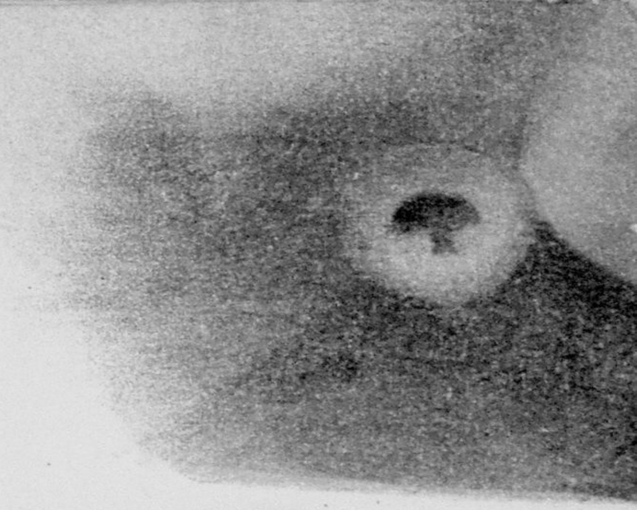
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΟΥ ΜΑΘΗΤΟΥ ΝΤΣΙΝΗΣ



Τρο

Α.Ε.

-17410-

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝ. ΣΧΟΛΗΣ
ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Τμήμα Δ' α

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ

Ἐγκεκριμένη διὰ μίαν πενταετίαν ἀπὸ τοῦ σχολικοῦ ἔτο[υς]
κατὰ τὸ ὑπ' ἀριθ. $\frac{46645}{15889}$ τῆς 23 Αὐγούστου 1[...]
ἔγγραφον τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδεί[ας]

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΒΔΟΜ[Η]

Ἀντίτυπα 2000

-17410-

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
52 ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ — ΜΕΓΑΡΟΝ ΑΡΣΑΚΕΙΟΥ
ΑΘΗΝΑΙ
1934

Τμήματα 47,10

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέω
ρεῖται κλεψίτυπον.

Τύποις ΑΘ. Α. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
Ὁδὸς Λέκα—Στοὰ Σιμοπούλου

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

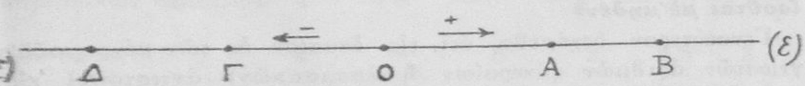
Περὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Διὰ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν) δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν εἰς τὴν ὁποίαν ὁ μειωτέος εἶνε μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου. Οὕτω π. χ. δὲν δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν 3—7, ἢ τὴν 0—5 κλπ., διότι δὲν ὑπάρχει οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικός τις ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν 7 ἢ εἰς τὸν 5 δίδει ἄθροισμα τὸν 3 ἢ τὸν 0.

Θὰ μάθωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ πᾶσα ἀφαίρεσις.

Καθὼς γνωρίζομεν, τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους δι᾽ ἄλλου ὁμοειδοῦς πρὸς αὐτὸ εἶνε ἀριθμός τις. Ἔστω εὐθεῖά τις (Ε) ἐπὶ τῆς ὁποίας διακρίνομεν δύο φοράς, μίαν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ Α, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***θετικὴν*** φορὰν καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Γ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ἀρνητικὴν*** φορὰν (Σχ. 1).



(Σχ. 1)

Καλοῦμεν ***θετικὸν*** μὲν τμῆμα τῆς (Ε), πᾶν μέρος αὐτῆς, ἂν θεωρῆται διαγραφόμενον ὑπὸ κινητοῦ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, ***ἀρνητικὸν*** δέ, ἂν κατὰ τὴν ἀρνητικήν. Οὕτω ἐπὶ τῆς (Ε) διακρίνομεν μεγέθη καλούμενα θετικά, ὡς τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ καὶ ἄλλα καλούμενα ἀρνητικά, ὡς τὰ ΟΓ, ΟΔ, ΓΔ. Τὰ μὲν θετικὰ μεγέθη τῆς εὐθείας μετρούμενα ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς ΟΑ. θὰ παριστάνωνται ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν ***θετικούς***, τὰ δὲ ἀρνηνικὰ ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν ***ἀρνητικούς***.

Ἐν γένει, πρὸς παράστασιν τῶν τιμῶν τῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα διακρίνομεν εἰς θετικὰ καὶ ἀρνητικά, μεταχειριζόμεθα τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καὶ δεχόμεθα ὅτι, εἷς ἕκαστον θετικόν, παριστάνοντα τὴν τιμὴν ποσοῦ ἢ μεγέθους τινὸς θετικοῦ, π.χ. τοῦ ΟΒ, ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀρνητικός, παριστάνων τὴν τιμὴν ἀρνητικοῦ ποσοῦ ἢ μεγέθους, ἀντιστοίχου τοῦ θετικοῦ, ὡς τοῦ ΟΔ (Σχ. 1), ἤτοι ἔχοντος τὸ αὐτὸ μέγεθος μὲ τὸ ΟΒ, ὅταν δὲν λαμβάνεται ὑπ᾽ ὄψιν ἡ ἀντίθεσίς των, ἂν τὰ ποσὰ ἢ μεγέθη ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀντίστοιχοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί, ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅτι, τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ 0. Π. χ. ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 6 δραχμαί, δώσωμεν τὸ γνώρισμα, ὅτι εἶνε κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχωμεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 6 δραχμῶν, παριστάνοντα ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου, καὶ ἑνώσωμεν τὰς μονάδας τῶν δύο ὁμοειδῶν μὲν αὐτῶν ἀριθμῶν, ἀλλ᾽ ἐχόντων διάφορον γνώρισμα, καθεμία μονὰς τοῦ κέρδους ἐξουδετερώνει μίαν τῆς ζημίας καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς τοιαύτης ἑνώσεως εἶνε ἴσον μὲ 0. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν ἐπίσης, ἐὰν π. χ. διανύσῃ τις ἐπ᾽ εὐθείας ὁδοῦ ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς, ἕνα ἀριθμὸν βημάτων πρὸς μίαν φοράν, ἔστω πρὸς βορρᾶν καὶ ἔπειτα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν βημάτων πρὸς νότον, ἀπὸ τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασε προηγουμένως, ζητεῖται δὲ πόσον θὰ ἀπέχῃ εἰς τὸ τέλος ἐκ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, οἵτινες ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην, λέγομεν ὅτι εἶνε ***ἀντίθετοι.*** Ὥστε,

«ἀντίθετοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν τὸ ἄθροισμά των ἰσοῦται μὲ μηδέν»

§ 4. Γενικώτερον δεχόμεθα ὅτι, εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) ἀντιστοιχεῖ εἷς ἄλλος ἀντίθετος αὐτοῦ, καὶ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν συμβολικῶς τὴν ἀντίθεσιν δύο τοιούτων ἀριθμῶν, γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, τοῦ μέχρι τοῦδε γνωστοῦ, τὸ σημεῖον + ***(σὺν)*** ἢ οὐδὲν σημεῖον, πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου τὸ — ***(πλήν)***· καὶ τὸ μὲν + ***λέγεται θετικὸν σημεῖον***, τὸ δὲ — ***ἀρνητικὸν σημεῖον***. Οὕτω, οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει 6 μονάδας γράφονται +6 καὶ — 6, ἀπαγγέλλονται δὲ ὡς ἑξῆς: ***σὺν ἓξ*** καὶ ***πλὴν ἕξ.*** Ὁμοίως ἀντίθετοι εἶνε οἱ ἀριθμοὶ 23 καὶ —23, οἱ $\frac{3}{5}$ καὶ $-\frac{3}{5}$, οἱ 6,15 καὶ —6,15 κλπ.

§ 5. Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ***ἑτερόσημοι***, ἐὰν ὁ μὲν εἷς ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον + ἢ οὐδὲν σημεῖον, ὁ δὲ ἄλλος τὸ —, ἀδιαφόρως τοῦ πλήθους τῶν μονάδων ἑκάστου. Οὕτω οἱ + 8 καὶ — 3 λέγονται ἑτερόσημοι· ὁμοίως ἑτερόσημοι εἶνε οἱ -15 καὶ $+\frac{5}{9}$, οἱ 2,15 καὶ $-8\frac{3}{4}$, οἱ 7 καὶ -12 κλπ.

Ὁμόσημοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ αὐτὸ σημεῖον, καθὼς οἱ $+3$ καὶ $+12$, οἱ -7 καὶ $-\frac{3}{4}$, οἱ $-2,5$ καὶ -6 κλπ.

Οἱ μὲν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον — λέγονται ***ἀρνητικοὶ*** ἀριθμοί, οἱ δὲ ἔχοντες τὸ + (ἢ καὶ οὐδὲν σημεῖον) ***θετικοὶ*** ἀριθμοί. Τὰ δύο δὲ ταῦτα εἴδη τῶν ἀριθμῶν λέγονται μὲ ἓν ὄνομα ***ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί.***

Κατὰ ταῦτα, ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ εἶνε οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ ἀριθμοὶ (ἀκέραιοι καὶ κλασματικοί), οἵτινες ἐκλήθησαν καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, καὶ οἱ ἀντίθετοι τούτων, οἵτινες λέγονται ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Καλοῦμεν ***ἀπόλυτον ἀριθμὸν*** ἢ ***ἀπόλυτον τιμὴν*** ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει ἐξ αὐτοῦ, ἂν παραλείψωμεν τὸ σημεῖον του καὶ θεωροῦμεν μόνον τὸ πλῆθος τῶν μονάδων τούτου. Οὕτω οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ τῶν

ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν $4 \cdot \quad -8 \cdot \quad -6 \cdot \quad +2 \cdot \quad -3,5 \cdot \quad -3\frac{1}{2}$

εἶνε οἱ $4 \cdot \quad 8 \cdot \quad 6 \cdot \quad 2 \cdot \quad 3,5 \cdot \quad 3\frac{1}{2}$

καὶ σημειώνομεν αὐτοὺς οὕτω: $|4|=4 \cdot |-8|=8 \cdot |-3,5|=3,5$ κλπ.

Παρατηροῦμεν ὅτι τῶν μὲν θετικῶν ἀριθμῶν οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ εἶνε αὐτοὶ οἱ ἴδιοι, τῶν δὲ ἀρνητικῶν οἱ ἀντίθετοί των θετικοί.

Δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***ἀπολύτως ἴσοι ἢ ἀπολύτως ἰσοδύναμοι,*** ἐὰν αἱ ἀπόλυτοι αὐτῶν τιμαὶ εἶνε ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι· καθὼς π. χ. οἱ 5 καὶ -5, οἱ $3\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{13}{4}$. Ἄρα οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶνε ἀπολύτως ἴσοι, ἀλλ' ἑτερόσημοι.

Ἴσοι ἢ ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἂν εἶνε ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους ἀπολύτους τιμάς, καθὼς π. χ. οἱ -3 καὶ -3 εἶνε ἴσοι, ἐνῷ οἱ -4 καὶ $-\frac{12}{3}$ εἶνε ἰσοδύναμοι, διότι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τούτων 4 καὶ $\frac{12}{3}$ εἶνε ἰσοδύναμοι.

Τὴν ἰσότητα καὶ ἰσοδυναμίαν δύο ἀριθμῶν σημειώνομεν διὰ τοῦ συμβόλου $=$ *(ἴσον)*, τιθεμένου μεταξὺ αὐτῶν, π. χ. θέτομεν

$$-4=-\frac{12}{3},\ -8=-8 \text{ κλπ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερωνύμους ἀλγεβρικοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν ὁμωνύμους, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμωνύμους τὰς ἀπολύτους των τιμάς, καὶ πρὸ τῶν ἐξαγομένων νὰ θέσωμεν τὰ σημεῖα τῶν δοθέντων ἰσοδυνάμων των. Οὕτω π. χ. ἀντὶ τῶν $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{8}$ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς ἰσοδυνάμους αὐτῶν

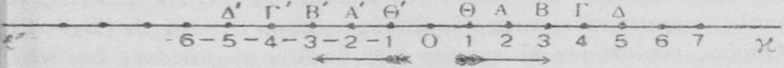
$$\frac{4}{8},\ -\frac{6}{8},\ -\frac{1}{8}.$$

Ἀσκήσεις.

1. Εὕρετε ποσὰ ἐπιδεχόμενα ἀντίθεσιν καὶ ἀριθμοὺς ἀντιθέτους παριστάνοντας ταῦτα.
2. Ποῖοι εἶνε οἱ ἀντίθετοι τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 8, 12, $-\frac{3}{7}$, -8, $-\frac{4}{9}$, $-\frac{15}{4}$, 0,12· $-6{,}15$· $-7{,}45$· 34,58· $-9{,}2$;
3. Γράψατε τρεῖς διαφόρους ὁμοσήμους ἀριθμοὺς καὶ τρεῖς ἑτεροσήμους.
4. Σημειώσατε τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν 3· -13· $+15$· -28· $-3{,}5$· $-13{,}17$· 12,42· -68 $-\frac{5}{8}$· $-2\frac{1}{5}$.
5. Εὕρετε τρεῖς ἀριθμοὺς ἀπολύτως ἴσους ἢ ἰσοδυνάμους πρὸς τὸν 6, τὸν $-2{,}5$, τὸν 6,15, τὸν $-3\frac{1}{4}$.
6. Ἐπί τινος εὐθείας λαμβάνομεν ἀπό τινος σημείου Ο τὰ θετικὰ μεγέθη ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,...καὶ παριστάνομεν αὐτὰ διὰ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4,..., ἂν εἶνε τὰ ΑΒ, ΒΓ,.. ἴσα μὲ τὸ ΟΑ. Πῶς θὰ παρασταθοῦν τὰ ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′,... ἴσα μὲν κατὰ μέγεθος πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀλλ' ἔχοντα φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀντίθετον τῆς ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ Α ;
7. Εὕρετε τὰ μεγέθη ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (τῆς ἀσκήσεως 6) τὰ ὁποῖα θὰ παριστάνουν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}$, 0,80 καθὼς καὶ οἱ ἀντίθετοι τούτων.

Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω εὐθεῖά τις xx'. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον ἔστω τὸ O, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ τὸ 0, καὶ ὡς θετικὴν μὲν φορὰν ἐπ' αὐτῆς τὴν ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ x, ὡς ἀρνητικὴν δὲ τὴν ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ x'. Ἂν λάβωμεν τὸ τμῆμα OΘ ὡς μονάδα μετρήσεως, καὶ ἴσον π. χ. μὲ 1 μ., τότε τὸ μὲν τμῆμα OΘ παρισταναται ὑπὸ τοῦ + 1, ὁ δὲ +1 ὑπὸ τοῦ τμήματος OΘ (Σχ. 2).



(Σχ. 2).

Ἂς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ὁδοιπόρος διατρέχει 2 μ. ἐπὶ τῆς Ox ἀπὸ τὸ O· θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν διὰ τοῦ τμήματος OA, ἔχοντος μῆκος 2 μ. τῆς εὐθείας xx'. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν καὶ ἂν ἄλλος ὁδοιπόρος διατρέξῃ 2 μ. ἀπὸ τοῦ O ἐπὶ τῆς Ox'. Ὁ δρόμος αὐτὸς θὰ παριστάνεναι ὑπὸ τοῦ τμήματος OA'. Οὕτω προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν ἐν γένει τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς διὰ τμημάτων τῆς εὐθείας xx', τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν*** ἢ ἄξονα τῶν ***τετμημένων***, τοῦ μήκους αὐτῶν μετρουμένου ἀπὸ ὡρισμένου σημείου ταύτης. Εἶνε δὲ τὸ μῆκος τμήματος, παριστάνοντος ὡρισμένον ἀριθμόν, ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικὸν διάστημα, π. χ. μετὰ 2 ἔτη (+2 ἔτη), λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ σημείου O τμῆμα OA μήκους 2 μονάδων, καὶ τοῦτο παριστάνει τὸ διάστημα + 2 ἐτῶν. Ὁμοίως χρονικὸν διάστημα 3 παρελθόντων ἐτῶν (—3 ἔτη) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος OB'.

Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ διευθύνωνται ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἷς μὲ ταχύτητα 5 χιλμ. πρὸς τὴν θετικὴν φοράν, ὁ δὲ πρὸς τὴν ἀρνητικὴν μὲ ταχύτητα 4 χμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος OΔ, 5 μονάδων μήκους καὶ κειμένου ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ τοῦ τμήματος OΓ', ἀντιθέτου τοῦ πρώτου καὶ μήκους 4 μονάδων.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς τὸ θερμόμετρον κλπ.

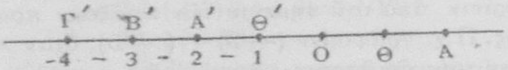
§ 9. Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς κα διὰ σημείων τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ἂν ὁρ σωμεν τὸ σημεῖον Θ ἄκρον τοῦ τμήματος ΟΘ, μήκους $+1$, ὅτ παριστάνει τὴν $+1$, λέγομεν ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ,... παριστα νουν τοὺς ἀριθμοὺς $+1, +2, +3, +4, \ldots$, ἐὰν τὰ Α, Β, Γ,... εἶν τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,... ἐχόντων μήκη ἴσα μὲ 1, 2 3, 4,... μονάδας. Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰ τῆς προηγουμένης, τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x΄, λάβωμεν τὸ τμῆμ ΟΘ΄ μήκους μιᾶς μονάδος, τὸ Θ΄ θὰ παριστάνῃ τὸ -1. Κα ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄,..., τ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $-2, -3, -4, \ldots$ (Σχ. 2 Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἕνα κλα σματικὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν $\frac{1}{2}$ ἢ $-\frac{1}{2}$, λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐ θείας τμῆμα μήκους $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος καὶ πρὸς τὴν φορὰν Οx μὲ ἀπὸ τοῦ Ο διὰ τὸν $\frac{1}{2}$, πρὸς τὴν Οx΄ δέ, διὰ τὸν $-\frac{1}{2}$.

§ 10. Τὸ μέρος Οx τῆς εὐθείας x΄x λέγεται ***θετικὸν τμῆμα τῆ εὐθείας τῶν ἀριθμῶν*** ἢ τοῦ ἄξονος ***τῶν τετμημένων***, καὶ ἐπ αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα τοὺς θετι κοὺς ἀριθμούς. Τὸ Οx΄ λέγεται ***ἀρνητικὸν τμῆμα*** καὶ ἐπ᾽ αὐτο κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ παριστάνοντα τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθ μούς. Ἡ φορὰ ἐκ τοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ x λέγεται ***θετική***, ἐκ Ο πρὸς τὸ x΄ ***ἀρνητική*** καὶ καθεμία σημειώνεται μὲ ἕ βέλος, καθὼς εἰς τὸ (Σχ. 2).

Σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος.

§ 11. Γνωρίζομεν ὅτι, πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικός ἀριθμὸς γίνεται ἐ τῆς 1, ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν ἴσων μερῶν αὐτῆς, διὰ τῆς ἐπαναλήψεω Ὁμοίως, πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἐκ τῆς -1, ἢ ἐξ ἑνὸ τῶν ἴσων μερῶν αὐτῆς, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως. Οὕτω π. χ. ὁ μὲ -3 γίνεται ἐκ τῆς -1, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν (ὡς προσθετέο τρεῖς φοράς, ὁ δὲ $-\frac{3}{5}$ ἐκ τοῦ πέμπτου τῆς -1, ἐὰν τοῦτ ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς.

Ἔστω ἀρνητικός τις ἀριθμὸς π.χ. ὁ -4, ὅστις παριστάνει ἀρ νητικόν τι μέγεθος, π.χ. τὸ ΟΓ′ (Σχ. 3) ἐπὶ τῆς εὐθείας xx′, μετρηθὲν ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς ΟΘ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης τοῦ ΟΓ′ ὑπὸ τοῦ ΟΘ παριστάνομεν διὰ τοῦ $\frac{ΟΓ'}{ΟΘ} = -4$.



(Σχ. 3).

Ἀλλὰ τὸ ΟΓ γίνεται ἐκ τοῦ ΟΘ′, ἢ ἐκ τοῦ ΟΘ ἀφοῦ τραπῇ τοῦτο εἰς ΟΘ′, καθὼς καὶ ὁ ἀριθμὸς —4 ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος—1, ἂν ἐπαναληφθῇ 4 φοράς. Διὰ τοῦτο δεχόμεθα ὅτι, ***«πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς γίνεται ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτῆς καὶ ταύτην ἢ μέρος ταύτης ἐπαναλάβωμεν (ὡς προσθετέον) πολλάκις».***

Οὕτω δεχόμεθα ὅτι ὁ —7 π.χ. γίνεται ἐκ τῆς +1, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς—1 καὶ αὐτὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φοράς· ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν +1, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς — 1 καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρίς.

Ἀσκήσεις.

58. Πῶς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοὶ — 5, — 6, — 10, — 20, — 50 ἐκ τῆς ἀρνητικῆς καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος;

59. Πῶς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοὶ $-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{4}{9}$ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς;

60. Πῶς σχηματίζονται οἱ ἀριθμοὶ 0,4· 0,45· 0,385· 1,25 ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος καὶ πῶς ἐκ ταύτης οἱ ἀντίθετοι τούτων;

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

12. Δεχόμεθα ὅτι καὶ διὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς διατηρεῖται ἡ ἰσχὺς τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων (τοῦ νόμου τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ) κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῶν, καθὼς καὶ ἡ ἰσχὺς τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος.

Πρόσθεσις.

13. ***Πρόσθεσις δοθέντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καλεῖται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλον ἀριθμόν, ἀποτελούμενον ἐκ πασῶν τῶν μονάδων τῶν δοθέντων.***

Οἱ δοθέντος ἀριθμοὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν λέγονται ***προσθετέοι***, τὸ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως ***ἄθροισμα***, τὸ δὲ σημεῖον τῆς πράξεως εἶνετὸ $+$ ***(σὺν ἢ καὶ ἢ πλέον)***, τιθέμενον μεταξὺ τῶν προσθετέων.

§ 14. Ὅταν σημειώνωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, γράφομεν αὐτούς, συνήθως, ἐν παρενθέσει μετὰ τοῦ σημείου αὐτῶν, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῶν πράξεων προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως. Π.χ. γράφομεν $(-3)+(+5)$, ὅταν πρόκειται νὰ προσθέσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς -3 καὶ $+5$.

α΄) Πῶς προσθέτομεν ὁμοσήμους ἀριθμούς.

§ 15. Τὸ ἄθροισμα $7+(+5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+12$. Διότι 7 θετικαὶ μονάδες καὶ 5 θετικαὶ κάμνουν 12 θετικάς.

Ὁμοίως τὸ ἄθροισμα $(-7)+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ -12. Διότι 7 ἀρνητικαὶ μονάδες καὶ 5 ἀρνητικοὶ κάμνουν 12 ἀρνητικάς. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν,

$$-3+(-2)+(-8)=-13.$$

Ἐπίσης $$+5+(+6)+(+10)=+21=21.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἔχοντας τὸ αὐτὸ σημεῖον, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς αὐτῶν, καὶ εἰς τὸ ἄθροισμα θέτομεν τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν προσθετέων».

β΄) Πῶς προσθέτομεν ἑτεροσήμους ἀριθμούς.

§ 16. Τὸ ἄθροισμα $+7+(-5)$ εἶνε ἴσον μὲ $+2$. Διότι, καθεμία τῶν 5 ἀρνητικῶν μονάδων ἐξουδετερώνεται μὲ ἀνὰ μίαν ἀντίστοιχον αὐτῆς θετικὴν ἐκ τῶν 7, καὶ μένουν μόνον δύο θετικαί. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εὑρίσκομεν ὅτι,

$$-7+(+5)=-2 \qquad -10+(+10)=0.$$

$$-\frac{3}{4}+\left(+\frac{1}{4}\right)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$1+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{4}+\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἑτεροσήμους ἀριθμούς, ἀφαιροῦμεν τὴν μικροτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν, καὶ εἰς τὴν διαφορὰν θέτομεν τὸ σημεῖον τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν».

§ 17. Διὰ νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ σημεῖον $+$ καὶ χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ $-$· οὕτω προκύπτουν δύο ἑτερόσημοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὡς ἀνωτέρω, καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων παριστάνει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Κατὰ ταῦτα διὰ τὸ ἄθροισμα

$$-3+(-5)+(+2)+(+3)+(-7)+(+6)$$

ἔχομεν $-3+(-5)+(-7)=-15,$

καὶ $+2+(+3)+(+6)=+11,$

τέλος $+11+(-15)=-4.$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἐργαζόμεθα καὶ ὡς ἑξῆς· προσθέτομεν τοὺς δύο πρώτους· ἀκολούθως τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μὲ τὸν τρίτον, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τοῦ τελευταίου. Π. χ. διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ $3+(-8)+(-6)+(-2)+10$, ἔχομεν $3+(-8)=-5$· ἀκολούθως λέγομεν $-5+(-6)=-11$· τώρα $-11+(-2)=-13$· τέλος $-13+10=-3$. Ἤτοι, τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶνε -3.

18. Αἱ λοιπαὶ γνωσταὶ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ προσθετέοι εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, ἀποδεικνύονται δὲ ὁμοίως.

19. Πρὸς παράστασιν ἀθροίσματός τινος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν πρὸ τῆς εὑρέσεως αὐτοῦ, θέτομεν ἐνίοτε τοὺς προσθετέους μετὰ τῶν σημείων τῆς προσθέσεως αὐτῶν ἐν παρενθέσει ἢ ἐν ἀγκύλαις. Οὕτω τὸ ἄθροισμά τῶν $-3+5+(-8)$ σημειώνεται καὶ οὕτω $[-3+5+(-8)]$.

20. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Διὰ νὰ παραστήσωμεν π. χ. τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -8, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδας μήκους. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον σημεῖον παριστάνει τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)=-5$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει π. χ. τὸ ἄθροισμα $4+(-8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ 4, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα.

1. α΄) $5+(-3)$. β΄) $-9+(-3)$. γ΄) $-25+3$. δ΄) $12+(-83)$. ε΄) $(-1864)+(+9134)$. στ΄) $63{,}5+(-96{,}57)$.

2. Ὁμοίως α΄) $-18{,}1+14{,}6$. β΄) $-0{,}13+(-29{,}1)$. γ΄) $0{,}14+$ $+(-13{,}5)$. δ΄) $-3{,}4+(-3{,}75)$. ε΄) $(-2{,}7)+(-6{,}3)$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα.

13. α') $12+(-18)+24$. β') $-29+(-13)+(-35)$.
γ') $13,7+(+1,118)+9,25-6,35-7,85-3,81$.

14. $-8,3+7,93+35,6-\dfrac{4}{5}-808,3-2,4-42-6,1$.

15. *Ὁμὰς τρίτη.* Κερδίζει τις 234 δραχμάς, ἔπειτα χάνει 216,4 δραχμάς· κερδίζει πάλιν 215,70 δραχμὰς καὶ χάνει ἐκ νέου 11 δραχμάς. Ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τελικῶς καὶ πόσον; Κερδ. 121,30

16. Ἔμπορός τις αὐξάνει τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 128 δραχμάς τὸ δὲ παθητικόν του κατὰ 312,40 δραχμάς. Τίνα μεταβολὴν πα θαίνει τὸ κεφάλαιόν του; ζημιοῦται κατὰ 184,40.

17. Σῶμα θερμανθὲν ἀπὸ 0° ἔλαβε θερμοκρασίαν 17,6°· ἔπειτ ἐψύχθη κατὰ 19,1° καὶ τέλος ἐθερμάνθη κατὰ 3,1°. Ηὐξήθη ἠλαττώθη τελικῶς ἡ ἀρχική του θερμοκρασία καὶ πόσον;

18. Ἔμπορος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖόν του 25000 δρχ. Ὀφείλει μὲν εἰ διαφόρους 17450 δρχ., 13600 δρχ. καὶ 1945 δρχ., τοῦ ὀφείλου δὲ 3400 δρχ., 1450 δρ., 2900 δρχ.· τί ποσὸν θὰ τοῦ μείνῃ, ἄ εἰσπράξῃ καὶ πληρώσῃ τὰ ὀφειλόμενα;

19. Ἔμπορος εἶχε 18000 δρχ. καὶ ἐπλήρωσε 12000 δρχ., εἰσέπραξε 7400 δρχ., ἐπλήρωσε 1480 δρχ. καὶ εἰσέπραξε 3940 δρχ.· τί πο σὸν τοῦ ἀπέμεινε ἢ πόσην ζημίαν ἔχει;

20. Κινητὸν ἀνεχώρησε ἀπὸ ἓν σημεῖον Ο εὐθείας καὶ διήνυσ διάστημα $+58,4$ μ.· ἔπειτα ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτὴν $-19,3$ μ. ἀπ' ἐκεῖ 23,7 μ. καὶ πάλιν ἀπὸ τὴν τελευταίαν θέσιν $-95,8$ μ Ποία εἶνε ἡ ἀπόστασις τῆς τελευταίας θέσεώς του ἀπὸ τὸ Ο;

Ἀφαίρεσις.

§ 21. ***Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλου α καλεῖτα ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς γ, ὅστι προστιθέμενος εἰς τὸν β δίδει ἄθροισμα τὸν α».***

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ***μειωτέος*** καὶ ***ἀφαιρε τέος***, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς γ ***διαφορά***, τὸ δὲ σημεῖον τῆς ἀφαι ρέσεως εἶνε τὸ — ***(πλὴν ἢ μεῖον)***, τιθέμενον μεταξὺ αὐτῶν.

§ 22. Διὰ νὰ εὕρωμεν π.χ. τὴν διαφορὰν $7-(-5)$, δυνάμεθα, ἀντ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 7 θετικὰς μονάδας 5 ἀρνητικάς, ν προσθέσωμεν εἰς τὰς 7 θετικὰς 5 θετικάς. Ἤτοι θὰ δείξωμε ὅτι ἡ διαφορὰ $7-(-5)=7+(+5)$.

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ γ τὴν ζητουμένην δια φοράν, θὰ ἔχωμεν ὅτι, $\gamma+(-5)=7$. Ἂν εἰς τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν $(+5)$, προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι· ἤτοι

$$\gamma+(-5)+(+5)=7+(+5).$$

Ἀλλὰ τὸ $(-5)+(+5)=0$. Ἄρα ἔχομεν $\gamma=7+(+5)$.

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι.

«διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπό τινος ἀριθμοῦ ἄλλον, προσθέτομεν εἰς τὸν μειωτέον τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι, $-3-(-5)=-3+(+5)=+2$. $12-(+6)=12+(-6)=+6$.

$$-\frac{4}{9}-\left(-\frac{2}{9}\right)=-\frac{4}{9}+\left(+\frac{2}{9}\right)=-\frac{2}{9}.$$

Παρατηρητέον ὅτι, ὅταν ἀριθμοὶ χωρίζωνται μεταξύ των ὑπὸ τοῦ $+$ ἢ $-$, τὸ σημεῖον τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς δηλωτικὸν τῆς προσθέσεως (τὸ $+$) ἢ τῆς ἀφαιρέσεως (τὸ $-$), ἀλλὰ καὶ ὡς δηλωτικὸν τοῦ εἴδους τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου προηγεῖται. Εἰς τὴν δευτέραν αὐτὴν περίπτωσιν οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ θὰ ἐννοοῦνται συνδεόμενοι μὲ τὸ $+$. Π. χ. εἶνε

$12-7=12-(+7)=12+(-7)$, $-12+8=(-12)+(+8)$,
$-20-5+10=-20-(+5)+10=-20+(-5)+(+10)$.

Αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως ἰσχύουν καὶ ὅταν πρόκειται περὶ ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν, ἀποδεικνύονται δ' ὁμοίως.

Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $-4-(+5)=-4+(-5)=-9$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4 καὶ προχωροῦμεν ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας. Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν π.χ. $-7-(-4)=-7+(+4)$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστάνοντος τὸν -7 κατὰ τέσσαρας μονάδας πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ.

Ἐκτέλεσις οἱασδήποτε ἀφαιρέσεως.

Εἶνε εὔκολον τώρα νὰ ἴδωμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐκτελέσωμεν οἱανδήποτε ἀφαίρεσιν μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν (§ 1). Ἤτοι, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶνε δυνατὴ καὶ ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶνε μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου. Πράγματι, ἔχομεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα π. χ. ὅτι,

$3-5=3-(+5)=3+(-5)=-2\cdot\quad 3-7=3+(-7)=-4.$
$10-25=10+(-25)=-15\cdot\quad 1-24=1-(+24)=1+(-24)=$
$=-23\cdot\ 0-7=0+(-7)=-7\cdot 0-12=-12\cdot 0-3,17=-3,17$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραὶ

21. α′) $8-(-4)$. β′) $-18-(+19)$. γ′) $-14-(-7)$.
22. α′) $0,9-(-0,13)$. β′) $2,25-(-1,65)$.
23. α′) $2\frac{5}{6}-\left(-3\frac{1}{3}\right)$. β′) $9\frac{1}{7}-\left(-7\frac{1}{3}\right)$.

Ὁμὰς δευτέρα. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

24. α′) $120+19-(-18)$. β′) $-17-(-4)+(+8)$.
25. $-5\frac{1}{2}+\left(-6\frac{1}{4}\right)-\left(-\frac{1}{5}\right)-4\frac{3}{4}$.
26. $-20+[29-10]-[95+(-14)]-[28-(-9)]$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἑξῆς πράξεων

27. α′) $2-7\cdot$ β′) $8-10\cdot$ γ′) $1,5-2,2\cdot$ δ′) $15-230\cdot$ ε′) $1,25-9,65$

28. *Ὁμὰς τετάρτη*. Αὐξάνει τις τὸ ἐνεργητικόν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικόν του κατὰ 64,20 δρ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του;

29. Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 84,3 δρχ., καὶ αὐξάνει τὸ παθητικόν του κατὰ 384,70 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του;

30. Ἀναχωρεῖ τις ἔκ τινος ὡρισμένου σημείου Α. Βαδίζει ἐπ᾽ εὐθείας ὁδοῦ 238 βήματα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β. Πόσα βήματα πρέπει νὰ βαδίσῃ ἐκ τοῦ Β πρὸς τ᾽ ἀριστερά διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον τοῦ Α 4846 βήματα;

31. Χάνει τις 16,3 δρχ.· πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ νὰ ἔχῃ 58,65 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὅσων εἶχεν ἀρχικῶς;

Πολλαπλασιασμός.

§ 26. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον β λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζεται ἐκ τοῦ α τρίτος ἀριθμός, ὅπως ὁ β ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.***

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται ***παράγοντες*** (***πολλαπλασιαστέος*** καὶ ***πολλαπλασιαστής***), ὁ προκύπτων ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ***γινόμενον***, τὸ δὲ σημεῖον τῆς πράξεως εἶνε τό. ἢ × (ἐπὶ) τιθέμενον μεταξὺ τῶν παραγόντων.

α΄) ***Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον θετικόν.***
Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν ἔχομεν ὅτι, π.χ.

$$(+8).(+3)=(+8)+(+8)+(+8)=+24=24.$$

Ὁμοίως $(-8).(+3)=(-8)+(-8)+(-8)=-24.$

$(-9).\frac{3}{4}$ σημαίνει, νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ -9, καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἤτοι ἔχομεν

$$(-9).\frac{3}{4}=\frac{(-9)}{4}.\ 3=\frac{(-27)}{4}=-6\frac{3}{4}.$$

Ἑπομένως, «***τὸ γινόμενον ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον θετικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, σημεῖον δὲ τὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου***».

β΄) ***Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν.***
Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον $(+8).(-3)$.

Τὸ -3 γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της -1 καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν τρίς. Ἄρα κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(+8).(-3)$, θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ $+8$, δηλαδὴ τὸν -8, καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρίς, ἤτοι θὰ εἶνε

$$(+8).(-3)=(-8).\ 3=(-8)+(-8)+(-8)=-24.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔχομεν ὅτι, $(-8).(-3)=(+8).3=24.$

Ἄρα, «***τὸ γινόμενον ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, σημεῖον δὲ ἀντίθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου***».

Π. χ. εἶνε $(+9).(-5)=-45$, $(-6).(-5)=30$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα.
«***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμάς των, καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ παράγοντες εἶνε ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν εἶνε ἑτερόσημοι***».

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν καθὼς καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν, δεικνύεται δ᾽ εὐκόλως ὅτι, ἂν εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ἐξ αὐτῶν εἶνε περιττὸς ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε ἀρνητικόν· ἂν δὲ τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε ἄρτιος ἀριθμός, τὸ γινόμενον θὰ εἶνε θετικόν.

Π.χ. $(-3).(+5).(-2).(-1).(-5)=150$.

$(-3).(-2).(-1).(+5)=-30$.

§ 31. Αἱ λοιπαὶ γνωσταὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως.

Πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ ± 1 ἢ ἐπὶ 0.

§ 32. Δεχόμενοι ὅτι, ἡ ἰδιότης τῆς ἐναλλαγῆς τῶν παραγόντων ἰσχύει καὶ ὅταν εἷς τούτων εἶνε ± 1 ἢ 0, παρατηροῦμεν ὅτι· πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ $+1$ μὲν σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐπὶ -1 δέ, τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτω θὰ εἶνε π.χ. $(-4).1=1.(-4)=(-1).(+4)=-4$· $(+5).1=1.(+5)=5$·
$(-5).(-1)=(-1).(-5)=+5$· $(+7).(-1)=(-1).(+7)=-7$.
Πολλαπλασιασμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ 0 σημαίνει νὰ θέσωμεν τὸ γινόμενον αὐτὸ ἴσον μὲ 0. Π.χ. εἶνε $(+3).0=0$.
Διότι $(+3).\ 0=0.\ (+3)=0+0+0=0$.
Ἐπίσης π.χ., $(-7).\ 0=0.\ (-7)=0.\ 7=0$, ἐπειδὴ ὁ ἀντίθετος τοῦ 0 εἶνε πάλιν 0.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα.

32. α΄) $(-5).(+8)$. β΄) $(+18).(-4)$. γ΄) $(-7).(+15)$. δ΄) $(-9).(-$

33. α΄) $(-8{,}4).(-6{,}5)$. β΄) $(-9{,}8).\ 8{,}5.\ (-4{,}3).\ (-2{,}3)$.

34. *Ὁμὰς δευτέρα.* Ὁμοίως α΄) $(-3{,}9).(-7{,}6)$. β΄) $(-9{,}46).\ 3$
γ΄) $(-9).\ (-7).\ (-3)$· δ΄) $\left(+4\frac{1}{2}\right).\left(-3\frac{1}{6}\right).\ (-6{,}8)$.

35. Ὁμοίως τὰ α΄) $(-16).\ 14.\left(-\frac{2}{3}\right).\left(-\frac{3}{8}\right)$.

36. α΄) $(-3{,}1).\ (+6).\ (+8).\ (-7)$. β΄) $(+7).\ (-4).\ (+8).\ (+$
γ΄) $(0{,}6).\ [(+9{,}74)-09.\ (+7{,}5)].\ 0{,}3$.

37. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα· α΄) $(-3).\ (-4{,}1).\ (-2)+8.\ (-2{,}4).(-$
β΄) $(-5{,}1).\ (-3{,}2).\ (-1)-12.(-3{,}2).\ (-4).\ (-7)-20$.

38. Εὕρετε α΄) τὸ $\frac{5}{8}.\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{1}{4}\right).\ (2+5-8)$.
β΄) $(-32).\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0{,}4\right)-\frac{4}{5}.\Big[-0{,}01+0{,}01.\ (-5{,}4$

39. Ὁμοίως τὸ $0{,}53.(-1{,}2).\ (-3-4)+19.\ (-0{,}45)$.

Διαίρεσις.

Διαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β λέγεται ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμὸς γ, ὅστις, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β, δίδει γινόμενον τὸν α.

Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ α λέγεται **διαιρετέος**, ὁ β **διαιρέτης** καὶ ὁ ζητούμενος γ **πηλίκον**, τὸ δὲ σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶνε τὸ : ***(διὰ ἢ πρός)*** καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν α καὶ β.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον π.χ. $(+8):(+2)$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον $+$, διότι τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου θετικοῦ ἐπὶ τὸν $+2$ θὰ εἶνε θετικόν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2, πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον 8, θὰ εἶνε ἴση μὲ $8:2=4$, ἤτοι ἔχομεν $(+8):(+2)=+4$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι, $(+8):(-2)=-4$.

Ἐπίσης $(-8):(-2)=+4$· $(-5):2=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$.

Ἄρα, ***«τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δοθέντων ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, καὶ σημεῖον θετικὸν μέν, ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶνε ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δέ, ἂν ἑτερόσημοι».***

Ἡ διαίρεσις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 0 εἶνε **ἀδύνατος**, διότι, ἂν π. χ. ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $-6:0$, ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0, δίδει γινόμενον τὸν -6. Τοῦτο ὅμως εἶνε ἀδύνατον· διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Ἀλλ' οὐδὲ νὰ δημιουργήσωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν εἶνε δυνατόν, ὥστε νὰ καταστήσωμεν διαίρεσιν δια τοῦ 0 δυνατήν.

Διότι, ἂν π. χ. ὑπῆρχε νέος τοιοῦτος ἀριθμός, ἔστω ὁ α, ὅστις θὰ εἶνε πηλίκον τοῦ $-6:0$, θὰ ἔχωμεν $-6=0.\alpha$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ἴσους τούτους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 5, προκύπτουν ἴσοι· ἤτοι $-6.5=0.\alpha.5$. Ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων, εὑρίσκομεν $-6.5=0.5.\alpha=0\,\alpha$ (ἐπειδὴ εἶνε $0.5=0$). Ἀλλὰ τὸ μὲν $-6.5=-30$, τὸ δὲ $0.\alpha=-6$ (ἐξ ὑποθέσεως)· ἄρα θὰ ἔχωμεν $-30=-6$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον.

§ 36. Ἡ διαίρεσις τοῦ 0 διά τινος ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ μηδενὸ ἰσοῦται μὲ 0. Οὕτω π. χ. 0 : (—7)=0. Διότι εἶνε 0. (—7)=0

§ 37. Αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως, αἱ γνωσταὶ ἐκ τῆς Ἀριθμητική ἰσχύουν καὶ δι' ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα.

40. α′) (+2):(—7). β′)(—45):(+9). γ′)(—49):49. δ′) (—1543):(—36)
41. α′) (+0,95):(—0,5). β′) (—349):1,8. γ′) —143,5:—32,1.

Ὁμὰς δευτέρα. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα.

42. α′) $3\frac{2}{3} : \left(-1\frac{4}{9}\right) : 8$. β′) (—9,6) : 0,7.6$\frac{1}{2}$.
43. Ὁμοίως τὰ α′) (— 34) : [— 9 — 8]. β′) — 18 : 9—(—4) : 2
44. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος x, ὥστε νὰ εἶνε α′) (—40). x=160. β′) (—6). x=24, γ′) 12. x=—48. δ′) 31,4. x=—18,84.

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραίους.

§ 38. Τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται ***δύναμις*** αὐτοῦ. Π. χ. τὸ (—5). (—5) καλεῖται ***δευτέρα δύναμις*** ἢ ***τετράγωνον*** τοῦ (—5) καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ $(-5)^2$· τ (—7). (—7). (—7)=$(-7)^3$ λέγεται ***τρίτη*** δύναμις ἢ ***κύβο*** τοῦ —7, κλπ.

Ὁ μὲν ἀριθμὸς τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται ***ἐκθέτης*** τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὴ δύναμιν λέγεται ***βάσις*** τῆς δυνάμεως. Οὕτω τῆς δυνάμεως $(-7)^2=(-7).(-7)$ τὸ—7 καλεῖται βάσις τὸ δὲ 2 ἐκθέτης αὐτῆς

45. ***Ἀσκήσεις.*** Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων α′) $(-6)^3$· β′) $(-9)^2$ γ′) $(+8)^5$· δ′) $(-3)^3$· ε′) $(-7)^5$· ϛ′) $(-1)^3$

46. Δείξατε διὰ παραδειγμάτων ὅτι, πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ θετικόν, εἶνε ἀριθμὸς θετικός, περιττὸν δ' ἐκθέτην ἔχουσα εἶνε ἀρνητικός.

Περὶ τῶν συμβόλων α^1 καὶ α^0.

§ 39. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ α ἔχομεν ὅτι,

$\alpha^5=\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha,\quad \alpha^4=\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha,$

$\alpha^3=\alpha.\ \alpha.\ \alpha,\quad \alpha^2=\alpha.\ \alpha.$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὁρίζε

τὴν δύναμιν ταύτην, διαιρεῖται δι᾽ ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων αὐτοῦ. Ἂν δεχθῶμεν, ὅτι τοῦτο ἰσχύει καὶ δι᾽ ἐκθέτας (ἀκεραίους) μικροτέρους τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\alpha^{2-1}=(\alpha.\ \alpha):\alpha$.
Ἀλλὰ τὸ α^{2-1} ἰσοῦται μὲ α^1, τὸ δὲ $(\alpha.\ \alpha):\alpha=\alpha$.

Ἄρα εἶνε $\alpha^1=\alpha$. Ἐκ τούτου ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τοῦ α^1.

«Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν».

Κατ᾽ ἀναλογίαν πρὸς τ᾽ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν ὅτι,

$\alpha^{1-1}=\alpha:\alpha=1$. Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{1-1}=\alpha^0$, ἄρα εἶνε $\alpha^0=1$, ὅταν τὸ α εἶνε διάφορον τοῦ μηδενός. Ἤτοι,

«τὸ α⁰, ὅπου τὸ α εἶνε ἀριθμός τις ἀλγεβρικὸς διάφορος τοῦ μηδενός, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα».

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

$$(-3)^0=1,\ 47^0=1,\ (-10)^0=1,\ \left(-\frac{3}{5}\right)^0=1,\ (-2)^1=-2.$$

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

40. Ἡ θεμελιώδης ἰδιότης καθ᾽ ἥν,

«τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις αὐτοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων» ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βάσις εἶνε ἀλγεβρικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ ἐκθέτης θετικὸς καὶ ἀκέραιος. Πράγματι, τὸ γινόμενον $\alpha^\mu.\ \alpha^\nu$, ὅπου μ καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ α ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, ἰσοῦται μὲ $\alpha^{\mu+\nu}$. Διότι ἔχομεν ὅτι

$$\alpha^\mu=\overbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ .\ \alpha}^{\mu\ \text{φορὰς}},\qquad \alpha^\nu=\overbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ .\ \alpha}^{\nu\ \text{φορὰς}}.$$

$$\text{ἑπομένως εἶνε } \alpha^\mu.\ \alpha^\nu=\overbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ .\ \alpha.}^{\mu\ \text{φορὰς}}\ \overbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ .\ \alpha}^{\nu\ \text{φορὰς}}$$
$$=\underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \ldots\ .\ \alpha}_{(\mu+\nu)\ \text{φορὰς}}=\alpha^{\mu+\nu}.$$

41. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ γινόμενον

$$\alpha^\mu.\ \alpha^\nu\ \alpha^\rho\ \ldots\ \alpha^\lambda=\alpha^{\mu+\nu+\rho+\cdots+\lambda},$$

ὅπου τὸ α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, τὰ δὲ $\mu, \nu, \rho, \ldots \lambda$ ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Ἤτοι, ***«τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων ἑνὸς ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων».***

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu.\nu}$, ὅπου α μὲν εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, μ καὶ ν δὲ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Ἤτοι, ***«ἂν δύναμίς τις ἀριθμοῦ ἀλγεβρικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν».***

Ἀσκήσεις. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων

47. α') $(-2)^2.(-2)^3$. β') $(-3)^4.(-3)^2$. γ') $(-5)^2.(-5)^3$. δ') $(1,5)^3.(1,5)$

48. α') $\left(-\frac{1}{2}\right)^2.\left(-\frac{1}{2}\right)^3.\left(-\frac{1}{3}\right)^4$. β') $(-5,1)^2.(-5,1)^3.(-5,1)$

γ') $0,5^5.\ 0,5^{10}.\ 0,5^3$.

§ 42. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ $[(-5)^3]^2$. Τοῦτο ἰσοῦται μὲ

$$(-5)^3(-5)^3=(-5)^{3+3}=(-5)^{3.2}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha^\mu)^\nu=\alpha^{\mu.\nu}$, ὅπου τὸ μὲν α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, τὰ δὲ μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοί. Ἤτοι ***«ἂν δύναμίς τις ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν».***

Ἀσκήσεις. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα

49. α') $\left((-2)^2\right)^3$. β') $\left((-3)^2\right)^3$. γ') $\left((-1)^2\right)^3$. δ') $\left((-1)^3\right.$

50. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα α') $\left[(0,2)^2\right]^4$. β') $\left[(0,4)^2\right]^3$. γ') $\left[(-1,5)^2\right]$

δ') $\left[(-0,5)^2\right]^3$. ε') $\left[(-3)^4\right]^2$ στ') $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]^3$. ζ') $\left[\left[(-5)^2\right]^3\right]$

§ 43. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι,

«διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν καθένα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν ταύτην, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα».

Πράγματι ἔχομεν ὅτι (ἂν τὸ ν εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, τὰ δὲ α, β, γ, ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί),

$$(\alpha\beta\gamma)^\nu=\underbrace{(\alpha\beta\gamma).\ (\alpha\beta\gamma)\ldots\ldots(\alpha\beta\gamma)}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

$$=\underbrace{\alpha.\ \alpha.\ \alpha\ldots\ldots\alpha}_{\nu\ \text{φορὰς}}\ .\ \underbrace{\beta.\ \beta.\ \beta\ldots\ldots\beta}_{\nu\ \text{φορὰς}}\ .\ \underbrace{\gamma.\ \gamma.\ \gamma\ldots\ldots\gamma}_{\nu\ \text{φορὰς}}$$

$$=\alpha^\nu.\beta^\nu.\gamma^\nu$$

§ 44. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι,

«κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ

ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων του ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην». Οὕτω ἔχομεν ὅτι, $\left(\frac{α}{β}\right)^μ=\frac{α^μ}{β^μ}$.

$$\text{Διότι τὸ } \left(\frac{α}{β}\right)^μ=\overbrace{\frac{α}{β}\cdot\frac{α}{β}\cdots\frac{α}{β}}^{μ \text{ φορὰς}}=\frac{\overbrace{α.\ α.\ α\ldots α}^{μ \text{ φορὰς}}}{β.\ β.\ β\ldots β}=\frac{α^μ}{β^μ},$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, τὰ δὲ α καὶ β ἀριθμοὺς ἀλγεβρικούς.

Ἀσκήσεις. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων.

. α') $[(-2).(-3)]^2$. β') $[(-1)(-2)]^4$. γ') $[(-1)\ (-2).\ 3]^2$.

. α') $[2.3.(-4).(-2)]^2$. β') $[(-2).\ (-3).4.5.0{,}5]^3$.

. α') $\left(\frac{2}{5}\right)^3$. β') $\left(-\frac{4}{9}\right)^2$. γ') $\left(-\frac{5}{9}\right)^2$. δ') $\left[\frac{2}{3}.\frac{4}{9}.\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2$.

ε') $\left[(-2).\frac{4}{5}.\frac{2}{9}.(-0{,}1)\right]^2$. στ') $\left[\left(-\frac{2}{5}\right).\frac{4}{9}.\left(-\frac{3}{7}\right).0{,}4\right]^3$.

. Ἡ ἰδιότης καθ' ἥν,

«τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶνε δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου» ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βάσις εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμός, οἱ ἐκθέται ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω τὸ πηλίκον

$$α^μ : α^ν=\frac{α^μ}{α^ν}=\frac{\overbrace{α.\ α.α\ldots.α}^{μ \text{ φορὰς}}}{\underbrace{α.\ α\ldots\ldots α}_{ν \text{ φορὰς}}}=\overbrace{α.\ α.α\ldots.α.α.α}^{μ-ν \text{φορὰς}}=α^{μ-ν},$$

ὅπου α παριστάνει ἀλγεβρικόν τινα ἀριθμὸν καὶ τὰ μ, ν θετικοὺς καὶ ἀκεραίους, ὁ δὲ μ εἶνε μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ν.

. ***Παρατήρησις.*** Ἡ εἰς τὴν § 39 σημασία τῶν $α^1$ καὶ $α^0$ προκύπτει καὶ ἂν δεχθῶμεν, ὅτι ἰσχύει ἡ εἰς τὴν § 40 θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων, θεωρουμένων τῶν $α^1$ καὶ $α^0$ ὡς δυνάμεων τοῦ α.

Πράγματι, ἔχομεν τότε $α^0.\ α^μ=α^{0+μ}=α^μ$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα $α^0.α^μ$ καὶ $α^μ$ διὰ τοῦ $α^μ$, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $α^0=1$.

Ὁμοίως ἔχομεν $α^1.\ α^μ=α^{1+μ}=α.\ α^μ$, καὶ διαιροῦντες τα ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ $α^μ$ ἔχομεν $α^1=α$.

Ἀσκήσεις.

54. Εὕρετε τὰ α′) $2^5:2^3$, β′) $(-2)^5:(-2)^3$, γ′) $(-7)^9:(-7)^5$ δ′) $(-3)^5:(-3$

55. α′) $\left(\frac{3}{7}\right)^5 : \left(-\frac{3}{7}\right)^3$. β′) $(-5{,}3)^6 : (-5{,}3)^4$.

56. $[(-1).(-3).5,7]^{10} : [(-1).-(-3).5,7]^5$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα.

57. α′) $x^{2\nu}.x.(-x)^{2\nu}$, β′) $x^{2\nu-1}.x.(-x)$, γ′) $x^{2\nu}.(-x$

δ′) $(4\alpha\beta^2)^3$, ε′) $(-3xy)^3$, στ′) $(5x^2)^2$, ζ′) $(-xy\omega)^4$.

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικούς.

§ 47. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τί παριστάνει ἡ δύναμις α ὅπου τὸ α εἶνε ἀλγεβρικός τις ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0. Ἂ δεχθῶμεν, ὅτι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ γινομένου δύο δυ νάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ εἷς τῶν ἐκθετ εἶνε ἀρνητικὸς ἀριθμός, π.χ. ὁ -1, θὰ ἔχωμεν $\alpha^1.\alpha^{-1}=\alpha^{1-1}$ $=\alpha^0=1$. Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^1.\alpha^{-1}=1$ διὰ τοῦ εὑρίσκομεν $\alpha^{-1}=\frac{1}{\alpha^1}$.

Καθ᾿ ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $\alpha^{-2}=\frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{-3}=\frac{1}{\alpha^3}$, καὶ γενικ $\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}$, ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀρ μόν, τὸ δὲ α ἀλγεβρικὸν (διάφορον τοῦ 0). Ἐκ τούτων ἕπετα ἑξῆς ὁρισμὸς τῆς σημασίας δυνάμεως μὲ ἀκέραιον ἀρνητικ ἐκθέτην.

«Δύναμίς τις ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ 0) μὲ ἐκθέτην θέντα ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἀριθμὸν παριστάνει κλάσμα, ἔχ ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα, παρονομαστὴν δὲ τὴν δύναμ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ θέντος».

Κατὰ ταῦτα εἶνε π.χ. $5^{-1}=\frac{1}{5^1}=\frac{1}{5}$, $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}$.

§ 48. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς καὶ ἀκεραί ἀριθμοὺς ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως, καὶ ὅταν ἐκθέται εἶνε οἱοιδήποτε ἀκέραιοι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί. Οὕτω π ἔχομεν $\alpha^3.\alpha^{-5}=\alpha^3.\frac{1}{\alpha^5}=\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^{-2}=\alpha^{3-5}$.

$$\alpha^{-3}.\ \alpha^{-5}=\frac{1}{\alpha^3}\cdot\frac{1}{\alpha^5}=\frac{1}{\alpha^8}=\alpha^{-8}=\alpha^{-3-5}.$$

$$\alpha^{-\mu}:\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}:\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\frac{1}{\alpha^{\mu}}.\ \alpha^{\nu}=\alpha^{\nu}:\alpha^{\mu}=\alpha^{\nu-\mu}=\alpha^{-\mu-(-\nu)}$$

$$(\alpha.\beta)^{-\nu}=\frac{1}{(\alpha.\beta)^{\nu}}=\frac{1}{\alpha^{\nu}.\ \beta^{\nu}}=\alpha^{-\nu}.\ \beta^{-\nu}.$$

Παρατήρησις. Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀρνητικοὺς ἀκεραίους, ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἰσχύει πάντοτε, ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξαιρέσεως (δηλαδὴ καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου εἶνε μικρότερος ἀπὸ τὸν τοῦ διαιρέτου). Οὕτω π. χ. ἔχομεν

$$\alpha^5:\alpha^7=\frac{\alpha^5}{\alpha^7}=\frac{1}{\alpha^2}=\alpha^{-2}=\alpha^{5-7}.$$

Ὁμοίως $\alpha^{-2}:\alpha^3=\frac{1}{\alpha^2}:\alpha^3=\frac{1}{\alpha^2.\alpha^3}=\frac{1}{\alpha^5}=\alpha^{-5}=\alpha^{-2-3}.$

Ἀσκήσεις.

3. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων.
5^{-3}, $(-3)^{-4}$, 5^{-24}, 7^{-2}, 20^{-2}, $0{,}75^{-2}$, $(-0{,}125)^{-3}$.

9. Ὁμοίως τῶν $(-1)^{-3}$, $(-0{,}01)^{-4}$, $\frac{1}{2^{-3}}$, $\frac{1}{5^{-2}}$, $\frac{1}{(-7)^{-4}}$.

0. Θέσατε ὅπου $x=1, -2, -3$, εἰς τὸ $5^{x-1}+7^x+3^{x-1}$ καὶ εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα.

1, Εὕρετε μὲ τί ἰσοῦνται τὰ $\alpha^{-3}.\alpha^{-4}.\alpha^0.\alpha^5$, $2^3.2^0.2^4.2^{-8}$, $7^{-8}:7^{-9}$, $(2\alpha\beta)^{-3}$, $x^{\nu}.\ x^{2\nu}:x^{-\nu}$, $5^2:5^{-4}$, $(3\alpha^{-3}\beta\gamma^{-4})^{-2}$.

2. Εὕρετε τὸ $4.6^3-5.(-6)^3+7(-6)^3+9.(-6)^3+13{,}6^3$.

3. Ὁμοίως τὸ $0{,}75.\alpha^5-0{,}5\alpha^4-0{,}9\alpha^5+0{,}7\alpha^4+0{,}8\alpha^5-1{,}2\alpha^4$, ὅταν $\alpha=5$.

4. Εὕρετε τὰ α΄) 82.4^{-3}. β΄) 81.3^{-5}. γ΄) $\frac{2^{-5}}{4^{-3}}$, δ΄) $\frac{3^{-5}}{9^{-2}}$, ε΄) $\frac{10^{-3}}{10^{-2}}$.

5. α΄) $\frac{(-6)^{-2}}{(-9)^{-1}}$, β΄) $\frac{(-10)^{-4}}{(-15)^{-2}}$, γ΄) $\frac{5}{5^{-2}}+\frac{10}{10^{-1}}+\frac{10^{-3}}{10^{-3}}-100^2$.

Περὶ ἀνισοτήτων.

0. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι, ἂν δύο ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι, π. χ. οἱ 5 καὶ 8, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των αὐτὴν διὰ

τῆς $5<8$ ἢ $8>5$, ἥτις καλεῖται ***ἀνισότης***. Γνωρίζομεν ἐ
ὅτι, ἂν εἰς ἀνίσους (θετικοὺς) ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσο
ἀνισότης διατηρεῖται. Δεχόμενοι, ὅτι ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύε
ὅταν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἶνε ἀλγεβρικός, ἔχομεν, προ
τοντες τὸν -5 π. χ. εἰς τους δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς 5 καὶ 8
$5+(-5)<8+(-5)$· ἢ $0<3$. Ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀνίσους ἀ
μοὺς 5 καὶ 8 προσθέσωμεν τὸν -8, θὰ ἔχωμεν

$$5+(-8)<8+(-8) \text{ ἢ } -3<0.$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ἐν
ὅτι, «***τὸ 0 εἶνε μικρότερον μὲν παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ,***
γαλύτερον διὰ παντὸς ἀρνητικοῦ».

§ 51. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $5>0$, Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνί
5 καὶ 0 προσθέσωμεν τὸν -7 π. χ., εὑρίσκομεν

$$5+(-7)>0+(-7) \text{ ἢ } -2>-7.$$

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ἕπεται ὅτι,
«***ἐκ δυο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶνε ὁ ἀπο***
τως μικρότερος».

§ 52. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $8>0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσ
8 καὶ 0 προσθέσωμεν π. χ. τὸν -3, εὑρίσκομεν $8+(-3)>0+(-$
ἢ $5>-3$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων παραδειγμάτων ἕπεται
«***πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶνε μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικο***

Ὁρισμὸς ἀνισότητος ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

§ 53. Λέγομεν ὅτι, «***δύο ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶνε ἄνι***
καὶ ὁ α μεγαλύτερος μὲν τοῦ β, ἂν ἡ διαφορὰ α—β εἶνε
τική, μικρότερος δ' αὐτοῦ, ἂν εἶνε ἀρνητική».

Ἂν ὁ α εἶνε μεγαλύτερος τοῦ β, σημειώνομεν τὴν σχέσιν τ
την μεταξὺ τῶν α καὶ β συμβολικῶς διὰ τοῦ $\alpha>\beta$ ἢ $\beta<\alpha$, ἥ
καλεῖται ***ἀνισότης*** μεταξὺ τῶν α καὶ β καὶ τότε εἶνε $\alpha-\beta>0$.

Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται ***μέλη*** τῆς θεωρουμένης ἀνισότητ

Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων.

§ 54. Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, ὅτε θὰ ἔχωμ
$\alpha-\beta>0$ καὶ $\gamma-\delta>0$.

Ἀφοῦ εἶνε $\alpha-\beta>0$, καὶ $\gamma-\delta>0$ θὰ εἶνε καὶ τὸ
$(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)>0$· ἤτοι $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)>0$. Ἑπομένως εἶ
καὶ $\alpha+\gamma>\beta+\delta$.

Ἄρα, ***«ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται».***

Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὰς $-5>-12$ καὶ $-3>-10$, προσθέτοντες τοὺς μεγαλυτέρους καὶ τοὺς μικροτέρους χωριστά, εὑρίσκομεν $-5-3>-12-10$ ἢ $-8>-22$.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\alpha>\beta$, ὅτε θὰ εἶνε $\alpha-\beta>0$. Ἐπειδὴ εἶνε $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)>0$, ἕπεται ὅτι $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$. Ἤτοι,

«ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται».

Ἔστω ὅτι ἔχομεν $\alpha>\beta$, ὅτε $\alpha-\beta=$θετικὸς ἀριθμός. Ἂν λ εἶνε ἀριθμὸς θετικὸς καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο ταῦτα ἴσα ἐπὶ λ, θὰ ἔχωμεν $(\alpha-\beta).\lambda=$θετ.$\times\lambda.=$θετ. ἀριθμός· ἤτοι, τὸ $\alpha.\lambda-\beta.\lambda=$θετικός. Ἑπομένως εἶνε $\alpha.\lambda>\beta.\lambda$.

Ἔστω τώρα ὅτι εἶνε $\alpha-\beta=$θετ. ἀριθμὸς καὶ τὸ λ ἀρνητικός. Ἂν τὰ ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν λ, θὰ εὕρωμεν $(\alpha-\beta).\lambda=$ θετ. ἀριθμὸς $\times$ ἀρνητικὸν $=$ ἀρνητικός. Ἑπομένως εἶνε $\alpha.\lambda-\beta.\lambda=$ἀρνητικός· ἤτοι $\alpha.\lambda<\beta.\lambda$.

Ἄρα, ***«ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ θετικὸν μὲν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται, ἐπὶ ἀρνητικὸν δὲ ἀντιστρέφεται».***

Οὕτω ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5>-8$ ἔχομεν $-5.4>-8.4$, ἤτοι $-20>-32$, ἐνῷ ἐκ τῆς $6<10$ εὑρίσκομεν διὰ (πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ -2) τὴν $6.(-2)>10.(-2)$ ἢ $-12>-20$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔχομεν ὅτι, ***«ἂν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ -1, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται».*** Π. χ. ἐκ τῆς $3<5$ ἔχομεν $3.(-1)>5.(-1)$ ἢ $-3>-5$.

Ἐὰν εἶνε $\alpha>\beta$ θὰ εἶνε καὶ $\alpha^{\mu}>\beta^{\mu}$, ἂν οἱ α, β εἶνε θετικοὶ ἀριθμοὶ τὸ δὲ μ θετικὸς καὶ ἀκέραιος.

Διὰ νὰ δείξωμεν τοῦτο παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι ἂν ἔχωμεν $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$, εἶνε δὲ οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί, θὰ εἶνε καὶ $\alpha.\gamma>\beta.\delta$. Διότι ἀφοῦ εἶνε $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$ θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\alpha-\beta=\text{θετ. ἀριθ.}, \text{ ἢ } \alpha=\beta+\text{θετικόν}.$$
$$\gamma-\delta=\text{θετ. ἀριθ.}, \text{ ἢ } \gamma=\delta+\text{θετικόν}.$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς τελευταίας ἰσότητος κατὰ μέλη εὑρίσκομεν,

$$\alpha.\gamma=\beta\delta+\beta\,\text{θετ.}+\delta.\text{θετ.}+\text{θετ.}\times\text{θετ.}$$

Δηλαδὴ $\alpha\gamma-\beta\delta=$θετ. ἀριθμός. Ἑπομένως εἶνε $\alpha\gamma>\beta\delta$.

Κατὰ ταῦτα ἐπειδὴ εἶνε $\begin{cases}\alpha>\beta\\ \alpha>\beta\end{cases}$ θὰ ἔχωμεν κατὰ τ' ἀνωτέρ

$\alpha.\alpha>\beta.\beta$, ἢ $\alpha^2>\beta^2$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^3>\beta^3$ καὶ γενικῶς $\alpha^\mu>\beta$

Ἐὰν εἶνε $\alpha>\beta$, θὰ εἶνε $\alpha^{-\mu}<\beta^{-\mu}$, ἂν α καὶ β εἶνε θετικ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ θετικὸς καὶ ἀκέραιος.

Διότι ἀφοῦ εἶνε $\alpha>\beta$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτ ἐπὶ $\frac{1}{\alpha\beta}$, εὑρίσκομεν $\frac{\alpha}{\alpha\beta}>\frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἢ $\frac{1}{\beta}>\frac{1}{\alpha}$ ἢ $\alpha^{-1}<\beta^{-1}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{-2}<\beta^{-2}$, καὶ γενικῶς $\alpha^{-\mu}<\beta^{-\mu}$.

Ἀσκήσεις.

66. Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶνε ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ τὰ ὑψ σωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισό ἀντιστρέφεται.

67. Ἐὰν εἶνε $\alpha>1$, θὰ εἶνε τὸ $\alpha^\mu<1$, ἂν τὸ $\mu<0$ καὶ ἀκέραι

68. Ἐὰν εἶνε $0<\alpha<1$, θὰ εἶνε $\alpha^\mu>1$, ἂν τὸ $\mu<0$ καὶ ἀκέραι

69. Ἂν εἶνε $\alpha>1$, θὰ εἶνε $\alpha^{-3}<\alpha^{-2}<\alpha^{-1}<\alpha^0<\alpha^1\ldots$

70. Ἂν εἶνε τὸ α θετικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος θὰ ε καὶ $\alpha^{-3}>\alpha^{-2}>\alpha^{-1}>\alpha^0>\alpha^1>\alpha^2\ldots.$

71. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τὰ προκύπτοντα ἐκ τῆς διαιρέσ τῶν μελῶν τῆς $-24>-84$ διὰ 2, -2, -3, -4 καὶ ποία ὁ σότης συνδέει αὐτά.

72. Νὰ εὑρεθῇ διὰ τίνας τιμὰς τοῦ x ἰσχύουν αἱ α′) $-5.x>50$, β′) $3x<39$. γ′) $(-3).(-2)..x>-4.8.(-1$

73. Νὰ εὑρεθῇ τίνας τιμὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ x, ἵνα ἰσχύει ἡ ἀ σότης α′) $\frac{3}{4}.\,x<-\frac{5}{8}$. β′) $-0{,}6.x<-32$,

γ′) $-0{,}8.(-3).x<120.\frac{4}{5}.\left(-\frac{2}{3}\right).(-0{,}6)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Περὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Γενικοὶ ἀριθμοί. Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.

Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν α μονάδες πράγματος τιμῶνται β δρ., αἱ μονάδες αὐτοῦ θὰ τιμῶνται $\frac{\beta}{\alpha}.\gamma$ δρ. Ἂν λοιπὸν παραστήωμεν μὲ τὸ x τὸ ἐξαγόμενον αὐτό, θὰ ἔχωμεν $x=\frac{\beta}{\alpha}.\gamma$ δρ. (1).

Ἂν ἀρνητικόν τι μέγεθος παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ μ, ὸ τριπλάσιον ἢ νιπλάσιον τοιοῦτον μέγεθος παριστάνεται ὑπὸ οῦ 3.μ ἢ τοῦ μ. ν, καὶ ἂν παρασταθῇ τοῦτο διὰ τοῦ y, θὰ χωμεν $$y=\mu.\nu. \qquad (2)$$

Οἱ μὲν ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι παριστάνονται μὲ γράμματα τοῦ λφαβήτου, ὡς οἱ ἀνωτέρω α, β, γ, μ, ν, x, y, λέγονται ***γενικοὶ*** ριθμοὶ καὶ εἶνε ἐν γένει ἀλγεβρικοί, αἱ δὲ γραφαὶ ὡς αἱ ἀνωέρω (1), (2) λέγονται ***ἀλγεβρικοὶ τύποι.***

Ἡ Ἄλγεβρα εἶνε γενικωτέρα τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ ἀσχολεῖαι μὲ τὴν λύσιν ζητημάτων, ἀναφερομένων εἰς γενικοὺς ἀριθιούς, καὶ κατὰ τρόπον γενικόν, χρησιμοποιεῖ δὲ ἀλγεβρικοὺς ύπους.

Καλοῦμεν ***ἀλγεβρικὰ σύμβολα*** τὰ χρησιμοποιούμενα εἰς τὴν Ἄλγεβραν πρὸς παράστασιν τοῦ σημείου (σὺν) + ἢ (πλὴν) — ῶν ἀριθμῶν, καθὼς καὶ τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, τῆς ροσθέσεως +, τῆς ἀφαιρέσεως —, τοῦ πολλαπλασιασμοῦ × ἢ . , ῆς διαιρέσεως :, τῆς τετραγωνικῆς ρίζης $\sqrt{}$ κλπ.

Ἀσκήσεις.

74. Εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ κεφάλαιον Κ (ἢ τὸ ἐπιτόκιον Ε), ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐπιτόκιον Ε (ἢ τὸ κεφάλαιον Κ), τὸν χρόνον Χ εἰς ἔτη καὶ τὸν τόκον Τ.

75. Εὕρετε τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὴν τιμὴν α μονάδων ἑνὸς πράγματος, ὅταν γ μονάδες αὐτοῦ τιμῶνται β δρ.

76. Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον τοῦ ἀνωτέρω τύπου, ὅταν εἶνε
$$\alpha=3{,}75, \quad \beta=6{,}4, \quad \gamma=6{,}2.$$

77. Ποῖοι τύποι δίδουν τὰ μερίδια x, y, ω, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς Κ μερισθῇ ἀναλόγως τῶν λ, μ, ν;

78. Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον τῶν ἀνωτέρω τύπων, ὅταν εἶνε
$K=38000,\ \lambda=4,\ \mu=0,40,\ \nu=0,78.$

79. Ποῖος τύπος δίδει τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς φορᾶς τῶν ἀριθμῶν α καὶ β ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μ;

80. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τοῦ προηγουμένου τύπου, ὅταν
$\alpha=6,8,\ \beta=12,\ \mu=0,20.$

81. Εὕρετε τύπον δίδοντα τὸ διανυόμενον διάστημα x ὑπὸ κ τοῦ εἰς χρόνον t, κινουμένου ὁμαλῶς ἐπ' εὐθείας μὲ ταχύ τ πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν τῆς εὐθείας. Τί ἀριθμὸς εἶνε ὁ x κ τ, ἂν τὸ κινητὸν κινῆται πρὸς τὴν θετικὴν ἢ τὴν ἀρνητικὴν φο

82. Εὕρετε τύπους δίδοντας τὸ ἡμιάθροισμα καὶ τὴν ἡμιαδι ρὰν δύο ἀριθμῶν α καὶ β. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα, ὅταν εἶνε
$\alpha=12,\ \beta=-15\cdot\ \alpha=-0,32,\ \beta=-6.$

Ὁρισμὸς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

§ 60. ***Ἀλγεβρικὴ παράστασις*** καλεῖται τὸ σύνολον ἀλγεβρ ἀριθμῶν, ἢ γραμμάτων, ἢ ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων, συνδε νων δι' ἀλγεβρικῶν συμβόλων, καθὼς αἱ $(-5-3):6+13-$ $\alpha+\beta$, $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$, α, 2α, $\beta\gamma^2$, $6\alpha^2$, $\beta-8\gamma$. Ἐκ τούτων ἡ α π.χ. φανερώνει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἡ $\alpha+\beta-(\gamma$ τὸ προκύπτον ἐξαγόμενον, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β καὶ ἀ ρεθῇ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ τὸ $(\gamma+\delta)$, κλπ.

