφό του. Τότε τά Μ, Μ΄, Η΄, Η εἶναι ὁμοκυκλικά (§ 276) καί, ἐπειδή $H'\widehat{H}M$ εἶναι 1 ορθ, θά εἶναι καί $H'\widehat{M'}M = 1$ορθ, δηλ. $H'\widehat{M'}O = 1$ ορθ. Ἑπομένως τό Μ΄ βρίσκεται πάνω σέ μιά περιφέρεια μέ διάμετρο ΟΗ΄. Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖο Ρ΄ τῆς περιφέρειας αὐτῆς διαφορετικό ἀπό τό Ο, εἶναι ἀντίστροφο ἑνός σημείου Ρ τῆς (ε) καί μάλιστα ἐκείνου, στό ὁποῖο ἡ εὐθεία ΟΡ΄ τέμνει τήν (ε). Γιατί ἀπό τίς: $H'\widehat{P'}P = 1$ ορθ., $P\widehat{H}H' = 1$ορθ. ⇒ Ρ, Ρ΄, Η΄, Η ὁμοκυκλικά ⇒ τά ζεύγη (Ρ, Ρ΄), (Η, Η΄) εἶναι ὁμόλογα στήν ἴδια ἀντιστροφή (§ 276).

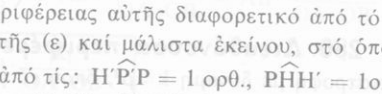


Σχ. 277

γ΄) **(Θ) — Τό ἀντίστροφο μιᾶς περιφέρειας, πού περνᾶ ἀπό τόν πόλο ἀντιστροφῆς Ο, εἶναι μία εὐθεία παράλληλη πρός τήν ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας στό Ο.**

Γιατί, ἀφοῦ ἡ ἀντιστροφή εἶναι ἐνελικτική, ἡ εὐθεία (ε) εἶναι τό ἀντίστροφο τῆς περιφέρειας μέ διάμετρο ΟΗ΄, ὅπως καθαρά φαίνεται στό σχ. 277.

δ΄) **(Θ) — Σέ κάθε ἀντιστροφή, πού μετασχηματίζει μία εὐθεία σέ μιά περιφέρεια, τό κέντρο τῆς περιφέρειας εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς ὡς πρός τήν εὐθεία.**



Σχ. 278

Ἀπόδειξη. Ἔστω Ι τό κέντρο τῆς περιφέρειας, πού εἶναι ἀντίστροφη τῆς εὐθείας (ε). Τό ἀντίστροφο τοῦ Ι εἶναι ἕνα σημεῖο Ι΄ τέτοιο, ὥστε (σχ. 278):

$$\overline{OI}\cdot\overline{OI'} = k = \overline{OH}\cdot\overline{OH'} \Rightarrow \overline{OI}\cdot\overline{OI'} = \overline{OH}\cdot\overline{OH'} \Rightarrow \frac{\overline{OH'}}{2}\cdot\overline{OI'} = \overline{OH'}\cdot\overline{OH} \left(\text{γιατί } \overline{OI} = \frac{\overline{OH'}}{2}\right)$$

καί τέλος $\overline{OI'} = 2\overline{OH}$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι τό Ι΄ εἶναι συμμετρικό τοῦ Ο ὡς πρός τήν (ε).

ε΄) (Θ) — Μιά εὐθεία καί μιά περιφέρεια μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἀντίστροφες μεταξύ τους κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, ἄν δέν ἐφάπτονται· καί κατά ἕνα μόνο τρόπο, ἄν ἐφάπτονται.

Ἀπόδειξη. Ἔστω μιά εὐθεία (ε) καί μιά περιφέρεια (γ) (σχ. 278). Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ ἐδ. β΄, ὁ πόλος ἀντιστροφῆς πρέπει νά εἶναι τό ἕνα ἤ τό ἄλλο ἄκρο τῆς διαμέτρου τῆς (γ), πού εἶναι κάθετη στήν (ε). Ἄς συμβολίσουμε μέ Ο καί Η΄ τά δύο αὐτά ἄκρα. Ἄν ἐκλέξουμε ὡς πόλο ἀντιστροφῆς τό Ο καί δύναμη ἀντιστροφῆς $\overline{OH'}\cdot\overline{OH}$, τότε, κατά τήν ἀντιστροφή αὐτή (Ο, $\overline{OH'}\cdot\overline{OH}$), ἡ (ε) ἀπεικονίζεται στήν (γ). Ὁμοίως καί στήν ἀντιστροφή (Η΄, $\overline{H'O}\cdot\overline{H'H}$), ἄν $\overline{H'O}\cdot\overline{H'H} \neq 0$. Ἄν ὅμως ἡ (ε) ἐφάπτεται τῆς (γ) στό Η΄, τότε τό Η΄ δέν μπορεῖ νά χρησιμεύσει ὡς πόλος τῆς ἀντιστροφῆς, πού φέρνει τήν (ε) πάνω στήν (γ), ἀλλά μόνο τό Ο.

282. Τὸ ἀντίστροφο περιφέρειας. α΄) Ἄν ἡ περιφέρεια περνᾶ ἀπό τόν πόλο ἀντιστροφῆς, τό ἀντίστροφό της εἶναι εὐθεία (§ 281).

β΄) (Θ) — Τό ἀντίστροφο τῆς περιφέρειας (c), πού δέν περνᾶ ἀπό τόν πόλο ἀντιστροφῆς, εἶναι μιά περιφέρεια (c΄) ὁμοιόθετη μέ τή (c) ὡς πρός κέντρο ὁμοιοθεσίας τόν πόλο ἀντιστροφῆς· τό λόγο λ τῆς ὁμοιοθεσίας, ἡ ὁποία μετασχηματίζει τήν (c) στήν (c΄), μᾶς τόν δίνει ὁ τύπος:

$$\boxed{\lambda = \frac{k}{p}}$$

ὅπου k ἡ δύναμη ἀντιστροφῆς καί p ἡ δύναμη τοῦ πόλου ἀντιστροφῆς ὡς πρός τήν περιφέρεια (c).

