ΓΕΩΡΓΙΟΥ Κ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ
Δρος τῶν Μαθηματικῶν

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Συμφώνως πρὸς τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα)

ΤΕΥΧΟΣ Α΄

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Κ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ
Δρος τῶν Μαθηματικῶν

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Συμφώνως πρὸς τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα)

ΤΕΥΧΟΣ Α′

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.

Κάθε γνήσιον ἀντίτυπον ὑπογράφεται ἀπὸ τὸν συγγραφέα.

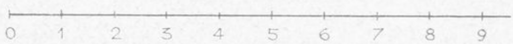
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1. Εἰσαγωγή.

1.1. Ἂς παρατηρήσωμεν μὲ προσοχὴν τὸ Σχῆμα 1.

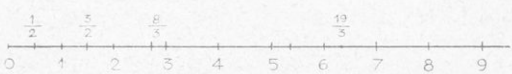
(η) :



Σχ. 1.

Βλέπομεν μίαν **ἡμιευθεῖαν (η)**· μερικὰ σημεῖα της εἶναι ζωηρῶς σημειωμένα καὶ ἀπέναντι ἀπὸ τὸ καθένα εἶναι γραμμένος ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός. Ἀπέναντι ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς (η) εἶναι γραμμένος ὁ 0, ἔπειτα ἀπ᾽ αὐτὸν ὁ 1, ἀμέσως ἔπειτα ὁ 2 κτλ. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$ κτλ. εἶναι ἴσα μεταξύ των. Μὲ ἄλλας λέξεις εἰς τὸ Σχ. 1 ἔχομεν παραστήσει τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς μὲ σημεῖα μιᾶς ἡμιευθείας. Μᾶς εἶναι γνωστὸν ὅτι μὲ σημεῖα τῆς ἰδίας ἡμιευθείας ἠμπορεῖ νὰ παρασταθοῦν καὶ οἱ ρητοὶ ἀριθμοί, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ Σχῆμα 2, ὅπου ἔχουν παρασταθῆ μερικοὶ ρητοί.

(η) :

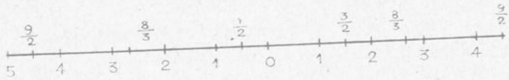


Σχ. 2.

Ἔστω τώρα ὅτι **ἕνα σημεῖον κινεῖται ἐπάνω εἰς τὴν (η)**· ἂν εἰς κάποιαν στιγμὴν μᾶς εἴπουν : **τὴν στιγμὴν αὐτὴν τὸ κινούμενον σημεῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν $\frac{8}{3}$, τότε ὁ καθένας μας θὰ καταλάβῃ ὅτι τὸ κινούμενον σημεῖον εὑρίσκεται τὴν στιγμὴν ἐκείνην εἰς τὸ σημεῖον τῆς (η), ποὺ εἶναι γραμμένος ὁ ἀριθμὸς $\frac{8}{3}$, δηλαδὴ εἰς τὸ σημεῖον τῆς (η), ποὺ παριστάνει τὸν $\frac{8}{3}$.**

1.2. Ἂς παρατηρήσωμεν τώρα μὲ προσοχὴν τὸ Σχῆμα 3.

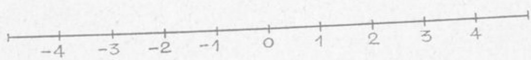
Βλέπομεν **μίαν εὐθεῖαν (ε),** ποὺ μὲ τὸ σημεῖον 0 εἶναι χωρισμένη εἰς δύο ἡμιευθείας καὶ ἐπάνω εἰς καθεμίαν ἀπὸ αὐτὰς ἔχουν παρασταθῆ μὲ σημεῖα οἱ ρητοὶ ἀριθμοί. Ἡ κοινὴ ἀρχὴ τῶν δύο ἡμιευθειῶν παριστάνει τὸν 0.

(ε) : 

Σχ. 3.

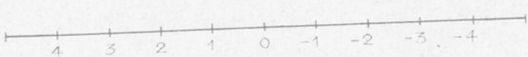
Ἄς φαντασθῶμεν τώρα ὅτι **ἕνα σημεῖον κινεῖται ἐπάνω εἰς τὴν (ε)·** ἂν εἰς κάποιαν στιγμὴν μᾶς εἴπουν : **τὴν στιγμὴν αὐτὴν τὸ κινούμενον σημεῖον εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν $\frac{8}{3}$, εἶναι βέβαιον ὅτι κανείς μας δὲν θὰ καταλάβῃ ποῦ ἀκριβῶς εὑρίσκεται τὴν στιγμὴν ἐκείνην τὸ κινούμενον σημεῖον·** μάλιστα εἶναι φυσικὸν νὰ εἴπῃ ὁ καθένας μας : **βλέπω δύο σημεῖα μὲ τὴν ἰδίαν «ἔνδειξιν», $\frac{8}{3}$· ποῖον ἀπὸ τὰ δύο ἐννοεῖτε ; αὐτό, ποὺ εἶναι δεξιὰ ἀπὸ τὸ 0 ἢ αὐτό, ποὺ εἶναι ἀριστερά του ;** Μὲ ἄλλας λέξεις ἡ προηγουμένη διατύπωσις δὲν ἔχει μίαν μόνον σημασίαν, ἀλλὰ δύο.

Ἠμποροῦμεν ν' ἀποφύγωμεν τὴν προηγουμένην ἀσάφειαν, ἂν τροποποιήσωμεν τὸ Σχ. 3 ἔτσι, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ Σχῆμα 4.

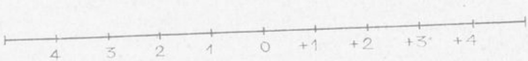
(ε) : 

Σχ. 4.

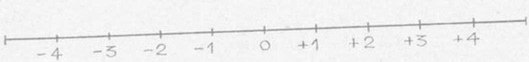
Δηλαδὴ ἐκάμαμεν τὴν ἑξῆς τροποποίησιν εἰς τὸ Σχ. 3 : ἀφήσαμεν τὴν δεξιὰ ἡμιευθεῖαν, ὅπως ἦτο εἰς τὸ Σχ. 3, ἐνῷ ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε ἔνδειξιν εἰς τὴν ἀριστερὰ ἡμιευθεῖαν ἐτοποθετήσαμεν ἕνα μικρὸν εὐθύγραμμον τμῆμα (μίαν παῦλαν). Συμφωνοῦμεν τώρα τὰς ἐνδείξεις $-1, -2, -\frac{5}{2}$ κτλ. νὰ τὰς διαβάζωμεν ἔτσι : πλὴν 1, πλὴν 2, πλὴν $\frac{5}{2}$ κτλ. Τώρα, ἂν μᾶς εἴπουν: **τὸ κινούμενον σημεῖον ἐπάνω εἰς τὴν (ε) εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν —3** (εἴτε εἰς τὴν θέσιν 4 κτλ.), **ἀντιλαμβανόμεθα ποῦ ἀκριβῶς εὑρίσκεται τὸ κινούμενον σημεῖον.**

(ε) : 

Σχ. 5α

(ε) : 

Σχ. 5β

(ε) : 

Σχ. 5γ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ τὸν ἴδιον σκοπὸν ἠμπορεῖ νὰ γίνῃ καὶ διαφορετικὴ τροποποίησις εἰς τὸ Σχ. 3, λ.χ. μία ἀπὸ τὰς τροποποιήσεις, ποὺ δείχνουν τὰ σχήματα 5α, 5β, 5γ.

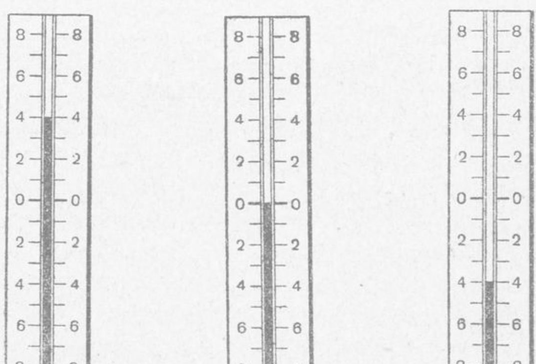
1.3. Ἂς συμφωνήσωμεν νὰ κάμωμεν τὴν τροποποίησιν τοῦ Σχ. 3, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ προηγούμενον Σχ. 5 γ, δηλαδή : **ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν γραμμένον δεξιὰ ἀπὸ τὸ 0 νὰ θέτωμεν ἕνα + (τὸ διαβάζομεν : σὺν) καὶ ἐμπρὸς ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν γραμμένον ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ 0 νὰ θέτωμεν ἕνα — (πλὴν).** Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον **ἀπὸ τὸ σύμβολον κάθε ἀριθμοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐκτὸς ἀπὸ τὸ 0, σχηματίζομεν (κατασκευάζομεν) δύο ἄλλα σύμβολα· ἕνα γράφοντες ἐμπρός του τὸ + καὶ ἄλλο ἕνα γράφοντες ἐμπρός του τὸ —.**

Ἔτσι ἔχομεν σύμβολα ὡσὰν τά :

$$+4, \quad -4, \quad -11, \quad -0{,}25, \quad -\frac{3}{8}, \quad +\frac{4}{5}, \quad +20 \text{ κτλ.}$$

Τὰ προηγούμενα σύμβολα ἠμποροῦμεν νὰ τὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ δι᾽ ἄλλους σκοπούς, διαφορετικοὺς ἀπὸ ἐκεῖνον, ποὺ προηγουμένως μᾶς ὡδήγησεν εἰς τὴν κατασκευήν των, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Εἰς τὸ παρακάτω Σχῆμα 6 βλέπομεν τὰ σχέδια τριῶν θερμομέτρων. Εἰς τὸ Σχ. 6α βλέπομεν τὸ ἐπάνω μέρος (τὸ ἄκρον) τῆς στή-



(α) (β) (γ)

Σχ. 6.

λης τοῦ ὑδραργύρου εἰς τὸ σημεῖον τῆς κλίμακος μὲ τὴν ἔνδειξιν 4 ἐπάνω ἀπὸ τὸ 0. Λέγομεν τότε : **τὸ θερμόμετρον δείχνει + 4 βαθμοὺς ἤ : ἔχομεν**

θερμοκρασίαν + 4. Εἰς τὸ Σχ. 6β τὸ ἄκρον τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου εὑρίσκεται εἰς τὸ 0 τῆς κλίμακος· αὐτὸ σημαίνει: **ἡ θερμοκρασία εἶναι 0 βαθμοί.** Εἰς τὸ 6γ τὸ ἄκρον τῆς στήλης τοῦ ὑδραργύρου εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς κλίμακος μὲ τὴν ἔνδειξιν 4 κάτω ἀπὸ τὸ 0. Λέγομεν τότε ὅτι: **τὸ θερμόμετρον δείχνει — 4 ἤ: ἔχομεν θερμοκρασίαν — 4 βαθμούς.**

Παράδειγμα 2ον. Οἱ ταμίαι τῶν καταστημάτων κάμνουν εἰσπράξεις καὶ πληρωμάς. Ἔστω ὅτι ὁ Α, λ.χ., ταμίας ἔκαμε κατὰ σειρὰν: 1ον πληρωμὴν 100 δρχ., 2ον εἴσπραξιν 350 δρχ., 3ον εἴσπραξιν 500 δρχ. καὶ 4ον πληρωμὴν 120 δρχ. Ὁ ταμίας ἠμπορεῖ αὐτὰ νὰ τὰ σημειώσῃ συντόμως εἰς τὸ βιβλίον του ὡς ἑξῆς:

1ον — 100 δρχ., 2ον + 350 δρχ., 3ον + 500 δρχ., 4ον — 120 δρχ.,

δηλαδὴ νὰ χρησιμοποιήσῃ τὰ σύμβολα τῶν ἀριθμῶν μὲ + ἔμπροσθεν, ἂν πρόκηται διὰ εἴσπραξιν, καὶ μὲ — ἔμπροσθεν, ἂν πρόκηται διὰ πληρωμήν.

Τὰ σύμβολα, ποὺ κατασκευάσαμεν προηγουμένως μὲ τὰ +, — καὶ μὲ τὰ σύμβολα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς, ὀνομάζονται **σχετικοὶ ἀριθμοὶ** καὶ **ἠμποροῦμεν μὲ αὐτὰ νὰ ἀναπτύξωμεν μίαν ἄλλην Ἀριθμητικήν, περισσότερον γενικὴν ἀπὸ αὐτήν, ποὺ γνωρίζομεν, καὶ πολὺ χρήσιμον.** Αὐτὸς εἶναι ὁ σκοπός μας εἰς τὰ ἀμέσως ἑπόμενα. Ὁ κλάδος τῶν Μαθηματικῶν, ποὺ περιλαμβάνει τὴν γενικὴν αὐτὴν Ἀριθμητικήν, ὀνομάζεται **Ἄλγεβρα.**

§ 2. Ὁρισμὸς τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ

2.1. Εἰς τὴν πρώτην τάξιν ἐμάθαμεν διὰ τοὺς **ρητοὺς ἀριθμούς.** Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν παρουσιάζει τὴν ἑξῆς σοβαρὰν ἀδυναμίαν: **προκειμένου νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἔννοιαν « μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος » (ὡς πρὸς μονάδα δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα), οἱ ρητοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἐπαρκοῦν.** (Μαθηματικὰ Α΄ Γυμνασίου, § 39).

Οἱ Μαθηματικοὶ ἐδημιούργησαν « ἀριθμοὺς » τοὺς λεγομένους **« ἀρρήτους ἀριθμοὺς »** εἴτε **« ἀσυμμέτρους ἀριθμούς ».** Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν καὶ ἀρρήτων ὁμοῦ δὲν ἐμφανίζει τὴν προηγουμένην ἀδυναμίαν τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν· δηλαδή: εἰς κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα ρητὸν ἢ ἄρρητον ἀριθμὸν ὡς μῆκος αὐτοῦ (ὡς πρὸς μονάδα ἕνα ὁποιοδήποτε δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα). Μίαν πρώτην μύησιν εἰς τὴν ἔννοιαν « ἄρρητος ἀριθμός » ἐλάβαμεν εἰς τὴν πρώτην τάξιν (Μαθηματικὰ Α΄ Γυμνασίου, § 220).

Κάθε ρητὸς ἢ ἄρρητος ἀριθμὸς ὀνομάζεται, ὅπως ἐμάθαμεν εἰς τὴν πρώτην τάξιν «**ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς**». Ἐδῶ θὰ ὀνομάζεται «**ἕνας ἀπόλυτος ἀριθμός**».

2.2. Ἔστω ὅτι α παριστάνει ἕνα ἀπόλυτον (ρητὸν εἴτε ἄρρητον) ἀριθμὸν διάφορον ἀπὸ τὸν μηδὲν ($\alpha \neq 0$). Ἀπὸ τὸ σύμβολον α σχηματίζομεν τὰ ἑξῆς δύο σύμβολα :

1) $+\alpha$ καὶ τὸ διαβάζομεν : σὺν ἄλφα.

2) $-\alpha$ καὶ τὸ διαβάζομεν : πλὴν ἄλφα.

Κάθε σύμβολον ὅπως τὸ $+\alpha$, π.χ. $+\frac{2}{3}$, $+\frac{8}{5}$, $+10$ κτλ. **λέγεται «ἕνας θετικὸς ἀριθμός»**· τὸ $+$ πρὸ τοῦ α λέγεται **πρόσημον** τοῦ $+\alpha$.

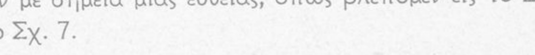
Κάθε σύμβολον ὅπως τὸ $-\alpha$, π.χ. $-\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{6}$, -7 κτλ. **λέγεται «ἕνας ἀρνητικὸς ἀριθμός»**. τὸ $-$ πρὸ τοῦ α λέγεται **πρόσημον** τοῦ $-\alpha$.

Ἀπὸ τὸν 0 σχηματίζομεν ἐπίσης τὰ δύο σύμβολα $+0$, -0, ἀλλὰ συμφωνοῦμεν νὰ τὰ θεωροῦμεν ταυτόσημα μὲ τὸν 0, δηλ. δὲν θεωροῦμεν τὸν $+0$ ὡς θετικὸν ἀριθμὸν οὔτε τὸν -0 ὡς ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Τὸ σύνολον τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι: ὁ μηδέν, οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ λέγεται «σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν». Θὰ τὸ παριστάνωμεν εἰς αὐτὸ τὸ βιβλίον μὲ Σ. Ἔτσι, ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $-3\frac{2}{5}$ εἶναι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $+7$ εἶναι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ὁ 0 εἶναι ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς (οὔτε θετικὸς οὔτε ἀρνητικός).

Ἂν ἰδιαιτέρως ὁ ἀπόλυτος ἀριθμὸς α εἶναι διάφορος τοῦ μηδενὸς ρητὸς ἀριθμός, τότε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς $+\alpha$, $-\alpha$ ὀνομάζεται : «**ἕνας ρητὸς σχετικὸς ἀριθμός**». Ἂν ὁ α εἶναι ἄρρητος, τότε ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς $+\alpha$, $-\alpha$ ὀνομάζεται : «**ἕνας ἄρρητος (ἀσύμμετρος) σχετικὸς ἀριθμός**».

2.3. Συμφώνως μὲ ὅσα ἔχομεν μάθει, οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ ἠμπορεῖ νὰ παρασταθοῦν μὲ σημεῖα μιᾶς εὐθείας, ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ Σχ. 5γ καὶ εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 7.



Σχ. 7.

Ἂς προσέξωμεν τώρα καὶ τὸ παρακάτω Σχῆμα 8.

Σχ. 8.

Εἰς τὸ σχῆμα αὐτὸ βλέπομεν ὅτι δεξιὰ ἀπὸ τὸ 0 ἔχουν σημειωθῆ οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ καὶ ὄχι οἱ θετικοί, ὅπως εἰς τὸ Σχ. 7. Ἡ σύγκρισις μεταξὺ τῶν δύο σχημάτων 7 καὶ 8 μᾶς κάμνει ν' ἀντιληφθῶμεν ὅτι : **ἡ διάκρισις** μεταξὺ τῶν ἀρνητικῶν καὶ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν γίνεται ἀκόμη καὶ ὅταν κάθε θετικὸν τὸν συμβολίσωμεν μὲ τὸ σύμβολον τοῦ ἀπολύτου ἀριθμοῦ, ἀπὸ τὸν ὁποῖον τὸν κατεσκευάσαμεν, δηλαδὴ ὅταν θεωροῦμεν τὰ σύμβολα, ὅπως τὰ $+\frac{3}{4}$, $+3\frac{2}{5}$, $+0{,}18$ κτλ. ὡσὰν ταυτόσημα μὲ τὰ σύμβολα $\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $0{,}18$ κτλ. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον κάμνομεν τὴν ἑξῆς συμφωνίαν: **εἰς τὸ ἑξῆς κάθε θετικὸς ἀριθμὸς θὰ θεωρῆται ταυτόσημος μὲ τὸν ἀπόλυτον ἀριθμὸν ἀπὸ τὸν ὁποῖον κατασκευάζεται·** μὲ ἄλλας λέξεις συμφωνοῦμεν νὰ θεωροῦμεν ὅτι : **Τὸ σύνολον P τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν συμπίπτει (ταυτίζεται, εἶναι ἴσον) μὲ τὸ σύνολον, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν 0 καὶ τοὺς θετικοὺς ἀριθμούς.**

2.4. Συμφώνως μὲ τὰ προηγούμενα τὸ σύνολον P τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Σ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ εἶναι : $P \subsetneq \Sigma$. Ἐπίσης, ἂν A παριστάνῃ τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ Θ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν τότε θὰ εἶναι :

1. $A \subsetneq \Sigma$ (τὸ A γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Σ).
2. $\Theta \subsetneq \Sigma$ (τὸ Θ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Σ).
3. $P = \Theta \cup \{0\}$ (τὸ P εἶναι ἡ ἕνωσις τοῦ Θ μὲ τὸ μονομελὲς σύνολον $\{0\}$).
4. $A \cap \Theta = \varnothing$ (ἡ τομὴ τοῦ A μὲ τὸ Θ εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, δηλαδὴ τὰ A καὶ Θ εἶναι ξένα μεταξύ των).
5. $A \cap P = \varnothing$ (ἡ τομὴ τοῦ A μὲ τὸ P εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, δηλαδὴ τὰ A καὶ P εἶναι ξένα μεταξύ των).

Σημείωσις. Εἰς τὸ ὑπόλοιπον μέρος αὐτοῦ τοῦ βιβλίου :

1) ὁ ὅρος « σχετικὸς ἀριθμὸς » σημαίνει « ρητὸς σχετικὸς ἀριθμός ».

2) Σ σημαίνει « τὸ σύνολον τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ». Ὅπου εἰς ἄλλα μέρη τοῦ βιβλίου παρουσιασθῆ ἄρρητος σχετικὸς ἀριθμὸς θὰ ἀναφέρεται σαφῶς μὲ τὴν ἔνδειξιν « ἄρρητος (ἀσύμμετρος) σχετικὸς ἀριθμός ».

Ἀσκήσεις

1) Νὰ ἀπαντήσετε μὲ ἕνα ναὶ ἢ ἕνα ὄχι εἰς τὰς παρακάτω ἐρωτήσεις:

α) εἶναι ὁ 0 ἀρνητικὸς ἀριθμός;

β) εἶναι ὁ 0 θετικὸς ἀριθμός;

γ) εἶναι ὁ 0 σχετικὸς ἀριθμός;

δ) εἶναι ὁ -3 ἀρνητικὸς ἀκέραιος;

ε) θεωρεῖται ὁ 8 θετικὸς ἀριθμός;

ς) εἶναι ὁ 10 σχετικὸς ἀριθμός;

ζ) εἶναι ἀληθὴς ἡ δήλωσις: $-3 \in \Sigma$.

2) Παριστάνομεν μὲ Z^+ τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀκεραίων, δηλ. $Z^+ = \{+1, +2, +3, +4, \ldots\}$, μὲ Z^- τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων, δηλ. $Z^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ καὶ μὲ Z τὸ σύνολον $Z^+ \cup \{0\} \cup Z^-$ δηλ. $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ εἶναι τὸ σύνολον (ὅλων) τῶν ἀκεραίων.

Νὰ ἀπαντήσετε εἰς τὰς παρακάτω ἐρωτήσεις μὲ ἕνα ναὶ ἢ ἕνα ὄχι καὶ νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἀπάντησίν σας.

α) Εἶναι ὁ 0 φυσικὸς ἀριθμός;

β) Εἶναι ὁ μηδὲν ἀκέραιος;

γ) εἶναι ὁ 0 θετικὸς ἀκέραιος;

δ) εἶναι ὁ -15 φυσικὸς ἀριθμός;

ε) εἶναι ὁ 15 ἀπόλυτος ἀκέραιος;

ς) εἶναι κάθε ἀκέραιος φυσικὸς ἀριθμός;

ζ) εἶναι κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς ἀκέραιος;

η) εἶναι ἀληθὴς ἡ δήλωσις: $-5 \in Z$; ἡ $+3 \in Z^+$;

θ) εἶναι ἀληθὴς ἡ δήλωσις: $Z^- \underset{\neq}{\subset} \Sigma$;

ι) εἶναι ἀληθὴς ἡ δήλωσις: $\Sigma \underset{\neq}{\subset} P$; ἡ $P \underset{\neq}{\subset} \Sigma$;

§ 3. Ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον Σ, τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

3.1. Ἔστω x ἕνας σχετικὸς ἀριθμός. **Θὰ ὀνομάζωμεν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ x ἢ καὶ πρότυπον τοῦ x τὸν ἀπόλυτον ἀριθμόν, ἀπὸ τὸν ὁποῖον κατασκευάζεται ὁ x.** Ἔτσι, τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{3}{4}$ τὸ πρότυπόν του εἶναι ὁ $\frac{3}{4}$· τοῦ $+7$ (δηλαδὴ τοῦ 7) τὸ πρότυπόν του εἶναι ὁ 7 κτλ. Συμβολικῶς γράφομεν $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$, $|+7| = 7$.

3.2. Ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ἔστω, α, ποὺ δὲν εἶναι ὁ 0, λέγεται ὁμόσημος ἄλλου σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω, β, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, καὶ ὁ β δὲν εἶναι ὁ 0 καὶ τὸ πρόσημον τοῦ α εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ πρόσημον τοῦ β. Ἔτσι εἶναι $+\frac{3}{4}$ ὁμόσημος τοῦ $+10$, ὁ $-\frac{6}{5}$ ὁμόσημος τοῦ -3 κτλ.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἐννοοῦμεν ὅτι: 1) Κάθε σχετικὸς ἀριθμὸς εἶναι ὁμόσημος μὲ τὸν ἑαυτόν του καὶ 2) Ἂν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι ὁμόσημος τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ β, τότε καὶ ὁ β εἶναι ὁμόσημος τοῦ α. Δι' αὐτὸ ἀντὶ νὰ λέγωμεν **ὁ α εἶναι ὁμόσημος τοῦ β**, ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν **οἱ α, β εἶναι ὁμόσημοι μεταξύ των.** Ὥστε: **κάθε δύο θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι μεταξύ των** καὶ **κάθε δύο ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι μεταξύ των.**

3.3. Ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ἔστω, α, ποὺ δὲν εἶναι ὁ 0, λέγεται ἑτερόσημος ἄλλου σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω, β, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, καὶ ὁ β δὲν εἶναι ὁ 0 καὶ τὸ πρόσημόν του δὲν εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ πρόσημον τοῦ β. Ἔτσι ὁ $+8$ εἶναι ἑτερόσημος τοῦ $-\frac{11}{3}$, ὁ -15 εἶναι ἑτερόσημος τοῦ $+\frac{2}{5}$ κτλ.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἐννοοῦμεν ὅτι: **ἂν ὁ α εἶναι ἑτερόσημος τοῦ β, τότε καὶ ὁ β εἶναι ἑτερόσημος τοῦ α.** Δι' αὐτὸ ἀντὶ νὰ λέγωμεν **ὁ α εἶναι ἑτερόσημος τοῦ β** ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν **οἱ α, β εἶναι ἑτερόσημοι μεταξύ των.** Ὥστε: **κάθε δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, ποὺ ὁ ἕνας εἶναι θετικὸς καὶ ὁ ἄλλος ἀρνητικὸς εἶναι ἑτερόσημοι μεταξύ των.**

3.4. Ἔστω α σχετικὸς ἀριθμός, ὄχι ὁ μηδέν, καὶ β ἐπίσης σχετικὸς ἀριθμὸς ὄχι ὁ μηδέν. Θὰ λέγωμεν **ὁ α εἶναι ἴσος μὲ τὸν β** καὶ **θὰ τὸ γράφωμεν $\alpha = \beta$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, οἱ α, β εἶναι ὁμόσημοι μεταξύ των καὶ τὰ πρότυπά των εἶναι ἴσοι ἀπόλυτοι ἀριθμοί.** Εἶναι π.χ. $-\frac{3}{4} = -\frac{6}{8}$ ἐπειδὴ οἱ $-\frac{3}{4}$, $-\frac{6}{8}$ εἶναι ὁμόσημοι μεταξύ των καὶ διὰ τὰ πρότυπά των, $\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$ εἶναι: $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Ἐπίσης εἶναι $+\frac{7}{11} = +\frac{11}{33}$, διότι οἱ $+\frac{7}{11}$ καὶ $+\frac{21}{33}$ εἶναι ὁμόσημοι μεταξύ των καὶ εἶναι $\frac{7}{11} = \frac{21}{33}$.

Ἡ γραφὴ $\alpha = \beta$ λέγεται **ἰσότης.** Τὸ ἀριστερὰ τοῦ $=$ (ἴσον) λέγεται **πρῶτον μέλος** τῆς ἰσότητος, τὸ δεξιά του **δεύτερον μέλος** της.

Διὰ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν 0 συμφωνοῦμεν νὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι: 0 ἴσος μὲ τὸν 0 καὶ νὰ τὸ γράφωμεν $0 = 0$.

Ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅταν γράφωμεν $\alpha = \beta$, ἐννοοῦμεν ὅτι « α » καὶ « β » εἶναι διαφορετικὰ ὀνόματα διὰ τὸν ἴδιον σχετικὸν ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως ἠμποροῦμεν νὰ κάμωμεν **ἀντικατάστασιν** τοῦ α μὲ τὸν β εἴτε τοῦ β μὲ τὸν α εἰς κάθε πρότασιν, ποὺ ἀναφέρεται εἰς αὐτοὺς (ἀρχὴ ἀντικαταστάσεως).

Ἂν δὲν εἶναι $\alpha = \beta$, τότε λέγομεν ὅτι : **ὁ α εἶναι διάφορος τοῦ β** εἴτε ὅτι **ὁ β εἶναι διάφορος τοῦ α** καὶ τὸ γράφομεν $\alpha \neq \beta$ εἴτε $\beta \neq \alpha$.

3.5. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι ἰσχύουν αἱ ἑξῆς προτάσεις, ποὺ ὀνομάζονται : **ἰδιότητες τῆς ἰσότητος :**

1) **Ἂν α εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε σχετικὸς ἀριθμὸς ($\alpha \in \Sigma$), τότε ἰσχύει ἡ πρότασις : $\alpha = \alpha$** (ἀνακλαστικὴ ἰδιότης).

2) **Ἂν α καὶ β συμβολίζουν σχετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἰσχύῃ ἡ πρότασις : $\alpha = \beta$, τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ πρότασις : $\beta = \alpha$** (συμμετρικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος).

3) **Ἂν α, β καὶ γ συμβολίζουν σχετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἰσχύουν αἱ προτάσεις : $\alpha = \beta$ καὶ $\beta = \gamma$, τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ πρότασις : $\alpha = \gamma$** (μεταβατικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος).

Ἀσκήσεις

3) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἰσχύῃ ὅτι : ἂν α ὁμόσημος τοῦ β καὶ β ὁμόσημος τοῦ γ, τότε εἶναι καὶ α ὁμόσημος τοῦ γ.

4) Ἰσχύει ὅτι εἶναι : α ἑτερόσημος τοῦ α ;

5) Ἰσχύει ὅτι : ἂν εἶναι α ἑτερόσημος τοῦ β καὶ β ἑτερόσημος τοῦ γ τότε εἶναι καὶ α ἑτερόσημος τοῦ γ ;

6) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἀληθεῖς ἢ ψευδεῖς αἱ ἰσότητες

$$-\frac{3}{9} = -0{,}333\ldots, \qquad -0{,}25 = -\frac{2}{8}, \qquad 4 = +4.$$

7) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύῃ ὅτι : $|+5| = |-5|$.

8) Εἶναι οἱ -5 καὶ -3 ὁμόσημοι ἀριθμοί ;

9) Εἶναι οἱ $+8$ καὶ $+\frac{1}{2}$ ὁμόσημοι ἀριθμοί ;

10) Ἂν $|x| = 0$, ποῖος ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὁ x ; ($x \in \Sigma$).

11) Ἂν $|x| = 5$ ποῖος ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὁ x ; ($x \in \Sigma$)

12) Ὁ ἀριθμὸς $|x|$ τί ἀριθμὸς εἶναι, θετικὸς ἢ ἀρνητικός ; ($x \in \Sigma$)

13) Εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδὴς ἡ ἰσότης $|x| = |-x|$; ($x \in \Sigma$)

14) Ἂν $x = 0$, ποῖος ἀριθμὸς εἶναι τὸ $|x|$; ($x \in \Sigma$)

§ 4. Σχετικὸς ἀριθμὸς ἀντίθετος ἄλλου σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

4.1. Ἂς πάρωμεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς $+\frac{3}{4}$ καὶ $-\frac{3}{4}$. Βλέπομεν ἀμέσως τὰς ἑξῆς:

i) **ὁ καθένας εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸν 0.** ii) εἶναι: **$+\frac{3}{4}$ ἑτερόσημος τοῦ $-\frac{3}{4}$ καὶ** iii) **πρότυπον τοῦ $+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}=$ πρότυπον τοῦ $-\frac{3}{4}$.**

Τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐπίσης, λ.χ., οἱ $-\frac{8}{7}$ καὶ $+\frac{8}{7}$, οἱ $-\frac{11}{3}$ καὶ $+\frac{22}{6}$ κτλ.

Γενικῶς: **Ἂν α καὶ β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ i) εἶναι $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ ii) ὁ α ἑτερόσημος τοῦ β καὶ iii) πρότυπον τοῦ α = πρότυπον τοῦ β, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι: ὁ α εἶναι ἀντίθετος τοῦ β (εἴτε: ὁ α εἶναι ἀντίθετος μὲ τὸν β).**

Ἔτσι ὁ $-\frac{13}{4}$ εἶναι ἀντίθετος τοῦ $+\frac{39}{12}$, διότι εἶναι: $-\frac{13}{4} \neq 0$, $+\frac{39}{13} \neq 0$, $-\frac{13}{4}$ ἑτερόσημος τοῦ $+\frac{39}{12}$ καὶ πρότ. τοῦ $-\frac{13}{4}=\frac{13}{4}=\frac{39}{12}=$ $=$ πρότ. τοῦ $+\frac{39}{12}$.

Διὰ τὸν ἀριθμὸν 0 συμφωνοῦμεν νὰ λέγωμεν ὅτι: **ὁ 0 εἶναι ἀντίθετος τοῦ 0.**

4.2. Ἂς πάρωμεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς +5 καὶ −5. Παρατηροῦμεν ὅτι: **ὁ +5 εἶναι ἀντίθετος τοῦ −5,** ἀλλὰ καὶ **ὁ −5 εἶναι ἀντίθετος τοῦ +5.** Γενικῶς: ἂν α, β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἰσχύει ὅτι:

(I): **ἂν ὁ α εἶναι ἀντίθετος τοῦ β, τότε καὶ ὁ β εἶναι ἀντίθετος τοῦ α.** (Ἠμπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε διατί;)

4.3. Ἂς πάρωμεν τώρα τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν −8· ἂν μᾶς ἐρωτήσουν: ὑπάρχουν σχετικοὶ ἀριθμοὶ ἀντίθετοι τοῦ −8; πόσοι; ποῖοι; Εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅλοι ὅτι ἡ ἀπάντησις εἶναι: **ὑπάρχει μόνον ἕνας ἀντίθετος τοῦ −8 καὶ αὐτὸς εἶναι ὁ +8** (εἴτε, ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον, ὁ 8). Γενικῶς:

(II): **διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν α, ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον ἀντίθετός του, ὁ ὁποῖος θὰ συμβολίζεται μὲ τὸ σύμβολον −α, ποὺ διαβάζεται: ἀντίθετος τοῦ α εἴτε: πλὴν α.**

Παρατηρήσεις 1η. Συμφώνως μὲ τὴν ἰδιότητα (I), δηλ. ὅτι: ἂν α ἀντίθετος τοῦ β, τότε καὶ β ἀντίθετος τοῦ α, ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν **οἱ α καὶ β εἶναι ἀντίθετοι (μεταξύ των)** καὶ νὰ ἐννοοῦμεν μίαν ὁποιανδήποτε ἀπὸ τὰς (ἰσοδυνάμους) ἐκφράσεις : 1) ὁ α εἶναι ἀντίθετος τοῦ β ἢ 2) ὁ β εἶναι ἀντίθετος τοῦ α.

2α. Συμφώνως μὲ τὴν ἰδιότητα (ΙΙ) ἀντὶ νὰ λέγωμεν, π.χ. « ὁ $+5$ εἶναι **ἀντίθετος** τοῦ -5 », πρέπει νὰ λέγωμεν « ὁ $+5$ εἶναι **ὁ ἀντίθετος** τοῦ -5 », ἀφοῦ διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν μόνον ἕνας ἀντίθετός του ὑπάρχει.

3η. Ἂς πάρωμεν ἕνα σχετικὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν $\alpha=+5$. Εἴπαμεν προηγουμένως ὅτι ὁ ἀντίθετος τοῦ $\alpha=+5$ θὰ συμβολίζεται μὲ $-\alpha$, ὥστε ὁ ἀντίθετος τοῦ $+5$ θὰ συμβολισθῇ μὲ $-(+5)$. Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι ὁ ἀντίθετος τοῦ $+5$ εἶναι ὁ -5, δηλαδή :

$-(+5)$ συμβολίζει τὸν ἀντίθετον τοῦ $+5$ καὶ
-5 εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $+5$·

εἴμεθα λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ γράψωμεν :

$$-(+5)=-5.$$

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον εἶναι : $-\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{4}$, $-(+8)=-8$ κτλ.

Ἐπίσης, ἔστω $\alpha=-8$· τότε :

$-\alpha$, δηλαδὴ **$-(-8)$, συμβολίζει τὸν ἀντίθετον τοῦ -8**
ἀλλὰ **$+8$ εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ -8·**

ὥστε εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ γράψωμεν :

$$-(-8)=+8\ (=8)$$

Διὰ τὸν ἴδιον λόγον εἶναι :

$-(-17)=+17\ (=17)$, $-\left(-\frac{2}{5}\right)=+\frac{2}{5}\left(=\frac{2}{5}\right)$ κτλ.

4η. Ἂν $\alpha=\beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $-\alpha=-\beta$, δηλαδή: **Εἰς κάθε ἰσότητα σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπιτρέπεται νὰ ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν μελῶν της.** (Ἠμπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε διατί ;)

5η. Ἂν α, β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, $\neq 0$, ἑτερόσημοι, ἀλλὰ ὄχι ἀντίθετοι, τότε τὰ πρότυπά των εἶναι ἄνισοι ἀπόλυτοι ἀριθμοί. Ἔτσι 1) ἂν $\alpha=-8$, $\beta=+3$, εἶναι πρότ. τοῦ $-8=8$, πρότ. τοῦ $+3=3$, $8>3$, δηλαδὴ πρότ. τοῦ α $>$ πρότ. τοῦ β.

2) Ἂν $\alpha=-4$, $\beta=+20$, εἶναι: πρότ. τοῦ $-4=4$, πρότ. τοῦ $+20=20$, $4<20$, δηλαδὴ πρότ. τοῦ α $<$ πρότ. τοῦ β.

Ἄσκησις 1. Ἂν $\alpha = -4, \beta = +13$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις (*) τῶν προτύπων των.

Λύσις : Εἶναι : πρότ. τοῦ $-4 = 4$, πρότ. τοῦ $+13 = 13$, ἀπόστασίς των $= 13 - 4 = 9$.

Ἄσκησις 2. Ἂν $\alpha = +24$, $\beta = -10$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν προτύπων των.

Λύσις : Εἶναι : πρότ. τοῦ $+24 = 24$, πρότ. τοῦ $-10 = 10$, ἀπόστασίς των $24 - 10 = 14$.

5η. Εἴπαμεν ὅτι, ἂν α εἶναι κάποιος σχετικὸς ἀριθμός, τότε μὲ $-\alpha$ ἐννοοῦμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ α. Ἔτσι εἶναι $-(-8) =$ ὁ ἀντίθετος τοῦ $-8 = +8$, $-(+4) =$ ὁ ἀντίθετος τοῦ $+4 = -4$.

Τί σημαίνει τώρα -0; σημαίνει τὸν ἀντίθετον τοῦ 0· ἐσυμφωνήσαμεν ὅμως ὁ ἀντίθετος τοῦ 0 νὰ εἶναι ὁ 0· ὥστε $-0 = 0$. Αὐτὸ εἶναι σύμφωνον καὶ μὲ ὅ,τι εἴπαμεν εἰς τὴν § 2.1.

Ἀσκήσεις

15) Ποῖος εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ $-\frac{1}{2}$;

16) Ποῖον ἀριθμὸν παριστάνει τὸ σύμβολον $-\left(-\frac{5}{8}\right)$;

17) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀντίθετοι οἱ $+\frac{3}{4}$ καὶ $-\frac{30}{40}$.

18) Νὰ εὕρετε τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν 17 καὶ 8.

19) Ἂν $x = 0$ ποῖος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $-x$;

20) Ὁ ἀριθμὸς $-|x|$ τί ἠμπορεῖ νὰ εἶναι : θετικὸς ἢ ἀρνητικός ; $(x \in \Sigma)$.

* Ἂν πάρωμεν δύο ἀπολύτους ἀριθμούς, π.χ. τοὺς α, β, τότε, ἂν δὲν εἶναι ἴσοι, κάποιος θὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου· ἔστω λοιπὸν $\alpha \geqslant \beta$. Ὀνομάζεται ἀπόστασις τοῦ α ἀπὸ τὸν β, εἴτε καὶ ἀπόστασις τῶν α, β, ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$. Ἔτσι π.χ. εἶναι : ἀπόστ. τῶν 7 καὶ $10 = 10 - 7 = 3$, ἀπόστασις τοῦ 5 ἀπὸ τὸν $5 = 5 - 5 = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ Σ

§ 5. Ἡ ἀνάγκη τοῦ ὁρισμοῦ πράξεων εἰς τὸ Σ

Πρόβλημα. Μίαν ὡρισμένην ἡμέραν ὁ ταμίας ἑνὸς καταστήματος εἶχε τὸ πρωῒ εἰς τὸ ταμεῖον του 14.500 δρχ. Τὸ βράδυ τῆς ἰδίας ἡμέρας, διὰ νὰ κλείσῃ τὸ ταμεῖον, συνεβουλεύθη τὸ πρόχειρον βιβλίον του, ὅπου εἶχε καταγράψει ἕως τὸ μεσημέρι τοὺς ἀριθμούς :

$$+158, \ -234, \ +18.550, \ -462{,}50$$

καὶ τὸ ἀπόγευμα τοὺς ἀριθμοὺς :

$$-1240, \ +654{,}30, \ -497{,}20.$$

Πόσας δραχμὰς εἶχεν εἰς τὸ ταμεῖον του ὁ ὑπάλληλος τὸ βράδυ τῆς ἡμέρας ἐκείνης ;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ γνωρίζομεν νὰ τὸ λύσωμεν μὲ τὴν βοήθειαν πράξεων μὲ ἀπολύτους ἀριθμούς, ὅταν ἔχωμεν καταγράψει τὰς εἰσπράξεις καὶ πληρωμὰς χωριστά. Τὸ ἴδιον ὅμως πρόβλημα **ἠμποροῦμεν μήπως νὰ τὸ λύσωμεν ἐκτελοῦντες κάποιας « πράξεις » μὲ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἔχει σημειώσει ὁ ταμίας; Τί εἴδους ὅμως πράξεις πρέπει νὰ εἶναι αὐταί ; Πῶς θὰ « ἐκτελοῦνται »;**

Δὲν ἔχομεν ἕως τώρα μάθει (οὔτε καὶ ἔχομεν σκεφθῆ), ἂν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν « πράξεις » μὲ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς. Γεννᾶται λοιπὸν τὸ πρόβλημα : **Εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν « πράξεις » μὲ σχετικοὺς ἀριθμούς,** ὅπως ὡρίσαμεν πράξεις μὲ τοὺς ἀπολύτους ἀριθμούς ; **Πῶς θὰ « ἐκτελοῦνται » αἱ « πράξεις » αὐταί;** Καὶ ἂν ἐπὶ τέλους τὸ ἐπιτύχωμεν αὐτὸ θὰ ἔχωμεν κάποιο κέρδος ἢ ἁπλῶς θὰ λύωμεν τὰ προβλήματα, ποὺ ἐλύαμεν ἕως τώρα, ἀλλὰ μὲ ἄλλους τρόπους ; **Μήπως μὲ αὐτοὺς τοὺς ἄλλους τρόπους τὰ προβλήματα λύονται συντομώτερον;** Διότι καὶ αὐτὸ θὰ εἶναι ἕνα ἀξιόλογον κέρδος. **Οἱ μαθηματικοί, ποὺ θὰ ἔχουν ἴσως σκεφθῆ τέτοια ἐρωτήματα, πῶς ἀπήντησαν;** Μία σύντομος ἀπάντησις εἰς ὅλα αὐτὰ εἶναι ἡ ἑξῆς : **Οἱ μαθηματικοὶ ἔχουν ἀπαντήσει εἰς τὰ ἐρωτήματα αὐτά. Ὥρισαν πράξεις εἰς τὸ σύνολον Σ καὶ εὐρῆκαν τρόπους διὰ νὰ λύωνται προβλήματα μὲ σχετικοὺς ἀριθμούς, ἀκόμη καὶ προβλήματα, ποὺ δὲν λύονται μὲ τοὺς**

ἀπολύτους ἀριθμοὺς καὶ ποὺ ἡ λύσις των εἶναι ἀπαραίτητος διὰ τὴν ζωὴν τοῦ πολιτισμένου ἀνθρώπου.

Σκοπός μας εἰς τὰ ἀμέσως ἑπόμενα εἶναι νὰ ὁρίσωμεν πράξεις εἰς τὸ σύνολον Σ, δηλαδὴ πράξεις μὲ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς. Αἱ πράξεις αὐταὶ ἔχουν τὰ γνωστά μας ὀνόματα: **Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, διαίρεσις.** Ἀφοῦ μάθωμεν αὐτὰς τὰς πράξεις, θὰ ἴδωμεν καὶ **πῶς μὲ τὴν βοήθειάν των** ἠμποροῦμεν νὰ λύωμεν διάφορα προβλήματα, ποὺ παρουσιάζονται.

Α΄. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΗΣ

§ 6. Ἡ πρόσθεσις (σχετικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἄλλον)

Ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, τί θὰ ὀνομάζωμεν **ἄθροισμα τοῦ α σὺν τὸν β;**

Διὰ τὴν ἀπάντησιν εἰς αὐτὸ τὸ ἐρώτημα διακρίνομεν 4 περιπτώσεις:

1η περίπτωσις: οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α, β εἶναι θετικοί, δηλαδὴ ἀπόλυτοι ἀριθμοί, διάφοροι τοῦ 0. Τότε: **ὀνομάζομεν ἄθροισμα α σὺν β καὶ τὸ γράφομεν $\alpha+\beta$, τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$, ὅπως τὸ γνωρίζομεν διὰ τοὺς ἀπολύτους ἀριθμούς.**

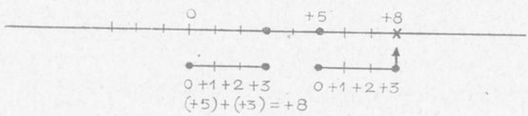
Ἔτσι, π.χ., ἂν $\alpha=+5$, δηλαδὴ 5, καὶ $\beta=+3$, δηλαδὴ 3, τὸ ἄθροισμα $+5$ σὺν $+3$, ποὺ θὰ τὸ γράφωμεν $(+5)+(+3)$, εἶναι τὸ ἄθροισμα $5+3=8=+8$. Εἶναι λοιπόν:

$$(+5)+(+3)=+(5+3)=+8$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$(+10)+(+4)=+(10+4)=+14$$
$$(+3)+(+5)=+(3+5)=+8$$
$$(+4)+(+10)=+(4+10)=+14$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ μὲ τοὺς α, β θετικούς, διὰ τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀθροίσματος $(+5)+(+3)$, ἀποδίδεται γεωμετρικῶς εἰς τὸ παρακάτω σχῆμα 9.



Σχ. 9.

2α περίπτωσις: οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α, β εἶναι ἀρνητικοί. Τότε ὀνομάζομεν ἄθροισμα α σὺν β, συντόμως $\alpha+\beta$, τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀθροίσματος τῶν προτύπων τῶν α, β.

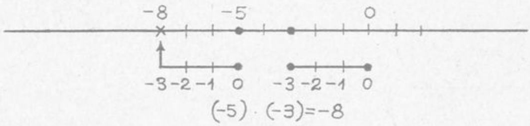
Ἔτσι, π.χ., ἂν $\alpha = -5$, $\beta = -3$, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα -5 σὺν -3, ποὺ τὸ γράφομεν $(-5)+(-3)$, θὰ εἴπωμεν: πρότ. τοῦ $-5 = 5$, πρότ. τοῦ $-3 = 3$, ἄθροισμα προτ. τοῦ -5 + πρότ. τοῦ $-3 = 5+3=8$ καὶ τέλος θὰ πάρωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ 8, δηλαδὴ τὸν -8. Εἶναι λοιπόν:

$$(-5)+(-3)=-(5+3)=-8$$

Ἐπίσης:

$$(-10)+(-4)=-(10+4)=-14$$
$$(-8)+(-5)=-(8+5)=-13$$
$$(-4)+(-10)=-(4+10)=-14$$

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ μὲ τοὺς α, β ἀρνητικοὺς ἀποδίδεται γεωμετρικῶς, εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀθροίσματος $(-5)+(-3)$, εἰς τὸ παρακάτω σχῆμα 10.



Σχ. 10.

3η περίπτωσις: οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α, β εἶναι ἑτερόσημοι, ὄχι ὅμως ἀντίθετοι.

Γνωρίζομεν ὅτι, ἐπειδὴ οἱ α, β εἶναι ἑτερόσημοι, ὄχι ὅμως ἀντίθετοι, θὰ εἶναι:

ἢ πρότ. τοῦ $\alpha >$ πρότ. τοῦ β

ἢ πρότ. τοῦ $\beta >$ πρότ. τοῦ α

καὶ ὅτι οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοί: πρότ. τοῦ α, πρότ. τοῦ β ἔχουν ὡς ἀπόστασιν κάποιον **ἀπόλυτον ἀριθμόν**, ἔστω τὸν δ $(\neq 0)$. Θὰ ὀνομάζωμεν τώρα: **ἄθροισμα α σὺν β, καὶ θὰ τὸ γράφωμεν α+β, τὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ κατασκευάζεται ἀπὸ τὸν δ, ἂν θέσωμεν ἐμπρός του τὸ πρόσημον ἐκείνου ἀπὸ τοὺς α, β, ποὺ ἔχει τὸ μεγαλύτερον πρότυπον.**

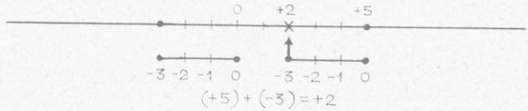
Ἔτσι, π.χ., 1) ἂν $\alpha = +5$, $\beta = -3$, θὰ εἶναι: πρότ. τοῦ $+5 = 5$, πρότ. τοῦ $-3 = 3$· ἀπόστασίς των $\delta = 5-3=2$. Ἀπὸ τοὺς $+5$, -3 τὸ μεγαλύτερον πρότυπον ἔχει ὁ $+5$, ὥστε τὸ ἄθροισμα: $+5$ σὺν -3, ποὺ τὸ γράφομεν $(+5)+(-3)$, εἶναι $+2$. Εἶναι λοιπόν: $(+5)+(-3)=+(5-3)=+2$.

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ παραπάνω ἀθροίσματος $(+5)+(-3)$ ἀποδίδεται γεωμετρικῶς εἰς τὸ παρακάτω σχῆμα 11.

2) Ἂν εἶναι $\alpha = -10$, $\beta = +2$, θὰ εἶναι: πρότ. τοῦ $-10 = 10$,

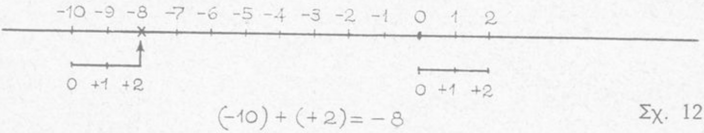
πρότ. τοῦ $+2=2$, ἀπόστασίς των $\delta=10-2=8$ καὶ ἀπὸ τοὺς -10, $+2$, τὸ μεγαλύτερον πρότυπον τὸ ἔχει ὁ -10· Ὥστε :

$$(-10)+(+2)=-(10-2)=-8.$$



Σχ. 11.

Ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ παραπάνω ἀθροίσματος $(-10)+(+2)$ δίδεται εἰς τὸ παρακάτω σχῆμα 12.



Σχ. 12.

Ἄλλα παραδείγματα:

$(-20)+(+2)=-(20-2)=-18$	$(+40)+(-8)=+(40-8)=+32$
$(-18)+(+1)=-(18-1)=-17$	$(+20)+(-7)=+(20-70)=+13$
$(-60)+(+24)=-(60-24)=-36$	$(+110)+(-50)=+(110-50)=+60$
$(+2)+(-20)=-(20-2)=-18$	$(-8)+(+40)=+(40-8)=+32$
$(+1)+(-18)=-(18-1)=-17$	$(-7)+(+20)=+(20-7)=+13$
$(+24)+(-60)=-(60-24)=-36$	$(-50)+(+110)=+(110-50)=+60$

4η περίπτωσις: οἱ α, β εἶναι ἀντίθετοι. Ὀνομάζομεν τότε ἄθροισμα α σὺν β καὶ τὸ γράφομεν $\alpha+\beta$ τὸν ἀριθμὸν 0. Ἔτσι εἶναι :

$$\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)=0,\ \left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)=0,\ (+5)+(-5)=0 \text{ κτλ.}$$

5η περίπτωσις: ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς α, β εἶναι ὁ 0, π.χ. εἶναι $\beta=o$. Ὀνομάζομεν τότε ἄθροισμα α σὺν 0 καὶ τὸ γράφομεν $\alpha+0$ τὸν ἀριθμὸν α, δηλαδὴ εἶναι : $\alpha+0=\alpha$ διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν α. Ἐπίσης ἄθροισμα $0+\alpha$ ὀνομάζομεν τὸν α.

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta$ λέγεται **πρόσθεσις** τοῦ α μὲ τὸν β (εἴτε : τοῦ α εἰς τὸν β)· οἱ α, β λέγονται : **προσθετέοι** ἢ **ὅροι τοῦ ἀθροίσματος**· ὁ α λέγεται **πρῶτος προσθετέος** καὶ ὁ β **δεύτερος**. Ἡ φράσις « προσθέσατε τὸν α μὲ τὸν β » σημαίνει : « νὰ εὕρετε τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ».

Παρατήρησις: Πρὸς ἁπλούστευσιν καὶ συντόμευσιν, ἀθροίσματα ὡσὰν τά : $(-3)+(-5)$, $(+3)+(-5)$ γράφονται καὶ ἔτσι :

$$-3+(-5),\ +3+(-5) \quad \text{εἴτε καὶ} \quad 3+(-5).$$

Παραδείγματα ὅλων τῶν περιπτώσεων :

1) $(+8)+(+12)=+(8+12)=+20$

2) $\frac{2}{5}+\left(+\frac{4}{5}\right)=+\left(\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\right)=+\frac{6}{5}$

3) $-\frac{3}{4}+\left(-\frac{7}{12}\right)=-\frac{9}{12}+\left(-\frac{7}{12}\right)=-\left(\frac{9}{12}+\frac{7}{12}\right)=-\frac{16}{12}=-\frac{4}{3}$

4) $-\frac{3}{4}+\left(+\frac{7}{12}\right)=-\frac{9}{12}+\left(+\frac{7}{12}\right)=-\left(\frac{9}{12}-\frac{7}{12}\right)=-\frac{2}{12}=-\frac{1}{6}$

5) $\frac{3}{4}+\left(-\frac{7}{12}\right)=\frac{9}{12}+\left(-\frac{7}{12}\right)=+\left(\frac{9}{12}-\frac{7}{12}\right)=+\frac{2}{12}=+\frac{1}{6}$.

6) $\frac{5}{6}+\left(-\frac{55}{66}\right)=\frac{5}{6}+\left(-\frac{5}{6}\right)=0$

7) $-\frac{5}{8}+\left(-\frac{7}{12}\right)=-\frac{15}{24}+\left(-\frac{14}{24}\right)=-\left(\frac{15}{24}+\frac{14}{24}\right)=-\frac{29}{24}$

8) $-1650+(+985)=-(1650-985)=-665$

Ἀσκήσεις

21) Νὰ εὕρετε τὰ παρακάτω ἀθροίσματα :

α) $(-7)+(-3)$, β) $(+4)+(+12)$, γ) $-13+(+8)$

δ) $-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)$ ε) $-2\frac{1}{2}+\left(+3\frac{5}{6}\right)$ ζ) $-4+\left(+\frac{2}{5}\right)$

22) Ὁμοίως τὰ ἀρθοίσματα :

α) $-5+\left(+1\frac{2}{3}\right)$ β) $+5+\left(-1\frac{2}{3}\right)$ γ) $-5+\left(-1\frac{2}{3}\right)$

δ) $-\frac{9}{16}+\left(+\frac{45}{80}\right)$ ε) $-2\frac{1}{2}+\left(-\frac{4}{5}\right)$ ζ) $-\frac{1}{2}+\left(+\frac{4}{15}\right)$

ζ) $-1{,}25+(-2{,}75)$ η) $-672+(+1456)$, θ) $-1654+(+975)$

23) Νὰ ἀποδοθῇ γεωμετρικῶς τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

α) $-10+(+4)$ β) $-8+(-3)$ γ) $-8+(+15)$.

§ 7. Ἡ πρόσθεσις μὲ προσθετέους περισσοτέρους ἀπὸ δύο.

Ἔστω ὅτι α, β, γ εἶναι τρεῖς σχετικοὶ ἀριθμοί. Ὀνομάζομεν ἄθροισμα α σὺν β σὺν γ, καὶ τὸ γράφομεν $\alpha+\beta+\gamma$, τὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ προκύπτει ὡς ἄθροισμα τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ $(\alpha+\beta)$ σὺν τὸν γ. Αὐτὸ τὸ γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$$

Ἔτσι π.χ. εἶναι :

$$(-3)+(+10)+(-20)=\big((-3)+(+10)\big)+(-20)=$$
$$(+7)+(-20)=-13$$

Ἄς εἶναι τώρα α, β, γ, δ τέσσερες σχετικοὶ ἀριθμοί. Ὀνομάζομεν ἄθροισμα α σὺν β σὺν γ σὺν δ, καὶ τὸ γράφομεν $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, τὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ προκύπτει ὡς ἄθροισμα τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ $(\alpha+\beta+\gamma)$ σὺν τὸν δ· αὐτὸ τὸ γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta+\gamma)+\delta$$

Ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα μὲ 5, 6 κτλ. προσθετέους.

Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὁ ὁρισμὸς τοῦ ἀθροίσματος μὲ περισσοτέρους ἀπὸ δύο προσθετέους σχετικοὺς ἀριθμοὺς δίδεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ποὺ δίδεται ὁ ὁρισμὸς διὰ τὸ ἄθροισμα μὲ περισσοτέρους ἀπὸ δύο προσθετέους εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογὴ 1η: Ἡ κίνησις ἑνὸς καταστήματος μίαν ἡμέραν ἦτο :

εἴσπραξις :	1000 δρχ.	Πόσα χρήματα ἔπρεπε νὰ παραδώσῃ ὁ ταμίας εἰς τὸ κατάστημα κατὰ τὸ κλείσιμον τῆς ἡμέρας ἐκείνης ;
πληρωμή :	50 δρχ.	
πληρωμή :	120 δρχ.	

Ἀπάντησις: Ὁ ταμίας ἔπρεπε νὰ παραδώσῃ :

$$(+1000)+(-50)+(-120)=\left[(+1000)+(-50)\right]+(-120)=$$
$$=(+950)+(-120)=+830.$$

Δηλ. ὤφειλε νὰ παραδώσῃ 830 δρχ. Τὴν ἰδίαν ἀπάντησιν εὑρίσκομεν, ἂν ἐργασθῶμεν μὲ ἀπολύτους ἀριθμούς. (Πῶς ;)

Ἐφαρμογὴ 2α. Ἂν ἡ κίνησις ἑνὸς καταστήματος μίαν ἡμέραν εἶναι :

πληρωμή :	50 δρχ.	Πόσα χρήματα ὀφείλει νὰ παραδώσῃ ὁ ταμίας εἰς τὸ κατάστημα κατὰ τὸ κλείσιμον τῆς ἡμέρας ἐκείνης ;
πληρωμή :	120 δρχ.	
εἴσπραξις :	1000 δρχ.	

Ἀπάντησις: Ὁ ταμίας ὀφείλει νὰ παραδώσῃ :

$$(-50)+(-120)+(+1000)=\left[(-50)+(-120)\right]+(+1000)=$$
$$=(-170)+(+1000)=+830.$$

Τὴν ἰδίαν ἀπάντησιν εὑρίσκομεν ἂν ἐργασθῶμεν μὲ ἀπολύτους ἀριθμούς.

Ἐφαρμογὴ 3η: Ἂν ἡ κίνησις ἑνὸς καταστήματος μίαν ἡμέραν ἦτο :

ταμεῖον κατὰ τὸ ἄνοιγμα :	12385 δρχ.	Τὸ κατάστημα ἔκλεισε τὴν ἡμέραν ἐκείνην μὲ ἔλλειμμα ἢ μὲ περίσσευμα καὶ πόσον ;
πληρωμή :	10000 δρχ.	
πληρωμή :	400 δρχ.	
εἴσπραξις :	1260 δρχ.	
εἴσπραξις :	950 δρχ.	

Ἀπάντησις: Αὐτὴ θὰ μᾶς δοθῇ, ἂν ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα :

$$(+12385)+(-10000)+(-400)+(+1260)+(950)$$

Εἶναι : $(+12385)+(-10000)=+2385$

$$(+12385)+(-10000)+(-400)=(+2385)+(-400)=+1985$$

$$(+12385)+(-10000)+(-400)+(+1260)=$$
$$(+1985)+(+1260)=+3245$$

$$(+12385)+(-10000)+(-400)+(+1260)+(+950)=$$
$$=(+3245)+(+950)=+4195$$

Ὥστε τὸ κατάστημα ἔκλεισε τὴν ἡμέραν ἐκείνην μὲ περίσσευμα 4195 δρχ. Τὴν ἰδίαν ἀπάντησιν εὑρίσκομεν, ἂν ἐργασθῶμεν μὲ ἀπολύτους ἀριθμούς.

Ἀξιοσημείωτος παρατήρησις: Ἂν α, β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς γ, τότε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $\alpha+\beta$ δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἴσον καὶ μὲ κάποιον ἄλλον σχετικὸν ἀριθμόν, διάφορον ἀπὸ τὸν γ. Αὐτὸ τὸ διατυπώνομεν ὡς ἑξῆς: **τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ὁρίζεται μονοσημάντως.** Τὸ διατὶ εἶναι φανερὸν ἀπὸ τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον ἔχει ὁρισθῆ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα μὲ τρεῖς, τέσσερες κτλ. προσθετέους ὁρίζεται **μονοσημάντως.** Ἐπίσης **τὸ ἄθροισμα αὐτὸ (δύο ἢ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν) εἶναι σχετικὸς ἀριθμός.** Δηλαδὴ ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον Σ εἶναι **ἐσωτερικὴ** καὶ **μονοσήμαντος.**

§ 8. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

1η ἰδιότης: Διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν α ἰσχύει $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$. Διὰ τὸν λόγον αὐτὸν τὸ 0 λέγεται **οὐδέτερον στοιχεῖον** τῆς προσθέσεως. Ἔτσι, π.χ., εἶναι:

$(-5)+0=-5=0+(-5)$, $(+8)+0=+8=0+(+8)$ κτλ.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἠμπορεῖ νὰ δικαιολογηθῇ* ὡς ἑξῆς: Ἰσχύει ἡ ἰσότης:

(1) $\alpha+0=\alpha$ (ἐξ ὁρισμοῦ) καὶ ἡ ἰσότης:

(2) $0+\alpha=\alpha$ (ἐξ ὁρισμοῦ), ἄρα ἰσχύει καὶ ἡ ἰσότης:

(3) $\alpha=0+\alpha$ (λόγῳ τῆς συμμετρικῆς ἰδιότητος τῆς ἰσότητος).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (3) καὶ ἐξ αἰτίας τῆς μεταβατικότητος τῆς ἰσότητος συμπεραίνομεν ὅτι: $\alpha+0=0+\alpha\ (=\alpha)$.

---

*Ὅ,τι εἶναι γραμμένον μὲ μικρὰ στοιχεῖα ἠμπορεῖ νὰ διδάσκεται ἢ νὰ παραλείπεται (κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος).

2α ἰδιότης: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β. (ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως).

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἔκφρασιν: **ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α, β** ἀντὶ τῆς: **ἄθροισμα τοῦ α μὲ τὸν β** εἴτε τῆς: **ἄθροισμα τοῦ β μὲ τὸν α.**

3η ἰδιότης: $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱσχετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ. (προσεταιριστικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως).

Εἶναι, π.χ.,

α) $[(-10)+(+4)]+(-20)=(-6)+(-20)=-26.$

β) $(-10)+[(+4)+(-20)]=(-10)+(-16)=-26,$

Ὥστε εἶναι:

$$[(-10)+(+4)]+(-20)=(-10)+[(+4)+(-20)]$$

Ἐφαρμογή: Νὰ δικαιολογήσετε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$\beta+[\alpha+(-\beta)]=\alpha,$$

ὅπου α, β ὁποιοιδήποτε σχετικοὶ ἀριθμοί.

Εἶναι:

$\beta+[\alpha+(-\beta)]$	$=\beta+[(-\beta)+\alpha]$	(ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης)
	$=[\beta+(-\beta)]+\alpha$	(προσεταιριστικὴ ἰδιότης)
	$=0+\alpha$	(ἐπειδὴ β καὶ $-\beta$ εἶναι ἀντίθετοι)
	$=\alpha$	(ἐπειδὴ τὸ 0 εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως)

Ὥστε ἀληθεύει ἡ ἰσότης $\beta+[\alpha+(-\beta)]=\alpha$, **ποὺ σημαίνει ὅτι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $[\alpha+(-\beta)]$ ἔχει ττὴν ἰδιότητα ὅτι: τὸ ἄθροισμά του μὲ τὸν β εἶναι ὁ α.**

4η ἰδιότης: Ἂν α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha=\beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εἶναι $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Ἰσχύει δηλαδὴ ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία:

$$\boxed{\alpha=\beta \Longleftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma}$$

Τὸ πρῶτον σκέλος τῆς ἰσοδυναμίας αὐτῆς, δηλ. ἡ συνεπαγωγὴ

$$\alpha=\beta \Longrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

(μονότονος ἰδιότης τῆς προσθέσεως ὡς πρὸς τὴν ἰσότητα), ἠμπορεῖ νὰ δικαιολογηθῇ ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=\alpha$ (ἀνακλαστικὴ ἰδιότης τῆς ἰσότητος) θὰ εἶναι καὶ

$\alpha + \gamma = \alpha + \gamma$ (ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν τοῦ Σ εἶναι ἕνας καὶ μόνον ἀριθμὸς τοῦ Σ, ἐπειδὴ δηλ. τὸ ἄθροισμα $\alpha + \gamma$ ὁρίζεται μονοσημάντως). Ἀλλ' εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος ἠμποροῦμεν νὰ ἀντικαταστήσωμεν (§ 3.4) τὸν α μὲ τὸν ἴσον του β, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Ἡ συνεπαγωγὴ $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Longrightarrow \alpha = \beta$ (νόμος τῆς διαγραφῆς) ἠμπορεῖ νὰ δικαιολογηθῇ ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ τὴν $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, συμφώνως πρὸς τὴν μονότονον ἰδιότητα, συνάγεται: $(\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma)$. Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα ἕπεται ὅτι ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$\alpha + [\gamma + (-\gamma)] = \beta + [\gamma + (-\gamma)]$, δηλ. $\alpha + 0 = \beta + 0$, ἄρα $\alpha = \beta$.

5η ἰδιότης: Ἡ ὁποιαδήποτε ἀλλαγὴ θέσεως τῶν προσθετέων ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀθροίσματος δὲν τὸ μεταβάλλει.

Π.χ.
$$(-1)+(-4)+(+8)=+3$$
$$(-4)+(-1)+(+8)=+3$$
$$(-1)+(+8)+(-4)=+3$$
$$(+8)+(-1)+(-4)=+3$$
$$(-4)+(+8)+(-1)=+3$$
$$(+8)+(-4)+(-1)=+3$$

Ἐφαρμογή. Νὰ εὕρετε τὸ ἄθροισμα:

$$(-2)+(-3)+(+4)+(-1)+(+2)+(+5)$$

Συμφώνως πρὸς τὴν 5ην ἰδιότητα ἀλλάζομεν τὰς θέσεις τῶν προσθετέων ὡς ἑξῆς: $(-2)+(-3)+(-1)+(+4)+(+2)+(+5)=$

$[(-2)+(-3)+(-1)]+[(+4)+(+2)+(+5)]=$

(προσεταιριστικὴ ἰδιότης) $=(-6)+(+11)=+5=5$

Βλέπομεν δηλ. ὅτι, ἐφαρμόζοντες τὴν 5ην ἰδιότητα, ἠμποροῦμεν ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικοὺς προσθετέους καὶ νὰ καταλήξωμεν εἰς ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν.

6η ἰδιότης : Ἡ ἐξίσωσις $\alpha + x = \alpha$, ὅπου α τυχαῖος σχετικὸς ἀριθμός, ἔχει μόνον μίαν λύσιν (διατί ;), ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὸν α, καὶ μάλιστα αὐτὴ εἶναι ἡ $x = 0$. Αὐτὸ τὸ διατυπώνομεν καὶ ὡς ἑξῆς: **ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνον οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως, τὸ 0. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν $(\alpha + x = \alpha) \Longleftrightarrow (x = 0)$.**

7η ἰδιότης : Ἡ ἐξίσωσις $\beta + x = \alpha$, ὅπου α, β τυχαῖοι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἔχει μόνον μίαν λύσιν, τὴν $[\alpha + (-\beta)]$.
Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $(\beta + x = \alpha) \Longleftrightarrow (x = \alpha + (-\beta))$. Π.χ. $(-3) + x = -4 \Longleftrightarrow x = -4 + [-(-3)] =$
$= -4 + (+3) = -1$

Δικαιολόγησις: τὸ ὅτι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς [α+ (−β)] εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως β+ χ= α, δηλ. ὅτι εἶναι: β+ [α+ (−β)]= α, τὸ γνωρίζομεν ἤδη (§ 8, 3η ἰδιότης, ἐφαρμογή). Τὸ ὅτι ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω λύσιν δὲν ὑπάρχει ἄλλη, ἠμπορεῖ νὰ δικαιολογηθῇ ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὅτι ὑπάρχουν δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ x_1, x_2 μὲ $x_1 \neq x_2$ καὶ τέτοιοι, ὥστε: $\alpha+x_1=\beta$ καὶ $\alpha+x_2=\beta$· τότε ὅμως (μεταβατικότης ἰσότητος) θὰ ἦτο $\alpha+x_1=\alpha+x_2$, δηλ. $x_1+\alpha=x_2+\alpha$, ἀλλὰ τότε (ἰδιότης διαγραφῆς) θὰ ἦτο καὶ $x_1=x_2$. Δὲν εἶναι δυνατὸν ὅμως νὰ εἶναι $x_1 \neq x_2$ (ὅπως ὑπεθέσαμεν) καὶ συγχρόνως $x_1=x_2$ (ὅπως λογικῶς ἐσυμπεράναμεν)· πρέπει λοιπὸν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἦτο ἐσφαλμένη ἡ ὑπόθεσίς μας ὅτι ὑπάρχουν δύο διαφορετικαὶ λύσεις τῆς $\alpha+x=\beta$. Ὑπάρχει λοιπὸν μία μόνον λύσις τῆς $\alpha+x=\beta$, ἡ $x=[\alpha+(-\beta)]$.

Ἐφαρμογή. Ὁ ἀντίθετος ἑνὸς ἀθροίσματος μὲ δύο προσθετέους εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων τῶν προσθετέων· δηλαδὴ ἰσχύει ὅτι :

$$-(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(-\beta)$$

δι' ὁποιουσδήποτε σχετικοὺς ἀριθμοὺς α, β.

Διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὴν ἀνωτέρω πρότασιν, ἂς πάρωμεν τὸ ἄθροισμα $(+3)+(-8)$. Ἔχομεν $(+3)+(-8)=-5$. ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ εἶναι $+5$. Ἔχομεν τώρα ὅτι ὁ ἀντίθετος τοῦ $+3$ εἶναι ὁ -3 καὶ ὁ ἀντίθετος τοῦ -8 εἶναι ὁ $+8$, ὥστε: τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων τοῦ $+3$ καὶ τοῦ -8 εἶναι: $-3+(+8)=+5$. Ἄρα εἶναι πραγματικῶς: ἀντίθ. τοῦ ἀθροίσματος $\big((+3)+(-8)\big)=$ (ἀντίθ. τοῦ $+3$)+ (ἀντίθ. τοῦ -8).

Ἡ προηγουμένη ἰδιότης εἶναι δυνατὸν νὰ δικαιολογηθῇ ὡς ἑξῆς: Ἔστω ὅτι ὁ x εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀθροίσματος $(\alpha+\beta)$· τότε θὰ εἶναι: $x+(\alpha+\beta)=0$, ἄρα (προσεταιριστικὴ ἰδιότης) $(x+\alpha)+\beta=0 \Longleftrightarrow$ (λόγῳ τῆς ἀντιμεταθετικῆς ἰδιότητος) $\beta+(x+\alpha)=0 \Longleftrightarrow$ (λόγῳ τῆς 7ης ἰδιότητος) $(x+\alpha)=0+(-\beta)=-\beta$, ὥστε:

$x+\alpha=-\beta \Longleftrightarrow$ (λόγῳ τῆς ἀντιμεταθετικῆς) $\alpha+x=-\beta \Longleftrightarrow$ (7η ἰδιότης)

$$x=-\beta+(-\alpha)=(-\alpha)+(-\beta).$$

Παρατήρησις : Ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ κάθε ἄθροισμα (μὲ ὁσουσδήποτε προσθετέους). Π.χ. εἶναι :

$$-\big((-3)+(+2)+(-7)\big)=(+3)+(-2)+(+7),$$

$$-\left(-\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+0{,}6\right)=+\frac{1}{2}+\left(+\frac{3}{4}\right)+(-0{,}6),$$

ὅπως εἶναι εὐκολώτατον νὰ ἐπαληθεύσωμεν.

§ 9. Ἁπλούστευσις τῆς γραφῆς ἑνὸς ἀθροίσματος.

Ἠμποροῦμεν χάριν συντομίας νὰ ἁπλουστεύσωμεν τὴν γραφὴν ἑνὸς ἀθροίσματος κάμοντες τὴν ἑξῆς **συμφωνίαν:** νὰ γράφωμεν τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου (καθένα μὲ τὸ πρόσημόν του) παραλείποντες τὰς παρενθέσεις καὶ τὰ σύμβολα τῆς προσθέσεως, ποὺ εἶναι γραμμένα μεταξύ τῶν παρενθέσεων.

Ἔτσι, π.χ., τὸ ἄθροισμα $(+3)+(-5)+(-2)+(+6)$ θὰ τὸ γράφωμεν $+3-5-2+6$.

Ὅταν λοιπὸν βλέπωμεν σχετικοὺς ἀριθμοὺς γραμμένους τὸν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου μὲ τὸ πρόσημόν των, θὰ ἐννοοῦμεν ὅτι πρόκειται διὰ ἄθροισμα. Ἔτσι, π.χ., ἡ γραφὴ $+2-7$ ἢ ἁπλούστερον $2-7$ σημαίνει $(+2)+(-7)=-5$. Ἐπίσης εἶναι:

$3-8-2+6=+3+(-8)+(-2)+(+6)=-10+(+9)=-1.$

Παρατήρησις: Ἂς πάρωμεν δύο σχετικοὺς (θετικοὺς) ἀριθμούς, ἔστω τοὺς $\alpha=+5$ καὶ $\beta=+7$. Εἶναι: $\alpha+\beta=(+5)+(+7)=+12$. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τοὺς α καὶ β ὡς ἀπολύτους ἀριθμούς, δηλαδὴ $\alpha=5$, $\beta=7$· ἔχομεν τότε, συμφώνως πρὸς τὴν Ἀριθμητικήν, ὅτι: $\alpha+\beta=5+7=12$ καὶ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $12=+12$. Εἶναι λοιπόν:

$$(+5)+(+7)=5+7$$

μὲ ἄλλας λέξεις: **τὸ ἄθροισμα, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ σύνολον Σ, δύο θετικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὸ ἄθροισμά των ὡς ἀπολύτων ἀριθμῶν, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ σύνολον Ρ (εἰς τὴν Ἀριθμητικήν), εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. Δι' αὐτὸν δὲ τὸν λόγον ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς σύμβολον τῆς πράξεως τῆς προσθέσεως εἰς τὸ σύνολον Σ τὸ +, δηλ. τὸ ἴδιον σύμβολον, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.**

Ἀσκήσεις

24) Νὰ εὕρετε τὰ παρακάτω ἀθροίσματα:

α) $(-10)+(+30)+(-15)+(+28)+(-25)$

β) $(+8)+(-1)+(-2)+(+3)+(-4)+(-5)+(+6)$

γ) $(-10)+(-20)+(+39)+(-40)+(+50)$.

25) Νὰ εὕρετε μὲ ποῖον σχετικὸν ἀριθμὸν εἶναι ἴσον τὸ καθένα ἀπὸ τὰ παρακάτω ἀθροίσματα:

α) $\left(-\frac{2}{8}\right)+\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{9}{8}\right)$

β) $\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(+4\frac{1}{15}\right)+\left(-5\frac{1}{5}\right)+\left(+6\frac{1}{6}\right)$

γ) $\left(+\frac{1}{2}\right)+(-3)+\left(+\frac{5}{6}\right)$

δ) $2+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-3\frac{1}{3}\right)+\left(+\frac{5}{6}\right)$

26) Νὰ εὕρετε τὰ ἀθροίσματα :

α) $-3-5+15-7+4-12+2$

β) $-50+60-70+80-90+100$

γ) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}-\frac{3}{4}+\frac{7}{12}+\frac{3}{4}$

δ) $-1,25+2,30-4,75-8-3,25+12,70$.

