ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΩΔΕΚΑΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1915

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΩΔΕΚΑΤΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1915

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐν τῷ παρόντι βιβλίῳ τῆς στοιχειώδους ἀλγέβρας ἀναπτύσσεται καὶ θεμελιοῦται ἡ ἄλγεβρα κατὰ τρόπον ὅλως νέον, συμφώνως πρὸς τὴν σημερινὴν τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης κατάστασιν.

Ἀρχόμενος ἀπὸ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐκθέτω τὰς γενικὰς τῶν τεσσάρων πράξεων ἰδιότητας καὶ δεικνύω, ὅτι πᾶσαι αὗται αἱ ἰδιότητες εἶναι ἀναγκαῖα ἀκολουθήματα δύο μόνον ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας διὰ τοῦτο καλῶ ἀρχικὰς ἢ πρωτευούσας ἰδιότητας. Ἐξαρτῶνται δὲ ἀπὸ τῶν δύο τούτων αἱ ἄλλαι κατὰ τρόπον τοιοῦτον, ὥστε καὶ πᾶσα ἄλλη πρᾶξις, εἴτε ἀριθμητικὴ εἴτε γεωμετρική, ἂν ἔχῃ τὴν ἑτέραν τῶν ἰδιοτήτων τούτων, ἔχει καὶ πάσας τὰς ἐξ αὐτῆς πηγαζούσας· (τοιαῦται πράξεις εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἡ πρόσθεσις τῶν γραμμῶν κτλ.).

Μετὰ δὲ ταῦτα δεικνύων τὴν ἀνάγκην τῆς προσαρτήσεως καὶ ἄλλων νέων ἀριθμῶν, θέτω ὡς ὅρον, ἢ ὡς ἀρχήν, ὅτι καὶ οὗτοι, οἱασδήποτε φύσεως καὶ ἂν εἶναι, πρέπει νὰ ἔχωσι τὰς αὐτὰς δύο ἀρχικὰς ἰδιότητας, ὅτε θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἄλλας, τὰς ἐξ αὐτῶν ἑπομένας. Ἐκ δὲ τῆς διατηρήσεως τῶν ἀρχικῶν τούτων ἰδιοτήτων εὑρίσκονται ἀμέσως ὡς ἀναγκαῖα ἀκολουθήματα οἱ ὁρισμοὶ τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὄχι μόνον βλέπει τις τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν βαθμηδὸν ἀναπτυσσόμενον, ἀλλὰ καὶ ἐννοεῖ, πῶς τὰ διάφορα τῶν ἀριθμῶν εἴδη, κοινὴν ἔχοντα τὴν γένεσιν, συνδέονται πρὸς ἄλληλα ἀναποσπάστως καὶ συναποτελοῦσιν ἓν ὅλον τέλειον καὶ ἁρμονικόν, συνάμα δὲ λαμβάνει καὶ σαφῆ ἰδέαν τοῦ σκοποῦ, δι' ὃν γίνεται.

Οἱ πάσης αἰτιολογίας καὶ βάσεως στερούμενοι, ὅλως αὐθαίρετοι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἀσύνδετοι ὁρισμοί, δι' ὧν ὡρίζοντο μέχρι τοῦδε οἱ ἀριθμοὶ καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις, δὲν εὐχαριστοῦσι τὸν μανθάνοντα, ὅστις δικαίως ἀπορεῖ, διατὶ οὕτω καὶ οὐχὶ ἄλλως ορίζονται ἕκαστα. Διατί, λόγου χάριν, τὸ γινόμενον δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁρίζεται ὡς θετικόν; Ἐκ τοῦ ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ σημαίνουσί τι ἐναντίον τοῦ ὑπὸ τῶν θετικῶν σημαινομένου (οἷα κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, καὶ τὰ ὅμοια) εἶναι ἀδύνατον νὰ ὁρισθῇ καὶ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν· διότι πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ εἴπωμεν, ὅτι 5 δραχμαὶ ζημίας ἐπὶ 8 δραχμὰς ζημίας πολλαπλασιαζόμεναι, δίδουσι 40 δραχμὰς κέρδους; Ὥστε ἡ αἰτία, διὰ τὴν ὁποίαν ὁρίζομεν τὸ γινόμενον τοιουτοτρόπως, κεῖται βαθύτερον καὶ εἶναι ὅλως ἄσχετος πρὸς τὰς ἐφαρμογὰς τῶν ἀριθμῶν, αἵτινες θὰ ὑπῆρχον καὶ ἂν ἄλλως ὡρίζετο ὁ πολλαπλασιασμός. Ὁμοίως ἐκ μόνης τῆς σημασίας, ἣν ἔχουσι τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{2}{3}$ εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν· εἶναι ἀνάγκη νὰ δώσωμεν νέον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἢ νὰ εὐρύνωμεν τὸν ἀρχικὸν αὐτοῦ ὁρισμόν. Ἀλλ᾽ ὁ ἀρχικός, ὁ φυσικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι ἡ ἐπανάληψις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλάκις (τῆς δὲ διαιρέσεως ὁ μερισμὸς εἰς ἴσα μέρη)· καὶ ὅμως δίδομεν ἐν τοῖς κλάσμασι τοιοῦτον ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὥστε συγχέονται ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις· διότι, ἵνα ἐπὶ παραδείγματος τοῦτο δείξωμεν, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 12 ἐπὶ $\frac{1}{4}$ οὐδὲν ἄλλο εἶναι ἢ αὐτόχρημα διαίρεσις τοῦ 12 διὰ 4. Τίς ἀνάγκη λοιπὸν ἀναγκάζει ἡμᾶς νὰ δίδωμεν τοὺς ὁρισμοὺς τούτους; [1]

Ἀλλὰ καὶ ἂν παραδεχθῶμεν τοὺς ὁρισμοὺς τούτους, πάλιν μένει ἡ ἀπορία, πῶς, ἀφοῦ οὐδὲν συνδέει τὰ διάφορα εἴδη τῶν ἀριθμῶν, ἀλλ᾽ ἕκαστον συγκροτεῖται χωριστὰ καὶ αὐθαιρέτως,

---

[1] Ὁ συνήθης ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν κλασμάτων, ὅτι τὸ γινόμενον γίνεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου ὅπως ὁ πολλαπλασιαστὴς γίνεται ἐκ τῆς μονάδος, ἔχει πλὴν τοῦ αὐθαιρέτου καὶ τοῦτο τὸ ἐλάττωμα· ὅτι δὲν ἐξηγεῖ πῶς γίνεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος. Ἡ ἀρχικὴ καὶ φυσικὴ γένεσις τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς μονάδος εἶναι ἡ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως (ἀριθμὸς εἶναι πλῆθος μονάδων)· ἀλλ᾽ ἐν τῷ ὁρισμῷ τὸ γίνεσθαι ἔχει βεβαίως ἄλλην σημασίαν· διότι τὰ κλάσματα δὲν γίνονται ἐκ τῆς μονάδος **1** μόνον διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, ἀλλ᾽ ἀπαιτοῦσι καὶ τὴν διαίρεσιν αὐτῆς· ἀλλ᾽ ἂν θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς γινομένους ἐκ τῆς μονάδος διὰ διαιρέσεως καὶ ἐπαναλήψεως, ὑπάρχουσιν ἄπειροι τρόποι γενέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐκ τῆς μονάδος, εὑρίσκονται δὲ καὶ πολλοί, καθ᾽ οὓς ὁ ὁρισμὸς ἐφαρμοζόμενος, ἄγει εἰς ἄτοπα ἐξαγόμενα. Ὅτι δὲ οἱ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον καὶ ἐπὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐκτείνοντες καὶ ἐφαρμόζοντες εἰς μεγαλήτερα περιπίπτουσιν ἄτοπα, ἐννοεῖται οἴκοθεν.

πῶς καὶ ὑπὸ τίνος δυνάμεως πάντα ταῦτα συναρμόζονται καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ὅλον, οὗτινος εἶναι φανερὰ ἡ ἁρμονία καὶ ἡ ἁπλότης; Ταῦτα πάντα ἐξηγοῦνται καὶ ἡ ἄλγεβρα θεμελιοῦται ἐπὶ ἀσφαλῶν καὶ ἁπλουστάτων βάσεων, ἐὰν παραδεχθῶμεν τὴν ἑπομένην ἀρχήν. Ὅτι ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους βαθμηδὸν ἐπινοοῦμεν καὶ προσαρτῶμεν εἰς τὸ σύστημα, πρέπει νὰ διατηρῶνται αἱ δύο ἀρχικαὶ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας οἱ ἀκέραιοι ἔχουσι καὶ ἀφ' ὧν αἱ λοιπαὶ ἀπορρέουσι. Τὸ ὀρθὸν καὶ σκόπιμον καὶ χρήσιμον τῆς ἀρχῆς ταύτης ἐννοεῖ πᾶς τις εὐκόλως. Καθώς, ὅταν οἰκοδόμημά τι πρόκειται νὰ ἐπεκταθῇ, πρέπει νὰ διατηρήσῃ τὰς κυριωτάτας αὐτοῦ γραμμὰς καὶ τὸν ρυθμόν, ἵνα μὴ ἀποβῇ ἄτακτόν τι καὶ δύσμορφον, οὕτω καὶ τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν πρέπει εὐρυνόμενον νὰ διατηρῇ τὰς κυριωτάτας τῶν ἰδιοτήτων αὐτοῦ. Ἡ ἀρχὴ αὕτη τῆς διατηρήσεως τῶν πρωτευουσῶν ἰδιοτήτων παντὸς ὅ,τι γενικεύεται ἢ ἐπεκτείνεται, ἐφαρμόζεται οὐ μόνον εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ καὶ εἰς ἄλλα τῆς μαθηματικῆς μέρη. Δι' αὐτῆς εὗρον καὶ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν κλασματικῶν δυνάμεων, δι' αὐτῆς προσέτι ὥρισα καὶ τοὺς λογαρίθμους τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν. Αὕτη δὲ εἶναι καὶ ἡ πρώτη αἰτία τῆς ἁρμονίας τῶν μαθηματικῶν θεωριῶν πρὸς ἀλλήλας καὶ τῆς ἁπλότητος καὶ τῆς γενικότητος αὐτῶν.

Ὅτι ὁ τρόπος οὗτος τῆς θεμελιώσεως τῆς ἀλγέβρας εἶναι ὁ μόνος ὀρθός, μαρτυροῦσι δύο τινά· πρῶτον μέν, ὅτι αἱ δύο ἀρχικαὶ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας λαμβάνω, ὁρίζουσιν ἐντελῶς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν καὶ οὐδεμίαν ἐπιτρέπουσιν αὔξησιν αὐτοῦ πέραν τῶν μιγάδων ἀριθμῶν· δεύτερον δὲ ὅτι, ἂν μεταβληθῶσι κατά τι αἱ ἰδιότητες αὗται, δύναται καὶ ἄλλο σύστημα ἀριθμῶν, διάφορον τοῦ κοινοῦ, νὰ διαπλασθῇ· καὶ ἐν γένει ἀναλόγως τῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας θέλομεν νὰ διατηρήσωμεν ἐφ' ἁπάντων τῶν ἀριθμῶν, μορφοῦται καὶ τὸ ἀριθμητικὸν σύστημα (ἰδὲ Εἰσαγ. Ἀνωτέρας Ἀλγέβρας).

Ἀφοῦ ἐν τῇ εἰσαγωγῇ ἀνεπτύχθη τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν συμμέτρων ἀριθμῶν καὶ προητοιμάσθη, οὕτως εἰπεῖν, τὸ ἀναγκαιοῦν ὑλικὸν πρὸς διάπλασιν τῆς ἀλγέβρας, ἐκτίθενται ἔπειτα εἰς τὰ δύο πρῶτα βιβλία ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς καὶ ἡ θεωρία τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, διότι ταῦτα καὶ μετὰ τὴν προσάρτησιν ἄλλων ἀριθμῶν οὐδαμῶς μεταβάλλονται. Τοῦτο καὶ εὐκολύνει τὴν σπουδὴν τῆς ἀλγέβρας καὶ ὀρθόν μοι φαίνεται·

διότι ταῦτα διδάσκονται ὑπὸ πολλῶν εἰς τὴν β΄ γυμνασιακὴν τάξιν, ὅτε ὁ μαθητὴς οὐδεμίαν ἔχει εἰσέτι γνῶσιν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἡ διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν συμπλήρωσις τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος γίνεται εἰς τὸ γ΄ βιβλίον. Ἐν αὐτῷ δεικνύεται ἡ ἀνάγκη τῆς προσαρτήσεως καὶ ἄλλων ἀριθμῶν, ὁρίζονται οἱ ἀσύμμετροι καὶ αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν πράξεις καὶ ἔπειτα διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν ἀποδεικνύεται ἡ ὕπαρξις τῶν ριζῶν, τίθεται δὲ καὶ ἡ βάσις τῶν ἐφαρμογῶν τῆς ἀλγέβρας εἰς τὴν γεωμετρίαν, δεικνυομένου, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ δύναται νὰ μετρηθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ. Μετὰ δὲ ταῦτα εὑρίσκονται οἱ ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων, ὧν οἱ ἐκθέται εἶναι οἱοιδήποτε ἀσύμμετροι ἀριθμοί, καὶ οἱ νόμοι, οἱ ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων ἰσχύοντες.

Τοὺς ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ὥρισα ὡς ἀριθμοὺς συγκειμένους ἐξ ἀπείρων τὸ πλῆθος μονάδων (δεκαδικῶν ἢ μὴ) καὶ τοιούτων, ὥστε ὁσαιδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν προστεθῶσι νὰ μὴ ὑπερβαίνωσιν ἀκέραιόν τινα. Τινὲς ὁρίζουσιν αὐτοὺς ὡς ὅρια τῶν συμμέτρων, ἀλλὰ τοῦτο, νομίζω, δὲν εἶναι ὀρθόν· διότι, ἵνα παραδεχθῶμεν, ὅτι μεταβλητός τις ἀριθμὸς ἔχει ὅριον, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν ἤδη τὸν ἀριθμόν, ὅστις εἶναι ὅριον καὶ πρὸς ὃν προσεγγίζει ὁ μεταβλητός· ἀλλὰ καὶ ἡ γεωμετρία, ἣν ὡς ἐπίκουρον προσλαμβάνουσιν, οὐδὲν ὠφελεῖ· διότι ἐν ταῖς γεωμετρικαῖς αὐτῶν ἀποδείξεσι προϋποτίθεται, ὅτι πᾶσα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδειχθῇ, ἂν μὴ πρότερον ὑποτεθῶσι γνωστοὶ οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Τοὺς ὅρους τῶν προβλημάτων διέκρινα εἰς δύο διάφορα εἴδη, ἅτινα ἐκάλεσα ἐπιτάγματα καὶ περιορισμούς. Εἰς δὲ τὴν ἀλγεβρικὴν τῶν προβλημάτων ἔκφρασιν μετὰ τῆς ἐξισώσεως, ἥτις ἐκφράζει τὰ ἐπιτάγματα, προσλαμβάνω καὶ τοὺς περιορισμούς· διότι δι᾽ ἀμφοτέρων τούτων καὶ πιστῶς ἐκφράζεται καὶ ὀρθῶς λύεται τὸ πρόβλημα.

Τὰ λεγόμενα σύμβολα τοῦ ἀπροσδιορίστου $\left(\frac{0}{0}\right)$ καὶ τοῦ ἀπείρου $\left(\frac{1}{0}\right)$ παρέλειψα ὅλως. Διότι, ἀποδειχθέντος, ὅτι ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος καὶ ἄγει εἰς ἄτοπα ἐξαγόμενα, οὐδεὶς λόγος δύναται νὰ γίνῃ περὶ τοιαύτης διαιρέσεως. Οὐδὲ ἐπιτρέπεται νὰ ὑποτεθῇ ὁ παρονομαστὴς κλασματικοῦ τύπου ἴσος τῷ 0· διότι ἡ ὑπόθεσις αὕτη ἀπεκλείσθη ἤδη κατὰ τὴν διαίρεσιν, ἐξ ἧς προέκυψεν ὁ τύπος. Διὰ τοῦτο αἱ μηδενίζουσαι τὸν παρονομαστὴν ὑποθέσεις πρέπει νὰ γίνωνται πρὸ τῆς διαιρέσεως. Ὅταν δὲ ἐν προβλήματι ὁ κλασματικὸς τύπος, ὁ τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου παρέχων, ἔχῃ κοινόν τινα παράγοντα ἔν τε τῷ ἀριθμητῇ καὶ τῷ παρονομαστῇ, ὁ παράγων οὗτος πρὸ τῆς διαιρέσεως, ἐξ ἧς ὁ κλασματικὸς τύπος προέκυψεν, ἦτο κοινὸς εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τοῦ προβλήματος, καὶ πᾶσα ἐπὶ τῶν δεδομένων ὑπόθεσις μηδενίζουσα αὐτόν, ἂν μὴ ἀπεκλείσθη ἤδη ἐν τῇ εὑρέσει τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως, καταστρέφει τὴν ἐξίσωσιν καὶ ἑπομένως καθιστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου ἀόριστον. Ἡ δὲ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ἡ μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος εὑρισκομένη (ἣν πολλοὶ νομίζουσιν ὡς τὴν μόνην λύσιν), ἔχει τοῦτο τὸ προτέρημα, ὅτι πρὸς αὐτὴν πλησιάζουσιν αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος, ὅταν τὰ διδόμενα αὐτοῦ πλησιάζωσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην, ἥτις μηδενίζει τὸν κοινὸν παράγοντα.

Τὴν θεωρίαν τῶν λογαρίθμων ἐξέθηκα κατ' ἴδιον ὅλως τρόπον. Αἱ πρὸς αὐτοὺς ἄγουσαι ὁδοὶ μέχρι τοῦδε ἦσαν δύο. Καὶ ἡ μὲν πρώτη, ἡ διὰ τῶν προόδων (δι' ἧς καὶ εὑρέθησαν τὸ πρῶτον οἱ λογάριθμοι) ἔχει τὸ ἐλάττωμα, ὅτι δι' αὐτῆς δὲν ὁρίζονται ἀκριβῶς πάντων τῶν ἀριθμῶν οἱ λογάριθμοι, ἀλλὰ μόνον τῶν ὀλίγων ἐκείνων, οἵτινες εἶναι ὅροι τῆς γεωμετρικῆς προόδου· ὅσον δ' ὀλίγον καὶ ἂν διαφέρωσιν ἀπ' ἀλλήλων δύο ἐφεξῆς ὅροι αὐτῆς, ὑπάρχουσι πάντοτε μεταξὺ αὐτῶν ἄπειροι ἀριθμοί. Ἡ δὲ δευτέρα, ἡ διὰ τῶν ἐκθετῶν, εἶναι δύσβατος καὶ μακρά· διότι εἶναι ἀνάγκη πρῶτον νὰ ὁρισθῶσιν αἱ δυνάμεις, αἱ ἀσύμμετρον ἔχουσαι ἐκθέτην, ὅπερ ἀπαιτεῖ τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν θεωρήματα· ἔπειτα πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ ἐπὶ τῶν δυνάμεων τούτων μένουσιν ἀληθεῖς αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων· μετὰ δὲ ταῦτα πρέπει νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^x = \beta$, ἐξ' ἧς ὁρίζονται οἱ λογάριθμοι, ἔχει λύσιν καὶ νὰ δειχθῇ, πῶς εὑρίσκεται ἢ πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ ἡ λύσις αὕτη, ὅπερ ἀπαιτεῖ τὴν γνῶσιν τῶν συνεχῶν κλασμάτων καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν. Ὅταν δὲ τὴν μακρὰν ταύτην ὁδὸν διανύσῃ ὁ μαθητής, τότε μόνον φθάνει εἰς τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου καὶ τῆς ἐπ' ἄπειρον προσεγγίσεως ἔχει φύσει ἀσαφές τι καὶ σκοτεινόν, δύσκολον εἶναι κατὰ τὴν μακρὰν ταύτην ὁδὸν νὰ διατηρηθῇ, ἐν νεαρᾷ μάλιστα διανοίᾳ, ἡ διαύγεια τῶν ἐννοιῶν, ἥτις εἶναι ἡ πρώτη τῆς μαθηματικῆς ἀρετή· εὐκολώτατα δὲ ἀποκτῶσι πάντα ταῦτα χροιάν τινα ἀβεβαιότητος καὶ ἀσαφείας, ἥτις ἀντίκειται εἰς τὴν μαθηματικὴν ἀκρίβειαν.

Ἀλλ᾽ ἡ θεωρία τῶν ἀσυμμέτρους ἐκθέτας ἐχουσῶν δυνάμεων, ὡς καὶ ἡ τῶν συνεχῶν κλασμάτων, καὶ δύσκολος εἶναι καὶ περιττὴ ὅλως διὰ τὴν στοιχειώδη μαθηματικήν· συμπεριελαμβάνοντο δὲ μέχρι τοῦδε ἐν τοῖς στοιχείοις χάριν τῶν λογαρίθμων.

Ταῦτα ἀναλογιζόμενος, ἐζήτησα καὶ εὗρον ἄλλον ὁρισμὸν τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων, ὅστις οὐδεμίαν τῶν θεωριῶν τούτων προϋποθέτει, ἀλλ᾽ ἁπλῶς στηρίζεται ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ὁ λογάριθμος ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐκφράζει (πλὴν ἑνὸς) τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων αὐτοῦ καὶ τῶν δεκαδικῶν δυνάμεων αὐτοῦ. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν λογαρίθμων εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου ἁπλούστατα καὶ στηρίζεται ἐπὶ τῆς στοιχειώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ᾽ ἣν τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ παράγοντες ἢ ἓν ὀλιγώτερον. Ἡ δὲ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων γίνεται κατὰ τὸν νέον ὁρισμὸν μόνον διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Τοιουτοτρόπως ἀποβαίνει ἡ θεωρία τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων καὶ συντομωτέρα καὶ ἁπλουστέρα.

Τοὺς ἄλλους ὁρισμοὺς τῶν λογαρίθμων καὶ τὰ διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα ἐξέθηκα διὰ βραχέων ἐν παραρτήματι· τοῦτο δὲ χάριν τῶν θελόντων να σπουδάσωσι τὴν ἀνωτέραν μαθηματικήν· διότι διὰ τοὺς ἄλλους φαίνονταί μοι ταῦτα ὅλως περιττά.

Ἀντὶ τῶν συνεχῶν κλασμάτων παρέλαβον τοὺς συνδυασμοὺς καὶ τὰ περὶ αὐτούς· διότι καὶ χρησιμώτερα εἶναι ταῦτα καὶ πρὸς τὸν σκοπὸν τῆς στοιχειώδους ἐκπαιδεύσεως φαίνονταί μοι μᾶλλον συντελοῦντα.

Τὰ διὰ μικρῶν στοιχείων τυπωθέντα, ὡς καὶ ἐκεῖνα, ὧν προετάχθη ἀστερίσκος, δύνανται νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος δὲν συγχωρῇ τὴν διδασκαλίαν αὐτῶν.

Ι. Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΡΧΑΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Προκαταρκτικαὶ ἔννοιαι.

1. Ἐὰν συγκρίνωμεν πλῆθος ἐξ ὁμοίων πραγμάτων συγκείμενον (ἢ τῶν ὁποίων παραβλέπομεν τὰς διαφορὰς) πρὸς ἓν τῶν πραγμάτων τούτων σχηματίζομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ *ἀριθμοῦ*.

Ἀριθμὸς ἄρα εἶναι ἡ ἔννοια, δι' ἧς ἐκφράζομεν τὴν σχέσιν πολλῶν ὁμοίων πραγμάτων πρὸς ἓν τούτων, ὅταν θεωρῶμεν αὐτὰ μόνον ὡς πρὸς τὸ πλῆθος.

2. Τὸ ἓν τῶν πραγμάτων, πρὸς ὃ συγκρίνεται τὸ πλῆθος, λέγεται *μονάς*.

3. Οἱ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦσι σειρὰν ἄπειρον ἀρχομένην ἀπὸ τοῦ ἑνός, ἐν ᾗ ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ μιᾶς μονάδος.

Διὰ τοῦτο ὁ ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα πολλῶν *μονάδων*, ἤτοι ὡς ἀποτελούμενος ὑπὸ τῆς μονάδος πολλάκις ἐπαναλαμβανομένης.

4. Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ὅταν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑνὸς ἔχῃ ἀντίστοιχον μίαν τοῦ ἄλλου, καὶ τἀνάπαλιν.

Ἄνισοι δέ, ὅταν μονάδες τινὲς τοῦ ἑνὸς δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους εἰς τὸν ἄλλον· τότε ὁ πρῶτος λέγεται *μείζων* τοῦ δευτέρου, ἢ ὅτι ἔχει περισσοτέρας μονάδας ἢ ὁ δεύτερος.

5. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν γίνεται φανερόν, ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ἑπομένας ἰδιότητας.

α') Οἱ τῷ αὐτῷ ἴσοι ἀριθμοὶ εἶναι καὶ ἀλλήλοις ἴσοι.

β') Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν ἴσων ἀριθμῶν προστεθῇ μία μονάς, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι· καὶ γενικῶς, ἐὰν εἰς ἴσους προστεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοί, οἱ προκύπτοντες εἶναι ἴσοι.

Τὰς ἰδιότητας ταύτας ὀνομάζομεν ἀρχικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

6. Τὸ σημεῖον, δι' οὗ παριστῶμεν τὴν ἰσότητα εἶναι τόδε $=$· γράφεται δὲ μεταξὺ τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν.

7. Οἱ δύο ἀριθμοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων γράφεται τὸ σημεῖον $=$, λέγεται, ὅτι ἀποτελοῦσιν ἰσότητα· ἑκάτερος δὲ αὐτῶν λέγεται μέλος τῆς ἰσότητος.

8. Τὸ σημεῖον, δι' οὗ παριστῶμεν τὴν ἀνισότητα εἶναι $<$, γράφεται δὲ ὁ μικρότερος ἀριθμὸς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας·

ὡς $8<9$, $12>7$.

9. Πάντα τὰ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ζητήματα ἀνάγονται εἰς τὰ τέσσαρα στοιχειώδη, πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν, πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν.

10. Ὅταν σκεπτώμεθα ἐπί τινων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους δὲν θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν, ἢ οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄγνωστοι, παριστῶμεν αὐτοὺς διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Οὕτω τὰ γράμματα

α β γ δ κ.τ.λ.

παριστῶσι τυχόντας ἀριθμούς.

Πρόσθεσις.

11. Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκεται ἄλλος, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, ἃς ἔχουσιν οἱ δοθέντες.

Ὁ ἀριθμὸς οὗτος λέγεται ἄθροισμα τῶν δοθέντων. Εὑρίσκεται δέ, ἂν εἰς τὸν πρῶτον προστεθῇ ὁ δεύτερος, εἰς τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα ὁ τρίτος, εἰς τὸ εὑρεθὲν νέον ἄθροισμα ὁ τέταρτος, καὶ οὕτω καθεξῆς.

12. Τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι εἶναι δεδομέναι αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτὸ μονάδες. Ἐκ τούτου συνάγεται ἡ ἑπομένη θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως.

13. Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις πολλῶν ἀριθμῶν, πάντοτε εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Διὰ τοῦτο τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ὡς τῶν α καὶ β, παρίσταται διὰ τοῦ α+β, ἢ διὰ τοῦ β+α (διὰ μὲν τοῦ α+β δηλοῦμεν, ὅτι εἰς τὸν α πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ β, διὰ δὲ τοῦ β+α δηλοῦμεν, τοὐναντίον, ὅτι εἰς τὸν β πρέπει νὰ προστεθῇ ὁ α) καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ παρίσταται ἀδιαφόρως διὰ τῶν

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta \quad ἢ \quad \alpha+\gamma+\delta+\beta \quad ἢ \quad \delta+\beta+\alpha+\gamma \quad κτλ.,$$

ἔνθα ἡ τάξις τῶν ἀριθμῶν δηλοῖ καὶ τὴν σειρὰν τῶν πράξεων.

Τὸ ἄθροισμα ἐγκλείεται συνήθως εἰς παρένθεσιν, ὅταν ἐπ' αὐτοῦ πρόκειται νὰ γίνῃ καὶ ἄλλη πρᾶξις, ὡς

$$(\alpha+\beta)+\gamma, \qquad (\alpha+\beta+\gamma)+\delta \quad κλπ.$$

14. Ἐκ τῆς εἰρημένης θεμελιώδους ἰδιότητος τῆς προσθέσεως πηγάζουσιν ἀμέσως αἱ ἑπόμεναι.

15. Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι δύο ἢ περισσότεροι προσθετέοι ὑπὸ τοῦ εὑρεθέντος ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon.$$

Λέγω, ὅτι οἱ προσθετέοι β καὶ δ δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν (β+δ).

Διότι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα εὑρίσκομεν, καὶ ἂν προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἑξῆς

$$\beta+\delta+\alpha+\gamma+\varepsilon\cdot$$

ἐὰν δέ, ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις, περιορισθῶμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν δύο πρώτων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν

$$(\beta+\delta)+\alpha+\gamma+\varepsilon.$$

Ἡ αὐτὴ πρότασις δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ

16. Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύναται οἱοσδήποτε τῶν προσθετέων νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

Ἤτοι ὁ προσθετέος (β+δ) δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ἐν τῷ ἀθροίσματι $(\beta+\delta)+\alpha+\gamma+\varepsilon$ ὑπὸ τῶν β καὶ δ.

17. Εἴτε εἰς ἄθροισμα προστεθῇ ἀριθμός, εἴτε εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν ἄθροισμα.

Διότι προσθέτοντες τὸν ε εἰς τὸ ἄθροισμα α+β+γ+δ, εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon,$$

ἤτοι τὸ $\alpha+\varepsilon+\beta+\gamma+\delta$, ἢ $(\alpha+\varepsilon)+\beta+\gamma+\delta$· ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι τὸ αὐτὸ προκύπτει ἄθροισμα, καὶ ἂν προσθέσωμεν τὸν ε εἰς ἕνα τῶν προσθετέων, οἷον τὸν α.

18. Ἄθροισμα προστίθεται εἰς ἄθροισμα, καὶ ἂν προστεθῶσι τὰ μέρη ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων.

Διότι ἔστωσαν τὰ δύο ἀθροίσματα

$$(\alpha+\beta+\gamma) \quad \text{καὶ} \quad (\delta+\varepsilon+\zeta+\eta)\text{·}$$

λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta.$$

Καὶ ὄντως, ἀντικαθιστῶντες ἐν αὐτῷ τοὺς προσθετέους α, β, γ ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $(\alpha+\beta+\gamma)$, εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta+\varepsilon+\zeta+\eta\text{·}$$

ποιοῦντες δὲ τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τοὺς ἄλλους προσθετέους, εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon+\zeta+\eta),$$

τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δοθέντων ἀθροισμάτων.

19. ***Παρατήρησις***. Εἰς τὰς ἀποδείξεις τῶν προτάσεων τούτων (15, 16, 17 καὶ 18) καὶ ὁ ὁρισμὸς τῆς προσθέσεως καὶ ὁ τρόπος, καθ' ὃν ἐκτελεῖται ἡ πρόσθεσις, εἶναι ἀδιάφορα· ἀρκεῖ μόνον τὸ ὅτι ὑπάρχει πλήρης ἀδιαφορία πρὸς τὴν τάξιν, καθ' ἣν λαμβάνονται ἀλλεπαλλήλως οἱ ἀριθμοὶ ἐν τῇ πράξει· ὥστε καὶ πᾶσα ἄλλη πρᾶξις τὴν αὐτὴν ἀδιαφορίαν ἔχουσα πρὸς τὴν τάξιν τῶν ἀριθμῶν, ἐφ' ὧν ἐκτελεῖται, ἔχει ἀναγκαίως καὶ τὰς ὑπὸ τῶν προτάσεων τούτων ἐκφραζομένας ἰδιότητας.

Ἀφαίρεσις.

20. Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι ἡ ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως πρᾶξις· ἐν αὐτῇ δίδονται δύο ἀριθμοί, α καὶ β, καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν β, νὰ δίδῃ ἄθροισμα τὸν α, ἤτοι νὰ εἶναι $\alpha=\beta+\gamma$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται διαφορὰ τῶν δεδομένων, τούτων δὲ ὁ μὲν α λέγεται μειωτέος, ὁ δὲ β ἀφαιρετέος.

21. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν παρίσταται διὰ τοῦ σημείου —, γραφομένου μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν καὶ πρὸ τοῦ ἀφαιρετέου, οὕτως: $\alpha-\beta$· ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\gamma=\alpha-\beta$.

22. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου καὶ διαφορᾶς σχέσις εἶναι σχέσις προσθέσεως, διότι $\alpha=\beta+\gamma$, ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ γε-

νικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ ἐκ τῶν τῆς ἰσότητος.

Τούτων αἱ πρωτεύουσαι εἶναι αἱ ἑπόμεναι.

1) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ μένει ἀμετάβλητος.

2) Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος, καὶ ἂν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων.

3) Εἴτε τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν διὰ μιᾶς ἀπὸ ἄλλου, εἴτε αὐτοὺς τοὺς ἀριθμούς, τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον, ἡ αὐτὴ προκύπτει διαφορά· ἤτοι $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$.

Τὰς ἀποδείξεις τούτων, ἁπλουστάτας οὔσας, παραλείπομεν.

Πολλαπλασιασμός.

23. Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἕτερον β εἶναι ἡ πρόσθεσις τόσων ἀριθμῶν ἴσων τῷ α, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ β· ὁ ἐκ τῆς προσθέσεως ταύτης προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται γινόμενον· οἱ δὲ δοθέντες, παράγοντες· καὶ ὁ μὲν α λέγεται πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ β πολλαπλασιαστής.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 6 ἐπὶ τὸν 4 σημαίνει τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος $6+6+6+6$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον σύγκειται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος.

24. Τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν β παρίσταται ὡς ἑξῆς·

$$\alpha\times\beta, \text{ ἢ } \alpha.\beta, \text{ ἢ καὶ ἁπλῶς } \alpha\beta\cdot$$

τὴν τελευταίαν ὅμως παράστασιν δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν, ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι ἀριθμοί· οὕτω τὸ γινόμενον τοῦ 7 ἐπὶ τὸν 5 ἀνάγκη νὰ σημειώνηται 7×5, ἢ 7.5, καὶ ὄχι διὰ τοῦ 75· διότι τότε συγχέεται τὸ γινόμενον μετὰ τοῦ ἀριθμοῦ 75.

25. Δεδομένων πολλῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον αὐτῶν πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο πρώτους, ἔπειτα τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν τρίτον, καὶ καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ ἀριθμοί.

26. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ ἡ τάξις, καθ' ἣν λαμβάνονται οἱ πολλαπλασιαστέοι ἀριθμοί, εἶναι ἀδιάφορος πρὸς τὸ ἐξαγόμενον· ἤτοι καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ

ἂν ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν πάντοτε εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ γινόμενον.

Διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν, ὡς τῶν α καὶ β, παρίσταται διὰ τοῦ α.β ἢ διὰ τοῦ β.α (διὰ τοῦ α.β, ὅταν ὁ α πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν β, διὰ δὲ τοῦ β.α, ὅταν ὁ β πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν α).

Καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν, ὡς τῶν α,β,γ,δ, παρίσταται ἀδιαφόρως ὡς ἑξῆς· α.β.γ.δ ἢ β.α.γ.δ ἢ δ.β.γ.α κτλ.· ἐγκλείεται δὲ καὶ τὸ γινόμενον εἰς παρένθεσιν, ἐὰν πρόκειται νὰ γίνῃ ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἄλλη πρᾶξις· ὡς (α.β)+(γ.δ), (3.5)+7.

27. Ἐκ τῆς εἰρημένης θεμελιώδους ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πηγάζουσιν ἀναγκαίως αἱ ἑπόμεναι, αἵτινες εἶναι ὅλως ὅμοιαι πρὸς τὰς ἐν τῇ προσθέσει εὑρεθείσας.

28. Ἐν παντὶ γινομένῳ δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι δύο ἢ περισσότεροι παράγοντες ὑπὸ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν (ἐδ. 15).

Ἡ αὐτὴ δὲ πρότασις ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς

Ἐν παντὶ γινομένῳ δύναται ὁ τυχὼν παράγων νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπ' ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον (παράβ. ἐδ. 16).

29. Εἴτε γινόμενον πολλαπλασιάσῃ ἀριθμὸς εἴτε ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου, τὸ αὐτὸ προκύπτει ὁλικὸν γινόμενον (ἐδ. 17).

30. Γινόμενον ἐπὶ γινόμενον πολλαπλασιάζεται, καὶ ἂν πολλαπλασιασθῶσι πάντες οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν γινομένων (παράβ. ἐδ. 18). Ἤτοι (α.β.γ).(δ.ε)=α.β.γ.δ.ε.

31. Αἱ προτάσεις αὗται ἀποδεικνύονται, ὡς ἀπεδείχθησαν καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ὅμοιαι ἐν τῇ προσθέσει ἐκ τῆς αὐτῆς θεμελιώδους ἰδιότητος, ἀρκεῖ ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν ἐκείναις νὰ τραπῶσι τὰ ὀνόματα πρόσθεσις, ἄθροισμα κ.τ.λ. εἰς τὰ πολλαπλασιασμός, γινόμενον κ.τ.λ.

Διὰ τοῦτο καὶ παρελείψαμεν τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν.

32. Ἡ πρόσθεσις καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς συνδέονται διὰ τῆς ἑπομένης γενικῆς ἰδιότητος.

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμὸν καὶ ἂν ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.

Τοῦτο ἐκφράζει ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta+\gamma).\delta=(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)$.

Λέγεται δὲ ἡ ἰδιότης αὕτη ἐπιμεριστική.

Ἕνεκα τῆς πρώτης ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύναται ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἕπεται

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἄλλων, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν προσθετέων καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα

ἤτοι $\delta.(\alpha+\beta+\gamma)=(\delta.\alpha)+(\delta.\beta)+(\delta.\gamma)$.

33. Ἐκ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος ἕπεται ἀμέσως ἡ ἑξῆς·

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄλλο ἄθροισμα, καὶ ἐὰν ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα γινόμενα.

Ἔστω τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)$.

Θεωροῦντες τὸ ἄθροισμα $(\delta+\varepsilon)$ ὡς εὑρεθὲν καὶ ἐφαρμόζοντες τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα, εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=\alpha.(\delta+\varepsilon)+\beta.(\delta+\varepsilon)+\gamma.(\delta+\varepsilon)$$

καὶ ἐὰν εἰς ἑκάστην παρένθεσιν ἐφαρμόσωμεν καὶ πάλιν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα, εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon)=(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)+(\alpha.\varepsilon)+(\beta.\varepsilon)+(\gamma.\varepsilon).$$

34. Τὰ διπλάσια τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσα καὶ τὰ τριπλάσια ὡσαύτως· καὶ γενικῶς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσα.

Ἔστω $\alpha=\beta$· ἐὰν προστεθῶσιν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους ἴσοι ἀριθμοί, οἱ α καὶ β, ἕπεται (ἐδ. 5, β) $\alpha+\alpha=\beta+\beta$, ἤτοι $2\alpha=2\beta$.

Ἐὰν δὲ τοῦτο γίνῃ πολλάκις, προκύπτει ἡ πρότασις.

Φανερὸν δέ, ὅτι τῶν ἀνίσων τὰ διπλάσια εἶναι ἄνισα, καὶ τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ὡσαύτως.

Διαίρεσις.

35. Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· ἐν αὐτῇ δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν β νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν α, ἤτοι νὰ εἶναι $\alpha=\beta.\gamma$.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς λέγεται πηλίκον καὶ παρίσταται διὰ τοῦ σημείου $\frac{\alpha}{\beta}$ (ὅπερ ἀπαγγέλλεται α διὰ β) ὥστε ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$.

Ὁ α λέγεται διαιρετέος, ὁ δὲ β διαιρέτης.

36. Ἐπειδὴ ἡ μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου καὶ πηλίκου σχέσις εἶναι σχέσις πολλαπλασιασμοῦ, διότι $\alpha = \beta.\gamma$, ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως δύνανται νὰ εὑρεθῶσιν ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ ἐκ τῶν τῆς ἰσότητος· τῶν ἰδιοτήτων τούτων πρωτεύουσαι εἶναι αἱ ἑξῆς

37. Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται (ὅταν ὑπάρχῃ), ἐὰν ἀμφότεροι πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (παράβ. ἐδ. 22,1).

Διότι, ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta.\gamma$, θὰ εἶναι (34) καὶ $\alpha.\eta = (\beta.\gamma).\eta = \beta.\gamma.\eta$,

ἢ (28) $\alpha.\eta = (\beta.\eta).\gamma$.

Ὥστε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α.η διὰ τοῦ β.η εἶναι πάλιν ὁ γ.

38. Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ (ἐὰν διαιρῆται) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (πρβλ. ἐδ. 22,2).

Ἔστω τὸ γινόμενον α β.γ.δ.ε καὶ ἂς διαιρῆται ὁ παράγων β διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ρ, ἂς δίδῃ δὲ πηλίκον π· τότε θὰ εἶναι $\beta = \rho.\pi$· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ α.β.γ.δ.ε διὰ τοῦ [illegible] εἶναι α.π.γ.δ.ε· διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ ρ δίδει

(α.π.γ.δ.ε).ρ ἢ α.(π.[illegible]γ.[illegible] ἢ α.β.γ.δ.ε· τοὐτέστι τὸν διαιρετέον.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἕπεται ἀμέσως, ὅτι γινόμενον διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἐὰν ἐξαλειφθῇ ὁ παράγων οὗτος.

39. Εἴτε διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων, εἴτε ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν τούτων (τουτέστι πρῶτον διὰ τοῦ πρώτου, εἶτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ δευτέρου καὶ καθεξῆς), ἓν καὶ τὸ αὐτὸ πηλίκον εὑρίσκομεν (παράβλ. ἐδ. 22,3).

Ἂς διαιρῆται ἀριθμός τις α διὰ τοῦ γινομένου (β.γ.δ) καὶ ἂς δίδῃ πηλίκον π· τότε εἶναι $\alpha = (\beta.\gamma.\delta).\pi$ ἢ καὶ $\alpha = \beta.(\gamma.\delta.\pi)$· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ α διὰ τοῦ πρώτου παράγοντος β διαιρεθείς, δίδει πηλίκον τὸ (γ.δ.π)· ἀλλὰ καὶ τοῦτο, διὰ τοῦ δευτέρου παράγοντος γ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ (δ.π)· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο διαιρεθῇ διὰ τοῦ τελευταίου παράγοντος δ, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ π.

40 Ἀντὶ νὰ διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ (ἐὰν διαιρῶνται) καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ πηλίκα.

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ πηλίκα τῶν ἀριθμῶν α,β,γ, διαιρουμένων διὰ δ, εἶναι τὰ π, ρ, σ, ἤτοι ἔστω $\alpha = \delta . \pi$, $\beta = \delta . \rho$, $\gamma = \delta . \sigma$· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha + \beta + \gamma$, διαιρεθέντος διὰ τοῦ δ, θὰ εἶναι $\pi + \rho + \sigma$· διότι τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δ δίδει $(\pi + \rho + \sigma) . \delta$· ἤτοι (ἐδ. 32) $\pi . \delta + \rho . \delta + \sigma . \delta$, τουτέστι τὸν διαιρετέον $\alpha + \beta + \gamma$.

Συμπέρασμα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων πηγάζουσιν ἅπασαι ἐκ δύο ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· τουτέστι πρῶτον ἐκ τῆς κοινῆς αὐτῶν ἰδιότητος, καθ' ἣν τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἄγουσιν, ἐπὶ ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἐφαρμοζόμεναι, μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λαμβάνωνται ἀλλεπαλλήλως οἱ ἀριθμοί· καὶ δεύτερον ἐκ τῆς συνδεούσης τὰς πράξεις ταύτας ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος.

Διὰ τοῦτο αἱ ἰδιότητες αὗται λέγονται θεμελιώδεις ἢ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

41. Οἱ ἀριθμοί, οἵτινες γίνονται ἐκ τῆς μονάδος 1 διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς, δὲν ἐξαρκοῦσιν εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀριθμητικῶν ζητημάτων· διότι ἡ ἀφαίρεσις καὶ ἡ διαίρεσις δύο τοιούτων ἀριθμῶν δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή· καὶ διὰ τοῦτο πλεῖστα προβλήματα, καίπερ ὄντα ἁπλούστατα, δὲν δύνανται νὰ λυθῶσι διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἐὰν π. χ. προταθῇ νὰ μοιρασθῶσι 3 πήχεις ὑφάσματος εἰς 8 ἀνθρώπους, ἂν καὶ γίνεται τοῦτο ἐν τοῖς πράγμασιν εὐκολώτατα, εἶναι ὅμως ἀδύνατον νὰ παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ τὸ μερίδιον ἑκάστου. Διὰ τοῦτο ἦτο ἀνάγκη νὰ ἐπινοηθῶσι καὶ ἄλλοι ἀριθμοὶ καὶ νὰ προσαρτηθῶσιν εἰς τοὺς ἐξ ἀρχῆς σχηματισθέντας, ὥστε ν' ἀποτελεσθῇ γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ αἱ δύο εἰρημέναι πράξεις νὰ εἶναι πάντοτε δυναταί. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν εἶναι δυνατὸν διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων ἀριθμῶν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4,.... νὰ γίνῃ σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ νὰ εἶναι δυνατὴ πᾶσα διαίρεσις.

42. Ἐπειδὴ εἰς τὸ νέον σύστημα θὰ δύναται πᾶς ἀριθμὸς νὰ διαιρῆται εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη, ἕπεται, ὅτι θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμὸς (ἕνα δὲ καὶ μόνον παραδεχόμεθα), ὅστις δὶς λαμβανόμενος νὰ δίδῃ τὴν μονάδα 1· ὁμοίως θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμός, ὅστις τρὶς λαμβανόμενος νὰ δίδῃ τὴν μονάδα 1· καὶ καθεξῆς· καὶ γενικῶς, θὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμὸς (καὶ εἷς μόνος), ὅστις μ φορὰς λαμβανόμενος ($\mu = 2,3,4,\ldots$) νὰ δίδῃ τὴν μονάδα 1.

Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους παριστῶμεν διὰ τῶν σημείων

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots\ldots,\ \frac{1}{\mu},\ldots\ldots$$

καὶ θεωροῦμεν ὡς νέας μονάδας· ὀνομάζομεν δ' αὐτὰς κλασματικάς· τὴν δὲ ἐξ ἀρχῆς ὑπάρχουσαν, ἀκεραίαν· ὥστε ἐν τῷ νέῳ συστήματι ἔχομεν τὰς μονάδας

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ldots\ldots,\ \frac{1}{\mu},\ldots\ldots$$

Αἱ κλασματικαὶ μονάδες διὰ τῆς ἐπαναλήψεως γίνονται ἀκέραιαι· καὶ ὄντως, κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτῶν, εἶναι·

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1,\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1,\quad \text{κτλ.}$$

Ὁρισμοί.

43. Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον πολλῶν μονάδων.

Οὕτως $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+1+1$, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ εἶναι ἀριθμοί.

Τὸ νέον σύστημα τῶν ἀριθμῶν λέγεται κλασματικὸν καὶ οἱ νέοι ἀριθμοὶ αὐτοῦ κλασματικοί, οἱ δὲ προϋπάρχοντες 1, 2, 3, 4.... λέγονται ἀκέραιοι.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι τὴν ἰδιότητα τῶν μονάδων· τουτέστι πολλάκις λαμβανόμενοι γίνονται ἀκέραιοι.

Παραδείγματος χάριν, ὁ ἀριθμὸς $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ γίνεται ἀκέραιος, ἐὰν ληφθῇ 2.3 φοράς, ἤτοι ἑξάκις· διότι πᾶσαι αἱ μονάδες, ἐξ ὧν σύγκειται, γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί.

44. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενοι γίνωνται ἀκέραιοι ἴσοι· ἄνισοι δέ, ἐὰν γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι· καὶ μεγαλήτερος λέγεται ὁ τὸν μεγαλήτερον ἀκέραιον δίδων· μικρότερος δὲ ὁ τὸν μικρότερον.

Παραδείγματος χάριν, οἱ δύο ἀριθμοὶ

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12} \text{ καὶ } \frac{1}{4} \text{ εἶναι ἴσοι·}$$

διότι τετράκις ληφθέντες γίνονται ἀμφότεροι 1.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{7}{10}$ εἶναι ἴσοι, διότι δεκάκις ληφθέντες γίνονται ἀμφότεροι 7.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἀνάγεται ἡ ἰσότης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἰς ἰσότητα ἀκεραίων (ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ ἀνισότης), ὥστε αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῆς ἰσότητος (ἐδ. 5) διατηροῦνται.

45. Διὰ νὰ διατηρηθῶσι δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν αὐτὰς ὡς ἑξῆς.

46. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζονται ὡς καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων· ὡσαύτως καὶ ὁ πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος· ἤτοι α.3 σημαίνει α+α+α, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ α.

47. Διὰ νὰ εὕρωμεν, πῶς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ κλάσμα, ἵνα διατηρήσωμεν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂς παραστήσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ α ἐπὶ μίαν κλασματικὴν μονάδα, ἔστω ἐπὶ $\frac{1}{5}$, ὡς συνήθως, διὰ τοῦ $α.\frac{1}{5}$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ 5 καὶ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὴν πρώτην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εὑρίσκομεν

$$\left(\alpha.\frac{1}{5}\right).5 \quad ἢ \quad \alpha.\left(\frac{1}{5}.5\right) \quad ἤτοι \quad \alpha.1 \quad ἤτοι \quad \alpha.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ $\alpha.\frac{1}{5}$ εἶναι τὸ πέμπτον μέρος τοῦ α· διότι πεντάκις ληφθὲν ἔδωκε τὸν α.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἐν γένει, ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha.\frac{1}{\mu}$ εἶναι τὸ μὸν μέρος τοῦ α.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν, ὅτι, διὰ νὰ διατηρήσωμεν τὰς ἀρχικὰς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰδιότητας καὶ εἰς τὸ νέον σύστημα, πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν κλασματικὴν μονάδα $\frac{1}{\mu}$ ὡς μερισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς μ ἴσα μέρη.

48. Ὁ δὲ πολλαπλασιασμὸς ἐν γένει πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς πρᾶξις, δι' ἧς, δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β, εὑρίσκεται τρίτος, συγκείμενος ἐκ τοῦ α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ β ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Διότι, ἂν ὁ β σύγκειται ἐκ τῶν μονάδων

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5},$$

τὸ γινόμενον θὰ εἶναι $\alpha.\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$·

ἤτοι, κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα

$$\alpha.1+\alpha.1+\alpha.\frac{1}{2}+\alpha.\frac{1}{5}+\alpha.\frac{1}{5},$$

τουτέστιν (ἐδ. 47) $\qquad \alpha+\alpha+\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{5}+\frac{\alpha}{5}.$

49. Ἡ διαίρεσις ὁρίζεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (ἐδ. 35)· ὥστε ὁ ὁρισμὸς αὐτῆς μένει ὁ αὐτός.

50. Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς εἰξεύρομεν, πῶς ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν μόνον, ὅτι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις ἀπέβαλον τὴν πρώτην αὐτῶν σημασίαν, καθ' ἣν ὁ μὲν πολλαπλασιασμὸς ἦτο ἐπανάληψις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ πολλάκις, ἡ δὲ διαίρεσις μερισμὸς ἀριθμοῦ εἰς πολλὰ ἴσα μέρη· καὶ πᾶς πολλαπλασιασμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς διαίρεσις, καὶ ἀντιστρόφως πᾶσα διαίρεσις δύναται νὰ θεωρηθῇ καὶ ὡς πολλαπλασιασμός.

Τῷ ὄντι, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$ σημαίνει διαίρεσιν αὐτοῦ διὰ τοῦ 3 καὶ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ τοῦ $\frac{1}{5}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν αὐτοῦ ἐπὶ 5· καὶ γενικῶς ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\frac{\beta}{\alpha}$ σημαίνει πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν ἕτερον.

Παρατήρησις. Τῆς εἰσαγωγῆς τῶν κλασμάτων εἰς τὴν ἀριθμητικὴν σκοπὸς εἶναι, ὡς εἴπομεν, νὰ καταστήσῃ τὴν λύσιν παντὸς προβλήματος, εἰς τὴν διαίρεσιν δύο ἀριθμῶν ἀναγομένου, δυνατήν, τοὐλάχιστον ἀριθμητικῶς· διότι ὑπάρχουσι καὶ προβλήματα καὶ ἁπλούστατα μάλιστα, ἅτινα λύονται μὲν ἀριθμητικῶς, ὧν ὅμως ἡ διὰ τῶν κλασμάτων λύσις, ἕνεκα τῆς ἰδιαιτέρας φύσεως τοῦ ἀγνώστου ποσοῦ, εἶναι ἀπαράδεκτος· τοιοῦτον εἶναι τὸ ἑπόμενον.

Ἐὰν δι' 8 πλοίων πρόκειται νὰ μεταφερθῶσι 1500 ἄνθρωποι καὶ νὰ διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου εἰς αὐτά, πόσους πρέπει νὰ ἔχῃ ἕκαστον τῶν πλοίων;

Ἡ ἀριθμητικὴ λύσις εἶναι $\frac{1500}{8}$ ἢ $187\frac{1}{2}$, διότι οὗτος ὁ ἀριθμός, καὶ οὗτος μόνος, πολλαπλασιασθεὶς ἐπὶ 8 δίδει τὸν 1500· πρόδηλον ὅμως, ὅτι τοῦτο εἶναι φύσει ἀδύνατον νὰ πραγματωθῇ, καὶ ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ τεθέντος προβλήματος εἶναι ἀδύνατος ἐν τοῖς πράγμασιν. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀριθμητική, χάριν τῆς γενικότητος, ἐργάζεται ἐπὶ ἀφῃρημένων ἀριθμῶν, ἄπειρα δὲ ἄλλα προβλήματα, εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀναγόμενα, ἐπιδέχονται πράγματι τὴν κλασματικὴν λύσιν $187\frac{1}{2}$, διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ ἀριθμητικὴ γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ νὰ δύνανται νὰ λυθῶσι δι' ἀριθμῶν πάντα τὰ ζητήματα. Ἂν δὲ ἡ εὑρισκομένη λύσις, ἥτις εἶναι ἡ μόνη δυνατή, εἶναι τῷ ὄντι ἐφαρμόσιμος εἰς τὰ πράγματα ἢ μή, τοῦτο ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἰδιαιτέρας φύσεως τῶν ποσῶν, ἅτινα εἰσέρχονται εἰς τὸ πρόβλημα· συνήθως ὅμως ἀμέσως ἐκ τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος ἐννοοῦμεν, ἂν ἡ τοιαύτη ἢ τοιαύτη λύσις τοῦ προβλήματος εἶναι παραδεκτὴ ἢ μή. Ἄν, παραδείγματος χάριν, ἐζητεῖτο νὰ μοιρασθῶσι 1500 δρ. εἰς 8 ἀνθρώπους, ἡ λύσις $187\frac{1}{2}$ προφανῶς εἶναι παραδεκτή. Διὰ ταῦτα, ἡ ἀριθμητική, παραβλέπουσα τὰς ἀνωμαλίας ταύτας τῶν καθ' ἕκαστα προβλημάτων, πλάσσει γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ πᾶν ζήτημα εἶναι δυνατὸν νὰ λυθῇ, τοὐλάχιστον δι' ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Περὶ τοῦ 0 ὡς ἀριθμοῦ.

51. Ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως δύο ἴσων ἀριθμῶν προκύπτει, ὡς γνωστόν, νέος τις ἀριθμός, ὁ ἀριθμὸς 0.

52. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος, προστιθέμενος εἰς ἀριθμὸν ἢ ἀφαιρούμενος ἀπὸ ἀριθμοῦ, οὐδόλως βλάπτει αὐτόν, πολλαπλασιάζων ὅμως πάντα ἀριθμὸν ποιεῖ αὐτὸν 0· τουτέστιν εἶναι

$$\alpha+0=\alpha, \quad \alpha-0=\alpha \quad \text{καὶ} \quad \alpha.0=0.\alpha=0.$$

Καὶ τὸ πηλίκον τοῦ 0 διαιρεθέντος δι' οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι 0, ἤτοι $\frac{0}{\alpha}=0$.

Εἰς τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα φθάνομεν ἐφαρμόζοντες καὶ ἐπὶ τοῦ 0 τοὺς γνωστοὺς ὁρισμοὺς τῶν πράξεων καὶ τὰς ἰδιότητας αὐτῶν.

53. Διὰ τοῦ 0 οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ, τουτέστιν ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος· καὶ ὄντως οὐδεὶς ἀριθμὸς τοῦ κλασματικοῦ συστήματος δύναται νὰ εἶναι πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως· διότι πάντες, ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενοι, δίδουσι γινόμενον 0.

54. Οὐδὲ εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ τὸ πηλίκον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως ὡς ἀριθμὸς καὶ νὰ εἰσαχθῇ εἰς τὸ ἤδη ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν· διότι εἰσαγόμενον καταστρέφει τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων.

Ἔστω τῷ ὄντι λ νέος τις ἀριθμός, ὅστις ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενος νὰ μὴ μηδενίζηται, ἀλλὰ νὰ δίδῃ γινόμενον 1 (τότε ὁ λ εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{1}{0}$)· παραδεχόμενοι τὸν ἀριθμὸν τοῦτον θὰ εἴχομεν, παραδείγματος χάριν, $0.3.\lambda=0.\lambda=1$,

ἀλλὰ πάλιν $0.3.\lambda=0.\lambda.3=1.3=3$.

Ὁμοίως $0.0.5.\lambda=0.5.\lambda=0.\lambda=1$,

ἀλλὰ καὶ $0.0.5.\lambda=0.0.\lambda.5=0.\lambda.5=1.5=5$,

ἢ καὶ $0.0.5.\lambda=0.\lambda.5.0=1.5.0=5.0=0$.

Ὁμοίως εἶναι $\lambda(\alpha+0)=\lambda.\alpha$, ἀλλὰ καὶ $\lambda(\alpha+0)=\lambda.\alpha+\lambda.0=\lambda.\alpha+1$·

Ὥστε ἡ παραδοχὴ τοῦ $\frac{1}{0}$ ὡς ἀριθμοῦ (ἤτοι ἡ παραδοχὴ ἀριθμοῦ μὴ μηδενιζομένου, ὅταν ἐπὶ 0 πολλαπλασιασθῇ) ἀντιβαίνει πρὸς τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος· τουτέστιν ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

55. Διὰ τῆς παραδοχῆς τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν κατέστη ἡ διαίρεσις πρᾶξις πάντοτε δυνατὴ καὶ ἐταυτίσθησαν ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις. Ἐν τῷ παρόντι κεφαλαίῳ θὰ ζητήσωμεν, ἂν εἶναι δυνατόν, διὰ τῆς παραδοχῆς νέων τινῶν ἀριθμῶν καὶ τῆς προσαρτήσεως αὐτῶν εἰς τοὺς ἤδη εὑρεθέντας, ν' ἀποτελεσθῇ σύστημά τι ἀριθμῶν γενικώτερον, ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ ἐκτελῆται πάντοτε, νὰ μὴ ἀλλοιωθῶσι δὲ τὸ παράπαν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος

56. Ἐν τῷ τοιούτῳ συστήματι τῶν ἀριθμῶν (ἐὰν ὑποτεθῇ ὑπάρχον) πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἡ διαφορὰ $0-\alpha$, τοῦ α ὄντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ τοῦ κλασματικοῦ συστήματος· τουτέστι πρέπει (ἐδ. 20) νὰ ὑπάρχῃ τις ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν α νἀποτελῇ μετ' αὐτοῦ 0.

57. Ἐντεῦθεν βλέπομεν, ὅτι πρέπει δι' ἕκαστον ἀριθμὸν νὰ παραδεχθῶμεν ἕνα ἀντίθετον, ἤτοι τοιοῦτον, ὥστε οἱ δύο ὁμοῦ ν' ἀποτελῶσι 0. Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ ἐξουδετεροῦσιν ἢ καταστρέφουσιν ἀλλήλους, ὥστε προστιθέμενοι ἀμφότεροι εἰς ἀριθμόν, οὐδόλως ἀλλοιοῦσιν αὐτόν.

58. Ἡ παραδοχὴ τοιούτων ἀριθμῶν δικαιολογεῖται καὶ ἐκ τῶν πραγμάτων· διότι ὑπάρχουσι πολλὰ ποσὰ ἀντίθεσιν ἐπιδεχόμενα, οἷον κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, καὶ τὰ τοιαῦτα (περὶ τῶν ὁποίων παρακατιόντες θὰ διαλάβωμεν)· εὔλογον δὲ εἶναι νὰ παριστῶνται τὰ ἀντίθετα ποσὰ δι' ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

Ἐὰν π. χ. ἔμπορός τις κερδίσῃ 1 δραχμὴν καὶ ἔπειτα χάσῃ 1 δραχμήν, φανερὸν εἶναι ὅτι ἡ χρηματική του κατάστασις δὲν ἠλλοιώθη ποσῶς, ἤτοι μία δραχμὴ κέρδους καὶ μία δραχμὴ ζημίας ἐξουδετεροῦσιν ἀλλήλας καὶ διὰ τοῦτο δύνανται νὰ παριστῶνται δι' ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

59. Διὰ τοῦτο παραδεχόμεθα ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος ἕνα ἀντίθετον, ὅν τινα παριστῶμεν, πρὸς τὸ παρόν, διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου φέροντος τόνον. Οὕτω τῶν $8, 3, \frac{1}{2}$ οἱ ἀντίθετοι εἶνε $8', 3', \frac{1'}{2}$. Καλοῦμεν δὲ τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς ἀρνητικούς, τοὺς δὲ προϋπάρχοντας, θετικούς.

60. Ὅπως οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν μονάδων $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, οὕτω καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν ἀντιθέτων μονάδων $1', \frac{1'}{2}, \frac{1'}{3}, \ldots$, αἵτινες καλοῦνται ἀρνητικαὶ μονάδες.

Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

Πρόσθεσις.

61. Ἐὰν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοειδεῖς, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν δὲν διαφέρει τῆς προσθέσεως ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι.

Οὕτως εἶναι $5+6=11$. $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}=\frac{10}{21}$, $\frac{3}{8}+\frac{4}{5}=\frac{47}{40}$.

Ὁμοίως εἶναι $5'+6'=11'$, $\frac{1'}{3}+\frac{1'}{7}=\frac{10'}{21}$, $\frac{3'}{8}+\frac{4'}{5}=\frac{47'}{40}$.

Ἐὰν δὲ εἶναι ἑτεροειδεῖς, ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι· δύο δὲ ἀντίθετοι μονάδες συναποτελοῦσιν (ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν ἕπεται) τὸ 0.

Διότι εἶναι $3+5'=3+3'+2'=2'$.

$$\frac{3}{7}+\frac{4'}{5}=\frac{15}{35}+\frac{28'}{35}=\frac{15}{35}+\frac{15'}{35}+\frac{13'}{35}=\frac{13'}{35}.$$

* Ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων διατηρεῖται καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ. Διότι, ἔστωσαν τυχόντες προσθετέοι οἱ $\frac{1}{2}$, $\frac{1'}{3}$, $\frac{5'}{8}$, $\frac{3}{4}$· ἐὰν ἀντ' αὐτῶν λάβωμεν τοὺς ἴσους αὐτῶν (κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῶν κλασμάτων) $\frac{12}{24}$, $\frac{8'}{24}$, $\frac{15'}{24}$, $\frac{18}{24}$, τὸ ἄθροισμα θὰ ἀποτελῆται, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς προσθέσεως (ἐδ. 11), ἐκ 30 θετικῶν μονάδων (εἰκοστῶν τετάρτων) καὶ ἐξ 23 ἀντιθέτων αὐταῖς. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γίνῃ ἡ πρόσθεσις, αἱ 23 ἀρνητικαὶ μονάδες θὰ ἐξουδετερώσωσιν 23 θετικὰς καὶ θὰ μείνωσιν ὡς ἄθροισμα 7 θετικαί· τὸ ἄθροισμα δηλαδὴ θὰ εἶναι $\frac{7}{24}$.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν, δύναταί τις νὰ προσθέσῃ χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικούς, μετὰ δὲ ταῦτα ν' ἀποτελέσῃ ἐκ τῶν δύο ἀθροισμάτων ἕνα μόνον ἀριθμόν, ἢ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ καὶ 0.

Παραδείγματα.

$$5+8'+2+9'=7+17'=10'.$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2'}{5}+1+\frac{1'}{8}=\frac{3}{2}+\frac{21'}{40}=\frac{39}{40}.$$

$$1+\frac{1}{2}+2'+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=2+2'=0.$$

Σημ. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων, εἴτε τοῦ αὐτοῦ εἴδους εἴτε καὶ μή, πάντοτε ἀνάγεται εἰς πλῆθός τι μονάδων τοῦ ἑνὸς εἴδους, ἢ καὶ εἰς τὸ 0, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸν ἀριθμὸν γενικώτερον ὡς ἄθροισμα μονάδων, ἀδιαφοροῦντες, ἂν αἱ μονάδες εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους ἢ οὔ.

Ἀφαίρεσις.

62. Ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται νῦν εἰς τὴν πρόσθεσιν· διότι ἔστω τυχὼν ἀριθμός, ὁ α, καὶ ἀντίθετος αὐτοῦ ὁ α΄· τότε ἡ διαφορὰ $\beta-\alpha$ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα $\beta+\alpha'$· διότι, ἂν εἰς τοῦτο προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος α, προκύπτει $\beta+\alpha'+\alpha$ ἤτοι ὁ μειωτέος β.

Ἡ ἀφαίρεσις ἄρα ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλου σημαίνει πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου αὐτοῦ.

Παραδείγματα.

$$8-3'=8+3=11.$$
$$7'-13=7'+13'=20'.$$
$$12-28=12+28'=16'.$$
$$15'-7'=15'+7=8'.$$
$$2'-15'=2'+15=13.$$

Πολλαπλασιασμός.

63. Ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς ὁρίζεται καὶ ἐν τῷ συστήματι τούτῳ, ὥς καὶ ἐν τῷ κλασματικῷ συστήματι· ἤτοι

$\alpha.3$ σημαίνει $\alpha+\alpha+\alpha$·

$\alpha.\frac{1}{5}$ σημαίνει τὸ πέμπτον μέρος τοῦ α ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{5}$.

$\alpha.\frac{2}{3}$ σημαίνει $\frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}$, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν εἶναι ὁ α.

64. Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ οἱουδήποτε ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα 1΄ πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς τροπὴ τοῦ ἀριθμοῦ εἰς τὸν ἀντίθετον (ἵνα διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Ἔστω α τυχὼν ἀριθμὸς καὶ α΄ ὁ ἀντίθετος αὐτοῦ· ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $1+1'$ ἰσοῦται τῷ 0, καὶ τὸ γινόμενον $\alpha.(1+1')$ ἰσοῦται τῷ 0· ἀλλὰ τὸ αὐτὸ γινόμενον, κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $(\alpha.1)+(\alpha.1')$, ἑπομένως οἱ δύο ἀριθμοὶ $\alpha.1$ καὶ $\alpha.1'$ εἶναι ἀντίθετοι· ἀλλ' ὁ πρῶτος εἶναι (ἐδ. 46) ἴσος τῷ α, ἀντίθετον δ' αὐτοῦ παρεδέχθημεν ἕνα μόνον· ὥστε ἀνάγκη νὰ εἶναι $\alpha.1'=\alpha'$.

