ΗΛΙΑ Χ. ΓΟΝΤΖΕ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε΄. & ΣΤ΄. ΤΑΞΙΝ

ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΚΑΤΑ

ΤΟ ΕΠΙΣΗΜΟΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΕΚΔΟΣΙΣ
Π. ΠΑΤΣΟΥΡΑΚΟΥ & Λ. ΓΟΝΤΖΕ
ΛΕΩΦ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α΄. 15—ΤΗΛ. 43-134
ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ
1936

Κατίνα Ν. Πανουσοπούλου

1939

Κατίνα Ν. Πανουσοπούλου

ΗΛΙΑ Χ. ΓΟΝΤΖΕ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Ε΄. & ΣΤ΄. ΤΑΞΙΝ

ΤΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΚΑΤΑ

ΤΟ ΕΠΙΣΗΜΟΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ

Π. ΠΑΤΣΟΥΡΑΚΟΥ & Λ. ΓΟΝΤΖΕ

ΛΕΩΦ. ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α΄. 15

ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ

1936

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον δέον νὰ φέρῃ τὴν σφραγίδα τῶν Ἐκδοτῶν.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΝ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
Π. ΠΑΤΣΟΥΡΑΚΟΥ & Λ. ΓΟΝΤΖΕ
ΕΝ ΠΕΙΡΑΙΕΙ

Καίτη Ν. Πανουτσοπούλου
1938

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σώματα — Ἐπιφάνειαι

Ὁ χάρτης, τὸ βιβλίον, τὸ θρανίον κτλ. εἶναι σώματα.

***Σῶμα** λέγομεν κάθε ἀντικείμενον, τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει κάποιον χῶρον.*

*Ὁ χῶρος ποὺ καταλαμβάνει κάθε σῶμα λέγεται **ὄγκος** τοῦ σώματος.*

*Ἑκάστου σώματος βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν μόνον τὸ ἐξωτερικόν του μέρος, τὸ ὁποῖον λέγομεν **ἐπιφάνειαν** αὐτοῦ.*

***Ἐπιφάνεια** λέγεται ὅλον τὸ ἐξωτερικὸν μέρος ἑνὸς σώματος, τὸ ὁποῖον βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν.*

*Κάθε σῶμα στερεὸν ὁρίζομεν κυρίως κατὰ τρεῖς διευθύνσεις: κατὰ τὸ **μῆκος** του (ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά), τὸ **πλάτος** (ἀπὸ ἐμπρὸς πρὸς τὰ ὀπίσω) καὶ τὸ **ὕψος** ἢ **βάθος** (ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἄνω). Τὰς τρεῖς ταύτας διευθύνσεις ὀνομάζομεν **διαστάσεις**.*

*Τὰ στερεὰ σώματα ἔχουν τρεῖς διαστάσεις : **μῆκος, πλάτος, ὕψος** ἢ **βάθος**.*

*Ἡ ἐπιφάνεια δὲν εἶναι μέρος τοῦ σώματος, διότι δὲν δυνάμεθα νὰ τὴν ξεχωρίσωμεν ἀπὸ αὐτό, καὶ διὰ τοῦτο τῆς λείπει μία διάατασις, τὸ βάθος. Ἡ ἐπιφάνεια λοιπὸν ἔχει δύο διαστάσεις : **μῆκος** καὶ **πλάτος**.*

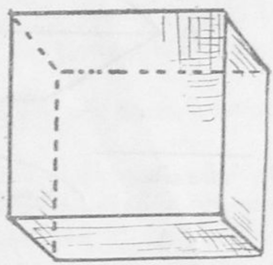
ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΤΑ ΑΠΛΟΥΣΤΕΡΑ ΣΤΕΡΕΑ ΣΩΜΑΤΑ

1. ΚΥΒΟΣ

Τὸ σχῆμα τοῦ στερεοῦ τούτου σώματος λέγεται ***κύβος***. Σχῆμα κύβου ἔχουν πολλὰ κιβώτια, σάπωνες τοῦ νιψίματος, πολλὰ δωμάτια καὶ ἄλλα.

Ὅλη ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύβου ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓξ μέρη, δηλαδὴ ὁ κύβος ἔχει ἓξ ἐπιφανείας, τὰς ὁποίας λέγομεν ἕδρας. Ὁ κύβος ἔχει ἓξ ***ἕδρας***.



Σχῆμα 1.

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου συναντῶνται ἀνὰ δύο. Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία ἑνώνει δύο ἕδρας λέγεται ***ἀκμὴ*** τοῦ κύβου. Ὁ κύβος ἔχει ***δώδεκα ἀκμάς***. Τὸ σημεῖον ὅπου συναντῶνται τρεῖς ἀκμαὶ λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ κύβου. Ὁ κύβος ἔχει ***ὀκτὼ κορυφάς***.

Ἐὰν θέσωμεν ἐπὶ ἑνὸς φύλλου χάρτου μίαν ἕδραν τοῦ κύβου καὶ ἰχνογραφήσωμεν τὸ σχῆμα της καὶ ἔπειτα θέσωμεν ἐπάνω εἰς τὸ σχῆμα αὐτὸ τὴν μίαν μετὰ τὴν ἄλλην ὅλας τὰς ἕδρας τοῦ κύβου, θὰ ἴδωμεν ὅτι καθεμία ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐπ' αὐτοῦ. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἐπίσης, ἐὰν μετρήσωμεν τὰς ἀκμὰς τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι ὅλαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Κύβος λοιπὸν εἶναι τὸ στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἓξ ἕδρας ἴσας μεταξύ των.

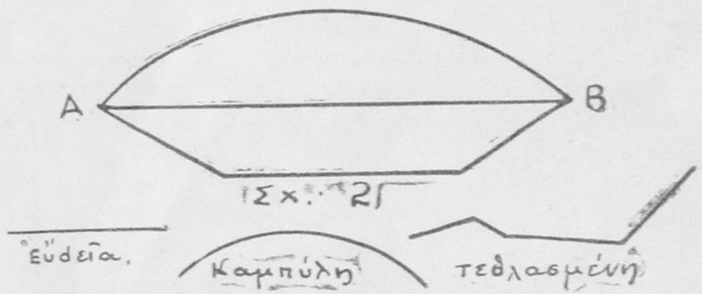
Γραμμαὶ—σημεῖα

Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι γραμμαί. Κάθε ἕδρα περιορίζεται ὑπὸ γραμμῶν.

Κάθε γραμμὴ εἶναι ἡ κόψις δύο ἐπιφανειῶν, χωρὶς ὅμως νὰ εἶναι μέρος τῆς ἐπιφανείας, διότι δὲν ἔχει πλάτος, παρὰ μόνον μῆκος. Ἡ γραμμὴ ἔχει μίαν μόνον διάστασιν, τὸ ***μῆκος***.

Τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς λέγονται ***σημεῖα***. Τὸ σημεῖον δὲν εἶναι γραμμή, καθόσον δὲν ἔχει οὐδεμίαν διάστασιν. Τοῦτο παριστάνομεν εἰς τὸν πίνακα ἢ εἰς τὸν χάρτην διὰ μιᾶς στιγμῆς καὶ κάθε σημεῖον ὁρίζομεν δι' ἑνὸς γράμματος τοῦ ἀλφαβήτου, π. χ. Α, Β.

Εἴδη γραμμῶν



Α. Β. Γ.

Δύο σημεῖα δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν μὲ ***τρία εἴδη γραμμῶν.*** Κάθε ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι ***εὐθεῖα γραμμή***, ὅπως ἡ γραμμὴ Α.

Δύο σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἑνώνομεν μὲ ***καμπύλην γραμμήν***, ὅπως ἡ γραμμὴ Β.

Ἐπὶ μιᾶς ἐπιφανείας δύο σημεῖα δυνάμεθα νὰ ἑνώσωμεν καὶ μὲ γραμμήν, ἡ ὁποία νὰ ἀποτελῆται ἀπὸ δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας, ὅπως ἡ γραμμὴ Γ΄. Αὐτὴ λέγεται ***τεθλασμένη γραμμή.***

Τρία λοιπὸν εἴδη γραμμῶν δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν εἰς διάφορα ἀντικείμενα: τὴν ***εὐθεῖαν***, τὴν ***καμπύλην*** καὶ τὴν ***τεθλασμένην***.

Εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων.

Εὐθεῖαν γραμμὴν παριστάνει κλωστὴ τεντωμένη.

Καμπύλη γραμμὴ εἶναι ἡ γραμμὴ τῆς ὁποίας κανὲν μέρος δὲν εἶναι εὐθεῖα. Κλωστὴ μὴ τεντωμένη παριστάνει καμπύλην γραμμήν.

Τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθείας, χωρὶς ὅλη νὰ εἶναι εὐθεῖα.

Ἡ γραμμὴ δὲ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ καμπύλην καὶ εὐθείας λέγεται ***μικτὴ γραμμή***.

Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ὅταν ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ νήματος τῆς στάθμης λέγεται ***κατακόρυφος***, ὅταν ἔχῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ἐπιφανείας ἀκινήτου ὕδατος λέγεται ***ὁριζοντία*** καὶ ὅταν δὲν εἶναι οὔτε κατακόρυφος οὔτε ὁριζοντία λέγεται ***πλαγία***.

Εὐθείας γραμμὰς χαράσσομεν μὲ τὸν κανόνα (ρήγαν) ἢ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον ἐπὶ τοῦ πίνακος, τοῦ χάρτου ἢ ἐπὶ οἱασδήποτε ἄλλης ἐπιφανείας.

Ὁ κύβος ἔχει ὀκτὼ ἀκμὰς ὁριζοντίας καὶ τέσσαρας κατακορύφους.

Εἰς κάθε ἕδραν τοῦ κύβου ἀνὰ δύο αἱ ἀπέναντι ἀκμαί των, ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν κατ' εὐθεῖαν γραμμήν, δὲν συναντῶνται καὶ διὰ τοῦτο λέγονται ***παράλληλοι***.

Παράλληλοι εὐθεῖαι λέγονται ὅσαι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν τὰς προεκτείνωμεν κατ' εὐθεῖαν γραμμήν.

Μέτρα μήκους.

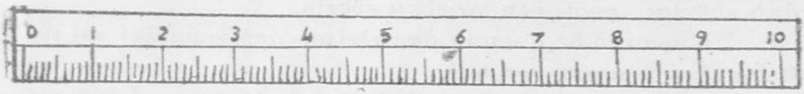
Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει δύο σημεῖα λέγεται ***ἀπόστασις*** τῶν σημείων τούτων. Ἐὰν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο τούτων σημείων, πρέπει νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος τῆς εὐθείας ταύτης.

Τὸ μῆκος τῶν γραμμῶν συνήθως μετρῶμεν μὲ τὸ ***μέτρον***, τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ ***βασιλικὸς πῆχυς***.

Τὸ ***μέτρον*** χωρίζεται εἰς 10 ***παλάμας***, κάθε παλάμη εἰς 10 ***δακτύλους*** καὶ κάθε δάκτυλος εἰς 10 ***γραμμάς***.

Τὸ μέτρον λοιπὸν ἔχει 10 παλάμας, 100 δακτύλους, 1000 γραμμάς. Ἡ παλάμη ἔχει 10 δακτύλους καὶ 100 γραμμάς.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν μεγάλας ἀποστάσεις μεταχειριζόμεθα τὸ ***χιλιόμετρον*** ἢ ***στάδιον***, τὸ ὁποῖον εἶναι 1000 μέτρα. Εἰς τὴν Ἑλλάδα οἱ ἔμποροι ὑφασμάτων διὰ νὰ μετροῦν τὸ μῆκος τούτων μεταχειρίζονται τὸν ἐμπορικὸν πῆχυν, ὁ ὁποῖος εἶναι 0,64



Σχ. 3.

τοῦ μέτρου καὶ χωρίζεται εἰς 8 ρούπια ἢ ὄγδοα. Οἱ κτίσται πάλιν μεταχειρίζονται τὸν τεκτονικὸν πῆχυν, ὁ ὁποῖος εἶναι 0,75 τοῦ μέτρου ἢ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ.

Ἐπιφάνειαι

Ἐὰν εἰς ὁποίαν δήποτε ἕδραν τοῦ κύβου θέσωμεν τὸν κανόνα καὶ τὸν στρέψωμεν πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις, βλέπομεν ὅτι ἐφαρμόζει ἀκριβῶς ἐπὶ τῆς ἕδρας εἰς κάθε νέαν θέσιν. Τὸ ἴδιον συμβαίνει καὶ διὰ τὸ πάτωμα καὶ διὰ τὸν μαυροπίνακα. Αὗται αἱ ἐπιφάνειαι λέγονται ***ἐπίπεδοι*** ἢ ***ἐπίπεδα***. ***Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια*** λέγεται κάθε ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁ κανὼν ἐφαρμόζει ἀκριβῶς πρὸς ὁποίαν δήποτε διεύθυνσιν καὶ ἂν στραφῇ.

Αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἢ ἐπίπεδα, ὁμοίως αἱ ἐπιφάνειαι τῶν τοίχων τοῦ δωματίου καὶ ἄλλα.

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τοῦ αὐγοῦ κλπ. λέγεται ***καμπύλη*** ἐπιφάνεια. Τῆς καμπύλης ἐπιφανείας δὲν εἶναι κανὲν μέρος της ἐπίπεδον.

Ἀσκήσεις

1) Ἓν τεμάχιον ὑφάσματος 84 μέτρων πόσοι ἐμπορικοὶ πήχεις εἶναι;

2) Τὸ μῆκος μιᾶς μάνδρας εἶναι 32 μέτρα. Πόσοι τεκτονικοὶ πήχεις εἶναι ;

3) Μία κορδέλλα ἔχει μῆκος 125 πήχεων. Πόσα μέτρα εἶναι ;

4) Ὁ τοῖχος ἑνὸς δωματίου ἔχει ὕψος 7 τεκτονικῶν πήχεων. Πόσα μέτρα ὕψος ἔχει ;

α΄) Πῶς τρέπομεν μέτρα εἰς ἐμπορικοὺς πήχεις ;

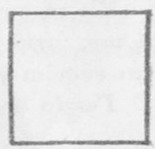
β΄) Πῶς τρέπομεν μέτρα εἰς τεκτονικοὺς πήχεις ;

γ΄) Πῶς τρέπομεν ἐμπορικοὺς πήχεις εἰς μέτρα ;

δ΄) Πῶς τρέπομεν τεκτονικοὺς πήχεις εἰς μέτρα ;

Τετράγωνον

Ἐὰν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ φύλλου χάρτου ἰχνογραφήσωμεν μίαν ἕδραν τοῦ κύβου, βλέπομεν ὅτι σχηματίζεται σχῆμα μὲ τέσσαρας πλευρὰς ἴσας μεταξύ των. Τὸ σχῆμα αὐτὸ λέγομεν **τετράγωνον**.