(Ἐννοεῖται ὅτι $|\lambda| = R'/R$, ὅπου R΄ καί R εἶναι, ἀντιστοίχως, οἱ ἀκτίνες τῶν (c΄) καί (c)).

Ἀπόδειξη. Ἔστω Μ΄ τό ὁμόλογο ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου Μ τῆς (c) (σχ. 279) στήν ἀντιστροφή (Ο, k). Θά ἔχουμε:

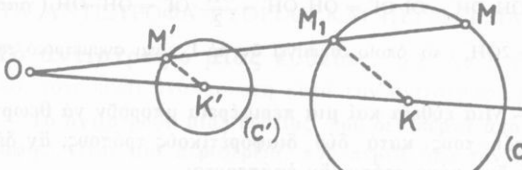
(1) $$\overline{OM}\cdot\overline{OM'} = k$$

Ἄν ἡ εὐθεία ΟΜ ξανακόβει τή (c) στό M_1, θά ἔχουμε:

(2) $$\overline{OM}\cdot\overline{OM_1} = p$$

Διαιρώντας τίς (1) καί (2) κατά μέλη βρίσκουμε:

$\dfrac{\overline{OM'}}{\overline{OM_1}} = \dfrac{k}{p}$ τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι τό Μ΄ εἶναι τό ὁμόλογο τοῦ M_1

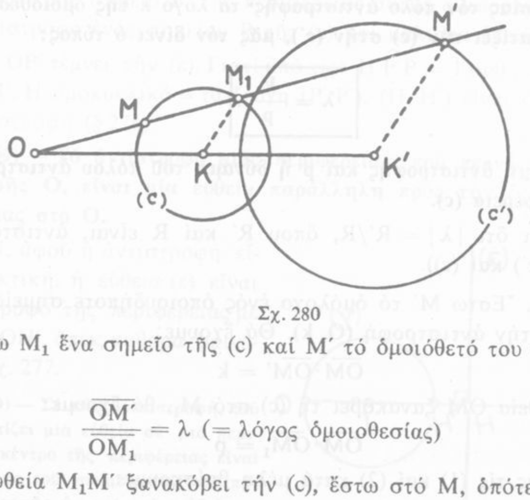


Σχ. 279

στήν ὁμοιοθεσία $\left(\mathrm{O}, \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{p}}\right)$. Τό σύνολο, λοιπόν, τῶν M′ εἶναι μιά περιφέρεια (c′) ὁμοιόθετη τῆς (c). (Φυσικά τό κέντρο K′ τῆς (c′) ὁρίζεται ἀπό τήν $\overline{\mathrm{OK'}}/\overline{\mathrm{OK}} = \mathrm{k/p}$).

γ′) (Θ) — Δυό δεδομένες περιφέρειες μποροῦν νά θεωρηθοῦν ἀντίστροφες μεταξύ τους κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, ἄν δέν ἐφάπτονται· καί κατά ἕνα μόνο τρόπο, ἄν ἐφάπτονται. Ἄν δέν ἐφάπτονται, οἱ πόλοι ἀντιστροφῆς εἶναι τά κέντρα ὁμοιοθεσίας· ἄν ἐφάπτονται, ὁ πόλος ἀντιστροφῆς εἶναι τό κέντρο ὁμοιοθεσίας, πού δέ βρίσκεται πάνω στίς περιφέρειες.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δυό περιφέρειες (c) καί (c′) (σχ. 280) καί ἕνα κέντρο ὁμοιοθεσίας τους O (§ 261), πού δέ βρίσκεται πάνω σέ καμμιά ἀπ' αὐτές.



Σχ. 280

Ἔστω $\mathrm{M_1}$ ἕνα σημεῖο τῆς (c) καί M′ τό ὁμοιόθετό του πάνω στή (c′). Τότε:

(1) $\dfrac{\overline{\mathrm{OM'}}}{\overline{\mathrm{OM_1}}} = \lambda$ (= λόγος ὁμοιοθεσίας)

Ἡ εὐθεία $\mathrm{M_1M'}$ ξανακόβει τήν (c), ἔστω στό M, ὁπότε:

(2) $\overline{\mathrm{OM_1}} \cdot \overline{\mathrm{OM}} = \mathrm{p}$ (= Δυν O/(c)).

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τίς (1) καί (2) παίρνουμε:

$$(3) \qquad \overline{OM'} \cdot \overline{OM} = \lambda\rho.$$

καί βλέπουμε ὅτι τό Μ΄ εἶναι τό ἀντίστροφο τοῦ Μ στήν ἀντιστροφή (Ο, λρ). Ἀλλά ἐπειδή τό Μ διατρέχει τή (c) καί τό Μ΄ τή (c΄), ἡ (c΄) εἶναι τό ἀντίστροφο τῆς (c) κατά τήν ἀντιστροφή (Ο, λρ).

Ἂν τό Ο βρίσκεται πάνω στή (c), τότε $\rho = 0$ καί $\lambda\rho = 0$, καί ἡ (3) δέν ἐκφράζει ἀντιστροφή (οὔτε κανένα σημειακό μετασχηματισμό). Ὅταν ὅμως τό κέντρο ὁμοιοθεσίας Ο βρίσκεται πάνω στή (c), οἱ περιφέρειες ἐφάπτονται μεταξύ τους στό Ο. Ὥστε στήν περίπτωση αὐτή τό Ο δέν εἶναι πόλος.

Παρατήρηση. Ἂν οἱ περιφέρειες εἶναι ἴσες, ἡ μιά ἀπό τίς δυό ἀντιστροφές καταλήγει νά εἶναι συμμετρία ὡς πρός ἄξονα (§ 276, ii).