27) Νὰ λύσετε τὰς παρακάτω ἐξισώσεις εἰς τὸ σύνολον Σ ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς διαγραφῆς :

α) $(-3)+x=-5$ β) $-6+x=10$ γ) $x+\frac{2}{3}=0$

δ) $x+5=-2$ ε) $(-1)+x=3$ ϛ) $(\chi+1)=4$

Παράδειγμα : $(-3)+x=-5 \Longleftrightarrow (-3)+x=(-3)+(-2) \Longleftrightarrow$ $x=-2$· ἐπαλήθευσις : $(-3)+(-2)=-5$

28) Νὰ δικαιολογήσετε ὅτι :
ἐὰν $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, τότε εἶναι καὶ $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Sigma)$

Β΄. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΗΣ

§ 10. Ἡ ἀφαίρεσις (σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ ἄλλον).

10.1. Ἄς ἐξετάσωμεν τὰ παρακάτω δύο προβλήματα :

Πρόβλημα 1

Νὰ εὕρετε κάποιον ἀπόλυτον ἀριθμόν, ποὺ τὸ ἄθροισμά του μὲ τὸν 8 νὰ εἶναι 3.

Ἐδῶ ὁ καθεὶς θ' ἀπαντήσῃ : **τέτοιος ἀπόλυτος ἀριθμὸς δὲν ὑπάρχει.** Αὐτὸ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς : **εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν ἡ ἐξίσωσις $8+x=3$ δὲν ἔχει (κάποιαν) λύσιν.**

Πρόβλημα 2

Νὰ εὕρετε κάποιον σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ τὸ ἄθροισμά του μὲ τὸν $+8$ νὰ εἶναι $+3$.

Ἐδῶ δὲν εἶναι δύσκολον ν' ἀπαντήσωμεν : **ἕνας τέτοιος ἀριθμὸς ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁ -5.** Πραγματικῶς : $+8+(-5)=+3$.

Αὐτὸ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς : **εἰς τὸ σύνολον Σ ἡ ἐξίσωσις $8+\chi=3$ ἔχει κάποιαν λύσιν· μία τέτοια λύσις εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\chi=-5$.**

Παρατηρήσεις : 1η. Ὅπως βλέπετε, τὰ δύο προηγούμενα προβλήματα εἶναι ἕνα καὶ τὸ ἴδιον πρόβλημα (ἀφοῦ εἶναι $+8=8$ καὶ $+3=3$), μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι : **εἰς τὸ πρόβλημα 1** ζητοῦμεν ὡς λύσιν του ἀριθμὸν ἀπὸ τὸ σύνολον Ρ τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν καὶ **ἡ λέξις «ἄθροισμα» νοεῖται ὅπως τὴν ὡρίσαμεν εἰς τὸ Ρ, ἐνῶ εἰς τὸ πρόβλημα 2** ζητοῦμεν ὡς λύσιν του ἀριθμὸν ἀπὸ τὸ σύνολον Σ καὶ **ἡ λέξις « ἄθροισμα » νοεῖται ἔτσι, ὅπως τὴν ὡρίσαμεν εἰς τὸ σύνολον Σ.**

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν: **τὸ πρόβλημα, ποὺ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἐξίσωσιν $8+\chi=3$, δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον Ρ, ἔχει ὅμως κάποιαν λύσιν εἰς τὸ σύνολον Σ, τὸν ἀριθμὸν $\chi=-5$.**

2α. Ἡ ἐξίσωσις $8+\chi=3$ ἔχει εἰς τὸ σύνολον Σ ἄλλην λύσιν, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν $\chi=-5$; Συμφώνως πρὸς τὴν 7ην ἰδιότητα τῆς προσθέσεως, ἡ ἀπάντησις εἶναι: **ὄχι.** Ἄς δικαιολογήσωμεν ὅμως τὴν ἀπάντησιν καὶ ἀπ' εὐθείας ἐδῶ. Ἔστω ὅτι ἡ ἐξίσωσις $8+\chi=3$ ἔχει, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν λύσιν $\chi=-5$, καὶ μίαν ἄλλην λύσιν, τὴν $y\neq-5$· τότε πρέπει νὰ ἰσχύουν αἱ ἰσότητες: $8+(-5)=3$, $8+y=3$, ἄρα θὰ ἴσχυε τότε ὅτι: $8+y=8+(-5)$ (ἐξ αἰτίας τῆς μεταβατικότητος τῆς ἰσότητος) καὶ ἐπίσης ἡ ἰσότης $y+8=(-5)+8$ (διατί;) καὶ ἑπομένως θὰ ἦτο $y=-5$ (διατί;), ἐνῶ ἡμεῖς ἔχομεν ὑποθέσει ὅτι εἶναι $y\neq-5$ καί, βεβαίως, δὲν ἠμπορεῖ δύο ἀριθμοὶ νὰ εἶναι τὴν ἰδίαν στιγμὴν καὶ ἴσοι καὶ διάφοροι (ἄνισοι). **Αὐτὸ μᾶς κάνει νὰ ἐννοήσωμεν ὅτι, ἐκτὸς ἀπὸ τὸν -5, κανένας ἄλλος σχετικὸς ἀριθμὸς δὲν εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $8+\chi=3$.**

Γενικώτερον, ἂν ἀντὶ τῶν 8 καὶ 3 ἔχομεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς β καὶ α, τότε πάλιν **τὸ πρόβλημα, ποὺ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἐξίσωσιν: $\beta+\chi=\alpha$, ἔχει μόνον μίαν λύσιν εἰς τὸ σύνολον Σ, τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν $\alpha+(-\beta)$,** εἶναι δηλαδή: $\beta+[\alpha+(-\beta)]=\alpha$· (αὐτὸ τὸ γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν 7ην ἰδιότητα τῆς προσθέσεως).

Ὥστε: $\boxed{\beta+x=\alpha \iff x=\alpha+(-\beta)}$ $(\alpha, \beta, x \in \Sigma)$

10.2. Ἔστω τώρα ὅτι α καὶ β εἶναι δύο σχετικοὶ ἀριθμοί. Θὰ ὀνομάζωμεν **διαφορὰν α πλὴν β** καὶ θὰ τὴν γράφωμεν **$\alpha-\beta$** τὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ τὸ ἄθροισμά του μὲ τὸν β εἶναι ὁ α, δηλ. τὸν $\alpha+(-\beta)$. Ὥστε εἶναι:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta) \quad (\text{ἐξ ὁρισμοῦ})$$

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ λέγεται **ἀφαίρεσις τοῦ β ἀπὸ τὸν α.** Ὁ α λέγεται **μειωτέος,** ὁ β **ἀφαιρετέος.** Ἡ φράσις **« ἀφαιρέσατε τὸν α ἀπὸ τὸν β»** εἶναι ταυτόσημος μὲ τὴν φράσιν **«νὰ εὕρετε τὴν διαφορὰν $\beta-\alpha$».** Ὁ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος μαζὺ λέγονται **ὅροι** τῆς διαφορᾶς.

Παραδείγματα :

1ον. Νὰ ἀφαιρέσετε τὸν -4 ἀπὸ τὸν $+10$.
Ἔχομεν : $(+10)-(-4)=(+10)+(+4)=+14$.

2ον. Νὰ ἀφαιρέσετε ἀπὸ τὸν -3 τὸν $+10$.
Ἔχομεν : $(-3)-(+10)=(-3)+(-10)=-13$.

3ον. Νὰ εὕρετε τὴν διαφορὰν $-13-(-2)$.
Ἔχομεν : $-13-(-2)=-13+(+2)=-11$.

4ον. Νὰ εὕρετε τὴν διαφορὰν $+10-(+4)$.
Ἔχομεν : $+10-(+4)=+10+(-4)=+6(=6)$. Εἰς τὸ ἴδιον ἀποτέλεσμα φθάνομεν, ἄν, ἀντὶ $+10$ καὶ $+4$, γράψωμεν 10 καὶ 4 καὶ κάμωμεν τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ 4 ἀπὸ τὸν 10, ὅπως τὴν γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικήν : $10-4=6(=+6)$.

Ἐφαρμογή. Χρεωστῶ 200 δρχ. καὶ ἐλαττώνω τὸ χρέος μου (δηλ. πληρώνω ἀπέναντι τοῦ χρέους μου) 50 δρχ. Πόσας δραχμὰς θὰ χρεωστῶ ἀκόμη ;

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν

χρέος 200 — χρέος 50,

δηλαδή : $(-200)-(-50)=$

$=-200+(+50)=-150$ δρχ. $=$ χρέος 150 δρχ.

ὥστε χρεωστῶ ἀκόμη 150 δρχ.

Τὴν ἰδίαν ἀπάντησιν θὰ εὑρίσκαμεν ἂν εἴχαμεν ἐργασθῇ μὲ ἀπολύτους ἀριθμούς.

Παρατηρήσεις : 1η. Ἐπειδὴ $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ καὶ ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)$ εἶναι ἕνας καὶ μόνον ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ἔστω γ, συμπεραίνομεν ὅτι **ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι ἕνας καὶ μόνον ἀριθμὸς τοῦ συνόλου Σ.** Ἡ ἀφαίρεσις δηλ. εἰς τὸ σύνολον Σ εἶναι πρᾶξις **ἐσωτερικὴ** καὶ **μονοσήμαντος.**

2α. Εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι $\beta+[\alpha+(-\beta)]=\alpha$, δηλ. τὸ ἄθροισμα τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta$ καὶ τοῦ ἀφαιρετέου της β εἶναι ὁ μειωτέος της. Ἂν λοιπὸν μὲ γ ὀνομάσωμεν τὸν ἀριθμὸν $[\alpha+(-\beta)]$, τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha-\beta=\gamma \iff \beta+\gamma=\alpha$.

Ἐξ ἄλλου $\beta+\gamma=\alpha \iff \alpha-\gamma=\beta$.

Ὥστε ἔχομεν τὰς ἑξῆς λογικὰς ἰσοδυναμίας τῆς ἀφαιρέσεως :

$$\boxed{\alpha-\beta=\gamma \iff \beta+\gamma=\alpha \iff \alpha-\gamma=\beta}$$

Ἀπὸ τὰς ἰσοδυναμίας αὐτὰς εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ $\gamma=0$, εὑρίσκομεν $\alpha-\beta=0 \iff \alpha=\beta$, δηλαδὴ **δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ διαφορά των εἶναι 0.**

3η. Ἄς πάρωμεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς $\alpha=+7$, $\beta=+2$· ἔχομεν :

$$\alpha-\beta=(+7)-(+2)=+5.$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τοὺς α, β ὡς ἀπολύτους ἀριθμούς, δηλαδὴ $\alpha=7$, $\beta=2$· συμφώνως μὲ τὴν Ἀριθμητικὴν εἶναι : $\alpha-\beta=7-2=5$ καὶ γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $5=+5$, ὥστε :

$$(+7)-(+2)=+5 \quad \text{καὶ} \quad 7-2=5=+5,$$

εἶναι ἑπομένως : $(+7)-(+2)=7-2.$

Δηλαδὴ εἰς τὸ παράδειγμά μας ἡ διαφορὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἴτε εὑρεθῇ ὡς διαφορὰ μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς Ἀριθμητικῆς εἴτε ὡς διαφορὰ μὲ τὴν ἔννοιαν, ποὺ ἔχει ὁρισθῆ εἰς τὸ σύνολον Σ, τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον **ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς σύμβολον τῆς πράξεως τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὸ σύνολον Σ τὸ —,** δηλαδὴ τὸ ἴδιον σύμβολον, ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν εἰς τὸ σύνολον Ρ τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

4η. Ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha-\beta$ εἶναι ὁ $\beta-\alpha$, δηλαδή :

$$-(\alpha-\beta)=\beta-\alpha \quad \textbf{διὰ κάθε} \quad \alpha\in\Sigma \quad \textbf{καὶ} \quad \beta\in\Sigma.$$

Π.χ. τοῦ $+7-(-4)$ ὁ ἀντίθετος εἶναι ὁ $-4-(+7)$·

Πράγματι εἶναι : $+7-(-4)=+7+4=+11$ καὶ

$$-4-(+7)=-4-7=-11.$$

Δικαιολόγησις : Πράγματι εἶναι :

$$(\alpha-\beta)+(\beta-\alpha)=[\alpha+(-\beta)]+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+(-\beta)+\beta+(-\alpha)=$$
$$=\alpha+(-\alpha)+(-\beta)+\beta=[\alpha+(-\alpha)]+[(-\beta)+\beta]=0+0=0.$$

5η. Ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$\alpha=\beta \iff \alpha-x=\beta-x \qquad (\alpha,\ \beta,\ \chi\in\Sigma)$$

Πράγματι, γνωρίζομεν (§ 8, 4η ἰδιότης) ὅτι

$$\alpha=\beta \iff \alpha+(-x)=\beta+(-x)\cdot$$

ἀλλὰ $\alpha+(-x)=\alpha-x$ καὶ $\beta+(-x)=\beta-x$

καὶ ἡ προηγουμένη ἰσοδυναμία γίνεται $\alpha=\beta \iff \alpha-x=\beta-x$, ποὺ μᾶς λέγει ὅτι **ἐπιτρέπεται ἀπὸ τὰ μέλη μιᾶς ἰσότητος ν' ἀφαιροῦμεν τὸν ἴδιον ἀριθμόν.**

Εἰδικώτερον εἶναι : $\alpha=\beta \iff \alpha-\beta=\beta-\beta$,

δηλ. $\alpha=\beta \iff \alpha-\beta=0.$

6η. Ἡ γραφὴ $2-7$ εἴδαμεν ὅτι εἶναι ἁπλοποιημένη γραφὴ τοῦ ἀθροίσματος $(+2)+(-7)$· ἑπομένως εἶναι $2-7=(+2)+(-7)=$ $=-5$. Ἀλλ' ἂν θεωρήσωμεν, εἰς τὴν γραφὴν $2-7$, τὸ $-$ ὡς σύμβολον τῆς πράξεως τῆς ἀφαιρέσεως, πάλιν θὰ ἔχωμεν $2-7=(+2)-(+7)=$ $=(+2)+(-7)=-5$.

Ἐφαρμογαί. Συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα ἔχομεν :

α) $x+\alpha=\beta \iff x=\beta-\alpha \qquad (\alpha,\beta,x\in\Sigma)$

β) $x-\alpha=\beta \iff x=\beta+\alpha \qquad (\alpha,\beta,x\in\Sigma)$

γ) $\alpha-x=\beta \iff x=\alpha-\beta \qquad (\alpha,\beta,x\in\Sigma)$

Π.χ. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x+4=-3 \quad (x\in\Sigma)$

Λύσις : $\chi+4=-3 \iff \chi=-3-4$, δηλ. $\chi=-7$.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x-4=-3 \quad (x\in\Sigma)$

Λύσις : $x-4=-3 \iff x=-3+4$, δηλ. $x=1$.

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4-x=-5 \quad (x\in\Sigma)$

Λύσις : $4-x=-5 \iff x=4-(-5) \iff x=9$

Ἀσκήσεις

29) Νὰ εὕρετε μὲ ποῖον σχετικὸν ἀριθμὸν εἶναι ἴση καθεμία ἀπὸ τὰς ἀκολούθους διαφοράς :

α) $-2-(-8)$, β) $-3-(-3)$, γ) $-8-(+5)$, δ) $+3-(-2)$

ε) $-6-(-13)$, ς) $+5-(-12)$, ζ) $-\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)$, η) $\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(+\frac{4}{3}\right)$

θ) $-4-\left(-\frac{2}{3}\right)$, ι) $4\frac{1}{2}-\left(-3\frac{3}{10}\right)$, ια) $+\frac{5}{8}-\left(+\frac{7}{12}\right)$

30) Νὰ εὕρετε μὲ δύο τρόπους (ὡς ἄθροισμα καὶ ὡς διαφορὰν) καθένα ἀπὸ τὰ ἑξῆς :

α) $-2-3$, β) $2-8$, γ) $8-2$, δ) $-\frac{2}{3}-5$

ε) $-3-0{,}4$, ς) $0{,}4-3$, ζ) $0-3$, η) $-\frac{2}{5}-0$

31) Νὰ ἐξηγήσετε διατί, ἂν $-x=\alpha$, τότε $x=-\alpha$.

32) Νὰ λύσετε τὰς ἑπομένας ἐξισώσεις : $(x\in\Sigma)$

α) $x+12=5$, β) $x+5=-12$, γ) $-6+\chi=-12$

δ) $-3=2+x$ ε) $5=-x+4$ ς) $|x+1|=5$

ζ) $-3-x=5$ η) $x-8=-2$ θ) $-5-x=1$

ι) $x-(2)=-4$ ια) $(-\chi)-7=1$ ιβ) $11-x=13$

33) Νὰ λύσετε τὴν ἐξίσωσιν $3-\alpha=x-\alpha \quad (\alpha, x\in\Sigma)$

§ 11. Ἀριθμητικὰ πολυώνυμα.

11.1. Κάθε παράστασις, ὅπως, π.χ., ἡ

$$(-8)+(+3)-(-2)-(+3)+(-2)-(+1),$$

ποὺ ἀποτελεῖται δηλαδὴ ἀπὸ σχετικοὺς ἀριθμοὺς συνδεομένους μεταξύ των μὲ τὰ σύμβολα + καὶ −, λέγεται **ἀριθμητικὸν πολυώνυμον.**

Συμφώνως μὲ ὅσα ἐμάθαμεν κάθε ἀριθμητικὸν πολυώνυμον ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ ὡς ἕνα ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν. Π.χ.

$$(-8)+(+3)-(-2)-(+3)+(-2)-(+1)=$$
$$=(-8)+(+3)+(+2)+(-3)+(-2)+(-1)=$$
$$=(-14)+(+5)=-9$$

Ὁ -9 λέγεται **τιμὴ** τοῦ δοθέντος ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου. Οἱ ἀριθμοί, ποὺ συναποτελοῦν τὸ ἀριθμητικὸν πολυώνυμον λέγονται **ὅροι** τοῦ πολυωνύμου.

Διὰ νὰ συντομεύσωμεν τὴν γλωσσικὴν διατύπωσιν ὡς ἀριθμητικὰ πολυώνυμα θὰ ἐννοοῦμεν καὶ τὰς παραστάσεις, ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἕνα μόνον ὅρον, π.χ., α, ἀφοῦ ἄλλωστε εἶναι

$$\alpha=\alpha+0=\alpha-0=\alpha+\beta+(-\beta)= \text{ κτλ.}$$

11.2. Παρατηροῦμεν ὅτι $(-2)+(+3)+(-4)+(-5)+(+7)=$

$$=[(-2)+(+3)+(-4)]+[(-5)+(+7)]=$$
$$=[(-2)+(-4)+(-5)]+[(+3)+(+7)]=-1.$$

Ἐπίσης, ἂν τὸ πολυώνυμον εἶναι γραμμένον μὲ ἁπλουστευμένην γραφήν, ἔχομεν : $-2+3-4-5+7=(-2+3-4)+(-5+7)=$

$$=(-2-4-5)+(3+7)=-1.$$

Δυνάμεθα δηλ. νὰ θέτωμεν ἐντὸς παρενθέσεων ὁσουσδήποτε ὅρους ἑνὸς ἀθροίσματος ἀντιμεταθέτοντες συγχρόνως ὁποιουσδήποτε ὅρους του.

11.3. Παρατηροῦμεν ὅτι $8-(-5+2)=8-(-3)=8+3=11$

καὶ ὅτι $\quad 8-(-5+2)=8+5-2=11$

ὥστε εἶναι $\quad 8-(-5+2)=8+5-2$

Γενικώτερον εἶναι : $\quad \alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+[-(\beta+\gamma)[=$

$$=\alpha+[(-\beta)+(-\gamma)]=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma$$

Δηλ. εἶναι : $\quad \alpha-(\beta+\gamma)=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)=\alpha-\beta-\gamma$

Συμπεραίνομεν λοιπὸν ὅτι, **ὅταν εἰς μίαν διαφορὰν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἄθροισμα δύο (ἢ περισσοτέρων) προσθετέων, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν τὴν παρένθεσιν, νὰ παραλείψωμεν τὸ — τῆς ἀφαιρέσεως**

καὶ νὰ γράψωμεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου μὲ ἀλλαγμένα τὰ πρόσημά των. Ἔτσι λοιπὸν εἶναι, π.χ.,

$$-3-(-4+5-2)=-3+4-5+2=-8+6=-2$$

Παρατήρησις. Ἂν εἰς τὴν προηγουμένην ἰσότητα $\alpha-(\beta+\gamma)=$ $=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)$ θέσωμεν $\alpha=0$, τότε προκύπτει ἡ ἰσότης $-(\beta+\gamma)=(-\beta)+(-\gamma)$, ποὺ ἐκφράζει τὴν ἤδη γνωστήν μας (§ 8, ἐφαρμογὴ) ἰδιότητα ὅτι: **ὁ ἀντίθετος τοῦ ἀθροίσματος δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιθέτων των.**

11.4. Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης $\alpha-(\beta+\gamma)=\alpha-\beta-\gamma$ γράφεται καὶ $\alpha-\beta-\gamma=\alpha-(\beta+\gamma)$, ἐννοοῦμεν ὅτι: **ὅταν θέσωμεν ὅρους ἑνὸς ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως μὲ τὸ — ἔμπροσθέν της, τότε πρέπει νὰ ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων, ποὺ κλείονται μέσα εἰς τὴν παρένθεσιν.**

Ἔτσι, π.χ., εἶναι: $-3+2+5-4-7=-3+2-(-5+4+7)$

11.5. Ὅταν ἔχωμεν παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας ἐξαλείφομεν πρῶτον τὰς παρενθέσεις καὶ ἔπειτα τὰς ἀγκύλας, πρὸς εὐκολίαν μας. Π.χ.

$$-2-[-(3-2+1)-(-1-2+1)-3]=$$
$$=-2-[-3+2-1+1+2-1-3]=-2+3-2+1-1-2+1+3=1$$

§ 12. Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τὸ σύνολον Σ.

Ἔπειτα ἀπὸ ὅσα εἴπαμεν διὰ τὴν ἀφαίρεσιν εἰς τὸ σύνολον Σ, τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, συμπεραίνομεν ὅτι ἰσχύουν καὶ εἰς τὸ σύνολον αὐτό, χωρὶς κανένα περιορισμόν, ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως, ποὺ ἐμάθαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν. Π.χ.

1) $\alpha-\beta=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ καὶ $\alpha-\beta=(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$

2) $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=(\alpha-\delta)+\beta+\gamma=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma=$
$=\alpha+\beta+(\gamma-\delta)$

3) $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)-\beta$

4) $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)-\beta$

Ἀσκήσεις

34) Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων. (Δηλαδὴ νὰ εὕρετε τὴν τιμὴν καθενὸς ἀπὸ τὰ παρακάτω ἀριθμητικὰ πολυώνυμα):

α) $(-2)-(-1)+(-5)-(+3)-(-8)$

β) $3-(-2)+(-1)+(+2)-(-3)-(+2)$

γ) $-5-(+8)+(-4)+(+3)-(-6)-(-1)$
δ) $0-1-3+2-4+3-5-6+8$

35) Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων :

α) $-5+2-(-3-1+2)-(-4)$
β) $-5+2-(3-1+2)-(-4)$
γ) $(5-1+2)+(-2+3-1)$
δ) $-2-(-3+2)-(-5+1-6)$
ε) $-3-[(3+1)-(-1+2)]$
ς) $[(5-2)-(5+2)]-3$
ζ) $0-[-(3-2)-(-4+5)]$

36) Εἰς τὰ παρακάτω ἀριθμητικὰ πολυώνυμα νὰ θέσετε τοὺς τρεῖς τελευταίους ὅρους μέσα εἰς παρένθεσιν 1) μὲ τὸ + ἐμπρός της καὶ 2) μὲ τὸ − ἐμπρὸς της :

α) $-5+3-2-1$, β) $-6+7-8-9+4$
γ) $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon$ δ) $\alpha-\beta-\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta$

37) Νὰ ἐξαλείψετε τὰς παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας ἀπὸ τὰς παρακάτω παραστάσεις καὶ νὰ τὰς γράψετε, ὅσον τὸ δυνατὸν ἁπλούστερον :

α) $-\alpha+(\beta-\gamma)-[\beta-\gamma-(\alpha-\beta)]$
β) $[\alpha-(\beta-\gamma)]-[(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)]$

Γ'. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΥΤΟΥ

§ 13. Ὁ πολλαπλασιασμὸς (σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον)

Ἂν α καὶ β εἶναι δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, τί θὰ ὀνομάζωμεν **γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν β ;**

Διὰ ν' ἀπαντήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ ἐρώτημα διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

1η περίπτωσις : Ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς α, β εἶναι ὁ 0, π.χ. $\beta=0$. Τότε ὀνομάζομεν γινόμενον τοῦ α ἐπὶ 0, καὶ τὸ γράφομεν $\alpha\cdot 0$, τὸν ἀριθμὸν 0, δηλ. εἶναι $\alpha\cdot 0=0$ (ἐξ ὁρισμοῦ).

Ἐπίσης ὀνομάζομεν γινόμενον τοῦ 0 ἐπὶ α, καὶ τὸ γράφομεν $0\cdot\alpha$, τὸν ἀριθμὸν 0. Εἰδικῶς λοιπὸν εἶναι : $0\cdot 0=0$. Ὥστε :

$$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0 \text{ διὰ κάθε } \alpha\in\Sigma \text{ (ἐξ ὁρισμοῦ).}$$

Συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ εἶναι :

α) ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x=0$ ἔχει ὡς λύσιν της κάθε σχετικὸν ἀριθμόν.

β) ἡ ἐξίσωσις $0 \cdot \chi = \beta$, μὲ $\beta \neq 0$, δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν.

2α περίπτωσις: Οἱ α, β εἶναι $\neq 0$ καὶ ὁμόσημοι. Ὀνομάζομεν τότε γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν β, καὶ τὸ γράφομεν $\alpha \cdot \beta$, τὸν θετικὸν ἀριθμόν: $+$ (πρότυπον τοῦ α · πρότ. τοῦ β) Δηλ. **εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) $\alpha \cdot \beta = +$ (πρότυπον τοῦ α · πρότυπον τοῦ β) δι' ὁποιουσδήποτε ὁμοσήμους σχετικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β.**

Παραδείγματα: 1ον $(+8) \cdot (+2) = +(8 \cdot 2) = +16\ (=16)$
2ον $(+2) \cdot (+8) = +(2 \cdot 8) = +16\ (=16)$
3ον $(-8) \cdot (-2) = +(8 \cdot 2) = +16\ (=16)$
4ον $(-2) \cdot (-8) = +(2 \cdot 8) = +16\ (=16)$

3η περίπτωσις: Οἱ α, β εἶναι $\neq 0$ καὶ ἑτερόσημοι. Ὀνομάζομεν τότε γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν β, καὶ τὸ γράφομεν $\alpha \cdot \beta$, τὸν ἀρνητικὸν ἀριθμόν: $-$ (πρότυπον τοῦ α · πρότυπον τοῦ β). Δηλ. **εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ): $\alpha \cdot \beta = -$ (πρότυπον τοῦ α · πρότυπον τοῦ β) δι' ὁποιουσδήποτε ἑτεροσήμους σχετικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β.**

Παραδείγματα: 1ον $(+4) \cdot (-3) = -(4 \cdot 3) = -12$
2ον $(-3) \cdot (+4) = -(3 \cdot 4) = -12$
3ον $(-4) \cdot (+3) = -(4 \cdot 3) = -12$
4ον $(+3) \cdot (-4) = -(3 \cdot 4) = -12$

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τοῦ γινομένου $\alpha \cdot \beta$ λέγεται **πολλαπλασιασμὸς τοῦ α ἐπὶ τὸν β.** Οἱ α, β λέγονται **παράγοντες τοῦ γινομένου $\alpha \cdot \beta$** (ὁ α λέγεται **πρῶτος παράγων**, ὁ β **δεύτερος παράγων**). Ἡ φράσις «νὰ πολλαπλασιάσετε τὸν α ἐπὶ τὸν β» εἶναι ταυτόσημος μὲ τὴν φράσιν «νὰ εὕρετε τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta$»

Παρατήρησις. Ἂν α, β εἶναι ὁποιοιδήποτε σχετικοὶ ἀριθμοί, τότε:

$$(+\alpha) \cdot (+\beta) = +(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot \beta\,(*) \qquad (-\alpha) \cdot (+\beta) = -(\alpha \cdot \beta)$$
$$(-\alpha) \cdot (-\beta) = +(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot \beta \qquad (+\alpha) \cdot (-\beta) = -(\alpha \cdot \beta)$$

Ἔτσι, π.χ., εἶναι:

$$(-(+3)) \cdot (+(-8)) = -((+3) \cdot (-8)) = -(-24) = +24,$$

ποὺ πραγματικῶς ἀληθεύει, διότι:

$$(-(+3)) \cdot (+(-8)) = (-3) \cdot (-8) = +24.$$

---

* Τὸ γινόμενον $\alpha \cdot \beta$ γράφεται ἁπλούστερον αβ· ἐπίσης τὸ $5 \,.\, \alpha$ γράφεται 5α κτλ. Μεταξὺ ἀριθμητικῶν συμβόλων ὅμως θέτομεν τὸ σύμβολον (.) τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

§ 14. Πολλαπλασιασμὸς μὲ παράγοντας περισσοτέρους ἀπὸ δύο

Ἄς εἶναι α, β, γ τρεῖς σχετικοὶ ἀριθμοί. **Θὰ ὀνομάζωμεν γινόμενον α ἐπὶ β ἐπὶ γ, καὶ θὰ τὸ γράφωμεν: α·β·γ, τὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ποὺ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ (α . β) ἐπὶ τὸν γ·** αὐτὸ τὸ γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς: $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$

Παραδείγματα:

1ον. $(-3)\cdot(+2)\cdot(-5)=[(-3)\cdot(+2)]\cdot(-5)=(-6)\cdot(-5)=+30$

2ον. $(+2)\cdot(-5)\cdot(-3)=[(+2)\cdot(-5)]\cdot(-3)=(-10)\cdot(-3)=+30$

Ἄς εἶναι τώρα α, β, γ, δ τέσσερες σχετικοὶ ἀριθμοί· **ὀνομάζομεν γινόμενον α ἐπὶ β ἐπὶ γ ἐπὶ δ, καὶ τὸ γράφομεν: α · β · γ · δ, τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν, ποὺ προκύπτει ὡς γινόμενον τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ (α · β · γ) ἐπὶ τὸν δ.** Αὐτὸ τὸ γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot\delta$$

Ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ γινόμενον μὲ 5, 6 κτλ. παράγοντας.

Παρατηροῦμεν ἐδῶ ὅτι ὁ ὁρισμὸς τοῦ γινομένου μὲ περισσοτέρους ἀπὸ δύο παράγοντας δίδεται ὅπως ἀκριβῶς καὶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ γινομένου μὲ περισσοτέρους ἀπὸ δύο παράγοντας εἰς τὸ σύνολον P τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν.

Π.χ.:

$$(-5).(-2).(+3).(-4)=(+10).(+3).(-4)=$$
$$=(+30)\cdot(-4)=-120$$

Ἀσκήσεις

38) Νὰ εὕρετε τὰ ἑξῆς γινόμενα:

α) $(-5)\cdot(-1)$, β) $(-5)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$, γ) $(+6)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)$,

δ) $(+2)\cdot(-12)$, ε) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{8}{6}\right)$, ϛ) $\left(+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(+\frac{8}{15}\right)$,

ζ) $(-3)\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)$, η) $\left(+2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{3}\right)$,

θ) $(-10{,}5)\cdot(+3{,}8)$, ι) $(-0{,}05)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$,

ια) $(+1892)\cdot(-305)$

§ 15. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

1η ἰδιότης: Διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν α ἰσχύει: $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ (νὰ ἐξηγήσετε διατί). Δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ὁ 1 $(= +1)$ εἶναι **οὐδέτερον στοιχεῖον** τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

2α ἰδιότης: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$, ὁποιοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β· (ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἔκφρασιν: **γινόμενον δύο παραγόντων α, β** ἀντί: **γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν β.**

Εἶναι π.χ. $(-3) \cdot (+8) = -24$ καὶ $(+8) \cdot (-3) = -24$.

Ὥστε: $$(-3) \cdot (+8) = (+8) \cdot (-3)$$

Παρατήρησις. Τὸ γινόμενον δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν, εἶναι ἕνας καὶ μόνον σχετικὸς ἀριθμός. Ἡ πρᾶξις δηλ. τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ σύνολον Σ εἶναι πρᾶξις **ἐσωτερικὴ** καὶ **μονοσήμαντος.**

3ης ἰδιότης: $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ διὰ κάθε τριάδα α, β, γ σχετικῶν ἀριθμῶν· (προσεταιριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ).

Π.χ. εἶναι:

$$[(-4) \cdot (-5)] \cdot (+3) = (+20) \cdot (+3) = +60$$

καὶ $$(-4) \cdot [(-5) \cdot (+3)] = (-4) \cdot (-15) = +60$$

ὥστε εἶναι: $$[(-4) \cdot (-5)] \cdot (+3) = (-4) \cdot [(-5) \cdot (+3)]$$

4η ἰδιότης: Ἂν $\alpha \cdot \beta = 0$, τότε ἢ $\alpha = 0$, ἢ $\beta = 0$, ἢ $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐξηγεῖται ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ γινομένου, ποὺ ἐδώσαμεν (§ 13, 1η περίπτωσις), καὶ ἀπὸ τὴν παρατήρησιν ὅτι, ὅταν $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta \neq 0$, τότε εἶναι πάντοτε $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

5η ἰδιότης: Ὁποιαδήποτε ἀλλαγὴ θέσεως τῶν παραγόντων ὁποιουδήποτε γινομένου δὲν τὸ μεταβάλλει.

Εἶναι π.χ.
$$\begin{aligned}
(-3) \cdot (-2) \cdot (+4) &= +(3 \cdot 2 \cdot 4) = +24\\
(-2) \cdot (-3) \cdot (+4) &= +(2 \cdot 3 \cdot 4) = +24\\
(-3) \cdot (+4) \cdot (-2) &= +(3 \cdot 2 \cdot 4) = +24\\
(+4) \cdot (-3) \cdot (-2) &= +(4 \cdot 3 \cdot 2) = +24\\
(-2) \cdot (+4) \cdot (-3) &= +(2 \cdot 4 \cdot 3) = +24\\
(+4) \cdot (-2) \cdot (-3) &= +(4 \cdot 2 \cdot 3) = +24
\end{aligned}$$

6η ἰδιότης: Ἂν α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, τότε ἰσχύει ὅτι:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ὀνομάζεται **ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν** καὶ συνδέει τὸν πολλαπλασιασμὸν μὲ τὴν πρόσθεσιν. (Ὅπως γνωρίζομεν ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ εἰς τὸ σύνολον P τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν).

Ὡς παράδειγμα ἂς πάρωμεν: $\alpha=-3$, $\beta=-5$, $\gamma=+7$. Ἔχομεν τότε: $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=(-3)\cdot[(-5)+(+7)]=(-3)\cdot(+2)=$ $=-(3\cdot 2)=-6$ καὶ $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=(-3)\cdot(-5)+(-3)\cdot(+7)=$

$$=+(3\cdot5)-(3\cdot7)=+15-21=-6$$

ὥστε εἶναι $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$

Ἀντιστρόφως εἶναι $\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta+\gamma)$· λέγομεν τότε ὅτι **ἐθέσαμεν τὸν κοινὸν παράγοντα α ἐκτὸς παρενθέσεως.**

Σημ. Ἐπειδὴ $\beta-\gamma=\beta+(-\gamma)$, θὰ εἶναι

$\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot[\beta+(-\gamma)]=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot(-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$

7η ἰδιότης: α) Ἂν α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha=\beta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha\,.\,\gamma=\beta\,.\,\gamma$.

Συμβολικῶς: $\alpha=\beta \Longrightarrow \alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\Sigma)$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ὀνομάζεται **μονότονος ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν ἰσότητα.**

Ἡ ἰδιότης ἐπαληθεύεται μὲ παραδείγματα. Π.χ. εἶναι $+\frac{2}{3}=+\frac{4}{6}$· θὰ εἶναι λοιπὸν καὶ $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-7)=\left(+\frac{4}{6}\right)\cdot(-7)$. Καὶ πραγματικῶς αὐτὸ ἰσχύει, ἀφοῦ εἶναι:

$$\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-7)=-\frac{14}{3} \quad \text{καὶ} \quad \left(+\frac{4}{6}\right)\cdot(-7)=-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}.$$

Δικαιολόγησις: Εἶναι: $\alpha=\beta$ (ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν, ποὺ ἐκάμαμεν). Ἐπίσης εἶναι: $\alpha\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma$ (μονοσήμαντον τοῦ γινομένου καὶ ἀνακλαστικότης ἰσότητος). Ἂν τώρα εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα **ἀντικαταστήσωμεν** τὸν α τοῦ δευτέρου μέλους μὲ τὸν ἴσον του β, εὑρίσκομεν $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$.

β) Ἂν α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ καὶ $\gamma\neq0$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Συμβολικῶς: $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ **καὶ** $\gamma\neq0 \Longrightarrow \alpha=\beta$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\Sigma)$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἀνομάζεται **νόμος τῆς διαγραφῆς.**

Ἔτσι, π.χ. ἔχομεν:

$$-\frac{28}{6}=-\frac{14}{3}, \text{ δηλ. } \left(+\frac{4}{6}\right)\cdot(-7)=\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-7)$$

καὶ ἀπὸ αὐτὴν $+\frac{4}{6}=+\frac{2}{3}$, ποὺ πράγματι ἀληθεύει.

Δικαιολόγησις: Ἀφοῦ εἶναι $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$ (ἀπὸ τὴν ὑπόθεσιν, ποὺ ἐκάμαμεν) θὰ εἶναι καὶ $\alpha \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = 0$ (§10.2, παρατήρησις 2α) καὶ ἑπομένως $(\alpha - \beta) \cdot \gamma = 0$ (ἀπὸ τὴν προηγουμένην 6ην ἰδιότητα).

Ἐπειδὴ ὅμως $\gamma \neq 0$, θὰ εἶναι $\alpha - \beta = 0$ (ἀπὸ τὴν προηγουμένην 4ην ἰδιότητα). Ἀλλὰ ἀφοῦ $\alpha - \beta = 0$, θὰ εἶναι $\alpha = \beta$ (§ 10.2, παρατήρησις 2α).

8η ἰδιότης: Ἡ ἐξίσωσις $\alpha \cdot x = \alpha$, ὅπου $\alpha \neq 0$ σχετικὸς ἀριθμός, ἔχει μόνον μίαν λύσιν (*) ἀνεξάρτητον ἀπὸ τὸν α, καὶ μάλιστα αὐτὴ εἶναι ἡ $x = 1$. Αὐτὸ τὸ ἐκφράζομεν καὶ ὡς ἑξῆς: **ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὁ 1.**

9η ἰδιότης: Διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν $\alpha \neq 0$ ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha \cdot x = 1$.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς: **ἡ ἐξίσωσις $\alpha \cdot x = 1$, ὅπου $\alpha \neq 0$ σχετικὸς ἀριθμός, ἔχει ἀκριβῶς μίαν λύσιν.** Αὐτὴ ἡ λύσις ὀνομάζεται **ὁ ἀντίστροφος** (σχετικὸς ἀριθμὸς) τοῦ α, συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{\alpha}$ καὶ διαβάζεται: 1 διὰ α. Συμβολικῶς γράφομεν:

$$\alpha \cdot x = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha \in \Sigma \quad \text{καὶ} \quad \alpha \neq 0.$$

Εἶναι λοιπόν: $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$ (ἐξ ὁρισμοῦ).

Σημ. Διὰ τὸν μηδὲν δὲν ὁρίζεται ἀντίστροφος, διότι θὰ πρέπῃ $0 \cdot x = 1$, ἐνῷ εἶναι $0 \cdot x = 0$ διὰ κάθε $x \in \Sigma$.

Παρατηρήσεις: 1η. Ἂς πάρωμεν π.χ. τὴν ἐξίσωσιν: $(+3) \cdot x = 1$· συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην ἰδιότητα αὐτὴ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, πού, ὅπως εἴπαμεν, συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{+3}$. **Ποῖος ὅμως εἶναι αὐτὸς ὁ σχετικὸς ἀριθμός, ποὺ συμβολίζει ἡ παράστασις $\frac{1}{+3}$;**

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι: $(+3) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = +1 = 1$

Ὥστε ὁ ἀντίστροφος τοῦ $+3$ εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $+\frac{1}{3}$, δηλ. ἡ παράστασις $\frac{1}{+3}$ συμβολίζει τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν $+\frac{1}{3}$. Εἶναι λοιπόν:

$$\textbf{ἀντίστροφος τοῦ } +3 = \frac{1}{+3} = +\frac{1}{3}$$

(*) α) Γνωρίζομεν ἤδη ἀπὸ τὴν 1ην ἰδιότητα ὅτι $\alpha \cdot 1 = \alpha$ (1), ὅτι δηλ. ἡ $x = 1$ εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \alpha$. β) Ἂν $y \neq 1$ ἦτο καὶ αὐτὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \alpha$, τότε θὰ ἦτο $\alpha \cdot y = \alpha$ (2). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι $\alpha \cdot y = \alpha \cdot 1$ καὶ ἀπὸ αὐτὴν $y = 1$. Δὲν ἠμπορεῖ ὅμως νὰ εἶναι συγχρόνως $y \neq 1$ καὶ $y = 1$ καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν ὅτι ἦτο ἐσφαλμένη ἡ ὑπόθεσίς μας ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη λύσις τῆς $\alpha \cdot x = \alpha$, διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν $x = 1$.

῾Ομοίως εἶναι :

$$\frac{1}{+7}=-\frac{1}{7},\quad \frac{1}{+10}=+\frac{1}{10},\quad \frac{1}{+\frac{3}{4}}=+\frac{1}{\frac{3}{4}}=+\frac{4}{3}\ \text{κ.τ.λ.}$$

2α. Ἂς πάρωμεν τώρα τὴν ἐξίσωσιν : $(-3)\cdot x=1$· συμφώνως πάλιν πρὸς τὴν 9ην ἰδιότητα ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει μίαν μόνον λύσιν, ποὺ ὅπως εἴπαμεν, συμβολίζεται μὲ $\frac{1}{-3}$. **Ποῖος ὅμως σχετικὸς ἀριθμὸς εἶναι αὐτός, ποὺ συμβολίζει ἡ παράστασις $\frac{1}{-3}$;**

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι :

$$(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=+\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)=+1=1\cdot$$

ὥστε ὁ ἀντίστροφος τοῦ -3 εἶναι ὁ $-\frac{1}{3}$, δηλ. ἡ παράστασις $\frac{1}{-3}$ συμβολίζει τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν $-\frac{1}{3}$. Εἶναι λοιπόν :

$$\textbf{ἀντίστροφος τοῦ } -3=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

῾Ομοίως εἶναι :

$$\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8},\quad \frac{1}{-10}=-\frac{1}{10},\quad \frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}\ \text{κ.τ.λ.}$$

Παρατηροῦμεν ἀπὸ τὰ δοθέντα παραδείγματα καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια ὅτι ὁ ἀντίστροφος ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε ὁμόσημός του ἀριθμός.

10η ἰδιότης: Διὰ κάθε δύο σχετικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β, μὲ $\alpha\neq 0$, ὑπάρχει ἕνας καὶ μόνον σχετικὸς ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha\cdot x=\beta$. ῾Η ἰδιότης αὐτὴ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς: **ἡ ἐξίσωσις $\alpha\cdot x=\beta$, ὅπου $\alpha\neq 0$ καὶ β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἔχει ἀκριβῶς μίαν λύσιν.**

Παράδειγμα. ῾Η ἐξίσωσις $(-3)\cdot x=-4$ ἔχει ἀκριβῶς μίαν λύσιν :

α) Παρατηροῦμεν ὅτι $(-3)\cdot\left(+\frac{4}{3}\right)=-\left(3\cdot\frac{4}{3}\right)=-4$. Δηλ. ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $+\frac{4}{3}$ εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως $(-3)\cdot x=-4$.

β) Δύο λύσεις δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἔχῃ ἡ ἐξίσωσις, διότι, ἂν εἶχε δύο λύσεις, ἔστω τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺ x_1 καὶ x_2 ($x_1\neq x_2$), τότε θὰ ἴσχυαν αἱ ἰσότητες $(-3)\cdot x_1=-4$ καὶ $(-3)\cdot x_2=-4$. Θὰ ἴσχυε λοιπὸν καὶ ἡ ἰσότης $(-3)\cdot x_1=(-3)\cdot x_2$ (διατί ;). Τότε ὅμως θὰ ἴσχυε καὶ ἢ $x_1 = x_2$ (διατί ;). Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι ἔχει ὑποτεθῆ ὅτι εἶναι $x_1 \neq x_2$. Ὥστε πραγματικῶς ὑπάρχει μία μόνον λύσις τῆς ἐξισώσεως $(-3) \cdot x = -4$ καὶ αὐτὴ εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $+\frac{4}{3}$.

Παρατήρησις: Ἂς πάρωμεν δύο σχετικοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, ἔστω τοὺς $\alpha = +5$ καὶ $\beta = +7$. Εἶναι : $\alpha \cdot \beta = (+5) \cdot (+7) = +35$. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τοὺς α, β ὡς ἀπολύτους ἀριθμούς, δηλαδὴ $\alpha = 5$, $\beta = 7$· ἔχομεν τότε, συμφώνως μὲ τὴν Ἀριθμητικήν, ὅτι : $\alpha \cdot \beta = 5 \cdot 7 = 35$ καὶ γνωρίζομεν ὅτι $35 = +35$. Ὥστε εἶναι :

$$(+5) \cdot (+7) = 5 \cdot 7,$$

μὲ ἄλλας λέξεις : **τὸ γινόμενον, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ Σ, δύο θετικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὸ γινόμενόν των ὡς ἀπολύτων ἀριθμῶν, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ σύνολον P (εἰς τὴν Ἀριθμητικήν), εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.** Δι᾽ αὐτὸν τὸν λόγον **ἐχρησιμοποιήσαμεν ὡς σύμβολον τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τὸ σύνολον Σ τὸ · , δηλαδὴ τὸ ἴδιον σύμβολον ποὺ ἐχρησιμοποιήσαμεν** καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς τὸ σύνολον P τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

§ 16. Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

Ἐφαρμόζοντες ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν γινόμενα διαφόρων ἀθροισμάτων : Π.χ.

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma+\delta) = (\alpha+\beta)\cdot\gamma + (\alpha+\beta)\cdot\delta =$$
$$= \alpha\cdot\gamma + \beta\cdot\gamma + \alpha\cdot\delta + \beta\cdot\delta,$$

$$(\alpha+\beta)\cdot(\gamma-\delta) = \alpha\cdot(\gamma-\delta) + \beta\cdot(\gamma-\delta) =$$
$$= \alpha\cdot\gamma - \alpha\cdot\delta + \beta\cdot\beta\cdot\gamma - \beta\cdot\delta,$$

$$(\alpha-\beta)\cdot(\gamma-\delta) = \alpha\cdot(\gamma-\delta) - \beta\cdot(\gamma-\delta) =$$
$$= \alpha\cdot\gamma - \alpha\cdot\delta - (\beta\cdot\gamma - \beta\cdot\delta) =$$
$$= \alpha\cdot\gamma - \alpha\cdot\delta - \beta\cdot\gamma + \beta\cdot\delta$$

Ἔτσι, π.χ., εἶναι :

$$(2-8)\cdot(5-6) = 2\cdot5 - 2\cdot6 - 8\cdot5 + 8\cdot6 = 10 - 12 - 40 + 48 = +6.$$

Ἀσκήσεις

39) Νὰ εὕρετε τὰ παρακάτω γινόμενα :

α) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(+4)\cdot(+5)$,

β) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(+6)$,

γ) $(-1)\cdot(-10)\cdot(+3)\cdot(+5)$,
δ) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-1)\cdot(+10)$,
ε) $(+3)\cdot(-5)\cdot(-6)$,
στ) $(+5)\cdot(-5)\cdot(+4)\cdot(+2)\cdot(+10)$·

Τί παρατηρεῖτε σχετικῶς μὲ τὸ πρόσημον τοῦ γινομένου καὶ μὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ;

40) Νὰ ἀναλύσετε τὸν ἀριθμὸν 120 εἰς γινόμενον : α) δύο θετικῶν καὶ δύο ἀρνητικῶν παραγόντων. β) εἰς γινόμενον τεσσάρων ἀρνητικῶν παραγόντων.

41) Νὰ ὑπολογίσετε μὲ δύο τρόπους τὰ γινόμενα :

α) $2\cdot(3+8)$, β) $-2\cdot(-3+8)$,
γ) $(+2)\cdot(-7-8)$, δ) $(8+9)\cdot(2-7)$,
ε) $-5\cdot(5-3+2-7)$, ς) $(-4-3)\cdot(4-7)$.

42) Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω παραστάσεων :

α) $5\cdot(-2)+4\cdot(-6)-5\cdot(-3)$,
β) $-4\cdot(-5)-3\cdot(-2)-(-6)\cdot(-4)+4\cdot(-8)$,
γ) $(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)-2\cdot(-5)\cdot(-4)+$
$-(-3)\cdot(-1)\cdot(+4)+5\cdot(-1)\cdot(+6)$,
δ) $-7\cdot(-3)-5\cdot(-10)\cdot(-1)-5\cdot(-10)+$
$-(-5)\cdot(-10)+4\cdot(-2)+6\cdot(-3)\cdot(-1)$.

43) Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τῆς διαγραφῆς νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις :

α) $(-5)\cdot x=20$.

Ἐπίλυσις. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται : $(-5)\cdot x=(-5)\cdot(-4)$ καὶ συμφώνως μὲ τὸν νόμον τῆς διαγραφῆς εἶναι : $x=-4$.

β) $5\cdot x=-15$, γ) $(-3)\cdot x=-15$, δ) $(-1)\cdot x=8$,
ε) $(-3)\cdot x=-3$, ς) $(-5)\cdot x=0$, ζ) $5\cdot x-3=-18$.

44) Ἐὰν α, β, γ, δ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ εἶναι $\alpha=\beta$ καὶ $\gamma=\delta$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\delta$.

45) Ποῖος εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ -2 ; τοῦ -1 ; τοῦ $+5$; τοῦ $-\frac{5}{8}$; τοῦ $+\frac{1}{2}$;

46) Νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\alpha=\beta \Longleftrightarrow -\alpha=-\beta \quad (\alpha, \beta \in \Sigma)$$

Δ'. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 17. Ἡ διαίρεσις (σχετικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἄλλον $\neq 0$)

17.1. Ἄς ἐξετάσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα: **Δίδονται οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ -3 καὶ -4. Ὑπάρχει κάποιος σχετικὸς ἀριθμός, ἔστω x, ποὺ τὸ γινόμενόν του μὲ τὸν -3 νὰ εἶναι ὁ -4;**

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἐκφράζεται μὲ τὴν ἐξίσωσιν $(-3)\cdot x=-4$ καὶ ἔχει ἤδη λυθῆ (10η ἰδιότης πολλαπλασιασμοῦ, παράδειγμα). Γνωρίζομεν ὅτι ὑπάρχει ἕνας μόνον ἀριθμὸς $x \in \Sigma$ μὲ τὴν ἰδιότητα

$(-3)\cdot x=-4$ καὶ ὅτι αὐτὸς εἶναι ὁ $+\frac{4}{3}$.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς $+\frac{4}{3}$ ὀνομάζεται: **τὸ πηλίκον** τοῦ -4 διὰ τοῦ -3, συμβολίζεται μὲ $\frac{-4}{-3}$ εἴτε καὶ μὲ $-4:(-3)$ καὶ διαβάζεται: -4 διὰ -3.

Γενικῶς: γνωρίζομεν (ἀπὸ τὴν 10ην ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ) ὅτι διὰ κάθε $\alpha \neq 0$ καὶ β σχετικοὺς ἀριθμοὺς ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ἔστω x, ποὺ τὸ γινόμενόν του μὲ τὸν α εἶναι ὁ β. Ὁ σχετικὸς αὐτὸς ἀριθμὸς ὀνομάζεται **πηλίκον τοῦ β διὰ α**, συμβολίζεται μὲ $\frac{\beta}{\alpha}$ εἴτε καὶ μὲ $\beta:\alpha$ καὶ διαβάζεται **β διὰ α.** Τὸ πηλίκον λοιπὸν $\frac{\beta}{\alpha}$ εἶναι ἡ μοναδικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\cdot x=\beta$, δηλ.:

$$\boldsymbol{\alpha\cdot x=\beta} \Longleftrightarrow x=\frac{\beta}{\alpha} \quad (\alpha\neq 0, \beta,\ x\in\Sigma)$$

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τοῦ πηλίκου $\frac{\beta}{\alpha}$ ὀνομάζεται **διαίρεσις τοῦ β διὰ τοῦ α** (εἴτε: **τοῦ β μὲ τὸν α**). Ὁ β λέγεται **διαιρετέος** τῆς διαιρέσεως αὐτῆς καὶ ὁ α **διαιρέτης** της, τὸ πηλίκον $\beta:\alpha$ ὀνομάζεται καί: **« πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β διὰ τοῦ α »** Ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ὀνομάζονται **ὅροι τῆς διαιρέσεως** (εἴτε καί: **ὅροι τοῦ πηλίκου της**). Ἡ φράσις « νὰ ἐκτελέσετε τὴν διαίρεσιν τοῦ α διὰ β » εἶναι ταυτόσημος μὲ τὴν φράσιν « νὰ εὕρετε τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ ».

17.2. Ἄς ἴδωμεν τώρα τὸ σύμβολον τοῦ πηλίκου $\frac{\beta}{\alpha}$ (εἴτε $\beta:\alpha$) ποῖον σχετικὸν ἀριθμὸν παριστάνει εἰς τὰς διαφόρους περιπτώσεις:

Παράδειγμα 1ον. Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $(+3)\cdot x = +4$ συμβολίζεται μὲ τὸ πηλίκον $\frac{+4}{+3}$. Ἀλλὰ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $+\frac{4}{3}$. Ὥστε εἶναι :

$$\textbf{πηλίκον}\ \frac{+4}{+3} = +\frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 2ον. Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $(-3)\cdot x = -4$ συμβολίζεται μὲ τὸ πηλίκιον $\frac{-4}{-3}$. Ἀλλὰ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $+\frac{4}{3}$. Ὥστε εἶναι :

$$\textbf{πηλίκον}\ \frac{-4}{-3} = +\frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 3ον. Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $(-3)\cdot x = +4$ συμβολίζεται μὲ $\frac{+4}{-3}$. Ἀλλὰ εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $-\frac{4}{3}$ (εἶναι πραγματικῶς $(-3)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = +\left(3\cdot\frac{4}{3}\right) = +4$). Ὥστε εἶναι :

$$\textbf{πηλίκον}\ \frac{+4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Παράδειγμα 4ον. Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $(+3)\cdot x = -4$ συμβολίζεται μὲ τὸ πηλίκον $\frac{-4}{+3}$. Ἀλλὰ εἶναι φανερὸν ὅτι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ἡ λύσις εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $-\frac{4}{3}$. (πραγματικῶς, $(+3)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) = -\left(3\cdot\frac{4}{3}\right) = -4$). Ὥστε εἶναι :

$$\textbf{πηλίκον}\ \frac{-4}{+3} = -\frac{4}{3}$$

Ἀπὸ αὐτὰ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι :

α) ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς πηλίκου, ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$, εἶναι ὁμόσημοι, τότε τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμός : $+\dfrac{\text{πρότυπον τοῦ } \alpha}{\text{πρότυπον τοῦ } \beta}$

β) ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς πηλίκου, ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}$, εἶναι ἑτερόσημοι, τότε τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμός : $-\dfrac{\text{πρότυπον τοῦ } \alpha}{\text{πρότυπον τοῦ } \beta}$

Ἔτσι, π.χ., εἶναι :

$$\frac{+3}{+4}=+\frac{3}{4},\quad \frac{-8}{-10}=+\frac{8}{10},\quad \frac{+7}{-3}=-\frac{7}{3},\quad \frac{-8}{+11}=-\frac{8}{11},$$

$$\frac{+20}{-4}=-\frac{20}{4}=-5,\qquad \frac{-20}{-4}=+\frac{20}{4}=+5,$$

$$\frac{-\frac{2}{5}}{+\frac{3}{4}}=-\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}}=-\frac{8}{15},\ \text{κ.τ.λ.}$$

17.3. Παρατηρήσεις: 1η. Ἂς πάρωμεν δύο σχετικοὺς θετικοὺς ἀριθμούς, ἔστω τοὺς $\alpha=+10$ καὶ $\beta=+14$. Εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{+10}{+14}=+\frac{10}{14}=$ $=+\frac{5}{7}$. Ἂς θεωρήσωμεν τώρα τοὺς α, β ὡς ἀπολύτους ἀριθμούς, δηλ. $\alpha=10$, $\beta=14$· ἔχομεν τότε (ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν) ὅτι: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$ καὶ γνωρίζομεν ὅτι $\frac{5}{7}=+\frac{5}{7}$.

Ὥστε εἶναι $\frac{+10}{+14}=\frac{10}{14}$. Μὲ ἄλλας λέξεις **τὸ πηλίκον** $\frac{\alpha}{\beta}$ ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω α, μὲ ἄλλον θετικὸν ἀριθμόν, ἔστω β, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ Σ, καὶ τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ σύνολον Ρ (εἰς τὴν Ἀριθμητικήν), εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. **Δι' αὐτὸν τὸν λόγον ἐχρησιμοποιήσαμεν τὰ ἴδια σύμβολα (—) καὶ (:) κατὰ τὴν παράστασιν τοῦ πηλίκου καὶ εἰς τὸ σύνολον Σ, τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.**

2α. Παρατηροῦμεν ὅτι **τὸ πηλίκον, π.χ.,** $\frac{+4}{-3}$ **καὶ τὸ γινόμενον** $(+4)\cdot\frac{1}{-3}$, **παριστάνουν ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν σχετικὸν ἀριθμόν.**

Πραγματικῶς, εἶναι :

$$\frac{+4}{-3}=-\frac{4}{3}\quad\text{καὶ}\quad(+4)\cdot\frac{1}{-3}=(+4)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\left(4\cdot\frac{1}{3}\right)=-\frac{4}{3}.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι γενικῶς εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$, ὅπου α καὶ $\beta\neq 0$ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί. **Δηλ. κάθε πηλίκον** $\frac{\alpha}{\beta}$ **εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρετέου α ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον** $\frac{1}{\beta}$ **τοῦ διαιρέτου.**

3η. Ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \quad (\gamma \neq 0, \alpha, \quad \beta \in \Sigma).$$

Αὐτὸ εἶναι εὔκολον νὰ τὸ διαπιστώσωμεν μὲ παραδείγματα.

Ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ τὸ δικαιολογήσωμεν ὡς ἑξῆς :

Ἀφοῦ $\gamma \neq 0$, ὁ ἀντίστροφός του, δηλ. ὁ $\frac{1}{\gamma}$, θὰ ὑπάρχῃ καὶ θὰ εἶναι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός· ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$\alpha = \beta \Longrightarrow \alpha \cdot \frac{1}{\gamma} = \beta \cdot \frac{1}{\gamma}$ (μονότονος ἰδιότης τῆς ἰσότητος εἰς τὸν πολ/σμόν).

$\Longrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$ (§ 17.3 παρατήρησις 2α).

Ἀντιστρόφως :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} \Longrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \gamma = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \gamma \Longrightarrow \left(\alpha \cdot \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \gamma = \left(\beta \cdot \frac{1}{\gamma}\right) \cdot \gamma$$

$$\Longrightarrow \alpha \cdot \left(\gamma \cdot \frac{1}{\gamma}\right) = \beta \cdot \left(\gamma \cdot \frac{1}{\gamma}\right) \Longrightarrow \alpha \cdot 1 = \beta \cdot 1 \Longrightarrow \alpha \cdot \beta.$$

4η. Εἰς τὰ προηγούμενα ὡρίσαμεν τὴν ἔννοιαν **πηλίκον β διὰ α** διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν $\alpha \neq 0$ καὶ εἴπαμεν ὅτι τὸ πηλίκον αὐτὸ εἶναι ἡ μονοσήμαντος λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \beta$. Ἂν ἠθέλαμεν νὰ ὁρίσωμεν (βεβαίως μὲ τὸν ἴδιον τρόπον) καὶ **πηλίκον β διὰ 0,** ἄρα καὶ διαίρεσιν διὰ τοῦ 0, θὰ ἔπρεπε νὰ εἴπωμεν ὅτι **« αὐτὸ εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) ἡ λύσις (!) τῆς ἐξισώσεως** $0 \cdot x = \beta$. Ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὐτὴ α) ἂν εἶναι $\beta \neq 0$, δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν, διότι εἶναι $0 \cdot x = 0$ διὰ κάθε $x \in \Sigma$ καὶ β) ἂν εἶναι $\beta = 0$, τότε ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις, δηλ. ἡ $0 \cdot x = 0$, ἔχει ὡς λύσιν της κάθε σχετικὸν ἀριθμόν. Ὅταν ὅμως εἰς τὰ Μαθηματικὰ ὁρίζωμεν μίαν « πρᾶξιν », εἶναι ἀπαραίτητον α) **νὰ ὑπάρχῃ «ἐξαγόμενον» τῆς πράξεως αὐτῆς** καὶ β) **τὸ «ἐξαγόμενον» αὐτὸ νὰ ὁρίζεται μονοσημάντως** (κατὰ ἕνα μόνον τρόπον)· ὅπως ὅμως εἴδαμεν αὐτὰ δὲν συμβαίνουν εἰς τὴν ἀνωτέρω περίπτωσιν. Δι' αὐτὸ ἡ ἔννοια **« πηλίκον β : α »** ὁρίζεται μόνον διὰ $\alpha \neq 0$ καὶ ἡ ἀντίστοιχος πρᾶξις (διαίρεσις β διὰ α) ὁρίζεται ἐπίσης μόνον διὰ $\alpha \neq 0$.

Ἀσκήσεις

47) Νὰ ἐκτελέσετε τὰς παρακάτω διαιρέσεις καί, ἀφοῦ εὕρετε τὰ πηλίκα νὰ κάμετε τὰς δοκιμὰς συμφώνως μὲ τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν :

$$\frac{\beta}{\alpha} = x \Longleftrightarrow \alpha \cdot x = \beta.$$

α) -25 διὰ -5, β) -32 διὰ $+8$, γ) $+56$ διὰ -7,
δ) $+35$ διὰ $+5$, ε) $-\frac{2}{5}$ διὰ $-\frac{7}{10}$.

48) Νὰ εὕρετε τὰ παρακάτω πηλίκα :

α) $\frac{-1}{-1}$, β) $\frac{-1}{+2}$, γ) $\frac{-3}{-5}$, δ) $\frac{-0,5}{+0,2}$, ε) $\frac{-2\frac{1}{2}}{-3\frac{1}{3}}$

49) Νὰ εὕρετε τὰ παρακάτω πηλίκα :

α) $\frac{-15625}{+125}$, β) $\frac{-1,50}{-0,05}$, γ) $\frac{1,75}{-25}$, δ) $\frac{-1,252525\ldots}{+\frac{99}{124}}$

50) Νὰ ἐπιλύσετε καὶ νὰ ἐπαληθεύσετε τὰς ἐξισώσεις :

α) $(-5)\cdot x=-25$, β) $(-3)\cdot x=9$,

γ) $(+2)\cdot x=-10$, δ) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x=-\frac{3}{4}$,

ε) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot x=+\frac{7}{10}$, ς) $(-5)\cdot x=-\frac{5}{2}$.

51) Νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἐξισώσεις :

α) $(-3)\cdot y=-3$, β) $(-5)\cdot x=0$, γ) $(-1)\cdot \varphi=8$,

δ) $\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot x=-\frac{4}{9}$, ε) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot x=+12$,

ς) $\frac{1}{3}\cdot x=-3$, ζ) $2\cdot x-5=7$,

η) $3\cdot x+\frac{1}{2}=-\frac{9}{2}$, θ) $\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x-\frac{5}{8}=+\frac{1}{2}$.

§ 18. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα

18.1. Κάθε παράστασις ὅπως ἡ $\frac{\beta}{\alpha}$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καὶ β σχετικοὶ ἀριθμοί, δηλ. τὸ σύμβολον κάθε πηλίκου, ὀνομάζεται καὶ **ἀλγεβρικὸν κλάσμα**. Ὁ β ὀνομάζεται **ἀριθμητὴς** τοῦ κλάσματος καὶ ὁ α **παρονομαστής του**. Ἔτσι, π.χ., $\frac{-8}{-7}$, δηλ. ἡ παράστασις τοῦ πηλίκου τοῦ -8 διὰ τοῦ -7, εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα καὶ εἶναι $\frac{-8}{-7}=-\frac{8}{7}$. Ὁμοίως ἡ παράστασις τοῦ πηλίκου τοῦ $-\frac{2}{3}$ διὰ τοῦ $+\frac{3}{4}$, δηλ. τὸ σύμβολον $\frac{-\frac{2}{3}}{+\frac{3}{4}}$, εἶναι ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα καὶ εἶναι $\frac{-\frac{2}{3}}{+\frac{3}{4}}=-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}}=-\frac{8}{9}$.

18.2. Ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα λέγεται ἴσον μὲ ἕνα ἄλλο, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, παριστάνουν τὸν ἴδιον σχετικὸν ἀριθμόν. Ἔτσι, π.χ., εἶναι $\frac{-3}{+4} = \frac{+6}{-8}$, διότι εἶναι $\frac{-3}{+4} = -\frac{3}{4}$ καὶ $\frac{+6}{-8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$.

Ἡ ἰσότης αὐτὴ (δηλ. ἡ ἔννοια) εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ὅπως καὶ ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, ὅπως, π.χ, ὁ $-\frac{2}{5}$, ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ κατὰ δύο τρόπους ὡς πηλίκον δύο σχετικῶν ἀκεραίων: $-\frac{2}{5} = \frac{-2}{+5}$ εἴτε $-\frac{2}{5} = \frac{+2}{-5}$. Ὁμοίως $+\frac{2}{5} = \frac{+2}{+5}$ εἴτε $+\frac{2}{5} = \frac{-2}{-5}$.

Ἐπίσης εἶναι $-5 = -\frac{5}{1} = \frac{-5}{+1} = \frac{+5}{-1}$. Εἶναι λοιπὸν φανερὸν ὅτι γενικῶς κάθε σχετικὸς ἀριθμὸς ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀλγεβρικὸν κλάσμα μὲ παρονομαστὴν τὴν θετικὴν μονάδα.

Κάθε ἀλγεβρικὸν κλάσμα, ποὺ δὲν παριστάνει ἀκέραιον σχετικὸν ἀριθμόν, λέγεται **γνήσιον ἀλγεβρικὸν κλάσμα.** Ἂν λοιπὸν K_γ εἶναι τὸ σύνολον τῶν γνησίων ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, θὰ εἶναι $K_\gamma \underset{\neq}{\subset} \Sigma$. Τὸ σύνολον ὅμως, ἔστω K_o, ὅλων τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων συμπίπτει μὲ τὸ σύνολον Σ, δηλ. $K_o = \Sigma$.

18.3. Διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα ἰσχύουν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

α) Ἂν πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαιρέσωμεν) τοὺς ὅρους ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος μὲ ἕνα καὶ τὸν αὐτόν, διάφορον τοῦ 0, σχετικὸν ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἴσον μὲ τὸ ἀρχικόν.

Πραγματικῶς, ἂς πάρωμεν ἕνα τυχαῖον ἀλγεβρικὸν κλάσμα, π.χ., τὸ $\frac{-10}{+9}$ τὸ κλάσμα αὐτὸ εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $-\frac{10}{9}$.

Ἂς πολλαπλασιάσωμεν τώρα τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{-10}{+9}$ μὲ τὸν ἴδιον σχετικὸν ἀριθμόν, π.χ., τὸν (-3)· θὰ ἔχωμεν τότε τὸ κλάσμα $\frac{(-10)\cdot(-3)}{(+9)\cdot(-3)} = \frac{+30}{-27}$, ποὺ εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $-\frac{30}{27} = -\frac{10}{9}$. Ὥστε εἶναι πραγματικῶς $\frac{-10}{+9} = \frac{(-10)\cdot(-3)}{(+9)\cdot(-3)}$.

Γενικῶς εἶναι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma}} \qquad (\alpha, \beta \neq 0, \ \gamma \neq 0 \in Z\,(*)$$

(*) Z ὠνομάσαμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας.

Ἕνα κλάσμα ὅπως τὸ $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ $(\alpha, \beta \neq 0,\ \gamma \neq 0,\ \delta \neq 0 \in Z)$ λέγεται **σύνθετον ἀλγεβρικὸν κλάσμα** καὶ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς **ἔξω** ὅρους του (ἔξω ὅροι εἶναι οἱ α, δ) καὶ τὸ γινόμενόν των γράψωμεν ὡς ἀριθμητὴν καὶ ἔπειτα τοὺς **μέσα** ὅρους του (δηλ. τοὺς β, γ) καὶ τὸ γινόμενόν των τὸ γράψωμεν ὡς παρονομαστήν.

Π.χ. $$\dfrac{\frac{-4}{+5}}{\frac{+2}{-3}} = \frac{(-4)\cdot(-3)}{(+5)\cdot(+2)} = \frac{+12}{+10} = +\frac{12}{10} = +\frac{6}{5}$$

Πραγματικῶς, εἶναι :

$$\dfrac{\frac{-4}{+5}}{\frac{+2}{-3}} = \dfrac{-\frac{4}{5}}{-\frac{2}{3}} = +\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = +\frac{12}{10} = +\frac{6}{5}$$

Ἐπίσης εἶναι :

$$\dfrac{\frac{-2}{-3}}{+5} = \dfrac{\frac{-2}{-3}}{\frac{+5}{+1}} = \frac{(-2)\cdot(+1)}{(-3)\cdot(+5)} = \frac{-2}{-15}$$

β) Ἰσχύει ἡ λογικὴ ἰσοδυναμία :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \qquad (\alpha, \beta \neq 0, \gamma, \delta \neq 0 \in \Sigma)$$

Πραγματικῶς, ἂς πάρωμεν τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα $\frac{-3}{+4}$ καὶ $\frac{+6}{-8}$, ποὺ εἶναι ἴσα, ὅπως ἐμάθαμεν (§ 18.2). Παρατηροῦμεν ὅτι

$$(-3)\cdot(-8) = (+4)\cdot(+6) = 24.$$

Ἀντιστρόφως, ἀπὸ τὴν ἰσότητα $(-3)\cdot(-8) = +(4)\cdot(+6)$, διαιροῦντες τὰ μέλη της μὲ τὸ γινόμενον $(+4)\cdot(-8)$, εὑρίσκομεν

$$\frac{(-3)\cdot(-8)}{(+4)\cdot(-8)} = \frac{(+4)\cdot(+6)}{(+4)\cdot(-8)}, \quad \text{δηλ. εἶναι} \quad \frac{-3}{+4} = \frac{+6}{-8}.$$

Ἠμποροῦμεν λοιπόν, ἐφαρμόζοντες τὴν ἀνωτέρω λογικὴν ἰσοδυναμίαν, νὰ ἐλέγχωμεν ἂν δύο ἀλγεβρικὰ κλάσματα εἶναι ἴσα. Ἔτσι, π.χ., εἶναι $\frac{-2}{-3} = \frac{+14}{+21}$, διότι εἶναι $(-2)\cdot(+21) = (-3)\cdot(+14)$.

Ἀλλὰ $\frac{-3}{-4} \neq \frac{-8}{-11}$, διότι $(-3)\cdot(-11) \neq (-4)\cdot(-8)$.

18.4. Ἐφαρμογαί: 1η. Συμφώνως μὲ προηγουμένην ἰδιότητα **ἠμποροῦμεν νὰ πολλαπλασιάσωσωμεν τοὺς ὅρους ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος ἐπὶ —1**, ὁπότε θὰ ἀλλάξουν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος. Π.χ. $\frac{+3}{+5}=\frac{(+3)\cdot(-1)}{(+5)\cdot(-1)}=\frac{-3}{-5}$.

2α. Ἠμποροῦμεν νὰ « ἁπλοποιήσωμεν » ἕνα ἀλγεβρικὸν κλάσμα διαιροῦντες τοὺς ὅρους του μὲ τὸν ἴδιον σχετικὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ 0. Π.χ. $\frac{-28}{+21}=\frac{-28:7}{+21:7}=\frac{-4}{3}$. Ἐπίσης $\frac{-8}{-24}=\frac{+1}{+3}$, $\frac{+40}{-36}=\frac{+10}{-9}$ κ.τ.λ.

3η. Ἠμποροῦμεν τὰ ἑτερώνυμα (δηλ. τὰ μὲ διαφορετικοὺς παρονομαστάς) **κλάσματα νὰ τὰ κάμωμεν ὁμώνυμα** (δηλ. μὲ τὸν ἴδιον παρονομαστὴν) πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ καθενὸς μὲ κατάλληλον σχετικὸν ἀριθμόν. Ἐάν, π.χ., ἔχωμεν τὰ κλάσματα $\frac{+2}{-5}$, $\frac{-3}{+10}$, $\frac{-7}{-30}$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μὲ τὸν $+6$, τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου μὲ τὸν -3 καὶ τοὺς ὅρους τοῦ τρίτου μὲ τὸν $+1$, θὰ εὕρωμεν τὰ κλάσματα $\frac{+12}{-30}$, $\frac{+9}{-30}$, $\frac{-7}{-30}$, ποὺ εἶναι ὁμώνυμα καὶ ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ ἀρχικά.

19. Πράξεις εἰς τὸ σύνολον K_0, τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων

19.1. Ἀπὸ τὸ ὅτι, ὅπως ἐμάθαμεν, κάθε ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἶναι ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς (καὶ ἀντιστρόφως), συμπεραίνομεν ὅτι : ἂν $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα, τότε θὰ ἔχουν ἔννοιαν αἱ παραστάσεις :

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}$ (ἄθροισμα) $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}$ (γινόμενον)

$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}$ (διαφορά) $\frac{\alpha}{\beta}:\frac{\gamma}{\delta}$ (πηλίκον)

Ἐπίσης ἔχουν ἔννοιαν παραστάσεις ὅπως αἱ παρακάτω :

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\eta}{\theta}$ (ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων)

$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}\cdot\frac{\eta}{\theta}$ (γινόμενον πολλῶν παραγόντων).

Τίθεται ὅμως τὸ ἐρώτημα : **αἱ παραπάνω πράξεις, εἰς τὸ σύνολον K_0, γίνονται (ἐκτελοῦνται) μὲ τρόπους ὅπως ἐκεῖνοι, ποὺ γνωρίζομεν διὰ τὰς πράξεις μὲ κλάσματα εἰς τὸ σύνολον P ;**

Ἡ ἀπάντησις εἶναι : ναί, ὅπως ἐξηγοῦμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

19.2 Πρόσθεσις. Τὸ ἄθροισμα ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος μὲ ἄλλο ὁμώνυμόν του εὑρίσκεται ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν :

$$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma} \qquad (\gamma \neq 0,\ \alpha, \beta \in Z)$$

Συμφώνως μὲ αὐτὸν τὸν « κανόνα » εἶναι, π.χ. :

$$\frac{-2}{-7}+\frac{+3}{-7}=\frac{-2+3}{-7}=\frac{+1}{-7}\ \left(=-\frac{1}{7}\right)$$

Ὁ κανὼν αὐτὸς ἐκτελέσεως τῆς προσθέσεως ἐπαληθεύεται ὡς ἑξῆς :

εἶναι : $\frac{-2}{-7}+\frac{+3}{-7}=+\frac{2}{7}+\left(-\frac{3}{7}\right)=-\left(\frac{3}{7}-\frac{2}{7}\right)=-\frac{1}{7}$

Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τὰ τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καὶ ἔπειτα τὰ προσθέτομεν. Ἐὰν ἔχωμεν σύνθετα ἀλγεβρικὰ κλάσματα, τὰ τρέπομεν πρῶτον εἰς ἁπλᾶ :

19.3. Ἀφαίρεσις. Εἶναι $\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}$ $(\gamma \neq 0,\ \alpha, \beta \in Z)$

Συμφώνως μὲ τὸν « κανόνα » αὐτὸν εἶναι, π.χ. :

$$\frac{+5}{+8}-\frac{-3}{+8}=\frac{+5-(-3)}{+8}=\frac{+5+3}{+8}=\frac{+8}{+8}=+1.$$

Ὁ κανὼν αὐτὸς ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως ἐπαληθεύεται ὡς ἑξῆς :

εἶναι : $\frac{+5}{+8}-\frac{-3}{+8}=+\frac{5}{8}-\left(-\frac{3}{8}\right)=+\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=+\frac{8}{8}=+1$

19.4. Πολλαπλασιασμός. Εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$ $(\beta\neq 0,\ \delta\neq 0,\ \alpha,\gamma \in Z)$

Συμφώνως μὲ αὐτὸν τὸν « κανόνα » εἶναι, π.χ. :

$$\frac{-3}{-8}\cdot\frac{-5}{+6}=\frac{(-3)\cdot(-5)}{(-8)\cdot(+6)}=\frac{+15}{-48}\ \left(=-\frac{15}{48}=-\frac{5}{16}\right)$$

Ὁ τρόπος αὐτὸς ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπαληθεύεται ὡς ἑξῆς :

εἶναι $\frac{-3}{-8}\cdot\frac{-5}{+6}=+\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{15}{48}=-\frac{5}{16}$

19.5. Διαίρεσις. Τὸ πηλίκον ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ ἄλλου $\frac{\gamma}{\delta}$ $(\beta \neq 0,\ \delta \neq 0,\ \gamma \neq 0,\ \alpha \in Z)$ εἶναι τὸ σύνθετον ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ καί, ὅπως ἐμάθαμεν, αὐτὸ τρέπεται εὐκόλως εἰς ἁπλοῦν.