Σχ. 4.

Ἐὰν τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐπὶ φύλλου χάρτου, τὸ διπλώσωμεν καὶ θέσωμεν τὰς γωνίας του τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης, βλέπομεν ὅτι καὶ αἱ τέσσαρες γωνίαι ἔχουν ἴσον ἄνοιγμα ἤτοι εἶναι ἴσαι. Αἱ τέσσαρες λοιπὸν γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Τετράγωνον εἶναι τὸ τετράπλευρον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς τέσσαρας πλευρὰς καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας του ἴσας μεταξύ των. Ἐὰν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραγώνου προεκτείνωμεν κατ᾽ εὐθεῖαν γραμμήν, βλέπομεν ὅτι δὲν συναντῶνται, δηλαδὴ εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράγωνον λοιπὸν ἔχει τὰς πλευράς του ἀνὰ δύο ἀπέναντι ὄχι μόνον ἴσας ἀλλὰ καὶ παραλλήλους.

Τὸ τετράγωνον εἶναι τετράπλευρον σχῆμα ***παραλληλόγραμμον***. Ἂν μετρήσωμεν τὸ μῆκος καὶ τῶν τεσσάρων πλευρῶν τοῦ τετραγώνου, λέγομεν ὅτι ἐμετρήσαμεν τὴν ***περίμετρον.***

Περίμετρος λοιπὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους τῶν τεσσάρων πλευρῶν του.

Ἐπειδὴ τοῦ τετραγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι ὅλαι ἴσαι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρόν του, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν μίαν μόνον πλευράν του καὶ τὸ μῆκος της νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 4.

Προβλήματα

1) Πόσα μέτρα εἶναι ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου οἰκοπέδου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 82 μέτρα;

2) Πόσα μέτρα κορδέλλα χρειάζεται διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὰς πλευρὰς τετραγωνικοῦ τραπεζομανδήλου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος 2,4 μέτρα;

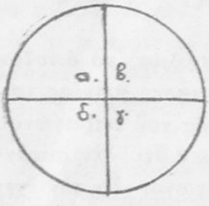
3) Ἡ περίμετρος μιᾶς τετραγωνικῆς αὐλῆς εἶναι 32 μέτρα. Πόσον μῆκος εἶναι ἡ μία πλευρά της;

4) Διὰ τὸ περιτοίχισμα ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου ἐπληρώσαμεν 4848 δραχμάς. Πόσον στοιχίζει ὁ τοῖχος κάθε πλευρᾶς του;

Ἐπίπεδοι γωνίαι

Εἰς τὰ σημεῖα τοῦ τετραγώνου, ὅπου ἑνώνονται δύο πλευραί του, σχηματίζονται γωνίαι. Αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι εὐθεῖαι γραμμαί.

Γωνία λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συναντῶνται εἰς ἓν σημεῖον καὶ δὲν ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν.



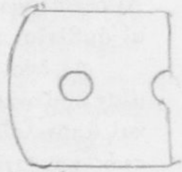
Σχ. 5.

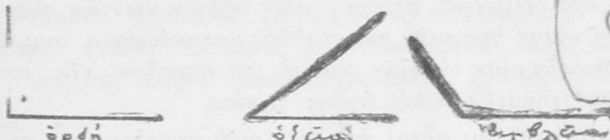
Ἐὰν κόψωμεν τὰς τέσσαρας γωνίας τοῦ τετραγώνου μὲ ἴσας πλευρὰς καὶ θέσωμεν αὐτὰς τὴν μίαν παραπλεύρως τῆς ἄλλης οὕτως ὥστε αἱ κορυφαί των νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τοῦ ἰδίου σημείου καὶ ἔπειτα διὰ καμπύλης γραμμῆς ἑνώσωμεν καὶ τὰ τέσσαρα ἀνοίγματα αὐτῶν, βλέπομεν ὅτι ὅλη ἡ καμπύλη αὐτὴ εἶναι ἕνας κύκλος. Κάθε δὲ μία γωνία ἔχει ἄνοιγμα τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου. Τὰς γωνίας αὐτὰς λέγομεν ***ὀρθὰς γωνίας.***

Ὀρθὴ γωνία εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἔχει ἄνοιγμα ἴσον μὲ τὸ $^1/_4$ τῆς περιφερείας κύκλου.

Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Δηλαδὴ ἔχουν τὸ **αὐτὸ** ἄνοιγμα.

Ἐὰν μία γωνία ἔχῃ ἄνοιγμα μικρότερον τῆς ὀρθῆς, λέγεται ***ὀξεῖα γωνία.***





Σχ. 6.

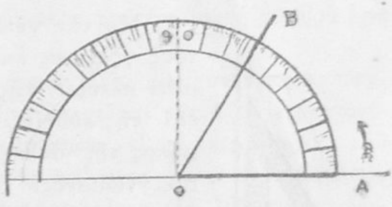
Ἐὰν μία γωνία ἔχει ἄνοιγμα μεγαλύτερον τῆς ὀρθῆς, λέγεται ***ἀμβλεῖα γωνία.***

Πῶς μετρῶμεν τὰς γωνίας

Τὸ μέγεθος τῶν γωνιῶν ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμά των καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν των.

Αἱ γωνίαι τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 2 μέτρων μήκους εἶναι ἴσαι μὲ τὰς γωνίας ἄλλου τετραγώνου μὲ πλευρὰν 25, 100, 1000 κλπ. μέτρων.

Τὰς γωνίας λοιπὸν μετρῶμεν κατὰ τὸ ἄνοιγμά των μὲ ἰδιαίτερον ὄργανον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***μοιρογνωμόνιον*** ἢ ***ἀναγωγεὺς*** (σχ. 7). Τοῦτο εἶναι τὸ ἥμισυ κύκλου καὶ εἶναι χωρισμένον εἰς 180 ἴσα μέρη ἤτοι εἰς 180 μοίρας. Εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας πλευρᾶς του ἓν σημεῖον δεικνύει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ εἶναι τὸ μοιρογνωμόνιον.



Σχ. 7.

Τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν τοῦ μοιρογνωμονίου ἀποτελοῦν αἱ δύο ὁριζόντιαι πλευραὶ δύο ὀρθῶν γωνιῶν, ἐὰν τεθοῦν οὕτως ὥστε νὰ συμπίπτουν ἐπὶ τοῦ ἰδίου σημείου αἱ κορυφαί των. Καὶ τὸ ἄνοιγμά των ἀποτελεῖ τὸ ἡμικύκλιον τοῦ μοιρογνωμονίου.

Ὥστε αἱ δύο ὀρθαὶ ἔχουν ἄνοιγμα 180 μοιρῶν καὶ ἡ μία 90 μοιρῶν. Κάθε ὀρθὴ λοιπὸν γωνία ἔχει ἄνοιγμα 90 μοιρῶν. Αἱ ὀξεῖαι γωνίαι ἔχουν ἄνοιγμα ὀλιγώτερον τῶν 90 μοιρῶν καὶ αἱ ἀμβλεῖαι περισσότερον τῶν 90 μοιρῶν.

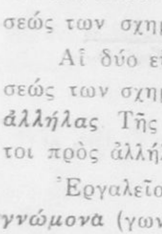
Αἱ δύο ὁριζόντιαι πλευραὶ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ἀποτελοῦν μίαν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ αἱ δύο κατακόρυφοι συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν καὶ εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεώς των σχηματίζουν δύο ὀρθὰς γωνίας.

Αἱ δύο εὐθεῖαι αὐταί, ἐπειδὴ εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεώς των σχηματίζουν ὀρθὰς γωνίας, λέγονται ***κάθετοι πρὸς ἀλλήλας*** Τῆς ὀρθῆς λοιπὸν γωνίας αἱ δύο πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐργαλεῖον διὰ νὰ χαράσσωμεν ὀρθὰς γωνίας ἔχομεν τὸν ***γνώμονα*** (γωνιάν), ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ γωνίαν, τῆς ὁποίας αἱ δύο πλευραὶ εἶναι κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Διὰ νὰ κάμωμεν ὀρθὴν γωνίαν, θέτομεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ χάρτου, πίνακος, ἐδάφους κλπ. καὶ διὰ τοῦ μολυβδοκονδύλου ἢ ἄλλου μέσου σύρομεν γραμμὰς κατὰ μῆκος τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Μὲ τὸν γνώμονα ἐπίσης σύρομεν καθέτους γραμμὰς ἐπὶ ἄλλων εὐθειῶν, θέτοντες τὴν μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ σύρομεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ γνώμονος.



Σχ. 8.

Δίεδροι καὶ στερεαὶ γωνίαι

Ἂν ἀνοίξωμεν ἓν φύλλον τοῦ βιβλίου καὶ τὸ κρατήσωμεν ἀνοικτὸν καθ' ὅλην τὴν βάσιν του ἀπὸ τὸ ἐσωτερικὸν σχηματίζεται γωνία εἰς τὸ μέρος τῆς ἑνώσεως τῶν δύο φύλλων.

Ἡ γωνία αὐτὴ σχηματίζεται ἀπὸ δύο ἕδρας καὶ λέγεται ***δίεδρος*** γωνία. Διέδρους γωνίας σχηματίζουν αἱ ἕδραι τοῦ κύβου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν ἀκμῶν του. Ἐπίσης εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῶν δωματίων δίεδροι γωνίαι σχηματίζονται εἰς τὴν ἕνωσιν δύο ἐπιφανειῶν κλπ.

Εἰς τὸ τελευταῖον σημεῖον μιᾶς διέδρου γωνίας τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ δωματίου ἑνοῦται καὶ τρίτη ἕδρα καὶ ἐκεῖ εἰς τὴν ἐσωτερικὴν ἕνωσιν τῶν τριῶν ἑδρῶν σχηματίζεται γωνία ***τρίεδρος*** ἢ ***στερεά***. Τρίεδροι γωνίαι εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῶν κορυφῶν τοῦ κύβου. Ὁ κύβος ἔχει ἐσωτερικῶς τόσας διέδρους γωνίας ὅσας καὶ ἀκμάς. Ἐπίσης ἔχει τόσας τριέδρους ὅσας καὶ κορυφάς.

Μέτρα ἐπιφανειῶν

Τὸ τετράγωνον εἶναι μία ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περικλείεται ἀπὸ τέσσαρας εὐθείας γραμμάς. Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸ μέγεθος τῆς τετραγωνικῆς ἐπιφανείας καθὼς καὶ κάθε ἄλλης ἐπιφανείας, πρέπει νὰ παραβάλωμεν ταύτην πρὸς μίαν ὡρισμένην ὡς γνωστὴν ἐπιφάνειαν. Αὐτὴ θὰ εἶναι τὸ μέτρον διὰ νὰ μετρῶμεν τὰς ἐπιφανείας.

Ὡς μέτρον λοιπὸν διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνομεν μίαν τετραγωνικὴν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος 1 μέτρον καὶ λέγεται ***τετραγωνικὸν μέτρον***. ***Τετραγωνικὸν μέτρον*** εἶναι ἓν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος ἓν μέτρον.

Τὸ τετραγωνικὸν λοιπὸν μέτρον εἶναι ***μέτρον ἐπιφανείας***.

Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικὰς παλάμας. ***Τετραγωνικὴ παλάμη*** εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος μιᾶς παλάμης ἤτοι 10 δακτύλων.

Ἡ τετραγωνικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 τετραγωνικοὺς δακτύλους. ***Τετραγωνικὸς δάκτυλος*** εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος ἑνὸς δακτύλου.

Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει τετραγωνικοὺς δακτύλους 100×100=10.000. Ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος ὑποδιαιρεῖται εἰς τετραγωνικὰς γραμμάς. Ἡ ***τετραγωνικὴ γραμμὴ*** εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἔχει μῆκος μιᾶς γραμμῆς.

Τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἔχει 1.000.000 τετραγωνικὰς γραμμὰς καὶ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη 10.000 τετραγωνικὰς γραμμάς.

Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων ἐπιφανειῶν λαμβάνομεν ὡς μονάδα τὸ στρέμμα, τὸ ὁποῖον εἶναι 1000 τετραγωνικὰ μέτρα. Εἰς τὴν Ἑλλάδα ὡς μέτρον ἐπιφανειῶν διὰ τὴν μέτρησιν οἰκοπέδων ἢ ἐπιφανειῶν τοίχων καὶ ἄλλων μεταχειρίζονται καὶ τὸν ***τετραγωνικὸν τεκτονικὸν πῆχυν***.

Ὁ ***τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς*** εἶναι τετράγωνον, τοῦ ὁποίου κάθε πλευρὰ ἔχει μῆκος ἑνὸς τεκτονικοῦ πήχεως (0,75 ἢ $^3/_4$ τοῦ μέτρου).

Ὁ τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ ἢ τὰ 0,5625 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου.

Προβλήματα

1) Μία τετραγωνικὴ παλάμη πόσας τετραγωνικὰς γραμμὰς ἔχει ;

2) Ἓν οἰκόπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐπιφάνειαν 462 τετραγ. μέτρα, ἐπωλήθη πρὸς 62 δραχμὰς τὸν τετρ. τεκτονικὸν πῆχυν. Ποία ἡ ἀξία του ;

3) 640 τετρ. τεκτονικοὶ πήχεις πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ;

α΄) Πῶς τρέπομεν τετραγωνικὰ μέτρα εἰς τετραγωνικοὺς τεκτονικοὺς πήχεις ;

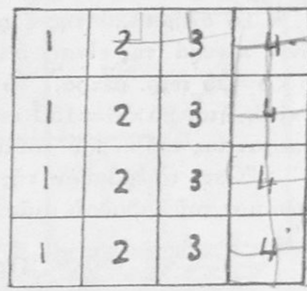
β΄) Πῶς τρέπομεν τετρ. τεκτονικοὺς πήχεις εἰς τετραγωνικὰ μέτρα ;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας

Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν ἐπιφάνειαν, συγκρίνομεν αὐτὴν μὲ τὴν μονάδα ἐπιφανείας, τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἢ τὸν τετρ. τεκτονικὸν πῆχυν καὶ εὑρίσκομεν πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ἢ τετρ. τεκτονικοὺς πήχεις περιέχει. Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, ὁ ὁποῖος μᾶς λέγει πόσας φορὰς τὸ μέτρον τῆς ἐπιφανείας περιέχεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τὴν ὁποίαν μετρῶμεν, λέγεται ***ἐμβαδόν***.

Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πα·ώματος ἑνὸς τετραγωνικοῦ δωματίου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 4 μέτρα λαμβάνομεν ἕνα τετραγωνικὸν μέτρον καὶ σημειώνομεν πόσας φορὰς χωρεῖ ἐπὶ τοῦ πατώματος. Εὑρίσκομεν ὅτι ἐσημειώσαμεν 4 φορὰς ἀπὸ 4 τετραγωνικὰ μέτρα ἤτοι 16 τετρ. μέτρα.



Σχῆμα 9.

Τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του ἤτοι $4 \times 4 = 16$ τετρ. μέτρα.

Ἐκ τούτου βλέπομεν ὅτι, ἀντὶ νὰ μετρῶμεν μὲ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον εἶναι κοπιαστικὸν διὰ τὰς μεγάλας ἰδίως ἐπιφανείας, μετρῶμεν τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου μὲ τὸ μέτρον τοῦ μήκους καὶ αὐτὸ τὸ πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸν ἑαυτόν του.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ τετραγώνου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ μήκους μιᾶς πλευρᾶς του ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Προβλήματα

1) Οἰκόπεδον τετραγωνικόν, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 25 μέτρα, ἐπωλήθη πρὸς 245 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόση ἦτο ἡ ἀξία του;

2) Μία αὐλὴ τετραγωνική, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ εἶναι 8 μέτρα, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκας τετραγωνικὰς τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 0,30 μέτρα. Πόσαι πλάκας θὰ χρειασθοῦν;

3) Τὸ γραφεῖον τοῦ σχολείου, τὸ ὁποῖον ἔχει περίμετρον 14 μέτρα καὶ σχῆμα τετραγώνου, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκας τετραγωνικὰς τῶν ὁποίων ἡ πλευρὰ εἶναι 0,20 τοῦ μέτρου. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας τοῦ κύβου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6, διότι καὶ αἱ ἓξ ἕδραι τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Τὸ σχῆμα ἑκάστης ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι τετράγωνον καὶ ἂν ἡ πλευρά της εἶναι 5 μέτρα, τὸ ἐμβαδόν της θὰ εἶναι $5 \times 5 = 25$ τετρ. μέτρα. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 6, ἤτοι $25 \times 6 = 150$ τετρ. μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου τούτου.

Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου εἶναι τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του.

Προβλήματα

1) Ἑνὸς κύβου τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἀκμῶν του εἶναι 2,8 τοῦ μέτρου. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ;

2) Τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς αἰθούσης εἶναι κύβος μὲ μῆκος 5,45 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα χάρτου χρειάζονται διὰ νὰ ἐπενδύσωμεν ὅλας τὰς ἐπιφανείας τῶν τοίχων του ἐκτὸς τῆς ὀροφῆς;

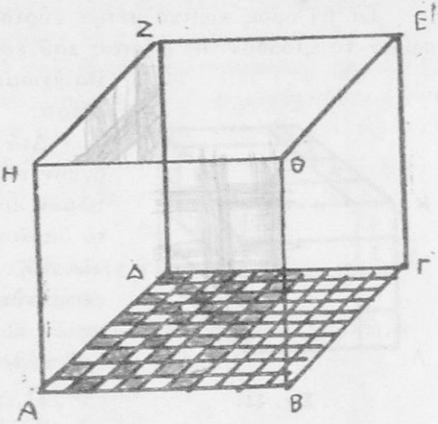
3) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 96 τετρ. μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας του; Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης ἀκμῆς του;

4) Διὰ νὰ χρωματίσωμεν ἐξωτερικῶς μίαν κυβικὴν ὑδαταποθήκην, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 3 μέτρα, πόσα θὰ πληρώσωμεν, ἐὰν τὸ χρωμάτισμα ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου στοιχίζει 25 δραχμάς;

Μέτρα ὄγκου

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου πρέπει, θὰ συγκρίνωμεν αὐτὸν μὲ τὸν ὄγκον ἑνὸς ὡρισμένου κύβου. Π. χ. ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυβικοῦ δωματίου, πρέπει νὰ ἴδωμεν πόσους ὡρισμένους κύβους δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν ἐντὸς αὐτοῦ.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυβικοῦ σώματος πρέπει νὰ συγκρίνωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ πρὸς ἕνα ὡρισμένον κύβον, δηλαδὴ ὡς μέτρον νὰ μεταχειρισθῶμεν κυβικὸν μέτρον. Καὶ ὡς μονάδα μέτρου ὄγκου λαμβάνομεν κύβον, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἕδρα ἔχει ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου ἢ ἑκάστη ἀκμή του εἶναι ἓν μέτρον. Τοῦτο λέγομεν ***κυβικὸν*** μέτρον.



Σχ. 10.

Τὸ κυβικὸν μέτρον ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ***κυβικὰς παλάμας***.

Κυβικὴ παλάμη εἶναι κύβος, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν μιᾶς παλάμης.

Ἡ κυβικὴ παλάμη ὑποδιαιρεῖται εἰς 1000 ***κυβικοὺς δακτύλους***.

Κυβικὸς δάκτυλος εἶναι κύβος ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκμὴν ἑνὸς δακτύλου. Τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει 1.000.000 κυβικοὺς δακτύλους ἤτοι 1000×1000.

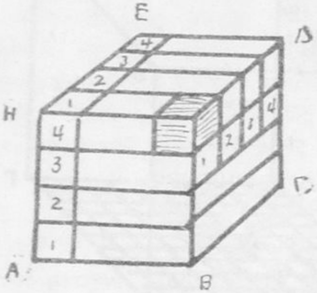
Ὁ ***κυβικὸς δάκτυλος*** ὑποδιαιρεῖται εἰς 1.000 κυβικὰς γραμμάς.

Κυβικὴ γραμμὴ εἶναι κύβος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι μία γραμμή. Τὸ κυβικὸν μέτρον ἔχει ἓν δισεκατομμύριον κυβικὰς γραμμὰς καὶ ἡ κυβικὴ παλάμη 1.000 000 κυβικὰς γραμμάς.

Ὄγκος κύβου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυβικοῦ σώματος, τοῦ ὁποίου ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι 4 μέτρα, χωρίζομεν τὴν βάσιν του εἰς τετραγωνικὰ μέτρα. Ἐὰν τὴν βάσιν ταύτην σκεπάσωμεν μὲ κυβικὰ μέτρα, θὰ ἔχωμεν 16 κυβικὰ εἰς ὕψος ἑνὸς μέτρου. Ἐπὶ τούτων θὰ τοποθετηθῶσιν ἄλλα 16 κυβικὰ μέτρα εἰς ὕψος τοῦ δευτέρου μέτρου καὶ ἐπὶ τούτων ἄλλα 16 εἰς τὸ ὕψος τοῦ τρίτου μέτρου, ὁμοίως καὶ εἰς τὸ ὕψος τοῦ τετάρτου μέτρου. Τοιουτοτρόπως θὰ ἔχωμεν 64 κυβικὰ μέτρα.

Τὰ 64 ὅμως κυβικὰ μέτρα εὑρίσκομεν ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ κύβου ἐπὶ τὸ ὕψος 4 ἤτοι θὰ ἔχωμεν (4×4) ×4=64 κυβικὰ μέτρα.



Σχ. 11.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον τοῦ κύβου, ἀντὶ νὰ τοποθετῶμεν κυβικὰ μέτρα ἐντὸς αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι δύσκολον, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος μιᾶς διαστάσεως αὐτοῦ τρεῖς φορὰς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι 4×4×4=ὄγκος τοῦ κύβου.

Π. χ. Ἐὰν εἷς κύβος ἔχει ἀκμὴν 3 μέτρων, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 3 × 3 × 3 = 27 κυβικὰ μέτρα.

Προβλήματα

1) Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 3,25 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

2) Κυβικὸς σωρὸς καυσοξύλων, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 4,50 μέτρα, ἐπωλήθη πρὸς 475 δραχμὰς τὸ κυβικὸν μέτρον. Πόση εἶναι ἡ ἀξία του;

3) Μία ὑδαταποθήκη κυβική, τῆς ὁποίας ἡ ἀκμὴ εἶναι 1,45 μέτρα, πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ, ἂν κάθε κυβικὸν μέτρον χωρεῖ 780 ὀκάδας ὕδωρ περίπου;

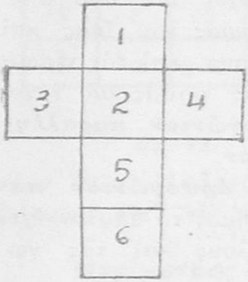
4) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀκμῶν του εἶναι 60 μέτρα;

Πῶς κατασκευάζομεν κύβον ἀπὸ χαρτόνιον

Ὁ κύβος ἔχει ἓξ ἕδρας ἴσας. Ἂν κόψωμεν ἀπὸ χαρτόνιον ἓξ τετράγωνα ἴσα καὶ τὰ κολλήσωμεν μὲ τρόπον ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ἓν κυτίον, τοῦτο εἶναι κύβος.

Εὐκολώτερον ὅμως κατασκευάζομεν κύβον ἀπὸ χαρτόνιον ὡς ἑξῆς:

Ἰχνογραφοῦμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ χαρτονίου ἓξ τετράγωνα ἴσα, ὥστε νὰ σχηματίζεται σταυρός. Περὶ τὸ κεντρικὸν 2 ὑψώνομεν τὰ γύρω τετράγωνα 1, 3, 5 καὶ 4 καὶ ἀφοῦ προηγουμένως χαράξωμεν τὰς ἀκμάς των διὰ μαχαιριδίου χωρὶς νὰ τὰς κόψωμεν ἐντελῶς τὸ τελευταῖον 6 λυγίζομεν πρὸς τὰ πλάγια· τοιουτοτρόπως ἔχομεν τὸν κύβον.



Σχ. 12.

Ἀσκήσεις

1) Κάμετε ἀπὸ χαρτόνιον μίαν κυβικὴν παλάμην.

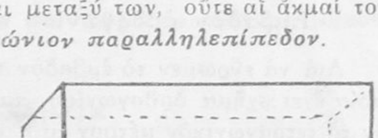
2) Κάμετε ὁμοίως ἀπὸ χαρτόνιον ἕνα κυβικὸν δάκτυλον.

3) Ποῖα κυβικὰ σώματα γνωρίζετε;

2. ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Τὸ κυτίον τῶν σπίρτων εἶναι καὶ αὐτὸ ἓν σῶμα μὲ ἓξ ἕδρας, μὲ 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς. Δὲν εἶναι ὅμως κύβος, διότι αἱ ἓξ ἕδραι του δὲν εἶναι ἴσαι μεταξύ των, οὔτε αἱ ἀκμαί του. Τὸ σῶμα αὐτὸ λέγεται ***ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον***.

Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ἓξ ἕδρας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλαι ἀνὰ δύο ἀπέναντι. Ἔχει δώδεκα ἀκμάς, 4 κατακορύφους, 8 ὁριζοντίας καὶ 8 κορυφάς. Αἱ ἀκμαί του εἶναι ἀνὰ δύο ἀπέναντι εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Αἱ γωνίαι ὅλων τῶν ἑδρῶν του εἶναι ὀρθαί.



Σχ. 13.

Συνήθως σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν τὰ δωμάτια, αἱ πλάκες τοῦ σάπωνος, τὰ βιβλία, τὰ τετράδια καὶ πολλὰ ἄλλα.

Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον

Ἂν ἰχνογραφήσωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ τοῦ πίνακος μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, θὰ σχηματισθῇ τετράπλευρον σχῆμα.

Σχ. 14.

Τοῦτο ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς τέσσαρας γωνίας ὀρθὰς καὶ λέγεται ***ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον***.

Ὥστε, ***ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον*** εἶναι τὸ τετράπλευρον σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς.

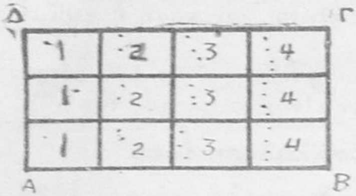
Τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ὁμοιάζει μὲ τὸ τετράγωνον εἰς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν καὶ τῶν γωνιῶν καὶ εἰς τὸ ὅτι ἔχουν καὶ τὰ δύο τὰς γωνίας ὀρθὰς καὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς των ἴσας καὶ παραλλήλους.

Διαφέρουν ὅμως εἰς τὸ ὅτι τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον δὲν ἔχει τὰς πλευράς του ὅλας ἴσας μεταξύ των, ὅπως τὸ τετράγωνον.

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς αὐλῆς, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, τοποθετοῦμεν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον καθ᾿ ὅλην τὴν γραμμὴν τοῦ μήκους της, σημειώνομεν τὰ τετραγωνικὰ μέτρα καὶ βλέπομεν ὅτι ἐτοποθετήθη τὸ τετραγωνικὸν μέτρον διὰ νὰ καλύψῃ καθ᾿ ὅλην του τὴν γραμμὴν τόσας φορὰς ὅσα μέτρα μῆκος ἔχει ἡ γραμμή, ἤτοι 4 τετρ. μέτρα. Τὸ ἴδιον ἐπαναλαμβάνομεν καὶ βλέπομεν ὅτι ἐσχηματίσθησαν τόσαι σειραὶ ἀπὸ 4 τετρ. μέτρα, ἡ μία βαθύτερον τῆς ἄλλης, ὅσα μέτρα εἶναι τὸ πλάτος του ἤτοι τρεῖς σειραὶ ἀπὸ 4 τετρ. μέτρα ἢ 12 τετρ. μέτρα.