δ΄) Κατασκευή τοῦ ἀντιστρόφου μιᾶς δεδομένης περιφέρειας (c). Κατασκευάζουμε δύο ὁμόλογα σημεῖα Μ καί Μ΄ τῆς ἀντιστροφῆς (Ο, k) (σχ. 280) καί ἀπ' αὐτά βρίσκουμε τό M_1. Φέρνουμε τή $M'K' \parallel M_1K$ καί βρίσκουμε τό Κ΄ πάνω στήν εὐθεία ΟΚ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

611. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (Ο, R) καί ἕνα σημεῖο Σ ἔξω ἀπ' αὐτή. Θεωροῦμε μεταβλητή διάμετρο ΑΒ τῆς (Ο, R).
i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περιφέρεια (ΣΑΒ) περνάει ἀπό δεύτερο σταθερό σημεῖο Ι.
ii) Οἱ εὐθεῖες ΣΑ, ΣΒ ξανατέμνουν τήν (Ο, R) στά Μ καί Ν. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία ΜΝ περνάει ἀπό σταθερό σημεῖο.
iii) Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περιφέρεια (ΣΜΝ) περνάει καί ἀπό δεύτερο σταθερό σημεῖο.

612. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (c) καί μιά χορδή της ΑΒ. Παίρνουμε τυχαῖο σημεῖο Μ τῆς (c) καί κατασκευάζουμε δυό περιφέρειες (γ) καί (γ΄), πού διέρχονται ἀπό τό Μ καί ἐφάπτονται στήν ΑΒ στά σημεῖα Α καί Β. Ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ δεύτερου σημείου τομῆς τῶν (γ) καί (γ΄).

613. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (Κ, R) καί μιά εὐθεία (ε) ἐξωτερική τῆς περιφέρειας. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς (ε) φέρνουμε τμήματα ΜΓ, ΜΔ ἐφαπτόμενα στήν περιφέρεια. Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν ὀρθοκέντρων τῶν τριγώνων ΜΓΔ, ὅταν τό Μ διατρέχει τήν (ε).

614. Στό ἐσωτερικό ἑνός κύκλου (Κ, R) ὑπάρχει ἕνα σημεῖο Α. Μιά ὀρθή γωνία μέ κορυφή τό Α στρέφεται γύρω ἀπό τήν κορυφή της καί οἱ πλευρές της τέμνουν τήν περιφέρεια (Κ, R) στά Γ καί Δ. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ἐφαπτομένων τῆς (Κ, R) στά Γ καί Δ.

615. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (c) καί μία χορδή της ΑΒ. Παίρνουμε τυχαῖο σημεῖο Μ τῆς εὐθείας ΑΒ καί θεωροῦμε δυό περιφέρειες (γ) καί (γ΄), πού διέρχονται ἀπό τό Μ καί ἐφάπτονται τῆς (c) στά Α καί Β. Ποιός εἶναι ὁ τόπος τοῦ δεύτερου σημείου τομῆς τῶν (γ) καί (γ΄);

616. Νά βρεθεῖ σέ τί μετατρέπεται ἡ ἁρμονική τετράδα (Α, Β, Γ, Δ) σέ μιά ἀντιστροφή, πού ἔχει πόλο διαφορετικό ἀπό τά Α, Β, Γ, Δ ἀλλά βρίσκεται στήν εὐθεία ΑΒΓΔ.

617. **Ἁρμονικό τετράπλευρο.** Θεωροῦμε μία ἁρμονική διαίρεση (Α,Β,Γ,Δ) = −1 καί ἐκτελοῦμε πάνω σ' αὐτή μιά ἀντιστροφή μέ πόλο ἔξω ἀπό τήν εὐθεία ΑΒΓΔ. Νά απο-

δείξετε ὅτι τά ὁμόλογα τῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι κορυφές ἐγγράψιμου τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου τά γινόμενα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσα.

Β΄.

618. Ἔστω ΟΑΒΓ ἕνα κυρτό τετράπλευρο καί Α΄, Β΄, Γ΄ τά ἀντίστροφα τῶν Α, Β, Γ σέ μιά θετική ἀντιστροφή (Ο, k). Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τό ΟΑΒΓ δέν εἶναι ἐγγράψιμο, τότε $Α΄Β΄ + Β΄Γ΄ > Α΄Γ΄$ ἐνῶ, ἄν εἶναι ἐγγράψιμο, τότε $Α΄Β΄ + Β΄Γ΄ = Α΄Γ΄$. Μέ χρήση τοῦ τύπου τῆς § 278 ἀποδεῖξτε τό πρῶτο θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου καθώς καί τό ἀντίστροφό του.

619. Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν πόλων τῶν ἀντιστροφῶν μέ δεδομένη δύναμη k, οἱ ὁποῖες μετασχηματίζουν δυό ὁμόκεντρες περιφέρειες σέ δυό ἴσες περιφέρειες.

620. Ἔχουμε δυό περιφέρειες (c_1), (c_2) καί πάνω σ' αὐτές, ἀντιστοίχως, τά σημεῖα Α καί Β. Νά κατασκευάσετε ἕνα σημεῖο Ρ τοῦ ριζικοῦ ἄξονα τῶν (c_1) καί (c_2) τέτοιο, ὥστε, ἄν οἱ εὐθεῖες ΡΑ, ΡΒ ξανατέμνουν τίς (c_1) καί (c_2) στά Α΄ καί Β΄, νά εἶναι $Α΄Β΄ \perp$ στό ριζικό ἄξονα.

