ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΩΡΕΑΝ

«Τό βιβλίο μεταγλωττίσθηκε ἀπό τόν εἰδικό Σύμβουλο τοῦ Κ.Ε.Μ.Ε. Γερ. Θεοδωράκη καί τό φιλόλογο Ε. Πλατῆ, Ἐπιθεωρητή Μ.Ε.».

ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑΙ 1976

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό βιβλίο αὐτό ἀπευθύνεται πρός τίς μαθήτριες καί τούς μαθητές τῆς Γ΄ τάξεως τοῦ γυμνασίου καί πραγματεύεται διεξοδικά τά θέματα τῆς Εὐκλειδείου Γεωμετρίας, πού καθορίζονται ἀπό τό ἐπίσημο ἀναλυτικό πρόγραμμα τοῦ Ὑπουργείου Ἐθνικῆς Παιδείας καί Θρησκευμάτων. Ἔχει γίνει ἰδιαίτερη προσπάθεια γιά τήν κατά τό δυνατόν ἁπλή ἔκθεση τῶν θεμάτων πού περιέχονται, χωρίς αὐτό νά ἀποβαίνει εἰς βάρος τῆς ἐπιστημονικῆς ἀρτιότητας τοῦ βιβλίου. Τά ἐδάφια πού ἔχουν σημειωθεῖ μέ ἀστερίσκο μποροῦν νά παραλειφθοῦν κατά τήν πρώτη ἀνάγνωση τοῦ βιβλίου· πάντως κρίθηκε σκόπιμη ἡ ἀναγραφή τους γιά τήν ἀρτιότητα τοῦ ἔργου καί πρέπει νά μελετηθοῦν ἀργότερα ἀπό ἐκείνους πού ἐνδιαφέρονται γιά τή βαθύτερη γνώση τῆς γεωμετρίας. Οἱ προτεινόμενες ἀσκήσεις κλιμακώνονται σέ δύο κατηγορίες Α καί Β· οἱ ἀσκήσεις τῆς κατηγορίας Α εἶναι ἁπλούστερες, οἱ ἀσκήσεις τῆς κατηγορίας Β εἶναι δυσκολότερες. Μέ τήν ἐλπίδα ὅτι τό βιβλίο αὐτό ἐκπληρώνει τόν προορισμό του, τό παραδίδω στά παιδιά τοῦ γυμνασίου.

ΧΡΗΣΤΟΣ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

(Ἡ ἀρίθμηση ἀναφέρεται σέ παραγράφους)

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΓΩΝΙΕΣ

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΚΑΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. Γεωμετρία λέγεται ὁ κλάδος τῶν μαθηματικῶν, πού ἐξετάζει τό σχῆμα καί τήν ἔκταση τῶν στερεῶν σωμάτων, καθώς καί τίς ὑπάρχουσες σ' αὐτά μετρικές σχέσεις. Ἀδιαφορεῖ γιά τήν ὕλη καί ἐνδιαφέρεται μόνο γιά τή μορφή τῶν στερεῶν. Ἔτσι, τά θεωρεῖ ἄυλα καί ἐπομένως ἔχει τό δικαίωμα νά τά μετατοπίζει, νά τά βάζει τό ἕνα πάνω στό ἄλλο, ἀκόμη καί τό ἕνα μέσα στό ἄλλο.

Ἱστορικό σημείωμα. Γεωμετρία, κατά τούς ἀρχαίους, εἶναι ἡ τέχνη μέ τήν ὁποία μετροῦμε τή Γῆ (τό ἔδαφος). Ὁ πατέρας τῆς ἱστορίας Ἡρόδοτος ἀναφέρει ὅτι ἡ γεωμετρία δημιουργήθηκε στήν Αἴγυπτο, τήν ἐποχή πού ὁ βασιλιάς Σέσωστρις μοίρασε σέ κλήρους τό ἔδαφος τῆς Αἰγύπτου καί ἔπρεπε ὁ κάθε Αἰγύπτιος νά βρίσκει τό γεωργικό του κλῆρο μετά ἀπό κάθε πλημμύρα τοῦ Νείλου.

Παρ' ὅλα αὐτά, ἡ πραγματική πατρίδα τῆς γεωμετρίας εἶναι ἡ Ἀρχαία Ἑλλάδα, γιατί οἱ ἀρχαῖοι πρόγονοί μας τῆς ἔδωσαν μεγάλη ἀνάπτυξη, τό κυριώτερο ὅμως τήν ἀνύψωσαν ἀπό πρακτική ἐμπειρία, σέ ἐπιστήμη. Ὡς πρῶτος θεμελιωτής τῆς γεωμετρίας θεωρεῖται ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (ΣΤ' π.Χ. αἰώνας) πού, μέ τό θεώρημά του γιά τά ἀνάλογα τμήματα πού περιλαμβάνονται μεταξύ παραλλήλων εὐθειῶν, ὑπολόγισε τό ὕψος αἰγυπτιακῆς πυραμίδας καί κατέπληξε τό βασιλιά Ἄμασι τῆς Αἰγύπτου. Ὁ Θαλῆς ἵδρυσε στή Μίλητο τήν Ἰωνική Σχολή καί πλούτισε τίς γεωμετρικές γνώσεις.

Ἡ μελέτη τῆς γεωμετρίας ἐξακολουθεῖ στή Μεγάλη Ἑλλάδα (Κάτω Ἰταλία), ὅπου ὁ Πυθαγόρας ὁ Σάμιος (580 - 500 π.Χ.) ἵδρυσε στόν Κρότωνα τήν περίφημη Σχολή του. Μετά ὁ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος (450 π.Χ.) δημοσίευσε Στοιχεῖα Γεωμετρίας καί θεωρεῖται ὁ πρῶτος πού ἔγραψε βιβλίο γεωμετρίας. Ὕστερα ὁ φιλόσοφος Πλάτων (430 - 347 π.Χ.) ἀνέπτυξε τή μελέτη τῆς γεωμετρίας καί ἔδωσε τόση σημασία σ' αὐτήν, ὥστε στό πάνω μέρος τῆς πύλης τῆς «Ἀκαδημίας», τῆς σχολῆς πού ἵδρυσε στήν Ἀθήνα, ἔγραψε τό ρητό «μηδείς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω», δηλαδή «νά μήν μπαίνει κανείς μέσα πού δέν ξέρει γεωμετρία». Στόν Πλάτωνα ὀφείλεται ἡ εἰσαγωγή τῆς ἀναλυτικῆς ἐρευνητικῆς μεθόδου καί ἡ διδασκαλία τῶν γεωμετρικῶν τόπων. Μετά, οἱ τρεῖς μεγάλοι ἀρχαῖοι συγγραφεῖς μαθηματικῶν βιβλίων, Εὐκλείδης (330 - 270 π.Χ.), Ἀρχιμήδης (287 - 212 π.Χ.) καί Ἀπολλώνιος (260 - 200 π.Χ.), συντέλεσαν πολύ στή μετέπειτα ἀνάπτυξη τῆς γεωμετρίας, ἰδιαίτερα ὁ Εὐκλείδης μέ τά «Στοιχεῖα», σύγγραμμα πού ἀποτελεῖται ἀπό 13 βιβλία. Στόν Εὐκλείδη ὀφείλεται ἡ ἀποδεικτική μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς στό ἄτοπο, ἐνῶ στόν Ἀρχιμήδη ὀφείλονται οἱ πρῶτες ἔννοιες τῶν ὁρίων. Ὤθηση ἐπίσης ἔδωσαν στήν ἀνάπτυξη τῆς γεωμετρίας οἱ μαθηματικοί τῆς 'Αλεξανδρινῆς ἐποχῆς Μενέλαος (80 π.Χ.), Πτολεμαῖος (125 μ.Χ.) καί Πάππος (Γ' αἰώνας μ.Χ.).

Ὕστερα ἀπό τούς 'Αλεξανδρινούς, ἡ ἀνάπτυξη τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων ἦταν βραδύτατη ἕως τήν ἐποχή τῆς 'Αναγεννήσεως. Μετά τήν 'Αναγέννηση ἄρχισε ραγδαία πρόοδος τῆς γεωμετρίας καί γενικά τῶν μαθηματικῶν. Ὁ Καρτέσιος (Descartes 1596 - 1650), μέ τίς συντεταγμένες ἑνός σημείου, δημιουργεῖ τήν ἀναλυτική γεωμετρία, ἕναν ἰδιαίτερο κλάδο τῶν μαθηματικῶν, πού συντέλεσε πάρα πολύ στήν μετέπειτα ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν καί ἔδωσε νέες ἐρευνητικές μεθόδους. Οἱ νέες αὐτές μέθοδοι καί ἡ ἀπειροστική ἀνάλυση, πού πρωτοφάνηκε τό ΙΖ' αἰῶνα, συντέλεσαν στήν πλατύτερη ἀνάπτυξη τῆς γεωμετρίας. Ἔτσι δημιουργήθηκαν καί ἄλλοι κλάδοι τῆς γεωμετρίας, ὅπως ἡ διαφορική γεωμετρία, ἡ παραστατική γεωμετρία, ἡ προβολική γεωμετρία ἤ γεωμετρία τῆς θέσεως κ.ἄ.

2. 'Αρχικὲς ἔννοιες. Ἡ γεωμετρία, ἐπειδή θεωρεῖ τά ἀντικείμενά της ἄυλα, οὐσιαστικά ἐργάζεται μέ φανταστικά τους εἴδωλα. Ἑπομένως ἔχει ἀνάγκη ἀπό σαφή θεμελίωση.

Τό νά ὁρίσουμε ἕνα ἀντικείμενο, σημαίνει νά τό περιγράψουμε κατά πλήρη τρόπο μέ τή βοήθεια γνωστῶν ἀντικειμένων καί νά τοῦ δώσουμε ἕνα ὄνομα. Εἶναι ἀδύνατο ὅμως νά τά ὁρίσουμε ὅλα, γιατί ἕνας ἀρχικός ὁρισμός θά ὑπέθετε ἀναγκαστικῶς ἀντικείμενα ἤδη γνωστά, πού ὡστόσο δέ θά τά εἴχαμε ὁρίσει.

Εἶναι λοιπόν ἀναπόφευκτο, στήν ἀρχή κάθε μαθηματικῆς ἐπιστήμης νά δεχτοῦμε ὅτι ὑπάρχουν μερικά ἀντικείμενα πού δέν ὁρίζονται, ἀλλά τά δεχόμαστε ὡς γνωστά. Αὐτά ἀκριβῶς ἀποτελοῦν τίς **ἀρχικές ἔννοιες**.

Ὡς ἀρχικές ἔννοιες στή γεωμετρία δεχόμαστε τό **«σημεῖο»**, τήν **«εὐθεία»**, τή **«γραμμή»**, τό **«ἐπίπεδο»**, τήν **«ἐπιφάνεια»** καί τό **«χῶρο»**. Πάνω στίς ἔννοιες αὐτές θά θεμελιωθεῖ μία γεωμετρική θεωρία μέ τίς προτάσεις της.

3. Συμβολισμοί. Τά σημεῖα συνήθως θά τά συμβολίζουμε μέ τά κεφαλαῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, τίς εὐθεῖες μέ τά πεζά (μικρά) γράμματα κλεισμένα μέσα σέ παρενθέσεις καί τά ἐπίπεδα μέ τά κεφαλαῖα γράμματα κλεισμένα μέσα σέ παρενθέσεις.

4. Οἱ προτάσεις τῆς γεωμετρίας. i) Θεώρημα λέγεται μία πρόταση πού τή δεχόμαστε μετά ἀπό ἀπόδειξη, δηλαδή μετά ἀπό λογική ἐπεξεργασία, πού στηρίζεται ἀποκλειστικά καί μόνο πάνω σέ προτάσεις ἐντελῶς ἀναγνωρισμένες ὡς ἀληθινές. 'Από κεῖ κ' ἔπειτα τήν ἀποδεικτέα πρόταση μποροῦμε νά τή θεωροῦμε γνωστή.

ii) 'Αξίωμα. Εἶναι ἀδύνατο νά τά ἀποδείξουμε ὅλα, γιατί κάποια ἀρχική ἀπόδειξη θά ἔπρεπε ἀναγκαῖα νά στηρίζεται σέ προτάσεις ἤδη γνωστές, πού ὡστόσο δέ θά τίς εἴχαμε ἀποδείξει. Ὑπάρχουν λοιπόν ἀναπόφευκτα στήν ἀρχή κάθε ἀποδειχτικῆς ἐπιστήμης μερικές ἀναπόδειχτες προτάσεις, πού τίς δεχόμαστε μόνο κατά ἐνορατικό τρόπο. Αὐτές ἀκριβῶς οἱ ἀναπόδειχτες προτάσεις ἀποτελοῦν τά ἀξιώματα. Ἔτσι λοιπόν μποροῦμε νά ποῦμε ὅτι **ἀξίωμα εἶναι μιά πρόταση πού τή δεχόμαστε χωρίς ἀπόδειξη.**

iii) Αἴτημα. Οὐσιαστική διαφορά ἀνάμεσα στό αἴτημα καί στό ἀξίωμα δέν ὑπάρχει. Τό αἴτημα, ὅπως καί τό ἀξίωμα, εἶναι πρόταση πού τή δεχόμαστε χωρίς ἀπόδειξη.

Ὁ Εὐκλείδης (γύρω στό 285 π.Χ.) στό Α' βιβλίο τῶν «Στοιχείων» του διατύπωσε πρόταση πού δέν ἀποδείχτηκε καί τήν ὀνόμασε **αἴτημα** ζητώντας ἔτσι τήν παραδοχή της, γιατί γνώριζε ὅτι, ἄν δέν γινόταν δεχτή ἡ πρότασή του, αὐτό δέ θά ὁδηγοῦσε ὁπωσδήποτε σέ ψευδή συμπεράσματα.

iv) Λῆμμα λέγεται μιά βοηθητική πρόταση πού χρειάζεται ἀπόδειξη (βοηθητικό θεώρημα), καί πού μπαίνει μπροστά ἀπό κάποιο θεώρημα, γιά νά διευκολύνει καί νά συντομεύσει τήν ἀπόδειξή του.

v) Πόρισμα λέγεται μιά πρόταση πού εἶναι ἄμεση συνέπεια μιᾶς ἄλλης προτάσεως (ἤ ἄλλων προτάσεων) καί ἐπομένως ἡ ἀπόδειξή της εἶναι συνήθως περιττή, γιατί εἶναι αὐτονόητη.

vi) Πρόβλημα λέγεται μιά πρόταση πού ζητεῖ νά ὑπολογιστεῖ ἤ νά κατασκευαστεῖ ἕνα γεωμετρικό μέγεθος ἀπό ὁρισμένα στοιχεῖα πού δίδονται.

5. Ἡ λογική τῶν προτάσεων. Οἱ περισσότερες μαθηματικές προτάσεις ἐκφράζονται μέ τή μορφή ὑποθετικῶν προτάσεων, πού περιέχουν μιά **ὑπόθεση** καί ἕνα **συμπέρασμα** καί λέγονται συνθῆκες τῆς προτάσεως. Π.χ. ἄν αὐτό τό ἀντικείμενο ἔχει μιά ἰδιότητα Α (ὑπόθεση), θά ἔχει καί τήν ἰδιότητα Β (συμπέρασμα), ὅπου τά Α καί Β εἶναι οἱ συνθῆκες τῆς προτάσεως. Γιά περισσότερη συντομία λέμε : «ἀπό Α ἔπεται Β» ἤ «Α συνεπάγεται Β», καί συμβολίζουμε :

$$A \Rightarrow B.$$

Ἡ προηγούμενη σχέση λέγεται **συνεπαγωγή.**

Τό νά ἀποδείξουμε μιά ὑποθετική πρόταση, σημαίνει ἀπό τήν ὑπόθεση Α νά φτάσουμε στό συμπέρασμα Β μέ λογική ἐπεξεργασία, πού θά στηρίζεται ἀποκλειστικά καί μόνο στίς προτάσεις πού μέχρι τώρα ἔχουμε δεχθεῖ εἴτε ἀξιωματικά εἴτε μετά ἀπό ἀπόδειξη.

Δύο ὑποθετικές προτάσεις λέγονται :

i) Ἀντίστροφες, ὅταν ἡ ὑπόθεση τῆς πρώτης εἶναι συμπέρασμα τῆς δεύτερης καί ἀντιστρόφως. Π.χ. οἱ ὑποθετικές προτάσεις $A \Rightarrow B$ καί $B \Rightarrow A$.

ii) Ἀντίθετες, ὅταν ἡ ὑπόθεση καί τό συμπέρασμα τῆς μιᾶς εἶναι οἱ ἀντίστοιχες ἀρνήσεις τῆς ὑποθέσεως καί τοῦ συμπεράσματος τῆς ἄλλης. Π.χ. ἀπό $A \Rightarrow B$ καί ἀπό ὄχι $A \Rightarrow$ ὄχι Β.

iii) Ἀντιστροφοαντίθετες, ὅταν ἡ ὑπόθεση καθεμιᾶς εἶναι ἄρνηση τοῦ συμπεράσματος τῆς ἄλλης. Π.χ. ἀπό $A \Rightarrow B$ καί ἀπό ὄχι $B \Rightarrow$ ὄχι Α.

Ὅταν δύο ὑποθετικές προτάσεις σχετίζονται μέ ἕναν ἀπό τούς τρεῖς προηγούμενους τρόπους, τότε ἡ μία ἀπό αὐτές μπορεῖ νά χαρακτηριστεῖ ὡς **εὐθεία πρόταση** καί ἡ ἄλλη, κατά σειρά, ὡς **ἀντίστροφη, ἀντίθετη** ἤ **ἀντιστροφοαντίθετη** τῆς πρώτης.

Ἀξίζει νά σημειώσουμε ἰδιαίτερα ὅτι δύο ἀντίστροφες προτάσεις $A \Rightarrow B$ καί $B \Rightarrow A$ μποροῦν νά συμβολισθοῦν γιά περισσότερη συντομία $A \Longleftrightarrow B$ σέ μιά διπλή ὑποθετική πρόταση. Τότε τίς συνθῆκες A καί B τίς λέμε **ἰσοδύναμες** καί ἡ καθεμιά λέγεται **ἀναγκαία καί ἱκανή** συνθήκη γιά τήν ἄλλη.

Μετά ἀπό αὐτά, ἡ φράση «νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ συνθήκη A εἶναι ἀναγκαία καί ἱκανή γιά τή συνθήκη B» μᾶς ὑποχρεώνει στήν ἀπόδειξη τῆς συνεπαγωγῆς $A \Rightarrow B$, μέ τήν ὁποία ἡ A χαρακτηρίζεται ἱκανή γιά τή B, ἀλλά καί τῆς ἀντίστροφής της $B \Rightarrow A$, μέ τήν ὁποία ἡ A ἀποδεικνύεται ἀναγκαία συνέπεια τῆς B.

Μερικές φορές ἡ φράση «ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη» διατυπώνεται καί «τότε καί μόνο τότε» ἤ «πρέπει καί ἀρκεῖ».

6. Ὁ χῶρος εἶναι θεμελιώδης ἔννοια γνωστή ἀπό τήν ἐμπειρία μας (περιβάλλον στό ὁποῖο ζοῦμε). Μέσα στό χῶρο ὑπάρχει ἡ ὕλη σέ ὅλες τίς μορφές της καί μέσα σ' αὐτόν συμβαίνουν τά φυσικά φαινόμενα.

7. Γεωμετρικό σχῆμα λέγεται ἡ ἄυλη ἀπεικόνιση κάθε ὑποσυνόλου τοῦ (αἰσθητοῦ) χώρου στό χῶρο τῆς νοήσεως. Μέ ἁπλούστερα λόγια, γεωμετρικό σχῆμα εἶναι ἕνα στερεό σῶμα ἀπό τό ὁποῖο φανταζόμαστε ὅτι ἔχει ἀφαιρεθεῖ ἡ ὕλη (περίγραμμα στερεοῦ σώματος). Τό γεωμετρικό σχῆμα εἶναι γενικά ἕνα σύνολο ἀπό σημεῖα, γραμμές καί ἐπιφάνειες, δηλαδή ἕνα σημειοσύνολο, ἀφοῦ οἱ γραμμές καί οἱ ἐπιφάνειες εἶναι σημειοσύνολα.

Τό γεωμετρικό σχῆμα ποτέ δέ μᾶς πείθει γιά κάποια ἰδιότητα τήν ὁποία μπορεῖ νά ἔχει τό ἐξεταζόμενο στερεό· μόνο πού μᾶς βοηθεῖ γιά νά βροῦμε τήν ἰδιότητα καί νά τήν ἀποδείξουμε.

8. Οἱ τρεῖς βασικές κατηγορίες ἀξιωμάτων. Οἱ θεμελιώδεις ἔννοιες τῆς γεωμετρίας εἶναι τό **σημεῖο, ἡ εὐθεία** καί τό **ἐπίπεδο.** Ὅπως ἔχουμε πεῖ, εἶναι ἔννοιες πού δέν μποροῦμε νά τίς ὁρίσουμε (ἀρχικές ἔννοιες) καί πού μ' αὐτές συγκροτοῦνται ὅλα τά γεωμετρικά σχήματα.

Τό σημεῖο δέν ἔχει ἔκταση (διαστάσεις) ἀλλά ἔχει μόνο θέση.

Ἕνα λεπτό τεντωμένο νῆμα δίνει τήν εἰκόνα ἑνός μέρους μιᾶς εὐθείας γραμμῆς.

Τέλος ἡ ἐλεύθερη ἐπιφάνεια νεροῦ σέ κατάσταση ἠρεμίας (μέ περιορισμένες διαστάσεις) μπορεῖ νά δώσει τήν εἰκόνα ἑνός μέρους μιᾶς ἐπίπεδης ἐπιφάνειας.

Τά προηγούμενα δέν εἶναι μαθηματικοί ὁρισμοί γιά τά γεωμετρικά στοιχεῖα σημεῖο, εὐθεία, ἐπίπεδο· αὐτά ἔχουν καθορισμένες ἰδιότητες πού περιγράφονται ἀπό ἀξιώματα.

Τά ἀξιώματα, πάνω στά ὁποῖα θεμελιώνεται ἡ Εὐκλείδειος γεωμετρία, χωρίζονται κυρίως σέ τρεῖς ὁμάδες, δηλαδή :

i) Ἀξιώματα θέσεως. Τά ἀξιώματα τῆς ὁμάδας αὐτῆς ἐνέχουν τήν ἔννοια τοῦ «περιέχειν» ἤ «περιέχεσθαι».

ii) Ἀξιώματα ἰσότητας. Αὐτά ἀναφέρονται στή σχέση τῆς βασικῆς ἰσότητας, τήν ὁποία θά ὁρίσουμε στό σύνολο τῶν σχημάτων.

iii) Ἀξιώματα διατάξεως. Αὐτά ἀναφέρονται στίς σχετικές θέσεις σημείων πάνω σέ μιά εὐθεία καί στίς σχέσεις μεγέθους τῶν γεωμετρικῶν στοιχείων.

Στά ἑπόμενα, ἡ θεμελίωση τῆς Εὐκλειδίου γεωμετρίας θά συμπληρωθεῖ καί μέ μερικά ἄλλα ἀξιώματα, ἀπό τά ὁποῖα σπουδαιότερο εἶναι τό ἀξίωμα (αἴτημα) τοῦ Εὐκλείδη, σχετικό μέ τίς παράλληλες εὐθεῖες.

9. Ἀξιώματα θέσεως. Ἀξίωμα I. Μία εὐθεία ἔχει τουλάχιστο δύο σημεῖα Α καί Β καί ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Γ ἔξω ἀπό τήν εὐθεία.

Παρατήρηση. Ὅταν θά λέμε «δύο σημεῖα», «δύο εὐθεῖες» ἤ «δύο ἐπίπεδα», θά ἐννοοῦμε γενικά ὅτι εἶναι διακεκριμένα μεταξύ τους, δηλαδή ὅτι δέ συμπίπτουν.

Ἀξίωμα II. Ἀπό δύο σημεῖα περνᾶ μία καί μόνο μία εὐθεία.

Ἀπό αὐτό βγαίνει ὅτι δύο σημεῖα Α καί Β ὁρίζουν τή θέση μιᾶς μόνο εὐθείας, πού μποροῦμε νά τή συμβολίζουμε καί εὐθ.ΑΒ.

Ἀξίωμα III. Ἕνα ἐπίπεδο ἔχει τρία τουλάχιστο σημεῖα Α, Β, Γ, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, καί ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Δ ἔξω ἀπ' τό ἐπίπεδο.

Ἀξίωμα IV. Ἀπό τρία σημεῖα, πού δέ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, περνᾶ ἕνα καί μόνο ἕνα ἐπίπεδο.

Ἀξίωμα V. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεία ΑΒ εἶναι εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Γιά τήν εὐθεία καί τό ἐπίπεδο δεχόμαστε ἀκόμη τά ἀκόλουθα ἀξιώματα:

Ἀξίωμα VI. Μιά εὐθεία ἐκτείνεται ἀπεριόριστα (δέν ἔχει ἀρχή οὔτε τέλος).

Ἀξίωμα VII. Ἕνα ἐπίπεδο ἐκτείνεται ἀπεριόριστα.

10. Μετατόπιση σχήματος λέγεται κάθε ἀλλαγή τῆς θέσεώς του μέσα στό χῶρο.

Συμβατικά δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει καί ταυτοτική μετατόπιση, δηλαδή μετατόπιση πού ἀφήνει κάθε σχῆμα στήν ἴδια θέση.

Ἀξίωμα VIII. Ὁποιαδήποτε μετατόπιση ἑνός σχήματος (Σ) δέν τό μεταβάλλει.

11. Ἴσα σχήματα. Στό σύνολο τῶν σχημάτων ὁρίζουμε τή σχέση τῆς βασικῆς ἰσότητας μέ τήν ἀκόλουθη ἔννοια:

Δύο σχήματα (Σ_1) καί (Σ_2) λέγονται ἴσα τότε καί μόνο τότε, ὅταν ὑπάρχει μετατόπιση πού νά τοποθετεῖ τό ἕνα πάνω στό ἄλλο (ἤ μέσα στό ἄλλο), ἔτσι ὥστε τά δύο σχήματα νά ταυτισθοῦν, δηλαδή κάθε σημεῖο τοῦ ἑνός σχήματος νά συμπέσει μέ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄλλου καί ἀντιστρόφως. Τότε γράφουμε συμβολικά:

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2).$$

12. Ἀξιώματα τῆς ἰσότητας. Γιά τή σχέση τῆς βασικῆς ἰσότητας δεχόμαστε τά ἀκόλουθα ἀξιώματα:

Ἀξίωμα I. Εἶναι ἀνακλαστική:

$$(\Sigma) = (\Sigma)$$

Ἀξίωμα II. Εἶναι συμμετρική, δηλαδή ἄν $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$, τότε καί $(\Sigma_2) = (\Sigma_1)$.

Γιά συντομία γράφουμε:

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \;\Rightarrow\; (\Sigma_2) = (\Sigma_1).$$

Ἀξίωμα III. Εἶναι μεταβατική, δηλαδή ἄν $(\Sigma_1) = (\Sigma_2)$ καί $(\Sigma_2) = (\Sigma_3)$ τότε $(\Sigma_1) = (\Sigma_3)$.

Γιά συντομία γράφουμε:

$$(\Sigma_1) = (\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2) = (\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1) = (\Sigma_3).$$

13. Διάταξη σημείων πάνω σέ εὐθεία. Ἄν ὑπάρχουν τρία διαφορετικά σημεῖα Α, Β, Γ πάνω στήν ἴδια εὐθεία (δ) καί βρίσκονται ὅπως στό σχῆμα 1, τότε τό σημεῖο Γ λέγεται ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Β. Ἡ σημειοσειρά αὐτή Α, Γ, Β λέμε ὅτι εἶναι μία διάταξη τῶν τριῶν σημείων πάνω στήν εὐθεία (δ) ἤ ἀκόμη ὅτι τά τρία σημεῖα εἶναι διαδοχικά μέ τή σειρά Α, Γ, Β.

14. Ἀξιώματα διατάξεως. Ἀξίωμα I. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεῖα μιᾶς εὐθείας (δ), ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο $\Gamma \in (\delta)$ ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Β (σχ. 1).

(δ) Α Γ Β

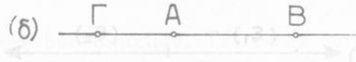
Σχ. 1.

Ἀξίωμα II. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεῖα

μιᾶς εὐθείας (δ), ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Γ ∈ (δ), τέτοιο ὥστε τό Β νά εἶναι ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Γ (σχ. 2).

Σχ. 2.

Ἀξίωμα ΙΙΙ. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεῖα μιᾶς εὐθείας (δ), ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Γ ∈ (δ), τέτοιο ὥστε τό Α νά εἶναι ἐνδιάμεσο τῶν Γ καί Β (σχ. 3).



Σχ. 3.

15. Θεώρημα. Μιά εὐθεία ἔχει ἄπειρα κατά τό πλῆθος σημεῖα.

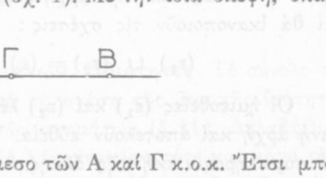
Ἀπόδειξη. Σύμφωνα μέ τά ἀξιώματα πού θέσαμε, μία εὐθεία (δ) ἔχει τουλάχιστο δύο σημεῖα Α καί Β. Τότε, γιά τά Α καί Β ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ἐνδιάμεσο σημεῖο Γ τῆς εὐθείας (δ) (σχ. 4). Μέ τήν ἴδια σκέψη, ὑπάρ-

Σχ. 4.

χει ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Δ τῆς (δ) ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Γ κ.ο.κ. Ἔτσι μποροῦμε νά συσσωρεύσουμε μιάν ἀπειρία ἀπό σημεῖα ἐνδιάμεσα τῶν Α καί Β. Ἄρα ἡ εὐθεία (δ) περιέχει ἄπειρα κατά τό πλῆθος σημεῖα, ἀφοῦ ἕνα μέρος της μόνο ἔχει ἄπειρα σημεῖα.

16. Θεώρημα. Δύο διαφορετικές μεταξύ τους εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) μποροῦν νά ἔχουν ἕνα τό πολύ κοινό σημεῖο.

Ἀπόδειξη. Ἄς παρατηρήσουμε πρῶτα ὅτι δύο εὐθεῖες μποροῦν νά ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο. Γιατί, ἄν θεωρήσουμε τρία σημεῖα Α, Β, Γ πού δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 5), τά Α καί Β ὁρίζουν τήν εὐθεία (ε_2) καί τά Α καί Γ ὁρίζουν τήν εὐθεία (ε_1), ὁπότε οἱ δύο εὐθεῖες εἶναι φανερό ὅτι ἔχουν κοινό σημεῖο τό Α.



Σχ. 5.

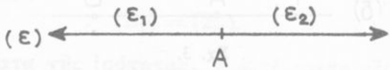
Ἐκτός ἀπό τό Α, δέν μποροῦν νά ἔχουν καί ἄλλο κοινό σημεῖο, γιατί, ἄν Μ ἦταν ἕνα ἀκόμα κοινό σημεῖο γιά τίς εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), αὐτές θά ταυτίζονταν, ἐπειδή τά

Α καί Μ μόνο μία εὐθεία ὁρίζουν. Ἄρα δύο διαφορετικές μεταξύ τους εὐθεῖες ἕνα τό πολύ κοινό σημεῖο μποροῦν νά ἔχουν. Τότε λέμε ὅτι οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) **τέμνονται** καί τό κοινό σημεῖο τους Α λέγεται **σημεῖο τομῆς** τους ἤ **ἴχνος** τῆς μιᾶς εὐθείας πάνω στήν ἄλλη.

17. Ἡμιευθεία. Ἄς θεωρήσουμε μιά εὐθεία (ε) καί ἕνα σημεῖο της Α (σχ. 6). Μέ τό Α ἡ εὐθεία (ε), ὡς σημειοσύνολο, χωρίζεται σέ δύο ὑποσύνολα (ε_1) καί (ε_2) τέτοια ὥστε νά εἶναι:

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) - \{A\} \text{ καί } (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \varnothing.$$

Τότε τά ὑποσύνολα (ε_1) καί (ε_2) λέγονται **ἡμιευθεῖες** μέ **ἀρχή** τό σημεῖο Α.



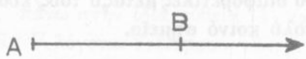
Σχ. 6.

Κατά τόν ὁρισμό, ἡ ἀρχή Α δέν ἀνήκει στίς ἡμιευθεῖες (ε_1) καί (ε_2), γι' αὐτό θά τίς λέμε **ἀνοιχτές** ἡμιευθεῖες. Ἄν ὅμως θέλουμε νά συμπεριλάβουμε σ' αὐτές καί τήν ἀρχή τους Α, τότε θά τίς λέμε **κλειστές** ἡμιευθεῖες καί θά ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις:

$$(\varepsilon_1) \cup (\varepsilon_2) = (\varepsilon) \text{ καί } (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2) = \{A\}.$$

Οἱ ἡμιευθεῖες (ε_1) καί (ε_2) λέγονται **ἀντίθετες** ἡμιευθεῖες, ἐπειδή ἔχουν κοινή ἀρχή καί ἀποτελοῦν εὐθεία. Ἡ καθεμιά ἀπό αὐτές μπορεῖ νά λέγεται καί συμπληρωματική τῆς ἄλλης.

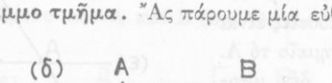
Εὐκολονόητο εἶναι ὅτι μιά ἡμιευθεία μέ ἀρχή ἕνα σημεῖο Α ἐκτείνεται ἀπεριόριστα ἀπό τό ἕνα μόνο μέρος της. Γιά τόν προσδιορισμό μιᾶς ἡμιευθείας χρειάζεται νά γνωρίζουμε τήν ἀρχή της Α καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο της Β (σχ. 7). Τή συμβολίζουμε ἡμιευθ.ΑΒ. ἤ ἁπλούστερα ΑΒ (ὅταν ἔ-



Σχ. 7.

χουμε ἀναφέρει προηγουμένως ὅτι πρόκειται γιά ἡμιευθεία). Πάντως, στό συμβολισμό βάζουμε ὁπωσδήποτε ὡς πρῶτο γράμμα τήν ἀρχή Α.

18. Εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἄς πάρουμε μία εὐθεία (δ) καί δύο σημεῖα



Σχ. 8.

της Α καί Β (σχ. 8). Εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα τά Α καί Β ὀνομάζουμε τό σύνολο ὅλων τῶν σημείων τῆς εὐθείας (δ) πού εἶναι ἐνδιάμεσα γιά τά A καί B. Συμβολικά γράφουμε τμ.AB ἤ ἁπλούστερα AB (ὅταν γνωρίζουμε ὅτι εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα). Μποροῦμε ὅμως τά εὐθύγραμμα τμήματα νά τά συμβολίζουμε καί μέ τά πεζά (μικρά) γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου α, β, γ,...

Τά σημεῖα A καί B λέγονται ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB καί, κατά τόν ὁρισμό, δέν ἀνήκουν στό εὐθύγραμμο τμῆμα. Τότε τό εὐθύγραμμο τμῆμα λέγεται **ἀνοιχτό** εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἄν ὅμως μέσα στό τμῆμα θέλουμε νά συμπεριλάβουμε καί τά ἄκρα του, θά τό λέμε **κλειστό** εὐθύγραμμο τμῆμα.

Συμβατικά δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει καί **μηδενικό** εὐθύγραμμο τμῆμα, πού τά ἄκρα του συμπίπτουν.

19. Ἀπόσταση δύο σημείων. Τήν ἔννοια αὐτή δέν τήν ὁρίζουμε καί τή θεωροῦμε γνωστή ἀπό τήν ἐμπειρία. Τονίζουμε ὅμως ὅτι ἡ ἀπόσταση δύο σημείων A καί B δέν εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα AB· γιατί αὐτό εἶναι σημειοσύνολο, ἐνῶ ἡ ἀπόσταση τῶν σημείων A καί B εἶναι ἔννοια ὁπωσδήποτε διαφορετική ἀπό τήν ἔννοια τοῦ σημειοσυνόλου.

20. Μῆκος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος λέγεται ἡ ἀπόσταση τῶν ἄκρων του.

21. Ἰσότητα εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἰδιότητες. Τό σύνολο τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τό ἐφοδιάζουμε μέ τή σχέση τῆς βασικῆς ἰσότητας, ὅπως αὐτή ὁρίσθηκε γενικά στό σύνολο τῶν σχημάτων (§ 11). Δηλαδή:

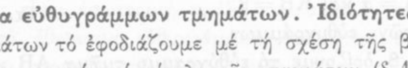
Δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καί ΓΔ λέγονται ἴσα τότε καί μόνο τότε, ὅταν αὐτά μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση (κάθε σημεῖο τοῦ πρώτου νά ταυτιστεῖ μέ ἕνα σημεῖο τοῦ δεύτερου, καί ἀντιστρόφως).

Ὡς ἰδιότητες τῆς βασικῆς ἰσότητας γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα ἀναφέρουμε τά τρία γενικά ἀξιώματα τῆς ἰσότητας· δηλαδή ἡ ἰσότητα στό σύνολο τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σχέση:

i) Ἀνακλαστική, δηλαδή: $AB = AB$ (κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι ἴσο μέ τόν ἑαυτό του).

ii) Συμμετρική, δηλαδή, ἄν $AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta = AB$.

iii) Μεταβατική, δηλαδή, ἄν $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma\Delta = EZ \Rightarrow AB = EZ$ (σχ. 9).

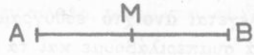


Σχ. 9.

Κάθε σχέση, γιά τήν ὁποία δεχόμαστε τά τρία προηγούμενα ἀξιώματα, τή χαρακτηρίζουμε **σχέση ἰσοδυναμίας**· ἑπομένως ἡ σχέση τῆς βασικῆς ἰσότητας εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας.

Παρατήρηση. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, ὡς σημειοσύνολο, συμπίπτει μέ τό ΒΑ. Ἄρα μποροῦμε νά ἀναφέρουμε ὡς ἰδιότητα τῆς ἰσότητας τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων καί τήν $AB = BA$.

22. Μέσο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος λέγεται ἕνα σημεῖο του πού ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος. Ἄν ΑΒ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα (σχ. 10) καί Μ εἶναι τό μέσο του, τότε εἶναι $MA = MB$.

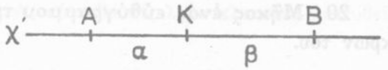


Σχ. 10.

Ἀξίωμα. Ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἔχει ἕνα καί μόνο ἕνα μέσο Μ.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

23. Ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἄς θεωρήσουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα α καί β. Πάνω σέ μιά εὐθεία xx′ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Κ (σχ. 11) καί πάνω στίς ἡμιευθεῖες Kx′ καί Kx παίρνουμε σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $KA = \alpha$ καί $KB = \beta$.



Σχ. 11.

Ὡς ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων α καί β ὁρίζουμε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί συμβολίζουμε: $\alpha + \beta = AB$ ἤ $AK + KB = AB$.

Ἡ προηγούμενη διαδικασία γιά τήν εὕρεση τοῦ ἀθροίσματος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων λέγεται πράξη τῆς προσθέσεως ἤ ἁπλούστερα πρόσθεση τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων.

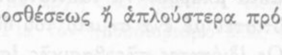
24. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως: i) Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἀντιμεταθετική, δηλαδή ἄν α, β εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Ἀπόδειξη. Ἄν $AB = \alpha$ καί $B\Gamma = \beta$ (σχ. 12) ἕπεται:

(1) $A\Gamma = AB + B\Gamma = \alpha + \beta$.

Ἐπίσης εἶναι:

(2) $\Gamma A = \Gamma B + BA = \beta + \alpha$.

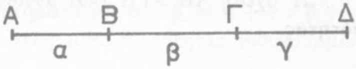


Σχ. 12.

Ἀλλά $A\Gamma = \Gamma A$ καί ἑπομένως ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) λαμβάνουμε $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

ii) Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι προσεταιριστική, δηλαδή ἄν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα, τότε $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Ἀπόδειξη. Πάνω σέ μιά εὐθεία λαμβάνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$, $\Gamma\Delta = \gamma$ (σχ. 13). Τότε εἶναι :



Σχ. 13.

(3) $A\Delta = A\Gamma + \Gamma\Delta = (\alpha + \beta) + \gamma$

καί

(4) $A\Delta = AB + B\Delta = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Οἱ σχέσεις (3) καί (4) ἔχουν τά πρῶτα μέλη τους ἴσα, ἄρα θά ἔχουν καί τά δεύτερα. Δηλαδή $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

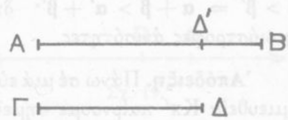
iii) Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τό μηδενικό εὐθύγραμμο τμῆμα· δηλαδή εἶναι $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ γιά κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα α.

iv) Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι μονότροπη καί ἐσωτερική πράξη γιά τό σύνολο τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων· δηλαδή τό σύνολο τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως.

Πραγματικά ἀπό τίς προηγούμενες ἰδιότητες ἕπεται ὅτι ν εὐθύγραμμα τμήματα μποροῦν νά προστεθοῦν μέ ὁποιαδήποτε σειρά, μέ ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως (ἄθροισμα) πάντα τό ἴδιο εὐθύγραμμο τμῆμα. Ἄρα εἶναι πράξη μονότροπη. Ἐπίσης εἶναι ἐσωτερική πράξη τοῦ συνόλου τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, γιατί τό ἄθροισμα εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι εὐθύγραμμο τμῆμα, δηλαδή εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἴδιου συνόλου.

25. Διάταξη στό σύνολο τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἄς θεωρήσουμε δύο ἄνισα (ὄχι ἴσα) εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ (σχ. 14).

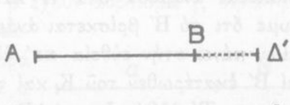
Μετατοπίζουμε τό ΓΔ στή θέση ΑΔ′, ἔτσι ὥστε τά δύο τμήματα νά ἀποκτήσουν ἕνα κοινό ἄκρο, τό Α, καί ἕνα κοινό μέρος. Τότε δύο εἶναι τά πιθανά ἐνδεχόμενα :



Σχ. 14.

i) Τό Δ′ πάνω στήν ΑΒ εἶναι ἀνάμεσα στά Α καί Β (σχ. 14). Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι τό τμῆμα ΑΒ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ΑΔ′ ἤ, πού εἶναι τό ἴδιο, τό ΑΒ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ΓΔ. Συμβολικά γράφουμε $AB > \Gamma\Delta$. Ἰσοδύναμη μέ τήν προηγούμενη σχέση εἶναι καί ἡ $\Gamma\Delta < AB$, πού τή διαβάζουμε : «τό ΓΔ εἶναι μικρότερο ἀπό τό ΑΒ».

ii) Ἄν τό Β πάνω στήν εὐθεία ΑΒ εἶναι ἀνάμεσα στά Α καί Δ′ (σχ. 15),



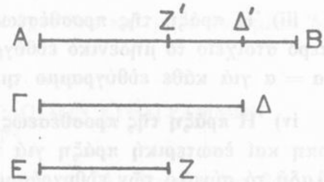
Σχ. 15.

τότε λέμε ὅτι τό τμῆμα ΑΒ εἶναι μικρότερο ἀπό τό ΓΔ (συμβολικά $AB < \Gamma\Delta$) ἤ τό ΓΔ μεγαλύτερο ἀπό τό ΑΒ (συμβολικά $\Gamma\Delta > AB$).

Ἡ σχέση $AB > \Gamma\Delta$ (καί ἀντίστοιχα ἡ $AB < \Gamma\Delta$) λέγεται **σχέση ἀνισότητας.**

26. Ἰδιότητες τῆς σχέσεως τῆς ἀνισότητας: i) Ἡ σχέση τῆς ἀνισότητας εἶναι μεταβατική· δηλαδή, ἄν $AB > \Gamma\Delta$ καί $\Gamma\Delta > EZ \Rightarrow AB > EZ$.

Ἀπόδειξη. Μετατοπίζουμε τά τμήματα ΓΔ καί ΕΖ πάνω στό ΑΒ, ἔτσι ὥστε τά ἄκρα Γ καί Ε νά ταυτιστοῦν μέ τό Α (σχ. 16) καί τά Δ καί Ζ νά λάβουν τίς θέσεις Δ′ καί Ζ′ ἀντιστοίχως πάνω στήν εὐθεία ΑΒ. Ἐπειδή εἶναι $AB > \Gamma\Delta$ καί $\Gamma\Delta > A\Delta' \Rightarrow AB > A\Delta'$, δηλαδή τό Δ′ βρίσκεται μεταξύ τῶν σημείων Α καί Β. Ἐπίσης, εἶναι $\Gamma\Delta > EZ \Rightarrow A\Delta' > AZ'$. Ἄρα τό Ζ′ βρίσκεται μεταξύ τῶν Α καί Δ′ καί ἑπομένως τό Ζ′ εἶναι μεταξύ τῶν Α καί Β $\Rightarrow AB > AZ' \Rightarrow AB > EZ$.

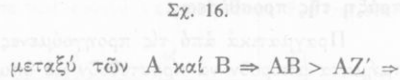


Σχ. 16.

Παρατήρηση. Ἡ σχέση τῆς ἀνισότητας δέν εἶναι συμμετρική· δηλαδή ἄν $AB > \Gamma\Delta$, ἀποκλείεται νά εἶναι $\Gamma\Delta > AB$. Κάθε σχέση μεταβατική καί ὄχι συμμετρική χαρακτηρίζεται ὡς **σχέση διατάξεως**· ἑπομένως ἡ σχέση τῆς ἀνισότητας στό σύνολο τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι σχέση διατάξεως.

ii) Ἄν α, α′, β, β′ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τέτοια, ὥστε $\alpha > \alpha'$ καί $\beta > \beta' \Rightarrow \alpha + \beta > \alpha' + \beta'$· δηλαδή μποροῦμε νά προσθέσουμε κατά μέλη ὁμοιόστροφες ἀνισότητες.

Ἀπόδειξη. Πάνω σέ μιά εὐθεία xx′ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Κ (σχ. 17). Στήν ἡμιευθεία Κx′ παίρνουμε σημεῖα Α καί Α′, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $KA = \alpha$ καί $KA' = \alpha'$. Στήν ἡμιευθεία Κx παίρνουμε σημεῖα Β καί Β′, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $KB = \beta$ καί $KB' = \beta'$. Ἐπειδή ἀπό τήν ὑπόθεση εἶναι $\alpha > \alpha' \Rightarrow KA > KA'$. Ἄρα τό Α′ βρίσκεται ἀνάμεσα στά Κ καί Α. Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι τό Β′ βρίσκεται ἀνάμεσα στά Κ καί Β. Αὐτή ἡ διάταξη τῶν σημείων πάνω στήν εὐθεία xx′ ἐξασφαλίζει τόσο τά Α καί Β ὅσο καί τά Α′ καί Β′ ἑκατέρωθεν τοῦ Κ καί τά Α καί Β ἑκατέρωθεν τῶν Α′ καί Β′ ἀντιστοίχως. Τότε θά εἶναι: $AB > AB'$ καί $AB' > A'B' \Rightarrow$



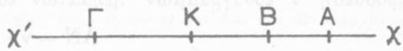
Σχ. 17.

(1) $$AB > A'B' \text{ (μεταβατική ἰδιότητα).}$$

Ἀλλά $AB = AK + KB = \alpha + \beta$ καί $A'B' = A'K + KB' = \alpha' + \beta'$. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται: $\alpha + \beta > \alpha' + \beta'$.

iii) Ἄν α, β, γ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα μέ $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$· δηλαδή μποροῦμε νά προσθέσουμε στά μέλη μιᾶς ἀνισότητας εὐθυγράμμων τμημάτων τό ἴδιο εὐθύγραμμο τμῆμα.

Ἀπόδειξη. Πάνω σέ μιά εὐθεία xx' παίρνουμε ἕνα σημεῖο K (σχ. 18). Στήν ἡμιευθεία Kx παίρνουμε δύο σημεῖα A καί B, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $KA = \alpha$ καί $KB = \beta$. Ἐπειδή κατά τήν ὑπόθεση εἶναι $\alpha > \beta \Rightarrow$ $\Rightarrow KA > KB$· ἑπομένως τό σημεῖο B βρίσκεται ἀνάμεσα στά K καί A. Στήν ἡμιευθεία Kx' παίρνουμε ἕνα σημεῖο Γ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι $\Gamma K = \gamma$. Ἡ διάταξη αὐτή τῶν σημείων πάνω στήν εὐθεία xx' ἐξασφαλίζει τό K μεταξύ τῶν σημείων Γ καί B, καθώς καί τό B μεταξύ τῶν Γ καί A. Ἄρα θά εἶναι:

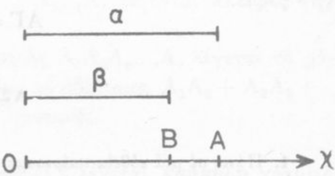


Σχ. 18.

(2) $\Gamma A > \Gamma B$.

Ἀλλά $\Gamma A = \Gamma K + KA = \gamma + \alpha$ καί $\Gamma B = \Gamma K + KB = \gamma + \beta$. Τότε ἡ σχέση (2) γράφεται $\gamma + \alpha > \gamma + \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

27. Διαφορά εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἄς θεωρήσουμε δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα α καί β μέ $\alpha > \beta$. Πάνω σέ μιά ἡμιευθεία Ox (σχ. 19) παίρνουμε $OA = \alpha$ καί $OB = \beta$. Τό τμῆμα AB (ἤ κάθε ἴσο του) ὀνομάζεται **διαφορά** τῶν τμημάτων α καί β· συμβολικά γράφουμε $OA - OB = AB$ ἤ $\alpha - \beta = AB$. Ἔτσι μποροῦμε νά δώσουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό: $\alpha - \beta = AB$ τότε καί μόνο τότε, ὅταν $\alpha = \beta + AB$.



Σχ. 19.

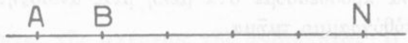
Ἡ διαδικασία, μέ τήν ὁποία ἀπό δύο εὐθύγραμμα τμήματα βρίσκουμε τή διαφορά τους, λέγεται πράξη τῆς ἀφαιρέσεως ἤ ἀφαίρεση.

Ἄν ἦταν $\alpha = \beta$, ἡ διαφορά τους θά ἦταν τό μηδενικό εὐθύγραμμο τμῆμα· δηλαδή ἄν $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha - \beta = 0$.

Παρατήρηση. Ἄν δύο τμήματα α καί β ἔχουν ἄθροισμα γ, δηλαδή ἄν $\alpha + \beta = \gamma$ (σχ. 20), ἀπό τόν ὁρισμό τῆς διαφορᾶς ἕπεται ὅτι τό τμῆμα β εἶναι ἡ διαφορά τῶν γ καί α, καθώς ἐπίσης ὅτι τό τμῆμα α εἶναι ἡ διαφορά τῶν γ καί β. Ἄρα ἀπό τή σχέση $\alpha + \beta = \gamma$ ἕπονται οἱ σχέσεις $\beta = \gamma - \alpha$ καί $\alpha = \gamma - \beta$.

Σχ. 20.

28. Γινόμενο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ἐπί φυσικόν ἀριθμό. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ (σχ. 21). Ὀνομάζουμε γινόμενο τοῦ ΑΒ ἐπί τόν φυσικόν ἀριθμό ν τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΝ πού προκύπτει ἀπό τήν



Σχ. 21.

πρόσθεση ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων πρός τό ΑΒ. Τότε γράφουμε

$$\text{ΑΝ} = \nu \cdot \text{ΑΒ}.$$

29. Πηλίκο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος διά φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΝ (σχ. 21). Ὀνομάζουμε πηλίκο τοῦ ΑΝ διά τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ἡ σχέση ΑΝ = ν · ΑΒ. Τότε γράφουμε:

$$\text{ΑΒ} = \frac{\text{ΑΝ}}{\nu}.$$

30. Γινόμενο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ἐπί ρητόν ἀριθμό. Ἔστω ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί $\frac{\mu}{\nu}$ ἕνας ρητός ἀριθμός. Ὀνομάζουμε γινόμενο τοῦ ΑΒ ἐπί τόν ρητό $\frac{\mu}{\nu}$ ἕνα τμῆμα ΑΓ πού προκύπτει, ἄν τό ΑΒ τό πολλαπλασιάσουμε ἐπί μ καί τό γινόμενο τό διαιρέσουμε διά ν. Τότε γράφουμε:

$$\text{ΑΓ} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \text{ΑΒ}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

1. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἄν εἶναι ΑΓ = ΒΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι θά εἶναι καί ΑΒ = ΓΔ.

2. Πάνω σέ μιά εὐθεία παίρνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ. Ἄν Δ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$\text{ΑΔ} = \frac{\text{ΑΓ} + \text{ΑΒ}}{2} \quad \text{καί} \quad \text{ΔΓ} = \frac{\text{ΑΓ} - \text{ΑΒ}}{2}.$$

3. Πάνω σέ μιά εὐθεία λαμβάνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ.

4. Πάνω σέ μιά εὐθεία λαμβάνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΒ = 2α καί ΒΓ = 2β. Ἄν Δ, Ε καί Ζ εἶναι ἀντιστοίχως τά μέσα τῶν τμημάτων ΑΒ, ΒΓ καί ΑΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι τά τμήματα ΑΕ καί ΔΖ ἔχουν τό ἴδιο μέσο καί νά ὑπολογίσετε τήν ἀπόσταση τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΔΖ ἀπό τό Γ.

5. Πάνω σέ μιά εὐθεία λαμβάνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΒ καί Ν εἶναι τό μέσο τοῦ ΓΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι

$$\text{ΜΝ} = \frac{\text{ΑΔ} + \text{ΒΓ}}{2}.$$

Β΄.

6. Ἄν τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία, ἔτσι ὥστε τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ νά ἔχουν κοινό μέσο, νά ἀποδείξετε ὅτι θά εἶναι ΑΓ = ΒΔ. Νά ἐξετάσετε ἄν ἀληθεύει τό ἀντίστροφο.

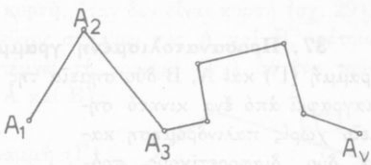
7. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι 6 διακεκριμένα σημεῖα, πού δέν βρίσκονται ἀνά τρία στήν ἴδια εὐθεία, ὁρίζουν 15 εὐθύγραμμα τμήματα.

8. Πόσα εὐθύγραμμα τμήματα ὁρίζονται ἀπό ν διακεκριμένα σημεῖα, πού δέν βρίσκονται ἀνά τρία στήν ἴδια εὐθεία; Νά γίνει ἐφαρμογή γιά $\nu = 20$.

9. Πόσα σημεῖα ὁρίζονται ἀπό ν εὐθεῖες, πού τέμνονται ἀνά δύο καί δέν διέρχονται ἀνά τρεῖς ἀπό τό ἴδιο σημεῖο;

ΓΡΑΜΜΕΣ

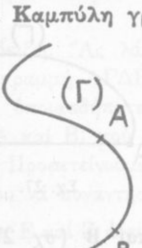
31. Τεθλασμένη γραμμή. Ἄς θεωρήσουμε ν διακεκριμένα σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ πού δέ βρίσκονται ὅλα στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 22). Γράφουμε τά εὐθύγραμμα τμήματα A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{\nu-1}A_\nu$. Ἡ γραμμή πού προκύπτει λέγεται **τεθλασμένη** γραμμή ἤ **πολυγωνική** γραμμή. Τά σημεῖα $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ λέγονται **κορυφές** τῆς γραμμῆς καί τά εὐθύγραμμα τμήματα A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{\nu-1}A_\nu$ λέγονται **πλευρές της**.



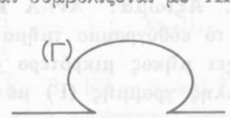
Σχ. 22.

32. Μῆκος μιᾶς τεθλασμένης γραμμῆς $A_1A_2A_3 \ldots A_\nu$ λέγεται τό μῆκος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος πού εἶναι ἴσο μέ ἄθροισμα $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{\nu-1}A_\nu$ τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς.

33. Καμπύλη γραμμή. Μία γραμμή (Γ) λέγεται **καμπύλη** γραμμή, ὅταν κανένα τμῆμα της δέν εἶναι εὐθύγραμμο (σχ. 23). Τότε κάθε τμῆμα της ΑΒ λέγεται καμπύλο τμῆμα ἤ τόξο τῆς καμπύλης καί συμβολίζεται μέ $\overset{\frown}{AB}$.



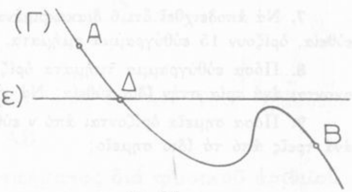
Σχ. 23.



Σχ. 24.

34. Μικτή γραμμή. Μία γραμμή (Γ) λέγεται **μικτή** γραμμή ἤ **τυχαία** γραμμή, ὅταν αὐτή ἀποτελεῖται ἀπό εὐθύγραμμα καί ἀπό καμπύλα τμήματα (σχ. 24).

35. Ἀξίωμα. Ἄν πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) εἶναι μιά εὐθεία (ε) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας (σχ. 25), κάθε γραμμή (Γ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), πού διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α καί Β, ἔχει ἕνα τουλάχιστο κοινό σημεῖο Δ μέ τήν εὐθεία (ε).



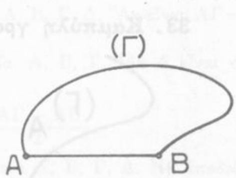
Σχ. 25.