Τὰ 12 ὅμως τετρ. μέτρα εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του 4 μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του (πλάτους) 3 καὶ τὸ γινόμενον 12 τὸ ὀνομάσωμεν τετρ. μέτρα. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου σχήματος, ἀντὶ νὰ μετρῶμεν διὰ τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, μετρῶμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του (μήκους) καὶ τοῦ πλάτους του (ὕψους) καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν τῶν δύο εἶναι τὸ ἐμβαδόν του.



Σχ. 15.

Ὥστε : ***τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Περίμετρος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον ἑνὸς περιμανδρωμένου οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, θὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος καὶ τῶν τεσσάρων τοίχων του καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους αὐτῶν θὰ παριστᾷ τὴν περίμετρον.

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι, ἀρκεῖ νὰ μετρήσωμεν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος του καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μήκους αὐτῶν νὰ τὸ διπλασιάσωμεν.

Ἡ περίμετρος λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ μήκους καὶ πλάτους του.

Προβλήματα

1) Ἕνας ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει μῆκος 84 μέτρα καὶ πλάτος 24,5 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Ἑνὸς δωματίου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 4,5 μέτρα καὶ πλάτος 3,8 πρόκειται νὰ στρωθῇ τὸ δάπεδον μὲ σανίδας μήκους 2,75 μέτρα καὶ πλάτος 0,25 τοῦ μέτρου. Πόσαι σανίδες θὰ χρειασθοῦν;

3) Μία αὐλὴ ὀρθογώνιος μὲ μῆκος 7,4 μέτρα καὶ πλάτος 3,25

πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκας ὀρθογωνίους, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μῆκος 0,45 καὶ πλάτος 0,3. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν ;

4) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 60 μέτρα καὶ τὸ μῆκος του 12 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος καὶ πόση ἡ περίμετρός του ;

5) Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου οἰκοπέδου εἶναι 130 μέτρα. Τὸ μῆκός του εἶναι 40 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ πλάτος του ;

Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς δεξαμενῆς σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 5 μέτρα, τὸ πλάτος 4 καὶ τὸ ὕψος 3 μέτρα, χωρίζομεν τὴν βάσιν της εἰς τετρ. μέτρα. Ἐὰν τὴν βάσιν ταύτην καλύψωμεν μὲ κυβικὰ μέτρα, θὰ ἔχωμεν 20 κυβ. μέτρα, δηλαδὴ ὅσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν ἓν παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος θὰ εἶναι 5 μέτρα, τὸ πλάτος 4 καὶ τὸ ὕψος 1.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ δεξαμενὴ αὐτὴ δέχεται τρία τοιαῦτα, διότι ἔχει ὕψος 3 μέτρα, ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι 20×3 ἤτοι 60 κυβικὰ μέτρα. Τὸ ἴδιον ὅμως εὑρίσκομεν καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸν ὄγκον λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐπειδὴ ὅμως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, δηλαδὴ τὰς δύο διαστάσεις της, καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, πολλαπλασιάζομεν τὸ γινόμενον τοῦτο ἐπὶ τὸ ὕψος, ἑπόμενον εἶναι, ὅτι: ***ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰς τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ, ἤτοι τὸ μῆκος, τὸ πλάτος καὶ τὸ ὕψος του*** (5×4×3).

Προβλήματα

1) Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος μιᾶς μαρμαρίνης πλακός, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 2 μέτρα, τὸ πλάτος 1,2 καὶ τὸ ὕψος 1,8 μέτρα ;

2) Μία ὑδαταποθήκη σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 1,5 μέτρα, πλάτος 0,8 καὶ ὕψος 1,2, πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ, ἂν κάθε κυβικὸν μέτρον χωρεῖ 780 περίπου ὀκάδας ;

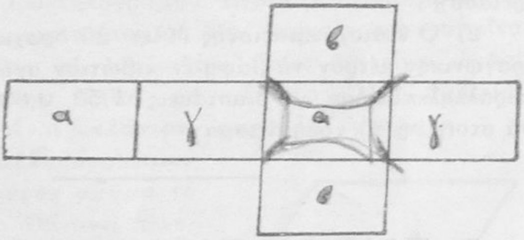
3) Ἓν κιβώτιον, σχήματος κύβου, μὲ ἀκμὴν 1,4 μέτρα, πόσα τεμάχια τοῦ ἰδίου σχήματος θὰ χωρέσῃ, ἐὰν κάθε τεμάχιον σάπωνος ἔχῃ διαστάσεις, 0,12 μ., 0,06 μ. καὶ 0,05 μέτρου ;

4) Ποῦ παρατηρεῖτε σχήματα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ;

5) Ποῖα σώματα γνωρίζετε νὰ εἶναι ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ;

Πῶς κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ χαρτόνιον, ἰχνογραφοῦμεν τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας ἐπὶ τοῦ χαρτονίου, ὅπως εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα, καὶ ἔπειτα χαράσσομεν αὐτὸ καὶ κάμνομεν ὅπως καὶ διὰ τὸν κύβον.



Σχ. 16.

Ἀσκήσεις

1) Κάμετε ἓν κυτίον ὅμοιον μὲ τὰ κυτία τῶν σπίρτων ἀπὸ χαρτόνιον.

2) Ἰχνογραφήσατε μίαν ὀρθογώνιον ἐπιφάνειαν καὶ ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἐκ τοῦ φυσικοῦ.

Ἐπιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου

Ἡ ἐπιφάνεια τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα.

Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἑκάστου καὶ νὰ προσθέσωμεν αὐτά.

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ ἕδραι του ἀνὰ δύο ἀπέναντι εἶναι ἴσαι, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν διαφόρων ἑδρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα νὰ διπλασιάσωμεν. Π. χ.

Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις 4, 3 καὶ 2 ;

Ἔχομεν ἀνὰ δύο ἕδρας μὲ πλάτος 3 καὶ μῆκος 4, μὲ 3 καὶ 2, μὲ 4 καὶ 2 ἤτοι $(3\times4)+(3\times2)+(4\times2)$ ἤτοι $(12+6+8)=26\times2=52$ τετρ. μέτρα.

Προβλήματα

1) Ἓν κιβώτιον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ μῆκος 2 μέτρα, πλάτος 1,20 καὶ ὕψος 0,80 μέτρα πρόκειται νὰ περιτυλιχθῇ μὲ ὕφασμα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ὕφασμα θὰ χρειασθῇ ;

2) Ὁ ἐλαιοχρωματιστὴς θέλει 25 δραχμὰς δι᾽ ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον νὰ βάψῃ ἓν κιβώτιον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μὲ διαστάσεις 1,50, 0,60 καὶ 0,75. Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ χρωμάτισμα ;

---

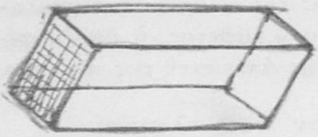
3. ΠΛΑΓΙΟΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟΝ

Ἐὰν ἑνὸς κυτίου, σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου πιέσωμεν δυνατὰ τὰς δύο ἀπέναντι μικροτέρας ἕδρας του, εἰς τρόπον ὥστε αἱ γωνίαι τῶν ἑδρῶν τούτων νὰ μὴ εἶναι πλέον ὀρθαί, τὸ νέον τοῦτο σχῆμα τοῦ κυτίου εἶναι τώρα πλάγιον παραλληλεπίπεδον καὶ οὐχὶ ὀρθογώνιον.

Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει καὶ αὐτὸ 6 ἕδρας ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἴσας καὶ παραλλήλους, 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς. Αἱ ἀκμαί του ἀνὰ δύο ἀπέναντι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

Ἐκ τούτων αἱ δύο ἕδραι εἶναι ὁριζόντιαι καὶ αἱ τέσσαρες πλάγιαι, αἱ 8 ἀκμαὶ ὁριζόντιαι καὶ αἱ 4 πλάγιαι.

Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον εἶναι καὶ αὐτὸ σῶμα ἑξάεδρον, ὅπως ὁ κύβος καὶ τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ἔχει καὶ αὐτὸ 12 ἀκμὰς καὶ 8 κορυφάς. Αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι καὶ αὐτοῦ ἴσα καὶ παράλληλα ἐπίπεδα. Διαφέρει ὅμως ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι του δὲν ἔχουν τὰς γωνίας ὀρθάς.



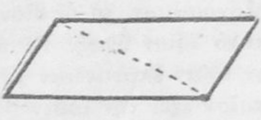
Σχ. 17.

Αἱ ἕδραι του εἶναι παραλληλόγραμμα σχήματα, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ τέσσαρες εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, αἱ δύο πλάγιαι δὲν εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ἀλλ' ἔχουν δύο γωνίας ὀξείας καὶ δύο ἀμβλείας.

Πλάγιον παραλληλόγραμμον

Δύο ἀπέναντι ἕδραι τοῦ πλαγίου παραλληλεπιπέδου δὲν εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἔχουν τὸ κατωτέρω σχῆμα. Τοῦ παραλληλογράμμου τούτου αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ γωνίαι του ὅμως δὲν εἶναι ὀρθαί, αἱ δύο ἀπέναντι εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἀμβλεῖαι. Τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ***πλάγιον παραλληλόγραμμον***.

Πλάγιον παραλληλόγραμμον εἶναι τὸ τετράπλευρον σχῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς ***γωνίας ὄχι ὀρθάς***.



Σχ. 18.

Τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ὁριζόντιαι καὶ αἱ δύο συνεχόμεναι μὲ αὐτὰς πλάγιαι, δηλαδὴ δὲν εἶναι οὔτε ὁριζόντιαι οὔτε κατακόρυφοι.

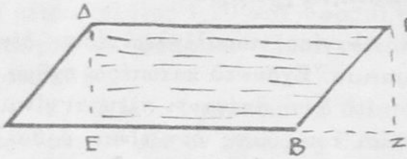
Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία δὲν εἶναι οὔτε ὁριζοντία οὔτε κατακόρυφος, λέγεται ***κεκλιμένη εὐθεῖα.***

Τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ἔχει καὶ αὐτὸ ὅπως καὶ τὸ ὀρθογώνιον τέσσαρας πλευράς, ἀνὰ δύο ἀπέναντι ἴσας καὶ παραλλήλους. Δὲν ἔχει ὅμως τὰς γωνίας ὀρθὰς ὅπως τὸ ὀρθογώνιον, ἀλλὰ τὰς δύο ὀξείας καὶ τὰς ἄλλας δύο κεκλιμένας. Ἐπίσης τὸ ὀρθογώνιον ἔχει δύο πλευρὰς ὁριζοντίας καὶ δύο κατακορύφους, ἐνῷ τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον ἔχει τὰ δύο ἀπέναντι ὁριζοντίας, ἀλλὰ τὰς ἄλλας δύο συνεχομένας κεκλιμένας εὐθείας.

Ἡ μία ἀπὸ τὰς ὁριζοντίας πλευρὰς τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι ἡ βάσις καὶ ὕψος εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία φέρεται εἰς τὴν βάσιν ἀπὸ ἕνα σημεῖον τῆς ἀπέναντί της πλευρᾶς.

Πῶς εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου.

Ἂν ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ἀνοίγματος τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου γωνίας, φέρομεν κάθετον εἰς τὴν βάσιν, πρὸς τὰ ἔξω τοῦ παραλληλογράμμου σχηματίζεται ἓν τρίγωνον. Ἂν τὸ τρίγωνον αὐτὸ κόψωμεν καὶ τὸ κολλήσωμεν ἀντεστραμμένον εἰς τὸ ἄλλο ἀπέναντι μέρος τοῦ παραλληλογράμμου, βλέπομεν ὅτι σχηματίζεται ἓν ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν μὲ τὸ πλάγιον καὶ τὸ ἴδιον ὕψος. Τὸ πλάγιον λοιπὸν παραλληλόγραμμον ἔχει τὴν ἰδίαν ἐπιφάνειαν μὲ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.



Σχ. 19.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος, ὅπως καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

Προβλήματα

1) Ἕνα οἰκόπεδον σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει πρόσοψιν 35 μέτρα καὶ βάθος 9,25, πωλεῖται πρὸς 42 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον Πόση εἶναι ἡ ἀξία του;

2) Ἕνας κῆπος σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου ἔχει ἐμβαδὸν 360 τετρ. μέτρα καὶ πρόσοψιν 18 μέτρα. Πόσα μέτρα βάθος ἔχει ;

3) Μία αἴθουσα, τῆς ὁποίας τὸ δάπεδον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου μὲ μῆκος 9 καὶ πλάτος 7 μέτρα, πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ πλάκας σχήματος πλαγίου παραλληλογράμμου μὲ μῆκος 0,3 καὶ βάθος 0,2 τοῦ μέτρου. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν ;

Ὄγκος πλαγίου παραλληλεπιπέδου

Τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τὸν ἴδιον ὄγκον μὲ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον πλαγίου παραλληλεπιπέδου, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Τὸ ὕψος εὑρίσκομεν ἂν φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της πλευρὰν τῆς κατακορύφου ἕδρας του.

Ἀσκήσεις

Ἑνὸς πλαγίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ἔχει μῆκος 5 μέτρα καὶ πλάτος 3 καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 2,5 μέτρα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον του: εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του $5 \times 3 = 15$ τετρ. μέτρα καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος 2,5 ἤτοι $15 \times 2{,}5 = 37{,}5$ κυβικὰ μέτρα.

Προβλήματα

1) Πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ ὑδαταποθήκη ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα πλαγίου παραλληλεπιπέδου μὲ μῆκος 3 μέτρα, 2 πλάτος καὶ ὕψος 3,4 μέτρα ;

2) Ἕνα πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον 81 κυβικὰ μέτρα καὶ βάσιν μὲ πλάτος 3 μέτρα καὶ μῆκος 6. Πόσον ὕψος ἔχει ;

3) Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως πλαγίου παραλλη-

λεπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐμβαδὸν 60 κυβικὰ μέτρα, ὕψος 4 καὶ μῆκος 5 μέτρα ;

Πρίσματα

Ὁ κύβος καὶ τὰ παραλληλεπίπεδα ἔχουν τὰς δύο ἀπέναντι ἕδρας των ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς παραπλεύρους παραλληλογράμμους. Τὰ σώματα ταῦτα εἰς τὴν Γεωμετρίαν λέγονται *πρίσματα.*

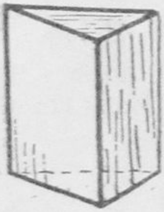
Πρίσμα λέγεται τὸ πολύεδρον τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ αἱ ἄλλαι παραλληλόγραμμοι.

Αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι λέγονται ***βάσεις*** αὐτοῦ καὶ ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τούτων ***ὕψος τοῦ πρίσματος.***

Αἱ βάσεις ἑνὸς πρίσματος δύνανται νὰ εἶναι τετράπλευρα, τρίγωνα ἢ πολύγωνα σχήματα.

Ὀρθὸν τριγωνικὸν πρίσμα

Τὸ σῶμα αὐτὸ εἶναι πρίσμα, διότι ἔχει δύο ἕδρας ἴσας καὶ παράλληλα ἐπίπεδα καὶ τὰς ἄλλας τρεῖς ἕδρας του παραλληλόγραμμα. Ἂν ἰχνογραφήσωμεν ἐπὶ χάρτου τὰς δύο ἀπέναντι ἕδρας θὰ ἴδωμεν πραγματικῶς ὅτι εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι καθεμία ἀπὸ αὐτὰς ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας.



Σχ. 20.

Τὸ πρίσμα τοῦτο ἔχει πέντε τὸ ὅλον ἕδρας. Ἀκμὰς ἔχει ἐννέα καὶ κορυφὰς ἕξ.

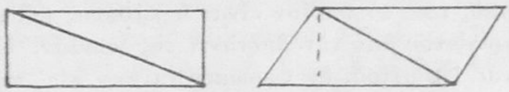
Τὸ σχῆμα τῶν βάσεων τούτων λέγομεν ***τρίγωνον.***

Τρίγωνον εἶναι σχῆμα τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας.

Ἐμβαδὸν τριγώνων

Ἂν διὰ μιᾶς εὐθείας ἑνώσωμεν δύο γωνίας τοῦ παραλληλογράμμου, χωρὶς ἡ εὐθεῖα αὐτὴ νὰ γίνεται πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, βλέπομεν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα. Ἂν τὰ τρίγωνα ταῦτα θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, βλέπομεν ὅτι εἶναι ἴσα.

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται ***διαγώνιος.*** Κάθε διαγώνιος τοῦ παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.



Σχ. 21.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ μετρήσωμεν τὴν βάσιν του καὶ τὸ ὕψος. Ὡς βάσιν λαμβάνομεν μίαν τῶν πλευρῶν του καὶ ὡς ὕψος τὴν κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της γωνίαν.

Ἡ κάθετος δύναται νὰ συναντᾷ τὴν βάσιν καὶ ἐκτὸς τοῦ σχήματος, εἰς τὴν κατ᾿ εὐθεῖαν προέκτασίν της.

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον εἶναι τὸ ἥμισυ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος, τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς βάσεώς του μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 2.

Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγωνικοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ἑδρῶν του καὶ νὰ προσθέσωμεν αὐτά.

Αἱ δύο βάσεις του ὅμως εἶναι ἴσαι καὶ αἱ παράπλευροι ἐπιφάνειαι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Διὰ τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν μόνον τῆς μιᾶς βάσεως καὶ τοῦτο τὸ διπλασιάζομεν καὶ ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων.

Αἱ τρεῖς παράπλευροι ἐπιφάνειαι ἔχουν ὅλαι τὸ ἴδιον ὕψος. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὰ ὕψος του.

Προβλήματα

1) Ἓν τριγωνικὸν πρίσμα ἔχει ὕψος 4,5 μέτρα καὶ ἡ βάσις του ἔχει πλευρὰς 2, 3, 1 μέτρα. Ποῖον τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ;

Λύσις: Πρῶτον θὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος τῆς τριγωνικῆς βάσεώς του, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν ἀπέναντί της γωνίαν. Καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 1,2 μέτρα, ἂν φέρωμεν ταύτην εἰς τὴν πλευρὰν τῶν 3 μέτρων. Πολλαπλασιάζομεν τὸ $3 \times 1{,}2 = 3{,}6$ καὶ τοῦτο διαιροῦμεν διὰ δύο ἤτοι $3{,}6 : 2 = 1{,}8$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεώς του. Καὶ τῶν δύο βάσεων θὰ εἶναι $1{,}8 \times 2 = 3{,}6$ τετρ. μέτρα.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεως: $2+3+1=6$ καὶ τὸ ἄθροισμα 6 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος 4,5 ἤτοι : $6 \times 4{,}5 = 27{,}0$ ἤτοι 27 τετρ. μέτρα.

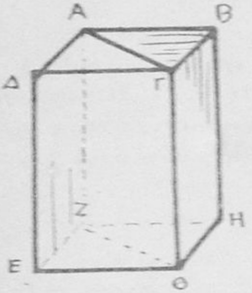
Τέλος προσθέτομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάαεων μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν: $3{,}6 + 27 = 30{,}6$ τετρ. μέτρα.

2) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 8 τετρ. μέτρα, τὸ ὕψος του 7 μέτρα καὶ ἡ περίμετρος τῆς βάσεώς του 9 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας του ;

3) Μία στήλη σχήματος τριγωνικοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον ἔχει περίμετρον τῆς βάσεώς του 12 μέτρα καὶ ὕψος 5, δια νὰ χρωματισθῇ στοιχίζει 5 δραχμὰς κατὰ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὅλος ὁ χρωματισμὸς τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν του ;

Ὄγκος ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος

Ἂν ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον κόψωμεν καθέτως ἐπάνω εἰς τὰς ἀκμάς του ΑΖ καὶ ΓΘ, ἔχομεν δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα. Ἕκαστον ἀπὸ αὐτὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΑΒΔΓΖΗΘΕ, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι τὸ μῆκος τῆς ΕΘ ἐπὶ τὸ πλάτος ΘΗ, ἂν τὸ ΕΘ εἶναι 4 μέτρα καὶ τὸ ΘΗ εἶναι 3 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι 12 τετρ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος 8 μέτρα, θὰ ἔχωμεν ὄγκον 12 × 8 = 96 κυβικὰ μέτρα. Κάθε ὅμως ἀπὸ τὰ δύο πρίσματα εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τούτου, ἤτοι 48 κυβικὰ μέτρα, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τριγωνικῆς βάσεως τοῦ πρίσματος, τὸ ὁποῖον εἶναι 3 × 4 = 12 : 2=6 ἐπὶ τὸ ὕψος 8 ἤτοι 6 × 8 = 48 κυβικὰ μέτρα. Ὥστε:



Σχ. 22.

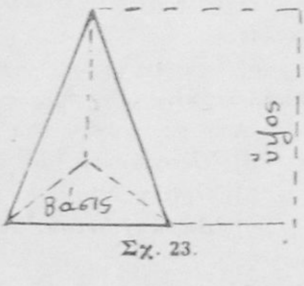
Ὁ ὄγκος τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀσκήσεις: 1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ τριγωνικὴ βάσις ἔχει μίαν πλευρὰν μὲ μῆκος 3 μέτρων καὶ τὴν ἐπ' αὐτῆς κάθετον 2 μέτρων, καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 6,5 μέτρα.

2) Ἓν δοχεῖον πρισματικὸν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ εἶναι 3,5 μέτρα, ἡ κάθετος ἐπ' αὐτῆς 5,4 μέτρα καὶ ὕψος 2 μέτρα. Πόσας ὀκάδας ὕδωρ χωρεῖ; (1 κυβ. μέτρον ὕδωρ, ζυγίζει 780 ὀκάδας περίπου).

Τριγωνικὴ πυραμὶς

Τὸ σῶμα αὐτὸ εἶναι τριγωνικὴ πυραμίς. Ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχει τέσσαρας ἕδρας· ἀπὸ αὐτὰς τρεῖς τελειώνουν εἰς μίαν καὶ τὴν ἰδίαν κορυφὴν καὶ στηρίζονται ἐπὶ τῆς τετάρτης ἕδρας. Ἀκμὰς ἔχει ἓξ καὶ τέσσαρας κορυφάς.



Σχ. 23.

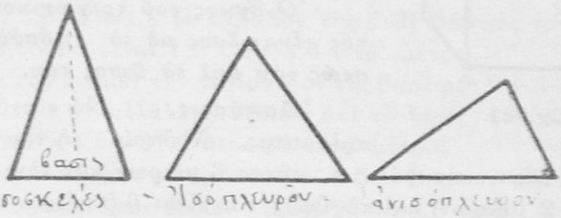
Ὅλαι αἱ ἕδραι τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ἔχουν σχῆμα τριγώνου.

Μίαν ἀπὸ τὰς ἕδρας αὐτὰς λαμβάνομεν ὡς βάσιν· ἡ κορυφὴ ἡ ὁποία εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως λέγεται ***κυρία κορυφή.*** Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ κάθετος, τὴν ὁποίαν φέρομεν ἀπὸ τῆς κυρίας κορυφῆς ἐπὶ τῆς βάσεως. Ἂν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἡ πυραμὶς αὐτὴ λέγεται ***κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμίς***.

Εἴδη τριγώνων

Τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα τελειώνουν εἰς τρεῖς εὐθείας γραμμάς, αἱ ὁποῖαι κόπτονται ἀνὰ δύο, τὰ λέγομεν ***τρίγωνα***.

Αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ γραμμαὶ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 24.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ἔχει τρεῖς πλευρὰς καὶ τρεῖς γωνίας. Ἂν μὲ τὸν κανόνα τρίγωνα κόψωμεν ἀπὸ ξύλον ἢ χαρτόνιον, θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς τρία εἴδη τριγώνων.

1) Τρίγωνον μὲ τρεῖς ἴσας πλευράς, τὸ ὁποῖον λέγομεν ***ἰσόπλευρον***.

2) Τρίγωνον μὲ δύο μόνον ἴσας πλευρὰς (σκέλη), τὸ ***ἰσοσκελές***.

3) Τρίγωνον μὲ τρεῖς ἀνίσους πλευράς, ***ἀνισόπλευρον (σκαλωτόν)***.

Ἀπὸ τὰς γωνίας του κάθε τρίγωνον εἶναι:

α) ***Ὀξυγώνιον***, ἂν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς του γωνίας ὀξείας.

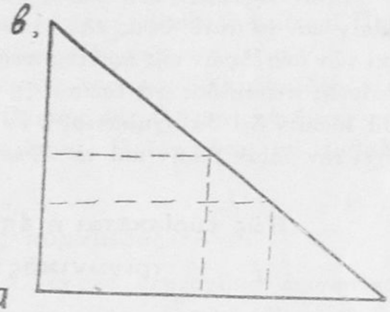
β) ***Ὀρθογώνιον***, ἂν ἔχῃ μίαν ὀρθὴν καὶ δύο ὀξείας γωνίας.

γ) ***Ἀμβλυγώνιον***, ἂν ἔχῃ μίαν ἀμβλεῖαν καὶ δύο ὀξείας γωνίας.

Εἰς κάθε τρίγωνον μία ἀπὸ τὰς πλευράς του λέγεται ***βάσις*** καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ ***τριγώνου***.

Ἂν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τριγώνου φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τῆς βάσεως, ἡ κάθετος αὐτὴ δεικνύει τὸ ***ὕψος*** τοῦ τριγώνου.

Εἰς τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ἡ ὁριζοντία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ βάσις του καὶ ἡ κάθετος τὸ ὕψος. Τὴν ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγομεν ***ὑποτείνουσαν***.



Σχ. 25.

Ἂν κάμωμεν ἕνα τρίγωνον ἀπὸ χάρτην καὶ ἀναδιπλώσωμεν τὰς γωνίας του μὲ τρόπον ὥστε αἱ γωνίαι α καὶ β νὰ συμπέσουν εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας γ, βλέπομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἀποτελεῖ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Τοῦτο δυνάμεθα νὰ δοκιμάσωμεν μὲ κάθε εἶδος τριγώνου.

Κανονικὰ εὐθύγραμμα σχήματα

Τὸ τετράγωνον σχῆμα ἔχει τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας ἀναμεταξύ των ὅπως καὶ τὰς γωνίας του. Τὸ τετράγωνον εἶναι ***κανονικὸν τετράπλευρον***.

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας ἀναμεταξύ των καθὼς καὶ τὰς τρεῖς γωνίας· τὸ τρίγωνον τοῦτο λέγεται ***κανονικὸν τρίγωνον***.

Κανονικὰ εὐθύγραμμα σχήματα λέγομεν, ὅσα ἔχουν ὅλας τὰς πλευρὰς καὶ ὅλας τὰς γωνίας των ἴσας ἀναμεταξύ των.

Σχέσις πυραμίδος καὶ πρίσματος

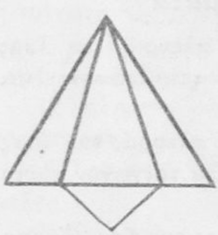
Ἂν ἔχωμεν ἓν τριγωνικὸν πρίσμα καὶ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα μὲν τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος καὶ συγκρίνωμεν αὐτά, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ πρίσμα ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι τριγωνικὰς ἕδρας του ἴσας καὶ παραλλήλους καὶ τὰς παραπλεύρους ἕδρας ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα. Ἐνῷ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει μίαν τριγωνικὴν βάσιν καὶ τρεῖς παραπλεύρους ἕδρας, τριγωνικὰς καὶ αὐτάς, αἱ ὁποῖαι τελειώνουν εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν.

Ἐὰν κάμωμεν δύο ἄλλας ὁμοίας πυραμίδας μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ τοποθετήσωμεν αὐτὰς ἀντιστρόφως ἐπὶ τῶν δύο ἑδρῶν τῆς πρώτης πυραμίδος, οὕτως ὥστε ἡ κορυφὴ ἑκάστης πυραμίδος νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς τῆς βάσεως, θὰ ἴδωμεν ὅτι θὰ σχηματισθῇ ἓν τριγωνικὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα.

Πῶς εὑρίσκεται ἡ ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος

Ἡ κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὰς παραπλεύρους τρεῖς ἕδρας της ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς πυραμίδος αὐτῆς, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἐξ αὐτῶν καὶ τοῦτο τὸ τριπλασιάζομεν· ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἐξαγόμενα.



