ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ΄

ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΒΕΛΤΙΩ ΔΙΕΣΚΕΥΑΣΜΕΝΗ

Τιμᾶται μετὰ βιβλιοσήμου καὶ Φόρου Δρ. 21.40
Βιβλιόσημον Δρ. 7.63 Ἀναγκ. Δαν. » 2.30
Ἀριθ. Πράξεως 179—27/8/927

ΑΘΗΝΑΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & ΣΙΑ

8 Α — ΟΔΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ — 8 Α

1927

Ανιζέτα Βαγιαννοπούλου

Έτος 1929.

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῷ προτύπῳ Γυμνασίῳ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μ. Ἐκπαιδεύσεως.

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΚΑΙ ΜΑΘΗΤΡΙΩΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΣΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ Δ΄.

ΣΥΝΤΟΜΩΤΕΡΑ ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΕΠΙ ΤΑ ΒΕΛΤΙΩ ΔΙΕΣΚΕΥΑΣΜΕΝΗ

ΑΘΗΝΑΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ Δ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ & Σια

8ια—ΟΔΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ—8ια

1927

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Ν. ΤΖΑΚΑ & Σ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τύποις, "ΑΥΓΗΣ" ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ Ὁδὸς Λέκα—Στοὰ Σιμοπούλου

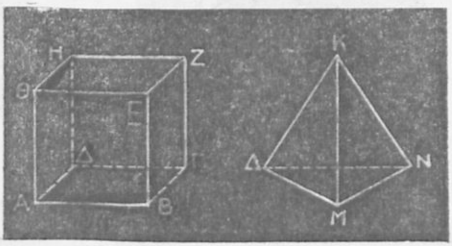
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ **1. Διάστημα. Ὄγκος σώματος.** — Τὸ σῶμα ΔΕ (Σχ. 1), ὡς καὶ πᾶν ἄλλο σῶμα, εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς ἀπείρου πέριξ ἡμῶν ἐκτάσεως, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν διάστημα.

Ἕκαστον τῶν σωμάτων ΑΖ, ΚΔΜΝ (Σχ. 1) καταλαμβάνει ἕνα μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον καλεῖται ὄγκος αὐτοῦ.

Ὥστε : Ὄγκος σώματος καλεῖται τὸ μέρος τοῦ διαστήματος, τὸ ὁποῖον τὸ σῶμα τοῦτο καταλαμβάνει.

§ **2. Ἐπιφάνεια.**— Παρατηροῦντες τὸ σῶμα ΔΕ (Σχ. 1) ἐκ τῶν ἔμπροσθεν, ὄπισθεν, δεξιῶν, ἀριστερῶν, ἄνω καὶ κάτω βλέπομεν ὅλα τὰ ἄκρα αὐτοῦ· ὅλα ὁμοῦ τὰ ἄκρα ταῦτα ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος τούτου. Τοῦτο ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σῶμα.



(Σχ. 1).

Ὥστε : Ἐπιφάνεια σώματος καλεῖται τὸ σύνολον τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

§ **3. Εἴδη ἐπιφανειῶν.** – *α΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.*— Τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1) ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ μέρη ἂν εἰς ἕνα ἀπὸ τὰ μέρη αὐτά, π. χ. εἰς τὸ ΑΒΕΘ, θέσωμεν νῆμα καλῶς τεντωμένον, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο ἐφαρμόζει πανταχοῦ ἐπὶ τοῦ ΑΒΕΘ.

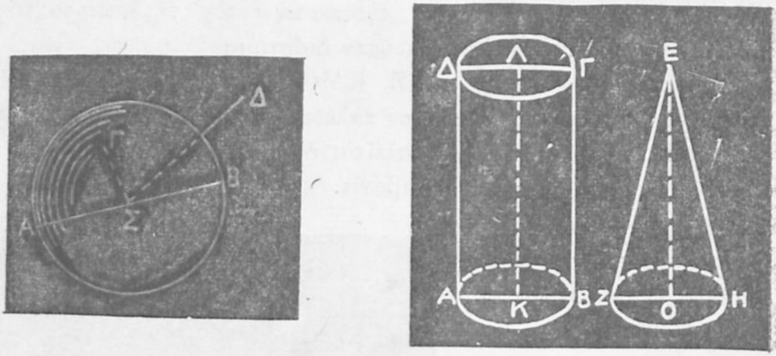
Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ εἰς τὰ μέρη τῶν ἐπιφανειῶν τοῦ σώματος ΚΔΜΝ (Σχ. 1), εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου, πατώματος κτλ.

Εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος Σ (Σχ. 2) τὸ τεντωμένον νῆμα οὐδόλως ἐφαρμόζει.

Ὁ διδάσκων ἐπιδεικνύει εἰς τοὺς μαθητὰς τὰ σχήματα ΔΕ κτλ. (Σχ. 1)

Εἰς τὰ μέρη ΑΒ καὶ ΔΓ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (Σχ. 2) τὸ νῆμα ἐφαρμόζει πανταχοῦ, ἐν ᾧ εἰς τὴν λοιπὴν αὐτοῦ ἐπιφάνειαν δὲν ἐφαρμόζει πανταχοῦ. Ὅμοιον συμβαίνει καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος ΕΖΗ (Σχ. 2).

Ὥστε εἰς ἄλλας μὲν ἐπιφανείας τὸ τεντωμένον νῆμα ἐφαρμόζει πανταχοῦ, εἰς ἄλλας δὲν ἐφαρμόζει πανταχοῦ καὶ εἰς ἄλλας οὐδόλως ἐφαρμόζει.



(Σχ. 2).

Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας νῆμα καλῶς τεταμένον ἐφαρμόζει πανταχοῦ, καλεῖται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον.

Ἡ ἐπιφάνεια ὑαλοπίνακος, ὁμαλοῦ τοίχου, πατώματος, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος, εἶναι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια.

β΄. Τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὅλη ὁμοῦ ἐπίπεδον. Αὕτη καλεῖται πολυεδρικὴ ἢ τεθλασμένη ἐπιφάνεια.

Ὥστε : Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον, καλεῖται τεθλασμένη ἢ πολυεδρικὴ ἐπιφάνεια.

γ΄. Καμπύλη ἐπιφάνεια.—Τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος Σ (Σχ. 2) οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον· ἡ ἐπιφάνεια αὕτη καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια ᾠοῦ εἶναι ἐπίσης καμπύλη ἐπιφάνεια.

Ὥστε : Πᾶσα ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι ἐπίπεδον, καλεῖται καμπύλη ἐπιφάνεια.

δ΄. Μικτὴ ἐπιφάνεια.—Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΑΒΓΔ (Σχ. 2) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἐπίπεδα μέρη καὶ ἀπὸ μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν. Ἕνεκα τούτου αὕτη καλεῖται μικτὴ ἐπιφάνεια.

Ὥστε : Πᾶσα ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ καμπύλα μέρη, καλεῖται μικτὴ ἐπιφάνεια.

Ἐρωτήσεις.—Τί καλεῖται διάστημα ; τί ὄγκος, τί ἐπιφάνεια σώματος ; Πόσα καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν ; Πῶς διακρίνομεν, ἂν ἐπιφάνειά τις εἶναι ἐπίπεδος ; Τί καλεῖται τεθλασμένη ἐπιφάνεια; πῶς ἄλλως λέγεται αὕτη ; Τί καλεῖται καμπύλη καὶ τί μικτὴ ἐπιφάνεια ;

§ **4. Γραμμαί Εἴδη γραμμῶν.** – Τὰ δύο μέρη, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ σώματος ΕΖΗ (Σχ. 2) τέμνονται· ἡ τομὴ αὐτῶν καλεῖται γραμμή. Ὁμοίως γραμμὴ καλεῖται καὶ ἡ τομὴ ΑΒ τῶν δύο μερῶν ΑΒΕΘ καὶ ΑΒΓΔ τῆς ἐπιφανείας τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1).

Ὥστε : Γραμμὴ καλεῖται ἡ τομὴ δύο ἐπιφανειῶν.

α΄. Εὐθεῖα γραμμή. –Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ τὰς γραμμὰς εἶναι ἡ εὐθεῖα γραμμή. Εἰκόνα ταύτης σχηματίζομεν παρατηροῦντες νῆμα ἢ τρίχα καλῶς τεντωμένην, τὴν τομὴν δύο τοίχων κτλ.

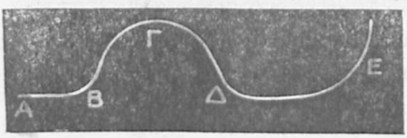
β΄. Τεθλασμένη γραμμή.— Ἡ γραμμὴ ΔΜΝ (Σχ. 1) ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αὕτη καλεῖται τεθλασμένη γραμμή. Ὁμοίως αἱ γραμμαὶ ΒΕΖ, ΚΔΜΝ (Σχ. 1) εἶναι τεθλασμέναι γραμμαί.

Ὥστε : Τεθλασμένη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται μὲν ἀπὸ εὐθείας, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

γ΄. Καμπύλη γραμμή. Τῆς μὴ εὐθείας γραμμῆς ΑΒ (Σχ. 2) οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Αὕτη καλεῖται καμπύλη γραμμή. Ὁμοίως αἱ γραμμαί, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται φύλλον δάφνης, αἱ ὄψεις μεταλλικοῦ νομίσματος κτλ. εἶναι καμπύλαι γραμμαί.

Ὥστε : Καμπύλη γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶναι εὐθεῖα γραμμή.

δ΄. Μικτὴ γραμμή.— Ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔΕ (Σχ. 3) ἀποτελεῖται



(Σχ. 3).

ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον αὕτη καλεῖται μικτὴ γραμμή.

Ὥστε : Μικτὴ γραμμὴ καλεῖται πᾶσα γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς.

Ἐρωτήσεις. — Τί καλοῦνται γραμμαί ; Πόσα καὶ τίνα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν ; Πῶς σχηματίζομεν εἰκόνα τῆς εὐθείας γραμμῆς ; Τί καλεῖται τεθλασμένη, καμπύλη, μικτὴ γραμμή ;

Περιληπτικὸς πίναξ ἐπιφανειῶν καὶ γραμμῶν.

Εἴδη ἐπιφανειῶν	*Εἴδη γραμμῶν*
Α΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον	Α΄. Εὐθεῖα γραμμή.
Β΄. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια (ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐπίπεδον)	Β΄. Τεθλασμένη γραμμή. (ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμή).
Γ΄. Καμπύλη ἐπιφάνεια (Οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι ἐπίπεδον)	Γ΄. Καμπύλη γραμμή. (Οὐδὲν μέρος αὐτῆς εἶναι εὐθεῖα γραμμή).
Δ΄. Μικτὴ ἐπιφάνεια (ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους καὶ καμπύλας ἐπιφανείας).	Δ΄. Μικτὴ γραμμή. (ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας καὶ καμπύλας γραμμάς).

§ **5. Σημεῖον.** — Ἡ τομὴ Β τῶν δύο γραμμῶν ΒΓ καὶ ΒΕ (Σχ. 1) καλεῖται σημεῖον. Ὁμοίως ἡ τομὴ Κ τῶν γραμμῶν ΚΜ καὶ ΚΔ (Σχ. 1) εἶναι σημεῖον.

Ὥστε : Σημεῖον καλεῖται ἡ τομὴ δύο γραμμῶν.

Ἕκαστον σημεῖον παρίσταται ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος μὲ μίαν στιγμήν.

Σημ. Ἐξ ὅσων εἴπομεν μέχρι τοῦδε εἶναι φανερὸν ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι ἀνήκουσιν εἰς τὰ σώματα, αἱ γραμμαὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας (καὶ ἑπομένως καὶ εἰς τὰ σώματα) καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰς γραμμάς, (ἑπομένως καὶ εἰς τὰς ἐπιφανείας καὶ σώματα).

Πολλάκις ὅμως νοοῦμεν τὰς ἐπιφανείας ἄνευ τῶν σωμάτων, τὰς γραμμὰς ἄνευ τῶν ἐπιφανειῶν καὶ τὰ σημεῖα ἄνευ τῶν γραμμῶν, εἰς τὰς ὁποίας εὑρίσκονται.

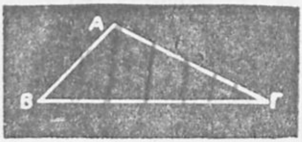
§ **6. Σχῆμα σώματος.—Εἴδη σχημάτων.**— Τὸ σῶμα ΔΕ (Σχ. 1) περατοῦται ἐξωτερικῶς κατὰ τρόπον διάφορον τοῦ τρόπου, κατὰ τὸν ὁποῖον περατοῦται τὸ σῶμα ΚΔΜΝ (Σχ. 1). Ἕνεκα τούτου λέγομεν περὶ αὐτῶν, ὅτι ἔχουσι διάφορον σχῆμα. Ὁμοίως τὰ σώματα

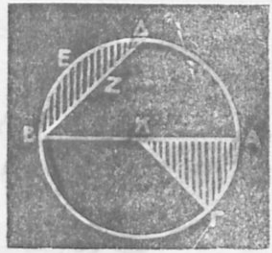
Σ, ΑΒΓΔ, ΕΖΗ (Σχ. 2) ἔχουσι διάφορον σχῆμα, διότι ἕκαστον περατοῦται ἐξωτερικῶς κατὰ τρόπον διάφορον ἀπὸ τὰ ἄλλα.

Ὥστε: Σχῆμα σώματος καλεῖται ὁ τρόπος, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ σῶμα τοῦτο περατοῦται ἐξωτερικῶς.

Τῶν σχημάτων ΑΒΓ καὶ Κ (Σχ. 4) ὅλα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος).

Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται ἐπίπεδα σχήματα.





(Σχ. 4).

Οὐδενὸς ὅμως τῶν σχημάτων (1 καὶ 2) ὅλα τὰ σημεῖα δύνανται νὰ τεθῶσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τά τοιαῦτα σχήματα καλοῦνται στερεὰ σχήματα.

Ὥστε: Ἐπίπεδα σχήματα καλοῦνται τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων ὅλα τὰ σημεῖα εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Στερεὰ σχήματα καλοῦνται τὰ σχήματα, τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα δὲν κεῖνται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

§ 7. Γεωμετρία.— Γεωμετρία καλεῖται ἡ ἐπιστήμη, ἡ ὁποία διδάσκει τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ τὰς μεθόδους τῆς μετρήσεως αὐτῶν.

Τὸ μέρος τῆς γεωμετρίας, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ ἐπίπεδα σχήματα, καλεῖται ἐπιπεδομετρία· τὸ δὲ μέρος, τὸ ὁποῖον ἐξετάζει τὰ στερεὰ σχήματα, καλεῖται στερεομετρία.

Ἡ γεωμετρία ἐξετάζει τὰ διάφορα τῶν σωμάτων σχήματα χωρὶς νὰ λαμβάνῃ ὑπ' ὄψιν τὴν ὕλην, ἐκ τῆς ὁποίας ἀποτελοῦνται τὰ σώματα ταῦτα.

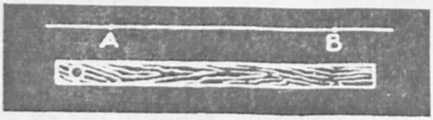
ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ. — ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

§ **8. Χάραξις εὐθείας γραμμῆς.** — Εὐθείας γραμμὰς χαράσσομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος (σχ. 5), κατὰ μῆκος τοῦ ὁποίου σύρομεν τὴν γραφίδα ἢ τὴν κιμωλίαν. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους καὶ ἐπὶ μικρῶν ἰδίᾳ ἐκτάσεων, π. χ. κήπων, προαυλίων κτλ. χαράσσομεν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς ἀκολούθως. Ἐμπήγομεν



(Σχ. 5).

ἐπὶ δύο σημείων τοῦ ἐδάφους δύο πασσάλους, εἰς τοὺς ὁποίους προσδένομεν νῆμα καλῶς τεντωμένον· ἔπειτα σύρομεν κατὰ μῆκος τοῦ νήματος τούτου αἰχμηρὸν πάσσαλον. Ἡ αἰχμὴ τούτου χαράσσει ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐνεπήχθησαν οἱ πάσσαλοι.

Οἱ τεχνῖται ἐνίοτε χαράττουσιν ἐπὶ σανίδος εὐθεῖαν ὡς ἀκολούθως. Μεταξὺ δύο σημείων, διὰ τῶν ὁποίων θέλουσι νὰ διέλθῃ ἡ εὐθεῖα, στερεοῦσι νῆμα καλῶς τεντωμένον καὶ προσφάτως χρωματισθὲν δι' ἐρυθροῦ συνήθως χρώματος. Ἀνυψοῦσιν ἔπειτα τὸ νῆμα διὰ τῶν δύο δακτύλων (μεγάλου καὶ δείκτου) κατὰ τὸ μέσον αὐτοῦ περίπου καὶ ἀφήνουσι πάλιν αὐτὸ νὰ πέσῃ ἀποτόμως ἐπὶ τῆς σανίδος. Ἡ ἐπὶ τῆς σανίδος προσκολλουμένη χρωματιστὴ ὕλη ὁρίζει εὐθεῖαν γραμμήν.

§ **9. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης εὐθείας γραμμῆς.** — Ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Α, Β (Σχ. 5) διέρχεται ἡ εὐθεῖα ΑΒ, τὴν ὁποίαν εὐκόλως χαράσσομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος. Ἐὰν θελήσωμεν νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ ἴδια σημεῖα Α καὶ Β, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν ΑΒ καὶ ἀποτελεῖ μὲ αὐτὴν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Ἀπὸ δύο σημεῖα μία μόνον εὐθεῖα γραμμὴ διέρχεται.

Τὴν ἰδιότητα ταύτην ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Δύο σημεῖα ὁρίζουσι τὴν θέσιν μιᾶς εὐθείας.

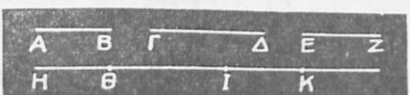
Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἑκάστην εὐθεῖαν ὀνομάζομεν μὲ τὰ γράμματα δύο σημείων αὐτῆς. Λέγοντες π. χ. εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 5) νοοῦμεν τὴν ὡρισμένην καὶ μόνην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

§ **10. Εὐθύγραμμα τμήματα.**— Εὐθεῖάν τινα π. χ. τὴν ΑΒ (Σχ. 5) νοοῦμεν ἑκατέρωθεν καὶ ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένην· λέγοντες δηλ. εὐθεῖαν ΑΒ νοοῦμεν τὴν ἀπέραντον εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἵνα δὲ ἀπὸ τῆς ἀπεράντου εὐθείας ΑΒ (Σχ. 5) διακρίνωμεν τὸ μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β περιεχόμενον μέρος αὐτῆς, θέλομεν καλῇ αὐτὸ εὐθύγραμμον τμῆμα.

Ὥστε ; Εὐθύγραμμον τμῆμα καλεῖται πᾶν μέρος εὐθείας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο σημείων αὐτῆς.

Τὰ δύο σημεῖα μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἕκαστον εὐθύγραμμον τμῆμα, καλοῦνται ἄκρα αὐτοῦ.

§ **11. Ἴσα καὶ ἄνισα εὐθ. τμήματα.**— α΄) Ἐὰν τὸ εὐθ.



(Σχ. 6).

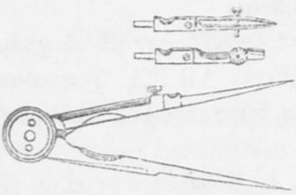
τμῆμα ΑΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΗΘ (Σχ. 6), οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον Α νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Η, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄκρον Β ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ Θ, τὰ δὲ δύο τμήματα ἐφαρμόζουσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν μόνον τμῆμα.

Τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΗΘ λέγονται ἴσα. Ὁμοίως τὰ εὐθ. τμήματα ΓΔ καὶ ΘΙ εἶναι ἴσα καὶ τὰ ΕΖ καὶ ΙΚ εἶναι ἐπίσης ἴσα.

Ὥστε : Δύο εὐθ. τμήματα λέγονται ἴσα, ἐὰν καταλλήλως ἐπιτιθέμενα ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν μόνον εὐθ. τμῆμα.

β΄) Ἐὰν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ τεθῇ ἐπὶ τοῦ ΓΔ, οὕτως ὥστε τὸ τὸ ἄκρον Α νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄκρον Β πίπτει μεταξὺ Γ καὶ Δ, τὸ δὲ ΑΒ ἐφαρμόζει εἰς μέρος τοῦ ΓΔ. Διὰ τοῦτο τὸ εὐθ τμῆμα ΑΒ λέγεται μικρότερον τοῦ ΓΔ, τὸ δὲ ΓΔ μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ καὶ τὰ δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ λέγονται ἄνισα.

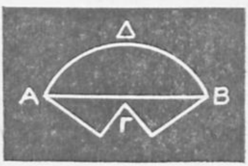
Ὥστε : Δύο εὐθ. τμήματα λέγονται ἄνισα, ἐὰν τὸ ἓν ἐφαρμόζῃ εἰς μέρος τοῦ ἄλλου.— Ἐκ τούτων ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζει εἰς μέρος τοῦ ἄλλου, καλεῖται μικρότερον τοῦ ἄλλου, τὸ δὲ ἄλλο καλεῖται μεγαλύτερον τοῦ πρώτου.



(Σχ. 7).

Διὰ τοῦ διαβήτου (*) (Σχ. 7) λαμβάνομεν εὐκόλως ἐπὶ δεδομένης εὐθείας εὐθ. τμῆμα ἴσον μικρότερον ἢ μεγαλύτερον ἄλλου δοθέντος εὐθ. τμήματος.

§ **12. Σχέσεις εὐθ. τμήματος πρὸς ἄλλας γραμμὰς ἐχούσας τὰ αὐτὰ πέρατα.**—Ἔστω ΑΒ (Σχ. 8) ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα. Ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ διέρχονται ἄπειροι τεθλασμέναι, καμπύλαι καὶ μικταὶ γραμμαί. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ἀποτελεῖ τὸν συντομώτερον δρόμον, ὁ ὁποῖος φέρει ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρον αὐτοῦ εἰς τὸ ἄλλο. Τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου προτάσεως.



(Σχ. 8).

Ἕκαστον εὐθ. τμῆμα εἶναι μικρότερον πάσης ἄλλης γραμμῆς, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα.

§ **13. Ἀπόστασις δύο σημείων.**— Ἀπόστασις δύο σημείων καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ σημεῖα ταῦτα.

Ἐρωτήσεις. Πῶς λαμβάνομεν ἔννοιαν τῆς εὐθείας γραμμῆς ; Τίνες οἱ διάφοροι τρόποι χαράξεως εὐθείας γραμμῆς ; Τίς ἰδιότης διακρίνει τὴν εὐθεῖαν ἀπὸ τὰς ἄλλας γραμμάς ; Τί καλεῖται εὐθ. τμῆμα; Πότε δύο εὐθ. τμήματα λέγονται ἴσα, πότε ἄνισα; Τίς σχέσις ὑφίσταται μεταξὺ εὐθ. τμήματος καὶ τυχούσης ἄλλης γραμμῆς ἡ ὁποία ἔχει

(*) Ὁ διδάσκων περιγράφει ἐποπτικῶς καὶ συντόμως τὸν διαβήτην.

τὰ αὐτὰ πέρατα; Ἐφαρμόζομεν εἰς τὸν βίον μας τὴν ἰδιότητα ταύτην καὶ πότε;

Ἀσκήσεις. 1) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας μίαν εὐθεῖαν καὶ ἓν εὐθ. τμῆμα καὶ λάβετε ἔπειτα ἐπὶ τῆς εὐθείας τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ γραφὲν τμῆμα.

2) Λάβετε ἐπὶ εὐθείας τμῆμα, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ δύο, τρεῖς κ.τ.λ. φορὰς ἄλλο δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

§ **14. Μέτρησις εὐθ. τμημάτων.**—Διὰ νὰ μετρήσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, συγκρίνομεν αὐτὸ πρὸς ἄλλο εὐθ. τμῆμα ὡρισμένον καὶ γνωστόν, τὸ ὁποῖον μονάδα καλοῦμεν.

Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μετρούμενον εὐθ. τμῆμα. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ μερῶν αὐτῆς, καλεῖται μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος.

Αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα καὶ ἐν γένει τὰς γραμμάς, καλοῦνται μονάδες μήκους.

§ **15. Κυριώτεραι μονάδες μήκους.**— Ἡ συνηθεστέρα μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ μέτρον ἢ ὁ βασιλικὸς πῆχυς. Ὁ β. πῆχυς ὑποδιαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται παλάμη· ἑκάστη παλάμη διαιρεῖται εἰς δέκα δακτύλους καὶ ἕκαστος δάκτυλος εἰς 10 γραμμάς.

Ὥστε : 1μ=10π=100δ=1000 γραμ.

1π=10δ=100 γραμ.

1δ=10 γραμ.

Εἰς τὴν πρᾶξιν μεταχειριζόμεθα τὸ διπλοῦν ὑποδεκάμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 0,20 μ καὶ τὴν ταινίαν, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 10μ ἢ 20μ· τὴν χρῆσιν τούτων ὡς ἁπλουστάτην παραλείπομεν.

Ἐὰν ἡ πρὸς μέτρησιν γραμμὴ εἶναι πολὺ μεγάλη, μεταχειριζόμεθα μεγαλυτέραν μονάδα, τὸ στάδιον ἢ χιλιόμετρον, τὸ ὁποῖον ἔχει 10 0 μέτρα καὶ τὸ μυριάμετρον τὸ ὁποῖον ἔχει 10 στάδια ἢ 10000 μέτρα.

Ἀσκήσεις. 3) Μετρήσατε διὰ τοῦ δ. ὑποδεκαμέτρου τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ (Σχ. 6) καὶ ΑΒ (Σχ. 8).

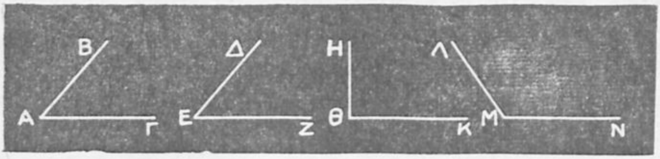
4) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ ἐπ' αὐτῆς λάβετε τμῆμα μήκους 0,12μ ἄλλο μήκους 0,17μ καὶ τρίτον 0,20μ.

5) Λάβετε ἐπὶ εὐθείας, ἡ ὁποία ἐγράφη ἐπὶ τοῦ πίνακος τμῆμα μήκους 0,27μ, ἄλλο 0,30μ καὶ τρίτον 0,40μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΓΩΝΙΑΙ. — ΚΑΘΕΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ 16. Ὁρισμὸς γωνίας καὶ τῶν στοιχείων αὐτῆς. Τὸ σχῆμα ΑΒΓ (Σχ. 9) ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας γραμμὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ δὲν ἀποτελοῦσιν



(Σχ. 9).

εὐθεῖαν. Τὸ σχῆμα τοῦτο καλεῖται γωνία. Ὁμοίως τὰ σχήματα ΔΕΖ, ΗΘΚ καὶ ΛΜΝ εἶναι γωνίαι.

Ὥστε: Γωνία καλεῖται πᾶν σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσι δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἀρχίζουσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ δὲν ἀποτελοῦσιν ***εὐθεῖαν γραμμήν.***

Αἱ δύο εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσι γωνίαν τινά, καλοῦνται πλευραὶ τῆς γωνίας ταύτης.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν πλευρῶν ἑκάστης γωνίας καλεῖται κορυφὴ τῆς γωνίας ταύτης.

Ἑκάστην γωνίαν ὀνομάζομεν μὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἢ μὲ τρία γράμματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἓν τίθεται πλησίον τῆς κορυφῆς, τὰ δὲ ἄλλα ἀνὰ ἓν εἰς ἄλλα σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς. Κατὰ τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς ἀναγινώσκεται πάντοτε εἰς τὸ μέσον.

§ 17. Ἴσαι καὶ ἄνισοι γωνίαι. α΄) Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ (Σχ. 9) τεθῇ ἐπὶ τῆς ΔΕΖ, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Α νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Ε καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἐπὶ τῆς ΕΖ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΕΔ, αἱ δὲ γωνίαι ἐφαρμόζουσι καὶ ἀποτελοῦσι μίαν γωνίαν.

Αἱ γωνίαι ΒΑΓ και ΔΕΖ λέγονται διὰ τοῦτο ἴσαι γωνίαι.

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι, ἐὰν καταλλήλως ἐπιτιθέμεναι ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν γωνίαν.

β΄. Ἐὰν ἡ γωνία ΒΑΓ τεθῇ ἐπὶ τῆς ΗΘΚ, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ Α νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Θ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΓ ἐπὶ τῆς ΘΚ, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ πίπτει μέσα εἰς τὴν γωνίαν ΗΘΚ, ἡ δὲ γωνία ΒΑΓ ἐφαρμόζει εἰς ἕνα μέρος τῆς γωνίας ΗΘΚ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἡ γωνία ΒΑΓ λέγεται μικροτέρα τῆς γωνίας ΗΘΚ, ἡ ΗΘΚ λέγεται μεγαλυτέρα τῆς ΒΑΓ, αἱ δύο δὲ αὗται γωνίαι λέγονται ἄνισοι γωνίαι. Ὁμοίως αἱ γωνίαι ΗΘΚ καὶ ΛΜΝ εἶναι ἄνισοι.

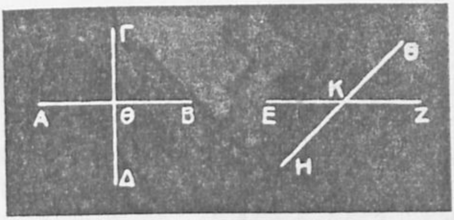
Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται ἄνισοι, ἐὰν ἡ μία ἐφαρμόζῃ εἰς ἓν μέρος τῆς ἄλλης.

Ἐκ τούτων ἐκείνη, ἡ ὁποία ἐφαρμόζει εἰς μέρος τῆς ἄλλης, καλεῖται μικροτέρα τῆς ἄλλης· ἡ δὲ ἄλλη καλεῖται μεγαλυτέρα τῆς πρώτης.

Ἐκ τούτων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ ἰσότης δύο γωνιῶν οὐδόλως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Ὁμοίως τὸ μέγεθος γωνίας τινὸς δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται γωνία; Πόσα καὶ ποῖα τὰ στοιχεῖα ἑκάστης γωνίας; Τί καλοῦνται πλευραὶ γωνίας; Τί καλεῖται κορυφὴ γωνίας; Πότε δύο γωνίαι λέγονται ἴσαι καὶ πότε ἄνισοι;

§ 18. Κάθετοι καὶ πλάγιαι εὐθεῖαι.—Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 10) τεμνόμεναι κατὰ τὸ σημεῖον Θ σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Αἱ εὐθεῖαι αὗται λέγονται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.



(Σχ. 10).

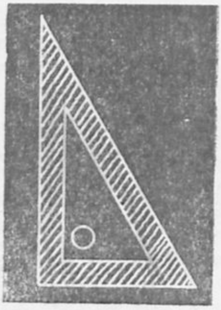
Γενικῶς: Δύο εὐθεῖαι λέγονται κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, ἐὰν αἱ ὑπ᾽ αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἔχομεν πολλὰ παραδείγματα εὐθειῶν καθέτων, τὸ σημεῖον + τῆς ἀριθμητικῆς, τὰ δύο σκέλη σταυροῦ, αἱ σιδηραὶ ῥάβδοι τῶν παραθύρων κ. ἄ.

Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΗΘ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Κ, αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι, δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Αἱ εὐθεῖαι αὗται λέγονται πλάγιαι.

Γενικῶς: Δύο εὐθεῖαι λέγονται πλάγιαι, ἐὰν αἱ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι δὲν εἶναι ὅλαι ἴσαι.

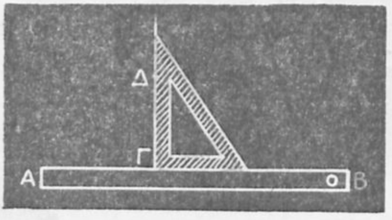
§ 19. Χάραξις καθέτων εὐθειῶν.—Γνώμων. Διὰ τὴν χάραξιν καθέτων εὐθειῶν γίνεται χρῆσις τοῦ γνώμονος (Σχ. 11), τοῦ ὁποίου αἱ δύο μικρότεραι πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.



(Σχ. 11).

Πρὸς τοῦτο, ἀφ' οὗ χαραχθῇ μία εὐθεῖα, τοποθετεῖται ὁ γνώμων, ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ συμπέσῃ μὲ αὐτὴν καὶ σύρεται ἔπειτα ἡ γραφὶς κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία τοιουτοτρόπως γράφεται εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πρώτην. Τὴν εὐθεῖαν ταύτην, ἂν θέλωμεν, προεκτείνομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διέρχηται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 12), κάμνομεν χρῆσιν τοῦ γνώμονος καὶ κανόνος. Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν τὸν μὲν κανόνα, οὕτως ὥστε μία πλευρὰ αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸν δὲ γνώμονα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς εὐθείας καὶ τοῦ σημείου καὶ οὕτως ὥστε ἡ μία (συνήθως ἡ μικροτέρα) τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ εἰς τὴν αὐτὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος. Τηροῦντες ἔπειτα τὸν κανόνα ἀκίνητον μεταθέτομεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου, καὶ σύρομεν κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τοῦ γνώμονος, τὴν γραφῖδα.



(Εἰκ. 12).

Σημ. α'. Εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ δοθὲν σημεῖον δύναται νὰ κεῖται, ὅπως τὸ Γ, εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, ὅπως τὸ Δ.

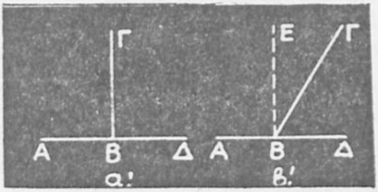
Σημ. β΄. Βραδύτερον θὰ μάθωμεν καὶ ἄλλον τρόπον κατασκευῆς καθέτων εὐθειῶν διὰ τοῦ διαβήτου καὶ κανόνος.

§ **20. Ἰδιότητες τῶν καθέτων εὐθειῶν.**— Α΄ Ἔστω ΑΔ μία εὐθεῖα καὶ Β ἓν σημεῖον αὐτῆς (Σχ. 13 α΄).

Ἐργαζόμενοι, ὅπως προηγουμένως εἴπομεν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ γνώμονος γράφομεν εὐθεῖαν ΓΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ διὰ τοῦ ὡρισμένου σημείου Β διερχομένην ἢ τὴν ΕΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ (Σχ. 13 β΄) καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΔ. Ἐὰν δὲ θελήσωμεν νὰ γράψωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Β ἢ Ε διερχομένην, παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην κάθετον.

Ἄρα: Ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ εὐθείας ἢ ἐκτὸς αὐτῆς ἄγεται μία μόνον κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

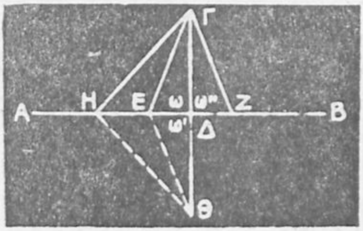
Τὰ κοινὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας ΑΔ μετὰ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι φέρονται πρὸς αὐτὴν ἀπὸ ἓν σημεῖον, καλοῦνται πόδες αὐτῶν.



(Σχ. 13).

Π. χ. Τὸ σημεῖον Β (Σχ. 13α΄) εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου ΒΓ, τὸ δὲ Β (Σχ. 13β΄) εἶναι πούς τῆς καθέτου ΕΒ καὶ τῆς πλαγίας ΒΓ πρὸς τὴν ΑΔ.

Β΄. Ἔστω ΑΒ μία εὐθεῖα, Γ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς ΑΒ· ἂς χαράξωμεν δὲ τὴν κάθετον ΓΔ καὶ τυχούσας πλαγίας ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ. Ἐὰν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ, βεβαιούμεθα ὅτι ΓΔ < ΓΕ. Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ΓΔ < ΓΖ καὶ ΓΔ < ΓΗ.



(Σχ. 14).

Ἄρα: Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται πρὸς εὐθεῖαν ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι μικροτέρα ἀπὸ ἑκάστην πλαγίαν, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

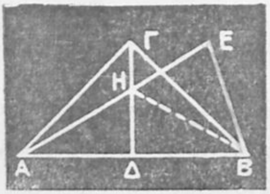
Γ΄. Ἐὰν διὰ τοῦ διαβήτου ὁρίσωμεν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ, τοιουτοτρόπως ὥστε νὰ εἶναι ΔΕ=ΔΖ, βεβαιούμεθα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου ὅτι ΓΕ=ΓΖ.

Ἄρα: Ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι.

Δ΄. Ἐὰν ὁρίσωμεν ἐπάνω εἰς τὴν ΑΒ ἓν σημεῖον Η οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΔΗ>ΔΖ, βεβαιούμεθα εὐκόλως μὲ τὸν διαβήτην ὅτι ΓΗ>ΓΖ.

Ἄρα: Ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἡ πλαγία, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ε΄. Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ἂς ὁρίσωμεν διαδοχικῶς δύο τμήματα ΑΔ καὶ ΔΒ ἴσα (Σχ. 15). Οὕτω τὸ σημεῖον Δ εἶναι μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Ἄς κατασκευάσωμεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ μέσον Δ. Ἄς φέρωμεν δὲ ἀπὸ ἓν σημεῖον Η αὐτῆς εὐθείας ΗΑ καὶ ΗΒ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ΑΒ. Ἐπειδὴ ΔΑ=ΔΒ κατὰ τὴν Γ΄ ἰδιότητα θὰ εἶναι ΗΑ=ΗΒ. Διὰ τὸν ἴδιον λόγον εἶναι καὶ ΓΑ=ΓΒ.



(Σχ. 15).

Ἄρα: Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνῃ εὐθ. τμῆμα καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον, πᾶν σημεῖον αὐτῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος.

ΣΤ΄. Ἐὰν ὁρίσωμεν ἓν σημεῖον Ε, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου ΓΔ (Σχ. 15) καὶ χαράξωμεν τά εὐθ. τμήματα ΕΑ καὶ ΕΒ, εὐκόλως βεβαιούμεθα ὅτι ΕΒ<ΕΑ.