§ 61. Καλοῦμεν ***ἀριθμητικὴν τιμὴν*** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἐ σης γράμματα, τὸ ἐξαγόμενον τὸ προκύπτον, ἐὰν τὰ γράμμ αὐτῆς ἀντικαταστήσωμεν δι' ὡρισμένων ἀριθμῶν καὶ ἐκτελ μεν τὰς σημειωμένας πράξεις. Π.χ, ἡ τιμὴ τῆς 4α, ὅταν α= εἶνε $4.(-3)=-12$, τῆς x^4, ὅταν $x=-2$ εἶνε $(-2)^4=16$

§ 62. Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἰσοδύναμοι, ἂν πρ πτη ἡ μία ἐκ τῆς ἄλλης δι' ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν ξεων, καθὼς αἱ $\alpha^2+\alpha\beta$ καὶ $\alpha(\alpha+\beta)$. Διότι, ἂν εἰς τὴν δευτ ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, εὑρίσκομεν τὴν πρώτην.

Παρατηρητέον ὅτι, δύο ἰσοδύναμοι παραστάσεις δίδουν ἴ ἀριθμοὺς διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των.

§ 63. Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται ***ῥητὴ*** μέν, ἂν ἐπὶ οὐδενὸς γραμμάτων αὐτῆς εἶνε σημειωμένη ῥίζα τις, καθὼς αἱ $\frac{\alpha}{2}$,

$\sqrt{3}\,\frac{\alpha}{\gamma}+\beta\delta^2$, $\frac{x}{\sqrt{13}}+y$, ***ἄρρητος*** δέ, ἂν δὲν εἶνε ῥητή, κα

αἱ $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha^3\sqrt{\alpha^5-\beta}$, $6\sqrt{x+y}$.

Ἀλγεβρικὴ παράστασίς (ρητὴ) λέγεται **ἀκεραία** μέν, ἂν δὲν πε-
χῃ διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων της,
αἱ $\alpha+\beta$, $4\alpha^2$, $-0{,}75.\alpha^2\beta+\gamma$, $0{,}8\alpha^2$, κλασματικὴ δὲ ἢ **ἀλγε-
ικὸν** κλάσμα λέγεται, ἂν τοὐναντίον, καθὼς αἱ

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{12\alpha^2-\beta}{\alpha+\beta}, \quad 0{,}75\alpha^2+\frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}, \quad 3\alpha^{-2}.$$

Ἀσκήσεις.

.* Τίνες τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶνε ρηταί, ἄρρητοι, ἀκέ-
ιαι, κλασματικαὶ καὶ διατί; Εὕρετε τὰς τιμὰς αὐτῶν διὰ τὰς
μειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

) $9\alpha^2-\alpha\beta^2$, $\alpha=0$, $\beta=1$. β') $\sqrt{28\alpha^2\beta}$, $\alpha=2$, $\beta=4$.

) $\sqrt{xy-\alpha}$, $\alpha=1$, $x=-2$, $y=-8$.

. Ὁμοίως διὰ τὰς $\sqrt{\alpha^2}$, $\sqrt{(\alpha+\beta)^2}$, $7\gamma : \sqrt[3]{\delta^3}$

$=\beta=\gamma=\delta=-3$, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{19\gamma^2}{\beta^2}$, ἂν $\alpha=\beta=\gamma=-2$

. Εὕρετε παραστάσεις, αἱ ὁποῖοι φαινομενικῶς εἶνε ἄρρητοι.

. Αἱ κατωτέρω παραστάσεις εἶνε ἀκέραιαι ἢ κλασματικαὶ καὶ
ατί; Εὕρετε τὰς τιμάς των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν
αμμάτων.

α') $\frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha}$, β') $\frac{16(\alpha-\beta)^2}{7(\alpha-\beta)}$, γ') $\frac{6\gamma xy^2}{5xy}$, δ') $\frac{3x^2}{y}$.

$\alpha=-2$, $\beta=-1$, $\gamma=0{,}5$ $x=y=-0{,}2$.

. Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ
ς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων,

$(\alpha+\beta)\,[\alpha^2-(\beta^2-6\alpha\gamma)]$, $\alpha=-5$, $\beta=2$, $\gamma=-3$.

) $\sqrt{\alpha^2-2\beta-4\gamma-2}.\ \sqrt{4\alpha^2+\beta.(\alpha+\gamma)}$, $\alpha=9$, $\beta=-4$, $\gamma=3$.

) $\alpha^2-6\alpha^2\beta+\beta^3.\ \frac{(\alpha+\beta)\,(\alpha-3\beta)}{6\alpha-2\beta}$, $\alpha=2$, $\beta=6$ καὶ $\alpha=-2$, $\beta=0{,}1$

Περὶ μονωνύμων.

*Μονώνυμον λέγεται ἀλγεβρικὴ παράστασις εἰς τὴν ὁποίαν
τε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σημειωμένη».*
. χ. αἱ παραστάσεις·

α, $-6xy^2$, $\frac{3}{7}\alpha\beta\gamma\delta$, $-\frac{9\gamma\delta}{9\gamma\delta}$ λέγονται μονώνυμα.

κέραιον λέγεται ἓν μονώνυμον, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν

ἐπὶ τῶν γραμμάτων του περιέχῃ. Ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ διαί
λέγεται **κλασματικόν.** Π. χ. ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων, τὰ
τρία πρῶτα εἶνε ἀκέραια, τὸ δὲ τελευταῖον κλασματικόν.

§ 66. Ἐὰν εἰς μονώνυμον ὑπάρχῃ ἀριθμητικός τις παράγων,
φεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται **συντελεστὴς** τοῦ μονων
Οὕτω εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα οἱ συντελεσταὶ εἶνε κατὰ σειρ

$$1, \quad -6, \quad \frac{3}{7}, \quad -\frac{8}{9}.$$

Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου δύναται νὰ λέγεται **κύριον π**
αὐτοῦ, εἶνε δὲ αὐτὰ εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα κατὰ σειρ

$$\alpha, \quad xy^2, \quad \alpha\beta\gamma\delta, \quad \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

Εἰς τὰ μονώνυμα, τὰ μὴ ἔχοντα συντελεστήν, ἐννοοῦμεν τοι
τὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν μονάδα, καθόσον ἔχει πρὸ αὐτὸ τ
μεῖον $+$ (ἢ οὐδὲν σημεῖον) ἢ τὸ $-$. Π. χ. τοῦ α συντελ
εἶνε ἡ 1, διότι δύναται νὰ γραφῇ $1.\alpha$, ἐνῷ τοῦ $-\alpha$ εἶνε ὁ
ἐπειδὴ γράφεται $-1.\alpha$.

Ἂν ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἑνὸς ἀριθμητικοὶ παράγ
εἰς ἓν μονώνυμον, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς διὰ τοῦ γινομένου
τὸ ὁποῖον γράφεται ὡς πρῶτος παράγων αὐτοῦ καὶ εἶνε ὁ
τελεστὴς τοῦ μονωνύμου. Οὕτω, ἂν ἔχωμεν $-3\alpha^2\beta\frac{4}{5}\gamma^3$, γ
μεν $(-3).\frac{4}{5}\alpha^2\beta\gamma^3$ ἢ $-\frac{12}{5}\alpha^2\beta\gamma^3$ καὶ ὁ $-\frac{12}{5}$ εἶνε ὁ συντελ
τοῦ μονωνύμου τούτου.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου εἶνε θετικὸς ἢ ἀ
κὸς ἀριθμός, ἕπεται ὅτι, τὰ μονώνυμα τὰ ἔχοντα θετικὸν
λεστὴν (ἢ μονάδα), θὰ ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον $+$ ἢ
σημεῖον, τὰ δὲ ἔχοντα ἀρνητικὸν συντελεστὴν τὸ $-$. Οὕτω

$$\alpha, \qquad -9xy, \qquad 8\alpha\beta\gamma\delta, \qquad \frac{-2\alpha\beta}{9\gamma\delta} \quad \text{γράφονται καὶ}$$

$$(+1).\alpha, \qquad (-9).xy, \qquad (+8).\alpha\beta\gamma\delta, \quad \left(-\frac{2}{9}\right).\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

Ὥστε, τὸ πρὸ τοῦ μονωνύμου γραφόμενον σημεῖον $+$
εἶνε τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ καὶ δεικνύει τὸ εἶδος τούτου.

Δύο μονώνυμα λέγονται ἀντίθετα, ἂν διαφέρουν μόνον
τὸ σημεῖον τῶν συντελεστῶν αὐτῶν, ὡς τὰ $25\alpha^2$ καὶ —

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τὸ μονώνυμον. Π.χ. τοῦ $7α^3β$, ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς μὲν τὸ α εἶνε 3, ὡς πρὸς δὲ τὸ β ὁ 1· τοῦ $—3α^3β^2γ$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶνε 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 2, καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

Ἐὰν ἓν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμός του ὡς πρὸς αὐτὸ εἶνε 0. Π.χ. τὸ $3α^2$ εἶνε 0 βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ β, διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3α^2$ τὸ $3α^2β^0$, ἐπειδὴ εἶνε $β^0=1$. Καὶ πράγματι εἶνε $3α^2β^0=3α^2.1=3α^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα γράμματά του λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθειῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα εἰς τὸ μονώνυμον. Π.χ. τὸ $6α^2β^3γ$ εἶνε πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α καὶ β καὶ ἕκτου ὡς πρὸς τὰ α, β, γ.

68. ***Ἀσκήσεις.*** Τίνος βαθμοῦ εἶνε καθὲν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς πρὸς α καὶ β; ὡς πρὸς α; ὡς πρὸς β; ὡς πρὸς γ; ὡς πρὸς α,β,γ; α΄) $13\,α^2βγ^3$. β΄) $11\,α^3δ^2γ$. γ΄) $24\,αβ^3γ^2$. δ΄) $—3α^3β^2γ$.

Ὅμοια μονώνυμα.

. Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ***ὅμοια,*** ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν, διαφέρουν δὲ κατὰ τοὺς συντελεστάς των (ἂν διαφέρουν). Οὕτω τὰ $6α$, $0,42α$, $—23α$ εἶνε ὅμοια, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν α, διαφέρουν δὲ μόνον κατὰ τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν. Ἐπίσης τὰ $—3,7β$, $6β$, $—17β$ εἶνε ὅμοια, ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν τὸ β, καθὼς εἶνε ὅμοια καὶ τὰ
$10α^2β$, $—15α^2β$, $—23α^2β$, $—α^2β$, ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν $α^2β$ καὶ διαφόρους τοὺς συντελεστάς των.

Μονώνυμα λέγονται ὅμοια πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα αὐτῶν, ἂν ἔχουν ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας. Οὕτω τὰ $5α^2βγ$, $—6α^2βδ^2$, $18α^2βδ$ εἶνε ὅμοια ὡς πρὸς τὰ α καὶ β, ὡς ἔχοντα ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Πρόσθεσις μονωνύμων.

. Καλοῦμεν ***ἄθροισμα*** δοθέντων μονωνύμων τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν, ἥτις προκύπτει, ὅταν γράψωμεν τὰ δοθέντα μονώνυμα τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο, καθὲν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον.

Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τὸ ἄθριοσμα τῶν μονωνύμων λέγεται ***πρόσθεσις*** αὐτῶν.

Οὕτω ἡ πρόσθεσις τῶν μονωνύμων $9\alpha^2$, $-15\beta^2$, $\frac{6}{\gamma^3}$

δίδει ἄθροισμα τὸ $9\alpha^2-15\beta^2+\frac{6}{\gamma^3}$.

«Τὸ ἄθροισμα δοθέντων ὁμοίων μονωνύμων εἶνε μ… νυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἀλγεβ… ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων».

Ἔστω π.χ. ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονων… 3α καὶ 4α. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο εἶνε τὸ $3\alpha+4\alpha$, τὸ ὁ… $=$μὲ $(3+4]$.α.Διότι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τ… (κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον) εὑρίσκομεν $(3+4).\alpha=3\alpha$… Ἀλλὰ τὸ $3+4=7$· ἄρα εἶνε $3\alpha+4\alpha=(3+4).\alpha=7\alpha$. Ὁ… ἔχομεν $-3\alpha+4\alpha+\frac{2}{3}\alpha-13\alpha=\left(-3+4+\frac{2}{3}-13\right).\alpha$… ἐπειδὴ εἶνε $-3+4+\frac{2}{3}-13=-12+\frac{2}{3}=-\frac{36}{3}+\frac{2}{3}=$…

ἕπεται ὅτι ἔχομεν ἐξαγόμενον τὸ $-\frac{34}{3}\alpha$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁ… μονωνύμων $2\alpha^2\beta$, $-6\alpha^2\beta$, $+13\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$

εἶνε $2\alpha^2\beta-6\alpha^2\beta+13\alpha^2\beta-\alpha^2\beta=(2-6+13-1)\alpha^2\beta=8\alpha^2\beta$…

Ἡ πρᾶξις αὕτη μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων καλεῖτ… ***ἀναγωγὴ αὐτῶν.***

Ἀσκήσεις.

89. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.
α΄) $9\mu+4\mu$· β΄) $-8\mu+(-6\mu)$· γ΄) $-4\mu+7\mu$· δ΄) $5\mu+(-$…
ε΄) $8\alpha+\alpha+9\alpha$· στ΄) $\rho+7\rho+(6\rho-3\rho)$· ζ΄) $7x+(-8x)$…
η΄) $9\alpha+(-6\alpha+\alpha)$· θ΄) $-\alpha+9\alpha+[(-3\alpha)+9\alpha]$.

90. Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον τοῦ $\frac{5}{2}x^2+3\alpha x-\frac{7}{2}\alpha^2-2x^2+\alpha x+$…

91. Ὁμοίως τοῦ $\frac{1}{2}x-\frac{13}{6}\beta-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}y-\frac{1}{6}\alpha-\frac{11}{4}x$…

92. Ἐκτελέσατε τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων μονωνύμων κ… ρετε τὸ ἐξαγόμενον, εἰς τὸ

$7\frac{3}{4}x^2y-4{,}45y^2\omega+19\frac{3}{8}\varphi^3+0{,}85\alpha^2\beta-1{,}75x-8\frac{3}{8}y-$…

$-47{,}5\alpha^2\beta+2\frac{5}{12}x-1{,}125y+9\frac{1}{6}-0{,}25x^2y-4\frac{1}{4}y^2\omega+0{,}6$…

93. Νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ μεταξὺ τῶν κάτωθι ὁμοίων μονων…

)$3\alpha^2\beta, -8xy^3, \quad 3\alpha^2\beta, \quad 32xy^3, \quad 0{,}35\alpha^2\beta, -0{,}25xy^3, -0{,}5\alpha^2\beta.$
) $30xy^2, -24\alpha^2\beta^3\gamma, \quad 16xy^2, -12{,}3\alpha^2\beta^3\gamma, -0{,}75\alpha^2\beta^3\gamma.$
) $-6\alpha^2\beta\gamma, \ 12\alpha^2\beta\gamma, -7\alpha^2\beta\gamma, -3{,}6\alpha^2\beta\gamma, \ 0{,}3\alpha^2\beta\gamma, \ 7{,}5\alpha^2\beta\gamma.$
4. Εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν ἀνωτέρω καὶ τῶν ἐξαγομένων των διὰ $=\gamma=1, \ \beta=-3, \ x=-1, \ y=0.$

Περὶ πολυωνύμων.

Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶνε πάντα ὅμοια.

Οὕτω τὰ $3\alpha^2+5\alpha\beta\gamma-13\gamma^2, \ 8\alpha^2-2\alpha\beta+4\gamma^2-5\gamma\delta$ εἶνε πολυώνυμα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον εἶνε ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων μονωνύμων $3\alpha^2, \quad 5\alpha\beta\gamma, \quad -13\gamma^2,$ τὸ δὲ δεύτερον τῶν $8\alpha^2, \quad -2\alpha\beta, \quad 4\gamma^2, \quad -9\gamma\delta.$

Καθὲν μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ ***ὅρος*** αὐτοῦ, δύναται δὲ εἷς ὅρος νὰ εἶνε καὶ ἀριθμός τις

Πολυώνυμόν τι λέγεται ***διώνυμον*** μέν, ἐὰν ἔχῃ δύο ὅρους, καθὼς τὰ $\alpha+\beta, \quad \alpha^2+\beta^2, \quad x^2+6,$ ***τριώνυμον*** δέ, ἐὰν ἔχῃ τρεῖς ὅρους, καθὼς τὰ

$$x^2+\lambda x-8, \quad \alpha+\beta-\gamma, \quad \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Βαθμὸς πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του λέγεται ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶνε 1, 2, 3,.., τὸ πολυώνυμον λέγεται ***πρώτου, δευτέρου, τρίτου...***, βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ $3\alpha^2-5\alpha\beta\gamma-13\gamma^3$ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ τρίτου ὡς πρὸς τὸ γ, πρώτου δὲ ὡς πρὸς τὸ β.

Βαθμὸς πολυωνύμου τινὸς ὡς πρὸς δύο, τρία,.. γράμματα αὐτοῦ καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα. Οὕτω τὸ $3x^2-2xy+2x-7$ εἶνε δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ y. Τὸ $5\alpha^2-3\alpha\beta^2\gamma+13\beta\gamma$ εἶνε τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ καὶ τρίτου ὡς πρὸς β, γ.

Ἔστω τὸ πολυώνυμον $8x+x^2+16$. Ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος x νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ ὡς ἑξῆς: $16+8x+x^2$, λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε ***διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος*** x.

Ὁμοίως ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ x νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ οὕτω: $x^2+9x+16$,

λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶνε ***διατεταγμένον κατὰ τὰ***
τιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος x.

Ἐν γένει, πᾶν πολυώνυμον δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς τὰ
τέρω κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας ἑνὸς γράμματος αὐτο

Ἀσκήσεις.

95. Τὰ κάτωθι πολυώνυμα τίνος βαθμοῦ εἶνε ὡς πρὸς
πρὸς α καὶ x; Διατάξατε αὐτὰ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμε
α καὶ τὰς κατιούσας τοῦ x μετὰ τὰς δυνατὰς ἀναγωγάς.

α΄) $3\alpha^2x^4-6\alpha x^5-28\alpha^3x^3+27\alpha^6+x^6-54\alpha^5x+9\alpha^4x^2$.

β΄) $-3x^6-\alpha^6+7\alpha x^5+27\alpha^5x+0,7\alpha^3x^2-0,7\alpha^2x^4-\alpha^3x^3$.

γ΄) $12x^6+\frac{2}{3}\alpha x^5+15\alpha^2x+7\alpha^6-7\alpha^4x^2+\frac{1}{12}\alpha^2x^4-11\alpha^3$

δ΄) $-2\alpha^5x-3x^6+13\alpha^5x+3\alpha^6-\frac{5}{6}\alpha^2x^4+6\alpha^3$.

Περὶ συναρτήσεων.

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως.

§ 72. ***Ταξιδεύων τις λαμβάνει μαζύ του 350 δραχμὰς κα***
δεύει καθ᾽ ἡμέραν 8 δραχμάς.

Ἐὰν ταξιδεύσῃ ἐπὶ 2 ἡμέρας θὰ ἐξοδεύσῃ 8.2 δρχ., ἐ
τρεῖς, τέσσαρας ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ 8.3· 8.4 δρ., καὶ
ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ 8.xδρ., θὰ τοῦ μείνουν δὲ 350δρ.—

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ με
ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξίδιον. Ἐὰν
στήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁπο
τοῦ μείνουν μετὰ x ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν ὅτι y=350 δρ.—8
καὶ ἐὰν π.χ. εἶνε x=5, τὸ y=350—8.5=350—30=3

Εἷς ποδηλάτης διήνυσε 21 χιλιόμετρα, διὰ νὰ φθά
ἕνα ὡρισμένον τόπον, ἀπὸ τοῦτον καὶ πέραν δὲ διήνυ
χιλμ. καθ᾽ ὥραν.

Μετὰ x ὥρας διήνυσε 17χιλμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ᾽ ἀρχῆ
ὅλῳ 21+17x χιμ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ y τὸν διανυ
δρόμον, θὰ ἔχωμεν ὅτι y=21+17.x. (

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμο
ἀπὸ τὸν ὡρισμένον τόπον, δηλαδὴ ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴ
x, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ y ἐκ τῆς ἰσότητο
Π.χ. ἂν εἶνε τὸ x=2, θὰ ἔχωμεν y=21+17.2=21+34
Ἂν εἶνε x=3, τότε y=21+17.3=21+51=72.

x = ἀνεξάρτητος μεταβλητή
y = συνάρτησις τῆς x.

Αἱ ποσότητες x καὶ y, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς ; καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων λέγονται ***μεταβληταί***, ῶ αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν ; ἓν πρόβλημα, λέγονται ***σταθεραί***. Π.χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημά- ον, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ταξιδιώτης μαζύ του καὶ ἡ ἀπόστασις ἣν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχάς, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ν ὡρισμένον τόπον, εἶνε σταθεραὶ ποσότητες.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης συνδέεται μὲ τὴν x οὕτως, ὥστε, ὅταν δώσωμεν εἰς τὴν x τι- ήν τινα ὡρισμένην, εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τοῦ y. Ἡ μετα- ητὴ x, εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν λομεν, καλεῖται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, ἡ δὲ y, τῆς ὁποίας τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x, καλεῖται ***συνάρτησις*** τῆς x.

Ἐν γένει, «***ἐὰν δύο μεταβληταὶ*** x ***καὶ*** y ***συνδέωνται μεταξύ ον κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τι- ὴν τοῦ*** x ***νὰ εὑρίσκωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς*** y, ***τότε ἡ*** y ***ὰ λέγεται συνάρτησις τῆς*** x, ***ἡ δὲ*** x ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***».

Κατὰ ταῦτα, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶνε συνάρτησις τῆς κτῖνος αὐτοῦ. Διότι, ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα οῦ κύκλου, καὶ διὰ τοῦ y τὸ ἐμβαδόν του, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἶνε $=\pi x^2$, καὶ τὸ μὲν π εἶνε ἀριθμὸς σταθερὸς (ἴσος μὲ 3,141 πε- που), τὸ δὲ y εὑρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὡρισμένη τις τιμή. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν ὡρισμένην α, ἶνε συνάρτησις τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Διότι ἔχομεν ὅτι, $y=\frac{1}{2}\,\alpha\,x$, ν τὸ x παριστάνῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ τὸ y τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις.

96. α΄) Εὕρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα αρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον (χρόνος, ἐργασία καὶ ἀμοιβή, ξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κλπ.).

β΄) Εὕρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ δια- όμενον διάστημα καὶ ἡ ταχύτης εἰς τὸ κενόν, τὸ διάστημα καὶ χρόνος κλπ.). Ὁμοίως ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως.

Ἔστω μία συνάρτησις y, ἡ ὁποία εἶνε ἴση μὲ 13+5x. Ἤτοι στω ὅτι ἔχομεν, $y=13+5x$ (1)

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σει- ὰν τὰς τιμὰς 0,1,2,3,..., δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους

τιμὰς τῆς y, ἂν θέσωμεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμ
Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

ὅταν εἶνε $x=0$, τὸ $y=13+5.0=13$·
ὅταν εἶνε $x=1$, τὸ $y=13+5.1=18$·
ὅταν εἶνε $x=2$, τὸ $y=13+5.2=23$.

Ὁμοίως π. χ. διὰ τὴν συνάρτησιν $y=144-6x$ ἔχομεν

ὅταν εἶνε $x=0$, $y=144-6.0=144$·
ὅταν εἶνε $x=1$, $y=144-6.1=138$·
ὅταν εἶνε $x=2$, $y=144-6.2=132$.

Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις π. χ. ἡ y, μιᾶς ἀν του μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x, καὶ διὰ δοθείσας τιμὰς τῆς φωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς y, καθὼς εἰς τὰ ἀνωτέ ραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως ταύτης.

Ἀσκήσεις.

Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ $x=1$· 2· 3· 5· 6· καὶ $x=-1$·-2·-3·

97. α΄) $y=3x+6$. β΄) $y=8x-25$. γ΄) $y=x$. δ΄) y
98. α΄) $y=0{,}75x-62$. β΄) $y=0{,}25x^2-3x-7$.
99. α΄) $y=x^2+x+9$. β΄) $y=600-35x^2+1{,}25x$

Σχηματίσατε τὸν πίνακα τῶν τιμῶν καθεμιᾶς τῶν κάτω αρτήσεων, ὅταν εἶνε $x=0$· 0,5· 1· 1,5· 2· 2,5.

100. α΄) $y=\dfrac{6x-7}{9x+6}$. β΄) $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{7}{5x+6}+9$. γ΄) y=

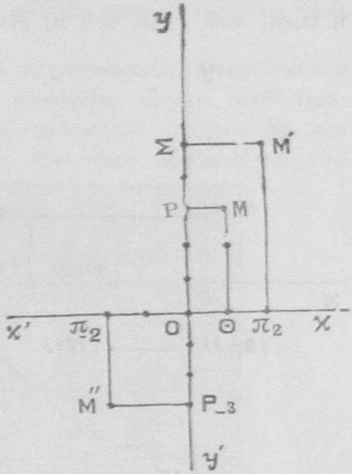
Ἀπεικόνισις τῶν τιμῶν συναρτήσεως.

§ 74. Καθὼς τοὺς ἀλγεβρικοὺς ἀριθμοὺς παριστάνομεν (σημείων τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, οὕτω δυνάμεθα ν στάνωμεν διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτή ταβλητῆς καὶ μιᾶς συναρτήσεως ταύτης. Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχο συνάρτησιν $y=2.x+1$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τ εὑρίσκομεν $y=2.1+1=3$.

Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων x΄x (Σχ.4) καὶ τοῦ τὸ σημεῖον Θ καὶ ὁρίζομεν αὐτὸ ὥστε νὰ παριστά τιμὴν $x=1$, ὅτε εἶνε $(ΟΘ)=1$. Τὴν τιμὴν τοῦ y θὰ π νωμεν κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον δι᾽ ἑνὸς σημείου μιᾶς ἄλλης y΄y, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν

Ο. Ταύτης τὸ μὲν μέρος Οy ὁρίζομεν ὡς τὸ τμῆμα τῶν θετιν τιμῶν τοῦ y, τὸ δὲ Οy′ τὸ τῶν ἀρνητικῶν (Σχ. 4).

Οὕτω ἡ τιμὴ τοῦ y=3 θὰ παστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ τῆς . Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν εὐθεῖαν ράλληλον πρὸς τὴν yy′ καὶ ἐκ τοῦ πρὸς τὴν xx′, αἱ εὐθεῖαι αὗται νονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Μ. ἱ λέγωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ παστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ =1 καὶ y=3 τῆς συναρτήσεως =2x+1.



(Σχ. 4).

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν σημεῖον, τὸ παριστάνον τὸ ζεῦος τῶν τιμῶν x=2 καὶ y=2.2+1=5, ἥτις εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1), ν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2. Τοῦτο παστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Μ′, τὸ ποῖον εἶνε ἡ τομὴ τῆς εὐθείας Π_2Μ′, ἥτις ἄγεται παραλλήλως πρὸς ὴν yy′ ἐκ τοῦ σημείου Π_2 τῆς x′x, αριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν x=2, καὶ τῆς ΣΜ′, ἥτις ἄγεται παράλληλος πρὸς τὴν xx′ ἐκ τοῦ σημείου Σ, τοῦ παριστάνοντος ὴν τιμὴν y=5. Διὰ τὴν τιμὴν x=−2 π. χ. ἔχομεν ἐκ τῆς (1)

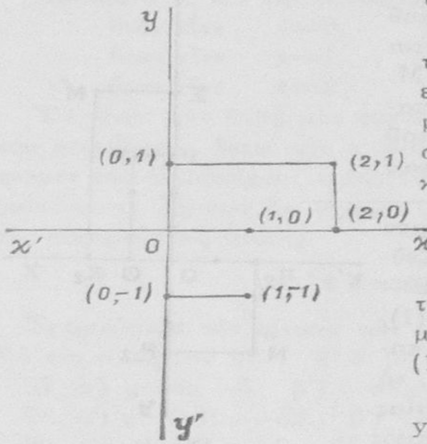
$$y=2.(-2)+2=-4+1=-3.$$

Εὑρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον Π_{-2} ἐπὶ τῆς εὐθείας x′x, τὸ P_{-3} ἐπὶ τῆς y′y καὶ τὸ σημεῖον Μ′′, τομὴ τῆς ἐκ τοῦ Π_{-2} παραλλήλου πρὸς τὴν y′y καὶ τῆς ἐκ τοῦ P_{-3} παραλλήλου πρὸς τὴν x′x, παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν x=−2, y=−3 τοῦ x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

Ἐν γένει, καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνεται ὑπὸ ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον εἶνε τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας x′x καὶ y′y. Ἐκ τούτων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν y′y ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου, τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x ἐπὶ τῆς εὐθείας x′x, ἡ δὲ πρὸς τὴν x′x ἐκ τοῦ σημείου, τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ y ἐπὶ τῆς εὐθείας y′y.

Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ σημείου τῆς x΄x (ἢ τῆς y΄y), τοῦ παριστῶντος τι
μὴν τοῦ x (ἢ τοῦ y) φέρομεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον
τὴν εὐθεῖαν y΄y (ἢ τὴν x΄x), καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μή
ὅση εἶνε ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x), πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιό
ἡ τιμὴ τοῦ y (ἢ τοῦ x) εἶνε θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ (ἢ
στερά), ἂν εἶνε ἀρνητικὴ (Σχ



(Σχ. 5).

Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν τὴν συ
τησιν y=2x—3, διὰ x=
εἶνε y=2.1—3=—1. Εὑρ
μεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον
στάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμ
καὶ —1 τῆς x καὶ y, ἐὰν ἀπ
σημεῖον τὸ παριστάνον τὴ
μὴν—1 τοῦ y ἐπὶ τοῦ Oy φ
μεν τμῆμα εὐθείας παράλλ
τῆς Ox καὶ μήκους 1. Τὸ
μεῖον τοῦτο σημειώνομεν διὰ
(1,—1) εἰς τὸ σχῆμα 5.

Ὁμοίως διὰ x=2
y=2.2—3=+1. Τὸ σημ
(2,1) παριστάνει τὸ ζεῦγος
τιμῶν 2 καὶ 1 κ.ο.κ.

Τὴν εὐθεῖαν x΄x καλοῦμεν συνήθως ***ἄξονα τῶν*** x ἢ
τετμημένων, τὴν δὲ εὐθεῖαν y΄y ***ἄξονα τῶν*** y ἢ ***τῶν τεταγ
νων,*** τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἓν ὄνομα ***ἄξονας τῶν συντεταγ
νων*** x καὶ y. Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὁριζόντ
τὸν δὲ τῶν y κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τοῦ x κα
καλοῦμεν ἀντιστοίχως ***τετμημένην*** καὶ ***τεταγμένην*** τοῦ σημε
τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν καὶ τὰς
δὲ μὲ ἓν ὄνομα ***συντεταγμένας*** τοῦ σημείου.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

Παραστήσατε διὰ σημείων τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x κα
τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x=1,2,3,4...

101. α΄) y=x+2. β΄) y=0,25x+1. γ΄) y=0,75x—2

102. α΄) y=—0,75x—0,4x². β΄) y=—2x+3x³—6.

103. α΄) y=—0,5x²—x³. β΄) y=—0,15x²+5. γ΄) y=—0,5(x—1)—

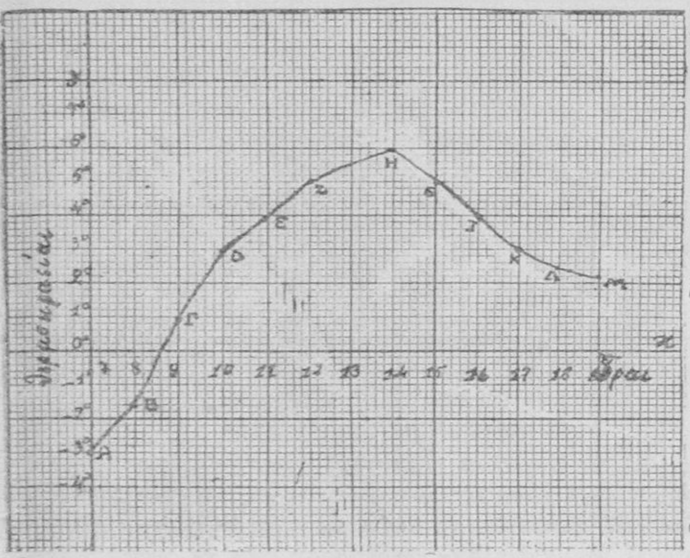
104, y=0,5x²—x+1, ὅταν εἶνε x=0· —1· —2· $\frac{3}{2}$· 2.

75

5. $y = x^3 - x + 3$, ὅταν εἶνε $x = 0 \cdot 1 \cdot - 1 \cdot - \frac{1}{3} \cdot 0{,}1$.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παραστάσεως ζεύγους τιμῶν μετα-
ιρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των ἐξαγόμενα πλή-
ους παρατηρήσεων.

Ἔστω π. χ. ὅτι γνωρίζομεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν
ικνύει τὸ θερμόμετρον τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥραν καθ' ἡμέ-
ιν ἐπὶ ἕνα μῆνα. Λαμβάνομεν ἓν ὡρισμένον τμῆμα ὡς μο-
ίδα μήκους, ἡ ὁποία θὰ παριστάνῃ τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ

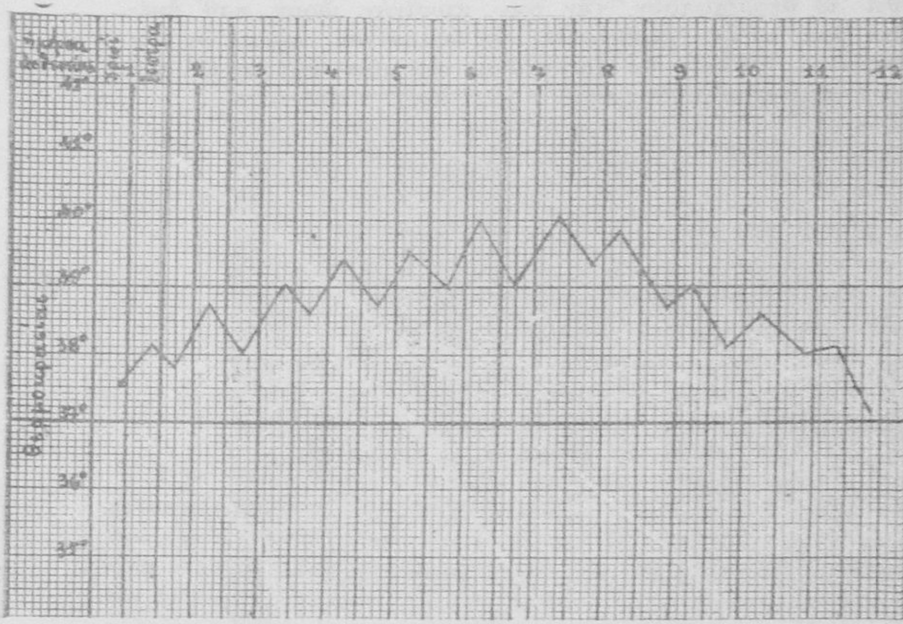


(Σχ. 6).

ξονας τῶν x, ἔστω ἴσον μὲ 0,01 μ., ἐπίσης ἓν ἄλλο ἐπὶ τοῦ
ξονος τῶν y, ἢ ἔστω τὸ αὐτό, τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνῃ τὸν ἕνα
αθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ
ημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν ἡμερῶν
οῦ μηνός, καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου) συν-
έομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα, ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς διὰ τμη-
ιάτων εὐθειῶν. Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ (Σχ. 6 καὶ 7), τὴν ὁποίαν
ὕτω εὑρίσκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρα-

σίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλ
συνήθως, ***γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας*** τοῦ ἐν λόγῳ μηνός.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν τῆς
μοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς, παρατηροῦντες α
π.χ, δὶς τῆς ἡμέρας (τὴν πρωΐαν καὶ ἑσπέραν συνήθως) καὶ
βάνοντες τὸ μέσον ὅρον των, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μέσην θε



(Σχ. 7)

κρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμὴν τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρω
καλοῦμεν συνήθως ***γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ*** τοῦ ἀσθενοῦς.

Ταύτας κατασκευάζομεν συνήθως ἐπὶ τετραγωνισμένου
του, ἐνίοτε δὲ παραλείπονται οἱ ἄξονες ὡς εἰς τὸ Σχ. 7.

Π.χ. ἂν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατά τινα ἡμέραν
ται ὡς ἑξῆς :

7	ὥρ.	—3°	11	ὥρ.	+4°
8	»	—1,5°	12	»	+5°
9	»	+1°	13	»	+5,7°
10	»	+3°	14	»	+6°

15	ὥρ.	$+5^\circ$	17	ὥρ.	$+3^\circ$
16	»	$+4^\circ$	18	»	$+2{,}4^\circ$

τεικονίζεται αὕτη γραφικῶς ὑπὸ τοῦ σχήματος 6. Ἀντιστρό-ως, ἐνίοτε ἐκ τῆς ἀπεικονίσεως τῆς μεταβολῆς μιᾶς μεταβλη-ῆς ἐννοοῦμεν τὴν πορείαν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν αὐτῆς, κα-ὼς π.χ. ἐκ τῆς προηγουμένης εἰκόνος τοῦ Σχ. 7 τῆς μεταβολῆς ῆς θερμοκρασίας ἀσθενοῦς τινος.

Ἀσκήσεις.

. Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶνε διὰ πάντας οὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν -4°· $-2{,}3^\circ$· $3{,}3^\circ$· $6{,}5^\circ$· 13°. 6,6°· 16°· 17,8°· 19,5°· 9°· 3,1°· $-2{,}6^\circ$. Λάβετε ὡς μονάδα μὲν με-ρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01 μ., ὡς μονάδα ὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y ἐπίσης τὸ ,01 μ. Εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

. Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 4 χιλιάδες, καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 ιτο 56· 46· 38· 32· 35· 37· 48· 52· 87· 79· 69· 90· 97 χιλιά-ες. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ οῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν y τὸ),005 μ. Ἀπεικονίσατε τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυ-σμοῦ τῆς πόλεως.

Πράξεις ἐπὶ τῶν πολυωνύμων.

Πρόσθεσις πολυωνύμων.

Καλοῦμεν ***πρόσθεσιν*** δοθέντων πολυωνύμων τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας σχηματίζομεν ἄλλο πολυώνυμον, ἔχον ὡς ὅρους τοὺς τῶν δοθέντων, ἑκάστου μετὰ τοῦ σημείου του. Τὸ πολυώνυμον τὸ προκύπτον ἐκ τῆς προσθέσεως πολυωνύμων λέγεται ***ἄθροι-σμα*** αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα π. χ. τῶν $3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4$ καὶ $-\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x$, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς: $(3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4)+(-\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x)$ εἶνε τὸ πολυώνυμον $3\alpha^2x+\beta^3+6+\alpha^4-\beta^3-8+2\alpha^4+2\alpha^2x$.

Ἐπειδὴ δὲ ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν αὐτῶν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸ

$$5\alpha^2x+3\alpha^4-2.$$

Ἐν γένει, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε πολυω-νύμων, σχηματίζομεν ἓν πολυώνυμον ἐκ πάντων τῶν ὅρων τῶν δοθέντων, διατηροῦντες τὰ σημεῖα τῶν ὅρων των, καὶ ἐκτελοῦ-

μεν ἀκολούθως ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὸ ἐξαγόμ
τοῦτο, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι,

Συνήθως ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα πολυ
μων, ἐχόντων ὁμοίους ὅρους, γράφομεν τὸ ἓν κάτω τοῦ ἄλ
ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην, κ
σον τοῦτο εἶνε δυνατόν, καὶ αὐτὸ διὰ νὰ εὐκολύνεται ἡ ἀναγ
τούτων. Οὕτω π. χ. ἂν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύ

$$5\alpha^5-4\alpha^3\beta^2+8\alpha^4\beta-7\alpha\beta^4\gamma^2+2\alpha^2\beta^3\gamma+\gamma^3,$$
$$2\alpha^2\beta^3\gamma+6\alpha^5-12\alpha^4\beta+2\alpha^3\beta^2-\alpha\beta^4\gamma^2-3\gamma^3,$$
καὶ $$-2\alpha^5-6\alpha^4\beta+9\alpha^2\beta^3\gamma-12\alpha^3\beta^2+\alpha\beta^4\gamma^2-7\gamma^3,$$

γράφομεν πρῶτον αὐτὰ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{l} 5\alpha^5+8\alpha^4\beta-4\alpha^3\beta^2+2\alpha^2\beta^3\gamma-7\alpha\beta^4\gamma^2+\gamma^3 \\ +6\alpha^5-12\alpha^4\beta+2\alpha^3\beta^2+2\alpha^2\beta^3\gamma-\alpha\beta^4\gamma^2-3\gamma^3 \\ -2\alpha^5-6\alpha^4\beta-12\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3\gamma+\alpha\beta^4\gamma^2-7\gamma^3. \end{array}$$

Ἀκολούθως κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων, κειμέ
εἰς τὰς αὐτὰς στήλας, καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$9\alpha^5-10\alpha^4\beta-14\alpha^3\beta^2+13\alpha^2\beta^3\gamma-7\alpha\beta^4\gamma^2-9\gamma^3.$$

Ἀσκήσεις. Νὰ προστεθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα

108. $\alpha^2+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, $\alpha^3-2\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-\beta^3$, $-\alpha^3+3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-$
$-\alpha^3-3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2-\beta^3$, $\alpha^3+6\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+\beta^3$,

109. $5x^4+3\alpha x^3-\beta x^2+3\gamma x-\delta$, $4x^4-6\alpha x^3+5\beta x^2-3\gamma x+2\delta$,
$5x^4-6\alpha x^2-5\beta x^2-3\gamma x-2\delta$, $6x^4+6\alpha x^3-8\beta x^2+6\lambda x+7\delta$,
$-10x^4-\alpha x^3+10\beta x^2-\gamma x+\delta$, $-x^4-x^3-\beta x^2-\gamma x-\delta$.

Ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

§ 77. Καλοῦμεν ***ἀφαίρεσιν*** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Β ἀπὸ ἄλλη
τὴν εὕρεσιν τρίτης Γ, ἡ ὁποία προστιθεμένη εἰς τὴν Β δ
ἄθροισμα τὴν Α. Τὸ ἐξαγόμενον Γ τῆς ἀφαιρέσεως λέγ
διαφορὰ τῶν Α καὶ Β.

«***Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν
ράστασιν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθε
τοῦ δοθέντος***». Διότι, ἂν π. χ. θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν δια
ρὰν τοῦ $-\alpha^2$ ἀπὸ τοῦ α^3y καὶ παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ τοῦ
θὰ εἶνε $$\delta=\alpha^3y-(-\alpha^2).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως θὰ ἔχωμεν,
$$\delta+(-\alpha^2)=\alpha^3y.$$
Προσθέτοντες εἰς τὰ ἴσα τὸ α^2, εὑρίσκομεν, $\delta+(-\alpha^2)+\alpha^2=\alpha^3y-$
καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν $-\alpha^2$ καὶ α^2, ἔχομεν

$$\delta=\alpha^3y+\alpha^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ π. χ. τοῦ $\alpha^2\beta$ ἀπὸ τοῦ $3\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3$ εἶνε $3\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3-\alpha^2\beta=2\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3$.

Ἐὰν ζητῆται π.χ. ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $\alpha^3x-\alpha^2y+\alpha^3$ ὰ ἀφαιρεθοῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς μονώνυμα, ἔστω τὰ

$$\alpha^2x,\quad -3\alpha^2y^3,\quad -\alpha^4,\quad 2\alpha y^2,$$

ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ πρῶτον μονώνυμον, αὶ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ δεύτερον καὶ ἀκολούθως ἀπὸ τὸ νέον ξαγόμενον τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἢ συντομώτερον προσέτομεν εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς ἀφαίρεσιν οθέντων μονωνύμων μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ἤτοι ἔχομεν κατὰ αῦτα $\alpha^3x-\alpha^2y+\alpha^3-\alpha^2x+3\alpha^2y^3+\alpha^4-2\alpha y^2$.

«Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν ολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιετέου, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον σημεῖόν του».

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθ' ὅμοιον τρόπον, καθὼς καὶ ἀνωτέρω.

Οὕτω ἡ διαφορὰ ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$3\alpha^2x-9\alpha^3x^2-6\alpha^2x^2$ ἀπὸ τοῦ πολυωνύμου

$9\alpha^2x+18\alpha^3x^2-\alpha^2x^2$, τὴν ὁποίαν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$(9\alpha^2x+18\alpha^3x^2-\alpha^2x^3)-(3\alpha^2x-9\alpha^3x^2-6\alpha^2x^2)$$

ῖνε $9\alpha^2x+18\alpha^3x^2-\alpha^2x^2-3\alpha^2x+9\alpha^3x^2+6\alpha^2x^2$,

αὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν,

$$6\alpha^2x+27\alpha^3x^2+5\alpha^2x^2.$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμα, ἔχοντα ὁμοίους ρους, συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ ράμματος καὶ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, καθὼς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀλλὰ μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα τῶν ρων τούτου, ἵνα εὐκολώτερον γίνεται ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ρων. Οὕτω π.χ. ἂν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν τοῦ

$\alpha^3-8\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-7\beta^3$ ἀπὸ τοῦ $7\alpha^3+2\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2-11\beta^3-4\gamma^2$

ράφομεν

$$\begin{array}{r} 7\alpha^3+2\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2-11\beta^3-4\gamma^2 \\ -9\alpha^3+8\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+7\beta^3 \end{array}$$

αὶ ἐκτελοῦντες ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων (κειμένων εἰς τὰς ὐτὰς στήλας) εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν

$$-2\alpha^3+10\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-4\beta^3-4\gamma^2.$$

Ἀσκήσεις.

110. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $4x^2+3xy+3y^2$ τὸ $x^2-xy+2y^2$.
111. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ $α^3+3α^2β+3αβ^2+β^3$ τὸ $α^3-3α^2β+3αβ^2-$
112. Ἀπὸ τὸ $α^2x^2+4αxy-3αβy^2$ τὸ $4αβy^2-5αxy+2α^2x^2$.
113. Ἀπὸ τὸ $10α^μ-15β^ν-γ^ρ+5δ^λ$ τὸ $-9α^μ+2β^ν-γ^ρ-5$
114. Ἀπὸ τὸ $2,5x^2+3αx-\frac{7}{9}α^2$ τὸ $2x^2-αx-0,5α^2$.

Περὶ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν.

§ 79. Τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο πολυωνύμων παριστάνο ὡς εἴδομεν (§ 76 καὶ 78), κλείοντες ἕκαστον αὐτῶν ἐντὸς πα θέσεως (ἢ ἀγκύλης) καὶ συνδέοντες ταύτας μὲ τὸ σημεῖον — τῆς πράξεως. Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $2α^2+4αβ-β^2$ $-α^2-αβ+γ$ παριστάνομεν διὰ τοῦ

$$(2α^2+3αβ-β^2)+(-α^2-αβ+γ).$$

καὶ ἰσοῦται τοῦτο μὲ $2α^2+3αβ-β^2-α^2-αβ+γ$.

Ἡ διαφορὰ τῶν αὐτῶν παραστάσεων παριστάνεται διὰ

$$(2α^2+3αβ-β^2)-(-α^2-αβ+γ)$$

καὶ ἰσοῦται μὲ $2α^2+3αβ-β^2+α^2+αβ-γ$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«ἐὰν μὲν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, ἐντὸς τῆς όπ ἔχομεν ὅρους, ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον +, δυνάμεθα νὰ τὴν ραλείψωμεν, χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ἐ αὐτῆς ὅρων· ἂν δὲ ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον —, τὴν παραλείπο ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον καθενὸς ἐντὸς αὐτῆς ὅρων».

Οὕτω ἔχομεν $α-(β-γ+δ)=α-β+γ-δ$.

Διότι, τὸ σημεῖον τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως σημαίνε ἀφαιρεθῇ τὸ $β-γ+δ$ ἀπὸ τὸ α, καὶ κατὰ τἀνωτέρω, ἀρκε προσθέσωμεν εἰς τὸ α τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως καθένα μ σημεῖόν του. Ὁμοίως ἔχομεν,

$$α-[-(β+γ)+(α-β)-γ+α]=α+(β+γ)-(α-β)+γ-α$$
$$=α+β+γ-α+β+γ-α=-α+2β+2γ.$$

Τοὐναντίον, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ὅρους ἀθροίσματος παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, καὶ ἂν μὲν θέσωμεν τὸ σημεῖον + αὐτῆς, ἕκαστος ὅρος διατηρεῖ τὸ σημεῖόν του ἐντὸς ταύτης, τὸ —, οἱ ὅροι γράφονται μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν των αὐτῆς. Οὕτω π.χ. ἔχομεν $α-β-γ=α+(-β-γ)=α-(β+γ$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πρά-
ων καὶ αἱ τιμαί των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$3x-(7x-4y)$. διὰ $x=y=3$.

$7\alpha-8\beta-(19\alpha+3\beta)$. » $\alpha=\beta=10$.

$3x+6y-9\omega+(14x-7y+6\omega)$. » $x=6, y=3, \omega=4$.

$\vartheta-(\mu-\nu)$, ἐὰν εἶνε $\vartheta=x+9x-6\omega$, $\mu=4x-7y+2\omega$,
$\nu=x+y+\omega$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ἐκτελέσατε τὰς πράξεις κατωτέρω, ὥστε νὰ
ἀλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι, καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς
ῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

. $8\alpha-3\beta-[(9\alpha-\gamma)-(6\beta-9\gamma)]$ Διὰ $\alpha=\beta=\gamma=2$,

. $(8\alpha-9\gamma)-\Big[[(6\beta-6\gamma)+7\alpha]-2\beta\Big]$

. $19-x-\Big[8x-[8-9x-(7-9x)]\Big]$ » $x=-3$.

. $-(x^2-4x^5-7x)-[5\alpha(\alpha^2-\beta^2)+3\alpha^3-3\beta^3+\gamma]$.

. Δίδονται τὰ πολυώνυμα $2-2x^2+7x^3-9x^4+x^5$,
$+2x^2-3x^3+4x^4-x^5$ καὶ $x^2+2x^3-3x^4+4x^5$. Νὰ εὑρεθῇ
') τὸ ἄθροισμα αὐτῶν. β') Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ
κολούθως ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τοῦ τρίτου. γ') Νὰ προστεθῇ ἡ
ιαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἰς τὸ τρίτον.

Ὁμὰς τρίτη. Γράψατε καταλλήλως τὰς κατωτέρω παραστά-
εις, ὥστε οἱ ὅροι των ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς νὰ εἶνε εἰς
αρένθεσιν ἢ ἀγκύλην, ἔχουσαν τὸ σημεῖον + ἢ τὸ —.

4. $13x-6x^2+19x^3-14\alpha+5\gamma$.

5. x^3+7x^2-3x-5.

6. $-5x^4-(3x^3-8x^2)-6x+9$.

7. Νὰ εὑρεθοῦν τά: α') $x+y+\omega+\varphi$. β') $x-y-\omega+\varphi$.
') $y-(x+\omega-\varphi)$. Ὅταν τεθῇ,

$$x=3\alpha^2-2\alpha\beta+5\beta^2,\ y=7\alpha^2-8\alpha\beta+5\beta^2,$$
$$\omega=9\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2,\ \varphi=11\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2.$$

8. Εὕρετε τὰ α') $\Delta-[B-(\Delta-E)]$. β') $\Gamma-[\Delta-(E+\Delta)]$,
ὅταν τεθῇ $E=5\alpha^3+3\alpha^2\beta-7\beta^3$, $B=8\alpha^3-9\alpha^2\beta-3\beta^3$.
$\Gamma=9\alpha^2\beta-3\alpha^3-7\beta^3$, $\Delta=8\alpha^2\beta-7\alpha^3-2\beta^3$.

9. *Ὁμὰς τετάρτη.* Ἓν παιδίον εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ πατήρ του
έχει τριπλασίαν ἡλικίαν τούτου. Ποῖον ἄθροισμα θὰ ἔχουν αἱ
ἡλικίαι των μετὰ μ ἔτη ἢ εἶχον πρὸ μ ἐτῶν;

0. Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου τινὸς φοιτοῦν α μαθηταί, εἰς

τὴν δευτέραν β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν τρίτην 2β ὀλιγώτεροι
εἰς τὴν πρώτην. Πόσους μαθητὰς ἔχουν ἐν ὅλῳ αἱ τρεῖς τάξ
Πόσους ἔχουν περισσοτέρους αἱ δύο πρῶται τάξεις τῆς τρίτης

131. Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β ὁ α′ ἔχει x δρ. καὶ οἱ δύ
ὁμοῦ μ. Ὁ Α δίδει εἰς τὸν Α 3 δρ.· πόσας θὰ ἔχῃ ἕκαστος

132. Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δρ. ἢ ὁ Α· ὁ Γ διπλασίας τῶν
Β· ὁ δὲ Α ἔχει μ δρ. Πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς;

Γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων.

§ 80. ***Καλοῦμεν γινόμενον δοθεισῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσ
τὴν παράστασιν, ἡ ὁποία ἔχει παράγοντας τὰς δοθείσας
ραστάσεις. Ἡ πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ γινόμ
ἀλγεβρικῶν παραστάσεων λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐ***

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀκερ
μονωνύμων $5^2\beta^2\gamma^2$ καὶ $3\beta\gamma^2$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τὸ
νον αὐτῶν, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω: $(5\alpha^2\beta^2\gamma)\cdot(3\beta\gamma^2)$, ἢ
ται μὲ $5\alpha^2\beta^2\gamma\cdot 8\beta\gamma^2$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶνε γινόμενον τῶν παραγό
τῶν μονωνύμων καὶ ἂν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν αὐτῶν, θὰ ἔχ

$$5\alpha^2\beta^2\gamma\cdot 3\beta\gamma^2=5\cdot 3\cdot \alpha^2\cdot \beta^2\cdot \beta\cdot \gamma\cdot \gamma^2=15\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν
***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμ
πολλαπλασιάζομεν τοὺς συντελεστάς των καὶ δεξιὰ τοῦ γ
μένου των γράφομεν καθὲν γράμμα, ὑπάρχον εἰς τὰ δο
τα μονώνυμα, μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν,
ὁποίους τοῦτο ἔχει εἰς τὰ δοθέντα».***

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα.

133. α′) $x^7(-x^3)\cdot y^6y^4$. β′) $(-x^4\cdot x)\cdot \alpha^3\cdot\alpha^5\cdot\alpha^2$, γ′) $(x^2)^2$, $(\beta^3)^4$
134. α′) $x^{\nu-2}\cdot x^{2\nu}\cdot x$. β′) $x^{3\nu-1}\cdot x\cdot x^{2\nu-2}\cdot x^2$, γ′) $\alpha^x(-2\alpha^{2x}$
135. α′) $(-xy\omega)\cdot(x^2y^2\omega^2)$ β′) $(-7xy\omega)\,(4x^2y^2)$.
136. Εὕρετε τὰ $(-2{,}5\alpha^2\beta x)^2$. β′) $(-0{,}3\alpha\beta\gamma^2)^3$, γ′) $(-2\alpha\beta^2\gamma$
137. Πῶς ὑψοῦμεν μονώνυμον εἰς δύναμιν;

Γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον.

§ 81. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον$(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του, θὰ
μεν, $(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)\cdot 2\alpha=[\alpha^2+(-3\alpha\beta)+\beta^2]2\alpha$,

καὶ ἐπειδὴ πρόκειται περὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀθροίσμ
ἐπὶ ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ὅτι ἰσοῦται μὲ

$$\alpha^2\cdot 2\alpha+(-3\alpha\beta)\,2\alpha+\beta^2\cdot 2\alpha=2\alpha^3-6^2\beta+2\alpha\beta^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν π. χ,

$$(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+7\beta^3)\cdot(-3\alpha\beta)=-15\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3-21\alpha\beta^4.$$

"Ωστε, ***«διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέ-ιον μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ὅρων τοῦ ολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξα-όμενα».***

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον ἐπὶ ολυώνυμον, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόν-ον (θεωροῦντες τὸ πολυώνυμον ὡς ἕνα ἀριθμόν, ἐπειδὴ εἶνε ροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλα-ἱσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Π.χ. τὸ γινόμενον

$$\alpha.(\beta-\alpha+\gamma)=(\beta-\alpha+\gamma)\alpha,$$

ὶ τοῦτο

$$=\alpha\beta-\alpha^2+\alpha\gamma.$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ αἱ τιμαί ον καὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$(x^3+9x^2-6x+1).x.$ Διὰ $x=\alpha=-4$.

$3\alpha x.(\alpha^2-4\alpha x+x^2)$ Διὰ $x=-1, \alpha=2$.

α΄) $5x-3\,(x+4)$, β΄)$(3\beta-5\alpha).\beta$ Διὰ $x=1, \alpha=-1, \beta=-3$.

$(3\alpha+7\beta).\alpha-(9\beta-5\alpha).\beta.$ Διὰ $\alpha=2,\ \beta=-3$.

$(3\alpha^2+7\beta^2)\alpha\beta-(9\alpha^2-8\beta^2).\alpha\beta,$ Διὰ $\alpha=-1, \beta=-2$.

$(3\alpha^2\gamma^3+7\beta^2)\,3\alpha^2\beta^2-(9\alpha^3\beta^3-8\beta^2).2\alpha^2\beta^3.$ Διὰ $\alpha=-1, \beta=-2$.

Ὁμὰς δευτέρα. Λύσατε τὰ ἑξῆς προβλήματα.

"Ἐκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι πρὸς ντιθέτους διευθύνσεις. Ὁ μὲν α΄ διανύει καθ' ἡμέραν α+μ χμ. ὶ ὁ β΄ 2 χμ. ὀλιγώτερα τοῦ α΄. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμ.;

Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶνε α. ὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶνε μ. Πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθ-ός, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του;

"Ἐκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων 30 χμ. ἡμε-ησίως· μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλ-ς, διατύων γ χμ. ἡμερησίως καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν α΄. Πό-ον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ α΄.

Γινόμενον πολυωνύμων.

Ἐπειδὴ ἕκαστον πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του, εται ὅτι,

ιὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων, ἀρκεῖ νὰ πολ-πλασιάσωμεν καθένα ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάν-

τας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμε

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων, συνήθως τάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ τοῦ γράμματος αὐτῶν, καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὸν πολλα σιασμὸν (πρὸς εὐκολίαν εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

1ον). Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον $(2x^2-x+3).(x-4)$

$$
\begin{array}{lr}
\text{Γράφομεν} & 2x^2-x+3 \\
 & x-4 \\
\hline
(1) \ldots\ldots\ldots & 2x^3-x^2+3x \\
(2) \ldots\ldots\ldots & -8x^2+4x-12 \\
\hline
(3) \ldots\ldots\ldots & 2x^3-9x^2+7x-12.
\end{array}
$$

Τὰ (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ λαπλασιαστέου ἐπὶ x καὶ ἐπὶ —4, λέγονται δὲ ***μερικὰ γινόμ*** Τὸ (3) προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ λέ ***τελικὸν γινόμενον.***

(2) Ἔστω τὸ γινόμενον $(4x^5-3x^4+x^2-1).(x^3=x+2)$.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$
\begin{array}{l}
4x^5-3x^4+x^2-1 \\
x^3-x+2 \\
\hline
4x^8-3x^7 \qquad +x^5 \qquad -x^3 \qquad (***) \\
\qquad -4x^6+3x^5 \qquad -x^3 \qquad +x \\
\qquad\qquad 8x^5-6x^4 \qquad +2x^2 \qquad -2 \\
\hline
4x^8-3x^7-4x^6+12x^5-6x^4-2x^3+2x^2+x-2.
\end{array}
$$

3ον) Ἐπίσης διὰ τὸ γινόμενον

$$(x^3-3\alpha x^2+\alpha^3).\ (2\alpha x-\alpha^2)$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{ἔχομεν} & x^3-3\alpha x^2+\alpha^3 \\
 & 2\alpha x-\alpha^2 \\
\hline
 & 2\alpha x^4-6\alpha^2x^3 \qquad +2\alpha^4x \\
 & -\alpha^2x^3+3\alpha^3x^2 \qquad -\alpha^5 \\
\hline
 & 2\alpha x^4-7\alpha^2x^3+3\alpha^3x^2+2\alpha^4x-\alpha^5.
\end{array}
$$

§ 83. Ἐκ τοῦ τελευταίου παραδείγματος παρατηροῦμεν ὅτι,

(***) Ὁ διδάσκων πρέπει νὰ ἐξηγῇ ὅτι, ἐὰν τοὐλάχιστον εἷς τ γόντων δὲν εἶνε πλῆρες πολυώνυμον, καθὼς τὸ $4x^5-3x^4+x^2-1$ μερικὰ γινόμενα ἀφήνομεν ἀντιστοίχως κενὰς θέσεις ἰσαρίθμους πρ ἐλλείποντας ἐνδιαμέσους ὅρους αὐτῶν, ἵνα εὐκολύνεται ἡ ἀναγωγὴ μοίων ὅρων εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν μερικῶν γινομένων.

μενον τοῦ πρώτου ὅρου x^3 τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πρῶ- ν ὅρον $2\alpha x$ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὸ πρῶτον ὅρον $2\alpha x^4$ ῦ γινομένου. Ὁμοίως τὸ γινόμενον τῶν δύο τελευταίων ὅρων τῶν α^3 καὶ α^2 δίδει τὸ τελευταῖον ὅρον α^5 τοῦ γινομένου. Τὰ τὰ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὰ προηγούμενα τούτου παραδείγ- τα. Ἤτοι,

«ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου δύο πολυωνύμων εἶνε δια- ταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς άμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων ἄκρων ὅρων ον (πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοίχους ρους ὅρους τοῦ γινομένου (πρῶτον καὶ τελευταῖον), δια- ταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα».

Ἀσκήσεις.

Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν δι- μενων καὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν αμμάτων.

α΄) $(3x+5y).(9x-8y)$. β΄) $(4xy+8\gamma\delta).(7xy-6\gamma\delta)$. $\quad x=2.\ y=3.\ \gamma=-3.\ \delta=-1.\ \varrho=-2.$

α΄) $(7\varrho^2-6\lambda^2).(9\varrho^2-3\lambda^2)$. β΄) $(6\varrho^2-7\varrho+5).(3\varrho+6)$ $\quad \lambda=-3^2$

α΄) $(\mu^2-7\mu\nu+5\nu^2).(7\mu^2+3\mu\nu+6\nu^2)$. $\quad \mu=-3,\ \nu=2.$

β΄) $(3\alpha+4).(5\alpha-6).(7\alpha+9)$. $\quad \alpha=-4.$

α΄) $(xy-3).(x^2y^2+9)$. $\quad x=y=-6.$

β΄) $(x^2+x+1).(x-2)-(x^2-x+6).(x+3)$. $\quad x=2.$

Εὕρετε τὰ γινόμενα.

$(\alpha^{\nu}+3\alpha^{\nu-2}-2\alpha^{\nu-1}).(2\alpha^{\nu+1}+\alpha^{\nu+2}-3\alpha^{\nu})$.

$(3y^{\mu}-2y^{\mu+1}-5y^{\mu+2}+y^{\mu+3})\times(3y^{\nu-3}+2y^{\nu-2}-5y^{\nu-1}-y^{\nu})$.

$(\alpha^{\varrho+5}\beta^{\mu}-2\alpha^{\varrho+4}\beta^{\mu+1}+3\alpha^{\varrho+3}\beta^{\mu+2}-5\alpha^{\varrho+2}\beta^{\mu+3}+\alpha^{\varrho+1}\beta^{\mu+4})$

$\times(\alpha^{\varrho}\beta^{\mu-5}+2\alpha^{\varrho-1}\mu^{\mu-4}+3\alpha^{\varrho-2}\beta^{\mu-3}-5\alpha^{\varrho-3}\beta^{\mu-2}-4\alpha^{\varrho-4}\beta^{\mu-1})$.

Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.

Παραστάσεις τῆς μορφῆς

$$(\alpha+\beta)^2,\ (\alpha+\beta),\ (\alpha-\beta),\ (\alpha+\beta)^3,\ (\alpha-\beta)^3$$

ρουσιάζονται πολὺ συχνά, καὶ διὰ τοῦτο εἶνε καλὸν νὰ γνωρί-

ζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν, ἐ
ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασια

Οὕτω ἔχομεν,

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha+\beta)=)\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+$

Ἤτοι, «*τὸ τετράνωτον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀρι ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, σὺν τ πλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ τέρου ἀριθμοῦ*».

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι,

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta).\ (\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+$

Ἤτοι, «*τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ, πλὴν τὸ δ σιαν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, σὺν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέ*

Ἐπίσης εὑρίσκομεν

$$(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2.$$

Δηλαδή, «*τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορά δίδει γινόμενον τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ πρ πλὴν τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου*».

§ 85. Ἐπίσης εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha-$

$$(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).\ (\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

Ἤτοι, «*ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶν μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου, σὺν τὸ τριπλάσιον τετράγων πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον, σὺν τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου, σὺν τὸν κύβον τοῦ δευτ*

Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράψωμεν $-\beta$ ἀντὶ
προκύπτει $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2.(-\beta)+3\alpha.(-\beta)^2+(-\beta)^3$ ἢ

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3.$$

Ἀσκήσεις.

Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι πράξεις καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς τ δομένων καὶ τῶν ἐξαγομένων των διὰ τὰς σημειουμένας τῶν γραμμάτων.

154. α') $(4x+7y)\ (4x+7y)$. β') $(x^2+y^2).\ (x^2-y^2)$, $x=2$, $y=$

155. α')$(9x+6y)^2$.β')$(9xy-xy^2)^2$. γ')$(4\alpha+\beta)^3$,$x=y=-1$,$\alpha=4$

156. Νὰ διατυπώσετε τὸν κανόνα διὰ τὸν τελευταῖον ἐκ τῶ τέρω τύπων κατ' ἀναλογίαν τῶν ἄλλων, ὅστις δίδει τὸ (α—

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ ί των, ὡς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν αμμάτων.

α') $(x+y+\omega)^2$. β') $(\alpha x^2+\beta y-\gamma\omega^2)^2$. Διὰ $\alpha,\beta,\gamma,x,y,\omega=3$.

α') $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$. β') $(\gamma+\delta-\alpha-\beta)^2$. Διὰ $\alpha,\beta=2,\gamma,\delta=1$.

Εὕρετε ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων κανόνα συμφώνως ιὸς τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος πεσσοτέρων τῶν δύο προσθετέων.

Ἐπαληθεύσατε ὅτι εἶνε

) $(\alpha^2+\beta^2).(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y)^2=(\alpha y-\beta x)^2$.

. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=(\alpha y-\beta x)^2+$ $+(\alpha\omega-\gamma x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2$. [Αὗται λέγονται ταὐτότητες τοῦ Larange].

. Συμπληρώσατε τὸ $\alpha^2+\beta^2$, ὥστε νὰ εἶνε ἴσον μὲ τὸ $(\alpha+\beta)^2$.

. Ὁμοίως τὸ $\alpha^3\pm\beta^3$ καὶ τὸ $\alpha^4+\beta^4$, ὥστε νὰ γίνῃ τὸ μὲν ἴσον ὲ $(\alpha\pm\beta)^3$, τὸ δὲ μὲ τὸ $(\alpha^2+\beta^2)^2$, ἢ μὲ τὸ $(\alpha^2-\beta^2)^2$.

Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα

. α') $(3-\beta x^3)(\beta x^3+3)$. β') $(\alpha^2+3x)(3x-\alpha^2)$.

. α') $(6\mu+2\nu^4)(2\nu^4-6\mu)$. β') $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$.

. α') $(\alpha-x)(\alpha+x)(\alpha^2+x^2)$. β') $(\mu+1)(\mu+2)(\mu-1)$.

Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.

Λέγομεν ὅτι ἀκέραιόν τι μονώνυμον εἶνε ***διαιρετὸν*** δι' ἄλλου, ἂν δύναται νὰ εὑρεθῇ τρίτον ἀκέραιον μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον δίδει γινόμενον τὸ πρῶτον. Τὸ οὕτω εὑρισκόμενον μονώνυμον καλεῖται ***πηλίκον*** τῆς (τελείας) διαιρέσεως τῶν δύο δοθέντων, τὰ ὁποῖα λέγονται ***διαιρετέος*** καὶ ***διαιρέτης***.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $24\alpha^7$ διὰ τοῦ $8\alpha^5$, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω $24\alpha^7 : 8\alpha^5$.

Ζητοῦμεν δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν ἓν μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ διαιρέτην $8\alpha^5$, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸν διαιρετέον $24\alpha^7$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ τοῦ Π, θὰ ἔχωμεν (ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρετέον) $\Pi.\ 8\alpha^5=24\alpha^7$.

Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν $\Pi.\alpha^5=24.\alpha^7:8$ ἢ $\Pi.\alpha^5=3.\alpha^7$. Διαιροῦντες καὶ τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ α^5, ἔχομεν

$$\Pi=3.\alpha^7 : \alpha^5=3\alpha^{7-5}=3.\alpha^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι π. χ. $20\alpha^5\beta^6 : (-4\alpha\beta^5)=-5\alpha^4\beta$.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,

«ἵνα γινόμενόν τι ἀλγεβρικῶν παραγόντων εἶνε δια δι' ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας αὐτοῦ κ θένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον». Προσέτι ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ (τέλειον) πηλίκον τῆς διαιρέσε ἀκεραίων μονωνύμων, διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου, καὶ δεξ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν του ε διαιρετέον καὶ διαιρέτην».

§ 87. Ἐὰν τὸ μονώνυμον τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται διὰ τ νωνύμου τοῦ διαιρέτου, ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντ διαιρετέου καὶ διαιρέτου, ἐὰν ὑπάρχουν, ἔπειτα δὲ σχηματ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν τὸν μένοντα ὡς διαιρετέον καὶ πα μαστὴν τὸν μένοντα ὡς διαιρέτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτ γομεν ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων μονωνύμων εἶνε ***κλασ κὸν*** ἢ παράστασις κλασματικὴ (§ 64). Οὕτω διὰ τὴν δια $20\alpha^2\beta^3\gamma^4 : -5\alpha\beta^4\gamma^7$ ἐξαλείφομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας 5 καὶ γ^4 τοῦ διαιρετέου καὶ διαιρέτου καὶ θὰ ἔχωμεν τὴν δια $4\alpha : -\beta\gamma^3$, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον γράφομεν οὕτω:

$\dfrac{4\alpha}{-\beta\gamma^3}$ ἢ $-\dfrac{4\alpha}{\beta\gamma^3}$ καὶ εἶνε τοῦτο κλασματικόν,

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέ

167. α΄) $2\alpha\mu^2 : \mu$. β΄) $8\mu^3\nu^5 : 2\nu^3$. γ΄) $9\mu^4y^6 : -3\mu^2y^2$.

168. α΄) $-121x^3y^5 : 11x^2y^4$. β΄) $0,5x^2y^3 : -0,2xy$.

169. α΄) $0,45\alpha^2\beta^3\gamma^4 : 0,9\beta^3\gamma^3$. β΄) $-12\mu^4\nu^5 : 16\mu^4\nu$.

170. α΄) $-4\alpha\beta^4 : 0,25\alpha\beta^3\gamma\delta^4$, β΄) $-\dfrac{7}{9}\alpha^5\beta^4\gamma^2 : 0,8\alpha^5\beta^5$.

Διαίρεσις πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου.

§ 88. Λέγομεν ὅτι δοθὲν πολυώνυμον εἶνε διαιρετὸν δι' ἀκεραίου νωνύμου, ἂν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλο πολυώνυμον, τὸ ὁπ πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ μονώνυμον δίδει γινόμενον τὸν δ πολυώνυμον.

Καλοῦμεν διαίρεσιν δοθέντος πολυωνύμου (διαιρετέου) ἀκεραίου μονωνύμου (διαιρέτου), τὴν πρᾶξιν διὰ τῆς ὁποίας ε σκομεν τὸ πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμε ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

πειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶνε ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἕπεται ὅτι, *«διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμόν τι (διαιρετὸν) δι' ἀκε-ίου μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του ὰ τοῦ μονωνύμου, καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα».*

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν,

$(7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3) : \alpha\beta=7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2.$

$(42\alpha x-48\alpha y+18\alpha\omega) : (-6\alpha)=-7x+8y-3\omega.$

$(-80\alpha^5-24\alpha^{10}) : (8\alpha^3)=-10\alpha^2-3\alpha^7.$

Ἐὰν πολυώνυμον διαιρῆται δι' ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, θὰ οῦται, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμόν, μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον ς διαιρέσεως αὐτῶν. Οὕτω ἔχομεν διὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα:

$(7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3)=\alpha\beta.\ (7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2).$

$(42\alpha x-48\alpha y+18\alpha\omega)=(-6\alpha).\ (-7x+8y-3\omega).$

$(-80\alpha^5-24\alpha^{10})=8\alpha^3\ (-10\alpha^2-3\alpha^7)=-8\alpha^3.(10\alpha^2+3\alpha^7).$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ἂν πάντες οἱ ὅροι δοθέντος πολυωνύ-ου ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν τὸς παρενθέσεως ὡς παράγοντα γινομένου, τοῦ ὁποίου ὁ ἄλλος ράγων εἶνε τὸ πηλίκον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ τε-ντος ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως κοινοῦ παράγοντος. Π. χ. εἰς τὸ ωτέρω πρῶτον πολυώνυμον ὡς κοινὸς διαιρέτης ἐλήφθη τὸ . καὶ ἐτέθη ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσό-τος (1)· εἰς τὸ δεύτερον πολυώνυμον ἐλήφθη ὡς διαιρέτης κοι-ς τὸ -6α, καὶ εἰς τὸ τρίτον τὸ $8\alpha^3$, καὶ ἐτέθησαν ἐκτὸς τῶν ρενθέσεων εἰς τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3).