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς.

1) Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος 1΄ ἐφ' ἑαυτὴν ἰσοῦται τῇ θετικῇ μονάδι 1, ἤτοι $1'.1'=1$.

2) Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος 1΄, ἐπὶ τὸν ἀντίθετον θετικὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματος χάριν, ὁ $\frac{3'}{8}$ ἰσοῦται τῷ $\frac{3}{8}.1'$.

65. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐκτελεῖται, ὡς ἂν ἦσαν ἀμφότεροι θετικοὶ (ἤτοι ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου συστήματος) καὶ τὸ γινόμενον εἶναι θετικὸν μέν, ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἑτεροειδεῖς.

Καὶ ὄντως, ἐπειδὴ εἶναι $5' = 5.1'$ καὶ $8' = 8.1'$, ἕπεται (κατὰ τὴν πρώτην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ)

$$5'.8 = 5.8.1' = 40.1' = 40'$$

$$\text{καὶ}\quad 5'.8' = 5.8.1'.1' = 40.1 = 40\cdot$$

ὥστε πλὴν τοῦ εἴδους τοῦ γινομένου, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐν τῷ συστήματι τούτῳ κατ' οὐδὲν ἄλλο διαφέρει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐν τῷ προηγουμένῳ συστήματι.

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων εἶναι θετικὸν μέν, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος (διότι ἀνὰ δύο πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι θετικὸν γινόμενον), ἀρνητικὸν δέ, ἂν περιττός.

66. Τῶν ἴσων ἀριθμῶν τὰ γινόμενα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν εἶναι ἴσα· διότι θετικῶς λαμβανόμενα εἶναι ἴσα· εἶναι δὲ καὶ ὁμοειδῆ· ὥστε κατ' οὐδὲν διαφέρουσι.

* ΣΗΜ. Ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν τοῦ συστήματος τούτου ἐλήφθησαν μὲν ὑπ' ὄψιν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἀλλ' εἶναι νῦν ἀνάγκη νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὡς ὡρίσθη ὁ πολλαπλασιασμός, πᾶσαι αἱ ρηθεῖσαι ἰδιότητες διατηροῦνται ἀληθεῖς ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν τοῦ συστήματος. Καὶ ἡ μὲν ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων εἶναι προφανής, διότι (κατὰ τὸν κανόνα τοῦ ἐδ. 65) πλὴν τοῦ εἴδους τοῦ γινομένου, ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ κλασματικοῦ συστήματος· ἡ δὲ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς.

1) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ ἐπὶ ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν, οἷον τὸν 3, εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$(\alpha+\beta).3 = (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) = (\alpha+\alpha+\alpha)+(\beta+\beta+\beta) = \alpha.3+\beta.3.$$

2) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ ἐπὶ θετικὴν κλασματικὴν μονάδα, οἷον $\frac{1}{5}$, εἶναι (ἐδ 48) τὸ πέμπτον μέρος τοῦ $\alpha+\beta$· ἀλλὰ τὸ πέμπτον τοῦ $\alpha+\beta$ εἶναι $\frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{5}$· διότι τοῦτο πεντάκις ληφθέν, ἤτοι ἐπὶ 5 πολλαπλασιασθέν, γίνεται $\alpha+\beta$· ἄρα

$$(\alpha+\beta).\frac{1}{5} = \frac{\alpha}{5}+\frac{\beta}{5} \quad \text{ἤτοι} = \alpha.\frac{1}{5}+\beta.\frac{1}{5}.$$

3) Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ ἐπὶ κλασματικὸν καὶ θετικὸν ἀριθμόν, ὡς τὸν $\frac{2}{3}$, εἶναι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐδ. 48)

$$(\alpha+\beta).\frac{2}{3} = \frac{(\alpha+\beta)}{3}+\frac{(\alpha+\beta)}{3} = \left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}\right)+\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}\right) = \alpha.\frac{2}{3}+\beta.\frac{2}{3}.$$

ὥστε διὰ πάντα θετικὸν ἀριθμὸν γ θὰ εἶναι $(\alpha+\beta).\gamma = \alpha.\gamma+\beta.\gamma$.

Καὶ διὰ πάντα ἀρνητικὸν ἀριθμὸν γ′ θὰ εἶναι $(\alpha+\beta).\gamma' = \alpha.\gamma'+\beta.\gamma'$· διότι οἱ ἀντίθετοι αὐτῶν ἀριθμοὶ $(\alpha+\beta).\gamma$ καὶ $\alpha\gamma+\beta\gamma$ εἶναι ἴσοι.

Διαίρεσις.

67. Ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν γίνεται, ὡς ἂν ἦσαν ἀμφότεροι θετικοί, καὶ τὸ πηλίκον εἶναι θετικὸν μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοειδεῖς, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἑτεροειδεῖς.

Π. χ. 8΄διὰ 4 δίδει 2΄, 8 διὰ 4΄ δίδει 2΄, καὶ 8΄διὰ 4΄ δίδει 2· διότι ἕκαστον τούτων πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Συμπέρασμα.

Ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε εἰρημένων γίνεται φανερόν, ὅτι ἐν τῷ συστήματι τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε δυναταὶ καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις (πλὴν μιᾶς ἐξαιρέσεως), ἀνάγεται δὲ ἡ μὲν ἀφαίρεσις εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἡ δὲ διαίρεσις εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐν τούτῳ τῷ συστήματι διατηροῦνται, ὡς ἀπεδείξαμεν, ἀληθεῖς αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων, συνάγεται, ὅτι διατηροῦνται καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῶν πηγάζουσαι γενικαὶ ἰδιότητες τῶν αὐτῶν πράξεων.

Γραφὴ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

68. Τοὺς θετικοὺς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς διακρίνομεν συνήθως προτάσσοντες αὐτῶν τὰ σημεῖα + (διὰ τοὺς θετικοὺς) καὶ — (διὰ τοὺς ἀρνητικούς), ὡς + 5, — 7, — 8, — 10, κτλ. καὶ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν παριστῶμεν κατὰ συνθήκην γράφοντες αὐτοὺς τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου αὐτοῦ· οὕτω τὸ ἄθροισμα 5+7΄+9΄+8 γράφεται +5—7—9+8·

τὸ	5΄+7΄	»	—5—7·
τὸ	3΄+9	»	—3+9·
τὸ	7 +1	»	+7+1·

γίνεται δὲ τοῦτο, διότι τοιουτοτρόπως εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν σεσημειωμέναι αἱ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος ἀπαιτούμεναι πράξεις.

69. Κατὰ ταῦτα, τὰ σημεῖα + καὶ — ἔχουσι διπλῆν χρῆσιν· δηλοῦσι δηλαδὴ καὶ τὰς πράξεις (τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως) καὶ τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν· ἀλλὰ τοῦτο οὐδεμίαν σύγχυσιν δύναται νὰ προξενήσῃ· διότι, ἐπὶ μεμονωμένων μὲν ἀριθμῶν, ὡς +5,—7,—9, προφανῶς δηλοῦσι τὰ σημεῖα τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν· ἐὰν δὲ ἀριθμοί τινες συνδέωνται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν σημείων τούτων, ὡς 5+7—9—10+4, εἴτε ταῦτα ἐκληφθῶσιν ὡς σημεῖα τῶν πράξεων, εἴτε ὡς δηλωτικὰ τοῦ εἴδους τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, εἰς τὸ αὐτὸ καταντᾷ· διότι, ἐν τῷ ληφθέντι παραδείγματι, ἡ ἀφαίρεσις τῶν 9 καὶ 10, δύναται ν' ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς προσθέσεως τῶν 9΄ καὶ 10΄, ἤτοι τῶν — 9 καὶ — 10.

Παράστασις τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

70. Ἀφοῦ ἀπεδείξαμεν, ὅτι ἐκ τῆς παραδοχῆς δύο εἰδῶν ἀριθμῶν ἀντιθέτων πρὸς ἀλλήλους, οὐδαμῶς βλάπτονται αἱ γενικαὶ ἀρχαὶ τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων, ἀλλὰ μάλιστα ἀποτελεῖται γενικώτερόν τι καὶ τελειότερον σύστημα ἀριθμῶν, ἐν τῷ ὁποίῳ καὶ αἱ τέσσαρες πράξεις ἐκτελοῦνται, μένει νῦν νὰ ἴδωμεν, πρὸς τὶ ἄλλο δύνανται οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι νὰ χρησιμεύσωσι. Φανερὸν εἶναι, ὅτι, ἂν παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ποσά τινα, τὰ ποσὰ ταῦτα θὰ ἐπιδέχωνται τὴν ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἐνυπάρχουσαν ἀντίθεσιν, ἤτοι θὰ ἔχωσι δύο ἀντιθέτους φοράς· τοιαῦτα δὲ ποσὰ προδήλως εἶναι τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία, ἡ περιουσία καὶ τὸ χρέος ἀνθρώπου τινός, οἱ ἐπί τινος γραμμῆς δρόμοι πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ χρόνος ὁ παρελθὼν καὶ ὁ μέλλων, καὶ τὰ ὅμοια. Ἐν πᾶσι τούτοις καὶ τῆς ὁμοίοις ποσοῖς δύνανται κατὰ συνθήκην νὰ παριστῶνται αἱ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φορὰν ἔχουσαι καταστάσεις τοῦ ποσοῦ διὰ τῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς εἴδους, αἱ δὲ τὴν ἐναντίαν ἔχουσαι, διὰ τῶν ἀντιθέτων. Ἐὰν λ.χ. παραστήσωμεν διὰ τοῦ $+1$ μίαν δραχμὴν κέρδους, ἡ ζημία μιᾶς δραχμῆς δύναται καὶ πρέπει νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ -1· διότι μία δραχμὴ κέρδους καὶ μία δραχμὴ ζημίας συναποτελοῦσι 0, ἤτοι οὐδόλως ἀλλοιοῦσι τὴν χρηματικὴν κατάστασιν τοῦ ταῦτα παθόντος, ὅπως καὶ οἱ ἀριθμοὶ $+1$ καὶ -1 συναποτελοῦσι 0 καὶ οὐδόλως ἀλλοιοῦσιν ἄλλον ἀριθμόν, ἐὰν ἀμφότεροι προστεθῶσιν εἰς αὐτόν. Ὁμοίως, ἐὰν τις ἀπό τινος σημείου O τῆς γραμμῆς AB διατρέξῃ δρόμον ἑνὸς πήχεως πρὸς τὰ δεξιά, ἔπειτα δρόμον ἑνὸς πήχεως πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ πρῶτος δρόμος θέλει παρασταθῇ διὰ τοῦ $+1$, ὁ δὲ δεύτερος, ὁ κατ' ἀντίθετον φορὰν διανυσθείς, διὰ τοῦ -1· διότι ὁ ἀμφοτέρους διανύσας εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ μὴ ἐκινήθη διόλου ἐκ τῆς θέσεώς του. Καὶ ἂν πολλὰ κέρδη καὶ ζημίαι παριστῶνται δι' ἀριθμῶν κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν θὰ παριστᾷ τὸ τελικὸν κέρδος ἢ τὴν τελικὴν ζημίαν, καθ' ὅσον εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ἐὰν π. χ. πρῶτον μὲν ἐκέρδισέ τις 5 δραχμάς, εἶτα δὲ ἐζημιώθη 3, τὸ ὁλικὸν κέρδος αὐτοῦ εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι $5+3'$, ἤτοι 2· ἐὰν δὲ πρῶτον μὲν ἐκέρδισεν 8 δραχμάς, εἶτα δὲ ἐζημιώθη 10, ἡ ὁλικὴ ζημία αὐτοῦ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $8+10'$, ἤτοι $2'$· καὶ ἄν τις ἐκέρδισε 10 δραχμάς, εἶτα ἐζημιώθη 8 (ὅτε ἔχει κέρδος $10+8'$), εἶτα πάλιν ἐκέρδισε 4, τὸ ὁλικὸν κέρδος αὐτοῦ εἶναι $(10+8')+4$ ἤτοι $10+8'+4$· ὁμοίως καὶ ἐπὶ περισσοτέρων.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι, ἄν τις βαδίζῃ ἐπὶ τῆς γραμμῆς AB, ὅτὲ μὲν πρὸς τὰ δεξιά, ὅτὲ δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ ἕκαστον διάστημα πρὸς τὰ δεξιὰ διανυσθὲν παριστᾶται διὰ θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἕκαστον δὲ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διανυσθὲν δι' ἀρνητικοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων θὰ παραστήσῃ τὴν τελικὴν ἀπόστασιν τοῦ κινουμένου ἀπὸ τοῦ σημείου Ο, ἐξ οὗ ὡρμήθη, καὶ τὸ εἶδος τοῦ ἐκ τῆς προσθέσεως προκύπτοντος ἀριθμοῦ θὰ δεικνύῃ, ἂν ἡ τελικὴ θέσις τοῦ κινηθέντος εἶναι πρὸς τὰ δεξιὰ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο.

Ἐκτὸς τούτου, δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν τοὺς θετικοὺς καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς πρὸς ὁρισμὸν τῆς θέσεως πράγματός τινος ἐν σειρᾷ πολλῶν ἢ καὶ ἀπείρων πραγμάτων· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ παραστήσωμεν τὸ τυχὸν τῆς σειρᾶς μέλος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 0 καὶ τὰ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν $+1$, $+2$, $+3$ κτλ. καὶ τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ αὐτοῦ μέλους εὑρισκόμενα διὰ τῶν ἀριθμῶν -1, -2, -3, κτλ.

Εἶναι ἀληθές, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ ποσὰ μὴ ἐπιδεχόμενα τοιαύτην ἀντίθεσιν καταστάσεων (π. χ. ἡ ἡλικία ἀνθρώπου τινός, αἱ ὧραι, καθ' ἃς θὰ ἐκτελεσθῇ ἔργόν τι, κτλ.)· ἀλλὰ τοῦτο δὲν ἐμποδίζει τὴν παραδοχὴν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὡς δὲν ἠμπόδισε τὴν παραδοχὴν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ἡ ὕπαρξις ποσῶν μὴ ἐπιδεχομένων τὴν διαίρεσιν· διότι, ὡς παρετηρήσαμεν καὶ ἐν ἄλλῳ τόπῳ, εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ ἀριθμητικὴ γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, δυνάμενον νὰ παραστήσῃ πάντα τὰ ποσὰ καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ πᾶν ἀριθμητικὸν ζήτημα νὰ λύηται τοὐλάχιστον δι' ἀριθμῶν.

Ἀνακεφαλαίωσις.

Ἀνακεφαλαιοῦντες πάντα τὰ προηγούμενα συνάγομεν, ὅτι·

1) Ἐὰν θέλωμεν νὰ καταστήσωμεν δυνατὰς καὶ τὰς τέσσαρας πράξεις, ἀνάγκη νὰ παραδεχθῶμεν δύο ἀρχικὰς μονάδας, ἀντιθέτους πρὸς ἀλλήλας (1 καὶ 1'), ἔτι δὲ καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος δευτερευούσας μονάδας, αἵτινες εἶναι μέρη τέλεια τῶν δύο πρώτων. Ἐκ τούτων δὲ τῶν μονάδων ἀποτελεῖται πᾶς ἀριθμός.

2) Πᾶσαι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων (τουτέστιν αἱ ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀληθεύουσαι) πηγάζουσιν ἐκ δύο ἀρχικῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, τῆς ἀδιαφορίας πρὸς τὴν τάξιν ἔν τε τῇ προσθέσει καὶ ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ, καὶ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος. Ἐπὶ τῶν δύο τούτων ἰδιοτήτων στηρίζεται πᾶσα ἀριθμητικὴ πρᾶξις· τὰς ἰδιότητας ταύτας εὑρίσκομεν μὲν ὑπαρχούσας ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀριθμοῖς, τοὺς ὁποίους πρώτους πάντων γνωρίζομεν, διατηροῦμεν δὲ καὶ ἐπὶ τῶν λοιπῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ἔπειτα σχηματίζομεν, ἀποκαθιστῶντες αὐτὰς γενικὰς ἀρχὰς ἢ νόμους τῶν πράξεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΩΝ

71. Γινόμενον, οὗτινος πάντες οἱ παράγοντες εἶναι ἴσοι, λέγεται δύναμις τοῦ ἑνὸς τῶν παραγόντων· καὶ ἂν μὲν εἶναι δύο οἱ παράγοντες, τὸ γινόμενον λέγεται δευτέρα δύναμις ἢ τετράγωνον, ἂν δὲ τρεῖς, τρίτη δύναμις ἢ κύβος καὶ καθεξῆς.

Κατὰ ταῦτα, τὸ γινόμενον $3\times3\times3\times3$ λέγεται τετάρτη δύναμις τοῦ 3· τὸ δὲ γινόμενον 15×15 λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ 15.

Τὰς δυνάμεις παριστῶμεν συντόμως γράφοντες μόνον ἕνα παράγοντα, δεξιὰ δὲ αὐτοῦ καὶ ὑψηλότερα τὸν ἀκέραιον, ὅστις δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων, οἷον·

12^4 σημαίνει $12\times12\times12\times12$·
5^3 » $5\times5\times5$.

Ἐν τῇ τοιαύτῃ γραφῇ τῶν δυνάμεων, ὁ μὲν παράγων λέγεται βάσις τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων ἐκφράζων ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμὸς λέγεται ἐκθέτης τῆς δυνάμεως.

72. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, ἕπεται ὅτι αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· εἶναι δὲ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων αἱ ἑξῆς·

1) Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθέτην δὲ ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\alpha^5.\alpha^8 = \alpha^{13}$·
καὶ γενικῶς $\alpha^\mu.\alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$·
τοῦτο εἶναι ἄμεσον ἀκολούθημα τῆς προτάσεως (ἐδ. 30), καθ' ἣν πολλαπλασιάζεται γινόμενον ἐπὶ ἄλλο γινόμενον.

Ἐκ τῆς προτάσεως ταύτης ἀκολουθεῖ, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐκθέτην ἔχουσα τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἐκθετῶν· ἤτοι

$$\alpha^\mu.\alpha^\nu \ldots.\alpha^\varrho = \alpha^{\mu+\nu+\ldots+\varrho}.$$

Παραδείγματος χάριν εἶναι $2^3.\ 2^5 = 2^8$,
$10^2.\ 10^6.\ 10^8 = 10^{16}$.

Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ὅτι αἱ πολλαπλασιαζόμεναι δυνάμεις εἶναι ἴσαι, τουτέστιν, ὅτι εἶναι $\mu=\nu=\ldots=\varrho$, καὶ παρασταθῇ τὸ πλῆθος αὐτῶν διὰ τοῦ π, ἕπεται ἐκ τῆς αὐτῆς προτάσεως

$$\alpha^\mu.\alpha^\mu.\alpha^\mu..\alpha^\mu = \alpha^{\mu+\mu+\mu..+\mu} = \alpha^{\mu.\pi}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\alpha^\mu . \alpha^\mu . \alpha^\mu \ldots \alpha^\mu = (\alpha^\mu)^\pi$, συνάγεται
ἡ ἰδιότης $(\alpha^\mu)^\pi = \alpha^{\mu.\pi}$.
Παραδείγματος χάριν $(3^2)^3 = 3^6$.
ἤτοι, ἵνα ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.

2) Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν·

ἤτοι $(\alpha\beta)^\mu = \alpha^\mu . \beta^\mu$

Παραδείγματος χάριν εἶναι $2^4 . 5^4 = 10^4 = 10000$.

3) Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν·

ἤτοι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$. οἷον $\frac{32^5}{16^5} = 2^5$.

Ἡ εὕρεσις τῶν ἰδιοτήτων τούτων ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι εὐκολωτάτη.

Παρατήρησις. Τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν αἱ μὲν περιττὸν ἐκθέτην ἔχουσαι δυνάμεις εἶναι ἀρνητικαί, αἱ δὲ ἄρτιον θετικαί.

Π. χ. εἶναι $(-5)^2 = (-5).(-5) = +25$·

ἀλλά $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = +25.(-5) = -125$.

Ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων α^1 καὶ α^0.

73. Κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν ὁ ἐκθέτης πάσης δυνάμεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ οὐχὶ μικρότερος τοῦ 2. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων καὶ ἐπὶ ἄλλων ἐκθετῶν, δέον νὰ διατηρήσωμεν ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων τὰς αὐτὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας (ὡς διετηρήσαμεν καὶ ἐπὶ πάντων τῶν ἀριθμῶν τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων)· διότι τοῦτο καὶ ἁπλουστέραν καθιστᾷ καὶ γενικωτέραν τὴν ἀριθμητικήν· ἀλλὰ καὶ τὸν γενικὸν ὁρισμὸν πάσης δυνάμεως δίδει, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ δειχθῇ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν, πῶς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὰς δυνάμεις α^1 καὶ α^0, ὥστε νὰ διατηρηθῇ καὶ δι' αὐτὰς ἡ πρώτη ἰδιότης τῶν δυνάμεων, ἥτις ἐκφράζεται διὰ τῆς ἰσότητος $\alpha^\mu . \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$,
παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν ὑποθέσωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἀληθῆ καὶ διὰ $\mu=1$, εὑρίσκομεν $\alpha^1 . \alpha^\nu = \alpha^{\nu+1}$,
ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι, α^1 εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha^{\nu+1}$, ἤτοι τοῦ $\alpha^\nu . \alpha$ διὰ α^ν καὶ ἑπομένως (ἐὰν α διαφέρῃ τοῦ 0) ἰσοῦται τῷ α·

ὥστε, ἂν θέλωμεν νὰ διατηρηθῇ ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν δυνάμεων, δέον νὰ ὁρίσωμεν ὡς πρώτην δύναμιν παντὸς ἀριθμοῦ (πλὴν τοῦ 0) αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν, ἤτοι $\alpha^1=\alpha$.

Ἐὰν ἐν τῇ αὐτῇ ἰσότητι τεθῇ $\mu=0$, προκύπτει $\alpha^0.\alpha^\nu=\alpha^\nu\cdot$ ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι α^0 εἶναι πηλίκον τοῦ α^ν διαιρεθέντος διὰ α^ν, ἤτοι εἶναι ἴσον τῇ μονάδι 1 (ἐὰν μὴ εἶναι $\alpha=0$), ὥστε α^0, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ α (πλὴν τοῦ 0), δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἴσον τῇ μονάδι 1.

Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

74. Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάλιν δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐκθετῶν· τῆς διαφορᾶς δὲ ταύτης μειωτέος μὲν εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου, ἀφαιρετέος δὲ ὁ τοῦ διαιρέτου.

Ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται νὰ διαιρεθῇ α^μ διὰ α^ν, εἶναι δὲ $\mu>\nu$· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι

$$\alpha^{\mu-\nu}.$$

Διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει $\alpha^{\mu-\nu}.\alpha^\nu$, ἤτοι κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα τῶν δυνάμεων, α^μ, ἤτοι τὸν διαιρετέον· ὥστε εἶναι

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}.$$

Ὑπετέθη $\mu>\nu$· ἀληθεύει δὲ ἡ ἰσότης αὕτη, καὶ ὅταν εἶναι $\mu=\nu$· διότι τότε γίνεται

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu}=\alpha^0=1.$$

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.

Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι γενικὴ ἀριθμητική· ἀσχολεῖται δὲ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ζητήματα.

Ἡ μὲν ἀριθμητική, ἀσχολουμένη περὶ τοὺς ἀριθμούς, ἀποβλέπει κυρίως εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τρόπων, καθ' οὓς ἐκτελοῦνται αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις· ἡ δὲ ἄλγεβρα ἐρευνᾷ τὰς ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ὑπαρχούσας γενικὰς σχέσεις· τουτέστι τὰς σχέσεις, αἵτινες ὑπάρχουσι μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι· ὅτι δὲ τοιαῦται σχέσεις ὑπάρχουσιν, ἐμάθομεν ἐν τοῖς προηγουμένοις.

Καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητήματα λύει ἡ ἄλγεβρα κατὰ γενικήν τινα μέθοδον, ἥτις στηρίζεται ἐπὶ τῶν εἰρημένων γενικῶν σχέσεων τῶν ἀριθμῶν· λύει δ' αὐτὰ καὶ γενικώτερον· διότι ἐπὶ ἑκάστου ζητήματος εὑρίσκει τὰς πράξεις, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων ἀριθμῶν, οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οὗτοι, ἵνα ἐξ αὐτῶν εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.

Ἀλγεβρικὰ σύμβολα

Ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος σημειοῦνται διὰ τῶν αὐτῶν συμβόλων, δι' ὧν καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ.

Καὶ οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται συνήθως διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Ἕκαστον δὲ γράμμα παριστᾷ ἐν ἑκάστῳ ζητήματι ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἀριθμοὺς διαφέροντας ἀπ' ἀλλήλων παριστῶμεν διὰ διαφόρων γραμμάτων, ἢ διὰ τοῦ αὐτοῦ μὲν γράμματος (ἐὰν ἔχωσί τι κοινόν), φέροντος ὅμως τόνους, πρὸς διάκρισιν τῶν ἀριθμῶν ἀπ' ἀλλήλων, ὡς α', α'', α''', κτλ.

Σημ. Ὅτι διὰ τῶν συμβόλων τούτων αἱ μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν γενικαὶ σχέσεις γράφονται συντομώτερον ἢ διὰ τῆς κοινῆς γραφῆς, εἶναι φανερόν· ἡ συντομία δ' αὕτη, ὅταν πολλαχῶς αἱ πράξεις συνδυάζωνται, εἶναι ὠφελιμωτάτη· διότι δι' αὐτῆς λαμβάνομεν σαφεστέραν ἰδέαν τοῦ συνόλου τῶν πράξεων καὶ εὐκολώτερον μεταβαίνομεν ἀπὸ μιᾶς σχέσεως εἰς ἄλλην, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἴδωμεν.

Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις καὶ διάφορα εἴδη αὐτῶν.

Ὁρισμοί.

75. Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος λέγεται ἡ διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων σημείωσις πράξεων ἐπὶ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν ἢ καὶ μόνον ἐπὶ γραμμάτων· οἷον $3α^2-2αβ+5β^2$ εἶναι ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ τύπος.

Ἐπειδὴ μέχρι τοῦδε μόνον τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις πράξεις ἐγνωρίσαμεν, διὰ τοῦτο ὑποθέτομεν πρὸς τὸ παρὸν ταύτας μόνον τὰς πράξεις σεσημειωμένας ἐν ταῖς ἀλγεβρικαῖς παραστάσεσιν.

76. Ὅταν παράστασις, ὡς εἷς ἀριθμὸς θεωρουμένη, συνδυάζηται διὰ οἱασδήποτε πράξεως πρὸς ἄλλην παράστασιν ἢ πρὸς ἁπλοῦν γράμμα ἢ καὶ πρὸς ἀριθμόν, ἐγκλείεται εἰς παρένθεσιν. Οὕτως ἡ διαφορὰ τῆς παραστάσεως $α-β$ ἀπὸ τοῦ $γ$ παρίσταται διὰ τοῦ $γ-(α-β)$· τὸ δὲ γινόμενον τῆς παραστάσεως $α-β$ ἐπὶ $γ$ παρίσταται διὰ τοῦ $(α-β).γ$.

Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ἡ σημασία τῶν ἑπομένων παραστάσεων

$$(α+β).(α-β), \qquad 3.(αβ-γδ)α \qquad 5.(α+β)$$
$$[α-(β-γ)]δ \qquad [α-(β-γ)]\ (δ+ζ).$$

77. Παράστασις, ἐν ᾗ μήτε πρόσθεσις μήτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σεσημειωμένη, λέγεται μονώνυμον· οἷον αἱ παραστάσεις

$$\frac{3α}{β}, \qquad 5αβ^2, \qquad 8'αβ, \qquad \frac{1'}{2}α \qquad \text{εἶναι μονώνυμα.}$$

Τὸ μονώνυμον εἶναι ἀκέραιον, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων περιέχῃ· ἐὰν δὲ καὶ διαίρεσιν ἐπὶ τῶν γραμμάτων περιέχῃ, λέγεται κλασματικόν.

Ἐὰν ἐν τῷ μονωνύμῳ ὑπάρχῃ τις ἀριθμητικὸς παράγων, γράφεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου· οὕτω τῶν μονωνύμων

$$5α, \quad 8\frac{α}{β}, \quad \frac{3}{7}α^2, \quad 4'β^2, \quad \text{συντελεσταὶ εἶναι}$$

οἱ ἀριθμοὶ $5,\ 8,\ \frac{3}{7},\ 4'$.

Ὅταν τὸ μονώνυμον δὲν ἔχῃ συντελεστήν, ἐννοοῦμεν συντελεστὴν αὐτοῦ τὴν θετικὴν μονάδα 1· οἷον τοῦ αβ συντελεστὴς εἶναι ἡ μονάς· διότι δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς 1.αβ. Ὡσαύτως ἀντὶ α δυνάμεθα νὰ γράψωμεν 1.α· ὥστε καὶ τὰ ἁπλᾶ γράμματα ὑπάγονται εἰς τὰς παραστάσεις.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶναι ἢ θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἕπεται ὅτι, ὅταν τὸ εἶδος τῶν ἀριθμῶν (69) σημαίνηται διὰ τῶν σημείων + καὶ —, τὰ μὲν θετικὸν συντελεστὴν ἔχοντα μονώνυμα θὰ ἔχωσι πρὸ αὐτῶν τὸ +, τὰ δὲ ἀρνητικόν, τὸ —. Οὕτω

$$+\alpha \qquad +3\alpha\beta \qquad -5\gamma^2 \qquad -8\alpha^2\beta \qquad -\alpha$$

εἶναι $(+1).\alpha.\quad (+3).\alpha\beta,\quad (-5).\gamma^2,\quad (-8).\alpha^2\beta,\quad (-1).\alpha$· ὥστε τὸ πρὸ τοῦ μονωνύμου γραφόμενον σημεῖον + ἢ — εἶναι τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ καὶ δεικνύει τὸ εἶδος τοῦ συντελεστοῦ.

Οἱ θετικοὶ συντελεσταὶ γράφονται συνήθως ἄνευ σημείου.

78. Πολυώνυμον λέγεται τὸ ἄθροισμα μονωνύμων· γράφεται δὲ τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονωνύμων, ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν· ἤτοι γράφονται τὰ μονώνυμα ἓν μετ' ἄλλο καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του· οἷον αἱ παραστάσεις

$$3\alpha^2-\beta^2+\alpha\gamma, \qquad 8\alpha^2-2\alpha\beta+4\gamma^2-6\delta\gamma$$

εἶναι πολυώνυμα· καὶ τὸ μὲν πρῶτον εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $+3\alpha^2, -\beta^2, +\alpha\gamma$, τὸ δὲ δεύτερον εἶναι ἄθροισμα τῶν ἑξῆς

$$+\,8\alpha^2,\ -\,2\alpha\beta,\ +\,4\gamma^2,\ -\,6\delta\gamma.$$

Ὅροι τοῦ πολυωνύμου λέγονται τὰ μονώνυμα, τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμα τὸ πολυώνυμον. Ἐὰν οἱ ὅροι εἶναι δύο, τὸ πολυώνυμον λέγεται διώνυμον, ἐὰν τρεῖς, τριώνυμον.

Οἱ τὸ + ἔχοντες ὅροι λέγονται θετικοί, οἱ δὲ τὸ — ἀρνητικοί.

Τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου, ἐὰν εἶναι τὸ +, παραλείπεται συνήθως.

Τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀκέραιον, ἐὰν πάντα τὰ μονώνυμα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, εἶναι ἀκέραια.

Ὅτι τὰ σημεῖα + καὶ —, ἅτινα ἔχουσι πρὸ αὐτῶν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου, δύνανται νὰ ἐκληφθῶσι καὶ ὡς σημεῖα τῶν πράξεων (προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως), χωρὶς ἐκ τούτου νὰ προκύψῃ σύγχυσις, ἀποδεικνύεται ὡς καὶ ἐν τῷ ἐδ. 69· διότι π. χ. εἰς τὸ πολυώνυμον $2\alpha^2-\beta^2+\alpha\gamma$ δυνάμεθα, ἀντὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ β^2, νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ ἀριθμόν, ἤτοι τὸ $-\beta^2$.

Βαθμὸς τῶν ἀκεραίων παραστάσεων.

79. Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου πρός τι γράμμα λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου ἐν τῷ μονωνύμῳ· οἷον τὸ μονώνυμον $8α^2β^3γδ^4$ εἶναι πρὸς τὸ α δευτέρου βαθμοῦ, πρὸς τὸ β τρίτου καὶ πρὸς τὸ δ τετάρτου.

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ἔχῃ ἐκθέτην, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχει τὴν μονάδα 1 (73)· ὥστε τὸ αὐτὸ μονώνυμον εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γ.

Πᾶν μονώνυμον εἶναι βαθμοῦ 0 πρὸς πᾶν γράμμα μὴ ἐν αὐτῷ περιεχόμενον· διότι δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἐν τῷ μονωνύμῳ ὡς παράγων ἡ 0 δύναμις τοῦ γράμματος, ἥτις ἰσοῦται τῇ μονάδι 1 (73).

Πρὸς πολλὰ δὲ γράμματα βαθμὸς μονωνύμου λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐν τῷ μονωνύμῳ·

οἷον τὸ μονώνυμον $5α^2β^2γδ^3$

εἶναι πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β τοῦ τετάρτου βαθμοῦ· πρὸς δὲ τὰ α,β,γ τοῦ πέμπτου· πρὸς δὲ τὰ α,β,γ,δ τοῦ ὀγδόου· κτλ.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρός τι γράμμα λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα· οἷον τὸ πολυώνυμον

$$χ^5+4αχ^4-3α^2χ^2+5α^4$$

εἶναι πρὸς τὸ χ τοῦ πέμπτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ α τοῦ τετάρτου.

Ὁμογενὲς λέγεται τὸ πολυώνυμον πρός τινα γράμματα, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα· π.χ. τὸ πολυώνυμον $3α^2+2β^2-7αβ$ εἶναι ὁμογενὲς πρὸς τὰ α καὶ β· ὁμοίως καὶ τὸ πολυώνυμον $α^2+νβ^2$ εἶναι ὁμογενὲς πρὸς τὰ α καὶ β.

Μερικαὶ τιμαὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

80. Ἐὰν ἐν ἀλγεβρικῇ παραστάσει ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ καὶ ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι πράξεις, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς λέγεται τιμὴ τῆς παραστάσεως καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ γράμμα τι ἀντικαθιστῶν, λέγεται τιμὴ τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων, ἅτινα περιέχει· καὶ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων δοθῶσιν· οἷον ἡ παράστασις $α^2+β^2-γ^2$,

ἂν μὲν ὑποτεθῇ $α=3, \quad β=2, \quad γ=1,$

δίδει $3^2+2^2-1^2$ ἢ $9+4-1$ ἤτοι 12·

ἂν δὲ ὑποτεθῇ $α=5, \quad β=3, \quad γ=3,$

γίνεται $5^2+3^2-3^2$ ἢ $25+9-9$ ἢ 25·

ἂν δὲ ὑποτεθῇ $α=4$ καὶ $β=γ$,

ἡ παράστασις γίνεται $4^2+\beta^2-\beta^2$ ἤτοι 16.
Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha=3$, $\beta=4$, $\gamma=5$, ἡ παράστασις γίνεται 0.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως $2\chi^2-5\chi+2$ τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ χ: $\chi=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

2) Εὑρεῖν τὰς τιμὰς τῆς παραστάσεως $3\alpha^2+2\alpha\chi-\chi^2$ τὰς ἀντιστοιχούσας πρὸς τὰς ἑπομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων

$$\left.\begin{matrix}\alpha=0\\ \chi=0\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha=1\\ \chi=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}\alpha=\frac{1}{2}\\ \chi=1\end{matrix}\right\} \quad \chi=3\alpha\Big\} \quad \chi=-\alpha\Big\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

81. Ἀλγεβρικαὶ πράξεις λέγονται αἱ μεταβολαί, αἵτινες, δυνάμει τῶν γενικῶν νόμων τῶν πράξεων, γίνονται ἐπὶ τῶν παραστάσεων, ἐν ὅσῳ οἱ ὑπὸ τῶν γραμμάτων παριστώμενοι ἀριθμοὶ μένουσιν ἐντελῶς ἀόριστοι. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, τὴν παράστασιν $(\alpha+\beta+\gamma).\delta$ δυνάμεθα νὰ μεταβάλωμεν εἰς τὴν ἑπομένην $(\alpha.\delta)+(\beta.\delta)+(\gamma.\delta)$, οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς καὶ ἂν παριστῶσι τὰ γράμματα, δυνάμει τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου· τοῦτο δὲ ποιοῦντες ἐκτελοῦμεν ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.

Τὸ σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται ἀλγεβρικὸς λογισμός.

82. Δύο παραστάσεις ἐξ ἀλλήλων προκύπτουσαι, δυνάμει τῶν εἰρημένων νόμων λέγονται ἴσαι· διότι προδήλως δίδουσιν ἀμφότεραι ἴσους ἀριθμούς, ὅταν ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τυχόντος ἀριθμοῦ· τοιαῦται εἶναι λ. χ. αἱ παραστάσεις

$$(\alpha+\beta+\gamma).\delta \quad \text{καὶ} \quad \alpha.\delta+\beta.\delta+\gamma.\delta.$$

83. Αἱ ἐπὶ τῶν παραστάσεων σημειούμεναι πράξεις ἔχουσι τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ὁμωνύμων ἀριθμητικῶν πράξεων, διότι καὶ αἱ παραστάσεις ἀριθμούς τινας παριστῶσι πάντοτε. Οὕτω π. χ. εἶναι

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}$$

καὶ ὅταν ἀντὶ α, β, γ, τεθῶσιν οἱαιδήποτε παραστάσεις· διότι ἡ ἰσότης αὕτη ἐδείχθη ἀληθὴς (40) ἐπὶ τριῶν οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.

Πρόσθεσις.

84. Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι, ἵνα προσθέσωμεν πολυώνυμον εἰς ἄλλο πολυώνυμον, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν

ὅρων ἀμφοτέρων τῶν πολυωνύμων (18), διατηροῦντες τὸ σημεῖον ἑκάστου ὅρου.

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ περὶ ὁσωνδήποτε πολυωνύμων ἢ καὶ μονωνύμων.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα $(3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta)+(8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)$
τῶν δύο πολυωνύμων $3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta$ καὶ $8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2$
ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $3\alpha^2-\beta^2+5\alpha\beta+8\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2$.

Καὶ τὸ ἄθροισμα $(\alpha-\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon-\zeta)+(\eta-\vartheta)$
τῶν τριῶν πολυωνύμων $\alpha-\beta+\gamma$, $\delta+\varepsilon-\zeta$, $\eta-\vartheta$
ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $\alpha-\beta+\gamma+\delta+\varepsilon-\zeta+\eta-\vartheta$.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μονωνύμων $+8\alpha\beta$ καὶ $-3\gamma\delta$
ἤτοι τὸ $(8\alpha\beta)+(-3\gamma\delta)$
ἰσοῦται (78) τῷ διωνύμῳ $8\alpha\beta-3\gamma\delta$·
τῶν δὲ μονωνύμων $-9\gamma\delta$ καὶ $-3\varepsilon^2$ τὸ ἄθροισμα εἶναι $-9\gamma\delta-3\varepsilon^2$.

Περὶ τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ τῆς προσθέσεως αὐτῶν.

85. Ὅμοιοι ὅροι λέγονται οἱ κατὰ τὸν συντελεστὴν μόνον διαφέροντες (ἂν διαφέρωσιν). Οὕτως ἐν τῷ πολυωνύμῳ

$$2\alpha\beta+5\beta\gamma-4\alpha\beta+8\alpha\beta$$

οἱ ὅροι $2\alpha\beta, -4\alpha\beta, 8\alpha\beta$ εἶναι ὅμοιοι.

Πάντες οἱ ὅμοιοι ὅροι τοῦ πολυωνύμου δύνανται νὰ προστεθῶσι καὶ συγχωνευθῶσιν εἰς ἕνα, ἡ δὲ πρᾶξις αὕτη λέγεται πρόσθεσις ἢ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.

Ἔστω τυχὸν πολυώνυμον, ἔχον ὁμοίους ὅρους, τὸ

$$8\alpha\beta\gamma^2+15\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2-7\alpha\beta^2\gamma+12\alpha^2\beta\gamma-13\alpha\beta\gamma^2\cdot$$

δῆλον, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων ὅρων

$$8\alpha\beta\gamma^2+15\alpha\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2-13\alpha\beta\gamma^2$$

ἰσοῦται (32) τῷ γινομένῳ

$$\alpha\beta\gamma^2(+8+15-2-13)$$

ἤτοι τῷ $\alpha\beta\gamma^2(+8)$ ἢ $8\alpha\beta\gamma^2$.

Ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι

Πάντες οἱ ὅμοιοι ὅροι πολυωνύμου ἀποτελοῦσιν ἕνα ὅρον ὅμοιον αὐτοῖς καὶ ἔχοντα συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν αὐτῶν ὅρων.

Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$
ἰσοῦται τῷ $2\alpha^2+2\beta^2+2\alpha\beta\cdot$
καὶ τὸ πολυώνυμον $3\alpha\beta-4\alpha^2+5\alpha\beta-8\beta^2-8\alpha\beta+3\beta^2$
ἰσοῦται τῷ $-4\alpha^2-5\beta^2$.

Ἀφαίρεσις.

86. Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρόκειται ἀπὸ παραστάσεως οἱασδήποτε Μ νὰ ἀφαιρεθῇ πολυώνυμον, ἔστω τὸ $\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta$· ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ Μ τὸν ὑπὸ τοῦ πολυωνύμου παριστώμενον ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ· οὗτος δὲ προδήλως εὑρίσκεται, ἐὰν ἀλλαχθῶσι τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου· ἐπομένως ἡ διαφορὰ $M-(\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta)$ ἰσοῦται τῇ παραστάσει $M-\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon+\zeta$· ἤτοι ἵνα ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ παραστάσεως οἱασδήποτε δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς πάντας τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου ἀλλάσσοντες τὰ σημεῖα αὐτῶν, ἤτοι τρέποντες τὰ + εἰς — καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατήρησις. Ὅτι ἡ παράστασις $M-\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon+\zeta$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ τῶν δύο ἑπομένων

$$M \quad \text{καὶ} \quad \alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\zeta,$$

γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τούτου, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῆς καὶ τοῦ ἀφαιρετέου ἰσοῦται τὸ μειωτέῳ Μ· διότι τὸ εἰρημένον ἄθροισμα γράφεται (78) καὶ ὡς ἑξῆς $M+\alpha-\alpha+\beta-\beta+\gamma-\gamma+\delta-\delta+\varepsilon-\varepsilon+\zeta-\zeta$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἀπ. $2\alpha^2+2\beta^2$.

2) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν τῶν αὐτῶν πολυωνύμων.

Ἀπ. $4\alpha\beta$.

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων πολυωνύμων

$$\begin{gathered}\alpha+\beta-\gamma\\ \alpha-\beta+\gamma\\ -\alpha+\beta+\gamma.\end{gathered}$$

Ἀπ. $\alpha+\beta+\gamma$.

4) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πολυωνύμων

$$\begin{gathered}\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3\\ \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3.\end{gathered}$$

Ἀπ. $2\alpha^3+6\alpha\beta^2$.

Πολλαπλασιασμός.

α΄) Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.

87. Πολλαπλασιασμὸς δύο μονωνύμων εἶναι ἡ εὕρεσις μονωνύμου ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἐπειδὴ πᾶν ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι (77) γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἕπεται ἀμέσως ἡ πρότασις:

Τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον, ἔχον παράγοντας πάντας τοὺς παράγοντας ἀμφοτέρων τῶν μονωνύμων.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ μονώνυμα

$$+3\alpha\beta^2\gamma \quad \text{καὶ} \quad -5\alpha^2\beta\gamma^3\delta\cdot$$

ἐπειδὴ τὸ μὲν πρῶτον εἶναι γινόμενον τῶν παραγόντων $+3, \alpha, \beta^2, \gamma,$ τὸ δὲ δεύτερον τῶν $-5, \alpha^2, \beta, \gamma^3, \delta,$ ἕπεται (30), ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $+3.\alpha.\beta^2.\gamma.(-5).\alpha^2.\beta.\gamma^3.\delta.$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ παράγοντες δύνανται νὰ γραφῶσι καθ᾿ οἱανδήποτε θέλωμεν τάξιν, τὸ αὐτὸ γινόμενον ἰσοῦται τῷ

$$(+3).(-5).\alpha\ \alpha^2.\beta^2.\beta.\gamma.\gamma^3.\delta$$

ἤτοι (28) τῷ $-15\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων

$$-12\alpha^5\beta\gamma\delta \quad \text{καὶ} \quad -\alpha\gamma^2\delta$$

εἶναι $(-12).(-1).\alpha^5.\alpha\ \beta\ \gamma.\gamma^2.\delta\ \delta$ ἤτοι $+12\alpha^6\beta\gamma^3\delta^2.$

Καὶ τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $6\alpha\beta\gamma^2$ καὶ $12\alpha^3\beta^4$ εὑρίσκεται ὁμοίως ἴσον τῷ μονωνύμῳ $72\alpha^4\beta^5\gamma^2.$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑπόμενον κανόνα·

Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀκέραια μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, ἔπειτα γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ γινομένου τῶν συντελεστῶν πάντα τὰ ἐν τοῖς μονωνύμοις ὑπάρχοντα γράμματα καὶ ἕκαστον μετ᾿ ἐκθέτου ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, οὓς ἔχει ἐν τοῖς μονωνύμοις.

Ἐὰν ἓν τῶν μονωνύμων δὲν ἔχῃ γράμμα τι, ὑποτίθεται ἔχον αὐτὸ εἰς τὴν δύναμιν 0 (73).

Ὁ αὐτὸς δὲ κανὼν δίδει προδήλως καὶ τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μονωνύμων· διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τούτου ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῶσι τὰ δύο πρῶτα, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς.

88. Τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα εὑρισκόμενον γινόμενον δύο μο-

νωνύμων ἔχει πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον $+$, ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμοιόσημοι, τὸ δὲ $-$, ἐὰν ἑτερόσημοι· τουτέστιν

Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν μονωνύμων τὰ ὅμοια σημεῖα δίδουσι $+$, τὰ δὲ ἀνόμοια $-$.

Ἡ πρότασις αὕτη ἐκφράζει τὸν λεγόμενον κανόνα τῶν σημείων.

β') Πολλαπλασιασμὸς τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

89. Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον (ἢ ἐπὶ μονώνυμον) εἶναι ἡ εὕρεσις πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ, ἕπεται, ὅτι

α) Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονώνυμον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.

β') Πολυώνυμον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ πολυώνυμον, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου πολλαπλασιασθῇ ἐφ' ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.

Ὥστε ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται πάντοτε εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μονωνύμων.

Παραδείγματα.

1) Τὸ γινόμενον $(α+β).(α+β)$ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εἰρημένα ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ $α.α+α.β+β.α+β.β$

ἤτοι $α^2+2αβ+β^2$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $(α+β).(α+β)$ εἶναι ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ ἀθροίσματος $(α+β)$ καὶ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(α+β)^2$, συνάγομεν τὴν ἰσότητα $(α+β)^2=α^2+2αβ+β^2$,

ἥτις ἐκφράζει τὴν ἑπομένην πρότασιν

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

2) Τὸ γινόμενον $(α-β).(α-β)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$$α.α+α.(-β)+(-β).α+(-β).(-β)$$

ἤτοι $α.α-α.β-β.α+β.β$

ἢ $α^2-2αβ+β^2$.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον $(α-β).(α-β)$ εἶναι ἡ δευτέρα δύναμις τῆς διαφορᾶς $(α-β)$ καὶ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(α-β)^2$, συνάγομεν τὴν ἰσότητα $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2,$

ἥτις ἐκφράζει τὴν ἑπομένην πρότασιν

Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

3) Τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)$ ἰσοῦται τῷ πολυωνύμῳ

$\alpha.\alpha+\alpha.\beta-\beta.\alpha-\beta.\beta.$ ἤτοι τῷ $\alpha^2-\beta^2\cdot$

ὅθεν ἔχομεν τὴν ἰσότητα $(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2,$

τουτέστι τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν δίδει τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Τὰ τρία ταῦτα γινόμενα ἀπαντῶσι συχνότατα ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ.

Ἐπὶ πολυπλοκωτέρων παραδειγμάτων διατίθεται ἡ πρᾶξις ὡς ἕπεται·

4) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$\chi^3-3\chi^2-5\chi+6$ καὶ $\chi^2+8\chi-5$

$$\begin{array}{r}
\chi^3-3\chi^2-5\chi+6 \\
\chi^2+8\chi-5 \\
\hline
\chi^5-3\chi^4-5\chi^3+6\chi^2 \\
+8\chi^4-24\chi^3-40\chi^2+48\chi \\
-5\chi^3+15\chi^2+25\chi-30 \\
\hline
\chi^5+5\chi^4-34\chi^3-19\chi^2+73\chi-30.
\end{array}$$

Οἱ ὅροι ἑκατέρου τῶν δοθέντων πολυωνύμων εἶναι γεγραμμένοι κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος χ ἐλαττοῦνται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον (ὅταν δὲ τοῦτο συμβαίνῃ εἰς πολυώνυμον, λέγεται, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος). Ὑπὸ τὴν ὁριζοντίαν γραμμήν, ἣν σύρομεν ὑποκάτω τῶν δύο πολυωνύμων, γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ (χ^2) ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ πολλαπλασιαστέου· ἔπειτα εἰς δευτέραν σειρὰν τὰ γινόμενα τοῦ δευτέρου ὅρου $(+8\chi)$ καὶ εἰς τρίτην τὰ τοῦ τρίτου (-5), γράφονται δὲ τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα οὕτως, ὥστε οἱ τὴν αὐτὴν δύναμιν τοῦ γράμματος χ ἔχοντες ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην· τέλος, ὑπὸ τὴν δευτέραν ὁριζοντίαν γραμμὴν γράφεται τὸ ἐκ πάντων τῶν μερικῶν γινομένων μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων ἀποτελούμενον πολυώνυμον, ὅπερ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων.

5) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$3-2\alpha+4\alpha^2$ καὶ $8+5\alpha-\alpha^2$

$$
\begin{array}{l}
3-2\alpha+4\alpha^2 \\
8+5\alpha-\alpha^2 \\
\hline
24-16\alpha+32\alpha^2 \\
\quad 15\alpha-10\alpha^2+20\alpha^3 \\
\quad\quad -3\alpha^2+2\alpha^3-4\alpha^4 \\
\hline
24-\alpha+19\alpha^2+22\alpha^3-4\alpha^4.
\end{array}
$$

Ἐνταῦθα οἱ ὅροι τῶν δύο πολυωνύμων ἐγράφησαν κατὰ τοιαύτην τάξιν, ὥστε νὰ αὐξάνωσιν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος α ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον· ἤτοι τὰ πολυώνυμα διετάχθησαν ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α· κατὰ τὰ ἄλλα, ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι.

6) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων

$\alpha^2\chi^2+\alpha\chi^3+\alpha^3\chi+\alpha^4+\chi^4$ καὶ $\chi-\alpha$.

$$
\begin{array}{l}
\chi^4+\alpha\chi^3+\alpha^2\chi^2+\alpha^3\chi+\alpha^4 \\
\chi-\alpha \\
\hline
\chi^5+\alpha\chi^4+\alpha^2\chi^3+\alpha^3\chi^2+\alpha^4\chi \\
\quad -\alpha\chi^4-\alpha^2\chi^3-\alpha^3\chi^2-\alpha^4\chi-\alpha^5 \\
\hline
\chi^5-\alpha^5
\end{array}
$$

7) Εὑρεῖν τὸν κύβον τοῦ $(\alpha+\beta)$, ἤτοι τὸ γινόμενον

$$(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).(\alpha+\beta).$$

Τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων ἰσοῦται τῷ

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$

ὥστε πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)$

$$
\begin{array}{l}
\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\
\alpha+\beta \\
\hline
\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\
\quad +\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\
\hline
\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.
\end{array}
$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων γίνεται καταφανές, ὅτι διὰ τῆς διατάξεως τῶν πολυωνύμων κατὰ τὰς κατιούσας ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἡ εὕρεσις τῶν ὁμοίων ὅρων τοῦ γινομένου καὶ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν γίνεται εὐκολώτερον.

90. Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν γίνεται ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο πο-

λυωνύμων, βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον πρὸ τῆς ἀναγωγῆς ἔχει τόσους ὅρους, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν μετρεῖται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων· ἀλλὰ διὰ τῆς ἀναγωγῆς δύναται τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ γινομένου νὰ καταστῇ μικρότερον.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε ἐν τῷ γινομένῳ δύο ὅροι πρὸς οὐδένα ἄλλον ὅμοιοι καὶ ἑπομένως ἀμετάβλητοι διαμένοντες ἐν αὐτῷ.

Εἶναι δὲ οὗτοι τὸ γινόμενον τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων καὶ τὸ γινόμενον τῶν τελευταίων, ὅταν τὰ πολυώνυμα εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Ἐὰν τῳόντι τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, οἱ πρῶτοι ὅροι ἔχουσι τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ γράμματος καὶ διὰ τοῦτο τὸ γινόμενον αὐτῶν θὰ ἔχῃ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ γράμματος μεγαλητέραν ἢ πάντα τὰ ἄλλα μερικὰ γινόμενα· ὁμοίως οἱ τελευταῖοι ὅροι ἔχουσι τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει διὰ τοῦτο μικροτέραν δύναμιν τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως ἢ πάντα τὰ ἄλλα γινόμενα· ἑπομένως οἱ δύο οὗτοι ὅροι τοῦ γινομένου οὐδένα ἔχουσιν ὅμοιον αὐτοῖς. Τοῦτο δύναταί τις νὰ ἴδῃ εἰς πάντα τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἔχει τοὐλάχιστον δύο ὅρους. Ὅτι δὲ δύναται καὶ δύο μόνον νὰ ἔχῃ, ἐξαφανιζομένων πάντων τῶν λοιπῶν ἐν τῇ ἀναγωγῇ, δεικνύει τὸ 6ον παράδειγμα.

Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου πρὸς γράμμα τι (79) ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Διαίρεσις.

α') Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.

91. Μονώνυμον ἀκέραιον λέγεται διαιρετὸν δι' ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου πηλίκου λέγεται διαίρεσις τῶν μονωνύμων.

92. Ἵνα μονώνυμον εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ πάντα τὰ γράμματα τὰ ἐν τῷ διαιρέτῃ ὑπάρχοντα καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος.

Διότι ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ ἀκέραιον καὶ μονώνυμον πηλίκον πολλαπλασιασθεὶς πρέπει νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον· περιέχονται ἄρα πάντα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου ἐν τῷ διαιρετέῳ καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος.

93. Ἐκ τοῦ κανόνος, καθ' ὃν πολλαπλασιάζονται δύο μονώνυμα, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸν ἑπόμενον κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν μονωνύμων (ὑποθέτοντες τὸ ἓν διαιρετὸν διὰ τοῦ ἄλλου):

Ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον δι' ἄλλου, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου ἑκάστου γράμματος αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ὑπάρχῃ ἐν τῷ διαιρέτῃ, ὑποτίθεται ὑπάρχον μὲ ἐκθέτην 0 (73).

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα τὰ μονώνυμα

$$40\alpha^5\beta^2\gamma\delta^3 \qquad 5\alpha\beta^2\delta.$$

Τὸ πηλίκον αὐτῶν, ὅπερ παρίσταται διὰ τοῦ

$$\frac{40\alpha^5\beta^2\gamma\delta^3}{5\alpha\beta^2\delta}, \text{ ἰσοῦται τῷ μονωνύμῳ } 8\alpha^4\gamma\delta^2\cdot$$

διότι τοῦτο πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Κατὰ τὸν δοθέντα κανόνα ἔπρεπε νὰ γράψωμεν εἰς τὸ πηλίκον καὶ τὸν παράγοντα β^0· παρελείψαμεν ὅμως αὐτὸν ὡς ἴσον τῇ μονάδι.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

τὸ μονώνυμον $-15\alpha^3\beta\gamma\delta^5$ διὰ τοῦ $7\alpha\beta\delta^3$ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ μονώνυμον $-\dfrac{15}{7}\alpha^2\gamma\delta^2\cdot$

Καὶ τὸ μονώνυμον $-20\alpha\beta\gamma^3$, διὰ τοῦ $-5\alpha\beta\gamma$ διαιρεθέν, δίδει πηλίκον τὸ $4\gamma^2\cdot$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι καὶ ἐν τῇ διαιρέσει τῶν μονωνύμων ὁ αὐτὸς κανὼν τῶν σημείων διατηρεῖται· ἤτοι ἐξ ὁμοίων σημείων προκύπτει $+$, ἐξ ἀνομοίων δέ $-$.

β΄) Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ μονωνύμου, ἀμφοτέρων ὄντων ἀκεραίων.

94. Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται διαιρετὸν διὰ μονωνύμου ἀκεραίου, ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιον πολυώνυμον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν· καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου τούτου καὶ ἀκεραίου πηλίκου λέγεται διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.

95. Πολυώνυμον ἀκέραιον εἶναι διαιρετὸν διὰ μονωνύμου, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου (τὸ πολυώνυμον ὑποτίθεται ἄνευ ὁμοίων ὅρων) καὶ τότε μόνον.

Διότι οἱ ὅροι οὗτοι εἶναι γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς ὅρους τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου πηλίκου.

Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον διὰ μονωνύμου διαιροῦμεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου, καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα.

Διότι τὸ πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ· ἄθροισμα δὲ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ χωριστὰ καὶ προστεθῶσι τὰ πηλίκα·

Παραδείγματος χάριν, τὸ πολυώνυμον

$4\alpha^2\beta^3 - 8\alpha^3\beta^2 + 12\alpha\beta^4$ διὰ τοῦ $2\alpha\beta^2$ διαιρεθέν,

δίδει πηλίκον τὸ $2\alpha\beta - 4\alpha^2 + 6\beta^2$.

Παρατήρησις. Ὅταν πάντες οἱ ὅροι πολυωνύμου εἶναι διαιρετοὶ διὰ μονωνύμου τινός, τὸ πολυώνυμον παρίσταται ὡς γινόμενον τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου.

Τοῦ πολυωνύμου $12\alpha^2\beta^4 - 6\alpha^3\beta^3 + 4\alpha^4\beta^2$ πάντες οἱ ὅροι εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ $2\alpha^2\beta^2$· ἑπομένως καὶ αὐτὸ τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2\alpha^2\beta^2$· ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον εἶναι $6\beta^2 - 3\alpha\beta + 2\alpha^2$, συνάγομεν, ὅτι τὸ αὐτὸ πολυώνυμον γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$(6\beta^2 - 3\alpha\beta + 2\alpha^2) . 2\alpha^2\beta^2.$$

Ὅταν εἰς πολυώνυμον γίνηται τοῦτο, λέγομεν, ὅτι ἐξάγονται οἱ κοινοὶ τῶν ὅρων παράγοντες ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως.

γ΄) Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου, ἀμφοτέρων ὄντων ἀκεραίων.

96. Πολυώνυμον λέγεται διαιρετὸν δι' ἄλλου, ἐὰν ὑπάρχῃ πολυώνυμον (ἢ μονώνυμον) ἀκέραιον ἴσον τῷ πηλίκῳ αὐτῶν.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου τούτου λέγεται διαίρεσις τῶν δύο πολυωνύμων· στηρίζεται δὲ ἡ πρᾶξις αὕτη ἐπὶ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων.

1) Ἐὰν δύο πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῶν (ἐὰν ὑποτεθῇ ὑπάρχον καὶ ὁμοίως διατεταγμένον) εὑρίσκεται ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων.

Ἔστω διαιρετέος μὲν τὸ πολυώνυμον

$$\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots,$$

διαιρέτης δὲ τὸ $\delta+\delta'+\delta''+\ldots,$

πηλίκον δὲ τὸ $\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots\cdot$

τότε θὰ εἶναι $\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots=(\delta+\delta'+\delta''+\ldots).(\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots)$.

Τοὺς ὅρους τῶν τριῶν τούτων πολυωνύμων ὑποθέτω διατεταγμένους κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος α (ἢ ὅλων κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ ὅλων κατὰ τὰς κατιούσας)· παριστῶ δὲ ἕκαστον ὅρον δι' ἑνὸς μόνου γράμματος χάριν συντομίας.

Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν δύο πολυωνύμων $(\delta+\delta'+\delta''+\ldots).(\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots)$, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα ταῦτα εἶναι ὁμοίως διατεταγμένα, οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν θὰ δώσωσι γινόμενον τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ γινομένου (ἐδ. 90), ἄρα εἶναι $\Delta=\delta.\Pi$· ἑπομένως καὶ $\Pi=\frac{\Delta}{\delta}$· τοῦτο δὲ ἐπρόκειτο νὰ ἀποδείξωμεν.

2) Ἐὰν ὁ διαιρέτης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἀφαιρεθῇ τὸ γινόμενον ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, εὑρίσκεται ὑπόλοιπον, ὅπερ διαιρούμενον διὰ τοῦ διαιρέτου θὰ δώσῃ πάντας τοὺς ἄλλους ὅρους τοῦ πηλίκου.

Διότι ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἤτοι ἀποτελεῖται ἐκ τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἂν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου, ἤτοι ἐπὶ τὸ ἐκ τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου ἀποτελούμενον πολυώνυμον· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διαιρέτου.

Ἐπὶ τῶν δύο τούτων θεωρημάτων στηριζόμενοι, εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον δύο πολυωνύμων (ὅταν ὑπάρχῃ)· διότι διὰ μὲν τοῦ πρώτου εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διὰ δὲ τοῦ δευτέρου ἀνάγεται ἡ εὕρεσις τῶν λοιπῶν εἰς νέαν τινὰ διαίρεσιν. Ἐὰν δὲ καὶ εἰς τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν ἐφαρμόσωμεν τὸ πρῶτον θεώρημα, εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου αὐτῆς (τουτέστι τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ ζητουμένου πηλίκου), ἡ δὲ εὕρεσις τῶν λοιπῶν ἀνάγεται καὶ πάλιν (δυνάμει τοῦ δευτέρου θεωρήματος) εἰς τρίτην τινὰ διαίρεσιν· καὶ οὕτω καθεξῆς. Φανερὸν δὲ ὅτι, ὅταν ὑπάρχῃ πολυώνυμον πηλίκον, μία τῶν μερικῶν τούτων διαιρέσεων, εἰς ἃς ἀνάγεται ἡ ἐξ ἀρχῆς δοθεῖσα, θὰ δώσῃ τὸν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ θὰ ἀφήσῃ ὑπόλοιπον 0.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἡ διαίρεσις τῶν πολυωνύμων ἀνάγεται οὕτως εἰς τὴν διαίρεσιν μονωνύμων· διότι εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι λαμβάνονται.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

1) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $8\chi^3-22\chi^2+17\chi-3$ διὰ τοῦ $4\chi-1$.

$$
\begin{array}{r|l}
8\chi^3-22\chi^2+17\chi-3 & 4\chi-1 \\ \cline{2-2}
-8\chi^3+2\chi^2 & 2\chi^2-5\chi+3 \\ \cline{1-1}
-20\chi^2+17\chi-3 & \\
+20\chi^2-5\chi & \\ \cline{1-1}
+12\chi-3 & \\
-12\chi+3 & \\ \cline{1-1}
0. &
\end{array}
$$

Τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ· μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου $(2\chi^2)$, πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ οἱ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτοντες ὅροι, ἐπειδὴ πρέπει νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, γράφονται ὑπ' αὐτὸν μετ' ἐναντίων σημείων καὶ προστίθενται εἰς αὐτόν. Τὸ δὲ ἐκ τῆς προσθέσεως μετὰ τὴν ἀναγωγὴν προκῦπτον πολυώνυμον $-20\chi^2+17\chi-3$ θεωρεῖται νῦν ὡς νέος διαιρετέος, ἐφ' οὗ ποιοῦμεν πάλιν τὰ αὐτὰ καὶ εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου (-5χ) καὶ τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον $12\chi-3$· θεωροῦντες καὶ τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον καὶ ποιοῦντες καὶ ἐπ' αὐτοῦ τὰ αὐτά, εὑρίσκομεν τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου $(+3)$ καὶ ὑπόλοιπον 0· ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$2\chi^2-5\chi+3.$$

2) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον

$$3\chi^5+5\alpha\chi^4-9\alpha^2\chi^3-12\alpha^3\chi^2+8\alpha^4\chi+5\alpha^5$$

διὰ τοῦ $\chi^3+\alpha\chi^2-2\alpha^2\chi-\alpha^3$.

$$
\begin{array}{r|l}
3\chi^5+5\alpha\chi^4-9\alpha^2\chi^3-12\alpha^3\chi^2+8\alpha^4\chi+5\alpha^5 & \chi^3+\alpha\chi^2-2\alpha^2\chi-\alpha^3 \\ \cline{2-2}
-3\chi^5-3\alpha\chi^4+6\alpha^2\chi^3+3\alpha^3\chi^2 & 3\chi^2+2\alpha\chi-5\alpha^2 \\ \cline{1-1}
2\alpha\chi^4-3\alpha^2\chi^3-9\alpha^3\chi^2+8\alpha^4\chi+5\alpha^5 & \\
-2\alpha\chi^4-2\alpha^2\chi^3+4\alpha^3\chi^2+2\alpha^4\chi & \\ \cline{1-1}
-5\alpha^2\chi^3-5\alpha^3\chi^2+10\alpha^4\chi+5\alpha^5 & \\
+5\alpha^2\chi^3+5\alpha^3\chi^2-10\alpha^4\chi-5\alpha^5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

97. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανὼν τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

Ἵνα διαιρέσωμεν πολυώνυμον δι᾽ ἑτέρου πολυωνύμου, διατάσσομεν ἀμφότερα κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος καὶ λαμβάνομεν ἐν τῇ διαιρέσει μόνον τοὺς πρώτους ὅρους αὐτῶν, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν ὅρον τοῦτον καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπόν τι· μετὰ δὲ ταῦτα θεωροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον καὶ ποιοῦμεν ἐπ᾽ αὐτοῦ ὅσα καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου διαιρετέου, ὅτε εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ὑπόλοιπόν τι. Θεωροῦμεν πάλιν καὶ τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον, καὶ ἐξακολουθοῦμεν τοιουτοτρόπως, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0· ὅπερ θὰ συμβῇ μετά τινας πράξεις, ἐὰν τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἑτέρου.

98. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου εὑρίσκονται ἐκ τοῦ διαιρετέου καὶ ἐκ τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων, διαιρουμένων τῶν πρώτων ὅρων αὐτῶν διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, ἕπεται, ὅτι ἡ διαίρεσις δύο πολυωνύμων δὲν δύναται νὰ περατωθῇ, ἤτοι τὸ πολυώνυμον τὸ ἀποτελοῦν τὸν διαιρετέον δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου, 1) ἐὰν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν διαιρῇ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου ἢ τὸν πρῶτον ὅρον τινὸς ἐκ τῶν ὑπολοίπων, καὶ 2) ἐὰν διαιρῇ μὲν πάντας τούτους, ἀλλ᾽ οὐδέποτε εὑρίσκηται ὑπόλοιπον 0· ὡς συμβαίνει ἐν τῇ ἑπομένῃ διαιρέσει

$$
\begin{array}{r|l}
\chi+\chi^2 & \chi-\chi^2 \\ \cline{2-2}
-\chi+\chi^2 & 1+2\chi+\ldots \\ \cline{1-1}
2\chi^2 & \\
-2\chi^2+2\chi^3 & \\ \cline{1-1}
+2\chi^3 & \\
\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Ἐπειδὴ πάντα τὰ ὑπόλοιπα εἶναι μονώνυμα, τὰ δὲ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι διώνυμα, φανερὸν εἶναι, ὅτι οὐδέποτε θὰ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἡ εἰς ἄπειρον ἐξακολούθησις τῆς διαιρέσεως εἶναι ἀδύνατος, ὅταν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος· διότι τότε ὁ βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως προβαίνει ἐλαττούμενος (διότι ἐν ἑκάστῃ διαιρέσει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ ὑπολοίπῳ), καὶ ἑπομένως μετά τινας πράξεις, ἐὰν δὲν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0, θὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ διαιρέτης, ὅτε ἡ διαίρεσις διακόπτεται· διὰ τοῦτο προτιμότερον εἶναι ἐν τῇ διαιρέσει νὰ διατάσσωμεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Σημ. α΄. Ἐὰν τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος ἔχῃ δύο μόνον ὅρους οἱ ὅροι οὗτοι εὑρίσκονται ἀμέσως, ὁ μὲν πρῶτος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων, ὁ δὲ δεύτερος ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν τελευταίων.

Οὕτω π. χ. ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^3-\chi^2-11\chi+3 \quad \Big| \; \chi^2-4\chi+1$$

τὸ πηλίκον δύο μόνον ὅρους δύναται νὰ ἔχῃ· διότι ὁ μὲν πρῶτος ὅρος αὐτοῦ εἶναι χ, ὁ δὲ τελευταῖος $+3$· μεταξὺ δὲ αὐτῶν οὐδεμία ἄλλη δύναμις τοῦ χ ὑπάρχει· ὥστε τὸ πηλίκον, ἂν ὑπάρχῃ, θὰ εἶναι τὸ $\chi+3$. Τοῦτο δὲ ἀληθῶς εἶναι τὸ πηλίκον· διότι πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον.

Ὁμοίως ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^4+2\chi^3-5\chi^2+3\chi+1 \quad \Big| \; \chi^3-8\chi^2+8\chi-1$$

τὸ πηλίκον μόνον τοὺς δύο ὅρους $\chi-1$ δύναται νὰ ἔχῃ· ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ $\chi-1$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην δὲν δίδει τὸν διαιρετέον, συνάγομεν, ὅτι ἡ προκειμένη διαίρεσις δὲν γίνεται.

Σημ. β΄. Ἐὰν ἐν πολυωνύμῳ αἱ δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως εὑρίσκωνται πολλαπλασιασμέναι οὐχὶ ἐπὶ ἀριθμοὺς ἢ ἐπὶ μονώνυμα, ὡς ἐν τοῖς ἀνωτέρω παραδείγμασι συνέβαινεν, ἀλλ' ἐπὶ πολυώνυμα, ἡ διαίρεσις ἀποβαίνει ἐπιπονωτέρα, ἀλλ' ἡ θεωρία αὐτῆς κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται· μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι, ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁποίων εὑρίσκονται οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου, εἶναι καὶ αὐτοὶ πολυώνυμα.

Σημ. γ΄. Διατάσσοντες τὰ πολυώνυμα πρὸς διάφορα γράμματα (ἂν ἔχωσιν), εὑρίσκομεν διὰ μιᾶς πολλοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου.

Οἷον ἐν τῇ διαιρέσει

$$\chi^4-4\alpha\chi^3+(3\beta^2-5\alpha^2)\chi^2-3\alpha\beta^2\chi+2\beta^4 \quad \Big| \; \chi^2+\alpha\chi+\beta^2$$

ἂν μὲν πρὸς τὸ χ διατάξωμεν, εὑρίσκομεν δύο ὅρους τοῦ πηλίκου, τοὺς χ^2 καὶ $2\beta^2$, ἂν δὲ πρὸς τὸ α, εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ πηλίκον πρέπει νὰ ἔχῃ τὸν ὅρον $-5\alpha\chi$· ὥστε τὸ πηλίκον ἔχει τοὺς ὅρους $\chi^2-5\alpha\chi+2\beta^2$· ἐπειδὴ δὲ πολλαπλασιάζοντες τούτους ἐπὶ τὸν διαιρέτην εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἐπερατώθη ἡ διαίρεσις.

* Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διὰ τοῦ $\chi-\alpha$.

99. Ἡ διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου, διατεταγμένου κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, διὰ τοῦ διωνύμου $\chi-\alpha$ δύναται νὰ παραταθῇ, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον βαθμοῦ πρὸς τὸ χ μικροτέρου ἢ ὁ διαιρέτης, ἤτοι μὴ περιέχον τὸ χ.

Εἰς τοῦτο στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν καὶ νὰ συμπεράνωμεν, πότε τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi-\alpha$.

Διότι, παριστῶντες διὰ τοῦ Φ τὸ διαιρετέον πολυώνυμον, διὰ τοῦ Π τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ Y τὸ ὑπόλοιπον θὰ ἔχωμεν

$$\Phi = (\chi-\alpha).\Pi+Y.$$

Διότι ἐν τῇ ἐκτελέσει τῆς διαιρέσεως ἀφηρέθησαν ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἤτοι ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον $(\chi-\alpha).\Pi$ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ ἔμεινε τὸ ὑπόλοιπον Y· ὥστε σύγκειται ὁ διαιρετέος ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τούτου καὶ ἐκ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha).\Pi$· ἀληθεύει δὲ τοῦτο προδήλως οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν ἔχωσι τὰ γράμματα χ καὶ α. Ἀλλ' ἐὰν ὑποτεθῇ $\chi=\alpha$ ἐν τῇ ἰσότητι, τὸ μὲν γινόμενον $(\chi-\alpha).\Pi$ μηδενίζεται, ὡς μηδενιζομένου ἑνὸς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, τὸ δὲ Y μένει ἀμετάβλητον· διότι δὲν περιέχει τὸ χ· τὸ δὲ πολυώνυμον Φ τρέπεται εἰς παράστασίν τινα μὴ ἔχουσαν τὸ χ, ἣν σημειοῦμεν διὰ τοῦ Φ_α. εἶναι ἄρα $\Phi_\alpha=Y$·
τουτέστι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ $\chi-\alpha$ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου, ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ τεθῇ τὸ α.

Ἐὰν ἄρα, ἀντικαθισταμένου τοῦ χ ὑπὸ τοῦ α, προκύπτῃ ἐκ τοῦ πολυωνύμου ἐξαγόμενον 0, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi-\alpha$.

Κατὰ ταῦτα τὸ πολυώνυμον $\chi^3-5\chi^2+2\chi-1$, διὰ τοῦ $\chi-\alpha$ διαιρούμενον, δίδει ὑπόλοιπον τὸ $\alpha^3-5\alpha^2+2\alpha-1$.

Καὶ τὸ πολυώνυμον $\chi^4-5\chi^3+2\chi-10$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\chi-5$, διότι μηδενίζεται, ὅταν ἐν αὐτῷ τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ ὁ 5.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ διώνυμον $\chi^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\chi-\alpha$· τὸ δὲ πηλίκον αὐτοῦ, διὰ τῆς διαιρέσεως εὑρισκόμενον, εἶναι

$$\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}.$$

πάντες οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου τούτου ἔχουσι συντελεστὴν τὸ $+1$, καὶ οἱ μὲν ἐκθέται τοῦ χ προβαίνουσιν ἐλαττούμενοι, τοῦ δὲ α τοὐναντίον αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα· ὥστε ὁ βαθμὸς ὅλων τῶν ὅρων πρὸς τὰ γράμματατα χ καὶ α εἶναι ὁ αὐτὸς $\mu-1$.

Ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι αἱ ἑξῆς·

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta, \qquad \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}=\alpha^2+\alpha.\beta+\beta^2.$$

Κλασματικαὶ παραστάσεις ἢ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

100. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν παραστάσεων παρίσταται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι αἱ οὕτω προκύπτουσαι κλασματικαὶ παραστάσεις αἵτινες καὶ ἀλγεβρικὰ κλάσματα λέγονται, ἔχουσι πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων· διότι καὶ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς αὐτῶν, οἱαιδήποτε παραστάσεις καὶ ἂν εἶναι, παριστῶσιν ἀριθμούς τινας· ἐπὶ πάντων δὲ τῶν ἀριθμῶν ἀπεδείχθησαν ἰσχύουσαι αἱ ἰδιότητες ἐκεῖναι ὡς ἀκολουθήματα ἀναγκαῖα τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων· ἑπομένως πᾶσαι αἱ ἁπλοποιήσεις καὶ αἱ πράξεις, αἱ ἐπὶ τῶν συνήθων κλασμάτων γινόμεναι, γίνονται καὶ ἐπὶ τούτων καὶ δι' αὐτῶν αἱ παραστάσεις τρέπονται ἢ μετασχηματίζονται εἰς ἄλλας ἴσας.

Ἕπονται παραδείγματά τινα μετασχηματισμῶν·

1) Τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $3\alpha^2\beta\gamma$ διὰ τοῦ $8\alpha\beta\gamma^2\delta$ εἶναι

$$\frac{3\alpha^2\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma^2\delta} \quad \text{ἢ ἁπλούστερον} \quad \frac{3\alpha}{8\gamma\delta}.$$

2) Τὸ πηλίκον τῶν παραστάσεων

$$\frac{\gamma}{\chi-\alpha}-\frac{\gamma}{\chi+\alpha} \quad \text{διὰ} \quad 1+\frac{\gamma^2}{\chi^2-\alpha^2}$$

εἶναι

$$\frac{\dfrac{\gamma}{\chi-\alpha}-\dfrac{\gamma}{\chi+\alpha}}{1+\dfrac{\gamma^2}{\chi^2-\alpha^2}}.$$

ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi^2-\alpha^2$, ἤτοι ἐπὶ

$(\chi-\alpha).(\chi+\alpha)$, ὁ μὲν ἀριθμητὴς γίνεται

$$\frac{\gamma}{\chi-\alpha}(\chi-\alpha).(\chi+\alpha)\quad\frac{\gamma}{\chi+\alpha}\quad(\chi+\alpha).(\chi-\alpha),$$

τουτέστι $\qquad \gamma(\chi+\alpha)-\gamma(\chi-\alpha)\qquad$ ἤτοι $2\alpha\gamma$·

ὁ δὲ παρονομαστὴς γίνεται $\chi^2-\alpha^2+\gamma^2$· ὥστε τὸ πηλίκον τῶν δοθεισῶν

παραστάσεων εἶναι $\qquad \dfrac{2\alpha\gamma}{\chi^2-\alpha^2+\gamma^2}$.

3) Τὸ πηλίκον τοῦ πολυωνύμου $\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-8\chi^2+2\chi-1$ διαιρουμένου διὰ τοῦ χ^2-4, εἶναι

$$\frac{\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-8\chi^2+2\chi-1}{\chi^2-4}$$

ἀλλ' ἐὰν διαιρεθῇ ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, εὑρίσκεται πηλίκον τὸ $\chi^3-2\chi^2+8\chi-16$ καὶ ὑπόλοιπον $34\chi-65$· ἐπομένως εἶναι

$$\chi^5-2\chi^4+4\chi^3-8\chi^2+2\chi-1=(\chi^2-4).(\chi^3-2\chi^2+8\chi-16)+$$
$$+(34\chi-65)\cdot$$

ὅθεν ἕπεται, ὅτι τὸ προκείμενον πηλίκον τῶν πολυωνύμων ἰσοῦται τῇ παραστάσει $\chi^3-2\chi^2+8\chi-16+\dfrac{34\chi-65}{\chi^2-4}$.

Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος τοῦ πηλίκου δύο πολυωνύμων δύναται πάντοτε νὰ ἐκτελεσθῇ, ἐὰν ὁ βαθμὸς τοῦ διαιρετέου δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου.

4) Ἡ διαφορὰ $\qquad \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}$

μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\qquad \dfrac{\alpha(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}$

ἤτοι $\qquad \dfrac{\alpha(\alpha+\beta)-\beta(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}\qquad$ ἢ $\qquad \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

5) Ἔστω τὸ κλάσμα $\qquad \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$.

Παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι $(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)$, ὁ δὲ παρονομαστὴς εἶναι $(\alpha-\beta)^2$, γράφομεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς·

$$\frac{(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)}{(\alpha-\beta).(\alpha-\beta)}$$

ἢ ἐξαλειφομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος $(\alpha-\beta)$,

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}.$$

6) Τοῦ κλάσματος $\dfrac{8\alpha^4-16\alpha^3\beta+8\alpha^2\beta^2}{3\alpha^2-3\beta^2}$

ὁ μὲν ἀριθμητὴς γράφεται $8\alpha^2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$ ἤτοι $8\alpha^2(\alpha-\beta)^2$, ὁ δὲ παρονομαστὴς $3(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)$· ὅθεν τὸ κλάσμα ἁπλούστερον γίνεται

$$\frac{8\alpha^2(\alpha-\beta)}{3(\alpha+\beta)}.$$

7) Τὸ ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\beta}{\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

εὑρίσκεται, ἂν τραπῶσιν εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· γίνεται δὲ κοινὸς παρονομαστὴς αὐτῶν ὁ $\alpha^2-\beta^2$, διότι ἡ παράστασις αὕτη διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\frac{2\alpha(\alpha-\beta)+2\beta(\alpha+\beta)+\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$$

ἢ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων $3.\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, ὁ κοινὸς παρονομαστής, εἰς ὃν ἀνάγονται πάντα, εἶναι παράστασις διαιρετὴ διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· τοιαύτη παράστασις εἶναι πάντοτε τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, ἀλλ' ἐνίοτε ὑπάρχει καὶ ἄλλη ἁπλουστέρα τούτου.

8) Τὸ γινόμενον τῶν δύο κλασμάτων

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\beta^2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$$

εἶναι $\dfrac{(\alpha-\beta).\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha^2-\beta^2)}$ ἢ $\dfrac{(\alpha-\beta)\ \alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)}$

καὶ ἁπλούστερον $\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta).(\alpha^2+\beta^2)}$.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^3-\beta^3}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}$.

Κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων θὰ γίνῃ ὁ $\alpha^3-\beta^3$.

2) Καταστῆσαι τὴν παράστασιν

$$\frac{6\alpha\beta}{3\gamma-\delta}\left(\frac{\gamma+\delta}{4}-\frac{\delta}{3}\right) \text{ ἁπλουστέραν. } \left(\text{Απ. } \frac{\alpha\beta}{2}\right).$$

3) Εὑρεῖν τὴν διαφορὰν $\dfrac{3\alpha}{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}-\dfrac{3}{\alpha+\beta}$.

4) Ἀποδεῖξαι τὴν ἀλήθειαν τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων:

$$(\alpha-\beta)\ (\gamma-\delta)=(1+\alpha\gamma)\ (1+\beta\delta)-(1+\alpha\delta)\ (1+\beta\gamma).$$

$$(\alpha^2+\beta^2).(\alpha'^2+\beta'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta')^2=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2.$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2=$$
$$=(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2+(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)^2.$$

$$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2.$$

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2+(2\alpha\beta)^2+(2\alpha\gamma)^2.$$

5) Διαιρέσαι $\chi^{3\omega}+\psi^{3\omega}$ διὰ τοῦ $\chi^{\omega}-\psi^{\omega}$.

Ἐὰν θέσωμεν $\chi^{\omega}=\alpha$ καὶ $\psi^{\omega}=\beta$, καταντῶμεν εἰς τὴν διαίρεσιν

$\alpha^3-\beta^3$ διὰ τοῦ $\alpha-\beta$.

6) Πότε ἡ διαφορὰ $\chi^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\chi^{\nu}-\alpha^{\nu}$;

7) Νὰ διαιρεθῇ τὸ διώνυμον $\chi^5\psi^3-\chi^3\psi^5$ διὰ τοῦ $\chi-\psi$.

(Ἀπ. πηλίκον $\chi^3\psi^3\ (\chi+\psi)$).

8) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\chi+\psi+\omega)^{\nu}-\chi^{\nu}-\psi^{\nu}-\omega^{\nu}$$

διαιρεῖται δι ἑκάστου τῶν ἀθροισμάτων

$$\chi+\psi, \qquad \psi+\omega, \qquad \omega+\chi,$$

ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττός.

9) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $7^{\nu}+1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ν εἶναι περιττός, ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

10) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^{35}-1$ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 127 $(=2^7-1)$.

(Ἀπ. Ἐὰν τεθῇ $2^7=\chi$, τὸ ζήτημα καταντᾷ εἰς τὸ ἑξῆς· νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ $\chi^{\mu}-1$ διαιρεῖται διὰ $\chi-1$).

11) Νὰ εὑρεθῇ τὸ λάθος εἰς τὴν ἑξῆς σειρὰν τῶν πράξεων, αἵτινες ἄγουσιν εἰς ἄτοπον ἐξαγόμενον.

Ἔστω $\alpha=\beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha\beta=\beta^2$·

προσέτι $\alpha\beta-\alpha^2=\beta^2-\alpha^2$ ἤτοι $\alpha(\beta-\alpha)=(\beta+\alpha).(\beta-\alpha)$·

ὅθεν ἕπεται (ἂν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ $\beta-\alpha$) $\alpha=\beta+\alpha$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha=\beta$, συνάγεται $\alpha=2\alpha$ ἢ καὶ $1=2$

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ ΠΕΡΙΕΧΟΥΣΑΙ

Ὁρισμοί

101. Τὰς ἰσότητας, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα, διακρίνομεν εἰς ταὐτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις.

Καὶ ταὐτότητα μὲν καλοῦμεν τὴν ἰσότητα, ἐὰν ἀληθεύῃ διὰ πάσας τὰς τιμὰς ἑκάστου τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα ἔχει· οἷαι εἶναι αἱ ἰσότητες $\alpha.\beta=\beta.\alpha$, $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$· καὶ πᾶσαι αἱ ἐν τοῖς προηγουμένοις εὑρεθεῖσαι.

Ἐξίσωσιν δὲ τὴν ἰσότητα, ἥτις ἀληθεύει, μόνον ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα λάβωσιν ἁρμοδίας τιμάς· τοιαύτη εἶναι ἡ ἰσότης

$$2\chi=4,$$

ἥτις ἀληθεύει μόνον ὅταν τὸ γράμμα χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως, ἅτινα πρέπει νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ ὡρισμένων ἀριθμῶν, ἵνα ἀληθεύσῃ ἡ ἰσότης, λέγονται ἄγνωστοι τῆς ἐξισώσεως. Οἱ δὲ ὡρισμένοι ἀριθμοί, οἵτινες ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται τιμαὶ τῶν ἀγνώστων. Ἐὰν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχωσιν, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ἀδύνατος.

Οἱ ἄγνωστοι παρίστανται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου φ, χ, ψ, ω.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων λέγεται λύσις τῆς ἐξισώσεως· εἶναι δὲ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς ἀλγέβρας· διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν προβλημάτων.

Ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἐξισώσεις, ὅταν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύωσιν ἀμφοτέρας.

Ἐν τῇ λύσει ἐξισώσεως οἱασδήποτε ἐπιτρέπεται πᾶσα μεταβολὴ αὐτῆς, ἐὰν ἄγῃ εἰς ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

102. ΘΕΩΡΗΜΑ Α΄. Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $5\chi=15$·

ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προστεθῇ ὁ τυχὼν ἀριθμὸς μ, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $5\chi+\mu=15+\mu$·

λέγω δέ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διότι, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ πρώτη (λαμβάνοντος τοῦ ἀγνώστου ἁρμοδίαν τιμήν), ἤτοι ἂν τὰ δύο μέλη αὐτῆς γίνωσι δύο ἴσοι ἀριθμοί, θὰ μείνωσιν ἴσοι καὶ μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ μ, ἐπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ δευτέρα· καὶ τἀνάπαλιν, ἂν ἡ δευτέρα ἀληθεύσῃ, τὰ μέλη αὐτῆς θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ μ, ἐπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ πρώτη· ὥστε αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐπειδὴ πᾶσα ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν (62), ἕπεται, ὅτι καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ὁ αὐτὸς ἀριθμός, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Παραδείγματος χάριν ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\chi+7=\frac{\chi}{2}+\chi^2+12$

εἶναι ἰσοδύναμος τῇ $\chi+7=\frac{\chi}{2}+12$,

ἣν εὑρίσκομεν παραλείποντες ἐξ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὸν ἀριθμὸν χ^2.

ΠΟΡΙΣΜΑ Α΄. Ἐὰν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς μ εἶναι ἀντίθετος ὅρῳ τινὶ τῆς ἐξισώσεως, ὁ ὅρος οὗτος ἀφανίζεται ἐκ τοῦ μέλους, ἐν ᾧ εὑρίσκετο, καὶ μεταβαίνει εἰς τὸ ἕτερον, ἔχων ἐναντίον σημεῖον· ὅθεν

Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους ἐξισώσεως ὅρον τινὰ εἰς τὸ ἕτερον, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $3\chi-7=\frac{\chi}{2}+5+2\chi$·

προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τὸν 7, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $3\chi=\frac{\chi}{2}+5+2\chi+7$,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ ὅρος 7, ὅστις εὑρίσκετο εἰς τὸ πρῶτον μέλος ἔχων τὸ σημεῖον —, εὑρίσκεται νῦν εἰς τὸ δεύτερον ἔχων τὸ +.

Ὁμοίως, προσθέτοντες εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τὸν ἀριθμὸν -2χ (ἢ ἀφαιροῦντες ἀπ' ἀμφοτέρων τὸ 2χ), λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$3\chi-2\chi=\frac{\chi}{2}+12\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ ὅρος 2χ, ὅστις εὑρίσκετο εἰς τὸ δεύτερον μέλος ἔχων τὸ σημεῖον $+$, μετέβη εἰς τὸ πρῶτον καὶ ἔχει νῦν τὸ $-$.

Πορισμα β′. Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $$8\chi-3=5\chi-\frac{\chi}{2}+12\cdot$$

μεταφέροντες τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μέλους εἰς τὸ πρῶτον καὶ τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου εἰς τὸ δεύτερον, λαμβάνομεν

$$-5\chi+\frac{\chi}{2}-12=-8\chi+3\cdot$$

γράφοντες δὲ τὸ δεύτερον μέλος ὡς πρῶτον καὶ τὸ πρῶτον ὡς δεύτερον, εὑρίσκομεν $$-8\chi+3=-5\chi+\frac{\chi}{2}-12.$$

103. **Θεωρημα β′. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ 0), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.**

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $12\chi+8=5\chi+10+\dfrac{\chi}{3}\cdot$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἀμφότερα ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν μ, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(12\chi+8\right)\mu=\left(5\chi+10+\frac{\chi}{3}\right)\mu$$

ἢ $$12\mu\chi+8\mu=5\mu\chi+10\mu+\frac{\mu\chi}{3}.$$

λέγω δέ, ὅτι αἱ ἐξισώσεις αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι.

Καὶ ὄντως, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ πρώτη, ἤτοι ἂν τὰ μέλη αὐτῆς γίνωσιν ἴσοι ἀριθμοί, θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν αὐτῶν ἐπὶ τὸν μ, ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ δευτέρα· ἂν δὲ πάλιν ἀληθεύσῃ ἡ δευτέρα, τὰ μέλη αὐτῆς θὰ μείνωσιν ἴσα καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν αὐτῶν διὰ τοῦ μ (διότι ὁ μ διαφέρει τοῦ 0)· ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ πρώτη· ὥστε εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἐπειδὴ πᾶσα διαίρεσις (πλὴν τῆς διὰ τοῦ 0) ἀνάγεται εἰς πολλαπλασιασμὸν (50), ἕπεται ὅτι, καὶ ἂν διαιρεθῶσι τὰ μέλη ἐξισώσεως ἀμφότερα διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Σημ. α′. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη οἱασδήποτε ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ 0, εὑρίσκομεν πάντοτε $0=0$ ἤτοι ἰσότητα, ἐξ ἧς οὐδεὶς ἄγνωστος δύναται νὰ ὁρισθῇ.

ΣΗΜ. Β'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης μ εἶναι παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων, αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἵτινες δὲν μηδενίζουσι τὴν παράστασιν μ.

Οὕτω λ. χ. ἡ ἐξίσωσις $(\alpha+\beta)\chi=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$, ἐν ᾗ ὁ χ θεωρεῖται ἄγνωστος, εἶναι ἰσοδύναμος τῇ

$$(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)\chi=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).(\alpha-\beta)\cdot$$

ἤτοι $$(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha^3-\beta^3,$$

ἐν ὅσῳ ὑποτίθεται α διάφορον τοῦ β, οὐχὶ δέ, καὶ ὅταν εἶναι $\alpha=\beta$.

Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $(\alpha-\beta)\chi=\alpha^2-\beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ

$$\chi=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta},$$

ἣν εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς πρώτης διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, μόνον ἐν ὅσῳ τὸ α εἶναι διάφορον τοῦ β.

ΣΗΜ. Γ'. Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης μ εἶναι παράστασις περιέχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $5\chi-3=4\chi-1$, ἐξ ἧς, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐπὶ τὴν παράστασιν $\chi-1$, εὑρίσκομεν $(\chi-1).(5\chi-3)=(\chi-1).(4\chi-1)\cdot$ ἀληθεύει δὲ αὕτη ὅταν τεθῇ $\chi=1$, οὐχὶ δὲ καὶ ἡ πρώτη.

104. ΠΟΡΙΣΜΑ. Δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν πάντας τοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων ἐξισώσεως. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κοινόν τι πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $$\frac{\chi}{3}+\frac{5}{2}=\frac{11\chi}{5}-3\chi\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 2.3.5, λαμβάνομεν

$$2.3.5.\frac{\chi}{3}+2.3.5.\frac{5}{2}=2.3.5.\frac{11\chi}{5}-2.3.5.3\chi,$$

ἢ $$2.5\chi+3.5.5.=2.3\ 11\chi-2\ 3\ 5.3\chi,$$

ἤτοι $$10\chi+75=66\chi-90\chi.$$

Ὅταν οἱ παρονομασταὶ εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί, ὁ ἁπλούστατος πολλαπλασιαστής, δι' οὗ ἐξαλείφονται οἱ παρονομασταί, εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi}{6}-\frac{2\chi}{3}+\frac{3}{8}=\frac{5}{12}(\chi+1)\cdot$

τῶν παρονομαστῶν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι 24· ἐὰν δὲ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη (ἤτοι πάντας τοὺς ὅρους) τῆς ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν·

$$24.\frac{\chi}{6}-24.\frac{2\chi}{3}+24.\frac{3}{8}=24.\frac{5}{12}(\chi+1)$$

ἢ
$$4\chi-16\chi+9=10\,(\chi+1).$$

Καὶ ὅταν οἱ παρονομασταὶ εἶναι ἐγγράμματοι, εὑρίσκεται ἐνίοτε παράστασις διαιρετὴ διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν καὶ ἁπλουστέρα τοῦ γινομένου αὐτῶν· ἡ τοιαύτη παράστασις λαμβάνεται τότε ὡς πολλαπλασιαστὴς τῆς ἐξισώσεως.

Ἔστω ἡ ἐγγράμματος ἐξίσωσις $\frac{(\alpha+\beta)\chi}{\alpha-\beta}+\frac{(\alpha-\beta)\chi}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$·

ἡ παράστασις $\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)$ εἶναι διαιρετὴ διὰ πάντων τῶν παρονομαστῶν· ἑπομένως, ἐὰν ἐπ' αὐτὴν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως, ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^2\chi+\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2\chi+\alpha^2\beta^2=\alpha^2-\beta^2\cdot$$

εἶναι δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἰσοδύναμος τῇ δοθείσῃ, πλὴν ὅταν εἶναι $\alpha^2=\beta^2$.

Περὶ τοῦ βαθμοῦ τῶν ἐξισώσεων.

105. Βαθμὸς ἐξισώσεως, ἐν ᾗ ἕκαστος τῶν ὅρων εἶναι ἢ ὡρισμένος ἀριθμὸς ἢ μονώνυμον ἀκέραιον καὶ ἐν ᾗ ὅμοιοι ὅροι δὲν ὑπάρχουσι, λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων πρὸς τοὺς ἀγνώστους (79).

Κατὰ ταῦτα αἱ ἐξισώσεις

$$3\chi=8,\qquad \frac{5}{6}\chi-9=0$$

εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ·
αἱ δὲ ἐξισώσεις $\chi^2+5\chi=14$, $\chi\psi=7$ εἶναι τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ τῶν ἕνα ἄγνωστον περιεχουσῶν.

106. Τὴν λύσιν ἐξισώσεως, ἕνα ἄγνωστον ἐχούσης, ἐπιχειροῦμεν συνήθως κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον.

α´) Ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, ἐὰν ἔχῃ.

β´) Ἐκτελοῦμεν τὰς σεσημειωμένας πράξεις, ἐὰν ὦσι.

γ´) Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἐχόντων τὸν ἄγνωστον, μεταφέροντες τοὺς μὲν πρώτους εἰς τὸ ἓν ἐκ τῶν μελῶν, τοὺς δὲ δευτέρους εἰς τὸ ἕτερον.

δ΄) Προσθέτομεν τοὺς ὁμοίους ὅρους ἐν ἑκάστῳ μέλει, ἐὰν ὑπάρχωσι τοιοῦτοι

Μετὰ τὰς πράξεις ταύτας, ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τοῦ πρώτου βαθμοῦ, οἱ μὲν γνωστοὶ ὅροι θὰ ἀποτελέσωσιν ὡρισμένον ἀριθμὸν ἢ παράστασιν γνωστήν, οἱ δὲ τὸν ἄγνωστον ἔχοντες, ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος εἶναι κοινὸς παράγων αὐτῶν, θὰ ἀποτελέσωσι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν ὡρισμένον ἢ ἐπὶ παράστασίν τινα γνωστήν· ὅθεν ἡ ἐξίσωσις θὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\alpha . \chi = \beta$·
τῶν α καὶ β ὄντων ἢ ὡρισμένων ἀριθμῶν ἢ καὶ παραστάσεων γνωστῶν.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi = \beta$ εἶναι ἰσοδύναμος τῇ δοθείσῃ· διότι εὑρέθη ἐξ ἐκείνης διὰ πράξεων, αἵτινες τρέπουσιν ἐξίσωσιν οἱανδήποτε εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον. Ὥστε εἰς τὴν λύσιν τοιαύτης ἐξισώσεως ἀνάγεται ἡ λύσις πάσης ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ὑποθέτοντες νῦν τὸν πολλαπλασιαστὴν τοῦ ἀγνώστου, ἤτοι τὸν α, διάφορον τοῦ 0, καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi = \beta$ διὰ τοῦ α, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\chi = \frac{\beta}{\alpha}$, ἥτις ἀληθεύει προδήλως, μόνον ὅταν ὁ ἄγνωστος ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$· ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει τότε, καὶ τότε μόνον, ὅταν ὁ χ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$· ἐλύθη ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις.

Μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi = \beta$ ἐν τῇ μερικῇ περιπτώσει, καθ' ἣν εἶναι ὁ α ἴσος τῷ 0, ὅτε γίνεται $0\chi = \beta$, ἤτοι $0 = \beta$· ἀλλ' ἂν μὲν ὁ γνωστὸς ὅρος β εἶναι καὶ αὐτὸς ἴσος τῷ 0, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται $0 = 0$ καὶ ἀληθεύει οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ ἄγνωστος χ· διότι οὐδόλως ἐν αὐτῇ περιέχεται· ἀληθεύει ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, ὡς ἰσοδύναμος αὐτῇ, οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ γράμμα χ· ὥστε, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἡ πρὸς λύσιν δοθεῖσα ὡς ἐξίσωσις ἦτο ταὐτότης· ἂν δὲ ὁ ὅρος β διαφέρῃ τοῦ 0, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ὑπὸ οὐδεμιᾶς τιμῆς τοῦ χ ἐπαληθεύεται, ἤτοι εἶναι ἀδύνατος· διότι ἀληθευούσης τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, θὰ ἦτο ἀληθὴς καὶ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῇ $\beta = 0$.

107. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται, ὅτι τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ αἱ μὲν ἐπαληθεύονται ὑπὸ μιᾶς μόνης τιμῆς τοῦ ἀγνώστου, αἱ δὲ ὑπὸ οὐδεμιᾶς (αἱ δὲ ἐπαληθευόμεναι ὑπὸ τι-

μῶν περισσοτέρων τῆς μιᾶς εἶναι ταὐτότητες). Καὶ αἱ μὲν πρῶται, ὅταν ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμοσθῶσιν αἱ τέσσαρες πράξεις τοῦ ἐδ. 106, ἄγονται εἰς τὴν μορφὴν $αχ=β$, ἐν ᾗ ὁ πολλαπλασιαστὴς $α$ διαφέρει τοῦ 0· ἤτοι διαφυλάττουσι τὸν ἄγνωστον· αἱ δὲ δεύτεραι ἄγονται εἰς τὴν μορφὴν $0=β$· τουτέστιν ἐν αὐταῖς πάντες οἱ τὸν ἄγνωστον ἔχοντες ὅροι ἀφανίζονται, ἀναιροῦντες ἀλλήλους, ἀλλ' οὐχὶ καὶ οἱ γνωστοί. Ἐὰν δὲ ἡ πρὸς λύσιν δοθεῖσα ὡς ἐξίσωσις εἶναι ταὐτότης, ἄγεται διὰ τῶν εἰρημένων πράξεων εἰς τὴν μορφὴν $0=0$· τουτέστιν ἐν αὐτῇ καὶ οἱ τὸν ἄγνωστον ἔχοντες ὅροι ἀφανίζονται καὶ οἱ γνωστοὶ ὡσαύτως.

Παραδείγματα.

1) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\frac{2(χ+1)}{5}-3=\frac{χ-1}{8}$.

ἵνα ἀπαλλάξωμεν αὐτὴν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, πολλαπλασιάζομεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν 5.8, ὅτε

εὑρίσκομεν $5.8.\frac{2(χ+1)}{5}-3.5.8=5.8\frac{χ-1}{8}$·

ἢ ἁπλούστερον $16(χ+1)-3.5.8=5(χ-1)$·

ἐκτελοῦντες δὲ τὰς σεσημειωμένας πράξεις, εὑρίσκομεν

$$16χ+16-120=5χ-5·$$

χωρίζοντες δὲ τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν λοιπῶν, λαμβάνομεν

$$16χ-5χ=120-16-5·$$

τέλος, προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκομεν $11χ=99$,

ἐξ ἧς καὶ $χ=\frac{99}{11}=9$·

ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ $χ$ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 9. Ἐὰν τῳόντι ἀντικαταστήσωμεν τὸν $χ$ διὰ τοῦ 9 ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει, εὑρίσκομεν

$$\frac{2(9+1)}{5}-3=\frac{9-1}{8}.$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἀληθῆ ἰσότητα $1=1$.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{3(χ+5)}{7}-\frac{2}{3}=\frac{χ}{8}+\frac{2χ}{3}$.

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον 7.3.8, ἀπαλλάσσομεν τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν καὶ εὑρίσκομεν

$$3\ 8.3(χ+5)-7.8.2=7.3χ+7.8.2χ·$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σεσημειωμένων πράξεων

$$72\chi+360-112=21\chi+112\chi\cdot$$

καὶ μετὰ τὸν χωρισμὸν τῶν ὅρων, $360-112=21\chi+112\chi-72\chi$· καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων $248=61\chi$,

ἐξ ἧς καὶ $$\chi=\frac{248}{61}=4+\frac{4}{61}\cdot$$

ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\frac{248}{61}$, καὶ μόνος οὗτος, λύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $$\frac{7-\chi}{5}+\frac{1}{3}+\frac{\chi}{6}=\frac{2(\chi-1)}{3}+\frac{\chi}{2}\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν, ὅπερ εἶναι 2.5.3, εὑρίσκομεν

$$2.3(7-\chi)+2.5+5.\chi=2.5.2(\chi-1)+3.5\chi\cdot$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς σεσημειωμένας πράξεις

$$42-6\chi+10+5\chi=20\chi-20+15\chi\cdot$$

καὶ χωρίζοντες τοὺς ὅρους, $42+10+20=6\chi-5\chi+20\chi+15\chi$·

καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν $72=36\chi$,

ἐξ ἧς καὶ $$\chi=\frac{72}{36}=2.$$

4) Ἔστω $$\frac{2\chi}{3}+\frac{5\chi}{6}+4=\frac{3\chi}{2}+5\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ 2.3, εὑρίσκομεν

$$2.2\chi+5\chi+4.2.3=3.3\chi+2.3.5\cdot$$

καὶ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις $4\chi+5\chi+24=9\chi+30$·

καὶ χωρίζοντες τοὺς ὅρους $4\chi+5\chi-9\chi=30-24$·

καὶ προσθέτοντες εὑρίσκομεν $0=6$·

ὅθεν βλέπομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἤτοι ὑπὸ οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἐπαληθεύεται.

5) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $$\frac{\chi-1}{4}+\frac{\chi}{12}=\frac{\chi-2}{3}+\frac{5}{12}\cdot$$

ἐὰν ἐπὶ 3.4 πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους, εὑρίσκομεν

$$3(\chi-1)+\chi=4(\chi-2)+5\cdot$$

ὅθεν $3\chi-3+\chi=4\chi-8+5$·

καὶ $3\chi+\chi-4\chi=3-8+5$,

ἤτοι $0=0$·

ὥστε ἡ πρὸς λύσιν δοθεῖσα ὡς ἐξίσωσις ἦτο ταυτότης καὶ ἀληθεύει διὰ τοῦτο, οἱοσδήποτε ἀριθμὸς καὶ ἂν τεθῇ ἀντὶ τοῦ χ.

6) Ἔστω πρὸς τούτοις ἡ ἐγγράμματος ἐξίσωσις

$$\frac{2\chi-4\beta}{\alpha+\beta}+1=\frac{4\alpha-\chi}{\alpha-\beta}\cdot$$

ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν πάντας τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν $(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)$, εὑρίσκομεν

$$(\alpha-\beta).(2\chi-4\beta)+(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta).(4\alpha-\chi)\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν

$$2\alpha\chi-4\alpha\beta-2\beta\chi+4\beta^2+\alpha^2-\beta^2=4\alpha^2-\alpha\chi+4\alpha\beta-\beta\chi\cdot$$

χωρίζοντες δὲ τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν

$$2\alpha\chi-2\beta\chi+\alpha\chi+\beta\chi=4\alpha\beta-4\beta^2-\alpha^2+\beta^2+4\alpha^2+4\alpha\beta\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων, $3\alpha\chi-\beta\chi=3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$,

ἤτοι $\qquad (3\alpha-\beta)\chi=3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2.$

Ἐὰν νῦν ὁ πολλαπλασιαστὴς τοῦ χ, ἤτοι ἡ παράστασις $3\alpha-\beta$, διαφέρῃ τοῦ 0, διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ταύτης διὰ $3\alpha-\beta$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ

$$\chi=\frac{3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2}{3\alpha-\beta}=\alpha+3\beta.$$

Ἐὰν ὅμως εἶναι $3\alpha-\beta=0$, ἤτοι $3\alpha=\beta$, ἡ διὰ τοῦ $3\alpha-\beta$ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος καὶ ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $0=0$· ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καταντᾷ ταὐτότης· καὶ ὄντως, ὑποθέτοντες $\beta=3\alpha$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτήν, ὡς ἕπεται

$$\frac{2\chi-12}{4\alpha}+1=\frac{\chi-4\alpha}{2\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\chi}{2\alpha}-3+1=\frac{\chi}{2\alpha}-2\cdot$$

ἐξ οὗ φαίνεται ὅτι εἶναι ταὐτότης.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις.

1) $$\frac{3(5\chi-4)}{7}=\frac{\chi+13}{2}+\chi-5 \qquad (\chi=5).$$

2) $$\frac{(2\chi-1).(2\chi+1)}{4}+1=\chi^2+2\chi-\frac{1}{4} \qquad \left(\chi=\frac{1}{2}\right).$$

3) $$\frac{\chi}{\alpha-\beta}-\frac{\chi}{\alpha+\beta}=\frac{2}{\alpha^2-\beta^2} \qquad \left(\chi=\frac{1}{\beta}\right).$$

4) $$\frac{\chi-2\alpha}{\alpha-2\beta}=\frac{\chi-2\beta}{\beta-2\alpha} \qquad \left(\chi=\frac{4}{3}(\alpha+\beta)\right).$$

Ἐὰν $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ ταὐτότης.

Προβλήματα

ὧν ἡ λύσις ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως ἕνα ἄγνωστον περιεχούσης.

Πρόβλημα λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ εὑρεθῶσιν ἓν ἢ περισσότερα ἄγνωστα ἐκπληροῦντα ὡρισμένας ἀπαιτήσεις.

108. Ἐν παντὶ προβλήματι διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα· (γνωστὰ καὶ ἄγνωστα).

109. Ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς προβλήμασι καὶ τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα εἶναι πάντοτε ἀριθμοί· ἂν δὲ εἰς πρόβλημα περιέχωνται ποσά τινα, ταῦτα ὑποτίθενται μεμετρημένα, ἕκαστον διὰ τῆς μονάδος αὐτοῦ, καὶ δι' ἀριθμῶν ἐκπεφρασμένα.

110. Ὅροι τοῦ προβλήματος λέγονται αἱ ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας τὰ ζητούμενα πρέπει νὰ πληρῶσιν, ἵνα λύωσι τὸ πρόβλημα.

Αἱ κυριώτεραι τῶν ἀπαιτήσεων τούτων γίνονται γνωσταὶ ἐν αὐτῇ τῇ ἐκφωνήσει τοῦ προβλήματος καὶ ὁρίζουσι τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα· λέγονται δὲ αἱ τοιαῦται ἀπαιτήσεις ἐπιτάγματα.

Ἀλλὰ πλὴν τούτων, ὅταν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δὲν εἶναι ἀφῃρημένος, ἀλλὰ παριστᾷ ποσόν τι, ὁ ἀριθμὸς οὗτος, ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεως τοῦ παριστωμένου ποσοῦ καὶ ἀσχέτως πρὸς τὸ πρόβλημα, εἶναι συνήθως ὑποκείμενος εἰς δευτερεύοντάς τινας ὅρους τοὺς ὁποίους ὡσαύτως ὀφείλει νὰ πληροῖ· λέγονται δὲ οἱ τοιοῦτοι ὅροι περιορισμοί.

Οὕτως ἐν τῷ προβλήματι

εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ τριπλάσιον ὑπερβαίνει αὐτὸν κατὰ 9, ἐπιτάσσεται τοῦτο μόνον: νὰ εἶναι τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμόν, ὅταν οὗτος αὐξηθῇ κατὰ 9· ὥστε ἂν παρασταθῇ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς διὰ τοῦ χ, αἱ δύο παραστάσεις 3χ καὶ $\chi+9$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι. Ἀλλ' οὐδεὶς ὑπάρχει περιορισμός· διότι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ὡς ἀφῃρημένος, δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε (θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός).

Ἐν δὲ τῷ προβλήματι

πόσα τέκνα ἔχει πατήρ τις, ὅστις δίδων εἰς ἕκαστον 3 δραχμάς, δίδει 9 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τέκνων;

Ἐὰν διὰ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν τέκνων, ἐπιτάσσεται πάλιν νὰ εἶναι αἱ δύο παραστάσεις 3χ καὶ $\chi+9$ ἴσαι· διότι ἀμφότεραι ἐκφράζουσι τὸν ἀριθμὸν τῶν δοθεισῶν δραχμῶν· ὥστε ἡ τὸ ζητούμενον πρὸς τὰ δεδομένα συνδέουσα σχέσις εἶναι πάλιν ἡ αὐτή. Ἀλλ' ἵνα τὸ πρόβλημα τοῦτο λυθῇ ἐν τοῖς πράγμασιν, ἀπαιτεῖται νὰ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός· διότι τοιαύτη ἡ φύσις τοῦ παριστωμένου ποσοῦ· τοῦτο δὲ εἶναι περιορισμός.

Πρόδηλον δέ, ὅτι πάντα τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος παριστᾷ ποσὸν τῆς αὐτῆς φύσεως, ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς περιορισμούς.

Καὶ πάντες οἱ διὰ τῶν γραμμάτων παριστώμενοι ἀριθμοί, εἴτε γνωστοὶ ὑποτίθενται, εἴτε ἄγνωστοι, ὑπόκεινται συνήθως εἰς περιορισμούς, πηγάζοντας ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ποσοῦ, ὅπερ παριστῶσιν.

111. Ἡ λύσις παντὸς ἀλγεβρικοῦ προβλήματος συνίσταται ἐκ τῶν ἑξῆς τριῶν μερῶν.

α') Ἐκφράζομεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· καὶ τὰ μὲν ἐπιτάγματα, ἤτοι αἱ τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα συνδέουσαι σχέσεις, ἐκφράζονται δι' ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας οἱ ζητούμενοι, ἀριθμοὶ (οἱ ἄγνωστοι) πρέπει νὰ ἐπαληθεύωσιν, οἱ δὲ περιορισμοὶ ἀναγράφονται ἁπλῶς πλησίον τῶν ἐξισώσεων· ὥστε πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ.

β') Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις· οὕτως εὑρίσκομεν ἐκ πάντων τῶν ἀριθμῶν, τίς ἢ τίνες μόνον δύνανται νὰ λύσωσι τὸ πρόβλημα.

γ') Ἐρευνῶμεν, ἂν ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως πληροῖ καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ὅτε εἶναι πραγματικὴ λύσις.

Καὶ διὰ μὲν τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων ὑπάρχουσιν ὡρισμένοι κανόνες· ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ εὕρεσις τῶν περιορισμῶν καὶ ἡ διερεύνησις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων οὐδεμίαν συνήθως παρέχουσι δυσκολίαν· ἀλλὰ διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐξισώσεων οὐδεὶς δύναται νὰ δοθῇ ὡρισμένος κανών, ἕνεκα τῆς ἀπείρου ποικιλίας τῶν προβλημάτων· ἀπαιτεῖται πρὸς τοῦτο ἄσκησις καὶ δεξιότης τοῦ πνεύματος· εἰς πολλὰς περιστάσεις ὁδηγεῖ πρὸς τὴν εὕρεσιν τῆς ἐξισώσεως ὁ ἑπόμενος κανών.

Σημειοῦμεν διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν σημείων ἐπὶ τῶν γραμμάτων, δι' ὧν παρίστανται οἱ ἄγνωστοι, καὶ ἐπὶ τῶν δεδομένων (ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων) **τὰς πράξεις τὰς ὁποίας ἠθέλομεν ἐκτελέσει,** ἄν, δοθέντων τῶν ἀγνώστων, ἠθέλομεν νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν πληρῶνται οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος.

Ἕπονται προβλήματά τινα, ἐν οἷς ἐφαρμόζεται ὁ κανὼν οὗτος.

Προβλήματα

ὧν ὁ ἄγνωστος οὐδένα ἔχει περιορισμόν.

112. Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗτινος τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον προσλαβόντα καὶ τὸν 21 ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 73.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, τὸ ἥμισυ αὐτοῦ θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $\frac{\chi}{2}$ καὶ τὸ τρίτον διὰ τοῦ $\frac{\chi}{3}$ καὶ τὸ τέταρτον διὰ τοῦ $\frac{\chi}{4}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων καὶ τοῦ 21 θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ $\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}+21$. Τοῦτο δέ, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι ἴσον τῷ 73· ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}+21=73,$$

ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=48$.

113. Ἐὰν ἀριθμός τις αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 57· τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Ἐὰν παρασταθῇ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς διὰ τοῦ χ, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ χ^2· ἀλλ' ἂν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, γίνεται $\chi+1$ καὶ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ γίνεται $(\chi+1)^2$· διαφέρουσι δὲ τὰ τετράγωνα ταῦτα κατὰ 57· ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\chi+1)^2-\chi^2=57\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων $\quad 2\chi+1=57,$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\quad \chi=28.$

114. Εὑρεῖν ἀριθμόν, εἰς ὃν προστιθέμενοι οἱ 3, 5, 7, 10 συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παρασταθῇ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς καὶ προστεθῶσιν εἰς αὐτὸν οἱ δοθέντες, θὰ προκύψωσιν οἱ ἀριθμοὶ

$$\chi+3, \qquad \chi+5, \qquad \chi+7, \qquad \chi+10.$$

Ἐπειδὴ δὲ οὗτοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν, θὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, ὅθεν ἕπεται ἡ ἰσότης

$$(\chi+3).(\chi+10)=(\chi+5).(\chi+7)\cdot$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων $\quad 13\chi+30=12\chi+35,$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\quad \chi=5.$

Τῷ ὄντι δὲ οἱ ἀριθμοὶ 8, 10, 12, 15 συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

115. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{10}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{1}{2}$.

Παριστῶντες τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ καὶ προσθέτοντες αὐτὸν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{10}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3+\chi}{10+\chi}=\frac{1}{2}$ ἐξ ἧς καὶ $\chi=4$.

116. Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗτινος τὸ τρίτον καὶ τὸ ἕκτον ἀποτελοῦσι τὸ ἥμισυ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Παριστῶντες τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ χ, εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{6}=\frac{\chi}{2}$,

ἐξ ἧς, μετὰ τὰς πράξεις τοῦ ἐδαφίου 106, προκύπτει $0=0$· ὥστε πᾶς ἀριθμὸς πληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

117. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῇ μονάδι.

Ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ χ, θὰ εἶναι $\frac{3+\chi}{5+\chi}=1$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $0=2$· τουτέστιν οὐδεὶς τοιοῦτος ὑπάρχει ἀριθμὸς καὶ τὸ ζητούμενον εἶναι ἀδύνατον.

Προβλήματα

ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

118. Πεζὸς διανύων 5 στάδια καθ' ὥραν διώκεται ὑπὸ ἱππέως κινήσαντος 10 ὥρας μετ' αὐτὸν καὶ διανύοντος 9 στάδια καθ' ὥραν ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ· μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς θὰ φθάσῃ τὸν πεζόν;

Τοῦτο θὰ γίνῃ ὅταν, τὰ διανυσθέντα ὑπ' ἀμφοτέρων στάδια θὰ εἶναι ἴσα (διότι ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἀνεχώρησαν καὶ εἰς τὸν αὐτὸν τόπον θὰ φθάσωσι).

Ἔστω μετὰ χ ὥρας· ἐπειδὴ ὁ ἱππεὺς διανύει εἰς μίαν ὥραν 9 στάδια, εἰς χ ὥρας θὰ διανύσῃ 9χ στάδια· ἀλλὰ καὶ ὁ πεζὸς θὰ διανύσῃ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον 5χ στάδια (διότι καθ' ἑκάστην ὥραν διανύει 5 στάδια)· εἶχε δὲ καὶ πρὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ ἱππέως διανύσει 5.10

ἤτοι 50 στάδια. Ἐπειδὴ δὲ τὰ διανυσθέντα στάδια εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $5\chi+50=9\chi$·
πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=\frac{50}{4}=12\frac{1}{2}$ ὥρας.

ΣΗΜ. Τὴν λύσιν ταύτην εὑρίσκομεν καὶ ἀμέσως παρατηροῦντες, ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις τοῦ ἱππέως ἀπὸ τοῦ πεζοῦ, ἥτις εἶναι 50 στάδια, ἐλαττοῦται καθ' ἑκάστην ὥραν (ἀφ' οὗ ἀναχωρήσῃ ὁ ἱππεὺς) κατὰ 4 στάδια.

119. Ἐργάτης χρειάζεται 15 ὥρας, ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι· δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον 12 ὥρας καὶ τρίτος 20 ὥρας· εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον;

Ἔστω εἰς χ ὥρας· ἐπειδὴ ὁ πρῶτος χρειάζεται 15 ὥρας, ἵνα τελειώσῃ τὸ ἔργον, εἰς μίαν ὥραν ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{15}$ τοῦ ἔργου καὶ ἑπομένως εἰς χ ὥρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{\chi}{15}$ τοῦ ἔργου· ὁμοίως ὁ δεύτερος ἐκτελεῖ τὰ $\frac{\chi}{12}$ καὶ ὁ τρίτος τὰ $\frac{\chi}{20}$ τοῦ ἔργου. Τὰ τρία ταῦτα μέρη τοῦ ἔργου πρέπει νὰ ἀποτελῶσιν ὅλον τὸ ἔργον. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν τὸ ἔργον διὰ τῆς μονάδος 1, τὰ τρία αὐτοῦ μέρη θὰ παριστῶνται διὰ τῶν κλασμάτων $\frac{\chi}{15}$, $\frac{\chi}{12}$ καὶ $\frac{\chi}{20}$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{15}+\frac{\chi}{12}+\frac{\chi}{20}=1\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=5$.

Εἶναι δὲ ἡ λύσις αὕτη παραδεκτή· διότι πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

120. Κρήνη πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρας, δευτέρα τις κρήνη δύναται νὰ πληρώσῃ αὐτὴν εἰς 9 ὥρας καὶ τρίτη εἰς 12· ὅταν δὲ ῥέωσι πᾶσαι συγχρόνως ἐπὶ 4 ὥρας, ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται εἰσέτι 50 λίτρας, ἵνα πληρωθῇ ἐντελῶς. Πόσας λίτρας χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

Ἔστωσαν χ αἱ λίτραι, τὰς ὁποίας χωρεῖ ἡ δεξαμενή· αἱ χ αὗται λίτραι θὰ ἀποτελῶνται ἐκ τῶν λιτρῶν, τὰς ὁποίας χύνουσιν αἱ κρῆναι εἰς 4 ὥρας καὶ ἐκ τῶν 50.

Ἀλλ' ἐκ τῆς πρώτης κρήνης ῥέουσι χ λίτραι εἰς 7 ὥρας (διότι εἰς 7 ὥρας πληροῖ τὴν δεξαμενήν)· ὅθεν εἰς μίαν ὥραν ῥέουσι λίτραι

$\frac{\chi}{7}$ καὶ εἰς 4 ὥρας ῥέουσι λίτραι $\frac{4\chi}{7}$· ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἐκ τῶν ἄλλων δύο κρηνῶν ῥέουσιν εἰς 4 ὥρας λίτραι $\frac{4\chi}{9}$ καὶ $\frac{4\chi}{12}$ ἢ $\frac{\chi}{3}$.

Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{4\chi}{7}+\frac{4\chi}{9}+\frac{\chi}{3}+50=\chi$

καὶ τὸν περιορισμὸν $\chi=$θετικῷ ἀριθμῷ.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=-143\frac{2}{11}$· ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται· διότι δὲν πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

121. Πατήρ τις ἀφίνει εἰς τοὺς τέσσαρας υἱούς του κληρονομίαν 3530 δραχ. Διατάσσει δὲ ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ λάβῃ ὁ πρῶτος διπλάσια τοῦ δευτέρου πλὴν 2000 δραχμῶν, ὁ δεύτερος τριπλάσια τοῦ τρίτου πλὴν 3000 δραχμῶν, καὶ ὁ τρίτος τετραπλάσια τοῦ τετάρτου πλὴν 4000 δραχμῶν. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος;

Ἐν τῷ προβλήματι τούτῳ εἶναι μὲν τέσσαρα τὰ ἄγνωστα, τουτέστιν αἱ τέσσαρες μερίδες, ἀλλ' ἐκ τῆς μερίδος τοῦ τελευταίου υἱοῦ εὑρίσκονται εὐκόλως αἱ τῶν λοιπῶν, κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος. Διὰ τοῦτο παριστῶμεν τὴν μερίδα τοῦ τετάρτου διὰ τοῦ χ, τότε ἡ μερὶς τοῦ τρίτου θὰ εἶναι $4\chi-4000$·

ἡ τοῦ δευτέρου $3.(4\chi-4000)-3000$ ἢ $12\chi-15000$·

ἡ δὲ τοῦ πρώτου $2.(12\chi-15000)-2000$ ἤτοι $24\chi-32000$.

Ἐπειδὴ δὲ τῶν τεσσάρων υἱῶν αἱ μερίδες συναποτελοῦσι προδήλως τὴν ὅλην κληρονομίαν, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\chi+(4\chi-4000)+(12\chi-15000)+(24\chi-32000)=3530.$$

Ὁ ἄγνωστος χ πρέπει καὶ αὐτὸς νὰ εἶναι θετικὸς καὶ τὰς μερίδας πάσας νὰ καθιστᾷ θετικάς.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=1330$· ἐκ δὲ ταύτης προκύπτουσιν αἱ μερίδες κατὰ σειρὰν -80, 960, 1320, 1330.

Ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀπορριπτέα, ὡς μὴ πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ὥστε τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

122. Ποσόν τι δραχμῶν διενεμήθη μεταξὺ τεσσάρων ἀνθρώπων. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε τὸ ἥμισυ πλὴν 6· ὁ δὲ δεύτερος τὸ τρίτον τοῦ ὑπολοίπου πλὴν 2· ὁ δὲ τρίτος τὸ τέταρτον τοῦ ὑπολοίπου πλὴν 1 καὶ ὁ τέταρτος ἔλαβε τὰς ἐπιλοίπους 13 δραχμάς. Πόσαι ἦσαν αἱ δραχμαὶ καὶ πόσας ἔλαβεν ἕκαστος τῶν τριῶν πρώτων;

Ἐὰν παρασταθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν διὰ τοῦ χ, ὁ πρῶτος ἔλαβεν

$$\frac{1}{2}\chi-6,$$

ἔμεινε δὲ ὑπόλοιπον ἐκ δραχμῶν $\chi-\left(\frac{1}{2}\chi-6\right)$ ἢ $\frac{1}{2}\chi+6$·

ὁ δεύτερος ἔλαβεν $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\chi+6\right)-2$ ἤτοι $\frac{1}{6}\chi$·

ἀφαιρουμένης δὲ τῆς μερίδος ταύτης ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, μένει ὑπόλοιπον $\frac{1}{2}\chi+6-\frac{1}{6}\chi$ ἤτοι $\frac{1}{3}\chi+6$·

ὁ τρίτος ἔλαβεν $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\chi+6\right)-1$ ἤτοι $\frac{1}{12}\chi+\frac{1}{2}$·

ἀφαιρουμένης δὲ τῆς μερίδος τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, μένει ὑπόλοιπον $\frac{1}{3}\chi+6-\left(\frac{1}{12}\chi+\frac{1}{2}\right)$ ἤτοι $\frac{1}{4}\chi+\frac{11}{2}$·

τοῦτο εἶναι τὸ μερίδιον τοῦ τετάρτου· ὅθεν εἶναι $\frac{1}{4}\chi+\frac{11}{2}=13$.

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ ὁ χ θετικὸς καὶ νὰ καθιστᾷ καὶ τὰς μερίδας πάσας θετικάς.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=30$· καὶ ἐκ τούτου τὰς μερίδας τῶν τεσσάρων ἀνθρώπων 9, 5, 3, 13· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

123. Δύο ἁτμάμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων ἀπεχουσῶν 280 στάδια ἀπ᾽ ἀλλήλων καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς μεταξὺ τῶν πόλεων ὁδοῦ. Ἡ πρώτη διατρέχει καθ᾽ ὥραν 45 στάδια, ἡ δὲ δευτέρα 30. Μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς πρώτης πόλεως θὰ συναντηθῶσιν;

Εὑρεθέντος τοῦ πρώτου, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ δεύτερον. Ἔστω λοιπὸν ἡ συνάντησις μετὰ χ ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τῶν ἁτμαμαξῶν. Ἡ μὲν πρώτη, ἐπειδὴ καθ᾽ ὥραν διατρέχει 45 στάδια, θὰ διατρέξῃ κατὰ τὰς χ ὥρας 45χ στάδια· ἡ δὲ δευτέρα θὰ διατρέξῃ 30χ στάδια. Ἀποτελοῦσι δὲ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως τὰ διανυσθέντα διαστήματα προφανῶς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο πόλεων· ὥστε εἶναι

$$45\chi+30\chi=280\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν λύοντες $\chi=3^{\text{ὣρ.}}\ 44'$,
ἥτις λύσις πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

ΣΗΜ. Τὴν λύσιν εὑρίσκει τις καὶ ἄνευ ἐξισώσεως παρατηρῶν, ὅτι ἡ ἀρχικὴ ἀπόστασις τῶν ἁτμαμαξῶν ἐλαττοῦται καθ' ἑκάστην ὥραν κατὰ τὰ ὑπ' αὐτῶν διανυόμενα 75 στάδια.

124. Κύριος συνεφώνησεν ὑπηρέτην 230 δραχμὰς κατ' ἔτος καὶ μίαν ἐνδυμασίαν· ἀποπέμψας δὲ αὐτὸν μετὰ 10 μῆνας, ἔδωκεν εἰς αὐτὸν 180 δραχμὰς καὶ τὴν ἐνδυμασίαν. Πόσον τιμᾶται ἡ ἐνδυμασία;

Ἔστω χ ἡ ἀξία τῆς ἐνδυμασίας. Ὁ ἐτήσιος μισθὸς τοῦ ὑπηρέτου σύγκειται ἐκ τῆς ἐνδυμασίας καὶ ἐκ τῶν 230 δραχμῶν ἤτοι εἶναι $230+\chi$· ἑπομένως ὁ μηνιαῖος εἶναι $\frac{230+\chi}{12}$· καὶ διὰ 10 μῆνας ἔπρεπε νὰ λάβῃ $\frac{10}{12}(230+\chi)$ ἢ $\frac{5}{6}(230+\chi)$· ἔλαβε δὲ $180+\chi$· ὥστε εἶναι

$$\frac{5}{6}(230+\chi)=180+\chi.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=70$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

125. Θέλει τις μὲ 55 δραχμὰς νὰ ἀγοράσῃ 12 πήχεις ἐκ δύο ὑφασμάτων· καὶ τοῦ μὲν ἑνὸς τιμᾶται ὁ πῆχυς 5 δραχμάς, τοῦ δὲ ἄλλου 3. Πόσους πήχεις θὰ ἀγοράσῃ ἐκ τοῦ πρώτου ὑφάσματος καὶ πόσους ἐκ τοῦ δευτέρου;

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τοὺς πήχεις τοῦ πρώτου, οἱ τοῦ δευτέρου θὰ εἶναι $12-\chi$.

Ἐπειδὴ εἷς πῆχυς τοῦ πρώτου ἀξίζει 5 δραχμάς, οἱ χ πήχεις ἀξίζουν 5χ δραχμάς.

Ἐπειδὴ εἷς πῆχυς τοῦ δευτέρου ἀξίζει 3 δραχμάς, οἱ $12-\chi$ πήχεις ἀξίζουν $3.(12-\chi)$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὁλικὴ ἀξία τῶν πήχεων εἶναι 55 δραχμαί, συνάγεται ἡ ἐξίσωσις $5\chi+3(12-\chi)=55$·
πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ τῶν πήχεων νὰ εἶναι ἀμφότεροι θετικοί.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=9\frac{1}{2}$ καὶ $12-\chi=2\frac{1}{2}$·
ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτή, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

126. Εἰς 32 λίτρας θαλασσίου ὕδατος περιέχεται 1 λίτρα ἅλατος. Πόσον γλυκὺ ὕδωρ πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς αὐτό, ἵνα τεσσαράκοντα λίτραι τοῦ κράματος περιέχωσιν $\frac{1}{5}$ τῆς λίτρας ἅλατος;

Ἂς προστεθῶσι χ λίτραι γλυκέος ὕδατος· τότε τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ λίτρας $\chi+32$. Ἐπειδὴ αἱ 40 λίτραι τοῦ κράματος περιέχουσιν $\frac{1}{5}$ τῆς λίτρας ἅλατος, ἡ μία λίτρα τοῦ κράματος θὰ περιέχῃ ἅλατος $\frac{1}{200}$ τῆς λίτρας, καὶ τὸ ὅλον κρᾶμα ἤτοι αἱ $32+\chi$ λίτραι, θὰ περιέχωσιν ἅλατος λίτρας $\frac{32+\chi}{200}$· ἀλλὰ τὸ ἐν τῷ κράματι ὑπάρχον ἅλας εἶναι μία λίτρα· ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{32+\chi}{200}=1$·

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=168$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

127. Εἶπέ τις: ἐὰν μοὶ τριπλασιάσῃ τις ὅσα ἔχω, δίδω εἰς αὐτὸν 27 δραχμάς· ἐξεπληρώθη ἡ αἴτησίς του τρὶς καὶ ἔχασε πάντα ὅσα εἶχε. Πόσα εἶχεν;

Ἔστωσαν χ αἱ δραχμαί, τὰς ὁποίας εἶχεν ἐν ἀρχῇ· τὸ ποσὸν τοῦτο ἐτριπλασιάσθη ἤτοι ἔγινε 3χ καὶ ἐξ αὐτοῦ ἔδωκεν 27 δραχμάς. Λοιπὸν τῷ ἔμειναν δραχμαὶ $3\chi-27$· ἔπειτα πάλιν ἐτριπλασιάσθη τὸ ποσὸν τοῦτο καὶ ἐκ τοῦ τριπλασιασθέντος ἔδωκεν 27 δραχμάς· ὥστε τῷ ἔμειναν

$$3(3\chi-27)-27 \quad \text{ἢ} \quad 9\chi-108.$$

Ὁμοίως μετὰ τὸν τρίτον τριπλασιασμὸν καὶ τὴν πληρωμὴν τῶν 27 δραχμῶν, τῷ ἔμειναν $27\chi-351$· ἐπειδὴ δὲ ἔχασεν ὅλα ὅσα εἶχε, θὰ εἶναι

$$27\chi-351=0·$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=13$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα

ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

128. Δώδεκα ἄτομα (ἄνδρες καὶ γυναῖκες) ἐδαπάνησαν ὁμοῦ διὰ τὸ δεῖπνον 55 δραχμάς· καὶ τῶν μὲν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε 5 δραχμάς, τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστη 3. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Εὑρεθέντος τοῦ πλήθους τῶν ἀνδρῶν, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ τὸ πλῆθος τῶν γυναικῶν. Ἔστω λοιπὸν χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, τότε ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $12-\chi$.

Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 5 δραχμάς, οἱ χ ἄνδρες ἐπλήρωσαν δραχμὰς 5χ.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γυναικῶν ἐπλήρωσε 3 δραχμάς, αἱ $(12-\chi)$ γυναῖκες ἐπλήρωσαν $3(12-\chi)$.