Π.χ. $\dfrac{-2}{+3} : \dfrac{+5}{-7} = \dfrac{\dfrac{-2}{+3}}{\dfrac{+5}{-7}} = \dfrac{+14}{+15}$, $\left(= +\dfrac{14}{15}\right)$

῾Ο κανὼν αὐτὸς ἐπαληθεύεται ὡς ἑξῆς :

$$\frac{-2}{+3} : \frac{+5}{-7} = -\frac{2}{3} : -\frac{5}{7} = +\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{7}\right) = +\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}\right) = +\frac{14}{15}.$$

19.6. Πῶς διαιροῦμεν ἄθροισμα διὰ ἀριθμοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον $\dfrac{-8+12+20}{-4}$. Ἐπειδὴ $-8+12-20=-16$, θὰ εἶναι $\dfrac{-8+12-20}{-4} = \dfrac{-16}{-4} = +4$. Ἀλλά, καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν κάθε προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος $-8+12-20$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ -4 καὶ ἔπειτα προσθέσωμεν τὰ πηλίκα, εὑρίσκομεν τὸν ἴδιον ἀριθμόν. Πραγματικῶς, ἔχομεν :

$$\frac{-8+12-20}{-4} = \frac{-8}{-4} + \frac{+12}{-4} + \frac{-20}{-4} = +2+(-3)+(+5) = +4.$$

Ἀσκήσεις

52) Νὰ **ἁπλοποιήσετε** τὰ κλάσματα $\dfrac{-35}{+42}$, $\dfrac{-105}{+70}$.

53) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἴσα τὰ κλάσματα $\dfrac{-7}{-2}$ καὶ $\dfrac{+35}{+10}$.

54) Νὰ εὕρετε τὸ πηλίκον $\dfrac{-3}{-5}$ διὰ $\dfrac{-6}{-7}$. Ἐπίσης τὸ $\dfrac{-5}{-9}$ διὰ -10.

55) Νὰ κάμετε ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :

α) $\dfrac{-2}{+5}$, $\dfrac{-8}{+10}$, $\dfrac{-7}{-20}$, β) $\dfrac{-1}{-2}$, $\dfrac{+5}{+6}$, $\dfrac{+11}{-12}$.

56) Νὰ λύσετε τὰς ἐξισώσεις :

α) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{7}{10}$, β) $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{+7}{-3}$, γ) $\dfrac{2\cdot(x-3)}{-5} = -2$.

57) Νὰ εὕρετε μὲ δυὸ τρόπους τὰ πηλίκα :

α) $\dfrac{-3+12-27}{-3}$, β) $\dfrac{+2-5+8}{+3}$, γ) $\dfrac{-56+63-70}{-7}$.

58) Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων :

α) $\dfrac{-5}{+6} + \dfrac{+2}{-3}$, β) $\dfrac{-5}{-6} - \dfrac{-2}{+3}$, γ) $-\dfrac{-2}{-3} + \dfrac{+4}{-5}$, δ) $-5 - \dfrac{-2}{+3}$,

ε) $\dfrac{-3}{-4} \cdot \dfrac{+5}{-6}$, ϛ) $\dfrac{-5}{+8} \cdot (-4)$ ζ) $\dfrac{-3}{\dfrac{-6}{+5}}$ η) $-2 : +\dfrac{4}{5}$.

59) Νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸν συντομώτερον δυνατὸν τρόπον τά :

α) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}$ β) $(+7)\cdot(-2)\cdot\dfrac{(+2)\cdot(-5)}{-4}\cdot\dfrac{-48}{-7}$

60) Αἱ τέσσερες πράξεις, ποὺ ὡρίσαμεν εἰς τὸ σύνολον Σ, τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, δηλ. ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς καὶ ἡ διαίρεσις, **δὲν εἶναι αἱ μόναι πράξεις, ποὺ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν εἰς τὸ Σ, ἔτσι, ὥστε νὰ ἔχουν τὰς γνωστάς μας ἰδιότητας ἢ μερικὰς ἐξ αὐτῶν.**

Ὡς παράδειγμα θὰ ὁρίσωμεν μίαν ἄλλην πρᾶξιν, ποὺ θὰ τὴν ὀνομάσωμεν **« πρόσθεσιν διπλοῦ σταυροῦ»**, ἐξ αἰτίας τοῦ συμβόλου μὲ τὸ ὁποῖον τὴν συμβολίζομεν.

Ὁρισμός: $\alpha \ddagger \beta=\alpha+\beta+\alpha\cdot\beta.$ $(\alpha, \beta \in \Sigma)$

π.χ. $2 \ddagger 3=2+3+2\cdot 3=11,$ $1 \ddagger 1=1+1+1\cdot 1=3$

ἐπίσης $\frac{2}{3}\ddagger\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{3}+\left(-\frac{2}{5}\right)+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{4}{15}=\frac{10-6-4}{15}=0$

δηλ. $\frac{2}{3}\ddagger\left(-\frac{2}{5}\right)=0.$

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις «$\ddagger$» εἶναι ἀντιμεταθετική. Πράγματι, εἶναι

$\alpha \ddagger \beta=\alpha+\beta+\alpha\cdot\beta$ καὶ $\beta \ddagger \alpha=\beta+\alpha+\beta\cdot\alpha$

καί, ἐπειδὴ $\alpha+\beta+\alpha\cdot\beta=\beta+\alpha+\beta\cdot\alpha,$

συμπεραίνομεν ὅτι $\alpha \ddagger \beta=\beta \ddagger \alpha.$

Ἂς ἐξετάσωμεν, **ἂν ἡ πρᾶξις « $\ddagger$ » ἔχῃ οὐδέτερον στοιχεῖον καὶ ποῖον εἶναι αὐτό :** Ἔστω x ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς (ἂν ὑπάρχῃ), ποὺ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὴν πρᾶξιν « $\ddagger$ ». Τότε θὰ ἔχωμεν, $\alpha \ddagger x=\alpha$ διὰ κάθε $\alpha\in\Sigma$, δηλ. $\alpha+x+\alpha\cdot x=\alpha$ διὰ κάθε $\alpha\in\Sigma$. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν διαδοχικῶς :

$\alpha+x+\alpha\cdot x-\alpha=0,$ $x+\alpha\cdot x=0,$ $1\cdot x+\alpha.x=0,$ $(1+\alpha)\cdot x=0\cdot$

τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι 0, 1) ὅταν $x=0$, ὁποιανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ α· 2) ὅταν $1+\alpha=0$, δηλ. ὅταν $\alpha=-1$, ὁποιανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν ἔχῃ ὁ x. Ὥστε : **τὸ 0 εἶναι οὐδέτερον τῆς προσθέσεως διπλοῦ σταυροῦ καὶ τὸ μόνον διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν $\neq -1$· εἰδικῶς διὰ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν —1 οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς πράξεως εἶναι ὁποιοσδήποτε σχετικὸς ἀριθμός.** Πράγματι, εἶναι

$-3 \ddagger 0=-3+0+(-3)\cdot 0=-3,$ $6 \ddagger 0=6+0+6\cdot 0=6.$

Ἐξ ἄλλου εἶναι

$$-1 \ddagger (-3) = -1 + (-3) + (-1) \cdot (-3) = -1 + (-3) + (+3) = -1,$$

ἐπίσης $$-1 \ddagger 5 = -1 + 5 + (-1) . 5 = -1$$

Νὰ ἐξετάσετε : α) ἂν ἡ πρᾶξις « $\ddagger$ » εἶναι προσεταιριστική. β) νὰ ἐξετάσετε ἂν διὰ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν α ὑπάρχῃ ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς x τέτοιος, ὥστε $\alpha \ddagger x = 0$, δηλ. ἂν ὑπάρχῃ προσθετικὸς ἀντίστροφος ἑνὸς τυχόντος σχετικοῦ ἀριθμοῦ α, διὰ τὴν πρᾶξιν « $\ddagger$ ».

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΔΙΑΤΑΞΙΣ ΕΙΣ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟΝ Σ

§ 20. Ἀνισότητες

20.1. Ἐμάθαμεν ὅτι ἡ διαφορὰ δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι 0, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι· δηλ. $\alpha - \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta$.

Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν δύο, ὄχι ἴσους, σχετικοὺς ἀριθμούς, π.χ. τοὺς α καὶ β, τότε ἢ θὰ εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς ἢ $\alpha - \beta =$ ἀρνητικός ἀριθμός.

Συμφωνοῦμεν τὰ ἑξῆς:

Ἂν α, β εἶναι δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha \neq \beta$, τότε:

θὰ λέγωμεν ὅτι « ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β » καὶ θὰ τὸ συμβολίζωμεν $\alpha > \beta$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμός. Δηλαδή:

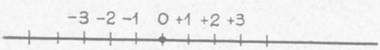
$\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta =$ θετ. ἀριθμὸς

Λέγομεν π.χ. ὅτι $+8 > +2$, διότι $+8 - (+2) = +8 - 2 = +6 =$ θετικὸς ἀριθμός.

Παράδειγμα: Ἔστω $\alpha = +3$, $\beta = -2$· εἶναι:

$\alpha - \beta = +3 - (-2) = +5 =$ θετ. ἀριθμός, ὥστε εἶναι: $+3 > -2$.

Παρατήρησις: Ἂς παραστήσωμεν τοὺς $+3$, -2 ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν:



Βλέπομεν ὅτι **ὁ μεγαλύτερος (+3) παριστάνεται ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὰ δεξιὰ (*) τοῦ σημείου, ποὺ παριστάνει τὸν μικρότερον (−2).**

Θὰ λέγωμεν ὅτι « ὁ α εἶναι μικρότερος τοῦ β » καὶ θὰ τὸ συμβολίζωμεν $\alpha < \beta$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $\alpha - \beta =$ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Δηλαδή:

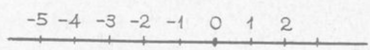
$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta =$ ἀρνητ. ἀριθμός

Λέγομεν π.χ. ὅτι $-12 < -8$, διότι $-12 - (-8) = -12 + 8 = -4 =$ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Παράδειγμα: Ἔστω $\alpha = -4$, $\beta = -1$· εἶναι:

$\alpha - \beta = -4 - (-1) = -3 =$ ἀρν. ἀριθμός, ὥστε εἶναι: $-4 < -1$.

Παρατήρησις: Ἂς παραστήσωμεν τοὺς -4, -1 ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν:



Βλέπομεν ὅτι **ὁ μεγαλύτερος (−1) παριστάνεται ἀπὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πρὸς τὰ δεξιὰ (*) τοῦ σημείου, ποὺ παριστάνει τὸν μικρότερον (−4).**

(*) Καθὼς βλέπομεν τὴν εὐθεῖαν.

Ἂν α καὶ β εἶναι τυχόντες σχετικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha \neq \beta$, ἢ θὰ εἶναι $\alpha > \beta$ ἢ θὰ εἶναι $\beta > \alpha$. Τὸ γεγονὸς αὐτὸ τὸ ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι: **τὸ σύνολον Σ εἶναι διατεταγμένον** εἴτε ὅτι τὸ Σ **εἶναι ἐφωδιασμένον μὲ μίαν διάταξιν.**

Αἱ ἔννοιαι « **μεγαλύτερος τοῦ** » καὶ « **μικρότερος τοῦ** », ποὺ εἰσήχθησαν ἀνωτέρω, χρησιμοποιοῦνται εὐρύτατα εἰς τὴν πρᾶξιν. Πχ. λέγομεν: ἡ θερμοκρασία τῶν $+38^0$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς θερμοκρασίας τῶν $+10^0$, ἡ θερμοκρασία τῶν -5^0 εἶναι μικροτέρα τῆς θερμοκρασίας τῶν $+15^0$, ἡ θερμοκρασία τῶν -4^0 εἶναι μικροτέρα τῆς θερμοκρασίας τοῦ -1^0 κ.τ.λ.

Αἱ παραστάσεις: $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$ λέγονται **ἀνισότητες.** Τὰ σύμβολα $>$ καὶ $<$ λέγονται **σύμβολα ἀνισότητος.** Τὸ ἀριστερὰ τοῦ $>$ ἢ τὸ $<$ μέλος τῆς ἀνισότητος λέγεται **πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος,** τὸ δεξιὰ τοῦ $>$ ἢ τοῦ $<$ λέγεται **δεύτερον μέλος** της. Δύο ἀνισότητες, ὅπως αἱ $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < \delta$, ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιον σύμβολον ἀνισότητος, λέγονται **ὁμόστροφοι ἀνισότητες** εἴτε **ἀνισότητες τῆς αὐτῆς φορᾶς.** Ὁμόστροφοι π.χ. εἶναι καὶ αἱ ἀνισότητες $\alpha < \beta$ καὶ $\gamma < \delta$. Δύο ἀνισότητες, ὅπως αἱ $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma < \delta$ λέγονται **ἑτερόστροφοι** ἢ **ἀνισότητες ἀντιθέτου φορᾶς.**

Ἐμάθαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι αἱ διαφοραὶ $\alpha - \beta$ καὶ $\beta - \alpha$ (ὅταν $\alpha \neq \beta$) εἶναι ἀντίθετοι σχετικοὶ ἀριθμοί, Ἑπομένως, ἂν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ $=$ θετικὸς ἀριθμός, ὁπότε $\alpha > \beta$, τότε ἡ διαφορὰ $\beta - \alpha =$ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ὁπότε $\beta < \alpha$ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν $\alpha < \beta$, τότε $\beta > \alpha$. Ἰσχύει δηλ.

$$\alpha > \beta \iff \beta < \alpha$$

Ἔτσι, π.χ., ἀντὶ νὰ γράφωμεν $-8 > -12$, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν $-12 < -8$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, **ἂν α καὶ β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἰσχύῃ:**

$$\text{ἢ} \quad \alpha = \beta, \quad \text{ἢ} \quad \alpha > \beta, \quad \text{ἢ} \quad \alpha < \beta.$$

Παρατήρησις: Ἂς πάρωμεν δύο ἀπολύτους ἀριθμούς, π.χ. τοὺς 5 καὶ 3. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν ὅτι $5 > 3$. Οἱ ἀριθμοὶ ὅμως 5 καὶ 3 εἶναι καὶ θετικοί ἀριθμοί: $5 = +5$ καὶ $3 = +5$. Συμφώνως μὲ ὅσα εἴπαμεν προηγουμένως, ἐπειδὴ $+5 - (+3) = +5 - 3 = +2 =$ θετ. ἀριθμός, δι' αὐτὸ εἶναι $+5 > +3$. Ὥστε ἐκεῖνος ἀπὸ δύο ἀπολύτους ἀριθμούς, ποὺ εἶναι μεγαλύτερος μὲ τὴν ἔννοιαν, ποὺ ἐμάθαμεν εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, ἐκεῖνος εἶναι ἐπίσης μεγαλύτερος καὶ ὅταν τοὺς θεωροῦμεν, ὄχι ὡς ἀπολύτους, ἀλλ' ὡς θετικοὺς ἀριθμούς. Ἔτσι π.χ., οἱ συμβολισμοὶ $+7 > +5$ καὶ $7 > 5$ εἶναι ταυτόσημοι· ἐπίσης καὶ οἱ συμβολισμοὶ $\mp 4 < +7$ καὶ $4 < 7$. Δι' αὐτὸ ἐχρησιμοποιήσαμεν καὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, τὰ ἴδια σύμβολα ὡς σύμβολα ἀνισότητος.

20. 2. Συνέπειαι τοῦ παραπάνω ὁρισμοῦ εἶναι αἱ ἑξῆς :

1η. Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 0.

Πράγματι, ἂν θ εἶναι ἕνας τυχὼν θετικὸς ἀριθμός, τότε $\theta - 0 = \theta =$ θετικὸς ἀριθμός· ἑπομένως $\theta > 0$. Π.χ. $+5 > 0$, $+2 > 0$ κ.τ.λ.

Δι' αὐτό, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ α, εἶναι θετικός, γράφομεν $\alpha > 0$.

2α. Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 0.

Πράγματι, ἂν α εἶναι ἕνας ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε ἡ διαφορὰ $\alpha - 0 = \alpha =$ ἀρνητ. ἀριθμὸς καὶ ἑπομένως $\alpha < 0$. Π.χ. $-3 < 0$.

Δι' αὐτό, διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι ἀρνητικός, γράφομεν $\alpha < 0$.

3η. Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος κάθε ἀρνητικοῦ.

Πράγματι, ἂν $\alpha =$ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ $\beta =$ ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε ὁ $-\beta$ θὰ εἶναι θετικὸς καὶ ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) =$ θετ. ἀριθμὸς $+$ θετικὸς ἀριθμὸς $=$ θετ. ἀριθμός· ἑπομένως εἶναι $\alpha > \beta$.

Ἔτσι, π.χ., εἶναι $+5 > -8$, $+2 > -15$ κ.τ.λ.

Εἶναι ἀντιστρόφως φανερὸν ὅτι κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος κάθε θετικοῦ ἀριθμοῦ. Π.χ. εἶναι $-3 < +2$, $-8 < +4$ κ.τ.λ.

4η. Ἀπὸ δύο ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἔχων τὸ μικρότερον πρότυπον.

Πράγματι, ἔστω ὅτι α καὶ β εἶναι ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ὅτι $|\alpha| > |\beta|$. Ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $\alpha + (-\beta)$ καὶ ἑπομένως ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ ἔχοντος τὸ μεγαλύτερον πρότυπον, δηλ. τοῦ α, ἄρα εἶναι ἀρνητ. ἀριθμός, ἑπομένως $\alpha < \beta$. Ἔτσι, π.χ., εἶναι $-2 > -8$ (καὶ πραγματικῶς εἶναι : $-2 - (-8) = -2 + 8 = +6 =$ θετ. ἀριθμός).

Σημείωσις 1η. Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἕνας σχετικὸς ἀριθμός, π.χ. **ὁ γ, εἶναι μικρότερος τοῦ α καὶ μεγαλύτερος τοῦ β,** χρησιμοποιοῦμεν τὸν συμβολισμὸν $\beta < \gamma < \alpha$ καὶ λέγομεν ὅτι ὁ γ περιέχεται μεταξὺ β καὶ α. Ἔτσι π.χ., ὁ -2 περιέχεται μεταξὺ -3 καὶ -1, δηλ. $-3 < -2 < -1$.

Σημείωσις 2α. Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι « **μικρότερος ἢ τὸ πολὺ ἴσος** » μὲ τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν β γράφομεν $\alpha \leqslant \beta$.

Ἐπίσης ὁ συμβολισμὸς $\alpha \geqslant \beta$ ἐκφράζει ὅτι ὁ α εἶναι « **μεγαλύτερος ἢ ἴσος** » μὲ τὸν β.

Ἐφαρμογή. Νὰ συγκρίνετε ἀνὰ δύο τοὺς ἀριθμοὺς -6, -3, 0, $+2$, $+4$, δηλ. νὰ τοὺς πάρετε ἀνὰ δύο καὶ νὰ εὕρετε ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος. Πόσας συγκρίσεις θὰ κάμετε ; **Μήπως ἠμπορεῖτε νὰ φθάσετε εἰς τὸ συμπέρασμά σας μὲ ὀλιγωτέρας συγκρίσεις; Νὰ παραστήσετε τοὺς παραπάνω ἀριθμοὺς εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Μήπως ἀπὸ τὴν παράστασιν αὐτὴν ἠμπορεῖτε ἀμέσως νὰ εἴπετε τὸ συμπέρασμα;** (Αἱ ἀπαντήσεις καὶ ἡ διατύπωσις τοῦ κανόνος νὰ δοθοῦν ἀπὸ τοὺς μαθητὰς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διδάσκοντος).

§ 21. Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων

Ἰσχύουν αἱ ἑξῆς προτάσεις, ποὺ ὀνομάζονται : **ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.**

1η ἰδιότης. $(\alpha > \beta \text{ καὶ } \beta > \gamma) \Longrightarrow \alpha > \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma)$

Π.χ. ἀπὸ τὸ ὅτι εἶναι $-2 > -5$ καὶ $-5 > -20$ συνάγεται ὅτι $-2 > -20$.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ λέγεται **μεταβατικὴ** ἰδιότης τῆς ἀνισότητος « $>$ ».

Δικαιολόγησις: Ἀφοῦ $\alpha > \beta$ καὶ $\beta > \gamma$, αἱ διαφοραὶ $\alpha - \beta$ καὶ $\beta - \gamma$ θὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμά των $\alpha - \beta + \beta - \gamma = \alpha - \gamma =$ θετικὸς ἀριθμός. Ἑπομένως $\alpha > \gamma$.

2α ἰδιότης. $\alpha > \beta \Longleftrightarrow -\alpha < -\beta \quad (\alpha, \beta \in \Sigma)$

Ἔτσι, π.χ., ἀπὸ τὸ ὅτι $+8 > -10$ συνάγομεν ὅτι $-8 < +10$.

Δικαιολόγησις: Ἀφοῦ $\alpha > \beta$ θὰ εἶναι $\alpha - \beta =$ θετ. ἀριθμός. Ἡ διαφορὰ ὅμως $-\alpha - (-\beta) = -\alpha + (+\beta) = \beta - \alpha$ εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha - \beta$, ὥστε εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἄρα εἶναι $-\alpha < -\beta$.

3η ἰδιότης. $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma)$.

Ἔτσι π.χ., ἀπὸ τὴν $-4 > -6$ συνάγεται ἡ $-4 + 8 > -6 + 8$, δηλ. $+4 > +2$, ποὺ πραγματικῶς ἰσχύει.

Δικαιολόγησις: Ἀφοῦ $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ δὲν μεταβάλλεται, ἂν προσθέσωμεν εἰς τὸν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον της τὸν αὐτὸν σχετικὸν ἀριθμόν· εἶναι δηλαδὴ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμός, ἄρα $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Ἀντιστρόφως, ἔχομεν :

$$\alpha + \gamma > \beta + \gamma \Longrightarrow (\alpha + \gamma) + (-\gamma) > (\beta + \gamma) + (-\gamma) \Longrightarrow$$

$$\alpha + [\gamma + (-\gamma)] > \beta + [\gamma + (-\gamma)] \Longrightarrow \alpha + 0 > \beta + 0 \Longrightarrow \alpha > \beta.$$

4η ἰδιότης. Ἂν α καὶ β εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha > \beta$ καὶ θ εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε ἀπόλυτος ἀριθμός, τότε θὰ εἶναι :

i) $\alpha \cdot (+\theta) > \beta \cdot (+\theta)$ καὶ ii) $\alpha \cdot (-\theta) < \beta \cdot (-\theta)$ καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔτσι, π.χ., ἀπὸ τὸ ὅτι εἶναι $-2 > -5$ συνάγεται :

$$\text{i) } (-2)\cdot(+3) > (-5)\cdot(+3),$$

δηλ. $-6 > -15$, (ποὺ πραγματικῶς ἰσχύει) καὶ

$$\text{ii) } (-2)\cdot(-3) < (-5)\cdot(-3),$$

δηλ. $+6 < +15$ (ποὺ πραγματικῶς ἰσχύει).

Δικαιολόγησις : i) Ἀφοῦ $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἐπομένως τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\cdot(+\theta) =$ θετικός · θετικὸς = θετικός, δηλ. εἶναι $\alpha\cdot(+\theta) - \beta\cdot(+\theta) =$ θετικὸς ἀριθμός, ἄρα $\alpha\cdot(+\theta) > \beta\cdot(+\theta)$.

ii) Εἶναι $\alpha > \beta$, ἄρα $\alpha - \beta =$ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ἐπομένως τὸ γινόμενον $(\alpha-\beta)\cdot(-\theta) =$ θετικὸς · ἀρνητικὸν = ἀρνητικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ $\alpha\cdot(-\theta) - \beta\cdot(-\theta) =$ ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἐπομένως $\alpha\cdot(-\theta) < \beta\cdot(-\theta)$.

Ἀντιστρόφως :

$$\text{i) } \alpha\cdot(+\theta) > \beta\cdot(\theta) \Longrightarrow \left[\alpha\cdot(+\theta)\right]\cdot\frac{1}{+\theta} > \left[\beta\cdot(+\theta)\right]\cdot\frac{1}{+\theta} \Longrightarrow$$

$$\alpha\cdot\left[(+\theta)\cdot\frac{1}{+\theta}\right] > \beta\cdot\left[(+\theta)\cdot\frac{1}{+\theta}\right] \Longrightarrow \alpha\cdot 1 > \beta\cdot 1 \Longrightarrow \alpha > \beta$$

$$\text{ii) } \alpha\cdot(-\theta) < \beta\cdot(-\theta) \Longrightarrow \left[\alpha\cdot(-\theta)\right]\cdot\frac{1}{-\theta} > \beta\cdot(-\theta)\cdot\frac{1}{-\theta}$$

(διότι $\frac{1}{-\theta} =$ ἀρνητικὸς)

$$\Longrightarrow \alpha\cdot\left[(-\theta)\cdot\frac{1}{-\theta}\right] > \beta\cdot\left[(-\theta)\cdot\frac{1}{-\theta}\right] \Longrightarrow \alpha\cdot 1 > \beta\cdot 1 \Longrightarrow \alpha > \beta$$

5η ἰδιότης. $\boldsymbol{\alpha > \beta}$ **καὶ** $\boldsymbol{\gamma > \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Sigma)$. Ἔτσι π.χ. ἀπὸ τὸ ὅτι εἶναι $-7 > -10$ καὶ $+3 > -1$ συνάγεται ὅτι εἶναι $-7 + (+3) > -10 + (-1)$, δηλ. ὅτι $-4 > -11$ (ποὺ πράγματι ἰσχύει).

Δικαιολόγησις : Ἀφοῦ $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, αἱ διαφοραὶ $\alpha - \beta$ καὶ $\gamma - \delta$ θὰ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἐπίσης θετικὸς ἀριθμὸς θὰ εἶναι καὶ τὸ ἄθροισμά των, δηλ. τὸ $\alpha - \beta + \gamma - \delta = \alpha + \gamma - \beta - \delta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) =$ θετ. ἀριθμός· ἐπομένως $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.

Σημείωσις. Αἱ αὐταὶ ἰδιότητες ἰσχύουν καὶ διὰ τὴν ἀνισότητα « $<$ », ὅπως εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθευθῇ καὶ δικαιολογηθῇ.

Ἀσκήσεις

61) Νὰ διατυπώσετε καὶ μὲ λόγια τὰς ἰδιότητας τῶν ἀνισοτήτων : 1ην ἕως 5ην.

62) Νὰ θέσετε τὸ κατάλληλον σύμβολον ἀνισότητος μεταξὺ τῶν ἀκολούθων ζευγῶν σχετικῶν ἀριθμῶν :

α) -2 καὶ -5, β) $+3$ καὶ -12, γ) -7 καὶ $+1$,
δ) 0 καὶ -5, ε) $+6$ καὶ 0, ς) $+14$ καὶ -20,
ζ) $-\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{3}$, η) $-\frac{5}{6}$ καὶ $-\frac{3}{4}$, θ) -1 καὶ $-\frac{3}{2}$.

53) Νὰ εὕρετε ποῖαι ἀπὸ τὰς ἀκολούθους ἀνισότητας εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς :

α) $-4 > -2$, β) $-10 > -\frac{21}{2}$, γ) $-\frac{3}{4} > 0$,

δ) $-50 < -\frac{1}{2}$, ε) $0 > -6$, ς) $12 > -30$,

ζ) $-|x| < 0 \quad (x \in \Sigma)$.

64) Νὰ τοποθετήσετε ἐπάνω εἰς τὴν εὐθεῖαν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν τοὺς ἀριθμούς :

$$-7, \quad -2\frac{1}{2}, \quad +4, \quad +\frac{5}{2}, \quad 0, \quad -\frac{5}{3}.$$

65) Ἐὰν $\alpha \cdot \beta > 0$, τί συμπεραίνετε διὰ τὰ πρόσημα τῶν α καὶ β;

66) Ἐὰν $\alpha \cdot \beta < 0$, τί συμπεραίνετε διὰ τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β ;

67) Ἐὰν $\alpha < \beta$ καὶ $\beta < \gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $\alpha < \gamma$. Νὰ ἐπαληθεύσετε αὐτὴν τὴν ἰδιότητα. Μήπως μπορεῖτε νὰ τὴν δικαιολογήσετε ; $(\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma)$

68) Ἐὰν $\alpha > \beta$, τότε θὰ εἶναι $\alpha - \gamma > \beta - \gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma)$.

69) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι, ἐὰν $\alpha < \beta$, τότε θὰ εἶναι $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$ ὅπου α, β, γ εἶναι τυχόντες σχετικοὶ ἀριθμοί.

70) Νὰ ἐπαληθεύσετε ἐπίσης ὅτι $\alpha < \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} < \gamma$.

71) Ἐὰν εἶναι $\alpha < \beta$, θὰ εἶναι $\alpha < 2 \cdot \beta$; Νὰ δώσετε μερικὰ παράδειγματα.

72) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $\alpha > \beta \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, ὅταν $\gamma =$ θετικὸς καὶ

$\alpha > \beta \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$, ὅταν $\gamma =$ ἀρνητικός.

73) Ἐὰν α, β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\alpha > \beta$ νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι θὰ εἶναι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$. Νὰ ἐξετάσετε τί συμβαίνει ὅταν οἱ α, β εἶναι καὶ οἱ δύο ἀρνητικοὶ καὶ τί ὅταν $\alpha \cdot \beta < 0$.

74) Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοὶ σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ εἶναι $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι θὰ εἶναι $\alpha \cdot \beta > \gamma \cdot \delta$.

75) Νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ διάφορα παραδείγματα ὅτι δὲν ἐπιτρέπεται νὰ ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη ὁμοστρόφους ἀνισότητας, διότι εἶναι δυνατὸν νὰ προκύψῃ ὁμόστροφος ἢ ἑτερόστροφος ἀνισότης ἢ καὶ ἰσότης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗΝ ΑΚΕΡΑΙΟΝ

§ 22. Αἱ δυνάμεις τῶν ἀπολύτων ἀριθμῶν

Γνωρίζομεν, ἀπὸ τὴν πρώτην τάξιν, τὴν σημασίαν τοῦ συμβόλου α^{μ} (α εἰς τὴν μ), ὅπου α εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμὸς καὶ μ φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ ὁ μηδέν. Π.χ. α^2 σημαίνει $\alpha \cdot \alpha$, α^3 σημαίνει $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, α^4 σημαίνει $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, α^1 σημαίνει α (ἐξ ὁρισμοῦ), α^0 σημαίνει 1, διὰ κάθε $\alpha \neq 0$ (ἐξ ὁρισμοῦ), κτλ.

Τὸ σύμβολον α^{μ} λέγεται **δύναμις** (ἀκριβέστερον : μ δύναμις τοῦ α), ὁ α, λέγεται **βάσις** τῆς δυνάμεως α^{μ} καὶ ὁ μ **ἐκθέτης.**

Γνωρίζομεν ἐπίσης ἀπὸ τὴν πρώτην τάξιν ὅτι αἱ δυνάμεις μὲ βάσιν ἀπόλυτον ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην μηδὲν ἢ φυσικὸν ἀριθμὸν ἔχουν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

$$
(\mathrm{I}^{\mathrm{P}}) : \quad \left\| \begin{array}{l}
1\eta \quad \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} \\
2\alpha \quad (\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu \cdot \nu} \\
3\eta \quad (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^{\mu} = \alpha^{\mu} \cdot \beta^{\mu} \cdot \gamma^{\mu} \\
4\eta \quad \alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \text{ ὅπου } \mu - \nu = \text{φυσικὸς ἀριθμὸς ἢ μηδέν.}
\end{array} \right.
$$

(Νὰ διατυπωθοῦν καὶ λεκτικῶς αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες).

Ἐπαναλαμβάνομεν : εἰς τὰ προηγούμενα ὑποθέτομεν α) ὅτι ἡ βάσις κάθε δυνάμεως εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμὸς καὶ β) ὅτι ὁ ἐκθέτης εἶναι μηδὲν ἢ φυσικὸς ἀριθμός.

Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν δυνάμεων θὰ τὸ συμβολίζωμεν (ἐνίοτε) μὲ Δ_{P}.

§ 23. Δυνάμεις μὲ βάσιν σχετικὸν ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην ἀκέραιον

23.1. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον $\geqslant 0$. Ἔστω α ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς ($\alpha \in \Sigma$) καὶ μ ἀκέραιος $\geqslant 2$, δηλ. θετικὸς ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ 1· ὀνομάζεται **μ δύναμις τοῦ α,** συμβολικῶς α^{μ} (διαβάζομεν : α εἰς τὴν μ), **τὸ γινόμενον μ παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν α.** Π.χ.

$$(-3)^4 \text{ σημαίνει } (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3),$$

$$\left(+\frac{2}{3}\right)^3 \text{ σημαίνει : } \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) \text{ κτλ.}$$

Ἔστω πάλιν $\alpha \in \Sigma$· ὀνομάζεται **πρώτη δύναμις τοῦ α**, συμβολικῶς α^1, **ὁ ἀριθμὸς α**, δηλαδή: $\alpha^1 = \alpha$ (ἐξ ὁρισμοῦ).

Π.χ. εἶναι $(-8)^1 = -8$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^1 = -\frac{3}{4}$, $(+4)^1 = +4$, $0^1 = 0$ κτλ. (ἐξ ὁρισμοῦ).

Ἔστω πάλιν $\alpha \in \Sigma$, ἀλλὰ $\alpha \neq 0$· ὀνομάζεται **μηδενικὴ δύναμις τοῦ α**, συμβολικῶς α^0, **ὁ ἀριθμὸς 1**, δηλαδή:

$$\alpha^0 = 1 \text{ διὰ κάθε } \alpha \in \Sigma \text{ μὲ } \alpha \neq 0 \text{ (ἐξ ὁρισμοῦ)·}$$

Π.χ. εἶναι $(-4)^0 = 1$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1$, $(+1)^0 = 1$ κτλ. (ἐξ ὁρισμοῦ).

Ὥστε εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\begin{array}{ll} \alpha^0 = 1 & \text{διὰ κάθε } \alpha \in \Sigma, \ \alpha \neq 0 \\ \alpha^1 = \alpha & \text{διὰ κάθε } \alpha \in \Sigma \\ \alpha^\mu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}} & \text{διὰ κάθε } \alpha \in \Sigma \end{array}$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι δὲν ἐδόθη ὁρισμὸς διὰ τὸ σύμβολον α^μ, ὅταν $\alpha = 0$ καὶ $\mu = 0$, δηλαδὴ δὲν γίνεται λόγος ἐδῶ διὰ τὸ σύμβολον 0^0, οὔτε θὰ γίνῃ λόγος· ἡ ἐξήγησις δὲν ἐνδιαφέρει τοὺς μαθητὰς τοῦ Γυμνασίου.

23.2. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτην ἀκέραιον < 0. Ἔστω $\alpha \in \Sigma$, ἀλλὰ $\alpha \neq 0$· **ἡ παράστασις** α^{-1} **ὀνομάζεται «-1 δύναμις τοῦ α» καὶ σημαίνει ἐξ ὁρισμοῦ τὸ κλάσμα** $\frac{1}{\alpha^1}$, **δηλαδὴ** $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha^1}$. **Ἡ παράστασις** α^{-2} **ὀνομάζεται «-2 δύναμις τοῦ α» καὶ σημαίνει ἐξ ὁρισμοῦ τὸ κλάσμα** $\frac{1}{\alpha^2}$, **δηλ.** $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$. **Ἡ παράστασις** α^{-3} **ὀνομάζεται «-3 δύναμις τοῦ α» καὶ σημαίνει ἐξ ὁρισμοῦ τὸ κλάσμα** $\frac{1}{\alpha^3}$, **δηλ.** $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$ **κτλ.**

Γενικῶς ἡ παράστασις $\alpha^{-\mu}$, ὅπου $\alpha \neq 0$ καὶ $\mu = 0$ εἴτε 1 εἴτε 2 εἴτε 3 εἴτε 4 κτλ. ὀνομάζεται «$-\mu$ δύναμις τοῦ α» καὶ σημαίνει ἐξ ὁρισμοῦ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\alpha^\mu}$, δηλαδή:

$$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu} \ \textbf{διὰ κάθε} \ \alpha \in \Sigma, \ \alpha \neq 0 \ \textbf{καὶ} \ \mu \geqslant 0 \ \textbf{ἀκέραιος.}$$

Ὁ α λέγεται καὶ ἐδῶ **βάσις τῆς δυνάμεως** $\alpha^{-\mu}$ καὶ ὁ $-\mu$ **ἐκθέτης.**

Π.χ. εἶναι :

$$(-3)^{-4}=\frac{1}{(-3)^4}=\frac{1}{81},\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-5}=\frac{1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^5},$$ κτλ. (ἐξ ὁρισμοῦ).

Παρατηροῦμεν ὅτι: ἐπειδὴ $-0=0$, θὰ εἶναι $\alpha^{-0}=\alpha^0=1=\frac{1}{\alpha^0}$, διὰ κάθε $\alpha \in \Sigma$ μὲ $\alpha \neq 0$.

Ἄσκησις : Ποῖον σχετικὸν ἀριθμὸν παριστάνει ἡ παράστασις :

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0\cdot(-4)^{-2}\cdot(-1)^{-1}\cdot(+1)^{-2}\,;$$

Λύσις : Εἶναι : $\left(-\frac{2}{3}\right)^0=1$

$$(-4)^{-2}=\frac{1}{(-4)^2}=\frac{1}{(-4)\cdot(-4)}=\frac{1}{16}$$

$$(-1)^{-1}=\frac{1}{(-1)^1}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$(+1)^{-2}=\frac{1}{(+1)^2}=\frac{1}{(+1)\cdot(+1)}=\frac{1}{1}=1$$

ὥστε εἶναι :

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0\cdot(-4)^{-2}\cdot(-1)^{-1}\cdot(+1)^{-2}=1\cdot\frac{1}{16}\cdot(-1)\cdot 1=-\frac{1}{16}$$

Προσοχή : Νὰ κάμετε τὰς ἑπομένας συγκρίσεις (*) καὶ νὰ διατυπώσετε τὰ συμπεράσματά σας ὡς κανόνας.

$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9$ (θετικὸς ἀριθμὸς)	$-3^2=-3\cdot 3=-9$
$(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+16$ (θετικὸς ἀριθμὸς)	$-2^4=-2\cdot2\cdot2\cdot2=-16$
$(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{+16}=+\frac{1}{16}$ (θετικὸς ἀριθμὸς)	$-2^{-4}=-\frac{1}{2^4}=-\frac{1}{16}$
$(-4)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=-64$ (ἀρνητικὸς ἀριθμὸς)	$-4^3=-4\cdot4\cdot4=-64$
$(-2)^{-5}=\frac{1}{(-2)^5}=\frac{1}{-32}=-\frac{1}{32}$ (ἀρνητικὸς ἀριθμὸς)	$-2^{-5}=-\frac{1}{2^5}=-\frac{1}{32}$

Νὰ δικαιολογήσετε ὅτι **ἂν α εἶναι σχετικὸς ἀριθμός, τότε ἡ παρά-**

(*) Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διδάσκοντος.

στασις ($-\alpha$)$^\nu$, ὅπου ν ἀκέραιος ($\alpha \neq 0$ μόνον ἂν $\nu \leqslant 0$), εἶναι ἴση i) μὲ α^ν , ἂν $\nu =$ ἄρτιος καὶ ii) μὲ $-\alpha^\nu$, ἂν $\nu =$ περιττός.

§ 24. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ βάσιν σχετικὸν καὶ ἐκθέτην ἀκέραιον ἀριθμὸν (**).

Ἔστω ἡ δύναμις $(+3)^4$· ἐδῶ ἡ βάσις εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ ἐκθέτης φυσικός· ἡ δύναμις αὐτὴ συμπίπτει μὲ τὴν δύναμιν 3^4, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμὸς καὶ ὁ ἐκθέτης φυσικός· Ἀντιλαμβανόμεθα λοιπὸν ὅτι τὸ σύνολον τῶν δυνάμεων μὲ βάσιν ἀπόλυτον ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην μηδὲν ἢ φυσικὸν ἀριθμόν, δηλ. τὸ σύνολον Δ_P, εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν δυνάμεων, ποὺ ὡρίσαμεν ἐδῶ, δηλ. τῶν δυνάμεων μὲ βάσιν σχετικὸν ἀριθμὸν καὶ ἐκθέτην ἀκέραιον. Ἂν λοιπὸν τὸ τελευταῖον αὐτὸ σύνολον συμβολισθῇ μὲ Δ_Σ, θὰ εἶναι $\Delta_P \underset{\neq}{\subset} \Delta_\Sigma$.

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ τὰς δυνάμεις, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον Δ_P (αὐτάς, ποὺ ἐμάθαμεν εἰς τὴν πρώτην τάξιν) ἰσχύουν αἱ τέσσερες ἰδιότητες (I_P) τῆς § 22. Τίθεται τώρα τὸ ἐρώτημα : διὰ τὰς δυνάμεις, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον Δ_Σ (αὐτάς, ποὺ ἐμάθαμεν, δηλαδή, προηγουμένως) ἰσχύουν αἱ ἴδιαι ἰδιότητες ; Ἡ ἀπάντησις εἶναι : **ναί,** ὅπως θὰ ἐξηγήσωμεν κατωτέρω.

1η ἰδιότης : $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ (γινόμενον δυνάμεων μὲ τὴν αὐτὴν βάσιν).

Ἂς πάρωμεν, π.χ., $\alpha = -3$, $\mu = -4$, $\nu = 2$ καὶ ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ γινόμενον $(-3)^{-4} \cdot (-3)^2$ κατὰ δύο τρόπους :

Α′ τρόπος : $(-3)^{-4} \cdot (-3)^2 = \dfrac{1}{(-3)^4} \cdot (-3)^2 = \dfrac{+9}{+81} = +\dfrac{1}{9}$.

Β′ τρόπος : (μὲ ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος) :

$$(-3)^{-4} \cdot (-3)^2 = (-3)^{-4+2} = (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = +\frac{1}{9}.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ κάθε ἄλλο παρόμοιον συμπεραίνομεν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἰσχύει.

2α ἰδιότης : (α^μ)$^\nu$ = $\alpha^{\mu \cdot \nu}$ (δύναμις δυνάμεως),

---

(**) Εἰς κάθε σύμβολον ὅπως τὸ α^μ, ποὺ θὰ συναντῶμεν εἰς τὰ ἑπόμενα, τὸ α πάντοτε παριστάνει σχετικὸν ἀριθμὸν καὶ τὸ μ ἀκέραιον, ἀλλὰ ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις : ($\alpha = 0$ καὶ $\mu \leqslant 0$)

Ἄς πάρωμεν, π.χ., $\alpha=-5$, $\mu=-2$, $\nu=-1$ καὶ ἃς ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν : $((-5)^{-2})^{-1}$ κατὰ δύο τρόπους :

Α' τρόπος: Εἶναι $(-5)^{-2}=\frac{1}{(-5)^2}=\frac{1}{25}$

ὥστε $((-5)^{-2})^{-1}=\left(\frac{1}{25}\right)^{-1}=1:\left(\frac{1}{25}\right)^{1}=1:\frac{1}{25}=25.$

Β' τρόπος (μὲ ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος):

$$((-5)^{-2})^{-1}=(-5)^{(-2)\cdot(-1)}=(-5)^2=25.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἰσχύει.

3η ἰδιότης: $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\mu}=\alpha^{\mu}\,.\,\beta^{\mu}\,.\,\gamma^{\mu}$ (γινόμενον εἰς δύναμιν)

Ἄς πάρωμεν, π.χ., $\alpha=-4$, $\beta=-1$, $\gamma=+2$, $\mu=-2$ καὶ ἃς ὑπολογίσωμεν τὴν δύναμιν $((-4)\cdot(-1)\cdot(+2))^{-2}$ κατὰ δύο τρόπους :

Α' τρόπος:

$$((-4)\cdot(-1)\cdot(+2))^{-2}=\frac{1}{((-4)\cdot(-1)\cdot(+2))^2}=\frac{1}{(+8)^2}=+\frac{1}{64}.$$

Β' τρόπος: (μὲ ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος): $((-4)\cdot(-1)\cdot(+2))^{-2}=$

$$=(-4)^{-2}\cdot(-1)^{-2}\cdot(+2)^{-2}=\frac{1}{(-4)^2}\cdot\frac{1}{(-1)^2}\cdot\frac{1}{(+2)^2}=$$

$$=\left(+\frac{1}{16}\right)\cdot\left(+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)=+\frac{1}{64}.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἰσχύει.

4η ἰδιότης: $\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$ (πηλίκον δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως).

Ἄς πάρωμεν, π.χ., $\alpha=-2$, $\mu=-3$, $\nu=-6$ καὶ ἃς ὑπολογίσωμεν τὸ πηλῖκον $(-2)^{-3}:(-2)^{-6}$ κατὰ δύο τρόπους :

Α' τρόπος:

$$(-2)^{-3}:(-2)^{-6}=\frac{1}{(-2)^3}:\frac{1}{(-2)^6}=\frac{(-2)^6}{(-2)^3}=\frac{+2^6}{-2^3}=-\frac{2^6}{2^3}=-8$$

Β' τρόπος (μὲ ἐφαρμογὴν τῆς ἰδιότητος):

$$(-2)^{-3}:(-2)^{-6}=(-2)^{-3-(-6)}=(-2)^{-3+6}=(-2)^3=-8.$$

Ἀπὸ τὸ παράδειγμα αὐτὸ καὶ ἀπὸ ἄλλα ὅμοια παραδείγματα συμπεραίνομεν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἰσχύει.

§ 25. Μερικαὶ ἐφαρμογαί.

Ἐφαρμογὴ 1η. Ἂς πάρωμεν ἕνα ἄθροισμα δύο σχετικῶν ἀριθμῶν π.χ., τὸ $\alpha+\beta$. Τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)$ γράφεται ὡς δύναμις $(\alpha+\beta)^2$. Τὸ γινόμενον αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ ὑπολογισθῇ μὲ ἐφαρμογὴν τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}&(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)\cdot\alpha+(\alpha+\beta)\cdot\beta=\\&=\alpha\cdot\alpha+\beta\cdot\alpha+\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\beta=\alpha^2+1\cdot\alpha\beta+1\cdot\alpha\beta+\beta^2=\\&=\alpha^2+(1+1).\,\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2.\,\alpha\beta+\beta^2.\end{aligned}$$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$(\mathbf{I}_1)\quad (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \quad \textbf{διὰ κάθε} \quad \alpha\in\Sigma,\quad \beta\in\Sigma.$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ μᾶς λέγει ὅτι: **τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου σὺν τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου τῶν δύο προσθετέων σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου.**

Π.χ. εἶναι: $(4+(-1))^2=4^2+2\cdot4\cdot(-1)+(-1)^2.$

καὶ πράγματι: α) $(4+(-1))^2=3^2=9$

β) $4^2+2\cdot4\cdot(-1)+(-1)^2=16-8+1=8+1=9.$

Ἐφαρμογὴ 2α. Μὲ ἀνάλογον πρὸς τὸν προηγούμενον τρόπον δικαιολογεῖται καὶ ἡ ἰσότης:

$$(\mathbf{I}_2)\quad (\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \quad \textbf{διὰ κάθε} \quad \alpha\in\Sigma,\quad \beta\in\Sigma.$$

(Τί μᾶς λέγει ἡ προηγουμένη ἰσότης;)

Ἐφαρμογὴ 3η. Μὲ ἀνάλογον τρόπον δικαιολογεῖται καὶ ἡ ἰσότης:

$$(\mathbf{I}_3)\quad (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2 \quad \textbf{διὰ κάθε} \quad \alpha\in\Sigma,\ \beta\in\Sigma.$$

Αἱ ἰσότητες (I_2) καὶ (I_3) εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθευθοῦν, ὅπως ἀκριβῶς ἔγινε μὲ τὴν ἴστητα (I_1).

Ἐφαρμογὴ 4η. Ἔστω $\alpha>0$, $\beta>0$· ἂς λάβωμεν τὰ δύο ἀντίστροφα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}$. Τότε θὰ εἶναι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geqslant 2$ καὶ τὸ $=$ θὰ ἰσχύῃ μόνον, ἐὰν εἶναι $\alpha=\beta$.

Πράγματι εἶναι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geqslant 2 \iff \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\geqslant 2 \iff$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\cdot\alpha\beta\geqslant 2\cdot\alpha\beta \iff \alpha^2+\beta^2\geqslant 2\alpha\beta \iff \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geqslant 0 \iff$$

$(\alpha-\beta)^2\geqslant 0$, τὸ ὁποῖον ὅμως εἶναι ἀληθὲς καὶ τὸ $=$ ἰσχύει μόνον ἐὰν $\alpha=\beta$. Ὥστε ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

Τὸ ἄθροισμα κάθε δύο ὁποιωνδήποτε ἀντιστρόφων κλασμάτων μὲ θετικοὺς ὅρους εἶναι μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ 2 καὶ ἴσον εἶναι μόνον ἂν οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων εἶναι ἴσοι.

Π.χ. $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{4+9}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}>2.$

Ἐπίσης : $\frac{9}{10}+\frac{10}{9}=\frac{81+100}{90}=\frac{181}{90}=2\frac{1}{90}>2$ κτλ.

Ἐφαρμογὴ 5η. Εἰς τὴν Φυσικὴν χρησιμοποιοῦμεν δυνάμεις τοῦ 10 μὲ θετικοὺς ἐκθέτας διὰ νὰ γράψωμεν συντόμως μεγάλους ἀριθμούς. Π.χ. : Τὸ φῶς διανύει 300 000 000 m εἰς τὸ δευτερόλεπτον. Αὐτὸ συντόμως γράφεται : Τὸ φῶς διανύει $3 \cdot 10^8$ m/sec.

Ἐπίσης χρησιμοποιοῦμεν δυνάμεις τοῦ 10 μὲ ἀρνητικοὺς ἐκθέτας διὰ νὰ γράψωμεν συντόμως πολὺ μικροὺς ἀριθμούς. Π.χ. τὸ ἕνα τρισεκατομμυριοστὸν τοῦ cm γράφεται συντόμως 10^{-12} cm. Ὁμοίως τὸν ἀριθμὸν 0,0000032 γράφομεν συντόμως ὡς $32 \cdot 10^{-7}$ κτλ.

Ἀσκήσεις

76) Νὰ ὑπολογίσετε τὰς ἀκολούθους δυνάμεις :

α) $(-2)^4$, $(-2)^{-5}$, $(-1)^4$, $(-1)^{15}$, $(-1)^{10}$, -5^4, $(-5)^4$, -1^{10},

β) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$, $\left(1\frac{1}{3}\right)^3$, $(-0{,}2)^3$, $-0{,}2^4$

77) Νὰ ἐκτελέσετε κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον τὰς ἀκολούθους πράξεις :

α) $7^2 \cdot 7 \cdot 7^0$, β) $x^{-2} : x^{-5}$, γ) $(-5x)^3$, δ) $(x^{-2})^{-3}$

ε) $(x^{-3})^2 \cdot x^5 : x^{-1}$ ς) $(x^5 \cdot x^{-5})^5$ ζ) $0^1 \cdot 1^0$ η) $10^0 \cdot 10 + 10^2$

θ) $x^0 : x^{-1}$ ι) $\frac{3^6}{2^3+2^0}$ ια) $\frac{49^3 \cdot 13 \cdot 49^{-3}}{5^2+5^0}$

78) Νὰ ἀντικαταστήσετε τὸν χ μὲ τὸν κατάλληλον, κάθε φοράν, ἀκέραιον ἀριθμόν :

α) $-27=(-3)^x$, β) $125=5^x$, γ) $16=(-2)^x$, δ) $-125=(-5)^x$

ε) $\alpha^{-3}=\alpha^2 \cdot \alpha^x$ ς) $(-3)^2=(-3)^5 : (-3)^x$ ζ) $3^3=3^0 \cdot 3^x$

79) Νὰ γράψετε συντόμως τοὺς ἀκολούθους ἀριθμούς :

α) 0,000000008 β) 0,00000000000125

γ) 72 τρισεκατομμύρια δ) 0,0000000000000085

80) Νὰ γράψετε ὡς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς τὰ ἀκόλουθα γινόμενα :

α) $5 \cdot 10^{-3}$ β) $-5 \cdot 10^{-5}$ γ) $3{,}75 \cdot 10^{-3}$ δ) $75 \cdot 10^{-6}$

ε) $2{,}57 \cdot 10^{-9}$ (ἀκτὶς ἀτόμου ὑδρογόνου)

81) Νὰ εὕρετε τὰ ἀκόλουθα γινόμενα :

α) $2\alpha \cdot (5\alpha + 3\alpha\beta)$, β) $(2\alpha + 3\beta) \cdot (3\alpha - 2\beta)$

γ) $(\alpha + 3)^2$ δ) $(\chi - 2)^2$ ε) $(\alpha + 6) \cdot (\alpha - 5)$

82) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι :

$$-3 > -4 \iff \left\{ \begin{array}{l} (-3)^2 < (-4)^2 \\ (-3)^3 > (-4)^3 \\ (-3)^4 < (-4)^4 \\ (-3)^5 < (-4)^5 \end{array} \right. \text{ καὶ γενικῶς } \left\{ \begin{array}{l} (-3)^\nu < (-4)^\nu, \\ \quad \text{ἂν } \nu = 2,4,6,\ldots \\ (-3)^\nu > (-4)^\nu, \\ \quad \text{ἂν } \nu = 1, 3, 5\ldots \end{array} \right.$$

83) Νὰ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀκολούθων πράξεων :

α) $(-2) \cdot (-3) \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-1)^3 \cdot (-3)^3 - 7 \cdot (-5)^2 \cdot (-1)^4$

β) $(-3)^2 \cdot (-4)^3 \cdot (-1)^5 - (-7)^2 \cdot (+2)^2 \cdot (-3)^2 + (-2)^5 . (-1)^{10}$

γ) $(-2)^3 \cdot (-3)^4 \cdot (-4)^2 - 5^2 \cdot (-4)^3 (+6)^2 - (-3)^4 \cdot (-1) . (-2)^4$

δ) $(+3) \cdot (-5) \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-3) + 5 - (+7) - (-2)$

ε) $5 \cdot (-6 + 2) - [-2 \cdot (+5) - 6]$

ϛ) $[+4 + 9 \cdot (-5) - 1] \cdot (-2)^3 + 1$

ζ) $-(2 \cdot 7 \cdot 5)^3 \cdot [2^2 \cdot (+3) - (+13) + 1]$

η) $[(+2) \cdot (-4) - 5 \cdot (-3)^2 + (-1)^3] : [2 \cdot (-1) \cdot (-5)]$

θ) $\dfrac{(-6)^2 - 4 \cdot (-5)^2}{(-6)^2 - (-6) - 90}$

ι) $\dfrac{3}{(-5)^2 + (-5) \cdot 3} + \dfrac{-5}{(-5) \cdot 3 - 3^2} - \dfrac{-5-1}{(-5) \cdot 3}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΣΥΝΟΛΑ

(ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ)

§ 26. Καθορισμὸς συνόλου

26.1. Ἔχομεν ἀπὸ τὴν πρώτην τάξιν ὑπ᾽ ὄψιν μας τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου, μάλιστα δὲ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἐχρησιμοποιήσαμεν συχνότατα καὶ εἰς τὰ προηγούμενα κεφάλαια αὐτοῦ τοῦ βιβλίου. Θὰ κάμωμεν τώρα μίαν ἐπανάληψιν καὶ μερικὰς προσθέτους παρατηρήσεις καὶ συμπληρώσεις.

29.2. Ἔστω Α ἕνα σύνολον ὄχι κενὸν ($A \neq \varnothing$)· γνωρίζομεν ὅτι ὁ συμβολισμὸς $\alpha \in A$ σημαίνει : τὸ (στοιχεῖον) α ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον Α καὶ ὁ συμβολισμὸς $\alpha \notin A$ σημαίνει : τὸ α δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Α.

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι 1) **τὰ στοιχεῖα κάθε συνόλου** (πού εἶναι διάφορον ἀπὸ τὸ κενὸν καὶ ἔχει περισσότερα ἀπὸ ἕνα στοιχεῖα) **νοοῦνται διακεκριμένα** (δυνάμεθα δηλ. νὰ διακρίνωμεν τὸ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο) καὶ 2) **ἕνα σύνολον, ἔστω Α, εἶναι ὡρισμένον (καθωρισμένον), ἐὰν διὰ κάθε ἀντικείμενον, ἔστω x, δυνάμεθα νὰ βεβαιώσωμεν ὅτι $x \in A$ ἢ ὅτι $x \notin A$.**

Παράδειγμα 1. Τὸ σύνολον τῶν καθηγητῶν τοῦ Γυμνασίου μας εἶναι καθωρισμένον, διότι τὰ στοιχεῖα του (οἱ καθηγηταί μας) εἶναι διακεκριμένα καὶ ἂν x εἶναι ἕνα ὁποιοδήποτε ἀντικείμενον καὶ μᾶς ἐρωτήσουν: « τὸ x εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν καθηγητῶν τοῦ Γυμνασίου μας ; » δυνάμεθα ν᾽ ἀπαντήσωμεν ἀδιστάκτως μὲ ἕνα ναὶ ἢ ἕνα ὄχι.

Παράδειγμα 2. Τὸ σύνολον τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 1966 εἶναι καθωρισμένον καί, ὅπως ἔχομεν μάθει, ἠμπορεῖ νὰ συμβολισθῇ μὲ τοὺς ἑξῆς δύο τρόπους :

1) $\{1, 9, 6\}$, δηλαδὴ **μὲ ἀναγραφὴν** τῶν στοιχείων του.

2) $\{x / x$ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ $1966\}$, δηλαδὴ **μὲ περιγραφήν,** ἤτοι (σύντομον) **διατύπωσιν χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του.** (ἐδῶ ἐκφράζομεν ὅτι ἕνα ἀντικείμενον ἀνήκει εἰς τὸ σύνολόν μας, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἀντικείμενον αὐτὸ εἶναι ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ 1966). Ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης εἶναι λοιπὸν μία **συνθήκη,** τὴν ὁποίαν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ πληροῖ ἕνα ἀντικείμενον, διὰ νὰ εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου.

Ἀσκήσεις

84) Νὰ ὁρίσετε καὶ μὲ συνθήκην τὸ σύνολον Α = { 2, 3, 4, 5 }.

85) Νὰ ὁρίσετε καὶ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα α) { x/x διαιρέτης τοῦ 12 },

β) { $x/x \neq x$ } καὶ γ) { $x/3x = 2$ καὶ x ρητὸς ἀριθμὸς }

86) Ἡ συνθήκη « x εἶναι μαθητὴς τῆς Β' τάξεως τοῦ σχολείου μας μὲ ξανθὰ μαλλιὰ » ἠμπορεῖ νὰ καθορίσῃ σύνολον ;

87) Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν τριγώνων, ποὺ ἔχουν τέσσαρας πλευράς ;

88) Ὑπάρχει ἢ ὄχι διαφορὰ μεταξὺ τοῦ α καὶ τοῦ { α } ;

89) Νὰ δώσετε μὲ ἀναγραφὴν τὸ σύνολον

Κ = { x/x καθηγητὴς τῆς τάξεώς σας }.

90) Νὰ καθορίσετε καὶ μὲ περιγραφὴν τὸ σύνολον Β = {2,4,6, . . . , 98}

91) Νὰ δώσετε μὲ ἀναγραφὴν τὸ σύνολον

Ν = { x/x νομὸς τῆς Πελοποννήσου }.

92) Νὰ καθορίσετε καὶ μὲ συνθήκην τὸ σύνολον { ὁ, ἡ, τό }.

93) Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἄκρων τοῦ εὐθυγρ. τμήματος ΑΒ ;

94) Νὰ παραστήσετε μὲ διάγραμμα τοῦ Venn τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ 24. Νὰ συμβολίσετε τὸ ἴδιον σύνολον καὶ μὲ τὸν σύντομον τρόπον περιγραφῆς ;

27. Ἴσα σύνολα.

27.1. Εἴδαμεν ὅτι τὸ { x/x ψηφίον τοῦ 1966 } = { 1, 9, 6 }.

Ἐπίσης, ἂν ὀνομάσωμεν Α = { α, β, γ } καὶ Β = { β, α, γ }, παρατηροῦμεν ὅτι Α καὶ Β εἶναι σύνολα, ποὺ περιέχουν τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα. Ἑπομένως Α = Β, δηλ. { α, β, γ } = { β, α, γ }.

27.2. Ἐμάθαμεν ἀκόμη εἰς τὴν πρώτην τάξιν ὅτι δύο σύνολα, π.χ. Α = { 1, 2, 10 } καὶ Β = { $\frac{4}{4}$, 2, $2 \cdot 5$ }, εἶναι ἴσα, ὅταν τὰ στοιχεῖα των εἶναι ἴσα ἕνα πρὸς ἕνα. Πραγματικῶς εἰς τὸ παράδειγμά μας, τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων ἐκφράζονται μὲ ὅρους, ποὺ ἔχουν διαφορετικὰ ὀνόματα, ἀλλ' ὅμως **ἴσους** ὅρους, δηλ. εἶναι $1 = \frac{4}{4}$, $2 = 2$, $10 = 2 \cdot 5$.

Γράφομεν λοιπὸν Α = Β, δηλ. { 1, 2, 10 } = { $\frac{4}{4}$, 2, $2 \cdot 5$).

27.3. Ἐμάθαμεν εἰς τὴν Α' τάξιν ὅτι

{ x/x ἄρτιος ἀριθμὸς } = { 0, 2, 4, 6, 8, . . . }.

Ἐπίσης εἶναι $\{x/x$ πολλαπλάσιον τοῦ $2\} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$
Ὥστε εἶναι $\{x/x$ ἄρτιος ἀριθμὸς$\} = \{x/x$ πολλαπλάσιον τοῦ $2\}$.

27.4. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα παραδείγματα, ἀντιλαμβανόμεθα ὅτι, ὅταν ἔχωμεν δύο ἴσα σύνολα, εἰς τὴν πραγματικότητα ἔχομεν ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σύνολον, ποὺ εἴτε τὸ ἀναγράφομεν μὲ δύο διαφορετικὰς διατάξεις τῶν στοιχείων του, εἴτε τὸ ἀναγράφομεν μὲ ὅρους, ποὺ εἶναι διαφορετικὰ ὀνόματα ἢ σύμβολα τῶν ἰδίων στοιχείων, εἴτε τὸ περιγράφομεν μὲ δύο φαινομενικῶς διαφορετικάς, ἀλλὰ ἰσοδυνάμους χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῶν στοιχείων του.

Παραδείγματα :

1. $\left.\begin{array}{l} A = \{x/x \text{ διαιρέτης τοῦ } 6\} \\ B = \{1, 2, 3, 6\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A = B$

2. $\left.\begin{array}{l} \Gamma = \{x/x \text{ ἰσοσκελὲς τρίγωνον}\} \\ \Delta = \{x/x \text{ τρίγωνον μὲ δύο γωνίας ἴσας}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma = \Delta$

Ἀσκήσεις

95) Νὰ ἐξηγήσετε μὲ παραδείγματα ὅτι ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος μεταξὺ συνόλων ἔχει τὰς ἰδιότητας :

1) ἀνακλαστικὴν, 2) συμμετρικὴν, 3) μεταβατικήν.

96) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἴσα ἢ ὄχι τὰ σύνολα

$A = \{x/x$ τετράπλευρον μὲ ἕνα κέντρον συμμετρίας$\}$ καὶ
$B = \{x/x$ παραλληλόγραμμον$\}$.

97) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἴσα ἢ ὄχι τὰ σύνολα

$\Gamma = \{x/x \neq x\}$ καὶ $\Delta = \{x/x$ ἄνθρωπος μὲ ἀνάστημα 5 μέτρων$\}$.

98) Ἠμπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε διατί ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνον κενὸν σύνολον ; (Βλέπετε Μαθηματικὰ Α΄ Γυμνασίου § 4, iv)

99) Νὰ εὕρετε δύο ἀκόμη σύνολα ἴσα μὲ τὸ σύνολον

$$A = \{10, 15, 20\}.$$

§ 28. Ἡ ἔννοια τοῦ ἐγκλεισμοῦ

28.1. Ἀπὸ τὴν πρώτην τάξιν γνωρίζομεν ὅτι ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σύνολα, ὄχι κενά, τότε ὁ συμβολισμὸς $A \subset B$ διαβάζεται : **Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β** καὶ σημαίνει ὅτι : **κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι στοιχεῖον καὶ τοῦ Β·** λέγομεν ἀκόμη εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι : **τὸ Α ἐγκλείεται (περιέχεται) εἰς τὸ Β.**

Παράδειγμα 1. Ἔστω $A = \{x / x$ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ $1966\}$ καὶ $B = \{9, 6, 1\}$· παρατηροῦμεν ἀμέσως ὅτι $A \subset B$.

Παράδειγμα 2. Ἔστω πάλιν τὸ σύνολον Α τοῦ προηγουμένου παραδείγματος καὶ τὸ σύνολον $\Gamma = \{9, 6, 1, 5, 4\}$· παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἐπίσης $A \subset \Gamma$.

Εἰς τὸ παράδειγμα 1 βλέπομεν ἀμέσως ὅτι εἶναι καὶ $B \subset A$, ἐνῷ εἰς τὸ παράδειγμα 2 βλέπομεν ὅτι **τὸ Γ δὲν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α,** διότι ὑπάρχουν στοιχεῖα, ποὺ ἀνήκουν εἰς τὸ Γ (τὰ 5 καὶ 4) καὶ ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α. Τὴν πρότασιν: **τὸ Γ δὲν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α** (τὸ Γ δὲν ἐγκλείεται εἰς τὸ Α) συμβολίζομεν μὲ $\Gamma \not\subset A$.

Διὰ τὸ κενὸν σύνολον **δεχόμεθα** ὅτι ἰσχύει $\varnothing \subset A$ διὰ κάθε σύνολον Α.

28.2. Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ σύνολα τοῦ παραδείγματος 1. Εἴδαμεν εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ ὅτι εἶναι $A \subset B$ καὶ $B \subset A$, δηλ. **κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι στοιχεῖον καὶ τοῦ Β** καὶ **κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι στοιχεῖον καὶ τοῦ Α·** μὲ ἄλλας λέξεις τὸ σύνολον Α εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Β. Ὥστε $(A \subset B$ καὶ $B \subset A) \Longrightarrow (A = B)$.

Ἐξ ἄλλου, ὅταν $A = B$, τότε εἶναι $A \subset B$ καὶ $B \subset A$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν λογικὴν ἰσοδυναμίαν:

$$(A \subset B \text{ καὶ } B \subset A) \iff (A = B)$$

28.3. Ἡ ἔννοια: «ἕνα σύνολον ἐγκλείεται εἰς ἕνα ἄλλο» ὀνομάζεται συντόμως «ἔννοια τοῦ ἐγκλεισμοῦ», καὶ ἔχει τὰς ἑξῆς ἰδιότητας:

1η ἰδιότης : $A \subset A$ (τὸ σύνολον Α περιέχεται εἰς τὸ Α) διὰ κάθε σύνολον Α. (ἀνακλαστικὴ ἰδιότης).

2α ἰδιότης : $(A \subset B$ καὶ $B \subset A) \Longrightarrow (A = B)$ δηλ. ἂν τὸ σύνολον Α περιέχεται εἰς τὸ Β καὶ τὸ Β περιέχεται εἰς τὸ Α, τότε τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἴσα· (ἀντισυμμετρικὴ ἰδιότης).

3η ἰδιότης: $(A \subset B$ καὶ $B \subset \Gamma) \Longrightarrow A \subset \Gamma$ (μεταβατικὴ ἰδιότης)

28.4. Παρατήρησις. Ἂς λάβωμεν τὰ σύνολα Α,Γ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος 2· δηλαδή:

$$A = \{x / x \text{ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ } 1966\}$$
$$\Gamma = \{9, 6, 1, 5, 4\}.$$

Εἴδαμεν ὅτι εἶναι $A \subset \Gamma$ (τὸ Α ἐγκλείεται εἰς τὸ Γ)

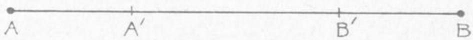
$\Gamma \not\subset A$ (τὸ Γ δὲν ἐγκλείεται εἰς τὸ Α),

ὑπάρχει δηλ. στοιχεῖον τοῦ Γ, ποὺ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Α. Μὲ ἄλλας λέξεις εἶναι: $A \subset \Gamma$ καὶ $A \neq \Gamma$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι **τὸ Α**

εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Γ εἴτε **τὸ Α ἐγκλείεται γνησίως** εἰς τὸ Γ καὶ γράφομεν συμβολικῶς $A \underset{\neq}{\subset} \Gamma$.

Ἡ ἔννοια : « ἕνα σύνολον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον ἄλλου » λέγεται : **γνήσιος ἐγκλεισμὸς** καὶ ἔχει μόνον τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα.

Παραδείγματα : 1) Ἐὰν $A = \{x / x$ τετράγωνον (σχῆμα) $\}$ καὶ $B = \{x / x$ ὀρθογώνιον $\}$, τότε $A \subset B$.



Σχ. 13.

2) Ἐὰν ΑΒ εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα (σχ. 13) καὶ Α′, Β′, δύο σημεῖα του, τότε εἶναι : $A'B' \subset AB$.

3) Τὸ σύνολον, ἔστω Ι, τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου, ἔστω Τ, τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων.

§ 29. Δυναμοσύνολον συνόλου

Ἂς σχηματίσωμεν τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $A = \{\alpha\}$· εἶναι δύο : τὸ $\varnothing$ καὶ τὸ $\{\alpha\}$: τὸ πλῆθος των λοιπὸν εἶναι 2^1.

Τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $B = \{\alpha, \beta\}$, ποὺ ἔχει δύο στοιχεῖα, εἶναι τά : $\varnothing$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\alpha, \beta\}$· τὸ πλῆθος των εἶναι 2^2.

Τὰ ὑποσύνολα τοῦ $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, ποὺ ἔχει τρία στοιχεῖα εἶναι : $\varnothing$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\}$· τὸ πλῆθος των εἶναι 2^3.

Μὲ ὅμοιον τρόπον διαπιστώνομεν ὅτι ἕνα σύνολον μὲ 4 στοιχεῖα θὰ ἔχῃ $2^4 = 16$ ὑποσύνολα κ.ο.κ.

Τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Α τὸ ὀνομάζομεν **δυναμοσύνολον τοῦ Α** καὶ τὸ συμβολίζομεν μέ : $\mathscr{P}(A)$, ποὺ διαβάζεται Πὲ -Ἄλφα. Ἔτσι π.χ., τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ εἶναι

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}\ \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}.$$

Ἀσκήσεις

100) Ποῖα εἶναι τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $E = \{1, 2\}$

101) Ποῖα εἶναι τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\{0\}$; Ποῖα τοῦ $\{\varnothing\}$;

102) Νὰ κάμετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn διὰ τὰ σύνολα :

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}, \quad \Gamma = \{2, 3\}$$

103) Ἐὰν $A = \{x / x$ παραλληλόγραμμον $\}$, $B = \{x / x$ ὀρθογώνιον $\}$ καὶ $\Gamma = \{x / x$ τετράγωνον (σχῆμα) $\}$ νὰ συμβολίσετε τοὺς ἐγκλεισμούς,

ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν συνόλων αὐτῶν καὶ νὰ κάμετε τὸ σχετικὸν διάγραμμα τοῦ Venn.

104) Νὰ ἐκφράσετε συμβολικῶς τοὺς ἐγκλεισμούς, ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τοῦ συνόλου, ἔστω Π, τῶν παραλληλογράμμων, τοῦ συνόλου, ἔστω Ρ, τῶν ρόμβων, τοῦ συνόλου, ἔστω Ο, τῶν ὀρθογωνίων καὶ τοῦ συνόλου, ἔστω Τ, τῶν τετραγώνων. Νὰ κάμετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn διὰ τὰ ἀνωτέρω σύνολα.

105) Νὰ δώσετε ἕνα παράδειγμα ἐγκλεισμοῦ ἀπὸ τὴν Γραμματικὴν τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης.

106) Νὰ δώσετε ἕνα παράδειγμα διὰ τὴν μεταβατικότητα τοῦ ἐγκλεισμοῦ.

107) Νὰ εὕρετε τὸ δυναμοσύνολον τοῦ συνόλου $A = \{x / x$ ἄρθρον τῆς ἑλλην. γλώσσης$\}$. Πρὶν τὸ εὕρετε ἠμπορεῖτε νὰ εἴπετε ἀπὸ πόσα στοιχεῖα θὰ ἀποτελεῖται ;

108) Νὰ ὀνομάσετε Μ τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, ποὺ περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 9, καὶ Π τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ποὺ περιέχονται μεταξὺ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν. Νὰ ἐξετάσετε ποῖοι ἀπὸ τοὺς ἑπομένους ἐγκλεισμοὺς εἶναι ἀληθεῖς :

α) $M \subset \Pi$, β) $M \subsetneq \Pi$, γ) $\Pi \subset M$, δ) $\Pi \subsetneq M$.

30. Ἰσοδυναμικὰ σύνολα.

30. 1. Ἂς πάρωμεν τὰ σύνολα $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\alpha, \gamma, 6\}$. Τὰ σύνολα αὐτὰ δὲν εἶναι ἴσα, διότι δὲν ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια στοιχεῖα· δὲν πρόκειται δηλ. δι' ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ σύνολον. Εἶναι λοιπὸν $A \neq B$. Ἠμποροῦμεν ὅμως νὰ τοποθετήσωμεν τὰ στοιχεῖα των ἔτσι, ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Α νὰ εἶναι **ἀπέναντι εἰς ἕνα** στοιχεῖον τοῦ Β, ὥστε νὰ μὴ πλεονάζῃ κανένα στοιχεῖον ἀπὸ τὸ Β.

Π.χ. νὰ ἔχωμεν, ὅπως συνήθως λέγομεν, τὴν ἀντιστοιχίαν :

$$\begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \alpha, & \gamma, & \beta \end{array} \quad \text{ἤ} \quad \begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \beta, & \alpha, & \gamma \end{array} \quad \text{ἤ} \quad \begin{array}{ccc} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \gamma, & \beta, & \alpha \end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅπως καὶ ἂν κάμωμεν τὴν ἀντιστοίχισιν, δὲν θὰ περισσεύῃ κανένα στοιχεῖον οὔτε ἀπὸ τὸ Α οὔτε ἀπὸ τὸ Β, ἀρκεῖ ἡ ἀντιστοίχισις νὰ γίνεται μὲ τὸν τρόπον, ποὺ εἴπαμεν προηγουμένως. Ἡ ἀντιστοιχία αὐτὴ λέγεται, ὅπως ἔχομεν μάθει, **ἀμφιμονοσήμαντος ἀντι-**

στοιχία (ἢ ἀντιστοιχία **ἕνα πρὸς ἕνα**) τοῦ Α εἰς τὸ Β καὶ τὸ σύνολον Α **ἰσοδυναμικὸν** μὲ τὸ Β. Γράφομεν : $A \sim B$ καὶ διαβάζομεν : **τὸ σύνολον Α εἶναι ἰσοδυναμικὸν μὲ τὸ Β.**

Ὥστε : **Ἕνα σύνολον Α λέγεται ἰσοδυναμικὸν πρὸς ἄλλο Β, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία τοῦ Α εἰς τὸ Β, ὥστε νὰ χρησιμοποιοῦνται εἰς αὐτὴν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Α καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Β.**

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες :

$A \sim A$ (ἀνακλαστική)

$A \sim B \Longleftrightarrow B \sim A$ (συμμετρική)

$A \sim B$ καὶ $B \sim \Gamma \Longrightarrow A \sim \Gamma$ (μεταβατική)

Ἡ συμμετρικὴ ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λέγωμεν : τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἰσοδυναμικά, ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σύνολον Α εἶναι ἰσοδυναμικὸν μὲ τὸ Β εἴτε τὸ σύνολον Β εἶναι ἰσοδυναμικὸν μὲ τὸ Α.