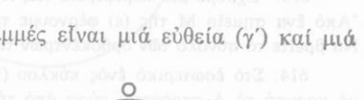
621. Δυό σχήματα F καί F΄ εἶναι ἀντίστροφα μεταξύ τους σέ μιά ἀντιστροφή (Ο, k). Θεωροῦμε τά μετασχηματισμένα τῶν F καί F΄, ἔστω τά Φ καί Φ΄, σέ μιά ἄλλη ἀντιστροφή (Ο΄, k΄). Νά ἀποδείξετε ὅτι τά Φ καί Φ΄ εἶναι ὁμόλογα σέ μιά ἀντιστροφή.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

283. α΄) Ἐδῶ, λέγοντας «γραμμή», θά ἐννοοῦμε τήν εὐθεία ἤ τήν περιφέρεια, γιατί μόνο αὐτές τίς δυό γραμμές ἐξετάζουμε. Λέγοντας **γωνία δύο γραμμῶν, πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Μ,** ἐννοοῦμε μία μή προσανατολισμένη κυρτή γωνία, πού σχηματίζεται ἀπό τίς ἐφαπτόμενες τῶν δύο γραμμῶν, οἱ ὁποῖες ἄγονται στό κοινό σημεῖο Μ. Ἄν ἡ γραμμή εἶναι εὐθεία, τότε, ὡς ἐφαπτομένη της σέ ἕνα σημεῖο της Μ, ἐννοεῖται ἡ ἴδια ἡ εὐθεία.

β΄) (Θ) Ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γραμμῆς (γ) σ' ἕνα της σημεῖο Μ, διαφορετικό ἀπό τόν πόλο καί ἡ ἐφαπτομένη τῆς ἀντίστροφης γραμμῆς (γ΄) στό σημεῖο της Μ΄, τό ὁμόλογο (ἀντίστροφο) τοῦ Μ, εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ ΜΜ΄.

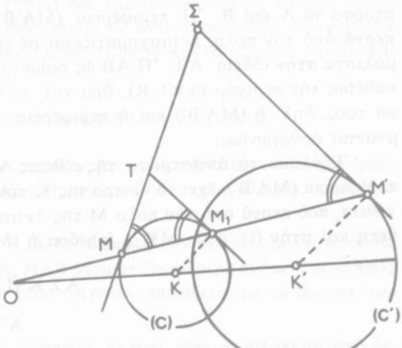
Περίπτωση 1η. Οἱ ἀντίστροφες γραμμές εἶναι μιά εὐθεία (γ΄) καί μιά περιφέρεια (γ). Ἄς εἶναι Μ καί Μ΄ δυό ὁμόλογα σημεῖα τῶν ἀντίστροφων αὐτῶν γραμμῶν καί ἀκόμη: $ΟΒ \perp (γ΄)$ καί Α τό ἀντίστροφο τοῦ Β (σχ. 281). Ἔστω ΓΜΗ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (γ) στό Μ, ἐνῶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (γ΄) στό Μ΄ εἶναι ἡ εὐθεία Μ΄Γ. Ἔχουμε ὅτι $Γ\widehat{Μ}Μ΄ = Ο\widehat{Μ}Η = Ο\widehat{Α}Μ$ (ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη...) $= Μ\widehat{Μ΄}Β$ (ἐπειδή τό ΑΜΜ΄Β εἶναι ἐγγράψιμο). Ἑπομένως $Γ\widehat{Μ}Μ΄ = Γ\widehat{Μ΄}Μ \Rightarrow$ τριγ



Σχ. 281

ΓΜΜ΄ ἰσοσκελές καί συνεπῶς οἱ ἐφαπτόμενες ΜΓ, Μ΄Γ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ ΜΜ΄.

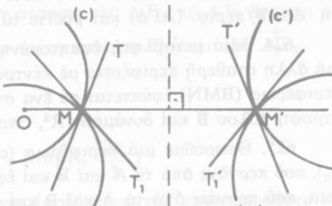
Περίπτωση 2η. Οἱ ἀντίστροφες γραμμές εἶναι περιφέρειες (c) καί (c΄). —Ὁ πόλος ἀντιστροφῆς Ο τῶν δύο κύκλων εἶναι ταυτοχρόνως καί κέντρο τῆς ὁμοιοθεσίας τους. Ἄν, λοιπόν, φέρουμε ἀπό τό Ο μιά εὐθεία, πού νά τέμνει τίς δύο περιφέρειες, αὐτή ὁρίζει καί ἕνα ζεῦγος σημείων M_1 καί Μ΄, πού εἶναι ὁμοιόθετα καί ἄλλο ζεῦγος σημείων Μ καί Μ΄, πού εἶναι ἀντίστροφα μεταξύ τους. Οἱ ἐφαπτόμενες M_1T καί Μ΄Σ στά ὁμοιόθετα σημεῖα M_1 καί Μ΄, εἶναι παράλληλες. Ἔστω ΜΤ ἡ ἐφαπτομένη τῆς (c) στό Μ. Ἐπειδή τό τρίγωνο TMM_1 εἶναι ἰσοσκελές καί $M_1T \parallel M'\Sigma$, γι᾽ αὐτό καί τό ΣΜΜ΄ εἶναι ἰσοσκελές μέ ΣΜ = ΣΜ΄.



Σχ. 282

Ἄρα οἱ ἐφαπτόμενες στά ἀντίστροφα σημεῖα Μ καί Μ΄ εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ ΜΜ΄.

γ΄) (Θ) Ἡ μή διευθυνόμενη κυρτή γωνία δύο γραμμῶν (γ) καί (c), οἱ ὁποῖες τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Μ, εἶναι ἴση μέ τή γωνία τῶν ἀντιστρόφων τους (γ΄) καί (c΄), πού τέμνονται στό ὁμόλογο σημεῖο Μ΄ τοῦ Μ (σχ. 283), γιατί τό ζεῦγος τῶν ἐφαπτομένων ΜΤ καί MT_1 τῶν (c) καί (γ) εἶναι, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο (Θ), συμμετρικό τοῦ ζεύγους τῶν ἐφαπτομένων Μ΄Τ΄ καί $M'T'_1$ τῶν (c΄) καί (γ΄) ὡς πρός τή μεσοκάθετο τοῦ ΜΜ΄. Ἑπομένως οἱ κυρτές μή διευθυνόμενες γωνίες, πού σχηματίζονται ἀπό τίς εὐθεῖες ΜΤ, MT_1 εἶναι, ἀντιστοίχως, συμμετρικές μέ αὐτές, πού σχηματίζονται ἀπό τίς Μ΄Τ΄ καί $M'T'_1$ ἄρα ἀντιστοίχως ἴσες.



