ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1969

Λ. Α. Σαρρόπουλος

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΩΡΕΑ
ΕΘΝΙΚΗΣ ΚΥΒΕΡΝΗΣΕΩΣ

ΝΕΙΛΟΥ ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου

ΑΛΓΕΒΡΑ

*(Συμπληρωθεῖσα διὰ τοῦ κεφαλαίου περὶ Παραγώγων κ.τ.λ.
ἐκ τοῦ ἔργου τοῦ Καθηγητοῦ Λ. ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΥ)*

Δ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ 1969

Λεῖψις ἐπῖ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὕπαρξιν, λεῖψις δὲ ἐπὶ ὕπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.

(Πλὴν ἐπὶ πλὴν ἴσον σύν, πλὴν ἐπὶ σὺν ἴσον πλήν).

Διοφάντου Ἀριθμητικῶν Α'

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Α΄ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ* ΚΑΙ ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΙΣ ΑΥΤΗΣ

§ 1. Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι κλάδος τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης ὅπως καὶ ἡ Ἀριθμητική, ἀλλ᾽ εἶναι γενικωτέρα αὐτῆς ἀσχολεῖται δὲ κατὰ τρόπον γενικὸν μὲ τὴν λύσιν ζητημάτων, τὰ ὁποῖα ἀναφέρονται ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον εἰς γενικοὺς ἀριθμοὺς (τοὺς ὁποίους χρησιμοποιεῖ ἐνίοτε καὶ ἡ Ἀριθμητική, καθὼς π. χ. διὰ τὴν παράστασιν ἑνὸς χρηματικοῦ κεφαλαίου Κ, τοῦ τόκου Τ κ.λ.π.).

§ 2. Εἰς τὴν Ἄλγεβραν χρησιμοποιοῦνται κυρίως, ἐκτὸς τῶν ἀραβικῶν συμβόλων, 0, 1, 2, 3, 4,... κ.τ.λ., γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Λέγομεν π.χ. α δραχμαί, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν εἷς ὡρισμένος ἀριθμὸς δραχμῶν. Ἡ τοιαύτη χρησιμοποίησις τῶν γραμμάτων εἶναι μὲν αὐθαίρετος, δυνάμεθα δηλαδὴ νὰ παραστήσωμεν ὡρισμένον ἀριθμὸν ἢ ὡρισμένην ποσότητα μὲ ἓν γράμμα, τὸ α π.χ. ἢ τὸ β ἢ τὸ γ κ.τ.λ., ἀλλὰ τὸ ὡρισμένον αὐτὸ γράμμα, τὸ ὁποῖον χρησιμοποιεῖται καθ᾽ ὅλην τὴν ἔκτασιν τοῦ ζητήματος, παριστάνει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν

* Ἡ λέξις Ἄλγεβρα ὀφείλει τὴν προέλευσίν της εἰς τὸν τίτλον ἑνὸς ἀρχαιοτάτου ἀραβικοῦ μαθηματικοῦ βιβλίου « AL — JEBR W'AL MUGABALAH».

Ὡς πρὸς τὴν ἐξέλιξιν τῆς Ἀλγέβρας διακρίνομεν κυρίως τρεῖς περιόδους.

Κατὰ τὴν πρώτην περίοδον ἡ ὁποία καλεῖται ρητορική, ἐπικρατεῖ ἡ χρῆσις λέξεων καὶ τῆς ἀφηγήσεως, χωρὶς νὰ χρησιμοποιῶνται σύμβολα. Κατὰ τὴν περίοδον αὐτὴν συχνὴ μόνον ἐπαναληπτικὴ ἀφήγησις ἀσκεῖ τὸν ἀσχολούμενον μὲ τὸ μάθημα τῆς Ἀλγέβρας. Εἰς τὸ κατώτατον αὐτὸ στάδιον τῆς ἀναπτύξεως τοῦ μαθήματος αὐτοῦ παρέμειναν καὶ αὐτοὶ οἱ Ἕλληνες μέχρι τοῦ 1ου αἰῶνος μ. Χ., ἐνῷ οἱ Ἄραβες, οἱ Ἀρχαῖοι Ἰταλοὶ καὶ Γερμανοὶ παρέμειναν μέχρι τοῦ 13ου αἰῶνος μ. Χ.

Ἡ δευτέρα περίοδος ἐξελίξεως τῆς Ἀλγέβρας, ἡ ὁποία καλεῖται **συγκεκομμένη**, ἀρχίζει ἀφ᾽ ὅτου μερικαὶ ἐκφράσεις ἤρχισαν νὰ παρουσιάζωνται συγκεἢ τὴν αὐτὴν ποσότητα. Κατὰ συνήθειαν, ἡ ὁποία ἐπεκράτησε, χρησιμοποιοῦνται τὰ πρῶτα μικρὰ γράμματα τοῦ (ἑλληνικοῦ ἢ ξένου) ἀλφαβήτου, τὰ α, β, γ, δ..., διὰ τὴν παράστασιν γνωστῶν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων, τὰ δὲ τελευταῖα χ. ψ, ω, φ,... διὰ τὴν παράστασιν ἀγνώστων ἢ ζητουμένων ποσοτήτων. Π.χ. λέγομεν: ἂν α ὀκάδες ἐμπορεύματός τινος τιμῶνται β δραχμάς, καὶ ζητῶμεν τὴν τιμὴν γ ὀκάδων τοῦ αὐτοῦ ἐμπορεύματος, παριστάνομεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν π.χ. μὲ χ καὶ θὰ ἔχωμεν, ὅτι $\chi = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma$ δρχ.

Ἐνίοτε χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὴν Ἄλγεβραν διαδοχικὰ γράμματα διὰ τὴν παράστασιν ἰσαρίθμων ὁμοειδῶν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Π.χ. λέγομεν: ἂν ποσὸν Α δραχμῶν μερισθῇ εἰς τέσσαρα πρόσωπα ἀναλόγως τεσσάρων διαφόρων ἀριθμῶν, π.χ. τῶν κ, λ, μ, ν καὶ ζητῶνται τὰ μερίδια αὐτῶν, παριστάνομεν τὰ ζητούμενα μερίδια π.χ. μὲ χ, ψ, z, ω καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$\chi = \frac{A \cdot \kappa}{\kappa+\lambda+\mu+\nu}, \quad \psi = \frac{A \cdot \lambda}{\kappa+\lambda+\mu+\nu}, \quad z = \frac{A \cdot \mu}{\kappa+\lambda+\mu+\nu}, \quad \omega = \frac{A \cdot \nu}{\kappa+\lambda+\mu+\nu}.$$

Ἐνίοτε χρησιμοποιοῦμεν ἓν μόνον γράμμα μὲ δείκτας μικροὺς ἀκεραίους ἀριθμούς, 1, 2, 3,... (ἢ μὲ ἕνα, δύο, τρεῖς τόνους).

κομμέναι εἰς βιβλία. Πρῶτος ἐκπρόσωπος τῆς περιόδου αὐτῆς εἶναι ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος τῆς Ἀλεξανδρείας τὸ δεύτερον ἥμισυ τῆς τρίτης ἑκατονταετηρίδος μ.Χ., ὁ ὁποῖος ἐχρησιμοποίησε σημαντικὴν συντομίαν εἰς μαθηματικὰς ἐκφράσεις εἰς τὸ ἔργον του περὶ Ἀλγέβρας, θεωρεῖται δὲ οὗτος καὶ θεμελιωτὴς αὐτῆς.

Ἡ τρίτη περίοδος τῆς Ἀλγέβρας χαρακτηρίζεται ὡς **συμβολική**. Πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Αἰγύπτιοι παρουσιάζονται χρησιμοποιοῦντες μερικοὺς συμβολισμοὺς εἰς τὰς μαθηματικὰς ἐκφράσεις, αἱ ὁποῖαι παρελήφθησαν καὶ ἐπεξετάθησαν βαθμηδὸν ὑπὸ τῶν Ἰνδῶν.

Κατὰ τὰ μέσα τοῦ 15ου αἰῶνος μ.Χ. φαίνεται πλέον ἐπικρατοῦσα ἡ συμβολικὴ γραφὴ τῆς Ἀλγέβρας καὶ τῶν Μαθηματικῶν ἐν γένει. Οὕτω τὸ 1494 χρησιμοποιοῦνται ὡς σύμβολα ὑπὸ τοῦ Ἰταλοῦ LUCA PACIOLI γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, τὰ ὁποῖα βραδύτερον ἀντικατεστάθησαν ὑπὸ τοῦ I. WIDMANN μὲ τὰ + καὶ −. Ἡ γενικωτέρα καὶ εὐρυτέρα ὅμως χρησιμοποίησις τοῦ συμβολισμοῦ ὀφείλεται εἰς τὸν Γάλλον F. VIÈTE (1591), ἡ ὁποία συνεπληρώθη κατὰ τὴν ἐποχὴν δύο διασήμων μαθηματικῶν, τοῦ Γερμανοῦ LEIBNITZ καὶ τοῦ Ἄγγλου NEWTON. Οὗτοι συνετέλεσαν σπουδαίως ὄχι μόνον εἰς τὴν μεγάλην προαγωγὴν τῶν Μαθηματικῶν ἐν γένει, ἀλλὰ καὶ εἰς τὴν διεθνοποίησίν των, μὲ τὴν χρησιμοποίησιν συμβόλων διεθνοῦς μορφῆς.

διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων. Π.χ. ἂν τοκίσῃ τις τρία διάφορα ποσὰ μὲ ἀντίστοιχα διάφορα ἐπιτόκια καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ (ἀπὸ κεφάλαια καὶ τόκους) μετὰ π.χ. ἓν ἔτος, παριστάνομεν τὰ τοκιζόμενα κεφάλαια π.χ. μὲ α_1, α_2, α_3, τὰ ἐπιτόκια π.χ. διὰ τῶν τ_1, τ_2, τ_3 καὶ τὸ ζητούμενον ποσὸν διὰ τοῦ χ.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν $\chi = \alpha_1 \cdot \left(1 + \frac{\tau_1}{100}\right) + \alpha_2 \cdot \left(1 + \frac{\tau_2}{100}\right) + \alpha_3 \cdot \left(1 + \frac{\tau_3}{100}\right)$.

Εἰς τὴν Ἄλγεβραν χρησιμοποιοῦμεν τὰ γνωστὰ σύμβολα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τὸ + (σὺν) διὰ τὴν πρόσθεσιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων, τὸ − (πλὴν ἢ μεῖον) διὰ τὴν ἀφαίρεσιν, τὸ × ἢ · (ἐπὶ) διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν, τό : (διὰ ἢ πρὸς) διὰ τὴν διαίρεσιν, ἐπίσης τὸ $\sqrt{\ }$ (ριζικὸν) διὰ τὴν ἐξαγωγὴν τῆς (τετραγωνικῆς) ρίζης κ.τ.λ. καθὼς καὶ ἄλλα σύμβολα, περὶ τῶν ὁποίων θὰ γίνῃ λόγος εἰς τὰ ἑπόμενα.

Ὅταν ἓν ζήτημα ἐκτίθεται μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν συμβόλων καὶ τῶν ἐκφράσεων τῶν χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῆς Ἀλγέβρας, τότε λέγομεν συνήθως, ὅτι τὸ ζήτημα ἐκτίθεται μὲ τὴν **γλῶσσαν τῆς Ἀλγέβρας** ἢ μὲ **ἀλγεβρικὴν γλῶσσαν** ἢ καὶ ἁπλῶς ἐκτίθεται **ἀλγεβρικῶς.**

Ἀσκήσεις

1. Ἂν 10 χιλιόγρ. ἐμπορεύματος τιμῶνται 100 δραχμάς, πόσον τιμῶνται 120 χιλιόγρ. αὐτοῦ ; Λύσατε τὸ πρόβλημα καὶ ἀκολούθως νὰ τὸ γενικεύσητε χρησιμοποιοῦντες γενικοὺς ἀριθμοὺς (γράμματα) καὶ νὰ λύσητε τὸ γενικευμένον πρόβλημα.

2. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 5, $\frac{3}{4}$, 13,5. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίστροφοί των ; Γενικεύσατε τὸ πρόβλημα χρησιμοποιοῦντες γράμματα καὶ λύσατε αὐτό.

3. Γράψατε τρεῖς ἀριθμοὺς γενικοὺς καὶ εὕρετε τὰ διπλάσιά των, τὰ τριπλάσιά των, τὰ νιπλάσιά των.

4. Δίδεται εἷς ἀριθμὸς π.χ. ὁ α. Πῶς παριστάνονται τὰ $\frac{5}{8}$, τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ αὐτοῦ;

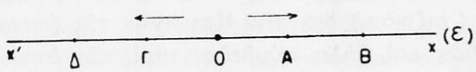
5. Σημειώσατε τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β, τὴν διαφορὰν τοῦ δευτέρου ἀπὸ τὸν πρῶτον, τὸ γινόμενόν των, τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου.

6. Γράψατε μὲ τί ἰσοῦται τὸ κεφάλαιον Κ δρχ., τὸ ὁποῖον, τοκιζόμενον ἐπὶ Χ ἔτη πρὸς Ε%, δίδει τόκον Τ καὶ εὕρετε πόσον εἶναι τὸ Κ, ὅταν, ἀντὶ τῶν Χ, Ε, Τ, θέσητε ὡρισμένους ἀριθμούς.

Β′ ΘΕΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ *

§ 3. Καθὼς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, **μέτρησις** ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ μὲ ἄλλο ὁμοειδές του, τὸ ὁποῖον θεωρεῖται ὡς μονὰς μετρήσεως. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ἑνὸς ποσοῦ ἢ μεγέθους εἶναι ἀριθμός τις, ὁ ὁποῖος λέγομεν, ὅτι παριστάνει τὴν τιμὴν τοῦ μετρηθέντος ἢ αὐτὸ τὸ μετρηθέν.

Ἔστω εὐθεῖα τις (ε), ἐπὶ τῆς ὁποίας διακρίνομεν δύο φορὰς (σχ. 1), μίαν τὴν ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτῆς π.χ. Ο πρὸς τὸ σημεῖον της Α, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **θετικὴν** φορὰν καὶ ἄλλην ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ σημεῖον της Γ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **ἀρνητικὴν** φοράν.



Σχ. 1

Καλοῦμεν **θετικὸν** μὲν τμῆμα τῆς (ε) πᾶν μέρος αὐτῆς, ἂν θεωρῆται διαγραφόμενον ὑπὸ κινητοῦ κατὰ τὴν θετικὴν φοράν, **ἀρνητικὸν** δέ, ἂν κατὰ τὴν ἀρνητικήν. Οὕτως, ἐπὶ τῆς εὐθείας (ε) διακρίνομεν τμήματα αὐτῆς θετικὰ ὡς τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΑΒ καὶ ἀρνητικὰ ὡς τὰ ΟΓ, ΟΔ, ΓΔ. Τὰ μὲν θετικὰ τμήματα τῆς εὐθείας μετρούμενα ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως (ἤτοι ὑπὸ ἑνὸς τμήματος θετικοῦ, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν αὐτοβούλως), ἔστω τοῦ ΟΑ, παριστῶνται ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν **θετικούς,** τὰ δὲ ἀρνητικὰ ὑπὸ ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους καλοῦμεν **ἀρνητικούς.** Πρὸς παράστασιν τῶν τιμῶν ποσῶν ἢ μεγεθῶν, τὰ ὁποῖα διακρίνομεν εἰς θετικὰ καὶ ἀρνητικά, μεταχειριζόμεθα τοὺς καλουμένους θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, καὶ δεχόμεθα ὅτι :

Εἰς ἕκαστον θετικὸν ἀριθμὸν παριστάνοντα τὴν τιμὴν ποσοῦ ἢ μεγέθους τινὸς θετικοῦ, ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς παριστάνων τὴν τιμὴν ἀρνητικοῦ ποσοῦ ἢ μεγέθους ἀντιστοίχου τοῦ θετικοῦ. Καὶ ἀντιστρόφως : Εἰς ἕκαστον ἀρνητικὸν ἀριθμόν, παριστάνοντα ἀρνητικὸν ποσὸν ἢ μέγεθος, ἀντιστοιχεῖ εἷς θετικός, ἂν τὰ ποσὰ ἢ μεγέθη ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν.

* Ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος τῆς (Ἀλεξανδρείας) ἐχρησιμοποίησεν ἀρνητικοὺς ἀριθμούς.

Οἱ τοιοῦτοι ἀντίστοιχοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ λέγομεν, ὅτι ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ μὲν πλῆθος μονάδων, ἀλλ' ἕκαστος χαρακτηρίζεται ὡς **ἀντίθετος** τοῦ ἄλλου. Π.χ. ἔστω, ὅτι εἰς τὸν ἀριθμὸν 6 δρχ. δίδομεν τὸ γνώρισμα, ὅτι εἶναι κέρδος ἑνὸς ἀνθρώπου, ἔχομεν δὲ καὶ ἄλλον ἀριθμὸν 6 δρχ., ὁ ὁποῖος παριστάνει ζημίαν τοῦ αὐτοῦ ἀνθρώπου. Οἱ δύο αὐτοὶ ἀριθμοὶ 6 δρχ. κέρδος καὶ 6 δρχ. ζημία τοῦ ἀνθρώπου αὐτοῦ θεωροῦνται ὡς **ἀντίθετοι ἀριθμοί.**

Ὅμοιόν τι συμβαίνει καὶ εἰς ἄλλας περιπτώσεις. Π.χ. ἂν διανύσῃ τις ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ, ἀπὸ ἓν ὡρισμένον σημεῖον αὐτῆς ἕνα ἀριθμὸν μέτρων, π.χ. 200 μ., πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν τῆς εὐθείας (ἔστω πρὸς βορρᾶν) καὶ ἔπειτα τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 200 μ. πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν (ἔστω πρὸς νότον) ἀπὸ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἔφθασε προηγουμένως καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί, 200 μ. πρὸς τὴν θετικὴν φορὰν καὶ 200 μ. πρὸς τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τῆς εὐθείας, λέγονται **ἀντίθετοι ἀριθμοί.**

Γενικώτερον δεχόμεθα, ὅτι εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς (ἀκεραίων, κλασματικῶν, ἀσυμμέτρων), ἀντιστοιχεῖ εἷς ἄλλος ἀντίθετος αὐτοῦ, καὶ διὰ νὰ ἐκφράσωμεν συμβολικῶς τὴν ἀντίθεσιν δύο τοιούτων ἀριθμῶν γράφομεν πρὸ τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, τοῦ μέχρι τοῦδε γνωστοῦ, τὸ σύμβολον + (σύν), πρὸ δὲ τοῦ ἄλλου, τὸ σύμβολον − (πλήν). Τὸ σύμβολον + τιθέμενον πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ (ἀριστερά του) λέγεται **θετικὸν πρόσημον** (ἢ **σῆμα**), τὸ δὲ − **ἀρνητικὸν πρόσημον** (ἢ **σῆμα**). Οὕτως οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει 6 μονάδας, γράφονται $+6$ καὶ -6, ἀπαγγέλλονται δὲ ὡς ἑξῆς: σὺν ἓξ καὶ πλὴν ἕξ. Συνήθως παραλείπεται τὸ + εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑπομένως, ὅταν εἷς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δὲν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ σύμβολον, ὑποτίθεται, ὅτι ἔχει τὸ +.

Κατὰ ταῦτα, οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ $+6$ καὶ -6 γράφονται καὶ οὕτως: 6 καὶ -6. Ὁμοίως, ἀντίθετοι εἶναι οἱ ἀριθμοί: 23 καὶ -23, οἱ $\frac{3}{5}$ καὶ $-\frac{3}{5}$, οἱ 6,15 καὶ $-6{,}15$, οἱ -5 καὶ 5, οἱ $-3{,}6$ καὶ 3,6 κ.τ.λ.

Ἂν εἷς ἀριθμὸς παριστάνεται π.χ. μὲ α, ὁ ἀντίθετός του παριστάνεται μὲ $-\alpha$.

§ 4. Δύο ἢ περισσότεροι ἀριθμοὶ λέγονται **ὁμόσημοι,** ἂν ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον (εἴτε τὸ + εἶναι εἴτε τὸ −). Οὕτως ὁμόσημοι λέγονται οἱ ἀριθμοὶ +3, +12, ἐπίσης οἱ 5, 23, 5, 15, 17, 3, καθὼς καὶ οἱ $-7, -\frac{3}{4}, -2\frac{1}{2}, -6$.

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται **ἑτερόσημοι,** ἐὰν ὁ μὲν εἷς ἔχῃ πρόσημον + ἢ οὐδὲν τοιοῦτον, ὁ δὲ ἄλλος τὸ −. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ + 8 καὶ − 3 λέγονται ἑτερόσημοι. Ὁμοίως ἑτερόσημοι λέγονται οἱ − 15 καὶ $+\frac{5}{9}$, οἱ 2,15 καὶ $-6\frac{3}{4}$, οἱ 7 καὶ − 12.

Οἱ μὲν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον + (ἢ οὐδὲν τοιοῦτον) λέγονται **θετικοὶ ἀριθμοί,** οἱ δὲ ἔχοντες τὸ − λέγονται **ἀρνητικοὶ ἀριθμοί,** καὶ ὑποτίθεται ὅτι, ἂν οἱ θετικοὶ παριστάνουν ποσὰ ἢ μεγέθη θετικά, οἱ ἀρνητικοὶ θὰ παριστάνουν ἀρνητικὰ τοιαῦτα, ἂν τὰ παριστώμενα ποσὰ ἐπιδέχωνται ἀντίθεσιν. Οἱ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ καὶ τὸ 0 (μηδὲν) λέγονται μὲ ἓν ὄνομα **σχετικοὶ** (πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοὺς κατωτέρω καλουμένους ἀπολύτους ἀριθμούς). Ὥστε :

Καλοῦμεν θετικὸν ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἀριθμὸν (τῆς Ἀριθμητικῆς) διάφορον τοῦ μηδενὸς 0, ἔχοντα τὸ πρόσημον + ἢ οὐδὲν τοιοῦτον. Καλοῦμεν ἀρνητικὸν ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἀριθμὸν (τῆς Ἀριθμητικῆς), διάφορον τοῦ 0, τοῦ ὁποίου τὸ πρόσημον εἶναι τὸ —.

Ὅταν λέγωμεν, ἔστω ἀριθμὸς α, ὁ τοιοῦτος ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ καὶ μηδέν.

§ 5. Καλοῦμεν **ἀπόλυτον ἀριθμὸν** ἢ **ἀπόλυτον τιμὴν** ἢ καὶ μέτρον ἑνὸς θετικοῦ μὲν ἀριθμοῦ ἢ τοῦ 0 αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἑνὸς ἀρνητικοῦ δὲ τὸν ἀντίθετόν του (θετικόν). Οὕτως οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοὶ τῶν ἀριθμῶν $+3, +5, +\frac{1}{2}, +0{,}45$ εἶναι οἱ $3, 5, \frac{1}{2}$, 0,45, τῶν δὲ $-1, -4\frac{3}{4}, -8{,}5$ εἶναι οἱ $1, 4\frac{3}{4}, 8{,}5$· τοῦ 0 ἀπόλυτος εἶναι τὸ 0. Τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν $-6, +2, -3{,}5, -3\frac{1}{2}$ ἀντίστοιχοι ἀπόλυτοι εἶναι οἱ $6, 2, 3{,}5, 3\frac{1}{2}$·

Τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἢ τὸ μέτρον ἑνὸς ἀριθμοῦ π.χ., τοῦ − 5, σημειώνομεν συμβολικῶς οὕτως : $|-5|$, ἤτοι τὸ σύμβολον παραστάσεως τῆς ἀπολύτου τιμῆς εἶναι δύο μικραὶ εὐθεῖαι | |, μεταξὺ τῶν ὁποίων γράφεται ὁ ἀριθμός. Γράφομεν λοιπὸν $|-5| = 5$. Ὁμοίως ἔχομεν $|+6| = 6$, $\left|-7\frac{1}{2}\right| = 7\frac{1}{2}$ κ.τ.λ.

Ἐν γένει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν ἀριθμοῦ α παριστάνομεν οὕτως: $|\alpha|$. Καὶ ἂν μὲν ὁ α εἶναι θετικὸς ἢ 0, τότε $|\alpha| = \alpha$, ἐὰν δὲ εἶναι α ἀρνητικὸς τότε $|\alpha| = -\alpha$.

Οἱ ἀπόλυτοι καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ 1, 2, 3, κ.τ.λ., λέγονται **φυσικοὶ** ἀριθμοί.

Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **ἀπολύτως ἴσοι ἢ ἀπολύτως ἰσοδύναμοι,** ἂν αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι, καθὼς π.χ. οἱ 5 καὶ -5, καὶ συμβολίζομεν τοῦτο οὕτως: $|5| = |-5|$. Ἐπίσης οἱ $3\frac{1}{4}$ καὶ $-\frac{13}{4}$ εἶναι ἀπολύτως ἰσοδύναμοι, διότι $\left|3\frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{13}{4}\right|$. Ὥστε:

Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀπολύτως ἴσοι.

Τὸ σύμβολον τῆς μὴ ἰσότητος (καὶ τῆς μὴ ἰσοδυναμίας) δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ $\neq$ καὶ ἀπαγγέλλεται: **διάφορον.** Ἤτοι, ἂν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς α δὲν εἶναι ἴσος (οὔτε ἰσοδύναμος) πρὸς ἄλλον β, συμβολίζομεν αὐτὸ οὕτως: $\alpha \neq \beta$ καὶ ἀπαγγέλλομεν, α διάφορον τοῦ β.

Γενικῶς, ἂν δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, π.χ. α καὶ β, εἶναι ἀπολύτως ἴσοι, γράφομεν $|\alpha| = |\beta|$.

§ 6. Ἴσοι ἢ ἰσοδύναμοι λέγονται δύο ἀριθμοί, ἂν εἶναι ὁμόσημοι καὶ ἔχουν ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους ἀπολύτους τιμάς, καθὼς π.χ. οἱ 3 καὶ $\frac{6}{2}$, οἱ -4 καὶ $-\frac{12}{3}$, διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ πρόσημον, αἱ δ' ἀπόλυτοι τιμαὶ αὐτῶν εἶναι ἴσαι, π.χ. τῶν 3 καὶ $\frac{6}{2}$, καθὼς καὶ τῶν -4 καὶ $-\frac{12}{3}$, σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ τὸ σύμβολον = (ἴσον) τιθέμενον μεταξὺ αὐτῶν, ἤτοι γράφομεν $3 = \frac{6}{2}$, ἐπίσης $-4 = -\frac{12}{3}$. Σημειωτέον, ὅτι διὰ νὰ τρέψωμεν ἑτερωνύμους κλασματικοὺς ἀριθμοὺς εἰς ἀντιστοίχους ἰσοδυνάμους αὐτῶν ὁμωνύμους, ἀρκεῖ νὰ τρέψωμεν εἰς ὁμωνύμους τὰς ἀπολύτους των τιμὰς καὶ νὰ διατηρήσωμεν τὰ πρόσημα αὐτῶν. Οὕτω π.χ., ἀντὶ τῶν $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}$, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τοὺς ἰσοδυνάμους των $\frac{4}{8}, -\frac{6}{8}, -\frac{1}{8}$.

Ἀσκήσεις

7. Εὕρετε ποσὰ ἐπιδεχόμενα ἀντίθεσιν, καὶ ἀριθμοὺς ἀντιθέτους παριστάνοντας ταῦτα (ἐνεργητικὸν καὶ παθητικὸν ἐπιχειρήσεως, κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, μέλλων καὶ παρελθὼν χρόνος κ.τ.λ.).

8. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀντίθετοι τῶν ἀριθμῶν 5, 12, -3, -8, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{7}$, $-\frac{4}{9}$, 6,15, 7,45, 0,12, $-34{,}85$.

9. Γράψατε διαφόρους ὁμοσήμους ἀριθμοὺς καὶ τρεῖς μὴ ὁμοσήμους. Γράψατε δύο ἀντιθέτους ἀριθμοὺς καὶ τὰς ἀπολύτους τιμάς των.

10. Ποῖαι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν 3, -13, -15, 28, $-3{,}5$, $13\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{9}$, 17,2, -42, 18, $-\frac{6}{9}$, $2\frac{1}{5}$· Συμβολίσατε αὐτάς.

11. Σημειώσατε τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α, $-\alpha$, $-\beta$, $+\beta$.

12. Εὕρετε δύο ἴσους ἢ ἰσοδυνάμους πρὸς τὸν $-\frac{1}{2}$, τὸν $\frac{1}{5}$ τὸν 2, τὸν 6 καὶ τὸν -3.

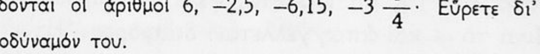
13. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ 6, $-2{,}5$, $-6{,}15$, $-3\frac{1}{4}$· Εὕρετε δι' ἕκαστον αὐτῶν ἕνα ἰσοδύναμόν του.

14. Ἐπί τινος εὐθείας λαμβάνομεν ἀπό τινος σημείου αὐτῆς Ο τὰ θετικὰ τμήματά της ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.., καὶ παριστάνομεν αὐτὰ μέ τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς 1,2, 3, 4...., ἂν τὰ ΑΒ, ΒΓ εἶναι ἴσα μὲ τὸ ΟΑ. Πῶς θὰ παρασταθοῦν τὰ ΟΑ′, ΟΒ′, ΟΓ′..., ἴσα ἀπολύτως μὲν πρὸς τὰ προηγούμενα, ἀλλ' ἔχοντα φορὰν ἐπὶ τῆς εὐθείας ἀντίθετον τῆς ΟΑ ;

15. Εὕρετε τὰ μεγέθη ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὡς ἄνω εὐθείας, τὰ ὁποῖα θὰ παριστάνουν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, 0,45, καθὼς καὶ οἱ ἀντίθετοι τούτων.

1. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 7. Ἔστω εὐθεῖα τις x′x. Ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Ο, τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν ἐκ τῶν προτέρων νὰ παριστάνῃ



Σχ. 2

τὸ μηδὲν (0). Ὁρίζομεν ὡς θετικὴν μὲν φορὰν ἐπ' αὐτῆς π.χ. τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x, ὡς ἀρνητικὴν δὲ τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x′.

Ἂν λάβωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΘ ὡς μονάδα μετρήσεως καὶ τὸ μῆκος αὐτοῦ ἴσον πρὸς 1 μ. π.χ., τότε τὸ μὲν τμῆμα ΟΘ θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ + 1, ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος θὰ λέγωμεν, ὅτι παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΘ (σχ. 2).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁδοιπόρος διατρέχει δύο μέτρα ἐπὶ τῆς Οx ἀπὸ τὸ Ο. Θὰ παριστάνωμεν τὸν δρόμον αὐτὸν μὲ τὸ τμῆμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον ἔχει μῆκος δύο μονάδων τῆς εὐθείας x′x. Ἀνάλογα παρατηροῦμεν, ἂν καὶ ἄλλος ὁδοιπόρος διατρέξῃ δύο μέτρα ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς Οx′ Ὁ δρόμος αὐτὸς θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΑ′. Οὕτω προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς μὲ τμήματα τῆς εὐθείας x′x, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν **εὐθεῖαν τῶν ἀριθμῶν** ἢ **ἄξονα** ἢ καὶ **εὐθεῖαν τῶν τετμημένων,** τοῦ μήκους αὐτῶν μετρουμένου ἀπὸ ὡρισμένου σημείου ταύτης, π.χ. ἀπὸ τοῦ Ο, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀρχὴ** ἢ **ἀφετηρία ἐπὶ τοῦ ἄξονος.** Τὸ μῆκος τμήματος παριστάνοντος ὡρισμένον ἀριθμὸν εἶναι ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅσας ἔχει ὁ δοθεὶς ἀριθμός. Κατὰ ταῦτα, ἂν θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν ἓν χρονικὸν διάστημα, π.χ. μετὰ δύο ἔτη (+ 2 ἔτη), λαμβάνομεν ἐκ τοῦ σημείου Ο ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας ἓν τμῆμα ΟΑ ἔχον μῆκος δύο μονάδων καὶ τὸ τμῆμα αὐτὸ ΟΑ λέγομεν ὅτι παριστάνει τὸ διάστημα + 2 ἐτῶν. Ὁμοίως χρονικὸν διάστημα πρὸ 3 ἐτῶν (− 3 ἔτη) παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΒ′, τῆς εὐθείας, ἔχοντος (ἀπόλυτον) μῆκος 3 μονάδων.

Ἐὰν δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦν ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον εὐθείας, ἔστω τὸ Ο, καὶ διευθύνωνται ἐπ' αὐτῆς ἀντιθέτως, ὁ μὲν εἷς μὲ ταχύτητα π.χ. 5 χλμ. πρὸς τὴν θετικὴν φοράν, ὁ δὲ πρὸς τὴν ἀρνητικὴν φορὰν μὲ ταχύτητα 4 χιλμ., ἡ μὲν ταχύτης τοῦ πρώτου θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος π.χ. ΟΔ, ἴσου μὲ 5 μονάδας μήκους καὶ κειμένου ἐπὶ τοῦ θετικοῦ μέρους τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου ὑπὸ τοῦ τμήματος ΟΓ′, ἀντιθέτου φορᾶς τοῦ πρώτου καὶ ἔχοντος μῆκος (ἀπολύτως λαμβανόμενον) ἴσον πρὸς 4 μονάδας μήκους.

Ἀνάλογα παρατηροῦμεν διὰ τὴν παράστασιν ἀριθμῶν τῆς θερμοκρασίας ἄνω ἢ κάτω τοῦ μηδενὸς εἰς το θερμόμετρον κ.τ.λ.

Δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ μὲ σημεῖα τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν. Πράγματι, ἂν ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον π.χ. Θ, ἄκρον τοῦ τμήματος αὐτῆς ΟΘ ἔχοντος μῆκος $+1$, ὅτι παριστάνει τὴν $+1$, εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ,... παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς $+2$, $+3$, $+4$,... ἐὰν τὰ Α, Β, Γ,... εἶναι τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,..., τῶν ὁποίων τὰ μήκη εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ $+2$, $+3$, $+4$,...

Ἐὰν ἐκ τοῦ Ο καὶ πρὸς τὴν ἀντίθετον φορὰν τῆς προηγουμένης, τὴν ἐκ τοῦ Ο πρὸς x', λάβωμεν ὁμοίως τὸ τμῆμα ΟΘ' μὲ μῆκος (ἀπολύτως λαμβανόμενον) μιᾶς μονάδος, τὸ Θ' παριστάνει τὸν -1. Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ',... τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς -2, -3 -4,... (σχ. 2).

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει ἕνα κλασματικὸν ἀριθμόν, π.χ. τὸν $\frac{1}{2}$. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν τμῆμα αὐτῆς μὲ μῆκος ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα ἀριθμόν, π.χ. ἴσον μὲ $\frac{1}{2}$ τῆς μονάδος μήκους, καὶ πρὸς τὴν φορὰν Ox μὲν ἀπὸ τὸ Ο, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι θετικός, πρὸς τὴν Ox' δὲ ἂν εἶναι ἀρνητικός. Τὸ μέρος Ox τῆς εὐθείας x'x λέγεται **θετικὸν μέρος** τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (ἢ ἡμιευθεῖα Ο x) ἢ τοῦ ἄξονος ἢ τῆς εὐθείας τῶν τετμημένων καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς θετικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸ μηδέν. Τὸ Ο x' τῆς εὐθείας x'x λέγεται **ἀρνητικὸν μέρος** (ἢ ἡμιευθεῖα Ο x') καὶ ἐπ' αὐτοῦ κεῖνται πάντα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὸ μηδέν. Ἡ φορὰ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x λέγεται θετική, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ x' ἀρνητική, ἑκάστη δὲ σημειουται μὲ ἓν βέλος, παρακείμενον εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἡμιευθεῖαν καθὼς εἰς τὸ σχ 1.

2. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΤΙΚΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

§ 8. Δεχόμεθα ὅτι: **Πᾶς ἀπόλυτος ἢ θετικὸς ἀριθμὸς τῆς Ἀριθμητικῆς δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς ὡς προσθετέου.**

Π.χ. ὁ $3 = 1 + 1 + 1$. Ὁ $2\frac{3}{5} = 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$.

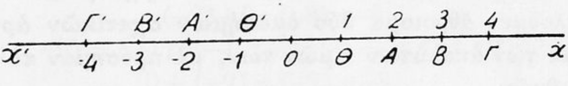
Καθ' ὅμοιον τρόπον δεχόμεθα ὅτι:

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος ἢ ἐξ ἑνὸς τῶν μερῶν αὐτῆς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς ὡς προσθετέου.

Οὕτω δεχόμεθα π.χ., ὅτι ὁ -3 γίνεται ἐκ τῆς -1, ἐὰν τὴν ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς. Ὁ $-\frac{3}{5}$ π.χ. γίνεται ἐκ τοῦ $\frac{1}{5}$ τῆς -1, ἐὰν ἐπαναλάβωμεν αὐτὸ τρεῖς φοράς.

Ἔστω ἀρνητικός τις ἀριθμός, π.χ. ὁ -4, ὅστις παριστάνει ἀρνητικόν τι μέγεθος, π.χ. τὸ ΟΓ′ ἐπὶ τῆς εὐθείας x′x, μετρηθὲν ὑπὸ τῆς μονάδος μετρήσεως, ἔστω τῆς ΟΘ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως ταύτης τοῦ ΟΓ′ ὑπὸ τῆς ΟΘ παριστάνομεν μὲ $\frac{ΟΓ'}{ΟΘ} = -4$ (σχ. 3).

Ἀλλὰ τὸ ΟΓ′ γίνεται ἐκ τοῦ ΟΘ′ (δηλαδὴ ἐκ τοῦ ΟΘ ἀφοῦ ἀντικατασταθῆ ὑπὸ τοῦ ΟΘ′) καθὼς καὶ ὁ ἀριθμὸς -4 ἐκ τῆς ἀρ-



Σχ. 3

νητικῆς μονάδος -1, διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῆς τέσσαρας φοράς.

Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δεχόμεθα ὅτι:

Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ γίνῃ ἀπὸ τὴν θετικὴν μονάδα, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον αὐτῆς καὶ ταύτην ἢ μέρος ταύτης ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον.

Οὕτω δεχόμεθα, ὅτι ὁ -7 γίνεται ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ τὴν ἐπαναλάβωμεν ἑπτὰ φορὰς ὡς προσθετέον. Ὁ $-\frac{3}{8}$ γίνεται ἀπὸ τὴν $+1$, ἐὰν πρῶτον λάβωμεν τὴν ἀντίθετον αὐτῆς -1 καὶ τὸ ὄγδοον ταύτης ἐπαναλάβωμεν τρὶς ὡς προσθετέον.

Ἀσκήσεις

16. Πῶς σχηματίζεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν -5, -6, -10, -50 ἐκ τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς;

17. Πῶς σχηματίζεται ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{4}{9}$ ἐκ τῆς ἀρνητικῆς καὶ πῶς ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος;

18. Πῶς σχηματίζεται ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 0,4, 0,45, 0,385, 1,25 καὶ πῶς ἕκαστος τῶν ἀντιστοίχων ἀντιθέτων αὐτῶν ;

Γ΄. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΧΕΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

§ 9. Ἔστω, ὅτι εἷς ἔμπορος ἐκέρδισεν ἀπὸ τὴν ἐπιχείρησίν του ἐντὸς μιᾶς ἡμέρας 15 000 δρχ. καὶ ἄλλην ἡμέραν ἐκέρδισεν 40 000 δρχ.

Προφανῶς ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 55 000 δρχ. Ἂν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς, ἤτοι μὲ $+ 15\,000$ δρχ. καὶ $+ 40\,000$ δρχ., θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα αὐτῶν τὸ $(15\,000 + 40\,000)$ δρχ. $= 55\,000$ δρχ. Ἂν ἔχωμεν δύο ἄλλους ὁμοσήμους ἀριθμοὺς π.χ. -35 καὶ -15, θὰ καλοῦμεν ἄθροισμα τούτων τὸν ἀριθμὸν $-(35 + 15)$, ἤτοι τὸν -50.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :

Καλοῦμεν ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των, μὲ πρόσημον τὸ πρόσημον τῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω, ὅτι ἔμπορος μίαν ἡμέραν ἐζημιώθη ἀπὸ μίαν πώλησιν 50 000 δρχ. καὶ ἐντὸς τῆς αὐτῆς ἡμέρας ἐκέρδισεν ἀπὸ μίαν ἄλλην πώλησιν 15 000 δρχ. Ἀπὸ τὰς δύο αὐτὰς πωλήσεις ὁ ἔμπορος ἐζημιώθη $(50\,000 - 15\,000)$ δρχ. Ἤτοι ἐζημιώθη 35 000 δρχ Ἂν παραστήσωμεν τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς, ἤτοι μὲ $-50\,000$ δρχ. τὴν ζημίαν καὶ μέ : $+ 15\,000$ δρχ. τὸ κέρδος, θὰ καλοῦμεν ἄθροισμά των τὸν ἀριθμὸν $-(50\,000 - 15\,000)$ δρχ. $= -35\,000$ δρχ. Ὁμοίως θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. $+ 40$ καὶ -30 εἶναι ὁ $(+ 40 - 30) = + 10$. Ἤτοι :

Καλοῦμεν ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν, τὴν διαφορὰν (τῆς μικροτέρας ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν) τῶν ἀπολύτων τιμῶν, μὲ πρόσημον τὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἔχοντος τὴν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

Ἂν δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἀντίθετοι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι τὸ μηδέν.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν -40 καὶ $+ 40$ εἶναι τὸ 0.

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς π.χ. $+ 24$ καὶ 0. Ἐπειδὴ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ 0 εἶναι 0, ἕπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα $+ 24 + 0 = + 24$.

τό $-6+0=-6$, τὸ ἄθροισμα τῶν 0 καὶ -25 ἰσοῦται μὲ -25 κ.τ.λ. Ἤτοι :

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι μηδέν, ἰσοῦται μὲ τὸν ἄλλον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ καὶ περισσοτέρων σχετικῶν ἀριθμῶν, λέγεται **πρόσθεσις,** συμβολίζεται δὲ ὅπως καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν μὲ τὸ + (σὺν ἢ καὶ) τιθέμενον μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι λέγονται **προσθετέοι.**

Διὰ νὰ ἀποφεύγεται ἡ σύγχυσις μεταξὺ τοῦ συμβόλου + τῆς προσθέσεως καὶ τοῦ προσήμου + ἢ − τῶν προσθετέων ἀριθμῶν, συνήθως τίθεται ὁ ἀριθμὸς μὲ τὸ πρόσημόν του ἐν παρενθέσει, οὕτω δὲ ἐμφανίζεται ἕκαστος ἀριθμὸς μὲ τὸ πρόσημόν του ὡς ἓν ὅλον. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$$(+5)+(+3)=(+8)=+8=8,\ (-6)+(+10)=(+4)=+4=4,$$
$$(-8)+0=(-8)=-8,$$
$$(+8)+(-9)=(-1)=-1,\ (+7)+0=(+7)=+7=7,$$
$$0+(-9)=(-9)=-9.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, **ἂν α καὶ β παριστάνουν δύο σχετικοὺς ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν** $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

Διότι εἰς τοὺς ἀνωτέρω ὁρισμοὺς οὐδεὶς περιορισμὸς τίθεται ποῖος ἐκ τῶν δύο προσθετέων θὰ τεθῇ πρῶτος, τὸ δὲ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν των δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν σειρὰν ἢ ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν.

Κατὰ ταῦτα, τὸ νὰ προστεθῇ ἀριθμὸς π.χ. β εἰς τὸν α, δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ τὸ $\alpha+\beta$, εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ προστεθῇ ὁ α εἰς τὸν β, ἤτοι μὲ τὸ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\beta+\alpha$.

10. Δοθέντων περισσοτέρων τῶν δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κ.τ.λ. καλοῦμεν ἄθροισμα τούτων καὶ παριστάνομεν μὲ $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β, εἰς τὸ ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸν γ, εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον προσθέσωμεν τὸν δ κ.τ.λ.

Σημειώνομεν μὲ $(\alpha+\beta)$ τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα τῶν α καὶ β, ἤτοι θέτομεν $\alpha+\beta=(\alpha+\beta)$.

Οὕτως ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Παριστάνομεν μὲ $(\alpha+\beta+\gamma)$ τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα τῶν

α, β, γ· ἤτοι θέτομεν $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)$ ἢ καὶ
$(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$ καὶ ἔχομεν
$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=[(\alpha+\beta)+\gamma]+\delta=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

Οὕτω λοιπὸν ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)$.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)+\varepsilon=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon).$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν καὶ $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma$ κ.τ.λ.

Π.χ. $(-3)+(+5)=+2=2$,

$(-3)+(+5)+(+7)=(+2)+(+7)=+9=9$,

ἄρα καὶ $(-3)+(5)+(+7)+(+1)=(+9)+(+1)=10$.

Παρατήρησις. Ὅταν οἱ διὰ τὴν πρόσθεσιν ὁριζόμενοι ἀριθμοὶ δὲν δίδωνται μὲ γράμματα, διὰ νὰ σημειώσωμεν τὸ ἄθροισμά των, δεχόμεθα πρὸς εὐκολίαν νὰ γράψωμεν αὐτοὺς κατὰ σειρὰν τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μὲ τὸ πρόσημόν του, παραλείποντες τὸ σύμβολον τῆς προσθέσεως. Οὕτω π.χ., ἀντὶ νὰ ἔχωμεν τὸ $(+4)+(+7)+(-6)+(-7)+(+1)$.
γράφομεν τὸ $+4+7-6-7+1$ καὶ εὑρίσκομεν

$$+4+7-6-7+1=11-6-7+1=+5-7+1=-2+1=-1.$$

Ὁμοίως, ἀντὶ π.χ. τοῦ $(-4)+\left(+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{9}\right)+(-2)$, γράφομεν $-4+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}-2$ καὶ εὑρίσκομεν $-4+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}-2=$
$-3\frac{1}{3}-\frac{4}{9}-2=-\frac{10}{3}-\frac{4}{9}-2=-\frac{30}{9}-\frac{4}{9}-2=-\frac{34}{9}-\frac{18}{9}=-\frac{52}{9}=-5\frac{7}{9}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 19. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

α΄) $5+(+3)$ β΄) $(+7)+(+1,4)$ γ΄) $(+4)+(+6)+(+8)$

δ΄) $\frac{4}{9}+\left(+\frac{2}{3}\right)$ ε΄) $\left(+7\frac{1}{3}\right)+\left(+3\frac{1}{5}\right)$ στ΄) $(+3)+\left(+4\frac{1}{2}\right)+\left(+8\frac{1}{4}\right)$

ζ΄) $(-4)+(-6)$ η΄) $(-10)+\left(-8\frac{1}{2}\right)$ θ΄) $(-4)+\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(-7\frac{1}{3}\right)$

ι΄) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{8}\right)$ ια΄) $(-4,5)+(-5,3)$ ιβ΄) $(-4)+(-5)+(+8)+\left(-3\frac{1}{2}\right)$

'Ομὰς δευτέρα. 20. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

α') $-5+3$ β') $+5-8-7+3$ γ') $-3\frac{1}{2}+5\frac{1}{4}-2\frac{1}{5}$

δ') $-3-5+6-7-8$ ε') $-3+5\frac{1}{2}-3+4-7$ στ') $+4-8-6+7\frac{1}{2}-8\frac{1}{2}-9$

ζ') $-3{,}5+7{,}4-8{,}5+6\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$ η') $-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-0{,}25+3{,}7$.

'Ομὰς τρίτη. 21. Κερδίζει τις 234 000 δρχ., ἔπειτα χάνει 216 400 δρχ. Κερδίζει πάλιν 215 700 δρχ. καὶ χάνει ἐκ νέου 112 000 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὕρετε ἂν ἐκέρδισεν ἢ ἔχασε τελικῶς καὶ πόσον.

22. Ἔμπορος αὐξάνει τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 128 000 δρχ., τὸ δὲ παθητικὸν κατὰ 312 400 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὕρετε ποίαν μεταβολὴν παθαίνει τὸ κεφάλαιόν του.

23. Σῶμα θερμανθὲν ἀπὸ 0^0 ἔλαβε θερμοκρασίαν $17{,}6^0$. Ἔπειτα ἐψύχθη κατὰ $19{,}1^0$ καὶ τέλος ἐθερμάνθη κατὰ $3{,}1^0$. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὕρετε ἂν ηὐξήθη ἢ ἠλαττώθη τελικῶς ἡ ἀρχική του θερμοκρασία καὶ πόσον.

24. Ἔμπορος ἔχει εἰς τὸ ταμεῖον του 250 000 δρχ. Ὀφείλει μὲν εἰς διαφόρους 174 500 δρχ., 136 000 δρχ., καὶ 19 450 δρχ., τοῦ ὀφείλουν δὲ 34 000 δρχ., καὶ 14 500 δρχ. καὶ 29 000 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὕρετε τὸ ἄθροισμά των. Τί ποσὸν θὰ τοῦ μείνῃ, ἂν εἰσπράξῃ καὶ πληρώσῃ τὰ ὀφειλόμενα;

25. Ἔμπορος εἶχεν 180 000 δρχ. καὶ ἐπλήρωσεν 120 000 δρχ., εἰσέπραξεν 74 000 δρχ., ἐπλήρωσε 14 800 δρχ. καὶ εἰσέπραξε 39 400 δρχ. Γράψατε τοὺς δοθέντας ἀριθμοὺς ἀλγεβρικῶς καὶ εὕρετε τὸ ἄθροισμά των. Τί ποσὸν τοῦ ἔμεινεν ἢ πόσην ζημίαν ἔχει;

26. Κινητὸν ἀνεχώρησεν ἀπὸ ἓν σημεῖον Ο ὡρισμένης εὐθείας καὶ διήνυσεν ἐπ' αὐτῆς διάστημα $+58{,}4$ μ., ἔπειτα ἀπὸ τὴν θέσιν αὐτὴν $-19{,}3$ μ. ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἀπ' ἐκεῖ $+23{,}7$ μ. καὶ πάλιν ἀπὸ τὴν τελευταίαν θέσιν $-95{,}8$ μ. πάντοτε ἐπὶ τῆς εὐθείας. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς τελευταίας θέσεώς του ἀπὸ τὸ Ο;

I. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΕΩΣ

§ 11. Τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ θέσις τῶν προσθετέων.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ, Ἔχομεν: $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=(\alpha+\beta+\gamma)+\delta$. Ἀλλ' εἶναι $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, ἄρα καὶ $(\alpha+\beta)=(\beta+\alpha)=\beta+\alpha$. Ἑπομένως $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ $=(\alpha+\beta)+\gamma+\delta=(\beta+\alpha)+\gamma+\delta=(\beta+\alpha+\gamma)+\delta=\beta+\alpha+\gamma+\delta$.

Ὁμοίως ἔχομεν:

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\beta+\alpha+\gamma)+\delta=\delta+(\beta+\alpha+\gamma)=\delta+\beta+\gamma+\alpha.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

Εἰς τὸ ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τινὰς ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι, ἂν θέλωμεν πχ. νὰ ἔχωμεν

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=(\alpha+\gamma+\varepsilon)+\beta+\delta$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\alpha+\gamma+\varepsilon+\beta+\delta=(\alpha+\gamma+\varepsilon)+\beta+\delta.$ Ὥστε:

Τὸ ἄθροισμα τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τὰς αὐτὰς ἰδιότητας μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς, ἤτοι ἰσχύει ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῶν θέσεων τῶν προσθετέων καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως μερικῶν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ἐπίσης ὅτι:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν περισσοτέρους τῶν δύο μὴ ὁμοσήμους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ πρόσημον +, χωριστὰ τοὺς ἔχοντας τὸ —, οὕτω δὲ προκύπτουν δύο ἑτερόσημοι ἀριθμοί, τοὺς ὁποίους προσθέτομεν, ὡς ἀνωτέρω καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων παριστάνει καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Κατὰ ταῦτα, διὰ τὸ ἄθροισμα π χ.

$-3+(-5)+(+2)+(+3)+(-7)+(+6)$

ἢ διὰ τὸ ἴσον του $-3-5+2+3-7+6$ ἔχομεν:

$-3-5-7=-15,\quad +2+3+6=11$ καὶ τέλος $-15+11=-4,$

ἤτοι: $-3-5+2+3-7+6=-4$

ἢ $(-3)+(-5)+(+2)+(+3)+(-7)+(+6)=(-4)=-4.$

Ὁμοίως διὰ τὸ ἄθροισμα π.χ.

$$(+4)+(-5)+0+\left(-\frac{4}{5}\right)+(+6)$$

ἢ διὰ τὸ ἴσον του $4-5+0-\frac{4}{5}+6$ ἔχομεν:

$$4-5+0-\frac{4}{5}+6=4+0+6-5-\frac{4}{5}=10-5\frac{4}{5}=4\frac{1}{5}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν π.χ.

$$-6+4+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+2=4+\frac{1}{7}+2-\frac{1}{5}-6=\frac{43}{7}-\frac{31}{5}=\frac{215}{35}-\frac{217}{35}=-\frac{2}{35}.$$

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως αὐτῆς δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γράφωμεν χωριστὰ ὅλους τοὺς ἐνδιαμέσους θετικοὺς καὶ ὅλους τοὺς ἀρνητικοὺς προσθετέους, ἀλλὰ σχηματίζομεν κατ' εὐθεῖαν τὰ μερικὰ ἀθροίσματα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν καὶ ἀκολούθως τὸ τελικὸν ἄθροισμα τούτων π. χ. $+3+0-1-2+1-6+4=8-9=-1$,

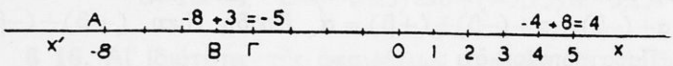
$$2-1+6-\frac{1}{3}+5-\frac{1}{4}-2=13-3\frac{7}{12}=9\frac{5}{12}.$$

Ἐπίσης (ἂν εὐκολυνώμεθα) εὑρίσκομεν τὸ ἐξαγόμενον προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν, προσθέτοντες εἰς τὸν πρῶτον προσθετέον τὸν δεύτερον, εἰς τὸ ἐξαγόμενον τὸν τρίτον κ.τ.λ. καὶ γράφομεν τὸ τελικὸν ἄθροισμα χωρὶς νὰ γράψωμεν τὰ ἐνδιάμεσα (μερικὰ ἐξαγόμενα).

Π.χ. διὰ τὸ $3-5+6-7+2-1$ λέγομεν $+3-5$ ἴσον -2 (χωρὶς νὰ τὸ γράψωμεν), ἀκολούθως λέγομεν $-2+6$ ἴσον $+4$ (χωρὶς νὰ τὸ γράψωμεν) καὶ ἐν συνεχείᾳ λέγομεν $+4-7$ ἴσον -3· ἀκολούθως λέγομεν $-3+2$ ἴσον -1, ἀκολούθως $-1-1$ ἴσον -2. Ἄρα, λέγομεν, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι -2.

II. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

§ 12. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν πρόσθεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων. Διὰ νὰ παραστήσωμεν π.χ. τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον ἔστω Α, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -8 ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ προχωροῦμεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ $+3$ μονάδας μήκους. Τὸ οὕτως εὑρισκόμενον σημεῖον, ἔστω Β, παριστάνει τὸ ἄθροισμα $-8+(+3)=-5$ (σχ. 4).



Σχ. 4

Διά νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει π.χ. τὸ ἄθροισμα $-4+(+8)$, ἀναχωροῦμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4, ἔστω τὸ Γ, καὶ προχωροῦμεν πρὸς τά δεξιὰ αὐτοῦ κατὰ ὀκτὼ μονάδας μήκους, ὅτε εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, ἔστω Δ, παριστάνον τὸ $-4+8=+4$.

Ἄσκησις

27. Εὕρετε τὰ κατωτέρω ἐξαγόμενα κατὰ τὸν συντομώτερον τρόπον καὶ ἀπεικονίσατε αὐτά :

α΄) $-3+5-8-7-11-15+6+0-3$ β΄) $16-53+47-5-6-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+11$

γ΄) $-\frac{4}{5}+\frac{2}{8}-\frac{3}{4}-5-7-2+1-13$ δ΄) $-13{,}5+17{,}18-5{,}6-7{,}8-15$

ε΄) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-5\frac{1}{4}-25{,}4-2.$

2. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

§ 13. Ἔστωσαν π.χ. δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ $+7$ καὶ -5. Σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $(+7)+(+5)$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν $(+7)$ προσθέσωμεν τὸν $(+5)$, ἀντίθετον τοῦ (-5). Ἂν εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ $(+7)+(+5)$ προσθέσωμεν τὸν δεύτερον ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, τὸν -5, θὰ εὕρωμεν

$$(+7)+(+5)+(-5)=(+7)$$

ἤτοι τὸν πρῶτον ἀριθμὸν ἐκ τῶν δοθέντων. Ἐν γένει :

Δοθέντων δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ὑπάρχει εἷς τρίτος σχετικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν ἕνα τῶν δοθέντων, δίδει τὸν ἄλλον.

Πράγματι, ἂν α, β εἶναι δύο δοθέντες σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τὸν β π.χ. νὰ δίδῃ ἄθροισμα τὸν α, σχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)$ ἀπὸ τὸν πρῶτον καὶ τὸν ἀντίθετον τοῦ δευτέρου β, τὸν $-\beta$. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς $\alpha+(-\beta)$ εἶναι ὁ ζητούμενος. Διότι, ἂν αὐτὸς προστεθῇ εἰς τὸν β, θὰ ἔχωμεν

$\beta+\alpha+(-\beta)=\alpha+(-\beta)+(+\beta)=\alpha$, ἐπειδὴ εἶναι $(+\beta)+(-\beta)=0$.

Παρατηρητέον ὅτι :

Δοθέντος οἱουδήποτε σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ὑπάρχει εἷς καὶ μόνον ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸν δοθέντα, δίδει ἄθροισμα τὸν ἴδιον. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς εἶναι τὸ 0.

Πράγματι, ἔχομεν π.χ. $\alpha+0=\alpha$, $\beta+0=\beta$ κ.τ.λ. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι :

Τὸ μηδὲν εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς οἱονδήποτε ἄλλον, δίδει ἄθροισμα τὸν ἄλλον.

§ 14. Καλοῦμεν διαφορὰν σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον α, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος, προστιθέμενος εἰς τὸν β, δίδει ἄθροισμα τὸν α.

Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, εἶναι ὁ $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$. Ὥστε ἡ διαφορὰ τοῦ β ἀπὸ τὸν α εἶναι $\alpha - \beta$. Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἡ διαφορὰ α μεῖον β εὑρίσκεται, ἂν εἰς τὸν α προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ β.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον α, καλεῖται **ἀφαίρεσις·** ὁ α καλεῖται **μειωτέος,** ὁ β **ἀφαιρετέος,** τὸ δὲ σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ − (πλήν), τιθέμενον μεταξὺ τοῦ α καὶ β, ἤτοι γράφομεν $\alpha - \beta$

Παραδείγματα: $(+8)-(+5)=(+8)+(-5)=(+3)=3$, $(-5)-(-6)=(-5)+(+6)=1$, $(-3)-0=(-3)+0=(-3)=-3$.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)-\left(+\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{4}{6}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{5}{6}$$

$0-(-7)=0+(+7)=(+7)=+7=7$, $0-(+5)=0+(-5)=(-5)=-5$.

§ 15. *Παρατήρησις.* Ἡ διαφορὰ ἀριθμοῦ τινος π.χ. α ἀπὸ τὸ 0 ἰσοῦται μὲ $0-\alpha=-\alpha$, ἤτοι μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ α. Ἄρα:

Ἐνῷ εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ τινος διαφόρου τοῦ 0. π.χ. τοῦ 3 ἀπὸ τὸ 0, εἶναι ἀδύνατος, μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἡ ἀφαίρεσις αὕτη καὶ πᾶσα ὁμοία εἶναι δυνατή.

Π.χ. $0-(+3)=0+(-3)=-3$, $0-(+1)=0+(-1)=-1$,
$0-4=-4$, $0-(+3{,}25)=0+(-3{,}25)=-3{,}25$.

§ 16. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ διὰ τὴν ἀφαίρεσιν σχετικῶν ἀριθμῶν, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 28. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί:
α΄) $8-(-4)$ β΄) $-18-(+19)$ γ΄) $-14-(-7)$ δ΄) $0{,}9-(-9{,}13)$

ε΄) 2,25 − (− 1,65) στ΄) $2\frac{5}{6} - \left(-3\frac{1}{3}\right)$ ζ΄) $9\frac{1}{7} - \left(-7\frac{1}{3}\right)$

η΄) Δείξατε, ὅτι εἶναι $\alpha - \beta = (\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 29. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α΄) 120+19−(−18) β΄) −17−(−4)+(+8) γ΄) $-5\frac{1}{2} + \left(-6\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{5}\right)$

δ΄) Δείξατε, ὅτι εἶναι $\alpha - \beta = (\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$.

30. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

α΄) 2 − 7 β΄) 8 − 10 γ΄) 1,5 − 2,2 δ΄) 15 − 230 ε΄) 1,25 − 9,65

στ΄) Δείξατε, ὅτι εἶναι $\alpha-(\beta+\gamma) = (\alpha-\beta)-\gamma$.

Ὁμὰς τρίτη. 31. Αὐξάνει τις τὸ ἐνεργητικόν του καὶ ἐλαττώνει τὸ παθητικόν του κατὰ 1 564,20 δρχ. Τίνα μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του ;

32. Ἐλαττώνει τις τὸ ἐνεργητικόν του κατὰ 15 484,3 δρχ. καὶ αὐξάνει τὸ παθητικόν του κατὰ 162 384,70 δρχ. Ποίαν μεταβολὴν παθαίνει ἡ περιουσία του ;

33. Ἀναχωρεῖ τις ἔκ τινος ὡρισμένου σημείου Α. Βαδίζει ἐπ' εὐθείας ὁδοῦ 238 μέτρα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Β. Πόσα μέτρα πρέπει νὰ βαδίσῃ ἐκ τοῦ Β πρὸς τὰ ἀριστερὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ἀπέχον ἀπὸ τοῦ Α 4 846 μέτρα :

34. Χάνει τις 15 016,3 δρχ. Πόσα πρέπει νὰ κερδίσῃ διὰ νὰ ἔχῃ 8 958 ,65 δρχ. περισσοτέρας τῶν ὅσων εἶχεν ἀρχικῶς ;

I. ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ

§ 17. Ἔστω τὸ (+5)−(+3)−(−4). Διὰ νὰ εὕρωμεν αὐτὸ ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ (+5) νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ (+3), ὅτε εὑρίσκομεν (+2). Ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο (+2) νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ (−4) καὶ εὑρίσκομεν (+2) − (−4) = (+2)+(+4) = +6.