30.2. Ἔχομεν μάθει εἰς τὴν Α΄ τάξιν, ὅτι, ὅταν ἠμποροῦμεν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου νὰ τὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα πρὸς ἕνα μὲ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς τμήματος (*) τοῦ συνόλου $\Phi = \{1, 2, 3, \ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τότε τὸ σύνολον ὀνομάζεται **πεπερασμένον.**

Ἔχομεν ἐπίσης μάθει ὅτι κάθε μὴ πεπερασμένον σύνολον ὀνομάζεται **ἀπειροσύνολον.**

Ὅταν δύο πεπερασμένα σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἰσοδυναμικά, δηλαδὴ ὅταν τὰ στοιχεῖα των εἶναι δυνατὸν νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν, τότε λέγομεν καὶ ὅτι : **ἔχουν τὸν ἴδιον πληθικὸν ἀριθμόν.** Ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς ἑνὸς συνόλου Α συμβολίζεται μὲ $\# A$. Διὰ τὰ ἀνωτέρω σύνολα Α καὶ Β ἔχομεν ὅτι $\# A = \# B = 3$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι **ὅταν ἕνα πεπερασμένον σύνολον Α ἔχῃ ὅσα στοιχεῖα καὶ ἕνα ἄλλο Β τότε τὰ σύνολα αὐτὰ εἶναι ἰσοδυναμικά.**

Εἶναι, ἐπίσης, φανερόν, ὅτι : **κανένα πεπερασμένον σύνολον δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἰσοδυναμικὸν μὲ ἕνα γνήσιον ὑποσύνολόν του.**

Παραδείγματα :

1) $\left.\begin{array}{l} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{1, 2, \alpha\} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \sim B$

2) $\left.\begin{array}{l} \Gamma = \{x / x \text{ κορυφὴ τετραπλεύρου}\} \\ \Delta = \{x / x \text{ πλευρὰ τετραπλεύρου}\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma \sim \Delta$

(*) Τὰ σύνολα $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ κτλ. λέγονται τμήματα τοῦ συνόλου Φ· 1ον τμῆμα τὸ $\{1\}$, 2ον τμῆμα τὸ $\{\overline{1}, 2\}$, 3ον τμῆμα τὸ $\{1, 2, 3\}$ κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις

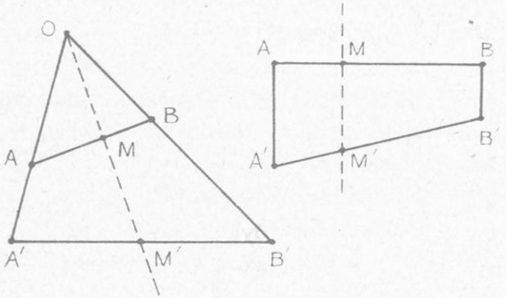
109) Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν ζυγῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἢ ὄχι ἰσοδυναμικὰ καὶ διατί ;

110) Νὰ ἐξηγήσετε διατὶ τὰ σημειοσύνολα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων AB καὶ A′B′ τοῦ σχ. 14 εἶναι ἰσοδυναμικά.

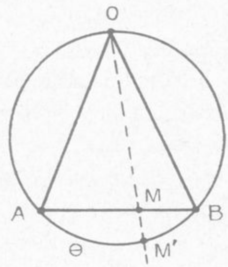
111) Δύο ἴσα σύνολα εἶναι ἢ ὄχι ἰσοδυναμικά ;

Νὰ ἐξετάσετε καὶ τὸ ἀντίστροφον, δηλ. ἂν δύο ἰσοδυναμικὰ σύνολα εἶναι ἢ ὄχι ἴσα.

112) Νὰ ἐξηγήσετε διατί τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ τόξου AΘB καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς χορδῆς τοῦ AB εἶναι ἰσοδυναμικὰ (σχ. 15).



Σχ. 14.



Σχ. 15.

113) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἰσοδυναμικὰ τὰ σύνολα :

$$A = \{\, x / x \text{ Εὐαγγελιστὴς} \,\}$$
$$B = \{\, \{\alpha\},\ \{\beta\},\ \{\gamma\},\ \delta \,\}$$

§ 31. Ἀπειροσύνολα

Ἔστω τὸ σύνολον τῶν **φυσικῶν ἀριθμῶν** :

$$\begin{array}{lllllll} \Phi & = \{ 1, & 2, & 3, \ldots, & & \nu, \ldots \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \Phi_\alpha & = \{ 2, & 4, & 6, \ldots, & & 2\nu, \ldots \}, \end{array}$$

καὶ ἂς λάβωμεν καὶ τὸ σύνολον : Φ_α, δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων (ζυγῶν) φυσικῶν ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι $\Phi_\alpha \subsetneq \Phi$, δηλ. τὸ Φ_α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Φ, διότι τὸ Φ περιέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Φ_α καὶ ἐπὶ πλέον ὅλους τοὺς περιττοὺς (μονοὺς) φυσικοὺς ἀριθμούς. Ἐν τούτοις ὅμως τὰ Φ καὶ Φ_α ἠμπορεῖ νὰ **νὰ τεθοῦν εἰς ἀντιστοιχίαν ἕνα πρὸς ἕνα,** ὅπως π.χ. δεικνύομεν μὲ τὰ διπλᾶ βέλη ἀνωτέρω καὶ ἑπομένως εἶναι ἰσοδυναμικά. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ κανένα πεπερασμένον σύνολον δὲν εἶναι ἰσοδυναμικὸν μὲ ἕνα γνήσιον ὑποσύνολόν του, συμπεραίνομεν ὅτι **τὸ Φ δὲν εἶναι πεπερασμένον σύνολον·** ἄρα εἶναι **ἀπειροσύνολον.**

Γενικῶς : **Ἕνα σύνολον εἶναι ἀπειροσύνολον, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι ἰσοδυναμικὸν μὲ ἕνα γνήσιον ὑποσύνολόν του.**

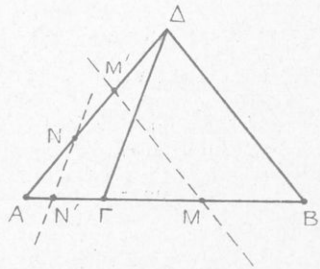
Συμβολικῶς γράφομεν :

$$(\Sigma \text{ εἶναι ἀπειροσύνολον}) \Longleftrightarrow (\text{ὑπάρχει } A \subsetneqq \Sigma \quad \text{καὶ} \quad A \sim \Sigma)$$

Παραδείγματα :

1) Τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροσύνολον. Πράγματι, τὸ $\Phi_\alpha = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ τίθεται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ $B = \{4, 8, 12, 16, 20, \ldots\}$, ποὺ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολόν του. (Ἀπέναντι ἀπὸ κάθε ἀριθμὸν τοῦ Α ἠμποροῦμεν νὰ παρατάξωμεν τὸν διπλάσιόν του, ποὺ ἀνήκει εἰς τὸ Β, ὁπότε ἔχομεν ἀντιστοιχίαν ἕνα πρὸς ἕνα).

2) Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ τυχόντος, ὄχι μηδενικοῦ, τμήματος ΑΒ (*) (σχ. 16) εἶναι ἀπειροσύνολον. Πραγματικῶς, ἂν μεταξὺ Α καὶ Β ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Γ, τότε $A\Gamma \subsetneqq AB$, διότι τὸ σημειοσύνολον ΑΒ περιέχει ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ΑΓ καὶ ἐπὶ πλέον τὰ σημεῖα τοῦ ΓΒ, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ ΑΓ. Ἂν φέρωμεν τώρα ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Δ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ κείμενον, τὰ τμήματα ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν εἰς ἀντιστοιχίαν ἕνα πρὸς ἕνα τὸ σημειοσύνολον ΑΒ εἰς τὸ ΑΔ. Πράγματι, μὲ εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν ΔΒ ἀντιστοιχίζομεν εἰς ἕκαστον σημεῖον, π.χ. τὸ Μ, τοῦ ΑΒ, ἕνα σημεῖον Μ′ τοῦ ΑΔ. Ἑπομένως εἶναι $AB \sim A\Delta$. Ἐπίσης εἶναι $A\Delta \sim A\Gamma$, διότι τὰ σημεῖα των ἀντιστοιχίζονται ἕνα πρὸς ἕνα μὲ εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὴν ΔΓ. Ἀλλὰ ($AB \sim A\Delta$

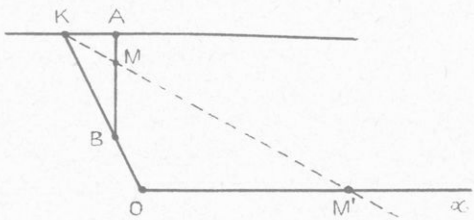


Σχ. 16.

(*) Ἐννοεῖται « κλειστοῦ ».

καὶ ΑΔ $\sim$ ΑΓ) $\Longrightarrow$ ΑΒ $\sim$ ΑΓ. Ἀφοῦ ὅμως ΑΓ $\subsetneq$ ΑΒ καὶ ΑΓ $\sim$ ΑΒ, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ΑΒ εἶναι ἀπειροσύνολον.

3) Εἰς τὸ παραπλεύρως σχ. 17 βλέπετε πῶς ἠμποροῦμεν ν' ἀντιστοιχίσωμεν ἕνα πρὸς ἕνα τὰ σημεῖα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ (ἐκτὸς ἀπὸ τὸ Α) μὲ τὰ σημεῖα μιᾶς ἡμιευθείας Ox. Εἰς τὸ σημεῖον Β ἀντιστοιχίζομεν τὸ 0, μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΚΒ, εἰς τὸ Μ τὸ Μ′ μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΚΜ κ.ο.κ.



Σχ. 17.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα αὐτὸ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς ἡμιευθείας Ox εἶναι ἰσοδυναμικά.

Ἀσκήσεις

Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς ἀντιστοιχίας ἕνα πρὸς ἕνα νὰ εὕρετε ὅτι :

114) Τὸ σύνολον τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροσύνολον.

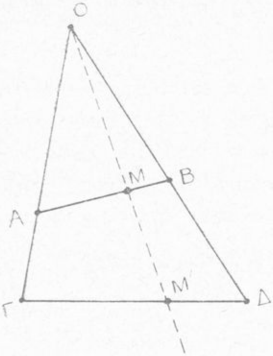
115) Τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν μονάδων $A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$ εἶναι ἀπειροσύνολον.

116) Τὸ σημειοσύνολον ἑνὸς ὁποιουδήποτε (ὄχι μηδενικοῦ) τόξου περιφερείας εἶναι ἀπειροσύνολον.

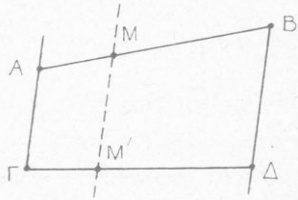
117) Τὸ σῦνολον τῶν τετραγώνων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπειροσύνολον.

118) Νὰ δείξετε ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδυναμικά.

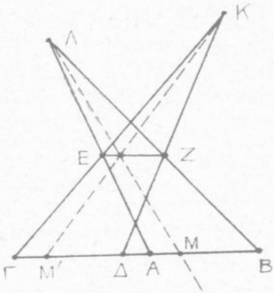
119) Δύο τυχόντα κλειστά, ὄχι μηδενικά, τμήματα εἶναι ἰσοδυναμικὰ σημειοσύνολα :

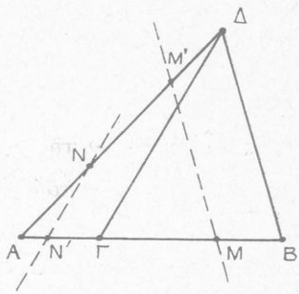


$AB \sim \Gamma\Delta$



$AB \sim \Gamma\Delta$





$$\left.\begin{matrix} AB \sim EZ \\ EZ \sim \Gamma\Delta \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AB \sim \Gamma\Delta$$

$$\left.\begin{matrix} AB \sim A\Delta \\ A\Delta \sim A\Gamma \end{matrix}\right\} \Longrightarrow AB \sim A\Gamma$$

120) Δύο κλεισταὶ ἡμιευθεῖαι εἶναι ἰσοδυναμικὰ ἀπειροσύνολα.

§ 32. Τομὴ καὶ Ἕνωσις συνόλων

32. 1. Εἰς τὴν πρώτην τάξιν τοῦ Γυμνασίου ἐμάθαμεν ὅτι : **Τομὴ δύο ἢ περισσοτέρων συνόλων εἶναι τὸ σύνολον, ποὺ περιέχει τὰ κοινὰ καὶ μόνον τὰ κοινὰ στοιχεῖα αὐτῶν τῶν συνόλων.** Ἔτσι λοιπόν, ἂν $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,

$B = \{\alpha, \gamma, \delta\}$, $\Gamma = \{\alpha, \beta, 3\}$ καὶ $\Delta = \{2, 3, \beta\}$, τότε :

$A \cap B = \{\alpha, \gamma\}$, $A \cap \Gamma = \{\alpha, \beta\}$, $A \cap B \cap \Gamma = \{\alpha\}$, $B \cap \Delta = \varnothing$.

Ὁ ὁρισμὸς τῆς τομῆς συνόλου Α μὲ σύνολον Β δίδεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

$$A \cap B = \{x \,/ x \in A \quad \text{καὶ} \quad x \in B\}$$

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς περιλαμβάνει καὶ τὴν περίπτωσιν, ποὺ ἕνα ἢ καὶ καθένα ἀπὸ τὰ δύο σύνολα εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

Δύο σύνολα Α, Β λέγονται **ξένα μεταξύ των,** ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $A \cap B = \varnothing$. Ἔτσι, π.χ., τὸ $\varnothing$ εἶναι ξένον πρὸς κάθε σύνολον, ἔστω Χ, διότι : $\varnothing \cap X = \varnothing$.

32. 2. Ἐπίσης ἐμάθαμεν ὅτι : **Ἕνωσις δύο ἢ περισσοτέρων συνόλων εἶναι τὸ σύνολον ποὺ περιέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν τῶν συνόλων καὶ μόνον αὐτά.** Ἔτσι, διὰ τὰ ἀνωτέρω σύνολα Α, Β, Γ, Δ ἔχομεν :

$$A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \quad \Gamma \cup \Delta = \{\alpha, \beta, 3, 2\}, \quad B \cup \Gamma \cup \Delta = \{\alpha, \gamma, \delta, \beta, 3, 2\}.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι κάθε στοιχεῖον, ποὺ ἀνήκει εἰς τὴν ἕνωσιν $A \cup B$, ἀνήκει ἢ εἰς τὸ Α, ἢ εἰς τὸ Β, ἢ καὶ εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἑνώσεως συνόλου Α μὲ ἄλλο Β δίδεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς :

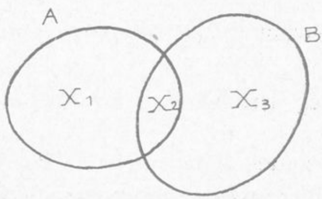
$$A \cup B = \{x / x \in A \quad \text{εἴτε} \quad x \in B\}$$

ὅπου ἡ λέξις « εἴτε » δὲν ἀποκλείει τὸ αὐτὸ στοιχεῖον x νὰ ἀνήκῃ καὶ εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ Β.

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς περιλαμβάνει καὶ τὴν περίπτωσιν, ποὺ ἕνα ἢ καὶ καθένα ἀπὸ τὰ δύο σύνολα εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

Εἰς τὸ σχ. 18 ἔχομεν δύο σύνολα Α καὶ Β, ποὺ δὲν εἶναι ξένα μεταξύ των καὶ εἰς τὸ διάγραμμα των διακρίνομεν τὰ ὑποσύνολα X_1, X_2, X_3. Ἀπὸ τὸ διάγραμμα αὐτὸ προκύπτει τώρα ὅτι

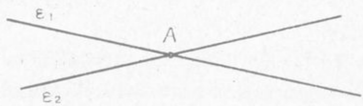
$$A \cap B = X_2, \ A \cup B = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$



Σχ. 18.

Παραδείγματα :

1) Διὰ τὰς εὐθείας ε_1 καὶ ε_2 τοῦ σχ. 19 ἔχομεν $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{A\}$.



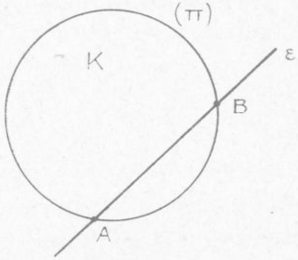
Σχ. 19.

2) Διὰ τὴν περιφέρειαν (Π) καὶ τὴν εὐθεῖαν ε τοῦ σχ. 20 ἔχομεν :

$$(\Pi) \cup \varepsilon = \{A, B\}$$

3) Διὰ τὸν κύκλον Κ καὶ τὴν εὐθεῖαν ε τῆς εἰκ. 7, ἔχομεν $K \cap \varepsilon = AB$.

4) Ἐὰν $A = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ $2 \}$ καὶ $B = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ $3 \}$, τότε $A \cap B = \{ x / x$ φυισκὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ $6 \}$.



Σχ. 20.

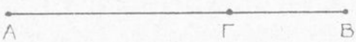
5) Ἐὰν $A = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμὸς, ποὺ τελειώνει εἰς $0 \}$ καὶ $B = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμὸς, ποὺ τελειώνει εἰς $5 \}$, τότε $A \cup B = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμός, ποὺ τελειώνει εἰς 0 ἢ $5 \} = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ $5 \}$.

6) Διὰ τὰ σημειοσύνολα ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ τοῦ σχ. 21 δηλ. διὰ τὰ κλειστὰ τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΓΒ ἔχομεν :

$$AB \cup A\Gamma = AB, \quad AB \cap A\Gamma = A\Gamma, \quad A\Gamma \cup \Gamma B = AB,$$
$$A\Gamma \cap \Gamma B = \{ \Gamma \}, \quad AB \cup \Gamma B = AB, \quad AB \cap \Gamma B = \Gamma B.$$

7) Ἐὰν ἔχωμεν τὰ σύνολα $A = \{ x / x$ κόκκινον ἄνθος$\}$ καὶ $B = \{ x / x$ γαρύφαλλον$\}$, τότε $A \cap B = \{ x / x$ κόκκινον γαρύφαλλον$\}$ καὶ $A \cup B = \{ x / x$ κόκκινον ἄνθος εἴτε γαρύφαλλον$\}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης (ἡ συνθήκη) διὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τομῆς $A \cap B$ προκύπτει ἀπὸ τὴν **σύζευξιν** τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων (συνθηκῶν) τῶν συνόλων Α καὶ Β. Κάθε στοιχεῖον x τῆς τομῆς ὀφείλει νὰ εἶναι καὶ κόκκινον ἄνθος καὶ γαρύφαλλον. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὸ παράδειγμα 4.



Σχ. 21.

Διὰ τὴν ἕνωσιν $A \cup B$ παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον της ὀφείλει νὰ εἶναι εἴτε κόκκινον ἄνθος εἴτε γαρύφαλλον. Ἡ χαρακτηριστικὴ αὐτὴ ἰδιότης λέγομεν ὅτι προκύπτει ἀπὸ τὴν **διάζευξιν** τῶν ἰδιοτήτων τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Α καὶ τοῦ συνόλου Β. Ἡ διάζευξις αὐτὴ λέγεται **μὴ ἀποκλειστική**, ἐπειδὴ ἡ ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Α (κόκκινον ἄνθος) δὲν ἀποκλείει τὴν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Β (γαρύφαλλον), διότι ὑπάρχουν τὰ κόκκινα γαρύφαλλα, ποὺ ἔχουν καὶ τὰς δύο ἰδιότητας. Εἰς τὸ παράδειγμα 5 ἡ διάζευξις τῶν ἰδιοτήτων τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων λέγεται **ἀποκλειστική**, ἐπειδὴ ἡ ἰδιότης τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Α (ἀριθμὸς φυσικὸς λήγων εἰς 0) ἀποκλείει τὴν ἄλλην (ἀριθμὸς φυσικὸς λήγων εἰς 5) ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Β. Μὲ διάφορα παραδείγματα διαπιστώνομεν ὅτι ἡ διάζευξις εἶναι ἀποκλειστική, ὅταν τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ξένα μεταξύ των.

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι εἰς τὸν σχηματισμὸν τῆς ἑνώσεως καὶ τῆς τομῆς συνόλων ἰσχύουν ἡ ἀντιμεταθετικὴ καὶ ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης, δηλ.

$A \cup B = B \cup A$, $\quad A \cap B = B \cap A$

$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$, $\quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

Ἀσκήσεις

121) Νὰ σχηματίσετε τὴν $A \cup B$ καὶ τὴν $A \cap B$, ἐὰν
$A = \{ x / x$ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\}$ καὶ $B = \{ x / x$ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $\}$.
Εἰς τὴν $A \cup B$ ἡ διάζευξις τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων εἶναι ἀποκλειστικὴ ἢ μὴ ἀποκλειστική ;

122) Νὰ ἀναγράψετε καὶ ἔπειτα ἐκφράσετε μὲ τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον $A \cap B$, ἐὰν

$A = \{ x / x$ διαιρέτης τοῦ $18 \}$ καὶ $B = \{ x / x$ διαιρέτης τοῦ $24 \}$.

123) Ἐὰν
$A = \{ x / x$ φυσικὸς διψήφιος ἄρτιος ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τοῦ $20 \}$
$B = (\chi / \chi$ φυσικὸς διψήφιος ἀριθμὸς πολλαπλάσιον τοῦ 3 καὶ μικρότερος τοῦ $20)$

α) Νὰ ἀναγράψετε τὰ σύνολα Α καὶ Β. β) Νὰ σχηματίσετε μὲ ἀναγραφὴν τὴν ἕνωσίν των. γ) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ διάζευξις τῶν συνθηκῶν τῶν συνόλων Α καὶ Β εἶναι ἢ ὄχι ἀποκλειστική.

124) Ἐὰν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ καὶ $\Gamma = \{3, 7\}$ νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι εἶναι α) $A \cap (B \cup \Gamma) = A \cap B \cup A \cap \Gamma$ (ἐπιμεριστικότης τῆς τομῆς ὡς πρὸς τὴν ἕνωσιν) β) $A \cup (B \cap \Gamma) = A \cup B \cap A \cup \Gamma$ (ἐπιμεριστικότης τῆς ἑνώσεως ὡς πρὸς τὴν τομήν).

125). Νὰ πάρετε τρία σύνολα Α, Β, Γ ἔτσι, ὥστε δύο ἀπὸ αὐτὰ νὰ εἶναι ξένα μεταξύ των. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον $A \cap B \cap \Gamma$ καὶ νὰ κάμετε τὸ σχετικὸν διάγραμμα.

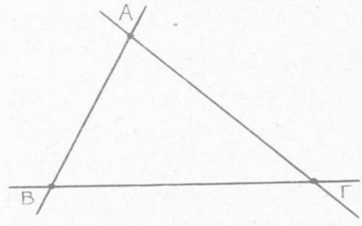
126) Ἂν Ε εἶναι ἕνα τυχὸν σύνολον μὴ κενὸν καὶ Α, Β εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Ε νὰ δείξετε μὲ παραδείγματα ὅτι ἰσχύει :

$$(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B) \subset E$$

127) Ἐὰν $A \cup B = \varnothing$, τί συμπεραίνετε διὰ τὰ σύνολα Α καὶ Β ;

128) Νὰ παρατηρήσετε τὸ σχ. 22 καὶ νὰ εὕρετε τί εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἑξῆς τριῶν κλειστῶν ἡμιεπιπέδων:

α) τοῦ ἡμιεπιπέδου ἀκμῆς ΒΓ, ποὺ περιέχει τὸ σημεῖον Α β) τοῦ ἡμιεπιπέδου ἀκμῆς ΑΓ, ποὺ περιέχει τὸ σημεῖον Β καὶ γ) τοῦ ἡμιεπιπέδου ἀκμῆς ΑΒ, ποὺ περιέχει τὸ σημεῖον Γ. Διὰ νὰ διευκολυνθῆτε νὰ γραμμοσκιάσετε μὲ χρωματιστὰ μολύβια τὰ τρία ἡμιεπίπεδα.



Σχ. 22.

33. Διαμερισμὸς συνόλου

31.1. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν τάξιν ἑνὸς μεικτοῦ σχολείου καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ τάξις αὐτὴ ἔχει καὶ μαθητὰς καὶ μαθητρίας. Ἔστω Α τὸ σύνολον ὅλων τῶν μαθητῶν καὶ μαθητριῶν τῆς τάξεως, A_1 τὸ σύνολον μόνον τῶν μαθητῶν καὶ A_2 τὸ σύνολον μόνον τῶν μαθητριῶν.

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ τὰ ἑξῆς:

1ον Κανένα ἀπὸ τὰ σύνολα A_1, A_2 δὲν εἶναι κενόν, δηλ.

$$A_1 \neq \varnothing \quad \text{καὶ} \quad A_2 \neq \varnothing$$

2ον Καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα A_1, A_2 εἶναι γνήσιον ὑποσύνολου τοῦ Α, δηλαδὴ

$$A_1 \underset{\neq}{\subset} A, \qquad A_2 \underset{\neq}{\subset} A$$

3ον Τὰ σύνολα A_1, A_2 εἶναι ξένα μεταξύ των, δηλ.

$$A_1 \cap A_2 = \varnothing$$

4ον Ἡ ἕνωσις $A_1 \cup A_2$ εἶναι τὸ Α.

Μὲ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις τὸ σύνολον $\{A_1, A_2\}$ λέγεται: **ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Α** εἰς δύο σύνολα. Καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα A_1, A_2 λέγεται **μία κλάσις τοῦ διαμερισμοῦ.**

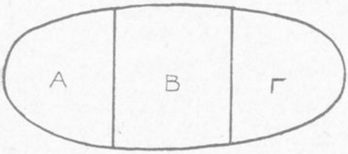
33.2. Γενικῶς, **ἂν ἔχωμεν ἕνα σύνολον, ἔστω Α, μὴ κενὸν καὶ ὑπάρχουν δύο μὴ κενὰ ὑποσύνολά του, ἔστω A_1, A_2, ξένα μεταξύ των καὶ μὲ « ἕνωσίν των » τὸ Α** ($A_1 \cup A_2 = A$), **τότε τὸ σύνολον $\{A_1, A_2\}$ λέγεται « ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Α εἰς δύο κλάσεις ».** Ἂν ἀντὶ τῶν A_1, A_2, ὑπάρχουν τρία, τέσσερα κτλ. ὑποσύνολα τοῦ Α μὲ τὰς ἀνωτέρω ἰδιότητας (δηλ. μὴ κενά, ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ μὲ « ἕνωσίν » των τὸ Α), τότε τὸ σύνολον ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρία, τέσσερα κτλ.

ὑποσύνολα λέγεται ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Α εἰς τρεῖς, τέσσερες κτλ. κλάσεις. Ἡ φράσις « ἔχομεν ἕνα διαμερισμὸν τοῦ Α εἰς. . . » διατυπώνεται καὶ ὡς ἑξῆς : « τὸ Α διαμερίζεται εἰς. . . ».

Ἄλλα παραδείγματα :

1. Ἔστω Μ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν ἑνὸς Γυμνασίου, ποὺ λειτουργεῖ μὲ ὅλας τὰς τάξεις του· ἔστω Α τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς α' τάξεως, Β τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς β' τάξεως καὶ Γ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς γ' τάξεως. Τὸ σύνολον $\{ Α, Β, Γ \}$ ἀποτελεῖ ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου Μ εἰς τρεῖς κλάσεις, διότι τὰ σύνολα Α, Β, Γ εἶναι μὴ κενά, εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Μ ξένα μεταξύ των ἀνὰ δύο καὶ ἡ ἕνωσίς των $Α \cup Β \cup Γ$ εἶναι τὸ Μ. Τὸν διαμερισμὸν αὐτὸν δυνάμεθα νὰ τὸν παραστήσωμεν γραφικῶς μὲ τὸ διάγραμμα, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ σχ. 23.

2. Ἂν $Φ_0 = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$, ἕνας διαμερισμὸς τοῦ $Φ_0$ εἰς δύο κλάσεις εἶναι τὸ σύνολον $\{ Φ_α , Φ_π \}$, ὅπου $Φ_α = \{ 0, 2, 4, 6, \ldots \}$ καὶ $Φ_π = \{ 1, 3, 5, \ldots \}$. Δηλ. εἰς τὴν κλάσιν $Φ_α$ ἐλάβαμεν τοὺς ἀρτίους ἀριθμοὺς τοῦ $Φ_0$ καὶ εἰς τὴν κλάσιν $Φ_π$ τοὺς περιττούς.



Σχ. 23.

3. Μία εὐθεῖα xy εἰς ἕνα ἐπίπεδον Π διαμερίζει τὸ σύνολον τῶν σημείων του εἰς τρία ὑποσύνολα τοῦ ἐπιπέδου. Αὐτὰ εἶναι τὰ δύο ἀνοικτὰ ἡμιεπίπεδα ἀκμῆς χψ καὶ ἡ εὐθεῖα xy.

4. Ἔστω Κ τὸ σύνολον τῶν κατοίκων τῆς Πελοποννήσου καὶ Α, Β, Γ, Δ, Ε τὰ σύνολα τῶν κατοίκων τῶν πέντε νομῶν της. Τὸ σύνολον $\{ Α, Β, Γ, Δ, Ε \}$ ἀποτελεῖ ἕνα διαμερισμὸν τῶν κατοίκων τῆς Πελοποννήσου εἰς πέντε κλάσεις, διότι

1) Τὰ σύνολα Α, Β, Γ, Δ, Ε εἶναι ὅλα ὑποσύνολα τοῦ Κ.
2) Εἶναι ὅλα μὴ κενὰ σύνολα
3) Εἶναι ἀνὰ δύο ξένα μεταξύ των
καὶ 4) ἡ ἕνωσίς των εἶναι τὸ Κ.

5. Ἐὰν $Α = \{ 1, 2, 3, 4 \}$, τότε τὸ σύνολον $Δ = \{ \{ 1, 2 \}, \{ 3 \}, \{ 4 \} \}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Α, εἰς τρεῖς κλάσεις (διατί) ;

Ἀσκήσεις

129) Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν διαμερίζεται εἰς τὰς ἑξῆς τρεῖς κλάσεις :

$\{ x / x$ θετικὸς ἀριθμός $\}$, $\{ x / x$ ἀρνητικὸς ἀριθμός $\}$, $\{ 0 \}$.

130) Νὰ κάμετε ἕνα διαμερισμὸν τοῦ συνόλου Ζ τῶν σχετικῶν ἀκεραίων εἰς τρεῖς κλάσεις. Ἡ μία κλάσις νὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

131) Νὰ δώσετε ἕνα παράδειγμα διαμερισμοῦ ἀπὸ τὴν Γραμματικὴν τῆς Ἑλληνικῆς γλώσσης.

132) Νὰ δώσετε ἕνα παράδειγμα διαμερισμοῦ ἀπὸ τὴν ζωολογίαν.

133) Νὰ διαμερίσετε τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας εἰς δύο κλάσεις.

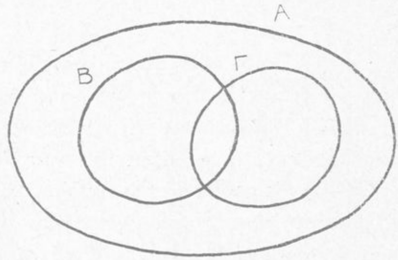
134) Ἔστω Φ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, Α τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν, Β τὸ σύνολον τῶν συνθέτων ἀριθμῶν καὶ $\Gamma = \{1\}$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ σύνολον $\Delta = \{A, B, \Gamma\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Φ.

135) Νὰ διαμερίσετε τὸ σύνολο Τ ὅλων τῶν τριγώνων εἰς τρεῖς κλάσεις κατὰ δύο τρόπους: α) ὡς πρὸς τὰς γωνίας των β) ὡς πρὸς τὰς πλευράς των.

136) Νὰ κάμετε τρεῖς διαμερισμοὺς τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

137) Ἐὰν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $A_1 = \{\alpha, \delta\}$, $A_2 = \{\beta, \gamma\}$, $A_3 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, νὰ ἐξετάσετε ἂν καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα $\Delta_1 = \{A_1, A_2\}$, $\Delta_2 = \{A_1, A_4\}$, ἀποτελεῖ διαμερισμὸν τοῦ Α.

138) Εἰς τὸ διάγραμμα τοῦ σχ. 24 νὰ διαγραμμίσετε τὰ χωρία ὅπου δὲν πρέπει νὰ ὑπάρχουν στοιχεῖα, διὰ νὰ παριστάνῃ τὸ σχῆμα τοῦτο ὅτι $\{B, \Gamma\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Α.



Σχ. 24.

139) Μία περιφέρεια (Κ, ρ) εἰς ἕνα ἐπίπεδον διαμερίζει τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου εἰς τρεῖς κλάσεις. Νὰ περιγράψετε αὐτὰς τὰς κλάσεις.

34. Συμπλήρωμα συνόλου

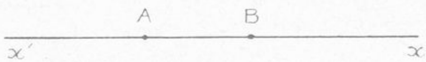
Ἔστω ἕνα σύνολον $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ ἕνα ὑποσύνολόν του, π.χ., τὸ $A = \{1, 5\}$. **Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ U, ποὺ δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α**, δηλ. τὸ $\{2, 3, 4\}$, **ὀνομάζεται συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς τὸ U** καὶ παριστάνεται συνήθως μὲ C_U^A, εἴτε μὲ A'.

Συμβολικῶς γράφομεν : $C_U^A = \{ x / x \in U$ καὶ $x \notin A \}$.
Εἶναι φανερὸν ὅτι ἰσχύουν : $A \cap A' = \varnothing$ καὶ $A \cup A' = U$.

Ἰσχύουν ἐπίσης : $C_U^U = \varnothing$ καὶ $C_U^{\varnothing} = U$.

Παραδείγματα. 1) Ἔστω $\Phi_0 = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$, δηλ. τὸ σύνολον τῶν ἀπcλύτων ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ $\Phi_\alpha = \{ 0, 2, 4, \ldots \}$. Τὸ συμπλήρωμα τοῦ Φ_α ὡς πρὸς Φ_0 εἶναι τὸ σύνολον $\Phi_\pi = \{ 1, 3, 5, \ldots \}$, δηλ. τὸ σύνολον τῶν ἀπολύτων περιττῶν ἀριθμῶν.

2) Ἔστω εὐθεῖα $x'x$ καὶ ΑΒ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα (κλειστὸν) ἐπάνω εἰς αὐτήν. (Σχ. 25). Εἶναι προφανῶς $AB \underset{\neq}{\subset} x'x$. Τὸ συμπλήρωμα τοῦ ΑΒ ὡς πρὸς τὴν $x'x$ εἶναι ἀνοικταὶ ἡμιευθεῖαι Bx καὶ Ax'. (Ἐννοεῖται ὅτι τὴν εὐθεῖαν $\chi'\chi$, τὸ τμῆμα ΑΒ καὶ τὰς ἡμιευθείας, τὰ θεωροῦμεν ὡς σύνολα σημείων).



Σχ. 25.

Ἀσκήσεις

140) Ποῖον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου $A = \{ x / x$ φυσικὸς ἀριθμὸς μὴ διαιρετὸς διὰ $3\}$ ὡς πρὸς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ;

141) Ποῖον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῶν τετραγώνων, ποὺ ἔχουν τρεῖς πλευρὰς ὡς πρὸς τὸ σύνολον ὅλων τῶν τετραγώνων ;

142) Θεωροῦμεν τὸ σύνολον Κ τῶν γωνιῶν, ποὺ ἔχουν μέτρον μεγαλύτερον τῶν 0^0 καὶ μικρότερον τῶν 180^0. Καὶ τὸ σύνολον Α, τῶν ὀξειῶν γωνιῶν. Ποῖον εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Α ὡς πρὸς τὸ Κ ;

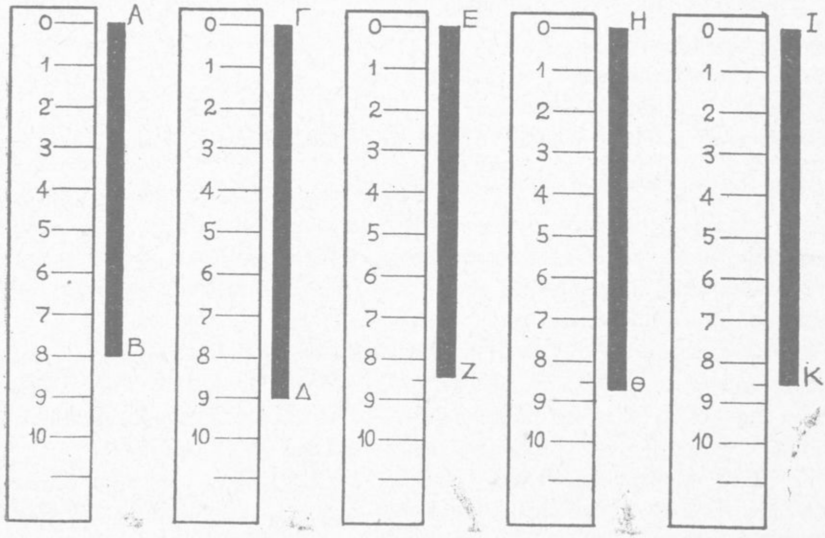
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 35. Κατὰ προσέγγισιν τιμὴ μεγέθους. Σφάλμα μετρήσεως

35.1. Ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ «ἐκτιμήσωμεν τὸ μῆκος» μιᾶς ράβδου (δηλ. ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος) μὲ τὴν βοήθειαν ἑνὸς κανόνος ὑποδιηρημένου εἰς ἑκατοστόμετρα (cm). Γνωρίζομεν ὅτι θὰ θέσωμεν τὴν ράβδον εἰς τὴν πλευρὰν τοῦ κανόνος (Σχ. 24), ὥστε τὸ ἕνα ἄκρον της νὰ εὑρεθῇ ἀκριβῶς εἰς τὸ 0 (μηδὲν) τοῦ κανόνος. Τότε τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς ράβδου θὰ τὸ ἴδωμεν νὰ εὑρίσκεται ἢ ἀκριβῶς εἰς μίαν ἀριθμημένην ὑποδιαίρεσιν τοῦ κανόνος, ὅπως, π.χ., εἰς τὸ Σχ. 24 ἢ μεταξὺ δύο ἀριθμημένων ὑποδιαιρέσεων, ὅπως, π.χ., συμβαίνει εἰς τὸ Σχ. 26.

Ἀκριβέστερον : κατὰ τὴν ἐκτίμησιν τοῦ μήκους ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος μὲ ἕνα κανόνα ὑποδιηρημένον, π.χ. εἰς cm, αἱ περιπτώσεις, ποὺ εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιασθοῦν, εἶναι ὡς αὐταί, ποὺ βλέπετε εἰς τὰ κατωτέρω σχήματα :



Σχ. 24 Σχ. 25 Σχ. 26 Σχ. 27 Σχ. 28

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. 24 θὰ εἴπωμεν: **τὸ μῆκος τῆς ράβδου AB εἰς cm εἶναι 8 cm** εἴτε **ἡ τιμὴ τῆς ράβδου εἰς cm εἶναι 8 cm. Ἐν τούτοις δὲν εἴμεθα βέβαιοι δι' αὐτό.** Πράγματι· ἂν παρατηρήσωμεν τὸ Σχ. 24 μὲ μεγεθυντικὸν φακόν, εἶναι πολὺ πιθανὸν ὅτι θὰ ἴδωμεν τὸ ἄκρον B τῆς ράβδου ἢ ὀλίγον πρὸ τοῦ σημείου 8 τῆς κλίμακος ἢ ὀλίγον μετὰ ἀπ' αὐτό. Θὰ ἐλέγαμεν λοιπὸν τότε ὅτι: **τὸ μῆκος τῆς ράβδου εἶναι 8 cm — σ cm ἢ 8 cm + σ cm, ὅπου τὸ σ δὲν θὰ ἠδυνάμεθα νὰ τὸ προσδιορίσωμεν ἀκριβῶς, θὰ ἠδυνάμεθα ὅμως μὲ βεβαιότητα νὰ εἴπωμεν δι' αὐτὸ ὅτι ἱκανοποιεῖ τὰς συνθήκας: $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}$.**

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν εἰς τὸ Σχ. 25. Εἰς τὸ Σχ. 26 εἴμεθα ἀμέσως βέβαιοι ὅτι **τὸ μῆκος τῆς ράβδου ΕΖ εἶναι 8 cm + σ cm**, ὅπου εἶναι $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Εἰς τὸ Σχ. 27 εἴμεθα βέβαιοι ὅτι ἐπίσης ὅτι **τὸ μῆκος τῆς ράβδου ΗΘ εἶναι 9 cm — σ cm** ὅπου πάλιν εἶναι $0 < \sigma < \frac{1}{2}$. Ἀλλὰ τόσον εἰς τὸ Σχ. 26 ὅσον καὶ εἰς τὸ Σχ. 27 **δὲν γνωρίζομεν ἀκριβῶς τὸ σ, ἀλλὰ μόνον ὅτι ἰσχύει δι' αὐτὸ $0 < \sigma < \frac{1}{2}$**. Εἰς τὸ Σχ. 28 **βλέπομεν** ὅτι τὸ μῆκος τῆς ράβδου ΙΚ εἶναι $8 \text{ cm} + \frac{1}{2}$ cm εἴτε (ποὺ εἶναι τὸ ἴδιον) $9 \text{ cm} - \frac{1}{2}$ mc.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι: **ὅταν ἐκτιμῶμεν τὸ μῆκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς κλίμακος, π.χ., ἑκατοστομέτρων, τότε εὑρίσκομεν ὡς μῆκος ἕνα ὡρισμένον ἀκέραιον ἀριθμὸν ἑκατοστομέτρων, ἔστω α, σὺν ἢ πλὴν ἕνα κλάσμα τοῦ ἑκατοστομέτρου, ἔστω σ, διὰ τὸ ὁποῖον τὸ μόνον, ποὺ ἀσφαλῶς γνωρίζομεν, εἶναι ὅτι $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}$.**

Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α cm (πρὸς τὸν ὁποῖον στρογγυλεύομεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως) λέγεται: **τὸ κατὰ προσέγγισιν εἰς cm μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος** εἴτε **ἡ κατὰ προσέγγισιν εἰς cm τιμὴ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.**

Εἰδικώτερον: 1) ἂν τὸ μῆκος ἐκτιμᾶται εἰς $(\alpha + \sigma)$ cm, τότε ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α cm λέγεται **τὸ κατ' ἔλλειψιν εἰς cm μῆκος τοῦ τμήματος.** 2) Ἂν τὸ μῆκος ἐκτιμᾶται εἰς $(\alpha - \sigma)$ cm, τότε ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς α cm λέγεται **τὸ καθ' ὑπεροχὴν εἰς cm μῆκος τοῦ τμήματος.**

Ἔτσι: εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. 26 θὰ εἴπωμεν: **τὸ κατ' ἔλλειψιν εἰς cm μῆκος τοῦ ΕΖ εἶναι 8 cm**, εἴτε: **τὸ μῆκος τοῦ ΕΖ εἶναι 8 cm κατ' ἔλλειψιν.** Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. 27 θὰ εἴπωμεν: **τὸ μῆ-**

κος τοῦ ΗΘ εἶναι 9 cm καθ' ὑπεροχήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Σχ. 28 θὰ εἴπωμεν ὅτι: **τὸ μῆκος τοῦ ΙΚ εἶναι 8 cm κατ' ἔλλειψιν** εἴτε ὅτι: **τὸ μῆκος τοῦ ΙΚ εἶναι 9 cm καθ' ὑπεροχήν·** (αὐτὰ βεβαίως μὲ τὴν παραδοχὴν ὅτι τὸ Κ εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖ, ποὺ τὸ βλέπομεν νὰ εἶναι, δηλ. εἰς τὸ μέσον τοῦ τμήματος $\overline{89}$).

35.2. Ἔστω ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν κανόνος ὑποδιηρημένου εἰς cm διεπιστώσαμεν ὅτι τὸ μῆκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι α cm $\pm\, \sigma$ cm. Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς:

$$(\alpha \pm \sigma) - \alpha = \pm\, \sigma$$

δηλ. ὁ ἀριθμὸς $\sigma \left(0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\right)$ ὀνομάζεται « **τὸ ἀπόλυτον σφάλμα τῆς μετρήσεως τοῦ τμήματος** » εἴτε, συντόμως, **τὸ σφάλμα τῆς μετρήσεως.**

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι **τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα** εἰς cm κατὰ μίαν εἰς cm μέτρησιν εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι $\frac{1}{2}$ cm. Ἐὰν κατὰ τὴν μέτρησιν τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ἐχρησιμοποιεῖτο κανὼν ὑποδιηρημένος εἰς mm, τότε τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα κατὰ τὴν μέτρησιν τοῦ τμήματος θὰ ἦτο $\frac{1}{2}$ mm. Ἐὰν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς μίαν μέτρησιν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐλήφθη ὡς μῆκος του ὁ ἀριθμὸς 85 mm, τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ τμῆμα ἔχει μῆκος 85 mm $\pm \frac{1}{2}$ mm, δηλ. τὰ ὅρια μεταξὺ τῶν τῶν ὁποίων τὸ μῆκος τοῦ τμήματος περιλαμβάνεται εἶναι ἀπὸ $84\frac{1}{2}$ mm ἕως $85\frac{1}{2}$ mm.

Εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα αἱ μετρήσεις ὑπετέθη ὅτι γίνονται μὲ κλίμακα ἑκατοστομέτρων ἢ χιλιοστομέτρων. Τὰ ἴδια θὰ ἐλέγαμεν, ἐὰν ἐχρησιμοποιεῖτο κλῖμαξ δεκατομέτρων (dm), μέτρων (m), χιλιομέτρων (km) κτλ. Π.χ. τὸ μῆκος ἑνὸς δρόμου εἰς χιλιόμετρα θὰ ἐκτιμηθῇ εἰς $x \pm \sigma$ χιλιόμετρα, ὅπου τὸ x ἀκέραιος καὶ τὸ σ κλάσμα τοῦ χιλιομέτρου ἀπὸ 0 ἕως $\frac{1}{2}$ $\left(0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμεν ὅτι μία μέτρησις εἶναι τόσον **περισσότερον ἀκριβής,** ὅσον μικροτέρα εἶναι ἡ χρησιμοποιουμένη μονὰς κατὰ τὴν μέτρησιν.

Ἀσκήσεις

143) Μία μετροταινία εἶναι διηρημένη εἰς δεκατόμετρα (dm). Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ἐμετρήθη μὲ τὴν ἀνωτέρω μετροταινίαν καὶ ὑπελογί-

σθη εἰς 153 dm. α) Ποία εἶναι ἡ μονὰς μετρήσεως ; β) Ποῖον τὸ ἀκριβὲς ἀπόμετρον ; γ) Ποῖον τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα ;

Λύσις: α) τὸ δεκατόμετρον (dm). β) $153 \pm \frac{1}{2}$ δεκατόμετρα. γ) $\frac{1}{2}$ τοῦ δεκατομέτρου.

144) Ποία μέτρησις ἀπὸ τὰ κατωτέρω ζεύγη μετρήσεων ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν ;

α) 17,3 m $\quad 12\frac{1}{2}$ m

β) 0,75 m $\quad$ 12,5 m

γ) 0,172 m $\quad$ 0,375 m

145) Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα εἰς τὰς ἑπομένας μετρήσεις ; (Ἡ ὑπογράμμισις φανερώνει, ποῦ γίνεται ἡ στρογγύλευσις τοῦ ἐξαγομένου τῆς μετρήσεως).

α) $356\underline{00}$ m $\quad$ β) $356\underline{0}$ m $\quad$ γ) $356\underline{0}0$ m

δ) 35,6 m $\quad$ ε) 0,356 m $\quad$ 5) 356,0 m

146) Ποία ἀπὸ τὰς μετρήσεις εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν εἶναι περισσότερον ἀκριβής ; Ποία ἡ ὀλιγώτερον ἀκριβής ;

147) Εἰς τὰς μηχανολογικὰς κατασκευὰς γίνεται συχνότατα λόγος περὶ «ἀνοχῆς». Ὁ ὅρος **ἀνοχὴ** σημαίνει τὸ μέγιστον ἐπιτρεπόμενον σφάλμα. Ἡ ἀνοχὴ καθορίζεται εἴτε ἀπὸ τὸν ἀγοραστὴν εἴτε ἀπὸ τὸ ἐργοστάσιον ἢ καὶ ἀπὸ διεθνεῖς συμφωνίας, δι' ὡρισμένας κατασκευὰς (πλάστιγγες κτλ.). Ἕνα ἐργοστάσιον, π.χ., ποὺ κατασκευάζει «ἔμβολα» διὰ μηχανὰς αὐτοκινήτων, διαφημίζει τὰ προϊόντα του «ὅτι ἔχουν διάμετρον 3 ἰντσῶν μὲ ἀνοχὴν ἑνὸς χιλιοστοῦ τῆς ἴντσας». Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ διάμετρος τῶν ἐμβόλων ἠμπορεῖ νὰ εἶναι $(3 \pm 0{,}001)$ ἴντσες. Μεταξὺ ποίων ἀκριβῶς ὁρίων περιλαμβάνεται ἡ διάμετρος τῶν ἐμβόλων ;

§ 36. Μέτρησις τυχόντος μεγέθους

Εἰς τὰ προηγούμενα ἠσχολήθημεν μὲ μετρήσεις εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἀνάλογοι ὅμως παρατηρήσεις θὰ ἐγίνοντο καὶ ὅμοιοι ὁρισμοὶ θὰ ἐδίδοντο, ἂν τὸ μετρούμενον μέγεθος, δὲν ἦτο εὐθύγραμμον τμῆμα, ἀλλά, π.χ., θερμοκρασία, βάρος, γωνία κτλ.

Κατὰ τὴν μέτρησιν λοιπὸν ἑνὸς τυχόντος μεγέθους μὲ μίαν ὡρισμένην μονάδα, π.χ. τὴν μ, ὁρίζονται αἱ ἔννοιαι : **τιμὴ τοῦ μεγέθους εἰς μονάδας μ, κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ μεγέθους εἰς μονάδας μ, κατ' ἔλλειψιν τιμὴ τοῦ μεγέθους (εἰς μονάδας μ), καθ' ὑπεροχὴν (εἰς μονά-**

δας μ) τιμὴ τοῦ μεγέθους, σφάλμα (εἰς μονάδας μ) τῆς μετρήσεως. Ἔτσι τώρα ἀντιλαμβανόμεθα τὴν σημασίαν τῶν ἐκφράσεων ὡς αἱ: ἡ θερμοκρασία εἶναι 18 βαθμοὶ Κελσίου, τὸ βάρος εἶναι 850 γραμμάρια, ἡ γωνία εἶναι μέτρου 15^0 κτλ.

§ 37. Σχετικὸν σφάλμα. Ἑκατοστιαῖον σφάλμα.

37.1. Δύο μετρήσεις ἠμπορεῖ νὰ γίνουν μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα μετρήσεως καὶ ἑπομένως νὰ παρουσιάζουν τὸ αὐτὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα. Καὶ ὅμως τὸ σφάλμα αὐτὸ εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι περισσότερον σημαντικὸν καὶ εἰς ἄλλας ὀλιγώτερον.

Ἂς ὑποθέσωμεν, π.χ., ὅτι τὸ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνθρώπου εἶναι 167 cm $\pm$ σ cm, ὅπου ὡς γνωστὸν τὸ σφάλμα σ εἶναι, κατὰ μέγιστον, 0,5 cm. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι **ἐπὶ ἀναστήματος 167 cm (κατὰ προσέγγισιν cm) ἔχομεν σφάλμα, κατὰ μέγιστον, 0,5 cm, δηλ. ἀσήμαντον.**

Ἐὰν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι μὲ τὴν ἰδίαν μονάδα μετρήσεως εὑρέθη ὅτι ὁ δάκτυλος τῆς χειρός του ἔχει μῆκος 8 cm $\pm$ σ cm, **ἔχομεν ἐπὶ μήκους 8 cm (κατὰ προσέγγισιν cm) πάλιν σφάλμα, κατὰ μέγιστον, 0,5 cm, τὸ ὁποῖον ὅμως τώρα εἶναι πολὺ σημαντικόν.**

Ἂς ὑπολογίσωμεν τὸ σφάλμα ἀνὰ μίαν μονάδα: Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀναστήματος εἰς (ὑποθετικὸν) ἀνάστημα 1 cm ἀναλογεῖ σφάλμα $\frac{0,5}{167}$ cm $\simeq$ 0,0029 cm. Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ δακτύλου εἰς (ὑποθετικὸν) μῆκος δακτύλου 1 cm ἀναλογεῖ σφάλμα $\frac{0,5}{8}$ cm $\simeq$ 0,0625 cm.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι **ὅταν εἰς δύο διαφόρους μετρήσεις ὁμοειδῶν μεγεθῶν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα ὑπολογίζομεν τὸ «σφάλμα ἀνὰ μίαν μονάδα», τότε σχηματίζομεν μίαν σαφῆ ἀντίληψιν τοῦ «βαθμοῦ ἀκριβείας» κατὰ τὰς δύο αὐτὰς μετρήσεις.** Διὰ τοῦτο ὁρίζομεν τὴν ἔννοιαν «σχετικὸν σφάλμα μετρήσεως» διὰ μέτρησιν μεγέθους εἰς μονάδας μ ὡς ἑξῆς:

$$\text{Σχετικὸν σφάλμα μετρήσεως} = \frac{\text{μέγιστον δυνατὸν σφάλμα}}{\text{κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ μεγέθους}}.$$

Εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα εἶναι:

Σχετ. σφάλμα μετρήσεως εἰς cm (τοῦ ἀναστήματος) $= \frac{0,5}{167} \simeq 0,0029$ cm.

Σχετ. σφάλμα μετρήσεως εἰς cm (τοῦ δακτύλου) $= \frac{0,5}{8} = 0,0625$ cm.

Δηλαδὴ κατὰ τὴν μέτρησιν τοῦ ἀναστήματος ἔχομεν ἀνὰ ἑκατοστόμετρον σφάλμα (κατὰ μέγιστον) 0,0029 τοῦ cm, ἐνῶ κατὰ τὴν μέτρησιν τοῦ δακτύλου ἔχομεν ἀνὰ ἑκατοστόμετρον σφάλμα (κατὰ μέγιστον) 0,0625 τοῦ mc.

37.2. Ἐννοοῦμεν καλύτερον τὴν ἔννοιαν «σχετικὸν σφάλμα», ὅταν τὸ ἐκφράσωμεν ὡς ποσοστὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατόν :

Ἐπὶ 100 cm ἔχομεν :

Διὰ τὸ ἀνάστημα : σφάλμα $100 \cdot 0{,}0029 = 0{,}29$ cm.

Διὰ τὸν δάκτυλον : σφάλμα $100 \cdot 0{,}0625 = 6{,}25$ cm.

Τώρα ἡ σύγκρισις τῶν δύο μετρήσεων ὡς πρὸς τὸν « βαθμὸν ἀκριβείας » εἶναι εὐκολωτέρα. Εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ἀναστήματος ἔχομεν σφάλμα 0,29 %, ἐνῶ εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ δακτύλου τὸ σφάλμα εἶναι 6,25 %, δηλ. εἶναι σημαντικόν. Ἡ πρώτη λοιπὸν μέτρησις εἶναι **ποιοτικῶς** καλυτέρα.

Ὥστε εἶναι : ἑκατοστιαῖον σφάλμα μετρήσεως = 100 · (σχετικὸν σφάλμα).

Ἀσκήσεις

148) Νὰ εὕρετε τὸ σχετικὸν σφάλμα εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους μετρήσεις :

α) 156 m β) 5,2 m γ) 3980 μίλια δ) 36$\underline{0}$ m

ε) 12,03 m ϛ) 0,005 m ζ) 74$\underline{000}$ μίλια η) 740$\underline{0}$0 μίλια

149) Ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα καὶ ποῖον τὸ ποσοστὸν σφάλματος (ἑκατοστιαῖον σφάλμα) εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους μετρήσεις :

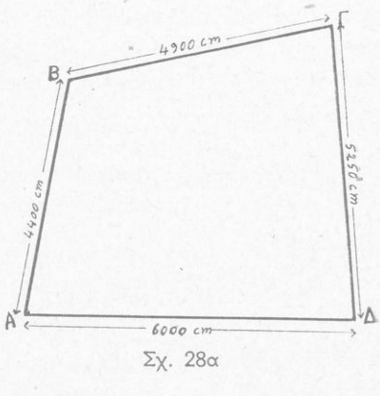
α) 7,2 m β) 0,072 m γ) 980 m δ) 98000 m

150) Νὰ εὕρετε τὸ σχετικὸν σφάλμα εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς ἀκολούθους μετρήσεις :

α) 52,1 m β) 52,10 m γ) 3,68 m δ) 368,0 m

§ 38. Πράξεις μὲ προσεγγιστικοὺς ἀριθμούς.

38.1 Σφάλμα ἀθροίσματος. Τὸ ἀπέναντι Σχ. 28α μᾶς δείχνει ἕνα οἰκόπεδον μὲ προσεγγιστικὰ μήκη τῶν πλευρῶν του : 4400 cm τῆς ΑΒ, 4900 cm τῆς ΒΓ, 5250 cm τῆς ΓΔ, 6000 cm τῆς ΔΑ. Ἀφοῦ ἡ μέτρησις τῶν πλευρῶν ἔγινεν εἰς cm, τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα εἶναι $\frac{1}{2}$ τοῦ cm δι' ἑκάστην πλευράν. Θὰ εἶναι λοιπὸν διὰ τὰ (ἀληθῆ) μήκη τῶν πλευρῶν :



Σχ. 28α

$(\mathrm{AB}) \simeq 4400 \pm \frac{1}{2}$ cm, $(\mathrm{B\Gamma}) \simeq 4900 \simeq \frac{1}{2}$ cm

$(\Gamma\Delta) \simeq 5250 \pm \frac{1}{2}$ cm, $(\Delta\mathrm{A}) \simeq 6000 \pm \frac{1}{2}$ cm, δηλαδὴ εἶναι:

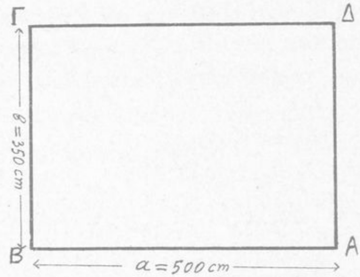
$$(\alpha): \quad \begin{aligned} 4400 - 0{,}5 &\leqslant (\mathrm{AB}) \leqslant 4400 + 0{,}5 \\ 4900 - 0{,}5 &\leqslant (\mathrm{B\Gamma}) \leqslant 4900 + 0{,}5 \\ 5250 - 0{,}5 &\leqslant (\Gamma\Delta) \leqslant 5250 + 0{,}5 \\ 6000 - 0{,}5 &\leqslant (\Delta\mathrm{A}) \leqslant 6000 + 0{,}5. \end{aligned}$$

Ἂν λ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓΔ, δηλ. $\lambda = (\mathrm{AB}) + (\mathrm{B\Gamma}) + (\Gamma\Delta) + (\Delta\mathrm{A})$, τότε, διὰ προσθέσεως τῶν (α) κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$20550 - 2 \leqslant \lambda \leqslant 20550 + 2,$$

δηλαδὴ $\lambda = 20550 \pm 2$ cm· ὥστε τὸ μῆκος **τῆς περιμέτρου εἶναι τὸ πολὺ 20552 cm καὶ τὸ ὀλιγώτερον 20548 cm.** Ὁ ἀριθμὸς 20550 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν προσεγγιστικῶν ἀριθμῶν 4400, 4900, 5250, 6000.

Συμφωνοῦμεν τώρα γενικῶς, νὰ **ὀνομάζωμεν (ἀπόλυτον) μέγιστον δυνατὸν σφάλμα (οἱουδήποτε) ἀθροίσματος προσεγγιστικῶν ἀριθμῶν τὸ ἄθροισμα τῶν μεγίστων δυνατῶν σφαλμάτων τῶν προσθετέων του.** Σύμφωνα μὲ αὐτὸν τὸν ὁρισμὸν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔχομεν **μέγιστον δυνατὸν σφάλμα διὰ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ οἰκοπέδου: $0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 2$ cm.** Δι' αὐτὸ ὁ ἀριθμὸς 20550 cm λέγεται καὶ **προσεγγιστικὴ τιμὴ τοῦ μήκους τῆς περιμέτρου.**



Σχ. 28β

38.2. Σφάλμα διαφορᾶς. Εἰς τὸ ἀπέναντι Σχ. 28β εἶναι:

α = προσεγγ. μῆκος τῆς ΑΒ = 500 cm, β = προσεγγ. μῆκος τῆς ΒΓ = 350 cm, ὥστε διὰ τὰ (ἀληθῆ) μήκη τῶν ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι:

$$(\mathrm{AB}) \simeq 500 \pm 0{,}5 \text{ cm}, \quad (\mathrm{B\Gamma}) \simeq 350 \pm 0{,}5 \text{ cm}$$

Εἶναι λοιπὸν $350 - 0{,}5 \leqslant (\mathrm{B\Gamma}) \leqslant 350 + 0{,}5$, ἑπομένως:

$$-350 - 0{,}5 \leqslant -(\mathrm{B\Gamma}) \leqslant -350 + 0{,}5.$$

Ἐπίσης εἶναι $500 - 0.5 \leqslant (\mathrm{AB}) \leqslant 510 + 0{,}5.$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$150 - 1 \leqslant (\mathrm{AB}) - (\mathrm{B\Gamma}) \leqslant 150 + 1,$$

δηλαδὴ $(\mathrm{AB}) - (\mathrm{B\Gamma}) \simeq 150 \pm 1$ cm.

Ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν αὐτὴν **ὁδηγούμεθα νὰ ὁρίσωμεν ὡς (ἀπόλυτον) μέγιστον δυνατὸν σφάλμα διὰ τὴν διαφορὰν προσεγγιστικῶν ἀριθμῶν τὸ ἄθροισμα τῶν μεγίστων δυνατῶν σφαλμάτων τῶν ὅρων της.** Εἰς τὸ προηγούμενον λοιπὸν παράδειγμα εἶναι : μέγ. δυνατὸν σφάλμα $= 0{,}5 + 0{,}5 = 1$ cm· **ἡ προσεγγιστικὴ τιμὴ τῆς διαφορᾶς : μῆκος πλευρᾶς ΑΒ — μῆκος πλευρᾶς ΒΓ εἶναι 150 cm** ($= \alpha - \beta$).

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸν προηγούμενον ὁρισμὸν διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα διαφορᾶς συμπεραίνομεν ὅτι **ὁ ὁρισμός, ποὺ ἐδόθη εἰς τὸ ἐδ. 38.1, διὰ τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα ἀθροίσματος, εἶναι δυνατὸν νὰ λαμβάνεται ὁ αὐτὸς καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι ὄχι ὅλοι θετικοὶ ἀριθμοί.**

38.3. Μέχρι τώρα οἱ προσθετέοι ἑνὸς ἀθροίσματος εἴτε οἱ ὅροι μιᾶς διαφορᾶς ἐλαμβάνοντο μὲ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν, δηλ. ἦσαν (ὡς δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν) « ἐξ ἴσου ἀκριβεῖς » Π.χ. εἰς τὸ ἐδ. 38.2 τὰ προσεγγιστικὰ μήκη τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐδίδοντο μὲ προσέγγισιν cm ἀμφότερα.

Πολλάκις ὅμως εὑρισκόμεθα εἰς τὴν ἀνάγκην νὰ ὑπολογίσωμεν ἀθροίσματα εἴτε διαφοράς, προσεγγιστικῶν ἀριθμῶν ἀλλὰ χωρὶς ὅλοι νὰ δίδωνται μὲ τὴν αὐτὴν προσέγγισιν (χωρὶς νὰ εἶναι « ἐξ ἴσου ἀκριβεῖς »). Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ἐργαζόμεθα κατὰ τὸν τρόπον, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ ἑξῆς παράδειγμα :

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἑξῆς προσεγγιστικοὺς ἀριθμούς :

$\alpha = 268{,}2$ m	προσέγγισις	dm,	μεγ. δυν. σφάλμα	0,5	dm	$= 0{,}05$ m
$\beta = 13{,}6$ m	»	dm	» » »	1,5	dm	$= 0{,}05$ m
$\gamma = 46{,}382$ m	»	mm	» » »	0,5	mm	$= 0{,}0005$ m
$\delta = 0{,}63$ m	»	cm	» » »	0,5	cm	$= 0{,}005$ m

Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν α, β, γ, δ, δύο εἶναι οἱ « ὀλιγώτερον ἀκριβεῖς »· αὐτοὶ εἶναι οἱ α καὶ β (ὁ γ εἶναι ὁ « περισσότερον ἀκριβὴς » ἀπὸ ὅλους τοὺς ἄλλους).

Ἐργαζόμεθα τώρα, διὰ νὰ ἔχωμεν μίαν ἀκριβεστέραν τιμὴν διὰ τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, ὡς ἑξῆς: **στρογγυλεύομεν τοὺς α, β, γ, δ εἰς τὰ dm** καὶ κατόπιν προσθέτομεν. Δηλαδή, εἰς τὸ παράδειγμά μας, ἔχομεν : $268{,}2 + 13{,}6 + 46{,}4 + 0{,}6 = 328{,}8$ m. Τώρα τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα εἰς κάθε προσθετέον εἶναι $0{,}5$ dm $= 0{,}05$ m. Τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα διὰ τὸ ἄθροισμα εἶναι $4 \cdot 0{,}05 = 0{,}20$ m.

Σημείωσις. Ὁ προηγούμενος τρόπος ἐργασίας μᾶς ὑποβάλλεται ἀπὸ ὡρισμένας σκέψεις, ποὺ δὲν εἶναι σκόπιμος ἡ ἔκθεσίς των εἰς αὐτὴν τὴν τάξιν.

38.4. Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν μὲ « ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν » γινομένων μὲ παράγοντας προσεγγιστικοὺς ἀριθμοὺς εἴτε πηλίκων μὲ ὅρους προσεγγιστικοὺς ἀριθμοὺς τὸ ζήτημα ἐμφανίζεται δυσχερέστερον ἀπὸ ὅ,τι μὲ τὰ ἀθροίσματα καὶ τὰς διαφοράς. Περιοριζόμεθα ἐδῶ εἰς τὸν ἑξῆς **πρακτικὸν κανόνα: Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ γινομένου, μὲ δύο παράγοντας προσεγγιστικοὺς ἀριθμοὺς μὲ δεκαδικὸν μέρος, πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο αὐτοὺς ἀριθμοὺς καὶ στρογγυλεύομεν τὸ γινόμενον, ποὺ προκύπτει, ὥστε νὰ ἔχῃ τόσα (σημαντικὰ) δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχει ὁ παράγων μὲ τὰ ὀλιγώτερα (σημαντικὰ) δεκαδικὰ ψηφία.**

Διὰ τὸν ὑπολογισμὸν πηλίκου ἐργαζόμεθα μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ἀσκήσεις

151) Αἱ διαστάσεις τοῦ δαπέδου τῆς αἰθούσης διδασκαλίας εἶναι: προσσεγιστικὸν μῆκος $\alpha = 830$ cm, προσεγ. πλάτος $\beta = 420$ cm. Νὰ εὕρετε τὸ μέγιστον δυνατὸν σφάλμα εἰς τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου. Ἐπίσης νὰ εὕρετε τὸ σχετικὸν σφάλμα καὶ τὸ ἑκατοστιαῖον.

152) Νὰ πολλαπλασιάσετε τοὺς ἑπομένους προσεγγιστικοὺς ἀριθμούς:
α) $3{,}6 \cdot 46{,}73$ β) $3{,}76 \cdot 2{,}9 \cdot 10^4$ γ) $2{,}67 \cdot 1{,}758$

153) Νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου τὸ προσεγ. πλάτος εἶναι 38,9 m καὶ τὸ προσεγγιστ. μῆκος εἶναι 128,35 m.

154) Νὰ κάμετε τὰς ἀκολούθους διαιρέσεις προσεγγιστικῶν ἀριθμῶν:
α) $3{,}632 : 83$ β) $3{,}14 \cdot 10^4 : 9{,}006$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

§ 39. Ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ. Ἐφαρμογαὶ

39.1. Ἔχομεν ἤδη συναντήσει τὰς ἐξισώσεις :

$$x+\beta=\alpha,\ x-\beta=\alpha,\ \beta-x=\alpha,\ \alpha x=\beta,\ \alpha x+\beta=\gamma$$

καὶ ἐμάθαμεν πῶς ἐπιλύονται. Ὅλαι αἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ὑπάγονται εἰς τὴν γενικὴν μορφὴν

$$\alpha x+\beta=0 \quad (\alpha\in\Sigma,\ \beta\in\Sigma)$$

ποὺ λέγεται **ἐξίσωσις α΄ βαθμοῦ,** ἐπειδὴ ὁ ἄγνωστος x ἐμφανίζεται μὲ τὴν πρώτην δύναμίν του ($x=x^1$).

Κάθε ἐξίσωσις ἐκφράζει ἕνα πρόβλημα· π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\alpha x+\beta=0$ ἐκφράζει τὸ πρόβλημα :

Δίδονται οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται σχετικὸς ἀριθμὸς χ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τοῦ β σὺν τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸν x νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν 0.

Κάθε σχετικὸς ἀριθμός, πού, ἂν τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ χ μιᾶς ἐξισώσεως ὡς αἱ ἀνωτέρω, δίδει εἰς τὸ πρῶτον μέλος ὡς ἀριθμητικὴν τιμὴν τὸ δεύτερον μέλος της, λέγεται : **μία λύσις τῆς ἐξισώσεως.**

Μία ἐξίσωσις ὡς αἱ ἀνωτέρω εἶναι ἐνδεχόμενον 1) νὰ μὴ ἔχῃ καμμίαν λύσιν 2) νὰ ἔχῃ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν ὡς λύσιν της καὶ 3) νὰ ἔχῃ μόνον μίαν λύσιν, καθὼς φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα :

Παράδειγμα 1. Ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x+5=0$ δὲν ἔχει (κάποιαν) λύσιν· διότι, μὲ ὁποιονδήποτε σχετικὸν ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικατασταθῇ ὁ x, ἡ παράστασις $0 \cdot \chi+5$ θὰ ἔχῃ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 5, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι 0 καὶ ὄχι 5.

Παράδειγμα 2. Ἡ ἐξίσωσις $0\cdot x=0$ ἔχει ὡς λύσιν της κάθε σχετικὸν ἀριθμόν· διότι, μὲ ὁποιονδήποτε σχετικὸν ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικατασταθῇ ὁ x, ἡ παράστασις $0 \cdot x$ θὰ ἔχῃ τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν 0.

Παράδειγμα 3. Ἡ ἐξίσωσις $-2x+16=0$ ἔχει μόνον μίαν λύσιν, τὴν $x=8$. Πράγματι εἶναι : $-2\cdot 8+16=-16+16=0$.

Ἄλλη λύσις δὲν ὑπάρχει. Πράγματι· ἂν ὑπῆρχε μία ἄλλη λύσις, ἔστω ἡ $x=\alpha\neq 8$, τότε θὰ ἴσχυαν :

$$(-2 \cdot 8 + 16 = 0 \quad \text{καὶ} \quad -2 \cdot \alpha + 16 = 0) \Longrightarrow$$
$$-2 \cdot 8 + 16 = -2 \cdot \alpha + 16 \qquad (\text{διατί ;}) \Longrightarrow$$
$$-2 \cdot 8 = -2 \cdot \alpha \qquad (\text{διατί ;}) \Longrightarrow$$
$$8 = \alpha \qquad (\text{διατί ;})$$

Ὑπεθέσαμεν ὅμως ὅτι εἶναι $\alpha \neq 8$ καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $\alpha \neq 8$ καὶ (συγχρόνως) $\alpha = 8$. Ἄρα δὲν ὑπάρχει ἄλλη λύσις πλὴν τῆς $x = 8$.

Πῶς θὰ ἐργασθῶμεν διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν ὡς ἡ $\alpha x + \beta = 0$;

Παρατηροῦμεν ὅτι ἔχομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις :

1η περίπτωσις : $\alpha \neq 0$

Τότε εἶναι εὔκολον νὰ ἀντιληφθῶμεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία :

$$\alpha x + \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha x = -\beta$$

καί, ὅπως γνωρίζομεν, εἶναι :

$$\alpha x = -\beta \Longleftrightarrow x = \frac{-\beta}{\alpha}$$

Ὥστε, **ἂν $\alpha \neq 0$, τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ ἔχει τὴν λύσιν $x = \frac{-\beta}{\alpha}$ καὶ μόνον αὐτήν.**

2α περίπτωσις : $\alpha = 0$

Ἡ ἐξίσωσίς μας εἶναι τώρα :

$$0 \cdot x + \beta = 0$$

Ἂν λοιπὸν $\beta \neq 0$, τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν. Ἂν δὲ $\beta = 0$, τότε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $0 \cdot x = 0$ καί, ὅπως γνωρίζομεν, κάθε σχετικὸς ἀριθμὸς εἶναι λύσις αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως.

39.2. Δύο ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον λέγονται **ἰσοδύναμοι,** ἂν κάθε λύσις μιᾶς οἱασδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι λύσις καὶ τῆς ἄλλης.

Ἔτσι, π.χ., αἱ ἐξισώσεις $2x - 6 = 0$ καὶ $2x + 4 = 10$ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι καὶ αἱ δύο ἔχουν ὡς μόνην λύσιν τὸν ἀριθμόν 3.

Εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστώσωμεν ὅτι ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

1) Ἂν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐκτελέσωμεν βασικὰς πράξεις, ἐφαρμόζοντες γνωστὰς ἰδιότητας τῶν πράξεων αὐτῶν, θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἀρχικήν. Π.χ.

$$2 \cdot (3x - 5) = x + 15 \Longleftrightarrow 6x - 10 = x + 15$$

διότι, συμφώνως μὲ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν, εἶναι : $2 \cdot (3x - 5) = 6x - 10$, ὁποιοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς x.

2) Συμφώνως πρὸς τὴν μονότονον ἰδιότητα τῆς ἰσότητος εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἐὰν εἰς τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν σχετικὸν ἀριθμόν, θὰ λάβωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον. Π.χ. προσθέτοντες εἰς τὰ μέλη τῆς $6x - 10 = x + 15$ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $+10$ θὰ ἔχωμεν :

$$6x - 10 = x + 15 \Longleftrightarrow 6x - 10 + 10 = x + 15 + 10 \Longleftrightarrow 6x = x + 15 + 10.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὅρος -10 τοῦ ἀριστεροῦ μέλους τῆς ἐξισώσεως **μετεφέρθη** κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἰς τὸ δεξιόν, ἀφοῦ ἤλλαξε πρόσημον. Ἠμποροῦμεν ὁμοίως νὰ **μεταφέρωμεν** τὸν x ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος τῆς $6x = x + 15 + 10$ εἰς τὸ πρῶτον, ἀλλάσσοντες τὸ πρόσημον του· ἔτσι θὰ ἔχωμεν :

$$6x = x + 15 + 10 \iff 6x - x = 15 + 10.$$

Ἐπειδή, συμφώνως πάλιν πρὸς τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα, εἶναι $6x - x = 6 \cdot x - 1 \cdot x = (6 - 1) \cdot x = 5x$, θὰ ἔχωμεν :

$$6x - x = 15 + 10 \iff 5x = 25$$

Σημ. Οἱ ὅροι 6x καὶ $-x$ λέγονται **ὅμοιοι ὅροι** καὶ ἡ ἀντικατάστασις τοῦ ἀθροίσματός των μὲ 5x λέγεται **ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων.**

3) Συμφώνως μὲ γνωστήν μας ἰδιότητα δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν (ἢ πολλαπλασιάσωμεν) τὰ μέλη μιᾶς ἐξισώσεως μὲ τὸν αὐτὸν (διάφορον τοῦ 0) σχετικὸν ἀριθμόν :

$$5x = 25 \iff \frac{5x}{5} = \frac{25}{5} \iff x = 5$$

δηλ. ἡ λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς 5.

Συμβολικῶς μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τῶν συνόλων γράφομεν :

$$\{ x \mid 2 \cdot (3x - 5) = x + 15 \} = \{ 5 \}.$$

Ἰδοὺ μερικὰ ἀκόμη παραδείγματα ἐφαρμογῆς τῶν ἀνωτέρω :

Παράδειγμα 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$.

Ἔχομεν: $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \iff -\frac{2}{3}x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$. Εἶναι ὅμως $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$. Ὥστε εἶναι : $-\frac{2}{3}x = -\frac{3}{4}$ καί, ὅπως γνωρίζομεν, $-\frac{2}{3}x = -\frac{3}{4} \iff x = -\frac{3}{4} : -\frac{2}{3} = +\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$.

Δηλ. ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν (μόνον) λύσιν τὴν $x = \frac{9}{8}$.

Παρατήρησις. Ἂν τὰ μέλη τῆς $-\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 3, 4, 2, δηλ. ἐπὶ 12, τότε προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $12 \cdot \left(-\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 12$, δηλ. ἡ ἐξίσωσις $-8x + 3 = -6$, ποὺ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $-8x = -9$. Ἀλλὰ $-8x = -9 \iff x = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}$. Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μελῶν τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων της τὴν μετέτρεψεν εἰς ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον χωρὶς παρονομαστάς. Ἡ ἐξάλειψις τῶν παρονομαστῶν εἶναι πρακτικῶς πολὺ χρήσιμος καὶ θὰ τὴν χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὰ ἑπόμενα.

Παράδειγμα 2ον. Πρόβλημα : Νὰ εὑρεθῆ σχετικὸς ἀριθμὸς μὲ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα : τὸ διπλάσιόν του σὺν 3 νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κατὰ 1 μικροτέρου του.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: ἂν ὑπῆρχε κάποια λύσις τοῦ προβλήματος καὶ ἦτο ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς x, τότε θὰ ἔπρεπε νὰ ἰσχύῃ :

$$(1) \qquad 2 \cdot x + 3 = \frac{x-1}{3}$$

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν μετετράπη εἰς τὸ ἑξῆς: **ὑπάρχει σχετικὸς ἀριθμὸς x, ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) νὰ γίνεται ἀληθὴς ἀριθμητικὴ ἰσότης;**

Ἐπιλύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1). **Ἐξαλείφομεν τὸν παρονομαστήν:** Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ 3 εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον τῆς (1) ἐξίσωσιν :

$$2x+3=\frac{x-1}{3} \iff 3 \cdot (2x+3)=\frac{3 \cdot (x-1)}{3} \iff 3 \cdot (2x+3)=x-1.$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις :

$$3 \cdot (2x+3)=x-1 \iff 6x+9=x-1$$

Χωρίζομεν τοὺς ὅρους, ποὺ ἔχουν τὸν ἄγνωστον x, ἀπὸ τοὺς ἄλλους μεταφέροντες αὐτοὺς εἰς τὸ ἕνα μέλος :

$$6x+9=x-1 \iff 6x-x=-1-9.$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων :

$$6x-x=-1-9 \iff 5x=-10$$

Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς $5x=-10$ μὲ τὸν 5 :

$$5x=-10 \iff \frac{5x}{5}=\frac{-10}{5} \iff x=-2.$$

Ὥστε τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν (μόνον) λύσιν, τὴν $x=-2$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}=x-\frac{1}{2}$.

Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν της, τὸ 12.

$$\frac{2x-1}{3}+\frac{3x+1}{4}=x-\frac{1}{2} \iff 4 \cdot (2x-1)+3 \cdot (3x+1)=12 \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις :

$$4 \cdot (2x-1)+3 \cdot (3x+1)=12 \cdot \left(x-\frac{1}{2}\right) \iff 8x-4+9x+3=12x-6$$

Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ἀγνώστους :

$$8x-4+9x+3=12x-6 \Longleftrightarrow 8x+9x-12x=-6+4-3$$

Κάμνομεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων :

$$8x+9x-12x=-6+4-3 \Longleftrightarrow 5x=-5$$

Διαιροῦμεν τὰ μέλη διὰ 5 :

$$5x=-5 \Longleftrightarrow \frac{5x}{5}=\frac{-5}{5} \Longleftrightarrow x=-1$$

Ὥστε ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς -1.

Ἐπαλήθευσις : $\frac{-2-1}{3}+\frac{-3+1}{4} \overset{;}{=} -1-\frac{1}{2}$

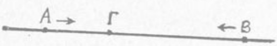
$$\frac{-3}{3}+\frac{-2}{4} \overset{;}{=} -1-\frac{1}{2}$$

$$\frac{-12}{12}+\frac{-6}{12} \overset{;}{=} \frac{-2}{2}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{-18}{12} \overset{;}{=} \frac{-3}{2}$$

$\frac{-3}{2} \overset{\surd}{=} \frac{-3}{2}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθὴς ἀριθμητικὴ ἰσότης.

Παράδειγμα 4ον. Πρόβλημα : Ἀπὸ δύο πόλεις Α καὶ Β (βλέπε σχῆμα), ποὺ συνδέονται μὲ ἕνα εὐθύγραμμον δρόμον, ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο αὐτοκίνητα καὶ κινοῦνται ἐπὶ τοῦ δρόμου ΑΒ, ὅπως δεικνύουν τὰ βέλη.



Τὸ αὐτοκίνητον ποὺ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν πόλιν Α διανύει 90 χιλιόμετρα τὴν ὥραν, τὸ δὲ ἄλλο 110 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Ἂν τὸ μῆκος τοῦ δρόμου εἶναι 400 χιλιόμετρα, μετὰ πόσας ὥρας ἀπὸ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεώς των θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο αὐτοκίνητα ;

Λύσις : Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ x ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των. Τότε αὐτό, ποὺ ἀνεχώρησε ἀπὸ τὴν πόλιν Α, θὰ ἔχῃ διανύσει $90 \cdot x$ χιλιόμετρα καὶ θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ σημεῖον (ἔστω) Γ. Εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον τὸ ἄλλο αὐτοκίνητον θὰ εὑρίσκεται ἐπίσης εἰς τὸ Γ, ἀφοῦ, ὅπως εἴπαμεν, θὰ συναντηθοῦν καὶ θὰ ἔχῃ διανύσει $110 \cdot x$ χιλιόμετρα. Ὥστε θὰ εἶναι :

$$90\,x+110\,x=400$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἐπιλυομένη δίδει $\chi=2$ (ὥρας), ἀριθμὸν δηλ. ὁ ὁποῖος εἶναι δεκτὸς ὡς λύσις τοῦ προβλήματός μας.

Ἀσκήσεις

155) Νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

α) $-3x+15=0$ β) $3x-15=0$ γ) $2x-5=45$

δ) $3\cdot(2x-1)+4\cdot(2x-3)=13$ ε) $7x-3\cdot(2x-5)=20$

ϛ) $6\cdot(x+5)-5x=25$ ζ) $60x+1=3\cdot(3+4x)$

η) $(5-x)\cdot(x+4)=8-x^2$ θ) $(x-3)^2-5\cdot(10+x)=x^2-8$

156) Νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

α) $18x-6\cdot(3x+1)=8x-5\cdot(x-3)$

β) $\frac{x}{4}-5=\frac{x}{3}-\frac{x}{8}$ γ) $\frac{3y}{5}+\frac{5}{2}=-\frac{y}{5}-\frac{3}{2}$

δ) $\frac{x+11}{6}+1=\frac{10-x}{3}$ ε) $\frac{3-x}{2}=\frac{-6-5x}{7}$

ϛ) $\frac{3\varphi+5}{2}-\frac{3\varphi+1}{4}=3$ ζ) $\frac{5x-9}{8}-\frac{3x-12}{4}=0$

η) $2x-\frac{2x}{9}=\frac{16x}{9}-\frac{1}{6}$ θ) $\frac{3x}{2}-\frac{2x}{3}=5\cdot\left(\frac{x}{6}+1\right)-5$

157) Νὰ ἐπιλύσετε καὶ ἐπαληθεύσετε τὰς ἐξισώσεις:

α) $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}=\frac{5x-36}{4}+1$ β) $\frac{x+1}{2}-\frac{6x+7}{8}=\frac{4-3x}{5}-\frac{1}{8}$

γ) $\frac{5x-1}{7}-\frac{9x-7}{5}+\frac{9x-5}{11}=0$ δ) $x-\frac{x}{33}-\frac{2x-30}{9}=\frac{12}{11}$

Προβλήματα πρὸς λύσιν

158) Τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ σὺν 40 κάμνουν 100. Νὰ εὕρετε τὸν ἀριθμόν.

159) Ἀπὸ ἕνα φορτίον πορτοκάλια ἐπωλήθη τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ φορτίου, ἐσάπισε τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ φορτίου καὶ ἀπέμειναν 370 πορτοκάλια. Πόσα πορτοκάλια εἶχε ὁλόκληρον τὸ φορτίον;

160) Κάποιος εἶχε πορτοκάλια καὶ ἐπώλησε τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτῶν. Ἠγόρασεν ἔπειτα 10 πορτοκάλια καὶ εἶχεν ἔτσι 5 ὀλιγώτερα τῶν ὅσων εἶχεν ἐξ ἀρχῆς. Πόσα πορτοκάλια εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

161) Ἕνας πατέρας εἶναι 40 ἐτῶν. Μετὰ δύο ἔτη ἡ ἡλικία του θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας, ποὺ θὰ ἔχῃ τότε ὁ υἱός του. Ποία εἶναι τώρα ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ;

162) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὰ $\frac{5}{6}$ του κατὰ 100;

163) Τὸ τετραπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ πλὴν 7 ἰσοῦται μὲ 53. Νὰ εὕρετε τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.

164) Ἐξώδευσα τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων, ποὺ εἶχα, διὰ νὰ ἀγοράσω τετράδια καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν χρημάτων διὰ γλυκὰ καὶ ἔτσι μοῦ ἔμειναν 14 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχα ;

165) Νὰ χωρίσετε τὸν ἀριθμὸν 200 εἰς δύο μέρη, ὥστε, ἐὰν διαιρεθῇ τὸ πρῶτον μέρος διὰ 16 καὶ τὸ δεύτερον διὰ 10, τὰ πηλίκα νὰ διαφέρουν κατὰ 6.

166) Δύο σιδηρόδρομοι ἀναχωροῦν συγχρόνως, ὁ ἕνας ἀπὸ τὴν πόλιν Α καὶ ὁ ἄλλος ἀπὸ τὴν πόλιν Β καὶ κινοῦνται ἐπὶ τῆς μεταξὺ τῶν δύο πόλεων σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Ὁ πρῶτος διανύει 54 χιλιόμετρα τὴν ὥραν καὶ ὁ δεύτερος 36. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις (ΑΒ) εἶναι 144 χιλιόμετρα, νὰ εὕρετε εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν πόλιν Α θὰ συναντηθοῦν οἱ σιδηρόδρομοι.

167) Ἡ διαφορὰ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι 495. Ὁ μεγαλύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ μικροτέρου δίδει πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 60. Νὰ εὕρετε τοὺς ἀριθμούς.

169) Ἡ διαφορὰ δύο σχετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι 15. Τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μεγαλυτέρου εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ μικροτέρου. Νὰ εὕρετε τοὺς ἀριθμούς.

169) Ἕνα ὀρθογώνιον εἶναι σχηματισμένον ἀπὸ τρία τετράγωνα, τοποθετημένα τὸ ἕνα παραπλεύρως τοῦ ἄλλου. Ἐὰν ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 72 cm, νὰ εὕρετε τὸ ἐμβαδόν του.

§ 40. Ἀνισώσεις πρώτου βαθμοῦ

40.1. Ἂς λάβωμεν τὴν παράστασιν $3x-5$, ὅπου x εἶναι κάποιος σχετικὸς ἀριθμός. Ἂν ἀντὶ τοῦ x θέσωμεν $\frac{5}{2}$, τότε ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $3x-5$ εἶναι ὁ 0. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα γνωρίζομεν ὅτι μόνον διὰ $x=\frac{5}{2}$ ἰσχύει $3x-5=0$. Ἑπομένως, ἂν εἶναι $x \neq \frac{5}{2}$, θὰ εἶναι $3x-5 \neq 0$.

Ἂς θέσωμεν τώρα εἰς τὴν ἰδίαν παράστασιν ἀντὶ x 1ον τὸν 4 καὶ 2ον τὸν $\frac{1}{2}$: Εὑρίσκομεν 1ον $3 \cdot 4-5=12-5=7$, δηλ. ἀριθμὸν θετικὸν (>0) καὶ 2ον $3 \cdot \frac{1}{2}-5=\frac{3}{2}-5=\frac{3}{2}-\frac{10}{2}=-\frac{7}{2}$, δηλ. ἀριθμὸν ἀρνητικὸν (< 0). Ὥστε ἄλλαι τιμαὶ τοῦ x $\left(\neq \frac{5}{2}\right)$ δίδουν τιμὴν θετικὴν (> 0) εἰς τὴν παράστασιν $3x - 5$ καὶ ἄλλαι ἀρνητικὴν (< 0).

Τίθεται λοιπὸν τὸ πρόβλημα :

Νὰ ὁρισθῇ ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς x, ὥστε νὰ εἶναι :

$$\textbf{1ον} \quad 3x - 5 > 0 \quad \textit{καὶ} \quad \textbf{2ον} \quad 3x - 5 < 0$$

Καθεμία ἀπὸ τὰς παραστάσεις $3x - 5 > 0$ καὶ $3x - 5 < 0$ λέγεται : **μία ἀνίσωσις πρώτου βαθμοῦ.** Μὲ τὸν ὅρον αὐτὸν ἐννοοῦμεν γενικῶς κάθε παράστασιν τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta > 0$ εἴτε $\alpha x + \beta < 0$, ὅπου α, β γνωστοὶ σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ x ἄγνωστος σχετικὸς ἀριθμὸς (ποὺ πρέπει νὰ ὁρισθῇ).

Ἡ φράσις « νὰ λυθῇ (ἢ νὰ ἐπιλυθῇ) ἡ ἀνίσωσις . . . » σημαίνει « νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ ἀγνώστου, διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἀνίσωσις . . . γίνεται ἀληθὴς (ἀριθμητικὴ) ἀνισότης ».

40.2. Μία ἀνίσωσις πρώτου βαθμοῦ ἐπιλύεται, ὅπως φαίνεται εἰς τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα :

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις : $3x - 5 > 0$.

Σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : ἂν ὑπῆρχε κάποιος σχετικὸς ἀριθμὸς x′ μὲ τὴν ἰδιότητα : $3x' - 5 > 0$ (ἄν, ὅπως λέγομεν, ὁ x′ ἐπηλήθευε τὴν ἀνίσωσιν), τότε αὐτὸς ὁ x′ θὰ εἶχε καὶ τὴν ἰδιότητα : $3x' > 5$ (ἐπροσθέσαμεν εἰς τὰ μέλη τὸν 5) καὶ ἀντιστρόφως. Δηλ. αἱ ἀνισότητες $3x' - 5 > 0$ καὶ $3x' > 5$ θὰ ἦσαν, ὅπως λέγομεν, **ἰσοδύναμοι.** Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ ἀνισότης $3x' > 5$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x' > \frac{3}{5}$ (ἐδιαιρέσαμεν τὰ μέλη τῆς $3x' > 5$ μὲ τὸν **θετικὸν 3**).

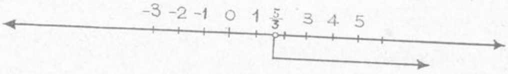
Ὥστε ἡ ἀρχικὴ ἀνίσωσις ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν x μὲ $x > \frac{5}{3}$ καὶ μόνον.

Μὲ τοὺς συμβολισμοὺς τῶν συνόλων γράφομεν :

$$\{x \mid 3x - 5 > 0\} = \{x \mid x > \frac{5}{3}\}.$$

Αὐτὸ τὸ συμβολίζομεν σχηματικῶς ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, σημειώνομεν ζωηρῶς τὸ σημεῖον $\frac{5}{3}$



Σχ. 29

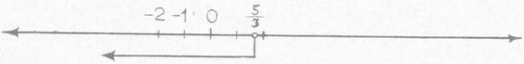
καὶ θέτομεν ὑποκάτω τῶν τιμῶν διὰ τὰς ὁποίας ἐπαληθεύεται ἡ ἀνίσωσις ἕνα βέλος, ὅπως βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 29.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις: $3x - 5 < 0$.

Μὲ ὁμοίους, ὅπως προηγουμένως συλλογισμοὺς εὑρίσκομεν :

$$3x - 5 < 0 \iff 3x < 5 \iff x < \frac{5}{3}.$$

Δηλ. ἡ δοθεῖσα ἀνίσωσις ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν x μὲ $x < \frac{5}{3}$ καὶ μόνον.



Σχ. 30

Σχηματικῶς τὸ συμπέρασμα παριστάνεται εἰς τὸ Σχ. 30.

Παρατήρησις. Ἐπειδὴ μᾶς ἦτο ἤδη γνωστὸν ὅτι :

1ον εἶναι $3x - 5 = 0$ μόνον διὰ $x = \frac{5}{3}$

2ον εἶναι $3x - 5 > 0$ μόνον δια $x > \frac{5}{3}$

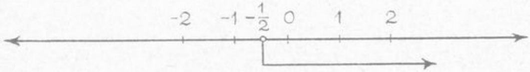
ἠμπορούσαμεν ἀμέσως νὰ συμπεράνωμεν ὅτι ἡ ἀνίσωσις $3x - 5 < 0$ ἐπαληθεύεται μόνον διὰ $x < \frac{5}{3}$.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις: $-4x + 3 < 5$.

Μὲ ὁμοίους, ὡς ἀνωτέρω, συλλογισμοὺς εὑρίσκομεν :

$$-4x + 3 < 5 \iff -4x < 2 \iff 4x > -2(*) \iff x > -\frac{1}{2}$$

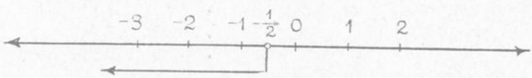
Σχηματικῶς τὸ συμπέρασμα παριστάνεται εἰς τὸ Σχ. 31.



Σχ. 31

Παράδειγμα 4ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνίσωσις $-4x + 3 > 5$.

Μὲ ὁμοίαν ἐργασίαν καταλήγομεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ποὺ ἐκφράζεται εἰς τὸ Σχ. 32.



Σχ. 32

40.3. Γενικαὶ παρατηρήσεις :

1η. Μία ἀνίσωσις εἶναι ἐνδεχόμενον νὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν εἴτε νὰ μὴ ὑπάρχῃ κάποιος σχετικὸς ἀριθμός, ποὺ νὰ τὴν ἐπαληθεύῃ.

Παράδειγμα 1ον. Ἡ ἀνίσωσις $0 \cdot x + 10 > 0$ ἐπαληθεύεται ἀπὸ κάθε σχετικὸν ἀριθμὸν (διατί ;).

(*) Γνωρίζομεν ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μελῶν ἀνισότητος ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρνητικὸν ἀλλάζει τὴν φοράν της.

Παράδειγμα 2ον. Τὴν ἀνίσωσιν $0 \cdot x - 8 > 0$ οὐδεὶς σχετικὸς ἀριθμὸς τὴν ἐπαληθεύει (διατί ;).

2α. Διὰ τὰς ἀνισώσεις ἰσχύει ἰδιότης ἀνάλογος μὲ τὴν ἰδιότητα, ποὺ συνηντήσαμεν εἰς τὰς ἐξισώσεις. Ἔτσι, π.χ. ἡ ἀνίσωσις $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἐκείνην ποὺ προκύπτει ἀπὸ αὐτήν, ἂν τὰ μέλη της πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 3, 2, 7, δηλ. ἐπὶ τὸν 42. Ἔχομεν λοιπὸν τότε, ἀντὶ τῆς $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$, τὴν **ἰσοδύναμόν της** $42 \cdot \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) < 42 \cdot \frac{5}{7}$, δηλαδὴ τὴν $-14x + 21 < 30$, τὴν ὁποίαν ἐπιλύομεν εὐκόλως.

Ἐπίσης **ἡ ἀνίσωσις** $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$ **εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἐκείνην, ποὺ προκύπτει ἀπὸ αὐτήν, ἂν τὰ μέλη της πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν**, δηλ. ἐπὶ τὸν -42. Ἔχομεν λοιπὸν τότε, ἀντὶ τῆς $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} < \frac{5}{7}$, τὴν ἰσοδύναμόν της :

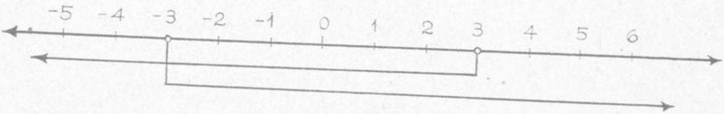
$$-42 \cdot \left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right) > -42 \cdot \frac{5}{7}, \text{ δηλ. τὴν } 14x - 21 > -30.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ προηγουμένη ἰδιότης ἔχει ἀξιόλογον πρακτικὴν σημασίαν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀνισώσεων.

Ἐφαρμογὴ 1η. Νὰ εὕρετε τὸ σύνολον $A \cap B$, ἐὰν εἶναι :

$A = \{x \mid x$ ἀκέραιος και $x < 3\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ ἀκέραιος καὶ $x > -3\}$.

Λύσις. Ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν σημειώνομεν ζωηρῶς τὰ σημεῖα, δηλαδὴ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α καὶ



Σχ. 33

ὑπογραμμίζομεν μὲ βέλος (Σχ. 33). Ὁμοίως μὲ ἕνα ἄλλο βέλος ὑπογραμμίζομεν τὰ σημεῖα, δηλ. τοὺς ἀριθμούς, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β.

Ὅπως βλέπομεν εἰς τὸ Σχ. 33 εἶναι :

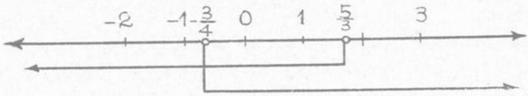
$$A = \{2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots\}$$
$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$
$$A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι $A \cap B$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας **συναληθεύουν** αἱ ἀνισώσεις :

$x < 3$ καὶ $x > -3$ καὶ x ἀκέραιος σχετικὸς ἀριθμός.

Ὥστε $A \cap B = \{ x | x$ σχετικὸς ἀκέραιος καὶ $-3 < x < 3 \}$.

Ἐφαρμογὴ 2α. Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $A = \{ x \mid 3x - 5 < 0 \}$, $B = \{ x \mid 4x + 3 > 0 \}$. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σύνολον $A \cap B$, δηλ. νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις $4x + 3 > 0$ καὶ $3x - 5 < 0$.



Σχ. 34

Λύσις. Ἔχομεν $A = \{ x \mid 3x - 5 < 0 \} = \{ x \mid 3x < 5 \} = \{ x \mid x < \frac{5}{3} \}$.

Ἐπίσης $B = \{ x \mid 4x + 3 > 0 \} = \{ x \mid 4x > -3 \} = \{ x \mid x > -\frac{3}{4} \}$.

Ὅπως εἶναι φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος 34 εἶναι:

$$A \cap B = \{ x \,/\, x \text{ σχετικὸς ἀριθμὸς καὶ } -\frac{3}{4} < x < \frac{5}{3} \}.$$

Μὲ ἄλλας λέξεις αἱ ἀνισώσεις $3x - 5 < 0$ καὶ $4x + 3 > 0$ συναληθεύουν διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, ποὺ περιέχονται μεταξὺ $-\frac{3}{4}$ καὶ $+\frac{5}{3}$.

Ἀσκήσεις

170) Νὰ ἐπιλύσετε τὰς ἀκολούθους ἀνισώσεις:

α) $3x - 5 < 13 - 3x$ β) $7 - 5x > 19 - 13x$

γ) $-2x + 3 \leqslant -4x - 5$ δ) $-3x + 2 \geqslant -4x - 5$

ε) $3x - \frac{2}{5} < 5x + \frac{3}{5}$ ϛ) $\frac{3}{2}x + 3 > x - 2$

171) Ἐὰν $A = \{ x \mid 4x - 2 > 5x + 3 \}$, $B = \{ x \mid x - 2 \leqslant 10 + \frac{x}{2} \}$, $\Gamma = \{ x \mid \frac{9}{7}x + 2 < \frac{2}{7}x + 5 \}$, $\Delta = \{ x \mid \frac{x}{5} - 3 \geqslant 17 \}$

Νὰ εὕρετε τὰ σύνολα $A \cap B$ καὶ $\Gamma \cap \Delta$.

172) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισώσεις:

α) $4 \cdot (5 + x) > 5 \cdot (x + 3)$

β) $\frac{3x - 1}{5} - \frac{13}{2} \geqslant \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}$

173) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ x συναληθεύουν αἱ ἀνισώσεις:

α) $5 \cdot (20 - x) > 3x + 68$ καὶ $3 \cdot (x - 7) < 4 \cdot (5x - 1)$;

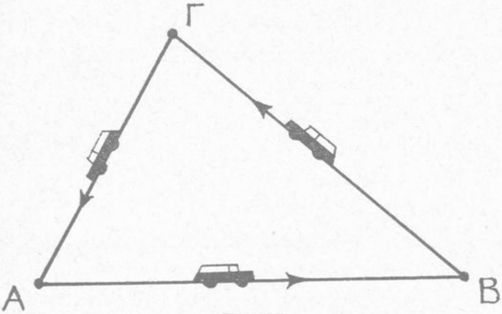
β) $\frac{2x - 7}{4} - \frac{x + 1}{9} > \frac{x - 5}{2}$ καὶ $\frac{3x - 14}{12} + \frac{3x - 2}{4} > \frac{2x - 2}{3}$;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

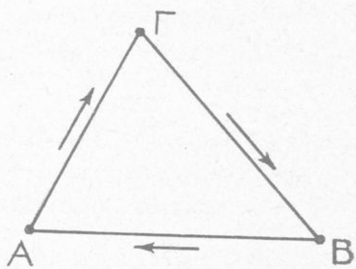
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΕΠΙ ΑΞΟΝΟΣ

§ 41. Εἰσαγωγὴ

Εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα 35 τὰ σημεῖα Α, Β, Γ παριστάνουν τρεῖς πόλεις. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ παριστάνουν τοὺς δρόμους, ποὺ συνδέουν μεταξύ των τὰς πόλεις Α, Β, Γ. Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν τριῶν πόλεων ἔχει συμφωνηθῇ ἡ συγκοινωνία νὰ γίνεται ἔτσι, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα. Ἔτσι ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς τρεῖς δρόμους, ποὺ συνδέουν τὰς πόλεις Α, Β, Γ, **διανύεται** (διατρέχεται) **πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν**



Σχ. 35



Σχ 36

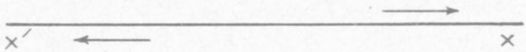
φορὰν (αὐτήν, ποὺ βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα). Ἂν λοιπὸν σκεφθῶμεν πρὸς στιγμὴν ἕνα ὁποιονδήποτε ἀπὸ τοὺς τρεῖς δρόμους τοῦ σχήματός μας, π.χ. αὐτόν, ποὺ ἔχει ἄκρα του τὰ Α, Β, τότε — **χωρὶς νὰ τὸ θέλωμεν — σκεπτόμεθα συγχρόνως καὶ τὴν φοράν, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ δρόμος αὐτὸς διανύεται.** Ἠμποροῦμεν ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι ἀπὸ τὰ δύο σημεῖα Α, Β τοῦ προηγουμένου δρόμου **πρῶτον σκεπτόμεθα τὸ Α καὶ κατόπιν τὸ Β**, δηλαδὴ τὸ Α τὸ σκεπτόμεθα ὡς « **ἀρχὴν** » τοῦ δρόμου καὶ τὸ Β ὡς « **πέρας** » του.

Ὁμοίας σκέψεις καὶ παρατηρήσεις θὰ ἐκάμναμεν ἂν εἶχε συμφωνηθῇ ἡ συγκοινωνία νὰ γίνεται ἔτσι, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ Σχ. 36.

Ἀπὸ τὸ προηγούμενον παράδειγμα συμπεραίνομεν ὅτι ὑπάρχουν περιπτώσεις, ποὺ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ τὸ σκεπτώμεθα (νὰ τὸ θεωροῦμεν) μαζὺ μὲ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς δύο φοράς, κατὰ τὰς ὁποίας δύναται νὰ διανυθῆ ἀπὸ ἕνα κινητὸν σημεῖον. Ἔτσι εἰς τὴν Φυσικὴν ἔχομεν μεγέθη, ὅπως π.χ. αἱ « **δυνάμεις** », ποὺ παριστάνονται ὡς « **εὐθύγραμμα τμήματα μὲ φοράν** ».

§ 42. Εὐθεῖα προσανατολισμένη

Ἔστω μία τυχοῦσα εὐθεῖα $x'x$ (σχ. 37) ἕνα σημεῖον της δύναται νὰ τὴν διαγράψη κινούμενον ἐπ' αὐτῆς κατὰ δύο « φοράς », δηλ. κινούμενον εἴτε ἀπὸ τὸ x' πρὸς τὸ x εἴτε ἀπὸ τὸ x πρὸς τὸ x'.



Σχ. 37

Σχ. 38

Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὴν μίαν φορὰν (κινήσεως ἐπὶ) μιᾶς εὐθείας ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὀνομάζομεν τὴν μίαν, ἀδιάφορον ποίαν, **θετικὴν (+)** καὶ τὴν ἄλλην **ἀρνητικὴν (—)**, ὅπως, π.χ., βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 38.

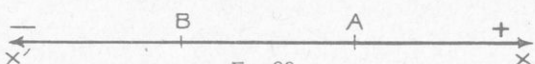
Κάθε εὐθεῖα, ἔστω $x'x$, μαζὶ μὲ τὴν θετικὴν φοράν της, δηλαδὴ (ἀκριβέστερον) τὸ σύνολον { εὐθεῖα $x'x$, θετικὴ φορὰ τῆς $x'x$ } ὀνομάζεται μία **εὐθεῖα προσανατολισμένη**.

§ 43. Τμῆμα προσανατολισμένον (ἐφαρμοστὸν διάνυσμα)

43.1. Εἰς τὸ Σχ. 39 βλέπετε μίαν προσανατολισμένην εὐθεῖαν $x'x$ καὶ δύο, διάφορα μεταξύ των, σημεῖα της A, B.

Βλέπετε λοιπὸν καὶ τὸ εὐθύγραμμον (μὴ μηδενικὸν) τμῆμα μὲ ἄκρα A, B, πού, ὅπως γνωρίζομεν, συμβολίζεται μὲ AB εἴτε (ἀδιάφορον) μὲ BA.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ A, B εἶναι δυνατὸν νὰ διαγραφῆ ἀπὸ ἕνα σημεῖον εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B (ποὺ «συμφωνεῖ» μὲ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς $x'x$) εἴτε κατὰ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ B πρὸς τὸ A (ποὺ « συμφωνεῖ » μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τῆς $x'x$).



Σχ. 39

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ A, B μαζὶ μὲ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B ὀνομάζεται : τὸ (μὴ μηδενικὸν) προσανατολισμένον τμῆμα ἄλφα βῆτα εἴτε : **τὸ (μὴ μηδενικὸν) ἐφαρμοστὸν διάνυσμα ἄλφα βῆτα καὶ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{AB}$**. Τὸ σημεῖον A ὀνομάζεται **ἡ ἀρχὴ τοῦ**

διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ σημεῖον Β **τὸ πέρας τοῦ $\overrightarrow{AB}$.** Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (Σχ. 39) λέγομεν ὅτι εἶναι **ἕνα ἀρνητικὸν διάνυσμα ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας $x'x$,** διότι ἡ φορὰ ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β « συμφωνεῖ » μὲ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς $x'x$.

Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ Α, Β μαζὶ μὲ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α ὀνομάζεται : τὸ (μὴ μηδενικὸν) προσανατολισμένον τμῆμα βῆτα ἄλφα εἴτε : τὸ (μὴ μηδενικὸν) ἐφαρμοστὸν διάνυσμα βῆτα ἄλφα καὶ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{BA}$. Τὸ σημεῖον Β ὀνομάζεται **ἡ ἀρχὴ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{BA}$** καὶ τὸ σημεῖον Α **τὸ πέρας τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{BA}$.** Τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$ λέγομεν ὅτι εἶναι, **ἕνα θετικὸν διάνυσμα ἐπὶ τῆς προσανατολισμένης εὐθείας $x'x$,** διότι ἡ φορὰ ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α « συμφωνεῖ » μὲ τὴν θετικὴν φορὰν τῆς $x'x$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι :

i) ἀπὸ κάθε μὴ μηδενικὸν τμῆμα ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας γεννῶνται δύο διανύσματα, ἕνα θετικὸν καὶ ἕνα ἀρνητικὸν καὶ ii) κάθε διάνυσμα ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας ἢ θὰ εἶναι θετικὸν ἢ θὰ εἶναι ἀρνητικόν.

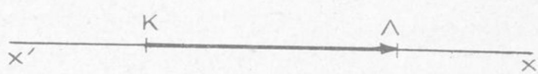
43.2. Δύο διανύσματα ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας λέγονται ὁμόρροπα (εἴτε ὁμόφορα) τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι καὶ τὰ δύο θετικὰ ἢ καὶ τὰ δύο ἀρνητικά.

Δύο διανύσματα ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας λέγονται ἀντίρροπα (εἴτε ἀντίφορα) τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἕνα εἶναι θετικὸν καὶ τὸ ἄλλο ἀρνητικόν.

Ἑπομένως **κάθε δύο διανύσματα ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας ἢ εἶναι ὁμόρροπα ἢ εἶναι ἀντίρροπα τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο.**

43.3. Ἔστω (Σχ. 40) ἕνα (μὴ μηδενικὸν) ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda}$.

Σχηματικῶς κάθε ἐφαρμοστὸν διάνυσμα παριστάνεται συνήθως ἀπὸ τὸ « ἀντίστοιχόν του » εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ μίαν αἰχμὴν βέλους(*) εἰς τὸ πέρας του.



Σχ. 40

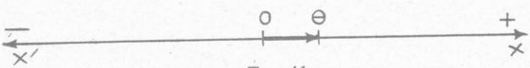
(*) Ἡ αἰχμὴ τοῦ βέλους δὲν εἶναι ἀπαραίτητος, διότι ἡ διάταξις τῶν ἄκρων τοῦ διανύσματος καθορίζει τὴν ἀρχήν του καὶ τὸ πέρας του: Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α καὶ πέρας τὸ Β.

Σημ. Εἰς τὰ ἑπόμενα θὰ χρησιμοποιῆται, πρὸς συντομίαν, ὁ ὅρος **διάνυσμα** ἀντὶ τοῦ ὅρου ἐφαρμοστὸν διάνυσμα.

§ 44. Ἄξων

Ἔστω (Σχ. 41) μία εὐθεῖα x′x. Λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῆς ἕνα (αὐθαίρετον) σημεῖον 0 καὶ ἕνα διάνυσμα (αὐθαίρετον ἐπίσης) $\overrightarrow{O\Theta}$.

Ὁρίζομεν τώρα τὴν θετικὴν φορὰν τῆς x′x : **Συμφωνοῦμεν νὰ λαμβάνεται ἔτσι ἡ θετικὴ φορὰ τῆς x′x καὶ τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$, ὥστε τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$ νὰ εἶναι θετικὸν διάνυσμα.** Ἡ προσανατολισμένη εὐθεῖα x′x μαζὺ μὲ τὸ O καὶ τὸ $\overrightarrow{O\Theta}$, δηλ. τὸ σύνολον { προσανατολ. εὐθεῖα x′x, O, $\overrightarrow{O\Theta}$ } ὀνομάζεται : **ὁ ἄξων x′Ox.** Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Theta}$ λέγεται : **τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ ἄξονος x′Ox.** Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ O, Θ θὰ λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τοῦ ἄξονος x′Ox.



Σχ. 41

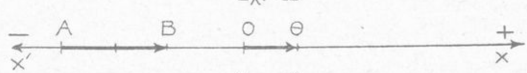
Τὸ σημεῖον O χωρίζει τὸν ἄξονα x′Ox εἰς δύο **ἡμιάξονας·** τὸν Ox, ποὺ λέγεται καὶ **θετικὸς ἡμιάξων τοῦ x′Ox** καὶ τὸν Ox′, ποὺ λέγεται καὶ **ἀρνητικὸς ἡμιάξων τοῦ x′Ox.**

§ 45. Μέτρον διανύσματος

Ἔστω τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x′Ox (Σχ. 42, 43).

Ὀνομάζεται μέτρον (εἴτε μῆκος) τοῦ $\overrightarrow{AB}$, τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μὲ ἄκρα τὰ A, B (ὡς πρὸς μονάδα μετρήσεως τὸ τμῆμα μὲ ἄκρα τὰ O, Θ).

Σχ. 42



Σχ. 43

Τὸ μέτρον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ συμβολίζεται μὲ $|\overrightarrow{AB}|$. Εἰς τὰ σχήματα 42 καὶ 43 εἶναι $|\overrightarrow{AB}| = 2$.

Κάθε διάνυσμα (θετικὸν εἴτε ἀρνητικὸν) ἐπὶ ἄξονος ἔχει ὡς μέτρον ἕνα ἀπόλυτον ἀριθμὸν διάφορον τοῦ μηδενός.

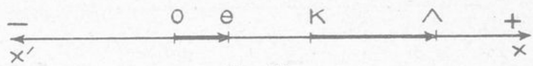
Δύο διανύσματα μὲ τὸ αὐτὸ μέτρον δὲν ἔχουν κατ᾽ ἀνάγκην καὶ

τὴν αὐτὴν φοράν. Ἔτσι εἰς τὸ Σχ. 42 τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀρνητικὸν (ἔχει τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ x΄Ox) καὶ ἔχει μέτρον $|\overrightarrow{AB}|=2$. Εἰς τὸ Σχ. 43, τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι θετικὸν (ἔχει τὴν θετικὴν φορὰν τοῦ x΄Ox) καὶ ἔχει πάλιν μέτρον $|\overrightarrow{AB}|=2$.

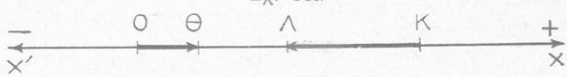
§ 46. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος

Ἔστω (Σχ. 44α, 44β) ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{K\Lambda}$ ἐπὶ ἄξονος x΄Ox καὶ ἔστω μ τὸ μέτρον του, δηλαδὴ $|\overrightarrow{K\Lambda}|=\mu$ ($\mu \neq 0$ ἀπόλυτος ἀριθμός).

Ὀνομάζεται ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{K\Lambda}$ (ἐπὶ τοῦ x΄Ox), καὶ συμβολίζεται μὲ $\overline{K\Lambda}$, ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς $+\mu$, ἂν τὸ $\overrightarrow{K\Lambda}$ εἶναι θετικὸν (Σχ. 44α), ἢ ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $-\mu$, ἂν τὸ $\overrightarrow{K\Lambda}$ εἶναι ἀρνητικὸν (Σχ. 44β). Ἔτσι, π.χ. εἰς τὸ Σχ. 42 εἶναι $\overline{AB}=-2$, ἐνῶ εἰς τὸ Σχ. 43 εἶναι $\overline{AB}=+2$.



Σχ. 44α

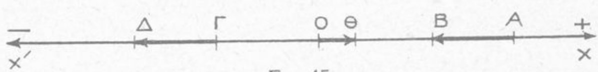


Σχ. 44β

§ 47. Ἴσα διανύσματα. Ἀντίθετα διανύσματα

47.1. Δύο διανύσματα ἐπὶ ἄξονος (Σχ. 45) ὀνομάζονται ἴσα, τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι ἴσαι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαί των.

Κάθε δύο ἴσα διανύσματα εἶναι προφανῶς ἰσομήκη καὶ ὁμόρροπα.



Σχ. 45

Ἔτσι, π.χ. εἰς τὸ Σχ. 45 ἔχομεν ὅτι τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι $\overline{AB}=-2$ καὶ $\overline{\Gamma\Delta}=-2$.

Τὸ ὅτι τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, εἶναι ἴσα (τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο) τὸ συμβολίζομεν μέ : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἴτε μέ : $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}$.

Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος διανυσμάτων ἔχει τὰς τρεῖς ἰδιότητας, ποὺ ἔχει καὶ ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητος εἰς τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Δηλ.

1η ἰδιότης : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ διὰ κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (ἀνακλαστική).

2α ἰδιότης : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$ (συμμετρική).

3η ἰδιότης : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EZ}$ (μεταβατική).

47.2. Δύο διανύσματα ἐπὶ ἄξονος ὀνομάζονται ἀντίθετα τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ των εἶναι ἀντίθετοι σχετικοὶ ἀριθμοί. Ἔτσι, π.χ., εἰς τὸ Σχ. 46 τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο.

Σχ. 46

($\overrightarrow{AB}$ θετικόν, $\overline{AB} = +2$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀρνητικόν, $\overline{\Gamma\Delta} = -2$)

Κάθε δύο ἀντίθετα διανύσματα εἶναι λοιπὸν ἰσομήκη καὶ ἀντίρροπα. Π.χ. εἰς τὸ Σχ. 46 εἶναι :

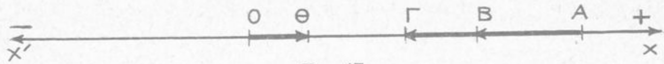
$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 2, \text{ ἀλλὰ } \overline{AB} = +2, \ \overline{\Gamma\Delta} = -2.$$

Τὸ ὅτι τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετα (τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο) συμβολίζεται : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἴτε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}$. **Διὰ κάθε διάνυσμα, ἔστω $\overrightarrow{AB}$, ἐπὶ ἄξονος ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἀντίθετά του· αὐτὰ εἶναι τὸ $\overrightarrow{BA}$ καὶ κάθε ἴσον του.**

§ 48. Διάνυσμα διαδοχικὸν ἄλλου

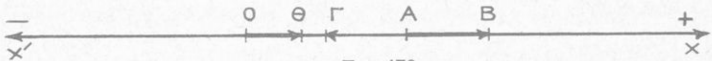
Ἔστω ἕνας ἄξων **x΄Ox** καὶ ἕνα διάνυσμά του, π.χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$. Ἂς λάβωμεν τώρα ἕνα ἄλλο διάνυσμα τοῦ ἄξονος μὲ ἀρχὴν τὸ B, π.χ. τὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$ (σχ. 47α, 47β).

Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ λέγεται **διαδοχικὸν** τοῦ $\overrightarrow{AB}$. Ἔτσι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι καὶ τὸ ἀντίθετόν του $\overrightarrow{BA}$. Ἕνα διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι καὶ τὸ ἀντίθετόν του $\overrightarrow{\Gamma B}$, ἕνα διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι καὶ τὸ ἀντίθετόν του $\overrightarrow{\Gamma A}$.



Σχ. 47α

(τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα)



Σχ. 47β

(τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι ἀντίρροπα)

Προσέξατε ! τὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$, τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὅμως δὲν εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{B\Gamma}$. (Δὲν ἐπιτρέπεται λοιπὸν νὰ λέγωμεν : τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά).

Συνόψισις καὶ παρατήρησις.

1. Κρατήσατε καλὰ εἰς τὸν νοῦν σας τὰ ἑξῆς :

α) ὁμόρροπα διανύσματα $\Longleftrightarrow$ ὁμόσημοι αἱ ἀλγεβρικαί των τιμαί.
β) ἀντίρροπα διανύσματα $\Longleftrightarrow$ ἑτερόσημοι αἱ ἀλγεβρικαί των τιμαί.
γ) ἴσα διανύσματα $\Longleftrightarrow$ ἴσαι αἱ ἀλγεβρικαί των τιμαί.
δ) ἀντίθετα διανύσματα $\Longleftrightarrow$ ἀντίθετοι αἱ ἀλγεβρικαί των τιμαί.

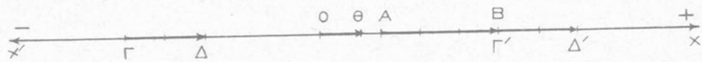
2. Ἂν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε (Σχ. 45), ἂν ὀλισθήσωμεν τὸ ἕνα, π.χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$, ἐπὶ τοῦ x′Ox, ἠμποροῦμεν νὰ τὸ φέρωμεν ἐπὶ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἔτσι, ὥστε ἡ ἀρχὴ A τοῦ $\overrightarrow{AB}$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἀρχὴν Γ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ τὸ πέρας B τοῦ $\overrightarrow{AB}$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ πέρας Δ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δηλ. ἔτσι ὥστε τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ νὰ ταυτισθοῦν. Αὐτὸ δὲν γίνεται εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀντιθέτων διανυσμάτων. Ἂν π.χ. εἰς τὸ Σχ. 46 ὀλισθήσωμεν τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἐπὶ τοῦ x′Ox ἠμπορεῖ τὸ A (ἡ ἀρχὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$) νὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Δ (πέρας τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$) καὶ τότε τὸ B (τὸ πέρας τοῦ $\overrightarrow{AB}$) θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Γ (τὴν ἀρχὴν τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$). Τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὅμως δὲν συνέπεσε μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀλλὰ μὲ τὸ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, ποὺ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

§ 49. Ἀξιοσημείωτος παρατήρησις. Μηδενικὸν διάνυσμα

47.1. Ἂς παρατηρήσωμεν προσεκτικὰ ἕνα πρὸς ἕνα τὰ κατωτέρω σχήματα :

1) Εἰς τὸ Σχ. 48α βλέπομεν ὅτι **i**) $\overline{AB} = +3$, $\overline{\Gamma\Delta} = +2$· τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι **καὶ τὰ δύο θετικά. ii**) τὸ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A\Delta'}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν

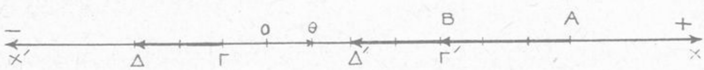


Σχ. 48α

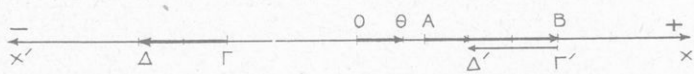
ἀρχὴν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ διαδοχικοῦ του $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ ($\equiv \overrightarrow{B\Delta'}$) εἶναι $+5$, δηλ. $\overline{A\Delta'} = +5 = (+3) + (+2) = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$. Ἐπίσης εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ κάθε ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{A\Delta'}$ διάνυσμα τοῦ ἄξονος $x'Ox$, ἔστω $\overrightarrow{K\Lambda}$, θὰ ἰσχύῃ $\overline{K\Lambda} = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$.

2) Εἰς τὸ Σχ. 48β βλέπομεν ὅτι **i**) $\overline{AB} = -3$, $\overline{\Gamma\Delta} = -2$· τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι **καὶ τὰ δύο ἀρνητικά. ii**) τὸ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A\Delta'}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρ-



Σχ. 48β



Σχ. 48γ

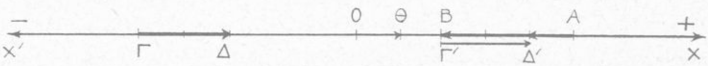
χὴν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ διαδοχικοῦ του $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$($\equiv \overrightarrow{B\Delta'}$), εἶναι -5, δηλ. $\overline{A\Delta'} = -5 = (-3) + (-2) = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$.

Ἐπίσης διὰ κάθε ἴσον μὲ τὸ ΑΔ′ διάνυσμα τοῦ χ′Οχ, ἔστω ΚΛ, θὰ ἰσχύῃ $\overline{K\Lambda} = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$.

3) Εἰς τὸ Σχ. 48γ βλέπομεν ὅτι **i**) **τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι θετικόν**, $\overline{AB} = +3$· **τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀρνητικόν**, $\overline{\Gamma\Delta} = -2$, **ii**) Τὸ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A\Delta'}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ διαδοχικοῦ του $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ ($\equiv \overrightarrow{B\Delta'}$) εἶναι $+1$, δηλ. $\overline{A\Delta'} = +1 = (+3) + (-2) = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$. Ἐπίσης διὰ κάθε ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{A\Delta'}$ διάνυσμα τοῦ ἄξονος $x'Ox$, ἔστω $\overrightarrow{K\Lambda}$, ἰσχύει $\overline{K\Lambda} = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$.

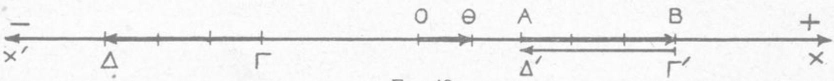
4) Εἰς τὸ Σχ. 48δ βλέπομεν ὅτι **i**) τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀρνητικόν, $\overline{AB} = -3$· τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι θετικόν, $\overline{\Gamma\Delta} = +2$. **ii**) τὸ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 48δ

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{A\Delta'}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ διαδοχικοῦ του $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ ($\equiv \overrightarrow{B\Delta'}$) εἶναι -1, δηλ. $\overline{A\Delta'} = -1 = (-3) + (+2) = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$. Ἐπίσης διὰ κάθε ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{A\Delta'}$ διάνυσμα τοῦ ἄξονος $\chi'O\chi$, ἔστω $\overrightarrow{K\Lambda}$, θὰ ἰσχύῃ $\overline{K\Lambda} = \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta}$.

5) Εἰς τὸ Σχ. 48ε βλέπομεν ὅτι **i**) τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι θετικόν, $\overline{AB} = +3$· τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀρνητικόν, $\overline{\Gamma\Delta} = -3$. **ii**) τὸ $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ εἶναι διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 48ε

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἐδῶ **δὲν ἔχομεν** διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta'}$ ὅπως εἰς ὅλας τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, διότι τὸ Δ′ συμπίπτει μὲ τὸ Α.

Διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ($\equiv \overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$) ἔχομεν :

(σ) $\quad \overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} = (+3) + (-3) = 0$

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα συμπεραίνομεν ὅτι, **ἂν δοθοῦν δύο διανύσματα, ὁποιαδήποτε, ἐπὶ ἄξονος, π.χ. τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἀλλὰ ὄχι ἀντίθετα τὸ ἕνα πρὸς τὸ ἄλλο, τότε ὑπάρχει ἕνα (τοὐλάχιστον) ἄλλο διάνυσμα τοῦ ἄξονος μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι ἡ ἀλγεβρική του τιμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.**

49.2. Διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰδιότης αὐτὴ χωρὶς ἐξαίρεσιν, δηλαδὴ καὶ διὰ κάθε δύο ἀντίθετα διανύσματα, **δεχόμεθα ὅτι, ὅπως ἀπὸ κάθε μὴ μηδενικὸν τμῆμα ΑΒ ὁρίζονται δύο διανύσματα, τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$, ἔτσι καὶ ἀπὸ κάθε μηδενικὸν τμῆμα, π.χ. ΑΑ, ὁρίζεται ἕνα (ἰδιότυπον, συμβατικὸν*) διάνυσμα, ποὺ θὰ λέγεται « μηδενικὸν διάνυσμα ἀντίστοιχον εἰς τὸ σημεῖον Α » καὶ θὰ συμβολίζεται μὲ $\overrightarrow{AA}$ εἴτε $\overrightarrow{O_A}$. Διὰ κάθε μηδενικὸν διάνυσμα,** ἔστω $\overrightarrow{AA}$ **ὁρίζομεν ὡς μῆκος (μέτρον) του τὸν 0 καὶ ἀλγεβρικὴν τιμήν του ἐπίσης τὸν 0·** συμβολικῶς : $|\overrightarrow{AA}|=0$, $\overline{AA}=0$.

49.3. Ἂς προσέξωμεν τώρα πάλιν τὸ Σχ. 48ε. Βλέπομεν ὅτι αὐτό, ποὺ εἰς ὅλας τὰς προηγουμένας περιπτώσεις, ἐκτὸς τῆς τελευταίας, ἔπαιζε τὸν ρόλον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta'}$, εἶναι τώρα τὸ μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ ($\equiv \overrightarrow{A\Delta'}$), ἀφοῦ τὸ Δ′ συμπίπτει μὲ τὸ Α. Τώρα ἡ ἰσότης (σ) ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ:

$$\overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta}=0=\overline{AA}$$

δηλαδὴ **τώρα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν δύο ἀντιθέτων διανυσμάτων ἰσχύει ἡ προηγουμένη ἰδιότης,** ἤτοι ὑπάρχει διάνυσμα, ποὺ ἡ ἀλγεβρική του τιμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν δύο ἀντιθέτων διανυσμάτων.

Συμφωνοῦμεν νὰ λέγωμεν ὅτι **κάθε δύο μηδενικὰ διανύσματα ἐπὶ ἄξονος εἶναι ἴσα μεταξύ των.** Ἔτσι, π.χ., $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{\Gamma\Gamma}=\dots$

49.4. Ἔστω χ′Οχ ἕνας ἄξων· τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος χ′Οχ (ἐφαρμοστῶν) διανυσμάτων (μὴ μηδενικῶν καὶ μηδενικῶν) θὰ συμβολίζεται, ὅπου μᾶς χρειασθῇ, μὲ $\mathscr{D}$.

§ 50. Πράξεις μὲ διανύσματα τοῦ συνόλου $\mathscr{D}$.

50.1. Πρόσθεσις. 1) Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα τοῦ $\mathscr{D}$, **τότε ὀνομάζεται ἄθροισμα τοῦ $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, συμβολικῶς $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, κάθε διάνυσμα, ἔστω $\overrightarrow{K\Lambda}$, μὲ τὴν ἰδιότητα :**

$$\overline{K\Lambda}=\overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta}.$$

(*) Διότι ἡ « ἀρχή » του συμπίπτει μὲ τὸ « πέρας » του καὶ δὲν ἠμποροῦμεν, βεβαίως, νὰ λέγωμεν ὅτι « διαγράφεται κτλ. ».

Εἴδαμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τῆς § 49.1. ὅτι ὑπάρχει πάντοτε ἕνα διάνυσμα μὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα καὶ μάλιστα εἰς τὰ σχήματα 48α, 48β, 48γ, 48δ, 48ε εἴδαμεν καὶ τρόπον νὰ κατασκευάζωμεν ἕνα διάνυσμα μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα· τὸν ὑπενθυμίζομεν : λαμβάνομεν τὸ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma'\Delta'}$ $(\equiv \overrightarrow{B\Delta'})$· τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Delta'}$ εἶναι ἄθροισμα τοῦ $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τὸ διάνυσμα αὐτὸ εἶναι τὸ $\overrightarrow{AA}$ εἰς τὴν περίπτωσιν, ποὺ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

Δυνάμεθα, βεβαίως, νὰ λάβωμεν ὡς ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, συμφώνως πρὸς τὸν προηγούμενον ὁρισμόν, καὶ κάθε ἄλλο διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$. ποὺ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\overrightarrow{A\Delta'}$. Γράφομεν : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Delta'}=\overrightarrow{A\Delta'}$.

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ὀνομάζεται **πρόσθεσις** εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρόσθεσις εἰς τὸ $\mathscr{D}$ εἶναι μὲν πρᾶξις **ἐσωτερικὴ** τοῦ $\mathscr{D}$ (δηλ. τὸ ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ σὺν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$, π.χ. $\overrightarrow{K\Lambda}$) ὄχι ὅμως καὶ **μονοσήμαντος**. (δηλ. ὡς ἄθροισμα δὲν ἔχομεν μόνον τὸ $\overrightarrow{K\Lambda}$, ἀλλὰ καὶ κάθε διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$, ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{K\Lambda}$).

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀθροίσματος δύο διανυσμάτων ἠμποροῦμεν νὰ συμπεράνωμεν ὅτι : ἡ πρόσθεσις διανυσμάτων ἔχει τὴν ἀντιμεταθετικὴν καὶ τὴν προσεταιριστικὴν ἰδιότητα. Πράγματι(*).

Ἔστω $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{K\Lambda}$· τότε, ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{K\Lambda} \iff \overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{K\Lambda}\cdot$$

ἀλλὰ $$\overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta}=\overline{K\Lambda} \iff \overline{\Gamma\Delta}+\overline{AB}=\overline{K\Lambda}$$

καὶ $$\overline{\Gamma\Delta}+\overline{AB}=\overline{K\Lambda} \iff \overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{K\Lambda},$$

ὥστε (ἀπὸ τὴν μεταβατικὴν ἰδιότητα τῆς ἰσότητος) εἶναι :

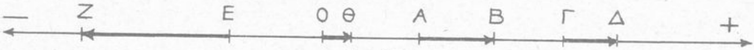
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{AB}$$

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δυνάμεθα νὰ δικαιολογήσωμεν καὶ ἀπὸ τὸν τρόπον, ποὺ ἐμάθαμεν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος.

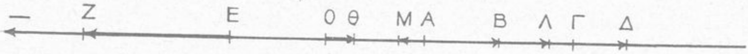
(*) ἡ δικαιολόγησις κατὰ τὴν κρίσιν τοῦ διδάσκοντος.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δικαιολογεῖται καὶ ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης.

2) Ἂν ἔχωμεν τώρα τρία διανύσματα τοῦ ἄξονος χ'Οχ, π.χ., τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ (σχ. 49), θὰ ὀνομάζωμεν ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}$ σὺν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ σὺν $\overrightarrow{EZ}$, καὶ θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}$, τὸ διάνυσμα τοῦ ἄξονος χ'Οχ, ποὺ προκύπτει ὡς ἄθροισμα τοῦ διανύσματος $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})$ σὺν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$. Συμφώνως μὲ τὸν ὁρισμὸν διὰ τὸ ἄθροισμα μὲ δύο προσθετέα διανύσματα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}$. Λαμβάνομεν τὸ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ διάνυσμα $\overrightarrow{B\Lambda}$ (σχ. 49α) Ἔχομεν ὅτι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Lambda}=\overrightarrow{A\Lambda}$. Λαμβάνομεν τώρα



Σχ. 49



Σχ. 49α

τὸ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{A\Lambda}$ καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{EZ}$ διάνυσμα $\overrightarrow{\Lambda M}$. Ἔχομεν τώρα $\overrightarrow{A\Lambda}+\overrightarrow{\Lambda M}=\overrightarrow{AM}$. Ὥστε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{A\Lambda}+\overrightarrow{\Lambda M}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+\overrightarrow{EZ}$.

Συντόμως λοιπὸν τὸ ἄθροισμα εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: λαμβάνομεν τὸ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἴσον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ διάνυσμα $\overrightarrow{B\Lambda}$ καὶ κατόπιν τὸ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{B\Lambda}$ καὶ ἴσον τοῦ $\overrightarrow{EZ}$ διάνυσμα $\overrightarrow{\Lambda M}$· ἔχομεν ἀντὶ τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ τά: $\overrightarrow{AB}$, τὸ διαδοχικόν του $\overrightarrow{B\Lambda}$ καὶ τὸ $\overrightarrow{\Lambda M}$ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{B\Lambda}$. Τὸ $\overrightarrow{AM}$, ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ «πρώτου» καὶ πέρας τὸ πέρας τοῦ «τρίτου», καθὼς καὶ κάθε ἴσον του, εἶναι τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}$. Εἶναι εὔκολον νὰ ἐπαληθεύσωμεν ὅτι $\overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta}+\overline{EZ}=\overline{AM}$, ὅτι δηλ. ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος τριῶν διανυσμάτων εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν προσθετέων διανυσμάτων. Εἰς τὸ Σχ. 49α, εἶναι πράγματι $(+3)+(+2)+(-6)=-1=\overline{AM}$.

Μὲ ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται ἄθροισμα μὲ τέσσερα, πέντε κτλ. προσθετέα διανύσματα.

50.2. Ἀφαίρεσις. Γνωρίζομεν ὅτι διὰ κάθε διάνυσμα, ἔστω, $\overrightarrow{AB}$ ἑνὸς ἄξονος ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ἀντίθετα πρὸς αὐτό· αὐτὰ εἶναι τὸ $\overrightarrow{BA}$ καὶ κάθε ἴσον του. Θὰ ὀνομάζωμεν **διαφορὰν** $\overrightarrow{AB}$ πλὴν $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, καὶ θὰ τὴν συμβολίζωμεν μὲ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τὸ ἄθροισμα τοῦ $\overrightarrow{AB}$ σὺν ἕνα διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$· εἶναι λοιπὸν (ἐξ ὁρισμοῦ) :

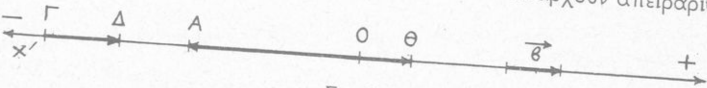
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

Ἡ πρᾶξις τῆς εὑρέσεως τῆς διαφορᾶς ἑνὸς διανύσματος ἀπὸ ἄλλο λέγεται **ἀφαίρεσις**.. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις διανύσματος ἀπὸ ἄλλο ἀνάγεται εἰς πρόσθεσιν. Ἑπομένως καὶ ἡ ἀφαίρεσις εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}$ τῶν διανυσμάτων ἑνὸς ἄξονος δὲν εἶναι μονοσήμαντος πρᾶξις.

§ 51. Τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα ἐπὶ ἄξονος.

Εἴδαμεν ὅτι οὔτε ἡ πρόσθεσις οὔτε ἡ ἀφαίρεσις εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}$ τῶν διανυσμάτων ἑνὸς ἄξονος εἶναι πρᾶξις μονοσήμαντος. Διὰ νὰ τὴν καταστήσωμεν μονοσήμαντον εἰσάγομεν εἰς τὰ ἑπόμενα τὴν ἔννοιαν : **ἐλεύθερον διάνυσμα ἐπὶ ἄξονος.**

Ἔστω ὁ ἄξων $x'Ox$ (Σχ. 50) καὶ τὸ σύνολον $\mathscr{D}$ τῶν διανυσμάτων του. Ἔστω ἕνα ἀπὸ τὰ διανύσματα αὐτά, π.χ., τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ὑπάρχουν ἀπειράριθμα



Σχ. 50

διανύσματα τοῦ $\mathscr{D}$ καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Τὸ σύνολον (ἡ κλάσις) ὅλων τῶν ἴσων πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ διανυσμάτων τοῦ $\mathscr{D}$ ὀνομάζεται: **ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα** τοῦ ἄξονος $x'Ox$ καὶ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (εἴτε ὁποιοδήποτε ἄλλο ἴσον του διάνυσμα ἀπὸ τὸ $\mathscr{D}$) ὀνομάζεται : **ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος**. Ἄν, ὅπως ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ἔτσι καὶ ἀπὸ κάθε διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$ σχηματίσωμεν ἀνὰ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα, τότε **τὸ $\mathscr{D}$ θὰ ἔχη διαμερισθῆ εἰς κλάσεις, ξένας μεταξύ των, καθεμία ἀπὸ τὰς ὁποίας εἶναι (ἐξ ὁρισμοῦ) ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα.** Ἕνα ὁποιοδήποτε διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος κάποιου ἐλευθέρου διανύσματος τοῦ ἄξονος $'xOx$. Συνήθως ὡς ἀντιπρόσωπον ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος ἑνὸς ' ἄξονος $x'Ox$ λαμβάνομεν τὸ διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}$ μὲ ἀρχὴν τὸ O. **Ἄν λοι-**

πὸν θεωρήσωμεν ὅλα τὰ διανύσματα τοῦ $\mathscr{D}$ μὲ κοινὴν ἀρχὴν τὸ O, τότε τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ ἀντιπροσωπεύει ἀνὰ ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ ἄξονος. Ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα εἶναι καὶ τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα, δηλ. ἡ κλάσις ὅλων τῶν (ἐφαρμοστῶν) μηδενικῶν διανυσμάτων. Τὸ σύνολον τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων τοῦ ἄξονος $x'Ox$ θὰ συμβολίζεται μὲ $\mathscr{D}_0$. Κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα θὰ συμβολίζεται εἴτε δι' ἑνὸς ἀντιπροσώπου του μὲ ἀρχὴν τὸ O εἴτε μὲ ἕνα μικρὸν γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας μὲ βέλος ὑπεράνω αὐτοῦ. Ἔτσι, ὅταν λέγωμεν, π.χ. τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ (Σχ. 50) δὲν ἐννοοῦμεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$, ποὺ βλέπομεν, ἀλλὰ τὴν κλάσιν τῶν ἴσων πρὸς τὸ $\overrightarrow{OA}$ ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἄξονος. Ἐπίσης, ὅταν λέγωμεν, π.χ., τὸ διάνυσμα $\vec{\beta}$ (Σχ. 50), δὲν ἐννοοῦμεν τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα, ποὺ βλέπομεν εἰς τὸ σχῆμα, ἀλλὰ τὴν κλάσιν τῶν ἴσων διανυσμάτων πρὸς τὸ ἐφαρμοστὸν διάνυσμα τοῦ σχήματος.

§ 52. Μέτρον (μῆκος) ἐλευθέρου διανύσματος

Μέτρον (εἴτε μῆκος) ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$ λέγεται τὸ μέτρον ἑνὸς ἀντιπροσώπου του καὶ συμβολίζεται μὲ $|\vec{\alpha}|$.

Π.χ. τὸ μηδενικὸν ἐλεύθερον διάνυσμα, ποὺ συμβολίζεται μὲ $\vec{O}$, ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον ἑνὸς ἀντιπροσώπου του, δηλ. ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἐφαρμοστοῦ μηδενικοῦ διανύσματος, π.χ. τοῦ $\overrightarrow{OO}$, εἴτε τοῦ $\overrightarrow{AA}$ κτλ. Ὥστε εἶναι: $|\vec{O}| = 0$.

§ 53. Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἐλευθέρου διανύσματος

Ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος λέγεται ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀντιπροσώπου του. Ἔτσι, π.χ., διὰ τὸ μηδενικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{OO}$ εἶναι $\overline{OO} = 0$.

§ 54. Ἡ ἰσότης εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}_0$, τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων

Λέγομεν ὅτι **ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ εἶναι ἴσον μὲ ἕνα ἄλλο $\vec{\beta}$,**

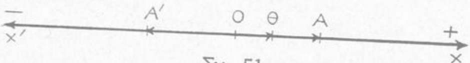
ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ὑπάρχῃ ἕνας ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$ ἴσος μὲ ἕνα ἀντιπρόσωπον τοῦ $\vec{\beta}$.

Ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες :

1. $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ (ἀνακλαστική)
2. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\alpha}$ (συμμετρική)
3. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ καὶ $\vec{\beta} = \vec{\gamma} \Longrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ (μεταβατική).

§ 55. Ἀντίθετα διανύσματα εἰς τὸ $\mathscr{D}_0$

Ἔστω ἕνα ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{OA}$ ὁ ἀντιπρόσωπός του μὲ ἀρχὴν τὸ O. Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$ (Σχ. 51) εἶναι ἀντιπρόσωπος ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος, ἔστω, $\vec{\alpha'}$· αὐτὸ τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα λέγεται



Σχ. 51

ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$ καὶ συμβολίζεται μὲ $-\vec{\alpha}$. Εἶναι φανερὸν ὅτι : **i) διὰ κάθε ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ὑπάρχει μόνον ἕνα ἀντίθετόν του·** δι' αὐτό, ἀντὶ νὰ λέγωμεν : τὸ $-\vec{\alpha}$ εἶναι **ἀντίθετον** τοῦ $\vec{\alpha}$, ἠμποροῦμεν νὰ λέγωμεν : **τὸ ἀντίθετον** τοῦ $\vec{\alpha}$. **ii) ἂν $\vec{\alpha}$ εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha'}$, τότε τὸ $\vec{\alpha'}$ εἶναι τὸ ἀντίθετον τοῦ $\vec{\alpha}$·** ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ λέγωμεν: **τὰ $\vec{\alpha}$, $\vec{\alpha'}$ εἶναι ἀντίθετα μεταξύ των.**

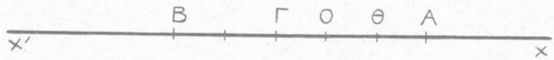
§ 56. Πράξεις εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}_0$, τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων

56.1. Πρόσθεσις. Ἔστω $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ καὶ $\vec{\beta} \in \mathscr{D}_0$, $\overrightarrow{OA}$ ὁ ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\alpha}$ μὲ ἀρχὴν τὸ O καὶ $\overrightarrow{OB}$ ὁ ἀντιπρόσωπος τοῦ $\vec{\beta}$ μὲ ἀρχὴν τὸ O. Ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα (ὅπως τὸ ὡρίσαμεν εἰς τὸ $\mathscr{D}$) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ καὶ ἔστω ὅτι εἶναι τὸ $\overrightarrow{O\Gamma}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\gamma}$. Ὀνομάζομεν ἄθροισμα $\vec{\alpha}$ σὺν $\vec{\beta}$, συμβολικῶς $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα $\vec{\gamma}$. (Σχ. 52). Γράφομεν : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

(Ἐλάβαμεν τὸ διαδοχικὸν τοῦ $\overrightarrow{OA}$ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{OB}$. Ὅπως γνωρίζομεν εἶναι : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$).

Ἡ πρόσθεσις λοιπὸν εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}_0$ εἶναι πρᾶξις **ἐσωτερικὴ καὶ μονοσήμαντος.**

Ἠμπορεῖ εὐκόλως νὰ δικαιολογηθῇ ὅτι **ἡ ἀνωτέρω πρόσθεσις ἔχει**



Σχ. 52

ὅλας τὰς ἰδιότητας, ποὺ ἔχει καὶ ἡ πρόσθεσις εἰς τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Ἔτσι ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

1η ἰδιότης: $\vec{\alpha}+\vec{O}=\vec{\alpha}$ (τὸ $\vec{O}$ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως εἰς τὸ $\mathscr{D}_0$)

2α ἰδιότης: $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης)

3η ἰδιότης: $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστικὴ)

4η ἰδιότης: $\vec{\alpha}=\vec{\beta} \iff \vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ (ἰδιότης διαγραφῆς)

5η ἰδιότης: Ἡ ἐξίσωσις $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{\alpha}$ ἔχει ἀκριβῶς μίαν λύσιν, τὴν $\vec{x}=\vec{O}$

6η ἰδιότης: Ἡ ἐξίσωσις $\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{\beta}$ ἔχει ἀκριβῶς μίαν λύσιν, τὴν $\vec{x}=\vec{\beta}+(-\vec{\alpha})$.

56.2. Πρόσθεσις εἰς τὸ $\mathscr{D}_0$ μὲ περισσοτέρους ἀπὸ δύο προσθετέους. Ἂν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ εἶναι τρία ἐλεύθερα διανύσματα, τότε ὀνομάζομεν ἄθροισμα $\vec{\alpha}$ σὺν $\vec{\beta}$ σὺν $\vec{\gamma}$, συμβολικῶς $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, τὸ διάνυσμα τοῦ $\mathscr{D}_0$ μὲ ἀντιπρόσωπον τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}$, ὅπου $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ εἶναι ἀντιπρόσωποι ἀντιστοίχως τῶν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$. Ἂν λοιπὸν εἶναι $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O\Delta}$, καὶ $\overrightarrow{O\Delta}$ εἶναι ἕνας ἀντιπρόσωπος ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\delta}$, θὰ γράψωμεν : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{\delta}$.

Ἀναλόγως ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα μὲ τέσσερες, πέντε, κτλ. προσθετέους. Διὰ τὰ ἀθροίσματα αὐτὰ ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες, ποὺ ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ ἀθροίσματα μὲ πολλοὺς προσθετέους σχετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ δικαιολογοῦνται μὲ τὸν ἴδιον τρόπον.

56.3. Ἀφαίρεσις εἰς τὸ $\mathscr{D}_0$. Ἔστω ἕνας ἄξων x΄Ox καὶ δύο διανύσματα $\vec{\alpha} \in \mathscr{D}_0$ καὶ $\vec{\beta} \in \mathscr{D}_0$. **Ὀνομάζομεν διαφορὰν $\vec{\alpha}$ πλὴν $\vec{\beta}$**, καὶ τὴν συμβολίζομεν μὲ $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, τὸ διάνυσμα $\vec{\gamma} \in \mathscr{D}_0$, ποὺ ὑπάρχει καὶ εἶναι ἀκριβῶς ἕνα (§ 56.1, ἰδιότης 6η) μὲ τὴν ἰδιότητα $\vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$. Δηλ. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{\alpha}$.

Ἡ ἀφαίρεσις εἰς τὸ σύνολον $\mathscr{D}_0$ ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας, ποὺ ἔχει ἡ ἀφαίρεσις εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

§ 57. Ἡ ἰδιότης τοῦ Chasles (Σάλ)

Ἂν Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα, ὁπωσδήποτε τοποθετημένα ἐπὶ ἄξονος, τότε ἰσχύει : $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$ (1)

Πράγματι· ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἀθροίσματος μὲ δύο προσθετέους (δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα) γνωρίζομεν ὅτι, ἂν λάβωμεν τὰ τρία διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$, $\vec{A\Gamma}$, τότε τὸ ἄθροισμα $\vec{AB} + \vec{B\Gamma}$ εἶναι τὸ $\vec{A\Gamma}$ (καὶ κάθε ἴσον του) καὶ ὅτι διὰ τὰς ἀλγεβρικὰς τιμάς των ἰσχύει (ἐξ ὁρισμοῦ) $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}$.

Διὰ τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, ὁπωσδήποτε τοποθετημένα ἐπὶ ἄξονος, ἰσχύει ἐπίσης :

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} \quad \text{καὶ} \quad \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{A\Delta} \qquad (2)$$

Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = 0$, διότι ἐκ τῆς (1) ἔχομεν : $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma A} = \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma A} = 0$. (ἐπροσθέσαμεν εἰς τὰ μέλη τῆς (1) τὸ αὐτὸν ἀριθμὸν $\overline{\Gamma A}$).

Ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta A} = 0$ (διατί ;).

Ἀναλόγως ἔχομεν διὰ πέντε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε ἐπὶ ἄξονος :

1) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta E} = \vec{AE}$ καὶ $\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta E} = \overline{AE}$.

2) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta E} + \vec{EA} = \vec{AA} = \vec{O_A}$ καὶ

$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta E} + \overline{EA} = 0$.

Τὰ προηγούμενα γενικεύονται εὐκόλως καὶ διὰ ὁσαδήποτε (πεπερασμένου πλήθους) σημεῖα ἐπὶ ἄξονος.

Ἀσκήσεις

174) Πέντε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε εἶναι τοποθετημένα ἐπὶ ἄξονος μὲ τρόπον αὐθαίρετον. Νὰ εὕρετε τὰ ἀθροίσματα :

α) $\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, β) $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}$, γ) $\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{EB}$,

δ) $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{AB}$, ε) $\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Delta B}-\overrightarrow{B\Gamma}$, ϛ) $\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{\Delta E}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Delta B}$.

175) Τρία σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι ὡρισμένα μὲ σειρὰν αὐθαίρετον ἐπὶ ἄξονος. Νὰ εὕρετε τὰς διαφοράς :

α) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma B}$, β) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{\Gamma A}$, γ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$, δ) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{B\Gamma}$, ε) $\overrightarrow{\Gamma A}-\overrightarrow{\Gamma B}$

176) Ἔστω ὅτι ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος εἶναι ὡρισμένα τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἔτσι, ὥστε $\overline{AB}=-6$, $\overline{B\Gamma}=+4$, $\overline{\Gamma\Delta}=+8$.

Χωρὶς νὰ κάμετε σχῆμα α) νὰ εὕρετε τά :

$$\overline{BA},\ \overline{A\Gamma},\ \overline{\Delta B},\ \overline{A\Delta},\ \overline{\Delta A}+\overline{A\Gamma},\ \overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B},\ \overline{B\Delta}-\overline{B\Gamma}-\overline{\Gamma\Delta}.$$

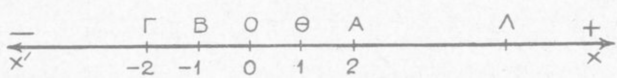
β) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ $\overline{EZ}$, ἂν εἶναι $\overline{\Delta E}=-3$ καὶ $\overline{BZ}=+9$.

177) Δίδονται ἐπὶ ἄξονος δύο διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$. Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίτον διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ ὥστε νὰ εἶναι :

α) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O}$ β) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}$.

§ 58. Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐπὶ ἄξονος

Ἔστω ἕνας ἄξων x'Ox (Σχ. 53). Ἐπὶ τοῦ x'Ox δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν μὲ σημεῖα του τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς. Ἔτσι τὸ Ο παριστάνει τὸν μηδέν, τὸ Θ παριστάνει τὸν +1, τὸ Α τὸν +2, τὸ Β τὸν −1, τὸ Γ τὸν −2 κτλ.

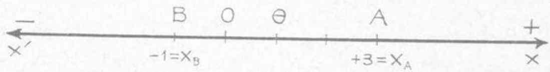


Σχ. 53

Εἶναι φανερὸν ὅτι τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ εἶναι $\overline{OA}=+2$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ εἶναι $\overline{OB}=-1$, διὰ τὸ $\overrightarrow{O\Gamma}$ εἶναι

$\overline{O\Gamma} = -2$ κτλ. Γενικῶς κάθε διάνυσμα, π.χ., $\overrightarrow{O\Lambda}$ ἔχει μίαν ἀλγεβρικὴν τιμὴν $\overline{O\Lambda}$. Ἡ ἀλγεβρικὴ αὐτὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{O\Lambda}$ ὀνομάζεται **συντεταγμένη τοῦ σημείου Λ** (τοῦ πέρατος δηλ. τοῦ $\overrightarrow{O\Lambda}$) ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'Ox$ εἴτε καὶ **τετμημένη τοῦ Λ.** Τὸ σημεῖον Ο ὀνομάζεται **ἀρχὴ** τῶν τετμημένων. Εἶναι λοιπὸν τετμημένη τοῦ $O = 0$, τετμημένη τοῦ $\Theta = +1$, τετμ. τοῦ $A = +2$, τετμ. τοῦ $B = -1$, τετμ. τοῦ $\Gamma = -2$ κτλ.

Ἐφαρμογὴ 1. Ἔστω (Σχ. 54) ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μὲ τετμημένην τοῦ $A = x_A$ καὶ τετμημένην τοῦ $B = x_B$. Τότε θὰ εἶναι $\overline{AB} = x_B - x_A$, δηλαδή: **ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος ἐπὶ ἄξονος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφοράν: τετμημένη τοῦ πέρατος πλὴν τετμημένη τῆς ἀρχῆς.**



Σχ. 54

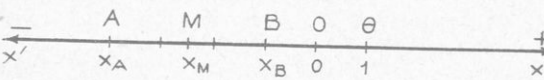
Ἔτσι εἰς τὸ Σχ. 54 εἶναι:

$x_A = +3$, $x_B = -1$, ἄρα $\overline{AB} = x_B - x_A = -1 - (+3) = -1 - 3 = -4$.

Ὁ τύπος $\overline{AB} = x_B - x_A$ δικαιολογεῖται ὡς ἑξῆς:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Longleftrightarrow \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$, καὶ $x_A + \overline{AB} = x_B \Longleftrightarrow \overline{AB} = x_B - x_A$

Ἐφαρμογὴ 2. Ἔστω (σχ. 55) ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μὲ τετμημένας τῶν ἄκρων του x_A, x_B. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετμημένη x_M τοῦ μέσου Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$. (Μέσον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ ὀνομάζεται τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μὲ ἄκρα τὰ Α, Β).



Σχ. 55

Ἔχομεν:
$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} &= \overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{OB}\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned}x_M + \overline{MA} &= x_A\\ x_M + \overline{MB} &= x_B\end{aligned}\right\} \quad (\sigma)$$

Ἀλλὰ τὸ $\overrightarrow{MA}$ καὶ $\overrightarrow{MB}$ εἶναι ἀντίθετα, ὥστε εἶναι $\overline{MA} + \overline{MB} = 0$.

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας (σ) θὰ ἔχωμεν:

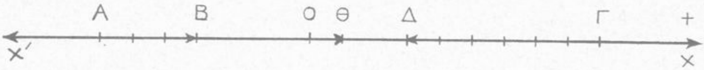
$$2x_M + 0 = x_A + x_B \Longleftrightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Ὥστε: **ἡ τετμημένη τοῦ μέσου τυχόντος διανύσματος ἐπὶ ἄξονος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων του.** Π.χ. εἰς τὸ Σχ. 55 εἶναι $x_A = -4$, $x_B = -1$ ὥστε εἶναι:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+(-1)}{2} = -2,5$$

§ 59. Γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ διάνυσμα

59.1. Εἰς τὸ Σχ. 56 βλέπετε δύο (ἀντίρροπα) διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ (θετικὸν) καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (ἀρνητικὸν) τοῦ ἄξονος x'Οx. Βλέπετε ἀκόμη ὅτι ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι $\overline{AB} = +3$ καὶ ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι $\overline{\Gamma\Delta} = -6$.