Σχ. 283

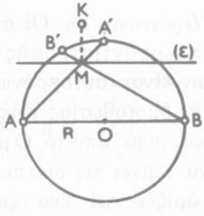
Πόρισμα 1ο. Δύο γραμμές πού τέμνονται ὀρθογωνίως μετασχηματίζονται, μέ ἀντιστροφή, σέ δύο γραμμές πού πάλι τέμνονται ὀρθογωνίως.

Πόρισμα 2ο. Δύο γραμμές, πού ἐφάπτονται μεταξύ τους στό σημεῖο Μ, μετασχηματίζονται, μέ ἀντιστροφή, σέ δύο γραμμές, πού ἐφάπτονται μεταξύ τους στό σημεῖο Μ΄, πού εἶναι ὁμόλογο τοῦ Μ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Δίνεται μιά περιφέρεια (Ο, R), μία διάμετρός της ΑΒ καί μιά εὐθεία (ε)//ΑΒ. Πάνω στήν (ε) παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ καί φέρνουμε τίς εὐθεῖες

ΜΑ, ΜΒ, πού ξανακόβουν τήν περιφέρεια στά Α΄ καί Β΄. Νά ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ περιφέρεια (ΜΑ΄Β΄) τέμνει ὀρθογωνίως τήν (Ο, R) καί ταυτόχρονα ἐφάπτεται στήν (ε).

Λύση. Ἄν ἐκτελέσουμε ἀντιστροφή μέ πόλο Μ καί δύναμη ἴση πρός τή Δυν Μ/(Ο, R), τότε ἡ (Ο, R) μένει ἀναλλοίωτη καί τά σημεῖα Α΄, Β΄ ἔχουν ὡς ἀντίστροφα τά Α καί Β. Ἡ περιφέρεια (ΜΑ΄Β΄), ἐπειδή περνᾶ ἀπό τόν πόλο, μετασχηματίζεται σέ εὐθεία καί μάλιστα στήν εὐθεία ΑΒ. Ἡ ΑΒ ὡς διάμετρος τέμνει καθέτως τήν περιφέρεια (Ο, R), ἄρα καί τά ἀντίστροφά τους, δηλ. ἡ (ΜΑ΄Β΄) καί ἡ περιφέρεια (Ο,R) τέμνονται ὀρθογωνίως.



Σχ. 284

Ἐξάλλου, τό ἀντίστροφο τῆς εὐθείας ΑΒ, δηλ. ἡ περιφέρεια (ΜΑ΄Β΄), ἔχει τό κέντρο της Κ πάνω σέ μιά εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τόν πόλο Μ τῆς ἀντιστροφῆς καί εἶναι κάθετη στήν ΑΒ, ἄρα κάθετη καί στήν (ε). Δηλ. ΜΚ $\perp$ (ε), ἄρα ἡ (ΜΑ΄Β΄) ἐφάπτεται στήν (ε).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

622. Ἔχουμε δυό περιφέρειες (c_1) καί (c_2), πού ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α καί ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ριζικοῦ ἄξονά τους.

i) Νά ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχουν, γενικά, δυό περιφέρειες, πού διέρχονται ἀπό τό Μ καί ἐφάπτονται στίς (c_1) καί (c_2).

ii) Νά προσδιορίσετε τό σύνολο τῶν δεύτερων σημείων τομῆς τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, ὅταν τό Μ διατρέχει τό ριζικό ἄξονα.

623. Ἔστω ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν οἱ περιφέρειες (ΑΒΓ) καί (ΑΔΓ) τέμνονται ὀρθογωνίως, τότε καί οἱ περιφέρειες (ΒΓΔ) καί (ΒΑΔ) τέμνονται ὀρθογωνίως. (**Ὑποδ.** Χρησιμοποιῆστε τήν ἀντιστροφή πόλου Β καί δυνάμεως ἴσης μέ τή Δυν Β/περιφ. (ΑΓΔ) καί βρεῖτε τά ὁμόλογα τῶν τεσσάρων περιφερειῶν).

624. Μιά μεταβλητή ἐφαπτομένη μιᾶς σταθερῆς περιφέρειας μέ κέντρο Α τέμνει μιά ἄλλη σταθερή περιφέρεια μέ κέντρο Β στά Μ καί Ν. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ μεταβλητή περιφέρεια (ΒΜΝ) ἐφάπτεται σέ ἕνα σταθερό κύκλο. (**Ὑποδ.** Χρησιμοποιῆστε τήν ἀντιστροφή πόλου Β καί δυνάμεως R^2, ὅπου R ἡ ἀκτίνα τῆς (Β)).

625. Θεωροῦμε μιά περιφέρεια (c), δυό σημεῖα Α, Β καί τίς δυό περιφέρειες (c_1), (c_2), πού περνᾶνε ἀπό τά Α καί Β καί ἐφάπτονται μέ τήν (c). Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περιφέρεια, πού περνάει ἀπό τά Α καί Β καί τέμνει ὀρθογωνίως τήν (c), τέμνει ὑπό ἴσες γωνίες τίς περιφέρειες (c_1) καί (c_2). (**Ὑποδ.** Νά κάνετε ἀντιστροφή πόλου Α).