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις καὶ ἄλλαι παρόμοιαι λέγονται **ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα.** Ἤτοι :

Ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα λέγεται μία ἀκολουθία προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται ἐπὶ σχετικῶν ἀριθμῶν.

§ 18. Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\alpha-(+\beta)+(-\gamma)-(-\delta)$ Θὰ δείξωμεν, ὅτι τοῦτο ἰσοῦται μὲ $\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+(+\delta)$

Διότι

Διά τὴν εὕρεσιν τοῦ	Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ
$\alpha-(+\beta)+(-\gamma)-(-\delta)$	$\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+(+\delta)$

1) Ἀπὸ τὸ α θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(+\beta)$.

1) Εἰς τὸ α θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-\beta)$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ α τὸ $(+\beta)$ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως).

2) Εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρεθῇ, θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-\gamma)$.

2) Εἰς τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ εὑρεθῇ θὰ προσθέσωμεν τὸ $(-\gamma)$.

3) Ἀπὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ $(-\delta)$

3) Εἰς τὸ νέον ἐξαγόμενον θὰ προσθέσωμεν τὸ $(+\delta)$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ $(-\delta)$.

Ἑπομένως εἶναι : $\alpha-(+\beta)+(-\gamma)-(-\delta)=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+(+\delta)$.

Ἤτοι, ἓν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλο ἴσον του ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἀντιστρόφως. Π. χ.

$$\alpha+(-\beta)+(+\gamma)+(-\delta)=\alpha-(+\beta)+(+\gamma)-(+\delta).$$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Ὅταν εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀριθμός τις ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ + τότε ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς προστίθεται, ἐνῷ ὅταν ἔχῃ πρὸ αὐτοῦ τὸ — τότε ἢ ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ἢ προστίθεται ὁ ἀντίθετός του.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁδηγούμενοι δεχόμεθα ὅτι, ἂν α εἶναι ἀριθμός τις (διάφορος τοῦ 0), τὸ $+\alpha$ παριστάνει τὸν α, ἐνῷ τὸ $-\alpha$ παριστάνει τὸν ἀντίθετον τοῦ α. Οὕτως ἔχομεν : $+(+5)=+5$.

$$-(+7)=-7, \quad +(-3)=-3, \quad -(-6)=6.$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Δύο διαδοχικὰ σύμβολα εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐκ τῶν + καὶ —, δύνανται νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ ἓν μόνον, τὸ + μέν, ἂν τὰ δύο διαδοχικὰ σύμβολα εἶναι τὰ αὐτά, μὲ τὸ — δέ, ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα δὲν εἶναι τὰ αὐτά.

Ἤτοι : 1) Ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $+\ +$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $+$.

2) Ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $-\ -$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $+$.

3) Ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $+\ -$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $-$, καὶ

4) Ἂν τὰ διαδοχικὰ σύμβολα (εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα) εἶναι μὲ τὴν σειρὰν $-$ $+$, θὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ $-$.

Οὕτως ἔχομεν $(+3)-(-6)+(-8)-(+7)-(-1)=$
$(+3)+(+6)+(-8)+(-7)+(+1)=3+6-8-7+1=10-15=-5$

§ 19. Καλοῦμεν **ὅρους** ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τοὺς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι τὸ ἀποτελοῦν, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει τὸ πρόσημόν του $+$ ἢ $-$.

Οὕτως εἰς τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\alpha-\beta+\gamma-\delta-\varepsilon$ οἱ ὅροι του εἶναι α, $-\beta$, γ, $-\delta$, $-\varepsilon$. Κατὰ ταῦτα.

Πᾶν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του.

Π.χ. τὸ $(+5)-(-4)+\left(+\frac{2}{5}\right)-(-8)$ εἶναι ἄθροισμα τῶν $(+5)$, $-(-4)$, $\left(+\frac{2}{5}\right)$, $-(-8)$, ἤτοι τῶν $+5$, $+4$, $+\frac{2}{5}$, $+8$, καὶ ἔχομεν

$$(+5)-(-4)+\left(+\frac{2}{5}\right)-(-8)=5+4+\frac{2}{5}+8=17+\frac{2}{5}=17\,\frac{2}{5}.$$

Συμφώνως μὲ τὰς ἰδιότητας διὰ τοὺς προσθετέους μιᾶς προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν, ἔχομεν ὅτι :

Εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ὅρων του. Π.χ. εἶναι $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\eta=\varepsilon-\beta+\gamma-\eta+\alpha-\delta$.

Εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν μερικοὺς ὅρους του μὲ τὸ ἄθροισμά των, καὶ ἀντιστρόφως, δυνάμεθα εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν ἕνα ὅρον μὲ τὸ ἄθροισμα ἄλλων, τῶν ὁποίων αὐτὸς εἶναι ἄθροισμα.

Ἤτοι :

Ἰσχύει καὶ δι' ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν προσθετέων καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως προσθετέων διὰ τοῦ ἀθροίσματός των.

Π.χ. $-(-5)+(-7)-(+4)=5-7-4=(5-7)-4=-2-4=-6$,
$10-(+7)+(-3)=(7+3)-(+7)+(-3)=7+3-7-3=10-10=0$.

Ἀφοῦ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄλλο ἴσον του ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως, ἕπεται ὅτι :

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα εἰς σχετικὸν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν σχετικὸν ἀριθμὸν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, ἕκαστον ὅπως εἶναι εἰς τὸ ἄθροισμα

Π. χ. $\alpha + (\beta-\gamma+\delta-\varepsilon) = \alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon$.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δοθέντα ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μὲ ὅρους τοὺς τῶν δοθέντων ἀθροισμάτων καὶ ἕκαστον ὅπως εἶναι εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα, εἰς τὸ ὁποῖον ὑπάρχει.

Π. χ. $(\alpha+\beta-\gamma+\delta)+(-\varepsilon+\zeta-\eta) = \alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon+\zeta-\eta$.

§ 20. Ὅταν εἰς δοθὲν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν ὅρων του, προκύπτει ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀντίθετον τοῦ δοθέντος (ἤτοι τὸ ἐξαγόμενόν του θὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀντίθετος τοῦ ἐξαγομένου ἀριθμοῦ ἐκ τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος).

Διότι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων του, ἔστω δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τούτου Α. Ἔπειτα θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ὅρων του, καὶ ἔστω ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τούτου Β. Ἂν μὲν εἶναι Α μεγαλύτερον τοῦ Β, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $+(A-B)$. Ἂν δὲ εἶναι τὸ Α μικρότερον τοῦ Β, τὸ δοθὲν ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $-(B-A)$.

Ἂν εἶναι $A = B$, τότε τὸ δοθὲν ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ 0.

Ὅταν ἀλλάξωμεν τὸ σῆμα ἑκάστου ὅρου τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος, οἱ θετικοὶ ὅροι θὰ γίνουν ἀρνητικοὶ καὶ οἱ ἀρνητικοὶ θὰ γίνουν θετικοί. Εἰς τὸ νέον αὐτὸ ἄθροισμα, τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ὅρων του θὰ ἔχῃ ἀπόλυτον τιμὴν Β, τὸ δὲ τῶν ἀρνητικῶν ὅρων αὐτοῦ θὰ ἔχῃ ἀπόλυτον τιμὴν Α.

Ἂν λοιπὸν εἶναι ὁ Α μεγαλύτερος τοῦ Β, τὸ ἐξαγόμενον (τοῦ νέου ἀθροίσματος) θὰ ἰσοῦται μὲ $-(A-B)$, ἂν δὲ τὸ Α εἶναι μικρότερον τοῦ Β, τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ $+(B-A)$, ἂν δὲ εἶναι $A = B$, τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ 0.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, καὶ κατὰ τὰς δύο περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον τοῦ δι' ἀλλαγῆς τοῦ προσήμου τῶν ὅρων προκύπτοντος ἀθροίσματος εἶναι ἀντίθετον τοῦ ἐξαγομένου τοῦ δοθέντος ἀθροίσματος, ὅταν δὲ $A = B$, ἔχομεν ἐξαγόμενον 0, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀντίθετον τὸ 0.

§ 21. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἀπὸ σχετικὸν ἀριθμόν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοὺς

ὅρους τοῦ ἀθροίσματος καὶ καθένα μὲ ἠλλαγμένον τὸ πρόσημον.

Π. χ. ἔχομεν $-\alpha-(\beta-\gamma+\delta)=-\alpha-\beta+\gamma-\delta$.

Διότι (κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως) ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ $-\alpha$ τὸ ἀντίθετον τοῦ $\beta-\gamma+\delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι, ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν, τὸ $-\beta+\gamma-\delta$.

§ 22. Ἐνίοτε παραλείπομεν παρένθεσιν, ἐντὸς τῆς ὁποίας ὑπάρχει ἄθροισμα ἀριθμῶν, καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς ὑπάρχῃ τὸ $+$, γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος ἕκαστον μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σῆμα, ἂν δὲ πρὸ αὐτῆς ὑπάρχῃ τὸ $-$, τότε γράφομεν τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος, ἀλλ' ἕκαστον μὲ ἀντίθετον τοῦ πρὸ αὐτοῦ προσήμου. Π.χ. ἔχομεν:

$+(3-5+6-7)=3-5+6-7, \quad (-\alpha-\beta+\gamma-\delta)=-\alpha-\beta+\gamma-\delta,$

$-(3-5+6-7)=-3+5-6+7, \quad -(-\alpha-\beta+\gamma-\delta)=\alpha+\beta-\gamma+\delta.$

Ἀ ν τ ι σ τ ό φ ω ς. Ἐνίοτε εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα γράφομεν τοὺς ὅρους του ἐντὸς παρενθέσεως (ἢ ἀγκυλῶν [ ]), καὶ ἂν μὲν πρὸ αὐτῆς θέσωμεν τὸ $+$, ἕκαστος ὅρος ἐντὸς αὐτῆς θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ εἰς τὸ δοθὲν ἄθροισμα, ἂν δὲ θέσωμεν πρὸ αὐτῆς τὸ $-$, ἕκαστος τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων θὰ ἔχῃ τὸ ἀντίθετον ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ δοθὲν ἄθροισμα.

Π. χ. ἔχομεν $-3+5-7-8+15-6=-3+5-7+(-8+15-6)$

$$-3+5-7-8+15-6=-3+5-7-(8-15+6)$$

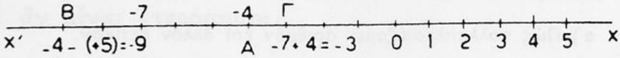
$$\alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon=\alpha+\beta+(-\gamma+\delta-\varepsilon).$$

$$\alpha+\beta-\gamma+\delta-\varepsilon=\alpha+\beta-(\gamma-\delta+\varepsilon).$$

II. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ Η ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

§ 23. Δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γεωμετρικῶς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ὡς ἑξῆς:

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τὴν διαφορὰν $-4-(+5)=-4-5=-9$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -4, ἔστω τὸ Α, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν καὶ προχωροῦμεν ἐπ' αὐτῆς ἀριστερὰ αὐτοῦ κατὰ 5 μονάδας, ὅτε εὑρίσκομεν, ἔστω τὸ σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν διαφορὰν $-4-(+5)=-9$ (σχ. 5). Διὰ νὰ παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν π.χ. $-7-(-4)=-7+4=-3$, προχωροῦμεν ἐκ τοῦ σημείου, ἔστω Δ, ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν -7 κατὰ τέσσαρας μονάδας πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ εὑρίσκομεν σημεῖον, ἔστω Γ, παριστάνον τὴν διαφορὰν -3.



Σχ. 5

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐργαζόμεθα διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἐπὶ τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις

35. Εὕρετε τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα καὶ παραστήσατε αὐτὰ γεωμετρικῶς.

α′) $2-3+5-7-6+7-11$ β′) $-3-2\frac{1}{2}+4-8-7-\frac{4}{5}$

γ′) $(-4+5-8)+(3-2-7+4)$ δ′) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-4\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+5-8\right)$

ε′) $\left(3-5-6-7\frac{1}{2}-3\right)-\left(2-6+4-\frac{1}{2}\right)$ στ′) $-\left(3\frac{1}{2}-4-6\right)+7-\left(3-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-3\right)$.

36. Εἰς τὸ $3-5-4+7-8-1-15$ θέσατε μόνον τοὺς ὅρους τρίτον, πέμπτον καὶ ἕκτον ἐντὸς παρενθέσεως καταλλήλως, ὥστε πρὸ αὐτῆς νὰ τεθῇ τὸ $+$ καὶ ἔπειτα πρὸ τῆς ἄλλης παρενθέσεως τὸ $-$.

37. Εἰς τὸ ἄθροισμα $-6\frac{1}{2}+7-12-7+5-\frac{3}{4}$ θέσατε μόνον τοὺς ὅρους πρῶτον, τρίτον καὶ τελευταῖον καταλλήλως ἐντὸς παρενθέσεως, ὥστε πρὸ αὐτῆς νὰ τεθῇ τὸ $-$, καὶ ἔπειτα πρὸ τῆς ἄλλης παρενθέσεως νὰ τεθῇ τὸ $+$.

3. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

§ 24. Πολλαπλασιασμὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ ἄλλον β λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν σχηματίζεται ἐκ τοῦ α τρίτος ἀριθμός, ὅπως ὁ β δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐκ τῆς θετικῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ λέγονται **παράγοντες** (ὁ α **πολλαπλα-**

σιαστέος καὶ ὁ β **πολλαπλασιαστής**). Ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται **γινόμενον,** τὸ δὲ σύμβολον τῆς πράξεως εἶναι τὸ · ἢ τὸ × (ἐπί), τιθέμενον μεταξὺ τῶν παραγόντων. Οὕτως ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν α καὶ β συμβολίζεται μὲ $\alpha \times \beta$ ἢ $\alpha \cdot \beta$, τὸ δὲ γινόμενον αὐτῶν μὲ $\alpha\beta$. Ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων εἶναι 0, τὸ γινόμενον ὁρίζεται ἴσον μὲ 0. Ἤτοι π. χ. $\alpha \cdot 0 = 0$, $0 \cdot \alpha = 0$, $(-3) \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 0 = 0$.

α') Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον θετικόν.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, τὸ γινόμενον, π.χ. τοῦ $(+4)$ ἐπὶ ἄλλον π.χ. τὸν $(+3)$, ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τρίτου ἀριθμοῦ, ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου $(+4)$, ὅπως ὁ δεύτερος $(+3)$ δύναται νὰ σχηματισθῇ ἀπὸ τὴν $+1$. Ἐπειδὴ ὁ $(+3) = 1+1+1$, θὰ ἔχωμεν $(+4) \cdot (+3) = (+4) + (+4) + (+4) = +12$.

Ὁμοίως $(-8) \cdot (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24$.

Π.χ. τὸ $(-9) \cdot \frac{3}{4}$ σημαίνει νὰ εὕρωμεν τὸ τέταρτον τοῦ -9 καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3. Ἤτοι ἔχομεν: $(-9) \cdot \frac{3}{4} = -\frac{9}{4} \cdot 3 = \left(-\frac{27}{4}\right) = -6\frac{3}{4}$. Ἑπομένως:

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον θετικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ τοῦ πολλαπλασιαστέου.

β) Πῶς πολλαπλασιάζομεν ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικόν.

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τὸ γινόμενον $(+8) \cdot (-3)$.

Τὸ (-3) δύναται νὰ γίνῃ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν λάβωμεν τὴν ἀντίθετόν της -1 καὶ ταύτην ἐπαναλάβωμεν ὡς προσθετέον τρίς. Ἄρα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $(+8) \cdot (-3)$, θὰ λάβωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ $(+8)$, δηλαδὴ τὸν (-8), καὶ τοῦτον θὰ ἐπαναλάβωμεν τρὶς ὡς προσθετέον. Ἤτοι θὰ εἶναι:

$$(+8) \cdot (-3) = (-8) \cdot (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = -24.$$

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον λέγομεν, ὅτι $(-8) \cdot (-3) = (+8) \cdot 3 = 24$. Ἄρα:

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄλλον ἀρνητικὸν ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ ἀντίθετον τοῦ πολλαπλασιαστέου.

Π.χ. εἶναι $(+9)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{45}{6}$, $(-5)\cdot(-6)=30$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν τὸν ἑξῆς γενικὸν κανόνα:

§ 25. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο σχετικοὺς ἀριθμούς, πολλαπλασιάζομεν τὰς ἀπολύτους τιμάς των καὶ τὸ γινόμενον λαμβάνομεν μὲ τὸ + μὲν ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δὲ ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

§ 26. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι $\alpha\beta=\beta\alpha$. Διότι κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ γινομένου τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο παραγόντων α, β εἶναι ἀδιάφορον ποῖος ἐκ τῶν παραγόντων λαμβάνεται κατὰ σειρὰν πρῶτος ἢ δεύτερος. Ἑπομένως, ὁ **νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων (δι' ἀριθμοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς), ἰσχύει καὶ διὰ δύο σχετικοὺς παράγοντας.**

§ 27 Γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὁρίζομεν καθὼς καὶ εἰς τὴν Ἀριθμητικήν.

Π. χ. $3\cdot(-5)\cdot(-4)=[3\cdot(-5)]\cdot(-4)=(-15)\cdot(-4)=60$.

Ἐν γένει ἔχομεν: $\alpha\beta\gamma=(\alpha\beta)\cdot\gamma$

$\alpha\beta\gamma\delta=(\alpha\beta)\cdot\gamma\cdot\delta=(\alpha\beta\gamma)\cdot\delta=(\alpha\beta\gamma\delta)$

Ἤτοι: α') $(-3)\cdot(+5)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-5)=(-15)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-5)$ $=(+30)\cdot(-1)\cdot(-5)=(-30)\cdot(-5)=+150$.

β') $(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(+5)=(+6)\cdot(-1)\cdot(+5)=(-6)\cdot(+5)=-30$

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι:

Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ἔχει ἀπόλυτον μὲν τιμὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων, πρόσημον δὲ τὸ + μὲν ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς ἢ 0, τὸ — δὲ ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον πολλῶν σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἀλλαχθῇ ἡ θέσις τῶν παραγόντων.

Ἂν εἷς τῶν παραγόντων γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι 0 τὸ γινόμενον εἶναι 0.

Π. χ. $(+5)\cdot(-3)\cdot0\cdot(+6)=(-5)\cdot0\cdot(+6)=0\cdot(+6)=0$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΕΠΙ + 1 Ή ΕΠΙ − 1

§ 28. Παρατηροῦμεν ὅτι, πολλαπλασιασμὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ + 1 μὲν σημαίνει αὐτὸν τὸν ἀριθμόν, ἐπὶ − 1 δὲ τὸν ἀντίθετόν του. Οὕτως ἔχομεν $\alpha\cdot(+1)=\alpha,\ \alpha\cdot(-1)=-\alpha\cdot(+1)=-\alpha$,

$$1\cdot(+\alpha)=(+\alpha)\cdot(+1)=+\alpha,$$
$$(-1)\cdot(+\alpha)=(+\alpha)\cdot(-1)=(-\alpha)\cdot(+1)=-\alpha,$$
$$(-1)\cdot(-\alpha)=(-\alpha)\cdot(-1)=(+\alpha)\cdot(+1)=+\alpha,$$

Π.χ. εἶναι : $(-4)\cdot 1=1\cdot(-4)=(-1)\cdot 4=-4,\ (+5)\cdot 1=1\cdot(+5)=5$

$$(-5)\cdot(-1)=(-1)\cdot(-5)=+5,\quad \frac{7}{5}\cdot(-1)=(-1)\cdot\left(+\frac{7}{5}\right)=-\frac{7}{5}$$

Αἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἡ ἀπόδειξις δὲ εἶναι εὔκολος.

Οὕτω π.χ., ἂν $\alpha=\beta$, θὰ εἶναι καὶ $\rho\alpha=\rho\beta$, ὅπου α, β, ρ εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 38. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α) $(-5)\cdot(+8)$ β) $(+18)\cdot(-4)$ γ) $(-7)\cdot(+15)$

δ) $(-7)\cdot(-7)$ ε) $(8{,}4)\cdot(-6{,}6)$ στ) $(-9{,}8)\cdot(8{,}5)\cdot(4{,}3)\cdot(2{,}3)$

ζ) Δείξατε ὅτι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta=\gamma\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\delta$, ὅταν α, β, γ, δ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ὁμὰς δευτέρα 39. Ὁμοίως εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α) $(-3{,}9)\cdot(-7{,}6)$ β′) $(+9{,}46)\cdot(-3{,}5)$

γ′) $(-9)\cdot(-7)\cdot(-3)$ δ′) $\left(+4\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{6}\right)\cdot(-6{,}8)$

40. Ὁμοίως τά:

α′) $(-16)\cdot 14\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{8}\right)$ β′) $(-3{,}1)\cdot(+6)\cdot(+8)\cdot(-7)$

γ′) $(+7)\cdot(-4)\cdot(+8)\cdot(+5)$ δ′) $0{,}6\cdot\Big[(+9{,}74)-0{,}9\cdot(+6{,}5)\Big]\cdot 0{,}3$

41. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα:

α′) $(-3)\cdot(-4{,}1)\cdot(-2)+8\cdot(-2{,}4)\cdot(-5)$

β′) $(-5{,}1)\cdot(-3{,}2)\ (-1)-12\cdot(-3{,}2)\cdot(-4)\cdot(-7)-20$

42, Εὕρετε τά: α′) $\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(2+5-8)$

β′) $(-32)\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-0{,}4\right)-\frac{4}{5}\Big[0{,}01+0{,}01\cdot(-5{,}4)\Big]$

43. Εὕρετε τὸ $0{,}53\cdot(-12,)\cdot(-3-4)+19\cdot(-0{,}45)$.

44. Εὕρετε τά :

α′) $(-5)\cdot(-8)$ β′) $\left(-\frac{53}{4}\right)\cdot 1$ γ′) $\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$

δ′) $(-3)\cdot(-5)\cdot 4\cdot 0$ ε′) $(-3)\cdot 6\cdot 0\cdot(-7)$

στ′) Δείξατε, ὅτι εἶναι $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon=(\alpha\cdot\varepsilon)\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$, ὅπου α, β, γ, δ, ε εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

ζ′) Δείξατε, ὅτι $(\alpha\beta\gamma)\cdot(\delta\varepsilon\zeta)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\varepsilon\cdot\zeta$, ὅπου οἱ παράγοντες α, β, γ καὶ οἱ δ, ε, ζ, εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

4. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

§ 29. Ὡς γνωστόν, ἀντίστροφος ἀριθμὸς π.χ. τοῦ 5 (τῆς Ἀριθμητικῆς) καλεῖται τὸ $\frac{1}{5}$, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν 5, δίδει γινόμενον $\frac{1}{5}\times 5=1$. Ἔστω σχετικὸς ἀριθμὸς α, διάφορος τοῦ μηδενός. Τὴν ἔκφρασιν **διάφορος** θὰ παριστάνωμεν μὲ τὸ σύμβολον $\neq$, θὰ γράφωμεν δὲ $\alpha\neq 0$ καὶ θὰ ἀπαγγέλλωμεν : α διάφορον τοῦ μηδενός. Καλοῦμεν **ἀντίστροφον** τοῦ α ($\neq 0$) τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν ἀντίστροφον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ α καὶ πρόσημον τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τοῦ α, ἤτοι τὸν $\frac{1}{\alpha}$. Π.χ. ἀντίστροφος τοῦ $-\frac{1}{8}$ εἶναι ὁ -8, τοῦ -6 ὁ $-\frac{1}{6}$, τοῦ $-3{,}4$ ὁ $-\frac{1}{3{,}4}=$ $=-\frac{10}{34}=-\frac{5}{17}$, τοῦ $+1$ ὁ $+1$ καὶ τοῦ -1 ὁ -1.

Τὸ γινόμενον σχετικοῦ ἀριθμοῦ ($\neq 0$) ἐπὶ τὸν ἀντίστροφόν του ἰσοῦται μὲ 1. Π.χ. τὸ γινόμενον $8\cdot\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$, τοῦ $-\frac{1}{8}\cdot(-8)=$ $=+\frac{8}{8}=+1$ κ.τ.λ.

Δοθέντων δύο σχετικῶν ἀριθμῶν α καὶ β (ἐνῷ εἶναι $\beta\neq 0$) ὑπάρχει τρίτος σχετικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β, δίδει γινόμενον τὸν α.

Πράγματι, ἂν παραστήσωμεν μὲ γ τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\gamma\cdot\beta=\alpha$. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἐπὶ $\frac{1}{\beta}$, ὅτε λαμβάνομεν :

$$\gamma\cdot\beta\cdot\frac{1}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta} \quad \text{ἢ} \quad \gamma\cdot\left(\beta\cdot\frac{1}{\beta}\right)=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}, \quad \text{ἢ} \quad \gamma=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot$$

Καὶ τῷ ὄντι, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν γ ἢ τὸν ἴσον του $\frac{\alpha}{\beta}$ ἐπὶ β, ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \beta = \alpha \cdot \frac{\beta}{\beta} = \alpha$.

§ 30. Διαίρεσις σχετικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β ($\neq 0$) λέγεται ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τρίτος σχετικὸς ἀριθμὸς γ, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν β, δίδει γινόμενον τὸν α.

Ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ὁ α λέγεται **διαιρετέος,** ὁ β **διαιρέτης,** καὶ ὁ ζητούμενος γ **πηλίκον,** τὸ δὲ σύμβολον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ (:) **(διὰ ἢ πρὸς)** καὶ γράφεται μεταξὺ τῶν α καὶ β. Τὸ πηλίκον τοῦ α : β συμβολίζομεν καὶ μὲ $\frac{\alpha}{\beta}$, λέγεται δὲ ἡ παράστασις αὐτὴ κλασματικὴ ἢ **ἀλγεβρικὸν κλάσμα** μὲ **ἀριθμητὴν** τὸν α καὶ **παρονομαστὴν** τὸν β, καὶ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \frac{1}{\beta}$

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τὸ πηλίκον π.χ. $(+8) : (+2)$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ πρόσημον +. Διότι τὸ γινόμενον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην (+2) πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἀφοῦ ὁ διαιρετέος (+8) εἶναι θετικός. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ 2 πρέπει νὰ δίδῃ γινόμενον 8, θὰ εἶναι ἴση μὲ $8 : 2 = 4$.

Ἤτοι ἔχομεν $(+8) : (+2) = (+4)$.

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται $(+8) : (-2)$. Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον –. Διότι τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν διαιρέτην (–2) πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἐπειδὴ ὁ διαιρετέος (+8) εἶναι θετικός.

Ἄρα ἔχομεν : $(+8) : (-2) = (-4)$. Ἐπίσης εὑρίσκομεν, σκεπτόμενοι ὁμοίως, ὅτι εἶναι :

$$(-8) : (-2) = +4, \quad (-5) : 2 = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}.$$ Ἄρα :

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο δοθέντων σχετικῶν ἀριθμῶν ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, καὶ πρόσημον θετικὸν μὲν ἂν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, ἀρνητικὸν δὲ ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

Παραδείγματα : $(-5) : (+6) = -\frac{5}{6}$, $\left(-\frac{1}{2}\right) : \left(+\frac{5}{6}\right) = -\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{6}{5} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$, $(-15) : (-5) = +\frac{15}{5} = +3$.

Ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ τοῦ 0 εἶναι **ἀδύνατος.** Διότι ἂν π.χ. ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $(-6):0$, ζητεῖται ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0, δίδει γινόμενον τὸ -6. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0.

Ἀλλ' οὐδὲ νὰ δημιουργήσωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν εἶναι δυνατόν, ὥστε νὰ καταστήσωμεν τὴν διαίρεσιν διὰ τοῦ 0 δυνατήν. Διότι, ἂν π.χ. ὑπῆρχε νέος τοιοῦτος ἀριθμός, ἔστω ὁ α, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι πηλίκον τοῦ $-6:0$, θὰ ἔχωμεν $-6=0\cdot\alpha$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἴσους τούτους ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 5, προκύπτουν ἴσοι. Ἤτοι $-6\cdot5=0\cdot\alpha\cdot5$. Ἀλλάσσοντες τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων παραγόντων, εὑρίσκομεν $-6\cdot5=0\cdot5\cdot\alpha=0\cdot\alpha$ (ἐπειδὴ εἶναι $0\cdot5=0$). Ἀλλὰ τὸ μὲν $-6\cdot5=-30$, τὸ δὲ $0\cdot\alpha=-6$ (ἐξ ὑποθέσεως), ἄρα θὰ ἔχωμεν $-30=-6$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ διαίρεσις τοῦ 0 διά τινος ἀριθμοῦ $(\neq 0)$ δίδει πηλίκον 0. Οὕτω π.χ. $0:(-7)=0$. Διότι εἶναι $0\cdot(-7)=0$.

Αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς ἀληθεύουν καὶ ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι σχετικοί, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 45. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα:

α') $(+2):(-7)$ β') $(-45):(+9)$ γ') $(-49):49$ δ') $(-1944):(-36)$

ε') $(+0{,}95):(+0{,}5)$ στ') $(-349):1{,}8$ ζ') $(-1425):(-32{,}1)$

η') Νὰ δειχθῇ ὅτι $\alpha:\beta=(\alpha\cdot\gamma):(\beta\cdot\gamma)$, ἂν τὰ α, β, γ εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Ὁμὰς δευτέρα. 46. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα:

$$\alpha')\ 3\frac{2}{3}:\left(-1\frac{4}{9}\right):8 \qquad \beta')\ (-9{,}6):0{,}7:6\frac{1}{2}$$

$$\gamma')\ (-1):4:(-3):\left(-\frac{1}{3}\right):(+2)$$

47. Ὁμοίως τά:

α') $(-34):(-9-8)$, β') $(-18):9-(-4):2$, γ') $(-25):(-5):(-5):(-5)$

48. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος x, ὥστε νὰ εἶναι:

α') $(-40)\cdot x=160$ β') $(-6)\cdot x=24$ γ') $12\cdot x=48$

δ') $(-3)\cdot x=(-15)$ ε') $(3{,}14)\cdot x=-18{,}84$ στ') $\left(-\frac{36}{7}\right)\cdot x=\frac{7}{12}$.

49. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

α') $\alpha:\beta=(\alpha:\rho):(\beta:\rho)$, ἔνθα α, β, ρ, εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοὶ $(\rho\neq0)$.

β') $(\alpha\beta\gamma):\alpha=\beta\gamma$ γ') $\alpha:(\beta\cdot\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma$.

Δ' ΚΛΑΣΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ *

§ 31. Τὰ κλάσματα μὲ ὅρους σχετικοὺς ἀριθμούς, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν **ἀλγεβρικὰ κλάσματα,** ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν κλασμάτων μὲ ὅρους ἀριθμοὺς τῆς Ἀριθμητικῆς ἀποδεικνύονται δὲ αὐταὶ εὐκόλως καὶ διὰ τοῦτο ἀναγράφομεν κατωτέρω τὰς κυριωτέρας ἐξ αὐτῶν.

1η. Πᾶς σχετικὸς ἀριθμὸς α π.χ. δυνατὸν νὰ θεωρηθῇ ὡς κλάσμα μὲ παρονομαστὴν 1, διότι $\frac{\alpha}{1} = \alpha$.

2α. Ἐὰν εἰς κλάσμα ὁ παρονομαστής του εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμητήν του, τὸ κλάσμα ἰσοῦται μὲ 1, ἤτοι ἔχομεν π.χ. $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$.

3η. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἢ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$) χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος.

Οὕτως ἔχομεν π. χ. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \gamma}{\beta \cdot \gamma}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}$, $\gamma \neq 0$.

4η. Δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα τῶν δύο ὅρων κλάσματος χωρὶς νὰ μεταβληθῇ ἡ ἀξία του. Διότι ἀλλαγὴ τῶν σημάτων τῶν δύο ὅρων τοῦ κλάσματος εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸν πολλαπλασιασμὸν ἑκάστου ὅρου ἐπὶ (–1).

Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}, \quad \frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}, \quad \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}, \quad \frac{-\frac{4}{9}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}.$$

5η. Δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἓν κλάσμα διὰ διαιρέσεως τῶν ὅρων του μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ἂν διαιροῦνται ἀκριβῶς.

Οὕτως ἔχομεν π.χ. $-\frac{6}{4} = -\frac{6:2}{4:2} = -\frac{3}{2}$,

$$\frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{\alpha \cdot \delta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\delta}, \qquad \frac{4 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha \cdot \delta \cdot \gamma} = \frac{4 \cdot \beta}{\delta \cdot \gamma}.$$

* Πρῶτος ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος (τῆς Ἀλεξανδρείας) ἔδωκεν αὐτοτελῆ σημασίαν εἰς τὰ κλάσματα.

6η. Δοθέντων κλασμάτων (περισσοτέρων τοῦ ἑνός) μὲ διαφόρους παρονομαστάς, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσάριθμα αὐτῶν καὶ ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς αὐτά, ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου τῶν δοθέντων μὲ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων.

Π.χ. ἔχομεν γιὰ τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\cdot\beta_1\cdot\beta_2}{\beta\cdot\beta_1\cdot\beta_2},\ \frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_1\cdot\beta\cdot\beta_2}{\beta_1\cdot\beta\cdot\beta_2},\ \frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_2\cdot\beta\cdot\beta_1}{\beta_2\cdot\beta\cdot\beta_1},$$

εἶναι δὲ τὰ εὑρεθέντα ὁμώνυμα.

Εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν δοθέντα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα, διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου τῶν παρονομαστῶν του (ἂν εἶναι τοῦτο σκόπιμον).

7η. Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα μὲ ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων.

Π.χ. ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\gamma=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{1}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta}$.

8η. Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀριθμὸν διὰ κλάσματος, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα τοῦ δοθέντος.

Οὕτως ἔχομεν $\frac{\gamma}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\gamma\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\gamma\cdot\beta}{\alpha}$, $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right):\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)=\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)}=$

$$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{\alpha\cdot\beta'}{\beta\cdot\alpha'},$$

$$1:\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\beta}:\gamma=\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\gamma}=\frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{\gamma}{1}\right)}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha}{\beta\cdot\gamma}.$$

Ἀσκήσεις

50. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν

$$\frac{-25}{-15}\qquad\frac{-3}{48}\qquad\frac{-121}{-4.11}\qquad\frac{5}{-8}\cdot\frac{4}{-9}\cdot\frac{1}{2}\qquad\frac{3}{-2}\cdot\frac{-8}{5}\cdot\frac{2}{-11}\cdot\frac{11}{-120}$$

51. Τρέψατε εἰς ὁμώνυμα τὰ ἑπόμενα κλάσματα μὲ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν των :

$α')\ \frac{2}{-3},\ \frac{-5}{8},\ \frac{1}{-2},\qquad δ')\ \frac{-3}{8},\ \frac{4}{-25},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{3}$

$β')\ \frac{-3}{4},\ \frac{-4}{9},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{5}\qquad ε')\ \frac{-5}{7},\ \frac{4}{21},\ \frac{-2}{3},\ \frac{-5}{8},\ \frac{1}{2}$

$γ')\ \frac{-11}{15},\ \frac{32}{-45},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{5}\qquad στ')\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{-5}{6},\ \frac{-7}{8},\ \frac{1}{4}$

Ε΄. ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΦΥΣΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 32. Καθὼς (εἰς τὴν Ἀριθμητικήν), τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ ἕνα ἀριθμόν, π.χ. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, καλοῦμεν **τετάρτην δύναμιν** τοῦ 3 καὶ παριστάνομεν αὐτὸ μὲ τὸ 3^4, οὕτω καὶ τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων, π.χ. τὸ $(-5)\cdot(-5)$, καλεῖται **δευτέρα δύναμις** τοῦ (-5) καὶ παριστάνεται μὲ τὸ $(-5)^2$. Ὁμοίως τὸ $(-3)\cdot(-3)$ λέγεται δευτέρα δύναμις τοῦ (-3) καὶ παριστάνεται μὲ τὸ $(-3)^2$. Τὸ $(+9)\cdot(+9)\cdot(+9)$ παριστάνεται μὲ $(+9)^3$ καὶ λέγεται **τρίτη** δύναμις τοῦ $(+9)$. Τὸ $(-7)\cdot(-7)\cdot(-7) = (-7)^3$ καὶ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ (-7). Ἐν γένει:

Καλοῦμεν δύναμιν ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων μὲ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

Ὁ μὲν ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων τοῦ γινομένου καλεῖται **ἐκθέτης τῆς δυνάμεως,** ὁ δὲ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ἔχομεν τὴν δύναμιν λέγεται **βάσις τῆς δυνάμεως.** Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ **τετράγωνον** τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ δὲ τρίτη δύναμις καὶ **κύβος** τοῦ ἀριθμοῦ. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι

$$(-7)^2 = (-7)\cdot(-7) = 49,\quad (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = (-5)^4.$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\ .$$

Ἐν γένει, τὸ $α^μ \underbrace{= α \cdot α \cdot α .....}_{μ\ \text{παράγοντες}} α$, ὅπου τὸ α φανερώνει σχετικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ μ φυσικόν. Τὸ $α^μ$ καλεῖται μιοστὴ ($μ^η$) δύναμις τοῦ α.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν:

$$(-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1,\quad (-1)^{2ν} = +1,\quad (-1)^{2ν+1} = -1.$$

ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀριθμὸν φυσικόν. Ἤτοι:

Πᾶσα δύναμις τῆς —1 μὲ ἐκθέτην ἄρτιον ἀριθμόν, ἰσοῦται μὲ 1, μὲ ἐκθέτην δὲ περιττὸν ἰσοῦται μὲ —1.

Ἑπομένως εἶναι $(-1)^\nu = \pm 1$ καὶ εἶναι $+1$ μὲν ἂν ν ἄρτιος, -1 δὲ ἂν ν περιττός.

Ἀσκήσεις

52. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων:
α΄) $(-6)^3$ β΄) $(-9)^2$ γ΄) $(+8)^5$ δ΄) $(-3)^3$ ε΄) $(-7)^5$ στ΄) $(-1)^3$

53. Δείξατε διὰ παραδειγμάτων, ὅτι πᾶσα δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην ἄρτιον καὶ φυσικόν, εἶναι ἀριθμὸς θετικός· περιττὸν δὲ ἐκθέτην ἔχουσα εἶναι ἀρνητικός.

2. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ α^1 ΚΑΙ α^0 ΩΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 33. Κατὰ τον ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ ἔχομεν ὅτι π.χ.

$$\alpha^5 = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha, \quad \alpha^4 = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha \quad \alpha^3 = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha, \quad \alpha^2 = \alpha\cdot\alpha$$

Ἐκ τούτων διακρίνομεν ὅτι, ὅταν ὁ ἐκθέτης μιᾶς δυνάμεως τοῦ α ἐλαττοῦται κατὰ μονάδα, τὸ γινόμενον, τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὴν δύναμιν ταύτην διαιρεῖται δι' ἑνὸς τῶν ἴσων παραγόντων αὐτοῦ. Ἂν δεχθῶμεν ὅτι τοῦτο ἰσχύει καὶ δι' ἐκθέτας (ἀκεραίους) μικροτέρους τοῦ 2, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\alpha^{2-1} = (\alpha\cdot\alpha):\alpha$.

Ἀλλὰ τὸ α^{2-1} ἰσοῦται μὲ α^1 τὸ δὲ $(\alpha\cdot\alpha):\alpha =$ μὲ α. Ἄρα εἶναι $\alpha^1 = \alpha$. Τοῦτο ὁδηγεῖ εἰς τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ α^1.

Ἡ πρώτη δύναμις ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἰσοῦται μὲ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Κατ' ἀναλογίαν πρὸς τ' ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν, ὅτι $\alpha^{1-1}=\alpha:\alpha=1$ ἀλλὰ ὁ $\alpha^{1-1}=\alpha^0$. Ἄρα εἶναι $\alpha^0=1$, ὅταν εἶναι τὸ $\alpha\neq 0$.

Οὕτως ἔχομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τοῦ α^0:

Τὸ α^0, ὅπου τὸ α εἶναι ἀριθμός τις $\neq 0$, ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν:

$$(-3)^0 = 1,\ 47^0 = 1,\ (-10)^0 = 1,\ \left(-\frac{3}{5}\right)^0 = 1$$

$$(-2)^1 = -2,\ \left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5},\ \ 4{,}3^1 = 4{,}3$$

3. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

§ 34. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς) ὅτι:

Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παρανόντων.

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ἂν ἡ βάσις εἶναι σχετικὸς ἀριθμός, οἱ δὲ ἐκθέται φυσικοὶ ἀριθμοί. Πράγματι, ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον π.χ. $\alpha^3 \cdot \alpha^2$ θὰ εἶναι $\alpha^3 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha$, $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$ καὶ ἑπομένως τὸ

$$\alpha^3 \cdot \alpha^2 = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha = \alpha^5 *.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι π.χ. εἶναι $\chi^4 \cdot \chi^2 = \chi^6$ καὶ ἐν γένει τὸ γινόμενον $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu$, ὅπου τὸ μ καὶ ν εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ τὸ δὲ α σχετικός τις ἀριθμός, ἰσοῦται μὲ τὸ $\alpha^{\mu+\nu}$.

Διότι ἔχομεν, ὅτι $\alpha^\mu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots\ldots \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}}$, $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$

ἑπομένως εἶναι $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \ldots\ldots \alpha}_{\mu \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\alpha \cdot \alpha \ldots\ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots\ldots \alpha}_{(\mu+\nu) \text{ παράγοντες}} = \alpha^{\mu+\nu}$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ γινόμενον $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu \cdot \alpha^\rho \ldots \alpha^\lambda = \alpha^{\mu+\nu+\rho \ldots +\lambda}$, ὅπου τὸ α εἶναι σχετικός τις ἀριθμός, τὰ δὲ μ, ν, ρ, ...λ φυσικοί.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

Ἀσκήσεις

54. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων:

α') $(-2)^2 \cdot (-2)^3$ β') $(-3)^4 \cdot (-3)^2$ γ') $(-5)^2 \cdot (-5)^3$

δ') $(1{,}5)^3 \cdot (1{,}5)^2$ ε') $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4$

στ') $(-5{,}1)^3 \cdot (5{,}1)^4$ ζ') $(0{,}5)^5 \cdot (0{,}5)^{10} \cdot (0{,}5)^3$

---

* Ἡ 4η δύναμις ἀριθμοῦ καλεῖται ὑπὸ τοῦ Διοφάντου εἰς τὸν ἔργον του «Ἀριθμητικὰ βιβλία» VI, καθὼς καὶ ὑπὸ τοῦ Ἥρωνος, **δυναμοδύναμις**, ἡ 5η δύναμις καλεῖται **δυναμόκυβος**, ἡ 6η **κυβόκυβος**, τὸ $\frac{1}{x}$ λέγεται **ἀριθμοστόν**, τὸ $\frac{1}{x^2}$ **δυναμοστόν**, τὸ $\frac{1}{x^3}$ **κυβοστόν**, καὶ τὸ $\frac{1}{x^6}$ **κυβοκυβοστόν**.

§ 35. Ἔστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸ $[(-5)^3]^2$. Τοῦτο ἰσοῦται $(-5)^3 \cdot (-5)^3 = (-5)^{3+3} = (-5)^{3 \cdot 2}$.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ $(2^3)^2$. Τοῦτο σημαίνει νὰ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων μὲ τὸ 2^3, ἤτοι τὸ $2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^{3 \cdot 2}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι $(\alpha^3)^4 = \alpha^{3 \cdot 4}$ καὶ ἐν γένει, ὅτι $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu \cdot \nu}$, ὅπου α εἶναι μὲν σχετικός τις ἀριθμός, μ καὶ ν δὲ φυσικοὶ ἀριθμοί.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :

Ἂν δύναμίς τις ἀριθμοῦ σχετικοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, προκύπτει δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἀσκήσεις

55. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν :

α′) $[(-2)^2]^3$ β′) $[(-3)^2]^2$ γ′) $[(-1)^2]^3$

δ′) $[(-1)^3]^3$ ε′) $\left[\left(-\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$ στ′) $\left[[(-10)^2]^3\right]^5$

56. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν :

α′) $[(0{,}2)^2]^4$ β′) $[(0{,}4)^2]^2$ γ′) $[(1{,}5)^2]^3$

δ′) $[(0{,}5)^2]^3 \cdot [(-3)^4]^2$, $\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]^3$ ε′) $\left[[(-5)^2]^3\right]^2$ στ′) $\left[\left[\left(-\frac{4}{5}\right)^2\right]^3\right]^5$

§ 36. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι :

Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον σχετικῶν παραγόντων εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἰς τὴν δύναμιν αὐτὴν καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα.

Πράγματι ἔχομεν, ὅτι (ἂν τὸ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς)

$$(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$[(-5) \cdot (-3)]^3 = (-5) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-5) \cdot (-3) =$$
$$= (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-5)^3 (-3)^3$$

καὶ γενικῶς, ὅτι

$$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^\nu = \underbrace{(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \cdot (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) \ldots\ldots\ldots (\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)}_{\nu \text{ παράγοντες}} =$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\beta \cdot \beta \cdot \beta \ldots \beta}_{\nu \text{ παράγοντες}} \cdot \underbrace{\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma \ldots \gamma}_{\nu \text{ παράγοντες}} = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu \cdot \gamma^\nu$$

§ 37. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι :

Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν ἕκαστος τῶν ὅρων του ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Οὕτως ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$, διότι τὸ

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdots\frac{\alpha}{\beta}}_{\mu \text{ παράγοντες}} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\,.........\,\alpha}^{\mu \text{ παράγοντες}}}{\underbrace{\beta\cdot\beta\cdot\beta\,.........\,\beta}_{\mu \text{ παράγοντες}}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

ὅπου τὸ μ φανερώνει ἀριθμὸν φυσικόν, τὰ δὲ α καὶ β ἀριθμοὺς σχετικούς.

Ἄσκησις

57. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

α') $[(-2)\cdot(-3)]^2$ β') $[(+1)\cdot(-2)]^4$

γ') $[(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)]^2$ δ') $[2\cdot 3\cdot(-4)\cdot(-2)]^2$

ε') $[(-2)\cdot(-3)\cdot 4\cdot 1\cdot 0{,}5]^3$ στ') $[(-1)\cdot(-2)\cdot(+3)]^3$

ζ') $\left[\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\right]^3$ η') $\left[\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right]^2$

θ') $\left[(-5)^2\cdot(-6)^3\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)\right]^2$ ι') $\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2$

ια') $\left[2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{9}\cdot(-0{,}1)\right]^2$ ιβ') $\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{-3}{7}\cdot 0{,}4\right]^3$

ιγ') $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)^3\right]^4$

§ 38. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς δυνάμεως 2^5 διὰ τῆς 2^2. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὅτι τὸ πηλίκον τοῦτο $2^5 : 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$. Ἤτοι ὅτι :

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν τοῦ διαιρετέου μεῖον τοῦ διαιρέτου.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει καὶ ὅταν ἡ βάσις τῶν δυνάμεων εἶναι σχετικός τις ἀριθμός, οἱ ἐκθέται φυσικοὶ ἀριθμοί, ἐκ τούτων δὲ ὁ τοῦ διαιρετέου μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν τοῦ διαιρέτου. Οὕτω τὸ πηλίκον,

$$(-5)^4:(-5)^2=\frac{(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)}{(-5)\cdot(-5)}=(-5)\cdot(-5)=(-5)^2=(-5)^{4-2}$$

ὁμοίως τὸ $(-3)^6:(-3)^3=\dfrac{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}{(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)}=$

$$(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=(-3)^3=(-3)^{6-3}.$$

Ἐν γένει τὸ πηλίκον

$$\alpha^\mu:\alpha^\nu=\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\frac{\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ \ldots\ldots\ldots\alpha}^{\mu \text{ παράγοντες}}}{\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ \ldots\ldots\ldots\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ \ldots\ldots\ldots\alpha}_{\mu\,-\,\nu \text{ παράγοντες}}=\alpha^{\mu-\nu}$$

ὅπου α παριστάνει σχετικόν τινα ἀριθμὸν καὶ μ, ν φυσικούς, ὁ δὲ μ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ν.

Παρατήρησις. Ἡ εἰς τὴν § 34 σημασία τοῦ α^0 καὶ α^1 προκύπτει καὶ ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἰσχύει ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ γινομένου δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, θεωρουμένων τῶν α^0 καὶ α^1 ὡς δυνάμεων τοῦ α. Πράγματι, ἔχομεν τότε $\alpha^0\cdot\alpha^\mu=\alpha^{0+\mu}=\alpha^\mu$. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ ἴσα $\alpha^0\cdot\alpha^\mu$ καὶ α^μ διὰ τοῦ α^μ, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι $\alpha^0=1$.

Ὁμοίως ἔχομεν $\alpha^1\cdot\alpha^\mu=\alpha^{1+\mu}=\alpha^\mu\cdot\alpha$, καὶ διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ α^μ ἔχομεν $\alpha^1=\alpha$.

Ἀσκήσεις

58. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α') $x^5\cdot x^3$ β') $\psi^3\cdot\psi^4$ γ') $x^5\cdot x$ δ') $(-x^4)^2$ ε') $(-\beta^5)^3$ στ') $x^2\cdot x$
ζ') $x^{2\nu}\cdot x\,(-x)^{2\nu}$ η') $x^{2\nu-1}\cdot x\,(-x)$ θ') $x^{2\nu}\cdot(-x)^3$ ι') $x^{2\nu-1}\cdot x^{2\nu}$
$\psi^{3\mu-1}\cdot\psi^2$.

59. Ὁμοίως τά:

α') $(4\alpha\beta)^2$ β') $(-3x\psi)^3$ γ') $(5x^2)^2$ δ') $(-x\psi\omega)^1$ ε') $\left(-\dfrac{2}{3}x^2\psi\right)^2$

στ') $\left(-\dfrac{1}{5}x\psi^2\right)^3$ ζ') $\left(-\dfrac{3}{4}x^2\right)^6$ η') $\left(\dfrac{5}{8}x^{2\nu}\right)^0$

θ') $\left(\dfrac{5}{8}x^2\psi\right)^3\cdot(4\alpha\beta)^0\cdot(3\alpha^2\beta^3)^2$.

60 Νὰ εὕρετε τά:

α') $2^5:2^3$ β') $(-2)^5:(-2)^3$ γ') $(-7)^9:(-7)^6$

δ') $(-3)^5:(-3)^2$ ε') $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^5:\left(-\dfrac{3}{7}\right)^3$ στ') $(-5{,}3)^6:(-5{,}3)$

ζ') $[(-3)\cdot5\cdot7]^7:(-3\cdot5\cdot7)^4$ η') $[(-1)\cdot(-3)\cdot5\cdot7]^{10}:[(-1)\cdot(-3)\cdot5\cdot7]^5$

4. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 39. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τί παριστάνει τὸ σύμβολον α^{-1}, ὅπου τὸ α εἶναι σχετικός τις ἀριθμὸς $\neq 0$.

Ἂν δεχθῶμεν, ὅτι ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ γινομένου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ εἷς ἐκ τῶν ἐκθετῶν εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς π.χ. -1, θὰ ἔχωμεν $\alpha^1 \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{1-1} = \alpha^0 = 1$.

Διαιροῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^1 \cdot \alpha^{-1} = 1$ διὰ τοῦ α^1, εὑρίσκομεν $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha^1}$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἔχομεν $\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$ καὶ γενικῶς $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$, ὅπου τὸ ν παριστάνει ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμόν, τὸ δὲ α σχετικὸν $\neq 0$. Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς σημασίας δυνάμεως μὲ ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἐκθέτην.

Δύναμίς τις ἀριθμοῦ ($\neq 0$), μὲ ἐκθέτην δοθέντα ἀκέραιον ἀρνητικὸν ἀριθμόν, παριστάνει κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα, παρονομαστὴν δὲ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Κατὰ ταῦτα εἶναι : $5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$, $\quad 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16, \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8.$$

Γενικῶς $\alpha^{-|\nu|} = \frac{1}{\alpha^{|\nu|}}$, ἔνθα ν σχετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός.

§ 40. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας φυσικοὺς ἀριθμοὺς ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι οἱοιδήποτε ἀκέραιοι σχετικοὶ ἀριθμοί.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν $\alpha^3 \cdot \alpha^{-5} = \alpha^3 \cdot \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{3-5}$

$$\alpha^{-3} \cdot \alpha^{-5} = \frac{1}{\alpha^3} \cdot \frac{1}{\alpha^5} = \frac{1}{\alpha^8} = \alpha^{-8} = \alpha^{-3-5}$$

$$\alpha^{-|\mu|} : \alpha^{-|\nu|} = \frac{1}{\alpha^{|\mu|}} : \frac{1}{\alpha^{|\nu|}} = \frac{1}{\alpha^{|\mu|}} \cdot \alpha^{|\nu|} = \alpha^{|\nu|} \cdot \alpha^{-|\mu|} = \alpha^{|\nu| + |\mu|} = \alpha^{-|\mu| - (-|\nu|)}$$

Ἐπίσης ἔχομεν, ὅτι $(\alpha \cdot \beta)^{-|\nu|} = \frac{1}{(\alpha \cdot \beta)^{|\nu|}} = \frac{1}{\alpha^{|\nu|} \cdot \beta^{|\nu|}}$, ὅπου ν παριστάνει σχετικὸν ἀριθμὸν ἀκέραιον.

Παρατήρησις: Μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀρνητικοὺς ἀκεραίους, ἡ ἰδιότης τοῦ πηλίκου δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἰσχύει πάντοτε, ἄνευ οὐδεμιᾶς ἐξαιρέσεως (δηλαδὴ καὶ ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν τοῦ διαιρέτου). Οὕτω π.χ. ἔχομεν :

$$\alpha^5 : \alpha^7 = \frac{\alpha^5}{\alpha^7} = \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^{-2} = \alpha^{5-7}.$$

Ὁμοίως $\quad \alpha^{-2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2} : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^2 \cdot \alpha^3} = \alpha^{-5} = \alpha^{-2-3}.$

Ἀσκήσεις

61. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

5^{-3}, $(3,5)^{-2}$, 7^{-2}, 20^{-2}, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$, $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}$, $(-1)^{-2\nu}$, $(-1)^{-(2\nu+1)}$

62. Ὁμοίως τῶν : $(-1)^{-3}$, $(-0,01)^{-4}$, $\frac{1}{2^{-3}}$, $\frac{1}{5^{-2}}$, $\frac{1}{(-7)^{-4}}$

63. Θέσατε κατωτέρω ὅπου $x=1, -2, -3$ καὶ εὕρετε μὲ τί ἰσοῦνται τὰ ἐξαγόμενα τῶν : α΄) $5^{x-1} + 7^x + 3^{x-1}$ β΄) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{4x}$

64. Νὰ εὑρεθῆ μὲ τί ἰσοῦνται τά: $2^5 \cdot 2 \cdot 2^0 \cdot 2^{-2}$, $4^{-3} . 4^3$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{0,1}\right)^{-3}$

65. Ὁμοίως τά :

α΄) $\alpha^{-2} \cdot \alpha^{-4} \cdot \alpha^0 \cdot \alpha^5$ β΄) $2^3 \cdot 2 \cdot 2^4 \cdot 2^{-8}$ γ΄) $(7^{-8} : 7^{-9}) \cdot 3^{-3}$ δ) $(2\alpha\beta)^{-2}$

ε΄) $x^\nu \cdot x^{2\nu} : x^\nu$ στ΄) $5^2 : 5^{-4}$ ζ΄) $(3\alpha^{-3} \cdot \beta^{-2} \cdot \gamma^{-4})^{-2} \cdot (-2\alpha^2\beta^{-2})^2$

66. Εὕρετε τά :

α΄) $5 \cdot 2^3 + 7 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^3 + 13 \cdot 2^3 - 11 \cdot 2^{-3}$

β΄) $4 \cdot 6^3 - 5 \cdot (-6)^3 + 7 \cdot (-6)^3 + 9 \cdot (-6)^3 + 13 \cdot 6^3$

γ΄) $5 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^5 + 8 \cdot 2^9 + 11 \cdot 2^5 - 7 \cdot 2^5$

δ΄) $0,75 \cdot \alpha^5 - 0,5 \cdot \alpha^4 - 0,9 \cdot \alpha^5 + 0,7 \cdot \alpha^4 + 0,8 \cdot \alpha^5 - 1,2 \cdot \alpha^4$, ὅταν $\alpha = 5$

67. Εὕρετε τά :

α΄) $32 \cdot 4^{-3}$ β΄) $81 \cdot 3^{-3}$ γ΄) $\frac{2^{-5}}{4^{-3}}$ δ΄) $\frac{3^{-3}}{9^{-3}}$ ε΄) $\frac{10^{-3}}{10^{-2}}$ στ΄) $\frac{(-6)^{-2}}{(-9)^{-2}}$

ζ΄) $\frac{(-10)^{-5}}{(-15)^{-2}}$ η΄) $\frac{5}{5^{-2}} + \frac{10}{10^{-1}} + \frac{-10^2}{10^{-3}} - 100^2$

ΣΤ΄. ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 41. Γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς), ὅτι ἂν δύο ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι, π.χ. οἱ 5 καὶ 8, σημειώνομεν τὴν σχέσιν των αὐτὴν μὲ τὸ 5 ⟨8 ἢ 8⟩5, ἡ ὁποία καλεῖται ἀνισότης, τὸ δὲ σύμβολον τῆς ἀνισότητος εἶναι τὸ $<$ ἢ $>$. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἂν εἰς ἀνίσους (θετικοὺς) ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἴσους, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φοράν. Δεχόμενοι, ὅτι ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἶναι σχετικός, ἔχομεν, προσθέτοντες τὸν -5 π.χ. εἰς τοὺς δύο ἀνίσους ἀριθμοὺς 5 καὶ 8, ὅτι $5+(-5) < 8+(-5)$ ἢ $0 < 3$. Ἐὰν εἰς τοὺς αὐτοὺς ἀνίσους ἀριθμοὺς 5 καὶ 8 προσθέσωμεν τὸν -8, θὰ ἔχωμεν $5+(-8) < 8+(-8)$ ἢ $-3 < 0$.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι ὁρίζομεν ὅτι:

Τὸ 0 εἶναι μικρότερον μὲν παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, μεγαλύτερον δὲ παντὸς ἀρνητικοῦ.

Οὕτως, ἂν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha > 0$, ἂν δὲ τὸ α εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μὲ $\alpha < 0$. Κατὰ ταῦτα εἶναι πάντοτε $|\alpha| > 0$, $-|\alpha| < 0$.

§ 42. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $5 > 0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 5 καὶ 0 προσθέσωμεν τὸ (-7) π.χ., εὑρίσκομεν: $5+(-7) > 0+(-7)$ ἢ $-2 > -7$. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων παραδειγμάτων ὁδηγούμενοι ὁρίζομεν ὅτι:

Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μικρότερος, ἐνῷ εἶναι γνωστόν, ὅτι ἐκ δύο θετικῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἀπολύτως μεγαλύτερος.

§ 43. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν τὴν ἀνισότητα $8 > 0$. Ἐὰν εἰς τοὺς ἀνίσους 8 καὶ 0 προσθέσωμεν π.χ. τὸν -3, εὑρίσκομεν

$$8+(-3) > 0+(-3) \text{ ἢ } 5 > -3.$$

Ὁρίζομεν λοιπὸν ὅτι: **πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ**, π.χ. $+5 > -13$, $+0{,}3 > -25$.

§ 44. Λέγομεν, ὅτι **σχετικός τις ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος μὲν ἄλλου, ἂν ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἶναι θετική, μικρότερος δὲ ἂν εἶναι ἀρνητική.**

Κατὰ ταῦτα, ἂν δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἄνισοι, καὶ ὁ α μεγαλύτερος τοῦ β, σημειώνομεν τὴν σχέσιν ταύτην συμβολικῶς μὲ $\alpha > \beta$ ἢ $\beta < \alpha$, ἡ ὁποία καλεῖται **ἀνισότης** καὶ τότε ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται **μέλη τῆς ἀνισότητος**. Παρατηρητέον, ὅτι ἂν $\alpha > \beta$, ὁ β εἶναι μικρότερος τοῦ α, ἤτοι εἶναι $\beta < \alpha$. Διότι, ἂν $\alpha-\beta=$θετικός, τὸ $(\beta-\alpha)=$ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Διὰ ταῦτα αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καὶ $\beta < \alpha$ λέγονται **ἰσοδύναμοι.**

Κατὰ τ' ἀνωτέρω, δοθέντων σχετικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ τοποθετήσωμεν αὐτοὺς κατὰ σειράν, ὥστε νὰ βαίνουν ἀπὸ τοῦ μικροτέρου πρὸς τὸν μεγαλύτερόν των. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς $+5, -\frac{2}{3}, +6, -7, -15, +\frac{3}{4}, 0, -1, -6$, ἔχομεν τὴν κατωτέρω τοποθέτησιν αὐτῶν, παρατηροῦντες, ὅτι ὁ μικρότερος εἶναι ὁ -15 καὶ ὁ μεγαλύτερος ὅλων ὁ $+6$.

$$-15 < -7 < -6 < -1 < -\frac{2}{3} < 0 < +\frac{3}{4} < +5 < +6.$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ

§ 45. Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, ὅτε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\alpha-\beta=$ θετικὸς ἀριθμὸς καὶ $\gamma-\delta=$θετικὸς ἀριθμός.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καὶ $\gamma-\delta$ ὁμοίως θετικός, τὸ $\alpha-\beta+\gamma-\delta$ θά εἶναι θετικός, ἤτοι τὸ $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)=$ θετικός. Ἑπομένως εἶναι καὶ $\alpha+\gamma > \beta+\delta$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνίσους, οὕτως ὥστε ὁ μεγαλύτερος νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ ὁ μικρότερος εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φοράν.

Οὕτω π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰς $-5 > -12$ καὶ $-3 > -10$, προσθέτοντες τοὺς μεγαλυτέρους καὶ τοὺς μικροτέρους χωριστά, εὑρίσκομεν:

$$-5-3 > -12-10 \text{ ἢ } -8 > -22.$$

§ 46. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε θὰ εἶναι $\alpha-\beta=$θετικός. Ἐπειδὴ εἶναι $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)=$ θετικός, ἕπεται ὅτι $\alpha+\gamma > \beta+\gamma$. Ἤτοι:

Ἂν εἰς ἀνίσους σχετικοὺς ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν σχετικὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φοράν.

Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$, θὰ εἶναι $\alpha-\gamma > \beta-\delta$. Διότι ἔχομεν $\alpha-\beta=$ θετικὸς ἀριθμός, $\delta-\gamma=$ θετικὸς ἀριθμός. Ἀλλ' εἶναι $(\alpha-\beta)+(\delta-\gamma)=$ θετικὸς ἀριθμὸς $=\alpha-\beta+\delta-\gamma=(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)=$ θετικὸς ἀριθμός, ἄρα $\alpha-\gamma > \beta-\delta$, π.χ. $+5 > -2$, $-9 < -4$ καὶ $5+9 > -2+4$ ἢ $+14 > +2$.

Ἂν δοθοῦν ἀνισότητες σχετικῶν ἀριθμῶν, π.χ. $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, $\varepsilon > \zeta$, $\eta > \theta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta > \beta+\delta+\zeta+\theta$.

Διότι εἶναι $\alpha-\beta =$ θετικὸς ἀριθμός, $\gamma-\delta =$ θετικὸς ἀριθ. $\varepsilon-\zeta=$ θετικὸς ἀριθμός, $\eta-\theta=$θετικὸς ἀριθμός. Ἄρα $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)+(\varepsilon-\zeta)+$ $+(\eta-\theta) =$θετικὸς ἀριθμὸς ἢ $\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon-\zeta+\eta-\theta =$ θετικὸς ἢ $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta-\beta-\delta-\zeta-\theta =$ θετικὸς ἢ $(\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta)-(\beta+\delta+\zeta+\theta)=$ θετικός, δηλαδὴ $\alpha+\gamma+\varepsilon+\eta > \beta+\delta+\zeta+\theta$. Π.χ. εἶναι $+5 > 0$,

$$+6 > -15,\ -8 > -20,\ \text{ἄρα}\ +5+6+(-8) > 0+(-15)+(-20)\ \text{ἢ}\ +3 > -35.$$

§ 47. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν $\alpha > \beta$, ὅτε εἶναι $\alpha-\beta =$ θετικὸς ἀριθμός. Ἂν $\lambda > 0$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο πρῶτα ἴσα ἐπὶ λ, θὰ ἔχωμεν $(\alpha-\beta)\cdot\lambda =$ θετικὸς $\times$ θετ. $=$ θετικὸς ἀριθμός, ἢ $\alpha\lambda-\beta\lambda =$ θετικὸς ἀριθμός. Ἑπομένως εἶναι $\alpha\lambda > \beta\lambda$.

Ἔστω τώρα, ὅτι εἶναι $\lambda < 0$. Ἂν τὰ ἴσα $\alpha-\beta =$ θετικὸς ἀριθμός, πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν ἀρνητικὸν λ, θὰ εὕρωμεν $(\alpha-\beta)\cdot\lambda =$ θετικὸς $\times$ ἀρν. $=$ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Ἑπομένως εἶναι $\alpha\lambda-\beta\lambda =$ ἀρν. ἤτοι $\alpha\lambda < \beta\lambda$. Ἤτοι :

Ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ θετικὸν μὲν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης δὲν μεταβάλλει φοράν, ἐπὶ ἀρνητικὸν δὲ ἀντιστρέφεται.

Οὕτως ἐκ τῆς ἀνισότητος $-5 > -8$ ἔχομεν $-5\cdot4 > -8\cdot4$, ἤτοι $-20 > -32$, ἐνῷ ἐκ τῆς $6 < 10$ εὑρίσκομεν μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ -2 τὴν $6\cdot(-2) > 10\cdot(-2)$ ἢ $-12 > -20$. Ἂν $\alpha < \beta$, εἶναι $\alpha\cdot[-|\lambda|] > \beta\cdot[-|\lambda|]$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος ἔχομεν ὅτι :

Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ —1, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται.

Π.χ. ἐκ τῆς $3 < 5$ ἔχομεν $3\cdot(-1) > 5\cdot(-1)$ ἢ $-3 > -5$.

§ 48. Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu > \beta^\mu$, ἂν οἱ α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ φυσικός. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι, ἂν ἔχωμεν $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, εἶναι δὲ α, β, γ, δ, θετικοί, θὰ εἶναι καὶ $\alpha\cdot\gamma > \beta\cdot\delta$. Διότι ἀφοῦ εἶναι $\alpha > \beta$ καὶ $\gamma > \delta$, θὰ ἔχωμεν ὅτι

$$\alpha-\beta=\text{θετ. ἀριθ.} \qquad \text{ἢ}\ \alpha=\beta+\text{θετ. ἀριθ.}$$
$$\gamma-\delta=\text{θετ. ἀριθ.} \qquad \text{ἢ}\ \gamma=\delta+\text{θετ. ἀριθ.}$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰς τελευταίας ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $αγ=βδ+β\cdot$ θετικὸν $+δ\cdot$ θετ. $+$ θετ. $\times$ θετικόν. Δηλαδή: $αγ-βδ=$ θετικὸς ἀριθμός. Ἑπομένως εἶναι $αγ > βδ$.

Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ εἶναι $α > β$, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω: $α\cdot α > β\cdot β$ ἢ $α^2 > β^2$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $α^3 > β^3$ καὶ γενικῶς $α^μ > β^μ$, (μ φυσικὸς ἀριθμός).

Ἐὰν εἶναι $α > β$, θὰ εἶναι $α^{-μ} < β^{-μ}$, ἂν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί, τὸ δὲ μ φυσικὸς ἀριθμός.

Διότι, ἀφοῦ εἶναι $α > β$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ $\frac{1}{αβ}$, εὑρίσκομεν $\frac{α}{α\cdot β} > \frac{β}{α\cdot β}$ ἢ $\frac{1}{β} > \frac{1}{α}$ ἢ $α^{-1} < β^{-1}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $α^{-2} < β^{-2}$, καὶ γενικῶς $α^{-μ} < β^{-μ}$, (μ φυσικός).

Οὕτως ἂν $|α| > |β|$, θὰ εἶναι $|α|^{|μ|} > |β|^{|μ|}$ καὶ $|α|^{-|μ|} < |β|^{-|μ|}$.

Ἀσκήσεις

68. Δείξατε ὅτι, ἐὰν τὰ μέλη ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ καὶ τὰ ὑψώσωμεν εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Τί συμβαίνει, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀρνητικοί;

69. α') Δείξατε ὅτι, ἐὰν εἶναι $α > 1$, θὰ εἶναι $α^μ < 1$, ἂν τὸ $μ < 0$.

β') Ἐὰν εἶναι $0 < α < 1$, θὰ εἶναι $α^μ > 1$, ἂν τὸ $μ < 0$.

γ') Ἐὰν εἶναι $α > 1$, θὰ εἶναι $α^{-3} < α^{-2} < α^{-1} < α^0 < α < α^2 < α^3$.

70. Δείξατε ὅτι, ἂν εἶναι $α > 0$, ἀλλὰ $α < 1$, θὰ εἶναι $α^{-3} > α^{-2} > α^{-1} > α^0 > α > α^2 > α^3$.

71. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ ποία ἀνισότης συνδέει αὐτά, τὰ προκύπτοντα ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν μελῶν τῆς $-8 > -23$ διὰ 2, $\frac{-1}{5}$, $-0{,}58$.

72. Νὰ εὑρεθῇ διὰ τίνας τιμὰς τοῦ x ἰσχύουν αἱ
$-5x < 30$, $3x < 39$, $(-3)\cdot(-2)\cdot x > -4{,}8\cdot(-22)$.

73. Νὰ εὑρεθῇ τίνας τιμὰς πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ x, ἵνα ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης

$$\frac{3}{4}\cdot x < -\frac{5}{8},\ -0{,}6x < -32,\ -0{,}8\cdot(-3)\cdot x < 120\cdot\frac{4}{5},$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(-0{,}6)\cdot x < -\frac{2}{5}\cdot(0{,}4)\cdot(-0{,}2).$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου I.

Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας	Σύμβολα
καὶ σύντομος ἱστορικὴ ἐπισκό-	$+$ (σὺν ἢ καὶ) προσθέσεως
πησις αὐτῆς (διάκρισις τριῶν	$-$ (πλὴν) ἀφαιρέσεως
περιόδων ἀναπτύξεως τῆς Ἀλ-	$+$ σῆμα ἢ πρόσημον θετ. ἀριθ.

γέβρας· περίοδος ρητορική, συγκεκομμένη, συμβολική).

Διόφαντος. Ἕλλην μαθηματικὸς (4ον αἰῶνα π.Χ.), ὁ θεμελιωτὴς τῆς Ἀλγέβρας.

Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί, $|\alpha|$ θετικός, $-|\alpha|$ ἀρνητικὸς

Ὁρισμὸς σχετικῶν ἀριθμῶν (τὸ σύνολον τῶν θετικῶν, ἀρνητικῶν καὶ τὸ 0).

$-$ σῆμα ἢ πρόσημον ἀρν. ἀριθμ.

$|\alpha|$ ἀπόλυτος τιμὴ σχετ. ἀριθμ. α

$|\alpha|$ = θετικὸς ἀριθμὸς

$-|\alpha|$ = ἀρνητικὸς ἀριθμὸς

= ἴσον, $\neq$ διάφορον

$+\cdot+=+,\ -\cdot-=+,\ +\cdot-=-$

$-\cdot+=-$

$+:+=+,\ -:-=+,\ +:-=-$

$-:+=-$

Ὁρισμὸς ἀθροίσματος σχετικῶν ἀριθμῶν. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$, 2) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\beta+\delta+\alpha+\gamma=\dots$

3) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\delta+\beta)+\gamma+\alpha=\dots$ 4) $\alpha+(\beta+\gamma)+\delta=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ ἄλλον α, ἤτοι $\alpha-\beta$, $0-\alpha=-\alpha$.

Ἀκολουθία δύο συμβόλων $+$ ἢ $-$: ἂν εἶναι τὰ αὐτὰ $=+$, ἂν εἶναι ἀντίθετα $=-$.

Ὁρισμὸς ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος $\alpha-(+\beta)-(+\gamma)-(-\delta)=$ $=\alpha-\beta-\gamma+\delta$.

Τοῦτο τρέπεται εἰς ἄθροισμα σχετικῶν ἀριθμῶν $\alpha-\beta-\gamma+\delta=$ $=\alpha+(-\beta)+(-\gamma)+(+\delta)$.

Δι' ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. Σημασία παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης μὲ προσθετέους ἐντὸς αὐτῆς

$$\alpha-(\beta-\gamma+\delta)=\alpha-\beta+\gamma-\delta=\alpha+(-\beta+\gamma-\delta).$$

Πολλαπλασιασμὸς δύο σχετικῶν ἀριθμῶν. Τὸ γινόμενον δύο ὁμοσήμων εἶναι θετικόν. Τὸ γινόμενον δύο ἑτεροσήμων εἶναι ἀρνητικόν. Ἰδιότητες τοῦ γινομένου σχετικῶν ἀριθμῶν.

1) $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$ (νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν παραγόντων).

2) $(\alpha+\beta+\gamma)\rho=\alpha\rho+\beta\rho+\gamma\rho$ (ἐπιμεριστικὸς νόμος).

3) $\alpha\beta\gamma\delta=(\alpha\beta)\cdot\gamma\delta=(\alpha\gamma)\cdot\beta\delta$. 4) $\alpha\cdot(\beta\gamma)\cdot\delta=\alpha\beta\gamma\delta$.

$$\alpha\cdot0=0\cdot\alpha=0,\ \alpha\cdot1=\alpha,\ \alpha(-1)=-\alpha.$$

Διαίρεσις σχετικοῦ ἀριθμοῦ α δι' ἄλλου β $(\neq0)$ $\alpha:\beta=\dfrac{\alpha}{\beta}$

Τὸ πηλίκον ὁμοσήμων σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικόν, τὸ πηλίκον ἑτεροσήμων εἶναι ἀρνητικόν.

Διαίρεσις διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος.

Ὁρισμὸς δυνάμεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

$$\alpha^{|\mu|} = \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha, \quad |\mu| \text{ παράγοντες}$$

$$\alpha^{-|\mu|} = \frac{1}{\alpha^{|\mu|}}, \quad \alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}, \quad \mu, \ \nu \text{ ἀκέραιοι ἀριθμοί.}$$

$$\alpha^0 = 1, \quad (\alpha \neq 0), \quad \alpha^1 = \alpha, \quad (-1)^2 = +1, \quad (-1)^{2\nu+1} = -1,$$

$$(-1)^{\nu} = \pm 1 \ (+ \text{ ἂν } \nu \text{ ἄρτιος}, - \text{ ἂν } \nu \text{ περιττός})$$

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}, \ \mu, \ \nu, \text{ σχετικοὶ ἀκέραιοι.}$$

Ἀνισότητες μεταξὺ σχετικῶν ἀριθμῶν.

$|\alpha| > 0$, $-|\alpha| < 0$, ἂν $\alpha-\beta > 0$, $\alpha > \beta$, ἂν $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, τότε $\alpha+\gamma > \beta+\delta$, ἂν $\alpha > \beta$, τότε $-\alpha < -\beta$, ἂν $\alpha > \beta$, $\alpha|\lambda| > \beta|\lambda|$. ἂν $\alpha > \beta$, $\alpha\cdot(-|\lambda|) < \beta\cdot(-|\lambda|)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Α΄. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 49. Ἀλγεβρικὴ παράστασις καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων (χρησιμοποιουμένων ὑπὸ τῆς Ἀλγέβρας πρὸς παράστασιν ἀριθμῶν ἢ ποσοτήτων) ἢ ἀριθμῶν καὶ γραμμάτων συνδεομένων μὲ ἀλγεβρικὰ σύμβολα τῶν πράξεων.

Ἐὰν δοθοῦν οἱ σχετικοὶ γενικοὶ ἀριθμοὶ π.χ. α, β, γ, καὶ προστεθοῦν οἱ α, καὶ β, εἰς δὲ τὸ ἄθροισμα τούτων προστεθῇ ὁ γ, θὰ ἔχωμεν (ὡς γνωστόν,) ἐξαγόμενον $(\alpha+\beta)+\gamma$, τὸ ὁποῖον λέγεται καὶ **ἀλγεβρικὸς τύπος.**

Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν α καὶ β ἀφαιρεθῇ ὁ γ, θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\beta)-\gamma$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ἐπίσης ἀλγεβρικὸς τύπος.

Τὸ $\alpha-(\beta-\gamma)$ λέγεται ἀλγεβρικὸς τύπος, φανερώνει δέ, ὅτι ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν α θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορὰ $\beta-\gamma$.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα $\alpha+\alpha+\alpha$ παριστάνομεν συντόμως μὲ τὸν ἀλγεβρικὸν τύπον 3α. Ὁμοίως γράφομεν ἐπίσης $\underbrace{\alpha+\alpha+\ldots\ldots+\alpha}_{\mu \text{ προσθετέοι}}=\alpha\mu$,

τὸ δὲ $\underbrace{-\alpha-\alpha-\alpha\ldots-\alpha}_{\nu \text{ προσθετέοι}}=-\nu\alpha$, τὸ $-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha}{3}=-\frac{5}{3}\alpha$

Τὰ διάφορα σύμβολα, τὰ ὁποῖα μεταχειριζόμεθα εἰς τὴν Ἄλγεβραν διὰ νὰ παραστήσωμεν τὸ πρόσημον ἑνὸς ἀριθμοῦ, τὸ σὺν (+) ἢ τὸ πλὴν (–), τὸ γινόμενον (·), τὸ πηλίκον (:), τὸ ἄθροισμα (+), τὴν διαφορὰν (–), τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ($\sqrt{\ }$) ἀριθμῶν, τὸ ἴσον (=), τὸ διάφορον ($\neq$), τὸ μεγαλύτερον ($>$) κ.τ.λ. καλοῦμεν **ἀλγεβρικὰ σύμβολα.**

Οὕτως ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις εἶναι αἱ : $(\alpha+\beta)$, $6\alpha+\beta-8\gamma$, α, 5α, $\beta\cdot\gamma$, $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$, $(-5-3):6+13-10$, $6\alpha^2-\alpha$.

Ἐκ τούτων ἡ $\alpha+\beta$ φανερώνει τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β. Ἡ $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ φανερώνει, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ἐὰν εἰς τὸν α προστεθῇ ὁ β καὶ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἀφαιρεθῇ τὸ $\gamma+\delta$. Ἡ παράστασις α παριστάνει τὸν ἀριθμὸν α, κ.τ.λ.

§ 50. Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται **ἰσοδύναμοι,** ἐὰν προκύπτῃ ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλην διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Οὕτω π.χ. αἱ $\alpha^2+\alpha\beta$ καὶ $\alpha(\alpha+\beta)$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι, ἂν εἰς τὴν δευτέραν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ α ἐπὶ τὸ $(\alpha+\beta)$, εὑρίσκομεν τὴν πρώτην $\alpha^2+\alpha\beta$· ἐπίσης αἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\beta+\alpha$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Τὴν ἰσότητα δύο ἰσοδυνάμων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καλοῦμεν **ταὐτότητα** καὶ σημειώνομεν αὐτὴν ἐνίοτε καὶ μὲ τὸ σύμβολον $\equiv$ τιθέμενον μεταξὺ τῶν ἰσοδυνάμων παραστάσεων, π.χ. $\alpha^2+\alpha\beta\equiv\alpha(\alpha+\beta)$, $\alpha+\beta\equiv\beta+\alpha$, ἀπαγγέλλομεν δὲ οὕτως, α^2 σὺν $\alpha\beta$ ἰσοδύναμον τοῦ α ἐπὶ α σὺν β, τὸ α σὺν β ἰσοδύναμον τοῦ β σὺν α.

1. ΕΙΔΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 51. Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται **ρητή***, ἐὰν ἐπὶ οὐδενὸς τῶν γραμμάτων της εἶναι σημειωμένη ρίζα τις. Καθὼς αἱ:

$$\alpha, \quad 3\alpha\sqrt{3}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}+\alpha^2\beta \quad \frac{x}{3\sqrt{13}}+\psi.$$

Παράστασις ἀλγεβρικὴ λέγεται **ἄρρητος***, ἐὰν δὲν εἶναι ρητή. Π.χ. αἱ $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\alpha-\sqrt{\alpha^5\cdot\beta}$, $6\sqrt{\chi+\psi}$ εἶναι παραστάσεις ἄρρητοι.

Ἀλγεβρικὴ παράστασις λέγεται **ἀκεραία,** ἐὰν δὲν περιέχῃ διαίρεσιν δι' ἑνὸς ἢ καὶ περισσοτέρων τῶν γραμμάτων της π.χ. αἱ παραστάσεις $\alpha+\beta$, $8\alpha^3-\frac{3}{4}\alpha^2\beta+\gamma$, $\frac{4}{5}\alpha^2$ λέγονται ἀκέραιαι.

Κλασματικὴ λέγεται μία ρητὴ παράστασις ἀλγεβρική, ἂν περιέχῃ διαίρεσιν τοὐλάχιστον δι' ἑνὸς τῶν γραμμάτων της π.χ. αἱ κατωτέρω: $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{12\alpha^2-\beta}{\alpha+\beta}$ $\frac{3\alpha^3}{5}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}$, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$, $3\alpha^{-2}$ λέγονται **κλασματικαὶ** ἢ **ἀλγεβρικὰ κλάσματα,** ἐπειδὴ ἡ πρώτη περιέχει διαίρεσιν διὰ τοῦ β, ἡ δευτέρα διὰ τοῦ $\alpha+\beta$, ἡ τρίτη διὰ τοῦ α^2 κ.ο.κ.

Ἀσκήσεις

74. Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι ρηταί; ἄρρητοι, ἀκέραιαι; κλασματικαί; Διατί;

---

* Εἰς Θεόδωρον τὸν Κυρηναῖον ὀφείλονται αἱ ὀνομασίαι ρητή, ἄρρητος.

α΄) $9\alpha^3\beta - \alpha\beta^2$, β΄) $\sqrt{28\alpha^2\beta}$ γ΄) $8\sqrt{\chi\psi} - 9\alpha$ δ΄) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{19\beta^2}{\gamma}$

75. Αἱ παραστάσεις α΄) $\sqrt{\alpha^2}$ β΄) $\sqrt{(\alpha+\beta)^2}$ γ΄) $\frac{7\gamma}{\sqrt[3]{\delta^3}}$ εἶναι ρηταὶ ἢ ἄρρητοι ; Διατί ; δ΄) Εὕρετε παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι φαινομενικῶς εἶναι ἄρρητοι.

76. Αἱ κατωτέρω παραστάσεις εἶναι ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί ; Διατί ;

α΄) $\frac{9\alpha^2\beta}{5\alpha}$ β΄) $\frac{16\alpha(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)}$ γ΄) $\frac{6\gamma^2\cdot x\cdot\psi^2}{5\gamma\cdot x\cdot\psi^2}$ δ΄) $\frac{3\alpha^2+\beta}{\alpha\beta}$.

2. ΠΕΡΙ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 52. Μονώνυμον λέγεται ἀλγεβρικὴ παράστασις, εἰς τὴν ὁποίαν οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις εὑρίσκεται σημειωμένη.

Π. χ. αἱ παραστάσεις : α, $-6\chi\psi^2$, $\frac{3}{7}\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$, $-\frac{8\alpha\beta}{9\gamma\delta}$ λέγονται μονώνυμα.

Ἀκέραιον λέγεται ἓν μονώνυμον, ἐὰν μόνον πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τῶν γραμμάτων του περιέχῃ. Ἐὰν δὲ περιέχῃ καὶ διαίρεσιν τοὐλάχιστον δι' ἑνὸς τῶν γραμμάτων του, λέγεται **κλασματικὸν** μονώνυμον. Οὕτως, ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τὰ μὲν τρία πρῶτα εἶναι ἀκέραια, τὸ δὲ τελευταῖον κλασματικόν.

Ρητὸν λέγεται ἓν μονώνυμον, ἂν δὲν ἔχῃ ρίζαν εἰς ἓν τοὐλάχιστον τῶν γραμμάτων του. Οὕτω τὰ $\frac{3\alpha^2\beta}{\gamma}$, $\sqrt{5}\,\alpha^2\beta$ εἶναι ρητὰ μονώνυμα.

Ἄρρητον λέγεται ἓν μονώνυμον, ἂν δὲν εἶναι ρητόν.

Ἐὰν εἰς τὸ μονώνυμον ὑπάρχῃ ἀριθμητικός τις παράγων γράφεται οὗτος πρῶτος καὶ λέγεται **(ἀριθμητικὸς) συντελεστὴς** τοῦ μονωνύμου. Οὕτως, εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα οἱ **συντελεσταὶ** κατὰ σειρὰν εἶναι οἱ : $1,\ -6,\ \frac{3}{7},\ -\frac{8}{9}$.

Τὸ ἄλλο μέρος τοῦ μονωνύμου δύναται νὰ λέγεται **κύριον ποσὸν** αὐτοῦ, εἶναι δὲ αὐτό, εἰς τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα κατὰ σειρὰν

$$\alpha,\quad \chi\psi^2,\quad \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta.\quad \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}.$$

Εἰς τὰ μονώνυμα, τὰ (φαινομενικῶς) μὴ ἔχοντα (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν, ἐννοοῦμεν τοιοῦτον τὸν $+1$, ἢ -1. Π.χ. τοῦ α (ἀριθμητικὸς) συντελεστὴς εἶναι $+1$, διότι ὁ α δύναται νὰ γραφῇ $1 \cdot α$, ἐνῷ τοῦ $-α$ εἶναι ὁ -1, ἐπειδὴ γράφεται $-1 \cdot α$.

Ἂν ὑπάρχουν περισσότεροι τοῦ ἑνὸς ἀριθμητικοὶ παράγοντες εἰς ἓν μονώνυμον, ἀντικαθιστῶμεν αὐτοὺς μὲ τὸ γινόμενόν των, τό ὁποῖον γράφεται ὡς πρῶτος παράγων αὐτοῦ καὶ εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου. Οὕτως, ἂν ἔχωμεν $-α^2β \cdot \frac{4}{5} γ^3$, γράφομεν $(-1). \frac{4}{5} α^2β \cdot γ^3$ ἢ $-\frac{4}{5} α^2βγ^3$ καὶ ὁ $-\frac{4}{5}$ εἶναι ὁ ἀριθμητικὸς συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου τούτου.

Καλοῦμεν συντελεστὴν ἑνὸς γράμματος (ἢ τοῦ γινομένου περισσοτέρων παραγόντων μονωνύμου) τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων παραγόντων αὐτοῦ, π.χ. εἰς τὸ $α^3χ^2$, συντελεστὴς τοῦ $χ^2$ εἶναι ὁ $α^3$, εἰς τὸ $-3α^2βχψ$ συντελεστὴς τοῦ $χψ$ εἶναι τὸ $-3α^2β$.

Δύο μονώνυμα λέγονται ἀντίθετα, ἂν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σῆμα τῶν (ἀριθμητικῶν) συντελεστῶν αὐτῶν, ὡς τὰ $25α^2$ καὶ $-25α^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του καλεῖται ὁ ἐκθέτης, τὸν ὁποῖον ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τοῦ $7α^3β$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶναι 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 1, τοῦ $\frac{3}{4}α^3β^2γ$ ὁ βαθμὸς ὡς πρὸς τὸ α εἶναι 3, ὡς πρὸς τὸ β ὁ 2, καὶ ὡς πρὸς τὸ γ ὁ 1.

Ἐὰν ἓν μονώνυμον δὲν περιέχῃ γράμμα τι, θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ βαθμός του ὡς πρὸς τὸ γράμμα αὐτὸ εἶναι 0. Π.χ. τὸ μονώνυμον $3α^2$ εἶναι 0 βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ β. Διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ἀντὶ τοῦ $3α^2$ τὸ $3α^2β^0$, ἐπειδὴ εἶναι $β^0 = 1$. Καὶ τῷ ὄντι, εἶναι $3α^2β^0 = 3α^2 \cdot 1 = 3α^2$.

Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρὸς περισσότερα τοῦ ἑνὸς γράμματά του, λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχουν τὰ γράμματα αὐτὰ εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. τὸ μονώνυμον $\frac{3}{4}α^2β^3γ$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β, τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ β καὶ γ, τρίτου ὡς πρὸς τὰ α καὶ γ, καὶ ἕκτου ὡς πρὸς τὰ α, β, γ.

Ἀσκήσεις

77. Εὕρετε τὸν συντελεστὴν καὶ τὸ κύριον ποσὸν ἑκάστου τῶν κάτωθι μονωνύμων:

α) $3\alpha^2\beta^3$ β) $-5\alpha^4\beta^5$ γ) $-\alpha$ δ) $-3x\psi^2$

ε) $2x^2$ στ) $-\frac{4}{5}x^3$ ζ) $-\frac{x^3}{4}$ η) $0,1\cdot x^2$

θ) $-4,56x^3$ ι) $-\frac{3}{4}\alpha^2$ ια) $-\frac{5}{8}\alpha^2 5\beta\cdot(-8)\beta^2$

78. Ὁμοίως τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν τῶν κάτωθι, καθὼς καὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ α, τοῦ x^3, τοῦ β^2:

α') $\frac{5}{8}\alpha\beta$ β') $-\frac{x}{3}$ γ') $-\frac{21}{4}x^3$ δ') $3,4x^2$ ε') $\frac{5}{6}\alpha\beta^2$

79. Ὁμοίως τῶν κάτωθι, τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν καὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ α, τοῦ x, τοῦ β, τοῦ ψ, τοῦ x^2:

α') $2\cdot(-3)\cdot 4\psi$ β') $-25\alpha\cdot 6\cdot\beta$ γ') $2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x\cdot(-7)\psi$ δ') $\frac{3\alpha^2\beta}{4\alpha\gamma}$

ε') $-\frac{4x}{\psi}$ στ') $-\frac{5x^2}{\psi^2}$ ζ') $-\frac{2}{5}x^2\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\psi$ η') $\frac{2}{3}x\cdot(-4)\cdot(3\alpha x)$·

80. Τίνος βαθμοῦ εἶναι καθὲν τῶν κάτωθι μονωνύμων ὡς πρὸς α, ὡς πρὸς β, ὡς πρὸς γ, ὡς πρὸς α καὶ β, ὡς πρὸς α, β, γ;

α) $15\alpha^2\beta\gamma^2$ β') $121\alpha^3\beta^2\gamma$ γ) $-24\alpha\beta^3\gamma^4$ δ) $-13\alpha^3\beta^2\gamma^4$

81. Ὁρίσατε ποῖα ἐκ τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων τῶν ἀσκήσεων 79 εἶναι ἀκέραια καὶ ὁρίσατε τίνος βαθμοῦ εἶναι καθέν: α') ὡς πρὸς α, β') ὡς πρὸς β, γ') ὡς πρὸς x, δ') ὡς πρὸς ψ, ε') ὡς πρὸς α καὶ β, στ') ὡς πρὸς x καὶ ψ.

I. ΟΜΟΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΑ

§ 53. Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσόν, διαφέρουν δὲ κατὰ τοὺς (ἀριθμητικοὺς) συντελεστάς των (ἂν διαφέρουν). Οὕτω τὰ μονώνυμα 6α, $\frac{2}{8}\alpha$, -23α εἶναι ὅμοια, ὡς διαφέροντα μόνον κατὰ τοὺς (ἀριθμητικούς) συντελεστάς των. Ἐπίσης τὰ $-\frac{39}{47}\beta$, 6β, -17β εἶναι ὅμοια, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καθὼς καὶ τὰ $12\alpha^2\beta$, $-15\alpha^2\beta$, $23\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$, ὡς ἔχοντα τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν $\alpha^2\beta$.

Μονώνυμα λέγονται ὅμοια, ὡς πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα αὐτῶν, ἂν ἔχουν τὰ γράμματα ταῦτα μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Οὕτω τὰ μονώνυμα $5\alpha^2\beta\gamma$, $-6\alpha^2\beta\delta^2$, $218\alpha^2\beta\delta$ εἶναι ὅμοια ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτῶν α καὶ β.

II. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 54. Καλοῦμεν **ἄθροισμα** δοθέντων μονωνύμων (ἢ καὶ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) τὴν ἀλγεβρικὴν παράστασιν, ἡ ὁποία προκύπτει, ὅταν γράψωμεν τὰ δοθέντα μονώνυμα (ἢ τὰς δοθείσας παραστάσεις) τὸ ἓν παρὰ τὸ ἄλλο, καθὲν μὲ τὸ πρὸ αὐτοῦ σῆμα.

Οὕτως ἡ πρόσθεσις τῶν μονωνύμων $4\alpha^2$, $-15\beta^2$, $\frac{6}{\gamma^2}$ δίδει ὡς ἄθροισμα τὸ $4\alpha^2-15\beta^2+\frac{6}{\gamma^2}$.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐν λόγω μονωνύμων (ἢ ἀλγεβρικῶν παραστάσεων) λέγεται **πρόσθεσις** αὐτῶν.

§ 55. Τὸ ἄθροισμα δοθέντων ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτά, ἔχον συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων.

Ἔστω π.χ., ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων 3α καὶ 4α. Παρατηροῦμεν, ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ $3\alpha+4\alpha$, τὸ ὁποῖον $=$ μὲ $(3+4)\alpha$. Διότι, ἂν ἐκτελέσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον (κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον), εὑρίσκομεν $(3+4)\alpha=3\alpha+4\alpha$.

Ἐπίσης ἔχομεν π.χ. $-3\alpha+4\alpha+\frac{2}{3}\alpha-13\alpha=\left(-3+4+\frac{2}{3}-13\right)\alpha$, καί, ἐπειδὴ εἶναι $-3+4+\frac{2}{3}-13=-12+\frac{2}{3}=-\frac{36}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{34}{3}$, ἕπεται ὅτι ἔχομεν ἐξαγόμενον τὸ $-\frac{34}{3}\alpha$.

Τὸ ἄθροισμα π. χ. τῶν $-\frac{3}{4}\alpha^2$, $\frac{5}{8}\alpha^2$, $4\alpha^2$, $-7\alpha^2$ εἶναι:

$$-\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{5}{8}\alpha^2+4\alpha^2-7\alpha^2=\left(-\frac{6}{8}+\frac{5}{8}-3\right)\alpha^2=\left(-\frac{1}{8}-3\right)\alpha^2=-3\,\frac{1}{8}\,\alpha^2.$$

Ὁμοίως ἔχομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $\chi^2\psi$, $-3\chi^2\psi$, $7\chi^2\psi$ $-\frac{4}{9}\chi^2\psi$ εἶναι:

$$\chi^2\psi-3\chi^2\psi+7\chi^2\psi-\frac{4}{9}\chi^2\psi=\left(1-3+7-\frac{4}{9}\right)\chi^2\psi=\left(5-\frac{4}{9}\right)\chi^2\psi=4\,\frac{5}{9}\,\chi^2\psi.$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων $+2\alpha^2\beta$, $-6\alpha^2\beta$, $+13\alpha^2\beta$, $-\alpha^2\beta$ εἶναι:

$$2\alpha^2\beta-6\alpha^2\beta+13\alpha^2\beta-\alpha^2\beta=(2-6+13-1)\alpha^2\beta=8\alpha^2\beta.$$

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων, μὲ τὴν ὁποίαν ἀντικαθιστῶνται αὐτὰ μὲ ἓν τοιοῦτο ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμά των καλεῖται **ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων.**

Ἀσκήσεις

82. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

α') $9\mu+4\mu$ β) $-10\mu+(-6\mu)$ γ) $-4\mu+6\mu$ δ) $5\mu+(-9\mu)$

ε) $8\alpha+\alpha+9\alpha$ στ) $\rho-7\rho+(6\rho-3\rho)$ ζ') $7x+(-8x)+6x+x$

η') $9\alpha+(-6\alpha+\alpha)$ θ') $-x+9x+[(-6x)+9x)]$

83. Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον τῶν:

α') $3x^2-5x^2+8x^2-3x^2$ β') $4\alpha x^3-4\beta x^3-5\gamma x^3$

γ') $3\alpha^2\beta x^2-2\alpha^2\beta x^3-6\alpha^2\beta x$ δ') $4x\psi^3-5x^2\psi^3+3x^3\psi^3-10x^4\psi^3$

ε') $\frac{5}{2}x^2+3\alpha x-\frac{7}{2}\alpha^2-2x^2+\alpha x+1\frac{1}{2}\alpha^2$

84. Ἐκτελέσατε τὴν ἀναγωγὴν μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἐκ τῶν κάτωθι καὶ εὕρετε τὸ ἄθροισμά των:

$$7\frac{3}{4}x^2\psi,\ -x,\ 19\frac{3}{8}\varphi^2,\ 1{,}75x,\ -8\frac{3}{8}\psi.$$

$$5\frac{5}{12}x,\ -1{,}125\psi,\ -0{,}25x^2\psi,\ 0{,}625\varphi^2.$$

85. Νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ μεταξὺ τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἐκ τῶν κάτωθι

α') $3\alpha^2\beta$, $-8\chi\psi^3$, $3\alpha^2\beta$, $32\chi\psi^3$, $0{,}35\alpha^2\beta$, $-0{,}25\chi\psi^3$, $-0{,}5\alpha^2\beta$.

β') $30\chi\psi^2$, $-24\alpha^2\beta^3\gamma$, $16x\psi^2$, $-12{,}3\alpha^2\beta^3\gamma$, $-0{,}75\alpha^2\beta^3\gamma$,

γ') $-6\alpha^2\beta\gamma$, $12\alpha^2\beta\gamma$, $-7\alpha^2\beta\gamma$, $-3{,}6\alpha^2\beta\gamma$, $0{,}3\alpha^2\beta\gamma$, $7{,}5\alpha^2\beta\gamma$.

3. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΤΙΜΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ

§ 56. Καλοῦμεν **ἀριθμητικὴν τιμὴν** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, τὸ ἐξαγόμενον τὸ προκύπτον, ἐὰν τὰ εἰς τὴν παράστασιν ὑπάρχοντα γράμματα ἀντικαταστήσωμεν, μὲ ἀριθμοὺς ὡρισμένους καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειοῦνται εἰς αὐτήν.

(Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων θὰ εἶναι τοιαῦται, ὥστε ὁ μὲν παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως, ἐὰν ἔχῃ τοιοῦτον, νὰ μὴ λαμβάνῃ τὴν τιμὴν μηδέν, ἡ δὲ ὑπὸ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ποσότης νὰ λαμβάνῃ τιμὴν θετικὴν ἢ μηδέν).

Οὕτω, ἐὰν εἶναι $α = 3$, ἡ παράστασις $4α$ ἔχει τὴν τιμὴν $4\cdot3=12$.
Ἡ παράστασις $α^4=α\cdotα\cdotα\cdotα$, ὅταν $α=3$, ἔχει τὴν τιμὴν $3\cdot3\cdot3\cdot3=81$.

Ἐὰν εἶναι $α=5$, $β=6$, $γ=7$, ἡ παράστασις $\frac{9}{14}α\cdotβ\cdotγ$ ἔχει τὴν τιμὴν
$$\frac{9}{14}\cdot5\cdot6\cdot7=135.$$

Ἐὰν εἶναι $α=-2$, $β=1$, $γ=5$, ἡ παράστασις $3α^2+2γ-5β$ ἔχει τὴν τιμὴν $3\cdot(-2)^2+2\cdot5-5\cdot1 = 12+10-5 = 17$.

Ἐὰν εἶναι $x=2$, $ψ=3$, $ω=4$, ἡ παράστασις $\frac{8x^2ψ}{3ω^3}$ ἔχει τὴν τιμὴν
$$\frac{8\cdot2\cdot2\cdot3}{3\cdot4\cdot4\cdot4}=\frac{1}{2}$$

Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ἰσοδύναμοι δίδουν ἴσους ἀριθμούς, ὅταν τὰ γράμματά των ἀντικατασταθοῦν μὲ τὰς αὐτάς, ἀλλὰ ὁποιασδήποτε τιμάς.

Π.χ. αἱ $α+β$ καὶ $β+α$ εἶναι ἰσοδύναμοι παραστάσεις καὶ δίδουν ἴσους ἀριθμούς, ἂν τεθῇ π.χ. $α=1$, $β=-5$, ὅτε $α+β= = 1-5 =-4 =-5+1$.

Ἀσκήσεις

86. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

α') $-6x+7ψ+(-3x)$, ὅταν εἶναι $x=3$, $ψ=4$

β') $-9x+(-7ψ)+(-3ψ)+(-6x)$ ὅταν εἶναι $x=3$, $ψ=-4$

87. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α') $α^3-6α^2β+β^3$, ὅταν εἶναι $α=2$, $β=6$.

β') $\frac{(α+β)(α-3β)}{6α-2β}$, ὅταν εἶναι $α=2$, $β=5$.

88. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

α') $(α+β)\cdot[α^2-(β^2-6αγ)]$, ὅταν εἶναι $=-5$, $β=2$, $γ=-3$

β') $\sqrt{α^3-2β-4γ-2\sqrt{4α^2+β}}\cdot(α+γ)$ ὅταν εἶναι $α=9$, $β=-4$, $γ=3$

89. Ἐὰν τεθῇ $φ(x)=3^x$, νὰ δειχθῇ, ὅτι εἶναι $φ(2)\cdotφ(4)=φ(6)$

90. Ἐὰν τεθῇ $φ(x)=4x^2+4x-3$ καὶ $ψ(x)=9(x+8)$, δείξατε, ὅτι $φ(5)=ψ(5)$

91. Ἐὰν $φ(x, ψ, z)=(x+ψ+z)(x+ψ-z)(x-ψ-z)$ δείξατε ὅτι:
$$φ(0, 1, 2)+φ(0,-1,-2)=0.$$

4. ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 57. Καλοῦμεν πολυώνυμον τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα μονωνύμων (τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι πάντα ὅμοια).

Π.χ. τὸ $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}+5\alpha^3-\frac{6\alpha^3\gamma}{3\beta}+15$ εἶναι πολυώνυμον καὶ εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $\frac{3\alpha\beta}{\gamma}$, $5\alpha^3$, $-\frac{6\alpha^2\gamma}{3\beta}$, 15.

Ἓν πολυώνυμον λέγεται **ρητόν,** ἐὰν ἕκαστον τῶν προσθετέων του μονωνύμων εἶναι ρητόν.

Ἀκέραιον λέγεται ἓν πολυώνυμον, ἐὰν ὅλοι οἱ προσθετέοι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα. **Ἄρρητον** λέγεται ἓν πολυώνυμον, ἂν τοὐλάχιστον εἷς τῶν προσθετέων του εἶναι μονώνυμον ἄρρητον, καὶ τέλος **κλασματικὸν** λέγεται, ἐὰν τοὐλάχιστον εἷς τῶν προσθετέων του εἶναι κλασματικὸν μονώνυμον.

Οὕτω τὸ $3\alpha^2+5\alpha\beta\gamma-13\gamma^2$ λέγεται ἀκέραιον πολυώνυμον, εἶναι δὲ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων : $3\alpha^2$, $5\alpha\beta\gamma$, $-13\gamma^2$.

Τὸ $\frac{3}{4}x^2\psi+\frac{5}{8}\frac{x^3}{\psi}-\frac{4}{9}\psi^2+6$ λέγεται ρητὸν πολυώνυμον.

Τὸ $\sqrt{x}+4x^2-6\sqrt{x-7}$ λέγεται ἄρρητον πολυώνυμον.

Ὁμοίως τὸ $-\frac{3}{4x}-\frac{5}{8}x^2+\frac{4}{9}\frac{x}{\psi}-7$ λέγεται κλασματικὸν πολυώνυμον.

Ἕκαστον μονώνυμον πολυωνύμου λέγεται καὶ **ὅρος αὐτοῦ,** δύναται δὲ εἷς ὅρος νὰ εἶναι ἀριθμός τις σχετικός.

Εἷς τοιοῦτος ὅρος δύναται νὰ ὑποτεθῇ, ὅτι ἔχει γράμματα καὶ καθὲν μὲ ἐκθέτην μηδέν, ἢ νὰ θεωρηθῇ ὡς μονώνυμον βαθμοῦ 0 ὡς πρὸς οἱαδήποτε γράμματα.

Ὅρος πολυωνύμου λέγεται συνήθως θετικὸς μὲν ἐὰν ἔχῃ ἀριθμητικὸν συντελεστὴν θετικόν, ἀρνητικὸς δὲ ἐὰν ἔχῃ ἀρνητικὸν ἀριθμητικὸν συντελεστήν.

Πολυώνυμον ἀκέραιον λέγεται **διώνυμον** μέν, ἐὰν ἔχῃ δύο ὅρους, καθὼς τὰ $\alpha+\beta$, $\alpha^2+\beta^2$, χ^2+6, **τριώνυμον** δέ, ἐὰν ἔχῃ τρεῖς ὅρους, καθὼς τὰ $\chi^2+\lambda\chi-8$, $\alpha+\beta-\gamma$, $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

§ 58. Δοθέντος ἀκεραίου πολυωνύμου καλοῦνται **ὅμοιοι ὅροι,** τὰ ὅμοια μονώνυμα αὐτοῦ.

Δοθέντος ἀκεραίου πολυωνύμου μὲ ὁμοίους ὅρους δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν αὐτοὺς μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμά των.

Οὕτω π.χ. εἰς τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $6\alpha\psi^3+\frac{3}{5}\alpha\psi^3-2\alpha^3\psi-\psi^4-7\alpha\psi^3+2\alpha^2\psi^2$ οἱ ὅροι $6\alpha\psi^3$, $\frac{3}{5}\alpha\psi^3$, $-7\alpha\psi^3$ εἶναι ὅμοιοι καὶ ἔχουν ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα $\left(6+\frac{3}{5}-7\right)\alpha\psi^3=-\frac{2}{5}\alpha\psi^3$. Ἀντικαθιστῶμεν λοιπὸν εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον τοὺς τρεῖς ὁμοίους ὅρους του μὲ τὸ $-\frac{2}{5}\alpha\psi^3$ καὶ ἔχομεν, ἀντὶ τοῦ δοθέντος, τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $-\frac{2}{5}\alpha\psi^3-2\alpha^3\psi-\psi^4+2\alpha^2\psi^2$, τὸ ὁποῖον λέγεται **ἀνηγμένον** πολυώνυμον τοῦ δοθέντος καὶ εἶναι ἰσοδύναμον αὐτοῦ.

Τὴν ἰσοδυναμίαν συμβολίζομεν ἐνίοτε καὶ μὲ τὸ $\equiv$ (σύμβολον τῆς ταυτότητος), ἤτοι θέτομεν:

$$6\alpha\psi^3+\frac{3}{5}\alpha\psi^3-2\alpha^3\psi-\psi^4-7\alpha\psi^3+2\alpha^2\psi^2\equiv-\frac{2}{5}\alpha\psi^3-2\alpha^3\psi-\psi^4+2\alpha^2\psi^2$$

Ὁμοίως ἔχομεν π.χ. $5\chi^3\psi+\chi^4-3\chi^3\psi+2\chi^4-5\chi^2\psi^2+\chi^3\psi-2\chi^2\psi^2\equiv$
$(1+2)\chi^4+(5-3+1)\chi^3\psi+(-5-2)\chi^2\psi^2\equiv 3\chi^4+3\chi^3\psi-7\chi^2\psi^2$.

§ 59. Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς ἓν γράμμα του, λέγεται ὁ μέγιστος τῶν ἐκθετῶν τοὺς ὁποίους ἔχει τὸ γράμμα τοῦτο εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου. Ἐὰν ὁ ἐκθέτης οὗτος εἶναι 1,2,3, τὸ πολυώνυμον λέγεται **πρώτου, δευτέρου, τρίτου... βαθμοῦ** ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ $3\alpha^2-5\alpha\beta\gamma-12\gamma^3$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς α καὶ τρίτου ὡς πρὸς γ, πρώτου δὲ ὡς πρὸς β.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ὡς πρὸς δύο, τρία . . .γράμματα αὐτοῦ, καλεῖται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα.

Οὕτω τὸ $3\chi^2-2\chi\psi+2\chi-7$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ χ καὶ ψ. Τὸ $5\alpha^2-3\alpha\beta^2\gamma+13\beta\gamma$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ, καὶ τρίτου ὡς πρὸς β, γ.

Ἔστω τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $8\chi+\chi^2+16$. Ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος χ νὰ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ ὡς ἑξῆς: $16+18\chi+\chi^2$, λέγομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι **διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ.** Ὁμοίως, ἐὰν γράψωμεν αὐτό, ὥστε οἱ ἐκθέται τοῦ χ νὰ βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, δηλαδὴ οὕτω : $χ^2 + 8χ + 16$, λέγομεν, ὅτι τοῦτο εἶναι **διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ, ἀνηγμένον.**

Ἐν γένει πᾶν πολυώνυμον δύναται νὰ διαταχθῇ, ὡς τὸ ἀνωτέρω, κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

92. Τὰ κάτωθι πολυώνυμα τίνος βαθμοῦ εἶναι ὡς πρὸς α, ὡς πρὸς x ; ὡς πρὸς α καὶ x ; Διατάξατε αὐτὰ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α καὶ τὰς κατιούσας τοῦ x, μετὰ τὰς δυνατὰς ἀναγωγάς.

α') $3α^2x^4-6αx^5-28α^3x^3+27α^6+x^6-54α^5x+9α^4x^2$

β') $-3x^6-α^6+7αx^5+27α^5x+0{,}7α^4x^2-0{,}7α^2x^4-α^3x^3$

γ') $16x^6+\frac{2}{3}αx^5+15α^5x+7α^6-7α^6-7α^4x^2+\frac{1}{12}α^2x^4-11α^3x^3$

δ') $-2α^5x-3x^6+13α^5x+3α^6-\frac{5}{2}α^2x^4+6α^3$

Β'. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

1. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 60. Καλοῦμεν ἄθροισμα δοθέντων πολυωνύμων, τὸ πολυώνυμον τὸ ἔχον ὡς ὅρους τοὺς ὅρους τῶν δοθέντων καὶ ἕκαστον μὲ τὸ σῆμα του.

Τὸ ἄθροισμα π.χ. τῶν $3α^2χ+β^3+6+α^4$ καὶ $-β^3-8+2α^4+2α^2χ$, τὸ ὁποῖον παριστάνομεν καὶ ὡς ἑξῆς :

$$(3α^2χ+β^3+6+α^4) + (-β^3-8+2α^4+2α^2χ)$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον $3α^2χ+β^3+6+α^4-β^3-8+2α^4+2α^2χ$.

Ἐπειδὴ ὑπάρχουν ὅμοιοι ὅροι εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο, ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν αὐτῶν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον τὸ $5α^2χ+3α^4-2$.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα δοθέντων πολυωνύμων, λέγεται **πρόσθεσις** αὐτῶν.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα καὶ περισσοτέρων τῶν δύο πολυωνύμων, (τὰ ὁποῖα πρὸς εὐκολίαν ὑποθέτομεν ἀνηγμένα), ἐκτελοῦμεν δὲ ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων εἰς τὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Συνήθως, ὅταν πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα (ἀνηγμένων) πολυωνύμων, ἐχόντων μεταξύ των ὁμοίους ὅρους, γράφομεν τὸ ἓν κάτωθι τοῦ ἄλλου, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν στήλην (καθ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατὸν) διὰ νὰ εὐκολύνεται ἡ ἀναγωγὴ τούτων. Οὕτω π.χ., ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων

$$5\alpha^5-4\alpha^3\beta^2+8\alpha^4\beta-7\alpha\beta^4\gamma^2+2\alpha^2\beta^3\gamma+\gamma^3$$
$$2\alpha^2\beta^3\gamma+6\alpha^5-12\alpha^4\beta+2\alpha^3\beta^2-\alpha\beta^4\gamma^2-3\gamma^3$$
$$-2\alpha^5-6\alpha^4\beta+9\alpha^2\beta^3\gamma-12\alpha^3\beta^2+\alpha\beta^4\gamma^2-7\gamma^3$$

γράφομεν πρῶτον αὐτὰ ὡς ἑξῆς:

$$5\alpha^5+8\alpha^4\beta-4\alpha^3\beta^2+2\alpha^2\beta^3\gamma-7\alpha\beta^4\gamma^2+\gamma^3$$
$$6\alpha^5-12\alpha^4\beta+2\alpha^3\beta^2+2\alpha^2\beta^3\gamma-\alpha\beta^4\gamma^2-3\gamma^3$$
$$-2\alpha^5-6\alpha^4\beta-12\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3\gamma+\alpha\beta^4\gamma^2-7\gamma^3$$

Ἀκολούθως κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων, τῶν κειμένων εἰς τὰς αὐτὰς στήλας καὶ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον

$$9\alpha^5-10\alpha^4\beta-14\alpha^3\beta^2+13\alpha^2\beta^3\gamma-7\alpha\beta^4\gamma^2-9\gamma^3$$

Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω ὁρίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἄσκησις

93. Νὰ προστεθοῦν τὰ κάτωθι πολυώνυμα:

α') $2\alpha-5\beta+2\gamma$, $\quad 2\alpha+3\beta+\gamma$, $\quad -3\alpha-2\gamma$

β') $2x^2-2x\psi+3\psi^2$, $\quad -x^2+5x\psi+4\psi^2$, $\quad x^2-2x\psi-6\psi^2$

γ') $2\alpha\beta+3\alpha\gamma+6\alpha\beta\gamma$, $\quad -5\alpha\beta+2\beta\gamma-5\alpha\beta\gamma$, $\quad 3\alpha\beta-2\beta\gamma$

δ') $\frac{2x^2}{3}+\frac{1}{3}x\psi-\frac{1}{4}\psi^2$, $\quad -x^2-\frac{2x\psi}{3}+2\psi^2$, $\quad \frac{2x^2}{3}-x\psi-\frac{5}{4}\psi^2$

ε') $\frac{5x^2}{8}-\frac{x\psi}{3}+\frac{3\psi^2}{8}$, $\quad -\frac{3x^2}{4}+\frac{14x\psi}{15}-\psi^2$, $\quad \frac{x^2}{2}-x\psi+\frac{\psi^2}{5}$

2. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 61. Καλοῦμεν **ἀφαίρεσιν** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως, ἔστω Β ἀπὸ ἄλλης Α, τὴν εὕρεσιν τρίτης Γ, ἡ ὁποία προστιθεμένη εἰς τὴν Β δίδει ἄθροισμα τὴν Α. Τὸ ἐξαγόμενον Γ τῆς ἀφαιρέσεως λέγεται **διαφορὰ** τῶν Α καὶ Β.

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν μονώνυμόν τι ἀπὸ δοθεῖσαν παράστασιν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς ταύτην τὸ ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Διότι, ἐὰν π.χ. θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν τοῦ $-\alpha^2$ ἀπὸ τοῦ $\alpha^3\psi$ καὶ παραστήσωμεν αὐτὴν μὲ δ, θὰ εἶναι

$$\delta = \alpha^3\psi-(-\alpha^2).$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως θὰ ἔχωμεν

$$\delta + (-\alpha^2) = \alpha^3\psi$$

Προσθέτοντες εἰς τὰ ἴσα τὸ α^2 εὑρίσκομεν $\delta + (-\alpha^2)+\alpha^2=\alpha^3\psi+\alpha^2$ καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν $-\alpha^2$ καὶ α^2, ἔχομεν $\delta=\alpha^3\psi+\alpha^2$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ διαφορὰ π.χ. τοῦ $\alpha^2\beta$ ἀπὸ τοῦ $3\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3$ εἶναι $3\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3-\alpha^2\beta=2\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3$.

Ἐὰν ζητεῖται π.χ. ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $\alpha^3\chi-\alpha^2\psi+\alpha^3$ νὰ ἀφαιρεθοῦν περισσότερα τοῦ ἑνὸς μονώνυμα, ἔστω τὰ $\alpha^2\chi$, $-3\alpha^2\psi^3$, $-\alpha^4$ $2\alpha\psi^2$ ἢ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ πρῶτον μονώνυμον, ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τὸ δεύτερον καὶ ἀκολούθως ἀπὸ τὸ νέον ἐξαγόμενον τὸ τρίτον καὶ οὕτω καθεξῆς, ἢ (συντομώτερον) προσθέτομεν εἰς τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ ἄθροισμα τῶν πρὸς ἀφαίρεσιν δοθέντων μονωνύμων, ἕκαστον μὲ ἀντίθετον σῆμα. Ἤτοι ἔχομεν κατὰ ταῦτα:

$$\alpha^3\chi-\alpha^2\psi+\alpha^3-\alpha^2\chi+3\alpha^2\psi^3+\alpha^4-2\alpha\psi^2.$$

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθείσης παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου, καθένα μὲ τὸ ἀντίθετον πρόσημόν του.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καθ' ὅμοιον τρόπον, καθὼς καὶ ἀνωτέρω. Οὕτω ἡ διαφορὰ τοῦ $3\alpha^2\chi-9\alpha^3\chi^2-6\alpha^2\chi^2$ ἀπὸ τοῦ $9\alpha^2\chi+18\alpha^3\chi^2-\alpha^2\chi^2$, τὴν ὁποίαν σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$(9\alpha^2\chi+18\alpha^3\chi^2-\alpha^2\chi^2)-(3\alpha^2\chi-9\alpha^3\chi^2-6\alpha^2\chi^2)$$

εἶναι $$9\alpha^2\chi+18\alpha^3\chi^2-\alpha^2\chi^2-3\alpha^2\chi+9\alpha^3\chi^2+6\alpha^2\chi^2$$

καὶ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$6\alpha^2\chi+27\alpha^3\chi^2+5\alpha^2\chi^2.$$

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ δοθὲν πολυώνυμον ἄλλο τοιοῦτο, ἐν πρώτοις δι' ἕκαστον εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῦ ἀνηγμένον, ἐὰν δὲ ἔχουν μεταξύ των ὁμοίους ὅρους, συνήθως διατάσσομεν ταῦτα κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον, καθὼς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν, ἀλλὰ μὲ ἠλλαγμένα τὰ πρόσημα τῶν ὅρων των.

Οὕτω π.χ., ἐὰν ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν τοῦ $9\alpha^3-8\alpha^2\beta+5\alpha\beta^2-7\beta^3$ ἀπὸ τοῦ $7\alpha^3+2\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2-11\beta^3-4\gamma^2$.

γράφομεν $\quad 7\alpha^3+2\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2-11\beta^3-4\gamma^2$

$\quad -9\alpha^3+8\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2+7\beta^3$

καὶ ἐκτελοῦντες τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν $\quad -2\alpha^3+10\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2-4\beta^3-4\gamma^2$.

Ἀσκήσεις

94. α΄) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ $4x^2+3x\psi+3\psi^2$ ἀπὸ τὸ $x^2-x\psi+2\psi^2$

β΄) Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ τὸ $\alpha^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-\beta^3$

γ΄) Ἀπὸ τὸ $\alpha^2x^2+4\alpha x\psi-3\alpha\beta\psi^2$ τὸ $4\alpha\beta\psi^2-5\alpha x\psi-2\alpha^2x^2$

δ΄) Ἀπὸ τὸ $10\alpha^{\mu}-15\beta^{\nu}-\gamma^{\rho}+5\delta^{\lambda}$ τὸ $-9\alpha^{\mu}+2\beta^{\nu}-5\delta^{\lambda}-\gamma^{\rho}$

ε΄) Ἀπὸ τὸ $4\psi^2+x^2-4x\psi-3x+4$ τὸ $\psi^2+x^2+2x\psi-4\psi-2x$

95. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $2{,}5x^2+3\alpha x-\frac{7}{9}\alpha^2$ τὸ $2x^2-\alpha x-0{,}5\alpha$

96. Νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ $\frac{x^2}{4}-6x+\frac{9}{15}$ τὸ $-\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{8}-\frac{3x}{9}+\frac{1}{5}$.

3. ΠΕΡΙ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ ΚΑΙ ΑΓΚΥΛΩΝ

§ 62. Τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν δύο πολυωνύμων παριστάνομεν, ὡς εἴδομεν, κλείοντες ἕκαστον αὐτῶν ἐντὸς παρενθέσεως (ἢ ἀγκύλης) καὶ συνδέοντες ταύτας μὲ τὸ $+$ ἢ $-$ τῆς πράξεως.

Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν $2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2$ καὶ $-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma$ παριστάνομεν μὲ $(2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)+(-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma)$
καὶ ἰσοῦται τοῦτο μὲ $2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma$

Ἡ διαφορὰ τῶν παραστάσεων παριστάνεται μὲ

$$(2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2)-(-\alpha^2-\alpha\beta+\gamma)$$

καὶ ἰσοῦται μὲ $2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2+\alpha^2+\alpha\beta-\gamma$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :

Ἐὰν μὲν πρὸ παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης ἐντὸς τῆς ὁποίας ἔχομεν ὅρους, ὑπάρχῃ τὸ +, δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψωμεν χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ πρόσημα τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων, ἐὰν δὲ ὑπάρχῃ τὸ —, τὴν παραλείπομεν, ἀφοῦ προηγουμένως ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον καθενὸς τῶν ἐντὸς αὐτῆς ὅρων.

Οὕτως ἔχομεν $\alpha-(\beta-\gamma+\delta)=\alpha-\beta+\gamma-\delta$

Διότι τὸ $-$, τὸ πρὸ τῆς παρενθέσεως, σημαίνει, νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $\beta-\gamma+\delta$ ἀπὸ τὸ α καὶ κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ α τοὺς ὅρους τῆς παρενθέσεως καθένα μὲ ἠλλαγμένον τὸ πρόσημόν του.

Ὁμοίως ἔχομεν :

$$\alpha-[-(\beta+\gamma)+(\alpha-\beta)-\gamma+\alpha]=\alpha+(\beta+\gamma)-(\alpha-\beta)+\gamma-\alpha=$$
$$=\alpha+\beta+\gamma-\alpha+\beta+\gamma-\alpha=-\alpha+2\beta+2\gamma.$$

Ἀντιστρόφως, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν ὅρους ἀθροίσματος ἐντὸς παρενθέσεως ἢ ἀγκύλης, καὶ ἂν μὲν θέτωμεν τὸ σῆμα + πρὸ αὐτῆς ἕκαστος ὅρος διατηρεῖ τὸ σῆμα του ἐντὸς ταύτης, ἂν δὲ τὸ —, οἱ ὅροι γράφονται ἕκαστος μὲ ἠλλαγμένον τὸ σῆμα του ἐντὸς αὐτῆς. Οὕτω π.χ. ἔχομεν :

$$\alpha-\beta-\gamma=\alpha+(-\beta-\gamma)=\alpha-(\beta+\gamma).$$

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 97. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :αὶ αἱ τιμαὶ των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

α') $3x-(7x-5\psi)$ ὅταν $x=\psi=3$.

β') $3x+6\psi-9\omega+(14x-7\psi+9\omega)$ ὅταν $x=6$, $\psi=3$, $\omega=4$.

γ') $\theta-(\mu-\nu)$ ἐὰν εἶναι $\theta=x+9\psi-6\omega$, $\mu=4x-7\psi+2\omega$, $\nu=x+\psi+\omega$.

Ὁμὰς δευτέρα. 98. Ἐκτελέσατε τὰς κατωτέρω πράξεις, ὥστε νὰ ἐξαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ αἱ ἀγκύλαι καὶ εὕρετε τὰς τιμὰς τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων :

α') $\alpha-[\alpha-[\alpha-(\alpha-1)]]$ ὅταν $\alpha=1$

β') $5{,}8\alpha^2-8{,}2\alpha^2-(\alpha^2-0{,}4)+0{,}6$ ὅταν $\alpha=2$

γ') $-[-[-(-x)]]-[-(-\psi)]$ ὅταν $x=\psi=-1$

δ') $-[+[+(-x)]]-[-[+(-x)]]]$ ὅταν $x=2$

ε' $-[-[-((\beta+\gamma-\alpha)]]+[-[-(\alpha-\beta+\gamma)]]$ ὅταν $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=-1$.

99. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$2-2x+7x^3-x^4+x^5$, $x+2x^2-3x^3+4x^4-x^5$ καὶ $x^2+2x^3-3x^4+4x^5$.

Νὰ εὑρεθῇ : α) Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν, β) τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ ἀκολούθως ἡ διαφορὰ τούτου ἀπὸ τοῦ τρίτου, γ') νὰ προστεθῇ ἡ διαφορὰ τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ πρώτου εἰς τὸ τρίτον.