36. Ἐπίπεδη καί στρεβλή γραμμή. Μία γραμμή λέγεται **ἐπίπεδη** τότε καί μόνο τότε, ὅταν ὅλα τά σημεῖα της βρίσκονται πάνω σέ ἕνα καί τό αὐτό ἐπίπεδο. Ἄν αὐτό δέν συμβαίνει, τότε ἡ γραμμή λέγεται **στρεβλή.** Ὡς παράδειγμα στρεβλῆς γραμμῆς ἀναφέρουμε ἕνα σπειροειδές ἐλατήριο, ἄν τό θεωρήσουμε ὡς γραμμή.

37. Προσανατολισμένη γραμμή. Ἄς θεωρήσουμε μιά ὁποιαδήποτε γραμμή (Γ) καί Α, Β δύο σημεῖα της (σχ. 26). Ἡ γραμμή αὐτή μπορεῖ νά διαγραφεῖ ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο χωρίς παλινδρόμηση κατά δύο διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή ἀπό τό Α πρός τό Β ἤ ἀπό τό Β πρός τό Α. Γιά διαχωρισμό τῶν δύο αὐτῶν τρόπων διαγραφῆς της, τόν ἕναν ἀπό αὐτούς, ἔστω τόν ἀπό τό Α πρός τό Β, τόν ὀνομάζουμε **θετική φορά διαγραφῆς.** Τότε ἡ ἀπό τό Β πρός τό Α θά λέγεται **ἀρνητική φορά διαγραφῆς.** Ἡ ἐκλογή τῆς θετικῆς φορᾶς διαγραφῆς εἶναι αὐθαίρετη.

Σχ. 26.

Μία γραμμή, πάνω στήν ὁποία ἔχει ὁριστεῖ ἡ θετική φορά διαγραφῆς της, λέγεται **προσανατολισμένη** ἤ **προσημασμένη** γραμμή.



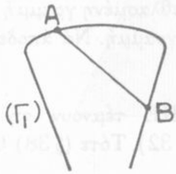
Σχ. 27.

38. Ἀξίωμα. Ἄν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ, πού ὁρίζουν, ἔχει μῆκος μικρότερο ἀπό τό μῆκος κάθε ἄλλης γραμμῆς (Γ) μέ τά ἴδια ἄκρα Α καί Β (σχ. 27).

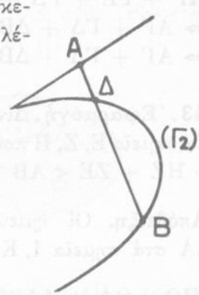
39. Ἐπίπεδα σχήματα. Ἕνα σχῆμα (Σ) λέγεται ἐπίπεδο σχῆμα, ἄν ὅλα τά σημεῖα του βρίσκονται πάνω σέ ἕνα καί τό αὐτό ἐπίπεδο (Π).

40. Κυρτή καί μή κυρτή γραμμή. Θεωροῦμε μιά ἐπίπεδη γραμμή

(Γ_1) (σχ. 28) μέ τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα : Γιά κάθε ζεῦγος σημείων της Α καί Β, τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ δέν ἔχει κανένα κοινό σημεῖο μέ τή γραμμή (Γ_1) (ἐκτὸς ἀπό τά Α καί Β), ἤ βρίσκεται ὁλόκληρο πάνω στή (Γ_1). Ἡ γραμμή αὐτή λέγεται **κυρτή γραμμή.**



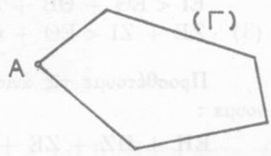
Σχ. 28.



Σχ. 29.

Μία γραμμή (Γ_2) θά λέγεται **μή κυρτή**, ὅταν δέν εἶναι κυρτή (σχ. 29), δηλαδή ὅταν ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ζεῦγος σημείων της Α καί Β, τέτοιο ὥστε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ νά τέμνει τή γραμμή (Γ_2) σέ ἕνα τουλάχιστο σημεῖο Δ (διαφορετικό ἀπό τά Α καί Β).

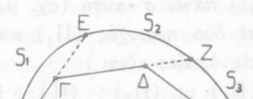
41. Κλειστή γραμμή. Μιά γραμμή (Γ) (ὄχι ἀπέραντη) λέγεται κλειστή γραμμή (σχ. 30), ὅταν τελειώνει (κλείνει) στό σημεῖο Α ἀπό τό ὁποῖο ἄρχισε.



Σχ. 30.

42. Θεώρημα. Τό μῆκος κάθε κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς, μέ ἄκρα τά σημεῖα Α καί Β, εἶναι μικρότερο ἀπό τό μῆκος κάθε ἄλλης γραμμῆς, πού τήν περιβάλλει καί ἔχει μέ τήν πρώτη γραμμή τά ἴδια ἄκρα.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε μιά κυρτή τεθλασμένη γραμμή ΑΓΔΒ, καί ἔστω S τό μῆκος μιᾶς ὁποιασδήποτε ἄλλης γραμμῆς μέ ἄκρα τά Α καί Β, πού περιβάλλει τήν ΑΓΔΒ (σχ. 31). Προεκτείνουμε τά τμήματα ΑΓ καί ΓΔ, ὥσπου νά συναντήσουν τήν ἄλλη γραμμή



Σχ. 31.

στά σημεῖα Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Ἄν εἶναι $\widehat{\mathrm{AE}} = S_1$, $\widehat{\mathrm{EZ}} = S_2$ καί $\widehat{\mathrm{ZB}} = S_3$ τά τρία τμήματα τῆς γραμμῆς S στά ὁποῖα αὐτή χωρίστηκε, τότε (§ 38):

$$\mathrm{AE} < \widehat{\mathrm{AE}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma E} < S_1$$

$$\mathrm{\Gamma Z} < \mathrm{\Gamma E} + \widehat{\mathrm{EZ}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta Z} < \mathrm{\Gamma E} + S_2$$

$$\mathrm{\Delta B} < \mathrm{\Delta Z} + \widehat{\mathrm{ZB}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{\Delta B} < \mathrm{\Delta Z} + S_3$$

Προσθέτουμε τίς δεύτερες σχέσεις κατά μέλη καί λαμβάνουμε :

$$\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma E} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta Z} + \mathrm{\Delta B} < S_1 + \mathrm{\Gamma E} + S_2 + \mathrm{\Delta Z} + S_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta B} < S_1 + S_2 + S_3$$
$$\Rightarrow \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta B} < S.$$

43. Ἐφαρμογή. Δίνεται μία κλειστή κυρτή τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΑ καί τρία σημεῖα Ε, Ζ, Η πού περικλείονται ἀπό τή γραμμή. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\mathrm{EH} + \mathrm{HZ} + \mathrm{ZE} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta A}$.

Ἀπόδειξη. Οἱ ἡμιευθεῖες ΕΖ, ΖΗ καί ΗΕ τέμνουν τή γραμμή ΑΒΓΔΑ στά σημεῖα Ι, Κ καί Θ ἀντιστοίχως (σχ. 32). Τότε (§ 38) θά εἶναι:

$\mathrm{H\Theta} < \mathrm{\Theta A} + \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta K} + \mathrm{KH}$ ἤ

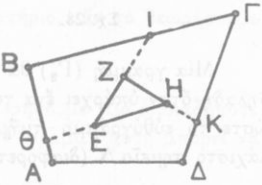
(1) $\mathrm{EH} + \mathrm{E\Theta} < \mathrm{\Theta A} + \mathrm{A\Delta} + \mathrm{\Delta K} + \mathrm{KH}$.

$\mathrm{ZK} < \mathrm{ZI} + \mathrm{I\Gamma} + \mathrm{\Gamma K}$ ἤ

(2) $\mathrm{HZ} + \mathrm{HK} < \mathrm{ZI} + \mathrm{I\Gamma} + \mathrm{\Gamma K}$ καί

$\mathrm{EI} < \mathrm{E\Theta} + \mathrm{\Theta B} + \mathrm{BI}$ ἤ

(3) $\mathrm{ZE} + \mathrm{ZI} < \mathrm{E\Theta} + \mathrm{\Theta B} + \mathrm{BI}$.



Σχ. 32.

Προσθέτουμε τίς ἀνισότητες (1), (2) καί (3) κατά μέλη καί λαμβάνουμε :

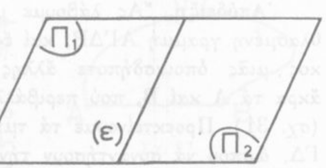
$$\mathrm{EH} + \mathrm{HZ} + \mathrm{ZE} + \mathrm{E\Theta} + \mathrm{HK} + \mathrm{ZI} < (\mathrm{\Theta A} + \mathrm{\Theta B})$$
$$+ (\mathrm{BI} + \mathrm{I\Gamma}) + (\mathrm{K\Delta} + \mathrm{K\Gamma}) + \mathrm{A\Delta} + \mathrm{ZI} + \mathrm{E\Theta} + \mathrm{KH}$$
$$\Longleftrightarrow \mathrm{EH} + \mathrm{HZ} + \mathrm{ZE} < \mathrm{AB} + \mathrm{B\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{\Delta A}.$$

44. Ἡμιεπίπεδο. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μία εὐθεία (ε) πάνω σ' αὐτό (σχ. 33). Μέ τήν εὐθεία (ε) τό ἐπίπεδο (Π) χωρίζεται σέ δύο περιοχές (Π_1) καί (Π_2), γιά τίς ὁποῖες εἶναι :

$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) - (\varepsilon)$ καί

$(\Pi_1) \cap (\Pi_2) = \varnothing$.

Οἱ περιοχές αὐτές λέγονται **ἡμιεπίπεδα** μέ ἀρχική εὐθεία τήν (ε).



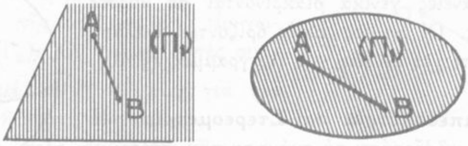
Σχ. 33.

Ὅπως ὁρίστηκαν τά ἡμιεπίπεδα, ἡ ἀρχική τους εὐθεία (ε) δέν ἀνήκει σ' αὐτά· γι' αὐτό τά λέμε **ἀνοιχτά** ἡμιεπίπεδα. Ἄν ὅμως θέλουμε νά συμπεριλάβουμε καί τήν εὐθεία (ε) στά ἡμιεπίπεδα, τότε αὐτά θά τά λέμε **κλειστά** ἡμιεπίπεδα καί θά εἶναι :

$$(\Pi_1) \cup (\Pi_2) = (\Pi) \quad \text{καί}$$
$$(\Pi_1) \cap (\Pi_2) = (\varepsilon).$$

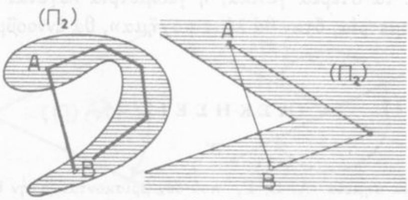
45. Ἐπίπεδα τμήματα. Διακρίνουμε δύο εἴδη ἐπιπέδων τμημάτων, τά κυρτά καί τά μή κυρτά.

Κυρτό ἐπίπεδο τμῆμα λέγεται κάθε ὑποσύνολο (Π_1) ἑνός ἐπιπέδου (Π), τό ὁποῖο ἔχει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα (σχ. 34) : Γιά κάθε ζεῦγος σημείων του Α καί Β τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἀνήκει στό (Π_1).



Σχ. 34.

Μή κυρτό ἐπίπεδο τμῆμα λέγεται κάθε ὑποσύνολο (Π_2) τοῦ ἐπιπέδου (Π), τό ὁποῖο ἔχει τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα (σχ. 35) :

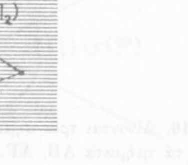


Σχ. 35.

Ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστο ζεῦγος σημείων του Α καί Β, τέτοιο ὥστε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ νά μήν ἀνήκει ὁλόκληρο στό (Π_2), ὑπάρχει ὅμως γραμμή μέ ἄκρα τά Α καί Β, πού βρίσκεται ὁλόκληρη στό (Π_2).

46. Εἴδη ἐπιφανειῶν. Ἡ ἔννοια τῆς ἐπιφάνειας γενικά δέν ὁρίζεται καί θεωρεῖται, ὡς ἀρχική ἔννοια, γνωστή. Πάντως τά διάφορα εἴδη ἐπιφανειῶν μποροῦν νά περιγραφοῦν περιφραστικά εἴτε καί μέ μαθηματικές σχέσεις. Θά περιοριστοῦμε στήν περιφραστική μόνο περιγραφή τῶν κυριώτερων εἰδῶν ἐπιφανειῶν. Αὐτά, ἐκτός ἀπό τή γνωστή μας ἐπίπεδη ἐπιφάνεια, εἶναι :

i) Τεθλασμένη ἤ πολυεδρική ἐπιφάνεια. Ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα τμήματα ὄχι τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου. Αὐτά λέγονται ἕδρες τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας (σχ. 36). Ἡ τομή δύο ἑδρῶν εἶναι εὐθεία ἤ τμῆμα εὐθείας (βλ. στό σχῆμα τήν ΑΒ) καί λέγεται ἀκμή τῆς πολυεδρικῆς ἐπιφάνειας. Ἡ τομή τριῶν τουλάχιστο ἑδρῶν (ἄν ὑπάρχει) εἶναι ἕνα σημεῖο (βλ. στό σχῆμα τό Β) καί λέγεται κορυφή τῆς πολεδρικῆς ἐπιφάνειας.

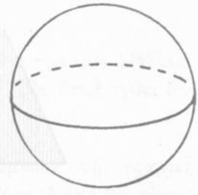


Σχ. 36.

ii) Καμπύλη ἐπιφάνεια. Πάνω σ' αὐτή κανένα ἐπίπεδο τμῆμα δέν ὑπάρχει. Καμπύλη ἐπιφάνεια εἶναι π.χ. ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια (σχ. 37), πού μᾶς εἶναι γνωστή ἀπό τήν προηγούμενη τάξη.

iii) Μικτή ἤ τυχαία ἐπιφάνεια. Αὐτή ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα καί ἀπό καμπύλα τμήματα.

Οἱ ἐπιφάνειες γενικά διακρίνονται σέ κυρτές καί μή κυρτές. Οἱ ἔννοιες αὐτές ὁρίζονται ἀνάλογα πρός τίς ἀντίστοιχες ἔννοιες γιά τίς γραμμές (§ 40).


Σχ. 37.

47. 'Επιπεδομετρία καί Στερεομετρία. 'Η γεωμετρία, γιά νά ἐξετάσει τά σχήματα τῶν στερεῶν, τά τέμνει ἀρχικά μέ ἐπίπεδα καί ἐξετάζει τίς τομές. Στό πρῶτο (καί μεγαλύτερο) μέρος της, ὅπου ἐξετάζει τίς ἐπίπεδες αὐτές τομές, λέγεται **ἐπιπεδομετρία.** Στό δεύτερο μέρος της, ὅπου ἐξετάζει τά στερεά γενικά, ἡ γεωμετρία λέγεται **στερεομετρία.**

Στήν ἐπιπεδομετρία, ὅταν θά λέμε «σχῆμα», θά ἐννοοῦμε ἐπίπεδο σχῆμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β'.

10. Δίνονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, πού δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, καί φέρνουμε τά τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. Ἄν Ο εἶναι ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ σχήματος ΑΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}}{2} < \mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{O\Gamma} < \mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Gamma}.$$

11. Πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ μιᾶς κλειστῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΑ, παίρνουμε τά σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$\mathrm{A'B'}+\mathrm{B'\Gamma'}+\mathrm{\Gamma'A'} < \mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma A}.$$

12. Δίδεται μία κυρτή κλειστή τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΑ καί φέρνουμε τά τμήματα ΑΓ καί ΒΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι :

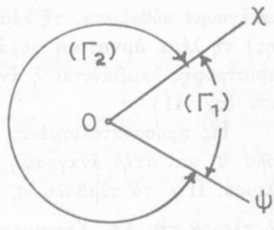
$$\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}}{2} < \mathrm{A\Gamma}+\mathrm{B\Delta} < \mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{\Gamma\Delta}+\mathrm{\Delta A}.$$

13. Νά διατυπωθοῦν οἱ ὁρισμοί τῆς κυρτῆς καί μή κυρτῆς ἐπιφάνειας, ἀντίστοιχοι πρός ἐκείνους τῆς κυρτῆς καί μή κυρτῆς γραμμῆς. Νά ἀναφέρετε ἀπό ἕνα παράδειγμα γιά τίς ἐπιφάνειες γνωστῶν στερεῶν.

ΓΩΝΙΕΣ

48. 'Ορισμός. Δύο ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή ἕνα σημεῖο Ο (σχ. 38) χωρίζουν τό ἐπίπεδο σέ δύο ἐπίπεδα τμήματα (Γ_1) καί (Γ_2), ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα εἶναι κυρτό καί τό ἄλλο μή κυρτό. Καθένα ἀπό τά δύο αὐτά ἐπίπεδα τμήματα λέγεται γωνία καί μάλιστα ἡ μία κυρτή καί ἡ ἄλλη μή κυρτή. Ἄρα : **γωνία λέγεται τό καθένα ἀπό τά δύο ἐπίπεδα τμήματα, στά ὁποῖα δύο ἡμιευθεῖες μέ κοινή ἀρχή χωρίζουν τό ἐπίπεδο.**

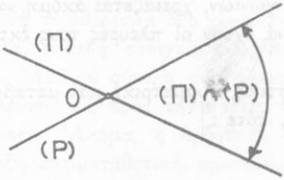
Οἱ ἡμιευθεῖες Ox καί Oy λέγονται πλευρές καί ἡ κοινή ἀρχή O τῶν πλευρῶν λέγεται **κορυφή** τῆς καθεμιᾶς ἀπό τίς γωνίες (Γ_1) καί (Γ_2). Οἱ γωνίες αὐτές συμβολίζονται καί μέ $x\widehat{O}y$ καί $x\overset{\smile}{O}y$ γιά τήν κυρτή καί τή μή κυρτή ἀντιστοίχως.



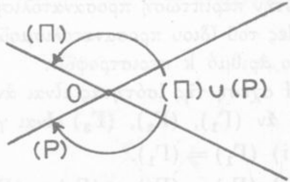
Σχ. 38.

Ἰσοδύναμοι πρός τόν προηγούμενο ὁρισμό εἶναι καί οἱ ἀκόλουθοι δύο ὁρισμοί :

Κυρτή γωνία λέγεται ἡ τομή δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καί (Ρ) τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων οἱ ἀρχικές εὐθεῖες τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο O (σχ. 39).



Σχ. 39.



Σχ. 40.

Μή κυρτή γωνία λέγεται ἡ ἕνωση δύο ἡμιεπιπέδων (Π) καί (Ρ) τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου, πού οἱ ἀρχικές τους εὐθεῖες τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο O (σχ. 40).

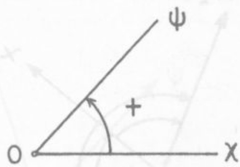
49. Προσανατολισμός γωνίας — Ἐπέκταση τῆς ἔννοιας τῆς γωνίας. Σκόπιμο εἶναι μερικές φορές νά θεωροῦμε τή γωνία ὡς μία ἐπίπεδη περιοχή πού διαγράφεται ἀπό μιά ἡμιευθεία Ox, ὅταν αὐτή στρέφεται πάνω στό ἐπίπεδο, μέ τό σημεῖο O ἀκίνητο, κατά μιά ὁρισμένη φορά περιστροφῆς (σχ. 41). Μία γωνία, καθορισμένη μέ αὐτόν τόν τρόπο, θά θεωρεῖται γνωστή, ὅταν γνωρίζουμε τά ἀκόλουθα στοιχεῖα :

i) Τήν ἀρχική πλευρά της Ox.

ii) Τήν τελική πλευρά της Oy.

iii) Τή φορά διαγραφῆς της.

iv) Τόν ἀκέραιο ἀριθμό k, πού δείχνει πόσες ὁλόκληρες περιστροφές ἔκανε ἡ ἀρχική πλευρά Ox, πρίν λάβει τήν τελική της θέση Oy.



Σχ. 41.

Μιά τέτοια γωνία τή λέμε **προσανατολισμένη.**

Εἶναι φανερό ὅτι δύο μόνο εἶναι οἱ δυνατές φορές περιστροφῆς τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς Οx περί τήν ἀρχή Ο. Γιά διάκριση, τή μία ἀπό αὐτές, πού τήν διαλέγουμε αὐθαίρετα, τή λέμε **θετική** καί τήν ἄλλη (τήν ἀντίθετη τῆς πρώτης) τή λέμε **ἀρνητική** φορά περιστροφῆς. Κατά συνήθεια, ὡς θετική φορά περιστροφῆς λαμβάνεται ἡ ἀντίθετη πρός τήν κίνηση τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ (σχ. 41).

Τίς προσανατολισμένες γωνίες τίς συμβολίζουμε προτάσσοντας τό σύμβολο $\sphericalangle$ καί στήν ἀναγραφή τῶν στοιχείων τους γράφεται πρῶτα ἡ ἀρχική πλευρά. Π.χ. τό σύμβολο $\sphericalangle$ xAy σημαίνει προσανατολισμένη γωνία μέ ἀρχική πλευρά τήν Ax. Χρησιμοποιεῖται καί ὁ συμβολισμός $(\widehat{Ax,Ay})$ μέ διατεταγμένο ζεῦγος ἡμιευθειῶν, ὅπου ἡ Ax εἶναι ἡ ἀρχική πλευρά τῆς γωνίας καί ἡ Ay εἶναι ἡ τελική.

50. 'Ισότητα στό σύνολο τῶν γωνιῶν. Δύο γωνίες λέγονται ἴσες τότε καί μόνο τότε, ὅταν μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση.

Στήν περίπτωση προσανατολισμένων γωνιῶν, χρειάζεται ἀκόμη νά εἶναι οἱ γωνίες τοῦ ἴδιου προσανατολισμοῦ καί νά ἔχουν οἱ πλευρές τους ἐκτελέσει τόν ἴδιο ἀριθμό k περιστροφῶν.

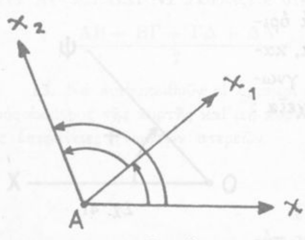
Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική· δηλαδή ἄν (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) εἶναι γωνίες, τότε :

i) $(\Gamma_1) = (\Gamma_1)$.

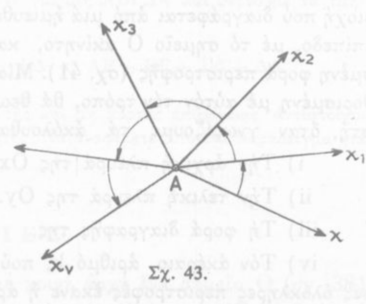
ii) $(\Gamma_1) = (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_2) = (\Gamma_1)$.

iii) $(\Gamma_1) = (\Gamma_2)$ καὶ $(\Gamma_2) = (\Gamma_3) \Rightarrow (\Gamma_1) = (\Gamma_3)$.

51. 'Εφεξῆς καί διαδοχικές γωνίες. 'Εφεξῆς λέγονται δύο γωνίες $x\widehat{A}x_1$ καί $x_1\widehat{A}x_2$ (σχ. 42), ἄν ἔχουν τήν ἴδια κορυφή, καί, θεωρούμενες ὡς προσανατολισμένες, ἔχουν τήν ἴδια φορά, ἡ δέ τελική πλευρά τῆς πρώτης εἶναι ἀρχική πλευρά τῆς δεύτερης.



Σχ. 42.



Σχ. 43.

Διαδοχικές λέγονται ν γωνίες (σχ. 43), ἄν ἔχουν τήν ἴδια κορυφή A, καί, θεωρούμενες ὡς προσανατολισμένες, ἔχουν τήν ἴδια φορά, ἡ δέ τελική πλευρά τῆς κάθε γωνίας εἶναι ἀρχική πλευρά τῆς ἑπόμενης. Π.χ. οἱ γωνίες $\sphericalangle xAx_1$, $\sphericalangle x_1Ax_2$, ..., $\sphericalangle x_{\nu-1}Ax_\nu$ εἶναι διαδοχικές.

52. Ἄθροισμα γωνιῶν. Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν $\sphericalangle xAx_1$ καί $\sphericalangle x_1Ax_2$ λέγεται ἡ γωνία $\sphericalangle xAx_2$ μέ ἀρχική πλευρά τήν ἀρχική πλευρά τῆς πρώτης γωνίας καί τελική πλευρά τήν τελική πλευρά τῆς δεύτερης γωνίας (σχ. 42). Συμβολικά γράφουμε $\sphericalangle xAx_1 + \sphericalangle x_1Ax_2 = \sphericalangle xAx_2$.

Ἄν οἱ γωνίες δέν εἶναι ἐφεξῆς, μποροῦν νά γίνουν μέ μετατόπιση. Ἡ διαδικασία, μέ τήν ὁποία βρίσκουμε τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν, λέγεται πράξη τῆς προσθέσεως ἤ ἁπλούστερα πρόσθεση τῶν γωνιῶν.

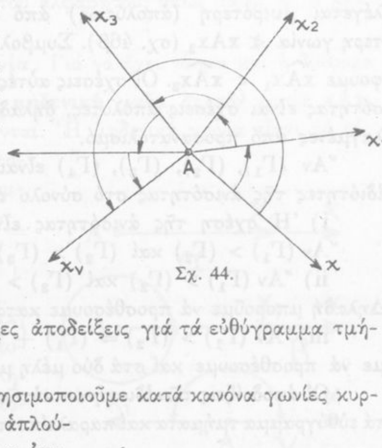
Ἀνάλογα ὁρίζεται καί τό ἄθροισμα γωνιῶν περισσοτέρων ἀπό δύο, ἄν στό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσουμε τήν τρίτη κ.ο.κ. Στό σχῆμα 44 εἶναι :

$$\sphericalangle xAx_1 + \sphericalangle x_1Ax_2 + \ldots + \sphericalangle x_{\nu-1}Ax_\nu = \sphericalangle xAx_\nu.$$

Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στό σύνολο τῶν γωνιῶν εἶναι ἐσωτερική πράξη, ἐπειδή τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν εἶναι γωνία, δηλαδή στοιχεῖο τοῦ ἴδιου συνόλου. Ἄρα τό σύνολο τῶν γωνιῶν εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πράξη τῆς προσθέσεως. Ἀκόμα ἡ πρόσθεση εἶναι πράξη ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική καί μονότροπη· δηλαδή ἄν (Γ_1), (Γ_2) καί (Γ_3) εἶναι γωνίες, τότε :

i) $(\Gamma_1) + (\Gamma_2) = (\Gamma_2) + (\Gamma_1)$

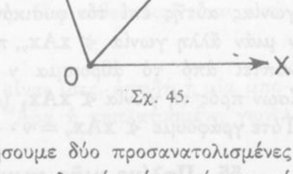
ii) $[(\Gamma_1) + (\Gamma_2)] + (\Gamma_3) = (\Gamma_1) + [(\Gamma_2) + (\Gamma_3)]$.



Σχ. 44.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ἀντίστοιχες ἀποδείξεις γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα καί παραλείπονται.

Παρατήρηση. Στή γεωμετρία χρησιμοποιοῦμε κατά κανόνα γωνίες κυρτές καί ὄχι προσανατολισμένες. Μέ ἁπλούστερο ὁρισμό, τό ἄθροισμα δύο τέτοιων ἐφεξῆς γωνιῶν $\widehat{xOy}$ καί $\widehat{yOz}$ (σχ. 45) εἶναι ἡ γωνία $\widehat{xOz}$, πού ἔχει τήν ἴδια κορυφή O καί πλευρές τίς μή κοινές πλευρές Ox καί Oz τῶν γωνιῶν, καί περιέχει τήν κοινή πλευρά τους Oy. Ἀνάλογα ὁρίζεται καί τό ἄθροισμα περισσοτέρων γωνιῶν.

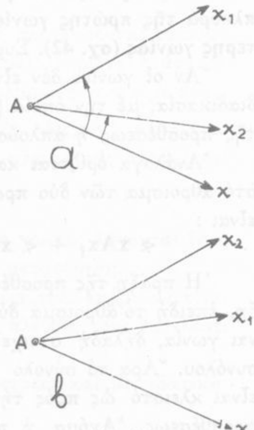


Σχ. 45.

53. Διαφορά δύο γωνιῶν. Ἄς θεωρήσουμε δύο προσανατολισμένες γωνίες $\sphericalangle xAx_1$ καί $\sphericalangle xAx_2$ μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό, μέ κοινή κορυφή

Α καί κοινή ἀρχική πλευρά τήν Ax (σχ. 46 α, β). Ὀνομάζουμε διαφορά τῆς $\sphericalangle xAx_2$ ἀπό τήν $\sphericalangle xAx_1$, καί συμβολίζουμε $\sphericalangle xAx_1 - \sphericalangle xAx_2$, τή γωνία $\sphericalangle x_2Ax_1$. Δηλαδή εἶναι $\sphericalangle xAx_1 - \sphericalangle xAx_2 = \sphericalangle x_2Ax_1$.

Ἡ διαδικασία γιά τήν εὕρεση τῆς διαφορᾶς δύο γωνιῶν λέγεται πράξη τῆς ἀφαιρέσεως ἤ ἀφαίρεση τῶν δύο γωνιῶν.



Σχ. 46.

Ἡ σχέση τῆς διατάξεως στό σύνολο τῶν γωνιῶν ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως: Ἄν ἡ διαφορά $\sphericalangle x_2Ax_1$ τῶν δύο γωνιῶν $\sphericalangle xAx_1$ καί $\sphericalangle xAx_2$ (σχ. 46α) εἶναι τοῦ ἴδιου προσανατολισμοῦ μέ τίς γωνίες, τότε ἡ γωνία $\sphericalangle xAx_1$ λέγεται μεγαλύτερη (ἀπολύτως) ἀπό τή γωνία $\sphericalangle xAx_2$ καί συμβολίζουμε $x\widehat{Ax_1} > x\widehat{Ax_2}$. Ἄν ὅμως ἡ διαφορά $\sphericalangle x_2Ax_1$ εἶναι ἀντίθετου προσανατολισμοῦ ἀπό ἐκεῖνον τῶν ἀρχικῶν γωνιῶν, ἡ πρώτη ἀπό τίς ἀρχικές γωνίες $\sphericalangle xAx_1$ λέγεται μικρότερη (ἀπολύτως) ἀπό τή δεύτερη γωνία $\sphericalangle xAx_2$ (σχ. 46β). Συμβολικά γράφουμε $x\widehat{Ax_1} < x\widehat{Ax_2}$. Οἱ σχέσεις αὐτές τῆς ἀνισότητας εἶναι σχέσεις ἀπόλυτες, δηλαδή ἀπαλλαγμένες ἀπό προσανατολισμό.

Ἄν (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3), (Γ_4) εἶναι γωνίες, διατυπώνουμε τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες τῆς ἀνισότητας στό σύνολο τῶν γωνιῶν:

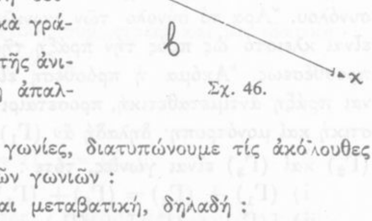
i) Ἡ σχέση τῆς ἀνισότητας εἶναι μεταβατική, δηλαδή:
Ἄν $(\Gamma_1) > (\Gamma_2)$ καί $(\Gamma_2) > (\Gamma_3)$ $\Rightarrow$ $(\Gamma_1) > (\Gamma_3)$.

ii) Ἄν $(\Gamma_1) > (\Gamma_2)$ καί $(\Gamma_3) > (\Gamma_4) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_4)$.
Δηλαδή μποροῦμε νά προσθέσουμε κατά μέλη ὁμοιόστροφες ἀνισότητες.

iii) Ἄν $(\Gamma_1) > (\Gamma_2) \Rightarrow (\Gamma_1) + (\Gamma_3) > (\Gamma_2) + (\Gamma_3)$. Δηλαδή μποροῦμε νά προσθέσουμε καί στά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητας γωνιῶν τήν ἴδια γωνία.

Οἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν εἶναι ἀνάλογες πρός τίς ἀντίστοιχες γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα καί παραλείπονται.

54. Γινόμενο μιᾶς γωνίας ἐπί φυσικόν ἀριθμό. Ἔστω μία γωνία $\sphericalangle xAx_1$. Ὀνομάζουμε γινόμενο τῆς γωνίας αὐτῆς ἐπί τόν φυσικόν ἀριθμό ν μιάν ἄλλη γωνία $\sphericalangle xAx_\nu$, πού προκύπτει ἀπό τό ἄθροισμα ν γωνιῶν ἴσων πρός τή γωνία $\sphericalangle xAx_1$ (σχ. 47). Τότε γράφουμε $\sphericalangle xAx_\nu = \nu \cdot \sphericalangle xAx_1$.



Σχ. 47.

55. Πηλίκο μιᾶς γωνίας διά

φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Ἔστω μία γωνία $\measuredangle\, xAx_\nu$ (σχ. 47). Ὀνομάζουμε πηλίκο τῆς γωνίας αὐτῆς διά τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τή γωνία $\measuredangle\, xAx_1$, γιά τήν ὁποία ἀληθεύει ἡ σχέση $\measuredangle\, xAx_\nu = \nu \cdot \measuredangle\, xAx_1$. Τότε γράφουμε:

$$\measuredangle\, xAx_1 = \frac{\measuredangle\, xAx_\nu}{\nu}.$$

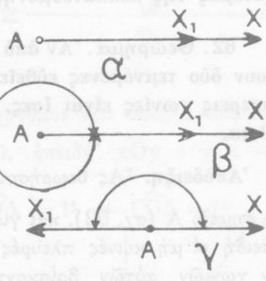
56. Πολλαπλασιασμός μιᾶς γωνίας ἐπί ρητόν ἀριθμό. Ἔστω γωνία ω καί μ/ν ἕνας ρητός ἀριθμός. Ὀνομάζουμε γινόμενο τῆς γωνίας ω ἐπί τόν ρητό μ/ν μιάν ἄλλη γωνία φ, πού προκύπτει ἄν τή γωνία ω τήν πολλαπλασιάσουμε ἐπί τόν ἀκέραιο μ καί τό γινόμενο τό διαιρέσουμε διά τοῦ ἀκεραίου ν. Τότε γράφουμε

$$\varphi = \frac{\mu}{\nu}\,\omega \quad \text{ἤ} \quad \varphi = \frac{\mu \cdot \omega}{\nu}.$$

Παρατήρηση. Τίς γωνίες μποροῦμε γιά ἁπλούστευση νά τίς συμβολίζουμε καί μέ πεζά (μικρά) γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, ὅπως τά ω, φ, σ κλπ.

57. Μηδενική καί πλήρης γωνία. Γιά νά ἔχει νόημα καί ἡ διαφορά δύο ἴσων γωνιῶν, δεχόμαστε ὅτι ὑπάρχει **μηδενική** γωνία, δηλαδή γωνία $x\widehat{A}x_1$ (σχ. 48α) πού οἱ πλευρές της ταυτίζονται. Ἡ μηδενική γωνία εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο γιά τήν πράξη τῆς προσθέσεως στό σύνολο τῶν γωνιῶν, συμβολίζεται μέ $\widehat{O}$ ἤ $\measuredangle\, O$ καί εἶναι $\widehat{A} + \widehat{O} = \widehat{O} + \widehat{A} = \widehat{A}$ γιά κάθε γωνία $\widehat{A}$.

Πλήρης γωνία λέγεται ἡ γωνία $x\widehat{A}x_1$ (σχ. 48β), πού ἡ ἀρχική πλευρά της ταυτίζεται μέ τήν τελική μετά ἀπό μιά πλήρη περιστροφή της γύρω ἀπό τήν κορυφή Α.



Σχ. 48.

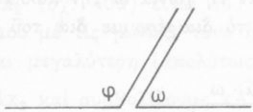
58. Πεπλατυσμένη γωνία ἤ εὐθεία γωνία λέγεται μιά κυρτή γωνία $x\widehat{A}x_1$ (σχ. 48 γ), πού οἱ πλευρές της βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία καί εἶναι ἀντίθετες ἡμιευθεῖες.

Παρατήρηση. Δύο πεπλατυσμένες γωνίες εἶναι ἴσες, ἐπειδή ἡ μία μπορεῖ νά ταυτιστεῖ μέ τήν ἄλλη μέ μετατόπιση. Ἄρα ἡ πεπλατυσμένη γωνία διατηρεῖ σταθερό μέγεθος.

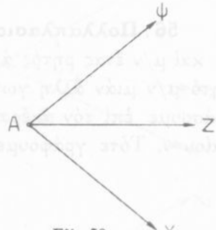
59. Παραπληρωματικές γωνίες λέγονται δύο γωνίες ω καί φ, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μιά πεπλατυσμένη γωνία (σχ. 49).

60. Διχοτόμος μιᾶς γωνίας $\widehat{xAy}$ λέγεται ἡ ἡμιευθεία Az μέ ἀρχή τήν κορυφή A, πού εἶναι ἐσωτερική τῆς $\widehat{xAy}$ καί χωρίζει τήν $\widehat{xAy}$ σέ δύο ἄλλες ἴσες γωνίες, δηλαδή $\widehat{xAz} = \widehat{zAy}$ (σχ. 50).

Ἀξίωμα. Μία γωνία ἔχει μία καί μόνο μία διχοτόμο.



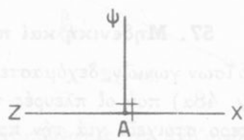
Σχ. 49.



Σχ. 50.

61. Ὀρθή γωνία. Δύο ἴσες καί παραπληρωματικές γωνίες $\widehat{xAy}$ καί $\widehat{yAz}$ λέγονται ὀρθές (σχ. 51). Τότε γράφουμε: $\widehat{xAy} = \widehat{yAz} = 1^{\llcorner}$.

Πόρισμα. Ἡ κοινή πλευρά Ay δύο ἐφεξῆς ὀρθῶν γωνιῶν $\widehat{xAy}$ καί $\widehat{yAz}$ εἶναι διχοτόμος τῆς πεπλατυσμένης γωνίας $\widehat{zAx}$.

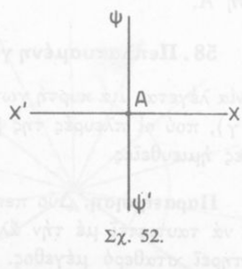


Σχ. 51.

62. Θεώρημα. Ἄν ἀπό τίς τέσσερεις κυρτές γωνίες, τίς ὁποῖες σχηματίζουν δύο τεμνόμενες εὐθεῖες, δύο ἐφεξῆς γωνίες εἶναι ἴσες, τότε καί οἱ τέσσερεις γωνίες εἶναι ἴσες, καί μάλιστα ὀρθές καί οἱ εὐθεῖες τέμνονται κάθετα.

Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τίς εὐθεῖες xAx′ καί yAy′, πού τέμνονται στό σημεῖο A (σχ. 52), καί γιά τίς ὁποῖες ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι $\widehat{xAy} = \widehat{yAx'}$. Ἐπειδή οἱ μή κοινές πλευρές Ax καί Ax′ τῶν γωνιῶν αὐτῶν βρίσκονται πάνω σέ εὐθεία, οἱ γωνίες εἶναι καί παραπληρωματικές. Ἄρα εἶναι ὀρθές, δηλαδή $\widehat{xAy} = \widehat{yAx'} = 1^{\llcorner}$.

Ἡ γωνία $\widehat{x'Ay'}$ εἶναι παραπληρωματική τῆς ὀρθῆς γωνίας $\widehat{yAx'}$. Ἄρα εἶναι καί αὐτή ὀρθή, δηλαδή $\widehat{x'Ay'} = 1^{\llcorner}$.



Σχ. 52.

Μέ ὅμοιο τρόπο μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι $\widehat{y'Ax} = 1^{\llcorner}$. Οἱ εὐθεῖες xAx′

καί yAy' λέγονται κάθετοι. Ἡ καθετότητα συμβολίζεται μέ τό $\perp$. Γράφουμε δηλαδή $xAx' \perp yAy'$.

63. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο A μιᾶς εὐθείας Zx μόνο μία κάθετο μποροῦμε νά φέρουμε πάνω στή Zx.

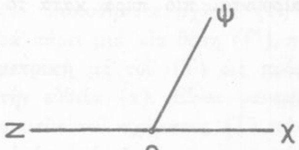
Ἀπόδειξη. Πραγματικά, μόνο μία κάθετο μποροῦμε νά φέρουμε πάνω στή Zx, γιατί ἡ διχοτόμος μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας $\widehat{ZAx}$ εἶναι μόνο μία (σχ. 51), ἡ $Ay \perp Zx$.

64. Ἰδιότητες παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

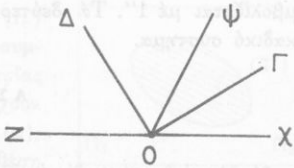
i) Οἱ μή κοινές πλευρές δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι ἀντίθετες ἡμιευθεῖες.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικές γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $y\widehat{O}z$ (σχ. 53). Ἐπειδή ἀπό τόν ὁρισμό τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 2^{\llcorner}$ καί ἐπειδή $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = x\widehat{O}z$, προκύπτει ὅτι $x\widehat{O}z = 2^{\llcorner}$. Δηλαδή οἱ ἡμιευθεῖες Ox καί Oz εἶναι ἀντίθετες.

ii) Οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι.



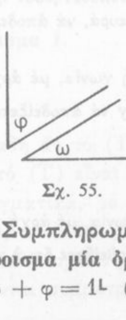
Σχ. 53.



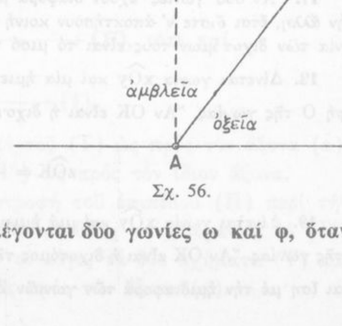
Σχ. 54.

Ἀπόδειξη. Ἄν ΟΓ καί ΟΔ εἶναι οἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν $x\widehat{O}y$ καί $y\widehat{O}z$ (σχ. 54), ἐπειδή $x\widehat{O}y + y\widehat{O}z = 2^{\llcorner}$

$$\Rightarrow \frac{x\widehat{O}y}{2} + \frac{y\widehat{O}z}{2} = 1^{\llcorner} \Rightarrow \Gamma\widehat{O}y + y\widehat{O}\Delta = 1^{\llcorner} \Rightarrow \Gamma\widehat{O}\Delta = 1^{\llcorner}$$



Σχ. 55.



Σχ. 56.

65. Συμπληρωματικές γωνίες λέγονται δύο γωνίες ω καί φ, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μία ὀρθή γωνία.

Δηλαδή $\omega + \varphi = 1^{\llcorner}$ (σχ. 55).

66. Πλάγιες εὐθεῖες. Δύο τεμνόμενες εὐθεῖες λέγονται **πλάγιες,** ὅταν δέν εἶναι κάθετες.

67. Ὀξεία καί ἀμβλεία γωνία. Κάθε γωνία μικρότερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ὀξεία** γωνία. (σχ. 56).

Κάθε κυρτή γωνία μεγαλύτερη ἀπό τήν ὀρθή λέγεται **ἀμβλεία** γωνία.

Δύο εὐθεῖες πού τέμνονται πλάγια ὁρίζουν τέσσερεις γωνίες, ἀπό τίς ὁποῖες οἱ δύο εἶναι ὀξεῖες καί οἱ ἄλλες δύο εἶναι ἀμβλεῖες.

68. Ἡ σύγκριση τῶν γωνιῶν. Ἐπειδή ἡ ὀρθή γωνία εἶναι σταθερή κατά μέγεθος (γιατί εἶναι τό μισό τῆς πεπλατυσμένης γωνίας), μπορεῖ αὐτή νά χρησιμεύσει ὡς μέτρο συγκρίσεως γιά τίς ἄλλες γωνίες. Κάθε γωνία μπορεῖ νά ἐκφραστεῖ σέ ὀρθές καί μέρη ὀρθῆς. Γιά καλύτερη ὅμως κλιμάκωση στή σύγκριση τῶν γωνιῶν, χρησιμοποιοῦμε ὡς μέτρο συγκρίσεως τό 1/90 τῆς ὀρθῆς γωνίας, πού τό λέμε **γωνία μιᾶς μοίρας** ἤ ἁπλούστερα **μοίρα** καί τό συμβολίζουμε 1^o. Ἔτσι μιά ὀρθή γωνία ἔχει 90^o, μιά πεπλατυσμένη γωνία ἔχει 180^o καί μιά πλήρης γωνία ἔχει 360^o. Κάθε μοίρα χωρίζεται σέ 60 ἴσα μέρη, πού τό καθένα λέγεται **πρῶτο λεπτό** καί συμβολίζεται μέ $1'$· καί κάθε πρῶτο λεπτό χωρίζεται σέ 60 ἴσα μέρη, πού τό καθένα λέγεται **δεύτερο λεπτό** καί συμβολίζεται μέ $1''$. Τά δεύτερα λεπτά ὑποδιαιροῦνται πιό πέρα κατά τό δεκαδικό σύστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

14. Ἄν οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶναι κάθετοι, ν' ἀποδείξετε ὅτι οἱ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.

15. Ποιᾶς γωνίας τό ἄθροισμα τῆς συμπληρωματικῆς της καί τῆς παραπληρωματικῆς της εἶναι ἴσο μέ τό ἑπταπλάσιο τῆς γωνίας;

16. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνία ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν γωνιῶν : Ἐφαρμογή : Οἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνία 120^o. Ἄν ἡ μία ἀπό τίς γωνίες εἶναι ἴση μέ τό 1/4 τῆς ἄλλης, νά βρεθεῖ τό μέγεθος τῆς καθεμιᾶς γωνίας.

17. Ἄν δύο γωνίες ἔχουν διαφορά μιά ὀρθή γωνία καί τοποθετηθοῦν ἡ μία πάνω στήν ἄλλη, ἔτσι ὥστε ν' ἀποκτήσουν κοινή κορυφή καί κοινή πλευρά, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τους εἶναι τό μισό τῆς ὀρθῆς.

18. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ καί μία ἡμιευθεία Oz ἔξω ἀπό τή γωνία, μέ ἀρχή τήν κορυφή O τῆς γωνίας. Ἄν OK εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ νά ἀποδείξετε ὅτι :

$$z\widehat{O}K = \frac{z\widehat{O}x + z\widehat{O}y}{2}$$

19. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$ καί μιά ἡμιευθεία OZ μέσα στή γωνία, μέ ἀρχή τήν κορυφή O τῆς γωνίας. Ἄν OK εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία $Z\widehat{O}K$ εἶναι ἴση μέ τήν ἡμιδιαφορά τῶν γωνιῶν $Z\widehat{O}x$ καί $Z\widehat{O}y$.

20. Ἄν μιά γωνία εἶναι τά 3/8 τῆς ὀρθῆς, νά βρεθεῖ ἡ συμπληρωματική καί ἡ παραπληρωματική της σέ μέρη ὀρθῆς καί σέ μοῖρες.

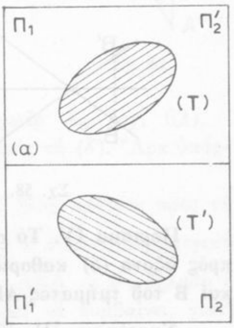
21. Τρεῖς διαδοχικές γωνίες ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μέ 2 ὀρθές. Ἄν ἡ β′ γωνία εἶναι τά 4/5 τῆς α′ καί ἡ γ′ εἶναι τό 1/3 τῆς α′, νά βρεθοῦν οἱ γωνίες σέ μέρη ὀρθῆς καί σέ μοῖρες.

22. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α φέρνουμε τρεῖς ἡμιευθεῖες Αx, Αy, Αz, ἔτσι ὥστε οἱ τρεῖς διαδοχικές γωνίες $x\widehat{A}y$, $y\widehat{A}z$, $z\widehat{A}x$ νά εἶναι ἴσες. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἡμιευθεῖες, ὅταν προεκταθεῖ, διχοτομεῖ τή γωνία τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.

23. Ἄν τέσσερεις ἡμιευθεῖες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ μέ κοινή ἀρχή ἕνα σημεῖο Ο σχηματίζουν γωνίες $A\widehat{O}B = A\widehat{O}\Delta$ καί $B\widehat{O}\Gamma = \Gamma\widehat{O}\Delta$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἡμιευθεῖες ΟΑ καί ΟΓ ἀποτελοῦν εὐθεία.

ΑΞΟΝΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

69. Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ἐπίπεδο (Π) καί μία εὐθεία (α) πάνω σ' αὐτό, πού τό χωρίζει σέ δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καί (Π_2) (σχ. 57). Ἄν φανταστοῦμε ὅτι τό ἐπίπεδο (Π) περιστρέφεται περί τήν εὐθεία (α) μέ τρόπο πού τό ἡμιεπίπεδο (Π_1) νά πάρει τή θέση (Π'_1) πάνω στό (Π_2) καί τό (Π_2) νά πάρει τή θέση (Π'_2) πάνω στό (Π_1), τότε ἕνα ὁποιοδήποτε σχῆμα (Τ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) θά πάρει μιά νέα θέση (Τ′), πού θά τή λέμε **συμμετρική** μέ τοῦ (Τ) ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία (α). Εἶναι φανερό ὅτι, ἄν ὑπάρχουν σημεῖα τοῦ σχήματος (Τ) πάνω στόν ἄξονα (α), αὐτά κατά τήν περιστροφή μένουν στήν ἴδια θέση καί λέγονται **ἀναλλοίωτα** σημεῖα στή συμμετρία ὡς πρός τόν ἄξονα (α).



Σχ. 57.

Συμβολικά, γιά νά δηλώσουμε ὅτι τό σχῆμα (Τ′) εἶναι συμμετρικό τοῦ (Τ) ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεία (α), γράφουμε:

$$(T) \xrightarrow{\Sigma(\alpha)} (T')$$

Πόρισμα Ι. **Ἄν $(T) \xrightarrow{\Sigma(\alpha)} (T')$, τότε καί**

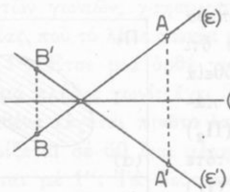
$$\mathbf{(T') \xrightarrow{\Sigma(\alpha)} (T).}$$

Δηλαδή ἄν τό (Τ′) εἶναι συμμετρικό τοῦ (Τ) ὡς πρός τόν ἄξονα (α), τότε καί τό (Τ) εἶναι συμμετρικό τοῦ (Τ′) ὡς πρός τόν ἴδιον ἄξονα.

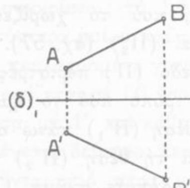
Πραγματικά, μέ μιά δεύτερη περιστροφή τοῦ ἐπιπέδου (Π) περί τήν εὐθεία (α), αὐτό θά ξαναέρθει στήν ἀρχική του θέση καί ἑπομένως τό (Τ′) θά πάρει πάλι τή θέση τοῦ (Τ). Γι' αὐτόν τό λόγο, τά δύο σχήματα (Τ) καί (Τ′) λέγονται συμμετρικά μεταξύ τους ὡς πρός τόν ἄξονα (α).

Πόρισμα ΙΙ. Δύο σχήματα συμμετρικά μεταξύ τους εἶναι ἴσα. Γιατί τό ἕνα ἀπό αὐτά μπορεῖ μέ μιά μετατόπιση νά πάρει τή θέση τοῦ ἄλλου. Ἡ μετατόπιση αὐτή (τῆς συμμετρίας) λέγεται ἀναστροφή.

Πόρισμα ΙΙΙ. Γιά νά βροῦμε τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας (ε) ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας μιάν εὐθεία (δ), ἐπειδή γνωρίζουμε ὅτι αὐτό εἶναι ἕνα ἴσο σχῆμα καί ἐπομένως εἶναι μιά εὐθεία (ε′), ἀρκεῖ νά βροῦμε τά συμμετρικά Α′ καί Β′ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων Α καί Β τῆς εὐθείας (ε). Αὐτά βρίσκονται πάνω στή συμμετρική εὐθεία (ε′) καί ἐπομένως μποροῦν νά τήν καθορίσουν. Συνήθως ὡς ἕνα ἀπό τά δύο σημεῖα λαμβάνουμε τό σημεῖο τομῆς τῆς (ε) μέ τόν ἄξονα συμμετρίας (δ), ἄν ὑπάρχει τέτοιο· γιατί αὐτό, ἀφοῦ ἀνήκει στόν ἄξονα (δ), παραμένει ἀναλλοίωτο κατά τή συμμετρία (σχ. 58).



Σχ. 58.



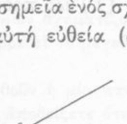
Σχ. 59.

Πόρισμα IV. Τό συμμετρικό Α′Β′ ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρός ἄξονα (δ) καθορίζεται ἀπό τά συμμετρικά Α′ καί Β′ τῶν ἄκρων Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ ὡς πρός τόν ἄξονα (δ) (σχ. 59).

Σημείωση. Ἡ ἀξονική συμμετρία λέγεται καί **κατοπτρισμός,** ἐπειδή δύο συμμετρικά μεταξύ τους σχήματα παρουσιάζουν σχέση ἴδια μ' ἐκείνη πού παρουσιάζει τό ἕνα ἀπό αὐτά μέ τό κατοπτρικό του εἴδωλο.

70. Ἄξονας συμμετρίας ἑνός σχήματος. Ἄν ὅλα τά σημεῖα ἑνός σχήματος (Σ) εἶναι ἀνά δύο συμμετρικά ὡς πρός μιά καί τήν αὐτή εὐθεία (α), τότε λέμε ὅτι τό σχῆμα (Σ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν εὐθεία (α). Αὐτή δέν ἀνήκει ἀναγκαστικά στό σχῆμα (Σ), ἀλλά τό χωρίζει σέ δύο ἴσα μέρη.

Ὡς παράδειγμα ἀναφέρουμε τή διχοτόμο μιᾶς γωνίας, πού εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος τῆς γωνίας (σχ. 60).



Σχ. 60.

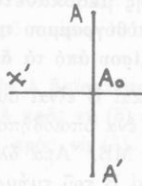
ΚΑΘΕΤΕΣ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

71. Μεσοκάθετος. Ἔστω μιά εὐθεία xx′ καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπό αὐτή. Παίρνουμε τό συμμετρικό Α′ τοῦ σημείου Α ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν xx′ καί γράφουμε τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΑ′ (σχ. 61), τό ὁποῖο τέμνει τή xx′ στό σημεῖο $Α_0$. Τότε, ἐξ αἰτίας τῆς συμμετρίας, ἔχουμε πρῶτα ὅτι

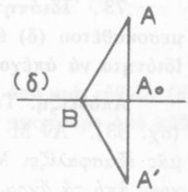
$AA_0 = A'A_0$, δηλαδή τό A_0 εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΑ' καί μετά ὅτι $\widehat{AA_0x} = \widehat{A'A_0x}$. Ἐπειδή ὅμως οἱ γωνίες αὐτές εἶναι καί παραπληρωματικές, ἕπεται ὅτι εἶναι ὀρθές, δηλαδή οἱ εὐθεῖες xx' καί ΑΑ' εἶναι κάθετοι. Ἡ εὐθεία xx', ἐπειδή εἶναι κάθετος στό μέσο τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΑ', λέγεται **μεσοκάθετος** τοῦ τμήματος αὐτοῦ.

Πόρισμα. Ὁ ἄξονας συμμετρίας εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος πού ὁρίζεται ἀπό κάθε ζεῦγος συμμετρικῶν σημείων Α καί Α'.

72. Θεώρημα. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό μιά εὐθεία (δ), μποροῦμε νά φέρουμε μία καί μόνο μία κάθετο πρός τήν εὐθεία (δ).



Σχ. 61.



Σχ. 62.

Ἀπόδειξη. Παίρνουμε τό συμμετρικό Α' τοῦ σημείου Α ὡς πρός τήν εὐθεία (δ) καί γράφουμε τό τμῆμα ΑΑ', πού τέμνει τήν εὐθεία (δ) στό σημεῖο A_0 (σχ. 62).

Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ΑΑ' κάθετο πρός τή (δ). Ἄρα ὑπάρχει ἀπό τό Α κάθετος πρός τή (δ).

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ἀπό τό Α ὑπάρχει καί ἄλλη κάθετος πρός τή (δ) καί εἶναι ἡ ΑΒ. Τότε θά εἶναι $\widehat{ABA_0} = 1^L$. Ἡ Α'Β εἶναι ἡ συμμετρική τῆς ΑΒ καί ἑπομένως θά εἶναι $\widehat{A'BA_0} = 1^L$. Ἄρα $\widehat{ABA'} = 2^L$, δηλαδή ἡ γραμμή ΑΒΑ' θά εἶναι εὐθεία. Αὐτό ὅμως δέν μπορεῖ νά συμβαίνει, γιατί ἀπό τά σημεῖα Α καί Α' μία καί μόνο μία εὐθεία διέρχεται, ἡ AA_0A'. Ἄρα ἡ ΑΒΑ' δέν μπορεῖ νά εἶναι κάθετος πρός τή (δ), δηλαδή ἀπό τό σημεῖο Α μόνο μία κάθετος ὑπάρχει πρός τήν εὐθεία (δ).