Καὶ ἐπειδὴ ἡ ὅλη δαπάνη τοῦ δείπνου εἶναι 55 δραχμαί, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$5\chi+3(12-\chi)=55\cdot$$

πρέπει δὲ καὶ ὁ τῶν ἀνδρῶν καὶ ὁ τῶν γυναικῶν ἀριθμὸς νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=9\frac{1}{2}$ καὶ $12-\chi=2\frac{1}{2}\cdot$ ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

129. Ἐρωτηθείς τις, πόσα τέκνα ἔχει, ἀπεκρίθη: ἀγοράσας μῆλα ἠθέλησα νὰ δώσω 7 εἰς ἕκαστον τέκνον μου, ἀλλὰ μοῦ ἔλειψαν 4· τότε ἔδωκα 4 μῆλα εἰς ἕκαστον καὶ μοῦ ἐπερίσσευσαν 3. Πόσα τέκνα εἶχεν ὁ ἄνθρωπος οὗτος;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν τέκνων· κατὰ τὴν πρώτην διανομὴν ἦσαν τὰ μῆλα $7\chi-4$· κατὰ δὲ τὴν δευτέραν $4\chi+3$· καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων ἦτο ὁ αὐτὸς κατ' ἀμφοτέρας τὰς διανομάς, ἕπεται

$$7\chi-4=4\chi+3\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης προκύπτουσα λύσις $\chi=2\frac{1}{3}$ ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

130. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις εἴτε διὰ 7 εἴτε διὰ 9 διαιρεθῇ, νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ δύο πηλίκα νὰ διαφέρωσι κατὰ 4.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἐπειδὴ διαιρούμενος διὰ τοῦ 7 ἢ διὰ τοῦ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3, ἕπεται ὅτι κατὰ 3 ἐλαττούμενος διαιρεῖται ἀκριβῶς καὶ ὑπὸ τοῦ 7 καὶ ὑπὸ τοῦ 9· καὶ τὰ πηλίκα εἶναι $\frac{\chi-3}{7}$ καὶ $\frac{\chi-3}{9}$. Ἐπειδὴ δὲ ταῦτα διαφέρουσι κατὰ 4, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi-3}{7}-\frac{\chi-3}{9}=4\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=129$· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Προβλήματα

ἐν οἷς ὁ ἄγνωστος ἀνάγκη νὰ περιέχηται μεταξὺ ὁρίων τινῶν.

131. Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{5}$ ἔργου τινὸς ἐργαζόμενοι 4 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐπὶ 9 ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν 15 ἐργάται, ἵνα ἀποπερατώσωσι τὸ ἔργον εἰς 3 ἡμέρας;

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν. Ἐπειδὴ ἕκαστος τῶν 15 ἐργατῶν θὰ ἐργάζηται χ ὥρας τὴν ἡμέραν, εἰς τρεῖς ἡμέρας θὰ ἐργασθῇ 3χ ὥρας· χρειάζονται λοιπὸν οἱ 15 ἐργάται διὰ τὰ μένοντα $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου 3χ ὥρας· ἐπομένως εἷς μόνος ἐργάτης θὰ χρειασθῇ διὰ τὰ αὐτὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου δεκαπενταπλάσιον χρόνον ἤτοι 15.3χ.

Ἀφ' ἑτέρου οἱ 8 ἐργάται διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου χρειάζονται ὥρας 4.9· ἐπομένως εἷς μόνος χρειάζεται $\left(\text{διὰ τὸ } \frac{1}{5}\right)$ 4.9.8 ὥρας καὶ διὰ τὰ $\frac{4}{5}$ χρειάζεται ὥρας 4.9.8.4. Ἐξισοῦντες δὲ τὰς ὥρας, τὰς ὁποίας χρειάζεται εἷς ἐργάτης διὰ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου, εὑρίσκομεν

$$15.3\chi = 4.9.8.4\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸν 24· διότι τοιοῦτον εἶναι φύσει τὸ ζητούμενον.

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi = 25\frac{3}{5}$ ἐπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ὥστε τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον νὰ πραγματωθῇ.

132. Αἱ ἡλικίαι δύο ἀνθρώπων εἶναι τοῦ μὲν 50, τοῦ δὲ 60 ἔτη. Ζητεῖται πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι ἡ ἧτο πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου ὡς ὁ 40 πρὸς τὸν 41.

Αἱ παραστάσεις 50+χ καὶ 60+χ ἐκφράζουσι τὰς ἡλικίας τῶν ἀνθρώπων μετὰ παρέλευσιν χ ἐτῶν· ἀλλ' αἱ αὐταὶ παραστάσεις ἐκφράζουσι καὶ τὰς ἡλικίας αὐτῶν πρὸ χ ἐτῶν, ἂν τὰ παρελθόντα ἔτη σημαίνωνται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{50+\chi}{60+\chi} = \frac{40}{41}\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς $50+\chi$, ὡς ἀριθμὸς ἡλικίας, νὰ εἶναι θετικὸς καὶ ὁ $60+\chi$ (ἡ μεγαλητέρα ἡλικία) νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου. (Ἐκ τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν, ὅτι οἱ περιορισμοὶ ἐνίοτε δὲν δύνανται νὰ ἐκφρασθῶσιν ἀκριβῶς).

Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=350$· ἀλλὰ μετὰ παρέλευσιν 350 ἐτῶν οὐδέτερος τῶν ἀνθρώπων θὰ ζῇ· ὥστε ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀπορριπτέα καὶ τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

133. Πατήρ τις εἶναι 37 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 9· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο ἢ θὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ;

Παριστῶντες διὰ τοῦ χ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν τῶν ἐτῶν (θετικὸν μέν, ἂν τὰ ἔτη εἶναι τοῦ μέλλοντος χρόνου, ἀρνητικὸν δέ, ἂν τοῦ παρελθόντος) εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν·

$$37+\chi=2(9+\chi)\cdot$$

οἱ δὲ περιορισμοὶ εἶναι ὅμοιοι τοῖς τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λυομένη δίδει $\chi=19$· ἡ δὲ λύσις αὕτη εἶναι παραδεκτὴ ὡς πληροῦσα τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

134. Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 56 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλήτερον διὰ τοῦ μικροτέρου διαιρεθὲν νὰ παρέχῃ πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2.

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ μικρότερον τῶν μερῶν, τὸ μεγαλήτερον θὰ εἶναι $56-\chi$· ἐπειδὴ δὲ τοῦτο διαιρούμενον διὰ τοῦ χ ἀφίνει ὑπόλοιπον 2, ἕπεται, ὅτι κατὰ 2 ἐλαττωθὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπὸ τοῦ χ καὶ παρέχει πηλίκον 5· τουτέστι

$$\frac{54-\chi}{\chi}=5\cdot$$

πρέπει δὲ ἀμφότερα τὰ μέρη νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=9$· ὅθεν τὰ ζητούμενα μέρη τοῦ 56 εἶναι 9 καὶ 47· ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

135. Νὰ μερισθῇ ὁ 51 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τρίτον τοῦ πρώτου καὶ τὸ πέμπτον τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελῶσι τὸν 21.

Ἔστω χ τὸ πρῶτον μέρος· τότε τὸ δεύτερον θὰ εἶναι $51-\chi$· εἶναι δέ, ὡς δηλοῖ ἡ ἐκφώνησις τοῦ προβλήματος,

$$\frac{\chi}{3}+\frac{51-\chi}{5}=21\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τοῦ 51.

Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=81$· ἑπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, ὡς μὴ πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

136. Εἰς τὰ 9 τέκνα του ἔδωκεν ἄνθρωπός τις 53 δραχμάς· καὶ ἕκαστον μὲν κοράσιον ἔλαβε 5 δραχμάς, ἕκαστος δὲ υἱὸς 3· πόσοι ἦσαν οἱ υἱοὶ καὶ πόσα τὰ κοράσια;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν κορασίων, ὁ ἀριθμὸς τῶν υἱῶν θὰ εἶναι $9-\chi$.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστον κοράσιον ἔλαβε 5 δραχμάς, τὰ χ κοράσια ἔλαβον 5χ δραχμάς.

Καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος υἱὸς ἔλαβε 3 δραχμάς, οἱ $9-\chi$ υἱοὶ ἔλαβον $3(9-\chi)$ δραχμάς.

Ἀλλ' ὅλα ὁμοῦ τὰ τέκνα ἔλαβον 53 δραχμάς· ὅθεν συνάγεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$5\chi+3(9-\chi)=53\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς χ νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 9.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=13$· ἡ δὲ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται ὡς μὴ πληροῦσα τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος· τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον· (τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τούτου, ὅτι, καὶ ἂν ἦσαν κοράσια ὅλα τὰ τέκνα, πάλιν θὰ ἐλάμβανον μόνον 45 δραχμὰς καὶ ὄχι 53).

137. Δύο πίθοι περιέχουσιν, ὁ μὲν 400 ὀκάδας οἴνου, ὁ δὲ 280· ἐὰν ἀνοιχθῶσιν αἱ στρόφιγγες αὐτῶν, ἐκρέουσιν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 9 ὀκάδες τὴν ὥραν, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 7. Ζητεῖται, ἂν ἀνοιχθῶσι συγχρόνως ἀμφότεραι αἱ στρόφιγγες, μετὰ πόσας ὥρας θὰ ὑπολειφθῶσιν ἐν τοῖς πίθοις ἴσα ποσὰ οἴνου;

Ἔστω μετὰ χ ὥρας· τότε θὰ περιέχωνται ἐν μὲν τῷ πρώτῳ $400-9\chi$· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ $280-7\chi$· ὥστε θὰ εἶναι

$$400-9\chi=280-7\chi\cdot$$

πρέπει δὲ ὁ ἀριθμὸς χ νὰ εἶναι θετικὸς καὶ νὰ καθιστᾷ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά· διότι μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶν χ ὡρῶν πρέπει νὰ μένῃ πράγματι οἶνος ἐν τοῖς πίθοις.

Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=60$· ἀλλὰ μετὰ 60 ὥρας οὐδέτερος τῶν πίθων περιέχει οἶνον· διότι ὁ μὲν πρῶτος κενοῦται εἰς $\frac{400}{9}$ ὥρας, ὁ δὲ δεύτερος εἰς 40· ἑπομένως ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται καὶ τὸ προτεινόμενον δὲν δύναται νὰ πραγματωθῇ.

138. Δύο ἄνθρωποι ἔχουσιν, ὁ μὲν 100, ὁ δὲ 50 δραχμάς· δαπανῶσι δὲ καθ' ἑκάστην, ὁ μὲν πρῶτος 3 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 2· μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχωσιν ἴσας δραχμάς;

Ἔστω μετὰ χ ἡμέρας· τότε ὁ μὲν πρῶτος θὰ ἔχῃ $100-3\chi$, ὁ δὲ δεύτερος $50-2\chi$ καὶ θὰ εἶναι $$100-3\chi=50-2\chi\cdot$$
πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ καθιστᾷ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά· διότι μετὰ τὴν παρέλευσιν τῶν χ ἡμερῶν πρέπει νὰ ἔχωσιν ἀμφότεροι ποσόν τι δραχμῶν.
Ἡ ἐξίσωσις λυομένη δίδει $\chi=50$· ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται· διότι οὐδέτερος τῶν ἀνθρώπων ἔχει τι μετὰ 34 ἡμέρας· ὥστε τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον ἐν τοῖς πράγμασιν.

Παρατήρησις.

139. Ἐκ τῶν προηγουμένων γίνεται καταφανές, ὅτι ἡ ἐξίσωσις μόνη δὲν ἐξαρκεῖ συνήθως εἰς τὴν πιστὴν καὶ τελείαν ἀλγεβρικὴν ἔκφρασιν τοῦ προβλήματος· ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ ἐπιβάλλωνται ἐπὶ τοῦ ἀγνώστου καὶ περιορισμοί τινες ἤτοι ὅροι ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ἀγνώστου ποσοῦ πηγάζοντες καὶ ὅλως ἄσχετοι ὄντες πρὸς τὴν διὰ τῆς ἐξισώσεως ἐκφραζομένην σχέσιν τῶν γνωστῶν πρὸς τὸν ἄγνωστον. Καὶ πάντα τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ἡ σχέσις τοῦ γνωστοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον εἶναι ἡ αὐτή, ἄγουσιν εἰς τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, οἱαςδήποτε φύσεως ποσὰ καὶ ἂν περιέχωσι (τοιαῦτα λ. χ. εἶναι τὰ προβλήματα τῶν ἐδαφίων 125 καὶ 128), δύνανται ὅμως νὰ διαφέρωσι κατὰ τοὺς περιορισμούς. Πόσον δὲ σπουδαίως ἐπιδρῶσιν οἱ περιορισμοὶ εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος, ἐμάθομεν ἐκ τῶν λυθέντων προβλημάτων.

Πολλάκις εἶναι δυνατὸν δι' ἐλαφρᾶς τινος μεταβολῆς ἢ γενικεύσεως τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος νὰ ἄρωμεν τοὺς περιορισμοὺς ἢ νὰ καταστήσωμεν αὐτοὺς ὀλιγώτερον στενούς, ὥστε ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρισκομένη λύσις νὰ εἶναι ἐφαρμοστή. Οὕτως, ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι, ἂν παραδεχθῶμεν ἐξ ἀρχῆς, ὅτι τὸ ποσὸν τῶν δραχμῶν, ἃς θὰ ἔχωσιν οἱ ἄνθρωποι, δύναται καὶ ἀρνητικὸν νὰ εἶναι ἤτοι ἀντὶ περιουσίας νὰ ἔχωσιν ἴσον χρέος, ὁ περιορισμὸς ἐπὶ τοῦ ἀγνώστου αἴρεται καὶ ἡ εὑρισκομένη λύσις εἶναι ἐφαρμοστή. Ὁμοίως ἐν τοῖς προβλήμασι τῶν ἐδαφίων 132 καὶ 133 παρεδέχθημεν ἐξ ἀρχῆς, ὅτι τὸ προτεινόμενον δύναται νὰ γίνῃ ἢ εἰς τὸ παρελθὸν ἢ εἰς τὸ μέλλον. Αἱ γενικεύσεις αὗται τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος δέον εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς νὰ γίνωνται, πρὸ τῆς συντάξεως τῆς ἐξισώσεως, οὐχὶ δὲ νὰ λύωμεν πρῶτον τὴν ἐξίσωσιν καὶ ἔπειτα νὰ ζητῶμεν τὴν σημασίαν τῆς τοιαύτης ἢ τοιαύτης τιμῆς τοῦ ἀγνώστου· διότι ὁ ἄγνωστος δὲν δύναται βεβαίως διὰ τῶν ἐπ' αὐτοῦ ἐκτελεσθεισῶν πράξεων νὰ ἀποκτήσῃ ποτὲ σημασίαν, τὴν ὁποίαν ἡμεῖς ἐξ ἀρχῆς δὲν ἐδώκαμεν εἰς αὐτόν.

Προβλήματα γενικά.

140. Ὅταν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι ἀριθμοί, ἐπὶ τοῦ εὑρεθέντος ἀγνώστου ἀριθμοῦ οὐδὲν ἴχνος τῶν πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ γενομένων πράξεων σῴζεται. Ἀλλ' ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ, ἐπειδὴ οἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν γινόμενοι συλλογισμοὶ εἶναι ἀδιάφοροι πρὸς τὸ μέγεθος τῶν ἀριθμῶν καὶ πρὸς τὸ εἶδος αὐτῶν (ὡς στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν γενικῶν σχέσεων τῶν ἀριθμῶν), δύναται ἕκαστος τῶν δοθέντων ἀριθμῶν νὰ παριστᾶται δι' ἑνὸς γράμματος καὶ τότε τὰ γράμματα ταῦτα διασῴζονται μέχρι τέλους ἐν τῇ λύσει καὶ εὑρίσκονται ἐπ' αὐτῶν σεσημειωμέναι αἱ πράξεις, αἵτινες πρέπει νὰ ἐκτελεσθῶσιν ἐπ' αὐτῶν, ἵνα εὑρεθῇ ἐξ αὐτῶν ὁ ἄγνωστος. Τοῦτο δὲ καὶ τὴν ἐξάρτησιν τοῦ ἀγνώστου ἀπὸ τῶν γνωστῶν σαφεστέραν ποιεῖ καὶ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος καθιστᾷ γενικήν, δηλαδὴ ἁρμόζουσαν εἰς πάντα τὰ προβλήματα, ὅσα μόνον κατὰ τὸ μέγεθος (ἢ καὶ τὸ εἶδος) τῶν δεδομένων ἀριθμῶν διαφέρουσι.

Πρόβλημα, οὗτινος τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων, λέγεται *γενικόν*.

141. Ἡ ἐκ τῆς λύσεως γενικοῦ προβλήματος προκύπτουσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστου περιέχει ἐν γένει τὰ γράμματα, δι' ὧν παρίστανται τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος· ὥστε εἶναι ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ τύπος· κατὰ τὰς διαφόρους δὲ τιμὰς τῶν γραμμάτων τούτων ἢ κατὰ τὰς διαφόρους ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας κάμνομεν περὶ αὐτῶν, δύναται τὸ πρόβλημα νὰ καθιστᾶται δυνατὸν ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον. Ἡ ἔρευνα τῶν διαφόρων τούτων περιπτώσεων λέγεται *διερεύνησις* τοῦ γενικοῦ προβλήματος.

Παραδείγματα τοιούτων προβλημάτων καὶ τῆς διερευνήσεως αὐτῶν ἔστωσαν τὰ ἑπόμενα.

1ον

142. *Πατήρ τις εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β· πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ πότε ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;*

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι (παράβλ. ἐδ. 133)

$$\alpha+\chi=2(\beta+\chi).$$

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β καὶ $\beta+\chi$, ὡς ἀριθμοὶ ἡλικίας, πρέπει νὰ εἶναι θετικοί· νὰ εἶναι δὲ καὶ $\alpha>\beta$· μηδὲ πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τις ἐξ αὐτῶν τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου

$$\chi=\alpha-2\beta.$$

Διερεύνησις. Ἂν εἶναι $\alpha < 2\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητική· τουτέστι τὸ προτεινόμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν· εἶναι δὲ παραδεκτὴ ἡ λύσις αὕτη· διότι αἱ ἡλικίαι ἦσαν τότε

$$\alpha+(\alpha-2\beta) \quad \text{καὶ} \quad \beta+(\alpha-2\beta),$$

ἤτοι $2(\alpha-\beta)$ καὶ $\alpha-\beta$ καὶ εἶναι ἀμφότεραι θετικαί.

Ἂν δὲ εἶναι $\alpha > 2\beta$, ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετική· τουτέστι τὸ προτεινόμενον θὰ γίνῃ εἰς τὸ μέλλον, ὅταν ὁ μὲν πατὴρ θὰ εἶναι $2(\alpha-\beta)$ ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς $\alpha-\beta$· εἶναι δὲ παραδεκτὴ ἡ λύσις αὕτη, ἐὰν ἡ μεγαλητέρα ἡλικία $2(\alpha-\beta)$ δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

2ον

143. Ἐργάτης χρειάζεται α ὥρας, ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι, δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται β ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ τρίτος γ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσωσι τὸ ἔργον;

Περιορισμοί. Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ὡς καὶ ὁ χ, πρέπει νὰ εἶναι πάντες θετικοί.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι (παράβλ. ἐδ. 119)

$$\frac{\chi}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}+\frac{\chi}{\gamma}=1\cdot$$

καὶ λύοντες εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}\cdot$

εἶναι δὲ ἡ λύσις αὕτη παραδεκτή.

3ον

144. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ᾿ ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ κλάσματι $\frac{\gamma}{\delta}\cdot$

Περιορισμοί. Οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ τῶν δοθέντων κλασμάτων πρέπει νὰ διαφέρωσι τοῦ 0.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot$$

ἐξ ἧς ἕπεται, ἂν ὑποθέσωμεν τὸν ἀριθμὸν $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0,

$$\chi(\gamma-\delta)=\beta\gamma-\alpha\delta. \qquad (1)$$

Ὅθεν, ὑποθέτοντες τὴν διαφορὰν $\gamma-\delta$ διάφορον τοῦ μηδενός, τουτέστι τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ διάφορον τῆς μονάδος 1, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma-\delta}\cdot \qquad (2)$$

Διερεύνησις. Πλὴν τῶν δύο περιπτώσεων, τὰς ὁποίας ἐξῃρέσαμεν, ἵνα φθάσωμεν εἰς τὴν λύσιν ταύτην, εἰς πάσας τὰς λοιπὰς ἡ λύσις εἶναι παραδεκτή.

Ἐὰν εἶναι $\gamma = \delta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0 = \gamma(\beta - \alpha)$ καὶ τὸ προτεινόμενον εἶναι ἑπομένως ἀδύνατον, ἂν δὲν εἶναι καὶ $\alpha = \beta$· ἐὰν δὲ καὶ τοῦτο συμβαίνῃ, ἡ ἐξίσωσις (1) καταντᾷ $0 = 0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ζητούμενον.

Ἐάν ποτε ὁ τύπος (2) δώσῃ $\chi = \beta$, ἡ λύσις αὕτη πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ· διότι $\beta - \chi$ ὑπετέθη (ἵνα ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταὶ) διάφορον τοῦ 0· τοῦτο συμβαίνει, ὅταν εἶναι $\alpha = \beta$· τουτέστιν, ὅταν τὸ δοθὲν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἴσον τῇ μονάδι 1· καὶ ὄντως τότε ὁ τύπος γίνεται

$$\chi = \frac{\beta(\gamma - \delta)}{\gamma - \delta} = \beta\cdot$$

ὅτι δὲ τότε τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον, βλέπει τις εὐκόλως.

4ον

145. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ ἀντιστρόφῳ αὐτοῦ.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι $\frac{\alpha - \chi}{\beta - \chi} = \frac{\beta}{\alpha}$.

Περιορισμός. Ὁ β πρέπει νὰ διαφέρῃ τοῦ 0, ὁμοίως καὶ ὁ α.

Ὅθεν, ὑποθέτοντες τὸν παρονομαστὴν $\beta - \chi$ διάφορον τοῦ 0, ἤτοι χ διάφορον τοῦ β, εὑρίσκομεν $(\alpha - \beta)\chi = \alpha^2 - \beta^2$. (1)

Καὶ ἂν $\alpha - \beta$ διαφέρῃ τοῦ 0, τουτέστιν, ἂν τὸ δοθὲν κλάσμα διαφέρῃ τῆς μονάδος 1, ἔχομεν $\chi = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta}$

ἤτοι $\chi = \alpha + \beta$. (2)

Διερεύνησις. Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν. Καὶ ἂν μὲν εἶναι $\alpha = \beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0 = 0$· ὅθεν πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ἐπιταχθὲν καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον. Ἡ δὲ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi = \beta$ τότε μόνον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2), ὅταν $\alpha = 0$, ὅτε προδήλως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

5ον

146. Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ.

Λύσεις

Περιορισμός. Ὁ παρονομαστὴς β διαφέρει τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{\alpha-\chi}{\beta-\chi}=\frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

ὅθεν ὑποθέτοντες $\beta-\chi$ διάφορον τοῦ 0, εὑρίσκομεν

$$(\alpha^2-\beta^2)\chi=\alpha\beta(\alpha-\beta). \tag{1}$$

Καὶ ἂν $\alpha^2-\beta^2$ διαφέρῃ τοῦ 0, ἕπεται ἡ τιμὴ τοῦ χ

$$\chi=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \tag{2}$$

Διερεύνησις. Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν, πλὴν τῶν δύο ἐξαιρεθεισῶν.

Ἂν εἶναι $\alpha^2=\beta^2$, θὰ εἶναι ἢ $\alpha=\beta$ ἢ $\alpha=-\beta$· διότι καὶ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι ἴσα· καὶ ἂν μὲν εἶναι $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀόριστον ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ ἐπιταχθέν· ἂν δὲ εἶναι $\alpha=-\beta$, ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις γίνεται $0=2\beta^3$ καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ ἐξαιρεθεῖσα λύσις $\chi=\beta$ οὐδέποτε δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (2)· διότι, ἂν ἦτο $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\beta$, θὰ ἦτο καὶ $\alpha\beta=\alpha\beta+\beta^2$· ὅθεν καὶ $\beta^2=0$ ἤτοι $\beta=0$· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

Παρατηρήσεις.

147. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων προβλημάτων βλέπομεν, ὅτι δύναται πρόβλημά τι, κατά τινα ὑπόθεσιν ἐπὶ τῶν δεδομένων αὐτοῦ, νὰ καταντᾷ ἀόριστον (τουτέστι νὰ λύηται ὑπὸ παντὸς ἀριθμοῦ), κατὰ πᾶσαν δὲ ἄλλην, ὁσονδήποτε ὀλίγον διαφέρουσαν ὑπόθεσιν νὰ ἔχῃ λύσιν ἐντελῶς ὡρισμένην.

Δυνατὸν δὲ εἶναι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει νὰ ζητηθῇ, πρὸς ποίαν τιμὴν πλησιάζει ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου, ὅταν τὰ δεδομένα πλησιάζωσι πρὸς τὴν κατάστασιν ἐκείνην, ἥτις καθιστᾷ τὸ πρόβλημα ἀόριστον.

Τὴν τοιαύτην τιμὴν τοῦ ἀγνώστου παρέχει ὁ γενικὸς τύπος τῆς τιμῆς αὐτοῦ, ἀφοῦ ἐξαλειφθῇ ὁ τὴν ἐξίσωσιν μηδενίζων καὶ τὴν λύσιν ἀόριστον καθιστῶν κοινὸς παράγων, ἐὰν τοιοῦτος παράγων ὑπάρχῃ. Οὕτως, ἐν τῷ τελευταίῳ προβλήματι ὁ τύπος (2) ἀληθεύει, ὁσονδήποτε ὀλίγον καὶ ἂν διαφέρωσι τὰ α καὶ β (ἀρκεῖ νὰ διαφέρωσι)· καὶ ἐξ αὐτοῦ φαίνεται, ὅτι, ὅσῳ πλησιάζουσι ταῦτα νὰ γίνωσιν ἴσα, τόσῳ ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου προσεγγίζει πρὸς τὸ $\frac{\alpha\alpha}{\alpha+\alpha}$ ἤτοι τὸ $\frac{\alpha}{2}$. Ὁμοίως, ἐν τῷ προβλήματι εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις προκύπτει συντελεστὴς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ ἐν ταῖς δεδομέναις. Συνήθως οἱ πολλαπλασιασταὶ λαμβάνονται θετικοί, καὶ ἂν μὲν ὁ προκύπτων κοινὸς συντελεστὴς τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου ἔχῃ ἐναντία σημεῖα εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, προσθέτομεν αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε ὁ ἄγνωστος ἀπαλείφεται· ἂν δὲ ἔχῃ τὸ αὐτὸ σημεῖον εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, πρὶν προσθέσωμεν, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς ἑτέρας τῶν ἐξισώσεων.

Ἀλλ' ἁπλούστερον εἶναι νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν δύο συντελεστῶν τοῦ ἀγνώστου καὶ τοῦτο νὰ καθιστῶμεν κοινὸν συντελεστὴν αὐτοῦ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις (ὡς ἐν τῇ ἀναγωγῇ δύο κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστήν)· γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἑκατέρα τῶν ἐξισώσεων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου, διαιρεθέντος διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ αὐτῇ ἐξισώσει.

Παραδείγματα.

1ον)
$$7\chi-8\psi=19$$
$$13\chi-6\psi=53.$$

Τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι ὁ 24· ἑπομένως, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ $\frac{24}{8}$ ἤτοι 3, καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ $\frac{24}{6}$ ἢ 4· οὕτως εὑρίσκομεν

$$21\chi-24\psi=57$$
$$52\chi-24\psi=212\cdot$$

ἀλλάσσοντες δὲ τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς πρώτης καὶ προσθέτοντες ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$31\chi=155,$$

ἐξ ἧς $\chi=5\cdot$

ἀντικαθιστῶντες νῦν τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν ἑτέραν τῶν δοθεισῶν (διότι ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις μεθ' ἑκατέρας τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι), ἔστω εἰς τὴν πρώτην, καὶ λύοντες ἔπειτα πρὸς τὸν ψ εὑρίσκομεν

$$35-8\psi=19, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=2.$$

2ον)
$$\chi-2\psi=-9$$
$$\chi+5\psi=26$$

Ἐπειδὴ ὁ χ ἔχει τὸν αὐτὸν συντελεστὴν εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις, ἀπαλείφομεν αὐτόν· πρὸς τοῦτο, ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων τῆς πρώτης καὶ προσθέτομεν ἀμφοτέρας κατὰ μέλη· οὕτως εὑρίσκομεν

$$7\psi=35, \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \psi=5\cdot$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi-2.5=-9$, ἐξ ἧς $\chi=1$.

3ον)

$$5\chi+2\psi=0$$
$$9\chi+8\psi=1.$$

Ἐπειδὴ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν συντελεστῶν τοῦ ψ εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς δευτέρας, πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐπὶ 4 (τὸ πηλίκον αὐτῶν) καὶ εὑρίσκομεν

$$20\chi+8\psi=0$$
$$9\chi+8\psi=1\cdot$$

ἀλλάσσοντες δὲ τὰ σημεῖα τῆς δευτέρας καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $11\chi=-1$, ἐξ ἧς $\chi=-\frac{1}{11}\cdot$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν

$$-\frac{9}{11}+8\psi=1, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=\frac{5}{22}\cdot$$

4ον)

$$3\chi-16\psi=1$$
$$4\chi+25\psi=12\cdot$$

πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐπὶ — 4 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 3 καὶ προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις, ἀπαλείφομεν τὸν χ (προτιμῶμεν δ' αὐτὸν ὡς ἔχοντα μικροτέρους συντελεστὰς) καὶ εὑρίσκομεν

$$139\psi=32, \qquad \text{ἐξ ἧς} \quad \psi=\frac{32}{139}\cdot$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν

$$3\chi-16\frac{32}{139}=1, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi=\frac{217}{139}\cdot$$

5ον)

$$5\chi-3\psi=8$$
$$15\chi-9\psi=12\cdot$$

ἀπαλείφοντες τὸν ψ, εὑρίσκομεν $0=+12\cdot$ ὥστε τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ

$$0=12$$
$$5\chi-3\psi=8\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ δοθὲν εἶναι ἀδύνατον.

6ον)
$$\chi - 3\psi = 8$$
$$4\chi - 12\psi = 32\cdot$$
ἀπαλείφοντες τὸν χ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα
$$0 = 0$$
$$\chi - 3\psi = 8,$$
ὅπερ ἔχει μόνον μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἐπιδέχεται διὰ τοῦτο λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν εἶναι τοιοῦτο· καὶ ὄντως, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος τῇ πρώτῃ, ὡς προκύπτουσα ἐξ αὐτῆς πολλαπλασιασθείσης ἐπὶ 4· ὥστε ἐδόθη κυρίως μία μόνον ἐξίσωσις μεταξὺ τῶν δύο ἀγνώστων.

* 158. Ἔστω τέλος τὸ γενικὸν σύστημα
$$\begin{aligned} \alpha\chi + \beta\psi &= \gamma \qquad (1)\\ \alpha'\chi + \beta'\psi &= \gamma'. \end{aligned}$$
Ἵνα ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων τὸν ἄγνωστον ψ, πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν πρώτην ἐπὶ β′, τὴν δὲ δευτέραν ἐπὶ — β καὶ προσθέτομεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, ὅτε εὑρίσκομεν
$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\chi = \gamma\beta' - \gamma'\beta,$$
ἐξ ἧς, ὑποθέτοντες τὴν παράστασιν $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ διάφορον τοῦ 0, λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην τιμὴν τοῦ χ
$$\chi = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$
Ὁμοίως, ἀπαλείφοντες τὸν χ εὑρίσκομεν
$$\psi = \frac{\gamma'\alpha - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$
Ὥστε, ἂν ἡ παράστασις $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ διαφέρῃ τοῦ 0, τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ἐπιδέχεται μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνην· ἤτοι ὑπάρχει μία τιμὴ τοῦ χ καὶ μία τοῦ ψ ἐπαληθεύουσαι τὸ σύστημα.

* 159. Μένει πρὸς ἐξέτασιν ἡ περίπτωσις, καθ' ἣν εἶναι
$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$$
καὶ ταύτην ὑποδιαιροῦμεν εἰς τρεῖς ἄλλας.

1) Ἂν ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις ἔχωσιν ἀγνώστους.

Τότε ἐκ τῶν συντελεστῶν α, β, εἷς τοὐλάχιστον διαφέρει τοῦ 0 (ὁμοίως καὶ ἐκ τῶν α′, β′)· ἔστω τοιοῦτος ὁ α· λέγω, ὅτι καὶ ὁ α′ θὰ εἶναι διάφορος τοῦ 0· διότι, ἂν ἦτο $\alpha' = 0$, ἡ ἰσότης $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ (ἥτις συνδέει νῦν τοὺς συντελεστὰς) θὰ ἐγίνετο $\alpha\beta' = 0$· ὅθεν καὶ $\beta' = 0$ ἤτοι ἀμφότεροι οἱ συντελεσταὶ α′ καὶ β′ θὰ ἦσαν 0 καὶ ἑπομένως ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δὲν θὰ εἶχεν ἀγνώστους, ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ὥστε ὁ α′ διαφέρει τοῦ 0.

Τούτου τεθέντος, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἐπὶ α καὶ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὴν ἰσότητα $\alpha\beta' = \beta\alpha'$, φέρομεν τὸ δοθὲν σύστημα (1) εἰς τὴν μορφὴν

$$\begin{array}{c|c|c} \alpha\chi+\beta\psi=\gamma & & \alpha\chi+\beta\psi=\gamma \\ & \text{ἤτοι} & \\ \alpha'(\alpha\chi+\beta\psi)=\gamma'\alpha & & \alpha\chi+\beta\psi=\dfrac{\gamma'\alpha}{\alpha'}. \end{array}$$

'Αλλ' ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἢ οὐδόλως διαφέρει τῆς πρώτης (ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma'\alpha}{\alpha'}$ ἴσον τῷ γ), ἑπομένως ἐδόθη μία μόνη ἐξίσωσις· ἢ εἶναι ἀσυμβίβαστος πρὸς αὐτὴν (ἐὰν $\frac{\gamma'\alpha}{\alpha'}$ διαφέρῃ τοῦ γ), διότι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς $\alpha\chi+\beta\psi$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴσος πρὸς δύο διαφόρους ἀριθμούς. Καὶ ἂν μὲν αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι μία καὶ ἡ αὐτή, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις (ἐδ. 154)· ἐὰν δὲ εἶναι ἀσυμβίβαστοι, οὐδεμία ὑπάρχει λύσις.

2) Ἂν μία μόνη ἐξίσωσις ἔχῃ ἀγνώστους· τότε τὸ σύστημα εἶναι

$$0=\gamma$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma',$$

πληροῦται δὲ ἀληθῶς καὶ ἡ ἰσότης $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$· ἀλλὰ τότε, ἂν μὲν ὁ γ διαφέρῃ τοῦ 0, εἶναι ἀδύνατον τὸ σύστημα, ἂν δὲ εἶναι $\gamma=0$, περιορίζεται εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$, ἥτις περιέχει ἢ τὸν ἕνα ἄγνωστον ἢ ἀμφοτέρους· καὶ ἂν μὲν περιέχῃ τὸν ἕνα μόνον ἄγνωστον, ὁρίζει αὐτόν· ἀλλ' ὁ ἄλλος μένει ἀόριστος· ἂν δὲ περιέχῃ καὶ τοὺς δύο, ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος (ἐδ. 154)· ὥστε καὶ πάλιν τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

3) Ἂν μήτε ἡ μία ἐξίσωσις μήτε ἡ ἄλλη ἔχῃ ἄγνωστον, τότε τὸ σύστημα εἶναι

$$0=\gamma$$
$$0=\gamma',$$

ἀλλὰ τότε, ἂν μὲν ἀμφότερα τὰ γ, γ' εἶναι 0, ἀληθεύει τὸ σύστημα διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων χ, ψ· εἰ δὲ μή, εἶναι ἀδύνατον.

Ἐκ πάντων τῶν προειρημένων συνάγεται ὅτι

Τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$$

ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνην λύσιν, ἐὰν ἡ παράστασις

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta$$

εἶναι διάφορος τοῦ 0· ἀλλ' ἐὰν τοὐναντίον εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$, τὸ σύστημα ἢ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν ἢ ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος· καὶ τὸ μὲν πρῶτον συμβαίνει, ὅταν τις τῶν ἐξισώσεων καθ' ἑαυτὴν εἶναι ἀδύνατος ἢ ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι πρὸς ἀλλήλας ἀσυμβίβαστοι· τὸ δὲ δεύτερον συμβαίνει, ὅταν μία τῶν ἐξισώσεων εἶναι ταὐτότης ἢ ὅταν αἱ δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.

160. Ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ ἑπομένως ἡ λύσις τοῦ συστήματος δύναται καὶ ἄλλως νὰ γίνῃ δυνάμει τοῦ Β΄ θεωρήματος.

Ἔστω, τῷ ὄντι, τὸ σύστημα

$$3\chi+8\psi=43$$
$$11\chi-7\psi=-24.$$

Ἐὰν ἡ πρώτη ἐξίσωσις λυθῇ πρὸς τὸ χ, τίθεται τὸ σύστημα ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\chi=\frac{43-8\psi}{3}$$
$$11\chi-7\psi=-24\cdot$$

ἐὰν δὲ ἀντικατασταθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, εὑρίσκεται τὸ ἰσοδύναμον (ἐδ. 153) σύστημα

$$\chi=\frac{43-8\psi}{3}$$
$$11\left(\frac{43-8\psi}{3}\right)-7\psi=-24,$$

οὗτινος ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἄγνωστον τὸν ψ καὶ λυομένη πρὸς αὐτὸν δίδει $\psi=5$· καὶ ἂν ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ ψ τεθῇ εἰς τὴν πρώτην, προκύπτει καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ

$$\chi=1.$$

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως· δύνανται δὲ καὶ ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις νὰ λυθῶσι πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον καὶ μετὰ ταῦτα νὰ γίνῃ ἡ ἀντικατάστασις.

Ἀλλ' ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως προτιμᾶται μόνον ὅταν ἡ ἑτέρα τῶν ἐξισώσεων δοθῇ λελυμένη πρὸς ἕνα ἄγνωστον· ἄλλως, προτιμητέα ἡ μέθοδος τῆς προσθέσεως, ὡς συντομωτέρα.

Λύσις οἱουδήποτε συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἐχουσῶν ἀγνώστους ἴσους τὸ πλῆθος.

161. Ἔστω πρότερον τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$2\chi-5\psi+5\omega=40$$
$$5\chi+2\psi-\omega=45$$
$$7\chi-\psi+9\omega=98.$$

Ἐὰν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἀπαλείψωμεν ἕνα ἐκ τῶν ἀγνώστων τῆς πρώτης, ἔστω τὸν ψ (δι' ὁποτέρας τῶν μεθόδων), εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δύο μόνον ἀγνώστους περιέχουσαν καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν δευτέραν· ὁμοίως, ἂν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείψωμεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν τοὺς αὐτοὺς δύο ἀγνώστους καὶ δυναμένην νὰ ἀντικαταστήσῃ τὴν τρίτην· οὕτω φθάνομεν εἰς τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$2\chi-5\psi+5\omega=40$$
$$29\chi+5\omega=305$$
$$33\chi+40\omega=450.$$

Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις αὐτοῦ περιέχουσι δύο μόνον ἀγνώστους (ἤτοι ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν), δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὰς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους (διότι ἐμάθομεν τοῦτο)· ἐὰν δέ, εὑρόντες τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων τούτων ($\chi=10$, $\omega=3$), ἀντικαταστήσωμεν αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν μόνον τὸν ἄλλον ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζομεν καὶ τοῦτον ($\psi=-1$).

Οὕτως ἀνάγεται ἡ λύσις τοῦ συστήματος τριῶν ἐξισώσεων τρεῖς ἀγνώστους ἐχουσῶν, εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν.

Ἔστωσαν νῦν ν ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ, ἰσαρίθμους ἀγνώστους περιέχουσαι· ἐὰν ἄγνωστόν τινα τῆς πρώτης ἀπαλείψωμεν μεταξὺ αὐτῆς καὶ ἑκάστης τῶν λοιπῶν, εὑρίσκομεν $\nu-1$ ἐξισώσεις (μίαν ἐξ ἑκάστης τῶν λοιπῶν), αἵτινες μετὰ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων ἀποτελοῦσι σύστημα ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι (διότι ἑκάστη νέα ἐξίσωσις δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ ἐκείνην, ἥτις, συνδυασθεῖσα μετὰ τῆς πρώτης, ἔδωκεν αὐτήν, καὶ τὸ σύστημα μένει ἰσοδύναμον). Αἱ νέαι αὗται ἐξισώσεις περιέχουσι μόνον τοὺς $\nu-1$ ἀγνώστους καὶ ἑπομένως ἀποτελοῦσιν ἴδιον σύστημα $\nu-1$ ἐξισώσεων μετὰ $\nu-1$ ἀγνώστων· ἐὰν δὲ τοῦτο τὸ σύστημα λυθῇ καὶ ἀντικατασταθῶσιν αἱ τιμαὶ τῶν $\nu-1$ ἀγνώστων εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, θὰ μείνῃ ἐν αὐτῇ εἷς μόνον ἄγνωστος καὶ ἑπομένως θὰ προσδιορισθῇ καὶ οὗτος· ὥστε κατὰ τοῦτον τὸν τρόπον, **ἀνάγεται ἡ λύσις παντὸς συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν ἄλλου συστήματος μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ἔχοντος ὀλιγώτερα.**

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου δυνάμεθα νὰ λύσωμεν οἱονδήποτε σύστημα, διότι δι' αὐτοῦ ἀνάγεται ἡ λύσις τῶν ν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν τῶν ν—1 καὶ τούτων πάλιν εἰς τὴν λύσιν τῶν ν—2, καὶ οὕτω καθεξῆς, καὶ τέλος, εἰς τὴν λύσιν δύο ἐξισώσεων δύο ἀγνώστους ἐχουσῶν, τὴν ὁποίαν λύσιν ἐμάθομεν.

* Παρατηρήσεις.

Πολλάκις ἡ φύσις τῶν ἐξισώσεων παρέχει τρόπον λύσεως συντομώτερον τοῦ γενικοῦ.

Οὕτω, λόγου χάριν, δὲν εἶναι ἀδιάφορος πρὸς τὴν συντομίαν τῆς λύσεως ἡ ἐκλογὴ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου, ἐν ἑκάστῃ μεταβάσει ἀπὸ συστήματος εἰς σύστημα, οὐδὲ ἡ ἐκλογὴ τῆς ἐξισώσεως ἥτις μόνη αὕτη συνδυάζεται πρὸς πάσας τὰς ἄλλας· ἀλλ' οὐδὲ εἶναι ἀνάγκη νὰ συνδυάζηται πάντοτε μία καὶ ἡ αὐτὴ ἐξίσωσις πρὸς τὰς ἄλλας, ἀλλὰ ποικίλοι συνδυασμοὶ δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων (ἢ καὶ πασῶν) δύνανται νὰ γίνωσι, δι' ὧν ταχύτερον νὰ εὑρίσκηται ἡ λύσις.

Καὶ ταῦτα μὲν γενικῶς· ἰδίᾳ δὲ παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς.

1) Ἐὰν ἐξίσωσίς τις ἑνὸς συστήματος δὲν ἔχῃ τινὰ τῶν ἀγνώστων, ἡ ἐξίσωσις αὕτη θὰ εἶναι ἐξίσωσις καὶ τοῦ ἑπομένου συστήματος (τοῦ μίαν ἐξίσωσιν καὶ ἕνα ἄγνωστον ἔχοντος ὀλιγώτερα), ἐὰν ὡς ἀπαλειπτέος ἄγνωστος ληφθῇ ὁ ἐν τῇ ἐξισώσει μὴ ὑπάρχων.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ σύστημα τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} &3\chi+5\psi+4\varphi+\omega=0\\ &2\chi+4\psi-\varphi-2\omega=1\\ &5\chi-\psi=2\\ &3\chi+8\psi+8\omega=10. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ ὁ φ δὲν ὑπάρχει εἰς τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις, λαμβάνοντες τοῦτον ὡς ἀπαλειπτέον ἄγνωστον, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} &11\chi+11\psi-7\omega=4\\ &5\chi-\psi=2\\ &3\chi+8\psi+8\omega=10, \end{aligned}$$

τοῦ ὁποίου ἡ πρώτη ἐξίσωσις προέκυψεν ἐκ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας τοῦ δοθέντος συστήματος, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο εἶναι αὐταὶ αἱ δοθεῖσαι.

Ἐπειδὴ δὲ πάλιν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δὲν ἔχει τὸν ἄγνωστον ω, λαμβάνοντες τοῦτον ὡς ἀπαλειπτέον, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} &109\chi+144\psi=102\\ &5\chi-\psi=2. \end{aligned}$$

2) Ἐνίοτε προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (ἢ πάσας ἢ τινας μόνον), εὑρίσκομεν τὴν λύσιν. Οὕτως, ἐν τῷ συστήματι

$$\begin{aligned} \chi+\psi-\varphi&=3\\ \chi-\psi+\varphi&=5\\ -\chi+\psi+\varphi&=9\cdot \end{aligned}$$

ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἐξισώσεις ἀνὰ δύο, εὑρίσκομεν

$$2\chi=8,\qquad 2\psi=12,\qquad 2\varphi=14.$$

Ὁμοίως εἰς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\varphi&=5\\ \psi+\varphi+\omega&=4\\ \varphi+\omega+\chi&=8\\ \omega+\chi+\psi&=13 \end{aligned}$$

ἐὰν προσθέσωμεν πάσας τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιρέσωμεν τὴν προκύπτουσαν διὰ 3, εὑρίσκομεν

$$\chi+\psi+\varphi+\omega=10.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ ταύτης ἀφαιρεθῇ ἑκάστη τῶν δοθεισῶν, προκύπτει

$$\omega=5,\qquad \chi=6,\qquad \psi=2,\qquad \varphi=-3.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ὑπάρχουσι πάντοτε πολλαπλασιασταί τινες ἐφ' οὓς πολλαπλασιαζόμεναι αἱ ἐξισώσεις τοῦ τυχόντος συστήματος καὶ προστιθέμεναι κατὰ μέλη, δίδουσιν ἐξίσωσιν ἕνα μόνον (ἢ οὐδένα) ἄγνωστον περιέχουσαν καὶ ἑπομένως προσδιορίζουσαν αὐτόν· ἀλλ' ἡ εὕρεσις τῶν πολλαπλασιαστῶν τούτων ὑπερβαίνει τὰ ὅρια τοῦ παρόντος ἔργου.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἐκ τῆς προσθέσεως ἐξισώσεών τινων τοῦ συστήματος (πολλαπλασιασμένων ἑκάστης ἐπὶ ἀριθμὸν διάφορον τοῦ 0) προκύπτῃ ἐξίσωσις μηδένα περιέχουσα ἄγνωστον, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑπόμενα συστήματα.

$$1^{\text{ον}})\quad \begin{cases} \chi+2\psi-\omega=2\\ 3\chi-\psi+4\omega=27\\ 4\chi+\psi-5\omega=-11 \end{cases}\qquad \begin{aligned} \chi&=3\\ \psi&=2\\ \omega&=5. \end{aligned}$$

$$2^{\text{ον}})\quad \begin{cases} \chi+\psi=\gamma\\ \psi+\omega=\alpha\\ \omega+\chi=\beta \end{cases}\qquad \begin{aligned} \chi&=\frac{1}{2}(\beta+\gamma-\alpha)\\ \psi&=\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta)\\ \omega&=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma). \end{aligned}$$

3ον) $\begin{cases} \chi-\psi=\alpha \\ \psi-\omega=\beta \\ \omega-\chi=\gamma \end{cases}$

4ον) $\begin{cases} \chi-8\psi+3\omega \quad \varphi=-1 & \qquad \varphi=\dfrac{1}{4} \\ \psi-2\omega-\varphi=0 & \qquad \omega=-\dfrac{1}{10} \\ 5\omega+2\varphi=0 & \qquad \psi=\dfrac{1}{20} \\ 4\varphi=1 & \qquad \chi=-\dfrac{1}{20}. \end{cases}$

5ον) $\begin{cases} 5\chi-7\psi+4\omega+\varphi=31 & \qquad \omega=1 \\ 3\chi+\psi-\omega-2\varphi=10 & \qquad \varphi=2 \\ 2\omega-\varphi=0 & \qquad \psi=0 \\ 7\omega+2\varphi=11 & \qquad \chi=5. \end{cases}$

6ον) $\begin{cases} 2\chi-\psi+5\omega-\varphi=11 & \qquad \chi=1 \\ 2\chi+\psi-3\omega+4\varphi=11 & \qquad \psi=2 \\ \chi+5\psi-3\omega+\varphi=6 & \qquad \omega=3 \\ 6\chi-\psi+4\omega+2\varphi=24 & \qquad \varphi=4. \end{cases}$

Τὰ ἑξῆς συστήματα ἀνάγονται εἰς πρωτοβάθμια, ἐὰν θεωρηθῶσιν ὡς ἄγνωστοι τὰ $\dfrac{1}{\chi}$ καὶ $\dfrac{1}{\psi}$ καὶ παρασταθῶσι διὰ χ' καὶ ψ'· εὑρεθέντων δὲ τῶν χ', ψ', εὑρίσκονται εὐκόλως καὶ τὰ χ, ψ.

7ον) $\dfrac{2}{\chi}-\dfrac{1}{\psi}=1 \qquad \chi=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{7}{\chi}+\dfrac{2}{\psi}=20 \qquad \psi=\dfrac{1}{3}.$

8ον) $\chi\psi=\alpha(\chi+\psi), \quad \psi\omega=\beta(\psi+\omega), \quad \omega\chi=\gamma(\omega+\chi).$

Ἡ ἐξίσωσις $\chi+\psi=2$ προφανῶς ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις, καὶ ὅμως διὰ τῶν ἑξῆς συλλογισμῶν φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν· διότι ἐξ αὐτῆς ἕπεται

$$(\chi+\psi)^2=4,$$

ἐκ δὲ τούτων συνάγεται $(\chi+\psi)^2-4=\chi+\psi-2$·
καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ $\chi+\psi-2$,
εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi+\psi+2=1 \quad \text{ἢ καὶ} \quad \chi+\psi=-1·$$

αὕτη δὲ μετὰ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως συνδυαζομένη, δίδει

$$2=-1· \quad \text{ὅπερ ἄτοπον.}$$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

Προβλήματα

1ον) Εὑρεῖν κλάσμα, τὸ ὁποῖον, ἂν μὲν αὐξηθῶσι κατὰ μονάδα οἱ ὅροι αὐτοῦ, νὰ γίνηται ἴσον τῷ $\frac{4}{5}$· ἂν δὲ ἐλαττωθῶσι κατὰ μονάδα, νὰ γίνηται ἴσον τῷ $\frac{3}{4}$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὸν ἀριθμητὴν καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν παρανομαστὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi+1}{\psi+1}=\frac{4}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\chi-1}{\psi-1}=\frac{3}{4}\cdot$$

ἤτοι $$5\chi-4\psi=-1$$
$$4\chi-3\psi=1.$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=7$, $\psi=9$· ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{7}{9}$.

2ον) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ 7, νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1, διὰ 11 ὑπόλοιπον 10 καὶ διὰ 13 ὑπόλοιπον 3· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν πηλίκων νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὰ τρία δέκατα τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν καὶ διὰ ω, φ, ψ τὰ τρία πηλίκα θὰ ἔχωμεν

$$\chi=7\omega+1$$
$$\chi=11\varphi+10$$
$$\chi=13\psi+3$$
$$\omega+\varphi+\psi=\frac{3}{10}\chi\cdot$$

πρέπει δὲ πάντες οἱ ἄγνωστοι νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ τῶν ω, φ, ψ, ληφθεῖσαι ἐκ τῶν τριῶν πρώτων ἐξισώσεων, ἀντικατασταθῶσιν εἰς τὴν τετάρτην, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\chi-1}{7}+\frac{\chi-10}{11}+\frac{\chi-3}{13}=\frac{3}{10}\chi,$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=120$· ὅθεν $\varphi=10$, $\omega=17$, $\psi=9$.

3ον) Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον, ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας· τὸ τετραπλοῦν τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων νὰ ὑπερβαίνῃ κατὰ μονάδα τὸ τριπλοῦν τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων· ἐὰν δὲ γραφῶσι τὰ ψηφία κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 36.

Ἔστωσαν χ αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ πρῶτον εἶναι $4\psi - 3\chi = 1$.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ ὅλον $10\chi + \psi$ μονάδας καὶ ὁ ἐξ αὐτοῦ προκύπτων (διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων) ἔχει μονάδας τὸ ὅλον $10\psi + \chi$, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$10\chi + \psi = 10\psi + \chi + 36 \qquad \text{ὅθεν} \qquad 9\chi - 9\psi = 36.$$

Ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα

$$4\psi - 3\chi = 1$$
$$\chi - \psi = 4$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἀμφότεροι οἱ ἄγνωστοι θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Ἐπειδὴ δὲ λύοντες τὰς ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\chi = 17$ καὶ $\psi = 13$, συμπεραίνομεν, ὅτι τοιοῦτος ἀριθμὸς οὐδεὶς ὑπάρχει.

4ον) Ἱέρων ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν ἔδωκεν εἰς χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, ἵνα κατασκευάσῃ ἐξ αὐτοῦ στέφανον τοῦ Διός. Ὑποπτεύσας δὲ μετὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ στεφάνου, ὅτι ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε δι' ἀργύρου μέρος τοῦ χρυσοῦ, ἠρώτησε τὸν Ἀρχιμήδην, ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀνακαλυφθῇ τοῦτο. Ὁ Ἀρχιμήδης γνωρίζων, ὅτι ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, ὁ δὲ ἄργυρος τὰ 99, ἐζύγισε τὸν στέφανον ἐν τῷ ὕδατι καὶ εὗρεν αὐτὸν 9 λιτρῶν καὶ 6 οὐγγιῶν, οὕτω δὲ ἀνεκάλυψε τὸν δόλον. Ζητεῖται, πόσος ἄργυρος καὶ πόσος χρυσὸς ὑπῆρχεν ἐν τῷ στεφάνῳ.

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν οὐγγιῶν τοῦ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσοῦ καὶ ψ ὁ τοῦ ἀργύρου· κατὰ πρῶτον ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν (ἀναμνηστέον, ὅτι 1 λίτρα = 16 οὐγγ.).

$$\chi + \psi = 160.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χρυσὸς ἀποβάλλει ἐν τῷ ὕδατι τὰ 52 χιλιοστὰ τοῦ βάρους του, τὸ βάρος χ τοῦ ἐν τῷ στεφάνῳ χρυσοῦ θὰ ἀποβάλῃ ἐν τῷ ὕδατι $\frac{52}{1000}\chi$ οὐγγίας· ὁμοίως τὸ βάρος ψ τοῦ ἀργύρου θὰ ἀποβάλῃ οὐγγίας $\frac{99}{1000}\psi$· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων ἀπωλειῶν θὰ συναποτελέσῃ τὴν ὅλην ἀπώλειαν τοῦ βάρους τοῦ στεφάνου ἐν τῷ ὕδατι ἤτοι 10 οὐγγίας, ἐξ ὧν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{52}{1000}\chi + \frac{99}{1000}\psi = 10$$

$$\text{ἢ} \qquad 52\chi + 99\psi = 10000.$$

Λύοντες δὲ τὰς ἐξισώσεις ταύτας, εὑρίσκομεν

$$χ = 7 \text{ λίτρ., } 12 \text{ οὐγγίαι καὶ } \frac{12}{47} \text{ οὐγγίας,}$$

$$ψ = 2 \text{ λίτρ., } 3 \text{ οὐγγίαι καὶ } \frac{35}{47} \text{ οὐγγίας.}$$

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἄνευ ἐξισώσεων ὡς ἑξῆς. Ἂν ὁ στέφανος ἦτο ὅλος ἐκ χρυσοῦ, θὰ ἔχανεν ἐν τῷ ὕδατι τὰ 0,052 τοῦ βάρους του ἤτοι θὰ ἔχανεν οὐγγίας $0{,}052 \times 160$ ἢ 8,32 οὐγγ.· ἀλλὰ τώρα χάνει 10 οὐγγίας ἤτοι χάνει 1,68 οὐγγ. περισσότερον τοῦ πρέποντος· καὶ ἐπειδὴ δι' ἑκάστην οὐγγίαν χρυσοῦ, ἣν ἀντικαθιστῶμεν δι' ἀργύρου, χάνει ὁ στέφανος 0,047 τῆς οὐγγίας περισσότερον (διότι τοῦ χρυσοῦ ἡ οὐγγία χάνει τὰ 0,052, ἐνῷ τοῦ ἀργύρου χάνει τὰ 0,099 αὐτῆς), συμπεραίνομεν, ὅτι τόσαι οὐγγίαι ἀργύρου θὰ εἶναι (ἂν δι' ἀργύρου ἐνοθεύθη ὁ στέφανος) ὅσας φορὰς χωρεῖ τὸν ἀριθμὸν 0,047 ὁ 1,68 ἤτοι $\frac{1680}{47}$ ἢ 2 λίτρ., 3 οὐγγ. καὶ $\frac{35}{47}$ τῆς οὐγγίας

5ον) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων του ὁ 5, καὶ ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτερων τῶν ὅρων του ὁ 3.

Ἔστω χ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ψ ὁ παρονομαστὴς τοῦ ζητουμένου κλάσματος· κατὰ τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{χ-5}{ψ-5} = \frac{1}{5} \quad \text{καὶ} \quad \frac{χ-3}{ψ-3} = \frac{1}{3}\cdot$$

αἱ ἐξισώσεις αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$3χ - ψ = 6$$
$$5χ - ψ = 20\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ χ καὶ ψ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Λύοντες τὰς ἐξισώσεις ταύτας εὑρίσκομεν $χ = 7$, $ψ = 15$· ὥστε τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{7}{15}$.

6ον) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, οὗ τὰ ψηφία ἔχουσιν ἄθροισμα 15 καὶ ὅστις ἀντιστρεφόμενος ἐλαττοῦται κατὰ 9

Ἔστωσαν χ αἱ δεκάδες καὶ ψ αἱ μονάδες τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐν πρώτοις εἶναι $\quad χ + ψ = 15.$

Ὁ ἀριθμὸς ἔχει τὸ ὅλον $10χ + ψ$ μονάδας, ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ $χ + 10ψ$, αὗται δὲ θὰ εἶναι ὀλιγώτεραι τῶν πρώτων κατὰ 9, ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\quad 10χ + ψ = χ + 10ψ + 9$

ἢ $\quad 9χ = 9ψ + 9 \quad$ ἤτοι $\quad χ = ψ + 1\cdot$

ἔχομεν ἄρα τὸ σύστημα $\chi+\psi=15$

$\chi=\psi+1$·

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Λύοντες τὸ σύστημα εὑρίσκομεν $\chi=8$, $\psi=7$· ὅθεν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 87.

7ον) Ἐρωτηθείς τις περὶ τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του, ἀπεκρίθη· πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία μου ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ μου, μετὰ 8 δὲ ἔτη θὰ εἶναι διπλασία· ζητοῦνται αἱ ἡλικίαι αὐτῶν.

Ἐὰν παρασταθῇ τοῦ πατρὸς ἡ ἡλικία διὰ τοῦ χ, τοῦ δὲ υἱοῦ διὰ τοῦ ψ, αἱ ἡλικίαι αὐτῶν, πρὸ 8 ἐτῶν, ἦσαν

$\chi-8$ καὶ $\psi-8$·

μετὰ 8 δὲ ἔτη αἱ ἡλικίαι θὰ εἶναι

$\chi+8$ καὶ $\psi+8$·

ἑπομένως, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι

$$\begin{matrix} \chi-8=3(\psi-8) \\ \chi+8=2(\psi+8) \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi-3\psi=-16 \\ \chi-2\psi=8 \end{matrix}$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνωσι τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων.

Λύοντες τὰς δύο ἐξισώσεις εὑρίσκομεν $\chi=56$, $\psi=24$, ἡ δὲ λύσις αὕτη πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

8ον) Ἔχων τις τρία καλάθια μὲ μῆλα ἔλαβεν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἔθεσεν εἰς τὰ δύο ἄλλα, εἰς ἕκαστον τόσα, ὅσα αὐτὸ εἶχεν· ἔπειτα ἔλαβεν ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἔθεσεν εἰς τὰ δύο ἄλλα, εἰς ἕκαστον τόσα, ὅσα τότε εἶχεν· ἔπειτα καὶ ἐκ τοῦ τρίτου ὁμοίως· τότε δὲ καὶ τὰ τρία καλάθια εἶχον ἴσον ἀριθμὸν μήλων ἤτοι 80· ζητεῖται, πόσα εἶχεν ἕκαστον ἐν ἀρχῇ.

Ἔστωσαν χ ὁ ἀριθμὸς τῶν μήλων τοῦ πρώτου, ψ ὁ ἀριθμὸς τοῦ δευτέρου καὶ ω τοῦ τρίτου.

Εἰς τὴν πρώτην μετάθεσιν τῶν μήλων ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τοῦ πρώτου καλαθίου τόσα μῆλα, ὅσα εἶχον τὰ δύο ἄλλα ὁμοῦ ἤτοι $\psi+\omega$, τῶν δὲ δύο ἄλλων τὰ μῆλα ἐδιπλασιάσθησαν, ὥστε τὰ μῆλα ἦσαν μετ' αὐτὴν

$\chi-\psi-\omega$, 2ψ, 2ω·

εἰς τὴν δευτέραν μετάθεσιν ἐδιπλασιάσθησαν μὲν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου καλαθίου, ἀφῃρέθησαν δὲ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τόσα, ὅσα περιεῖχον τὰ δύο ἄλλα· ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ τῶν μήλων ἔγιναν

$$2(\chi-\psi-\omega),\qquad 2\psi-(\chi-\psi-\omega)-2\omega,\qquad 4\omega$$

ἢ

$$2\chi-2\psi-2\omega,\qquad 3\psi-\omega-\chi,\qquad 4\omega\cdot$$

εἰς δὲ τὴν τρίτην μετάθεσιν ἔγιναν ὁμοίως

$$4\chi-4\psi-4\omega,\qquad 6\psi-2\omega-2\chi,\qquad 7\omega-\chi-\psi.$$

Ἑπομένως, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, εἶναι

$$\left.\begin{array}{r}4\chi-4\psi-4\omega=80\\-2\chi+6\psi-2\omega=80\\-\chi-\psi+7\omega=80\end{array}\right\}\ (1)\quad \text{ἢ}\quad \left.\begin{array}{r}\chi-\psi-\omega=20\\-\chi+3\psi-\omega=40\\-\chi-\psi+7\omega=80\cdot\end{array}\right\}\ (\iota)$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ χ, ψ, ω ἀκέραιοι καὶ θετικοί.

Ἵνα λύσωμεν τὸ σύστημα (1), προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, ὅτε εὑρίσκομεν

$$\chi+\psi+\omega=240\cdot$$

(ὅπερ καὶ ἐκ τῶν προτέρων ἦτο φανερόν· διότι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν μήλων δὲν μετεβλήθη).

Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εἰς ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (ι), εὑρίσκομεν

$$\chi=130,\qquad \psi=70,\qquad \omega=40.$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἄνευ ἐξισώσεων ὡς ἑξῆς. Εἰς τὴν τελευταίαν μετάθεσιν ἐδιπλασιάσθησαν τὰ μῆλα τῶν δύο πρώτων καλαθίων, ἑπομένως ταῦτα εἶχον πρὶν 40 καὶ 40 μῆλα· ὅθεν τὸ τρίτον εἶχεν 160· εἰς τὴν δευτέραν μετάθεσιν ἐδιπλασιάσθησαν τὰ μῆλα τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου· λοιπὸν εἶχε τὸ μὲν πρῶτον 20, τὸ δὲ τρίτον 80· ἄρα εἶχε τὸ δεύτερον 140· τέλος εἰς τὴν πρώτην ἐδιπλασιάσθησαν τὰ μῆλα τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ τρίτου· ἄρα τὸ μὲν δεύτερον εἶχεν 70, τὸ δὲ τρίτον 40· ἑπομένως τὸ πρῶτον εἶχεν 130.

9ον) Δύο βυτία ἐντελῶς ἴσα καὶ ὅμοια τὴν κατασκευὴν εἶναι πλήρη, τὸ μὲν ἓν ἐλαίου, τὸ δὲ ἄλλο ὕδατος· καὶ τὸ μὲν πρῶτον ζυγίζει α ὀκάδας, τὸ δὲ δεύτερον β. Πόσον εἶναι τὸ ἔλαιον καὶ πόσον τὸ ὕδωρ; καὶ πόσον ζυγίζει τὸ καθὲν βυτίον κενόν;

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸ βάρος τοῦ ἑτέρου ἐκ τῶν δύο βυτίων κενοῦ καὶ διὰ ψ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ διὰ ω τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶναι, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος

$$\chi+\psi=\beta$$
$$\chi+\omega=\alpha.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἔλαιον καὶ τὸ ὕδωρ τῶν δύο βυτίων ἔχουσιν ἴσους ὄγκους, τὸ βάρος ω τοῦ ἐλαίου θὰ εἶναι τὰ 0,912 τοῦ βάρους ψ τοῦ ὕδατος ἤτοι

$$\omega = 0{,}912\,\psi.$$

Ἀπαλείφοντες νῦν τὸ ω, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\chi + \psi = \beta$$
$$1000\chi + 912\psi = 1000\alpha,$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν λύοντες

$$\chi = \frac{1000\alpha - 912\beta}{88},\quad \psi = \frac{1000(\beta-\alpha)}{88}\quad \text{καὶ}\quad \omega = \frac{912(\beta-\alpha)}{88}.$$

Ὅτι β εἶναι μεγαλήτερον τοῦ α εἶναι προφανές· ἀλλὰ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ πρέπει νὰ εἶναι θετική· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$0{,}912\,\beta < \alpha < \beta.$$

ΣΗΜ. Ἐὰν πρόβλημά τι ἔχῃ μὲν πολλοὺς ἀγνώστους, ἀλλὰ τοιούτους, ὥστε, ἐκ τοῦ ἑνὸς νὰ εὑρίσκωνται εὐκόλως καὶ οἱ ἄλλοι, τὸ τοιοῦτον πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ διὰ μιᾶς ἐξισώσεως καὶ διὰ πολλῶν (τοιαῦτα εἶναι τὰ προβλήματα τῶν ἐδαφίων 121, 128, 130, 134, 135 καὶ τὰ 2ον καὶ 4ον ἐκ τῶν προηγουμένων)· διὰ μιᾶς μέν, ἐὰν παρασταθῇ ὁ περὶ οὗ ὁ λόγος ἄγνωστος δι' ἑνὸς γράμματος καὶ ἐκφρασθῶσι δι' αὐτοῦ οἱ λοιποί, μετὰ δὲ ταῦτα εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἣν ὁ ἄγνωστος οὗτος ἐπαληθεύει· διὰ πολλῶν δέ, ἐὰν ἕκαστος τῶν ἀγνώστων παρασταθῇ δι' ἰδίου γράμματος καὶ ἐπ' αὐτῶν ἐφαρμοσθῶσιν οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος. Ὁ δεύτερος οὗτος τρόπος εἶναι γενικώτερος τοῦ πρώτου διότι παρέχει σύστημα ἐξισώσεων, ἐκ τοῦ ὁποίου, διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ἄλλων ἀγνώστων, προκύπτει καὶ ἡ ἐξίσωσις, ἡ κατὰ τὸν ἄλλον τρόπον εὑρισκομένη· δύναται δὲ πάντοτε νὰ γίνῃ ἡ τοιαύτη ἀπαλοιφή· διότι ἐξ ὑποθέσεως τοιοῦτοι εἶναι οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος, ὥστε δι' ἑνὸς ἐκ τῶν ἀγνώστων ἐκφράζονται οἱ λοιποί· τοὺς ὅρους δὲ τούτους τοῦ προβλήματος παριστῶσι καὶ σημαίνουσιν αἱ ἐξισώσεις. Εὐνόητον δὲ εἶναι, ὅτι, κατὰ τὰς περιστάσεις, δύναται νὰ εἶναι εὐκολωτέρα ἡ διὰ πολλῶν ἐξισώσεων λύσις· διότι αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος δύνανται κατὰ ποικίλους τρόπους νὰ συνδυασθῶσιν, ὥστε νὰ προκύψῃ ἐξ αὐτῶν μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον· καθ' ἕνα δὲ τῶν τρόπων τούτων προκύπτει μία ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

1) Εὑρεῖν τριψήφιον ἀριθμὸν ἔχοντα τὰς ἑπομένας ἰδιότητας. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ψηφίων εἶναι 11· τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ τῶν ἑκατοντάδων· ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφῶσι κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλήτερος κατὰ 99. (Ἀπ. 182).