Ὁμὰς τρίτη. 100. Γράψατε καταλλήλως τὰς κατωτέρω παραστάσεις, ὥστε οἱ ὅροι των ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς νὰ εἶναι εἰς παρένθεσιν ἢ ἀγκύλην ἔχουσαν πρὸ αὐτῆς : α') τὸ σῆμα +, β') τὸ σῆμα —:

χ^3+7x^2-3x-5, $-5x^4-(3x^3-8x^2)-6x+9$, $13x-16x^2+19x^3-14\alpha+5\gamma$

101. Νὰ εὑρεθοῦν τά :

α') $x+\psi+\omega+\varphi$, β') $x-\psi-\omega+\varphi$, γ') $\psi-(x+\omega-\varphi)$, ὅταν τεθῇ :

$x=3\alpha^2-2\alpha\beta+5\beta^2$, $\psi=7\alpha^2-8\alpha\beta+5\beta^2$, $\omega=9\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2$, $\varphi=11\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta$

Ὁμὰς τετάρτη. 102. Εἰς τὴν πρώτην τάξιν σχολείου τινὸς φοιτοῦν α μαθηταί, εἰς τὴν δευτέραν β ὀλιγώτεροι, εἰς δὲ τὴν τρίτην 2β ὀλιγώτεροι τῶν εἰς τὴν πρώτην. Πόσους μαθητὰς ἔχουν ἐν ὅλῳ αἱ τρεῖς τάξεις; Πόσους ἔχουν αἱ δύο πρῶται τάξεις περισσοτέρους τῆς τρίτης:

103. Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καὶ Β, ὁ Α ἔχει x δρχ. καὶ οἱ δύο ὁμοῦ μ δρχ. Ἂν ὁ Α δώσῃ εἰς τὸν Β 3 δρχ., πόσας θὰ ἔχῃ ἕκαστος;

104. Ὁ Β ἔχει τριπλασίας δρχ. ἢ ὁ Α, ὁ Γ διπλασίας τοῦ Β, ὁ δὲ Α ἔχει μ δρχ. Πόσας ἔχουν καὶ οἱ τρεῖς;

4. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 63. Καλοῦμεν γινόμενον δοθεισῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τὴν παράστασιν, ἡ ὁποία ἔχει παράγοντας τὰς δοθείσας παραστάσεις.

Ἡ πρᾶξις, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον ἀλγεβρικῶν παραστάσεων λέγεται **πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $5\alpha^2\beta^2\gamma$ καὶ $3\beta\gamma^2$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ γινόμενόν των, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτω: $(5\alpha^2\beta^2\gamma)\cdot(3\beta\gamma^2)$, ἰσοῦται μὲ $5\alpha^2\beta^2\gamma\cdot 3\beta\gamma^2$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι γινόμενον τῶν ἀλγεβρικῶν παραγόντων τῶν μονωνύμων καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν αὐτῶν θὰ ἔχωμεν

$$5\alpha^2\beta^2\gamma\cdot 3\beta\gamma^2=5\cdot 3\cdot\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\gamma^2=15\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Ἐκ τούτων καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων ὁδηγούμενοι λέγομεν ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἀκεραίων μονωνύμων, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς συντελεστάς των καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου των γράφομεν καθένα γράμμα, ὑπάρχον εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα, μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει τοῦτο εἰς τὰ δοθέντα.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου μονωνύμων ὡς πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματά του, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων του ὡς πρὸς τὰ γράμματα αὐτά. Π.χ. τὸ $(5\alpha^2\beta\gamma)\cdot(-2\alpha\beta^2\gamma^3\delta)=-10\alpha^3\beta^3\gamma^4\delta$ εἶναι βαθμοῦ ὡς πρὸς α, β, γ, δ $4+7=11$, ὅπου 4 εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ πρώτου παράγοντος καὶ 7 ὁ τοῦ δευτέρου ὡς πρὸς τὰ α, β, γ, δ.

Ἀσκήσεις

105. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α') $x^7\cdot(-x^3)\cdot\psi^4\cdot\psi^4$ β') $(-x^4\cdot x)\cdot\alpha^3\cdot\alpha^5\cdot\alpha^2$ γ') $(x^2)^3\cdot(\beta^3)^4$ δ') $x^{\nu+2}\cdot x^{2\nu}\cdot x$

ε') $x^{3\nu+1} \cdot x \cdot x^{2\nu-2} \cdot x^2$, στ') $(7x\psi\omega)\cdot(4x^2\psi^2)$ ζ') $(-x\cdot\psi\omega)\cdot(x^2\cdot\psi^2\cdot\omega^2)$

106. Εὕρετε τὰ α') $(-2,5\alpha^2\beta x)^2$, β') $(-0,3\alpha\beta\gamma^2)^3$, γ') $(-2\alpha\beta^2\gamma x^2)^4$

107. Εὕρετε τά:

α') $\alpha^x\,(-\alpha^{2x-1})$, β') $(-x^{\nu-1}\psi^{\mu-3})\,(-x^{\nu-1}\cdot\psi^{\mu-1})$. γ') Πῶς ὑψοῦμεν μονώνυμον εἰς τὸ τετράγωνον ἢ εἰς τὸν κύβον ἢ εἰς δύναμιν μὲ ἀκέραιον ἐκθέτην; Π.χ. μὲ τί ἰσοῦται τὸ $(6\alpha\beta^2)^2$, τὸ $\left(\frac{3}{4}x^3\psi\right)^3$, τὸ $(25\alpha^2\beta^2\gamma)^5$;

5. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΕΠΙ ΜΟΝΩΝΥΜΟΝ

§ 64. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)\cdot 2\alpha.$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του, θὰ ἔχωμεν $(\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)\cdot 2\alpha=[\alpha^2+(-3\alpha\beta)+\beta^2]\cdot 2\alpha$.

Ἐπειδὴ ἔχομεν πολλαπλασιασμὸν ἀθροίσματος σχετικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ ἄλλον ἀριθμόν, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ἀνωτέρω γινόμενον ἰσοῦται μὲ $\alpha^2\cdot 2\alpha+(-3\alpha\beta)\cdot 2\alpha+\beta^2\cdot 2\alpha=2\alpha^3-6\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι:

$(5\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+7\beta^3)\cdot(-3\alpha\beta)=-15\alpha^3\beta^2+9\alpha^2\beta^3-21\alpha\beta^4$. Ὥστε:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν καθένα τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα.

Ἐὰν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν μονώνυμον ἐπὶ πολυώνυμον, δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν παραγόντων (θεωροῦντες τὸ πολυώνυμον ὡς ἕνα σχετικὸν ἀριθμόν, ἐπειδὴ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτοῦ) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυώνυμον ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον. Π.χ. τὸ γινόμενον

$\alpha\cdot(\beta+\gamma-\alpha)=(\beta+\gamma-\alpha)\cdot\alpha$ καὶ τοῦτο $=\alpha\beta+\alpha\gamma-\alpha^2$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 108. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ τῶν ἐξαγομένων αἱ ἀριθμ. τιμαὶ διὰ τὰς δοθομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $3\alpha x(\alpha^2-4\alpha x+x^2)$	ὅταν	$x=-1,\ \alpha=2$
β') $(3\alpha+7\beta)\alpha-(9\beta-5\alpha)\beta$	»	$\alpha=2,\ \beta=-3$
γ') $(3\alpha^2+7\beta^2)\alpha\beta-(9\alpha^2-8\beta^2)\alpha\beta$	»	$\alpha=-1,\ \beta=-2$
δ') $(3\alpha^2\beta^3+7\beta^2)\cdot 3\alpha^2\beta^2-(9\alpha^3\beta^3-8\beta^2)\cdot 2\alpha^2\beta^2$	»	$\alpha=-1,\ \beta=-2$

Ὁμὰς δευτέρα. Λύσατε τὰ ἑξῆς προβλήματα :

109. Ἐκ τινος τόπου ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο ταχυδρόμοι προχωροῦντες ἐπ' εὐθείας πρὸς ἀντιθέτους φοράς. Ὁ α' διανύει καθ' ἡμέραν $\alpha+\mu$ χλμ. καὶ ὁ β' 2 χλμ. ὀλιγώτερα τοῦ α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμ. ;

110. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου τινὸς ἀριθμοῦ εἶναι α. Τὸ ψηφίον τῶν μονάδων του εἶναι μ. Πότε καὶ πόσον θὰ αὐξηθῇ ὁ ἀριθμὸς ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του ;

111. Ἐκ τινος τόπου ἀναχωρεῖ ταχυδρόμος διανύων 30 χλμ. ἡμερησίως. μ ἡμέρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων γ χλμ ἡμερησίως καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν α'. Πόσον θὰ ἀπέχουν μετὰ τ ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ α' ;

6. ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 65. Καλοῦμεν γινόμενον δύο πολυωνύμων, τὸ πολυώνυμον τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ αὐτῶν, ἤτοι τὸ ἔχον παράγοντας τὰ δύο πολυώνυμα.

Ἐπειδὴ ἕκαστον πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἕπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ πάντας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων συνήθως διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας ἢ ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὸν πολλαπλασιασμόν, πρὸς εὐκολίαν εἰς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα.

1ον. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ γινόμενον $(2\chi^2-\chi+3)(\chi-4)$.

Γράφομεν

$$\begin{array}{lr}
 & 2\chi^2-\chi+3 \\
 & \chi-4 \\ \hline
\text{(1) μερικὸν γινόμενον} & 2\chi^3-\chi^2+3\chi \\
\text{(2) » »} & -8\chi^2+4\chi-12 \\ \hline
\text{(3) τελικὸν »} & 2\chi^3-9\chi^2+7\chi-12
\end{array}$$

Τὰ (1), (2) εὑρίσκονται ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ χ καὶ ἐπὶ -4, λέγονται δὲ μερικὰ γινόμενα.

Τὸ (3) προκύπτει ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν (1) καὶ (2) καὶ λέγεται τελικὸν γινόμενον.

2ον. Ἔστω τὸ γινόμενον $(4\chi^5-3\chi^4+\chi^2-1)(\chi^3-\chi+2)$. Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω ἔχομεν

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & & 4\chi^5 & -3\chi^4 & & +\chi^2 & & -1 & \\
 & & & & & \chi^3 & & -\chi & +2 & \\
\hline
4\chi^8 & -3\chi^7 & & +\chi^5 & & -\chi^3 & & & & \\
 & & -4\chi^6 & +3\chi^5 & & -\chi^3 & & +\chi & & \text{μερικὸν γινόμενον} \\
 & & & +8\chi^5 & -6\chi^4 & & +2\chi^2 & & -2 & \text{» »} \\
\hline
4\chi^8 & -4\chi^7 & -4\chi^6 & +12\chi^5 & -6\chi^4 & -2\chi^3 & +2\chi^2 & +\chi & -2 & \text{τελικὸν »}
\end{array}$$

§ 66. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον τοῦ α′ ὅρου $4\chi^5$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν α′ ὅρον χ^3 τοῦ πολλαπλασιαστοῦ δίδει τὸν α′ ὅρον $4\chi^8$ τοῦ γινομένου. Ὁμοίως τὸ γινόμενον τῶν δύο τελευταίων ὅρων αὐτῶν -1 καὶ 2 δίδει τὸν τελευταῖον ὅρον -2 τοῦ γινομένου. Ἐπομένως:

Ὅταν οἱ παράγοντες γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων (ἀνηγμένων) εἶναι διατεταγμένοι κατὰ τὰς κατιούσας ἢ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των, τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων ἄκρων ὅρων (τῶν πρώτων καὶ τελευταίων) δίδουν τοὺς ἀντιστοίχους ἄκρους ὅρους τοῦ γινομένου διατεταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.

Ἄρα τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον δύο ὅρους καὶ δὲν δύναται νὰ εἶναι μονώνυμον.

§ 67. Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα των ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.

Ἀσκήσεις

112. Εὕρετε τὰ κάτωθι γινόμενα καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν δοθέντων ὡς καὶ τῶν ἐξαγομένων διὰ τὰς διδομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

α′) $(x^2+4x+3)\cdot(1-x^2)$ ἂν τεθῇ ὅπου $x=-1$

β′) $(x^2+2x+2)\cdot(x^2-5x+3)$ » » » $x=-1$

γ′) $(x^3-2x^2+8)\cdot(x^2-2x-2)$ » » » $x=3$

δ′) $(3\alpha^2-2\alpha+5\alpha^3-1)\cdot(\alpha-3-4\alpha^2)$ » » » $\alpha=3$

113. Ὁμοίως:

α′) $(4\alpha^{2\nu+1}+6\alpha^{\nu+3}+9\alpha^3)\cdot(2\alpha^{\nu+4}-3\alpha^3)$

β′) $(x^{12}-x^4\psi^2+x^6\psi^4-x^3\psi^6)\cdot(x^3+\psi^2)$

γ') $(\alpha^{\mu}-\beta\cdot\alpha^{\mu-1}\cdot x+\gamma\cdot\alpha^{\mu-2}\cdot x^2)(x^{2-\mu}+\beta\cdot\alpha^{1-\mu}\cdot x-\gamma\cdot\alpha^{\mu}\cdot x^2)$

δ') $([x^{\alpha(\beta-1)})+\psi^{\beta(\alpha-1)}][x^{\alpha(\beta-1)})-\psi^{\beta(\alpha-1)})]$

ε') $(x^4+x^3-x^2+x+1)(x-1)(x+2)(x+1)$

στ') $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha+\beta+3\gamma)(\beta-3\gamma-2\alpha)$

θέτοντες εἰς ὅλα ὅπου $\alpha=1$, $\beta=2$, $x=\psi=-1$.

7. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΙ

§ 68. Παραστάσεις τῆς μορφῆς:

$(\alpha+\beta)^2$, $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$, $(\alpha+\beta)^3$, $(\alpha-\beta)^3$,...

παρουσιάζονται συχνὰ καὶ εἶναι καλὸν νὰ γνωρίζωμεν ἀπὸ μνήμης τὰ ἐξαγόμενα τὰ εὑρισκόμενα, ἐὰν εἰς ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόσωμεν τὸν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Οὕτως ἔχομεν:

1ον. $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

2ον. $(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)\cdot(\alpha-\beta)=\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$. Ἤτοι:

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος (ἢ τῆς διαφορᾶς) δύο σχετικῶν ἀριθμῶν, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ σὺν (ἢ πλὴν) τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ἀριθμῶν σὺν τῷ τετραγώνῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

3ον. Ἐπίσης εὑρίσκομεν: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2+\alpha\beta-\alpha\beta-\beta^2=\alpha^2-\beta^2$. Ἤτοι

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν των, ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ μειωτέου πλὴν τὸ τετράγωνον τοῦ ἀφαιρετέου.

4ον. Ἐπίσης εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι: $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta)$

$$=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\cdot(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3.$$

5ον. Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα γράψωμεν $-\beta$ ἀντὶ τοῦ $+\beta$, προκύπτει $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2(-\beta)+3\alpha(-\beta)^2+(-\beta)^3$

ἢ $$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3.$$

Εὐκόλως εὑρίσκομεν δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἀκόμη ὅτι:

6ον. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)=\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta$.

7ον. $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)=\chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\chi+\alpha\beta\gamma$

8ον. $(\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+\psi^2)-(\alpha\chi+\beta\psi)^2=(\alpha\psi-\beta\chi)^2$.

9ον. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\chi^2+\psi^2+\zeta^2)-(\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\zeta)^2=$

$$=(\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\beta\zeta-\gamma\psi)^2=(\gamma\chi-\alpha\zeta)^2$$

Αἱ δύο ἀνωτέρω ἰσότητες 8 καὶ 9 λέγονται ταυτότητες τοῦ Lagrange.

'Ασκήσεις

114. Δείξατε, ὅτι εἶναι :

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2.$$

115. Ἐὰν τεθῇ $x=2\psi+3\omega$, δείξατε ὅτι εἶναι $x^3-8\psi^3-27\omega^3-18x\psi\omega=0$.

116. Ἐὰν τεθῇ $\alpha+\gamma=2\beta$, δείξατε, ὅτι εἶναι $(\alpha-\beta)^2+2\beta^2+(\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\gamma$

117. Ἐὰν τεθῇ $x+\psi=1$, δείξατε, ὅτι εἶναι $x^3(\psi+1)-\psi^3(x+1)-x+\psi=0$.

118. Ἐὰν τεθῇ $x=\alpha-\beta$, θὰ εἶναι $(x-\alpha)^2+(x-\alpha)(2\beta-\gamma)-\beta\gamma+\beta^2=0$.

119. Ἐὰν τεθῇ $\varphi(x_1)=3x^2_1-x_1+1$, δείξατε ὅτι εἶναι

$$\varphi(x_1+1)-\varphi(x_1)-2\varphi(0)=6x_1.$$

120. Ἐὰν τεθῇ $\varphi(x)=3x^2+7x$ καὶ $\psi(x)=6x+10$, δείξατε ὅτι εἶναι

α') $\varphi(x+1)-\varphi(x)=\psi(x)$, β') $\psi(x+1)-\psi(x)=6$.

121. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, δείξατε ὅτι :

α') $(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\tau^2$

β') $(\tau-\alpha)^3+(\tau-\beta)^3+(\tau-\gamma)^3+3\alpha\beta\gamma=\tau^3$

γ') $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\beta)(\tau-\alpha)=\alpha\beta\gamma$

122. Δείξατε ὅτι $\alpha^4+\beta^4+(\alpha+\beta)^4=2\alpha^2\beta^2+2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2$.

123. Ὁμοίως : α') $\alpha^5+\beta^5=(\alpha^3+\beta^3)(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

β') $(\psi-\omega)^3+(x-\psi)^3+3(x-\psi)(x-\omega)(\psi-\omega)=(x-\omega)^3$.

124. Ὁμοίως : $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$

125. Ὁμοίως : $x^2(\psi-\omega)+\psi^2(\omega-x)+\omega^2(x-\psi)+(\psi-\omega)(\omega-x)(x-\psi)=0$.

8. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 69. Λέγομεν ὅτι ἀκέραιόν τι μονώνυμον εἶναι **διαιρετὸν** δι' ἄλλου, ἂν δύναται νὰ εὑρεθῇ τρίτον τοιοῦτο, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸ β' δίδει γινόμενον τὸ α'. Τὸ οὕτως εὑρισκόμενον μονώνυμον καλεῖται **πηλίκον** τῆς διαιρέσεως τῶν δύο δοθέντων, τὰ ὁποῖα λέγονται **διαιρετέος** καὶ **διαιρέτης**.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον τοῦ $24\alpha^7$ διὰ τοῦ $8\alpha^5$, τὸ ὁποῖον σημειώνομεν οὕτως $24\alpha^7 : 8\alpha^5$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον μὲ Π, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ὁρισμὸν $\Pi\cdot 8\alpha^5=24\alpha^7$. Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ τοῦ 8, εὑρίσκομεν $\Pi\cdot\alpha^5=24\alpha^7 : 8$ ἢ $\Pi\cdot\alpha^5=3\alpha^7$. Διαιροῦντες καὶ τὰ ἴσα αὐτὰ διὰ τοῦ α^5, ἔχομεν $\Pi=3\alpha^7 : \alpha^5=3\alpha^{7-5}=3\alpha^2$, ἤτοι $\Pi=3\alpha^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν π.χ. ὅτι $20\alpha^5\beta^6 : (-4\alpha\beta^5)=-5\alpha^4\beta$.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Ἵνα γινόμενόν τι σχετικῶν παραγόντων εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας αὐτοῦ καὶ καθένα μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον.

Προσέτι ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως δύο ἀκεραίων μονωνύμων διαιροῦμεν τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ (ἀριθμητικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καθὲν μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὸν διαιρετέον καὶ διαιρέτην.

§ 70. Ἐὰν ὁ διαιρετέος δὲν διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ τοῦ διαιρέτου, παραλείπομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντάς των, ἐὰν ὑπάρχουν, καὶ σχηματίζομεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν μένοντα, ὡς διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν μένοντα, ὡς διαιρέτην. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῶν δοθέντων μονωνύμων εἶναι **κλασματικὸν** ἢ παράστασις **κλασματική.** Οὕτω διὰ τὴν διαίρεσιν $20\alpha^2\beta^2\gamma^4 : -5\alpha\beta^3\gamma^7$ παραλείπομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας $5,\ \alpha,\ \beta^2,\ \gamma^4$ τοῦ διαιρέτου καὶ διαιρετέου καὶ θὰ ἔχωμεν :

$$4\alpha : -\beta\gamma^3 = \frac{4\alpha}{-\beta\gamma^3} = -\frac{4\alpha}{\beta\gamma^3}.$$

Ἄσκησις

126. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

α΄) $9\mu^4\psi^5 : -3\mu^2\psi^2$ β΄) $-12x^5\psi^5 : 11x^2\psi^4$ γ΄) $0{,}5x^2\psi^3 : -0{,}2x\psi$

δ΄) $0{,}45\alpha^2\beta^3\gamma^4 : 0{,}9\beta^3\gamma^3$ ε΄) $-12\mu^4\nu^5 : 16\mu^4\nu$ στ΄) $4\alpha\beta^4 : 0{,}25\alpha\beta^5\gamma\delta^4$

ζ΄) $-\frac{7}{9}\alpha^5\beta^4\gamma^2 : 0{,}8\alpha^5\beta^5$

9. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΔΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

§ 71. Καλοῦμεν διαίρεσιν δοθέντος πολυωνύμου (διαιρετέου) διὰ μονωνύμου (διαιρέτου) τὴν πρᾶξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν (ἂν ὑπάρχῃ) πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ἐπειδὴ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του, ἕπεται ὅτι :

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμον (διαιρετὸν) διὰ μονωνύμου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν καθένα ὅρον του διὰ τοῦ μονωνύμου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐξαγόμενα.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν:

(1) $(7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3):\alpha\beta = 7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2$

(2) $(42\alpha\chi-48\alpha\psi+18\alpha\omega):(-6\alpha) = -7\chi+8\psi-3\omega$

(3) $(-80\alpha^5-24\alpha^{10}):8\alpha^3 = -10\alpha^2-3\alpha^7$

Ἐὰν πολυώνυμον διαιρῆται διὰ μονωνύμου, θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Οὕτως ἔχομεν διὰ τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα:

(1) $7\alpha^2\beta^3+6\alpha^3\beta^2-15\alpha^3\beta^3 = \alpha\beta\cdot(7\alpha\beta^2+6\alpha^2\beta-15\alpha^2\beta^2)$

(2) $42\alpha\chi-48\alpha\psi+18\alpha\omega = (-6\alpha)\cdot(-7\chi+8\psi-3\omega)$

(3) $-80\alpha^5-24\alpha^{10}=8\alpha^3\cdot(-10\alpha^2-3\alpha^7) = -8\alpha^3\cdot(10\alpha^2+3\alpha^7)$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Ἂν πάντες οἱ ὅροι δοθέντος πολυωνύμου ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν αὐτὸν ἐκτὸς παρενθέσεως ὡς παράγοντα γινομένου, τοῦ ὁποίου ὁ ἄλλος παράγων εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου διὰ τοῦ τεθέντος ἐκτὸς τῆς παρενθέσεως κοινοῦ παράγοντος.

Π.χ. εἰς τὸ ἀνωτέρω πρῶτον πολυώνυμον ὡς κοινὸς διαιρέτης ἐλήφθη τὸ $\alpha\beta$ καὶ ἐτέθη ἐκτὸς παρενθέσεως εἰς τὸ β′ μέλος τῆς (1). Εἰς τὸ δεύτερον πολυώνυμον ἐλήφθη ὡς διαιρέτης τὸ -6α καὶ εἰς τὸ τρίτον τὸ $-8\alpha^3$ καὶ ἐτέθησαν ἐκτὸς τῶν παρενθέσεων εἰς τὰ δεύτερα μέλη τῶν (2) καὶ (3).

Ἀσκήσεις

127. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ νὰ τραπῇ ἀκολούθως ὁ διαιρετέος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων. Ἐπαληθεύσατε καὶ τὰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων:

α′) $(14x^3\psi^2-28x^4\psi^2):(2x^2\psi^2)$ ὅταν $x=2,\ \psi=-2$

β′) $(x+\psi)\cdot(\alpha-\beta):(x+\psi)$ » $x=\psi=4,\ \alpha=\beta=1$

γ′) $(8\alpha^4\beta^2-16\alpha^3\beta^3+24\alpha^2\beta^4-12\alpha^2\beta^2):(-4\alpha^2\beta^2)$ » $\alpha=3,\ \beta=2$

δ′) $(x^{\mu+2}\cdot\psi^\nu+2x^{\mu+1}+\psi^{\nu+1}-x^\mu\psi^{\nu+2}):x^\mu\psi^\nu$ » $x=4, \psi=1, \mu=\nu=-1$

128. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων τὰ

α′) $\alpha x+\beta x$, β′) $49\alpha\beta+63\alpha$, γ′) $56x\psi-72x\omega$, δ′) $0{,}35\alpha\beta-0{,}49\alpha\gamma$.

ε′) $2{,}3\alpha^4\beta^5-2{,}5\alpha^5\beta^4$, στ′) $\alpha^3x^3\psi+3\alpha^2\beta x^2\psi+3\alpha\beta^2x\psi^2-x\psi^4$,

ζ′) $12\frac{2}{3}\alpha^2\beta-14{,}25\alpha^5\beta^5-15\frac{5}{6}\alpha^5\beta^5\quad 11\frac{1}{12}\alpha^5\beta^1$

/

9. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ * ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ ΔΙΑ ΜΟΝΩΝΥΜΟΥ

§ 72. Καλοῦμεν διαίρεσιν (ἀκεραίου) πολυωνύμου (διαιρετέου) διὰ (ἀκεραίου) πολυωνύμου (διαιρέτου) τὴν πρᾶξιν, μὲ τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν, ἂν ὑπάρχῃ, τρίτον πολυώνυμον (πηλίκον), τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$ διὰ τοῦ $\alpha+1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ α, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ α), τὸν ὁποῖον ζητοῦμεν, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον α τοῦ διαιρέτου, πρέπει νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου α^3. Ἑπομένως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι $\alpha^3:\alpha=\alpha^2$. Ἀλλὰ τὸ α^2 δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁλόκληρον τὸ πηλίκον. Διότι, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν δοκιμὴν τῆς διαιρέσεως αὐτῆς. εὑρίσκομεν:

$$\alpha^2(\alpha+1)=\alpha^3+\alpha^2.$$

Τοῦτο ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸν διαιρετέον δίδει

$$(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1)-(\alpha^3+\alpha^2)=2\alpha^2+3\alpha+1.$$

Πρέπει λοιπὸν εἰς τὸν εὑρεθέντα πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου νὰ προστεθῇ παράστασίς τις ἀκόμη, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\alpha+1$ νὰ δίδῃ $2\alpha^2+3\alpha+1$. Ἤτοι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $2\alpha^2+3\alpha+1$ διὰ τοῦ $\alpha+1$. Ἔχομεν πάλιν νὰ διαιρέσωμεν δύο πολυώνυμα. Ἀλλ' ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἁπλουστέρα τῆς δοθείσης, διότι ὁ διαιρετέος ταύτης εἶναι προφανῶς ἁπλούστερος. Ἐπαναλαμβάνομεν τὴν αὐτὴν πορείαν καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῆς εἶναι $2\alpha^2:\alpha=2\alpha$. Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦ 2α ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\alpha+1$, δηλαδὴ τὸ $2\alpha\cdot(\alpha+1)=2\alpha^2+2\alpha$, ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον $2\alpha^2+3\alpha+1$, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $(2\alpha^2+3\alpha+1)-(2\alpha^2+2\alpha)=\alpha+1$

Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν εὑρέθη ὁλόκληρον τὸ πηλίκον ἀλλ' ὅτι πρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἀκόμη τὸ $\alpha+1$ διὰ τοῦ $\alpha+1$.

Ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς νέας αὐτῆς διαιρέσεως εἶναι 1, τὸ δὲ

*Ἡ διαίρεσις διὰ πολυωνύμου δὲν παρουσιάσθη πρὸ τοῦ 16ου αἰῶνος.

ὑπόλοιπον 0. Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως εἶναι $\alpha^2 + 2\alpha + 1$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 0.

Συνήθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ὡς ἀκολούθως:

Γράφομεν τὸν διαιρετέον, δεξιὰ αὐτοῦ τὸν διαιρέτην, κάτωθι τούτου τὸ πηλίκον καὶ ὑπὸ τὸν διαιρετέον τὰ γινόμενα ἑκάστου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην μὲ ἀντίθετον πρόσημον καὶ προσθέτομεν. Εἰς τὴν αὐτὴν στήλην γράφομεν καὶ τὰ ἑκάστοτε ὑπόλοιπα ἀφαιρέσεων.

$$\begin{array}{lrr|l}
\text{(διαιρετέος)} & \alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1 & & \alpha+1 \ \text{(διαιρέτης)} \\
 & -\alpha^3-\alpha^2 & & \alpha^2+2\alpha+1 \\
\hline
\text{πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον} & 2\alpha^2+3\alpha+1 & (1) & \text{(πηλίκον)} \\
 & -2\alpha^2-2\alpha & & \\
\hline
\text{δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον} & \alpha+1 & (2) & \\
 & -\alpha-1 & & \\
\hline
\text{τελικὸν ὑπόλοιπον} & 0 & (3) &
\end{array}$$

Αἱ παραστάσεις (1), (2) λέγονται μερικὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν διαιρέσεων, τὸ δὲ ὑπόλοιπον, τελικὸν ὑπόλοιπον τῆς ὅλης διαιρέσεως.

§ 73. Ἐν γένει διὰ τὴν διαίρεσιν δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, ὅταν εἶναι δυνατὴ ἡ διαίρεσις, ἀποδεικνύεται ὅτι:

α) Ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι διατεταγμένοι* κατὰ τὰς κατιούσας (ἢ ἀνιούσας) δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, διατεταγμένου ὁμοίως, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Διότι ἔστω $\Delta + \Delta' + \Delta'' + ..$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου καὶ $\delta + \delta' + \delta'' + ...$ τῶν τοῦ διαιρετέου, διατεταγμένων π.χ. κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Παριστάνομεν μὲ $\Pi + \Pi' + \Pi'' + ...$ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τοῦ

* Ἡ διάταξις πολυωνύμων κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γράμματός των διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτῶν, συναντᾶται τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔργον τοῦ NEWTON «Arithmetica Universalis» (1707). Τὸ 1760 παρουσιάζεται τὸ θέμα βελτιωμένον ἀπὸ διδακτικῆς πλευρᾶς.

πηλίκου διατεταγμένου ὁμοίως ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως ἔχομεν ὅτι

$$\Delta+\Delta'+\Delta''...=(\delta+\delta''+\delta''+...)\cdot(\Pi+\Pi'+\Pi''...)$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\delta\cdot\Pi$ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος ταύτης παριστάνει τὸν ὅρον, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τοῦ γράμματος, ὡς πρὸς τὸ ὁποῖον ὑπετέθησαν διατεταγμένα τὰ πολυώνυμα, ἑπομένως θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον Δ τοῦ πρώτου μέλους. Ἤτοι ἔχομεν ὅτι : $\delta\cdot\Pi=\Delta$ καὶ $\Pi=\Delta:\delta$, ἤτοι τὸ Π εἶναι πηλίκον τοῦ Δ διὰ τοῦ δ. Ἄρα :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν α΄ ὅρον τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο (ἀκεραίων) πολυωνύμων διατεταγμένων κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματός των, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν α΄ ὅρον τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Θὰ συμβῇ τὸ αὐτό, ἂν τὰ τρία πολυώνυμα (τοῦ διαιρετέου, διαιρέτου καὶ πηλίκου) εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ πρῶτοι κατὰ σειρὰν ὅροι των, θὰ εἶναι οἱ τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ καὶ ὁ ὅρος τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὅρου κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τοῦ κατωτάτου βαθμοῦ τοῦ πηλίκου.

β) Ἐὰν ἔχωμεν ἕνα ἢ περισσοτέρους κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν πρώτων ὅρων τοῦ πηλίκου, καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν διαφοράν, ἡ ὁποία καλεῖται μερικὸν ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Ἂν τούτου, διατεταγμένου ὁμοίως, διαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου θὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν μὲ Π μὲν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου (ἢ τὸ ἄθροισμα τῶν γνωστῶν κατὰ σειρὰν ἐκ τῶν πρώτων ὅρων αὐτοῦ), μὲ Ρ τὸ ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων τούτου, μὲ Δ τὸν διαιρετέον καὶ μὲ Δ΄, τὸν διαιρέτην (διατεταγμένων ὅλων ὁμοίως), θὰ ἔχωμεν $\Delta=\Delta'\cdot(\Pi+P)=\Delta'\cdot\Pi+\Delta'\cdot P$. Ἀφαιροῦντες τὸ τὸ $\Delta'\cdot\Pi$ ἀπὸ τὰ ἴσα, εὑρίσκομεν $\Delta-\Delta'\cdot\Pi=\Delta'\cdot P$ (τὸ ὁποῖον καλοῦμεν μερικὸν ὑπόλοιπον τῆς γενομένης διαιρέσεως). Ἀλλ' ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἕπεται $(\Delta-\Delta'\cdot\Pi):\Delta'=P$. Δηλαδὴ τὸ Ρ, ἤτοι οἱ λοιποὶ ὅροι τοῦ πηλίκου, θὰ εὑρεθοῦν ἂν διαιρέσωμεν τὸ

Δ–Δ'·Π διὰ τοῦ διαιρέτου Δ'. Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, ἂν διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Δ–Δ'·Π διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ Δ', θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Ρ, ἤτοι τὸν ἀμέσως ἑπόμενον μετὰ τὸν Π, ὅρον τοῦ πηλίκου.

§ 74. Καλοῦμεν **πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον** τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων τὸ εὑρισκόμενον, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον· τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον, τῆς ἐν λόγῳ διαιρέσεως λέγεται τὸ εὑρισκόμενον, ἐὰν ἀπὸ τὸ πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν **τρίτον μερικὸν ὑπόλοιπον,** τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται, ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου ἀπὸ τὸ δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἂν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον διαιρέσεως εἶναι 0, ἡ διαίρεσις λέγεται **τελεία,** ἄλλως λέγεται **ἀτελής.**

§ 75. Ἐν γένει ἔστω ὅτι πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν ἓν (ἀκέραιον) πολυώνυμον Δ διὰ τοῦ Δ', διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματός των, καὶ ὅτι ὁ διαιρετέος δὲν εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου ὡς πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Καὶ ὅταν δὲν γνωρίζωμεν ἂν ἡ διαίρεσις αὐτῶν εἶναι τελεία, ἀρχίζομεν τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον καὶ θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ὅρων τοῦ πηλίκου καθὼς καὶ μίαν σειρὰν πολυωνύμων, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι **πρῶτον, δεύτερον** κ.τ.λ. μερικὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως. Ὁ βαθμὸς τῶν ὑπολοίπων, ὡς πρὸς τὸ ἐν λόγῳ γράμμα, θὰ βαίνῃ ἐλαττούμενος. Διότι μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου καὶ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου π.χ. δὲν θὰ ὑπάρχῃ εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου. Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρέτου, δίδει γινόμενον ἴσον μὲ τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου, ὅταν ἀφαιρέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην ἀπὸ τὸν διαιρετέον, οἱ ὅροι τοῦ ἀνωτέρου βαθμοῦ, δὲν θὰ ὑπάρχουν εἰς τὴν διαφοράν, ἤτοι τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον θὰ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρετέου. Ὁμοίως τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην, ἀφαιρούμενον ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, δίδει τὸ δεύτερον ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, τοῦ ὁποίου ὁ πρῶτος ὅρος, διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου, δίδει τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου.

Ὁμοίως προχωροῦντες παρατηροῦμεν ὅτι ὁ βαθμὸς ἑκάστου ὑπολοίπου εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του τοὐλάχιστον κατὰ μίαν μονάδα.

Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εὕρωμεν ὅρους τινὰς τοῦ πηλίκου, ἂν θέλωμεν νὰ συνεχίσωμεν τὴν πρᾶξιν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀντιστοίχου ὑπολοίπου νὰ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου. Πρὸς τοῦτο, πρέπει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου τούτου νὰ μὴ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Ἐπειδὴ οἱ βαθμοὶ τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων βαίνουν ἐλαττούμενοι, θὰ καταλήξωμεν μετά τινας πράξεις ἢ εἰς ὑπόλοιπον μηδὲν ἢ εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου.

Ἑπομένως, δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς χ, π.χ. τῶν Δ καὶ Δ', μὲ βαθμὸν τοῦ Δ ὄχι κατώτερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ Δ' ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα των χ, ὑπάρχει ἓν πολυώνυμον ἔστω Π, τοιοῦτον ὥστε, νὰ εἶναι τὸ $\Delta-\Delta'\cdot\Pi$ πολυώνυμον ἀκέραιον ὡς πρὸς χ καὶ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ Δ'. Τὸ Π εὑρίσκεται, ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διὰ τοῦ Δ' ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη.

Ἂν τεθῇ $\Delta-\Delta'\cdot\Pi=\Upsilon$, θὰ εἶναι $\Delta=\Delta'\cdot\Pi+\Upsilon$ Τὰ οὕτως εὑρισκόμενα Π καὶ Υ καλοῦνται **πηλίκον** καὶ **ὑπόλοιπον** τῆς **μὴ τελείας** ἢ **ἀτελοῦς** ταύτης διαιρέσεως. Ἐὰν τὸ $\Upsilon=0$, ἔχομεν περίπτωσιν τελείας διαιρέσεως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς μὲν τὴν τελείαν διαίρεσιν ἔχομεν ὅτι:

Ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον.

Εἰς δὲ τὴν ἀτελῆ ὅτι:

Ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.

῎Εστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ

$\chi^4-2\chi^3-7\chi^2-19\chi-8$ διὰ τοῦ $\chi^2-4\chi-2$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν, ἔχομεν :

(διαιρετέος)	$\chi^4-2\chi^3-7\chi^2-19\chi-8$	$\chi^2-4\chi-2$ (διαιρέτης)
	$-\chi^4+4\chi^3+2\chi^2$	$\chi^2+2\chi+3$ (πηλίκον)
πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον	$2\chi^3-5\chi^2-19\chi-8$	
	$-2\chi^3+8\chi^2+4\chi$	
δεύτερον μερικὸν ὑπόλοιπον	$3\chi^2-15\chi-8$	
	$-3\chi^2+12\chi+6$	
τελικὸν ὑπόλοιπον	$-3\chi-2$	

᾿Επειδὴ τὸ ὑπόλοιπον $-3\chi-2$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $\chi^2-4\chi-2$, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιον μονώνυμον ἢ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\chi^2-4\chi-2$, νὰ δίδῃ γινόμενον τὸ $-3\chi-2$. Διὰ τοῦτο πρέπει νὰ διακόψωμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην καὶ τὸ $-3\chi-2$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀτελοῦς ταύτης διαιρέσεως, τὸ δὲ $\chi^2+2\chi+3$ πηλίκον αὐτῆς.

§ 76. *Παρατηρήσεις.* Πολυώνυμόν τι δὲν εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου, διατεταγμένων καὶ τῶν δύο ὁμοίως πρὸς ἓν γράμμα των :

1ον. ῞Οταν ὁ α' ὅρος τοῦ διαιρετέου ἢ ἑνὸς ἐκ τῶν εὑρισκομένων μερικῶν ὑπολοίπων δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρέτου.

2ον. ῞Οταν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ διαιρέτου δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

3ον. ῞Οταν εἶναι διαιρετὸς μὲν ὁ α' ὅρος καὶ ὁ τελευταῖος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α' καὶ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου ἀντιστοίχως, ἀλλὰ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως δὲν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

᾿Ασκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 129. Νὰ γίνουν αἱ ἑξῆς διαιρέσεις μετὰ τῶν δοκιμῶν των :

α') $(2x^3-7x^2-7x+4):(2x-1)$ β') $(6x^3+2x^2+11x+10):(3x-2)$

γ') $(x^4+x^2+1):(x^2+x+1)$ δ') $(x^3-6x^2+12x-18):(x^2-4x+4)$
ε') $(10x^5-21x^4-10x^2-40x):(5x^2-3x+8)$ στ) $(1+\alpha^5+\alpha^{10}):(\alpha^2+\alpha+1)$
ζ') $(\alpha^4+\beta^4):(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$ η') $(1-6x^5+x^6):(1-2x+x^2)$
θ') $(x^5-41x-120):(x^2+4x+5)$.

Ὁμὰς δευτέρα. 130. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:
α') $(x^{3\nu}-3x^{2\nu}\psi^{\nu}+3x^{\nu}\psi^{2\nu}-\psi^{3\nu}):(x^{\nu}-\psi^{\nu})$.
β') $(9\alpha^{x}+3\alpha^{4x}+14\alpha^{3x}+2):(\alpha^{2x}+5\alpha^{x}+1)$,
γ') $(x^{8\nu}-\psi^{8\rho}):(x^{5\nu}-x^{4\nu}\psi^{\rho}+x^{\nu}\psi^{4\rho}-\psi^{5\rho})$,
δ') $(\alpha^{4\mu}+4\alpha^{2\mu}x^{2\nu}+16x^{4\nu}):(\alpha^{2\mu}+2\alpha^{\mu}x^{\nu}+4x^{2\nu})$,
ε') $(x^{\mu+\nu}\psi^{\nu}-4x^{\mu+\nu-1}\psi^{2\nu}-27x^{\mu+\nu-2}\psi^{3\nu}+42x^{\mu+\nu-3}\psi^{4\nu})$:
$(x^{\mu}+3x^{\mu-1}\psi^{\nu}-6x^{\mu-2}\psi^{2\nu})$.

Ὁμὰς τρίτη. 131. Δείξατε ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου δύο ἀκεραίων (ἀνηγμένων) πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου πλὴν τὸν τοῦ διαιρέτου. Ἐξηγήσατε τοῦτο μὲ τρία διάφορα παραδείγματα.

1. ΥΠΟΛΟΙΠΟΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΠΕΡΙΕΧΟΝΤΟΣ ΤΟ x ΔΙΑ ΤΟΥ $x \pm \alpha$ Ἢ ΔΙΑ ΤΟΥ $\alpha x \pm \beta$

§ 77. Ἔστω π.χ. ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(\chi^3-3\chi^2+3\chi+2):(\chi-1)$.

Ἐὰν μὲ ρ παραστήσωμεν τὸ πηλίκον καὶ μὲ τὸ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως, θὰ ἔχωμεν:

$$(\chi^3-3\chi^2+3\chi+2) = \rho(\chi-1)+\upsilon \qquad (1)$$

Τὸ ὑπόλοιπον υ δὲν περιέχει τὸ χ εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην, διότι ὁ διαιρέτης εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς χ (τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου).

Ἡ σχέσις (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἄρα καὶ διὰ τὴν $\chi = 1$. Θέτοντες εἰς αὐτὴν $\chi = 1$, εὑρίσκομεν

$$1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1+2=\upsilon, \text{ ἤτοι } \upsilon = 3.$$

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ ἐπαληθεύσωμεν καὶ ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν.

Ἐν γένει ἔστω, ὅτι Π(x), τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι πολυώνυμον περιέχον τὸ x, παριστάνει τὸν διαιρετέον, τὸ ρ(x) τὸ πηλίκον καὶ τὸ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ (x–α), τὸ ὁποῖον δὲν θὰ περιέχῃ τὸν x.

Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ υ εἶναι ἴσον μὲ Π(α), δηλαδὴ μὲ τὸ ἐξαγόμενον τὸ προκῦπτον, ἐὰν εἰς τὸ πολυώνυμον τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἀντὶ τοῦ x, τὸ α, ἤτοι τὴν τιμήν, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ x–α λαμβάνει τὴν τιμὴν 0.

Πράγματι ἔχομεν ὅτι $\Pi(x) = \rho(x)\cdot(x-\alpha)+\upsilon$.

Ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ α λαμβάνομεν:

$$\Pi(\alpha) = \rho(\alpha)\cdot(\alpha-\alpha)+\upsilon \quad ἢ \quad \Pi(\alpha) = \rho(\alpha)\cdot 0+\upsilon = \upsilon.$$

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(x^6-\alpha^6):(x+\alpha)$

Τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸν διαιρετέον θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x, τὸ $(-\alpha)$, ἤτοι τὴν τιμὴν τοῦ x, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ $x+\alpha$ λαμβάνει τὴν τιμὴν 0. Διότι τὸ $x+\alpha = x-(-\alpha)$. Ὥστε ἀντὶ τῆς δοθείσης διαιρέσεως ἔχομεν τὴν $(x^6-\alpha^6):[x-(-\alpha)]$. Ἐὰν κάμωμεν τὴν ἀντικατάστασιν $x=(-\alpha)$ εἰς τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^6-\alpha^6 = \alpha^6-\alpha^6 = 0$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου περιέχοντος τὸ χ, διὰ τοῦ $\chi\pm\alpha$, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν ὅπου χ τὸ $-\alpha$ ἢ τὸ α εἰς τὸ πολυώνυμον καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τούτου, ἤτοι νὰ θέσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ χ, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ $\chi\pm\alpha$.

Οὕτω τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(x^4+\alpha^4):(x+\alpha)$ εἶναι τὸ $(-\alpha)^4+\alpha^4 = \alpha^4+\alpha^4 = 2\alpha^4$.

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\Pi(x)$ διὰ $\alpha x+\beta$ εὑρίσκεται, ἂν τεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἡ τιμὴ $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται τὸ $\alpha x+\beta$. Διότι, ἂν $\Pi(x)$ παριστάνῃ τὸν διαιρετέον, $\rho(x)$ τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\Pi(x) = \rho(x)\cdot(\alpha x+\beta)+\upsilon.$$

Θέτοντες $x=-\frac{\beta}{\alpha}$ εἰς τὴν ἰσότητα αὐτήν, εὑρίσκομεν

$$\Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \rho\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot(-\beta+\beta)+\upsilon = \upsilon, \text{ ἤτοι } \Pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \upsilon.$$

§ 78. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι:

Πολυώνυμόν τι $\Pi(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\alpha\chi\pm\beta$, ἂν τὸ $\Pi\left(\mp\frac{\beta}{\alpha}\right)$ εἶναι ἴσον μὲ 0.

Οὕτω τὸ $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι $\alpha^\mu-\alpha^\mu = 0$, $(\alpha\neq 0)$.

Τὸ $x^{\mu} + \alpha^{\mu}$ δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ $x-\alpha$, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι $\alpha^{\mu}+\alpha^{\mu}=2\alpha^{\mu}\neq 0$.

Τὸ $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν τὸ μ ἄρτιος ἀριθμός, ἀλλὰ δὲν διαιρεῖται δι' αὐτοῦ, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός.

Διότι, εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι

$$(-\alpha)^{\mu}-\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}-\alpha^{\mu}=0.$$

εἰς δὲ τὴν δευτέραν εἶναι $(-\alpha)^{\mu}-\alpha^{\mu}=-2\alpha^{\mu}\neq 0$.

Τὸ $x^{\mu}+\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται μὲν διὰ τοῦ $x+\alpha$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττός, διότι τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $(-\alpha)^{\mu}+\alpha^{\mu}=-\alpha^{\mu}+\alpha^{\mu}=0$. ἀλλ' ὄχι ὅταν τὸ μ εἶναι ἄρτιος, διότι τότε τὸ ὑπόλοιπον εἶναι

$$(-\alpha)^{\mu}+\alpha^{\mu}=\alpha^{\mu}+\alpha^{\mu}=2\alpha^{\mu}\neq 0.$$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 132. Εὕρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

α') $(2x^2+x-9):(x-2)$ β') $(x^2+6x+7):(x+2)$
γ') $(x^4+17x^3-68x-33):(x-0,5)$ δ') $(27x^3+1):(3x+1)$

Ὁμὰς δευτέρα. 133. Εὕρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις.

α') $(81x^4-256):(3x-4)$ β') $(8\alpha^3+\beta^3):(2\alpha+\beta)$
γ') $(32x^5+243):(2x+3)$ δ') $(64x^6-1):(2x+1)$
ε') $(1+x^3):(1+x)$ στ') $(\alpha^{10}+\beta^{10}):(\alpha^2+\beta^2)$
ζ') $(\alpha^{12}-\beta^{12}):(\alpha^4-\beta^4)$ η') $(x^{15}+\psi^{15}):(x^3+\psi^3)$
θ') $(x^{15}+\psi^{10}):(x^3+\psi^2)$ ι) $(x^{18}-\psi^{18}):(x^6-\psi^6)$.

Ὁμὰς τρίτη. 134. Εὕρετε τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις.

α') $(\psi^{\mu\nu}-1):(\psi^{\nu}-1)$ β') $(\mu^6-\nu^{12}):(\mu^2-\nu^3)$ γ') $(\alpha^{2\nu+\mu}+\beta^{2\nu+\mu}):(\alpha+\beta)$
δ') $(\psi^{12}-\omega^4):(\psi^3+\omega)$ ε') $(x^{4\pi}-1):(x^{\pi}-1)$.

12. ΠΗΛΙΚΑ ΤΩΝ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΝ $(x^{\mu}\pm\alpha^{\mu}):(x\pm\alpha)$

§ 79. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ ἢ τοῦ $x^{\mu}+\alpha^{\mu}$ διὰ τοῦ $x-\alpha$, ὅπου $\mu>0$ καὶ ἀκέραιος. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν πρᾶξιν, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\alpha^3x^{\mu-4}\ldots+\alpha^{\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0 διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, $2\alpha^{\mu}$ δὲ διὰ τὴν δευτέραν.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\mu}-\alpha^{2\mu}):(x+\alpha)$ ὡς πηλίκον $x^{2\mu-1}-\alpha x^{2\mu-2}+\ldots-\alpha^{2\mu-1}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\nu+1}+\alpha^{2\nu+1}) : (x+\alpha)$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x^{2\nu}-\alpha x^{2\nu+1}+...+\alpha^{2\nu}$ καὶ ὑπόλοιπον 0.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $(x^{2\nu-1}-\alpha^{2\nu+1}) : (x+\alpha)$ εὑρίσκομεν πηλίκον $x^{2\nu}-\alpha x^{2\nu-1}+...+\alpha^{2\nu}$ καὶ ὑπόλοιπον $-2\alpha^{2\nu+1}$.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν:

$(x^4-\alpha^4) : (x-\alpha)=x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha^3$

$(x^6-\alpha^6) : (x+\alpha)=x^5-\alpha x^4+\alpha^2 x^3-\alpha^3 x^2+\alpha^4 x-\alpha^5$

$(x^3+\alpha^3) : (x-\alpha)=x^2+\alpha x+\alpha^2$ καὶ ὑπόλοιπον $2\alpha^3$

$(x^3+\alpha^3) : (x+\alpha)=x^2-\alpha x+\alpha^2$

§ 80. Λέγομεν ὅτι πολυώνυμόν τι εἶναι **ὁμογενὲς βαθμοῦ** τινὸς ὡς πρὸς ὡρισμένα γράμματά του ἐὰν πάντες οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα ταῦτα. Π.χ. τὸ $x^3+5\alpha x^2-12\alpha x^2+\alpha^3$ εἶναι ὁμογενὲς γ΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ α καὶ x. Τὸ $5x\psi-8x^2+4\psi^2$ εἶναι ὁμογενὲς β΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x καὶ ψ.

Ὁμογενὲς γραμμικὸν λέγεται πολυώνυμόν τι ὡς πρὸς ὡρισμένα γράμματα αὐτοῦ, ἐὰν εἶναι ὁμογενὲς α΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς αὐτά, π.χ. τὸ $3\alpha x-5\beta\psi+8\gamma\omega$ ὡς πρὸς τὸ α, β, γ ἢ ὡς πρὸς τὰ x, ψ, ω.

Οὕτω τὰ ἀνωτέρω πηλίκα τῶν διαιρέσεων $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x\pm\alpha)$ εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ βαθμοῦ μ−1 ὡς πρὸς x καὶ α.

Π.χ. τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(x^4-\alpha^4) : (x-\alpha)$ εἶναι τὸ $x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha^3$ ὁμογενὲς πολυώνυμον γ΄ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ α.

Ἀσκήσεις

135. Εὕρετε τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων ἀπὸ μνήμης:

α΄) $(\alpha^3+\beta^3) : (\alpha+\beta)$ β΄) $(\alpha^3-\beta^3) : (\alpha-\beta)$ γ΄) $(\alpha^2-\beta^2) : (\alpha+\beta)$

136. α΄) $(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3) : (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

β΄) $(\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3) : (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$

137. Εὕρετε ἀπὸ μνήμης τὰ πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων:

α΄) $(x^5+\psi^5) : (x+\psi)$ β΄) $(x^6-\psi^6) : (x-\psi)$ γ΄) $(x^3+\psi^3) : (x+\psi)$

δ΄) $(x^5+\psi^5) : (x-\psi)$ ε΄) $(x^7+1) : (x+1)$ στ΄) $(x^3+\alpha^3) : (x-\alpha)$

138. Εὕρετε τίνων διαιρέσεων τῆς μορφῆς $(x^\mu \pm \alpha^\mu) : (x\pm\alpha)$ εἶναι τέλεια πηλίκα τὰ κάτωθι:

α') $x^2+\alpha x+\alpha^2$ β') x^2-x+1 γ') x^3+x^2+x+1

δ') $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$ ε') $x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3x+\alpha^4$

139. Εὕρετε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\alpha^{5\nu}-\beta^{5\nu}):(\alpha^\nu-\beta^\nu)$, χωρὶς νὰ ἐκτελέσητε τὴν πρᾶξιν (τὸ ν ὑποτίθεται ἀκέραιος >0).

140. Ὁμοίως τῆς διαιρέσεως $(7^\rho+1):8$, ἂν τὸ ρ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ περιττός. Παρατηρήσατε ὅτι τὸ $8=7+1$. Εὕρετε καὶ ἄλλα τοιαῦτα παραδείγματα τελείων διαιρέσεων.

141. Δείξατε ὅτι τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ διαιρεῖται διὰ τῶν $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττὸς καὶ θετικὸς ἀριθμός.

142. Δείξατε ὅτι ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς χ, διαιρῆται διὰ τοῦ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, $(\alpha\neq\beta\neq\gamma)$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ $x-\alpha$, διὰ τοῦ $x-\beta$ καὶ διὰ τοῦ $x-\gamma$.

13. ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 81. Ἔστω μονώνυμον ἀκέραιον, πχ. τὸ $24\alpha^2\beta^3\gamma$.

Ἐὰν τὸν ἀριθμὸν 24 ἀναλύσωμεν εἰς τοὺς πρώτους του παράγοντας, θὰ εὕρωμεν ὅτι εἶναι $24=2^3{\cdot}3$. Ἄρα τὸ $24\alpha^2\beta^3\gamma=2^3{\cdot}3\alpha^2{\cdot}\beta^3\gamma$. Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ ἀνωτέρω μονωνύμου εἶναι οἱ 2, 3, α, β, γ. Ἡ ἀνάλυσις λοιπὸν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου, ἔχοντος (ἀριθμητικὸν) συντελεστὴν ἀκέραιον ἀριθμόν, γίνεται εὐκόλως, διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀναλύσωμεν τὸν (ἀριθμητικὸν) συντελεστήν του εἰς πρώτους παράγοντας.

Τοὐναντίον, ἡ τροπὴ πολυωνύμου τινὸς εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τρόπον μᾶλλον ἁπλοῦν, εἶναι δυνατὴ εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις καὶ ἐκ τούτων ἀναφερομέν τινας κατωτέρω.

1η περίπτωσις. Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι γινόμενα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινόν τινα παράγοντα, τρέπεται τοῦτο εὐκόλως εἰς γινόμενον παραγόντων.

Οὕτω τὸ $\alpha\mu+\beta\mu-\gamma\mu=\mu\cdot(\alpha+\beta-\gamma)$.

Ὁμοίως τὸ $\mu\alpha+\mu=\mu(\alpha+1)$.

Ἐπίσης τὸ $2x^3+6x\psi=2x(x^2+3\psi)$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν, ὅτι θέτομεν τὸν κοινὸν παράγοντα ἐκτὸς παρενθέσεως.

143. Τρέψατε εἰς γινόμενα τὰς κάτωθι παραστάσεις :

α') $8\alpha^2\beta-6\alpha^3+4\alpha\beta$ β') $4\alpha x^2\psi-82\psi^2-4x\psi$

γ') $8\alpha^3\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^3\gamma^3+2\alpha^2\beta^2\gamma^3$ δ') $15\alpha^3x-10\alpha^3\psi+5\alpha^3\omega$

ε') $\alpha^3\gamma\psi^3+2\alpha^2\gamma^2\psi^2-\alpha^2\gamma\psi^2$ στ) $3\beta^3\gamma^3+2\beta^2\gamma^2-6\beta\gamma^3$

ζ') $x^2\psi^2\omega^2-x^3\psi^3\omega^3+x^2\psi^3\omega$ η') $\alpha\beta^2\gamma^3-2\alpha^2\beta^2\gamma+3\alpha^2\beta^3\gamma$

θ') $6\alpha^2-12\alpha^3$ ι') $3x^2-7x^4$ ια') $8x^2\psi^2+16x\psi\omega-24x^2\psi^2\omega^2$

2α περίπτωσις. Ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ διαταχθοῦν οἱ ὅροι πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, ὥστε εἰς ἑκάστην τούτων νὰ ὑπάρχῃ ὁ αὐτὸς παράγων, τότε τρέπεται ἐν γένει τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta$ εἶναι ἴσον μὲ

$$(\alpha\gamma+\alpha\delta)+(\beta\gamma+\beta\delta)=\alpha(\gamma+\delta)+\beta(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta).$$

Ἄσκησις

144. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha+x$ β') $x^3-x^2\omega-x\psi^2+\psi^2\omega$

γ') $\alpha\beta x-\alpha\beta\psi+\gamma\delta x-\gamma\delta\psi$ δ') $\alpha x^2-\beta x^2+\alpha-\beta$

ε') $\alpha^2\gamma\pm\beta^2\delta\pm\beta^2\gamma+\alpha^2\delta$ στ') $\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2\pm\alpha\beta\gamma\pm\beta\gamma^2$

ζ') $1+\gamma-\gamma^2x\psi-\gamma^3x\psi$ η') $6x^3-10x\psi^3-15\psi^4+9x^2\psi$

θ') $2x(x-\psi)-6\alpha(x-\psi)$ ι') $x^3+2(x^2-1)-1$

ια') $\alpha x+\beta x-\gamma x+\alpha\psi+\beta\psi-\gamma\psi$ ιβ') $\alpha^5+2(\alpha^3+1)+1$

3η περίπτωσις. Ἐὰν τριώνυμόν τι ἰσοῦται μὲ τέλειον τετράγωνον διωνύμου, τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων. Οὕτω τὸ

$$x^2+2x\psi+\psi^2=(x+\psi)(x+\psi)=(x+\psi)^2.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$16\alpha^2-24\alpha\beta+9\beta^2=(4\alpha-3\beta)^2=(4\alpha-3\beta)(4\alpha-3\beta).$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$x^4-2x^2\psi+\psi^2=(x^2-\psi)^2=(x^2-\psi)(x^2-\psi).$$

Ἄσκησις

145. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις :

α') $\mu^2\nu^2\pm16\mu\nu\alpha^2+64\alpha^4$ β') $\alpha^2\beta^6\gamma^6\pm2\alpha\beta^2\gamma^3x^8+x^{16}$ γ') $x^6\pm34x^3+289$

δ') $(x+\psi)^2-4\omega(x+\psi)+4\omega^2$ ε') $(\alpha-\beta)^2-6(\alpha-\beta)\gamma^3+9\gamma^6$

στ') $(\varphi+\omega^2)^2+8\varphi+8\omega^2+16$

4η περίπτωσις. Ἐὰν διώνυμόν τι εἶναι διαφορὰ δύο τετραγώνων, τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν δοθέντων τετραγώνων καθ' ἣν τάξιν εὑρίσκονται τὰ δοθέντα τετράγωνα.

Οὕτως ἔχομεν $16x^2-9\psi^2=(4x+3\psi)(4x-3\psi)$.

Ὁμοίως τὸ $25-16\alpha^2=(5+4\alpha)(5-4\alpha)$.

Ἄσκησις

146. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις:

α') $\alpha^2\beta^2-1$ β') $4\alpha^2-49\beta^2$ γ') $121\alpha^2-36\beta^2$ δ') $49x^{14}-\psi^{12}$

ε') $81\alpha^4\beta^2-\gamma^4$ στ') $4\alpha^2\gamma-9\gamma^3$ ζ') $20\alpha^3\beta^2-5\alpha\beta^2$ η') $3\alpha^5-12\alpha^3\gamma^2$

θ') $1-400x^4$ ι') $4x^{16}-\psi^{20}$ ια') $9x^2-\alpha^8$ ιβ') $16x^{17}-9x\psi^6$.

5η περίπτωσις. Ἐνίοτε δυνάμεθα νὰ διατάξωμεν τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καθ' ὁμάδας, οὕτως ὥστε αἱ ὁμάδες αὗται νὰ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς διαφορὰ τετραγώνων δύο παραστάσεων. Οὕτως ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Π.χ. ἔχομεν ὅτι: $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-9\gamma^2=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-9\gamma^2=(\alpha-\beta)^2-9\gamma^2=(\alpha-\beta+3\gamma)(\alpha-\beta-3\gamma)$. Ὁμοίως $12\alpha\beta+9x^2-4\alpha^2-9\beta^2=9x^2-(4\alpha^2-12\alpha\beta+9\beta^2)=9x^2-(2\alpha-3\beta)^2=(3x-2\alpha+3\beta)(3x+2\alpha-3\beta)$

Ἄσκησις

146α. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

α') $\beta^2-x^2+4\alpha x-4\alpha^2$ β') $\alpha^2-x^2-\psi^2-2x\psi$

γ') $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-16\alpha^2\beta^2$ δ') $4x^2-9\alpha^2+6\alpha-1$

ε') x^4-x^2-2x-1 στ') $2x\psi-x^2+\alpha^2-\psi^2$

ζ') $\alpha^{4\nu}+2\alpha^{2\nu}\beta^{2\nu}-\gamma^{2\nu}+\beta^{4\nu}$ η') $x^{2\nu}-2x\psi^{\nu}+\psi^{2\nu}-4\omega^{2\nu}$

θ') $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta-2\gamma\delta$ ι') $\alpha^2-x^2+2(\alpha\beta-3x\psi)+\beta^2-9\psi^2$

ια') $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2-2(\alpha\delta-\beta\gamma)$ ιβ') $4(\alpha\delta+\beta\gamma)^2-(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)^2$

6η περίπτωσις. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$, παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta).$$

Π.χ. τὸ $\mathbf{x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=}$
$$\mathbf{=(x^2+1-x)(x^2+1+x)}.$$

7η περίπτωσις. **Ἐὰν ἡ δοθεῖσα** παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\mathbf{x^2+\beta x+\gamma}$ **καὶ τὸ μὲν β εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο ἀρι-**

θμῶν, ἔστω τῶν ρ καὶ ρ', τὸ δὲ γ τὸ γινόμενον τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν, θὰ ἔχωμεν $\beta=\rho+\rho'$, $\gamma=\rho\rho'$. Ἄρα:

$$x^2+\beta x+\gamma=x^2+(\rho+\rho')x+\rho\rho'=x^2+\rho x+\rho' x+\rho\rho'=$$
$$(x^2+\rho x)+(\rho' x+\rho\rho')=x(x+\rho)+\rho'(x+\rho)=(x+\rho)\,(x+\rho').$$

Π.χ. ἐὰν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $x^2+8x+15$, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $8=5+3$ καὶ $15=3\cdot 5$. Διὰ τοῦτο ἔχομεν:

$$x^2+8\chi+15=(x+3)\,(x+5).$$

8η περίπτωσις. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὴν εἰς γινόμενον φέροντες πρῶτον αὐτὴν εἰς τὴν προηγουμένην μορφήν, ἤτοι γράφοντες αὐτὴν οὕτως: $\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$, ὅτε ἀρκεῖ νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τὸ $x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\frac{1}{\alpha}(\alpha^2x^2+\alpha\beta x+\alpha\gamma)$. Θέτομεν $\alpha x=\omega$ ὅτε ἔχομεν, ἀντὶ τῆς δοθείσης παραστάσεως, τὴν $\frac{1}{\alpha}(\omega^2+\beta\omega+\alpha\gamma)$.