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ νὰ -απῇ ἀκολούθως ὁ διαιρετέος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. ιρετε καὶ τὰς τιμὰς τῶν ἰσοτήτων, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν διὰ ς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$(14x^3y^2-28x^4y^2) : 2x^2y^2.$ Διὰ $x=2,\ y=-2$

$(x+y).\ (\alpha+\beta) : (x+y)$ » $x=y=4,\ \alpha=\beta=1,$

$(8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2) : (-4\alpha^2\beta^2).$ $\alpha=3,\ \beta=-2.$

$(x^{\mu+2}y^{\nu}+2x^{\mu+1}y^{\nu+1}-x^{\mu}y^{\nu+2}):x^{\mu}y^{\nu}$. Διὰ $x=4, y=1, \mu=\nu=-1.$

...τραποῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων τὰ

α΄) $\alpha x+\beta x$. β΄) $49\alpha\beta+63\alpha$. γ΄) $56xy-72x\omega$. δ΄) $0,35\alpha\beta-0,49,\alpha\gamma$.

α΄) $2,3\alpha^4\beta^5-2,2\alpha^5\beta^4$. β΄) $\alpha^3x^3y-3\alpha^2\beta x^2y+3\alpha\beta^2xy^2-xy^4$.

177. $12\frac{2}{3}\alpha^3\beta - 14{,}25\,\alpha^4\beta^7 - 15\frac{5}{6}\alpha^5\beta^5 + 11\frac{1}{12}\alpha^6\beta^4$.

Διαίρεσις πολυωνύμου διὰ πολυωνύμου.

§ 90. Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶνε διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου, ὅ νάμεθα νὰ εὕρωμεν τρίτον τοιοῦτον ἐν γένει, τὸ ὁποῖον π πλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον δίδει γινόμενον τὸ πρῶτο πρᾶξις διὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸ τρίτον πολυώνυμον λ διαίρεσις (τελεία) τοῦ ἑνὸς πολυωνύμου (διαιρετέου) διὰ το λου (διαιρέτου), τὸ δὲ εὑρισκόμενον πολυώνυμον καλεῖται *κον* τῆς διαιρέσεως ταύτης.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1 \text{ διὰ τοῦ } \alpha+1.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶνε διατετα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πη (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, π πλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου α^3. Ἑπομένως, ὁ π ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶνε $\alpha^3 : \alpha = \alpha^2$.

Ἀλλὰ τὸ α^2 δὲν δύναται νὰ εἶνε ὁλόκληρον τὸ πηλίκον. ἐὰν κάμωμεν τὴν δοκιμήν, εὑρίσκομεν

$$\alpha^2.\ (\alpha+1)=\alpha^3+\alpha^2.$$

Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπο τὸν διαιρετέον δίδει

$$(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1)-(\alpha^3+\alpha^2)=2\alpha^2+3\alpha+1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκ προστεθῇ παράστασίς τις ἀκόμη, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομέ $(\alpha+1)$ νὰ δίδῃ τὸ $2\alpha^2+3\alpha+1$. Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέ ἀκόμη τὸ $2\alpha^2+3\alpha+1$ διὰ τοῦ $(\alpha+1)$.

Ἔχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ᾽ ἡ ρεσις αὕτη εἶνε ἁπλουστέρα τῆς δοθείσης, ἐπειδὴ ὁ διαι ταύτης εἶνε προφανῶς ἁπλούστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴ τὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν νέαν ταύτην διαίρεσιν καὶ εὑρίσ ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶνε $2\alpha^2 : \alpha = 2\alpha$.

Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ 2α ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\alpha+1$, δ τὸ $2\alpha.\ (\alpha+1)=2\alpha^2+2\alpha$, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον

$$2\alpha^2+3\alpha+1,$$

εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $(2\alpha^2+3\alpha+1)-(2\alpha^2+2\alpha)=\alpha+1$.

ροῦμεν ὅτι δὲν εὑρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον, ἀλλ' ὅτι πρέπει διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $\alpha+1$ διὰ τοῦ $\alpha+1$.

Ἐπαναλαμβάνομεν πάλιν τὴν αὐτὴν πορείαν ἢ καὶ ἀμέσως αρατηροῦμεν ὅτι τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως εἶνε 1, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶνε $\alpha^2+2\alpha+1$,

ὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς κατωτέρω.

Γράφομεν τὸν διαιρετέον δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, κάτωθεν ούτου τὸ πηλίκον, καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἑκάστου ρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον σημεῖον, καὶ ροσθέτομεν. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἑκάστοτε πόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & \alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1 & \alpha+1 \\
 & -\alpha^3-\alpha^2 & \overline{\alpha^2+2\,\alpha+1} \\
\hline
1) & 2\alpha^2+3\alpha+1 & \\
 & -2\alpha^2-2\alpha & \\
\hline
2) & \alpha+1 & \\
 & -\alpha-1 & \\
\hline
3) & 0 &
\end{array}
$$

Αἱ παραστάσεις (1), (2), (3) λέγονται ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ τελευταῖον καὶ τῆς ὅλης διαιρέσεως.

Ἐν γένει διὰ τὴν τελείαν διαίρεσιν δύο πολυωνύμων ἀποδεικνύεται ὅτι,

α') ***«ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶνε διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διατεταγμένου ὁμοίως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου».***

*) Διότι ἔστω $\Delta+\Delta'+\Delta''+\ldots$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου καὶ $\delta+\delta'+\delta''+\ldots$ τῶν τοῦ διαιρέτου, διατεταγμένων π.χ. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Παριστάνομεν διὰ τοῦ $\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots$ τὸ ἄθροισμα τῶν

*) Τὰ φέροντα τὸ σημεῖον τοῦτο, ὡς μᾶλλον θεωρητικά, δύνανται νὰ παραλείπωνται κατὰ τὴν διδασκαλίαν μόνον εἰς τὰ κλασικὰ γυμνάσια, ἂν δὲν ἐπαρκῇ ὁ χρόνος.

ὅρων τοῦ πηλίκου, διατεταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ γράμμα. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν ὅτι,

$$\Delta+\Delta'+\Delta''\ldots=(\delta+\delta'+\delta''+\ldots).\ (\Pi+\Pi'+\Pi''+\ldots$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον δ. Π τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσό ταύτης παριστάνει τὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον την τοῦ γράμματος ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπετέθησαν διατεταγ τὰ πολυώνυμα (§ 83). Ἑπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον Δ τοῦ πρώτου μέλους. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι,

$$\delta.\Pi=\Delta \text{ καὶ } \Pi=\Delta : \delta.$$

ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι, τὸ Π εἶνε πηλίκον τοῦ Δ διὰ τοῦ δ.

β') «***Ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἢ περισσοτέρους τῶν πρώτων ὅ τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν διαιρ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν διαφορά ὁποία ἂν διαιρεθῇ διὰ τοῦ διαιρέτου, θὰ δώσῃ τοὺς λοι ὅρους τοῦ πηλίκου***».

*) Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Π μὲν τὸν πρῶτον τοῦ πηλίκου (ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν γνωστῶν ἐκ τῶν πρώτων ὅ αὐτοῦ), διὰ τοῦ Ρ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων τούτου, Δ τὸν διαιρετέον καὶ τοῦ Δ' τὸν διαιρέτην, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta=\Delta'.\ (\Pi+P)=\Delta'.\ \Pi+\Delta'.\ P$$

καὶ ἀφαιροῦντες τὸ Δ'. Π ἀπὸ τὰ ἴσα εὑρίσκομεν Δ—Δ'.Π=Δ ἐξ οὗ ἕπεται (ἂν διαιρέσωμεν τὰ τελευταῖα ἴσα διὰ τοῦ (Δ—Δ'.Π) : Δ'.=Ρ· δηλαδὴ τὸ Ρ, ἤτοι οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ π κου θὰ εὑρεθοῦν, ἂν διαιρέσωμεν τὸ Δ—Δ'. Π διὰ τοῦ δια του Δ'.

§ 92. Καλοῦμεν ***πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον*** τῆς διαιρέσεως πολυωνύμων, τὸ εὑρισκόμενον, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν δια τέον τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ π κου· ***δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον*** λέγεται τὸ εὑρισκόμενον, ἀπὸ τὸν διαιρετέον ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ πηλίκου. Κατ' ἀνάλο τρόπον ὁρίζομεν τὸ ***τρίτον μερικὸν ὑπόλοιπον***, καὶ οὕτω καθε

§ 93. Ἐν γένει, ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν ἓν πολυώνυ Δ διὰ τοῦ Δ', διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις αὐτοῦ γράμματός των, καὶ ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶνε βαθμοῦ τωτέρου τοῦ διαιρέτου ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Καὶ ὅταν γνωρίζωμεν, ἂν ἡ διαίρεσις αὐτῶν εἶνε τελεία, ἀρχίζομεν τὴν τέλεσιν αὐτῆς, ὡς ἀνωτέρω, καὶ θὰ εὕρωμεν ἐν γένει μίαν σει

ων τοῦ πηλίκου, καθὼς καὶ μίαν σειρὰν πολυωνύμων, τὰ
τοῖα θὰ εἶνε ***πρῶτον***, ***δεύτερον***, κλπ. μερικὰ ὑπόλοιπα τῆς
αιρέσεως. Ὁ βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων ὡς πρὸς τὸ ἓν λόγῳ γράμμα
ὶ βαίνῃ ἐλαττούμενος, διότι μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου
ῦ πηλίκου καὶ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου π. χ., δὲν θὰ ὑπάρχῃ εἰς
τὸ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου. Ἐὰν λοιπὸν ἡ διαίρεσις δὲν
νε τελεία, θὰ εὕρωμεν κατ' ἀνάγκην ὅρους τινὰς τοῦ πηλίκου,
ὧν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἔστω Π, καὶ ὑπόλοιπον ἔστω υ, ***τὸ
ποῖον θὰ ἔχῃ βαθμὸν μικρότερον ἀπὸ τὸν βαθμὸν τοῦ
αιρέτου***, ὅτε καὶ θὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν. Οὕτω θὰ ἔχω-
εν ὅτι $\Delta = \Delta' . \Pi + \upsilon$· διότι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως
ὐτης τὸ υ εὑρέθη μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τὸν διαιρετέον Δ
οῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου Δ' ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον Π. Τὰ
ὕτω εὑρισκόμενα Π καὶ υ καλοῦνται ***πηλίκον*** καὶ ***ὑπόλοιπον***
ῆς μὴ ***τελείας*** ἢ ***ἀτελοῦς*** ταύτης διαιρέσεως.

Ἐὰν τὸ υ εἶνε ἴσον μὲ 0, ἔχομεν τὴν περίπτωσιν τῆς τελείας
αιρέσεως.

Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον

$$x^4-2x^3-7x^2-19x-8 \text{ διὰ τοῦ } x^2-4x-2.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-7x^2-19x-8 & x^2-4x-2 \\
\cline{2-2}
-x^4+4x^3+2x^2 \qquad\qquad\quad & x^2+2x+3 \\
\hline
2x^3-5x^2-19x-8 & \\
-2x^3+8x^2+4x \quad\;\; & \\
\hline
3x^2-15x-8 & \\
-3x^2+12x--6 & \\
\hline
-3x-2. &
\end{array}$$

Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $-3x-2$ εἶνε βαθμοῦ μικροτέρου ἀπὸ
ὸν βαθμὸν τοῦ διαιρέτου x^2-4x-2, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει
κέραιον μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμε-
ον ἐπὶ τὸν διαιρέτην x^2-4x-2 νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $-3x-2$.
ιὰ τοῦτο πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην, καὶ τὸ
$-3x-2$ εἶνε τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀτελοῦς ταύτης διαιρέσεως, τὸ δὲ
$^2+2x+3$ πηλίκον αὐτῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς μὲν τὴν τελείαν διαί-
εσιν ἔχομεν ὅτι, «***ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ***

τὸ πηλίκον» εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ ὅτι, *«ὁ διαιρετέος ἰσοῦτα*
τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τὸ ὑπόλοιπον».

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης ἔχομεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσ
δύο πολυωνύμων, ὁμοίαν πρὸς τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως
ἀριθμῶν.

§ 94. *Παρατηρήσεις.* 1) Ἐὰν διαιροῦμεν πολυώνυμον δι' ἄλ
διατεταγμένων κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμμ
των, ὅτε οἱ βαθμοὶ τῶν πρώτων ὅρων τῶν ὑπολοίπων βαίν
διηνεκῶς αὐξανόμενοι, καὶ διακρίνομεν ὅτι ἡ διαίρεσις δὲν δ
ται νὰ τελειώσῃ ποτέ, διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας
νάμεις, ὅτε θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0 καὶ βαθ
κατωτέρου τοῦ διαιρετέου, ἐὰν ἡ διαίρεσις εἶνε ἀτελής.

2) Πολυώνυμόν τι δὲν εἶνε διαιρετὸν δι' ἄλλου, καὶ τῶν
διατεταγμένων ὁμοίως ὡς πρὸς ἓν γράμμα των: α') ὅταν
ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ἑνὸς ἐκ τῶν εὑρισκομένων μερικῶν ὑπο
πων δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρέτου· β') ὅταν δ
λευταῖος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ τελευτ
τοῦ διαιρέτου· γ') ὅταν διαιροῦνται μὲν ὁ α' ὅρος καὶ ὁ τε
ταῖος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α' καὶ τοῦ τελευταίου τοῦ διαιρ
ἀντιστοίχως, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως δὲν εὑρίσκ
ὑπόλοιπον 0.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δ
μῶν των.

178. $(5\alpha\gamma+3\beta\gamma-5\alpha\delta-3\beta\delta):(5\alpha+3\beta)$. $= \gamma-\delta$

179. $(10x^3+21x^2+5x-6):(3+2x)$.

180. $(12x\mu^3+x^3):(x^2-5\mu x+25\mu^2)$,

181. $(x^3+\alpha^3):(x-\alpha)$.

182. $(2{,}4\alpha^5\beta^3-6\alpha^4\beta^2+8{,}4\alpha^3\beta):(0{,}2\alpha^4\beta^2-0{,}5\alpha^3\beta+0{,}7\alpha^2)$.

183. $(6{,}75\alpha^7\beta^8-7{,}5\alpha^5\beta^6-10{,}8\alpha^3\beta^7):\left(0{,}8\alpha^4-\frac{8}{9}\alpha^2\beta^3-1\frac{7}{25}\beta^4\right.$

184. $(75\varrho^2-55\varrho\lambda-173\varrho\nu-60\lambda^2-11\lambda\nu+80\nu^2):(25\varrho+15\lambda-1$

185. *Ὁμὰς δευτέρα.* Ἔμπορος ἀγοράζει α ὀκάδας ἐμπορεύμ
τινος πρὸς μ δραχμὰς ἑκάστην ὀκᾶν· β ὀκ. πρὸς ν δρ. καὶ γ
πρὸς ρ δρ. ἑκάστην. Πόσον κοστίζει ἑκάστη ὀκᾶ κατὰ μέ
ὅρον, καὶ πόσον ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν;

186. Ἔμπορός τις ἀναμειγνύει α ὀκ. οἴνου μὲ β ὀκ. ἄλλης π

ος καὶ μὲ γ ὀκ. ὕδατος. Ἡ μὲν ὀκᾶ τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται δρ. τοῦ δὲ δευτέρου ν δρ. Πόσον κοστίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μείγματος πόσας ὀκάδας μείγματος ἀγοράζει κατὰ μέσον ὅρον μὲ 1 δραχμήν;

Ἁμαξοστοιχία τις τρέχει α ὥρας μὲ ταχύτητα τ χιλιομέτρων αθ' ὥραν. Ἔπειτα τρέχει β ὥρας μὲ ταχύτητα τ΄ χιλ. τὴν ὥραν. όση εἶνε ἡ μέση ταχύτης αὐτῆς καθ' ὥραν; Πόσας ὥρας χρειάται κατὰ μέσον ὅρον, ἵνα διατρέξῃ ἓν χιλιόμετρον;

Υπόλοιπον διαιρέσεως πολυωνύμου, περιέχοντος τὸν x, διὰ τοῦ x±α ἢ τοῦ αx±β.

Ἔστω π. χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιέσεως $(x^3-3x^2+3x+2):(x-1)$,

Ἐὰν διὰ τοῦ ρ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ διὰ τοῦ υ τὸ πόλοιπον τῆς πράξεως, θὰ ἔχωμεν

$$(x^3-3x^2+2x+1)=\rho.(x-1)+\upsilon. \qquad (1)$$

Τὸ ὑπόλοιπον υ δὲν περιέχει τὸ x εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, ιότι ὁ διαιρέτης εἶνε πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x (§ 93).

Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἄρα καὶ διὰ τὴν $x=1$. Θέτοντες εἰς αὐτὴν $x=1$, εὑρίσκομεν,

$$1^3-3.\,1^2+3.\,1+2=\upsilon, \text{ ἤτοι } \upsilon=3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ ἐὰν κτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἐν γένει, ἔστω ὅτι Π (x) παριστάνει τὸν διαιρετέον, ὁ ὁποῖος ποτίθεται ὅτι εἶνε πολυώνυμον περιέχον τὸν x, ὅτι τὸ ρ (x) παιστάνει τὸ πηλίκον, καὶ τὸ υ τὸ ὑπόλοιπον) τῆς διαιρέσεως διὰ οῦ (x—α), τὸ ὁποῖον (ὑπόλοιπον δὲν περιέχει τὸ x, ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης εἶνε πρώτου βαθμοῦ (§ 93). Λέγω ὅτι τὸ υ εἶνε ἴσον ιὲ Π(α). Δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προκύπτον, ἐὰν εἰς τὸ ποιυώνυμον τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ α, ἤτοι τὴν ιμὴν αὐτοῦ διὰ τὴν ὁποίαν τὸ x—α λαμβάνει τὴν τιμὴν 0.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι $\Pi(x)=\rho(x).(x-\alpha)+\upsilon$.

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ α, λαμβάνομεν

$$\Pi(\alpha)=\rho(\alpha).\,(\alpha-\alpha)+\upsilon.$$

ἢ

$$\Pi(\alpha)=\rho(\alpha).\,0+\upsilon=\upsilon.$$

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(x^6-\alpha^6):(x+\alpha)$.

Τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ (—α), ἤτοι τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁποίαν τὸ x+α λαμβάνει τὴν τιμὴν 0. Διότι τὸ $x+\alpha=x-(-\alpha)$. Ὥστε ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν $(x^6-\alpha^6):[x-(-\alpha)]$. Ἐὰν κ[...]μεν τὴν ἀντικατάστασιν $x=(-\alpha)$ εἰς τὸν διαιρετέον, εὑρίσκ[...] ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^6-\alpha^6=\alpha^6-\alpha^6=0$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι,

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυω[νύ]μου, περιέχοντος τὸ x, διὰ τοῦ $x\pm\alpha$, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν δ[...] x τὸ α ἢ τὸ —α εἰς τὸ πολυώνυμον καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν [τι]μὴν τούτου, ἤτοι νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τὴν ὁπ[οίαν] μηδενίζεται τὸ $x\pm\alpha$».

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^4+\alpha^4):(x+\alpha)$ εἶν[ε]

$$(-\alpha)^4+\alpha^4=\alpha^4+\alpha^4=2\alpha^4.$$

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ [πο]λυωνύμου Π(x) διὰ τοῦ $\alpha x+\beta$ εὑρίσκεται, ἂν τεθῇ εἰς τὸν [διαι]ρετέον ἡ τιμὴ $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ αx[...]

Π.χ. τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(8x^2-4x+2):(2x+4)$ ε[ὑρί]σκεται, ἂν τεθῇ $x=-4:2=-2$ εἰς τὸν διαιρετέον, ὅτε ἔχ[ομεν] $\upsilon=42$.

§ 96. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι, ***«πολυώνυμόν τι Π[(x)] εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $\alpha x\pm\beta$ ἂν τὸ $\Pi\left(\mp\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶνε ἴσον μὲ[...]***

Τὸ $x^3+\alpha^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $x+\alpha$, διότι εἶνε (ἂν τεθῇ $x=$[...] εἰς τὸν διαιρετέον), τὸ $(-\alpha)^3+\alpha^3=-\alpha^3+\alpha^3=0$.

Ἐν γένει τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶνε διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότ[ι τὸ] ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶνε $\alpha^\mu-\alpha^\mu=0$.

Τὸ $x^\mu+\alpha^\mu$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον [τῆς] διαιρέσεως αὐτῆς εἶνε $\alpha^\mu+\alpha^\mu=2\alpha^\mu\neq0$.

Τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν τὸ μ εἶνε [ἄρ]τιος ἀριθμός, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ, ὅταν τὸ μ εἶνε [πε]ριττός. Διότι εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον [εἶνε] $(-\alpha)^\mu-\alpha^\mu=\alpha^\mu-\alpha^\mu=0$, εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶνε

$$(-\alpha)^\mu-\alpha^\mu=-2\alpha^\mu\neq0.$$

Τὸ $x^\mu+\alpha^\mu$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν τὸ μ εἶνε [πε]ριττός, διότι τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^\mu+\alpha^\mu=-\alpha^\mu+\alpha^\mu=$[0], ἀλλ' ὄχι ὅταν τὸ μ εἶνε ἄρτιος, διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $(-\alpha)^\mu+\alpha^\mu=\alpha^\mu+\alpha^\mu=2\alpha^\mu\neq0$.

Πηλίκα τῶν διαιρέσεων $(x^\mu\pm\alpha^\mu):(x\mp\alpha)$.

§ 97. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^\mu-\alpha^\mu$, ἢ τοῦ $x^\mu+$[...]

ὰ τοῦ $x-\alpha$, ὅπου εἶνε $\mu>0$ καὶ ἀκέραιος. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν ράξιν, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-1}$ ὶ ὑπόλοιπον 0 διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, $2\alpha^{\mu}$ δὲ διὰ τὴν υτέραν.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\nu}-\alpha^{2\nu}):(x+\alpha)$ ὡς ηλίκον $x^{2\nu-1}-\alpha x^{2\nu-2}+\ldots-\alpha^{2\nu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\nu+1}+\alpha^{2\nu+1}):(x+\alpha)$ εὑρίσκομεν πηλίκον $^{\nu}-\alpha x^{2\nu-1}+-\ldots+\alpha^{2\nu}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\nu+1}-\alpha^{2\nu+1}):(x+\alpha)$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x^{2\nu}-\alpha x^{2\nu-1}+-\ldots+\alpha^{2\nu}$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^{2\nu+1}$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν,

$^4-\alpha^4):(x-\alpha)=x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3$.

$^6-\alpha^6):(x+\alpha)=x^5-\alpha x^4+\alpha^2x^3-\alpha^3x^2+\alpha^4x-\alpha^5$.

$^3+\alpha^3):(x-\alpha)=x^2+\alpha x+\alpha^2$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^3$.

$^3+\alpha^3):(x+\alpha)=x^2-\alpha x+\alpha^2$.

$^5-\gamma^5):(\beta+\gamma)=\beta^4-\beta^3\gamma+\beta^2\gamma^2-\beta\gamma^3+\gamma^4$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\gamma^5$.

Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶνε ***ὁμογενὲς*** βαθμοῦ τινος ὡς ὸς ὡρισμένα γράμματα αὐτοῦ, ἐὰν πάντες οἱ ὅροι του εἶνε τοῦ οῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα. Π.χ. τὸ $+5\alpha x^2-12\alpha^2x+\alpha^3$ εἶνε ὁμογενὲς γ΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α καὶ Τὸ $5xy-8x^2+4y^2$ εἶνε ὁμογενὲς β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ y.

Οὕτω τὰ ἀνωτέρω πηλίκα τῶν διαιρέσεων $(x^{\mu}\pm\alpha^{\mu}):(x\pm\alpha)$ νε πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ βαθμοῦ $\mu-1$ ὡς πρὸς x καὶ α. Π.χ. τὸ λίκον τῆς διαιρέσεως $(x^4-\alpha^4):(x-\alpha)$ εἶνε τὸ $x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3$, ογενὲς πολυώνυμον γ΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ α.

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ τελεσθῇ ἡ πρᾶξις.

$(2x^3+x-19):(x-2)$ $(x^3+\alpha x^2-3\alpha^2):(x-\alpha)$.

$(x^2+6x+7):(x+2)$.

Εὕρετε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(2x^4+17x^3-68x-32):(x-0,5)$$

ρὶς νὰ ἐκτελέσετε τὴν πρᾶξιν.

Εὕρετε τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων ἀπὸ ήμης.

α΄) $(\alpha^3+\beta^3):(\alpha+\beta)$, β΄) $(\alpha^3-\beta^3):(\alpha-\beta)$, γ΄) $(\alpha^2-\beta^2):(\alpha+\beta)$.

192. α') $(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3):(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

β') $(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3):(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$.

Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσ

193. α') $(x^6+y^6):(x+y)$, β') $(x^6-y^6):(x-y)$, γ') $(x^3+y^3):(x-$

194. α') $(x^5+\alpha^5):(x+\alpha)$, β') $(x^7+1):(x+1)$, γ') $(x^3+\alpha^3):(x-$

Εὕρετε τίνων διαιρέσεων εἶνε τέλεια πηλίκα τὰ κάτωθι.

195. α') $x^2+\alpha x+\alpha^2$, β') x^2-x+1, γ') x^3+x^2+1.

196. α') $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$, β') $x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3x+\alpha^4$.

197. Εὕρετε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\alpha^{5\nu}-\beta^{5\nu}):(\alpha^\nu-\beta^\nu$ ρὶς νὰ ἐκτελέσετε τὴν πρᾶξιν (τὸ ν ὑποτίθεται ἀκέραιος >0)

198. Ὁμοίως τῆς διαιρέσεως $(7^\rho+1):\ 8$ ἂν τὸ ρ εἶνε θετικὸ περιττὸς ἀριθμός. (Τὸ $8=7+1$). Εὕρετε καὶ ἄλλα τοιαῦτα ραδείγματα τελείων διαιρέσεων.

199. Δείξατε ὅτι τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ διαιρεῖται διὰ $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, ὅταν τὸ μ εἶνε περιττὸς ἀριθμὸς καὶ θε

Ἀνάλυσις ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόμενον παραγόντων.

§ 98. Ἔστω μονώνυμόν τι ἀκέραιον, π.χ. τὸ $24\alpha^2\beta^2\gamma$.

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους το ράγοντας, θα εὕρωμεν ὅτι εἶνε $24=2^3.3$. Ἄρα $25\alpha^2\beta^2\gamma=2^3.3\alpha$ Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω μονωνύμο οἱ 2,4,α,β,γ. Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, τος συντελεστὴν ἀκέραιον ἀριθμόν, γίνεται εὐκόλως, διότι, τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν συντελεστήν του εἰς πρώτο ράγοντας. Τοὐναντίον, ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινό παραγόντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἁπλοῦν εἶνε δυνατὴ εἰς ὡ νας τινὰς περιπτώσεις καὶ ἐκ τούτων ἀναφέρομέν τινας κατω

α') Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶνε γινόμε ὁποῖα ἔχουν κοινόν τινα παράγοντα, τρέπεται τοῦτο εἰς γ νον παραγόντων (§ 89).

Οὕτω τὸ $\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu=\mu.(\alpha+\beta-\gamma)$.

Ὁμοίως τὸ $\mu\alpha+\mu=\mu.(\alpha+1)$.

Ἐπίσης τὸ $2x^2+6xy=2x(x+3y)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

Ἀσκήσεις. Τρέψατε εἰς γινόμενα τὰς κάτωθι παρασ α') $8\alpha^2\beta-6\alpha^3+4\alpha\beta$. β') $4\alpha x^2y-8xy^2-4xy$.

α') $8\alpha^3\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^3\gamma^3+2\alpha^2\beta^2\gamma^3$. β') $15\alpha^3x-10\alpha^3y+5\alpha^3\omega$.

α') $\alpha^3\gamma y^3+2\alpha^2\gamma^2y^2-\alpha^2\gamma y^4$. β') $3\beta^3\gamma^3+2\beta^2\gamma^2-6\beta\gamma^3$.

α') $x^2y^2\omega^2-x^3y^2\omega^3+x^2y^3\omega$. β') $\alpha\beta^2\gamma^3-2\alpha^2\beta\gamma+3\alpha^3\beta^3\gamma^2$.

α') $6\alpha^2-12\alpha^3$. β') $3x^2-6x$. γ') $8x^2y^2+16xy\omega-24x^2y^3\omega^2$.

β') Ἐὰν εἶνε δυνατὸν νὰ διαταχθοῦν οἱ ὅροι πολυωνύμου θ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἑκάστην τούτων νὰ ὑπάρχῃ ὁ αὐτὸς παράν, τότε τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων. Π. χ. τὸ λυώνυμον $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$ εἶνε ἴσον μὲ

$$(\alpha\gamma+\alpha\delta)+(\beta\delta+\beta\delta)=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=(\gamma+\delta)(\alpha+\beta).$$

Ὁμοίως ἔχομεν $3x^3-5x^2-6x+10=(3x^3-5x^2)-(6x-10)$.

$$=x^2(3x-5)-2(3x-5)=(3x-5)(x^2-2).$$

Ἀσκήσεις. Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι ρ παραστάσεις.

α') x^2-x^3+1-x, β') $x^3-5x^2+2x-10$. γ') $x^3+7x^2+3x+21$.

α') $\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha+x$, β') $(x-y)^2+2y(x-y)$. γ') $1+15x^4-3x^3-5x$.

α') $x^3+x-x^2\omega-\omega$. β') $\alpha x^4+\beta x^3-\alpha x-\beta$. γ') $2x^3-5x^2-4x+6$.

γ') Ἐὰν τριώνυμόν τι ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον, τρέπεαι εἰς γινόμενον παραγόντων, ἤτοι, ἐὰν ἕκαστος τῶν δύο ὅρων υ εἶνε τέλειον τετράγωνον, ὁ δὲ τρίτος ὅρος εἶνε τὸ διπλάσιον ῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν δύο ἄλλων. Οὕτω τὸ

$$x^2+2xy+y^2=(x+y)(x+y).$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$16\alpha^2-24\alpha\beta+9\beta^2=(4\alpha-3\beta)^2=(4\alpha-3\beta)(4\alpha-3\beta),$$

Ἐπίσης τὸ $x^4-2x^2y+y^2=(x^2-y)^2=(x^2-y)(x^2-y)$,

Ἀσκήσεις. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων

α') $9x^2+24xy+16y^2$. β') $49x^2-28xy+4y^2$. γ') $1-20\beta+100\beta^2$.

α') $49-140\lambda^2+100\lambda^4$. β') $81\alpha^2+126\alpha\beta+49\beta^2$.

α') $4\alpha^2-20\alpha x+25x^2$. β') $121\alpha^2+198\alpha y+81y^2$.

α') $49\alpha^2+42\alpha\gamma^2+9\gamma^4$ β') $121+110x+25x^2$.

δ') Ἐὰν διώνυμόν τι εἶνε διαφορὰ δύο τετραγώνων, τρέπεαι εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῆς τετραωνικῆς ρίζης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Οὕτω ἔχομεν ὅτι

$$16x^2-9y^6=(4x+3y^3)(4x-3y^3).$$

Ὁμοίως τὸ $25-16\alpha^2=(5+4\alpha)(5-4\alpha)$.

Ἀσκήσεις. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα.

α') $\alpha^2\beta^2-1$. β') $4\alpha^2-49\beta^2$. γ') $121\alpha^2-36\beta^2$. δ') $49\alpha^{14}-y^{12}$.

α') $81\alpha^4\beta^4-\gamma^4$. β') $4\alpha^2\gamma-9\gamma^3$. γ') $20\alpha^3\beta^3-5\alpha\beta$. δ') $3\alpha^5-12\alpha^3\gamma^2$.

214. α') $1-400x^4$. β') $4x^{16}-y^{20}$. γ') $9x^8-\alpha^6$. δ') $16x^{11}-$

ε') Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους δοθέντ λυωνύμου καθ' ὁμάδας οὕτως, ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύ νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων. ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν.

Π. χ. ἔχομεν ὅτι, $\alpha^2-2\alpha\beta^2+\beta^2-9\gamma^2=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=(\alpha-\beta)^2-9\gamma^2=(\alpha-\beta+3\gamma)\ (\alpha-\beta$

Ὁμοίως $12\alpha\beta+9x^2-4\alpha^2-9\beta^2=9x^2-(4\alpha^2-12\alpha\beta+9$

$=9x^2-(2\alpha-3\beta)^2=(3x-2\alpha+3\beta)\ (3x+2\alpha$

Ἀσκήσεις.

215. α') $\alpha^2-(3\beta-2\gamma)^2$. β') $\beta^2-(2\alpha+3\gamma)^2$. γ') $9\alpha^2-(x-$

216. α') $26\alpha^2-(2y-3\omega)^2$. β') $(\alpha+2\beta-3\gamma)^2-(\alpha+5\gamma)^2$.

217. α') $(2\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-2\beta+\gamma)^2$. β') $(x-5)^2-(x+y-5$

218. α') $(2\alpha-1)^2-(2\alpha+1)^2$. β') $(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta$

219. α') $(\alpha-3x)^2-(3\alpha-2x)^2$. β') $1-(x+5\beta)^2$. γ') $x^2-(y-\alpha$

στ') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς

$$\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$$

παρατηροῦμεν ὅτι $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2$

$=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$

$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)\ (\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta).$

Π. χ. τὸ $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=$

$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)\ (x^2-x+1)$

ζ') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς $x^2+\beta x$ καὶ τὸ μὲν β εἶνε τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἔ τῶν ϱ καὶ ϱ', τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ μεν ὅτι, $\beta=\varrho+\varrho'$, $\gamma=\varrho.\varrho'$. Ἄρα τὸ $x^2+\beta x+\gamma=x^2+(\varrho+\varrho')x+\varrho$
$=x^2+\varrho x+\varrho' x+\varrho\varrho'=(x^2+\varrho x)+(\varrho' x+\varrho\varrho')=$
$=x(x+\varrho)+\varrho'(x+\varrho)=(x+\varrho)\ (x+\varrho')$.

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^2+8x+15$,

παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $8=5+3$. καὶ $15=3.5$.

Διὰ τοῦτο ἔχομεν $x^2+8x+15=(x+3)\ (x+5)$.

Ὁμοίως τὸ $x^2+11x+30=(x+5)\ (x+6)$.

Διότι εἶνε $5+6=11$ καὶ $30=5.6$.

η') Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+$ δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ τὴν τρέψωμεν εἰς γινόμενον, ἐπαναφέρον πρῶτον αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν.

Εστω π. χ. ἡ παράστασις $3x^2-x-2$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς $\frac{1}{3}(3.3x^2-3x-3.2)$.

Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3x$ τὸ ω, δηλαδὴ $3x=\omega$,

ομεν $\quad 3x^2-x-2=\frac{1}{3}(\omega^2-\omega-6)$.

Ἀναλύομεν τὸ $\omega^2-\omega-6$ εἰς τὸ $(\omega-3)(\omega+2)$ καὶ οὕτω θὰ

ομεν $\quad 3x^2-x-2=\frac{1}{3}(\omega-3)(\omega+2)$.

φομεν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον αὐτοῦ $3x$ καὶ ἔχομεν

$(3x-3)(3x+2)=\frac{3}{3}(x-1)(3x+2)=(x-1),(3x+2)$,

οι $\quad 3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$.

β'). Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶνε ἄθροισμα ἢ διαφορὰ κύβων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρέσεως ωνύμου διὰ τοῦ $x+\alpha$ ἢ τοῦ $x-\alpha$. Οὕτω π. χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ ρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$, καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$. Ἑπομέ εἶνε $\quad \alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

Ὁμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, καὶ δίδει πηλίκον $\alpha\beta+\beta^2$. Ἄρα εἶνε $\quad \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ $\quad x^6+y^9=(x^2+y^3)(x^4-x^2y^3+y^6)$.

Τὸ $(x-y)^3+\omega^3=(x-y+\omega)\,[(x-y)^2-(x-y)\omega+\omega^2]=$

$=(x-y+\omega)\,(x^2-2xy+y^2-x\omega+y\omega+\omega^2)$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις.

) $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$. β') $4x^4-21x^2y^2+9y^4$. γ') $\lambda^4+\lambda^2+1$.
) $4\alpha^4-13\alpha^2+1$. β') $4x^4-37x^2y^2+9y^4$. γ') $\alpha^8+\beta^8$.
) $x^4+x^2y^2+y^4$, β') $25x^4+31x^2y^2+16y^4$. γ') $\alpha^4+\beta^4$.
) $9\alpha^8-15\alpha^4+1$. β') $16\alpha^4-17\alpha^2+1$. γ') $16\lambda^4+9\nu^4$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως αἱ παραστάσεις.

) x^2-7x-8. β') x^2+9x+8 γ') $x^2-3x-18$.
) x^2+4x-5. β') $\gamma^2-58\gamma+57$. γ') $\alpha^2\beta^2-13\alpha\beta\gamma+22\gamma^2$.
) $\alpha^2+17\alpha-390$. β') $\alpha^2-7\alpha\beta+10\beta^2$. γ') $\alpha^4-11\alpha^2\beta^3+30\beta^6$.
) $\alpha^2x^2-3\alpha x-54$. β') $\omega^2+9\omega y+20y^2$.

Ὁμὰς τρίτη. Ἐπίσης αἱ παραστάσεις.

) $6x^2-x-2$. β') $18x^2+9x-2$. γ') $12x^2-7x+1$.
) $12x^2-x-1$. β') $3x^2-2x-5$. γ') $3x^2+4x-4$.

230. α') $4x^2+13x+3$. β') $6x^2+17x+12$. γ') $11\alpha^2-23\alpha$

Ὁμὰς τετάρτη. Νὰ τραπουν εἰς γινόμενα αἱ παραστά

231. α') $x^3\pm64$. β') $343\pm x^3$. γ') $\alpha^3\beta^3\pm343$, δ') 8α

232. α') $216\mu^3\pm\nu^6$, β') $x^3y^3\pm512\omega^3$. γ') $(\omega+5)^3\pm\alpha^3$. δ') $9x^6$

Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης καὶ ἐλάχιστον κοιν πολλαπλάσιον.

§ 99. Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεωτ τοῦ μ. κ. δ. ἀριθμῶν δι' ἀνα αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρε μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, μὲ συντελεστ ραίους, ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, καὶ ἡ ἀπόδειξ ται ὁμοίως. Οὕτω ὁ μ.κ δ. τῶν

$6\alpha^2\beta^3=2.3.\alpha^2\beta^3$, $9\alpha^3\beta^2=3^2.\alpha^2\beta^2$, $16\alpha^4\beta^3=2^4\alpha^4\beta^3$ εἶνε τὸ α

Ὁ μ.κ.δ. τῶν $\alpha^2-\alpha\beta=\alpha(\alpha-\beta)$, $\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha(\alpha-\beta)$

καὶ $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, εἶνε τὸ $(\alpha-\beta)$.

§ 100. Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐ.κ.π. ἀριθμῶν δι' ἀνα εἰς πρώτους παράγοντας ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων (μὲ συντελεστὰς ἀκερ ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁ Οὕτω τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων

$$18\alpha^3\beta^2=2.3^2.\alpha^3\beta^2,\quad 9\alpha\beta^2=3^2.\alpha.\beta^2,\quad 12\alpha\beta=2^2.3.\alpha.\beta$$

εἶνε τὸ γινόμενον $2^2.3^2.\alpha^3.\beta^2=36\alpha^3\beta^2$.

Ὁμοίως τῶν $6(\alpha+\beta)$, $4(\alpha+\beta)^2.(\alpha-\beta)$, $9(\alpha+\beta)(\alpha-$

τὸ ἐ.κ.π. εἶνε $2^2.3^2(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2=36(\alpha^2-\beta^2)^2$.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ, τῶν παραστάσεων.

233. α') $120\alpha^2$ καὶ $168\ \alpha^4\beta^2$. β') τῶν $36\alpha^5x$ καὶ $28x^3y$.
γ') τῶν $(x-1)^2(x+2)^3$ καὶ $(x-1)(x+3)^3$.

234. $35x^2(\mu+\nu)^2$, $(\mu-\nu)^3$, $20x^3(\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2$, $45x^4(\mu+\nu)^3(\mu$
Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων.

235. $18x(\alpha+2\beta)^3$, $9xy(\alpha+2\beta)^2(\alpha-2\beta)$, $18x^2y^2(\alpha-2\beta)^2$.

236. $(\mu+1)^2$, $(\mu-1)$, $\mu^2-2\mu+1$, μ^2-1.

237. x^5+x^4, x^5+x. $(x^5-x)^2$.

238. $(3x^4+3x)$, $(5x^3-5x)$, $(10x^2+10x)$.

Περὶ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

§ 101. Καθὼς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν παρί διὰ κλάσματος, ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρο στὴν τὸν διαιρέτην, οὕτω καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀλ

ῶν παραστάσεων, π. χ. τῶν $-5\alpha^2+\beta^3$ καὶ $8\gamma^3+9\alpha$ παρίσταται ...ὰ τοῦ κλάσματος $\frac{-5\alpha^2+\beta^3}{8\gamma^3+9\alpha}$, τὸ ὁποῖον λέγεται ***ἀλγεβρικὸν ...λάσμα.*** Γενικῶς,

«ἀλγεβρικὸν κλάσμα καλεῖται τὸ κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ...οοι εἶνε ἐν γένει ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, παρι...τάνει δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ ...αρονομαστοῦ αὐτοῦ».

Ἰδιότητες ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

... Ἐπειδὴ οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶνε αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ πα...αστάσεις, αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ἀλ...εβρικοῦ κλάσματος, οἱ ὅροι αὐτοῦ παριστάνουν ἀριθμούς, ἔπε...αι ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμα...ικῶν ἀριθμῶν (διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των διὰ τὰς ὁποίας ...ὲν μηδενίζεται ὁ παρονομαστής των). Οὕτω,

«ἐὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος πολλαπλα...σιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία του ...ὲν μεταβάλλεται». Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta\gamma}{\alpha\gamma}, \quad \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

Ὁμοίως $$\frac{57\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3.19.\alpha^3\beta\gamma^2}{2.19.\alpha^2\beta^3\gamma^3}=\frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^3}.$$

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα, δυνάμεθα νὰ τρέψω...μεν δοθὲν κλάσμα ἀλγεβρικὸν εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ...χον ὅρους ἁπλουστέρους ἢ μὴ τοῦ δοθέντος.

Ἁπλοποίησις ἀλγεβρικοῦ τινος κλάσματος λέγεται ἡ πρᾶξις ...ιὰ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμόν του, καὶ ἔχον ...ρους ἁπλουστέρους.

Ἵνα ἁπλοποιήσωμεν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, διαιροῦμεν τοὺς ...ρους του διά τινος κοινοῦ διαιρέτου των. Οὕτω τὸ κλάσμα

$$\frac{(\alpha+5)\ (\alpha+3)}{(\alpha+3)\ (\alpha+2)} \text{ τρέπεται εἰς τὸ } \frac{(\alpha+5)}{(\alpha+2)}$$

...φοῦ οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος διαιρεθοῦν διὰ τοῦ $(\alpha+3)$.

... ***Ἀνάγωγον*** καλεῖται κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν ...οινὸν παράγοντα. Ἑπομένως ἀνάγωγον κλάσμα δὲν ἁπλοποιεῖται.

Ὁ κανὼν καθ' ὃν τρέπεται κλασματικὸς ἀριθμὸς εἰς ἀνάγωγον ...σχύει καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα (ἢ τὰς ἀλγεβρικὰς κλασμα...ικὰς παραστάσεις).

Οὕτω ἔχωμεν ὅτι,

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2\gamma^2}=\frac{2^2\alpha^2\beta^2\gamma}{2.3\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2\alpha}{3\gamma^3}\ (\mu.\kappa.\delta.\ \text{εἶνε ὁ}\ 2\alpha\beta^2\gamma).$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha+1)}{\alpha}\ (\mu\ \kappa.\delta.\ \text{εἶνε ὁ}\ \alpha-1).$$

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{(x+\alpha+\beta)(x+\alpha-\beta)}{(x+\beta+\alpha)(x+\beta-\alpha)}=\frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha}(\mu.\kappa.\delta.\text{ὁ}\ x+\alpha-$$

Ἀσκήσεις. Νὰ τραποῦν εἰς ἀνάγωγα τὰ κλάσματα.

239. α′) $\frac{16\alpha^2\beta^2}{18\alpha\beta^2}$. β′) $\frac{45\alpha^2\beta^2\gamma^2}{9\alpha\beta^2\gamma}$. γ′) $\frac{46x^2y^3}{36x^3y^5}$. δ′) $\frac{98xy-2}{24x^2-3}$

240. α′) $\frac{8x^2+24\alpha x+18\alpha^2}{16x^3+54\alpha^3}$. β′) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$. γ′) $\frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$. δ′) $\frac{x^5-}{x^4-}$

§ 103. Διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα ἀλγεβρικὰ κλάσματα (ἢ ἀ-βρικὰς κλασματικὰς παραστάσεις), ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ κλασματικοὺς ἀριθμούς, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως.

Ἔστωσαν π.χ. τὰ κλάσματα

$$\frac{\beta}{6\alpha},\quad \frac{\alpha}{9\beta},\quad \frac{1}{4\alpha^2\beta},\quad \frac{1}{18\alpha^2\beta^3}.$$

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε τὸ $3^2.2^2.\alpha^2\beta^3$. Διαιροῦντες αὐτὸ διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκο κατὰ σειρὰν $6\alpha\beta^3$, $4\alpha^2\beta^2$, $9\beta^2$, 2.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους καθενὸς τῶν δοθέν κλασσάτων κατὰ σειρὰν εἰς τὰ πηλίκα ταῦτα, εὑρίσκομεν τὰ ὁ-νυμα κλάσματα

$$\frac{6\alpha\beta^4}{36\ \alpha^2\beta^3},\quad \frac{4\alpha^3\beta^2}{36\alpha^2\beta^3},\quad \frac{9\ \beta^2}{36\ \alpha^2\ \beta^3},\quad \frac{2}{36\ \alpha^2\ \beta^3}.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα μὲ κοινὸν -ρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

241. $\frac{1}{x^2-1},\quad \frac{1}{x},\quad \frac{1}{x-1},\quad \frac{1}{x+1}.$

242. $\frac{\mu}{3x^2y^2},\quad \frac{\nu}{8xy^3},\quad \frac{\varrho}{9x^4y^3},\quad \frac{7}{24x^2y^4}.$

243. $\frac{1}{4(\alpha+\beta)^3},\quad \frac{5}{8(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)},\quad \frac{9}{5(\alpha-\beta)^2}.$

β') $\frac{\alpha^2}{(x^2-4)(x-1)}$, $\frac{\alpha}{(x+2)(x+1)}$, $\frac{3}{x^2-4x+4}$.

γ') $\frac{x^2}{\varrho(\alpha\mu+\mu^2)}$, $\frac{x}{\varrho^2(\alpha^2-\alpha\mu)}$, $\frac{1}{\varrho^3(\alpha^2-\mu^2)}$.

Περὶ τῶν παραστάσεων $\frac{0}{0}$ καὶ $\frac{\alpha}{0}$.

Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$. Ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὸ $x=\alpha$, εὑ-
σκομεν $\frac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-\alpha}=\frac{0}{0}$. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἐνίοτε οἱ ὅροι
θέντος κλάσματος διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος γί-
νται ἴσοι μὲ 0, καὶ ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ κλάσματος
ει τὴ μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἀλλ' ἡ παράστασις αὕτη δὲν ἔχει καμμίαν
ρισμένην τιμὴν καὶ λέγεται ***ἀόριστος***, ἐπειδὴ ἂν θέσωμεν τὸ $\frac{0}{0}$
σον μὲ οἱονδήποτε ἀριθμόν, π.χ. $\frac{0}{0}=7$, θὰ ἔχωμεν $0=0.\ 7=0$.
ότι, πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0,
Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι (ἂν εἶνε τὸ x διάφορον τοῦ α, τὸ ὁποῖον
ημειώνομεν οὕτω : $x\neq\alpha$) ἔχομεν $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}=\frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x-\alpha}=x+\alpha$,
αὶ ἂν εἰς τοῦτο τεθῇ $x=\alpha$, ἔχομεν 2α καὶ ὄχι $\frac{0}{0}$. Διὰ ταῦτα, ὅταν
υμβαίνῃ κλάσμα τι νὰ γίνεται $\frac{0}{0}$ διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμ-
ατος αὐτοῦ, ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος, ἀντι-
ακαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ προ-
ύπτον ἐκ τοῦ δοθέντος, μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὅρων του.

. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{3x^3}{x-2}$ διὰ $x=2$.
ν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ 2 εὑρίσκομεν

$$\frac{3.2^3}{2-2}=\frac{3.8}{0}=\frac{24}{0}.$$

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἐνίοτε ἡ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος λαμβάνει φὴν κλάσματος μέν, ἀλλ' ἔχοντος παρονομαστὴν τὸ 0 καὶ ἀρ τὴν ὡρισμένον τινα ἀριθμόν. Ἐν γένει, ἔστω ὅτι ἡ τιμὴ κλ τός τινος εἶνε ἡ $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμόν τινα διάφορο μηδενός. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι, ***«ἡ παράσ*** $\frac{\alpha}{0}$ ***οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν, ἢ ὅτι, ἡ τιμὴ τοῦ*** $\frac{\alpha}{0}$ ***εἶνε με τέρα ἀπολύτως (§ 6) παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτ γάλου».*** Καὶ τὸ μὲν ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν, φαίνε τοῦ ὅτι, οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις πολλαπλασιαζόμενο 0, δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸ α, ἀφοῦ, τὸ 0 ἐπὶ οἱονδ ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενον δίδει ἐξαγόμενον 0.

Ἐξ ἄλλου ὅμως ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος, ἔχ ἀριθμητὴν ὡρισμένον $\alpha \neq 0$, εἶνε πολὺ μικρός, ἔστ 0,000...1, τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha}{0{,}000\ldots1}=\alpha\times\frac{1000\ldots}{1}=1000\ldots\alpha.$$

Δηλαδὴ εἶνε ἀριθμὸς ἀπολύτως πολὺ μέγας· καὶ ὅσῳ ὁ πα μαστὴς ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ 0, τόσῳ τὸ κλ γίνεται ἀπολύτως μεγαλύτερον καὶ τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα κὸν ἀριθμόν, λέγομεν δὲ ὅτι ***τείνει*** εἰς τὸ ἄπειρον καὶ παρ νομεν τοῦτο διὰ τοῦ συμβόλου $\pm\infty$ ***(θετικὸν ἢ ἀρνητ ἄπειρον)***, καθόσον ὁ ἀριθμητὴς α εἶνε θετικὸς ἢ ἀρνητικός

Διὰ τοῦτο πάντοτε, ***«ἐν πάσῃ διαιρέσει πρέπει νὰ ὑπ τωμεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ 0».***

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰ σημ μένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

246. α') $\frac{x^3+2x^4}{x}$ διὰ $x=0$. β') $\frac{y^4-\alpha^4}{y^2-\alpha^2}$ διὰ $y=\alpha$.

γ') $\frac{x^2-\alpha^2}{x^2-\alpha^3}$ διὰ $x=\alpha$. δ') $\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$ διὰ $\alpha=\beta$.

α′) $\dfrac{(x^3+2\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$ β′) $\dfrac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}$ διὰ $x=\alpha$.

γ′) $\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}$ διὰ $x-1$. δ′) $\dfrac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1}$ διὰ $\alpha=-1$.

α′) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2-x-1}$ διὰ $x=-1$. β′) $\dfrac{x^2-6x+15}{x^2-8x+4}$ διὰ $x=5$.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

῾Ο κανὼν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κλασματικῶν
θμῶν ἰσχύει καὶ διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ἀλγεβρικῶν
σματικῶν παραστάσεων, ἀποδεικνύεται δ' ὁμοίως.

ω ἔχομεν ὅτι $\dfrac{\alpha}{\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}$.

$$\frac{\alpha}{\mu}+\frac{\beta}{\nu}=\frac{\alpha\nu+\beta\mu}{\mu.\nu},\quad \frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\gamma}.$$

$$\frac{20xy}{9}-\frac{25xy}{9}-\frac{4xy}{9}=-\frac{9xy}{9}=-xy.$$

$$\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=\frac{4x}{20}-\frac{5x}{20}=-\frac{x}{20}.$$

᾿Ασκήσεις.

῾Ομὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πρά-
ν καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς ση-
ουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

$\dfrac{2(x+3)}{7}-\dfrac{3(x-3)}{4}+\dfrac{5(x+5)}{12}+\dfrac{x+2}{21}$. Διὰ $x=-0{,}5$.

$\dfrac{2}{2x+5}+\dfrac{4}{3x+7}-\dfrac{2(5x+12)}{(2x+5)(3x+7)}$. Διὰ $x=2$.

῾Ομὰς δευτέρα. ῾Ομοίως τῶν

$\dfrac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-3\beta}-\dfrac{2\alpha-3\beta}{2\alpha+3\beta}+\dfrac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{(4\alpha^2-9\beta^2)}$. Διὰ $\alpha=1$, $\beta=2$.

$\dfrac{4\alpha}{x^2-4}+\dfrac{\alpha}{x-2}-\dfrac{\gamma}{x^2-4x+4}$. Διὰ $x=-3$, $\alpha=2$, $\gamma=-1$.

$\dfrac{\alpha}{\alpha x+x^2}+\dfrac{\beta}{\alpha^2-\alpha x}+\dfrac{2\alpha}{\alpha^2-x^2}$. Διὰ $x=3$, $\alpha=\beta=\gamma=-1$.

῾Ομὰς τρίτη. ῾Ομοίως τῶν

254. $5x^2+3xy+4y^2+\frac{x^3+y^3}{x-y}$. Διὰ $x=-1$, $y=5$

255. $\frac{1}{2x^2+2x}+\frac{5}{5x^2-5x}-\frac{3}{10x^2-10x}$. Διὰ $x=-3$.

256. $\frac{1}{(x-3)(x+5)}+\frac{1}{(5-x)(x-7)}-\frac{2}{(x-7)(3-x)}$. Διὰ

257. $\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$. Διὰ $\alpha=1$, $\beta=7$.

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

§ 107. Ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ κλασματικῶν ἀρι ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ὅροι αὐτῶν εἶνε ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοί, καὶ διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, ἀ κνύεται δ' ὁμοίως. Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\frac{12x^2y}{7\omega\varphi^2}\cdot\frac{14\omega^2\varphi}{3xy^2}=\frac{12x^2y.14\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2.3xy^2}=\frac{12.14x^2y\omega^2\varphi}{7.3xy^2\omega\varphi^2}=\frac{8x\omega}{y\varphi}.$$

Παρατηρητέον ὅτι, δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιοῦμεν τὸν ἀρ τὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων μὲ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ἐξ α πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμου, ἂν εἶνε δυνατόν.

Π. χ. εἶνε $\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\cdot\frac{\alpha-x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\alpha+x}{\alpha^2+x^2}$.

Ἐπίσης $\frac{x(\alpha+x)}{\alpha(\alpha-x)}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha-x)^2}{x^2(\alpha+x)^2}=\frac{x(\alpha+x)}{\alpha(\alpha-x)}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha-x)(\alpha-x)}{x^2(\alpha+x)(\alpha+x)}=$

$$=\frac{\alpha(\alpha-x)}{x(\alpha+x)}.$$

§ 108. Ὁ κανὼν διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ ἀρι ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δι' α βρικοῦ κλάσματος. Οὕτω π. χ. τὸ

$$\frac{12\alpha^2}{\beta^2}:\frac{3\alpha\beta^2}{10}=\frac{12\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{10}{3\alpha\beta^2}=\frac{120\alpha^4}{3\alpha\beta^2}=\frac{40\alpha}{\beta^4}.$$

Τὸ $\frac{15(\alpha+\beta)}{22(\alpha-\beta)}:\frac{5(\alpha+\beta)^2}{11(\alpha-\beta)}=\frac{15(\alpha+\beta)}{22(\alpha-\beta)}\cdot\frac{11(\alpha-\beta)}{5(\alpha+\beta)^2}=\frac{3}{2(\alpha+\beta)}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα

258. α') $\frac{\alpha x+\alpha y}{\gamma x-\gamma y}\times\frac{\gamma x^2-\gamma y^2}{\beta x+\beta y}$. β'] $\frac{3x^2-6xy+3y^2}{x+y}\times\frac{x^3+y^3}{6(x-y)}$.

) $\left(1+\frac{x^4-2x^2y^2+y^4}{4x^2y^2}\right).\ (x^4-2x^2y^2+y^4).$

$\alpha')\left(\frac{2x^2+3xy}{2x^2-3xy}\right)^2 \beta')\left(\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}\right).\left(\frac{\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta}\right).$

. ***Ὁμὰς δευτέρα.*** Ἔχει τις 5λ δραχμάς. Ἐκ τούτων ἐξοδεύει ρῶτον τὸ τρίτον, ἔπειτα τὸ ἕβδομον καὶ τέλος τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀρχι-οῦ ποσοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

. Ἔχει τις (β—1) δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει τὸ τέταρτον αὐτῶν καὶ — τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

. Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 90 δρ. καὶ ἔπειτα ὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου· πόσαι δραχμαὶ τοῦ μένουν;

. Ἔχει τις γ δραχμὰς καὶ χάνει πρῶτον τὰ δύο ἕβδομα αὐτῶν, τειτα τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν· τέλος χάνει άλιν τὸ ἓν τρίτον τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν. Πόσαι ραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

. Ἀπὸ μίαν βρύσιν τρέχουν 7 ὀκ. ὕδατος εἰς 5^δ · ἀπὸ ἄλλην 9 κ. εἰς 4^δ. Πόσαι ὀκάδες θὰ τρέξουν καὶ ἐκ τῶν δύο, ἐὰν ἡ μὲν ρώτη τρέχῃ ἐπὶ τ^δ, ἡ δὲ ἄλλη ἀνοιχθῇ 2^δ βραδύτερον, κλεί-ουν δὲ συγχρόνως;

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πρά-ων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς ση-ειωμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

. $\alpha')\ \frac{12xy^2}{7\alpha^2\beta}:\frac{8x^2y}{25\alpha\beta^2}.\ \beta')\ \frac{12\alpha^2}{5\beta^2\gamma^3}:\frac{3\alpha\beta^2}{10\gamma^3}.$ Διὰ $x=y=1,\ \alpha=2,\ \beta=\gamma=3.$

) $\alpha^3:\left(\alpha^2:\frac{\alpha}{\beta}\right).\ \delta')\ \frac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2}:\left(\frac{12\alpha^2\beta}{7\gamma^2}:4\beta^2\gamma\right).$ Διὰ $\alpha=2,$ $=\gamma=-3.$

. $\alpha')\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{\alpha}{\beta}-1\right):\frac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}.\ \beta')\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{\alpha^4-\beta^4}{x^4-2x^2y^2+y^4}\right).$

$\frac{\alpha^2+\alpha x+\alpha y+xy}{\alpha^2-\alpha x-\alpha y+xy}:\frac{\alpha^2-\alpha x+\alpha y-xy}{\alpha^2+\alpha x-\alpha y-xy}$ Διὰ $x=y=3.$

. $\left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\frac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}.$ Διὰ $\alpha=\beta=2.$

. ***Ὁμὰς τετάρτη.*** Ἔχει τις α δραχμάς. Τὸ ποσὸν τοῦτο αὐξάνει κατὰ τὸ πέμπτον αὐτοῦ. Ἐξοδεύει τὰ 0,25 τῶν ὅσον ἔχει, καὶ αὐξάνει ὅσα τοῦ μένουν κατὰ τὰ 0,5 αὐτῶν. Πόσα εἰς τὸ τέλος ;

270 Ἔχων τις α δραχμάς, τὰς αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτῶν. Ἐξο ἔπειτα 5 δραχμάς, καὶ τὸ ὑπολειφθὲν αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐ ἐξοδεύει δὲ πάλιν 5 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς τὸ τέ

271, Χωρικάς, τις ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν (16α+30) αὐγὰ πρὸς λησιν. Ἐν πρώτοις ἐπώλησε τὰ 0,5 τῶν ὅσων ἔφερε καὶ ἓν α ἐπὶ πλέον· ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὰ 0,5 καὶ ἀκόμη ἓν αὐ Ὁμοίως ἐπώλησε καὶ τρίτην καὶ τετάρτην φοράν. Πόσα τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ τέλος ;

Σύνθετα κλάσματα.

§ *109.* ***Σύνθετον κλάσμα*** καλεῖται κλάσμα τι, ἐὰν τοὐλάχιστο τῶν ὅρων του δὲν εἶνε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ ἀκεραία ἀλγεβ παράστασις.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\dfrac{3x}{\dfrac{4x-1}{4y}}$

εἶνε σύνθετον, διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶνε κλασματικὴ ράστασις.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶνε πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀρι τοῦ διὰ παρονομαστοῦ του, ἕπεται ὅτι ἔχομεν,

$$\frac{3x}{\dfrac{4x-1}{4y}}=3x:\frac{4x-1}{4y}=3x\times\frac{4y}{4x-1}=\frac{12xy}{4x-1}.$$

Ἐν γένει, «***ἵνα κλάσμα σύνθετον καταστήσωμεν ἁπλ ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρ στοῦ του***».

Συντομώτερος τρόπος διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετό κλάσμα ἁπλοῦν, εἶνε ὁ ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρανομαστῶν τῶν κλασμάτων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος συνθέτου κλάσμα καὶ ἐπ' αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δοθέ κλάσματος.

Ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-x}-\dfrac{\alpha}{\alpha+x}}{\dfrac{x}{\alpha-x}+\dfrac{x}{\alpha+x}}$

Τὸ ἐ. κ. π. τῶν $\alpha-x$ καὶ $\alpha+x$ εἶνε τὸ γινόμενον αὐτῶν $-x)(\alpha+x)$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος κλά-ιτος ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha(\alpha+x)-(\alpha-x)\alpha}{x(\alpha+x)+x(\alpha-x)}=\frac{\alpha^2+\alpha x-\alpha^2+\alpha x}{\alpha x+x^2+\alpha x-x^2}=\frac{2\alpha x}{2\alpha x}=1$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ αί των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $\dfrac{\frac{x}{\mu}+\frac{y}{\mu}}{\frac{\omega}{\mu}}$. β') $\dfrac{\frac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}+1}{1+\frac{\nu}{\mu+\nu}}$. γ') $\dfrac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1}$. δ') $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}}{x-\frac{1}{x}}$.

Διὰ $\left\{\begin{array}{l} x=y=\omega=\mu=4,\ \nu=-2. \\ \alpha=2,\ \beta=1. \end{array}\right.$

α') $\dfrac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}}$. Διὰ $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=2$. β') $\dfrac{x+y}{x+y+\dfrac{1}{x+y+\frac{1}{x+y}}}$

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\frac{1}{x}}}-\frac{1}{y(xy\omega+x+\omega)}.$$ Διὰ $x=2$, $y=\omega=1$.

α') $\dfrac{\frac{x^2-y^2-\omega^2-2y\omega}{x^2-y^2-\omega^2+2y\omega}}{\frac{x-y-\omega}{x+y-\omega}}$. Διὰ $x=3$, $y=1, \omega=-1$. β') $\dfrac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}$.

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{1-x}}},\ x=-3.$$ δ') $\dfrac{\frac{\alpha^2-4x^2}{\alpha^2+4\alpha x}}{\frac{\alpha^2-2\alpha x}{\alpha x+4x^2}}$ $\alpha=1$. $x=3$.

α') $\dfrac{\dfrac{\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{x^2}}{\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}}}{\alpha-x}$ $\alpha=2$, $x=2$. β') $\dfrac{1+\frac{x-\alpha}{x+\alpha}}{\dfrac{\frac{x+\alpha}{x-\alpha}-1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}}}$, $x=2$. $\alpha=3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

Ὁρισμοὶ καὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

§ 110. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3x=15$.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκομεν ὅτι ὅταν τ
γίνῃ 5, ἡ ἰσότης ἀληθεύει. Πράγματι διὰ $x=5$ εἶνε

$$3.5=15, \text{ ἤτοι } 15=15.$$

Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀρ
μοὺς ἴσους, ἤτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτ
$3x=12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x=4$. Ἐὰν ἐξ ἄλλου
τὴν ἰσότητα $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
ἀντικαταστήσωμεν τὸν α καὶ β δι' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν, π
τῶν $\alpha=1$ καὶ $\beta=3$, ἢ τῶν $\alpha=5$ καὶ $\beta=7$, παρατηροῦμεν
προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $4=4$, $12=12$. Ἐκ τούτων συνάγο
ὅτι, ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀ
θεύουν μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματά των λάβουν
μοδίας τιμάς, καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας
τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Τὰς πρώτας καλοῦμεν ***ἐξισώσεις***
δ' ἄλλας ***ταὐτότητας***. Ὥστε,

***«ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόν
ὅταν τὸ γράμμα ἢ γράμματα αὐτῆς λάβουν ἁρμοδίας τιμά***

***«Ταὐτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πά
τὰς τιμὰς καθενὸς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει».***

Καλοῦμεν ***ἀγνώστους*** ἐξισώσεώς τινος τὰ γράμματα, τὰ ὁπ
πρέπει νὰ λάβουν ὡρισμένας τιμάς, διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἡ ἐξίσω

Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντι
θιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν. Αἱ τι
τῶν ἀγνώστων ἐξισώσεώς τινος λέγονται καὶ ***ῥίζαι τῆς ἐξισώσε***

Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνώστους ἐξισώσεώς τινος
τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου x, y, ω, φ,..., τ
δὲ γνωστοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν α, β, γ,..

Λύσις ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγ
στων αὐτῆς, ἢ ἡ εὕρεσις τῶν ῥιζῶν ταύτης.

§ 111. ***Ἰσοδύναμοι*** λέγονται δύο ἐξισώσεις, ἐὰν ἐπαληθεύων
διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, ἤτοι·

α') ***«ἐὰν πᾶσα ῥίζα τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἶνε καὶ ῥ*** *ς δευτέρας· β') πᾶσα ρίζα τῆς δευτέρας εἶνε ρίζα καὶ τῆς ώτης».*

Αἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος παραστάσεις λέγονται *λη αὐτῆς (πρῶτον ἢ ἀριστερόν, καὶ δεύτερον ἢ δεξιόν).*

Ἐξίσωσίς τις λέγεται *ἀριθμητικὴ* μέν, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὅρων ς περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων· *ἐγγράμματος* δέ, τοὐναντίον. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις $8x+12x-3=4x$ εἶνε ἀριθμη- ή, ἐνῶ ἡ $3x-5\alpha=8\beta+2$ εἶνε ἐγγράμματος.

Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων,

«ἐὰν εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσω- ν) τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».

Πράγματι, ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $8x=32$ (1)

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π.χ. 6. προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $8x+6=32+6$, (2) ὁποία λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διότι ἡ τιμὴ τοῦ ἰς τὴν (1) εἶνε ὁ 4, καθὼς εὐκόλως φαίνεται καὶ εἶνε

$$8.4=32. \quad (1')$$

Ἀλλ' ἂν εἰς τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν π. χ. 6 προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι. Ἦτοι θὰ εἶνε καὶ

$$8.4+9=32+6. \quad (2')$$

Ἀντικαθιστῶμεν καὶ εἰς τὴν (2) τὸ x διὰ τοῦ 4. Εὑρίσκομεν μὲν τοῦ πρώτου μέλους της $8.4+6$, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου $32+6$. λὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα, ὡς εἴδομεν (2'). Ὥστε ἡ ρίζα ῆς (1) εἶνε ρίζα καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντιστρόφως· ἡ ρίζα τῆς (2) ε καὶ τῆς (1). Διότι ἐπειδὴ ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν 4, θὰ ἔχωμεν, θέσωμεν εἰς αὐτὴν ἀντὶ τοῦ x τὸ 4, $8.4+6=32+6$. (2') Ἂν δὲ ἀπὸ τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν 6, ἔχωμεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $8.4=32$ (1')

Θέτομεν τώρα εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὴν ρίζαν ῆς δευτέρας. Εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς , ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τὸ 32. Ἀλλ' αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι . Ἑπομένως ἡ ρίζα τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶνε ρίζα καὶ τῆς ότης. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶσαν ἐξίσωσιν

Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἓν μέλος ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x-\beta=\alpha$.

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν β, λαμβάνομεν τὴν

ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν (πρὸς τὴν προηγουμένην), $x—β+β=$
Ἐπειδὴ δὲ εἶνε $—β+β=0$, μένει $x=α+β$.

Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει, καὶ ἐὰν εἰς τὴν δοθεῖσ σωσιν μεταφέρωμεν τὸ $—β$ ἐκ τοῦ α΄ μέλους εἰς τὸ β΄ μὲ τίθετον σημεῖον.

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x+β=α$, λαμβάνομεν $x=$ ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἀφαιρέσωμεν τὸ β, ἢ ἂν μ ρωμεν τὸ β εἰς τὸ β΄ μέλος μὲ ἀντίθετον σημεῖον. Ὅθεν ἔχομ

«εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρο ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ σημεῖόν

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι,

«ἂν ὅρος τις ὑπάρχῃ εἰς τὰ μέλη ἐξισώσεως μὲ τὸ σημεῖον δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείπωμεν, καὶ ἡ προκύπ ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν».

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $γ—x=α—β$. (

Ἐὰν μεταφέρωμεν καθένα ὅρον αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μέλο της μὲ ἀντίθετον σημεῖον, εὑρίσκομεν

$β—α=x—γ$, ἢ $x—γ=β—α$.

Ἡ (4) προκύπτει ἐκ τῆς (3) καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σ καθενὸς τῶν ὅρων αὐτῆς. Ὥστε,

«ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἐξισώ προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».

Προφανῶς ἔχομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A=B$, ὅπου τὰ Α, Β στάνουν τὰ μέλη αὐτῆς, εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A—B=$ ἢ μὲ τὴν $A—B=0$.

§ 114. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεω

«Ἐὰν τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν (ἢ διαι μεν) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (διάφορον τοῦ μηδενός), π πτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος».

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $7x=35$. (

Λέγω ὅτι καὶ ἡ $\frac{7x}{3}=\frac{35}{3}$. (

εἶνε ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν. Διότι, καθὼς εὐκόλως φαίνε ρίζα τῆς (1) εἶνε ἡ $x=5$. Ἄρα, ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ 5 εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔχομεν $7.5=35$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὸ x διὰ τοῦ 5 καὶ σκομεν, ἀπὸ μὲν τὸ πρῶτον μέλος $\frac{7.5}{3}$, ἀπὸ δὲ τὸ δεύτερο

Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶνε ἴσα. Διότι προκύπτουν ἀπὸ ους ἀριθμοὺς 7.5 καὶ 35, ἀφοῦ τοὺς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 3. ἰπομένως ἡ ρίζα $x=5$ τῆς (1) εἶνε ρίζα καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντι-ρόφως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν εὑρεθῇ ἡ ρίζα τῆς (2), αὐτὴ θὰ νε ρίζα καὶ τῆς (1). Διότι, ἡ ρίζα αὐτὴ εἶνε ἡ 5, ὡς εὐκό ως φαίνεται, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{7.5}{3}=\frac{35}{3}$. Ἀλλὰ τότε καὶ 7.5 εἶνε ον μὲ 35. Δηλαδὴ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) ἐπαληθεύεται διὰ τὴν αὐ-ν τιμὴν τοῦ $x=5$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδή, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ έλη ἐξισώσεώς τινος ἐπὶ 0 προκύπτει $0=0$, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ ῦ μηδενὸς εἶνε ἀδύνατος, ἕπεται ὅτι, ***«ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ὲν ἀληθεύει, ὅταν ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζο εν ἢ διαιροῦμεν τὰ μέλη ἐξισώσεως εἶνε*** 0».

Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἡ τοία περιέχει γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων τῆς ἐξισώσεως, νέα ἐξίσωσις εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν μόνον διὰ τὰς μὰς τῶν γραμμάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν παράστασιν. Ι. χ. ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε $\alpha-\beta$, πρέπει ὰ εἶνε $\alpha-\beta\neq 0$ (σημειώνομεν δι' αὐτὸ καὶ οὕτω $\alpha\neq\beta$). Διότι, ν εἶνε $\alpha-\beta=0$, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτω-ν, τὴν ὁποίαν ἐξῃρέσαμεν.

Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶνε παράστασις, ἔχουσα α ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἡ προ-ύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶνε πάντοτε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν . χ. ἡ ἐξίσωσις $3x=4$ καὶ ἡ $3x(x-2)=4(x-2)$ δὲν εἶνε ἰσο-ύναμοι. Διότι, ἡ δευτέρα ἔχει τὴν ρίζαν 2, καθὼς φαίνεται, ἂν έσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ 2 εἰς αὐτήν, ἐνῷ ἡ πρώτη δὲν τὴν ἔχει.

Ἀπαλοιφὴ τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως.