Σημείωση. Ἡ ἀποδεικτική μέθοδος πού χρησιμοποιήσαμε στό προηγούμενο θεώρημα λέγεται **«μέθοδος τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο»** ἤ «μέθοδος τοῦ ἀποκλεισμοῦ τῶν δυνατῶν περιπτώσεων». Αὐτή ὀφείλεται στόν Εὐκλείδη καί συνίσταται στό ἑξῆς: Ἐπειδή μερικές φορές βρισκόμαστε σέ ἀδυναμία νά ἀποδείξουμε μέ ἄμεσο τρόπο τήν ἀλήθεια μιᾶς προτάσεως Α, γι' αὐτό θεωροῦμε ὅλα τά πιθανά ἐνδεχόμενα Β, Γ, . . ., Ν πού εἶναι δυνατόν νά συμβαίνουν. Ἄν λάβουμε καθένα ἀπό τά Β, Γ, . . ., Ν χωριστά καί ὑποθέσουμε ὅτι αὐτό ἀληθεύει, καί ὕστερα φτάσουμε μετά ἀπό λογική ἐπεξεργασία σέ συμπέρασμα ὄχι ἀληθινό ἤ ἄτοπο, ὅπως λέμε, καταλαβαίνουμε πλέον ὅτι στό λανθασμένο συμπέρασμα μᾶς ὁδήγησε ἡ λανθασμένη ὑπόθεση, πού ἑπομένως πρέπει ἀναγκαστικά νά ἀποκλειστεῖ.

Ἄν μέ τόν τρόπο αὐτό ἀποκλείσουμε τά ἐνδεχόμενα Β, Γ, . . ., Ν, καταλαβαίνουμε ὅτι τό μόνο πού μπορεῖ νά ἀληθεύει εἶναι τό ἐνδεχόμενο Α.

Τά ἐνδεχόμενα Β, Γ, . . ., Ν λέγονται **συμπληρωματικά** τοῦ Α. Ἄν ἕνα ἐνδεχόμενο Α ἔχει ἕνα μόνο συμπληρωματικό ἐνδεχόμενο Β, τότε τό Β λέγεται **ἀντίθετο** τοῦ Α.

Στό προηγούμενο θεώρημα, ἡ ὑπόθεση ὅτι μπορεῖ νά ὑπάρχει καί μιά ἄλλη κάθετος ἀπό τό Α πρός τή (δ) μᾶς ὁδήγησε στό ἐσφαλμένο (ἄτοπο) συμπέρασμα ὅτι ἀπό τά Α καί Α′ διέρχονται δύο εὐθεῖες. Αὐτός ἦταν καί ὁ λόγος γιά τόν ὁποῖο ἀποκλείστηκε ἡ ὕπαρξη καί μιᾶς ἄλλης καθέτου ἀπό τό Α πρός τή (δ).

73. Ἰδιότητα τῆς μεσοκαθέτου. Θεώρημα. Ὅλα τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου (δ) ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ καί μόνο αὐτά ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἀπέχουν ἐξίσου ἀπό τά ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος.

Ἀπόδειξη. Τά Α καί Β εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή μεσοκάθετο (δ) (σχ. 63). Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς (δ), τότε ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει $MA = MB$. Ἄρα ὅλα τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος.

Ἄς λάβουμε τώρα ἕνα σημεῖο Ν, πού νά μήν εἶναι πάνω στή μεσοκάθετο (δ), καί ἔστω ὅτι αὐτό βρίσκεται πρός τό μέρος τοῦ Β ὡς πρός τή (δ). Τότε ἡ ΝΑ θά τέμνει τή (δ) σέ σημεῖο Ρ, γιά τό ὁποῖο, ὅπως ἀποδείχθηκε, θά εἶναι :

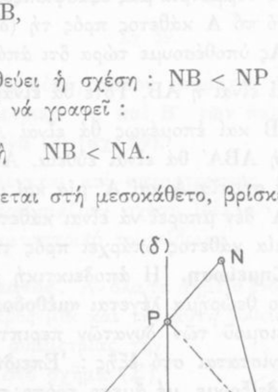
(1) $$PA = PB,$$

ἀφοῦ βρίσκεται στή μεσοκάθετο.

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι (§ 38) ἀληθεύει ἡ σχέση : $NB < NP + PB$, ἡ ὁποία, λόγω τῆς σχέσεως (1), μπορεῖ νά γραφεῖ :

$$NB < NP + PA \quad ἤ \quad NB < NA.$$

Ἄρα κάθε σημεῖο Ν, πού δέν βρίσκεται στή μεσοκάθετο, βρίσκεται σέ ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ καί μάλιστα σέ μεγαλύτερη ἀπόσταση ἀπό τό Α, ἐπειδή αὐτό βρίσκεται ἀπό τήν ἄλλη μεριά τῆς μεσοκαθέτου (δ).



Σχ. 63.

Ἀπό τά προηγούμενα ἕπεται ὅτι μόνο τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου (δ) ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ.

Παρατήρηση. Ἡ προηγούμενη ἰδιότητα, πού ἔχουν τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος καί μόνο αὐτά, ἀποδείχθηκε μέ τή λογική ἰσοδυναμία τῶν προτάσεων $A \Rightarrow B$ καί ὄχι $A \Rightarrow$ ὄχι B, ἀπό τίς ὁποῖες ἕπεται ὅτι $A \Longleftrightarrow B$.

74. Γεωμετρικός τόπος λέγεται κάθε σύνολο ἀπό σημεῖα, πού μόνο αὐτά ἔχουν μιά ὁρισμένη ἰδιότητα.

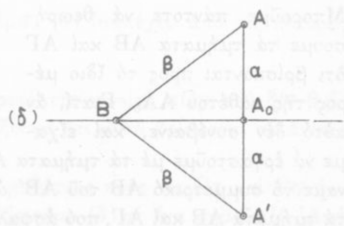
Τά σημεῖα ἑνός γεωμετρικοῦ τόπου (γιά συντομία γ. τόπου) εἶναι γενικῶς ἄπειρα καί ἀποτελοῦν ἕνα σχῆμα (Τ). Ἄν f εἶναι ἡ καθοριστική ἰδιότητα ἑνός γ. τόπου (Τ) (δηλαδή ἡ ἰδιότητα πού ἔχουν τά σημεῖα του), κάθε σημεῖο τοῦ σχήματος (Τ) ἔχει τήν ἰδιότητα f, ἀλλά καί κάθε σημεῖο πού ἔχει τήν ἰδιότητα f ἀνήκει στόν γ. τόπο (Τ).

Σύμφωνα μ' αὐτά, ἡ μεσοκάθετος (δ) ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ, εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου μέ τήν καθοριστική ἰδιότητα νά «ἰσαπέχουν ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ».

75. Θεώρημα. Ἄν ἕνα σημεῖο Α βρίσκεται ἔξω ἀπό μιά εὐθεία (δ), τό κάθετο εὐθύγραμμο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τή (δ) εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε πλάγιο εὐθύγραμμο τμῆμα ἀπό τό Α πρός τή (δ).

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τό συμμετρικό Α′ τοῦ Α ὡς πρός τήν εὐθεία (δ) καί φέρνουμε τήν ΑΑ′ πού τέμνει τή (δ) στό $Α_0$. Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει τήν ΑΑ′ κάθετο πρός τή (δ) καί $ΑΑ_0 = Α'Α_0 = α$ (σχ. 64).

Ἄν θεωρήσουμε καί ἕνα πλάγιο εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ ἀπό τό Α πρός τή (δ), τό Α′Β θά εἶναι τό συμμετρικό του ὡς πρός τή (δ), ἑπομένως $ΑΒ = Α'Β = β$.



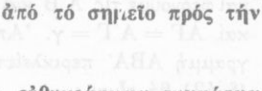
Σχ. 64.

Τότε θά εἶναι (§ 38) $ΑΑ' < ΑΒ + Α'Β$ ἤ $2α < 2β \Rightarrow α < β$ ἤ $ΑΑ_0 < ΑΒ$.

Ὁρισμός. Ἀπόσταση ἑνός σημείου ἀπό μιά εὐθεία λέγεται τό μῆκος τοῦ κάθετου εὐθύγραμμου τμήματος πού ἄγεται ἀπό τό σημεῖο πρός τήν εὐθεία.

76. Θεώρημα. Ἄν τά ἴχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἀπό ἕνα σημεῖο Α πρός μία εὐθεία (δ) ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος $Α_0$ τῆς καθέτου [πού φέρνουμε ἀπό τό Α πρός τή (δ), τότε τά τμήματα εἶναι ἴσα· καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἄν ΑΒ καί ΑΓ εἶναι τά δύο πλάγια τμήματα πρός τήν εὐθεία (δ) (σχ. 65), γιά τά ὁποῖα ἀληθεύει ἡ σχέση $Α_0Β = Α_0Γ$, τότε τά Β καί Γ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν κάθετο $ΑΑ_0$ καί ἑπομένως εἶναι $ΑΒ = ΑΓ$.



Σχ. 65.

Ἀντιστρόφως. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $ΑΒ = ΑΓ$. Τότε τό σημεῖο

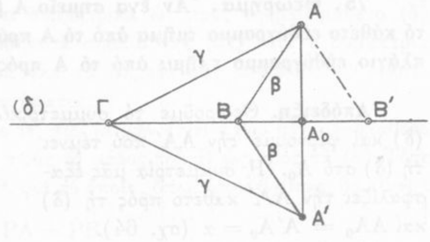
Α θά βρίσκεται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΓ· δηλαδή ἡ κάθετος AA_o πρός τήν εὐθεία (δ) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ (§ 73). Ἄρα: $A_oB = A_o\Gamma$.

77. Θεώρημα. Ἄν τά ἴχνη δύο πλαγίων εὐθυγράμμων τμημάτων ἀπό ἕνα σημεῖο Α πρός μία εὐθεία (δ) βρίσκονται σέ ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος A_o τῆς καθέτου πού φέρνουμε ἀπό τό Α πρός τή (δ), τά τμήματα εἶναι κατά τήν ἴδια ἔννοια ἄνισα· καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἄς εἶναι ΑΒ καί ΑΓ δύο πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα ἀπό ἕνα σημεῖο Α πρός μία εὐθεία (δ), γιά τά ὁποῖα ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι (σχ. 66).

(1) $A_oB < A_o\Gamma$

ὅπου A_o εἶναι τό ἴχνος τῆς καθέτου ἀπό τό Α πρός τή (δ). Μποροῦμε πάντοτε νά θεωρήσουμε τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ ὅτι βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς καθέτου AA_o. Γιατί, ἄν αὐτό δέν συνέβαινε, καί εἴχαμε νά ἐργαστοῦμε μέ τά τμήματα ΑΒ καί ΑΒ′ (βλ. σχ. 66), τότε θά λαμβάναμε τό συμμετρικό ΑΒ τοῦ ΑΒ′ ὡς πρός τήν AA_o καί θά ἐργαζόμασταν μέ τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ, πού ἀσφαλῶς βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς AA_o. Αὐτή ἡ μετατόπιση δέ βλάφτει σέ τίποτε, γιατί μᾶς ἐνδιαφέρουν τά μήκη τῶν τμημάτων καί ὄχι οἱ θέσεις τους.



Σχ. 66.

Μετά ἀπό αὐτά, λαμβάνουμε τό συμμετρικό Α′ τοῦ Α ὡς πρός τή (δ) καί φέρνουμε τίς Α′Β καί Α′Γ. Ἡ συμμετρία μᾶς ἐξασφαλίζει ΑΒ = Α′Β = β καί ΑΓ = Α′Γ = γ. Ἀπό τή σχέση (1) ἕπεται ὅτι ἡ κυρτή τεθλασμένη γραμμή ΑΒΑ′ περικλείεται ἀπό τήν ΑΓΑ′, ἐνῶ ἔχουν τά ἴδια ἄκρα. Τότε (§ 42) θά εἶναι:

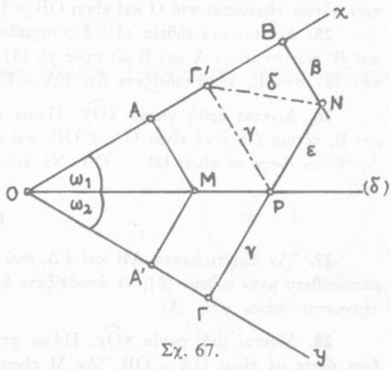
$$AB + A'B < A\Gamma + A'\Gamma \text{ ἤ } 2\beta < 2\gamma \Rightarrow \beta < \gamma \text{ ἤ } AB < A\Gamma.$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι εἶναι ΑΒ < ΑΓ. Τότε ἀποκλείεται νά εἶναι $A_oB = A_o\Gamma$, γιατί θά ἦταν καί ΑΒ = ΑΓ, πράγμα τό ὁποῖο δέν συμφωνεῖ μέ τήν ὑπόθεση. Ἐπίσης ἀποκλείεται νά εἶναι καί $A_oB > A_o\Gamma$, γιατί, ὅπως ἀποδείχθηκε, τότε θά ἦταν καί ΑΒ > ΑΓ, ἀλλά καί αὐτό δέν συμφωνεῖ μέ τήν ὑπόθεση. Ἄρα τό μόνο πού μπορεῖ νά συμβαίνει εἶναι $A_oB < A_o\Gamma$.

78. Ἰδιότητα τῆς διχοτόμου μιᾶς κυρτῆς γωνίας. Θεώρημα. Ὅλα

τά σημεῖα τῆς διχοτόμου (δ) μιᾶς κυρτῆς γωνίας $x\widehat{O}y$, καί μόνο αὐτά, ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἰσαπέχουν ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου (δ) μιᾶς κυρτῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ (σχ. 67). Ἀπό αὐτό φέρνουμε τίς καθέτους ΜΑ καί ΜΑ′ πρός τίς πλευρές Ox καί Oy τῆς γωνίας ἀντιστοίχως. Ἡ συμμετρία ὡς πρός ἄξονα τή διχοτόμο (δ) τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ ἀπεικονίζει τήν ἡμιευθεία Ox πάνω στήν Oy, γιατί εἶναι $\omega_1 = \omega_2$. Τότε τό σημεῖο Α ἀπεικονίζεται στό Α′, γιατί, ἄν δέν συνέβαινε αὐτό, θά ὑπῆρχαν δύο κάθετοι ἀπό τό Μ πρός τήν Oy. Ἄρα εἶναι ΜΑ = ΜΑ′, ἐπειδή εἶναι συμμετρικά τμήματα. Ἀπό αὐτό ἔπεται ὅτι κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου (δ) ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.



Σχ. 67.

Ἄν τώρα Ν εἶναι ἕνα σημεῖο ἐσωτερικό τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$ πού δέν βρίσκεται πάνω στή διχοτόμο (δ), θά ἀποδείξουμε ὅτι αὐτό βρίσκεται σέ ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας.

Ἀπό τό Ν φέρνουμε τίς ΝΒ καί ΝΓ καθέτους πρός τίς Ox καί Oy ἀντιστοίχως, καί ἔστω ὅτι ἡ ΝΓ τέμνει τή διχοτόμο (δ) σέ ἕνα σημεῖο Ρ. Ἀπό τό Ρ φέρνουμε τήν $ΡΓ' \perp Ox$. Τότε ὅπως ἀποδείχθηκε, θά εἶναι $ΡΓ = ΡΓ' = \gamma$. Ἄν συμβολίσουμε $ΝΒ = \beta$ καί $ΝΡ = \varepsilon$, εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι $\beta < \varepsilon + \gamma$.

Φέρνουμε τή $ΝΓ' = \delta$. Τότε, ἐπειδή ἡ β εἶναι κάθετος πρός τήν Ox, ἡ δ θά εἶναι πλαγία καί ἑπομένως

(1) $$\beta < \delta.$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι (§ 38)

(2) $$\delta < \gamma + \varepsilon.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι $\beta < \delta < \gamma + \varepsilon \Rightarrow \beta < \gamma + \varepsilon$ ἤ $ΝΒ < ΝΓ$.

Ἄρα τά σημεῖα τῆς διχοτόμου (δ), ἀλλά μόνο αὐτά, ἔχουν τήν ἰδιότητα νά βρίσκονται σέ ἴσες ἀποστάσεις ἀπό τίς πλευρές Ox καί Oy τῆς κυρτῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.

Πόρισμα. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων πού βρίσκονται στό ἐσωτερικό μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$ καί ἰσαπέχουν ἀπ' τίς πλευρές της εἶναι ἡ διχοτόμος (δ) τῆς γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

24. Δίνονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ. Ἄν οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων αὐτῶν τέμνονται στό Ο καί εἶναι ΟΒ = ΟΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι θά εἶναι καί ΟΑ = ΟΔ.

25. Δίνεται μιά εὐθεία (δ), δύο σημεῖα Α καί Β καί λαμβάνουμε τά συμμετρικά Α′ καί Β′ τῶν σημείων Α καί Β ὡς πρός τή (δ). Ἄν ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ τέμνει τήν (δ) στό Ε, νά ἀποδείξετε ὅτι ΕΑ = ΕΒ = ΕΑ′ = ΕΒ′.

26. Δίνεται ὀρθή γωνία $x\widehat{O}y$. Πάνω στήν πλευρά Ox λαμβάνουμε δύο σημεῖα Α καί Β, τέτοια ὥστε νά εἶναι ΟΑ < ΟΒ, καί πάνω στήν Oy λαμβάνουμε δύο σημεῖα Γ καί Δ, τέτοια ὥστε νά εἶναι ΟΓ < ΟΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΑΓ < ΒΔ.

Β΄.

27. Ἄν δύο τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, πού δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, ἔχουν κοινή μεσοκάθετο μιάν εὐθεία (δ), νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται πάνω στή (δ).

28. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y$. Πάνω στίς πλευρές της λαμβάνουμε σημεῖα Α καί Β, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΟΑ = ΟΒ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΜΑ = ΜΒ.

29. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$, καί ἔστω Oz ἡ διχοτόμος της. Λαμβάνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α, καί ἔστω ὅτι εἶναι Β τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τή διχοτόμο Oz. Θεωροῦμε τίς καθέτους ΑΓ ⊥ Ox καί ΒΔ ⊥ Oy. Νά ἀποδείξετε ὅτι: i) ΑΓ = ΒΔ, ii) ΑΔ = ΒΓ, iii) οἱ ΑΓ καί ΒΔ (ἄν στήν ἀνάγκη προεκταθοῦν) τέμνονται πάνω στή διχοτόμο Oz, iv) τό ἴδιο καί γιά τίς ΑΔ καί ΒΓ.

30. Δίνονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ πού δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. Φέρνουμε τίς εὐθεῖες ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καί θεωροῦμε τίς καθέτους ΑΔ ⊥ ΒΓ, ΒΕ ⊥ ΑΓ, ΓΖ ⊥ ΑΒ, ὅπου τά Δ, Ε καί Ζ βρίσκονται πάνω στίς εὐθεῖες ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ < ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ.

31. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ὁ γ. τόπος τῶν σημείων πού ἰσαπέχουν ἀπό δύο εὐθεῖες, πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο, εἶναι δύο κάθετες εὐθεῖες πού περνοῦν ἀπό τό Ο.

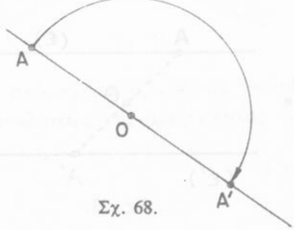
ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

79. Πάνω σ' ἕνα ἐπίπεδο (Π) λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Ο. Μποροῦμε νά φανταστοῦμε ὅτι τό ἐπίπεδο τοῦτο, ὀλισθαίνοντας πάνω στόν ἑαυτό του, στρέφεται ἔτσι, ὥστε τό σημεῖο Ο μένει ἀκίνητο καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Α λαμβάνει μιά θέση Α′, τέτοια ὥστε τά τρία σημεῖα Α, Ο καί Α′ νά βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία (σχ. 68). Τότε τό σημεῖο Α′ λέγεται συμμετρικό τοῦ Α μέ κέντρο συμμετρίας τό σημεῖο Ο. Συμβολικά γράφουμε $A \xrightarrow{\Sigma_O} A'$ καί διαβάζουμε «τό Α μέ κεντρική συμμετρία ὡς πρός τό Ο ἀπεικονίζεται στό Α′».

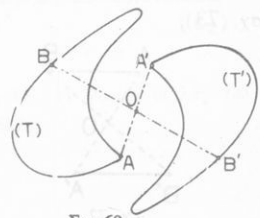
Ἄν (Τ) εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σχῆμα τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ. 69), θά λάβει κατά τήν περιστροφή γύρω ἀπό τό Ο μιάν ἄλλη θέση (Τ′). Τό (Τ′) θά λέγεται συμμετρικό τοῦ (Τ) στή συμμετρία μέ κέντρο τό Ο. Τότε ὁποιοδήποτε σημεῖο Α τοῦ (Τ) θά ἔχει τό συμμετρικό του Α′ πάνω στό (Τ′), ἀλλά καί ὁποιοδήποτε σημεῖο Β′ τοῦ (Τ′) εἶναι τό συμμετρικό ἑνός σημείου Β τοῦ (Τ) στή συμμετρία μέ κέντρο τό Ο. Συμβολικά γράφουμε :

$$(T) \xrightarrow{\Sigma_o} (T').$$

Τό κέντρο τῆς συμμετρίας Ο εἶναι τό μόνο ἀναλλοίωτο σημεῖο τοῦ ἐπι-



Σχ. 68.



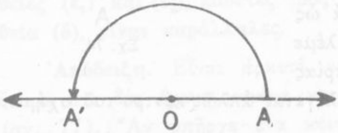
Σχ. 69.

πέδου (Π) στή συμμετρία μέ κέντρο τό Ο, δηλαδή εἶναι τό μόνο σημεῖο πού ἀπεικονίζεται στόν ἑαυτό του.

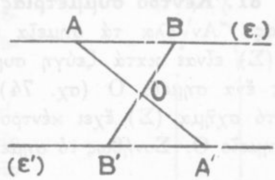
Πόρισμα Ι. Ἄν $(T) \xrightarrow{\Sigma_o} (T')$, τότε καί $(T') \xrightarrow{\Sigma_o} (T)$, δηλαδή ἄν τό (Τ′) εἶναι συμμετρικό τοῦ (Τ), τότε καί τό (Τ) εἶναι συμμετρικό τοῦ (Τ′) στήν κεντρική συμμετρία μέ κέντρο τό Ο.

Πόρισμα ΙΙ. Δύο σχήματα συμμετρικά μεταξύ τους σέ μία κεντρική συμμετρία εἶναι ἴσα. Γιατί ἡ κεντρική συμμετρία εἶναι μετατόπιση.

Πόρισμα ΙΙΙ. Κάθε εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο συμμετρίας Ο μένει ἀναλλοίωτη κατά τήν κεντρική συμμετρία Σ_o, δηλαδή ἀπεικονίζεται στήν ἴδια εὐθεία, ἐνῶ κάθε ἡμιευθεία μέ ἀρχή τό Ο ἀπεικονίζεται στήν ἀντίθετή της (σχ. 70).



Σχ. 70.



Σχ. 71.

Πόρισμα IV. Τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας (ε) ὡς πρός κέντρο τό σημεῖο Ο εἶναι, ὡς ἴσο σχῆμα, εὐθεία (ε′), πού μπορεῖ νά ὁρισθεῖ ἀπό τά συμμετρικά Α′ καί Β′ δύο σημείων Α καί Β τῆς εὐθείας (ε) (σχ. 71).

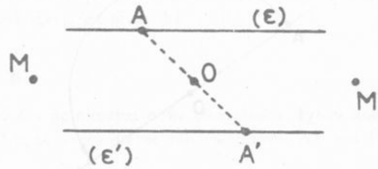
Πόρισμα V. Τό συμμετρικό ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρός

κέντρο ἕνα σημεῖο Ο εἶναι, ὡς ἴσο σχῆμα, ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, πού ὁρίζεται ἀπό τά συμμετρικά Α΄ καί Β΄ τῶν ἄκρων Α καί Β τοῦ τμήματος (σχ. 72).

80. Θεώρημα. Δύο συμμετρικές εὐθεῖες (ε) καί (ε΄) σέ μία κεντρική συμμετρία Σ_o, πού τό κέντρο της Ο δέν βρίσκεται πάνω στίς εὐθεῖες, δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο.

Ἀπόδειξη. Στήν ἀρχή παρατηροῦμε ὅτι οἱ δύο εὐθεῖες δέν μποροῦν νά ταυτίζονται, γιατί τό κέντρο συμμετρίας βρίσκεται ἔξω ἀπ' τήν εὐθεία (ε) (σχ. 73).

Σχ. 72.



Σχ. 73.

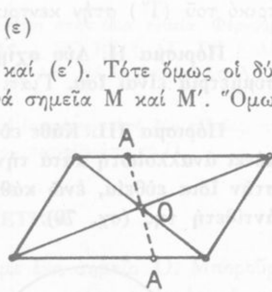
Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει ἕνα κοινό σημεῖο Μ γιά τίς δυό εὐθεῖες, δηλαδή :

(1) $$M \in (\varepsilon) \text{ καί } M \in (\varepsilon').$$

Τότε ἄν Μ΄ εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός τό Ο, ἀπό τίς σχέσεις (1) ἔπεται ἀντιστοίχως ὅτι :

$$M' \in (\varepsilon') \text{ καί } M' \in (\varepsilon)$$

δηλαδή τό Μ΄ ἀνήκει καί στίς δύο εὐθεῖες (ε) καί (ε΄). Τότε ὅμως οἱ δύο εὐθεῖες θά ταυτίζονταν, ἀφοῦ θά εἶχαν δύο κοινά σημεῖα Μ καί Μ΄. Ὅμως αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα οἱ δύο εὐθεῖες δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο.



Σχ. 74.

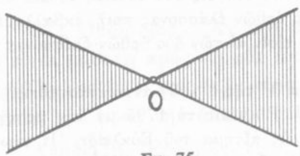
81. Κέντρο συμμετρίας ἑνός σχήματος. Ἄν ὅλα τά σημεῖα ἑνός σχήματος (Σ) εἶναι κατά ζεύγη συμμετρικά ὡς πρός ἕνα σημεῖο Ο (σχ. 74), τότε λέμε ὅτι τό σχῆμα (Σ) ἔχει κέντρο συμμετρίας τό σημεῖο Ο. Συνήθως τό σημεῖο αὐτό λέγεται ἁπλῶς κέντρο τοῦ σχήματος.

82. Κατακορυφήν γωνίες. Δύο γωνίες λέγονται κατακορυφήν, τότε καί μόνο τότε, ὅταν ἔχουν κοινή κορυφή ἕνα σημεῖο Ο καί εἶναι συμμετρικές ὡς πρός κέντρο συμμετρίας τήν κορυφή τους Ο (σχ. 75).

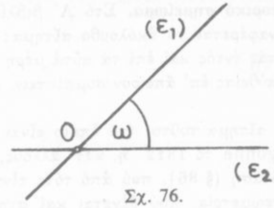
Πόρισμα Ι. Ὅταν δύο γωνίες εἶναι κατακορυφήν, οἱ πλευρές τῆς μιᾶς εἶναι οἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Πόρισμα ΙΙ. Δύο κατακορυφήν γωνίες εἶναι ἴσες. Γιατί εἶναι συμμετρικές.

83. Γωνία δύο τεμνομένων εὐθειῶν. Γωνία δύο εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο (σχ. 76), λέγεται ἡ μικρότερη γωνία ω ἀπό



Σχ. 75.



Σχ. 76.

αὐτές πού σχηματίζονται μέ κορυφή τό σημεῖο Ο. Ἡ γωνία ω λέγεται καί γωνία κλίσεως τῆς μιᾶς εὐθείας ὡς πρός τήν ἄλλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

32. Ἄν δύο ἡμιευθεῖες Αx καί Α'x' εἶναι συμμετρικές ὡς πρός κέντρο ἕνα σημεῖο Ο, νά ἀποδείξετε ὅτι α) κάθε εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό Ο καί τέμνει τήν Αx σ' ἕνα σημεῖο Β, τέμνει καί τήν Α'x' σ' ἕνα σημεῖο Β' καί β) ΑΒ = Α'Β'.

33. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο κατακορυφήν γωνιῶν εἶναι ἀντίθετες ἡμιευθεῖες.

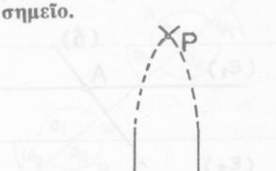
34. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι συμμετρικές ὡς πρός κέντρο ἕνα σημεῖο Ο, νά ἀποδείξετε ὅτι α) κάθε εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τό Ο καί τέμνει τήν (ε_1), τέμνει καί τήν (ε_2) καί β) σχηματίζει μέ τίς (ε_1) καί (ε_2) ἴσες γωνίες.

35. Ἄν ἕνα σχῆμα ἔχει δύο κάθετους ἄξονες συμμετρίας, νά ἀποδείξετε ὅτι ἔχει καί κέντρο συμμετρίας τήν τομή τῶν ἀξόνων.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

84. Ὁρισμός. Δύο συνεπίπεδες εὐθεῖες λέγονται παράλληλες τότε καί μόνο τότε, ὅταν δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο.

85. Θεώρημα. Δύο συνεπίπεδες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), κάθετες πρός τρίτη εὐθεία (δ), εἶναι παράλληλες.



Σχ. 77.

Ἀπόδειξη. Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο (σχ. 77). Ἄν ὑπῆρχε ἕνα κοινό σημεῖο Ρ γιά τίς δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2), τότε ἀπό τό Ρ θά ὑπῆρχαν δύο κάθετοι πάνω στήν ἴδια εὐθεία (δ)· ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες.

Τό σύμβολο τῆς παραλληλίας εἶναι //, δηλαδή γράφουμε $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$.

86. Τό αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη. Ἀπό ἕνα σημεῖο, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό μιά εὐθεία, μία καί μόνο μία παράλληλος ἄγεται πρός τήν εὐθεία.

Ἱστορικὸ σημείωμα. Στό Α' βιβλίο τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδη (περί τό 285 π.Χ.) ἀναφέρεται τό ἀκόλουθο αἴτημα: «Ἠτήσθω... ἐάν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τάς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἅ μέρη εἰσίν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι».

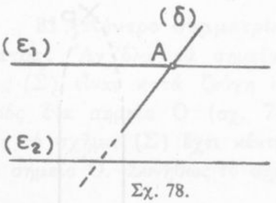
Τό αἴτημα τοῦτο, (τό ὁποῖο εἶναι τό πόρισμα V τῆς § 103) ἀντικαταστάθηκε ἀπό τόν Gergonne τό 1812 ἤ, κατ' ἄλλους, ἀπό τόν J. Playfair τό 1795 μέ τήν προηγούμενη πρόταση (§ 86), πού ἀπό τότε εἶναι γνωστή ὡς αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη. Ἡ γνωστή σέ μᾶς γεωμετρία, πού δέχεται καί στηρίζεται στό αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη, λέγεται Εὐκλείδειος Γεωμετρία.

Ὅσοι ἐπιχείρησαν νά ἀποδείξουν τό αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη, δέν κατόρθωσαν παρά νά μετατοπίσουν τήν πρόταση, δηλαδή νά παραδεχτοῦν ἄλλη πρόταση ὡς αἴτημα καί πάνω σ' αὐτή νά ἀποδείξουν τό αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη. Μάλιστα ὁ γάλλος ἀκαδημαϊκός Lagrange ἀναγκάστηκε νά ἀποσύρει ἐργασία του γιά τίς παράλληλες τήν ὥρα πού τήν ἀνακοίνωνε στή συνεδρίαση τῆς Ἀκαδημίας τῶν Παρισίων λέγοντας: «Πρέπει νά σκεφτῶ ἀκόμη γιά τό ζήτημα αὐτό».

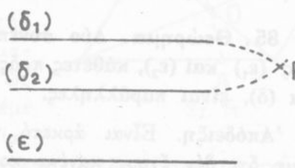
Ὅλες οἱ ἄκαρπες αὐτές προσπάθειες γιά τήν ἀπόδειξη τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδη ἀνάγκασαν τούς γεωμέτρες νά δεχτοῦν ἤ ὅτι τό ζήτημα εἶναι ἄλυτο, ἤ ὅτι εἶναι δυνατό νά μήν ἔχει ἀπόλυτη ἰσχύ τό αἴτημα. Ἔτσι ὁ Ρῶσος Lobatchewsky (1793 - 1856), ὁ Γερμανός Riemann (1826 - 1866) καί ἄλλοι ξεκίνησαν ἀπό τή θέση ὅτι, ἄν δέν παραδεχτοῦν τό αἴτημα τοῦ Εὐκλείδη, δέν ὁδηγοῦνται ὁπωσδήποτε σέ ἄτοπα συμπεράσματα. Μέ τόν τρόπο αὐτό, ἐκτός ἀπό τήν Εὐκλείδειο γεωμετρία, ὑπάρχει καί ἡ γεωμετρία τοῦ Lobatchewsky, κατά τήν ὁποία ἀπό ἕνα σημεῖο ἄγονται ἄπειρες παράλληλες πρός μία εὐθεία, καί ἡ γεωμετρία τοῦ Riemann, κατά τήν ὁποία δέν ὑπάρχουν παράλληλες ἀπό ἕνα σημεῖο πρός μία εὐθεία.

Πόρισμα Ι. Κάθε εὐθεία πού τέμνει τή μία ἀπό δυό παράλληλες τέμνει καί τήν ἄλλη.

Θεωροῦμε δυό παράλληλες $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ καί μία εὐθεία (δ) πού τέμνει τήν (ε_1) σ' ἕνα σημεῖο Α (σχ. 78). Ἄν ἡ (δ) δέν ἔτεμνε καί τήν (ε_2), θά



Σχ. 78.

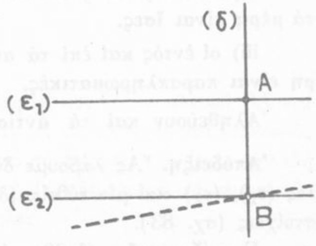


Σχ. 79.

ἔπρεπε νά ἦταν παράλληλος πρός αὐτή καί τότε ἀπό τό Α θά ὑπῆρχαν δύο παράλληλες πρός τήν (ε_2), ἡ (ε_1) καί ἡ (δ)· ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ἡ (δ) τέμνει καί τήν (ε_2).

Πόρισμα ΙΙ. Δύο εὐθεῖες παράλληλες πρός τρίτη εὐθεία εἶναι καί μεταξύ τους παράλληλες. Ἄν δηλαδή εἶναι $(\delta_1)//(\varepsilon)$ καί $(\delta_2)//(\varepsilon)$ (σχ. 79), τότε θά εἶναι καί $(\delta_1)//(\delta_2)$. Πραγματικά οἱ εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2) δέν μποροῦν νά ἔχουν κοινό σημεῖο Ρ, θά ὑπῆρχαν ἀπ' αὐτό δυό παράλληλες πρός τήν εὐθεία (ε)· ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα εἶναι $(\delta_1)//(\delta_2)$.

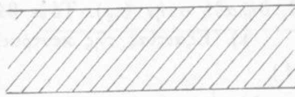
87. Θεώρημα. Ἄν μία εὐθεία (δ) εἶναι κάθετη πρός τή μία ἀπό δυό παράλληλες (ε_1) καί (ε_2), τότε εἶναι κάθετη καί πρός τήν ἄλλη.



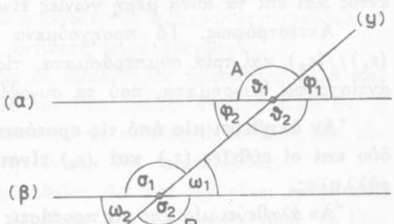
Σχ. 80.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι εἶναι $(\delta)\perp(\varepsilon_1)$ στό σημεῖο Α (σχ. 80). Ἡ εὐθεία (δ), ἀφοῦ τέμνει τήν (ε_1), θά τέμνει καί τήν παράλληλό της (ε_2), ἔστω στό σημεῖο Β. Ἄν ἡ (ε_2) δέν ἦταν κάθετη πρός τή (δ), τότε θά ὑπῆρχε μιά ἄλλη εὐθεία κάθετη ἀπό τό Β πρός τή (δ). Αὐτή θά ἦταν παράλληλη τῆς (ε_1) (§ 85). Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο, γιατί τότε θά ὑπῆρχαν ἀπό τό σημεῖο Β δυό παράλληλες πρός τήν (ε_1). Ἄρα εἶναι καί $(\delta)\perp(\varepsilon_2)$.

88. Ζώνη ἤ ταινία δύο παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται τό ἐπίπεδο τμῆμα πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν δύο παραλλήλων (σχ. 81).


Σχ. 81.

89. Γωνίες πού σχηματίζονται ἀπό δυό παράλληλες καί μία τέμνουσα. Θεωροῦμε δυό παράλληλες (α) καί (β) καί μιά εὐθεία (y), πού τέμνει τίς παράλληλες στά σημεῖα Α καί Β (σχ. 82). Τότε σχηματίζονται τέσσερα ζεύγη κυρτῶν κατακορυφήν γωνιῶν. Ἄς τίς συμβολίσουμε μέ φ_1, φ_2, θ_1, θ_2 καί ω_1, ω_2, σ_1, σ_2. Οἱ γωνίες φ_1, θ_1, ω_2 καί σ_2 βρίσκονται ἔξω ἀπό τή ζώνη τῶν δύο παραλλήλων· γιά συντομία θά τίς λέμε γωνίες **ἐκτός**. Οἱ γωνίες φ_2, θ_2, ω_1 καί σ_1 ἔχουν κοινό μέρος μέ τή ζώνη τῶν παραλλήλων· γιά συντομία θά τίς λέμε γωνίες **ἐντός**.



Σχ. 82.

Ἄν ἀκόμη δύο ἀπό τίς προηγούμενες γωνίες βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς τέμνουσας ΑΒ, ὅπως οἱ γωνίες φ_1 καί ω_1, θά λέγονται γιά συντομία γωνίες **ἐπί τά αὐτά (μέρη)** καί, τέλος, ἄν δύο γωνίες βρίσκονται ἀπό τό ἕνα καί τό ἄλλο μέρος τῆς τέμνουσας ΑΒ, ὅπως οἱ γωνίες φ_2 καί ω_1, θά λέγονται γιά συντομία γωνίες **ἐναλλάξ**. Σχετικά μέ τίς γωνίες αὐτές ἀληθεύει τό ἑπόμενο θεώρημα:

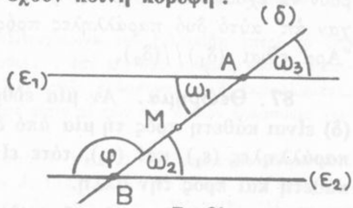
90. Θεώρημα. Ἂν δύο παράλληλες τέμνονται ἀπό μιά εὐθεία, τότε ἀπό τίς σχηματιζόμενες γωνίες πού δέν ἔχουν κοινή κορυφή:

i) οἱ ἐντός ἐναλλάξ εἶναι ἴσες.

ii) οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι ἴσες.

iii) οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη εἶναι παραπληρωματικές.

Ἀληθεύουν καί τά ἀντίστροφα.



Σχ. 83.

Ἀπόδειξη. Ἂς λάβουμε δύο παράλληλες (ε_1), (ε_2) καί μία εὐθεία (δ), πού τίς τέμνει στά σημεῖα A καί B ἀντιστοίχως (σχ. 83).

Γνωρίζουμε ὅτι (§ 80) τό συμμετρικό μιᾶς εὐθείας (ε_1) ὡς πρός κέντρο συμμετρίας ἕνα σημεῖο, πού δέ βρίσκεται πάνω σ' αὐτή, εἶναι μιά εὐθεία παράλληλη τῆς (ε_1). Ἂν λοιπόν ὡς κέντρο συμμετρίας λάβουμε τό μέσο M τοῦ τμήματος AB, ἡ συμμετρία ὡς πρός τό M ἀπεικονίζει τό σημεῖο A στό σημεῖο B καί τήν εὐθεία (ε_1) στήν παράλληλη τῆς (ε_1) πού ἄγεται ἀπό τό B, δηλαδή στήν (ε_2). Τότε θά εἶναι:

i) Ἐξαιτίας τῆς κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρός τό M:

(1) $$\omega_1 = \omega_2$$

δηλαδή οἱ ἐντός ἐναλλάξ γωνίες εἶναι ἴσες.

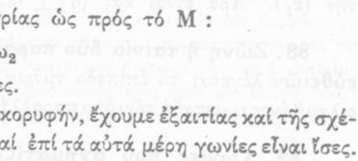
ii) Ἐπειδή $\omega_1 = \omega_3$, ὡς γωνίες κατακορυφήν, ἔχουμε ἐξαιτίας καί τῆς σχέσεως (1), $\omega_2 = \omega_3$· δηλαδή οἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες εἶναι ἴσες.

iii) Ἐπειδή οἱ γωνίες ω_2 καί φ εἶναι παραπληρωματικές, δηλαδή $\omega_2 + \varphi = 2^{\llcorner}$, ἔχουμε, ἐξαιτίας καί τῆς σχέσεως (1), $\omega_1 + \varphi = 2^{\llcorner}$· δηλαδή οἱ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.

Ἀντιστρόφως. Τό προηγούμενο θεώρημα, ἐπειδή ἔχει μία ὑπόθεση, $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$, καί τρία συμπεράσματα, τίς προτάσεις i), ii) καί iii), ἔχει τρία ἀντίστροφα θεωρήματα, πού τά συνοψίζουμε στό ἑξῆς:

Ἂν ἀληθεύει μία ἀπό τίς προτάσεις i), ii), iii), ἀληθεύουν καί οἱ ἄλλες δύο καί οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες.

Ἂν ἀληθεύει μία ἀπό τίς προτάσεις i), ii), iii), εὔκολα φαίνεται ὅτι ἀληθεύουν καί οἱ ἄλλες δύο (γιατί;). Εἶναι ἀρκετό λοιπόν νά ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύει μία ἀπό αὐτές, ἔστω ἡ i). Δηλαδή ἄν οἱ σχηματιζόμενες ἀπό τήν τέμνουσα AB ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ω_1



Σχ. 84.

καί ω_2 εἶναι ἴσες, τότε οἱ εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλες. (σχ. 84). Αὐτό πραγματικά συμβαίνει. Γιατί, ἄν οἱ (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται σέ κάποιο σημεῖο Ρ, τότε θά φέρουμε ἀπό τό σημεῖο Β τήν εὐθεία $(\varepsilon)//(\varepsilon_1)$. Αὐτή θά σχηματίζει μέ τίς (ε_1) καί ΑΒ τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες, δηλαδή :

(2) $$\omega_1 = \omega.$$

Ἀπό τήν ὑπόθεση ὅμως ἔχουμε ὅτι

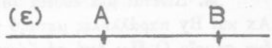
(3) $$\omega_1 = \omega_2.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) ἕπεται ὅτι

(4) $$\omega = \omega_2.$$

Οἱ γωνίες ὅμως ω καί ω_2 ἔχουν τήν ἴδια κορυφή Β, κοινή τήν πλευρά ΒΑ καί κοινό μέρος. Ἄρα, ἀφοῦ εἶναι καί ἴσες, πρέπει νά ταυτίζονται καί ἑπομένως ἡ εὐθεία (ε_2) ταυτίζεται μέ τήν παράλληλη ἀπό τό Β πρός τήν (ε_1). Δηλαδή $(\varepsilon_2) \equiv (\varepsilon)//(\varepsilon_1)$. Σύμφωνα μέ τά παραπάνω ἡ (ε_2) δέ μπορεῖ νά τέμνει τήν (ε_1) σέ κανένα σημεῖο Ρ. Ἄρα εἶναι παράλληλες.

91. Ὁμόρροπη καί ἀντίρροπη παραλληλία. Συνδεδεμένη μέ τήν ἔννοια τῆς εὐθείας (γενικότερα τῆς γραμμῆς) εἶναι καί ἡ φορά διαγραφῆς της. Ἄν πάνω σέ μιά εὐθεία ἔχει καθοριστεῖ καί ἡ φορά διαγραφῆς της, δηλαδή ἡ φορά κατά τήν ὁποία ἕνα κινητό σημεῖο χωρίς παλινδρόμηση διαγράφει τήν εὐθεία, τότε αὐτή λέγεται **προσανατολισμένη** εὐθεία. Εἶναι γνωστό ὅτι γιά μιά εὐθεία (ε) (σχ. 85) δύο μόνο φορές διαγραφῆς εἶναι δυνατές, ἡ ἀπό τό Α πρός τό Β ἤ ἡ ἀπό τό Β πρός τό Α. Αὐτές λέγονται ἀντίθετες καί, ἄν τή μιά ἀπό αὐτές τήν ὀνομάσουμε θετική, ἡ ἄλλη θά λέγεται ἀρνητική. Τήν εὐθεία (ε), πάνω στήν ὁποία ὁρίστηκε ἡ θετική καί ἡ ἀρνητική φορά διαγραφῆς της, θά τή συμβολίζουμε $\overrightarrow{(\varepsilon)}$.

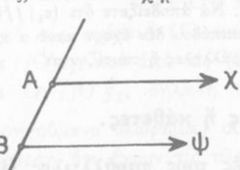


Σχ. 85.

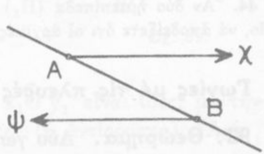
Ἡ ἔννοια τῆς ὁμόρροπης παραλληλίας ἀναφέρεται σέ παράλληλες εὐθεῖες μέ τήν ἴδια φορά διαγραφῆς, ἐνῶ ἡ ἔννοια τῆς ἀντίρροπης παραλληλίας ἀναφέρεται σέ παράλληλες εὐθεῖες μέ ἀντίθετη φορά διαγραφῆς.

Οἱ ἴδιες ἔννοιες ἐπεκτείνονται καί σέ παράλληλες ἡμιευθεῖες ἀλλά καί σέ παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα μέ τόν ἴδιο τρόπο. Φανερό εἶναι ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ «ὁμορρόπου» ἤ «ἀντιρρόπου» γιά τίς εὐθεῖες, ἡμιευθεῖες καί εὐθύγραμμα τμήματα προϋποθέτει καί τήν ἔννοια τῆς παραλληλίας.

Στό σχῆμα 86 οἱ παράλληλες ἡμιευθεῖες Αx καί Βy εἶναι ὁμόρροπες καί τό χαρακτηριστικό τους εἶναι ὅτι ἡ εὐθεία ΑΒ τίς ἀφήνει πρός τό ἴδιο μέρος, ἐνῶ στό σχῆμα 87 οἱ ἡμιευθεῖες Αx καί Βy εἶναι ἀντίρροπες καί τό



Σχ. 86.



Σχ. 87.

χαρακτηριστικό τους εἶναι ὅτι βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἡ ὁμόρροπη παραλληλία δύο εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) συμβολίζεται μέ $\overrightarrow{(\varepsilon_1)} \uparrow\uparrow \overrightarrow{(\varepsilon_2)}$· ἀντιστοίχως, ἡ ἀντίρροπη παραλληλία μέ τό σύμβολο $\downarrow\uparrow$. Οἱ ἴδιοι συμβολισμοί ἰσχύουν καί γιά τίς ἡμιευθεῖες καί τά εὐθύγραμμα τμήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

36. Ἀπό τίς ὀκτώ γωνίες πού σχηματίζουν δύο παράλληλες εὐθεῖες, ὅταν τέμνονται ἀπό μιά εὐθεία, ἡ μία εἶναι ἴση πρός τά 4/5 τῆς ὀρθῆς. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἄλλες ἑπτά γωνίες σέ μέρη ὀρθῆς καί σέ μοῖρες.

37. Δίνονται δύο παράλληλες καί ὁμόρροπες ἡμιευθεῖες $\overrightarrow{Ax}$ καί $\overrightarrow{By}$. Φέρνουμε τό τμῆμα ΑΒ καί παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ο μέσα στή ζώνη τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν. Φέρνουμε ἀκόμη καί τά τμήματα ΟΑ καί ΟΒ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$\widehat{AOB} = \widehat{OAx} + \widehat{OBy}.$$

38. Δίνεται μία εὐθεία (δ) καί δύο σημεῖα της Α καί Β. Φέρνουμε τίς ἡμιευθεῖες Αx καί By παράλληλες μεταξύ τους καί πρός τό ἴδιο μέρος τῆς (δ), παίρνουμε ἀκόμη καί ἕνα σημεῖο Ο ἔξω ἀπό τή ζώνη τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν καί πρός τό μέρος τῆς (δ) ὅπου βρίσκονται οἱ ἡμιευθεῖες. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{AOB}$ εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{OAx}$ καί $\widehat{OBy}$.

39. Ἄν δύο εὐθεῖες πού τέμνονται ἀπό τρίτη εὐθεία σχηματίζουν τίς ἐκτός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες ἤ τίς ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ δύο πρῶτες εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

40. Δίνεται ἡ κυρτή τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν κυρτῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καί $\widehat{B\Gamma\Delta}$ τέμνονται.

41. Ἄν (ε_1) καί (ε_2) εἶναι δύο παράλληλες εὐθεῖες καί (δ) εἶναι μιά τρίτη εὐθεία πού τίς τέμνει, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι δύο ἐντός ἐναλλάξ γωνιῶν εἶναι παράλληλες, ἐνῶ οἱ διχοτόμοι δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετες.

42. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σχῆμα πού ἀποτελοῦν δύο ἀντίρροπες ἡμιευθεῖες ἔχει κέντρο συμμετρίας.

Β΄.

43. Δύο συνεπίπεδες εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) ἔχουν τήν ἀκόλουθη ἰδιότητα: Κάθε εὐθεία τοῦ ἐπιπέδου πού τέμνει τή μία τέμνει καί τήν ἄλλη. Νά ἀποδείξετε ὅτι $(\varepsilon_1) // (\varepsilon_2)$.

44. Ἄν δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καί (Π_2) τοῦ ἴδιου ἐπιπέδου δέν ἔχουν κανένα κοινό σημεῖο, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀρχικές εὐθεῖες τους εἶναι παράλληλες ἤ ταυτίζονται.

Γωνίες μέ τίς πλευρές τους παράλληλες ἤ κάθετες.

92. Θεώρημα. Δύο γωνίες μέ τίς πλευρές τους παράλληλες εἶναι ἴσες ἤ παραπληρωματικές.

'Απόδειξη. i) "Ας λάβουμε δύο γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O'}y'$ μέ τίς πλευρές τους παράλληλες καί ὁμόρροπες, δηλαδή $Ox \uparrow\uparrow O'x'$ καί $Oy \uparrow\uparrow O'y'$ (σχ. 88). Ἡ εὐθεία Oy, ἀφοῦ τέμνει τήν Ox, θά τέμνει καί τήν παράλληλή της εὐθεία $O'x'$ σέ ἕνα σημεῖο O_1. Τότε θά εἶναι :

(1) $\omega = \omega_1$

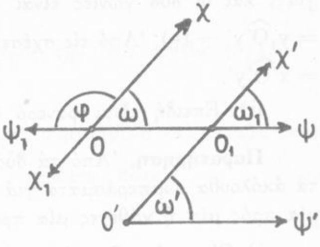
ἐπειδή $Ox \uparrow\uparrow O'x'$ καί τέμνονται ἀπό τήν Oy. Γιά ὅμοιους λόγους θά εἶναι καί

(2) $\omega_1 = \omega'$.

'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι

(3) $\omega = \omega'$.

"Αρα $x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.



Σχ. 88.

ii) 'Επειδή εἶναι $\omega + \varphi = 2^{L}$, μέ βάση τή σχέση (3) ἡ τελευταία γράφεται $\omega' + \varphi = 2^{L} \Rightarrow x'\widehat{O'}y' + x\widehat{O}y_1 = 2^{L}$.

Σημείωση. Γιά διευκρίνιση μποροῦμε νά διαχωρίσουμε τίς δύο περιπτώσεις τοῦ προηγούμενου θεωρήματος ὡς ἑξῆς :

Δύο γωνίες μέ τίς πλευρές τους παράλληλες εἶναι ἴσες, ἄν οἱ πλευρές τους εἶναι ὁμόρροπες ἤ ἄν εἶναι ἀντίρροπες· ἀντίθετα, οἱ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἄν τό ἕνα ζεῦγος πλευρῶν εἶναι ἡμιευθεῖες ὁμόρροπες καί τό ἄλλο ζεῦγος πλευρῶν εἶναι ἡμιευθεῖες ἀντίρροπες.

93. Θεώρημα. Δύο γωνίες μέ τίς πλευρές τους κάθετες εἶναι ἴσες ἤ παραπληρωματικές.

'Απόδειξη. i) "Ας λάβουμε δύο γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O'}y'$ μέ τίς πλευρές τους κάθετες (σχ. 89), δηλαδή

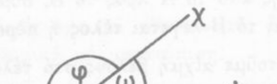
(1) $Ox \perp O'x'$ καί

(2) $Oy \perp O'y'$.

'Από τήν κορυφή O' φέρνουμε

(3) $O'x_1 \perp O'x'$ καί

(4) $O'y_1 \perp O'y'$.



Σχ. 89.

'Από τίς σχέσεις (1) καί (3) ἔπεται ὅτι $Ox // O'x_1$, καί ἀπό τίς (2) καί (4) ἔπεται ὅτι $Oy // O'y_1$, δηλαδή (σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα) οἱ γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x_1\widehat{O'}y_1$ εἶναι ἴσες, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι ἔχουν τίς πλευρές τους ὁμόρροπες (ἤ ἀντίρροπες). "Αρα

(5) $\omega_1 = \omega$.

Εἶναι φανερό ὅμως ὅτι :

(6) $$\omega_1 = \omega'$$

γιατί καί οἱ δύο γωνίες εἶναι συμπληρωματικές τῆς γωνίας σ $(x_1\widehat{O'}x' = y_1\widehat{O'}y' = 1^{L})$. Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (6) λαμβάνουμε $\omega = \omega' \Rightarrow x\widehat{O}y = x'\widehat{O'}y'$.

ii) Ἐπειδή εἶναι φανερό ὅτι $\omega + \varphi = 2^{L} \Rightarrow \omega' + \varphi = 2^{L}$.

Παρατήρηση. Ἀπό τά δύο προηγούμενα θεωρήματα μποροῦν νά βγοῦν τά ἀκόλουθα συμπεράσματα γιά δύο γωνίες μέ τίς πλευρές τους παράλληλες μία πρός μία ἤ κάθετες μία πρός μία :

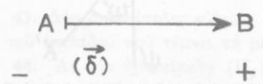
i) Οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, ἄν εἶναι καί οἱ δυό ὀξεῖες.

ii) Οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, ἄν εἶναι καί οἱ δυό ἀμβλεῖες.

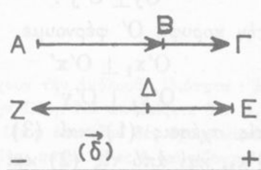
iii) Οἱ γωνίες εἶναι παραπληρωματικές, ἄν ἡ μία ἀπό αὐτές εἶναι ὀξεία καί ἡ ἄλλη ἀμβλεία.

94. Ἰσότητα καί πράξεις στό σύνολο τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων. Μία προσανατολισμένη εὐθεία $(\vec{\delta})$ ἐφοδιάζει τό ἐπίπεδο μέ μία θετική φορά διαγραφῆς (καί τήν ἀντίθετή της ἀρνητική). Τό σύνολο ὅλων τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου, πού εἶναι παράλληλα πρός τή διεύθυνση $(\vec{\delta})$, ἀποτελεῖ ἕνα ὑποσύνολο $\mathfrak{D}$ τοῦ συνόλου τῶν προσανατολισμένων εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου. Κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα τοῦ συνόλου $\mathfrak{D}$, μέ ἄκρα τά σημεῖα Α καί Β καί φορά διαγραφῆς ἀπό τό Α πρός τό Β, συμβολίζεται μέ $\vec{AB}$. Τό Α λέγεται **ἀρχή** τοῦ $\vec{AB}$ καί τό Β λέγεται **τέλος** ἤ **πέρας.** Στή σχηματική ἀπεικόνιση (σχ. 90) τοποθετοῦμε αἰχμή βέλους στό τέλος Β τοῦ $\vec{AB}$, πού δείχνει τή φορά διαγραφῆς του.

Δύο προσανατολισμένα τμήματα μέ τήν ἴδια διεύθυνση λέγονται **διαδοχικά,** ὅταν τό τέλος τοῦ ἑνός εἶναι ἀρχή γιά τό ἄλλο, ἀνεξάρτητα ἀπό τό



Σχ. 90.



Σχ. 91.

ἄν αὐτά εἶναι ὁμόρροπα ἤ ἀντίρροπα. Στό σχῆμα 91 τά $\vec{AB}$ καί $\vec{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά, ὅπως ἐπίσης καί τά $\vec{\Delta E}$ καί $\vec{EZ}$.

Ἴσα λέγονται δύο προσανατολισμένα τμήματα τότε καί μόνο τότε, ὅταν ἔχουν :

i) Ἴσα μήκη.

ii) Τήν ἴδια διεύθυνση [παράλληλα πρός τήν ἴδια εὐθεία (δ)].

iii) Τήν ἴδια φορά (ὁμόρροπα).

Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική· δηλαδή ἄν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ εἶναι προσανατολισμένα τμήματα, τότε :

i) $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

ii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$

iii) $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \wedge \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$.