Σχ. 56

Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ γράψωμεν $\overline{\Gamma\Delta} = -2 \cdot (+3) = -2 \cdot \overline{AB}$, δηλαδή: ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ (ἀρνητικοῦ) διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ (ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ) -2 ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ (θετικοῦ) διανύσματος $\overrightarrow{AB}$. Δι' αὐτὸν τὸν λόγον λέγομεν ὅτι: **τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι γινόμενον τοῦ -2 ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ καὶ συμβολίζομεν: $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ἰσότητες:

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$ (διανυσματικὴ ἰσότης)

$\overline{\Gamma\Delta} = -2 \cdot \overline{AB}$ (ἀριθμητικὴ ἰσότης)

εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των.

Γενικῶς: **ἂν $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τυχὸν διάνυσμα ἑνὸς ἄξονος καὶ ρ εἶναι τυχὼν σχετικὸς ἀριθμός, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι: ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τοῦ αὐτοῦ ἄξονος εἶναι γινόμενον τοῦ ρ ἐπὶ τὸ $\overrightarrow{AB}$ καὶ θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \rho \cdot \overrightarrow{AB}$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι $\overline{\Gamma\Delta} = \rho \cdot \overline{AB}$, δηλ. ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι γινόμενον τοῦ ρ ἐπὶ τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ $\overrightarrow{AB}$.**

Ὥστε ἔχομεν (ἐξ ὁρισμοῦ) τὴν ἰσοδυναμίαν :

$$(\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \rho \cdot \overrightarrow{AB}) \iff (\overline{\Gamma\Delta} = \rho \cdot \overline{AB})$$

Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν εἶναι (Σχ. 56) :

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = +2 \cdot \overrightarrow{AB}$, διότι εἶναι $\overline{\Delta\Gamma} = +6 = +2 \cdot (+3) = +2 \cdot \overline{AB}$

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = +2 \cdot \overrightarrow{BA}$, διότι εἶναι $\overline{\Gamma\Delta} = -6 = +2 \cdot (-3) = +2 \cdot \overline{BA}$

$\overrightarrow{\Delta\Gamma} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$, διότι εἶναι $\overline{\Delta\Gamma} = -2 \cdot (+3) = -2 \cdot \overline{AB}$

Ἐπίσης, συμφώνως πρὸς τὸν προηγούμενον ὁρισμόν, εἶναι :

1) $0 \cdot \overrightarrow{AB} =$ μὲ κάθε μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ χ΄Οχ, π.χ. μὲ τὸ $\overrightarrow{XX}$, διότι εἶναι $\overline{XX} = 0 = 0 \cdot \overline{AB}$.

2) $\rho \cdot \overrightarrow{AA} =$ μὲ κάθε μηδενικὸν διάνυσμα τοῦ χ΄Οχ, π.χ. μὲ τὸ $\overrightarrow{XX}$, διότι εἶναι $\overline{XX} = 0 = \rho \cdot 0 = \rho \cdot \overline{AA}$.

3) Ἂν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} =$ θετικός $\cdot \overrightarrow{AB}$ καὶ $B \neq A$, τότε εἶναι $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ὁμόρροπον τοῦ $\overrightarrow{AB}$, διότι εἶναι $\overline{\Gamma\Delta} =$ θετικός $\cdot \overline{AB}$, ἄρα, ἂν $\overline{AB} > 0$, θὰ εἶναι καὶ $\overline{\Gamma\Delta} > 0$ καὶ ἂν $\overline{AB} < 0$, θὰ εἶναι καὶ $\overline{\Gamma\Delta} < 0$.

4) Ἂν $\overrightarrow{\Gamma\Delta} =$ ἀρνητικός $\cdot \overrightarrow{AB}$ καὶ $B \neq A$, τότε εἶναι $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀντίρροπον τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

59.2. Ἔστω τώρα $\vec{\alpha}$ ἕνα **ἐλεύθερον διάνυσμα** ἑνὸς ἄξονος χ΄Οχ, $\overrightarrow{OA}$ ἕνας ἀντιπρόσωπός του καὶ ρ ἕνας σχετικὸς ἀριθμός. Θὰ ὀνομάζωμεν γινόμενον τοῦ ρ ἐπὶ τὸ $\vec{\alpha}$, καὶ θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $\rho \cdot \vec{\alpha}$, τὸ ἐλεύθερον διάνυσμα τοῦ x΄Οx, ποὺ ἕνας του ἀντιπρόσωπος εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OB}$ μὲ $\overrightarrow{OB} = \rho \cdot \overrightarrow{OA}$.

Ἀσκήσεις

178) Τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ ἄξονος χ΄Οχ δίδονται μὲ τὰς τετμημένας των $x_A = 2$, $x_B = -4$, $x_\Gamma = 5$, $x_\Delta = -7$.

Ζητεῖται : α) νὰ εὕρετε τὰς ἀλγεβρικὰς τιμὰς καθενὸς ἀπὸ τὰ διανύσματα: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Delta}$.

β) Νὰ ἐπαληθεύσετε τὰς ἰσότητας :

$$\overline{AB} + \overline{B\Gamma} = \overline{A\Gamma}, \quad \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma\Delta} + \overline{\Delta A} = 0, \quad \overline{B\Delta} - \overline{B\Gamma} = \overline{\Gamma\Delta}$$

179) Ἐπὶ ἄξονος $x'Ox$ δίδονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β διὰ τῶν τετμημένων των $x_A = 3$, $x_B = -5$. Ζητεῖται : α) νὰ εὕρετε τὰς τετμημένας τῶν σημείων Ε, Ζ, Η, Θ, ἐὰν γνωρίζετε ὅτι $\overline{AE} = 4$, $\overline{BZ} = 8$, $\overline{HA} = -2$, $\overline{\Theta B} = 12$. Τί παρατηρεῖτε σχετικῶς μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Ζ ; β) Νὰ εὕρετε τὴν τετμημένην x_M τοῦ σημείου Μ, ποὺ καθορίζεται ἀπὸ κάθε μίαν τῶν ἰσοτήτων :

$$\overline{AM} = \overline{BA}, \quad \overline{AM} = \overline{MB}, \quad \overline{MA} = 2 \cdot \overline{AB}, \quad 3 \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = 0$$

180) Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος ἔχουν τετμημένην $x_A = 8$ καὶ $x_B = -4$. Νὰ εὕρετε τὴν τετμημένην x_M τοῦ μέσου Μ τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

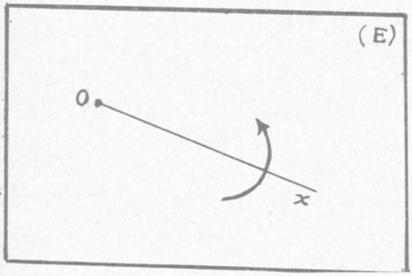
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΑ ΣΗΜΕΙΟΣΥΝΟΛΑ

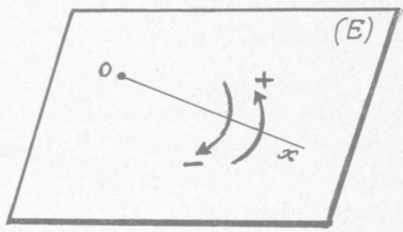
§ 60. Προσανατολισμένον ἐπίπεδον

Ἔστω Ε ἕνα τυχὸν ἐπίπεδον, π.χ. τὸ ἐπίπεδον τοῦ πίνακος (Σχ. 57). Μία ἡμιευθεῖσα τοῦ Ε, π.χ. ἡ Ox, ἠμπορεῖ νὰ τὸ διαγράψῃ παραμένουσα ἐπ' αὐτοῦ καὶ στρεφομένη περὶ τὸ Ο κατὰ δύο φοράς, εἴτε δηλαδὴ κατὰ τὴν φοράν, ποὺ δεικνύει τὸ καμπύλον βέλος τοῦ Σχ. 57, εἴτε κατὰ τὴν ἀντίθετόν της.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὴν μίαν φορὰν (διαγραφῆς τοῦ Ε ἀπὸ τὴν Ox)



Σχ. 57



Σχ. 58

ἀπὸ τὴν ἄλλην, ὀνομάζομεν τὴν μίαν (ἀδιάφορον ποίαν) θετικὴν (+) καὶ τὴν ἄλλην ἀρνητικὴν (−), ὅπως π.χ. βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 58.

Κάθε ἐπίπεδον , ἔστω Ε, μαζὺ μὲ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπ' αὐτοῦ, δηλαδὴ τὸ σύνολον { ἐπίπ. Ε, θετ. φορὰ ἐπὶ τοῦ Ε } ὀνομάζεται : **ἕνα προσανατολισμένον ἐπίπεδον.**

§ 61. Προσανατολισμένη γωνία

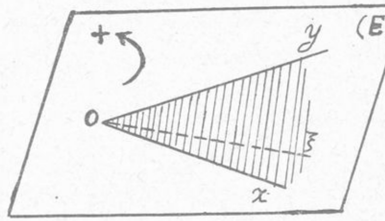
Εἰς τὸ Σχ. 59 βλέπετε ἕνα προσανατολισμένον ἐπίπεδον Ε καὶ ἐπάνω εἰς αὐτὸ δύο διαφόρους μεταξύ των ἡμιευθείας Ox, Oy. Ἂς θεωρήσωμεν μίαν γωνίαν (μὴ μηδενικήν), π.χ. τὴν διαγραμμισμένην, μὲ πλευρὰς τὰς Ox, Oy. Ἡ γωνία αὐτή, ὡς γνωστόν, συμβολίζεται μὲ $\sphericalangle$ xOy εἴτε $\sphericalangle$ yOx εἴτε $\sphericalangle$ (Ox, Oy) εἴτε $\sphericalangle$ (Oy, Ox).

Ἡ γωνία xOy ἠμπορεῖ νὰ διαγραφῇ ἀπὸ μίαν ἡμιευθεῖαν Οξ τοῦ Ε διὰ περιστροφῆς της περὶ τὸ Ο εἴτε ἀπὸ τὴν θέσιν Ox πρὸς τὴν θέσιν Oy κατὰ φοράν, ποὺ συμφωνεῖ μὲ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ Ε, εἴτε ἀπὸ τὴν θέσιν Oy πρὸς τὴν Ox, δηλαδὴ κατὰ φοράν, ποὺ συμφωνεῖ μὲ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ Ε.

Ἡ ὡς ἄνω γωνία xOy μαζὶ μὲ τὴν θετικὴν φορὰν (*) ἀπὸ τὴν Ox πρὸς τὴν Oy ὀνομάζεται : **ἡ (μὴ μηδενικὴ) προσανατολισμένη γωνία (Ox, Oy)** καὶ συμβολίζεται μὲ $\sphericalangle$ (Ox, Oy). Ἡ γωνία αὐτὴ λέγομεν ὅτι εἶναι : **μία θετικὴ γωνία ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου E.**

Ἡ ἰδία γωνία xOy μαζὺ μὲ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν ἀπὸ τὴν Oy πρὸς τὴν Ox ὀνομάζεται : **ἡ (μὴ μηδενικὴ) προσανατολισμένη γωνία (Oy, Ox)** καὶ συμβολίζεται μὲ $\sphericalangle$ (Oy, Ox). Ἡ γωνία αὐτὴ λέγομεν ὅτι εἶναι : **μία ἀρνητικὴ γωνία ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου E.**

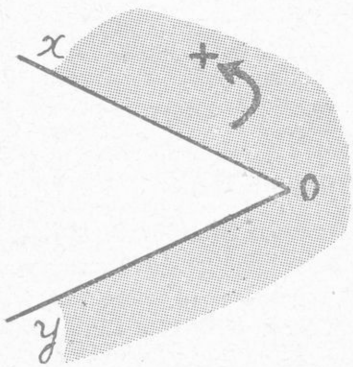
Τῆς γωνίας $\sphericalangle$ (Ox, Oy) ἡ Ox λέγεται **ἡ πρώτη** εἴτε **ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ** καὶ ἡ Oy **ἡ δευτέρα** εἴτε **ἡ τελικὴ** πλευρά της. Τῆς γωνίας $\sphericalangle$ (Oy, Ox) ἡ Oy λέγεται **ἡ πρώτη** εἴτε **ἡ ἀρχικὴ πλευρὰ** καὶ ἡ Ox λέγεται **ἡ δευτέρα** εἴτε **ἡ τελικὴ πλευρά της.**



Σχ. 59

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι :

i) Εἰς κάθε μὴ μηδενικὴν γωνίαν ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο προσανατολισμέναι γωνίαι, μία θετικὴ καὶ μία ἀρνητική, λέγομεν δὲ ὅτι **καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἡ ἀντίθετος τῆς ἄλλης. ii) κάθε προσανατολισμένη γωνία ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ἢ θὰ εἶναι θετικὴ ἢ θὰ εἶναι ἀρνητική.** Ἔτσι, π.χ., ἀπὸ τὴν σκιασμένην γωνίαν τοῦ Σχ. 60 ὁρίζονται αἱ προσανατολισμέναι γωνίαι $\sphericalangle$ (Oy, Ox) καὶ $\sphericalangle$ (Ox, Oy).



Σχ. 60

---

* Ὡς θετικὴ φορὰ διαγραφῆς ἑνὸς ἐπιπέδου, ὅπως τὸ E τοῦ σχ. 59, ὑπὸ μιᾶς στρεφομένης περὶ τὴν ἀρχήν της ἡμιευθείας του, λαμβάνεται συνήθως ἡ ἀντίθετος τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

Ἂν μ ($\neq 0$) εἶναι τὸ μέτρον (ἀπόμετρον) μιᾶς μὴ μηδενικῆς γωνίας, τότε τὸν ἀριθμὸν $+\mu$ ὀνομάζομεν **ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς ἀντιστοίχου της θετικῆς γωνίας** καὶ τὸν ἀριθμὸν $-\mu$ **ἀλγεβρικὴν τιμὴν τῆς ἀντιστοίχου της ἀρνητικῆς γωνίας.**

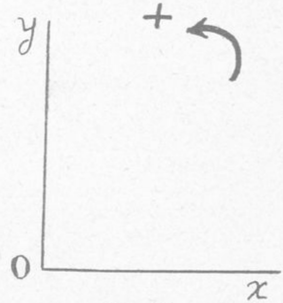
Εἰς τὸ Σχ. 61 βλέπετε : δύο καθέτους ἡμιευθείας, δύο συνήθεις γωνίας καὶ τέσσαρας προσανατολισμένας γωνίας :

1) $\sphericalangle$ (Ox, Oy), ἀλγεβρ. τιμή της $+\ 90^0$

2) $\sphericalangle$ (Ox, Oy), ἀλγεβρ. τιμή της -270^0

3) $\sphericalangle$ (Oy, Ox), ἀλγεβρ. τιμή της $+270^0$

4) $\sphericalangle$ (Oy, Ox), ἀλγεβρ. τιμή της $-\ 90^0$



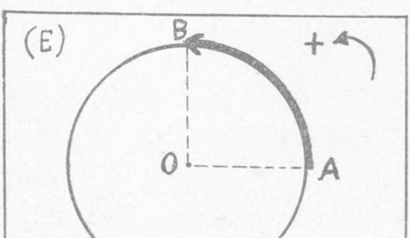
Σχ. 61

Σημ. Δὲν θεωροῦμεν ἐδῶ προσανατολισμένας γωνίας τῶν ὁποίων ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ὑπερβαίνει (ἀπολύτως) τὰς 360^0. Ἄλλως ὑπάρχουν ἀπειράριθμοι γωνίαι θετικαὶ καὶ ἀπειράριθμοι ἀρνητικαί, ποὺ ἔχουν, π.χ., ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν Ox (Σχ. 61) καὶ τελικικὴν πλευρὰν τὴν Oy. Ὅλαι αὐταὶ αἱ γωνίαι, ποὺ ἔχουν κοινὴν ἀρχὴν πλευρὰν καὶ κοινὴν τελικὴν πλευράν, διαφέρουν μεταξύ των κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον μιᾶς πλήρους γωνίας.

Κατ᾽ ἐπέκτασιν, εἰς μίαν μηδενικὴν γωνίαν (μέτρου λοιπὸν 0), θεωροῦμεν ὅτι ἀντιστοιχεῖ μία « μηδενικὴ προσανατολισμένη γωνία ». Ὡς ἀλγεβρικὴν τιμήν της ὁρίζομεν τὸν ἀριθμὸν 0.

§ 62. Τόξον κύκλου προσανατολισμένον

Εἰς τὸ Σχ. 62 βλέπετε ἕνα προσανατολισμένον ἐπίπεδον Ε, ἕνα κύκλον Ο ἐπάνω εἰς τὸ Ε καὶ δύο, διάφορα μεταξύ των, σημεῖα Α, Β ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο. Βλέπετε λοιπὸν καὶ δύο τόξα μὲ ἄκρα τὰ Α, Β. Ἂς θεωρήσωμεν ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ τόξα τὸ ζωηρῶς σχεδιασμένον. Τὸ τόξον αὐτὸ ἠμπορεῖ νὰ διαγραφῇ ἀπὸ ἕνα κινητὸν σημεῖον εἴτε κατὰ τὴν φοράν, ποὺ « συμφωνεῖ » μὲ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ Ε, δηλ. ἀπὸ τὸ Α



Σχ. 62

πρὸς τὸ B, εἴτε κατὰ τὴν « ἀντίθετον», ποὺ « συμφωνεῖ » μὲ τὴν ἀρνητικὸν φορὰν ἐπὶ τοῦ E, δηλ. ἀπὸ τὸ B πρὸς τὸ A.

Τὸ ὡς ἄνω **τόξον μὲ ἄκρα τὰ A, B μαζὺ μὲ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B ὀνομάζεται : τὸ (μὴ μηδενικόν), προσανατολισμένον τόξον ἄλφα βῆτα** καὶ συμβολίζεται μὲ $\overset{+}{\widehat{AB}}$. Τὸ προσανατολισμένον αὐτὸ τόξον λέγομεν ὅτι εἶναι **ἕνα θετικὸν τόξον** (διότι ἡ φορά του συμφωνεῖ μὲ τὴν θετικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου E). Τὸ σημεῖον A λέγεται **ἡ ἀρχὴ** τοῦ προσανατολισμένου τόξου ἄλφα βῆτα καὶ τὸ B **τὸ πέρας** του. Εἰς τὸ σχῆμα θέτομεν συνήθως μίαν αἰχμὴν βέλους εἰς τὸ πέρας τοῦ προσανατολισμένου τόξου.

Τὸ αὐτὸ ὡς ἄνω **τόξον μὲ ἄκρα τὰ A, B μαζὺ μὲ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ B πρὸς τὸ A ὀνομάζεται : τὸ (μὴ μηδενικὸν) προσανατολισμένον τόξον βῆτα ἄλφα** καὶ συμβολίζεται μὲ $\overset{-}{\widehat{BA}}$. Τὸ προσανατολισμένον αὐτὸ τόξον λέγομεν ὅτι εἶναι **ἕνα ἀρνητικὸν τόξον** (διότι ἡ φορά του συμφωνεῖ μὲ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου E). Τὸ B λέγεται **ἡ ἀρχὴ** τοῦ $\overset{-}{\widehat{BA}}$ καὶ τὸ A **τὸ πέρας** του.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι :

i) ἀπὸ κάθε μὴ μηδενικὸν κυκλικὸν τόξον ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου γεννῶνται δύο προσανατολισμένα τόξα, ἕνα θετικὸν καὶ ἕνα ἀρνητικόν· λέγομεν ὅτι τὸ καθένα ἀπὸ αὐτὰ εἶναι τὸ **ἀντίθετον** τοῦ ἄλλου.

ii) κάθε προσανατολισμένον τόξον ἐπὶ προσανατολισμένου ἐπιπέδου ἢ θὰ εἶναι θετικὸν ἢ θὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἔτσι ἀπὸ τὸ ζωηρῶς σχεδιασμένον τόξον τοῦ Σχ. 62 γεννῶνται τὰ προσανατολισμένα τόξα $\overset{+}{\widehat{AB}}$ καὶ $\overset{-}{\widehat{BA}}$.

Ἂν μ ($\neq 0$) εἶναι τὸ μέτρον (ἀπόμετρον) ἑνὸς μὴ μηδενικοῦ τόξου $\widehat{AB}$, τότε τὸν ἀριθμὸν $+\mu$ ὀνομάζομεν **ἀλγεβρικὴν τιμὴν** τοῦ ἀντιστοίχου θετικοῦ τόξου, τὸν δὲ $-\mu$ ὀνομάζομεν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ ἀντιστοίχου ἀρνητικοῦ τόξου. Ἔτσι εἰς τὸ Σχ. 62 βλέπετε δύο συνήθη τόξα μὲ ἄκρα τὰ A, B. Τὸ ἕνα μέτρου 90^0 καὶ τὸ ἄλλο μέτρου 270^0. Βλέπετε ἐπίσης τέσσαρα προσανατολισμένα τόξα, τά :

1) $\overset{+}{\overparen{AB}}$, ἀλγεβρ. τιμή του $+\ 90^0$

2) $\overset{-}{\overparen{AB}}$, ἀλγεβρ. τιμή του -270^0

3) $\overset{+}{\overparen{BA}}$, ἀλγεβρ. τιμή του $+270^0$

4) $\overset{-}{\overparen{BA}}$, ἀλγεβρ. τιμή του $-\ 90^0$

Σημ. Δὲν θεωροῦμεν ἐδῶ προσανατολισμένα τόξα, τῶν ὁποίων ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ ὑπερβαίνει (ἀπολύτως) τὰς 360^0 περιφερείας.

Κατ' ἐπέκτασιν, εἰς ἕνα μηδενικὸν τόξον (μέτρου λοιπὸν 0), θεωροῦμεν ὅτι ἀντιστοιχεῖ ἕνα « μηδενικὸν προσανατολισμόνον τόξον »· ὡς ἀλγεβρικὴν τιμήν του ὁρίζομεν τὸν ἀριθμὸν μηδέν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΝ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΣΥΝΟΛΟΥ ΕΠΙ ΑΛΛΟ ΣΥΝΟΛΟΝ. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

§ 63. Διατεταγμένον ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν

63.1. Ἔστω ὅτι ἕνα κατάστημα πωλεῖ εἴδη ἀριθμημένα: εἶδος 1, εἶδος 2, εἶδος 3 κτλ. Ἕνας πελάτης ἐνδιαφέρεται νὰ παραγγείλῃ εἰς τὸ κατάστημα μερικὰ εἴδη. Θὰ ζητήσῃ βεβαίως νὰ μάθῃ τὰς τιμάς των. Ἔστω λοιπὸν ὅτι ὁ πελάτης ἔλαβε τὰς ἑξῆς «πληροφορίας»:

1η :	εἶδος	ὑπ'	ἀριθ.	7,	τιμὴ	δρχ.	84
2α :	»	»	»	19,	»	»	67
3η :	»	»	»	67,	»	»	19
4η :	»	»	»	70,	»	»	70 κτλ.

Διὰ νὰ μὴ λησμονήσῃ ὁ πελάτης τὰς ἀνωτέρω πληροφορίας καὶ διὰ συντομίαν τὰς γράφει εἰς τὸ σημειωματάριόν του ὡς ἑξῆς.

(7, 84)	καὶ	ἐννοεῖ :	τὸ	εἶδος	7	τιμᾶται	84	δρχ.
(19, 67)	»	»	»	»	19	»	67	»
(67, 19)	»	»	»	»	67	»	19	»
(70, 70)	»	»	»	»	70	»	70	» κτλ.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι **i)** κάθε «πληροφορία» χαρακτηρίζεται ἀπὸ δύο ἀριθμοὺς μαζὺ (ἴσους ἢ διαφόρους), δηλαδή, ὅπως δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἀπὸ ἕνα ζεῦγος ἀριθμῶν. **ii)** ὁ πελάτης συνεφώνησε μὲ τὸν ἑαυτόν του νὰ γράφῃ κάθε ζεῦγος (κάθε πληροφορίαν) μὲ ἕνα ὡρισμένον τρόπον διὰ συντομίαν καὶ εὐκολίαν, δηλαδή: νὰ γράφῃ τοὺς δύο ἀριθμοὺς τοῦ ζεύγους μέσα εἰς μίαν παρένθεσιν, μεταξύ των ἕνα κόμμα, ἀλλὰ ἀριστερὰ ἀπὸ τὸ κόμμα, δηλαδὴ πρῶτον, νὰ γράφῃ πάντοτε τὸν αὔξοντα ἀριθμὸν τοῦ εἴδους καὶ δεξιὰ ἀπὸ τὸ κόμμα, δηλαδὴ δεύτερον, νὰ γράφῃ πάντοτε τὸν ἀριθμόν, ποὺ φανερώνει τὴν τιμὴν τοῦ εἴδους. Ἔτσι ὁ πελάτης δὲν κάμνει σύγχυσιν μεταξὺ ζευγῶν ὅπως τὰ (19, 67) καὶ (17, 69), διότι μὲ τὸ (19, 67) ἐννοεῖ: εἶδος ὑπ' ἀριθ. 19, τιμὴ δρχ. 67 καὶ μὲ τὸ (67, 19) ἐννοεῖ: εἶδος ὑπ' ἀριθ. 67, τιμὴ 19 δρχ.

63.2. Χρησιμοποιοῦντες σχετικοὺς ἀριθμοὺς ἠμποροῦμεν, ἐντελῶς τυπικῶς, νὰ σχηματίσωμεν παραστάσεις ὡς ἀνωτέρω αἱ: (7, 84), (19, 67),

(67, 19), (70, 70) κτλ. Π. χ. : (–3,5), $\left(\frac{3}{4}, -20\right)$, (–8, –10), (–3, 2), (2, –3), (4, 4), (0, 0) κτλ. καὶ γενικῶς (α, β), ὅπου α, β σχετικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι μεταξύ των εἴτε ὄχι.

Συμφωνοῦμεν τώρα τὸ ἑξῆς : **μία παράστασις (α, β) νὰ λέγεται ἴση μὲ μίαν ἄλλην (α′, β′), ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι α = α′ καὶ β = β′.** Μὲ τὴν συμφωνίαν αὐτὴν κάθε παράστασις (α, β) μὲ τοὺς α, β σχετικοὺς ἀριθμοὺς (διαφόρους μεταξύ των εἴτε ὄχι) λέγεται : **ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν.** Δηλαδὴ εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν ἐπιτρέπεται ἐναλλαγὴ τῶν ἀριθμῶν, ποὺ τὸ ἀποτελοῦν (ὅταν εἶναι διάφοροι), διότι τότε τὸ ζεῦγος ἀλλάζει. Ἔτσι, πχ., τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (–3, 4) εἶναι διάφορον τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (4, –3).

Ἐὰν (x, y) εἶναι ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος, τότε τὸ x λέγεται **τὸ πρῶτον μέλος** τοῦ ζεύγους καὶ τὸ y **τὸ δεύτερον μέλος** του.

§ 64. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλου ἐπὶ ἄλλο σύνολον

64.1. Ἀπὸ τὸ παράδειγμα τῆς § 63.1 ἐννοῦμεν ὅτι πολλάκις εἴμεθα ὑποχρεωμένοι (δι᾽ ὡρισμένους λόγους) νὰ ἀσχολούμεθα μὲ διατεταγμένα ζεύγη σχετικῶν ἀριθμῶν. Δίδομεν ἀκόμη ἕνα παράδειγμα : ἀριθμοῦμεν τὰς ἡμέρας ἑνὸς ὡρισμένου ἔτους : 1, 2, 3, 4, . . . καὶ καταγράφομεν τὴν θερμοκρασίαν ἑκάστης ἡμέρας. Ἔχομεν καὶ ἐδῶ ζεύγη. Συμφωνοῦμεν νὰ γράφωμεν πρῶτον τὸν αὔξοντα ἀριθμὸν τῆς ἡμέρας καὶ δεύτερον τὸν ἀριθμόν, ποὺ φανερώνει τὴν θερμοκρασίαν κατὰ τὴν ἡμέραν ἐκείνην. Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν διατεταγμένα ζεύγη ἀριθμῶν, ὅπως, π.χ., τά :

(1, – 4), (2, – 8), (3, – 5), . . . (300, + 30) κ.τ.λ.

64.2. Γενικῶς : ἂν ἔχωμεν δύο ὁποιαδήποτε μὴ κενὰ σύνολα Α, Β, **ὄχι ὑποχρεωτικῶς σύνολα ἀριθμῶν,** δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν παραστάσεις, ὡς αἱ (α, β), (α′, β′) κ.τ.λ., ὅπου τὸ πρῶτον μέλος, κάθε παρασστάσεως νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον Α καὶ τὸ δεύτερον εἰς τὸ σύνολον Β. Ἐὰν τώρα συμφωνήσωμεν νὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι (α, β) = (α′, β) ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, εἶναι α = α′ καὶ β = β′, τότε κάθε τοιαύτη παράστασις λέγεται : **ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος.**

Τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (α, β), ποὺ σχηματίζονται, ἂν λάβωμεν κάθε α ἀπὸ τὸ Α καὶ κάθε β ἀπὸ τὸ Β λέγεται : τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον τοῦ συνόλου Α ἐπὶ τὸ σύνολον Β καὶ συμβολίζεται μὲ Α×Β.

Εἰς τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν δὲν ἀποκλείεται νὰ εἶναι $A = B$· τότε τὸ $A \times B$ γίνεται $A \times A$ καὶ γράφεται συνήθως A^2.

Συμβολικῶς ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου γράφεται :

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ καὶ } y \in B \}.$$

Τὰ σύνολα A, B λέγονται **παράγοντες** τοῦ καρτ. γινομένου, **πρῶτος** τὸ A, **δεύτερος** τὸ B.

Παράδειγμα 1ον. Ἔστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$. Ἔχομεν :

$A \times B = \{ (\alpha, 2), (\alpha, 3), (\beta, 2), (\beta, 3), (\gamma, 2), (\gamma, 3) \}$.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπὸ κάθε στοιχεῖον τοῦ A προκύπτουν 2 ζεύγη (ὅσα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ β), ἑπομένως ἀπὸ τὰ 3 στοιχεῖα τοῦ A θὰ προκύψουν $3 \cdot 2 = 6$ ζεύγη. Δηλ. ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τοῦ $A \times B$ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν τῶν A καὶ B.

Μὲ τὸν ἴδιον τρόπον συμπεραίνομεν, γενικώτερον, ὅτι ἂν διὰ δύο πεπερασμένα σύνολα A καὶ B εἶναι $\# A = \kappa$ καὶ $\# B = \lambda$, τότε $\# (A \times B) = \kappa \cdot \lambda$.

Παράδειγμα 2ον. Ἔστω πάλιν $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$ καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ $B \times A$. Ἔχομεν :

$B \times A = \{ (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma) \}$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ $B \times A$ εἶναι $2 \cdot 3 = 6$. Τὸ $A \times B$ ὅμως εἶναι διάφορον τοῦ $B \times A$.

Γενικῶς : $A \neq B \Longrightarrow A \times B \neq B \times A$

Παράδειγμα 3ον. Ἔστω $A = B = \{-2, 3, 4\}$. Τότε εἶναι :

$$A \times A = A^2 = \{ (-2, -2,), (-2, 3), (-2, 4), (3, -2), (3,3), (3, 4), (4, -2), (4, 3), (4, 4) \}.$$

§ 65. Πίναξ διπλῆς εἰσόδου

Εἰς τὸ Σχ. 63 βλέπετε ἕνα πίνακα, ποὺ ὀνομάζεται **πίναξ διπλῆς εἰσόδου**, μὲ τὸν ὁποῖον παριστάνομεν τὸ καρτεσιανὸν γινόμενον $A \times B$, ὅπου :

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ καὶ } B = \{3, 2\}.$$

3	(α,3)	(β,3)	(γ,3)
2	(α,2)	(β,2)	(γ,2)
B / A	α	β	γ

Σχ. 63

Ἡ στήλη τοῦ α δίδει τὰ ζεύγη (α, 2), (α, 3) εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν των. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὰς στήλας τῶν β καὶ γ τοῦ πίνακος.

Εἰς τὸ Σχ. 64 βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου διὰ τὴν παράστασιν τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times A$, ὅπου $A = \{-2, 3, 4\}$.

(Νὰ κατασκευάσετε πίνακα διπλῆς εἰσόδου διὰ τὸ $B \times A$, ὅπου $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$. Ποῦ θὰ τοποθετήσετε τὸ στοιχεῖα τοῦ B ;)

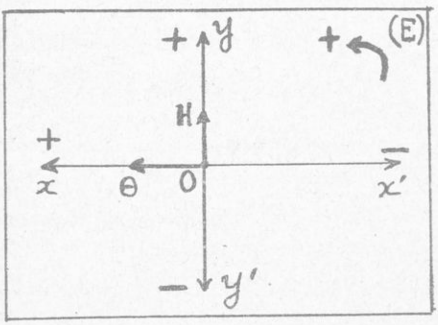
Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ διὰ ἕνα τυχὸν ὑποσύνολον Καρτεσιανοῦ γινομένου.

4	(-2,4)	(3,4)	(4,4)
3	(-2,3)	(3,3)	(4,3)
-2	(-2,-2)	(3,-2)	(4,-2)
A / A	-2	3	4

Σχ. 64

§ 66. Ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων. Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον

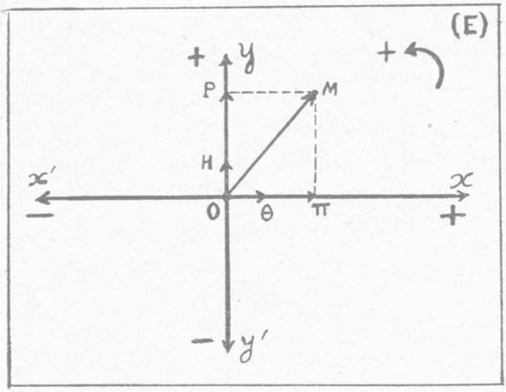
66.1. Ἔστω ἕνα προσανατολισμένον ἐπίπεδον Ε (Σχ. 65). Λαμβάνομεν ἐπ' αὐτοῦ ἕνα (αὐθαίρετον σημεῖον Ο καὶ δύο, μὴ μηδενικά, κάθετα διανύσματα $\overrightarrow{OH}$, $\overrightarrow{O\Theta}$. Ὁρίζομεν τώρα τοὺς ἄξονας μὲ κοινὴν των ἀρχὴν τὸ Ο καὶ μοναδιαῖα των διανύσματα τὰ $\overrightarrow{O\Theta}$, $\overrightarrow{OH}$. Τὸ ζεῦγος, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς δύο ὡς ἄνω ἄξονας λέγεται : **ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων ἐπὶ τοῦ προσανατολισμένου ἐπιπέδου Ε.**



Σχ. 65

66.2. Ἔστω ἕνα προσανατολισμένον ἐπίπεδον (Σχ. 66) μαζὶ μὲ ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων x′Ox, y′Oy. **Συνηθίζεται τὸ σύστημα αὐτὸ νὰ λαμβάνεται ἔτσι, ὥστε, ἂν ὁ θετικὸς ἡμιάξων Ox στραφῇ (ἐπὶ τοῦ Ε) περὶ τὸ Ο κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν κατὰ γωνίαν μέτρου 90⁰ νὰ ταυτίζεται μὲ τὸν θετικὸν ἡμιάξονα Oy.** Αὐτό, ὅπως βλέπετε, ἰσχύει εἰς τὸ Σχ. 66 (δὲν ἰσχύει ὅμως εἰς τὸ Σχ. 65). Ὅταν ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων ἔχῃ ληφθῇ κατὰ τὸν τρόπον, ποὺ τὸ ἐλάβαμεν εἰς τὸ Σχ. 66, τότε **ὁ ἄξων x′Ox λέγεται καί : ὁ πρῶτος ἄξων τοῦ συστήματος** εἴτε : **ὁ**

ἄξων τῶν τετμημένων, ὁ δὲ y′Oy λέγεται : **ὁ δεύτερος ἄξων τοῦ συστήματος** εἴτε καὶ **ὁ ἄξων τῶν τεταγμένων** (Τὸ ὀρθογώνιον δηλαδὴ σύστημα ἀξόνων εἶναι τώρα ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος). Ἂν ἐπὶ πλέον τὰ μοναδιαῖα διανύσματα ληφθοῦν ἰσομήκη, τότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἕνα **ὀρθοκανονικὸν** σύστημα ἀξόνων ἐπὶ τοῦ Ε.



Σχ. 66

66.3. Ἔστω τώρα τὸ ὡς ἄνω ἐπίπεδον Ε μαζὶ μὲ ἕνα ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων, ἔτσι, ὅπως τὸ ἐλάβαμεν εἰς τὸ Σχ. 66, καὶ Μ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ε. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς παραλλήλους τῶν ἀξόνων· εὑρίσκομεν ἔτσι ἕνα σημεῖον Π ἐπὶ τοῦ x′Ox καὶ ἕνα σημεῖον Ρ ἐπὶ τοῦ y′Oy. Ἔχουν λοιπὸν ὁρισθῆ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{O\Pi}$, $\overrightarrow{OP}$.

Τὸ διάνυσμα	$\overrightarrow{OM}$ λέγεται	:	**ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ σημείου Μ.**
» »	$\overrightarrow{O\Pi}$ »	:	**ἡ πρώτη προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{OM}$.**
» »	$\overrightarrow{OP}$ »	:	**ἡ δευτέρα προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{OM}$.**
Ἡ ἀλγ. τιμὴ $\overline{O\Pi}$ τοῦ	$\overrightarrow{O\Pi}$ »	:	**ἡ πρώτη συντεταγμένη εἴτε ἡ τετμημένη τοῦ Μ.**
» » » $\overline{OP}$ τοῦ	$\overrightarrow{OP}$ »	:	**ἡ δευτέρα συντεταγμένη εἴτε ἡ τεταγμένη τοῦ Μ.**

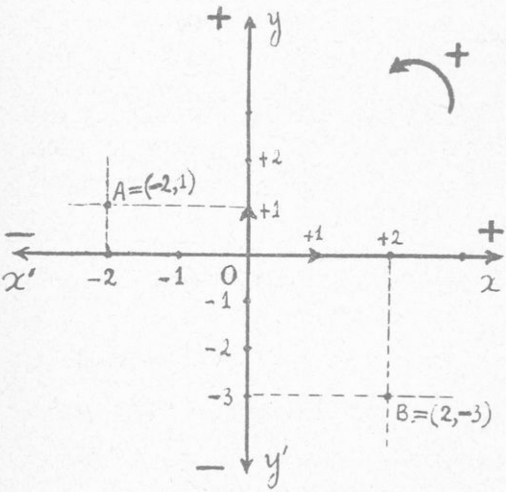
Ἡ τετμημένη ἑνὸς σημείου, ἔστω Μ, συμβολίζεται μὲ x_M καὶ ἡ τεταγμένη του μὲ y_M, ὀνομάζονται δὲ ἀμφότεραι (μὲ τὸ κοινὸν ὄνομα) **ὀρθογώνιοι συντεταγμέναι τοῦ Μ.**

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι : 1) **μὲ τὸν τρόπον, ποὺ εἴδαμεν προηγουμένως, εἰς κάθε σημεῖον, π.χ., Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, διατ. ζεῦγος μὲ πρῶτον μέλος του τὴν πρώτην συντεταγμένην x_M τοῦ Μ καὶ μὲ δεύτερον μέλος του τὴν δευτέραν συντετα-**

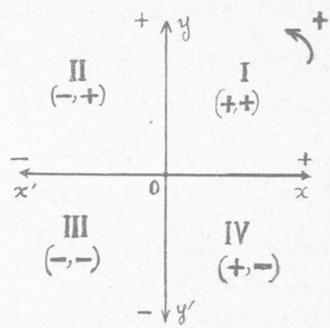
γμένην y_M τοῦ M, δηλαδὴ τὸ δ. ζεῦγος (x_M, y_M). 2) Ἀντιστρόφως: ἂν λάβωμεν ἕνα δ. ζεῦγος, π.χ. τὸ (x_M, y_M), ποὺ ὡρίσθη ἀπὸ τὸ M προηγουμένως, τότε ὑπάρχει ἕνα ἀκριβῶς σημεῖον (ἔστω) Π ἐπὶ τοῦ x'Ox, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{O\Pi} = x_M$ καὶ ἕνα ἀκριβῶς σημεῖον (ἔστω) P ἐπὶ τοῦ y'Oy, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{OP} = y_M$. Ἂν ἀπὸ τὸ Π φέρωμεν τὴν παράλληλον τοῦ y Oy καὶ ἀπὸ τὸ P τὴν παράλληλον τοῦ x'Ox, αἱ δύο αὐταὶ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον (μάλιστα δὲ ἐδῶ, ποὺ ἐλάβαμεν τὸ ζεῦγος, (x_M, y_M), τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι τὸ M).

Ἔτσι εἰς τὸ O ἀντιστοιχεῖ τὸ δ. ζεῦγος (0, 0) καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπίσης εἰς τὸ A (Σχ. 67) ἀντιστοιχεῖ τὸ ζεῦγος (−2, 1) καὶ ἀντιστρόφως. Εἰς τὸ B τὸ δ. ζεῦγος (2, −3) καὶ ἀντιστρόφως κ.ο.κ.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἕνα σημεῖον, ἔστω, N, ἔχει τετμημένην x καὶ τεταγμένην y γράφομεν : N = (x, y).



Σχ. 67



Σχ. 68

66.4. Παρατηρήσατε τώρα τὸ Σχ. 68 καὶ κρατήσατε εἰς τὸν νοῦν σας ὅτι :

i) Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας I ἔχει συντεταγμένας θετικάς.

ii) Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας III ἔχει συντεταγμένας ἀρνητικάς.

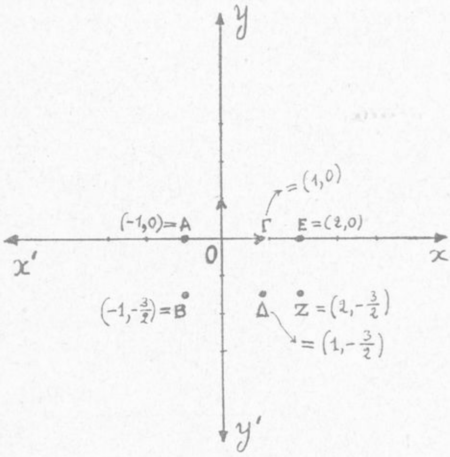
iii) Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας II ἔχει τὴν 1ην συντεταγμένην ἀρνητικὴν καὶ τὴν 2αν θετικήν.

iv) Κάθε σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας IV ἔχει τὴν 1ην συντεταγμένην θετικὴν καὶ τὴν 2αν ἀρνητικήν.

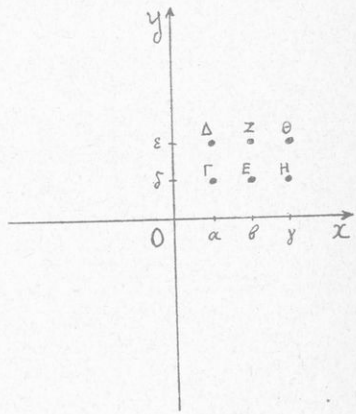
(Ποίας ἀναλόγους παρατηρήσεις κάμνετε διὰ τὰς συντεταγμένας ἑνὸς σημείου, ποὺ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς τῶν ἀξόνων ;)

§ 67. Γεωμετρικὴ παράστασις Καρτεσιανοῦ γινομένου

67.1. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ μέλη ἑνὸς διατεταγμένου ζεύγους σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς συντεταγμένας σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδον xOy, τότε κάθε διατεταγμένον ζεῦγος παριστάνει ἕνα σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἑπομένως ἕνα Καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ δύο παράγοντας θὰ παριστάνῃ τότε ἕνα



Σχ. 69



Σχ. 70

σύνολον σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σύνολον τῶν σημείων τούτων τὸ ὀνομάζομεν **γεωμετρικὴν παράστασιν** τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου. Ἐὰν π.χ.,

$$M=\{-1, 1, 2\} \text{ καὶ } N=\{0, -\frac{3}{2}\}, \text{ τότε}$$

$$M\times N=\{(-1,0), (-1,-\frac{3}{2}), (1,0), (1,-\frac{3}{2}), (2,0), (2,-\frac{3}{2})\}$$

καὶ εἰς τὸ σχ. 69 βλέπετε τὴν γεωμετρικήν του παράστασιν· εἶναι τὸ σημειοσύνολον : { Α, Β, Γ, Δ, Ε Ζ }.

Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν καὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου (μὴ κενοῦ) ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου.

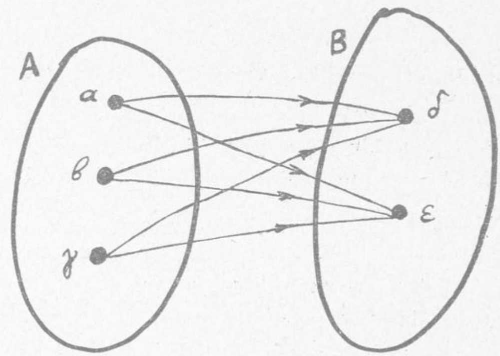
67.2. Γεωμετρικὴν παράστασιν ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου κάμνομεν συνήθως, ὅταν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν του εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ἀλλὰ καὶ ὅταν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου εἶναι ἄλλης φύσεως, ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν αὐτοῦ. Ἂς θεωρήσωμεν π.χ. τὰ σύνολα : $A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ καὶ $B = \{ \delta, \varepsilon \}$ ὅπου τὰ α, β, γ, δ,ε, εἶναι πρόσωπα (π.χ. Ἀντωνίου, Βασιλείου, Γεωργίου κ.τ.λ.) Ἔχομεν : $A \times B = \{ (\alpha,\delta), (\alpha,\varepsilon), (\beta,\delta), (\beta,\varepsilon), (\gamma,\delta), (\gamma,\varepsilon) \}$.

Διὰ νὰ παραστήσωμεν γεωμετρικῶς τὸ $A \times B$, λαμβάνομεν ὀρθογωνίους ἄξονας Ox, Oy, καὶ ἐπὶ τοῦ Ox εἰς ἴσας μεταξύ των ἀποστάσεις γράφομεν τὰ α, β, γ. Γράφομεν ἐπίσης ὁμοίως ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy τὰ δ, ε (Σχ. 70). Τότε τὸ ζεῦγος π.χ. (α, δ) παριστάνεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ, τὸ ζεῦγος (β, ε) ἀπὸ τὸ σημεῖον Ζ κ.τ.λ. καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων { Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ } εἶναι ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τοῦ $A \times B$.

§ 68. Γράφημα Καρτεσιανοῦ γινομένου

Ὀνομάζομεν **γράφημα** ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn διὰ τὰ σύνολα Α καὶ Β εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχουν ἐπὶ πλέον καμπύλα βέλη, ποὺ συνδέουν τὰ μέλη κάθε ζεύγους καὶ ὁδηγοῦν ἀπὸ τὸ πρῶτον εἰς τὸ δεύτερον μέλος τοῦ ζεύγους. Ἔτσι, π.χ. εἰς τὸ Σχ. 71 βλέπετε τὸ γράφημα τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου



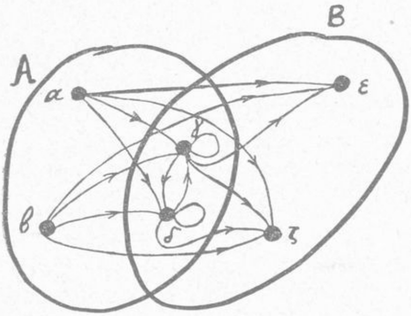
Σχ. 71

$$A \times B = \{ \alpha, \beta, \gamma \} \times \{ \delta, \varepsilon \} = \{ (\alpha,\delta), (\alpha,\varepsilon), (\beta,\delta), (\beta,\varepsilon), (\gamma,\delta), (\gamma,\varepsilon) \}.$$

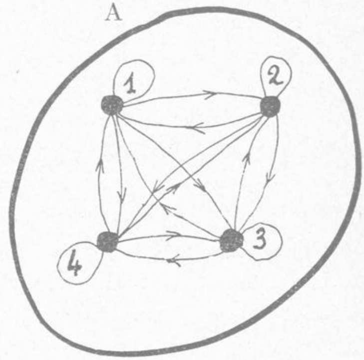
Εἰς τὸ Σχ. 72 βλέπετε τὸ γράφημα τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου τοῦ συνόλου $A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$ ἐπὶ τὸ σύνολον $B = \{ \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \}$, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα. Εἶναι :

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (\alpha,\gamma), (\alpha,\delta), (\alpha,\varepsilon), (\alpha,\zeta), \\ & (\beta,\gamma), (\beta,\delta), (\beta,\varepsilon), (\beta,\zeta), \\ & (\gamma,\gamma), (\gamma,\delta), (\gamma,\varepsilon), (\gamma,\zeta), \\ & (\delta,\gamma), (\delta,\delta), (\delta,\varepsilon), (\delta,\zeta) \}. \end{aligned}$$

Διὰ τὸ ζεῦγος (γ,γ) πρέπει νὰ ἔχωμεν βέλος, ποὺ νὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ στοιχεῖον γ καὶ νὰ ἐπιστρέφῃ εἰς τὸ ἴδιον· αὐτὸ τὸ παριστάνομεν μὲ τὴν θηλειάν, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ σχῆμα. Τὸ ἴδιον κάμνομεν διὰ τὸ ζεῦγος (δ,δ). Ἐὰν A = B θὰ ἔχωμεν γράφημα ὅπως τοῦ Σχ. 73, εἰς τὸ ὁποῖον βλέπετε



Σχ. 72



Σχ. 73

τὸ γράφημα τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Σημ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἠμποροῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν γράφημα καὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου ἑνὸς Καρτεσιανοῦ γινομένου.

Ἀσκήσεις

181) Ἂν τὰ διατεταγμένα ζεύγη $(x + 1, 5)$ καὶ $(-4, y - 1)$ εἶναι ἴσα νὰ εὕρετε τὰ x καὶ y.

182) Νὰ πάρετε ἕνα σύστημα ἀξόνων, ὀρθοκανονικόν, καὶ νὰ προσδιορίσετε τὰ σημεῖα α) $A = (8, 5)$ β) $B = (-3, 5)$ καὶ νὰ εὕρετε τὰς συντεταγμένας τῶν συμμετρικῶν τοῦ A πρὸς τὴν ἀρχὴν O καὶ πρὸς τοὺς ἄξονας x′Ox καὶ y′Oy.

183) Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, νὰ εὕρετε τὸ $A \times B$, νὰ κάμετε τὸ γράφημά του καὶ νὰ τὸ παραστήσετε καὶ μὲ πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

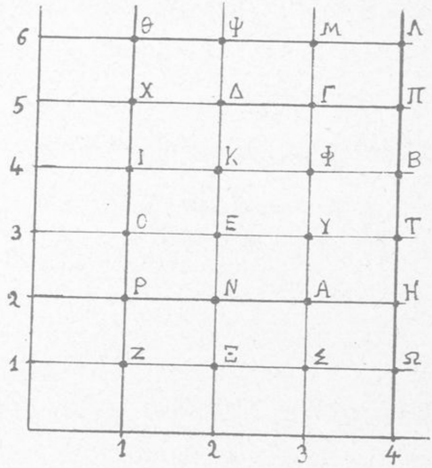
184) Ἂν $A = \{2, 3, -5\}$ καὶ $B = \{2, -1\}$ νὰ εὕρετε τὰ α) $A \times A$ β) $A \times B$, γ) $B \times B$ καὶ νὰ κάμετε τὸ γράφημα τοῦ $A \times B$, καὶ τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τοῦ $B \times B$.

185) Ποῖα εἶναι τὰ σύνολα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐσχηματίσθη τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον $\{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$;

Νὰ κάμετε τὸ γράφημα τοῦ Καρτεσιανοῦ τούτου γινομένου, πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ γεωμετρικὴν παράστασιν αὐτοῦ.

186) Ἐὰν τὸ σύνολον $A \times B$ περιέχῃ 5 στοιχεῖα (ζεύγη), πόσα στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα Α καὶ Β;

187) Ἡ ἀκολουθία τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (2, 3), (4, 5), (1, 4), (4, 3), (2, 3), (4, 3), (2, 3) εἶναι διαταγὴ λοχαγοῦ πρὸς προκεχωρημένην διμοιρίαν του, συνταχθεῖσα μὲ «κώδικα» τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 74.: α) Νὰ ἀποκρυπτογραφήσετε τὴν διαταγήν, β) Μὲ τὸν ἴδιον «κώδικα» νὰ συντάξετε τὸ μήνυμα: «ἀναμένομεν ἐνισχύσεις».



Σχ. 74

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΣΧΕΣΕΙΣ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 69. Σχέσις. Συνάρτησις

69.1. Ἔστω ὅτι A καὶ B εἶναι δύο μὴ κενὰ σύνολα. «**Κάθε ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ λέγεται «μία σχέσις ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B** (*)». Εἰδικώτερον: **Κάθε σχέσις ἀπὸ ἕνα σύνολον A εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον A λέγεται : μία σχέσις μέσα εἰς τὸ A εἴτε, ἁπλούστερον, μία σχέσις εἰς τὸ A.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν συμπεραίνομεν ὅτι **κάθε σχέσις εἶναι ἕνα σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν.**

Παράδειγμα. Ἔστω $A = \{1, 2, 0, 8\}$ καὶ $B = \{2, 0, 3, 5\}$. Τὸ σύνολον $R = \{(1, 2,), (1, 0), (2,3), (0, 3)\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B = \{1, 2, 0, 8\} \times \{2, 0, 3, 5\}$. Ἑπομένως τὸ R εἶναι μία σχέσις ἀπὸ τὸ σύνολον $\{1, 2, 0, 8\}$ εἰς τὸ $\{2, 0, 3, 5\}$. Ἡ ἰδία σχέσις εἶναι ἐπίσης μία σχέσις ἀπὸ τὸ σύνολον $\{1, 2, 0, 8, 10, 50\}$, ποὺ εἶναι ἕνα ὑπερσύνολον τοῦ $\{1, 2, 0, 8\}$, εἰς τὸ σύνολον $\{2, 0, 3, 5, 15, 17\}$, ποὺ εἶναι ἕνα ὑπερσύνολον τοῦ $\{2, 0, 3, 5\}$. (Ἠμπορεῖτε νὰ ἐξηγήσετε τὸ διατί ;).

Εἴπαμεν ὅτι μία σχέσις R εἶναι ὑποσύνολον ἑνὸς καρτεσιανοῦ γινομένου, ἔστω τοῦ $A \times B$. Τὸ σύνολον A λέγεται : **ἕνα σύνολον ἀναχωρήσεως τῆς σχέσεως R**· τὸ σύνολον B λέγεται : **ἕνα σύνολον ἀφίξεως τῆς R.**

Τὸ σύνολον τῶν πρώτων μελῶν τῶν ζευγῶν, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὴν R, λέγεται : **τὸ πρῶτον πεδίον** ἢ **τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R**· θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ Π.

Τὸ σύνολον τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, λέγεται : **τὸ δεύτερον πεδίον** ἢ **τὸ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως R**· Θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ T.

Τὸ σύνολον $\Pi \cup T$ λέγεται : **τὸ βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως R**· θὰ τὸ συμβαλίζωμεν μὲ U.

Ἔτσι, διὰ τὴν σχέσιν R τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος, εἶναι :

ἕνα σύνολον ἀναχωρήσεώς της τὸ $\{1, 2, 0, 8\}$

(*) Ἀκριβέστερον : μία **διμελὴς** σχέσις ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B , ἀλλὰ συνήθως παραλείπομεν τὸ ἐπίθετον διμελής.

ἕνα ἄλλο σύνολον ἀναχωρήσεώς της τὸ $\{1, 2, 0, 8, 7\}$
ἕνα σύνολον ἀφίξεώς της τὸ $\{2, 0, 3, 5\}$
ἕνα ἄλλο σύνολον ἀφίξεώς της τὸ $\{2, 0, 3, 5, 10\}$
τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της εἶναι τὸ $\Pi = \{1, 2, 0\} \subset A$
τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2, 0, 3\} \subset B$
τὸ βασικόν της σύνολον εἶναι τὸ $\Pi \cup T = U = \{1, 2, 0, 3\}$.

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις $R = \{(1, 2), (1, 0), (2,3), (0, 3)\}$, ποὺ εἶναι μία σχέσις **ἀπὸ** τὸ $A = \{1, 2, 0, 8]$ **εἰς** τὸ $B = \{2, 0, 3, 5\}$, εἶναι συγχρόνως μία σχέσις **μέσα** εἰς τὸ $A \cup B = \Gamma = \{0, 1, 2, 3, 5, 8\}$. διότι ἡ R εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $\Gamma \times \Gamma$.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις R εἶναι ἐπίσης μία σχέσις, ἀπὸ τὸ σύνολον Π εἰς τὸ σύνολον T, διότι ἡ R εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $\Pi \times T$ καὶ ἀκόμη εἶναι μία σχέσις μέσα εἰς τὸ βασικὸν σύνολον $U = \{0, 1, 2, 3\}$, διότι αὕτη εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $U \times U$.

Ἀκόμη ἡ R εἶναι ἐπίσης μία σχέσις μέσα εἰς τὸ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 30\}$, ποὺ εἶναι ἕνα ὑπερσύνολον τοῦ U καὶ ἐπίσης εἶναι σχέσις μέσα εἰς κάθε ὑπερσύνολον τοῦ βασικοῦ της συνόλου U.

Γενικῶς: **κάθε σχέσις εἶναι μία σχέσις μέσα εἰς τὸ βασικόν της σύνολον. (διατί ;)**

69.2. Ἂς λάβωμεν τώρα τὴν σχέσιν $R' = \{(1,2), (0,2), (3,1), (4,2)\}$.
Παρατηροῦμεν ὅτι μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R', δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος. Αὐτὸ δὲν συμβαίνει μὲ τὴν σχέσιν R τοῦ παραδείγματος τῆς § 69.1, ὅπου ὑπάρχουν δύο ζεύγη (τὰ $(1, 2)$ καὶ $(1,0)$) μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος.

Κάθε σχέσις ἀπὸ ἕνα σύνολον A εἰς ἄλλο σύνολον B (ὅπου ἠμπορεῖ νὰ εἶναι B = A) μὲ τὴν ἰδιότητα ὅτι : μεταξὺ τῶν ζευγῶν, ποὺ τὴν ἀποτελοῦν, δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος λέγεται : μία συνάρτησις.

69.3. Δίδομεν μερικὰ παραδείγματα σχέσεων καὶ συναρτήσεων:
Παράδειγμα 1ον. Ἂς θεωρήσωμεν δύο σύνολα ὄχι κενά, π.χ. ἕνα σύνολον μαθητῶν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ καὶ ἕνα σύνολον πόλεων $B = \{K, \Lambda, M, N, X\}$. Ζητεῖται νὰ καθορίσωμεν μὲ ἀναγραφὴν τὸ σύνολον R_1 τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y), τῶν ὁποίων τὰ μέλη ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην « ὁ $x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ τὴν $y \in B$ »· Συμβολικῶς αὐτὸ γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$R_1 = \{(x, y) \mid x \in A \text{ ἔχει ἐπισκεφθῆ } y \in B\}.$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι :

ὁ μαθητὴς α ἔχει ἐπισκεφθῆ τὰς πόλεις Κ,Μ.

ὁ μαθητὴς β ἔχει ἐπισκεφθῆ τὴν πόλιν Λ

ὁ μαθητὴς γ ἔχει ἐπισκεφθῆ τὰς πόλεις Μ, Ν, Χ.

ὁ μαθητὴς δ δὲν ἔχει ἐπισκεφθῆ καμίαν πόλιν τοῦ συνόλου Β.

Τὰ διατετ. ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην « $x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ $y \in B$ » εἶναι λοιπὸν τὰ ἀκόλουθα :

$$(\alpha, K),\ (\alpha, M),\ (\beta, \Lambda),\ (\gamma, M),\ (\gamma, N),\ (\gamma, X).$$

Ὥστε : $R_1 = \{\, (x, y) \mid x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ $y \in B \,\} =$

$$\{\, (\alpha, K),\ (\alpha, M),\ (\beta, \Lambda),\ (\gamma, M),\ (\gamma, N),\ (\gamma, X) \,\}.$$

Ἔχομεν λοιπὸν ἐδῶ μίαν σχέσιν R_1 ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β, εἶναι δὲ $R_1 \underset{\neq}{\subset} A \times B$.

Παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1) ἡ σχέσις δὲν εἶναι συνάρτησις, διότι ἔχει στοιχεῖα (ζεύγη) μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος, π.χ. τὰ (α, K) καὶ (α, M).

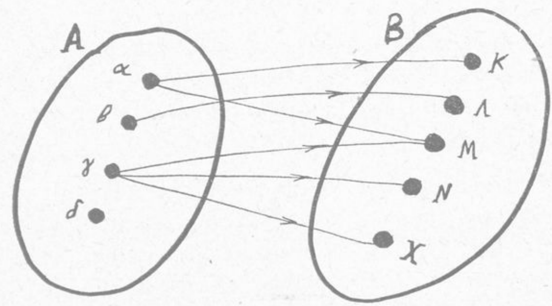
2) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $\Pi = \{\alpha, \beta, \gamma, \} \subset A$

3) τὸ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $T = \{K, \Lambda, M, N, X\} \subset B$

4) συνθήκη, ποὺ ὁρίζει τὴν σχέσιν εἶναι ἡ «$x \in A$ ἔχει ἐπισκεφθῆ $y \in B$»

5) τὸ βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $\Pi \cup T = \{\alpha, \beta, \gamma, K, \Lambda, M, N, X\}$.

Εἰς τὸ παράδειγμα αὐτὸ παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ὁ μαθητὴς δ δὲν ἔχει ἐπισκεφθῆ καμίαν ἀπὸ τὰς πόλεις τοῦ συνόλου Β καὶ ἑπομένως δὲν ὁρίζεται ζεῦγος μὲ πρῶτον μέλος τὸ δ. Λέγομεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι ἡ σχέσις δὲν εἶναι **ὡρισμένη** διὰ $x = \delta$.



Σχ. 75

Τὴν ἀνωτέρω σχέσιν R_1 ἀπὸ τὸ σύνολον Α εἰς τὸ σύνολον Β ἠμποροῦμεν νὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ τὸ **γράφημα**, ποὺ βλέπεται εἰς τὸ Σχ. 75.

Ἀπὸ τὸ γράφημα τῆς σχέσεως, βλέπομεν **ἀμέσως** ὅτι ἡ σχέσις R_1 δὲν εἶναι συνάρτησις, διότι ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς βέλη.

Χ			+	
Ν			+	
Μ	+		+	
Λ		+		
Κ	+			
Β / Α	α	β	γ	δ

Σχ. 75 α

Εἰς τὸ Σχ. 75α βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου διὰ τὴν σχέσιν R_1. Τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη σημειώνονται μὲ σταυροὺς εἰς τὴν κατάλληλον θέσιν των. Ἡ στήλη τοῦ α ἔχει 2 σταυρούς, ποὺ σημαίνει ὅτι ἔχομεν δύο ζεύγη μὲ πρῶτον μέλος των τὸ α [εἶναι τὰ (α, Κ), (α, Μ)]. Ὅταν ὑπάρχῃ εἰς τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου μιᾶς σχέσεως μία στήλη μὲ περισσοτέρους ἀπὸ ἕνα σταυρούς, ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ σχέσις δὲν εἶναι συνάρτησις.

Παράδειγμα 2ον. Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν ἕνα σύνολον μαθητῶν Α = { α, β, γ, δ } καὶ ἕνα σύνολον πόλεων Β = { Κ, Λ, Μ }.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι :

ὁ μαθητὴς α ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Κ
ὁ μαθητὴς β ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Μ
ὁ μαθητὴς δ ἐγεννήθη εἰς τὴν πόλιν Μ
ὁ μαθητὴς γ δὲν ἐγεννήθη εἰς καμίαν ἀπὸ τὰς πόλεις τοῦ συνόλου Β.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι μὲ τὴν συνθήκην « $x \in A$ ἐγεννήθη εἰς $y \in B$ » καθορίζεται τὸ σύνολον. $R_2 = \{ (x, y) \mid x \in A$ ἐγεννήθη εἰς $y \in B \}$, τὸ ὁποῖον ὡς σύνολον διατ. ζευγῶν εἶναι μία σχέσις. Ἡ σχέσις αὐτὴ R_2 ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῇ καὶ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της.

Ἔχομεν τὰ ἑξῆς ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην τῆς σχέσεως : (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ).

Ὥστε : εἶναι $R_2 = \{ (\alpha, K), (\beta, M), (\delta, M) \}$.

Διὰ τὴν σχέσιν R_2 παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1) ἡ R_2 εἶναι συνάρτησις, διότι δὲν ὑπάρχουν εἰς αὐτὴν δύο ζεύγη μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος.

2) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως R_2 εἶναι τὸ $\Pi = \{ \alpha, \beta, \delta \} \subsetneqq A$.

3) τὸ πεδίον τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως R_2 εἶναι τὸ $T = \{ K, M \} \subsetneqq B$.

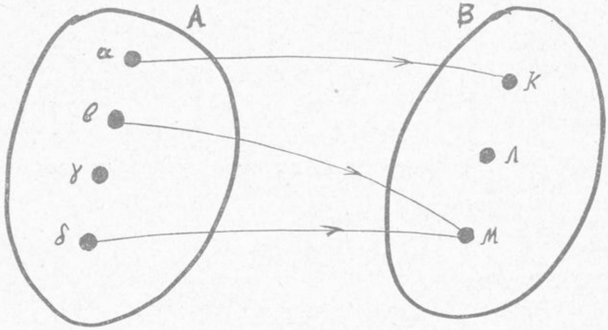
4) συνθήκη τῆς συναρτήσεως εἶναι « $x \in A$ ἐγεννήθη εἰς $y \in B$ ».

5) τὸ βασικὸν σύνολον τῆς συναρτήσεως R_2 εἶναι τὸ $\Pi \cup T = \{ \alpha, \beta, \delta, K, M \}$.

Ἔχομεν καὶ ἐδῶ σχέσιν (συνάρτησιν) ἀπὸ τὸ σύνολον Α εἰς τὸ σύνολον Β.

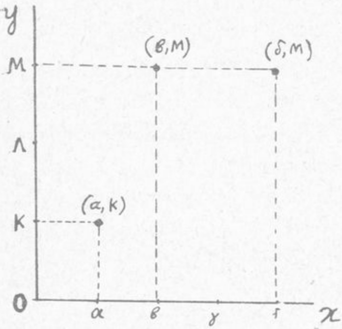
Ἡ συνάρτησις αὕτη δὲν εἶναι ὡρισμένη διὰ $x = \gamma$.

Εἰς τὸ Σχ. 76 βλέπετε τὸ γράφημα τῆς συναρτήσεως R_2.



Σχ. 76

Ἀπὸ τὸ γράφημα αὐτὸ βλέπομεν **ἀμέσως** ὅτι ἡ R_2 εἶναι συνάρτησις, διότι δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ Α, ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ ἀναχωροῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς βέλη. Βλέπομεν ἐπίσης ὅτι ἡ συνάρτησις δὲν εἶναι ὡρισμένη διὰ $x = \gamma$.



Σχ. 76 α

Συμφώνως μὲ ὅσα ἐμάθαμεν εἰς τὴν § 67.2 ἠμποροῦμεν νὰ ἔχωμεν γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως { (α, Κ), (β, Μ), (δ, Μ) }. Ἡ παράστασις αὐτὴ εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων, ποὺ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 76α. Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχουν δύο σημεῖα μὲ τὴν αὐτὴν τετμημένην καὶ ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμεν πάλιν ὅτι ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις.

Παράδειγμα 3ον. (σχέσεως μέσα εἰς ἕνα σύνολον). Δίδεται τὸ σύνολον Ε = { 2, 3, 4, 6, 8 } καὶ ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της ἡ σχέσις :

$$R_3 = \{ (x, y) \mid x \in E \text{ διαιρέτης τοῦ } y \in E \}.$$

Ἡ συνθήκη « x διαιρέτης τοῦ y », συμβολικῶς $x \mid y$, καθορίζει τὰ ζεύγη.

Πράγματι :

2 | 2 · ζεῦγος (2, 2)
2 | 4 · ζεῦγος (2, 4)
2 | 6 · ζεῦγος (2, 6)
2 | 8 · ζεῦγος (2, 8)

4 | 4 · ζεῦγος (4, 4)
4 | 8 · ζεῦγος (4, 8)

3 | 3 · ζεῦγος (3, 3)
3 | 6 · ζεῦγος (3, 6)

6 | 6 · ζεῦγος (6, 6)

8 | 8 · ζεῦγος (8, 8)

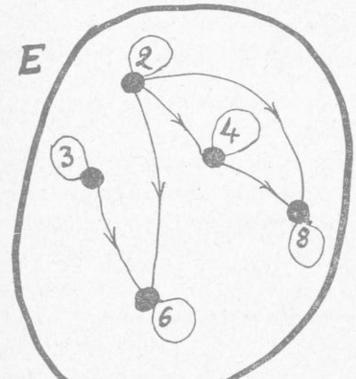
Ἡ σχέσις λοιπὸν παριστάνεται, μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της, ὡς ἑξῆς :

$R_3 = \{ (2,2), (2,4), (2,6), (2,8), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (6,6), (8,8) \}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ σχέσις R_3 δὲν εἶναι συνάρτησις·

τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της εἶναι τὸ σύνολον $\Pi = \{2, 3, 4, 6, 8\} = E$·
τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2, 3, 4, 6, 8\} = E$·
τὸ βασικὸν σύνολον τῆς σχέσεως R_3 εἶναι τὸ $\Pi \cup T = E \cup E = E$.

Εἰς τὸ Σχ. 77, βλέπετε τὸ γράφημα τῆς σχέσεως R_3. Κάθε θηλειά, ὅπως



Σχ. 77

T / Π	2	3	4	6	8
8	+		+		+
6	+	+		+	
4	+		+		
3		+			
2	+				

Σχ. 77α

γνωρίζομεν, παριστάνει βέλος, ποὺ ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἕνα στοιχεῖον καὶ ἐπιστρέφει (καταλήγει) εἰς τὸ αὐτὸ στοιχεῖον.

Εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα 77α βλέπετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου, μὲ τὸν ὁποῖον ἠμποροῦμεν νὰ παραστήσωμεν τὴν σχέσιν R_3. Τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη σημειώνονται μὲ ἕνα σταυρόν. Εἰς τὴν στήλην τοῦ 2 ἔχομεν 4 σταυρούς, δηλ. ἔχομεν 4 ζεύγη μὲ πρῶτον μέλος τὸ 2 κ.τ.λ. Ὅταν λοιπὸν ὑπάρχῃ στήλη μὲ περισσοτέρους ἀπὸ ἕνα σταυρούς, ἐννοῦμεν ὅτι ἡ σχέσις δὲν εἶναι συνάρτησις.

(Νὰ κάμετε γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως).

Παράδειγμα 4ον. (σχέσεως μέσα εἰς ἕνα σύνολον) Εἰς τὸ σύνολον $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. νὰ ὁρισθῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της ἡ σχέσις :

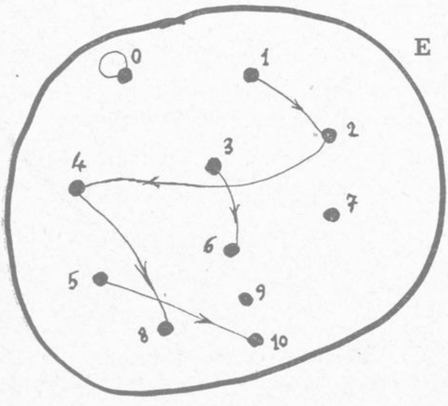
$R_4 = \{ (x, y) \mid y$ διπλάσιον τοῦ $x \}$, δηλ. $R_4 = \{ (x, y) \mid y = 2x \}$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ζεύγη, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην $y = 2x$, δίδομεν μὲ τὴν σειρὰν εἰς τὸ x ὡς τιμὰς τὰ στοιχεῖα τοῦ E :

Ὅταν	$x=0$,	τότε	$y=2\cdot0=0$·	τιμὴ	δεκτή,	διότι	$0\in E$,	ζεῦγος	$(0,0)$
»	$x=1$	»	$y=2\cdot1=2$·	»	»	»	$2\in E$,	»	$(1,2)$
»	$x=2$	»	$y=2\cdot2=4$·	»	»	»	$4\in E$,	»	$(2,4)$
»	$x=3$	»	$y=2\cdot3=6$·	»	»	»	$6\in E$,	»	$(3,6)$
»	$x=4$	»	$y=2\cdot4=8$·	»	»	»	$8\in E$,	»	$(4,8)$
»	$x=5$	»	$y=2\cdot5=10$	»	»	»	$10\in E$,	»	$(5,10)$.
»	$x=6$	»	$y=2\cdot6=12$	τιμή, ποὺ δὲν εἶναι δεκτή, διότι $12 \notin E$.					

Ἐπίσης καὶ διὰ τὰς τιμὰς $\chi = 7, 8, 9, 10$ εὑρίσκομεν τιμὰς τοῦ y, ποὺ ἀπορρίπτονται, διότι δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον E. Ἡ σχέσις λοιπὸν παριστάνεται ὡς ἑξῆς :

$$R_4 = \{ (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10) \}.$$



Σχ. 78

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις· τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ $\Pi = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$· τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$· τὸ βασικὸν σύνολον τῆς R_4 εἶναι τὸ $U = \{0,1,2,3,4,5,6,8,10\} \subsetneq E$.

Εἰς τὸ παραπλεύρως Σχ. 78 βλέπετε τὸ γράφημα τῆς συναρτήσεως

$(R_4 = \{ (x, y \mid y = 2x \}$ μὲ $x, y \in E$.

Ἀπὸ τὸ γράφημα βλέπομεν **ἀμέσως** ὅτι ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις, διότι ἀπὸ κανένα στοιχεῖον τοῦ Ε δὲν ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο βέλη.

(Νὰ κάμετε τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ γεωμετρικὴν παράστασιν διὰ τὴν ὡς ἄνω συνάρτησιν).

Παράδειγμα 5ον. (σχέσεως μέσα εἰς ἕνα σύνολον). Ἔστω ἕνα σύνολον προσώπων $E = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$, ποὺ εἶναι γραμμένα εἰς ἕνα κατάλογον μὲ αὐτὴν τὴν σειράν. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ μὲ ἀναγραφὴν ἡ σχέσις R_5 μὲ συνθήκην τὴν « x δείχνει y », μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι κάθε πρόσωπον δείχνει αὐτούς, ποὺ προηγοῦνται ἀπὸ αὐτὸν εἰς τὸν κατάλογον τῶν ὀνομάτων των.

Σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὁ α εἶναι πρῶτος εἰς τὸν κατάλογον καὶ ἑπομένως δὲν δείχνει κανένα. Ὁ β δείχνει τὸν α, ὁ ὁποῖος προηγεῖται αὐτοῦ· ἔχομεν λοιπὸν τὸ ζεῦγος (β, α). Ὁ γ θὰ δείξῃ τὸν α καὶ τὸν β· ἔχομεν λοιπὸν τὰ ζεύγη (γ, α), (γ, β). Ὁ δ θὰ δείξῃ τὸν α, τὸν β καὶ τὸν γ· ἔχομεν ἑπομένως τὰ ζεύγη (δ, α), (δ, β). (δ, γ). Ἡ σχέσις λοιπὸν μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της (ζευγῶν της) ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$R_5 = \{ (\beta, \alpha), (\gamma, \alpha). (\gamma, \beta), (\delta, \alpha), (\delta, \beta), (\delta, \gamma) \}.$$

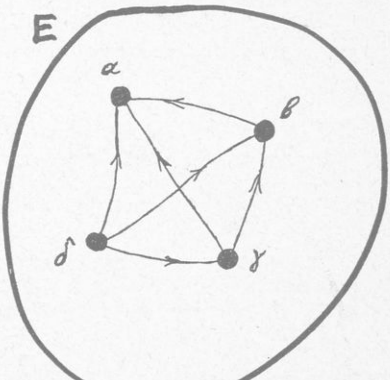
Ἡ σχέσις R_5 δὲν εἶναι συνάρτησις. Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως R_5 εἶναι τὸ σύνολον:

$$\Pi = \{ \beta, \gamma, \delta, \} \cdot$$

τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ · τὸ βασικόν της σύνολον εἶναι τὸ $U = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = E$.

Εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα 79 βλέπετε τὸ γράφημα τῆς σχέσεως $\{ (x, y) \mid x$ «δείχνει» y, μὲ $x, y \in E$.

Ἀπὸ τὸ γράφημα διακρίνομεν ἀμέσως ὅτι ἡ σχέσις δὲν εἶναι συνάρτησις, διότι ὑπάρχει στοιχεῖον (ὅπως π.χ. τὸ γ) ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀναχωροῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς βέλη.