2) Δύο ἀγγεῖα περιέχουσιν α ὀκάδας ὕδατος· λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ πρώτῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον· ἔπειτα τὸ τρίτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον· ἔπειτα τὸ τέταρτον τοῦ περιεχομένου τότε εἰς τὸ πρῶτον καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ δεύτερον· τέλος δὲ λαμβάνομεν τὸ πέμπτον τοῦ περιεχομένου τότε ἐν τῷ δευτέρῳ καὶ χύνομεν αὐτὸ εἰς τὸ πρῶτον. Τότε δὲ τὸ πρῶτον ἀγγεῖον εὑρίσκεται περιέχον β ὀκάδας περισσότερον τοῦ δευτέρου. Πόσας ὀκάδας περιεῖχεν ἕκαστον τῶν ἀγγείων κατ' ἀρχάς; $\left(\text{'Απ. } \frac{\alpha+5\beta}{2}, \frac{\alpha-5\beta}{2}\right)$.

3) Ἐὰν αὐξηθῇ κατὰ 2 μέτρα ἡ βάσις ὀρθογωνίου, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ ἐλαττωθῇ κατὰ 3 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἐλαττοῦται κατὰ 41 τετραγωνικὰ μέτρα. Ἐὰν δὲ αὐξηθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ κατὰ τρία μέτρα καὶ ἐλαττωθῇ τὸ ὕψος κατὰ 2, ἡ ἐπιφάνεια αὐξάνει κατὰ 24 τετραγωνικὰ μέτρα. Ζητοῦνται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου. (Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει τόσα τετραγωνικὰ μέτρα, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουσι, πόσα μέτρα ἔχει ἡ βάσις καὶ πόσα τὸ ὕψος). ('Απ. Βάσις 33, ὕψος 32).

4) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ἡ διαφορά, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον νὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3 καὶ 5. ('Απ. 10 καὶ 2).

5) Μίγμα 150 ὀκάδων σίτου καὶ 70 ὀκάδων κριθῆς ἀξίζει 105 δραχμάς. Πόσον ἀξίζει μίγμα 140 ὀκάδων σίτου καὶ 60 ὀκάδων κριθῆς; ('Απ. Μεταξὺ 90 καὶ 98).

6) Ὀπωροπώλης τις ἔχει δύο εἰδῶν μῆλα· ἐὰν πωλήσῃ 4 ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 6 ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους, θὰ λάβῃ 60 λεπτά· πόσα θὰ λάβῃ ἐὰν πωλήσῃ 10 μῆλα ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους καὶ 15 ἐκ τοῦ δευτέρου; ('Απ. 150).

7) Εὑρεῖν τετραψήφιον ἀριθμὸν ἔχοντα τὰς ἑξῆς ἰδιότητας: τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 14· ἐὰν γραφῶσι τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, αὐξάνει ὁ ἀριθμὸς κατὰ 369· τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν μέσων· ἐὰν δὲ τὰ μεσαῖα ψηφία ἀντιμετατεθῶσιν, ἐλαττοῦται ὁ ἀριθμὸς κατὰ 630. ('Απ. 3704).

8) Ὀκτὼ βόες ἔφαγον εἰς 7 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 4 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο· 9 βόες ἔφαγον εἰς 8 ἑβδομάδας τὸ χόρτον 5 στρεμμάτων καὶ ὅσον ἐβλάστησε κατὰ τὸ διάστημα

τοῦτο. Ζητεῖται, πόσοι βόες δύνανται νὰ βοσκήσωσιν ἐπὶ 12 ἑβδομάδας εἰς 6 στρέμματα, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ χόρτου, τὸ ὁποῖον θὰ βλαστήσῃ κατὰ τὸ διάστημα τοῦτο; ('Απ. 8).

9) Ἀπὸ σταθμοῦ τινος σιδηροδρόμου ἀναχωρεῖ ἀτμάμαξα, μὲ ταχύτητα τ· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σταθμοῦ καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ ἀναχωρεῖ μετά τινα χρόνον ἄλλη ἀτμάμαξα, μὲ ταχύτητα τ΄· ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος, ὥστε νὰ φθάσωσιν ἀμφότεραι συγχρόνως εἴς τινα τόπον. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἀτμάμαξα, ἀφοῦ διέτρεξε τὰ δύο τρίτα τῆς ὁδοῦ, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύτητα αὐτῆς εἰς τὸ ἥμισυ τῆς προτέρας καὶ οὕτω συμβαίνει συνάντησις τῶν ἀτμαμαξῶν α χιλιόμετρα πρὸ τοῦ τόπου, εἰς ὃν ἔπρεπε νὰ συναντηθῶσι. Ζητεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως ἀπόστασις τοῦ τόπου.

Ἀπ. Ἂν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸ μῆκος τῆς ὁδοῦ καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσαντα χρόνον, εὑρίσκομεν

$$\chi=3\left(2-\frac{\tau}{\tau'}\right)\alpha, \qquad \psi=3\,\frac{\tau'-\tau}{\tau\tau'}\left(2-\frac{\tau}{\tau'}\right)\alpha.$$

10) Ἵνα ἐκτελέσωσιν ἔργον τι, χρειάζονται οἱ μὲν Α καὶ Β ὁμοῦ γ ὥρας, οἱ δὲ Β καὶ Γ ὁμοῦ α ὥρας, οἱ δὲ Γ καὶ Α ὁμοῦ β ὥρας· πόσας ὥρας χρειάζεται ἕκαστος τούτων διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ πόσας ὅλοι ὁμοῦ;

Ἀπ. Παριστῶντες διὰ τοῦ χ τὰς ὥρας τοῦ πρώτου, διὰ τοῦ ψ τοῦ δευτέρου καὶ διὰ τοῦ ω τοῦ τρίτου, διὰ δὲ τοῦ φ τὰς ὥρας, καθ' ἃς ὅλοι ὁμοῦ θὰ ἐκτελέσωσι τὸ ἔργον, εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\chi}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right), \qquad \frac{1}{\psi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right),$$

$$\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right).$$

11) Γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος α καὶ τοῦ πηλίκου π δύο ἀριθμῶν, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμούς. $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha\pi}{\pi+1},\ \frac{\alpha}{\pi+1}\right).$

12) Τρία βυτία ἴσα καὶ τὴν κατασκευὴν ἐντελῶς ὅμοια, εἶναι πλήρη, τὸ μὲν ὕδατος, τὸ δὲ ἄλλο ἐλαίου, τὸ δὲ τρίτον ἐλαίου καὶ ὕδατος ὁμοῦ· τὸ βάρος τοῦ πρώτου εἶναι α ὀκάδες, τοῦ δευτέρου β καὶ τοῦ τρίτου γ. Νὰ εὑρεθῇ 1) τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ, 2) πόσον ὕδωρ καὶ πόσον ἔλαιον περιέχει τὸ τρίτον.

Ἀπ. Ἐὰν χ παριστᾷ τὸ βάρος ἑκάστου βυτίου κενοῦ, φ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος καὶ ω τὸ τοῦ ἐλαίου καὶ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου, θὰ εἶναι

$$\chi=\frac{\beta-\alpha\varepsilon}{1-\varepsilon},\qquad \varphi=\frac{\gamma-\beta}{1-\varepsilon},\qquad \omega=\frac{(\alpha-\gamma)\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

13) Λέβης συγκείμενος ἐκ χαλκοῦ καὶ σιδήρου ἔχει βάρος 108 χιλιογράμμων, χάνει δὲ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ζυγιζόμενος 13 χιλιόγραμμα. Γνωστὸν δὲ εἶναι, ὅτι ὁ χαλκὸς χάνει ἐν τῷ ὕδατι ζυγιζόμενος τὸ $\frac{1}{9}$ τοῦ βάρους του, ὁ δὲ σίδηρος τὸ $\frac{1}{8}$· ζητεῖται ἐκ πόσου χαλκοῦ καὶ ἐκ πόσου σιδήρου σύγκειται ὁ λέβης οὗτος. ('Απ. σιδήρ. 72 χιλιόγρ., χαλκοῦ 36).

14) Ὁ Α μοὶ ὀφείλει διπλάσια ἢ ὁ Β, ἀλλὰ μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 3 μονάδας μικρότερον· λαμβάνω δὲ ἐξ ἀμφοτέρων τὸ αὐτὸ ποσὸν ὡς τόκον· νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐπιτόκια. ('Απ. 3 καὶ 6).

15) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ βάσις ὀρθογωνίου τινός, ἐλαττωθῇ δὲ τὸ ὕψος κατὰ δύο μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ δὲν βλάπτεται· εὑρεῖν τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου. ('Απ. 4).

16) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις εἴτε διὰ 4 εἴτε δι' 8 διαιρεθῇ, νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 1, τὸ δὲ ἓν πηλίκον νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

17) Δύο ταχυδρόμοι ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο τόπων Α καὶ Β, διευθυνόμενοι πρὸς ἀλλήλους καὶ συναντῶνται μετὰ 5 ὥρας· ἂν ἑκάτερος διέτρεχε καθ' ὥραν 100 μέτρα περισσότερον, θὰ συνηντῶντο μετὰ $4\frac{1}{2}$ ὥρας μόνον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀρχικὴ αὐτῶν ἀπόστασις.

18) Ἡ ἀπόστασις δύο κινητῶν ὁμαλῶς κινουμένων ἦτο τὴν 8 π. μ. 3000 μέτρα, τὴν δὲ 10 ἠλαττώθη εἰς 2400· πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις κατὰ τὴν μεσημβρίαν; καὶ πότε θὰ γίνῃ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν 500 μέτρα;

*Περὶ ἀνισοτήτων.

162. Ὅταν παριστῶμεν διὰ τοῦ σημείου $<$ τὴν ἀνισότητα δύο ἀριθμῶν, λαμβάνομεν παράστασιν, ἥτις καὶ αὐτὴ λέγεται ἀνισότης· ὡς $7>3$, $\frac{3}{5}<2$ λέγονται ἀνισότητες.

Ἡ ἀνισότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν (ἐδ. 44) ἔχει τὴν ἀκόλουθον ἀρχικὴν ἰδιότητα (ἥτις συνάγεται ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῆς).

Ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἀνίσους ὁ αὐτὸς ἀριθμός, ἡ ἀνισότης μένει.

163. Ἂν θέλωμεν νὰ συμπεριλάβωμεν εἰς τὰς ἀνισότητας καὶ τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, νὰ διατηρήσωμεν δὲ τὴν ἀρχικὴν ταύτην ἰδιότητα, δέον νὰ θεωρῶμεν πάντα ἀρνητικὸν ἀριθμὸν ὡς μικρότερον τοῦ 0, καὶ ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν νὰ θεωρῶμεν μεγαλήτερον τὸν ἄνευ σημείου μικρότερον.

Καὶ ὄντως· ἂν εἰς τὴν ἀνισότητα $5 < 8$, προστεθῇ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 8΄ ἢ -8, προκύπτει

$$5-8 < 8-8 \quad \text{ἤτοι} \quad -3 < 0.$$

Καὶ ἂν εἰς τὴν αὐτὴν ἀνισότητα προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς -10, εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, προκύπτει ἡ ἀνισότης $-5 < -2$.

Καὶ γενικῶς πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀνισότητα ὡς ἑξῆς:

Ἀριθμὸς α λέγεται μεγαλήτερος ἄλλου β, ἐὰν ἡ διαφορὰ α—β εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Καὶ ὄντως, ἔστω ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἴση τῷ ϑ· ἂν τότε εἰς τὴν ἀνισότητα $\vartheta > 0$ προστεθῇ, εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη, ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς β, προκύπτει ἡ ἀνισότης $\beta+\vartheta > \beta$ ἤτοι $\alpha > \beta$.

Ἐὰν ὅμως ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἡ ἀντίθετος $\beta-\alpha$ εἶναι θετικὸς καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι τότε $\beta > \alpha$· ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι $\alpha > \beta$ σημαίνει, ὅτι ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

164. Ἐκ τῆς ἀρχικῆς ἰδιότητος ἕπονται ἀμέσως αἱ ἑξῆς:

α΄) Ἐὰν προστεθῶσιν ἄνισοι εἰς ἀνίσους, ἀλλ' ὁ μεγαλήτερος εἰς τὸν μεγαλήτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης μένει.

Ἔστω $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$·

λέγω, ὅτι τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma > \beta+\delta$.

Διότι, ἂν εἶναι $\alpha-\beta=\vartheta$ καὶ $\gamma-\delta=\vartheta'$,

θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma-(\beta+\delta)=\vartheta+\vartheta'$·

ἐπειδὴ δὲ αἱ διαφοραὶ ϑ καὶ ϑ' εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $\vartheta+\vartheta'$ εἶναι θετικόν· ὥστε εἶναι $\alpha+\gamma > \beta+\delta$.

β΄) Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ 0, μένει μὲν ἡ ἀνισότης, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικός, ἀντιστρέφει ὅμως, ἂν εἶναι ἀρνητικός.

Ἔστω $\alpha > \beta$· ἂν εἶναι $\alpha-\beta=\vartheta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\mu-\beta\mu=\vartheta\mu$· καὶ ἂν μὲν ὁ μ εἶναι θετικός, μθ εἶναι ὡσαύτως θετικόν· ὥστε ἔχομεν

$$\alpha\mu > \beta\mu\cdot$$

ἂν δὲ πάλιν εἶναι μ ἀρνητικόν, καὶ ὁ μθ εἶναι ἀρνητικός· ὥστε ἔχομεν

$$\alpha\mu < \beta\mu.$$

Πόρισμα. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος τραπῶσιν εἰς τὰ ἀντίθετα (ἤτοι ἂν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα ἐπὶ -1), ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφει.

Οὕτως, ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5 > -9$, ἕπεται $5 < 9$.

165. Καὶ αἱ ἀνισότητες, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα, δύνανται ἢ νὰ

ἀληθεύωσι διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ἢ μόνον διά τινας (ἢ καὶ δι' οὐδεμίαν)· τότε τὰ γράμματα ταῦτα λέγονται ἄγνωστοι τῆς ἀνισότητος.

Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες (102) καὶ (103) τῶν ἐξισώσεων ἀληθεύουσι καὶ εἰς τὰς ἀνισότητας, ὧν τὰ μέλη ἔχουσι γράμματα ἄγνωστα, καὶ ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον· μόνον ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.

Ἔστω ἡ ἀνισότης $\frac{\chi}{3}+\frac{2\chi}{5}+\frac{\chi-1}{2}>\chi+\frac{2}{3}$.

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 2.3.5, λαμβάνομεν

$$10\chi+12\chi+15\chi-15>30\chi+20\cdot$$

καὶ χωρίζοντες τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἀγνώστων,

$$10\chi+12\chi+15\chi-30\chi>20+15$$

ἢ

$$7\chi>35\cdot$$

καὶ διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ 7 (ἢ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{1}{7}$) εὑρίσκομεν $\chi>5$·

ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει, μόνον ὅταν ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 5.

Ὅταν ἀνισότης ἀχθῇ εἰς τοιαύτην μορφήν, ὥστε τὸ ἓν μέλος αὐτῆς νὰ ἀποτελῆται ὑπὸ μόνου τοῦ ἀγνώστου γράμματος, τὸ δὲ ἄλλο ὑπὸ τῶν γνωστῶν, τότε λέγομεν ὅτι *ἐλύθη* ἡ ἀνισότης.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀνισοτήτων γίνεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καθ' ὃν γίνεται καὶ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων.

Πρόβλημα. Δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦσι συγχρόνως, ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α πρὸς τὴν πόλιν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α· ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου ποικίλλει μεταξὺ 5 καὶ 8 σταδίων καθ' ὥραν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου μεταξὺ 6 καὶ 7· ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι 44 στάδια. Μεταξὺ ποίων ὡρῶν θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις αὐτῶν; καὶ εἰς ποῖον μέρος τῆς ὁδοῦ;

(Ἀπ. Ἡ συνάντησις θὰ συμβῇ μεταξὺ τῆς $2^{\omega\varrho.}$ $56'$ καὶ τῆς $4^{\omega\varrho}$ ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως· θὰ συμβῇ δὲ μεταξὺ τοῦ $18^{\sigma\tau\alpha\delta.}\frac{1}{3}$ καὶ τοῦ $25^{\sigma\tau\alpha\delta}\frac{1}{7}$ ἀπὸ τῆς πόλεως Α).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

166. Ἐξίσωσις περιέχουσα ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος· διότι δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν αὐτοβούλως πάντας τοὺς ἀγνώστους πλὴν ἑνός, ὅστις προσδιορίζεται καὶ οὗτος ἐκ τῆς ἐξισώσεως.

167. Καὶ σύστημα ἐξισώσεων περισσοτέρους ἔχον ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις, ἐπιδέχεται ἐν γένει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· διότι ὁρίζοντες τοὺς περισσεύοντας ἀγνώστους αὐτοβούλως, δυνάμεθα ἐν γένει νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς λοιποὺς ἐκ τοῦ συστήματος.

Ἀλλ' ἂν ἐκ τῶν ἀπειροπληθῶν λύσεων τοιαύτης ἐξισώσεως ἢ συστήματος ζητῆται νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι (ἐν αἷς αἱ τιμαὶ πάντων τῶν ἀγνώστων εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί), τὸ ζήτημα ἀποβαίνει δυσκολώτερον· διότι οἱ περισσεύοντες ἄγνωστοι πρέπει νὰ ὁρίζωνται τότε οὐχὶ αὐτοβούλως, ἀλλ' ἁρμοδίως, ἵνα αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων προκύπτωσιν, εἰ δυνατόν, ἀκέραιαι.

168. **Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις** καλεῖται τὸ μέρος τῆς ἀλγέβρας, ἐν τῷ ὁποίῳ διδάσκεται ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων δεδομένης ἐξισώσεως, περισσοτέρους τοῦ ἑνὸς ἐχούσης ἀγνώστους ἢ καὶ συστήματος ἐξισώσεων, περισσοτέρους ἔχοντος ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις.

Οἱ συντελεσταὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὑποτίθενται ἀκέραιοι ἀριθμοί· (διότι, ἂν εἶναι κλασματικοί, καθιστῶμεν αὐτοὺς ἀκεραίους ἀπαλλάσσοντες τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν).

Ἐνταῦθα θὰ θεωρήσωμεν μόνον μίαν ἐξίσωσιν, περιέχουσαν δύο ἀγνώστους καὶ ἠγμένην εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma,$$

ἔνθα α, β, γ εἶναι γνωστοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί).

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ α,β,γ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δύνανται νὰ ὑποτεθῶσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι, ἂν ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, ἐξαλείφομεν αὐτὸν, διαιροῦντες δι' αὐτοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως.

169. Θεωρημα Α'. *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῶν ἀγνώστων ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν*

Διότι, ἂν οἱ ἀκέραιοι α, β εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ ἀκεραίου δ, οἱουσδήποτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τῶν χ καὶ ψ, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ δ, καὶ ἐπομένως δὲν θὰ εἶναι ἴσον τῷ γ, ὅστις ἐξ ὑποθέσεως δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ δ.

170. Θεωρημα Β'. Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ἔχει ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.

*Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι εἷς τῶν συντελεστῶν, οἷον ὁ α, δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ θετικός· διότι, ἂν δὲν εἶναι, γίνεται, τρεπομένων τῶν σημείων πάντων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως.

Ἐὰν νῦν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν ἄγνωστον χ, οὗτινος ὁ συντελεστὴς ὑποτίθεται θετικὸς ἀριθμός, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}\cdot$$

λέγω δὲ, ὅτι ἐκ τῶν ἑπομένων τιμῶν τοῦ ψ

$$\psi=0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots,(\alpha-1),\qquad (\mu)$$

ὧν τὸ πλῆθος εἶναι α, εὑρίσκεται μία καὶ μία μόνη, πρὸς ἣν ἀντιστοιχεῖ τιμὴ τοῦ χ ἀκεραία.

Ἂς τεθῶσιν αἱ τιμαὶ τοῦ ψ κατὰ σειρὰν εἰς τὴν παράστασιν $\gamma-\beta\psi$ καὶ ἂς διαιρεθῶσιν οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ πάντες διὰ τοῦ α, ἀλλ' οὕτως, ὥστε πάντα τὰ ὑπόλοιπα νὰ εἶναι θετικὰ (γίνεται δὲ τὸ ἀρνητικὸν ὑπόλοιπον θετικόν, ἐὰν εἰς τὸ πηλίκον προστεθῇ μία ἀρνητικὴ μονάς· ἂν π. χ. ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν -9 διὰ 5, θὰ εἶναι πηλίκον -1 καὶ ὑπόλοιπον -4· λαμβάνοντες ὅμως ὡς πηλίκον τὸ -2, θὰ ἔχωμεν ὑπόλοιπον 1· διότι $-9=5.(-2)+1$)· λέγω, ὅτι τῶν διαιρέσεων τούτων τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι πάντα διάφορα ἀπ' ἀλλήλων· διότι, ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι δύο διαιρέσεις δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα, ἔστωσαν δὲ αἱ πρὸς τὰς τιμὰς ψ' καὶ ψ'' τοῦ ψ ἀντιστοιχοῦσαι· τότε, παρισταμένου τοῦ κοινοῦ αὐτῶν ὑπολοίπου διὰ υ καὶ τῶν πηλίκων διὰ π' καὶ π'', θὰ εἶναι

$$\gamma-\beta\psi'=\alpha\pi'+\upsilon$$
$$\gamma-\beta\psi''=\alpha\pi''+\upsilon,$$

ἐκ δὲ τούτων, ἀφαιρουμένων κατὰ μέλη, προκύπτει

$$\beta(\psi''-\psi')=\alpha(\pi'-\pi'')\cdot$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι ὁ ἀριθμὸς α, πρῶτος ὢν πρὸς τὸν β, διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\beta(\psi''-\psi')$· ἑπομένως ὁ α διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $\psi''-\psi'$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον· διότι, ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ ψ', ψ'' εἶναι μικρότεροι τοῦ α· ἄτοπος ἄρα ἦτο ἡ ὑπόθεσις, ὅτι δύο διαιρέσεις ἔδιδον ἴσα ὑπόλοιπα.

Ἐπειδὴ δὲ διαιρέτης εἶναι ὁ α, ἕπεται, ὅτι ὑπόλοιπα τῶν εἰρημένων διαιρέσεων δύνανται νὰ εἶναι μόνον οἱ μικρότεροι αὐτοῦ ἀριθμοὶ

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots, α-1\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἀκριβῶς τόσοι, ὅσαι εἶναι καὶ αἱ διαιρέσεις, καὶ ἑκάστη ἔχει ἴδιον ὑπόλοιπον, συμπεραίνομεν, ὅτι μία τῶν διαιρέσεων τούτων δίδει ὑπόλοιπον 0· ἤτοι πρὸς μίαν τῶν τιμῶν (μ) τοῦ ψ ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ· ὥστε ὑπάρχει τις ἀκεραία λύσις.

171. Θεωρημα Γ΄. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις $αχ+βψ=γ$ ἔχῃ μίαν ἀκεραίαν λύσιν, ἔχει καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος.

Ἔστω $χ=η$, $ψ=θ$ μία ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$αχ+βψ=γ\cdot$$

ἤτοι ἔστω $$αη+βθ=γ.$$

Ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοί, ὁ $αη+βθ$ καὶ ὁ $γ$, θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις ἰσοδύναμος,

ἡ $$α(χ-η)+β(ψ-θ)=0,$$

ἢ $$α(χ-η)=β(θ-ψ). \qquad (ε)$$

Ἵνα εὕρωμεν πάσας τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης, παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ α διαιρεῖ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως· πρέπει ἄρα νὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον (ἂν ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύῃ δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν χ καὶ ψ). Ἐπειδὴ δὲ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β, ἀνάγκη νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $θ-ψ$, ἥτις θὰ εἶναι διὰ τοῦτο πολλαπλάσιόν τι τοῦ α· ὥστε πρέπει νὰ εἶναι

$$θ-ψ=αω, \qquad (1)$$

τοῦ ω ὄντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἐπίσης ὁ β ἀνάγκη νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $χ-η$ ἤτοι ἡ διαφορὰ αὕτη πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ β· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$χ-η=βω', \qquad (2)$$

τοῦ ω΄ ὄντος ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τῶν διαφορῶν (1) καὶ (2) τεθῶσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (ε), προκύπτει $ω'=ω$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (ε) ἐπαληθεύσῃ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, οἱ δύο ἀκέραιοι ω καὶ ω΄ νὰ εἶναι ἴσοι· ὥστε, τοῦ ω ὄντος οἱουδήποτε ἀκεραίου, αἱ ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) παρεχόμεναι τιμαὶ

$$\left.\begin{aligned} χ&=η+βω \\ ψ&=θ-αω \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν (ε)· ἐπίσης δὲ καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $αχ+βψ=γ$, ὡς ἰσοδύναμον τῇ (ε)· ὑπάρχουσιν ἄρα ἄπειροι ἀκέραιαι λύσεις, ἃς δίδουσιν οἱ τύποι (3)· ἀλλά, πλὴν τούτων, οὐδεμία ἄλλη ὑπάρχει.

ΣΗΜ. Ὅτι αἱ τιμαὶ (3) ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, οἱοσδήποτε ἀκέραιος καὶ ἂν ὑποτεθῇ ὁ ω, ἐπιβεβαιοῦται καὶ διὰ τῆς ἀμέσου ἀντικαταστάσεως αὐτῶν εἰς τὴν ἐξίσωσιν· διότι, θέτοντες τὰς τιμὰς (3) τῶν χ καὶ ψ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $αχ+βψ=γ$, εὑρίσκομεν $αη+αβω+βθ-βαω=γ$ ἤτοι $αη+βθ=γ$· ὅπερ εἶναι ταὐτότης· διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ τιμαὶ $χ=η$, $ψ=θ$ λύουσι τὴν ἐξίσωσιν.

172. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν ὅτι ἐκ μιᾶς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $αχ+βψ=γ$ εὑρίσκομεν τύπον περιέχοντα πάσας τὰς λύσεις· πρὸς τοῦτο, αὐξάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ ἀόριστόν τινα ἀκέραιον ω, τὴν δὲ τιμὴν τοῦ ψ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ χ, πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ω.

Ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ ω δύναται νὰ γραφῇ καὶ —ω (διότι ὁ ω εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός), ἕπεται, ὅτι εἶναι ἀδιάφορον, τίς ἐκ τῶν συντελεστῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ω καὶ τίς ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ ω.

Μέθοδοι πρὸς εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $αχ+βψ=γ$

173. Ἡ ἀπόδειξις τῆς ὑπάρξεως ἀκεραίας λύσεως παρέχει καὶ τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως αὐτῆς· καὶ ὄντως, εἴδομεν, ὅτι, ἐὰν ἀντὶ τοῦ ψ τεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 0,1,2,3. . ., α—1, εἰς ἕνα τούτων θὰ ἀντιστοιχῇ τιμὴ τοῦ χ ἀκεραία· μιᾶς δὲ λύσεως ἀκεραίας εὑρεθείσης, εὑρίσκονται ἀμέσως καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαί.

Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις

$$5χ-8ψ=7·$$

λύοντες πρὸς τὸν χ, εὑρίσκομεν

$$χ=\frac{7+8ψ}{5}.$$

εἰξεύρομεν δέ, ὅτι ἐκ τῶν πέντε τιμῶν τοῦ ψ

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,$$

μία καὶ μία μόνη καθιστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἀκεραίαν· δοκιμάζοντες λοιπὸν εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$ψ=1,\qquad χ=3·$$

ὅθεν πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως περιέχονται ἐν τοῖς τύποις

$$χ=3+8ω$$
$$ψ=1+5ω.$$

Αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ ω (καὶ ἡ τιμὴ 0) δίδουσι τιμὰς θετικὰς ἀμφοτέρων τῶν ἀγνώστων, αἱ δὲ ἀρνητικαὶ ἀρνητικάς.

Ἔστω δεύτερον ἡ ἐξίσωσις $91χ-30ψ=19·$

λύοντες πρὸς τὸν ψ (διότι οὗτος ἔχει τὸν μικρότερον συντελεστὴν καὶ διὰ τοῦτο θὰ γίνωσιν ὀλιγώτεραι δοκιμαί), εὑρίσκομεν

$$ψ=\frac{91χ-19}{30}.$$

παρατηρητέον νῦν, ὅτι, ἵνα διαιρῆται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ 30, ἀνάγκη νὰ λήγῃ εἰς 0· ἤτοι ἀνάγκη νὰ λήγῃ ὁ ἀριθμὸς 91χ εἰς 9· ὁ χ ἄρα πρέπει νὰ ἔχῃ μίαν τῶν ἑπομένων τιμῶν 9, 19, 29 καὶ ταύτας μόνον δοκιμάζομεν· οὕτως εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\chi = 19 \qquad \psi = 3 \,.\, 19 = 57,$$

ἐξ ἧς ἐν γένει

$$\chi = 19 + 30\omega$$
$$\psi = 57 + 91\omega.$$

Ἔστω τέλος ἡ ἐξίσωσις $7\chi + 13\psi = 75$· λύοντες πρὸς τὸν χ, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{75 - 13\psi}{7}\cdot$$

καὶ δοκιμάζοντες τὰς τιμὰς $\psi = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, εὑρίσκομεν τὴν λύσιν

$$\psi = 2, \quad \chi = 7\cdot$$

ἐξ ἧς καὶ τὴν γενικὴν λύσιν

$$\chi = 7 - 13\omega$$
$$\psi = 2 + 7\omega\cdot$$

πλὴν τῆς εὑρεθείσης λύσεως, (ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\omega = 0$), πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἔχουσιν ἕνα ἀρνητικὸν καὶ ἕνα θετικὸν ἀριθμόν.

*174. Ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι μεγάλοι ἀριθμοί, ἡ μέθοδος αὕτη ἀποβαίνει ἐπίπονος· τότε μεταχειριζόμεθα τὴν ἑπομένην μέθοδον, διὰ τῆς ὁποίας καὶ ἡ ὕπαρξις ἀκεραίας τινὸς λύσεως γίνεται καταφανής.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$, τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ α, β ὑποτίθενται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν ὁ β εἶναι μεγαλήτερος, ἂς διαιρεθῇ διὰ τοῦ α· ἔστω δὲ π τὸ πηλίκον καὶ β' τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως· τότε θὰ εἶναι

$$\beta = \alpha\pi + \beta'\cdot$$

ὅθεν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\alpha\chi + (\alpha\pi + \beta')\psi = \gamma$$

ἢ

$$\alpha(\chi + \pi\psi) + \beta'\psi = \gamma\cdot$$

καὶ ἂν τεθῇ $\chi + \pi\psi = \chi'$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha\chi' + \beta'\psi = \gamma,$$

ἔνθα χ' εἶναι νέος τις ἄγνωστος, συνδεόμενος πρὸς τοὺς χ, ψ διὰ τῆς ἰσότητος $\chi' = \chi + \pi\psi$ ἢ $\chi = \chi' - \pi\psi$.

Ἐὰν τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρεθῇ ἀκεραία τις λύσις, εὑρίσκεται ἀμέσως ἄλλη τῆς δοθείσης· διότι, εὑρεθέντων τῶν χ' καὶ ψ, εὑρίσκεται καὶ ὁ χ ἐκ τῆς ἰσότητος $\chi = \chi' - \pi\psi$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων ἄλλης, ἡ ὁποία ἔχει συντελεστὰς τὸν μικρότερον τῶν συντελεστῶν τῆς δοθείσης καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μεγαλητέρου συντελεστοῦ διὰ τοῦ μικροτέρου· ἀλλ' ὁμοίως ἀνάγεται καὶ αὐτῆς ἡ λύσις εἰς ἄλλην· καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γινόμεναι διαιρέσεις εἶναι αἱ διαιρέσεις, δι' ὧν εὑρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν συντελεστῶν α καὶ β, οὗτοι δὲ ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἕπεται, ὅτι θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τέλους ὑπόλοιπόν τι ἴσον τῷ μεγίστῳ κοινῷ διαιρέτῃ 1 καὶ θὰ φθάσωμεν οὕτως εἰς ἐξίσωσιν, ἐν ᾗ ὁ ἕτερος τῶν ἀγνώστων θὰ ἔχῃ συντελεστὴν τὴν μονάδα 1 ἤτοι ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\chi_1+\varrho\psi_1=\gamma,$$

χ_1 καὶ ψ_1 ὄντων τῶν ἀγνώστων.

Ἀλλὰ τῆς τοιαύτης ἐξισώσεως εὑρίσκεται ἀμέσως ἀκεραία τις λύσις· διότι, ἂν τεθῇ $\psi_1=0$, ἕπεται $\chi_1=\gamma$ (καὶ γενικῶς, ἂν τεθῇ $\psi_1=A$, ἕπεται $\chi_1=\gamma-A\varrho$, τοῦ A ὄντος ἀκεραίου)· ἐπομένως εὑρίσκεται ἐξ αὐτῆς ἀκεραία τις λύσις καὶ ἑκάστης τῶν προηγουμένων, ἄρα καὶ τῆς δοθείσης.

Ὡς παράδειγμα ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$31\chi+68\psi=121$$

ἐπειδὴ εἶναι $68=2.31+6$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$31(\chi+2\psi)+6\psi=121\cdot$$

καὶ ἂν θέσωμεν $\chi+2\psi=\chi',$

ἕπεται $31\chi'+6\psi=121\cdot$

ἐπειδὴ δὲ πάλιν εἶναι $31=5.6+1$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται

$$6(\psi+5\chi')+\chi'=121\cdot$$

καὶ ἂν τεθῇ $\psi+5\chi'=\psi'$, ἕπεται

$$6\psi'+\chi'=121\cdot$$

ὅθεν εὑρίσκεται ἡ λύσις

$$\psi'=20, \qquad \chi'=1,$$

ἐξ ἧς, δυνάμει τῶν τεθεισῶν ἰσοτήτων, εὑρίσκομεν

$$\psi=15 \quad \text{καὶ} \quad \chi=-29\cdot$$

ὅθεν ἕπεται καὶ ἡ γενικὴ λύσις

$$\chi=-29+68\omega$$
$$\psi=15-31\omega.$$

*Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$

175. Δυνατὸν νὰ ζητηθῶσιν ἐκ τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἐκεῖναι, ἐν αἷς αἱ τιμαὶ ἀμφοτέρων τῶν ἀγνώστων εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί. Πρὸς εὕρεσιν τούτων, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ὁμοειδεῖς ἢ ἑτεροειδεῖς.

Ἔστωσαν πρότερον ὁμοειδεῖς· ἐπειδὴ ὁ α ὑπετέθη θετικός, καὶ ὁ β εἶναι θετικός· ἐὰν νῦν ὁ γ εἶναι ἀρνητικός, οὐδεμία προφανῶς ὑπάρχει θετικὴ λύσις· ἀνάγκη ἄρα νὰ εἶναι καὶ ὁ γ θετικός.

Τούτων τεθέντων, ἔστω $\chi=\eta$, $\psi=\vartheta$ ἡ διὰ τοῦ πρώτου τρόπου εὑρισκομένη ἀκεραία λύσις, ἐν ᾗ ἑπομένως εἶναι ὁ θ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τοῦ α· τότε πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις περιέχονται ἐν τοῖς τύποις

$$\chi=\eta-\beta\omega$$
$$\psi=\vartheta+\alpha\omega.$$

Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ ω καθιστῶσι τὸν ψ ἀρνητικόν· διότι, ἂν τεθῇ $\omega=-1,-2,-3,-4,\ldots$, προκύπτει

$$\psi=\vartheta-\alpha,\ \vartheta-2\alpha,\ \vartheta-3\alpha,\ldots,\ \text{ἅτινα}$$

πάντα εἶναι ἀρνητικά, διότι ὁ θ εἶναι μικρότερος τοῦ α.

Αἱ δὲ θετικαὶ πᾶσαι (καὶ ἡ 0) καθιστῶσιν αὐτὸν θετικόν· διότι αἱ τιμαὶ $\omega=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$
δίδουσιν $\psi=\vartheta,\ \vartheta+\alpha,\ \vartheta+2\alpha,\ldots$·
ἀλλ' ἵνα καὶ ὁ χ ἀποβῇ θετικὸς διὰ τὰς τιμὰς $\omega=0, 1, 2, 3,\ldots$, δέον νὰ εἶναι ὁ η θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τοῦ ἀφαιρουμένου ὅρου $\beta.\omega$· ὥστε (τοῦ η ὄντος θετικοῦ) πρέπει νὰ εἶναι $\eta>\beta\omega$ ἤτοι

$$\frac{\eta}{\beta}>\omega.$$

Ὅθεν ὁ ω δύναται νὰ λάβῃ τὰς τιμὰς 0, 1, 2,.. μέχρι τοῦ μεγίστου θετικοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\eta}{\beta}$ περιεχομένου καὶ ἂν ὁ μέγιστος οὗτος ἀκέραιος παρασταθῇ διὰ τοῦ μ, αἱ τιμαί, ἃς δύναται νὰ λάβῃ ὁ ω, εἶναι $0, 1, 2, 3, 4,\ldots, \mu$· καὶ ἑπομένως τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως εἶναι τότε $\mu+1$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha\eta+\beta\vartheta=\gamma$ (διότι $\chi=\eta$, $\psi=\vartheta$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$), ἕπεται, ἂν διαιρέσωμεν πάντας τοὺς ὅρους διὰ αβ,

$$\frac{\eta}{\beta}+\frac{\vartheta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha\beta}. \qquad (\iota)$$

Ἔστω μ ὁ μέγιστος θετικὸς ἀκέραιος, ὁ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\eta}{\beta}$ περιεχόμενος· τότε θὰ εἶναι $\frac{\eta}{\beta}=\mu+\varphi$ (τοῦ φ ὄντος μικροτέρου τῆς μονάδος 1) καὶ ἡ ἰσότης (ι) γίνεται $\mu+\varphi+\frac{\vartheta}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ θὰ περιέχῃ μέγιστον ἀκέραιον ἢ τὸν μ ἢ τὸν $\mu+1$ (τὸν μ, ἂν τὸ ἄθροισμα $\varphi+\frac{\vartheta}{\alpha}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, τὸν δὲ $\mu+1$, ἂν μεγαλήτερον)· μεγαλήτερον ὅμως ἀκέραιον δὲν δύναται νὰ περιέχῃ, διότι οἱ δύο ἀριθμοὶ φ καὶ $\frac{\vartheta}{\alpha}$ εἶναι ἀμφότεροι μικρότεροι τῆς μονάδος (διότι $\vartheta<\alpha$) καὶ δὲν δύνανται ν' ἀποτελέσωσι τὸν 2.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ὅπου α καὶ β εἶναι ἀμφότεροι θετικοί ἐκφράζεται ἡ ὑπὸ τοῦ μεγίστου θετικοῦ ἀκεραίου τοῦ ἐν τῷ κλάσματι $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ περιεχομένου (ἂν περιέχηται ὁ $\mu+1$), ἢ ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου ηὐξημένου κατὰ μονάδα (ἂν περιέχηται ὁ μ).

Ἔστωσαν νῦν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β ἑτεροειδεῖς ἤτοι ὁ α θετικὸς καὶ ὁ β ἀρνητικός· ἐὰν καὶ πάλιν λάβωμεν τὴν αὐτὴν λύσιν $\chi=\eta$, $\psi=\vartheta$, ἔχομεν τοὺς αὐτοὺς τύπους τῆς γενικῆς λύσεως

$$\chi=\eta-\beta\omega$$
$$\psi=\vartheta+\alpha\omega.$$

Αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ ω καθιστῶσι καὶ πάλιν τὸν ψ ἀρνητικὸν (διότι δίδουσι $\psi=\vartheta-\alpha$, $\vartheta-2\alpha$, $\vartheta-3\alpha$..), αἱ δὲ θετικαὶ (καὶ ἡ 0) καθιστῶσιν αὐτὸν θετικὸν (διότι δίδουσι $\psi=\vartheta$, $\vartheta+\alpha$, $\vartheta+2\alpha,\ldots$).

Ὡς πρὸς τὸν χ παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν μὲν εἶναι ὁ η θετικός, αἱ τιμαὶ $\omega=0, 1, 2,\ldots$ δίδουσι θετικὰς τιμὰς τοῦ χ, $\chi=\eta$, $\eta-\beta$, $\eta-2\beta,\ldots$ (διότι ὁ β εἶναι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἀρνητικός· ἄρα ὁ $-\beta$ θετικός), ἂν δὲ ὁ η εἶναι ἀρνητικός, αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ ω, αἱ ὑπερβαίνουσαι τὸ κλάσμα $\frac{\eta}{\beta}$, καθιστῶσι τὸν χ θετικόν.

Διότι ἡ τιμὴ τοῦ χ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\chi=\beta\left(\frac{\eta}{\beta}-\omega\right)\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ παράγων β εἶναι ἀρνητικός, διὰ νὰ εἶναι θετικὸν τὸ γινόμενον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι καὶ ὁ ἄλλος παράγων ἀρνητικός· ἤτοι νὰ εἶναι $\omega > \frac{\eta}{\beta}$.

ὥστε, ὅταν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$ εἶναι ἑτεροειδεῖς, ἡ ἐξίσωσις ἐπιδέχεται πλῆθος ἄπειρον θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων.

Προβλήματα.

1) Εὑρεῖν κλάσμα τοιοῦτον, ὥστε, ἂν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ 3 καὶ ὁ παρονομαστὴς κατὰ 4, νὰ γίνηται τὸ κλάσμα ἴσον τῷ $\frac{2}{3}$.

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παρασταθῇ ὁ παρονομαστὴς καὶ διὰ τοῦ ψ ὁ ἀριθμητὴς θὰ εἶναι

$$\frac{\psi+3}{\chi+4} = \frac{2}{3}.$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $3\psi - 2\chi = -1$, ἥτις ἐπιδέχεται τὰς ἀκεραίας λύσεις

$$\chi = 2 + 3\omega$$
$$\psi = 1 + 2\omega.$$

Εἶναι δὲ πᾶσαι αὗται θετικαί, ἐὰν ω εἶναι ἢ 0 ἢ θετικόν, ὥστε ὑπάρχουσιν ἄπειρα τοιαῦτα κλάσματα καὶ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\frac{1+2\omega}{2+3\omega} \quad \text{ἔνθα} \quad \omega = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

ΣΗΜ. Τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{\psi+3}{\chi+4} = \frac{2}{3}$$

εὑρίσκομεν ἁπλούστατα, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, ὅτι, ὅταν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα καὶ τὸ ἕτερον αὐτῶν εἶναι ἀνάγωγον $\left(\text{ὡς τὸ } \frac{2}{3}\right)$, οἱ ὅροι τοῦ ἄλλου εἶναι γινόμενα τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου ἐπί τινα ἀκέραιον ἀριθμόν· ἵνα ἀληθεύσῃ λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις, ἀνάγκη νὰ εἶναι

$$\psi + 3 = 2\varphi$$
$$\text{καὶ} \quad \chi + 4 = 3\varphi.$$

Ὅθεν ἕπεται ἡ λύσις $\chi = 3\varphi - 4$ καὶ $\psi = 2\varphi - 3$, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ προηγουμένως εὑρεθεῖσα, ἂν τεθῇ $\varphi = \omega + 2$ (διότι ὁ φ εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος, ὡς καὶ ὁ ω). Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν καὶ γενικῶς τὰς λύσεις πάσης ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$\frac{\psi - \vartheta}{\chi - \eta} = \frac{\alpha}{\beta},$$

αἵτινες εἶναι $\chi = \eta + \beta\omega$
$\psi = \vartheta + \alpha\omega$.

2) Ἔμπορος ἠγόρασεν ἵππους καὶ βόας ἀντὶ 1770 ταλλήρων· ἐπλήρωσε δὲ δι' ἕκαστον μὲν ἵππον 31 τάλληρα, δι' ἕκαστον δὲ βοῦν 21. Πόσους ἵππους καὶ πόσους βόας ἠγόρασεν;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν ἵππων καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν βοῶν, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$31\chi + 21\psi = 1770,$$

ἧς τινος αἱ ἀκέραιαι λύσεις περιέχονται πᾶσαι εἰς τοὺς τύπους

$$\chi = 9 + 21\omega \qquad \psi = 71 - 31\omega.$$

Ἐκ δὲ τούτων, θετικαὶ εἶναι μόνον αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega = 0, \omega = 1, \omega = 2$ ἀντιστοιχοῦσαι· ἤτοι

$$\begin{matrix} \chi = 9 \\ \psi = 71 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = 30 \\ \psi = 40 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = 51 \\ \psi = 9. \end{matrix}$$

3) Πρόκειται νὰ πληρωθῶσι 43 δραχμαὶ διὰ διδράχμων καὶ πενταδράχμων· πόσα ἐξ ἑκάστου εἴδους πρέπει νὰ δοθῶσι;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν διδράχμων καὶ διὰ τοῦ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν πενταδράχμων, θὰ εἶναι

$$2\chi + 5\psi = 43.$$

Αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης περιέχονται εἰς τοὺς τύπους

$$\chi = 19 - 5\omega$$
$$\psi = 1 + 2\omega.$$

Ἐκ τούτων εἶναι θετικαὶ αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega = 0, 1, 2, 3$ ἀντιστοιχοῦσαι· ὥστε εἶναι

$$\text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = 19 \\ \psi = 1 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = 14 \\ \psi = 3 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = 9 \\ \psi = 5 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = 4 \\ \psi = 7. \end{matrix}$$

4) Βοσκός τις θέλει μὲ 40 λίρας νὰ ἀγοράσῃ 40 ζῷα, τριῶν εἰδῶν· ἀρνία, πρόβατα καὶ κριούς· πωλεῖται δὲ ἕκαστον ἀρνίον ἡμίσειαν λίραν, ἕκαστον πρόβατον δύο καὶ ἕκαστος κριὸς τέσσαρας λίρας. Πόσα θὰ ἀγοράσῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

Ἔστωσαν χ οἱ κριοί, ψ τὰ πρόβατα καὶ φ τὰ ἀρνία· τότε εἶναι

$$\chi + \psi + \varphi = 40$$

καὶ $$4\chi + 2\psi + \frac{\varphi}{2} = 40\cdot$$

ἐξ ὧν, ἀπαλείφοντες τὸν φ, εὑρίσκομεν $7\chi + 3\psi = 40$

Ἐπιδέχεται δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη τὰς ἀκεραίας λύσεις

$$\chi = 1 + 3\omega$$
$$\psi = 11 - 7\omega,$$

ἐξ ὧν θετικαὶ εἶναι αἱ πρὸς τὰς τιμὰς $\omega=0$, $\omega=1$ ἀντιστοιχοῦσαι· ἤτοι

ἢ $\chi=1$, $\psi=11$ καὶ ἑπομένως $\varphi=28$·
ἢ $\chi=4$, $\psi=4$ » » $\varphi=32$.

5) Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων αὐτοῦ, προσλαβὸν καὶ τὸν 8, νὰ γίνηται ἴσον πρὸς τὸ πέμπτον τῆς διαφορᾶς τοῦ 66 καὶ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ χ τὰς δεκάδας καὶ διὰ τοῦ ψ τὰς μονάδας, θὰ εἶναι $$2\chi+8=\frac{66-\psi}{5}$$

ἢ $10\chi+40=66-\psi$, ὅθεν $10\chi+\psi=26$·

πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἄγνωστοι χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι

$\chi=0$, $\psi=26$·
$\chi=1$, $\psi=16$·
$\chi=2$, $\psi=6$.

Ἐκ δὲ τούτων ἡ τελευταία μόνη πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς πάντας· ὥστε ἡ μόνη λύσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς 26.

6) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ 25πλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων προσλαβὸν καὶ τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων καὶ τὸν 156, νὰ γίνηται ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ 1560, ἀφοῦ ἐλαττωθῇ οὗτος κατὰ τὸ διπλάσιον τῶν δεκάδων καὶ κατὰ τὰς μονάδας.

Ἔστωσαν χ αἱ ἑκατοντάδες, ψ αἱ δεκάδες καὶ ω αἱ μονάδες τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ.

Κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶναι

$$25\chi+2\psi+156=\frac{1560-2\psi-\omega}{4}$$

ἢ $$100\chi+8\psi+624=1560-2\psi-\omega\cdot$$
ὅθεν $$100\chi+10\psi+\omega=936\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἄγνωστοι χ, ψ, ω πάντες ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Γράφοντες τὴν ἐξίσωσιν ὡς ἕπεται

$$100(\chi-9)+10(\psi-3)+(\omega-6)=0,$$

βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι ἡ μόνη λύσις, ἡ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος πληροῦσα εἶναι $\chi=9$, $\psi=3$, $\omega=6$· ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 936.

7) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ εἰκοσαπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, προσλαβόντα καὶ τὴν μονάδα 1, νὰ ἰσῶνται πρὸς τὸ πέμπτον τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$20\chi+\psi+1=\frac{100\chi+10\psi+\omega}{5},$$

διότι ὁ ἀριθμὸς ἔχει μονάδας τὸ ὅλον $100\chi+10\psi+\omega$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται

$$\omega+5\psi=5\cdot$$

αἱ δὲ λύσεις αὐτῆς, αἱ εἰς τὸ πρόβλημα ἁρμόζουσαι, εἶναι

$$\omega=0,\quad \psi=1\cdot$$
$$\omega=5,\quad \psi=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ χ δὲν ὡρίσθη, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἑπομένων

110 210 310 410 510 610 710 810 910
105 205 305 405 505 605 705 805 905·

διότι πάντες οὗτοι πληροῦσι τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

8) Εὑρεῖν ἀριθμὸν διψήφιον, ὅστις ἀντιστρεφόμενος γίνεται ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ ἑαυτοῦ.

Ἐὰν χ εἶναι αἱ δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ψ αἱ μονάδες αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ μονάδας τὸ ὅλον $10\chi+\psi$ ἀντιστρεφόμενος δὲ θὰ ἔχῃ μονάδας τὸ ὅλον $10\psi+\chi$· ὥστε θὰ εἶναι

$$10\psi+\chi=\frac{4}{7}(10\chi+\psi).$$

Ὅθεν προκύπτει $\quad 66\psi=33\chi$

ἢ $\quad 2\psi=\chi\cdot$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἄγνωστοι χ, ψ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 10.

Αἱ λύσεις τοῦ προβλήματος εὑρίσκονται εὐκόλως ἐκ τῆς ἐξισώσεως καὶ εἶναι

ἢ $\psi=1$ καὶ $\chi=2$,
ἢ $\psi=2$ » $\chi=4$,
ἢ $\psi=3$ » $\chi=6$,
ἢ $\psi=4$ » $\chi=8\cdot$

ὥστε οἱ λύοντες τὸ πρόβλημα ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 21, 42, 63, 84.

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

1) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ 5 δίδει ὑπόλοιπον 3, δι' 7 ὑπόλοιπον 2 καὶ διὰ 11 ὑπόλοιπον 1. ('Απ. $\chi = 23 + 385\omega$).

2) Νὰ διαιρεθῇ ὁ 150 εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ μὲν εἶναι διαιρετὸν δι' 7, τὸ δὲ διὰ 23. ('Απ. 35 καὶ 115).

3) Εἰς ἑορτὴν ἐδαπάνησαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες δραχμὰς 200· εἶναι δὲ γνωστόν, ὅτι ἑκάστη γυνὴ ἐδαπάνησε δραχμὰς 9, ἕκαστος δὲ ἀνὴρ 11. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

('Απ. $\alpha = 1$ καὶ $\gamma = 21$ ἢ $\alpha = 10$ καὶ $\gamma = 10$).

4) Εἰς ἑορτὴν ἐδαπάνησαν 30 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία, 30 τάλληρα· καὶ τῶν μὲν ἀνδρῶν ἐδαπάνησεν ἕκαστος 3 τάλληρα, τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστη $2\frac{1}{2}$, τῶν δὲ παιδίων $\frac{1}{2}$· ζητεῖται πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα τὰ παιδία. ('Απ. 6, 0, 24 ἢ 2, 5, 23).

5) Πρόκειται ἐξ 100 νομισμάτων, πενταδράχμων, διδράχμων καὶ ἀργυρῶν κερμάτων τῶν 20 λεπτῶν, νὰ σχηματισθῇ τὸ ποσὸν 100 δραχμῶν· πόσα πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους;

6) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος διὰ τοῦ 7 νὰ δίδῃ πηλίκον ὅσον καὶ ὑπόλοιπον. ('Απ. 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48).

7) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, εἴτε διὰ 7, εἴτε διὰ 11 διαιρεθῇ, νὰ δίδῃ πηλίκα ἴσα μὲ τὰ ὑπόλοιπα. ('Απ. 0, 24, 48).

8) Ἄνθρωπός τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μοιρασθῶσιν αἱ κάμηλοί του εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς. Ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ αὐτῶν, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{9}$. Ὁ ἀριθμὸς τῶν καμήλων δὲν διῃρεῖτο διὰ τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 9, ὥστε ἡ διανομὴ ἦτο ἀδύνατος· ἀλλ' ὁ καδῆς, ἵνα κατορθωθῇ ἡ διανομή, ἐδώρησεν εἰς τὰ ὀρφανὰ ἀριθμόν τινα καμήλων καὶ τότε ὄχι μόνον ἔγινεν ἡ διανομὴ συμφώνως πρὸς τὴν διαθήκην, ἀλλ' ἔμειναν καὶ ὡς περίσσευμα αἱ κάμηλοι τοῦ καδῆ, ἃς οὗτος ἔλαβε πάλιν ὀπίσω. Ζητεῖται πόσαι ἦσαν αἱ κάμηλοι καὶ πόσας ἐδώρησεν ὁ καδῆς.

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς χ σημαίνῃ τὰς καμήλους τῶν ὀρφανῶν καὶ ὁ ψ τὰς τοῦ καδῆ, εὑρίσκομεν $\chi = 17\psi$·
ὥστε τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος.

9) Εὑρεῖν ἀριθμὸν τριψήφιον, ὅστις ἀντιστρεφόμενος γίνεται ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ ἑαυτοῦ. ('Απ. 231, 462, 693).

10) Εὑρεῖν ἀκέραιον ἀριθμὸν διψήφιον, ὅστις ἀντιστρεφόμενος ἐλαττοῦται κατὰ 81.

Γ γ Γ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

176. Τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν) εἶναι μὲν τέλειον κατὰ τὰς τέσσαρας στοιχειώδεις πράξεις, ὥστε λύονται ἐν αὐτῷ πάντα τὰ εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ἄγοντα ζητήματα· φαίνεται ὅμως ἐλλιπὲς καὶ τοῦτο, ὅταν, μένοντες ἐν αὐτῷ, ἐπιχειρήσωμεν τὴν λύσιν ἀνωτέρων ζητημάτων, οἷα εἶναι τὰ ἑπόμενα.

Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον τῷ 2· ἢ εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ ὁ κύβος νὰ εἶναι ἴσος τῷ 4 καὶ τὰ λοιπά, ἅτινα ὑπὸ οὐδενὸς τῶν εἰρημένων ἀριθμῶν λύονται.

Ὅτι π. χ. οὐδεὶς ἀκέραιος ἔχει τετράγωνον τὸν 2 εἶναι προφανές· ἀλλ' οὐδὲ κλασματικός· διότι, ἂς ὑποτεθῇ τοιοῦτος ὁ $\frac{\mu}{\nu}$, ἔστω δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ ἀνάγωγον· τότε θὰ εἶναι

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=2 \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu^2}{\nu^2}=2.$$

Ὅθεν ἕπεται μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μ καὶ ν ἡ ἰσότης

$$\mu^2=2\nu^2.$$

Ἀλλ' ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐπαληθεύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην δὲν ὑπάρχουσι· καὶ ὄντως, ὁ ἀριθμὸς μ πρέπει νὰ εἶναι ἄρτιος (διότι τὰ τετράγωνα τῶν ἀρτίων εἶναι ἄρτια καὶ τῶν περιττῶν περιττά)· δύναται λοιπὸν νὰ τεθῇ $\mu=2\mu'$, τοῦ μ' ὄντος ἄλλου ἀκεραίου· τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$4\mu'^2=2\nu^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \nu^2=2\mu'^2.$$

ὥστε καὶ ὁ ν εἶναι ἄρτιος· τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον· διότι τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον. Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι οὐδεὶς ἐκ τῶν ἀριθμῶν οὓς ἔχομεν, ἔχει τετράγωνον τὸν 2.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ 10 οὐδενὸς ἀριθμοῦ (ἐξ ὅσων ἔχομεν) εἶναι τετράγωνον, οὐδὲ κύβος, οὐδὲ δύναμις οἱασδήποτε τάξεως.

Ἀλλὰ καὶ ἡ μέτρησις τῶν γραμμῶν καὶ ἑπομένως ἡ ἐφαρμογὴ τῆς ἀριθμητικῆς εἰς τὴν γεωμετρίαν καὶ ἐν γένει ἡ καταμέτρησις τῶν συνεχῶν λεγομένων ποσῶν εἶναι ἀδύνατος (ὡς ἐν τῇ γεωμετρίᾳ ἀποδεικνύεται), ἐὰν μένωμεν περιωρισμένοι εἰς τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

177. Τὰ ζητήματα ταῦτα καὶ τὰ τούτοις ὅμοια, ἢ πρέπει νὰ θεωρήσωμεν ἄλυτα καὶ νὰ περιορίσωμεν τὴν ἀριθμητικὴν εἰς τὰ ἁπλούστερα ζητήματα, τὰ διὰ τῶν τεσσάρων πράξεων λυόμενα, ἤ, ἵνα ἄρωμεν καὶ τὸ ἐμπόδιον τοῦτο τῆς προόδου τῆς ἀριθμητικῆς, πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν διὰ τῆς προσαρτήσεως νέων ἀριθμῶν καὶ τοιούτων, ὥστε νὰ λύωνται καὶ τὰ ῥηθέντα ζητήματα, νὰ διατηρῶνται δέ, ὡς πάντοτε, οἱ νόμοι τῶν πράξεων ἀβλαβεῖς.

178. Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν νέων τούτων ἀριθμῶν ὁδηγεῖ ἡμᾶς ἡ παρατήρησις, ὅτι, ἐὰν ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν δεκαδικῶν μονάδων $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$ θέλωμεν νὰ ἀποτελέσωμεν πάντας τοὺς ἀριθμούς, τὰ πλεῖστα τῶν κλασμάτων ἀπαιτοῦσιν, ἵνα ἀποτελεσθῶσιν, ἄπειρον πλῆθος τοιούτων μονάδων· οὕτω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$ γίνεται 0,4 καὶ τὸ $\frac{8}{25}$ γίνεται 0,32· ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{3}$ δὲν δύναται ἄλλως νὰ ἀποτελεσθῇ ὑπὸ δεκαδικῶν μονάδων ἢ ὑπὸ τῶν ἑπομένων ἀπείρων τὸ πλῆθος 0,33333 . . . · ὡσαύτως τὸ $\frac{5}{33}$ ἀποτελεῖται μόνον ὑπὸ τῶν ἑπομένων 0,1515151515 . ., ἐὰν αἱ ἄπειροι αὗται μονάδες νοηθῶσιν ὡς ἓν ὅλον ἀποτελοῦσαι.

Τὰ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία τὰ οὕτω προκύπτοντα ἐπαναλαμβάνονται (ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς) ἀπαύστως τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Ἀλλ' ἂν ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες θεωρηθῶσιν ὅτι συναποτελοῦσιν ἀριθμόν, ὅταν τὰ ψηφία, δι' ὧν γράφονται, ἔχωσι τὴν εἰρημένην τάξιν, διατὶ νὰ μὴ συμβαίνῃ τὸ αὐτό, καὶ ὅταν τὰ ψηφία, δι' ὧν γράφονται αἱ μονάδες, εἶναι οἱαιδήποτε;

Εὐνόητον ἀποβαίνει ἐκ τούτων, ὅτι δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἀριθμὸν τὸ πλῆθος οἱωνδήποτε δεκαδικῶν μονάδων, δι' οἱωνδήποτε ψηφίων καὶ ἂν γράφωνται αὗται.

Οἷον, τὰ ἑξῆς πλήθη τῶν δεκαδικῶν μονάδων

0, 10 100 1000 10000....
0, 2 4 8 16 32 64 128....
0, 51 511 5111 51111....
12, 389 3890 38900 389000....
4, 25 50 75 100 125 150....
0, 12 13 14 15 16 17 18 19 20....

δύνανται νὰ θεωρηθῶσιν ὡς ἀριθμοὶ ὡρισμένοι, διότι τὰ ψηφία αὐτῶν εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα (ὁ νόμος, καθ' ὃν προχωροῦσι τὰ ψηφία ἑκάστου εἶναι προφανής).

'Αλλ' ἂν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν μονάδων δεχώμεθα ὡς ἀριθμόν, οὐδὲν κωλύει νὰ δεχθῶμεν ὡς ἀριθμὸν καὶ πλῆθος ἄπειρον οἱωνδήποτε μονάδων ὁμοειδῶν (θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν)· τοιουτοτρόπως φθάνομεν εἰς τὸν ἑξῆς γενικὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁρισμός.

179. 'Αριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον ὁμοειδῶν μονάδων, εἴτε πεπερασμένον εἶναι τὸ πλῆθος αὐτῶν εἴτε καὶ ἄπειρον, ἐάν, ὁσαιδήποτε ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἂν προστεθῶσι, πάντοτε δίδωσιν ἄθροισμα μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς.

Ὁ περιορισμὸς οὗτος εἶναι ἀναγκαῖος διὰ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὸ πλῆθος τῶν μονάδων εἶναι ἄπειρον· διότι παντὸς ἀριθμοῦ πρέπει νὰ ὑπάρχῃ ἄλλος μεγαλήτερος.

Ὁ ἀριθμὸς εἶναι ὡρισμένος, ὅταν εἶναι ὡρισμέναι αἱ συναποτελοῦσαι αὐτὸν μονάδες· π. χ. ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς

$$1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^{10}}+\frac{1}{10^{100}}+\frac{1}{10^{1000}}+\frac{1}{10^{10000}}\dots\dots$$

εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένα.

ΣΗΜ. Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ νοηθῇ ὡς συγκείμενος ἐκ δεκαδικῶν μονάδων· διότι ἑκάστη τῶν ἄλλων ἀποτελεῖται ὑπὸ πλήθους τινὸς δεκαδικῶν μονάδων.

Ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

180. Μεγαλήτερος λέγεται ἀριθμὸς ἄλλου ἀριθμοῦ, ἐὰν ἔχῃ πάσας τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἄλλας προσέτι.

181. Ἴσοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν πᾶς ἀριθμός, ἀκέραιος ἢ κλασματικός, μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου.

Ἔστωσαν, ὡς παράδειγμα, οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,99999. . . πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ πρώτου εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ δευτέρου· διότι ἔστω ὁ μικρότερος τῆς μονάδος ἀριθμὸς $\frac{538}{539}$· οὗτος εἶναι μικρότερος τοῦ $\frac{999}{1000}$ (διότι ὁ $\frac{999}{1000}$ διαφέρει ἀπὸ τῆς μονάδος κατὰ ἓν χιλιοστὸν $\left(\frac{1}{1000}\right)$, ἐνῷ ὁ $\frac{538}{539}$ διαφέρει αὐτῆς κατὰ $\frac{1}{539}$ ἤτοι περισσότερον)· ἄρα ὁ $\frac{538}{539}$, ὡς μικρότερος τοῦ 0,999, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ 0,999999. .

Ἀλλὰ καὶ πᾶς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 0,99999. ., εἶναι καὶ τῆς μονάδος μικρότερος· διότι ὁσαδήποτε ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 0,99999. . . καὶ ἂν λάβωμεν, πάντοτε εὑρίσκομεν ἀριθμὸν μικρότερον τῆς μονάδος· ὥστε εἶναι 1 = 0,99999. . .

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι 0,1 = 0,09999. . .

0,01 = 0,009999. . κλπ.

. . . .

Ὅτι δὲ ὁ νέος οὗτος ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος ἐφαρμόζεται καὶ ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ ἐπὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι φανερόν.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

182. Διὰ νὰ εἶναι ἴσοι δύο ἀριθμοὶ ἐξ ἀκεραίων καὶ ἐκ δεκαδικῶν μονάδων συγκείμενοι, πρέπει ἢ α΄) νὰ συμφωνῶσι κατὰ πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν ἢ β΄) τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ᾽ ἃ διαφέρουσι, νὰ ἔχωσι διαφορὰν 1, καὶ τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ψηφίον πάντα τἀκόλουθα ψηφία νὰ εἶναι 9, τοῦ δὲ ἔχοντος τὸ μεγαλήτερον πάντα τ᾽ ἄλλα νὰ εἶναι 0· ἄλλως οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι.

Διότι, ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο ἴσοι ἀριθμοὶ παρίστανται ὡς δεκαδικοὶ καὶ εἶναι οἱ ἑξῆς: 2,125. . . . καὶ 2,124. . . .

Ἐπειδὴ τὸ περισσεῦον ἓν χιλιοστὸν τοῦ πρώτου ἰσοῦται τῷ 0,000999.., ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἰσοῦται τῷ 2,124999, ηὐξημένῳ κατὰ τὰς μονάδας τῶν ἀνωτέρων τάξεων, ἐὰν ὑπάρχωσιν· ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ ὑποτίθενται ἴσοι, βλέπομεν, ὅτι πάντα τὰ λοιπὰ ψηφία τοῦ δευτέρου ἀνάγκη νὰ εἶναι 9 καὶ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς νὰ μὴ ἔχῃ ψηφία μηδεμιᾶς τῶν ἀνωτέρων τάξεων.

183. Ἐὰν τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία καθ᾽ ἃ διαφέρουσιν οἱ ἀριθμοί, ἔχωσι διαφορὰν μεγαλητέραν τοῦ 1, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι.

Ἔστωσαν ὡς παράδειγμα οἱ ἀριθμοὶ 2,126. . . καὶ 2,124. . .

Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ἑπόμενα ψηφία τοῦ δευτέρου, δὲν δύναται οὗτος νὰ εἶναι μεγαλήτερος τοῦ 2,1249999. . . . ἤτοι τοῦ 2,125· εἶναι ἄρα μικρότερος τοῦ πρώτου.

Διάκρισις τῶν ἀριθμῶν εἰς συμμέτρους καὶ εἰς ἀσυμμέτρους.