Ἄρα: Ἐὰν ἓν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον εὐθ. τμήματος, τὸ σημεῖον τοῦτο ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου καί ὀλιγότερον ἀπέχει ἀπὸ τὸ ἄκρον, τὸ ὁποῖον κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου μὲ αὐτό.

Ἀσκήσεις. 6) Δύο σημεῖα Β καὶ Γ ἀπέχουσιν ἀπ᾽ ἀλλήλων 0,02 μ., ἡ δὲ ἀπὸ αὐτὰ διερχομένη εὐθεῖα ΒΓ τέμνει πλαγίως ἄλλην εὐθεῖαν ΑΔ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. (§ 20 Ε΄).

7) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας (ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος) μίαν εὐ-

θεῖαν καὶ δύο καθέτους εἰς αὐτήν. Δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι αὗται οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι (§ 20 Α΄).

§ **21. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας.** — Ἐπειδή, καθὼς ἐμάθομεν, ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα φέρονται ἀπὸ ἓν σημεῖον πρὸς μίαν εὐθεῖαν, μικρότερον εἶναι τὸ κάθετον εἰς αὐτήν, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ ἓν μόνον ὡρισμένον, ἀγόμεθα εἰς τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν.

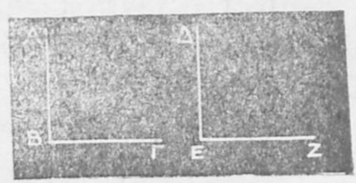
Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Οὕτω ΓΔ (Σχ. 14) εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

§ **22 Α΄. Ὀρθαὶ γωνίαι.** — Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο καθέτους πλευρὰς τοῦ γνώμονος, λέγεται ὀρθὴ γωνία· ὁμοίως ἑκάστη τῶν γωνιῶν Β καὶ Ε (Σχ. 16), τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Γενικῶς : Ὀρθὴ γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

§ **23. Ἰδιότης τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.** —Ἐὰν τὴν τυχοῦσαν ὀρθὴν γωνίαν Ε (Σχ. 16) θέσωμεν ἐπὶ ἄλλης ὀρθῆς γωνίας Β, οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ καὶ δύο πλευραὶ αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ ἄλλαι πλευραὶ αὐτῶν συμπίπτουσιν * Ἄρα: Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι :



(Σχ. 16).

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ἔχει σταθερὸν μέγεθος. Διὰ τοῦτο δὲ λαμβάνεται ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν.

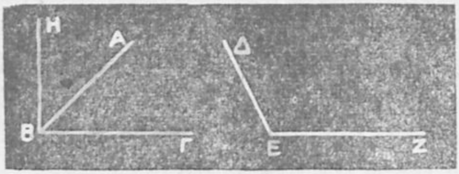
§ **24. Β΄. Ὀξεῖαι γωνίαι.** — Ἡ γωνία ΑΒΓ (Σχ. 17) εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὀνομάζεται δὲ ὀξεῖα γωνία· ὁμοίως ἡ

* Ἐὰν δὲν συνέπιπτον, θὰ διήρχοντο ἀπὸ ἓν σημεῖον δύο κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον. (§ 20 Α΄.)

γωνία ΗΒΑ, ἑκατέρα τῶν ἄλλων (πλὴν τῆς ὀρθῆς) γωνιῶν τοῦ γνώμονος εἶναι ὀξεῖα γωνία.

Γενικῶς : Ὀξεῖα γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία μικροτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

§ 25. Γ'. Ἀμβλεῖαι γωνίαι. — Ἡ γωνία Ε (Σχ. 17) εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας, καλεῖται δὲ ἀμβλεῖα γωνία.



(Σχ. 17).

Γενικῶς : Ἀμβλεῖα γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ἐρωτήσεις. Πόσα εἶναι τὰ εἴδη τῶν γωνιῶν; Τί καλεῖται ὀρθὴ γωνία ; Διατί ἡ ὀρθὴ γωνία λαμβάνεται ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν γωνιῶν; Τί καλεῖται ὀξεῖα καὶ τί ἀμβλεῖα γωνία;

Ἀσκήσεις. 8) Κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ κορυφὴν σημεῖον τοῦ τετραδίου σας ἐκ τῶν προτέρων ὁρισθέν Πόσας τοιαύτας γωνίας δύνασθε νὰ κατασκευάσητε;

9) Κατασκευάσατε ὀρθὴν γωνίαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μίαν πλευρὰν ἐκ τῶν προτέρων χαραχθὲν εὐθ. τμῆμα καὶ κορυφὴν τὸ ἓν ἄκρον αὐτοῦ.

10) Χαράξατε δύο εὐθείας πλαγίως τεμνομένας καὶ ἐξελέγξατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος τὸ εἶδος ἑκάστης τῶν ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένων τεσσάρων γωνιῶν.

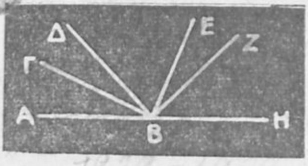
§ 26, Ἐφεξῆς γωνίαι, Αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΒΗ (Σχ. 17) ἔχουσι τὴν κορυφὴν Β κοινὴν καὶ τὴν πλευρὰν ΒΑ κοινήν, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΒΗ κεῖνται ἡ μία ἀπὸ τὸ ἓν καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος (ἑκατέρωθεν) τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΒΑ.

Αἱ δύο αὗται γωνίαι καλοῦνται ἐφεξῆς γωνίαι. Ὁμοίως ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι αἱ γωνίαι ΕΚΘ καὶ ΘΚΖ (Σχ. 10).

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, αἱ δὲ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς.

§ 27. Ἄθροισμα γωνιῶν.—Ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ αὐτῶν. Π. χ. τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΗΒΑ (Σχ. 17) ἄθροισμα εἶναι ἡ γωνία ΗΒΓ.

Ἄθροισμα οἱωνδήποτε γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται, ὅταν τεθῶσι ὅλαι ἡ μία παραπλεύρως τῆς ἄλλης, οὕτως ὥστε ἑκάστη μὲ τὴν ἑπομένην νὰ εἶναι ἐφεξῆς γωνίαι. Π. χ. τῶν γωνιῶν ΑΒΓ, ΓΒΔ, καὶ ΔΒΕ (Σχ. 18) ἄθροισμα εἶναι ἡ γωνία ΑΒΕ.



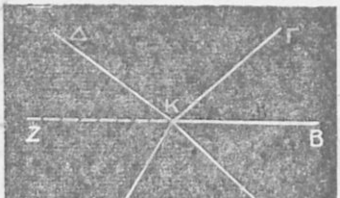
(Σχ. 18).

§ 28. Ἀξιοσημείωτα ἀθροίσματα γωνιῶν.—Κατὰ τὰ λεχθέντα τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν πρέπει νὰ εἶναι μία γωνία. Ὑπάρχουσιν ὅμως δύο ἀξιοσημείωτοι περιπτώσεις, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ ἄθροισμα γωνιῶν δὲν εἶναι μία γωνία.

Αἱ περιπτώσεις αὗται εἶναι αἱ ἀκόλουθοι:

Α΄. Ἄς φέρωμεν ἀπὸ ἓν σημεῖον Β (Σχ. 18) μιᾶς εὐθείας ΑΗ ἄλλας εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ, ΒΖ, ὅλας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΗ· οὕτω σχηματίζονται αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΓΒΔ, ΔΒΕ, ΕΒΖ, καὶ ΖΒΗ. Κατὰ τὰ προηγουμένως (§ 27) λεχθέντα, ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰς τὰς εὐθείας ΒΑ καὶ ΒΗ. Ἀλλὰ τοιαύτη γωνία δὲν ὑπάρχει, διότι αἱ ΒΑ καὶ ΒΗ ἀποτελοῦσιν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἂν ὅμως ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β ἡ ΒΚ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΗ, μὲν γωνίαι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς καθέτου ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν μίαν ἀπὸ τὰς ὀρθὰς γωνίας ΑΒΚ καὶ ΚΒΗ, αἱ δὲ ἄλλαι τὴν ἄλλην.

Ἄρα: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ὅταν ἀπὸ ἓν σημεῖον εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.



(Σχ. 19).

Β΄. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Κ (Σχ. 19) ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ΚΕ καὶ ἂς προεκβληθῇ μία ἀπὸ αὐτάς, π.χ. ἡ ΚΒ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Κ. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, ὅσαι γωνίαι κεῖνται πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς ΒΖ, ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς, αἱ δὲ ἄλλαι ἄλλας δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ἄρα: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται, ὅταν ἀπὸ ἓν σημεῖον ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, εἶναι τέσσαρες ὀρθαὶ γωνίαι.

§ **29. Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν.** – Διαφορὰ δύο ἀνίσων γωνιῶν καλεῖται ἡ γωνία, ἡ ὁποία μένει, ὅταν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἀποκοπῇ γωνία, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν μικροτέραν καὶ νὰ ἔχῃ μὲ αὐτὴν μίαν πλευρὰν κοινήν. Π.χ. τῶν γωνιῶν ΗΒΓ καὶ ΑΒΓ (Σχ. 17) διαφορὰ εἶναι ἡ γωνία ΑΒΗ.

Ἀσκήσεις. 11) Ἐὰν ἡ γωνία ΑΒΓ (Σχ. 18) εἶναι $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ΓΒΗ;

12) Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν μίαν πλευρὰν αὐτῆς γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{4}{7}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν ἡ αὐτὴ εὐθεῖα σχηματίζει μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας;

13). Ἐὰν ἀχθῶσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον μιᾶς εὐθείας δύο εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πρώτης, σχηματίζονται τρεῖς γωνίαι. Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ αὐτάς;

14). Ἐὰν ἀχθῶσιν ἀπὸ ἓν σημεῖον τρεῖς εὐθεῖαι, σχηματίζονται τρεῖς γωνίαι. Ἐὰν αὗται εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης;

15). Ἀπὸ ἓν σημεῖον εὐθείας ἄγεται πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς ἄλλη εὐθεῖα. Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκατέρας;

§ **30. Συμπληρωματικαὶ γωνίαι.**—Αἱ δύο γωνίαι ΗΒΑ καὶ ΑΒΓ (Σχ. 17) ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΗΒΓ· αὗται λέγονται συμπληρωματικαὶ γωνίαι.

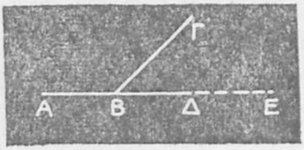
Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί, ἐὰν ἔχωσιν ἄθροισμα μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

§ **31. Παραπληρωματικαὶ γωνίαι.** — Αἱ δύο γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (Σχ. 20) ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας (§ 28 Α')· αὗται λέγονται παραπληρωματικαὶ γωνίαι.

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί, ἐὰν ἔχωσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ἀσκήσεις : 16). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ συμπληρωματικὴ ὀξείας γωνίας, τὴν ὁποίαν κατασκευάζομεν κατ' ἀρχάς.

17). Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς συμπληρωματικὰς γωνίας εἶναι $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἄλλης;

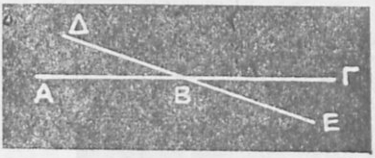


(Σχ. 20)

18). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ παραπληρωματικὴ γωνίας, τὴν ὁποίαν κατεσκευάσαμεν προηγουμένως.

19). Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς παραπληρωματικὰς γωνίας εἶναι $1\frac{1}{3}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἄλλης;

§ 32. Κατὰ κορυφὴν γωνίαι.—Αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΓΒΕ (Σχ. 21) ἔχουσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης. Αἱ γωνίαι αὗται λέγονται κατὰ κορυφὴν γωνίαι. Ὁμοίως αἱ γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΔΒΓ (Σχ. 21) εἶναι κατὰ κορυφήν.



(Σχ. 21).

Γενικῶς: Δύο γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν, ἐὰν ἔχωσι κορυφὴν κοινήν, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων σχηματίζονται δύο ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

§ 33. Ἰδιότης τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.—Ἐὰν ἐπιθέσωμεν καταλλήλως τὴν γωνίαν ΑΒΔ (Σχ. 21) ἐπὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΓΒΕ παρατηροῦμεν ὅτι ἐφαρμόζουσιν. Ἄρα :

Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις. 20). Δοθείσης γωνίας τινὸς νὰ κατασκευασθῇ ἄλλη ἴση πρὸς αὐτὴν καὶ νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

21). Ἐὰν ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, μία εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθ, πόσον εἶναι τό μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων;

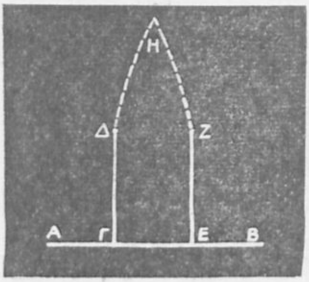
22). Ἐὰν μία ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας εἶναι ὀρθή, αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι. (διατί;)

23). Νοήσατε τὴν γωνίαν ΓΒΔ (Σχ. 21) στρεφομένην ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς περὶ τὴν κορυφὴν αὐτῆς, ὅπως στρέφονται οἱ δεῖκται ὡρολογίου καὶ μέχρις οὗ ἡ μία πλευρὰ αὐτῆς ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ποίαν θέσιν θέλει καταλάβει ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ διατί ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

§ **34. Ὁρισμὸς τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.**—Ἄς χαράξωμεν ἐπὶ φύλλου χάρτου (ἢ τοῦ πίνακος) τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 22) καὶ δύο ἄλλας εὐθείας ΕΖ καὶ ΓΔ καθέτους πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ κάθετοι αὗται οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι [1], κεῖνται δὲ ἐκ κατασκευῆς καὶ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Τὰς εὐθείας ταύτας καλοῦμεν παραλλήλους εὐθείας. Ὁμοίως παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι αἱ ΓΖ καὶ ΒΕ τοῦ σώματος ΔΕ (Σχ. 1), αἱ ἀπέναντι πλευραὶ συνήθους τραπέζης, τοίχου, κτλ.



(Σχ. 22).

Γενικῶς : Δύο εὐθεῖαι γραμμαὶ λέγονται παράλληλοι, ἐὰν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν.

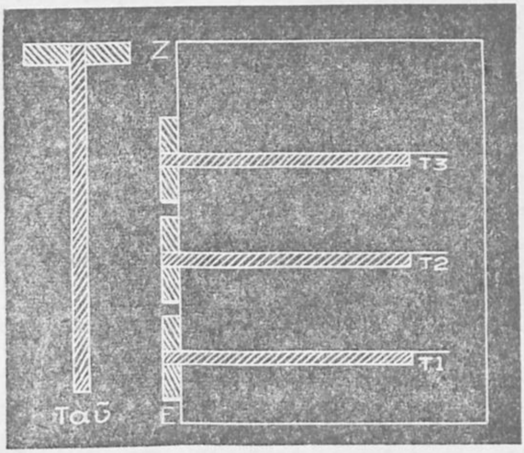
§ **35. Εὐκλείδειον αἴτημα.**—Ἔστωσαν ΓΔ καὶ ΕΖ (Σχ. 22) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι. Ἐὰν ἡ ΕΖ στραφῇ κατ' ἐλάχιστον περὶ τὸ Ε, παύει νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἐκ τῶν διὰ τοῦ σημείου Ε διερχομένων ἀπείρων εὐθειῶν μία μόνον, ἡ ΕΖ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ. Τοῦτο ἐκφράζομεν διὰ τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

---

(1) Διότι, ἂν συνηντῶντο εἰς ἕνα σημεῖον Η, θὰ διήρχοντο ἀπὸ τὸ Η δύο κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ· τοῦτο δὲ γνωρίζομεν (§ 20 Α') ὅτι εἶναι ψευδές.

Διὰ παντὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου μία μόνον εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτὴν διέρχεται.

Ἡ πρότασις αὕτη ὀφείλεται εἰς τὸν Ἕλληνα μαθηματικὸν Εὐκλείδην (320 π.Χ.) καὶ καλεῖται Εὐκλείδειον αἴτημα.



(Σχ. 23).

§ **36. Χάραξις παραλλήλων εὐθειῶν.**—α΄) Ἐπὶ τοῦ πίνακος, τραπέζης, ἰχνογραφικῆς σανίδος κτλ. χαράσσομεν παραλλήλους εὐθείας ὡς ἀκολούθως.

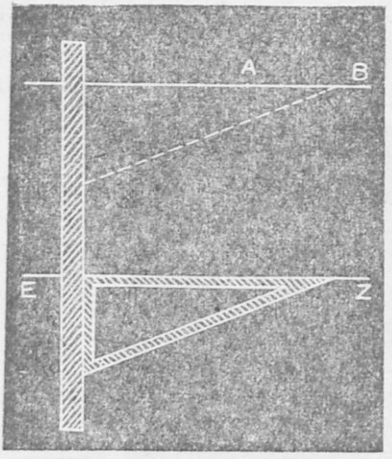
Τοποθετοῦμεν ἐπὶ τοῦ πίνακος (τραπέζης κτλ.) τὸ ὄργανον ταῦ (Σχ. 23) εἰς θέσιν τινὰ T_1, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 23 φαίνεται, καὶ σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῆς μιᾶς ἢ καὶ τῶν δύο τῶν ἐπιμηκεστέρων πλευρῶν τοῦ σκέλους αὐτοῦ.

Ἐὰν ἔπειτα ὠθήσωμεν τὸ ταῦ κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΕΖ τοῦ πίνακος, ἀναγκάζαμεν αὐτὸ νὰ καταλάβῃ διαδοχικῶς διαφόρους θέσεις T_2, T_3, κτλ· εἰς ἑκάστην δὲ ἀπὸ τὰς θέσεις ταύτας σύρομεν τὴν γραφίδα κατὰ μῆκος τῶν ἐπιμηκεστέρων πλευρῶν τοῦ σκέλους. Ὅλαι αἱ χαρασσόμεναι τοιουτοτρόπως εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΕΖ (Σχ. 22) καὶ διερχομένην δι᾽ ὡρισμένου σημείου Γ, ἐργαζόμεθα κατὰ μίαν τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

β΄) Ἄγομεν διὰ τοῦ γνώμονος τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ τὴν

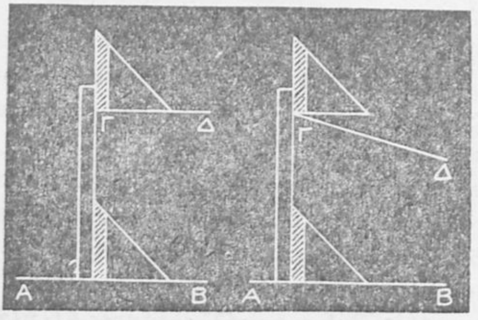
ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος πρὸς τὴν ΕΖ (§ 34).



(Σχ. 24).

γ΄) Ἐφαρμόζομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ μίαν (συνήθως τὴν μεγαλυτέραν) ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ γνώμονος καὶ τὸν κανόνα κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ προσέχοντες ὅπως ὁ γνώμων καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κανόνος (Σχ. 24). Τηροῦντες ἔπειτα ἀκίνητον εἰς τὴν θέσιν ταύτην τὸν κανόνα μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α ἡ πλευρὰ τοῦ γνώμονος, ἡ ὁποία εἶχεν ἀρχικῶς τοποθετηθῆ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΖ. Ἐὰν τέλος σύρωμεν κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ταύτης τὴν γραφίδα, χαράσσομεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν (§ 34).

§ **37. Ἔλεγχος τῆς παραλληλίας δύο εὐθειῶν.**— Ἵνα βεβαιωθῶμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ.25), αἱ ὁποῖαι ἐχαράχθησαν εἰς ἓν ἐπίπεδον, εἶναι παράλληλοι ἢ οὔ, ἐργαζόμεθα, ὡς ἀκολούθως: Ἐφαρμόζομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν καὶ οὕτως ὥστε μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν εὐθειῶν τούτων π. χ. τῆς ΑΒ.



(Σχ. 25).

Τοποθετοῦμεν ἔπειτα τὸν κανόνα παραπλεύρως ἀπὸ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος καὶ κρατοῦντες αὐτὸν ἀκίνητον εἰς τὴν θέσιν ταύτην μετακινοῦμεν κατὰ μῆκος αὐτοῦ τὸν γνώμονα, μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ ἔλθῃ ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας ΓΔ. Ἐὰν εἰς τὴν θέσιν ταύτην τοῦ γνώμονος ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ ἡ πλευρὰ τοῦ γνώμονος, ἡ ὁποία ἀρχικῶς εἶχε τοποθετηθῆ ἐπὶ τῆς ΑΒ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 25α′) εἶναι παράλληλοι (§ 34), ἄλλως αὗται δὲν εἶναι παράλληλοι (Σχ. 25β′).

Ἀσκήσεις. 24) Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τρεῖς εὐθείας παραλλήλους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἄλλας παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνωσι τὰς πρώτας.

25) Σημειώσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ μὴ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας καὶ χαράξατε τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία περνᾷ ἀπὸ τὸ καθ᾽ ἓν καὶ εἶναι παράλλληλος προς τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν τὰ ἄλλα ὁρίζουσιν.

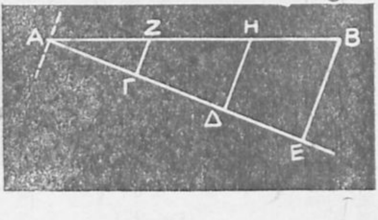
26) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ δείξατε ὅτι αὗται εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι (§ 35).

27) Γράψατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν μίαν. Δείξατε ὅτι αὕτη τέμνει καὶ τὴν ἄλλην(§ 35).

§ **38. Πρόβλημα.** Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς τρία ἴσα μέρη.

Ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον Α τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 26) ἄγομεν εὐθεῖαν ΑΕ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν. Ἐπὶ δὲ τῆς εὐθείας ταύτης ΑΕ ἀπὸ τοῦ Α ἀρχόμενοι λαμβάνομεν διαδοχικῶς τρία εὐθ. τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ ἴσα πρὸς ἄλληλα, καὶ ἔπειτα φέρομεν τὴν ΕΒ. Τέλος ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ φέρομεν εὐθείας ΓΖ καὶ ΔΗ παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΒ. Οὕτω τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ διαιρεῖται εἰς τρία εὐθ. τμήματα ΑΖ, ΖΗ καὶ ΗΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, ὡς εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτος πειθόμεθα.

Ἀσκήσεις 28). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τυχούσης γωνίας Α λάβετε τμήματα τυχόντα ΑΒ καὶ ΑΓ, ὁρίσατε τὰ μέσα Δ καὶ Ε αὐτῶν καὶ χαράξατε τὰ εὐθ. τμήματαΓΒ, ΔΕ. Ἐπαληθεύσατε τὴν παραλληλίαν ἢ μὴ τῶν τμημάτων τούτων καὶ ἀνεύρετε τὴν μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουσαν σχέσιν μεγέθους.



(Σχ. 26).

§ **39. Παράλληλος μετάθεσις.**— Ὅταν χαράσσωμεν παραλλήλους εὐθείας μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος (§ 36 γ΄). δίδομεν εἰς τοῦτον κίνησιν, διὰ τῆς ὁποίας μεταβαίνει ἀπὸ μίαν θέσιν εἰς ἄλλην (Σχ. 24). Κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην ἄξια παρατηρήσεως εἶναι τὰ ἀκόλουθα.

α΄) Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ γνώμονος, ὅπερ ἀρχικῶς ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ πίνακος, φύλλου χάρτου κτλ. ὀλισθαίνει διαρκῶς ἐπὶ τῆς ἐπιπέδου ταύτης ἐπιφανείας.

β΄) Ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ μέρους τούτου τῆς ἐπιφανείας τοῦ γνώμονος ἡ μία ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς ἀκινήτου εὐθείας τοῦ κανόνος, μὲ τὴν ὁποίαν συμπίπτει, ἡ δὲ ΕΖ μένει πάντοτε παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της. (§ 34) καὶ γ΄) εἶναι εὔκολον νὰ βεβαιωθῶμεν (§ 37) ὅτι καὶ ἡ τρίτη πλευρά, ὅπως καὶ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι χαραγμένη εἰς τὴν ὀλισθαίνουσαν αὐτὴν ἐπιφάνειαν, μένει κατὰ τὴν κίνησιν ταύτην παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της.

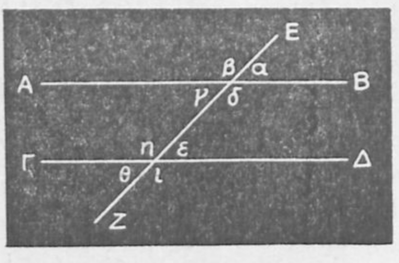
Ἡ κίνησις αὕτη τοῦ γνώμονος καλεῖται παράλληλος μετάθεσις.

Ἡ εὐθεῖα τοῦ κανόνος, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὀλισθαίνει ἡ μία πλευρὰ τῆς κινουμένης ἐπιφανείας καλεῖται ὁδηγός.

Ὁμοίως ἡ κίνησις, εἰς τὴν ὁποίαν ὑποβάλομεν τοῦ ταῦ (Σχ. 23) κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΕΖ πίνακος, τραπέζης κτλ. ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν δι᾿ αὐτοῦ εὐθείας παραλλήλους, εἶναι παράλληλος μετάθεσις μὲ ὁδηγὸν τὴν ΕΖ.

Γενικῶς: Ὅταν ἓν ἐπίπεδον σχῆμα ὀλισθαίνῃ ἐπάνω εἰς ἄλλο ἀκίνητον ἐπίπεδον καὶ οὕτως ὥστε μία αὐτοῦ εὐθεῖα νὰ ὀλισθαίνῃ διαρκῶς ἐπὶ ὡρισμένης εὐθείας τοῦ ἀκινήτου ἐπιπέδου, λέγομεν ὅτι τὸ κινούμενον ἐπίπεδον σχῆμα ὑφίσταται παράλληλον μετάθεσιν.

Ἡ εὐθεῖα τοῦ ἀκινήτου ἐπιπέδου, κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ὁποίας γίνεται ἡ παράλληλος μετάθεσις, καλεῖται ὁδηγός.



(Σχ. 27).

Κατὰ τὴν παράλληλον μετάθεσιν ἐπιπέδου σχήματος πᾶσα εὐθεῖα αὐτοῦ, μένει παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της.

40. Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν. Α΄ Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 27) δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καὶ ΕΖ ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει ἐκείνας πλαγίως. Ἀπὸ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ αὐτὰς αἱ μὲ α, γ, ε, καὶ θ εἶναι ὀξεῖαι, αἱ δὲ λοιπαὶ ἀμβλεῖαι.

Ἂν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ε ὑποβάλλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν κατὰ τὸν ὁδηγὸν ΕΖ καὶ μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ αὐτῆς ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας α, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς α καὶ κατ᾽ἀκολουθίαν εἶναι ε=α. Ἐπειδὴ δέ, ὡς γνωστὸν (§ 33), εἶναι καὶ α=γ, θ=ε, ἕπεται ὅτι α=γ=ε=θ.

Ὥστε: Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης πλαγίως, πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι ὀξεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

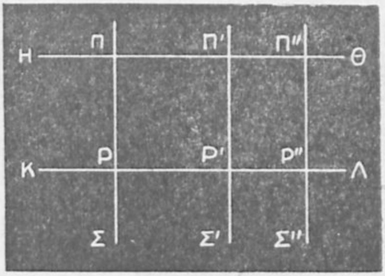
Β′. Ἐὰν ὑποβάλωμεν εἰς ὁμοίαν παράλληλον μετάθεσιν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν η, βλέπομεν ὅτι αὕτη ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς β. ὥστε η=β. Ἐπειδὴ δὲ η=ι καὶ δ=β, ἕπεται ὅτι η=δ=β=ι.

Ὥστε: Ἐὰν αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης πλαγίως, πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Γ′. Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν (§ 28 Α′) ὅτι η+ε=2 ὀρθ. καὶ θέσωμεν ἀντὶ η τὴν ἴσην πρὸς αὐτὴν δ, εὑρίσκομεν ὅτι ε+δ=2 ὀρθ.

Ὥστε: Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης πλαγίως, μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας αὐτῶν καὶ μία ἀπὸ τὰς ἀμβλείας εἶναι παραπληρωματικαί.

Δ′. Ἔστωσαν ΗΘ καὶ ΚΛ (Σχ. 28) δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ΣΡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ καὶ Π τὸ σημεῖον, κατὰ τὸ ὁποῖον ἡ ΣΡ τέμνει (§ 35) τὴν ΗΘ.



(Σχ. 28).

Ἐπειδὴ διὰ παραλλήλου μεταθέσεως ἡ ὀρθὴ γωνία Ρ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς Π, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ Π εἶναι ὀρθὴ γωνία.

Ἄρα: Πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

§ **41. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν.**— Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ΚΛ καὶ ΗΘ (Σχ. 28) καὶ διάφοροι πρὸς αὐτὰς κάθετοι ΠΡ, Π′Ρ′, Π″Ρ″, κτλ. Ἐὰν συγκρίνωμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰ μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμενα τμήματα τῶν καθέτων τούτων, πειθόμεθα ὅτι ὅλα εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· παριστᾷ δὲ ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ (§ 20 Β′) τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν δύο σημείων τῶν παραλλήλων ΚΛ καὶ ΗΘ. Διὰ τοὺς λόγους τούτους ἕκαστον τῶν τμημάτων ΠΡ, Π′Ρ′ κτλ. καλεῖται ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΚΛ καὶ ΗΘ.

Ὥστε : Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν καλεῖται τὸ τμῆμα τυχούσης κοινῆς καθέτου αὐτῶν, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν.

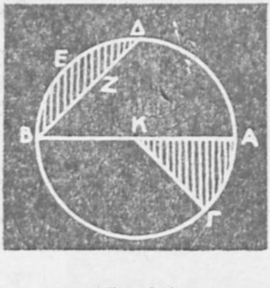
Ἀσκήσεις. 29). Χαράξατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ μίαν παράλληλον πρὸς αὐτήν, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχῃ 0,03 μ ἀπὸ αὐτήν.

30) Χαράξατε δύο εὐθείας παραλλήλους καὶ ἄλλην παράλληλον πρὸς αὐτὰς καὶ ἡ ὁποία νὰ κεῖται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ′.

ΚΥΚΛΟΣ

§ 42. Κύκλος, κέντρον καὶ περιφέρεια κύκλου.— Ἐὰν στερεώσωμεν τὰ δύο σκέλη διαβήτου, οὕτως ὥστε νὰ μὴ μεταβάλληται ἡ ἀπόστασις τῶν αἰχμῶν αὐτῶν, ἂς στηρίξωμεν ἔπειτα τὴν αἰχμὴν τοῦ ἑνὸς σκέλους εἰς ἓν σημεῖον Κ ἑνὸς ἐπιπέδου (π. χ. τοῦ πίνακος, φύλλου χάρτου, τραπέζης κτλ.). Ἔπειτα ἂς στρέψωμεν περὶ τὸ σημεῖον Κ τὸν διαβήτην, οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ ἐγγίζῃ πάντοτε τὸ ἐπίπεδον, εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ σημεῖον Κ. Οὕτω τὸ κινούμενον τοῦτο ἄκρον τοῦ διαβήτου, ἐὰν εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ γραφίδα, θέλει γράψει μίαν συνεχῆ γραμμὴν ΑΔΒΓ (Σχ. 29), τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν σταθερὰν ἀπόστασιν τῶν αἰχμῶν τῶν σκελῶν τοῦ διαβήτου.



(Σχ. 29)

Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὴν γραμμὴν ΑΔΒΓ καλεῖται κύκλος, τὸ σημεῖον Κ καλεῖται κέντρον καὶ ἡ γραμμὴ ΑΔΒΓ καλεῖται περιφέρεια τοῦ κύκλου τούτου.

Τὰ ἐπίπεδα μέρη τῆς ἐπιφανείας τῶν σωμάτων ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗ (Σχ. 2) εἶναι κύκλοι.

Γενικῶς : Κύκλος καλεῖται μέρος ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν τοῦτο περατοῦται.

Περιφέρεια κύκλου καλεῖται ἡ γραμμή, εἰς τὴν ὁποίαν οὗτος περατοῦται.

Κέντρον κύκλου καλεῖται τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

§ **43. Ἀκτὶς καὶ διάμετρος κύκλου.** — Ἀκτὶς κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ καταλήγει εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Π. χ. τὰ εὐθ. τμήματα ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ κτλ. εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Κ. (Σχ. 29).

Διάμετρος κύκλου καλεῖται πᾶν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τούτου. Π.χ. τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. (Σχ. 29).

§ **44. Τόξον.—Χορδὴ τόξου.**—Ἡ γραμμὴ ΔΕΒ (Σχ. 29) εἶναι μέρος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ. Αὕτη καλεῖται τόξον.

Γενικῶς: Τόξον καλεῖται τυχὸν μέρος περιφερείας.

Ἕκαστον τόξον ἔχει δύο ἄκρα.

Τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ ἄκρα τόξου καλεῖται χορδὴ τοῦ τόξου τούτου. Οὕτω τοῦ τόξου ΔΕΒ χορδὴ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΖΒ.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι ὅτι ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδὴν (§ 9), ἐν ᾧ εἰς ἑκάστην χορδὴν ἀντιστοιχοῦσι δύο τόξα.

§ **45. Τμῆμα κύκλου.—Κυκλικὸς τομεύς.** Τὸ σχῆμα ΔΕΒΖΔ (Σχ. 29) εἶναι μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὸ τόξον ΔΕΒ καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν αὐτοῦ. Τοῦτο καλεῖται τμῆμα κύκλου.

Γενικῶς: Τμῆμα κύκλου καλεῖται πᾶν μέρος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ἓν τόξον καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν αὐτοῦ.

Τὸ σχῆμα ΑΚΓ (Σχ. 29) εἶναι μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τοῦ τόξου ΑΓ καὶ τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΓ, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ αὐτοῦ τόξου. Τοῦτο καλεῖται κυκλικὸς τομεύς.

Γενικῶς : Κυκλικὸς τομεὺς καλεῖται πᾶν μέρος κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται κύκλος ; τί περιφέρεια καὶ κέντρον κύκλου ; Τί καλεῖται ἀκτὶς καὶ τί διάμετρος κύκλου ; Ἐκ πόσων ἀκτίνων ἀποτελεῖται ἑκάστη διάμετρος; Τί καλεῖται τόξον; Τί καλεῖται χορδὴ τόξου καὶ πόσας χορδὰς ἔχει ἕκαστον τόξον καὶ διατί; πόσα τόξα ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην χορδήν; Τί καλεῖται τμῆμα κύκλου καὶ τί κυκλικὸς τομεύς.

Ἀσκήσεις. 31) Γράψατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας περιφέρειαν μὲ ἀκτῖνα 0,02μ καὶ χαράξατε δύο διαμέτρους καθέτους. Εἰς πόσα σχήματα διαιρεῖται τοιουτοτρόπως ὁ κύκλος; Πῶς λέγονται τὰ σχήματα ταῦτα;

32) Γράψατε περιφέρειαν ἀκτῖνος 0,03μ καὶ ὁρίσατε ἐπ' αὐτοῦ δύο τόξα, ἔχοντα κοινὰ ἄκρα καὶ χορδὴν 0,04μ. Ἐὰν ἀχθῇ καὶ ἡ χορδὴ αὕτη, εἰς πόσα σχήματα διαιρεῖται τοιουτοτρόπως ὁ κύκλος; Πῶς λέγονται τὰ σχήματα ταῦτα;

§ 46. Κυκλικαὶ ἰδιότητες. – Α΄. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ κύκλου (§ 42) εἶναι φανερὰ ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου ἰδιότητος-

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

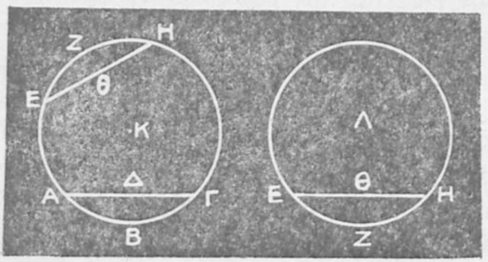
Β΄. Ἐπειδὴ ἑκάστη διάμετρος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Ὅλαι αἱ διάμετροι ἑκάστου κύκλου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Γ΄. Ἂς κόψωμεν ἕνα κύκλον ἀπὸ χαρτόνιον κατὰ μῆκος μιᾶς διαμέτρου αὐτοῦ. Ἐὰν τὰ δύο μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύκλος θέσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο παρατηροῦμεν, ὅτι ταῦτα ἐφαρμόζουσι τελείως· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὰ δύο τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα διῃρέθη ἡ περιφέρεια αὐτοῦ.

Ἄρα: Πᾶσα διάμετρος διαιρεῖ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Τὸ καθ' ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα μέρη τοῦ κύκλου καλεῖται ἡμικύκλιον, τὸ καθ' ἓν δὲ ἀπὸ τὰ δύο ἴσα μέρη τῆς περιφερείας καλεῖται ἡμιπεριφέρεια.



(Σχ. 30).

Δ΄. Ἂς γράψωμεν ἐπὶ φύλλου χάρτου δύο περιφερείας μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα. Ἐὰν ἔπειτα ἀποκόψωμεν τὸν ἕνα ἀπὸ τοὺς σχηματισθέντας κύκλους καὶ θέσωμεν αὐτὸν ἐπάνω εἰς τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐτῶν ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι ὁμοίως.

Ἄρα: Ἐὰν αἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων εἶναι ἴσαι, οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι καὶ αἱ περιφέρειαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ε΄. Εἰς ἕνα κύκλον Κ ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους Κ καὶ Λ (Σχ. 30) τοὺς ὁποίους κατεσκευάσαμεν ἀπὸ χάρτην, ἂς χαράξωμεν τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου καὶ κανόνος δύο ἴσας χορδὰς ΑΓ καὶ ΕΗ. Ἂς ἀποκόψωμεν ἔπειτα τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΕΖΗΘ καὶ ἂς θέσωμεν αὐτὸ ἐπάνω εἰς τὸ ΑΒΓΔ, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι αὐτῶν χορδαὶ καὶ τὰ κυκλικὰ τμήματα νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῶν χορδῶν αὐτῶν. Θέλομεν οὕτω παρατηρήσει ὅτι τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΕΖΗ ἐφαρμόζουσι τελείως, ἤτοι ταῦτα εἶναι ἴσα. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι τὰ μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα ΑΖΓ καὶ ΕΒΗ εἶναι ἴσα.