95. Ἄθροισμα προσανατολισμένων τμημάτων πού ἔχουν τήν ἴδια διεύθυνση. Ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν προσανατολισμένων τμημάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{B\Gamma}$ (σχ. 91) λέγεται τό προσανατολισμένο τμῆμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ μέ ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί τέλος τό τέλος τοῦ δεύτερου τμήματος. Συμβολικά γράφουμε $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$ (ὁμοίως, στό σχῆμα εἶναι καί $\overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{\Delta Z}$). Εἶναι φανερό ὅτι τό $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι παράλληλο πρός τήν ἴδια διεύθυνση (δ) (γιατί); καί ἑπομένως ἀνήκει κι αὐτό στό σύνολο $\mathfrak{D}$. Ἄρα ἡ πράξη τῆς προσθέσεως εἶναι ἐσωτερική πράξη στό σύνολο $\mathfrak{D}$, δηλαδή τό $\mathfrak{D}$ εἶναι κλειστό ὡς πρός τήν πρόσθεση.

Ἄν τά προσανατολισμένα τμήματα, πού ἔχουμε νά ἀθροίσουμε, δέν εἶναι διαδοχικά, μποροῦμε νά τά κάνουμε διαδοχικά μέ μετατόπιση.

Ἀνάλογα ὁρίζεται τό ἄθροισμα προσανατολισμένων τμημάτων περισσοτέρων ἀπό δύο, ἄν στό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσουμε τό τρίτο κ.ο.κ.

Ἡ πράξη τῆς προσθέσεως στό σύνολο $\mathfrak{D}$ εἶναι ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική καί μονότροπη. Ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τό μηδενικό προσανατολισμένο τμῆμα, πού συμβολίζεται μέ $\vec{O}$. Ἄν δηλαδή τά $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ἀνήκουν στό $\mathfrak{D}$, ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες :

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$.

ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$.

iii) $\vec{\alpha} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$.

Οἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀνάλογες μέ ἐκεῖνες πού δόθηκαν γιά τά εὐθύγραμμα τμήματα.

96. Ἀντίθετα λέγονται δύο προσανατολισμένα τμήματα τότε καί μόνο τότε, ὅταν ἔχουν ἄθροισμα τό μηδενικό προσανατολισμένο εὐθύγραμμο τμῆμα. Δύο ἀντίθετα προσανατολισμένα τμήματα εἶναι ὁπωσδήποτε ἀντίρροπα. Γιά κάθε τμῆμα $\overrightarrow{AB}$, τό $\overrightarrow{BA}$ εἶναι ἀντίθετό του, γιατί $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{O}$. Ἄρα $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{O} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Ἡ διαφορά $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δύο προσανατολισμένων τμημάτων ἀνάγεται σέ ἄθροισμα, γιατί $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} - (-\overrightarrow{\Delta\Gamma}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεση προσανατολισμένου τμήματος ἐπί ἀκέραιον ἀριθμό (ἀντιστοίχως ρητόν ἀριθμό), ἀνάγονται στίς ἀντίστοιχες πράξεις τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων· ὅμως ἐδῶ μποροῦμε νά ἐπεκτείνουμε τίς πράξεις αὐτές καί γιά ἀρνητικούς πολλαπλασιαστές (ἤ ἀντιστοίχως διαιρέτες). Ὅταν εἶναι θετικός ὁ πολλαπλασιαστής (ἤ ὁ διαιρέτης), τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως εἶναι ὁμόρροπο τμῆμα μέ τό ἀρχικό, ἐνῶ, ὅταν εἶναι ἀρνητικός ὁ πολλαπλασιαστής (ἤ ὁ διαιρέτης), τό ἀποτέλεσμα τῆς πράξεως εἶναι τμῆμα ἀντίρροπο ἀπό τό ἀρχικό.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

45. Δίνονται δύο ζεύγη παραλλήλων εὐθειῶν $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ καί $(\zeta_1)//(\zeta_2)$ πού τέμνονται σέ τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι στό σχῆμα ΑΒΓΔ :

i) οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες

ii) οἱ διπλανές γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.

46. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$. Φέρνουμε $Ox_1 \perp Ox$ καί πρός τό μέρος πού βρίσκεται ἡ Oy. Ἐπίσης φέρνουμε $Oy_1 \perp Oy$ καί πρός τό μέρος πού δέν βρίσκεται ἡ Ox. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ γωνίες $x\widehat{O}y$, $x_1\widehat{O}y_1$ εἶναι ἴσες καί ὅτι οἱ διχοτόμοι τους εἶναι κάθετες.

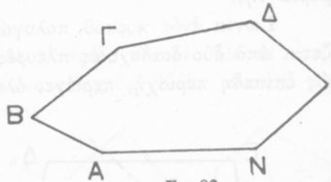
ΠΡΩΤΟ ΒΙΒΛΙΟ

ΠΟΛΥΓΩΝΑ

97. Ὁρισμός. Πολύγωνο λέγεται τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό μιά κλειστή τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓ...ΝΑ (σχ. 92).

Οἱ κορυφές τῆς τεθλασμένης γραμμῆς λέγονται **κορυφές** τοῦ πολυγώνου καί οἱ **πλευρές** της λέγονται πλευρές του.

Ἕνα πολύγωνο δέν μπορεῖ νά ἔχει λιγότερες ἀπό τρεῖς κορυφές, γιατί λιγότερα ἀπό τρία σημεῖα δέν ὁρίζουν τεθλασμένη γραμμή.



Σχ. 92.

Προσανατολισμένο λέγεται τό πολύγωνο, ὅταν ἡ τεθλασμένη γραμμή ἀπό τήν ὁποία ἀποτελεῖται εἶναι προσανατολισμένη, δηλαδή ὅταν ἔχει ὁριστεῖ ἡ θετική φορά διαγραφῆς της.

98. Θεώρημα. Ἕνα πολύγωνο ἔχει τόσες κορυφές, ὅσες καί πλευρές.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα πολύγωνο ΑΒΓ...Ν μέ ν πλευρές (σχ. 92). Παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στίς κορυφές καί στίς πλευρές του, μέ τήν ἔννοια $Α \leftrightarrow ΑΒ$, $Β \leftrightarrow ΒΓ$, ..., $Ν \leftrightarrow ΝΑ$. Ἄρα οἱ κορυφές τοῦ πολυγώνου εἶναι τόσες, ὅσες καί οἱ πλευρές του.

Ἕνα πολύγωνο ἀνάλογα μέ τό πλῆθος τῶν κορυφῶν (ἤ τῶν πλευρῶν) του, λέγεται τρίγωνο (ἤ τρίπλευρο), τετράπλευρο, πεντάγωνο (ἤ πεντάπλευρο), ..., ν/γωνο (ἤ ν/πλευρο).

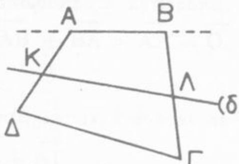
Περίμετρος ἑνός πολυγώνου λέγεται τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του.

Διαδοχικές κορυφές ἑνός πολυγώνου λέγονται δύο κορυφές του πού εἶναι ἄκρα τῆς ἴδιας πλευρᾶς.

Διαδοχικές πλευρές ἑνός πολυγώνου λέγονται δύο πλευρές του πού ἔχουν μία κοινή κορυφή.

Διαγώνιος ἑνός πολυγώνου λέγεται κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα πού ἔχει ἄκρα δύο μή διαδοχικές κορυφές.

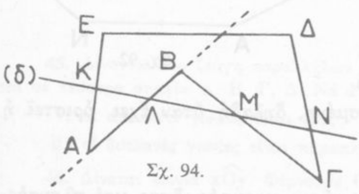
Κυρτό πολύγωνο λέγεται κάθε πολύγωνο, ὅταν ἡ κλειστή τεθλασμένη γραμμή ἀπό τήν ὁποία ἀποτελεῖται εἶναι κυρτή. Ἕνα κυρτό πολύγωνο μπορεῖ νά τέμνεται σέ δύο τό πολύ σημεῖα ἀπό μιά εὐθεία (δ) πού δέν περιέχει καμιά πλευρά του (σχ. 93)· ἐπίσης, κάθε πλευρά του, ὅταν προεκταθεῖ, ἀφήνει τό πολύγωνο μέσα στό ἕνα ἀπό τά δύο ἡμιεπίπεδα πού ὁρίζει.



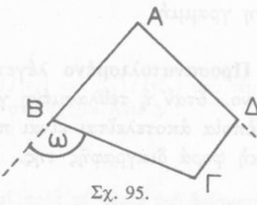
Σχ. 93.

Μή κυρτό λέγεται ἕνα πολύγωνο, ὅταν ἡ κλειστή τεθλασμένη γραμμή ἀπό τήν ὁποία ἀποτελεῖται εἶναι μή κυρτή (σχ. 94). Τότε ὑπάρχει μία τουλάχιστο εὐθεία (δ), πού δέν περιέχει καμιά πλευρά τοῦ πολυγώνου καί πού τό τέμνει σέ περισσότερα ἀπό δύο σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν· ἐπίσης ὑπάρχει μία τουλάχιστο πλευρά του ΑΒ πού, ὅταν προεκταθεῖ, χωρίζει τό πολύγωνο σέ δύο μέρη ἀπό τή μιά καί τήν ἄλλη μεριά της.

Γωνία ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ κυρτή γωνία πού σχηματίζεται ἀπό δύο διαδοχικές πλευρές του. Κάθε γωνία ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου, ὡς ἐπίπεδη περιοχή, περιέχει ὁλόκληρο τό πολύγωνο (σχ. 95).



Σχ. 94.

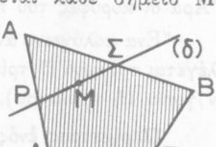


Σχ. 95.

Ἐξωτερική γωνία μιᾶς γωνίας $\widehat{B}$ (σχ. 95) ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται ἡ γωνία ω, πού εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματική τῆς γωνίας $\widehat{B}$ τοῦ πολυγώνου.

Ἐσωτερικό σημεῖο ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται κάθε σημεῖο Μ (σχ. 96), ὅταν κάθε εὐθεία (δ) πού περνᾶ ἀπ' αὐτό τέμνει τό πολύγωνο σέ δύο σημεῖα Ρ καί Σ.

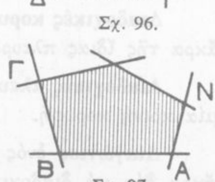
Τό σύνολο ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου λέγεται **ἐσωτερικό** τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 96.

★ **Παρατήρηση.** Ἐπειδή σέ ἕνα κυρτό πολύγωνο ΑΒΓ...Ν κάθε γωνία του, ὡς ἐπίπεδο τμῆμα, περιέχει ὁλόκληρο τό πολύγωνο, τό ἐσωτερικό τοῦ πολυγώνου μπορεῖ νά θεωρηθεῖ ὡς τό κοινό μέρος τῶν γωνιῶν του (σχ. 97). Δηλαδή :

$$\text{ἐσ. } (AB\Gamma\ldots N) = \widehat{A} \cap \widehat{B} \cap \ldots \cap \widehat{N}.$$



Σχ. 97.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

47. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐσωτερικό ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ταυτίζεται μέ τήν τομή δύο γωνιῶν του, δηλαδή $\text{ἐσ}(ΑΒΓ) = \widehat{Β} \cap \widehat{Γ}$.

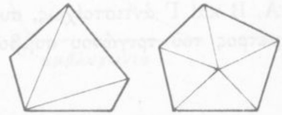
48. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐσωτερικό ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ταυτίζεται μέ τήν τομή δύο ἀπέναντι γωνιῶν του, δηλαδή $\text{ἐσ}(ΑΒΓΔ) = \widehat{Α} \cap \widehat{Γ} = \widehat{Β} \cap \widehat{Δ}$.

49. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἐσωτερικό ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου $Α_1Α_2Α_3 \ldots Α_{2ν}$ μέ 2ν πλευρές ταυτίζεται μέ τήν τομή τῶν ἐσωτερικῶν τῶν γωνιῶν του πού ἔχουν ἄρτια διαδοχική τάξη, δηλαδή $\text{ἐσ}(Α_1Α_2Α_3 \ldots Α_{2ν}) = Α_2 \cap Α_4 \cap \ldots \cap Α_{2ν}$.

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

99. Τό τρίγωνο εἶναι τό ἁπλούστερο, ἀλλά καί τό σημαντικότερο ἀπό τά πολύγωνα, γιατί κάθε πολύγωνο μπορεῖ μέ διάφορους τρόπους νά χωριστεῖ σέ τρίγωνα (σχ. 98).

Κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου λέγονται οἱ τρεῖς πλευρές καί οἱ τρεῖς γωνίες του. Ἔτσι, ἕνα τρίγωνο ἔχει ἕξι κύρια στοιχεῖα. Κάθε πλευρά τοῦ τριγώνου μπορεῖ νά λέγεται καί βάση του.

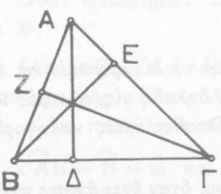


Σχ. 98.

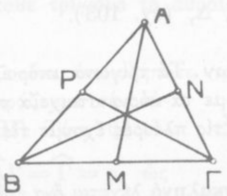
100. Ὕψη - διάμεσοι - διχοτόμοι. Ἄς λάβουμε ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ. Σ' αὐτό μποροῦμε νά ὁρίσουμε τά ἑξῆς :

i) Τό κάθετο τμῆμα ΑΔ (σχ. 99), πού ἄγεται ἀπό τήν κορυφή Α πρός τήν εὐθεία ΒΓ, λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου. Ἀνάλογα ὁρίζονται καί ἄλλα δύο ὕψη τοῦ τριγώνου ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ. Ἔτσι, κάθε τρίγωνο ἔχει τρία ὕψη πού ἄγονται ἀπό τίς τρεῖς κορυφές του· εἶναι τά ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ.

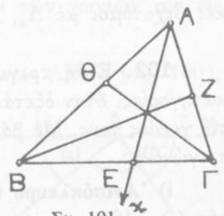
ii) Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ (σχ. 100), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΜ λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου ἀπό τήν κορυφή Α. Ἀνάλογα ὁρίζονται καί οἱ διάμεσοι ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ. Ἔτσι, κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς διαμέσους ἀπό τίς τρεῖς κορυφές του. τίς ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ.



Σχ. 99.



Σχ. 100.



Σχ. 101.

iii) Ἄν Αx εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{Α}$, πού τέμνει τήν πλευρά ΒΓ στό σημεῖο Ε (σχ. 101), τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΕ λέγεται **διχοτόμος**

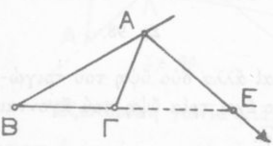
τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀνάλογα ὁρίζονται καί οἱ διχοτόμοι τοῦ τριγώνου ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ. Ἔτσι κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς διχοτόμους ἀπό τίς τρεῖς κορυφές του, τίς ΑΕ, ΒΖ, ΓΘ.

vi) Ἄν Αy εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ καί τέμνει τήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΒΓ στό Ε (σχ. 102), τό τμῆμα ΑΕ λέγεται **ἐξωτερική διχοτόμος** τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$. Ἀνάλογα ὁρίζονται καί οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι ἀπό τίς δύο ἄλλες κορυφές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἔτσι, κάθε τρίγωνο ἔχει τρεῖς ἐξωτερικές διχοτόμους ἀπό τίς τρεῖς κορυφές του.

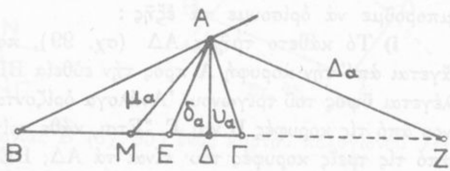
Τά ὕψη, οἱ διάμεσοι καί οἱ διχοτόμοι ἑνός τριγώνου λέγονται δευτερεύοντα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Ὑπάρχουν καί ἄλλα δευτερεύοντα στοιχεῖα, πού θά τά γνωρίσουμε στά ἑπόμενα.

101. Συνηθέστεροι συμβολισμοί. Ἕνα τρίγωνο μέ κορυφές τά σημεῖα Α, Β, Γ συμβολίζεται μέ τριγ.ΑΒΓ ἤ $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ ἤ ἁπλά ΑΒΓ (ὅταν γνωρίζουμε ὅτι πρόκειται γιά τρίγωνο).

Οἱ πλευρές ΒΓ, ΓΑ καί ΑΒ, πού βρίσκονται ἀπέναντι ἀπό τίς κορυφές Α, Β καί Γ ἀντιστοίχως, συμβολίζονται μέ α, β, γ ἀντιστοίχως, ἐνῶ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου συμβολίζεται μέ 2τ, δηλαδή $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.



Σχ. 102.



Σχ. 103.

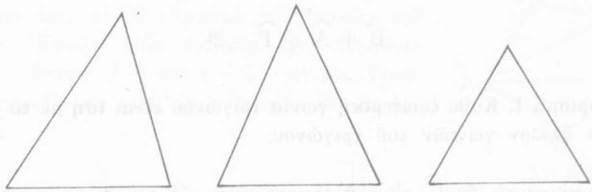
Τά ὕψη ἀπό τίς κορυφές Α, Β, Γ συμβολίζονται μέ υ_α, υ_β, υ_γ ἀντιστοίχως, οἱ διάμεσοι μέ μ_α, μ_β, μ_γ καί οἱ διχοτόμοι μέ δ_α, δ_β, δ_γ, ἐνῶ οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι μέ Δ_α, Δ_β, Δ_γ (σχ. 103).

102. Εἴδη τριγώνων. Τά τρίγωνα μποροῦμε νά τά διακρίνουμε σέ ἕξι κατηγορίες, ὅταν ἐξετάσουμε τά κύρια στοιχεῖα τους, δηλαδή τίς πλευρές καί τίς γωνίες τους. Μέ βάση τίς πλευρές ἔχουμε τίς ἀκόλουθες τρεῖς κατηγορίες τριγώνων:

i) Ἀνισόπλευρο ἤ σκαληνό λέγεται ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἔχει ἄνισες πλευρές (σχ. 104).

ii) Ἰσοσκελές λέγεται ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἔχει δύο ἴσες πλευρές. Ἡ τρίτη πλευρά του λέγεται βάση.

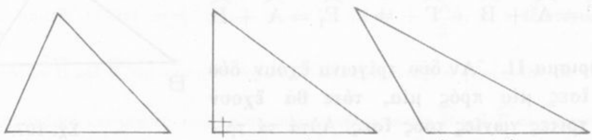
iii) Ἰσόπλευρο λέγεται ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἔχει καί τίς τρεῖς πλευρές του ἴσες.



Σχ. 104.

Μέ βάση τίς γωνίες ἔχουμε :

iv) Ὀξυγώνιο λέγεται ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἔχει καί τίς τρεῖς γωνίες του ὀξεῖες (σχ. 105).



Σχ. 105.

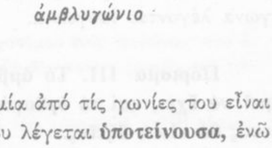
v) Ὀρθογώνιο λέγεται ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἡ μία ἀπό τίς γωνίες του εἶναι ὀρθή. Ἡ ἀπέναντι ἀπό τήν ὀρθή γωνία πλευρά του λέγεται **ὑποτείνουσα,** ἐνῶ οἱ ἄλλες πλευρές λέγονται **κάθετες πλευρές** τοῦ τριγώνου.

vi) Ἀμβλυγώνιο λέγεται ἕνα τρίγωνο, ὅταν ἡ μία ἀπό τίς γωνίες του εἶναι ἀμβλεία.

Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου.

103. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίγωνο τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι $2\llcorner$.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 106). Ἀπό τήν κορυφή του Α χαράζουμε τήν εὐθεία x'Ax παράλληλη τῆς ΒΓ. Τότε θά εἶναι $x'\widehat{A}B = \widehat{B} = \omega$ καί $x\widehat{A}\Gamma = \widehat{\Gamma} = \varphi$, ὡς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες τῶν παραλλήλων xx' καί ΒΓ πού τέμνονται ἀπό τίς ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Ἐπειδή ἡ xAx' εἶναι εὐθεία, ἔχουμε :



Σχ. 106.

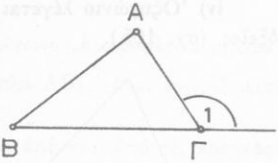
$$x'\widehat{AB} + \widehat{A} + x\widehat{A\Gamma} = 2^{\llcorner} \;\; ἤ \;\; \omega + \widehat{A} + \varphi = 2^{\llcorner} \;\; ἤ$$

$$\widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}.$$

Πόρισμα I. Κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Πραγματικά, ἄν $\widehat{\Gamma_1}$ εἶναι ἡ ἐξωτερική γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στήν κορυφή Γ (σχ. 107), ἔχουμε πρῶτα ὅτι : $\widehat{\Gamma_1} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}$, καί κατόπιν (κατά τό προηγούμενο θεώρημα) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}$.
᾿Από αὐτές ἕπεται ὅτι :

$$\widehat{\Gamma_1} + \widehat{\Gamma} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\Gamma_1} = \widehat{A} + \widehat{B}.$$



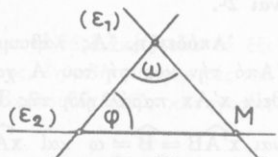
Σχ. 107.

Πόρισμα II. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίες ἴσες μία πρός μία, τότε θά ἔχουν καί τίς τρίτες γωνίες τους ἴσες. Αὐτά τά τρίγωνα λέγονται ἰσογώνια.

Πόρισμα III. Τό ἀμβλυγώνιο τρίγωνο μία μόνο ἀμβλεία γωνία μπορεῖ νά ἔχει, καί τό ὀρθογώνιο μία μόνο ὀρθή γωνία. Οἱ ἄλλες δύο γωνίες τους θά εἶναι ὀξεῖες.

Πόρισμα IV. Στό ὀρθογώνιο τρίγωνο οἱ δύο ὀξεῖες γωνίες εἶναι συμπληρωματικές.

Πόρισμα V. Ἄν δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται ἀπό τρίτη εὐθεία (δ) (σχ. 108) καί σχηματίζουν δύο ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες ω καί φ μέ ἄθροισμα μικρότερο ἀπό $2^{\llcorner}$, οἱ εὐθεῖες αὐτές τέμνονται σέ σημεῖο Μ πού βρίσκεται ἀπό τό μέρος τῶν γωνιῶν ω καί φ.

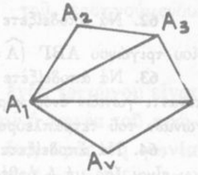


Σχ. 108.

104. Θεώρημα. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου μέ ν πλευρές εἶναι ἴσο μέ 2ν — 4 ὀρθές γωνίες.

᾿Απόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα κυρτό ν/γωνο $A_1A_2 \ldots A_\nu$ (σχ. 109). ᾿Από μιά κορυφή του, ἔστω τήν A_1, φέρνουμε ὅλες τίς διαγωνίους A_1A_3, $A_1A_4, \ldots$,

$A_1A_{\nu-1}$, μέ τίς ὁποῖες τό πολύγωνο χωρίζεται σέ $\nu - 2$ τρίγωνα. Εἶναι φανερό ὅτι τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδή κάθε τρίγωνο ἔχει ἄθροισμα γωνιῶν 2^L, ἔπεται ὅτι τά $\nu - 2$ τρίγωνα ἔχουν ἄθροισμα γωνιῶν $(\nu - 2) \cdot 2^L$, δηλαδή $2\nu - 4$ ὀρθές γωνίες.



Σχ. 109.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

50. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι 70^0 καί ἡ γωνία $\widehat{B}$ εἶναι τά $4/5$ τῆς $\widehat{A}$. Νά βρεθεῖ ἡ γωνία $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

51. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδείξετε ὅτι: α) οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται σέ σημεῖο Ο καί σχηματίζουν γωνία ἴση μέ $1^L + \frac{\widehat{A}}{2}$, β) οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται σέ σημεῖο Ζ καί σχηματίζουν γωνία ἴση μέ $1^L - \frac{\widehat{A}}{2}$ καί γ) μία ἐσωτερική καί μία ἐξωτερική διχοτόμος τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται σέ σημεῖο Κ καί σχηματίζουν γωνία ἴση μέ $\widehat{A}/2$.

52. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία τοῦ ὕψους καί τῆς διχοτόμου ἑνός τριγώνου, πού ἄγονται ἀπό τήν ἴδια κορυφή, εἶναι ἴση μέ τήν ἡμιδιαφορά τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

53. Ἄν σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$ τέμνονται σέ σημεῖο Ε, νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{E} = \frac{\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta}}{2}$.

54. Νά ὑπολογίσετε τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ α) πενταγώνου, β) ἑξαγώνου, γ) δωδεκαγώνου.

55. Ἄν δύο γωνίες ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι παραπληρωματικές, νά ἀποδείξετε ὅτι καί οἱ ἄλλες δύο γωνίες του θά εἶναι παραπληρωματικές.

56. Πόσες πλευρές ἔχει ἕνα κυρτό πολύγωνο, ὅταν τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι α) 10 ὀρθές γωνίες, β) 16 ὀρθές γωνίες.

57. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν μία γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο.

58. Ἄν μία γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του, τότε τό τρίγωνο εἶναι ἀμβλυγώνιο.

59. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σχηματίζει μέ τήν πλευρά ΒΓ δύο γωνίες, πού ἡ διαφορά τους εἶναι ἴση μέ τήν διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

60. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου, ὅταν τέμνονται ἀνά δύο, σχηματίζουν ἕνα τετράπλευρο, στό ὁποῖο οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι παραπληρωματικές.

61. Νά ἀποδειχθεῖ τό ἴδιο καί γιά τίς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου.

Β'.

62. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A}=1$∟) τέμνονται καί σχηματίζουν γωνία 45^0.

63. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ὀξεία γωνία, πού σχηματίζεται ἀπό τίς διχοτόμους δύο ἀπέναντι γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου, εἶναι ἴση μέ τήν ἡμιδιαφορά τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

64. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν κάθε κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσο μέ 4 ὀρθές.

65. Ἄν ἡ γωνία $\widehat{A}$ ἑνός τριγώνου εἶναι 60^0, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου σχηματίζουν ἴσες γωνίες μέ τίς πλευρές ΑΓ καί ΑΒ ἀντιστοίχως.

66. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=90^0$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$ σχηματίζει μέ τήν πλευρά ΒΓ γωνία 45^0.

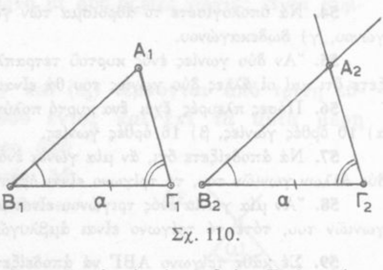
67. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε γωνία ἑνός κυρτοῦ ν/γώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν ἄλλων γωνιῶν του ($\nu \geqq 4$).

68. Νά ὑπολογίσετε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν ἑνός κυρτοῦ πολυγώνου, ὅταν τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι k ὀρθές γωνίες. Νά γίνει καί διερεύνηση.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

105. Α' περίπτωση. Θεώρημα. Ἄν μία πλευρά ἑνός τριγώνου εἶναι ἴση μέ μία πλευρά ἄλλου τριγώνου καί οἱ προσκείμενες γωνίες τῆς πλευρᾶς τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσες μέ τίς προσκείμενες γωνίες τῆς ἴσης πλευρᾶς τοῦ ἄλλου τριγώνου, τά δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ μέ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$ καί $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$, $\widehat{\Gamma_1}=\widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 110). Μετατοπίζουμε τό ἕνα ἀπό αὐτά, ἔστω τό $A_1B_1\Gamma_1$, ὥστε νά ταυτιστεῖ ἡ πλευρά του $B_1\Gamma_1$ μέ τήν ἴση της $B_2\Gamma_2$ καί μάλιστα μέ τέτοιον τρόπο, ὥστε νά ταυτιστοῦν καί οἱ κορυφές στίς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν οἱ ἴσες γωνίες. Προσέχουμε ἀκόμη, οἱ κορυφές A_1 καί A_2 νά βρίσκονται πρός τό ἴδιο μέρος τῆς $B_2\Gamma_2$. Τότε, ἐπειδή εἶναι $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ καί $\widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}_2$, ἡ ἡμιευθεία B_1A_1 θά ταυτιστεῖ μέ τήν ἡμιευθεία B_2A_2, ὅπως καί ἡ ἡμιευθεία Γ_1A_1 θά ταυτιστεῖ μέ τήν ἡμιευθεία Γ_2A_2. Τότε θά ταυτιστοῦν καί οἱ τομές τους A_1 καί A_2. Ἄρα τά τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐπειδή μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση.

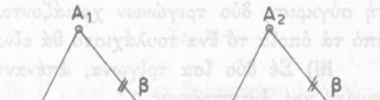


Σχ. 110.

Παρατήρηση. Στά ἑπόμενα, ἄν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ ἀποδειχθοῦν ἴσα μέ βάση τό προηγούμενο κριτήριο, γιά συντομία θά συμβολίζουμε $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ (Γ - Π - Γ), ὅπου τό Γ - Π - Γ θά σημαίνει Γωνία - Πλευρά - Γωνία, δηλαδή θά εἶναι συμβολικό τοῦ προηγούμενου κριτηρίου.

106. Β' περίπτωση. Θεώρημα. Ἄν δύο πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσες μία πρός μία μέ δύο πλευρές ἑνός ἄλλου τριγώνου καί ἡ γωνία τοῦ πρώτου τριγώνου, πού περιέχεται στίς πλευρές αὐτές, εἶναι ἴση πρός τή γωνία τοῦ δεύτερου τριγώνου, πού περιέχεται στίς πλευρές του τίς ἴσες μέ τίς πλευρές τοῦ πρώτου τριγώνου, τά τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ μέ $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2 = \alpha$, $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2 = \beta$ καί $\widehat{\Gamma_1} = \widehat{\Gamma_2}$ (σχ. 111). Μετατοπίζουμε τό τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ πάνω στό $A_2B_2\Gamma_2$ ἔτσι, ὥστε ἡ γωνία $\widehat{\Gamma_1}$ νά ταυτιστεῖ μέ τήν ἴση της $\widehat{\Gamma_2}$ καί ἡ πλευρά $B_1\Gamma_1$ νά ταυτιστεῖ μέ τήν ἴση της $B_2\Gamma_2$. Τότε εἶναι φανερό πώς καί ἡ πλευρά Γ_1A_1 θά ἔρθει ἀκριβῶς πάνω στήν ἴση της Γ_2A_2. Ἑπομένως τά δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἀφοῦ μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ μετατόπιση.

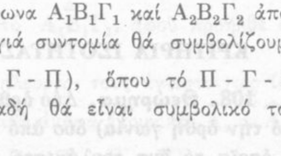


Σχ. 111.

Παρατήρηση. Στά ἑπόμενα, ἄν δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ ἀποδειχθοῦν ἴσα κατά τό προηγούμενο κριτήριο, γιά συντομία θά συμβολίζουμε τήν ἰσότητά τους : $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\Delta}{A_2B_2\Gamma_2}$ (Π - Γ - Π), ὅπου τό Π - Γ - Π θά σημαίνει Πλευρά - Γωνία - Πλευρά, δηλαδή θά εἶναι συμβολικό τοῦ προηγούμενου κριτηρίου.

107. Γ' περίπτωση. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν καί τίς τρεῖς πλευρές τους ἀντιστοίχως ἴσες, τότε εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε δυό τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ μέ $A_1B_1 = A_2B_2$, $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ καί $\Gamma_1A_1 = \Gamma_2A_2$ (σχ. 112). Μετατοπίζουμε τό ἕνα ἀπό αὐτά, ἔστω τό $A_2B_2\Gamma_2$, ἔτσι πού ἡ πλευρά του $B_2\Gamma_2$ νά συμπέσει μέ τήν ἴση της $B_1\Gamma_1$ καί ἡ κορυφή A_2 νά λάβει τή θέση A'_2 μέ τέτοιο τρόπο, ὥστε τά σημεῖα A_1 καί A'_2 νά εἶναι ἀπό τή μιά καί τήν ἄλλη μεριά τῆς $B_1\Gamma_1$ καί στίς κορυφές B_1 καί Γ_1 νά συντρέχουν ἴσες πλευρές $B_1A_1 = B_1A'_2$ καί $\Gamma_1A_1 = \Gamma_1A'_2$. Τότε τά σημεῖα B_1 καί Γ_1, ἀφοῦ τό καθένα ἰσαπέχει ἀπό τίς κορυφές A_1



Σχ. 112.

καί A'_2, βρίσκονται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος $A_1A'_2$. Ἄρα ἡ μεσοκάθετος τοῦ $A_1A'_2$ εἶναι ἡ $B_1\Gamma_1$. Ἄρα τά τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A'_2B_1\Gamma_1$ εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τή $B_1\Gamma_1$ καί συνεπῶς ἴσα. Τότε θά εἶναι καί $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$, γιατί τό $A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ εἶναι ἴσο πρός τό $A'_2\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1$, ἀφοῦ τό τελευταῖο προέκυψε ἀπό μετατόπιση τοῦ $A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$.

Παρατηρήσεις. i) Στά ἑπόμενα, ἄν δυό τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ ἀποδειχθοῦν ἴσα κατά τό προηγούμενο κριτήριο, γιά συντομία θά συμβολίζουμε τήν ἰσότητά τους : $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ (Π — Π — Π), ὅπου τό Π — — Π — Π θά σημαίνει Πλευρά — Πλευρά — Πλευρά, δηλαδή θά εἶναι συμβολικό τοῦ προηγούμενου κριτηρίου.

ii) Ἀπό τά τρία προηγούμενα θεωρήματα (κριτήρια) ἔπεται ὅτι γιά τή σύγκριση δύο τριγώνων χρειάζονται τρία ζεύγη ἀντίστοιχων στοιχείων, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα τουλάχιστο θά εἶναι ζεῦγος πλευρῶν τῶν δύο τριγώνων.

iii) Σέ δύο ἴσα τρίγωνα, ἀπέναντι ἀπό ἴσες πλευρές βρίσκονται ἴσες γωνίες καί ἀντιστρόφως.

iv) Στή συμβολική ἀναγραφή δυό ἴσων τριγώνων, θά προσπαθοῦμε οἱ κορυφές στίς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν ἴσες γωνίες νά γράφονται μέ τήν ἴδια σειρά, δηλαδή $A_1B_1\Gamma_1 = A_2B_2\Gamma_2$ καί ὄχι $A_1B_1\Gamma_1 = B_2A_2\Gamma_2$. Αὐτό μᾶς διευκολύνει νά διακρίνουμε τά ἴσα στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων μόνο ἀπό τήν ἀναγραφή τῆς ἰσότητας, χωρίς νά εἶναι ἀπαραίτητο νά ἀνατρέχουμε στό σχῆμα.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

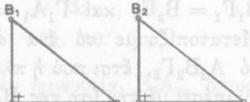
108. Θεώρημα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν (ἐκτός ἀπό τήν ὀρθή γωνία) δύο ἀπό τά κύρια στοιχεῖα τους ἀντιστοίχως ἴσα, ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα τουλάχιστο νά εἶναι πλευρά.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ μέ $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 1^{L}$ (σχ. 113). Διακρίνουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις :

i) Ἔχουν τίς ὑποτείνουσες ἴσες καί μιά ἀπό τίς ὀξεῖες γωνίες τους ἴση, δηλαδή $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ καί $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.

Ἑπομένως ἔχουν καί $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν. Ἄρα εἶναι

$$B_1\overset{\Delta}{\Gamma_1}A_1 = B_2\overset{\Delta}{\Gamma_2}A_2 \quad (\Gamma - \Pi - \Gamma).$$



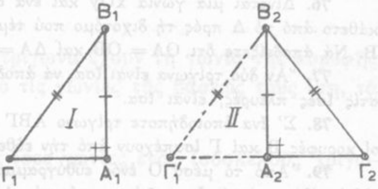
Σχ. 113.

ii) Ἔχουν μία κάθετη πλευρά ἴση καί τήν προσκείμενη ὀξεία γωνία ἀντιστοίχως ἴση, δηλαδή $A_1B_1 = A_2B_2$ καί $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$. Ἐπειδή, κατά τήν ὑπόθεση, ἔχουν καί $\widehat{A_1} = \widehat{A_2} = 1^{L}$, ἔπεται ὅτι $A_1\overset{\Delta}{B_1}\Gamma_1 = A_2\overset{\Delta}{B_2}\Gamma_2$ (Γ — Π — Γ).

iii) Ἔχουν μία κάθετη πλευρά ἴση καί τήν ἀπέναντί της γωνία ἴση ἀντιστοίχως, δηλαδή $A_1B_1 = A_2B_2$ καί $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$.

Ἄρα ἔχουν καί $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, ὡς συμπληρώματα ἴσων γωνιῶν, καί ἑπομένως $\overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1} = \overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma_2}$ (Γ — Π — Γ).

iv) Τά τρίγωνα ἔχουν τίς ὑποτείνουσες ἴσες καί μία ἀπό τίς κάθετες πλευρές ἀντιστοίχως ἴσες, δηλαδή $B_1\Gamma_1 = B_2\Gamma_2$ καί $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 114).



Σχ.114.

Μετατοπίζουμε τό $A_1B_1\Gamma_1$ ἀπό τή θέση I στή θέση II ἔτσι, ὥστε ἡ πλευρά A_1B_1 νά συμπέσει μέ τήν ἴση της A_2B_2 καί μέ τρόπο πού οἱ κορυφές τῶν ὀρθῶν γωνιῶν νά ταυτιστοῦν, ἐνῶ ἡ κορυφή Γ_1 νά ἔρθει στή θέση Γ'_1, ὥστε τά σημεῖα Γ'_1 καί Γ_2 νά βρίσκονται ἀπό τή μιά καί τήν ἄλλη μεριά τῆς A_2B_2. Ἡ $\Gamma'_1A_2\Gamma_2$ εἶναι εὐθεία, ἐπειδή ἡ γωνία $\Gamma'_1\widehat{A_2}\Gamma_2$, ὡς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν, εἶναι πεπλατυσμένη. Ἐπειδή $B_2\Gamma'_1 = B_2\Gamma_2$, ἕπεται ὅτι τό σημεῖο B_2 βρίσκεται στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος $\Gamma'_1\Gamma_2$. Ἄρα ἡ B_2A_2 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ $\Gamma'_1\Gamma_2$. Τότε εἶναι $A_2\Gamma'_1 = A_2\Gamma_2$, ἑπομένως εἶναι $\overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma_2} = \overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma'_1}$ (Π — Π — Π). Ἄρα θά εἶναι καί $\overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma_2} = \overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1}$, γιατί τό $\overset{\triangle}{A_2B_2\Gamma'_1}$ εἶναι ἴσο μέ τό $\overset{\triangle}{A_1B_1\Gamma_1}$, ἀφοῦ προῆλθε ἀπό αὐτό μέ μετατόπιση.

v) Τά τρίγωνα ἔχουν τίς δύο κάθετες πλευρές τους ἀντιστοίχως ἴσες, δηλαδή $A_1B_1 = A_2B_2$ καί $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2$. Ἐπειδή ἀκόμα ἔχουν καί $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 1^{L}$, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα : $\overset{\triangle}{B_1A_1\Gamma_1} = \overset{\triangle}{B_2A_2\Gamma_2}$ (Π — Γ — Π).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

69. Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, νά ἀποδείξετε ὅτι καί οἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν τους εἶναι ἴσες.

70. Δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Ο. Πάνω στήν (ε_1) παίρνουμε σημεῖα Α καί Β ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΟΑ = ΟΒ, καί πάνω στήν (ε_2) παίρνουμε σημεῖα Γ καί Δ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΟΓ = ΟΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΑΓ = ΒΔ καί ΑΔ = ΒΓ.

71. Στήν προέκταση τῆς διαμέσου ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνουμε ἕνα τμῆμα ΔΕ = ΑΔ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ΑΒ = ΕΓ.

72. Πάνω στίς πλευρές μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$ λαμβάνουμε τμήματα ΟΑ = ΟΒ. Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι κάθε σημεῖο τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας, ἰσαπέχει ἀπό τά Α καί Β.

73. Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, νά ἀποδείξετε ὅτι καί οἱ διάμεσοί τους, πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἴσες πλευρές, εἶναι ἴσες.

74. Ἄν δύο κυρτά τετράπλευρα ἔχουν τίς πλευρές τους ἴσες μία πρός μία καί ὅμοια τοποθετημένες καί μία γωνία ἴση, πού περιέχεται σέ ἴσες πλευρές, τά τετράπλευρα εἶναι ἴσα.

75. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ πρός τό μέρος τῆς κορυφῆς Α καί στίς προεκτάσεις λαμβάνουμε ἀντιστοίχως τμήματα ΑΒ′ = ΑΒ καί ΑΓ′ = = ΑΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διάμεσος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν προεκταθεῖ, περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς Β′Γ′.

76. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y$ καί ἕνα σημεῖο Δ τῆς διχοτόμου της. Θεωροῦμε τήν κάθετο ἀπό τό Δ πρός τή διχοτόμο πού τέμνει τίς ἄλλες πλευρές τῆς γωνίας στά Α καί Β. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΟΑ = ΟΒ καί ΔΑ = ΔΒ.

77. Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, νά ἀποδείξετε ὅτι καί τά ὕψη τους, πού ἀντιστοιχοῦν στίς ἴσες πλευρές, εἶναι ἴσα.

78. Σ' ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τή διάμεσο ΑΜ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ κορυφές Β καί Γ ἰσαπέχουν ἀπό τήν εὐθεία ΑΜ.

79. Ἀπό τό μέσο Ο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (δ), πού νά εἶναι πλάγια πρός τήν ΑΒ. Ἄν οἱ κάθετοι ἀπό τά Α καί Β πρός τήν ΑΒ τέμνουν τήν (δ) στά Ε καί Ζ ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι ΟΕ = ΟΖ.

80. Ἀπό τό μέσο Ο ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (δ) καί ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε κάθετους ΑΓ καί ΒΔ πάνω στή (δ). Νά ἀποδείξετε ὅτι ΑΔ = ΒΓ.

Β′.

81. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$. Πάνω στήν Οx παίρνουμε σημεῖα Α καί Β καί πάνω στήν Οy σημεῖα Γ καί Δ ἔτσι, ὥστε νά εἶναι ΟΑ = ΟΓ καί ΟΒ = ΟΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι α) ΑΒ = ΓΔ. β) Ἄν Ε εἶναι τό σημεῖο τομῆς γιά τίς ΑΔ καί ΒΓ, τότε τριγ.ΕΑΒ = τριγ. ΕΓΔ. γ) Ἡ ΟΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.

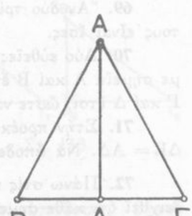
82. Δίδεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό τήν κορυφή Α φέρνουμε καθέτους πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ ὄχι πρός τό μέρος τοῦ τριγώνου, καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα ΑΒ′ = ΑΒ καί ΑΓ′ = ΑΓ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι α) ΒΓ′ = ΓΒ′ καί β) ΒΓ′ ⊥ ΓΒ′.

83. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ. Κατόπιν τά προεκτείνουμε πρός τό μέρος τῶν κορυφῶν καί στίς προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΒΒ′ = ΑΓ καί ΓΓ′ = ΑΒ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι α) ΑΒ′ = ΑΓ′ καί β) ΑΒ′ ⊥ ΑΓ′.

ΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

109. Θεώρημα. Ἄν ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, μέ ΑΒ = ΑΓ, τότε οἱ γωνίες τῆς βάσεώς του ΒΓ εἶναι ἴσες· καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν κορυφή Α φέρνουμε τήν κάθετο ΑΔ πρός τή ΒΓ (σχ. 115). Ἐπειδή εἶναι ΑΒ = = ΑΓ, ἡ ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ. Ἑπομένως ὑπάρχει συμμετρία μέ ἄξονα τήν ΑΔ. Ἄρα εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ὡς συμμετρικές.



Σχ. 115.

Ἀντίστροφο. Ἄν στό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, θά ἀποδείξουμε ὅτι αὐτό εἶναι ἰσοσκελές. Συγκρίνουμε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ. Αὐτά ἔχουν τήν

ΑΔ κοινή καί τίς ὀξεῖες γωνίες $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$ ἴσες. Ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπό αὐτό ἕπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ, δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Πόρισμα I. Κάθε ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι ἰσογώνιο καί κάθε γωνία του εἶναι ἴση μέ 60^0. Γιατί τό ἄθροισμα καί τῶν τριῶν γωνιῶν του εἶναι 180^0.

Πόρισμα II. Ἄν σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο μία γωνία του εἶναι 60^0, αὐτό εἶναι ἰσόπλευρο.

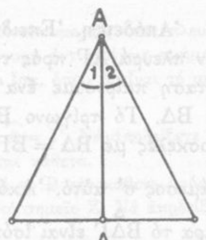
Πόρισμα III. Ἄν δύο ἰσοσκελή τρίγωνα ἔχουν τή γωνία τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν τους ἴση ἤ μία ἀπό τίς γωνίες τῆς βάσεώς τους ἴση, τά τρίγωνα εἶναι ἰσογώνια.

Πόρισμα IV. Ἡ καθεμιά ἀπό τίς ἴσες γωνίες ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ὀξεία γωνία.

110. Θεώρημα. Σέ κάθε ἰσοσκελές τρίγωνο τό ὕψος πού ἄγεται ἀπό τήν κορυφή τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι καί διάμεσος καί διχοτόμος τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ = ΑΓ (σχ. 116). Τότε τό ὕψος ΑΔ θά εἶναι καί μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, γιατί τό σημεῖο Α ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα Β καί Γ. Ἀφοῦ ἡ ΔΑ εἶναι μεσοκάθετος, εἶναι καί διάμεσος, γιατί ΔΒ = ΔΓ. Ἀκόμη εἶναι καί διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{Α}$, γιατί, ὡς μεσοκάθετος τοῦ ΒΓ, εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἑπομένως εἶναι $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2}$.

111. Θεώρημα. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο συμβαίνει : i) ἕνα ὕψος νά εἶναι καί διάμεσος ἤ ii) ἕνα ὕψος νά εἶναι καί διχοτόμος ἤ iii) μία διάμεσος νά εἶναι καί διχοτόμος, τότε τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.



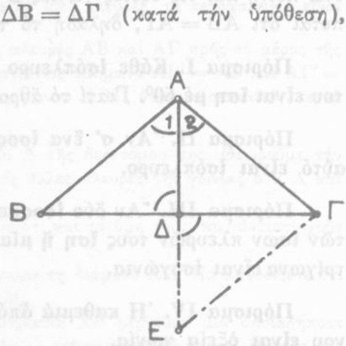
Σχ. 116.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 116), στό ὁποῖο ὑποθέτουμε ὅτι :

i) Τό ὕψος ΑΔ εἶναι καί διάμεσος. Τότε τό ΑΔ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΒΓ, δηλαδή εἶναι ἄξονας συμμετρίας. Ἄρα ΑΒ = ΑΓ. Ἑπομένως τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

ii) Τό ὕψος ΑΔ εἶναι καί διχοτόμος. Τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ, ἀφοῦ ἔχουν τήν ΑΔ κοινή καί $\widehat{Α_1} = \widehat{Α_2}$, εἶναι ἴσα. Ἄρα θά εἶναι καί ΑΒ = ΑΓ. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

iii) Ἡ διάμεσος ΑΔ εἶναι καί διχοτόμος. Στήν προέκτασή της παίρνουμε τμῆμα ΔΕ = ΔΑ (σχ. 117) καί συγκρίνουμε τά τρίγωνα ΔΑΒ καί ΔΕΓ. Αὐτά εἶναι ἴσα, ἐπειδή ἔχουν ΔΒ = ΔΓ (κατά τήν ὑπόθεση), ΔΑ = ΔΕ καί τίς γωνίες τους στό Δ ἴσες (ὡς κατακορυφήν). Ἄρα θά εἶναι :



Σχ. 117.

(1) $\mathrm{AB} = \mathrm{E\Gamma}$ καί $\widehat{A}_1 = \widehat{E}$.

'Επειδή ὅμως εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἔπεται ὅτι $\widehat{A}_2 = \widehat{E}$. Ἄρα τό τρίγωνο ΑΓΕ εἶναι ἰσοσκελές μέ :

(2) $\mathrm{A\Gamma} = \mathrm{E\Gamma}$.

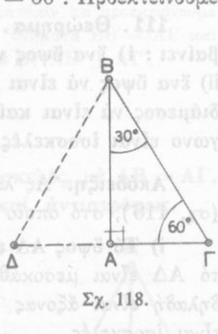
'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι ΑΒ = ΑΓ. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

112. Θεώρημα. Ἄν σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ μία ὀξεία γωνία του εἶναι 30⁰, τότε ἡ ἀπέναντι ἀπ' αὐτή πλευρά εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας· καί ἀντιστρόφως.

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 118) μέ $\widehat{B} = 30^0$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι $\mathrm{A\Gamma} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

'Απόδειξη. 'Επειδή εἶναι $\widehat{B} = 30^0$, ἔπεται ὅτι $\widehat{\Gamma} = 60^0$. Προεκτείνουμε τήν πλευρά ΑΓ πρός τό μέρος τοῦ Α καί στήν προέκταση παίρνουμε ἕνα τμῆμα ΑΔ = ΑΓ. Φέρνουμε τή ΒΔ. Τό τρίγωνο ΒΔΓ πού σχηματίζεται εἶναι ἰσοσκελές μέ ΒΔ = ΒΓ, γιατί ἡ ΒΑ εἶναι ὕψος καί διάμεσος σ' αὐτό. 'Ακόμα ἡ γωνία του $\widehat{\Gamma}$ εἶναι 60^0. Ἄρα τό $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Delta\Gamma}}$ εἶναι ἰσόπλευρο. Τότε εἶναι ΔΓ = ΒΓ. 'Αλλά ΔΓ = 2ΑΓ. 'Από αὐτές ἔπεται ὅτι 2ΑΓ = ΒΓ

$$\Rightarrow \mathrm{A\Gamma} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}.$$



Σχ. 118.

'Αντίστροφο. Ἄν στό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ἡ μία κάθετη πλευρά του εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας, τότε ἡ ἀπέναντι γωνία της εἶναι 30^0.

'Απόδειξη. Ἔχουμε ὅτι $\mathrm{A\Gamma} = \dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Προεκτείνουμε, ὅπως καί πρίν, τήν ΑΓ πρός τό μέρος τοῦ Α, καί στή προέκταση παίρνουμε ἕνα τμῆμα $ΑΔ = ΑΓ$. Τότε τό τρίγωνο ΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ:

(1) $$ΒΔ = ΒΓ$$

γιατί ἡ ΒΑ εἶναι ὕψος καί διάμεσός του. Ἄρα θά εἶναι καί διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΔΒΓ}$. Κατά τήν ὑπόθεση ὅμως εἶναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2} \Rightarrow 2ΑΓ = ΒΓ$ ἤ

(2) $$ΔΓ = ΒΓ.$$

Τώρα, ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι $ΒΔ = ΒΓ = ΔΓ$. Δηλαδή τό τρίγωνο ΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρο. Ἄρα θά εἶναι $\widehat{ΔΒΓ} = 60^0 \Rightarrow \widehat{ΑΒΓ} = 30^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

84. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ἡ βάση εἶναι τό 1/3 καθεμιᾶς ἀπό τίς ἴσες πλευρές του. Ἄν ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου εἶναι 35m, νά βρεθεῖ τό μῆκος κάθε πλευρᾶς του.

85. Δίνεται ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στίς προεκτάσεις τῆς βάσεως ΒΓ παίρνουμε τμήματα $ΒΒ' = ΓΓ'$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο $ΑΒ'Γ'$ εἶναι ἰσοσκελές.

86. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά ὕψη πρός τίς ἴσες πλευρές ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσα.

87. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο ὕψη ἴσα, εἶναι ἰσοσκελές.

88. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διάμεσοι πρός τίς ἴσες πλευρές ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες.

89. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσες.

90. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι κορυφές ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

91. Σ' ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) προεκτείνουμε τίς ἴσες πλευρές πρός τό μέρος τῆς κορυφῆς Α, καί στίς προεκτάσεις λαμβάνουμε ἀντιστοίχως τμήματα ΑΕ = ΑΖ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρίγωνα ΕΒΔ καί ΖΓΔ εἶναι ἴσα, ὅπου Δ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, καί ὅτι τά Ε καί Ζ ἰσαπέχουν ἀπό τό Δ.

92. Ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει ΑΒ = ΒΓ καί $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι α) ΑΔ = ΔΓ καί β) οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα.

93. Σέ τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τή διχοτόμο ΑΔ καί ἀπό τό Β τήν κάθετο πρός τή διχοτόμο, πού τέμνει τή διχοτόμο στό σημεῖο Ε καί τήν ΑΓ στό σημεῖο Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΕΒ = ΕΖ.

94. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέσο τῆς βάσεως ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἰσαπέχει ἀπό τίς ἴσες πλευρές τοῦ τριγώνου.

95. Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$. Πάνω στήν Oy λαμβάνουμε ἕνα σημεῖο Α καί ἀπ' αὐτό φέρνουμε $ΑΒ \perp Oy$. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{ΟΑΒ}$ τέμνει τήν Oy στό σημεῖο Γ, ἀπό τό ὁποῖο φέρνουμε κάθετο πρός τήν Oy. Ἡ κάθετος αὐτή τέμνει τήν Ox στό Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΔΑ = ΔΓ.

96. Ἀπό τό σημεῖο Ο, στό ὁποῖο τέμνονται οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε παράλληλο πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τίς ΑΒ καί ΑΓ στά Δ καί Ε ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΔΕ = ΒΔ + ΓΕ.

97. Δίνεται μιά κυρτή γωνία $x\widehat{O}y$. 'Από τήν κορυφή Ο φέρνουμε $OA \perp Oy$. Πάνω στήν πλευρά Ox λαμβάνουμε $OB = OA$ καί φέρνουμε τήν $B\Delta \perp Oy$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ AB εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\Delta\widehat{B}O$ ἤ τῆς γωνίας $\Delta\widehat{B}x$.

98. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ $AB > A\Gamma$. Πάνω στήν πλευρά AB λαμβάνουμε ἕνα τμῆμα $A\Delta = A\Gamma$. Νά ἀποδείξετε ὅτι

$$\Delta\widehat{\Gamma}B = \frac{\widehat{\Gamma} - \widehat{B}}{2}.$$

99. Δίνεται ἕνα ὀρθογώνιο καί ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$). Στήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΒΑ λαμβάνουμε ἕνα τμῆμα $A\Delta = AB$. Μέ πλευρά τή ΒΔ κατασκευάζουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο ΒΔΕ καί φέρνουμε τή ΓΕ. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΓΒΕ (δύο περιπτώσεις).

100. Δίνεται μιά γωνία $x\widehat{O}y$. 'Από ἕνα σημεῖο Α τῆς Ox φέρνουμε παράλληλο πρός τήν Oy καί πάνω σ' αὐτή λαμβάνουμε $AB = AO$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ BO εἶναι διχοτόμος (ἐσωτερική ἤ ἐξωτερική) τῆς γωνίας $x\widehat{O}y$.

101. Δίνεται ὀρθή γωνία $B\widehat{A}\Gamma$. Κατασκευάζουμε γωνία $A\widehat{B}\Delta = 30^0$. 'Η ΒΔ τέμνει τήν ΑΓ ἤ τήν προέκτασή της στό Δ. 'Επίσης κατασκευάζουμε γωνία $A\widehat{\Gamma}E = 30^0$, ὅπου ἡ ΓΕ τέμνει τήν AB ἤ τήν προέκτασή της στό Ε. Ἄν οἱ ΒΔ καί ΓΕ τέμνονται στό Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρίγωνα ΒΕΖ καί ΖΔΓ εἶναι ἰσοσκελή ἤ ὀρθογώνια.

102. Δίνεται εὐθύγραμμο τμῆμα AB καί ἕνα σημεῖο Γ πάνω σ' αὐτό. 'Από τά Α καί Β φέρνουμε δύο παράλληλες ἡμιευθεῖες Ax καί By πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ AB καί πάνω στίς παραλλήλους λαμβάνουμε τμήματα $A\Delta = A\Gamma$ καί $BE = B\Gamma$ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\Delta\widehat{\Gamma}E = 1^{L}$.

103. Ἄν ἡ ἐξωτερική διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνός τριγώνου εἶναι παράλληλη μέ τήν ἀπέναντι πλευρά, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

104. Δίνεται ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Μέ βάσεις τίς πλευρές του κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό τό τρίγωνο τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΕ καί ΒΓΖ. Νά ἀποδείξετε ὅτι: α) οἱ γραμμές ΔΑΕ, ΕΓΖ καί ΖΒΔ εἶναι εὐθεῖες, β) τό τρίγωνο ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρο.

Β'.

105. Μέ βάσεις τίς ἴσες πλευρές AB καί ΑΓ ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλη πρός τή ΒΓ. Πότε ἡ γραμμή ΔΑΕ εἶναι εὐθεία;

106. Δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) τέμνονται σέ σημεῖο Ο. Πάνω στήν (ε_1) παίρνουμε σημεῖα Β καί Γ καί πάνω στήν (ε_2) σημεῖο Α ἔτσι, ὥστε νά εἶναι $OA = OB = O\Gamma$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο.

107. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$. Φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ καί στήν προέκταση τῆς AB λαμβάνουμε τμῆμα $BE = B\Delta$. Ἄν ἡ ΕΔ τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρίγωνα ΖΔΓ καί ΖΔΑ εἶναι ἰσοσκελή.

108. Πάνω σέ μιά εὐθεία δίνονται διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ. Σχηματίζουμε τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καί ΒΓΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $AE = \Gamma\Delta$.