184. Ὁ νέος ὁρισμὸς τῶν ἀριθμῶν περιλαμβάνει μὲν πάντας τοὺς ἀκεραίους καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς, εἰσάγει δὲ καὶ ἄλλους ἀριθμοὺς διαφόρους τούτων· τῷ ὄντι, οἱ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ ἔχοντες ἀριθμοί, οἱ διὰ τοῦ νέου ὁρισμοῦ προσαρτηθέντες, δὲν δύνανται πρὸς οὐδένα τῶν ἀκεραίων, οὐδὲ τῶν κλασματικῶν, νὰ εἶναι ἴσοι· διότι οὗτοι, τρεπόμενοι εἰς δεκαδικούς, ἢ ἔχουσιν ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἢ ἔχουσιν ἄπειρα, ἀλλὰ περιοδικά.

Πρὸς διάκρισιν καλοῦνται οἱ μὲν ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου συστήματος, οἱ ἐκ πεπερασμένου πλήθους μονάδων συγκείμενοι, σύμμετροι, οἱ δὲ εἰσαχθέντες διάφοροι τούτων, οἱ μὴ δυνάμενοι ἄλλως νὰ ἀποτελεσθῶσιν ἢ ὑπὸ ἀπείρου πλήθους μονάδων, λέγονται ἀσύμμετροι· οὗτοι, τρεπόμενοι εἰς δεκαδικοὺς ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.

Παρατήρησις.

Καὶ μετὰ τὴν προσάρτησιν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν οἱ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων πράξεων μένουσιν οἱ αὐτοί. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἄθροισμα καὶ διαφορὰ καὶ γινόμενον καὶ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν καὶ ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων διατηροῦνται. Ὡσαύτως ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι καὶ τετράγωνον ἄλλου τινὸς καὶ κύβος ἄλλου· καὶ γενικῶς μυοστὴ δύναμις ἄλλου τινὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου)· ἤτοι ὑπάρχει πάντοτε θετικός τις ἀριθμὸς ἔχων μυοστὴν δύναμιν τὸν δοθέντα θετικὸν ἀριθμόν. Πρὸς τούτοις, ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶσα εὐθεῖα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ (συμμέτρου ἢ ἀσυμμέτρου)· ὥστε διὰ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν λύονται πάντα τὰ ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ παρόντος κεφαλαίου μνημονευθέντα ἄλυτα ζητήματα. Ἀλλὰ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν παραλείπομεν ἐνταῦθα χάριν συντομίας (ἰδὲ Εἰσαγωγὴν ἀνωτέρας ἀλγέβρας).

ΣΗΜ. Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ συνδέονται συνήθως πρὸς τοὺς συμμέτρους διά τινων σχέσεων, ἐξ ὧν προκύπτουσιν, ὡς ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ ἴδωμεν, ἰδιαίτεραι, συντομώτεραι μέθοδοι, καθ' ἃς ἐκτελοῦνται αἱ ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων πράξεις. Δυνάμεθα ὅμως (ὅπερ καὶ γίνεται ἐν τῇ πράξει) νὰ παραλείπωμεν τὰ ἄπειρα ψηφία τῶν ἀσυμμέτρων ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς (π. χ. ἀπὸ τῶν ἑκατομμυριοστῶν καὶ ἐφεξῆς), ὅτε εὑρίσκομεν ἀριθμοὺς συμμέτρους, τὰ ἐξαγόμενα δέ, ἅτινα λαμβάνομεν, προσεγγίζουσι πρὸς τἀληθῆ τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ περισσότερα ψηφία διατηροῦμεν.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

Ὁρισμοί.

185. Ἐάν τις ἀριθμὸς εἶναι μυοστὴ δύναμις ἄλλου, οὗτος λέγεται μυοστὴ ῥίζα τοῦ πρώτου.

Ἐὰν δηλ. εἶναι $\alpha = \beta^{\mu}$, ὁ β λέγεται μυοστὴ ῥίζα τοῦ α.

Ἡ μυοστὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt[\mu]{\alpha}$·

ὥστε, ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta^{\mu}$, θὰ εἶναι καὶ $\beta = \sqrt[\mu]{\alpha}$·
τουτέστιν ἀμφότεραι αἱ ἰσότητες αὗται μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἐκφράζουσι σχέσιν τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

186. Ἀξιοπαρατήρητοι εἶναι αἱ ταὐτότητες.

$$\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu} = \alpha \qquad \text{καὶ} \qquad \sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}} = \alpha\cdot$$

αἵτινες ἕπονται ἐξ αὐτοῦ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς μυοστῆς ῥίζης.

187. Ἡ ῥίζα τῆς δευτέρας τάξεως λέγεται καὶ τετραγωνικὴ ῥίζα· ἡ δὲ ῥίζα τῆς τρίτης τάξεως λέγεται καὶ κυβικὴ ῥίζα. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παρίσταται συνήθως ἄνευ τοῦ δείκτου 2, ὡς ἑξῆς: $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\alpha+\beta}$, κλπ.

Τὸ σημεῖον $\sqrt{}$ καλεῖται ῥιζικόν· ἡ δὲ ὑπ' αὐτὸ ὑπάρχουσα παράστασις λέγεται ὑπόρριζον.

Παράστασις ἔχουσα ῥιζικὸν λέγεται ἄλογος·

$$\text{ὡς} \qquad \frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{\gamma}, \qquad \alpha\sqrt{\beta}, \qquad \text{κτλ.}$$

Αἱ δὲ μὴ περιέχουσαι ῥιζικὸν λέγονται ῥηταί.

188. Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ῥίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως καὶ μίαν ἑκάστης περιττῆς.

Παραδείγματος χάριν, ὁ 16 ἔχει δύο τετραγωνικὰς ῥίζας, τὸν 4 καὶ τὸν -4· διότι εἶναι $4.4 = 16$, ἀλλὰ καὶ $(-4).(-4) = 16$.

Ὁμοίως ἔχει δύο τετάρτας ῥίζας, τὸν 2 καὶ τὸν -2· διότι εἶναι $2.2.2.2 = 16$, ἀλλὰ καὶ $(-2).(-2).(-2).(-2) = 16$.

Αἰτία τούτου εἶναι, ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἰς ἀρτίας δυνάμεις ὑψούμενοι, δίδουσι θετικοὺς ἀριθμούς.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 8 ἔχει μίαν μόνην κυβικὴν ῥίζαν, τὸν 2· διότι εἶναι $2.2.2 = 8$· ἀλλὰ $(-2).(-2).(-2) = -8$·
ὥστε τὸ -2 δὲν εἶναι κυβικὴ ῥίζα τοῦ 8, ἀλλὰ τοῦ -8.

Αἰτία τούτου εἶναι, ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἰς περιττὰς δυνάμεις ὑψούμενοι, δίδουσιν ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν ἑκάστης περιττῆς τάξεως, ἀλλ' οὐδεμίαν ἀρτίας τάξεως.

Παραδείγματος χάριν, ὁ -8 ἔχει μίαν κυβικὴν ρίζαν τὸν -2· διότι εἶναι $(-2).(-2).(-2)=-8$, ἀλλὰ $2.2.2=8$.

Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -16 δὲν ὑπάρχει· δηλαδὴ ὁ -16 δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδενὸς ἀριθμοῦ, διότι πᾶν τετράγωνον εἶναι θετικόν· ὁμοίως καὶ πᾶσα δύναμις ἀρτίας τάξεως εἶναι θετική.

Ὅταν ἀριθμὸς ἔχῃ δύο ρίζας μιᾶς τάξεως, αἱ ρίζαι αὗται εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, ὅταν δὲ ἔχῃ μίαν μόνην, ἡ ρίζα αὕτη εἶναι ὁμοειδὴς τῷ ἀριθμῷ.

Ρίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

189. Αἱ ρίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι ἢ ἀκέραιοι πάλιν ἀριθμοὶ ἢ ἀσύμμετροι, οὐδέποτε δὲ κλάσματα.

Καὶ ὄντως, ἔστω τοῦ ἀκεραίου Α μυοστὴ ρίζα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπερ ἂς ὑποτεθῇ ἀνάγωγον· τότε εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}=\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}=A$.

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἐξ ὑποθέσεως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα καὶ αἱ δυνάμεις αὐτῶν α^{μ} καὶ β^{μ} εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ ἑπομένως ἀδύνατον νὰ διαιρῇ ὁ β^{μ} τὸν α^{μ} καὶ νὰ δίδῃ πηλίκον ἀκέραιον Α· ὥστε αἱ ρίζαι τῶν ἀκεραίων οὐδέποτε εἶναι κλάσματα.

190. Ἡ μυοστὴ ρίζα ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος, ἂν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ἐξ ὧν γίνεται, εἶναι πολλαπλάσια τοῦ μ, καὶ τότε μόνον.

Διότι, ἂν εἶναι $\beta^{\mu}=\alpha$ ἤτοι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$, οἱ δὲ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἀκέραιοι, ἂς ἀναλυθῇ ὁ β εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ ἔστω

$$\beta=\vartheta^{\varkappa}.\vartheta'^{\varkappa'}..$$

τότε θὰ εἶναι $\beta^{\mu}=(\vartheta^{\varkappa}.\vartheta'^{\varkappa'}...)^{\mu}=\vartheta^{\varkappa\mu}.\vartheta'^{\varkappa'\mu}$ (κατὰ τὸ ἐδ. 72)· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\beta^{\mu}=\alpha$, ἕπεται $\alpha=\vartheta^{\varkappa\mu}.\vartheta'^{\varkappa'\mu}.....$,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων ἀριθμῶν θ, θ', .., ἐξ ὧν γίνεται ὁ α, διαιροῦνται ὑπὸ τοῦ μ.

Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εἶναι $\alpha=\vartheta^{\varkappa\mu}.\vartheta'^{\varkappa'\mu}.....$

ἡ μ ρίζα τοῦ α θὰ εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $\vartheta^{\varkappa}.\vartheta'^{\varkappa'}....$, διότι οὗτος, ὑψούμενος εἰς τὴν μ δύναμιν, παράγει τὸν α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΝΟΜΟΙ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

191. Ἐν τῇ διαπλάσει τοῦ συστήματος τῶν ἀριθμῶν ὁδηγὸν εἴχομεν τὴν ἀρχήν, ὅτι, ὅταν πρόκειται νὰ καταστησωμέν τι γενικώτερον, πρέπει νὰ διατηρῶμεν τὰς ἀρχικὰς αὐτοῦ ἰδιότητας. Καὶ νῦν, θέλοντες νὰ εὐρύνωμεν τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων ἐπὶ οἱωνδήποτε ἐκθετῶν, θέτομεν ὡς ὅρον τὴν διατήρησιν τῶν ἀρχικῶν αὐτῶν ἰδιοτήτων, τὰς ὁποίας ἀποκαθιστῶμεν νόμους τῶν δυνάμεων.

Ἐὰν ἡ ὑπὸ τῆς ἰσότητος $\alpha^{\mu} . \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ (1) ἐκφραζομένη ἀρχικὴ ἰδιότης τῶν δυνάμεων θέλωμεν νὰ ἰσχύῃ, καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι οἱοιδήποτε σύμμετροι ἀριθμοί, ἀνάγκη νὰ ὁρίσωμεν καταλλήλως τὴν σημασίαν τῶν δυνάμεων, αἵτινες ἔχουσιν ἐκθέτην κλασματικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Δυνάμεις κλασματικὸν ἔχουσαι ἐκθέτην.

192. Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα (1), τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διατηρήσωμεν ἀληθῆ ἐπὶ πασῶν τῶν δυνάμεων, ὑποτεθῇ $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ προκύπτει

$$\alpha^{\frac{1}{2}} . \alpha^{\frac{1}{2}} = \alpha.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α· διότι ἐφ' ἑαυτὸ πολλαπλασιασθὲν δίδει τὸν α.

Ἵνα εὕρωμεν τὴν σημασίαν τοῦ $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ (τοῦ ρ ὄντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀκεραίου), σχηματίζομεν τὸ γινόμενον τῶν ρ παραγόντων

$$\alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \; . \alpha^{\frac{1}{\varrho}},$$

ὅτε κατὰ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα, ἣν διατηροῦμεν, εὑρίσκομεν αὐτὸ ἴσον τῷ $\alpha^{\varrho . \frac{1}{\varrho}}$ ἤτοι ἴσον τῷ α· ὥστε τὸ $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ρ ῥίζα τοῦ α.

Κατὰ ταῦτα, αἱ δύο παραστάσεις

$\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ καὶ $\sqrt[\varrho]{\alpha}$ σημαίνουσι τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Παραδείγματα: $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

Καὶ γενικῶς $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ (π καὶ ρ ὄντων οἱωνδήποτε θετικῶν ἀκεραίων) δέον νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ ρ ῥίζα τοῦ α^{π}· διότι, πολλαπλασιαζόμενον ρ φορὰς ἐφ' ἑαυτὸ δίδει α^{π}, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} . \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} . \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} \ldots \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} = \alpha^{\varrho . \frac{\pi}{\varrho}} = \alpha^{\pi} .$$

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ σημαίνει καὶ τὴν π δύναμιν τῆς ρ ῥίζης τοῦ α· διότι προκύπτει ἂν ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{1}{\varrho}}$ πολλαπλασιασθῇ π φορὰς ἐφ' ἑαυτήν, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\alpha^{\frac{1}{\varrho}} . \alpha^{\frac{1}{\varrho}} \ldots \alpha^{\frac{1}{\varrho}} = \alpha^{\pi . \frac{1}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} .$$

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι ἡ π δύναμις τῆς ρ ῥίζης τοῦ α πρέπει νὰ εἶναι ἴση τῇ ρ ῥίζῃ τῆς π δυνάμεως τοῦ α· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\left(\sqrt[\varrho]{\alpha}\right)^{\pi} = \sqrt[\varrho]{\alpha^{\pi}} = \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} \ldots\ldots \qquad (1)$$

ἢ

$$\left(\alpha^{\frac{1}{\varrho}}\right)^{\pi} = \left(\alpha^{\pi}\right)^{\frac{1}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} .$$

Ὅτι δὲ ἀληθῶς ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\varrho]{\alpha}\right)^{\pi}$ ἰσοῦται τῇ ρ ῥίζῃ τοῦ α^{π}, ἤτοι τῇ $\sqrt[\varrho]{\alpha^{\pi}}$, δεικνύεται ἀμέσως ἐκ τούτου ὅτι ἡ ρ δύναμις αὐτῆς εἶναι ἴση τῷ α^{π}.

Καὶ ὄντως, ἡ παράστασις $\left(\sqrt[\varrho]{\alpha}\right)^{\pi}$ εἶναι γινόμενον π παραγόντων, ὧν ἕκαστος εἶναι ἴσος τῇ $\sqrt[\varrho]{\alpha}$, ἑπομένως, κατὰ τὴν τρίτην ἰδιότητα τῶν δυνάμεων (72), ἡ ρ δύναμις αὐτῆς εὑρίσκεται, ἂν ὑψωθῇ ἕκαστος παράγων αὐτῆς εἰς τὴν ρ δύναμιν· ὅτε γίνεται α· ὅθεν ἡ ρ δύναμις τοῦ γινομένου εἶναι ἐπίσης α^{π}.

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ὅταν ὁ ρ εἶναι ἄρτιος (ὅτε ἐξ ἀνάγκης θὰ εἶναι ὁ α θετικὸς ἀριθμός), τὸ μὲν δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (1) ἔχει πάντοτε δύο τιμὰς ἀντιθέτους, τὸ δὲ πρῶτον ἔχει ἀμφοτέρας μὲν τὰς τιμὰς ταύτας, ἂν ὁ π εἶναι περιττὸς (διότι τὸ γινόμενον $\left(\sqrt[\varrho]{\alpha}\right)^{\pi}$ εἶναι τότε ὁμοειδὲς τῇ $\sqrt[\varrho]{\alpha}$), τὴν θετικὴν ὅμως μόνην, ἂν ὁ π εἶναι ἄρτιος·

ὥστε κατὰ τοῦτο ἡ ἰσότης (1) δὲν εἶναι τελεία· π. χ. ἡ $\sqrt[4]{\alpha^2}$ ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἐν ᾧ ἡ $\left(\sqrt[4]{\alpha}\right)^2$ ἔχει μόνην τὴν θετικὴν ἐξ αὐτῶν.

193. Ὁ κλασματικὸς ἐκθέτης δύναται πάντοτε νὰ ὑποτεθῇ ἀνάγωγος· καὶ ὄντως εἶναι ἡ δύναμις

$$\alpha^{\frac{\pi\nu}{\varrho\nu}} \quad \text{ἴση τῇ} \quad \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}, \tag{2}$$

διότι ἀμφότεραι, ὑψούμεναι εἰς τὴν ρ.ν δύναμιν, γίνονται ἴσαι τῷ $\alpha^{\pi\nu}$· ὑψοῦται δὲ ἡ δευτέρα εἰς τὴν ρ.ν δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν ρ καὶ ἔπειτα ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ὑψωθῇ εἰς τὴν ν δύναμιν (72).

Παρατηρητέον ὅμως ὅτι, ἐὰν ὁ κοινὸς παράγων εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ ρ περιττός, ἡ μὲν πρώτη δύναμις ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἡ δὲ δευτέρα μίαν μόνον· ὥστε ἡ ἰσότης αὐτῶν δὲν εἶναι τελεία.

Διὰ νὰ εἶναι αἱ δύο ἰσότητες (1) καὶ (2) ἀληθεῖς ἄνευ ἐξαιρέσεως, θὰ ὑποθέτωμεν ἐν τοῖς ἑξῆς τὸν ἀριθμὸν α πάντοτε θετικὸν καὶ ἐκ τῶν δύο ἀντιθέτων τιμῶν πάσης ῥίζης ἀρτιοταγοῦς θὰ λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψει μόνον τὴν θετικήν· τότε αἱ παραστάσεις

$$\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}, \qquad \sqrt[\varrho]{\alpha^\pi}, \qquad \left(\sqrt[\varrho]{\alpha}\right)^\pi,$$

οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀκεραίων π καὶ ρ, παριστῶσιν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν πᾶσαι θετικὸν ἀριθμόν.

Τὰς δὲ ῥίζας τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ὅταν ὑπάρχωσιν ἀνάγομεν εἰς τὰς ὁμοταγεῖς ῥίζας τῶν θετικῶν· διότι π. χ. εἶναι

$$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2, \qquad \sqrt[5]{-16} = -\sqrt[5]{16},$$

$$(-4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-4)^2} = 4^{\frac{2}{3}}.$$

Ἐὰν τὴν ἰσότητα $\alpha^{\frac{\pi\nu}{\varrho\nu}} = \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ γράψωμεν διὰ τῶν ῥιζῶν, βλέπομεν, ὅτι εἶναι

$$\sqrt[\varrho]{\alpha^\pi} = \sqrt[\varrho\nu]{\alpha^{\pi\nu}},$$

τουτέστι, δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ρ τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην π τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· τοῦτο δὲ οὐδόλως βλάπτει τὴν ῥίζαν.

Παραδείγματα: $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$, $25^{\frac{2}{4}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$.

Δυνάμεις ἀρνητικὸν ἔχουσαι ἐκθέτην.

194. Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ ὑποθέσωμεν $\nu = -\mu$, εὑρίσκομεν

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^{-\mu} = \alpha^0 = 1.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ἂν ὁ α διαφέρῃ τοῦ 0,

$$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}.$$

ἀνάγκη ἄρα νὰ δοθῇ διὰ τὰς δυνάμεις ταύτας ὁ ἑπόμενος ὁρισμός.

Πᾶσα ἀρνητικὸν ἐκθέτην ἔχουσα δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ (πλὴν τοῦ 0) ἰσοῦται κλάσματι, ἔχοντι ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα 1, παρονομαστὴν δὲ τὴν ἀντίθετον ἐκθέτην ἔχουσαν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},$$

$$5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Γενικῶς εἶναι (π καὶ ρ ὄντων θετικῶν ἀκεραίων)

$$\alpha^{-\frac{\pi}{\rho}} \left(\text{ἤτοι } \frac{1}{\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}}\right) = \sqrt[\rho]{\alpha^{-\pi}},$$

διότι ἀμφότερα, ὑψούμενα εἰς τὴν ρ δύναμιν, γίνονται $\alpha^{-\pi}$.

ΣΗΜ. Τῆς μονάδος 1 πᾶσα δύναμις εἶναι πάλιν 1.

Διότι π. χ. $1^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{1^2} = \sqrt[3]{1} = 1.$

*Διατήρησις τῶν ἀρχικῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων.

195. Ὑπολείπεται ἔτι νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ εὑρεθέντες ὁρισμοὶ τῶν συμμέτρους ἐκθέτας ἐχουσῶν δυνάμεων εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε διατηροῦνται καὶ ἐπ' αὐτῶν πᾶσαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων· τουτέστιν, ὅτι ἀληθεύουσιν αἱ τὰς ἰδιότητας ταύτας ἐκφράζουσαι ἰσότητες:

$$\alpha^{\mu} . \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \qquad (1)$$

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} \qquad (2)$$

$$(\alpha\beta)^{\mu} = \alpha^{\mu} . \beta^{\mu} \qquad (3)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}} \qquad (4)$$

καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι κλασματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί), ἤτοι τῆς μορφῆς $\frac{\pi}{\varrho}$ $(=\mu)$ καὶ $\frac{\varkappa}{\tau}$ $(=\nu)$.

1) Τὴν ἰσότητα τῶν δύο παραστάσεων

$$\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}} . \alpha^{\frac{\varkappa}{\tau}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^{\frac{\pi}{\varrho}+\frac{\varkappa}{\tau}}$$

ἀποδεικνύομεν ὑψοῦντες ἑκατέραν εἰς τὴν δύναμιν ρ.τ.

Ἵνα, τῷ ὄντι, ὑψωθῇ ἡ πρώτη παράστασις εἰς τὴν δύναμιν ρ.τ, ἀρκεῖ (72) νὰ ὑψωθῇ ἑκάτερος τῶν παραγόντων αὐτῆς εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ρ.τ.

Ἵνα δὲ ὑψωθῇ ὁ πρῶτος παράγων $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}$ εἰς τὴν δύναμιν ρτ, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν ρ (ὅτε γίνεται α^{π}) καὶ ἔπειτα εἰς τὴν τ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\pi\tau}$· ἵνα δὲ ὁ δεύτερος παράγων $\alpha^{\frac{\varkappa}{\tau}}$ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ρτ, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν τ (ὅτε γίνεται $\alpha^{\varkappa}$) καὶ ἔπειτα εἰς τὴν ρ, ὅτε γίνεται $\alpha^{\varrho\varkappa}$· ἑπομένως ἡ πρώτη παράστασις, ὑψωθεῖσα εἰς τὴν δύναμιν ρτ, γίνεται $\alpha^{\pi\tau} \alpha^{\varkappa\varrho}$ ἢ $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\varrho}$.

Ἀλλὰ καὶ ἡ δευτέρα παράστασις $\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}+\frac{\varkappa}{\tau}}$ ἢ $\alpha^{\frac{\pi\tau+\varkappa\varrho}{\varrho\tau}}$, ὑψωθεῖσα εἰς τὴν ρτ δύναμιν γίνεται $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\varrho}$.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι ἀμφότεραι αἱ συγκρινόμεναι παραστάσεις εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ρτ ρίζαν τοῦ $\alpha^{\pi\tau+\varkappa\varrho}$· ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι·

2) Ἵνα δείξωμεν, ὅτι αἱ δύο παραστάσεις

$$\left(\alpha^{\frac{\pi}{\varrho}}\right)^{\frac{\varkappa}{\tau}} \quad \text{καὶ} \quad \alpha^{\frac{\pi}{\varrho} . \frac{\varkappa}{\tau}} \quad \text{εἶναι ἴσαι,}$$

ὑψοῦμεν πάλιν ἀμφοτέρας εἰς τὴν δύναμιν ρτ.

Καὶ ἡ μὲν δευτέρα ὑψουμένη ἀμέσως εἰς τὴν ρτ δύναμιν γίνεται $α^{πκ}$, ἡ δὲ πρώτη ἵνα ὑψωθῇ εἰς τὴν ρτ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ πρῶτον εἰς τὴν δύναμιν τ, ὅτε γίνεται $\left(α^{\frac{π}{ρ}}\right)^κ$ ἢ $α^{\frac{π}{ρ}} . α^{\frac{π}{ρ}} \ldots α^{\frac{π}{ρ}}$, κ φορὰς ἤτοι $α^{\frac{πκ}{ρ}}$, ἔπειτα δὲ εἰς τὴν δύναμιν ρ, ὅτε γίνεται $α^{πκ}$· ὥστε ἀμφότεραι αἱ παραβαλλόμεναι παραστάσεις εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ρτ ρίζαν τοῦ $α^{πκ}$, ἄρα εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ταύτῃ ὑπετέθη ὁ κ θετικὸς ἀριθμός· ἂν εἶναι ἀρνητικός, ἡ ἰσότης τῶν δύο παραστάσεων ἀποδεικνύεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν.

3) Ἵνα δείξωμεν, ὅτι αἱ δύο παραστάσεις $(αβ)^{\frac{π}{ρ}}$ καὶ $α^{\frac{π}{ρ}} . β^{\frac{π}{ρ}}$ εἶναι ἴσαι, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν δύναμιν ρ· καὶ ἡ μὲν πρώτη γίνεται $(αβ)^π$, ἡ δὲ δευτέρα, ἐπειδὴ εἶναι γινόμενον, γίνεται $α^π . β^π$ ἤτοι $(αβ)^π$· ὥστε ἀμφότεραι αἱ παραστάσεις αὗται εἶναι ἴσαι τῇ ρ ρίζῃ τοῦ $(αβ)^π$.

4) Πρὸς ἀπόδειξιν τῆς ἰσότητος τῶν δύο παραστάσεων $\left(\frac{α}{β}\right)^{\frac{π}{ρ}}$ καὶ $\frac{α^{\frac{π}{ρ}}}{β^{\frac{π}{ρ}}}$, ὑψοῦμεν ἀμφοτέρας εἰς τὴν ρ δύναμιν· τότε ἡ μὲν πρώτη γίνεται $\left(\frac{α}{β}\right)^π$ ἢ $\frac{α^π}{β^π}$, ἡ δὲ δευτέρα (κατὰ τὸ ἐδ. 72) γίνεται $\frac{α^π}{β^π}$, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι αἱ συγκρινόμεναι παραστάσεις εἶναι ἴσαι.

ΣΗΜ. Ἂν ὁ ἀριθμὸς ρτ εἶναι ἄρτιος, ἑκάτερον τῶν μελῶν τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἔχει ἀνὰ δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἂν δὲ ὁ ρτ εἶναι περιττός, ἑκάτερον τῶν μελῶν ἔχει μίαν μόνην τιμήν. Ὡσαύτως τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) ἔχει ἑκάτερον τῶν μελῶν δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἂν ὁ ρ εἶναι ἄρτιος, μίαν δὲ μόνην, ἂν περιττός.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν ριζῶν.

196. Ἐπειδὴ γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν, ὑψοῦντες τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma$ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$, εὑρίσκομεν $(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}$

$$\text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma} = \sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}$$

ἡ δὲ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ θεώρημα :

ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ἰσοβαθμίους ρίζας, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν.

Παραδείγματος χάριν εἶναι $\sqrt{2}.\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$.

Ἂν δὲ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\alpha^\nu.\beta$ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$, εὑρίσκομεν

$$\left(\alpha^\nu.\beta\right)^{\frac{1}{\nu}} = \alpha\beta^{\frac{1}{\nu}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^\nu\beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}\cdot$$

τουτέστιν, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν ρίζαν ἐπὶ ἀριθμὸν θετικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Παραδείγματος χάριν εἶναι $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2.3} = \sqrt{12}$.

Ἡ αὐτὴ ἰσότης δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς.

Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν παράγοντά τινα τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν αὐτοῦ.

197. Ἐπειδὴ δὲ κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῶσιν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἕπεται

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}.$$

Τουτέστιν, ἵνα διαιρέσωμεν ρίζαν δι' ἄλλης ἰσοβαθμίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν.

Παραδείγματος χάριν εἶναι $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2$, $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2$.

Ἐξάγοντες τὴν νὴν ρίζαν τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha}{\beta^\nu}$ (ἤτοι ὑψοῦντες αὐτὸ εἰς τὴν δύναμιν $\frac{1}{\nu}$) εὑρίσκομεν

$$\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}}=\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta},$$

τουτέστιν, ἵνα διαιρέσωμεν ρίζαν δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

Ἡ αὐτὴ δὲ ἰσότης δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ.

Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν διαιρέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν εἶναι $\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$,

$$\frac{\sqrt{200}}{5}=\sqrt{\frac{200}{25}}=\sqrt{8}.$$

198. Ρίζαι διαφόρων βαθμῶν τρέπονται εἰς ἰσοβαθμίους, ὅπως καὶ κλάσματα μὴ ὁμώνυμα εἰς ὁμώνυμα· διότι ἐπιτρέπεται νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην ἑκάστης ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν θέλωμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν

Κατὰ ταῦτα αἱ ρίζαι $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[5]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$

γίνονται ἰσοβάθμιοι: $\sqrt[60]{\alpha^{10}}$, $\sqrt[60]{\beta^{12}}$, $\sqrt[60]{\gamma^{15}}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ριζῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς μίαν ρίζαν.

Παρατηρήσεις.

1) Πᾶν γινόμενον, ὁσαδήποτε καὶ οἱαδήποτε ριζικὰ καὶ ἂν ἔχῃ, ἀνάγεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, εἰς μίαν ρίζαν. Ἡ τοιαύτη ἀναγωγὴ εἶναι ὠφέλιμος, ὅταν πρόκειται νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενον κατά τινα προσέγγισιν. Οὕτως, ἀντὶ $10\sqrt{5}$, καλὸν εἶναι νὰ γράφωμεν τότε $\sqrt{500}$· διότι ἐξάγοντες τὴν ρίζαν τοῦ 500 κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν 22, ἐν ᾧ ἐκ τοῦ γινομένου $10\sqrt{5}$, ἂν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα τοῦ 5 ὁμοίως, προκύπτει μόνον 20· συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι τὸ λάθος, τὸ ἐπὶ τῆς ρίζης $\sqrt{5}$ συμβαῖνον, εἶναι μὲν μικρότερον τῆς μονάδος, ἀλλὰ δεκαπλασιαζόμενον ὑπερβαίνει αὐτήν. Ὁμοίως, ἀντὶ $\sqrt{8}\,.\,\sqrt{3}$, γραπτέον $\sqrt{24}$, κτλ. Δυνατὸν δὲ καὶ νὰ συμβῇ, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν νὰ εὑρίσκηται ἀκριβῶς, ἀφοῦ τραπῇ εἰς μίαν ρίζαν· οὕτω π. χ. εἶναι

$\sqrt{3} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{81} = 9$· ὁμοίως $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{64} = 8$· τοῦτο δὲ δὲν θὰ ἐφαίνετο, ἂν ἑκάστη τῶν ριζῶν εὑρίσκετο κατὰ προσέγγισιν καὶ ἔπειτα ἐπολλαπλασιάζοντο.

2) Τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ν ρίζης κλάσματος ἀνάγομεν εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ρίζης ἀκεραίου (ὅπερ ἁπλούστερον), ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε νὰ γίνῃ ὁ παρονομαστὴς τελεία ν δύναμις. Οὕτω π. χ. εἶναι

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{2.5.5}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{50}}{5}.$$

3) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ ριζικόν, δυνάμεθα νὰ μεταβιβάσωμεν αὐτὸ εἰς τὸν ἀριθμητήν, πολλαπλασιάζοντες ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ ἁρμοδίαν τινὰ παράστασιν.

Ἔστω ἡ παράστασις $\dfrac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$.

ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτῆς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ $\sqrt{\delta}$, γίνεται αὕτη

$$\frac{2\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}\ \sqrt{\delta}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{2\alpha\beta^2\gamma\sqrt{\delta}}{\delta}.$$

Καὶ ὅταν ἡ παράστασις ἔχῃ παρονομαστὴν τῆς μορφῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$, (ἔνθα α καὶ β εἶναι ρηταὶ παραστάσεις), ἀπαλλάσσεται ὁ παρονομαστὴς ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῆς κλασματικῆς παραστάσεως ἐπὶ $\alpha - \sqrt{\beta}$, διότι τότε γίνεται ὁ παρονομαστὴς $(\alpha + \sqrt{\beta}) \cdot (\alpha - \sqrt{\beta}) = \alpha^2 - (\sqrt{\beta})^2 = \alpha^2 - \beta$· ἤτοι ρητός.

Ἡ μεταβίβασις αὕτη τῶν ριζῶν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὸν ἀριθμητὴν πρέπει νὰ γίνηται πάντοτε, ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν κλάσμα τι κατὰ προσέγγισιν· διότι συμφέρει πολὺ περισσότερον νὰ ἔχωμεν τὸν παρονομαστὴν ἀκριβῶς, τὸν δὲ ἀριθμητὴν μὲ προσέγγισιν ἢ νὰ ἔχωμεν τὸ ἐναντίον. Παραδείγματος χάριν, ἐὰν ἔχωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{5}{\sqrt{12}}$ καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν $\dfrac{5}{3}$. ἀλλ' ἂν γράψωμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς $\dfrac{5\sqrt{12}}{12}$ ἢ $\dfrac{\sqrt{300}}{12}$ καὶ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκομεν $\dfrac{17}{12}$, ὅπερ εἶναι πολὺ πλησιέστερον εἰς τὸ ἀληθές.

Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶναι

$$\sqrt{2}.\sqrt{8}=4, \quad \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}=2, \quad \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}=5.$$

$$\sqrt[3]{25}.\sqrt[6]{25}=5, \quad \sqrt{12}.\sqrt{27}=18.$$

$$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{40}, \quad 5\sqrt{8}=\sqrt{200}, \quad 3\sqrt{2}=\sqrt{18}.$$

2) Εὑρεῖν τὸ γινόμενον τῶν δυνάμεων

$$\alpha^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[6]{\alpha^5}. \qquad (\text{Ἀπ. } \alpha^2).$$

3) Εὑρεῖν τὸ πηλίκον τῶν παραστάσεων

$$\sqrt{\alpha} : \sqrt[5]{\alpha^2}. \qquad \left(\text{Ἀπ. } \sqrt[10]{\alpha}\right).$$

4) Εὑρεῖν τὸν κύβον τῆς παραστάσεως

$$\sqrt[5]{\alpha^7}. \qquad \left(\text{Ἀπ. } \alpha^{\frac{21}{5}} \text{ ἢ } \alpha^4.\sqrt[5]{\alpha}\right).$$

5) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ τίθεται καὶ ὑπὸ τὴν ἑπομένην μορφὴν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$· διότι τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ῥιζῶν εἶναι $(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}$.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο τετραγωνικῶν ῥιζῶν τρέπεται εἰς μίαν μόνην ῥίζαν, ἐὰν τὸ γινόμενον $\alpha.\beta$ τῶν ὑπορρίζων εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτως εὑρίσκεται

$$\sqrt{3}+\sqrt{27}=\sqrt{48}, \qquad \sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{80}.$$
$$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18},$$

Ἐκ τῆς αὐτῆς ἰσότητος βλέπομεν, ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα παραστάσεως τῆς μορφῆς $\gamma+\sqrt{\delta}$, δύναται ἐνίοτε νὰ τραπῇ εἰς ἄθροισμα δύο ῥιζῶν τετραγωνικῶν ἢ καὶ εἰς ὁμοίαν παράστασιν. Οὕτως εἶναι

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=1+\sqrt{2}, \qquad \sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}.$$
$$\sqrt{29+\sqrt{720}}=3+2\sqrt{5},$$

6) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶναι

$$\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta},$$

ὅταν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί· ὥστε ἡ τετραγ. ῥίζα ἀθροίσματος δὲν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ῥιζῶν τῶν μερῶν του.

7) νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}.$

8) Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ἰσότης $\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3}=\gamma$, ἐὰν α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι, εἶναι ἀδύνατος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Τετραγωνική ρίζα τῶν μονωνύμων.

199. Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου, τουτέστιν ἡ δύναμις $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ, ἐξάγεται, κατὰ τοὺς νόμους τῶν δυνάμεων (195), ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἑκάστου παράγοντος.

Ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος παράγων εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ ἐξάγεται (195), διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ τοῦ 2.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\sqrt{49\alpha^2\beta^2\gamma^8} = (49)^{\frac{1}{2}}\,.\,(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\,.\,(\beta^2)^{\frac{1}{2}}\,.\,(\gamma^8)^{\frac{1}{2}} = \pm 7\alpha\beta\gamma^4.$$

Κλασματικοῦ μονωνύμου ἡ ρίζα ἐξάγεται κατὰ τοὺς αὐτοὺς νόμους (195), ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\sqrt{\frac{25\alpha^2\beta^6\gamma^4}{36\delta^4}} = \left(\frac{25\alpha^2\beta^6\gamma^4}{36\delta^4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(25)^{\frac{1}{2}}.(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.(\beta^6)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^4)^{\frac{1}{2}}}{(36)^{\frac{1}{2}}.(\delta^4)^{\frac{1}{2}}} = \pm\frac{5\alpha\beta^3\gamma^2}{6\delta^2}.$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ ἐγράφη πρὸ τῶν ἐξαγομένων, διότι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ὡς καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ρίζα, ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμὰς καὶ δύναται, ἑπομένως, τὸ ἐξαγόμενον νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς.

Ἐάν τινος τῶν παραγόντων δὲν ἐξάγηται ἡ ρίζα, ἀφίνομεν ἐπ' αὐτοῦ σεσημειωμένην τὴν πρᾶξιν· ἤ, ἂν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς δύο, οὕτως, ὥστε νὰ ἐξάγηται ἡ ρίζα τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\sqrt{5\alpha^2\beta^6\gamma^8} = \sqrt{5}\,.\,\alpha\beta^3\gamma^4,$$

$$\sqrt{8\alpha^3\beta^4\gamma^6} = \sqrt{8}\,.\,\sqrt{\alpha^3}.\,\beta^2\gamma^3 = \sqrt{2\cdot 4}\cdot\sqrt{\alpha^2.\alpha}\,.\,\beta^2\gamma^3 =$$

$$= 2\sqrt{2}\,.\,\alpha\sqrt{\alpha}\,.\,\beta^2\gamma^3 = 2\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{2\alpha}.$$

Ὁμοίως $\sqrt{\dfrac{4\alpha^2\beta^4\gamma^2}{\delta}} = \dfrac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$

* Τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν πολυωνύμων.

200. Ἐξαγαγεῖν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου σημαίνει εὑρεῖν πολυώνυμον, οὗ τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τὸ δοθέντι πολυωνύμῳ.

Ἡ μέθοδος, δι' ἧς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν πολυωνύμων (ὅταν ὑπάρχῃ), συνάγεται ἐκ τοῦ σχηματισμοῦ τοῦ τετραγώνου αὐτῶν.

Τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων καὶ ἐκ τῶν διπλασίων τῶν γινομένων τῶν ὅρων ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

Ἔστω τυχὸν πολυώνυμον, οὗ τοὺς ὅρους παριστῶμεν πρὸς συντομίαν ἕκαστον δι' ἑνὸς γράμματος

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa\cdot$$

τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa).(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa)$ εὑρίσκεται, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἐφ' ἑαυτὸν καὶ ἐπὶ τοὺς ἄλλους πάντας καὶ προστεθῶσι τὰ γινόμενα.

Ἐκ τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι ἐν τῷ γινομένῳ θὰ εὑρίσκωνται τὰ τετράγωνα τῶν ὅρων πάντων· ἀλλὰ καὶ τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ὅρων θὰ εὑρίσκηται διπλοῦν· διότι τὸ γινόμενον βα, ἵνα τοῦτο θεωρήσωμεν, θὰ προκύψῃ πρῶτον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὅρου β ἐπὶ τὸ πολυώνυμον, καὶ δεύτερον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ὅρου α ἐπὶ τὸ πολυώνυμον· ὥστε, ἐν τῇ προσθέσει τῶν ὁμοίων ὅρων θὰ προκύψῃ 2αβ· ἐπειδὴ δὲ ἄλλο εἶδος ὅρων δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ γινομένῳ, συνάγεται ἡ πρότασις.

Κατὰ ταῦτα, τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου

$$4\chi^3-2\alpha\chi^2+5\alpha^2\chi-2\alpha^3$$

εἶναι

$$\begin{array}{l} 16\chi^6+4\alpha^2\chi^4+25\alpha^4\chi^2+4\alpha^6 \\ -16\alpha\chi^5+40\alpha^2\chi^4-16\alpha^3\chi^3 \\ -20\alpha^3\chi^3+8\alpha^4\chi^2 \\ -20\alpha^5\chi \end{array}$$

ἢ, μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων,

$$16\chi^6-16\alpha\chi^5+44\alpha^2\chi^4-36\alpha^3\chi^3+33\alpha^4\chi^2-20\alpha^5\chi+4\alpha^6.$$

Ὅταν πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ὑπάρχουσιν ἐν τῷ τετραγώνῳ αὐτοῦ τέσσαρες ὅροι, μὴ δυνάμενοι νὰ ἀναχθῶσι μετ' οὐδενὸς ἄλλου· εἶναι δὲ οὗτοι οἱ δύο πρῶτοι καὶ οἱ δύο τελευταῖοι, ἐὰν τὸ τετράγωνον εἶναι καὶ αὐτὸ διατεταγμένον. Καὶ ὄντως, ἂν πολυώνυμόν τι διαταχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἔστω τοῦ χ, καὶ παρασταθῶσι πρὸς συντομίαν οἱ ὅροι αὐτοῦ κατὰ σειρὰν διὰ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varkappa, \lambda$, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda).(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda)\cdot$$

ἐμάθομεν δὲ ἐκ τῆς θεωρίας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων, ὅτι οἱ ὅροι α^2 καὶ λ^2 (ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος) μετ' οὐδενὸς ἄλλου δύνανται νὰ ἀναχθῶσιν· ἀλλὰ καὶ οἱ δύο ὅροι $2\alpha\beta$ καὶ $2\varkappa\lambda$ (τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δύο πρώτων καὶ τὸ διπλοῦν γινόμενον τῶν δύο τελευταίων) μένουσιν ἀνάγωγοι· διότι, τὸ μὲν $2\alpha\beta$ εἶναι γινόμενον δύο ὅρων τοῦ πολυωνύμου τὰς μεγίστας δυνάμεις τοῦ χ ἐχόντων καὶ θὰ περιέχῃ διὰ τοῦτο τὸ γράμμα χ εἰς δύναμιν μεγαλητέραν ἢ τὰ λοιπὰ γινόμενα β^2, $2\beta\gamma$, $2\alpha\gamma$, κλπ.· ὁ δὲ $2\varkappa\lambda$ εἶναι γινόμενον δύο ὅρων τὰς ἐλαχίστας δυνάμεις τοῦ χ ἐχόντων καὶ ἑπομένως θὰ περιέχῃ τὸ χ εἰς δύναμιν μικροτέραν ἢ πάντα τὰ λοιπὰ γινόμενα τῶν ὅρων ἀνὰ δύο λαμβανομένων.

201. Τούτων οὕτως ἐχόντων, εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δοθέντος πολυωνύμου (ἐὰν ὑπάρχῃ) κατὰ τὸν ἀκόλουθον τρόπον.

Ὑποθέσωμεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἔστω τοῦ χ· παραστήσωμεν δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ὁμοίως διατεταγμένην διὰ τοῦ πολυωνύμου

$$\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\varkappa,$$

αὐτὸ δὲ τὸ δοθὲν διὰ τοῦ $\quad A+B+\Gamma+\ldots\ldots+M.$

Κατὰ τὰ προειρημένα, ὁ πρῶτος ὅρος A τοῦ δοθέντος πολυωνύμου (ἐὰν εἶναι τετράγωνον τοῦ $\alpha+\beta+\ldots+\varkappa$) θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· ἐξάγοντες ἄρα τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς ῥίζης· ἤτοι $\quad \alpha=\sqrt{A}.$

Καὶ ὁ δεύτερος ὅρος B τοῦ δοθέντος πολυωνύμου εἶναι, ὡς ἐμάθομεν, ἴσος τῷ διπλασίῳ γινομένῳ τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης ἤτοι τῷ $2\alpha\beta$· ἐὰν ἄρα διαιρέσωμεν τὸν B διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης ἤτοι διὰ τοῦ 2α, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν δεύτερον ὅρον τῆς ῥίζης· ἤτοι

$$\beta=\frac{B}{2\sqrt{A}}.$$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν δύο πρώτων ὅρων, α καὶ β, τῆς ῥίζης, ἐπειδὴ εἰξεύρομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν $\alpha+\beta$ ἤτοι τοὺς τρεῖς ὅρους $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, ἀφαιροῦμεν αὐτοὺς ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς· ἐπειδὴ ὁ α^2 εἶναι αὐτὸς ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πολυωνύμου, διαγράφομεν αὐτὸν καὶ ἐκ τοῦ ὑπολειπομένου πολυωνύμου ἀφαιροῦμεν τοὺς δύο ὅρους $2\alpha\beta+\beta^2$ ἤτοι τὸ γινόμενον $\beta(2\alpha+\beta)$, ὅπερ εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὸν δεύτερον ὅρον εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ προκῦπτον ἄθροισμα $2\alpha+\beta$ ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον β.

Τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου $(\alpha+\beta)^2$ ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου προκῦπτον ὑπόλοιπον Π′ πρέπει νὰ περιέχῃ, καθ' ἃ ἐμάθομεν, τὰ διπλάσια γινόμενα τῶν εὑρεθέντων ὅρων α καὶ β ἐπὶ τὸν τρίτον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου κλπ., ἤτοι τοὺς ὅρους

$$2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2+\dots$$

ἀλλὰ μεταξὺ τῶν ὅρων τούτων, ὁ πρῶτος $2\alpha\gamma$ περιέχει τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου, ἑπομένως ὁ ὅρος οὗτος τοῦ ὑπολοίπου δὲν ἠδυνήθη νὰ ἀναχθῇ μετ' οὐδενὸς τῶν ἑπομένων καὶ εἶναι, διὰ τοῦτο, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου· ἐὰν ἄρα διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου Π′ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν τρίτον ὅρον τῆς ρίζης.

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ τρίτου ὅρου γ, ἐπειδὴ εἰξεύρομεν, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον Π πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta+\gamma)$ ἤτοι τὸ $(\alpha+\beta)^2+2\gamma.(\alpha+\beta)+\gamma^2$, ἀφαιροῦμεν τοὺς ὅρους τούτους ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου· τοῦτο δὲ γίνεται ὡς ἑξῆς· τὸ μὲν τετράγωνον $(\alpha+\beta)^2$ ἀφῃρέσαμεν ἤδη (καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον τὸ Π′)· ὥστε μένει, ἐκ τοῦ ὑπολοίπου Π′ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$· τοῦτο δὲ εὑρίσκομεν προσθέτοντες τὸν εὑρισκόμενον τρίτον ὅρον γ εἰς τὸ διπλάσιον τῶν ἤδη εὑρεθέντων καὶ πολλαπλασιάζοντες τὸ ἄθροισμα $2\alpha+2\beta+\gamma$ ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον γ.

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου $(\alpha+\beta+\gamma)^2$ τῶν τριῶν πρώτων ὅρων τῆς ρίζης ἀπὸ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, ὑπολείπεται ὑπόλοιπόν τι Π″, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ρίζης, διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ διὰ τοῦ 2α.

Ἐξακολουθοῦντες οὕτως, εὑρίσκομεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς ρίζης· ἡ δὲ πρᾶξις περατοῦται, ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος·

$25\alpha^4-10\alpha^3\beta+21\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+4\beta^4$	$5\alpha^2-\alpha\beta+2\beta^2$
$-25\alpha^4$	$10\alpha^2$
$-10\alpha^3\beta+21\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+4\beta^4$	$10\alpha^2-\alpha\beta$
$10\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2$	$-\alpha\beta$
$20\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+4\beta^4$	$-10\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2$
$-20\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3-4\beta^4$	$10\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2$
$0.$	$+2\beta^2$
	$20\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+4\beta^4.$

Ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου ἐλάβομεν αὐτὴν μετὰ τοῦ σημείου +· ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν αὐτὴν καὶ μετὰ τοῦ σημείου — τότε θὰ εὑρίσκομεν τοὺς αὐτοὺς ὅρους ἐν τῇ ῥίζῃ, ἀλλὰ πάντας μετὰ σημείου ἀντιθέτου· ὑπάρχουσιν, ἑπομένως, δύο πολυώνυμα ἀντίθετα, ὧν τετράγωνον εἶναι τὸ δοθέν. Γνωστὸν δὲ καὶ ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι πᾶσα τετραγωνικὴ ῥίζα ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμάς.

202. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών.

Ἵνα ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν πολυωνύμου, διατάσσομεν αὐτὸ κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολυωνύμου καὶ τὴν ῥίζαν ταύτην γράφομεν πρῶτον ὅρον τῆς ῥίζης τοῦ πολυωνύμου.

Διαγράφομεν τὸν πρῶτον ὅρον ἐκ τοῦ πολυωνύμου καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· τὸ πηλίκον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς ῥίζης.

Γράφομεν τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ τὸν δεύτερον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον· τὸ δὲ προκῦπτον γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου· ὅτε εὑρίσκομεν δεύτερόν τι ὑπόλοιπον.

Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ῥίζης· καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁ τρίτος ὅρος τῆς ῥίζης τοῦ πολυωνύμου.

Γράφομεν τὸ διπλάσιον τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ῥίζης καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτῶν τὸν εὑρεθέντα τρίτον ὅρον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπ' αὐτὸν τὸν τρίτον ὅρον, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, ὅτε προκύπτει τρίτον τι ὑπόλοιπον, καὶ οὕτω καθεξῆς· λαμβάνει δὲ ἡ πρᾶξις πέρας, ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

ΣΗΜ. Α΄. Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνεται, ὅτι δοθὲν πολυώνυμον δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου κατὰ τὰς ἑπομένας περιπτώσεις·

α΄) Ἐὰν εἶναι διώνυμον· διότι, παντὸς μὲν μονωνύμου τὸ τετράγωνον εἶναι πάλιν μονώνυμον, παντὸς δὲ διωνύμου εἶναι τριώνυμον.

β΄) Ὅταν, μετὰ τὴν διάταξιν πρὸς οἱονδήποτε γράμμα, ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα· τοῦτο συμβαίνει πάντοτε, ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων τούτων (οἵτινες εἶναι ὁ μέγιστος καὶ ὁ ἐλάχιστος ἐκθέτης τοῦ πολυωνύμου) δὲν εἶναι ἀμφότεροι ἄρτιοι.

γ΄) Ὅταν τινὸς τῶν ὑπολοίπων ὁ πρῶτος ὅρος δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης.

ΣΗΜ. Β΄. Ἐὰν εἰξεύρωμεν, ὅτι ἡ ρίζα δοθέντος πολυωνύμου δὲν ἔχει περισσοτέρους τῶν τεσσάρων ὅρων, εὑρίσκομεν αὐτοὺς ἀμέσως· διότι τὸν μὲν πρῶτον καὶ τὸν τελευταῖον εὑρίσκομεν ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ πολυωνύμου (διατεταγμένου)· τὸν δὲ δεύτερον (ἐὰν ὑπάρχῃ) εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης· τὸν δὲ τρίτον (ἐὰν ὑπάρχῃ) διαιροῦντες τὸν προτελευταῖον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ τελευταίου ὅρου τῆς ρίζης. Συμβαίνει δὲ τοῦτο ὅταν ὁ βαθμὸς τοῦ δοθέντος πολυωνύμου πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως δὲν ὑπερβαίνει τὸν 6ον· διότι τότε ἡ ρίζα αὐτοῦ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ὅρους περισσοτέρους τῶν τεσσάρων ἤτοι τοὺς ἔχοντας τὰς δυνάμεις χ^3, χ^2, χ, καὶ ὅρον μὴ ἔχοντα τὸν χ.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, τὸ πολυώνυμον

$$\chi^6-4\chi^4+10\chi^3+4\chi^2-20\chi+25\cdot$$

αἱ ρίζαι τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι χ^3 καὶ ± 5· (διότι δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ρίζης πάντοτε θετικόν)· ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ $2\chi^3$, βλέπομεν, ὅτι ἡ ρίζα θὰ ἔχῃ τὸν ὅρον -2χ· τὸν αὐτὸν δὲ ὅρον εὑρίσκομεν καὶ διαιροῦντες τὸν προτελευταῖον ὅρον τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ 10· ὅθεν ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ δοθέντος πολυωνύμου (ἐὰν τοῦτο εἶναι τέλειον τετράγωνον) δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ἄλλους ὅρους ἢ τοὺς ἑξῆς

$$\chi^3-2\chi+5\varepsilon\cdot \quad \text{ἔνθα } \varepsilon \text{ εἶναι ἢ } 1 \text{ ἢ } -1.$$

Ὑψοῦντες τὸ τριώνυμον τοῦτο εἰς τὸ τετράγωνον, βλέπομεν, ὅτι (ἂν ὑποτεθῇ $\varepsilon=+1$) ὄντως εἶναι ρίζα τοῦ δοθέντος πολυωνύμου.

Ἔστω, δεύτερον, τὸ πολυώνυμον

$$\chi^6-8\chi^5+4\chi^4-10\chi^3+15\chi^2-8\chi+1\cdot$$

κατὰ τὰ εἰρημένα, ἡ ῥίζα, ἂν ὑπάρχῃ, ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ὅρων

$$\chi^3 - 4\chi^2 - 4\chi\varepsilon + \varepsilon \qquad \text{ἔνθα } \varepsilon \text{ εἶναι ἢ } 1 \text{ ἢ } -1.$$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου τούτου εἶναι διάφορον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου (εἴτε $\varepsilon = +1$, εἴτε $\varepsilon = -1$ ὑποθέσωμεν), ἕπεται, ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον οὐδενὸς πολυωνύμου εἶναι τετράγωνον.

ΣΗΜ. Γ΄. Ἐνίοτε ἀναλύεται τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἰς δύο παράγοντας, ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ πολυώνυμον

$$2\chi^5 - 12\chi^4 + 22\chi^3 - 12\chi^2 + 2\chi,$$

ὅπερ γράφεται ὡς ἑξῆς

$$2\chi(\chi^4 - 6\chi^3 + 11\chi^2 - 6\chi + 1)$$

ἢ

$$2\chi(\chi^2 - 3\chi + 1)^2.$$

καὶ ἑπομένως ἡ ῥίζα αὐτοῦ δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἕπεται

$$(\chi^2 - 3\chi + 1)\sqrt{2\chi}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

203. ΘΕΩΡΗΜΑ. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις· εἶναι δὲ αὗται ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς προερχομένη, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς ἀλλαχθῇ.

Λέγω δὲ μίαν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς δύο ἄλλας, ὅταν πᾶσα λύσις αὐτῆς εἶναι λύσις καὶ τῆς ἑτέρας τῶν δύο ἄλλων, καὶ τἀνάπαλιν, πᾶσα λύσις τῆς ἑτέρας τῶν δύο τούτων εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης.

Ἔστω τυχοῦσα ἐξίσωσις $\alpha = \beta$, τῆς ὁποίας τὰ μέλη παριστῶμεν πρὸς συντομίαν ἕκαστον δι' ἑνὸς γράμματος· λέγω, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2 = \beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $\alpha = \beta$ καὶ $\alpha = -\beta$.

Τουτέστι, πᾶσα λύσις τῆς πρώτης θὰ εἶναι λύσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο δευτέρων καὶ πᾶσα λύσις τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο δευτέρων θὰ εἶναι λύσις καὶ τῆς πρώτης.

Διότι, ἂν ἀληθεύσῃ ποτὲ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2 = \beta^2$ ἤτοι ἂν τὰ μέλη αὐτῆς α^2 καὶ β^2 γίνωσιν ἴσοι ἀριθμοί, ἐπειδὴ τῶν ἴσων ἀριθμῶν αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι εἶναι ἢ ἴσαι ἢ ἀντίθετοι, θὰ εἶναι ἢ $\alpha = \beta$ ἢ $\alpha = -\beta$ ἤτοι θὰ ἀληθεύῃ καὶ μία ἐκ τῶν εἰρημένων δύο ἐξισώσεων· ἐὰν δὲ πάλιν ἀληθεύσῃ ἡ μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων $\alpha = \beta$, ἢ $\alpha = -\beta$ ἤτοι, ἂν α καὶ β γίνωσιν ἴσοι ἢ ἀντίθετοι ἀριθμοί, τὰ τετράγωνα αὐτῶν α^2 καὶ β^2 θὰ γίνωσιν ἴσα· καὶ ἑπομένως θὰ ἀληθεύσῃ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2 = \beta^2$.

Τὸ αὐτὸ θεώρημα δύναται καὶ ὡς ἑξῆς νὰ ἐκφρασθῇ.

Ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐξισώσεως ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα, ληφθῇ δὲ ἡ ῥίζα τοῦ ἑτέρου τῶν μελῶν καὶ μετὰ τοῦ + καὶ μετὰ τοῦ —, αἱ οὕτω προκύπτουσαι δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δεδομένην.

Ἤτοι, ἡ ἐξίσωσις $\alpha = \beta$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς δύο

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{\beta} \qquad \text{καὶ} \qquad \sqrt{\alpha} = -\sqrt{\beta},$$

διότι προκύπτει ἐξ ἑκατέρας αὐτῶν, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς τετραγωνισθῶσιν.

Γενικὴ μορφὴ πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἥτις ἔχει ἕνα ἄγνωστον.

204. Πᾶσα ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἕνα ἔχουσα ἄγνωστον, δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=\gamma\cdot \tag{1}$$

γίνεται δὲ τοῦτο, ἀφοῦ ἐξαλειφθῶσιν οἱ παρονομασταί, ἐκτελεσθῶσιν αἱ σεσημειωμέναι πράξεις, χωρισθῶσιν οἱ γνωστοὶ ὅροι ἀπὸ τῶν λοιπῶν καὶ ἀναχθῶσιν εἰς ἕνα ὅρον πάντες οἱ περιέχοντες τὸ χ^2, ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ περιέχοντες τὸ χ· τουτέστιν, ἀφοῦ ἐφαρμοσθῶσιν ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως αἱ πράξεις τοῦ ἐδαφ. 106.

Ὁ συντελεστὴς α δὲν δύναται νὰ εἶναι 0· διότι τότε ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ πρώτου βαθμοῦ· ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=\frac{\gamma}{\alpha}. \tag{2}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πηλίκα $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοὶ ἢ γνωσταὶ παραστάσεις, ἐὰν παραστήσωμεν τὸ μὲν πρῶτον διὰ τοῦ π, τὸ δὲ δεύτερον διὰ τοῦ κ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς ἕπεται

$$\chi^2+\pi\chi=\kappa. \tag{3}$$

Ἐὰν ὁ συντελεστὴς π εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ

$$\chi^2=\kappa.$$

Ἐὰν δὲ ὁ γνωστὸς ὅρος κ εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\chi^2+\pi\chi=0.$$

Τὰς δύο ταύτας μερικὰς ἐξισώσεις θὰ θεωρήσωμεν πρὸ τῆς γενικῆς.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi^2=\kappa$.

205. Διὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ζητεῖται ἀριθμός, οὗ τὸ τετράγωνον νὰ εἶναι ἴσον τῷ δοθέντι ἀριθμῷ κ· καὶ ἂν μὲν ὁ κ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, οὐδενὸς ἀριθμοῦ, ἐξ ὅσων ἔχομεν, εἶναι τετράγωνον (σελ. 134), καὶ ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις οὐδεμίαν ἔχει λύσιν ἐν τῷ παρόντι τῶν ἀριθμῶν συστήματι· ἂν δὲ ὁ κ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἐμάθομεν, ὅτι εἶναι τετράγωνον δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν, οἵτινες παρίστανται γενικῶς διὰ τῶν συμβόλων $\sqrt{\kappa}$ καὶ $-\sqrt{\kappa}$· ὥστε, ἵνα λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ χ ἴσος τῷ ἑτέρῳ τῶν ἀριθμῶν τούτων· ἤτοι

$$\text{ἢ} \quad \chi=+\sqrt{\kappa} \quad \text{ἢ} \quad \chi=-\sqrt{\kappa}.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τὰς δύο ταύτας ἐξισώσεις καὶ ἀμέσως ἐκ τῆς δοθείσης, ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς.

206. Ἵνα ἡ λύσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\chi^2 = \varkappa$$

καταστῇ πάντοτε δυνατή, εἶναι ἀνάγκη νὰ πλάσωμεν καὶ παραδεχθῶμεν νέον τινὰ ἀριθμὸν καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ νὰ εἶναι -1. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, ὅντινα παριστῶμεν διὰ τοῦ i, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν, μετ' αὐτῆς δὲ καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς $-i$ καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια καὶ τὰ πολλοστὰ ἀμφοτέρων. Οὕτω προκύπτει σύστημα εὐρύτερον, τοῦ ὁποίου οἱ ἀριθμοὶ γίνονται πάντες ἐκ τῶν τεσσάρων μονάδων $1, -1, i$ καὶ $-i$ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν. Λέγονται δὲ αἱ μὲν νέαι μονάδες i καὶ $-i$ φανταστικαί, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀποτελούμενοι ἀριθμοί, φανταστικοί· αἱ δὲ παλαιαὶ 1 καὶ -1, πρὸς διάκρισιν, λέγονται πραγματικαί, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοί, πραγματικοί. Οἱ δὲ ἐκ φανταστικῶν καὶ ἐκ πραγματικῶν συγκροτούμενοι λέγονται μιγάδες· ὡς $4+2i$, $-3+4i$, κτλ. Ἀποδεικνύεται δὲ ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ ὅτι καὶ ἐν τῷ γενικωτέρῳ τούτῳ συστήματι διατηροῦνται ἀμετάβλητοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων (ἑπομένως καὶ σύμπας ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμὸς) καὶ ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις μ βαθμοῦ ἔχει μ ρίζας ἐν αὐτῷ· ἀλλ' ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ εὑρυνθῇ περισσότερον, χωρὶς νὰ παύσωσιν ὑπάρχουσαι αἱ ρηθεῖσαι ἰδιότητες.

207. Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi^2 = \varkappa$ λύεται, καὶ ὅταν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὁ $\varkappa$· ἤτοι ὑπάρχουσι καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι· διότι αἱ φανταστικαὶ μονάδες i καὶ $-i$ εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ -1.

Ἔστω, παραδείγματος χάριν, ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2 = -5,$$

δι' ἧς ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -5· ἐξάγοντες ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, εὑρίσκομεν

$$\chi = \pm\sqrt{-5} = \pm\sqrt{(-1).(5)} = \pm\sqrt{-1}\,.\sqrt{5} = \pm i\sqrt{5}\cdot$$

ὥστε οἱ δύο ἀριθμοὶ $i\sqrt{5}$ καὶ $-i\sqrt{5}$ λύουσι τὴν ἐξίσωσιν.

Παραδείγματα

1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2 + 18 = 8\chi^2 - 62$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $5\chi^2 = 80$, ὅθεν $\chi^2 = 16$, καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὰς δύο λύσεις

$$\text{ἢ} \quad \chi = +\sqrt{16} = 4 \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\sqrt{16} = -4.$$

2ον) $$\frac{\chi^2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{\chi^2}{6} + \frac{3}{8} + \chi^2.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $116\chi^2 = 35$· ὅθεν $\chi^2 = \frac{35}{116}$,

καὶ ἑπομένως ἔχομεν τὰς λύσεις

$$\text{ἢ} \quad \chi = +\sqrt{\frac{35}{116}} \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\sqrt{\frac{35}{116}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\sqrt{\frac{35}{116}} = \sqrt{\frac{35}{4.29}} = \sqrt{\frac{35\ 29}{4.29^2}} = \frac{1}{58}\sqrt{1015},$$

ἕπεται, ὅτι ἢ $\chi = +\frac{1}{58}\sqrt{1015}$, ἢ $\chi = -\frac{1}{58}\sqrt{1015}$.

3ον) $$(\chi + \alpha)\cdot(\chi - \alpha) = 2\alpha + 1.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἕπεται $\chi^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ ἤτοι

$$\chi^2 = (\alpha + 1)^2.$$

Ὅθεν ἕπονται αἱ λύσεις

$$\chi = \alpha + 1 \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\alpha - 1.$$

4ον) $$4\chi^2 - 8 = 12\chi^2 + 24.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται $8\chi^2 = -32$ ἢ $\chi^2 = -4$·

ὅθεν ἕπονται αἱ φανταστικαὶ λύσεις

$$\text{ἢ} \quad \chi = +\sqrt{-4} = 2i \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\sqrt{-4} = -2i.$$

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + \pi\chi = 0$.

208. Ἵνα λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, γράφομεν αὐτὴν ὡς ἕπεται:

$$\chi(\chi + \pi) = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ γινόμενον δύο παραγόντων τότε μόνον εἶναι 0, ὅταν ὁ ἕτερος τῶν παραγόντων εἶναι 0, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$\text{ἢ} \quad \chi = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi + \pi = 0·$$

ἔχομεν ἄρα δύο λύσεις: ἢ $\chi = 0$ ἢ $\chi = -\pi$.

Ἔστω, ὡς παράδειγμα, ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2 - 8\chi = 0·$$

γράφοντες αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi(\chi - 8) = 0$,

βλέπομεν, ὅτι ἔχει τὰς λύσεις

$$\text{ἢ} \quad \chi = 0 \quad \text{ἢ} \quad \chi = 8.$$

Λύσις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

209. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως ταύτης σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τοῦ χ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ χ ἐπὶ τὸν γνωστὸν ἀριθμὸν $\frac{\pi}{2}$ (διότι τὸ πχ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\frac{\pi}{2}\cdot 2\chi$)· ἀποτελεῖ ἄρα τοὺς δύο πρώτους ὅρους τοῦ τετραγώνου $\left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2$· ἵνα δὲ ἀποτελέσῃ τὸ ὅλον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ προστεθῇ εἰς αὐτὸ ὁ τρίτος ὅρος τοῦ τετραγώνου, ὅστις εἶναι ὁ $\frac{\pi^2}{4}$. Διὰ τῆς προσθέσεως τούτου εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\chi^2+\pi\chi+\frac{\pi^2}{4}=\kappa+\frac{\pi^2}{4}$$

$$\text{ἢ}\qquad \left(\chi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\kappa+\frac{\pi^2}{4}\cdot$$

ἐξάγοντες δὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, λαμβάνομεν τὰς δύο ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτὴν ἐξισώσεις

$$\chi+\frac{\pi}{2}=\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}},\qquad \chi+\frac{\pi}{2}=-\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}\cdot$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς δύο λύσεις

$$\text{ἢ}\qquad \chi=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}$$

$$\text{ἢ}\qquad \chi=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}.$$

Τὰς δύο ταύτας λύσεις περιλαμβάνομεν εἰς ἕνα μόνον τύπον, γράφοντες αὐτὰς ὡς ἕπεται

$$\chi=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}\cdot \tag{1}$$

210. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ χ εἶναι γενικὸς τύπος, δι' οὗ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς λύοντας τὴν ἐξίσωσιν ἀριθμούς, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς προηγηθέντας συλλογισμούς, οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ καὶ ἂν εἶναι οἱ συντελεσταὶ π καὶ κ.