Σχ. 26.

Ἐπειδὴ αἱ τρεῖς παράπλευροι ἐπιφάνειαι τοῦ κανονικοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἀποτελοῦν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῶν εὑρίσκεται καὶ ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους ἑνὸς τῶν τριγώνων αὐτῆς.

Προβλήματα

1) Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 4,6 τετρ. μέτρα, ἡ περίμετρος τῆς βάσεως 3,75

καὶ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της 2 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας της;

2) Τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 9 τετρ. μέτρα, ἡ περίμετρός της 9 μέτρα καὶ τὸ ὕψος τῆς τριγωνικῆς της βάσεως 2,4 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας της;

3) Ἡ περίμετρος τῆς βάσεως τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 4,2, τὸ ὕψος τῆς τριγωνικῆς βάσεώς της 0,8 καὶ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της 1,6 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας της;

Ὄγκος πυραμίδος

Ἂν πάρωμεν δύο δοχεῖα, ἓν νὰ ἔχῃ σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος καὶ τὸ ἄλλο τριγωνικῆς πυραμίδος μὲ τὴν ἰδίαν βάσιν καὶ τὸ ἴδιον ὕψος καὶ γεμίσωμεν τὴν πυραμίδα ἄμμον καὶ τὴν ἀδειάσωμεν μέσα εἰς τὸ ἄλλο δοχεῖον, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ τριγωνικὸν πρίσμα δὲν θὰ γεμίσῃ. Ἐὰν τοῦτο κάμωμεν ἄλλας δύο φορὰς τότε θὰ γεμίσῃ ἐντελῶς.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὸ ὑλικὸν τῆς πυραμίδος χωρεῖ τρεῖς φορὰς εἰς τὸ τριγωνικὸν πρίσμα. Δηλαδὴ ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ ἴσην βάσιν καὶ ὕψος.

Τοῦ τριγωνικοῦ ὅμως πρίσματος ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος. Τῆς πυραμίδος ὅμως εἶναι τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερον. Ὥστε:

Ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον τριγωνικῆς πυραμίδος πολλαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 3.

Προβλήματα

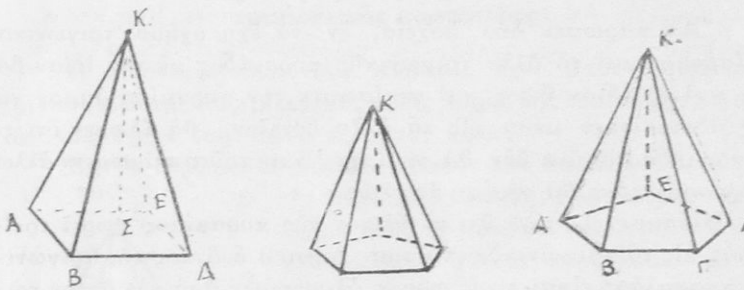
1) Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὕψος 4,6 μέτρα καὶ βάσιν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο πλευραὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουν μῆκος 3 μέτρα ἡ μία καὶ 5 ἡ ἄλλη. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

2) Ὁ ὄγκος μιᾶς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 90 κυβ. μέτρα καὶ τὸ ὕψος της 15 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της;

3) Ποῖον ὕψος θὰ δώσωμεν εἰς μίαν τριγωνικὴν στέγην, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον μὲ βάσιν 4 μέτρα καὶ ὕψος 5 μέτρα, διὰ νὰ ἔχῃ χωρητικότητα 30 κυβικῶν μέτρων;

Ἄλλα εἴδη πυραμίδων

Ὅλα τὰ σώματα αὐτὰ εἶναι πυραμίδες, διότι ἔχουν τὰς παραπλεύρους ἐπιφανείας των τρίγωνα, τὰ ὁποῖα τελειώνουν



Σχ. 27.

εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν κορυφήν, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐκτὸς τῆς ἕδρας, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς βάσιν, καὶ ἡ ὁποία εἶναι τρίγωνον ἢ τετράπλευρον ἢ πολύγωνον.

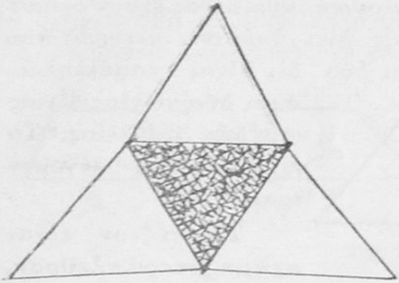
Ἔχομεν λοιπὸν πυραμίδας ***τριγωνικάς, τετραγωνικάς, πενταγωνικὰς κτλ.***

Ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία φέρεται ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν.

Ὅλαι αἱ ἕδραι τῆς πυραμίδος ἐκτὸς τῆς βάσεως λέγονται παράπλευροι ἕδραι καὶ ἀποτελοῦν ὅλαι μαζὶ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς πυραμίδος.

Κατασκευὴ πυραμίδος

Διὰ νὰ κάμωμεν κανονικὴν τριγωνικὴν πυραμίδα ἀπὸ χονδρὸν χάρτην, γράφομεν ἐπ' αὐτοῦ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ σχηματίζομεν τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἔπειτα



Σχ. 28.

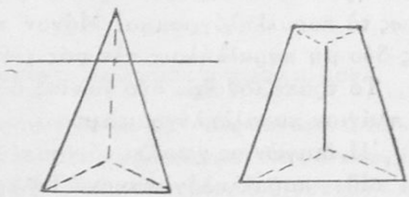
χαράσσομεν (σχ. 28) τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως καὶ ὑψώνομεν ταῦτα περὶ τὸ κεντρικὸν ἕως ὅτου ἑνωθοῦν αἱ κορυφαί των καὶ τότε ἔχομεν τὴν τριγωνικὴν κανονικὴν πυραμίδα. Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον κάμνομεν καὶ ἄλλα εἴδη πυραμίδων.

Ἀσκήσεις: Ποῦ εἴδατε πυραμοειδῆ σχήματα; Ἰχνογραφήσατε τρίγωνα ἰσόπλευρα, ἀνισόπλευρα. Ἐπίσης πυραμίδα τριγωνικὴν καὶ τεταγωνικήν.

Κόλουρος πυραμὶς

Λαμβάνομεν μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα καὶ κόπτομεν τὴν κορυφήν της ὁριζοντίως. Βλέπομεν ὅτι ἔγινε ἄλλο σῶμα μὲ μίαν ἕδραν ἐπὶ πλέον καὶ ὅτι τὸ σχῆμα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν δὲν εἶναι τώρα τριγωνικόν. Τὸ νέον τοῦτο σῶμα τὸ λέγομεν ***κόλουρον πυραμίδα***.

Ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι σῶμα μὲ πολλὰς ἕδρας, ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἡ βάσις καὶ ἡ ἀπέναντί της εἶναι παράλληλα ἐπίπεδα, αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι δὲν εἶναι παράλληλοι.



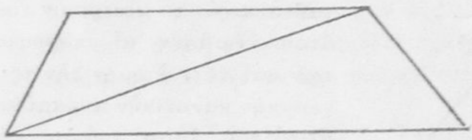
Σχ. 29.

Αἱ δύο παράλληλοι ἕδραι εἶναι τρίγωνα καὶ αἱ τρεῖς παράπλευροι ἕδραι εἶναι σχήματα τετράπλευρα.

Ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχει 5 ἕδρας, 9 ἀκμὰς καὶ 6 κορυφάς.

Τραπέζιον

Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς κολούρου πυραμίδος ἔχουν σχῆμα τετράπλευρον. Τοῦτο ἔχει μόνον τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους ἀλλ' ὄχι ἴσας. Αἱ ἄλλαι δύο δὲν εἶναι παράλληλοι.


Σχ. 30.

Ἔχει δύο γωνίας ὀξείας καὶ δύο ἀμβλείας. Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγομεν *τραπέζιον*.

Τραπέζιον εἶναι σχῆμα τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἄνισοι καὶ δύο μόνον ἀπέναντι εἶναι παράλληλοι.

Εἰς τὸ τραπέζιον τὰς δύο παραλλήλους πλευρὰς λέγομεν *βάσεις* καὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν *ὕψος*.

Ἐὰν τὸ τραπέζιον ἔχῃ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του ἴσας, λέγεται *ἰσοσκελὲς τραπέζιον*.

Ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο ἀπέναντι γωνίας χωρὶς νὰ εἶναι πλευρὰ τοῦ τραπεζίου, λέγεται **διαγώνιος**.

Ἡ διαγώνιος χωρίζει τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα.

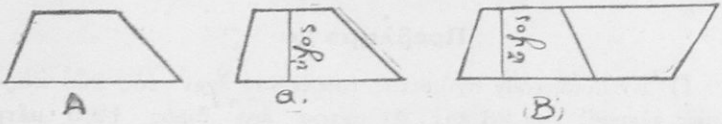
Τὸ τραπέζιον ἔχει τέσσαρας πλευρὰς καὶ τέσσαρας γωνίας ὅπως καὶ τὰ παραλληλόγραμμα. Δὲν ἔχει ὅμως καὶ τὰς τέσσαρας πλευράς του ἀνὰ δύο ἀπέναντι παραλλήλους, ἀλλὰ μόνον δύο. Ἐπίσης τὸ τραπέζιον δὲν ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του ἴσας, ὅπως τὰ παραλληλόγραμμα. Μόνον τὰ ἰσοσκελῆ τραπέζια ἔχουν τὰς δύο μὴ παραλλήλους πλευράς των ἴσας.

Τὸ τραπέζιον ἔχει δύο γωνίας ὀξείας καὶ δύο ἀμβλείας, ὅπως τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον.

Ἡ διαγώνιος χωρίζει τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα ὅπως καὶ κάθε παραλληλόγραμμον. Τὰ τρίγωνα αὐτὰ δὲν εἶναι ἴσα ἀναμεταξύ των ὅπως εἰς τὰ παραλληλόγραμμα.

Ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου

Ἂν ἀπὸ χάρτην κάμωμεν δύο τραπέζια Α καὶ α ἴσα ἀναμεταξύ των καὶ τὰ τοποθετήσωμεν μὲ τρόπον ὥστε ἡ μικροτέρα βάσις τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι προέκτασις τῆς μεγαλυτέρας τοῦ ἄλλου, θὰ σχηματισθῇ τὸ παραλληλόγραμμον Β, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὰς δύο βάσεις τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὸ ἴδιον. Τοῦ παραλληλογράμμου τούτου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.



Σχ. 31.

Τὸ τραπέζιον ὅμως Α εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου Β. Τὸ παραλληλόγραμμον ὅμως τοῦτο ἔχει βάσιν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὸ ἴδιον.

Ὥστε: ***Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τοῦ μήκους τῶν δύο βάσεων ἐπὶ τὸ ὕψος του.***

Π. χ. Ἂν ἡ μία βάσις τοῦ τραπεζίου εἶναι 7 μέτρα, ἡ ἄλλη 5 καὶ τὸ ὕψος 4 μέτρα, τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $\frac{7+5}{2} = 6$ καὶ $6 \times 4 = 24$ τετρ. μέτρα.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος

Ἡ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τρίγωνα καὶ ἀπὸ τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία σχηματίζει τραπέζια, τῶν ὁποίων αἱ βάσεις ἔχουν μῆκος τὸ μῆκος τῶν δύο περιμέτρων τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ τὸ ἴδιον ὕψος.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων, ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ προσθέτομεν αὐτά.

Προβλήματα

1) Ἓν οἰκόπεδον σχήματος τραπεζίου ἔχει τὰς δύο παραλλήλους πλευράς του 28 καὶ 20 μέτρα καὶ ὕψος 12,5 μέτρα. Τοῦτο ἐπωλήθη πρὸς 36 δραχμὰς τὸ τετραγωνικὸν μέτρον. Πόσον ἐπωλήθη;

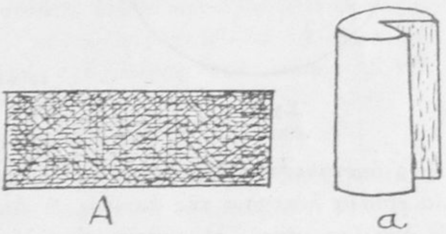
2) Μία αὐλὴ σχήματος τραπεζίου ἔχει ἐμβαδὸν 150 τετρ. μέτρα καὶ αἱ βάσεις του εἶναι 40 καὶ 20 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

3) Μία ἄμπελος σχήματος τραπεζίου ἔχει τὰς δύο παραλλήλους πλευρὰς 70 καὶ 30 μέτρα καὶ 25 μέτρα τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο τούτων πλευρῶν της. Πόσα κλήματα ἔχει, ἂν κάθε δύο τετραγωνικὰ μέτρα περιέχουν 6 κλήματα;

ΜΕΡΟΣ Β'.

Κύλινδρος

Ἐὰν τὸ ὀρθογωνικὸν χαρτόνιον Α καμπυλώσωμεν, μέχρις ὅτου αἱ δύο κάθετοι πλευραί του ἑνωθοῦν, θὰ σχηματισθῇ τὸ σῶμα **α**. Τὸ νέον τοῦτο σῶμα **α** λέγομεν ***κύλινδρον***.



Σχ. 32.

Ὁ ***κύλινδρος*** περιορίζεται ἀπὸ τρεῖς ἐπιφανείας, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι ἐπίπεδα ἴσα καὶ παράλληλα ἀναμεταξύ των καὶ ἡ ἄλλη εἶναι καμπύλη καὶ λέγεται ***κυρτὴ*** ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου. Σχῆμα κυλίνδρου ἔχει ὁ σωλὴν τῆς θερμάστρας, ὁ ἄξων τῶν τροχῶν τῆς ἁμάξης, τὸ ἔμβολον τῆς ἀντλίας καὶ πολλὰ ἄλλα ἀντικείμενα.

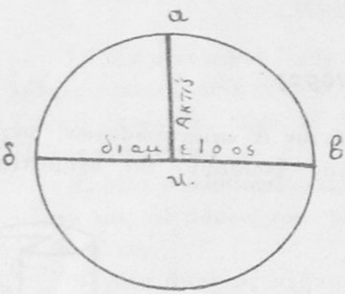
Ὁ κύλινδρος εἶναι στερεὸν σῶμα ***τρίεδρον***. Ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι ἕδρας ὁριζοντίους, ἴσας καὶ παραλλήλους ἀναμεταξύ των καὶ μίαν κάθετον. Αἱ δύο ἀπέναντι ἕδραι τοῦ κυλίνδρου λέγονται ***βάσεις*** αὐτοῦ.