Ἀντιστρόφως: Ἐὰν νοήσωμεν δύο ἴσα τόξα ΑΒΓ καὶ ΕΖΗ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἴσων κύκλων ἐπιτιθέμενα, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν, εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι (§ 9) καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΓ καὶ ΕΗ ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα: Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· καὶ εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦσιν ἴσα τόξα.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον, ὅταν θέλωμεν νὰ ὁρίσωμεν εἰς μίαν περιφέρειαν ἢ εἰς ἴσας περιφερείας τόξα ἴσα, ἀρκούμεθα νὰ ὁρίζωμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰ ἄκρα ἴσων χορδῶν. Διότι ταῦτα εἶναι ἄκρα ἴσων τόξων.

Ἀσκήσεις. 33). Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ ἔπειτα ἄλλο διπλάσιον αὐτοῦ.

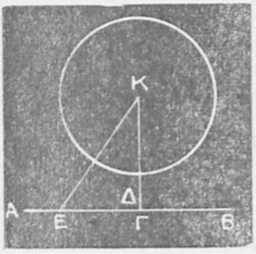
34). Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα. Εἶναι πάντοτε τοῦτο δυνατόν;

35). Ἐπὶ περιφερείας ὁρίσατε τόξον μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Προσπαθήσατε νὰ εὕρητε ἀπὸ πόσα τοιαῦτα τόξα ἀποτελεῖται ὅλη ἡ περιφέρεια;

36). Χαράξατε δύο ἴσας χορδὰς εἰς κύκλον καὶ τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ αὐτὰς (§ 21). Εὕρετε ἔπειτα μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου τὴν σχέσιν, ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τούτων.

§ **47. Θέσεις εὐθείας πρὸς περιφέρειαν κύκλου.** — Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 31) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

Ἡ περιφέρεια Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 32) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ Γ· τέλος ἡ περιφέρεια Κ καὶ ἡ εὐθεῖα χψ (Σχ. 33) ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα, τὸ Α καὶ τὸ Β.



(Σχ. 31).

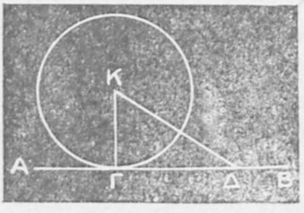
Αἱ θέσεις ἄρα, τὰς ὁποίας μία εὐθεῖα δύναται νὰ λάβῃ πρὸς περιφέρειαν κύκλου, εἶναι τρεῖς.

Α'. Ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐκτὸς τοῦ κύκλου χωρὶς νὰ ἔχῃ μετὰ τῆς περιφερείας του κοινὸν σημεῖον.

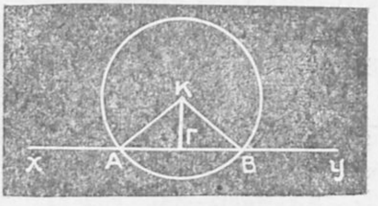
Β'. Ἡ εὐθεῖα ἔχει μὲ τὴν περιφέρειαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Γ'. Ἡ εὐθεῖα ἔχει μὲ τὴν περιφέρειαν δύο κοινὰ σημεῖα (τέμνουσα).

§ **48. Ἐφαπτομένη περιφερείας.**— Ἡ εὐθεῖα ΑΔ, ἡ ὁποία ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ (Σχ. 32) ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, καλεῖται ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ταύτης.



(Σχ. 32).



(Σχ. 33).

Γενικῶς: Ἐφαπτομένη περιφερείας καλεῖται πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἔχει μὲ αὐτὴν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐφαπτομένης καὶ περιφερείας καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς.

§ **49. Ἰδιότητες τῶν ἐφαπτομένων περιφερείας.**— Α'. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΚΓ (Σχ. 32), τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ κέντρον Κ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Γ, εἶναι προφανῶς ἀκτὶς τοῦ κύκλου Κ, τὸ δὲ εὐθ. τμῆμα ΚΔ, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ κέντρον Κ καὶ ἀπὸ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Δ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἀκτῖνος.

Ἄρα: Ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα μιᾶς ἐφαπτομένης τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κεῖται εἰς μικροτέραν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν.

Β΄. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος βεβαιούμεθα εὐκόλως ὅτι αἱ γωνίαι ΚΓΑ καὶ ΚΓΒ εἶναι ὀρθαί.

Ἄρα : Πᾶσα ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

Γ΄. Ἡ κάθετος ΑΒ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΓ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς ἔχει μὲ τὴν περιφέρειαν κοινὸν σημεῖον τὸ Γ (Σχ. 32). Ἐπειδὴ δὲ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς ΑΒ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ Κ ἀποστάσεις μεγαλυτέρας τῆς ἀκτῖνος ΚΓ, ὡς διὰ τοῦ διαβήτου εὐκόλως πειθόμεθα, ἕπεται ὅτι ὅλα ταῦτα κεῖνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

Ἄρα : Ἡ κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

Δ΄. Ἐκ τῆς ἰδιότητος Γ΄, ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν καὶ τὴν ἰδιότητα (20 Α΄) συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

Ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον περιφερείας διέρχεται μία μόνον ἐφαπτομένη αὐτῆς.

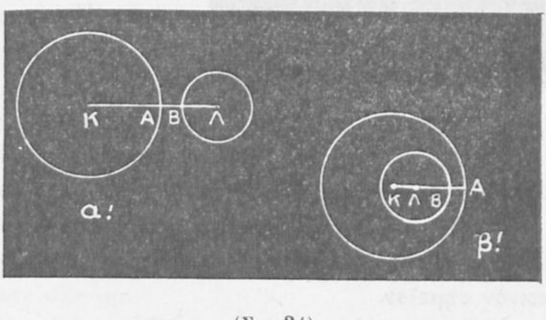
§ **50. Πρόβλημα.**— Νὰ κατασκευασθῇ ἐφαπτομένη περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.

Λύσις. Ἄγομεν τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἔπειτα κάθετον εἰς αὐτήν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι (§ 49 Γ΄) ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

Ἀσκήσεις. *37).* Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, μίαν διάμετρον αὐτοῦ καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς. Δείξατε ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

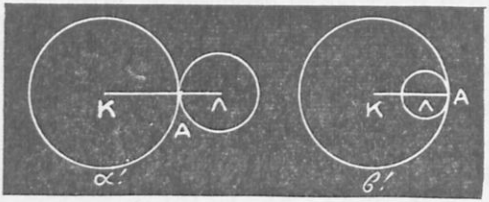
38). Γράψατε περιφέρειαν κύκλου, δύο ἀκτῖνας καθέτους καὶ τὰς ἐφαπτομένας εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν. Ἀναγνωρίσατε μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ καταλλήλου γεωμ. ὀργάνου τὸ εἶδος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται σχηματίζουσι.

§ **51. Θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας.**—Αἱ δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 34 α΄) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ κάθε μία κεῖται ὅλη ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ἡ ἄλλη ὁρίζει.



(Σχ. 34).

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ ΚΛ (Σχ. 34 β΄) οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, κεῖται δὲ ἡ μία ὁλόκληρος ἐντὸς κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.



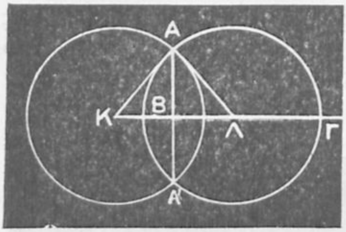
(Σχ. 35).

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 35 α΄) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α καὶ κάθε μία κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῆς ἄλλης. Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός.

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 35 β΄) ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Α, ἀλλὰ ὅλα τὰ ἄλλα σημεῖα τῆς μιᾶς κεῖνται ἐντὸς τοῦ κύκλου τῆς ἄλλης.

Περὶ τῶν τοιούτων περιφερειῶν λέγομεν ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός.

Αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (Σχ. 36) ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα Α καὶ Α΄. Περὶ τῶν τοιούτων περιφερειῶν λέγομεν ὅτι τέμνονται.



(Σχ. 36).

Κατὰ ταῦτα αἱ θέσεις δύο περιφερειῶν εἶναι αἱ ἀκόλουθοι πέντε.

α΄) Ἑκατέρα κεῖται ὁλόκληρος ἐκτὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ἡ ἄλλη ὁρίζει.

β΄) Ἡ μία κεῖται ὁλόκληρος ἐντὸς τοῦ κύκλου, τὸν ὁποῖον ὁρίζει ἡ ἄλλη.

Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.

γ΄) Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός.

δ΄) Αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός.

Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον.

ε΄) Αἱ περιφέρειαι τέμνονται (δύο κοινὰ σημεῖα).

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν, καλεῖται διάκεντρος αὐτῶν.

Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων (ἐντὸς ἢ ἐκτὸς) περιφερειῶν, καλεῖται σημεῖον ἐπαφῆς.

Τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς διακέντρου αὐτῶν.

Ἐρωτήσεις. Πόσαι αἱ διάφοροι θέσις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας ; Εἰς πόσας καὶ ποίας περιπτώσεις δύο περιφέρειαι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον ; Εἰς πόσας καὶ ποίας περιπτώσεις δύο περιφέρειαι ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ; Τίνα θέσιν ἐν σχέσει πρὸς τὴν διάκεντρον ἔχει τὸ σημεῖον ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν ; Πόσα τὸ πολὺ κοινὰ σημεῖα δύνανται νὰ ἔχωσι δύο περιφέρειαι ;

Ἀσκήσεις 39). Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,02 $^{\mu.}$ γράψατε δύο περιφερείας, μίαν μὲν μὲ ἀκτῖνα 0,02 $^{\mu.}$ τὴν δὲ ἄλλην μὲ ἀκτῖνα 0,05 $^{\mu.}$ Ποία ἡ θέσις αὐτῶν πρὸς ἀλλήλας ;

40) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα εὐθ. τμήματος μήκους 0,03 $^{\mu.}$ γράψατε δύο περιφερείας ἐκτὸς ἐφαπτομένας καὶ ἄλλας δύο ἐντὸς ἐφαπτομένας.

§ **52. Κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν.**—Τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ΄ (Σχ. 36), τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ, εἶναι προφανῶς χορδὴ εἰς τὰς δύο ταύτας περιφερείας. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καλεῖται κοινὴ χορδὴ αὐτῶν.

Γενικῶς : Κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν.

§ **53. Ἰδιότητες τῆς κοινῆς χορδῆς δύο περιφερειῶν.** Α΄. Ἡ κοινὴ χορδὴ ΑΑ΄ τέμνεται ὑπὸ τῆς διακέντρου ΚΛ (Σχ. 36) εἰς ἓν σημεῖον Β. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου πειθόμεθα εὐκόλως ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ Α΄Β εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα· τῇ βοηθείᾳ δὲ τοῦ γνώμονος πειθόμεθα ὅτι πᾶσαι αἱ περὶ τὸ Β γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

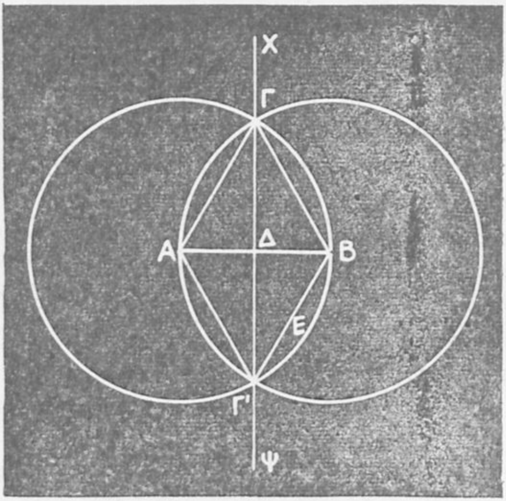
Ἄρα : Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο περιφερειῶν τέμνεται ὑπὸ τῆς διακέντρου καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον.

Ἐὰν αἱ τεμνόμεναι περιφέρειαι Κ καὶ Λ εἶναι ἴσαι, εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου βεβαιούμεθα ὅτι καὶ ΚΒ=ΒΛ.

Ἄρα : Ἡ κοινὴ χορδὴ δύο ἴσων περιφερειῶν διχοτομεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων αὐτῶν.

§ **54. Πρόβλημα.**— Νὰ γραφῇ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

Λύσις.— Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ δοθέντος εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 37) καὶ ἀκτῖνα ΑΒ γράφομεν δύο τεμνομένας περιφε-



(Σχ. 37).

ρείας καὶ ἄγομεν την κοινὴν αὐτῶν χορδὴν ΓΓ'. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα (§ 53) καὶ τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

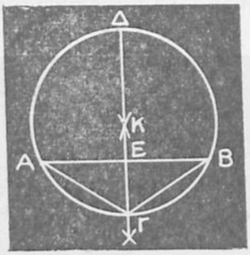
ΣΗΜ. Ἡ ἀκτίς, μὲ τὴν ὁποίαν γράφονται αἱ περιφέρειαι Α καὶ Β δύναται νὰ εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸ τμῆμα ΑΒ, ἀρκεῖ μόνον αἱ περιφέρειαι νὰ τέμνωνται.

§ **55. Ἰδιότητες τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον χορδῆς.**— Α'. Ἔστω εἷς κύκλος Κ καὶ ΑΒ μία χορδὴ αὐτοῦ (Σχ. 38). Ἄς γράψωμεν μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς χορδῆς ταύτης καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΚΑ δύο περιφερείας. Αὗται τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ, ἡ δὲ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ ΚΛ τέμνει τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον (§ 54),

Ἄρα : Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Β'. Ἔστωσαν Γ καὶ Δ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνει τὴν περιφέρειαν ἡ κάθετος ΚΛ, τὴν ὁποίαν προηγουμένως κατεσκευάσαμεν (Σχ. 38). Ἂν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΓΒ, παρατηροῦμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι· ἐπομένως (§ 46 Ε') καὶ τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα. Ὁμοίως πειθόμεθα καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων ΑΔ καὶ ΔΒ.

Ἄρα : Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς διαιρεῖ εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ εἰς αὐτὴν ἀντίστοιχα τόξα.



(Σχ. 38).

§ **56. Πρόβλημα.**— Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Λύσις. Κατασκευάζομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς αὐτοῦ (§ 54). Τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὸ δοθὲν τόξον εἶναι τὸ μέσον αὐτοῦ. (§ 55 Β').

Ἀσκήσεις. 41). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ διάμετρον δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

42). Γράψατε τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ὁρίσατε τυχαίως δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα νὰ κεῖνται ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς. Γράψατε ἔπειτα περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ τὰ σημεῖα ταῦτα καὶ νὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς χαραχθείσης εὐθείας (§ 55 Α'.—§ 54).

43). Γράψατε εὐθ. τμῆμα μήκους 0,05 μ. καὶ ὁρίσατε ἔπειτα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ μὲν τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ 0,04 μ. ἀπὸ δὲ τοῦ ἄλλου 0,03 μ. (Πόσα τοιαῦτα σημεῖα ὑπάρχουσιν ;).

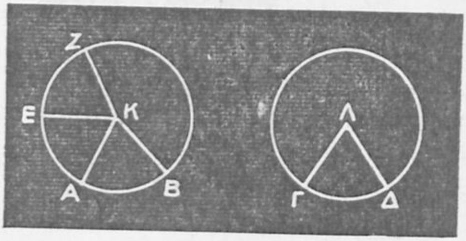
§ **57. Ἐπίκεντροι γωνίαι.** – Τῆς γωνίας ΑΚΒ (Σχ. 39) ἡ κορυφὴ εἶναι κέντρον τοῦ κύκλου Κ. Ἡ γωνία αὕτη καλεῖται ἐπίκεντρος γωνία· τὸ δὲ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, καλεῖται ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς.

Γενικῶς : Ἐπίκεντρος γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κορυφὴν τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου.

Τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας, καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.

§ **58. Ἰδιότητες τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν.—Α'.** Ἔστωσαν δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ (ἢ ΕΖ), τὰ ὁποῖα ἀνήκουσιν εἰς δύο ἴσας περιφερείας γραμμένας εἰς φύλλον χάρτου ἢ εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν (Σχ. 39). Ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν, σχηματίζονται δύο κυκλικοὶ τομεῖς ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ (ἢ ΕΚΖ). Ἂν ἀποκόψωμεν τὸν ἕνα ἀπὸ αὐτοὺς καὶ θέσωμεν ἐπάνω εἰς τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ ἴσα τόξα, θέλομεν παρατηρήσει ὅτι οἱ τομεῖς οὗτοι ἐφαρμόζουσι τελείως καὶ ἑπομένως καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ (ἢ ΕΚΖ) ἐφαρμόζουσιν.

Ἄρα : Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα τόξα βαίνουσιν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι.



(Σχ. 39).

Β΄. Ἂν ἀντιστρόφως αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ (ἢ ΕΚΖ) (Σχ. 39) εἶναι ἴσαι καὶ ἀνήκουσιν εἰς τὸν αὐτὸν ἢ εἰς ἴσους κύκλους, ἐπιθέσωμεν δὲ πάλιν τὸν ἕνα κυκλικὸν τομέα ἐπάνω εἰς τὸν ἄλλον, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, εὐκόλως κατανοοῦμεν ὅτι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα θέλουσιν ἐφαρμόσει.

Ἄρα : Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν εἰς ἴσα τόξα.

Γ΄. Ἀπὸ τὰς ἰδιότητας ταύτας συμπεραίνομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς τόξον διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. ἄλλου τόξου βαίνει διπλασία, τριπλασία κτλ. ἐπίκεντρος γωνία. Καὶ ἀντιστρόφως ἐπίκεντρος γωνία διπλασία, τριπλασία κτλ. ἄλλης βαίνει εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον κτλ. τόξον.

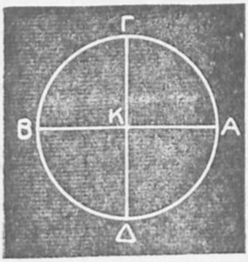
Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται ἐπίκεντρος γωνία ; Τί καλεῖται ἀντίστοιχον τόξον ἐπικέντρου γωνίας ; Πῶς δυνάμεθα νὰ καταστήσωμεν μίαν γωνίαν ἐπίκεντρον ; Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων ; Ἐὰν ἓν τόξον εἶναι πενταπλάσιον ἄλλου, ποίαν σχέσιν ἔχουσι πρὸς ἀλλήλας αἱ ἐπ᾿ αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ;

§ **59. Πρόβλημα.** — Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα.

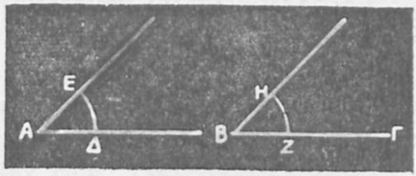
Λύσις. Γράφομεν δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους πρὸς ἀλλήλας (Σχ. 40). Τὰ τόξα ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπὸ τῶν καθέτων τούτων διαιρεῖται ἡ περιφέρεια, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, διότι βαίνουσιν εἰς αὐτὰ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, ὡς ὀρθαί.

Ἕκαστον τῶν τόξων τούτων καλεῖται τεταρτημόριον περιφερείας· βαίνει δὲ εἰς ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία.

§ **60**. **Πρόβλημα.**—Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δοθεῖσαν γωνίαν καὶ νὰ ἔχῃ κορυφὴν δοθὲν σημεῖον.



(Σχ. 40).

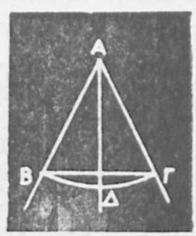


(Σχ. 41).

Λύσις. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἔστω δὲ ΔΕ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχόμενον τόξον (Σχ. 41). Ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Β καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν, (§ 46 Ε΄) τόξον ΖΗ ἴσον πρὸς τὸ ΔΕ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΒΖ καὶ ΒΗ. Ἡ γωνία ΗΒΖ εἶναι ἡ ζητουμένη (§ 58 Α΄).

§ **61**. **Πρόβλημα.** — Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α (Σχ. 42) ἐπίκεντρον καὶ ἔπειτα κατασκευάζομεν τὴν κάθετον ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς τοῦ ἀντιστοίχου τόξου ΒΓ. Ἡ κάθετος αὕτη διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ (§ 55). Διαιρεῖ ἑπομένως τὴν γωνίαν Α εἰς δύο γωνίας ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι (§ 58 Α΄).



(Σχ. 42)

§ **62**. **Διχοτόμος γωνίας**. — Ἡ εὐθεῖα ΑΔ (Σχ. 42), ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν γωνίαν Α εἰς δύο ἴσας γωνίας, καλεῖται διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Γενικῶς : Διχοτόμος γωνίας καλεῖται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Ἀσκήσεις. 44) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ ὀρθῆς γωνίας.

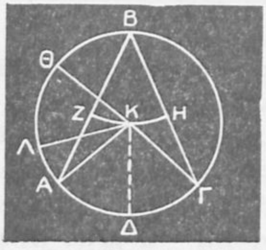
45) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $1\frac{1}{2}$ ὀρθ.

46) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{1}{4}$ ὀρθῆς γωνίας.

47) Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς γωνίας. (§ 58 Γ').

48) Γράψατε τυχοῦσαν περιφέρειαν καὶ διαιρέσατε αὐτὴν εἰς 8 ἴσα τόξα.

§ **63. Ἐγγεγραμμέναι εἰς κύκλον γωνίαι.**—Τῆς γωνίας ΑΒΓ (Σχ. 43) ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. Ἡ γωνία αὕτη καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία, τὸ δὲ τόξον ΑΓ, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς, καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.



(Σχ. 43).

Γενικῶς : Ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία καλεῖται πᾶσα γωνία, τῆς ὁποίας ἡ μὲν κορυφὴ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ εἶναι χορδαὶ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

Τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἐγγεγραμμένης εἰς κύκλον γωνίας, καλεῖται ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον.

§ **64. Ἰδιότητες τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς κύκλον γωνιῶν.**— Α'. Ἔστω τυχοῦσα ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ΑΒΓ καὶ ΑΚΓ (Σχ. 43) ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον. Ἂς καταστήσωμεν τὴν ἐγγεγραμμένην γωνίαν ΑΒΓ ἐπίκεντρον γράφοντες μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν αὐτῆς καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ περιφέρειαν κύκλου· ἔστω δὲ ΖΗ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον. Ἐὰν μετὰ τοῦτο κατασκευάσωμεν τὴν διχοτόμον ΚΔ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΓ καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰς χορδὰς ΖΗ καὶ ΑΔ, βλέπομεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι· συμπεραίνομεν ὅθεν (§ 46 Ε') ὅτι τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΗΖ, εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ ἑπομένως (§ 58 Α') καὶ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΚΔ, εἶναι ἐπίσης ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Εἶναι λοιπὸν ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΚΓ.

Ὁμοίως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τυχούσης ἄλλης ἐπικέντρου γωνίας ΘΚΛ, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τόξον ἴσον πρὸς τὸ ΑΓ.

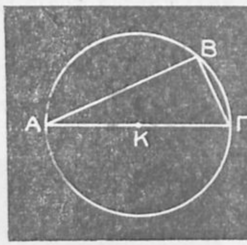
Ἄρα : Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ ἴσου τόξου.

Β΄. Στηριζόμενοι εἰς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα συμπεραίνομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Πᾶσαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ἢ εἰς ἴσα τόξα, εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Γ΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 44) ἐγγεγραμμένη γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ γνώμονος πειθόμεθα εὐκόλως ὅτι ἡ γωνία αὕτη εἶναι ὀρθή.

Ἄρα : Πᾶσα ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθὴ γωνία.

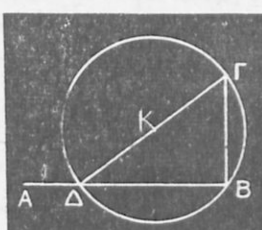


(Σχ. 44).

Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία ; τί ἀντίστοιχον τόξον ἐγγεγραμμένης γωνίας ; Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἐπικέντρου καὶ ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ ἴσου τόξου ; Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἢ ἐπὶ ἴσων τόξων ; Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ ἡμιπεριφερείας ;

Ἀσκήσεις 49). Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τεταρτημόριον περιφερείας ;

50) Ἐὰν ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἐπικέντρου γωνίας, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ;



(Σχ. 45).

51) Μὲ κέντρον ἓν σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 45) καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ γράφο-

μεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Δ. Ἄγομεν ἔπειτα τὴν διάμετρον ΔΚΓ καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὐτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

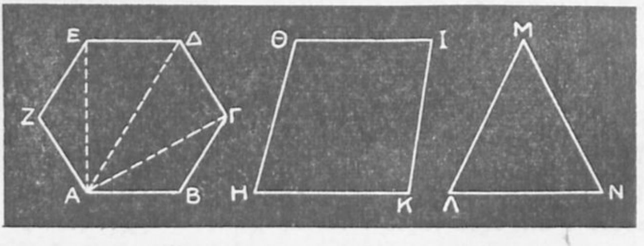
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

§ **63. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα εὐθυγράμμου σχήματος**. Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 46) εἶναι μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα. Τὸ σχῆμα τοῦτο καλεῖται διὰ τοῦτο εὐθύγραμμον σχῆμα.

Ὁμοίως τὰ σχήματα ΗΘΙΚ, ΛΜΝ εἶναι εὐθ. σχήματα.

Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καὶ ΖΑ, ὑπὸ τῶν ὁποίων περικλείεται τὸ ΑΒΓΔΕΖ, καλοῦνται πλευραὶ τοῦ εὐθ. τούτου σχήματος.



(Σχ. 46).

Αἱ γωνίαι ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ κτλ. αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓΔΕΖ, καλοῦνται γωνίαι αὐτοῦ. Αἱ κορυφαὶ Α,Β,Γ κτλ. τῶν γωνιῶν τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕΖ καλοῦνται κορυφαὶ τοῦ σχήματος τούτου.

Γενικῶς : Εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται μέρος ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται πανταχόθεν ἀπὸ εὐθ. τμήματα.

Πλευραὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται τὰ εὐθ. τμήματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περικλείεται τοῦτο.

Γωνίαι εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

Κορυφαὶ εὐθ. σχήματος καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἕκαστον εὐθ. σχῆμα ἔχει ἴσον ἀριθμὸν πλευρῶν, γωνιῶν καὶ κορυφῶν.

Τὰ εὐθ. σχήματα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν γωνιῶν ἢ πλευρῶν αὐτῶν διαιροῦνται εἰς τρίγωνα ἢ τρίπλευρα, τετράπλευρα, πεντάγωνα, ἑξάλωνα κτλ.

Τὰ πεντάγωνα, ἑξάγωνα, ἑπτάγωνα κτλ. καλοῦνται συνήθως πολύγωνα.

Διαγώνιος εὐθ. σχήματος καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο κορυφὰς μὴ διαδοχικάς.

Π. χ. ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ κτλ. (Σχ. 46) εἶναι διαγώνιοι τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕΖ.

Τὰ τρίγωνα δὲν ἔχουσι διαγωνίους.

Περίμετρος εὐθ. σχήματος καλεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου ἔχουσιν μῆκος 369^{μ} ἡ μέν, 81^{μ} ἡ ἄλλη καὶ 360 μ. ἡ τρίτη, ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι

$$369^{\mu} + 81^{\mu} + 360^{\mu} = 810\ \mu.$$

Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται εὐθ. σχῆμα ; Ποῖα τὰ στοιχεῖα εὐθ. σχήματος ; Τί καλοῦνται πλευραί, γωνίαι, κορυφαὶ εὐθ. σχήματος ; Τί καλοῦνται διαγώνιοι εὐθ. σχήματος ; Ποῖα τὰ εἴδη τῶν εὐθ. σχημάτων ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν ἢ γωνιῶν αὐτῶν ; Τί καλεῖται περίμετρος εὐθ. σχήματος ;

Ἀσκήσεις. 52). Γράψατε ἓν τρίγωνον, ἓν τετράπλευρον, ἓν πεντάγωνον, ἓν ἑξάγωνον.

53). Τίνος εἴδους γραμμὴν ἀποτελοῦσι τέσσαρες συνεχεῖς πλευραὶ ἑξαγώνου ;

54). Πόσας διαγωνίους ἔχει ἕκαστον τετράπλευρον ;

55). Κατασκευάσατε ἓν πεντάγωνον καὶ χαράξατε ὅλας τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

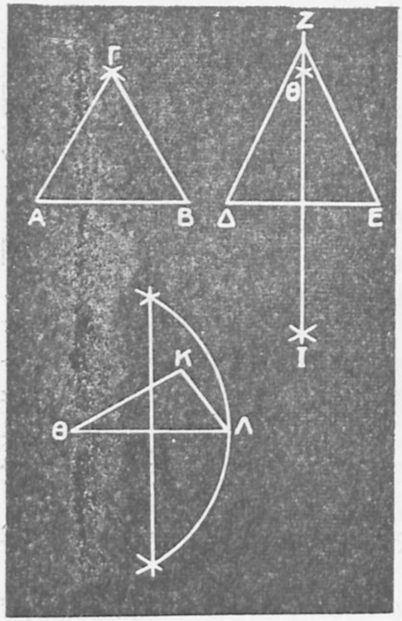
ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΑ

Εἴδη τριγώνων.

66. Ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνὰ τρίγωνα.— Α΄. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β εὐθ. τμήματος ΑΒ (Σχ. 47) καὶ μὲ ἀκτῖνα AB ἂς γράψωμεν δύο περιφερείας, ἔστω δὲ Γ τὸ ἓν κοινὸν αὐτῶν σημεῖον. Ἂς χαράξωμεν δὲ ἔπειτα τὰ εὐθ. τμήματα ΓΑ καὶ ΓΒ· οὕτω σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον καλεῖται ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Γενικῶς Ἰσόπλευρον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι πᾶσαι ἴσαι.



(Σχ. 47).

Ἔστω ΔΕ εὐθ. τμῆμα καὶ ΘΙ εὐθεῖα κάθετος πρὸς αὐτὸ καὶ εἰς τὸ μέσον του (§ 54). Ἐὰν ὁρίσωμεν εἰς αὐτὴν ἓν σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὰ ἄκρα Δ καὶ Ε ἀπόστασιν διάφορον ἀπὸ τὸ ΔΕ καὶ φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΖΔ καὶ ΖΕ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΖΔΕ. Τοῦτο ἔχει (§ 20 Ε΄) τὰς δύο πλευρὰς ΖΔ καὶ ΖΕ ἴσας, καλεῖται δὲ ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

Γενικῶς: Ἰσοσκελὲς τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Τοῦ τριγώνου ΘΚΛ ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι· τοῦτο καλεῖται σκαληνόν.

Γενικῶς: Σκαληνὸν τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ἀπὸ τὸ σχετικὸν μέγεθος τῶν πλευρῶν αὐτῶν διαιροῦνται εἰς ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνά.

§ **67**. Β΄. **Ὀξυγώνια, ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια τρίγωνα.**—Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 47) ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι· διὰ τοῦτο καλεῖται ὀξυγώνιον τρίγωνον. Καὶ τὸ τρίγωνον ΔΖΕ (Σχ. 47) εἶναι ὀξυγώνιον.

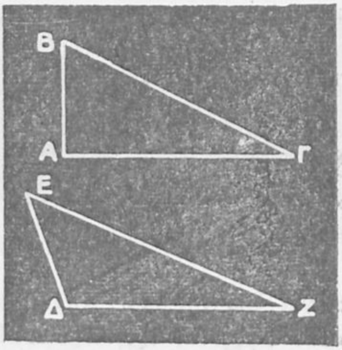
Γενικῶς: Ὀξυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι.

Ἔστω Α ὀρθή τις γωνία (Σχ. 48). Ἐὰν φέρωμεν εὐθεῖαν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ κόπτῃ τὰς πλευρὰς χωρὶς νὰ περνᾷ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας ταύτης, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Τοῦτο καλεῖται ὀρθογώνιον τρίγωνον, διότι ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν.

Γενικῶς: Ὀρθογώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου καλεῖται ὑποτείνουσα αὐτοῦ.

Ἔστω Δ ἀμβλεῖά τις γωνία (Σχ.48). Ἐργαζόμενοι ὅπως προηγουμένως, σχηματίζομεν τρίγωνον ΖΔΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν. Τοῦτο καλεῖται διὰ τοῦτο ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.



(Σχ. 48).

Γενικῶς : Ἀμβλυγώνιον τρίγωνον καλεῖται πᾶν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν αὐτῶν καὶ ἀσχέτως πρὸς τὸ μέγεθος τῶν πλευρῶν, διαιροῦνται εἰς ὀξυγώνια, ὀρθογώνια καὶ ἀμβλυγώνια.

Ἐρωτήσεις. Τί καλοῦνται τρίγωνα ; Ποῖα τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου ; Τί καλοῦνται πλευραί, τί γωνίαι, τί κορυφαὶ τριγώνου ; Πόσα καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων ἀπὸ τὸ σχετικὸν μέγεθος τῶν πλευρῶν ; Ποῖα τρίγωνα καλοῦνται ἰσόπλευρα ; ποῖα ἰσοσκελῆ καὶ ποῖα σκαληνά ; Πόσα καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων ἀπὸ τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν ; Ποῖα τρίγωνα καλοῦνται ὀξυγώνια, ποῖα ὀρθογώνια καὶ ποῖα ἀμβλυγώνια ;

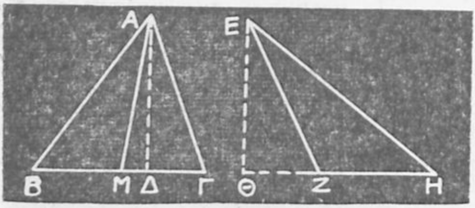
Ἀσκήσεις. 56) Κατασκευάσατε τρίγωνον ἰσόπλευρον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,05 μ, ἄλλο ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μῆκος 0,02 μ. κάθε μία δὲ ἀπὸ τὰς ἄλλας ἀνὰ 0,06 μ.

57) Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ ἔχωσι μήκη 0,02 μ. ἡ μία καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη.

58). Ἐὰν ἡ περίμετρος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 182, 25 μ. πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ ;

59). Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 107, 60 μ. ἡ δὲ ἄνισος πλευρὰ αὐτοῦ 50 μ. Πόσον ἔχει μῆκος κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ ;

60). Ἡ περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 197, 60 μ. ἡ δὲ ἄνισος πλευρὰ αὐτοῦ 50 μ. Πόσον μῆκος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευρὰς αὐτοῦ ;



(Σχ. 49).

§ **68. Βάσις καὶ καὶ ὕψος τριγώνου.** Βάσις τριγώνου καλεῖται μία οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ. Ἄς ληφθῇ ἡ ΒΓ ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 49). Ἡ κορυφὴ Α, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως ταύτης, ἀπέχει ἀπὸ τὴν βάσιν ἀπόστασιν ΑΔ (§ 21). Ἡ ἀπόστασις αὕτη καλεῖται ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὁμοίως, ἂν ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ τριγώνου ΕΖΗ (Σχ. 54) ἡ πλευρὰ ΖΗ, ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΕΘ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὴν βάσιν ΖΗ.

Γενικῶς : Ὕψος τριγώνου καλεῖται ἡ ἀπὸ τῆς βάσεως ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα ΕΖΗ (Σχ. 49) βλέπομεν ὅτι ἐνίοτε τὸ ὕψος τριγώνου εὑρίσκεται ἐκτὸς αὐτοῦ.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ὡς βάσις καὶ ὕψος λαμβάνονται συνήθως αἱ πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας αὐτοῦ, εἰς δὲ τὰ ἰσοσκελῆ ὡς βάσις λαμβάνεται ἡ ἄνισος πλευρὰ αὐτοῦ.

Διάμεσος τριγώνου λέγεται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζει μία κορυφὴ καὶ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ, π. χ. τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

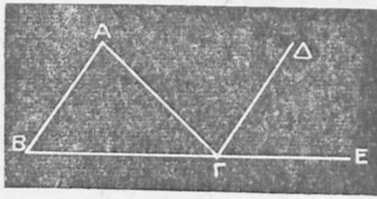
§ **69. Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τριγώνων.**— Α΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 50) τυχὸν ἐκ φύλλου χάρτου τρίγωνον. Ἄς ἀποκόψωμεν διὰ ψαλλίδος τὰς γωνίας Α καὶ Β αὐτοῦ καὶ ἂς θέσωμεν τὴν μὲν Α παραπλεύρως ἀπὸ τὴν Γ εἰς τὴν θέσιν ΑΓΔ, τὴν δὲ Β παραπλεύρως ἀπὸ τὴν ΑΓΔ εἰς τὴν θέσιν ΔΓΕ. Βλέπομεν τοιουτοτρόπως ὅτι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΓΕ κεῖνται ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν καὶ ἐπομένως (§ 28 Α΄) συμπεραίνομεν ὅτι $Α+Β+Γ=2$ ὀρθ.

Ἄρα : Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

Β΄. Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα προκύπτει εὐκόλως ἡ ἀλήθεια τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχωσι καὶ τὰς ἄλλας αὐτῶν γωνίας ἴσας.

Γ΄. Ἐπειδὴ ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι εὐθ. τμῆμα, αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ αὐτοῦ ἀποτελοῦσι τεθλασμένην γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ αὐτό, συμπεραίνομεν (§ 12) ὅτι :



(Σχ. 50).

Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἀσκήσεις 61) Τριγώνου τινὸς δύο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα $1\frac{4}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ ;

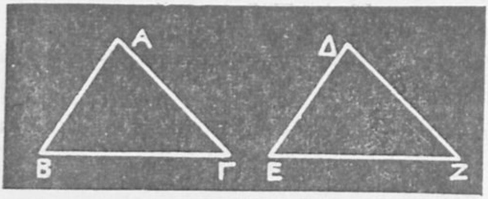
62) Τριγώνου τινὸς δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ κάθε μία εἶναι $\frac{4}{7}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ;

63) Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, (πλὴν τῆς ὀρθῆς), γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ; Ποῖον τὸ εἶδος τῶν γωνιῶν τούτων ;

64). Ὀρθογωνίου τριγώνου μία τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι $\frac{4}{5}$ ὀρθ. Πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ ;

§ 70. Γενικαὶ περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων. — Δύο τρίγωνα λέγονται ἴσα, ἐὰν ἐφαρμόζωσι καὶ σχηματίζωσιν ἓν μόνον τρίγωνον, ὅταν τεθῇ καταλλήλως τὸ ἓν ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο.