626. Ἔχουμε μιά περιφέρεια (Ο) καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτήν. Ἀπό τό Α διέρχεται μιά τέμνουσα ΑΒΓ τῆς (Ο) καί κατόπιν γράφονται δυό περιφέρειες, πού διέρχονται ἀπό τό Α καί ἐφάπτονται τῆς (Ο), ἡ μία στό Β καί ἡ ἄλλη στό Γ. Νά βρεῖτε τό γ. τόπο τοῦ δεύτερου σημείου τομῆς Μ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΒΓ στρέφεται γύρω ἀπό τό Α. (**Ὑποδ.** Νά κάνετε ἀντιστροφή πόλου Α καί δυνάμεως ἴσης πρός Δυν Α/(Ο) $= \overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma} = A\Delta^2 = AE^2$, ὅπου ΑΔ, ΑΕ ἐφαπτόμενα τμήματα στήν (Ο). Ἀρκεῖ νά βρεῖτε τόν τόπο τοῦ ὁμόλογου τοῦ Μ στή ἀντιστροφή αὐτή).

Β΄.

627. Νά βρεῖτε τό σύνολο τῶν πόλων τῶν ἀντιστροφῶν δυνάμεως k, οἱ ὁποῖες μετασχηματίζουν δυό περιφέρειες, πού τέμνονται στά Α καί Β, σέ ἴσες περιφέρειες. (**Ὑποδ.** Ἄν Μ ἕνας ἀπό τούς πόλους αὐτούς, ἄς θεωρήσουμε τό ὁμόλογο τῆς περιφέρειας (ΜΑΒ)

στήν ἀντιστροφή (Μ, k) καί ἄς ἐξετάσουμε τή θέση του σχετικά μέ τίς δυό ἴσες περιφέρειες, στίς ὁποῖες μετασχηματίζονται οἱ δεδομένες).

628. Ἔχουμε τρία σημεῖα Α, Ο, Β πάνω σέ μιά εὐθεία καί εἶναι ΑΟ = ΟΒ = R. Μέ διαμέτρους ΑΒ καί ΑΟ γράφουμε ἀντιστοίχως περιφέρειες (c_1) καί (c_2). Ἔστω (γ) μιά μεταβλητή περιφέρεια, πού ἐφάπτεται στή (c_1) καί τέμνει ὀρθογωνίως τή (c_2). Ἐκτελοῦμε τήν ἀντιστροφή (A, AB^2). Νά κατασκευάσετε τά ἀντίστροφα τῶν περιφερειῶν (c_1), (c_2), (γ) καί νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ (γ) ἐφάπτεται σέ σταθερό κύκλο (c_3), τοῦ ὁποίου καί νά προσδιορίσετε τό κέντρο καί τήν ἀκτίνα.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΝΩ ΣΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ Χ - ΧΙΙΙ

629. Τά κέντρα βάρους τῶν τεσσάρων τριγώνων, πού τό καθένα ἔχει κορυφές τρεῖς ἀπό τίς κορυφές τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, σχηματίζουν νέο τετράπλευρο ὁμοιόθετο πρός τό ΑΒΓΔ.

630. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν τά σημεῖα Α, Β, Γ, Η ἀποτελοῦν ὀρθοκεντρική τετράδα, τότε τά βαρύκεντρα τῶν τριγώνων ΗΒΓ, ΗΓΑ, ΗΑΒ σχηματίζουν τρίγωνο ὁμοιόθετο πρός τό τρίγωνο ΑΒΓ καί ὅτι τό ὀρθόκεντρο τοῦ νέου τριγώνου ταυτίζεται μέ τό βαρύκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

631. Νά κατασκευάσετε περιφέρεια μέ δεδομένη ἀκτίνα, πού νά διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο καί νά ἀποτέμνει ἀπό δεδομένη εὐθεία μιά χορδή δεδομένου μήκους.

632. Προσδιορίστε τά στοιχεῖα τοῦ μετασχηματισμοῦ:

$$T = \text{Μετ}(-\vec{\delta}) \circ \text{Στρ}(O,\ \theta) \circ \text{Μετ}(\vec{\delta}).$$

633. Ἔχουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί θεωροῦμε τίς τρεῖς στροφές:

$$\text{Στρ}\left(A, \frac{2\pi}{3}\right),\ \text{Στρ}\left(B, \frac{2\pi}{3}\right),\ \text{Στρ}\left(\Gamma, \frac{2\pi}{3}\right).$$

Διάνυσμα $\overrightarrow{\Delta E}$ (δεσμευμένο) ἔρχεται μέ τήν πρώτη στροφή στό $\overrightarrow{\Delta_1 E_1}$, τό $\overrightarrow{\Delta_1 E_1}$ ἔρχεται μέ τή δεύτερη στροφή στό $\overrightarrow{\Delta_2 E_2}$ καί τό $\overrightarrow{\Delta_2 E_2}$ μέ τήν τρίτη στροφή ἔρχεται στό $\overrightarrow{\Delta_3 E_3}$.

i) Προσδιορίστε τή γωνία $(\overrightarrow{\Delta E}, \overrightarrow{\Delta_3 E_3})$.

ii) Προσδιορίστε τό μετασχηματισμό:

$$T = \text{Στρ}\left(\Gamma, \frac{2\pi}{3}\right) \circ \text{Στρ}\left(B, \frac{2\pi}{3}\right) \circ \text{Στρ}\left(A, \frac{2\pi}{3}\right)$$

(δηλ. βρεῖτε μέ ποιό γνωστό μετασχηματισμό εἶναι ἰσοδύναμος καί κατασκευάσετε τά στοιχεῖα του).

iii) Καθορίστε τό εἶδος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, γιά νά εἶναι ὁ Τ ταυτοτικός.

634. Ἔχουμε μιά περιφέρεια, ἕνα σημεῖο της Β καί ἕνα ἄλλο σημεῖο Α πάνω στήν εὐθεία, πού ἐφάπτεται τῆς περιφέρειας στό Β. Ἀπό τό Α φέρνουμε μιά τέμνουσα ΑΓΔ καί προβάλλουμε τά Γ καί Δ στήν εὐθεία ΑΒ. Ἄν Γ΄ καί Δ΄ εἶναι οἱ προβολές τῶν Γ, Δ, ποιός εἶναι ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν Γ΄Δ καί ΓΔ΄;

635. Ἔχουμε δυό σταθερά σημεῖα Ο καί Ι. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, τά ὁποῖα εἶναι τέτοια, ὥστε τό ὁμόλογο τοῦ Μ στή στροφή κέντρου Ο καί γωνίας $+\ \pi/2$ νά βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία ΜΙ.