Κύκλος

Ἐὰν θέσωμεν κύλινδρον ἐπάνω εἰς φύλλον χάρτου, οὕτως ὥστε νὰ στηρίζεται ἐπὶ μιᾶς τῶν δύο βάσεών του, καὶ ἰχνογραφήσωμεν τὸ σχῆμα τῆς βάσεως ταύτης, θὰ σχηματισθῇ σχῆμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν μόνον καμπύλην γραμμήν.

Τὸ σχῆμα τοῦτο λέγεται ***κύκλος*** καὶ ἡ καμπύλη γραμμὴ ***περιφέρεια*** τοῦ κύκλου.

Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἴσα ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἐντὸς αὐτῆς. Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται ***κέντρον*** τοῦ κύκλου.



Σχ. 33

Ἂν ἑνώσωμεν τὴν ἀπόστασιν ἑνὸς σημείου τῆς περιφερείας μὲ τὸ κέντρον δι' εὐθείας γραμμῆς, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται ***ἀκτίς.***

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ ἰδίου κύκλου εἶναι ἴσαι.

Ἂν τὴν ἰδίαν ἀκτῖνα ἐκτείνωμεν κατ' εὐθεῖαν ἀπὸ τοῦ κέντρου μὲ ἀντίθετον διεύθυνσιν, ἕως ὅτου νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἀπέναντι ἀκριβῶς σημεῖον τῆς περιφερείας, σχηματίζεται μία εὐθεῖα διπλασία τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία χωρίζει τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ λέγεται ***διάμετρος.***

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ τελειώνει εἰς δύο ἀπέναντι σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

Ἐὰν εἰς κυκλικὴν ἐπιφάνειαν χάρτου γράψωμεν διάμετρον καὶ κόψωμεν αὐτὴν κατὰ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς, παρατηροῦμεν ὅτι χωρίζεται εἰς δύο τμήματα. Ἐὰν τὰ τμήματα αὐτὰ τοῦ κύκλου θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως, βλέπομεν ὅτι καὶ τὰ δύο εἶναι ἴσα.

Ἡ διάμετρος λοιπὸν χωρίζει τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειάν του εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἕκαστον ἀπὸ τὰ μέρη αὐτὰ λέγεται ***ἡμικύκλιον.***

Μέρη τοῦ κύκλου καὶ τῆς περιφερείας

Τόξον. Μέρος τῆς περιφερείας λέγεται ***τόξον***, ὅπως τὸ Α Β.

Σχ. 34.

Χορδή. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου λέγεται ***χορδή***, ὅπως ἡ εὐθεῖα Γ Δ.

Τμῆμα. Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον κλείεται ὑπὸ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, λέγεται *τμῆμα*.

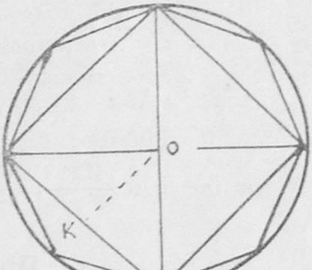
Τομεὺς κύκλου. Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον κλείεται ὑπὸ ἑνὸς τόξου καὶ δύο ἀκτίνων αἱ ὁποῖαι φέρονται εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, λέγεται ***τομεύς***, ὅπως τὸ μέρος τοῦ κύκλου ΚΑΒ.

Πολύγωνα γραμμένα ἐντὸς κύκλου

Ἐὰν εἰς κύκλον φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των καὶ ἑνώσωμεν τὰ τέσσαρα ἄκρα των, σχηματίζομεν ἓν τετράγωνον ΑΒΓΔ.

Αἱ πλευραὶ τοῦ τετραγώνου εἶναι χορδαὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἴσαι μεταξύ των.

Ἐὰν κάθε τόξον ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω χωρίσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῶν χωρισμάτων μὲ χορδάς, σχηματίζομεν κανονικὸν ***ὀκτάγωνον***.

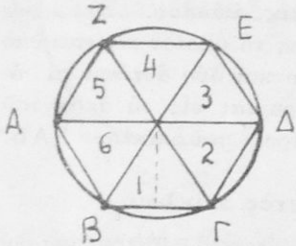


Σχ. 35.

Ἐὰν πάλιν κάθε νέον τόξον χωρίσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὰ ἑνώσωμεν μὲ χορδάς, σχηματίζομεν κανονικὸν ***δεκαεξάγωνον***. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον δυνάμεθα ἐντὸς κύκλου νὰ γράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα τετράγωνα, ὀκτάγωνα, δεκαεξάγωνα κλπ. τῶν ὁποίων αἱ δύο πλευραὶ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς ἀκτῖνας τοῦ κύκλου. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν τοῦτο, θὰ καταντήσῃ ἡ μία πλευρὰ τοῦ πολυγώνου μικροτέρα ἀπὸ κάθε εὐθεῖαν καὶ ἑπομένως ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου εἶναι γραμμένον τὸ πολύγωνον τοῦτο.

Ἐμβαδὸν κανονικῶν πολυγώνων

Εἰς τὸν κύκλον ἔχομεν γραμμένον τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει ἓξ πλευράς. Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου φέρωμεν εὐθείας γραμμὰς εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, ἔχομεν τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου ἤτοι ἕξ. Ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἴσας πλευράς, καὶ ἀκτῖνας τοῦ ἰδίου κύκλου, καὶ ἑπομένως καὶ ἴσον ὕψος.



Σχ. 36.

Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἑκάστου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦτο πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6, ὅσα εἶναι τὰ τρίγωνα, ἔχομεν τὸ ἐμβαδὸν ὅλου τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἴδιον ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν, ἐὰν εὕρωμεν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ὕψος. Π.χ. ἐὰν τὸ ὕψος (ἀπόστημα) κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι 3 μέτρα καὶ ἡ κάθε πλευρά του 4 μέτρα, ἡ περίμετρος θὰ εἶναι $4 \times 5 = 20$ μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $\frac{20 \times 3}{2} = \frac{60}{2} = 30$ τετρ. μέτρα.

Προβλήματα

1) Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα κανονικοῦ πενταγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς μὲ 5 μέτρα μῆκος τὴν καθεμίαν καὶ ἀπόστημα 3,40. Πόσα δένδρα θὰ φυτευθοῦν ἐὰν εἰς τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τετραγωνικοῦ μέτρου φυτεύωνται δύο δένδρα;

2) Ποία εἶναι ἡ περίμετρος κανονικοῦ ὀκταγώνου, τοῦ ὁποίου ἑκάστη πλευρὰ εἶναι 5,24 μέτρα καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδόν του;

Μέτρησις κύκλου

Α΄) *Πῶς εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου.*

Διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα κύκλον μὲ ὡρισμένον μῆκος τῆς περιφερείας του, πρέπει νὰ λάβωμεν ὡρισμένου μήκους ἀκτῖνα ἢ διάμετρον. Ἀναλόγως μὲ τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ἢ διαμέτρου θὰ σχηματισθῇ κύκλος μὲ περιφέρειαν ἀνάλογον.

Ἑνὸς κύκλου τὴν περιφέρειαν περιβάλλομεν μὲ νῆμα καὶ ἔπειτα ἁπλώνομεν τὸ νῆμα καὶ μετροῦμεν τοῦτο. Ἐὰν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διαιρέσωμεν διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου, θὰ εὕρωμεν πηλίκον 3,14... Εὑρίσκομεν δηλαδὴ ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι 3,14... μεγαλυτέρα ἀπὸ τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου τοῦ ἰδίου κύκλου.

Τὸ ἴδιον κάμνομεν καὶ εἰς ἄλλους κύκλους καὶ πάντοτε εὑρίσκομεν τὴν ἰδίαν ἀναλογίαν. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν εὑρίσκομεν ὅτι:

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ μήκους τῆς περιφερείας κύκλου διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του εἶναι 3,14... Τοῦτο παρατηροῦμεν εἰς ὅλους τοὺς κύκλους.

Ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος, ὥστε:

Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14... ἢ μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14.

Ἀσκήσεις

1) Ἑνὸς φρέατος ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 1,50. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

2) Εἷς τροχὸς ἔχει ἀκτῖνα μὲ μῆκος 0,6. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς κυκλικοῦ ἁλωνίου ἔχει μῆκος 24,60. Πόσον εἶναι ἡ διάμετρός του;

Β΄ Ἐμβαδὸν κύκλου.

Εἰς ἕκαστον κύκλον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα μὲ ἀριθμὸν πλευρῶν διπλασιαζόμενον συνεχῶς καὶ φθάνομεν εἰς πολύγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος ἐλάχιστα διαφέρει ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εὕρωμεν, ἐὰν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ τὸ ὕψος (ἀπόστημα) μὲ τὴν ἀκτῖνα.

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους του. Ἑπομένως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκομεν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του;

1) Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ κύκλου ὁ ὁποῖος ἔχει περιφέρειαν 18,64 μέτρα καὶ ἀκτῖνα 3 μέτρα εἶναι

$$\frac{18.64 \times 3}{2} = \frac{55,92}{2} = 27,96 \text{ τετρ. μέτρα.}$$

2) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα 4 μέτρα, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, ἤτοι ἡ περιφέρεια θὰ εἶναι $2 \times 4 \times 3,14 = 25,12$ μέτρα. Τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἤτοι $25,12 \times \frac{4}{2}$ ἢ $25,12 \times 2 = 50,24$ τετρ. μέτρα.

Προβλήματα

1) Ἑνὸς κυκλικοῦ ἁλωνίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 12 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

2) Μιᾶς κυκλικῆς πλατείας ἡ περιφέρειά της ἔχει μῆκος 82 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν της;

3) Ἑνὸς δίσκου κυκλικοῦ ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 0,80 τοῦ μέτρου. Πόσα ποτήρια δύναται νὰ περιλάβῃ, ἂν ἕκαστον ποτήριον κατέχῃ ἐπιφάνειαν 0,004 τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου;

Ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου

Ἐὰν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου περιτυλίξωμεν μὲ λεπτὸν χάρτην καὶ ἔπειτα ἁπλώσωμεν τὸν χάρτην ἐπὶ ἐπιπέδου, ἔχομεν ἓν ὀρθογώνιον. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου. Ἐπίσης τὸ μῆκος τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὴν περιφέρειαν τῶν κυκλικῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου καὶ τὸ μῆκος τῆς καθέτου πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ ἴδιον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του διὰ τοῦ 3,14, θὰ εὕρωμεν τὴν διάμετρον τῶν κυκλικῶν του βάσεων καὶ τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου θὰ εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος των.

Ἐὰν ἡ περιφέρεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι 5 μέτρα καὶ τὸ ὕψος 8 μέτρα, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι $5 \times 8 = 40$ μέτρα. Ἡ ἀκτὶς τῆς κυκλικῆς βάσεώς του θὰ εἶναι $5 : 3,14 = 1,592 : 2 = 0,796$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν $\frac{5 \times 0,796}{2} = \frac{3,980}{2} = 1,99$. Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι ; $40 + 1,99 + 1,99 = 43,98$ τετρ. μέτρα.

Προβλήματα

1) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 8 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὅλων τῶν ἐπιφανειῶν του ;

2) Μιᾶς στήλης κυλινδρικῆς τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς της εἶναι 0,75 καὶ τὸ ὕψος της 4 μέτρα, πρόκειται νὰ σοφατισθῇ ἡ κάθετος ἐπιφάνειά της. Πόσον θὰ στοιχίσῃ, ἂν ἕκαστον τετραγωνικὸν μέτρον στοιχίζῃ 8,5 δραχμάς ;

3) Ἑνὸς κυλίνδρου, μὲ περιφέρειαν 4 μέτρα, ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του ;

Πῶς εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον κυλίνδρου

Ἐπειδὴ τὸ κανονικὸν πρίσμα μὲ ἀπείρους παραπλεύρους ἕδρας πολὺ ὀλίγον διαφέρει ἀπὸ τὸν κύλινδρον, τὸ ὄγκον τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκομεν, ὅπως καὶ τὸν ὄγκον τοῦ πρίσματος, δηλαδὴ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεώς του καὶ τοῦτο πολλαπλασιάζομεν μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους του.

Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου μὲ περιφέρειαν 9,42 μέτρα καὶ ὕψος 5 μέτρα, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, ἀφοῦ πρῶτον εὕρομεν τὴν ἀκτῖνα. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14, ἤτοι 9,42 : 3,14=3 μέτρα ἡ διάμετρος καὶ συνεπῶς ἡ ἀκτὶς 1,50. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς βάσεως εἶναι $\frac{1{,}50 \times 9{,}42}{2} = \frac{14.13}{2} = 7{,}065$ τετρ. μέτρα καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου $7{,}065 \times 5 = 35{,}325$ κυβικὰ μέτρα. Ὥστε :

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Προβλήματα

1) Κυλινδρικὴ στήλη, μὲ περιφέρειαν 6,28 μ. καὶ ὕψος 5 μέτρα, ποῖον ὄγκον ἔχει ;

2) Μία ὑδαταποθήκη κυλινδρικὴ μὲ ἀκτῖνα ἐσωτερικὴν 0,80 μέτρα καὶ ὕψος 3 μέτρα, πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ, ἂν ἕκαστον κυβικὸν μέτρον χωρῇ 780 ὀκάδας ὕδατος ;

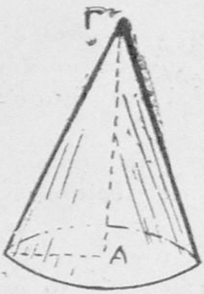
3) Μία μαρμάρινος στήλη μὲ περιφέρειαν 15,70 μέτρα καὶ ὕψος 3 μέτρα, πόσας ὀκάδας ζυγίζει, ἂν ἕκαστον κυβικὸν μέτρον μαρμάρου ζυγίζει 3500 ὀκάδας ;

4) Κυλινδρικὸς κορμὸς δένδρου μὲ περιφέρειαν 2,4 μέτρα καὶ ὕψος 4 μέτρα, πόσα πρέπει νὰ πωληθῇ, ἂν ἕκαστον κυβικὸν μέτρον πωλῆται 1.500 δραχμάς ;

Κῶνος

Κάθε σῶμα, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα χωνίου, λέγεται ***κῶνος***.