109. Ἄν ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) χωρίζεται ἀπό μιά ἐσωτερική γραμμή ΒΔ σέ δύο ἰσοσκελή τρίγωνα ΑΔΒ καί ΒΔΓ μέ $A\Delta = \Delta B$ καί $B\Delta = B\Gamma$ ἀντιστοίχως, νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

113. Θεώρημα. i) Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἕξι σχέσεις ἀνισότητας :

(1) $\alpha < \beta + \gamma$ καί (4) $\alpha > |\beta - \gamma|$

(2) $\beta < \alpha + \gamma$ (5) $\beta > |\alpha - \gamma|$

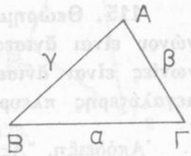
(3) $\gamma < \alpha + \beta$ (6) $\gamma > |\alpha - \beta|$

ii) Οἱ προηγούμενες ἕξι σχέσεις εἶναι ἰσοδύναμες μέ τή διπλή ἀνισότητα:

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma \qquad (7)$$

ὅπου α, β καί γ εἶναι οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου καί οἱ συμβολισμοί τῆς μορφῆς $|\alpha - \beta|$ ἔχουν τήν ἔννοια : $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, ἄν $\alpha \geqq \beta$, ἐνῶ $|\alpha - \beta| = \beta - \alpha$, ἄν $\alpha < \beta$.

Ἀπόδειξη. i) Οἱ τρεῖς πρῶτες σχέσεις εἶναι φανερές ἀπό τό ἀξίωμα τῆς § 38, σύμφωνα μέ τό ὁποῖο ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι μικρότερο ἀπό κάθε ἄλλη γραμμή μέ τά ἴδια ἄκρα.



Σχ. 119.

Στή συνέχεια, ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3), λαμβάνουμε ἀντιστοίχως $\alpha > \beta - \gamma$ καί $\alpha > \gamma - \beta$. Ἀπό αὐτές ἕπεται ὅτι $\alpha > |\beta - \gamma|$· δηλαδή ἀληθεύει ἡ σχέση (4).

Μέ ὅμοιο τρόπο, ἀπό τίς σχέσεις (1), (3) καί (1), (2) λαμβάνουμε ἀντιστοίχως $\beta > |\alpha - \gamma|$ καί $\gamma > |\alpha - \beta|$. Δηλαδή ἀληθεύουν καί οἱ σχέσεις (5), (6).

ii) Ἄν ἀληθεύουν οἱ σχέσεις ἀπό τό (1) ἕως τό (6), τότε εἶναι φανερό ὅτι ἀληθεύει καί ἡ σχέση (7), γιατί τά δύο σκέλη της $|\beta - \gamma| < \alpha$ καί $\alpha < \beta + \gamma$ δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά οἱ σχέσεις (4) καί (1) πού τίς ἔχουμε δεχτεῖ.

Ἀντίστροφο. Ἄν ἀληθεύει ἡ σχέση (7), θά ἀποδείξουμε ὅτι ἀληθεύουν καί οἱ σχέσεις ἀπό τό (1) ἕως τό (6).

Ἀπό τήν (7) ἕπεται ὅτι ἀληθεύουν καί οἱ σχέσεις (4) καί (1), γιατί αὐτές δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά τά δύο σκέλη τῆς (7).

Χωρίς νά βλάψουμε τή γενικότητα, μποροῦμε νά θεωρήσουμε μιάν ὁποιαδήποτε σχέση διατάξεως ἀνάμεσα στίς πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἔστω ὅτι αὐτή εἶναι $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma$. Τότε ἡ (7) μπορεῖ νά γραφεῖ $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ καί νά διασπαστεῖ στίς σχέσεις :

(8) $\beta - \gamma < \alpha$ καί

(9) $\alpha < \beta + \gamma$.

Ἀπό τήν (8) ἕπεται ὅτι $\beta < \alpha + \gamma$· δηλαδή ἀληθεύει ἡ σχέση (2). Ἐπειδή ὑποθέσαμε ὅτι ἡ πλευρά γ εἶναι ἡ μικρότερη πλευρά τοῦ τριγώνου, ἕπεται ὅτι αὐτή εἶναι μικρότερη καί ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, δηλαδή $\gamma < \alpha + \beta$. Ἄρα ἀληθεύει καί ἡ σχέση (3). Ἀπό τή σχέση (9) βγαίνει ὅτι $\beta > \alpha - \gamma$ καί $\gamma > \alpha - \beta$. Ἐπειδή ὅμως ὑποθέσαμε ὅτι $\alpha \geqq \gamma$ καί $\alpha \geqq \beta$, οἱ δύο προηγούμενες σχέσεις μποροῦν νά γραφοῦν $\beta > |\alpha - \gamma|$ καί $\gamma > |\alpha - \beta|$. Δηλαδή ἀληθεύουν καί οἱ σχέσεις (5) καί (6). Ἄρα ἀποδείχθηκε ὅτι οἱ ἀνισότητες ἀπό τό (1) ἕως τό (6) εἶναι ἰσοδύναμες μέ τή διπλή ἀνισότητα (7).

114. Θεώρημα. Κάθε ἐξωτερική γωνία ἑνός τριγώνου εἶναι μεγαλύτερη ἀπό καθεμιά ἀπό τίς δύο ἄλλες γωνίες τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 120) καί ἔστω $\widehat{\Gamma}_1$ ἡ ἐξωτερική γωνία τῆς $\widehat{\Gamma}$. Γνωρίζουμε ὅτι (§ 103 πόρ. Ι) : $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A} + \widehat{B}$. Ἄρα θά εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{A}$ καί $\widehat{\Gamma}_1 > \widehat{B}$.

Σχ. 120.

115. Θεώρημα. Ἄν δύο πλευρές ἑνός τριγώνου εἶναι ἄνισες, τότε καί οἱ ἀπέναντί τους γωνίες εἶναι ἄνισες καί μάλιστα ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερης πλευρᾶς βρίσκεται μεγαλύτερη γωνία· καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο εἶναι $\beta > \gamma$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι καί $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$ (σχ. 121).

Πάνω στή μεγαλύτερη πλευρά ΑΓ=β λαμβάνουμε τμῆμα ΑΔ=ΑΒ=γ. Τότε τό τρίγωνο ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές καί ἑπομένως

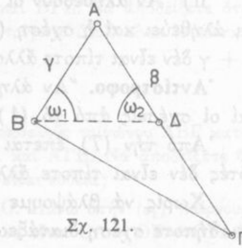
(1) $\omega_1 = \omega_2$.

Τό σημεῖο Δ, ὡς ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Γ, ἐξασφαλίζει τή ΒΔ ἐσωτερική γιά τή γωνία $\widehat{B}$. Ἄρα

(2) $\widehat{B} > \omega_1$.

Ἐπειδή ἀκόμη εἶναι (§ 114) :

(3) $\omega_2 > \widehat{\Gamma}$



Σχ. 121.

ἕπεται ἀπό τίς (2), (1) καί (3) ὅτι $\widehat{B} > \omega_1 = \omega_2 > \widehat{\Gamma}$. Ἄρα $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$.

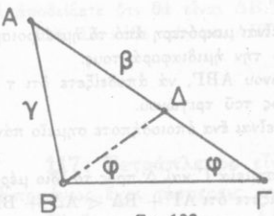
Ἀντίστροφο. Ἔστω ὅτι εἶναι $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι καί $\beta > \gamma$ (σχ. 122).

Ἀπό τό Β φέρνουμε μιά ἡμιευθεία ἐσωτερική τῆς γωνίας $\widehat{B}$, πού νά σχηματίζει μέ τή ΒΓ γωνία $\varphi = \widehat{\Gamma}$. Τότε τό σημεῖο Δ, στό ὁποῖο ἡ ἡμιευθεία τέμνει τήν ΑΓ, εἶναι ἐνδιάμεσο τῶν Α καί Γ καί τό τρίγωνο ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα :

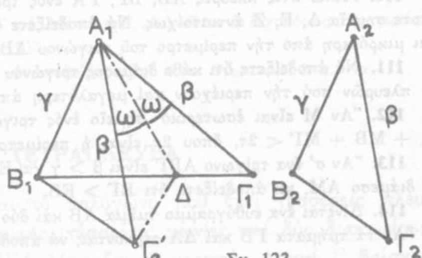
(4) $$\Delta B = \Delta \Gamma.$$

'Από τό τρίγωνο ΑΒΔ λαμβάνουμε $\gamma < A\Delta + \Delta B$. Αὐτή, λόγω τῆς (4), γράφεται $\gamma < A\Delta + \Delta\Gamma$ ἤ $\gamma < A\Gamma$. Ἄρα $\gamma < \beta$.

116. Θεώρημα. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρές ἀντιστοίχως ἴσες καί τίς περιεχόμενες στίς πλευρές αὐτές γωνίες ἄνισες, τότε τά τρίγωνα εἶναι ἄνισα καί ἀπέναντι στή μεγαλύτερη γωνία βρίσκεται ἡ μεγαλύτερη πλευρά· καί ἀντιστρόφως.



Σχ. 122.



Σχ. 123.

'Απόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε δύο τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ μέ $A_1B_1 = A_2B_2 = \gamma$, $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = \beta$ καί $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$ (σχ. 123). Θά ἀποδείξουμε ὅτι $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$.

Μετατοπίζουμε τό τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ στή θέση $A_1B_1\Gamma'_2$ ἔτσι, ὥστε ἡ πλευρά A_2B_2 νά ἔρθει πάνω στήν ἴση της A_1B_1 καί ἡ γωνία του $\widehat{A_2}$ νά ἀποκτήσει κοινό μέρος μέ τή γωνία $\widehat{A_1}$. Τότε, ἐπειδή $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$, ἡ $A_1\Gamma'_2$ εἶναι ἐσωτερική τῆς γωνίας $\widehat{A_1}$ καί εἶναι ἀρκετό πιά νά ἀποδείξουμε ὅτι $B_1\Gamma_1 > B_1\Gamma'_2$.

Θεωροῦμε τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\Gamma_1\widehat{A_1}\Gamma'_2$ καί ἔστω ὅτι αὐτή τέμνει τήν πλευρά $B_1\Gamma_1$ στό σημεῖο Δ. Τότε εἶναι $A_1\Gamma_1\Delta = A_1\Gamma'_2\Delta$, ἐπειδή ἔχουν $A_1\Gamma_1 = A_1\Gamma'_2$, τήν $A_1\Delta$ κοινή καί $\Gamma_1\widehat{A_1}\Delta = \Gamma'_2\widehat{A_1}\Delta = \omega$. Ἄρα θά εἶναι :

(1) $$\Delta\Gamma_1 = \Delta\Gamma'_2.$$

'Από τό τρίγωνο $B_1\Delta\Gamma'_2$ λαμβάνουμε : $B_1\Gamma'_2 < B_1\Delta + \Delta\Gamma'_2$. Λόγω τῆς σχέσεως (1), ἡ τελευταία γράφεται : $B_1\Gamma'_2 < B_1\Delta + \Delta\Gamma_1$ ἤ $B_1\Gamma'_2 < B_1\Gamma_1$. Ἄρα $B_2\Gamma_2 < B_1\Gamma_1$ ἤ $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$.

'Αντίστροφο. Ἔστω ὅτι τά τρίγωνα $A_1B_1\Gamma_1$ καί $A_2B_2\Gamma_2$ ἔχουν $A_1B_1 = A_2B_2 = \gamma$, $A_1\Gamma_1 = A_2\Gamma_2 = \beta$ καί $B_1\Gamma_1 > B_2\Gamma_2$. Θά ἀποδείξουμε ὅτι : $\widehat{A_1} > \widehat{A_2}$.

Πραγματικά, ἡ περίπτωση $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ἀποκλείεται· γιατί τότε τά τρίγωνα θά ἦταν ἴσα, ἀφοῦ θά εἶχαν δυό ἴσες πλευρές ἀντιστοίχως καί τίς περιεχόμενες σ' αὐτές γωνίες ἴσες. Αὐτό ὅμως ἀντιβαίνει πρός τήν ὑπόθεση. 'Επίσης ἀποκλείεται ἡ περίπτωση $\widehat{A}_1 < \widehat{A}_2$· γιατί τότε, ὅπως ἀποδείχθηκε, θά ἦταν $B_1\Gamma_1 < B_2\Gamma_2$, ἀλλά κι αὐτό ἀντίκειται πρός τήν ὑπόθεση. Ἄρα τό μόνο πού μπορεῖ νά συμβαίνει εἶναι $\widehat{A}_1 > \widehat{A}_2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

110. Πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα Δ, Ε, Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

111. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἡμιάθροισμα τῶν πλευρῶν πού τήν περιέχουν καί μεγαλύτερη ἀπό τήν ἡμιδιαφορά τους.

112. Ἄν Μ εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι $\tau < MA + MB + M\Gamma < 2\tau$, ὅπου 2τ εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου.

113. Ἄν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\beta > \gamma$ καί Ε εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο πάνω στή διάμεσο ΑΜ, νά ἀποδείξετε ὅτι $E\Gamma > EB$.

114. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί δύο σημεῖα Γ καί Δ πρός τό ἴδιο μέρος του. Ἄν τά τμήματα ΓΒ καί ΔΑ τέμνονται, νά ἀποδείξετε ὅτι $A\Gamma + B\Delta < A\Delta + B\Gamma$.

115. Ἄν, σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, νά ἀποδείξετε ὅτι $AB > B\Delta$ καί $A\Gamma > \Gamma\Delta$.

116. Στό ἐσωτερικό ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ παίρνουμε δύο σημεῖα Ε καί Ζ, ἔτσι ὥστε ἡ τεθλασμένη γραμμή ΑΕΖΔ νά εἶναι κυρτή. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΖΔ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

117. Ἄν τά σημεῖα Δ, Ε καί Ζ εἶναι ἐσωτερικά ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔΕΖ εἶναι μικρότερη ἀπό τήν περίμετρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Β'.

118. Στίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ἀντιστοίχως τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\Delta E > B\Gamma$.

119. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τήν ἡμιπερίμετρο καί μικρότερο ἀπό τήν περίμετρο τοῦ τετραπλεύρου.

120. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρνουμε τή διχοτόμο ΒΔ τῆς γωνίας $\widehat{B}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι $A\Delta < \Gamma\Delta$.

121. Σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι $A\Delta = B\Gamma$ καί $\widehat{A\Delta\Gamma} > \widehat{B\Gamma\Delta}$. Νά συγκριθοῦν οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ.

122. Ἄν ἡ πλευρά ΒΓ ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ ($AB = A\Gamma$) εἶναι μικρότερη ἤ ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό τή μία ἀπό τίς ἴσες πλευρές του, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{A}$ θά εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερη ἤ ἴση ἤ μεγαλύτερη ἀπό 60^0.

123. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ καί ΑΜ ἡ διάμεσός του. Νά ἀποδείξετε ὅτι: α) ἄν $AM < \dfrac{B\Gamma}{2}$, τότε $\widehat{A} > 1^{L}$, β) ἄν $AM = \dfrac{B\Gamma}{2}$, τότε $\widehat{A} = 1^{L}$ καί γ) ἄν $AM > \dfrac{B\Gamma}{2}$, τότε $\widehat{A} < 1^{L}$.

124. Ἂν τό ὕψος ΑΔ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι ὀξεία ἤ ὀρθή. Πότε εἶναι ὀρθή;

125. Δίνεται ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στό ὁποῖο ἡ πλευρά ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλύτερη καί ἡ πλευρά ΓΔ εἶναι ἡ μικρότερη. Νά ἀποδείξετε ὅτι $B\widehat{\Gamma}\Delta > B\widehat{A}\Delta$ καί $A\widehat{\Delta}\Gamma > A\widehat{B}\Gamma$.

126. Ἂν ἡ διάμεσος ἑνός τριγώνου περιέχεται ἀνάμεσα σέ ἄνισες πλευρές, νά ἀποδείξετε ὅτι σχηματίζει μέ τίς πλευρές αὐτές ἄνισες γωνίες καί μάλιστα μικρότερη γωνία μέ τή μεγαλύτερη πλευρά. Νά ἀποδείξετε ἐπίσης ὅτι ἡ διάμεσος αὐτή σχηματίζει ἀμβλεία γωνία μέ τό τμῆμα τῆς τρίτης πλευρᾶς, πού βρίσκεται πρός τό μέρος τῆς μεγαλύτερης ἀπό τίς δύο ἄλλες πλευρές.

127. Ἂν ΑΒΓ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε τρίγωνο, νά ἀποδείξετε ὅτι $\upsilon_\alpha \leqq \delta_\alpha \leqq \mu_\alpha$ ὅπου τό = ἀληθεύει μόνο γιά τό ἰσοσκελές τρίγωνο.

128. Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ ΑΒ > ΑΓ, ΑΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A}$, νά ἀποδείξετε ὅτι θά εἶναι ΔΒ > ΔΓ.

129. Σέ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $2\mu_\alpha > \beta + \gamma - \alpha$.

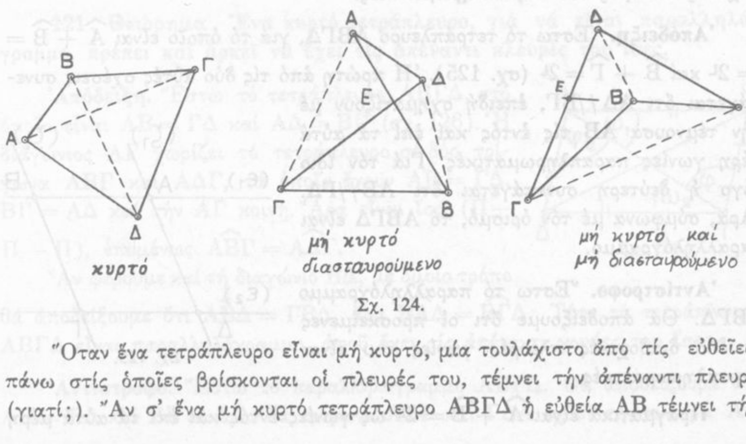
ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

117. Τετράπλευρο εἶναι τό πολύγωνο πού ἔχει τέσσερεις πλευρές. Ἑπομένως ἔχει τέσσερεις κορυφές, τέσσερεις γωνίες καί δύο διαγωνίους.

Σ' ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ λέμε ὅτι οἱ κορυφές Α καί Γ βρίσκονται ἀπέναντι, ὅπως καί οἱ Β καί Δ. Ἐπίσης λέμε ὅτι βρίσκονται ἀπέναντι οἱ γωνίες $\widehat{A}, \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{B}, \widehat{\Delta}$ ὅπως καί οἱ πλευρές ΑΒ, ΓΔ καί ΒΓ, ΑΔ.

Οἱ ἀπέναντι κορυφές Α, Γ καί Β, Δ ὁρίζουν τίς δύο διαγωνίους ΑΓ καί ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου.

Ὑπάρχουν κυρτά τετράπλευρα καί μή κυρτά (σχ. 124). Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4 ὀρθές γωνίες (§ 104).



Σχ. 124.

Ὅταν ἕνα τετράπλευρο εἶναι μή κυρτό, μία τουλάχιστο ἀπό τίς εὐθεῖες, πάνω στίς ὁποῖες βρίσκονται οἱ πλευρές του, τέμνει τήν ἀπέναντι πλευρά (γιατί;). Ἂν σ' ἕνα μή κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἡ εὐθεία ΑΒ τέμνει τήν ἀπέναντι πλευρά στό σημεῖο Ε (σχ. 124) καί συμβαίνει τό Ε νά εἶναι σημεῖο τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τότε λέμε ὅτι οἱ πλευρές ΑΒ καί ΓΔ διασταυρώνονται καί τό τετράπλευρο λέγεται **διασταυρούμενο.** Ἄν τό σημεῖο Ε τῆς εὐθείας ΑΒ βρίσκεται στήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τότε οἱ πλευρές ΑΒ καί ΓΔ δέν διασταυρώνονται καί τό τετράπλευρο λέγεται **μή διασταυρούμενο.**

Τελικά παρατηροῦμε ὅτι στά κυρτά τετράπλευρα οἱ διαγώνιοι εἶναι ἐσωτερικά τμήματα τοῦ τετραπλεύρου καί τέμνονται, ἐνῶ στά μή κυρτά τετράπλευρα δέν τέμνονται. Στά μή κυρτά καί διασταυρούμενα οἱ διαγώνιοι εἶναι ἐξωτερικά τμήματα, ἐνῶ στά μή κυρτά καί μή διασταυρούμενα ἡ μία διαγώνιος εἶναι ἐσωτερικό τμῆμα τοῦ τετραπλεύρου καί ἡ ἄλλη εἶναι ἐξωτερικό τμῆμα. Στό μή κυρτό καί μή διασταυρούμενο τετράπλευρο ἡ ἐσωτερική διαγώνιος χωρίζει τό τετράπλευρο σέ δύο τρίγωνα καί ἐπομένως τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου εἶναι 4^{L}. Δέν συμβαίνει τό ἴδιο καί μέ τό διασταυρούμενο τετράπλευρο.

Στά ἑπόμενα, ὅταν θά λέμε «τετράπλευρο», θά ἐννοοῦμε κυρτό τετράπλευρο.

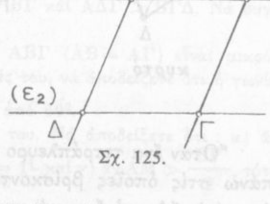
ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

118. Ὁρισμός. Παραλληλόγραμμο λέγεται τό τετράπλευρο πού ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δύο ζεύγη ἀπό παράλληλες εὐθεῖες (ε_1), (ε_2) καί (ζ_1), (ζ_2), ὅταν τέμνονται, ὁρίζουν ἕνα παραλληλόγραμμο (σχ. 125). Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι πάντοτε κυρτό τετράπλευρο.

119. Θεώρημα. Ἕνα κυρτό τετράπλευρο γιά νά εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχει τίς γωνίες τίς προσκείμενες σέ δύο διαδοχικές πλευρές του παραπληρωματικές.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, γιά τό ὁποῖο εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{L}$ καί $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$ (σχ. 125). Ἡ πρώτη ἀπό τίς δύο αὐτές σχέσεις συνεπάγεται ὅτι ΑΔ//ΒΓ, ἐπειδή σχηματίζουν μέ τήν τέμνουσα ΑΒ τίς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές. Γιά τόν ἴδιο λόγο ἡ δεύτερη συνεπάγεται ὅτι ΑΒ//ΓΔ. Ἄρα, σύμφωνα μέ τόν ὁρισμό, τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.



Σχ. 125.

Ἀντίστροφο. Ἔστω τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ προσκείμενες σέ δύο διαδοχικές πλευρές γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές.

Πραγματικά εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{L}$ ὡς γωνίες ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ καί ΒΓ, πού τέμνονται ἀπό τήν ΑΒ. Γιά ὅμοιο λόγο εἶναι καί $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}$.

120. Θεώρημα. Ἕνα κυρτό τετράπλευρο, γιά νά εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχει τίς ἀπέναντι γωνίες του ἴσες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 125) γιά τό ὁποῖο εἶναι :

(1) $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ καί $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$.

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 4^{\llcorner}$, ἐπειδή αὐτό εἶναι κυρτό τετράπλευρο. Τότε ἡ προηγούμενη σχέση, λόγω τῶν σχέσεων (1), γράφεται $2\widehat{A} + 2\widehat{B} = 4^{\llcorner} \Rightarrow$

(2) $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{\llcorner}$.

Μέ ὅμοιο τρόπο ἀποδεικνύεται ὅτι

(3) $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^{\llcorner}$.

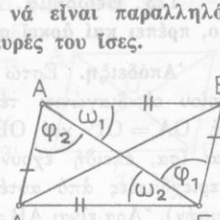
Τότε, ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) καί σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, ἔπεται ὅτι τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἀντίστροφο. Ἄς πάρουμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα θά εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{\llcorner}$ καί $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^{\llcorner}$. Ἀπό αὐτές ἔπεται ὅτι $\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{A} + \widehat{\Delta} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{\Delta}$.

Μέ ὅμοιο τρόπο εἶναι $\widehat{A} + \widehat{B} = 2^{\llcorner}$ καί $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}$, ἀπό τίς ὁποῖες ἔπεται ὅτι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$. Ἄρα τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἔχει τίς ἀπέναντι γωνίες του ἴσες.

121. Θεώρημα. Ἕνα κυρτό τετράπλευρο, γιά νά εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, στό ὁποῖο εἶναι ΑΒ = ΓΔ καί ΑΔ = ΒΓ (σχ. 126). Ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τό τετράπλευρο σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΔΓ, τά ὁποῖα ἔχουν ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ = ΑΔ καί τήν ΑΓ κοινή. Ἄρα εἶναι ἴσα (Π — Π — Π), ἑπομένως $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma}$.



Σχ. 126.

Ἄν φέρουμε καί τή διαγώνιο ΒΔ, μέ ὅμοιο τρόπο θά ἀποδείξουμε ὅτι $A\overset{\triangle}{B}\Delta = \Gamma\overset{\triangle}{B}\Delta$, ἄρα $\widehat{BA\Delta} = \widehat{B\Gamma\Delta}$. Τότε τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ ἔχει τίς ἀπέναντι γωνίες του ἴσες.

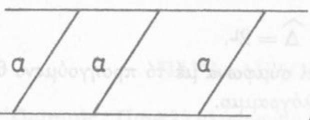
Ἀντίστροφο. Ἔστω τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι ΑΒ = ΓΔ καί ΒΓ = ΑΔ. Τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΓΔΑ ἔχουν τήν πλευρά ΑΓ κοινή καί τίς γωνίες $\omega_1 = \omega_2$ καί $\varphi_1 = \varphi_2$, ἐπειδή εἶναι ἐντός ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΑΒ / /ΓΔ καί ΒΓ / /ΑΔ ἀντιστοίχως πού τέμνονται ἀπό τήν ΑΓ. Ἄρα τά δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα (Γ — Π — Γ). Ἑπομένως ΑΒ = ΓΔ καί ΒΓ = ΑΔ.

Πόρισμα Ι. Κάθε διαγώνιος ἑνός παραλληλογράμμου τό χωρίζει σέ δύο ἴσα τρίγωνα.

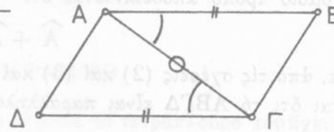
Πόρισμα ΙΙ. Παράλληλα τμήματα πού ἔχουν τίς ἄκρες τους σέ δύο παράλληλες εὐθεῖες εἶναι ἴσα (σχ. 127).

122. Θεώρημα. Ἄν ἕνα κυρτό τετράπλευρο ἔχει δύο ἀπέναντι πλευρές του ἴσες καί παράλληλες, εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 128), στό ὁποῖο θεωροῦμε τίς πλευρές ΑΒ καί ΓΔ ἴσες καί παράλληλες. Φέρνουμε τή διαγώ-



Σχ. 127.

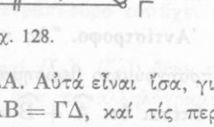


Σχ. 128.

νιο ΑΓ, πού τό χωρίζει σέ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΓΔΑ. Αὐτά εἶναι ἴσα, γιατί ἔχουν δύο πλευρές ἀντιστοίχως ἴσες, ΑΓ = ΑΓ, ΑΒ = ΓΔ, καί τίς περιεχόμενες ἀπό αὐτές γωνίες ἴσες (λόγω τῶν ΑΒ / /ΓΔ, πού τέμνονται ἀπό τήν ΑΓ). Ἄρα θά εἶναι καί ΑΔ = ΒΓ. Τώρα τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του ἀνά δύο ἴσες. Ἄρα (§ 121) εἶναι παραλληλόγραμμο.

123. Θεώρημα. Ἕνα κυρτό τετράπλευρο, γιά νά εἶναι παραλληλόγραμμο, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ διαγώνιοί του νά διχοτομοῦνται.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 129), τοῦ ὁποίου οἱ διαγώνιοι τέμνονται στό σημεῖο Ο καί διχοτομοῦνται, δηλαδή ΟΑ = ΟΓ καί ΟΒ = ΟΔ. Τότε τά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΟΔ εἶναι ἴσα, ἐπειδή ἔχουν δύο πλευρές ἴσες καί τίς περιεχόμενες ἀπό αὐτές γωνίες ἴσες (ὡς κατακορυφήν). Ἄρα εἶναι ΑΒ = ΓΔ. Εἶναι ἀκόμη ΑΒ / /ΓΔ· γιατί τέμνονται ἀπό τή ΑΓ καί σχηματίζουν τίς ἐντός ἐναλλάξ γωνίες ἴσες. Ἄρα, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.



Σχ. 129.

Ἀντίστροφο. Ἔστω τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, στό ὁποῖο οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται στό Ο. Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό σημεῖο αὐτό εἶναι τό μέσο τῆς καθεμιᾶς διαγωνίου.

Πραγματικά, τά σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΟΔ εἶναι ἴσα. Γιατί ἔχουν τίς πλευρές τους ΑΒ καί ΓΔ ἴσες καί τίς προσκείμενες σ' αὐτές γωνίες ἀνά δύο ἴσες, λόγω τῶν παραλλήλων ΑΒ//ΓΔ πού τέμνονται ἀπό τίς ΑΓ καί ΒΔ ἀντιστοίχως. Ἑπομένως θά εἶναι ΟΑ = ΟΓ καί ΟΒ = ΟΔ. Δηλαδή οἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται.

Κέντρο συμμετρίας παραλληλογράμμου.

124. Θεώρημα. Τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι κέντρο συμμετρίας του.

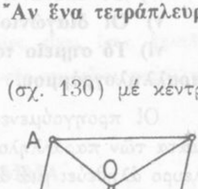
Ἀπόδειξη. Ἔστω τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 130) καί Ο τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του. Ἐπειδή τό Ο εἶναι τό μέσο καθεμιᾶς ἀπό τίς διαγωνίους, μποροῦμε νά θεωρήσουμε τίς ἀκόλουθες ἀπεικονίσεις κεντρικῆς συμμετρίας ὡς πρός τό Ο :

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} \longleftrightarrow \Gamma \\ \mathrm{B} \longleftrightarrow \Delta \\ \Gamma \longleftrightarrow \mathrm{A} \\ \Delta \longleftrightarrow \mathrm{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{AB}\Gamma\Delta \longleftrightarrow \Gamma\Delta\mathrm{AB}.$$

Ἄρα τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἀπεικονίζεται στόν ἑαυτό του μέ κεντρική συμμετρία ὡς πρός τό Ο. Δηλαδή τό Ο εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

125. Θεώρημα (ἀντίστροφο τοῦ προηγουμένου). Ἄν ἕνα τετράπλευρο ἔχει κέντρο συμμετρίας, εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 130) μέ κέντρο συμμετρίας τό σημεῖο Ο. Ἡ πλευρά ΑΒ, μέ κεντρική συμμετρία ὡς πρός τό Ο, ἀπεικονίζεται ὁπωσδήποτε πάνω στή ΓΔ, γιατί μέ τίς ΑΔ καί ΒΓ ἔχει κοινά σημεῖα (§ 80). Τότε, ἐξαιτίας τῆς κεντρικῆς συμμετρίας, θά εἶναι ΑΒ = ΓΔ καί ΑΒ//ΓΔ ⇒ τό ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο (§ 122).



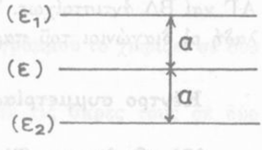
Σχ. 130.

Σημείωση. Τό κέντρο συμμετρίας Ο ὀνομάζεται γιά ἁπλούστευση **κέντρο** τοῦ παραλληλογράμμου ἤ **κέντρο βάρους** του. Ὁ ὅρος «κέντρο βάρους» πάρθηκε ἀπό τή Φυσική, γιατί τό κέντρο τοῦ παραλληλογράμμου συμπίπτει μέ τό κέντρο βάρους μιᾶς πλάκας ἀπό ὁμοιογενές ὑλικό σχήματος παραλληλογράμμου.

126. Ἀπόσταση δύο παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται τό μῆκος ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος πού εἶναι κάθετο πρός τίς παράλληλες εὐθεῖες καί ἔχει τά ἄκρα του πάνω σ' αὐτές.

127. Μεσοπαράλληλη εὐθεῖα δύο παραλλήλων εὐθειῶν ($ε_1$) καί ($ε_2$) λέγεται μιά εὐθεία (ε) πού εἶναι παράλληλη πρός τίς ($ε_1$) καί ($ε_2$) καί ἰσαπέχει ἀπό αὐτές (σχ. 131).

Ἡ μεσοπαράλληλη δύο παραλλήλων εὐθειῶν βρίσκεται μέσα στή ζώνη τήν ὁποία ὁρίζουν οἱ παράλληλες.



Σχ. 131.

128. Βάση ἑνός παραλληλογράμμου μποροῦμε νά λέμε ὁποιαδήποτε πλευρά του.

129. Ὕψος ἑνός παραλληλογράμμου λέγεται ἡ ἀπόσταση δύο παραλλήλων πλευρῶν του. Ἄρα κάθε παραλληλόγραμμο ἔχει δύο ὕψη $υ_1$ καί $υ_2$ (σχ. 132).

Σχ. 132.

130. Σύνοψη τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων.

Κάθε παραλληλόγραμμο ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες :

i) Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες.
ii) Οἱ προσκείμενες γωνίες κάθε πλευρᾶς του εἶναι παραπληρωματικές.
iii) Οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι ἴσες.
iv) Οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι ἴσες.
v) Οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.
vi) Τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

Οἱ προηγούμενες ἰδιότητες μποροῦν νά χρησιμεύσουν καί ὡς γνωρίσματα τῶν παραλληλογράμμων. Ἄν δηλαδή ἀνακαλύψουμε ὅτι σ' ἕνα τετράπλευρο ἀληθεύει μιά ἀπό τίς προηγούμενες ἰδιότητες, τότε αὐτό εἶναι παραλληλόγραμμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

130. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν προσκειμένων γωνιῶν ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι κάθετες, ἐνῶ οἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του εἶναι παράλληλες.

131. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς δύο ἄλλες πλευρές του πού τέμνουν τήν ἀπό τό Α παράλληλο τῆς ΒΓ στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ εἶναι ἴσα.

132. Σέ κάθε παραλληλόγραμμο νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ μεγαλύτερη διαγώνιος εἶναι αὐτή πού ἔχει ἄκρα τίς κορυφές τῶν μικρότερων γωνιῶν.

133. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ἑνώνουμε μέ εὐθύγραμμα τμήματα τά μέσα

Ε καί Ζ δύο άπέναντι πλευρῶν του, τό καθένα μέ τίς δύο άπέναντι κορυφές. Νά άποδείξετε ότι τά τέσσερα αὐτά τμήματα σχηματίζουν ἕνα παραλληλόγραμμο.

134. Νά άποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν τεσσάρων τμημάτων, στά ὁποῖα τό κέντρο ἑνός παραλληλογράμμου χωρίζει τίς δύο διαγωνίους του, εἶναι κορυφές ἑνός ἄλλου παραλληλογράμμου, πού ἔχει τό ἴδιο κέντρο μέ τό πρῶτο.

135. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τίς διαμέσους ΑΔ καί ΒΕ καί στίς προεκτάσεις τους λαμβάνουμε τμήματα ΔΗ = ΔΑ καί ΕΖ = ΕΒ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Η, Γ καί Ζ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καί ὅτι τό Γ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΗΖ.

136. Ἀπό τό κέντρο Ο ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε μιά εὐθεία (δ), πού τέμνει τίς δύο ἀπέναντι πλευρές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Β'.

137. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί φέρνουμε τή διχοτόμο ΑΔ τῆς γωνίας $\widehat{A}$. Ἀπό τό Δ φέρνουμε παράλληλο πρός τήν ΑΒ, πού τέμνει τήν ΑΓ στό σημεῖο Ε, καί ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τήν ΑΒ στό σημεῖο Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΑΕ = ΒΖ.

138. Δίνεται ἕνα ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καί ἔστω Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς ἴσες πλευρές τοῦ τριγώνου, πού τέμνουν τίς ἴσες πλευρές στά σημεῖα Δ καί Ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα ΜΔ + ΜΕ παραμένει σταθερό.

139. Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τίς πλευρές του κατά κυκλική σειρά καί στίς προεκτάσεις παίρνουμε τμήματα ΒΑ' = ΒΑ, ΓΒ' = ΓΒ, ΔΓ' = ΔΓ, ΑΔ' = ΑΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι :

α) Τό τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμο.

β) Τά κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.

140. Ἀπό ἕνα σημεῖο Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς ἄλλες πλευρές τοῦ τριγώνου, πού τίς τέμνουν στά σημεῖα Ε καί Ζ. Ἄν εἶναι $\beta > \gamma$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ τεθλασμένη γραμμή ΕΔΖ εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή γ καί μικρότερη ἀπό τή β.

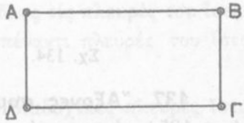
141. Ἄν σ' ἕνα κυρτό ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες, δηλαδή $\widehat{A} = \widehat{\Delta}$, $\widehat{B} = \widehat{E}$ καί $\widehat{\Gamma} = \widehat{Z}$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀπέναντι πλευρές του εἶναι παράλληλες, δηλαδή ΑΒ//ΔΕ, ΒΓ//ΕΖ, ΓΔ//ΖΑ.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

131. Ὀρθογώνιο λέγεται τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές.

132. Θεώρημα. Ἄν σ' ἕνα τετράπλευρο ὅλες οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες, τότε αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

Ἀπόδειξη. Ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τετραπλεύρου εἶναι τέσσερεις ὀρθές καί ἐπειδή, στήν περίπτωση τούτη, ὅλες οἱ γωνίες εἶναι ἴσες, ἕπεται ὅτι ἡ καθεμιά εἶναι ὀρθή. Ἄρα τό τετράπλευρο εἶναι ὀρθογώνιο (σχ. 133).



Σχ. 133.

133. Θεώρημα. Τό ὀρθογώνιο εἶναι παραλληλόγραμμο.

'Απόδειξη. Πραγματικά, τό ὀρθογώνιο εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ οἱ προσκείμενες γωνίες σέ κάθε πλευρά του, ὡς ὀρθές, εἶναι παραπληρωματικές (§ 119). Τό ὀρθογώνιο μποροῦμε νά τό λέμε καί ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

134. Θεώρημα. Ἄν ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει μιά ὀρθή γωνία, αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο.

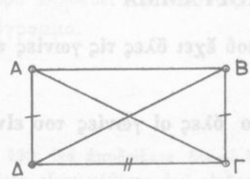
'Απόδειξη. Ἄς πάρουμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 133), τό ὁποῖο ἔστω ὅτι ἔχει $\widehat{A} = 1^{L}$. Τότε θά ἔχει καί $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 1^{L}$, ἀφοῦ αὐτές εἶναι παραπληρωματικές τῆς $\widehat{A}$ (§ 119). Τώρα τό τετράπλευρο ἔχει τρεῖς ὀρθές γωνίες καί ἀναγκαστικά θά ἔχει καί τήν τέταρτη γωνία ὀρθή. Ἄρα εἶναι ὀρθογώνιο.

135. Θεώρημα. Τό ὀρθογώνιο ἔχει ἴσες διαγωνίους.

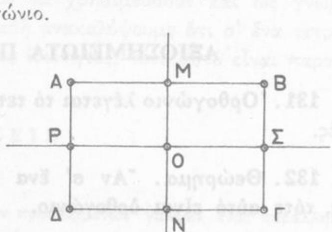
'Απόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ μέ διαγωνίους τίς ΑΓ καί ΒΔ (σχ. 134). Τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν ΑΔ = ΒΓ, ὡς ἀπέναντι πλευρές παραλληλογράμμου (ὀρθογωνίου), καί τή ΔΓ κοινή. Ἄρα εἶναι ἴσα. 'Από αὐτό ἔπεται ὅτι θά εἶναι ΑΓ = ΒΔ.

136. Θεώρημα. Ἄν ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει τίς δύο διαγωνίους του ἴσες, εἶναι ὀρθογώνιο.

'Απόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 134), πού νά ἔχει ΑΓ = ΒΔ. Τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΒΔΓ ἔχουν τότε καί τίς τρεῖς πλευρές τους ἴσες. Ἄρα εἶναι ἴσα. 'Από αὐτά παίρνουμε $\widehat{A\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma\Delta}$. 'Αλλά οἱ γωνίες αὐτές εἶναι καί παραπληρωματικές, γιατί εἶναι οἱ προσκείμενες γωνίες τῆς πλευρᾶς ΓΔ τοῦ παραλληλογράμμου. Ἄρα εἶναι ὀρθές καί, ἐπομένως, τό παραλληλόγραμμο εἶναι ὀρθογώνιο.



Σχ. 134.

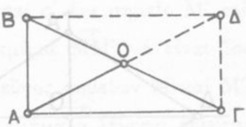


Σχ. 135.

137. Ἄξονες συμμετρίας ὀρθογωνίου. Ἄν σ' ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ (σχ. 135) φέρουμε τήν εὐθεία πού ὁρίζεται ἀπό τά μέσα Μ καί Ν τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καί ΓΔ, αὐτή θά εἶναι παράλληλη πρός τίς ΑΔ καί ΒΓ καί κάθετη πρός τίς ΑΒ καί ΓΔ· γιατί τό σχηματιζόμενο τετράπλευρο ΑΜΝΔ εἶναι ὀρθογώνιο, ἀφοῦ ἔχει $AM // = \Delta N$ καί $\widehat{A} = 1^{L}$. Ἑπομένως ἡ εὐθεία ΜΝ εἶναι κοινή μεσοκάθετος τῶν ΑΒ καί ΓΔ. Ἄρα εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἐπίσης ἡ εὐθεία ΡΣ, πού ὁρίζεται ἀπό τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, γιά τούς ἴδιους λόγους εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἄρα τό ὀρθογώνιο ἔχει δύο ἄξονες συμμετρίας, οἱ ὁποῖοι μάλιστα εἶναι κάθετοι μεταξύ τους.

138. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου πού ἀντιστοιχεῖ στήν ὑποτείνουσα εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ὑποτείνουσας. Ἀληθεύει καί τό ἀντίστροφο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 136) καί ΑΟ ἡ διάμεσός του πρός τήν ὑποτείνουσα. Στήν προέκταση τῆς διαμέσου παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΟΑ = ΟΔ. Ἄρα:



Σχ. 136.

(1) $$2 \cdot OA = A\Delta.$$

Τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται· εἶναι μάλιστα ὀρθογώνιο, γιατί ἔχει $\widehat{A} = 1^{L}$. Ἑπομένως οἱ διαγώνιοί του θά εἶναι ἴσες, δηλαδή:

(2) $$A\Delta = B\Gamma.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε $2 \cdot OA = B\Gamma \Rightarrow OA = \dfrac{B\Gamma}{2}$.

Ἀντίστροφο. Ἔστω ὅτι ἡ διάμεσος ΑΟ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ΒΓ. Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο.

Στήν προέκταση τῆς ΑΟ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Δ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΟΑ = ΟΔ. Τό σχηματιζόμενο τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται. Κατά τήν ὑπόθεση ὅμως εἶναι $OA = \dfrac{B\Gamma}{2} \Rightarrow 2 \cdot OA = B\Gamma$ ἤ $A\Delta = B\Gamma$. Ἄρα τό παραλληλόγραμμο εἶναι ὀρθογώνιο, μιά κι ἔχει ἴσες διαγωνίους. Ἑπομένως εἶναι $\widehat{A} = 1^{L}$. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο.

139. Ρόμβος λέγεται τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς πλευρές του ἴσες. Ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του ἴσες (§ 121).

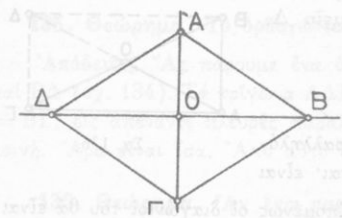
Πόρισμα. Τό παραλληλόγραμμο πού ἔχει δύο διαδοχικές πλευρές ἴσες εἶναι ρόμβος.

140. Θεώρημα. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι κάθετες.

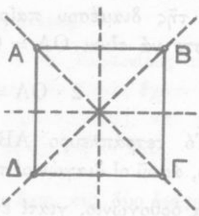
Ἀπόδειξη. Ἄς θεωρήσουμε τό ρόμβο ΑΒΓΔ (σχ. 137). Τό σημεῖο Α ἰσαπέχει ἀπό τά Β καί Δ, ἀφοῦ εἶναι ΑΒ = ΑΔ (ὡς πλευρές ρόμβου). Τότε τό σημεῖο Α ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΔ. Γιά τόν ἴδιο λόγο τό σημεῖο Γ ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΔ. Ἑπομένως ἡ ΑΓ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΒΔ. Ἄρα ΑΓ ⊥ ΒΔ.

141. Θεώρημα (ἀντίστροφο τοῦ προηγουμένου). Ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι κάθετες, τό παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 137), στό ὁποῖο οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται στό Ο καί εἶναι κάθετες μεταξύ τους. Τό τρίγωνο ΑΒΔ ἔχει τό τμῆμα ΑΟ ὕψος καί διάμεσο. Ἄρα εἶναι ἰσοσκελές. Δηλαδή ΑΒ = ΑΔ. Ἑπομένως τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος (§ 139 πόρισμα).



Σχ. 137.



Σχ. 138.

Πόρισμα Ι. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Πόρισμα ΙΙ. Ἄν σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο οἱ διαγώνιοι εἶναι ἄξονες συμμετρίας, τό τετράπλευρο εἶναι ρόμβος.

142. Θεώρημα. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου διχοτομοῦν τίς γωνίες του.

Ἀπόδειξη. Αὐτό συνάγεται ἀπό τό ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ σχήματος.

143. Θεώρημα (ἀντίστροφο τοῦ προηγουμένου). Ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός παραλληλογράμμου διχοτομοῦν τίς γωνίες του, τό παραλληλόγραμμο εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε τό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 137), στό ὁποῖο οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ διχοτομοῦν τίς γωνίες του. Τότε τό τρίγωνο ΑΒΔ, ἀφοῦ ἔχει τό τμῆμα ΑΟ διάμεσο καί διχοτόμο, εἶναι ἰσοσκελές, μέ ΑΒ = ΑΔ. Ἄρα τό ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος (§ 139 πόρισμα).

144. Τετράγωνο λέγεται τό τετράπλευρο πού ἔχει ὅλες τίς γωνίες του ὀρθές καί ὅλες τίς πλευρές του ἴσες (σχ. 138).

Πόρισμα Ι. Τό τετράγωνο εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος ρόμβος.

Πόρισμα ΙΙ. Ἕνα παραλληλόγραμμο, γιά νά εἶναι τετράγωνο, πρέπει καί ἀρκεῖ οἱ διαγώνιοί του νά εἶναι ἴσες καί νά τέμνονται κάθετα.

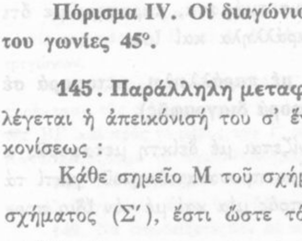
Πόρισμα ΙΙΙ. Τό τετράγωνο, ὡς ὀρθογώνιο, ἔχει δύο ἄξονες συμμετρίας, τίς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του, καί, ὡς ρόμβος, ἔχει δύο ἄξονες συμμετρίας, τίς διαγωνίους του. Ἄρα τό τετράγωνο ἔχει τέσσερεις ἄξονες συμμετρίας (σχ. 138).

Πόρισμα IV. Οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου σχηματίζουν μέ τίς πλευρές του γωνίες 45°.

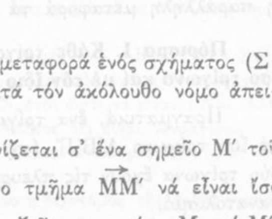
145. Παράλληλη μεταφορά. Παράλληλη μεταφορά ἑνός σχήματος (Σ) λέγεται ἡ ἀπεικόνισή του σ' ἕνα σχῆμα (Σ') κατά τόν ἀκόλουθο νόμο ἀπεικονίσεως:

Κάθε σημεῖο Μ τοῦ σχήματος (Σ) ἀπεικονίζεται σ' ἕνα σημεῖο Μ' τοῦ σχήματος (Σ'), ἔστι ὥστε τό προσανατολισμένο τμῆμα $\overrightarrow{MM'}$ νά εἶναι ἴσο μέ δεδομένο προσανατολισμένο τμῆμα $\overrightarrow{\alpha}$ γιά κάθε ζεῦγος σημείων Μ καί Μ', δηλαδή $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{\alpha}$ (σχ. 139). Τό προσανατολισμένο τμῆμα α λέγεται **δείκτης** τῆς μεταφορᾶς.

146. Θεώρημα. Ἕνα ὁποιοδήποτε προσανατολισμένο τμῆμα $\overrightarrow{AB}$ ἀπεικονίζεται μέ μιά παράλληλη μεταφορά σ' ἕνα ἴσο προσανατολισμένο τμῆμα $\overrightarrow{A'B'}$.



Σχ. 139.



Σχ. 140.

Ἀπόδειξη. Ἄν $\overrightarrow{\alpha}$ εἶναι ὁ δείκτης τῆς μεταφορᾶς, ἀπεικονίζουμε τά ἄκρα Α καί Β τοῦ τμήματος ΑΒ κατά τό δείκτη $\overrightarrow{\alpha}$ στά Α' καί Β' ἀντιστοίχως, δηλαδή $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{\alpha}$ καί $\overrightarrow{BB} = \overrightarrow{\alpha}$ (σχ. 140). Τότε τό ΑΑ'Β'Β εἶναι παραλληλόγραμμο, ἐπειδή $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{\alpha} \Rightarrow AA' \uparrow\uparrow = BB'$. Ἑπομένως θά εἶναι καί $AB \uparrow\uparrow = A'B' \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Πρέπει ἀκόμη νά ἀποδείξουμε ὅτι ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἀπεικονίζεται σ' ἕνα σημεῖο Μ' τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ καί ἀντιστρόφως. Πραγματικά, ἄν ἀπό ένα σημείο Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ φέρουμε εὐθεία $MM' // AA'$, ὅπου τό M' εἶναι πάνω στό $A'B'$, τό τετράπλευρο $AA'M'M$ εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατί ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες. Ἄρα θά εἶναι $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{\alpha}$. Δηλαδή τό M' εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ Μ στή μεταφορά μέ δείκτη $\vec{\alpha}$. Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε καί τό ἀντίστροφο, δηλαδή τό σημεῖο M' τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ ἔχει πρότυπο ἕνα σημεῖο Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ κατά τήν μεταφορά μέ δείκτη $\vec{\alpha}$.

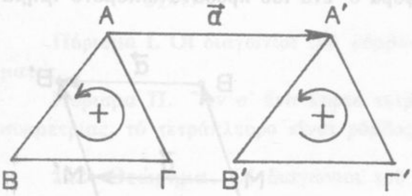
Ἀναφερόμενοι καί σέ μή προσανατολισμένα τμήματα, παρατηροῦμε ὅτι ἡ παράλληλη μεταφορά τά ἀπεικονίζει σέ παράλληλα καί ἴσα.

Πόρισμα Ι. Κάθε τρίγωνο ἀπεικονίζεται μέ παράλληλη μεταφορά σέ ἴσο τρίγωνο καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό (φορά διαγραφῆς).

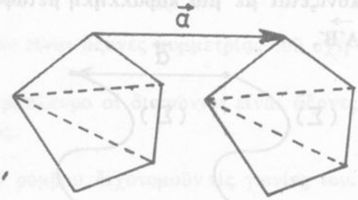
Πραγματικά, ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἀπεικονίζεται μέ δείκτη μεταφορᾶς $\vec{\alpha}$ σέ ἴσο τρίγωνο Α′Β′Γ′ (σχ. 141) καί τοῦ ἴδιου προσανατολισμοῦ· γιατί τά δύο τρίγωνα ἔχουν τίς πλευρές τους ἴσες μία πρός μία καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό.

Πόρισμα ΙΙ. Κάθε πολύγωνο ἀπεικονίζεται μέ παράλληλη μεταφορά σέ ἴσο πολύγωνο καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό.

Πραγματικά, αὐτό συμβαίνει, γιατί τά δύο πολύγωνα μποροῦν νά χωριστοῦν σέ ἴσα τρίγωνα καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό (σχ. 142).



Σχ. 141.



Σχ. 142.

Τά προηγούμενα μποροῦν νά γενικευτοῦν καί γιά ἕνα ὁποιοδήποτε σχῆμα (Σ) πού ἀπεικονίζεται μέ παράλληλη μεταφορά σέ ἴσο σχῆμα (Σ′) καί μέ τόν ἴδιο προσανατολισμό. Κατά συνέπεια, ἡ παράλληλη μεταφορά εἶναι μετατόπιση. Γι' αὐτόν τό λόγο μποροῦμε νά τή λέμε καί **παράλληλη μετατόπιση.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′.

142. Δίνονται δύο εὐθεῖες (ε_1) καί (ε_2) πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς εὐθείας (ε_1) φέρνουμε καθέτους ΑΒ καί ΑΓ πρός τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν δύο εὐθειῶν. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΑΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιο καί ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλη πρός τήν (ε_2).

143. Δίνεται μία γωνία $x\widehat{O}y$ καί ἕνα σημεῖο Α στό ἐσωτερικό της. Φέρνουμε $ΑΒ \perp Ox$ $ΑΓ \perp Oy$ καί ἀπό τό μέσο Μ τοῦ τμήματος ΟΑ φέρνουμε κάθετο πρός τή ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ κάθετος αὐτή περνᾶ ἀπό τό μέσο τοῦ τμήματος ΒΓ.

144. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι $E\widehat{Δ}Z = 1^{L}$.

145. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$ φέρνουμε παραλλήλους πρός τίς πλευρές τῆς γωνίας, οἱ ὁποῖες ὁρίζουν πάνω στὶς πλευρές τά σημεῖα Α καί Β. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τμήματα ΑΒ καί ΟΜ τέμνονται κάθετα καί ὅτι τό ἕνα διχοτομεῖ τό ἄλλο.

146. Ἑνώνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τῆς διαγωνίου ΑΓ ἑνός ρόμβου ΑΒΓΔ μέ τίς κορυφές του Β καί Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ ρόμβος ἔχει χωριστεῖ σέ δύο ζεύγη ἴσων τριγώνων.

147. Σ' ἕνα τετράγωνο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε τίς πλευρές του ΑΒ καί ΒΓ. Στήν προέκταση τῆς ΑΒ καί πρός τό μέρος τοῦ Β παίρνουμε ἕνα σημεῖο Μ, ἐνῶ στήν προέκταση τῆς ΒΓ καί πρός τό μέρος τοῦ Γ παίρνουμε ἕνα σημεῖο Ν, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΓΝ = ΑΜ. Κατασκευάζουμε τό παραλληλόγραμμο ΜΔΝΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι τετράγωνο.

148. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά ὕψη ἑνός ρόμβου εἶναι ἴσα καί ἀντιστρόφως, ὅτι, ἄν ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει ἴσα ὕψη, εἶναι ρόμβος.

149. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας διχοτομεῖ ἐπίσης καὶ τή γωνία τοῦ ὕψους καί τῆς διαμέσου πού ἄγονται ἀπό τήν κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας.

150. Ἄν σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = 2ΒΓ καί Ε εἶναι τό μέσο τῆς ΓΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι $A\widehat{E}B = 1^{L}$.

Β΄.

151. Ἡ κάθετος πρός τή βάση ΒΓ ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο της Δ τέμνει τή μιά πλευρά τοῦ τριγώνου καί τήν προέκταση τῆς ἄλλης στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα ΔΕ + ΔΖ εἶναι σταθερό.

152. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ καί ἀπό τό Δ φέρνουμε τίς καθέτους ΔΕ καί ΔΖ πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετη πρός τή διάμεσο ΑΜ τοῦ τριγώνου.

153. Δίνεται ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καί ἔστω Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἀπό τό Μ φέρνουμε καθέτους ΜΕ καί ΜΖ πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα ΜΕ + ΜΖ εἶναι στεθερό.

154. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τά ὕψη ΒΔ καί ΓΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΔΕ < ΒΓ.

155. Ἄν Ο εἶναι ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου εἶναι σταθερό.

156. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τμήματα, πού ἄγονται ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς βάσεως ΒΓ ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καί τέμνουν τίς ἴσες πλευρές του κατά σταθερή γωνία ω, ἔχουν ἄθροισμα σταθερό.

157. Δίνονται δύο ἐφεξῆς καί ἴσες γωνίες $x\widehat{O}y = y\widehat{O}z = 60^{0}$ καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ στό ἐσωτερικό τῆς $x\widehat{O}y$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπό τίς Ox καί Oy εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόσταση τοῦ Μ ἀπό τήν Oz.

158. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ φέρνουμε τίς $ΑΑ' \perp ΒΔ$ καί $ΓΓ' \perp ΒΔ$. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΒΓ ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες Α΄Ε καί Γ΄Ζ τέμνονται κάθετα.

159. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνός παραλληλογράμμου τέμνονται καί σχηματίζουν ἕνα ὀρθογώνιο, στό ὁποῖο οἱ διαγώνιοι εἶναι παράλληλες πρός τίς πλευρές τοῦ παραλληλογράμμου. Πότε αὐτό εἶναι τετράγωνο;

160. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι σημεῖα τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΔ ἀντιστοίχως ἑνός ρόμβου ΑΒΓΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΕΒ, ΕΔ, ΖΑ, ΖΓ τέμνονται καί σχηματίζουν ἕνα κυρτό τετράπλευρο πού οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικές.