Α΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 51) ἓν τρίγωνον ἐκ χαρτονίου. Ἂς κατασκευάσωμεν δὲ (§ 60) μίαν γωνίαν Δ ἴσην πρὸς τὴν Α καὶ ἂς λάβωμεν ἐπάνω εἰς τὰς πλευρὰς αὐτῆς τμῆμα ΔΕ ἴσον πρὸς ΑΒ καὶ ΔΖ ἴσον πρὸς ΑΓ καὶ ἂς φέρωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ. Ἐὰν διὰ ψαλλίδος ἀποκόψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ θέσωμεν αὐτὸ ἐπάνω εἰς τὸ ΔΕΖ, οὕτως ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ Δ καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ αὐτῶν, θέλομεν παρατηρήσει ὅτι τὰ τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν :



(Σχ. 51)

Ἄρα : Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ᾽ αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Β΄. Ἔστω ΑΒΓ (Σχ.51) τυχὸν ἐκ φύλλου χάρτου τρίγωνον καὶ ΕΖ εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἂν κατασκευάσωμεν τρίγωνον ΔΕΖ μὲ πλευρὰν ΕΖ καὶ γωνίας Ε καὶ Ζ ἴσας πρὸς τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θέσωμεν δὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ ΔΕΖ οὕτως ὥστε ἡ πλευρὰ ΒΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης ΕΖ (τὸ ἄκρον Β μὲ τὸ Ε), παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα ἐφαρμόζουσι.

Ἄρα : Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς ταύτην προσκειμένας γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Γ΄. Ἔστω ἀκόμη ΑΒΓ τυχὸν ἐκ φύλλου χάρτου τρίγωνον, καὶ ΕΖ εὐθ. τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ (Σχ. 51). Μὲ κέντρα Ε καὶ Ζ καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἃς γράψωμεν περιφερείας κύκλου. Βλέπομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι τέμνονται καὶ ἔστω Δ τὸ ἓν σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν. Ἂν δὲ φέρωμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΔΕ καὶ ΔΖ, σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζει ἐπάνω εἰς τὸ ΑΒΓ.

Ἄρα : Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσιν ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.

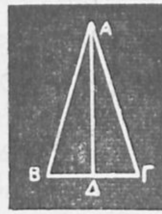
ΣΗΜ. Δύο ἴσα τρίγωνα ἔχουσιν ἴσα ἓν πρὸς ἓν ὅλα τὰ ὁμοειδῆ αὐτῶν στοιχεῖα. Εἶναι δὲ ἴσαι γωνίαι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν καὶ ἴσαι πλευραὶ ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

Ἀσκήσεις 65). Ἐὰν αἱ κάθετοι πλευραὶ δύο ὀρθογωνίων τριγώνων εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί ;

66). Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί ;

67) Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἴσην καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας ἴσην, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Διατί ;

§ **71. Ἰδιότητες τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων.**—Ἔστω ΑΒΓ (Σχ. 52) ἓν ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ΒΓ ἡ βάσις αὐτοῦ καὶ Δ τὸ μέσον αὐτῆς. Ἂν φέρωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΔ, διαιρεῖται τὸ ΑΒΓ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα (§ 70 Γ΄) καὶ ἑπομένως εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἑξῆς ἰσότητες: Β=Γ, $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΔΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΔΓ}$. Ἄρα :



(Σχ. 52).

Α΄. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

Β΄. Ἡ διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ, διαιρεῖ εἰς δύο ἴσας γωνίας, τὴν γωνίαν ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως.

Γ΄. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ἴσαι, εἶναι δὲ καὶ παραπληρωματικαὶ (§ 28 Α΄) ἕπεται ὅτι κάθε μία εἶναι ὀρθή.

Ἄρα : Ἡ διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτοῦ.

§ **72. Ἰδιότητες ἰσοπλεύρων τριγώνων.** — Ἐὰν ἐνθυμηθῶμεν τὰς προηγουμένας ἰδιότητας τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον θεωρεῖται ὡς ἰσοσκελές, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν οἱανδήποτε πλευρὰν αὐτοῦ, συνάγομεν εὐκόλως τὴν ἀλήθειαν τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Α΄. Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Β΄. Αἱ διάμεσοι ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τούτου τριγώνου.

Ἀσκήσεις: 68) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία εἶναι $\frac{2}{7}$ ὀρθῆς γωνίας. Πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας γωνίας αὐτοῦ ;

69). Πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ;

70). Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ;

71). Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς.

72). Ποίου εἴδους γωνίαι εἶναι αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι αὐτοῦ;

73). Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς νὰ ἔχωσι μήκη 0,02 μ. ἡ μία καὶ 0,35 μ. ἡ ἄλλη.

74). Κατασκευάσατε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς 0,02 μ. 0,03 μ. καὶ 0,04. μ.

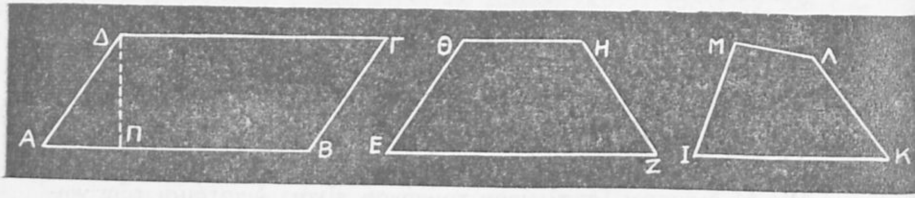
75). Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ νὰ ἔχωσι μῆκος 0,03 μ. ἡ μία καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη. Νὰ εὕρητε ἔπειτα διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

§ **73. Εἴδη τετραπλεύρων.**—Α΄. Τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 53) αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ τετράπλευρον τοῦτο καλεῖται παραλληλόγραμμον.

Γενικῶς: Παραλληλόγραμμον καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Βάσις παραλληλογγράμμου καλεῖται μία οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.



(Σχ. 53).

Ὕψος παραλληλογράμμου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ. (§ 41). Οὕτως, ἂν ἡ ΑΒ ληφθῇ ὡς βάσις τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (Σχ. 53), ὕψος αὐτοῦ θὰ εἶναι τὸ τμῆμα ΔΠ.

Β΄. Τοῦ τετραπλεύρου ΕΖΗΘ (Σχ. 53) δύο μόνον πλευραὶ εἶναι παράλληλοι· τοῦτο καλεῖται τραπέζιον.

Γενικῶς: Τραπέζιον καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου δύο μόνον πλευραὶ εἶναι παράλληλοι.

Αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἑκάστου τραπεζίου καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων τραπεζίου καλεῖται ὕψος αὐτοῦ.

Γ'. Τὸ τετράπλευρον ΙΚΛΜ δὲν ἔχει πλευρὰς παραλλήλους· τοῦτο καλεῖται τραπεζοειδές.

Γενικῶς : Τραπεζοειδὲς καλεῖται πᾶν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει πλευρὰς παραλλήλους.

Τὰ τετράπλευρα λοιπὸν διαιροῦνται εἰς παραλληλόγραμμα, τραπέζια καὶ τραπεζοειδῆ.

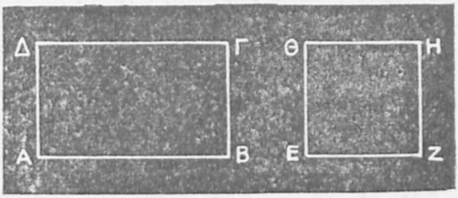
Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται τετράπλευρον ; πόσα καὶ ποῖα τὰ εἴδη τῶν τετραπλεύρων ; Τί καλεῖται παραλληλόγραμμον ; τί τραπέζιον ; τί τραπεζοειδές ; Πόσα ζεύγη παραλλήλων πλευρῶν ἔχει ἕκαστον παραλληλόγραμμον ; πόσα ἕκαστον τραπέζιον ; Τί καλεῖται βάσις καὶ τί ὕψος παραλληλογράμμου ; Τί καλοῦνται βάσεις καὶ τί ὕψος τραπεζίου ;

Ἀσκήσεις 76). Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας ἀνὰ ἓν παραλληλόγραμμον, τραπέζιον καὶ τραπεζοειδές. Χαράξατε τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τραπεζίου.

77). Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς λάβετε δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα νὰ ἀρχίζωσιν ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ νὰ ἔχωσι μήκη $0{,}05^{\mu}$ τὸ ἓν καὶ $0{,}03^{\mu}$ τὸ ἄλλο. Ἔπειτα κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι ἡ Α καὶ δύο πλευραὶ τὰ ὁρισθέντα τμήματα τῶν πλευρῶν αὐτῆς.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

§ **74. Εἴδη παραλληλογράμμων.**— Τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ (Σχ. 54) αἱ γωνίαι εἶναι ὅλαι ὀρθαί· τούτου ἕνεκα καλοῦνται ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνια.



(Σχ. 54).

Γενικῶς: Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

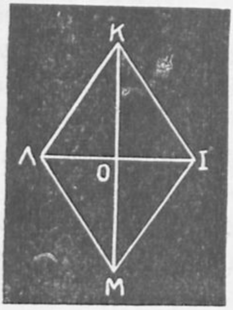
Βάσις καὶ ὕψος ὀρθογωνίου εἶναι δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

Τοῦ ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι· τοῦτο καλεῖται τετράγωνον.

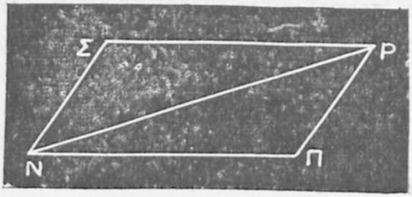
Γενικῶς : Τετράγωνον καλεῖται πᾶν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Β΄. Τοῦ παραλληλογράμου ΜΙΚΛ (Σχ. 55) αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι, αἱ δὲ γωνίαι διάφοροι τῆς ὀρθῆς· τοῦτο καλεῖται ῥόμβος.

Γενικῶς : Ῥόμβος καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαί.



(Σχ. 55).



(Σχ. 56).

Γ΄. Τοῦ παραλληλογράμμου ΝΠΡΣ (Σχ. 56) αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαί· τοῦτο καλεῖται ῥομβοειδές.

Γενικῶς : Ῥομβοειδὲς καλεῖται πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι, αἱ δὲ γωνίαι μὴ ὀρθαί.

Τὰ παραλληλόγραμμα λοιπὸν διαιροῦνται εἰς ὀρθογώνια (εἰς τὰ ὁποῖα κατατάσσονται καὶ τὰ τετράγωνα), ῥόμβους καὶ ῥομβοειδῆ.

Ἐρωτήσεις. Ποῖα παραλληλόγραμμα ἔχουσιν ὅλας τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας ; ποῖα παραλληλόγραμμα ἔχουσιν ὅλας τὰς γωνίας ἴσας ; Ποία ὁμοιότης ἢ διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ α΄.) τετραγώνου καὶ ὀρθογωνίου ; β΄) τετραγώνου καὶ ῥόμβου ; γ΄) ῥόμβου καὶ ῥομβοειδοῦς ; δ΄) ὀρθογωνίου καὶ ῥομβοειδοῦς ;

Ἀσκήσεις 78). Κατασκευάσατε τετράγωνον καὶ χαράξατε τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

79). Ἀποδείξατε ὅτι κάθε μία διαγώνιος τετραγώνου διχοτομεῖ δύο γωνίας αὐτοῦ (§ 69 Α΄.—71 Α΄).

80). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ῥόμβου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 184, 60 μ.

81) Ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἔχει μῆκος 56, 35 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ ;

§ **75. Ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων.**—Εἴς τυχὸν ἀπὸ χάρτην παραλληλόγραμμον ΝΠΡΣ (Σχ. 56) ἂς χαράξωμεν μίαν ἀπὸ τὰς διαγωνίους αὐτοῦ καὶ ἂς κόψωμεν ἔπειτα τὸ παραλληλόγραμμον κατὰ μῆκος τῆς διαγωνίου ταύτης. Ἐὰν δὲ θέσωμεν καταλλήλως τὸ ἓν ἀπὸ τὰ δύο τρίγωνα ἐπάνω εἰς τὸ ἄλλο, παρατηροῦμεν ὅτι ταῦτα ἐφαρμόζουσιν. Τοῦτο δὲ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν ἄλλην διαγώνιον. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῶν ἀκολούθων ἰδιοτήτων.

Α΄. Ἑκατέρα διαγώνιος παραλληλογράμμου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τρίγωνα ἴσα.

Β΄. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι.

Γ΄. Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις 82) Ἡ περίμετρος παραλλογράμμου εἶναι 191, 40 μ. μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 23, 40 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ ;

83). Παραλληλογράμμου μία γωνία εἶναι $\frac{1}{5}$ ὀρθ. Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς ἀπέναντι γωνίας αὐτοῦ ;

84). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἴσαι, εἶναι τετράγωνον.

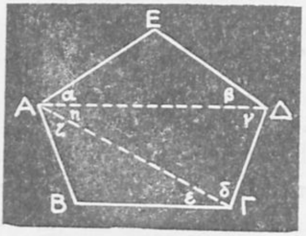
85). Κατασκευάσατε τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰν 0,03 μ.

§ **76. Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εὐθ. σχήματος.**— Α΄. Γνωρίζομεν (§ 69 Α΄) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας.

Β΄. Ἔστω ἤδη τυχὸν τετράπλευρον ΝΠΡΣ (Σχ. 56) καὶ ΝΡ μία διαγώνιος αὐτοῦ. Ἡ διαγώνιος αὕτη διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ἑκάστου τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς γωνίας, ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρ.$\times$2=4 ὀρθ.

Ἄρα : Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς τετραπλεύρου ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας.

Γ' Ἔστω τέλος τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 57).



(Σχ. 57).

Ἂν φέρωμεν πάσας τὰς διαγωνίους, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α αὐτοῦ, διαιρεῖται τοῦτο εἰς τρία τρίγωνα. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι παντὸς τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας, συμπεραίνομεν ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕ ἔχουσιν ἄθροισμα $2\times3=6$ ὀρθὰς γωνίας.

Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι αἱ γωνίαι παντὸς

ἑξαγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα $2\times4=8$ ὀρθ. γωνίας
ἑπταγώνου » » $2\times5=10$ » »
ὀκταγώνου » » $2\times6=12$ » » κ.τ.λ.

Ἀλλ' εἰς τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα φθάνομεν καὶ ἂν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑκάστου πολυγώνου καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρέσωμεν 4. *Τῷ ὄντι*.

διὰ τὸ πεντάγωνον εὑρίσκομεν $(5\times2)-4=6$
» » ἑξάγωνον » $(6\times2)-4=8$
» » ἑπτάγωνον » $(7\times2)-4=10$
» » ὀκτάγωνον » $(8\times2)-4=12$ κ.τ.λ.

Ἄρα : Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς τόσας ὀρθὰς γωνίας, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4.

§ **77. Γενίκευσις τῆς προηγουμένης ἰδιότητος.** — Ἐπειδὴ $(3\times2)-4=2$ καὶ $(4\times2)-4=4$, ἔπεται ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ τρίγωνα καὶ τὰ τετράπλευρα, ἤτοι δι' ὅλα τὰ εὐθύγραμμα σχήματα. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν γενικῶς οὕτω :

Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς εὐθ. σχήματος εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσας μονάδας ἔχει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ἠλαττωμένον κατὰ 4.

Ἀσκήσεις : 86). Πόσον εἶναι τὸ ἄθρσισμα τῶν γωνιῶν παντὸς δεκαγώνου ;

87). Ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ ;

88). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι ὀρθή, τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

89). Ἐὰν μία γωνία ῥόμβου εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ ;

90). Ἀπὸ τὰς δύο γωνίας παραλληλογράμμου, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κορυφὰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Πόσον μέγεθος ἔχει κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτοῦ ;

91). Τραπεζίου τινὸς ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς εἶναι κάθετος πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ ὀρθῶν γωνιῶν αὐτοῦ ;

92). Ἐὰν πᾶσαι αἱ γωνίαι ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης ;

§ 78. **Κανονικὰ εὐθ. σχήματα.**—Ἑκάστου τετραγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ αἱ γωνίαι ὡσαύτως ὅλαι ἴσαι. Ἕνεκα τούτου τὸ τετράγωνον καλεῖται κανονικὸν εὐθ. σχῆμα.

Ὁμοίως τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν εὐθ. σχῆμα (§ 72 Α′).

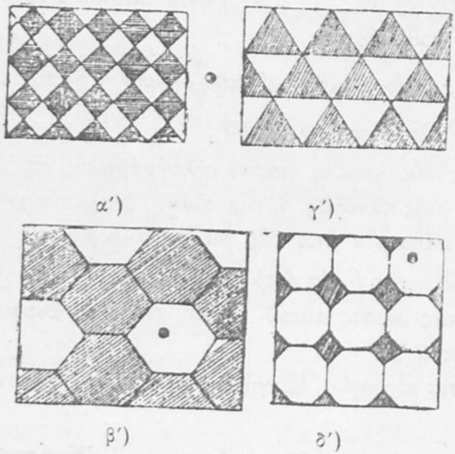
Γενικῶς: Ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται κανονικόν, ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Αἱ πλάκες, μὲ τὰς ὁποίας στρώνουσι διαδρόμους, αἰθούσας, αὐλάς, μαγειρεῖα κτλ. εἶναι κανονικὰ εὐθ. σχήματα.

Εἰς τὰ σχήματα ταῦτα πρέπει αἱ γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ κορυφαὶ συμπίπτουσιν εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἐδάφους νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθάς, ἵνα μὴ μεταξὺ αὐτῶν μένῃ χάσμα (§ 28 Β′).

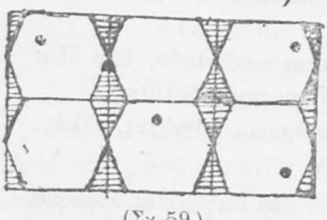
Διὰ τὸν λόγον τοῦτον πρὸς ἐπίστρωσιν γίνεται χρῆσις καταλλήλων κανονικῶν σχημάτων. Τετραγωνικαὶ π. χ. πλάκες εἶναι κατάλληλοι πρὸς τοῦτο· τῷ ὄντι 4 γωνίαι αὐτῶν τιθέμεναι πέριξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐδάφους δὲν ἀφίνουσιν ἀκάλυπτον ἔδαφος, διότι ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας (Σχ. 58 α′). Τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα χρησιμοποιοῦνται ἐπίσης διὰ τὸν σκοπὸν τοῦτον διότι τρεῖς γωνίαι αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{8}{6} \times 3 = 4$ ὀρθ. (Σχ. 58 β′). Ἐπίσης τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι κατάλληλα, διότι $\frac{2}{3} \times 6 = 4$ ὀρθ. (Σχ. 58 γ′). Συνηθέστατα δὲ γίνεται χρῆσις κανονικῶν ὀκταγώνων καὶ τετραγώνων

(Σχ. 58) δ΄) τοποθετουμένων οὕτως ὥστε περὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ



(Σχ. 58).

ἐδάφους νὰ ὑπάρχωσι 2 γωνίαι ὀκταγώνου καὶ μία τετραγώνου $\left(\frac{12}{8}\times 2+1=4 \text{ ὀρθ.}\right)$.



(Σχ.59).

Ὁμοίως γίνεται χρῆσις κανονικῶν ἑξαγώνων καὶ ἰσοπλεύρων τριγώνων (Σχ. 59) τοποθετουμένων οὕτως ὥστε περὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐδάφους νὰ εὑρίσκωνται δύο γωνίαι ἑξαγώνου καὶ δύο τριγώνου $\left(\frac{8}{6}\times 2+\frac{2}{3}\times 2=4 \text{ ὀρθ.}\right)$.

Ἀσκήσεις 93). Ποῖα ἀπὸ τὰ τετράπλευρα εἶναι σχήματα κανονικά ; Ποῖα ἀπὸ τὰ τρίγωνα ;

94) Πόσον εἶναι τὸ μέγεθος ἑκάστης γωνίας κανονικοῦ δεκαγώνου ;

95). Πλάκες, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι σχῆμα κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι κατάλληλοι πρὸς ἐπίστρωσιν ἢ ὄχι ; καὶ διατί ;

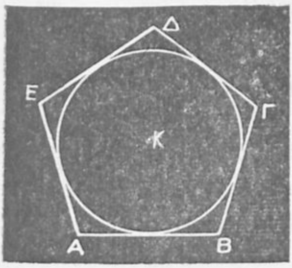
96). Κανονικοῦ πολυγώνου αἱ γωνίαι ἔχουσι ἄθροισμα 32 ὀρθ. Πόσας πλευρὰς ἔχει τοῦτο ; Δυνάμεθα μὲ τοιαῦτα πολύγωνα νὰ ἐπιστρώσωμεν αἴθουσαν ;

97). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι κανονικὰ ἢ ὄχι καὶ διατί ;

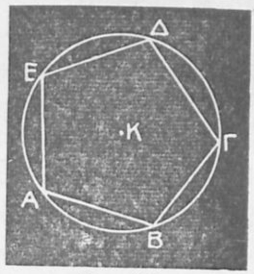
§ **79. Περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον κανονικὰ εὐθύγραμμα σχήματα.** — Τοῦ εὐθ. σχήματος

ΑΒΓΔΕ (Σχ. 60) ὅλαι αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται τοῦ κύκλου Κ. Τὸ εὐθύγραμμον τοῦτο σχῆμα καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ, ὁ δὲ κύκλος οὗτος καλεῖται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ.

Γενικῶς : Ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα καλεῖται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, ἐὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου. Εἷς δὲ κύκλος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς εὐθ. σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι περιγεγγραμμένον περὶ τὸν κύκλον.



(Σχ 60)



(Σχ. 61).

Τοῦ εὐθ. σχήματος ΑΒΓΔΕ (Σχ. 61) αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι χορδαὶ εἰς τὸν κύκλον Κ· τὸ σχῆμα τοῦτο καλεῖται ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ, ὁ δὲ κύκλος οὗτος καλεῖται περιγεγραμμένος περὶ τὸ εὐθ. σχῆμα ΑΒΓΔΕ.

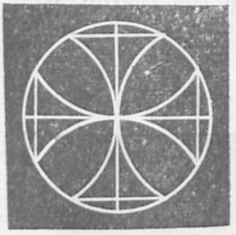
Ι ενικῶς : Ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκύκλον, ἂν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι χορδαὶ εἰς τὸν κύκλον τοῦτον. Εἷς δὲ κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος περὶ εὐθ. σχῆμα, ἂν τοῦτο εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον τοῦτον.

§ **80. Κατασκευὴ ἐγγεγραμμένων καὶ περιγεγραμμένων κανονικῶν εὐθ. σχημάτων.** — Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθέντα κύκλον ὡρισμένον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τόσα ἴσα τόξα, ὅσας πλευρὰς θέλομεν νὰ ἔχῃ τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον σχῆμα, καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς αὐτῶν.

Τὸ ἐγγεγραμμένον σχῆμα, τὸ ὁποῖον κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον σχηματίζεται, εἶναι πράγματι κανονικόν, διότι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι πᾶσαι ἴσαι (46 Ε΄.) καὶ αἱ γωνίαι ἐπίσης ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι καὶ βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων· (ἕκαστον τῶν τόξων τούτων μένει, ἂν ἀπὸ τῆς περιφερείας ἀφαιρεθῶσιν δύο ἀπὸ τὰ ἴσα τόξα, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη ἡ περιφέρεια).

Ὁμοίως διὰ νὰ περιγράψωμεν περὶ κύκλον κανονικὸν εὐθ. σχῆμα πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἴσα τόξα ἰσάριθμα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ καὶ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως αὐτῆς.



(Σχ. 62).

Ἀσκήσεις. 98). Ἐγγράψατε εἰς δεδομένον κύκλον τετράγωνον (§ 59).

99). Περιγράψατε περὶ δεδομένον κύκλον τετράγωνον.

100). Ἰχνογραφήσατε τὸ Σχ. 62.

101). Ἐγγράψατε εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν ὀκτάγωνον.

102). Περιγράψατε περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν ὀκτάγωνον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

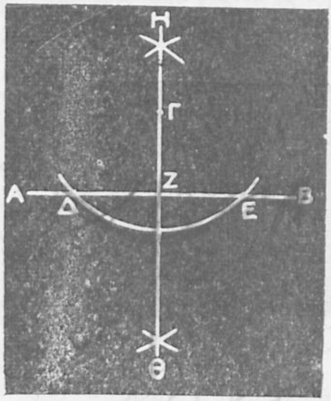
§ 81. Πρόβλημα 1ον.—Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος πρὸς αὐτήν.

(Σχ. 63).

Λύσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς δοθείσης ΑΒ δύο τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ (Σχ. 63) ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ εἶτα κατασκευάζομεν τὴν κάθετον ΖΗ εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΕ (§ 54). Προφανῶς ἡ ΖΗ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

§ 82. Πρόβλημα 2ον.—Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος πρὸς αὐτήν.

Λύσις. Μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον Γ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ μὲ τὴν ΑΒ δύο κοινὰ σημεῖα Δ καὶ Ε (Σχ. 64). Ἔπειτα κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΘ, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὸ μέσον καὶ καθέτως τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ (§.54) Ἡ εὐθεῖα αὕτη ΗΘ εἶναι ἡ ζητουμένη, διότι εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ (§ 55 Α΄).



(Σχ. 64).

ΣΗΜ. Ὡς γνωστὸν (§ 19) τὴν λύσιν τῶν δύο τούτων προβλημάτων ἐκτελοῦμεν καὶ μὲ τὸν γνώμονα καὶ κανόνα.

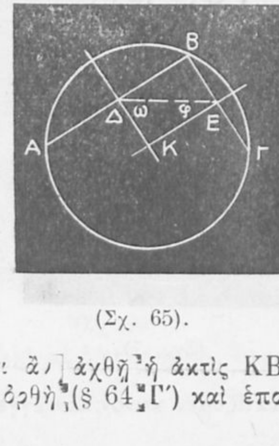
§ **83. Πρόβλημα 3ον.**— Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται εἰς μίαν εὐθεῖαν.

Λύσις. Ἔστωσαν Α,Β,Γ, (Σχ.65) τὰ τρία σημεῖα. Ἄγομεν τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν εὐθ. τμημά των ΑΒ καὶ ΒΓ, ἔστω δὲ Κ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται. Ἔπειτα μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα ΚΑ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Αὕτη διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ, διότι ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (§ 20 Γ΄.) Εἶναι ἄρα ἡ ζητουμένη.

ΣΗΜ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ κέντρον δεδομένου κυκλικοῦ τόξου.

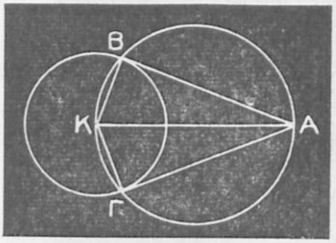
§ **84. Πρόβλημα 4ον.**—Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθέντος κύκλου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.

Λύσις. Ἔστω Κ ὁ δοθεὶς κύκλος καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον (Σχ. 66). Γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΑ, ἔστωσαν δὲ Β καὶ Γ τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν Κ. Ἄγομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ. Λέγω ὅτι αὗται εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ. Πράγματι ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΒ, σχηματίζεται ἡ γωνία ΑΒΚ, ἡ ὁποία εἶναι ὀρθὴ (§ 64 Γ΄) καὶ επο-



(Σχ. 65).

μένως ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΒ, ἄρα (§ 49 Γ΄.) εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Ὁμοίως πειθόμεθα ὅτι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς αὐτῆς περιφερείας Κ.



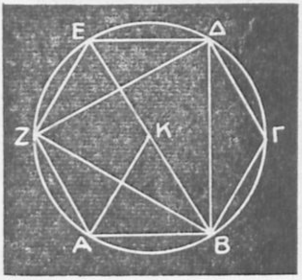
(Σχ. 66).

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου βλέπομεν ὅτι ἀπὸ κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, ἄγονται δύο ἐφαπτόμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Ἐὰν συγκρίνωμεν δὲ μὲ τὸν διαβήτην τὰ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ πειθόμεθα ὅτι εἶναι ἴσα. Ἤτοι:

Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερείας ἀπέχει ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς.

§ **85. Πρόβλημα 5ον.**—Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον.

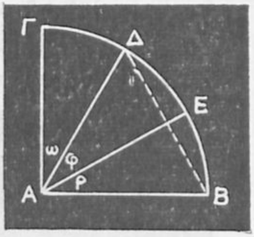
Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς ἓξ ἴσα τόξα καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν (§ 80). Ἂς λάβωμεν τόξον τι ΑΒ (Σχ. 67) μικρότερον ἡμιπεριφερείας καὶ τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου· ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΒ, ἡ ὁποία βαίνει εἰς αὐτό, εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, ὡς γωνία τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΚΒ. Ἐπειδὴ δὲ 4 ὀρθ. : $\frac{2}{3}$ ὀρθ. $=6$, ἕπεται ὅτι περὶ τὸ σημεῖον Κ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ἀκριβῶς 6 τοιούτων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ὅλαι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων. Πρὸς διαίρεσιν ἄρα τῆς περιφερείας εἰς 6 τόξα, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν διαδοχικῶς ἐπ᾿ αὐτῆς τόξα, τὸ καθ᾿ ἓν τῶν ὁποίων νὰ ἔχῃ χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα καὶ νὰ εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας. Ἐὰν φέρωμεν ἔπειτα τὰς χορδὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, καὶ ΖΑ τῶν τόξων τούτων σχηματίζομεν κανονικὸν ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον.



(Σχ. 7).

§ **86. Πρόβλημα 6ον.**—Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθέντα κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

Λύσις Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς ΒΔ, ΔΖ καὶ ΖΒ. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐγγράφεται τὸ τρίγωνον ΒΔΖ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον. Πράγματι δὲ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων.



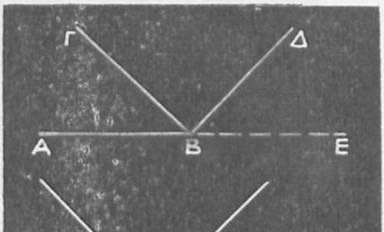
(Σχ. 68).

§ **87. Πρόβλημα 7ον.**—Νὰ διαιρεθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.

Λύσις. Καθιστῶμεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ἐπίκεντρον καὶ ἔστω ΒΓ τὸ ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον (Σχ. 68). Ἐπὶ τοῦ τόξου τούτου λαμβάνομεν δύο τόξα ΒΔ καὶ ΓΕ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχωσι χορδὴν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΑΒ καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΑΕ καὶ ΑΔ. Τοιουτοτρόπως διαιρεῖται ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τρεῖς γωνίας ΓΑΔ, ΔΑΕ, ΕΑΒ ἴσας. Πράγματι· ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσόπλευρον, ἡ γωνία ΔΑΒ ἰσοῦται πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθ. καὶ ἑπομένως ἡ ω ἰσοῦται πρὸς $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς. Ὁμοίως, ἐπειδὴ ΓΑΕ$=\frac{2}{3}$ ὀρθ. ἡ γωνία ρ εἶναι ἴση πρὸς $\frac{1}{3}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ γωνία φ ἰσοῦται πρὸς $1-\frac{1}{3}\times 2=\frac{1}{3}$ ὀρθῆς.

§ **88. Πρόβλημα 8ον.** Ἐὰν δοθῶσιν αἱ δύο γωνίαι τριγώνου, νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ.

Λύσις. Ἔστωσαν ΑΒΓ καὶ φ (Σχ 69) αἱ δοθεῖσαι γωνίαι. Μὲ κορυφὴν Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΓ κατασκευάζομεν (§ 60) γωνίαν ΓΒΔ ἴσην πρὸς τὴν φ καὶ κειμένην πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΒΓ. Τέλος προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς καὶ σχηματίζεται ἡ γωνία ΔΒΕ. ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι ἡ ζητουμένη, γωνία τοῦ τριγώνου καὶ αἱ δύο δοθεῖσαι ἔχουσιν



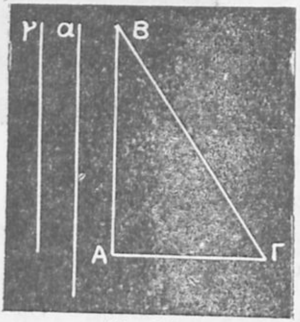
(Σχ. 69).

ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς γωνίας (§ 69 Α΄)· ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΒΕ μὲ τὰς αὐτὰς γωνίας ἔχουσιν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθὰς (§ 28 Α΄).

ΣΗΜ. Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν μόνον, ὅταν τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

§ **89. Πρόβλημα 9ον.** — Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας πρὸς δοθέντα εὐθ. τμήματα.

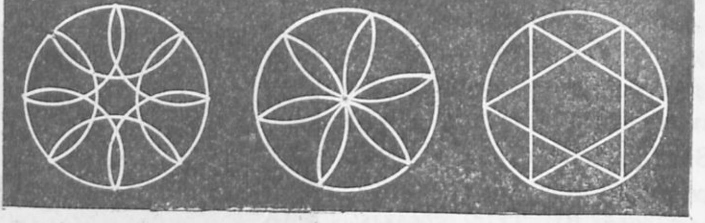
Λύσις. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α (σχ. 70) καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΒ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν κάθετον πλευρὰν α. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν α γράφομεν περιφέρειαν κύκλου· ἡ περιφέρεια αὕτη τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν τῆς γωνίας εἰς ἓν σημεῖον Γ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι προφανῶς τό ζητούμενον.



(Σχ. 70).

ΣΗΜ. Ἵνα ὑπάρχῃ λύσις πρέπει νὰ εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα α μεγαλύτερον τοῦ γ (§ 20).

§ **90. Πρόβλημα 10ον.**—Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἐκ δύο πλευρῶν καὶ τῆς ὑπ᾽ αὐτῶν σχηματιζομένης γωνίας.



(Σχ. 71).

§ **91. Πρόβλημα 11ον.**—Νὰ σχηματισθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν αὐτοῦ.

§ **92. Πρόβλημα 12ον.** Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 103). Περιγράψατε περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἰσόπλευρον τρίγωνον.

104). Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία εἶναι $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἰσοῦται πρὸς δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

105). Κατασκευάσατε παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς νὰ ἔχωσι μήκη 0,04 μ. ἡ μία καὶ 0,02 μ. ἡ ἄλλη.

106). Ἰχνογραφήσατε τὰ σχήματα 71.

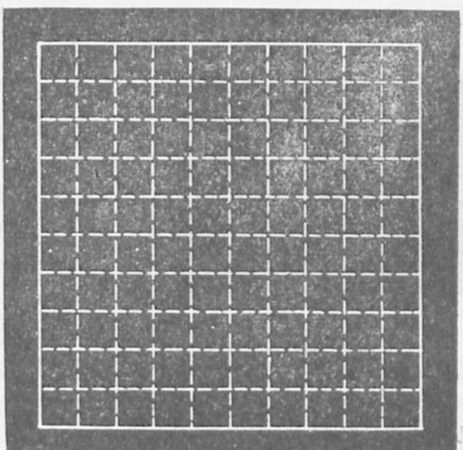
107). Εἰς δοθὲν τετράγωνον ἐγγράψατε κύκλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Μέτρησις τῶν εὐθ. σχημάτων.

§ 93. Μονάδες ἐπιφανειῶν.—Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν, συγκρίνομεν ταύτην πρὸς ὡρισμένην καὶ γνωστὴν ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν μονάδα καλοῦμεν. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἐμετρήθη.



(Σχ. 72).

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς καλεῖται ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ταύτης.

ΣΗΜ. Συνήθως τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐπιφανείας σημειοῦμεν μὲ τὰ γράμματα αὐτῆς κλεισμένα ἐντὸς παρενθέσεως. Π. χ. (ΑΒΓΔ) σημαίνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔ·

Αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τὰς ἐπιφανείας, καλοῦνται μονάδες ἐπιφανειῶν.

Συνηθέσταται μονάδες ἐπιφανειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς:

α΄. Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν ἴσην πρὸς ἓν μέτρον (Σχ. 72).

β΄. Τὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, τὰ ὁποῖα εἶναι:

ἡ τετραγωνικὴ παλάμη $= \frac{1}{100}$ τετρ. μ.

ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος $= \frac{1}{100}$ τ. π. $= \frac{1}{10000}$ τ. μ.

ἡ τετραγωνικὴ γραμμὴ $= \frac{1}{100}$ τ. δ. $= \frac{1}{10000}$ τ. π. $= \frac{1}{1000000}$ τ. μ.

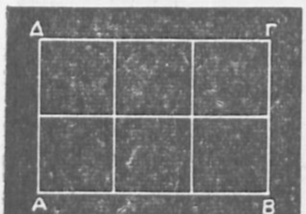
γ΄. Τὰ πολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, τὰ ὁποῖα εἶναι.

τὸ βασιλικὸν στρέμμα = 1000 τετρ. μέτρα

τὸ παλαιὸν στρέμμα = 1270 » »

τὸ τετραγωνικὸν χιλιόμετρον = 1000000 » »

Πρὸς μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων γίνεται συνήθως χρῆσις καὶ τοῦ τεκτονικοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{9}{16}$ τοῦ τετρ. μέτρου.



(Σχ. 73).

§ **94. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνέου.** — Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τυχὸν ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (Σχ. 73).

Μετροῦμεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ· ἔστω δὲ ὅτι ΑΒ=3 μ. καὶ ΔΑ =2 μ. Ἂν διαιρέσωμεν τὴν μὲν ΑΒ εἰς 3 ἴσα μέρη (§ 38), τὴν δὲ ΑΔ εἰς 2 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς $3 \times 2 = 6$ τετρ.μέτρα. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει μῆκος 7μ., τὸ δὲ ὕψος 4 μ. εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $7 \times 4 = 28$ τετρ. μέτρα. Ἂν ὀρθογωνίου ἡ βάσις εἶναι 15,35μ.$=1535^{\delta}$ καὶ τὸ ὕψος 3,7.$^{\mu.}$ $= 370^{\delta}$ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $1535 \times 370 = 567950 =$ τ. δ. $= \frac{567950}{10000} =$ τ. μ. 56,7950 τ.μ.$= 15,35 \times 3,7$ τ.μ.

Ὅθεν συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἐάν, χάριν γενικότητος, παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τινὸς διὰ Ε, τὸ δὲ μῆκος της βάσεως αὐτοῦ διὰ β καὶ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους διὰ υ, ἀληθεύει, κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν Ε, β καὶ υ ἡ ἀκόλουθος ἰσότης:

$$E=\beta\times\upsilon \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις. 108). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 25,05 μ., ὕψος δὲ 10 μ; (Ἀπ. 250,5 τετρ. μ.).

109). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν περίμετρος εἶναι 40 μ. μία δὲ πλευρὰ αὐτοῦ 8 μ.; (Ἀπ. 96 τετρ. μ.).

110). Πρόκειται νὰ φυτευθῇ ἄμπελος σχήματος ὀρθογωνίου καὶ ἐμβαδοῦ 600 τετρ. μέτρων. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πλάτος αὐτῆς, ἂν τὸ μῆκος αὐτῆς εἶναι 30 μέτρων; (Ἀπ. 20 μ.).

111). Ἐπώλησέ τις ἀγρὸν ὀρθογώνιον καὶ ἔχοντα μῆκος μὲν 50μ. πλάτος δὲ 30 μ., πρὸς 400 δραχμὰς τὸ βασιλικὸν στρέμα· Πόσα χρήματα ἔλαβεν; (Ἀπ. 600 δραχμάς).

§ **95. Ἐμβαδὸν τετραγώνου.**—Ἐπειδὴ πᾶν τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον (§ 74) ἀληθεύει καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἡ προηγουμένη πρότασις. Ἐπειδὴ ὅμως ὅλαι αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, ἡ πρότασις αὕτη διατυποῦται ὡς ἀκολούθως:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου εἶναι γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της.

Τοῦ τετραγώνου π.χ. τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 5 μ. τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $5\times5=25$ τετρ. μέτρα.

ΣΗΜ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ γινόμενον παντὸς ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του καλεῖται τετράγωνον τοῦ α. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ α σημειοῦται οὕτω α^2.

Κατὰ ταῦτα μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε καὶ τοῦ μήκους α τῆς πλευρᾶς τετραγώνου τινὸς ἀληθεύει ἡ ἀκόλουθος ἰσότης $E=\alpha^2$.

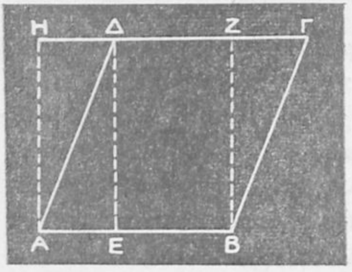
Ἀσκήσεις. 112). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 8,05 μ.; (Ἀπ. 64,8025 τ. μ.).

113). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει περίμετρον 105,36 μ. (Ἀπ. 720,4866 τ. μ.).

114). Τετράγωνόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 144 τετρ. μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς αὐτοῦ; (Ἀπ. 12 μ.).

115). Τετραγωνικὸν οἰκόπεδον ἐπωλήθη πρὸς 20 δραχμὰς τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν· ἐὰν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἔχῃ μῆκος 30 μέτρων, ἀντὶ πόσων χρημάτων ἐπωλήθη; (Ἀπ. 32000 δραχ.

§ **96. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.**—Ἔστω ὅτι θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 78).



(Σχ. 78).

Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΒΓΖ ὑποβάλωμεν εἰς παράλληλον μετάθεσιν κατὰ τὴν ὁδηγὸν ΓΔ καὶ μέχρις οὗ ἡ κορυφὴ Γ πέσῃ ἐπὶ τῆς Δ, ἐπειδὴ ἡ ΓΒ μένει πάντοτε παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της, θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ σημεῖον Β ἐπὶ τοῦ Α (§ 75 Β΄.) καὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΖ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑΔΗ. Οὕτω δὲ τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραλλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΖΗ εἶναι (§ 94) (ΑΒ)×(ΒΖ)=(ΑΒ)×(ΔΕ), ἕπεται ὅτι καὶ (ΑΒΓΔ)=(ΑΒ)×(ΔΕ) ἤτοι:

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ τὴν πρότασιν ταύτην μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε, τῆς βάσεως β καὶ τοῦ ὕψους υ παραλληλογράμμου ἀληθεύει ἡ ἰσότης Ε=β×υ.

Ἀσκήσεις. 116). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν μὲν 12,2 μ. ὕψος δὲ 5,7 μ. (Ἀπ. 69,54 τετρ. μέτρα).

117). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 28,46 μ. ἡ δὲ μεταξὺ αὐτῶν κάθετος 8,76 μ. (Ἀπ. 124,6548 τ. μ.).

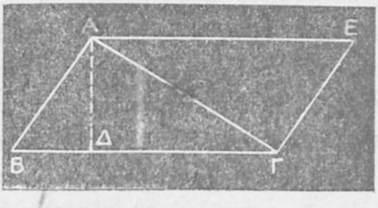
118). Παραλληλόγραμμόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 5 βασιλικῶν στρεμμάτων καὶ βάσιν 100 μέτρων. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ; (Ἀπ. 50 μ).

§ **97. Ἐμβαδὸν τριγώνου.**—Ἔστω πρὸς μέτρησιν τὸ τυχὸν τρίγωνον ΒΑΓ (Σχ. 79). Ἐὰν φέρωμεν ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α καὶ

Γ παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς, σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμον ΑΒΓΕ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ τρίγωνον.

Ἐπειδὴ δὲ (ΑΒΓΕ)=(ΒΓ)×(ΑΔ) καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμου τούτου (§ 75 Α΄), συμπεραίνομεν ὅτι

$(ΑΒΓ)=\frac{(ΒΓ)\times(ΑΔ)}{2}$, ἤτοι:



(Σχ. 79).

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε, τῆς βάσεως β καὶ τοῦ ὕψους υ τριγώνου τινὸς ἀληθεύει ἡ σχέσις $Ε=\frac{β\times υ}{2}$.

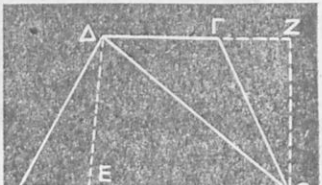
Ἀσκήσεις. 119). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 27 μ. ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπὸ ταύτης εἶναι 12 μ. (Ἀπ. 162 τ. μ.).

120). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ἔχει μῆκος 25 μ. ἡ δὲ ἄλλη 46, 30 μ., (Ἀπ. 578, 75 τ. μ.).

121). Τρίγωνόν τι ἔχει ἐμβαδὸν 2 παλαιῶν στρεμμάτων καὶ ὕψος 40 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς βάσεως αὐτοῦ. (127 μ.).

122). Ἀγρὸς τριγωνικὸς καὶ ἄλλος τετραγωνικὸς ἔχουσιν ἴσον ἐμβαδόν. Τοῦ μὲν τριγωνικοῦ ἡ βάσις ἔχει μῆκος 400 μ. τοῦ δὲ τετραγωνικοῦ ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 200 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου ἀγροῦ καὶ πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγωνικοῦ;

(Ἀπ. 40 β· στρεμ., 200 μ.).



(Σχ. 80).

§ 98. Ἐμβαδὸν τραπεζίου.—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (Σχ.80). Ἐὰν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, διαιρεῖται τὸ τραπέζιον εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ. Ἐπειδὴ δὲ (§ 97) $(ΑΒΔ)=\frac{(ΑΒ)\times(ΔΕ)}{2}$ καὶ

$(ΒΓΔ) = \frac{(ΓΔ)\times(ΒΖ)}{2}$, ἕπεται ὅτι $(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΑΒ)\times(ΔΕ)+(ΔΓ)\times(ΒΖ)}{2}$.
Ἐὰν δέ παρατηρήσωμεν ὅτι $ΒΖ = ΔΕ$ (§ 75 Β΄), ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΑΒ)\times(ΔΕ)+(ΔΓ)\times ΔΕ)}{2} = \frac{(ΑΒ)+(ΔΓ)}{2}\times(ΔΕ)$.

Ἄρα : Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

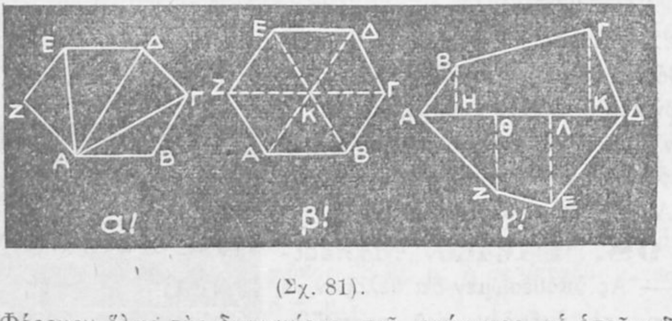
Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ Ε τὸ ἐμβαδόν, διὰ Β καὶ β τὰ μήκη τῶν βάσεων καὶ διὰ υ τὸ ὕψος τραπεζίου τινός, ἀληθεύει μεταξὺ αὐτῶν ἡ ἰσότης $Ε = \frac{Β+β}{2} \times υ$.

Ἀσκήσει : 123). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 45 μ. ἡ ἄλλη 20 μ. καὶ τὸ ὕψος εἶναι 12,5 μ. (Ἀπ. 406, 25 τ. μ.).

124). Ἀπὸ πόσα παλαιὰ στρέμματα ἀποτετελεῖται ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἔχει μῆκος 62 μ. ἡ ἄλλη 85 μ. καὶ τὸ ὕψος 20 μ; (Ἀπ. 1, 157 π. σ.)

§ **99**. **Ἐμβαδὸν οἱωνδήποτε εὐθ. σχημάτων.** — Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τραπεζοειδοῦς ἢ οἱουδήποτε πολυγώνου διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς τρίγωνα, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων τούτων (§ 97) καὶ προσθέτομεν τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα.

Διαιροῦμεν δὲ εὐθύγραμμον σχῆμα εἰς τρίγωνα κατὰ τοὺς δύο ἀκολούθους τρόπους.



(Σχ. 81).

α΄). Φέρομεν ὅλας τὰς διαγωνίους τοῦ σχήματος, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ μίαν κορυφὴν αὐτοῦ (Σχ. 81 α΄).

β΄). Ὁρίζομεν ἐντὸς τοῦ σχήματος ἕν σημεῖον καὶ φέρομεν ὅλα τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπ' αὐτοῦ καὶ τῶν κορυφῶν τοῦ σχήματος (Σχ. 81 β΄).

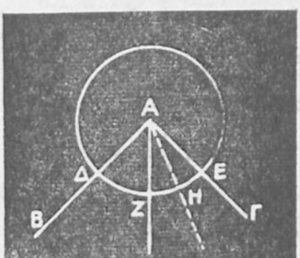
Συνήθως ἀναλύομεν εὐθύγραμμόν τι σχῆμα οὐ μόνον εἰς τρίγωνα ἀλλὰ καὶ εἰς τραπέζια καὶ ὀρθογώνια ἐνίοτε. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν μεγαλυτέραν διαγώνιον αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὰς λοιπὰς κορυφὰς ἄγομεν καθέτους ἐπὶ ταύτην (Σχ. 81 γ′).

Ἀσκήσεις. 125). Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα τραπεζοειδοῦς, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος ἔχει μῆκος 80 μ. αἱ δὲ ἀποστάσειςτῶν λοιπῶν κορυφῶν ἀπὸ ταύτης εἶναι 5 μ. ἡ μὲν καὶ 35 μ. ἡ ἄλλη. Ἀπὸ πόσα β. στρέμματα ἀποτελεῖται ὁ ἀγρὸς οὗτος ; (1,6 β. στρεμ.)

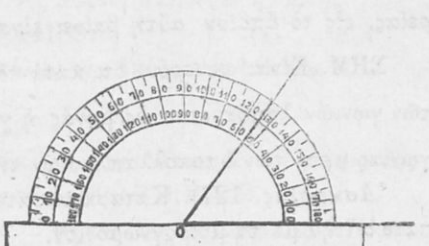
126). Πενταγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι κατὰ σειρὰν 10 μ. 20 μ. 30 μ. 40 μ. 50 μ. ἓν σημεῖον αὐτοῦ ἀπέχει ἀπὸ τὰς πλευρὰς κατὰ σειρὰν 23 μ, 25 μ, 20 μ., 17 μ. καὶ 10 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ; (Ἀπ. 1255 τ. μ).

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

§ **100. Μοιρογνωμόνιον Μέτρησις γωνίας.** - Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον κτλ. τόξον βαίνει διπλασία, τριπλασία κλ. ἐπίκεντρος γωνία καὶ ἀντιστρόφως (§ 58 Γ′). Κατὰ ταῦτα, ὅσας φορὰς ἓν τόξον ΗΕ (Σχ. 82) χωρεῖ εἰς ἄλλο τόξον ΔΗ, (τῆς αὐτῆς περιφερείας), τόσας φορὰς καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΗΑΕ χωρεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν



(Σχ. 82).



(Σχ. 83).

ΔΑΗ. Ἐὰν λοιπὸν τὸ μὲν τόξον ΗΕ ληφθῇ ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν τῶν τόξων, ἡ δὲ ἐπίκεντρος γωνία ΗΑΕ ὡς μονὰς πρὸς μέτρησιν γωνιῶν, εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ τόξον ΔΗ (τῆς αὐτῆς ἢ ἴσης περιφερείας) καὶ ἡ εἰς αὐτὸ βαίνουσα ἐπίκεντρος γωνία παρίστανται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου αὕτη βαίνει, ὅταν καταστῇ ἐπίκεντρος εἰς τὸν κύκλον, εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων.

Πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον χρησιμεύει τὸ μοιρογνωμόνιον (Σχ. 83), τὸ ὁποῖον εἶναι μεταλλικὸν ἡμικύκλιον, τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι διῃρημένη εἰς 180 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται μοῖραι.

Ἑκάστη μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60′ καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60″. Εἰς τὸ μέσον τῆς διαμέτρου τοῦ ἡμικυκλίου τούτου ὑπάρχει μία μικρὰ χαραγή, ἡ ὁποῖα δεικνύει τὴν θέσιν τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι ἥμισυ.

Ἵνα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου μετρήσωμεν γωνίαν τινὰ (Σχ. 83) ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Τοποθετοῦμεν αὐτὸ οὕτως ὥστε τὸ μὲν κέντρον νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, ἡ δὲ διὰ τῆς ἀρχῆς τῆς διαιρέσεως διερχομένη ἀκτὶς νὰ συμπίπτῃ μὲ μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας καὶ τὸ ὅλον μοιρογνωμόνιον, πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἄλλη πλευρά. Οὕτως ἡ δευτέρα αὕτη πλευρὰ τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν τοῦ ὀργάνου εἰς ἓν σημεῖον· εἰς αὐτὸν εἶναι γραμμένος ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει πόσον μοιρῶν κ.τ.λ. εἶναι τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, καὶ ἑπομένως πόσων μοιρῶν εἶναι καὶ ἡ γωνία αὕτη.

Ἡ ὀρθὴ γωνία εἶναι 90^0, διότι καὶ τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη βαίνει εἶναι $\frac{360^0}{4}=90^0$ (§ 59).

ΣΗΜ. Εἶναι φανερὸν ὅτι κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνεται ὡς μονὰς ἡ γωνία 1^0 ἤτοι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας μετὰ τῶν ὑποπολλαπλασίων τῆς μοίρας.

Ἀσκήσεις. 127). Κατασκευάσατε τυχοῦσαν γωνίαν καὶ μετρήσατε αὐτὴν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον.

128). Πόσων μοιρῶν εἶναι γωνία ἴση πρὸς $\frac{2}{5}$ ὀρθῆς ; (36^0).

129). Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία 50^0 ; (ἀπ. $\frac{5}{9}$ ὀρθ.).

130). Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι γωνία $33^0\ 45'$; (ἀπ. $\frac{3}{8}$ ὀρθ).

131). Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία ὀξεῖα γωνία νὰ εἶναι 54^0 καὶ ἡ ὑποτείνουσα 0,04 μ.

132). Κατασκευάσατε τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία γωνία νὰ εἶναι

108° αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς 0,06 μ. ἡ μία καὶ 0,04 μ. ἡ ἄλλη. Μετρήσατε τὰς ἄλλας αὐτοῦ γωνίας.

133). Γράψατε περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος 0,03 μ. καὶ χωρίσατε εἰς αὐτὸν κυκλικὸν τομέα 25°.

3. ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

§ **101. Μῆκος περιφερείας κύκλου.** Ἂς κατασκευάσωμεν ἐκ χαρτονίου ἢ λεπτῆς σανίδος κύκλον καὶ ἂς περιβάλωμεν μίαν φορὰν ὅλην τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ μὲ νῆμα. Ἐὰν ἔπειτα τεντώσωμεν καὶ μετρήσωμεν τὸ νῆμα τοῦτο, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι μὲ ἀρκετὴν προσέγγισιν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας. Ἐὰν δὲ τὸ μῆκος τοῦτο τῆς περιφερείας διαιρέσωμεν μὲ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτοῦ, εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 3,14159 (1).

Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο συμβαίνει εἰς πάντα κύκλον συμπεραίνομεν ὅτι:

Εἰς πάντα κύκλον τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτοῦ εἶναι 3,14159.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος ταύτης συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν παρασταθῇ διὰ γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου καὶ διὰ α τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$\gamma=2\times\alpha\times3,14159. \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης δὲ πορίζόμεθα εὐκόλως τὴν ἀκόλουθον ἰσότητα

$$2\times\alpha=\frac{\gamma}{3,14159} \qquad (2)$$

ἥτις ἐκφράζει ὅτι: ἡ διάμετρος κύκλου εὑρίσκεται, ἂν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14159.

Ἀσκήσεις. 134) Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 3 μ.; (ἀπ. 18, 84954).

135). Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει περιφέρειαν 26,5; (ἀπ. 4,058μ.).

136). Τροχὸς μὲ μίαν ὁλόκληρον στροφὴν διανύει διάστημα 2 μ, 25. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ; (ἀπ. 0,358 μ.).

---

(1). Τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἀναγράφομεν ἐνθυμούμενοι ὅτι: «Ἕνα τέσσαρα καὶ ἕνα πέντε κάμνουν ἐννέα».

§ **102. Μῆκος τόξου,**—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Μετροῦμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ὑπολογίζομεν, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τόξον. Ἔστω τοῦτο 8 μ.· ἔπειτα διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου εὑρίσκομεν πόσων μοιρῶν κ.τ.λ. εἶναι ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ τόξον τοῦτο, καὶ ἑπομένως πόσων μοιρῶν εἶναι καὶ τὸ τόξον τοῦτο, ἔστω δὲ 50^0. Μετὰ ταῦτα σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως:

Τόξον 360^0 τῆς περιφερείας ταύτης ἔχει μῆκος 8 μ.

» 1^0 » αὐτῆς περιφερείας ἔχει μῆκος $\frac{8}{360}$ μ.

» 50^0 » » » ἔχει μῆκος $\frac{8}{360}\times 50 = 1{,}111$μ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τόξον 75^0 περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 12 μ. ἔχει μῆκος $\frac{12^{\mu}}{360}\times 75 = 2^{\mu}, 5$.

Κατὰ ταῦτα, ἂν γ εἶναι τὸ μῆκος ὁλοκλήρου περιφερείας καὶ τ τὸ μῆκος τόξου μ^0 αὐτῆς, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\tau = \frac{\gamma}{360}\times \mu = \gamma \times \frac{\mu}{360}$.

ΣΗΜ. Ἂν τὸ τόξον περιέχῃ καὶ πρῶτα ἢ δεύτερα λεπτά, τρέπομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\mu}{360}$ εἰς μονάδας τῆς κατωτέρας εἰς τὸν μ πεοιεχομένης τάξεως, καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τὸν προηγούμενον τύπον.

Ἀσκήσεις 137). Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τόξου 15^0 εἰς περιφέρειαν ἀκτῖνος 8^{μ}; (ἀπ. 0^{μ}, 78539.

138). Ἡ περιφέρεια κύκλου ἔχει μῆκος 18^{μ}. Πόσον μῆκος ἔχει τόξον αὐτῆς $25^0\ 36'\ 40''$; (ἀπ. $\tau = 18\times \frac{92200}{1296000} = 1,\ 28^{\mu}$).

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΚΥΚΛΟΥ

§ **103. Ἐμβαδὸν κύκλου.**—Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν α εἶνε ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης;

$$E = 2\times\alpha\times 3{,}14159\times\frac{\alpha}{2} \text{ ἢ } E = 3{,}14159\times\alpha^2 \qquad (1).$$

Ἡ ἰσότης (1) ἐκφράζει ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου εἶναι γινόμενον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159.

Ἀσκήσεις 139). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα $2^{\mu.}$ (ἀπ. 12,566 τ. μ).

140). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἁλωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα 5 μέτρων. (ἀπ. 78, 53975 τ. μ.).

141). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος $32{,}5^{\mu.}$ (ἀπ. 33,0549125 τ. μ.).

§ **104. Ἐμβαδὸν κυκλ. τομέως.** — Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ κυκλ. τομέως ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Μετροῦμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ὑπολογίζομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ κύκλου, ἔστω δὲ τοῦτο 4 τ. μ. Ἔπειτα μετροῦμεν διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ ἀκτῖνες, εἰς τὰς ὁποίας περατοῦται ὁ κυκλικὸς τομεὺς καὶ εὑρίσκομεν οὕτω πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία καὶ τὸ τόξον τοῦ τομέως, ἔστω δὲ 45^0. Ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἀκολούθως.

Ὅλος ὁ κύκλος, ἤτοι κυκλικὸς τομεὺς 360^0 ἔχει ἐμβαδὸν 4 τ. μ. τοῦ αὐτοῦ κύκλου κυκλικὸς τομεὺς 1^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{4 \text{ τ. μ.}}{360}$ τοῦ αὐτοῦ κύκλου κυκλικὸς τομεὺς 45^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{4}{360}$ τ. μ. $\times 45 = 0,5$ τ.μ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς κύκλον ἔχοντα ἐμβαδὸν 30 τ. μ. κυκλικὸς τομεὺς 20^0 ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{30}{360}$ τ. μ. $\times 20 = 1,666$ τ. μ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν Ε εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς καὶ ε τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως αὐτοῦ μ^0, ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\varepsilon = \frac{E}{360} \times \mu = E \times \frac{\mu}{360}$ (1)

ΣΗΜ. α΄. Ἂν τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τομέως περιέχῃ καὶ πρῶτα ἢ δεύτερα λεπτά, ἐργαζόμεθα ὡς εἴπομεν ἐν (§ 102 σημ.).

ΣΗΜ. β΄. Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ τὸ μῆκος τόξου μ^0, διὰ τοῦ γ τὸ μῆκος ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα α, ἀληθεύει, ὡς γνωστὸν (§ 102) ἡ ἰσότης $\tau = \gamma \times \frac{\mu}{360}$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ ταύτης προκύπτει ὅτι : $\frac{\tau}{\gamma} = \frac{\mu}{360}$ ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\varepsilon = E \times \frac{\tau}{\gamma}$ καὶ ἐπειδὴ $E = \gamma \times \frac{\alpha}{2}$ (§ 103, ἕπεται ὅτι $\varepsilon = \gamma \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{\tau}{\gamma}$ ἢ $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} \times \tau$ (2).

Ἤτοι : Τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεος τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ.

Ασκήσεις. 142). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 100° εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 3, 14159 τ. μ; (ἀπ, 0,872 τ. μ.).

143). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 30° καὶ ἀκτῖνος 4 μ. (ἀπ. 4,18878 τ. μ.).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

144). Ἐκ πόσων βασ. στρεμάτων ἀποτελεῖται τετραγωνικὸς ἀγρὸς ἔχων περίμετρον 600 μέτρων; (ἀπ. $22\frac{1}{2}$ β. στρ.).

145). Ἐκ πόσων τεκτονικῶν τετραγωνικῶν πήχεων ἀποτελεῖται οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει μῆκος 25 μ. τὸ δὲ ὕψος 8,2 μ.; (Ἀπ. 364,44 τ. τ. π.).

146). Λιθόστρωτος ὁδὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου ἔχοντος μῆκος 150 μ. καὶ ὕψος 15 μ. Ἡ ὁδὸς αὕτη εἶναι ἐστρωμένη μὲ τετραγωνικὰς πλάκας, τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,75 μ. Πόσας πλάκας περιέχει ἐν ὅλῳ ἡ ὁδὸς αὕτη; (Ἀπ. 4000).

147). Ἀγρός τις ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 65 μ. τὸ δὲ ὕψος 22 μ. Πόσον τιμᾶται ὁ ἀγρὸς οὗτος, ἂν ἕκαστον παλαιὸν στρέμμα αὐτοῦ τιμᾶται 130 δραχμάς;

(Ἀπ. 146, 37 δρ.)

148). Ἀγρὸς σχήματος παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν 18 μ. καὶ ὕψος 10 μ. ἀνταλλάσσεται μὲ τετραγωνικὸν πλευρᾶς 12 μ. Ἐὰν ἕκαστον τετρ. μέτρον τοῦ δευτέρου ἀγροῦ τιμᾶται 0,40 δρ., πόσον τιμᾶται ἕκαστον τετρ. μέτρον τοῦ πρώτου; (Ἀπ. 0,32 δραχ.).

149). Τριγωνικοῦ ἀγροῦ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 750 τ. μ. ἡ δὲ βάσις 50 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ; (Ἀπ. 30 μ.).

150). Δωμάτιον μήκους 5 μ. καὶ πλάτος 3,60 μ. πρόκειται νὰ πατωθῇ διὰ σανίδων, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει μετὰ τὴν ὑπὸ τοῦ τεχνίτου ἐπεξεργασίαν μῆκος μὲν 1,80 μ. πλάτος δὲ 0,25 μ. Πόσαι τοιαῦται σανίδες χρειάζονται; (Ἀπ. 40 σανίδες).

151). Ἁμάξης διανυσάσης 1884,9μ. οἱ πρόσθιοι τροχοὶ ἔκαμον ἀνὰ 1000 περιστροφάς. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς ἑκατέρου τούτων; (Ἀπ. 0,3 μ.).

152). Περὶ κυκλικὴν τράπεζαν διαμέτρου 1,95 μ. κάθηνται 8 ἄνθρωποι. Πόσον μέρος τῆς περιφερείας ἀναλογεῖ δι᾿ ἕκαστον;

(Ἀπ. 0, 589 μ.).

153). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα 3,30 μ;

(Ἀπ. 34,21 τ. μ.).

Ἀσκήσεις. 154). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 48,60 μ; (Ἀπ. 1855,08 τ. μ.).

155). Πόσας δραχμὰς θὰ πληρώσῃ τις διὰ τὴν ἀμμοκονίασιν τοῦ πυθμένος κυκλικῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι 12,6 μ, ἐὰν πληρώνῃ 4,50 δρχ. κατὰ τετρ. μέτρον; (Ἀπ. 560,80 δραχ.),

156). Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τραπεζίου, ὅπερ ἔχει ἐμβαδὸν 525 τ. μ. μίαν βάσιν 60 μ. καὶ τὴν ἄλλην 40 μ.; (Ἀπ. 10,5 μ.).

157). Διὰ νὰ πατώσωμεν τετραγωνικὸν δωμάτιον πρὸς 15,50 δρ. κατὰ τετρ. μέτρον ἐδαπανήθησαν 225,28 δρχ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ δωματίου τούτου;
(Ἀπ. 3,81 μ.).

158). Νὰ εὑρεθῇ εἰς παλαιὰ στρέμματα τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶναι 137,70 μ. τὸ δὲ ὕψος 100 μέτρα;
(Ἀπ. $5 \frac{1}{2}$ π. στρ.).

159). Ἠγόρασέ τις ἄμπελον πρὸς 624 δρχ. τὸ βασ. στρέμμα. Ἡ ἄμπελος ἔχει σχῆμα τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν μία βάσις εἶναι 29,50 μ, ἡ ἄλλη 38,20 μ. καὶ τὸ ὕψος 47,30 μ. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ πληρώσῃ; (Ἀπ. 928,4 δραχ.).

160). Ἐν κύκλῳ ἀκτῖνος 3 μ. λαμβάνομεν τόξον 128^0 καὶ φέρομεν τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κυκλικοῦ τομέως. (Ἀπ. 9,42477 τετρ. μ.).

161). Ἐκ δύο ὁμοκέντρων κύκλων τοῦ μὲν ἡ ἀκτὶς εἶναι 5 μ. τοῦ δὲ 3 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περικλείεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν; (Ἀπ. 50,26544 τ. μ.).

162). Κύκλος ἔχων ἀκτῖνα 5 μ. εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τετράγωνον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου κειμένης ἐπιφανείας τοῦ τετραγώνου. (Ἀπ. 21,46025 τ. μ.).

163). Οἰκόπεδόν τι ἐπωλήθη πρὸς 3,40 δραχ. τὸν τεκτονικὸν τετραγωνικὸν πῆχυν. Ἐκ πόσων βασιλικῶν στρεμμάτων ἀποτελεῖται τοῦτο, ἂν ἡ ὁλικὴ αὐτοῦ ἀξία εἶναι 34000 δραχμαί; (Ἀπ. 5,625 β. σ.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

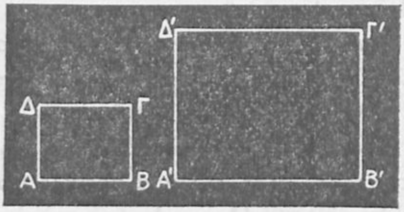
105. Εὐθ. τμήματα ἀνάλογα πρὸς ἄλλα. Ἂς νοήσωμεν τρία εὐθύγραμμα τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι κατὰ σειρὰν 2 μ., 4 μ. καὶ 7 μ καὶ ἄλλα τρία, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μήκη 2×10 μ., 4×10 μ. καὶ 7×10 μ. Τὰ τελευταῖα ταῦτα εὐθ. τμήματα, λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ πρῶτα. Ἐπίσης τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μήκη 2×12 μ., 4×12 μ. καὶ 7×12 λέγοντα ἀνάλογα πρὸς τὰ πρῶτα.

Γενικῶς : Δύο ἢ πλείονα εὐθ. τμήματα λέγονται ἀνάλογα πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἄν τὰ μήκη αὐτῶν προκύπτωσιν ἀπὸ τὰ μήκη τῶν ἄλλων, ἀφ᾽ οὗ πολλαπλασιασθῶσιν ὅλα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἀριθμῶν 2×12, 4×12 7×12 πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ $\frac{1}{12}$ προκύπτουσιν οἱ ἀριθμοί, 2,4,12 καὶ τὰ εὐθ. τμήματα, τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι 2,4, 12 εἶναι ἀνάλογα πρὸς ἐκεῖνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι μήκη 2×12 μ, 4×12 μ. καὶ 7×12 μ. Τὰ δύο εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουσιν ἐξ ἀλλήλων διὰ πολλαπλασιασμοῦ, καλοῦνται ἀντίστοιχα ἢ ὁμόλογα τμήματα.

Σημ. Τὸ μῆκος εὐθ, τμήματος ΑΒ σημειοῦμεν συνήθως οὕτω (ΑΒ).

§ **106**. **Ὅμοια εὐθ. σχήματα.** Ἔστω ΑΒΓΔ (Σχ. 84) ἕνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν ΑΒ καὶ ὕψος ΑΔ. Ἂς λάβωμεν ἐπὶ τυχούσης εὐθείας τμῆμα Α΄Β΄ διπλάσιον τοῦ ΑΒ καὶ ἃς φέρωμεν εἰς τὰ ἄκρα Α΄ καὶ Β΄ αὐτοῦ καθέτους πρὸς τὴν Α΄Β΄. Ἔπειτα δὲ ἂς λάβωμεν ἐπὶ τῶν καθέτων τούτων τμήματα Α΄Δ΄, Β΄Γ΄ διπλάσια τοῦ ΑΔ καὶ ἃς φέρωμεν τὸ εὐθ. τμῆμα Δ΄Γ΄. Οὕτω σχηματίζεται ἄλλο ὀρθογώνιον Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τοῦ ὁποίου αἱ μὲν γωνίαι εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, μὲ τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔ, αἱ δὲ πλευραὶ ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἐκείνου ἐκ κατασκευῆς. Τὰ δύο ταῦτα ὀρθογώνια λέγονται ὅμοια. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α΄Β΄ λέγονται ὁμόλογοι πλευραί, ὁμοίως ὁμόλογοι εἶναι αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ Β΄Γ΄, ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄, ΑΔ καὶ Α΄Δ΄.



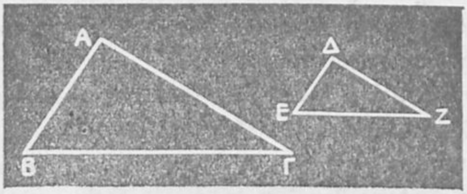
(Σχ. 84).

Ὁμοίως δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, τοῦ ὁποίου τὸ ἓν ἔχει πλευρὰς τριπλασίας ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου, εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Γενικῶς : Δύο εὐθύγραμμα σχήματα λέγονται ὅμοια, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ πλευραί, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι εἶναι ἀνάλογοι.

Αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίων σχημάτων, εἰς τὰς ὁποίας πρόσκεινται ἴσαι γωνίαι λέγονται ὁμόλογοι πλευραί.

§ **107. Ὅμοια τρίγωνα.** — Α΄. Ἔστω ἓν τρίγωνον ΔΕΖ (Σχ. 85). Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ἂς λάβωμεν τμῆμα ΒΓ διπλάσιον τῆς πλευρᾶςς ΕΖ καὶ ἂς κατασκευάσωμεν μὲ πλευρὰν ΒΓ καὶ κορυφὰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ δύο γωνίας καὶ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς γωνίας Ε καὶ Ζ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΑΒ κειμένας (§ 60). Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Α καὶ σχηματίζεται νέον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ΔΕΖ, (§ 69 Β΄). Ἐὰν τώρα τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ συγκρίνωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου πρὸς τὰς ΔΕ καὶ ΔΖ βλέπομεν ὅτι, ὅπως ΒΓ=ΕΖ×2, οὕτω καὶ ΑΒ=ΔΕ×2 καὶ ΑΓ=ΔΖ×2 τὰ τρίγωνα ὅθεν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Τοῦτο συμβαίνει δι᾿ ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι πάσας τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.



(Σχ. 85).

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοιαι.

Β΄ Ἔστω ἓν τρίγωναν ΔΕΖ (Σχ. 85). Ἐπὶ εὐθείας τινὸς ἂς λάβωμεν διαδοχικῶς δύο τμήματα ἴσα πρὸς τὴν πλευρὰν ΔΕ, ὅτε ἀποτελεῖται ἓν τμῆμα διπλάσιον ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΔΕ· ὁμοίως σχηματίζομεν τμῆμα διπλάσιον ἀπὸ τὴν ΔΖ καὶ ἄλλο τμῆμα διπλάσιον ἀπὸ τὴν ΕΖ. Ἂν τώρα κοτοσκευάσωμεν τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰ κατασκευασθέντα τμήματα ἤτοι διπλασίας ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ ΔΕΖ, καὶ ἐπιθέσωμεν τὰς γωνιας Δ,Ε,Ζ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ τοῦ ΑΒΓ, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζουσι μία πρὸς μίαν. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους Ἄρα :

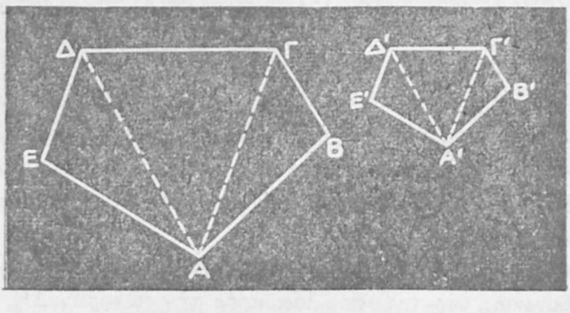
Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

Γ΄. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν γωνίας Α ἴσης πρὸς τὴν γωνίαν Δ τριγώνου ΔΕΖ ἂς λάβωμεν τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ π. χ. ΑΒ=ΔΕ×2 καὶ ΑΓ=ΔΖ×2, καὶ ἂς χαράξωμεν το τμῆμα ΒΓ. Συγκρίνοντες τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαβήτου τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΕΖ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 85) βλέπομεν ὅτι ΒΓ=ΕΖ×2. Τὰ δύο λοιπὸν τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς πλευρᾶς ἀναλόγους καί, κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, εἶναι ὅμοια. Ἄρα:

Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῆς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοιαι

Σημ. Εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ ἴσαι γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἀσκήσεις. 164). Κατασκευάσατε ἐπὶ τοῦ τετραδίου σας τυχὸν τρίγωνον, διαιρέσατε δύο πλευρὰς αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ χαράξατε τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζουσι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τούτων. Ἀποδείξατε ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου (§ 107 Γ΄).



(Σχ. 86).

165). Ἀποδείξατε ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου, εἶναι ὅμοιον πρὸς αὐτό. (Ἄσκ. 164, § 107 Β΄).

166). Ἀποδείξατε ὅτι δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὰς καθέτους πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια. (§ 107 Γ΄.).

§ 108. Ἀνάλυσις ὁμοίων πολυγώνων εἰς ὅμοια τρίγωνα.—Ἔστωσαν δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄

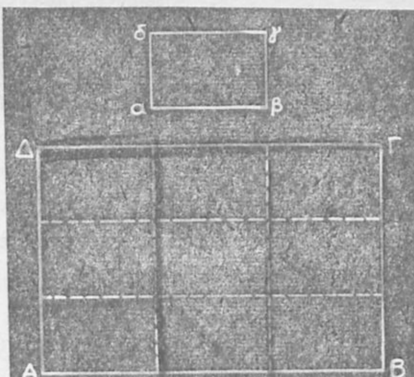
(Σχ. 86) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἑκάστη πλευρὰ τοῦ πρώτου εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τοῦ δευτέρου, ἤτοι (ΑΒ)=(Α΄Β΄)×2, (ΒΓ)=Β΄Γ΄)×2 κτλ.