Ζητοῦμεν τώρα νὰ τρέψωμεν τὸ $\omega^2+\beta\omega+\alpha\gamma$ εἰς γινόμενον. Ἔστω λοιπὸν ὅτι εὑρέθη $\omega^2+\beta\omega+\alpha\gamma=(\omega-\rho_1)(\omega-\rho_2)$. Θέτομεν $\omega=\alpha x$ καὶ εὑρίσκομεν $(\alpha x-\rho_1)(\alpha x-\rho_2)$, ἄρα ἡ δοθεῖσα παράστασις τρέπεται εἰς τὴν $\frac{1}{\alpha}(\alpha x-\rho_1)(\alpha x-\rho_2)$.

Ἔστω π.χ. ἡ παράστασις $3x^2-x-2$.

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς: $\frac{1}{3}(3\cdot 3x^2-3x-3\cdot 2)$. Ἐὰν γράψωμεν ἀντὶ $3x$ τὸ ω, δηλαδὴ ἂν θέσωμεν $3x=\omega$, εὑρίσκομεν

$$3x^2-x-2=\frac{1}{3}(\omega^2-\omega-6).$$

Ἀναλύομεν τὸ $\omega^2-\omega-6$ εἰς τὸ $(\omega-3)\,(\omega+2)$ καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$3x^2-x-2=\frac{1}{3}(\omega-3)(\omega+2).$$

Γράφομεν ἀντὶ τοῦ ω τὸ ἴσον αὐτοῦ $3x$ καὶ ἔχομεν:

$$\frac{1}{3}(3x-3)(3x+2)=\frac{3}{3}(x-1)(3x+2)=(x-1)(3x+2)$$

Ἤτοι: $3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$.

9η περίπτωσις. Ἐὰν ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ δύο κύβων, ἀναλύεται εἰς γινόμενον ἐπὶ τῇ βάσει τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου διὰ τοῦ $x+\alpha$ ἢ τοῦ $x-\alpha$. Οὕτω π.χ. τὸ $\alpha^3-\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha-\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$.

Ἑπομένως εἶναι : $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

Ὁμοίως τὸ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται διὰ τοῦ $\alpha+\beta$ καὶ δίδει πηλίκον $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$. Ἄρα εἶναι $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$.

Κατὰ ταῦτα τὸ $x^6+\psi^9=(x^2+\psi^3)(x^4-x^2\psi^3+\psi^6)$.

Τὸ $(x-\psi)^3+\omega^3=(x-\psi+\omega)[(x-\psi)^2-(x-\psi)\omega+\omega^2]=$

$$(x-\psi+\omega)(x^2+\psi^2-2x\psi-x\omega+\psi\omega+\omega^2).$$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 147. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α΄) $9\alpha^4+26\alpha^2\beta^2+25\beta^4$
β΄) $4x^4-21x^2\psi^2+9\psi^4$
γ΄) $\lambda^4+\lambda^2+1$
δ΄) $4\alpha^4-13\alpha^2+1$
ε΄) $4x^4-37x^2\psi^2+9\psi^4$
στ΄) $\alpha^8+\beta^4$
ζ΄) $\alpha^4+\alpha^2\psi^2+\psi^4$
η΄) $25x^4+31x^2\psi^2+16\psi^4$
θ΄) $\alpha^4+4\beta^4$
ι΄) $9\alpha^8-15\alpha^4+1$
ια΄) $16\alpha^4-17\alpha^2+1$
ιβ΄) $16\lambda^4+\gamma^4$
ιγ΄) $\alpha^2+17\alpha-390$
ιδ΄) $\alpha^2-7\alpha\beta+10\beta^2$

Ὁμὰς δευτέρα. 148. Ἐπίσης νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις.

α΄) $4x^2+13x+3$
β΄) $6x^2+17x+12$
γ΄) $11\alpha^2-23\alpha\beta+2\beta^2$
δ΄) $x^3\pm 64$
ε΄) $343\pm x^3$
στ΄) $\alpha^2\beta^3\pm 343$
ζ΄) $8\alpha^3\pm\beta^6$
η΄) $216\mu^3\pm\nu^6$

Ὁμὰς τρίτη. 149. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κατωτέρω παραστάσεις διὰ συνδυασμοῦ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθεισῶν περιπτώσεων.

α΄) $(x+\psi)^2-1-x\psi(x+\psi+1)$
β΄) $\alpha^4-\beta^4+2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$
γ΄) $(x^2-4)^2-(3x-2)(x+2)^2$
δ΄) $\alpha^2\gamma^2+\beta\gamma-\alpha^2\gamma-\beta$
ε΄) $x(2+x)-\psi(2+\psi)$
στ΄) $\alpha^3-\beta^3+\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\alpha+\beta$
ζ΄) $4x+4\alpha\nu+x^2-4\alpha^2-\nu^2+4$
η΄) $x^4\psi^4-4x^2+4-\psi^2-4x^2\psi^2+4x\psi$
θ΄) $x^2\psi-3x\psi^2-3x^3-\psi^3$
ι΄) $\alpha\beta(x^2+1)+x(\alpha^2+\beta^2)$
ια΄) $\pi\nu(\mu^2+1)+\mu(\pi^2+\nu^2)$

4. ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 82. Καλοῦμεν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην (μ.κ.δ.) δοθέντων ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς ἀκεραίους, τὸν μ.κ.δ. τῶν κυρίων ποσῶν των, μὲ συντελεστὴν τὸν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν των.

Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων ἀριθμῶν (τῆς Ἀριριθμητικῆς) δι' ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς πρώτους παράγοντας, ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ παραστάσεων, μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους, ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Οὕτω ὁ μ.κ.δ. τῶν $6\alpha^2\beta^3 = 2\cdot3\cdot\alpha^2\beta^3$, $9\alpha^3\beta^2 = 3^2\alpha^3\beta^2$, $16\alpha^4\beta^3 = 2^4\cdot\alpha^4\beta^3$, εἶναι τὸ $\alpha^2\beta^2$

Ὁ μ.κ.δ. τῶν $\alpha^2-\alpha\beta = (\alpha-\beta)\alpha$, $\alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 = \alpha(\alpha-\beta)^2$ καὶ $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ εἶναι τὸ $\alpha-\beta$.

§ 83. Καλοῦμεν ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.) ἀκεραίων μονωνύμων μὲ ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς ἀκεραίους, τὸ ἐ.κ.π. τῶν κυρίων ποσῶν αὐτῶν, μὲ συντελεστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν του.

Ὁ κανὼν τῆς εὑρέσεως τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων ἀριθμῶν (τῆς Ἀριθμητικῆς) δι' ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας ἰσχύει καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐ.κ.π. ἀκεραίων σχετικῶν ἀριθμῶν ἢ καὶ ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων (μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους), ὅταν αὗται τρέπωνται εἰς γινόμενα, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως

Οὕτω τὸ ἐ.κ.π. τῶν $18\alpha^3\beta^2 = 2\cdot3^2\alpha^3\beta^2$, $9\alpha\beta^2 = 3^2\cdot\alpha\beta^2$, $12\alpha\beta = 2^2\cdot3\alpha\beta$, εἶναι τὸ γινόμενον $2^2\cdot3^2\alpha^3\beta^2 = 36\alpha^3\beta^2$.

Ἀσκήσεις

150. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων:

α') $121\alpha^2$ $\quad 168\alpha^4\beta^2$

β') $36\alpha^3x$, $\quad 28x^3\psi$

δ) $(x-1)^2(x+2)^3$, $\quad (x-1)(x+3)^3$

δ') $35x^2(\mu+\nu)^2$, $\quad (\mu+\nu)^3$, $\quad 20x^3(\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2$, $\quad 45x^4(\mu+\nu)^3(\mu-\nu)^3$

ε') x^3+2x^2-3x, $\quad 2x^3+5x^2-3x$

στ') $1-x$, $\quad (1-x^2)^2$, $\quad (1-x)^3$

ζ') $x^4+\alpha x^3+\alpha^3x+\alpha^4$, $\quad x^4+\alpha^2x^2+\alpha^4$

151. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων

α') $18x(\alpha+2\beta)^2$, $\quad 9x\psi(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta)$, $\quad 18x^2\psi^2(\alpha-2\beta)^2$

β') $3x^4+3x$, $\quad 5x^3-5x$ $\quad 10x^2+10x$

γ') $14\alpha^4(\alpha^3-\beta^3)$, $\quad 21\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2$ $\quad 6\alpha^3\beta(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)$

δ') $\mu^3\nu-\mu\nu^3$, $\quad \mu^2+\mu\nu-2\nu^2$, $\quad \mu^2-\mu\nu-2\nu^2$

ε') $x^4-(\pi^2+1)x^2+\pi^2$ $\quad x^4-(\pi+1)^2x^2+2(\pi+1)\pi x-\pi$

Γ'. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΡΗΤΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 84. Καθὼς τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο σχετικῶν ἀριθμῶν παριστάνεται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην, οὕτω καὶ τὸ πηλίκον δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, π.χ. τῶν ἀκεραίων τοιούτων $-5\alpha^2+\beta^3$ καὶ $8\gamma^3+9\alpha$ παριστάνεται μὲ τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα $\frac{-5\alpha^2+\beta^3}{8\gamma^3+9\alpha}$.

Τοῦτο, ὡς καὶ πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἐν γένει ἀκέραια πολυώνυμα, λέγεται **ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα.**

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΡΗΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 85. Ἐπειδὴ οἱαιδήποτε καὶ ἂν εἶναι αἱ ἀκέραιαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, αἱ ἀποτελοῦσαι τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν ρητοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος, οἱ ὅροι αὐτοῦ παριστάνουν σχετικοὺς ἀριθμοὺς (διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των, διὰ τὰς ὁποίας δὲν μηδενίζεται ὁ παρονομαστής των) ἕπεται ὅτι καὶ τὰ κλάσματα ταῦτα ἔχουν τὰς ἰδιότητας τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Οὕτως, ἐὰν τοὺς ὅρους ἀλγεβρικοῦ τινὸς κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ($\neq 0$), ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται.

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν π.χ. $\frac{37\alpha^3\beta\gamma^2}{38\alpha^2\beta^3\gamma^4}=\frac{3\cdot 19\alpha^3\beta\gamma^2}{2\cdot 19\alpha^3\beta^3\gamma^4}=\frac{3\alpha}{2\beta^2\gamma^2}$.

Στηριζόμενοι εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ τρέψωμεν δοθὲν ἀλγεβρικὸν ρητὸν κλάσμα εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ ἔχον ὅρους ἁπλουστέρους τοῦ δοθέντος. Πρὸς εὐκολίαν χρησιμοποιοῦμεν, ἂν εἶναι δυνατόν, τὸν μ.κ.δ. τῶν ὅρων του, τρέποντες αὐτοὺς εἰς γινόμενα, ἂν εἶναι δυνατόν.

§ 86. Ἁπλοποίησις ἀλγεβρικοῦ τινὸς ρητοῦ κλάσματος λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλου κλάσματος ἰσοδυνάμου του καὶ ἔχοντος ὅρους ἁπλουστέρους. Ἡ ἁπλοποίησις καὶ τῶν ρητῶν κλασμάτων ἀνάγεται εἰς τὴν ἀντίστοιχον ἁπλοποίησιν τῶν ἀλγεβρικῶν τοιούτων. Ἤτοι :

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ρητὸν ἀλγεβρικὸν κλάσμα, διαι-

ροῦμεν τοὺς ὅρους του διά τινος κοινοῦ διαιρέτου των τρέποντες τούτους εἰς γινόμενα, ἂν εἶναι δυνατόν.

Οὕτως ἔχομεν π.χ. διὰ τὸ κλάσμα

$$\frac{\alpha^2+8\alpha+15}{\alpha^2+5\alpha+6} \quad \text{ἔχομεν} \quad \frac{\alpha^2+8\alpha+15}{\alpha^2+5\alpha+6}=\frac{(\alpha+5)(\alpha+3)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}=\frac{\alpha+5}{\alpha+2}.$$

Τοῦτο εὑρέθη, ἀφοῦ πρῶτον οἱ ὅροι τοῦ δοθέντος ἐτράπησαν εἰς γινόμενα καὶ ἀκολούθως οἱ ὅροι τοῦ προκύψαντος ἰσοδυνάμου κλάσματος διῃρέθησαν διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων του ἤτοι μὲ τὸ $\alpha+3$.

§ 87. Ἀνάγωγον λέγεται ἓν κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν κοινὸν παράγοντα καὶ ἑπομένως δὲν ἁπλοποιεῖται. Ὁ κανὼν καθ' ὃν τρέπεται ἀλγεβρικὸν κλάσμα εἰς ἀνάγωγον ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀλγεβρικὰ ρητὰ κλάσματα καὶ πρὸς εὐκολίαν χρησιμοποιεῖται ὁ μ.κ.δ. τῶν ὅρων του, ἑκάστου τούτων τρεπομένου εἰς γινόμενον παραγόντων (ἂν εἶναι δυνατόν). Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\frac{4\alpha^2\beta^2\gamma}{6\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2^2\cdot\alpha^2\beta^2\gamma}{2\cdot3\alpha\beta^2\gamma^3}=\frac{2\alpha}{3\gamma^2}\ (\text{μ.κ.δ. εἶναι ὁ } 2\alpha\beta^2\gamma).$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{\alpha+1}{\alpha}\ (\text{ὁ μ.κ.δ. εἶναι τὸ } \alpha-1).$$

Ἐπίσης εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(x+\alpha)^2-\beta^2}{(x+\beta)^2-\alpha^2}=\frac{(x+\alpha+\beta)\cdot(x+\alpha-\beta)}{(x+\alpha+\beta)\cdot(x+\beta-\alpha)}=\frac{x+\alpha-\beta}{x+\beta-\alpha}$$

$$(\text{μ.κ.δ. ὁ } x+\alpha+\beta).$$

Ἄσκησις

152. Νὰ τραποῦν εἰς ἀνάγωγα τὰ κλάσματα:

α') $\dfrac{16\alpha^2\beta^2}{18\alpha\beta^2}$ β') $\dfrac{45\alpha^2\beta^2\gamma^3}{9\alpha^2\beta^2\gamma}$ γ') $\dfrac{46x^2\psi^2}{39x^3\psi^5}$ δ') $\dfrac{98x\psi-24\psi^3}{24x^2-32x\psi}$

ε') $\dfrac{x^3-\psi^3}{x^2-\psi^2}$ στ') $\dfrac{x^2-\psi^2}{x^3+\psi^3}$ ζ') $\dfrac{x^4-6561}{x^2-81}$ η') $\dfrac{\alpha\beta\gamma+9\beta\gamma-5\gamma^2}{2\alpha\beta\delta\rho+18\beta\delta\rho-10\gamma\delta\rho}$

θ') $\dfrac{\alpha x+\beta\psi+\alpha\psi+\beta x}{\alpha\psi+2\beta x+2\alpha x+\beta\psi}$ ι') $\dfrac{\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}+\dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\gamma\alpha}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}$

ια') $\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)^2+4\alpha^2\beta+\beta(\alpha+\beta)^2}{\alpha(\alpha-\beta)+2\alpha\beta+\beta(\alpha+\beta)}$ ιβ') $\dfrac{x^3+2x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

§ 88. Διὰ νὰ τρέψωμεν εἰς ἰσοδύναμά των ὁμώνυμα ἀλγεβρικὰ ρητὰ κλάσματα, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ διὰ τὰ ἀριθμητικὰ κλάσματα.

Ἔστωσαν π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{\beta}{6\alpha}$, $\frac{\alpha}{9\beta}$, $\frac{1}{4\alpha^2\beta}$, $\frac{1}{18\alpha^2\beta^3}$ Τὸ ἐ. κ. π. παρονομαστῶν εἶναι τὸ $3^2 \cdot 2^2 \cdot \alpha^2 \cdot \beta^3$. Διαιροῦντες αὐτὸ δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν $6\alpha\beta^3$, $4\alpha^2\beta^2$, $9\beta^2$, 2.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου τῶν δοθέντων κλασμάτων κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰ πηλίκα ταῦτα, εὑρίσκομεν (ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων) τὰ ὁμώνυμα κλάσματα

$$\frac{6\alpha\beta^4}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{4\alpha^3\beta^2}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{9\beta^2}{36\alpha^2\beta^3}, \quad \frac{2}{36\alpha^2\beta^3}.$$

Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{1}{4(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)}, \quad \frac{5}{8(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta)}, \quad \frac{9}{5(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)}.$$

Τρέπομεν τοὺς παρονομαστὰς τούτων εἰς γινόμενα καὶ ἔχομεν, ἀντὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων, τὰ ἑξῆς ἰσοδύναμά των ἀντιστοίχως

$$\frac{1}{4(\alpha+\beta)^3}, \quad \frac{5}{8(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)}, \quad \frac{9}{5(\alpha-\beta)^2}, \qquad (2)$$

Τὸ ἐ.κ.π. τούτων εἶναι $8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2$. Τὰ πηλίκα τούτων δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $2 \cdot 5(\alpha-\beta)^2$, $5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, $8(\alpha+\beta)^3$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων (2) ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ ἀντιστοίχως, εὑρίσκομεν τὰ ἰσοδύναμα τῶν δοθέντων κλασμάτων

$$\frac{2 \cdot 5(\alpha-\beta)^2}{8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{5 \cdot 5(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{8 \cdot 5(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}, \quad \frac{9 \cdot 8(\alpha+\beta)^3}{5 \cdot 8(\alpha+\beta)^3(\alpha-\beta)^2}.$$

Ἄσκησις

153. Νὰ τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τὰ κάτωθι κλάσματα μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων:

α') $\frac{1}{x^2+1}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{x+1}$. β') $\frac{\mu}{3x^2\psi^2}$, $\frac{\nu}{8x\psi^3}$, $\frac{\rho}{9x^4\psi^3}$, $\frac{6}{24x^2\psi^4}$.

γ') $\frac{\alpha^2}{(x^2-4)(x-1)}$, $\frac{\alpha}{(x+2)(x+1)}$, $\frac{3}{x^2-4x+3}$.

δ') $\frac{x^2}{\rho(\alpha\mu+\mu^2)}$, $\frac{x}{\rho^2(\alpha^2-\alpha\mu)}$, $\frac{1}{\rho^3(\alpha^2-\mu^2)}$.

2. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ $\frac{0}{0}$ ΚΑΙ $\frac{\alpha}{0}$

§ 89. Καθὼς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα, ἂν τύχῃ νὰ ἔχωμεν διαίρεσιν τοῦ $0:0$, τὸ πηλίκον εἶναι ἀόριστον, δηλαδὴ τὸ πηλίκον δύναται νὰ εἶναι οἱοσδήποτε σχετικὸς ἀριθμός, ἔστω α, διότι $\alpha \cdot 0 = 0$. Διὰ τοῦτο, ὅταν καὶ οἱ δύο ὅροι ρητοῦ κλάσματος λαμβάνουν τὴν τιμὴν 0 δι' ὡρισμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων των, ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος διὰ τὰς τιμὰς ταύτας θεωρεῖται, ὅτι εἶναι **ἀόριστος.**

Ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$. Ἂν θέσωμεν εἰς αὐτὸ $x = \alpha$ εὑρίσκομεν $\frac{\alpha^2-\alpha^2}{\alpha-\alpha} = \frac{0}{0}$. Διὰ τοῦτο ἡ παράστασις $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$, ὅταν $x = \alpha$, παρουσιάζεται ὡς ἀόριστος διὰ τὴν τιμὴν α τοῦ x.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι, ἂν εἶναι τὸ $x \neq \alpha$, ἔχομεν $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha} = x + \alpha$, καὶ ἂν εἰς τοῦτο τεθῇ $x = \alpha$, ἔχομεν ἐξαγόμενον 2α καὶ ὄχι $\frac{0}{0}$. Ἡ εὑρεθεῖσα αὐτὴ τιμὴ 2α εἶναι καὶ ἡ (ἀληθὴς) τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{x^2-\alpha^2}{x-\alpha}$, ὅταν $x = \alpha$. Διὰ ταῦτα, ὅταν συμβαίνῃ ρητὸν ἐν γένει ἀλγεβρικὸν κλάσμα νὰ γίνεται $\frac{0}{0}$ διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός του, ἵνα εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ τιμήν του, ἀντικαθιστῶμεν τὴν τιμὴν τοῦ γράμματος εἰς τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ δοθέντος μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν τῶν ὅρων του. Ἐὰν καὶ εἰς τὸ προκῦπτον κλάσμα παρουσιάζεται παρόμοιον φαινόμενον, ἐργαζόμεθα καὶ ἐπ' αὐτοῦ ὁμοίως.

Ἂν θέλωμεν τὴν τιμὴν π. χ. διὰ τὸ $\frac{\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1}{\alpha^3-4\alpha^2+5\alpha-2}$, ὅταν $\alpha = 1$, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι τούτου, ὅταν $\alpha = 1$, λαμβάνουν ἕκαστος τὴν τιμὴν 0. Ἀλλὰ καὶ ἐκ τούτου διακρίνομεν, ὅτι οἱ ἐν λόγῳ ὅροι διαιροῦνται διὰ τοῦ $\alpha-1$, (ἀφοῦ, ὅταν $\alpha = 1$, μηδενίζονται).

Διαιροῦμεν λοιπὸν ἕκαστον τῶν ὅρων του μὲ $\alpha - 1$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ δοθέντος $\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{\alpha^2-3\alpha+2}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τούτου οἱ ὅροι ἔχουν τὴν τιμὴν 0 ἕκαστος, ὅταν $\alpha = 1$. Καὶ τούτου οἱ ὅροι διαιροῦνται διὰ τοῦ $\alpha - 1$, καὶ ἐκτελοῦντες τὰς διαιρέσεις εἰς ἕκαστον τῶν ὅρων, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{\alpha-1}{\alpha-2}$.

Θέτομεν εἰς τοῦτο $\alpha=1$ καὶ εὑρίσκομεν $\frac{0}{1-2}=0$. Αὐτὴ εἶναι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅταν $\alpha=1$.

Ὅταν ἐργαζώμεθα ὡς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὑρίσκομεν, ἀντὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ἰσοδύναμόν του, διὰ τὸ ὁποῖον δὲν ὑπάρχει διὰ τὰς θεωρουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων, ἀόριστος τιμὴ τούτου, τότε λέγομεν ὅτι **αἴρομεν τὴν ἀοριστίαν** τοῦ δοθέντος κλάσματος.

Ἂν δοθὲν ἀλγεβρικὸν κλάσμα δὲν εἶναι ρητόν, τότε δὲν ἔχομεν ὡρισμένον ἁπλοῦν κανόνα διὰ νὰ ἄρωμεν τὴν ἀοριστίαν του. Ἀλλὰ συνήθως ἐπιδιώκομεν (ἂν εἶναι δυνατὸν) νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ δοθέντος μὲ ρητὸν παρονομαστὴν καὶ νὰ ἐπιτύχωμεν ὁμοίως τὴν ἀποβολὴν τῆς ἀοριστίας. Π. χ. $\frac{\alpha-5}{\sqrt{\alpha-1}-2}$, ὅπου $\alpha=5$, λαμβάνει τιμὴν ἀόριστον. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt{\alpha-1}+2$, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον παράστασιν τοῦ δοθέντος.

$\frac{(\alpha-5)(\sqrt{\alpha-1}+2)}{\alpha-5}=\sqrt{\alpha-1}+2$. Αὐτη, ὅταν $\alpha=5$, λαμβάνει τὴν τιμὴν ἡ ὁποία εἶναι καὶ (ἀληθὴς) τιμὴ καὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος, ὅταν $\alpha=5$.

§ 90. Ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha-1}+2$ λέγεται **συζυγὴς** τῆς $\sqrt{\alpha-1}-2$. Ἐν γένει δύο διώνυμα λέγονται **συζυγῆ**, ὅταν οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν εἶναι ἴσοι, οἱ δὲ δεύτεροι ἀντίθετοι· δηλαδὴ ὅταν εἶναι τῆς μορφῆς $A+B$ καὶ $A-B$.

Π.χ. αἱ $-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ καὶ $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ εἶναι συζυγῆ διώνυμα ἢ συζυγεῖς παραστάσεις.

§ 91. Ἔστω ὅτι ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{9x^3}{x-2}$, ὅταν $x=2$. Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτό, τὸ x μὲ τὸ 2, εὑρίσκομεν

$$\frac{9\cdot 2^3}{2-2}=\frac{9\cdot 8}{0}=\frac{72}{0}$$

Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι ἐνίοτε ἡ τιμὴ ἀλγεβρικοῦ ρητοῦ κλάσματος διά τινα δοθεῖσαν τιμὴν γράμματός τινος λαμβάνει μορφὴν κλάσματος μέν, ἀλλ' ἔχοντος παρονομαστὴν τὸ 0 καὶ ἀριθμητὴν ὡρισμένον τινὰ ἀριθμὸν $\neq 0$.

Ἐν γένει ἔστω, ὅτι ἡ τιμὴ κλάσματός τινος εἶναι ἡ $\frac{\alpha}{0}$, ὅπου α παριστάνει ἀριθμόν τινα ὡρισμένον ($\neq 0$). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι:

Ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{0}$ οὐδεμίαν ἔχει ἔννοιαν ἢ ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ $\frac{\alpha}{0}$ εἶναι ἀπολύτως μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ (ὁσονδήποτε μεγάλου).

Καὶ ὅτι μὲν τὸ $\frac{\alpha}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν, φαίνεται ἐκ τούτου: οὐδεὶς ἀριθμὸς ὑπάρχει, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δύναται νὰ δώσῃ γινόμενον τὸ α, ἀφοῦ τὸ 0 ἐπὶ οἱονδήποτε ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενον δίδει γινόμενον 0.

Ἐξ ἄλλου ὅμως, ἂν ὁ παρονομαστὴς ἑνὸς κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν ὡρισμένον $\alpha \neq 0$ ἐλαττοῦται, τότε τὸ κλάσμα αὐξάνεται ἀπολύτως. Οὕτω π.χ. τὸ $\frac{\alpha}{0{,}001} = 1000\alpha$, ἐνῷ τὸ $\frac{\alpha}{0{,}0001} = 10\,000\alpha$ εἶναι δὲ τὸ δεύτερον τοῦτο μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου του, ἐνῷ ὁ παρονομαστὴς τούτου εἶναι μικρότερος τοῦ προηγουμένου του.

Οὕτως, ὅσον ὁ παρονομαστὴς ἐλαττώνεται καὶ πλησιάζει νὰ γίνῃ 0, τόσον ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος γίνεται ἀπολύτως μεγαλυτέρα καὶ τείνει νὰ ὑπερβῇ πάντα θετικὸν ἀριθμόν. Ἂν συμβαίνῃ τοῦτο διὰ τὸ $\frac{\alpha}{0}$, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{0}$ τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον ἢ εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, καθ' ὅσον εἶναι τὸ $\alpha > 0$ ἢ τὸ $\alpha < 0$. Τὸ θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄπειρον παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον $\pm\infty$ (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἄπειρον).

Διὰ τοῦτο πάντοτε **εἰς πᾶσαν διαίρεσιν ὑποθέτομεν τὸν διαιρέτην διάφορον τοῦ 0.**

Ἄσκησις

154. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι κλασμάτων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α΄) $\frac{x^3+2x}{x}$, ὅταν $x=0$, β΄) $\frac{\psi^4-\alpha^4}{\psi^2-\alpha^2}$, ὅταν $\psi=\alpha$, γ΄) $\frac{x^2-\alpha^2}{x^3-\alpha^3}$, ὅταν $x=\alpha$,

δ΄) $\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$, ὅταν $\alpha=\beta$, ε΄) $\frac{(x^2+2\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)}{x^2-\alpha^2}$, ὅταν $x=\alpha$,

στ΄) $\frac{x^4-\alpha^4}{x-\alpha}$, ὅταν $x=\alpha$, ζ΄) $\frac{x^2-3x+5}{x^2-2x+1}$, ὅταν $x=1$, η΄) $\frac{\alpha^3+1}{\alpha^2-1}$, ὅταν $\alpha=1$,

θ΄) $\frac{\sqrt[3]{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha-\beta}+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}+\alpha^2(\alpha-\beta)}$, ὅταν $\alpha=\beta$.

3. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

§ 92. Ὁ κανὼν τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως ἀριθμητικῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἰσχύει καὶ διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Ἂν τὰ δοθέντα ρητὰ ἐν γένει κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα μὲ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν (ἀφοῦ τρέψωμεν τούτους εἰς γινόμενα) καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν, ὅπως καὶ εἰς τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς.

Ἔστω π.χ., ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα $\frac{2\alpha+3\beta}{2\alpha-3\beta}+\frac{2\alpha-3\beta}{2\alpha+3\beta}+\frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}$. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι τὸ $4\alpha^2-9\beta^2=(2\alpha+3\beta)(2\alpha-3\beta)$. Τὰ πηλίκα τούτου δι᾽ ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν εἶναι κατὰ σειρὰν $2\alpha+3\beta$, $2\alpha-3\beta$ καὶ 1. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ ἀντιστοίχως καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{(2\alpha+3\beta)^2}{4\alpha^2-9\beta^2}+\frac{(2\alpha-3\beta)^2}{4\alpha^2-9\beta^2}+\frac{2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}=\frac{(2\alpha+3\beta)^2+(2\alpha-3\beta)^2+2(4\alpha^2+9\beta^2)}{4\alpha^2-9\beta^2}.$$

Ἀσκήσεις

155. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καθὼς καὶ τῶν διδομένων, διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α΄) $\frac{2}{2x+5}+\frac{4}{3x+17}-\frac{2(5x+12)}{(2x+5)(3x+17)}$, ὅταν $x=2$,

β΄) $\frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}-\frac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)}$, ὅταν $\alpha=1$, $\beta=-1$, $\gamma=2$,

γ΄) $\frac{1-2x}{3(x^2-2x+1)}+\frac{1+x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{6(x+1)}$, ὅταν $x=2$.

δ) $\frac{\alpha^2+\alpha\gamma}{\alpha^2\gamma-\gamma^3}-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\alpha^2\gamma+2\alpha\gamma^2+\gamma^3}+\frac{28}{\gamma^2-\alpha^2}-\frac{3}{\alpha+\gamma}$,

ε) $\frac{x^3\psi-x\psi^3}{x^6-\psi^6}+\frac{x}{x^3-\psi^3}-\frac{\psi}{x^3+\psi^3}$,

στ) $\frac{x^2-(2\psi-3\omega)^2}{(3\omega+x)^2-4\psi^2}+\frac{4\psi^2-(3\omega-x)^2}{(x+2\psi)^2-9\omega^2}+\frac{\omega^2-x^2}{x+\omega}$,

ζ) $\frac{x}{x-\psi}-\frac{\psi}{x+\psi}-\frac{x^2}{x^2+\psi^2}+\frac{\psi^2}{\psi^2-x^2}$.

η) $\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^4-\beta^4}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right)$.

156. Ἐὰν θέσωμεν $\varphi(x)\equiv x+2$, $\pi(x)\equiv x^2+2x+4$, $\psi(x)\equiv x-2$ καὶ $\omega(x)\equiv x^2-2x+4$, δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{\pi(x)\cdot\omega(x)}{\varphi(x)\cdot\omega(x)-\pi(x)\cdot\psi(x)}=\frac{x^4+4x^2+16}{16}$.

4. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

§ 93. Ὁ κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀλγεβρικῶν κλασμάτων ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ρητὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα. Οὕτω π.χ. ἔχομεν $\frac{12x^2\psi}{7\omega\varphi^2}\cdot\frac{14\omega^2\varphi}{3x\psi^2}=\frac{12x^2\psi\cdot14\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2\cdot3x\psi^2}=\frac{12\cdot14x^2\psi\omega^2\varphi}{7\omega\varphi^2\cdot3x\psi^2}=\frac{8x\omega}{\psi\varphi}$.

Παρατηρητέον, ὅτι εἰς γινόμενον κλασμάτων δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιοῦμεν τὸν ἀριθμητὴν ἑνὸς τῶν παραγόντων, μὲ τὸν παρονομαστὴν ἑνὸς ἐξ αὐτῶν πρὸ τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατὸν (τρέποντες πρὸς εὐκολίαν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων εἰς γινόμενα). Π.χ. εἶναι

$$\frac{\alpha+x}{\alpha-x}\cdot\frac{\alpha-x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\alpha+x}{\alpha^2+x^2}$$

Ἐπίσης $\frac{x(\alpha+x)}{\alpha(\alpha-x)}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha-x)^2}{x^2(\alpha+x)^2}=\frac{x(\alpha+x)}{\alpha(\alpha-x)}\cdot\frac{\alpha^2(\alpha-x)(\alpha-x)}{x^2(\alpha+x)(\alpha+x)}=\frac{\alpha(\alpha-x)}{x(\alpha+x)}$.

Ὁ κανὼν διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν διαίρεσιν ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δι' ἀλγεβρικοῦ ρητοῦ κλάσματος ἐν γένει. Οὕτω π.χ. τὸ

$$\frac{12\alpha^2}{\beta^2}:\frac{3\alpha\beta^2}{10}=\frac{12\alpha^2}{\beta^2}\cdot\frac{10}{3\alpha\beta^2}=\frac{120\alpha^2}{3\alpha\beta^4}=\frac{40\alpha}{\beta^4}.$$

Τὸ $\frac{15(\alpha+\beta)}{22(\alpha-\beta)}:\frac{5(\alpha+\beta)^2}{11(\alpha-\beta)}=\frac{15(\alpha+\beta)}{22(\alpha-\beta)}\cdot\frac{11(\alpha-\beta)}{5(\alpha+\beta)^2}=\frac{3}{2(\alpha+\beta)}$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 157. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

α') $\dfrac{\alpha x+\alpha\psi}{\gamma x-\gamma\psi}\cdot\dfrac{\gamma x^2-\gamma\psi^2}{\beta x+\beta\psi}$ β') $\dfrac{3x^2-6x\psi+3\psi^2}{x+\psi}\cdot\dfrac{x^3+\psi^3}{6(x-\psi)}$,

$$\gamma')\ \left(1+\frac{x^4-2x^2\psi^2+\psi^4}{4x^2\psi^2}\right)(x^4-2x^2\psi^2+\psi^4).$$

δ') $\left(\dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta}{\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta}\right)\cdot\left(\dfrac{\alpha\gamma-\beta\gamma+\alpha\delta-\beta\delta}{\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha\delta-\beta\delta}\right)$, ε') $\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta}{\alpha^2+4\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha^2-4\beta^2}$,

$$\sigma\tau')\ \left(\alpha^4-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)\cdot\frac{\alpha^2x^2+\alpha\beta x^2}{\alpha x+1}\cdot\frac{\alpha x}{\alpha^2-\beta^2},$$

$$\zeta')\ \left(\alpha+1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\left(\alpha-1+\frac{1}{\alpha}\right)\cdot\frac{\alpha^2(\alpha^2-1)}{\alpha^6-1},$$

$$\eta')\ \left(2+\frac{\mu}{\mu-3}\right)\left(\frac{9-\mu^2}{4-\mu^2}\right)\left(\frac{2-\mu}{\mu^2+\mu-6}\right)-\left(\frac{2}{\mu+2}\right)$$

Ὁμὰς δευτέρα. 158. Ἔχει τις 5λ δρχ. Ἐκ τούτων ἐξοδεύει πρῶτον τὸ τρίτον, ἔπειτα τὸ ἕβδομον καὶ τέλος τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ἀρχικοῦ ποσοῦ. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

159. Ἔχει τις $\beta-1$ δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει τὸ τέταρτον αὐτῶν καὶ $\frac{3}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα τοῦ ἔμειναν;

160. Ἔχει τις α δραχμὰς καὶ ἐξοδεύει πρῶτον 90 δραχ. καὶ ἔπειτα τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσαι δρχ. τοῦ μένουν;

161. Ἔχει τις γ δραχμὰς καὶ χάνει πρῶτον τὰ δύο ἕβδομα αὐτῶν, ἔπειτα τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὑπολοίπου καὶ 1 δραχμήν. Πόσαι δραχμαὶ τοῦ ἔμειναν;

162. Ἀπὸ μίαν βρύσην τρέχουν 7 όκ. ὕδατος εἰς 5δ. Ἀπὸ ἄλλην 9 όκ. εἰς 4δ Πόσαι ὀκάδες θὰ τρέξουν καὶ ἐκ τῶν δύο, ἐὰν ἡ μὲν πρώτη τρέχῃ ἐπὶ τδ, ἡ δὲ ἄλλη ἀνοιχθῇ 2δ βραδύτερον, κλείσουν δὲ συγχρόνως;

Ὁμὰς τρίτη. 163. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ αἱ τιμαὶ αὐτῶν, καθὼς καὶ τῶν διδομένων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων των.

α') $\dfrac{12x\psi^2}{7\alpha^2\beta}:\dfrac{8x^2\psi}{25\alpha\beta^2}$, β') $\dfrac{12\alpha^2}{5\gamma^3\beta^2}:\dfrac{3\alpha\beta^2}{10\gamma^2}$, ὅταν $x=\psi=1, \alpha=2,\ \beta=\gamma=3$,

γ') $\alpha^3:\left(\alpha^2:\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$, δ') $\dfrac{9\gamma^2}{28\alpha^3\beta^2}:\left(\dfrac{12\alpha^2\beta}{7\gamma^2}:4\beta^2\gamma\right)$, ὅταν $\alpha=\beta=\gamma=-3$,

ε') $\dfrac{\alpha}{\alpha^3+\beta^3}:\left(\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{\alpha}{\beta}+1\right)$, στ') $\left(\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{x^2-\psi^2}\right):\left(\dfrac{\alpha^4-\beta^4}{x^4-2x^2\psi^2+\psi^4}\right)$,

ζ') $\dfrac{\alpha^2+\alpha x-\alpha\psi+x\psi}{\alpha^2-\alpha x-\alpha\psi+x\psi}:\dfrac{\alpha^2-\alpha x+\alpha\psi-x\psi}{\alpha^2+\alpha x-\alpha\psi-x\psi}$, ὅταν $\alpha=1,\ x=\psi=3$,

$$\eta') \left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2-1}\right):\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{x}{x^2-1}\right),$$

$$\theta') \left[\frac{\alpha^3}{\beta^3}-\frac{\beta^3}{\alpha^3}-3\left(\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)+5\right]:\left(\frac{\alpha}{\beta}-1-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,$$

$$\iota') \left[\frac{x-\alpha}{(x+\alpha)^2}+\frac{x+\alpha}{(x-\alpha)^2}\right]:\left[\frac{1}{(x+\alpha)^2}-\frac{1}{x^2-\alpha^2}+\frac{1}{(x-\alpha)^2}\right],$$

$$\iota\alpha') \left(\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}+\frac{\alpha}{\alpha-2\beta}\right):\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-4\beta^2}$$

Ὁμὰς τετάρτη. 164. Ἔχει τις α δραχμάς. Τὸ ποσὸν τοῦτο αὐξάνει κατὰ τὸ πέμπτον αὐτοῦ. Ἐξοδεύει τὰ 0,25 τῶν ὅσων οὕτως ἔχει καὶ αὐξάνει ὅσα τοῦ μένουν κατὰ τὰ 0,5 αὐτῶν. Πόσα ἔχει εἰς τὸ τέλος ;

165. Ἔχων τις α δραχμάς, τὰς αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτῶν. Ἐξοδεύει ἔπειτα 5.000 δραχμὰς καὶ τὸ ὑπολειφθὲν αὐξάνει κατὰ τὰ 0,25 αὐτοῦ, ἐξοδεύει δὲ πάλιν 5.000 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς ἔχει εἰς τὸ τέλος ;

166. Χωρικός τις ἔφερεν εἰς τὴν ἀγορὰν 16α+30 αὐγὰ πρὸς πώλησιν. Ἐν πρώτοις ἐπώλησε τὰ 0,5 τῶν ὅσων ἔφερε καὶ ἓν αὐγὸν ἐπὶ πλέον· ἔπειτα ἐκ τοῦ ὑπολοίπου τὰ 0,5 καὶ ἀκόμη ἓν αὐγόν. Ὁμοίως ἐπώλησε καὶ διὰ τρίτην καὶ τετάρτην φοράν. Πόσα αὐγὰ τοῦ ἔμειναν εἰς τὸ τέλος :

5. ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 94. Δοθὲν κλάσμα λέγεται **σύνθετον,** ἐὰν τουλάχιστον εἷς τῶν ὅρων του δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ ἀκεραία ἀλγεβρικὴ παράστασις. **Ἁπλοῦν** λέγεται ἓν κλάσμα, ὅταν δὲν εἶναι σύνθετον.

Οὕτω τὸ κλάσμα $\dfrac{3x}{\dfrac{4x-1}{4\psi}}$ εἶναι σύνθετον, διότι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ εἶναι κλασματικὴ παράστασις.

Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του, ἕπεται ὅτι ἔχομεν

$$\frac{3x}{\dfrac{4x-1}{4\psi}}=3x:\frac{4x-1}{4\psi}=3x\cdot\frac{4\psi}{4x-1}=\frac{12x\psi}{4x-1}.$$

Ἐν γένει :

Ἵνα κλᾶσμα σύνθετον καταστήσωμεν ἁπλοῦν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμητήν του διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Συντομώτερος τρόπος διὰ νὰ καταστήσωμεν σύνθετόν τι κλάσμα ἁπλοῦν εἶναι ὁ ἑξῆς :

Εὑρίσκομεν τὸ ἑ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ δοθέντος κλάσματος καὶ ἐπ αὐτὸ πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος

Ἔστω π.χ. τὸ κλάσμα $\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-x}-\dfrac{\alpha}{\alpha+x}}{\dfrac{x}{\alpha-x}+\dfrac{x}{\alpha+x}}$. Τὸ ἐ.κ.π. τῶν $\alpha-x$ καὶ $\alpha+x$ εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $(\alpha-x)(\alpha+x)$. Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ δοθέντος κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τοῦτο, εὑρίσκομεν

$$\frac{\alpha(\alpha+x)-\alpha(\alpha-x)}{x(\alpha+x)+(\alpha-x)x}=\frac{\alpha^2+\alpha x-\alpha^2+\alpha x}{\alpha x+x^2+\alpha x-x^2}=\frac{2\alpha x}{2\alpha x}=1.$$

Ἀσκήσεις

167. Νὰ τραποῦν εἰς ἁπλᾶ τὰ κάτωθι κλάσματα καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ των διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τῶν γραμμάτων.

α') $\dfrac{\dfrac{x}{\mu}+\dfrac{\psi}{\mu}}{\dfrac{\omega}{\mu}}$, β') $\dfrac{\dfrac{2\mu+\nu}{\mu+\nu}+1}{1+\dfrac{\nu}{\mu+\nu}}$, γ') $\dfrac{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1}$, δ') $\dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}}{x-\dfrac{1}{x}}$

ὅταν $x=\psi=\omega=\mu=4,\ \nu=2,\ \alpha=3,\ \beta=1.$

ε') $\dfrac{x+\psi}{x+\psi+\dfrac{1}{x+\psi+\dfrac{1}{x-\psi}}}$, στ') $\dfrac{\left(x-\psi-\dfrac{4\psi^2}{x-\psi}\right)\left(x+\psi-\dfrac{4x^2}{x+\psi}\right)}{3(x+\psi)-\dfrac{8x\psi}{x+\psi}}$

ὅταν $x=2,\ \psi=1.$

168. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα.

α') $\dfrac{\dfrac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}\quad\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha-\beta}}{\dfrac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}\quad\dfrac{\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma}}$ β') $\dfrac{\dfrac{1-(x\psi-\psi\omega)^2}{(x\psi-1)^2-\psi^2\omega^2}}{\dfrac{(\psi\omega-1)^2-x^2\psi^2}{(x\psi-\omega\psi)^2-1}}$ γ') $\dfrac{\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\psi-1}{\psi}+\dfrac{\omega+1}{\omega}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}}$

169. Ἐὰν τεθῇ

$(\varphi)x=\dfrac{x-1}{x+1}$ καὶ $\varphi(\psi)=\dfrac{\psi-1}{\psi+1}$, εὕρετε τὸ $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(\psi)}{1+\varphi(x)\cdot\varphi(\psi)}$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου II.

Ὁρισμὸς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως (ἀκεραία, κλασματική, ρητή, ἄρρητος παράστασις).

Σύμβολα : $\sqrt{\ }$ ριζικόν, $\equiv$ ταυτότητος ἢ ἰσοδυναμίας ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ἰσοδύναμοι παραστάσεις. Ὁρισμὸς ταυτότητος παραστάσεων

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

(αἱ ταυτότητες ἀληθεύουν δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των).

Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ὁρισμὸς μονωνύμου, διωνύμου, πολυωνύμου (ἀκέραιον, κλασματικόν, ρητόν, ἄρρητον μονώνυμον ἢ πολυώνυμον).

Ἀριθμητικὸς συντελεστὴς μονωνύμου, συντελεστὴς μονωνύμου, ὡς πρὸς γράμμα του ἢ ὡς πρὸς γινόμενον παραγόντων του.

Ὅμοια μονώνυμα (ἀντίθετα μονώνυμα). Ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων. Αἱ 4 πράξεις μὲ μονώνυμα.

Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματά του. Ὁμογενὲς ἀκέραιον πολυώνυμον, ὡς πρὸς γράμματά του.

Ὁμογενὲς γραμμικόν. Διατεταγμένον ἀκέραιον πολυώνυμον κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας δυνάμεις γραμμάτων του. Ἀνηγμένον (ἀκέραιον) πολυώνυμον.

Αἱ 4 πράξεις μὲ (ἀκέραια) πολυώνυμα καὶ μονώνυμα ἢ μὲ πολυώνυμα.

Αἱ πράξεις στηρίζονται ἐπὶ τῶν πράξεων καὶ ἰδιοτήτων τῶν ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων.

Διαίρεσις (ἀκεραίου) πολυωνύμου δι' ἄλλου διατεταγμένου ὁμοίως. Εὑρίσκομεν τὸν α' ὅρον τοῦ πηλίκου ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ α' ὅρου τοῦ διαιρέτου. Εὕρεσις τῶν λοιπῶν ὅρων τοῦ πηλίκου μετὰ τὸν α' ὅρον.

Σχέσις διαιρετέου, διαιρέτου, πηλίκου καὶ ὑπολοίπου. Σχέσις ὑπολοίπου καὶ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὸν βαθμόν των.

Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες

1) $(\alpha \pm \beta)^2 = \alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2$

2) $(\alpha \pm \beta)^3 = \alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3$

3) $(\mathbf{x} + \alpha)(\mathbf{x} + \beta) = \mathbf{x}^2 + (\alpha + \beta)\mathbf{x} + \alpha\beta$

4) $(\mathbf{x} + \alpha)(\mathbf{x} + \beta)(\mathbf{x} + \gamma) = \mathbf{x}^3 + (\alpha + \beta + \gamma)\mathbf{x}^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\mathbf{x} + \alpha\beta\gamma$

5) $(x^2 + \psi^2)(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha\mathbf{x} + \beta\psi)^2 = (\alpha\psi - \beta\mathbf{x})^2$

6) $(x^2 + \psi^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta\psi + \gamma\omega)^2 =$
$= (\alpha\psi - \beta\mathbf{x})^2 + (\beta\omega - \gamma\psi)^2 + (\gamma\mathbf{x} - \alpha\omega)^2$

Αἱ δύο τελευταῖαι λέγονται ταυτότητες τοῦ Lagrange.

Ὑπόλοιπον υ διαιρέσεως πολυωνύμου $\Pi(x) : (x \pm \alpha)$ εἶναι

$$\upsilon = \Pi(\mp \alpha)$$

Ὑπόλοιπον υ διαιρέσεως πολυωνύμου $\Pi(x) : (\alpha\chi \pm \beta)$ εἶναι

$$\upsilon = \Pi\left(\mp \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Πηλίκον (π) διαιρέσεως

$$(x^{\mu} - \alpha^{\mu}) : (x - \alpha) = x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1}$$

Πηλίκον (π) διαιρέσεως

$$(x^{2\nu+1} + \alpha^{2\nu+1}) : (x \pm \alpha) = x^{2\nu} \mp \alpha x^{2\nu-1} + \ldots + \alpha^{2\nu}$$

Τροπὴ ἀκεραίας ἀλγεβρικῆς παραστάσεως εἰς γινόνενον παραγόντων (διάκρισις ἐννέα περιπτώσεων).

Ὁρισμὸς ρητοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος (μὲ ὅρους ἀλγεβρικὰς παραστάσεις).

Παραστάσεις, τῶν ὁποίων ἡ τιμὴ παρουσιάζεται, ὡς ἀόριστος $\frac{0}{0}$. Ἄρσις τῆς ἀοριστίας. Συζυγεῖς παραστάσεις $A + B$ καὶ $A - B$ $\sqrt{A} + \sqrt{B}$ καὶ $\sqrt{A} - \sqrt{B}$.

Ὁρισμὸς συνθέτου κλάσματος, ἁπλοποίησις αὐτοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Α΄. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ *

§ 95. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν ἰσότητα $3x = 15$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν τὸ x γίνῃ 5, ἡ ἰσότης ἐπαληθεύεται. Πράγματι, ὅταν $x=5$, εἶναι $3 \cdot 5 = 15$, ἤτοι $15 = 15$. Διὰ πᾶσαν ἄλλην τιμὴν τοῦ x ἡ ἐν λόγῳ ἰσότης δὲν δίδει ἀριθμοὺς ἴσους, ἤτοι δὲν ἀληθεύει. Ὁμοίως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $3x=12$ ἀληθεύει διὰ μόνην τὴν τιμὴν $x=4$. Ἐὰν ἐξ ἄλλου εἰς τὴν ἰσότητα $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ α καὶ β δι' οἱωνδήποτε ἀριθμῶν π.χ. μὲ $\alpha = 1$ καὶ $\beta = 3$ ἢ μὲ $\alpha = 5$ καὶ $\beta = -7$, παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι ἀντιστοίχως, ἤτοι $4 = 4$ εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ $-2 = -2$ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν. Ἐκ τούτου συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχουν ἰσότητες ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύονται μόνον, ὅταν τὸ γράμμα ἢ ὡρισμένα γράμματά των λάβουν ἁρμοδίας τιμὰς καὶ ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων των. Τὰς πρώτας καλοῦμεν **ἐξισώσεις** τὰς δὲ ἄλλας **ταυτότητας.** Ὥστε :

Ἐξίσωσις λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει μόνον, ὅταν ἓν γράμμα ἢ ὡρισμένα γράμματα αὐτῆς λάβουν ἁρμοδίας τιμάς

Καλοῦμεν ἀγνώστους ἐξισώσεως τὰ γράμματά της, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν ὡρισμένας τιμάς, διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὐτή.

§ 96. Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων λέγονται οἱ ἀριθμοὶ (ἢ αἱ ποσότητες), οἱ ὁποῖοι ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν λέγονται δὲ αὗται καὶ **ῥίζαι** αὐτῆς. Συνήθως παριστάνομεν τοὺς ἀγνώστους ἐξισώσεως μὲ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου χ, ψ, ω κ.τ.λ.

---

* Ἡ χρῆσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον τοῦ Αἰγυπτίου **Ahmes** ἀλλὰ μόνον μὲ παραδείγματα. Ἡ ἐπιστημονικὴ διαμόρφωσις τοῦ ζητήματος ὀφείλεται εἰς τὸν Ἕλληνα **Διόφαντον** καὶ τὸν **Ἥρωνα** (1ον αἰῶνα π.Χ.).

Λύσις δὲ ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν της.

§ 97. Δύο ἐξισώσεις λέγονται **ἰσοδύναμοι,** ἐὰν ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, ἤτοι : ἐὰν πᾶσα ρίζα τῆς α′ ἐξισώσεως εἶναι ρίζα καὶ τῆς β′ καὶ πᾶσα τῆς β′ εἶναι καὶ τῆς α′.

Αἱ ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς ἰσότητος παραστάσεις λέγονται **μέλη** αὐτῆς (πρῶτον καὶ δεύτερον). Ἕκαστον μέλος ἐξισώσεως εἶναι ἐν γένει ἄθροισμα προσθετέων, ἕκαστος τῶν ὁποίων λέγεται **ὅρος** τῆς ἐξισώσεως.

§ 98. Ἐξίσωσίς τις λέγεται **ἀριθμητική** μέν, ἐὰν οὐδεὶς τῶν ὅρων της περιέχῃ γράμματα ἐκτὸς τῶν ἀγνώστων, **ἐγγράμματος** δὲ ἐὰν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο. Οὕτως ἡ $8x+12x=3-4x$ εἶναι ἀριθμητική, ἐνῷ ἡ $3x-5\alpha=8\beta+2$ εἶναι ἐγγράμματος.

§ 99. Μία ἐξίσωσις λέγεται **ἀκεραία,** ἂν οἱ ὅροι της εἶναι παραστάσεις ἀκέραιαι, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους της, καθὼς π.χ. ἡ $\alpha\sqrt{\alpha-\beta}\,x^2-2\beta x=\gamma$.

Κλασματική λέγεται μία ἐξίσωσις, ἂν τουλάχιστον εἷς τῶν ὅρων της εἶναι κλασματικὴ παράστασις, ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους της, π.χ. ἡ $\frac{3}{x+1}-\frac{7}{x^2-1}+4=0$.

Ρητὴ μὲν λέγεται μία ἐξίσωσις, ἂν οὐδεὶς τῶν ὅρων της ἔχῃ ρίζαν ἐπὶ τῶν ἀγνώστων της. **Ἄρρητος** δέ, ἂν δὲν εἶναι ρητή, π.χ. ἡ $\sqrt{x^2+2}=6$ εἶναι ἄρρητος.

§ 100. Θ' ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων :

Ἐὰν εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν (ἢ ἀφαιρέσωμεν) τὴν αὐτὴν ποσότητα, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Πράγματι ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $8x=32$. (1)

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν πχ. τὸν 6, προκύπτει ἡ $8x+6=32+6$ (2), ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διότι ἡ (1) ἔχει τὴν ρίζαν 4, ἐπειδὴ εἶναι $8\cdot 4=32$ (1′). Ἀλλ' ἂν εἰς τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν τὸν 6, προκύπτουν ἀριθμοὶ ἴσοι $8\cdot 4+6=32+6$ (2′). Θέτομεν εἰς τὴν (2) $x=4$ καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ α′ μέλους $8\cdot 4+6$, ἐκ δὲ τοῦ β′ $32+6$.

Ἀλλὰ τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶναι ἴσα, ὡς εἴδομεν (2΄). Ἄρα ἡ ρίζα 4 τῆς (1) εἶναι καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν 4, διότι ὅταν τεθῇ $x=4$ εἰς αὐτήν, εὑρίσκομεν $8 \cdot 4+6=32+6$ (2΄). Ἂν δὲ ἀπὸ τοὺς ἴσους αὐτοὺς ἀριθμοὺς ἀφαιρέσωμεν τὸν 6, ἔχομεν $8 \cdot 4=32$ (1΄). Θέτομεν εἰς τὴν (1) τὴν ρίζαν τῆς (2) $x=4$ καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τοῦ α΄ μέλους της $8 \cdot 4$, ἐκ δὲ τοῦ β΄ 32. Ἀλλ᾽ αὐτοὶ οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι (1΄). Ἤτοι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι ρίζα καὶ τῆς (1). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶσαν ἐξίσωσιν, ὡς καὶ ὅταν προστίθεται παράστασις περιέχουσα τὸν ἄγνωστον.

§ 101. Μεταφορὰ ὅρου ἀπὸ τὸ ἓν μέλος τῆς ἐξισώσεως εἰς τὸ ἄλλο.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x-\beta=\alpha$.

Ἐὰν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν β, λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν τῆς δοθείσης $x-\beta+\beta=\alpha+\beta$ ἢ $x=\alpha+\beta$. Τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον προκύπτει καὶ ἐὰν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν μεταφέρωμεν τὸ $-\beta$ ἐκ τοῦ α΄ μέλους εἰς τὸ β΄ μὲ τὸ ἀντίθετόν του πρόσημον. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἐξισώσεως $x+\beta=\alpha$ λαμβάνομεν $x=\alpha-\beta$, ἂν μεταφέρωμεν τὸ β εἰς τὸ β΄ μέλος μὲ ἀντίθετον αὐτοῦ πρόσημον. Ἄρα:

α΄). Εἰς πᾶσαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν ὅρον τινὰ ἐκ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς ἄλλο μὲ ἠλλαγμένον τὸ πρόσημόν του.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι:

Ἂν ὅρος τις ὑπάρχῃ εἰς τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως μὲ τὸ αὐτὸ πρόσημον, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείψωμεν, ὅτε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\gamma-x=\alpha-\beta$. (3)

Ἐὰν μεταφέρωμεν καθένα ὅρον αὐτῆς εἰς τὸ ἄλλο μέλος της μὲ ἀντίθετον πρόσημον, εὑρίσκομεν: $\beta-\alpha=x-\gamma$ ἢ $x-\gamma=\beta-\alpha$. (4)

Ἡ (4) προκύπτει ἐκ τῆς (3) καὶ ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ πρόσημον καθενὸς τῶν ὅρων αὐτῆς. Ὥστε:

β΄). Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σήματα πάντων τῶν ὅρων ἐξισώσεως, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Προφανῶς ἔχομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $A=B$, ὅπου τὰ A, B, παριστάνουν τὰ δύο μέλη αὐτῆς, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A - B = B - B$ ἢ μὲ τὴν $A - B = 0$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι:

γ′). **Δοθείσης ἐξισώσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμόν της τῆς μορφῆς $A=0$, ἂν μεταφέρωμεν καταλλήλως ὅλους τοὺς ὅρους τῆς δοθείσης εἰς τὸ α′ μέλος της καὶ παραστήσωμεν αὐτὸ μὲ Α.**

§ 102. Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν ἐξισώσεων:

Ἐὰν τὰ δύο μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἐπὶ τὴν αὐτὴν (γνωστὴν) ποσότητα ($\neq 0$), προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $7x=35$ (1). Λέγομεν ὅτι ἡ $\frac{7x}{3}=\frac{35}{3}$ (2) εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1). Διότι ἡ ρίζα τῆς (1) εἶναι $x=5$, ἐπειδὴ διὰ $x = 5$ ἔχομεν $7 \cdot 5 = 35$. Θέτομεν $x = 5$ εἰς τὴν (2) καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ μὲν τὸ α′ μέλος της $\frac{7.5}{3}$, ἀπὸ δὲ τὸ β′ τὸ $\frac{35}{3}$ Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι, διότι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ἴσους $7 \cdot 5$ καὶ 35, ἀφοῦ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 3. Ἑπομένως ἡ ρίζα $x=5$ τῆς (1) εἶναι ρίζα καὶ τῆς (2). Ἀντιστρόφως παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν 5, διότι ἂν τεθῇ εἰς αὐτὴν $x = 5$, εὑρίσκομεν $\frac{7.5}{3}=\frac{35}{3}$ Ἀλλὰ οἱ $7 \cdot 5$ καὶ 35 εἶναι ἴσοι, διότι προκύπτουν ἀπὸ τοὺς ἴσους $\frac{7 \cdot 5}{3}$ καὶ $\frac{35}{3}$, ἂν πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 3. Οὕτω καὶ ἡ (1) ἔχει τὴν ρίζαν $x = 5$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A = B$ ἢ ἡ ἰσοδύναμος αὐτῆς $A-B=0$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη της ἐπὶ λ ($\neq 0$), λαμβάνομεν τὴν $\lambda(A - B)=0$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης. Διότι πᾶσα ρίζα τῆς $A - B = 0$ ἐπαληθεύει αὐτήν, ἀλλ' ἐπαληθεύει καὶ τὴν $\lambda(A - B) = 0$, διότι $\lambda \neq 0$ καὶ $A - B = 0$. Ἀλλὰ καὶ πᾶσα ρίζα τῆς $\lambda(A-B)=0$, εἶναι καὶ τῆς $A - B = 0$, ἀφοῦ $\lambda \neq 0$, ἤτοι ἡ ρίζα αὐτὴ εἶναι καὶ ρίζα τῆς $A=B$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἐπειδὴ ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ 0, προκύπτει $0 = 0$, ἡ δὲ διαίρεσις διὰ τοῦ 0 εἶναι ἀδύνατος, ἕπεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἰσχύει, ὅταν ὁ ἀριθμός, μὲ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν ἢ διαιροῦμεν τὰ μέλη ἐξισώσεως, εἶναι ἢ γίνεται 0. Διὰ τοῦτο, ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν μόνον διὰ τὰς τιμὰς αὐτῶν τῶν γραμμάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν παράστασιν. Π.χ. ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι $\alpha-\beta$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha-\beta\neq 0$ (σημειώνομεν αὐτὸ καὶ οὕτως $\alpha\neq\beta$). Διότι, ἂν εἶναι $\alpha-\beta\neq 0$, ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην ἐξετασθεῖσαν περίπτωσιν.

Ἂν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι παράστασις ἔχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3x=4$ καὶ ἡ προκύπτουσα ἐκ ταύτης μὲ πολλαπλασιασμὸν τῶν μελῶν της ἐπὶ $(x-2)$, ἤτοι ἡ $3x(x-2)=$ $=4(x-2)$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι ἡ β′ ἔχει καὶ τὴν ρίζαν 2 (καθὼς φαίνεται, ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὸ 2 εἰς αὐτήν), ἐνῷ ἡ α′ δὲν τὴν ἔχει.