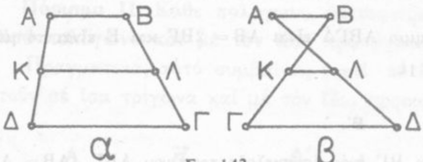
ΤΡΑΠΕΖΙΟ

147. Ὁρισμός. Κάθε τετράπλευρο, στό ὁποῖο οἱ δύο μόνο ἀπέναντι πλευρές εἶναι παράλληλες, λέγεται τραπέζιο.

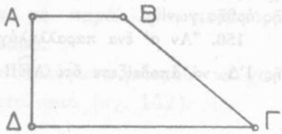
Ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μπορεῖ νά εἶναι κυρτό (σχ. 143 α) ἤ καί μή κυρτό (σχ. 143 β).

Οἱ παράλληλες πλευρές ΑΒ καί ΓΔ τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται **βάσεις** τοῦ τραπεζίου καί ἡ ἀπόστασή τους λέγεται **ὕψος** τοῦ τραπεζίου.

Διάμεσος τοῦ τραπεζίου λέγεται τό εὐθύγραμμο τμῆμα ΚΛ πού ἔχει ἄκρα τά μέσα τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.



Σχ. 143.



Σχ. 144.

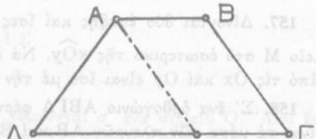
148. Θεώρημα. Σέ κάθε κυρτό τραπέζιο οἱ γωνίες οἱ προσκείμενες σέ καθεμιά ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές εἶναι παραπληρωματικές.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα κυρτό τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ ΑΒ//ΓΔ (σχ. 143α). Ἡ πλευρά ΑΔ, ἀφοῦ τέμνει τίς παραλλήλους ΑΒ καί ΓΔ, σχηματίζει μέ αὐτές τίς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές. Ἄρα εἶναι $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2^{\llcorner}$. Τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ καί ἑπομένως εἶναι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}$.

Πόρισμα. Ἄν ἕνα τραπέζιο ἔχει μιά ὀρθή γωνία, ἔχει καί μιάν ἄλλη ὀρθή γωνία. Τότε τό τραπέζιο λέγεται ὀρθογώνιο τραπέζιο (σχ. 144).

149. Ἰσοσκελές τραπέζιο λέγεται τό τραπέζιο πού ἔχει ἴσες τίς μή παράλληλες πλευρές του (σχ. 145).

150. Θεώρημα. Σέ κάθε ἰσοσκελές τραπέζιο οἱ προσκείμενες σέ κάθε βάση γωνίες εἶναι ἴσες καί ἀντιστρόφως.



Σχ. 145.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ

(1) $$ΒΓ = ΑΔ.$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$ καί $\widehat{Α} = \widehat{Β}$ (σχ. 145).

Ἀπό τό ἄκρο Α τῆς βάσεως ΑΒ φέρνουμε παράλληλο πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τή βάση ΓΔ στό Ε. Τότε θά εἶναι :

(2) $$ΒΓ = ΑΕ,$$

ἐπειδή εἶναι παράλληλα τμήματα μέ τά ἄκρα τους πάνω σέ παράλληλες εὐθεῖες. Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι ΑΔ = ΑΕ. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ἔχει :

(3) $$\widehat{Δ} = \widehat{ΑΕΔ}.$$

Εἶναι ὅμως :

(4) $$\widehat{Γ} = \widehat{ΑΕΔ}$$

λόγω τῶν παραλλήλων ΑΕ//ΒΓ πού τέμνονται ἀπό τή ΓΕ. Ἀπό τίς σχέσεις (3) καί (4) ἔπεται ὅτι $\widehat{Γ} = \widehat{Δ}$. Τότε θά εἶναι καί $\widehat{Β} = \widehat{Α}$, ὡς παραπληρωματικές τῶν ἴσων γωνιῶν $\widehat{Γ}$ καί $\widehat{Δ}$ ἀντιστοίχως.

Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε τό θεώρημα καί γιά μή κυρτό τραπέζιο.

Ἀντίστροφο. Ἔστω ὅτι τό τραπέζιο ΑΒΓΔ (σχ. 145) ἔχει :

(5) $$\widehat{Γ} = \widehat{Δ}.$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπό τήν κορυφή Α τῆς βάσεως ΑΒ φέρνουμε παράλληλο πρός τή ΒΓ, πού τέμνει τή ΓΔ στό Ε. Τότε θά εἶναι :

(6) $$\widehat{Γ} = \widehat{ΑΕΔ}$$

λόγω τῶν παραλλήλων ΒΓ//ΑΕ πού τέμνονται ἀπό τή ΓΕ.

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (6) ἔπεται ὅτι $\widehat{Δ} = \widehat{ΑΕΔ}$. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελές, ἀφοῦ ἔχει τίς προσκείμενες στή βάση του γωνίες ἴσες. Ἀπ' αὐτό παίρνουμε :

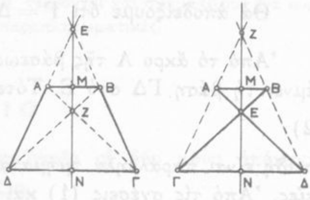
(7) $$ΑΔ = ΑΕ.$$

Ἀλλά εἶναι καί

(8) $$ΒΓ = ΑΕ$$

ἐπειδή εἶναι παράλληλα τμήματα μέ τά ἄκρα τους πάνω σέ παράλληλες εὐθεῖες. Ἀπό τίς σχέσεις (7) καί (8) παίρνουμε ΑΔ = ΒΓ. Δηλαδή τό τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές.

151. Ἄξονας συμμετρίας ἰσοσκελοῦς τραπέζίου. Ἐπειδή σέ κάθε ἰσοσκελές τραπέζιο (κυρτό ἤ μή κυρτό σχ. 146 α, β) οἱ μή παράλληλες πλευρές σχηματίζουν μέ καθεμιά ἀπό τίς βάσεις ἴσες γωνίες, αὐτές (ὅταν προεκταθοῦν) τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ε καί σχηματίζουν μέ τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τά ΕΑΒ καί ΕΓΔ. Τό ὕψος τῶν τριγώνων ἀπό τήν κορυφή Ε θά περνᾶ ἀπό τά μέσα Μ καί Ν τῶν βάσεων ΑΒ καί ΓΔ ἀντιστοίχως· δηλαδή θά εἶναι κοινή μεσοκάθετος τῶν βάσεων καί ἑπομένως θά εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος.



α Σχ. 146. β

Οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΒΔ, ὡς συμμετρικές, εἶναι ἴσες καί τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ζ πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

161. Νά ἀποδείξετε ὅτι, ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός τραπεζίου εἶναι ἴσες, αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

162. Ἄν ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου εἶναι κάθετη πρός αὐτές, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιο.

163. Ἄν ἡ βάση ΓΔ ἑνός τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι ἴση πρός τό ἄθροισμα τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καί $\widehat{B}$ τέμνονται πάνω στή ΓΔ.

164. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τραπέζιο ἡ διαφορά τῶν δύο βάσεων εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τή διαφορά τῶν δύο μή παραλλήλων πλευρῶν καί μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμά τους.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

152. Θεώρημα. Τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού ἔχει ἄκρα τά μέσα δύο πλευρῶν ἑνός τριγώνου, εἶναι παράλληλο πρός τήν τρίτη πλευρά καί ἴσο μέ τό μισό της.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί Μ, Ν τά μέσα τῶν πλευρῶν του ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως (σχ. 147). Φέρνουμε τό τμῆμα ΜΝ καί στήν προέκτασή του λαμβάνουμε τμῆμα ΝΔ = ΝΜ. Τότε οἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΜΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΜΓΔ τέμνονται στό σημεῖο Ν καί διχοτομοῦνται. Ἄρα αὐτό εἶναι παραλληλόγραμμο καί ἑπομένως :

(1) ΓΔ // = ΜΑ (*)

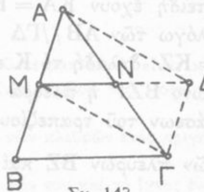
* Ἡ ΓΔ // = ΜΑ συμβολίζει τήν παραλληλία καί τήν ἰσότητα γιά τά τμήματα ΓΔ καί ΜΑ καί ἑπομένως ἀντικαθιστᾶ τίς σχέσεις ΓΔ // ΜΑ καί ΓΔ = ΜΑ.

Ἐπειδή ὅμως εἶναι $ΜΑ = ΜΒ$ καί τό τμῆμα ΜΒ βρίσκεται στήν ἴδια εὐθεία μέ τό ΜΑ, ἀπό τή σχέση (1) ἕπεται ὅτι :

$$(2) \qquad ΓΔ \,//\!= ΜΒ.$$

Ἄρα τό τετράπλευρο ΒΓΔΜ εἶναι παραλληλόγραμμο. Τότε θά εἶναι :

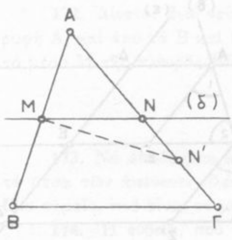
$$ΜΔ \,//\!= ΒΓ \text{ ἤ } 2ΜΝ \,//\!= ΒΓ, \text{ ἄρα } ΜΝ \,//\!= \frac{ΒΓ}{2}.$$



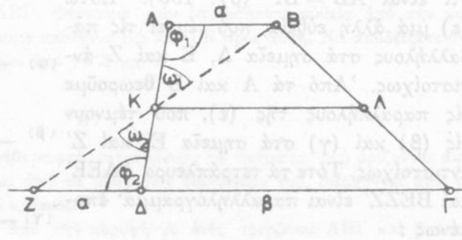
Σχ. 147.

153. Θεώρημα. Ἄν μιά εὐθεία (δ) εἶναι παράλληλη πρός μιά πλευρά ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί περνᾶ ἀπό τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, τότε θά περνᾶ καί ἀπό τό μέσο Ν τῆς πλευρᾶς ΑΓ καί τό τμῆμα της ΜΝ ἰσοῦται μέ τό μισό τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ἡ παράλληλη ἀπό τό μέσο Μ τῆς ΑΒ πρός τή ΒΓ τέμνει τήν ΑΓ στό σημεῖο Ν (σχ. 148). Τό Ν εἶναι τό μέσο τῆς ΑΓ·



Σχ. 148.



Σχ. 149.

γιατί, ἄν δέν ἦταν αὐτό, καί ἦταν τό Ν′, τότε ἡ ΜΝ′ θά ἔπρεπε, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, νά ἦταν παράλληλη πρός τήν ΒΓ. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπο, ἐπειδή ἀπό τό σημεῖο Μ θά ὑπῆρχαν δύο παράλληλες πρός τήν ΒΓ, ἡ ΜΝ καί ἡ ΜΝ′. Ἄρα ἡ ἀπό τό Μ παράλληλος πρός τή ΒΓ περνᾶ ἀπό τό μέσο Ν τῆς ΑΓ.

Τό τμῆμα ΜΝ εἶναι ἴσο μέ τό μισό τῆς ΒΓ, ἐπειδή, σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, τά Μ καί Ν εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

154. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος κάθε κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις του καί ἴση μέ τό ἡμιάθροισμά τους.

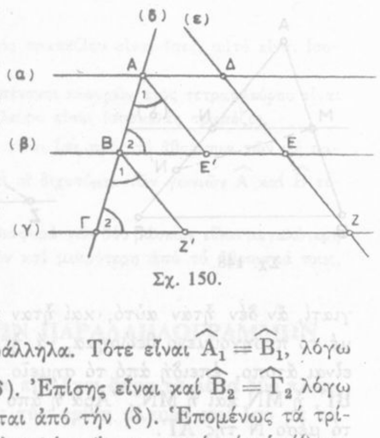
Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα κυρτό τραπέζιο ΑΒΓΔ (σχ. 149), στό ὁποῖο οἱ βάσεις εἶναι $ΑΒ = α$ καί $ΓΔ = β$. Ἄν Κ καί Λ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ ἀντιστοίχως, φέρνουμε τήν ΒΚ, πού τέμνει τήν προέκταση τῆς ΓΔ στό Ζ. Τά σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΚ καί ΔΖΚ εἶναι ἴσα, ἐπειδή ἔχουν ΚΑ = ΚΔ, $\omega_1 = \omega_2$ (ὡς γωνίες κατακορυφήν) καί $\varphi_1 = \varphi_2$ (λόγω τῶν ΑΒ//ΓΔ πού τέμνονται ἀπό τήν ΑΔ). Ἑπομένως ἔχουμε ΒΚ = = ΚΖ· δηλαδή τό Κ εἶναι μέσο τοῦ ΒΖ καί ΑΒ = ΔΖ = α. Τότε, στό τρίγωνο ΒΖΓ ἡ πλευρά ΖΓ εἶναι ἴση μέ α + β, δηλαδή μέ τό ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου, ἐνῶ ἡ διάμεσος ΚΛ τοῦ τραπεζίου ἑνώνει τά μέσα τῶν πλευρῶν ΒΖ καί ΒΓ τοῦ τριγώνου ΒΖΓ. Ἄρα εἶναι $\text{ΚΛ} // = \frac{\text{ΖΓ}}{2}$.

Δηλαδή $\text{ΚΛ}//\text{ΑΒ}//\text{ΓΔ}$ καί $\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΑΒ}+\text{ΓΔ}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

155. Θεώρημα. Ἄν παράλληλες εὐθεῖες ἀποκόπτουν ἀπό μιάν εὐθεία πού τίς τέμνει ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τότε αὐτές ἀποκόπτουν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα καί ἀπό κάθε ἄλλη εὐθεία πού τίς τέμνει.

Ἀπόδειξη. Θεωροῦμε τρεῖς παράλληλες εὐθεῖες (α), (β), (γ) καί μιά εὐθεία (δ), πού τίς τέμνει στά σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, καί ὑποθέτουμε ὅτι εἶναι ΑΒ = ΒΓ (σχ. 150). Ἔστω (ε) μιά ἄλλη εὐθεία, πού τέμνει τίς παραλλήλους στά σημεῖα Δ, Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Ἀπό τά Α καί Β θεωροῦμε τίς παραλλήλους τῆς (ε), πού τέμνουν τίς (β) καί (γ) στά σημεῖα Ε′ καί Ζ′ ἀντιστοίχως. Τότε τά τετράπλευρα ΑΔΕΕ′ καί ΒΕΖΖ′ εἶναι παραλληλόγραμμα· ἐπομένως:

(1) ΔΕ = ΑΕ′ καί ΕΖ = ΒΖ′.



Σχ. 150.

Τά τμήματα ΑΕ′ καί ΒΖ′, ὡς παράλληλα πρός τήν (ε), εἶναι καί μεταξύ τους παράλληλα. Τότε εἶναι $\widehat{\text{Α}}_1 = \widehat{\text{Β}}_1$, λόγω τῶν ΑΕ′//ΒΖ′ πού τέμνονται ἀπό τήν (δ). Ἐπίσης εἶναι καί $\widehat{\text{Β}}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ λόγω τῶν παραλλήλων (β) καί (γ) πού τέμνονται ἀπό τήν (δ). Ἑπομένως τά τρίγωνα ΑΒΕ′ καί ΒΓΖ′ εἶναι ἴσα, γιατί ἐπιπλέον ἔχουν, κατά τήν ὑπόθεση, ΑΒ = ΒΓ. Ἀπό αὐτά ἔπεται ὅτι

(2) ΑΕ′ = ΒΖ′.

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) παίρνουμε ΔΕ = ΕΖ.

Πόρισμα. Ἄν παράλληλες εὐθεῖες ἀποκόπτουν ἀπό μιά εὐθεία πού τίς τέμνει ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τότε ἰσαπέχουν.

Παρατήρηση. Ἀπό τό προηγούμενο θεώρημα φαίνεται ἡ δυνατότητα τῆς διαιρέσεως ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος σέ ὁσαδήποτε ἴσα τμήματα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

165. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν κάθε κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφές παραλληλογράμμου. Πότε αὐτό εἶναι ὀρθογώνιο, πότε εἶναι ρόμβος καί πότε τετράγωνο;

166. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τμήματα πού ἑνώνουν τά μέσα τῶν πλευρῶν ἑνός τριγώνου χωρίζουν τό τρίγωνο σέ τέσσερα ἴσα τρίγωνα.

167. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο τά μέσα τῶν πλευρῶν του καί τό ἴχνος ἑνός ὕψους του εἶναι κορυφές ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

168. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διάμεσος πού ἀντιστοιχεῖ σέ μιά πλευρά ἑνός τριγώνου τέμνει στό μέσο τό τμῆμα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

169. Ἄν ἡ μία βάση ἑνός κυρτοῦ τραπεζίου εἶναι διπλάσια ἀπό τήν ἄλλη βάση, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διάμεσος τοῦ τραπεζίου τριχοτομεῖται ἀπό τίς διαγωνίους.

170. Ἄν ἡ διάμεσος ΚΛ ἑνός τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνεται ἀπό τίς διαγωνίους στά σημεῖα Ε καί Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι ΚΕ = ΛΖ. Πότε ἡ διάμεσος τριχοτομεῖται ἀπό τίς διαγωνίους;

171. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνός τριγώνου ἀπό μιάν ὁποιαδήποτε εὐθεία, πού δέν τέμνει τό τρίγωνο, εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀπό τήν ἴδια εὐθεία.

172. Δίνεται ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε μιάν ὁποιαδήποτε εὐθεία ἀπό τήν κορυφή Α, καί ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε καθέτους ΒΔ καί ΓΕ πρός αὐτή. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἰσαπέχει ἀπό τά Δ καί Ε.

Β΄.

173. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε κυρτό τετράπλευρο τά τμήματα, πού ὁρίζονται ἀπό τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καί ἀπό τά μέσα τῶν διαγωνίων του, διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, πού εἶναι τό μέσο τοῦ καθενός.

174. Ἡ εὐθεία, πού περνᾶ ἀπό τήν κορυφή Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί ἀπό τό μέσο Ε τῆς διαμέσου ΒΔ, τέμνει τήν πλευρά ΒΓ σέ ἕνα σημεῖο Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΖΓ = 2ΒΖ.

175. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τή διχοτόμο ΑΔ καί ἀπό τό Β φέρνουμε κάθετο πρός αὐτή, πού τήν τέμνει στό Ε. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι $ΕΜ // ΑΓ$ καί $ΕΜ = \dfrac{|ΑΒ - ΑΓ|}{2}$.

176. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό εὐθύγραμμο τμῆμα, μέ ἄκρα τά μέσα τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τραπεζίου, εἶναι παράλληλο πρός τίς βάσεις του καί ἴσο πρός τήν ἡμιδιαφορά τους.

177. Ἔστω Δ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στήν προέκταση τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνουμε τμῆμα ΓΕ = ΒΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τμῆμα ΔΕ διχοτομεῖται ἀπό τή ΒΓ.

178. Σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ φέρνουμε τή ΒΕ, πού εἶναι παράλληλη καί ἴση πρός τήν ΑΔ καί βρίσκεται πρός τό ἴδιο μέρος μέ τήν ΑΔ ὡς πρός τήν ΑΒ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τμῆμα ΓΕ εἶναι παράλληλο πρός τήν εὐθεία πού ἑνώνει τά μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου.

179. Παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Ε τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, καί πάνω στίς πλευρές ΑΔ καί ΒΓ παίρνουμε τά σημεῖα Ζ καί Η ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΖ = ΑΕ καί ΒΗ = ΒΕ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΖΗ, νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{ΑΜΒ} = 1^{\llcorner}$.

180. Ἀπό τήν κορυφή Α ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε μιάν ὁποιαδήποτε εὐθεία (ε). Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Γ ἀπό τήν (ε) εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα ἤ τή διαφορά τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν Β καί Δ ἀπό τήν (ε), ἀνάλογα μέ τό ἄν ἡ εὐθεία (ε) δέν τέμνει ἤ τέμνει τό παραλληλόγραμμο.

181. Δίνεται ἕνα παραλληλόγραμμο καί μία εὐθεία (ε) πού δέν τό τέμνει. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀπό τήν (ε) εἶναι ἴσο πρός τό τετραπλάσιο τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου ἀπό τήν εὐθεία (ε).

182. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ μέσου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος ἀπό μιάν ὁποιαδήποτε εὐθεία εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα ἤ μέ τήν ἡμιδιαφορά τῶν ἀποστάσεων τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ἀπό τήν εὐθεία, ἀνάλογα μέ τό ἄν τό τμῆμα δέν τέμνει ἤ τέμνει τήν εὐθεία.

ΚΕΝΤΡΑ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

156. Θεώρημα. Οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν κάθε τριγώνου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό ὁποῖο ἰσαπέχει ἀπό τίς κορυφές του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 151). Θεωροῦμε τίς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν ΒΓ καί ΑΓ. Αὐτές εἶναι κάθετες σέ μή παράλληλες εὐθεῖες ΒΓ καί ΑΓ καί ἑπομένως δέν εἶναι παράλληλες. Ἄρα τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Ο. Τό σημεῖο αὐτό, ἀφοῦ ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΒΓ, ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα του, δηλαδή εἶναι :

(1) $$ΟΒ = ΟΓ.$$

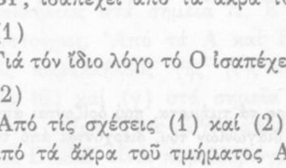
Γιά τόν ἴδιο λόγο τό Ο ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΓ, δηλαδή εἶναι :

(2) $$ΟΓ = ΟΑ.$$

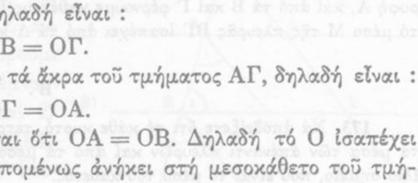
Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἔπεται ὅτι ΟΑ = ΟΒ. Δηλαδή τό Ο ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ, ἑπομένως ἀνήκει στή μεσοκάθετο τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἄρα καί οἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο, πού ὀνομάζεται **περίκεντρο** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἰσαπέχει ἀπό τίς κορυφές τοῦ τριγώνου, ὅπως προκύπτει ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2).

157. Θεώρημα. Τά τρία ὕψη κάθε τριγώνου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, στό ὁποῖο φέρνουμε τά τρία ὕψη ΑΔ, ΒΕ καί ΓΖ (σχ. 152). Ἀπό τίς κορυφές Α, Β καί Γ φέρνουμε παραλλή-



Σχ. 151.



Σχ. 152.

λους πρός τίς ἀπέναντι πλευρές, πού καθὼς τέμνονται ὁρίζουν ἕνα ἄλλο τρίγωνο ΙΚΛ. Τό τετράπλευρο ΑΒΓΚ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες, ἐπομένως εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἄρα :

$$(1) \qquad \text{ΑΚ} = \text{ΒΓ} = \alpha.$$

Τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τό ΑΓΒΛ. Ἄρα :

$$(2) \qquad \text{ΑΛ} = \text{ΓΒ} = \alpha.$$

'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι ΑΚ = ΑΛ. Δηλαδή τό Α εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ. Τό ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὡς κάθετο πρός τή ΒΓ, θά εἶναι κάθετο καί πρός τήν παράλληλό της ΚΛ· καί ἐπειδή περνᾶ ἀπό τό μέσο Α τῆς ΚΛ, ἕπεται ὅτι εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΚΛ τοῦ τριγώνου ΙΚΛ.

Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι τά ὕψη ΒΕ καί ΓΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ΙΛ καί ΙΚ ἀντιστοίχως τοῦ τριγώνου ΙΚΛ. Τότε αὐτά περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Η (§ 156). Τό σημεῖο Η λέγεται **ὀρθόκεντρο** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

158. 'Ορθοκεντρική τετράδα σημείων. Οἱ τρεῖς κορυφές κάθε τριγώνου καί τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου λέμε ὅτι ἀποτελοῦν μιάν ὀρθοκεντρική τετράδα σημείων, γιατί εὔκολα φαίνεται ὅτι τά τρία ἀπό αὐτά, ὁποιαδήποτε, εἶναι κορυφές τριγώνου πού ἔχει ὡς ὀρθόκεντρο τό τέταρτο σημεῖο τῆς τετράδας.

★ 159. Θεώρημα. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΓ καί ΑΒ ἀντιστοίχως ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, οἱ ἡμιευθεῖες ΒΕ καί ΓΖ τέμνονται σέ σημεῖο Σ ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου καί ἡ ἡμιευθεία ΑΣ τέμνει τή ΒΓ σέ σημεῖο Δ ἐνδιάμεσο στά Β καί Γ.

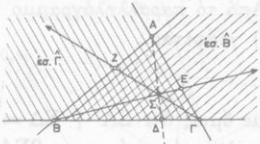
'Απόδειξη. 'Επειδή τά Ε καί Ζ εἶναι ἐσωτερικά τῶν γωνιῶν $\widehat{\text{Β}}$ καί $\widehat{\text{Γ}}$ ἀντιστοίχως, ἕπεται ὅτι (σχ. 153) :

$$\text{Ε}\widehat{\text{Β}}\text{Γ} < \widehat{\text{Β}} \text{ καί } \text{Ζ}\widehat{\text{Γ}}\text{Β} < \widehat{\text{Γ}}.$$

Τότε θά εἶναι καί

$$\text{Ε}\widehat{\text{Β}}\text{Γ} + \text{Ζ}\widehat{\text{Γ}}\text{Β} < \widehat{\text{Β}} + \widehat{\text{Γ}} < 2\text{L}.$$

Ἄρα οἱ ἡμιευθεῖες ΒΕ καί ΓΖ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Σ.



Σχ. 153.

Οἱ ἡμιευθεῖες ΒΕ καί ΓΖ εἶναι στό ἐσωτερικό τῶν γωνιῶν $\widehat{\text{Β}}$ καί $\widehat{\text{Γ}}$ ἀντιστοίχως, δηλαδή

$$\text{ΒΕ} \in \text{ἐσ. } \widehat{\text{Β}} \text{ καί } \text{ΓΖ} \in \text{ἐσ. } \widehat{\text{Γ}}. \text{ Τότε :}$$

$$\text{ΒΕ} \cap \text{ΓΖ} \in (\text{ἐσ. } \widehat{\text{Β}}) \cap (\text{ἐσ. } \widehat{\text{Γ}}) \Rightarrow$$

$\Sigma \in$ ἐσ (ΑΒΓ). Δηλαδή τό Σ εἶναι σημεῖο ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Κατά συνέπεια, ἡ ΑΣ εἶναι ἐσωτερική ἡμιευθεία τῆς κυρτῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί τά Β καί Γ, ὡς σημεῖα τῶν πλευρῶν τῆς $\widehat{A}$, βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΑΣ. Ἄρα τό τμῆμα ΒΓ τέμνει τήν ἡμιευθεία ΑΣ σέ σημεῖο Δ, ἤ, πράγμα πού εἶναι τό ἴδιο, ἡ ἡμιευθεία ΑΣ τέμνει τή ΒΓ σέ σημεῖο Δ ἐνδιάμεσο τῶν Β καί Γ.

160. Θεώρημα. Οἱ τρεῖς διάμεσοι κάθε τριγώνου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό ὁποῖο εἶναι ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου καί ἡ ἀπόστασή του ἀπό κάθε κορυφή εἶναι ἴση πρός τά 2/3 τῆς ἀντίστοιχης διαμέσου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ καί ΒΕ, ΓΖ οἱ δύο διάμεσοί του (σχ. 154). Αὐτές τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Σ (§ 159), τό ὁποῖο εἶναι ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου.

Φέρνουμε τήν ΑΣ, πού τέμνει τή ΒΓ στό Δ. Τώρα ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό Δ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ.

Πάνω στήν ΑΔ παίρνουμε τμῆμα

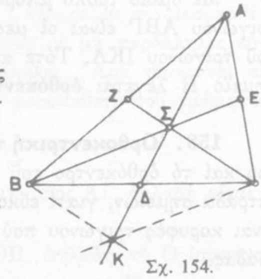
(1) $\quad ΣΚ = ΣΑ,$

ἔτσι ὥστε τό Σ νά εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΑΚ. Τότε, ἐπειδή τό Ζ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ἔπεται ὅτι ΖΣ//ΒΚ ἤ

(2) $\quad ΖΓ // ΒΚ.$

Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι ΕΣ//ΓΚ ἤ

(3) $\quad ΕΒ // ΓΚ.$



Σχ. 154.

Ἀπό τίς σχέσεις (2) καί (3) ἔπεται ὅτι τό τετράπλευρο ΒΚΓΣ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ ἔχει τίς ἀπέναντι πλευρές του παράλληλες. Ἄρα οἱ διαγώνιοί του ΣΚ καί ΒΓ διχοτομοῦνται. Δηλαδή τό Δ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ. Ἑπομένως καί ἡ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπό τό Α περνᾶ ἀπό τό κοινό σημεῖο Σ τῶν δύο ἄλλων διαμέσων.

Ἀπό τό παραλληλόγραμμο ΒΚΓΣ παίρνουμε ΣΚ = 2ΣΔ. Τότε ἡ σχέση (1) γράφεται:

(4) $\quad 2ΣΔ = ΣΑ.$

Ἔχουμε ὅμως ὅτι $ΣΑ + ΣΔ = ΑΔ$ ἤ $2ΣΑ + 2ΣΔ = 2ΑΔ$. Ἀπό τή σχέση (4), ἡ τελευταία γράφεται : $2ΣΑ + ΣΑ = 2ΑΔ \Rightarrow 3ΣΑ = 2ΑΔ$. Ἀπό τοῦτο παίρνουμε $ΣΑ = \frac{2}{3} ΑΔ$. Δηλαδή τό σημεῖο Σ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων βρίσκεται ἀπό τήν κορυφή Α σέ ἀπόσταση ἴση πρός τά 2/3 τῆς διαμέσου ΑΔ.

Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι :

$$ΣΒ = \frac{2}{3} ΒΕ \quad \text{καί} \quad ΣΓ = \frac{2}{3} ΓΖ.$$

Τό κοινό σημεῖο Σ τῶν διαμέσων ἑνός τριγώνου ὀνομάζεται **κέντρο βάρους ἤ βαρύκεντρο** τοῦ τριγώνου. Ὁ ὅρος αὐτός ἔχει ληφθεῖ ἀπό τή Φυσική, ἐπειδή τό Σ συμπίπτει μέ τό κέντρο βάρους μιᾶς πλάκας ἀπό ὁμοιογενές ὑλικό σέ σχῆμα τριγώνου.

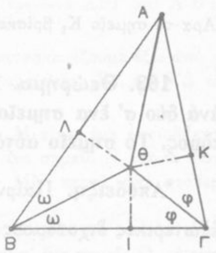
161. Θεώρημα. Οἱ τρεῖς ἐσωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο, τό ὁποῖο εἶναι ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου καί ἰσαπέχει ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του.

Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 155), στό ὁποῖο φέρνουμε τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$. Αὐτές βρίσκονται μέσα στίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$, ἐπομένως τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Θ ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου. Ἀπό τό Θ φέρνουμε $\Theta I \perp B\Gamma$, $\Theta K \perp A\Gamma$ καί $\Theta\Lambda \perp AB$. Τό σημεῖο Θ, ἀφοῦ ἀνήκει στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{B}$, ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της, δηλαδή:

(1) $\Theta I = \Theta\Lambda$.

Ἐπειδή ἀκόμη αὐτό ἀνήκει καί στή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{\Gamma}$, ἕπεται ὅτι ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της, δηλαδή:

(2) $\Theta I = \Theta K$.

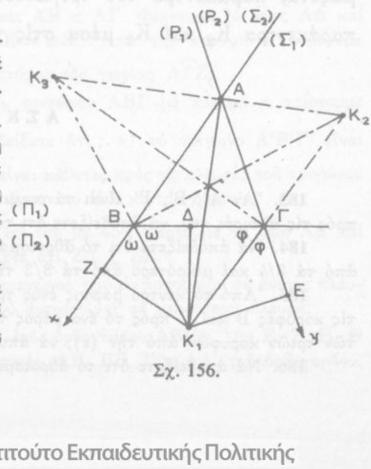


Σχ. 155.

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι $\Theta\Lambda = \Theta K$. Δηλαδή τό Θ ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καί ἐπομένως ἀνήκει στή διχοτόμο της. Ἄρα καί οἱ τρεῖς ἐσωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Θ, πού εἶναι ἐσωτερικό τοῦ τριγώνου. Τό Θ λέγεται **ἔγκεντρο** τοῦ τριγώνου καί ἔχει τήν ἰδιότητα νά ἰσαπέχει ἀπό τίς τρεῖς πλευρές του.

★ 162. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίγωνο οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι δύο γωνιῶν τέμνονται σέ σημεῖο πού βρίσκεται μέσα στήν τρίτη γωνία του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 156). Ἡ εὐθεία ΒΓ, πάνω στήν ὁποία βρίσκεται ἡ πλευρά τοῦ τριγώνου, χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ δύο ἡμιεπίπεδα (Π_1) καί (Π_2), ὅπου ἡ κορυφή Α βρίσκεται στό (Π_1). Ἡ καθεμιά ἀπό τίς εὐθεῖες ΑΓ καί ΑΒ χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ δύο ἡμιεπίπεδα (P_1), (P_2) καί (Σ_1), (Σ_2) ἀντιστοίχως, ὅπου οἱ κορυφές Β καί Γ βρίσκονται στά (P_1) καί (Σ_1) ἀντιστοίχως. Ἄν 2ω καί 2φ εἶναι οἱ ἐξωτερικές γωνίες τῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ ἀντιστοίχως, ἔχουμε: $2\omega < 2^{L}$ καί $2\varphi < 2^{L}$ ὡς



Σχ. 156.

παραπληρωματικές τῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$. Ἄρα $2\omega + 2\varphi < 4\llcorner \Rightarrow \omega + \varphi < 2\llcorner$. Ἀπό αὐτή ἔπεται ὅτι οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο K_1 στό ἡμιεπίπεδο (Π_2). Τό σημεῖο K_1, ὡς σημεῖο τοῦ ἡμιεπιπέδου (Π_2), βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο ΑΒΓ. Οἱ διχοτόμοι BK_1 καί ΓK_1 βρίσκονται μέσα στίς κυρτές γωνίες $\widehat{\Gamma B x}$ καί $\widehat{B\Gamma y}$. Δηλαδή :

$$BK_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \quad \text{καί}$$
$$\Gamma K_1 \in (\Pi_2) \cap (P_1) \Rightarrow$$
$$(BK_1) \cap (\Gamma K_1) \in [(\Pi_2) \cap (\Sigma_1)] \cap [(\Pi_2) \cap (P_1)]$$
$$\Rightarrow K_1 \in (\Pi_2) \cap (\Sigma_1) \cap (P_1) \Rightarrow$$
$$K_1 \in (\Pi_2) \cap [(\Sigma_1) \cap (P_1)].$$

Ἀπό αὐτή ἔπεται
$$K_1 \in (\Sigma_1) \cap (P_1) \quad \text{ἤ}$$
$$K_1 \in \text{ἐσ. } \widehat{A}.$$

Ἄρα τό σημεῖο K_1 βρίσκεται ἔξω ἀπό τό τρίγωνο καί μέσα στή γωνία $\widehat{A}$.

163. Θεώρημα. Σέ κάθε τρίγωνο οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τέμνονται ἀνά δύο σ' ἕνα σημεῖο, ἀπό τό ὁποῖο περνᾶ καί ἡ τρίτη ἐσωτερική διχοτόμος. Τό σημεῖο αὐτό ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.

Ἀπόδειξη. Παίρνουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 156) καί φέρνουμε τίς ἐξωτερικές διχοτόμους τῶν γωνιῶν του $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$, πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο K_1 ἔξω ἀπό τό τρίγωνο καί μέσα στή γωνία $\widehat{A}$ (§ 162). Φέρνουμε τίς $K_1\Delta \perp B\Gamma$ $K_1E \perp A\Gamma$ καί $K_1Z \perp AB$. Τότε ἐπειδή τό K_1 εἶναι σημεῖο τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{\Gamma Bx}$ καί $\widehat{B\Gamma y}$, θά εἶναι : $K_1\Delta = K_1Z$ καί $K_1\Delta = K_1E \Rightarrow K_1Z = K_1E$. Ἀπό τήν τελευταία ἔπεται ὅτι τό K_1 ἀνήκει στήν ἐσωτερική διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$, ἀφοῦ βρίσκεται μέσα στή γωνία $\widehat{A}$ καί ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές της.

Τό σημεῖο K_1 ἰσαπέχει ἀπό τίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου καί ὀνομάζεται **παράκεντρο** τοῦ τριγώνου. Ἀντιστοίχως, ὑπάρχουν καί δύο ἄλλα παράκεντρα K_2 καί K_3 μέσα στίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ τοῦ τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

183. Ἄν Α', Β', Γ' εἶναι τά συμμετρικά τοῦ περικέντρου ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός τίς πλευρές του, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο Α'Β'Γ' εἶναι ἴσο πρός τό ΑΒΓ.

184. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διαμέσων κάθε τριγώνου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τά 3/4 καί μικρότερο ἀπό τά 3/2 τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου.

185. Ἀπό τό κέντρο βάρους ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε εὐθεία (ε) πού ἀφήνει τίς κορυφές Β καί Γ πρός τό ἕνα μέρος της. Ἄν ΑΑ', ΒΒ' καί ΓΓ' εἶναι οἱ ἀποστάσεις τῶν τριῶν κορυφῶν ἀπό τήν (ε), νά ἀποδείξετε ὅτι ΑΑ' = ΒΒ' + ΓΓ'.

186. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνός τριγώνου ἀπό μιάν ὁποιαδήποτε εὐθεία, πού δέν τέμνει τό τρίγωνο, εἶναι ἴσο μέ τό τριπλάσιο τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ἀπό αὐτήν.

187. Ἑνός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωροῦμε τά μέσα Μ καί Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΔ τριχοτομεῖται ἀπό τίς ΓΜ καί ΓΝ.

188. Ἄν ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο ἴσες διαμέσους, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ἰσοσκελές.

189. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ οἱ διάμεσοί του καί Ο τό κέντρο βάρους του. Προεκτείνουμε τίς διαμέσους καί στίς προεκτάσεις λαμβάνουμε τμήματα ΔΑ′ = ΔΟ ΕΒ′ = ΕΟ, ΖΓ′ = ΖΟ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα.

Β΄.

190. Ἄν σ' ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τίς πλευρές του κατά κυκλική σειρά καί πάνω στίς προεκτάσεις λάβουμε τμήματα ΑΑ′ = ΒΒ′ = ΓΓ′, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τρίγωνο Α′Β′Γ′ εἶναι ἰσόπλευρο καί ὅτι τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ ἔχουν τό ἴδιο κέντρο βάρους.

191. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΑΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό τό τρίγωνο τά τετράγωνα ΑΒΔΕ καί ΑΓΖΗ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΒΖ καί ΓΔ τέμνονται πάνω στό ὕψος ΑΘ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

192. Δίνεται ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς πλευρᾶς ΑΒ καί στήν προέκταση τῆς ΑΓ πάρουμε ἕνα σημεῖο Ν, τέτοιο ὥστε ΓΝ = ΒΜ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΝ περνᾶ ἀπό σταθερό σημεῖο.

193. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ. Ἄν Δ καί Ε εἶναι σημεῖα τῶν πλευρῶν ΑΓ καί ΑΒ ἀντιστοίχως, τέτοια ὥστε γιά τά τμήματα ΒΔ καί ΓΕ, πού τέμνονται σ' ἕνα σημεῖο Ο, νά εἶναι ΒΟ = 2 · ΟΔ καί ΓΟ = 2 · ΟΕ, νά ἀποδείξετε ὅτι τά Δ καί Ε εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΓ καί ΑΒ.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

194. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά σημεῖα τομῆς τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν $\widehat{\text{Ε}}$ καί $\widehat{\text{Ζ}}$ εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

195. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ΑΒ < ΑΓ. Φέρνουμε τό ὕψος ΑΔ καί πάνω στήν ὑποτείνουσα παίρνουμε τμῆμα ΔΕ = ΔΒ. Ἀπό τήν κορυφή Γ φέρνουμε ΓΖ ⊥ ΑΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΓΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\text{ΑΓΖ}}$.

196. Πάνω στίς πλευρές ἑνός ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ μέ πλευρά α παίρνουμε τμήματα $ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ' = \frac{α}{3}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι: α) τό τρίγωνο Α′Β′Γ′ εἶναι ἰσόπλευρο, β) οἱ πλευρές τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ εἶναι κάθετες πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί γ) τά δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α′Β′Γ′ ἔχουν τό ἴδιο κέντρο βάρους.

197. Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ ἡ γωνία $\widehat{\text{Β}}$ εἶναι ἴση μέ 45^0. Φέρνουμε τά ὕψη ΑΔ καί ΓΕ καί ἔστω Ζ τό μέσο τῆς ΑΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΖΔ ⊥ ΖΕ.

198. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διάμεσοι ἑνός τριγώνου πού ἀντιστοιχοῦν σέ ἄνισες πλευρές εἶναι ἄνισες καί μεγαλύτερη εἶναι αὐτή πού ἀντιστοιχεῖ σέ μικρότερη πλευρά.

199. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖο στό ἐσωτερικό ἑνός ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ. Ἄν Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τά συμμετρικά τοῦ Μ ὡς πρός τίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ ὀρθογωνίου.

α) Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ κορυφές τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ, β) πότε τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμο;

200. Ἄν Μ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ΑΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι ΜΒ + ΜΓ > ΑΒ + ΑΓ.

201. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)$ καί ἀπό ἕνα σημεῖο Α τῆς (ε_1) φέρνουμε ΑΓ $\perp$ (ε_2) καί ΑΒ πλάγια πρός τήν (ε_2). Ἀπό τό Β θεωροῦμε εὐθεία πού τέμνει τήν ΑΓ στό σημεῖο Δ καί τήν (ε_1) στό σημεῖο Ζ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΔΖ = 2ΑΒ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{ΑΒΓ} = 3\widehat{ΔΒΓ}$.

202. Πάνω στίς πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἑνός τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τά σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ ἀντιστοίχως, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΑΕ = ΒΖ = ΓΗ = ΔΘ = λ. α) Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ΕΖΗΘ εἶναι τετράγωνο. β) Νά προσδιοριστεῖ τό λ, ἔτσι ὥστε τό τετράγωνο ΕΖΗΘ νά εἶναι τό ἐλάχιστο δυνατό.

203. Σ' ἕνα τετράπλευρο οἱ διαγώνιοι τέμνονται κάθετα. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφές ὀρθογωνίου.

204. Σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οἱ πλευρές ΑΔ καί ΒΓ εἶναι ἴσες. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας τῶν πλευρῶν ΑΔ καί ΒΓ.

205. Δίνεται ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ΑΒ καί ἔστω Γ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο του. Ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε παραλλήλους Αx καί Βy πρός τό ἴδιο μέρος τοῦ ΑΒ, πάνω στίς ὁποῖες παίρνουμε τμήματα ΑΔ = ΑΓ καί ΒΕ = ΒΓ. Ἄν Ζ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΔΕ, νά ἀποδείξετε ὅτι ΖΑ $\perp$ ΖΒ.

206. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό τήν κορυφή Α φέρνουμε κάθετες ἡμιευθεῖες πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ, ὄχι πρός τό μέρος τοῦ τριγώνου, καί πάνω σ' αὐτές παίρνουμε τμήματα ΑΒ' = ΑΒ καί ΑΓ' = ΑΓ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὅταν προεκταθεῖ, διέρχεται ἀπό τό μέσο τοῦ τμήματος Β'Γ'. Τί παρατηρεῖτε γιά τό ὕψος ΑΕ τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ';

207. Ἀπό τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε πρός τή διχοτόμο τῆς γωνίας $\widehat{A}$ κάθετο, πού τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ στά Β' καί Γ' ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι $ΑΒ' = ΑΓ' = \dfrac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$.

208. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ. Ἀπό τό Α φέρνουμε ἀνά μία τίς καθέτους ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ πρός τίς τέσσερεις διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{Γ}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Δ, Ε, Ζ, Η βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

209. Μέ πλευρές τίς ΑΒ καί ΑΓ ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό τό τρίγωνο τά τετράγωνα ΑΒΔΕ καί ΑΓΖΘ. Φέρνουμε τίς ΔΔ' $\perp$ ΒΓ καί ΖΖ' $\perp$ ΒΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι : α) ΔΔ' + ΖΖ' = ΒΓ. β) Τά σημεῖα Δ, Α, Ζ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία. γ) Οἱ ΔΕ καί ΖΘ τέμνονται πάνω στήν προέκταση τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

210. Σ' ἕνα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι παραπληρωματικές καί οἱ ἀπέναντι πλευρές προεκτεινόμενες τέμνονται στά σημεῖα Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{E}$ καί $\widehat{Z}$ τέμνουν τίς πλευρές τοῦ τετραπλεύρου σέ τέσσερα σημεῖα, τά ὁποῖα εἶναι κορυφές ρόμβου.

211. Ἄν Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΒΓ ἀντιστοίχως ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί Δ εἶναι τό ἴχνος τοῦ ὕψους ΑΔ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{ΔΕΖ}$ εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{Γ}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

212. Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1^{L}$) φέρνουμε τό ὕψος ΑΗ καί ἀπό τό

Η φέρνουμε καθέτους ΗΔ καί ΗΕ πρός τίς ΑΒ καί ΑΓ ἀντιστοίχως. Ἀπό τό Β φέρνουμε εὐθεία (δ) παράλληλη τῆς ΔΕ. Ἄν Λ καί Μ εἶναι τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΒΓ ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι : α) ΑΜ $\perp$ (δ), β) οἱ ΛΜ καί ΑΗ τέμνονται πάνω στή (δ) καί γ) οἱ ΑΜ καί ΗΕ τέμνονται πάνω στή (δ).

213. Οἱ μεσοκάθετοι ΔΟ, ΕΟ τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ τέμνουν τίς ΒΓ, ΑΒ στά Ζ, Η ἀντιστοίχως. Ἄν σχηματίσουμε τό παραλληλόγραμμο ΗΒΖΘ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΘΟ εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

214. Ἄν ἕνα τρίγωνο ἔχει δύο ἴσες διχοτόμους, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ἰσοσκελές.

215. Ἔστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ, καί πάνω στίς πλευρές του κατασκευάζουμε ἔξω ἀπό αὐτό τά τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ, ΑΔΛΜ. Ἄν Σ καί Τ εἶναι τά μέσα τῶν ΛΕ καί ΙΘ, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΒΣΔΤ εἶναι τετράγωνο.

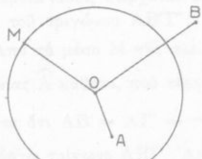
ΒΙΒΛΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ο ΚΥΚΛΟΣ

164. Ὁρισμοί. Κύκλος λέγεται τό σύνολο τῶν σημείων (γ. τόπος) τοῦ ἐπιπέδου, πού ἔχουν τήν ἰδιότητα νά βρίσκονται σέ ὁρισμένη ἀπόσταση R ἀπό ἕνα σταθερό σημεῖο O τοῦ ἐπιπέδου.

Τό σημειοσύνολο αὐτό συμβολίζεται μέ (O, R) καί τό O λέγεται **κέντρο** τοῦ κύκλου. Ἄν M εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου (σχ. 157), τό εὐθύγραμμο τμῆμα $OM = R$ ὀνομάζεται **ἀκτίνα** τοῦ κύκλου.

Ἕνα σημεῖο A λέγεται **ἐσωτερικό σημεῖο** τοῦ κύκλου (O, R) τότε καί μόνο τότε, ὅταν εἶναι $OA < R$. Τό σύνολο ὅλων τῶν ἐσωτερικῶν σημείων λέγεται **ἐσωτερικό τοῦ κύκλου** καί συμβολίζεται μέ ἐσ.(O, R). Ἕνα σημεῖο B λέγεται **ἐξωτερικό σημεῖο** τοῦ κύκλου τότε καί μόνο τότε, ὅταν εἶναι $OB > R$. Τό σύνολο ὅλων τῶν ἐξωτερικῶν σημείων λέγεται **ἐξωτερικό τοῦ κύκλου** καί συμβολίζεται μέ ἐξ. (O, R).



Σχ. 157.

Σχ. 158.

Σημείωση. Σύμφωνα μέ ἄλλον ὁρισμό, κύκλος ὀνομάζεται τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, γιά τά ὁποῖα εἶναι $OM \leqq R$, ἐνῶ τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου γιά τά ὁποῖα εἶναι $OM = R$ λέγεται περιφέρεια τοῦ κύκλου. Ἐδῶ θά δεχτοῦμε τόν ὁρισμό πού ἀναφέραμε προηγουμένως § 164.

Χορδή τοῦ κύκλου (O, R) λέγεται κάθε εὐθύγραμμο τμῆμα AB, πού ἔχει τά ἄκρα του A καί B πάνω στόν κύκλο (σχ. 158).

Διάμετρος τοῦ κύκλου (O, R) λέγεται κάθε χορδή του ΓΔ, πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο O τοῦ κύκλου (σχ. 158). Τό μῆκος κάθε διαμέτρου εἶναι ἴσο μέ τό διπλάσιο τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου, δηλαδή $ΓΔ = 2R$. Ἄρα στόν ἴδιο κύκλο ὅλες οἱ διάμετροι εἶναι ἴσες. Τά ἄκρα Γ καί Δ μιᾶς διαμέτρου λέγονται **ἀντιδιαμετρικά** σημεῖα.

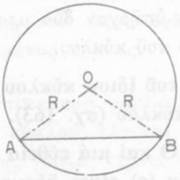
Ἡ χάραξη τοῦ κύκλου γίνεται μέ τό γνωστό ὄργανο, τό διαβήτη, τό ὁποῖο διατηρεῖ σταθερή ἀπόσταση μεταξύ τῆς αἰχμῆς του, πού καθορίζει τό κέντρο τοῦ κύκλου, καί τῆς γραφίδας του, πού χαράζει (γράφει) τόν κύκλο.

165. Θεώρημα. Γιά κάθε χορδή ΑΒ ἑνός κύκλου (Ο, R) εἶναι ΑΒ $\leqq$ 2R.

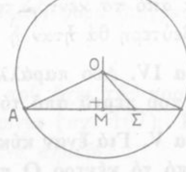
Ἀπόδειξη. i) Ἄν ἡ χορδή ΑΒ δέν εἶναι διάμετρος (σχ. 159), τό τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές μέ $OA = OB = R$. Ἀπό αὐτό παίρνουμε $AB < OA + OB \Rightarrow AB < R + R \Rightarrow AB < 2R$.

ii) Ἄν ἡ χορδή ΑΒ εἶναι διάμετρος, εἶναι φανερό ὅτι θά εἶναι $AB = 2R$.

Ἄρα γιά κάθε χορδή ΑΒ τοῦ κύκλου ἀληθεύει ἡ σχέση $AB \leqq 2R$, καί ἡ μεγαλύτερη χορδή εἶναι ἡ διάμετρος, πού εἶναι ἴση μέ 2R.



Σχ. 159.

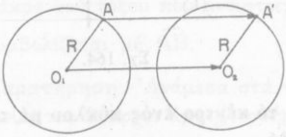


Σχ. 160.

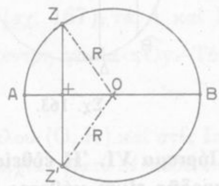
166. Θεώρημα. Κάθε σημεῖο μιᾶς χορδῆς κύκλου εἶναι ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας κύκλος (Ο, R), ΑΒ μία χορδή του καί Σ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς χορδῆς (σχ. 160). Εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι $O\Sigma < R$. Φέρνουμε $OM \perp AB$. Τό σημεῖο Μ εἶναι τό μέσο τῆς χορδῆς ΑΒ, γιατί τό τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές ($OA = OB = R$). Ἐπειδή τό Σ εἶναι σημεῖο τῆς χορδῆς, ἔπεται ὅτι $M\Sigma < MB \Rightarrow O\Sigma < OB$ (§ 77) ἤ $O\Sigma < R$.

167. Ἴσοι κύκλοι. Δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι τότε καί μόνο τότε, ὅταν ἔχουν ἴσες ἀκτίνες. Γιατί τότε μόνο μποροῦν νά ταυτιστοῦν μέ παράλληλη μετατόπιση (σχ. 161).



Σχ. 161.



Σχ. 162.

168. Ἀξονική συμμετρία στόν κύκλο. Θεώρημα. Κάθε διάμετρος ἑνός κύκλου εἶναι ἄξονας συμμετρίας του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας κύκλος (Ο, R) καί ΑΒ μία διάμετρός του (σχ. 162). Ἄν Ζ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου, θεωροῦμε τό συμμετρικό του Z′ ὡς πρός ἄξονα τήν AB καί ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό Z′ εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου (σχ. 162). Πραγματικά, αὐτό συμβαίνει, γιατί ἀπό τή συμμετρία εἶναι $OZ = OZ'$. Ἀλλά $OZ = R$. Ἄρα $OZ' = R$ καί ἑπομένως τό Z′ εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου.

Πόρισμα I. Κάθε διάμετρος χωρίζει ἕναν κύκλο σέ δύο ἴσα μέρη, πού τό καθένα λέγεται ἡμικύκλιο.

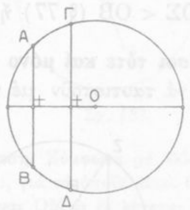
Πόρισμα II. Ἡ κάθετος ἀπό τό κέντρο ἑνός κύκλου πρός μία χορδή του περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς χορδῆς.

Πόρισμα III. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς χορδῆς ἑνός κύκλου περνᾶ ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου. Αὐτό συμβαίνει γιατί, ἄν ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς δέν περνοῦσε ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου, θά ὑπῆρχαν δύο μεσοκάθετοι τῆς χορδῆς. Ἡ δεύτερη θά ἦταν ἡ ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου.

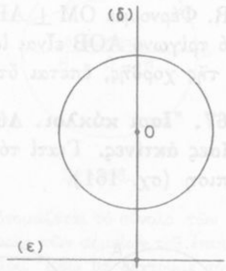
Πόρισμα IV. Δύο παράλληλες χορδές τοῦ ἴδιου κύκλου ἔχουν κοινή μεσοκάθετο, πού περνᾶ ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου (σχ. 163).

Πόρισμα V. Γιά ἕναν κύκλο μέ κέντρο O καί μιά εὐθεία (ε), ἡ κάθετη εὐθεία (δ) ἀπό τό κέντρο O πρός τήν εὐθεία (ε) εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ ὅλου σχήματος εὐθείας καί κύκλου.

Πραγματικά, ἡ εὐθεία (δ) (σχ. 164), ἀφοῦ περνᾶ ἀπό τό κέντρο O, εἶναι ἄξονας συμμετρίας γιά τόν κύκλο. Ἀκόμα ἡ (δ) εἶναι ἄξονας συμμετρίας γιά τήν εὐθεία (ε), ἀφοῦ εἶναι (δ) ⊥ (ε). Ἄρα ἡ (δ) εἶναι ἄξονας συμμετρίας γιά τό σχῆμα κύκλου καί εὐθείας.



Σχ. 163.



Σχ. 164.

Πόρισμα VI. Ἡ εὐθεία πού ἑνώνει τό κέντρο ἑνός κύκλου μέ τό μέσο μιᾶς χορδῆς εἶναι κάθετος πρός τή χορδή.

169. Κεντρική συμμετρία στόν κύκλο. Θεώρημα. Τό κέντρο ἑνός κύκλου εἶναι καί κέντρο συμμετρίας του.

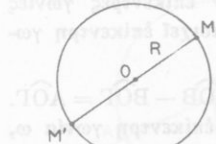
Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας κύκλος (O, R) καί M ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο του (σχ. 165). Θεωροῦμε τό συμμετρικό του M′ ὡς πρός τό O καί εἶναι ἀρκετό νά ἀποδείξουμε ὅτι τό M′ εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου. Πραγματικά αὐτό συμβαίνει, γιατί ἡ κεντρική συμμετρία ἐξασφαλίζει $OM' = OM = R$. Ἄρα τό M′ εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου.

170. Προσανατολισμός ἑνός κύκλου. Ἕνας κύκλος μπορεῖ νά διαγραφεῖ ἀπό ἕνα κινητό σημεῖο χωρίς παλινδρόμηση, κατά δύο διαφορετικούς τρόπους. Γιά νά διακρίνουμε αὐτούς τούς δύο τρόπους διαγραφῆς, θά λέμε τόν ἕναν ἀπό αὐτούς **θετική φορά διαγραφῆς** (σχ. 166) καί τόν ἄλλο **ἀρνητική φορά διαγραφῆς.** Ἡ θετική φορά διαγραφῆς, καί ἀντίστοιχα ἡ ἀρνητική, ὁρίζονται αὐθαίρετα. Συνήθως ὅμως λαμβάνουμε ὡς θετική φορά διαγραφῆς τήν ἀντίθετη στήν κίνηση τῶν δεικτῶν τοῦ ρολογιοῦ.

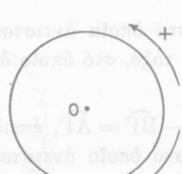
Ὁ κύκλος, στόν ὁποῖο ἔχει ὁριστεῖ ἡ θετική φορά διαγραφῆς, λέγεται **προσανατολισμένος κύκλος.**

171. Ἐπίκεντρη γωνία. Κάθε γωνία πού ἔχει τήν κορυφή της στό κέντρο ἑνός κύκλου λέγεται ἐπίκεντρη γωνία (σχ. 167). Κάθε πλευρά μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας τέμνει τόν κύκλο σέ ἕνα σημεῖο.