Καλοῦμεν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἐξισώσεως τὴν ὕρεσιν ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ἄνευ παρονομαστῶν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{3}-\frac{x-1}{11}=x-9.$

Ἐὰν τὰ δύο ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρο-ομαστῶν 3 καὶ 11, δηλαδὴ ἐπὶ 33, καὶ ἁπλοποιήσωμεν, εὑρί-κομεν τὴν $11x-3x+3=33x-297.$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶνε ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν καὶ ἰσο-ύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Ἐν γένει, *«ἐὰν ἐξίσωσις ἔχῃ ὅρους κλασματικούς, δ μεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομασ ἐάν 1) εὕρωμεν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλα των· 2) πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπ εὑρεθὲν ἐ.κ.π.· 3) ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλα των».*

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$.

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶνε

$$(x-5)\,(x-6)\,(x-8)\,(x-9).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν,

$$(x-4)\,(x-6)\,(x-8)\,(x-9)-(x-5)^2(x-8)\,(x-9)=$$
$$=(x-7)\,(x-5)\,(x-6)\,(x-9)-(x-8)^2(x-5)\,(x-6),$$

ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀπηλλαγμένη ρονομαστῶν.

Διὰ συντομίαν, ἀντὶ νὰ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη ἐξισώ ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ νὰ ἁ ποιοῦμεν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάζωμεν καθένα ἀριθμητὴν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ παρ μαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου, καὶ νὰ παραλείπωμεν τοὺς παρον στάς. Π.χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3x}{4}-\frac{2x-1}{5}-1=\frac{2}{3}$$

ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$\frac{\overbrace{3x}^{15}}{4}-\frac{\overbrace{2x-1}^{12}}{5}-\frac{\overbrace{1}^{60}}{1}=\frac{\overbrace{2}^{20}}{3}.\ (\text{ἐ.κ.π. } 60).$$

ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 15, 12, 60, 20 εἶνε τὰ ἀντίστοιχα πη τοῦ ἐ.κ,π. 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3. τὰ πηλίκα αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθ τὰς τῶν ὅρων, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψει πλέον τοὺς παρονο στάς. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὑρίσκομεν

$$45x-24x+12-60=40.$$

§ 116. Καλοῦμεν ***βαθμὸν*** ἐξισώσεως, τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἓν μ εἶνε πολυώνυμον περιέχον ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, τ ἄλλο 0, τὸν βαθμὸν τοῦ πολυωνύμου τούτου ὡς πρὸς τοὺς ἀγ στους. Π. χ. ἡ ἐξίσωσις $3x^2-6x+2=0$ εἶνε δευτέρου βαθμ

$xy-5y^2+2x-1=0$ εἶνε β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, ἡ
$-3=0$ εἶνε α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Δύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν
$$3x-7=14-4x.$$
Ἐὰν τὸν ὅρον $-4x$ μεταφέρωμεν (καταλλήλως) εἰς τὸ πρῶτον
ος, τὸν δὲ -7 εἰς τὸ δεύτερον, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον
ωσιν $$3x+4x=14+7$$
Ἐκτελοῦντες εἰς αὐτὴν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑ-
κομεν $$7x=21.$$
Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 7 τοῦ
προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $x=3$, ἡ ὁποία εἶνε ἰσοδύναμος μὲ τὴν
εῖσαν, καὶ ἀληθεύει, ἂν τὸ x γίνῃ ἴσον μὲ 3. Ἄρα καὶ ἡ ρίζα
δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε ἡ 3.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $1-4(x-2)=7x-3(3x-1)$.
Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ -4 ἐπὶ $(x-2)$
τοῦ -3 ἐπὶ $(3x-1)$ εὑρίσκομεν, $1-4x+8=7x-9x+3$.
Εἰς αὐτὴν μεταφέρομεν (καταλλήλως) τοὺς μὲν ὅρους τοὺς ἔχον-
τὸν x εἰς τὸ πρῶτον μέλος, τοὺς δὲ ἄλλους εἰς τὸ δεύτερον,
προκύπτει ἡ ἰσοδύναμος ἐξίσωσις $-4x+9x-7x=3-1-8$,
μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $-2x=-6$.
Διαιροῦντες τὰ μέλη ταύτης διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x εὑρί-
μεν ὅτι ἡ ζητουμένη τιμὴ τοῦ x εἶνε ἡ $x=\frac{-6}{-2}=3$.

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξσωσις
$$\frac{x}{3}-\frac{x-1}{11}=x-9.$$
Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ
ονομαστῶν, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π.
1 τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, ἢ καθένα τῶν ἀριθμητῶν
ιστοίχως ἐπὶ 11· 3· 33· 33 καὶ εὑρίσκομεν
$$11x-3x+3=33x-297.$$
Ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $x=12$.
Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι,
***«διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνω-
ν· 1) ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, ἐὰν ἔχῃ
οι εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν)·***

2) ἐκτελοῦμεν τὰς σημειωμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύν *3) χωρίζομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστο τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτόν, εἰς τὴν νέαν ἐξίσωσιν· 4) ἐκ μεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ διαιροῦμεν τὰ μέ τελευταίας διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου».*

Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως.

§ 118. Ἐὰν μετὰ τὴν λύσιν δοθείσης ἐξισώσεως ἀντικαταστήσωμεν τὴν (ἢ εἰς ἰσοδύναμόν της) ἀντὶ τοῦ ἀγνώστου τὴν εὑρεθεῖσα αὐτοῦ, θὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς ἴσους, ἢ μίαν ταὐτότητα ὡ τὰ ἄλλα γράμματα τῆς ἐξισώσεως, ἐὰν ἔχῃ τοιαῦτα. Ἡ ἐργασί διὰ τῆς ὁποίας δεικνύομεν, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ τοῦ ἀγνώστ θεύει τὴν ἐξίσωσιν, λέγεται ***ἐπαλήθευσις τῆς ἐξισώσεως*** ἐὰν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{x-\alpha}{5}=2\alpha$, εὑρίσκομεν x = Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀντὶ τοῦ x τὸ 11α, εὑρ $\frac{11\alpha-\alpha}{5}=2\alpha$, ἢ $11\alpha-\alpha=10\alpha$, ἢ $10\alpha=10\alpha$, ἡ ὁποία εἶ τότης ὡς πρὸς τὸ α.

Ἀσκήσεις. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

276. α′) $x+17=3x+1$. β′) $5x-4=38-x$. γ′) $6x+25=$
δ′) $4(3x+5)-70=2x$. ε′) $11(2x-15)-x=6$.

277. α′) $\alpha x=\alpha+1+x$. β′) $4\alpha^2x-1=x+2\alpha$ γ′) $\beta x+\alpha x=$

Διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta$

§ 119. Ἀπὸ πᾶσαν ἐξίσωσιν ἔχουσαν ἕνα ἄγνωστον, τὸν α′ βαθμὸν προκύπτει ἰσοδύναμος αὐτῆς τῆς μορφῆς αχ μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὅρων εἰς τὸ α′ μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίω ὅπου τὰ α, β εἶνε ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνω

Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αχ ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἐ τήσεις· 1) ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει μίαν ρίζαν ἢ δύναται καὶ περισσοτέρας; 2) τί πρέπει νὰ εἶνε τὸ α καὶ β δι μίαν ρίζαν, καὶ τί διὰ νὰ ἔχῃ περισσοτέρας, ἢ καμμίαν ;

Ἐκ τῆς $\alpha x+\beta=0$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της α

1ον) Ἂν εἶνε $\alpha\neq0$, θὰ ἔχωμεν $x=-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἤτοι,

≠0, ἡ τιμὴ τοῦ x εἶνε ὡρισμένη καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην ῥίζαν, ἢ μίαν νην λύσιν.

2ον) Ἐὰν εἶνε $\alpha=0$, καὶ $\beta\neq0$, θὰ ἔχωμεν $0.x=\beta$, ἢ $0=\beta$, (διότι 0 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν δίδει γινόμενον 0), τὸ ὁποῖον ε ἀδύνατον, ἐπειδὴ ὑπετέθη τὸ $\beta\neq0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐ- λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ἀδύνατος, ἢ ὅτι δὲν ἔχει μίαν λύσιν,

3ον) Ἐὰν εἶνε $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $0.x=\beta$, ἢ $0=0$ καὶ φανῶς τὸ x δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν, λέγομεν δέ, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε ταυτότης (§ 110) ἢ ὅτι ἔχει ἀπεί- ους ῥίζας δηλαδὴ πάντας τοὺς ἀριθμούς.

Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περι- ώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ $\alpha x+\beta=0$.

Λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta=0$.

) ***Ἂν εἶνε*** $\alpha\neq0$ ***καὶ*** β ***οἱονδήποτε, ὑπάρχει μία ῥίζα, ἡ*** $x=\dfrac{-\beta}{\alpha}$.

α) ***Ἂν εἶνε*** $\alpha=0$, $\beta\neq0$ ***δὲν ὑπάρχει καμμία ῥίζα.***

) ***Ἂν εἶνε*** $\alpha=0, \beta=0$ ***ὑπάρχουν ἄπειροι ῥίζαι (ταὐτότης).***

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Εὕρετε τίνες τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχουν αν λύσιν ἢ καμμίαν ἢ εἶνε ταυτότητες.

) $\dfrac{3}{2}x-5+x=\dfrac{x-10}{2}+2x$. β΄) $2x-5=\dfrac{x+7}{2}+\dfrac{3}{2}x$.

) $\dfrac{x-\alpha}{2}+\dfrac{x+\beta}{3}=\dfrac{5x}{6}-1$. β΄) $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{x}{\beta}+1=\dfrac{(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{\alpha\beta}$.

) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{5}-3=2x-7$. δ΄) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x}{2}+5=\dfrac{5x}{6}+2$.

Ποίας σχέσεις πρέπει νὰ πληροῦν τὰ α καὶ β, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{x-\beta}{3}+\dfrac{x}{2}=3x-\alpha$ ἔχῃ μίαν λύσιν, καμμίαν ἢ νὰ εἶνε ἀδύνατος.

Προσδιορίσατε τὸ α ὥστε ἡ $\dfrac{\alpha x-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}=4$ νὰ εἶνε ἀδύνατος.

ὰς δευτέρα. Νὰ γίνῃ ἡ λύσις καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐξισώσεων.

) $3(x+4)=x+2$. β΄) $\dfrac{x-1}{2}=3x-1$. γ΄) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{x-3}{3}$.

) $\dfrac{3x}{2}-1=4+\dfrac{x}{4}$ ε΄) $\dfrac{2}{3}=\dfrac{x-7}{5}$. στ΄) $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}=5$.

283. $27x-5(2x-5)=6(3x-5)+5(2x-1)-2.$

284. $\frac{3x}{2}+\frac{2x}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{4x}{6}+\frac{5x}{12}=\frac{7x}{12}+238.$

285. $\frac{2(3x-5)}{2}-\frac{5(5x+10)}{12}=\frac{6(3x+2)}{2}-71.$

286. $x-\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}\right)-\left(\frac{3x}{4}-\frac{4x}{6}\right)-\frac{6x}{6}=66.$

287. $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right).$

288. $\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{2}{(x-2)(x-3)}+\frac{16}{(x-3)(x-4)}=\frac{1}{(x-2)\ldots}$

289. $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2}+\frac{4}{x^2(x-2)}=0.$

Ὁμὰς τρίτη, Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις.

290. α΄) $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=2\alpha^2.$ β΄) $\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{x}{\alpha\gamma}=\frac{1}{\beta\gamma}.$

291. α΄) $\alpha(\nu x-\mu+\beta)=\beta(\mu-\nu x+\varrho).$ β΄) $(\alpha^2+\beta^2)x+2\alpha\beta x=\alpha^2\ldots$

292. $2\mu(x-\mu)-2\nu(\nu-x)=(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2.$

393. $(x+1)^2-\alpha(5-2\alpha-x)=(x-2\alpha)^2+5.$

294. α΄) $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha+\beta}=2\alpha+\beta.$ β΄) $\frac{\beta x+\alpha}{2\alpha^2\beta}+\frac{x-1}{3\beta^2}=\frac{3\beta^2+5\alpha\ldots}{6\alpha^2\beta(\alpha-\ldots}$

295. α΄) $\frac{2x+3\beta}{x(x-\alpha)}+\frac{3x-5\alpha}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{5}{x-\beta}.$ β΄) $\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{x-\beta}=x-\ldots$

296. $\frac{8\alpha}{(x+2)^2}+\frac{3x}{(x-2)^2}-\frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2}=-(\alpha+\beta).$

§ 120. Ἐφαρμογὴ τῶν ἐξισώσεων εἰς τὴν λύσιν προβλημά…

Πρόβλημα λέγεται πρότασις εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται ν… ρεθῇ ἓν ἢ περισσότερα ἄγνωστα ἐξαρτώμενα ἐξ ἄλλων γνω… ἢ δεδομένων. Τὰ διδόμενα καὶ τὰ ζητούμενα εἶνε ἀριθμοί, … περιεχόμενα εἰς τὸ πρόβλημα ποσὰ μετρούμενα μὲ τὴν μο… αὐτοῦ ἕκαστον παριστάνεται ὑπὸ ἀριθμοῦ.

Λύσις ἑνὸς προβλήματος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ζητουμ… ἀγνώστων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα παριστάνομεν συνήθως διὰ τῶν γ… μάτων x, y, ω..., τὰ δὲ γνωστὰ δι᾿ ἀριθμῶν ἢ διὰ τῶν α, β, γ, …

Διὰ νὰ λυθῇ ἓν πρόβλημα, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ … πληροῦν ὡρισμένας τινὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν ὅ… τοῦ προβλήματος. Ἐκείνους ἐκ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν … σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δ…

καλοῦμεν **ἐπιτάγματα**. Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος. Π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα: *εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερη κατὰ 6»* τὸ ἐπίταγμα εἶνε ὅτι, *«τὸ διπλάσιον εἶνε μεγαρον αὐτοῦ κατὰ 6»*. Ἐπομένως, ἐὰν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς σταθῇ διὰ τοῦ x, τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶνε 2x. Ἐπειδὴ 2x θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις αὶ x+6 νὰ εἶνε ἴσαι. Οὕτω ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν =x+6, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν x=6.

οτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστάνει τὴν τιμὴν ποσοῦ τινος, ποῖον ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους ς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιούτους ὅρους καεν **περιορισμούς**. Π. χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματός τινος ται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωὅτι, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός.

γένει, ***διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος, ἐργαζόα ὡς ἑξῆς. 1) Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώ τοῦ προβλήματος καὶ τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ***, ἐκ τῶν ίων αἱ πρῶται ἐκφράζουν τὰς σχέσεις τὰς συνδεούσας τὰ ζηιενα μὲ τὰ δεδομένα αὐτοῦ. 2) ***Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ώσεις καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τίνες εἶνε οἱ ἀριθμοί***, οἵτινες ανται νὰ λύσουν τὸ πρόβλημα. 3) Ἐξετάζομεν ἂν οἱ ἐκ τῆς εως εὑρεθέντες ἀριθμοὶ πληροῦν καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ βλήματος.

Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος δὲν ἔχει περιορισμόν.

1) *«Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶνε ἴσον μὲ τὸν ἀριθ-, αὐξηθέντα κατὰ 60. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός ;»*

Ἔστω ὅτι x εἶνε ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ τετραπλάσιον οῦ θὰ εἶνε 4x, τὸ δὲ x+60 παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ηὐξηον κατὰ 60. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος θὰ εἶνε =x+60 ἢ 3x=60. Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν x=20 καὶ ύσις εἶνε δεκτή.

2) *«Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε 25, τὸ δὲ ἑξαπλάσιον ῦ μεγαλυτέρου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροου δίδει 150 ποῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοί ;»*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθ-

μῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶνε 25—x, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ με-
ρου 6x, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου 4(25—x). "
κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ 6x—4(
εἶνε ἴση μὲ 50, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν 6x—4(25—x)
6x+4x—100=50 ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν x=15. "
ἀριθμοὶ εἶνε 15 καὶ 25—15=10.

3) «*Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος ε-*
ὅρους τοῦ ἑπτὰ ἑνδέκατα κάμνει αὐτὸ ἴσον μὲ ἓν τέτα-
"Αν παραστήσωμεν διὰ x τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν θὰ
$\frac{7+x}{11+x}=\frac{1}{4}$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν x=—
δὲ λύσις εἶνε δεκτή.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

297. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲ
5 ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 19.

298. Εὕρετε ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ
τούμενον κατὰ 2 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον του σὺν 16.

299. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρο
ἓξ δέκατα ἕβδομα τὸ κάμνει ἴσον μὲ ἓν τρίτον.

300. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τοὺς—5,6
δει ἀριθμούς ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι ἔχουν λόγο
πρὸς τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν ζητούμενον.

301. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἐλαττούμενος κατὰ τὸ τρίτο
καὶ κατὰ 4 γίνεται ἴσος μὲ τὰ τέσσαρα ἕκτα αὐτοῦ μεῖον 4

302. Τίνα ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὅρους
κοσιεννέα τεσσαρακοστὰ δεύτερα διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ 0,5 ;

303. Τὶς εἶνε ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ δύο τρίτα καὶ τὰ τρί-
ταρτα κάμνουν 170;

304. Τὶς εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτο
τὸ τέταρτον κάμνουν 156 ;

305. Νὰ χωρισθῇ ὁ 240 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ πη-
τῶν δύο μερῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τρία ἕβδομα.

§ 122. Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος πρέπει νὰ εἶνε θετικός.

1) «*Ὁ Ἰωάννης ἔχει τετραπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία,*
οἱ δύο δὲ μαζὺ ἔχουν 45. Πόσα ἔχει ἕκαστος» ;

Προφανῶς οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶνε θετ-
"Αν διὰ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τοῦ Ἰωά

ταρασταθοῦν διὰ τοῦ 4x, τῶν δύο δὲ διὰ τοῦ $4x+x$, καὶ ἶνε $4x+x=45$, ἐξ ἧς $x=9$· ἤτοι ἡ Μαρία εἶχεν 9 καὶ ὁ ίννης $4.9=36$ μῆλα, ἡ δὲ λύσις εἶνε δεκτή.

2) *«Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάσις εἶνε 4 μ. μεγαλυτέρα πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τὸ δὲ ὕψος . μικρότερον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ».*

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶνε θετικοί.

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τὸ αδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε $x.x=x^2$. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ ασταθῇ τότε διὰ τοῦ $x+4$, τὸ ὕψος του διὰ τοῦ $x-3$, καὶ μβαδόντου εἶνε $(x+4)(x-3)$, θὰ ἔχωμεν δὲ $(x+4)(x-3)=x^2$ $x^2+4x-3x-12=x^2$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=12$. Ὥστε ιὲν βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος $12+4=16$ μ., τὸ δὲ ος $12-3=9$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶνε δεκτή.

3) *«Ὁ Α ἐκτελεῖ ἓν ἔργον εἰς 7 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ τὸ εἰς 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζύ, εἰς πό- ς ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον»;*

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, τις πρέπει νὰ εἶνε θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 5), παρατηροῦμεν ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι ὁλό- ηρον τὸ ἔργον, εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔρ- υ. Ἀφοῦ ὁ Α εἰς 7 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμ. θὰ ἐκ- ῇ τὸ $\frac{1}{7}$. Ὁ Β ἐκτελεῖ εἰς 1 ἡμ. τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Καὶ οἱ δύο ζὺ εἰς 1 ἡμ. ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἑπομένως ἔχο- ν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$ ἢ $5x+7x=35$, ἐκ τῆς ὁποίας ρίσκομεν $x=2\frac{11}{12}$ Ὥστε καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι θὰ ἐκτε- σουν τὸ ἔργον εἰς $2\frac{11}{12}$ ἡμέρας, καὶ ἡ λύσις εἶνε δεκτή.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

1 Ἔχει τις 100 ὀκάδας οἴνου τῶν 9, 5 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον ἶνον τῶν 11 δραχ. κατ' ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμείξῃ διὰ νὰ κοστίζῃ ὀκᾶ τοῦ κράματος 10 δρχ.;

2 Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ δύο τόπων, συγχρόνως κινούμενα

ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως, ὥστε νὰ συναντηθοῦν. Τὸ μὲν διαν
χμ. τὴν ὥραν τὸ δὲ 5,5 χμ. Εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν π
τόπον θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν τόπων εἶνε 6(

308. 40 ὀκάδες ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3,4 ὀκ. ἅλατος. I
καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 40 ὀκ. τοῦ
κράματος περιέχουν 2 ὀκ. ἅλατος ;

309. Πόσον κοστίζει κτῆμά τι, ἂν τὰ δύο τρίτα τῆς ἀξίας αὐτοῦ
2500 δρχ. ἀποτελοῦν τὰ τρία τέταρτα αὐτῆς μεῖον 2 000

310. Πόσον εἶνε τὸ βάρος βαρελίου πλήρους ἐλαίου, ἂν ἀφοῦ
λήθη τὸ τρίτον αὐτοῦ καὶ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ὑπολοίπο
ἀπομεῖναν ἦτο 60 ὀκ. ;

311. Δύο κτήματα ἐπωλήθησαν 89000 δρ.· τὶς ἡ ἀξία ἑκά
ἂν τὰ τέσσσαρα δέκατα καὶ τὸ τρίτον τῆς τοῦ πρώτου ἰσοῦν
τὰ 0,75 τῆς τοῦ δευτέρου.

312. Εἶχέ τις πορτακάλια καὶ ἐπώλησε τὰ τρία πέμπτα αὐτῶν·
ρασε ἔπειτα 33 πορτοκάλια καὶ εἶχεν 9 περισσότερα τῶν ὅσο
χεν ἐξ ἀρχῆς. Πόσα εἶχε ;

313. Ἀτμάμαξα διανύουσα 48 χμ. τὴν ὥραν ἀνεχώρησεν 20λ
δύτερον ἄλλης καὶ συνηντήθη μὲ αὐτὴν μετὰ 2 ὥρ. 20λ
τὴν ἀναχώρησίν της. Ποία εἶνε ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης ;

314. Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρ., ἄλλος πληροῖ α
10 ὥρ. καὶ τρίτος κενοῖ αὐτὴν εἰς 30 ὥρ. Ἂν καὶ οἱ
ἀνοιχθοῦν συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ;

315. Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 6000 δρχ. καὶ μίαν ἐ
μασίαν· ἂν διὰ 8 μῆνας ἔλαβε 3450 δρχ., πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ἐ
μασία ;

§ 123. Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος εἶνε ἀκέραιος θετικός.

1) *«10 ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐπλήρωσαν 500 δ
Ἂν ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσεν 60 δρχ. καὶ ἑκάστη τ
γυναικῶν 40 δρχ., πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ
ναῖκες ;»*

Παρατηρητέον ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶνε ἀ
ραιοι καὶ θετικοί, ἄλλως ἡ λύσις δὲν δύναται νὰ εἶνε δεκτή.

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν
τῶν ἀνδρῶν θὰ εἶνε 10 — x. Ὅλοι οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσ
60(10—x), ὅλαι δὲ αἱ γυναῖκες 40x.

στε θὰ εἶνε $60(10-x)+40x=500$, ἐκ τῆς ὁποίας προ·
τει $x=5$ γυναῖκες καὶ ἄνδρες 5, ἡ δὲ λύσις εἶνε δεκτή.

2) *«Ἀπὸ 80 ἄνδρας, γυναῖκας καὶ παιδιά, αἱ μὲν γυ-
ῖκες ἦσαν τὰ 0,8 τῶν ἀνδρῶν, τὰ δὲ παιδιὰ τὰ ἑπτὰ πέμ-
ι τῶν ἀνδρῶν. Πόσοι ἦσαν ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά»;*

Ἂν x παριστάνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν ὁ τῶν γυναικῶν
εἶνε $0,8x$ καὶ ὁ τῶν παιδίων $\frac{7}{5}x$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$-0,8x+\frac{7}{5}x=80,$$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=25$.

στε οἱ ἄνδρες ἦσαν 25, αἱ γυναῖκες $0,8.25=20$, καὶ τὰ παιδιὰ
$.25=35$, ἡ δὲ λύσις εἶνε δεκτή.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α π ρ ὸ ς λ ύ σ ι ν.

Εἰς μίαν ἐκλογὴν μεταξὺ δύο ὑποψηφίων ἐψήφισαν 12 400
ογεῖς καὶ ἔλαβεν ὁ ἐκλεγεὶς 5 153 ψήφους περισσοτέρας τοῦ
οτυχόντος, εὑρέθησαν δὲ καὶ 147 λευκοὶ ψῆφοι. Πόσας ψή-
υς ἔλαβεν ἕκαστος ;

Ἐκ τῶν βόλων, οἱ ὁποῖοι ὑπάρχουν εἰς κυτίον, τὸ πέμπτον
ε λευκοί, τὸ τέταρτον ἐρυθροί, τὸ τρίτον πράσινοι, τὸ ἕκτον
ανοὶ καὶ 6 ἀκόμη φαιοί. Πόσους βόλους ἔχει τὸ κυτίον καὶ
σους ἑκάστου χρώματος ;

Ἐὰν ὅμιλός τις εἶχε τό ἕβδομον τῶν μελῶν του ὀλιγώτερον
ν ὅσων ἔχει, θὰ εἶχεν 120 μέλη. Πόσα μέλη ἔχει ;

Τὸ τριπλάσιον τοῦ πέμπτου ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, ηὐξημέ-
ν κατὰ 7, δίδει τὸν 34. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός;

Τὶς εἶνε ὁ ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον αὐξηθὲν
τὰ 2 δίδει τὸ 23 ;

Διψηφίου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶνε διπλάσιον
ῦ τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του,
οκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 36. Τὶς εἶνε ὁ
ιθμός ;

Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶνε 12. Ἐὰν
αττωθῇ κατὰ 18, προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του
ρισκόμενος ἀριθμός. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός ;

Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις διαιρούμενος διὰ 7 ἢ 9
ρίνει ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα διαφέρουν κατὰ 4.

§ 124. Προβλήματα τῶν ὁποίων ὁ ἄγνωστος περιέχεται μεταξὺ ὁρίων.

1) *«Ἡ ἡλικία ἑνὸς πατρὸς εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του· πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των»;*

Ἂν διὰ τοῦ x παρασταθῇ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ, ἡ τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε 3x, πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ νὰ εἶνε θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὴν δυνατὴν ἀνθρωπίνην ἡλικίαν. Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ μὲν υἱοῦ ἦτο x—8, τοῦ δὲ πατρὸς 3x—8, καὶ ἔχωμεν $3x-8=4(x-8)$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=24$. Ἄρα ἡ ἡλικία τοῦ μὲν υἱοῦ εἶνε 24, τοῦ δὲ πατρὸς $24.3=72$ ἔτη, καὶ ἡ λύσις εἶνε δεκτή.

2) ***«Ἐκ δύο ἀνθρώπων ὁ μὲν ἔχει 1 800 δρχ. καὶ δαπανᾷ 50 δρχ. καθ' ἑκάστην ἡμέραν, ὁ δὲ ἔχει 1 000 δρχ. καὶ δαπανᾷ 30 δρχ. ἡμερησίως. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσα ποσά»;***

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ διὰ τοῦ x, ὁ μὲν θὰ δαπανήσῃ 50x δρχ. καὶ θὰ τοῦ μείνουν (1800—50x.) δρχ. ὁ δὲ 30x δρχ. καὶ θὰ τοῦ μείνουν (1 000—30x) δρχ.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν $1\,800-50x=1\,000-30x$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=40$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὐτη ἀπορρίπτεται, διότι μετὰ 40 ἡμέρας καὶ οἱ δύο ἄνθρωποι δὲν θὰ ἔχουν τίποτε.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

324. Ὁ μαθηματικὸς Διόφαντος ἔζησε τὸ τρίτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδίον, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἕβδομον αὐτῆς μέχρι τὸν γάμον του καὶ 5 ἔτη, ὅτε ἀπέκτησεν υἱόν, ὅστις ἔζησε τὸ ἥμισυ ἢ ὅσον ὁ πατήρ του, ἔζησε δὲ ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος;

325. Ἔχει τις ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης του· αἱ ἡλικίαι τῶν δύο εἶνε 28 ἔτη ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τῆς τοῦ πατρός. Πόσην ἡλικίαν ἔχει ἕκαστος;

326. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουν ὁμοῦ ἡλικίαν 24 ἐτῶν, ἐνῶ ἕκαστος εἶνε κατὰ δύο ἔτη μεγαλύτερος τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του. Τίνες εἶνε αἱ ἡλικίαι των;

327. Εἶνε τις 40 ἐτῶν καὶ ἔχει θυγατέρα 16 ἐτῶν· πότε ἡ ἡλικία τῆς θυγατρὸς θὰ εἶνε ἢ ἦτο τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός;

328. Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 70. Ὁ δεύτερος διαιρούμενος

τοῦ πρώτου δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1, ὁ τρίτος διαιμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3. ῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοί;

16 ἐργάται ἐκτελοῦν τὰ δύο πέμπτα ἔργου ἐργαζόμενοι 9 ἡμέ ἐπὶ 4 ὥρ. καθ' ἑκάστην. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται ἐργάται καθ' ἡμέραν διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς 3 ἡμέρας;

Πατήρ τις εἶνε 58 ἐτῶν καὶ ἔχει υἱὸν 28 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ ἡλικίαν διπλασίαν τῆς τοῦ υἱοῦ του;

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ ἥμισυ αὐτοῦ σὺν 6 νὰ ῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ τετάρτου αὐτοῦ ηὐξημένον κατὰ 4.

Ἐργάτης εἶχεν 125 δρχ., ὅταν ἐπληρώθη διὰ 15 ἡμεροθιά του. Ἐκ τούτων ἐξώδευσε 50 δρχ. καὶ τοῦ ἔμειναν 30 δρχ. σον ἦτο τὸ ἡμερομίσθιόν του;

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἐλαττούμενος κατὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ κατὰ τὸ 8, δίδει τὸ τετραπλάσιον τοῦ ὀγδόου αὐτοῦ ἠλαττωον κατὰ 2.

Προβλήματα γενικά.

1) ***«Πατήρ τις εἶνε α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β ἐτῶν· τε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶνε ἢ ἦτο τριπλασία τῆς ῦ υἱοῦ;»***

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἡ ἡλικία τοῦ μὲν παος μετὰ x ἔτη θὰ εἶνε $\alpha+x$, τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta+x$, καὶ θὰ ἔχωμεν $-x=3(\beta+x)$, ἢ $x-3x=3\beta-\alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $=\alpha-3\beta$, καὶ $x=\frac{\alpha-3\beta}{2}$. Ἐὰν μὲν εἶνε $\alpha-3\beta>0$ τὸ ζητούνον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἐὰν δ' εἶνε $\alpha-3\beta<0$, ἔγινεν εἰς παρελθόν, ἂν δὲ $\alpha-3\beta=0$, τὸ $x=0$, ἤτοι ἡ σημερινὴ ἡλικία ῦ πατρὸς εἶνε τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὰ δεδομένα παριστάνονται διὰ γραμτων καὶ διασώζονται μέχρι τέλους τῆς λύσεως, εἰς τὴν ὁποίαν ι εὑρίσκονται μὲ σημειωμένας πράξεις ἐπ' αὐτῶν. Τοὐναντίον, τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων τὰ δεδομένα εἶνε ἀριθμοὶ οὐδὲν ος ἐν γένει διατηρεῖται εἰς τὴν τιμὴν τοῦ ἀγνώστου περὶ τῶν νομένων πράξεων κατὰ τὴν λύσιν.

Τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων τὰ δεδομένα παριστάνονται μὲ άμματα λέγονται ***γενικὰ*** καὶ ἔχουν τὴν ἰδιότητα ὅτι, ἡ λύσις

αὐτῶν ὡς περιέχουσα τὰ δεδομένα ἐν γένει, εἶνε ἀλγεβρικὸ
πος, ὅστις διὰ διαφόρους τιμὰς τῶν γραμμάτων αὐτοῦ ἢ κ
διαφόρους ὑποθέσεις περὶ αὐτῶν δίδει διαφόρους λύσεις τοῦ
βλήματος, αἵτινες λέγονται μερικαὶ περιπτώσεις τῆς γενικῆς

Ἡ ἐξέτασις τῶν διαφόρων τούτων περιπτώσεων λέγετα
ρεύνησις τοῦ προβλήματος, ὡς ἐγένετο π. χ. εἰς τὸ ἀνω
πρόβλημα.

2) «***Ἂν ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶνε α καὶ τοῦ Παύλ ἔτη, μετὰ πόσα ἔτη ἡ τοῦ α΄ θὰ εἶνε ἢ ἦτο μιπλασία τῆς τοῦ***

Ὑποτίθεται ὅτι τὰ α, β καὶ μ εἶνε θετικά. Ἂν παρ
σωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha+x=\mu(\beta+x),$$

ἐξ ἧς $(\mu-1)x=\alpha-\mu\beta$ καὶ ἂν $\mu-1\neq 0, x=\dfrac{\alpha-\mu\beta}{\mu-1}$. Αἱ ἡ
τοῦ Πέτρου καὶ Παύλου θὰ εἶνε μετὰ x ἔτη

$$(1) \qquad x+\alpha=\mu\,\frac{\alpha-\beta}{\mu-1}, \qquad x+\beta=\frac{\alpha-\beta}{\mu-1}$$

αἵτινες πρέπει νὰ εἶνε θετικαὶ καὶ $\neq 0$, ἄρα $\alpha\neq\beta$, νὰ μὴ
βαίνουν δὲ τὰ ὅρια τῆς ἀνθρωπίνης ἡλικίας.

Διερεύνησις. Ἐὰν εἶνε $\mu=1$ καὶ $\alpha-\mu\beta\neq 0$, θὰ εἶνε 0
$=\alpha-\mu\beta\neq 0$ καὶ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον. Ἐὰ εἶνε
καὶ $\alpha=\mu\beta$ ἢ $\alpha=\beta$, θὰ εἶνε $0.x=0$ καὶ λέγομεν ὅτι τὸ πρόβ
εἶνε ἀόριστον. Ἐὰν εἶνε $\mu>1$ καὶ $\alpha=\mu\beta$, τὸ ζητούμενον συ
νει εἰς τὸ παρόν, ἐπειδὴ εἶνε $x=0$, ἂν δὲ $\alpha-\mu\beta>0$, θὰ
$x>0$ καὶ θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον, ἐνῶ διὰ $\alpha-\mu\beta<0$ σι
εἰς τὸ παρελθόν, ὑποτιθεμένου τοῦ $\alpha>\beta$ ἕνεκα τῶν (1). Ἂν
$\mu<1$, θὰ συμβαίνουν τὰ ἐναντία, ἂν $\alpha-\mu\beta>0$ ἢ <0 καὶ τὸ α

3) «***Ἀπὸ τόπον Α κινεῖται σημεῖόν τι ὁμαλῶς μὲ τ τητα τ μέτρων κατὰ 1^δ πρὸς τὴν (εὐθύγραμμον) φορὰν α^δ βραδύτερον κινεῖται ἀπὸ τὸν τόπον Β, κείμενο μέτρα ὄπισθεν τοῦ Α, ἄλλο σημεῖον ὁμαλῶς μὲ ταχύτη κατὰ 1^δ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν μὲ τὸ πρῶτον. Πότε θὰ αντηθοῦν τὰ δύο κινητά;***»

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλ
ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως τοῦ α΄. Εἶνε φανερὸν ὅτι τὸ β
κινῆται x—α δευτερόλεπτα μέχρι τῆς συναντήσεως. Τὸ διάσ

2 9 5 - 3 5 7 - 3 3 7.

οῖον θὰ διανυθῇ ὑπὸ τοῦ α΄ θὰ εἶνε τ.x, τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ β΄ —α) καὶ θὰ ἔχωμεν $\tau'(x-\alpha)=\tau x+\mu$, ἐπειδὴ τὸ διανυθὲν ημα $\tau'(x-\alpha)$ ὑπὸ τοῦ β΄ εἶνε ἴσον μὲ τὸ τ.x διανυθὲν τοῦ πρώτου, ηὐξημένον κατὰ μ, καθ' ὃ ἦτο ὀπίσω τὸ β΄, τοῦτο ἔφθασε τὸ α΄. Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρί-ομεν $x=\frac{\mu+\tau'\alpha}{\tau'-\tau}$, ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ $\tau'-\tau\neq 0$.

ιερεύνησις. Ἂν εἶνε $\tau'-\tau>0$ ἢ $\tau'>\tau$, ἡ συνάντησις θὰ εἰς τὸ μέλλον. Ἂν εἶνε $\tau'-\tau<0$ ἢ $\tau'<\tau$, ἡ συνάντησις ἔγι-εἰς τὸ παρελθόν, ἀλλ' ἡ λύσις ἀπορρίπτεται ἀφοῦ τὸ β΄ κι-ν ἀνεχώρησε μετὰ τὸ α΄, (ὑποτίθεται ὅτι, τὰ τ΄, τ΄, α καὶ μ θετικοὶ ἀριθμοί). Ἂν $\tau'-\tau=0$, ἡ συνάντησις δὲν θὰ γίνῃ , διότι ἡ τιμὴ τοῦ x εἶνε κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν ἀριθμόν ὡρισμένον καὶ παρονομαστὴν 0, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ x τείνει ὸ ἄπειρον.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

Ὁμὰς πρώτη (γενικά). Τὸ μὲν ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶνε δὲ διαφορά των δ. Ποῖοι εἶνε οἱ δύο ἀριθμοί;

Ἐργάτης τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερος εἰς β ἡμ.· εἰς ας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζὺ ἐργαζόμενοι;

Οἱ μὲν ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἁμάξης ἔχουν περιφέρειαν μήκους α ρων, οἱ δὲ ὀπίσθιοι β. Ποίαν ἀπόστασιν θὰ διανύσῃ ἡ ἅμαξα, οἱ ἐμπρόσθιοι κάμουν ν περιστροφὰς περισσοτέρας τῶν ὀπι-ων;

Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις αὐξανόμενος κατὰ τὸ μιοστὸν μέ-του δίδει τὸ νιοστὸν μέρος αὐτοῦ σὺν λ.

Δαπνᾷ τις τὸ νιοστὸν τοῦ εἰσοδήματός του διὰ τροφήν, $\frac{1}{\alpha}$ διὰ κατοικίαν, τὸ $\frac{1}{\beta}$ δι' ἐνοίκιον, τὸ $\frac{1}{\gamma}$ δι' ἄλλα ἔξοδα τοῦ περισσεύουν μ δραχμαί. Ποῖον εἶνε τὸ εἰσόδημά του; (Μερικὴ περίπτωσις $\nu=3$, $\alpha=4$, $\beta=6$, $\gamma=8$, $\mu=300$).

Νὰ χωρισθῇ ποσόν τι α εἰς τρία μέρη, ὥστε τὸ α΄ νὰ ὑπερ-ίνῃ τὸ β΄ κατὰ ρ, καὶ τὸ γ΄ νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ α΄ μεῖον λ.

Ταξιδιώτης θέλει νὰ διανύσῃ α χιλιόμετρα εἰς η ἡμέρας. τὰ ταξίδιον β ἡμερῶν λαμβάνει ἐντολὴν νὰ ἐπιστρέψῃ γ ἡμέ-ς ἐνωρίτερον. Πόσον διάστημα ὀφείλει νὰ διανύῃ καθ' ἡμέ-ν; (Μερικὴ περίπτωσις $\alpha=300$, $\eta=18$, $\beta=7$, $\gamma=5$).

341. Ποσόν τι α διενεμήθη μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ, εἰς τρόπον
τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β ἔχει λόγον ἴσον μὲ
τὸ δὲ τοῦ Β πρὸς τὸ τοῦ Γ ἴσον μὲ ϱ : λ. Τίνα τὰ τρία

342. Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν τὸ μὲν πρὸς ε ο/ο τὸ δὲ πρ
καὶ δίδουν ἐτήσιον τόκον τ. Τίνα τὰ κεφάλαια, ἂν τὸ ἄθ
των εἶνε k;

343. Ἐργάτης τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 2 ἡμέρας, ἄλλος εἰς ν
ρας καὶ τρίτος εἰς μ σὺν ν δεύτερα. Εἰς πόσας ἡμέρας θ
λειώσουν τὸ ἔργον ἐργαζόμενοι καὶ οἱ τρεῖς μαζύ;

344. Κεφάλαιόν τι προεξοφλούμενον διὰ ν ἡμέρας μὲ ἐξωτ
ὑφαίρεσιν πρὸς ε ο/ο ὑφίσταται ἔκπτωσιν α δραχμῶν ὀλιγώ
ἢ ἂν ἐξωφλεῖτο μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Ποῖον εἶνε
φάλαιον;

345. ***Ὁμὰς δευτέρα***. Χωρικὴ ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν αὐγῶν τὰ
εἶχε καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησε
τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολοίπων καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θρ
κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως. Πόσ
χεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν τῆς ἔμεινεν 1 αὐγόν;

346. Χωρικὴ ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγὰ εἶχε πρὸς 50 λ.
στον. Ἐπειδὴ ἔσπασαν 3, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 60 λ.
δὲν ἐζημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

347. Βρύσις πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 3 ὥρας· ἄλλη τὴν πληροῖ εἰς 4
καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν πληροῦν ἂν
καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως;

348. ***Ὁμὰς τρίτη*** (κινήσεως). Ἔκ τινος τόπου ἀνεχώρησε
διατρέχων 60 χιλ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐ
αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολήν, νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτο
8 ἡμ. Πόσα χιλ. πρέπει νὰ διανύῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν;

349. Ἐκ δύο τόπων, ἀπεχόντων 575 χιλ., ἀναχωροῦν δύο
χυδρόμοι, διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ εἷς
νύῃ 50 χιλ., ὁ δὲ ἄλλος 55 χιλ. καθ' ἡμέραν πότε θὰ συναντη

350. Ἀπὸ σημείου Α κινεῖται εὐθυγράμμως σῶμά τι, διανύο
μέτρα εἰς 4^{δ} καὶ διευθύνεται πρὸς τὸ Β. Μετὰ 3^{δ} ἀναχωρ
τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν φορὰν ΑΒ κινούμενον, καὶ δια
60 μέτρα εἰς 5^{δ}, πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον;

351. Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται
τὸν Β, διανύουσα 30 χιλ. καθ' ὥραν· 1 ὥραν βραδύτερον ἀν
ρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνομένη πρὸς τὸ Β ἁμαξοστοιχία, διανύ

$6\frac{7}{3}x = 60+6x$

ιλ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν τοῦ Α θὰ φθάση ἡ δευτέρα τὴν πρώτην ;

Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου διανύων 12 χιλ. τὴν ν· 3 ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλ- διανύων 16 χιλ. τὴν ὥραν· α΄) πότε θὰ προηγῆται ὁ α΄ τοῦ δευ- υ 12 χιλ.; β΄) πότε θὰ προηγῆται ὁ β΄ τοῦ πρώτου 50 χιλ.;

Τὴν 10 πρωϊνὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τόπου Α, ύων 12 χιλ. καθ' ὥραν· ποίαν ὥραν πρέπει νὰ ἀναχωρήση ερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 χιλ. καθ' ὥραν, νὰ φθάση πρῶτον εἰς 3 ὥρας ;

Ἀπὸ σημείου περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ ύουν ἀντιστοίχως $\bar{a}^{o}$ καὶ β^{o} $(\alpha > \beta)$ εἰς 1^{δ}. Πότε θὰ συναντη- ν ; ἂν διευθύνωνται α΄) ἀντιθέτως; β΄) πρὸς τὴν αὐτὴν άν ;

Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητά, διανύοντα ὴν εἰς χρόους t_1 καὶ t_2 $(t_1 > t_2)$. Πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ , 2αν, ... νὴν φοράν, ἂν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν θετον φοράν;

Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου ;

Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται (τοῦ προηγουμένου βλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην, . . ίν ;

Πότε μετὰ μεσημβρίον οἱ δεῖκται τοῦ προηγουμένου προ- ματος σχηματίζουν γωνίαν α^{o} διὰ 1ην, 2αν, 3ην, . , φοράν ;

Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτο- τὴν γωνίαν τῶν ἄλλων διὰ πρώτην φοράν ;

Κύων διώκει ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει 60 πηδήματα αὐτῆς. ταν αὐτη κάμνη 6 πηδήματα, ὁ κύων κάμνει 6. Ἀλλὰ 3 πη- ματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκείνης. Μετὰ πόσα πηδήματα οῦ θὰ τὴν φθάση ὁ κύων ;

Ὁμὰς τετάρτη (γεωμετρικά). 1 Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ δια- ρὰ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε 20°· πόση εἶνε ἑκάστη τῶν νιῶν;

Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν ρὰ τὴν βάσιν. Πόσαι εἶνε αἱ γωνίαι του ;

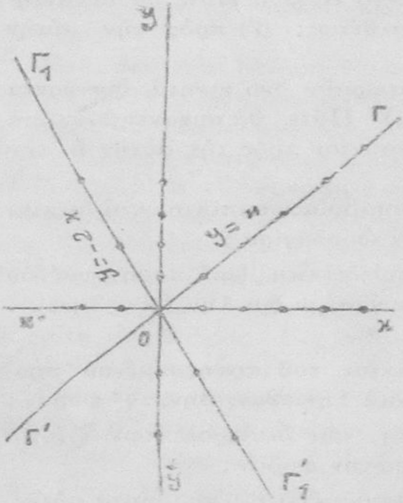
363. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν καθεμία εἶν
10° μεγαλυτέρα τῆς προηγουμένης της.

364. Πόσας πλευρὰς ἔχει κανονικὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου
γωνία εἶνε 144°.

365. Ποῖαι εἶνε αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἐὰν εἶνε μεταξύ τ
θῶς οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4 ;

Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$.

§ *126.* «*Ἡ συνάρτησις* $y=\alpha x+\beta$, *ὅπου τὸ α εἶνε σταθε ποσότης* $\neq 0$ *καὶ* $\beta=0$, *παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, χομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων Ο*».



(Σχ. 8)

Διότι ἔστω πρῶτον $\alpha>0$, π.χ. $\alpha=1$, ὅτε ἡ σ τησις εἶνε $y=x$. Ἐὰν εἰ x δώσωμεν κατὰ σειρὰ τιμὰς 0·1·2·3·3...(1), τὸ y βάνει τὰς τιμὰς 0·1·2·3·4. Ἐὰ νσημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ νος τῶν x (Σχ. 8) τὰ σημε παριστάτοντα τὰς τιμὰς (1 x καὶ τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄ τῶν y, τὰ παριστάνοντα τιμὰς (2) τοῦ y, παρατηρο ὅτι τὰ σημεῖα τὰ παρ νοντα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν ((1,1)· (2,2),... κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, τῆς ΟΓ.

Ἐὰν εἰς τὸν x δώσ τὰς τιμὰς —1·—2·—3· . . . ρίσκομεν ὅτι τὸ y λαμβ τὰς τιμὰς —1·—2.—3· . . . τὰ δὲ σημεῖα τὰ ὁποῖα παριστά τὰ ζεύγη (—1,—1), (—2,—2). . . κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΓ ὁποία εἶνε προέκτασις τῆς ΟΓ. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις y παριστάνει τὴν εὐθεῖαν ΓΓ′ (Σχ. 8).

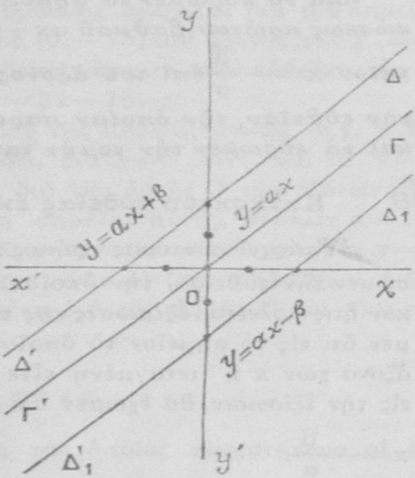
Ἔστω ὅτι εἶνε τὸ $\alpha<0$, π. χ. $\alpha=-2$. Εὑρίσκομεν ὅμοιον τρόπον, ὅτι ἡ συνάρτησις $y=-x$ παριστάτει θεῖαν $\Gamma_1\Gamma_1'$ (Σχ. 8).

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχῃ ἄλλην οἱανδήποτε τι ὴν ἢ ἀρνητικήν, καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$ τάνει εὐθεῖαν γραμμήν, διερχομένην διὰ τοῦ Ο.

ὴν συνάρτησιν $y=\alpha x+\beta$ (ἂν εἶνε $\alpha, \beta \neq 0$) δυνάμεθα νὰ ἀπει- ωμεν γραφικῶς, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην ἑκάστου σημείου τῆς ας τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $y=\alpha x$, προσθέσωμεν τὴν ποσό- β. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει, νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $y=\alpha x$ λλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἄνω ἢ , καθόσον τὸ β εἶνε ἀριθ- θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

Ἑπομένως, ἡ συνάρτησις $x+\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν μὴν (βλ. Σχ. 9 τὰς εὐ- ΔΔ΄ καὶ $\Delta_1\Delta'_1$).

ιὰ νὰ εὕρωμεν τὶ παρι- ι ἡ ἐξίσωσις $y=\beta$, παρα- ῦμεν ὅτι, οἱανδήποτε τιμὴν ν ἔχῃ τὸ x, εἶνε τὸ $y=\beta$. ι ἡ ἐξίσωσις $y=\beta$ πα- νει τὰ σημεῖα, τὰ ἔχοντα μένην β. Προφανῶς ταῦτα αι ἐπ' εὐθείας παραλλή- ρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ούσης ἀπόστασιν β ἀπ' αὐ- Ἄρα, ὅταν τὸ $\alpha=0$, ἡ ρτησις $y=\alpha x+\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμήν, παράλλη- ρὸν τὸν ἄξονα τῶν x.



(Σχ. 9).

Ἀσκήσεις.

Εὕρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ συναρ- ς.

΄) $y=3x$. β΄) $y=x+3$. γ΄) $y=0{,}75x$. δ΄) $y=x-\dfrac{2}{3}$.

΄) $y=\dfrac{x}{2}+5$. β΄) $y=-\dfrac{5x}{6}-\dfrac{1}{8}$. γ΄) $y=8$.

Γραφικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω μία ἐξίσωσις τοῦ α΄ βαθμοῦ π. χ. ἡ $3x-6=0$. (1) Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παραστήσωμεν διὰ τοῦ y, ἔχο- τὴν συνάρτησιν $y=3x-6$.

Διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x=2$ διὰ τὴν ὁποίαν ἀληθεύει ἡ
$y=0$. Τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν (2,0
ται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἐπειδὴ δέ, ὡς εἴδομεν, ἡ $y=$
παριστάνει εὐθεῖαν, ἕπεται ὅτι ἡ ρίζα τῆς (1) παριστάνει
τοῦ σημείου, καθ' ὃ ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα
Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν

***«διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν ρίζ
σώσεως πρώτου βαθμοῦ*** $\alpha x+\beta=0$, ***ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν
μεῖον*** $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ***ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν*** x ***ἢ νὰ κατασκευ
τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις*** $y=$
καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶ

§ *128.* Κατασκευὴ εὐθείας ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς

Ὑπάρχει σύντομος τρόπος καθ' ὃν δυνάμεθα νὰ κατ
σωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=$
καὶ ἥτις καλεῖται ***ἐξίσωσις τῆς εὐθείας.*** Πρὸς τοῦτο πα
μεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τὸ ὁποῖον ἡ ἄγνωστος εὐθεῖα τέμ
ἄξονα τῶν x ἡ τεταγμένη εἶνε $y=0$. Ἂν λοιπὸν θέσωμ
εἰς τὴν ἐξίσωσιν, θὰ ἔχωμεν $\alpha x+\beta=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑ
$x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Οὕτω εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τ
τῶν τιμῶν $\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}, 0\right)$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, καὶ εἰς τὸ
εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τοῦτον.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον καθ' ὃ ἡ εὐ
μνει τὸν ἄξονα τῶν y, ἔχει τετμημένην 0. Ἂν λοιπὸν
εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀντὶ τοῦ x τὸ 0, θὰ εὕρωμ
Τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος (0,β) ἐπὶ το
τῶν y, εἶνε ἐκεῖνο καθ'ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τοῦ
τούτων ἕπεται ὅτι,

***«διὰ νὰ κατασκευάσωμεν εὐθεῖαν, ὅταν δοθῇ ἡ
αὐτῆς, θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὸ*** $y=0$, ***καὶ λύομε
γόμενον ὡς πρὸς*** x, ***ὁ δὲ προκύπτων ἀριθμὸς ὁρίζε
μεῖον καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ἄξονα τῶν*** x· ***θέ
τὴν ἐξίσωσιν*** $x=0$, ***καὶ λύομεν τὸ ἐξαγόμενον ὡς***

...ω δ' εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸν ...να τῶν y· συνδέομεν τὰ δύο οὕτω εὑρεθέντα σημεῖα τῶν ...όνων δι' εὐθείας, ἥτις εἶνε ἡ ζητουμένη».

'Εφαρμογή. "Εστω ἡ ἐξίσωσις $y=3x-15$.

Θέτομεν $y=0$, καὶ ἔχομεν $3x-15=0$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρί...ομεν $x=5$. Θέτομεν $x=0$ καὶ μένει $y=-15$. Ἡ εὐθεῖα τὴν ...οίαν παριστάνει ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ... 0) τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τοῦ (0, —15) τοῦ ἄξονος τῶν y. Συν...οντες τὰ σημεῖα αὐτὰ δι' εὐθείας, ἔχομεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁ...ίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $y=3x-15$.

'Εὰν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶνε τῆς μορφῆς $y=\alpha x$, π.χ. ἡ ἐξί...σωσις $y=2x$, παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $x=0$ εἶνε καὶ τὸ $y=0$. ...πομένως ἡ εὐθεῖα διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν ἀξόνων. Διὰ ... εὕρωμεν καὶ ἓν ἄλλο ἀκόμη σημεῖον αὐτῆς, θέτομεν $x=1$ (ἢ ...λλην τινὰ τιμὴν διάφορον τοῦ μηδενός), καὶ εὑρίσκομεν $y=2$. ...ὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος (1,2) καὶ ἡ ζη...τουμένη εὐθεῖα εἶνε ἡ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ ...μείου τούτου (1,2).

'Ασκήσεις.

— Κατασκευάσατε τὰς εὐθείας τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξι...ώσεις.

...) $y=9x$. β') $y=3x+1$. γ') $y=-2x$. δ') $y=-7x+1$.

...) $y=0{,}5\,x-1$. στ') $3y-2\,x=2$ ζ') $0{,}5\,y-0{,}75\,x-1=0$.

Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ...ατωθι ἐξισώσεις.

α') $\frac{3}{4}x-\frac{5}{8}y=2+x$. β') $\frac{5x-3\,y}{7}-1=4\,y$.

γ') $\frac{1}{2}x+3(y-1)=2x$. δ') $7x=\frac{x-y}{3}+1$.

ε') $\frac{x}{2}=\frac{y}{6}=2-\frac{y-2}{3}+1$. στ') $\frac{x+y}{2}-\frac{y-x}{3}=2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV.

§ 129. Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστωσαν δύο ἐξισώσεις, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀ
στους x καὶ y, καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν, αἱ

$$x+y=10, \quad x-y=2.$$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀγνώ
$x=6$ καὶ $y=4$, καὶ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ***σύστημα δύο ἐξ
σεων μὲ δύο ἀγνώστους.***

Ἐν γένει καλοῦμεν ***σύστημα ἐξισώσεων*** τὸ σύνολον δ
περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὗταὶ
τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις συστήματος περιέχουν τοὺς ἀγνώστου
πρῶτον βαθμόν, λέγεται τοῦτο σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώ
ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτοῦ.

Καλοῦμεν ***λύσιν*** συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν
τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξ
σεις τοῦ συστήματος.

Δύο ἢ περισσότερα συστήματα ἐξισώσεων λέγονται ***ἰσο
ναμα***, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώσ

Εἶνε φανερὸν ὅτι, ἐὰν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μί
περισσοτέρας τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι᾽ ἰσοδυνάμων των, πρ
πτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχὸν σύστημα

$$A_1=B_1, \quad A_2=B_2, \quad A_3=B_3,$$

ὅπου τὰ A_1, B_1, . . . , παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων
σώσεων, εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα

$$A_1-B_1=0, \quad A_2-B_2=0, \quad A_3-B_3=0. \quad (\S\ 116).$$

Λέγομεν ὅτι ἐξίσωσίς τις εἶνε ***λυμένη πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώσ
αὐτῆς***, π.χ. πρὸς τὸν x, ἂν εἶνε τῆς μορφῆς $x=A$, ὅπου τ
δὲν περιέχει τὸν ἄγνωστον x.

§ 130. Ἰδιότητες τῶν συστημάτων.

α΄) Θ᾽ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν συστημάτων.

***«Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο ἢ πε
σοτέρας αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τ
προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυψάσης, εὑρίσκομεν σύστημα ἰ
δύναμον πρὸς τὸ δοθέν».***

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα (1) $\left\{ \begin{array}{l} 2x-3y=1 \\ x+y=3. \end{array} \right.$

Ἂν προσθέσωμεν τὰς (1) κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν ν, ἔστω τὴν α΄ ἐκ τῶν προστεθεισῶν διὰ τῆς προκυπτούσης $+x-3y+y=1+3$, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x+x-3y+y=1+3 \\ x+y=3, \end{cases}$$

ὁποῖον λέγω ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι αἱ τιμαὶ 2 καὶ $y=1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν

γόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς (1΄) $\begin{vmatrix} 2.2-3.1=1, \\ 2+1=3. \end{vmatrix}$

δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας προσθέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $2.2+2-3.1+1=1+3$. Ἀντικαθιστῶμεν τώρα καὶ εἰς τὸ τὰ x καὶ y διὰ τοῦ 2 καὶ 1, ὅτε εὑρίσκομεν ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη $2.2+2-3.1+1$ καὶ $2+1$. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶνε ἴσοι $1+3$ καὶ 3, ὡς φαίνεται εἰς τὴν (2΄) καὶ τὴν β΄ τῶν (1΄). Ἐπομένως αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1) ἐπαληθεύουν τὸ (2). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ y, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2) ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἄρα τὰ (1) καὶ (2) ε ἰσοδύναμα.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶν ο σύστημα.

β΄) Θὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα.

«Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία ἐξ αὐτῶν εἶνε λυμένη πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸν διὰ ς τιμῆς του εἰς ἄλλας (ἢ εἴς τινας μόνον), εὑρίσκομεν στημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν».

Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα (1) $\begin{cases} x=2y+1, \\ x-y=2, \end{cases}$

ὁ ὁποίου ἡ α΄ ἐξίσωσις εἶνε λυμένη ὡς πρὸς x. Ἐὰν τὴν τιν $2y+1$ τοῦ x ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν β΄ ἐξίσωσιν, εὑσκομεν τὸ σύστημα (2) $\begin{cases} x=2y+1, \\ 2y+1-y=2, \end{cases}$

ὁποῖον λέγω, ὅτι εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι αἱ τιμαὶ $=3$, $y=1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν γόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς (1΄) $3=2.1+1$, $3-1=2$.

ν τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ y θέσωμεν εἰς τὸ (2), εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς α΄ ἐξισώσεως ἴσους ἀριθμούς, διότι εἶνε αὐτὴ ἡ α΄ (1), ἐκ δὲ τοῦ πρώτου μέλους τῆς β΄ τοῦ (2) προκύπτει ὁ ἀρι (2΄) $2.1+1-1$ ἢ ὁ $3-1$, ἐπειδὴ τὸ $2\ 1+1$ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμ τοῦ x. Ἑπομένως, τὸ ἐξαγόμενον (2΄) ἰσοῦται μὲ 2, ὡς φαίν καὶ ἐκ τῆς β΄ τῶν (1΄). Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ y αἱ ἐπαληθε σαι τὸ (1) ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι αἱ τ τῶν x καὶ y, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2) ἐπαληθεύουν καὶ τὸ Ἄρα τὰ (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστη

Μέθοδοι λύσεως συστήματος δύο ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μὲ δύο ἀγνώστους

§ 131. *Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστ*

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν π.χ. τὸ σύστημα (1) $\begin{cases} 2x+3y= \\ 3x+4y= \end{cases}$

Ἐπιδιώκομεν πρῶτον νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δοθεί ἐξισώσεις (ἢ μίαν ἐξ αὐτῶν) εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους τούτων τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων των, π. τοῦ x, νὰ εἶνε ἀντίθετοι. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν ἐξίσωσιν (ἤτοι τὰ μέλη αὐτῆς) ἐπὶ τὸν 3 (συντελεστὴν τοῦ x τὴν β΄ ἐξίσωσιν) καὶ τὴν β΄ ἐπὶ τὸν -2 (ἀντίθετον τοῦ συν λεστοῦ τοῦ x εἰς τὴν α΄). Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον σημει νομεν γράφοντες παραπλεύρως ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τὸν ἀρι μὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν, ὡς κατωτέρω,

(1) $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11 \end{cases}$ $\left| \begin{array}{l} 3 \text{ καὶ εὑρίσκομεν} \\ -2 \text{ τὸ σύστημα} \end{array} \right.$ (3) $\begin{cases} 6x+9y=24 \\ -6x-8y=-2 \end{cases}$

Προφανῶς τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶνε ἰσοδύναμα (§ 119 Προσθέτομεν τώρα τὰς ἐξισώσεις τοῦ (2) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκ μεν $y=2$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μὲ μίαν τῶν προστεθεισῶν τοῦ (ἢ μὲ μίαν τοῦ (1), ἔστω τὴν πρώτην, ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύνα μον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1). Δηλαδὴ τὸ σύστημα (3) $\begin{cases} 2x+3y= \\ y=2 \end{cases}$ εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ (καὶ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι θὰ εὑρεθοῦν, θὰ ἐπαλη θεύουν καὶ τὸ (1).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ $y=2$, ἀντικαθιστῶντες ε τὴν ἐξίσωσιν $2x+3y=8$ τὸ y διὰ τοῦ 2, εὑρίσκομεν $2x+3.2=$ ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $x=1$. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ εἶνε αἱ $x=1$, $y=2$. Πράγματι, ἂν θέσωμεν εἰς τὸ (1) ἀντὶ τ

καὶ y=2, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.
Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως συστήματος λέγεται ***μέθοδος ...οιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ διὰ τῆς προσθέ-***
. Διότι δι᾿ αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν α΄) νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς ...σεις εἰς ἰσοδυνάμους των, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώ- ... αὐτῶν νὰ εἶνε ἀντίθετοι, καὶ β΄) διὰ τῆς προσθέσεως τού- ...ὰ προκύπτῃ μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον, ἤτοι ***...λείφομεν*** τὸν ἄλλον ἄγνωστον.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα (1΄) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{10}+\dfrac{x-y}{2}=0, \\ \dfrac{x+y}{5}+\dfrac{x-y}{2}=1. \end{cases}$

Ἀπαλείφοντες πρῶτον τοὺς παρονομαστὰς ἑκάστης τῶν ἐξι-...ων τούτων καὶ ἐκτελοῦντες ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εὑ-...μεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$(2') \quad \begin{cases} 6x-4y=0, \\ 7x-3y=10. \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὴν μὲν α΄ τούτων ἐπὶ −3, τὴν δὲ β΄ ἐπὶ ...ὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν y, καὶ εὑρίσκομεν $-18x+12y=0,$
$28x-12y=40.$

...ιὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν $10x=40$, ...ς ὁποίας προκύπτει x=4, καὶ ἥτις μὲ μίαν τῶν ἐξισώσεων ...2΄), ἔστω τὴν β΄, ἀποτελεῖ τὸ σύστημα

$$(3') \quad \begin{cases} 7x-3y=10 \\ x=4, \end{cases}$$

...οῖον εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ (2΄) καὶ μὲ τὸ δοθὲν (1΄).
...ὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x=4 ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν α΄ τοῦ ...αὶ λύομεν ὡς πρὸς y, ὅτε εὑρίσκομεν y=6. Ὥστε αἱ τιμαὶ ...ἀγνώστων εἶνε x=4 καὶ y=6. Διὰ νὰ κάμωμεν τὴν ἐπαλή-...ν, θέτομεν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα ἀντὶ τοῦ x καὶ y τὰς τι-...4 καὶ 6 ἀντιστοίχως, καὶ βλέπομεν ὅτι, αἱ δύο ἐξισώσεις ...ηθεύονται.

...ιὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις δοθέντος συ-...ατος εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώ-... νὰ εἶνε ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως ...ξισώσεις ἐπὶ τὰ πηλίκα τοῦ ἐ. κ. π. τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν ... ἀγνώστου δι᾿ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Π. χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύ-...α

$$(1'') \quad \begin{cases} 12x+5y=17 \\ -8x+7y=-1 \end{cases}$$

...κ.π. τῶν 12 καὶ 8 εἶνε τὸ 24. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώ-

την τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 24 : 12=2, καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 24
καὶ λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (2΄΄) ἰσοδύναμον
δοθὲν (1΄΄).

$$\begin{array}{c|rcl} 2 & 12x+5\,y & = & 17 \\ 3 & -8\,x+7\,y & = & -1. \end{array}$$

$$(2'')\quad \begin{cases} 24\,x+10y=34, \\ -24\,x+21y=-3. \end{cases}$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2΄΄) κατὰ μέλη
πτει ἡ ἐξίσωσις $31y=31$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $y=$
ἀκολούθως, ἐργαζόμενοι ὡς καὶ ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν $x=$

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ ἐπαληθευθο

Ἀσκήσεις.

370. α΄) $x+y=19$, $x-y=11$. β΄) $2x+y=17$, $2y-x=9$. γ΄) $3x-0{,}2y=1$, $3y-0{,}2x=6$.
δ΄) $4x-y=2$, $5y-2x=8$. ε΄) $x+2y=22$, $5(x-5)-y=3$, δ΄) $x-4y=1$, $y-3x=6$.

371. α΄) $2x-3y=0$, $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4y}{5}=2$. β΄) $3x-2y=12$, $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{2y}{3}=9$. γ΄) $3(x-y)=0{,}5x$, $x+4y=2y-3$

372. α΄) $\alpha x+\beta y=\alpha^2$, $\alpha x-\beta y=\beta^2$. β΄) $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$. γ΄) $2x-2y=5\beta-$, $3x-2y=\alpha+5$

373. α΄) $\alpha x+\beta y=\gamma$, $\lambda x-\mu y=\delta$ β΄) $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\gamma$, $\dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{y}{\beta}=\delta$. γ΄) $\dfrac{x}{\mu}+\dfrac{y}{\nu}=\varrho$, $\dfrac{x}{\lambda}+\dfrac{y}{k}=\delta$.

§ 132. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς δι' ἀντικαταστάσεως.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$(1)\quad \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11. \end{cases}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἐξ
Ἀπομονώνομεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. τὸν x, ἔστω εἰς
α΄ τῶν ἐξισώσεων. Ἤτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x, θ
ροῦντες τὸν y ὡς γνωστόν. Οὕτω λαμβάνομεν $x=\dfrac{8-3y}{2}$.

Αὕτη μὲ τὴν ἄλλην τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν τὸ
τωτέρω σύστημα (2) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1)

$$(2)\quad \begin{cases} x=\dfrac{8-3y}{2} \\ 3x+4y=11. \end{cases}$$

Τὴν τιμὴν τοῦ x τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντικα
ῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἢ τοῦ (2) καὶ
σκομεν $3 \cdot \frac{8-3y}{2}+4y=11$, ἡ ὁποία μετὰ τῆς προηγουμένης
τελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1).
Λύομεν τὴν τελευταίαν ταύτην ὡς πρὸς y καὶ εὑρίσκομεν $y=2$.
Διὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἀντικαθιστῶμεν τὸ y διὰ
2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, ἢ εἰς τὴν $x=\frac{8-3y}{2}$

εὑρίσκομεν $x=\frac{8-6}{2}=1$,

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς λύσεως συστήματος καλοῦμεν συνή-
μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἀσκήσεις.

Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα καὶ ἐπαληθεύσατε αὐτά.

α΄) $3x=4y$, $2x-3y=8$. β΄) $x=1\frac{1}{3}$, $\frac{x}{4}+\frac{2y}{4}=9$. γ΄) $3x=2y+12$, $\frac{5}{8}x+\frac{2y}{3}=9$.

α΄) $7y=18+\frac{5y}{3}$, $0{,}75x+2y=15$ β΄) $x=\alpha+y$, $\lambda y+\mu y=\nu$. γ΄) $\alpha x=\alpha^2-\beta y$, $\alpha x-\beta y=\beta^2$.

α΄) $y=3\alpha-\frac{x}{2}$, $\frac{2y}{5}-x=2\beta$. β΄) $x=4\alpha-y$, $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=\alpha$. γ΄) $\frac{x}{9}=\frac{4}{3}$, $2x+2y=5$.

Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς συγκρίσεως. Ἔστω ὅτι ἔχο-
πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ 3x+4y=11. \end{array}\right\}$$

νὰ λύσωμεν αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Ἀπο-
ώνομεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. τὸν x, εἰς τὴν πρώτην
εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ἤτοι λύομεν
εμίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τὸν x, θεωροῦντες τὸν
ς γνωστόν, καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x=\frac{8-3y}{2}$

ὲ τῆς δευτέρας $x=\frac{11-4y}{3}$

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶνε ἴσαι, ἔχο
τὴν ἐξίσωσιν $\frac{8-3y}{2}=\frac{11-4y}{3}$, ἡ ὁποία μὲ μίαν

ἐκ τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δ
Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν $y=2$. Διὰ νὰ ε
μεν τὴν τιμὴν τοῦ x, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὰ προηγο
παραδείγματα, καὶ εὑρίσκομεν $x=1$.

Τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως συστημάτων καλοῦμεν
θως ***μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς συγκρίσεως.***

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ ν
ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν.

377. α΄) $2x+4y=14$, $3x-2y=5$. β΄) $3x+5y=20$, $2x-10y=0$.

378. α΄) $12x-3y=12$, $8x+y=20$. β΄) $x+y=\alpha+\beta$, $\beta x+\alpha y=2\alpha\beta$.

379. α΄) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$, $\frac{x}{\beta}-\frac{y}{\alpha}=1$. β΄) $x+y=\gamma$, $\alpha x-\beta y=\gamma(\alpha-\beta)$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα δ
καταλληλοτέρας μεθόδου καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶ

380. α΄) $x=3y+1$, $3x=4y+8$. β΄) $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, $5x=4y-3$. γ΄) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\frac{4}{3}$, $2x=y$.

381. α΄) $\frac{x}{\alpha+\beta}+\frac{y}{\alpha-\beta}=2\alpha$, $\frac{x-y}{2\alpha\beta}=\frac{x+y}{\alpha^2+\beta^2}$. β΄) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\alpha^2\beta$, $\frac{x}{\alpha^2}+\frac{y}{\beta^2}=-\beta^2$.

Ὁμὰς τρίτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστ

382. $2(2x+3y)=3(2x-3y)+10$, $4x-3y=4(6y-2x)+3$.

383. α΄) $\frac{13}{x+2y+3}+\frac{3}{4x-5y+6}=0$, $\frac{3}{6x-5y+4}=\frac{19}{3x+2y+1}$. β΄) $\frac{5x+7y}{3x+11}=\frac{13}{7}$, $\frac{11x+27}{7x+6y}=\frac{19}{11}$

384. α΄) $\frac{x}{\alpha+\beta}+\frac{y}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha-\beta}$, $\frac{x}{\alpha+\beta}-\frac{y}{\alpha-\beta}=\frac{1}{\alpha+\beta}$ β΄) $\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=\frac{10}{xy}$, $\frac{5}{3x}+\frac{3}{4y}=\frac{49}{12x}$

385. $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y=2\alpha\beta$, $(\alpha+\gamma)x+(\alpha-\gamma)y=2\alpha\gamma$. β΄) $\alpha x+1=\alpha y+$, $\beta y+1=\alpha y+$

Διερεύνησις τοῦ συστήματος τῆς μορφῆς

$$\left.\begin{aligned} \alpha x+\beta y&=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y&=\gamma_1. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς α΄ τῶν ἀνωτέρω ἐξι-
εων ἐπὶ β_1 καὶ τῆς β΄ ἐπὶ $-\beta$ (ὑποτιθεμένου ὅτι τὰ β καὶ β_1
διάφορα τοῦ μηδενός), προσθέσωμεν δὲ τὰ ἐξαγόμενα κατὰ
ι, εὑρίσκομεν $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)x=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta.$ (2)

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ἂν τὰ μέλη τῆς μὲν α΄ τῶν (1) πολλα-
σιάσωμεν ἐπὶ $-\alpha_1$, τῆς β΄ ἐπὶ α καὶ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγό-
α, $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)y=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma.$ (3)

Τὸ σύστημα (1) εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸ τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ
Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὰς (2)
(3) ἐπαληθεύουν καὶ τὰς (1).

1) Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι, ἂν ὁ κοινὸς συντελεστὴς τῶν x καὶ
ς τὰς (2) καὶ (3) εἶνε διάφορος τοῦ μηδενός, δηλαδὴ ἂν εἶνε

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0, \quad \text{ἢ} \quad \alpha\beta_1\neq\alpha_1\beta$$

αὶ $\dfrac{\alpha}{\alpha_1}\neq\dfrac{\beta}{\beta_1}$ (τὸ ὁποῖον προκύπτει, ἂν τοὺς ἀνίσους ἀριθ-
ς $\alpha\beta_1$ καὶ $\alpha_1\beta$ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ $\alpha_1\beta_1$, ὑπο-
εμένου $\neq 0$) τότε, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα τῶν (2)
(3) διὰ τοῦ $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ καὶ εὑρίσκομεν ὡς τιμὰς τῶν x καὶ y,

$$x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}, \qquad y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta} \qquad (4)$$

ὁποῖαι εἶνε ἐντελῶς ὡρισμέναι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὡς
ρατηροῦμεν, τὸ σύστημα τῶν (2) καὶ (3), ἄρα καὶ τὸ δοθέν,
ι μίαν μόνην λύσιν τὴν (4).