Ἐξ ἄλλου, ἂν ἔχωμεν π.χ. τὴν ἐξίσωσιν $(x+5)(x-4)=0$ καὶ διαιρέσωμεν τὰ μέλη της διὰ $x+5$, εὑρίσκομεν τὴν $x-4=0$, ἡ ὁποία δὲν ἔχει τὴν ρίζαν $x=-5$ τῆς δοθείσης.

2. ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΤΩΝ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ

§ 103. Καλοῦμεν **ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν** ἐξισώσεως τὴν εὕρεσιν ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ἐξισώσεως ἄνευ παρονομαστῶν.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{3}-\frac{x-1}{11}=x-9$.

Ἐὰν τὰ δύο ἴσα πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 3 καὶ 11, δηλαδὴ ἐπὶ 33 καὶ ἁπλοποιήσωμεν, λαμβάνομεν τὴν $11x-3x+3=33x-297$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἀπηλλαγμένη παρονομαστῶν καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Ἐν γένει :

Ἐὰν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι κλασματικὴ (ρητὴ) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμόν της ἀκεραίαν, ἐὰν πολλαπλασιάσω-

μεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της καὶ ἁπλοποιήσωμεν τοὺς ὅρους τῶν κλασμάτων.

Πράγματι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ β' μέλος μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι τὸ μηδέν, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν τὸ α' μέλος αὐτῆς ὑπὸ τὴν μορφὴν $\frac{A}{B}$, ἀντὶ δὲ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως νὰ ἔχωμεν τὴν $\frac{A}{B}=0$ (1), ὅπου Α, Β εἶναι πολυώνυμα ἀκέραια ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Ἂν δι' οὐδεμίαν τιμὴν τῶν ἀγνώστων μηδενίζωνται συγχρόνως τὸ Α καὶ Β, τότε διὰ νὰ εἶναι $\frac{A}{B}=0$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $A=0$ (2), ὅτε αἱ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἂν ὅμως ὑπάρχουν τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, δι' ἑκάστην τῶν ὁποίων μηδενίζεται τὸ Α καὶ Β, τότε αἱ τιμαὶ αὐταὶ ἐπαληθεύουν τὴν (2), ἀλλὰ δυνατὸν νὰ μὴ ἐπαληθεύουν τὴν (1). Διότι διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τὸ $\frac{A}{B}$ παρουσιάζεται ὅτι ἔχει τιμὴν ἀόριστον καὶ ἡ ἀληθὴς τιμή του δύναται νὰ μὴ εἶναι μηδέν.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις: $\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$ (2). Τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $(x-5)(x-6)(x-8)(x-9)$. Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν: $(x-4)(x-6)(x-8)(x-9)-(x-5)^2(x-8)(x-9)-(x-7)(x-5)(x-6)(x-9)+(x-8)^2(x-5)(x-6)=0$, ἡ ὁποία εἶναι ἀκεραία καὶ ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν, διότι δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x ἐπαληθεύουσα αὐτὴν καὶ τὴν $(x-5)(x-6)(x-8)(x-9)=0$.

Πρὸς συντομίαν διὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καθένα ἀριθμητὴν τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ἐ.κ.π. διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ὅρου τούτου καὶ νὰ παραλείψωμεν τοὺς παρονομαστάς. Π.χ. διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\frac{3x}{4}-\frac{2x-1}{5}-1=\frac{2}{3}$ παρατηροῦμεν ὅτι ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της εἶναι τὸ 60 καὶ τὰ 15, 12, 60, 20 εἶναι τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα τοῦ 60 διὰ καθενὸς τῶν παρονομαστῶν 4, 5, 1, 3. Ἐπὶ τὰ πηλίκα αὐτὰ θὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ἀντιστοίχους ἀριθμητὰς τῶν ὅρων, χωρὶς νὰ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν πλέον τοὺς παρονομαστάς. Μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πολλαπλασιασμῶν εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$45x-24x+12-60=40.$$

§ 104. Καλοῦμεν βαθμὸν ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $A = 0$, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι (ἀκέραιον ἀνηγμένον) πολυώνυμον, περιέχον ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, τὸν βαθμὸν τοῦ πολυωνύμου τούτου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους. Π.χ. ἡ $3x^2-6x+2=0$ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἡ $3x^2\psi-4\psi^2+2x-1 = 0$ εἶναι γ' βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ ψ, ἡ $2x-3 = 0$ εἶναι α' βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

3. ΛΥΣΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ Α' ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ 105. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$3x-7 = 14-4x.$$

Ἐὰν τὸν ὅρον $-4x$ μεταφέρωμεν καταλλήλως εἰς τὸ α' μέλος, τὸ δὲ -7 εἰς τὸ β', εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν τῆς δοθείσης

$$3x+4x = 14+7.$$

Ἐκτελοῦντες εἰς τὸ α' καὶ β' μέλος αὐτῆς τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, εὑρίσκομεν $7x=21$. Ἐὰν τὰ μέλη ταύτης διαιρέσωμεν διὰ τοῦ συντελεστοῦ 7 τοῦ x, προκύπτει ἡ $x=3$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν καὶ ἀληθεύει, ὅταν $x=3$. Ἄρα καὶ ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ 3.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{3} - \frac{x-1}{11} = x-9$.

Διὰ νὰ λύσωμεν ταύτην, εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν. Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ταύτης κατὰ σειρὰν ἐπὶ 11, 3, 33, 33, (ὅπου τὸ 33 εἶναι τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν της) καὶ εὑρίσκομεν $11x-3x+3 = 33x-297$.

Ἐργαζόμενοι ἐπ' αὐτῆς ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν $x = 12$. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, 1ον ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς αὐτῆς, ἐὰν ἔχῃ (ἤτοι εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς ἄνευ παρονομαστῶν), 2ον ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις εἰς τὴν ἰσοδύναμον, 3ον χωρίζομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον ἀπὸ τοὺς μὴ ἔχοντας αὐτὸν εἰς τὴν νέαν ἐξίσωσιν γράφοντες τοὺς μὲν εἰς τὸ ἓν μέλος, τοὺς δὲ εἰς τὸ ἄλλο μέλος, 4ον ἐκτελοῦμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων καὶ 5ον διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

170. α') $x+17=8x+1$, β') $5x-4=38-x$.
171. α') $6x+25=31+2x$, β') $4(3x+5)-60=2x$
172. α') $11(2x-15)-x=6$, β') $\alpha x=\alpha+1+x$.
173. α') $4\alpha^2x-1=x+2\alpha$, β') $\beta x+\alpha x=1$.
174. α') $\frac{3x-1}{4}-\frac{2x+1}{3}-\frac{4x-5}{5}=4$, β') $2-\frac{7x-1}{6}=3x-\frac{19x+3}{4}$.
175. $\frac{5x+1}{3}+\frac{19x+7}{9}-\frac{3x-1}{2}=\frac{7x-1}{6}$.
176. $11-\left(\frac{3x-1}{4}+\frac{2x+1}{3}\right)=10-\left(\frac{2x-5}{3}+\frac{7x+1}{8}\right)$.

4. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta=0$

§ 106. Ἐὰν ἀπὸ δοθεῖσαν ἀκεραίαν ἢ κλασματικὴν (ρητὴν) ἐξίσωσιν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν πάντων τῶν ὅρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων προκύπτει ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον x, αὕτη θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x+\beta=0$. ὅπου τὰ α, β εἶναι ἀριθμοὶ γνωστοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί.

Ὅταν λέγωμεν θὰ **διερευνήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta=0$**. ἐννοοῦμεν ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ ἀπαντήσωμεν εἰς τὰς ἑξῆς ἐρωτήσεις:

1ον. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει μίαν ρίζαν ἢ δύναται νὰ ἔχῃ καὶ περισσοτέρας ἢ καὶ οὐδεμίαν;

2ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὰ α καὶ β, διὰ νὰ ἔχῃ μίαν ρίζαν καὶ τί διὰ νὰ ἔχῃ περισσοτέρας ἢ οὐδεμίαν;

Ἐκ τῆς $\alpha x+\beta=0$ εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x=-\beta$

1ον. Ἂν εἶναι $\alpha\neq 0$, θὰ ἔχωμεν $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ x εἶναι ὡρισμένη καὶ λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις **ἔχει μίαν μόνην ρίζαν ἢ μίαν μόνην λύσιν.**

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq 0$, θὰ ἔχωμεν $0x=-\beta$ ἢ $0=-\beta$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ ὑπετέθη $\beta\neq 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ἀδύνατος** ἢ ὅτι **οὐδεμίαν ἔχει λύσιν.**

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2}-3-\frac{x}{3}=1+\frac{x}{6}-\frac{1}{3}$. Ἀντ' αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $3x-18-2x=6+x-2$ ἢ τὴν $0x=22$ ἢ $0=22$, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος, ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $0\cdot x=0$ ἢ $0=0$ καὶ προφανῶς τὸ x δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν. Λέγομεν δὲ ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι **ταυτότης** πρὸς x ἢ ὅτι εἶναι **ἀόριστος**.

§ 107. *Παρατήρησις.* Ὅταν τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ ἐλαττούμενον πλησιάζῃ διηνεκῶς πρὸς τὸ 0, τότε λέγομεν ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ x τείνει εἰς τὸ 0, συμβολίζομεν δὲ αὐτὸ οὕτως: $\alpha \to 0$ Ἀλλὰ τότε, ἂν τὸ β εἶναι ὡρισμένος ἀριθμὸς $\neq 0$, τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ διηνεκῶς αὐξάνεται ἀπολύτως, καὶ λέγομεν ὅτι τείνει εἰς τὸ $+\infty$ μέν, ἂν εἶναι $\beta > 0$, εἰς τὸ $-\infty$ δέ, ἂν εἶναι $\beta < 0$, λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἢ τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον, καθ' ὅσον $\beta > 0$ ἢ $\beta < 0$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΛΥΣΕΩΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x+\beta=0$

§ 108. Πρὸς εὐκολίαν παραθέτομεν τὸν κατωτέρω πίνακα τῶν περιπτώσεων τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ πρώτου βαθμοῦ

$$\alpha x+\beta=0.$$

1ον. Ἂν εἶναι $\alpha \neq 0$, ὑπάρχει μία ρίζα, ἡ $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

2ον. Ἂν εἶναι $\alpha=0$, $\beta \neq 0$ δὲν ὑπάρχει ρίζα.

Ὅταν εἶναι $\beta \neq 0$ καὶ ὡρισμένον, ἀλλὰ τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ $\to 0$, ἡ ρίζα τείνει πρὸς τὸ $+\infty$, ἂν $\beta > 0$ ἢ εἰς τὸ $-\infty$, ἂν $\beta < 0$.

3ον. Ἂν εἶναι $\alpha=0$, $\beta=0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος· ἀληθεύει μὲ κάθε x.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 177. Εὕρετε τὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

α') $\frac{3}{2}x-5+x=\frac{x-10}{2}+2x$,

β') $2x-5=\frac{x+7}{2}+\frac{3x}{2}$,

δ') $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\beta}+1=\frac{(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{\alpha\beta}$,

ε') $\frac{x}{3}-\frac{x}{5}-3=2x-7$,

γ') $\frac{x-\alpha}{2}+\frac{x+\beta}{3}=\frac{5x}{6}-1$, στ') $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}+5=\frac{5x}{6}+2$.

178. Ποίας σχέσεις πρέπει νὰ πληροῦν τὸ α καὶ β, ἵνα ἡ $\frac{\alpha x-\beta}{3}+\frac{x}{2}=3x-\alpha$, ἔχῃ μίαν λύσιν, οὐδεμίαν ἢ εἶναι ἀόριστος.

179. Προσδιορίσατε τὸ α, ὥστε ἡ $\frac{\alpha x-1}{3}+\frac{x+1}{2}=4$ νὰ εἶναι ἀδύνατος.

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. 180. Νὰ γίνῃ ἡ λύσις καὶ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν ἐξισώσεων: α') $27x-5(2x-4)=6(3x-5)+5(2x-1)$.

β') $\frac{2(3x-5)}{3}-\frac{25(x+2)}{12}=\frac{5(3x+2)}{2}+33$

γ') $x-\left(\frac{x}{2}-\frac{2x}{3}\right)-\left(\frac{3x}{4}+\frac{2x}{3}\right)-\frac{5x}{6}=65$

δ') $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{6}\right)$

ε') $\frac{1}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x-3)}+\frac{19}{(x-3)(x-4)}=\frac{19}{(x-2)(x-4)}$,

στ') $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{4(x-1)}{x^2(x-2)^2}+\frac{4}{x^2(x-2)}=0$.

Ὁ μ ὰ ς τ ρ ί τ η. 181. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις:

α') $(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)x=2\alpha^2$, β') $(\alpha^2+\beta^2)x+2\alpha\beta x=\alpha^3+\beta^3$,

γ') $2\mu(x-\mu)-2\nu(\nu-x)=(\mu+\nu)^2-(\mu-\nu)^2$,

δ') $(x+1)^2-\alpha(5-3\alpha+2x)=(x-2\alpha)^2+5$, ε') $\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{\alpha+\beta}=2\alpha+\beta$.

στ') $\frac{\beta x+\alpha}{2\alpha^2\beta}+\frac{x-1}{3\beta^2}=\frac{3\beta^2+7\alpha^2}{6\alpha^2\beta(\alpha-\beta)}$, ζ') $\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1}=\frac{\alpha x+\beta}{\alpha_1 x+\beta_1}$,

η') $\frac{8\alpha}{(x+2)^2}+\frac{8\beta}{(x-2)^2}-\frac{(\alpha+\beta)x^4}{(x^2-4)^2}=-(\alpha+\beta)$.

5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

§ 109. Πρόβλημα λέγεται πρότασις, εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἓν ἢ περισσότερα ἄγνωστα ἐξαρτώμενα ἀπὸ ἄλλα γνωστὰ ἢ δεδομένα. Τὰ διδόμενα καὶ τὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος εἶναι ἐν γένει σχετικοὶ ἀριθμοί, τὰ δὲ περιεχόμενα εἰς αὐτὸ ποσὰ μετρούμενα μὲ τὴν μονάδα αὐτοῦ ἕκαστον παριστάνονται μὲ ἀριθμούς.

§ 110. Λύσις ἑνὸς προβλήματος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν ζητουμένων ἀγνώστων αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα παριστάνομεν συνήθως μὲ γράμματα $x, \psi, \omega, \ldots$, τὰ δὲ γνωστὰ μὲ ἀριθμοὺς ἢ μὲ γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Διὰ νὰ λυθῇ ἓν πρόβλημα, πρέπει τὰ ζητούμενα αὐτοῦ νὰ πληροῦν ὡρισμένας τινὰς ἀπαιτήσεις, τὰς ὁποίας καλοῦμεν **ὅρους** τοῦ προβλήματος. Ἐκείνους ἐκ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι ὁρίζουν τὰς σχέσεις, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχουν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα, καλοῦμεν **ἐπιτάγματα.**

Τὰ ἐπιτάγματα γίνονται γνωστὰ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος π.χ. εἰς τὸ πρόβλημα:

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον νὰ τὸν ὑπερβαίνῃ κατὰ 6. Τὸ ἐπίταγμα εἶναι ὅτι: **τὸ διπλάσιον εἶναι μεγαλύτερον αὐτοῦ κατὰ 6.**

Ἑπομένως, ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ μὲ x, τὸ διπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι $2x$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ $2x$ θὰ ὑπερβαίνῃ τὸ x κατὰ 6, πρέπει αἱ δύο παραστάσεις $2x$ καὶ $x+6$ νὰ εἶναι ἴσαι. Οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $2x = x + 6$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 6$.

Ἐνίοτε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστάνει τὴν τιμὴν ποσοῦ τινός, τὸ ὁποῖον ἕνεκα τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς ὅρους τινάς, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ πληροῖ. Τοὺς τοιούτους ὅρους καλοῦμεν **περιορισμούς**. Π.χ. ἂν διὰ τῆς λύσεως προβλήματός τινος ζητῆται τὸ πλῆθος ἀνθρώπων, δυνάμεθα ἐκ τῶν προτέρων νὰ εἴπωμεν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός.

Ἐν γένει διὰ τὴν λύσιν προβλήματός τινος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

1ον Εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καὶ τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων αἱ πρῶται ἐκφράζουν τὰς σχέσεις τὰς συνδεούσας τὰ ζητούμενα μὲ τὰ δεδομένα αὐτοῦ.

2ον. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τίνες εἶναι οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι δύνανται νὰ λύσουν τὸ πρόβλημα.

3ον. Ἐξετάζομεν ἂν οἱ ἐκ τῆς λύσεως εὑρεθέντες ἀριθμοὶ πληροῦν καὶ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος.

Ι. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΝ

§ 111. α΄) Τὸ τετραπλάσιον ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐξηθέντα κατὰ 60. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

Ἔστω ὅτι x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ θὰ εἶναι $4x$, τὸ δὲ $x+60$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸν ηὐξημένον κατὰ 60. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι $4x=x+60$ ἢ $3x=60$. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=20$ καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

β΄) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 25, τὸ δὲ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου δίδει 50. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν μεγαλύτερον τῶν ἀριθμῶν, ὁ μικρότερος θὰ εἶναι $25-x$, τὸ ἑξαπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου $6x$, τὸ δὲ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου $4(25-x)$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος ἡ διαφορὰ $6x-4(25-x)$ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ 50, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $6x-4(25-x)=50$ ἢ $6x+4x-100=50$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=15$. Ἄρα οἱ ἀριθμοὶ εἶναι 15 καὶ $25-15=10$.

γ΄) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{7}{11}$ κάμνει αὐτὸ ἴσον μὲ $\frac{1}{4}$.

Ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν: $\frac{7+x}{11+x}=\frac{1}{4}$, ἐκ τῆς λύσεως, τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=-5\frac{2}{3}$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτή.

Προβλήματα

182. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ διπλάσιον αὐξηθὲν κατὰ 5 ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ μεῖον 19.

183. Εὕρετε ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετραπλάσιον αὐτοῦ ἐλαττούμενον κατὰ 2 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον του σὺν 17.

184. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{6}{17}$ τὸ κάμνει ἴσον μὲ $\frac{1}{3}$.

185. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τοὺς -5, 6, 8, δίδει ἀριθμούς, ἐκ τῶν ὁποίων οἱ δύο πρῶτοι ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τοῦ τρίτου πρὸς τὸν ζητούμενον.

186. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ καὶ κατὰ 4 γίνεται ἴσος μὲ τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ μεῖον 8.

187. Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὅρους τοῦ $\frac{29}{42}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ 0,5 ;

188. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ κάμνουν 170 ;

II. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΟΣ

§ 112. α΄) Ὁ Ἰωάννης ἔχει τετραπλάσια μῆλα ἢ ἡ Μαρία καὶ οἱ δύο δὲ μαζὶ ἔχουν 45. Πόσα ἔχει ἕκαστος ;

Περιορισμός. Προφανῶς οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὰ μῆλα τῆς Μαρίας, τὰ τοῦ Ἰωάννου θὰ παρασταθοῦν μὲ τὸ $4x$ καὶ τῶν δύο μὲ τὸ $4x+x$ καὶ πρέπει νὰ εἶναι $4x+x=45$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 9$. Ἤτοι ἡ Μαρία εἶχεν 9 καὶ ὁ Ἰωάννης $4\cdot 9=36$ μῆλα καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

β΄) Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάσις εἶναι 4 μ. μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό, τὸ δὲ ὕψος 3 μ. μικρότερον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τετραγώνου, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι $x \cdot x=x^2$. Ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου θὰ παρασταθῇ τότε μὲ $x+4$, τὸ ὕψος του μὲ $x-3$ καὶ τὸ ἐμβαδόν του εἶναι $(x+4)(x-3)$. Πρέπει νὰ εἶναι :
$(x+4)(x-3)=x^2$ ἢ $x^2+4x-3x-12=x^2$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν $x = 12$.

Ὥστε ἡ μὲν βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχει μῆκος $12+4=16$ μ. τὸ δὲ ὕψος $12-3=9$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

γ΄) Ὁ Α ἐκτελεῖ ἓν ἔργον εἰς 7 ἡμέρας. Ὁ Β ἐκτελεῖ αὐτὸ εἰς 5 ἡμέρας. Ἐὰν ἐργασθοῦν καὶ οἱ δύο μαζί, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον ;

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν (ὁ ὁποῖος πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ 5), παρατηροῦμεν ὅτι, ἀφοῦ εἰς x ἡμέρας ἐκτελοῦν καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι τὸ ἔργον, εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου. Ἀφοῦ ὁ Α εἰς 7 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὸ ἔργον, εἰς 1 ἡμέραν θὰ ἐκτελῇ τὸ $\frac{1}{7}$. Ὁ Β ἐκτελεῖ εἰς 1 ἡμέραν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Καὶ οἱ δύο μαζὶ εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ἑπομένως πρέπει νὰ εἶναι $\frac{1}{7}+\frac{1}{5}=\frac{1}{x}$ ἢ $5x+7x=35$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=2\frac{11}{12}$.

Ὥστε καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι θὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργον εἰς $2\frac{11}{12}$ ἡμέρας καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

Προβλήματα

189. Ἔχει τις 100 ὀκάδας οἴνου τῶν 9,50 δρχ. κατ' ὀκᾶν. Πόσον οἶνον τῶν 9 δρχ. κατ' ὀκᾶν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ, διὰ νὰ κοστίζῃ, ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 9,2 δρχ ;

190. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ δύο τόπων συγχρόνως κινούμενα ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ὥστε νὰ συναντηθοῦν. Τὸ μὲν διανύει 5 χλμ. τὴν ὥραν, τὸ δὲ 5,5 χλμ. Εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πρῶτον τόπον θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν τόπων εἶναι 60 χλμ. ;

191. 40 ὀκάδες ἁλμυροῦ ὕδατος περιέχουν 3,4 ὀκ. ἅλατος. Πόσον καθαρὸν ὕδωρ πρέπει νὰ ρίψωμεν εἰς αὐτό, ἵνα 30 ὀκ. τοῦ νέου μίγματος περιέχουν 2 ὀκ. ἅλατος ;

192. Πόσον κοστίζει ἓν κτῆμα, ἂν τὰ τρία πέμπτα τῆς ἀξίας αὐτοῦ σὺν 250 000 δρχ. ἀποτελοῦν τὰ τρία τέταρτα αὐτῆς μεῖον 200 000 δρχ. ;

193. Ἀτμάμαξα διανύουσα 48 χλμ. τὴν ὥραν ἀνεχώρησεν 20π βραδύτερον ἄλλης (ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου) καὶ διευθυνομένη ὁμοίως, συνηντήθη δὲ μὲ αὐτὴν μετὰ 2 ὥρας καὶ 20π μετὰ τὴν ἀναχώρησίν της. Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τῆς ἄλλης ;

194. Κρουνὸς πληροῖ δεξαμενὴν εἰς 12 ὥρας, ἄλλος πληροῖ αὐτὴν εἰς 10 ὥρας καὶ τρίτος πληροῖ αὐτὴν εἰς 30 ὥρας. Ἂν καὶ οἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν συγχρόνως, εἰς πόσον χρόνον θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή ;

195. Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 6.000 δρχ. καὶ μίαν ἐνδυμασίαν. Ἂν διὰ 8 μῆνας ἔλαβε 5.000 δρχ. πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ἐνδυμασία ;

III. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΕΙΝΑΙ ΑΚΕΡΑΙΟΣ ΘΕΤΙΚΟΣ

§ 113. α') Δέκα ἄτομα, ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐπλήρωσαν

500 δρχ. Ἂν ἕκαστος τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσεν 60 δρχ. καὶ ἑκάστη τῶν γυναικῶν 40 δρχ. πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες ;

Περιορισμός. Παρατηρητέον, ὅτι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί, ἄλλως ἡ λύσις δὲν δύναται νὰ εἶναι δεκτή.

Ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν γυναικῶν, ὁ τῶν ἀνδρῶν θὰ εἶναι $10-x$. Ὅλοι οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν $60(10-x)$ δρχ. ὅλαι δέ αἱ γυναῖκες $40x$ δρχ.

Πρέπει νὰ εἶναι $60(10-x)+40x=500$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει $x=5$ γυναῖκες, ὁπότε οἱ ἄνδρες, εἶναι $10-5=5$, ἡ δὲ λύσις εἶναι δεκτή.

β′) Ἀπὸ 80 ἄτομα, ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά, αἱ μὲν γυναῖκες ἦσαν τὰ 0,8 τῶν ἀνδρῶν, τὰ δὲ παιδιὰ τὰ ἑπτὰ πέμπτα τῶν ἀνδρῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδιά ;

Ἂν x παριστάνῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν, ὁ τῶν γυναικῶν θὰ εἶναι $0{,}8x$ καὶ ὁ τῶν παιδιῶν $\frac{7}{5}x$. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι $x+0{,}8x+\frac{7}{5}x=80$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=25$.

Ὥστε οἱ ἄνδρες ἦσαν 25, αἱ γυναῖκες $25\cdot 0{,}8=20$ καὶ τὰ παιδιὰ $25\cdot\frac{7}{5}=35$, ἡ δέ λύσις εἶναι δεκτή.

Προβλήματα

196. Εἰς μίαν ἐκλογὴν μεταξὺ δύο ὑποψηφίων ἐψήφισαν 12 400 ἐκλογεῖς καὶ ἔλαβεν ὁ ἐκλεγεὶς 5 153 ψήφους περισσοτέρας τοῦ ἀποτυχόντος, εὑρέθησαν δὲ καὶ 147 λευκαὶ ψῆφοι. Πόσας ψήφους ἔλαβεν ἕκαστος ;

197. Ἐὰν ὅμιλός τις εἶχε τὸ ἕβδομον τῶν μελῶν του ὀλιγώτερον τῶν ὅσων ἔχει, θὰ εἶχεν 120 μέλη. Πόσα μέλη ἔχει ;

198. Τὸ τριπλάσιον τοῦ πέμπτου ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 7 δίδει τὸ 34. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

199. Τίς εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον αὐξηθὲν κατὰ 2 δίδει τὸ 23 ;

200. Νὰ εὑρεθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος διὰ 7 ἢ διὰ 9 ἀφίνει ὑπόλοιπον 3, τὰ δὲ πηλίκα διαφέρουν κατὰ 4.

201. Εἶχέ τις πορτοκάλια καὶ ἐπώλησε τὰ τρία πέμπτα αὐτῶν· ἠγόρασεν ἔπειτα 33 πορτοκάλια καὶ εἶχεν οὕτως 9 περισσότερα τῶν ὅσων εἶχεν ἐξ ἀρχῆς. Πόσα εἶχε ;

IV. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ Ο ΑΓΝΩΣΤΟΣ ΠΕΡΙΕΧΕΤΑΙ ΜΕΤΑΞΥ ΟΡΙΩΝ

§ 114. α΄) Ἡ ἡλικία ἑνὸς πατρὸς εἶναι τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Ποῖαι αἱ ἡλικίαι των ;

Ἂν μὲ x παρασταθῇ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἰς ἔτη, ἡ τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $3x$ ἔτη, πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ x καὶ $3x$ νὰ εἶναι θετικοὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὴν δυνατὴν ἀνθρωπίνην ἡλικίαν.

Πρὸ 8 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ μὲν υἱοῦ ἦτο $x-8$ ἔτη, τοῦ δὲ πατρὸς $3x-8$ ἔτη καὶ πρέπει νὰ εἶναι $3x-8=4(x-8)$, ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=24$. Ἄρα ἡ ἡλικία τοῦ μὲν υἱοῦ εἶναι 24, τοῦ δὲ πατρὸς $24 \cdot 3 = 72$ ἔτη καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

β΄) Ἐκ δύο ἀνθρώπων, ὁ μὲν ἔχει 1800 δρχ. καὶ δαπανᾷ 50 δρχ. καθ' ἑκάστην ἡμέραν, ὁ δὲ ἔχει 1000 δρχ. καὶ δαπανᾷ 30 δρχ. ἡμερησίως. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσα ποσά ;

Ἂν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παρασταθῇ μὲ x, ὁ μὲν θὰ δαπανήσῃ $50x$ δρχ. καὶ θὰ τοῦ μείνουν $(1800-50x)$ δρχ, ὁ δὲ $30x$ καὶ θὰ τοῦ μείνουν $(1000-30x)$ δρχ. Ἄρα πρέπει νὰ εἶναι: $1800-50x=1000-30x$ ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=40$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη ἀπορρίπτεται, διότι μετὰ 40 ἡμέρας καὶ οἱ δύο ἄνθρωποι δὲν θὰ ἔχουν τίποτε.

Προβλήματα

202. Ὁ Ἕλλην μαθηματικός, συγγραφεὺς τῆς Ἀλγέβρας, Διόφαντος ἔζησε τὸ ἕκτον τῆς ζωῆς του ὡς παιδίον, τὸ δωδέκατον αὐτῆς ὡς νεανίας, τὸ ἕβδομον αὐτῆς, μετὰ τὸν γάμον του καὶ πέντε ἔτη ἀκόμη, ὅτε ἀπέκτησε υἱόν, ὁ ὁποῖος ἔζησε τὸ ἥμισυ ἢ ὅσον ὁ πατήρ του· ἔζησε δὲ ὁ Διόφαντος ἀκόμη 4 ἔτη μετὰ τὸν θάνατον τοῦ υἱοῦ του. Πόσα ἔτη ἔζησεν ὁ Διόφαντος ;

203. Ἔχει τις ἡλικίαν τριπλασίαν τῆς κόρης του· αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν δύο εἶναι 28 ἔτη ὀλιγώτερον τοῦ διπλασίου τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός. Πόσην ἡλικίαν ἔχει ἕκαστος ;

204. Τρεῖς ἀδελφοὶ ἔχουν ὁμοῦ ἡλικίαν 24 ἐτῶν, ἐνῷ ἕκαστος εἶναι κατὰ δύο ἔτη μεγαλύτερος τοῦ ἀμέσως ἑπομένου του. Ποῖοι εἶναι αἱ ἡλικίαι των ;

205. Εἶναι τις 40 ἐτῶν καὶ ἔχει θυγατέρα 16 ἐτῶν· πότε ἡ ἡλικία τῆς θυγατρὸς θὰ εἶναι ἢ ἦτο τὸ τρίτον τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός ;

206. Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 70. Ὁ δεύτερος διαιρούμενος διὰ τοῦ πρώτου δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1. Ὁ τρίτος διαιρούμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

207. 16 ἐργάται ἐκτελοῦν τὰ δύο πέμπτα ἑνὸς ἔργου ἐργαζόμενοι 9 ἡμέρας ἐπὶ 4 ὥρας καθ' ἑκάστην. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται 15 ἐργάται καθ' ἡμέραν, διὰ νὰ τελειώσουν τὸ ἔργον εἰς τρεῖς ἡμέρας ;

208. Πατήρ τις εἶναι 58 ἐτῶν καὶ ἔχει υἱὸν 28 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ ἡλικίαν διπλασίαν τῆς τοῦ υἱοῦ του ;

209. Διψηφίου ἀκεραίου ἀριθμοῦ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ τῶν δεκάδων. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ πρώτου κατὰ 36. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

210. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 12. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἐλαττωθῇ κατὰ 18, προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του εὑρισκόμενος ἀριθμός. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

V. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

§ 115. α') Πατὴρ εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ ἦτο τριπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ.

Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ μετὰ x ἔτη. Τότε ὁ πατὴρ θὰ εἶναι $\alpha+x$ ἐτῶν καὶ ὁ υἱὸς $\beta+x$ ἐτῶν. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\alpha+x=3(\beta+x) \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad x>0.$$

Ἂν τὸ ζητούμενον εἶχε γίνει πρὸ x ἐτῶν, ὁ πατὴρ θὰ ἦτο τότε $\alpha-x$, ὁ δὲ υἱὸς $\beta-x$ ἐτῶν. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι:

$$\alpha-x=3(\beta-x) \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad x>0.$$

Ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις (2) προκύπτει ἀπὸ τὴν (1), ἂν τὸ x ἐκείνης γίνῃ $-x$. Τοῦτο φανερώνει ὅτι αἱ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ **θετικαὶ** τῆς (2) καὶ ἐπομένως ἡ (1) εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Εἰς τὰς θετικὰς ρίζας τῆς (1) **ἀντιστοιχεῖ** λύσις τοῦ προβλήματος πραγματοποιουμένη εἰς τὸ **μέλλον**· εἰς τὰς **ἀρνητικὰς** ρίζας τῆς (1) ἀντιστοιχεῖ λύσις τοῦ προβλήματος πραγματοποιηθεῖσα εἰς τὸ παρελθόν.

Λύοντες τὴν (1) εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha-3\beta}{2}$.

Ἀντίστοιχοι ἡλικίαι εἶναι τοῦ μὲν πατρὸς $\alpha+\frac{\alpha-3\beta}{2}$ δηλ. $\frac{3(\alpha-\beta)}{2}$ τοῦ δὲ υἱοῦ $\beta+\frac{\alpha-3\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}$ ἐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι θετικαί, διότι ὑποτίθεται $\alpha>\beta$.

Ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ x γίνεται δεκτή.

Καὶ ἂν μὲν $\alpha-3\beta>0$, εἶναι $x>0$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἂν $\alpha-3\beta<0$, εἶναι $x<0$ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν. Ἂν $\alpha-3\beta=0$, εἶναι $x=0$ καὶ τὸ ζητούμενον συμβαίνει εἰς τὸ παρόν.

β΄) Ἂν ἡ ἡλικία τοῦ Πέτρου εἶναι α καὶ τοῦ Παύλου β ἐτῶν, πότε ἡ τοῦ Πέτρου θὰ εἶναι ἢ ἦτο διπλασία τῆς τοῦ Παύλου;

Ὑποτίθεται ὅτι α, β, μ εἶναι θετικοὶ καὶ $\mu\neq1$, $\alpha\neq\beta$. Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον θὰ γίνῃ μετὰ x ἔτη.

Πρέπει νὰ εἶναι $\alpha+x=\mu(\beta+x)$ (1) καὶ $x>0$.

Ἂν τὸ ζητούμενον εἶχε γίνει πρὸ x ἐτῶν, πρέπει νὰ εἶναι:

$$\alpha-x=\mu(\beta-x) \quad (2) \quad \text{καὶ } x>0.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ (2) προκύπτει ἐκ τῆς (1) ἐὰν τὸ x ἐκείνης γίνῃ $-x$, συνάγεται ὅτι αἱ ἀρνητικαὶ ρίζαι τῆς (1) εἶναι θετικαὶ τῆς (2) καὶ συνεπῶς ἡ (1) εἶναι ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος.

Ἡ (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $(\mu-1)x=\alpha-\mu\beta$, ἐκ τῆς ὁποίας, ἐπειδὴ $\mu-1\neq0$ διότι ὑποτίθεται $\mu\neq1$, εὑρίσκομεν $x=\frac{\alpha-\mu\beta}{\mu-1}$.

Ἀντίστοιχοι ἡλικίαι εἶναι, τοῦ μὲν Πέτρου $\alpha+\frac{\alpha-\mu\beta}{\mu-1}$ δηλ. $\frac{\mu(\alpha-\beta)}{\mu-1}$ τοῦ δὲ Παύλου $\beta+\frac{\alpha-\mu\beta}{\mu-1}$ δηλ. $\frac{\alpha-\beta}{\mu-1}$ ἐτῶν, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ εἶναι θετικαὶ καὶ νὰ μὴ ὑπερβαίνουν τὰ ὅρια τῆς ἀνθρωπίνης ἡλικίας.

Διερεύνησις. Ἐπειδὴ $\mu\neq1$ ἐξ ὑποθέσεως, διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις: Ἔστω $\mu>1$· τότε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha>\beta$, διὰ νὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ἡλικίαι $\frac{\mu(\alpha-\beta)}{\mu-1}$, $\frac{\alpha-\beta}{\mu-1}$. Ἄλλως, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι καὶ $\alpha>\mu\beta$ θὰ εἶναι $x>0$ καὶ τὸ ζητούμενον θὰ συμβῇ εἰς τὸ μέλλον. Ἂν $\alpha<\mu\beta$, θὰ εἶναι $x<0$ καὶ τὸ ζητούμενον συνέβη εἰς τὸ παρελθόν, ἂν δὲ $\alpha=\mu\beta$, θὰ εἶναι $x=0$ καὶ τὸ ζητούμενον συμβαίνει εἰς τὸ παρόν.

Ἔστω $\mu<1$· τότε πρέπει νὰ εἶναι $\alpha<\beta$ διὰ νὰ εἶναι θετικαὶ αἱ ἀνωτέρω ἡλικίαι, θὰ συμβαίνουν δὲ τὰ ἀντίθετα ἂν $\alpha>\mu\beta$ ἢ $\alpha<\mu\beta$.

γ΄) Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ κινητὸν κινούμενον ἐπὶ εὐθείας ΑΓ ὁμαλῶς μὲ ταχύτητα τ μέτρων κατὰ 1^{δ} πρὸς τὴν φορὰν ΑΓ. Μετὰ α^{δ} ἀναχωρεῖ ἀπὸ τόπον Β κείμενον μ μέτρα ὄπισθεν τοῦ Α, ἄλλο κινητὸν κινούμενον ὁμαλῶς πρὸς τὴν αὐτὴν φο-

ρὰν μὲ τὸ πρῶτον καὶ μὲ ταχύτητα τ′ μέτρων κατὰ 1^{δ}. Πότε θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο κινητά ;

Ὑποτίθεται ὅτι τ′ > τ, διότι ἄλλως οὐδέποτε τὸ δεύτερον θὰ φθάσῃ τὸ πρῶτον.

Ἔστω ὅτι θὰ συναντηθοῦν μετὰ x δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου. Τότε, χρόνος κινήσεως εἶναι τοῦ μὲν πρώτου x τοῦ δὲ ἄλλου x—α δευτερόλεπτα. Διανυθέντα διαστήματα κατὰ τοὺς χρόνους αὐτοὺς εἶναι τx μέτρα ὑπὸ τοῦ πρώτου καὶ τ′(x—α) ὑπὸ τοῦ ἄλλου. Πρέπει τὸ β′ διάστημα νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ πρῶτον κατὰ μ μέτρα, δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\tau'(x-\alpha)=\tau x+\mu$ (1) καὶ $x>0$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $\tau'-\tau>0$, διότι $\tau'>\tau$ ἐξ ὑποθέσεως, εὑρίσκομεν $x=\dfrac{\mu+\tau'\alpha}{\tau'-\tau}$.

Ἡ τιμὴ αὐτὴ εἶναι θετική, ἀφοῦ τ′ > τ ἐξ ὑποθέσεως καὶ μ, τ′, α ἐπίσης θετικά. Ἑπομένως γίνεται δεκτή.

Προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. (Γενικά). 211. Ἐργάτης τελειώνει ἔργον τι εἰς α ἡμέρας, δεύτερος εἰς β ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας τελειώνουν τὸ ἔργον καὶ οἱ δύο μαζὶ ἐργαζόμενοι ;

212. Οἱ μὲν ἐμπρόσθιοι τροχοὶ ἁμάξης ἔχουν περιφέρειαν μήκους α μέτρων, οἱ δὲ ὀπίσθιοι β μέτρων. Ποίαν ἀπόστασιν θὰ διανύσῃ ἡ ἅμαξα, ἂν οἱ ἐμπρόσθιοι κάμνουν ν περιστροφὰς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων ;

213. Δαπανᾷ τις τὸ νιοστὸν τοῦ εἰσοδήματός του διὰ τροφήν, τὸ $\frac{1}{\alpha}$ αὐτοῦ διὰ κατοικίαν, τὸ $\frac{1}{\beta}$ δι' ἐνοίκιον, τὸ $\frac{1}{\gamma}$ δι' ἄλλα ἔξοδα καὶ τοῦ περισσεύουν μ δραχμαί. Ποῖον εἶναι τὸ εἰσόδημά του ; (μερικὴ περίπτωσις $\nu=3$, $\alpha=4$, $\beta=6$. $\gamma=8$, $\mu=30\,000$).

214. Ταξιδιώτης θέλει νὰ διανύσῃ α χιλιόμετρα εἰς η ἡμέρας. Μετὰ ταξείδιον β ἡμερῶν λαμβάνει ἐντολὴν νὰ ἐπιστρέψῃ γ ἡμέρας ἐνωρίτερον. Πόσον διάστημα ὀφείλει νὰ διανύσῃ καθ' ἡμέραν ; (μερικὴ περίπτωσις $\alpha=300$, $\eta=18$, $\beta=7$ καὶ $\gamma=3$).

215. Ποσόν τι α διενεμήθη μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ, εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέρος τοῦ Α πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β ἔχει λόγον ἴσον μὲ μ : ν, τὸ δὲ τοῦ Β πρὸς τὸ τοῦ Γ ἴσον μὲ ρ : λ. Τίνα τὰ τρία μέρη ;

216. Δύο κεφάλαια ἐτοκίσθησαν τὸ μὲν πρὸς ε%, τὸ δὲ πρὸς ε′% καὶ δίδουν ἐτήσιον τόκον τ. Τίνα τὰ κεφάλαια ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι Κ ;

217. Ἐργάτης τελειώνει ἓν ἔργον εἰς 2 ἡμέρας, ἄλλος εἰς ν ἡμέρας καὶ τρίτος εἰς $\left(\mu + \frac{\nu}{2}\right)$ ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον ἐργαζόμενοι καὶ οἱ τρεῖς μαζί ;

218. Κεφάλαιόν τι προεξοφλούμενον διὰ ν ἡμέρας μὲ ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν πρὸς 2% ὑφίσταται ἔκπτωσιν α δραχμῶν περισσότερον ἢ ἂν προεξωφλεῖτο μὲ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν. Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον ;

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. 219. Χωρικὴ ἐπώλησε τὸ ἥμισυ τῶν αὐγῶν, τὸ ὁποῖον εἶχε καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Ἐπώλησεν πάλιν τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολοίπων καὶ ἥμισυ αὐγόν, χωρὶς νὰ θραύσῃ κανέν. Τρίτην καὶ τετάρτην φορὰν ἐπώλησεν ὁμοίως. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς, ἂν εἰς τὸ τέλος τῆς ἔμεινεν 1 αὐγόν ;

220. Χωρικὴ ἐσκόπευε νὰ πωλήσῃ ὅσα αὐγὰ εἶχε πρὸς 1,50 δρχ. ἕκαστον· Ἐπειδὴ ἔσπασαν 3, ἐπώλησε τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 1,60 δρχ. ἕκαστον καὶ δὲν ἐζημιώθη. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς ;

221. Βρύσις πληροῖ δεξαμενὴν εἰς τρεῖς ὥρας· ἄλλη τὴν πληροῖ εἰς 4 ὥρας καὶ τρίτη εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας τὴν πληροῦν, ἂν ρέουν καὶ αἱ τρεῖς συγχρόνως ;

Ὁ μ ὰ ς τ ρ ί τ η (Κινήσεως). 222. Ἐκ τινος τόπου ἀνεχώρησε πεζὸς διατρέχων 60 χλμ. καθ' ἡμέραν. Μετὰ 4 ἡμέρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς 8 ἡμέρας. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νὰ διανύσῃ αὐτὸς καθ' ἡμέραν ;

223. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων 525 χιλ. ἀναχωροῦν δύο ταχυδρόμοι διευθυνόμενοι πρὸς συνάντησίν των. Ἐὰν ὁ μὲν εἰς διανύσῃ 50 χλμ., ὁ δὲ ἄλλος 55 χιλ. καθ' ἡμέραν, πότε θὰ συναντηθοῦν ;

224. Ἀπὸ σημεῖον Α κινεῖται εὐθυγράμμως σῶμά τι διανῦον 32 μ. εἰς 4δ καὶ διευθύνεται πρὸς Β. Μετὰ 3δ ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α ἄλλο σῶμα πρὸς τὴν φορὰν ΑΒ κινούμενον καὶ διανῦον 60 μέτρα εἰς 5δ. Πότε καὶ ποῦ θὰ συναντήσῃ τὸ πρῶτον σῶμα ;

225. Ἀπὸ τόπον Α ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία καὶ διευθύνεται πρὸς τὸν Β διανύουσα 30 χιλ. καθ' ὥραν. Μίαν ὥραν βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνομένη πρὸς τὸν Β ἁμαξοστοιχία διανύουσα 50 χλμ. καθ' ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν Α θὰ φθάσῃ ἡ δευτέρα τὴν πρώτην ;

226. Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό τινος τόπου διανύων 12 χλμ. τὴν ὥραν. Τρεῖς ὥρας βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλος διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν. α') Πότε θὰ προηγῆται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου 12 χλμ ; β') Πότε θὰ προηγῆται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου 50 χιλιόμετρα ;

227. Τὴν 10ην πρωϊνὴν ὥραν ἀναχωρεῖ ποδηλάτης ἀπὸ τόπου Α διανύων 12 χλμ. καθ' ὥραν. Ποίαν ὥραν πρέπει ν' ἀναχωρήσῃ δεύτερος ἐκ τοῦ Α, ὥστε διανύων 16 χλμ. καθ' ὥραν νὰ φθάσῃ τὸν πρῶτον εἰς τρεῖς ὥρας ;

228. Ἀπὸ σημεῖον περιφερείας κύκλου ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ διανύουν ἀντιστοίχως α^{o} καὶ β^{o} $(\alpha>\beta)$ εἰς 1δ. Πότε θὰ συναντηθοῦν ἂν διευθύνωνται α') ἀντιθέτως β') πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν ;

229. Ἀπὸ σημείου περιφερείας ἀναχωροῦν δύο κινητὰ διανύοντα ταύτην εἰς

χρόνους $τ_1$ καὶ $τ_2$ $(τ_1 > τ_2)$. Πότε θὰ συναντηθοῦν διὰ 1ην, 2αν,...νην φοράν, ἂν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φοράν ;

230. Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς μεσημβρίας συμπίπτουν οἱ δεῖκται τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν ὡρολογίου ;

231. Πότε μετὰ μεσημβρίαν οἱ αὐτοὶ δεῖκται (τοῦ προηγουμένου προβλήματος) σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν διὰ 1ην, 2αν, 3ην, τελευταίαν φοράν ;

232. Πότε μετὰ τὴν μεσημβρίαν οἱ δεῖκται τοῦ προηγουμένου προβλήματος σχηματίζουν γωνίαν $α^0$ διὰ 1ην, 2αν, 3ην,... τελευταίαν φοράν ;

233. Πότε μετὰ μεσημβρίαν ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων διὰ 1ην φοράν ;

234. Κύων διώκει ἀλώπεκα, ἡ ὁποία ἀπέχει τοῦ κυνὸς 60 πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὐτὴ κάμνῃ 9 πηδήματα, ὁ κύων κάμνει 6. Ἀλλὰ τρία πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μὲ 7 ἐκείνης. Μετὰ πόσα πηδήματα αὐτοῦ θὰ τὴν φθάσῃ ὁ κύων ;

Β'. ΠΕΡΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 116. α') Ταξιδεύων τις λαμβάνει μαζί του 350000 δρχ. καὶ ἐξοδεύει καθ' ἡμέραν 8000 δρχ.

Ἐὰν ταξιδεύσῃ ἐπὶ δύο ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8.000 \cdot 2$ δρχ., ἐὰν ἐπὶ τρεῖς, τέσσαρας ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8\,000 \cdot 3$ δρχ., $8\,000 \cdot 4$ δρχ. καὶ ἐπὶ x ἡμέρας, θὰ ἐξοδεύσῃ $8\,000 \cdot x$ δρχ., θὰ τοῦ μείνουν δὲ καὶ $350\,000 - 8\,000x$ δρχ.

Καθὼς βλέπομεν, θὰ εὕρωμεν πόσαι δραχμαὶ θὰ τοῦ μείνουν, ἂν γνωρίζωμεν πόσας ἡμέρας διήρκεσε τὸ ταξείδιον. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $ψ$ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ τοῦ μείνουν μετὰ x ἡμέρας, θὰ ἔχωμεν ὅτι $ψ = 350\,000 - 8\,000x$ δρχ. καὶ ἐὰν εἶναι τὸ $x = 5$, τὸ $ψ = 350\,000 - 8\,000 \cdot 5 = 350\,000 - 40\,000 =$ $= 310\,000$ δρχ.

β') Εἷς ποδηλάτης διήνυσεν 21 χιλ. διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἕνα ὡρισμένον τόπον. Ἀπὸ τοῦτον ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του καὶ διήνυσε 17 χιλμ. καθ' ὥραν.

Μετὰ x ὥρας διήνυσε $17x$ χλμ. ἀπὸ τὸν τόπον, ἀπ' ἀρχῆς δὲ ἐν ὅλῳ $21 + 17x$ χλμ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $ψ$ τὸν διανυθέντα δρόμον, θὰ ἔχωμεν ὅτι $ψ = 21 + 17x$. (1)

Ἐὰν γνωρίζωμεν πόσας ὥρας ἐξηκολούθησε τὸν δρόμον του ἀπὸ τὸν ὡρισμένον τόπον, δηλαδή, ἂν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ ἐκ τῆς ἰσότητος (1).

Π.χ. ἂν τὸ $x = 2$, θὰ ἔχωμεν $\psi = 21+17 \cdot 2 = 21 + 34 = 55$. Ἂν εἶναι $x = 3$, τότε $\psi = 21+17 \cdot 3 = 21+51 = 72$.

Αἱ ποσότητες x καὶ ψ, αἱ ὁποῖαι λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων, λέγονται **μεταβληταί.** Ἐνῷ αἱ ποσότητες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς ἓν πρόβλημα λέγονται **σταθεραί.** Π.χ. τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ὁ ἀνωτέρω ταξειδιώτης μαζί του καὶ ἡ ἀπόστασις, τὴν ὁποίαν διήνυσεν ὁ ποδηλάτης κατ' ἀρχάς, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν ὡρισμένον τόπον, εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Εἰς καθὲν τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων ἡ μεταβλητὴ ποσότης ψ συνδέεται μὲ τὴν x οὕτως, ὥστε, ὅταν δώσωμεν εἰς τὴν x τιμήν τινα ὡρισμένην, εὑρίσκομεν καὶ τὴν τιμὴν τῆς ψ. Ἡ μεταβλητὴ x, εἰς τὴν ὁποίαν δίδομεν αὐθαιρέτως τὴν τιμήν, τὴν ὁποίαν θέλομεν, καλεῖται **ἀνεξάρτητος μεταβλητή,** ἡ δὲ ψ, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τῆς x, καλεῖται συνάρτησις τῆς x. Ἐν γένει:

Ἐὰν δύο μεταβληταὶ x καὶ ψ, συνδέωνται μεταξύ των κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς καθεμίαν δοθεῖσαν τιμὴν τῆς x νὰ εὑρίσκωμεν ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ, τότε ἡ ψ θὰ λέγεται συνάρτησις τῆς x, ἡ δὲ x ἀνεξάρητος μεταβλητή.

Κατὰ ταῦτα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Διότι ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου καὶ ψ τὸ ἐμβαδόν του, θὰ ἔχωμεν ὅτι εἶναι $\psi = \pi x^2$ καὶ τὸ μὲν π εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος (ἴσος μὲ 3,141 μὲ προσέγγισιν), τὸ δὲ ψ εὑρίσκεται, ὅταν δοθῇ εἰς τὸ x ὡρισμένη τις τιμή. Ὁμοίως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν ὡρισμένην α, εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους αὐτοῦ. Διότι ἔχομεν ὅτι $\psi = \frac{1}{2}\alpha x$, ἂν τὸ x παριστάνῃ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ψ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

235. Εὕρετε παραδείγματα ἐξαρτήσεως δύο ποσῶν, τὰ ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τὸν κοινὸν βίον, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν νὰ εἶναι συνάρτησις τοῦ ἄλλου (χρόνος ἐργασίας καὶ ἀμοιβή, ἀξία ἐμπορεύματος καὶ βάρος κ.τ.λ.).

236. Εὕρετε παραδείγματα συναρτήσεων ἐκ τῆς Φυσικῆς (τὸ διανυόμενον

διάστημα καὶ ἡ ταχύτης εἰς τὸ κενόν, τὸ διάστημα καὶ ἡ ταχύτης κ.τ.λ.). Ὁμοίως ἐκ τῆς Γεωμετρίας.

§ 117. Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως. Ἔστω μία συνάρτησις ψ, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ $13+5x$. Ἤτοι ἔστω ὅτι ἔχομεν $ψ=13+5x$. (1)

Ἐὰν εἰς τὴν ἀνεξάρτητον μεταβλητὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0,1,2,3,.... δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ, ἂν θέσωμεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμὰς του. Οὕτως ἔχομεν ὅτι:

ὅταν εἶναι $x=0$, τὸ $ψ=13+5\cdot 0=13$,
ὅταν εἶναι $x=1$, τὸ $ψ=13+5\cdot 1=18$,
ὅταν εἶναι $x=-2$, τὸ $ψ=13+5\cdot(-2)=3$.

Ὁμοίως διὰ τὴν συνάρτησιν $ψ=144-6x$ ἔχομεν ὅτι:

ὅταν εἶναι $x=0$, $ψ=144-6\cdot 0=144$,
ὅταν εἶναι $x=-1$, $ψ=144+6\cdot 1=150$.

Ἐν γένει, ἐὰν δοθῇ μία συνάρτησις π.χ. ἡ ψ μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔστω τῆς x, καὶ διὰ δοθείσας τιμὰς τοῦ x γράψωμεν, τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς ψ, καθὼς εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα, λέγομεν ὅτι σχηματίζομεν πίνακα τῶν τιμῶν τούτων τῆς συναρτήσεως αὐτῆς.

Ἀσκήσεις

237. Σχηματίσατε διὰ τὰς τιμὰς $x=1, 2, 3, 4, 5, -1, x=-2, -3, -\frac{1}{2}$ τὸν πίνακα τῶν τιμῶν τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α) $ψ=3x+5$, β) $ψ=8x-25$, γ) $ψ=x$, δ) $ψ=-x$.

238. Ὁμοίως τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α΄) $ψ=\frac{3}{4}x-62$, β΄) $ψ=\frac{x^2}{2}-3x-7$.

239. Ὁμοίως τῶν α΄) $ψ=\frac{4}{19}x^2+\frac{3}{8}x+9$, β΄) $ψ=600-35x^2+\frac{13}{15}x$.

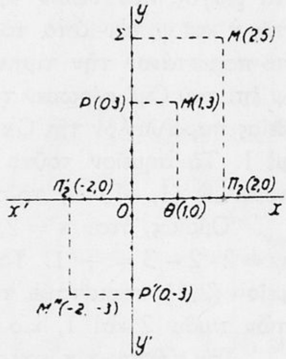
2. ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 118. Καθὼς τοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς παριστάνομεν μὲ σημεῖα τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, οὕτω δυνάμεθα νὰ παριστάνωμεν μὲ σημεῖα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως ταύτης. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $\psi = 2x+1$. (1)

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν x τὴν τιμὴν 1, ἔχομεν $\psi = 2 \cdot 1 + 1 = 3$.

Λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων $x'x$ καὶ ἐπ' αὐτοῦ εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Θ (ὅπου $O\Theta = 1$), τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν τιμὴν $x = 1$. Τὴν τιμὴν τῆς ψ θὰ παριστάνωμεν κατ' ἀνάλογον τρόπον μὲ ἓν σημεῖον μιᾶς ἄλλης εὐθείας $\psi'\psi$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν συνήθως κάθετον ἐπὶ τὴν $x'x$ εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ταύτης τὸ μὲν Οψ εἶναι τὸ τμῆμα τῶν θετικῶν τιμῶν τῆς ψ, τὸ δὲ Οψ', τὸ τῶν ἀρνητικῶν (σχ. 6).

Οὕτως ἡ τιμὴ τῆς $\psi = 3$ θὰ παριστάνηται ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ τῆς Οψ, ἐνῷ εἶναι $(OP) = 3$. Ἐὰν ἐκ τοῦ Θ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν Οψ καὶ ἐκ τοῦ Ρ πρὸς τὴν Οx, αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον, ἔστω τὸ Μ. Θὰ λέγωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ $x = 1$ καὶ $\psi = 3$ τῆς συναρτήσεως $\psi = 2x + 1$. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x = 2$ καὶ $\psi = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐκ τῆς (1), ἐὰν θέσωμεν ὅπου x τὸ 2. Τοῦτο παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Μ', τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας Π_2M', παραλλήλου πρὸς τὴν Οψ ἐκ τοῦ σημείου Π_2 τῆς $x'x$, παριστάνοντος τὸν ἀριθμὸν $x = 2$ καὶ τῆς ΣΜ', παραλλήλου πρὸς τὴν Οx ἐκ τοῦ σημείου Σ, τοῦ παριστάνοντος τὴν τιμὴν $\psi = 5$ Διὰ τὴν τιμὴν $x = -2$ ἔχομεν ἐκ τῆς (1)



Σχ. 6.

$$\psi = 2 \cdot (-2) + 1 = -4 + 1 = -3.$$

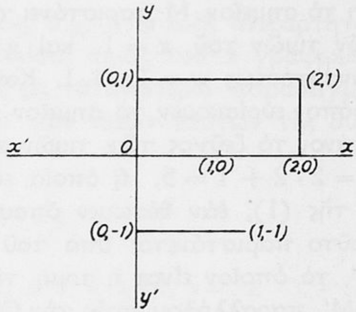
Εὑρίσκομεν δὲ τὸ σημεῖον Π'_2 ἐπὶ τῆς $x'x$, τὸ Ρ' ἐπὶ τῆς $\psi'\psi$ καὶ τὸ Μ'' τομὴν τῆς ἐκ τοῦ Π'_2, παραλλήλου πρὸς τὴν $\psi'\psi$ καὶ τῆς ἐκ τοῦ Ρ' παραλλήλου πρὸς τὴν $x'x$, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $x = -2$, $\psi = -3$ τῆς x καὶ τῆς συναρτήσεως (1).

Ἐν γένει καθὲν ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καὶ τῆς συναρτήσεως θὰ παριστάνηται μὲ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τομὴ δύο εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς τὰς εὐθείας x΄x καὶ ψ΄ψ. Ἐκ τούτων ἡ μὲν παράλληλος πρὸς τὴν ψ΄ψ ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τοῦ x ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x, ἡ δὲ πρὸς τὴν x΄x ἐκ τοῦ σημείου τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς ψ ἐπὶ τῆς εὐθείας ψ΄ψ

Δυνάμεθα ταχύτερον νὰ εὕρωμεν τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τοῦ σημείου τῆς x΄x (ἢ τῆς ψ΄ψ) τοῦ παριστῶντος τὴν τιμὴν τῆς x (ἢ τῆς ψ) φέρομεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ψ΄ψ (ἢ τὴν x΄x) καὶ ἴσον μὲ τόσας μονάδας μήκους, ὅση εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ψ (ἢ τῆς x) πρὸς τὰ ἄνω μὲν (ἢ δεξιά), ἂν ἡ τιμὴ τῆς ψ (ἢ τῆς x) εἶναι θετική, πρὸς τὰ κάτω δὲ (ἢ ἀριστερά), ἂν εἶναι ἀρνητική.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $\psi = 2x-3$, ὅταν $x = 1$, θὰ εἶναι $\psi = 2 \cdot 1 - 3 = -1$. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 1, καὶ -1 τῆς x καὶ ψ, ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν τιμὴν -1 τῆς ψ ἐπὶ τοῦ Οψ΄ φέρωμεν τμῆμα εὐθείας παράλληλον τῆς Οx καὶ ἴσον μὲ 1. Τὸ σημεῖον τοῦτο σημειώνομεν μὲ $(1, -1)$ εἰς τὸ σχῆμα 7.



Σχ. 7.

Ὁμοίως, ὅταν $x = 2$, θὰ εἶναι $\psi = 2 \cdot 2 - 3 = +1$. Τὸ δὲ σημεῖον $(2, 1)$ παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν 2 καὶ 1, κ.ο.κ.

Τὴν εὐθεῖαν x΄x καλοῦμεν συνήθως **ἄξονα τῶν x ἢ τῶν τετμημένων,** τὴν δὲ εὐθεῖαν ψ΄ψ **ἄξονα τῶν ψ ἢ τῶν τεταγμένων** τοὺς δύο δὲ ἄξονας μὲ ἓν ὄνομα **ἄξονας τῶν συντεταγμένων x καὶ ψ.** Συνήθως λαμβάνομεν τὸν ἄξονα τῶν x ὁριζόντιον, τὸν δὲ τῶν ψ κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον. Τὴν τιμὴν τῶν x καὶ ψ καλοῦμεν ἀντιστοίχως **τετμημένην** καὶ **τεταγμένην** τοῦ σημείου τοῦ παριστάνοντος τὸ ζεῦγος τῶν δύο τούτων τιμῶν καὶ τὰς δύο δὲ μὲ ἓν ὄνομα καλοῦμεν **συντεταγμένας τοῦ σημείου.**

'Ασκήσεις

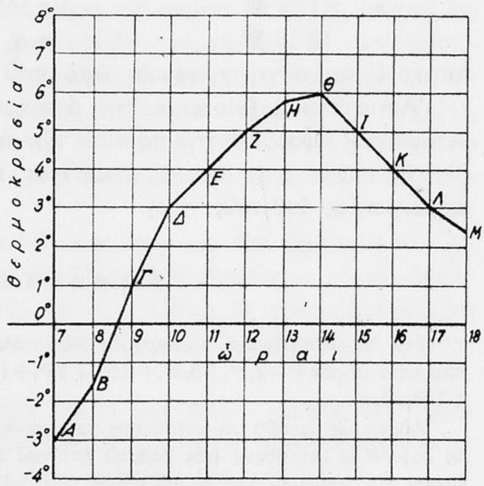
240. Παραστήσατε μὲ σημεῖα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν τῆς x καὶ ψ τῶν κάτωθι συναρτήσεων διὰ τὰς σημειουμένας τιμὰς τοῦ x :

α') $\psi=x+2$, β') $\psi=\frac{1}{2}x+1$ γ') $\psi=\frac{3}{4}x-2$, ὅταν $x=0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2$

241. $\psi=\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}x^2$, ὅταν $x=0.\ 1,\ 3,\ 4.$

242. α') $\psi=\frac{1}{2}x^2-x^3$, β') $\psi=-\frac{3}{4}x^2+5$, ὅταν $x=0,\ -1,\ -2,\ 2,\ 3.$

§ 119. *Παρατήρησις.* Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς παραστάσεως ζεύγους τιμῶν μεταχειρίζονται συχνὰ διὰ νὰ συγκρίνουν μεταξύ των πλῆθος παρατηρήσεων. Ἔστω π.χ. ὅτι γνωρίζομεν τὴν θερμοκρασίαν, τὴν ὁποίαν δεικνύει τὸ θερμότερον τὴν 8ην πρωϊνὴν ὥραν καθ' ἡμέραν ἐπὶ ἕνα μῆνα. Λαμβάνομεν ἓν ὡρισμένον τμῆμα, ὡς μονάδα μήκους, ἡ ὁποία θὰ παριστάνῃ τὴν μίαν ἡμέραν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἔστω ἴσον μὲ 0,01 μ. Ἐπίσης ἕνα ἄλλο ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ, ἔστω τὸ 0,01 μ, τὸ ὁποῖον θὰ παριστάνῃ τὸν ἕνα βαθμὸν (ἢ περισσοτέρους) τοῦ θερμομέτρου. Ἀφοῦ εὕρωμεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (τῶν



Σχ. 8

ἡμερῶν τοῦ μηνὸς καὶ τῶν ἀντιστοίχων βαθμῶν τοῦ θερμομέτρου), συνδέομεν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἑξῆς μὲ τμήματα εὐθειῶν. Ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν οὕτως εὑρίσκομεν, δίδει μίαν εἰκόνα τῶν μεταβολῶν τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὸν θεωρούμενον μῆνα. Ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται συνήθως **γραμμὴ τῆς θερμοκρασίας** τοῦ ἐν λόγῳ μηνός. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀπεικονίζομεν τὴν μεταβολὴν τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος ἑνὸς ἀσθενοῦς παρατηροῦντες αὐτὴν π.χ. δὶς τῆς ἡμέρας (τὴν πρωΐαν καὶ ἑσπέραν συνήθως) καὶ λαμβάνοντες τὸν μέσον ὅρον των, διὰ νὰ ἔχωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας. Τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν οὕτω θὰ εὕρωμεν, καλοῦμεν συνήθως **γραμμὴν τοῦ πυρετοῦ τοῦ ἀσθενοῦς.**

Ταύτας κατασκευάζομεν συνήθως ἐπὶ τετραγωνισμένου χάρτου, ἐνίοτε δὲ παραλείπονται οἱ ἄξονες, ὡς εἰς τὸ ἀνωτέρω σχῆμα. Π.χ. ἂν ἡ θερμοκρασία ἑνὸς τόπου κατά τινα ἡμέραν δίδεται ὡς ἑξῆς :

ὥρα	7	-3^0	ὥρα	13	$5,7^0$
»	8	$-1,5^0$	»	14	6^0
»	9	1^0	»	15	5^0
»	10	3^0	»	16	4^0
»	11	4^0	»	17	3^0
»	12	5^0	»	18	$2,4^0$

ἀπεικονίζεται αὕτη γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω σχήματος 8.