Σχ. 79

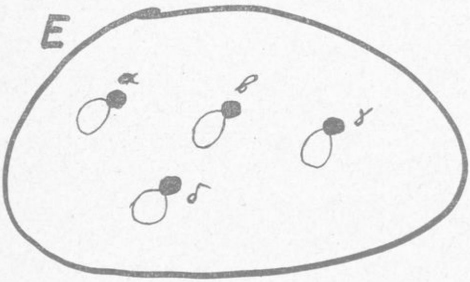
Παράδειγμα 6ον. Εἰς τὸ αὐτὸ ὡς ἄνω σύνολον προσώπων Ε, δηλ. εἰς τὸ $E = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$ νὰ ὁρισθῇ μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν της ἡ σχέσις: $R_6 = \{ (x,y) \mid x$ ταυτίζεται μὲ $y \}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε πρόσωπον ταὐτίζεται μὲ τὸν ἑαυτόν του καὶ μὲ κανένα ἄλλο. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὰ ζεύγη (α, α), (β, β), (γ, γ), (δ, δ) καὶ μόνον αὐτά. Ὥστε :

$R_6 = \{ (x, y) \mid x \equiv y$, μὲ $x, y \in E \} = \{ (\alpha, \alpha), (\beta, \beta), (\gamma, \gamma), (\delta, \delta) \}$.

Ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις, διότι δὲν ὑπάρχουν εἰς αὐτὴν ζεύγη μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος.

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως εἶναι τὸ $\Pi = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$· τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$.



Σχ. 80

Εἰς τὸ Σχ. 80 βλέπετε τὸ γράφημα τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως. (Νὰ κάμετε τὴν γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως).

Παράδειγμα 7ον. Δίδεται ἡ συνάρτησις

$f = \{ (2,3), (3,4), (4,5) \}$

καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν α) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της β) τὸ πεδίον τιμῶν της γ) τὸ βασικόν της σύνολον, δ) μίαν συνθήκην τῆς συναρτήσεως καὶ ε) νὰ ὁρίσωμεν τὴν f μὲ περιγραφήν.

Ἔχομεν : $\Pi = \{ 2, 3, 4 \}$, $T = \{ 3, 4, 5 \}$, $U = \Pi \cup T = \{ 2, 3, 4, 5 \}$.

Ἐδῶ εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν καὶ μίαν συνθήκην ὁρίζουσαν τὴν f. εἶναι ἡ : $y = x + 1$, μὲ $x \in \Pi$.

Ἡ f μὲ περιγραφὴν εἶναι : $f = \{ (x, y) \mid y = x + 1$, μὲ $x, y \in U \}$.

Ἀσκήσεις

188) Νὰ εὕρετε : i) τὸ πεδίον ὁρισμοῦ, ii) τὸ πεδίον τῶν τιμῶν, iii) τὸ βασικὸν σύνολον καὶ iv) ποία εἶναι συνάρτησις, εἰς τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

α) $R = \{ (3,9), (5,15), (7,21), (9,27) \}$
β) $R_1 = \{ (0,1), (1,0), (1,1), (0,0) \}$
γ) $R_2 = \{ (2,3), (3,2), (2,2), (3,4) \}$
δ) $R_4 = A^2$, ὅπου $A = \{0, 2, -4\}$
ε) $R_5 = \{ (3,2), (4,3), (5,4), (6,5) \}$.

Μήπως ἠμπορεῖτε νὰ εὕρετε καὶ τὴν συνθήκην εἰς τὰς σχέσεις R καὶ R_5 ;

189) Εἰς τὸ σύνολον Σ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν καὶ μὲ πεδίον ὁρισμοῦ

τὸ σύνολον $\Pi = \{1, 3, 9, 12\}$ νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν των τὰς σχέσεις :

α) $R = \{(x, y) \mid y = x\}$, β) $R_1 = \{(x, y) \mid y = x - 5)\}$.

190) Νὰ σχεδιάσετε γραφήματα, πίνακας διπλῆς εἰσόδου καὶ γεωμετρικὰς παραστάσεις διὰ τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

α) $R = \{(2,3), (3,2), (4,3), (3,4), (1,2), (2,1)\}$

β) $f = \{(x, y) \mid y = 4x\}$ μὲ $x, y \in \Phi$, ὅταν $\Pi = \{1, 2, 3, 4\}$

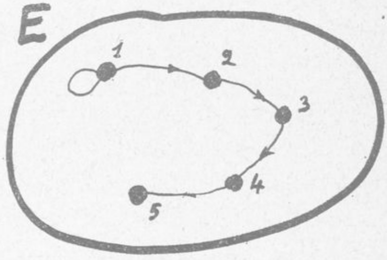
γ) $R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

δ) $R = \{(3,2), (4,3), (4,2), (5,4), (5,3), (5,2), (6,5), (6,4), (6,3), (6,2)\}$.

Ποῖαι ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω σχέσεις εἶναι συναρτήσεις ;

191) Τὸ γράφημα μιᾶς σχέσεως εἶναι ὅπως τὸ βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 81.

α) Ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις ἢ ὄχι καὶ πῶς διακρίνετε τοῦτο ἀπὸ τὸ γράφημα ; β) Νὰ ἀναγράψετε τὴν σχέσιν.



Σχ. 81

192) Δίδονται τὰ σύνολα

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

καὶ $B = \{1, 2, 3\}$

καὶ ζητεῖται νὰ καθορισθῆ μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της ἡ σχέσις $R = \{(x, y) \mid x \in A$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $y \in B\}$.

193) Ἕνα σύνολον προσώπων $E = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ εἶναι γραμμένα εἰς ἕνα κατάλογον μὲ αὐτὴν τὴν σειράν. Εἰς τὸ σύνολον αὐτὸ ζητεῖται α) νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τὴν σχέσιν :

$R = \{(x, y) \mid x$ « δείχνει » $y\}$ μὲ τὴν ἔννοιαν ὅτι τὸ κάθε πρόσωπον δείχνει αὐτούς, ποὺ ἕπονται αὐτοῦ εἰς τὸν κατάλογον. β) Νὰ κάμετε τὸ γράφημα καὶ πίνακα διπλῆς εἰσόδου τῆς σχέσεως.

194) Εἰς τὸ σύνολον $E = \{1,2, 3, 4\}$ νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν της τὴν σχέσιν $R = \{(x, y) \mid x \leqslant y\}$ Νὰ κάμετε ἔπειτα γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς σχέσεως.

195) Τρεῖς μητέρες Λ, Μ, Ν ἔχουν τέκνα, ἡ Λ τὰ α καὶ δ, ἡ Μ τὸ γ καὶ ἡ Ν τὰ β καὶ η. Ζητεῖται νὰ καθορίσετε μὲ ἀναγραφὴν τῶν ζευγῶν της τὴν σχέσιν :

$R = \{(x, y) \mid y$ εἶναι μητέρα τοῦ $x\}$, ὅπου $y \in \{\Lambda, M, N\}$ καὶ $x \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$.

Νὰ κάμετε ἔπειτα τὸ γράφημα τῆς σχέσεως.

§ 70. Ἀνακλαστικαὶ σχέσεις μέσα εἰς ἕνα σύνολον U

70.1. Ἔστω R μία σχέσις εἰς ἕνα σύνολον U. **Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ σχέσις R εἶναι ἀνακλαστική, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε στοιχεῖον x τοῦ συνόλου U, τὸ ζεῦγος (x, x) ἀνήκῃ εἰς τὴν σχέσιν R.**

Συμβολικῶς ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς γράφεται :

$$(\text{R ἀνακλαστική}) \iff \text{Διὰ κάθε } x,\ x \in U \implies (x, x) \in R.$$

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις $R = \{(2,2), (2,3), (3,3), (4,4), (4,3)\}$ εἶναι ἀνακλαστικὴ ἢ ὄχι.

Ἀπάντησις. Εὑρίσκομεν ὅτι τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς σχέσεως εἶναι τὸ $\Pi = \{2, 3, 4\}$, τὸ δὲ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι τὸ $T = \{2, 3, 4\}$. Ἑπομένως τὸ βασικὸν σύνολον εἶναι τὸ $U = \Pi \cup T = \{2, 3, 4\}$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὴν σχέσιν ἀνήκουν τὰ ζεύγη $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$· ἄρα εἶναι ἀνακλαστική.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{(1,1), (2,2), (2,3)\ (3,1)\ (3,3), (4,3)\}$ εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική.

Ἀπάντησις. Πεδίον ὁρισμοῦ $\Pi = \{1, 2, 3, 4\}$

Πεδίον τῶν τιμῶν $T = \{1, 2, 3\}$

Τὸ βασικὸν σύνολον $U = \Pi \cup T = \{1, 2, 3, 4\}$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέσις περιέχει τὰ ζεύγη $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, ἀλλὰ δὲν περιέχει τὸ $(4,4)$. Ἑπομένως δὲν εἶναι ἀνακλαστική.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις « . . . διαιρέτης τοῦ . . . » * (ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν μὲ συνθήκην τὴν « x διαιρέτης τοῦ y ») εἰς τὸ σύνολον Φ, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική.

Ἀπάντησις. Ἐπειδὴ κάθε ἀριθμὸς τοῦ Φ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἑαυτοῦ του, ἐννοοῦμεν ὅτι, διὰ κάθε $x \in \Phi$, τὸ ζεῦγος (x, x) θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν σχέσιν. Ἄρα ἡ σχέσις « . . . διαιρέτης τοῦ . . . » εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνακλαστική.

70.2. Ἀπὸ τὸ γράφημα της ἠμποροῦμεν **ἀμέσως** νὰ διακρίνωμεν ἂν μία σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον U εἶναι ἀνακλαστική, ἀπὸ τὸ ὅτι εἰς ὅλα τὰ σημεῖα (στοιχεῖα) τοῦ συνόλου U θὰ ὑπάρχουν θηλειὲς (μποῦκλες). (Βλέπετε γράφημα Σχ. 80).

(*) Εἰς μίαν σχέσιν δίδομεν συνήθως **τὸ ὄνομα τῆς συνθήκης της**, ἐπειδὴ ἀπὸ αὐτὴν καθορίζεται τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν σχέσιν.

Ἀσκήσεις

196) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικαὶ αἱ σχέσεις :

$R_1 = \{ (2,2), (3,3), (2,3), (4,4), (2,4) \}$
$R_2 = \{ (1,1), (1,2), (2,2), (3,4), (4,4) \}$
$R_3 = \{ (2,2), (2,3), (3,4), (3,3), (3,6), (4,4), (4,8), (8,8) \}$.

197) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ» (ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν μὲ συνθήκην τὴν « $x \leqslant y$ ») εἰς τὸ σύνολον **Φ**, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική.

198) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικὴ ἡ σχέσις τοῦ 6ου παραδείγματος τῆς § 69.3.

199) Εἰς βασικὸν σύνολον τὸ σύνολον $\mathcal{P}_A$ τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου A νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (x, y) \mid x \subset y \}$ εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστική.

§ 71. Συμμετρικαὶ σχέσεις εἰς σύνολον U

71.1. Ἔστω R μία σχέσις εἰς ἕνα σύνολον U. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν σχέσιν R, προκύπτει μία σχέσις, ποὺ ὀνομάζεται **ἡ ἀντίστροφος** τῆς R καὶ συμβολίζεται μὲ R^{-1}. Ἔτσι, π.χ., ἐὰν $R = \{ (\alpha, \beta), (\beta, \gamma), (\gamma, \gamma), (\delta, \varepsilon) \}$, τότε $R^{-1} = \{ (\beta, \alpha), (\gamma, \beta), (\gamma, \gamma), (\varepsilon, \delta) \}$.

Τὸ ζεῦγος (β, α) λέγεται **τὸ ἀντίστροφον ζεῦγος** τοῦ (α, β) καὶ ἀντιστρόφως τὸ (α, β) τὸ ἀντίστροφον τοῦ (β, α).

71.2. Ἂς ἐξετάσωμεν εἰς ἕνα σύνολον U μαθητῶν ἑνὸς Γυμνασίου τὴν σχέσιν : $R = \{ (x, y) \mid x$ συμμαθητὴς τοῦ $y \}$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν ὁ x_1 εἶναι συμμαθητὴς τοῦ y_1, τότε καὶ ὁ y_1 εἶναι συμμαθητὴς τοῦ x_1 καὶ τὰ ζεύγη (x_1, y_1) καὶ (y_1, x_1) ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R. Ὥστε, ἂν ἕνα ζεῦγος (x, y) ἀνήκῃ εἰς τὴν R, καὶ τὸ ἀντίστροφόν του ζεῦγος (y, x) θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν R. Αἱ σχέσεις μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγονται **συμμετρικαί**. Ὥστε :

Μία σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον U λέγεται συμμετρικὴ ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ ἀντίστροφον τοῦ κάθε στοιχείου της ἀνήκῃ εἰς αὐτήν.

Εἶναι φανερὸν ὅτι μία συμμετρικὴ σχέσις δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν στοιχείων της. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι :

Μία σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον U λέγεται συμμετρική, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ταὐτίζεται μὲ τὴν ἀντίστροφόν της, δηλ. ἐὰν $R = R^{-1}$.

Παράδειγμα 1ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις R = { (1, 2), (2, 1)' (3, 4), (4, 3), (3, 3) } εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

Ἀπάντησις. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, προκύπτει { (2, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 4) (3, 3) }, δηλ. ἡ ἰδία ἡ R. Ὥστε εἶναι $R = R^{-1}$, ἄρα ἡ R εἶναι συμμετρική.

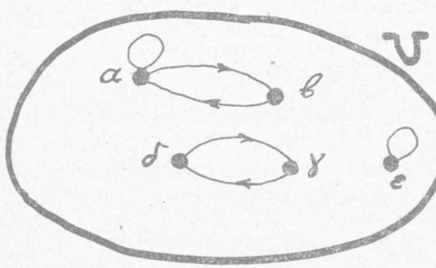
Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις R = { x, y) | $x \perp y$ } εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου p εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

Ἀπάντησις. Ἂν x_1 καὶ y_1 εἶναι εὐθεῖαι τοῦ p καὶ εἶναι $x_1 \perp y_1$, τότε ὅπως γνωρίζομεν, θὰ εἶναι καὶ $y_1 \perp x_1$, δηλ. τὰ ζεύγη (x_1, y_1) καὶ (y_1, x_1) ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ δι' ὁποιοδήποτε ἄλλο ζεῦγος καθέτων εὐθειῶν τοῦ p. Ἄρα ἡ σχέσις p (τὴν ὁποίαν ὀνομάζομεν **σχέσιν καθετότητος**) εἶναι συμμετρική.

Παράδειγμα 3ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις R = { (x, y) | x διαιρέτης τοῦ y] εἰς τὸ σύνολον **Φ**, τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

Ἀπάντησις. Ἂς πάρωμεν ἕνα ζεῦγος φυσικῶν ἀριθμῶν, ποὺ ἀνήκει εἰς τὴν σχέσιν R. Ὁ 4, π.χ., εἶναι διαιρέτης τοῦ 8 καὶ ἑπομένως τὸ ζεῦγος (4, 8) ἀνήκει εἰς τὴν σχέσιν R. Ὁ 8 ὅμως δὲν εἶναι διαιρέτης τοῦ 4 καὶ ἑπομένως τὸ ζεῦγος (8, 4) δὲν ἀνήκει εἰς τὴν σχέσιν. Ἄρα ἡ R δὲν εἶναι συμμετρική.

71.3. Ἀπὸ τὸ γράφημα μιᾶς σχέσεως διακρίνομεν ἀμέσως ἂν μία σχέσις εἶναι συμμετρικὴ ἀπὸ τὸ ὅτι, ἂν ἀπὸ ἕνα στοιχεῖον α τοῦ U ἀναχωρῇ ἕνα βέλος καὶ καταλήγῃ εἰς ἕνα ἄλλο στοιχεῖον β, τότε ἕνα ἄλλο βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ β καὶ καταλήγει εἰς τὸ α. Ἐννοεῖται ὅτι καὶ κάθε « θηλειὰ » ὑποδεικνύει ζεῦγος, ποὺ ταὐτίζεται μὲ τὸ ἀντίστροφόν του ζεῦγος. Εἰς τὸ Σχ. 82 βλέπετε τὸ γράφημα τῆς συμμετρικῆς σχέσεως { (α, α), (α, β), (β, α), (γ, δ), (δ, γ), (ε, ε) } εἰς τὸ σύνολον U.



Σχ. 82

Ἀσκήσεις

200) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἢ ὄχι συμμετρικαὶ αἱ σχέσεις :

α) $R_1 = \{ (\alpha, \alpha), (\alpha, \beta), (\beta, \alpha), (\beta, \beta) \}$
β) $R_2 = \{ (0, 0), (1, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2 \}$
γ) $R_3 = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 3), (3, 5) \}$

201) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις :

$$R = \{ (x, y) \mid x \text{ παραπληρωματικὴ τῆς } y \}$$

εἰς τὸ σύνολον Κ τῶν κυρτῶν γωνιῶν εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

202) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R_1 = \{ (x, y) \mid x$ ἀδελφὸς τοῦ $y \}$ εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀνδρῶν ἑνὸς χωριοῦ εἶναι ἢ ὄχι συμμετρική.

203) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R_2 = \{ (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2) \}$ εἶναι συγχρόνως ἀνακλαστικὴ καὶ συμμετρική.

§ 72. Μεταβατικαὶ σχέσεις εἰς σύνολον U

72.1. α) Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὸ σύνολον U τῶν μαθητῶν ἑνὸς Γυμνασίου καὶ ἂς ἐξετάσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ σύνολον τὴν σχέσιν :

$$R = \{ (x, y) \mid x \text{ συμμαθητὴς τοῦ } y \}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν x εἶναι συμμαθητὴς τοῦ y καὶ y εἶναι συμμαθητὴς τοῦ z, τότε καὶ x εἶναι συμμαθητὴς τοῦ z, δηλαδή, ἂν τὰ ζεύγη (x, y) καὶ (y, z) ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R, τότε καὶ τὸ ζεῦγος (x, z) ἀνήκει εἰς τὴν R. Μία σχέσις μὲ αὐτὴν τὴν ἰδιότητα λέγεται **μεταβατική**.

β) Ἂς ἐξετάσωμεν, διὰ νὰ ἐννοήσωμεν καλύτερον τὰς μεταβατικὰς σχέσεις, τὴν σχέσιν :

$$R_1 = \{ (1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (2, 4), (1, 4) \}.$$

Ἐδῶ εἶναι :

$$\Pi = \{ 1, 2, 3 \}, \quad T = \{ 2, 3, 4 \}, \quad \text{ἑπομένως} \quad U = \{ 1, 2, 3, 4 \}.$$

Ἔχομεν ὅτι :

$$\left.\begin{matrix} (1, 2) \in R_1 \\ (2, 3) \in R_1 \end{matrix}\right\} \text{ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ } (1, 3) \in R_1,$$

Ἐπίσης :

$$\left.\begin{matrix} (2, 3) \in R_1 \\ (3, 4) \in R_1 \end{matrix}\right\} \text{ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ } (2, 4) \in R_1,$$

Ἐπίσης :

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R_1\\(2,4)\in R_1\end{array}\right\}$$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ $(1,4)\in R_1$,

Ἐπίσης :

$$\left.\begin{array}{l}(1,3)\in R_1\\(3,4)\in R_1\end{array}\right\}$$ παρατηροῦμεν δὲ ὅτι καὶ $(1,4)\in R_1$.

Ἄρα ἡ R_1 εἶναι μεταβατική.

Παρατηροῦμεν δηλ. ὅτι, ὅταν διὰ τὴν τυχοῦσαν τριάδα ἀπὸ στοιχεῖα τοῦ U, ἔστω α, β, γ, συμβαίνῃ νὰ ἔχωμεν $(\alpha, \beta)\in R_1$ καὶ $(\beta,\gamma)\in R_1$, τότε συμβαίνει νὰ ἔχωμεν καὶ $(\alpha,\gamma)\in R_1$.

Ἀξιοσημείωτον εἶναι ὅτι τὰ στοιχεῖα α, β, γ ἀπὸ τὸ σύνολον U δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ των. Ἡ σχέσις, π.χ.,

$$R_2=\{(1,2),\ (2,3),\ (1,3),\ (2,2),\ (5,6)\}$$

εἶναι μεταβατική. Πράγματι εἶναι :

$$\Pi=\{1,2,5\},\quad T=\{2,3,6\}\quad \text{καὶ}\quad U=\{1,2,3,5,6\}$$

καὶ ἔχομεν :

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R_2\\(2,3)\in R_2\end{array}\right\}\quad \text{καὶ}\quad (1,3)\in R_2$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R_2\\(2,2)\in R_2\end{array}\right\}\quad \text{καὶ}\quad (1,2)\in R_2$$

Ὁμοίως αἱ σχέσεις $\{(\alpha,\beta),\ (\beta,\beta)\}$ καὶ $\{(\alpha,\alpha),\ (\alpha,\beta)\}$ εἶναι μεταβατικαί.

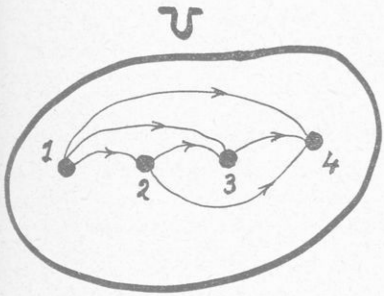
Ὁ συμβολικὸς ὁρισμὸς τῆς μεταβατικῆς σχέσεως εἶναι :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Διὰ κάθε} & \alpha,\beta,\gamma\in U\\ \text{μὲ} & (\alpha,\beta)\in R\\ \text{καὶ} & (\beta,\gamma)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow(\alpha,\gamma)\in R$$

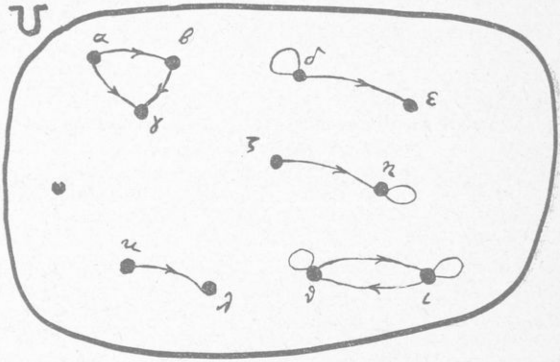
Ὥστε : **μία σχέσις R εἰς ἕνα σύνολον U λέγεται μεταβατική, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε τριάδα μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ U, ἔστω α, β, γ (ὅπου α, β, γ ὄχι ἀναγκαίως διάφορα μεταξύ των) διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $(\alpha,\beta)\in R$ καὶ $(\beta,\gamma)\in R$, εἶναι καὶ $(\alpha,\gamma)\in R$.**

72.2 Ἀπὸ τὸ γράφημά της διακρίνομεν **ἀμέσως** ἂν μία σχέσις εἶναι μεταβατικὴ ἀπὸ τὸ ὅτι, ὅταν ἕνα βέλος ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ α καὶ πηγαίνῃ εἰς τὸ β καὶ ἕνα δεύτερον βέλος ἀναχωρῇ ἀπὸ τὸ β καὶ πηγαίνῃ εἰς τὸ γ, τότε καὶ ἕνα τρίτον βέλος ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ α καὶ καταλήγει εἰς τὸ γ.

Εἰς τὰ σχήματα 83 καὶ 84 βλέπετε γραφήματα μεταβατικῶν σχέσεων:



Σχ. 83



Σχ. 84

Γράφημα τῆς μεταβατικῆς σχέσεως:

$\{(1,2),\ (2,3),\ (1,3),\ (2,4),\ (3,4),\ (1,4)\}$

Γράφημα τῆς μεταβατικῆς σχέσεως:

$\{(\alpha,\beta),\ (\beta,\gamma),\ (\alpha,\gamma),\ (\delta,\delta),\ (\delta,\varepsilon),\ (\zeta,\eta),\ (\eta,\eta),\ (\theta,\theta),(\theta,\iota)\,(\iota,\theta),(\iota,\iota),(\kappa,\lambda)\}$

Ἀσκήσεις

204) Νὰ ἐξετάσετε ἂν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις εἶναι ἢ ὄχι μεταβατικαί:

α) $R_1=\{(1,2),\ (2,3),\ (1,3),\ (3,3)\}$

β) $R_2=\{(\alpha,\beta),\ (\beta,\gamma),\ (\beta,\beta),\ (\gamma,\gamma),\ (\alpha,\gamma),\ (\alpha,\delta),\ (\delta,\alpha),\ (\delta,\delta),\ (\alpha,\alpha)\}$

γ) $R_3=\{(1,2),\ (2,3),\ (1,3),\ (3,4),\ (1,4)\}$

205) Εἰς τὸ σύνολον $U=\{2, 14, 70, 210\}$ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R=\{(x,y)\,|\,x$ διαιρέτης τοῦ $y\}$ εἶναι ἢ ὄχι μεταβατική. Νὰ ἐξετάσετε ἐπίσης ἂν ἡ R εἶναι ἢ ὄχι ἀνακλαστικὴ καὶ συμμετρική.

206) Εἰς τὸ σύνολον U τῶν ἀνδρῶν ἑνὸς χωριοῦ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R=\{(x,y)\,|\,x$ ἀδελφὸς τοῦ $y)\}$ εἶναι ἢ ὄχι μεταβατική. Μήπως ἡ σχέσις εἶναι καὶ ἀνακλαστικὴ ἢ συμμετρική;

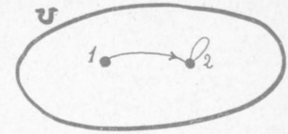
207) Εἰς τὸ δυναμοσύνολον $\mathscr{P}_{(A)}$ ἑνὸς συνόλου A, δηλ. εἰς τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων τοῦ A, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις « ὑποσύνολον τοῦ »

(ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν

$$R = \{ (x, y) \mid x \subset y \})$$

εἶναι μεταβατική.

208) Εἰς τὸ Σχ. 85 βλέπετε τὸ γράφημα μιᾶς σχέσεως R. Νὰ ἀναγράψετε τὴν σχέσιν καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι μεταβατική.



Σχ. 85

§ 73. Σχέσεις ἰσοδυναμίας εἰς σύνολον U

73.1 Εἴδαμεν εἰς τὰ προηγούμενα σχέσεις, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἄλλαι εἶναι ἀνακλαστικαί, ἄλλαι συμμετρικαί, ἄλλαι μεταβατικαί, ἄλλαι ἀνακλαστικαὶ καὶ συμμετρικαὶ (*) κ.τ.λ.

Ὑπάρχουν ὅμως **σχέσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι συγχρόνως ἀνακλαστικαί, συμμετρικαὶ καὶ μεταβατικαί.** Αἱ σχέσεις αὐταὶ λέγονται **σχέσεις ἰσοδυναμίας.**

Παράδειγμα 1ον. Δίδεται ἕνα σύνολον μαθητῶν $M = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις :

$$R = \{ (x, y) \mid x \text{ ἔχει αὐτὸ τὸ ἀνάστημα μὲ τὸν } y \}$$

εἶναι ἢ ὄχι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἀπάντησις. Πρῶτον ἡ σχέσις εἶναι ἀνακλαστική, διότι κάθε μαθητὴς ἔχει τὸ ἴδιον ἀνάστημα μὲ τὸν ἑαυτόν του καὶ ἑπομένως τὰ ζεύγη (α, α), (β, β), (γ, γ), (δ, δ), $(\varepsilon, \varepsilon)$, (ζ, ζ) ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R.

Δεύτερον, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας μαθητὴς α ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν β, τότε καὶ ὁ β ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν α καὶ ἑπομένως ἂν $(\alpha, \beta) \in R$, τότε καὶ $(\beta, \alpha) \in R$. Ἡ σχέσις ἑπομένως εἶναι συμμετρική.

Τρίτον, ἐὰν ἕνας μαθητὴς α ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν β καὶ ὁ β τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν ε, τότε καὶ ὁ α ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ τὸν ε, δηλ. $(\alpha, \beta) \in R$ καὶ $(\beta, \varepsilon) \in R \Longrightarrow (\alpha, \varepsilon) \in R$. Ἄρα ἡ σχέσις εἶναι μεταβατική. Ἡ σχέσις λοιπὸν R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἀξιοπαρατήρητον εἶναι τοῦτο : ὅτι ἡ συνθήκη « ἔχει τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μὲ » **διαμερίζει** τὸ σύνολον (**) M εἰς ὑποσύνολα (κλάσεις) καθένα ἀπὸ

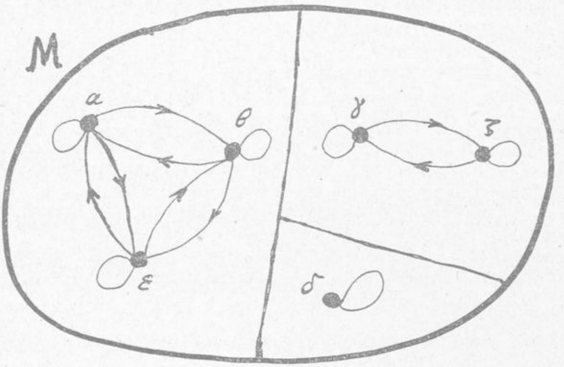
(*) Δὲν εἶναι ἀπαραίτητον μία σχέσις νὰ εἶναι ἀνακλαστικὴ εἴτε συμμετρικὴ εἴτε μεταβατική. Ἡ σχέσις, π.χ., $R = \{ (1, 2), (5, 7), (2, 10) \}$ δὲν εἶναι οὔτε ἀνακλαστικὴ οὔτε συμμετρικὴ οὔτε μεταβατική.

(**) Ἡ συνθήκη κάθε σχέσεως ἰσοδυναμίας διαμερίζει τὸ βασικὸν σύνολον.

τὰ ὁποῖα περιλαμβάνει τοὺς μαθητάς, ποὺ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἀνάστημα μεταξύ των.

Ἐάν, π.χ., ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ μαθηταὶ α, β, ε ἔχουν ἀνάστημα 1,80 m, οἱ γ, ζ ἔχουν ἀνάστημα 1,75 m καὶ ὁ δ 1,65 m, τότε θὰ ἔχωμεν διαμερισμὸν τοῦ Μ εἰς τρεῖς κλάσεις, τάς : $\{ α, β, ε \}$, $\{ γ, ζ \}$, $\{ δ \}$.

Εἰς τὸ Σχ. 86 βλέπετε τὸ γράφημα τῆς σχέσεως R καὶ τὰς κλάσεις, εἰς τὰς



Σχ. 86

ὁποίας διαμερίζεται τὸ Μ καὶ αἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται **κλάσεις ἰσοδυναμίας**. Ὅπως διακρίνετε εἰς τὸ γράφημα (Σχ. 86) εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν κλάσεις ἰσοδυναμίας μὲ δύο στοιχεῖα ἢ καὶ μὲ ἕνα μόνον στοιχεῖον.

Παράδειγμα 2ον. Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ σχέσις :
$R = \{ (1, 2), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1) \}$
εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίες.

Ἀπάντησις. Ἔχομεν :

$$Π = \{ 1, 2, 3 \}, \quad T = \{ 1, 2, 3 \}, \quad U = \{ 1, 2, 3 \}$$

α) Εἰς τὴν σχέσιν ἀνήκουν τὰ ζεύγη (1, 1), (2, 2), (3, 3) ἄρα εἶναι ἀνακλαστική. β) Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ μέλη τῶν ζευγῶν, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν R, ἡ σχέσις δὲν μεταβάλλεται· πράγματι :

$$R^{-1} = \{ (2, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (2, 3), (3, 1), (1, 3) \} = R.$$

῾Επομένως ἡ σχέσις εἶναι συμμετρική. γ) ἔχομεν :

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R\\(2,1)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (1,1)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(1,2)\in R\\(2,2)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (1,2)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,2)\in R\\(2,3)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (1,3)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(1,1)\in R\\(1,3)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (1,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(2,1)\in R\\(1,1)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (2,1)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(2,2)\in R\\(2,3)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (2,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,3)\in R\\(3,2)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (3,2)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(1,3)\in R\\(3,3)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (1,3)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,2)\in R\\(2,3)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (3,3)\in R \qquad \left.\begin{array}{l}(3,2)\in R\\(2,1)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (3,1)\in R$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,1)\in R\\(1,3)\in R\end{array}\right\}\Longrightarrow (3,3)\in R \quad \text{κ.τ.λ.}$$

ἄρα ἡ σχέσις εἶναι καὶ μεταβατική. Ἄρα εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Παράδειγμα 3ον. Γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν πρώτην τάξιν ὅτι δύο εὐθεῖαι ε_1, καὶ ε_2 ἑνὸς ἐπιπέδου p, λέγονται παράλληλοι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον· δηλ. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$. Διευρύνοντες τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν θὰ λέγωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι ἑνὸς ἐπιπέδου p λέγονται παράλληλοι ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον ἢ συμπίπτουν· δηλ. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \varnothing$ ἢ $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$.

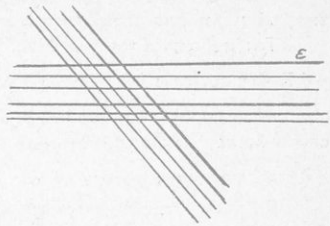
Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν λέγομεν ὅτι ἔχομεν εὐθείας παραλλήλους μὲ **στενὴν σημασίαν**· εἰς τὴν δευτέραν λέγομεν ὅτι ἔχομεν εὐθείας παραλλήλους μὲ **εὐρεῖαν σημασίαν**. Εἰς τὸ ἑξῆς μὲ τὸ σύμβολον $\parallel$ θὰ ἐννοοῦμεν παραλληλίαν μὲ εὐρεῖαν σημασίαν.

Ἂς ἐξετάσωμεν τώρα εἰς τὸ σύνολον E τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου p τὴν σχέσιν $R = \{ (x, y) \mid x$ παράλληλος πρὸς $y \}$, δηλ. :

$$R = \{ (x, y) \mid x \parallel y \}.$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνθήκη « παράλληλος πρὸς » διαμερίζει τὸ σύνολον E τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου p εἰς ὑποσύνολα (κλάσεις)· ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ E, αἱ ὁποῖαι εἶναι παραλληλοι πρὸς μίαν ὡρισμένην εὐθεῖαν ε, ἀποτελοῦν μίαν κλάσιν ἢ ὅπως συνήθως λέγομεν μίαν **διεύθυνσιν**. Καθεμία ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς εἶναι ἕνα ἀντιπρόσωπος τῆς διευθύνσεως καὶ καθορίζει αὐτὴν (Σχ. 87).

Τὸ σύνολον $R = \{ (x, y) \mid x \parallel y \}$ εἰς τὸ σύνολον Ε τῶν εὐθειῶν τοῦ p, εἶναι, βεβαίως, ἕνα ἀπειροσύνολον καὶ ἑπομένως τὴν σχέσιν R δὲν ἠμποροῦμεν νὰ τὴν παραστήσωμεν μὲ ἀναγραφήν. Ἐπειδὴ ὅμως κάθε εὐθεῖα x_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἑαυτόν της τὰ ζεύγη (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3) κ.τ.λ. θὰ ἀνήκουν εἰς τὴν σχέσιν R. Ἑπομένως ἡ R εἶναι ἀνακλαστική. Ἐπίσης· ἐπειδὴ ἐὰν $x_1 \parallel y_1$, τότε καὶ $y_1 \parallel x_1$, δηλ. ἐάν, τὸ ζεῦγος (x_1, y_1) ἀνήκῃ εἰς τὴν R, τότε καὶ τὸ (y_1, x_1) θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν σχέσιν R, δι' αὐτὸ ἡ σχέσις εἶναι συμμετρική.



Σχ. 87

Τέλος $x \parallel y$ καὶ $y \parallel z \Longrightarrow x \parallel z$ καὶ ἑπομένως διὰ κάθε τριάδα εὐθειῶν x, y, z, διὰ τὴν ὁποίαν $(x, y) \in R$ καὶ $(y, z) \in R$, ἔχομεν καὶ $(x, z) \in R$, δηλ. ἡ R εἶναι καὶ μεταβατική. Εἶναι λοιπὸν ἡ R ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, δηλ. εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Ἀσκήσεις

209) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R = \{ (x, y) \mid x = y \}$ εἰς τὸ σύνολον Ε, τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, εἶναι ἢ ὄχι σχέσις ἰσοδυναμίας.

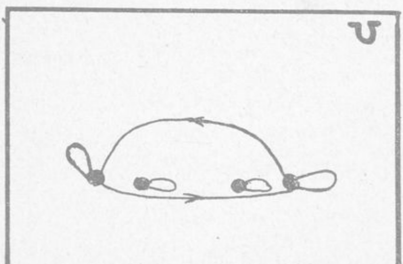
210) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R_1 = \{ (x, y) \mid x \sim y \}$ εἰς ἕνα σύνολον Ε ἀπὸ σύνολα, εἶναι ἢ ὄχι σχέσις ἰσοδυναμίας.

211) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις :

$$R = \{ (1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 1), (1, 3) \}$$

εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

212) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις τῆς ὁποίας τὸ γράφημα βλέπετε εἰς τὸ Σχ. 88 εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.



Σχ. 88

§ 74. Ἀντισυμμετρικαὶ σχέσεις εἰς σύνολον U

Ἔστω ἡ σχέσις $R = \{ (1, 1), (1, 2), (3, 4), (5, 2) \}$. Ἔχομεν :

$$\Pi = \{1, 3, 5\}, \; T = \{1, 2, 4\}, \; U = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ R **δὲν περιέχει τὸ ἀντίστροφον ζεῦγος κανενὸς ζεύγους της, μὲ μέλη ἀπὸ διαφορετικὰ στοιχεῖα τοῦ U.**

Τὰς σχέσεις αὐτὰς τὰς ὀνομάζομεν ἀντισυμμετρικάς. **Ὥστε :**

(R ἀντισυμμετρική) $\Longleftrightarrow$ $(x, y) \in U$, $x \neq y$ καί : $(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$).

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἐὰν $(x, y) \in R$ καὶ $(y, x) \in R$, τότε θὰ εἶναι $x = y$. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ εἴπωμεν ὅτι :

(R ἀντισυμμετρική) $\Longleftrightarrow$ $(x, y) \in U$, $(x, y) \in R$ καὶ $(y, x) \in R \Longrightarrow x = y$).

Κλασικὸν παράδειγμα ἀντισυμμετρικῆς σχέσεως εἶναι ἡ σχέσις « μεγαλύτερος τοῦ » εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλ. ἡ σχέσις :

$$R = \{ (x, y) \mid x > y \} \text{ μὲ } x, y \in \Phi.$$

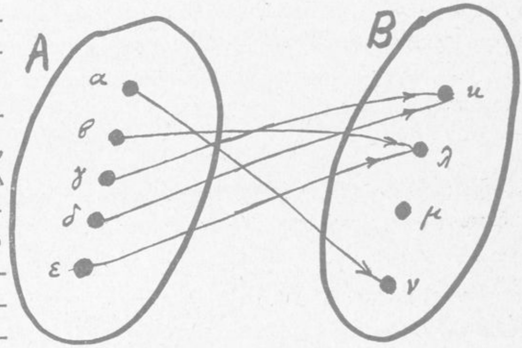
Πράγματι· ἂν ἕνα ζεῦγος μὲ στοιχεῖα ἀπὸ τὸ Φ (διάφορα μεταξύ των) ἀνήκῃ εἰς τὴν R, ὅπως, π.χ., τὸ ζεῦγος (5,4), διότι εἶναι $5 > 4$, τὸ ἀντίστροφον ζεῦγος (4,5) δὲν ἀνήκει εἰς τὴν R, διότι δὲν ἰσχύει $4 > 5$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 75. Ἀπεικόνισις συνόλου εἰς σύνολον

75.1. Ἔστω ὅτι A καὶ B εἶναι δύο μὴ κενὰ σύνολα, ὄχι ἀναγκαίως διάφορα μεταξύ των. Ἔστω δὲ ὅτι **μὲ ἕνα κάποιον τρόπον ἀντιστοιχίζομεν εἰς κάθε στοιχεῖον $x \in A$ ἕνα (καὶ μόνον ἕνα) στοιχεῖον $y \in B$.** Ἕνα τρόπον ἀντιστοιχίσεως βλέπετε κατωτέρω μὲ τὰ βέλη τοῦ γραφήματος (Σχ. 89).



Σχ. 89

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαν, ὅπως βλέπομεν, **κάθε** στοιχεῖον ἀπὸ τὸ A ἔχει ἕνα (καὶ μόνον) ἀντίστοιχον στοιχεῖον ἀπὸ τὸ B, δηλ. εἰς τὴν ἀντιστοιχίαν αὐτὴν χρησιμοποιοῦνται ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A.

Ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἀντιστοιχίαν ὁρίζεται τὸ σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν
$F = \{ (\alpha, \nu), (\beta, \lambda), (\gamma, \kappa), (\delta, \kappa), (\varepsilon, \lambda) \}$.

Τὸ σύνολον F εἶναι μία σχέσις ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B καὶ παρατηροῦμεν εἰς αὐτὴν ὅτι : 1) **κάθε** στοιχεῖον τοῦ A παρουσιάζεται ὡς πρῶτον μέλος κάποιου ἀπὸ τὰ διατετ. ζεύγη, ποὺ ἀποτελοῦν τὴν F, 2) κάθε στοιχεῖον τῆς F εἶναι διατετ. ζεῦγος μὲ πρῶτον μέλος του ἀπὸ τὸ A καὶ μὲ δεύτερον μέλος του τὸ ἀντίστοιχον τοῦ πρώτου μέλους του εἰς τὸ B καὶ 3) δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα στοιχεῖα τῆς σχέσεως F μὲ τὸ αὐτὸ πρῶτον μέλος. Ὥστε : **ἡ σχέσις F εἶναι μία συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ της τὸ A καὶ μὲ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον τοῦ B.** Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ἠμπορεῖ λοιπὸν νὰ συμβολισθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$F = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ καὶ } y \text{ τὸ εἰς τὸ } B \text{ ἀντίστοιχον τοῦ } x \}$$

Κάθε σχέσις μὲ τὰ ἀνωτέρω γνωρίσματα, δηλ. κάθε συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ, ἔστω A, καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον συνόλου Β, ὀνομάζεται **μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Α εἰς τὸ Β** ἤ, ἁπλῶς, **ἀπεικόνισις τοῦ Α εἰς τὸ Β**.

Κάθε μονοσήματος ἀπεικόνισις ἑνὸς συνόλου Α εἰς ἕνα σύνολον Β συμβολίζεται μὲ ἕνα γράμμα, π.χ. f, ὡς ἑξῆς:

$$f : A \rightarrow B$$

καὶ διαβάζεται: ἡ f ἀπεικονίζει τὸ σύνολον Α εἰς τὸ Β.

Ἀντὶ τοῦ γράμματος f ἠμποροῦμεν νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ ὁποιοδήποτε ἄλλο, συνήθως δὲ φ, σ, g, R κ.τ.λ.

Ἔστω μία τυχοῦσα μονοσήμαντος ἀπεικόνισις $f : A \rightarrow B$ καὶ ἔστω ὅτι εἰς τὸ στοιχεῖον, π.χ., $x \in A$ ἀντιστοιχεῖ τὸ $y \in B$· τότε τὸ x ὀνομάζεται **ἀρχέτυπον τοῦ y** καὶ τὸ y ὀνομάζεται **ἡ εἰκὼν τοῦ x κατὰ τὴν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f** καὶ συμβολίζεται μὲ $f(x)$ (διαβάζεται: ἔφ τοῦ χί). Τὸ $f(x)$ λέγεται καὶ **τιμὴ τῆς συναρτήσεως f εἰς τὸ x**. Ημποροῦμεν τώρα νὰ γράψωμεν πληρέστερον:

$$f : A \rightarrow B : x \in A \xrightarrow{f} f(x) \in B,$$

ποὺ διαβάζεται ὡς ἑξῆς: « ἡ συνάρτησις f ἀπεικονίζει τὸ σύνολον Α εἰς τὸ Β, ὥστε κάθε $x \in A$ νὰ ἀπεικονίζεται διὰ τῆς f εἰς τὸ $f(x) \in B$ ».

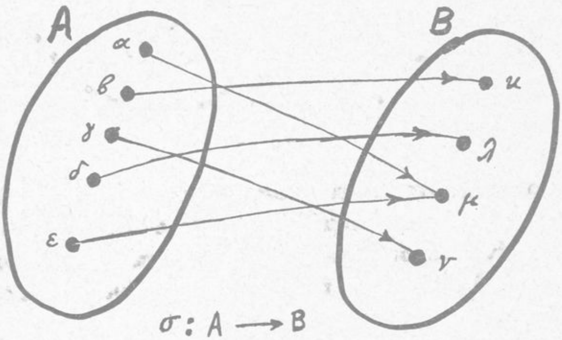
Σημ. Ἐπειδή, ὅπως εἴδαμεν, ἡ ἔννοια: **ἀπεικόνισις τοῦ Α εἰς τὸ Β**, συμπίπτει μὲ τὴν ἔννοιαν: **συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Α καὶ πεδίον τῶν τιμῶν της ἕνα ὑποσύνολον τοῦ Β**, διὰ τοῦτο εἰς τὰ ἑπόμενα οἱ ὅροι **συνάρτησις** καὶ **ἀπεικόνισις** θὰ χρησιμοποιοῦνται ἀδιαφόρως.

75.2. Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὸν ὅρον « συνάρτησις », τὸ στοιχεῖον $x \in A$ λέγεται **ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ τῆς συναρτήσεως** καὶ τὸ στοιχεῖον $y = f(x) \in B$ (ποὺ εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ x) λέγεται **ἐξηρτημένη μεταβλητὴ τῆς συναρτήσεως**.

Παρατήρησις. Εἴπαμεν εἰς τὰ προηγούμενα ὅτι ἡ ἀντιστοιχία, ποὺ ὁρίζεται, ὅταν εἰς κάθε στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου Α ἀντιστοιχίζομεν ἕνα (καὶ μόνον) στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου Β, πραγματοποιεῖται « κατὰ κάποιον τρόπον ». Τρόποι ἀντιστοιχίσεως ὑπάρχουν πολλοί· ἕνας τρόπος εἶναι, π.χ., μὲ πίνακα εἰς τὸν ὁποῖον καταγράφονται αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς y. Συνήθως δίδεται συνθήκη (τύπος ἢ πρότασις) μὲ τὴν ὁποίαν προσδιορίζεται τὸ δεύτερον μέλος τοῦ κάθε ζεύγους, ὅταν ὁρισθῇ τὸ πρῶτον, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω εἰς διάφορα παραδείγματα.

§ 76. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἑνὸς συνόλου A ΕΠΑΝΩ εἰς σύνολον B

Εἰς τὰ προηγούμενα (§ 75.1) εἴδαμεν τὴν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν f : A → B. Εἰς αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι **ὑπάρχει στοιχεῖον τοῦ B (τὸ μ), χωρὶς ἀρχέτυπόν του εἰς τὸ A,** δηλ. εἰς αὐτὴν **δὲν ἐμφανίζεται κάθε στοιχεῖον τοῦ B ὡς εἰκὼν κάποιου στοιχείου τοῦ A.** Ἠμπορεῖ ὅμως νὰ σκεφθῇ κανεὶς καὶ μονοσημάντους ἀπεικονίσεις ἑνὸς συνόλου A εἰς σύνολον B, κατὰ τὰς ὁποίας **κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι εἰκὼν κάποιου στοιχείου τοῦ A.** Ἔτσι εἰς τὸ Σχ. 90 βλέπετε μίαν τέτοιαν ἀπεικόνισιν **σ** μὲ « σύνολον ἀρχετύπων » τὸ A τοῦ Σχ. 89 καὶ « σύνολον εἰκόνων » τὸ B τοῦ Σχ. 89.



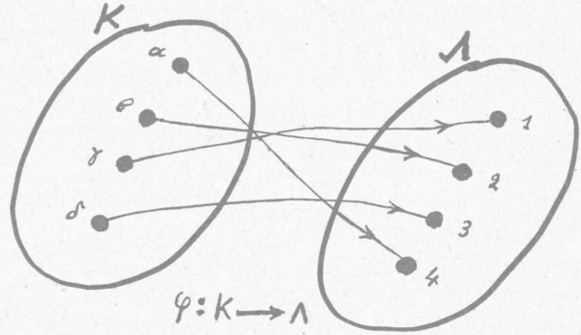
Σχ. 90

Κάθε μονοσήμαντος ἀπεικόνισις, ἔστω f : A → B, εἰς τὴν ὁποίαν κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι εἰκὼν κάποιου στοιχείου τοῦ A λέγεται : μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A ΕΠΑΝΩ εἰς τὸ B.

Ἔτσι ἡ ἀπεικόνισις, ποὺ παριστάνεται εἰς τὸ Σχ. 90 εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A **ἐπάνω** εἰς τὸ B.

§ 77. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου A ἐπάνω εἰς σύνολον B

Παρατηρήσατε τὴν ἀπεικόνισιν **σ** εἰς τὸ Σχ. 90 καὶ τὴν ἀπεικόνισιν **φ** εἰς τὸ κατωτέρω Σχ. 91. Βλέπετε ὅτι καὶ ἡ **σ** καὶ ἡ **φ** εἶναι μονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις ἑνὸς συνόλου ἐπάνω εἰς ἄλλο σύνολον. Διαφέρουν ὅμως κατὰ τοῦτο : Εἰς τὴν **σ** ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν εἰκόνων B, ποὺ ἔχουν περισσότερα ἀρχέτυπα ἀπὸ ἕνα, π.χ., εἶναι **σ** (α) = μ καὶ **σ** (ε) = μ. Εἰς τὴν **φ** ὅμως αὐτὸ δὲν συμβαίνει· δηλ. **εἰς τὴν φ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Λ (τῶν εἰκόνων), εἶναι εἰκὼν μόνον ἑνὸς στοιχείου τοῦ συνόλου Κ (τῶν ἀρχετύπων).**



Σχ. 91

Κάθε μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἑνὸς συνόλου A ἐπάνω εἰς σύνολον B, εἰς τὴν ὁποίαν συμβαίνει κάθε στοιχεῖον τοῦ B νὰ εἶναι εἰκὼν μόνον ἑνὸς στοιχείου τοῦ A λέγεται : ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A ἐπάνω εἰς τὸ B, εἴτε ἀπεικόνισις ἕνα πρὸς ἕνα τοῦ A ἐπάνω εἰς τὸ B.

§ 78. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου A εἰς σύνολον B

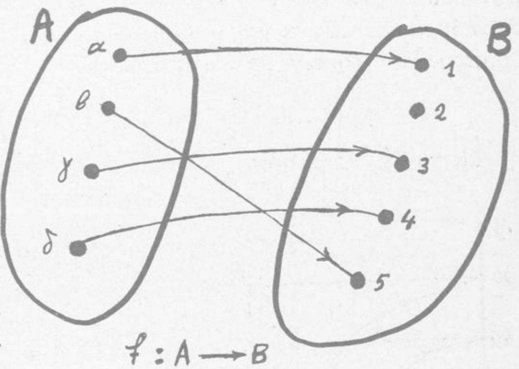
Παρατηρήσατε τὴν ἀπεικόνισιν f : A → B εἰς τὸ Σχ. 92 Βλέπετε ὅτι, ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀπεικόνισιν φ : K → Λ (Σχ. 91), διάφορα μεταξύ των πρότυπα ἔχουν διαφόρους μεταξύ των εἰκόνας, ἀλλὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ B δὲν εἶναι εἰκὼν στοιχείου τοῦ A. Τὸ στοιχεῖον 2∈B, π.χ., δὲν εἶναι εἰκὼν κανενὸς στοιχείου τοῦ A. Ἔχομεν λοιπὸν τώρα ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ A εἰς τὸ B, ἀλλὰ ὄχι ἐπάνω εἰς τὸ B.

Παραδείγματα ἀπεικονίσεων (συναρτήσεων).

Παράδειγμα 1ον. Ἂς λάβωμεν ὡς σύνολον A τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σύνολον B τὸ ἴδιον τὸ A. Ἂς ἀντιστοιχίσωμεν τώρα εἰς κάθε στοιχεῖον $x \in A$ τὸ x^2, ποὺ εἶναι ἐπίσης στοιχεῖον τοῦ A. Ὁρίζομεν ἔτσι μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ A εἰς τὸ A :

$$f : A \longrightarrow A : x \xrightarrow{f} x^2$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε $x \in A$ ἔχει μίαν εἰκόνα $f(x) = x^2 \in A$, διότι κάθε ἀκέραιος ἔχει ἕνα τετράγωνον, ποὺ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιος. Ἀλλὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ A δὲν εἶναι εἰκὼν (μὲ τὴν f) κάποιου στοιχείου τοῦ A, διότι κάθε ἀκέραιος δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου. Ὥστε τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ A. Ἔχομεν λοιπὸν ἁπλῶς ἀπεικόνισιν τοῦ A εἰς τὸ A. (Παλαιότερον ἐλέγετο ἀπεικόνισις τοῦ A **μέσα** εἰς τὸ A).



Σχ. 92

Παράδειγμα 2ον. Ἂς λάβωμεν πάλιν τὸ σύνολον A τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας καὶ ὡς σύνολον B τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, ποὺ εἶναι τέλεια τετράγωνα. δηλ. $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$, $B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$. Τότε, μὲ τὴν ἀπεικόνισιν $f : A \longrightarrow B : x \xrightarrow{f} x^2$, κάθε ἀκέραιος τοῦ B εἶναι εἰκὼν δύο στοιχείων τοῦ A. (Π.χ. ὁ $25 \in B$ εἶναι εἰκὼν τοῦ $5 \in A$ καὶ τοῦ $-5 \in A$). Ἔχομεν λοιπὸν τώρα ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου A **ἐπάνω** εἰς τὸ B.

Παράδειγμα 3ον. Ἂς λάβωμεν ὡς σύνολον A τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ὡς σύνολον B τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, οἱ ὁποῖοι εἶναι τέλεια τετράγωνα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, μὲ τὴν ἀπεικόνισιν $f : A \longrightarrow B : x \xrightarrow{f} x^2$, κάθε ἀκέραιος τῆς Ἀριθμητικῆς ἀπεικονίζεται εἰς τὸ τετράγωνόν του, δηλ. κάθε ἀκέραιος τοῦ A ἔχει εἰκόνα τὸ τετράγωνόν του εἰς τὸ B καὶ κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι τετράγωνον ἑνὸς μόνον ἀκεραίου ἀπὸ τὸ A. Ἔχομεν λοιπὸν τώρα ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ A ἐπάνω εἰς τὸ B.

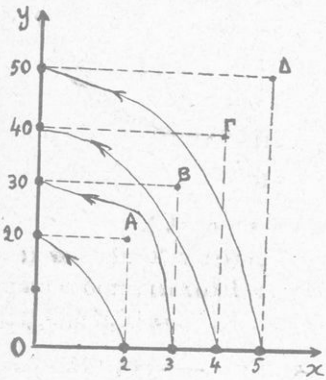
Παράδειγμα 4ον. Ἂς λάβωμεν τὴν συνάρτησιν :

$$f = \{(2,20), (3,30), (4,40), (5,50)\}$$

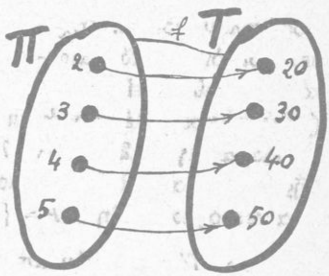
Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι : $\Pi = [\, 2, 3, 4, 5 \,]$, $T = [\, 20, 30, 40, 50 \,]$. Ἔχομεν ἐδῶ μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Π ἐπάνω εἰς τὸ Τ. Εἰκὼν τοῦ 2 εἶναι τὸ 20, δηλ. $f(2) = 20$, $f(3) = 30$ κ.τ.λ. Ἀρχέτυπον τοῦ 50 εἶναι τὸ 5. Μὲ τὴν f ἀπεικονίζεται τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της Π (σύνολον τῶν ἀρχετύπων) εἰς τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της Τ (σύνολον τῶν εἰκόνων). Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι εἰς τὴν τιμὴν $x = 2$ ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $y = 20$, ποὺ εἶναι $10 \cdot 2$, δηλ. $10 \cdot x$ καὶ γενικῶς κάθε $x \in \Pi$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $10x \in T$. Ἠμποροῦμεν λοιπὸν νὰ γράψωμεν :

$$f : \Pi \longrightarrow T : x \xrightarrow{f} 10x, \text{ ὅπου } x \in \{ 2, 3, 4, 5 \}$$

Εἰς τὸ Σχ. 93 βλέπετε γράφημα καὶ γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως f. Ἡ γεωμετρική της παράστασις εἶναι τὸ σημειοσύνολον { Α, Β, Γ, Δ }. Εἰς τὸ Σχ. 94 βλέπετε ἕνα ἄλλο γράφημα τῆς f.



Σχ. 93



Σχ. 94

Παράδειγμα 5ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\varphi = \{ (5, 1), (4, 1), (2, 1) \}$. Ἔχομεν $\Pi = \{ 5, 4, 2 \}$, $T = \{ 1 \}$. Μὲ τὴν φ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της ἀπεικονίζεται ἐπάνω εἰς τὸ μονομελὲς σύνολον $\{ 1 \}$.

Κάθε συνάρτησις, ποὺ τὸ πεδίον τῶν τιμῶν της εἶναι μονομελὲς σύνολον λέγεται σταθερὰ συνάρτησις. Ἡ $f = \{ (5, 1), (4, 1), (2, 1) \}$ εἶναι λοιπὸν σταθερὰ συνάρτησις.

Σημ. Εἰς τὰς συναρτήσεις τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν ὅτι τὰ πεδία ὁρισμοῦ των καὶ τὰ πεδία τῶν τιμῶν των **ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἀριθμούς**, διὰ τοῦτο συναρτήσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω ὀνομάζονται **ἀριθμητικαὶ συναρτήσεις.**

Παράδειγμα 6ον. Ἔστω ὅτι ἔχομεν ἕνα σύνολον παιδιῶν $A = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta \}$ καὶ ἕνα σύνολον μητέρων $B = \{ \Lambda, M, N \}$ καὶ ἔστω ὅτι ἡ

Λ εἶναι μητέρα τῶν α καὶ δ, ἡ Μ τοῦ γ καὶ ἡ Ν τῶν β καὶ η. Ζητεῖται νὰ καθορίσωμεν μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της τὴν σχέσιν :

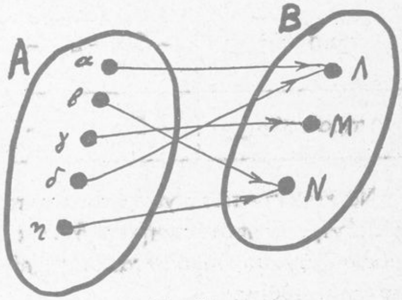
R = { (x, y) | y∈B εἶναι μητέρα τοῦ x∈A }. Ἔχομεν ὅτι :

ὁ α ἔχει μητέρα τὴν Λ · ζεῦγος (α, Λ)
ὁ β ἔχει μητέρα τὴν Ν · ζεῦγος (β, Ν)
ὁ γ ἔχει μητέρα τὴν Μ · ζεῦγος (γ, Μ)
ὁ δ ἔχει μητέρα τὴν Λ · ζεῦγος (δ, Λ)
ὁ η ἔχει μητέρα τὴν Ν · ζεῦγος (η, Ν).

Ἡ σχέσις λοιπὸν μὲ ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων της εἶναι :

R = { (α, Λ), (β, Ν), (γ, Μ), (δ, Λ), (η, Ν) }

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σχέσις εἶναι συνάρτησις. Εἶναι δηλ. ἀπεικόνισις μὲ τὴν ὁποίαν κάθε παιδὶ ἀπεικονίζεται εἰς τὴν μητέρα του. Ὅπως βλέπετε καὶ ἀπὸ τὸ γράφημα (Σχ. 95), ἡ ἀπεικόνισις εἶναι μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Α ἐπάνω εἰς τὸ Β, ὄχι ὅμως ἀμφιμονοσήμαντος.



Σχ. 95

Παράδειγμα 7ον. Ἐὰν ἀντιστοιχίσωμεν εἰς κάθε Κράτος τὴν πρωτεύουσάν του ἔχομεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου τῶν Κρατῶν εἰς τὸ σύνολον τῶν πρωτευουσῶν των καὶ μάλιστα μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν ἐπάνω. Εἶναι : f (Ἑλλὰς) = Ἀθῆναι, f (Γαλλία) = Παρίσι κ.τ.λ.

Ἡ Ρώμη εἶναι μὲ τὴν f ἡ εἰκὼν τῆς Ἰταλίας κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις

213) Ἔστω ἡ συνάρτησις $f : \Phi_0 \longrightarrow \Phi_0 : x \xrightarrow{f} x + 5$.

Νὰ εὕρετε τὴν τιμὴν τῆς συναρτήσεως εἰς τὸ 2, δηλ. νὰ εὕρετε τὸ f(2). Ἐπίσης τὸ f (0). Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν ἐδῶ ;

214) Ἔστω Α τὸ σύνολον τῶν πόλεων τοῦ κόσμου καὶ Β τὸ σύνολον τῶν Κρατῶν τοῦ κόσμου. Ἡ σχέσις g, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν συνθήκην « x∈A εὑρίσκεται εἰς y∈B » εἶναι ἢ ὄχι ἀπεικόνισις καὶ διατί ; Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν ἐδῶ ; Νὰ εὕρετε τὰ g (Πάτραι), g (Λευκωσία), g (Μιλάνον).

215) Ἔστω Μ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς μας καὶ Ε τὸ

σύνολον τῶν ἐπωνύμων των. Ἐὰν ἀντιστοιχίσωμεν κάθε μαθητὴν εἰς τὸ ἐπώνυμόν του ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ Μ εἰς τὸ Ε. Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν, ὅταν δὲν ὑπάρχουν συνωνυμίαι ; Τί ὅταν ὑπάρχουν συνωνυμίαι ;

216) Νὰ ἐξετάσετε ἄν, ἡ συνθήκη « ὁ x δὲν ἐκτιμᾷ τὸν y » εἰς τὸ σύνολον Α τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως, ὁρίζῃ συνάρτησιν ἢ ἁπλῶς σχέσιν.

217) Νὰ καταρτίσετε πίνακα μερικῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως :

$$\varphi : \Sigma \longrightarrow \Sigma : x \xrightarrow{\varphi} 2x+1=y.$$

νὰ εὕρετε π.χ. τὰς ἐλλειπούσας τιμὰς εἰς τὸν κάτωθι πίνακα :

τιμαὶ τῆς x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
τιμαὶ τῆς y	-5		-1		2		5	7			

Νὰ κάμετε ἔπειτα γεωμετρικὴν παράστασιν τῆς φ δι' ὅλα τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη. Θὰ παρατηρήσετε ὅτι τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ κάθε διατεταγμένου ζεύγους εὑρίσκονται ὅλα ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν. Νὰ χαράξετε αὐτὴν τὴν εὐθεῖαν.

Γενικῶς ἡ συνάρτησις $\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \alpha x+\beta=y$ $(\alpha, \beta, x\in\Sigma)$ ἔχει ὡς γεωμετρικὴν παράστασιν μίαν εὐθεῖαν.

218) Ἐὰν Φ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ Φ_α τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις $R=\{(x, y) \mid$ $x\in\Phi_\alpha$ εἶναι διπλάσιος τοῦ $x\in\Phi\}$ εἶναι ἀπεικόνισις ἢ ὄχι. Ἐὰν ναὶ τί ἀπεικόνισις εἶναι ; Ἐὰν ἀντὶ τοῦ Φ_α λάβωμεν πάλιν τὸ Φ τί ἀπεικόνισιν ἔχομεν ;

219) Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν νυμφευμένων χριστιανῶν ἀνδρῶν εἰς τὸν κόσμον καὶ Γ τὸ σύνολον τῶν συζύγων των ἡ σχέσις :
$R=\{(x, y) \mid x\in A$ ἔχει ὡς σύζυγον $y\in\Gamma\}$ εἶναι ἀπεικόνισις. Διατί ;

Ἂν παραλείψωμεν τὴν λέξιν « χριστιανῶν » τότε ἡ R ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι συνάρτησις ; Διατί ;

Τί εἴδους ἀπεικόνισιν ἔχομεν ὅταν Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν νυμφευμένων χριστιανῶν ἀνδρῶν εἰς τὸν κόσμον καὶ Γ τὸ σύνολον ὅλον τῶν ὑπανδρευμένων γυναικῶν ;

220) Μὲ τὴν γνωστὴν μας, ἀπὸ τὴν Α' τάξιν, κατασκευὴν εἰς κάθε σημεῖον Μ ἑνὸς ἐπιπέδου p ἀντιστοιχίζομεν τὸ συμμετρικόν του πρὸς κέν-

τρον Ο σημεῖον M′ τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου. Ὁρίζομεν λοιπὸν ἔτσι ἀπεικόνισιν, ἔστω f, τοῦ p εἰς τὸ p. Δηλ. $f: p \longrightarrow p: M \xrightarrow{f} M'$. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

221) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ παράλληλος μεταφορὰ εἰς τὸ ἐπίπεδον p κατὰ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὁρίζῃ ἀπεικόνισιν καὶ ἂν ναὶ τί εἴδους ἀπεικόνισις εἶναι.

222) Νὰ ἐξετάσετε μὲ ἰδικά σας παραδείγματα ἂν ἡ ἀντίστροφος f^{-1} μιᾶς συναρτήσεως f εἶναι πάντοτε συνάρτησις.

§ **79. Σημείωμα διὰ τὴν συναρτησιακὴν ὁρολογίαν.** Παλαιότερον, (μερικοὶ δὲ μαθηματικοὶ ἀκόμη καὶ σήμερον) ὁμιλοῦντες διὰ τὴν συνάρτησιν, π.χ. $f = \{ (x, y) \mid y = 10x,$ μὲ $x, y \in \Sigma \}$ ἔλεγον ἡ συνάρτησις $y = 10\,x$. Αὐτὸ ἴσως εἶναι ἕνας σύντομος τρόπος τοῦ λέγειν. Πάντως ἐννοοῦμεν καὶ τότε τὴν συνάρτησιν $f = \{ (x, y) \mid y = 10x,$ μὲ $x, y \in \Sigma \}$. Μερικοὶ ἐκφράζονται συντομώτερον. Λέγουν, πχ., « ἡ συνάρτησις 10x » μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Σ καὶ ἐννοοῦν τὴν συνάρτησιν, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν συνθήκην $y = 10x$, μὲ $x \in \Sigma$.

Αὐτὸ συνηθίζεται πολὺ συχνὰ εἰς τὴν Φυσικήν, ὅπου διαβάζομεν, π.χ., ἐκφράσεις ὅπως αὐτή : « ἡ ἀπόστασις, ποὺ διατρέχει τὸ κινητὸν εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου ». αὐτὸ σημαίνει ὅτι : ὑπάρχει συνάρτησις φ τέτοια, ὥστε ὁ τύπος $y = \varphi\,(x)$, δίδει τὴν ἀπόστασιν y, ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς χρόνον x.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΤΕΥΧΟΥΣ

ΤΥΠΟΙΣ ΑΔΕΛΦΩΝ Γ. ΡΟΔΗ, ΚΕΡΑΜΕΙΚΟΥ 40, ΑΘΗΝΑΙ, ΤΗΛ. 522.512

«ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ»

Γιὰ τὴν α΄ τάξη τοῦ Γυμνασίου

ὑπὸ Γ. Κ. ΜΠΟΥΣΓΟΥ
Δρος τῶν Μαθηματικῶν

ΜΕΘΟΔΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΚΑΙ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

6

10 40

29
30
35
30

128 | 4
:8 32

204/34
6

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α.Ε.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Αὐτὸ τὸ μικρὸ φυλλάδιο ἀποτελεῖ ἀπόπειρα ἰδιαίτερης ἐπικοινωνίας μου μὲ τοὺς συναδέλφους καὶ γράφοντάς το δοκιμάζω πραγματικὴ εὐχαρίστηση, γιατὶ ἴσως τοῦτο ν' ἀποτελέση εὐκαιρία καὶ ἀπαρχὴ γιὰ ἐνθουσιωδέστερη συζήτηση ἢ καὶ συνεργασία σὲ θέματα διδαχτικῆς τῶν σχολικῶν Μαθηματικῶν καὶ γενικώτερα πάνω στὸ μεγάλο ἐρώτημα: « Ποιὰ πρέπει νὰ εἶναι καὶ πῶς πρέπει νὰ διδάσκωνται τὰ σχολικὰ Μαθηματικά ».

Τὸ ἐρώτημα βέβαια εἶναι πολὺ παλαιὸ καὶ ποτὲ δὲν θὰ πάψη ν' ἀπασχολῆ τοὺς Μαθηματικοὺς - παιδαγωγούς, γιατὶ προϋποθέτει βαθύτερη θεώρηση : α) τῆς διαρκῶς ἐξελισσόμενης μαθηματικῆς ἐπιστήμης, β) τῶν διαρκῶς αὐξανόμενων ἐφαρμογῶν τῶν Μαθηματικῶν στοὺς διάφορους τομεῖς τοῦ τεχνικοῦ πολιτισμοῦ μας καὶ γ) τῶν διανοητικῶν ἱκανοτήτων τοῦ μαθητῆ στὰ διάφορα στάδια τῆς ἡλικίας του.

'Απὸ τὸ 1955 περίπου ἄρχισε μιὰ ἰδιαίτερη καὶ ἔντονη κίνηση καὶ ἔρευνα πρῶτα στὴν 'Αμερικὴ κι' ὕστερα στὴν Εὐρώπη, ὄχι πιὰ πάνω στὸ « πῶς » πρέπει νὰ διδάσκωνται τὰ ὡρισμένα στατικὰ καὶ βαλσαμωμένα Μαθηματικὰ στὰ σχολεῖα, ἀλλὰ καὶ πάνω στὸ « ποιὲς πρέπει νὰ εἶναι οἱ μεταβολὲς στὸ περιεχόμενό τους », ὥστε ν' ἀνταποκρίνωνται ὅσο τὸ δυνατὸ περισσότερο στὶς σημερινὲς ἀπαιτήσεις τῆς Μαθηματικῆς 'Επιστήμης καὶ τῶν ἐφαρμογῶν της. Ἔτσι, ὕστερα ἀπὸ συστηματικὴ μελέτη καὶ πολλὲς πειραματικὲς διδασκαλίες στὰ σχολεῖα, ἄρχισε ἡ περικοπὴ καὶ ἀντικατάσταση ἄχρηστου ὑλικοῦ τῆς παλαιᾶς « διδακτέας ὕλης » μὲ νέα θέματα, ποὺ ὄχι μόνον εἶναι ἀπαραίτητα σὲ διάφορες ἐφαρμογές, ἀλλὰ καὶ ἐξασφαλίζουν θεωρητικώτερη διείσδυση τοῦ μαθητῆ στὴ φύση τῶν Μαθηματικῶν καὶ τοῦ καλλιεργοῦν πειθαρχημένη μαθηματικὴ σκέψη σὲ κάθε σοβαρὴ διανοητική του δραστηριότητα.

Τὸ 1959 εἶχαν ἤδη κυκλοφορήσει στὴν 'Αμερικὴ τὰ πρῶτα πειραματικὰ βιβλία μὲ τὴ νέα μέθοδο καὶ τὴ νέα ὕλη. Στὸ τέλος τοῦ 1959 ὁ 'Οργανισμὸς Εὐρωπαϊκῆς Οἰκονομικῆς Συνεργασίας (ἤδη O.E.C.D.), ὠργάνωσε στὸ Rogaumont, κοντὰ στὸ Παρίσι, Σεμινάριο γιὰ τὰ « νέα Μαθηματικά ». Τὰ πορίσματα τῶν ἐργασιῶν τοῦ Σεμιναρίου δημοσιεύτηκαν σ' ἕναν τόμο στὴν ἀγγλικὴ καὶ γαλλικὴ γλῶσσα (Mathématiques

Nouvelles 1961). Ἕνα δεύτερο Σεμινάριο τοῦ Ο.Ε.Ο.Σ. ὠργανώθηκε στὴ Γιουγκοσλαβία (21 Αὐγούστου μέχρι 19 Σεπτεμβρίου 1960). Ὁ Ο.Ε.Ο.Σ. δημοσίευσε σὲ γαλλικὴ καὶ ἀγγλικὴ γλῶσσα (Synopses for modern secondary school mathematics) ἕνα πρόγραμμα, ποὺ περιέχει « τὰ ἀπαιτούμενα Μαθηματικά », ποὺ ἀνταποκρίνονται σὲ μιὰ σύγχρονη σύλληψη προσαρμοσμένη στὶς σημερινὲς ἀνάγκες καὶ δυνατότητες τῶν μαθητῶν τῶν σχολείων τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως. Τὸ πρόγραμμα αὐτὸ περιέχει ἀκόμα καὶ ὑποδείξεις γιὰ τὸν τρόπο τῆς διδασκαλίας τῶν νέων Μαθηματικῶν. Ὅλα τὰ παραπάνω δὲν εἶναι βέβαια τὰ ὁριστικὰ προγράμματα, ἀλλὰ θεωροῦνται σὰ βασικὰ στοιχεῖα γιὰ τὴν προπαρασκευὴ τῶν ὁριστικῶν προγραμμάτων καὶ ὁδηγοὶ γιὰ τὴ σύνταξη διδαχτικῶν βιβλίων.

Σήμερα κάθε ἄνθρωπος, ποὺ ἀσχολεῖται σοβαρὰ μὲ τὶς θετικὲς ἐπιστῆμες, γνωρίζει πὼς τὰ Μαθηματικὰ εἶναι τὸ ἀπαιραίτητο στοιχεῖο καὶ τὸ ἀναντικατάστατο ὑλικό του. Ἀλλὰ καὶ κάθε Μαθηματικός, ποὺ παρακολουθεῖ χωρὶς προκατάληψη τὴν ἐξέλιξη τῆς ἐπιστήμης του, παραδέχεται κι' ἀναγνωρίζει ὅτι δὲν μπορεῖ νὰ ἐξασφαλίση καμμιὰ σοβαρὴ θεμελίωση στὶς μαθηματικὲς δομές, χωρὶς νὰ ζητήση τὴ βοήθεια τῶν αὐστηρῶν ἐκφράσεων τῆς Συμβολικῆς (Μαθηματικῆς) Λογικῆς καὶ τῶν Συνόλων.

Ἔτσι, τόσο τὰ ἀπαραίτητα παλαιὰ θέματα τῆς ὕλης τῶν Σχολικῶν Μαθηματικῶν, ὅσο καὶ τὰ νέα κεφάλαια (π.χ. στατιστικὴ καὶ πιθανότητες, διανυσματικὸς λογισμὸς κλπ.) χρησιμοποιοῦν τὴν αὐστηρὴ καὶ ἀξιόπιστη γλῶσσα τῶν Συνόλων, ποὺ μ' αὐτὰ οἱ πρῶτες ἐπαφὲς τοῦ παιδιοῦ πρέπει ν' ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ Δημοτικὸ Σχολεῖο.

Θὰ ἀποτελοῦσε, νομίζω, ἀσέβεια πρὸς τοὺς συναδέλφους μου, ν' ἀραδιάσω ὅλους τοὺς τομεῖς ὅπου χρησιμοποιοῦνται, γιὰ ν' ἀποδείξω τὴ χρησιμότητα τῶν νέων κεφαλαίων. Εὐτυχῶς καὶ στὴ χώρα μας ἔχουν γίνει ἀρκετά, θὰ μποροῦσε νὰ πῆ κανεὶς πολλά, πράγματα. Ὄχι μόνο ἀπὸ τὸ Σεβαστὸ Ὑπουργεῖο Ἐθνικῆς Παιδείας μὲ τὰ νέα προγράμματα καὶ τὰ πειραματικὰ μαθήματα καὶ πειραματικὰ βιβλία, ἀλλὰ καὶ ἀπὸ τὴν Ἑλληνικὴ Μαθηματικὴ Ἑταιρεία καὶ ἀπὸ μαθηματικοὺς - συγγραφεῖς, ποὺ μὲ ἀξιέπαινο ἐνθουσιασμὸ ἐργάστηκαν καὶ ἐργάζονται γιὰ τὸν ἐκσυγχρονισμὸ τῶν σχολικῶν Μαθηματικῶν καὶ φέρνουν σ' ἐπαφὴ τοὺς Ἕλληνες μαθηματικοὺς μὲ τὴν πλούσια ξένη σύγχρονη μαθηματικὴ βιβλιογραφία.

Ἔγραψα τὸ βιβλίο « ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ » γιὰ τὴν Α' τάξη τοῦ Γυμνασίου ἀκολουθώντας τὸ ἐπίσημο ἀναλυτικὸ πρόγραμμα τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας καὶ τὶς ὁδηγίες τοῦ Synopses for modern secondary school mattematics. Θέλησα ὄχι μόνο νὰ διευκολύνω τὸν καθηγητὴ τῶν Μαθηματικῶν στὴν πλήρη συμμόρφωσή του πρὸς τὶς διαταγὲς τοῦ Ὑπουργείου σχετικὰ μὲ τὴ διδακτέα ὕλη, ἀλλὰ καί, συνυφαίνοντας τὴν ὕλη τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ Ἐνορατικῆς Γεωμετρίας, νὰ τὸν βοηθήσω νὰ καταδείξῃ στοὺς μαθητές του τὶς ἀμοιβαῖες στενὲς σχέσεις καὶ τὸ ἑνιαῖο αὐτῶν τῶν μαθημάτων. Εἶναι γεγονός, ὅπως τονίζεται στὰ προγράμματα τοῦ Ο.Ο.Σ.Α., ὅτι ἡ τάση αὐτὴ τῆς ἑνοποιήσεως εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ χαρακτηριστικὰ τῆς ἐξελίξεως τῶν Μαθηματικῶν στὸν 20ὸν αἰῶνα. Καὶ πρέπει ἕνα σύγχρονο πρόγραμμα διδασκαλίας νὰ ὑπογραμμίζῃ τὴ θεμελιώδη αὐτὴ ἑνότητα τῶν Μαθηματικῶν. Ἔχομε τὴ γνώμη ὅτι τὸ Σεβαστὸ Ὑπουργεῖο Παιδείας θὰ δώσῃ ὁδηγίες καὶ γιὰ τὸ ἑνιαῖο τῆς ἐξετάσεως καὶ βαθμολογίας.