172. Τόξο κύκλου λέγεται τό μέρος ἑνός κύκλου πού περιέχεται στό ἐσωτερικό μιᾶς ἐπίκεντρης γωνίας του. Ἄν A καί B εἶναι τά σημεῖα, στά



Σχ. 165.



Σχ. 166.

Σχ. 167.

ὁποῖα ἡ ἐπίκεντρη γωνία $x\widehat{O}y$ τέμνει τόν κύκλο (σχ. 167), τά A καί B λέγονται ἄκρα τοῦ τόξου πού ἀντιστοιχεῖ στήν ἐπίκεντρη γωνία $x\widehat{O}y$. Τό τόξο αὐτό συμβολίζεται μέ $\widehat{AB}$.

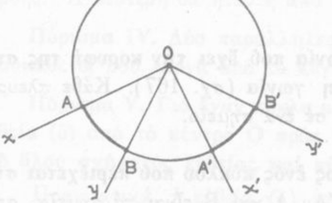
Παρατήρηση. Ἀνάμεσα στά τόξα ἑνός κύκλου (O, R) καί στίς ἐπίκεντρες γωνίες του ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, γιατί σέ κάθε ἐπίκεντρη γωνία $x\widehat{O}y$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα τόξο $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (O, R) καί σέ κάθε τόξο $\widehat{AB}$ τοῦ κύκλου (O, R) ἀντιστοιχεῖ μιά ἐπίκεντρη γωνία $A\widehat{O}B \equiv x\widehat{O}y$.

173. Ἰσότητα, πράξεις καί διάταξη στό σύνολο τῶν τόξων. Ἀπό τήν ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία, πού ὑπάρχει μεταξύ τόξων καί ἐπικέντρων γωνιῶν ἑνός κύκλου, εὔκολα ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότητα καί ὁρίζονται τά ἀκόλουθα: (Τονίζουμε ἰδιαίτερα ὅτι ἀναφερόμαστε σέ τόξα **τοῦ ἰδίου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων**).

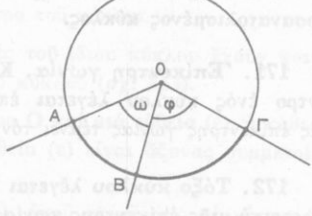
i) Δύο τόξα $\widehat{AB}$ καί $\widehat{A'B'}$ εἶναι ἴσα τότε καί μόνο τότε, ὅταν σ' αὐτά ἀντιστοιχοῦν ἴσες ἐπίκεντρες γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $x'\widehat{O}y'$. Μπορεῖ νά ἀποδειχθεῖ μέ μετατόπιση (σχ. 168).

ii) Ἄθροισμα δύο τόξων, στά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντρες γωνίες ω καί φ, λέγεται ἕνα τόξο, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία ω + φ.

Στό σχῆμα 169 εἶναι $\widehat{AB} + \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$, ἐπειδή $A\widehat{O}B + B\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}\Gamma$. Ἀνάλογα ὁρίζεται καί τό ἄθροισμα τόξων περισσότερων ἀπό δύο.



Σχ. 168.



Σχ. 169.

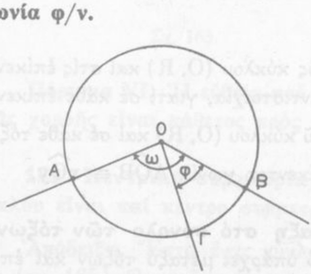
iii) Διαφορά δύο τόξων, στά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν ἐπίκεντρες γωνίες ω καί φ μέ ω > φ, λέγεται ἕνα τόξο, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία ω — φ.

Στό σχῆμα 170 εἶναι $\widehat{AB} - \widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Gamma}$, ἐπειδή $A\widehat{O}B - B\widehat{O}\Gamma = A\widehat{O}\Gamma$.

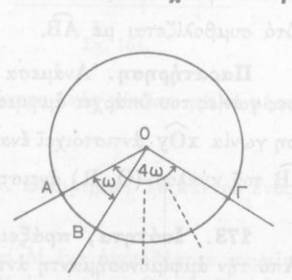
iv) Γινόμενο ἑνός τόξου, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία ω, ἐπί ἕνα φυσικόν ἀριθμό ν λέγεται ἕνα τόξο, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία νω.

Στό σχῆμα 171 εἶναι $4\widehat{AB} = \widehat{A\Gamma}$, ἐπειδή $4A\widehat{O}B = A\widehat{O}\Gamma$.

v) Πηλίκο ἑνός τόξου, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία φ, διά ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν λέγεται ἕνα τόξο, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία φ/ν.



Σχ. 170.



Σχ. 171.

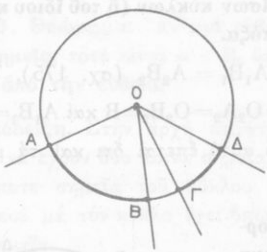
Στό σχῆμα 171 εἶναι $\dfrac{\widehat{\mathrm{A\Gamma}}}{4} = \widehat{\mathrm{AB}}$, ἐπειδή $\dfrac{\widehat{\mathrm{AO\Gamma}}}{4} = \widehat{\mathrm{AOB}}$.

vi) Γινόμενο ἑνός τόξου, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία ω, ἐπί ἕνα ρητόν ἀριθμό μ/ν λέγεται τό τόξο, στό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ ἐπίκεντρη γωνία $\varphi = \dfrac{\mu}{\nu}\omega$.

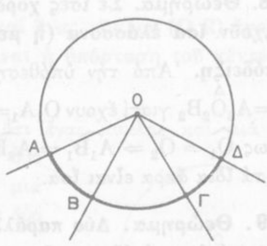
vii) Ἕνα τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ (σχ. 172) λέγεται μεγαλύτερο ἀπό ἕνα τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$, — συμβολικά γράφουμε $\widehat{\mathrm{AB}} > \widehat{\Gamma\Delta}$ — τότε καί μόνο τότε, ὅταν οἱ ἀντίστοιχες στά τόξα αὐτά ἐπίκεντρες γωνίες εἶναι ὁμοιόστροφα ἄνισες, δηλαδή ὅταν $\widehat{\mathrm{AOB}} > \widehat{\Gamma\mathrm{O}\Delta}$. Ἀντίστοιχα ὁρίζεται καί ἡ σχέση <.

174. Μέσο ἑνός τόξου λέγεται ἕνα σημεῖο του, πού τό χωρίζει σέ δύο ἴσα τόξα. Ἀπό τό μέσο ἑνός τόξου περνᾶ καί ἡ διχοτόμος τῆς ἀντίστοιχης ἐπίκεντρης γωνίας. Κατά συνέπεια **ἕνα τόξο ἔχει ἕνα μόνο μέσο,** ἐπειδή ἡ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη γωνία ἔχει μία μόνο διχοτόμο.

175. Διαδοχικά τόξα λέγονται δύο ἤ περισσότερα τόξα τοῦ ἴδιου κύκλου, ὅταν οἱ ἀντίστοιχες σ' αὐτά ἐπίκεντρες γωνίες — πού εἶναι ἐφεξῆς, ἄν εἶναι δύο — εἶναι γενικά διαδοχικές (σχ. 173).



Σχ. 172.



Σχ. 173.

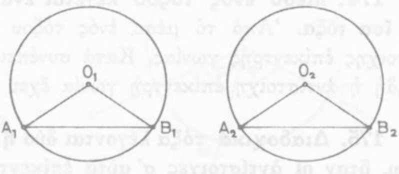
176. Παραπληρωματικά τόξα λέγονται δύο τόξα (τοῦ ἴδιου κύκλου ἤ ἴσων κύκλων), ὅταν οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες τους εἶναι παραπληρωματικές.

Παρατήρηση. Ἄν λάβουμε πάνω σ' ἕναν κύκλο (O, R) δύο σημεῖα A καί B, αὐτά εἶναι προφανῶς ἄκρα δύο τόξων (σχ. 174). Γενικά, τό ἕνα ἀπό τά τόξα αὐτά εἶναι μικρότερο ἀπό ἡμικύκλιο, καί λέγεται **ἔλασσον** τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ ἤ ἁπλούστερα τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$, καί τό ἄλλο εἶναι μεγαλύτερο ἀπό ἡμικύκλιο καί λέγεται **μεῖζον** τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$. Ὁ καθορισμός ἑνός ἀπό τά τόξα $\widehat{\mathrm{AB}}$ μπορεῖ νά γίνει καί μέ τήν παρεμβολή ἑνός τρίτου γράμματος, πού ἀντιστοιχεῖ σέ σημεῖο τοῦ τόξου ἐνδιάμεσο τῶν ἄκρων Α καί Β, π.χ. $\overset{\frown}{AMB}$ ἤ $\overset{\frown}{ANB}$ γιά τά τόξα τοῦ σχήματος 174.

177. Θεώρημα. Σέ ἴσα τόξα δύο ἴσων κύκλων (ἤ τοῦ ἴδιου κύκλου) ἀντιστοιχοῦν ἴσες χορδές (*).

Ἀπόδειξη. Ἄς λάβουμε δύο ἴσους κύκλους (O_1, R), (O_2, R) καί δύο ἴσα τόξα $\overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2}$ (σχ. 175). Τότε εἶναι ἴσες καί οἱ ἀντίστοιχες ἐπίκεντρες γωνίες τῶν τόξων $\widehat{A_1O_1B_1} = \widehat{A_2O_2B_2}$. Ἄρα $\overset{\triangle}{A_1O_1B_1} = \overset{\triangle}{A_2O_2B_2}$, ἐπειδή ἔχουν $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$ καί $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. Ἑπομένως εἶναι $A_1B_1 = A_2B_2$.

Σχ. 174.



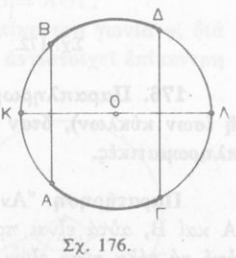
Σχ. 175.

178. Θεώρημα. Σέ ἴσες χορδές δύο ἴσων κύκλων (ἤ τοῦ ἴδιου κύκλου) ἀντιστοιχοῦν ἴσα ἐλάσσονα (ἤ μείζονα) τόξα.

Ἀπόδειξη. Ἀπό τήν ὑπόθεση εἶναι $A_1B_1 = A_2B_2$ (σχ. 175). Τότε : $\overset{\triangle}{A_1O_1B_1} = \overset{\triangle}{A_2O_2B_2}$ γιατί ἔχουν $O_1A_1 = O_1B_1 = O_2A_2 = O_2B_2 = R$ καί $A_1B_1 = A_2B_2$. Ἑπομένως $\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \Rightarrow \overset{\frown}{A_1B_1} = \overset{\frown}{A_2B_2}$. Ἀπό αὐτό ἔπεται ὅτι καί τά μείζονα τόξα μέ τά ἴδια ἄκρα εἶναι ἴσα.

179. Θεώρημα. Δύο παράλληλες χορδές ἑνός κύκλου ὁρίζουν μέσα στή ζώνη τους δύο ἴσα τόξα τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας κύκλος μέ κέντρο Ο καί $AB // \Gamma\Delta$ δύο χορδές του (σχ. 176). Φέρνουμε τή διάμετρο ΚΟΛ, πού εἶναι κοινή μεσοκάθετος γιά τίς δύο παράλληλες χορδές. Τότε ἡ ΚΛ εἶναι ἄξονας συμμετρίας γιά τό σχῆμα καί, ἑπομένως εἶναι $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$.



Σχ. 176.

* Χορδή πού ἀντιστοιχεῖ σέ τόξο $\overset{\frown}{AB}$ νοεῖται ἡ χορδή ΑΒ μέ ἄκρα τά ἄκρα τοῦ τόξου. Σέ ἕνα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ἀντιστοιχεῖ μία χορδή ΑΒ, ἐνῶ σέ μιά χορδή ΑΒ ἀντιστοιχοῦν τά δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ (ἔλασσον καί μεῖζον).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

216. Ἄν δύο σημεῖα μιᾶς χορδῆς ἑνός κύκλου ἰσαπέχουν ἀπό τό μέσο της, νά ἀποδείξετε ὅτι ἰσαπέχουν καί ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου.

217. Νά ἀποδείξετε ὅτι δύο παράλληλες χορδές ἑνός κύκλου πού γράφονται ἀπό τά ἄκρα τῆς ἴδιας διαμέτρου εἶναι ἴσες καί ἡ χορδή πού ἑνώνει τά ἄλλα ἄκρα τῶν παραλλήλων χορδῶν εἶναι ἐπίσης διάμετρος.

218. Νά ἀποδείξετε ὅτι δύο χορδές κύκλου κάθετες στά ἄκρα μιᾶς τρίτης χορδῆς εἶναι ἴσες.

219. Δίνεται ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΚΒ. Πάνω στήν ΑΒ καί ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Κ παίρνουμε σημεῖα Γ καί Δ, ἔτσι ὥστε νά εἶναι ΚΓ = ΚΔ. Ἀπό τά Γ καί Δ φέρνουμε δύο παραλλήλους, πού τέμνουν τό ἡμικύκλιο στά Ε καί Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ χορδή ΕΖ εἶναι κάθετη πρός τίς παραλλήλους.

220. Ἡ μεσοκάθετος μιᾶς ἀκτίνας ΚΑ ἑνός κύκλου μέ κέντρο Κ τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Β καί Γ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{ΒΚΓ} = 120^{0}$.

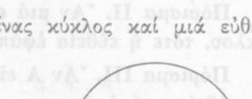
221. Δίνεται κύκλος μέ διάμετρο ΑΟΒ καί ἕνα σημεῖο Γ τῆς ἀκτίνας ΟΑ. Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου, νά ἀποδείξετε ὅτι $ΓΑ < ΓΜ < ΓΒ$.

222. Νά ἀποδείξετε ὅτι δύο χορδές τοῦ ἴδιου κύκλου, πού δέν περνοῦν ἀπό τό κέντρο του, δέν μποροῦν νά διχοτομοῦν ἡ μία τήν ἄλλη.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

180. Θεώρημα. Ἄν μιά εὐθεία (δ) καί ἕνας κύκλος (Ο,R) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, τότε εἶναι $α < R$, ὅπου α εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπό τήν εὐθεία.

Ἀπόδειξη. Στήν ἀρχή παρατηροῦμε ὅτι ἕνας κύκλος καί μιά εὐθεία μποροῦν νά ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, ἐπειδή δυό ὁποιαδήποτε σημεῖα τοῦ κύκλου ὁρίζουν μιά εὐθεία, πού μέ τόν κύκλο ἔχει ὁπωσδήποτε δύο κοινά σημεῖα.



Σχ. 177.

Ἄς πάρουμε λοιπόν μιά εὐθεία (δ) πού μέ ἕνα κύκλο (Ο, R) ἔχει δύο κοινά σημεῖα Α καί Β (σχ. 177). Φέρνουμε τήν $ΟΜ \perp ΑΒ$ καί ἡ $ΟΜ = α$ θά εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου Ο ἀπό τήν εὐθεία (δ). Τότε τό Μ εἶναι τό μέσο τῆς χορδῆς ΑΒ καί ἡ $ΟΑ = R$ εἶναι πλαγία πρός τήν (δ). Ἄρα θά εἶναι $ΟΜ < ΟΑ$ ἤ $α < R$.

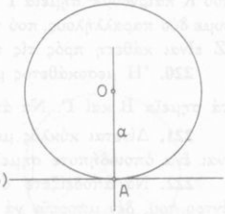
Στή θέση αὐτή τοῦ κύκλου καί τῆς εὐθείας, ἡ εὐθεία λέγεται **τέμνουσα** τοῦ κύκλου. Τό ἴδιο εἶναι, ἄν ποῦμε ὅτι ἡ εὐθεία τέμνει τόν κύκλο ἤ ὁ κύκλος τέμνει τήν εὐθεία.

181. Ἐφαπτομένη εὐθεία σέ κύκλο λέγεται μιά εὐθεία πού ἔχει

ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τόν κύκλο (σχ. 178). Τό κοινό σημεῖο λέγεται **σημεῖο ἐπαφῆς.** Οἱ προτάσεις «εὐθεία ἐφάπτεται σέ κύκλο» καί «κύκλος ἐφάπτεται σέ εὐθεία» εἶναι ἰσοδύναμες.

182. Θεώρημα. Ἄν μία εὐθεία (δ) ἐφάπτεται σέ ἕναν κύκλο (O, R), τότε εἶναι $\alpha = R$, ὅπου α εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπό τήν εὐθεία.

Ἀπόδειξη. Γνωρίζουμε ὅτι τό σχῆμα πού ἀποτελεῖται ἀπό τόν κύκλο (O, R) καί τήν εὐθεία (δ) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τήν κάθετο ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου O πρός τήν εὐθεία (δ) (§ 168 πόρισμα V). Ἄν ἑπομένως ὁ κύκλος (O, R) (σχ. 178) καί ἡ εὐθεία (δ) ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο A, πρέπει ἀναγκαστικά αὐτό νά βρίσκεται πάνω στόν ἄξονα συμμετρίας· γιατί, ἄν αὐτό δέ συνέβαινε, θά ὑπῆρχε καί δεύτερο κοινό σημεῖο τοῦ κύκλου (O, R) καί τῆς εὐθείας (δ), τό συμμετρικό τοῦ A ὡς πρός τόν ἄξονα συμμετρίας. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο, γιατί τότε θά ὑπῆρχαν δύο κοινά σημεῖα κύκλου καί εὐθείας. Ἄρα τό τμῆμα OA εἶναι τό κάθετο τμῆμα ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου πρός τήν εὐθεία (δ), δηλαδή ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου ἀπό τήν εὐθεία. Ἑπομένως εἶναι $OA = R$, ἐπειδή τό A ἀνήκει στόν κύκλο· ἤ $\alpha = R$.



Σχ. 178.

Πόρισμα I. Μία ἐφαπτομένη ἑνός κύκλου εἶναι κάθετη πρός τήν ἀκτίνα τοῦ κύκλου πού ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο ἐπαφῆς.

Πόρισμα II. Ἄν μιά εὐθεία εἶναι κάθετη στό ἄκρο μιᾶς ἀκτίνας ἑνός κύκλου, τότε ἡ εὐθεία ἐφάπτεται στόν κύκλο.

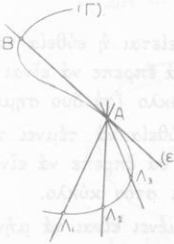
Πόρισμα III. Ἄν A εἶναι σημεῖο ἑνός κύκλου, ὑπάρχει μία καί μόνο μία εὐθεία πού ἐφάπτεται στόν κύκλο στό σημεῖο A.

★ **183. Ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης.** Ὁρίσαμε τήν ἐφαπτομένη εὐθεία σέ κύκλο ὡς τήν εὐθεία πού ἔχει ἕνα μόνο κοινό σημεῖο μέ τόν κύκλο. Ὁ ὁρισμός αὐτός ἐξυπηρετεῖ ἀπόλυτα τίς ἀνάγκες τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας, ἀλλά δέν ἀρκεῖ γιά μιά ὁποιαδήποτε καμπύλη (Γ). Γενικότερα θά δώσουμε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό : Μιά εὐθεία (ε) λέγεται ἐφαπτομένη μιᾶς καμπύλης (Γ) σέ ἕνα σημεῖο της A (σχ. 179), ὅταν ἡ εὐθεία (ε) εἶναι ἡ ὁριακή θέση μιᾶς μεταβλητῆς τέμνουσας AΛ, ὅπου τό μεταβλητό σημεῖο Λ, διατρέχοντας τήν ἀκολουθία τῶν σημείων Λ_1, Λ_2 Λ_3, . . . τῆς καμπύλης (Γ), τείνει νά ταυτιστεῖ μέ τό A.

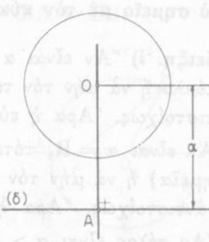
Ἡ ἐφαπτομένη εὐθεία (ε) μπορεῖ νά ἔχει μέ τήν καμπύλη (Γ), ἐκτός ἀπό τό A, καί δεύτερο κοινό σημεῖο B. Αὐτό μπορεῖ νά συμβαίνει, μόνο ὅταν ἡ καμπύλη (Γ) εἶναι μή κυρτή.

184. Θεώρημα. Ἄν μία εὐθεία (δ) καί ἕνας κύκλος (O, R) δέν ἔχουν κοινό σημεῖο, τότε εἶναι $\alpha > R$, ὅπου α εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεία.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ἡ εὐθεία (δ) καί ὁ κύκλος (O, R) δέν ἔχουν κοινά σημεῖα (σχ. 180), ἕπεται ὅτι δέν ὑπάρχουν σημεῖα τῆς εὐθείας (δ) ἐσωτερικά γιά τόν κύκλο (O, R)· γιατί, ἄν ὑπῆρχαν, ἡ εὐθεία θά ἔτεμνε τόν κύκλο. Τότε ἀπό τό κέντρο O τοῦ κύκλου φέρνουμε τήν κάθετο OA πρός τή (δ).



Σχ. 179.



Σχ. 180.

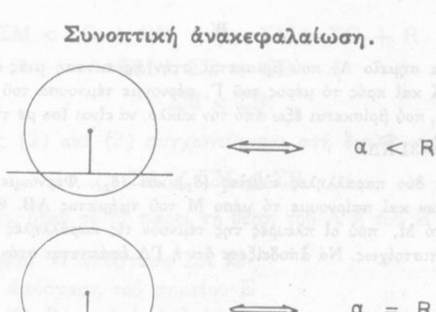
Τό A, ὡς σημεῖο τῆς (δ), θά εἶναι ἐξωτερικό τοῦ κύκλου. Ἄρα, γιά τήν ἀπόσταση $OA = α$ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (O, R) ἀπό τήν εὐθεία (δ), θά εἶναι $OA > R$ ἤ $α > R$.

Στή θέση αὐτή τῆς εὐθείας καί τοῦ κύκλου, ἡ εὐθεία λέγεται ὡς πρός τόν κύκλο ἐξωτερική ἤ μή τέμνουσα.

Γιά τά τρία προηγούμενα θεωρήματα ἀληθεύουν καί τά ἀντίστροφα, πού συνοψίζονται στό ἑπόμενο θεώρημα.

185. Θεώρημα. Ἄν (δ) εἶναι μιά εὐθεία, (O, R) εἶναι ἕνας κύκλος

Συνοπτική ἀνακεφαλαίωση.



Σχ. 181.

καί α εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπὸ τὴν εὐθεία, τότε i) ἄν εἶναι $\alpha < R$, ἡ εὐθεία τέμνει τὸν κύκλο σέ δύο σημεῖα, ii) ἄν $\alpha = R$, ἡ εὐθεία ἐφάπτεται στόν κύκλο καί iii) ἄν $\alpha > R$, ἡ εὐθεία δέν ἔχει κανένα κοινὸ σημεῖο μέ τὸν κύκλο.

'Απόδειξη. **i)** Ἄν εἶναι $\alpha < R$, τότε ἀποκλείεται ἡ εὐθεία νά ἐφάπτεται στόν κύκλο ἤ νά μήν τόν τέμνει, γιατί τότε θά ἔπρεπε νά εἶναι $\alpha = R$ ἤ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἄρα ἡ εὐθεία τέμνει τόν κύκλο (σέ δύο σημεῖα).

ii) Ἄν εἶναι $\alpha = R$, τότε ἀποκλείεται ἡ εὐθεία νά τέμνει τόν κύκλο (σέ δύο σημεῖα) ἤ νά μήν τόν τέμνει, γιατί τότε θά ἔπρεπε νά εἶναι $\alpha < R$ ἤ $\alpha > R$ ἀντιστοίχως. Ἄρα ἡ εὐθεία ἐφάπτεται στόν κύκλο.

iii) Ἄν τέλος εἶναι $\alpha > R$, τό μόνο πού μένει εἶναι νά μήν ἔχουν ἡ εὐθεία καί ὁ κύκλος κοινά σημεῖα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Α΄.

223. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες στά ἄκρα μιᾶς διαμέτρου ἑνός κύκλου εἶναι παράλληλες.

224. Ἔστω ὀρθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ στίς γωνίες $\widehat{A}$ καί $\widehat{\Delta}$. Ἄν ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι ἴση μέ τό ἄθροισμα $AB + \Gamma\Delta$ τῶν δύο βάσεων, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ κύκλος μέ διάμετρο τή ΒΓ ἐφάπτεται στήν ΑΔ.

Β΄.

225. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται στήν προέκταση μιᾶς διαμέτρου ΒΓ ἑνός κύκλου μέ κέντρο Κ καί πρός τό μέρος τοῦ Γ, φέρνουμε τέμνουσα τοῦ κύκλου ΑΔΕ, ἔτσι ὥστε τό τμῆμα ΑΔ, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κύκλο, νά εἶναι ἴσο μέ τήν ἀκτίνα. Νά ἀποδείξετε ὅτι $B\widehat{K}E = 3\Gamma\widehat{K}\Delta$.

226. Δίνονται δύο παράλληλες εὐθεῖες (δ_1) καί (δ_2). Φέρνουμε μία κοινή κάθετο ΑΒ τῶν παραλλήλων καί παίρνουμε τό μέσο Μ τοῦ τμήματος ΑΒ. Θεωροῦμε μιά ὀρθή γωνία μέ κορυφή τό Μ, πού οἱ πλευρές της τέμνουν τίς παράλληλες (δ_1) καί (δ_2) στά σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΓΔ ἐφάπτεται στόν κύκλο μέ διάμετρο τήν ΑΒ.

186. Θεώρημα. Ἔστω κύκλος (Ο, R) καί Σ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου του. Φέρνουμε τή ΣΟ, πού τέμνει τόν κύκλο στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν εἶναι $\Sigma A < \Sigma B$ καί Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου, τότε θά εἶναι καί $\Sigma A \leqq \Sigma M \leqq \Sigma B$.

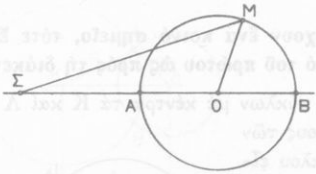
'Απόδειξη. Φέρνουμε τήν ἀκτίνα ΟΜ καί ἀπό τό τρίγωνο ΣΟΜ παίρνουμε (§ 113) :

(1) $|\Sigma O - OM| < \Sigma M.$

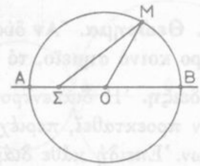
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

i) Ἄν τό Σ εἶναι ἔξω ἀπό τόν κύκλο (Ο, R) (σχ. 182), ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$\Sigma O - OM < \Sigma M \quad \text{ἤ} \quad \Sigma A + AO - OM < \Sigma M \quad \text{ἤ}$$
$$\Sigma A + R - R < \Sigma M \Rightarrow \Sigma A < \Sigma M.$$



Σχ. 182.



Σχ. 183.

ii) Ἄν τό Σ εἶναι μέσα στόν κύκλο (Ο, R) (σχ. 183), ἡ σχέση (1) γράφεται:

$$OM - \Sigma O < \Sigma M \quad \text{ἤ} \quad OM - (OA - \Sigma A) < \Sigma M$$
$$\text{ἤ} \quad R - (R - \Sigma A) < \Sigma M \Rightarrow$$
$$(2) \qquad \Sigma A < \Sigma M.$$

Ἔτσι ἀποδείχθηκε τό πρῶτο σκέλος τῆς ἀποδεικτέας διπλῆς σχέσεως, μέ τήν παρατήρηση ὅτι τό $=$ ἰσχύει, ὅταν τό Μ πάρει τή θέση τοῦ Α.

Μέ ὅμοιο τρόπο, ἀπό τό τρίγωνο ΣΟΜ παίρνουμε καί στίς δύο περιπτώσεις ὅτι:

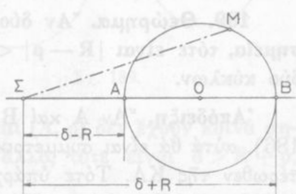
$$\Sigma M < \Sigma O + OM \quad \text{ἤ} \quad \Sigma M < \Sigma O + R \quad \text{ἤ}$$
$$\Sigma M < \Sigma O + OB \quad \text{ἤ}$$
$$(3) \qquad \Sigma M < \Sigma B.$$

Οἱ σχέσεις (2) καί (3) συγχωνεύονται στή διπλή σχέση:

$$\Sigma A \leqq \Sigma M \leqq \Sigma B$$

ὅπου τό $=$ ἰσχύει, ὅταν τό Μ πάρει τή θέση τοῦ Α ἤ τοῦ Β ἀντιστοίχως.

Παρατήρηση. Ἡ ἀπόσταση ΣΑ λέγεται ἐλάχιστη ἀπόσταση τοῦ σημείου Σ ἀπό τόν κύκλο (Ο, R) καί ἡ ΣΒ λέγεται μέγιστη ἀπόσταση τοῦ Σ ἀπό τόν κύκλο (Ο, R).



Σχ. 184.

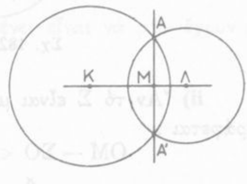
Πόρισμα. Ἄν δ εἶναι ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου Σ ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου (Ο, R), τότε ἡ ἀπόσταση ἑνός ὁποιουδήποτε σημείου Μ τοῦ κύκλου ἀπό τό Σ βρίσκεται μεταξύ $|\delta - R|$ καί $\delta + R$ (σχ. 184), δηλαδή εἶναι $|\delta - R| \leqq \Sigma M \leqq \delta + R$.

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

187. Διάκεντρος δύο κύκλων λέγεται τό εὐθύγραμμο τμῆμα μέ ἄκρα τά κέντρα τῶν δύο κύκλων. Ἡ διάκεντρος δύο κύκλων συνήθως συμβολίζεται μέ τό γράμμα δ.

188. Θεώρημα. Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο, τότε ἔχουν καί δεύτερο κοινό σημεῖο, τό συμμετρικό τοῦ πρώτου ὡς πρός τή διάκεντρο.

Ἀπόδειξη. Ἡ διάκεντρος ΚΛ δύο κύκλων μέ κέντρα τά Κ καί Λ (σχ. 185), ὅταν προεκταθεῖ, περιέχει διαμέτρους τῶν δύο κύκλων. Ἐπειδή κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξονας συμμετρίας γιά τόν κύκλο, ἔπεται ὅτι ἡ διάκεντρος ΚΛ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος τῶν δύο κύκλων. Ἄν ἑπομένως ὑπάρχει ἕνα κοινό σημεῖο Α τῶν δύο κύκλων, ἔπεται ὅτι καί τό συμμετρικό του Α′ ὡς πρός τή διάκεντρο ἀνήκει καί στούς δύο κύκλους.



Σχ. 185.

Πόρισμα Ι. Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, τότε ἡ διάκεντρός τους εἶναι μεσοκάθετος τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν δύο κύκλων.

Πόρισμα ΙΙ. Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, αὐτό βρίσκεται πάνω στή διάκεντρο.

Ἔστω Α τό κοινό σημεῖο δύο κύκλων μέ κέντρα τά Κ καί Λ (σχ. 187). Ἄν τό Α δέν ἦταν πάνω στήν ΚΛ, τότε οἱ δύο κύκλοι θά εἶχαν ὡς κοινό σημεῖο καί τό συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός τήν ΚΛ, δηλαδή θά εἶχαν δύο κοινά σημεῖα. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Ἄρα τό κοινό σημεῖο Α βρίσκεται πάνω στήν ΚΛ.

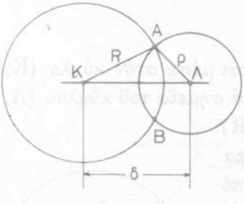
Στήν περίπτωση αὐτή, πού οἱ δύο κύκλοι ἔχουν ἕνα μόνο κοινό σημεῖο, λέμε ὅτι αὐτοί **ἐφάπτονται** καί τό κοινό σημεῖο τους λέγεται **σημεῖο ἐπαφῆς**.

189. Θεώρημα. Ἄν δύο κύκλοι (Κ, R) καί (Λ, ρ) τέμνονται σέ δύο σημεῖα, τότε εἶναι $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, ὅπου δ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων.

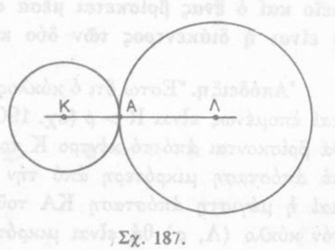
Ἀπόδειξη. Ἄν Α καί Β εἶναι τά κοινά σημεῖα τῶν δύο κύκλων (σχ. 186), αὐτά θά εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ΚΛ. Ἄρα θά βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς ΚΛ. Τότε ὑπάρχει τρίγωνο ΑΚΛ, ἀπό τό ὁποῖο παίρνουμε (§ 113) : $|ΑΚ - ΑΛ| < ΚΛ < ΑΚ + ΑΛ \Rightarrow |R - \rho| < \delta < R + \rho$.

190. Θεώρημα. Ἄν δύο κύκλοι (Κ, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται κι ὁ καθένας βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν ἄλλο, τότε εἶναι $\delta = R + \rho$, ὅπου δ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων.

Ἀπόδειξη. Ἔστω Α τό σημεῖο ἐπαφῆς (σχ. 187). Αὐτό εἶναι ἐνδιάμεσο τῶν κέντρων Κ καί Λ τῶν δύο κύκλων, γιατί ὁ καθένας βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν ἄλλο. Ἄρα $ΚΛ = ΚΑ + ΑΛ \Rightarrow δ = R + ρ$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά.



Σχ. 186

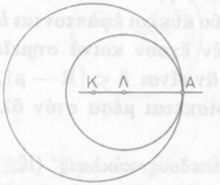


Σχ. 187.

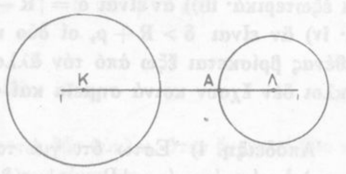
191. Θεώρημα. Ἄν δύο κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) ἐφάπτονται καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο, τότε εἶναι $δ = |R - ρ|$, ὅπου δ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων.

Ἀπόδειξη. Ἔστω Α τό σημεῖο ἐπαφῆς, τό ὁποῖο βρίσκεται πάνω στήν ΚΛ (σχ. 188). Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται μέσα στόν κύκλο (K, R). Τότε εἶναι $R > ρ$ καί τό Λ, ὡς ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ κύκλου (K, R), εἶναι ἐνδιάμεσο τῶν Κ καί Α. Ἄρα $ΚΑ = ΚΛ + ΛΑ \Rightarrow R = δ + ρ \Rightarrow δ = R - ρ$. Γενικά γράφουμε $δ = |R - ρ|$, ὅταν δέ γνωρίζουμε τή σχέση μεγέθους τῶν ἀκτίνων.

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε ὅτι οἱ δύο κύκλοι **ἐφάπτονται ἐξωτερικά.**



Σχ. 188.



Σχ. 189.

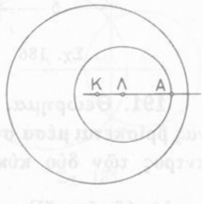
192. Θεώρημα. Ἄν δύο κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) δέν ἔχουν κοινά σημεῖα καί ὁ καθένας βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν ἄλλο, τότε εἶναι $δ > R + ρ$, ὅπου δ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων.

Ἀπόδειξη. Ἀφοῦ ὁ κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν κύκλο (K, R) (σχ. 189), ἕπεται ὅτι κάθε σημεῖο τοῦ κύκλου (Λ, ρ) βρίσκεται ἀπό τό Κ σέ ἀπόσταση μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου (K, R). Τότε καί ἡ ἐλάχιστη ἀπόσταση ΚΑ τοῦ σημείου Κ ἀπό τόν κύκλο (Λ, ρ) θά εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτίνα R, δηλαδή (§ 186) θά εἶναι $KA > R$ ἤ $\delta - \rho > R \Rightarrow \delta > R + \rho$.

193. Θεώρημα. Ἄν δύο κύκλοι (K, R) καί (Λ, ρ) δέν ἔχουν κοινό σημεῖο καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο, τότε εἶναι $\delta < |R - \rho|$, ὅπου δ εἶναι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι ὁ κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται μέσα στόν κύκλο (K,R) καί ἑπομένως εἶναι $R > \rho$ (σχ. 190). Τότε ὅλα τά σημεῖα τοῦ κύκλου (Λ, ρ) θά βρίσκονται ἀπό τό κέντρο K τοῦ κύκλου (K, R) σέ ἀπόσταση μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα R. Ἄρα καί ἡ μέγιστη ἀπόσταση KA τοῦ σημείου K ἀπό τόν κύκλο (Λ, ρ) θά εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀκτίνα R. Δηλαδή (§ 186) θά εἶναι:

$$KA < R \text{ ἤ } \delta + \rho < R \Rightarrow \delta < R - \rho.$$



Σχ. 190.

Γενικά γράφουμε $\delta < |R - \rho|$, ὅταν δέ γνωρίζουμε τή σχέση μεγέθους τῶν δύο ἀκτίνων.

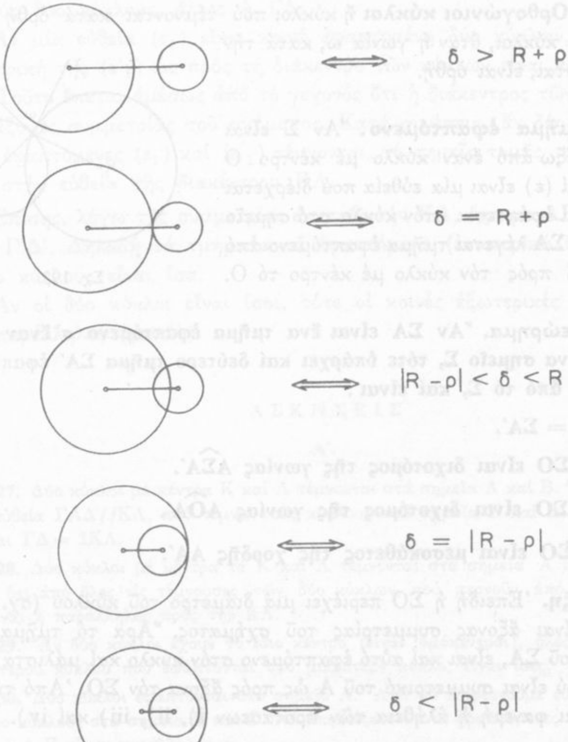
Γιά τά προηγούμενα θεωρήματα, πού ἀναφέρονται στίς σχετικές θέσεις δύο κύκλων, ἀληθεύουν καί τά ἀντίστροφα· αὐτά συνοψίζονται στό ἑπόμενο θεώρημα:

194. Θεώρημα. Ἔστω ὅτι (K, R) καί (Λ, ρ) εἶναι δύο συνεπίπεδοι κύκλοι μέ διάκεντρο δ. Τότε: i) ἄν εἶναι $|R - \rho| < \delta < R + \rho$, οἱ δύο κύκλοι τέμνονται σέ δύο σημεῖα· ii) ἄν εἶναι $\delta = R + \rho$, οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά· iii)) ἄν εἶναι $\delta = |R - \rho|$, οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά· iv) ἄν εἶναι $\delta > R + \rho$, οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινά σημεῖα καί ὁ καθένας βρίσκεται ἔξω ἀπό τόν ἄλλο· καί v) ἄν εἶναι $\delta < |R - \rho|$, οἱ δύο κύκλοι δέν ἔχουν κοινά σημεῖα καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο.

Ἀπόδειξη. i) Ἔστω ὅτι γιά τούς συνεπίπεδους κύκλους (K, R) καί (Λ, ρ) ἰσχύει ἡ σχέση $|R - \rho| < \delta < R + \rho$. Τότε ἀποκλείεται τό ἐνδεχόμενο οἱ δύο κύκλοι νά ἐφάπτονται ἐξωτερικά ἤ ἐσωτερικά, ἐπειδή τότε θά ἦταν $\delta = R + \rho$ ἤ $\delta = |R - \rho|$ ἀντιστοίχως· ἀλλά αὐτό ἀντίκειται στήν ὑπόθεση. Ἐπίσης ἀποκλείεται οἱ δύο κύκλοι νά μήν ἔχουν κοινό σημεῖο, ἐπειδή τότε θά ἦταν $\delta > R + \rho$ ἤ $\delta < |R - \rho|$· ἀλλά καί αὐτό ἀντίκειται στήν ὑπόθεση. Ἄρα τό μόνο πού μένει γιά τούς δύο κύκλους εἶναι ὅτι αὐτοί τέμνονται σέ δύο σημεῖα.

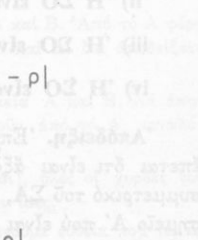
Μέ τήν ἴδια μέθοδο τῆς ἀπαγωγῆς σέ ἄτοπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συνθῆκες $\delta = R + \rho$, $\delta = |R - \rho|$, $\delta > R + \rho$, $\delta < |R - \rho|$ ἐξασφαλίζουν τίς ἀντίστοιχες θέσεις γιά τούς δύο κύκλους.

Συνοπτική ἀνακεφαλαίωση



Σχ. 191.

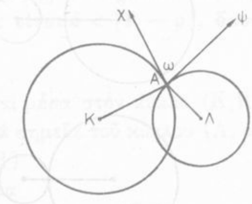
195. Ὁμόκεντροι κύκλοι λέγονται δύο κύκλοι, ὅταν ἔχουν τό ἴδιο κέντρο. Ἡ διάκεντρος δύο ὁμόκεντρων κύκλων εἶναι μηδενική καί ὁ ἕνας βρίσκεται μέσα στόν ἄλλο (σχ. 192).



Σχ. 192.

196. Γωνία δύο τεμνομένων κύκλων λέγεται ἡ κυρτή γωνία ω, τήν ὁποία σχηματίζουν οἱ ἐφαπτόμενες ἡμιευθεῖες Ax καί Ay τῶν δύο κύκλων σέ ἕνα ἀπό τά κοινά σημεῖα τους A, ὅταν οἱ ἡμιευθεῖες αὐτές δέν τέμνουν τούς κύκλους (σχ. 193). Ἀξίζει νά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ γωνία ω τῶν δύο κύκλων εἶναι παραπληρωματική τῆς γωνίας $\widehat{KA\Lambda}$, πού σχηματίζεται ἀπό τίς ἀκτίνες τῶν δύο κύκλων πού ἀντιστοιχοῦν στό σημεῖο Α, (γιατί;)

197. 'Ορθογώνιοι κύκλοι ἤ κύκλοι πού τέμνονται κατά ὀρθή γωνία λέγονται δύο κύκλοι, ὅταν ἡ γωνία ω, κατά τήν ὁποία τέμνονται, εἶναι ὀρθή.



Σχ. 193.

198. Τμῆμα ἐφαπτόμενο. Ἄν Σ εἶναι ἕνα σημεῖο ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο μέ κέντρο Ο (σχ. 194) καί (ε) εἶναι μία εὐθεία πού διέρχεται ἀπό τό Σ καί ἐφάπτεται στόν κύκλο στό σημεῖο Α, τό τμῆμα ΣΑ λέγεται τμῆμα ἐφαπτόμενο ἀπό τό σημεῖο Σ πρός τόν κύκλο μέ κέντρο τό Ο.

199. Θεώρημα. Ἄν ΣΑ εἶναι ἕνα τμῆμα ἐφαπτόμενο σ' ἕναν κύκλο (Ο, R) ἀπό ἕνα σημεῖο Σ, τότε ὑπάρχει καί δεύτερο τμῆμα ΣΑ' ἐφαπτόμενο στόν (Ο, R) ἀπό τό Σ, καί εἶναι:

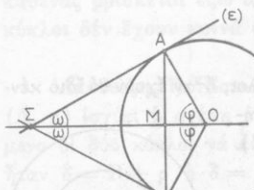
i) ΣΑ = ΣΑ'.

ii) Ἡ ΣΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{A\Sigma A'}$.

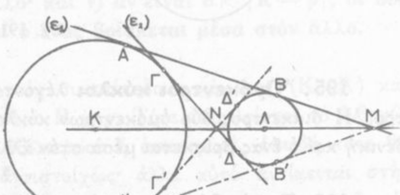
iii) Ἡ ΣΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{AOA'}$.

iv) Ἡ ΣΟ εἶναι μεσοκάθετος τῆς χορδῆς ΑΑ'.

'Απόδειξη. 'Επειδή ἡ ΣΟ περιέχει μιά διάμετρο τοῦ κύκλου (σχ. 194), ἔπεται ὅτι εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Ἄρα τό τμῆμα ΣΑ', συμμετρικό τοῦ ΣΑ, εἶναι καί αὐτό ἐφαπτόμενο στόν κύκλο καί μάλιστα σ' ἕνα σημεῖο Α' πού εἶναι συμμετρικό τοῦ Α ὡς πρός ἄξονα τόν ΣΟ. 'Από τή συμμετρία γίνεται φανερή ἡ ἀλήθεια τῶν προτάσεων i), ii), iii) καί iv).



Σχ. 194.



Σχ. 195.

200. Κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων λέγεται μιά εὐθεία πού ἐφάπτεται καί στούς δύο κύκλους.

Μία κοινή ἐφαπτομένη (ε_1) δύο κύκλων (Κ, R) καί (Λ, ρ) (σχ. 195) λέγεται ἐξωτερική, ἄν ἀφήνει πρός τό ἴδιο μέρος της τούς δύο κύκλους, ὅπως ἡ ΑΒ. Μία κοινή ἐφαπτομένη (ε_2) λέγεται ἐσωτερική, ἄν ἀφήνει ἑκατέρωθέν της τούς δύο κύκλους, ὅπως ἡ ΓΔ.

Ἄν μία εὐθεία (ε_1) εἶναι κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων, τότε καί ἡ συμμετρική της (ε'_1) ὡς πρός τή διάκεντρο τῶν κύκλων εἶναι κοινή ἐφαπτομένη. Τοῦτο ἕπεται ἀμέσως ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν δύο κύκλων εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος. Κατά συνέπεια, ἄν δύο συμμετρικές κοινές ἐφαπτόμενες (ε_1) καί (ε'_1) τέμνονται, τό σημεῖο τομῆς τους βρίσκεται πάνω στήν εὐθεία τῆς διακέντρου ΚΛ.

Ἐπίσης, λόγω τῆς συμμετρίας ὡς πρός τήν ΚΛ, ἔχουμε $ΑΒ = Α'Β'$ καί $ΓΔ = Γ'Δ'$. Δηλαδή τά τμήματα τά ἐφαπτόμενα (ἐσωτερικά ἤ ἐξωτερικά) σέ δύο κύκλους εἶναι ἴσα.

Ἄν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἴσοι, τότε οἱ κοινές ἐξωτερικές ἐφαπτόμενες εἶναι παράλληλες (γιατί;)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

227. Δύο κύκλοι μέ κέντρα Κ καί Λ τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τό Α φέρνουμε εὐθεία ΓΑΔ//ΚΛ, πού τέμνει τούς κύκλους στά σημεῖα Γ καί Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $ΓΔ = 2ΚΛ$.

228. Δύο κύκλοι μέ κέντρα τά Κ καί Λ τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἀπό ὅλες τίς τέμνουσες τῶν δύο κύκλων, πού περνοῦν ἀπό τό Α, μεγαλύτερη εἶναι ἡ παράλληλος πρός τήν ΚΛ.

229. Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν τό ἴδιο κέντρο (εἶναι ὁμόκεντροι), ὅλες οἱ χορδές τοῦ μεγαλύτερου κύκλου πού ἐφάπτονται στό μικρότερο κύκλο, εἶναι ἴσες.

230. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται στό σημεῖο Α. Ἀπό τό Α φέρνουμε εὐθεία πού τέμνει τούς δύο κύκλους στά σημεῖα Β καί Γ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τῶν δύο κύκλων στά Β καί Γ εἶναι παράλληλες.

231. Ἀπό ἕνα σημεῖο Α, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό έναν κύκλο μέ κέντρο Κ, θεωροῦμε τίς ἐφαπτόμενες ΑΒ καί ΑΓ τοῦ κύκλου καί ἔστω Κ' τό συμμετρικό τοῦ Κ ὡς πρός τήν ΑΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{ΒΑΚ'} = 3\widehat{ΒΑΚ}$.

232. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ κοινή ἐφαπτομένη δύο κύκλων εἶναι μικρότερη ἤ τό πολύ ἴση πρός τή διάκεντρο τῶν δύο κύκλων. Πότε εἶναι ἴση;

233. Δύο κύκλοι μέ κέντρα τά Κ καί Λ ἐφάπτονται σέ τρίτο κύκλο στά σημεῖα Α καί Β. Ἄν ἡ ΑΒ τέμνει τόν κύκλο Λ στό σημεῖο Γ, νά ἀποδείξετε ὅτι ΚΑ//ΛΓ.

Β΄.

234. Δίνεται κύκλος μέ κέντρο Κ καί μία διάμετρός του ΑΒ. Μέ κέντρο τό σημεῖο Γ τῆς ἀκτίνας ΚΒ καί ἀκτίνα ΓΚ γράφουμε κύκλο πού τέμνει τόν (Κ, ΚΒ) στά σημεῖα Δ καί Ε. Ἄν ἡ εὐθεία ΓΔ τέμνει τόν κύκλο (Κ, ΚΒ) στό σημεῖο Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{ΑΚΖ} = 3\widehat{ΒΚΔ}$.

235. Δύο κύκλοι μέ ἀκτίνες ρ καί 3ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικά. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ γωνία τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

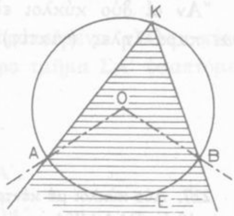
236. Δύο κύκλοι μέ κέντρα τά Κ καί Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό Α. Ἄν ΒΓ εἶναι ἡ κοινή ἐξωτερική ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων, νά ἀποδείξετε ὅτι α) $\widehat{ΒΑΓ} = 1^{\llcorner}$, β) ὁ κύκλος μέ διάμετρο τή ΒΓ ἐφάπτεται στή διάκεντρο στό Α, γ) ὁ κύκλος μέ διάμετρο τήν ΚΛ ἐφάπτεται στή ΒΓ στό μέσο της.

237. Δίνεται ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΚΒ. Φέρνουμε τίς ἐφαπτόμενες ἡμιευθεῖες Αx καί By πρός τό μέρος τοῦ ἡμικυκλίου καί τρίτη ἐφαπτομένη τοῦ ἡμικυκλίου, πού τέμνει τίς Αx καί By στά σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι α) ΓΔ = ΑΓ + ΒΔ, β) $\widehat{ΓΚΔ} = 1^{\llcorner}$.

201. Ἐγγεγραμμένη γωνία σέ κύκλο (O,R) λέγεται κάθε γωνία $\widehat{AKB}$, πού ἔχει τήν κορυφή της K πάνω στόν κύκλο (O, R) καί οἱ πλευρές της τέμνουν τόν κύκλο στά σημεῖα A καί B.

Γιά τή γωνία $\widehat{AKB}$ (σχ. 196) λέμε ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένη στό τόξο $\widehat{AKB}$ πού δέν περιέχεται μέσα στή γωνία.

Ἡ ἐπίκεντρη γωνία $\widehat{AOB}$, πού περιέχει τό τόξο $\widehat{AEB}$, λέγεται ἐπίκεντρη ἀντίστοιχη στήν ἐγγεγραμμένη. Εἶναι φανερό ὅτι, στήν ἀντιστοιχία αὐτή, κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία ἔχει μία ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη, ἐνῶ μία ἐπίκεντρη γωνία εἶναι ἀντίστοιχη σέ ἄπειρες ἐγγεγραμμένες, πού οἱ κορυφές τους εἶναι σημεῖα τοῦ τόξου $\widehat{AKB}$.



Σχ. 196.

202. Σχέση ἐπίκεντρης γωνίας πρός μία ἀντίστοιχή της ἐγγεγραμμένη.

Θεώρημα. Σέ ἕνα κύκλο μία ἐπίκεντρη γωνία εἶναι διπλάσια ἀπό κάθε ἀντίστοιχή της ἐγγεγραμμένη.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας κύκλος (O, R), $\widehat{AOB}$ μία ἐπίκεντρη γωνία καί $\widehat{AMB}$ μία ἀντίστοιχή της ἐγγεγραμμένη. Θά διακρίνουμε τρεῖς περιπτώσεις :

i) Ἄν ἡ κορυφή M βρίσκεται στήν προέκταση τῆς AO (σχ. 197), τότε τό τρίγωνο OMB εἶναι ἰσοσκελές μέ OM = OB = R. Ἄρα $\widehat{OMB} = \widehat{OBM} = \omega$ ἤ

(1) $\widehat{AMB} = \omega.$

Ἑπομένως θά εἶναι καί

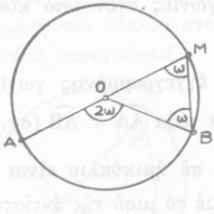
(2) $\widehat{AOB} = \omega + \omega = 2\omega$

ὡς ἐξωτερική τοῦ τριγώνου OMB.

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}.$$

ii) Ἄν ἡ κορυφή M βρίσκεται μέσα στήν κατακορυφήν γωνία τῆς $\widehat{AOB}$



Σχ. 197.

Σχ. 198.

(σχ. 198), τότε ἡ ἡμιευθεία MO τέμνει τόν κύκλο σέ ἕνα σημεῖο Γ καί εἶναι :

(3) $$\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB} \text{ καί}$$

(4) $$\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB}.$$

Τότε, κατά τό προηγούμενο, θά ἔχουμε :

(5) $$\widehat{AO\Gamma} = 2\widehat{AM\Gamma} \quad \text{καί}$$

(6) $$\widehat{\Gamma OB} = 2\widehat{\Gamma MB}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τίς σχέσεις (5) καί (6) καί παίρνουμε : $\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2(\widehat{AM\Gamma} + \widehat{\Gamma MB})$· λόγω τῶν σχέσεων (4) καί (3) ἡ τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}.$$

iii) Ἄν ἡ κορυφή M βρίσκεται ἔξω ἀπό τήν κατακορυφήν γωνία τῆς $\widehat{AOB}$ (σχ. 199), τότε ἡ ἡμιευθεία MO τέμνει τόν κύκλο σέ ἕνα σημεῖο Γ καί εἶναι :

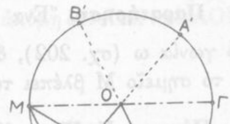
(7) $\widehat{AMB} = \widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma}$ καί

(8) $\widehat{AOB} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma}$.

Τότε, κατά τήν περίπτωση i), ἔχουμε :

(9) $\widehat{AO\Gamma} = 2\widehat{AM\Gamma}$ καί

(10) $\widehat{BO\Gamma} = 2\widehat{BM\Gamma}$.



Σχ. 199.

Ἀφαιροῦμε κατά μέλη τίς σχέσεις (9) καί (10) καί παίρνουμε : $\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma} = 2(\widehat{AM\Gamma} - \widehat{BM\Gamma})$ καί λόγω τῶν σχέσεων (8) καί (7) ἡ τελευταία γράφεται :

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}.$$

Πόρισμα Ι. Σ' ἕναν κύκλο ὅλες οἱ ἐγγεγραμμένες γωνίες στό ἴδιο τόξο (ἤ σέ ἴσα τόξα) εἶναι ἴσες.

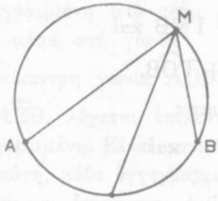
Πραγματικά εἶναι ἴσες, ἐπειδή ὅλες εἶναι ἴσες μέ τό μισό τῆς ἴδιας ἐπίκεντρης γωνίας (ἤ ἴσων ἐπίκεντρων γωνιῶν).

Πόρισμα ΙΙ. Δύο ἴσες ἐγγεγραμμένες γωνίες στόν ἴδιο κύκλο ἤ σέ ἴσους κύκλους ὁρίζουν ἴσα τόξα.

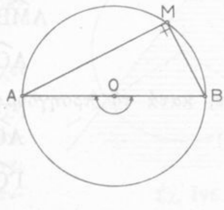
Πόρισμα ΙΙΙ. Ἡ διχοτόμος ΜΔ μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{AMB}$ σέ τόξο $\widehat{AB}$ χωρίζει τό τόξο τοῦτο σέ δύο ἴσα τόξα $\widehat{A\Delta} = \widehat{\Delta B}$ (σχ. 200).

Πόρισμα IV. Μία γωνία ἐγγεγραμμένη σέ ἡμικύκλιο εἶναι ὀρθή.

Πραγματικά εἶναι ὀρθή, ἀφοῦ εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ἀντίστοιχής της ἐπίκεντρης γωνίας, πού εἶναι πεπλατυσμένη (σχ. 201).



Σχ. 200.



Σχ. 201.

Ἀληθεύει καί τό ἀντίστροφο· δηλαδή, ἄν μιά ὀρθή γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη σέ κύκλο, τό τόξο πού ὁρίζει πάνω στόν κύκλο εἶναι ἡμικύκλιο. Γιατί ἡ ἀντίστοιχής της ἐπίκεντρη γωνία θά εἶναι πεπλατυσμένη καί ἑπομένως θά χωρίζει τόν κύκλο σέ δύο ἡμικύκλια.

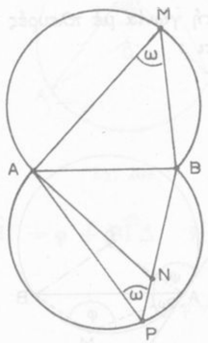
Παρατήρηση. Ἕνα τμῆμα ΑΒ λέμε ὅτι φαίνεται ἀπό ἕνα σημεῖο Μ ὑπό γωνία ω (σχ. 202), ὅταν εἶναι $\widehat{AMB} = \omega$. Τό ἴδιο ἐννοοῦμε, ὅταν λέμε ὅτι τό σημεῖο Μ βλέπει τό τμῆμα ΑΒ ὑπό γωνία ω.