Ἀντιστρόφως ἐνίοτε ἐκ τῆς ἀπεικονίσεως τῆς μεταβολῆς μιᾶς μεταβλητῆς ἐννοοῦμεν τὴν πορείαν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καθὼς π.χ. ἐκ τῆς ἀνωτέρω εἰκόνος τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας ἀσθενοῦς τινος.

Ἀσκήσεις

243. Ἡ μέση μηνιαία θερμοκρασία μιᾶς πόλεως εἶναι διὰ τοὺς μῆνας ἑνὸς ἔτους κατὰ σειρὰν $4^0, -2,3^0, +3,3^0, +6,5^0, +13^0, +16,6^0, +17,8^0, +19,5^0, +13,9^0, +9^0, +3,1^0, -2,6^0$.

Λάβετε ὡς μονάδα μὲν μετρήσεως τοῦ μηνὸς ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ 0,01μ. ὡς μονάδα δὲ μετρήσεως ἑνὸς βαθμοῦ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ ἐπίσης τὸ 0,01 μ. Εὕρετε τὴν γραμμὴν τῆς θερμοκρασίας τῆς πόλεως.

244. Ἡ αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ μιᾶς πόλεως κατὰ τὸ 1890 ἦτο 54 χιλιάδες καὶ κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη κατὰ σειρὰν μέχρι τοῦ 1903 ἦτο 56, 46, 38, 32, 35, 37, 48, 52, 87, 79, 69, 90, 97 χιλιάδες. Λάβετε ὡς μονάδα μήκους πρὸς παράστασιν τοῦ ἔτους ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τῆς χιλιάδος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ ψ τὸ 0,05 μ. Ἀπεικονίσατε τὴν πορείαν τῆς αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ τῆς πόλεως.

3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $ψ = αχ + β$

§ 120. Ἡ συνάρτησις $ψ = αχ + β$, ὅπου τὸ α εἶναι σταθε-

ρά τις ποσότης $\neq 0$ καὶ $\beta = 0$, παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων Ο.

Διότι ἔστω πρῶτον τὸ $\alpha > 0$, π.χ. $\alpha = 1$, ὅτε ἡ συνάρτησις εἶναι $\psi = x$. Ἐὰν εἰς τὴν x δώσωμεν κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4,... (1), τὸ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, 4,... (2)

Ἐὰν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x (σχ. 9) τὰ σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰς τιμὰς (1) τῆς x καὶ τὰ σημεῖα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ψ τὰ παριστάνοντα τὰς τιμὰς (2) τῆς ψ, παρατηροῦμεν ὅτι, τὰ σημεῖα τὰ παριστάνοντα τὰ ζεύγη τῶν τιμῶν (0,0), (1,1), (2, 2),.... κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς, ἔστω τῆς ΟΓ.

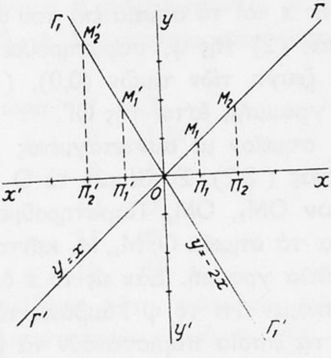
Διότι ἔστω ὅτι M_1 εἶναι τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας (1,1) καὶ M_2 τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας (2,2). Συνδέομεν τὸ Ο μὲ τὰ M_1 M_2 δι' εὐθυγράμμων τμημάτων OM_1, OM_2. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι γων $xOM_1 =$ γων xOM_2, ἄρα τὰ σημεῖα Ο, M_1, M_2 κεῖνται ἐπὶ εὐθείας, δηλαδὴ ἡ OM_1M_2 εἶναι εὐθεῖα γραμμή. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὰς τιμὰς $-1, -2, -3, ...$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ψ λαμβάνει τὰς τιμὰς -1, -2, -3..., τὰ δὲ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰ ζεύγη $(-1, -1)$,$(-2, -2)$,..., κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΓ', ἡ ὁποία εἶναι προέκτασις τῆς ΟΓ. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\psi = x$, παριστάνει τὴν εὐθεῖαν ΓΓ' (σχῆμα 9).

Ἔστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha < 0$, π.χ. $\alpha = -2$, ὅτε ἔχομεν $\psi = -2x$. Εὑρίσκομεν καθ' ὅμοιον τρόπον δύο ἢ περισσότερα σημεῖα θέτοντες π.χ. $x = 0$, ἔπειτα $x = 1$, $x = -1$,... Οὕτω δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = -2x$ παριστάνει εὐθεῖαν $\Gamma_1\Gamma'_1$ διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Ο.

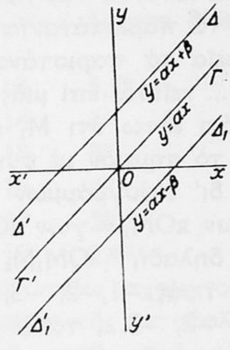
Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἐὰν τὸ α ἔχῃ ἄλλην οἱανδήποτε τιμὴν θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τοῦ Ο.

§ 121. Τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x + \beta$ (ἂν εἶναι α, $\beta \neq 0$) δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν γραφικῶς, ἐὰν εἰς τὴν τεταγμένην ἑκάστου σημείου τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ $\psi = \alpha x$, προσθέσωμεν τὴν ποσότητα β. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει νὰ μεταφέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $\psi = \alpha x$ παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν ἄνω ἢ κάτω, καθ' ὅσον τὸ β εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικός. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\psi = \alpha x + \beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν (σχ. 10).

Ἡ ἐξίσωσις $\psi=\beta$ παριστάνει τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τεταγμένην β. Προφανῶς ταῦτα κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ ἀπεχούσης ἀπόστασιν β ἀπ' αὐτοῦ. Ἄρα, ἡ ἐξίσωσις $\psi=\beta$ παριστάνει εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.



Σχ. 9



Σχ. 10

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ $x=\alpha$ παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν ψ καὶ ἀπέχουσαν ἀπόστασιν α ἀπὸ αὐτόν.

Ἡ $\psi=0$ παριστάνει τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ δὲ $x=0$ τὸν ἄξονα τῶν ψ. Ἡ ἐξίσωσις $\psi=x$ παριστάνει τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γωνίαν xOψ, ἡ δὲ $\psi=-x$ τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν x'Oψ (σχ. 9).

Ἀσκήσεις

Εὕρετε τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ κάτωθι συναρτήσεις:

245. α) $\psi=3x$ β') $\psi=x+3$, γ') $\psi=0{,}5x$.

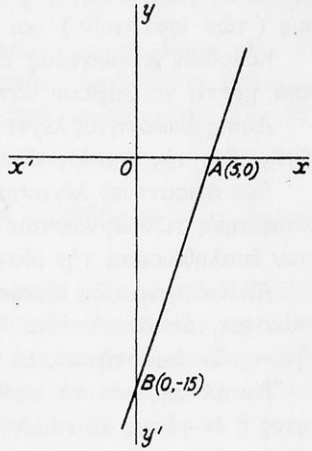
246. α') $\psi=x-\frac{2}{3}$, β') $\psi=\frac{x}{2}-x$, γ') $\psi=-\frac{5x}{6}-\frac{1}{8}$

247. α') $\psi=-\frac{3}{2}$, β') $\psi=5-2x$, γ') $\psi-3=\frac{x-1}{2}$.

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 122. Ἔστω μία ἐξίσωσις τοῦ α΄ βαθμοῦ π.χ. ἡ $3x-15=0$ (1) Ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς παραστήσωμεν μὲ ψ, ἔχομεν τὴν συνάρτησιν $\psi=3x-15$. Θέτομεν π.χ. $x=0$, ὅτε εὑρίσκομεν $\psi=-15$. Θέτομεν $x=1$, ὅτε εὑρίσκομεν $\psi=3 \cdot 1-15=-12$.

Οὕτως ἔχομεν τὰ σημεῖα (0,–15) καὶ (1,–12) τῆς εὐθείας. Ἄρα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν αὐτὴν (σχ. 11). Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ εὐθεῖα αὐτὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, ἤτοι τὴν τετμημένην τοῦ σημείου αὐτοῦ. Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον ἔχει τετμημένην 5. Αὐτὴ εἶναι ἡ ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, διότι εἰς αὐτὴν ἀντιστοιχεῖ τεταγμένη $\psi=0$. Ὥστε ρίζα εἶναι ὁ 5. Τοῦτο ἐπαληθεύομεν καὶ μὲ τὴν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι :



Σχ. 11

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὴν ρίζαν ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ $\alpha x+\beta=0$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha x+\beta$ καὶ νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν ταύτης καὶ τοῦ ἄξονος τῶν x.

Γ΄. ΠΕΡΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

§ 123. Ἔστω π.χ. ἡ ἀνισότης $3x > 15$. Προφανῶς ἀληθεύει αὕτη, μόνον, ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ 5, ἐνῷ ἡ $\alpha^2+\beta > 2\alpha\beta$ ἀληθεύει δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν α καὶ β, διαφορετικὰς μεταξύ των. Π.χ. ἂν εἶναι $\alpha=2$ καὶ $\beta=1$, ἔχομεν :

$$2^2+1 > 2 \cdot 2 \cdot 1, \text{ ἢ } 5 > 4.$$

Ὅπως τὰς ἰσότητας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν γράμματα, διακρίνομεν εἰς ταυτότητας καὶ εἰς ἐξισώσεις, οὕτω καὶ τὰς ἀνισότητας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν γράμματα, διακρίνομεν εἰς δύο εἴδη : Ἐκείνας ἐκ τούτων, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν γραμμάτων των καὶ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀληθεύουν μόνον, ὅταν ὡρισμένα γράμματά των λαμβάνουν καταλλήλους τιμάς. Τὰς πρώτας καλοῦμεν **ταυτότητας ἀνισοτήτων** ἢ λέγομεν ὅτι αὗται **ἀντιστοιχοῦν εἰς ταυτότητας** ἰσοτήτων, ἐνῷ αἱ ἄλλαι **ἀντιστοιχοῦν εἰς ἐξισώσεις** (τῶν ἰσοτήτων) καὶ ἰσχύουν ὑπὸ συνθήκας.

Καλοῦμεν **ἀγνώστους** ἀνισότητος τὰ γράμματα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ λάβουν καταλλήλους τιμὰς διὰ νὰ ἀληθεύῃ αὕτη.

Λύσις ἀνισότητος λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, διὰ τὰς ὁποίας ἀληθεύει αὕτη.

Δύο ἀνισότητες λέγονται **ἰσοδύναμοι,** ἐὰν ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, ἤτοι ἂν οἱαδήποτε τιμὴ ἀγνώστου ἐπαληθεύουσα τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν ἄλλην.

Αἱ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀνισότητας μὲ ἀγνώστους, ἀποδεικνύονται δὲ εὐκόλως μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισοτήτων, μὲ τὴν παρατήρησιν ὅτι:

Ἂν ἀλλάξωμεν τὰ πρόσημα πάντων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος ἢ ἐν γένει, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ ἀριθμὸν ἀρνητικόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος μὲν τῆς δοθείσης, ἀλλ' ὑπὸ τὸν ὅρον νὰ ἀνιστραφῇ ἡ φορὰ αὐτῆς.

Π.χ. ἡ $3x-5>6x$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $-3x+5<-6x$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν, ἂν τὰ μέλη της πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ -1. Διὰ τοῦτο ἐπιδιώκομεν κατὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἀνισότητος νὰ πολλαπλασιάζωμεν τὰ μέλη αὐτῆς ἐπὶ θετικὴν ποσότητα π.χ. ἐπὶ τὸ κατάλληλον τετράγωνον ποσότητος.

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα ἀντὶ δοθείσης ἀνισότητος μὲ ἀγνώστους νὰ θεωροῦμεν ἰσοδύναμόν της τῆς μορφῆς $A>0$, ὅπου A εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς ἀνισότητος.

Βαθμὸς ἀνισότητος, τῆς ὁποίας τὸ μὲν ἓν μέλος εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι 0, λέγεται ὁ βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους· π.χ. ἡ ἀνισότης $3x^2-5x+1<0$ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Διὰ τὴν λύσιν ἀνισότητος τοῦ α' βαθμοῦ ἐργαζόμεθα κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὴν λύσιν ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $2x+3-(x+1)>5$. Ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $2x+3-x-1>5$. Ἐκ ταύτης μετὰ την μεταφορὰν τῶν 3 καὶ -1 εἰς τὸ δεύτερον μέλος καὶ τὴν ἀναγωγήν, ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης $x > 3$. Ἄρα πάντες οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 3, ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα.

Ἔστω πρὸς λύσιν καὶ ἡ ἀνισότης $x + \frac{x}{4} > \frac{x}{5} - 4$. Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς πολλαπλασιάζοντες τὰ ἄνισα μέλη ἐπὶ $4 \cdot 5 = 20$ καὶ λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης $20x + 5x > 4x - 80$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $25x - 4x > -80$ ἢ τὴν $21x > -80$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x > -\frac{80}{21}$. Ἐκ ταύτης συνάγομεν, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ $-\frac{80}{21}$ εἶναι λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισότητος.

Ἐν γένει ἡ ἀνισότης μὲ ἕνα ἄγνωστον α' βαθμοῦ μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν ὅλων τῶν ὅρων της εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων πράξεων, ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν $\alpha x + \beta > 0$, ὅπου, α, β ὑποτίθενται γνωσταὶ ποσότητες. Αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\alpha x > -\beta$. Ἐὰν μὲν εἶναι $\alpha > 0$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $x > -\frac{\beta}{\alpha}$, ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha < 0$, ἔχομεν τὴν $x < -\frac{\beta}{\alpha}$. Ἂν εἶναι $\alpha = 0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης $\alpha x + \beta > 0$ γίνεται $\beta > 0$, ἐπαληθευομένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ἂν εἶναι τὸ $\beta > 0$, δηλαδὴ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι τότε ταυτότης ἀνισότητος. Ἂν ὅμως εἶναι $\beta < 0$, ἡ ἀνισότης εἶναι ἀδύνατος.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 284. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες

α') $-3x > \frac{5}{3}$, β') $-4x - 9 > 0$, γ') $0{,}5x + 5 > 0$,

δ') $-9x - 18 < 0$, ε) $9x + 7 > 0$, στ') $-7x - 48 > 0$,

ζ') $0{,}6x - 5 > 0{,}25(x-1)$, η') $-9x + 32 > 0$, θ') $0{,}5x - 1 > 0{,}7x - 1$,

ι') $(x+1)^2 < x^2 + 3x - 5$. ια') $\frac{x-3}{x-4} > 0$.

249. Εὕρετε τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς τοὺς ἐπαληθεύοντας τὰς ἀνισότητας $2x + 3 < 4$ καὶ $x - 5 > -8$.

250. Δύο σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχουν ἀπόστασιν $(AB) = 2\gamma$. Τρίτον σημεῖον

έχει θέσιν τοιαύτην, ὥστε νὰ εἶναι (AM) + (BM) = 2α, ὅπου α $>$ γ. Πῶς μεταβάλλονται αἱ ἀποστάσεις (AM) καὶ (BM), ἂν τὸ M κινῆται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ABM ;

251. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν σημείων A καὶ B, διευθύνονται δὲ πρὸς συνάντησίν των. Ἂν ἡ ταχύτης των μεταβάλληται μεταξὺ τῶν τ_1 καὶ τ'_1 τοῦ ἑνὸς καὶ τ_2 καὶ τ'_2 τοῦ ἄλλου, μεταξὺ τίνων χρόνων θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις καὶ εἰς τίνα ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A, ἂν εἶναι (AB) = α.

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. 252. α') Ἐὰν ἀπὸ τὰ μέλη ἰσότητος ἀφαιρέσωμεν τὰ μέλη ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης.

β') Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta > 0$ καὶ $\alpha \neq \beta$, δείξατε ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} > 2$.

253. Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος, τὰ ὁποῖα εἶναι θετικά, διαιρέσωμεν μὲ τὰ μέλη ἀνισότητος, προκύπτει ἀνισότης ἀντίστροφος τῆς δοθείσης, ἂν τὰ μέλη αὐτῆς εἶναι ὁμόσημα· ἄλλως, ἡ φορὰ τῆς ἀνισότητος δὲν μεταβάλλεται.

254. Λύσατε τὴν κάτωθι ἀνισότητα μὲ ἄγνωστον τὸν x,

$$\frac{\mu x+\nu}{\alpha+\beta}-\frac{\kappa x-\lambda}{\alpha-\beta} < \frac{\mu x-\nu}{\alpha-\beta}+\frac{\kappa x-\lambda}{\alpha+\beta},$$

ἐὰν εἶναι $(\alpha^2-\beta^2)(\beta\mu+\alpha\kappa) < 0$, ἢ > 0

255. α') Δείξατε ὅτι εἶναι $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 > \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ ἂν α, β, γ δὲν εἶναι ὅλοι ἴσοι.

β') Ἂν, α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου, θὰ εἶναι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 < 2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma).$$

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου III.

Ὁρισμὸς ἐξισώσεως, ἀγνώστων ἐξισώσεων, ριζῶν ἐξισώσεως. Ορισμὸς λύσεως μιᾶς ἐξισώσεως. Ἐπαλήθευσις ἐξισώσεως. Ἐξίσωσις ἀριθμητική, ἐγγράμματος, ρητή, ἀκεραία, κλασματικὴ (ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς).

Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις (ἂν πᾶσα ρίζα ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων εἶναι ρίζα καὶ τῶν ἄλλων). Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων :

1ον αἱ ἐξισώσεις $A = B$, $A+\lambda = B+\lambda$ εἶναι ἰσοδύναμοι,

2ον αἱ ἐξισώσεις $A = B$, $A\rho = B\rho$ ($\rho \neq 0$) εἶναι ἰσοδύναμοι,

Ὁρισμὸς ἀπαλοιφῆς παρονομαστῶν ἐξισώσεως. Ἀναγωγὴ ἐξισώσεως εἰς τὴν μορφὴν $A = 0$. Ὁρισμὸς βαθμοῦ ἐξισώσεως (ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους της). Λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ $\alpha x+\beta = 0$, $x = -\beta:\alpha$ (ἂν $\alpha \neq 0$), ἀδύνατος ἂν $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, ἀόριστος ἂν $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Ὁρισμὸς προβλήματος, ἐπιτάγματος, περιορισμοῦ. Διάκρισις γενικοῦ προβλήματος ἀπὸ ἀριθμητικοῦ. Ὁρισμὸς διερευνήσεως προβλήματος.

Ὁρισμὸς σταθερᾶς καὶ μεταβλητῆς ποσότητος. Ὁρισμὸς συναρτήσεως τοῦ x (παραδείγματα ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Γεωμετρίας, τῆς Φυσικῆς).

Πίναξ τιμῶν συναρτήσεως καὶ ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

Ἀπεικόνισις τιμῶν συναρτήσεως. Τετμημένη, τεταγμένη (συντεταγμέναι σημείου). Ἄξονες συντεταγμένων (ὀρθογώνιοι).

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha x$ (εὐθεῖα διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων).

Γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως $\psi = \alpha x + \beta$ (εὐθεῖα τέμνουσα τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0, \beta)$ καὶ τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $(-\frac{\beta}{\alpha}, 0)$.

Γραφικὴ παράστασις τῆς $x = \alpha$ (εὐθεῖα παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν ψ).

Γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = \beta$. (εὐθεῖα παράλληλος τοῦ ἄξονος τῶν x). Ἡ $x = 0$ παριστάνει τὸν ἄξονα ψ, ἡ $\psi = 0$ τὸν ἄξονα τῶν x, ἡ $\psi = x$ τὴν διχοτόμον εὐθεῖαν τῆς γωνίας xOψ τῶν ἀξόνων, ἡ $\psi = -x$ τὴν διχοτόμον τῆς ψ γωνίας x΄Oψ.

Γραφικὴ λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Ἀνισότητες πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. (Ὁρισμὸς ἀνισότητος, ταυτότητος ἀνισότητος, ἀγνώστων ἀνισότητος, λύσεως ἀνισότητος, ἰσοδυνάμων ἀνισοτήτων, βαθμοῦ ἀνισότητος) Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha x + \beta > 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Α΄. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 124. Ἔστωσαν δύο ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει δύο ἀγνώστους x καὶ ψ καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν, αἱ $x + \psi = 10, \qquad x - \psi = 2.$

Αὗται ἀληθεύουν διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν ἑκάστου τῶν ἀγνώστων $x = 6$ καὶ $\psi = 4$· λέγομεν τότε, ὅτι ἀποτελοῦν **σύστημα** δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ἐν γένει :

Καλοῦμεν σύστημα ἐξισώσεων τὸ σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αὐτῶν.

Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις συστήματος περιέχουν τοὺς ἀγνώστους εἰς πρῶτον βαθμόν, λέγεται τοῦτο σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτοῦ.

Καλοῦμεν **λύσιν** συστήματός τινος ἐξισώσεων τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Δύο ἢ περισσότερα συστήματα ἐξισώσεων λέγονται ἰσοδύναμα, ἐὰν ἐπαληθεύωνται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, ἤτοι ἂν πᾶσαι αἱ λύσεις ἑκάστου ἐκ τῶν συστημάτων αὐτῶν εἶναι λύσεις καὶ ὅλων τῶν ἄλλων.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν εἰς σύστημα ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἢ περισσοτέρας τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δι' ἰσοδυνάμων των, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον. Κατὰ ταῦτα τὸ τυχὸν σύστημα

$$A_1 = B_1, \qquad A_2 = B_2, \qquad A_3 = B_3,$$

ὅπου τὰ A_1, B_1, ..., παριστάνουν τὰ μέλη τῶν ἀντιστοίχων ἐξισωσεων, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα

$$A_1 - B_1 = 0, \qquad A_2 - B_2 = 0, \qquad A_3 - B_3 = 0.$$

Λέγομεν, ὅτι ἐξίσωσίς τις εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, π.χ. πρὸς τὸν x, ἂν εἶναι τῆς μορφῆς $x = A$, ὅπου τὸ A δὲν περιέχει τὸν ἄγνωστον x.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

§ 125. α') Θὰ ἀποδείξωμεν τὴν ἑξῆς ἰδιότητα τῶν συστημάτων

Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν δύο ἢ περισσοτέρας αὐτῶν κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν προστεθεισῶν μὲ τὴν προκύπτουσαν, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθέν.

Ἔστω π.χ. τὸ σύστημα $\begin{cases} 2x - 3\psi = 1, \\ x + \psi = 3. \end{cases}$ (1)

Ἂν προσθέσωμεν τὰς (1) κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὴν μίαν, ἔστω τὴν πρώτην, ἐκ τῶν προστεθεισῶν μὲ τὴν προκύπτουσαν $2x + x - 3\psi + \psi = 1 + 3$, εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + x - 3\psi + \psi = 1 + 3 \\ x + \psi = 3, \end{cases} \qquad (2)$$

τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x = 2$ καὶ $\psi = 1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν ἐξαγόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμούς.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1, \\ \quad 2 + \ 1 = 3. \end{cases} \qquad (1')$$

Ἂν τὰς ἰσότητας αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $2 \cdot 2 + 2 - 3 \cdot 1 + 1 = 1 + 3.$ (2')

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα καὶ εἰς τὸ σύστημα (2) τὰ x καὶ ψ μὲ τὸ 2 καὶ 1, εὑρίσκομεν δὲ ἀπὸ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ $2 \cdot 2 + 2 - 3 \cdot 1 + 1$ καὶ $2 + 1$. Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι ἀντιστοίχως μὲ $1 + 3$ καὶ 3, ὡς φαίνεται εἰς τὴν (2') καὶ τὴν δευτέραν τῶν (1'). Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ ψ, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἄρα τὸ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα.

β') Θὰ ἀποδείξωμεν καὶ τὴν ἑξῆς ἰδιότητα:

Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων μία ἐξ αὐτῶν ειναι λελυμένη ὡς πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων καὶ ἀντικαταστήσωμεν αὐτὸν μὲ

τὴν τιμήν του εἰς τὰς ἄλλας (ἢ εἴς τινας μόνον), εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἔστω π.χ. τὸ σύστημα $\begin{cases} x = 2\psi + 1 \\ x - \psi = 2, \end{cases}$ (1)

τοῦ ὁποίου ἡ πρώτη ἐξίσωσις εἶναι λελυμένη ὡς πρὸς x. Ἐὰν τὴν τιμὴν $2\psi + 1$ τοῦ x ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν,

εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $\begin{cases} x = 2\psi + 1 \\ 2\psi + 1 - \psi = 2, \end{cases}$ (2)

τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (1). Διότι παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ $x = 3$, $\psi = 1$ ἐπαληθεύουν τὸ (1) καὶ τιθέμεναι εἰς αὐτὸ δίδουν ἐξαγόμενα τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς

$$3 = 2 \cdot 1 + 1, \quad 3 - 1 = 2. \qquad (1')$$

Ἂν τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν x καὶ ψ θέσωμεν εἰς τὸ (2), εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης ἐξισώσεως τοῦ συστήματος αὐτοῦ ἴσους ἀριθμούς, διότι εἶναι αὐτὴ ἡ πρώτη τοῦ (1), ἐκ δὲ τοῦ πρώτου μέλους τῆς δευτέρας τοῦ συστήματος (2) προκύπτει ὁ ἀριθμὸς (2') $2 \cdot 1 + 1 - 1$ ἢ ὁ $3 - 1$, ἐπειδὴ τὸ $2 \cdot 1 + 1$ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν τοῦ 3 τοῦ x. Ἐπομένως τὸ ἐξαγόμενον (2') ἰσοῦται μὲ 2, ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (1'). Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ ψ, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (1), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (2). Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ (2), ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1). Ἄρα τὰ (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ πᾶν ἄλλο σύστημα.

2. ΜΕΘΟΔΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

I. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΩΝ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ

§ 126. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν π.χ. τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \qquad (1)$$

Ἐπιδιώκομεν πρῶτον νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δοθείσας ἐξισώσεις (ἢ μίαν ἐξ αὐτῶν) εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους τούτων εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων των π.χ.

τοῦ x νὰ εἶναι ἀντίθετοι. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν (ἤτοι τὰ μέλη αὐτῆς) ἐπὶ τὸν 3 (συντελεστὴν τοῦ **x** εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν) καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ τὸν –2 (ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ **x** εἰς τὴν πρώτην). Τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦτον σημειώνομεν γράφοντες παραπλεύρως ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων τὸν ἀριθμὸν ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη αὐτῆς, ὡς κατωτέρω.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right. \qquad (1)$$

καὶ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 6x + 9\psi = 24 \\ -6x - 8\psi = -22 \end{array}\right. \qquad (2)$

Προφανῶς τὰ συστήματα (1) καὶ (2) εἶναι ἰσυδύναμα. Προσθέτομεν τώρα τὰς ἐξισώσεις τοῦ (2) κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν $\psi=2$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη μὲ μίαν τῶν προστεθεισῶν τοῦ (2) ἢ μὲ μίαν τοῦ (1), ἔστω μὲ τὴν πρώτην, ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1). Δηλαδὴ τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 2x + 3\psi = 8 \\ \psi = 2 \end{array}\right.$ (3) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ λυθῇ τὸ (3) καὶ αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ, αἱ ὁποῖαι θὰ εὑρεθοῦν, θὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὸ (1).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi = 2$, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x + 3\psi=8$ τὸ ψ μὲ τὸ 2, εὑρίσκομεν $2x + 3\cdot 2=8$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = 1$. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ εἶναι αἱ $x = 1$, $\psi = 2$. Πράγματι, ἂν θέσωμεν εἰς τὸ (1) ἀντὶ τοῦ $x = 1$ καὶ $\psi = 2$, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται.

Ὁ ἀνωτέρω τρόπος τῆς λύσεως συστήματος λέγεται **μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ διὰ τῆς προσθέσεως.**

Διότι δι' αὐτῆς ἐπιτυγχάνομεν α') νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς ἐξισώσεις εἰς ἰσοδυνάμους των, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν νὰ εἶναι ἀντίθετοι καὶ β') διὰ τῆς προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη νὰ προκύπτῃ μία ἐξίσωσις μὲ ἕναν μόνον ἄγνωστον, ἤτοι **ἀπαλείφομεν** τὸν ἄλλον ἄγνωστον.

Διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις δοθέντος συστήματος εἰς τρόπον, ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἀντίθετοι, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως τὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὰ πηλίκα τοῦ ε.κ.π. τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν συντελεστῶν τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου δι' ἑκάστου ἐξ αὐτῶν λαμβανομένων καταλλήλως τῶν προσήμων αὐτῶν.

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 12x + 5\psi = 17 \\ -8x + 7\psi = -1 \end{array}\right.$ (1'')

τὸ ε.κ.π. τῶν 12 καὶ 8 εἶναι τὸ 24. Πολλαπλασιάζομεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ 24 : 12=2 καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ 24 : 8 = 3.

$$\begin{array}{ll} 2 & 12x + 5\psi = 17 \\ 3 & -8x + 7\psi = -1 \end{array}$$

καὶ λαμβάνομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (2'') ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1'') $\left\{\begin{array}{l} 24x + 10\psi = 34 \\ -24x + 21\psi = -3 \end{array}\right.$ (2'')

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τοῦ (2'') κατὰ μέλη προκύπτει ἐξίσωσις $31\psi = 31$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\psi=1$ καὶ ἀκολούθως ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν $x = 1$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 256. Νὰ λυθοῦν τὰ ἑπόμενα συστήματα καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις μετὰ τὴν εὕρεσιν τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων.

α') $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4\psi = 10 \\ 4x + \psi = 9 \end{array}\right.$ β') $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{6} + \frac{\psi}{4} = 6 \\ \frac{x}{4} + \frac{\psi}{6} = \frac{17}{3} \end{array}\right.$ γ') $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{13} - \frac{\psi}{7} = \\ = 6x - 10\psi - 8 = 0 \end{array}\right.$

257. α') $\left\{\begin{array}{l} 6\psi - 5x = 18 \\ 12x - 9\psi = 0 \end{array}\right.$ β') $\left\{\begin{array}{l} 7{,}2x + 3{,}6\psi = 54 \\ 2{,}3x - 5{,}9\psi = 22 \end{array}\right.$

258. α') $\left\{\begin{array}{l} (x+5)(\psi+7) - (x+1)(\psi-9) = 12 \\ 2x + 10 - (3\psi+1) = 0 \end{array}\right.$ β') $\left\{\begin{array}{l} 0{,}3x - 0{,}2\psi = 0{,}01 \\ 1{,}2x - 0{,}6\,\psi = 0{,}6 \end{array}\right.$

259. $\left\{\begin{array}{l} \alpha x + \beta\psi = \alpha^3 + 2\alpha^2\beta - \beta^3 \\ \beta x + \alpha\psi = \alpha^3 + \beta^3 \end{array}\right.$ 260. $\left\{ \frac{x}{3} + \frac{\psi}{4} = 3x - 7\psi - 37 = 0. \right.$

261. $\left\{ \frac{x+3}{5} = \frac{8-\psi}{4} = \frac{3(x+\psi)}{8} \right.$ 262. $\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{0{,}2} + \frac{\psi}{0{,}5} = 12{,}3 \\ \frac{x}{0{,}6} + \frac{\psi}{0{,}8} = 5{,}55 \end{array}\right.$

Ὁμὰς δευτέρα. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἑπόμενα συστήματα:

263. $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2 \\ \beta x+\alpha\psi=\alpha^2+\beta^2 \end{cases}$

264. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)\psi=\alpha^2+\beta^2 \\ (\alpha-\beta)x+(\alpha+\beta)\psi=\alpha^2-\beta^2 \end{cases}$

265. $\begin{cases} \alpha(x-\psi)+\beta(x+\psi)=4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x-\beta\psi=\alpha\psi \end{cases}$

266. $\begin{cases} \alpha(x+\beta)=2\beta\psi \\ \beta(x+\alpha)-\beta^2=\beta\psi \end{cases}$

267. $\begin{cases} (\alpha+\beta)x-\alpha\psi=\alpha^2 \\ \beta x-(\alpha-\beta)\psi=\beta^2 \end{cases}$

II. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙ' ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

§ 127. Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x+3\psi=8 \\ 3x+4\psi=11 \end{cases} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτό, δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀπομονώνομεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων π.χ. τὸν x, ἔστω εἰς τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων. Ἤτοι λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς x θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστόν. Οὕτω λαμβάνομεν $x=\frac{8-3\psi}{2}$.

Αὐτὴ μὲ τὴν ἄλλην τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἀποτελοῦν τὸ κατωτέρω σύστημα (2) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν (1)

$$\begin{cases} x=\frac{8-3\psi}{2} \\ 3x+4\psi=11. \end{cases} \qquad (2)$$

Τὴν τιμὴν τοῦ x τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (1) ἢ τοῦ (2) καὶ εὑρίσκομεν $3\cdot\frac{8-3\psi}{2}+4\psi=11$, ἡ ὁποία μετὰ τῆς προηγουμένης ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1).

Λύομεν τὴν τελευταίαν ταύτην ὡς πρὸς τὸ ψ καὶ εὑρίσκομεν $\psi=2$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν τὸ ψ μὲ τὸ 2 εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν ἢ εἰς τὴν $x=\frac{8-3\psi}{2}$, ὅτε εὑρίσκομεν $x=\frac{8-6}{2}=1$.

Τὸν ἀνωτέρω τρόπον τῆς λύσεως συστήματος καλοῦμεν συνήθως **μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως.**

Ἀσκήσεις

268. Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα καὶ ἐπαληθεύσατε αὐτά:

α') $\begin{cases} 7x = 18 + \dfrac{5\psi}{3} \\ 0{,}75x + 2\psi = 15 \end{cases}$ β') $\begin{cases} x = \alpha + \psi \\ \lambda x + \mu\psi = \nu \end{cases}$ γ') $\begin{cases} \alpha x = \alpha^2 - \beta\psi \\ \alpha x - \beta\psi = \beta^2 \end{cases}$

269. α') $\begin{cases} \psi = 3\alpha - \dfrac{x}{2} \\ \dfrac{2\psi}{5} - x = 2\beta \end{cases}$ β') $\begin{cases} x = 4\alpha - \psi \\ \dfrac{x+\psi}{3} - \dfrac{x-\psi}{2} = \alpha \end{cases}$ γ') $\begin{cases} \dfrac{x}{9} = \dfrac{\psi}{3} \\ 2x + 3\psi = 5 \end{cases}$

III. ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΔΙΑ ΤΗΣ ΣΥΓΚΡΙΣΕΩΣ

§ 128. Ἔστω ὅτι ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3\psi = 8 \\ 3x + 4\psi = 11 \end{cases} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Ἀπομονώνομεν τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων π.χ. τὸν **x** εἰς τὴν πρώτην καὶ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος. Ἤτοι λύομεν κάθε μίαν τῶν ἐξισώσεων τούτων ὡς πρὸς τὸν **x** θεωροῦντες τὸν ψ ὡς γνωστὸν καὶ εὑρίσκομεν ἐκ μὲν τῆς πρώτης $x = \dfrac{8-3\psi}{2}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x = \dfrac{11-4\psi}{3}$.

Ἐπειδὴ αἱ δύο αὐταὶ τιμαὶ τοῦ x πρέπει νὰ εἶναι ἴσαι, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\dfrac{8-3\psi}{2} = \dfrac{11-4\psi}{3}$, ἡ ὁποία μὲ μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 2$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ **x**, ἐργαζόμεθα καθὼς καὶ εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα καὶ εὑρίσκομεν $x = 1$.

Τὸν τρόπον τοῦτον τῆς λύσεως συστημάτων καλοῦμεν συνήθως **μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῆς συγκρίσεως.**

Παρατήρησις. Καθὼς διακρίνομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅταν λέγωμεν, ὅτι μεταξὺ δύο ἐξισώσεων ἑνὸς συστήματος ἀπαλείφομεν τὸν ἕνα ἄγνωστον, ἐννοοῦμεν μὲ αὐτό, ὅτι ἐκφράζομεν τὸ ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις ἀληθεύουν διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου.

'Ασκήσεις

'Ομὰς πρώτη. 270. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν :

α') $\begin{cases} 3x+5\psi=20 \\ 3x+10\psi=0 \end{cases}$ β') $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{\psi}{\beta}=1 \\ \dfrac{x}{\alpha}-\dfrac{\psi}{\beta}=1 \end{cases}$ γ') $\begin{cases} \alpha x-\beta\psi=\gamma(\alpha-\beta) \\ x+\psi=\gamma \end{cases}$

δ') $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{\psi}{\alpha-\beta}=2\alpha \\ \dfrac{x-\psi}{2\alpha\beta}=\dfrac{x+\psi}{\alpha^2+\beta^2} \end{cases}$ ε') $\begin{cases} x+\psi=\alpha+\beta \\ \beta x+\alpha\psi=2\alpha\beta \end{cases}$ στ') $\begin{cases} (x:\alpha)-(\psi:\beta)=\alpha^2\beta \\ (x:\alpha^2)+(\psi:\beta^2)=-\beta^2 \end{cases}$

'Ομὰς δευτέρα. 271. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα διὰ τῆς καταλληλοτέρας μεθόδου καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις αὐτῶν ;

α') $\begin{cases} 2(x+2\psi)=3(2x-3\psi)+10 \\ 2(2x-\psi)=8(3\psi-x)+3 \end{cases}$ β') $\begin{cases} (5x+7\psi):(3x+11)=13:7 \\ (11x+27):(7x+5\psi)=19:11 \end{cases}$

γ') $\begin{cases} (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)\psi=2\alpha\beta \\ (\alpha+\gamma)x+(\alpha-\gamma)\psi=2\alpha\gamma \end{cases}$ δ') $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\alpha^2 \\ \beta x+\alpha\psi=\beta^2 \end{cases}$

ε') $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{\psi}{\beta-\alpha}=2\alpha^2\beta \\ \dfrac{x}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{\psi}{\beta^2-\alpha^2}=2\alpha\beta \end{cases}$ στ') $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\alpha^2 \\ \alpha x-\beta\psi=\beta^2 \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \lambda x-\mu\psi=\delta \end{cases}$ η') $\begin{cases} \dfrac{13}{x+2\psi+4}+\dfrac{3}{4x-7\psi+6}=0 \\ \dfrac{3}{6x-5\psi+1}-\dfrac{15}{3x+2\psi+5}=0 \end{cases}$

'Ομὰς τρίτη. 272. Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν τὰ συστήματα :

α') $\begin{cases} 2(3x-\psi)=3(4x+\psi)+5 \\ 3(x-3\psi)=5(3\psi-x) \end{cases}$ β') $\begin{cases} \alpha x+1=\alpha\psi+\beta x \\ \beta\psi+1=\alpha\psi+\beta x \end{cases}$ γ') $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{\psi}=\dfrac{10}{x\psi} \\ \dfrac{5}{3x}+\dfrac{3}{4\psi}=\dfrac{49}{12x\psi} \end{cases}$

δ') $\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2-\beta^2)\psi=2\alpha^2\beta^2 \\ (\alpha^2+\gamma^2)x+(\alpha^2-\gamma^2)\psi=2\alpha^2\gamma^2 \end{cases}$ ε') $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{\psi}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha-\beta} \\ \dfrac{x}{\alpha-\beta}+\dfrac{\psi}{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta} \end{cases}$

στ') $\begin{cases} \dfrac{0,1}{x+7\psi+5}+\dfrac{3,5}{7x-9\psi+19}=0 \\ \dfrac{3,5}{6x-5\psi+3}-\dfrac{0,9}{0,1x-4,5\psi-1}=0 \end{cases}$ ζ') $\begin{cases} \gamma x+\alpha\psi=\alpha(\beta+1)+\gamma(\beta-1) \\ x=\dfrac{\alpha(\beta-\gamma\psi)+\gamma(2\alpha\beta-\gamma)}{\alpha\gamma} \end{cases}$

3. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

$$\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1\psi=\gamma_1 \end{cases} \qquad (1)$$

§ 129. Ὑποθέτομεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων δὲν εἶναι ὅλοι μηδενικοί. Δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha\neq 0$.

Τότε ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος λυομένη πρὸς x, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς εἶναι $\neq 0$, δίδει $x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$.

Καὶ ὅταν ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ x εἰσαχθῇ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν, ἡ ἐξίσωσις αὕτη γίνεται $\alpha_1\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}+\beta_1\gamma=\gamma_1$, ἡ ὁποία ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\psi=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (1) ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} x&=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\psi&=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma \end{aligned} \qquad (2)$$

Διακρίνομεν τώρα δύο περιπτώσεις:

1ον. $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$. Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) θὰ ἔχῃ τότε μίαν μόνην λύσιν, τὴν $\psi=\dfrac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$.

Ἡ τιμὴ αὐτὴ τοῦ ψ εἰσαγομένη εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) δίδει τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ x, τὴν $x=\dfrac{\gamma\beta_1-\beta\gamma_1}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$.

Οὕτω, τὸ σύστημα (2), καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμον πρὸς αὐτὸ (1) ἔχει μίαν λύσιν, εἰς τὴν θεωρουμένην περίπτωσιν.

Παρατηροῦμεν ὅμως, ὅτι, ὅταν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$ ἀποκλείεται νὰ εἶναι μηδενικοὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ ἑπομένως παρέλκει ἡ ὑπόθεσις τοῦ νὰ μὴ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων ὅλοι μηδενικοί.

Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ λέγεται **ὁρίζουσα** τοῦ συστήματος (1). Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λέγωμεν:

Ἂν ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν.

2ον. $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) γίνεται μὲ κάθε ψ. $0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$.

Καὶ ἂν μὲν εἶναι πράγματι ἡ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ ἴση μὲ μηδέν, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) ἀληθεύει μὲ κάθε ψ καὶ οὕτω τὸ σύστημα (2) ἀνάγεται εἰς μόνην τὴν $x=\dfrac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$.

Αὐτὴ ἔχει ἀπείρους λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τυχοῦσαν τιμὴν εἰς τὸν ψ καὶ νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως τοῦ x, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x.

Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα (2) καὶ συνεπῶς καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (1) εἶναι **ἀόριστον.**

Ἂν ὅμως ἡ παράστασις $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma$ εἶναι $\neq 0$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ (2) εἶναι ἀδύνατος, ὁπότε καὶ τὸ σύστημα (2) καθὼς καὶ τὸ (1) εἶναι **ἀδύνατον.**

Ὅταν ὅμως εἶναι $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq 0$, τότε $\alpha\gamma_1 \neq \alpha_1\gamma$. Καὶ διαιροῦντες διὰ τοῦ α, τὸ ὁποῖον εἶναι $\neq 0$, εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma_1 \neq \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha}$, ὁπότε $\beta\gamma_1 \neq \frac{\alpha_1\gamma\cdot\beta}{\alpha}$.

Ἄρα καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma \neq \frac{\alpha_1\beta\gamma}{\alpha}-\beta_1\gamma$.

$$\text{δηλ.}\quad \beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq\gamma\,\frac{(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)}{\alpha}\quad \text{ἤτοι}\quad \beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq 0$$

διότι $\frac{\gamma(\alpha_1\beta-\alpha\beta_1)}{\alpha}=0$, ἀφοῦ $\alpha_1\beta-\alpha\beta_1=0$ ἐξ ὑποθέσεως.

Ὁμοίως συλλογιζόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι ἂν $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma=0$, τότε καὶ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma=0$.

Ὥστε :

Ὅταν ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος (1) εἶναι μηδενική, χωρὶς νὰ εἶναι μηδενικοὶ ταὐτοχρόνως καὶ ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων, τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀόριστον ἢ ἀδύνατον. Καὶ ἀόριστον μὲν θὰ εἶναι ὅταν εἶναι ταὐτοχρόνως μηδενικὴ καὶ μία οἱαδήποτε ἐκ τῶν παραστάσεων $\alpha_1\gamma-\alpha_1\gamma$ ἢ $\beta\gamma_1-\beta_1\gamma$, ἀδύνατον δὲ ὅταν μία ἐκ τῶν παραστάσεων αὐτῶν εἶναι $\neq 0$.

Παρατήρησις I. Εἶναι δυνατὸν ἡ λύσις ἑνὸς γενικοῦ προβλήματος νὰ ὁδηγήσῃ εἰς σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων καὶ νὰ εἰσαχθῇ ἡ ὑπόθεσις ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι μηδενικοί. Τότε τὸ (1) γίνεται $0=\gamma$.

$$0=\gamma_1.$$

μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ.

Καὶ τότε φαίνεται ὅτι ἂν οἱ γ, γ_1 εἶναι μηδενικοὶ καὶ οἱ δύο, τὸ σύστημα ἀληθεύει μὲ κάθε x καὶ κάθε ψ.

Λέγομεν ὅτι εἶναι **ἀόριστον μὲ πλήρη ἀοριστίαν.** Ἂν ὅμως εἷς ἐκ τῶν γ ἢ γ_1 εἶναι $\neq 0$, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Παρατήρησις II. Ἡ παράστασις $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$ εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς :

Γράφονται αἱ ἐξισώσεις ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ αὐτοῦ ἀγνώστου νὰ εἶναι εἰς τὴν αὐτὴν στήλην. Τότε πολ|ζονται οἱ συντελεσταὶ αὐτοὶ τῆς πρώτης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς δευτέρας καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτον γινόμενον ἀφαιρεῖται τὸ δεύτερον.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκονται καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων τῶν ἀγνώστων x, ψ, ἀφοῦ πρῶτον μεταφερθοῦν εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ οἱ ὅροι οἱ ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων.

Διὰ τὸν καταρτισμὸν τοῦ ἀριθμητοῦ ἑκάστου ἀγνώστου θὰ παραλείπεται νοερῶς ἡ στήλη αὐτοῦ τοῦ ἀγνώστου καὶ θὰ πολ|ζωνται οἱ ὅροι τῆς ἑπομένης στήλης, ἕκαστος ἐπὶ τὸν διαγωνίως ἀπέναντι τῆς ἄλλης στήλης, παραλειπομένου τοῦ ἀγνώστου ποὺ περιέχεται εἰς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν τῶν στηλῶν, ἀπὸ τὸ πρῶτον δὲ γινόμενον θὰ ἀφαιρῆται τὸ δεύτερον. Παρονομαστὴς εἶναι ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος. Πχ. Ἔστω τὸ σύστημα

$$0{,}3x+0{,}1\psi=1{,}2$$
$$2x=5\psi-5{,}6$$

Μεταφέροντες ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος ἔχομεν

$$0{,}3x+0{,}1\psi-1{,}2=0$$
$$2x-5\psi+5{,}6=0$$

Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν $x=\dfrac{0{,}1\cdot5{,}6-(-5)\cdot(-1{,}2)}{0{,}3\cdot(-5)-2\cdot(0{,}1)}=\dfrac{-5{,}44}{-1{,}7}=3{,}2.$

$$\psi=\frac{-1{,}2\cdot2-0{,}3\cdot5{,}6}{0{,}3\cdot(-5)-2\cdot(0{,}1)}=\frac{-4{,}08}{-1{,}7}=2{,}4.$$

ΛΥΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1\psi=\gamma_1 \end{cases}$

§ 130. Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς ἐγγραμμάτου συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εὑρίσκομεν τὴν ὁρίζουσαν αὐτοῦ. Καὶ τότε, λαμβάνοντες τὴν περίπτωσιν, κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ὁρίζουσα αὐτὴ εἶναι $\neq 0$ θὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ καταρτίσωμεν κατὰ τὸν ἀνωτέρω μηχανισμόν. (Παρατ. II).

Ἔπειτα λαμβάνομεν τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν, ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι μηδενικὴ καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμάς, αἱ ὁποῖαι τὴν μηδενίζουν. Ἀντικαθιστῶντες τότε εἰς τὸ σύστημα τὰ γράμματα μὲ τὰς τιμὰς αὐτάς, ἀναγνωρίζομεν εὐκόλως ἂν αἱ δύο ἐξισώσεις ἀνάγωνται εἰς μίαν, ὁπότε ἔχομεν **ἀοριστίαν,** ἢ ἂν εἶναι **ἀσυμβίβαστοι,** ὁπότε τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐφαρμογή. Ἔστω τὸ σύστημα $\lambda x+\psi=2.$
$$x+\psi=2\lambda.$$

Μεταφέροντες ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος, ἔχομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα $\lambda x+\psi-2=0.$
$$x+\psi-2\lambda=0.$$

Ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι $\lambda-1$.

1ον. Ἐὰν $\lambda-1\neq 0$, τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν,

$$\text{τὴν } x=\frac{-2\lambda+2}{\lambda-1}=\frac{-2(\lambda-1)}{\lambda-1}=-2$$
$$\psi=\frac{-2+2\lambda^2}{\lambda-1}=\frac{2(\lambda^2-1)}{\lambda-1}=2(\lambda+1)$$

2ον. Ἐὰν $\lambda-1=0$, τότε $\lambda=1$ καὶ τὸ σύστημα γίνεται, ἂν τεθῇ ἀντὶ λ τὸ 1, $x+\psi=2 \quad x+\psi=2$

Ἤτοι τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνην ἐξίσωσιν: τὴν $x+\psi=2$ καὶ ἀληθεύει ὅταν $x=2-\psi$ ὅπου ψ αὐθαίρετος.

Εἶναι ἑπομένως ἀόριστον.

Παρατήρησις. Ποσότης τις, ὡς π.χ. ἡ λ, ἡ ὁποία δύναται νὰ λαμβάνῃ διαφόρους τιμὰς εἰς μίαν ἢ περισσοτέρας ἐξισώσεις ἀνεξαρτήτως τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, καλεῖται **παράμετρος.**

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη 273. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα καὶ νὰ διερευνηθοῦν διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ:

α') $\begin{cases}\lambda x+\psi=2\\ x+\lambda\psi=2\lambda+1\end{cases}$ β') $\begin{cases}\lambda x-2\psi=\lambda\\ (\lambda-1)x-\psi=1\end{cases}$ γ') $\begin{cases}x+(3\lambda-1)\psi=0\\ \lambda\psi-4x=\lambda-4\end{cases}$

δ') $\begin{cases}\psi=\lambda+2x\\ 3\psi-\lambda=x+3\end{cases}$ ε') $\begin{cases}x+\psi=1\\ \lambda x+\psi=1\end{cases}$ στ') $\begin{cases}(\lambda^2-1)x-\psi=\lambda\\ 2x-\psi=\lambda-1\end{cases}$

274. Τίνα τῶν κάτωθι συστημάτων ἔχουν μίαν λύσιν, εἶναι ἀόριστα ἢ ἀδύνατα;

α') $\begin{cases}3x-5\psi=2\\ -3x+5\psi=7\end{cases}$ β') $\begin{cases}2x+7\psi-4=0\\ 5x+21\psi-12=0\end{cases}$ γ') $\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{\psi}{3}=1\\ 7x+2\psi=6\end{cases}$

δ') $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{\psi}{4}=-1\\ \frac{2x}{3}+\frac{\psi}{2}=5\end{cases}$ ε') $\begin{cases}2\alpha x-\beta\psi=3\\ \frac{\alpha x}{2}-\frac{\beta\psi}{6}=2\end{cases}$ στ') $\begin{cases}\frac{x}{\alpha}+\frac{\psi}{\beta}=1\\ \beta x+\alpha\psi=\alpha\beta\end{cases}$

Ὁμὰς δευτέρα. 275. Λύσατε καὶ διερευνήσατε τὰ κατωτέρω συστήματα:

α′) $\begin{cases} 2x-3\psi=5\beta-\alpha \\ 3x-2\psi=\alpha+5\beta \end{cases}$ β′) $\begin{cases} \alpha(x-\psi)+\beta(x+\psi)=4\alpha\beta \\ (\alpha-\beta)x-\beta\psi=\alpha\psi \end{cases}$

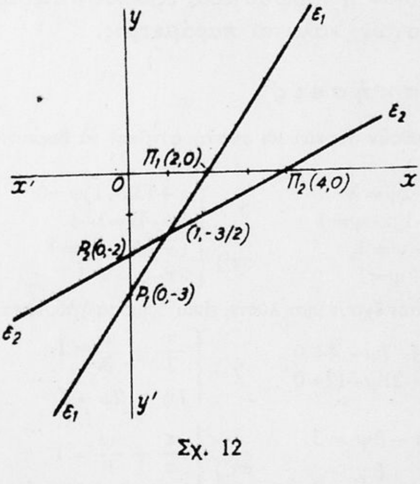
γ′) $\begin{cases} 3x-\psi=2(\alpha+\beta)^2 \\ 3\psi-x=2(\alpha-\beta)^2 \end{cases}$ δ′) $\begin{cases} \alpha(x-\psi+\beta)+\beta^2=\beta\psi \\ \alpha(\psi-\alpha-\beta)+\beta x=\beta\psi \end{cases}$

ε′) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-\alpha}+\dfrac{\psi}{\psi-\beta}=2 \\ \alpha x+\beta\psi=2\alpha\beta \end{cases}$ στ′) $\begin{cases} x+\psi=\dfrac{2\beta\gamma(\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha^2\gamma)}{\alpha\beta\gamma-2\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2} \\ \alpha(x-\alpha^2)+\beta(\psi+\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)^2 \end{cases}$

4. ΓΡΑΦΙΚΗ ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 131. Ἔστω τὸ σύστημα $\begin{cases} 3x-2\psi=6 \\ x-2\psi=4 \end{cases}$ (1)

Λύοντες αὐτὸ εὑρίσκομεν $x=1$, $\psi=-\dfrac{3}{2}\cdot$ Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸ ζεῦγος τῶν τιμῶν $(1, -\dfrac{3}{2})$, κεῖται ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος. Ἑπομένως αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ε_1 καὶ ε_2 ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (1).



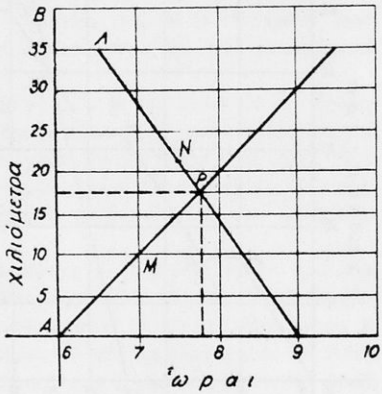
Σχ. 12

Ἄρα διὰ νὰ λύσωμεν ἓν σύστημα α′ βαθμοῦ δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων γραφικῶς, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν τῶν παριστανομένων ὑπὸ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (σχ. 12).

Ἐφαρμογαί. **1η) Ἱππεὺς ἀναχωρεῖ τὴν 6ην πρωϊνὴν ὥραν ἀπὸ τοῦ τόπου Α, διὰ νὰ μεταβῇ εἰς τὸν Β. Ἡμίσειαν ὥραν βραδύτερον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Β ποδηλάτης διευθυνόμενος πρὸς τὸν Α διὰ τοῦ αὐτοῦ δρόμου ὡς ὁ ἱππεύς. Ποίαν ὥραν καὶ εἰς**

ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α θὰ συναντηθοῦν, ἂν ὁ μὲν ἱππεὺς διανύῃ 10 χλμ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ ποδηλάτης 14 χλμ. τὴν ὥραν καὶ ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 35 χλμ.

Παριστάνομεν τὰς ὥρας μὲ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τὰς ἀποστάσεις μὲ σημεῖα τοῦ ἄξονος τῶν ψ (τῶν ἀξόνων τεμνομένων ἐνταῦθα εἰς τὸ Α). Δεχόμεθα ὅτι ἑκάστη ὑποδιαίρεσις ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x θὰ παριστάνῃ χρόνον διαφέροντα κατὰ 1 ὥραν τῆς παρακειμένης της καὶ ἑκάστη ἐπὶ τοῦ ψ κατὰ 5 χλμ. Οὕτω μετὰ 1 ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ὁ ἱππεὺς θὰ εὑρίσκηται εἰς θέσιν παριστανομένην ὑπὸ τοῦ Μ ἔχοντος τετμημένην 7 ὥρ. καὶ τεταγμένην 10 χλμ., ἐνῷ ἡ πορεία του παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΑΜ

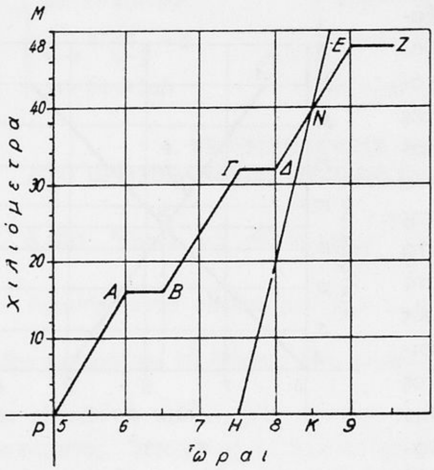


Σχ. 13

Ἡ θέσις τοῦ ποδηλάτου κατὰ τὴν ἀναχώρησίν του παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Λ (6,5, 35) καὶ εἰς τὸ τέλος 1 ὥρ. μετ' αὐτὴν ὑπὸ τοῦ Ν μὲ τεταγμένην 35–14=21 χλμ. Ἡ πορεία τούτου παριστάνεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΛΝ. Τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως τῶν δύο κινητῶν ἐπὶ τοῦ δρόμου ΑΒ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ (7, 75 ὥρ. 17,5 χλμ.). Ἄρα ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ εἰς τὰς 7 ὥρ. 45 καὶ εἰς ἀπόστασιν 17,5 χλμ. ἀπὸ τοῦ Α (σχ. 13).

2) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ τὴν 5ην πρωϊνὴν ὥραν ἐκ τόπου Ρ διευθυνόμενος πρὸς τὸν Μ διανύων 16 χλμ. τὴν ὥραν καὶ σταθμεύων πάντοτε ἐπὶ 30λ μετὰ ἀπὸ πορείαν 1 ὥρας. Ζητεῖται : α΄) ποίαν ὥραν θὰ ἔχῃ διανύσῃ 48 χλμ. ἀπὸ τοῦ Ρ, β΄) ποίαν ὥραν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Ρ θὰ συναντηθῇ μὲ αὐτοκίνητον ἀναχωρῆσαν ἐκ τοῦ Ρ τὴν 7ην ὥραν 30λ πρωϊνήν, τὸ ὁποῖον κινεῖται πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν διανῦον 40 χλμ. τὴν ὥραν.

Ἐργαζόμενοι καθὼς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ δρόμος τοῦ ποδηλάτου ἀπὸ τῆς 5ης ὥρας μέχρι τῆς 6ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΡΑ (σχ. 14), ὅπου τὸ Ρ παριστάνει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων. Ὁ δρόμος ἀπὸ τῆς 6,5ης ὥρας μέχρι τῆς 7,5ης ὥρας παριστάνεται ὑπὸ τοῦ ΒΓ καὶ ἀπὸ τῆς 8ης μέχρι τῆς 9ης ὥρας ὑπὸ τοῦ ΔΕ. Τὰ εὐθύγραμμα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ (παράλληλα τοῦ ἄξονος τῶν x) ἀντιστοιχοῦν πρὸς τοὺς χρόνους τῶν σταθμεύσεων. Οὕτως ἡ ὅλη πορεία μετὰ σταθμεύσεων τοῦ ποδηλάτου παριστάνεται ὑπὸ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΡΑΒΓΔΕΖ. Ἡ ἀπόστασις 48 χλμ. ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον Ε ἔχον τετμημένην 9 ὥρας. Ἄρα τὴν 9ην ὥραν θὰ ἀπέχῃ ὁ ποδηλάτης 48 χλμ. ἀπὸ τοῦ Ρ.



Σχ. 14

Ἡ πορεία τοῦ αὐτοκινήτου δίδεται ὑπὸ τῆς εὐθείας ΗΝ, ἐνῷ ἔχομεν Η (7,5, 0) καὶ τέμνει ἡ ΗΝ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν εἰς τὸ σημεῖον Ν ἔχον τετμημένην 8,5 ὥρας καὶ τεταγμένην 40 χλμ. Ἑπομένως ἡ συνάντησις θὰ γίνῃ τὴν 8ην ὥραν 30λ εἰς ἀπόστασιν 40 χλμ. ἀπὸ τοῦ τόπου Ρ.