2) Ἐὰν εἶνε $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$, ἀλλὰ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (2) καὶ (3),
λαδὴ τὰ $\gamma\beta_1-\gamma_1\beta$ καὶ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ εἶνε $\neq 0$, θὰ ἔχωμεν

$$0.x=0=\gamma_1\beta_1-\gamma_1\beta, \qquad 0.y=0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma \qquad (5)$$

ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν
δοθὲν σύστημα (1) δὲν ἐπιδέχεται καμμίαν λύσιν μὲ τιμὰς τῶν
νώστων ὡρισμένους ἀριθμούς· διότι δὲν ὑπάρχει τιμή τις τῶν
καὶ y, ἥτις πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 0 νὰ δίδῃ τὰ $\gamma\beta_1-\gamma_1\beta$ καὶ
$-\alpha_1\gamma$ τῶν (5), διάφορα τοῦ 0.

Ἀλλὰ καὶ ἐξ αὐτῶν τῶν τιμῶν (4) τῶν x καὶ y παρατηροῦ-
ν ὅτι, καθεμία τῶν διαιρέσεων, τὰς ὁποίας παριστάνουν τὰ
άσματα (4) εἶνε ἀδύνατος, ἀφοῦ ὁ διαιρέτης εἶνε 0, ὁ δὲ διαι-
τέος ποσότης ὡρισμένη καὶ διάφορος τοῦ 0. Ἐπειδὴ
τιμαὶ τῶν κλασμάτων (4) αὐξάνονται διηνεκῶς, ὅταν ὁ πα-
ονομαστὴς αὐτῶν τείνῃ νὰ γίνῃ 0, διὰ τοῦτο θὰ λέγωμεν ὅτι,
ταν εἶνε $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$, καὶ $\gamma\beta_1-\gamma_1\beta\neq 0$ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq 0$,

τὸ σύστημα (1) εἶνε ἀδύνατον, ἢ ὅτι ἐπιδέχεται μὲν μίαν
ἀλλ' αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθ
εἶνε ἄπειροι.

3) Ἐὰν εἶνε $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ καὶ τοὐλάχιστον ἓν τῶν δευτέ
λῶν τῶν (2) καὶ (3) ἔστω τὸ $\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta = 0$, τὸ σύστημα ἐ
ται ἄπειρον πλῆθος λύσεων.

Διότι ἐκ μὲν τῆς $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$, ἔχομεν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1}$ ἐκ δὲ
$\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta = 0$, λαμβάνομεν $\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1}$.

καὶ συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἀναλογίας ἔχομεν $\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1}$

Ἂν τοὺς ἴσους τούτους λόγους παραστήσωμεν διὰ τοῦ
εἶνε
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{\gamma}{\gamma_1} = \rho.$$

Ἄρα ἔχομεν καὶ $\alpha = \alpha_1\rho$, $\beta = \beta_1\rho$, $\gamma = \gamma_1\rho$.
Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν α, β, γ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x +$
τοῦ συστήματος (1), ὅτε προκύπτει $\alpha_1\rho x + \beta_1\rho y = \gamma_1\rho$.

Διαιροῦντες διὰ τοῦ ρ (ὑποτιθεμένου $\neq 0$) ἔχομεν
$$\alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1.$$

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, δίδομεν εἰς τὸν ἕνα τῶν δύο
στων, ἔστω εἰς τὸν y, μίαν οἱανδήποτε τιμήν, π. χ. τὴν
ὅτε ἔχομεν $\alpha_1 x + \beta_1 = \gamma_1$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν (ἂν ὑποτεθῇ $\alpha_1 \neq 0$) $x = \frac{\gamma_1 - \beta_1}{\alpha_1}$.

Ἐὰν εἰς τὸν y δώσωμεν ἄλλας τιμάς, π. χ. τὰς 0·2, κλ
ἔχωμεν διὰ τὸν x τὰς τιμὰς $x = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}$, $\frac{\gamma_1 - 2\beta_1}{\alpha_1}$, κλπ.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν
ρον πλῆθος τιμῶν εἰς τὸν y, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν καὶ
ρον πλῆθος ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ x. Διὰ τοῦτο λέγομ
τὸ δοθὲν σύστημα (1) κατὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐπιδέ
ἄπειρον πλῆθος λύσεων, καὶ θὰ τὸ καλοῦμεν ***ἀόριστον.***

4) Ἐὰν εἶνε $\alpha = \alpha_1 = \beta = \beta_1 = 0$, τὰ δὲ γ καὶ γ_1, ἢ ἓν ἐκ τ
διάφορον τοῦ μηδενός, τὸ δοθὲν σύστημα (1) εἶνε ***ἀδύν***
Διότι, τὰ μὲν πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) γίνονται 0, τ
δεύτερα ἢ τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν, θὰ εἶνε $\neq 0$, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίν
τὴν ὑπόθεσιν.

5) Τέλος, ἐὰν εἶνε καὶ τὰ γ καὶ γ_1 ἴσα μὲ 0, αἱ ἐξισώσει
εἶνε ταὐτότητες, καὶ ἐπαληθεύονται δι' οἱασδήποτε τιμὰς τ
καὶ y.

Ἀνακεφαλαιοῦντες τ' ἀνωτέρω ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Λύσεις τοῦ συστήματος $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1 \end{cases}$..

) ἂν εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha_1}\neq\frac{\beta}{\beta_1}$, *τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύ-*
ιν, τὴν $x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$, $\quad y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$.

) ἂν εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}\neq\frac{\gamma}{\gamma_1}$, *τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.*

) ἂν εἶνε $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta_1}{\beta_1}=\frac{\gamma}{\gamma_1}$, *τὸ σύστημα εἶνε ἀόριστον.*

) ἄν εἶνε $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1,=0$, *καὶ* γ *ἢ καὶ* $\gamma_1\neq0$, *τὸ σύστημα εἶνε ἀδύνατον.*

) ἄν εἶνε $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1=0$, *εἶνε ἀόριστον.*

Ἐφαρμογή. Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{cases} \lambda x+y=2 \\ x+y=2\lambda, \end{cases}$ ὅπου τὸ λ ὑ-
ίθεται ὅτι εἶνε ποσότης γνωστή. Ἔχομεν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=\lambda-1$
ομένως, ἐὰν τὸ λ εἶνε διάφορον τῆς 1, τὸ σύστημα ἔχει μίαν
ιν, τὴν

$$x=\frac{2(1-\lambda)}{\lambda-1}=-2, \quad y=\frac{2(\lambda^2-1)}{\lambda-1}=2(\lambda+1).$$

Ἐὰν εἶνε τὸ $\lambda=1$, $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$, καὶ τὸ σύστημα γίνεται,
θέσωμεν ἀντὶ λ τὸ 1 $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=2. \end{cases}$

Ἤτοι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην ἐξίσωσιν καὶ εἶνε ἀόριστον.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς
ιαφόρους τιμὰς τοῦ λ.

α') $\begin{matrix} \lambda x+y=2 \\ x+y=2\lambda. \end{matrix}$ β') $\begin{matrix} \lambda x-2y=\lambda \\ (\lambda-1)x-y=1. \end{matrix}$ γ') $\begin{matrix} x+(3\lambda-1)y=0 \\ y+2y=\lambda-4. \end{matrix}$

α') $\begin{matrix} y=\lambda+2x, \\ 3y-\lambda=x+3. \end{matrix}$ β') $\begin{matrix} x+y=\lambda, \\ \lambda x+y=1. \end{matrix}$ γ') $\begin{matrix} (\lambda^2-1)x-y=\lambda \\ 2x-y=\lambda-1. \end{matrix}$

Τίνα τῶν κάτωθι συστημάτων ἔχουν μίαν λύσιν, εἶνε ἀόρι-
α, ἢ ἀδύνατα ;

388. α′) $3x-5y=2$ β′) $2x+7y-4=0$, γ′) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=$
$-3x+5y=7$. $6x+21y-12=0$, $3x+2y=$

389. α′) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-1$ β′) $x=3,2y$ γ′) $x-14=$
$\frac{2x}{3}+\frac{y}{2}=7$. $4x-3y=12$. $5x+y=$

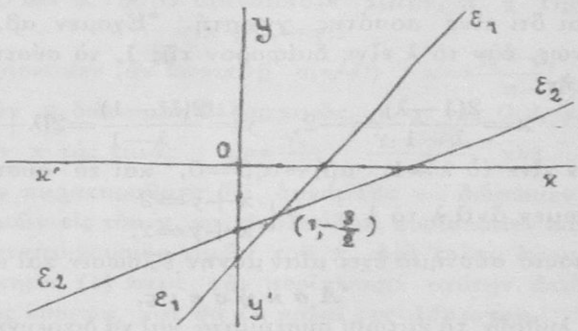
390. α′) $2\alpha x-\beta x=3$ β′) $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$ γ′) $x+y=8$
$\frac{\alpha x}{2}-\frac{\beta y}{6}=2$. $\beta x+\alpha y=\alpha\beta$. $-x-y=$

§ 135. Γραφικὴ λύσις συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἔστω τὸ σύστημα

$$(1)\quad \begin{cases} 3x-2y=6 \\ x-2y=4. \end{cases}$$

Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $x=1, y=-\frac{3}{2}$. Τὸ σημεῖον ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$



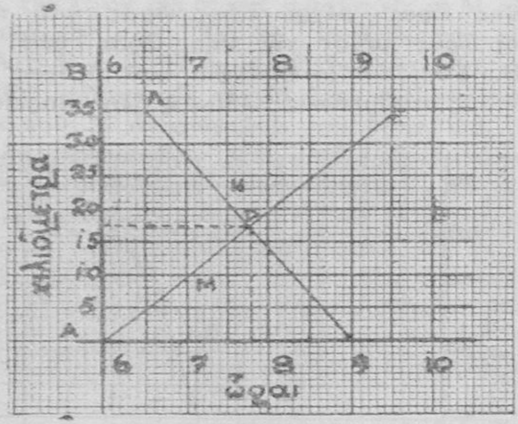
(Σχ. 10.)

κεῖται ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν E_1, E_2, τὰς ὁποίας παριστά αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἑκάστην τῶν εὐθειῶν συστήματος (1), αἱ δὲ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν παρι νουν τὰς ῥίζας τοῦ δοθέντος συστήματος (Σχ. 10).

Ἐφαρμογαί. 1) Ἱππεὺς ἀναχωρεῖ τὴν 6ην πρωϊνὴν ὥ ἐκ τοῦ τόπου Α διὰ νὰ μεταβῇ εἰς τὸν Β. Ἡμίσειαν ὥ βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Β ποδηλάτης, διευθυνόμ

ρὸς τὸν Α διὰ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ὡς ὁ ἱππεύς. Ποίαν ὥραν ὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ συναντηθοῦν, ἄν ὁ πεὺς διανύῃ 10 χλμ. τὴν ὥραν, ὁ ποδηλάτης 14 χλμ. καὶ ἀπόστασις ΑΒ εἶνε 35 χλμ. ;»

Παριστάνομεν τὰς ὥρας διὰ σημείων τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ



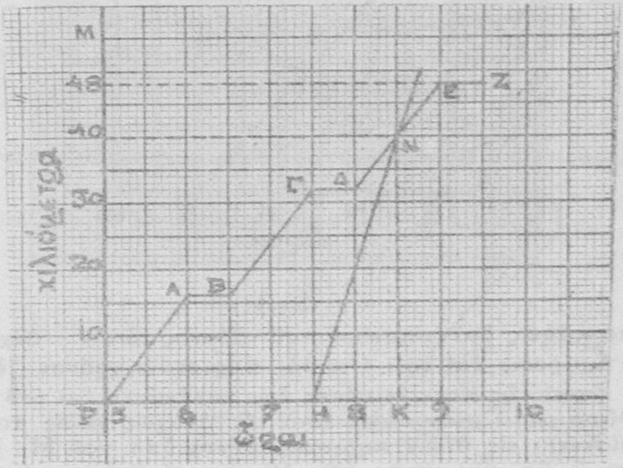
(Σχ. 11).

ὰς ἀποστάσεις διὰ σημείων τοῦ ἄξονος τῶν y. Δεχόμεθα ὅτι, κάστη διαίρεσις ἐπὶ τοῦ Ox θὰ παριστάνῃ χρόνον, διαφέροντα ατὰ 1 ὥραν τῆς παρακειμένης της, καὶ ἑκάστη ἐπὶ τοῦ Oy κατὰ 5 λμ. Οὕτω μετὰ μίαν ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς ὰ εὑρίσκεται εἰς θέσιν παριστανομένην ὑπὸ τοῦ Μ, ἔχοντος τεημέεην 7 ὥρ. καὶ τεταγμένην 10 χλμ., ἐνῶ ἡ πορεία του παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΟΜ. Ἡ θέσις τοῦ ποδηλάτου κατὰ τὴν ἀναχώρησίν του παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Λ (6,5·35) καὶ ἡ ἰς τὸ τέλος μιᾶς ὥρας μετ᾽ αὐτὴν ὑπὸ τοῦ Ν, μὲ τεταγμένην 35—14=21 χλμ. Ἡ πορεία τούτου παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐείας ΑΝ. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν δύο κινητοῦ ἐπὶ τοῦ ρόμου ΑΒ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ(7,75 ὥρ. 17, 5χλμ.). Ἄρα ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ τὰς 7 ὥρ. 45^{λ} καὶ εἰς ἀπόστασιν 7,5χμ ἀπὸ τὸ Α (Σχ. 11).

2) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ τὴν 5ην πρωϊνὴν ὥραν ἐκ τόπου Ρ, διευθυνόμενος πρὸς τὸν Μ, διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν, αὶ σταθμεύων πάντοτε ἐπὶ 30^{λ} μετὰ πορείαν μιᾶς ὥρας. Ζητεῖται, α΄) ποίαν ὥραν θὰ ἔχῃ διανύσῃ 48 χλμ. ἀπὸ οῦ Ρ.· β΄) ποίαν ὥραν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ρ

θὰ συναντηθῇ μὲ αὐτοκίνητον, ἀναχωρῆσαν ἐκ τοῦ Ρ 7 ὥρ.30λ προϊνὴν, τὸ ὁποῖον κινεῖται πρὸς τὴν αὐ διεύθυνσιν διανῦον 40 χλμ. τὴν ὥραν;.»

Ἐργαζόμενοι καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δρόμος τοῦ ποδηλάτου ἀπὸ τῆς 5ης ὥ μέχρι τῆς 6ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ΡΑ (Σχ. 12 ἀπὸ τῆς 6,6ης ὥρας μέχρι 7,5ης ὥρας ὑπὸ τῆς ΒΓ ἀπὸ τῆς 8ης ὥρας μέχρι τῆς 9ης ὥρας ὑπὸ τῆς ΔΕ. τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ (παράλληλα τοῦ ἄξονος τῶν x) ἀ στοιχοῦν πρὸς τὰς σταθμεύσεις. Οὕτω ἡ ὅλη πορεία μετὰ



(Σχ. 12)

σταθμεύσεων τοῦ ποδηλάτου παριστάνεται ὑπὸ τεθλασμέ γραμμῆς ΡΑΒΓΔΕΖ. Ἡ ἀπόστασις 48 χλμ. ἀντιστοιχοῖ εἰς σημεῖον Ε, ἔχον τετμημένην 9ὥρ. Ἄρα τὴν 9ην ὥραν ἀπέχῃ ὁ ποδηλάτης 48 χιλμ. ἀπὸ τοῦ Ρ.

Ἡ πορεία τοῦ αὐτοκινήτου δίδεται ὑπὸ τῆς αὐθείας Η ἐνῷ ἔχομεν Η (7,5 0), καὶ τέμνει ἡ ΗΝ τὴν τεθλασμένην Ν, ἔχον τετμημένην 8,5 ὥρας καὶ τεταγμένην 40 χλμ. Ἑ μένως ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ τὴν 8 ὥρ. 30λ εἰς ἀπόστα 40 χλμ. ἀπὸ τοῦ τόπου Ρ.

Προβλήματα γραφικῶν κατασκευῶν.

αραστήσατε γραφικῶς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τὰς πορείας
ὸς αὐτοκινήτου καὶ μιᾶς ἁμαξοστοιχίας· β΄) μιᾶς δευτέρας
στοιχίας καὶ μιᾶς τρίτης. Τὰ μὲν δύο πρῶτα κινητὰ ἀναχω-
ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου Ρ, τὰ δὲ δύο ἄλλα ἐκ τοῦ Μ. Τὸ αὐτοκί-
ἀναχωρεῖ τὴν 13ην ὥρ.5^λ καὶ φθάνει εἰς τὸ Μ τὴν 15ην ὥρ.
ὲ σταθμεύσεις 5^λ, 4^λ, 3^λ, 2^λ, 1^λ εἰς ἕκαστον τῶν ἐνδιαμέ-
ταθμῶν Α,Β,Γ,Δ,Ε. Ἡ ἐκ τοῦ Ρ ἁμαξοστοιχία, ἀναχωροῦσα
4ην ὥρ. 25^λ, φθάνει εἰς τὸν Μ ἄνευ σταθμεύσεως τὴν 16ην
^{λ}. Ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀναχωροῦσα τὴν 13ην ὥρ. 20^λ φθάνει
τὸν Ρ τὴν 15ην ὥρ. 45^λ μετὰ σταθμεύσεις 2^λ, 3^λ,
^{λ} εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμοὺς Δ, Γ, Β, Α. Ἡ τρίτη
στοιχία, ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ Μ τὴν 14ην ὥραν φθάνει εἰς
ʼ τὴν 15ην ὥρ. 55^λ μετὰ στάθμευσιν 3^λ εἰς τὸν Α. Ἡ
τασις ΡΜ εἶνε 131 χλμ., ἡ δὲ τῶν ἐνδιαμέσων σταθ-
ἀπὸ τοῦ Ρ εἶνε 51χλμ., 66, 80χλμ., 95χλμ., 122χλμ., καὶ
νήσεις ὑποτίθενται ὁμαλαί. Εὕρετε γραφικῶς ποῦ συναν-
ι τὰ κινητὰ ἀνὰ δύο καὶ νὰ γίνουν αἱ πρέπουσαι ἐπαλη-
εις.

Ἐκ δύο προσώπων τὸ ἓν ἔχει 65000 δρχ. τὸ ἄλλο 125000 δρχ.
ἔτος τοῦ μὲν α΄ ἐλαττοῦται τὸ ποσὸν κατὰ 8000 δρχ. τοῦ
αὐξάνεται κατὰ 2500 δρχ. Μετὰ πόσα ἔτη αἱ περιουσίαι
θὰ εἶνε ἴσαι; Νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ δι'
ογισμοῦ.

ύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν ὁ μὲν ἐκ τοῦ τόπου Μ τὴν
ὥρ., ὁ δὲ ἐκ τοῦ Ν τὴν 9ην ὥρ. 48^λ καὶ διευθύνονται
συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. Ὁ Α συναντᾷ τὸν Β τὴν
ὥρ. καὶ φθάνει εἰς τὸν Ν τὴν 13ην ὥρ. Ἂν ἡ ἀπόστασις
εἶνε 60 χλμ., νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος καθ' ὃν ὁ Β φθάνει εἰς τὸν
αὶ ἡ ταχύτης ἑκάστου ποδηλάτου. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ γρα-
ς καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

Μία γραμμὴ τροχιοδρόμων ΑΒ μήκους 8 χλμ. διατρέχεται κατὰ
ἀντιθέτους φορὰς ὑπὸ ἁμαξῶν, αἵτινες ἀναχωροῦν ἀνὰ
διανύουσαι 12 χλμ. τὴν ὥραν, περιλαμβανομένων καὶ τῶν
μεύσεων. Ἡ πρώτη ἀναχώρησις ἐκ τοῦ Α καὶ Β γίνεται
ρόνως τὴν 6ην ὥραν. Πεζοπόρος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α τὴν

8ην ὥρ. 15^{λ}, διευθυνόμενος πρὸς τὸ Β μὲ ταχύτητα 4χλμ. ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ α΄) πόσας ἁμάξας θὰ συναντήσῃ ἐρχομέν τοῦ Β· β΄) πόσαι ἅμαξαι ἐρχόμεναι ἐκ τοῦ Α θὰ τὸν συν σουν. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ γραφικῶς καὶ ἡ ἐπαλήθευσις λογιστ

Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν.

395. $4x-5y=1$ καὶ $3x+7y=6$.

396. $0{,}75\,x-9y-5=0$ » $x-3y=0$.

397. $0{,}75x-0{,}625y-0{,}5=0$ » $x+9y-7=0$.

398. $\frac{x-1}{3}=\frac{x+4}{7}$ » $x-2y=0$.

399. $\frac{x-y}{3}-\frac{x-y}{2}+1=10$ » $x-7y=0$.

400. $\frac{1}{x}-\frac{2}{y}=\frac{2}{xy}$ » $x+y=3$.

§136. Συστήματα ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ περισσοτέ τῶν δύο ἀγνώστους.

Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς στους, π. χ. τὸ

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3\omega&=14\\ 2x+y+\omega&=17\\ 3x+2y+2\omega&=13, \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ διὰ μιᾶς τῶν μεθόδων, τὰς ὁ ἐγνωρίσαμεν. Οὕτω διὰ τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀ των συντελεστῶν ἀπαλείφομεν π.χ. τὸν x μεταξὺ τῶν δύο των ἐξισώσεων τῶν (1) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 2 & x+2y+3\omega=14\\ -1 & 2x+y+\omega=7\\ \hline & 3y+5\omega=21. \end{array}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δύο πρώτων ἐξισώ τοῦ δοθέντος συστήματος (1), ἔστω τὴν δευτέραν, διὰ τῆς εὑρεθείσης $3y+5\omega=21$, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον τὸ δοθὲν (§ 129), τὸ

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3\omega&=14\\ 3y+5\omega&=21\\ 3x+2y+2\omega&=13. \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Ἀπαλείφομεν τώρα τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν
ιαὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|r} 3 & x+2y+3\omega=14 \\ -1 & 3x+2y+2\omega=13 \\ \hline & 4y+7\omega=29. \end{array}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρώτην ἢ τὴν τρίτην
ωσιν τοῦ (2) διὰ τῆς προκυψάσης $4y+7\omega=29$, ἔστω τὴν
ίην, καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (3) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ
καὶ τὸ (1)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3\omega=14 \\ 3y+5\omega=21 \\ 4y+7\omega=29. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Μεταξὺ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3) ἀπαλείφομεν
y καὶ εὑρίσκομεν $\omega=3$. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν μίαν τῶν δύο
ευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3), ἔστω τὴν τρίτην, διὰ τῆς $\omega=3$,
ι ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (4)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3\omega=14 \\ 3y+5\omega=21 \\ \omega=3, \end{array}\right\} \quad (4)$$

ὁποῖον εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὰ προηγούμενα. Ἀντικαθι-
ῶμεν τὸ ω διὰ τῆς τιμῆς του εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων
4 καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $y=2$. Τέλος ἐὰν τὰς τιμὰς τῶν
καὶ y ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ (1) ἢ τοῦ (4) εὑ-
ίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν
γνώστων εἶνε $x=1$, $y=2$ καὶ $\omega=3$.

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) λύομεν καὶ δι' ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς
ντικαταστάσεως ὡς ἑξῆς. Λύομεν τὴν μίαν τῶν (1), ἔστω τὴν
ρώτην, ὡς πρὸς τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων, π.χ. ὡς πρὸς x, θεω-
οῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς γνωστούς. Οὕτω εὑρίσκομεν τὴν ἐξί-
ωσιν

$$x=14-2y-3\omega. \quad (2')$$

ύτη μετὰ δύο ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν σύστημα
ισοδύναμον πρὸς αὐτό. Τὴν τιμὴν ταύτην θέτομεν εἰς τὰς ἄλ-
ας δύο ἐξισώσεις τοῦ (1) καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὰς κάτωθι δύο
ξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους

$$2(14-2y-3\omega)+y+\omega=7$$
$$3(14-2y-3\omega)+2y+2\omega=13,$$

ἢ μετὰ τὴν κατάλληλον διάταξιν
$$3y+5\omega=21$$
$$4y+7\omega=29,$$

καὶ αἱ ὁποῖαι μὲ τὴν (2΄) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον τὸ δοθέν. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὕρ μεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὰς τιμὰς τῶν y καὶ ω, ἤτοι y= ω=3. Ἀκολούθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰ (2΄) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x=1.

Τὸ δοθὲν σύστημα (1) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν εὐκόλως καὶ παλοιφῆς ἀγνώστου, μεταχειριζόμενοι τὴν μέθοδον τῆς συγκρί

Ἄσκησις. Λύσατε τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) διὰ τῆς δου ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς συγκρίσεως.

§ 137. Ἐν γένει, διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων μὲ μ ἀ στους εἰς πρῶτον βαθμόν, ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτη δοθεισῶν καὶ ἑκάστης τῶν (μ—1) ἄλλων ἕνα καὶ τὸν ἄγνωστον. Οὕτω προκύπτουν (μ—1) νέαι ἐξισώσεις μὲ (μ ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦ στημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐρ μεθα ὁμοίως, λαμβάνοντες τὰς νέας (μ—1) ἐξισώσεις αὐτοῦ τῆς δευτέρας καὶ ἑξῆς. Οὕτω προκύπτουν (μ—2) ἐξισώσει (μ—2) ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ τέρου συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ θέν. Οὕτω προχωροῦντες θὰ εὕρωμεν σύστημα ἰσοδύναμον τὸ δοθὲν μὲ μ ἐξισώσεις. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἡ τ ταία θὰ ἔχῃ ἕνα ἄγνωστον· ἡ προτελευταία δύο· ἡ πρὸ α τρεῖς καὶ οὕτω καθεξῆς, ἡ δὲ πρώτη θὰ ἔχῃ μ ἀγνώστους. Λύ τὴν τελευταίαν, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου. άγομεν τὴν τιμὴν τούτου εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν λύομεν αὐτήν, ὡς πρὸς τὸν ἄλλον ἄγνωστον· προχωροῦμεν ὁμ εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ οὕτω καθεξῆς μ τῆς πρώτης.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθ στήματα.

401. α΄) $x+y+\omega=11$, $2x-y+\omega=5$, $3x+2y+\omega=24$. β΄) $x-y+\omega=7$, $x+y-\omega=1$, $y+\omega-x=3$.

402. α΄) $x+4y-8\omega=-8$, $4x+8y-\omega=70$, $8x-y-4\omega=110$. β΄) $2x+7y-11\omega=10$, $5x-10y+3\omega=-15$, $-5x+12y-\omega=31$.

$\frac{x+2y}{5x+6\omega}=\frac{7}{9}$ β') $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{2\omega}{7}=58$

$\frac{3y+4\omega}{x+2y}=\frac{8}{7}$ $\frac{5x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{\omega}{3}=76$

$+y+\omega=128.$ $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{7\varphi}{40}=\frac{147}{5}.$

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἑξῆς συ-
ματα.

$x+\alpha(y+\omega)=k$ β') $x+ky+\lambda\omega=\alpha$
$y+\beta(\omega+x)=\lambda$ $y+k\omega+\lambda x=\beta$
$\omega+\gamma(x+y)=\mu.$ $\omega+kx+\lambda y=\gamma.$

$x+y+\omega=0$ β') $x+y+\omega=1.$
$(\beta+\gamma)y+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega=0$ $\alpha x+\sigma y+\gamma\omega=k$
$\beta\gamma x+\alpha\gamma y+\alpha\beta\omega=1.$ $\alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=k^2.$

$3x+6y-2\omega+9\varphi=6$ β') $x-3\omega+\varphi=10$
$4y-5x+5\omega-5\varphi=5$ $4y+\omega-4\varphi=1$
$2\omega-3x+8y-3\varphi=3$ $3y+\varphi=1$
$9\varphi+10y+3\omega-4x=7.$ $x+2y+3\varphi=25.$

$4x-3\omega=10$ β') $x-2y+3\omega-4\varphi=-8$
$2y-5\varphi=5$ $y-2\omega+3\varphi-4x=6$
$\omega+3\tau=19$ $\omega-2\varphi+3x-4y=-8$
$3x+y=13$ $\varphi-2x+3y-4\omega=-2.$
$2y-3\varphi=12.$

μὰς τρίτη. Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματά ι, στηριζόμενα ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ τῶν ἰδιοτή- τῶν πράξεων. Τὸ εἶδος τούτων δὲν εἶνε ὡρισμένον καὶ φα- ὸν διὰ καθὲν σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν. Οὕτω π. χ. πρὸς λύσιν συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} x+6x+7\omega = 30 \\ x : y : \omega=6 : 8 : 3 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

άφομεν τὰς δευτέρας ὡς ἑξῆς $\frac{x}{6}=\frac{y}{8}=\frac{\omega}{3}$

θὰ εἶνε $\frac{x}{6}=\frac{6y}{48}=\frac{7\omega}{21}=\frac{x+6y+7\omega}{75}=\frac{30}{75}=\frac{2}{5}.$ Εὕ-
ε τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰ κάτωθι συστήματα.

409. α')
$$\begin{aligned} x+y&=5\\ y+\omega&=8\\ \omega+\varphi&=9\\ \varphi+\tau&=11\\ \tau+x&=9. \end{aligned}$$

β')
$$\begin{aligned} x+y+\omega&=15\\ x+y+\tau&=16\\ x+\omega+\tau&=18\\ y+\omega+\tau&=30. \end{aligned}$$

410. α')
$$\frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{18}$$
$$3x+5y+\omega=34.$$

β')
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$$
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2xy.$$

411. α')
$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma}=\frac{\varphi}{\delta}$$
$$\alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi=\frac{\alpha}{\beta}.$$

β')
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{20}$$
$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{1}{15}.$$

γ')
$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}-\frac{\gamma}{\omega}=\lambda$$
$$\frac{\alpha}{x}-\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{\omega}=\mu$$
$$\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{\omega}=\nu.$$

β')
$$\begin{aligned} x+y+\omega+\varphi+\tau&=\ldots\\ x+y+\omega+\tau+\sigma&=\ldots\\ x+y+\omega+\varphi+\sigma&=\ldots\\ x+y+\tau+\varphi+\sigma&=\ldots\\ x+\omega+\tau+\varphi+\sigma&=\ldots\\ y+\omega+\tau+\varphi+\sigma&=\ldots \end{aligned}$$

412. α') $\mu x=\nu y=\varrho\omega$
$\alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta.$

β')
$$\begin{aligned} y\omega+x\omega+xy&=\ldots\\ 3y\omega-4x\omega+5xy&=\ldots\\ 4y\omega-3x\omega+2xy&=1\ldots \end{aligned}$$

γ')
$$\frac{1}{3x-2y+1}+\frac{1}{x+2y-3}=\frac{5}{12}$$
$$\frac{1}{x+2y-3}-\frac{1}{3x-2y+1}=\frac{1}{12}.$$

δ')
$$\begin{aligned} &x+\alpha y+\alpha^2\omega+\ldots\\ &x+\beta y+\beta^2\omega+\ldots\\ &x+\gamma y+\gamma^2\omega+\ldots \end{aligned}$$

413. α')
$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=\mu$$
$$\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\nu.$$

β')
$$\begin{aligned} 3x+7y&=23xy\\ 3\omega+8x&=38x\omega\\ 5y-6\omega&=2y\omega. \end{aligned}$$

$$\frac{xy}{5x+4y}=3 \qquad \frac{y\omega}{3y+5\omega}=7 \qquad \frac{\omega x}{2\omega+3x}=6.$$

δ′) $7(8x-5y)+3(3x-5\omega)=31$

$2(2x-3y)+5(5y-7\omega)=19$

$4(3x-5\omega)-3(5y-7\omega)=19.$

′) $(\omega+x)\mu-(\omega-x)\nu=2y\omega$

$(x+y)\nu-(x-y)\varrho=2x\omega$

$(y+\omega)\varrho-(y-\omega)\mu=2xy.$

β′) $(\varrho+\mu)x-(\varrho-\mu)y=2\nu\varrho$

$(\mu+\nu)y-(\mu-\nu)\omega=2\mu\varrho$

$(\nu+\varrho)\omega-(\nu-\varrho)x=2\mu\nu.$

) $x+y-\varphi=k$ 1

$y+\omega-\tau=\lambda$ 2

$\omega+\varphi-x=\mu$ 3

$\omega+\tau-y=\nu$ 4

$\tau+y-\omega=\varrho.$ 5

δ′) $\dfrac{\mu-\nu}{\nu x+\mu y}=\dfrac{(\nu-\varrho)(\mu-\varrho)}{\varrho}$

$\dfrac{\nu-\varrho}{\varrho y+\nu\omega}=\dfrac{(\varrho-\mu)(\nu-\mu)}{\mu}.$

$\dfrac{\varrho-\mu}{\mu\omega+\varrho x}=\dfrac{(\mu-\nu)(\varrho-\nu)}{\nu}.$

) $3y\omega+2x\omega-xy=xy\omega$

$30y\omega+12xy-18x\omega=13xy\omega$

$18xy+24y\omega-42x\omega=5xy\omega.$

β′) $\dfrac{42}{2x+3y}-\dfrac{9}{2x-3\omega}=4\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{28}{2x+3y}-\dfrac{15}{5y-4\omega}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{4}{2x-3\omega}-\dfrac{5}{5y-4\omega}=0.$

γ′) $\dfrac{1}{x+y}=\mu$

$\dfrac{1}{x+\omega}=\nu$

$\dfrac{1}{y+\omega}=\varrho.$

δ′) $\dfrac{12}{2x+3y}-\dfrac{7,5}{3x+4\omega}=1$

$\dfrac{30}{3x+4\omega}+\dfrac{37}{5y+9\omega}=3$

$\dfrac{222}{5y+9\omega}-\dfrac{8}{2x+3y}=5.$

Ὁμὰς τετάρτη. Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$$\alpha x+\beta y=\gamma$$
$$\alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1$$

γραφικῶς· ἤτοι τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἄπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶνε ἀδύνατον;

Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

§ 138. Προβλήματα πρωτοβαθμίων συστημάτων.

Λέγομεν ὅτι πρόβλημά τι εἶνε πρωτοβαθμίου συστή
ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, ἂν ἡ λύσις
ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος πρωτοβαθμίου μὲ
περισσοτέρους ἀγνώστους. Διὰ τὴν λύσιν σχηματίζομεν τὰς
σεις αὐτοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐπιταγμάτων, λύομεν τὸ σύστη
ἀκολούθως ἐξετάζομεν, ἂν ἡ εὑρεθεῖσα λύσις πληροῖ τοὺς
ὑπάρχοντας περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ἵνα αὕτη εἶνε

Προβλήματα μὲ δύο ἀγνώστους.

*1) «Ἂν ὁ Α δώσῃ 10 δρχ. εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ
τριπλάσια τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 δρχ. εἰς τὸν Α
ἔχῃ ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δρχ. ἔχει καθείς;»*

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶνε θετικοί. Ἐὰ
τοῦ x παραστήσωμεν τὰς δρχ. τοῦ Α καὶ διὰ τοῦ y τὰς το
δώσῃ δὲ 10 δρχ. ὁ Α εἰς τὸν Β, τὰ μὲν ἀπομένοντα χρή
εἰς τὸν Α θὰ εἶνε $x-10$, τὰ δὲ τοῦ Β, $y+10$ καὶ θὰ
μεν $4(x-10)=y+10$.

Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 δρχ. εἰς τὸν Α θὰ εἶνε $x+20=(2y-$

Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\begin{cases} 3(x-10)=y+10 \\ x+20=2(y-20) \end{cases}$ ἐκ τῆς λύσεως
τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=28$ δρχ., $y=44$ δρχ. καὶ ἡ λύσις
δεκτή.

*2) «Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου
ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶνε 10, ἐὰν δ' ἐναλλάξωμε
ψηφία του νὰ προκύπτῃ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ».*

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων
y τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶνε $10x+y$
δὲ x καὶ y πρέπει νὰ εἶνε ἀκέραιοι μονοψήφιοι διάφοροι το

Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα $\begin{cases} x+y=10 \\ 10y+x=3\,(10x- \end{cases}$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $y=8\frac{1}{18}$, $=1\frac{17}{18}$. Ἑ
μένως ἡ λύσις ἀπορρίπτεται καὶ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον.

*3) «Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ
μείου καὶ θ' ἀπέχουν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου 12 μέτρα μέν, ἐὰν
νηθοῦν ἐπὶ 12 πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, 204 μέτρα δέ,*

ρς ἀντιθέτους φοράς. Πόση εἶνε ἡ ταχύτης καθενὸς (κι-υμένων ὁμαλῶς)».

Ἔστω x μέτρα ἡ ταχύτης τοῦ α′ καὶ yμ. ἡ τοῦ β′. Μετὰ 12^{δ} τὸ α′ ὰιατρέξῃ 12x μ. καὶ β′ τὸ 12yμ., ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶνε ι (11x—12y) μ., ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, καὶ (12x+ 2) μ., ἐὰν τὴν ἀντίθετον. Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ

ςημα $\left\{\begin{array}{l} 12-12y=12 \\ 12+12y=204 \end{array}\right.$ ἢ τὸ ἰσοδύναμον $\left\{\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=17 \end{array}\right.$

τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν x=9μ, y=8μ. καὶ ἡ λύ-ς εἶνε δεκτή.

4) «Ἔχει τις οἶνον δύο ποιοτήτων, τῆς μὲν α′ ἡ ὀκᾶ ᾶται α δρχ., τῆς δὲ β′ β δρχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ ύῃ ἐξ ἑκάστης, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ ὀκάδων τιμώ-εον γ δρχ. κατ' ὀκᾶν (χωρὶς κέρδος ἢ ζημίαν)».

Ἔστω ὅτι θὰ θέσῃ x ὀκάδας ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ y τῆς δευτέρας. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x+y=\mu \\ \alpha x+\beta y=\gamma\mu \end{array}\right.$

τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=\dfrac{(\beta-\gamma)\mu}{\beta-\alpha}$, $y=\dfrac{(\gamma-\alpha)\mu}{\beta-\alpha}$.

ερεύνησις. Ἵνα ὑπάρχῃ μία μόνη λύσις, πρέπει $\beta-\alpha\neq 0$ ἢ $\beta\neq\alpha$. ὶ ἂν εἶνε $\beta>\alpha$ πρέπει $\beta\geqq\gamma$, $\gamma\geqq\alpha$, ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y εἶνε θετικαὶ ἢ 0. Ἂν εἶνε $\beta<\alpha$, πρέπει καὶ $\beta\leqq\gamma$, $\gamma\leqq\alpha$ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἂν εἶνε $\beta=\alpha$ τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ὸς ἂν εἶνε καὶ $\beta=\gamma$, ὅτε καταντᾷ ἀόριστον. Ἐν γένει διὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶνε $\beta>\gamma>\alpha$ ἢ $\gamma<\alpha$.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

εὑρεθῇ κλάσμα, τοῦ ὁποίου ἂν διπλασιασθῇ ὁ ἀριθμητὴς ἐλαττωθῇ ὁ παρονομασνὴς κατὰ 1 γίνεται ἴσον μὲ 0,5· ἂν λασιασθῇ ὁ παρονομαστὴς καὶ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμητής του τὰ 1 γίνεται ἴσον μὲ ἓν ἕβδομον.

ὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἂν εἰς τὸ διπλάσιον ῦ ἑνὸς προστεθῇ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἄλλου, νὰ προκύπτῃ 24. ν εἰς τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου προστεθῇ τὸ πενταπλάσιον ῦ ἄλλου νὰ προκύπτῃ 29.

αιδίον λέγει εἰς ἄλλο, ἐὰν μου δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων υ θὰ ἔχω 40 μῆλα. Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ· δός μου σὺ τὸ ἥμισυ ν ἰδικῶν σου διὰ νὰ ἔχω 35. Πόσα μῆλα εἶχε καθέν;

421. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ
του μεῖον τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου νὰ ἰσοῦται μὲ 15, κ
τετραπλάσιον τοῦ πρώτου μεῖον τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ δευτέρ
ἰσοῦται μὲ 12.

422. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α΄ εἶνε τριπλάσιος
καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ α΄ μεῖον τὸ τριπλάσιον τοῦ β΄ νὰ ἰσοῦται

423. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ
του μεῖον τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου νὰ ἰσοῦται μὲ 5, κα
διπλάσιον τοῦ πρώτου μεῖον 25 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαπ
πλάσιον τοῦ δευτέρου.

10/1/36 424. Ὁ Ἱέρων τῶν Συρακουσῶν ἔδωκε νὰ τοῦ κατασκευάσουν
φανον ἐκ χρυσοῦ βάρους 7465 γραμ. Ἵνα εὕρῃ ὁ Ἀρχιμ
μήπως ὁ χρυσοχόος ἀντεκατέστησε χρυσὸν δι᾽ ἀργύρου, ἔβ
τὸν στέφανον εἰς τὸ ὕδωρ καὶ ἔχασεν οὗτος 467 γραμ. το
ρους του. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδω
0,052 καὶ ὁ ἄργυρος 0,095 τοῦ βάρους του, πόσος ἦτο ὁ χ
τοῦ στεφάνου καὶ πόσος ὁ ἄργυρος ;

425. Δίδει ὁ Α εἰς τὸν Β μ δρχ. καὶ ἔχει ὁ Β διπλάσια τοῦ Α.
ὁ Β εἰς τὸν Α μ δρχ. καὶ ἔχει ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσα
χεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς ;

426. Δύο κινητὰ ἀπέχοντα α μέτρα ἀπ᾽ ἀλλήλων κινοῦνται ὁμ
καὶ ἀντιθέτως, ἀναχωρήσαντα συγχρόνως. Ὅταν μετὰ t δ
ρόλεπτα συνηντήθησαν τὸ ἓν εἶχε διατρέξει β μέτρα περισσ
τοῦ ἄλλου. Ποίας ταχύτητας εἶχον ;

427. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων α μέτρα, ἀναχωροῦν συγχρόνως
κινητά, κινούμενα ὁμαλῶς. Ἂν μὲν κινοῦνται ἀντιθέτως,
αντῶνται μετὰ λ_1 ὥρας, ἂν δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, συναντ
μετὰ λ_2 ὥρας. Ποίας ταχύτητας εἶχον ;

428. Δύο μέταλλα ἔχουν εἰδικὰ βάρη δ_1 καὶ δ_2. Ἐὰν σχηματίσ
ἐξ αὐτῶν μεῖγμα εἰδικοῦ βάρους δ καὶ ἀπολύτου βάρους α
πόσα χιλγρ. ἐξ ἑκάστου θὰ λάβωμεν ;

429. α ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ β δρχ. Ἐκ τῶν
δρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε γ δρχ. καὶ ἐκ τῶν γυναικῶν δ
Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ; Μερικὴ περί
σις $\alpha=7$, $\beta=260$, $\gamma=50$, $\delta=30$.

430. Διὰ τὴν ἀγορὰν ν ὀκάδων ζαχάρεως καὶ μ ὀκάδων καφὲ
ρώνει τις δ δρχ. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ καφὲ κα
ζαχάρεως, ἂν ὁ λόγος των εἶνε ρ ;

$x\,0{,}058+y\,0{,}095=\ldots$
$x+y=2215$

. **Προβλήματα μὲ περισσοτέρους τῶν δύο ἀγνώστους.**

1) «Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροι-μα τῶν ψηφίων εἶνε 21 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψη-ίων διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν δ' ἐναλλάξωμεν τὰ ψη-α τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται ατὰ 90».

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, ι y τῶν δεκάδων καὶ διὰ τοῦ ω τὸ τῶν μονάδων (ἐνῷ τὰ x,y,ω έπει νὰ εἶνε θετικοὶ μονοψήφιοι καὶ $\neq$ τοῦ 0), ὁ ἀριθμὸς ριστάνεται ὑπὸ τοῦ $100x+10y+\omega$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ

στημα $\left\{\begin{array}{l} x+y+\omega=21 \\ x+\omega=2y \\ 100x+10y+\omega-90=100y+10x+\omega \end{array}\right.$

τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=8$, $y=7$, $\omega=6$. Ἄρα ζητούμενος ἀριθμὸς εἶνε 876.

2) «Ὁ Α καὶ ὁ Β μαζὺ ἐργαζόμενοι τελειώνουν ἓν ἔρ-ν εἰς 5 ἡμέρας· ὁ Α καὶ Γ εἰς 6 ἡμ.· ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς ,5 ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α,Β,Γ δύνα-ι νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον».

Ἔστωσαν x,y,ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι πρέπει νὰ

ε >0. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ

$\frac{1}{y}$ καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Ἄρα οἱ Α καὶ Β εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ καὶ αὐτὸ εἶνε ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$. Διότι ἀφοῦ εἰς 5 ἡμέρας

κτελοῦν τὸ ἔργον, εἰς μίαν ἡμ. ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε

χομεν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν τὸ

ύστημα
$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{5{,}5} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Προσθέτοντες τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιρ-
τες διὰ 2, εὑρίσκομεν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{181}{660}$. Ἀφαιροῦντε-
αὐτῆς τὴν πρώτην τῶν (1), εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega}=\frac{49}{660}$. Ἄρα
$\omega=\frac{660}{49}=13\frac{23}{49}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $y=9\frac{21}{71}$ καὶ $x=1($

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

431. *Ὁμὰς πρώτη.* Τρεῖς ἄνθρωποι εἶχον ποσόν τι χρημάτων
στος καὶ συνεφώνησαν κατὰ σειρὰν νὰ διπλασιάσῃ καθεὶ
χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη ἕκαστος μὲ
δραχμάς. Τὶ ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατ' ἀρχάς;

432. Τρεῖς ἄνθρωποι ἠγόρασαν κτῆμα ἀντὶ 64000 δρχ. Ὁ π
τος θὰ ἠδύνατο νὰ πληρώσῃ ὁλόκληρον τὸ ποσόν, ἂν ὁ
τερος τοῦ ἔδιδε τὰ πέντε ὄγδοα τῶν ὅσων εἶχεν· ὁ δεύτερος
ἠδύνατο νὰ πληρώσῃ τὸ ποσόν, ἂν ὁ τρίτος τοῦ ἔδιδε τὰ ὀ
ἔνατα τῶν ἰδικῶν του, ὁ δὲ τρίτος διὰ νὰ τὸ πληρώσῃ, τοῦ ἔλ
πε τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων εἶχεν ὁ πρῶτος καὶ τὰ τρία δέκατα
τῶν ὅσων εἶχεν ὁ δεύτερος. Πόσα εἶχεν ἕκαστος;

433. Τρεῖς γυναῖκες πωλοῦν ᾠά. Ἐὰν ἡ πρώτη ἔδιδε τὸ ἕβδομον
ἡ τρίτη τὸ δέκατον τρίτον τῶν ἰδικῶν της εἰς τὴν δευτέραν,
εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ᾠῶν. Ἐὰν κα
τρεῖς εἶχον ἐξ ἀρχῆς 368 ᾠά, πόσα εἶχεν ἑκάστη;

434. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν
φίων εἶνε διπλάσιον τῶν μονάδων, καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐ
ὁ 376, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλα
τῶν ψηφίων του. Τὶς εἶνε ὁ ἀριθμός;

435. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ πρῶτος σὺν
ἥμισυ τοῦ δευτέρου, ὁ δεύτερος σὺν τὸ τρίτον τοῦ τρίτου, κα
τρίτος σὺν τὸ τέταρτον τοῦ πρώτου νὰ εἶνε πάντοτε 1000.

436. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ὁ πρῶτος σὺν
ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶνε 120, ὁ δεύτερος σὺν
δέκατον πέμπτον τῆς διαφορᾶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ πρώτου
ἰσοῦται μὲ 62, τὸ δὲ ἡμιάθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦται μὲ

437. *Ὁμὰς δευτέρα* (Διάφορα). Ἔχει τις κεφάλαιον 5400 δρ. καὶ ἄ
6500 δρ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 384 δρ. καὶ ἐκ τῶν δ

..ὸ τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου, καὶ
..ὐαντίον, θὰ ἐλάμβανε 5,5 δρχ. περισσοτέρας ὡς τόκον ἢ πρίν.
..σα τὰ ἐπιτόκια ;

449. ..ὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμε-
..ν καὶ τὸ πηλίκον νὰ εἶνε ἴσα.

450. ..σὸν 8100 δρ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερί-
..ατῶν μὲν α΄ καὶ β΄ νὰ εἶνε ὡς 2 : 3 τῶν δὲ β΄ καὶ γ΄
..ς 3 : 5. Ποῖα τὰ μερίδια ; 9/1/36

..οράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ πρώτου 5 μ. ἐκ
.. οῦ δευτέρου 6 μ., ἀντὶ 122 δρ. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε

451. .. δύο εἴδη, ἐζημιώθη ὁ ἀγοραστὴς 2 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ
..έτρον καθενὸς εἴδους ;

..ύ δυνάμεις, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὁμορρόπως
..έ, ἔχουν συνισταμένην 16 χρ., ἀντιρρόπως δὲ 2 χρ. Πόση εἶνε

452. ..ντασις καθεμιᾶς τούτων ; 9/1/36

..Α λέγει εἰς τὸν Β· δός μου 10 ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω
.. τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ· δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν
..ο, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα εἶχε καθείς ;

453. ..άς τρίτη (Κινήσεως). Ἐκ δύο σημείων, ἀπεχόντων 1500 μ.
..χωροῦν συγχρόνως δύο κινητά, ὁμαλῶς καὶ ἀνιθέτως κι-
..ομενα. Ὅταν συνηντήθησαν τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει 300 μ.
..εισσότερον τοῦ ἄλλου. Τὶς ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των ;

..πὸ δύο τόπων ἀπεχόντων δ μ. ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συ-

454. ..ατῶνται μετὰ t_1^{λ}. Ἐὰν ηὐξάνετο μὲν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου
..ὰ λ %, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἠλαττώνετο κατὰ λ΄ %, θὰ συ-
..τῶντο μετὰ t_2^{λ}, Τίνες εἶνε αἱ ταχύτητες αὐτῶν; Νὰ γίνῃ καὶ ἡ
..ρεύνησις.

..πὸ τῶν ἄκρων τόξου κύκλου 45° κινοῦνται ἐπ' αὐτοῦ δύο κι-
..τὰ ἀντιθέτως, καὶ συναντῶνται μετὰ 3^{δ}. Ἐὰν κινοῦνται πρὸς
..ὴν αὐτὴν φορὰν συναντῶνται μετὰ 5^{δ}. Πόσων μοιρῶν τόξον
..ανύει καθὲν κινητὸν εἰς 1^{δ} ;

..μὰς τετάρτη (Γεωμετρικά). Αἱ πλευραὶ τριγώνου εἶναι 8 μ.,
..1. μ., 12 μ. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὁμοίου πρὸς
..τὸ τριγώνου, ἔχοντος περίμετρον 60 μ. ;

..εῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Πόσαι εἶνε αἱ
..τῖνές των, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν κέντρων των εἶνε α, β, γ ;
.. βάσις καὶ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου ἔχουν λόγον μ: ν. Ἂν ἡ μὲν βάσις

του αὐξηθῇ κατὰ α, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ κατὰ β, τὸ ἐμβαδόν
αὐξάνεται κατὰ γ. Τίνες αἱ διαστάσεις αὐτοῦ;

449. Δύο κύκλων ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς ἡ ἀπόστασις τῶν τρων των εἶνε 0,30 μ. Πόσαι εἶνε αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν, ἐὰν ἔ λόγον 2 : 3;

450. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ βάσις τριγώνου κατὰ 1 μ. καὶ ἐλαττωθ ὕψος αὐτοῦ κατὰ 2 μ., ἐλαττοῦται τὸ ἐμβαδόν του κατὰ Ἐὰν ἐλαττωθῇ ἡ βάσις του κατὰ 2 μ. καὶ αὐξηθῇ τὸ ὕψος κατὰ 3 μ., τὸ ἐμβαδόν του ἐλαττοῦται κατὰ 10 μ^2. Πόση εἶ βάσις καὶ τὸ ὕψος του;

451. *Ὁμὰς πέμπτη*. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁπ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶνε δύο τρίτα τοῦ τῶν μονάδων, γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκυ ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερός του.

452. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του νὰ εἶνε 9. Ἂν ἀντιστρ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του, προκύπει ἀριθμὸς ἴσος μὲ 36 τεσσ κοστὰ ἕβδομα.

453. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον ἑκατοντάδων εἶνε τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλ τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 μεγαλύτερος αὐτοῦ.

454. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δ δων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸν 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθ εἶνε 604. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ πρώτου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34. Νὰ εὑρ ὁ ἀριθμός.

140. Περὶ ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω π. χ. ἡ ἀνισότης $3x > 15$. Προφανῶς ἀληθεύει αὕτη ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ 5. Ἡ ἀνισότης $\alpha^2 + \beta^2 > 2\alpha\beta$ ἀληθεύει δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν α καὶ β. Π. χ. ἂν εἶνε $\alpha=2$, $\beta=1$, ἔχομεν $2^2+1^2>2.1.2$, ἢ $5>4$.

Καλοῦμεν ***ἀγνώστους*** ἀνισότητος τὰ γράμματα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν καταλλήλους τιμὰς διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὕτη.

Αἱ ἀνισότητες αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων των λέγομεν ὅτι ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς ταὐτότητας, ἐκεῖναι δὲ αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν δι' ὡρισμένας τιμὰς αὐτῶν, λέγομεν ὅτι ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς ἐξισώσεις.

Λύσις ἀνισότητος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Δύο ἀνισότητες λέγονται ***ἰσοδύναμοι***, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.

Αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀνισότητας, ἐχούσας ἀγνώστους, ἀποδεικνύονται δ' εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισοτήτων.

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων ἀνισότητος ἢ διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς δι' ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Διὰ τοῦτο ἐπιδιώκομεν κατὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἀνισότητος νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ θετικὴν ποσότητα.

Βαθμὸς ἀνισότητος, τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἓν μέλος εἶνε πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς τὸ δὲ ἄλλο εἶνε 0, λέγεται ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους.

Π. χ. ἡ ἀνισότης $3x^2-5x+1>0$ εἶνε β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Διὰ λύσιν ἀνισότητος τοῦ πρώτου βαθμοῦ ἐργαζόμεθα κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν λύσιν ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ.

Ἔστω π. χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $2x+3-(x+1)>5$.

Ἔχομεν $2x+3-x-1>5$.

Ἐκ ταύτης μετὰ τὴν μεταφορὰν τῶν 3 καὶ -1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγήν, ἔχομεν $x>3$. Δηλαδὴ πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶνε μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Ἔστω πρὸς λύσιν καὶ ἡ ἀνισότης $x+\dfrac{x}{4}>\dfrac{x}{5}-4$.

Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζοντες τὰ ἄνισα ἐπὶ $4.5=20$ καὶ λαμβάνομεν $20x+5x>4x-80$ ἐκ τα της δὲ τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $25x-4x>-80$, ἢ $21x>-80$ ἐ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x>-\frac{80}{21}$.

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $\frac{x}{7}-\frac{x}{6}<2$.

Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, πολλαπλασιάζοντες ἐπ $7.5=35$ καὶ εὑρίσκομεν $5x-7x<70$, ἐκ ταύτης δὲ τὴ $-2x<70$ καὶ ἀκολούθως $x>-35$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες.

455. α′) $2x+5>0$. β′) $-3x>\frac{5}{3}$. γ′) $-4x-9>0$.

14/1/36 456. α′) $0,5x+5<0$. β′) $-9x-18<0$. γ′) $-9x+12>8$.
α′) $9x+7>0$. β′) $-7x-48>0$. γ′) $0,6x-5>0,25(x-1$

14/1/36 457. α) $9x-13>0$. β′) $-9x+32>0$. γ′) $0,5x-1<0,7x-1$.

458. Εὕρετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἐπαληθεύοντας τὰς ἀν σότητας $2x+3<4$ καὶ $x-5>-8$.

459. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν ἀπόστασιν $(AB)=2\gamma$. Τρίτο σημεῖον ἔχει θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶνε $(AM)+(BM)=2\alpha$ ὅπου $\alpha>\gamma$. Πῶς μεταβάλλονται αἱ ἀποστάσεις ΑΜ καὶ ΒΜ ἄν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΜ;

460. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν Α καὶ Β, διευθύ νονται δὲ πρὸς συνάντησίν των. Ἂν ἡ ταχύτης των μεταβάλ λεται μεταξὺ τῶν τ_1 καὶ τ'_1 τοῦ ἑνὸς καὶ τ_2 καὶ τ'_2 τοῦ ἄλλου μεταξὺ τίνων χρόνων θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις καὶ εἰς τίνα ἀπό στασιν ἀπὸ τοῦ Α, ἂν εἶνε $(AB)=\alpha$;

461. ***Ὁμὰς δευτέρα.*** Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη ἰσότητος ἀφαιρέσωμεν τ μέλη ἀνισότητος προκύπτει ἀνισότης, ἀντίστροφος τῆς δοθείσης

462. Ἐὰν εἶνε $\alpha.\beta>0$, δείξατε ὅτι εἶνε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$.

463. Ἐὰν τὰ μέλη ἰσότητος διαιρέσωμεν μὲ τὰ μέλη ἀνισότητος προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης.

464. Ἐὰν εἶνε $\alpha>\beta$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^2>\alpha\beta$, ἂν τὸ α εἶνε θετικός, κα $\alpha^2<\alpha\beta$, ἂν τὸ α εἶνε ἀρνητικός.

465. Ἐὰν εἶνε $\alpha>1$, θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu>1$, ἐὰν μ εἶνε θετικὸς ἀριθμός Ἂν δ' εἶν $\alpha<1$. θὰ εἶνε καὶ $\alpha^\mu<1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

141. Περὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2. Αὕτη δὲν εἶνε ἀκέραιός τις ἀριθμός, διότι $1^2=1$ καὶ $2^2=4$. Ἀλλ' οὔτε ἄλλος τις ἀριθμὸς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμὸς δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, δύναται οὗτος νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος ἀναγώγου. Ἔστω τοῦτο $\frac{\lambda}{\mu}$. Τότε θὰ εἶνε $\frac{\lambda^2}{\mu^2}=2$, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον, ἐπειδὴ ἀφοῦ τὸ $\frac{\lambda}{\mu}$ εἶνε ἀνάγωγον καὶ τὸ $\frac{\lambda^2}{\mu^2}$ θὰ εἶνε ἀνάγωγον καὶ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ 2.

Λαμβάνομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1·1,1· 1,2· 1,3·....1,7· 1,8· 1,9·2 καὶ σχηματίζομεν ἀκολούθως τὰ τετράγωνα τούτων 1·1,21· 1,44· 1,69· 1,96· 2,25... Παρατηροῦμεν ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν 2 καὶ ὅτι ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,96 καὶ 2,25, τετραγώνων τῶν 1,4 καὶ 1,5 δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Ἤτοι εἶνε $1,4^2<2<1,5^2$.

Λαμβάνομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1,4· 1,41· 1,42 1,43... 1,49· 1,5. Ἐπειδὴ ὁ 2 δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἐκ τούτων, θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Πράγματι, ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε $1,41^2<2<1,42^2$. Ἑπομένως ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ 1,41 καὶ 1,42. Ὁμοίως προχωροῦμεν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 1, 414 καὶ 1,415, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ διαφέρουν κατὰ ἓν χιλιοστόν. Ἂν προχωρήσωμεν ἀκόμη, εὑρίσκομεν ὅτι, ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατὰ ἓν δέκατον χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐν γένει λοιπόν, ἂν προχωρήσωμεν ὁμοίως, θὰ εὕρωμεν ὅτι, ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως τὴν ὁποίαν περιέχουν, καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλωμεν μικρὰ (ἂν ἐξακολουθήσωμεν ἀρκούντως).

Ἄρα ἕκαστος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, κατὰ μείζονα λόγο θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνοντα τ $\sqrt{2}$ κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν.

Λαμβάνομεν ὡς $\sqrt{2}$ τὸν ἕνα ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἔχει αὐτὸς ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, διότι ἄλλως, ὁ ἀρι μὸς αὐτὸς θὰ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος, τὸ ὁποῖ εἶνε ἀδύνατον.

Τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ὅστις παριστάνει τὴν $\sqrt{2}$ καλοῦμεν ***ἀσύμμετρο***

Τοιούτους ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν καὶ εἰς τὴν Γεωμετρί κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν καλουμένων ***ἀσυμμέτρων μεγεθῶ*** πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως αὐτῶν.

«Ἐν γένει καλοῦμεν ἀσυμμέτρους μὲν ἀριθμοὺς ἐκε νους, οἵτινες ἔχουν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μ περιοδικῶν», καὶ εἶνε θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἂν ἔχουν τὸ σημεῖο + ἢ οὐδὲν σημεῖον, ἢ τὸ —, ***συμμέτρους*** δὲ τοὺς μέχρι τοῦ γνωστοὺς ἀριθμοὺς (ἀκεραίους ἢ κλασματικοὺς ἐν γένει). Κα ταῦτα ἡ $\sqrt{2}$ εἶνε ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ὁ 1,41421... κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ. Ὁμοίως οἱ ἀρι μοὶ 3,141 59... καὶ 2,718 28... εἶνε ἀσύμμετροι (ἔχοντες ἄπει δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Καθὼς γνωρίζομεν, οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γ νουν ἐκ τῆς μονάδος ἢ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς 0,1· 0,01· 0,001· διὰ τῆς ἐπαναλήψεως, πρὸς δὲ ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα, τὰ ὁποῖ εἶνε ἴσα μὲ ἀριθμούς, ἔχοντας μὲν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶ ψηφίων, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἑξῆ ὁμοίως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγομε ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθο δεκαδικῶν μονάδων 0,1. 0,01· 0,001 κλπ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα ὅτι, ***«τὸ σύνολον πλήθου ἐκ τῶν αὐτῶν ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων, ἐξ ἑκάστης τῶ ὁποίων δὲν εἶνε περισσότεραι τῶν ἐννέα, θεωροῦνται ὡ ἀριθμοί, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶνε τὰ ψηφία διὰ τῶν ὁποίω γράφονται αὗται»***.

§ 142. Καὶ μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν διατη ροῦνται οἱ ὁρισμοὶ τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν συμ μέτρων, δεικνύεται δ' ὅτι, εἶνε δυνατὴ ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις ὁ πολλαπλασιασμὸς (καὶ ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν ἀκεραίαν) καὶ ἡ διαί ρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν $\alpha : \beta\ (\neq 0)$. Ἐπίσης δεικνύετα ὅτι ἰσχύουν καὶ ἐπ' αὐτῶν αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν πράξεων.

Εἰς τὰς πράξεις των ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείπομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν ἀπό τινος καὶ ἑξῆς καὶ οὕτω ἔχομεν συμμέτρους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶνε μόνον κατὰ προσέγγισιν ἴσοι μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ἐπὶ τῶν συμμέτρων δὲ τούτων ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας.

143. Ἀριθμός τις θετικὸς σύμμετρος (γραμμένος ὡς δεκαδικὸς) λέγεται ***μεγαλύτερος*** ἄλλου τοιούτου, ὁ ὁποῖος λέγεται ***μικρότερος*** τοῦ α', ἂν περιέχῃ τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως τοῦ β' καὶ ἄλλας ἀκόμη, καθὼς ὁ 2,5349 εἶνε μεγαλύτερος τοῦ 2,53438956.

Δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ σύμμετροι λέγονται ***ἴσοι***, ἂν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὁ ὁποῖος εἶνε μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,999... εἶνε ἴσοι. Διότι, ἔστω ἀριθμός τις μικρότερος τῆς 1, π.χ. ὁ $\frac{147}{148}$. Αὐτὸς εἶνε μικρότερος καὶ τοῦ $\frac{999}{1000}$, ἐπειδὴ ὁ μὲν $\frac{999}{1000}$ διαφέρει ἀπὸ τὴν 1 κατὰ $\frac{1}{1000}$, ὁ δὲ $\frac{147}{148}$ κατὰ $\frac{1}{148}$, ἤτοι περισσότερον. Ἑπομένως ὁ $\frac{147}{148}$, ὁ ὁποῖος εἶνε μικρότερος τοῦ 0,999 εἶνε ἀκόμη μικρότερος καὶ τοῦ 0,9999... Ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου, ὁσαδήποτε δὲ ψηφία τοῦ 0,9999.... καὶ ἂν λάβωμεν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος· ἄρα εἶνε 1=0,9999 . . . Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι εἶνε 0,1=0,09999..., καὶ 0,01=0,00999... κλπ.

Κατὰ ταῦτα δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ σύμμετροι, γραμμένοι ὡς δεκαδικοί, θὰ εἶνε ἴσοι: 1) ἂν πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία των τῆς αὐτῆς τάξεως εἶνε τὰ αὐτά· 2) ἂν τινὰ μὲν ψηφία των ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς εἶνε κατὰ σειρὰν τὰ αὐτά, καὶ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τούτων τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφέρει ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχόν του (τῆς αὐτῆς τάξεως) τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, τὰ δὲ ἑπόμενα ψηφία τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ἐκ τῶν ἀνίσων ψηφίων εἶνε πάντα 9, τοῦ δὲ ἄλλου εἶνε πάντα 0 (τὰ ὁποῖα καὶ παραλείπονται). Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἄνισοι. Οὕτω π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 3,1539999... καὶ 3,154 εἶνε ἴσοι, καθὼς καὶ οἱ 0,54327 καὶ 0,543269999..., ἐνῶ οἱ 3,1452.... κα 3,1478... εἶνε ἄνισοι καὶ 3,1478....>3,1452...

Παρατήρησις. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων δυνάμε θα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα καὶ μὲ ἀσυμμέτρου ἀριθμούς. Π.χ. ἐκ τῶν ἀσυμμέτρων 3,14159.... καὶ 2,71828... εἶνε ὁ 3,14159.... μεγαλύτερος τοῦ 2,71828...

Ἀσκήσεις.

466. Δείξατε ὅτι, ἂν δὲν ὑπάρχῃ ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου ἡ τρίτη δύναμις νὰ ἰσοῦται μὲ 7 π. χ., δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος οὔτε κλασματικὸς καὶ ὅτι θὰ ὑπάρχῃ τοιοῦτος ἀσύμμετρος ἀριθμός. Εὕρετε τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, κατὰ τὴν ἐκτεθεῖσαν πορείαν, τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία του.

467. Γενικώτερον, δείξατε ὅτι, ἂν ἀριθμὸς τις τις ἀκέραιος δὲν ἔχῃ ὡς νιοστὴν ρίζαν ἀκέραιον (ν θετικὸς καὶ ἀκέραιος), δὲν ἔχε τοιαύτην οὔτε κλασματικόν, ἀλλ' ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

468. Δείξατε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 3,567999... καὶ 3,568 εἶνε ἴσοι.

469. Ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν 18,1557... καὶ 18,145296... εἶνε μεγαλύτερος ; καὶ διατί ;

470. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 3,14124..., 0,68456... 1,72354... καὶ 12,53652... κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

471. Εὕρετε τὸ $\sqrt{9} \pm \sqrt{3}$ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

472. Εὕρετε τὴν διαφορὰν τοῦ 6,372457... ἀπὸ τοῦ 3,542754... κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

473. Εὕρετε τὴν διαφορὰν $\sqrt{5}-\sqrt{2}$, τὴν $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

§ 144. Περὶ τῶν ριζῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Καλοῦμεν ***δευτέραν, τρίτην,... μιοστὴν*** ρίζαν (ἢ ***μιοστῆς τάξεως ρίζαν)*** δοθέντος ἀριθμοῦ τὸν ἀριθμόν, ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην,... μιοστὴν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα. Τὴν δευτέραν, τρίτην.... μιοστὴν ρίζαν ἀριθμοῦ α σημειώνομεν διὰ τοῦ $\sqrt{\alpha}, \sqrt[3]{\alpha}, \ldots, \sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha, \left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^3=\alpha, \ldots, \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\alpha.$$

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται ***ριζικόν,*** ἡ ὑπ' αὐτὸ ποσότης ***ὑπόρριζος ποσότης,*** ὁ δὲ ἀριθμὸς ὅστις δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ρίζης τῆς ὑπορρίζου ποσότητος λέγεται ***δείκτης τῆς ρίζης.*** Οὕτω εἰς τὴν παράστασιν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ ὑπόρριζος ποσότης εἶνε τὸ α καὶ δείκτης ὁ μ, εἰς δὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐννοεῖται δείκτης ὁ 2.

Ρίζα τις λέγεται ***ἀρτίας ἢ περιττῆς τάξεως***, ἂν ὁ δείκτης ταύτης εἶνε ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός.

5. ***«Ἂν αἱ μιοσταὶ δυνάμεις δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶνε ἴσαι, οἱ ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι»***. Διότι, ἂν π.χ. εἶνε $\alpha^\mu = \beta^\mu$, ὅπου μ εἶνε ἀκέραιος καὶ θετικός, διάφορος τοῦ 0, καὶ οἱ α, β ὁμόσημοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha^\mu : \beta^\mu = 1$, ἢ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = 1$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = 1$. Ἄρα $\alpha = \beta$.

6. α′) ***«Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ρίζας ἀρτίας τάξεως ἀντιθέτους, μίαν δὲ περιττῆς (θετικήν)»***.

Διότι ἀφ᾽ ἑνὸς μέν, θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν, ἐνῷ ἀφ᾽ ἑτέρου, μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν. Οὕτω π.χ. ἡ $\sqrt{16} = \pm 4$, διότι εἶνε $(\pm 4)^2 = 16$. Ἐπίσης εἶνε $\sqrt[3]{27} = 3$, ἐπειδὴ εἶνε $3^3 = 27$, καὶ $\sqrt[5]{32} = 2$.

β′) ***«Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, ἀρνητικήν, καὶ οὐδεμίαν ἀρτίας τάξεως»***.

Διότι, ἀφ᾽ ἑνὸς μέν, μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν, ἐνῷ ἀφ᾽ ἑτέρου, οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) ὑψούμενος εἰς δύναμιν ἀρτίαν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν. Οὕτω π. χ. ἡ $\sqrt[5]{-32} = -2$, ἐπειδὴ εἶνε $(-2)^5 = -32$.

7. Ἔστω ἡ $\sqrt[3]{-8}$. Αὕτη εἶνε -2. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\sqrt[3]{8} = 2$. Ἑπομένως ἔχομεν $\sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8}$, ἤτοι $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι,

«ἡ ρίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀντίθετον ρίζαν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἀντιθέτου του ἀριθμοῦ».

Ἀσκήσεις.

474. Πᾶσα ρίζα τῆς 1 εἶνε $+1$ ἢ -1. Διατί; Πᾶσα ρίζα τοῦ εἶνε 0. Διατί;

475. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν $\sqrt{9}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt{-32}$, $\sqrt[3]{\pm 27}$.

476. Εὕρετε τὰ $3-\sqrt{4}$, $3+\sqrt{4}$, $\alpha+\sqrt{\alpha^2}$, $\alpha+\sqrt[3]{\beta^3}$.

477. Ἡ ἰσότης $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$ εἶνε τελείως ἀκριβὴς καὶ διατί;

478. Πότε ἡ ἰσότης $\sqrt[6]{(\alpha^2)^6}=\alpha^2$ εἶνε τελείως ἀκριβὴς καὶ διατί;

479. Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον $\sqrt{4}+\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{-27}+\sqrt[3]{-125}$.

480. Ὁμοίως τὸ α΄) $\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}-\sqrt[4]{16}$, β΄) $\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{32}$.

481. Ὁμοίως τὰ α΄) $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3}$, β΄) $\sqrt{x^4y^4}$, γ΄) $\sqrt[3]{5^6}+\sqrt[3]{-8}$.

482. Ὁμοίως τὰ α΄) $(3+\sqrt{2})\cdot(3-\sqrt{2})$. β΄) $(\sqrt[3]{\alpha^4})^3$.

Ἰδιότητες τῶν ριζῶν.

§ 148. Κατωτέρω ἐκ τῶν δύο ριζῶν ἑκάστης ἀρτίας τάξεως ἀριθμοῦ θετικοῦ θὰ θεωροῦμεν μόνον τὴν θετικήν.

§ 149. ***«Ἵνα ρίζα ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἰς τὴν δύναμιν ταύτην».***

Οὕτω εἶνε $(\sqrt[\mu]{\alpha})^\rho=\sqrt[\mu]{\alpha^\rho}$ (1)

Διότι, ἂν τὰς παραστάσεις ταύτας ὑψώσωμεν εἰς τὴν μ δύναμιν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενα ἴσα. Ἤτοι:

$$\left[(\sqrt[\mu]{\alpha})^\rho\right]^\mu=(\sqrt[\mu]{\alpha})^{\rho\mu}=\left[(\sqrt[\mu]{\alpha})^\mu\right]^\rho=\alpha^\rho,\ \text{καὶ}\ (\sqrt[\mu]{\alpha^\rho})^\mu=\alpha^\rho.$$

Παρατηρητέον ὅτι, ἡ ἰσότης (1) δὲν θὰ ἦτο τελείως ἀκριβής, ἂν ἐθεωροῦμεν καὶ τὰς δύο ρίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως (θετικοῦ ἀριθμοῦ). Διότι τότε, ἂν τὰ ρ καὶ μ εἶνε ἄρτιοι $(\alpha>0)$, τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς (1) θὰ εἶνε θετικόν, τὸ δὲ δεύτερον θὰ εἶχε δύο τιμὰς ἀντιθέτους.