Ἂν ἐξετάσωμεν τὸν κῶνον, βλέπομεν ὅτι ἔχει μίαν κορυφήν, ὅπως ἡ *πυραμίς*, μίαν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν μὲ σχῆμα κύκλου καὶ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου λέγεται ***βάσις*** καὶ ἡ κυρτὴ ***κυρτὴ ἐπιφάνεια*** τοῦ κώνου.

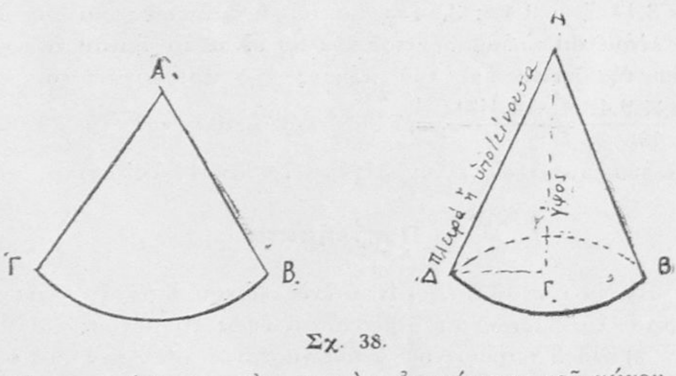


Σχ. 37.

Ὁ κῶνος εἶναι στερεὸν σῶμα μὲ δύο ἐπιφανείας. Ἡ μία εἶναι ἐπίπεδος καὶ ἔχει σχῆμα κύκλου καὶ ἡ ἄλλη ***κυρτὴ ἐπιφάνεια***, ἡ ὁποία τελειώνει εἰς ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον λέγεται ***κορυφὴ*** τοῦ κώνου.

Ὕψος τοῦ κώνου εἶναι ἡ κάθετος ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἐπὶ τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του. Ἡ κάθετος αὐτὴ λέγεται καὶ ***ἄξων*** τοῦ κώνου. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εὑρίσκομεν καὶ ἔξω αὐτοῦ, ἂν φέρωμεν ἀπὸ τῆς κορυφῆς του παράλληλον τῆς ἐπιπέδου βάσεως ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται καὶ ἔπειτα φέρομεν κάθετον μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων. Ἡ κάθετος αὐτὴ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κώνου

Ἐπιφάνεια κώνου



Σχ. 38.

Ἂν σκεπάσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου μὲ φύλλον λεπτοῦ χάρτου καὶ ἁπλώσωμεν κατόπιν τοῦτον ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, θὰ σχηματισθῇ ὁ ***τομεὺς*** Α Β Γ, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον Β Γ εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου.

Βλέπομεν ὅτι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου εἶναι ἴση μὲ τὸν τομέα, τοῦ ὁποίου τὸ τόξον εἶναι ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ἀκτὶς ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εὑρίσκεται ὅπως καὶ τοῦ τομέως κύκλου, δηλαδὴ πολλαπλασιάζομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του καὶ προσθέτομεν τὰ δύο ἐμβαδά. Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τῶν δύο ἐπιφανειῶν τοῦ κώνου.

Ἂν ἑνὸς κώνου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του εἶναι 12,56 μέτρα καὶ ἡ πλευρά του 8 μέτρα, διὰ νὰ εὕρωμεν α΄) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας πολλαπλασιάζομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεώς του 12,56 ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του $\frac{8}{2}$ ἤτοι $9{,}42 \times \frac{8}{2}$ ἢ $9{,}42 \times 4 = 37{,}68$ τετρ. μέτρα.

β΄) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα της, ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς διαμέτρου τὴν ὁποίαν θὰ εὕρωμεν, ἂν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειάν της διὰ τῶν 3,14 ἤτοι $9{,}42 : 3{,}14 = 3$ μέτρα ἡ διάμετρος καὶ ἡ ἀκτὶς 1,5 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας του, ἤτοι $\frac{1{,}5 \times 9{,}42}{2} = \frac{14{,}130}{2} = 7{,}065$ τετρ. μέτρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐπιφανειῶν εἶναι $37{,}68 + 7{,}065 = 44{,}745$ τετρ. μέτρα.

Προβλήματα

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει περιφέρειαν τῆς βάσεώς του 6 μέτρα καὶ ὕψος 10 μέτρα;

2) Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα χαρτονίου θέλομεν διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα κῶνον μὲ περιφέρειαν βάσεώς του 3,14 καὶ ὕψος 7 μέτρα;

3) Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 2 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 6 μέτρα. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα λευκοσιδήρου

θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ σκεπάσωμεν ὅλην του τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

Ὄγκος τοῦ κώνου

Τὸ ὄγκον τοῦ κώνου εὑρίσκομεν, ὅπως εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος, διότι ἡ πυραμὶς εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς κῶνος, ὅταν αἱ τριγωνικαί της ἕδραι διπλασιάζονται συνεχῶς.

Ὁ ὄγκος λοιπὸν τοῦ κώνου εὑρίσκεται, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του. Π.χ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κώνου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις του ἔχει διάμετρον 1,5 μέτρα καὶ ὕψος 2,5, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του. Καὶ πρῶτον εὑρίσκομεν τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως $1{,}5 \times 3{,}14 = 4{,}71$. Ἔπειτα πολλαπλασιάζωμεν τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, ἤτοι $4{,}71 \times \frac{0{,}75}{2} = \frac{3{,}532}{2} = 1{,}766$ τετρ. μέτρα.

Τὸ ἐμβαδὸν τώρα τῆς βάσεως 1,766 τ. μ. πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ ὕψος 2,5 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 3, ἤτοι $\frac{1{,}766 \times 2{,}5}{3} = \frac{4{,}413}{3} = 1{,}471$ κυβ. μέτρα ὁ ὄγκος τοῦ κώνου τούτου.

Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εὑρίσκεται εὐκολώτερον μὲ τὸν ἑξῆς τύπον: $\frac{3{,}14 \times α \times α \times υ}{3}$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι μ. καὶ τὸ ὕψος 10 συμφώνως μὲ τὸν τύπον: $O = \frac{3.14 \times α \times α \times υ}{3}$ καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὰ α μὲ τὴν ἀκτῖνα 2 καὶ τὸ υ μὲ τὸ ὕψος 10 θὰ ἔχωμεν $O = \frac{3.14 \times 2 \times 2 \times 10}{3} = \frac{125{,}6}{3} = 41{,}88$ κυβικὰ μέτρα.

Προβλήματα

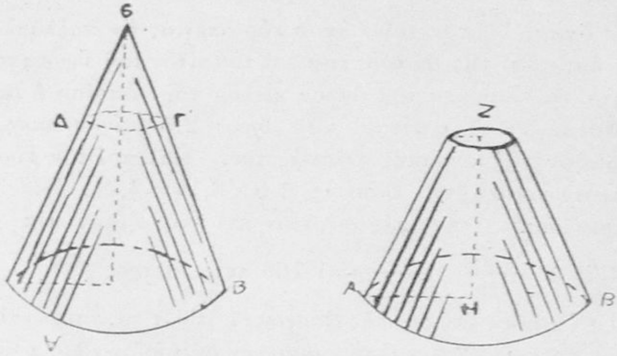
1) Πόσα κυβικὰ μέτρα σίτου χωρεῖ ἓν χωνίον ὑδρομύλου

κωνοειδές, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 0,80 μέτρα καὶ ὕψος 3;

2) Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς χωνίου εἶναι 0,75 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 1,20, πόσα κυβικὰ μέτρα ὕδατος χωρεῖ;

3) Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι 12,560 κυβ. μέτρα, τὸ ὕψος του 1 μέτρον. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του;

Κόλουρος κῶνος



Σχ. 39

Ἐὰν ἕνα ὄρθιον κῶνον κόψωμεν παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν του, τὸ μέρος μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τῆς κοπῆς τοῦ κώνου λέγεται ***κόλουρος κῶνος***.

Ὁ κόλουρος κῶνος ἔχει τρεῖς ἐπιφανείας, μίαν κυρτὴν καὶ δύο κυκλικὰς καὶ παράλληλα ἐπίπεδα μεταξύ των.

Σχῆμα κολούρου κώνου ἔχουν συνήθως ὁ κάδος, τὸ σκέπασμα τῆς λάμπας (ἀμπαζούρ), διάφορα ἀνθοδοχεῖα καὶ ἄλλα ἀντικείμενα.

Σφαῖρα

Τὸ τόπι, τὸ ποδόσφαιρον, ὁ βόλος κ.λ.π. εἶναι ***σφαῖραι***.

Σφαῖρα εἶναι στερεὸν σῶμα, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἴσα ἀπὸ ἕν σημεῖον ἐντὸς αὐτῆς εὑρισκόμενον. Τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι τὸ ***κέντρον*** τῆς σφαίρας.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία φέρεται ἀπὸ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν, λέγεται **ἀκτὶς** τῆς σφαίρας.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ τελειώνει εἰς τὸ ἕνα καὶ τὸ ἄλλο μέρος τῆς ἐπιφανείας, λέγεται ***διάμετρος*** τῆς σφαίρας.

Αἱ διάμετροι τῆς ἰδίας σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των, Ἐπίσης καὶ αἱ ἀκτῖνες τῆς ἰδίας σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἡ διάμετρος καθὼς καὶ κάθε κύκλος ὁ ὁποῖος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου της λέγεται ***μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας***.

Κάθε μέγιστος κύκλος χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ***ἡμισφαίρια***.

Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου στηρίζεται ἡ σφαῖρα, λέγεται ***ἄξων τοῦ κύκλου τῆς σφαίρας***.

Τὰ ἄκρα τοῦ ἄξονος λέγονται ***πόλοι***.

Κάθε σφαῖρα ἔχει δύο πόλους.

Ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας

Ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι κυρτὴ ἐπιφάνεια.

Ἐὰν τὸ κάλυμμα μιᾶς σφαίρας ἁπλώσωμεν ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ἐπὶ τῆς ὁποίας νὰ σημειώσωμεν καὶ ἕνα μέγιστον κύκλον αὐτῆς, θὰ ἴδωμεν ὅτι τὸ κάλυμμα ἔχει τετραπλασίαν ἐπιφάνειαν ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ μεγίστου κύκλου.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου της.

Εὑρίσκομεν ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, ἂν εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου της, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἢ τῆς ἀκτῖνος ἢ καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγίστου κύκλου της.

α) Ἂν ἡ διάμετρος εἶναι 4 μέτρα, ἡ ἀκτὶς 2 μέτρα, ἡ περιφέρεια θὰ εἶναι $3{,}14 \times 4 = 12{,}56$ μέτρα. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου εἶναι $\frac{12{,}56 \times 2}{2} = 12{,}56$ καὶ τῆς ἐξωτερικῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ τετραπλάσιον, ἤτοι $12{,}56 \times 4 = 50{,}24$ τετραγ. μέτρα.

β) Ἂν ἡ ἀκτὶς εἶναι 2 μέτρα τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι συμφώνως μὲ τὸν τύπον $3{,}14 \times α \times α = 3{,}14 \times 2 \times 2 = 12{,}56$ καὶ τοῦτο ἐπὶ 4 ἤτοι $12{,}56 \times 4 = 50{,}24$ τετρ. μέτρα.

γ) Ἂν ἡ περιφέρεια εἶναι 12,56 μέτρα, ἡ διάμετρος θὰ ναι $12{,}56 : 3{,}14 = 4$ μέτρα καὶ ἡ ἀκτὶς τὸ ἥμισυ ἤτοι 2 μέτρα, καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεγίστου κύκλου ὅπως ἀνωτέρω 12,56 καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ τετραπλάσιον τούτου ἤτοι 50,24 τετραγ. μέτρα.

Προβλήματα

1) Μία ὑδρόγειος σφαῖρα ἔχει διάμετρον 2,5 μέτρα. Ποῖον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς της ἐπιφανείας; (16,622 τ. μ.).

2) Ἡ περιφέρεια τῆς ἐπιπέδου βάσεως ἑνὸς ἡμισφαιρίου εἶναι 6,28 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ πόση ὅλης τῆς σφαίρας.

4) Θέλομεν νὰ καλύψωμεν σφαῖραν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον 5 μέτρα μὲ μεταξωτὸν ὕφασμα. Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ κάλυμμα, ἂν τὸ ὕφασμα τιμᾶται 125 δραχμὰς τὸ τετρ. μέτρον;

Ὄγκος τῆς σφαίρας

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐξωτερικῆς της ἐπιφανείας, τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα της καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας της ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος της.

Ἂν ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 0,8 μέτρα, ἡ ἐξωτερικὴ ἐπιφάνεια θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $3{,}14 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 4 = 8{,}038$ τ. μ. καὶ ὁ ὄγκος της $8{,}038 \times \frac{0{,}8}{3} = \frac{6{,}43}{3} = 2{,}143$ κυβ. μέτρα.

Ὥστε ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶναι $\frac{4 \times 3{,}14 \times α \times α \times α}{3}$ ἤτοι, ἂν ἡ ἀκτὶς μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 μέτρα ὁ ὄγκος θὰ εἶναι:

$$\frac{4\times 3,14\times 2\times 2\times 2}{3}=33,493 \text{ κυβ. μέτρα.}$$

Προβλήματα

1) Ἡ ὑδρόγειος σφαῖρα τοῦ σχολείου ἔχει διάμετρον 0,4 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα εἶναι ὁ ὄγκος της;

2) Μία σφαῖρα ἀεροστάτου ἔχει διάμετρον 6 μέτρα. Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ;

3) Ἡ περιφέρεια ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 6,28 μέτρα. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

ΤΕΛΟΣ

ΤΑ ΝΕΩΤΕΡΑ ΒΟΗΘΗΤΙΚΑ
ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ

ΕΚΔΟΤΑΙ

Π. ΠΑΤΣΟΥΡΑΚΟΣ & Λ. ΓΟΝΤΖΕΣ

ΠΕΙΡΑΙΕΥΣ