Δύναται δὲ νὰ ἑρμηνευθῇ ὁ τύπος οὗτος ὡς ἕπεται:

Ἐκ πάσης ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ, ἀνηγμένης εἰς τὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\kappa$, *ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται, ἐὰν ληφθῇ τὸ ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως αὐτοῦ μετὰ τοῦ ἐναντίου σημείου,* προστεθῇ δὲ εἰς αὐτὸ ἢ ἀφαιρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γνωστοῦ ὅρου, ηὐξημένου κατὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ληφθέντος ἡμίσεος τοῦ συντελεστοῦ.

Αἱ λύσεις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως λέγονται καὶ ρίζαι αὐτῆς.

Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου (1) βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο μὲν πραγματικὰς λύσεις ἢ ρίζας, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\varkappa + \frac{\pi^2}{4}$ εἶναι θετικός, μίαν δὲ μόνον (πραγματικὴν) ἐὰν ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἶναι 0, καὶ δύο μιγάδας, ἐὰν ἀρνητικός.

211. Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (1) εὑρίσκονται καὶ αἱ λύσεις τῶν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων $\chi^2 = \varkappa$ καὶ $\chi^2 + \pi\chi = 0$ (διότι καὶ αἱ ἐξισώσεις αὗται ὑπάγονται εἰς τὴν γενικήν, ἧς τινος εἶναι μερικαὶ μόνον περιπτώσεις).

Ἐάν, τῷ ὄντι, ὑποθέσωμεν $\varkappa = 0$, ἡ μὲν γενικὴ ἐξίσωσις καταντᾷ $\chi^2 + \pi\chi = 0$, ὁ δὲ γενικὸς τύπος δίδει

$$\chi = -\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4}} \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2},$$

ὅθεν αἱ λύσεις $\chi = 0$ καὶ $\chi = -\pi$.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\pi = 0$, ἡ μὲν γενικὴ ἐξίσωσις καταντᾷ $\chi^2 = \varkappa$, ὁ δὲ γενικὸς τύπος δίδει

$$\chi = \pm\sqrt{\varkappa}.$$

ΣΗΜ. Ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δοθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$(\chi - \alpha)^2 = \beta,$$

αἱ ρίζαι αὐτῆς εὑρίσκονται ἀμέσως διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετρ. ρίζης ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ εἶναι

$$\chi = \alpha \pm \sqrt{\beta}.$$

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 5\chi = -6$·
ἐφαρμόζοντες εἰς αὐτὴν τὸν εὑρεθέντα τύπον, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6}$$

ἤτοι $\chi = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}$.

ἑπομένως αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\chi = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

καὶ $\chi = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$

2ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+6\chi=8$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τύπον

$$\chi=-3\pm\sqrt{9+8}=-3\pm\sqrt{17}\cdot$$

ἑπομένως αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\chi=-3+\sqrt{17}$$

καὶ $\chi=-3-\sqrt{17}$.

3ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+7\chi=1$.

Ἐκ ταύτης ἕπεται κατὰ τὸν τύπον

$$\chi=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+1}=-\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{53}\cdot$$

ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι

$$\chi=\frac{-7+\sqrt{53}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-7-\sqrt{53}}{2}.$$

4ον) $\chi^2-7\alpha\chi=-12\alpha^2$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης, ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{7\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{49\alpha^2}{4}-12\alpha^2}=\frac{7\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}}$$

ἤτοι $\chi=\frac{7\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\cdot$

ἑπομένως, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\chi=4\alpha$ καὶ $\chi=3\alpha$.

5ον) $\chi^2-(2\alpha+5\beta)\chi+10\alpha\beta=0$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν γενικὸν τύπον εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2\alpha+5\beta}{2}\right)^2-10\alpha\beta}.$$

Ἡ ὑπόρριζος παράστασις εἶναι

$$\frac{4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2}{4} \quad \text{ἤτοι} \quad \left(\frac{2\alpha-5\beta}{2}\right)^2.$$

ὅθεν ἕπεται

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}\pm\frac{2\alpha-5\beta}{2}\cdot$$

καὶ αἱ ρίζαι, ἑπομένως, εἶναι

$$\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}+\frac{2\alpha-5\beta}{2}=2\alpha$$

καὶ $\chi=\frac{2\alpha+5\beta}{2}-\frac{2\alpha-5\beta}{2}=5\beta$.

6ον) $$\chi^2-8\chi+25=0.$$

Ἐφαρμόζοντες τὸν γενικὸν τύπον εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν

$$\chi=4\pm\sqrt{16-25}=4\pm\sqrt{-9}=4\pm\sqrt{9(-1)}\cdot$$

ἐξ οὗ ἕπονται αἱ μιγάδες ῥίζαι

$$\chi=4+3i \quad \text{καὶ} \quad \chi=4-3i.$$

Εὔκολον δὲ εἶναι νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι ἐπαληθεύουσι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

*212. Ἵνα εὕρωμεν τύπον παρέχοντα ἀμέσως τὰς ῥίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ἀνηγμένης, εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,$$

διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ τοῦ α, ὅτε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \quad \text{ἢ} \quad \chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot$$

ταύτης δὲ αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἐκ τοῦ τύπου (1), ἐὰν τεθῇ ἐν αὐτῷ ἀντὶ τοῦ π τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἀντὶ τοῦ κ τὸ $-\frac{\gamma}{\alpha}\cdot$ οὕτω προκύπτει

$$\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}}$$

$$\text{ἢ} \quad \chi=-\frac{\beta}{2\alpha}\pm\sqrt{\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ῥίζαν κλάσματος, ἐξάγομεν τὴν ῥίζαν τῶν ὅρων καὶ γράφομεν κοινὸν παρονομαστὴν τὸν 2α· οὕτως εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}. \qquad (2)$$

Ὁ γενικὸς οὗτος τύπος παρέχει ἀμέσως τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0,$$

χωρὶς νὰ εἶναι ἀνάγκη νὰ ἄγηται πρῶτον εἰς τὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

Παραδείγματα.

1ον) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $10\chi^2+\chi-3=0$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, κατὰ τὸν τύπον (2)

$$\chi=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.10(-3)}}{20}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{20}=\frac{-1\pm11}{20}$$

ἑπομένως αἱ ῥίζαι εἶναι

$$\chi=\frac{-1+11}{20}=\frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-1-11}{20}=-\frac{3}{5}.$$

2ον) $$8\chi^2+13\chi+12=0.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\chi=\frac{-13\pm\sqrt{169-4.8.12}}{16}=\frac{-13\pm\sqrt{-215}}{16}$$

καὶ αἱ ῥίζαι εἶναι

$$\chi=\frac{-13+i\sqrt{215}}{16} \quad \text{καὶ} \quad \chi=\frac{-13-i\sqrt{215}}{16}.$$

Πρὸς ἄσκησιν προτείνομεν εἰς λύσιν καὶ τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις.

1) $$\sqrt{\frac{\alpha}{\chi-\beta}}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2.$$

2) $$24\chi^2+29\chi+7=0.$$

3) $$\chi^2-2\alpha\chi=\beta^2-\alpha^2.$$

4) $$(\alpha+\beta)^2.(\chi^2-\chi)+\alpha\beta=0.$$

5) $$(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\chi(\alpha^2+\beta^2)+\alpha^2-\beta^2=0.$$

Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\chi^2+\pi\chi=\kappa$.

213. Τῶν δύο ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi=\kappa$, τὸ μὲν ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ συντελεστῇ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου μετ' ἐναντίου σημείου, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται τῷ γνωστῷ ὅρῳ, ὡσαύτως μετ' ἐναντίου σημείου εἰλημμένῳ.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὰς ῥίζας διὰ ϱ′ καὶ ϱ′′, ἔχομεν

$$\varrho'=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa},$$

$$\varrho''=-\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+\kappa}$$

καὶ προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\varrho'+\varrho''=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=2.\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi.$$

Πολλαπλασιάζοντες δ' αὐτάς, εὑρίσκομεν

$$\varrho'.\varrho''=\left\{\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}\right\}.\left\{\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{\kappa+\frac{\pi^2}{4}}\right\}=$$

$$=\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\kappa+\frac{\pi^2}{4}\right)=\frac{\pi^2}{4}-\kappa-\frac{\pi^2}{4}=-\kappa.$$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι αἱ ἰδιότητες αὗται μένουσι, καὶ ὅταν μία λύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi - \varrho').(\gamma - \varrho')$· ἑπομένως πρὸ τῆς διαιρέσεως τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ εἶναι ἴσον τῷ $\alpha(\chi - \varrho').(\chi - \varrho'')$.

Κατὰ ταῦτα, τὸ τριώνυμον $\chi^2 - 5\chi + 6$ ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον $(\chi - 2).(\chi - 3$· διότι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^2 - 5\chi + 6 = 0 \qquad \text{εἶναι } 2 \text{ καὶ } 3.$$

Καὶ τὸ τριώνυμον $\chi^2 + 7\chi - 8$ ἀναλύεται εἰς τὸ γενόμενον $(\chi - 1).(\chi + 8)$· διότι οἱ μηδενίζοντες αὐτὸ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ -8 καὶ $+1$.

Καὶ τὸ τριώνυμον $5\chi^2 + 9\chi - 2$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ

$$5(\chi + 2).\left(\chi - \frac{1}{5}\right) \quad \text{ἢ τῷ} \quad (\chi + 2).(5\chi - 1),$$

διότι οἱ μηδενίζοντες αὐτὸ ἀριθμοὶ εἶναι -2 καὶ $\frac{1}{5}$.

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη ἐξηγεῖ, διατί ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο ρίζας. Καὶ ὄντως, γινόμενον δύο παραγόντων, οἷον τὸ $(\chi - \varrho').(\chi - \varrho'')$, μηδενίζεται κατὰ δύο διαφόρους τρόπους, δηλονότι μηδενιζομένου ἢ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου παράγοντος. Ἐὰν δὲ ἐξισώσωμεν τῷ 0, πρῶτον τὸν ἕνα παράγοντα καὶ ἔπειτα τὸν ἄλλον, θὰ λάβωμεν τὰς δύο ρίζας τοῦ πολυωνύμου $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, ἔχουσαν ρίζας, δύο ὡς ἔτυχε δεδομένους ἀριθμούς, ὡς τοὺς λ καὶ ρ· πρὸς τοῦτο, σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $(\chi - \lambda).(\chi - \varrho)$ καὶ ἐξισοῦμεν αὐτὸ μὲ τὸ 0· ἤτοι θέτομεν $(\chi - \lambda).(\chi - \varrho) = 0$.

Ὅτι δὲ οὐδεμία ἄλλη δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ ἔχει τὰς δοθείσας ρίζας, εἶναι φανερόν.

* Τὴν ἀνάλυσιν παντὸς τριωνύμου $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ εἰς πρωτοβαθμίους παράγοντας δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$.

Συμπληροῦντες τὸ τετράγωνον, εἰς ὃ ἀνήκουσιν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι (ἐδ. 209), γράφομεν αὐτὸ ὡς ἕπεται

$$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right)^2 + \gamma - \frac{1}{4}\beta^2.$$

ἔπειτα διακρίνομεν τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

1) Ἐὰν $\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$ εἶναι θετικόν, παριστῶντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ διὰ τοῦ τ, θὰ ἔχωμεν τὸ πολυώνυμον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right)^2 + \tau^2 \qquad (1)$$

ἢ $$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta + \tau i\right) . \left(\chi + \frac{1}{2}\beta - \tau i\right).$$

2) Ἐὰν εἶναι $\gamma - \frac{1}{4}\beta^2$ ἀρνητικόν, ὁ ἀντίθετος ἀριθμὸς $\frac{1}{4}\beta^2 - \gamma$ θὰ εἶναι θετικὸς καὶ παριστῶντες τὴν τετραγωνικὴν αὐτοῦ ρίζαν διὰ τ, θὰ ἔχωμεν τὸ τριώνυμον ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right)^2 - \tau^2 \qquad (2)$$

ἢ $$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta + \tau\right) . \left(\chi + \frac{1}{2}\beta - \tau\right).$$

3) Ἐὰν τέλος εἶναι $\gamma - \frac{1}{4}\beta^2 = 0$, τὸ τριώνυμον καταντᾷ

$$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right)^2 \quad ἢ \quad \left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right)\left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right). \qquad (3)$$

Ὥστε καὶ κατὰ τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὸ τριώνυμον ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων πρωτοβαθμίων (ὡς πρὸς τὸ χ).

Παρατηρησις. Ἐὰν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοί, λ καὶ μ, τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ χ εἰς τὸ τριώνυμον $\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, δίδωσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ μία ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο ἀριθμῶν λ καὶ μ.

Διότι τὸ τριώνυμον τότε τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν (2)

$$\left(\chi + \frac{1}{2}\beta\right)^2 - \tau^2.$$

διότι εἰς τὰς ἄλλας δύο μορφὰς (1) καὶ (3) τὸ τριώνυμον εἶναι ἢ τετράγωνον τέλειον ἢ ἄθροισμα δύο τετραγώνων καὶ διὰ τοῦτο δὲν δύναται νὰ δώσῃ ἀρνητικὸν ἐξαγόμενον διὰ πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ· αἱ ρίζαι ἄρα θὰ εἶναι πραγματικαὶ $\left(αἱ \; -\frac{1}{2}\beta + \tau \quad καὶ \quad -\frac{1}{2}\beta - \tau\right)$ καὶ ἄνισοι, καὶ ἂν παραστήσωμεν αὐτὰς διὰ ϱ_1 καὶ ϱ_2, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ τριώνυμον καὶ ὡς ἑξῆς

$$(\chi - \varrho_1) . (\chi - \varrho_2).$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὸ χ εἰς αὐτό, πρῶτον μὲν ὑπὸ τοῦ λ, ἔπειτα δὲ ὑπὸ τοῦ μ, εὑρίσκομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα

$$(\lambda - \varrho_1) . (\lambda - \varrho_2) \quad καὶ \quad (\mu - \varrho_1) . (\mu - \varrho_2),$$

ἅτινα ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἑτεροειδῆ· ἑπομένως τὸ πηλίκον αὐτῶν

$$\frac{\lambda-\varrho_1}{\mu-\varrho_1}\cdot\frac{\lambda-\varrho_2}{\mu-\varrho_2},$$

εἶναι ἀρνητικόν· ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ ἓν ἐκ τῶν πηλίκων θὰ εἶναι ἀρνητικόν· ἔστω τὸ πρῶτον· τότε οἱ ἀριθμοὶ $\lambda-\varrho_1$ καὶ $\mu-\varrho_1$ θὰ εἶναι ἑτεροειδεῖς· ἤτοι ἡ ῥίζα ϱ_1 θὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ λ καὶ μ.

Ἐξισώσεις ἔχουσαι ῥιζικά.

216. Ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ τετραγωνικήν τινα ῥίζαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος, κατορθοῦμεν, ὥστε αὕτη μόνη νὰ ἀποτελῇ τὸ ἕτερον τῶν μελῶν καὶ ὑψοῦμεν ἔπειτα ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε ἡ ῥίζα ἐξαφανίζεται. Ἀναμνηστέον ὅμως, ὅτι ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς δύο ἐξισώσεις, τὴν ἀρχικὴν καὶ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν, ὅταν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ληφθῇ μετὰ τοῦ ἀντιθέτου σημείου. Λέγονται δὲ αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις συζυγεῖς ἀλλήλων.

Παραδείγματα.

1ον) $$\chi+\sqrt{\chi}=20\cdot$$

γράφομεν $$\sqrt{\chi}=20-\chi,$$

ὅθεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη, ἔχομεν

$$\chi=400+\chi^2-40\chi$$

ἢ $$\chi^2-41\chi=-400,$$

καὶ λύοντες, εὑρίσκομεν $\chi=16$, $\chi=25$· τῶν λύσεων τούτων μόνον ἡ πρώτη ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-\sqrt{\chi}=20$.

2ον) $$\chi+\sqrt{\chi^2-5}=5\cdot$$

γράφομεν $$\sqrt{\chi^2-5}=5-\chi.$$

ὅθεν $$\chi^2-5=25-10\chi+\chi^2$$

ἢ $$10\chi=30$$

καὶ $$\chi=3.$$

Ἡ λύσις αὕτη ἁρμόζει εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἑπομένως ἡ συζυγὴς αὐτῆς $\chi-\sqrt{\chi^2-5}=5$ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται λύσιν.

3ον) $$\chi-\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=1\cdot$$

γράφομεν $$\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=\chi-1,$$

ὅθεν $$2\chi^2-8\chi+9=\chi^2-2\chi+1$$

ἢ $$\chi^2-6\chi+8=0.$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι ἢ $\chi=2$ ἢ $\chi=4$, ἁρμόζουσι δὲ ἀμφότεραι εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν· ἑπομένως ἡ συζυγὴς αὐτῆς

$$\chi+\sqrt{2\chi^2-8\chi+9}=1$$

οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.

4ον)
$$\chi+\sqrt{\chi^2-10\chi+1}=5\cdot$$

γράφομεν
$$\sqrt{\chi^2-10\chi+1}=5-\chi,$$

ὅθεν
$$\chi^2-10\chi+1=25+\chi^2-10\chi$$

ἢ
$$0=24\cdot$$

ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις καὶ ἡ συζυγὴς αὐτῆς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

Καὶ περισσότερα ριζικὰ (δευτέρου βαθμοῦ) ἐξαφανίζονται διὰ τῆς ἀλλεπαλλήλου ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, ὡς φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

5ον)
$$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9.$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον ἀμφότερα τὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\chi+\chi-9+2\sqrt{\chi^2-9\chi}=81$$

ἤτοι
$$2\chi-90=-2\sqrt{\chi^2-9\chi}$$

ἢ
$$\chi-45=-\sqrt{\chi^2-9\chi}\cdot$$

ὑψοῦντες δὲ καὶ πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$$\chi^2-90\chi+2025=\chi^2-9\chi,$$

ὅθεν $\quad 81\chi=2025, \quad$ ἐξ ἧς $\quad \chi=25.$

Ἡ ἐξίσωσις $81\chi=2025$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1) καὶ τὴν συζυγῆ αὐτῆς $\chi-45=\sqrt{\chi^2-9\chi}\cdot$ τούτων δὲ πάλιν ἡ μὲν (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις

$$\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9$$
$$-\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9\cdot$$

ἡ δὲ συζυγὴς τῇ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς

$$\sqrt{\chi}-\sqrt{\chi-9}=9$$
$$-\sqrt{\chi}+\sqrt{\chi-9}=9\cdot$$

ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἄνευ ριζικῶν ἐξίσωσις $81\chi=2025$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς τέσσαρας ταύτας ἐξισώσεις (αἵτινες προκύπτουσιν ἐκ τῆς δοθείσης, λαμβανομένης ἑκάστης ρίζης μετὰ τοῦ θετικοῦ ἢ μετὰ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου, καθ' ἅπαντας τοὺς δυνατοὺς συνδυασμούς).

Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις $\chi = 25$ ἁρμόζει (ὡς εὐκόλως βλέπει τις) εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, συνάγεται ὅτι, αἱ λοιπαὶ τρεῖς οὐδεμίαν ἔχουσι λύσιν.

ΣΗΜ. Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι ριζικὰ λύονται ἐνίοτε εὐκολώτερον διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ ἀγνώστου. Οὕτως, ἡ πρώτη, ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi} = \omega$, ἀνάγεται εἰς τὴν $\omega^2 + \omega = 20$· ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν ἢ $\omega = 4$ ἢ $\omega = -5$, ἄρα $\chi = 16$ ἢ $\chi = 25$.

Η δὲ πέμπτη λύεται, ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi} = \omega$ καὶ $\sqrt{\chi - 9} = \varphi$· διότι ἀνάγεται τότε εἰς τὸ σύστημα

$$\omega + \varphi = 9 \quad \text{καὶ} \quad \omega^2 - \varphi^2 = (\omega + \varphi).(\omega - \varphi) = 9\cdot$$

ὅθεν $\omega + \varphi = 9$ καὶ $\omega - \varphi = 1$·

ἄρα $\omega = 5$, $\varphi = 4$ καὶ ἑπομένως $\chi = 25$.

Ἡ ἀλλαγὴ αὕτη ὠφελεῖ μάλιστα, ὅταν ὑπὸ τὸ ριζικὸν δὲν ὑπάρχῃ ἢ ἡ πρώτη δύναμις τοῦ ἀγνώστου.

Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

217. Οὕτω καλοῦνται αἱ ἐξισώσεις τοῦ τετάρτου βαθμοῦ, αἱ ἀρτίας μόνον δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου περιέχουσαι, ἤτοι αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^4 + \beta\chi^2 = \gamma. \qquad (1)$$

Ἐὰν τεθῇ $\chi^2 = \omega$, ἕπεται καὶ $\chi^4 = \omega^2$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha\omega^2 + \beta\omega = \gamma$, ἤτοι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον ω.

Εὑρεθεισῶν δὲ τῶν δύο τιμῶν τοῦ ω ἐκ τῆς δευτεροβαθμίου ταύτης ἐξισώσεως, εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τοῦ χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 = \omega$.

Ἔστωσαν ω' καὶ ω'' αἱ δύο τιμαὶ τοῦ ω· τότε ἔχομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $\chi^2 = \omega'$, ὅθεν $\chi = \pm\sqrt{\omega'}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $\chi^2 = \omega''$, ὅθεν $\chi = \pm\sqrt{\omega''}$· ὥστε εὑρίσκονται τέσσαρες ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1)

$$+\sqrt{\omega'},\ -\sqrt{\omega'},\ +\sqrt{\omega''},\ -\sqrt{\omega''}.$$

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον λύοντες τὴν ἐξίσωσιν,

$$\chi^4 - 13\chi^2 + 36 = 0,$$

εὑρίσκομεν τὰς ρίζας $+2, -2, +3, -3$.

Προβλήματα.

1ον) Ἔμπορος πωλήσας πρᾶγμά τι ἀντὶ 16 δραχμῶν, ἐζημιώθη τόσον τοῖς ἑκατόν, ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτό. Ζητεῖται ἀντὶ πόσων δραχμῶν εἶχεν ἀγοράσει τὸ πρᾶγμα.

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἡ ζημία θὰ εἶναι $\chi - 16$. Ἀλλά, κατὰ τὸ πρόβλημα, ἐζημιώθη τὸν τόκον τῶν χ δραχμῶν πρὸς χ τοῖς ἑκατὸν (δι' ἓν ἔτος) ἤτοι $\frac{\chi^2}{100}$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{\chi^2}{100} = \chi - 16\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως εὑρίσκομεν λύοντες

$$\text{ἢ} \quad \chi = 80 \quad \text{ἢ} \quad \chi = 20\cdot$$

ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται πληροῦσι πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

2ον) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα ἀντὶ 600 δραχμῶν. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἐλάμβανεν 20 πήχεις περισσότερον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως θὰ ἦτο κατὰ 5 δραχμὰς μικροτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων· ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{600}{\chi}$, ἂν δὲ οἱ πήχεις ἦσαν $\chi+20$, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς θὰ ἦτο $\frac{600}{\chi+20}$· ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{600}{\chi} - \frac{600}{\chi+20} = 5,$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν τὰς λύσεις

$$\text{ἢ} \quad \chi = 40 \quad \text{ἢ} \quad \chi = -60,$$

ὧν μόνον ἡ πρώτη εἶναι παραδεκτή, ὡς πληροῦσα πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

3ον) Ἐκ δύο ἐργατῶν, ὁ εἷς εἰργάσθη 3 ἡμέρας περισσοτέρας τοῦ ἄλλου, ἔλαβον δὲ ὁμοῦ διὰ τὰ ἡμερομίσθιά των 147 δραχμάς. Ἀλλ' ἂν ὁ πρῶτος εἰργάζετο ὅσας ὁ δεύτερος ἡμέρας, θὰ ἐλάμβανεν 60 δραχμάς· ἂν δὲ ὁ δεύτερος εἰργάζετο ὅσας ὁ πρῶτος, θὰ ἐλάμβανεν 90. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη ἑκάτερος τῶν ἐργατῶν;

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ χ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, καθ' ἃς εἰργάσθη ὁ πρῶτος, ὁ δεύτερος εἰργάσθη ἡμέρας χ—3. Ἂν ὁ πρῶτος εἰργάζετο χ—3 ἡμέρας, θὰ ἐλάμβανεν 60 δραχμάς· ἑπομένως τὸ ἡμερομίσθιόν του εἶναι $\frac{60}{\chi-3}$· καὶ ἐργασθεὶς χ ἡμέρας ἔλαβεν $\frac{60\chi}{\chi-3}$. Ἂν ὁ δεύτερος εἰργάζετο χ ἡμέρας, θὰ ἐλάμβανεν 90 δραχμάς· ἑπομένως τὸ ἡμερομίσθιόν του εἶναι $\frac{90}{\chi}$· καὶ ἐργασθεὶς χ—3 ἡμέρας ἔλαβεν $\frac{90(\chi-3)}{\chi}$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{90(\chi-3)}{\chi}+\frac{60\chi}{\chi-3}=147\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ εἶναι ὁ χ θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμὸς καὶ μεγαλήτερος τοῦ 3.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=15$ ἢ $\chi=18$· ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται πληροῦσι πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος· ἐπομένως, ἢ ὁ πρῶτος εἰργάσθη 15 ἡμέρας καὶ ὁ δεύτερος 12, ἢ ὁ πρῶτος 18 καὶ ὁ δεύτερος 15.

4ον) Ἔμπορος πωλήσας 8 πήχεις ὑφάσματος, ἔλαβε τόσας δραχμάς, ὅσους πήχεις ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ, ἵνα λάβῃ 50 δραχμάς· πόσας δραχμὰς ἔλαβεν;

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔλαβε διὰ τοὺς 8 πήχεις, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{\chi}{8}$· καὶ ἵνα λάβῃ 50 δραχμάς, ἔπρεπε νὰ πωλήσῃ πήχεις $50:\frac{\chi}{8}$ ἤτοι $\frac{400}{\chi}$· εἶναι δέ, κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\chi=\frac{400}{\chi} \quad ἢ \quad \chi^2=400\cdot$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν λύοντες

$$ἢ \quad \chi=20 \quad ἢ \quad \chi=-20\cdot$$

φανερὸν δέ, ὅτι μόνον ἡ πρώτη λύσις εἶναι παραδεκτή.

5ον) Ἐάν τις ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, ὁ κύβος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 721· τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ εἶναι

$$(\chi+1)^3-\chi^3=721\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(\chi+1)^3=\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$ (σελ. 43), ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος γίνεται $\quad 3\chi^2+3\chi+1=721$

$$ἢ \quad 3\chi^2+3\chi=720,$$

$$ὅθεν\ καὶ \quad \chi^2+\chi=240\cdot$$

λύοντες τὴν ἐξίσωσιν ταύτην, εὑρίσκομεν τὰς δύο λύσεις

$$ἢ \quad \chi=15 \quad ἢ \quad \chi=-16.$$

6ον) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 20 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὰ τετράγωνα αὐτῶν νὰ διαφέρωσι κατὰ 120.

Παριστῶντες τὰ ἄγνωστα μέρη διὰ χ καὶ ψ, θὰ ἔχωμεν

$$\chi+\psi=20$$
$$\chi^2-\psi^2=120\cdot$$

ἐπειδὴ δὲ $\chi^2-\psi^2$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον $(\chi+\psi).(\chi-\psi)$ ἤτοι μὲ τὸ $20(\chi-\psi)$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται $\chi-\psi=6$, καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος γίνονται

$$\chi+\psi=20$$
$$\chi-\psi=6\cdot$$

ἐξ ὧν προκύπτει ἡ λύσις $\chi=13, \quad \psi=7.$

7ον) Δύο ταχυδρόμοι, ὁμαλῶς κινούμενοι, ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν πορευόμενος ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Συνέβη δὲ ὁ μὲν πρῶτος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β ἐννέα ὥρας μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὴν Α δεκαὲξ ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον.

Α Γ Β

Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἐκκινήσαντος καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β· ἔστω, πρὸς τούτοις, Γ τὸ σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΑΒ, εἰς ὃ ἐγένετο ἡ συνάντησις τῶν ταχυδρόμων. Ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΒ εἰς 9 ὥρας μὲ ταχύτητα χ· ἄρα εἶναι $\Gamma B=9\chi$. Ὁ δεύτερος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΑ εἰς 16 ὥρας μὲ ταχύτητα ψ· ἄρα εἶναι $\Gamma A=16\psi$.

Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως ἐξεκίνησαν καὶ συγχρόνως ἔφθασαν εἰς τὸ Γ, ἕπεται ὅτι ὁ χρόνος, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ πρῶτος τὸ διάστημα ΑΓ $\left(\text{ὅστις εἶναι } \frac{A\Gamma}{\chi} \text{ ἤτοι } \frac{16\psi}{\chi}\right)$, εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ δεύτερος τὸ διάστημα ΒΓ $\left(\text{οὗτος δὲ εἶναι } \frac{B\Gamma}{\psi} \text{ ἢ } \frac{9\chi}{\psi}\right)$· ὥστε ἔχομεν

$$\frac{16\psi}{\chi}=\frac{9\chi}{\psi} \quad \text{ἤτοι} \quad 16\psi^2=9\chi^2,$$

ἐξ ἧς καὶ $$\frac{\chi^2}{\psi^2}=\frac{16}{9}\cdot$$

καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{4}{3},$$

τουτέστιν, ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου εἶναι πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου, ὅπως ὁ 4 πρὸς τὸν 3.

8ον) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν γ.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\begin{aligned} \chi+\psi&=\alpha \\ \chi\psi&=\gamma. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ τοῦ ψ ληφθῇ ἐκ τῆς πρώτης καὶ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν, ἀπαλείφεται ὁ ψ καὶ εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} \chi(\alpha-\chi)&=\gamma \\ \chi^2-\chi&=-\gamma\cdot \end{aligned} \qquad (2)$$

ὅθεν $\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}.$

Ἂν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι α· ἂν δὲ πάλιν ὁ χ ληφθῇ ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$, ὁ ψ θὰ εἶναι ἴσος τῷ $\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$. ἑπομένως οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι οἱ

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2} \qquad (3)$$

τουτέστιν εἶναι αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2).

ΣΗΜ. Ὅτι αἱ δύο ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως (2) ἔχουσιν ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ (ἑπομένως λύουσι τὸ πρόβλημα), ἦτο ἤδη γνωστὸν (213)· ὅτι ὅμως μόνον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι λύουσι τὸ πρόβλημα, τοῦτο ἐδείχθη νῦν, διὰ τῆς ἀμέσου λύσεως τοῦ προβλήματος.

Διερεύνησις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι πραγματικοί, ἐὰν τὸ $\alpha^2-4\gamma$ δὲν εἶναι ἀρνητικόν. Καὶ ἂν μὲν τὸ γ εἶναι ἀρνητικὸν (ὅτε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἑτεροειδεῖς), τὸ $\alpha^2-4\gamma$ εἶναι πάντοτε θετικόν· ἂν δὲ τὸ γ εἶναι θετικόν (ὅτε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμοειδεῖς), δὲν πρέπει νὰ εἶναι ὁ 4γ μεγαλήτερος τοῦ α^2. Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ὁμοειδῶν ἀριθμῶν οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν (α) μερίσωμεν ὁπωσδήποτε εἰς δύο ὁμοειδῆ μέρη, τὸ μέγιστον γινόμενον τῶν μερῶν τούτων εἶναι ἴσον τῷ τετάρτῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Εὑρίσκεται δὲ τὸ μέγιστον τοῦτο γινόμενον, ὅταν μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς εἰς ἴσα μέρη· διότι ἐὰν ὑποτεθῇ $\gamma=\frac{\alpha^2}{4}$, οἱ τύποι (3) δίδουσι τὰ δύο μέρη $\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2}$.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν μερίσωμεν εἰς ὁσαδήποτε ὁμοειδῆ μέρη, τὸ γινόμενον τῶν μερῶν τούτων γίνεται μέγιστον, ὅταν τὰ μέρη γίνωσιν ἴσα.

Διότι, ἂν δύο μέρη δὲν εἶναι ἴσα, ἔστωσαν, λόγου χάριν, 5 καὶ 7, καθιστῶντες αὐτὰ ἴσα, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ἄθροισμά των, ἤτοι λαμβάνοντες ἀντ' αὐτῶν τὰ 6, 6, εὑρίσκομεν γινόμενον 6.6, μεγαλήτερον τοῦ 5.7· ἄρα καὶ τὸ γινόμενον πάντων τῶν μερῶν θὰ γίνῃ μεγαλήτερον.

9ον) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ γινομένου αὐτῶν γ καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν β.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\begin{aligned} \chi^2+\psi^2 &= \beta \\ \chi\psi &= \gamma\cdot \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἡ δευτέρα διπλασιασθεῖσα προστεθῇ εἰς τὴν πρώτην (κατὰ μέλη), προκύπτει $(\chi+\psi)^2=\beta+2\gamma\cdot$

ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῇ, ἕπεται

$$(\chi-\psi)^2=\beta-2\gamma.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$\chi+\psi=\pm\sqrt{\beta+2\gamma}, \qquad \chi-\psi=\pm\sqrt{\beta-2\gamma}.$$

Καὶ ἂν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν ὑποτεθῇ θετικόν, εὑρίσκομεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$\frac{1}{2}\sqrt{\beta+2\gamma}+\frac{1}{2}\sqrt{\beta-2\gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{2}\sqrt{\beta+2\gamma}-\frac{1}{2}\sqrt{\beta-2\gamma}$$

ἂν δὲ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα ὑποτεθῇ ἀρνητικόν, εὑρίσκονται οἱ ἀντίθετοι τούτων ἀριθμοί· φαίνεται δὲ καὶ ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1), ὅτι, ἂν ἀληθεύωσιν αὗται διὰ δύο ἀριθμούς, ἀληθεύουσι καὶ διὰ τοὺς ἀντιθέτους αὐτῶν.

Διερεύνησις. Ἀμφότεραι αἱ λύσεις θὰ εἶναι πραγματικαί, ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\beta+2\gamma$ καὶ $\beta-2\gamma$ εἶναι θετικοὶ ἤτοι ἂν εἶναι β θετικὸν καὶ ὁ 2γ (θετικῶς λαμβανόμενος) δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν β.

10ον) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων αὐτῶν β.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\begin{aligned} \chi+\psi &= \alpha \\ \chi^2+\psi^2 &= \beta. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$$\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\alpha^2.$$

Ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$2\chi\psi = \alpha^2 - \beta \quad \text{ἢ} \quad \chi\psi = \frac{\alpha^2-\beta}{2}.$$

Ἐπειδὴ δὲ νῦν ἔχομεν $\chi+\psi=\alpha$ καὶ $\chi\psi=\frac{\alpha^2-\beta}{2}$, ἀνάγεται τὸ πρόβλημα εἰς τὸ 8ον.

Δύναται δὲ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα τοῦτο καὶ διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων (1)· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ἡ τιμὴ αὐτοῦ ἐκ τῆς πρώτης καὶ νὰ τεθῇ εἰς τὴν δευτέραν.

Οἱ ζητούμενοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{2\beta-\alpha^2}}{2}. \tag{2}$$

Διερεύνησις. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι πραγματικοί, ἂν εἶναι 2β θετικὸν καὶ μεγαλήτερον ἢ τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ α^2· εἰ δὲ μή, εἶναι μιγάδες.

Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ἀριθμὸς μερισθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο μερῶν εὑρίσκεται, ἐὰν τὰ δύο μέρη εἶναι ἴσα.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν δοθέντα ἀριθμὸν μερίσωμεν ὁπωςδήποτε εἰς μέρη, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μερῶν γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν τὰ μέρη γίνωσιν ἴσα.

Διότι, ἂν δύο ἐκ τῶν μερῶν δὲν εἶναι ἴσα, ἔστωσαν, λόγου χάριν, 5 καὶ 7, καθιστῶντες αὐτὰ ἴσα, χωρὶς νὰ βλάψωμεν τὸ ἄθροισμά των, ἤτοι λαμβάνοντες, ἀντ' αὐτῶν, τὰ μέρη 6 καὶ 6, εὑρίσκομεν ἄθροισμα τετραγώνων 6^2+6^2, μικρότερον τοῦ 5^2+7^2· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πάντων τῶν μερῶν θὰ γίνῃ μικρότερον.

*11ον) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων αὐτῶν κ.

Αἱ ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\begin{aligned} \chi+\psi &= \alpha \\ \chi^3+\psi^3 &= \kappa. \end{aligned} \tag{1}$$

Ἵνα λύσωμεν ταύτας, ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸν κύβον· ὅτε εὑρίσκομεν

$$\chi^3+\psi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3.$$

Ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν κατὰ μέλη, ἔχομεν

$$3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3-\kappa$$

$$\text{ἢ} \quad 3\chi\psi(\chi+\psi)=\alpha^3-\kappa\cdot$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου αὐτῷ α, ἔχομεν

$$3\alpha\chi\psi=\alpha^3-\kappa$$

ἢ $$\chi\psi=\frac{\alpha^3-\kappa}{3\alpha}.$$

Ἔχομεν ἄρα τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν· ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ 8ον.

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa-\alpha^3}{3\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\kappa-\alpha^3}{3\alpha}}.$$

Διερεύνησις. Γράφοντες τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\frac{4\kappa}{3\alpha}-\frac{\alpha^2}{3},$$

βλέπομεν, ὅτι, ἵνα οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πραγματικοί, ἀνάγκη τὰ α καὶ κ νὰ εἶναι ὁμοειδῆ καὶ νὰ εἶναι 4κ οὐχὶ μικρότερον τοῦ α^3. Ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι, ἐὰν ἀριθμὸς θετικὸς μερισθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη ὁμοειδῆ, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν τούτων θὰ εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ κύβου τοῦ ἀριθμοῦ. Τοῦτο δὲ τὸ ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν μερῶν γίνεται, ὅταν τὰ δύο μέρη εἶναι ἴσα.

* 12ον) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν α καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν τ.

Πρὸς τοῦτο, εἶναι ἀνάγκη νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}\chi+\psi&=\alpha\\ \chi^4+\psi^4&=\tau\end{aligned} \qquad (1)$$

λύεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς.

Τετραγωνίζοντες τὴν πρώτην, λαμβάνομεν

$$\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\alpha^2, \qquad (2)$$

τετραγωνίζοντες δὲ καὶ ταύτην, εὑρίσκομεν

$$\chi^4+\psi^4+6\chi^2\psi^2+4\chi^3\psi+4\chi\psi^3=\alpha^4,$$

ἐξ ἧς, ἀφαιροῦντες τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν

$$6\chi^2\psi^2+4\chi\psi(\chi^2+\psi^2)=\alpha^4-\tau.$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ $\chi^2+\psi^2$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\alpha^2-2\chi\psi$, ἐκ τῆς ἐξισώσεως (2), εὑρίσκομεν

$$(\chi\psi)^2-2\alpha^2(\chi\psi)=\frac{\tau-\alpha^4}{2}. \qquad (3)$$

Προβλήματα γεωμετρικά.

Ἐν τῇ γεωμετρίᾳ ἐμάθομεν ἤδη, ὅτι πᾶσα γραμμὴ μετρεῖται καὶ παρίσταται ὑπό τινος ἀριθμοῦ· καὶ τἀνάπαλιν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς παριστᾷ γραμμήν, ὅταν ὁρισθῇ ἡ γραμμή, ἣν παριστᾷ ἡ μονάς. Δυνάμεθα, ἑπομένως, νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν ἐπὶ γεωμετρικῶν προβλημάτων.

14ον) Διαιρέσαι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, μέσον καὶ ἄκρον λόγον, τουτέστιν εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.

Α　　　　　　　　　　Μ　　　　　Β

Ἔστω α ὁ τὴν δοθεῖσαν γραμμὴν ΑΒ παριστῶν ἀριθμὸς, καὶ χ ὁ παριστῶν τὸ ἄγνωστον μέρος αὐτῆς ΑΜ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον· τότε τὸ λοιπὸν μέρος ΜΒ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha-\chi$. Θὰ εἶναι δὲ

$$\alpha:\chi=\chi:\alpha-\chi \qquad \text{ἤτοι} \qquad (\alpha-\chi)\,\alpha=\chi^2.$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ χ θετικὸν καὶ μικρότερον τοῦ α.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν $\chi=-\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$· ἐκ δὲ τούτων τῶν τιμῶν, μόνη ἡ πρώτη, ἡ $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1)$, πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου μέρους ΑΜ.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ προταθῇ καὶ γενικώτερον ὡς ἑξῆς.

Ἐπὶ εὐθείας ἀπεράντου, δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, ὧν ἡ ἀπόστασις μετρεῖται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α· ζητεῖται δὲ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τῆς εὐθείας τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασις αὐτοῦ νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Β καὶ τῆς ΑΒ.

Μ　　　Α　　　　　　　Μ　　　Β　　　　Μ

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον ἢ μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ἢ ὄπισθεν τοῦ Α ἢ πέραν τοῦ Β. Τὸ πρόβλημα ἄρα, διαιρεῖται εἰς τρία· καὶ αἱ τρεῖς αὐτοῦ περιπτώσεις δίδουσι τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις (χ παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν ΑΜ).

Ἡ πρώτη　$\chi^2=\alpha(\alpha-\chi)$　περιορ. $0<\chi<\alpha$,

ἡ δευτέρα　$\chi^2=\alpha(\alpha+\chi)$　περιορ. χ θετικόν,

ἡ τρίτη　$\chi^2=\alpha(\chi-\alpha)$　περιορ. $\chi>\alpha$.

Αἱ δύο πρῶται περιπτώσεις δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς μίαν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ οἱ μετροῦντες τὰς ἀπὸ τοῦ Α ἀποστάσεις λαμβάνωνται θετικοὶ μὲν διὰ τὰ ἔμπροσθεν τοῦ Α σημεῖα, ἀρνητικοὶ δὲ διὰ τὰ ὄπισθεν· διότι τότε ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐξισώσει πρέπει νὰ γραφῇ ἀντὶ τοῦ χ $\delta - \chi$· τοῦτο δὲ τρέπει αὐτὴν εἰς τὴν πρώτην· ὥστε ἡ εὑρεθεῖσα ἀρνητικὴ λύσις τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶναι θετικὴ λύσις τῆς δευτέρας, καὶ ἑπομένως δίδει σημεῖόν τι, ὄπισθεν τοῦ Α κείμενον καὶ πληροῦν τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

Ἡ τρίτη ἐξίσωσις οὐδεμίαν λύσιν πραγματικὴν ἔχει· ὥστε οὐδὲν σημεῖον τοιοῦτον ὑπάρχει πέραν τοῦ Β.

15ον) Δίδονται ἐπ' εὐθείας τέσσαρα σημεῖα, τὰ Α, Β, Γ, Δ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τεσσάρων σημείων νὰ ἀποτελῶσιν ἀναλογίαν· τουτέστι νὰ εἶναι $AM : BM = \Gamma M : \Delta M$.

Α Β Γ Δ

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον ἢ ὄπισθεν τοῦ Α ἢ μεταξὺ Α καὶ Β ἢ μεταξὺ Β καὶ Γ ἢ μεταξὺ Γ καὶ Δ ἤ, τέλος, πέραν τοῦ Δ· τὸ πρόβλημα ἄρα διαιρεῖται εἰς πέντε, καὶ ἂν οἱ θετικοὶ ἀριθμοί, οἱ τὰς ἀποστάσεις ΑΜ, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ μετροῦντες, παρασταθῶσι κατὰ σειρὰν διὰ χ, β, γ, δ, αἱ ῥηθεῖσαι πέντε ὑποθέσεις δίδουσι τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις

ἡ 1η $\chi(\beta+\gamma-\delta)+\beta.\gamma=0$, περ. $\chi>0$,

ἡ 2α $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma=0$, περ. $0<\chi<\beta$,

ἡ 3η $\chi(\beta+\gamma-\delta)-\beta\gamma=0$, περ. $\beta<\chi<\gamma$,

ἡ 4η $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma=0$, περ. $\gamma<\chi<\delta$,

ἡ 5η $\chi(\beta+\gamma-\delta)-\beta\gamma=0$, περ. $\chi>\delta$.

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη περίπτωσις ἐπιδέχεται λύσιν, ἂν εἶναι $\delta>\beta+\gamma$· διότι τότε ἡ τιμὴ τοῦ χ, ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως λαμβανομένη, εἶναι θετική· ἀλλ' ἂν εἶναι $\delta<\beta+\gamma$ ἢ $\delta=\beta+\gamma$, ἡ πρώτη περίπτωσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἡ τρίτη περίπτωσις εἶναι πάντοτε ἀδύνατος· διότι ἡ ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρισκομένη τιμὴ τοῦ χ δὲν εἶναι μικροτέρα τοῦ γ.

Ἡ πέμπτη περίπτωσις ἐπιδέχεται λύσιν, μόνον ἂν εἶναι $\delta<\beta+\gamma$· διότι τότε ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ καὶ ὑπερβαίνει τὸν δ.

Ἡ δευτέρα καὶ ἡ τετάρτη ἐπιδέχονται ἀνὰ μίαν λύσιν πάντοτε· διότι ἡ κοινὴ αὐτῶν ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ῥίζας, ὧν ἡ μὲν κεῖται μεταξὺ 0 καὶ β, ἡ δὲ μεταξὺ γ καὶ δ· βεβαιούμεθα δὲ περὶ τούτου, ἂν παρατηρήσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ β, ἀντικαθιστῶντες τὸ

χ ἐν τῷ πολυωνύμῳ $2\chi^2-(\beta+\gamma+\delta)\chi+\beta\gamma$, παρέχουσιν ἐξαγόμενα ἑτεροειδῆ· ὡσαύτως δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ γ καὶ δ (σελ. 164. Παρατήρ.).

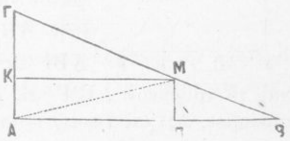
Ὥστε ἐν συνόλῳ τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τρεῖς λύσεις, ἂν δ καὶ $\beta+\gamma$ εἶναι ἄνισα, εἰ δὲ μή, δύο· εὑρίσκεται δὲ τὸ ἓν ἐκ τῶν τριῶν σημείων, τόσῳ μακρύτερα ἐπὶ τῆς εὐθείας, ὅσῳ ὀλιγώτερον διαφέρουσι τὰ $\beta+\gamma$ καὶ δ.

Παρατήρησις Ἐνίοτε πρόβλημά τι, ἵνα λυθῇ, διαιρεῖται εἰς πολλὰς περιπτώσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων παρέχει ἰδίαν ἐξίσωσιν (τοιαῦτα ἦσαν τὰ δύο τελευταῖα προβλήματα)· ἑκάστη τῶν περιπτώσεων τούτων θεωρεῖται τότε καὶ ἐξετάζεται ὡς ἴδιον πρόβλημα.

Δυνατὸν δὲ δύο περιπτώσεις τοῦ προβλήματος νὰ ἀποκλείσωσιν ἀλλήλας, τουτέστιν, ἀληθευούσης τῆς ἑτέρας ἐξ αὐτῶν, νὰ εἶναι ἡ ἄλλη ἀδύνατος, καὶ τἀνάπαλιν, τὸ ἀδύνατον τῆς ἑτέρας νὰ δεικνύῃ τὴν ἀλήθειαν τῆς ἄλλης. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, πρόκειται ἔν τινι προβλήματι, νὰ ὁρισθῇ ἐν ἐπιπέδῳ ἡ θέσις εὐθείας τινὸς ἀγνώστου πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κειμένην, δύνανται νὰ γίνωσι δύο ὑποθέσεις ἀποκλείουσαι ἀλλήλας· ἢ ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα τέμνει που τὴν δοθεῖσαν ἢ ὅτι εἶναι παράλληλοι· φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι, ἂν ἡ ἐξίσωσις, τὴν ὁποίαν ἡ πρώτη ὑπόθεσις παρέχει, ἀληθεύῃ, ἡ δευτέρα ὑπόθεσις εἶναι ἀδύνατος.

Ἂν δὲ ἡ ῥηθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἡ δευτέρα ὑπόθεσις ἀληθεύει.

16ον) Εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ἔχον περίμετρον ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τοῦ τριγώνου πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἰς τὸ Α.



Ἕκαστον σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ εἶναι κορυφὴ ἐγγεγραμμένου ὀρθογωνίου, ὅπερ εὑρίσκομεν, ἄγοντες ἐξ αὐτοῦ τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α· διὰ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κορυφὴν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Ἔστωσαν β καὶ γ οἱ τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ παριστῶντες ἀριθμοί, χ δὲ καὶ ψ οἱ παριστῶντες τὰς ἀποστάσεις τοῦ ζητουμένου σημείου Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ.

Ἐν πρώτοις θὰ εἶναι $2\chi+2\psi=\beta+\gamma.$ (1)

Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΑΜ, διαιρεῖ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ, ἐξ ὧν τὸ πρῶτον ἔχει βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΜΠ, τὸ δὲ δεύτερον ἔχει βάσιν ΑΓ καὶ ὕψος ΜΚ. Ἐκφράζοντες δέ, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν ἀποτελοῦσι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος τριγώνου, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\beta\chi+\gamma\psi=\beta\gamma, \qquad (2)$$

περιορ. $0<\chi<\gamma$ καὶ $0<\psi<\beta$.

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων, ὑποθέτοντες β ἄνισον τῷ γ, εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{1}{2}\gamma \quad \text{καὶ} \quad \psi=\frac{1}{2}\beta\cdot$$

τουτέστιν, ἡ κορυφὴ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἐὰν ὅμως εἶναι $\beta=\gamma$ ἤτοι, ἂν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσοσκελές, αἱ δύο ἐξισώσεις καταντῶσι μία μόνη καὶ τὸ σύστημα ἀποβαίνει ἀόριστον· ὥστε, πᾶν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι τότε κορυφὴ ὀρθογωνίου, πληροῦντος τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

17ον) Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αὐξάνεται μὲν ἡ πλευρὰ ΑΓ κατά τινα εὐθεῖαν ΓΓ′, ἐλαττοῦται δὲ ἡ ΑΒ κατὰ τὴν ἴσην ΒΒ′· ζητεῖται, ἂν ἀχθῇ ἡ Β′Γ′, εἰς ποῖον σημεῖον θὰ τέμνῃ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Ἂς ἀχθῶσιν αἱ ΜΠ καὶ ΜΚ ἐκ τοῦ Μ, κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἂς νοηθῶσιν αἱ εὐθεῖαι τοῦ σχήματος πᾶσαι μεμετρημέναι καὶ ὑπ' ἀριθμῶν παριστώμεναι. Ἡ τομὴ Μ θὰ εἶναι γνωστή, ὅταν εὑρεθῶσιν οἱ τὰς ἀποστάσεις ΠΜ καὶ ΚΜ μετροῦντες ἀριθμοί, οἵτινες ἔστωσαν ψ καὶ χ· πρὸς τούτοις, ἂς παριστᾷ τὰς εὐθείας ΒΒ′ καὶ ΓΓ′ ὁ ε, καὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου οἱ ἀριθμοὶ α (τὴν ΒΓ), β (τὴν ΑΓ) καὶ γ (τὴν ΑΒ). Ἂν ἀχθῇ ἡ ΑΜ, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο, τὰ ΑΜΒ καὶ ΑΜΓ· ὡσαύτως διαιρεῖ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒ′Γ′ εἰς δύο, τὰ ΑΜΒ′ καὶ ΑΜΓ′. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν, ὡς καὶ ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι

$$\beta\chi+\gamma\psi=\beta\gamma \qquad (1)$$

καὶ $(\beta+\varepsilon)\chi+(\gamma-\varepsilon)\psi=(\beta+\varepsilon).(\gamma-\varepsilon)$.

Ἐξ ὧν ἔπεται τὸ σύστημα

$$(2)\quad \begin{array}{l}\beta\chi+\gamma\psi=\beta\gamma\\ \varepsilon(\chi-\psi)=\varepsilon(\gamma-\beta-\varepsilon)\end{array} \qquad \text{περιορ.} \quad \begin{array}{l}0<\chi<\gamma,\\ 0<\psi<\beta.\end{array}$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου, ἂν ὑποτεθῇ ε διάφορον τοῦ 0, εὑρίσκομεν, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ κοινοῦ παράγοντος ε ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως,

$$\chi=\frac{\gamma^2-\varepsilon\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad \psi=\frac{\beta^2+\varepsilon\beta}{\beta+\gamma}. \qquad (3)$$

Ἐὰν ὁ ε, ἐλαττούμενος καταντήσῃ 0, αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) ἢ καὶ τοῦ (2), γίνονται μία μόνη καὶ τὸ σύστημα καταντᾷ ἀόριστον· ἀλλὰ τότε καὶ αἱ δύο εὐθεῖαι ἐφαρμόζουσι καὶ ἔχουσι κοινὰ πάντα τὰ σημεῖα τῆς ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ πρόβλημα καταντᾷ ἀόριστον.

Δυνατὸν ὅμως νὰ ζητηθῇ, πρὸς ποῖον σημεῖον τῆς ΒΓ πλησιάζει ἡ τομὴ Μ, ὅταν ἡ Β΄Γ΄ πλησιάζῃ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν ΒΓ (τουτέστιν, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ 0)· τοῦτο εὑρίσκεται ἐκ τῶν τιμῶν (3) εὐκόλως· διότι, ὅσῳ τὸ ε πλησιάζει πρὸς τὸ 0, τόσῳ αἱ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ πλησιάζουσι νὰ γίνωσι

$$\chi=\frac{\gamma^2}{\beta+\gamma}, \qquad \psi=\frac{\beta^2}{\beta+\gamma}\cdot$$

ὥστε καὶ ἡ τομὴ πλησιάζει πρὸς τὸ σημεῖον, οὗ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ μετροῦνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Τὸ σημεῖον τοῦτο διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη, ἀνάλογα πρὸς τὰς ἄλλας πλευράς, ὥστε δύναται καὶ γεωμετρικῶς νὰ εὑρεθῇ.

18ον) Ἐκ τοῦ στομίου φρέατος ἀφέθη λίθος εἰς αὐτό· ἠκούσθη δὲ ὁ κρότος τοῦ λίθου (κτυπήσαντος τὸν πυθμένα) μετὰ παρέλευσιν θ δευτέρων λεπτῶν ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς πτώσεως. Ζητεῖται τὸ βάθος τοῦ φρέατος.

Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τοὺς ἑπομένους νόμους τῆς φυσικῆς.

1) Ἐὰν σῶμα, ἀπό τινος ὕψους ἀφεθέν, πίπτῃ ἐπὶ χ δεύτερα λεπτά, τὸ διανυσθὲν ὑπ' αὐτοῦ διάστημα εἶναι

$$\frac{1}{2}\gamma\chi^2, \quad \text{ἔνθα} \quad \gamma=9{,}8088 \text{ μέτρα}\cdot$$

(ἡ τοῦ ἀέρος ἀντίστασις δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψει).

2) Ὁ ἦχος διαδίδεται μεθ' ὁμαλῆς κινήσεως, διανύων ἐν τῷ ἀέρι 340 περίπου μέτρα καθ' ἕκαστον δεύτερον λεπτόν. Τὴν ταχύτητα ταύτην τοῦ ἤχου θὰ παραστήσωμεν, χάριν συντομίας, διὰ τοῦ τ.

Ἔστω νῦν φ τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἰς μέτρα· φανερὸν εἶναι, ὅτι ὁ μετρηθεὶς χρόνος θ συνίσταται ἐκ δύο μερῶν· ἐκ τοῦ χρόνου τῆς πτώσεως τοῦ λίθου μέχρι τοῦ πυθμένος καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, ὃν ἐχρειάσθη ὁ ἦχος, ἵνα φθάσῃ ἐκ τοῦ πυθμένος μέχρι τοῦ στομίου.

Καὶ ὁ μὲν χρόνος τῆς πτώσεως τοῦ λίθου ἐκ τοῦ ὕψους φ εὑρίσκεται, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐκ τοῦ τύπου

$$\varphi=\frac{1}{2}\gamma\chi^2, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad \chi=+\sqrt{\frac{2\varphi}{\gamma}}\cdot$$

ὁ δὲ χρόνος τῆς ἀναβάσεως τοῦ ἤχου, ἂν παρασταθῇ διὰ χ', θὰ εἶναι

$$\varphi = \tau . \chi',$$

διότι φ εἶναι τὸ διανυσθὲν ὑπ' αὐτοῦ διάστημα· ἐπομένως εἶναι

$$\chi' = \frac{\varphi}{\tau}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{\varphi}{\tau} + \sqrt{\frac{2\varphi}{\gamma}} = \vartheta. \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1), ἀπαλλασσομένη τῆς τετραγ. ρίζης (ἐδ. 216), γίνεται

$$\varphi^2 - 2\tau\left(\vartheta + \frac{\tau}{\gamma}\right)\varphi = -\vartheta^2\tau^2.$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἔχει δύο ρίζας ἀμφοτέρας θετικὰς (ἐδ. 214)·

εἶναι δὲ αὗται $\quad \varphi = \tau\left(\vartheta + \dfrac{\tau}{\gamma}\right) \pm \tau\sqrt{\dfrac{\tau}{\gamma}\left(\dfrac{\tau}{\gamma} + 2\vartheta\right)}.$

Ἡ μία ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ φ εἶναι προφανῶς μεγαλητέρα τοῦ $\tau\vartheta$· ἐπομένως καθιστᾷ τὸ $\dfrac{\varphi}{\tau}$ μεγαλήτερον τοῦ ϑ καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως (1), ἀλλὰ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς· ἡ δὲ ἄλλη εἶναι μικροτέρα τοῦ $\tau\vartheta$· διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο ριζῶν (ἐδ. 213) εἶναι $\tau\vartheta . \tau\vartheta$· ἐπομένως δὲν δύνανται ἀμφότεραι νὰ εἶναι μεγαλήτεραι τοῦ $\tau\vartheta$· ἡ δευτέρα αὕτη λύσις εἶναι τῆς ἐξισώσεως (1), διότι δι' αὐτὴν εἶναι τὸ $\vartheta - \dfrac{\varphi}{\tau}$ θετικόν· ἐπομένως αὐτὴ λύει τὸ πρόβλημα.

19ον) Ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διέρχεται διὰ δύο φωτεινῶν σημείων Α καὶ Β, εὑρεῖν σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν.

Α Β

Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει τὸν ἑπόμενον φυσικὸν νόμον.

Τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται ἐπιφάνειά τις, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τοῦ φωτεινοῦ σημείου.

Κατὰ τὸν νόμον τοῦτον, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ μ τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται ἐπιφάνειά τις ἐκ φωτεινοῦ σημείου, ὅταν εὑρίσκηται εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς μέτρου ἀπ' αὐτοῦ, καὶ διὰ ω τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται ἡ αὐτὴ ἐπιφάνεια, ὅταν εὑρίσκηται εἰς ἀπόστασιν χ μέτρων, θὰ εἶναι

$$\omega : \mu = 1 : \chi^2 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \omega = \frac{\mu}{\chi^2}.$$

Τὸ ζητούμενον σημεῖον Μ δύναται νὰ ὑποτεθῇ κείμενον ἢ ὄπισθεν τοῦ Α ἢ μεταξὺ Α καὶ Β ἢ πέραν τοῦ Β. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ Α καὶ διὰ τοῦ α^2 τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ὅπερ δέχεται ἐκ τοῦ Α τὸ τὴν ἀπόστασιν 1 ἀπέχον ἀπ' αὐτοῦ σημεῖον, καὶ διὰ β^2 τὸ ὅμοιον ποσὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Β, πρὸς δὲ τούτοις διὰ δ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ, εὑρίσκομεν κατὰ τὰς τρεῖς εἰρημένας ὑποθέσεις, ἐξισοῦντες τὰ ποσὰ τοῦ φωτός, τὰ ὁποῖα δέχεται τὸ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον σημεῖον· κατὰ τὴν πρώτην

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta+\chi)^2} \qquad \chi>0,$$

κατὰ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην:

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-\chi)^2} \qquad \chi>0.$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ συμπεριληφθῶσιν εἰς μίαν, ἂν αἱ ἀποστάσεις τῶν ὄπισθεν τοῦ Α κειμένων σημείων παριστῶνται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, διότι τότε ἐν τῇ πρώτῃ πρέπει νὰ τεθῇ $-\chi$ ἀντὶ τοῦ χ (διότι ἐν τῇ ἐξισώσει ἐκείνῃ τὸ χ σημαίνει τὴν θετικὴν ἀπόστασιν ΑΜ, αὕτη δὲ εἶναι νῦν $-\chi$)· ἀλλὰ τότε τρέπεται ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἰς τὴν δευτέραν· ἑπομένως ὡς ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ ληφθῇ ἡ ἑπομένη

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-\chi)^2}. \tag{1}$$

καὶ ἂν μὲν εἶναι $\chi<0$, τὸ σημεῖον κεῖται ὄπισθεν τοῦ Α· ἂν δὲ $0<\chi<\delta$, μεταξὺ Α καὶ Β· ἂν δὲ $\chi>\delta$, τὸ σημεῖον κεῖται πέραν τοῦ Β.

Ἡ ἐξίσωσις (1) δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατὰ τὸν συνήθη τρόπον· ἐπειδὴ ὅμως ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἶναι τέλεια τετράγωνα, ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτῶν καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰς πρὸς αὐτὴν ἰσοδυνάμους δύο ἐξισώσεις

$$\text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\chi}=+\frac{\beta}{\delta-\chi} \qquad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\chi}=-\frac{\beta}{\delta-\chi},$$

ἐξ ὧν εὐκολώτατα λαμβάνομεν τὰς λύσεις

$$\text{ἢ} \quad \chi=\delta.\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{ἢ} \quad \chi=\delta.\frac{\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη τῶν λύσεων τούτων εἶναι πάντοτε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ δ· διότι τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ ὁ δ πολλαπλασιάζεται, εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος· ἑπομένως ὑπάρχει πάντοτε μεταξὺ τῶν φωτεινῶν σημείων Α καὶ Β, σημεῖόν τι, ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν· τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἂν τὰ φῶτα εἶναι ἴσα τὴν δύναμιν ἤτοι ἂν εἶναι $\alpha=\beta$· εἰ δὲ μή, εἶναι πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον· καὶ τῷ ὄντι, ἂν εἶναι $\alpha>\beta$, εἶναι καὶ $2\alpha>\alpha+\beta$ καὶ διὰ τοῦτο τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζεται ὁ δ, εἶναι μεγαλήτερον τοῦ $\frac{\alpha}{2\alpha}$ ἤτοι τοῦ $\frac{1}{2}$, ὥστε $\chi > \frac{1}{2}\delta$· ἂν δὲ εἶναι $\alpha < \beta$, θὰ εἶναι καὶ $2\alpha < \alpha + \beta$· καὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{2}$, ὥστε θὰ εἶναι $\chi < \frac{1}{2}\delta$.

Ἡ δευτέρα λύσις ὑπάρχει, μόνον ὅταν τὰ φῶτα εἶναι ἄνισα τὴν δύναμιν (διότι, ἂν ὑποτεθῇ $\alpha = \beta$, ἡ ἐξίσωσις, ἐξ ἧς ἐλήφθη, γίνεται $\alpha\delta = 0$, καὶ ὁ ἄγνωστος δὲν ὁρίζεται). Καὶ ἂν μὲν ὑποτεθῇ $\beta < \alpha$, ἡ λύσις εἶναι ἀρνητικὴ ἤτοι ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὄπισθεν τοῦ Α· ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha > \beta$, ἡ λύσις εἶναι θετικὴ καὶ μεγαλητέρα τοῦ δ· διότι τὸ κλάσμα, ἐφ' ὃ ὁ δ πολλαπλασιάζεται, ὑπερβαίνει τὴν μονάδα· ἑπομένως ὑπάρχει τότε σημεῖον, ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πέραν τοῦ Β· ὥστε ἐν συνόλῳ ὑπάρχει (πλὴν τοῦ μεταξὺ τῶν δύο φώτων κειμένου σημείου) καὶ δεύτερον σημεῖον, ἐξ ἴσου φωτιζόμενον· κεῖται δὲ καὶ τοῦτο πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἀσθενεστέρου φωτός.

Ἐὰν τὰ φῶτα, ἄνισα ὄντα τὴν δύναμιν, τείνωσι νὰ καταστῶσιν ἴσα, ἡ δευτέρα λύσις δίδει τιμὴν τοῦ χ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανομένην καὶ δυναμένην νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν, τουτέστι τὸ σημεῖον τὸ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον, τὸ ἐκτὸς τῆς ΑΒ ὑπάρχον, ἀπομακρύνεται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀπὸ τῶν φωτεινῶν σημείων καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τούτων δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶσαν δοθεῖσαν ἀπόστασιν· ἀπέχει δὲ ἀπ' αὐτῶν τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ ὀλιγώτερον διαφέρουσι τὰ φῶτα ἀπ' ἀλλήλων.

Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν φώτων, ἔστω τὸ Β, γίνηται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἀσθενέστερον, ἀμφότερα τὰ ἐξ ἴσου φωτιζόμενα σημεῖα πλησιάζουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο Β. Διότι ὅσῳ μικρότερον γίνεται τὸ β, τόσῳ πλησιάζουσιν αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἀμφότεραι πρὸς τὸ δ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ δύο δοθέντων α καὶ β, ἵνα τὰ τετράγωνα αὐτῶν γίνωσιν ἴσα;

(Ἀπ. Ὁ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$· ἀλλ' ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta$, πᾶς ἀριθμὸς ποιεῖ τὸ προτεινόμενον).

2) Δοθέντων δύο ὀρθογωνίων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ

αὐτῶν κατά τινα (τὴν αὐτὴν πᾶσαι) γραμμήν, ὥστε νὰ γίνωσιν ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν.

('Εὰν τὰ ὀρθογώνια εἶναι ἰσοπερίμετρα ἀλλ' ἄνισα, τὸ προτεινόμενον εἶναι ἀδύνατον· ἐὰν δὲ εἶναι καὶ ἴσα, ἀόριστον).

3) Δοθέντων δύο τριγώνων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ πρώτου, κατά τινα γραμμήν, καὶ αἱ τοῦ δευτέρου κατ' ἄλλην, ὥστε νὰ γίνωσιν ὅμοια.

(Τὸ πρόβλημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον).

4) Δοθέντος ὀρθογωνίου νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ κατά τινα γραμμήν, ὥστε τὸ ἐμβαδόν του νὰ γίνῃ τὸ ἥμισυ ἢ πρότερον.

('Απ. 'Εὰν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου ἔχωσι μήκη α, β, τὸ μῆκος τῆς γραμμῆς, καθ' ἣν πρέπει νὰ ἐλαττωθῶσιν, εἶναι $\chi = \dfrac{\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$).

5) Κλάσματος ὑψοῦνται ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προκύπτει νέον κλάσμα· ζητεῖται, τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς ἑκάτερον τῶν ὅρων τοῦ νέου κλάσματος, ἵνα γίνῃ ἴσον τῷ ἀρχικῷ.

6) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις, ἐλαττούμενος κατὰ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ, γίνεται ἴσος τῷ 1406. ('Απ. 1444).

7) 1320 δραχμαὶ διενεμήθησαν εἴς τινας ἀνθρώπους· ἂν οἱ ἄνθρωποι ἦσαν κατὰ ἕνα ὀλιγώτεροι, θὰ ἐλάμβανεν ἕκαστος 10 δραχμὰς περισσοτέρας· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι; ('Απ. 12).