636. Ἔχουμε δυό στροφές: (O_1, θ_1), (O_2, θ_2) καί ἕνα μῆκος λ. Ἕνα σημεῖο Μ ἔρχεται μέ τήν πρώτη στροφή στό M_1 καί τό M_1 ἔρχεται μέ τή δεύτερη στό M_2. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν Μ, τά ὁποῖα εἶναι τέτοια, ὥστε: $M_1M_2 = \lambda$.

637. Στήν προέκταση τῆς διαμέτρου ΑΒ μιᾶς περιφέρειας παίρνουμε ἕνα σημεῖο

Σ. Νά κατασκευάσετε μιά εὐθεία, πού νά διέρχεται ἀπό τό Σ καί νά τέμνει τήν περιφέρεια στά Μ καί Ν ἔτσι, ὥστε ἡ προβολή τῆς χορδῆς ΜΝ στήν ΑΒ νά εἶναι ἴση μέ δεδομένο τμῆμα λ.

638. Ἔχουμε δυό περιφέρειες, πού τέμνονται. Νά κατασκευάσετε μιά εὐθεία, πού νά τέμνει τίς δυό περιφέρειες σέ δυό ζεύγη σημείων ἔτσι, ὥστε τό ἕνα ζεῦγος νά χωρίζει ἁρμονικά τό ἄλλο.

639. Νά βρεθοῦν πάνω στίς πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ ἀντίστοιχα σημεῖα Μ, Ν, Ρ τέτοια, ὥστε:

$$\mathrm{BM} = \mathrm{MN} = \mathrm{NP} = \mathrm{PA}$$

(**Ὑποδ.** Ἐκλέγουμε μιά ὁμοιοθεσία μέ κέντρο τό Α καί μέ ὁμόλογο τοῦ Ρ τό Β καί κατασκευάζουμε τεθλασμένη γραμμή ὁμοιόθετη πρός τή ζητούμενη ΑΡΝΜΒ).

640. Ἔστω ἕνα ὀξυγώνιο τρίγωνο καί M_1, M_2, M_3 τά μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στά M_1, M_2, M_3 σχηματίζουν τρίγωνο ὁμοιόθετο πρός τό ὀρθικό τρίγωνο τοῦ ΑΒΓ. Τό κέντρο ὁμοιοθεσίας τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

641. Ἔχουμε ἕνα σημεῖο Α καί μιά εὐθεία (ε). Μιά γωνία σταθεροῦ μεγέθους μέ κορυφή Α στρέφεται γύρω ἀπό τό Α, ἐνῶ οἱ πλευρές της τέμνουν τήν (ε) στά Β καί Γ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περιφέρεια (ΑΒΓ) ἐφάπτεται πάντοτε σέ μιά σταθερή περιφέρεια. (**Ὑποδ.** Ἔστω ΑΗ ἡ ἀπόσταση τοῦ Α ἀπό τήν (ε). Θεωροῦμε τήν ἀντιστροφή $(\mathrm{A}, \mathrm{AH}^2)$ καί ἐξετάζουμε, ἄν τό ἀντίστροφο τῆς (ΑΒΓ) ἐφάπτεται σέ σταθερή περιφέρεια).

642. Μιά περιφέρεια (Β) περνάει ἀπό τό κέντρο Α μιᾶς ἄλλης περιφέρειας (Α). Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ριζικός ἄξονας τῶν (Α) καί (Β) εἶναι τό ἀντίστροφο τῆς (Β) σέ ἀντιστροφή, πού ἔχει διευθύνουσα περιφέρεια τήν (Α).

643. Ἔχουμε δυό κύκλους (Κ) καί (Ο) καί μιά εὐθεία (ε). Νά κατασκευάσετε μιά εὐθεία $\|(\varepsilon)$, ἡ ὁποία νά ἀποτέμνει ἀπό τίς (Κ) καί (Ο) χορδές ΑΒ καί ΓΔ, πού ἔχουν δεδομένο ἄθροισμα. (**Ὑποδ.** Σέ μιά μεταφορά, πού φέρνει τό Α στό Δ, ἡ περιφέρεια (Κ) ἔρχεται σέ περιφέρεια (Κ′), ἡ ὁποία κατασκευάζεται).

644. Νά κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ὥστε οἱ πλευρές ΑΒ, ΒΓ νά ἔχουν δεδομένα μέσα καί οἱ κορυφές Β καί Γ νά βρίσκονται πάνω σέ δυό δεδομένους κύκλους.

645. Σέ δεδομένο κύκλο νά κατασκευάσετε χορδή, πού νά χωρίζεται σέ τρία ἴσα μέρη ἀπό δυό δεδομένες ἀκτίνες.

646. Πάνω στή βάση ΒΓ δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ νά ὁριστεῖ σημεῖο Ρ τέτοιο, ὥστε $\mathrm{AP}^2 : \mathrm{BP} \cdot \mathrm{P\Gamma} = \mu : \nu$, ὅπου μ, ν, δεδομένα τμήματα. (**Ὑποδ.** Ἔστω Ν τό σημεῖο, στό ὁποῖο ἡ προέκταση τοῦ ΑΡ τέμνει τήν περιγεγραμμένη περιφέρεια (ΑΒΓ). Ἄν ὁριστεῖ τό Ν, ὁρίζεται καί τό Ρ).

647. Νά κατασκευάσετε εὐθεία, πού νά διέρχεται ἀπό δεδομένο σημεῖο καί νά ἀποτέμνει ἀπό δύο κύκλους χορδές ἀνάλογες πρός τίς ἀκτίνες τῶν κύκλων.