Ἐὰν φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δύο ὁμολόγους κορυφὰς αὐτῶν π. χ. ἀπὸ τὰς Α καὶ Α΄, διαιροῦνται τὰ πολύγωνα εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα· ἐὰν δὲ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου συγκρίνωμεν τὰς διαγωνίους τοῦ ἑνός, πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ἄλλου, βλέπομεν ὅτι (ΑΓ)=(Α΄Γ΄)×2, (ΑΔ)=(Α΄Δ΄)×2.

Τὰ τρίγωνα ὅθεν ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι (§ 107 Β΄.) ὅμοια· ὁμοίως τὰ ΑΓΔ καὶ Α΄Γ΄Δ΄, ΑΔΕ καὶ Α΄Δ΄Ε΄ εἶναι ὅμοια.

Ἄρα: Αἱ διαγώνιοι δύο ὁμοίων πολυγώνων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δύο ὁμολόγους κορυφὰς αὐτῶν, διαιροῦσι ταῦτα εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια ἓν πρὸς ἕν.

§ 109. Σχέσις μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων.—Ἔστωσαν δύο ὅμοια ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ αβγδ (Σχ. 87). Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι (ΑΒ)=(αβ)×3, (ΓΔ)=(γδ)×3, (ΒΓ)=(βγ)×3 καὶ (ΑΔ)=(αδ)×3. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν βάσιν ΑΒ καὶ τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἑκάστης φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, βλέπομεν ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ διαιρεῖται εἰς ἐννέα ὀρθογώνια ἴσα πρὸς τὸ αβγδ. Τὸ ἐμβαδὸν ὅθεν τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι ἐννεαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ αβγδ.



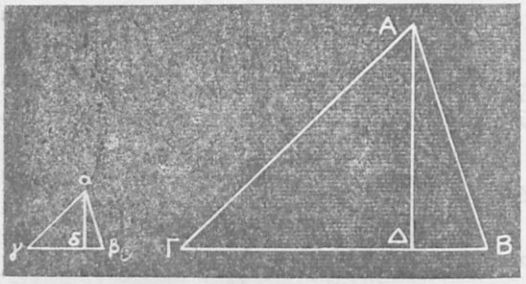
(Σχ. 87).

Ἔστωσαν ἐπίσης δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ (Σχ. 88) καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι (ΑΒ)=(αβ)×4, (ΒΓ)=(βγ)×4 καὶ (ΑΓ)=(αγ)×4. Ἐὰν φέρωμεν δύο ὁμόλογα ὕψη ΑΔ καὶ αδ καὶ συγκρίνωμεν ταῦτα πρὸς ἄλληλα, βλέπομεν ὅτι (ΑΔ)=(αδ)×4. Ἐὰν τώρα ἐνθυμηθῶμεν τὸν τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐμβαδοῦ παντὸς τριγώνου, ἔχομεν

$$(\text{ΑΒΓ})=\frac{(\text{ΒΓ})\times(\text{ΑΔ})}{2} \quad \text{ἢ} \quad (\text{ΑΒΓ})=\frac{(\beta\gamma)\times 4\times(\alpha\delta)\times 4}{2}$$

ἢ $(ΑΒΓ)=\frac{(βγ)\times(αδ)}{2}\times 16=(αδγ)\times 16$, ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ εἶναι δεκαεξαπλάσιον τοῦ αδγ.

Ἔστωσαν τέλος δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (Σχ. 86) καὶ ἔστω ὅτι $(ΑΒ)=(Α'Β')\times 2$, $(ΒΓ)=(Β'Γ')=2$ κτλ. Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ Α΄Β΄Γ΄, Α΄Γ΄Δ΄, Α΄Δ΄Ε΄ (§ 108), ἕπεται ὅτι:
$ΑΒΓ=(Α'Β'Γ')\times 4$, $(ΑΓΔ)=(Α'Γ'Δ')\times 4$ καὶ $(ΑΔΕ)=Α'Δ'Ε'\times 4$.
Προσθέτοντες ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι
$(ΑΒΓΔΕ)=(Α'Β'Γ'Δ'Ε')\times 4$.



(Σχ. 88).

Ἄρα: Ἐὰν ἐκ δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων Σ καὶ σ αἱ πλευραὶ τοῦ Σ εἶναι γινόμενα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τοῦ σ ἐπί τινα ἀριθμὸν λ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ Σ θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σ ἐπὶ $λ^2$.

Ἀσκήσεις: 167). Ἐὰν πᾶσαι αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 7, πόσας φορὰς τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ γίνεται μεγαλύτερον;

168). Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου εἶναι ἑξαπλασία ἀπὸ τὴν πλευρὰν ἄλλου, πόσας φορὰς ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου εἶναι μεγαλυτέρα ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἄλλου τετραγώνου;

169). Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 3, 4, καὶ 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει τετραπλάσιον ἐμβαδόν;

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΠΙ ΤΟΥ ΧΑΡΤΟΥ

§ **110. Διάγραμμα εὐθ. σχήματος.** Πολλάκις λαμβάνομεν ἀνάγκην νὰ ἀπεικονίσωμεν ἐπὶ χάρτου ἀγρὸν ἢ ἄμπελον ἢ οἱονδήποτε γήπεδον, τὸ ὁποῖον βεβαίως ὁ χάρτης δὲν δύναται νὰ περιλάβῃ μὲ τὰς πραγματικὰς αὐτοῦ διαστάσεις. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει γράφομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου σχῆμα ὅμοιον πρὸς τὸ ἀπεικονιζόμενον, τὸ ὁποῖον καλεῖται διάγραμμα ἐκείνου. Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη γίνεται, ὡς ἀκολούθως θέλομεν ἐκθέσει.

Σημ. Εἰς τὰ ἀκόλουθα θέλομεν σημειώνει μὲ κεφαλαῖα γράμματα πᾶν σχῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους θεωρούμενον, μὲ τὰ ἀντίστοιχα δὲ μικρὰ τὸ εἰς τὸν χάρτην ὅμοιόν του.

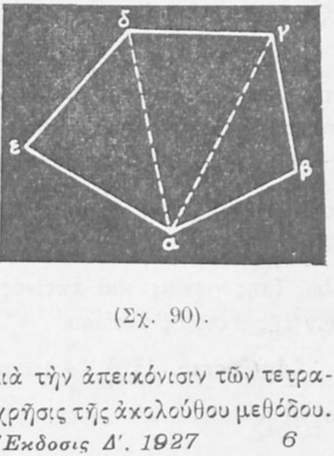
§ **111. Α΄. Ἀπεικόνισις τριγώνου.**—Ἡ συνηθεστέρα μέθοδος ἀπεικονίσεως τριγώνου εἶναι ἡ ἀκόλουθος. Κατασκευάζομεν τμήματα ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς ἓν ὡρισμένον ὑποπολλαπλάσιον (π. χ. πρὸς τὸ $\frac{1}{10000}$) τῶν πλευρῶν τοῦ τριγωνικοῦ ἀγροῦ ΑΒΓ. Ἔπειτα κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ (Σχ. 89), τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς τὰ τμήματα ταῦτα. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον τρίγωνον αβγ εἶναι ὅμοιον πρὸς πρὸς τὸ ΑΒΓ, (§ 107 Β΄.)

Σημ. Ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{10000}$, τῆς ὁποίας ἐγένετο προηγουμένως χρῆσις, καλεῖται κλῖμαξ ἢ σμίκρυνσις. Ὁ παρονομαστὴς τῆς κλίμακος δεικνύει πόσας φορὰς ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κείμενον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ εἰς τὸν χάρτην ὁμολόγου. Αἱ συνήθεις κλίμακες εἶναι $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ κτλ. καὶ αἱ διπλάσιαι αὐτῶν $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{1}{500}$ κτλ.

Ἀσκήσεις. 170). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{10000}$ ἀγρὸς ἔχων σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσι μήκη 60μ ἡ μία καὶ 80μ ἡ ἄλλη.

171). Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 3500 μ. ἡ μία, 1800 μ. ἡ ἄλλη καὶ 2000 μ. ἡ τρίτη. Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100000}$ καὶ νὰ μετρηθῶσιν αἱ γωνίαι αὐτοῦ διὰ τοῦ μοιρογνωμονίου.

172). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000000}$ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 50000 μ.



(Σχ. 90).

§ **112. Β΄. Ἀπεικόνισις οἱωνδήποτε εὐθ. σχημάτων.**—Διὰ τὴν ἀπεικόνισιν τῶν τετραπλεύρων καὶ πολυγώνων γίνεται συνήθως χρῆσις τῆς ἀκολούθου μεθόδου.

Μετροῦμεν ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ σχήματος ΑΒΓΔΕ καὶ ὅλας τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ μίαν κορυφὴν Α αὐτοῦ. Ἔπειτα κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ (Σχ. 90), τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὸ $\frac{1}{1000}$ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ ΑΓ. Ἔπειτα πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς αγ σχηματίζομεν τρίγωνον αγδ ἔχον πλευρὰς τὴν αγ καὶ δύο ἄλλας αδ καὶ γδ ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὸ $\frac{1}{1000}$ τῶν ΑΔ καὶ ΓΔ. Ὁμοίως τέλος κατασκευάζομεν καὶ τὸ τρίγωνον αεδ. Τὰ τρία ταῦτα τρίγωνα ἀποτελοῦσι τὸ πεντάγωνον αβγδε, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ.

Σημ. Ὅπως πᾶσα πλευρὰ ἢ διαγώνιος οὕτω καὶ πᾶν ἄλλο εὐθ. τμῆμα διαγράμματός τινος λαμβανόμενον τόσας φοράς, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ παρανομαστὴς τῆς κλίμακος, ἀποτελεῖ τὸ ἀντίστοιχον ἐπὶ τοῦ ἐδάφους εὐθ. τμῆμα.

Ἀσκήσεις. 173). Ἄμπελός τις ἔχει σχῆμα τραπεζοειδοῦς ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν (ΑΓ)=450 μ. ἡ πλευρὰ (ΑΒ)=350 μ. ἡ (ΒΓ)=180 μ. ἡ (ΔΓ)=250 μ. καὶ ἡ (ΔΑ)=260 μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς.

174). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μεγαλυτέρα βάσις ἔχει μῆκος 50 μ, ἡ μικροτέρα 35 μ, ἡ τρίτη πλευρὰ 12 μ. καὶ ἡ ὑπὸ ταύτης καὶ τῆς μεγαλυτέρας βάσεως σχηματιζομένη γωνία εἶναι ἴση πρὸς $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς γωνίας.

§ **113. Γ΄. Ἀπεικόνισις κύκλου.**—Κυκλικὸς ἀγρὸς κτλ. ἀπεικονίζεται διὰ κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι ὡρισμένον τι ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.

Ἐὰν π. χ. ἡ ἀκτὶς κυκλικοῦ ἁλωνίου εἶναι 30 μ, ἀπεικονίζομεν αὐτὸ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ διὰ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 0,030 μ.

Σημ. Καὶ τυχὸν κυκλικὸς τομεὺς ἀπεικονίζεται διὰ κυκλικοῦ τομέως ἴσης γωνίας καὶ ἀκτῖνος ἴσης πρὸς ὡρισμένον τι ὑποπολλαπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἐκείνου.

Ἀσκήσεις. 175). Ἀπεικονίσατε ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ κύκλον ἀκτῖνος 8 μ.

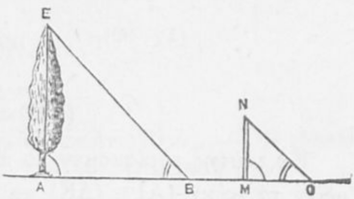
176). Ἀπεικονίσατε ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ κυκλικὸν τομέα 60^0 καὶ ἀκτῖνος 5 μ.

177). Ἀπεικονίσατε τῇ βοηθείᾳ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$ κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχον πλευρὰν 4 μ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΟΜΟΙΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

§ **114. Πρόβλημα** Α΄.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς αὐτοῦ.

Λύσις. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἰς τὸ ὁποῖον ὑψοῦται τὸ δένδρον καὶ τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὁριζόντιον, ἐμπήγομεν κατακορύφως ῥάβδον τινὰ ΜΝ, ἡ ὁποία ῥίπτει σκιὰν ΜΟ (Σχ, 91), τῆς ὁποίας μετροῦμεν τὸ μῆκος.



(Σχ. 91).

Ἐπειδὴ αἱ ἡλιακαὶ ἀκτῖνες ΕΒ καὶ ΝΟ θεωροῦνται παράλληλοι, ἕνεκα τῆς μεγάλης ἀποστάσεως τοῦ ἡλίου, αἱ γωνίαι Β καὶ Ο εἶναι ἴσαι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ Α=Μ, ἕπεται ὅτι καὶ Ε=Ν· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΜΝΟ εἶναι ὅμοια (§ 107 Α΄). Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ ὕψος (ΑΕ) τοῦ δένδρου καὶ ἡ σκιὰ αὐτοῦ (ΑΒ) εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ μήκη (ΜΝ) καὶ (ΜΟ). Ἐὰν δηλ. εἶναι (ΑΒ)=(ΜΟ)×ρ (1), θὰ εἶναι καὶ (ΑΕ)=(ΜΝ)×ρ (2). Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος (1) προκύπτει εὐκόλως ὅτι $\rho=\frac{(AB)}{(MO)}$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται

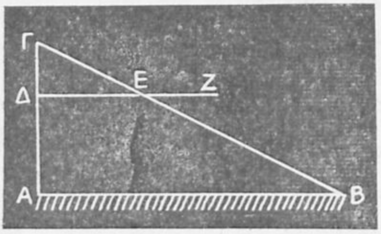
$$(AE)=(MN)\times\frac{(AB)}{(MO)} \text{ ἢ } (AE)=(AB)\times\frac{(MN)}{(MO)} \qquad (3)$$

Ἂν π. χ. (ΑΒ)=8μ, (ΜΟ)=1,60 μ. καὶ (ΜΝ)=2 μ. εὑρίσκομεν ὅτι $(AE)=8\times\frac{2}{1,60}=10$ μ.

Σημ. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον εὑρίσκομεν καὶ τὸ ὕψος κατακορύφου πύργου ἢ κωδωνοστασίου.

§ **115. Πρόβλημα Β΄.**—Νὰ εὕρωμεν τὸ πλάτος ποταμοῦ χωρὶς νὰ μεταβῶμεν εἰς τὴν ἀπέναντι ὄχθην.

Λύσις. Εἰς ἓν σημεῖον Α (Σχ. 92) τῆς ὄχθης, εἰς τὴν ὁποίαν ἱστάμεθα, στηρίζομεν κατακορύφως κανόνα ΑΓ, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος εἶναι γνωστὸν καὶ κατά τι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀνάστημα ἡμῶν. Κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος τούτου μετακινοῦμεν καθέτως ἐπ' αὐτὸν ἄλλον κανόνα ΔΖ, ὁ ὁποῖος φέρει εἰς γνωστὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἀπόστασιν μίαν ὀπήν Ε. Ἀφ' οὗ θέσωμεν τόν ὀφθαλμόν μας εἰς τὸ Γ μετακινοῦμεν τὸν κανόνα ΔΖ, μέχρις ὅτου ἐπιτύχωμεν τοιαύτην αὐτοῦ θέσιν, ὥστε νὰ βλέπωμεν διὰ μέσου τῆς ὀπῆς Ε σημεῖον τι Β τῆς ἀπέναντι ὄχθης.



(Σχ. 92).

Ἐὰν νοηθῶσιν καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΕΒ, σχηματίζωνται δύο τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΑΒ ὅμοια (§ 107 Α΄), ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτουσιν αἱ ἰσότητες

$$(\mathrm{A\Gamma})=(\Gamma\Delta)\times\rho. \quad (1)$$

$$(\mathrm{AB})=(\Delta\mathrm{E})\times\rho. \quad (2)$$

Ἐπειδὴ δε ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι $\rho=\frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\Delta\Gamma)}$, ἡ (2) γίνεται.

$$(\mathrm{AB})=(\Delta\mathrm{E})\times\frac{(\mathrm{A\Gamma})}{(\Gamma\Delta)} \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ πλάτος (ΑΒ) τοῦ ποταμοῦ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ μήκη (ΑΓ), (ΔΕ) καὶ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τοῦ εὐθ. τμήματος ΔΓ. Ἐὰν π. χ. εἶναι (ΑΓ) = 1,40 μ, (ΔΕ)=1 μ. καὶ (ΓΔ)= 0,40 εὑρίσκομεν ὅτι $(\mathrm{AB})=1$ μ. $\times\frac{1{,}40}{0{,}40}=3{,}5$ μ.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

178). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ ὀρθογώνιον ἔχον βάσιν 700 μ. καὶ ὕψος 200 μ. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαγράμματος νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

179). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{50}$ τετραγωνικὴ ἄμπελος, τῆς ὁποίας ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 12,5 μ.

180). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ κανονικὸν ἑξάγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 35 μ.

181). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ ἔχει μῆκος 60 μ.

182). Ὁ κύκλος Κ (Σχ. 29) ἀπεικονίζει ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$ ἁλώνιον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἁλωνίου τούτου.

183). Τραπεζίου ἡ μία βάσις ἔχει μῆκος 140 μ. ἡ ἄλλη 35 μ καὶ ἡ μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν κάθετος οὖσα πρὸς τὰς βάσεις ἔχει μῆκος 32 μ. Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$.

184). Τὸ σχῆμα αβγ (Σχ. 89) ἀπεικονίζει ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{500}$ ἄμπελον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς. 8055

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

§ **116. Θέσεις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον.** — Ἡ εὐθεῖα ΓΔ (Σχ. 1) κεῖται ὅλη εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ. Ἡ εὐθεῖα ΕΘ (Σχ. 1) οὐδέποτε συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, ὅσον δήποτε καὶ ἂν προεκταθῶσιν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον. Αὕτη καλεῖται παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ.

Γενικῶς : Μία εὐθεῖα λέγεται παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδέποτε συναντῶνται ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν.

Ἡ εὐθεῖα ΕΒ (Σχ. 1) διαπερᾷ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ καὶ ἔχει μετ᾽ αὐτοῦ ἓν κοινὸν σημεῖον τὸ Β Περὶ ταύτης λέγομεν ὅτι τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

Κατὰ ταῦτα αἱ διάφοροι θέσεις, τὰς ὁποίας μία εὐθεῖα δύναται νὰ λάβῃ πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι τρεῖς ;

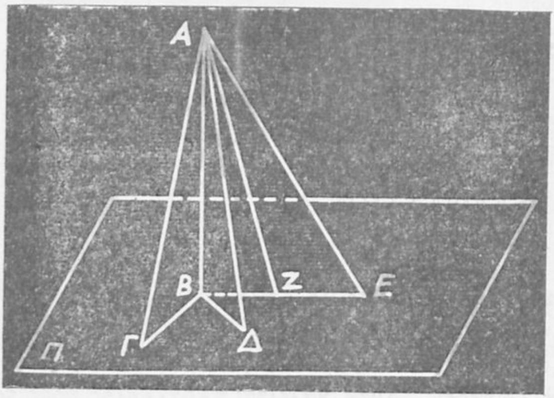
α΄) Ἡ εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, β΄) ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ γ΄) ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

§ **117. Εὐθεῖαι κάθετοι καὶ πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον.**—Ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 93) εἶναι κάθετος πρὸς τὰς εὐθείας ΒΓ, ΒΔ, ΒΕ τοῦ ἐπιπέδου Π καθὼς καὶ πρὸς πᾶσαν ἄλλην εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν διὰ τοῦ Β δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Αὕτη καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ὁμοίως ἡ ΓΖ (Σχ. 1) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ.

Γενικῶς : Μία εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν εἶναι κάθετος πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ἡ εὐθεῖα ΑΓ (Σχ. 93) τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό. Αὕτη λέγεται πλαγία πρὸς τὸ Π. Ὁμοίως αἱ ΑΔ, ΑΖ, ΑΕ εἶναι πλάγιαι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 93).



(Σχ. 93).

Γενικῶς : Πᾶσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος πρὸς αὐτό, καλεῖται πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.

Τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπιπέδου καὶ εὐθείας τεμνούσης αὐτὸ (καθέτως ἢ πλαγίως) καλεῖται ποὺς τῆς εὐθείας ταύτης.

Ἀσκήσεις. 185) Στηρίξατε ἐπὶ τοῦ μελανοπίνακος τὸν γνώμονα, οὕτως ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτόν.

186). Τείνατε νῆμα παραλλήλως πρὸς τὸ πάτωμα αἰθούσης καὶ ἔπειτα παραλλήλως πρός τινα τοῖχον αὐτῆς.

§ 118. Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ πλαγίων πρὸς ἐπίπεδον.—Ἡ ἐκ σημείου πρὸς ἐπίπεδον ἀγομένη κάθετος καὶ πλάγιαι ἔχουσι τὰς ἐν § 20 ἐκτεθείσας ἰδιότητας, ἤτοι ;

Α΄. Ἀπὸ ἕκαστον σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ ἄγεται μία μόνον κάθετος πρὸς αὐτό.

Β΄. Ἐὰν ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου, ἀχθῇ ἡ κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ τυχοῦσα πλαγία πρὸς αὐτό, τὸ τμῆμα τῆς καθέτου, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον καὶ τὸν πόδα αὐτῆς, εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον τμῆμα τῆς πλαγίας.— Οὕτως τὸ τμῆμα ΑΒ (Σχ. 93) εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὰ τμήματα ΑΓ, ΑΔ, ΑΖ, ΑΕ.

Β΄. Ἂν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι.—Οὕτως ἂν ΒΓ=ΒΖ, θὰ εἶναι καὶ ΑΓ=ΑΖ (Σχ. 93).

Γ΄. Ἂν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἀπέχωσιν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ ποὺς ἀπέχει περισσότερον.—Οὕτως, ἂν εἶναι ΒΕ > ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ ΑΕ > ΑΓ.

§ **119. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον.**—Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον καλεῖται τὸ εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦτο καὶ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία φέρεται ἐξ αὐτοῦ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

§ **120. Θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα.**—Τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ (Σχ. 1) οὐδέποτε συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσι. Ταῦτα καλοῦνται παράλληλα ἐπίπεδα. Ὁμοίως τὰ ἐπίπεδα ΒΓΖΕ καὶ ΑΔΗΘ, (Σχ. 1), οἱ ἀπέναντι τοῖχοι αἰθούσης κτλ. εἶναι παράλληλα ἐπίπεδα.

Γενικῶς: Δύο ἐπίπεδα λέγονται παράλληλα, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσῳ καὶ ἂν προεκταθῶσιν.

Ἑκάστη ἀπὸ τὰς εὐθείας ΒΕ, ΓΖ, ΔΗ, ΘΑ (Σχ. 1) εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὰ δύο παράλληλα ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ. Τὰ δὲ μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων περιεχόμενα τμήματα αὐτῶν εἶναι πάντα ἴσα, ὡς εὐκόλως διὰ τοῦ διαβήτου πειθόμεθα. Καλεῖται δὲ ἕκαστον τούτων ἀπόστασις τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων.

Γενικῶς: Ἀπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται τὸ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενον τμῆμα τυχούσης κοινῆς αὐτῶν καθέτου.

Τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ καὶ ΑΒΕΘ (Σχ. 1) τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Ὥστε: Δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα ἢ τέμνονται. Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕΘ, τὸ ὁποῖον (Σχ. 1) περιέχει τὴν εὐθεῖαν ΒΕ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ, καλεῖται κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ.

Γενικῶς: Ἓν ἐπίπεδον καλεῖται κάθετον ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἐὰν περιέχῃ μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

Τὸ ἐπίπεδον ΚΔΜ (Σχ. 1) τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΔΜΝ καὶ δὲν εἶναι κάθετον πρὸς αὐτό. Τὸ ἐπίπεδον ΚΔΜ καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΔΜΝ. Ὁμοίως ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελεῖται ἡ στέγη οἰκίας, εἶναι κεκλιμένον πρὸς τὸ πάτωμα.

Γενικῶς: Ἐὰν ἓν ἐπίπεδον δὲν εἶναι παράλληλον, οὔτε κάθετον πρὸς ἄλλο, καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρὸς αὐτό.

Ἀσκήσεις. 187). Τοποθετήσατε τεμάχιον χαρτονίου παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος.

188). Τοποθετήσατε τὸ αὐτὸ τεμάχιον καθέτως καὶ ἔπειτα πλαγίως πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος.

189). Μετρήσατε τὴν ἀπόστασιν δύο ἀπέναντι τοίχων τῆς αἰθούσης τῆς διδασκαλίας.

§ **121. Πολύεδρα.**—Τὸ σῶμα ΔΕ (Σχ. 1) περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ ἐπίπεδα. Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται πολύεδρον. Τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓΔ, ΒΓΖΕ, ΑΒΕΘ, ΑΔΗΘ, ΗΔΓΖ καὶ ΘΕΖΗ, ἀπὸ τὰ ὁποία περικλείεται, καλοῦνται ἕδραι αὐτοῦ. Αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΒΓ κτλ. τῶν ἑδρῶν τούτων καλοῦνται ἀκμαὶ τοῦ πολυέδρου τούτου, αἱ δὲ κορυφαὶ Α, Β, Γ, Δ κτλ. τῶν ἑδρῶν καλοῦνται κορυφαὶ τοῦ αὐτοῦ πολυέδρου.

Γενικῶς: Πολύεδρον καλεῖται πᾶν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη ἀπὸ ἐπίπεδα.

Ἕδραι πολυέδρου καλοῦνται τὰ ἐπίπεδα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα περικλείεται τοῦτο.

Ἀκμαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Κορυφαὶ πολυέδρου καλοῦνται αἱ κορυφαὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Τὰ πολύεδρα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν αὐτῶν διαιροῦνται εἰς τετράεδρα, πεντάεδρα, ἑξάεδρα κτλ.

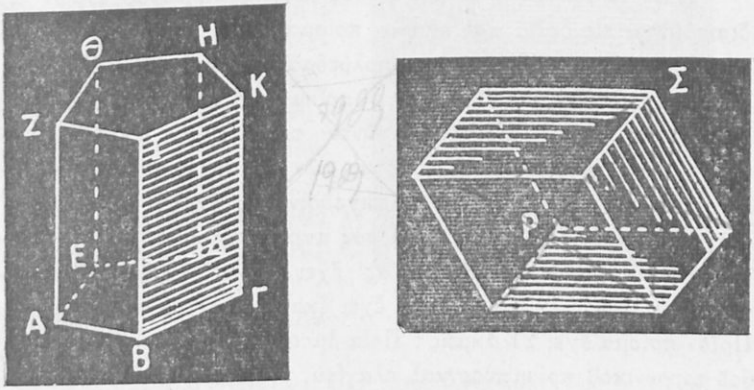
ΔΙΑΦΟΡΑ ΕΙΔΗ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

I. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

§ **122. Πρίσματα.**—Τὸ πολύεδρον ΑΚ (Σχ. 94) ἔχει δύο ἕδρας ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΙΚΗΘ ἴσας καὶ παραλλήλους, ἐν ᾧ αἱ ἄλλαι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι παραλληλόγραμμα. Τοῦτο καλεῖται πρίσμα.

Αἱ ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΙΚΗΘ αὐτοῦ καλοῦνται βάσεις, ἡ ἀπόστασις ΑΖ τῶν βάσεων τούτων καλεῖται ὕψος αὐτοῦ, αἱ δὲ λοιπαὶ ἕδραι ΑΒΙΖ, ΒΙΚΓ, ΓΔΗΚ, ΔΕΘΗ, ΑΕΘΖ καλοῦνται παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ.

Ὁμοίως τὸ πολύεδρον ΑΖ (Σχ. 1) καὶ τὸ ΡΣ (Σχ. 94) εἶναι πρίσματα.



(Σχ. 94).

Γενικῶς: Πρίσμα καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου δύο μὲν ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ ἄλλαι παραλληλόγραμμα.

Βάσεις πρίσματος καλοῦνται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ.

Ὕψος πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Παράπλευροι ἕδραι πρίσματος καλοῦνται αἱ ἄλλαι (πλὴν τῶν βάσεων) ἕδραι αὐτοῦ.

Τὸ πρίσμα ΡΣ (Σχ. 94), τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις τετράπλευρα, καλεῖται τετραγωνικὸν πρίσμα. Τὸ πρίσμα ΑΚ (Σχ. 94), τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις πεντάγωνα, καλεῖται πενταγωνικὸν πρίσμα. Ἐὰν αἱ βάσεις πρίσματος εἶναι τρίγωνα, τοῦτο καλεῖται τριγωνικὸν πρίσμα.

Ὥστε τὰ πρίσματα ἐκ τοῦ εἴδους τῶν βάσεων αὐτῶν διαιροῦνται εἰς τριγωνικά, τετραγωνικά, πενταγωνικά, ἑξαγωνικὰ κτλ. πρίσματα.

Τοῦ πρίσματος ΑΚ (Σχ. 94) αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια, καλεῖται δὲ τοῦτο ὀρθὸν πρίσμα

Τοῦ πρίσματος ΡΣ (Σχ. 94) αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ρόμβοι ἢ ρομβοειδῆ· τοῦτο καλεῖται πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρίσμα.

Πλάγιον πρίσμα καλεῖται ἐπίσης καὶ πᾶν ἄλλο πρίσμα, τοῦ ὁποίου τινὲς παράπλευροι ἕδραι εἶναι ρόμβοι ἢ ρομβοειδῆ.

Γενικῶς: Ὀρθὸν πρίσμα καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

Πλάγιον ἢ κεκλιμένον πρίσμα καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου ὅλαι ἢ τινὲς τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι ῥόμβοι ἢ ῥομβοειδῆ.

Ὥστε τὰ πρίσματα ἐκ τοῦ εἴδους τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῶν διαιροῦνται εἰς ὀρθὰ καί πλάγια πρίσματα.

Ἐρωτήσεις : Τί καλεῖται πολύεδρον ; τί καλοῦνται ἕδραι, ἀκμαί, κορυφαὶ πολυέδρου ; τί καλεῖται πρίσμα ; τί καλοῦνται βάσεις καὶ τί ὕψος πρίσματος ; Εἰς τί διαιροῦνται τὰ πρίσματα α΄) ἐκ τοῦ εἴδους τῶν βάσεων ; καὶ β΄) ἐκ τοῦ εἴδους τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν αὐτῶν ; Πόσαι παράπλευροι ἕδραι ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην πλευρὰν τῆς μιᾶς τῶν βάσεων πρίσματος ; Πόσας παραπλεύρους ἕδρας ἔχει ἕκαστον τριγωνικὸν πρίσμα ; Πόσας ἕδρας ἔχει ἐν ὅλῳ ἕκαστον ἑξαγωνικὸν πρίσμα ; Πόσας ἐν ὅλῳ ἀκμὰς ἔχει ἕκαστον τετραγωνικὸν πρίσμα ; Ποῖον πρίσμα ἔχει 21 ἀκμάς ; Ποία ὁμοιότης ὑφίσταται μεταξὺ α΄) ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ πλαγίου τοιούτου ; β΄) ὀρθοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος καὶ ὀρθοῦ τριγωνικοῦ ; Ποία διαφορὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῶν αὐτῶν σωμάτων ;

§ **123. Παραλληλεπίπεδα.** — Τοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος ΑΖ (Σχ. 1) αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα. Τοῦτο καλεῖται παραλληλεπίπεδον. Ὁμοίως τὸ τετραγωνικὸν πρίσμα ΡΣ (Σχ. 94) εἶναι παραλληλεπίπεδον.

Γενικῶς : Παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμα (§ 122).

Ἀπέναντι ἑκάστης ἕδρας παραλληλεπιπέδου κεῖται ἄλλη ἴση καὶ παράλληλος πρὸς αὐτήν. Κατ᾽ ἀκολουθίαν δύνανται δύο τυχοῦσαι ἀπέναντι ἕδραι παραλληλεπιπέδου νὰ ληφθῶσιν ὡς βάσεις αὐτοῦ.

Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΖ (Σχ. 1) ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια. Τοῦτο καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

Γενικῶς : Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια.

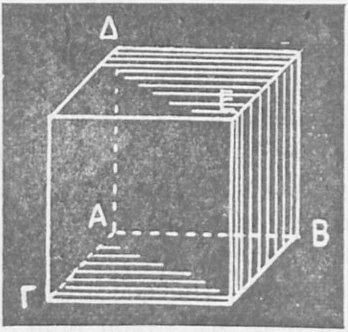
Αἱ ἀκμαὶ ΑΘ, ΑΒ, ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΖ (Σχ. 1), συναντῶνται ὅλαι εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν Α αὐτοῦ. Αὗται λέγονται διαστάσεις αὐτοῦ :

Γενικῶς: Διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καλοῦνται τρεῖς ἀκμαί, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν αὐτοῦ.

Τῶν τριῶν διαστάσεων παραλληλεπιπέδου ἡ μὲν μία καλεῖται μῆκος, ἡ ἄλλη πλάτος καὶ ἡ τρίτη εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΕ (Σχ. 95) ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα. Τοῦτο καλεῖται κύβος.

Ὥστε: Κύβος καλεῖται πᾶν παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.



(Σχ. 95).

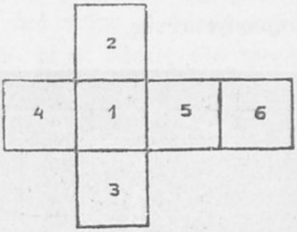
Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΑΓ=ΑΔ (Σχ. 95) κατανοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

α΄. Αἱ ἀκμαὶ κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας

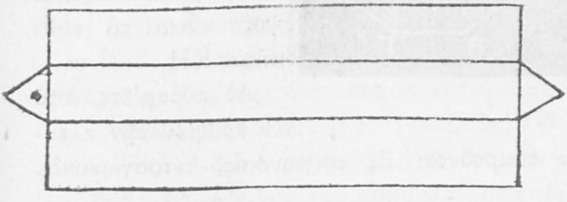
β΄. Αἱ ἕδραι κύβου εἶναι ὅλαι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται παραλληλεπίπεδον; Ὑπάρχουσι τετραγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι παραλληλεπίπεδα; Τί καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον; τί καλοῦνται διαστάσεις ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου; Τί καλεῖται κύβος; Ὁ κύβος εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον πρίσμα; Πόσας ἕδρας ἔχει ἕκαστον παραλληλεπίπεδον; Πόσας ἀκμὰς καὶ πόσας κορυφὰς ἔχει ὁ κύβος;

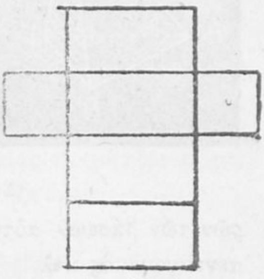
Ἐφαρμογή: Τῇ βοηθείᾳ τῶν σχεδίων τοῦ σχήμ. 96 κατασκευάσατε ἐκ χαρτονίου κύβον, ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα καὶ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.



(Σχ. 96 α΄)



(Σχ. 96 β΄).



(Σχ. 96 γ΄).

2. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

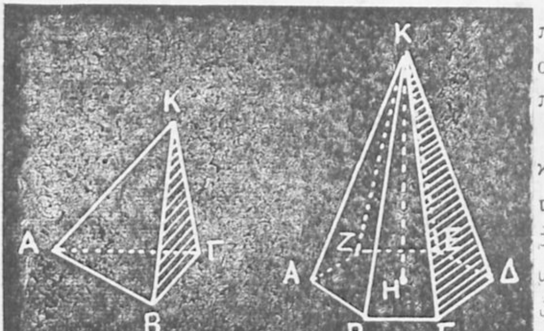
§ **124. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα πυραμίδος.** – Τοῦ πολυέδρου Κ. ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 97) ἡ μὲν ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἑξάγωνον, αἱ δὲ ἄλλαι ἕδραι εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς ἑξαγωνικῆς αὐτοῦ ἕδρας· ἕκαστον δὲ ἀπὸ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχει ὡς βάσιν μίαν πλευρὰν τοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ. Τὸ πολύεδρον τοῦτο καλεῖται πυραμίς. Ἡ κοινὴ κορυφὴ Κ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν καλεῖται κορυφὴ τῆς πυραμίδος ταύτης. Τὸ ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει τὴν κορυφήν, καλεῖται βάσις αὐτῆς.

Καὶ τὸ πολύεδρον Κ.ΑΒΓ (Σχ. 97) εἶναι πυραμίς.

Γενικῶς: Πυραμὶς καλεῖται πᾶν πολύεδρον, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶναι τυχὸν εὐθ. σχῆμα, αἱ δὲ ἄλλαι εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις μὲν τὰς πλευρὰς τοῦ εὐθυγράμμου τούτου σχήματος, κορυφὴν δὲ κοινὴν σημεῖόν τι κείμενον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ εὐθ. σχήματος.

Κορυφὴ πυραμίδος καλεῖται τὸ κονὸν σημεῖον τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

Βάσις πυραμίδος καλεῖται ἡ ἕδρα, ἡ ὁποία δὲν περιέχει τὴν κορυφὴν αὐτῆς.



(Σχ. 97).

Παράπλευροι ἕδραι πυραμίδος καλοῦνται αἱ ἄλλαι ἕδραι αὐτῆς πλὴν τῆς βάσεως.

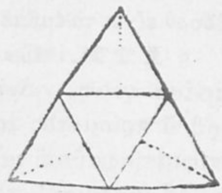
Ὕψος πυραμίδος καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τὴν βάσιν αὐτῆς. Τῆς πυραμίδος π.χ. Κ.ΑΒΓΔΕΖ ὕψος εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΗ.

Αἱ πυραμίδες ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτῶν διαιροῦνται εἰς τριγωνικάς, τετραγωνικάς, πενταγωνικὰς κτλ.

Εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ὡς βάσις λαμβάνεται τυχοῦσα ἕδρα αὐτῆς.