Πόρισμα V. Ἕνα τόξο $\widehat{AMB}$ καί τό συμμετρικό του ὡς πρός τήν ΑΒ (σχ. 202) ἀποτελοῦν τό γ. τόπο τῶν σημείων, ἀπό τά ὁποῖα τό τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό σταθερή γωνία ω.

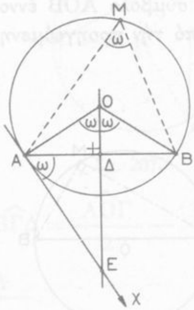
Ἄν ἕνα σημεῖο Ν δέν ἀνήκει στό τόξο $\widehat{AB}$, ἀποκλείεται νά εἶναι $\widehat{ANB} = \omega$. Γιατί, ἄν ἡ ΝΒ τέμνει τό τόξο $\widehat{AB}$ στό σημεῖο Ρ, θά εἶναι $\widehat{APB} = \omega$. Ἄν ἦταν καί $\widehat{ANB} = \omega \Rightarrow AP//AN$. Αὐτό ὅμως εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ὁ γ. τόπος εἶναι τά δύο τόξα $\widehat{AB}$.

203. Γωνία πού σχηματίζεται ἀπό χορδή καί ἐφαπτομένη. Θεώρημα. Ἡ γωνία πού σχηματίζεται ἀπό μιά χορδή κύκλου καί μιά ἐφαπτομένη στό ἕνα ἄκρο τῆς χορδῆς εἶναι ἴση μέ τήν ἐγγεγραμμένη γωνία στό τόξο πού δέν περιέχεται μέσα στήν πρώτη γωνία.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ἕνας κύκλος μέ κέντρο Ο, ΑΒ μιά χορδή του καί Αx ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό ἄκρο Α τῆς χορδῆς (σχ. 203). Διακρίνουμε τίς ἀκόλουθες περιπτώσεις :



Σχ. 202.



Σχ. 203.

i) Ἄν ἡ γωνία ω εἶναι ὀξεία, ἡ χορδή ΑΒ δέν εἶναι διάμετρος. Τότε φέρνουμε τήν ἀκτίνα ΟΑ, πού θά εἶναι κάθετη στήν Αx, καί τήν ΟΔ $\perp$ ΑΒ, πού τέμνει τήν Αx στό σημεῖο Ε. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καί ΟΑΕ ἔχουν τή γωνία $\widehat{E}$ κοινή. Ἄρα θά εἶναι ἰσογώνια καί ἐπομένως θά ἔχουν καί

$$(1) \qquad \widehat{\Delta A E} = \widehat{AOE} = \omega.$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι $\widehat{BO\Delta} = \widehat{AO\Delta} = \omega$ λόγω τῆς συμμετρίας ὡς πρός τόν ἄξονα ΟΔ καί ἐπομένως $\widehat{AOB} = 2\omega$. Γνωρίζουμε ἀκόμη ὅτι εἶναι καί $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (§ 202). Ἄρα :

$$(2) \qquad \widehat{AMB} = \omega.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι εἶναι $\widehat{\Delta A E} = \widehat{AMB}$, δηλαδή :

$$\mathbf{\widehat{BAx} = \widehat{AMB}.}$$

ii) Ἄν ἡ γωνία εἶναι ὀρθή, ἡ χορδή ΑΒ εἶναι διάμετρος (σχ. 204). Ἀλλά τότε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AMB}$ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη σέ ἡμικύκλιο. Ἄρα :

$$\mathbf{\widehat{BAx} = \widehat{AMB}.}$$

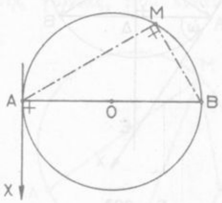
iii) Ἄν ἡ γωνία $\widehat{BAx} = \varphi$ εἶναι ἀμβλεία (σχ. 205), ἡ χορδή ΑΒ δέν εἶναι διάμετρος. Τότε γιά τήν παραπληρωματική γωνία ω γνωρίζουμε ὅτι

$$\omega = \frac{\widehat{AOB}}{2}. \text{ Ἄρα } \widehat{BAx} = \varphi = 2^{L} - \omega = 2^{L} - \frac{\widehat{AOB}}{2} =$$

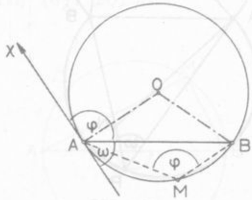
$$= \frac{4^{L} - \widehat{AOB}}{2} = \frac{\widecheck{AOB}}{2} = \widehat{AMB},$$

ὅπου μέ τό σύμβολο $\widecheck{AOB}$ ἐννοοῦμε τή μή κυρτή γωνία μέ πλευρές τίς ΟΑ καί ΟΒ. Ἀπό τήν προηγούμενη σχέση ἔπεται ὅτι :

$$\mathbf{\widehat{BAx} = \widehat{AMB}.}$$



Σχ. 204.



Σχ. 205.

204. Γωνία δύο τεμνομένων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Θεώρημα. Ἄν δύο χορδές ἑνός κύκλου τέμνονται σέ σημεῖο ἐσωτερικό τοῦ κύκλου, ἡ γωνία πού σχηματίζουν εἶναι ἴση μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ἐπίκεντρων γωνιῶν, οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στά τόξα πού περιλαμβάνονται μέσα στή γωνία καί μέσα στήν κατακορυφήν της.

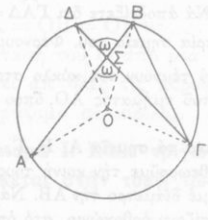
Ἀπόδειξη. Ἄς πάρουμε δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κύκλου (Ο, R), πού τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Σ ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (σχ. 206). Ἄν εἶναι ω ἡ γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τίς χορδές, φέρνουμε τή ΒΓ, καί ἀπό τό τρίγωνο ΣΒΓ παίρνουμε :

$$\omega = \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma\Delta} = \frac{\widehat{A O \Gamma}}{2} + \frac{\widehat{B O \Delta}}{2}.$$

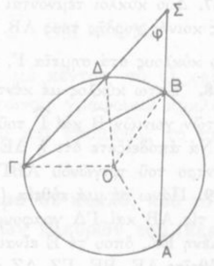
Ἄρα : $$\omega = \frac{\widehat{A O \Gamma} + \widehat{B O \Delta}}{2}.$$

205. Θεώρημα. Ἄν δύο χορδές ἑνός κύκλου τέμνονται (ὅταν προεκταθοῦν) ἔξω ἀπό τόν κύκλο, ἡ γωνία πού σχηματίζουν εἶναι ἴση μέ τήν ἡμιδιαφορά τῶν ἐπίκεντρων γωνιῶν, πού ἀντιστοιχοῦν στά τόξα τά περιλαμβανόμενα μέσα στή γωνία.

Ἀπόδειξη. Ἂς πάρουμε δύο χορδές ΑΒ καί ΓΔ ἑνός κύκλου (Ο, R), πού τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Σ ἔξω ἀπό τόν κύκλο (σχ. 207). Ἂν φ εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζουν, φέρνουμε τή ΒΓ καί ἀπό τό τρίγωνο ΣΒΓ παίρνουμε :



Σχ. 206.



Σχ. 207.

$$\widehat{ΑΒΓ} = φ + \widehat{ΒΓΔ} \quad ἤ \quad φ = \widehat{ΑΒΓ} - \widehat{ΒΓΔ} = \frac{\widehat{ΑΟΓ}}{2} - \frac{\widehat{ΒΟΔ}}{2}.$$

Ἄρα $$φ = \frac{\widehat{ΑΟΓ} - \widehat{ΒΟΔ}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

238. Δύο ἴσοι κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τό Α φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία, πού τέμνει τούς κύκλους στά Γ καί Δ, καί ἀπό τό Β φέρνουμε ΒΜ $\perp$ ΓΑΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό Μ εἶναι τό μέσο τοῦ τμήματος ΓΔ.

239. Ἀπό τό σημεῖο ἐπαφῆς Α δύο ἐφαπτομένων κύκλων φέρνουμε δύο εὐθεῖες, πού τέμνουν τούς κύκλους. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ δύο χορδές, πού ὁρίζονται ἀπό τά σημεῖα τομῆς τῶν κύκλων μέ τίς εὐθεῖες, εἶναι παράλληλες.

240. Δύο κύκλοι μέ ἀκτῖνες ρ καί 2ρ ἐφάπτονται ἐσωτερικά στό σημεῖο Α. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε χορδή τοῦ μεγαλύτερου κύκλου, πού περνᾶ ἀπό τό Α, διχοτομεῖται ἀπό τό μικρότερο κύκλο.

241. Μέ διαμέτρους τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε δύο κύκλους. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό δεύτερο σημεῖο Δ τῆς τομῆς τῶν δύο κύκλων βρίσκεται πάνω στή ΒΓ καί ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετη στή ΒΓ.

242. Ἂν Α, Β, Γ, Δ εἶναι τέσσερα διαδοχικά σημεῖα ἑνός κύκλου καί Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{ΑΒ}, \widehat{ΒΓ}, \widehat{ΓΔ}, \widehat{ΔΑ}$, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ χορδές ΚΜ καί ΛΝ εἶναι κάθετες.

243. Μέ διαμέτρους τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ γράφουμε δύο κύκλους. Ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε παράλληλες χορδές ΒΔ καί ΓΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Δ, Α καί Ε βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

244. Κύκλος μέ κέντρο Κ ἐφάπτεται σέ ἄλλον κύκλο μέ κέντρο Λ στό σημεῖο Α καί ἐπίσης ἐφάπτεται σέ εὐθεία (ε) στό σημεῖο Β. Ἂν ἡ ΒΑ τέμνει τόν κύκλο Λ στό σημεῖο Γ, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΓΛ $\perp$ (ε).

245. Μέ διάμετρο μία ἀπό τίς κάθετες πλευρές ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου γράφουμε κύκλο. Ἂν αὐτός τέμνει τήν ὑποτείνουσα στό σημεῖο Μ, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου στό σημεῖο Μ περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Β΄.

246. Δίνεται κύκλος μέ κέντρο Ο καί μία διάμετρός του ΑΒ. Φέρνουμε τήν ἀκτίνα ΟΓ, κάθετη στήν ΑΒ, καί μία ὁποιαδήποτε χορδή ΓΔ, πού τέμνει τήν ΑΒ στό σημεῖο Ε. Ἄν ἡ ἐφαπτομένη στό Δ τέμνει τήν ΑΒ στό Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΖΔ = ΖΕ.

247. Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β καί ἔστω Μ ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς κοινῆς χορδῆς τους ΑΒ. Ἀπό τό Μ θεωροῦμε μία ὁποιαδήποτε εὐθεία, πού τέμνει τούς δύο κύκλους στά σημεῖα Γ, Δ, Ε, Ζ διαδοχικά. Νά ἀποδείξετε ὅτι $\widehat{ΓΑΔ} = \widehat{ΕΒΖ}$.

248. Ἔστω κύκλος μέ κέντρο Κ καί Α, Β, Γ τρία σημεῖα του. Φέρνουμε τίς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, πού τέμνουν τόν κύκλο στά σημεῖα Δ καί Ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΟ, ὅπου τό Ο εἶναι τό ἔγκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

249. Πάνω σέ μιά εὐθεία (δ) παίρνουμε διαδοχικά τά σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Μέ διαμέτρους τίς ΑΒ καί ΓΔ γράφουμε δύο κύκλους καί θεωροῦμε τήν κοινή τους ἐξωτερική ἐφαπτομένη ΕΖ, ὅπου τό Ε εἶναι σημεῖο τοῦ κύκλου μέ διάμετρο τήν ΑΒ. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ εὐθεῖες ΑΕ, ΒΕ, ΓΖ, ΔΖ τέμνονται καί σχηματίζουν ὀρθογώνιο, στό ὁποῖο ἡ ἄλλη διαγώνιος εἶναι κάθετη στή διάκεντρο τῶν δύο κύκλων.

250. Ἀπό τό ἕνα κοινό σημεῖο Α δύο τεμνομένων κύκλων θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία ΒΑΓ πού τούς τέμνει. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες στά Β καί Γ τέμνονται κατά σταθερή γωνία.

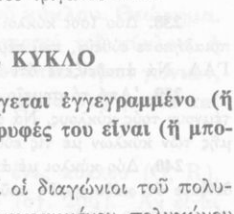
251. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐσωτερικά στό Α. Θεωροῦμε μιά χορδή ΒΓ τοῦ μεγαλύτερου κύκλου, πού ἐφάπτεται στόν μικρότερο κύκλο στό σημεῖο Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τή γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$.

252. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικά στό σημεῖο Α. Θεωροῦμε μιά χορδή ΒΓ τοῦ ἑνός κύκλου πού, ὅταν προεκταθεῖ, ἐφάπτεται στόν ἄλλο κύκλο στό σημεῖο Δ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας $\widehat{Α}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

206. Ὁρισμός. Ἕνα πολύγωνο ΑΒΓ. . . Ν λέγεται ἐγγεγραμμένο (ἤ ἐγγράψιμο) σέ κύκλο τότε καί μόνο τότε, ὅταν οἱ κορυφές του εἶναι (ἤ μποροῦν νά εἶναι) σημεῖα ἑνός κύκλου.

Ἀπό τόν ὁρισμό ἔπεται ὅτι οἱ πλευρές, ὅπως καί οἱ διαγώνιοι τοῦ πολυγώνου, εἶναι χορδές τοῦ κύκλου. Οἱ κορυφές τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου λέγονται ὁμοκυκλικά ἤ ὁμοκύκλια σημεῖα. Ὁ κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος περί τό πολύγωνο.



Σχ. 208.

207. Θεώρημα. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ὥστε ἕνα πολύγωνο ΑΒΓ. . . Ν μέ ν πλευρές νά εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (O,R), εἶναι νά περνοῦν οἱ ν - 1 μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν του ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Ἀπόδειξη. i) Εἶναι ἀναγκαία : Ἔστω τό ἐγγεγραμμένο πολύγωνο ΑΒΓ. . . Ν στόν κύκλο (O, R) (σχ. 208). Ἐπειδή οἱ πλευρές του εἶναι χορδές τοῦ κύκλου, ἔπεται ὅτι ἡ μεσοκάθετος κάθε πλευρᾶς περνᾶ ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου. Ἄρα τό θεώρημα ἀληθεύει.

ii) Εἶναι ἱκανή : Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι στό πολύγωνο ΑΒΓ. . .ΜΝ οἱ μεσοκάθετοι τῶν $\nu - 1$ πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, . . . , ΜΝ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο. Τότε τό σημεῖο Ο, ἀφοῦ ἀνήκει σέ καθεμιά ἀπό τίς μεσοκαθέτους αὐτές, ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τῶν πλευρῶν τούτων, δηλαδή :

$$OA = OB, \quad OB = O\Gamma, \quad \ldots, \quad OM = ON.$$

Ἄρα $OA = OB = O\Gamma = \ldots = ON$. Ἄν τώρα μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν ἀπόσταση τοῦ Ο ἀπό μιά κορυφή τοῦ πολυγώνου γράψουμε κύκλο, αὐτός θά περάσει ἀπ' ὅλες τίς κορυφές τοῦ πολυγώνου καί ἑπομένως τό πολύγωνο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

Πόρισμα Ι. Κάθε τρίγωνο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο, πού τό κέντρο του βρίσκεται στήν τομή τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν του (περίκεντρο § 156).

Πόρισμα ΙΙ. Ἀπό τρία σημεῖα, πού δέν βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία, περνᾶ ἕνας καί μόνο ἕνας κύκλος. Γιατί ἕνα εἶναι τό περίκεντρο τοῦ τριγώνου μέ κορυφές τά σημεῖα αὐτά.

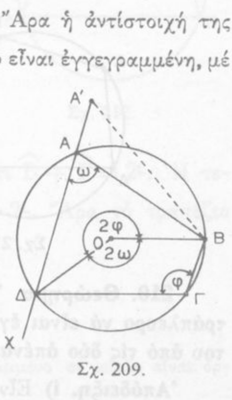
Πόρισμα ΙΙΙ. Ἄν δύο κύκλοι ἔχουν τρία κοινά σημεῖα, τότε ταυτίζονται.

ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

208. Θεώρημα. Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ὥστε ἕνα κυρτό τετράπλευρο νά εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι νά ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίες του παραπληρωματικές.

Ἀπόδειξη. i) Εἶναι ἀναγκαία : Ἔστω ὅτι τό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ κέντρο Ο (σχ. 209). Φέρνουμε τίς ἀκτίνες ΟΒ καί ΟΔ. Ἡ γωνία $\widehat{A} = \omega$ εἶναι ἐγγεγραμμένη. Ἄρα ἡ ἀντίστοιχή της ἐπίκεντρη θά εἶναι $\Delta\widehat{O}B = 2\omega$. Ἐπίσης ἡ γωνία $\widehat{\Gamma} = \varphi$ εἶναι ἐγγεγραμμένη, μέ ἀντίστοιχη ἐπίκεντρη τή μή κυρτή γωνία $B\breve{O}\Delta$. Ἄρα $B\breve{O}\Delta = 2\varphi$. Ἀλλά $2\omega + 2\varphi = 4^{\llcorner}$. Ἄρα $\omega + \varphi = 2^{\llcorner}$ $\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}$. Συμπερασματικά ἕπεται καί :

$$\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2^{\llcorner}.$$



Σχ. 209.

ii) Εἶναι ἱκανή : Ἔστω ὅτι στό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι :

$$(1) \qquad \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner} \iff B\widehat{A}x + \widehat{\Gamma} = 2^{\llcorner}.$$

Θεωροῦμε τόν κύκλο πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα Β, Γ καί Δ. Ἄν αὐτός περνᾶ καί ἀπό τό Α, τό θεώρημα ἀληθεύει. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι δέν περνᾶ ἀπό τό Α. Τότε θά τέμνει τήν ΔΑ σέ ἕνα σημεῖο Α', ὁπότε τό τετράπλευρο Α'ΒΓΔ θά εἶναι ἐγγεγραμμένο καί ἑπομένως θά εἶναι :

(2) $$\widehat{BA'x}+\widehat{\Gamma}=2^{\llcorner}.$$

'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι $\widehat{BAx}+\widehat{\Gamma}=\widehat{BA'x}+\widehat{\Gamma}\Rightarrow\widehat{BAx}=\widehat{BA'x}\Rightarrow AB//A'B$. 'Αλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ὁ κύκλος, πού περνᾶ ἀπό τά Β, Γ καί Δ, θά περάσει ἀναγκαστικά καί ἀπό τό Α. 'Επομένως τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο.

209. Θεώρημα. 'Αναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ὥστε ἕνα κυρτό τετράπλευρο νά εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι νά ἔχει μιάν ἐξωτερική γωνία του ἴση μέ τήν ἀπέναντί της ἐσωτερική.

'Απόδειξη. i) Εἶναι ἀναγκαία : Ἔστω ὅτι τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο (σχ. 210). Τότε θά εἶναι :

(1) $$\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=2^{\llcorner}.$$

Εἶναι ὅμως καί

(2) $$\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}_1=2^{\llcorner}.$$

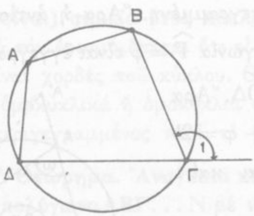
'Από τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι

$$\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}_1\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{\Gamma}_1.$$

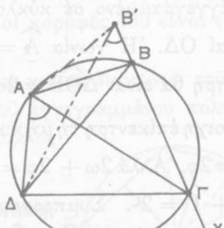
ii) Εἶναι ἱκανή : Ἔστω ὅτι στό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἀληθεύει ἡ σχέση

(3) $$\widehat{\Gamma}_1=\widehat{A}.$$

'Επειδή εἶναι $\widehat{\Gamma}_1+\widehat{\Gamma}=2^{\llcorner}$, ἀπό τή σχέση (3) αὐτή γράφεται $\widehat{A}+\widehat{\Gamma}=2^{\llcorner}$. Ἄρα τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο.



Σχ. 210.



Σχ. 211.

210. Θεώρημα. 'Αναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ὥστε ἕνα κυρτό τετράπλευρο νά εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι νά φαίνεται μιά πλευρά του ἀπό τίς δύο ἀπέναντι κορυφές ὑπό ἴσες γωνίες.

'Απόδειξη. i) Εἶναι ἀναγκαία : Ἄς πάρουμε ἕνα κυρτό ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ. 211). Φέρνουμε τίς διαγωνίους ΑΓ καί ΒΔ. Οἱ γωνίες $\widehat{\Delta A \Gamma}$ καί $\widehat{\Delta B \Gamma}$ εἶναι ἐγγεγραμμένες στό ἴδιο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$. Ἄρα εἶναι ἴσες :

$$\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma}.$$

Τότε ἡ πλευρά ΓΔ φαίνεται ὑπό ἴσες γωνίες ἀπό τίς κορυφές Α καί Β.

ii) Εἶναι ἱκανή : Ἔστω ὅτι στό κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἡ πλευρά ΓΔ φαίνεται ἀπό τίς ἀπέναντι κορυφές Α καί Β ὑπό ἴσες γωνίες. Τότε αὐτό εἶναι ἐγγράψιμο· γιατί, ἄν δέν ἦταν, ὁ κύκλος πού ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα Α, Γ καί Δ θά ἔτεμνε τή ΒΓ σέ ἕνα σημεῖο Β'. Τότε τό τετράπλευρο ΑΒ'ΓΔ θά ἦταν ἐγγράψιμο καί ἑπομένως.

(1) $$\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B' x}.$$

Ἀπό τήν ὑπόθεση ὅμως γνωρίζουμε ὅτι :

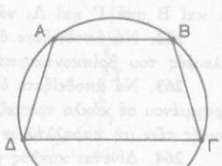
(2) $$\widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B \Gamma} \Longleftrightarrow \widehat{\Delta A \Gamma} = \widehat{\Delta B x}.$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) ἕπεται ὅτι : $\widehat{\Delta B x} = \widehat{\Delta B' x} \Rightarrow B\Delta // B'\Delta$. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἄτοπο. Ἄρα ὁ κύκλος πού περνᾶ ἀπό τά Α, Γ καί Δ θά περάσει ἀναγκαῖα καί ἀπό τό Β. Ἑπομένως τό ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμο.

ΤΡΑΠΕΖΙΟ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

211. Θεώρημα. Ἄν ἕνα τραπέζιο εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι ἰσοσκελές· καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξη. Ἔστω τό ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ ΑΒ // ΓΔ (σχ. 212). Οἱ παράλληλες χορδές ΑΒ καί ΓΔ ὁρίζουν μέσα στή ζώνη τους δύο ἴσα τόξα $\widehat{B\Gamma} = \widehat{A\Delta}$ (§ 179). Ἄρα καί οἱ ἀντίστοιχες χορδές τους εἶναι ἴσες, δηλαδή ΒΓ = ΑΔ. Τότε τό τραπέζιο εἶναι ἰσοσκελές.



Σχ. 212.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω τό ἰσοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ. Αὐτό, ὡς ἰσοσκελές, ἔχει τίς γωνίες σέ κάθε βάση του ἴσες, δηλαδή :

(1) $$\widehat{\Gamma} = \widehat{\Delta}.$$

Ἀκόμη, ἀπό τίς παράλληλες ΑΒ // ΓΔ, ἔχουμε ὅτι $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2^{L}$. Ἡ τελευταία σχέση, λόγω τῆς (1), γράφεται : $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2^{L}$. Ἄρα τό τραπέζιο εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α'.

253. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο εἶναι ὀρθογώνιο.

254. Ἀπό ἕνα σημεῖο Ο, πού βρίσκεται ἔξω ἀπό ἕναν κύκλο μέ κέντρο Κ, φέρνουμε τήν ΟΚ καί τό ἐφαπτόμενο τμῆμα ΟΑ. Ἀπό τό Ο θεωροῦμε μιά ὁποιαδήποτε εὐθεία (δ) καί ἀπό τό Κ φέρνουμε ΚΒ $\perp$ (δ). Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο πού ἔχει κορυφές τά σημεῖα Κ, Α, Β, Ο εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο καί νά βρῆτε τό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

255. Δύο κύκλοι τέμνονται στά σημεῖα Α καί Β. Ἀπό τά Α καί Β φέρνουμε ἀπό μία τέμνουσα τούς κύκλους ΓΑΔ καί ΕΒΖ. Ἄν τά Γ καί Ε εἶναι σημεῖα τοῦ ἑνός κύκλου καί τά Δ καί Ζ τοῦ ἄλλου, νά ἀποδείξετε ὅτι ΓΕ//ΔΖ.

256. Ἄν ἀπό ἕνα σημεῖο Μ ἀχθοῦν κάθετοι πρός τίς πλευρές μιᾶς γωνίας $x\widehat{O}y$, νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα τομῆς καθεμιᾶς καθέτου μέ τήν ἄλλη πλευρά, τά συμμετρικά τοῦ Μ ὡς πρός τίς πλευρές τῆς γωνίας, καί τό σημεῖο Ο, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

257. Ἄν ΑΒΓΔ εἶναι τετράπλευρο ἐγγράψιμο σέ κύκλο καί ΒΕ, ΓΖ εἶναι κάθετοι πρός τίς ΓΔ, ΑΒ ἀντιστοίχως, νά ἀποδείξετε ὅτι ΕΖ//ΑΔ.

Β΄.

258. Δίνεται ἡμικύκλιο μέ διάμετρο ΑΒ. Παίρνουμε δύο ἴσα τόξα $\widehat{ΒΓ} = \widehat{ΓΔ}$ μικρότερα ἀπό ἕνα τεταρτοκύκλιο καί ἕνα σημεῖο Ε τοῦ τόξου $\widehat{ΑΔ}$. Ἄν οἱ χορδές ΑΓ καί ΒΕ τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Ο καί οἱ ΑΔ καί ΓΕ τέμνονται σέ ἕνα σημεῖο Ζ, νά ἀποδείξετε ὅτι : α) τό τετράπλευρο ΑΕΖΟ εἶναι ἐγγράψιμο, β) τό σημεῖο Ο ἰσαπέχει ἀπό τήν ΑΒ καί ἀπό τό Ζ.

259. Δίνεται κύκλος μέ κέντρο Κ καί μία χορδή του ΑΒ. Ἀπό τό μέσο Γ τοῦ τόξου $\widehat{ΑΒ}$ φέρνουμε δύο χορδές ΓΔ καί ΓΕ, ἔτσι ὥστε αὐτές νά τέμνουν τή χορδή ΑΒ στά σημεῖα Η καί Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΔΕΖΗ εἶναι ἐγγράψιμο.

260. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ὀρθικό τρίγωνο κάθε τριγώνου ΑΒΓ (δηλαδή τό τρίγωνο μέ κορυφές τά ἴχνη τῶν ὑψῶν τοῦ ΑΒΓ) ἔχει γιά διχοτόμους τά ὕψη τοῦ ΑΒΓ.

261. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ χορδῆς ΑΒ ἑνός κύκλου φέρνουμε κάθετο πρός τήν ἀκτίνα πού περνᾶ ἀπ' αὐτό. Ἄν ἡ κάθετος αὐτή τέμνει τίς ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου ἀπό τά σημεῖα Α καί Β στά Γ καί Δ, νά ἀποδείξετε ὅτι ΜΓ = ΜΔ.

262. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά συμμετρικά τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνός τριγώνου ὡς πρός τίς πλευρές του βρίσκονται πάνω στόν περιγεγραμμένο κύκλο τοῦ τριγώνου.

263. Νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ κύκλος, πού περνᾶ ἀπό δύο ἀπέναντι κορυφές ἑνός ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο τραπεζίου καί ἀπό τό κέντρο τοῦ κύκλου, περνᾶ καί ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

264. Δίνεται κύκλος μέ κέντρο Κ καί ἕνα σημεῖο Α ἔξω ἀπ' αὐτόν. Φέρνουμε μιά ὁποιαδήποτε τέμνουσα ΑΒΓ καί ἀπό τό Α μιά κάθετο στήν ΚΑ. Οἱ ἐφαπτόμενες πού ἄγονται στά Β καί Γ τέμνουν αὐτή τήν κάθετο στά σημεῖα Δ καί Ε. Νά ἀποδείξετε ὅτι : α) τά τετράπλευρα ΚΒΑΔ καί ΚΓΕΑ εἶναι ἐγγράψιμα, β) ΑΔ = ΑΕ.

265. Δίνονται δύο ἐφεξῆς καί ἴσες γωνίες $x\widehat{O}y$ καί $y\widehat{O}z$ καί ἕνα σημεῖο Μ μέσα στή γωνία $x\widehat{O}y$. Ἀπό τό Μ φέρνουμε καθέτους ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ πρός τίς Οx, Οy, Οz ἀντιστοίχως. Νά ἀποδείξετε ὅτι : α) τά σημεῖα Μ, Α, Β, Γ, Ο εἶναι ὁμοκυκλικά, β) ΒΑ = ΒΓ.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

212. Ὁρισμός. Ἕνα πολύγωνο λέγεται περιγεγραμμένο σέ κύκλο (ἤ περιγράψιμο) τότε καί μόνο τότε, ὅταν ὅλες οἱ πλευρές του ἐφάπτονται (ἤ μποροῦν νά ἐφάπτονται) σέ ἕναν καί τόν αὐτό κύκλο.

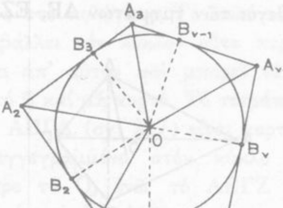
213. Θεώρημα. Μία ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ὥστε ἕνα πολύ-

γωνο μέ ν πλευρές νά εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο, εἶναι οἱ ν - 1 διχοτόμοι τῶν ν - 1 γωνιῶν του νά περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

Ἀπόδειξη. i) Εἶναι ἀναγκαία : Ἔστω ὅτι τό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο μέ κέντρο Ο (σχ. 213). Ἐπειδή κάθε γωνία τοῦ πολυγώνου ἔχει πλευρές πού ἐφάπτονται στόν κύκλο, ἕπεται ὅτι ἡ διχοτόμος της περνᾶ ἀπό τό κέντρο Ο τοῦ κύκλου (§ 199). Ἄρα ὅλες οἱ διχοτόμοι τοῦ πολυγώνου περνοῦν ἀπό τό κέντρο Ο.

ii) Εἶναι ἱκανή : Ἔστω ὅτι στό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ οἱ ν - 1 διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_{\nu-1}$ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο. Ἀπό τό Ο φέρνουμε τά κάθετα τμήματα $OB_1, OB_2\ldots, OB_\nu$ πρός τίς πλευρές τοῦ πολυγώνου. Τό Ο, ἀφοῦ ἀνήκει στίς ν - 1 διχοτόμους τῶν γωνιῶν $\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \ldots, \widehat{A}_{\nu-1}$, ἰσαπέχει ἀπό τίς πλευρές τῆς κάθε γωνίας, δηλαδή : $OB_1 = OB_1$, $OB_2 = OB_3$, $\ldots$, $OB_{\nu-1} = OB_\nu$. Ἄρα $OB_1 = OB_2 = \ldots = OB_\nu$. Ἑπομένως ἄν μέ κέντρο τό Ο καί ἀκτίνα τήν OB_1 γράψουμε κύκλο, αὐτός θά ἐφάπτεται στίς πλευρές τοῦ πολυγώνου. Ἄρα τό πολύγωνο εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο.

Πόρισμα. Κάθε τρίγωνο, εἶναι περιγεγραμμένο σ' ἕναν κύκλο, πού τό κέντρο του βρίσκεται στήν τομή τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του (ἔγκεντρο § 161).



Σχ. 213.

Σχ. 214.

214. Θεώρημα. Γιά νά εἶναι ἕνα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σέ κύκλο, πρέπει καί ἀρκεῖ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του νά εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σέ κύκλο (Ο, R) καί Ε, Ζ, Η καί Θ τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν του μέ τόν κύκλο (σχ. 214). Τότε θά εἶναι (§ 199) :
$AE = A\Theta = \alpha$, $BE = BZ = \beta$, $\Gamma Z = \Gamma H = \gamma$ καί $\Delta H = \Delta\Theta = \delta$. Ἄρα θά εἶναι :

(1) $AB + \Gamma\Delta = AE + BE + \Gamma H + \Delta H = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ καί

(2) $A\Delta + B\Gamma = A\Theta + \Delta\Theta + BZ + \Gamma Z = \alpha + \delta + \beta + \gamma$.

Οἱ σχέσεις (1) καί (2) ἔχουν τά τελευταῖα μέλη τους ἴσα. Ἄρα θά ἔχουν καί τά πρῶτα μέλη τους ἴσα, δηλαδή

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.$$

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι στό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἰσχύει ἡ σχέση :

(3) $$ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.$$

Θά ἀποδείξουμε ὅτι τό τετράπλευρο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο.

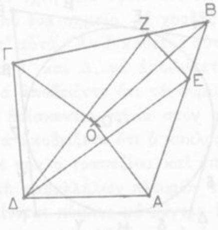
i) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $ΑΒ > ΑΔ$. Τότε ἡ σχέση (3) γράφεται :

(4) $$ΑΒ - ΑΔ = ΒΓ - ΓΔ.$$

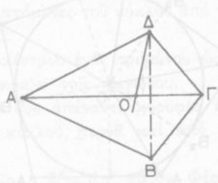
Ἀπό αὐτή ἕπεται ὅτι εἶναι καί $ΒΓ > ΓΔ$. Τώρα, πάνω στίς δύο μεγαλύτερες πλευρές ΑΒ καί ΒΓ (σχ. 215) παίρνουμε τμήματα $ΑΕ = ΑΔ$ καί $ΓΖ = ΓΔ$, ὥστε νά σχηματιστοῦν οἱ διαφορές τῶν μελῶν τῆς σχέσεως (4). Ἔτσι ἡ (4) μπορεῖ νά γραφτεῖ :

$$ΑΒ - ΑΕ = ΒΓ - ΓΖ \quad ἤ \quad ΒΕ = ΒΖ.$$

Ἄρα τό τρίγωνο ΒΕΖ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐξάλλου καί τά τρίγωνα ΑΔΕ καί ΓΔΖ εἶναι ἀπό τήν κατασκευή τους ἰσοσκελή. Ἄρα οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Β}$ καί $\widehat{Γ}$ τοῦ τετραπλεύρου εἶναι μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων ΔΕ, ΕΖ καί



Σχ. 215.



Σχ. 216.

ΔΖ ἀντιστοίχως, δηλαδή εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ἄρα περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο (§ 156). Ἑπομένως, κατά τό προηγούμενο θεώρημα, τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο.

ii) Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι $ΑΒ = ΑΔ$ (σχ. 216). Τότε, ἀπό τή σχέση (3), ἕπεται ὅτι εἶναι καί $ΓΔ = ΒΓ$. Ἄρα τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΓΒΔ εἶναι ἰσοσκελή. Οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$ καί $\widehat{Γ}$, ὡς μεσοκάθετοι τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΒΔ, συμπίπτουν μέ τήν ΑΓ. Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἀπό τίς δύο ἄλλες γωνίες τοῦ τετραπλεύρου, ἔστω τῆς $\widehat{Δ}$, τέμνει τήν ΑΓ στό σημεῖο Ο καί ἔτσι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{Α}$, $\widehat{Δ}$ καί $\widehat{Γ}$ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο Ο. Ἑπομένως τό τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο (§ 213).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄.

266. Νά ἀποδείξετε ὅτι κάθε παραλληλόγραμμο περιγεγραμμένο σέ κύκλο εἶναι ρόμβος.

267. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο τό ἄθροισμα δύο κάθετων πλευρῶν εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῆς ὑποτείνουσας καί τῆς διαμέτρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

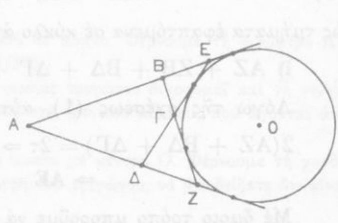
268. Ἄν ἕνα τραπέζιο ΑΒΓΔ μέ βάσεις τίς ΑΒ καί ΓΔ εἶναι περιγεγραμμένο σέ κύκλο μέ κέντρο Κ, νά ἀποδείξετε ὅτι : α) τά σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο βάσεων εἶναι ἄκρα τῆς ἴδιας διαμέτρου καί β) $\widehat{\mathrm{BK\Gamma}} = 1^{L}$.

269. Ἄν σέ ἕνα ἰσοσκελές τραπέζιο ἡ διάμεσος εἶναι ἴση μέ μία ἀπό τίς μή παράλληλες πλευρές του, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τραπέζιο εἶναι περιγράψιμό σέ κύκλο.

270. Ἄν οἱ δύο κύκλοι οἱ ἐγγεγραμμένοι στά δύο τρίγωνα, στά ὁποῖα ἕνα τετράπλευρο χωρίζεται μέ μιά διαγώνιό του, ἐφάπτονται, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο εἶναι περιγράψιμο σέ κύκλο.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΠΑΡΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ

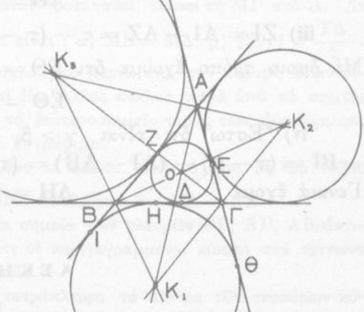
215. Ὁρισμός. Ἕνα πολύγωνο λέγεται παρεγγεγραμμένο σέ κύκλο τότε καί μόνο τότε, ὅταν οἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του ἤ καί μερικές ἀπό τίς πλευρές του (πάντως ὄχι ὅλες), ἐφάπτονται σ' ἕναν κύκλο.



Σχ. 217.

Ὁ κύκλος λέγεται παρεγγεγραμμένος στό πολύγωνο. Τό πολύγωνο δέν περιβάλλει τόν κύκλον οὔτε περιβάλλεται ἀπ' αὐτόν καί μπορεῖ νά εἶναι κυρτό ἤ καί μή κυρτό. Τό τετράπλευρο π.χ. ΑΒΓΔ (σχ. 217) εἶναι κυρτό καί παρεγγεγραμμένο στόν κύκλο μέ κέντρο τό Ο, ἐνῶ τό ΑΕΓΖ εἶναι μή κυρτό καί παρεγγεγραμμένο στόν ἴδιο κύκλο. Ἐπίσης τά τρίγωνα ΑΕΔ καί ΑΒΖ εἶναι παρεγγεγραμμένα στόν ἴδιο κύκλο.

Ἕνα τρίγωνο ἔχει πάντοτε τρεῖς παρεγγεγραμμένους κύκλους, πού τά κέντρα τους ὁρίζονται ἀπό τά τρία σημεῖα στά ὁποῖα τέμνονται οἱ ἐξωτερικές διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του ἀνά δύο (§ 163). Ἀπό τά ἴδια σημεῖα περνοῦν καί ἀνά μία οἱ ἐσωτερικές διχοτόμοι. Ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος μέ κέντρο τό K_1 (σχ. 218), ἐπειδή βρίσκεται μέσα στή γωνία $\widehat{A}$, λέγεται πα-



Σχ. 218.

ρεγγεγραμμένος στή γωνία $\widehat{A}$ ή στήν πλευρά α. Ἀντιστοίχως οἱ παρεγγεγραμμένοι κύκλοι μέ κέντρα τά K_2 καί K_3 λέγονται παρεγγεγραμμένοι στίς γωνίες $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$ ή στίς πλευρές β καί γ. Τά κέντρα K_1, K_2 καί K_3 τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων λέγονται παράκεντρα.

216. Θεώρημα. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ἄν Δ, Ε καί Ζ εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου μέ τίς πλευρές α, β καί γ ἀντιστοίχως καί Η, Θ καί Ι εἶναι τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου στή γωνία $\widehat{A}$ μέ τήν πλευρά α καί τίς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν β καί γ ἀντιστοίχως, τότε εἶναι :

i) $AE = AZ = \tau - \alpha$, ii) $A\Theta = AI = \tau$, iii) $E\Theta = ZI = \alpha$ καί iv) $\Delta H = |\beta - \gamma|$, ὅπου $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$.

Ἀπόδειξη. Γνωρίζουμε ὅτι (σχ. 218) :

(1) $$AE = AZ, \quad B\Delta = BZ, \quad \Gamma\Delta = \Gamma E$$

ὡς τμήματα ἐφαπτόμενα σέ κύκλο ἀπό ἕνα σημεῖο (§ 199). Τότε θά εἶναι καί :

i) $AZ + ZB + B\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma E + EA = 2\tau.$

Λόγω τῆς σχέσεως (1), αὐτή γράφεται :

$$2(AZ + B\Delta + \Delta\Gamma) = 2\tau \Rightarrow AZ + B\Gamma = \tau \Rightarrow AZ = \tau - B\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{AE = AZ = \tau - \alpha.}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο μποροῦμε νά ἀποδείξουμε ὅτι εἶναι $B\Delta = BZ = \tau - \beta$ καί $\Gamma\Delta = \Gamma E = \tau - \gamma$.

ii) $AB + BH + \Gamma H + A\Gamma = 2\tau$. Ἐπειδή εἶναι $BH = BI$ καί $\Gamma H = \Gamma\Theta$, ἡ προηγούμενη σχέση γράφεται : $AB + BI + A\Gamma + \Gamma\Theta = 2\tau \Rightarrow AI + A\Theta = 2\tau$. Ἀλλά εἶναι $AI = A\Theta$. Ἄρα $2AI = 2\tau \Rightarrow AI = \tau \Rightarrow$

$$\mathbf{A\Theta = AI = \tau.}$$

iii) $ZI = AI - AZ = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha.$

Μέ ὅμοιο τρόπο ἔχουμε ὅτι $E\Theta = \tau - (\tau - \alpha) = \alpha$. Ἄρα

$$\mathbf{E\Theta = ZI = \alpha.}$$

iv) Ἔστω ὅτι εἶναι $\gamma > \beta$. Τότε : $\Delta H = B\Delta - BH = (\tau - \beta) - BI = (\tau - \beta) - (AI - AB) = (\tau - \beta) - (\tau - \gamma) = \gamma - \beta.$

Γενικά ἔχομε $$\mathbf{\Delta H = |\beta - \gamma|.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Β΄.

271. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ κορυφές Β καί Γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, τό ἔγκεντρό του, καί τό παράκεντρο πού ἀντιστοιχεῖ στήν πλευρά α, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

272. Ἄν ὁ παρεγγεγραμμένος στήν πλευρά α κύκλος ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται στήν ΒΓ στό σημεῖο Δ καί στίς προεκτάσεις τῶν ΑΒ καί ΑΓ στά σημεῖα Ε καί Ζ, νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἀπό τίς γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

273. Ἄν ἕνα κυρτό τετράπλευρο εἶναι παρεγγεγραμμένο σέ κύκλο, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διαφορά δύο ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴση μέ τή διαφορά τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του.

274. Ἄν Ο καί Κ εἶναι τά κέντρα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καί τοῦ παρεγγεγραμμένου στήν πλευρά α, νά ἀποδείξετε ὅτι ὁ περιγεγραμμένος κύκλος τοῦ τριγώνου διχοτομεῖ τό τμῆμα ΟΚ.

275. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων στίς πλευρές β καί γ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ σχηματίζει μέ τή ΒΓ γωνία ἴση μέ τήν ἡμιδιαφορά τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καί $\widehat{\Gamma}$.

276. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ θεωροῦμε τούς παρεγγεγραμμένους κύκλους στίς πλευρές β καί γ. Ἄν αὐτοί ἐφάπτονται στίς προεκτάσεις τῆς πλευρᾶς ΒΓ στά σημεῖα Δ καί Ε, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $\Delta E = \beta + \gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΣ

Α΄.

277. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Φέρνουμε τή διάμετρο ΑΔ καί τό ὕψος ΓΕ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΒΔ//ΓΕ.

278. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας τριγώνου διχοτομεῖ καί τή γωνία τοῦ ὕψους καί τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο κύκλου, πού ἄγονται ἀπό τήν ἴδια κορυφή.

279. Τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο μέ κέντρο Ο. Φέρνουμε τή χορδή ΓΔ κάθετη πρός τή ΒΓ. Ἄν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΑΗ = ΓΔ.

280. Δίνεται ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Ἄν Δ καί Ε εἶναι τά μέσα τῶν τόξων $\widehat{AB}$ καί $\widehat{A\Gamma}$, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ χορδή ΔΕ τριχοτομεῖται ἀπό τίς πλευρές ΑΒ καί ΑΓ.

281. Ἰσοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$, στό ὁποῖο δέ βρίσκεται τό Α, φέρνουμε τήν ΑΜ καί ἀπό τό Β φέρνουμε $BE \perp AM$ πού, ὅταν προεκταθεῖ, τέμνει τή ΜΓ στό Δ. Ἄν Ζ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι : α) ΜΒ = ΜΔ, β) $EZ // = \frac{\Gamma\Delta}{2}$.

282. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωροῦμε κύκλο πού περνᾶ ἀπό τήν κορυφή Β καί τέμνει τίς πλευρές ΑΒ καί ΒΓ στά σημεῖα Δ καί Ε. Ἄλλος κύκλος περνᾶ ἀπό τά σημεῖα Γ καί Ε καί τέμνει τήν ΑΓ στό Ζ. Ἄν Θ εἶναι τό δεύτερο σημεῖο τομῆς τῶν δύο κύκλων, νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο ΑΔΘΖ εἶναι ἐγγράψιμο.

283. Ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Ἀπό τό μέσο Μ τοῦ τόξου $\widehat{B\Gamma}$ φέρνουμε χορδή ΜΔ παράλληλη τῆς ΑΓ. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΜΔ = ΑΒ.

284. Ἄν Δ, Ε, Ζ εἶναι τρία ὁποιαδήποτε σημεῖα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ ἀντιστοίχως ἑνός τριγώνου ΑΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι στά τρίγωνα ΑΕΖ, ΒΔΖ καί ΓΔΕ περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

285. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε κυρτό τετράπλευρο τά κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων πού ἐφάπτονται στίς πλευρές του ἀνά τρεῖς, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

286. Ἔστω κύκλος μέ κέντρο Κ καί δύο κάθετες χορδές του ΑΒ, ΓΔ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό τετράπλευρο, πού οἱ πλευρές του εἶναι ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου στά ἄκρα τῶν χορδῶν, εἶναι ἐγγράψιμο σέ κύκλο.

287. Ἄν ὁ ἐγγεγραμμένος σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ κύκλος ἐφάπτεται στίς πλευρές τοῦ τριγώνου στά σημεῖα Α', Β', Γ', νά ὑπολογιστοῦν οἱ γωνίες τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' ἀπό τίς γωνίες τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Β'.

288. Σέ ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, ἄν Κ εἶναι τό κέντρο τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καί Δ τό σημεῖο στό ὁποῖο ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{\mathrm{A}}$ τέμνει τόν περιγεγραμμένο κύκλο, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΒΔ = ΔΚ.

289. Ἔστω ΑΒΓΔ ἕνα κυρτό τραπέζιο ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Οἱ μή παράλληλες πλευρές του ΑΔ καί ΒΓ τέμνονται στό σημεῖο Ε καί οἱ ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου στά σημεῖα Α καί Γ τέμνονται στό σημεῖο Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι: α) $\widehat{\mathrm{E}} = \widehat{\mathrm{Z}}$ καί β) ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλη πρός τίς βάσεις τοῦ τραπεζίου.

290. Ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ ἀπόσταση τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀπό μία πλευρά τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μέ τό μισό τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς του.

291. Ἄν οἱ διαγώνιοι ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα, νά ἀποδείξετε ὅτι τά ἴχνη τῶν καθέτων, πού γράφονται ἀπό τό σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων πρός τίς πλευρές τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

292. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Ἀπό τά Β καί Γ φέρνουμε ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου, πού τέμνονται στό σημεῖο Δ. Ἀπό τό Δ φέρνουμε κάθετα τμήματα ΔΕ, ΔΖ, ΔΗ πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ΔΕΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμο.

293. Δίνεται ἰσόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, ὁ περιγεγραμμένος κύκλος καί ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο Μ τοῦ ἐλάσσονος τόξου $\widehat{\mathrm{B\Gamma}}$. Νά ἀποδείξετε ὅτι ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ.

294. Δίνεται ἕνα ἐγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Τήν κάθε πλευρά του τή χρησιμοποιοῦμε γιά χορδή καί γράφουμε τέσσερεις κύκλους. Οἱ κύκλοι αὐτοί, καθώς τέμνονται ἀνά δύο διαδοχικοί, ὁρίζουν τέσσερα σημεῖα. Νά ἀποδείξετε ὅτι αὐτά εἶναι κορυφές ἑνός ἐγγράψιμου τετραπλεύρου.

295. Στό ἄκρο Α μιᾶς διαμέτρου ΑΒ ἑνός κύκλου φέρνουμε ἐφαπτομένη, πού τέμνεται ἀπό τήν προέκταση μιᾶς χορδῆς ΒΓ στό σημεῖο Δ. Στήν προέκταση τῆς ΑΓ (πρός τό μέρος τοῦ Α ἤ πρός τό μέρος τοῦ Γ) παίρνουμε τμῆμα ΑΕ = ΑΔ καί ἀπό τό Ε φέρνουμε παράλληλο τῆς ΑΒ, πού τέμνει τή ΒΓ στό σημεῖο Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι ΒΖ = = ΒΑ.

296. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, πού σχηματίζουν οἱ ἀπέναντι πλευρές ἑνός ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο τετραπλεύρου, τέμνονται κάθετα καί συναντοῦν τίς πλευρές τοῦ τετραπλεύρου σέ σημεῖα πού εἶναι κορυφές ρόμβου.

297. Ἀπό ἕνα ἐσωτερικό σημεῖο Μ τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε καθέτους ΜΗ, ΜΖ, ΜΘ πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου. Ὁ κύκλος πού ὁρίζεται ἀπό τά Η, Ζ, Θ τέμνει τίς πλευρές τοῦ τριγώνου σέ δεύτερα σημεῖα Η', Ζ', Θ' ἀντιστοίχως. Ἄν Μ' εἶναι τό συμμετρικό τοῦ Μ ὡς πρός τό κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου, νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ Μ'Η', Μ'Ζ', Μ'Θ' εἶναι κάθετες πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου.

298. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Πάνω σέ κάθε πλευρά του καί ἔξω ἀπό τό τρίγωνο κατασκευάζουμε τά ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ', ΒΓΑ', ΓΑΒ'. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τμήματα ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' εἶναι ἴσα καί ὅτι περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

299. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Νά ἀποδείξετε ὅτι τό ἀντιδιαμετρικό τῆς κορυφῆς Α καί τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὁρίζουν μιά εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

300. Ἄν Ο εἶναι τό κέντρο τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο, καί Μ εἶναι τό μέσο τῆς ΒΓ, νά ἀποδείξετε ὅτι $AH = 2 \cdot OM$.

301. Ἄν ἡ διαγώνιος ΑΓ ἑνός ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι διάμετρος καί φέρουμε τίς $AE \perp B\Delta$ καί $\Gamma Z \perp B\Delta$, νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι $BE = \Delta Z$.

302. Εὐθεία τοῦ Euler. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο τό ὀρθόκεντρο Η, τό κέντρο βάρους Μ καί τό περίκεντρο Κ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία καί εἶναι $HM = 2MK$.

303. Κύκλος τοῦ Euler (τῶν ἐννέα σημείων). Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε τρίγωνο τά μέσα τῶν πλευρῶν του, τά ἴχνη τῶν ὕψῶν του, καί τά μέσα τῶν τμημάτων πού ἑνώνουν τό ὀρθόκεντρο μέ κάθε κορυφή εἶναι ὁμοκυκλικά σημεῖα.

304. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου στό τρίγωνο κύκλου καί τό κέντρο τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τό μέσο τῆς εὐθείας τοῦ Euler.

305. Νά ἀποδείξετε ὅτι οἱ ἀκτίνες τοῦ περιγεγραμμένου σ' ἕνα τρίγωνο κύκλου, πού ἀντιστοιχοῦν στίς κορυφές τοῦ τριγώνου, εἶναι κάθετες πρός τίς πλευρές τοῦ ὀρθικοῦ τριγώνου.

306. Νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό μέσο Μ τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνός τριγώνου ΑΒΓ καί ἀπό τό μέσο Ν τοῦ τμήματος ΑΗ, ὅπου Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο, εἶναι κάθετη πρός τήν εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τά ἴχνη τῶν ὕψῶν πού ἄγονται ἀπό τίς κορυφές Β καί Γ.

307. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ καί ὁ περιγεγραμμένος κύκλος. Σχηματίζουμε : α) τό ὀρθικό τρίγωνο ΔΕΖ, β) τό τρίγωνο Α'Β'Γ' μέ κορυφές τά συμμετρικά τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρός τίς πλευρές τοῦ ΑΒΓ καί γ) τό τρίγωνο ΘΙΛ μέ πλευρές τίς ἐφαπτόμενες τοῦ περιγεγραμμένου περί τό τρίγωνο κύκλου στά σημεῖα Α, Β, Γ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρία αὐτά τρίγωνα ἔχουν πλευρές παράλληλες.

308. Νά ἀποδείξετε ὅτι σέ κάθε ἐγγράψιμο τετράπλευρο οἱ εὐθεῖες πού ἄγονται ἀπό τό μέσο καθεμιᾶς πλευρᾶς κάθετες πρός τήν ἀπέναντι πλευρά περνοῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

309. Τό ἔγκεντρο καί τά τρία παράκεντρα κάθε τριγώνου ὁρίζουν ἀνά δύο ἕξι εὐθύγραμμα τμήματα. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά μέσα τῶν τμημάτων αὐτῶν βρίσκονται πάνω στόν περιγεγραμμένο στό τρίγωνο κύκλο.

310. Σέ κάθε τρίγωνο νά ἀποδείξετε ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέση :

$$R_\alpha + R_\beta + R_\gamma = 4R + \rho, \text{ ὅπου } R_\alpha,\ R_\beta,\ R_\gamma$$

εἶναι οἱ ἀκτίνες τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων, R εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου καί ρ ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

311. Δίνεται ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 1\llcorner$). Νά ἀποδείξετε ὅτι εἶναι :

$$\alpha)\ R_\beta + R_\gamma = 2R \text{ καί } \beta)\ R_\alpha = R_\beta + R_\gamma + \rho$$

312. Εὐθεία τοῦ Simson. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά ἴχνη τῶν καθέτων, πού ἄγονται ἀπό ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ περιγεγραμμένου περί ἕνα τρίγωνο κύκλου πρός τίς πλευρές του, βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

313. Ἔστω τρίγωνο ΑΒΓ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο. Ἄν Μ εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ κύκλου, νά ἀποδείξετε ὅτι ἡ εὐθεία τοῦ Simson πού ἀντιστοιχεῖ στό Μ διχοτομεῖ τό τμῆμα ΜΗ, ὅπου Η εἶναι τό ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου.

314. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά συμμετρικά ἑνός σημείου Μ τοῦ περιγεγραμμένου σ' ἕνα τρίγωνο κύκλου ὡς πρός τίς πλευρές τοῦ τριγώνου βρίσκονται στήν εὐθεία πού περνᾶ ἀπό τό ὀρθόκεντρο Η τοῦ τριγώνου καί εἶναι παράλληλη πρός τήν εὐθεία τοῦ Simson πού ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο Μ.

315. Ἀπό ἕνα σημεῖο Μ τοῦ περιγεγραμμένου σ' ἕνα τρίγωνο κύκλου φέρνουμε εὐθεῖες μέ ἴση κλίση πρός τίς τρεῖς πλευρές τοῦ τριγώνου. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά τρία σημεῖα, στά ὁποῖα οἱ εὐθεῖες τέμνουν τίς πλευρές τοῦ τριγώνου, βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

316. Μέ διαμέτρους τίς χορδές ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἑνός κύκλου γράφουμε τρεῖς κύκλους, πού ἀνά δύο τέμνονται γιά δεύτερη φορά στά σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Νά ἀποδείξετε ὅτι τά σημεῖα Δ, Ε καί Ζ βρίσκονται στήν ἴδια εὐθεία.

317. Ἔστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένο σέ κύκλο, πού οἱ διαγώνιοί του ΑΓ καί ΒΔ τέμνονται κάθετα στό σημεῖο Θ. Ἀπό τό Θ φέρνουμε καθέτους πρός τίς πλευρές τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, πού τίς τέμνουν στά σημεῖα Ε, Ζ, Η, Ι. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

α) Τό τετράπλευρο ΕΖΗΙ εἶναι ἐγγράψιμο.

β) Τό τετράπλευρο ΕΖΗΙ εἶναι περιγράψιμο.

γ) Ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος στό ΕΖΗΙ περνᾶ ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓΔ.

024000025186

ΕΚΔΟΣΙΣ Β', 1976 (VII) — ΑΝΤΙΤ. 135.000 — ΣΥΜΒΑΣΙΣ: 2722/28-4-76

ΣΤΟΙΧ.- ΕΚΤΥΠ.- ΒΙΒΛ.: «ΑΤΛΑΝΤΙΣ - Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ» Α.Ε.

ΟΕ
ΔΒ