§ 150. ***«Ἂν εἰς τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ὑπορρίζου ποσότητος ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων, δυνάμεθα νὰ ἐξαλείψωμεν αὐτόν».***

Π. χ. εἶνε $\sqrt[3.2]{\alpha^{5.2}} = \sqrt[3]{\alpha^5}$. Διότι ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς σότητος εἰς τὴν 3.2 δύμαμιν, εὑρίσκομεν ἴσα ἐξαγόμενα, τὰ

$$\left(\sqrt[3.2]{\alpha^{5.2}}\right)^{3.2} = \alpha^{5.2}, \text{ καὶ } \left(\sqrt[3]{\alpha^5}\right)^{3.2} = \left(\alpha^5\right)^2 = \alpha^{5.2}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha^{\rho\mu}} = \alpha^{\rho}$.

Ἀντιστρόφως· ***«δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην ὑπορρίζου ποσότητος ἐπὶ ὸν αὐτὸν ἀριθμόν»***, δεικνύεται δ' ὁμοίως.

1. «Ἂν εἰς τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπάρχῃ παράγων με ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης, δύναται νὰ ἐξαχθῇ οὗτος ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου».

Π. χ. εἶνε $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta} = \alpha . \sqrt[\mu]{\beta}$. Διότι ἔχομεν $\left(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta}\right)^\mu = \alpha^\mu . \beta$ καὶ $(\alpha \sqrt[\mu]{\beta})^\mu = \alpha^\mu . (\sqrt[\mu]{\beta})^\mu = \alpha^\mu . \beta$.

Καὶ ἀντιστροφως· ***«παράγων τις ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς αὐτοῦ, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης».***

Π. χ. εἶνε $3 . \sqrt{2} = \sqrt{3^2 . 2} = \sqrt{18}$, $\alpha . \sqrt[\mu]{\beta} = \sqrt[\mu]{\alpha^\mu \beta}$ καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως, ὡς ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις.

Ἁπλοποιήσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις.

3. $\sqrt[3]{\alpha^5}$, $\sqrt[3]{\alpha^6}$, $\sqrt[5]{\alpha^{25}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}}$, $\sqrt{5^4}$, $\sqrt[3]{4^5}$.

4. $\sqrt[5]{9^{10}}$, $\sqrt[11]{8^{22}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}}$, $\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{4\nu+2}}$.

5. $\sqrt[3]{64^2}$, $\sqrt[9]{125^4}$, $\sqrt[5]{32^3}$.

6. $\sqrt{(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)^3}$, $\sqrt{(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)^4}$, $\sqrt{(3\alpha^2+20\beta+25\beta^2)^6}$,

7. $\sqrt[3]{(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)^2}$, $\sqrt{(8\alpha^3+12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+\delta^3)^2}$,

8. $7 : \sqrt{7}$, $11 : \sqrt{11}$, $\alpha : \sqrt{\alpha}$, $(\alpha+\beta) : \sqrt{\alpha+\beta}$, $(\alpha-1) : \sqrt{\alpha-1}$.

§ 152. ***«Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν ἄλλης ρίζης ποσότη τινος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δείκτας τῶν ριζ καὶ νὰ ἀφήσωμεν ὡς ὑπόρριζον ποσότητα τὴν αὐτήν».***

Π.χ. εἶνε $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}=\sqrt[4.3]{\alpha}$. Διότι, ἂν αἱ δύο παραστάσεις ὑψωθ εἰς τὴν 4.3 δύναμιν, δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα. Πράγματι, ἔχομ

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^{4.3}=\left[\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^{4}\right]^{3}=\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^{3}=\alpha, \text{ καὶ } \left(\sqrt[4.3]{\alpha}\right)^{4.3}=$$

§ 153. ***«Ρίζας μὲ διαφόρους δείκτας δυνάμεθα νὰ τρέψωμ εἰς ἄλλας ἴσας πρὸς αὐτὰς μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην».***

Ἔστωσαν π. χ. αἱ ρίζαι $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$. Ἐπειδὴ τὸ ἑ.κ.π. τ δεικτῶν 2,3,4 τῶν ριζῶν εἶνε ὁ 12, ἂν τοὺς ἐκθέτας τῶν ὑπο ρίζων καὶ τοὺς δείκτας τῶν ριζῶν πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 6, 4, ἀντὶ τῶν δοθέντων λαμβάνομεν τὰ $\sqrt[12]{\alpha^6}$, $\sqrt[12]{\beta^3}$, $\sqrt[12]{\gamma^3}$. Ἐν γένει, τροπὴ ριζικῶν εἰς ἄλλα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην, γίνεται καθ καὶ ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα. Π. χ. $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta}$ τρέπονται εἰς τὰ $\sqrt[\mu\nu]{\alpha^{\nu}}$ καὶ $\sqrt[\nu\mu]{\beta^{\mu}}$. Τὰ $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{}$ $\sqrt[\rho]{\gamma}$ εἰς τὰ $\sqrt[\mu\nu\rho]{\alpha^{\nu\rho}}$, $\sqrt[\mu\nu\rho]{\beta^{\mu\rho}}$, $\sqrt[\mu\nu\rho]{\gamma^{\mu\nu}}$, κ.ο.κ.

§ 154. ***«Τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ριζῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτ ἰσοῦται μὲ ρίζαν τοῦ γινομένου ἢ τοῦ πηλίκου τῶν ὑπο ρίζων ποσοτήτων μὲ δείκτην τὸν τῶν παραγόντων».***

Π. χ. $\sqrt[\mu]{\alpha}.\ \sqrt[\mu]{\beta}.\ \sqrt[\mu]{\gamma}=\sqrt[\mu]{\alpha.\beta.\gamma}$. Διότι, ἂν αἱ παραστάσεις αὐτ ὑψωθοῦν εἰς τὴν μ δύναμιν δίδουν ἐξαγόμενα ἴσα. Πράγμα ἔχομεν $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}.\ \sqrt[\mu]{\beta}.\ \sqrt[\mu]{\gamma}\right)^{\mu}=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu}.\left(\sqrt[\mu]{\beta}\right)^{\mu}.\left(\sqrt[\mu]{\gamma}\right)^{\mu}=\alpha.\beta.$ καὶ $\left(\sqrt[\mu]{\alpha.\beta.\gamma}\right)^{\mu}=\alpha.\beta.\gamma.$

Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha}:\sqrt[\mu]{\beta}=\dfrac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}=\sqrt[\mu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, ἡ δὲ ἀπόδειξ γίνεται ὁμοίως. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\sqrt{2}.\ \sqrt{3}.\ \sqrt{5}.=\sqrt{3}$ $\sqrt{32}:\sqrt{2}=\sqrt{32:2}=\sqrt{16}=4.$

155. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ριζικῶν ἐχόντων διαφόρους δείκτας, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἄλλα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα. Οὕτω θὰ ἔχωμεν π.χ. $\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{5^9}\cdot\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{5^9\cdot 2^4}$, $\sqrt[3]{20^2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{20^4}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{20^4\cdot 5^3}$.

156. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ρίζης κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ρίζης ἀκεραίας παραστάσεως ἐν γένει, ἂν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ παρονομαστὴς νὰ ἔχῃ ὡς ὑπόρριζον ποσότητα δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν δείκτην τῆς ρίζης.

Οὕτω ἔχομεν π. χ. $\sqrt[4]{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{2^3}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}=\dfrac{\sqrt[4]{10}}{2}$

Γενικῶς, ἂν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ ριζικόν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κατάλληλον παράστασιν, δυνάμεθα νὰ μεταιρέψωμεν τὴν δοθεῖσαν εἰς ἄλλην μὲ παρονομαστὴν ἄνευ ριζικοῦ. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\dfrac{\gamma}{\alpha+\sqrt{\beta}}$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{\gamma}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{\gamma\,(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})\,(\alpha-\sqrt{\beta})}=\frac{\gamma\,(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α΄) $\sqrt{54}+3\sqrt{24}-3\sqrt{6}$ β΄) $2\sqrt{45\alpha^3}+\sqrt{124\alpha^3}-\sqrt{320\alpha^3}$.

$$\sqrt{\frac{11^4.5}{7^2}}+\sqrt{\frac{11^2.5^3}{7\,.\,13^2}}-\sqrt{\frac{11^3.\,13^2.}{7.5^2}}$$

Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

$x\cdot\sqrt{x-1}$, $3.\sqrt{5}$, $\alpha\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, $2\sqrt{\dfrac{5}{2}}$, $7\sqrt{\dfrac{1}{49}}$.

Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν ἐχούσας τὸν ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην.

α΄) $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$. β΄) $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt[12]{\gamma}$. γ΄) $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[3]{\gamma}$.

17/1/36 493. Νὰ γίνῃ ἁπλοποίησις τῶν ριζῶν $\sqrt[4]{64}$, $\sqrt[6]{48}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[2\mu]{\alpha^{\mu}}$

17/1/36 494. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

α') $\sqrt{5}.\ \sqrt{20}.\ \sqrt[3]{4}.\ \sqrt[3]{2}.$ γ') $\sqrt[3]{5}.\ \sqrt[4]{30}.$ δ') $\sqrt[3]{\alpha^2}.\ \sqrt[5]{\alpha}.$

495. α') $\sqrt[3]{xy}\sqrt{\dfrac{x}{y}}.$ β') $\sqrt[3]{2\alpha}.\ \sqrt[3]{3\beta}.\ \sqrt[4]{5\alpha\beta}.$ γ') $\sqrt{5}.\ \sqrt{2}.$

496. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα

α') $\sqrt{24} : \sqrt{2}.$ β') $\sqrt[3]{7000} : \sqrt[3]{875}.$ γ') $\sqrt[3]{x^4} : \sqrt[3]{2}.$ δ') $\sqrt[3]{6\alpha^4}\ \sqrt[3]{2}$

497. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})^2$.

~~23/1/36~~ 498. α') $\left(2\sqrt[3]{x}+8\sqrt[3]{x^2}\right).\sqrt[3]{x}.$ β') $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[4]{\alpha}\right).\sqrt{}$

15/1/36 499. Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἰσοδύναμα αὐτῶν μὲ ρ τοὺς παρονομαστάς.

α') $\dfrac{3}{\sqrt{2}}.$ β') $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$ γ') $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}.$ δ') $\dfrac{4.\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}.$ ε') $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$

Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλασματικούς.

§ 157. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$, ὅπου τὸ α παριστ νει ἀλγεβρικὸν ἀριθμόν. Δεχόμενοι ὅτι ἡ ἰδιότης περὶ τοῦ γιν μένου δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέτ εἶνε κλασματικοὶ ἀριθμοί, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\alpha^1=$

Ἤτοι $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2=\alpha$ καὶ ἑπομένως τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha}.$

Κατὰ ταῦτα εἶνε $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2,\quad 9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3.$

Ἂν δοθῇ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ καὶ ζητεῖται νὰ ὁρίσωμεν τὴν σημασίαν αὐτο ἐνῷ εἶνε $\nu>0$ καὶ ἀκέραιος, θὰ ἔχωμεν ἐργαζόμενοι ὡς ἀνα τέρω, $\underbrace{\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\ \alpha^{\frac{1}{\nu}}\ \ldots\ \alpha^{\frac{1}{\nu}}}_{\nu\ \text{φορὰς}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{\nu}{\nu}}=\alpha^1=\alpha.$ Ἤτο

$$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha \text{ καὶ } \alpha^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha}.$$

Ἂν ζητῆται νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἐνῷ εἶνε μ καὶ ν ἀκέραιοι κα θετικοί, λαμβάνομεν τοῦτο ὡς παράγοντα ν φοράς, ὅτε ἔχομε

$$\underbrace{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \ldots \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}_{\nu \text{ φορὰς}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu}{\nu}+\ldots\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\nu} = \alpha^{\mu}, \text{ ἤτοι } \left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = \alpha^{\mu},$$

καὶ τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ εἶνε ἡ νιοστὴ ῥίζα τοῦ α^{μ}, δηλαδὴ ἔχομεν
$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ λάβωμεν ὡς παράγοντα μ φορὰς θὰ ἔχωμεν

$$\underbrace{\alpha^{\frac{1}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{1}{\nu}} \ldots \alpha^{\frac{1}{\nu}}}_{\mu \text{ φορὰς}} = \alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\ldots+\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{1}{\nu}\cdot\mu} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

Ἀλλὰ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$, καὶ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}\cdot\mu} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}$.

Ἡ τελευταία ἰσότης ἰσχύει ἄνευ περιορισμοῦ, ἐπειδὴ θεωροῦμεν ἐκ τῶν δύο ῥιζῶν ἑκάστης ἀρτίας τάξεως μόνον τὴν θετικὴν (§ 148). Οὕτω ἔχομεν $100^{\frac{3}{2}} = \sqrt{100^3} = \sqrt{1000000} = 1000$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τῆς δυνάμεως ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα.

«Δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην κλάσμα, ἔχον ὅρους ἀκεραίους καὶ θετικούς, παριστάνει ἢ τὴν ῥίζαν, τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπόρριζον τὸν ἀριθμὸν μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, ἢ τὴν δύναμιν μὲ βάσιν τὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ».

58. Ἂν τὸν ἐκθέτην τῆς $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ γράψωμεν οὕτω $\alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}}$, τοῦ ρ παριστῶντος ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, θὰ ἔχωμεν
$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}}$ ἤτοι $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ἄλλας ἰδιότητας τῶν ῥιζῶν καθὼς καὶ νὰ τρέψωμεν ῥίζας εἰς ἄλλας ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην.

59. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Ἔχομεν (ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ γινομένου τῶν δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε καὶ ἀρνητικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί),

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \alpha^{0} = 1.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα μέλη τῆς ἰσότητος

$\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{-\frac{1}{2}}=1$ διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2}}$, εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{\nu}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}}$ (ὅπου τὸ ν εἶνε θετικ

καὶ ἀκέραιος ἀριθμός). Καὶ γενικῶς $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}\frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}=\frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$ (ἂν τὰ

καὶ ν εἶνε θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ 0).

Ἤτοι, ***«δύναμις ἀριθμοῦ (διαφόρου τοῦ 0) μὲ ἐκθέτη δοθὲν ἀρνητικὸν κλάσμα παριστάνει κλάσμα, ἔχον ἀριθμ τὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ δύναμιν τοῦ αὐτο ἀριθμοῦ, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος*** (παραβάλετε μὲ τὴν § 46). Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\alpha^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{\alpha^{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^{5}}},\ 4^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{4^{3}}}=\frac{1}{\sqrt{64}}.$$

§ 160. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀριθμοὺ (θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς) ἰσχύουν καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶνε κλα σματικοὶ ἀριθμοὶ (θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ) καὶ ἀποδεικνύονται ε κόλως. Οὕτω ἔχομεν π. χ., ἂν οἱ μ, ν, ρ, λ εἶνε ἀκέραιοι κα θετικοὶ ἀριθμοί,

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\varrho}{\lambda}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\varrho}{\lambda}}. \qquad (1)$$

Διότι, ἂν ἑκάστην τῶν παραστάσεων τούτων ὑψώσωμεν ε τὴν ν. λ δύναμιν, ἔχομεν ἴσα ἐξαγόμενα. Πράγματι, ἵνα πρώτη παράστασις ὑψωθῇ εἰς τὴν ν. λ δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώ σωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων αὐτῆς εἰς τὴν δύναμιν ταύτη καὶ ἔχομεν

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}.\alpha^{\frac{\varrho}{\lambda}}\right)^{\nu.\lambda}=\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu.\lambda}.\left(\alpha^{\frac{\varrho}{\lambda}}\right)^{\nu.\lambda}=\alpha^{\mu.\lambda}.\alpha^{\varrho.\nu}=\alpha^{\mu\lambda+\nu\varrho}. \qquad (2$$

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν τὴν δευτέραν παράστασιν τῆς ἰσότητο (1) εἰς τὴν ν. λ δύναμιν, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\varrho}{\lambda}}=\alpha^{\frac{\mu.\lambda+\varrho}{\nu.\lambda}}$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν ν. λ δύναμιν τὴν τελευ ταίαν παράστασιν, ὅτε ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{\mu\lambda+\varrho\nu}{\nu.\lambda}}\right)^{\nu.\lambda}=\alpha^{\mu\lambda+\nu\varrho}$ (3)

Ἐπειδὴ λοιπὸν τὰ ἐξαγόμενα (2) καὶ (3) εἶνε ἴσα, ἕπεται ὅτ ιαὶ αἱ δύο παραστάσεις τῆς (1) εἶνε ἴσαι μὲ τὴν ν. λ ρίζαν τοῦ $^{\mu\lambda+\varrho\nu}$, ἄρα μεταξύ των εἶνε ἴσαι.

Ἀσκήσεις.

0. Τί σημαίνει α΄) $\alpha^{3\frac{1}{2}}$; β΄) $\alpha^{-4\frac{1}{2}}$; γ΄) $\alpha^{-\frac{3}{8}}$; δ΄) $32^{-\frac{1}{4}}$;

1. Εὕρετε τὸ α΄) $(3+2^{-\frac{1}{2}}).(3-2^{-\frac{1}{2}})$. β΄) $(\alpha+\beta^{-\frac{1}{2}}).(\alpha-\beta^{-\frac{1}{2}})$

2. Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα

5|1|36 α΄) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}\right).\left(2^{\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)$. β΄) $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2$.

3. Εὕρετε τὰ α΄) $\alpha^{0,8}.\ \alpha^{1,4}.\ \alpha^{-0,2}$. β΄) $x^{\frac{3}{4}} : x^{-\frac{2}{3}}$. γ΄) $x^{-\frac{2}{3}} : x^{\frac{4}{5}}$

4. α΄) $\alpha^{1,2} : \alpha^{-0,8}$. β΄) $\alpha^{-1,4} : \alpha^{1,2}$. γ΄) $8^{\frac{4}{5}}.\ 4^{\frac{4}{5}}$.

5. Ὁμοίως τὰ $\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}},\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}},\ \left(\alpha^{-\frac{3}{6}}\right)^{-\frac{4}{5}}.\alpha^{-\frac{3}{}}$.

23/1/36

Περὶ τῆς ρίζης μονωνύμων.

1. Γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ ὑψωθῇ γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμίν τινα, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην, καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον μονωνύμου τινὸς εὑρίσκεται, ἂν διπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι

«διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2».

Οὕτω ἔχομεν ὅτι, $\sqrt{25\alpha^4\beta^2\gamma^6}=25^{\frac{1}{2}}\left(\alpha^4\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\beta^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\gamma^6\right)^{\frac{1}{2}}=$ $=5\alpha^2\beta\gamma^3$. Ὁμοίως τὸ $\sqrt{16\alpha^2\beta^4}=4\alpha\beta^2$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξάγεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ μονωνύμου, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἑκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ. Οὕτω π. χ. ἔχομεν $\sqrt{\dfrac{9\alpha^6\beta^2\gamma^4}{16\delta^2\varepsilon^4}}=\dfrac{3\alpha^3\beta\gamma^2}{4\,\delta\cdot\varepsilon^2}$.

Ἐὰν παράγοντός τινος δὲν ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκριβῶς (δηλαδὴ ἂν ὁ ἐκθέτης του δὲν διαιρῆται διὰ 2), ἀφήνομεν ἐπ' αὐτοῦ σημειωμένην τὴν πρᾶξιν, ἤ, ἐὰν εἶνε δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς παράγοντας, ὥστε νὰ ἐξάγεται ἡ ρίζα τοὐλάχιστον ἑνὸς ἐκ τούτων.

Οὕτω π. χ. ἔχομεν $\sqrt{24\alpha^2\beta^3\gamma}=\sqrt{4.6.\alpha^2\beta^2.\beta\gamma}=2\alpha\beta\sqrt{6\beta\gamma}$.

Εξ Εμμανουήλ Α Λεοντσίνης

Ἀσκήσεις.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἑξῆς μονωνύμων

506. α′) $64\alpha^4\beta^2\gamma^6$. β′) $\frac{4}{9}\alpha^2\beta^2\gamma$. γ′) $\frac{\beta^2\gamma^3\delta^8}{4\alpha^4}$. δ′) $\frac{32\alpha^2\beta^4\gamma^2}{46\delta^4\varepsilon^6}$.

507. α′) $\frac{125}{64}\alpha^3\beta^4\gamma^6$. β′) $\frac{9x^2y^4}{64^4\alpha\beta^2}$. γ′) $\frac{3\alpha^2\beta^8\gamma\eta^6}{16\varepsilon^3\delta^4\vartheta^8}$.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἑξῆς μονωνύμων.

508. α′) $8\alpha^2\beta^6\gamma^9$ β′) $-64\alpha^6\beta^3\gamma^9$. γ′) $\frac{-8\alpha^8\beta^5\gamma^6}{125\delta^3\varepsilon^3}$. δ′) $\frac{8\alpha^3\beta^6\gamma}{27\beta^9\varepsilon^4}$.

Περὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

§ 162. Καθὼς εἴδομεν (§ 146, β′) οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ρίζ ἀρτίας τάξεως. Ἐὰν θέλωμεν λοιπὸν νὰ ἔχουν καὶ οἱ ἀρνητικ ἀριθμοὶ τετραγωνικὴν ρίζαν, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶ οἱ ὁποῖοι γίνονται ἀπὸ νέαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγων δεχόμεθα ἴσον μὲ -1. Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς θὰ καλο μεν ***φανταστικούς***. Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἀρνητικ μονάδος θὰ καλοῦμεν ***φανταστικὴν μονάδα***, καὶ θὰ τ παριστάνωμεν διὰ τοῦ συμβόλου i, τὴν δὲ ἀντίθετον ταύτ διὰ τοῦ $-i$. Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\sqrt{-1}=\pm i$ εἶνε δὲ $i^2=-1$ κ $(-i)^2=-1$. Ἐκ τῆς i ἢ μέρους αὐτῆς γίνονται διὰ τῆς ἐπ ναλήψεως οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί. Π. χ. ἔχομεν ὅτι

$$2i=i+i,\ 3i=i+i+i,\ \frac{4}{9}i=\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον σχηματίζονται καὶ οἱ ἀρνητικοὶ φα ταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$, ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγμα κοὶ ἐκ τῆς -1. Π. χ. εἶνε $-4i=(-i)+(-i)+(-i)+(-i)$.

Οὕτω ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δύναται παρασταθῇ δι' ἀριθμοῦ φανταστικοῦ. Π. χ. ἡ τετραγωνικὴ ρί τοῦ -25 γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\sqrt{-25}=\sqrt{(-1).25}=\sqrt{i^2.25}=\pm i\sqrt{25}=\pm i5.$$

Καὶ γενικῶς θὰ εἶνε $\sqrt{-\alpha^2}=\sqrt{(-1).\alpha^2}=\sqrt{i^2\alpha^2}=\pm\alpha i$.

Οὕτω $\sqrt{-8}=\sqrt{(-1).8}=\sqrt{i^2.8}=\pm i\sqrt{8}=\pm 2i.\sqrt{2}$.

«Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθ ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων».

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα φανταστικοῦ καὶ πραγματικοῦ ἀρι μοῦ καλοῦμεν ***μιγάδα ἀριθμόν***. Οὕτω οἱ $3-5i, -8+5i, 9-$

εἶνε ἀριθμοὶ μιγάδες. Ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ μιγάδος ἀριθμοῦ εἶνε $\alpha+\beta i$, ὅπου α καὶ β εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

Δύο μιγάδες ἢ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **συζυγεῖς**, ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Π.χ. οἱ $7+3i$ καὶ $7-3i$ λέγονται συζυγεῖς (μιγάδες), καθὼς καὶ οἱ $-5i$ καὶ οἱ $5i$, κλπ.

Πράξεις ἐπὶ φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

3. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις φανταστικῶν ἀριθμῶν γίνεται καθὼς καὶ τῶν πραγματικῶν καὶ δίδει ἐν γένει φανταστικὸν ἀριθμόν. Π. χ. εἶνε $8i+5i=13i$. Ὁμοίως, $-17i-6i=-23i$, $24i-5i=19i$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμόν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόνται εἶνε ἄρτιον. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$i.i=i^2=-1$, $(-i).(-i)=(-i)^2=i^2=-1$,

$i^3=i^2.i=-1.i=-i$, $i^4=i^2.\ i^2=(-1)(-1)=+1$.

Γενικῶς εἶνε $i^{4\nu}=(i^4)^\nu=1$, $i^{4\nu+1}=i^{4\nu}.i=1.i=i$,

$i^{4\nu+2}=i^{4\nu}.i^2=1.(-1)=-1$, $i^{4\nu+3}=i^{4\nu}.i^3=1.(-i)=-i$.

Ἡ διαίρεσις καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καὶ εἶνε

$$\alpha i : \beta i=\frac{\alpha i}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \alpha : \beta i=\frac{\alpha}{\beta i}=\frac{\alpha i}{\beta i.i}=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=-\frac{\alpha}{\beta}i.$$

Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν δίδει ἐξαγόμενα ἐν γένει μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτω ἔχομεν ὅτι,

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i.$$

$$(\alpha-\beta i)-(\gamma+\delta i)=\alpha-\gamma-(\beta+\delta)i.$$

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\beta\gamma+\alpha\delta)i.$$

$$4)\ (\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$$

Ἰδιότητες φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν.

4. ***«Τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε ἀριθμὸς πραγματικός».***

Οὕτω τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=\alpha+\beta i+\alpha-\beta i=2\alpha$.

Ἐὰν ζητῆται τὸ γινόμενον τῶν συζυγῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$ ἔχομεν $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2+\alpha\beta i-\alpha\beta i-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2$.

Ἤτοι, ***«τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶνε πραγματικὸς ἀριθμός, καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς τούτων».***

Καλοῦμεν ***μέτρον*** μιγάδος ἢ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ $\alpha+\beta i$, τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ γινομένου τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ συζυγοῦς αὐτοῦ $\alpha-\beta i$. Κατὰ ταῦτα τὸ μέτρον τοῦ $\alpha+\beta i$ καὶ τοῦ $\alpha-\beta i$ εἶνε τὸ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, τοῦ βi καὶ τοῦ $-\beta i$ τὸ $\sqrt{\beta^2}=\beta$. Π.χ. τὸ μέτρον $4-3i$ εἶνε τὸ $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$, τοῦ $\pm 3i=0\pm 3i$ τὸ $\sqrt{3^2}=3$.

Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ εἶνε μεταξύ των ἴσοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει $(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i=0$

ἢ $$(\alpha-\gamma)=-(\beta-\delta)i=(\delta-\beta)i$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα $\alpha-\gamma$ καὶ $(\delta-\beta)i$ εὑρίσκομεν $(\alpha-\gamma)^2=(\delta-\beta)^2 \cdot i^2=(\delta-\beta)^2 \cdot (-1)=-(\delta-\beta)^2$.

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἶνε $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶνε ἴσα μὲ 0, ἐνῷ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν ὅτι, θετικός τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν, τὸ ὁποῖον εἶνε ἀδύνατον.

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι, ***«ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶνε ἴσοι μεταξύ των, θὰ εἶνε χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη αὐτῶν»***, καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξὺ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικοὺς ἀριθμούς.

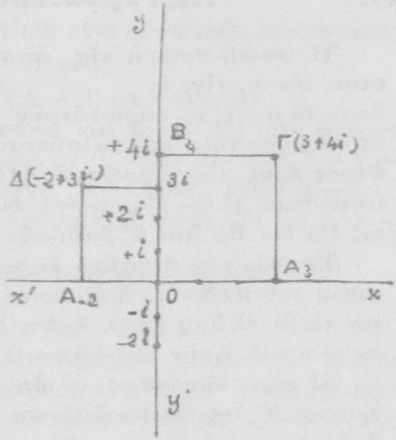
Σημεῖα ὁριζόμενα διὰ μιγάδων ἀριθμῶν.

§ 165. Καθὼς οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἂν θέλωμεν, ὁρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν, οὕτω καὶ οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ὁρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν, ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ τὸ ἄκρον τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν y μήκους 1 θὰ λέγωμεν ὅτι παριστάνει τὴν φανταστικὴν μονάδα i. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $2i$, $3i$,... βi, $(\beta>0)$ ἐὰν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ O τμῆμα ἴσα μὲ 2, 3,.., β μονάδας μήκους πρὸς τὴν φορὰν Oy, καὶ τὰ ὁποῖα λέγομεν ὅτι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν φανταστικῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐὰν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν φορὰν Oy', θὰ λέγωμεν ὅτι αὐτὰ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν

—i, —2i, —3i,.., —βi καὶ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους σχ. 13).

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ μιγάδος τινὸς ριθμοῦ, π. χ. ὑπὸ τοῦ $3+4i$, ὑρίσκομεν τὸ σημεῖον A_3 ἐπὶ ῆς $x'x$, τὸ παριστάνον τὸν ριθμὸν 3, τὸ B_4, παριστάνον ὸν $4i$ ἐπὶ τῆς $y'y$, καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώιον $OA_3B_4\Gamma$· τούτου δὲ ἡ τεάρτη κορυφὴ Γ εἶνε τὸ ζητούενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον παιστάνει τὸν ἀριθμὸν $3+4i$. Καθὼς βλέπομεν, τὸ σημεῖον Γ χει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4. Ἐν γένει, θὰ λέγωμεν τι, ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $\alpha+\beta i$ παιστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου, ἢ τι ὁρίζει τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον χει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$.



(Σχ. 13).

Καλοῦμεν *ὅρισμα* τοῦ μιγάδος $3+4i$ τὴν γωνίαν τὴν ὁποίαν χηματίζει ἡ εὐθεῖα Ox μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΓ, τὸ ποῖον συνδέει τὸν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ σημεῖον τὸ παριτάνον τὸν ἀριθμὸν $3+4i$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ ὅρισμα τοῦ $+\beta i$ εἶνε ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ Ox καὶ τὸ εὐθύραμμον τμῆμα OM, ἂν τὸ M παριστάνη τὸν $\alpha+\beta i$.

Ἀσκήσεις.

Παραστήσατε διὰ σημείων τοὺς μιγάδας.

. α') $2-0{,}75i$· β') $5+3i$· γ') $6-5i$ δ') $-0{,}75-0{,}625i$.

. α') $4+5i$. β') $3-4i$. γ') $2-0{,}64i$. δ') $5+2i$. ε') $6-3i$.

Εὕρετε καὶ τὰ ἀθροίσματα, διαφοράς, γινόμενα, πηλίκα αὐτῶν νὰ δύο.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξανόμενα τῶν κάτωθι πράξεων, καὶ νὰ αρασταθοῦν αὐτὰ διὰ σημείων.

. α') $(5+3i)(7+3i)$. β') $(8+2i)^2$ γ')$(2-7i).(9-2i)$.

. α') $(6+7i).(6-7i)$.β')$(11+8i).(11-8i)$ γ')$(14+15i).(14-15i)$.

. α') $(3+i\sqrt{2}).(4-3i\sqrt{2})$. β') $(9-7i\sqrt{3}):(5+4i\sqrt{3})$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI.

§ 166. Περὶ ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνω στον, τὸν x, εἶνε ἡ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) ὅπου τὰ α, β, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς πραγματικοὺς ἢ παρα στάσεις γνωστάς, καὶ καλοῦνται ***συντελεσταί***, τὸ δὲ γ καὶ ***στα θερὸς ὅρος*** τῆς ἐξισώσεως (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ὑποτίθεται δὲ ὅτι εἶνε $\alpha\neq0$· διότι, ἂν ἦτο $\alpha=0$, τότε ἡ ἐξίσω σις (1) δὲν θὰ ἦτο β′ βαθμοῦ.

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (1) οἱ συντελεσταὶ εἶνε διά φοροι τοῦ μηδενός, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ***πλήρης***, ἐὰν δ' εἶνε μό νον τὸ $\beta=0$, ἢ τὸ $\gamma=0$, ἢ $\beta=0$ καὶ $\gamma=0$, ὅτε θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴ $\alpha x^2+\gamma=0$, ἢ τὴν $\alpha x^2+\beta x=0$ ἢ τὴν $\alpha x^2=0$, λέγεται ***μὴ πλήρης***

Αἱ ῥίζαι ἐξισώσεως, αἱ ὁποῖαι εἶνε σύμμετροι ἀριθμοὶ (εὑρί σκονται δ' ἀκριβῶς) καλοῦνται ***σύμμετροι***, ὅσαι δ' εἶνε ἀριθμο ἀσύμμετροι (εὑρίσκονται δὲ κατὰ προσέγγισιν) λέγονται ***ἀσύμμε τροι***. Αἱ ῥίζαι αἱ ὁποῖαι εἶνε ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καλοῦντα ***πραγματικαὶ*** πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τὰς ***φανταστικὰς*** ἢ ***μιγαδι κάς***, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου ἔχῃ ὑπό ριζον ποσότητα ἀρνητικὴν (ὑποτιθεμένου ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῆ ἐξισώσεως εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί).

§ 167. *Ἰδιότης τῶν ἐξισώσεων.*

«Ἐὰν ἐξισώσεως ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον προκύπτει ἐξίσωσις, ἔχουσα τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆ προκυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖο τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς».

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1) ὅπου τὰ A καὶ B παριστάνουν τὰ μέλη αὐτῆς. Ἐὰν ταύτης ὑ ψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$A^2=B^2. \quad (2)$$

Λέγω ὅτι αὕτη ἔχῃ τὰς ῥίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$ Πράγματι πᾶσαι αἱ ῥίζαι τῆς (1) εἶνε ῥίζαι καὶ τῆς (2). Διότι ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τὰς ῥίζας αὐτῆς, θ ἔχομεν ὅτι ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ Α εἶνε ἴση μὲ τὴν ὁμοίως προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ Β. Ἄρα καὶ (ἡ τιμὴ τοῦ Α)^2= μὲ (τὴν τιμὴν τοῦ Β)^2.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ (2) εἶνε προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$A^2-B^2=0,$$

ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτω $(A-B).(A+B)=0$.

Ἵνα αὕτη ἐπαληθεύεται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων $A-B$ καὶ $A+B$ νὰ εἶνε ἴσος μὲ 0. Ἐὰν μὲν εἶνε $A-B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (1), ἂν δ' εἶνε $A+B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ $A=-B$. Ἄρα ἡ $A^2=B^2$ ἔχει τὰς ῥίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

68. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\gamma=0$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5x^2-48=2x^2$. (1)

Μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3x^2=48$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x^2=16$. Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς $x=4$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον· ἄρα (§ 167) ἡ $x^2=16$ ἔχει τὰς ῥίζας $x=4$ καὶ $x=-4$. Δηλαδὴ αἱ ῥίζαι τῆς (1) εἶνε αἱ 4 καὶ -4.

Ἐν γένει, πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\gamma=0$ (ἐνῷ εἶνε $\alpha\neq 0$), μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος, ὅτε προκύπτει $\alpha x^2=-\gamma$ καὶ ἀκολούθως $x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}$. Αἱ ῥίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς $\alpha x^2+\gamma=0$ εἶνε (§ 167) αἱ $x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Ἐὰν τὸ $-\frac{\gamma}{\alpha}$ εἶνε ἀριθμὸς θετικός, αἱ ῥίζαι θὰ εἶνε πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἂν δ' ἀρνητικός, αἱ ῥίζαι θὰ εἶνε φανταστικοὶ ἀριθμοὶ συζυγεῖς. Δηλαδή, ἂν τὰς ῥίζας τῆς ἐξισώσεως παραστήσωμεν διὰ τῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2, θὰ εἶνε, $\varrho_1=\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\varrho_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν δευτέραν $x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}=$ $\sqrt{(-1).\frac{\gamma}{\alpha}}=\pm\sqrt{i^2\frac{\gamma}{\alpha}}$, ἤτοι $\varrho_1=i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\varrho_2=-i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x^2+25=0$. Εἶνε $\alpha=5$, $\gamma=25$ καὶ $x=\pm\sqrt{-5}=\pm\sqrt{(-1).5}=\pm\sqrt{i^2.5}$ καὶ $x=\pm i\sqrt{5}$,

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

14|2|3 514. α') $4x^2-3=x^2+6$. β') $5x^2+6=x^2+2$.

515. α') $9x^2-0,2=3x^2+15$. β') $\frac{x^2-9}{3}=\frac{x^2-1}{2}$.

516. α') $\frac{3x^2-5}{6}+\frac{x^2+2}{3}=7$. β') $\frac{6}{7x^2}-\frac{4}{9x^2}=\frac{4}{25}$.

517. α') $\frac{x^2-\alpha^2}{5}+\frac{x^2-\beta^2}{2}=\frac{1}{3}$. β') $\frac{x^2-1}{\alpha^2}+\frac{\beta^2-x^2}{\alpha}=\frac{1}{\alpha\beta}-\frac{x^2-1}{4}$.

14|2|36 518. α') $(x+1)(x-1)=48$. β') $(x+7)(x-7)=32$.

519. α') $4(2x+5)(2x-5)=44$. β') $8(3x+\frac{1}{2})(3x-\frac{1}{2})=646$.

§ 169. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x=0$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3x^2+5x=0$.

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $x(3x+5)=0$.

Τὸ γινόμενον $x(3x+5)$ γίνεται 0, ὅταν εἶνε ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶνε ἴσος μὲ 0. Δηλαδή, ὅταν εἶνε $x=0$ καὶ ὅταν $3x+5=0$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x=-\frac{5}{3}$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶνε 0 καὶ $-\frac{5}{3}$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x=0$ (ἐνῷ εἶνε $\alpha\neq0$). Γράφομεν αὐτὴν οὕτω $x.(\alpha x+\beta)=0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶνε αἱ 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

520. α') $6x^2-8x+7x^2=12x^2-8x$ β') $\frac{3}{4}x^2-7\frac{x}{3}-\frac{x}{3}$.

521. α') $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{x}{\alpha}=\frac{x^2+\alpha x}{\alpha\beta}$. β') $\frac{x}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{x}{\alpha+\beta}=\frac{x^2-x}{\alpha-\beta}$.

522. α') $1,6x^2-0,8x+1,7x^2=1,2x-8x$. β') $3,2x^2-7x=1,4$.

523. α') $3\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{4}\right)=\frac{5x^2}{3}$ β') $\frac{5x^2}{2}-\frac{2x}{5}=\frac{3x^2}{2}+\frac{3x}{7}$.

1. α') $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)=3x-\frac{1}{9}$. β') $\frac{x^2}{3}+15x=18x$.
γ') $(x+\alpha)(x-\alpha)-\lambda x-\alpha^2$, δ') $\alpha(x-\alpha)(x-\beta)=\varrho x+\alpha^2\beta$.

170. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (ἐνῷ εἶνε $\alpha\neq 0$), μεταφέρομεν τὸ γ εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $\alpha x^2+\beta x=-\gamma$.

Προσπαθοῦμεν τώρα νὰ καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τὸ πρῶτον μέλος ταύτης. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν ἀκολούθως εἰς αὐτὰ τὸ τετράγωνον τοῦ β. Οὕτω λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$, ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη γράφεται καὶ οὕτω $(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$.

Αὕτη (§ 167) ἔχει τὰς ῥίζας τῶν $2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-2\alpha\gamma}$, ἐκ ταύτης δ' εὑρίσκομεν, ἂν μεταφέρωμεν τὸ β εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα διὰ τοῦ 2α, $x=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.
Ἤτοι, ἂν καλέσωμεν ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὰς ῥίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\varrho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\qquad \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τούτους, εὑρίσκομεν τὰς ῥίζας οἱασδήποτε τῶν μορφῶν ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ.

Ἔστω π. χ., ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x^2-5x+2=0$.

Εἶνε τὸ $\alpha=3$, τὸ $\beta=-5$, καὶ τὸ $\gamma=2$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους τὰς τιμὰς ταύτας εὑρίσκομεν,

$\varrho_1=\frac{5+\sqrt{25-24}}{6}$, $\varrho_2=\frac{5-\sqrt{25-24}}{6}$. Ἤτοι $\varrho_1=1$ καὶ $\varrho_2=\frac{2}{3}$.

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $4x^2+25=0$.

Ἔχομεν $\alpha=4, \beta=0, \gamma=25$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τοὺς ἀνωτέρω τύπους εὑρίσκομεν, $\varrho_1=\frac{\sqrt{-4.4.25}}{2.4}$, $\varrho_2=-\frac{\sqrt{-4.4.25}}{2.4}$

ἢ $\varrho_1=\frac{4.5.i}{2.4}=\frac{5}{2}i$, $\varrho_2=-\frac{5}{2}i$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις.

525. α΄) $3x^2-3x=8$. β΄) $3x^2-\frac{2}{3}x=25$. γ΄) $x^2-\frac{3}{4}x=3x+1$.

526. α΄) $\frac{7x}{5}-\frac{5}{3x}=\frac{2}{3}$. β΄) $\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x}=2$.

527. α΄) $\frac{2}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}$. β΄) $(x+2)(2x+1)+(x-1)(3x+2)=57$.

528. α΄) $\frac{x-5}{x+3}+\frac{x-8}{x-3}=\frac{80}{x^2-9}+\frac{1}{2}$. β΄) $\frac{2x+2}{7-x}+\frac{4x+1}{7+x}=\frac{45}{49-x^2}+1$.

529. α΄) $\frac{x+1}{x^2-4}-\frac{1-x}{x+2}=\frac{2}{5(x-2)}$. β΄) $\frac{x-2}{x+1}+\frac{x-3}{x-1}=\frac{x-4}{x^2-1}$.

Ὁμὰς δευτέρα. Ὁμοίως τὰς ἐξισώσεις.

530. α΄) $x^2+2\alpha x=3\alpha^2$ β΄) $2\alpha^2x^2+\alpha x-1=2$.

531. α΄) $\frac{2x^2}{3}+\frac{\alpha x}{4}=11\alpha(x-3\alpha)$. β΄) $\frac{3x^2}{4}+\frac{x}{2\alpha}=\frac{3}{2\alpha^2}$.

532. α΄) $\frac{2\alpha+x}{2\alpha-x}+\frac{\alpha-2x}{\alpha+2x}=\frac{8}{3}$. β΄) $\frac{x+\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{\beta-\alpha}{x+\alpha}=2$.

533. α΄) $\frac{1}{\alpha+\beta+x}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}$. β΄) $\frac{x^2}{\alpha+\beta}+\alpha-\beta=\frac{2\alpha x}{\alpha-\beta}$.

534. α΄) $\lambda x^2-1=\frac{(\lambda^2-\mu)^2x}{\lambda\mu}$. β΄) $\frac{x^2}{3\lambda-2\alpha}-\frac{\lambda^2-4\alpha^2}{4\alpha-6\lambda}=\frac{x}{2}$.

535. α΄) $\frac{x+3\beta}{8\alpha^2-12\alpha\beta}-\frac{3\beta}{9\beta^2-4\alpha^2}-\frac{\alpha+3\beta}{(2\alpha+3\beta)(x-3\beta)}=0$.

536. *Ὁμὰς τρίτη.* Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 τῆς ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ εἶνε τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 κλπ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν $3x^2-23x=-30$.

537. Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 δὲν εἶνε τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον κλπ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=-2$.

538. Ἐνίοτε λύομεν τὴν ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ δι᾽ ἀμέσου ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων. Π. χ. ἔχομεν ἀντὶ τῆς $x^2+7x-60=0$ τὴν $(x+12)(x-5)=0$. Εὕρετε τὰς ρίζας ταύτης.

ὰ τῆς προηγουμένης πορείας δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν τὰς ις καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π. χ. ἂν μεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3-x^2-6x=0$, γράφομεν $x(x^2-x-6)=0$ $(x-3)(x+2)=0$. Εὕρετε τὰς ρίζας ταύτης.

λυθοῦν ὡς ἀνωτέρω καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

) $x^3-8=0$. β΄) $x^3+8=0$. γ΄) $x^4-16=0$.

) $(3x^3+2x^2).(3x+2)=0$. β΄) $x^3+x^2-4(x+1)=0$.

) $5x^2-16x+11=0$. β΄) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$.

Περὶ τοῦ εἴδους τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $+\beta x+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν, ὡς εἴδομεν (§ 170)

$$=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \varrho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν εἶνε τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ ρίζαι εἶνε αγματικαὶ καὶ ἄνισοι. Ἐπὶ πλέον, ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε τέον τετράγωνον, αἱ ρίζαι εἶνε σύμμετροι, ἄλλως ἀσύμμετροι.

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ ρίζαι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$.

ὰν εἶνε τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρίζαι εἶνε μιγάδες ἐν γένει, ἐπειδὴ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ γράφεται καὶ οὕτω $-(4\alpha\gamma-\beta^2)=i^2(4\alpha\gamma-\beta^2)$, εται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ρίζαι εἶνε συζυγεῖς φανστικαί, ἤτοι $\varrho_1=\frac{-\beta+i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$, $\varrho_2=\frac{-\beta-i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Εἶδος τῶν ριζῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2 τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x^2+\gamma=0$.

1) ***Ἐὰν εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ ϱ_1, ϱ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (σύμμετροι μέν, ἂν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶνε τέλειον τετράγωνον, ἄλλως ἀσύμμετροι).***

2) ***Ἐὰν εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ ϱ_1, ϱ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.***

3) ***Ἐὰν εἶνε $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ϱ_1 ϱ_2 εἶνε μιγάδες ἢ φανταστικοὶ συζυγεῖς.***

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2-5x+6=0$.

ινε $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=6$. $\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1$.

πομένως αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαὶ ἄνισοι καὶ σύμμετροι.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2-12x+12=0$.
Εἶνε $\alpha=3$, $\beta=-12$, $\gamma=12$, $\beta^2-4\alpha\gamma=144-144=0$.
Ἄρα αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.
Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-3x+4=0$
εἶνε $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=4$, $\beta^2-4\alpha\gamma=9-32=-23$.
Ἄρα αἱ ῥίζαι ταύτης εἶνε μιγάδες συζυγεῖς.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῶ[ν] κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν.

543. α') $x^2+5x-15=0$. β') $x^2-5x+15=0$. γ') $x^2+3x+9=0$.
544. α') $6x^2-x+7=0$. β') $9x^2+x-33=0$. γ') $5x^2+8x+3,2=$[0]

Ὁμὰς δευτέρα. Διὰ τίνας τιμὰς τοῦ μ αἱ κατωτέρω ἐξισώσε[ις] ἔχουν ῥίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας;

545. α') $2\mu x^2+(5\mu+2)x+4\mu+1=0$. β') $0,5\mu x^2-(2\mu-1)x=3\mu-$[2]
546. α') $(\mu+1)x^2+3(\mu-1)x+\mu+1=0$. β') $(2\mu-3)x^2+\mu x+\mu-1=$[0]
547. α') $2\mu x^2+3\mu x-6=3x-2(\mu-2)-x^2$.
β') $\mu x^2+(9-3\mu)x-10-2\mu=0$.

§ 172. Σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Ἐκ τοῦ τύπου (§170) τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=$[0]

ἔχομεν $\varrho_1=\dfrac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, $\varrho_2=\dfrac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ (1

Ἐὰν μὲν τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑ-ρίσκομεν $\varrho_1+\varrho_2=\dfrac{-2\beta}{2\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$,

ἐὰν δὲ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ τὰ μέλη

$$\varrho_1.\varrho_2=\frac{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\right)\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}\right)}{4\alpha^2}.$$

Εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιά-σωμεν τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν $-\beta$ καὶ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$. Ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶνε $\beta^2-(\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})^2=$ $=\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)=4\alpha\gamma$. Ἄρα ἔχομεν $\varrho_1.\varrho_2=\dfrac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Π. χ. τῆς ἐξισώσεως $3x^2+5x+6=0$ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ῥι-ζῶν εἶνε $\dfrac{5}{3}$, τὸ δὲ γινόμενον $\dfrac{6}{3}=2$.

73. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς διὰ τῆς λύσεως ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ. Πράγματι, ἂν β εἶνε τὸ ἄθροισμα καὶ γ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, παραστήσωμεν δ' αὐτοὺς διὰ ϱ_1 καὶ ϱ_2, θὰ εἶνε $\varrho_1+\varrho_2=\beta$, $\varrho_1.\varrho_2=\gamma$ καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\beta x+\gamma=0$ θὰ εἶνε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Π. χ. ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶνε -4 καὶ τὸ γινόμενον -45, οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶνε ρίζαι ῆς $x^2+4x-45=0$, ἤτοι οἱ 5 καὶ -9.

Παρατήρησις Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἰσοῦται μὲ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἂν τὸ α τείνῃ εἰς τὸ 0, ἡ μὲν ἐξίσωσις τείνει πρὸς τὴν $\beta x+\gamma=0$, τῆς ὁποίας ρίζα εἶνε ἡ $-\dfrac{\gamma}{\beta}$, ἡ δὲ ἄλλη ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εἶνε τὸ $\pm\infty$, ἐπειδὴ τὸ $\dfrac{-\beta}{\alpha}$ τείνει πρὸς αὐτὸ (§ 105), ἄρα καὶ τὸ $-\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\gamma}{\beta}$ τείνει εἰς τὸ $\pm\infty$.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν.

8. α′) $2x^2-4x-3=0$. β′) $3x^2+8x-12=0$. γ′) $x^2-7x+10=0$

9. α′) $x^2+3x=28$ β′) $x^2+2\alpha x=3\alpha^2$. γ′) $x^2-4\alpha x=-3\alpha^2$. δ′) $2x(x-\alpha)-5\alpha^2=0$.

0. Εὕρετε τὴν ἄλλην ρίζαν τῶν ἐξισώσεων. α′) $x^2-5x+6=0$, ἂν ἡ μία εἶνε 2· β′) τῆς $x^2-\dfrac{10}{3}x+1=0$, ἂν ἡ μία εἶνε $\dfrac{1}{3}$· γ′) τῆς $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$, ἂν ἡ μία εἶνε α.

1. *Ὁμὰς δευτέρα.* α′) Ἂν ϱ_1, ϱ_2 εἶνε ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, εὕρετε τὰ $\varrho_1-\varrho_2$ διὰ τῶν α,β,γ.
β′) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\varrho_1^2+\varrho_2^2$ τῶν ριζῶν ϱ_1,ϱ_2 τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, καὶ ἀκολούθως τὸ $\varrho_1^3+\varrho_2^3$ διὰ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως.

2. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, τὴν διαφοράν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\pi x+k=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

3. Προσδιορίσατε τὸν λ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(\lambda-2)x-(\lambda+3)=0$ νὰ εἶνε μ.

4. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β καὶ γ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχουν λόγον λ.

555. Εὕρετε σχέσιν μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεω $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶνε ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν.

556. Προσδιορίσατε τὰ β καὶ γ, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ νὰ εἶνε 4, τῶν δὲ κύβων των 208.

557. Προσδιορίσατε τὸ ν, ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\alpha-\beta)^2x^2+2(\alpha^2-\beta^2)x+\nu=0$ νὰ εἶνε ἴσαι ἢ νὰ ἔχουν γινόμενον 1

458. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ, ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεω $3x^2-10x+\gamma=0$ νὰ εἶνε μιγαδικαί; Νὰ ἔχουν γινόμενον $-0{,}75$

559. Προσδιορίσατε τὸ γ, ὥστε αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-8x+\gamma=0$ νὰ πληροῦν τὰς ἑξῆς σχέσεις. α΄) $\varrho_1=\varrho_2$. β΄) $\varrho_1=3\varrho_2$. γ΄) $\varrho_1\varrho_2=\pm1$. δ΄) $3\varrho_1=4\varrho_2+3$. ε΄) $\varrho_1^2+\varrho_2^2=40$.

§ *174*. Περὶ τοῦ σημείου τῶν ῥιζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ποῖον εἶνε τὸ σημεῖον ἑκάστης τῶν ῥιζῶν αὐτῆς, ἂν εἶνε πραγματικαί, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἶνε $\varrho_1 . \varrho_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\varrho_1+\varrho_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Σημεῖα τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

1) ***Ἂν εἶνε*** $\dfrac{\gamma}{\alpha}>0$, ***αἱ ῥίζαι εἶνε ὁμόσημοι· θετικαὶ μέν, ἂν εἶνε καὶ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}>0$, ***ἀρνητικαὶ δέ, ἂν εἶνε καὶ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}<0$.

2) ***Ἂν εἶνε*** $\dfrac{\gamma}{\alpha}<0$, ***αἱ ῥίζαι εἶνε ἑτερόσημοι· ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετικὴ μέν, ἂν εἶνε καὶ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}>0$, ***ἡ ἀρνητικὴ δέ, ἂν εἶνε καὶ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}<0$.

3) ***Ἂν εἶνε*** $\dfrac{\gamma}{\alpha}=0$, ***ἡ μία ῥίζα εἶνε ἴση μὲ*** 0, ***ἡ δὲ ἄλλη μὲ*** $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+8x+12=0$. Ἔχομεν $\beta^2-4\alpha\gamma=$

$=64-48=16=$ θετικός. Ἄρα αἱ ρίζαι ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε πραγματικαί. Ἐπειδὴ δὲ $\varrho_1\varrho_2=12$ καὶ $\varrho_1+\varrho_2=-8$, θὰ εἶνε ἀρνητικαί.

Ἀσκήσεις.

Εὕρετε τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται.

α') $x^2-8x+12=0$. β') $6x^2-15x-50=0$. γ') $7x^2-14x-1=0$.

α') $5x^2-6x-12=0$. β') $3x^2+12x+4=0$. γ') $5x^2-15x-1=0$.

α') $7x^2-5x-1=0$. β') $x^2-3x-4=0$. γ') $3x^2-4x-2=0$.

75. Τροπὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρὸς x.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ τραπῇ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἂν ϱ_1, ϱ_2 εἶνε αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ ρίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου, θὰ εἶνε

$$\varrho_1+\varrho_2=-\frac{\beta}{\alpha}\quad(1),\qquad \varrho_1\cdot\varrho_2=\frac{\gamma}{\alpha}.\quad(2)$$

Ὑποθέτοντες τὸ $\alpha\neq0$, γράφομεν τὸν τριώνυμον ὡς ἑξῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Ἀντικαθιστῶντες ἀντὶ τοῦ $\frac{\beta}{\alpha}$ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-(\varrho_1+\varrho_2)$ ἐκ τῆς (1) τὸ δὲ $\frac{\gamma}{\alpha}$ διὰ τοῦ $\varrho_1\cdot\varrho_2$ ἐκ τῆς (2), εὑρίσκομεν ὅτι

$$\begin{aligned}\alpha x^2+\beta x+\gamma &=\alpha[x^2-(\varrho_1+\varrho_2)\,x+\varrho_2\varrho_1]=\\ &=\alpha[x^2-\varrho_1 x-\varrho_2 x+\varrho_1\varrho_2]=\\ &=\alpha[(x-\varrho_1).\,x-\varrho_2(x-\varrho_1)]=\\ &=\alpha\,(x-\varrho_1)\,(x-\varrho_2).\end{aligned}$$

Ἤτοι τὸ $\qquad\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\varrho_1).\,(x-\varrho_2)$.

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἑξῆς τρεῖς περιπτώσεις.

1) Ἂν αἱ ρίζαι ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\,(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$.

2) Ἂν εἶνε $\varrho_1=\varrho_2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)^2$.

3) Ἂν εἶνε $\varrho_1=\gamma+\delta i$, $\varrho_2=\gamma-\delta i$ (μιγάδες συζυγεῖς), θὰ ἔχωμεν $x-\varrho_1=(x-\gamma)-\delta i$, $x-\varrho_2=(x-\gamma)+\delta i$, καὶ $(x-\varrho_1)\,(x-\varrho_2)=[(x-\gamma)-\delta i]\,[(x-\gamma)+\delta i]=$ $=(x-\gamma)^2+\delta^2$. Ἄρα $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[(x-\gamma)^2+\delta^2]$.

Ἤτοι, *«τὸ τριώνυμον* $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ *τρέπεται εἰς γινόμ νον μὲν τοῦ* α *ἐπὶ δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρ* x, *ἂν αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως* $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ *εἶνε πραγμ τικαὶ καὶ ἄνισοι· εἰς γινόμενον δὲ τοῦ* α *ἐπὶ ἓν τέλειον τ τράγωνον, ἢ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἂν αἱ ῥίζ τῆς ἐξισώσεως εἶνε ἴσαι, ἢ μιγάδες συζυγεῖς».*

Π. χ. διὰ τὸ $2x^2-3x-2$, τοῦ ὁποίου αἱ ῥίζαι εἶνε καὶ $-0{,}5$ ἔχομεν, $2x^2-3x-2=2(x-2).(x+0{,}5)$.

Διὰ τὸ $2x^2-12x+18$, τοῦ ὁποίου αἱ ῥίζαι εἶνε ἴσαι μὲ ἔχομεν $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$.

§ 176. Εὕρεσις τριωνύμου ἐκ τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ.

Ὅταν δοθοῦν αἱ ῥίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 ἑνὸς τριωνύμου β΄ βαθμο ὡς πρὸς x, τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $(x-\rho_1).(x-\rho_2)=$ $x^2-(\rho_1+\rho_2).x+\rho_1.\rho_2$ πολλαπλασιασμένον τὸ πολὺ ἐπὶ παρα γοντά τινα σταθερόν.

Ἤτοι, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τριώνυμον τοῦτο (παραλε πομένου τοῦ σταθεροῦ παράγοντος) ἐκ τῶν ῥιζῶν αὐτοῦ.

Π. χ. τὸ τριώνυμον, τὸ ἔχον ῥίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶνε ἴσο μὲ $(x-3).(x-\frac{1}{2})=(x-3).\left(\frac{2x-1}{2}\right)=\frac{2x^2-7x+3}{2}$.

τὰ δὲ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶνε ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-7x+3=0$

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα.

563. α΄) $x^2-9x+18$. β΄) x^2+4x+3. γ΄) $2x^2+3x-2$.

564. α΄) $2x^2+12x+18$. β΄) x^2-4x-5. γ΄) x^2-5x+6.

Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα.

565. α΄) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$. β΄) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$. γ΄) $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$.

566. α΄) $\frac{2x^2-2x-12}{x^2+x-12}$. β΄) $\frac{x^2-6x+5}{3x^2+6x-9}$. γ΄) $\frac{x^2-9x+18}{2x^2-12x+18}$.

Ὁμὰς δευτέρα. Εὕρετε ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ μὲ συντελεστὰ ἀκεραίους, ἔχουσαν ῥίζας

567. α΄) 3 καὶ 0,5. β΄) $3\pm\sqrt{2}$. γ΄) $4\pm\sqrt{5}$. δ΄) $\pm i\sqrt{2}$.

568. α΄) $\alpha\pm\beta$. β΄) $\alpha\pm\sqrt{\beta}$. γ΄) $\alpha\pm i\sqrt{\beta}$. δ΄) $\alpha\pm\sqrt{\alpha}$.

177. Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διὰ τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ὅτι τὸ x λαμβάνει πραγματικὰς τιμάς.

Ἂν αἱ ῥίζαι αὐτοῦ ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω δὲ ὅτι εἶνε καὶ $\varrho_1<\varrho_2$) θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1).(x-\varrho_2).$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε μικρότεραι τοῦ ϱ_1, ἑπομένως καὶ τοῦ ϱ_2. Τότε τὸ $(x-\varrho_1)$ καὶ $(x-\varrho_2)$ εἶνε ἀρνητικά, τὸ δὲ $(x-\varrho_1).(x-\varrho_2)$ ὡς γινόμενον ἀρνητικῶν παραγόντων εἶνε θετικόν, καὶ τὸ $\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἔστω τώρα ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε μεγαλύτεραι τοῦ ϱ_2, ἑπομένως καὶ τοῦ ϱ_1. Τότε τὸ $(x-\varrho_1)$ καὶ $(x-\varrho_2)$ εἶνε θετικά· ἐπίσης καὶ τὸ $(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ εἶνε θετικόν, τὸ δὲ $\alpha(x-\varrho_1).(x-\varrho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε μεγαλύτεραι τοῦ ϱ_1, ἀλλὰ μικρότεραι τοῦ ϱ_2, δηλαδή, ὅτι αὗται κεῖνται μεταξὺ τῶν ῥιζῶν. Τότε τὸ μὲν $(x-\varrho_1)$ εἶνε θετικόν, τὸ δὲ $(x-\varrho_2)$ ἀρνητικόν· τὸ $(x-\varrho_1).(x-\varrho_2)$ εἶνε ἀρνητικόν, ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμων παραγόντων· ἄρα τὸ $\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

Ἂν αἱ ῥίζαι ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε ἴσαι, ἢ μιγάδες ἐν γένει, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x πραγματικὴν καὶ διάφορον τῶν ῥιζῶν, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α. Διότι, ἂν μὲν εἶνε $\varrho_1=\varrho_2$, τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)^2$. Ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α. Ἂν δ' αἱ ῥίζαι εἶνε μιγάδες ἐν γένει, τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων (§ 175), ἑπομένως ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι,

«ὅταν τὸ x ἔχῃ τιμὴν πραγματικήν, κειμένην ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α, ἐνῷ διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x κειμένην μεταξὺ τῶν ῥιζῶν ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α».

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικάς; ἀρνητικάς;

α') $2x^2-16x+24$. β') $-x^2+16x-24$. γ') $2x^2-16x+32$.

570. α) $-2x^2+16x-32$. β′) $2x^2-16x+40$. γ′) $-3x^2+16x-4$

Ὁμὰς δευτέρα. Δοθέντος ἀριθμοῦ πραγματικοῦ λ, νὰ ε ρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν (πραγματικῶ ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν διὰ $x=\lambda$ τὸ $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ ἔχῃ τὸ σ μεῖον τοῦ α, τὸ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2. Μένει εὕρωμεν, ἂν εἶνε μικρότερον τῆς μικροτέρας ϱ_1 ἢ μεγαλύτερον τ μεγαλυτέρας ϱ_2. Ἂν εἶνε $\lambda<\varrho_1$, θὰ εἶνε $\lambda<\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἂ εἶνε $\lambda>\varrho_2$, θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\frac{\varrho_1+\varrho_2}{2}$, ἢ $\lambda>-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἀντιστρόφω ἀποδείξατε διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι, ἂν εἶνε $\lambda<-\frac{\beta}{2\alpha}$ τότε εἶνε $\lambda<\varrho_1$, καὶ ἂν εἶνε $\lambda>-\frac{\beta}{2\alpha}$ θὰ εἶνε καὶ $\lambda>\varrho_2$. Ἡ τούτων ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας.

571. Τὶς ἡ θέσις τῶν 1,75· 5· —1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσε α′) $x^2+3x-2=0$. β′) $2x^2+7x-1=0$. γ′) $x^2-4x+3=$

572. ***Εὕρεσις τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ***κατὰ προσέγγισιν***. Ἐὰν διὰ $x=\lambda_1$ καὶ λ_2 (ὅπου τὰ λ λ_2 εἶνε ἀριθμοὶ πραγματικοὶ) τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ λαμβάνῃ τιμ ἑτεροσήμους, μεταξὺ τῶν λ_1, καὶ λ_2 περιέχεται μία τῶν ριζῶν τ ἐξισώσεως (ἐχούσης ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους).

Διότι τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$, ἂν ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶ αἱ ρίζαι. Διὰ $x=\lambda_1$ γίνεται $\alpha(\lambda_1-\varrho_1)(\lambda_1-\varrho_2)$. Διὰ $x=\lambda_2$ γίν ται $\alpha(\lambda_2-\varrho_1)(\lambda_2-\varrho_2)$. Ἂν λοιπὸν τὰ ἐξαγόμενα αὐτ εἶνε ἑτερόσημα, τὸ πηλίκον των $\frac{(\lambda_1-\varrho_1)\ (\lambda_1-\varrho_2)}{(\lambda_2-\varrho_1)\ (\lambda_2-\varrho_2)}$ εἶνε ἀ νητικόν. Ἂν ὁ παράγων $\frac{\lambda_1-\varrho_1}{\lambda_2-\varrho_1}$ εἶνε <0, ἔστω $\lambda_1-\varrho_1>0$ $\lambda_2-\varrho_1<0$, τότε $\lambda_1>\varrho_1$, $\lambda_2<\varrho_1$. Δηλαδὴ $\lambda_1>\varrho_1>\lambda_2$. Ἤτοι ἡ ρίζ ϱ_1 περιέχεται μεταξὺ τῶν λ_1 καὶ λ_2.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆ διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς (πραγματικὰς) ρίζας ἐξισώσεως κατὰ προσ έγγισιν. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2-2x-3=0$. Θέτομεν ἀντὶ τοῦ δύο ἀριθμούς, ὥστε τὰ ἐξαγόμενα τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν ἐκ τ ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2-2x-3$ νὰ εἶνε ἑτερόσημα.

Διὰ $x=0$ εὑρίσκομεν -3, διὰ $x=1$ ἔχομεν 3· ἑπομένως μ ταξὺ 0 καὶ 1 περιέρχεται μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1· δηλαδὴ θέτομεν $x=0,5$ ὅτε εὑρίσκομεν $2-4=-2$· ἑπομένως ἡ ρίζα περιέχεται μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ τοῦ 1.

Ἡ μέση τιμὴ μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ 1 εἶνε 0,75 καὶ εἶνε ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Διὰ $x=-1$ ἔχομεν $8+2-3=7$. Ἄρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ -1. Προσεγγίσατε περισσότερον, ἢ εὕρετε αὐτήν.

178. Λύσις ἀνισότητος δευτέρου βαθμοῦ.

Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x, εἶνε ἐν γένει τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0, \quad ἢ \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0, (ὅπου\ εἶνε\ \alpha\neq 0),$$

Ἡ β′ μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν α′, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα πάντων τῶν ὅρων, ὅτε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Ὥστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὅτι εἶνε τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$, ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶνε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ (1), παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου τῆς (1) καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι ($\varrho_1<\varrho_2$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ εἶνε θετικόν.

Ἂν εἶνε τὸ $\alpha>0$, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον γίνεται θετικὸν διὰ $x<\varrho_1$, καὶ $x>\varrho_2$ (§ 177). Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα, εἶνε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης ϱ_1 καὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ϱ_2 τοῦ ἀνωτέρω τριωνύμου.

Ἂν εἶνε $\alpha<0$, τότε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τοῦ ϱ_1 καὶ ϱ_2, τὸ γινόμενον $\alpha(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδὴ θετικὸν (§ 177). Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν (1) εἶνε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν ϱ_1 καὶ ϱ_2.

Ἂν αἱ ρίζαι ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε ἴσαι, καὶ εἶνε τὸ $\alpha>0$, τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, διάφορον τῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου, τὸ γινόμενον $\alpha(x-\varrho_1)^2$ εἶνε θετικόν. Δηλαδὴ τότε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἐκτὸς τῆς ϱ_1 ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα. Ἂν εἶνε τὸ $\alpha<0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται διὰ καμμίαν τιμὴν πραγματικὴν τοῦ x, διότι τότε εἶνε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\varrho_1)^2$, καὶ ἀφοῦ τὸ α εἶνε ἀρνητικὸν τὸ $\alpha(x-\varrho_1)^2$ εἶνε ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἂν αἱ ῥίζαι ϱ_1 καὶ ϱ_2 εἶνε μιγάδες ἐν γένει, ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x μέν, ἂν εἶνε $\alpha>0$, δι' οὐδεμίαν δέ, ἂν εἶνε $\alpha<0$. Διότι τὸ τριώνυμον τῆς (1) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων (§ 175)· ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω π. χ., ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2-3x+7>0$. Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε μιγάδες καὶ εἶνε τὸ $\alpha=1>0$· ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $x^2-x-6>0$.

Αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου εἶνε αἱ -2 καὶ 3 καὶ τὸ $\alpha=1>0$. Ἐπομένως αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα εἶνε αἱ $x>3$, καὶ $x<-2$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες.

573. α') $x^2+3x-4>0$ β') $x^2+3x-6>0$. γ') $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{4}<-2$.

Εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ x, τὰς ἐπαληθευούσας τὰς ἀνισότητας

574. $x^2-12x+32>0$ καὶ $x^2-13x+22<0$.
575. $x^2-3x+2>0$ καὶ $4x^2+5x+1<0$.
576. α') $\frac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)}>1$. β') $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-2}>0$. γ') $3+\frac{1}{3-x}>\frac{1}{5x+1}$

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες, ἂν εἶνε $\alpha<\gamma<\gamma<\delta$

577. α') $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$. β') $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)<0$
578. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες.
α') $4x^3-10x^2+18x<0$. β') $3x^3-5x+2x>0$. γ') $x^3-x^2+4x>0$
579. Μεταξὺ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχεται ὁ μ, ἵνα ἡ $\mu x^2+(\mu-1)x+2\mu=0$ ἔχῃ ῥίζας πραγματικάς; μιγάδας;
580. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, ἵνα ἡ $x^2+(2\lambda+1)x>19$ ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x;

79. Περὶ τῶν τιμῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x.

Ἔστω π. χ. τὸ τριώνυμον $7x^2-5x+6$.

Ἂν παραστήσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ y, θὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν

$$y=7x^2-5x+6. \qquad (1)$$

Ἂν τὸ x ἀντικαταστήσωμεν διά τινος τιμῆς, π. χ. διὰ τῆς $x=3$, τὸ y λαμβάνει τὴν τιμὴν $7.3^2-5.3+6. \qquad (2)$

Ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν $3+\varepsilon$, ὅπου τὸ ε παριστάνει ποσότητά τινα πραγματικήν, θὰ ἔχωμεν ὡς τιμὴν τοῦ y τὴν

$$y=7.(3+\varepsilon)^2-5.(3+\varepsilon)+6=$$
$$=7(3^2+2.3.\varepsilon+\varepsilon^2)-5.3-5\,\varepsilon+6=$$
$$=(7.3^2-5.3+6)+7.2.3.\varepsilon+7.\varepsilon^2-5.\varepsilon \qquad (3)$$

Ἐὰν ἀπὸ τὴν τιμὴν ταύτην (3) τοῦ y ἀφαιρέσωμεν τὴν προηγουμένην τιμὴν αὐτοῦ (2), εὑρίσκομεν διαφορὰν τὴν

$$7.2.3.\varepsilon+7.\varepsilon^2-5.\varepsilon \qquad (4)$$

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ε εἶνε ποσότης (θετικὴ ἢ ἀρνητικὴ) ὅσον θέλομεν ἐλαχίστη ἀπολύτως, καὶ ἡ ποσότης (4) γίνεται ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἀπολύτως). Διότι ἕκαστος τῶν ὅρων της περιέχει τὸ ε, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν ὅσον θέλομεν (ἀπολύτως). Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι εἰς ἐλαχίστην (ἀπολύτως), μεταβολὴν τῆς τιμῆς 3 τοῦ x ἀντιστοιχεῖ ἐλαχίστη (ἀπολύτως) μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως (1). Διὰ τοῦτο ***τὸ τριώνυμον (1) λέγεται συνεχὲς ὡς πρὸς*** x ***ἢ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ*** x ***διὰ τὴν τιμὴν τοῦ*** $x=3$. Ἀλλ' οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x, καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ δοθὲν τριώνυμον εἶνε συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x διὰ πᾶσαν τιμὴν τούτου.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι καὶ πᾶν τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶνε συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Ὁμοίως ὁρίζομεν τὴν συνέχειαν αἱασδήποτε συναρτήσεως τοῦ x, ἂν δὲ συνάρτησίς της δὲν εἶνε συνεχὴς διά τινα τιμὴν τοῦ x λέγεται ***ἀσυνεχὴς*** διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπό τινος πραγματικῆς τιμῆς λ εἰς ἄλλην μ, λαμβάνον συνεχῶς πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς, τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν λ καὶ μ, τὸ τριώνυμον θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ εἰς τὴν τιμὴν $\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$, λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους τιμάς, τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν δύο τούτων τιμῶν.

Ἐὰν μεταβλητή τις λαμβάνῃ ἄπειρον πλῆθος πραγματικῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμ θετικόν, ὁσονδήποτε μεγάλον, λέγομεν ὅτι ***τείνει*** εἰς τὸ ***θετικ ἄπειρον*** ($+\infty$) καὶ τὸ σημειώνομεν διὰ τοῦ $x \to \infty$. Ἐὰν αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἀπό τινος καὶ ἑξῆς εἶνε μικρότεραι παντὸς ἀρν τικοῦ ἀριθμοῦ, ὁσονδήποτε μικροῦ, λέγομεν ὅτι τείνει εἰς τὸ ἀ νητικὸν ἄπειρον ($-\infty$) καὶ τὸ σημειώνομεν $x \to -\infty$.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma, (\alpha \neq 0)$. Θέλομεν νὰ εὕρωμ πῶς μεταβάλλεται τοῦτο, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπό $-\infty$ μέχ τοῦ $+\infty$, λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους πραγμ τικὰς τιμάς. Γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς.

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right]=$$

$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right]=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right].$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν μὲν εἶνε τὸ $\alpha>0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔ τὸ σημεῖον τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εἶνε ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν· δ' εἶνε $\alpha<0$, θὰ ἔχῃ τὸ ἀντίθετον σημεῖον αὐτῆς.