8) 'Επληρώθησαν 96 δραχμαὶ εἰς 14 ἐργάτας, ἄνδρας καὶ γυναῖκας· ἔλαβε δὲ ἕκαστος ἀνὴρ τόσας δραχμάς, ὅσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, καὶ ἑκάστη γυνὴ τόσας δραχμάς, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; ('Απ. 6 καὶ 8).

9) Εὑρεῖν τοὺς τέσσαρας ὅρους ἀναλογίας, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι 2, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων ὅρων 260.

10) Δύο ἐργάται, ὁμοῦ ἐργαζόμενοι, ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς α ὥρας· ἂν ὅμως ἑκάτερος ἐξετέλει διαδοχικῶς τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου, θὰ ἐχρειάζοντο β ὧραι πρὸς ἀποπεράτωσιν αὐτοῦ. Ζητεῖται, εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος ἤθελεν ἐκτελέσει μόνος τὸ ἔργον.

11) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

12) Εὑρεῖν δύο ἀριθμοὺς, ἔχοντας ἄθροισμα 12, τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ ἑνὸς νὰ διαφέρῃ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἄλλου κατὰ μίαν μονάδα.

('Απ. Ἐὰν τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου εἶναι μεγαλήτερον, ἡ λύσις εἶναι 5 καὶ 7 ἢ —29 καὶ 41· ἐὰν δὲ μικρότερον, ἡ λύσις εἶναι $-12 \pm \sqrt{287}$ καὶ $24 \pm \sqrt{287}$).

13) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις εἴτε διὰ 7, εἴτε διὰ 9 διαιρεθῇ, νὰ ἀφίνῃ ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα πολλαπλασιαζόμενα νὰ δίδωσι τὸν ἀριθμὸν 28.

14) Τίς ἀριθμός, ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων γινομένου, δὲν βλάπτει αὐτό; καὶ τίς ἐν γινομένῳ τριῶν παραγόντων ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα;

15) Λῦσαι τὸ σύστημα $\begin{array}{l}(\chi+\psi)\cdot(\chi^2+\psi^2)=\alpha\\(\chi-\psi)\cdot(\chi^2-\psi^2)=\beta.\end{array}$

16) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\chi-\sqrt{\chi}}{\chi+\sqrt{\chi}}=\dfrac{5}{6}$.

17) Νὰ λυθῇ τὸ ἑξῆς σύστημα

$$\frac{\alpha}{\chi\psi}+\frac{\beta}{\psi Z}=\lambda, \quad \frac{\gamma}{Z\chi}+\frac{\delta}{\chi\psi}=\mu, \quad \frac{\varepsilon}{\psi Z}+\frac{\vartheta}{Z\chi}=\nu.$$

18) Πότε ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος

$$\frac{A'\chi^2+B'\chi+\Gamma'}{A\chi^2+B\chi+\Gamma}$$

εἶναι ἡ αὐτὴ διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ;

$$\left(\text{'Απ. Ὅταν εἶναι } \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right).$$

19) Δοθέντος τριγώνου, νὰ ἐλαττωθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ πᾶσαι κατὰ μίαν γραμμήν, ὥστε νὰ γίνῃ ὀρθογώνιον.

20) Τίνες τιμαὶ τοῦ χ ἐπαληθεύουσι τὴν ἀνισότητα $(\chi-\alpha)\cdot(\chi-\beta)>0$, ὅταν $\alpha<\beta$; καὶ τίνες τὴν ἑξῆς $(\chi-\alpha)\cdot(\chi-\beta)<0$;

('Απ. Διὰ τὴν πρώτην πρέπει ἢ $\chi<\alpha$ ἢ $\chi>\beta$· διὰ τὴν δευτέραν πρέπει $\beta>\chi>\alpha$).

*21) Σφαῖρα κοίλη ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει βάρος α χιλιογράμμων· τεθεῖσα δὲ ἐν τῷ ὕδατι ἐπιπλέει, μένοντος τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς ἐκτὸς τοῦ ὕδατος· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς καὶ τὸ πάχος αὐτῆς.

22) Ἁμαξοστοιχία τις ἀπεμακρύνετο ἀπό τινος φρουρίου κατ' εὐθεῖαν γραμμὴν μὲ ταχύτητα 45 σταδίων καθ' ὥραν, ὅτε οἱ ἐν αὐτῇ εὑρισκόμενοι εἶδον τὴν λάμψιν ἐκπυρσοκροτήσεως καὶ μετὰ 15'' ἤκουσαν τὸν κρότον αὐτῆς. Πόσον ἀπεῖχον ἀπὸ τοῦ φρουρίου τὴν στιγμήν, καθ' ἣν εἶδον τὴν λάμψιν; $\left(\text{'Απ. } 4912\frac{1}{2} \text{ μέτρα}\right)$.

23) Οἱ ἐν τῇ αὐτῇ ἁμαξοστοιχίᾳ εὑρισκόμενοι ἤκουσαν δύο κανονιοβολισμοὺς ἐκ τοῦ φρουρίου, τὸν ἕνα 5 πρῶτα λεπτὰ μετὰ τὸν ἄλλον. Ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας ἦτο 10 στάδια καθ' ὥραν. Ζητεῖται ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἐκπυρσοκροτήσεων μεσολαβήσας χρόνος.

$$\left(\text{'Απ. } 4'\ 57''\frac{28}{51}\right).$$

24) Εὑρεῖν ἅπαντα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὧν μία μὲν ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση μὲ 12 μέτρα, αἱ δὲ λοιπαὶ δύο πλευραὶ αὐτῶν σύγκεινται ἐξ ἀκεραίων ἀριθμῶν μέτρων.

Ἐὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν χ, ψ, 12 παρασταθῶσιν αἱ τρεῖς πλευραὶ ἑνὸς τοιούτου τριγώνου (διὰ τοῦ χ ἡ ὑποτείνουσα), θὰ εἶναι

$$\chi^2-\psi^2=12^2=144$$

$$\text{ἢ}\qquad (\chi+\psi).(\chi-\psi)=144\cdot$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ $\chi+\psi$ καὶ $\chi-\psi$ εἶναι συζυγεῖς διαιρέται τοῦ 144 (ἤτοι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ὁ 144)· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 144 (ἰδὲ Θεωρ. Ἀριθμητικῆς ἐδ. 125), ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα· κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εἶναι

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r|r|r} \chi+\psi=144 & 72 & 48 & 36 & 24 & 18 & 16 & 12 \\ \chi-\psi=\ \ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 12 \end{array},$$

$$\text{ὅθεν}\quad \begin{array}{r|r|r|r} \chi=37 & 20 & 15 & 13, \\ \psi=35 & 16 & 9 & 5. \end{array}$$

Τέλος, παραθέτομεν καὶ τὸ ἑπόμενον πρόβλημα ἐκ τῆς ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

25) Εὑρεῖν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

$$\chi^2+\psi^2=\omega^2. \qquad (1)$$

Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ λύσιν τινὰ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀποτελοῦντες, ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην δ, καὶ τὰ πηλίκα αὐτῶν, διαιρουμένων διὰ δ, ἐπαληθεύουσι τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῶσιν αἱ ἀκέραιαι λύσεις, ὧν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, πρῶτοι ὄντες πρὸς ἀλλήλους, ἐπαληθεύωσι τὴν ἐξίσωσιν, εἷς ἐκ τῶν χ καὶ ψ εἶναι ἄρτιος, οἱ δὲ δύο ἄλλοι εἶναι περιττοὶ (ὅτι καὶ οἱ τρεῖς δὲν δύνανται νὰ εἶναι περιττοί, εἶναι φανερόν)· διότι, ἂν ἦσαν δύο ἄρτιοι, καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου θὰ ἦτο ἄρτιον· ἄρα καὶ ὁ τρίτος ἄρτιος· καὶ θὰ εἶχον οἱ τρεῖς κοινὸν διαιρέτην τὸν 2· ἀλλ' ὁ ω πρέπει νὰ εἶναι περιττός· διότι, ἂν ἦτο ἄρτιος, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ω^2 ἢ $\chi^2+\psi^2$, θὰ διῃρεῖτο διὰ 4· τὸ ἄθροισμα ὅμως $\chi^2+\psi^2$ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ διαιρεῖται μόνον διὰ 2 καὶ οὐχὶ διὰ 4· διότι ἂν ὁ εἷς εἶναι $2\mu+1$ καὶ ὁ ἄλλος $2\nu+1$, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι

$$4(\mu^2+\nu^2+\mu+\nu)+2\cdot$$

ὥστε ὁ ω εἶναι περιττός.

Ἔστω ἄρτιος ὁ χ· καὶ ἂς τεθῇ $\chi=2\chi'$· τότε ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$4\chi'^2=\omega^2-\psi^2,$$

$$\text{ἢ} \qquad \chi'^2=\frac{1}{2}(\omega+\psi)\cdot\frac{1}{2}(\omega-\psi). \qquad (2)$$

Οἱ δύο ἀκέραιοι $\frac{1}{2}(\omega+\psi)$ καὶ $\frac{1}{2}(\omega-\psi)$ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην· διότι, ἂν ἀριθμός τις πρῶτος διῄρει αὐτούς, θὰ διῄρει καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ω καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ψ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν χ'^2, ἑπομένως καὶ αὐτὸν τὸν χ', ὥστε θὰ εἶχον οἱ τρεῖς χ, ψ, ω, κοινὸν διαιρέτην· ὅπερ ἐναντίον τῆς ὑποθέσεως.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τότε μόνον εἶναι τετράγωνον, ὅταν ἑκάτερος αὐτῶν εἶναι τετράγωνον, ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{1}{2}(\omega+\psi)=\alpha^2 \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{1}{2}(\omega-\psi)=\beta^2.$$

Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τεθῶσιν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), προκύπτει $\chi'=\alpha\beta$· ὅθεν ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ζητούμεναι λύσεις περιέχονται εἰς τοὺς τύπους

$$(3) \qquad \begin{aligned} \chi&=2\alpha\beta \\ \psi&=\alpha^2-\beta^2 \\ \omega&=\alpha^2+\beta^2 \end{aligned} \qquad \text{ἔνθα } \alpha \text{ καὶ } \beta \text{ εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι.}$$

Ἡ ἁπλουστάτη τῶν λύσεων εἶναι ἡ (3, 4, 5) καὶ δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων (3), ἂν τεθῇ $\alpha=2$ καὶ $\beta=1$· μετ' αὐτὴν ἔρχονται αἱ ἑξῆς

(5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25).

Οἱ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἐπαληθεύοντες ἀριθμοὶ χ, ψ, ω μετροῦσι τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου· ὥστε διὰ τῶν προηγουμένων ἐλύθη καὶ τὸ ἑπόμενον γεωμετρικὸν πρόβλημα.

Εὑρεῖν ἅπαντα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ εἶναι σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

Ἐμάθομεν ἤδη, ὅτι τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε θετικῶν παραγόντων, ὧν τὸ ἄθροισμα μένει σταθερόν, γίνεται μέγιστον, ὅταν πάντες οἱ παράγοντες γίνωσιν ἴσοι.

Εἰς τὴν πρότασιν ταύτην ἐφθάσαμεν διὰ τῆς λύσεως τοῦ 8ου προβλήματος, ἐν ᾧ ζητοῦνται δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ· διότι ἐν τῇ παραστάσει, ἥτις δίδει τὰς τιμὰς τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ὑπάρχει ἡ τετρ. ρίζα $\sqrt{\alpha^2-4\gamma}$, ἥτις πρέπει νὰ ἔχῃ πραγματικὴν τιμήν, διότι οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ εἶναι πραγματικοί· ἄρα τὸ ὑπόρριζον οὐδέποτε εἶναι ἀρνητικόν, ἑπομένως θὰ εἶναι $\alpha^2 \geqq 4\gamma$ ἤτοι $\gamma \leqq \frac{\alpha^2}{4}$· ὥστε ἡ μεγίστη τιμή, ἣν δύναται νὰ ἔχῃ τὸ γινόμενον γ, εἶναι $\frac{\alpha^2}{4}$· τότε δὲ τὸ ὑπόρριζον γίνεται 0 καὶ οἱ δύο ἀριθμοὶ χ καὶ ψ γίνονται ἴσοι.

Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ πρότασις διὰ δύο παράγοντας, ἥτις ἔπειτα εὐκόλως γενικεύεται ἐπὶ ὁσωνδήποτε θετικῶν παραγόντων, ἐχόντων ἄθροισμα σταθερόν.

Ἐπίσης ἐκ τῆς λύσεως τοῦ 10ου προβλήματος, ἐν ᾧ ζητοῦνται δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα α καὶ ἄθροισμα τετραγώνων β, ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων χ καὶ ψ περιέχουσι τὴν τετρ. ρίζαν $\sqrt{2\beta-\alpha^2}$, συνεπεράναμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα μένει σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ γίνωσιν ἴσοι· ἡ δὲ πρότασις αὕτη ἐκτείνεται εὐκόλως ἐπὶ ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης τῆς τετραγωνικῆς ρίζης δυνάμεθα καὶ ἄλλα μέγιστα καὶ ἐλάχιστα νὰ εὕρωμεν· ἐάν, λ. χ., ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ τριωνύμου $\chi^2-6\chi+15$, παριστῶντες τὴν τιμὴν αὐτοῦ, τὴν πρὸς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχοῦσαν, διὰ τοῦ ψ, θὰ ἔχωμεν

$$\chi^2-6\chi+15=\psi\cdot$$

καὶ λύοντες πρὸς χ εὑρίσκομεν $\chi=3\pm\sqrt{\psi-6}$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ τριωνύμου εἶναι $\psi=6$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τοῦ τριωνύμου $A\chi^2+B\chi+\Gamma$ ἐλαχίστη τιμὴ εἶναι ἡ $\frac{4A\Gamma-B^2}{4A}$, ἐὰν Α εἶναι θετικόν, μεγίστη δὲ τιμὴ εἶναι πάλιν ἡ $\frac{4A\Gamma-B^2}{4A}$, ἐὰν Α εἶναι ἀρνητικόν.

Ἀλλὰ καὶ ἡ πρότασις τοῦ μεγίστου γινομένου ἄγει εἰς πολλὰς ἄλλας προτάσεις μεγίστου καὶ ἐλαχίστου.

αἱ αὐταὶ δὲ τιμαὶ καθιστῶσι καὶ τὸ γινόμενον $\chi^\mu . \psi^\nu$ μέγιστον.

ΣΗΜ. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ ἀθροίσματος $\chi + \psi$ μένῃ σταθερὸν τὸ ἄθροισμα $\chi^\sigma + \psi^\tau$, θέτομεν $\chi^\sigma = \chi_1$ καὶ $\psi^\tau = \psi_1$, καὶ ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Παραδείγματα.

1) Τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $\chi\,(2\alpha - \chi)$, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγόντων του εἶναι 2α $(\alpha > 0)$, εὑρίσκεται, ὅταν γίνῃ

$$\chi = 2\alpha - \chi \quad \text{ἤτοι} \quad \chi = \alpha.$$

2) Τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $\chi^3\,(\alpha - \chi)$ προκύπτει ὅταν γίνῃ

$$\frac{\chi}{3} = \frac{\alpha - \chi}{1} = \frac{\alpha}{4}, \quad \text{ὅθεν} \quad \chi = \frac{3}{4}\,\alpha.$$

3) Τὸ μέγιστον τοῦ γινομένου $\chi\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}$ εὑρίσκεται, ἐὰν ἀντ' αὐτοῦ λάβωμεν τὸ τετράγωνόν του $\chi^2(\alpha^2 - \chi^2)$ καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο παραγόντων τούτου (χ^2 καὶ $\alpha^2 - \chi^2$) μένει σταθερόν, συνάγεται, ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ $\chi^2 = \alpha^2 - \chi^2$ ἤτοι $\chi^2 = \frac{1}{2}\,\alpha^2$.

Προβλήματα.

1) Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, εὑρεῖν τὸ μέγιστον.

Ἐὰν διὰ χ καὶ ψ παρασταθῶσιν αἱ δύο ἐφεξῆς πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου, ἡ δὲ περίμετρος αὐτοῦ διὰ τοῦ 2α, θὰ εἶναι $\chi + \psi = \alpha$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν $\chi\psi$. Τοῦτο δὲ πρέπει νὰ γίνῃ μέγιστον· ὅθεν βλέπομεν, ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ $\chi = \psi = \frac{1}{2}\,\alpha$· ἤτοι τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων εἶναι τὸ τετράγωνον. (Παρβλ. Στοιχ. Γεωμετρίας σελ. 117).

2) Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον;

Παριστῶντες καὶ πάλιν διὰ τῶν χ καὶ ψ τὰς δύο ἐφεξῆς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου καὶ διὰ τοῦ 2α τὴν περίμετρον αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν $\chi + \psi = \alpha$· πρόκειται δὲ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ $\sqrt{\chi^2 + \psi^2}$ ἤτοι ἡ διαγώνιος· ἵνα δὲ ἡ ῥίζα αὕτη γίνῃ ἐλάχιστον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον τὸ ὑπόρριζον $\chi^2 + \psi^2$· ὥστε πρέπει νὰ γίνῃ $\chi = \psi$· καὶ ἐπομένως, ἐξ ὅλων τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, τὸ τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον ἔχον εἶναι τὸ τετράγωνον.

*3) Δοθέντος τετραγώνου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τέσσαρα τετράγωνα ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἀνυψοῦμεν τὰ πέριξ σχηματιζόμενα τέσσαρα ὀρθογώνια, ὥστε νὰ γίνωσι τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν κάθετα ἐπὶ

Ἐν πρώτοις, δυνάμεθα, στηριζόμενοι εἰς αὐτήν, νὰ εὕρωμεν τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ γινομένου $\chi^\mu . \psi^\nu$ τῶν δύο δυνάμεων χ^μ, ψ^ν δύο μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ, ὧν τὸ ἄθροισμα α μένει ἀμετάβλητον (οἱ ἐκθέται μ, ν ὑποτίθενται θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι).

Πρὸς τοῦτο, παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ γινόμενον $\chi^\mu . \psi^\nu$ γίνῃ μέγιστον, καὶ τὸ γινόμενον $(\nu\chi)^\mu . (\mu\psi)^\nu$ θὰ γίνῃ μέγιστον, καὶ ἀντιστρόφως· διότι τὸ δεύτερον τοῦτο γινόμενον εἶναι αὐτὸ τὸ πρῶτον, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν σταθερὸν παράγοντα $\mu^\nu . \nu^\mu$· ἀλλὰ τὸ δεύτερον γινόμενον ἔχει $\mu+\nu$ παράγοντας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν· διότι

$$(\nu\chi+\nu\chi+\,..\,+\nu\chi)+(\mu\psi+\mu\psi+\,..\,+\mu\psi)=\mu\nu\,(\chi+\psi)=\mu\nu\alpha\cdot$$

ἄρα τὸ γινόμενον τοῦτο (ἑπομένως καὶ τὸ πρῶτον) θὰ γίνῃ μέγιστον, ὅταν γίνῃ $\nu\chi=\mu\psi$ ἢ καὶ $\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\alpha}{\mu+\nu}\cdot$ ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ, αἱ καθιστῶσαι μέγιστον τὸ γινόμενον $\chi^\mu . \psi^\nu$ (ὅταν $\chi+\psi=\alpha$) εἶναι

$$\chi=\frac{\alpha\mu}{\mu+\nu}, \qquad \psi=\frac{\alpha\nu}{\mu+\nu}. \tag{1}$$

Δι' ὁμοίου τρόπου δεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ γινόμενον $\chi^\mu . \psi^\nu . \tau^\varrho$ τῶν τριῶν δυνάμεων χ^μ, ψ^ν, τ^ϱ τῶν τριῶν θετικῶν ἀριθμῶν χ, ψ, τ, ὧν τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi+\tau$ μένει σταθερόν, γίνεται μέγιστον, ὅταν γίνῃ

$$\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\tau}{\varrho}=\frac{\alpha}{\mu+\nu+\varrho}. \tag{2}$$

πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον $(\chi\nu\varrho)^\mu . (\varrho\mu\psi)^\nu . (\mu\nu\tau)^\varrho$, ὅπερ εἶναι τὸ $\chi^\mu . \psi^\nu . \tau^\varrho$, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ σταθερὸν παράγοντα καὶ ἔχει $\mu+\nu+\varrho$ παράγοντας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν.

Πρόδηλον δὲ εἶναι, ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ἐπὶ ὁσωνδήποτε θετικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων σταθερὸν ἄθροισμα.

Καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ, ν, ϱ,.. εἶναι κλασματικοὶ θετικοὶ ἀριθμοί, ἡ αὐτὴ ἰσχύει πρότασις· διότι, ἂν εἶναι

$\mu=\frac{\mu_1}{\sigma}$, $\nu=\frac{\nu_1}{\sigma}$, ὑψοῦντες τὸ γινόμενον $\chi^\mu . \psi^\nu$ εἰς τὴν δύναμιν σ εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $\chi^{\mu_1} . \psi^{\nu_1}$, ὅπερ προφανῶς γίνεται μέγιστον, ὅταν καὶ τὸ πρῶτον γίνῃ μέγιστον, καὶ ἀντιστρόφως· ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, αἱ καθιστῶσαι μέγιστον τὸ γινόμενον $\chi^{\mu_1} . \psi^{\nu_1}$, εἶναι

$$\frac{\chi}{\mu_1}=\frac{\psi}{\nu_1}=\frac{\alpha}{\mu_1+\nu_1} \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\alpha}{\mu+\nu}.$$

τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου· πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τῶν ἀφαιρουμένων τετραγώνων, ἵνα τὸ προκῦπτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (ἄνευ καλύμματος) ἔχῃ τὴν μεγίστην χωρητικότητα;

Ἐὰν διὰ τοῦ χ παραστήσωμεν τὴν ζητουμένην πλευρὰν τῶν ἀφαιρετέων τετραγώνων καὶ διὰ τοῦ α τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου, ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ εἶναι $\chi(\alpha-2\chi)^2$· τοῦτο δὲ θὰ γίνῃ μέγιστον, ὅταν καὶ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ $2\chi(\alpha-2\chi)^2$ γίνῃ μέγιστον, καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν 2χ, $\alpha-2\chi$ εἶναι σταθερόν, συνάγεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{2\chi}{1}=\frac{\alpha-2\chi}{2}=\frac{\alpha}{3}\cdot \quad \text{ἄρα} \quad \chi=\frac{1}{6}\alpha.$$

4) Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α διαιροῦμεν εἰς τρία μέρη χ, ψ, ω καὶ ἐπὶ ἑκάστου τούτων, ὡς ἀπὸ διαμέτρου, ἀναγράφομεν ἡμικύκλιον· ὁποῖα πρέπει νὰ εἶναι τὰ μέρη, ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἡμικυκλίων γίνῃ ἐλάχιστον;

Ἐπειδὴ εἶναι $\chi+\psi+\omega=\alpha$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν ἡμικυκλίων εἶναι $\frac{1}{8}\pi(\chi^2+\psi^2+\omega^2)$, γίνεται δὲ τοῦτο ἐλάχιστον, ὅταν καὶ τὸ ἄθροισμα $\chi^2+\psi^2+\omega^2$ γίνῃ ἐλάχιστον, συνάγεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$\chi=\psi=\omega=\frac{1}{3}\alpha.$$

*5) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, ὧν αἱ ἀκμαὶ ἔχουσι σταθερὸν ἄθροισμα 4α, ποῖον ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

Ἐὰν διὰ τῶν χ, ψ, ω παραστήσωμεν τὰς τρεῖς συνεχεῖς ἀκμὰς τοῦ παραλληλεπιπέδου, θὰ εἶναι $\chi+\psi+\omega=\alpha$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ εἶναι $2(\chi\psi+\psi\omega+\omega\chi)$ ἤτοι $\alpha^2-(\chi^2+\psi^2+\omega^2)$ καὶ τούτου ζητεῖται τὸ μέγιστον· ἀλλ' ἵνα γίνῃ ἡ διαφορὰ αὕτη μεγίστη, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γίνῃ ὁ ἀφαιρετέος ἐλάχιστος (ὁ μειωτέος δὲν μεταβάλλεται)· ὥστε πρέπει νὰ γίνῃ $\chi=\psi=\omega$· ἤτοι, τὸ τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν ἔχον παραλληλεπίπεδον (ἐκ τῶν ἐχόντων σταθερὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκμῶν) εἶναι ὁ κύβος.

6) Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων, ποῖον, στρεφόμενον περὶ τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, γράφει τὸν μέγιστον κύλινδρον;

Ἔστωσαν χ καὶ ψ αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου (χ ὁ ἄξων τῆς περιστροφῆς) καὶ 2α ἡ περίμετρος· (τότε $\chi+\psi=\alpha$)· ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $\pi\chi\psi^2$ καὶ ἑπομένως θὰ γίνῃ μέγιστος, ὅταν $\frac{\chi}{1}=\frac{\psi}{2}=\frac{\alpha}{3}\cdot$

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

Α΄. ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

218. Σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου, τῇ προσθήκῃ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λέγεται, ὅτι ἀποτελεῖ πρόοδον ἀριθμητικὴν ἢ κατὰ διαφοράν· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου, τῇ προσθήκῃ τοῦ ἀριθμοῦ 2.

Τοιοῦτοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$19,\ 16,\ 13,\ 10,\ 7,\ldots,$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τῇ προσθήκῃ τοῦ ἀριθμοῦ -3.

Οἱ πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι τῆς προόδου, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις, προστιθέμενος εἰς ἕκαστον, παράγει τὸν ἑπόμενον, λέγεται λόγος τῆς προόδου.

Ἡ πρόοδος λέγεται αὔξουσα, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν αὐξανόμενοι, συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι θετικὸς ἀριθμός· τοιαύτη ἡ πρόοδος 3, 7, 11, 15,.. Φθίνουσα δὲ λέγεται ἡ πρόοδος, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν ἐλαττούμενοι· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ὁ λόγος εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός· τοιαύτη ἡ πρόοδος 21, 16, 11, 6,..

Εὕρεσις τοῦ ὅρου, τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν τῇ προόδῳ.

219. Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ, ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ, αὐξηθέντι κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Διότι, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ὁ πρῶτος ὅρος καὶ διὰ τοῦ τ ὁ νός, διὰ δὲ τοῦ ω ὁ λόγος, θὰ εἶναι

πρῶτος ὅρος	α
δεύτερος	$\alpha+\omega$
τρίτος	$\alpha+2\omega$
τέταρτος	$\alpha+3\omega$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὥστε ὁ ὅρος τ, ὁ τὴν νὴν τάξιν κατέχων καὶ τοῦ ὁποίου προηγοῦνται ν—1 ἄλλοι ὅροι, θὰ εἶναι

$$\tau = \alpha + (\nu - 1)\,\omega. \qquad (1)$$

Ἐφαρμογαί.

1) Εὑρεῖν τὸν 50ὸν ὅρον τῆς προόδου

3, 9, 15, 21, . . . λόγος 6.

Ἐπειδὴ τοῦ ὅρου τούτου προηγοῦνται 49 ἄλλοι, ἰσοῦται τῷ

$3 + 49 . 6$ ἤτοι τῷ 297.

2) Εὑρεῖν τὸν 23ον ὅρον τῆς φθινούσης προόδου

500, 485, 470. . . λόγος — 15.

Ἐπειδὴ προηγοῦνται αὐτοῦ 22 ὅροι, θὰ εἶναι ἴσος τῷ

$500 + 22(-15)$ ἤτοι 170.

Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

220. Ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν ἄκρων.

Ἄς ἀποτελῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ldots, \varrho,\ \sigma,\ \tau$$

ἀριθμητικὴν πρόοδον· ἔστω δὲ λόγος τῆς προόδου ὁ ω· τότε εἶναι

$$\beta = \alpha + \omega \qquad \text{καὶ} \qquad \tau = \sigma + \omega$$

ἢ καὶ $\sigma = \tau - \omega$,

ὅθεν καὶ $\beta + \sigma = \alpha + \tau$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\beta, \gamma, \ldots, \varrho, \sigma$ ἀποτελοῦσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἕπεται $\beta + \sigma = \gamma + \varrho$·

ὅθεν $\alpha + \tau = \beta + \sigma = \gamma + \varrho$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ πάντας τοὺς ἐξ ἴσου ἀπέχοντας ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρους.

Ὑποθέσωμεν νῦν, ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots\ldots\ldots, \varrho,\ \sigma,\ \tau,$$

ὧν τὸ πλῆθος εἶναι ν.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Κ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα,

θὰ εἶναι $K = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots + \varrho + \sigma + \tau$·

ὡσαύτως $K = \tau + \sigma + \varrho + \ldots\ldots + \gamma + \beta + \alpha$·

διότι οἱ αὐτοὶ ὅροι ἐγράφησαν κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

Ἐκ τούτου ἕπεται

$$2K = (\alpha + \tau) + (\beta + \sigma) + (\gamma + \varrho) + \ldots + (\varrho + \gamma) + (\sigma + \beta) + (\tau + \alpha)\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ, κατὰ τὴν προηγουμένως ἀποδειχθεῖσαν ἰδιότητα, τὰ ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἀθροίσματα εἶναι πάντα ἴσα ἀλλήλοις, εἶναι δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀθροισμάτων τούτων ν (ὅσον εἶναι καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου), ἕπεται

$$2K = (\alpha + \tau)\,\nu,$$

ἐξ οὗ καὶ
$$K = \frac{\nu(\alpha+\tau)}{2}, \qquad (2)$$

τουτέστι

τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἐκφράζων ἀριθμὸς ἐπὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἐάν, π. χ., ζητῆται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000, θὰ εἶναι $\nu = 1000$, $\alpha = 1$ καὶ $\tau = 1000$· ἄρα $K = 1001 . 500 = 500500$.

221. Δυνατὸν νὰ δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου καὶ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, νὰ ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων· τότε εὑρίσκομεν κατὰ πρῶτον τὸν τελευταῖον ὅρον ἐκ τοῦ τύπου (1) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2).

ΣΗΜ. Οἱ πέντε ἀριθμοὶ α, τ, ν, ω καὶ Κ, οἵτινες θεωροῦνται ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ, συνδέονται πρὸς ἀλλήλους διὰ τῶν ἐξισώσεων

$$\tau = \alpha + (\nu - 1)\,\omega, \qquad K = \frac{\nu(\alpha+\tau)}{2}.$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι, δοθέντων τῶν τριῶν ἐξ αὐτῶν, οἱ λοιποὶ δύο πρέπει νὰ προσδιορίζωνται ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων, ἐν αἷς περιέχονται ὡς ἄγνωστοι.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ πέντε πραγμάτων δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὰ δύο κατὰ δέκα διαφόρους τρόπους, ἕπεται, ὅτι δύνανται νὰ προταθῶσιν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων δέκα διάφορα προβλήματα.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν. $\left(\text{᾿Απ. } \frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)$.

2) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν ν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειράν. (Ἀπ. ν^2).

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ν.

Ἐὰν εἰς τὴν ταὐτότητα $(\alpha+1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1$

τεθῇ κατὰ σειρὰν $\alpha=1, 2, 3, \ldots, \nu$, καὶ προστεθῶσι κατὰ μέλη αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες, εὑρίσκεται ἡ ἰσότης

$$(\nu+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+3(1+2+3+\ldots+\nu)+\nu\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι $1+2+3+\ldots+\nu=\frac{1}{2}\nu(\nu+1)$,

ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται

$$(\nu+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2)+\frac{3}{2}\nu(\nu+1)+\nu,$$

ἐξ ἧς $3(1^2+2^2+\ldots+\nu^2)=(\nu+1)^3-\frac{3}{2}\nu(\nu+1)-\nu-1$

καὶ $1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1).(2\nu+1)}{1.2.3}$.

4) Ἀποδεῖξαι, ὅτι εἶναι

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3=(1+2+3+4+\ldots+\nu)^2.$$

5) Θέλων τις νὰ ἀνορύξῃ φρέαρ, συνεφώνησε μετὰ τῶν ἐργατῶν ὡς ἑξῆς. Διὰ τὴν πρώτην ὀργυιὰν τοῦ βάθους νὰ πληρώσῃ 5 δραχμάς, διὰ τὴν δευτέραν 10, διὰ τὴν τρίτην 15 καὶ οὕτω καθεξῆς, δι' ἑκάστην ἑπομένην ὀργυιὰν 5 δραχμὰς περισσότερον. Τὸ ὕδωρ εὑρέθη εἰς βάθος 18 ὀργυιῶν. Πόσον θὰ πληρώσῃ; ('Απ. 855).

6) Δύο ἀριθμητικῶν προόδων δοθεισῶν, εὑρεῖν τοὺς κοινοὺς αὐτῶν ὅρους.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐδόθησαν αἱ ἑξῆς πρόοδοι

$$10, \quad 13, \quad 16, \ldots\ldots, \quad \text{λόγος } 3$$
$$8, \quad 15, \quad 22, \ldots\ldots, \quad \text{λόγος } 7.$$

Ὁ τυχὼν ὅρος τῆς πρώτης, ὁ ἔχων τὴν τάξιν τ εἶναι $10+3(\tau-1)$· ὁ δὲ τυχὼν ὅρος τῆς δευτέρας, ὁ ἔχων τὴν τάξιν υ, θὰ εἶναι $8+7(\upsilon-1)$· ὅταν δὲ οἱ ὅροι οὗτοι εἶναι ἴσοι, οἱ ἀκέραιοι τ καὶ υ συνδέονται διὰ τῆς ἰσότητος $10+3(\tau-1)=8+7(\upsilon-1)$ ἢ $3\tau-7\upsilon=-6$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ἀκεραίας λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος (ἐδ. 170)· δίδονται δὲ αὗται ὑπὸ τῶν ἑξῆς τύπων

$$\tau=-2+7\omega \qquad \upsilon=3\omega\cdot$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν, ὑποθέτοντες $\omega=1, 2, 3, \ldots$

$$\tau=5, \quad 12, \quad 19, \quad 26, \quad 33, \quad 40, \ldots\ldots$$
$$\upsilon=3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad 15, \quad 18, \ldots\ldots$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι θὰ εἶναι ἴσοι ὁ 5ος ὅρος τῆς α´ καὶ ὁ 3ος τῆς β´, ὁ 12ος τῆς α´ καὶ ὁ 6ος τῆς β´, ὁ 19ος τῆς α´ καὶ ὁ 9ος τῆς β´· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ περισσοτέρων ἀριθμητικῶν προόδων τοὺς κοινοὺς ὅρους.

7) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀριθμῶν, τῶν μικροτέρων τοῦ 1000, οἵτινες διαιροῦνται διὰ τοῦ 7.

Β'. ΠΡΟΟΔΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ

222. Σειρὰ ἀριθμῶν, ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λέγεται, ὅτι ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν ἢ κατὰ πηλίκον· τοιοῦτοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ldots\cdot$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 2.

Τοιοῦτοι καὶ οἱ ἀριθμοὶ

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{32},\ldots.$$

ὧν ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου, πολλαπλασιασθέντος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{2}$.

Οἱ πρόοδον ἀποτελοῦντες ἀριθμοὶ λέγονται ὅροι τῆς προόδου, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις, πολλαπλασιάζων ἕκαστον ὅρον, παράγει τὸν ἑπόμενον, λέγεται λόγος τῆς προόδου.

Ἡ πρόοδος εἶναι αὔξουσα, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς προβαίνωσιν αὐξανόμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα· φθίνουσα δέ, ἐὰν οἱ ὅροι προβαίνωσιν ἐλαττούμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος.

Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

223. Ἐν πάσῃ γεωμετρικῇ προόδῳ ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται τῷ πρώτῳ, πολλαπλασιασθέντι ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων.

Διότι, ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου καὶ διὰ τοῦ τ ὁ ν^ος^, διὰ δὲ τοῦ ω ὁ λόγος, θὰ εἶναι

πρῶτος ὅρος	α,
δεύτερος	$\alpha\omega$,
τρίτος	$\alpha\omega^2$,
τέταρτος	$\alpha\omega^3$.

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὥστε ὁ ὅρος τ, ὁ τὴν ν^ην^ τάξιν κατέχων καὶ τοῦ ὁποίου προηγοῦνται $\nu-1$ ἄλλοι ὅροι, θὰ εἶναι

$$\tau = \alpha\omega^{\nu-1}. \qquad (1)$$

Ἐφαρμογαί.

Εὑρεῖν τὸν 20ὸν ὅρον τῆς προόδου

1, 2, 4, 8, 16 . . ., λόγος 2.

Ἐπειδὴ τοῦ εἰκοστοῦ ὅρου προηγοῦνται 19 ἄλλοι, ὁ ὅρος οὗτος ἰσοῦται τῷ $1.(2)^{19}$ ἤτοι τῷ 524288.

Εὑρεῖν τὸν 30ὸν ὅρον τῆς προόδου

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \quad \text{λόγος } \frac{1}{2}.$$

Ἐπειδὴ προηγοῦνται αὐτοῦ 29 ὅροι, θὰ εἶναι ἴσος τῷ

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)^{29} \quad \text{ἤτοι τῷ} \quad \frac{1}{2^{29}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{536870912}.$$

Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

224. Ἂς ἀποτελῶσιν οἱ ἀριθμοὶ

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma, \ldots \varrho,\ \sigma,\ \tau,$$

γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἂς παρασταθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διὰ τοῦ Κ· ἤτοι ἔστω

$$K = \alpha + \beta + \gamma + \ldots + \varrho + \sigma + \tau. \qquad (\alpha)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς ἐπὶ τὸν λόγον τῆς προόδου, εὑρίσκομεν

$$K\omega = \alpha\omega + \beta\omega + \gamma\omega + \ldots + \varrho\omega + \sigma\omega + \tau\omega.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha\omega = \beta$, $\beta\omega = \gamma, \ldots, \varrho\omega = \sigma$, $\sigma\omega = \tau$, ἡ δευτέρα ἰσότης δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$K\omega = \beta + \gamma + \ldots + \varrho + \sigma + \tau + \tau\omega.$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν δύο ἴσων ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα (α), εὑρίσκομεν

$$K\omega - K = \tau\omega - \alpha$$

ἢ

$$K(\omega - 1) = \tau\omega - \alpha \qquad (\beta)$$

καί, ἂν ὁ ω διαφέρῃ τῆς μονάδος 1,

$$K = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}. \qquad (2)$$

τουτέστι, τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἂν ὁ τελευταῖος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεθῇ διὰ τοῦ λόγου, ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.

Ἐπειδὴ ὁ τύπος (2) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$K = \tau + \frac{\tau - \alpha}{\omega - 1}, \qquad (2')$$

συνάγομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται τῷ τελευταίῳ ὅρῳ, ηὐξημένῳ κατὰ τὸ πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὴν διαφορὰν τῶν ἄκρων διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ λόγου ἀπὸ τῆς μονάδος.

Ἐὰν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶναι ἴσος τῇ μονάδι 1, ἡ ἐξίσωσις (β) δὲν δίδει τὸ ἄθροισμα Κ· διότι γίνεται $0=0$· ἀλλὰ τότε τὸ ἄθροισμα Κ εὑρίσκεται ἀμέσως ἐκ τῆς προόδου· διότι πάντες οἱ ὅροι εἶναι ἴσοι· ὥστε, ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι ν, θὰ εἶναι $K=\nu.\alpha$.

Δυνατὸν νὰ δοθῶσιν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου καὶ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων, νὰ ζητῆται δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων· τότε εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τελευταῖον ὅρον ἐκ τοῦ τύπου (1) καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (2), ὅτε εὑρίσκομεν εὐκόλως

$$K=\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}.$$

ΣΗΜ. Τὸν τύπον τοῦτον δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν· τῷ ὄντι, κατὰ τὰ δεδομένα, οἱ προσθετέοι ὅροι εἶναι

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}$$

ἢ $$\alpha(1+\omega+\omega^2\ldots+\omega^{\nu-1})\cdot$$

ἀλλὰ τὸ ἐν τῇ παρενθέσει ἄθροισμα εὑρίσκεται ὡς πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$\frac{\omega^{\nu}-1}{\omega-1},$$

ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ

$$\frac{\alpha(\omega^{\nu}-1)}{\omega-1}.$$

Θεωρήματα περὶ τῶν φθινουσῶν γεωμετρικῶν προόδων, αἵτινες ἔχουσιν ἄπειρον πλῆθος ὅρων (θετικῶν).

225. Ἐὰν ἐκ τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου

$$\alpha,\quad \alpha\omega,\quad \alpha\omega^2,\quad \alpha\omega^3\ldots \qquad (\omega<1)$$

ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε (εἴτε κατὰ σειρὰν εἴτε καὶ μή), τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων εἶναι πάντοτε μικρότερον ἀριθμοῦ τινος

Ἂς ληφθῶσιν ὁσοιδήποτε ὅροι καὶ ἐκ τῶν ληφθέντων, ἔστω ὁ τὴν μεγίστην τάξιν κατέχων, ὁ $\alpha\omega^{\mu}$· τότε, πάντες οἱ ληφθέντες εὑρίσκονται μεταξὺ τῶν ὅρων $\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2,\ \alpha\omega^3,\ldots \alpha\omega^{\mu}$ καὶ ἐπομένως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν δὲν ὑπερβαίνει τὸ ἑξῆς

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\alpha\omega^3+\ldots+\alpha\omega^{\mu},$$

τοῦτο δέ, ἐὰν διὰ τοῦ τ παρασταθῇ ὁ τελευταῖος ὅρος, εἶναι

$$\frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1} \quad ἢ \quad \frac{\alpha-\tau\omega}{1-\omega} \quad ἢ \quad \frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\tau\omega}{1-\omega},$$

ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$· ὥστε, ὁσουσδήποτε ὅρους τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου καὶ ἂν προσθέσωμεν, πάντοτε εὑρίσκομεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

226. Δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, εὑρίσκεται ὅρος τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου μικρότερος αὐτοῦ (ὡς καὶ πάντες οἱ ἑπόμενοι).

Ἔστω ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ε· ἂν πάντες οἱ ὅροι τῆς προόδου ἦσαν μεγαλήτεροι τοῦ ε, θὰ ἦτο δυνατὸν, λαμβάνοντες ἱκανοὺς τὸ πλῆθος καὶ προσθέτοντες, νὰ εὕρωμεν ἄθροισμα ὑπερβαῖνον πάντα ἀριθμόν· διότι καὶ ὁ ε πολλάκις ἐπαλαμβανόμενος, γίνεται μείζων παντὸς ἀριθμοῦ· ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει· ἑπομένως, ὑπάρχει τις ὅρος, μικρότερος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ πάντες δὲ οἱ ἑπόμενοι αὐτοῦ εἶναι, ὡσαύτως, μικρότεροι τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

227. Ἐὰν λαμβάνωμεν τοὺς ὅρους τῆς φθινούσης προόδου κατὰ σειρὰν ἀπ᾽ ἀρχῆς καὶ προσθέτωμεν, ὅσον περισσοτέρους ὅρους λαμβάνομεν, τόσον προσεγγίζομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{1-\omega}$· καί. δοθέντος ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τόσους ὅρους τῆς προόδου, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ληφθέντων νὰ διαφέρῃ τοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ διαφορὰν, μικροτέραν τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Καὶ ὄντως, τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς φθινούσης προόδου α, β, γ, ... , τ (ἂν ὁ λόγος αὐτῆς παρασταθῇ διὰ τοῦ ω) εἶναι

$$\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\omega\tau}{1-\omega}$$

καὶ διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ κατὰ $\frac{\omega\tau}{1-\omega}$· ἀλλ᾽ ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι γινόμενον δύο παραγόντων, ὧν, ὁ μὲν εἷς $\frac{\omega}{1-\omega}$ μένει ἀμετάβλητος, ὁ δὲ ἕτερος εἶναι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος, ὅστις, κατὰ τὰ ἀποδειχθέντα, γίνεται μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ· ἑπομένως καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\omega}{1-\omega}$, τουτέστιν ἡ θεωρουμένη διαφορά, γίνεται μικρότερον παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐκφράζομεν συντόμως λέγοντες, ὅτι τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων αὐτῆς ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\alpha}{1-\omega}$,

ἤτοι, τὸν πρῶτον ὅρον, διαιρεθέντα διὰ τῆς μονάδος, ἠλαττωμένης κατὰ τὸν λόγον.

Ἐφαρμογαί.

1) Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots.$$

ἰσοῦται τῷ $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$ ἤτοι τῷ 2.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{A^2}+\frac{1}{A^3}+\ldots.. \qquad A>1,$$

εἶναι $\dfrac{1}{A-1}$.

3) Εὑρεῖν τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν δυνάμεων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$. $(\beta>\alpha)$

ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3+\ldots..$ $\left(\text{Ἀπ. } \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\right)$.

4) Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα δύναται νὰ ἐκληφθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου· διότι, ἔστω τὸ κλάσμα

$$0{,}52525252\ldots..$$

τοῦτο εἶναι $\frac{52}{100}+\frac{52}{100^2}+\frac{52}{100^3}+\ldots$

καὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τούτων τῶν κλασμάτων εἶναι, κατὰ τὰ προηγούμενα,

$$\frac{\frac{52}{100}}{1-\frac{1}{100}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{52}{99}.$$

ὅπερ καὶ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι γνωστόν.

5) Εἰς δοθὲν τετράγωνον ἐγγράφομεν ἄλλο τετράγωνον, συνάπτοντες

τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· εἰς τοῦτο πάλιν ἄλλο· καὶ οὕτω καθεξῆς, εἰς ἄπειρον· ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν πάντων τούτων τῶν τετραγώνων.

('Απ. $2\alpha^2$· ἔνθα α δηλοῖ τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου).

6) Ἄνθρωπός τις διέταξεν ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μερισθῇ ἡ περιουσία αὐτοῦ εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του, ὡς ἑξῆς· ὁ μὲν πρωτότοκος νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{2}$, ὁ δὲ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τελευταῖος τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας· δὲν ἐσυλλογίσθη ὅμως, ὅτι τὰ τρία ταῦτα μέρη (τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον) δὲν συναποτελοῦσι τὴν ὅλην περιουσίαν, ἀλλὰ μόνον τὰ $\frac{19}{20}$ αὐτῆς· πῶς πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διανομή, ἵνα, ὅσον τὸ δυνατὸν, πραγματωθῇ ἡ θέλησις τοῦ διαθέτου;

Λύσις. Ἀφοῦ δοθῇ τὸ ἥμισυ τῆς περιουσίας εἰς τὸν πρῶτον καὶ τὸ τέταρτον αὐτῆς εἰς τὸν δεύτερον καὶ τὸ πέμπτον αὐτῆς εἰς τὸν τρίτον, θὰ μείνῃ τὸ $\frac{1}{20}$ τῆς περιουσίας· τοῦτο δέ, ὡς πατρικὴ περιουσία, θὰ διανεμηθῇ πάλιν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τὸ νέον περίσσευμα $\left(\frac{1}{20}\right)^2$ θὰ διανεμηθῇ πάλιν ὁμοίως, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἐπ' ἄπειρον.

Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ τρία μερίδια εἶναι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{20}\right)^3+\ldots \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{10}{19}.$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{20}\right)^3+\ldots \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{5}{19}.$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{20}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{20}\right)^3+\ldots \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{4}{19}.$$

7) Δύο κινητὰ Α καὶ Β κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἀπέχουσι τὴν στιγμὴν ταύτην ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν ἴσην τῇ α· ἡ κίνησις ἀμφοτέρων γίνεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ΑΒ, εἶναι δὲ ἡ ταχύτης τ τοῦ Α μεγαλητέρα τῆς ταχύτητος τ΄ τοῦ Β. Ζητεῖται, μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς τὸ Α θὰ φθάσῃ τὸ Β.

Λύσις. Ἵνα τὸ Α φθάσῃ τὸ Β, πρέπει πρῶτον νὰ διανύσῃ τὸ χωρίζον νῦν αὐτὰ διάστημα α· καὶ πρὸς τοῦτο χρειάζεται χρόνον $\frac{\alpha}{\tau}$ (διότι τ εἶναι ἡ ταχύτης του)· ἀλλ' ἐν τῷ χρόνῳ τούτῳ τὸ κινητὸν Β θὰ προχωρήσῃ κατὰ τὸ διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}\tau'$ (διότι τ΄ εἶναι ἡ ταχύτης του)· ὥστε, μετὰ παρέλευσιν τοῦ χρόνου $\frac{\alpha}{\tau}$, ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κινητῶν θὰ εἶναι $\alpha.\frac{\tau'}{\tau}$· ἀνάγκη λοιπὸν τὸ Α νὰ διανύσῃ καὶ τὸ διάστημα τοῦτο (ἵνα φθάσῃ τὸ Β)· καὶ πρὸς τοῦτο χρειάζεται δεύτερον χρονικὸν διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau}$.

Ἐν τῷ δευτέρῳ τούτῳ χρονικῷ διαστήματι τὸ κινητὸν Β θὰ προχωρήσῃ κατὰ τὴν ἀπόστασιν $\frac{\alpha}{\tau}.\frac{\tau'}{\tau}\tau'$· ἤτοι $\alpha\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$. τόση λοιπὸν θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κινητῶν εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου χρονικοῦ διαστήματος· ἀνάγκη ἄρα τὸ Α νὰ διανύσῃ καὶ τὴν ἀπόστασιν ταύτην καὶ πρὸς τοῦτο χρειάζεται τρίτον χρονικὸν διάστημα $\frac{\alpha}{\tau}.\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$.

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, βλέπομεν, ὅτι, ἵνα τὸ Α φθάσῃ τὸ Β, χρειάζεται ἄπειρα τὸ πλῆθος χρονικὰ διαστήματα, τὰ ἑξῆς

$$\frac{\alpha}{\tau},\quad \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right),\quad \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2,\quad \frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^3 \ldots,$$

δὲν πρέπει ὅμως ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν (*), ὅτι τὸ Α οὐδέποτε θὰ φθάσῃ τὸ Β· διότι τὰ ἀπειροπληθῆ ταῦτα χρονικὰ διαστήματα συναποτελοῦσι χρονικόν τι διάστημα πεπερασμένον. Καὶ ὄντως, τὰ χρονικὰ ταῦτα διαστήματα εἶναι ὅροι μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου· ἄρα τὸ σύνολον αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸν χρόνον

$$\frac{\frac{\alpha}{\tau}}{1-\frac{\tau'}{\tau}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha}{\tau-\tau'} \quad \text{(παράβαλε ἐδ. 149),}$$

εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις τῶν κινητῶν θὰ εἶναι 0.

8) Ἐάν τις διπλασιάζῃ κατ' ἔτος τὴν περιουσίαν του καὶ ἀρχίσῃ ἀπὸ 1 λεπτόν, πόσα λεπτὰ θὰ ἔχῃ μετὰ 40 ἔτη;

(Ἀπ. 2^{40} λεπτά· ἤτοι 10 995 116 277 δρ., 76).

(*) Οὕτω συνεπέραινον οἱ ἀρχαῖοι σοφισταὶ καὶ ἀπεδείκνυον, ὅτι ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς δὲν ἠδύνατο νὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὐδὲ ἂν ἓν μόνον βῆμα ὑπελείπετο αὐτῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

Ὡς βάσιν τῆς θεωρίας τῶν λογαρίθμων λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς στοιχειώδη ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν θετικῶν καὶ μεγαλητέρων τῆς μονάδος ἔχει τόσα ψηφία ἀκέραια, ὅσα ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες ἢ ἓν ὀλιγώτερον.

Ἡ ἰδιότης αὕτη δύναται νὰ ὑποτεθῇ γνωστὴ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, ἀλλά, χάριν ἀκριβείας, ἀποδεικνύομεν αὐτὴν ἐνταῦθα.

Ἂς λάβωμεν, ὡς παράδειγμα, δύο ἀριθμοὺς, ἔχοντας ἀκέραια ψηφία, ὁ μὲν εἷς 3, ὁ δὲ ἄλλος 5. Ὁ μὲν πρῶτος θὰ εἶναι ἴσος ἢ μεγαλήτερος τοῦ $100 (=10^2)$, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ $1000 (=10^3)$, ὁ δὲ δεύτερος θὰ εἶναι ἴσος ἢ μεγαλήτερος τοῦ $10000 (=10^4)$, ἀλλὰ μικρότερος τοῦ $100000 (10^5)$· ἄρα τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ γινομένου $10^2 . 10^4$ ἤτοι τοῦ 10^6, ἀλλὰ μικρότερον τοῦ γινομένου $10^3 . 10^5$ ἤτοι τοῦ 10^8. Καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον ἢ μεγαλήτερον τοῦ 10^6, θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον 7 ψηφία (ὅσα ἔχει ὁ 10^6)· ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν εἶναι μικρότερον τοῦ 10^8, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ 9 ψηφία (διότι ὁ 10^8 εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἐκ τῶν ἀριθμῶν, τῶν ἐχόντων 9 ψηφία), ἄρα θὰ ἔχῃ ἢ 7 ψηφία ἢ 8.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ὁσαδήποτε ψηφία καὶ ἂν ἔχωσιν οἱ ἀριθμοί.

Ὁρισμός.

228. Ἀριθμοῦ ἀκεραίου καὶ θετικοῦ λέγεται θέμα ὁ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἐκφράζων ἀριθμὸς, κατὰ μονάδα ἠλαττωμένος.

Παραδείγματος χάριν, τοῦ ἀριθμοῦ 5 θέμα εἶναι ὁ 0, τοῦ ἀριθμοῦ 37 θέμα εἶναι ὁ 1, τοῦ 3893 ὁ 3 καὶ τοῦ 73805 ὁ 4.

229. Παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ καὶ μεγαλητέρου τῆς μονάδος, θέμα, λέγεται τὸ θέμα τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.

Παραδείγματος χάριν, τοῦ 3,55 θέμα εἶναι τὸ τοῦ 3 ἤτοι 0· καὶ τοῦ 18,7 θέμα εἶναι τὸ τοῦ 18 ἤτοι 1.

Ἰδιότητες τῶν θεμάτων.

230. Τὸ θέμα τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν θεμάτων τῶν παραγόντων ἢ ὑπερβαίνει αὐτὸ κατὰ μονάδα.

Ἂς ὑποθέσωμεν δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας θέματα ὁ μὲν εἷς τὸ 3, ὁ δὲ ἄλλος τὸ 8· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχῃ θέμα ἢ τὸ 11 ἢ τὸ 12.

Διότι, ὁ μὲν πρῶτος ἀριθμὸς ἔχει 4 ψηφία (ἀκέραια), ὁ δὲ δεύτερος 9· ἄρα τὸ γινόμενόν των θὰ ἔχῃ ψηφία ἢ 12 ἢ 13 καὶ διὰ τοῦτο θὰ ἔχῃ θέμα ἢ τὸ 11 (ἂν ἔχῃ 12 ψηφία) ἢ τὸ 12 (ἂν ἔχῃ 13 ψηφία).

Παραδείγματα.

θεμ. (185) = 2	θεμ. (87) = 1
θεμ. (3974) = 3	θεμ. (542) = 2
θεμ. γινομένου 735190 = 5.	θεμ. γινομένου 47154 = 4.

231. Τὸ θέμα παντὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖ τὰς δεκάδας εἰς τὸ θέμα τῆς δεκάτης δυνάμεως αὐτοῦ.

Ἔστω ἀριθμός τις α, ἔχων θέμα 3· λέγω, ὅτι τὸ θέμα τοῦ α^{10} θὰ ἔχῃ 3 δεκάδας ἤτοι θὰ εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν

30 31 32 33 34 35 36 37 38 39.

Διότι, τὸ θέμα τοῦ γινομένου $\alpha . \alpha$ ἤτοι τοῦ α^2, θὰ εἶναι ἢ 6 ἢ $6+1$, δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$\text{θεμ.}\ (\alpha^2) = 6 + \varepsilon_1, \quad \text{ἔνθα } \varepsilon_1 \text{ εἶναι ἢ } 0 \text{ ἢ } 1.$$

Καὶ τὸ θέμα τοῦ γινομένου $\alpha^2 . \alpha$ ἤτοι τοῦ α^3 θὰ εἶναι ἢ $9+\varepsilon_1$ ἢ $9+\varepsilon_1+1$· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$\text{θεμ.}\ (\alpha^3) = 9 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \text{ἔνθα } \varepsilon_2 \text{ εἶναι ἢ } 0 \text{ ἢ } 1.$$

Καὶ τὸ θέμα τοῦ γινομένου $\alpha^3 . \alpha$ ἤτοι τοῦ α^4, θὰ εἶναι ἢ $12+\varepsilon_1+\varepsilon_2$ ἢ $12+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1$· δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$\text{θεμ.}\ (\alpha^4) = 12 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \text{ἔνθα } \varepsilon_3 \text{ εἶναι ἢ } 0 \text{ ἢ } 1.$$

Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως, βλέπομεν, ὅτι εἶναι

$$\text{θεμ.}\ (\alpha^{10}) = 3 . 10 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_9,$$

ἔνθα ἕκαστον τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_9$ εἶναι ἢ 0 ἢ 1.

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ θέμα τοῦ α^{10} δὲν εἶναι μικρότερον τοῦ 30, οὐδὲ μεγαλήτερον τοῦ 39· ἄρα θὰ εἶναι εἷς ἐκ τῶν ἀριθμῶν

30, 31, 32, ... , 39.

Ἐκ τούτου συνάγεται τὸ ἑξῆς

Ἔστω ἀριθμός τις θετικὸς καὶ μεγαλήτερος τῆς μονάδος, ὁ α· ἐὰν ὑψώσωμεν αὐτὸν κατὰ σειρὰν εἰς τὰς δυνάμεις

$$\alpha^1 \quad \alpha^{10} \quad \alpha^{100} \quad \alpha^{1000} \quad \alpha^{10000} \quad \ldots\ldots,$$

ἑκάστη ἐκ τούτων εἶναι δεκάτη δύναμις τῆς προηγουμένης αὐτῇ (ἐδ. 72)· ἑπομένως τὸ θέμα ἑκάστης ἐξ αὐτῶν θὰ ἀποτελῇ τὰς δεκάδας εἰς τὸ θέμα τῆς ἑπομένης.

Παραδείγματος χάριν, εἶναι θέμα τοῦ $11 = 1$,
θέμα τοῦ $11^{10} = 10$,
θέμα τοῦ $11^{100} = 104$,
θέμα τοῦ $11^{1000} = 1041$.

Ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων.

232. Λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος α λέγεται ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἀκέραιον μὲν μέρος τὸ θέμα τοῦ α, δέκατα δὲ ἐν συνόλῳ τὸ θέμα τοῦ α^{10}, ἑκατοστὰ δὲ τὸ θέμα τοῦ α^{100}, καὶ οὕτω καθεξῆς· τουτέστιν ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ἐν συνόλῳ τόσας μονάδας ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως, ὅσας ἔχει τὸ θέμα τῆς ὁμωνύμου δυνάμεως τοῦ α

Παραδείγματος χάριν, ὁ λογάριθμος τοῦ 11

ἔχει 1	ἀκέραιον	ἢ	εἶναι	1,. . .	διότι θέμ. (11)	$= 1$,
ἔχει 10	δέκατα	ἤτοι	εἶναι	1,0.	διότι θέμ. (11^{10})	$= 10$,
ἔχει 104	ἑκατοστά	ἤτοι	εἶναι	1,04. .	διότι θέμ. (11^{100})	$= 104$,
ἔχει 1041	χιλιοστά	ἤτοι	εἶναι	1,041. .	διότι θέμ. (11^{1000})	$= 1041$,

. . . .

Ὁ λογάριθμος τοῦ α παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου λογ. α· εἶναι δὲ ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμός, διότι πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ εἶναι ὡρισμένα.

233. Τῆς μονάδος 1 λογάριθμος εἶναι τὸ 0 καὶ τοῦ 10 ἡ μονάς.

Ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις τοῦ 1 εἶναι πάντοτε 1 καὶ ἔχει, διὰ τοῦτο θέμα 0, ἕπεται, ὅτι ὁ λογάριθμος τοῦ 1 εἶναι 0 ἤτοι λογ. $1 = 0$.

Ἐπειδὴ δὲ πάλιν εἶναι θέμα τοῦ $10 = 1$,
θέμα τοῦ $10^{10} = 10$,
θέμα τοῦ $10^{100} = 100$,

. . . .

ἕπεται λογ. $10 = 1{,}000 \ldots\ldots = 1$.

Παραδείγματα.

Πρὸς εὕρεσιν τῶν ψηφίων τοῦ λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ, δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς δυνάμεις τοῦ ἀριθμοῦ, ἀλλὰ μόνον τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων αὐτῶν· τοῦτο δὲ εἶναι ἁπλούστερον, ὡς δεικνύουσι τὰ ἑπόμενα παραδείγματα. (Οἱ ἐν παρενθέσει κλειόμενοι ἀριθμοὶ σημαίνουσι πλῆθος μηδενικῶν, ὡς 11(2) σημαίνει 1100, 13(5) σημαίνει 1300000, κτλ.).

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 2 παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $2^{10} = 1024$· ὥστε 2^{10} περιέχεται μεταξὺ 10^3 καὶ 11(2).

Ἑπομένως $2^{20} = (2^{10})^2$	περιέχεται	μεταξὺ	10^6	καὶ	13(5),
$2^{40} = (2^{20})^2$	»	»	10^{12}	»	17(11),
$2^{80} = (2^{40})^2$	»	»	10^{24}	»	29(23),
$2^{100} = 2^{80} . 2^{20}$	»	»	10^{30}	»	38(29).

Ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι ἡ ἑκατοστὴ δύναμις τοῦ 2 ἔχει 31 ψηφία· ἄρα εἶναι λογ. 2 = 0,30 . . .

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 3 παρατηροῦμεν ὡσαύτως, ὅτι

3^{10}	περιέχεται	μεταξὺ	59(3)	καὶ	6(4),
3^{20}	»	»	34(8)	»	36(8),
3^{40}	»	»	11(18)	»	13(18),
3^{80}	»	»	12(37)	»	17(37),
3^{100}	»	»	40(46)	»	52(46)·

ἤτοι, ἡ ἑκατοστὴ δύναμις τοῦ 3 ἔχει 48 ψηφία καὶ ἑπομένως εἶναι

λογ. 3 = 0,47 . . .

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 7 παρατηροῦμεν ὁμοίως, ὅτι

	7^5	περιέχεται	μεταξὺ	168(2)	καὶ	169(2),
ὥστε	7^{10}	»	»	28(7)	»	29(7),
	7^{20}	»	»	78(15)	»	85(15),
	7^{40}	»	»	60(32)	»	73(32),
	7^{80}	»	»	36(66)	»	54(66),
	7^{100}	»	»	28(83)	»	56(83)·

ὥστε, ἡ ἑκατοστὴ δύναμις τοῦ 7 ἔχει 85 ψηφία, καὶ ἑπομένως εἶναι

λογ. 7 = 0,84 . . .

Ἐὰν θέλωμεν περισσότερα ψηφία τοῦ λογαρίθμου, ἀνάγκη νὰ διατηρῶμεν ἐν τοῖς πολλαπλασιασμοῖς περισσότερα σημαντικὰ ψηφία.

Ἐάν, π. χ., πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 2 μέχρι τῶν χιλιοστῶν, ὑπολογίζομεν ὡς ἑξῆς $2^{10} = 1024$·

2^{20}	περιέχεται	μεταξὺ	1048(3)	καὶ	105(4),
2^{40}	»	»	1099(9)	»	111(10),
2^{80}	»	»	1207(21)	»	124(22),
2^{100}	»	»	1264(27)	»	131(28),
2^{200}	»	»	1597(57)	»	172(58),
2^{400}	»	»	255(118)	»	296(118),
2^{800}	»	»	65(239)	»	88(239),
2^{1000}	»	»	10(300)	»	16(300)·

ὥστε ἡ χιλιοστὴ δύναμις τοῦ 2 ἔχει 302 ψηφία καί, διὰ τοῦτο, εἶναι

λογ. 2 = 0,301 . . .

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

234. Οἱ λογάριθμοι ἔχουσι τὴν ἑπομένην ἀρχικὴν ἰδιότητα.

Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Τουτέστιν, εἶναι $\lambda o\gamma\ (\alpha\beta) = (\lambda o\gamma\ \alpha) + (\lambda o\gamma\ \beta)$.

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου, ἄς θεωρήσωμεν, κατὰ πρῶτον, τὰ εἰς τοὺς λογαρίθμους τούτους περιεχόμενα χιλιοστά· κατὰ τὸν ὁρισμόν, ἕκαστος τῶν τριῶν τούτων λογαρίθμων ἔχει τόσα χιλιοστά, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ θέμα τῆς χιλιοστῆς δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ, οὗτινος εἶναι λογάριθμος· ἑπομένως εἶναι (ἐὰν πρὸς συντομίαν τεθῇ $\tau = 1000$)

$$\lambda o\gamma\ \alpha = \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\alpha^{\tau})}{1000} + \varepsilon,$$

$$\lambda o\gamma\ \beta = \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\beta^{\tau})}{1000} + \eta,$$

$$\lambda o\gamma\ (\alpha\beta) = \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\alpha\beta)^{\tau}}{1000} + \vartheta\cdot$$

ἔνθα ἕκαστος τῶν τριῶν ἀριθμῶν $\varepsilon, \eta, \vartheta$ εἶναι μικρότερος ἑνὸς χιλιοστοῦ

Ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $\theta\varepsilon\mu.\ (\alpha\beta)^{\tau} = \theta\varepsilon\mu.\ (\alpha^{\tau}\beta^{\tau}) = \theta\varepsilon\mu.\ (\alpha^{\tau}) + \theta\varepsilon\mu.\ (\beta^{\tau}) + \iota$ (ἔνθα $\iota =$ ἢ 0 ἢ 1), ἡ τελευταία ἰσότης γίνεται

$$\lambda o\gamma\ (\alpha\beta) = \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\alpha^{\tau})}{1000} + \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\beta^{\tau})}{1000} + \vartheta + \frac{\iota}{1000}.$$

ἀθροίζοντες δὲ τὰς δύο πρώτας ἰσότητας κατὰ μέλη, λαμβάνομεν

$$\lambda o\gamma\ (\alpha) + \lambda o\gamma\ (\beta) = \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\alpha^{\tau})}{1000} + \frac{\theta\varepsilon\mu.\ (\beta^{\tau})}{1000} + \varepsilon + \eta.$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι ἂν τὸ ἄθροισμα $\lambda o\gamma\ \alpha + \lambda o\gamma\ \beta$ διαφέρῃ ἀπὸ τοῦ $\lambda o\gamma\ (\alpha\beta)$, ἡ διαφορὰ θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν δύο χιλιοστῶν.

Ὁμοίως, θεωροῦντες τὰ εἰς τοὺς τρεῖς λογαρίθμους περιεχόμενα ἑκατομμυριοστά, δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα τῶν δύο ἑκατομμυριοστῶν.

Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν παραβαλλομένων ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα δύο μονάδων οἱασδήποτε δεκαδικῆς τάξεως, συμπεραίνομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι οὐδεμίαν ἔχουσι διαφορὰν ἤτοι εἶναι ἴσοι.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἐκτείνεται ἐπὶ ὁσωνδήποτε παραγόντων.

Καὶ ὄντως, εἶναι $\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma = (\alpha\beta)\,.\,\gamma$,

ὅθεν $\lambda o\gamma\ (\alpha\beta\gamma) = \lambda o\gamma\ (\alpha\beta) + \lambda o\gamma\ \gamma = \lambda o\gamma\ \alpha + \lambda o\gamma\ \beta + \lambda o\gamma\ \gamma$.