Στὸ φυλλάδιο αὐτὸ περιορίζομαι σὲ ὡρισμένες γενικὲς γνῶμες - ὁδηγίες, καθὼς καὶ σὲ κατὰ κεφάλαιο ἢ διδαχτικὴ ἑνότητα παρατηρήσεις - ὑποδείξεις, πού, σὰν συγγραφέας τοῦ βιβλίου, νομίζω πὼς θὰ βοηθήσουν τὸ συνάδελφο στὴ διδασκαλία του.

Θὰ τὸ θεωρήσω μεγάλη ὑποχρέωση καὶ μὲ πολλὴ εὐχαρίστηση θὰ δεχτῶ ἀπὸ τοὺς συναδέλφους παρατηρήσεις τους ἢ ἐρωτήματα, ποὺ θὰ γεννηθοῦν ἀπὸ τὴ χρήση τοῦ βιβλίου στὸ σχολεῖο, γιατὶ πιστεύω πὼς μόνον ἡ πράξη καὶ ἡ ἐφαρμογὴ ὁδηγοῦν σὲ ἀξιόπιστα συμπεράσματα σχετικὰ μὲ τὴ Διδαχτική.

Γ. Κ. ΜΠΟΥΣΓΟΣ
Παλαμᾶ 1, Ἀθῆναι (901)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Πρώτη ἐργασία μας θὰ εἶναι νὰ διαιρέσωμε ὅλη τὴ διδακτέα ὕλη σὲ ἑνότητες τόσες, ὅσος περίπου εἶναι ὁ ὁλικὸς ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν διδασκαλίας τοῦ μαθήματος. Ἔτσι θὰ εἴμαστε βέβαιοι, ὅτι στὸ τέλος τοῦ α' ἑξαμήνου καὶ τοῦ σχολικοῦ ἔτους θὰ ἔχει καλυφθῆ ἡ «διδακτέα» ὕλη, ποὺ προβλέπεται ἀπὸ τὸ πρόγραμμα. Ὅταν θὰ κάνωμε αὐτὴ τὴν ἐργασία, πρέπει νὰ ἔχωμε ὑπ' ὄψη, ὅτι γιὰ τὰ προβλήματα ἐπάνω στὶς 4 πράξεις τῶν ἀκεραίων καὶ γιὰ τὴ διδασκαλία τῶν κλασμάτων καὶ τῶν δεκαδικῶν θὰ παραχωρήσωμε τὸν πιὸ μικρὸ ἀριθμὸ ὡρῶν. Οἱ μαθητὲς γνωρίζουν π.χ. νὰ λύνουν προβλήματα πάνω στὶς 4 πράξεις τῶν ἀκεραίων. Γνωρίζουν ἐπίσης, ὅτι, γιὰ νὰ προσθέσουν δυὸ κλάσματα ὁμώνυμα, πρέπει νὰ προσθέσουν τοὺς ἀριθμητὲς καὶ νὰ βάλουν κάτω ἀπὸ τὸ ἄθροισμά τους τὸν κοινὸ παρονομαστή. Ἐκεῖνο ποὺ δὲν γνωρίζουν εἶναι τὸ γιατὶ τὸ κάνομε αὐτό. Τὸ ἴδιο στὸν πολλαπλασιασμὸ καὶ τὴ διαίρεση τῶν κλασμάτων. Στὰ λίγα λοιπὸν μαθήματα, ποὺ θὰ διαθέσωμε, θὰ ἐξηγήσωμε καὶ θὰ δώσωμε στοὺς μαθητὲς τὴ δικαιολογία γιὰ τοὺς κανόνες, ποὺ ἀκολουθοῦμε. Ἔτσι μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι γιὰ τὰ προβλήματα πάνω στὶς 4 πράξεις καὶ γιὰ τὰ κλάσματα μὲ τοὺς δεκαδικοὺς θὰ διαθέσωμε 20 - 22 μαθήματα τὸ πολύ. Θὰ ἔχωμε ἔτσι τὸν ἀπαιτούμενο καιρὸ γιὰ τὴ διδασκαλία καὶ ἐμπέδωση τῆς νεώτερης ὕλης. Ὅταν δοῦμε, καθὼς θὰ προχωροῦμε, ὅτι, ἡ ὕλη ποὺ προβλέπεται ἀπὸ τὸ πρόγραμμα, θὰ ὁλοκληρωθῆ, τότε μποροῦμε νὰ ξαναγυρίσωμε σὲ προηγούμενες ἑνότητες γιὰ μεγαλύτερη ἐμβάθυνση καὶ ἐξάσκηση.

Γιὰ τὴ διδασκαλία κάθε ἑνότητας θὰ συντάσσωμε σχέδια διδασκαλίας, ποὺ θὰ πρέπει νὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ πέντε βήματα: α) προπαρασκευὴ τοῦ μαθητῆ γιὰ τὴν εἰσαγωγή του στὴ νέα ἑνότητα. β) παρουσίαση τῆς νέας ἑνότητας· γ) ἐφαρμογὲς τῆς νέας ἑνότητας μὲ τὴν ἐπίβλεψη καὶ βοήθειά μας μέσα στὴν τάξη· δ) ἔλεγχος τοῦ ἂν ἡ ἑνότητα κατανοήθηκε ἀπὸ τοὺς μαθητές· ε) ἀνάθεση ἐργασίας στοὺς μαθητὲς γιὰ τὸ σπίτι.

Ὅταν συντάσσωμε τὸ σχέδιο διδασκαλίας καὶ ὅταν διδάσκωμε, πρέπει νὰ προσέξωμε τὰ ἑξῆς σημεῖα:

1. Πρέπει νὰ κινήσωμε τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν.

2. Πρέπει νὰ καθορισθῆ μὲ σαφήνεια ὁ σκοπὸς τῆς διδασκαλίας τῆς ἑνότητας, γιὰ νὰ αἰσθανθῆ ὁ μαθητὴς τὴν ἀνάγκη νὰ μάθη, γιὰ νὰ ἱκανοποιηθῆ ἔπειτα μὲ τὴ μάθηση καὶ μὲ τὶς γνώσεις, ποὺ ἀπόχτησε ἀπὸ τὴν ἑνότητα, ποὺ διδάχτηκε.

3. Ἡ ἀνάγκη, ποὺ θὰ ἱκανοποιηθῆ μὲ τὴ διδασκαλία καὶ τὴν ἐκμάθηση τῆς νέας ἑνότητας, μπορεῖ νὰ εἶναι πραχτικὴ (π.χ. πραχτικὲς ἐξωσχολικὲς ἐφαρμογές), μπορεῖ ὅμως νὰ εἶναι σχετικὴ μὲ αὐτὸν τὸν ἴδιο τὸν κλάδο, ποὺ διδάσκεται.

4. Πρέπει νὰ ἔχωμε στὴν τάξη τὰ ἐποπτικὰ μέσα, ποὺ θὰ μᾶς χρειασθοῦν γιὰ τὴ διεξαγωγὴ τοῦ μαθήματος.

Μιὰ κινέζικη παροιμία λέει «Μιὰ εἰκόνα ἀξίζει χίλιες λέξεις». Πραγματικὰ οἱ εἰκόνες καὶ τὰ σχέδια στὸν πίνακα εἴτε στὸ τετράδιο δὲν εἶναι μόνο ἀποτελεσματικὰ σὰ διδαχτικὰ τεχνάσματα, ἀλλὰ προσθέτουν καὶ ἐνδιαφέρον στὸ μάθημα. Δίνουν ἔμφαση στὸ θέμα, ποὺ ἔτσι ἐντυπώνεται μὲ μεγαλύτερη δύναμη, ἐπειδὴ οἱ εἰκόνες εἶναι λιγώτερο ἀφηρημένες ἀπὸ τὶς προτάσεις. Βοηθοῦν ἀκόμα στὸ νὰ συγκρατοῦν τὴν προσοχὴ τῶν μαθητῶν.

5. Μὲ κατάλληλο τρόπο πρέπει νὰ φροντίζωμε νὰ ὑπενθυμίζωμε καὶ νὰ ἀνακαλοῦμε τὶς γνώσεις, ποὺ εἶναι ἀπαραίτητες γιὰ τὴν ἐκμάθηση τῆς νέας ἑνότητας.

6. Νὰ ἔχωμε ὑπ' ὄψη, ὅτι, πολλὲς φορὲς ἀταξία ἢ ἀπροσεξία τοῦ μαθητοῦ τὴν ὥρα τοῦ μαθήματος, ὀφείλεται σὲ μᾶς, ποὺ δὲν κατωρθώσαμε νὰ κινήσωμε τὸ ἐνδιαφέρον του καὶ δὲν τοῦ δώσαμε τὴν εὐκαιρία νὰ πάρη μέρος στὸ μάθημα.

7. Νὰ ἀρχίζωμε πάντοτε μὲ ἐπαγωγή, ἀπὸ τὸ συγκεκριμένο καὶ γνωστό, νὰ προχωροῦμε στὴν παραγωγή, ὅταν χρειάζεται, καὶ νὰ καταλήγωμε σὲ ἐφαρμογές.

8. Νὰ δίνωμε εὐκαιρίες στοὺς μαθητὲς νὰ συντάσσουν οἱ ἴδιοι προβλήματα, νὰ διατυπώνουν ἐμπειρικῶς ὁρισμοὺς καὶ γενικώτερα νὰ κάνουν φραστικὲς διατυπώσεις, ὥσπου μὲ δική μας βοήθεια νὰ πετύχουν τὴν ἀντίστοιχη πλήρη, ἀκριβῆ, σαφῆ καὶ περιεκτικὴ διατύπωση.

9. Νὰ κάνωμε πάντοτε ἐξήγηση - γραμματικὴ καὶ ἐτυμολογικὴ —

κάθε νέου μαθηματικοῦ ὅρου (π.χ. διαιρετέος, ἐφαπτομένη, ὀξεῖα, ἀμβλεῖα γωνία κλπ.). Αὐτὸ θὰ βοηθήση στὸ νὰ συγκρατήση ὁ μαθητὴς τὴν ὅρο καὶ νὰ ἐμβαθύνη στὴ μαθηματικὴ ἔννοια καὶ λειτουργικὴ σημασία του. Νὰ γράφωμε πάντοτε κάθε νέο ὅρο στὸν πίνακα.

10. Ἡ σημερινὴ Διδακτικὴ τῶν Μαθηματικῶν ἀπαιτεῖ, ὅταν αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνη, νὰ φροντίζωμε νὰ διατυπώνωμε τὰ συμπεράσματά μας μὲ γραπτὴ μαθηματικὴ ἔκφραση, δηλ. μὲ τὴ διεθνῆ γλῶσσα τῶν μαθηματικῶν συμβόλων καὶ τύπων, ποὺ ἀποδείχτηκε ὅτι μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθοῦν μὲ ἐπιτυχία καὶ ἀπὸ τοὺς μαθητές, ποὺ δυσκολεύονται στὶς λεκτικὲς ἐκφράσεις.

11. Πρέπει νὰ ἔχωμε ἕτοιμα γραπτὰ ἐρωτήματα πάνω στὴν ἑνότητα, ποὺ διδάξαμε, γιὰ νὰ τὰ μοιράσωμε, κατὰ τὸ βῆμα δ) δηλ. τοῦ ἐλέγχου τῆς διδασκαλίας, σὲ ὅλους τοὺς μαθητὲς καὶ νὰ ζητήσωμε νὰ τὰ συμπληρώσουν ὅλοι στὸ ἴδιο χρονικὸ διάστημα τῶν πέντε ἕως δέκα λεπτῶν. Ἐξετάζοντάς τα μετὰ τὸ μάθημα ἐπισημαίνομε τὰ σημεῖα, ποὺ πρέπει νὰ διευκρινήσωμε στὸ ἑπόμενο μάθημα.

Δὲν πρέπει ποτὲ νὰ χρησιμοποιοῦμε τὶς μικρὲς αὐτὲς ἐξετάσεις γιὰ βαθμολόγηση. Γιὰ τὸ σκοπὸ τῆς βαθμολογήσεως θὰ κάνωμε πρόχειρη γραπτὴ ἐξέταση, χωρὶς προειδοποίηση, μιὰ ἕως δυὸ φορὲς τὸ μῆνα πάνω σὲ μάθημα τῆς ἡμέρας ἢ ἑνότητα (περιωρισμένη) ποὺ ἔχει κατὰ τὴν ἀντίληψή μας ἐμπεδωθῆ. Κάθε μαθητής μας πρέπει νὰ ἔχη βέβαια μέσα στὸ μῆνα καὶ βαθμὸ ἀπὸ προφορικὴ ἐξέταση. Ὁ βαθμὸς τοῦ διμήνου, ποὺ καταχωρίζομε στοὺς εἰδικοὺς ἐλέγχους, πρέπει νὰ εἴμαστε βέβαιοι, ὅτι ἀντιπροσωπεύει ἕναν ἀληθινὸ δείχτη γιὰ τὴν κατάσταση τοῦ μαθητῆ.

12. Πρέπει νὰ ἐπαινοῦμε τὸ μαθητὴ γιὰ τὴν καλὴ ἐργασία του, τὴ σωστὴ ἀπάντησή του καὶ ἀκόμα γιὰ τὴν προσπάθειά του. Στοὺς ἀδύνατους μαθητὲς νὰ δίνωμε εὐκαιρίες νὰ παρουσιάσουν μιὰ πετυχημένη ἐργασία, ὥστε νὰ δεχτοῦν κι' αὐτοὶ τὸν ἔπαινό μας καὶ νὰ μὴ χάσουν τὸ θάρρος τους.

13. Νὰ μὴν ἀπογοητεύομε καὶ πρὸ παντὸς νὰ μὴν ἀπειλοῦμε ποτὲ τὸ μαθητή. Ἀκόμα καὶ ὅταν δὲν κατορθώνη νὰ ἐργαστῆ μὲ ἐπιτυχία. Τότε προπαντὸς ἔχει ἀνάγκη καὶ πρέπει νὰ τὸν βοηθήσωμε.

14. Στὶς ἀσκήσεις καὶ ἐφαρμογὲς καθὼς καὶ στὰ παραδείγματα τὴν ὥρα τῆς διδασκαλίας πρέπει νὰ προσπαθοῦμε νὰ μεταχειριζώ-

μαστε καὶ στοιχεῖα ἀπὸ παλαιότερα μαθήματα, ποὺ κινδυνεύουν νὰ λησμονηθοῦν ἀπὸ τοὺς μαθητές. Ἔτσι ἐξασφαλίζομε καὶ τὴν ὀνομαζόμενη ἐ π ι μ ά θ η σ η.

15. Νὰ διατηροῦμε σὲ εἰδικὸ φάκελλο τὰ σχέδια τῆς διδασκαλίας μας καὶ τὰ ἐρωτηματολόγια ἐλέγχου, κάνοντας πάνω σ' αὐτὰ τὶς συμπληρώσεις καὶ διορθώσεις, ποὺ θεωροῦμε ἀναγκαῖες ἔπειτα ἀπὸ τὴν πεῖρα, ποὺ ἀποχτήσαμε στὴ διδασκαλία. Ἔτσι μελλοντικὰ θὰ εἴμαστε ἕτοιμοι νὰ τὰ χρησιμοποιήσωμε καί, χωρὶς πολὺ κόπο, θὰ βελτιώνομε διαρκῶς τὴ διδασκαλία μας.

16. Τέλος πρέπει νὰ ἔχωμε ὑπ' ὄψη μας ὅτι ἡ ὅλη προσωπικότητα τοῦ δασκάλου, ἡ καλὴ κατάρτισή του καὶ ἡ ἀπόλυτη κατοχὴ τοῦ θέματος, ποὺ διδάσκει, εἶναι τὸ μεγαλύτερό του ὅπλο γιὰ τὴν ἀποτελεσματικότητα τῆς διδασκαλίας.

Τὰ πολλὰ χρόνια στὸ λειτούργημα τοῦ δασκάλου, ὅταν δὲν συνοδεύωνται ἀπὸ συνεχῆ προσπάθεια γιὰ βελτίωση μὲ διαρκῆ μελέτη, πειραματισμὸ καὶ γενικὴ ἐπιμόρφωση, δὲν μᾶς κάνουν πιὸ πεπειραμένους ἐκπαιδευτικούς, ἀλλά, ἁπλούστατα, πιὸ γέρους στὴν ὑπηρεσία.

Ἕνα πολὺ σπουδαῖο ζήτημα εἶναι τὸ πῶς θὰ κατορθώσωμε νὰ βοηθήσωμε τοὺς μαθητὲς νὰ ἀποδώσουν ὅ,τι καλύτερο μποροῦν.

Γιὰ νὰ μπορέσωμε ν' ἀνταποκριθοῦμε σ' αὐτὸ τὸ καθῆκον πρέπει πρῶτα - πρῶτα νὰ κάνωμε τὴ λεγόμενη «διάγνωση». Πρέπει δηλ. νὰ ἐξακριβώσωμε, ποιοὶ μαθητὲς συναντοῦν δυσκολίες. Ἐὰν ἡ τάξη εἶναι μικρή, μποροῦμε νὰ προσέξωμε κάθε μαθητὴ προσωπικά. Ἀλλ' αὐτὸ σήμερα εἶναι κάπως δύσκολο. Γι' αὐτὸ θὰ πρέπει νὰ ἀναγνωρίσωμε αὐτοὺς ποὺ ἔχουν τὶς πιὸ πολλὲς ἐλλείψεις, καὶ μᾶς φαίνεται ὅτι ὑστεροῦν. Θὰ τοὺς διακρίνωμε ἀπὸ τὴν ἐργασία, ποὺ δώσαμε γιὰ τὸ σπίτι, ἀπὸ τὶς προφορικὲς ἀπαντήσεις, ποὺ δίνουν στὶς ἐρωτήσεις μας μέσα στὴν τάξη καὶ ἀπὸ τὰ γραπτὰ ἐρωτήματα, ποὺ θέτομε, ὅταν ἔχωμε διδάξει μιὰν ἑνότητα.

Μὲ βάση τὰ εἴδη τῶν σφαλμάτων, ποὺ κάνουν, μποροῦμε νὰ ξεχωρίσωμε τέσσερες ὁμάδες μαθητῶν μέσα σὲ μιὰ τάξη.

Ἡ πρώτη ὁμάδα — ἂς ποῦμε — ἀποτελεῖται ἀπ' αὐτούς, ποὺ ἀσχολοῦνται μὲ ἐπιδεξιότητα καὶ ἐπιτυχία στὶς ἀσκήσεις καὶ τὰ προβλήματα καὶ δείχνουν ὅτι ἔχουν ἐπαρκῆ ἀντίληψη τοῦ «πῶς» καὶ «γιατὶ» πάνω στὶς βασικὲς ἔννοιες, ἰδιότητες καὶ πράξεις. Εἶναι οἱ μαθητές, ποὺ ἔχουν τὴ «σφραγῖδα τῆς δωρεᾶς».

Τὴ δεύτερη ὁμάδα ἀποτελοῦν οἱ μαθητές, ποὺ ἐνῶ ἀσχολοῦνται μὲ ἐπιτυχία σὲ θέματα ἐπιδεξιότητας καὶ λύνουν ἀσκήσεις καὶ προβλήματα μὲ σχετικὰ καλὴ ἐπίδοση, δὲν μποροῦν νὰ ἀπαντήσουν σὲ ἐρωτήσεις, ποὺ ἀπαιτοῦν γνώση ἀρχῶν. Εἶναι οἱ μαθητές, ποὺ ξέρουν τὸ «πῶς», ἀλλὰ ὄχι τὸ «γιατί».

Μὲ τὴν ὁμάδα αὐτὴ θὰ ἀσχοληθοῦμε ἰδιαίτερα καὶ μὲ κατάλληλο τρόπο θὰ συζητήσουμε μέσα στὴν τάξη γιὰ τὶς αἰτίες, ποὺ βρίσκονται πίσω ἀπὸ τὶς πράξεις καὶ γενικὰ τὶς ἐνέργειές μας. Δὲν ὠφελεῖ νὰ δίνωμε ἀσκήσεις καὶ προβλήματα πρακτικῆς ἐξασκήσεώς τους πάνω στὸ θέμα. Πρέπει νὰ καταλάβουν καὶ τὸ «γιατί» τοῦ θέματος.

Ἡ τρίτη ὁμάδα μαθητῶν ἀπαντᾶ μὲ ἐπιτυχία σὲ ἐρωτήσεις, ποὺ ἀπαιτοῦν γνώση ἀρχῶν, ἀλλὰ δὲν τὰ καταφέρνει σὲ θέματα ἐπιδεξιότητας. Μία πιθανὴ ἐξήγηση εἶναι ὅτι οἱ μαθητὲς αὐτῆς τῆς ὁμάδας δὲν νοιάζονται γιὰ τὴν ἐκτέλεση τῶν πράξεων. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἀντιλαμβάνονται τὸ «γιατί», ἀλλὰ δὲν ἔχουν ἀναπτύξει σὲ ἱκανοποιητικὸ βαθμὸ συνήθειες σοβαρῆς ἐργασίας. Εἶναι εὐνόητο ὅτι θὰ ἀπαιτοῦμε ἀπ' αὐτοὺς λεπτομερέστατες καὶ ὁλοκληρωτικὲς λύσεις στὶς ἀσκήσεις καὶ τὰ προβλήματα. Τοὺς χρειάζεται πραχτικὴ ἄσκηση.

Ἡ τέταρτη ὁμάδα ἀποτελεῖται ἀπὸ μαθητές, ποὺ δὲν τὰ καταφέρνουν σὲ κανέναν τύπο ἐρωτήσεων ἢ ἐξετάσεων. Ἡ ἐργασία μας μ' αὐτοὺς θὰ εἶναι πολὺ δύσκολη, γιατὶ θὰ ἔχουν ἕνα ἱστορικὸ ἀποτυχιῶν στὰ Μαθηματικὰ καί, φυσικά, μιὰ δυσμενῆ — ἴσως ἐχθρικὴ — στάση ἀπέναντι στὸ μάθημα. Καὶ τὰ δύο εἴδη διδασκαλίας, ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω θὰ χρειασθοῦν γι' αὐτούς. Καὶ θεωρητικὲς ἐξηγήσεις καὶ πρακτικὴ ἄσκηση ἰδιαίτερη.

Ἕνας τρόπος ν' ἀλλάξωμε τὴ δυσμενῆ στάση τους σχετικὰ μὲ τὸ μάθημα εἶναι νὰ μελετήσωμε μαζύ τους σιγὰ - σιγὰ καὶ προχωρώντας προσεχτικά, ὥστε νὰ εἴμαστε βέβαιοι ὅτι καταλαβαίνουν ἐκεῖνο, ποὺ μελετοῦμε, νὰ τοὺς ἐξετάσωμε ἕναν - ἕναν, ἂν ἀντιληφθοῦμε ὅτι θὰ σημειώσουν ἐπιτυχία. Αὐτὴ ἡ ἐμπειρία τῆς ἐπιτυχίας παρέχει ἰσχυρότατο κίνητρο. Ὅταν νοιώσουν ὅτι καταλαβαίνουν ἕνα θέμα ἢ πρόβλημα, ἀσχολοῦνται μὲ τὴ μελέτη τῶν Μαθηματικῶν μὲ πιὸ θετικὴ στάση. Οἱ μαθητὲς τῆς τελευταίας αὐτῆς ὁμάδας χρειάζονται πολλὴ ἐνθάρρυνση καὶ ἔπαινο. Θὰ πρέπει νὰ δημιουργήσωμε εὐκαιρίες γιὰ νὰ τοὺς ἐπαινέσωμε. Εἶναι, βέβαια, ἀνάγκη νὰ εἴμαστε εἰλικρινεῖς. Καὶ οἱ μαθητὲς εἶναι πολὺ ἔμπειροι στὴ διάκριση ἀνάμεσα στὴν κολακεία καὶ τὸν εἰλικρινῆ ἔπαινο. Χρειάζεται ἀκόμα μεγάλη ὑπομονή. Ὁ ρυθμὸςτῆς μαθήσεώς τους εἶναι ἀργὸς καὶ εὔκολα χάνουν τὸ θάρρος τους. Ἀρχίζομε ἀπ' αὐτὰ ποὺ ξέρουν. Πολλὲς φορὲς θὰ διαπιστώσωμε, ὅτι δὲν γνωρίζουν τὸν πίνακα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Ἄλλες φορὲς θὰ ἀνακαλύψωμε, ὅτι κάποιο φυσικὸ ἐλάττωμα, τοὺς κάνει νὰ ὑστεροῦν. Π.χ. μπορεῖ κάποιος ἀπ' αὐτοὺς νὰ μὴ βλέπη καλὰ ἢ νὰ μὴν ἀκούη καλά. Τὶς πιὸ πολλὲς φορὲς θὰ δοῦμε ὅτι δὲν ξέρουν πῶς νὰ μελετήσουν τὰ Μαθηματικὰ καὶ πῶς πρέπει νὰ ἀναλύσουν ἕνα πρόβλημα καὶ νὰ ξεκινήσουν γιὰ νὰ τὸ λύσουν. Ἡ ἱκανότητα τοῦ μαθητῆ νὰ λύνη προβλήματα εἶναι ἀποτέλεσμα κατανοήσεως ἐννοιῶν, ἰδιοτήτων καὶ κανόνων. Γι' αὐτό, ἀπὸ τὰ πρῶτα κιόλας μαθήματα, μόλις διαγνώσωμε τέτοιες καταστάσεις, θὰ ἁπλοποιήσωμε ὅσο πιὸ πολὺ μποροῦμε τὸ λεκτικό μας, γιὰ νὰ εἴμαστε βέβαιοι ὅτι καταλαβαίνουν τὴν ἔννοια τῶν λέξεων, ποὺ χρησιμοποιοῦμε, θὰ δίνωμε μεγαλύτερη ἔμφαση στὴ σημασία τῶν ὅρων. Ἔπειτα ἀπὸ τὴ διδασκαλία θὰ δείχνωμε μέσα στὸ βιβλίο ποιὰ εἶναι ἡ ὕλη, ποὺ ἀναπτύξαμε στὸν πίνακα, ἐξηγώντας ὅ,τι νομίζομε πὼς χρειάζεται νὰ προσέξουν ἰδιαίτερα. Γιὰ τοὺς σημερινοὺς μαθητὲς τῆς Α' τάξεως τοῦ Γυμνασίου, ἡ ἁπλούστατη καθαρεύουσα, στὴν ὁποία εἶναι γραμμένο τὸ βιβλίο, εἶναι, νομίζομε, κατανοητὴ καὶ ἀνταποκρίνεται στὸ γλωσσικὸ αἴσθημα τῶν μαθητῶν. Παρ' ὅλα αὐτά, ὅταν ὑπάρχη χρόνος, ἡ ἀνάγνωση μέσα στὴν τάξη ἀπὸ ἕνα μαθητή, ἔστω καὶ ἑνὸς μέρους τοῦ μαθήματος, γιὰ τὸ ὁποῖο ὁ « διδάσκων » θα δίνη ἐξηγήσεις, δείχνοντας καὶ ἀναλύοντας στὸν πίνακα, πρέπει νὰ θεωρῆται ἀπαραίτητη. Πολλοὶ παιδαγωγοὶ βρίσκουν αὐτὸ τὸ εἶδος τῆς μελέτης σὰν ἀποτελεσματικὴ διδαχτικὴ μέθοδο. Εἶναι μέθοδος, ποὺ ἔχει εὐκαμψία καὶ ἐπιτρέπει τὴν ἀντιμετώπιση τῶν διαφορετικῶν ἀναγκῶν τοῦ κάθε μαθητῆ, ποὺ πρέπει νὰ εἶναι ἐλεύθερος νὰ ρωτήση καὶ νὰ λύση τὴν ὁποιαδήποτε ἀπορία, ποὺ τοῦ γεννήθηκε. Ἔτσι ἡ διδασκαλία, ποὺ εἶχε προηγηθῆ, ἐπαναλαμβάνεται περιληπτικὰ καὶ ὁ « διδάσκων » πετυχαίνει πολὺ σημαντικὰ ἀποτελέσματα, γιατὶ τώρα γίνεται ἑρμηνευτής, ἐξηγητὴς καὶ καθοδηγητὴς μελέτης καὶ σκέψεως καὶ τῶν ὁμάδων καὶ τῶν ἀτόμων.

Ἂς θυμηθοῦμε, τελευταῖο, καὶ τὸ μαυροπίνακα, τὸν πιὸ πολύτιμο βοηθό μας. Πρέπει γιὰ νὰ εἶναι ἀποτελεσματικὴ ἡ χρησιμοποίησή του :

1. Νὰ γράφωμε πάντοτε καθαρά.

2. Νὰ γράφωμε ξεχωριστὰ κάθε νέο ὅρο, καθὼς διδάσκομε.

3. Νὰ κάνωμε πάντοτε, ὅταν τὸ θέμα τὸ ἐπιτρέπη, ἕνα καλὸ σχέδιο ἢ σκίτσο, ποὺ νὰ διασαφηνίζη τὸ θέμα.

4. Νὰ συνοψίζωμε στὸ τέλος τῆς διδασκαλίας, ὅλα τὰ στάδια τοῦ προβλήματος ἤ, γενικώτερα, τοῦ θέματος, δείχνοντας στοὺς μαθητὲς τοὺς ἀντίστοιχους τύπους ἢ σύμβολα ἢ εἰκόνες.

5. Νὰ μὴ σβήνωμε κάτι, ποὺ θὰ χρειαστῆ νὰ ξαναγυρίσωμε σ' αὐτό.

6. Νὰ συγκρατοῦμε τὴν προσοχὴ τῶν μαθητῶν ρωτώντας συχνά, καθὼς γράφομε, «γιατὶ αὐτὸ» καὶ «πῶς τὸ ξέρετε αὐτὸ» κλπ.

ΕΙΔΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

Οἱ γενικοὶ σκοποὶ τῆς διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν εἶναι γνωστοί. Δὲν εἶναι ἴσως γνωστὸ ποιὸ θὰ εἶναι τὸ περιεχόμενο τῆς διδασκαλίας, δηλ. ἡ « διδακτέα ὕλη » στὶς ἄλλες τάξεις, γιὰ τοὺς μαθητὲς τῆς Α' τάξεως, ποὺ ἀκολουθοῦν τὸ νέο ἀναλυτικὸ πρόγραμμα. Καὶ ὅμως αὐτὸ θὰ ἦταν πολὺ κατατοπιστικὸ γιὰ τὴ ρύθμιση τῶν ἄλλων παραγόντων τῆς διδασκαλίας ὅπως εἶναι π.χ. τὸ γιατὶ πρέπει νὰ διδαχθῆ τὸ τάδε μάθημα, τί πρέπει νὰ διδαχθῆ ἀπὸ τὸ μάθημα αὐτό, πότε-πόσο καὶ πῶς πρέπει νὰ διδαχθῆ. Μιὰ μερικὴ ἰδέα μπορεῖ νὰ σχηματίση κανεὶς ἀπ' τὰ πειραματικὰ βιβλία τῆς Β' καὶ Γ' τάξεως τοῦ Γυμνασίου, ποὺ ἔχει συντάξει ἡ Ἑλληνικὴ « Ἐπιτροπὴ πειραματικῆς μελέτης καὶ διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὴν Μέσην Ἐκπαίδευσιν ». Ἔχομε τὴ γνώμη ὅτι μία ἀπὸ τὶς πρῶτες φροντίδες τοῦ Παιδαγωγικοῦ Ἰνστιτούτου, θὰ εἶναι ἡ μετάφραση καὶ ἀποστολὴ σ' ὅλους τοὺς συναδέλφους Μαθηματικούς, τοῦ «Synopses for modern secontary school mathematics», ποὺ συνέταξε ἡ εἰδικὴ ἐπιτροπὴ τοῦ Ο.Ε.Ε.Σ. Στὸ πρόγραμμα αὐτὸ ἀναφέρονται τὰ θέματα, ποὺ πρέπει νὰ διδαχθοῦν στοὺς δύο κύκλους τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως καὶ δίνονται ὁδηγίες γιὰ τὴν ἐφαρμογὴ τοῦ προγράμματος. Ἔτσι ὅλοι οἱ Ἕλληνες μαθηματικοί, θὰ μπορέσουν νὰ κατατοπισθοῦν πάνω στὸ ποιὰ εἶναι ἡ ὕλη, ποὺ θὰ διδάξουν στὰ προσεχῆ χρόνια καὶ νὰ μάθουν ποιοὶ λόγοι ἀναγκάζουν τὶς πιὸ πολλὲς Εὐρωπαϊκὲς χῶρες καὶ τὴν Ἀμερική, νὰ κάνουν βασικὲς τροποποιήσεις στὰ ἐκπαιδευτικά τους συστήματα.

Μποροῦμε πάντως νὰ θεωρήσωμε ὅτι ἄμεσοι καὶ εἰδικοὶ σκοποὶ τῆς διδασκαλίας τῆς Ἀριθμητικῆς στὴν α' καὶ β' τάξη τοῦ Γυμνασίου εἶναι νὰ δοθοῦν στὸ μαθητὴ ὅλα τὰ ἐφόδια ὥστε :

1. Νὰ μπορῆ νὰ ἐκτελῆ σωστά, γρήγορα καί, γενικά, χωρὶς δυσκολίες τὶς 4 πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν (κοινῶν καὶ δεκαδικῶν) ἀριθμῶν.

2. Νὰ κατανοήση τὶς τρεῖς βασικὲς ἰδιότητες : ἀντιμεταθετική, προσεταιριστική, ἐπιμεριστική, ποὺ ἀργότερα θὰ τὶς θέσωμε σὰν ἀξιώματα, γιὰ τὴν θεμελίωση (ἀξιωματικὴ) τῆς Ἄλγεβρας.

3. Νὰ μπορῆ νὰ ἐφαρμόζη μὲ εὐστοχία καὶ ἐπιτυχία τὶς πράξεις σὰν ἀποτελεσματικὰ « μαθηματικὰ ἐργαλεῖα » σὲ διάφορες πραγματικὲς καταστάσεις.

4. Νὰ μπορῆ νὰ ἀνακαλύπτη σχέσεις μεταξὺ ποσῶν καὶ νὰ κάνη συγκρίσεις μὲ ἐπιτυχία (διαφορὰ - λόγος).

5. Νὰ ἐμβαθύνη κάπως θεωρητικώτερα στὴν πορεία τῆς ἐκτελέσεως τῶν 4 πράξεων.

6. Νὰ μπορῆ νὰ λύση μὲ ἐπιτυχία τὰ ἁ π λ ᾶ προβλήματα τοῦ καθημερινοῦ του βίου.

7. Νὰ μπορῆ (στὸ τέλος τῆς Β' τάξεως) νὰ κάνη πινάκωση στατιστικῶν δεδομένων καὶ ἀντίστροφα νὰ μπορῆ νὰ ἑρμηνεύη γραφικὲς παραστάσεις καὶ τὰ ἄλλα ἀποτελέσματα ἀπὸ τὶς στατιστικὲς ἐπεξεργασίες.

8. Νὰ ἔχη ἀρχίσει, μὲ κατάλληλη προπαρασκευή, νὰ μπαίνη στὸν τομέα τῆς Ἄλγεβρας μὲ τὴ χρήση (στὶς βασικὲς ἰδιότητες καὶ στὶς ἰδιότητες τῶν πράξεων) γραμμάτων ἀντὶ ἀριθμῶν.

Εἶναι φανερὴ ἡ ἀνάγκη νὰ χρησιμοποιοῦμε τὴ σαφέστατη καὶ περιεκτικὴ γλώσσα τῶν συνόλων στὴν ἐπιδίωξη τῶν παραπάνω σκοπῶν. Οἱ ἁπλὲς ἔννοιες ἀπὸ τὰ σύνολα θεωροῦνται σήμερα βασικὲς γιὰ τὴ σπουδὴ ὄχι μόνο τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ πολλῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν.

Γενικώτερα ἀπὸ τὶς πρῶτες τάξεις τοῦ Γυμνασίου, θὰ δίνωμε ἔμφαση καὶ στὴ δομὴ τῶν συστημάτων γιὰ νὰ μὴν ἀποτελοῦν, γιὰ τὸ μαθητή, τὰ διάφορα θέματα ἕνα ἀνακάτεμα ἀπὸ λογιστικοὺς καὶ μάλιστα μηχανικοὺς κανόνες ξηροῦ λογαριασμοῦ.

Ἄμεσοι καὶ εἰδικοὶ σκοποὶ τῆς διδασκαλίας τῆς Ἐνορατικῆς Γεωμετρίας στὴν α' καὶ β' τάξη τοῦ Γυμνασίου εἶναι :

1. Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ μαθητῆ στὶς γεωμετρικὲς ἔννοιες καὶ στοὺς γεωμετρικοὺς τρόπους σκέψεως.

2. Ἡ καλλιέργεια τῆς ἱκανότητας νὰ ἐκφράζεται μὲ ἀκρίβεια γλώσσας καὶ σκέψεως.

3. Ἡ ἀνάπτυξη τῆς ἱκανότητας τοῦ νὰ διακρίνη, νὰ καταλαβαίνη καὶ νὰ διαπιστώνη (ἐπαληθευτικὰ) ὡρισμένες θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν βασικῶν στοιχείων τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων (στὸ σχέδιό τους).

4. Νὰ ἀποκτήση τὴν ἱκανότητα νὰ χαράζη σχέδια σχημάτων χρησιμοποιώντας τὰ γεωμετρικὰ ὄργανα.

5. Νὰ ἀποκτήση ὁ μαθητὴς τὴν ἱκανότητα νὰ κάνη μὲ ἐπιτυχία μετρικὲς ἐφαρμογὲς στὸ σχολεῖο καὶ ἔξω ἀπ' αὐτὸ σὲ διάφορες πραγματικὲς καταστάσεις.

6. Νὰ καταλάβη ὁ μαθητὴς τὴ χρήση καὶ τοὺς συμβολισμοὺς τῶν συνόλων στὴ Γεωμετρία.

7. Νὰ ἐννοήση ὅτι ἡ Γεωμετρία, ποὺ διδάσκεται, ἀναφέρεται σὲ σχῆμα, θέση καὶ μέγεθος, καὶ

8. Νὰ ἀποκτήση γενικὰ ἀπὸ τὴ μελέτη καὶ ἀπασχόλησή του μὲ τὴν Ἐνορατικὴ Γεωμετρία, μιὰ πλούσια ἐμπειρία, ποὺ θὰ τὸν βοηθήση νὰ προχωρήση στὴ μελέτη τῆς καθαρὰ ἀξιωματικῆς Γεωμετρίας.

Οἱ παραπάνω σκοποὶ θὰ ἐπιδιωχθοῦν μὲ τὴ χρησιμοποίηση ἀπὸ τοὺς μαθητὲς τῶν γεωμετρικῶν ὀργάνων γιὰ τὴν κατασκευὴ σχεδίων, μὲ τὴ χρήση διαφανοῦς χαρτιοῦ, μὲ διπλώσεις, ἐπιθέσεις, ἐπικολλήσεις κλπ.

Ὅταν ὁ μαθητὴς συναντᾶ φραστικὲς δυσκολίες θὰ τὸν προτρέπωμε νὰ ἐκφράζεται μὲ σύμβολα ἀριθμητικὰ ἢ γεωμετρικά, ὅταν, βέβαια, αὐτὸ εἶναι δυνατόν. Δὲν πρέπει νὰ ξεχνοῦμε ὅτι ἡ ἱκανότητα νὰ ἐκφράζεται ὁ μαθητὴς μὲ σχετικὴ πληρότητα συντελεῖται πολὺ ἀργότερα καὶ εἶναι ἔμφυτη ἀτομικὴ ἰδιότητα.

Ὅταν μιλοῦμε γιὰ ἰδιότητες (ἀρχές, νόμους) εἴτε στὴν Ἀριθμητικὴ εἴτε στὴν Ἐνορατικὴ Γεωμετρία πρέπει νὰ μὴ ξεχνοῦμε, ὅτι δὲν χρειάζεται ἀπόδειξή τους, ἀλλὰ ἀρκεῖ ἡ ἐπίδειξη τοῦ ὅτι ἀληθεύουν εἴτε μὲ παραδείγματα, εἴτε μὲ δοκιμὲς καὶ ἐπαληθεύσεις εἴτε μὲ παρατήρηση.

ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α'

ΣΥΝΟΛΑ

Στὴν § 1 θὰ προσέξωμε νὰ καταλάβουν καλὰ οἱ μαθητὲς τὶ σημαίνει **ὡρισμένα** καὶ **διακεκριμένα**.

Ὡρισμένα θὰ πῆ νὰ μποροῦμε κατηγορηματικὰ ν' ἀποφανθοῦμε ὅταν ἔχη δοθῆ τὸ σύνολο, ἂν ἕνα πράγμα ἀνήκη ἢ ὄχι στὸ σύνολο. Π.χ. στὸ σύνολο $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ τὰ στοιχεῖα του εἶναι ὡρισμένα, γιατὶ μποροῦμε νὰ ποῦμε κατηγορηματικὰ ὅτι τὸ 2 ἀνήκει στὸ σύνολο Σ καὶ ἐπίσης ὅτι τὸ 8 δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο Σ.

Διακεκριμένα θὰ πῆ τὰ στοιχεῖα νὰ εἶναι διαφορετικὰ μεταξύ τους. Ἑπομένως μέσα στὸ ἄγκιστρο κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου θὰ ἀναγράφεται μόνο μιὰ φορά. Π.χ. τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως **μπανάνα** εἶναι $\{\mu, \pi, \alpha, \nu\}$. Δηλ. κάθε γράμμα τῆς λέξεως ἀναγράφεται μία μόνο φορά. Ἑπομένως $\{\alpha, \alpha, \beta, \beta, \gamma\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Στὴν § 1, iii λέμε γιὰ τὸ σύνολο $H = \{x / x$ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος$\}$ ὅτι θὰ τὸ διαβάσωμε « Η εἶναι τὸ σύνολο **ὅλων** τῶν x, τοιούτων ὥστε x εἶναι ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος ». Αὐτὸ τὸ **«ὅλων»** δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ λέγεται. Ὅταν λέμε « τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως » ἐννοοῦμε ὅλους τοὺς μαθητές. Καὶ ὅταν λοιπὸν λέμε « τὸ σύνολο τῶν x τέτοιων ὥστε x εἶναι ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος » ἐννοοῦμε ὅλα τὰ x ποὺ εἶναι ἡμέρες τῆς ἑβδομάδος. Νομίζομε ὅτι στὴ πρώτη αὐτὴ μύηση τῶν μικρῶν μαθητῶν στὶς ἔννοιες τῶν συνόλων ὠφέλιμο εἶναι νὰ μὴ παραλείπεται τὸ **ὅλων**.

Πρέπει ἐπίσης νὰ ἐξηγήσωμε στοὺς μαθητές, ὅτι, ὅταν λέμε « χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα », ἐννοοῦμε ἰδιότητα, ποὺ καθορίζει **σαφῶς** ποιὰ πράγματα ἀνήκουν στὸ σύνολο· Ἂν π.χ. ποῦμε « τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Α' τάξεως, ποὺ ἔχουν γαλανὰ μάτια », δὲν ἔχομε **σαφῶς** χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα, γιατὶ μπορεῖ κάποιος νὰ θεωρήση ὅτι ἀνήκει στὸ σύνολο ἕνας μαθητὴς μὲ πρασινογάλανα μάτια καὶ κάποιος ἄλλος νὰ μὴ τὸν θεωρήση ὅτι ἀνήκει στὸ σύνολο.

Στὴν § 3 μιλώντας γιὰ τὰ ὑποσύνολα μποροῦμε νὰ τονίσωμε ὅτι κάθε σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του, ἀλλὰ δὲν εἶναι καὶ γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του.

Στὴν § 4 νὰ τονίσωμε ὅτι τὸ κενὸ σύνολο εἶναι ἕνα καὶ μόνο. Γι' αὐτὸ ὅταν μιλᾶμε γιὰ σύνολο χωρὶς στοιχεῖα θὰ λέμε « τὸ κενὸ σύνολο » καὶ ὄχι ἁπλῶς « κενὸ σύνολο ».

Στὴν § 6 διδάσκοντας γιὰ τὴν ἕνωση συνόλων μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε στὸν πίνακα καὶ μὲ σύνολα ἀπὸ μαύρους καὶ ἄσπρους βώλους ὡς ἑξῆς :

α) $\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet}_{A}\quad\underbrace{\circ\circ\circ}_{B}\quad\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ}_{A\cup B}$

β) $\rlap{$\overbrace{}^{A}$}\bullet\bullet\underbrace{\bullet\bullet\circ\circ\circ}_{B}\quad\underbrace{\bullet\bullet\bullet\bullet\circ\circ\circ}_{A\cup B}$

Γιὰ τὴ διδασκαλία τῆς § 7 γιὰ τὴν τομὴ συνόλων μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσωμε εἰκόνες σὰν αὐτὲς ποὺ βλέπετε ἐδῶ :

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\begin{array}{ccc} & \Delta & \\ & \overbrace{\circ\circ} & \\ \Gamma\ \circ\circ\circ & \boxed{\bullet\bullet} & \circ\circ\circ \\ & \circ\circ & \\ & \circ\circ & \end{array}$$

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

Ἡ τομὴ τῶν συνόλων Γ καὶ Δ εἶναι τὸ σύνολο τῶν δύο μαύρων βώλων, ποὺ ἔχομε κλείσει μέσα στὸ ὀρθογώνιο πλαίσιο.

Γιὰ τὴν § 8 ἡ μέθοδος, ποὺ ἀκολουθεῖται στὸ βιβλίο εἶναι ἱκανοποιητικὴ γιὰ ἕνα καλὸ πλησίασμα στὸ θέμα.

Σχετικὰ μὲ τὰ διαγράμματα (§ 5 καὶ § 9) δὲν πρέπει νὰ μᾶς ἱκανοποιήσῃ μιὰ μηχανικὴ μέθοδος σχεδιάσματος. Παρ' ὅλο ποὺ γιὰ τὴν Α' τάξη ἡ μηχανικὴ μέθοδος σχεδιάσματος τῶν διαγραμμάτων δὲν εἶναι κακή, θὰ πρέπει νὰ ζητήσωμε ἀπὸ τοὺς μαθητὲς νὰ διακρίνουν πῶς σχετίζεται τὸ σχέδιο μὲ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἑνώσεων, τομῶν καὶ συμπληρωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ - ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ἡ διδασκαλία τῆς § 10 δὲν εἶναι καὶ τόσο εὔκολη. Πρὶν ἀρχίσωμε νὰ κάνωμε στὸν πίνακα τὴν εἰκόνα 9 τοῦ βιβλίου μποροῦμε νὰ ἀναφέρωμε πῶς μετροῦσαν οἱ ἀρχαιότατοι ἄνθρωποι τὰ πρόβατά τους μὲ βότσαλα (βλέπετε § 11).

Στὸ βιβλίο, The California Indians, τῶν R. F. Heizer καὶ M. Whipple, 1931, p. 377 ἀναφέρεται ὅτι οἱ Ἰνδιάνοι Mohaves τῆς Καλιφόρνιας τῶν Η.Π.Α. συνήθιζαν νὰ συμμαχοῦν μὲ τοὺς Yumas καὶ νὰ κάνουν μαζὺ ἐπιδρομὲς ἐναντίον ἄλλων φυλῶν. Γιὰ νὰ συντονίζουν μιὰν ἐπίθεσή τους, ἔστελναν στοὺς πολεμιστὲς τῶν Yumas ἕνα σπάγγο μὲ κόμπους καὶ κρατοῦσαν συγχρόνως ἕναν ἐντελῶς ὅμοιο σπάγγο γιὰ τὸν ἑαυτό τους. Κάθε φυλὴ ἔλυνε ἕναν κόμπο κάθε πρωῒ καὶ ἔκαναν τὴν ἐπίθεσή τους τὸ πρωῒ τοῦ τελευταίου κόμπου.

Σήμερα μποροῦμε νὰ περιγράψωμε τὴν πράξη τους λέγοντας ὅτι ἔδεναν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ κόμπων στὸν κάθε σπάγγο. Ἀλλὰ ἡ τεχνική τους δὲν ἀπαιτοῦσε ἀριθμοὺς ἢ ἀπαρίθμηση. Στηριζόταν ἁπλῶς στὴν ἀναγνώριση ὅτι δύο σύνολα (κόμποι - μέρες ἢ κόμποι - πρωϊνά), μὲ ἐντελῶς διαφορετικὰ στοιχεῖα, εἶναι δυνατὸν νὰ μοιάζουν στὸ ὅτι μποροῦν νὰ ἀποβάλουν τὰ μέλη τους κατὰ ζεύγη (κόμπος μὲ κόμπο ἢ κόμπος μὲ πρωϊνὸ) ἔτσι, ποὺ νὰ ἐξαντληθοῦν μαζὺ ὅλα τὰ μέλη στὰ δύο σύνολα. Τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ Ἰνδιάνοι αὐτοὶ ἐζευγάρωναν σύνολα μ' αὐτὸν τὸν τρόπο, δείχνει ὅτι βρίσκονταν πολὺ κοντὰ στὴν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, γιατὶ τὸ ἑπόμενο φυσικὸ βῆμα θὰ ἦταν νὰ δώσουν ἕνα **ὄνομα** στὸ κάθε εἶδος κομποδεμένου σπάγγου καὶ νὰ χρησιμοποιήσουν τὸ ἴδιο αὐτὸ ὄνομα γιὰ νὰ περιγράφουν (χαρακτηρίζουν) ὁποιοδήποτε σύνολο, ποὺ τὰ στοιχεῖα του θὰ μποροῦσαν νὰ ζευγαρώσουν μὲ τὰ στοιχεῖα (κόμπους) τοῦ ἀντίστοιχου σπάγγου. Τὸ ἱστορικὸ αὐτὸ παράδειγμα δείχνει καθαρὰ ὅτι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἰδιότητες τῶν συνόλων. Πραγματικὰ λέμε συνήθως ὅτι δύο σύνολα ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ στοιχείων ὅταν μποροῦμε νὰ τὰ ζευγαρώσωμε, ὅπως εἴπαμε παραπάνω. Ἡ ἀπαρίθμηση (καταμέτρηση) ἑνὸς συνόλου γίνεται μὲ ζευγάρωμα τῶν στοιχείων του μὲ ἕνα ἀρχικὸ ἀπόκομμα τῆς ἀκολουθίας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (δηλ. μὲ ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν). Καὶ ὀνομάζομε ἰσοδυναμικὰ δύο σύνολα, ἂν μποροῦμε νὰ τὰ ἀντιστοιχίσωμε κατὰ ζεύγη στοιχείων. Τότε ὁρίζομε τοὺς πληθικοὺς ἀριθμούς των σὰν « κλάσεις » ἰσοδυναμικῶν συνόλων. Ἐδῶ ἡ λέξη « κλάση » χρησιμοποιεῖται σὰν συνώνυμη τῆς λέξεως « σύνολο » γιὰ ν' ἀποφύγωμε τὴ φράση « σύνολο συνόλων ».

Γιὰ νὰ καταλάβωμε καλὰ τὴν ἔννοια τοῦ ζευγαρώματος δύο συνόλων, ἂς ἐξετάσωμε τὸ περιεχόμενο τῆς διαδικασίας. Ὅταν ζευγαρώνωμε δύο πεπερασμένα σύνολα, ἀποχωρίζομε ἕνα μέλος ἀπὸ τὸ ἕνα καὶ ἕνα ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ τὰ τοποθετοῦμε χωριστά. Ἐπαναλαμβάνομε τὴν ἐνέργεια αὐτή, ὥσπου ὅλα τὰ μέλη (στοιχεῖα) καὶ τῶν δύο συνόλων νὰ ἐξαντληθοῦν. Ἐὰν κάποιο στοιχεῖο ὁποιουδήποτε συνόλου μείνη μόνο του. συμπεραίνομε ὅτι τὰ σύνολα δὲν ζευγαρώνουν.

Ἐπιχειροῦμε, μ' ἄλλα λόγια, τὸ σχηματισμὸ ἑνὸς συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν, ποὺ τὰ πρῶτα στοιχεῖα τους εἶναι ἀπὸ τὸ ἕνα σύνολο καὶ τὰ δεύτερα ἀπὸ τὸ ἄλλο, καὶ τέτοιου, ποὺ τὸ καθένα στοιχεῖο τοῦ πρώτου συνόλου καὶ καθένα στοιχεῖο τοῦ δευτέρου συνόλου νὰ ἀνήκουν σὲ ἕνα καὶ μόνο διατεταγμένο ζεῦγος. Ἕνα τέτοιο σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν ἀποτελεῖ « σχέση » μὲ « πεδίο ὁρισμοῦ » τὸ πρῶτο σύνολο καὶ « ἔκταση » τὸ δεύτερο σύνολο. Ἐπὶ πλέον κάθε τέτοια « σχέση » ἀποτελεῖ « συνάρτηση », καθὼς ἐπίσης καὶ ἡ ἀντίστροφή της, γιατὶ κάθε πρῶτο στοιχεῖο ζεύγους (ἐδῶ καὶ κάθε δεύτερο) ἀνήκει σὲ ἕνα μόνο ζεῦγος. Δὲν ὑπάρχουν δηλ. δυὸ ζεύγη μὲ τὸ ἴδιο πρῶτο (ἐδῶ καὶ δεύτερο) στοιχεῖο.

Στὴ γλῶσσα τῶν ἀντιστοιχιῶν ἕνα τέτοιο ζευγάρωμα λέγεται « ἕνα πρὸς ἕνα » ἀντιστοιχία ἢ « ἀμφιμονοσήμαντη » ἀντιστοιχία.

Σημ. Νομίζομε ὅτι μὲ ὅσα παραπάνω εἴπαμε κατατοπίζεται ὁ « διδάσκων » πάνω στὴν ἔννοια τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'

ΑΡΙΘΜΗΣΗ

Ἐδῶ μποροῦμε νὰ τονίσωμε τὴ σπουδαιότητα τῆς ἀνακαλύψεως ἑνὸς συμβόλου γιὰ τὸ μηδέν. Ὀφείλομε εὐγνωμοσύνη στοὺς Ἰνδοὺς καὶ Ἄραβες. Μὲ τὸ μηδὲν καὶ μὲ ἐννέα ἀκόμα σύμβολα γράφομε ὁποιοδήποτε ἀριθμό. Οἱ Ρωμαῖοι μὴ ἔχοντας σύμβολο γιὰ τὸ μηδέν, ἦταν ὑποχρεωμένοι νὰ σχεδιάζουν συνεχῶς νέα σύμβολα γιὰ νὰ γράφουν μεγάλους ἀριθμούς. Ὅταν πολλαπλασίαζαν μὲ τὸ 10 οἱ Ρωμαῖοι ἔπρεπε νὰ μπάσουν νέα σύμβολα, ἐνῶ ἐμεῖς ὄχι.

Νὰ ἐπιστήσωμε ἐπίσης τὴν προσοχὴ τῶν μαθητῶν στὸ ὅτι κάθε ψηφίο ἔχει τὴν ἀξία ποὺ τοῦ δίνει ἡ μορφή του καὶ τὴν ἀξία ποὺ τοῦ δίνει ἡ θέση του. Στὸν ἀριθμὸ π.χ. 565 τὸ τελευταῖο πρὸς τὰ δεξιὰ ψηφίο παρασταίνει 5 ἁπλὲς μονάδες, ἐνῷ τὸ πρῶτο ἀπὸἀριστερὰ—τρίτη θέση ἀπὸ τὰ δεξιὰ—παρασταίνει 5 ἑκατοντάδες.

Στὴν § 21 ἀναφέρεται ὅτι οἱ Κέλτες μετροῦσαν μὲ εἰκοσαδικὸ σύστημα. Ἦταν ξυπόλυτοι καὶ χρησιμοποίησαν ὄχι μόνο τῶν χεριῶν ἀλλὰ καὶ τῶν ποδιῶν τὰ δάχτυλα γιὰ ἀπαρίθμηση. Ἀντίθετα οἱ Ἐσκιμῶοι, ποὺ ἔχουν πάντοτε τὸ ἕνα χέρι στὴν τσέπη, γιὰ νὰ τὸ ζεσταίνουν, χρησιμοποίησαν πενταδικὸ σύστημα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ΄

ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΠΟΣΩΝ

Ὁ παλαιὸς γνωστὸς ὁρισμὸς τοῦ ποσοῦ δὲν εἶναι σωστός, γιατὶ δὲν συμπεριλαβαίνει καὶ τὰ μεγέθη ἐκεῖνα, ποὺ δὲν ἐπιδέχονται αὔξηση ἢ ἐλάττωση. Τὸ βάρος π.χ. ἑνὸς θρανίου ἢ τὸ πλάτος τῆς αἴθουσας διδασκαλίας εἶναι ποσὰ καὶ ὅμως δὲν μποροῦν οὔτε νὰ αὐξηθοῦν οὔτε νὰ ἐλαττωθοῦν.

Ἂς μὴ ταλαιπωροῦμε τοὺς μαθητὲς μὲ τὴν ἀξίωση νὰ μάθουν ἀπ᾿ ἔξω (ἀποστηθίσουν) τὶς διάφορες, ἰδίως ξένες, μονάδες καὶ τὰ ἰσοδύναμά τους στὸ δικό μας ἀντίστοιχο σύστημα μετρήσεως. Οἱ μαθητὲς πρέπει νὰ ξέρουν καλὰ τὶς μονάδες μετρήσεως τῶν ποσῶν ποὺ εἶναι σὲ χρήση στὴ χώρα μας καὶ κυρίως τὸ **μετρικὸ** σύστημα.

Νὰ καθοδηγηθοῦν οἱ μαθητὲς νὰ χρησιμοποιοῦν τοὺς πίνακες στὶς τελευταῖες σελίδες τοῦ βιβλίου.

Νὰ ἐξηγηθῆ σ᾿ αὐτοὺς ὅτι ἕνα πρόβλημα ἀλλαγῆς μονάδας εἶναι εἴτε πρόβλημα πολλαπλασιασμοῦ εἴτε πρόβλημα διαιρέσεως. Πρέπει λοιπὸν νὰ ξέρωμε ἢ νὰ βρίσκωμε κάθε φορά, ποιὰ εἶναι ἡ σχέση μεταξὺ τῆς μονάδας, ποὺ ἔχομε καὶ τῆς μονάδας, ποὺ σ᾿ αὐτὴ θέλομε νὰ πᾶμε. Πρέπει νὰ μάθη ὁ μαθητὴς νὰ σκέπτεται καὶ νὰ ἀναλογίζεται πρῶτα-πρῶτα, ἂν ἡ μονάδα μετρήσεως, στὴν ὁποία θέλει νὰ ἐκφράση τὸ μέγεθος, εἶναι μεγαλύτερη ἢ μικρότερη ἀπὸ τὴ μονάδα μετρήσεως, ποὺ τοῦ ἔχει δοθῆ. Αὐτὸ θὰ τοῦ δώση νὰ καταλάβη, ἐὰν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ ποὺ θὰ βρῆ, θὰ εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ μικρότερος ἀπ᾿ αὐτόν, ποὺ ἔχει δοθῆ καὶ ἀπ᾿ αὐτὸ (πρακτικὰ) καταλαβαίνει τί πράξη θὰ κάνη.

Ξέρομε π.χ. ὅτι ὁ 1 τπ^2 εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ μ^2. Δηλ. τὸ μ^2 εἶναι μονάδα μεγαλύτερη ἀπὸ τὸν τπ^2. Ἂν λοιπὸν τρέψωμε ἕναν ἀριθμὸ π.χ. 128 τπ^2 σὲ μ^2 θὰ βροῦμε ἀριθμὸ μικρότερο ἀπὸ τὸν 128. Θὰ πολλαπλασιάσωμε λοιπὸν τὸν 128 ἐπὶ $\frac{9}{16}$. Ἀντίθετα ἂν ἔχωμε 128 μ^2 καὶ θέλομε νὰ τὰ τρέψωμε σὲ πήχεις τετραγωνικοὺς δηλ. νὰ βροῦμε μὲ πόσους τετρ. τεκτον. πήχεις ἰσοδυναμοῦν, θὰ σκεφθοῦμε ὅτι θὰ βροῦμε ἀριθμὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν 128. Θὰ πολλαπλασιάσωμε λοιπὸν τὸν 128 ἐπὶ $\frac{16}{9}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στὶς ξένες χῶρες, ἄρχισαν νὰ χρησιμοποιοῦν τὸ σύμβολο $\cong$ γιὰ νὰ ἐκφράζουν ἰσότητα μεταξὺ σχημάτων. Ἴσως θὰ πρέπει κι' ἐμεῖς νὰ κάνωμε τὸ ἴδιο. Στὴ περίπτωση αὐτὴ θὰ γράφωμε π.χ. $AB \cong \Gamma\Delta \Longrightarrow (AB) = (\Gamma\Delta)$.

Στὴν § 50 θὰ ὁρίσωμε τὴ μὴ κυρτὴ γωνία τῶν ἡμιευθειῶν ΟΑ καὶ ΟΒ τῆς εἰκόνας 38, σὰν « ἕνωση » τοῦ ἡμιεπιπέδου τῆς $\overleftrightarrow{OA}$, ποὺ δὲν περιέχει τὴν πλευρὰ ΟΒ καὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου τῆς $\overleftrightarrow{OB}$, ποὺ δὲν περιέχει τὴν πλευρὰ ΟΑ.

Ἡ διαπραγμάτευση ὕλης τῆς Ἐνορατικῆς Γεωμετρίας μὲ τὴ βοήθεια τῶν συνόλων, ὄχι μόνο ἑνοποιεῖ κατὰ κάποιο τρόπο τὴν ὕλη τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ τῆς Γεωμετρίας, ἀλλὰ ἀργότερα, στὴ Θεωρητικὴ Γεωμετρία, θὰ ἔχωμε μεγάλη εὐκολία μὲ τὴ χρήση τῶν συμβολισμῶν, ποὺ χρησιμοποιοῦμε στὰ σύνολα.

Γιὰ τὰ βασικὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα πρέπει οἱ μαθητὲς νὰ καταλάβουν καλά, ποιὰ εἶναι, πῶς σχηματίζονται καὶ πῶς ὀνομάζονται. Π.χ. τί εἶναι γωνία, πῶς σχηματίζεται (γενετικὰ § 65) καὶ πῶς διαβάζεται.

Οἱ μαθητὲς πρέπει νὰ μάθουν καλὰ τὴ χρήση τοῦ μοιρογνωμόνιου (καλύτερα νὰ τὸ λέγαμε γωνιόμετρο). Θὰ τοὺς διδάξωμε λοιπὸν νὰ βρίσκουν τὸ μέτρο μιᾶς γωνίας, νὰ κάνουν τὸ σχέδιο μιᾶς γωνίας, ποὺ ξέρουν τὸ μέτρο της καὶ νὰ διχοτομοῦν μιὰ γωνία χρησιμοποιώντας γωνιόμετρο. Ἀκόμα καὶ κάθετο πρὸς μιὰ εὐθεῖα νὰ μποροῦν νὰ χαράξουν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ϛ'

ΣΥΝΟΛΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ ΖΕΥΓΩΝ

Τὸ κεφάλαιο αὐτὸ εἶναι σπουδαιότατο. Ἀποτελεῖ τὴν πρώτην εἰσαγωγὴ τῶν μαθητῶν στὴν ἔννοια τῶν συντεταγμένων. Οἱ μαθηταὶ τὸ καταλαβαίνουν εὔκολα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ'

ΠΡΟΣΘΕΣΗ

Ἡ πρόσθεση δύο ἀριθμῶν θὰ παρουσιασθῆ ὡς ἑξῆς:

Σὲ δυὸ ἀριθμούς, ποὺ εἶναι οἱ πληθικοὶ ἀριθμοὶ δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων, **ἀντιστοιχίζομε** ἕναν ἄλλον ἀριθμό, ποὺ εἶναι ὁ πληθικὸς ἀριθμὸς τῆς ἑνώσεως τῶν δύο συνόλων. Θὰ πάρωμε τὰ σύνολα Α καὶ Β καὶ τὴν ἕνωσή τους Ε καὶ τοὺς ἀντίστοιχους πληθικοὺς ἀριθμοὺς καὶ θὰ γράψωμε στὸν πίνακα:

$$A \cap B = E$$
$$3 + 5 = 8$$

Διδάσκοντας στὴν § 81 τὸν πίνακα τῆς προσθέσεως μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ἐπεκτείνομε τὸν πίνακα ὅσο θέλομε καὶ τότε παρατηροῦμε ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἀκεραίων εἶναι πάντοτε ἕνας καὶ μόνον ἀκέραιος δηλ. δείχνομε τὸ **μονοσήμαντο** τῆς πράξεως τῆς προσθέσεως.

Στὸν ἴδιο πίνακα μποροῦμε νὰ δείξωμε τὴν ἀντιμεταθετικότητα ὅτι δηλ. $5 + 7 = 7 + 5$

Νὰ ἀσκήσωμε τοὺς μαθητὲς στὸ νοερὸ λογισμὸ (§ 86), ὄχι μόνο στὴν πρόσθεση ἀλλὰ καὶ ἀργότερα στὶς ἄλλες πράξεις. Ἡ μαθηματικὴ μόρφωση εἶναι ἀνεπαρκὴς ὅταν ἕνα ἄτομο γιὰ νὰ λύση ἕνα ἁπλὸ πρόβλημα χρειάζεται μολύβι καὶ χαρτί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η'

ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Μερικοὶ μαθητὲς συνηθίζουν νὰ λένε «ἀφαιρῶ τὸν τάδε ἀριθμὸ **μὲ** τὸν τάδε».

Πρέπει νὰ ἐξηγήσωμε στοὺς μαθητὲς ὅτι μεταχειριζόμαστε τὸ « ἀπό ». Δηλ. τὸ ζεῦγος μειωτέος - ἀφαιρετέος εἶναι διατεταγμένο ζεῦγος.

Ἔπειτα ἀπὸ τὴν διδασκαλία τῆς ἀφαιρέσεως, θὰ εἰσαγάγωμε τὴν ἔννοια τῆς ἐξισώσεως καὶ θὰ κάνωμε χρήση τῶν εὐκαιριῶν, ποὺ παρουσιάζονται γιὰ νὰ λύνωμε ἐξισώσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ'

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στὴν § 116 μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι ὁ πίνακας μπορεῖ νὰ ἐπεκταθῆ καὶ νὰ δείξωμε καὶ ἐδῶ τὴν ἀντιμεταθετικότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καθὼς καὶ τὸ **μονοσήμαντο** τῆς πράξεως, ὅτι δηλ. τὸ γινόμενο δύο ἀκεραίων εἶναι ἕνας καὶ μόνο ἀκέραιος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι'

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Στὴν § 134 νὰ τονίσετε ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι ἀριθμός.

Μερικοὶ μαθητὲς θεωροῦν τὸ μηδὲν σὰν τίποτε καὶ αὐτὸ προκαλεῖ παρανοήσεις καὶ δυσκολίες. Λένε π.χ. ὅτι 5 :0 σημαίνει ὁ 5 νὰ διαιρεθῆ μὲ τὸ τίποτε καὶ ἀφοῦ διαιρῆς μὲ τὸ τίποτε, δὲν διαιρεῖς τὸ 5 μὲ κάτι. Ἄρα ἡ ἀπάντηση εἶναι 5.

Πρέπει λοιπὸν νὰ καταλάβουν καλὰ οἱ μαθητὲς ὅτι τὸ μηδὲν εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ὅπως καὶ οἱ ἄλλοι καὶ εἶναι ὑποχρεωμένος κι' αὐτὸς νὰ συμμορφώνεται πρὸς τὶς ἰδιότητες τῶν πράξεων, ποὺ βασίζονται στὶς ἰδιότητες τῶν ἀριθμῶν. Γι' αὐτὸ νὰ δώσωμε ἔμφαση στὴ σημασία τῆς διαιρέσεως μὲ ὁρολογία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Π.χ. $20 : 5$ σημαίνει $5 \cdot \text{——} = 20$; Αὐτὸ ὁδηγεῖ στὸ $5 : 0$ σημαίνει $0 \cdot \text{——} = 5$ καὶ οἱ μαθητὲς ξέροντας ὅτι κανένας ἀριθμὸς ὅταν πολλαπλασιάζεται μὲ 0 δὲν θὰ κάνη 5, συμπεραίνουν ἢ μᾶλλον παραδέχονται ὅτι ἡ διαίρεση μὲ τὸ 0 εἶναι ἀδύνατη.

Στὶς ἀσκήσεις τῆς § 150 εἶναι εὐκαιρία, γιὰ τὴν κατανόηση τῆς τιμῆς τῶν ψηφίων ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τὴν ἐμβάθυνση στὸ μηχανισμὸ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, νὰ ἐξηγήσωμε τὴν ἔννοια τῆς λέξεως «κρατούμενα » μὲ μιὰ πρόσθεση π.χ. στὸ πενταδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΑ'

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

Τὸ κεφάλαιο εἶναι γραμμένο πολὺ ἀναλυτικά.

Μποροῦμε νὰ ἐξηγήσωμε στοὺς μαθητὲς ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι ἡ «τομὴ» τῶν συνόλων τῶν πρώτων παραγόντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ Ε.Κ.Π. εἶναι ἡ «ἕνωση» τῶν συνόλων τῶν πρώτων παραγόντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΒ'

ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Γιὰ νὰ διδάξωμε μερικὰ θέματα στὰ κλάσματα χρησιμοποιοῦμε ψευδοπροβλήματα, ποὺ θὰ τὰ ποῦμε «ἰδεατὰ» προβλήματα. Αὐτὸ γίνεται ἀπὸ ἀνάγκη, γιατὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμε πραγματικὰ προβλήματα σ' ὅλες τὶς μερικὲς περιπτώσεις.

Ἀλλὰ καὶ μόνον ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ κλάσματα ἀποτελοῦν σύνολο ἀριθμῶν, μπορεῖ νὰ γεννηθῆ τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν νὰ μάθουν πῶς γίνονται οἱ 4 πράξεις μεταξὺ κλασμάτων, κλασμάτων καὶ ἀκεραίων, κ.λ.π.

Τὰ λεγόμενα ἰδεατὰ προβλήματα βοηθοῦν στὴν καλλιέργεια ἱκανοτήτων καὶ συνηθίζουν τὸ μαθητὴ νὰ ἐργάζεται σὲ ἀφηρημένα πεδία. Πρέπει ὅμως νὰ δίνωμε τὴν εὐκαιρία στοὺς μαθητὲς νὰ τὰ διατυπώνουν σὰν π.χ. μαθηματικὰ παιχνίδια.

Θὰ διδάξωμε σὲ ὅσο μποροῦμε συντομώτερο χρονικὸ διάστημα τὶς πράξεις μεταξὺ ρητῶν ἀριθμῶν, δίνοντας τὴ δικαιολογία γιὰ τὸν τρόπο τῆς ἐκτελέσεως κάθε πράξεως.

Θὰ ἐπιμείνωμε στὴ λύση τῆς ἐξισώσεως $\alpha \cdot x = \beta$ ($\alpha \neq o$) δίνοντας παραδείγματα διάφορα: Π.χ. νὰ εἶναι $\alpha = 2$, $\beta = \frac{4}{5}$ ἢ $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 4$ ἢ $\alpha = 5$, $\beta = 2$ ἢ $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{4}{5}$ κλπ.

Θὰ δώσωμε στοὺς μαθητὲς νὰ καταλάβουν ὅτι διατηρήσαμε καὶ στοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς τὶς γνωστὲς ἰδιότητες ἀκεραίων.

Ἡ § 192 ἔχει ξεχωριστὴ σημασία καὶ πρέπει νὰ τὴ διδάξωμε μὲ ἐπιτυχία. Ἔτσι ὁ μαθητής, ὅταν θὰ μάθη γιὰ τοὺς ἄρρητους ἀριθμούς, θὰ μπορέση νὰ καταλάβη τὸ συμπαγὲς τῆς ἡμιευθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΓ'

ΔΕΚΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ἔμφαση στὴν § 201 καὶ στὴν § 205. Οἱ μαθητὲς νὰ καταλάβουν καλὰ ὅτι κάθε ρητὸς ἔχει περιοδικὸ δεκαδικὸ ἀνάπτυγμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΔ'

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Διαθέτομε ἕνα μάθημα γιὰ τὴ σχετικὴ διδασκαλία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΕ'

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Χρησιμοποιοῦμε ὅλα τὰ μέσα (χαράξεις, διπλώσεις κλπ.) γιὰ νὰ κατανοηθῆ τὸ κεφάλαιο τοῦτο ἀπὸ τοὺς μαθητές.

Διδάσκομε ἐπίσης καὶ ἀσκοῦμε τοὺς μαθητὲς στὴ λύση τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν τῆς § 222.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙϚ'

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Εἶναι γνωστὸ πόσο θεμελιῶδες εἶναι τὸ κεφάλαιο τοῦτο στὴ διδασκαλία τῆς Γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΖ'

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ἀπὸ τὴ διδασκαλία αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου καταλαβαίνουν οἱ μαθητὲς ὅτι ἡ Γεωμετρία, ποὺ διδάσκονται, ἀναφέρεται σὲ σχῆμα, θέση καὶ μέγεθος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΗ'

ΕΜΒΑΔΑ - ΤΕΤΡ. ΡΙΖΑ ΡΗΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Δίνομε ἔμφαση στὴν § 231 καὶ § 232. Καθοδηγοῦμε τοὺς μαθητὲς νὰ βρίσκουν τετράγωνα καὶ τετραγωνικὲς ρίζες ἀπὸ τοὺς πίνακες στὶς τελευταῖες σελίδες τοῦ βιβλίου.

Διδάσκοντας τὴν § 235 ἀναφερόμαστε στὴν § 44 καὶ στὴν § 192 καὶ τοποθετοῦμε ἀκεραίους, κλασματικοὺς καὶ ἀσυμμέτρους πάνω στὴν ἡμιευθεῖα τῶν ἀριθμῶν. Δίνομε ἔτσι τὴν εἰκόνα τοῦ συμπαγοῦς τῆς ἡμιευθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΘ'

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ - ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΡΙΩΝ - ΠΟΣΟΣΤΑ

Οἱ μαθητὲς μαθαίνουν πολὺ εὔκολα νὰ βρίσκουν τὸν ἄγνωστο ὅρο μιᾶς ἀναλογίας καὶ νὰ ἐφαρμόζουν τὶς ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν στὴ λύση προβλημάτων. Ἀπὸ τὸ Δημοτικὸ σχολεῖο ἔχουν μάθει τὸ γνωστὸ κανόνα : « ὁ ἄγνωστος χ ἰσοῦται μὲ τὸν ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμόν... ». Δὲν μποροῦμε νὰ ἐμποδίσωμε τὴ χρήση οὔτε νὰ ἀπορρίψωμε αὐτὲς τὶς γνώσεις τῶν μαθητῶν. Πρέπει ὅμως νὰ καταλάβουν τὴ χρήση τῶν ἀναλογιῶν στὴ λύση τῶν προβλημάτων τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν καὶ αὐτό, ὅπως εἴπαμε, γίνεται εὔκολα. Σχετικὰ μὲ τὴν § 245 συμβουλεύομε νὰ λυθοῦν μερικὰ προβλήματα μὲ δύο τρόπους. Αὐτὸ ἀποτελεῖ μιὰ καλύτερη πεῖρα ἀπὸ τὴ λύση πολλῶν προβλημάτων μὲ τὴν ἴδια μέθοδο.

Στὴ λύση τῶν ἀσκήσεων 775 μποροῦμε νὰ ἐξηγήσωμε στοὺς μαθητὲς ὅτι ἔχομε τὴ δυνατότητα νὰ ἐκφρασθοῦμε κατὰ τρεῖς διαφορετικοὺς τρόπους γιὰ τὸ ἴδιο πρᾶγμα. Π.χ. τὸ $\frac{1}{5}$ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι τὰ 0,2 τοῦ ποσοῦ ἢ τὰ 20% τοῦ ποσοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Κ'

ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ — ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

Θὰ ἐξηγήσωμε στοὺς μαθητὲς ὅτι ὁ ἄνθρωπος ἐπινόησε τρόπους γιὰ ἔμμεσες μετρήσεις. Χρησιμοποιώντας π.χ. τὶς ἀναλογίες στὰ ὅμοια τρίγωνα μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου, σπιτιοῦ κ.λ.π.

Θὰ ἀναφέρωμε καὶ τὸ ἱστορικὸ παράδειγμα, ποὺ ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος, ὅτι ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος βρῆκε τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος στὴν Αἴγυπτο μετρώντας τὴ σκιά της. Ἡ μέτρηση ἔγινε τὴ στιγμὴ τῆς ἡμέρας, ποὺ ἡ σκιὰ κατακόρυφου ραβδιοῦ ἔχει μῆκος ὅσο ἔχει καὶ τὸ ραβδί. Ἑπομένως καὶ ἡ πυραμίδα ἔχει μέτρο ὕψους ὅσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς της, γιατὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ σχηματίζονται εἶναι ὅμοια.

$S = E \cup E'$

$F \cap S = (F \cap E) \cup (F \cap E')$

F

$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap E') - \cancel{P(}$

$S = E' \cup E.$

$F \cup S = S = P(F \cup E') \cup E$

$1 = P(F \cup E') + P(E) - P(F \cup E$