1) ***Ἔστω ὅτι εἶνε τὸ α*** >0. Ὅταν τὸ $x\to-\infty$, τὸ $\left(x+\frac{\beta}{4\alpha}\right)^2 \to +\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὡρισμέ ἀριθμὸς $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{2\alpha^2}$, μένει ὑπόλοιπον τὸ ὁποῖον ὅτι $\to+\infty$. Ὡ διὰ $x\to-\infty$ τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

Ἐὰν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ λαμβά τιμὰς μικροτέρας τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶνε ἀρνητικόν, ἀλλὰ τετράγωνον αὐτοῦ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶνε θετικόν, καὶ ἐλαττοῦται συ χῶς. Ὅταν τὸ x γίνῃ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται 0, τὸ δὲ τριώ μον γίνεται $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.\alpha$. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς μῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ συνεχῶς τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ποσότης $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ θετική, καὶ αὐξάνεται συνεχῶς, ἀπὸ τοῦ 0 τείνουσα εἰ $+\infty$. Ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου αὐξάνεται συνεχῶς τῆς τιμῆς $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}.\alpha$ τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$.

2) *Ἔστω ὅτι εἶνε τὸ* $\alpha<0$. Ὅταν τὸ $x \to -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $-\infty$. Ὅταν τὸ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ τριώνυμον γίνεται $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\cdot\alpha$, καὶ διὰ $x \to +\infty$, τείνει πάλιν εἰς τὸ $-\infty$.

Ἤτοι, ἐνῷ ὅταν εἶνε τὸ $\alpha>0$ καὶ μεταβάλλεται συνεχῶς τὸ x ἀπὸ $-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$, τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνεται συνεχῶς μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν εἶνε τὸ $\alpha<0$, διὰ τὴν αὐτὴν συνεχῆ μεταβολὴν τοῦ x, τὸ τριώνυμον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$, γίνεται $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$, καὶ ἐλαττοῦται πάλιν συνεχῶς μέχρι τοῦ $-\infty$.

Ὅταν μία τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης εἶνε μεγαλυτέρα πασῶν τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτῆς, λέγομεν ὅτι αὐτὴ εἶνε ***μέγιστον*** τῆς μεταβλητῆς. Τοὐναντίον, ἐὰν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶνε μικροτέρα τῶν ἄλλων τιμῶν αὐτῆς καλοῦμεν αὐτὴν ***ἐλάχιστον*** τῆς μεταβλητῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι,

«ὅταν μὲν εἶνε τὸ $\alpha>0$ ***τὸ τριώνυμον*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***ἔχει ἐλάχιστον διὰ*** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ***ὅταν δὲ τὸ εἶνε*** $\alpha<0$ ***ἔχει μέγιστον διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν τοῦ x».***

Ἔστω π. χ. τὸ τριώνυμον $3x-6x+7$. Τὸ $\alpha=3>8$, ἄρα ἔχει ἐλάχιστον διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{6}{6}=1$. Θέτοντες $x=1$ εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου εἶνε 4.

Ἀσκήσεις. Δι' ἕκαστον τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x εὑρίσκεται τοῦτο.

1. α') $-x^2+4x+3$. β') $19x^2-7x+3$. γ') x^2-13.
δ') $15x^2+x-7$. ε') $-x^2+3x-6$. στ') $9,5x^2-0.25x-2=0$.

180. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

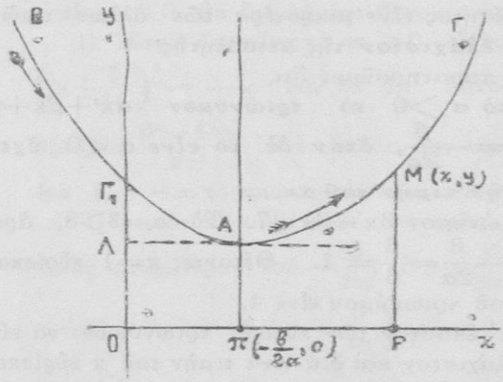
Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ὅπου εἶνε $(\alpha\neq0)$. Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ, θέτομεν

$$y=\alpha x^2+\beta x+\gamma, \qquad (1)$$

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1) *Ὅταν τὸ α εἶνε θετικόν*. Γνωρίζομεν (§ 179) ὅτι ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ y ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) (ἂν τὰς μὲν τιμὰς τοῦ x θεωρήσωμεν ὡς τετμημένας, τὰς δὲ τοῦ y ὡς τεταγμένας σημείων ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους Ox, Oy), θὰ ἔχῃ ἕνα κλάδον συνεχῆ (ἄνευ διακοπῆς τινος), ὁ ὁποῖος θὰ ἀναχωρῇ ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν yOx′), καὶ εἶνε πολὺ μεμακρυσμένον (μὲ τετμημένην » $-\infty$ καὶ τεταγμένην » $+\infty$), διέρχεται δὲ κατερχόμενος διὰ τοῦ σημείου Α, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (Σχ. 14).

Ὅταν τὸ x ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνεται συνεχῶς, τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἄλλον συνεχῆ κλάδον τῆς γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν xOy, μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $+\infty$.



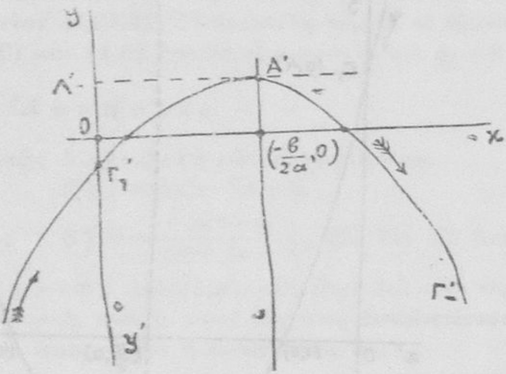
(Σχ. 14)

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ὅταν τὸ α εἶνε θετικὸν παριστάνει τὴν καμπύλην ΒΑΓ (Σχ. 14).

2) *Ὅταν τὸ α εἶνε ἀρνητικόν*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{-\beta}{2\alpha}$, τὸ y αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως, διὰ

τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἕνα συνεχῆ κλάδον, ὁ ὁποῖος ἔρχεται ἀπὸ ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον καὶ κείμενον εἰς τὴν γωνίαν x΄Oy΄, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη τείνουν εἰς τὸ $-\infty$, καταλήγει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α΄, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν τετμημένη ἰσοῦται μὲ $\frac{-\beta}{2\alpha}$, ἡ δὲ τεταγμένη μὲ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (Σχ. 15).

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{-\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ τριώνυμον, ἄρα καὶ τὸ y, ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$, καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς παριστάνει συνεχῆ κλάδον καμπύλης γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἄρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α΄ καὶ απομακρύνεται εἰς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, κείμενον εἰς τὴν γωνίαν xOy΄, μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς $+\infty$ καὶ $-\infty$ (Σχ. 15).



(Σχ. 15).

Διὰ νὰ εὕρωμεν ποῦ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν x=0. Ἀλλ᾽ ἂν θέσωμεν x=0 εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν y=γ. Ὥστε ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα yOy΄ εἰς τὸ σημεῖον Γ_1 (Σχ. 14) ἢ τὸ Γ'_1 (Σχ.15), ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ. Ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶνε αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου, διὰ $x=\rho_1$ καὶ ρ_2 ἔχομεν y=0. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας ρ_1 καὶ ρ_2. Ἂν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶνε φανταστικοὶ ἢ μιγάδες ἀριθμοί, ἡ καμπύλη δὲν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

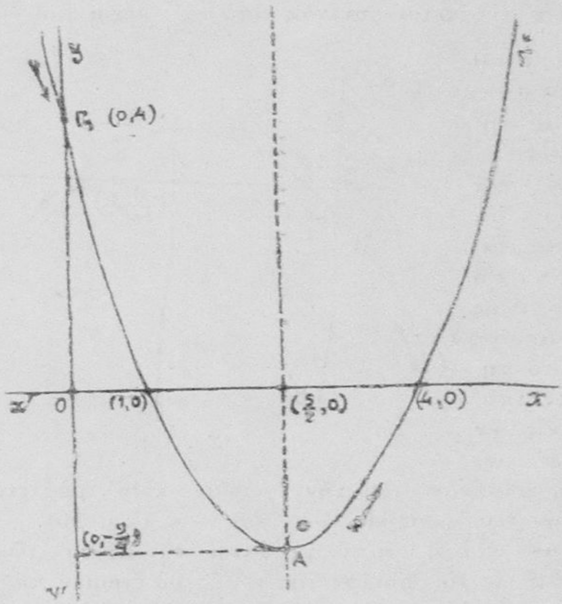
Ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται ***παραβολή***, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ἀλλάσσει μετὰ τοῦ σημείου τοῦ α καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

Ἐφαρμογή. Ἔστω τὸ τριώνυμον $y=x^2-5x+4$. Ἔχομεν

$$y=x^2-5x+4+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+4-\frac{25}{4}=$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$, τὸ



(Σχ. 16).

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ y ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{9}{4}$. Οὕτω ἡ καμπύλη ἔχει συνεχῆ κλάδον $\Gamma_1 A$ (Σχ. 16), ἐρχόμενον ἀπὸ σημεῖον, μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $-\infty$ καὶ $+\infty$, καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον $A\left(\frac{5}{2},-\frac{9}{4}\right)$. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ y αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\frac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον συνεχῆ κλάδον ΑΓ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας τεινούσας εἰς τὸ $+\infty$ (Σχ.16).

Διὰ $x=0$ τὸ y εἶνε ἴσον μὲ 4. Ἄρα ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $\Gamma_1(0,4)$. Ἡ καμπύλη τέμνει τὸ ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα (1,0) καὶ (4,0) ἐπειδὴ εἶνε $\rho_1=1$, καὶ $\rho_2=4$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν συναρτήσεων.

2. α΄) $y=x^2-x-3$. β΄) $y=3x^2-7x+3$.

3. α΄) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-2x-3}$. β΄) $y=\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}$. Εἰς τὴν α΄) διὰ $x\to-1$ καὶ $x\to3$ τὸ $y\to\infty$. Διὰ $(1:x)\to0$, ἤτοι διὰ $x\to\infty$, τὸ $y\to1$. Αἱ εὐθεῖαι $x=-1$, $x=3$, $y=1$ λέγονται ***ἀσύμπτωτοι*** τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις α΄).

4. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ καμπύλη ἡ παριστανομένη ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως α΄) $y=2x+\frac{x^2}{4}$. β΄) $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{5}x-1$.

5. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $x^2-7x+11=0$. (Θέσατε $y=x^2-7x+11$ καὶ εὕρετε ποῦ ἡ παριστῶσα ταύτην γραμμὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x).

6. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραμμὴ τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2+y^2=25$.

7. Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ γραμμαὶ $y=x^2$, $x=y^2$ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν χορδήν.

8. Εὕρετε γραφικῶς τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῶν $y=x^2$ καὶ $x=-y^2$.

9. Εὕρετε τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν $y=x^2$ καὶ $y=8x^2$ καὶ συγκρίνατε αὐτὰς μεταξύ των.

10. Εὕρετε τὴν τομὴν τῶν γραμμῶν $x^2+y^2=100$ καὶ $x+y=5$.

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ.

Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

§ 181. Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα μὲ ἕνα ἄγνωστον (ἔστω τὸν x) *δι-τετράγωνον*, ἐὰν μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴ μεταφορὰν τῶν ὅρων εἰς τὸ α΄ μέλος καὶ τὰς ἀναγωγὰς ἔχῃ τὴ μορφὴν $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0, \ (\alpha\neq 0)$ (1)

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις

$$x^4-25x^2+144=0.$$

Ἂν τὸ x^2 ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ y καὶ ἑπομένως τὸ x διὰ τοῦ y^2, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $y^2-25y+144=0$.

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $y=\dfrac{25\pm 7}{2}$ ἢ $y_1=16$ καὶ $y_2=9$

Ἄρα εἶνε $x^2=16$ καὶ $x^2=9$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $x=\pm 4$ καὶ $x=\pm 3$

Ἐν γένει, πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, ἀντι-καθιστῶμεν εἰς αὐτὴν $x^2=y$, ὅτε θὰ εἶνε $x^4=y^2$, καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0.$ (2)

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (2) θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ y, καὶ ἔστω-σαν αὗται αἱ y_1 καὶ y_2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ῥίζας τῆς (1), δη-λαδὴ τὰς τιμὰς τοῦ x, θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα $x^2=y$ ὅπου y τὰ τιμὰς αὐτοῦ y_1 καὶ y_2, ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2=y_1$ καὶ $x^2=y_2$ ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x=\pm\sqrt{y_1}$ καὶ $x=\pm\sqrt{y_2}$. Ἤτοι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶνε αἱ

$$\sqrt{y_1}, \quad -\sqrt{y_1}, \quad \sqrt{y_2}, \quad -\sqrt{y_2}.$$

Ἀλλ' αἱ τιμαὶ y_1 καὶ y_2 εἶνε καθὼς γνωρίζομεν αἱ

$$y_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad y_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἑπομένως ἂν παραστήσωμεν διὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 καὶ ϱ_4 τὰς ῥίζας τῆς (1) θὰ ἔχωμεν,

$$\varrho_1=\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \varrho_2=-\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$$\varrho_3=\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \varrho_4=-\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.$$

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀναλύσωμεν τὸ $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ εἰς γινόμενον παραγόντων, παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=\alpha y^2+\beta y+\gamma=\alpha(y-y_1).(y-y_2)=\alpha(x^2-y_1)(x^2-y_2)=$$

$$=\alpha(x+\sqrt{y_1})\ (x-\sqrt{y_1})\ (x+\sqrt{y_2})\ (x-\sqrt{y_2})=$$

$$=\alpha(x-\varrho_1)\ (x-\varrho_2)\ (x-\varrho_3)\ (x-\varrho_4).$$

Κατὰ ταῦτα, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς ρίζας τοῦ $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, τρέπεται τοῦτο εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τέσσαρας πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x.

Ἐφαρμογή. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $x^4+x^2-12=0$. Εἶνε $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-12$ καὶ

$$\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=3 \text{ ἢ } =-4.$$

Ἑπομένως εἶνε $\varrho_1=\sqrt{3}$, $\varrho_2=-\sqrt{3}$, $\varrho_3=2i$, $\varrho_4=-2i$.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

91. α΄) $\alpha^2\beta^2x^4-(\alpha^4+\beta^4)x^2+\alpha^2\beta^2=0$. β΄) $x^4+4\alpha\beta x^2-(\alpha^2-\beta^2)^2=0$.

92. γ΄) $\alpha^4x^4+(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^2)x^2-\alpha^2\beta^2=0$. β΄) $x^4+x^2+3=0$.

Εὕρετε τίνες τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχουν ρίζας φανταστικὰς καὶ πόσας, χωρὶς νὰ λύσετε αὐτάς.

93. α΄) $x^2-\frac{8}{x^2}-9=0$. β΄) $5x^2-\frac{24}{x^2}=23$.

94. α΄) $0{,}4y^4-1{,}7y^2+4=0$. β΄) $2y^4-26y^2=9$,

95. α΄) $x^2-5+\frac{2}{x^2-1}=3$. β΄) $\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^2}-36=0$.

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων.

96. α΄) $4x^4-17x^2+1$. β΄) $7x^4-35x^2+28$.

97. α΄) $\alpha^2\beta^2y^4-(\alpha^4+\beta^4)y^2+\alpha^2\beta^2$. β΄) $y^4+4\alpha\beta y^2-(\alpha^2-\beta^2)^2$.

98. α΄) $\lambda^4y^4+\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)y^2-\alpha^2\beta^2$. β΄) $y^4-(\alpha+1)\alpha x^2+\alpha^3$.

Εὕρετε τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας

99. α΄) $\pm3, \pm1$. β΄) $\pm\alpha, \pm\sqrt{\alpha}$. γ΄) $\pm0{,}5, \pm4i$. δ΄) $\pm3, \pm i$.

Εὕρετε τριώνυμα ἔχοντα ὡς ρίζας τὰς

00. α΄) $\pm i$ καὶ $\pm\frac{2}{3}$. β΄) $\pm0{,}2$ καὶ $\pm0{,}75$. γ΄) $\pm\alpha, \pm2\alpha$,

01. α΄) $\pm(\alpha-i), \pm(\alpha+i)$. β΄) $\pm0{,}75$ καὶ $\pm(3+2i)$. γ΄) $\pm2, \pm3i$.

02. ***Ὁμὰς τρίτη.*** Εὕρετε τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$, ὅταν τὸ x εἶνε ἐκτὸς τῶν ριζῶν αὐτοῦ $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ (ἂν εἶνε $\varrho_1<\varrho_2<\varrho_3<\varrho_4$). Δηλαδὴ ἂν $x<\varrho_1$, ἢ $x>\varrho_4$, καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ριζῶν, δηλαδὴ ἂν εἶνε $\varrho_1<x<\varrho_2$, $\varrho_2<x<\varrho_3$, καὶ

$\rho_3 < x < \rho_4$. (Διακρίναται δύο περιπτώσεις ὅταν εἶνε $\alpha > 0$ καὶ ὅταν $\alpha > 0$).

603. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda^2+3)=0$ τίνα τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ρίζαι αὐτῆς κατὰ 1;

Τροπὴ διπλῶν τινων ριζικῶν εἰς ἁπλᾶ.

§ 182. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $x^4-6x^2+1=0$.

Ἐπειδὴ εἶνε $\alpha=1$, $\beta=-6$, $\gamma=1$, ἔχομεν ὡς ρίζας

$$\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-4}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{32}}{2}} \text{ καὶ } \pm\sqrt{\frac{6-\sqrt{32}}{2}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κατελήξαμεν εἰς παραστάσεις μὲ διπλᾶ ριζικὰ τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$.

Ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν πότε εἶνε δυνατὸν τὰς τοιαύτας παραστάσεις νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν μὲ ἁπλᾶ ριζικά. Θὰ δείξωμεν ὅτι,

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \tag{1}$$

ἂν εἶνε $A>0$ καὶ A^2-B εἶνε (τέλειον τετράγωνον)$=\Gamma^2$.

Διότι ἂν θέσωμεν $\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\psi}+\sqrt{\omega}$.

καὶ $\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\psi}-\sqrt{\omega}$,

θὰ ἔχωμεν ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον

$$A+\sqrt{B}=\psi+\omega+2\sqrt{\psi\omega}.$$
$$A-\sqrt{B}=\psi+\omega-2\sqrt{\psi\omega}.$$

Προσθέτοντες καὶ ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $A=\psi+\omega$,

καὶ $2\sqrt{B}=4\sqrt{\psi\omega}$, ἢ $\sqrt{B}=2\sqrt{\psi\omega}$. (2)

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον $B=4\psi\omega$, καὶ ἔχομεν $\psi+\omega=A$, $\psi\omega=\dfrac{B}{4}$.

Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν ψ καὶ ω, θὰ εἶνε ρίζαι ἐξισώσεως β΄

αθμοῦ τῆς μορφῆς $x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0$,

τοι αἱ $\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$ καὶ $\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$,

πειδὴ δὲ ὑπετέθη $A^2 - B = \Gamma^2$, οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ ψ καὶ ω,

ὰ εἶνε $\psi = \frac{A+\Gamma}{2}$ καὶ $\omega = \frac{A-\Gamma}{2}$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\psi} \pm \sqrt{\omega} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}.$$

Κατὰ ταῦτα διὰ τὴν παράστασιν $\sqrt{6 \pm \sqrt{32}}$ ἔχομεν

$A = 6$, $B = 32$, $A^2 - B = 36 - 32 = 4 = 2^2 = \Gamma^2$ καὶ

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{32}} = \sqrt{\frac{6+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{6-2}{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} \pm \sqrt{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ παράστασις $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

ἶνε $A = 2$, $B = 3$, $A^2 - B = 4 - 3 = 1^2 = \Gamma^2$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Ἀσκήσεις. Τρέψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄλλας ούσας ἁπλᾶ ριζικά.

$\sqrt{5+\sqrt{24}}$. β') $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. γ') $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

$\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}$. β') $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$. γ'. $\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}$

$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$. β') $\sqrt{x+y-2x\sqrt{y}}$, γ') $\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Ἐξίσωσις μὲ ριζικὰ β' τάξεως.

. Ἐξίσωσίς τις λέγεται ***μὲ ριζικὸν β' τάξεως***, ἂν (μετὰ τὴν αλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὅρων εἰς τὸ ἓν λος καὶ τὰς ἀναγωγὰς) ἔχῃ τοὐλάχιστον ἓν ριζικὸν μὲ δείκτην 2 ὶ οὐδὲν μὲ δείκτην ἀνώτερον, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ ἄγνωος, καθὼς π.χ. ἡ $4\sqrt{x^2+5} = x - 1$. (1)

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1), ἐπιδιώκομεν νὰ ἐξαλεί-ψωμεν τὸ ῥιζικόν. Πρὸς τοῦτο πρῶτον ἀπομονώνομεν αὐτό, δηλαδὴ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς μόνον τὸ ῥιζικόν, Οὕτω ἔχομεν τὴν

$$\sqrt{x^2+5}=x-5. \qquad (1').$$

Ὑψοῦντες τὰ ἴσα ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον, λαμβάνομεν $x^2+5=(x-5)^2$, ἢ $x^2+5=x^2-10x+25$ ἢ $10x=20$ (2), ἥτις ἔχει τὰς ῥίζας τῆς (1′) καὶ τῆς $\sqrt{x^2+5}=-(x-5)$ (§ 167).

Λύοντες τὴν (2) εὑρίσκομεν $x=2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν $x=2$ εἰς τὴν (1′) εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ α′ μέλους $\sqrt{2^2+5}=3$, ἐκ δὲ τοῦ β′ τὸ -3. Ἄρα ἡ τιμὴ $x=2$ εἶνε ῥίζα τῆς $\sqrt{x^2+5}=-(x-5)$ ὄχι δὲ καὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$. (3)

Ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν, ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ νέον ῥιζικόν, $2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x$.

Ὑψοῦντες πάλιν τὰ ἴσα ταῦτα εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$$4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν ἀναγωγὴν $x^2-288x+1136=0$.

Αἱ ῥίζαι ταύτης εἶνε 4 καὶ 284. Θέτοντες $x=4$ καὶ $x=284$ εἰς τὴν (3), εὑρίσκομεν ὅτι μόνον ἡ τιμὴ 4 τὴν ἐπαληθεύει, ἐνῶ ἡ 284 εἶνε ῥίζα τῆς $2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=-(37-3x)$.

Ἑπομένως, ***«διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν μὲ ῥιζικὸν β′ τάξεως, ἀπομονώνομεν τὸ ῥιζικόν, ὥστε ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, νὰ προκύπτῃ ἐξίσωσις χωρὶς ῥιζικόν· ἀκολούθως λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ῥίζαι αὐτῆς εἶνε καὶ ῥίζαι τῆς δοθείσης».***

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν.

607. α′) $2(x+\sqrt{\alpha^2+x^2})\sqrt{\alpha^2+x^2}=5\alpha^2$.

608. α′) $\sqrt{3x+7+3\sqrt{2x-4}}=7$. β′) $\dfrac{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}=\sqrt{\beta}$.

609. α′) $\dfrac{(1-\alpha x).\sqrt{1+\beta x}}{(1+\alpha x).\sqrt{1-\beta x}}=1$. β′) $\sqrt{x^2+3x+10}=x+2$.

0. α′) $\sqrt{9x^2-5x-1}=3x$. β′) $13-\sqrt{4x^2+7x-8}=2x$.

1. α′) $\sqrt{x+3}+4=\sqrt{5x+31}$. β′) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

2. α′) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ β′) $\sqrt{25x-1}-\sqrt{4y+1}=\sqrt{9x-2}$.

3. α′) $\sqrt{4x-3\alpha}-\sqrt{6\alpha+x}=\sqrt{x-3\alpha}$. β′) $\sqrt{9x-2\beta}+\sqrt{4x+\beta}=\sqrt{25x-\beta}$

4. α′) $\sqrt{x+3\alpha^2}+\sqrt{x-2\alpha^2}=5\alpha$. β′) $4\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-21}=3$.

Συστήματα ἐξισώσεων β′ βαθμοῦ.

4. Καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων β′ βαθμοῦ τὸ σύστημα τοῦ ποίου τοὐλάχιστον μία ἐξίσωσις εἶνε β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς γνώστους αὐτοῦ, αἱ δ' ἄλλαι κατωτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς αὐτούς.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} x-y=5 \\ xy=-4. \end{cases}$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἔχομεν $y=x-5$ καὶ εἰσάγοντες ἡν τιμὴν τοῦ y εἰς τὴν δευτέραν, λαμβάνομεν $x(x-5)=-4$, ἐκ ῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=1$ καὶ $x=4$, ἄρα $y=1-5=-4$ καὶ $=4-5=-1$.

Ἐν γένει, ἂν μία τῶν δύο ἐξισώσεων εἶνε α′ καὶ ἡ ἄλλη β′ αθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους, λύομεν ταύτην ὡς πρὸς τὸν α καὶ ἀντικαθιστῶμεν αὐτὸν εἰς τὴν ἄλλην, ὅτε ἀγόμεθα εἰς ἡν λύσιν ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Μετὰ τὴν λύ-ν ταύτης εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς καὶ τοῦ ἄλλου ἀγνώστου. Εἰς ἡν περίπτωσιν ταύτην ἀνάγομεν ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον τὴν λύσιν ιὶ οἱουδήποτε συστήματος ἐξισώσεων β′ βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις.

Ὁμὰς πρώτη. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συ-ήματα.

α′) $x^2+y^2=5$. β′) $x^2+y^2=25$ γ′) $x^2-y^2=39$
$x+y=3$. $x-y=-1$. $x-y=3$.

α′) $x^2+y^2=4{,}26$ β′) $x^2+y^2=2$ γ′) $x^2+y^2=61$
$xy=+1$. $xy=0{,}75$. $\dfrac{x}{y}=1{,}2$.

α′) $x^2+4xy-5y^2+12x+92=0$,
$8x-y=3$.

Ἐὰν εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους β′ βαθ-ῦ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς νώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, διὰ καταλλήλου ἀπαλοιφῆς

τῶν ἰσοβαθμίων τούτων δυνάμεων τῶν ἀγνώστων εὑρίσκομ
ἐξίσωσιν α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Αὕτη μὲ μίαν τ
δοθεισῶν ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ οὕτ
ἡ λύσις τοῦ συστήματος ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως
βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} 3x^2-5xy+4y^2-8x+7y=8 \\ 9x^2-15xy+12y^2+11x-3y=32. \end{cases}$$

('Απαλείφομεν τὸ x^2 καὶ εὑρίσκομεν τὴν $35x-24y=8$, ἥτις
μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέ

619. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^2+3xy-6y^2=208 \\ xy-2y^2=16. \end{cases}$

(Διαιρέσατε τὴν α΄ διὰ τῆς β΄ καὶ εὕρετε ἀκολούθως ἐξίσωσ
μὲ ἄγνωστον τὸ $\frac{x}{y}$ κλπ.).

620. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x+y=3. \end{cases}$

('Εκ τῆς β΄ λαμβάνομεν ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸν κύβον

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=27$$

ἢ ἕνεκα τῆς πρώτης $3xy(x+y)=27-9=18$ ἢ $xy=2$ κλπ.).

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα

621. α΄) $5x^2+3y^2=3300$, $3x-2y=40$. β΄) $\frac{15}{x}+\frac{22}{y}=4$, $x+y=16$. γ΄) $\frac{9}{x}-\frac{8}{y}=1$, $2yx+y=10$.

622. α΄) $x-\sqrt{2y+4}=8$, $3x-2y=3$. β΄) $\frac{7x+12y}{12x+7y}=\frac{26}{31}$, $7x^2-17y^2=144$. γ΄) $\frac{8}{x}+\frac{9}{y}=7$, $2x-y=3$.

623. α΄) $9x^2+5x-7y=25$, $(x+y)^2-3(x+y)=10$. β΄ $2x^2-3xy+9x=29$, $(x-y)^2+7(x-y)=30$.

624. α΄) $14x^2-11xy+4y^2=10$, $(2x-3y)^2+4(2x-3y)=5$. β΄ $8x^2-2xy+7y^2=527$, $(3x+y)^2-9(3x+y)=20$.

625. $9x^2-12xy+4y^2+12x-8y+4=0$, $3x^2-5xy+y^2+x+y+6=0$.

626. $3(8x^2+7y^2-4)=27(5x^2-11y^2+6)$, $\sqrt{27x-36y+4}=6x-8y-3$.

$7(x-2\sqrt{21x-6y-2})=2(y-25)$

$13x^2-3y^2=4.$

Ὁμὰς δευτέρα. (Προσδιορίσατε πρῶτον τὸν λόγον x:y)

α′) $x^2+y^2=100$ β′) $x^2-y^2=56$ γ′) $24y(x-5y)=(x+2y)(5x-28y)$

$x:y=3:5.$ $x:y=9:5$ $5x^2-12y^2=32.$

α′) $x^2+xy+y^2=76$ β′) $x^2-xy+y^2=91$ γ′) $(x+5)^2=xy$

$(x+y):(x-y)=5:2.$ $(x+y):(x-y)=8:3.$ $y^2=(y+9)(x+4).$

α′) $(x^2+xy^2)(x+y)=1080$ β′) $(x^2-y^2)(2x-3y)=192$

$(x^2+y^2)(x-y)=540.$ $(x^2-y^2)(3x+y)=1344.$

Ὁμὰς τρίτη. (Θεωρήσατε νέας μεταβλητὰς τὰ $x\pm y$).

α′) $x^2-xy=14$ β′) $x^2+y^2=73$ γ′) $x^2+y^2=97$

$xy-y^2=10$ $4xy=24.$ $xy=236.$

α′) $x^2+y^2=125$ β′) $x^2+y^2=585$ γ′) $x^2+y^2=\frac{25}{36}$

$3xy=150.$ $4xy=258.$ $6xy=2.$

α′) $x^2+xy+y=121$ β′) $x^2-y^2=87$ γ′) $x^2+xy=187$

$x^2+xy+x=61.$ $x-y=3.$ $y^2+xy=102.$

α′) $x^2+9y^2=136$ β′) $3(x+y)^2-5(x+y)=50$

$x-3y=4.$ $5(x-y)^2+6(x-y)=11.$

α′) $x^3-y^3=7.$ β′) $x^3-y^3=\alpha,$ γ′) $x^4+y^4=17.$

$x-y=1.$ $x-y=\beta.$ $x+y=3.$ (Ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας εἰς τὸν κύβον καὶ τὴν προκύπτουσαν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὴν δευτέραν, ὅτε εὑρίσκομεν

$x^4+y^4+6x^2y^2+4xy(x^2+y^2)=3^4$ ἢ $6x^2y^2+4xy(x^2+y^2)=3^4-17.$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν ἐκφράζομεν τὸ x^2+y^2 διὰ τοῦ xy καὶ εἰσάγομεν τὴν τιμήν του εἰς τὴν ἀνωτέρω, ὅτε ἔχομεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς xy κλπ)..

α′) $x^4+y^4=\alpha$ β′) $x^4+y^4=\lambda$

$x+y=\beta,$ $x-y=\mu.$

Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x^5+y^5=\alpha \\ x+y=\beta. \end{array}\right.$ Ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς δευτέρας εἰς τὸν κύβον εὑρίσκομεν $x^3+y^3+3xy(x+y)=\beta^3.$ Ὑψοῦμεν τὴν δευτέραν εἰν τὸ τετράγωνον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὴν προκύπτουσαν μὲ τὴν προηγουμένην, ὅτε εὑρίσκομεν

$$x^5+y^5+5y(x^3+y^3)+10x^2y^2(x+y)=\beta^5.$$

Εἰς ταύτην ἀντικαθιστῶμεν τὸ x^5+y^5 διὰ τοῦ α, τὸ $x+y$ διὰ τοῦ β καὶ ἐκφράζομεν τὸ x^3+y^3 διὰ τοῦ xy, ὅτε εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς xy). Λύσατε περαιτέρω τὸ σύστημα καθὼς καὶ ὅταν εἶνε $\alpha=211$, $\beta=1$.

Ὁμὰς τετάρτη. (Θεωρήσατε νέας μεταβλητὰς τὰ xy, x^2+y^2 ἢ τὸ $x\pm y$).

638. α´) $x+y=21-\sqrt{xy}$ β´) $2(x^2+y^2)^2=1479$

$x^2+y^2=527$. $3x^2y^2-2\frac{1}{2}xy-275=7$.

639. α´) $x^2+y^2=\sqrt{x^2y^2+273}$ β´) $x^2-y^2=21(x-y)$

$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4\frac{1}{4}$. $\frac{x-3}{y}=2\frac{xy-1}{xy+2y}$.

640. α´) $x+y+\sqrt{x+y-2}=14$ β´) $\frac{2(x+y)-7}{5(x+y-4)}=\frac{5}{6}-\frac{2}{x+y}$

$\frac{x^2y^2}{3}-\frac{3xy}{4}=174$. $x:y=y:(x+3y)$.

Ὁμὰς πέμπτη. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα.

641. α´) $x^3+y=973$ β´) $x^3+y^3=19$ γ´) $x^3-y^3=341$

$(x-y)^2-7(x+y)=90-xy$. $x+y=4$. $x-y=11$.

642. α´) $\sqrt{x}(\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3})=273$ β´) $xy=72$

$x\sqrt{xy}+y^2=364$. $x^2+y^2+\omega^2=289$

$x+y+\omega-29$.

643. α´) $x^2-y\sqrt{xy}=535$ β´) $x^2+y^2=40$ γ´) $y^2+\omega^2-x(y+\omega)=25$

$y^2=x\sqrt{xy}-234$. $xy=\omega$ $\omega^2+x^2-y(\omega+x)=16$

$x+y=8$. $x^2+y^2-\omega(x+y)=9$.

Προβλήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

§ 185. Καλοῦμεν προβλήματα ἐξισώσεων β´ βαθμοῦ τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἢ συστημάτων β´ βαθμοῦ. Πρὸς ἐφαρμογὴν λύομεν κατωτέρω ἁπλᾶ τινα προβλήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

1) *«Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 1 ἰσοῦται μὲ 86;»*.

Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ εἶνε τὸ x^2, τὸ μὲν τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θὰ εἶνε x^2, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶνε τὸ $2x$. Ἑπομένως θὰ ἔχωεν τὴν ἐξίσωσιν $3x^2+2x+1=86$.

ύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $x=5$ καὶ $x=-\frac{17}{3}$. Ἑπομένως ὁ ζηούμενος ἀριθμὸς εἶνε ὁ 5 ἢ ὁ $-\frac{17}{3}$.

2) ***«Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, α τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ κατὰ 4 τὸν διαιρέτην;».***

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ωμεν $\frac{96}{x}-x=4$, ἢ $x^2+4x-96=0$.

Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=8$ καὶ $x=-12$.

3) ***«Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων κλάσματος εἶνε 120· οἱ οι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφῃροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν ὶ ἐπροσθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖοι εἶνε οἱ ὅροι ῦ κλάσματος;».***

Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητήν, ὁ παρονομαστὴς εἶνε $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x+1=\frac{120}{x}-1$ ἢ $x^2+x=120-x$ $x^2+2x-120=0$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$x=10 \text{ καὶ } x=-12.$$

Ἑπομένως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος θὰ εἶνε οἱ 10 καὶ 12 ἢ -12 καὶ -10.

«Τίς εἶνε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ 0,75 αὐξανόμενα τὰ 1 δίδουν τὸν 16 διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν οῖον ἀποτελοῦν τὰ 0,8 τοῦ ζητουμένου πλὴν 15;».

Ἂν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχω- τὴν ἐξίσωσιν $0,75x+1=\frac{16}{0,8x-15}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίμεν $x=20$ καὶ $x=-\frac{31}{12}$.

5). ***«Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ περιττοὶ διαδοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν 8000».***

Ἔστωσαν $2x-1$ καὶ $2x+1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν ιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $(2x+1)^2-(2x-1)^2$

ἢ $8x=8000$, καὶ

Νείλου Σακελλαρίου, *Ἄλγεβρα, ἔκδοσις ἑβδόμη.*

Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶνε 2001, καὶ 1999.

6) ***«Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶνε ἀνάλογοι τῶν 3· 2· 5 καὶ τ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε ἴσον μὲ 342· νὰ εὑ ρεθοῦν οἱ ἀριθμοί».***

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τῶν x, y, ω τοὺς ζητουμένους ἀριθ μούς, θὰ ἔχωμεν $x^2+y^2+\omega^2=342$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ x, y καὶ εἶνε ἀνάλογοι τῶν 3, 2 καὶ 5 θὰ εἶνε $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{\omega}{5}$. Ἐκ του των ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους διὰ τοῦ

$$x=3.\varrho, \quad y=2.\varrho, \quad \omega=5.\varrho.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσι εὑρίσκομεν $9\varrho^2+4\varrho^2+25\varrho^2=342$,

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\varrho=\pm 3$. Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀρι μοὶ εἶνε οἱ $\pm 9 \cdot \pm 6 \cdot \pm 15$.

7) ***«Ἐγευμάτισαν 15 ἄτομα· οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 36 δρχ. ἐν ὅλῳ καὶ αἱ γυναῖκες ὁμοίως 360 δρχ. Πόσοι ἦσ οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα ἐξώδευσε καθε ἐὰν καθεμία γυνὴ ἐδαπάνησε 20 δρχ. ὀλιγώτερον καθεν ἀνδρός;»***

Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε $15-x$ θὰ εἶνε ὁ ἀρι μὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς μὲν ἀνδρὸς θὰ εἶνε $\frac{360}{x}$ καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{360}{15-x}$. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ πρ βλήματος θὰ ἔχωμεν $\frac{360}{15-x}=\frac{360}{x}-20$

ἢ $x^2-51x+270=0$ καὶ $x=\frac{51\pm 39}{2}$,

Ἐκ τῶν δύο σημείων τῶν πρὸ τοῦ 39 ἀποκλείομεν τὸ διότι, ἂν ἐλαμβάνομεν τοῦτο, θὰ εἴχομεν $x=45$ ἄνδρας, ἐνῶ δρες καὶ γυναῖκες ἦσαν 15. Ὥστε εὑρίσκομεν 6 ἄνδρας $15-6=9$ γυναῖκας.

8) ***«Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. να ἐγγραφῇ ὀρθογώνι τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.».***

Ἂν διὰ τοῦ x καὶ y παραστήσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθ γωνίου, θὰ ἔχωμεν $x-y=17$, $x^2+y^2=25^2=625$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x=24$ καὶ $y=7$.

9) ***«Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὥστε ἂν ἀπὸ τούτου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευράν, νὰ χωρίζεται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα».***

Παριστάνομεν διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ διὰ τὴν x τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν ΑΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ (ΔΕ εἶνε παράλληλος τῆς ΓΒ) θὰ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἐπομένως τὰ ἐμβαδὰ τούτων θὰ εἶνε ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων αὐτῶν πλευρῶν. Ἤτοι θὰ εἶνε $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{x^2}{α^2}$. Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς ἰσοῦται μὲ ἥμισυ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος· ἤτοι ἔχομεν

$$\frac{x^2}{α^2}=\frac{1}{2} \text{ καὶ } x^2=\frac{α^2}{2},\ x=\frac{α\sqrt{2}}{2}$$

(ἀπορριπτομένης τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς τοῦ x).

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

4. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ 0,75 αὐξανόμενα κατὰ 1,3 δίδουν τὸν 16 διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ 0,82 τοῦ ζητουμένου μεῖον 12.

5. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι διαδοχικοὶ περιττοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶνε 202.

6. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

7. Νὰ μερισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν 1620.

8. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἔχοντος διαγώνιον 17 μ. καὶ ἐμβαδὸν 120 ($μ^2$).

9. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν λόγον 3:4.

10. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶνε 14 καὶ τὸ γινόμενον 1632. Ποῖοι εἶνε οἱ ἀριθμοί ;

651. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐλαττούμενος κατὰ τὸ πενταπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης του γίνεται 500 ;

652. Ἠρωτήθη τις, ποία εἶνε ἡ ἡλικία του, καὶ ἀπεκρίθη· τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας μου ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαεξαπλάσιον τῆς ἡλικίας τὴν ὁποίαν θὰ ἔχω μετὰ 12 ἔτη. Ποία ἡ ἡλικία του ;

653. Δύο βρύσεις, ρέουσαι μαζύ, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἑκάστη δύναται νὰ τὴν πληρώσῃ, ἂν ἡ μία τούτων χρειάζεται μόνον 27 ὥρας ἐπὶ πλέον τῆς ἄλλης μόνης ;

654. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον, ἔχον πλευρὰν 99 μ., καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶνε ἐννέα δέκατα ἕκτα τῆς ἄλλης.

655. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις (βάσις καὶ ὕψος) ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶνε 51 μ. καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν ὀκτὼ δέκατα πέμπτα.

§ 186. Προβλήματα γενικά.

1) (Πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς). «***Δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ χωρίσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον***».

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Γ χωρίζει τὴν $(ΑΒ)=α$ εἰς δύο μέρη, τὰ $(ΑΓ)=x$ καὶ $(ΓΒ)=α-x$, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ x εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν α καὶ α—x, θὰ ἔχωμεν $\frac{α}{x}=\frac{x}{α-x}$ ἢ $x^2+αx-α^2=0$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$x=\frac{-α\pm\sqrt{5α^2}}{2}=\frac{-α\pm α\sqrt{5}}{2}=\frac{α(\pm\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Διερεύνησις. Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶνε πραγματικαὶ καὶ μὲ σημεῖα ἀντίθετα, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶνε $-α^2$. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3. Ἑπομένως ἡ ρίζα, ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σημεῖον + τοῦ ριζικοῦ, θὰ εἶνε θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α, ἄρα δίδει τὴν ζητουμένην λύσιν. Ἡ ἄλλη ρίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική. Ὥστε ἔχομεν $x=\frac{α(\sqrt{5}-1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἀπὸ τοῦ Α, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{α}{2}$.

$18x+18y=1$
$~~24~~y = x+27$

2) *«Σῶμά τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενὸν) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος υ;»*

Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Φυσικῆς), τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους, γνωστοὺς ἐκ τῆς Φυσικῆς,

$$υ=αt-\frac{1}{2}gt^2, \quad τ=α-gt, \qquad (1)$$

ὅπου τὸ τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν ἴσην μὲ 9,81 μ. (κατὰ προσέγγισιν). Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν

$$gt^2-2αt+2υ=0 \qquad (2)$$

ἐκ τῆς λύσεως δι' αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ t.

Διερεύνησις. Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶνε αἱ ῥίζαι τῆς (2) πραγματικαὶ εἶνε $α^2-2gυ \geqq 0$, ἢ $υ \leqq \frac{α^2}{2g}$. Ἑπομένως $υ=\frac{α^2}{2g}$ εἶνε τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ τὸ κινητόν, ἂν ριφθῇ μὲ ταχύτητα ἀρχικὴν α. Ἐὰν εἶνε $υ=\frac{α^2}{2g}$, αἱ ῥίζαι τῆς (2) εἶνε ἴσαι μὲ $\frac{α}{g}$. Ἑπομένως χρειάζεται $\frac{α}{g}$ χρόνον, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος τὸ κινητόν. Εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν ταχύτητα ἴσην μὲ 0. Πράγματι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) τὸ t διὰ τοῦ $\frac{α}{g}$ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 0. Ἤτοι $τ=α-\frac{gα}{g}=0$. Ἐὰν εἶνε $υ<\frac{α^2}{2g}$ αἱ δύο ῥίζαι τῆς πρώτης τῶν (1) εἶνε πραγματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαί, ὁ δὲ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει αὐτὰς εἶνε ὁ

$$t=\frac{α\pm\sqrt{α^2-2gυ}}{g}.$$

Αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ t ἁρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα. Διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φοράς, δι' ἑκάστου σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας τὴν ὁποίαν παριστάνει τὸ ὕψος υ, μίαν ἀνερχόμενον καὶ μίαν κατερχόμενον. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μὲν μία τῶν τιμῶν τούτων τοῦ t εἶνε μεγαλυτέρα ἡ δὲ ἄλλη μικροτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{g}$ κατὰ $\frac{\sqrt{\alpha^2-2g\upsilon}}{g}$. Εἶνε εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ t αἱ ταχύτητες (δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ τ τῆς δευτέρας τῶν (1)) εἶνε ἀντίθετοι.

Ἐὰν τεθῇ $\upsilon=0$, θὰ ἔχωμεν $t=0$, καὶ $t=\frac{2\alpha}{g}$. Τὸ $\frac{2\alpha}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον μετὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησεν. Ὅθεν ὁ χρόνος καθ' ὃν γίνεται ἡ ἀνάβασις ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον καθ' ὃν γίνεται ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

3) ***«Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος φρέατος, ἂν ἐπέρασαν*** t^s ***, ἀφότου ἀφέθη νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἠκούσθη ὁ ἦχος, ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται)».***

Παριστάνομεν διὰ τοῦ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος, καὶ διὰ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα.

Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη.

1) Ἀπὸ τὸν χρόνον t_1, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ.
2) Ἀπὸ τὸν χρόνον t_2, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς τὴν ἀπόστασιν x.

Ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x=\frac{1}{2}gt_1^2$, ὅστις δίδει τὸ διάστημα, ὅταν δίδεται ὁ χρόνος κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶνε καὶ ἡ κίνησις κατὰ τὴν πτῶσιν τοῦ λίθου. Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}$ (1)

Ἐκ τοῦ $x=\tau.t_2$, ὅστις δίδει τὸ διάστημα ἐκφραζόμενον διὰ τῆς ταχύτητος τ καὶ τοῦ χρόνου t_2 κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἤχου, εὑρίσκομεν $t_2=\frac{x}{\tau}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{\tau}=t, \text{ ἢ } \sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{\tau}. \tag{2}$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν, ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x,

$$gx^2-2\tau(gt+\tau)x+g\tau^2t^2=0. \tag{3}$$

Ἐπειδὴ τὸ t_1, εἶνε θετικὸν κατὰ τὴν (1) ἢ τὴν (2) τὸ ἴσον σ τοῦ $t-\frac{x}{\tau}$ πρέπει νὰ εἶνε θετικόν, ἤτοι $t-\frac{x}{\tau}>0$, ἢ $x<\tau t$. (4).

Ἵνα αἱ ῥίζαι τῆς (3) εἶνε πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶνε θετικὸν τὸ $\tau^2(gt+\tau)^2-g^2\tau^2t^2$, ἢ τὸ $\tau^3(\tau+2gt)$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει. Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε τ^2t^2, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{2\tau(gt+\tau)}{g}$, τὰ ὁποῖα εἶνε θετικά. Ἑπομένως αἱ ῥίζαι εἶνε θετικαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶνε κατὰ τὴν (4) τὸ $x<\tau t$ (καὶ τὸ γινόμενον τῶν ῥιζῶν εἶνε $\tau t.\tau t$, εἶνε δὲ αὗται ἄνισοι), ἕπεται ὅτι ἡ μία τῶν ῥιζῶν εἶνε μεγαλυτέρα τοῦ τt καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα τούτου, ἡ ὁποία καὶ θὰ εἶνε δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ πληροῦται ἡ ἀνισότης (4).

Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (3) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμήν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον — τοῦ ῥιζικοῦ. Ἤτοι ἔχομεν

$$x=\frac{\tau}{g}\left(gt+\tau-\sqrt{\tau(\tau+2gt)}\right).$$

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

6. *Ὁμὰς πρώτη* (γενικά). Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιοστὸν μέρος ἐπὶ τὸ νιοστὸν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν α. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; (Διερεύνησις)

7. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιπλάσιον ἐπὶ τὸ νιπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν α. Ποῖος εἶνε ὁ ἀριθμός; (Διερεύνησις).

8. Κεφάλαιον α δρχ. δίδει τόκον τ δρχ., ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν τῆς διαρκείας τοῦ δανείου εἶνε κατὰ δ μεγαλύτερος τοῦ ἐπιτοκίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου. (Διερεύνησις· μερικὴ περίπτωσις $\alpha=5400$, $\delta=2$, $\tau=1296$).

9. Κεφάλαιον α δρχ. ἔφερε τόκον τ δρχ. καὶ θὰ ἔδιδε τὸν αὐτὸν τόκον, ἂν ἐτοκίζετο μὲ ἐπιτόκιον ε ὀλιγώτερον, ἀλλ' ἐπὶ μ ἔτη περισσότερα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον. (Διερεύνησις· μερικὴ περίπτωσις $\alpha=2100$, $\varepsilon=1$, $\mu=1$, $\tau=420$).

10. Ἐκ δύο κεφαλαίων τὸ ἓν ἦτο κατὰ δ μικρότερον, ἀλλ' ἐτοκίσθη μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου καὶ ἔφερε τόκον ἐπὶ ν_1 ἔτη τ_1 δρχ., ἐνῷ τὸ ἄλλο εἰς ν_2 ἔτη ἔφερε τ_2 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια. (Διερεύνησις· μερικὴ περίπτωσις $\delta=600$, $\varepsilon=1$, $\nu_1=6$, $\nu_2=5$, $\tau_1=900$, $\tau_2=720$).

661. Ἠγοράσθη ὕφασμα ἀντὶ α δραχμῶν. Ἐὰν ἕκαστον μέτρο τούτου ἐτιμᾶτο β δραχμὰς ὀλιγώτερον, θὰ ἠγοράζοντο γ μέτρ ἐπὶ πλέον. Πόσα μέτρα ἠγοράσθησαν καὶ πόσας δρχ. τὸ μέτρον (Διερεύνησις).

662. Δίδεται τρίγωνον μὲ πλευρὰς α,β,γ. Νὰ εὑρεθῇ μῆκος τοιοῦ τον ὥστε, ἂν αἱ πλευραί του αὐξηθοῦν ἢ ἐλαττωθοῦν κατ' αὐτό νὰ εἶνε δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου.

663. Νὰ εὑρεθῇ ἀπεράντου εὐθείας AB σημεῖον, ὥστε νὰ φω τίζεται ἐξ ἴσου ἐκ δύο φωτεινῶν ἑστιῶν. κειμένων εἰς τὰ ση μεῖα Σ, Σ′ τῆς εὐθείας, ἂν ἡ ποσότης τοῦ φωτός, τὸ ὁποῖον δέ χεται μία ἐπιφάνεια ἀπὸ φωτεινῆς ἑστίας εἶνε ἀντιστρόφω ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἑστία (Διερεύνησις).

664. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τραπέζιον ἔχον περίμετρον 2τ.

665. Δοθέντος τριγώνου ὀρθογωνίου ΑΒΓ, νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆ ὑποτεινούσης αὐτοῦ ΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον ὥστε· α′) τὸ ἄθροι σμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἐκ τῶν τριῶν κορυ φῶν νὰ εἶνε ἴσον μὲ k^2. β′) τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτο ἀπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ λ^2. γ′) Τὸ ἄθροισμ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν δύο καθέτω πλευρῶν του νὰ ἰσοῦται μὲ μ^2. (Διερεύνησις).

666. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου α′) ἂν δοθ ἡ ὑποτείνουσα α καὶ τὸ ἄθροισμα λ τῶν δύο ἄλλων· β′) ἡ ὑπο τείνουσα καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτήν· γ′) ἡ περίμε τρος 2τ καὶ τὸ ὕψος υ, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὑποτείνουσα δ′) ἡ περίμετρος 2τ καὶ ἡ ἀκτὶς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

667. ***Ὁμὰς δευτέρα.*** Τὶς ὁ μικρότερος δύο ἀριθμῶν, διαφερόντω κατὰ 3, ἂν ἔχουν γινόμενον 54;

668. Τίς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶνε κατὰ 29 μικρότερος τοῦ τετραγώ νου, τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου αὐτοῦ;

669. Εὕρετε δύο ἀριθμούς, ἔχοντας γινόμενον 2, ἂν τὸ ἄθροισμ τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ ἓν καὶ πέντε δωδέκατα.

670. Εὕρετε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶνε κατὰ 4 μικρό τερος τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν αὐξηθῇ ὁ ἀριθμητὴς κατὰ 7 κ ἐλαττωθῇ ὁ παρονομαστὴς κατὰ 5, διαφέρει τοῦ προηγουμένο κατὰ ἓν καὶ ἓν δέκατον πέμπτον.

671. Ἐπλήρωσέ τις 1600 δρχ. διὰ καφὲ καὶ 1800 δρχ. διὰ τεῖο ἔλαβε δὲ 40 χιλιόγρ. καφὲ ἐπὶ πλέον τοῦ τεΐου. Πόσον ἐκόστι

τὸ χιλιόγραμμον τοῦ καφέ, ἂν τοῦ τείου ἐκόστιζε 50 δρχ. ἐπὶ πλέον ;

672. Εἰς ἐκδρομὴν αἱ γυναῖκες ἦσαν 3 ὀλιγώτεραι τῶν ἀνδρῶν. Ἂν οἱ μὲν ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ 1750 δρχ., αἱ δὲ γυναῖκες 800 δρχ.· πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες, ἐὰν καθεὶς τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 50 δρχ. περισσότερον ἢ καθεμία γυνή;

673. Εἰς 27 ἄνδρας καὶ γυναῖκας ἐπληρώθησαν 210 δρχ. διὰ τοὺς ἄνδρας καὶ 420 διὰ τὰς γυναῖκας. Πόσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, ἂν καθεμία ἐπληρώνετο 15 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ ἀνδρός ;

674. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ εἶνε 282.

675. *Ὁμὰς τρίτη.* (Γεωμετρικά). Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος σημείων μεταξὺ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν 78 εὐθείας συνδεούσας αὐτὰ ἀνὰ δύο ;

676. Ποῖον ἐπίπεδον πολύγωνον ἔχει 104 διαγωνίους ;

677. Ἐκ δύο ἐπιπέδων πολυγώνων τὸ α´ ἔχει 6 πλευρὰς ἐπὶ πλέον τοῦ β´ καὶ τρεῖς καὶ ἓν τρίτον φορὰν περισσοτέρας διαγωνίους· πόσας πλευρὰς ἔχει καθέν ;

678. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ 3 μ., τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου θὰ εἶνε 2,25 φορὰς τοῦ ἀρχικοῦ. Πόση εἶνε ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ;

679. Πόσον εἶνε τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 150 ($μ^2$), ἂν ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶνε 0,75 ;

680. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μὲν βάσις εἶνε 19 μ. μεγαλυτέρα ἑκάστου τῶν σκελῶν του, κατὰ 8μ. δὲ τοῦ ὕψους του. Πόση εἶνε ἡ βάσις τούτου ;

681. Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἔχοντος ἐμβαδὸν 192 ($μ^2$), ἂν διαφέρουν κατὰ 4 μ. ;

682. Ρόμβου ἡ μὲν πλευρὰ ἔχει μῆκος 17 μ., αἱ δὲ διαγώνιοι διαφορὰν 14 μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ μικροτέρα διαγώνιός του ;

683. Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 12,5 μ., ἂν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 17 μ. ;

684. Εὕρετε τὰς πλευρὰς δύο τετραγώνων, ἐχόντων ἄθροισμα ἐμβαδῶν 8621 ($μ^2$), ἂν τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων αὐτῶν εἶνε 8540.

685. *Ὁμὰς τετάρτη.* (Συστημάτων). 1) Δύο βρύσεις τρέχουσαι μαζύ, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 2,4 ὥρ. Ἡ β´ μόνη χρειάζεται

2 ὥρας ἐπὶ πλέον τῆς α'. Εἰς πόσον χρόνον ἑκάστη τὴν πληροῖ
μόνη ;

686. Δύο ἐργάται, ἐργαζόμενοι χωριστά, χρειάζονται 25 ὥρας διὰ νὰ τελειώσουν ἓν ἔργον, ἐνῶ ἕκαστος τελειώνει τὸ ἥμισυ ἔργου. Ἂν εἰργάζοντο μαζύ, θὰ ἐχρειάζοντο 12 ὥρ. δι' ὁλόκληρον τὸ ἔργον. Πόσον χρόνον ἐχρειάζετο ἕκαστος διὰ τὸ ἔργον ;

687. Δύο ἐπιχειρηματίαι κατέθεσαν ὁμοῦ 2000 δρχ., ὁ α' διὰ μῆνας καὶ ὁ β' διὰ 8 μ. Ὁ μὲν α' ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 1800 δρχ., ὁ δὲ β' 900 δρχ. Πόσα ἐκέρδισεν ἕκαστος ;

688. Δύο κεφάλαια ἔχοντα ἄθροισμα 30000 δρχ. ἐτοκίσθησαν πρὸς 6 %. Τὸ μὲν α' ἔμεινε 4 μῆνας ἐπὶ πλέον καὶ ἔδωκε τόκον 128 δρχ. τὸ δὲ β' 840 δρχ. Τίνα τὰ κεφάλαια ;

689. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶνε 62,5, καὶ ὁ μὲν α' ὑπερβαίνῃ τὸν β' κατὰ 4, ὁ δὲ γ' τὸν δ' κατὰ 3.

690. Εὕρετε διψήφιον ἀριθμόν, ὅστις διαιρούμενος μὲν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει πέντε καὶ ἓν τρίτον, ἐλαττούμενος δὲ κατὰ 9 δίδει τὸν προκύπτοντα ἀριθμόν, δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

691. Εὕρετε τριψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν β' ψηφίον εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ δὲ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτου εἶνε ὡς 125 : 7· δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς ηὐξημένος κατὰ 594.

692. Εὕρετε τρεῖς ἀριθμούς, ἂν ὁ β' εἶνε μέσον ἀνάλογος τῶν ἄλλων· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε 21, τῶν δὲ τετραγώνων τούτων 18

693. Εἰς δεξαμενὴν τρέχει τὸ ὕδωρ βρύσεως ἐπὶ τρία πέμπτα τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἄλλη βρύσις μόνη θὰ τὴν ἐπλήρωνε. Κλείεται ἡ α' βρύσις καὶ ἀνοίγεται ἡ β' μέχρις ὅτου πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἠνοίγοντο μαζύ, θὰ ἐπληροῦτο εἰς 6 ὥρας, θὰ ἔτρεχον δ' ἐκ τῆς α' τὰ δύο τρίτα τοῦ ἐκ τῆς β', ἀφ' ὅτου ἐκλείσθη ἡ α'. Εἰς πόσον χρόνον καθεμία βρύσις πληροῖ τὴν δεξαμενήν ;

694. *Ὁμὰς πέμπτη.* (Φυσικῆς). Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 μ., ἀφιέμενος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ ; (Παραβλέπεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος

695. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος, ῥιπτόμενος ἄνω κατακορύφως (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5μ. καὶ ἐπαναπέσῃ

 187

3. Πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ιφθῇ κατακορύφως ἄνω (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 2,5 μ.;

). Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1460 μ. σφαῖρα, ριπτομένη καταιρύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενὸν) καὶ ἀναχωροῦσα μὲ ἀρχικὴν ιχύτητα 185 μ.;

). Ποίαν πίεσιν ἐξασκεῖ σφαῖρα 41 χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμέου ἐπιπέδου, ἐὰν ἰσορροπῇ δύναμιν 9 χιλιογράμμων;

. Ἐπὶ πόσα δευτερόλεπτα κυλίεται σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιτέδου εἰς μῆκος 39,2 μ. καὶ ὕψος 10 μ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ ιάτω;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Περὶ προόδων.

Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

7 ***Ἀριθμητικὴ πρόοδος*** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν δποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως τῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λγονται ***ὅροι αὐτῆς,*** ὁ δὲ προστιθέμενος εἰς καθένα ὅρον ἀριθμς διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, καλεῖται ***λόγος ἢ διαφορὰ*** ῆς προόδου.

Ἂν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου εἶνε ἀριθμὸς θετικός, οἱ ὅροι βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα,*** ἐὰν δ' εἶνε ἀνητικός, οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ λέγεται ***φθίνουσα.*** Π. χ. ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, ... 48 εἶνε πρόοδος ἀριθμητικὴ αὔξουσα μὲ λόγον 1, καθὼς καὶ ἡ 1, 3, 5 . . . , 53 μὲ λόγον 2, ἡ δὲ 35, 30, 25, . . . , 0 εἶνε φθίνουσα μ λόγον —5.

Ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀριθμητικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ δεύτερος ὅρος θ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ α+ω, ὁ τρίτος ὑπὸ τοῦ α+2ω, καὶ οὕτω καθεξῆς. Ὥστε οἱ ὅροι τῆς προόδου θὰ εἶνε

$$\alpha, \quad \alpha+\omega, \quad \alpha+2\omega, \quad \alpha+3\omega, \quad \alpha+4\omega, \ldots \qquad (1)$$

Ἄρα, ***«ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν α ὅρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων».***

Οὕτω ὁ ὅρος τῆς προόδου (1) ὁ ἔχων π.χ. τὴν τριακοστὴν τάξι
ἰσοῦται μὲ α+29ω, ὁ τὴν ἑξηκοστὴν πέμπτην τάξιν μὲ α+64ω κλπ

Ἐὰν ν παριστάνῃ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς (1) καὶ τ τὸ
ἔχοντα τὴν νιοστὴν τάξιν ὅρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτο
θὰ εἶνε (ν—1) τὸ πλῆθος, καὶ θὰ ἔχωμεν τ=α+(ν—1)ω.

Π.χ. ὁ ὅρος ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τρίτην τάξιν εἰς ἀριθμητι
κὴν πρόοδον μὲ α′ ὅρον 3 καὶ λόγον 5 ἰσοῦται μὲ

$$3+(13-1).5=3+12.5=3+60=63.$$

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ ὅρο
τῆς δεκάτης τάξεως εἶνε 31 καὶ τῆς εἰκοστῆς 61. Ἔχομεν ὅτι
δέκατος ὅρος εἶνε α+9ω=31, ὁ εἰκοστὸς α+19ω=61, ἀφαι
ροῦντες δ' ἐκ τῆς β′ ἰσότητος τὴν α′ εὑρίσκομεν

$$10\omega=61-31=30, \text{ ἢ } 10\omega=30 \text{ καὶ } \omega=3.$$

Ἑπομένως εἶνε α+9.3=31 καὶ α=4. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶν
4, 7, 10, 13,...

§ 188. Δοθέντων δύο ἀριθμῶν, ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξ
αὐτῶν ὁσουσδήποτε ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων ν
ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν διὰ τῶν α καὶ τ παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺ
καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι θὰ παρεμβλη
θοῦν, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου, τὴν ὁποίαν θὰ σχημα
τίσωμεν, θὰ εἶνε ν+2, καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος τ. Ἑπομένως θ
ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu+1)\omega_1$, ὅπου τὸ ω_1 παριστάνει τὸν λόγον τ
προόδου, καὶ $\omega_1=\frac{\tau-\alpha}{\nu+1}$. Οὕτω δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴ
πρόοδον ἐκ τοῦ α′ ὅρου, τοῦ λόγου καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου αὐτῆ

Ἂν π. χ. ζητῆται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 1
ἀριθμοί, ὥστε μετ' αὐτῶν νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητική
ἔχομεν α=1, τ=4, ν=16, $\omega=\frac{4-1}{16+1}=\frac{3}{17}$ καὶ ἡ ζητουμέ
πρόοδος εἶνε ἡ $1, 1\frac{3}{17}, 1\frac{6}{17}, \ldots, 4.$

Ἀσκήσεις.

700. Εὕρετε τίνες τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν προόδων εἶνε αὔξουσ
καὶ τίνες φθίνουσαι καὶ διατί ;
α′) 3,5,7,9,... β′) —15,—10,—5, 0, 5,... γ′) 0,5·1,5· 2,5·
δ′) 0,75·1·1,25·1,5.. ε′) 68·64·60... στ′) —5,3·—5,6·—5,9

)1. Εὕρετε τὸν δέκατον ὅρον τῆς προόδου α΄) 9, 13, 17, . . .
β΄) —3· —1· 1·... γ΄) τὸν ὄγδοον τῆς α, α+3β, α+6β, .

)2. Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον τῆς ὁποίας ὁ ὅρος τῆς δεκάτης τάξεως εἶνε 231 καὶ ὁ τῆς εἰκοστῆς 2681.

)3. Εὕρετε τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, τῆς ὁποίας δίδεται ὁ α΄ ὅρος α· καὶ ὁ ἔχων τὴν νιοστὴν τάξιν τ. Μερικὴ περίπτωσις α=0,2· τ=3,2 καὶ ν=6.

4. Εὕρετε τὸν α΄ ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ἀποτελουμένης ἐκ 10 ὅρων, μὲ διαφορὰν 0,75 καὶ τελευταῖον ὅρον 6,25.

5. Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ α΄ ὅρον 3, τελευταῖον 9 καὶ διαφορὰν 2.

6. Εὕρετε τὸν ὅρον τῆς εἰκοστῆς τάξεως τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, μὲ πρῶτον ὅρον 6,35 καὶ διαφορὰν —0,25.

7. Μεταξὺ τῶν 4 καὶ 25 νὰ παρεμβληθοῦν 6 ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος.

8. Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικήν.

9. Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάμνει τὸ ἡμερονύκτιον ;

Ἄθροισμα ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

9. Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπον, δίδοντα τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἑξῆς ἰσότητα. «***Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων, ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων***».

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\quad α, β, γ, . . . κ, λ, τ \quad$ (1)
ὁ μὲν λόγος αὐτῆς ὁ ω, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὅρων ν.

Ἔχομεν ὅτι $β=α+ω$, $γ=α+2ω$, $τ=λ+ω$ καὶ $τ=κ+2ω$.

Ἑπομένως $λ=τ-ω$ καὶ $κ=τ-2ω$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας $β=α+ω$ καὶ $λ=τ-ω$, εὑρίσκομεν $β+λ=α+τ$.

Ὁμοίως ἐκ τῶν ἰσοτήτων $γ=α+2ω$ καὶ $κ=τ-2ω$ εὑρίσκομεν, προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη $\quad γ+κ=α+τ$, κ.ο.κ.

Ἔστω τώρα ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς (1). Ἂς παραστήσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ Σ· ἤτοι ἂς θέσωμεν

$$Σ=α+β+γ+ . . . +κ+λ+τ,$$
$$Σ=τ+λ+κ+ . . . +γ+β+α.$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$2Σ=(α+τ)+(β+λ)+(γ+κ)+ . . . +(τ+α).$$

Ἐπειδὴ καθὲν τῶν ἐν παρενθέσει ἀθροισμάτων εἶνε ἴσον μ
(α+τ), τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν εἶνε ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων
δηλαδὴ μὲ ν, ἔχομεν $2\Sigma=(\alpha+\tau).\nu$, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν διαιροῦντε
τὰ ἴσα διὰ τοῦ ν $$\Sigma=\frac{(\alpha+\tau).\nu}{2} \qquad (2)$$

Ἤτοι, ***«τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προό δου ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἐπὶ τὸ ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων αὐτῆς».***

Ἐὰν εἰς τὴν (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha+(\nu-1)$ ω
ὅπου ω παριστάνει τὸν λόγον τῆς προόδου, εὑρίσκομεν
$$\Sigma=\frac{[\alpha+\alpha+(\nu-1)\omega]\nu}{2}=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}.\nu \qquad (3)$$

Π. χ. ἂν ζητῆται τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα πρώτων ὅρων τῆ
προόδου 2, 5, 8,..., ἔχομεν $\alpha=2$, $\omega=3$, $\nu=10$. Ἑπομένως ἐ
τοῦ (3) εὑρίσκομεν $\Sigma=\frac{(2.2+9.3).10}{2}=\frac{31.5}{1}=155.$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

710. Πόσον εἶνε τὸ ἄθροισμα α΄) τῶν 25 πρώτων διαδοχικῶν ἀκ ραίων ἀριθμῶν; β΄) τῶν 30 πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ; ἀρι μῶν; γ΄) τῶν 40 πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ;
711. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τ 1 μέχρι τοῦ ν.
712. Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, α΄ ὅρον 12, τελευταῖον 144 καὶ ἄθροισμα αὐτῶν 1014 ;
713. Ποία ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου ἐκ 14 ὅρων, ἂν ὁ εἶνε 8 καὶ τὸ ἄθροισμα 567 ;
714. Ποία εἶνε ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ 16 ὅρους, τ ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶνε 63 καὶ καὶ τὸ ἄθροισμα 728 ;
715. Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, ἄθροισμα 578, διαφορὰν —3 καὶ α΄ ὅρον 58 ;
716. Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, μὲ ἄθρ σμα 456, διαφορὰν —12 καὶ τελευταῖον ὅρον 15.
717. Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἂν πληρώνεται εἰς 12 δόσεις κα α΄ δόσις εἶνε 10 δρχ., ἡ β΄ 15 δρχ., ἡ γ΄ 20 δρχ. κ.ο.κ. ;
718. Ἂν ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθρ σμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ ὁ 11ος 71, τίνες εἶνε οἱ τέσσαρες ὅροι
719. Ποία ἡ ἀριθμητικὴ πρόδοδος μὲ 12 ὅρους, ἂν τὸ ἄθροισ

τῶν τεσσάρων μέσων ὅρων εἶνε 74, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων 70;

20. Εὕρετε ἀριθμητικὴν πρόοδον ἐκ 3 ὅρων μὲ ἄθροισμα μὲν 33, γινόμενον δὲ 1287.

21. Εὕρετε τοὺς πέντε ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου, ἔχοντας γινόμενον 12320 καὶ ἄθροισμα 40.

22. ***Ὁμὰς δευτέρα.*** Νὰ εὑρεθῇ ὁ νιοστὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου $1, \frac{\nu-1}{\nu}, \frac{\nu-2}{\nu}, \frac{\nu-3}{\nu}, \ldots$

23. Νὰ εὑρεθῇ ὁ νιοστὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα των ν πρώτων ὅρων τῆς $\frac{\nu^2-1}{\nu}, \nu, \frac{\nu^2+1}{\nu}, \frac{\nu^2+2}{\nu}, \ldots$

24. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι τοῦ ν.

Παριστάνομεν διὰ S_1 τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν καὶ διὰ S_2, S_3 τὰ ἄλλα ζητούμενα ἀθροίσματα. Θέτομεν $\beta=1$ εἰς τὴν $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, ὅτε $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2.1+3.\alpha.1^2+1^3$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς ταύτην τώρα τὸ α διὰ τῶν $1, 2, 3, \ldots, \nu$ καὶ προσθέτοντες τὰς προκυπτούσας ἰσότητας προσδιορίζομεν τὸ S_2. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ S_3 χρησιμοποιήσατε ὁμοίως τὸν τύπον $(\alpha+1)^4=\alpha^4+4\alpha^3.1+6\alpha^2.1^2+4\alpha.1^3+1^4$.

25. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶνε 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶνε ἓν καὶ ἓν εἰκοστὸν τέταρτον.

Πρόοδοι γεωμετρικαί.

190. ***Γεωμετρικὴ πρόοδος*** καλεῖται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται ***ὅροι*** αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὅρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, λέγεται ***λόγος*** τῆς προόδου.

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενος (§ 6), εἶνε μεγαλύτερος τῆς 1, οἱ ὅροι, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενοι, βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***αὔξουσα,*** ἐὰν δ' ὁ λόγος, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενος, εἶνε μικρότερος τῆς 1, οἱ ὅροι, ***ἀπολύτως*** θεωρούμενοι, βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται ***φθίνουσα.*** Κατὰ ταῦτα ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots . 64$$

ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν μὲ λόγον 2. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ $-5, 10, -20, 40, -80, \ldots$ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον αὔξουσαν μὲ λόγον τὸν -2. Ἐνῶ οἱ

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ καὶ οἱ $2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \ldots$

ἀποτελοῦν φθίνουσας γεωμετρικὰς προόδους μὲ λόγους τοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ $-\frac{1}{3}$.

Ἂν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ ὅρος ταύτης ὁ ἔχων τὴν β΄ τάξιν θὰ εἶνε $\alpha.\omega$, ὁ ἔχων τὴν γ΄ τάξιν θὰ παριστάνεται ὑπὸ $\alpha.\omega.\omega = \alpha.\omega^2$ κ. ο. κ. Ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτω : $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \alpha\omega^4, \ldots$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι, «***ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν α΄ ὅρον αὐτῆς ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων***».

Ἐὰν διὰ τοῦ τ παραστήσωμεν τὸν νιοστῆς τάξεως ὅρον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης α΄ ὅρον τὸν α καὶ λόγον τὸν ω, θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$.

Π.χ. ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου $2, 6, 18, \ldots$, εἶνε ὁ 2.3^9, διότι εἶνε $\alpha=2$ καὶ $\omega=3$ τὸ δὲ $\nu=10$.

§ 191. Δίδονται δύο ἀριθμοὶ α καὶ β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ν ἄλλους, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν᾿ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω_1 τὸν λόγον τῆς προόδου, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς θὰ εἶνε $\nu+2$, ὁ τελευταῖος ὅρος $\beta = \alpha.\omega_1^{\nu+1}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν

$$\omega_1^{\nu+1} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \omega_1 = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶνε ἡ

$$\alpha, \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \alpha\sqrt[\nu+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}, \ldots$$

Π.χ. ἂν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν ἐννέα ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν᾿ ἀποτελέσουν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἔχομεν $\nu=9$ καὶ $\omega_1 = \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶνε $1, 2^{\frac{1}{10}}, 2^{\frac{2}{10}}, 2^{\frac{3}{10}}, \ldots\ldots, 2$.

Ἀσκήσεις.

5. Τίνες τῶν κάτωθι προόδων εἶνε αὔξουσαι, τίνες φθίνουσαι καὶ διατί ; α′) 5,10,20,... β′) 3,—6,12,... γ′) 7,—28,112,...

δ′) 135·27·5,4·... ε′) $\frac{32}{81}, \frac{16}{27}, \frac{8}{9}, \ldots$ στ′) $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὅρος τῆς ἑβδόμης τάξεως τῆς γεωμετρικῆς προόδου 2,6,18,..

. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον ὸν 9 καὶ πέμπτης τάξεως τὸν 144.

. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος της εἶνε , ὁ τελευταῖος 512 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων 9.

. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶνε 27,2, ὁ προτελευταῖος 25,9 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων 6.

Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶνε 6, ὁ δεύτερος 12 καὶ ὁ τελευταῖος 3072 ;

1 Εἶνε δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ πλῆθος ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, α′ ὅρον 23,75, λόγον —0,925 καὶ τελευταῖον—7,375;

2 Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης εάρτης τάξεως ὅρον 13, ἕκτης 117 καὶ τελευταῖον 9477.

3 Εὕρετε τὸν λόγον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης τρίτης τάξεως ὅρον τὸν 12 καὶ ὀγδόης τὸν 384.

Ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \ldots, \alpha\omega^{\nu-1}$ ἐκ ρων. Ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ παραστήσωμεν αὐτὸ διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^{\nu-1} \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα μέλη ἐπὶ ω, ἀφαιρέσωμεν δὲ τὸ ἐξαγόμενον $\Sigma\omega = \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \alpha\omega^3 + \ldots + \alpha\omega^\nu$ ν (1) (κατὰ μέλη) προκύπτει

$$\Sigma\omega - \Sigma = \alpha\omega^\nu - \alpha \quad \text{ἢ} \quad \Sigma(\omega-1) = \alpha\omega^\nu - \alpha,$$

ἧς ὁποίας εὑρίσκομεν, διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ ω—1 (τὸ σον ὑποτίθεται $\neq 0$, δηλαδὴ $\omega \neq 1$), $\Sigma = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$ (2).

Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην θέσωμεν τὸ τ ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^{\nu-1}$

παριστάνον τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς (1), θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμεν

ἄθροισμα $$\boxed{\Sigma = \frac{\alpha\omega^{\nu-1}.\omega - 1}{\omega - 1} = \frac{\tau.\omega - \alpha}{\omega - 1}} \qquad (3)$$

§ 193. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἰ φθίνουσα μὲ ἄπειρον πλῆθος ὅρων, δηλαδὴ ὅτι ἔχομεν τὴν γε μετρικὴν πρόοδον (1′) $\alpha, \ \alpha\omega, \ \alpha\omega^2, \ \alpha\omega^3, \ldots$ (ἐπ' ἄπειρο ἐνῷ τὸ ω εἶνε ἀπολύτως < 1, τότε τὸ ω^ν θὰ εἶνε ἀριθμὸς πο μικρὸς ὅταν τὸ ν εἶνε πολὺ μεγάλος (θετικός). Ὅταν τὸ ν ὑπερβαίνῃ πάντα δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν καὶ τείνῃ εἰς ∞, τὸ ω^ν καθὼς καὶ τὸ $\alpha\omega^\nu$ γίνεται ἀπολύτως μικρότερον πα τὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ λέγομεν ὅτι *τείνει* εἰς τὸ 0.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδο

$\Sigma = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$, γράψωμεν οὕτω $\Sigma = \frac{\alpha - \alpha\omega^\nu}{1 - \omega} = \frac{\alpha}{1 - \omega} - \frac{\alpha\omega^\nu}{1-\omega}$

καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ ν τείνει εἰς τὸ ∞, ὅτε λέγομεν ὅτι πρ σθέτομεν τοὺς ἀπείρους ὅρους τῆς προόδου, ἐπειδὴ τὸ μὲν $\frac{\alpha}{1-\omega}$ εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος, τὸ δὲ $\alpha\omega^\nu$ τείνει εἰς τὸ 0, θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα τῆς (1′) τὸ $\frac{\alpha}{1-\omega}$.

Ἤτοι, «***τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων φθι νούσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀρι μητὴν μὲν τὸν πρῶτον ὅρον, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονά ἠλαττωμένην κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου***».

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots$ εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\omega = \frac{1}{2}$ καὶ $\alpha = 1$, εἶνε $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου

$4, \ 2, \ 1, \ \frac{1}{2}, \ldots\ldots$ εἶνε $\frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = 8$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα.

734. *Ὁμὰς πρώτη.* Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα γεωμετρικῆς προόδου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε
α′) $\alpha=25$, $\omega=-3$, $\nu=7$. β′) $\alpha=7$, $\tau=5103$, $\nu=7$.
γ′) $\tau=2946$, $\omega=0{,}337$, $\nu=13$. δ′) $\alpha=\sqrt{\mu}$, $\tau=\sqrt{\mu^{2k+1}}$, $\nu=k$

735. Πόσον εἶνε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ α′) $\alpha=4$, $\omega=4$ καὶ ἄθροισμα $\Sigma=13120$, β′) $\alpha=4{,}6$, $\omega=108$, $\Sigma=210{,}23$. γ′) $\alpha=5$, $\tau=1280$, $\Sigma=2555$.

736. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης τῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους ὅρους.
α′) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ β′) $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ γ′) $2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$
δ′) $0{,}8686\ldots$ ε′) $0{,}54444\ldots$

737. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν γεωμετρικῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἂν μεταξὺ α′) τῶν 13,7 καὶ 5279,5 παρεμβληθοῦν 17 ἀριθμοί. β′) τῶν 0,996 καὶ 0,824 παρεμβληθοῦν 12 ἀριθμοί.

738. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἰς τὴν ὁποίαν εἶνε $\tau=384$, $\omega=2$, $\nu=8$.

739. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα α′) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots$(ἐπ᾽ ἄπειρον). β′) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots$(ἐπ᾽ ἄπειρον).

740. *Ὁμὰς δευτέρα.* Ἂν εἶνε $\alpha>\beta>0$ νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα
α′) $\alpha^{\nu}+\beta\alpha^{\nu-1}+\beta^2\alpha^{\nu-2}+\ldots$ β′) $\alpha+\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\ldots$

741. Εἰς τετράγωνον (ἢ ἰσόπλευρον τρίγωνον) πλευρᾶς α συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν νέον τοιοῦτον. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθεξῆς. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων ἢ τριγώνων.

742. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον· εἰς τοῦτο κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων καὶ τῶν τετραγώνων.

743. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἂν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἡ τετάρτη εἶνε ἐννεαπλασία τῆς δευτέρας.

744. Νὰ μερισθῇ ὁ 221 εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ γ′ ὅρος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν α′ κατὰ 136.

745. Τὸ μὲν ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶνε 248, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶνε 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὅροι;

746. Δείξατε ὅτι εἰς γεωμετρικὴν πρόοδον τὸ γινόμενον δύο ὅρων, ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων.

§ 194. Περὶ λογαρίθμων.

Καλοῦμεν ***λογάριθμον*** ἀριθμοῦ τινος Α ὡς πρὸς τὴν βάσιν* 10 τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν Α». Ἤτοι, ἂν εἶνε $10^{\alpha}=A$, τὸ α λέγεται λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν τὸν 10, ἢ ἁπλῶς λογάριθμος τοῦ Α, καὶ σημειώνεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς $\alpha=\lambda o\gamma A$ ἢ $\lambda o\gamma A=\alpha$, ἀπαγγέλλεται δ' ἡ ἰσότης αὕτη οὕτω, ***ὁ λογάριθμος τοῦ Α εἶνε ἴσος μὲ α.***

Ἐπειδὴ εἶνε $10^0=1$ καὶ $10^1=10$, ἕπεται ὅτι, «***ὁ λογάριθμος τῆς μὲν 1 εἶνε*** 0, ***τοῦ δὲ 10 ἡ 1***».

§ 195. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι, «***δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ, ὑπάρχει, εἷς μόνον λογάριθμος αὐτοῦ***».

Ἔστω α΄) ἀριθμὸς $A>1$. Λαμβάνομεν ἕνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν ν καὶ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς $0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}, \dots$ καὶ τὰς δυνάμεις $10^0, 10^{\frac{1}{\nu}}, 10^{\frac{2}{\nu}}, 10^{\frac{3}{\nu}}, \dots$ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν, ἐπειδὴ εἶνε $10^{\frac{1}{\nu}}>1$ (διότι ἂν ἦτο $10^{\frac{1}{\nu}}\leqq 1$, ὑψοῦντες τὰ ἄνισα αὐτὰ εἰς τὴν ν δύναμιν, θὰ εἴχομεν $10\leqq 1$). Οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ τοῦ α΄ καὶ ἑξῆς καὶ ἂν μὲν τύχῃ εἷς ἐξ αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν Α, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ Α, ἂν δὲ δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ περιέχεται ὁ Α μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου, ἔστω τῶν $10^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}}$, ἤτοι θὰ εἶνε

$$10^{\frac{\mu}{\nu}}<A<10^{\frac{\mu+1}{\nu}}.$$

---

*) Καλοῦμεν ***νεπέριον*** λογάριθμον ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνεται μὲ τὸ γράμμα e καὶ εἶνε $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots$(ἐπ' ἄπειρον) ἢ $\alpha=2,718\,281\,828\dots$

Ὁ e δὲν εἶνε ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως (βλ. σελ. 209) καὶ διὰ τοῦτο λέγεται ***ὑπερβατικὸς*** ἀριθμός.

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α διαφέρουν κατὰ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}} - 10^{\frac{\mu}{\nu}} = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot 10^{\frac{1}{\nu}} - 10^{\frac{\mu}{\nu}} = 10^{\frac{\mu}{\nu}}\left(10^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)$.

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ ὅσον θέλωμεν μικροῦ, ἂν τὸ ν λάβωμεν ἀρκούντως μέγα (διότι τότε τὸ $10^{\frac{1}{\nu}} - 1$ δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ὅταν τὸ ν ὑπερβαίνῃ πάντα ἀριθμὸν ὁσονδήποτε μεγάλον, ἐπειδὴ τὸ $10^{\frac{1}{\nu}}$ διηνεκῶς ἐλαττοῦται καθόσον αὐξάνεται τὸ ν καὶ πλησιάζει τὴν 1).

Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ δύο ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικρὰν (ὅταν λάβωμεν τὸ ν ἀρκούντως μέγα), κατὰ μείζονα λόγον ὁ Α θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ ποσότητα ὅσον θέλωμεν μικράν, καὶ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸν Α ἴσον μὲ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων (ὅταν τὸ ν ληφθῇ ἀρκούντως μέγα) ἤτοι θὰ θέσωμεν

$10^{\frac{\mu}{\nu}} = A$, ὅτε εἶνε $\lambda o\gamma A = \frac{\mu}{\nu}$, ἢ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}} = A$, ὅτε εἶνε $\lambda o\gamma A = \frac{\mu+1}{\nu}$,

Οἱ δύο οὗτοι λογάριθμοι τοῦ Α διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$, τὸ ὁποῖον τείνει εἰς τὸ 0, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς ∞.

β') Ἐὰν εἶνε $0 < A < 1$, παρατηροῦμεν ὅτι θὰ εἶνε $\frac{1}{A} > 1$, ἑπομένως θὰ ἔχῃ οὗτος λογάριθμον ἔστω τὸν $\frac{k}{\lambda}$, δηλαδὴ θὰ εἶνε $\frac{1}{A} = 10^{\frac{k}{\lambda}}$ καὶ ἀντιστρέφοντες τὰ ἴσα, θὰ ἔχωμεν

$$A = \frac{1}{10^{\frac{k}{\lambda}}} = 10^{-\frac{k}{\lambda}},$$ ἑπομένως ἔχομεν $\lambda o\gamma A = -\frac{k}{\lambda}$.

Λέγομεν τώρα ὅτι εἷς μόνος λογάριθμος τοῦ Α ὑπάρχει. Διότι, ἐὰν εἴχομεν π.χ. $\nu = \lambda o\gamma A$ καὶ $\rho = \lambda o\gamma A$, θὰ ἦτο $10^\nu = A$, $10^\rho = A$, καὶ $10^\nu = 10^\rho$, ἄρα καὶ $10^{\nu-\rho} = 1$, ἑπομένως $\nu - \rho = 0$ ἢ $\nu = \rho$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, ***«πᾶς ἀριθμὸς $A > 0$ ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον θετικὸν μέν, ἂν εἶνε $A > 1$, ἀρνητικὸν δὲ ἂν εἶνε $A < 1$»***.

§ 196. *Παρατηρήσεις.* 1. «*Ἀρνητικός τις ἀριθμὸς δὲν ἔχει λογάριθμον*», ἐπειδὴ δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x ἡ δύναμις 10^x δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν (§ 148).

2. Ἀριθμός τις σύμμετρος α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λογάριθμος τοῦ 10^{α}, εἶνε δὲ οὗτος ὁ μόνος ὅστις ἔχει λογάριθμον τὸν α.

3. Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν σύμμετρον ἔχει λογάριθμον τὸν σύμμετρον τοῦτον ἐκθέτην, πᾶς δ' ἄλλος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἀσύμμετρον ἀριθμόν. Διότι, ἂν εἶχε λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμόν, θὰ ἦτο οὗτος ἴσος μὲ δύναμιν τοῦ 10 ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν σύμμετρον τοῦτον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

§ 197. α') «*Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων*».

Ἔστω ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma A=\alpha$, $\lambda o\gamma B=\beta$, $\lambda o\gamma \Gamma=\gamma$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma(A.B.\Gamma)=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma B+\lambda o\gamma\Gamma=\alpha+\beta+\gamma$.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν

$$10^{\alpha}=A,\ 10^{\beta}=B,\ 10^{\gamma}=\Gamma$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ταῦτα κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$10^{\alpha}.\ 10^{\beta}.\ 10^{\gamma}=10^{\alpha+\beta+\gamma}=A.B.\Gamma.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ὅτι $\lambda o\gamma(A.B.\Gamma)=\alpha+\beta+\gamma=$ $=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma B+\lambda o\gamma\Gamma$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, π. χ. ἔχομεν

$$\lambda o\gamma 105=\lambda o\gamma(3.5.7)=\lambda o\gamma 3+\lambda o\gamma 5+\lambda o\gamma 7.$$

β') «*Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου πλὴν τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου*».

Ἔστω ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma A=\alpha$, $\lambda o\gamma B=\beta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\lambda o\gamma \frac{A}{B}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B.$$

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν $\begin{matrix}10^{\alpha}=A\\10^{\beta}=B\end{matrix}$

διαιροῦντες δὲ τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\frac{10^{\alpha}}{10^{\beta}}=\frac{A}{B}$,

ἢ $10^{\alpha-\beta}=\frac{A}{B}$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ὅτι

$$\lambda o\gamma\frac{A}{B}=\alpha-\beta=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B.$$

Οὕτω ἔχομεν π.χ. $\lambda o\gamma\, 5\frac{2}{3} = \lambda o\gamma \frac{17}{3} = \lambda o\gamma 17 - \lambda o\gamma 3$.

γ') ***«Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται ὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βά- εως αὐτῆς».***

Ἔστω ὅτι εἶνε $\lambda o\gamma A = \alpha$ καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν A^{μ} μὲ θέτην μ οἱονδήποτε. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\lambda o\gamma A^{\mu} = \mu .\, \lambda o\gamma\, A$.

Διότι ἐπειδὴ εἶνε $\lambda o\gamma A = \alpha$, θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha} = A$ καὶ ὑψοῦντες ἴσα εἰς τὴν μ δύναμιν εὑρίσκομεν

$$(10^{\alpha})^{\mu} = A^{\mu}, \text{ ἢ } 10^{\mu . \alpha} = A^{\mu}.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὐτη ὁρίζει ὅτι $\lambda o\gamma A^{\mu} = \mu . \alpha = \mu . \lambda o\gamma A$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν $\lambda o\gamma\, A^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu} \lambda o\gamma A$, ἤτοι ὅτι,

«ὁ λογάριθμος ῥίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον ῦ ὑπορρίζου, διῃρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ῥίζης».

Ἀσκήσεις. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων.

$\lambda o\gamma 15 = \lambda o\gamma 3 + \lambda o\gamma 5$. β') $\lambda o\gamma 55 = \lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 11$.

α') $\lambda o\gamma 2\frac{1}{3} = \lambda o\gamma 7 - \lambda o\gamma 3$. β') $\lambda o\gamma 49 = 2 .\, \lambda o\gamma 7$.

α') $\lambda o\gamma \sqrt{20} = (\lambda o\gamma 20) : 2$. β') $\lambda o\gamma \sqrt{647^3} = (3\, \lambda o\gamma 647) : 2$.

α') $6 .\, \lambda o\gamma 32 = \lambda o\gamma 32^6$. β') $\lambda o\gamma 5 + \lambda o\gamma 7 + \lambda o\gamma 4 = \lambda o\gamma 140$.

Περὶ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τῶν λογαρίθμων.

Καλοῦμεν ***χαρακτηριστικὸν*** λογαρίθμου τινὸς τὸ ἀκέραιον ος αὐτοῦ, ὅταν τὸ ἄλλο μέρος του, ἐὰν ἔχῃ, εἶνε θετικὸν καὶ <1.

Ἔστω ἀριθμός τις, περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10, π. χ. Θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma 1 < \lambda o\gamma 7 < \lambda o\gamma 10$, ἢ $0 < \lambda o\gamma 7 < 1$· ἤτοι ὁ λο- θμος ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ 1 καὶ 10 ἔχει χαρακτηρι- ὸν 0. Ἂν ἀριθμός τις περιέχεται μεταξὺ τῶν 10 καὶ 100, π.χ. , θὰ ἔχωμεν $\lambda o\gamma 10 < \lambda o\gamma 47 < \lambda o\gamma 100$, ἢ $1 < \lambda o\gamma 47 < 2$· ἤτοι πᾶς ῦτος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον μὲ χαρακτηριστικὸν 1, κ. ο. κ.

Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος α') μεταξὺ 1 καὶ 10 ἀκέραιον μονοψήφιον, β') μεταξὺ 10 καὶ 100 ἔχει ἀκέραιον φιον κ.ο.κ., ἕπεται ὅτι, ***«τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθ- ἀριθμοῦ $A > 1$ ἔχει τόσας ἀκεραίας μονάδας ὅσον εἶνε τὸ θος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου του, ἠλαττωμένον κατὰ 1».***

Π. χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ345 εἶνε 2, τοῦ 12,4 εἶνε 1, τοῦ 3835,24 εἶνε 3 κλπ.

Ἔστω τώρα ἀριθμός τις περιεχόμενος μεταξὺ τῶν 0,1 καὶ 1, π.χ. ὁ 0,34. Ἔχομεν $λογ\,0,1 < λογ0,34 < λογ1$, ἢ $-1 < λογ0,34 < 0$ ἤτοι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελούμενος ἀπὸ τὸ $-1+k_1$, ὅπου εἶνε $0 < k_1 < 1$.

Ἂν ἀριθμός τις περιέχεται μεταξὺ τῶν 0,01 καὶ 0,1 π.χ. ὁ 0,047, θὰ ἔχωμεν, $λογ0,01 < λογ0,047 < λογ0,1$ ἢ $-2 < λογ0,047 < -1$ ἤτοι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀποτελούμενος ἀπὸ τὸ $-2+k_2$, ὅπου εἶνε $0 < k_2 < 1$, κ.ο.κ.

Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος α΄) μεταξὺ 0,1 καὶ 1, ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικός, θὰ ἔχῃ σημαντικὸν ψηφίον τὸ α΄ δεκαδικὸν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, β΄) μεταξὺ 0,01 καὶ 0,1 (ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικὸς) θὰ ἔχῃ σημαντικὸν ψηφίον τὸ β΄ αὐτοῦ δεκαδικὸν μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν, κ.ο.κ. ἕπεται ὅτι,

«τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ $A<1$, γραμμένου ὡς δεκαδικοῦ, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅση εἶνε ἡ τάξις τοῦ α΄ σημαντικοῦ ψηφίου του, τοῦ δεξιὰ τῆς ὑποδιαστολῆς, ὅταν ὁ λογάριθμος θεωρῆται ὡς ἄθροισμα ἀκεραίου ἀρνητικοῦ καὶ ἄλλου θετικοῦ μικροτέρου τῆς 1».

Π. χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ0,3 εἶνε -1, τοῦ 0,0147 ὁ -2, τοῦ 0,00356 ὁ -3 κλπ.

Τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ $A<1$ θὰ θεωροῦμεν ὡς ἄθροισμα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἄλλου θετικοῦ, μικροτέρου τῆς 1, θὰ ὑποθέτωμεν δὲ αὐτὸν γραμμένον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν. Οὕτω θὰ εἶνε π.χ. $λογ0,3 = -1 + \ldots$ ὅπου τὸ ἐλλεῖπον (μὲ σημαντικὰ ψηφία μόνον δεκαδικὰ) εἶνε θετικὸς καὶ μικρότερον τῆς 1.

§ 199. Ἀντιστρόφως, ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι,

«ἂν μὲν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ A εἶνε θετικόν, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ A ἔχει τόσα ψηφία ὅσας μονάδας ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν σὺν ἕν· ἂν δὲ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε ἀρνητικόν, ὁ A εἶνε δεκαδικὸς μὲ ἀκέραιον 0, τὴν δὲ τάξιν τοῦ α΄ σημαντικοῦ ψηφίου του ὁρίζει τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν μονάδων τοῦ χαρακτηριστικοῦ».

Οὕτω, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ εἶνε 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε -2, ὁ ἀριθμὸς εἶνε δεκαδικὸς μὲ ἀκέραιον μὲν 0 καὶ α' σημαντικὸν ψηφίον μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν αὐτοῦ τὸ δεύτερον.

Ο. Ἔστω ὅτι εἶνε $10^{\alpha}=A$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ταῦτα ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν 10^3, θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha}.10^3=A.10^3$, ἢ $10^{\alpha+3}=A.10^3$, καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν ὅτι, λογ $(A.10^3)=\alpha+3$. Ἀλλ' ἔχομεν $\alpha=$λογA. Ἑπομένως εἶνε λογ $(A.10^3)=\alpha+3=$λογA$+3$. Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 10^2 π.χ. τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $10^{\alpha}=A$, εὑρίσκομεν ὅτι λογ $(A:10^2)=$λογA-2. Ἤτοι, «***ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) μὲ τὸ 10· 100· 1000·... ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ 1·2·3·..***».

Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι,

«***ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν***».

Π.χ. ὁ λογάριθμος τοῦ 5 εἶνε	0,69 897
τοῦ 50 »	1,69 897
τοῦ 500 »	2,69 897
τοῦ 0,5 »	$-1+0{,}69\ 897$
τοῦ 0,05 »	$-2+0{,}69\ 897$ κλπ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν α') λογ35, β') λογ4513, γ') λογ9,5, δ') λογ0,80· λογ0,008· λογ800· λογ8000, ε') λογ0,00132· λογ132· λογ1320, στ') λογ397,551· λογ3974,51· λογ 39741,1, ζ') λογ $\frac{13}{3}$, η') λογ $\frac{1}{50}$, θ') λογ $62\frac{4}{6}$, ι') λογ $2\frac{1}{7}$ λογ 0,04· λογ 40.

Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 3,5,7,1,0,12 ;

Ποία εἶνε ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν —1, —2, —3, —5, —9 ;

Ὁ λογάριθμος τοῦ 80 εἶνε 1,70506· ποῖοι ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος τῶν λογαρίθμων των ;

Ποῖον γνώρισμα ἔχει ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶνε ὁ 0,70586 ; ὁ 1,70586 ; ὁ $-1+0{,}70586$; ὁ $-2+0{,}70586$; ὁ $-3+0{,}70586$ καὶ διατί ;

§ 201. Τροπὴ ἀρνητικοῦ δεκαδικοῦ εἰς ἐν μέρει ἀρνητικόν.

Τὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος, τὸ μικρότερον τῆς 1, ἐκφράζεται συνήθως διὰ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (κατὰ προσέγγισιν). Οὕτω ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ εἶνε ἐν γένει ἀκέραιος ἢ δεκαδικὸς ἀριθμὸς (κατὰ προσέγγισιν). Ἐπειδὴ τῶν μικροτέρων τῆς 1 (θετικῶν) ἀριθμῶν ὁ λογάριθμος εἶνε ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον ἴσον του, ἐν μέρει ἀρνητικόν, δηλαδὴ τοιοῦτον ὥστε, τὸ μὲν ἀκέραιον μέρος νὰ εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν θετικόν.

Ἔστω π. χ. ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος $-2{,}54327$, ἤτοι ὁ $-2-0{,}54327$. Ἐὰν εἰς αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν -1 καὶ τὸν $+1$, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}-2-1+1-0{,}54327=-3+1-0{,}54\,327&=-3+1{,}00000\\&\;-0.54327\\ \hline &=-3+0{,}45673,\end{aligned}$$

τὸ ὁποῖον γράφομεν $\overline{3},45673$· δηλαδὴ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν ὅτι τοῦτο μόνον εἶνε ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν εἶνε θετικόν.

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ τρέψωμεν λογάριθμον ἀρνητικὸν εἰς ἐν μέρει ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου κατὰ 1 καὶ γράφομεν τὸ — ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, δεξιὰ δὲ τούτου γράφομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία τὰς διαφορὰς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου (σημαντικοῦ) ἀπὸ τὸ 10, τῶν δ' ἄλλων ἀπὸ τὸ 9.

§ 202. ***Παρατήρησις.*** Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν μὲ παραλλαγάς τινας, ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, καὶ αἱ ὁποῖαι φαίνονται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Πρόσθεσις. Ἔστω ὅτι ζητεῖται π. χ. τὸ $2{,}57\,834+\overline{1},67943$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ $2=3$ καὶ $-1=2$. Οὕτω εὑρίσκομεν ἄθροισμα $2{,}25\,777$.

Ἀφαίρεσις. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\overline{5},67893-\overline{8},75\,928$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν· 1 τὸ κρατούμενον καὶ -8 ἴσον -7, διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται $+7$ καὶ σὺν $-5=+2$. Ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον εἶνε $2{,}91\,965$.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ $\bar{5},62\,893 \times 3$. Ἔχομεν $\bar{5},62\,893 \times 3 = -5.3 + 0,62\,893.3 =$

$$= -15 + 1,88679 = \overline{14},88679.$$

Διαίρεσις δι' ἀκεραίου. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ $\bar{5},62\,891 : 3$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶνε

$$= \bar{5},62891 : 3 = (-5 + 0,62891) : 3 = (-5 - 1 + 1 + 0,62891) : 3 =$$
$$= (-6 + 1,62\,891) : 3 = -2 + 0,54\,297 = \bar{2},54\,297.$$

Ὁμοίως διὰ τὴν διαίρεσιν $\bar{4},67\,837 : 9$, ἔχομεν $\bar{4},67\,837 : 9 =$

$$= (-4 + 0,67\,837) : 9 = (-4 - 5 + 5 + 0,67837) : 9 =$$
$$= (-9 + 5,67837) : 9 = -1 + 0,63093 \text{ ἢ } \bar{1},63093.$$

Ἀσκήσεις.

5. Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ 2,34 897· $\bar{6}$,97 852· 9,82 057.
6. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\bar{3},0809$ ἀπὸ $\bar{8},30467$· ὁ $\bar{9},93726$ ἀπὸ τὸν $\bar{3},86564$.
7. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\bar{9},30\,942$ ἐπὶ 3·7·42.
8. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία τοῦ $\bar{9},93\,642$ διὰ 8·9·12.

Λογάριθμος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν.

Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ ***προσέγγισιν μονάδος***, κατὰ προσέγγισιν 0,1, ἢ 0,01,... τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν δύο δυνάμεων τοῦ 10 μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμός, καὶ οἵτινες (ἐκθέται) διαφέρουν κατὰ 1, ἢ 0,1, ἢ 0,01,...

Οὕτω, ἐὰν ἔχωμεν $10^{\rho} < A < 10^{\rho+1}$ (ἐνῶ τὸ ρ εἶνε ἀκέραιος) ὁ ρ λέγεται λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ἤτοι ὁ ρ εἶνε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α.

Ἂν ἔχωμεν $10^{\frac{\lambda}{10}} < A < 10^{\frac{\lambda+1}{10}}$ τὸ $\frac{\lambda}{10}$ λέγεται λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν 0,1 κ.ο.κ.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται ὁ λογΑ κατὰ προσέγγισιν 0,1. Ἂν παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον ἀριθμὸν διὰ τοῦ $\frac{x}{10}$, θὰ ἔχωμεν $10^{\frac{x}{10}} < A < 10^{\frac{x+1}{10}}$. Ὑψοῦμεν τὰ ἄνισα εἰς τὴν δεκάτην δύναμιν καὶ εὑρίσκομεν $10^{x} < A^{10} < 10^{x+1}$.

Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ x εἶνε τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{10}.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἂν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἢ 0,001,...

Ἐπομένως, «***διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ*** *κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01,... ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν 10ην, ἢ εἰς τὴν 100ήν,... δύναμιν, τοῦ ἐξαγομένου νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10 ἢ 100,...».*

Περὶ λογαριθμικῶν πινάκων.

§ 204. Ἐνῶ, ὡς εἴδομεν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐν τούτοις ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶνε λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπονος. Διὰ τοῦτο ὑπάρχουν πίνακες, οἵτινες λέγονται ***λογαριθμικοὶ πίνακες***, περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως (§ 198), οἱ πίνακες περιέχουν ἑκάστου λογαρίθμου ἓν δεκαδικὸν μέρος μὲ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Συνήθως μεταχειριζόμεθα πίνακας μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, ἡ δὲ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ κατωτέρω πίνακος (ληφθέντος ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis).

Τὸ μὲν σύνολον τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν εἶνε γραμμένον

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 879	906	914	923	932	940	949	958	966	975
1	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
2	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003

εἰς τὴν πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα N (Nombres), τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἰς τὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τοῦ N. Ὁ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῶν

205

ογαρίθμων αὐτῶν κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον καὶ νο-
ῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

Ὁ ἀστερίσκος, ὁ ὁποῖος ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ, σημαίνει ὅτι τὰ αραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβω-εν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν ὅτι,

ογ500=2,69 897· λογ5000=3,69 897, λογ5017=3,70 044·
ογ5063=3,70 441, λογ 5129=3,71 003.

. Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰς ἑξῆς ύο περιπτώσεις.

1) *«Ὅταν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ν λογάριθμον αὐτοῦ».*

2) *«Ὅταν δοθέντος λογαρίθμου τινός, θέλωμεν νὰ εὕρω-εν τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὸν ἀριθμόν».*

Περίπτωσις πρώτη. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισ-ότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθ-ου αὐτοῦ ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὑρίσκομεν αὐτό, καθὼς δομεν ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν 0,003817·
141· 0,0845· 107,3· 13,07· 0,0013· 0,0004124.

Ἔστω ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθ-ς, ἔχει ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, π. χ. ὁ 507356. Τὸ ρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶνε 5, χωρίζοντες τὰ 4 πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 73,56. Ἐπειδή, ὡς εἶνε γνωστὸν (§ 200), τὸ δεκαδικὸν μέρος ῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶνε τὸ τό, ἕπεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογα-θμου τοῦ ἀριθμοῦ 5073,56. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται με-ξὺ τῶν 5 073 καὶ 5 074. Ἄρα καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,56 περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 74. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν ὅτι

λογ 5073=3,70 526 καὶ λογ 5074=3,70 535.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶνε 9 ἑκατοστὰ τοῦ ιοστοῦ. Τώρα δεχόμεθα ὅτι, ***αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων ε ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσ-ισιν)***, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶνε μικρότεραι τῆς άδος, καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5 073 αὐξηθῇ α 1 καὶ γίνῃ 5 074, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 9 μο-

νάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως ὅταν ὁ ἀριθμὸς α
ξηθῇ κατὰ 0,56 διὰ νὰ γίνῃ 5073,56 ὁ λογάριθμος αὐτοῦ
αὐξηθῇ κατὰ $9 \times 0,56 = 5,04$ ἢ κατὰ 5 περίπου ἑκατοστὰ τοῦ
λιοστοῦ. Ὥστε, πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον 3,70526 νὰ πρ
θέσωμεν 5 ἑκατοστὰ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τ
5073,56. Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εὑρίσκομεν ὅτι

λογ 5073,56=3,70 531. Ἄρα, ὁ λογ507356=4,70 531.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶνε 5,07356 τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τ
λογαρίθμου αὐτοῦ θὰ εἶνε 0, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τούτου
εἶνε τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 507356 (§ 200). Ἑπ
μένως θὰ ἔχωμεν ὅτι λογ 5,07356=0,70 531.

Περίπτωσις δευτέρα Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέν
λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν ἀπένα
αὐτοῦ τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Π. χ. ἂν
δοθεὶς λογάριθμος εἶνε 3,70 140, τὸ δεκαδικὸν μέρος εὑ
σκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ε
ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶνε 3, ὁ ἀντίστοιχος ἀρ
μὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία (§ 199)· ἄρα εἶνε ἀκριβῶς
5028. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸν λογάριθμ
$\bar{1}$,70 552 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμ
0,70 995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

Ἔστω ὅτι δίδεται π.χ. ὁ λογάριθμος 2,70 169 καὶ ζητεῖ
ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός. Τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτ
ἀναζητούμενον εἰς τοὺς πίνακας, παρατηροῦμεν ὅτι εὑρίσκε
μεταξὺ τοῦ 0,70 165 καὶ τοῦ 0,70 174 εἰς τοὺς ὁποίους ἀν
στοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 5031 καὶ ὁ 5032, καὶ οἱ μὲν λογάριθ
τούτων διαφέρουν κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τ
ξεως, οἱ δὲ ἀριθμοὶ κατὰ 1. Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς.

Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 5031, ὁ ὁποῖος εἶνε 3,70 165, αὐξη
κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐ
νεται κατὰ 1. Ἂν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέ
πτης δεκαδικῆς τάξεως καὶ γίνῃ 3,70 169 ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξη
κατὰ $\frac{4}{9}$ ἤτοι κατὰ 0,44... Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δ
καδικὸν μέρος εἶνε 0,70 169 θὰ εἶνε ὁ 5031,44... Ἐπειδὴ τὸ χ
ρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶνε 2, ὁ ἀντίστοι
ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα εἶνε ὁ 503,144.

Ἀσκήσεις.

0. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν.

α΄) 95 348. β΄) 6,8 372 γ΄) 0,98 629. δ΄) $968\frac{3}{8}$. ε΄) 0,0364598.

στ΄) 6,3347. ζ΄) 326,537. η΄) 5278,37. θ΄) 15389,45.

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ x ἐκ τοῦ δεδομένου κατωτέρω λογαρίθμου αὐτοῦ.

α΄) λογx=0,63 147. β΄) λογx=1,72 127. γ΄) x=0, 68 708.

δ΄) λογ x=$\overline{3}$,92836. ε΄) λογx=$\overline{4}$,38221. στ΄) λογx=$\overline{3}$,70 032.

Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων.

06. Διὰ τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς διαίρεσιν. Πράγματι, ἂν ζητοῦμεν π. χ. τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ προσθέτομεν αὐτούς· τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν θὰ εἶνε ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὸν λογάριθμον αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας (ἢ μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν) καὶ τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὗτος θὰ παριστάνῃ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $-908,4\times0,05\,392\times2,117$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου διὰ ταῦ x καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων εὑρίσκομεν

λογx=λογ908,4+λογ0,05 392+λογ2,117.

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν ὅτι

ογ908,4=2,95828, λογ.0,05392=$\overline{2}$,73175,λογ.2,117=0,32572.

Διὰ προσθέσεως τούτων προκύπτει ὅτι λογx=2,01 575.

Ὁ μὲν ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶνε ὁ 03,693, ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶνε ἀρνητικόν, θὰ ἶνε τοῦτο τὸ —103,693.

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἐὰν εἶνε $x=\frac{7,56\times4667\times567}{899,1\times0,00\,337\times23\,435}$

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

λογx=λογ7,56+λογ4 667+λογ567

— λογ899,1—λογ0,00 337—λογ23 435.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

λογ. 7,56=0,87 852	λογ899,1=2,95 381
λογ.4667=3,66 904	λογ0,00337=$\overline{3}$,52 763.
λογ 567=2,75 358	λογ 23 435=4,36 986.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν

$$λογ7,56+λογ4\,667+λογ567=7,30\ 114$$

$$λογ899,1+λογ0,00\ 337+λογ23435=4,85\ 130.$$

Δι' ἀφαιρέσεως προκύπτει $λογx=2,44\ 984.$

Εὑρίσκοντες τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμόν, ἔχομεν $x=281,73$.

3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 0,000 043 461.

Ἐὰν θέσωμεν $x=\sqrt{0,000\ 043\ 461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν $λογx=\frac{1}{2}\times λογ0,000\ 043\ 461$

ἢ $λογx=\frac{1}{2}\times\overline{5},63\ 810$, ἢ $λογx=\overline{3},81905$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται $x=0,0065925$.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x ἐκ τῆς ἰσότητος $81^x=10$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$λογ81^x=λογ10$, ἢ $x.λογ81=λογ10=1$. Ἄρα $x=\frac{1}{1,90849}=\frac{1,00\ 000}{1,90\ 849}=0,52\ 397$. Ἤτοι $x=0,52\ 397$.

Ἀσκήσεις.

762. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τῶν λογαρίθμων,

α') $0,4326^3$. β') $\sqrt[3]{12}$. γ') $\sqrt[5]{0,07776}$. δ') $\sqrt[5]{43}$.

ε') $-875,6348\times 62,82407$. στ') $\sqrt[15]{25,36496}:0,0893462$.

763. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 2,52075 δακτύλους.

764. Νά παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

765. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως σώματος, πίπτοντος εἰς τὸ κενόν, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4810 μ. (τῆς κορυφῆς τοῦ λευκοῦ ὄρους).

. Περὶ ἐκθετικῶν καὶ λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Καλοῦμεν ***ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν*** τὴν ἐξίσωσιν εἰς τὴν ὁποίαν ἄγνωστος ὑπάρχει εἰς τὸν ἐκθέτην δυνάμεως, ἐχούσης βάσιν ριθμόν τινα ἢ παράστασιν γνωστὴν $\neq 0$, π. χ. τὰς ἐξισώσεις $^{2-2x+2}=1$, $\alpha^{2x+3}=\alpha^2$. Τὰς μέχρι τοῦδε γνωστὰς ἐξισώσεις κα- οῦμεν ***ἀλγεβρικὰς*** πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἐκθετικῶν.

Λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν νώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν γεβρικῆς. Τοῦτο γίνεται κυρίως ὅταν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν σωσιν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης μὲ ἓν μέλος τὴν 1, τὸ δὲ λο δύναμιν ἀριθμοῦ τινος ἢ παραστάσεως γνωστῆς $\neq 0$, τῆς οίας ὁ ἐκθέτης περιέχει τὸν ἄγνωστον τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἔστω πρὸς λύσιν π. χ. ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $3^{3x}=\frac{1}{27}$.

Δίδομεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν $3^{3x}.27=1$ ἢ $3^{3x}.3^3=1$ ἢ $^{+3}=1$ ἢ $3^{3x+3}=3^0$ (ἐπειδὴ $1=3^0$). Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ἐπει- αἱ ἴσαι δυνάμεις ἴσων βάσεων θὰ ἔχουν καὶ ἐκθέτας ἴσους) $+3=0$, ἐξ ἧς $x=-1$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-3}+3^{x-4}$.

ομεν εἰς αὐτὴν τὴν μορφὴν $\frac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}}=\frac{2^x.2^{-1}-2^x.2^{-3}}{3^x.3^{-3}+3^x.3^{-4}}=1$

$$\frac{{}^{x}.\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}{{}^{x}.\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{81}}\frac{2^x}{3^x}=\frac{3.81.2^x}{4.\ 8.3^x}=\frac{3^5.2^x}{2^5.3^x}=\frac{2^x.2^{-5}}{3^x.3^{-5}}=$$

$$\frac{{}^{x-5}}{{}^{x-5}}=1, \text{ ἢ } \left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}=1=\left(\frac{2}{3}\right)^0, \text{ ἐξ ἧς } x-5=0 \text{ καὶ } x=5.$$

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{(\beta-x)x}=\alpha^x$ ἐνῶ. τίθεται ὅτι εἶνε τὸ α θετικὸν $\neq$ τοῦ 0 καὶ τῆς 1.

Διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ α^x, εὑρίσκομεν $\alpha^{(\beta-x)x}:\alpha^x=1$ ην $\alpha^{(\beta-x)x-x}=1=\alpha^0$.

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ α, ἔχομεν

$$(\beta-x)x-x=0 \text{ ἢ } x^2+x-\beta x=0,$$

ῆς λύσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν $x=0$ καὶ $x=\beta-1$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται καὶ σύστημα ἐκθετικῶν ἐξι-

σώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους καθὼς καὶ ἡ λύσ
αὐτοῦ.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} \alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^8 \\ \dfrac{\alpha^x}{\alpha^y} = \dfrac{1}{\alpha^2}. \end{cases}$ Γράφομ

αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\begin{cases} \alpha^{x+y} = \alpha^8 \\ \alpha^{x-y} = \alpha^{-2} \end{cases}$ ἢ $\begin{matrix} \alpha^{x+y} : \alpha^8 = 1 \\ \alpha^{x-y} : \alpha^{-2} = 1 \end{matrix}$

ἢ $\begin{cases} \alpha^{x+y-8} = 1 = \alpha^0 \\ \alpha^{x-y+2} = 1 = \alpha^0. \end{cases}$

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν ἴσων δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσε
ἔχομεν τὸ ἑξῆς ἀλγεβρικὸν σύστημα, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέ
$\begin{cases} x+y-8=0 \\ x-y+2=0 \end{cases}$ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν x=
καὶ $y=5$.

Ἐνίοτε ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἢ συστήματος τοιούτ
ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ τ
βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x^2-9x-24} = 4096$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$(x^2-9x-24).\lambda o\gamma 2 = \lambda o\gamma 4096.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ λογ2, εὑρίσκομεν

$$x^2-9x-24 = \frac{\lambda o\gamma 4\,096}{\lambda o\gamma 2} = \frac{3{,}61\,236}{0{,}30\,103} = 12.$$

Ἤτοι $x^2-9x-24=12$, ἐξ ἧς $x=12$ καὶ $x=-3$.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 3\,981\,312 \\ 2^y \cdot 5^x = 400\,000. \end{cases}$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν τὸ ἰ

δύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθέν, $\begin{cases} x.\lambda o\gamma 3 + y.\lambda o\gamma 4 = \lambda o\gamma 3\ 981\ 3 \\ y.\lambda o\gamma 2 + x.\lambda o\gamma 5 = \lambda o\gamma 400\ 00 \end{cases}$

Θέτοντες $\lambda o\gamma 4 = \lambda o\gamma 2^2 = 2.\lambda o\gamma 2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μ
τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν

$$\begin{cases} x.\ \lambda o\gamma 3 + 2y.\lambda o\gamma 2 = \lambda o\gamma 3\ 981\ 312 \\ 2y.\lambda o\gamma 2 + 2x.\lambda o\gamma 5 = 2\lambda o\gamma 400\ 000. \end{cases}$$

Ἐὰν τὴν πρώτην τούτων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν δευτέρ
εὑρίσκομεν $x(2.\lambda o\gamma.5 - \lambda o\gamma 3) = 2\lambda o\gamma\ 400000 - \lambda o\gamma 3981312$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $x = \dfrac{2\lambda o\gamma 400000 - \lambda o\gamma 3981312}{2.\ \lambda o\gamma\ 5 - \lambda o\gamma 3}$

καὶ μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν λογαρίθμων καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν $x=5$.

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν

$$2^y = \frac{400\,000}{5^5} = \frac{4.10^5}{5^5} = \frac{2^2.2^5.5^5}{5^5} = 2^7,$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $2^y : 2^7 = 1$ ἢ $2^{y-7} = 1 = 2^0$ καὶ $y-7=0, y=7$.

. Καλοῦμεν ***λογαριθμικὴν*** ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσαν λογαρίθμους τῶν ἀγνώστων αὐτῆς.

Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ἔστω π. χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 2\log y - \log x = 0,12\ 494 \\ \log 3 + 2\log x + \log y = 1,73\ 239 \end{cases}$$

Τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς·
$\log x + \log y = 1,73\,239 - \log 3 = 1,73\,239 - 0,47712 = 1,25\,527$.
Μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἀπαλείφομεν τὸ λογx καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν, $5.\log y = 1,50\ 515$
καὶ διὰ διαιρέσεως τῶν ἴσων διὰ 5 τὴν $\log y = 0,30\ 103$, ἐξ ἧς καὶ $y=2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=3$.

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις.

α΄) $\alpha^{x+\mu} = \alpha^{2\mu}$. β΄) $\alpha^{3x+2} = \alpha^{y+4}$. γ΄) $\gamma^{2-5x} = \gamma^{x+3}$.

α΄) $\beta^{(2x+1)(3x+4)} = \beta^{(3x+1)(2x+5)}$. β΄) $(\alpha^{\mu})^{(x+3)} = \alpha^{x+2\nu}$.

α΄) $\alpha^{2x+3}.\alpha^{5x+1} = \alpha^{5x+6}$. β΄) $2^{2x} = 32$. γ΄) $(-2)^x = 16$.

α΄) $5^{2x} - 7.5^x = 450$. β΄) $\sqrt[x]{\alpha} = \alpha^x$. γ΄) $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$.

α΄) $2^x + 4^x = 272$. β΄) $\log x = \log 24 - \log 3$. γ΄) $2^{x+1} + 4^x = 80$.

α΄) $5.\log x = \log 288 + 3\log\frac{x}{2}$. β΄) $\log x = \log 192 + \log\frac{3}{4}$.

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα.

α΄) $\begin{cases} \alpha^{2x}.\alpha^{3y} = \alpha^8 \\ \dfrac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3y}} = \dfrac{1}{\alpha^6}. \end{cases}$ β΄) $\begin{cases} 5^{3x}.5^{4y} = (5^5)^3 \\ \dfrac{5^{2x}}{5^{7y}} = 5^{-17}. \end{cases}$ γ΄) $\begin{cases} x+y=65 \\ \log(x-y)=3. \end{cases}$

α΄) $\begin{cases} x^2+y^2=425 \\ \log x + \log y = 2. \end{cases}$ β΄) $\begin{cases} 5x^2-3y^2=11\ 300 \\ \log x + \log y = 3. \end{cases}$

Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν.

774. α') $3^x = 177\ 147$. β') $3^{\frac{x}{2}} = 768$. γ') $3^{\sqrt{x}} = 243$.

775. α) $23^{3x-2} = 10\ 000$ β') $5^{x^2-3x} = 625$ γ') $x^{x^2-7x+12} = 1$.

776. α') $6^{x^4-13x^2+36} = 7\ 776$. β') $\alpha.\alpha^3.\alpha^5.\alpha^7\ldots\alpha^{2x-1} = \nu$.

777. α') $x^4 + y^4 = 641$, $\lambda o\gamma(xy)^2 = 2$. β') $\lambda o\gamma xy = 1{,}5$, $\lambda o\gamma \dfrac{x}{y} = 0{,}5$. γ') $\lambda o\gamma xy = 3$, $5x^2 - 3y^2 = 11\ 300$.

778. α') $\lambda o\gamma\sqrt{x} - \lambda o\gamma\sqrt{5} = 0{,}5$, $3\lambda o\gamma x + 2.\lambda o\gamma y = 1{,}50\ 515$. β') $\lambda o\gamma \dfrac{x}{y} = \lambda o\gamma 10$, $\lambda o\gamma x^3 + \lambda o\gamma y^2 = \lambda o\gamma 32$.

Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ

§ 209. Προβλήματα ***ἀνατοκισμοῦ*** ἢ ***συνθέτου τόκου*** λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς μονάδος.

Ὁ τόκος τὸν ὁποῖον ἐξετάζει ἡ Ἀριθμητικὴ καλεῖται ***ἁπλοῦς τόκος*** πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ συνθέτου.

Πρόβλημα 1). ***«Δανείζει τις ποσὸν α δραχμῶν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (εἰς ἓν ἔτος, ἢ μίαν ἑξαμηνίαν, τριμηνίαν, κλπ.) τ δραχμάς· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας»;***

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ 1 δραχ. εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δραχμάς, αἱ α δραχμαὶ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον α.τ δραχμάς. Ἑπομένως τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶνε

$$\alpha + \alpha\tau = \alpha.(1+\tau) \quad \text{δραχμαί.}$$

Ἤτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1+\tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς α΄ χρονικῆς μονάδος.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)$ εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀκόμη χρονικῆς μονάδος θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ $\alpha(1+\tau).(1+\tau)$ ἢ $\alpha(1+\tau)^2$.

῞Ωστε τὸ ἀρχικὸν ποσὸν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος $\alpha(1+\tau)^2$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὸ τέλος ν χρονικῶν μονάδων τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α θὰ γίνῃ $\alpha.(1+\tau)^\nu$.

῎Αν τὸ ποσὸν τοῦτο παραστήσωμεν διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha\ (1+\tau)^\nu\ . \qquad (1)$$

᾿Εκ ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν Σ, α, ν, τ μὲ τὴν βοήθειαν καὶ τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), ὅταν γνωρίζωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν.

᾿Εφαρμογή. *«Δανείζει τις 1500 δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4°/₀ κατ' ἔτος· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 6 ἔτη;»*.

Ζητεῖται τὸ Σ καὶ ἔχομεν $\alpha=1500$, $\nu=6$, $\tau=0{,}04$.

῾Επομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\Sigma=1500.1{,}04^6$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 1500+6.\lambda o\gamma 1{,}04.$$

᾿Εκ τῶν πινάκων ἔχομεν λογ1 500=3,17 609

λογ 1,04=6.0,01 703=0,10218, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως λογΣ=3,27 827 καὶ ἐκ τούτου Σ=1 897,9.

῏Ητοι ὁ τοκίσας τὰς 1500 δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4°/₀ θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὅλῳ 1 897,90 δρχ.

Πρόβλημα 2). *«Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6°/₀, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὅλῳ 5000 δραχμάς;»*.

Ἔχομεν $\Sigma=5000$, $\tau=0{,}06$, $1+\tau=1{,}06$, $\nu=15$ καὶ ζητεῖται τὸ α.

᾿Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $5000=\alpha.1{,}05^{15}$.

᾿Εὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων, εὑρίσκομεν λογ5000=λογα+15.λογ1,06 ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 5000-15.\lambda o\gamma 1{,}06.$$

᾿Εκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν λογ.5000=3,69 897, καὶ λογ1,06=15.0,02 531=0,37 965 καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως λογ α=3,31 932, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι, α=2 086 δρχ.

Πρόβλημα 3). *«Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 862 δρχ., ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος, γίνονται μετὰ 5 ἔτη 1 048,70 δραχμαί;»*.

Ἔχομεν $\alpha=862$, $\nu=5$, $\Sigma=1048{,}70$ καὶ ζητεῖται τὸ τ.

᾿Αντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

Κ α

$1\,048,70=862.(1+τ)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσ
τούτων εὑρίσκομεν $λογ1048,70=λογ862+5.λογ(1+τ)$ ἐκ τ
ὁποίου ἕπεται ὅτι, $5.λογ(1+τ)=λογ1\,048,60-λογ862$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν
$λογ1\,048,70=3,02065$, $λογ862=2,93\,551$, ἐκ τῶν ὁποίων ἔ
μεν $λογ\,1048,70-λογ862=0,07\,514$
καὶ $λογ\,(1+τ)=0,08\,514 : 5=0,01\,703$· ἤτοι $(1+τ)=1,04$
καὶ $τ=0,04$. Αὐτὸς εἶνε ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς 1 ἔτος, ὁ
τὸ ἐπιτόκιον $100.τ$ θὰ εἶνε 4 δραχμαί.

Πρόβλημα 4). *«Μετὰ πόσον χρόνον 2086 δρχ. ἀνα κιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 6°/₀ γίνονται 5037,50 δρχ.;»*.

Ἔχομεν $α=2086$, $τ=0,06$, $Σ=5037,50$ καὶ ζητεῖται τὸ

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν
$5037,5=2086.1,06^ν$. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσ
εὑρίσκομεν $λογ5037,5=λογ2086+ν.λογ1,06$ ἐκ τοῦ ὁπο
προκύπτει ὅτι $ν=\dfrac{λογ5037,5-λογ2086}{λογ\,1,06}$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $λογ5037,5=3,70\,222$
$λογ2086=3,31931$, $λογ1,06=0,02\,531$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶνε $0,38\,291$. Ἑπομένω
ἔχωμεν $ν=\dfrac{0,38\,291}{0,02\,531}=15$ ἔτη καὶ κάτι ἐπὶ πλέον

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 16ου ἔτους,
ρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 15ου ἔτους αἱ 2086 δρχ. γίνο
$2086.1,06^{15}=5000$ δρχ. Ἑπομένως αἱ 5037,5 δρχ. —5000δρ
$=37,5$ δρχ. εἶνε τόκος ἁπλοῦς τῶν 5000 δρχ. πρὸς 6°/₀ εἰς
ζητούμενον χρόνον. Λύομεν λοιπὸν τὸ πρόβλημα τοῦτο τοῦ ἁ
τόκου καὶ εὑρίσκομεν 45 ἡμ., τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360

Παρατήρησις. Ἂν ποσὸν α ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος μὲ τό
τῆς μονάδος κατ' ἔτος, θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη $α(1+τ)^ν$, καὶ τοῦτο
η ἡμέρας ἀκόμη φέρει ἁπλοῦν τόκον $\dfrac{α(1+τ)^ν\,.\,100τ.η}{100\,360}$.

Ἄρα γίνεται ἐν ὅλῳ μετὰ ν ἔτη καὶ η ἡμ. $Σ=α(1+τ)^ν\left(1+\right.$

ἐξ οὗ $λογΣ=λογ\,α+ν.λογ(1+τ)+λογ\left(1+\dfrac{ητ}{360}\right)$· ἐπειδὴ δ

$1+\dfrac{ητ}{360}<1+τ$, ἔχομεν $λογ\left(1+\dfrac{ητ}{360}\right)<λογ(1+τ)$

Ἄρα (λογΣ—λογ α): λογ(1+τ) δίδει πηλίκον ν καὶ ὑπόλοιπον $υ=λογ\left(1+\frac{ητ}{360}\right)$. Ἐκ ταύτης, ἐπειδὴ εὑρίσκεται τὸ υ, εὐκόλως προδιορίζεται τὸ η.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

79. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ τις, ἐὰν ἀνατοκίσῃ κατ' ἔτος 5600 δρχ. ἐπὶ 100 ἔτη πρὸς 5 %;

80. Πατήρ τις κατέθεσεν εἰς τράπεζαν 750 δρχ. κατὰ τὴν γέννησιν τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4,5%. Πόσα θὰ λάβῃ ὁ υἱός του εἰς τὸ τέλος τοῦ 20 ἔτους τῆς ἡλικίας αὐτοῦ;

81. Πόσην αὔξησιν παθαίνει κεφάλαιον 100 000 δρχ. εἰς 8 ἔτη καὶ 8 μῆνας, ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4%;

82. Ποῖον ἀρχικὸν κεφάλαιον γίνεται μετὰ τῶν τόκων αὐτοῦ ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 3,5 % εἰς 20 ἔτη 3730,85δρχ.;

83. Τὶς ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45896 δρχ., πληρωτέου μετὰ 15 ἔτη καὶ 210 ἡμ. μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 8 %;

84. Πόσον ποσὸν πρέπει νὰ τοκίσωμεν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ' ἑξαμηνίαν πρὸς 4 %, ἵνα μετὰ 18 ἔτη γίνῃ 20000 δρχ.;

85. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐτοκίσθη μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος κεφάλαιον 625 δρχ. ἐπὶ 15 ἔτη καὶ ἔγινε 1166,9 δρχ.;

86. Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἐὰν 100 δραχ. εἰς 22 ἔτη γίνωνται 2247,7 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι;

87. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ ἓν κεφάλαιον κατ' ἔτος διὰ νὰ τετραπλασιασθῇ μετὰ 31 ἔτη;

88. Εἰς πόσον χρόνον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος κεφάλαιον 3580 δρχ. πρὸς 4,5 % γίνεται 56000 δραχ.;

89. Πότε κατετέθησαν 630 δρχ. εἰς τράπεζάν τινα μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4%, ἐὰν τὴν 1ην Ἀπριλίου 1909 εἶχον γίνει 969,80 δρχ;

90. Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος ποσόν τι πρὸς 3,5% διὰ νὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ ἢ τετραπλασιασθῇ;

91. Ὁ πληθυσμὸς ἑνὸς Κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατὰ τὸ ὀγδοηκοστὸν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ διπλασιασθῇ ἢ τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμὸς αὐτοῦ;

92. Μία πόλις ἔχει 8000 κατοίκους καὶ ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς ἐλαττοῦται κατὰ 160 κατοίκους. Ἐὰν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήσῃ κατὰ τὴν αὐτὴν ἀναλογίαν, μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 5000 κατοίκους;

Προβλήματα ἴσων καταθέσεων.

§ 210. Πρόβλημα 1). *«Καταθέτει τις εἰς τὴν τράπεζαν ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4,5°/₀ ποσὸν 2050 δρχ. εἰς τ ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Πόσα θὰ λάβῃ μετὰ 15 ἔτη;».*

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν 2050 δραχμῶν θὰ μείνῃ 15 ἔ ἀνατοκιζομένη πρὸς 4,5°/₀. Ἐπομένως θὰ γίνῃ $2\,050.1{,}045^{15}$.

Ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους γινομένη κατάθεσις μείνῃ μόνη 14 ἔτη εἰς τὸν τόκον· ἄρα θὰ γίνῃ $2\,050.1{,}045^{14}$.

Ὁμοίως ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάθεσις θὰ γ $2\,050.1{,}045^{13}$ κ.ο.κ, ἡ τελευταία θὰ μείνῃ μόνον ἓν ἔτος καὶ γίνῃ $2\,050.1{,}045$.

Ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτ θὰ εἶνε $2050\,1{,}045^{15}+2050\,1{,}045^{14}+\ldots+2050.1{,}045$.
ἢ $2050\,1{,}045+2050.1{,}045^{2}+2050.1{,}045^{3}+\ldots+2050.1{,}045$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶνε ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶνε 1,045. Ἐφ μόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων γεωμε κῆς προόδου, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ποσόν, ἔστω Σ, τὸ ὁπο θὰ λάβῃ εἶνε

$$\Sigma=\frac{2050.1{,}045^{15}1{,}045-2050.1{,}045}{1{,}045-1=0{,}045}$$

ἢ $$\Sigma=2050.1{,}045\frac{1{,}045^{15}-1}{0{,}045}.$$

Διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ $1{,}045^{15}$. Πρὸς το ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x=1{,}045^{15}$.

$$\lambda o\gamma x=15.\lambda o\gamma 1{,}045=0{,}28\,680,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι $x=1{,}93\,552$

Ὥστε θὰ ἔχωμεν $\Sigma=2\,050.1{,}045\,\frac{0{,}93\,552}{0{,}045}$

ἢ $$\Sigma=\frac{2\,050.1{,}045.935{,}52}{45}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 2\,050+\lambda o\gamma 1{,}045+\lambda o\gamma 935{,}52-\lambda o\gamma 45$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 2\,050 &= 3{,}31\,175\\ \lambda o\gamma\, 1{,}045 &= 0{,}01\,912\\ \lambda o\gamma\, 935{,}52 &= 2{,}97\,105\\ \hline \text{ἄθροισμα}\quad & 6{,}30\,192\\ \lambda o\gamma 45 &= 1{,}65\,321\\ \hline \end{aligned}$$

καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma\Sigma=4{,}64\,871$, ἐκ ὁποίου προκύπτει $\Sigma=44\,536$· ἤτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 44 536

Ἐν γένει, ἐὰν καταθέτῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς εἴς τινα τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητεῖται δὲ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἡ δευτέρα $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, κ.ο.κ. ἡ τελευταία $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν μονάδων θὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἂν παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν

$\Sigma=\alpha.(1+\tau)\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ἢ τὸ α, ἐὰν δοθῇ τὸ Σ, τὸ τ καὶ τὸ ν.

Πρόβλημα 2). «***Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας ;***».

Ἡ πρώτη κατάθεσις νὰ μείνῃ ἐπὶ ν—1 χρονικὰς μονάδας. Ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ ἐπὶ ν—2 χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθεξῆς ἡ τελευταία θὰ εἶνε μόνον α. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha+\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἢ $\Sigma=\dfrac{\alpha(1+\tau)^{\nu}-\alpha}{\tau}=\alpha.\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α,τ,ν. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὑρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ Σ,ν,τ.

Προβλήματα χρεωλυσίας.

11. ***Χρεωλυσία*** λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται ***χρεωλύσιον*** καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

Πρόβλημα 1). «***Ἐδανείσθη τις 18 500 δρχ. πρὸς***

4,5% μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξ φλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖ θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· πόσον εἶνε τ χρεωλύσιον ;».

Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν 18 500 δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔ $18\,500.1,045^{12}$. Ἐὰν διὰ τοῦ x παραστήσωμεν τὸ ζητούμεν χρεωλύσιον, ἡ πρώτη δόσις ἐκ x δραχμῶν θὰ γίνῃ x. 1,045 μετὰ 11 ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται ὅτι ἔμειναν εἰς τὸν τ κον. Ἡ δευτέρα δόσις θὰ γίνῃ $x.1,045^{10}$, ἡ τρίτη $x.1,045^{9}$κ.ο ἡ τελευταία θὰ μείνῃ x. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν πληρωθ των ποσῶν μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν θὰ εἶνε

$$x+x.1,045+x.1065^{2}+....+x.1,045^{11}$$

ἢ $x.\dfrac{1,045^{12}-1}{0,045}$. Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶνε ἴσον τὸ ὀφειλόμενον, συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα. Ἤτοι θὰ ἔχω

$$x.\frac{1,045^{12}-1}{0,045}=18500.1,045^{12},$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμ

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $1,045^{12}$,θέτον αὐτὴν ἴσην μὲ τὸ ψ, ὅτε εἶνε $ψ=1,045^{12}$

$$\text{καὶ } λογψ=12\,λογ1,045=0,22944,$$

ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι ψ=1,696.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸ x μετὰ τὴν ἀντ τάστασιν τοῦ $1,045^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ 1,696 εὑρίσκομεν

$$x=\frac{18500\times0,045\times1696}{696}$$ ἐκ τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$λογx=λογ18500+λογ0,045+λογ1696-λογ\,696.$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned} λογ18500&=4,26717\\ λογ0,045&=\bar{2},65321\\ λογ\,1696&=3,22943\\ \hline \text{ἄθροισμα } &6,14981\\ λογ696&=2,84261\\ \hline \end{aligned}$$

Ἑπομένως $\quad λογx=3,30720$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται ὅτι x=2028,6 δραχμαί.

Ἐν γένει, ἐὰν διὰ τοῦ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενο σὸν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ' ὡρισμένην χρονικὴν μονάδα καὶ διὰ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, καὶ διὰ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ

$\alpha(1+\tau)^\nu$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἀξία τῶν ν δόσεων ἐκ x δραχμῶν ἑκάστη θὰ εἶνε

$$x+x(1+\tau)+x(1+\tau)^2 \ldots, +x(1+\tau)^{\nu-1}$$

ἢ

$$x.\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $x\frac{(1+\tau)^\nu-1}{\tau}=\alpha.(1+\nu)^\nu$ (1)

ἐκ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

Πρόβλημα 2). ***«Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 6 ἔτη διὰ ἐτησίου χρεωλυσίου 8000 δραχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 4°/₀»;***

Ἔχομεν $x=8000$, $\nu=6$, $\tau=0{,}04$

ζητεῖται δὲ τὸ α. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x, ν, τ, εὑρίσκομεν $8000.\frac{1{,}04^6-1}{0{,}04}=\alpha.1{,}04^6$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $\alpha=\frac{8000.[1{,}04^6-1]}{0{,}04.1{,}04^6}$. Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $1{,}04^6$, καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων $\alpha=41\ 900$ δραχμάς.

Πρόβλημα 3). ***«Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 20 000 δραχμῶν διὰ χρεωλυσίου 1300 δραχμῶν ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 3°/₀;»***

Ἔχομεν $\alpha=20\ 000$, $x=1300$, $\tau=0{,}03$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν

$1300.\frac{1{,}03^\nu-1}{0{,}03}=20\ 000.1{,}03^\nu$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν

$$1\ 300.1{,}03^\nu-1\ 300=0{,}03\ 20\ 000.1{,}03^\nu$$

ἢ $\quad 1{,}03^\nu\ [1300-0{,}03.20000]=1300$

καὶ $\quad 1{,}03^\nu=\frac{1300}{700}=\frac{13}{7}.$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν
ν. λογ1,03=λογ13—λογ7, ἢ 0,01284.ν=1,11394—0,84510= =0,26 884, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν ν=20,943 ἔτη. Ἤτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνῃ μετὰ 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶνε κατά τι μικροτέρα τῶν ἄλλων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν εἰκοστὴν πρώτην δόσιν, εὑρίσκομεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον τῶν 20 000 δρχ. εἰς 21 ἔτη, δηλαδὴ τὸ $20000.1{,}03^{21}$ δρχ., τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 37 205,90

δρχ., ἀκολούθως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ 21 δόσεις ἐκ 1300 δρ. ἑκά-
στη εἰς τὸ τέλος $21^{ου}$ ἔτους γίνονται

$$1300\frac{1{,}03^{20}-1}{0{,}03}.1{,}03=35979{,}90$$ δρχ. Ἡ διαφορὰ 37205,90δρ.
—35979,90δρχ.=1226 δρχ. παριστάνει τὴν τελευταίαν δόσιν.

Προβλήματα πρὸς λύσιν.

793. Ἔμπορός τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 35 δρχ. ἐκ τῶν κερδῶν αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κα ἔτος πρὸς 4%. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτου
794. Καταθέτει τις κατ᾿ ἔτος μὲ σύνθετον τόκον 1 000 δρχ. πρ 5%. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ 13210 δρχ.;
795. Ἡ διατροφὴ καὶ τὰ ἔξοδα τῶν σπουδῶν τέκνου κατεγρ φοντο ὑπὸ τοῦ πατρὸς εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· ἀνήρχοντο κατὰ μέσον ὅρον εἰς 2 000 δρχ. ἐτησίως. Πόσα θὰ ἐγίνοντο αὐ μετὰ 20 ἔτη, ἐὰν ἀνετοκίζοντο κατ᾿ ἔτος πρὸς 3,5%;
796. Πατήρ τις ἀποκτήσας κόρην, θέλει νὰ καταθέτῃ κατ᾿ ἔτ ποσόν τι ὡρισμένον δι᾿ αὐτήν, ἵνα αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ᾿ ἔτ πρὸς 5% γίνουν μετὰ 21 ἔτη 25 000 δραχμαί. Πόση πρέπει εἶνε ἡ ἐτησία κατάθεσις;
797. Πόσον εἶνε τὸ χρεωλύσιον διὰ τοῦ ὁποίου ἐξοφλεῖται χρ 100 ἑκατομμυρίων δρχ., ἀνατοκιζόμενον κατ᾿ ἔτος πρὸς 4%, πληρώνεται διὰ 50 ἐτησίων δόσεων;
798. Χρέος ἐξοφλεῖται δι᾿ ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτ Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶνε 2 180δ καὶ τὸ ἐπιτόκιον 4,5%;
799. Ἔμπορος ἐδανείσθη 450000 δρχ. ἐπ᾿ ἀνατοκισμῷ κατ᾿ ἔ πρὸς 5%. Ἐὰν πληρώνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 30000 δρχ., μ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος αὐτοῦ;
800. Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικ Καθεμία δόσις (ἐτησία) θὰ εἶνε 461 300 δρχ., θὰ ἀρχίσῃ δ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶνε τὸ χικῶς δανεισθὲν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον ἦτο 4,5%;
801 Κράτος ἐδανείσθη ποσόν τι πρὸς 3,75%. Ἡ χρεωλυ ἐξόφλησίς του ἄρχεται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου θὰ πληρώνωνται 158 800 δρχ. ἐτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον τὸ δανεισθὲν ποσόν;

802. Χρέος ἐξ 1,5 ἑκατομμυρίων δρχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων δόσεων ἐτησίων, ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶνε τὸ χρεωλύσιον, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 3,75°/₀ ;

803. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20 000δρχ. διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐκ 1780,3 δρχ. ἑκάστην;

(Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν (1) (σελ 219) εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}}=\frac{20\,000}{1\,780{,}30} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμόν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις αὐτῆς, ἐν γένει, δὲν εἶνε γνωστή, καὶ καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶνε μεγαλύτερον, ὅσω ὁ τ εἶνε μικρότερος. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ διὰ μικροτέρου ἀριθμοῦ τῆς ζητουμένης τιμῆς του, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶνε μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20\,000}{1\,780{,}30}$. Θέτοντες π. χ. τ=0,04 εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{0{,}04}\left(1-\frac{1}{1{,}04^{16}}\right)25=\left(1-\frac{1}{1{,}04^{16}}\right)=11{,}6\ 522\ 845,$$

ἐνῶ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2) εὑρίσκομεν τὸ 11,234. Θέτομεν λοιπὸν τώρα τ=0,045, ἔπειτα τ=0,0475 κ.ο.κ. προχωροῦντες προσεγγίζομεν περισσότερον πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ τ).

804. Κατέθετέ τις ἐπὶ πέντε συνεχῆ ἔτη πρὸς 4°/₀ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ποσόν τι καὶ εἰσέπραξεν ἓξ ἔτη μετὰ τὴν καταβολὴν τῆς τελευταίας καταθέσεως 20 000 δρχ. Ποία ἦτο ἡ κατάθεσις ;

805. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 1250 δρχ. ἐπὶ 7 ἔτη πρὸς 6°/₀ τὶ ποσὸν θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ δωδεκάτου ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

806. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὀκτὼ καταθέσεις ἐκ 1 000 δρ. ἑκάστη ἀποτελοῦν ποσὸν 10 200 δραχμῶν ;

807. Πόσαι καταθέσεις ἐκ 1 000 δρχ., αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἀποτελεσθῇ ποσὸν 2 457839δρχ. τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5¹/₂°/₀ ;

808. Δικαιοῦται τις νὰ εἰσπράξῃ μετὰ 5 ἔτη ποσὸν 10 000 δρχ. Ἀντὶ τούτου ἐπιθυμεῖ νὰ εἰσπράττῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τῶν

πέντε ἐτῶν τὸ αὐτὸ πάντοτε ποσόν. Ποῖον εἶνε τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράττη, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5°/₀ ;

809. Ὀφείλει τις 15 000 δρχ. πληρωτέας τὴν 1ην Ἰουλίου 1932. Νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ ὑποχρέωσις αὕτη διὰ τριῶν ἑτέρων ἴσων πρὸς ἀλλήλας, πληρωτέων τὴν 1ην Ἰουλίου 1933, 1934 καὶ 1935 (ἐπιτόκιον 6°/₀).

810. Διὰ πόσων ἑξαμηνιαίων χρεωλυτικῶν δόσεων θὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20 000 δρχ., ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται πρὸς 3°/₀ καθ' ἑξαμηνίαν, τὸ δὲ χρεωλύσιον εἶνε 1 000 δρχ. ;

811. Συνῆψέ τις δάνειον χρεωλυτικὸν 25 000 δρχ. πρὸς 7°/₀ ἐξοφλητέον ἐντὸς 8 ἐτῶν. Τρεῖς μῆνας μετὰ τὴν καταβολὴν τῆς πέμπτης χρεωλυτικῆς δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὁλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ;

812. Ἐδανείσθη τις τὴν 1ην Ἀπριλίου 1925 ποσὸν 20008 δρχ. ἐξοφλητέον ἐντὸς 20 ἐτῶν πρὸς 6°/₀. Καταβάλλων κανονικῶς τὰ μέχρι τοῦ 1932 χρεωλύσια, ἐπιθυμεῖ τὴν 1ην Ὀκτωβρίου 1933 νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του τελείως. Τί ποσὸν θὰ χρειασθῇ ;

813. Διὰ πόσων δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 100 000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶνε 7°/₀, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 10 000 δρχ ;

814. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον συνήφθη δάνειον 250 000 δρχ., τὸ ὁποῖον ἐξοφλεῖται ἐντὸς 15 ἐτῶν δι' ἐτησίων χρεωλυσίων 245 530 δρχ. ;

815. Ἑταιρεία τις δύναται νὰ διαθέτῃ ἐτησίως ἐκ τῶν κερδῶν αὐτῆς 10 000 δρχ. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ διὰ θέτουσα ἐπὶ εἰκοσαετίαν τὸ ἄνω ποσὸν διὰ χρεωλύσιον τοῦ δανείου, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5°/₀ ;

816. Εἰσπράττει τις ἐπὶ μίαν πενταετίαν καὶ εἰς τὸ μέσον ἑκάστου ἔτους 210 ἑκατομμύρια δραχμῶν, αὐξανομένου τοῦ ποσοῦ τούτου ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος κατὰ 7,5°/₀₀ (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Κατὰ τὴν ἑπομένην πενταετίαν εἰσπράττει ὁμοίως τὸ προηγούμενον ποσόν, ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ἐνῷ ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος ἐξακολουθεῖ ἡ αὔξησις τοῦ ποσοῦ καὶ κατὰ 7,5°/₀₀ (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Πόσον ποσὸν θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τῆς 1ης, 2ας, 3ης, 4ης πενταετίας, ὁμοίως αὐξανομένου τοῦ ποσοῦ εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης πενταετίας κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἀρχικοῦ, ἂν ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 5°/₀;

ΤΕΛΟΣ

ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

KΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

KΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

14x=60+6x
8x=60
x=7.5