Ἐρωτήσεις: Τί καλεῖται πυραμίς; τί καλεῖται κορυφή, βάσις καὶ ὕψος πυραμίδος; Εἰς τί διαιροῦνται αἱ πυραμίδες ἐκ τοῦ εἴδους τῶν βάσεων αὐτῶν; Πόσαι παράπλευροι ἕδραι πυραμίδος ἀντιστοιχοῦσιν εἰς ἑκάστην πλευρὰν τῆς βάσεως αὐτῆς; Πόσας ἕδρας ἔχει ἐν ὅλῳ ἑκάστη ἑξαγωνικὴ πυραμίς; Πόσας ἀκμὰς ἔχει ἑκάστη πενταγωνικὴ πυραμίς;

Ἐφαρμογή: Τῇ βοηθείᾳ τοῦ σχεδίου 98 κατασκευάσατε ἐκ χονδροῦ χάρτου τριγωνικὴν πυραμίδα.



(Σχ. 98).

§ **125. Κανονικαὶ πυραμίδες.**— Τῆς πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 97) ἡ βάσις ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικὸν πολύγωνον, ὁ δὲ ποὺς Η τοῦ ὕψους αὐτῆς ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως ταύτης.

Ἡ πυραμὶς αὕτη καλεῖται κανονικὴ πυραμίς, τὸ δὲ σημεῖον Η καλεῖται κέντρον τῆς βάσεως.

Γενικῶς: Κανονικὴ πυραμὶς καλεῖται πᾶσα πυραμίς, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν κανονικὸν εὐθύγραμμον σχῆμα καὶ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς βάσεως.

Αἱ ἀκμαὶ κανονικῆς πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἶναι ὅλαι ἴσαι (§ 118 Β'). Διὰ τοῦτο αἱ παράπλευροι αὐτῆς ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἰσοσκελῆ· ἐπειδὴ δὲ αἱ βάσεις τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἴσαι, ἔπειτα ὅτι (§ 72 Γ') αἱ παράπλευροι αὗται ἕδραι εἶναι ὅλαι ἴσαι.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

§ 126. Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος. Ἔστω ΑΚ (Σχ. 94) ὀρθὸν πρίσμα. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι τὸ ὕψος αὐτοῦ ΑΖ εἶναι 5 μ. καὶ ὅτι ΑΒ=2 μ. (ΒΓ) =3 μ. (ΓΔ)=1 μ. (ΔΕ)=2,5 μ. καὶ (ΑΕ)=1,5 μ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας ΑΒΙΖ εἶναι 2×5 τ. μ., τῆς ΒΓΚΙ εἶναι 3×5 τ. μ., τῆς ΓΔΗΚ εἶναι 1×5 τ.μ. τῆς ΔΕΘΗ εἶναι $2,5\times5$ τ. μ. καὶ τῆς ΑΕΘΖ εἶναι $1,5\times5$ τ.μ. Τῆς ὅλης ὅθεν παραπλεύρου ἐπιφανείας τὸ ἐμβαδὸν εἶναι,

$$(2\times5)+(3\times5)+(1\times5)+(2,5\times5)+(1,5\times5).$$

Ἢ $(2+3+1+2,5+1,5)\times5=50$ τ. μ.

Ἄρα: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 190). Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 2,5 μ. καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς βάσεις αὐτοῦ εἶναι τρίγωνον ἰσόπλευρον ἔχον πλευρὰν 2 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ; (ἀπ. 15 τ. μ.)

191). Στήλη ἔχει ὕψος 4 μ. καὶ βάσιν τετράγωνον, πλευρᾶς 0,50μ· Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς; (ἀπ. 8τ.μ.)

§ **127. Ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος.** Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἀρκεῖ προφανῶς εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων.

Ἀσκήσεις. 192). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς στήλης, περὶ ἧς γίνεται λόγος ἐν τῇ ἀσκήσει 191(ἀπ. 8,50 τ.μ.)·

193). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ ἐν τῇ ἀσκήσει 190 ἀναφερομένου ὀρθοῦ πρίσματος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ὕψος ἑκατέρας τῶν βάσεων αὐτοῦ εἶναι 1,732 μ.

194). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κύβου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 0,40. (ἀπ. 0,96 τ. μ.)

§ **128. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας πυραμίδων.** – Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας πυραμίδος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδὰ ὅλων τῶν ἑδρῶν αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἀπὸ τὰς ἴσας παραπλεύρους ἕδρας αὐτῆς καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν παραπλεύρων τούτων ἑδρῶν, εἰς δὲ τὸ οὕτω προκύπτον γινόμενον προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος.

Ἀσκήσεις. 195). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,60 μ., αἱ δὲ ἀποστάσεις τῆς κορυφῆς ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς βάσεως εἶναι πᾶσαι ἴσαι πρὸς 1 μ. (ἀπ. 1, 56 τ. μ.).

196). Πυραμὶς τριγωνικὴ ἔχει βάσιν τρίγωνον ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 2 μ. ἡ μέν, 3 μ. ἡ ἄλλη καὶ 3,60555 μ. ἡ ὑποτείνουσα. Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας τῆς βάσεως ἀγομένη ἀκμὴ αὐτῆς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ ἴση πρὸς 1,5 μ. ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς πυραμίδος ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τῆς βάσεως εἶναι 5,02 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ταύτης; (ἀπ. 15,7999 τ.μ.).

197). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ κορυφὴ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς βάσεως 3,5 μ. ἡ δὲ βάσις εἶναι τετράγωνον ἔχων περίμετρον 8,60 μ.

198). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 4 μ, ἡ δὲ κορυφὴ ἀπέχει ἀπὸ ἑκάστης πλευρᾶς τῆς βάσεως 3,4641 μ.

§ 129. Μονάδες ὄγκου. Πρὸς μέτρησιν τοῦ ὄγκου (§ 1) σώματός τινος συγκρίνεται οὗτος πρὸς ὡρισμένον καὶ γνωστὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν μονάδα. Διὰ τῆς συγκρίσεως ταύτης εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ὁ μετρηθεὶς ὄγκος.

Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος φανερώνει τὸ πλῆθος τοῦτο τῶν μονάδων ἢ καὶ μερῶν αὐτῆς καλεῖται καὶ αὐτὸς ὄγκος τοῦ σώματος.

Αἱ διάφοροι μονάδες, μὲ τὰς ὁποίας μετροῦμεν τοὺς ὄγκους τῶν σωμάτων, καλοῦνται μονάδες ὄγκου.

Αἱ συνήθεις μονάδες ὄγκου εἶναι αἱ ἑξῆς:

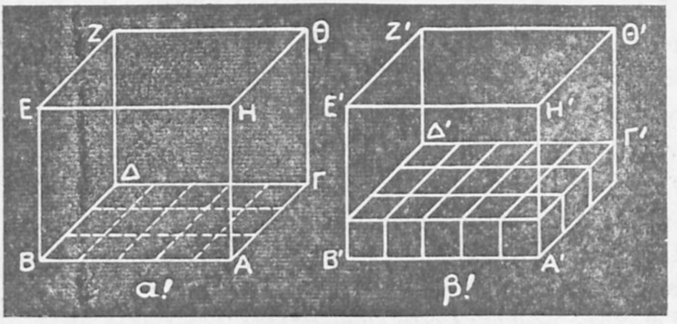
Α΄. Τὸ κυβικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι κύβος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀλμὴ ἰσοῦται πρὸς ἓν μέτρον

Β΄. Τὰ ὑποπολλαπλάσια τοῦ κυβικοῦ μέτρου, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ἀκόλουθα: κυβικὴ παλάμη $= \frac{1}{1000}$ κ. μ.

κυβικὸς δάκτυλος $= \frac{1}{1000}$ κ. π. $= \frac{1}{1000000}$ κ. μ.

κυβικὴ γραμμὴ $= \frac{1}{1000}$ κ. δ. $= \frac{1}{1000000}$ κ. π. $= \frac{1}{1000000000}$ κ. μ.

§ 130. Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. —Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΒΘ (Σχ. 99). Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν τὰς τρεῖς αὐτοῦ διαστάσεις (§ 123) καὶ ἔστω ὅτι τὸ μὲν μῆκος ΒΑ αὐτοῦ εἶναι 5 μ. τὸ πλάτος ΒΔ εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ὕψος ΒΕ εἶναι 4 μ. Ἐὰν νοήσωμεν τὸ μῆκος ΒΑ διῃρημένον εἰς 5 ἴσα μέρη καὶ τὸ πλάτος ΒΔ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἀπὸ δὲ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας νοήσωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν ἄλλην, διαιρεῖται ἡ βάσις εἰς $5 \times 3 = 15$ τετρ. μέτρα. Ἐὰν τώρα φαντασθῶμεν ὅτι ἐπὶ ἑκάστου τῶν τετραγωνικῶν τούτων μέτρων τοποθετεῖται ἀνὰ ἓν κυβικὸν μέτρον, θέλει ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν 15 τούτων κυβικῶν μέτρων τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Α′Δ′ (Σχ. 99 β′), τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος ἑνὸς μέτρου. Ἐπειδὴ τὸ ὕψος Β′Ε′ ἰσοῦται πρὸς 4 μ. εἶναι εὐνόητον ὅτι τὸ ὀρθ. παραλληλεπίπεδον Β′Θ′ περιέχει ἀκριβῶς 4 ὀρθ. παραλληλεπίπεδα ὡς τὸ Α′Δ′ τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τὸ ἄλλο μέχρι τῆς ἕδρας Ε′Η′Θ′Ζ′. Τὸ κυβικὸν ἄρα μέτρον χωρεῖ ἐντὸς τοῦ ΒΘ ἀκριβῶς 15×4 ἢ 5×3×4 φοράς, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ ΒΘ εἶναι 5×3×4=60 κυβ. μέτρα.



(Σχ. 99).

Ἐὰν ὀρθ. παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι 2,35 μ. = 235 δ ἡ μία, 2,40 μ. = 240 δ ἡ ἄλλη καὶ 5 μ. = 500 δ ἡ τρίτη, ὁ ὄγκος εἶναι 135×340×500 κυβ. δάκτυλοι ἢ

$$\frac{135\times340\times500}{1000000} = 1{,}35\times3{,}40\times5 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

Ἄρα: Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι ὁ ὄγκος οὗτος ἐκφράζεται εἰς κυβικὰ μέτρα, κυβ. παλάμας ἢ κυβ. δακτύλους, καθ᾽ ὅσον αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ἐκφράζονται εἰς μέτρα, παλάμας ἢ δακτύλους.

§ **131. Ὄγκος κύβου.**—Ἐπειδὴ ὁ κύβος εἶναι ὀρθ. παραλληλεπίπεδον, ἰσχύει καὶ διὰ τὸν κύβον ἡ προηγουμένη πρότασις. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι ἡ πρότασις αὕτη διατυποῦται οὕτω.

Ὁ ὄγκος κύβου εἶναι γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων πρὸς τὸ μῆκος τῆς ἀκμῆς αὐτοῦ.

Σημ. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων πρός τινα ἀριθμὸν α καλεῖται καὶ κύβος τοῦ α. Ὁ κύβος τοῦ α σημειοῦται οὕτω $α^3$.

Ἀσκήσεις. 199). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος αἰθούσης, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 6 μ. πλάτος 5 μ. καὶ ὕψος 4 μ. π. (ἀπ. 120 κυβ. μέτρα).

200). Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ ἔχει μῆκος 2,30 μ ; (ἀπ. 12,087 κ. μ).

201). Πλατεῖα τετραγωνικὴ ἔχουσα πλευρὰν 80 μέτρων πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ σκίρα εἰς ὕψος 0,16 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῶν σκίρων, τὰ ὁποῖα χρειάζονται ; (ἀπ. 1024 κ. μ.).

202). Ὁ ὄγκος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου εἶναι 74,06 κ. μ. ἡ δὲ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 4,6 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ ; (ἀπ. 3,5 μ.).

203). Κιβώτιον ἐσωτερικοῦ μήκους 1 μέτρου, πλάτους 0,20 μ. καὶ ὕψους 0,70 μ εἶναι πλῆρες σάπωνος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλὰξ ἔχει μῆκος 0,14 μ. πλάτος δὲ καὶ ὕψος ἀνὰ 0,05 μ. Πόσας τοιαύτας πλάκας περιέχει ; (400).

204). Πόσα κοιλὰ σίτου χωρεῖ ἀποθήκη σχήματος ὀρθ. παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος 6 μ. πλάτος 4 μ. καὶ ὕψος 3 μ. (ἀπ. 720 κ.).

Σημ. Κοιλὸν εἶναι τὸ δέκατον τοῦ κυβ. μέτρου.

§ **132. Μονάδες βάρους.**—Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωρίζομεν ὅτι μονάδες βάρους, τὰς ὁποίας ὅλα τὰ πεπολιτισμένα ἔθνη παρεδέχθησαν, εἶναι τὸ γραμμάριον, χιλιόγραμμον καὶ ὁ τόνος.

α΄. Γραμμάριον καλεῖται τὸ βάρος ἑνὸς κυβ. δακτύλου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0 Κ.

β΄. Χιλιόγραμμον καλεῖται τὸ βάρος μιᾶς κυβ. παλάμης ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμακρασίας 4^0 Κ.

γ΄. Τόνος καλεῖται τὸ βάρος ἑνὸς κυβ. μέτρου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4^0 Κ.

Εἶναι εὐνόητον ὅτι 1 χιλιόγραμ=1000 γραμμάρια καὶ 1 τόνος=1000 χιλιόγραμ=1000000 γραμμάρια.

Συμφώνως πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν μονάδων τούτων βάρους, ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸν ὄγκον ὕδατος ἀπεσταγμένου 4^0 Κ εἰςκυβ. δακτύλους, κ. παλάμας ἢ κ. μέτρα, ὁ ἴδιος ἐκφράζει καὶ τὸ βάρος τοῦ αὐτοῦ ὕδατος ἀντιστοίχως εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα ἢ τόνους. Οὕτως ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4^0 Κ ἔχον ὄγκον 12 κ. δ. ἔχει βάρος 12 γραμμαρίων, ἐν ᾧ τοιοῦτον ὕδωρ 145 κ. παλαμῶν ἔχει βάρος 145 χιλιογράμμων καὶ ὅμοιον ὕδωρ 25 κ. μέτρων ἔχει βάρος :5 τόνων.

§ **133. Εἰδικὸν βάρος σώματος.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν εἰς τὴν διάθεσίν μας κύβον ἀπὸ ὕαλον ἀκμῆς 0,05 μ. Ἐὰν ζυγίσωμεν αὐτόν, θέλομεν εὕρει ὅτι ἔχει βάρος 311 γραμμαρίων. Ἐπειδὴ δὲ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4° Κ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ὄγκον ἤτοι 0,05×0,5×0,05=125 κ. δ, ἔχει βάρος ?25 γρμ. ἕπεται ὅτι ὁ ὑάλινος κύβος εἶναι βαρύτερος ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ. κατὰ 311 Γρ : 125 γρ=2,488.

Τὸν ἀριθμὸν 2,488 καλοῦμεν εἰδικὸν βάρος τῆς ὑάλου.

Γενικῶς : Εἰδικὸν βάρος σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὸ βάρος τεμαχίου τοῦ σώματος τούτου διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ.

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα, τόνους τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4° Κ, ὁ ἴδιος ἐκφράζει (§ 132) εἰς κ. δακτύλους, κ. παλάμας, κ. μέτρα τὸν ὄγκον τῆς αὐτῆς ποσότητος ὕδατος καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ τοῦ σώματος τὸν ὄγκον, ὁ προηγούμενος ὁρισμὸς διατυποῦται καὶ οὕτω. Εἰδικὸν βάρος σώματος καλεῖται τὸ πηλίκον τοῦ βάρους διὰ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ.

Ἐὰν δηλ. σῶμα ἔχον ὄγκον 100 κ. π. ἔχῃ βάρος 778,8 χιλιόγραμμα, τὸ εἰδ. βάρος αὐτοῦ εἶναι 778,8 : 100=7,788. Ὁμοίως σῶμα ἔχον ὄγκον 30 κ. δ. καὶ βάρος 105, 48 γραμ. ἔχει εἰδ. βάρος 105,48 : 30=3, 516.

Τὰς μεθόδους τῆς εὑρέσεως τοῦ εἰδ. βάρους τῶν σωμάτων διδάσκει ἡ Φυσική. Ὁ ἀκόλουθος πίναξ παρέχει τὰ εἰδ. βάρη σωμάτων τινῶν.

Χρυσὸς	19,258	Μάρμαρον	2,837	Φελλὸς	0,240
Μόλυβδος	11,353	Ὕαλος	2,488	Ὑδράργυρος	13 596
Ἄργυρος	10,474	Θεῖον	2,070	Γάλα	1,030
Χαλκὸς	8,788	Πάγος	0,930	Οἶνος	0,994
Σίδηρος	7,788	Πτελέα	0,800	Ἔλαιον	0,915
Ἀδάμας	3,516	Ἐλάτη	0,675	Ἀὴρ	0,001293

§ **134. Σχέσεις ὄγκου καὶ βάρους τῶν σωμάτων.** — Ἂς παραστήσωμεν διὰ Β τὸ βάρος εἰς γραμμάρια, χιλιόγραμμα ἢ τόνους τεμαχίου σώματος, διὰ Σ τὸν ὄγκον αὐτοῦ ἀντιστοίχως εἰς κ. δακτύλους, κ. παλάμας ἢ κ. μέτρα καὶ διὰ ε τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὕλης, ἀπὸ τὴν ὁποίαν συνίσταται τοῦτο. Κατὰ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν τοῦ εἰδικοῦ βάρους, θὰ εἶναι :

$$\text{Β} : \Sigma = \varepsilon \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης δὲ τῆς ἰσότητος συνάγεται εὐκόλως ὅτι

$$\text{Β} = \Sigma \times \varepsilon \qquad (2)$$

Ἄρα : Τὸ βάρος σώματος εὑρίσκεται, ἂν ὁ ὄγκος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῆς ἰσότητος (2) προκύπτει εὐκόλως ἡ ἰσότης

$$\Sigma = \frac{\text{Β}}{\varepsilon} \qquad (3).$$ ἕπεται ὅτι :

Ὁ ὄγκος σώματος εὑρίσκεται, ἂν τὸ βάρος διαιρεθῇ διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ.

Σημ. Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴν τῶν ἰσοτήτων (2) ἢ (3) δὲν πρέπει νὰ λησμονῶμεν ὅτι, ἂν Β παριστᾷ γραμμάρια, χιλιόγραμμα, τόνους, Σ θὰ παριστᾷ ἀντιστοίχως κ. δακτύλους, κ. παλάμας, κ. μέτρα καὶ τἀνάπαλιν.

Ἀσκήσεις. 205). Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ὀρθ. παρελληλεπιπέδου ἐκ μαρμάρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ εἶναι 2^{μ}, $1{,}5^{\mu}$, καὶ 3^{μ} (ἀπ. 25533 χιλιόγραμ.).

206). Τεμάχιον ἐλάτης ἔχει βάρος 25 χιλιογράμμων. Ποσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ; (ἀπ. 37,037 κ. παλ.).

207). Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς δωμάτια μήκους 3^{μ} πλάτους 2^{μ} καὶ ὕψος 4^{μ} ; (ἀπ. 31,032 χιλιόγρ.).

§ 135 Ὄγκος πρίσματος. — Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ὀρθοῦ ἢ πλαγίου πρίσματος ἐκ πτελέας, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ὕψος εἶναι 0,06 μ. ἡ δὲ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 0,0003 τ. μ.

Πρὸς τοῦτο (§ 134 —3) εὑρίσκομεν τὸ ἀκριβὲς βάρος αὐτοῦ, ὅπερ εἶναι 120 γραμμαρίων καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους 0,8 τῆς πτελέας. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος τούτου εἶναι 120 : 0,8=150 κ. δ.=0,000150 κ. μ. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν 0,0003 τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος 0,05 τοῦ πρίσματος.

Ἄρα. Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Σημ. Ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο αὐτοῦ διαστάσεων μήκους καὶ πλάτους παριστᾷ (§ 95) τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 208). Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις ἔχει ἐμβαδὸν 27 τ. μ. τὸ δὲ ὕψος εἶναι 10,5 μ; (ἀπ. 283,5 κ.μ.)

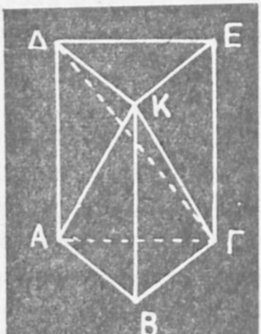
209). Πρίσμα ἔχει ὕψος μὲν 10^{μ}, βάσιν δὲ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ ἔχουσι μῆκος 12^{μ} ἡ μία καὶ 15^{μ} ἡ ἄλλη. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ; (ἀπ. 900 κ. μ.).

210). Πόσον εἶναι τὸ ὕψος πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον μὲν $840^{\kappa.\mu}$ βάσιν δὲ $100^{\tau.\mu}$; (ἀπ. $8{,}40^{\mu}$).

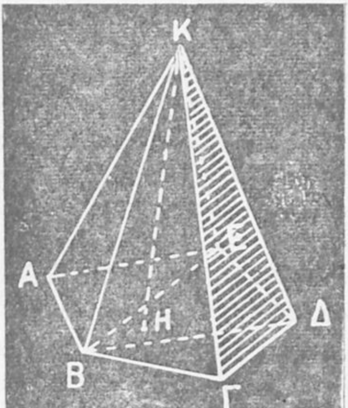
211). Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4°Κ, τὸ ὁποῖον χωρεῖ κυβικὸν δοχεῖον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 0,5 μ; (ἀπ. 97 ὀκ. $25_7 \frac{1}{2}$ δραμ.)

212). Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ ἐλαίου, τὸ ὁποῖον χωρεῖ τὸ δοχεῖον τοῦ προηγουμένου ζητήματος.

§ 136. Ὄγκος πυραμίδος. — Ἔστω τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΚ (Σχ. 100) κατεσκευασμένον ἀπὸ ὁμοιομερὲς ξύλον. Ἂν εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἀκριβὲς βάρος αὐτοῦ καὶ ἔπειτα ἀποσπάσαντες ἀπ' αὐτοῦ τὴν πυραμίδα ΚΑΒΓ ζυγίσωμεν καὶ ταύτην μετ' ἀκριβείας, θέλομεν παρατηρήσει ὅτι τὸ βάρος αὐτῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίτον τοῦ βάρους τοῦ πρίσματος, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀπεσπάσθη.



(Σχ. 100).



(Σχ. 101).

Ἐπειδὴ δὲ τὰ δύο ταῦτα σώματα ἔχουσι τὸ αὐτὸ εἰδικὸν βάρος, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΚΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΚ, μετὰ τοῦ ὁποίου αὕτη ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τοῦτο δὲ ἀληθεύει καὶ διὰ πᾶσαν ἄλλην τριγωνικὴν πυραμίδα.

Ἄρα : Ὁ ὄγκος πάσης τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἔστω ἀκόμη τυχοῦσα πολυγωνικὴ πυραμὶς Κ.ΑΒΓΔΕ (Σχ. 101). Ἐπειδὴ αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας Κ.ΑΒΕ, Κ. ΒΕΔ καὶ Κ. ΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος ΚΗ, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι ἴσος πρὸς

$$\frac{(\text{ΑΒΕ})\times(\text{ΚΗ})}{3}+\frac{(\text{ΒΕΔ})\times(\text{ΚΗ})}{3}+\frac{(\text{ΒΓΔ})\times(\text{ΚΗ})}{3}$$

$$\text{ἢ } \frac{[(\text{ΑΒΕ})+(\text{ΒΕΔ})+(\text{ΒΓΔ})]\times(\text{ΚΗ})}{3}=\frac{(\text{ΑΒΓΔΕ})\times(\text{ΚΗ})}{3}$$

Ἄρα : Ὁ ὄγκος πάσης πυναμίδος εἶναι ἴσος πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

Ἀσκήσεις. 213). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος μὲν 5^{μ}, βάσιν δὲ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι 10μ. καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πρὸς αὐτὴν εἶναι 3^{μ} ; (ἀπ. 50 κ. μ.)

214). Τριγωνική τις πυραμὶς ἔχει ὕψος μὲν 3^{μ} βάσιν δὲ ὀρθογώνιον, τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη κάθετος πλευρὰ ἔχει μῆκος 3,70 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτῆς ; (ἀπ. 6,845 κ. μ.).

215). Πόσον εἶναι τὸ ὕψος πυραμίδος ἡ ὁποία ἔχει ὄγκον 50 κ. μ. καὶ βάσιν 30 τ. μ. ; (ἀπ. 5 μ.).

216). Τετραγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὕψος 6 μ. καὶ βάσιν τραπέζιον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν παραλλήλων πλευρῶν εἶναι 4 μ., ἡ ἄλλη 8 μ., καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 3 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ταύτης ; (ἀπ. 36 κ. μ).

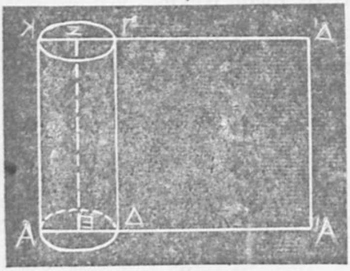
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′

ΣΩΜΑΤΑ ΕΙΣ ΜΙΚΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΝ ΠΕΡΑΤΟΥΜΕΝΑ

Ι. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

§ 137. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κυλίνδρου.—Ἐὰν ἀριθμόν τινα ἴσων μεταλλικῶν ἢ χαρτίνων κύκλων θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, οὕτως ὥστε ἕκαστος νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ὑποκάτω, σχηματίζεται ἓν σῶμα, τὸ ὁποῖον καλοῦμεν κύλινδρον. Τὰ συνήθη μέτρα τῆς χωρητικότητος, οἱ σωλῆνες τῶν θερμαστῶν καὶ ὑδραγωγείων, τὸ σῶμα ΑΒΓΔ (Σχ. 102) εἶναι κύλινδροι.

Ὁ κύλινδρος παράγεται καὶ ὑπὸ ἑνὸς μόνον κύκλου, ἀρκεῖ νὰ νοήσωμεν αὐτὸν κινούμενον οὕτως ὥστε τὸ κέντρον αὐτοῦ νὰ μένῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εὐθείας.



(Σχ. 102).

Ἐν τῇ κινήσει ταύτῃ ὁ μὲν κύκλος γράφει τὸν κύλινδρον, ἡ δὲ περιφέρεια αὐτοῦ γράφει καμπύλην τινὰ ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν ἰδιαιτέρως καλοῦμεν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου.

Ὥστε : Κύλινδρος καλεῖται πᾶν σῶμα παραγόμενον ὑπὸ κύκλου, ὁ ὁποῖος κινεῖται παραλλήλως πρὸς τὸν ἑαυτόν του καὶ ἔχει τὸ κέντρον του πάντοτε ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου πρὸς αὐτὸν εὐθείας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ κύλινδρος περατοῦται εἰς δύο κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους (ὁ κινητὸς κύκλος εἰς τὴν πρώτην καὶ τελευταίαν θέσιν αὐτοῦ) καὶ εἰς καμπύλην τινὰ ἐπιφάνειαν.

Βάσεις κυλίνδρου καλοῦνται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους οὗτος περατοῦται.

Ὕψος κυλίνδρου καλεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ κυλίνδρου ΑΒΓΔ (Σχ. 102) βάσεις μὲν εἶναι οἱ δύο κύκλοι Ε καὶ Ζ, ὕψος δὲ τὸ εὐθ. τμῆμα ΕΖ.

Ἐρωτήσεις. Τί καλεῖται κύλινδρος; Πόσας βάσεις ἔχει ἕκαστος κύλινδρος; Ποῖον τὸ σχῆμα τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου; Τί καλεῖται ὕψος κυλίνδρου: Τί καλεῖται κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου; Τίνος εἴδους ἐπιφάνεια εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου;

§ 138. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.— Ἄς περιτυλίξωμεν ἀκριβῶς καὶ μίαν μόνον φορὰν ὅλην τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου μὲ λεπτὸν φύλλον χάρτου. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ φύλλου τούτου. Ἐὰν ἐκτυλίξωμεν τὸ φύλλον τοῦτο βλέπομεν ὅτι λαμβάνει σχῆμα ὀρθογωνίου ΔΓΔ΄Α΄ (Σχ. 102), τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὴν βάσιν (ΔΑ΄) ἐπὶ τὸ ὕψος(ΓΔ) αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ μὲν βάσις (ΔΑ΄) ἰσοῦται πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Ε, ἐπὶ τῆς ὁποίας προηγουμένως ἐφήρμοζεν, τὸ δὲ ὕψος (ΔΓ) εἶναι καὶ τοῦ κυλίνδρου ὕψος, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι :

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, διὰ υ τὸ ὕψος καὶ διὰ α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης (§ 101).

$$ε=2\times α\times 3,14159\times υ \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων αὐτοῦ (§ 103). Ἂν δὲ παραστήσωμεν διὰ Ε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως α, θὰ ἀληθεύει ἡ ἰσότης. $Ε=(2\times α\times 3,14159\times υ+(2\times 3,1415\times α^2)$ ἢ $Ε=2\times α\times 3,14159\times(υ+α)$ (2).

Ἄρα : Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται πρός τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ ὕψους, καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 217) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος $4^μ$ καὶ ἀκτῖνα βάσεως $0,40^μ$. (ἀπ. 10,0 53 τ. μ.).

218). Πρόκειται μὲ ὕφασμα πλάτους $1^μ$ νὰ καλυφθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλινδρικῆς στήλης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 3 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,65 μ. Πόσα μέτρα χρειάζονται ; (ἀπ. 6,03168 μ.)-

219). Κυλινδρικὴ στήλη ἔχει ὕψος $2^μ$ καὶ ἀκτῖνα βάσεως $0,37^μ$. Πόσα χρήματα ἀπαιτοῦνται πρὸς χρωματισμὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτῆς, ἂν δι' ἕκαστον μέτρον ἀπαιτοῦνται 3 δραχμαί ; (ἀπ. 13,95 δρ.).

220) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος μὲν 0,60 μ. ἀκτῖνα δὲ βάσεως 0,3 μ. (ἀπ. 1,6964 τ. μ.)

§ 139. Ὄγκος κυλίνδρου. — Ἄς λάβωμεν κύλινδρον ὁμοιομερῆ καὶ κατεσκευασμένον ἀπὸ ξύλον, τὸ ὁποῖον ἔχει γνωστὸν εἰδικὸν βάρος π.χ. 0,8. Ἔστω δὲ ὅτι τὸ μὲν ὕψος αὐτοῦ εἶναι 10 δακτύλων, ἡ δὲ διάμετρος τῆς βάσεως 7 δακ. Ἐὰν ζυγίσωμεν αὐτὸν δι' ἀκριβοῦς ζυγοῦ, θέλομεν εὕρει ὅτι τὸ βάρος εἶναι 307,872 γραμ. Ὁ ὄγκος, ὅθεν αὐτοῦ εἶναι 307,872:0,8=384,84 κ. δ,.

Ἐπειδὴ δὲ τοῦ κυλίνδρου τούτου ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν $3,14159 \times 3,5^2 = 38,484$ τ. δ. τὸ δὲ ὕψος εἶναι 10 δ, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ ἂν πολλαποασιάσωμεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου ($38,484 \times 10 = 384,84$). Ὁμοίως ἐργαζόμενοι καὶ ἐπὶ ἄλλου κυλίνδρου διαφόρων διαστάσεων καὶ διαφόρου οὐσίας ἀπὸ τὸν προηγούμενον καταλήγομεν εἰς ὅμοιον συμπέρασμα.

Ἄρα: Ὁ ὄγκος κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ Θ τὸν ὄγκον κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνα βάσεως α, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης.

$$\Theta = 3,14159 \times \alpha^2 \times \upsilon \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις 221). Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 5 καὶ ἀκτῖνα βάσεως 1 μέτρου; (*ἀπ.* 15, 70795 κ. μ.)

222). Ὁ ὄγκος κυλίνδρου τινὸς εἶναι 20 κ. μ., τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 5 κ. μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ; (ἀπ. 4 τ. μ.)

223). Πόσον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4^0 Κ., ὅπερ χωρεῖ κυλινδρικὸς κάδος, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος 2,5 κ. μ. καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,6 μ; (ἀπ. 2827431 γραμ.).

224). Πρόκειται ἐπὶ κυκλικῆς βάσεως, ἡ ὁποία ἔχει ἐμβαδὸν 3, 2 τ. μ. νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸς κάδος χωρητικότητος 5000 ὀκάδων ὕδατος ἀπεσταγμένου 4^0Κ. Πόσον ὕψος πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ κάδος οὗτος; (ἀπ. 2 μ.).

2. ΚΩΝΟ

§ **140. Περιγραφὴ καὶ στοιχεῖα κώνου.** Τὸ σῶμα ΓΑΒ (Σχ. 103) περατοῦται εἰς ἕνα κύκλον Κ καὶ εἰς μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν. Ἡ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὑψουμένη πρὸς αὐτὸν κάθετος ἔχει μὲ τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον Γ. Πᾶσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ σημείου τούτου εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας, κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης ἐπιφανείας τοῦ σώματος.

Τὸ σῶμα τοῦτο καλεῖται κῶνος.

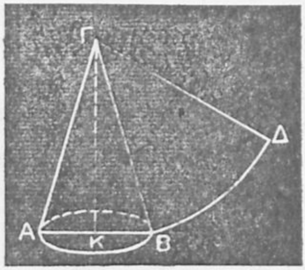
Τὸ σημεῖον Γ καλεῖται κορυφὴ τοῦ κώνου.

Ὁ κύκλος, εἰς τὸν ὁποῖον περατοῦται ὁ κῶνος, καλεῖται βάσις αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις ΓΚ τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς βάσεως καλεῖται ὕψος τοῦ κώνου τούτου.

Τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου, καλοῦνται πλευραὶ αὐτοῦ. Πᾶσαι αἱ πλευραὶ ἑκάστου κώνου εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας (§ 118 Β′).

Καὶ τοῦ κώνου τὴν καμπύλην ἐπιφάνειαν καλοῦμεν ἰδιαιτέρως κυρτὴν ἐπιφάνειαν.



(Σχ. 103).

§ **141. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κώνου.**—Ἐὰν περιτυλίξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου μὲ λεπτὸν φύλλον χάρτου, ὡς ἀκριβῶς ἐπράξαμεν καὶ διὰ τὸν κύλινδρον (§ 138), καὶ ἐκτυλίξωμεν ἔπειτα τὸ φύλλον, βλέπομεν ὅτι τοῦτο ἔχει σχῆμα κυκλικοῦ τομέως ΓΒΔ (Σχ. 103). Τοῦ τομέως τούτου ἡ μὲν ἀκτὶς ἰσοῦται πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΒ τοῦ κώνου, τὸ δὲ τόξον ἔχει τὸ αὐτὸ μῆκος Γ μὲ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως, μετὰ τῆς ὁποίας πρὸ τῆς ἐκτυλίξεως συνέπιπτεν. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως τούτου εἶναι $\frac{(\Gamma\,B)}{2}$ (τοξ. $\times$ ΒΔ) (§ 104 Σημ. 6′) ἢ $\frac{(\Gamma\,B)}{2} \times \Gamma$, ἕπεται ὅτι τόσον εἶναι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ἄρα: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, διὰ τοῦ λ τὴν πλευρὰν καὶ διὰ τοῦ α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως αὐτοῦ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{2} \times 2 \times \alpha \times 3{,}14159 \text{ ἢ } \varepsilon = \lambda \times \alpha \times 3{,}14159 \qquad [1]$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας νὰ προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτοῦ (§103). Κατὰ ταῦτα ἀληθεύει ἡ ἰσότης $E = (\lambda \times \alpha \times 3{,}14159) + (\alpha^2 \times 3{,}14159)$ ἢ

$$E = \frac{2 \times \alpha \times 3{,}14159}{2} \times (\lambda + \alpha) \qquad (2)$$

Ἤτοι: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις. 225). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν μὲν 2,25 $^{\mu}$, ἀκτῖνα δὲ βάσεως 9,35 $^{\mu}$, (ἀπ. 2,474 τ. μ.).

226). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 3$^{\mu\cdot}$ καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,40$^{\mu\cdot}$ (ἀπ. 4,2725 τ.μ.).

227). Κυκλικὸς τομεὺς ἐκ χαρτονίου 45^{0} καὶ ἀκτῖνος 0,04 $^{\mu\cdot}$ περιτυλίσσεται εἰς σχῆμα κώνου. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου τούτου; (ἀπ. 0,0314159 τ. μ.).

§ **142. Ὄγκος κώνου.**—Κυλινδρικὸν ποτήριον χωρεῖ ὕδωρ τριπλασίου βάρους ἀπὸ ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον χωρεῖ κωνικὸν ποτήριον ἔχον ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος πρὸς τὸ προηγούμενον. Ὁ ὄγκος ἑπομένως τοῦ ὑδατίνου κώνου εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ὑδατίνου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος πρὸς τὸν κῶνον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ (§ 139), συνάγομεν εὐκόλως ὅτι:

Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος κώνου, α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ Θ ὁ ὄγκος αὐτοῦ, ἀληθεύει ἡ ἰσότης: $\Theta = \dfrac{\alpha^2 \times 3{,}14159 \times \upsilon}{3}$ (1)

Ἀσκήσεις. 228). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κώνου, ἔχοντος ὕψος 1$^{\mu\cdot}$ καὶ ἀκτῖνα βάσεως 0,25$^{\mu\cdot}$ (ἀπ. 0,065449791 κ. μ.).

229). Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος μὲν 2$^{\mu\cdot}$ διάμετρον δὲ βάσεως 1 μέτρου; (ἀπ. 0,5235983 κ. μ).

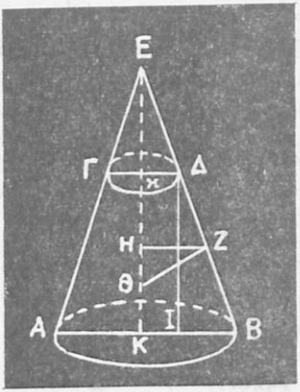
230]. Πόσον εἶναι τὸ βάρος κώνου ἔχοντος ὕψος 0,40$^{\mu\cdot}$ διάμετρον βάσεως 0,30$^{\mu}$, καὶ ὁ ὁποῖος εἶναι κατεσκευασμένος ἀπὸ μέταλλον, τοῦ ὁποίου τὸ εἰδ. βάρος εἶναι 7,788; (ἀπ. 72, 4 χιλιόγραμμα).