648. Νά βρεῖτε μιά ἀντιστροφή, πού μετασχηματίζει τρεῖς δεδομένους κύκλους, τῶν ὁποίων τά κέντρα δέ βρίσκονται σέ μιά εὐθεία, σέ τρεῖς ἄλλους κύκλους, τῶν ὁποίων τά κέντρα βρίσκονται σέ δεδομένη εὐθεία.

649. Σημεῖο Μ μιᾶς περιφέρειας (Ο, R) προβάλλεται στά Α καί Β πάνω σέ δυό κάθετες διαμέτρους (δ_1) καί (δ_2) τῆς (Ο, R). i) Ἄν ὁ πόλος τῆς ΑΒ ὡς πρός τήν (Ο, R) εἶναι τό Ρ καί ἄν P_1, P_2 εἶναι οἱ προβολές τοῦ Ρ στίς (δ_1) καί (δ_2), νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ ἐφάπτεται μέ τήν (Ο, R) στό Μ. ii) Μέ διάμετρο $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ γράφουμε περιφέρεια, πού τέμνει τήν (Ο, R) στά Γ καί Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΓΔ περνάει ἀπό τά Α καί Β.

650. Ἔχουμε δυό σημεῖα Ο καί Ι. Ἔστω Μ′ τό ὁμόλογο τοῦ Μ στήν ὁμοιότητα

$\left(O, \frac{\pi}{2}, k\right)$. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, πού εἶναι τέτοια, ὥστε τά Μ, Ι, Μ′ νά εἶναι συνευθειακά;

651. Σέ προσανατολισμένο ἐπίπεδο ἔχουμε δυό ἴσες περιφέρειες (Κ) καί (Λ) καί, ἀντιστοίχως, πάνω σ᾽ αὐτές τά σημεῖα Α καί Β. Θεωροῦμε δυό ἄλλα μεταβλητά σημεῖα πάνω στίς περιφέρειες αὐτές, τά Μ καί Ν, πού εἶναι τέτοια, ὥστε τά τόξα $\overrightarrow{\widehat{AM}}$ καί $\overrightarrow{\widehat{BN}}$ νά εἶναι ἀντιρρόπως ἴσα. Ποιό εἶναι τό σύνολο τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΜΝ;

652. Μεταβλητή περιφέρεια (Ο) μέ κέντρο Ο περνάει ἀπό δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο τῆς ΟΒ τέτοιο, ὥστε: $\overline{MB}/\overline{MO} = -m$, ὅπου m δεδομένος θετικός ἀριθμός.

i) Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν Μ;

ii) Ἀπό τό Μ φέρνουμε $\perp$ΟΒ, ἡ ὁποία τέμνει τήν περιφέρεια (Ο) στά Γ καί Δ. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ βαρύκεντρου G τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου ΑΓΔ; Νά ἀποδείξετε ἀκόμη ὅτι ἡ OG διέρχεται ἀπό σταθερό σημεῖο.

653. Πάνω σέ μιά εὐθεία ἔχουμε τά σημεῖα Α, Β, Γ. Μιά μεταβλητή περιφέρεια (γ) ἐφάπτεται μέ τήν εὐθεία ΑΒΓ στό Γ. Ἀπό τό Α φέρνουμε καί τήν ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς (γ) καί ἔστω Τ τό σημεῖο ἐπαφῆς. Ἡ εὐθεία ΒΤ ξανατέμνει τήν (γ) στό Μ. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ Μ;

654. Πάνω σέ μιά εὐθεία ἔχουμε κατά σειρά τά σημεῖα Ι, Α, Β. Μιά εὐθεία (δ) τέμνει τήν εὐθεία ΙΑΒ στό Ι. Πάνω στή (δ) παίρνουμε τυχαῖο σημεῖο S καί θεωροῦμε τήν ἀντιστροφή (S, SB^2). Ἔστω Ρ τό ἀντίστροφο τοῦ Α στήν ἀντιστροφή αὐτή. Ποιός εἶναι ὁ γ. τόπος τοῦ Ρ, ὅταν τό S διατρέχει τήν (δ);

655. Παίρνουμε δυό περιφέρειες (Κ) καί (Κ′) ἐξωτερικές μεταξύ τους καί, ἀντιστοίχως, δυό σταθερά σημεῖα Α καί Α′ πάνω σ᾽ αὐτές. Δυό μεταβλητές περιφέρειες (γ) καί (γ′) ἐφάπτονται ἀντιστοίχως στίς (Κ) καί (Κ′) στά σημεῖα Α καί Α′, ἀλλά ἐφάπτονται καί μεταξύ τους στό S. Νά ἀποδείξετε, μέ κατάλληλη ἀντιστροφή, ὅτι τό σύνολο τῶν S ἀποτελεῖ δυό περιφέρειες ὀρθογώνιες μεταξύ τους.

Τὰ ἀντίτυπα τοῦ βιβλίου φέρουν τὸ κάτωθι βιβλιόσημο γιὰ ἀπόδειξη τῆς γνησιότητας αὐτῶν.

Ἀντίτυπο στερούμενο τοῦ βιβλιοσήμου τούτου θεωρεῖται κλεψίτυπο. Ὁ διαθέτων, πωλῶν ἢ χρησιμοποιῶν αὐτὸ διώκεται κατὰ τὶς διατάξεις τοῦ ἄρθρου 7 τοῦ Νόμου 1129 τῆς 15/21 Μαρτίου 19/46 (Ἐφ. Κυβ. 1946, Α' 108).

024000025178

ΕΚΔΟΣΗ Δ' 1978 (VIII) ΑΝΤΙΤΥΠΑ 20.000 — ΣΥΜΒΑΣΗ 3083/11-8-78

Ἐκτύπωση - Βιβλιοδεσία : Χ. ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΚΑΙ ΣΙΑ Ε. Ε.

ΟΕ
ΔΒ