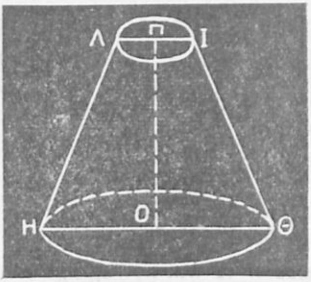
3. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

§ **143. Ὁρισμὸς καὶ στοιχεῖα κολούρου κώνου.** Ἐὰν τὸν τυχόντα κῶνον ΕΑΒ (Σχ. 104) τμήσωμεν δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, μένει μεταξὺ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τῆς βάσεως τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ· τὸ στερεὸν τοῦτο καλεῖται κόλουρος κῶνος. Ὁμοίως τὸ στερεὸν ΗΘΙΛ (Σχ. 104) εἶναι κόλουρος κῶνος.

Γενικῶς: Κόλουρος κῶνος καλεῖται μέρος κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ κώνου τούτου καὶ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸν κῶνον καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ.

Ἡ τομὴ ἑκάστου κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ μὴ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς εἶναι κύκλος μικρότερος τῆς βάσεως αὐτοῦ. Κατ' ἀκολουθίαν τούτου ὁ κόλουρος κῶνος περατοῦται εἰς δύο κύκλους καὶ εἰς μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν.





(Σχ. 104).

Οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ὁ κόλουρος κῶνος, καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων κολούρου κώνου καλεῖται ὕψος αὐτοῦ.

Πλευραὶ κολούρου κώνου καλοῦνται τὰ μέρη τῶν πλευρῶν τοῦ κώνου, ἐκ τοῦ ὁποίου παρήχθη, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν βάσεων αὐτοῦ. Π.χ. ΛΗ καὶ ΙΘ εἶναι δύο πλευραὶ τοῦ κολούρου κώνου ΗΛΙΘ.

§ 144. Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας κολούρου κώνου.— Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου ἰσοῦται πρὸ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα, ἂν παραστήσωμεν διὰ λ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς, διὰ Α καὶ α τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων κολούρου κώνου καὶ διὰ ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας, ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$\varepsilon=\frac{\lambda}{2}\times(2\times3,14159\times A+2\times3,14159\times\alpha) \text{ ἢ}$$

$$\varepsilon=3,14159\times\lambda\times(A+\alpha) \qquad (1)$$

Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου εὑρίσκομεν, ἂν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς αὐτοῦ ἐπιφανείας προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. Ὥστε:

$$E=3,14159\times\lambda\times(A+\alpha)+3,14159\times A^2+3,14159\times\alpha^2 \text{ ἢ}$$

$$E=3,14159\times[A^2+\alpha^2+\lambda\times(A+\alpha)] \qquad (2).$$

Ἀσκήσεις. 231). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν $2^{\mu.}$ καὶ ἀκτῖνας βάσεων $0.45^{\mu.}$ καὶ $0,25^{\mu.}$ (ἀπ. 4,398226 τ, μ.).

232). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν $1^{\mu,}$ καὶ ἀκτῖνας βάσεων $0,60^{\mu.}$ καὶ $0,40^{\mu.}$ (ἀπ. 4,7752168 τ. μ.).

§ **145. Ὄγκος κωλ. κώνου.**—Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει ὅτι ὁ ὄγκος Θ κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος υ καὶ ἀκτῖνας βάσεων Α καὶ α, παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος.

$$\Theta=\frac{1}{3}\times3,14159\times\upsilon\times(A^2+A\times\alpha+\alpha^2) \qquad (1)$$

Πρακτικῶς δυνάμεθα νὰ πεισθῶμεν περὶ τῆς ἀληθείας ταύτης ὡς ἀκολούθως. Λαμβάνομεν ποτήριον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα κολ. κώνου καὶ μετροῦμεν τὸ ἐσωτερικὸν ὕψος καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐσωτερικῶν βάσεων αὐτοῦ. Ἔστω δὲ ὅτι $\upsilon=10^{\delta}$, $A=4^{\delta}$ καὶ $\alpha=3^{\delta}$. Ὑπολογίζοντες τὸν κενὸν ὄγκον αὐτοῦ κατὰ τὴν ἰσότητα (1) εὑρίσκομεν

$$\Theta=\frac{1}{3}\times3,14159\times10\times(16+12+9)=387,46 \text{ κ. δ.}$$

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ποτήριον τοῦτο ὀφείλει νὰ χωρῇ ὕδωρ ἀπεσταγμένον 4°K βάρους 387,46 γραμμαρίων· πράγματι δὲ ζυγίζοντες αὐτὸ πρῶτον μὲν κενόν, ἔπειτα δὲ πλῆρες τοιούτου ὕδατος, ἀνευρίσκομεν ὅτι χωρεῖ ὕδωρ 387,46 γραμμαρίων.

Ἀσκήσεις. 233). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κολ. κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος $0,30^{\mu.}$ καὶ ἀκτῖνας βάσεων $0,12^{\mu.}$ καὶ $0,08^{\mu.}$ (ἀπ.0,00956 κ.μ.).

234). Κώνου ἡ μὲν βάσις ἔχει διάμετρον $0,12^{\mu}$ τὸ δὲ ὕψος εἶναι $0,16^{\mu.}$ Ἐὰν οὗτος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν καὶ ἀπέχοντος ἀπ' αὐτῆς $0,08^{\mu}$ σχηματίζεται τομὴ αὐτοῦ ἔχουσα διάμετρον 0,06^{μ}. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου κολ. κώνου;

§ **146. Χωρητικότης πίθου.** Πρὸς εὕρεσιν τῆς χωρητικότητος πίθου εἴτε τοῦ ὄγκου τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ, ὅταν ὁ πίθος εἶναι πλήρης ἐργαζόμεθα κατὰ μίαν τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

Αον.—Μὴ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὴν κυρτότητα τοῦ πίθου θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς συγκείμενον ἐκ δύο κολ. κώνων. Ὑπολογίζοντες ὅθεν τὸν ὄγκον ἑνὸς ἐκ τῶν κολ. κώνων κατὰ τὸν τύπον (1) (§ 145) καὶ διπλασιάζοντες αὐτὸν εὑρίσκομεν τὴν χωρητικότητα τοῦ πίθου.

Βον—Θεωροῦμεν τὸν πίθον μὲ ἀρκοῦσαν προσέγγισιν ὡς ἴσον κατ' ὄγκον πρὸς κύλινδρον, ὁ ὁποῖος ἔχει ὕψος ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τοῦ πίθου καὶ διάμετρον βάσεως τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῆς διαμέτρου ἑνὸς τῶν ἄκρων κύκλων, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται ὁ πίθος, καὶ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου Δ τοῦ μέσου τοῦ πίθου. Κατὰ ταῦτα, ἂν κληθῇ Θ ὁ ὄγκος πίθου, ἔχοντος μῆκος υ, διάμετρον τοῦ μέσου Δ καὶ τοῦ ἄκρου δ, θὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης.

$$Θ=3,14159\times\left(\frac{δ+2\timesΔ}{6}\right)^2\timesυ \qquad (1).\ *$$

Ἂν ὁ πίθος δὲν εἶναι πλήρης ὑγροῦ ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ὑπολογίζομεν πρῶτον, κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον, ὅλην τὴν χωρητικότητα τοῦ πίθου καὶ ἔστω αὕτη 1800 κ. π. Διὰ ῥάβδου δέ, τὴν ὁποίαν διὰ τοῦ στομίου τοῦ πίθου εἰσάγομεν εἰς τὸν πίθον, μετροῦμεν τὸ ὕψος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ, ἔστω δὲ τοῦτο 1,5 μ. Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν τὸ ὕψος τοῦτο 1,5 διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου τοῦ μέσου ὅπερ ἔστω 3,75 μ., εὑρίσκομεν πηλῖκον 0,4. Εἰς τὸ εὑρεθὲν τοῦτο πηλίκον, ὅπερ εὑρίσκομεν ἀναγεγραμμένον ἐν τῇ πρώτῃ στήλῃ τοῦ παρακειμένου πίνακος ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,37 τῆς στήλης Χ τοῦ αὐτοῦ πίνακος. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὴν ὅλην χωρητικότητα 1800 κ. π. τοῦ πίθου

Υ:Δ	Χ
1,0	1
0,9	0,95
0,8	0,86
0,7	0,75
0,6	0,63
0.5	0.50
0,4	0,37
0,3	0,25
0,2	0,14
0,1	0,05

(*) Εἰς τὸ αὐτὸ περίπου ἐξαγόμενον ἄγει καὶ ὁ ἀκόλουθος τύπος τοῦ Oughtred.

$$Θ=\frac{1}{12}\times3,14159\times(2Δ^2+δ^2)\timesυ. \qquad (2)$$

ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 0,37 εὑρίσκομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ εἶναι 666 κ. παλαμῶν (2).

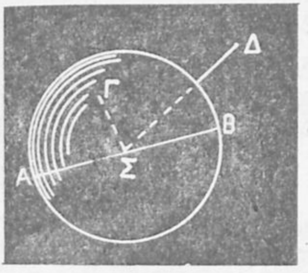
Ἀσκήσεις. 235 ***Πόση*** εἶναι ἡ ὁλικὴ χωρητικότης πίθου, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 2 μέτρων, ἄκραν διάμετρον 1 μέτρου καὶ μεσαίαν 1,68;

236). Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου ὑγροῦ ἐν τῷ αὐτῷ πίθῳ, ἂν τοῦτο ἔχῃ ὕψος 0,80 μ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΣΦΑΙΡΑ

§ **147. Ὁρισμὸς σφαίρας.**—Τοῦ σώματος Σ (Σχ. 105) ἡ ἐπιφάνεια εἶναι καμπύλη. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας ταύτης ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ σώματος τούτου. Τὸ σῶμα Σ καλεῖται σφαῖρα.



(Σχ. 105).

Γενικῶς. Σφαῖρα καλεῖται πᾶν σῶμα, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Κέντρον σφαίρας καλεῖται τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.

Ἀκτὶς σφαίρας καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον ἄρχεται ἐκ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Οὕτω τὰ τμήματα ΣΑ ΣΒ κτλ. εἶναι ἀκτῖνες τῆς σφαίρας Σ (Σχ. 105).

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας ἐννοοῦμεν εὐκόλως ὅτι:

Πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

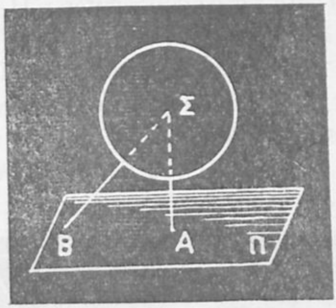
Διάμετρος σφαίρας καλεῖται πᾶν εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ καταλήγει ἑκατέρωθεν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς. Π. χ. τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας Σ.

Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι α΄) Πᾶσα διάμετρος σφαίρας σύγκειται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας καὶ β΄) Πᾶσαι αἱ διάμετροι σφαίρας εἶναι ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

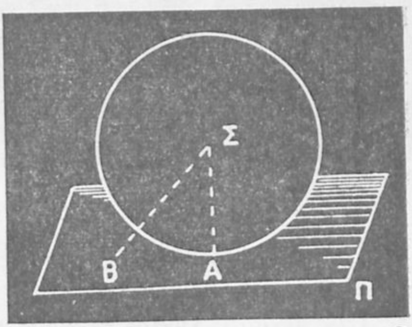
§ **148 Θέσεις ἐπιπέδου πρὸς σφαῖραν.**—Τὸ ἐπίπε-

(2) Ἐν τὸ πηλῖκον Γ : Δ περιέχῃ δεκαδικὰ ψηφία πλείονα τοῦ ἑνὸς παραλείπομεν τὰ λοιπὰ πλὴν τοῦ πρώτου.

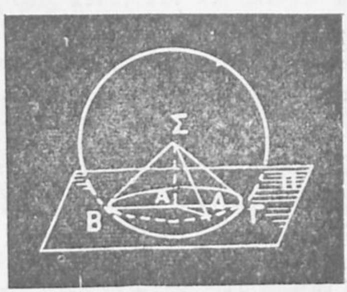
δον Π (Σχ. 106) οὐδόλως συναντᾷ τὴν σφαῖραν Σ· τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 107) ἐγγίζει τὴν σφαῖραν Σ εἰς ἓν μόνον σημεῖον Α· λέγεται δὲ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Τέλος τὸ ἐπίπεδον Π. (Σχ. 108) τέμνει τὴν σφαῖραν Σ, ἤτοι εἰσχωρεῖ μέσα εἰς τὴν σφαῖραν καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο μέρη ἑκατέρωθεν αὐτοῦ κείμενα. Ὥστε αἱ θέσεις, τὰς ὁποίας τυχὸν ἐπίπεδον δύναται νὰ ἔχῃ πρὸς σφαῖραν εἶναι τρεῖς: α΄) τὸ ἐπίπεδον οὐδόλως συναντᾷ τὴν σφαῖραν, β΄) τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ γ΄) τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν.



Σχ. 106).



(Σχ. 107).



(Σχ. 108).

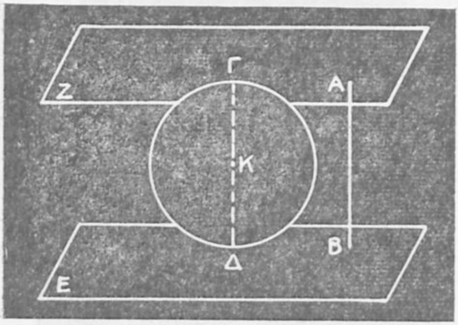
§ 149. Εὕρεσις τῆς ἀκτῖνος σφαίρας. —Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας Κ (Σχ. 109) τοποθετοῦμεν αὐτὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τραπέζης Ε καὶ ἐπ᾿ αὐτῆς στηρίζομεν ἐπίπεδον τεμάχιον χαρτονίου Ζ ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας καὶ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ε. Μετροῦμεν ἔπειτα τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν δύο τούτων παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ διαιροῦμεν αὐτὴν διὰ 2. Τὸ πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Τῷ ὄντι· ἡ διάμετρος ΓΔ τῆς σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν ἐπιπέδων Ε καὶ Ζ.

§ **130. Κύκλοι σφαίρας.**— Ἐὰν ἐπίπεδόν τι τέμνῃ σφαῖραν, ἔχει μετ᾽ αὐτῆς ἓν κοινὸν μέρος· τὸ κοινὸν τοῦτο μέρος εἶναι κύκλος. Τοῦτο ἐκφράζομεν οὕτω: Ἡ τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος.

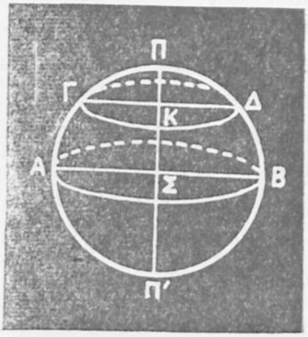
Μέγιστος κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶς κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Οὕτως ὁ κύκλος ΑΒ (Σχ. 110) εἶναι μεγ. κύκλος τῆς σφαίρας Σ.

Οἱ μεγ. κύκλοι σφαίρας ἔχουσι τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας.



(Σχ. 109).



(Σχ. 110).

α΄. Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας ἔχει κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

β΄. Πᾶς μέγιστος κύκλος σφαίρας διαιρεῖ τὴν σφαῖραν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.

Καθ᾽ ἓν ἀπὸ τὰ ἴσα ταῦτα μέρη τῆς σφαίρας καλεῖται ἡμισφαίριον.

Μικρὸς κύκλος σφαίρας καλεῖται πᾶς κύκλος σφαίρας, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Οὕτως ὁ κύκλος ΔΓ εἶναι μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας Σ (Σχ. 110).

Παράλληλοι κύκλοι σφαίρας καλοῦνται οἱ κύκλοι, κατὰ τοὺς ὁποίους αὕτη τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων.

Οὕτως οἱ κύκλοι ΔΓ καὶ ΑΒ (Σχ. 110) εἶναι παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας Σ.

§ **131. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας.**— Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως.

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων αὐτῆς.

Κατὰ ταῦτα, τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα α, παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος $E = \alpha^2 \times 3{,}14159 \times 4$ (1).

Ἀσκήσεις. 237), Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,35μ· ; (ἀπ. 1,539379 τ.μ.).

238). Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 3,50μ· ; (ἀπ. 38,4844775 τ. μ.).

239). Ἡ ἀκτὶς σφαίρας, τὸ ὕψος κυλίνδρου καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ ἔχουσι πάντα μῆκος ἀνὰ 0,2μ ἕκαστον. Ποσάκις ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ; (ἀ. δίς).

240). Σφαῖρα ἔχει ἐπιφάνεια 50,265 44 τ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ; (ἀπ. 2 μ.)

§ 152. Ὄγκος σφαίρας.—Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία ἀποδεικνύει τὴν ἀλήθειαν τῆς ἀκολούθου προτάσεως :

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι γινόμενον τῆς ἐπιφανείας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.

Κατὰ ταῦτα ὁ ὄγκος Θ σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα α παρέχεται ὑπὸ τῆς ἰσότητος :

$$\Theta = \alpha^2 \times 3{,}14159 \times 4 \times \frac{\alpha}{3} \text{ ἢ } \Theta = \frac{4}{3} \times 3{,}14159 \times \alpha^3 \qquad (1)$$

Ἀσκήσεις. 241). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 1,2 μ. (ἀπ. 0,9047 κ. μ.).

242). Πόσον εἶναι τὸ βάρος σφαίρας ἐκ μολύβδου, ἡ ὁποία ἔχει ἀκτῖνα 0,15 μ ; (ἀπ. 114,714 χιλιόγραμ.).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

243). Τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 0,40μ , ἡ δὲ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἀπ' αὐτῆς εἶναι 0,25μ , ἀποτελεῖ τὴν βάσιν πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 9 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ ; (ἀπ. 0,450 κ. μ.).

244). Ἐργάται κατασκεύασαν τάφρον μήκους 40μ· βάθους 2μ· καὶ πλάτους 0,80 μ· Πόσας δραχμὰς ἔλαβον διὰ τὴν ἐργασίαν ταύτην, ἐὰν εἶχον συμφωνήσῃ νὰ πληρώνωνται, 1,89 δρχ. δι' ἕκαστον κ. μέτρον ἐξαχθησομένου χώματος ; (ἀπ. 120,96. δραχ).

245). Πόσος είναι ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος μὲν 6^{μ}, βάσιν δὲ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι 2,4 μ. ἡ μία καὶ 0,85 μ. ἡ ἄλλη; (ἀπ. 4,08 κ. μ.).

246). Πόσον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου 4^{o} Κ, ὅπερ χωρεῖ κυλινδρικὸς κάδος ὕψους $2,5^{\mu.}$ καὶ ἀκτῖνος βάσεως $0,60^{\mu.}$; (ἀπ. 2827,431 χιλιόγραμ.).

247). Τεμάχιον θείου ἔχει βάρος 24, 84 χιλιογραμ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (ἀπ. 12 κ. παλ.).

248). Πόσον εἶναι τὸ βάρος σιδηρᾶς σφαίρας, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι $0,02^{\mu.}$; (ἀπ. 260,9765 γραμ.).

249). Κῶνος ἔχει ὕψος $3^{\mu.}$ καὶ ὄγκον $0,156636^{\kappa.\ \mu.}$. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ; (ἀπ. 0,2 μ).

250). Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας ἀκτῖνος 6 μ.

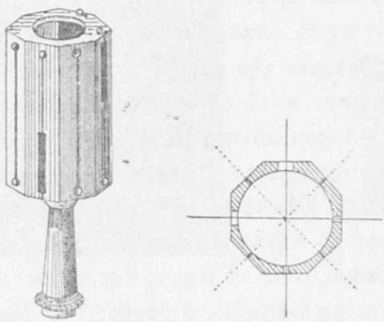
251). Ἀντλίον (κουβᾶς) ἔχει βάθος $0,30^{\mu}$, ἡ διάμετρος τοῦ πυθμένος εἶναι $0,23^{\mu.}$ ἡ δὲ διάμετρος τοῦ στομίου $0,29^{\mu.}$ Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ; (ἀπ. $12\frac{1}{2}$ ὀκ.).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

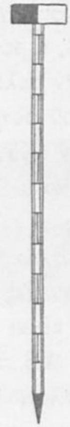
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΧΩΡΟΜΕΤΡΙΑΣ

§ 153. Χωρομετρικὰ ὄργανα.—Ἡ χωρομετρία ἔχει ὡς σκοπὸν τὴν μέτρησιν καὶ ἐπὶ φύλλου χάρτου ἀπεικόνισιν γαιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι μικρὰν ἔκτασιν σχετικῶς μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς Γῆς. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ σκοποῦ τούτου γίνεται χρῆσις διαφόρων ὀργάνων, ἐκ τῶν ὁποίων ἁπλούστερα εἶναι τὸ ἀκόντιον (Σχ. 112), ἡ ταινία καὶ τὸ ὀρθόγωνον ἢ ὁ χωρομετρικὸς γνώμων.

Τὸ ὀρθόγωνον εἶναι ὀρθὸν κοῖλον ὀκταγωνικὸν πρῖσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν κανονικὸν ὀκτάγωνον (Σχ. 111). Ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας αὐτοῦ ὑπάρχει μία σχισμὴ καὶ θυρὶς πλατυτέρα, τῶν ὁποίων ὁ κοινὸς ἄξων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις τοῦ πρίσματος. Κατὰ μῆκος τοῦ ἄξονος τῆς θυρίδος ἑκάστης ἕδρας τείνεται λεπτὸν νῆμα, ὅπερ ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν σχισμὴν τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Οὕτω τὸ νῆμα ἑκάστης θυρίδος καὶ ἡ σχισμὴ τῆς ἀπέναντι ἕδρας ὁρίζουσιν ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον καλεῖται σκοπευτικὸν ἐπίπεδον. Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουσι 4 ζεύγη ἀπέναντι ἑδρῶν, ὁρίζονται 4 σκοπευτικὰ ἐπίπεδα, ὧν ἕκαστον σχηματίζει γωνίαν 45° μεθ᾽ ἑκατέρου τῶν παρακειμένων καὶ ὀρθὴν γωνίαν μετὰ τοῦ τετάρτου. Διὰ ξυλίνης ῥάβδου καταληγούσης εἰς σιδηρᾶν



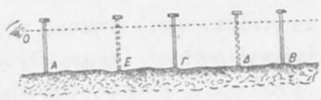
(Σχ. 111).



(Σχ. 112).

αἰχμὴν τὸ ὄργανον τοῦτο δύναται νὰ στερεοῦται κατακορύφως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

§ **154. Χάραξις εὐθείας ἐπὶ ἐδάφους.***— Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχηται ἀπὸ δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ



(Σχ. 113.)

ἐδάφους (Σχ. 113) ἐργαζόμεθα ὡς ἀκολούθως. Ἐμπήγομεν εἰς τὸ σημεῖον Β κατακορύφως ἓν ἀκόντιον. Ἔπειτα ἱστάμενοι εἰς τὸ σημεῖον Α νεύομεν καταλλήλως τὸν βοηθόν μας, ὅστις ἐμπηγνύει ἀκόντιον Δ, οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ ἀποκρύπτῃ ἀπὸ ἡμᾶς τὸ Α· ἔπειτα τοποθετεῖ ἕτερον Γ, οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ ἀποκρύπτῃ ἀπὸ ἡμᾶς τὰ ἄλλα καὶ οὕτω καθ᾽ ἑξῆς. Οἱ πόδες τῶν οὕτω τοποθετουμένων ἀκοντίων κεῖνται ὅλοι ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ.

§ **155. Μέτρησις εὐθείας κεχαραγμένης ἐπὶ ἐδάφους.**—Πρὸς μέτρησιν εὐθείας τινὸς ΑΒ. (Σχ. 113) ἐργαζόμεθα ὡς

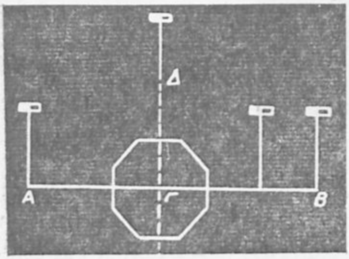
(*) Εἰς πάσας τὰς ἐκτεθειμένας χωρομετρικὰς ἐργασίας τὸ ἔδαφος ὑποτίθεται ὁριζόντιον.

ἀκολούθως. Στερεοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Α τὴν ἀρχὴν τῆς ταινίας, ἐν ᾧ ὁ βοηθὸς ἡμῶν κρατῶν εἰς χεῖράς του τὸ τέρμα αὐτῆς βαδίζει κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ. Ὅταν δὲ ἡ ταινία τεντωθῇ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΑΒ, ὁ βοηθὸς σημειώνει τὴν θέσιν τοῦ ἄκρου αὐτῆς ἐμπηγνύων ἐκεῖ σιδηρᾶν βελόνην. Ἔπειτα ἀμφότεροι βαδίζομεν ἐπὶ τῆς ΑΒ, προηγουμένου τοῦ βοηθοῦ, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν ἐμπηχθεῖσαν βελόνην· εἰς τὸν πόδα αὐτῆς θέτομεν τὴν ἀρχὴν τῆς ταινίας, ἐν ᾧ ὁ βοηθὸς τείνων καλῶς τὴν ταινίαν κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ ἐμπηγνύει ἄλλην βελόνην εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἄκρου αὐτῆς. Μετὰ τοῦτο ἀφαιροῦντες τὴν πρώτην βελόνην βαδίζομεν ὡς πρότερον ἐπαναλαμβάνοντες τὴν προτέραν ἐργασίαν μέχρι πέρατος. Ἐὰν τὸ τελευταῖον τμῆμα τῆς μετρουμένης εὐθείας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μῆκος τῆς ταινίας, εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ΑΒ πολλαπλασιάζοντες τὸ μῆκος τῆς ταινίας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν βελονῶν, τὰς ὁποίας ἐνέπηξεν ὁ βοηθός, ηὐξημένον κατὰ μονάδα. Ἂν π. χ. ἡ ταινία ἔχῃ μῆκος 20 μ. ἐνεπήχθησαν δὲ μεταξὺ Α καὶ Β 4 βελόναι, ἡ μετρηθεῖσα εὐθεῖα ἔχει μῆκος 20μ×5=100μ. Ἂν ὅμως τὸ τελευταῖον τμῆμα εἶναι μικρότερον τοῦ μήκους τῆς ταινίας, εὑρίσκει ὁ βοηθὸς τὸ μῆκος αὐτοῦ τεντώνων τὴν ταινίαν μεταξὺ τῆς τελευταίας βελόνης καὶ τοῦ τέρματος Β τῆς εὐθείας καὶ παρατηρῶν ποῖος ἀριθμὸς αὐτῆς ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον Β. Εἶτα ὁ ἀριθμὸς οὗτος προστίθεται εἰς τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς ταινίας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν βελονῶν, ὧν ἐγένετο χρῆσις. Οὕτως, ἂν ἡ ταινία ἔχῃ μῆκος 20 μ. καὶ ἐγένετο χρῆσις 4 βελονῶν, ὁ δὲ βοηθὸς εὗρεν ὅτι τὸ τελευταῖον τμῆμα τῆς μετρουμένης εὐθείας ἔχει μῆκος 8,30 μ., ἡ εὐθεία ΑΒ θὰ ἔχῃ μῆκος 20μ×4+8,30=88,30 μ.

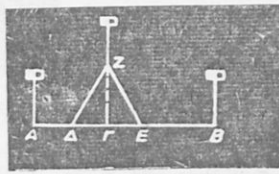
§ 136. Πρόβλημα.—Διὰ δοθέντος σημείου Γ εὐθείας ΑΒ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ᾽ αὐτήν.

Α΄. Λύσις: Εἰς τὸ δεδομένον σημεῖον Γ στερεοῦμεν κατακορύφως τὸ ὀρθόγωνον, οὕτως ὥστε ἓν ἐκ τῶν σκοπευτικῶν αὐτοῦ ἐπιπέδων νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ἀκοντίου Β. Ἔπειτα τοποθετοῦμεν ἕτερον ἀκόντιον Δ κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προηγούμενον. Τὸ σημεῖον Γ καὶ ὁ πούς Δ τοῦ νέου τούτου ἀκοντίου ὁρίζουσι τὴν ζητουμένην κάθετον,

Β΄. Λύσις: Ἑκατέρωθεν τοῦ δεδομένου σημείου Γ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τμήματα ΓΔ καὶ ΓΕ ἴσα πρὸς ἄλληλα (Σχ. 115). Εἶτα στερεοῦντες εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τὰ ἄκρα νήματος ἀρκετὰ ἐπιμηκεστέρου τοῦ τμήματος ΕΔ (ἢ καὶ αὐτῆς τῆς ταινίας τὰ ἄκρα) καὶ



(Σχ. 114)



(Σχ. 115)

κρατοῦντες αὐτὸ διὰ τοῦ μέσου ἀπομακρυνόμεθα τῆς ΓΑ, μέχρις οὗ τὰ ἡμίση τοῦ νήματος καλῶς τεντωθῶσι.

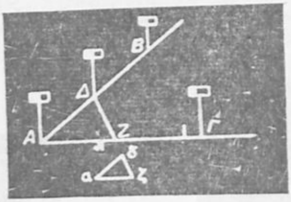
Τὸ σημεῖον Ζ, εἰς τὸ ὁποῖον ἐφαρμόζει τὸ μέσον τοῦ νήματος εἶναι σημεῖον τῆς ζητουμένης καθέτου (§ 72 Γ')· ἐμπήγοντες ὅθεν εἰς αὐτὸ ἀκόντιον, ὁρίζομεν μὲ αὐτὸ καὶ μὲ τὸ ἀκόντιον Γ τὴν ζητουμένην κάθετον.

§ **137. Πρόβλημα.** Διὰ δοθέντος σημείου Δ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ κειμένου νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.

Λύσις. Τοποθετοῦμεν τὸ ὀρθόγωνον ἐπὶ τῆς ΑΒ (Σχ. 114) καὶ οὕτως ὥστε, ἓν τῶν σκοπευτικῶν ἐπιπέδων αὐτοῦ νὰ συμπίπτῃ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀκοντίων αὐτῆς. Ἔπειτα κρατοῦντες εἰς τὴν χεῖρα ἡμῶν τὸ ὀρθόγωνον βαδίζομεν κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ σκοπεύοντες συγχρόνως ἀπὸ καιροῦ εἰς καιρὸν πρὸς τὸ ἀκόντιον Δ διὰ τοῦ σκοπευτικοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ προηγούμενον. Τὸ σημεῖον Γ, ἀπὸ τὸ ὁποῖον τὸ ἀκόντιον Δ φαίνεται εἰς τὸ δεύτερον τοῦτο σκοπευτικὸν ἐπίπεδον, εἶναι ὁ πούς τῆς ζητουμένης καθέτου. Ἐμπήγομεν δὲ εἰς αὐτὸ ἀκόντιον. Τοῦτο καὶ τὸ ἀκόντιον Δ ὁρίζουσι διὰ τῶν ποδῶν των τὴν ζητουμένην κάθετον.

§ **138. Πρόβλημα.** Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς γωνίαν δύο εὐθειῶν τοῦ ἐδάφους.

Λύσις. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α (Σχ. 116) τῆς δεδομένης γωνίας ἀρχόμενοι λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς δύο τμήματα ΑΔ καὶ



(Σχ. 116).

ΑΖ συνήθως ἴσα π. χ. 100 μέτρων καὶ χαράσσομεν καὶ μετροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΖ, ἔστω δὲ αὕτη 30 μ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἐπὶ φύλλου χάρτου τρίγωνον αδζ, ἔχον πλευρὰς $0{,}1^{\mu.}$ $0{,}1^{\mu.}$ καὶ $0{,}03^{\mu.}$ ἤτοι ἴσας πρὸς $\frac{1}{1000}$ τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΔΖ. Ἐπειδὴ (§ 107 Β΄) τὰ τρίγωνα ΑΔΖ καὶ αδζ εἶναι ὅμοια ἡ γωνία α εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α καὶ ἑπομένως εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ **159. Ἀπεικόνισις εὐθυγράμμων γηπέδων.**— Ἐπειδὴ τὰ θεωρούμενα γήπεδα εἶναι μικρᾶς ἐκτάσεως ἐν σχέσει πρὸς τὸ μέγεθος τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς, παραβλέπομεν τὴν κυρτότητα αὐτῶν καὶ θεωροῦμεν αὐτὰ ὡς ἐπίπεδα σχήματα. Ἡ ἀπεικόνισις κατ' ἀκολουθίαν αὐτῶν γίνεται κατὰ τὰς ἐν § 111 καὶ 112 ἐκτεθείσας μεθόδους ἀπεικονίσεως εὐθυγράμμων σχημάτων, ἀφ' οὗ προηγουμένως χαραχθῶσιν δι' ἀκοντίων καὶ μετρηθῶσιν αἱ διὰ τὴν ἀπεικόνισιν ἀναγκαιοῦσαι εὐθεῖαι.

§ **160. Μέτρησις εὐθυγράμμου γηπέδου.**—Πρὸς μέτρησιν εὐθ. γηπέδου ἐργαζόμεθα κατὰ μίαν τῶν ἀκολούθων μεθόδων.

Α΄.—Ἐφαρμόζομεν τὰς γνωστὰς μεθόδους τῆς μετρήσεως τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων, ἀφ' οὗ προηγουμένως χαράξωμεν καὶ μετρήσωμεν κατὰ τὰς ὑποδειχθείσας μεθόδους (§ 154, 155, 156, 157,) τὰς ἀναγκαιούσας εὐθείας.

Β΄.—Ἀπεικονίζομεν τὸ πρὸς μέτρησιν εὐθ. σχῆμα ὑπὸ ὡρισμένην κλίμακα, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ διαγράμματος καὶ πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος [§109].

Ἀσκήσεις. 252). Τὸ τρίγωνον αδγ (Σχ. 89) ἀπεικονίζει γήπεδον ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100000}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γηπέδου τούτου.

253) Τὸ τραπέζιον ΕΖΗΘ (Σχ. 53) παριστᾷ γήπεδον ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ γηπέδου τούτου.

254). Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος εὐθ. τμήματος, ὅπερ κεῖται ἐπὶ χαραγμένης εὐθείας τοῦ ἐδάφους καὶ τοῦ ὁποίου μόνον τὰ ἄκρα εἶναι προσιτά.

255). Νὰ ἀπεικονισθῇ ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἡ διάγωνος ΑΓ ἔχει μῆκος 367^{μ}, σχηματίζει δὲ μεθ' ἑκατέρας τῶν βάσεων γωνίαν 45^{0} καὶ αἱ βάσεις ἔχουσι μῆκος 528^{μ} ἡ μία καὶ 252 μ ἡ ἄλλη.— Νὰ εὑρεθῇ τῇ βοηθείᾳ τοῦ διαγράμματος τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Νικολέτα Βαγιαννοπούλου

ΤΕΛΟΣ

Κυριακή Βάσγαμο
ανήζω
Βασγαμο ανήζω

'Αριθ. Πρωτ. 52281 / Διεκπ.

'Εν 'Αθήναις τῇ 22/11/1920

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ
ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. Ν. Νικολάου
Συγγραφέα διδακτικκῶν βιβλίων

'Ανακοινοῦμεν ὑμῖν ὅτι δι' ἡμετέρας πράξεως τῇ 14 τοῦ λήγοντος μηνὸς ἐκδοθείσης καὶ τῇ 21 τοῦ αὐτοῦ δημοσιευθείσης, ἐν τῷ ὑπ' ἀριθ. 71 φύλλῳ τῆς ἐφημερίδος τῆς Κυβερνήσεως ἐνεκρίθη τὸ πρὸς κρίσιν ὑποβληφὲν ἐν χειρογράφῳ ὑμέτερον βιβλίον «Πρακτικὴ Γεωμετρία», πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῶν ἑλλ. σχολείων καὶ τῶν ἀστικῶν σχολείων, ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως πρὸ τῆς ἐκτυπώσεως τοῦ βιβλίου συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ὑποδείξεις τοῦ ἐκπαιδευτικοῦ συμβουλίου.

'Εντολῇ τοῦ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΥ
'Ο Τμηματάρχης τοῦ Γ' τμήματος
Γ. Δροσίνης

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1. **Θεωρητικὴ 'Αριθμητικὴ** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων. 'Η συντομωτέρα καὶ μεθοδικωτέρα ὅλων.

2. **Στοιχειώδης Γεωμετρία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων, ἄρτι ἐγκριθεῖσα καὶ διακρινομένης διὰ τὸ εὐμέθοδον, σύντομον καὶ τὰς πολυπληθεῖς καὶ καταλλήλους ἀσκήσεις.

3. **Στοιχεῖα Εὐθ. Τριγωνομετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων συντεταγμένα κατὰ τὰς συγχρόνους ἀπαιτήσεις τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης καὶ διδακτικῆς.

4. **Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία** (μεγάλη), ἡ μόνη ἐγκεκριμένη πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν σπουδαστῶν τῶν Μαθηματικῶν, Φυσικῶν κ.τ.λ. ἀπαραίτητος εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τὰς ἀνωτέρας σχολὰς (Πανεπιστήμιον, Πολυτεχνεῖον, Δασολογικὴ καὶ Γεωπονικὴ σχολή).

5. **Συμπλήρωμα Γεωμετρίας** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων. Τὸ πρῶτον ἐκδίδεται παρ' ἡμῖν τοιοῦτον βιβλίον χρήσιμον διὰ πάντα περὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀσχολούμενον.

6. **Κοσμογραφία** πρὸς χρῆσιν τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καὶ Λυκείων, εὐμενεστάτης τυχοῦσα ὑποδοχῆς διὰ τὴν μεθοδικότητα καὶ ἁπλότητα αὐτῆς.

8. **Λύσεις** τῶν ἐν ἀμφοτέραις ταῖς Τριγωνομετρίαις καὶ τῇ Κοσμογραφίᾳ περιεχομένων ἀσκήσεων.