Προβλήματα γραφικῶν κατασκευῶν

276. Παραστήσατε γραφικῶς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος τὰς πορείας α') ἑνὸς αὐτοκινήτου καὶ μιᾶς ἁμαξοστοιχίας, β) μιᾶς δευτέρας ἁμαξοστοιχίας καὶ μιᾶς τρίτης. Τὰ μὲν δύο πρῶτα κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου Ρ, τὰ δὲ δύο ἄλλα ἐκ τοῦ Μ. Τὸ αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ τὴν 13ην ὥραν 5λ καὶ φθάνει εἰς τὸ Μ τὴν 15ην ὥρ. 57λ μὲ σταθμεύσεις 5λ, 4λ, 2λ, 1λ εἰς ἕκαστον τῶν ἐνδιαμέσων σταθμῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε. Ἡ ἐκ τοῦ Ρ ἁμαξοστοιχία ἀναχωροῦσα τὴν 15ην ὥραν 25λ φθάνει εἰς τὸ Μ ἄνευ σταθμεύσεως τὴν 16ην ὥρ. 5λ. Ἡ ἐκ τοῦ Μ ἀναχωροῦσα τὴν 13ην ὥρ. 20λ φθάνει εἰς τὸ Ρ τὴν 16ην ὥρ. 45λ μετὰ σταθμεύσεως 2λ, 3λ, 4λ, 5λ εἰς τοὺς ἐνδιαμέσους σταθμοὺς Δ, Γ, Β, Α. Ἡ τρίτη ἁμαξοστοιχία ἀναχωροῦσα ἐκ τοῦ Μ τὴν 14ην ὥραν φθάνει εἰς τὸ Ρ τὴν 15ην ὥραν 55λ μετὰ στάθμευσιν 3λ

εἰς τὸν Α. Ἡ ἀπόστασις ΡΜ εἶναι 131 χλμ., ἡ δὲ τῶν ἐνδιαμέσων σταθμῶν ἀπὸ τοῦ Ρ εἶναι 51 χλμ., 66 χλμ., 80 χλμ., 95 χλμ., 122 χλμ., καὶ αἱ κινήσεις ὑποτίθενται ὁμαλαί. Εὕρετε γραφικῶς ποῦ συναντῶνται τὰ κινητὰ ἀνὰ δύο καὶ νὰ γίνουν αἱ πρέπουσαι ἐπαληθεύσεις.

277 Ἐκ δύο προσώπων τὸ ἓν ἔχει 63 500 δρχ. τὸ ἄλλο 125 000 δρχ. Κατ' ἔτος τοῦ μὲν α' αὐξάνεται τὸ ποσὸν κατὰ 8 000 δρχ. τοῦ δὲ β' ἐλαττοῦται κατὰ 12 500 δρχ. Μετὰ πόσα ἔτη αἱ περιουσίαι θὰ εἶναι ἴσαι ; Νὰ λυθῇ γραφικῶς καὶ καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ δι' ὑπολογισμοῦ.

278. Δύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν ὁ μὲν ἐκ τοῦ τόπου Μ τὴν 8ην ὥραν, ὁ δὲ ἐκ τοῦ Ν τὴν 9ην ὥραν 48λ καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου. Ὁ Α συναντᾷ τὸν Β τὴν 11ην ὥραν φθάνει εἰς τὸν Ν τὴν 13ην ὥραν. Ἂν ἡ ἀπόστασις ΜΝ εἶναι 60 χλμ., νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος, καθ' ὃν ὁ Β φθάνει εἰς τὸν Μ καὶ ἡ ταχύτης ἑκάστου ποδηλάτου. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ, γραφικῶς καὶ νὰ ἐπαληθευθῇ διὰ τοῦ ὑπολογισμοῦ.

279. Μία τροχιοδρομικὴ γραμμὴ ΑΒ μήκους 8 χλμ. διατρέχεται κατὰ δύο ἀντιθέτους φορὰς ὑπὸ ἁμαξῶν, αἱ ὁποῖαι ἀναχωροῦν ἀνὰ 10 λ διανύουσαι 12 χλμ. τὴν ὥραν περιλαμβανομένων καὶ τῶν σταθμεύσεων. Ἡ πρώτη ἀναχώρησις ἐκ τῶν Α καὶ Β γίνεται συγχρόνως τὴν 6ην ὥραν. Πεζοπόρος ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α τὴν 8ην ὥραν 12λ διευθυνόμενος πρὸς τὸ Β μὲ ταχύτητα 4 χλμ. τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ α') πόσας ἁμάξας θὰ συναντήσῃ ἐρχομένας ἐκ τοῦ Β, β') πόσαι ἅμαξαι ἐρχόμεναι ἐκ τοῦ Α θὰ τὸν συναντήσουν. Ἡ λύσις νὰ γίνῃ γραφικῶς καὶ ἡ ἐπαλήθευσις λογιστικῶς.

280. Εὕρετε τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν :

α') $2x+3\psi=1,$ καὶ $\psi-3x=4.$

β') $0{,}3x+0{,}1\psi=1{,}2$ » $2x-5\psi+5{,}6=0.$

γ') $0{,}4x+0{,}3\psi-0{,}45=0,$ » $1{,}6x+0{,}4\psi+1=0.$

δ') $\frac{x-1}{3}=\frac{\psi+4}{7}$ » $x-2\psi=0.$

ε') $\frac{x-\psi}{3}-\frac{\psi-x}{7}+1=10,$ » $x-7\psi=0.$

στ') $\frac{1}{x}-\frac{2}{\psi}=\frac{2}{x\psi},$ » $x+\psi=3.$

5. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΩΝ

§ 132. Ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μὲ τρεῖς ἀγνώστους π.χ. τὸ

$$\left\{\begin{aligned} x+2\psi+3\omega&=14\\ 2x+\psi+\omega&=7\\ 3x+2\psi+2\omega&=13\end{aligned}\right. \qquad (1)$$

δυνάμεθα νὰ λύσωμεν αὐτὸ μὲ μίαν ἀπὸ τὰς μεθόδους, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν. Οὕτω μὲ τὴν μέθοδον ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀπαλείφομεν π.χ. τὸν x μεταξὺ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τῶν (1) καὶ ἔχομεν :

$$\begin{array}{r|l} 2 & x+2\psi+3\omega=14 \\ -1 & 2x+\psi+\ \omega=7 \\ \hline & \quad 3\psi+5\omega=21 \end{array}$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος (1), ἔστω τὴν δευτέραν, μὲ τὴν οὕτως εὑρεθεῖσαν $3\psi+5\omega=21$, προκύπτει σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν τὸ

$$\left\{\begin{array}{r} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ 3x+2\psi+2\omega=13 \end{array}\right. \qquad (2)$$

Ἀπαλείφομεν τώρα τὸν x μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τρίτης τῶν (2) καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r|l} 3 & x+2\psi+3\omega=14 \\ -1 & 3x+2\psi+2\omega=13 \\ \hline & \quad 4\psi+7\omega=29 \end{array}$$

Δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν πρώτην ἢ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ (2) μὲ τὴν προκύψασαν $4\psi+7\omega=29$. Ἃς ἀντικαταστήσωμεν τὴν τρίτην καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (3) ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (2) καὶ τὸ (1)

$$\left\{\begin{array}{r} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ 4\psi+7\omega=29 \end{array}\right. \qquad (3)$$

Μεταξὺ τῶν τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (3) ἀπαλείφομεν τὸν ψ καὶ εὑρίσκομεν $\omega=3$. Ἀντικαθιστῶμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο τελευταίων τοῦ (3), ἔστω τὴν τρίτην, μὲ τὴν $\omega=3$ καὶ ἔχομεν τὸ κατωτέρω σύστημα (4)

$$\begin{array}{r} x+2\psi+3\omega=14 \\ 3\psi+5\omega=21 \\ \omega=3 \end{array} \qquad (4)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὰ προηγούμενα. Ἀντικαθιστῶμεν τὸ ω μὲ τὴν τιμήν του εἰς την δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (4) καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi=2$. Τέλος, ἐὰν τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ ψ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην τοῦ (1) ἢ τοῦ (4), εὑρίσκομεν εὐκόλως καὶ τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι $x=1$, $\psi=2$ καὶ $\omega=3$.

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) λύομεν καὶ δι' ἀπαλοιφῆς μὲ ἀντικατάστασιν ὡς ἑξῆς : Λύομεν τὴν μίαν τοῦ (1), ἔστω τὴν πρώτην, ως πρὸς τὸν ἕνα τῶν ἀγνώστων π.χ. ὡς πρὸς x θεωροῦντες τοὺς ἄλλους δύο ὡς γνωστούς. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$x=14-2\psi-3\omega \qquad (2')$$

Αὐτὴ μὲ τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ (1) ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό. Τὴν τιμὴν ταύτην θέτομεν εἰς τὰς ἄλλας δύο ἐξισώσεις τοῦ (1) καὶ οὕτως εὑρίσκομεν τὰς κάτωθι δύο ἐξισώσεις

μὲ δύο ἀγνώστους $\begin{cases} 2(14-2\psi-3\omega)+\ \psi+\ \omega=\ 7 \\ 3(14-2\psi-3\omega)+2\psi+2\omega=13 \end{cases}$

καὶ μετὰ τὴν κατάλληλον διάταξιν $\begin{cases} 3\psi+5\omega=21 \\ 4\psi+7\omega=29 \end{cases}$

Αὗται μὲ τὴν (2') ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρός τὸ δοθέν. Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἀνωτέρω ἐξισώσεων εὑρίσκομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω, ἤτοι $\psi=2$ καὶ $\omega=3$. Ἀκολούθως τὰς τιμὰς τούτων ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (2') καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=1$.

Τὸ δοθὲν σύστημα (1) δυνάμεθα νὰ λύσωμεν εὐκόλως καὶ δι' ἀπαλοιφῆς ἀγνώστων μεταχειριζόμενοι τὴν μέθοδον τῆς συγκρίσεως.

Ἄσκησις

281. Λύσατε τὸ ἀνωτέρω σύστημα (1) διὰ τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς διὰ συγκρίσεως.

§ 133. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} 4x-5\omega+2\varphi=\ 0 \\ 3x+2\omega+7\varphi=28 \\ x-\ \omega+2\varphi=\ 5 \end{cases}$ (1)

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα αὐτὸ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς μὲν πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ κ_1, τῆς δὲ δευτέρας ἐπὶ κ_2 καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα κατὰ μέλη, μὲ τὰ μέλη ἀντιστοίχως τῆς τρίτης ἐξισώσεως, ὅτε λαμβάνομεν τὴν

$$(4\kappa_1+3\kappa_2+1)x-(5\kappa_1-2\kappa_2+1)\omega+(2\kappa_1+7\kappa_2+2)\varphi=28\kappa_2+5. \quad (2)$$

Αὐτὴ μὲ τὰς δύο πρώτας, π.χ. τοῦ δοθέντος συστήματος, ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον αὐτοῦ. Ἂν θέσωμεν ἴσον μὲ 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τῶν ω καὶ φ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (2)

εὑρίσκομεν $\left\{\begin{array}{l} 5\kappa_1-2\kappa_2+1=0 \\ 2\kappa_1+7\kappa_2+2=0 \end{array}\right. \quad (3)$

καὶ λύοντες τὸ σύστημα αὐτὸ ὡς πρὸς κ_1 καὶ κ_2, εὑρίσκομεν

$$\kappa_1=-\frac{11}{93}, \quad \kappa_2=-\frac{8}{39}.$$

Εἰσάγομεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν (2) καὶ εὑρίσκομεν $\left(-\frac{44}{39}-\frac{24}{39}+1\right)x=-\frac{224}{39}+5$ καὶ $x=1$.

Ἂν θέσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν x καὶ φ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως (2) ἴσον μὲ 0 ἕκαστον, θὰ ἔχωμεν

$$\left\{\begin{array}{l} 4\kappa_1+3\kappa_2+1=0 \\ 2\kappa_1+7\kappa_2+2=0 \end{array}\right. \quad (4)$$

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (4) εὑρίσκομεν

$$\kappa_1=-\frac{1}{22}, \quad \kappa_2=-\frac{3}{11}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν (2), εὑρίσκομεν

$$\left(-\frac{5}{22}+\frac{6}{11}+1\right)\omega=\frac{84}{11}-5 \text{ καὶ } \omega=2.$$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ φ καὶ εὑρίσκομεν, ἂν θέσωμεν ἴσον μὲ 0 ἕκαστον τῶν συντελεστῶν τοῦ x καὶ ω

τῆς (2), τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} 4\kappa_1+3\kappa_2+1=0 \\ 5\kappa_1-2\kappa_2+1=0 \end{array}\right. \quad (5)$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ τούτου εὑρίσκομεν $\kappa_1=-\frac{5}{23}$, $\kappa_2=-\frac{1}{23}$ καὶ τέλος $\varphi=3$.

Ἡ μέθοδος αὐτή, ἡ ὁποία εἶναι γενικωτέρα τῆς μεθόδου ἀπαλοιφῆς ἀγνώστου διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν, δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ διὰ τὴν λύσιν συστήματος καὶ μὲ περισσοτέρους τῶν τριῶν ἀγνώστους, καλεῖται δὲ μέθοδος τοῦ Bézout.

§ 134. Ἐν τέλει διὰ νὰ λύσωμεν σύστημα μ ἐξισώσεων πρωτοβαθμίων μὲ μ ἀγνώστους, ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν καὶ ἑκάστης τῶν μ − 1 ἄλλων ἐξισώσεων ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον. Οὕτω προκύπτουν μ−1 νέαι ἐξισώσεις μὲ μ − 1 ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἐργαζόμεθα ὁμοίως λαμβάνοντες τὰς νέας μ − 1 ἐξισώσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς δευτέρας καὶ ἑξῆς. Οὕτω προκύπτουν μ − 2 ἐξισώσεις μὲ μ − 2 ἀγνώστους. Αὗται μὲ τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Οὕτω προχωροῦντες θὰ εὕρωμεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν μὲ μ ἐξισώσεις. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων ἡ τελευταία θὰ ἔχῃ ἕνα ἄγνωστον, ἡ προτελευταία δύο, ἡ πρὸ αὐτῆς τρεῖς καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἡ δὲ πρώτη θὰ ἔχῃ μ ἀγνώστους. Λύοντες τὴν τελευταίαν εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου. Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν τούτου εἰς τὴν προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ λύομεν αὐτὴν ὡς πρὸς τὸν ἄλλον ἄγνωστον, προχωροῦμεν ὁμοίως εἰς τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἐξίσωσιν καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τῆς πρώτης, ὅτε εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς ὅλων τῶν ἀγνώστων.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 282. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α') $\begin{cases} 2x+7\psi-11\omega=10 \\ 5x-10\psi+3\omega=-15 \\ -6x+12\psi-\omega=31 \end{cases}$ β') $\begin{cases} \dfrac{x+2\psi}{5x+6\omega}=\dfrac{1}{20} \\ \dfrac{3\psi+4\omega}{x+2\psi}=\dfrac{11}{4} \\ x+\psi+\omega=12 \end{cases}$ γ') $\begin{cases} x-2\psi+3\omega-3\varphi=2 \\ \psi-2\omega+3\varphi-4x=4 \\ \omega-2\varphi+3x-4\psi=-4 \\ \varphi-2x+3\psi-4\omega=-8 \end{cases}$

δ') $\begin{cases} x-\psi+\omega=7 \\ 2x=\omega \\ 8\psi=5\omega \end{cases}$ ε') $\begin{cases} 3x+6\psi-2\omega+9\varphi=20 \\ 4\psi-6x+5\omega-5\varphi=-5 \\ 2\omega-3x+8\psi-3\varphi=-1 \\ 9\varphi+10\psi+3\omega-6x=24 \end{cases}$ στ') $\begin{cases} 0{,}5x+0{,}3\psi=0{,}15 \\ 0{,}4x-0{,}2\omega=-0{,}22 \\ 0{,}3\psi+0{,}4\omega=0{,}95 \end{cases}$

ζ') $\left\{ x+\dfrac{\psi}{2}=\psi+\dfrac{\omega}{3}=\omega+\dfrac{x}{4}=100 \right.$

Ὁμὰς δευτέρα. 283. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α') $\begin{cases} \alpha x+\psi+\omega=\alpha^2 \\ x+\alpha\psi+\omega=3\alpha \\ x+\psi+\alpha\omega=2 \end{cases}$ β') $\begin{cases} \alpha x+\psi=(\alpha+\beta)(\alpha+1) \\ \psi-\omega=\gamma \\ x+(\alpha+\beta)\omega=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1) \end{cases}$

γ') $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi+\gamma\omega=3\alpha\beta\gamma \\ \dfrac{x}{\alpha^{-1}}=\dfrac{\psi}{\beta^{-1}}=\dfrac{\omega}{\gamma^{-1}} \end{cases}$ ς') $\begin{cases} \alpha x=\beta\psi=\gamma\omega \\ x+\psi+\omega=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} \end{cases}$

ε') $\begin{cases} x+\alpha(\psi+\omega)=\kappa \\ \psi+\beta(\omega+x)=\lambda \\ \omega+\gamma(x+\psi)=\mu \end{cases}$ στ') $\begin{cases} x+\kappa\psi+\lambda\omega=\alpha \\ \psi+\kappa\omega+\lambda x=\beta \\ \omega+\kappa x+\lambda\psi=\gamma \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} x+\psi+\omega=0 \\ (\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)\psi+(\alpha+\beta)\omega=0 \\ \beta\gamma x+\alpha\gamma\psi+\alpha\beta\omega=1 \end{cases}$ η') $\begin{cases} x+\psi+\omega=1 \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma\omega=\kappa \\ \alpha^2x+\beta^2\psi+\gamma^2\omega=\kappa^2 \end{cases}$

6. ΛΥΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΕΧΝΑΣΜΑΤΩΝ

§ 135. Ἐνίοτε πρὸς λύσιν συστήματός τινος πρὸ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν μεθόδων μεταχειριζόμεθα τεχνάσματά τινα στηριζόμενοι ἐπὶ τῶν θεμελιωδῶν νόμων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων. Τὸ εἶδος τῶν τεχνασμάτων αὐτῶν δέν εἶναι ὡρισμένον καὶ φανερὸν διὰ κάθε σύστημα, ἀλλ' ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς συνηθείας καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ περὶ τὴν λύσιν.

Οὕτω π.χ. πρὸς λύσιν τοῦ συστήματος $\begin{cases} x+6\psi+7\omega=30 \\ x:\psi:\omega=6:8:3 \end{cases}$ (1)

γράφομεν τὰς δευτέρας ἐξισώσεις ὡς ἑξῆς : $\dfrac{x}{6}=\dfrac{\psi}{8}=\dfrac{\omega}{3}$, ὅτε θὰ εἶναι $\dfrac{x}{6}=\dfrac{6\psi}{48}=\dfrac{7\omega}{21}=\dfrac{x+6\psi+7\omega}{75}=\dfrac{30}{75}=\dfrac{2}{5}$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $\dfrac{x}{6}=\dfrac{2}{5}$ καὶ $x=\dfrac{12}{5}$, $\dfrac{6\psi}{48}=\dfrac{2}{5}$, $\psi=\dfrac{2\cdot48}{5\cdot6}=\dfrac{16}{5}$, $\dfrac{7\omega}{21}=\dfrac{2}{5}$, $\omega=\dfrac{2\cdot21}{5\cdot7}=\dfrac{6}{5}$.

Τὸ αὐτὸ ἀνωτέρω σύστημα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς :

Θέτομεν $\dfrac{x}{6}=\dfrac{\psi}{8}=\dfrac{\omega}{3}=\tau$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $x=6\tau$, $\psi=8\tau$, $\omega=3\tau$. Τὰς τιμὰς τῶν x,ψ,ω θέτομεν εἰς τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν $6\tau+6\cdot8\tau+7\cdot3\tau=30$ ἢ

$75\tau=30$, $\tau=\dfrac{30}{75}=\dfrac{2}{5}$. Οὕτως ἔχομεν $x=6\tau=\dfrac{6\cdot2}{5}=\dfrac{12}{5}$,

$\psi=8\tau=8\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{16}{5}$, $\omega=3\tau=3\cdot\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{5}$.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} x+\psi = 5 \\ \psi+\omega = 8 \\ \omega+\varphi = 9 \\ \varphi+\tau = 11 \\ \tau+x = 9 \end{cases}$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν
$2x+2\psi+2\omega+2\varphi+2\tau=42$, ἄρα $x+\psi+\omega+\varphi+\tau=21$.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην καὶ τρίτην τῶν ἐξισώσεων τῶν (2) καὶ εὑρίσκομεν $x+\psi+\omega+\varphi=14$. Τὰ μέλη ταύτης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ τῆς προηγουμένης καὶ εὑρίσκομεν $\tau = 21-14$ ἢ $\tau = 7$. Θέτομεν εἰς τὴν τετάρτην $\tau = 7$ καὶ εὑρίσκομεν $\varphi+7=11$, ἄρα $\varphi = 4$. Θέτομεν εἰς τὴν τελευταίαν $\tau = 7$ καὶ εὑρίσκομεν $7+x=9$, ἄρα $x = 2$. Θέτομεν εἰς τὴν πρώτην $x = 2$ καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 3$. Θέτομεν εἰς τὴν δευτέραν $\psi = 3$ καὶ εὑρίσκομεν $\omega = 5$

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} x+\psi+\omega = 15 \\ x+\psi+\tau = 16 \\ x+\omega+\tau = 18 \\ \psi+\omega+\tau = 30 \end{cases}$ (3)

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς ἐξισώσεις τοῦ δοθέντος συστήματος καὶ εὑρίσκομεν $3(x+\psi+\omega+\tau) = 79$, ἄρα

$$x+\psi+\omega+\tau = \frac{79}{3} \qquad (4)$$

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) καὶ εὑρίσκομεν $\tau = \frac{79}{3} - 15 = \frac{79-45}{3} = \frac{34}{3}$

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ τῆς (4) καὶ εὑρίσκομεν $\omega = \frac{79}{3} - 16 = \frac{79-48}{3} = \frac{31}{3}$.

Ἀφαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τρίτης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων ἀπὸ τὰ τῆς (4) καὶ εὑρίσκομεν $\psi = \frac{79}{3} - 18 = \frac{79-54}{3} = \frac{25}{3}$.

Τέλος ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (4) τὰ τῆς τελευταίας τῶν δοθεισῶν καὶ εὑρίσκομεν $x = \frac{79}{3} - 30 = \frac{79-90}{3} = -\frac{11}{3}$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 284. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

α') $\begin{cases} \dfrac{x}{6}=\dfrac{\psi}{3}=\dfrac{\omega}{18} \\ 3x+2\psi+\omega=34 \end{cases}$ β') $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}=5 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{\psi}{3}=2x\psi \end{cases}$ γ') $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{\psi}{\beta}=\dfrac{\omega}{\gamma}=\dfrac{\varphi}{\delta} \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma\omega+\delta\varphi=\dfrac{\alpha}{\beta} \end{cases}$

δ') $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{20} \\ \dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{15} \end{cases}$ ε') $\begin{cases} \dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{\psi}-\dfrac{\gamma}{\omega}=\lambda \\ \dfrac{\alpha}{x}-\dfrac{\beta}{\psi}+\dfrac{\gamma}{\omega}=\mu \\ -\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{\beta}{\psi}+\dfrac{\gamma}{\omega}=\nu \end{cases}$ στ') $\begin{cases} \mu x=\nu\psi=\rho\omega \\ \alpha x+\beta\psi+\gamma\omega=\delta \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} \psi\omega+x\omega+x\psi=12x\psi\omega \\ 3\psi\omega-4x\omega+5x\psi=15x\psi\omega \\ 4\psi\omega-3x\omega+12x\psi=13x\psi\omega \end{cases}$ η') $\begin{cases} \dfrac{1}{3x-2\psi+1}+\dfrac{1}{x+2\psi-3}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{x+2\psi-3}-\dfrac{1}{3x-2\psi+1}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

θ') $\begin{cases} x+\alpha\psi+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+\beta\psi+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+\gamma\psi+\gamma^2\omega+\gamma^3=0 \end{cases}$ ι') $\begin{cases} \dfrac{x\psi}{5x+4\psi}=3 \\ \dfrac{\psi\omega}{3\psi+5\omega}=7 \\ \dfrac{\omega x}{2\omega+3x}=6 \end{cases}$ ια') $\begin{cases} 3x+7\psi=23x\psi \\ 3\omega+8x=38x\omega \\ 5\psi-6\omega=2\psi\omega \end{cases}$

Ὁμὰς δευτέρα. 285. Λύσατε τὰ κάτωθι συστήματα:

α') $\begin{cases} (\rho+\mu)x-(\rho-\mu)\psi=2\nu\rho \\ (\mu+\nu)\psi-(\mu-\nu)\omega=2\mu\rho \\ (\nu+\rho)\omega-(\nu-\rho)x=2\mu\nu \end{cases}$ β') $\begin{cases} (\omega+x)\mu-(\omega-x)\nu=2\psi\omega \\ (x+\psi)\nu-(x-\psi)\rho=2x\omega \\ (\psi+\omega)\rho-(\psi-\omega)\mu=2\psi x \end{cases}$

γ') $\begin{cases} 3\psi\omega+2x\omega-x\psi=x\psi\omega \\ 30\psi\omega+12x\psi-18x\omega=13x\psi\omega \\ 18x\psi+24\psi\omega-42x\omega=5x\psi\omega \end{cases}$ δ') $\begin{cases} \dfrac{10}{2x+3\psi}-\dfrac{49}{2x-3\omega}=-4\dfrac{7}{8} \\ \dfrac{2}{2x+3\psi}-\dfrac{6}{5\psi-4\omega}=-\dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4}{2x-3\omega}\right)-\dfrac{3}{5\psi-4\omega}=0 \end{cases}$

Ὁμὰς τρίτη. 286. Ἐξηγήσατε τὴν διερεύνησιν τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1\psi=\gamma_1 \end{cases}$$

γραφικῶς, ἤτοι τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τὸ σύστημα ἐπιδέχεται μίαν λύσιν, ἄπειρον πλῆθος λύσεων ἢ ὅτι εἶναι ἀδύνατον.

287. Τί σημαίνει γεωμετρικῶς τὸ ὅτι τρεῖς ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ ψ ἐπαληθεύονται διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων αὐτῶν;

7. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 136. Λέγομεν ὅτι πρόβλημά τι εἶναι πρωτοβαθμίου συστήματος ὡς πρὸς δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, ἂν ἡ λύσις αὐτοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτου προβλήματος σχηματίζομεν τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐπιταγμάτων, λύομεν τὸ σύστημα αὐτῶν καὶ ἐξετάζομεν, ἂν ἡ λύσις πληροῖ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ἵνα αὕτη εἶναι δεκτή.

I. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

α΄) Ἂν ὁ Α δώσῃ 10000 δρχ. εἰς τὸν Β, θὰ ἔχῃ οὗτος τριπλάσια τοῦ Α. Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20000 δρχ. εἰς τὸν Α, θὰ ἔχῃ ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δρχ. ἔχει ὁ καθείς;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὰς δραχ. τοῦ Α καὶ ψ τὰς τοῦ Β, δώσῃ δὲ 10000 δρχ. ὁ Α εἰς τὸν Β, τὰ μὲν ἀπομένοντα χρήματα εἰς τὸν Α θὰ εἶναι $(x-10000)$ δραχμαί, τὰ δὲ τοῦ Β θὰ εἶναι $(\psi+10000)$ δραχμαὶ καὶ θὰ ἔχωμεν $3(x-10000)=\psi+10000$.

Ἐὰν ὁ Β δώσῃ 20 000 δρχ. εἰς τὸν Α, θὰ εἶναι $x+20000=2(\psi-20000)$.

Ὥστε ἔχομεν τὸ σύστημα $\begin{cases} 3(x-10000)=\psi+10000 \\ x+20000=2(\psi-20000), \end{cases}$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=28000$ δρχ., $\psi=44000$ δρ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

β΄) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 10, ἐὰν δὲ ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία του νὰ προκύπτῃ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ.

Περιορισμός. Ἂν μὲ ψ παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ μὲ τὸ x τὸ τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμὸς θὰ εἶναι $10\psi+x$, τὰ δὲ x καὶ ψ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι μονοψήφιοι >0.

Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x+\psi = 10 \\ 10\psi + x = 3(10x+\psi). \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\psi = 8\frac{1}{18}$, $x = 1\frac{17}{18}$. Ἑπομένως ἡ λύσις ἀπορρίπτεται, ἤτοι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

γ') **Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ θὰ ἀπέχουν τὸ ἓν τοῦ ἄλλου 12 μέτρα μὲν ἐὰν κινηθοῦν ἐπὶ 12^δ πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, 204 μέτρα δὲ ἐὰν πρὸς ἀντιθέτους φοράς. Πόση εἶναι ἡ ταχύτης καθενὸς (κινουμένων ὁμαλῶς) ;**

Ἔστω x μέτρα ἡ ταχύτης τοῦ α' καὶ ψ ἡ τοῦ β' κατὰ δευτερόλεπτον. Μετὰ 12δ τὸ α' θὰ διατρέξῃ 12x μ. καὶ τὸ β' 12ψ μ. ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν θὰ εἶναι $(12x-12\psi)$ μ. ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν καὶ $(12x+12\psi)$ μ. ἐὰν τὴν ἀντίθετον. Κατὰ τὰ ἐπιτάγματα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 12x - 12\psi = 12 \\ 12x + 12\psi = 204 \end{cases} \text{ ἢ τὸ ἰσοδύναμον } \begin{cases} x - \psi = 1 \\ x + \psi = 17 \end{cases}$$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὑρίσκομεν $x=9$ μ., $\psi=8$ μ. καὶ ἡ λύσις εἶναι δεκτή.

δ') **Ἔχει τις οἶνον δύο ποιοτήτων· τῆς μὲν α' ἡ ὀκᾶ τιμᾶται α δρχ. τῆς δὲ β', β δρχ. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστης ποιότητος, ὥστε νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα μ ὀκάδων τιμώμενον γ δρχ. κατ' ὀκᾶν (χωρὶς κέρδος ἢ ζημίαν) ;**

Ἔστω ὅτι θὰ λάβῃ x ὀκάδας ἐκ τῆς πρώτης ποιότητος καὶ ψ ἐκ τῆς δευτέρας. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς τὸ σύστημα $\begin{matrix} x+\psi=\mu \\ \alpha x+\beta\psi=\gamma\mu \end{matrix}$

Ἐκ τῆς λύσεως τούτου εὑρίσκομεν $x = \frac{(\beta-\gamma)\mu}{\beta-\alpha}$, $\psi = \frac{(\gamma-\alpha)\mu}{\beta-\alpha}$.

Διερεύνησις. Ἵνα ὑπάρχῃ μία μόνη λύσις, πρέπει $\beta-\alpha \neq 0$ ἢ $\beta \neq \alpha$. Καὶ ἂν εἶναι $\beta > \alpha$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha < \gamma < \beta$, ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ ψ νὰ εἶναι θετικαί. Ἂν εἶναι $\beta < \alpha$, πρέπει νὰ εἶναι $\beta < \gamma < \alpha$, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἂν εἶναι $\beta = \alpha$, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον· ἄλλως τε τότε δὲν δύναται νὰ γίνῃ λόγος περὶ μίγματος·

Ἐν γένει διὰ νὰ ἐπιδέχεται λύσιν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εἶναι $\beta > \gamma > \alpha$ ἢ $\beta < \gamma < \alpha$.

Προβλήματα

288. Παιδίον λέγει εἰς ἄλλο: «Ἐὰν μοῦ δώσῃς τὸ ἥμισυ τῶν μήλων σου, θὰ ἔχω 40 μῆλα». Τὸ ἄλλο ἀπαντᾷ: «Δός μου σὺ τὸ ἥμισυ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω 35». Πόσα μῆλα ἔχει καθέν;

289. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ α' εἶναι τριπλάσιος τοῦ β' καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ α' μεῖον τὸ τριπλάσιον τοῦ β' νὰ ἰσοῦται μὲ 42.

290. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μεῖον τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου νὰ ἰσοῦται μὲ 5 καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου μεῖον 25 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαπενταπλάσιον τοῦ δευτέρου.

291. Ὁ Ἱέρων τῶν Συρακουσῶν ἔδωκε νὰ τοῦ κατασκευάσουν στέφανον ἀπὸ χρυσὸν βάρους 7 465 γραμ. Ἵνα εὕρῃ ὁ Ἀρχιμήδης, ἐρωτηθεὶς μήπως ὁ χρυσοχόος ἀντικατέστησε χρυσὸν δι' ἀργύρου, ἐβύθισε τὸν στέφανον εἰς ὕδωρ καὶ ἔχασεν οὗτος 467 γραμ. τοῦ βάρους του. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,052 καὶ ὁ ἄργυρος 0,095 τοῦ βάρους του, πόσος ἦτο ὁ χρυσὸς τοῦ στεφάνου καὶ πόσος ὁ ἄργυρος;

292. Δίδει ὁ Α εἰς τὸν Β μ δραχ. καὶ ἔχει ὁ Β διπλάσια τοῦ Α. Δίδει ὁ Β εἰς τὸν Α μ δρχ. καὶ ἔχει ὁ Α διπλάσια τοῦ Β. Πόσα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς;

293. Δύο κινητὰ ἀπέχοντα α μέτρα μεταξύ των κινοῦνται ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως ἀναχωρήσαντα συγχρόνως. Ὅταν μετὰ τ δευτερόλεπτα συνηντήθησαν τὸ ἓν εἶχεν διατρέξει β μέτρα περισσότερα τοῦ ἄλλου. Ποίας ταχύτητας εἶχον;

294. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων α μέτρα ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ κινούμενα ὁμαλῶς. Ἂν μὲν κινοῦνται ἀντιθέτως, συναντῶνται μετὰ λ_1 ὥρας, ἂν δὲ πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν, συναντῶνται μετὰ λ_2 ὥρας. Ποίας ταχύτητας εἶχον;

295. α ἄνδρες καὶ γυναῖκες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ β δρχ. Ἐκ τῶν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐπλήρωσε γ δραχ. καὶ ἐκ τῶν γυναικῶν ἑκάστη δ δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες; Μερικὴ περίπτωσις $\alpha=6$, $\beta=260$, $\gamma=50$, $\delta=30$.

II. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 137. α') Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 21 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων διπλάσιον τοῦ μεσαίου· ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ ψηφία τῶν ἑκατοντάδων καὶ δεκάδων του, ὁ ἀριθμὸς ἐλαττώνεται κατὰ 90.

Ἐὰν μὲ x παραστήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, μὲ ψ τῶν δεκάδων καὶ μὲ ω τὸ τῶν μονάδων (ἐνῷ τὰ x, ψ, ω πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι θετικοὶ μονοψήφιοι), ὁ ἀριθμὸς παριστάνεται μὲ $100x+10\psi+\omega$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} x+\psi+\omega=21 \\ x+\omega=2\psi \\ 100x+10\psi+\omega-90=100\psi+10x+\omega, \end{cases}$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $x=8$, $\psi=7$, $\omega=6$. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι 876.

β΄) Ὁ Α καὶ ὁ Β μαζὶ ἐργαζόμενοι τελειώνουν ἓν ἔργον εἰς 5 ἡμέρας, ὁ Α καὶ ὁ Γ εἰς 6 ἡμέρας, ὁ δὲ Β καὶ Γ εἰς 5,5 ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας καθεὶς μόνος τῶν Α, Β, Γ δύναται νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον ;

Περιορισμός. Οἱ ζητούμενοι πρέπει νὰ εἶναι θετικοί.

Λύσις. Ἔστωσαν x, ψ, ω οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Ὁ Α εἰς μίαν ἡμέραν θὰ ἐκτελέσῃ τὸ $\frac{1}{x}$ τοῦ ἔργου, ὁ Β τὸ $\frac{1}{\psi}$ καὶ ὁ Γ τὸ $\frac{1}{\omega}$. Ἄρα οἱ Α καὶ Β εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}$ τοῦ ἔργου καὶ αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ. Διότι ἀφοῦ εἰς 5 ἡμέρας ἐκτελοῦν τὸ ἔργον, εἰς μίαν ἡμέραν ἐκτελοῦν τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου. Ὥστε ἔχομεν $\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}=\frac{1}{5}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν τὸ σύστημα :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}=\frac{1}{5} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{5,5} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Προσθέτοντες τὰς ἀνωτέρω ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ διαιροῦντες τὰ ἐξαγόμενα διὰ 2 εὑρίσκομεν $\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=\frac{181}{660}$.

Ἀφαιροῦντες ἀπ' αὐτῆς τὴν πρώτην τῶν (1) εὑρίσκομεν $\frac{1}{\omega}=\frac{49}{660}$. Ἄρα $\omega=\frac{660}{49}=13\frac{23}{49}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\psi=9\frac{21}{71}$ καὶ $x=10\frac{50}{61}$.

Προβλήματα.

Ὁμὰς πρώτη. 296. Τρεῖς ἄνθρωποι εἶχον ποσόν τι χρημάτων ἕκαστος καὶ συνεφώνησαν κατὰ σειρὰν νὰ διπλασιάσῃ καθεὶς τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη ἕκαστος μὲ 1600 δρχ. Τί ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατ' ἀρχάς ;

297. Τρεῖς ἄνθρωποι ἠγόρασαν κτῆμα ἀντὶ 64 000 δρχ. Ὁ πρωτος θὰ ἠδύνατο νὰ πληρώσῃ ὁλόκληρον τὸ ποσόν, ἂν ὁ δεύτερος τοῦ ἔδιδε τὰ $\frac{5}{8}$ τῶν ὅσων εἶχεν. Ὁ δεύτερος θὰ ἠδύνατο νὰ πληρώσῃ τὸ ποσόν, ἂν ὁ τρίτος τοῦ ἔδιδε τὰ $\frac{8}{9}$ τῶν ἰδικῶν του. Ὁ τρίτος διὰ νὰ πληρώσῃ, τοῦ ἔλλειπε τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων εἶχεν ὁ πρῶτος καὶ τὰ $\frac{3}{16}$ τῶν ὅσων εἶχεν ὁ δεύτερος. Πόσα εἶχεν ἕκαστος ;

298. Τρεῖς γυναῖκες πωλοῦν αὐγά. Ἐὰν ἡ πρώτη ἔδιδε τὸ $\frac{1}{7}$ καὶ ἡ τρίτη τὸ $\frac{1}{13}$ τῶν ἰδικῶν της εἰς τὴν δευτέραν, θὰ εἶχον καὶ αἱ τρεῖς τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν αὐγῶν. Ἐὰν καὶ αἱ τρεῖς ἐξ ἀρχῆς εἶχον 360 αὐγά, πόσα εἶχεν ἑκάστη ;

299. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 17, τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ ὁ 396 εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν τὸν προκύπτοντα δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός ;

300. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε ὁ πρῶτος καὶ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων νὰ εἶναι 120, ὁ δὲ δεύτερος καὶ τὸ δέκατον πέμπτον τῆς διαφορᾶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τοῦ πρώτου νὰ ἰσοῦται μὲ 62, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν νὰ ἰσοῦται μὲ 190.

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. (Διάφορα). 301. Ἔχει τις κεφάλαιον 54 000 δρχ. καὶ 65 000 δρχ., λαμβάνει δὲ κατ' ἔτος τόκον 3 840 δρχ. καὶ ἐκ τῶν δύο. Ἐὰν τὸ πρῶτον ἐτοκίζετο πρὸς τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως, θὰ ἐλάμβανε 55 δρχ. περισσοτέρας ὡς τόκον ἢ πρίν. Ποῖα τὰ ἐπιτόκια ;

302. Ποσὸν 8100 δρχ. νὰ μοιρασθῇ εἰς τρία πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια τῶν μὲν α' καὶ β' νὰ εἶναι 2 : 3, τῶν δὲ β' καὶ γ' 3 : 4. Ποῖα τὰ μερίδια ;

303. Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφασμάτων, ἐκ τοῦ μὲν πρώτου 5 μ. ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 6 μ. ἀντὶ 1220 δρχ. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη ὁ ἀγοραστὴς 20 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον καθενὸς εἴδους ;

304. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὁμορρόπως μὲν ἔχουν συνισταμένην 16 kg. ἀντιρρόπως δὲ 2kg. Πόση εἶναι ἡ ἔντασις καθεμιᾶς τούτων ;

305. Ὁ Α λέγει εἰς τὸν Β : δός μου 10 ἐκ τῶν μήλων σου καὶ θὰ ἔχω 1,5 τῶν ἰδικῶν σου. Ὁ Β ἀπαντᾷ : δός μου 10 ἐκ τῶν ἰδικῶν σου, διὰ νὰ ἔχω τετραπλάσια τῶν ἰδικῶν σου. Πόσα εἶχεν ὁ καθείς ;

Ὁ μ ὰ ς τ ρ ί τ η (Κινήσεως). 306. Ἐκ δύο σημείων ἀπεχόντων 1500 μ. ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητὰ ὁμαλῶς καὶ ἀντιθέτως κινούμενα. Ὅταν συνηντήθησαν τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει 300 μ. περισσότερον τοῦ ἄλλου. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων των ;

307. Ἀπὸ δύο τόπων ἀπεχόντων δ μ ἀναχωροῦν δύο κινητὰ καὶ συναντῶνται μετὰ τ_1δ. Ἐὰν μὲν ηὐξάνετο ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κατὰ λ%, ἡ δὲ τοῦ δευτέρου ἠλαττώνετο κατὰ λ_1%, θὰ συνηντῶντο μετὰ τ_2δ. Ποῖαι εἶναι αἱ ταχύτητες αὐτῶν ; Νὰ γίνῃ διερεύνησις.

308. Ἀπὸ τῶν ἄκρων τόξου κύκλου 45^0 κινοῦνται ἐπ' αὐτοῦ δύο κινητὰ ἀντιθέτως καὶ συναντῶνται μετὰ 3δ. Ἐὰν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν συναντῶνται μετὰ 5δ. Πόσων μοιρῶν τόξον διανύει κάθε κινητὸν εἰς 1δ ;

Ὁμὰς τετάρτη. 309. Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι δύο τρίτα τοῦ τῶν μονάδων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία αὐτοῦ κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 18 μεγαλύτερός του.

310. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς περιεχόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ εἶναι 9. Ἂν ἀντιστραφῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος μὲ τριάκοντα ἓξ τεσσαρακοστὰ ἕβδομα τοῦ ἀριθμοῦ.

311. Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ δὲ τῶν δεκάδων εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Ἂν γραφοῦν τὰ ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 198 μεγαλύτερος αὐτοῦ.

312. Ἐὰν παρεμβάλωμεν μεταξὺ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ δεκάδων διψηφίου ἀριθμοῦ τὸ 4, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 604. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον ἀριθμὸν διὰ τοῦ πρώτου, εὑρίσκομεν πηλίκον 9 καὶ ὑπόλοιπον 34 Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου IV.

Ὁρισμὸς συστήματος ἐξισώσεων (σύνολον δύο ἢ περισσοτέρων ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων).

Ὁρισμὸς τῆς λύσεως συστήματος ἐξισώσεων.

Ὁρισμὸς ἰσοδυνάμων συστημάτων (ἂν πᾶσαι αἱ λύσεις οἱουδήποτε ἐξ αὐτῶν εἶναι λύσεις καὶ τῶν ἄλλων συστημάτων.).

Ἰδιότητες τῶν συστημάτων.

1ον Τὰ συστήματα π.χ. $\begin{array}{lll} A = B. & A_1 = B_1 & A_2 = B_2 \\ A = B, & A_1 = B_1, & A_1 + A_2 = B_1 + B_2 \end{array}$

εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον Τὰ συστήματα. π.χ.

$$A(x,\psi,\omega) = B(x,\psi,\omega), \quad x = \varphi(\psi,\omega), \quad \Gamma(x,\psi,\omega) = \Delta(x,\psi,\omega)$$

$$A[\varphi(\psi,\omega,),\psi,\omega] = B[\varphi(\psi,\omega),\psi,\omega], \quad x = \varphi(\psi,\omega),$$

$$\Gamma[\varphi(\psi,\omega),\psi,\omega] = \Delta[\varphi(\psi,\omega),\psi,\omega]$$

εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὁρισμὸς βαθμοῦ συστήματος ἐξισώσεων (ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους του).

Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους α' βαθμοῦ (μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἀγνώστου, δι' ἀντικαταστάσεως, διὰ συγκρίσεως).

Διερεύνησις τοῦ συστήματος $\begin{cases} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1\psi=\gamma_1 \end{cases}$

Ἂν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$ μία λύσις $x=\dfrac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$, $\psi=\dfrac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}$

Ἂν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$ τὸ σύστημα εἶναι ἢ ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Τί ἐννοοῦμεν ὅταν λέγωμεν « ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον π.χ. μεταξὺ δύο ἐξισώσεων ».

Ὁρισμὸς τῆς παραμέτρου μιᾶς ἐξισώσεως, χρησιμοποίησις αὐτῆς διὰ τὴν διερεύνησιν ἐξισώσεως ἢ συστήματος ἐξισώσεων.

Γραφικὴ λύσις συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους (κατασκευὴ τῶν παριστανομένων εὐθειῶν καὶ τομὴ αὐτῶν.)

Λύσις συστήματος μὲ τὴν μέθοδον τοῦ Bézout.

Λύσις συστήματος μ ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ μ ἀγνώστους. Λύσις συστημάτων α' βαθμοῦ μὲ τεχνάσματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Α'. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 138. Καλοῦμεν **δευτέραν, τρίτην,...., νιοστὴν (ἢ νιοστῆς τάξεως)** ρίζαν δοθέντος ἀριθμοῦ, τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν, τρίτην,......, νιοστὴν δύναμιν δίδει τὸν δοθέντα.

Τὴν δευτέραν*, τρίτην,...., νιοστὴν ρίζαν ἑνὸς ἀπολύτου ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ α συμβολίζομεν μὲ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$,...., $\sqrt[\nu]{\alpha}$ καὶ εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$(\sqrt{\alpha})^2=\alpha,\ (\sqrt[3]{\alpha})^3=\alpha, \ldots\ldots\ (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha.$$

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται **ριζικόν**, ἡ ὑπ' αὐτὸ ποσότης **ὑπόρριζος ποσότης,** ὁ δὲ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δεικνύει τὴν τάξιν τῆς ρίζης τῆς ὑπορρίζου ποσότητος, λέγεται **δείκτης τῆς ρίζης.** Οὕτως εἰς τὴν παράστασιν $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι τὸ α καὶ δείκτης ὁ ν. Εἰς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἐννοεῖται δείκτης ὁ 2.

Ρίζα τις λέγεται **ἀρτίας** ἢ **περιττῆς τάξεως,** ἂν ὁ δείκτης αὐτῆς εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ περιττός. Οὕτως αἱ ρίζαι $\sqrt[5]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$ εἶναι τάξεως περιττῆς, αἱ δὲ $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[8]{\alpha}$ εἶναι τάξεως ἀρτίας.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

§ 139. Ἀποδεικνύομεν πρῶτον τὴν ἑξῆς βοηθητικὴν πρότασιν.

Ἂν αἱ μιοσταὶ δυνάμεις δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι ἴσαι, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

---

* Ὁ Rafaello Rombelli τὸ 1572 εἰς τὸ βιβλίον του « Algebra » ἔκαμε χρῆσιν τῶν $\sqrt{-\alpha}$, $-\sqrt{-\alpha}$.

Διότι, ἄν π.χ. εἶναι $\alpha^{\mu} = \beta^{\mu}$, ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ α, β ὁμόσημοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\mu} : \beta^{\mu} = 1$, ἤ
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = 1$, ἄρα $\frac{\alpha}{\beta} = 1$, ἀφοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι θετικός, καὶ συνεπῶς $\alpha = \beta$.

§ 140. α') Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ρίζας ἀρτίας τάξεως ἀντιθέτους, μίαν δὲ περιττῆς τάξεως (θετικήν).

Διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν, ἐνῷ ἀφ' ἑτέρου μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τῶν δύο ριζῶν μιᾶς ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ θετικὴ συμβολίζεται κατὰ συνθήκην μὲ τὸ οἰκεῖον ῥιζικὸν ἄνευ προσήμου, ἡ δὲ ἀρνητικὴ μὲ τὸ αὐτὸ ῥιζικὸν ἔχον ἀριστερὰ τὸ πρόσημον —. Οὕτω, ἄν α εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τὸ σύμβολον $\sqrt{\alpha}$ σημαίνει: ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α. Ἡ ἀρνητικὴ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α συμβολίζεται μὲ τὸ $-\sqrt{\alpha}$.

β') Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει μόνον μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, ἀρνητικήν, οὐδεμίαν δὲ ἀρτίας τάξεως.

Διότι μόνον ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν. ἐνῷ οὐδεὶς ἐκ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν (θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς) ὑψούμενος εἰς δύναμιν ἀρτίαν δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικὸν ἀριθμόν.

Ἔστω π.χ. ἡ $\sqrt[3]{-8}$. Αὐτὴ εἶναι -2, διότι εἶναι $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι εἶναι $\sqrt[3]{8} = 2$, διότι εἶναι $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Ἑπομένως ἔχομεν $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$.

Ἡ εὕρεσις τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ ἐδημιουργήθη κατὰ τὰ μέσα τῆς 5ης ἑκατονταετηρίδος π.Χ. κυρίως ἀπὸ τὴν ἀναζήτησιν τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τοῦ διπλασιασμοῦ τοῦ κύβου, τὸ ὁποῖον καλεῖται «Δήλιον πρόβλημα», δηλαδὴ τῆς εὑρέσεως τοῦ x, ὥστε νὰ εἶναι $x^3 = 2\alpha^3$ ἢ $x = \alpha\sqrt[3]{2}$ καὶ τοῦ προβλήματος τῆς τριχοτομήσεως μιᾶς οἱασδήποτε γωνίας. Τὰ προβλήματα αὐτὰ καθὼς καὶ τὸ τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου, ἀπησχόλησαν ὄχι μόνον τοὺς μαθηματικοὺς τῆς παλαιᾶς ἐποχῆς, ἀλλὰ καὶ τοὺς τότε μορφωμένους κύκλους, ἐπὶ πλέον δὲ καὶ διασήμους μαθηματικοὺς ὅλων τῶν προηγμένων χωρῶν. Ἀπεδείχθη ὅτι τὰ προβλήματα αὐτὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ λυθοῦν μὲ μαθηματικὴν ἀκρίβειαν καὶ μάλιστα μόνον μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῶν κυρίως γεωμετρικῶν ὀργάνων, τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

Ἐκ τούτου καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι:

Ἡ ρίζα περιττῆς τάξεως ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως ἴση μὲ τὴν ρίζαν τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ ἀντιστοίχου ἀπολύτου ἀριθμοῦ.

Ἀσκήσεις

313. Δείξατε ὅτι πᾶσα ρίζα τῆς 1 εἶναι $+1$ ἢ -1. Διατί ; Πᾶσα ρίζα τοῦ 0 εἶναι 0. Διατί ;

314. Εὕρετε τὰ ἐξαγόμενα τῶν $\sqrt{9}$, $\sqrt{36}$, $\sqrt[3]{\pm 125}$, $\sqrt{+64}$.

315. Εὕρετε τὰ $3-\sqrt{4}$, $\alpha+\sqrt{\alpha^2}$, $\alpha+\sqrt[3]{\beta^3}$.

316. Ἡ ἰσότης $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$ πότε εἶναι ἀκριβής ; Διατί ;

317. Ἡ ἰσότης $\sqrt{(\alpha^2)^6}=\alpha^2$ εἶναι ἀκριβὴς καὶ διατί ;

318. α') Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον $\sqrt{4}+\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{-27}-\sqrt[5]{-32}$.

Ὁμοίως τά : β') $\sqrt{4}+\sqrt[3]{8}-\sqrt{16}$, γ') $\sqrt[3]{27}-\sqrt[5]{-32}$, δ') $\sqrt[3]{(\alpha\beta)^3}$

ε') $\sqrt{x^4\psi^4}$, στ') $\sqrt{36}+\sqrt[3]{-8}$, ζ') $\sqrt{125}-\sqrt{64}$, η') $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})$, θ') $\sqrt[3]{\alpha^{\kappa}}$.

§ 141. Ἵνα ρίζα ἀπολύτου ἀριθμοῦ ὑψωθῇ εἰς δύναμιν, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.

Λέγομεν δηλαδὴ ὅτι εἶναι $(\sqrt[\mu]{\alpha})^\rho = \sqrt[\mu]{\alpha^\rho}$ · (1) Διότι ἂν τὰς παραστάσεις αὐτὰς ὑψώσωμεν εἰς τὴν μ δύναμιν, εὑρίσκομεν ἐξαγόμενα ἴσα, ἄρα καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ (ὡς ὁμόσημοι) εἶναι ἴσοι. Πράγματι εἶναι

$$\left[(\sqrt[\mu]{\alpha})^\rho\right]^\mu=(\sqrt[\mu]{\alpha})^{\rho\mu}=\left[(\sqrt[\mu]{\alpha})^\mu\right]^\rho=\alpha^\rho \text{ καὶ } (\sqrt[\mu]{\alpha^\rho})^\mu=\alpha^\rho.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης δὲν ἀληθεύει ἂν πρόκειται διὰ τὴν ἀρνητικὴν ρίζαν ἑκάστης ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ. Διότι τότε, ἂν ὑψωθῇ ἡ ρίζα αὐτὴ εἰς ἀρτίαν δύναμιν γίνεται θετικὸς ἀριθμός, ἐνῷ ἂν ὑψωθῇ μόνον τὸ ὑπόρριζον εἰς αὐτὴν τὴν δύναμιν, μένει ἀριστερὰ τοῦ ριζικοῦ τὸ πρόσημον — καὶ ἔχομεν ἀρνητικὸν ἀποτέλεσμα.

Κατωτέρω τὴν ὑπόρριζον ποσότητα θὰ ὑποθέτωμεν θετικήν, ἐκ τῶν δύο δὲ ριζῶν ἑκάστης ἀρτίας τάξεως θετικοῦ ἀριθμοῦ θὰ θεωροῦμεν μόνον τὴν θετικήν.

§ 142. Ἂν εἰς τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ὑπορρίζου ποσότητος (θετικῆς) ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων, δυνάμεθα νὰ τὸν παραλείψωμεν.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[3.2]{\alpha^{5\cdot 2}} = \sqrt[3]{\alpha^5}$ ἂν $\alpha > 0$. Διότι ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἰς τὴν 3·2 δύναμιν εὑρίσκομεν ἴσα ἐξαγόμενα, ἄρα καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὡς ὁμόσημοι εἶναι ἴσοι. Πράγματι ἔχομεν $(\sqrt[3\cdot 2]{\alpha^{5\cdot 2}})^{3\cdot 2}$ $=\alpha^{5\cdot 2}$ καὶ $(\sqrt[3]{\alpha^5})^{3\cdot 2}=(\alpha^5)^2=\alpha^{5\cdot 2}$ Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha^{\rho\mu}}=(\sqrt[\mu]{\alpha^\rho})^\mu=\alpha^\rho$. Καὶ ἀντιστρόφως:

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος (θετικῆς) ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος αὐτῆς γίνεται, ὅπως καὶ τῆς προηγουμένης.

§ 143. Ἂν εἰς τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπάρχῃ παράγων θετικὸς μὲ ἐκθέτην διαιρετὸν διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης, δύναται νὰ ἐξαχθῇ οὗτος ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης διαιρεθῇ διὰ τοῦ δείκτου.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt[\mu]{\beta}$ ἂν $\alpha>0$. Διότι ἔχομεν $(\sqrt[\mu]{\alpha^\mu\beta})^\mu=\alpha^\mu\cdot\beta$ καὶ $(\alpha\sqrt[\mu]{\beta})^\mu=\alpha^\mu(\sqrt[\mu]{\beta})^\mu=\alpha^\mu\cdot\beta$. Καὶ ἀντιστρόφως:

Παράγων τις θετικὸς ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς αὐτοῦ, ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

Π. χ. εἶναι $3\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$, $\alpha\cdot\sqrt[\mu]{\beta}=\sqrt[\mu]{\alpha^\mu\cdot\beta}$ καὶ ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως, ὡς ἀνωτέρω.

Ἀσκησις

319. Ἁπλοποιήσατε τὰς κάτωθι παραστάσεις:

α') $\sqrt{\alpha^6}$, $\sqrt[3]{\alpha^6}$, $\sqrt[5]{\alpha^{25}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{2\nu}}$, $\sqrt{5^4}$, $\sqrt[3]{4^6}$.

β') $\sqrt[5]{9^{10}}$, $\sqrt[11]{8^{22}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha^{4\nu}}$, $\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{4\nu+2}}$.

γ') $\sqrt[3]{64^2}$, $\sqrt[9]{125^4}$, $\sqrt[5]{\pm 32^3}$.

δ') $\sqrt{(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)^3}$, $\sqrt{(\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2)^4}$, $\sqrt{(4\alpha^2+20\alpha\beta+25\beta^2)^6}$.

ε') $\sqrt[3]{(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)^2}$, $\sqrt{(8\alpha^3+12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2+\beta^3)^3}$.

στ') $7:\sqrt{7}$, $11:\sqrt{11}$, $\alpha:\sqrt{\alpha}$, $(\alpha+\beta):\sqrt{\alpha+\beta}$, $(\alpha-1):\sqrt{\alpha-1}$.

§ 144. Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ρίζαν ἄλλης ρίζης ποσότητός τινος θετικῆς, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δείκτας τῶν ριζῶν καὶ νὰ ἀφήσωμεν ὡς ὑπόρριζον ποσότητα τὴν αὐτήν.

Π.χ. εἶναι $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}=\sqrt[4.3]{\alpha}$. Διότι ἂν αἱ δύο αὐταὶ παραστάσεις ὑψωθοῦν εἰς τὴν 4·3 δύναμιν, δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα, ἄρα καὶ αἱ παραστάσεις αὐταὶ (ὡς παριστάνουσαι ἀριθμοὺς ὁμοσήμους) εἶναι ἴσαι. Πράγματι ἔχομεν :

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha}}\right)^{4\cdot 3}=\left(\sqrt[4]{(\sqrt[3]{\alpha})^3}\right)^4=(\sqrt[3]{\alpha})^3=\alpha \text{ καὶ } (\sqrt[4\cdot 3]{\alpha})^{4\cdot 3}=\alpha.$$

§ 145. Ρίζας θετικῶν ἀριθμῶν μὲ διαφόρους δείκτας δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἴσας πρὸς αὐτὰς μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην.

Ἔστωσαν π.χ. αἱ ρίζαι $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\beta}$, $\sqrt[4]{\gamma}$ ὅπου α, β, γ, θετικοί. Ἐπειδὴ τὸ ἐ.κ.π. τῶν δεικτῶν 2, 3, 4 τῶν ριζῶν εἶναι ὁ 12, ἂν τοὺς ἐκθέτας τῶν ὑπορρίζων καὶ τοὺς δείκτας τῶν ριζῶν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ σειρὰν ἐπὶ 6, 4, 3, ἀντὶ τῶν δοθέντων λαμβάνομεν τὰ ἴσα των ἀντιστοίχως

$$\sqrt[12]{\alpha^6},\quad \sqrt[12]{\beta^4},\quad \sqrt[12]{\gamma^3}.$$

Ἐν γένει, ἡ τροπὴ ριζικῶν εἰς ἄλλα ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην γίνεται καθὼς καὶ ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Π.χ. τὰ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καὶ $\sqrt[\nu]{\beta}$ τρέπονται εἰς τὰ $\sqrt[\mu\nu]{\alpha^\nu}$ καὶ $\sqrt[\mu\nu]{\beta^\mu}$. Τὰ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\rho]{\gamma}$ τρέπονται εἰς τὰ $\sqrt[\mu\nu\rho]{\alpha^{\nu\rho}}$, $\sqrt[\mu\nu\rho]{\beta^{\mu\rho}}$ $\sqrt[\mu\nu\rho]{\gamma^{\mu\nu}}$ κ.ο.κ.

§ 146. Τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ριζῶν θετικῶν ἀριθμῶν μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην ἰσοῦται μὲ ρίζαν τοῦ γινομένου ἢ τοῦ πηλίκου τῶν ὑπορρίζων ποσοτήτων καὶ μὲ δείκτην τὸν τῶν παραγόντων.

Π.χ. $\sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}\;\sqrt[\mu]{\gamma}=\sqrt[\mu]{\alpha\beta\gamma}$. Διότι, ἂν αἱ (ὁμόσημοι) αὐταὶ παραστάσεις ὑψωθοῦν εἰς τὴν μ δύναμιν, δίδουν ἐξαγόμενα ἴσα. Πράγματι ἔχομεν $(\sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}\cdot\sqrt[\mu]{\gamma})^\mu=(\sqrt[\mu]{\alpha})^\mu\cdot(\sqrt[\mu]{\beta})^\mu\cdot(\sqrt[\mu]{\gamma})^\mu=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$. καὶ $(\sqrt[\mu]{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma})^\mu=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$. Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[\mu]{\alpha}:\sqrt[\mu]{\beta}=\dfrac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}=\sqrt[\mu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, ἡ δὲ ἀπόδειξις γίνεται ὁμοίως. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{30},\qquad \sqrt{32}:\sqrt{2}=\sqrt{32:2}=\sqrt{16}=4.$$

§ 147. α′) Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ριζικῶν ἐχόντων διαφόρους δείκτας καὶ θετικὰ ἢ ἀπόλυτα ὑπόρριζα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ἄλλα ἴσα των, ἔχοντα τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα. Οὕτω θὰ ἔχωμεν π.χ.

$$\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{5^3}\cdot\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{5^3.2^4},\qquad \sqrt[3]{20^2}:\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{20^4}:\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{20^4:5^3}.$$

Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς ρίζης κλάσματος ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς ρίζης ἀκεραίας παραστάσεως ἐν γένει, ἂν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ παρονομαστὴς νὰ ἔχῃ ὑπόρριζον ποσότητα δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν δείκτην τῆς ρίζης. Οὕτως ἔχομεν π.χ.

$$\sqrt[4]{\frac{5}{8}}=\sqrt[4]{\frac{5}{2^3}}=\sqrt[4]{\frac{5\cdot 2}{2^4}}=\sqrt[4]{\frac{10}{2^4}}=\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{\sqrt[4]{10}}{2}$$

Γενικῶς, ἂν ὁ παρονομαστὴς κλασματικῆς παραστάσεως ἔχῃ ριζικόν, πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ κατάλληλον παράστασιν, δυνάμεθα νὰ μετατρέψωμεν τὴν δοθεῖσαν εἰς ἄλλην μὲ παρονομαστὴν ἄνευ ριζικοῦ. Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὴν παράστασιν $\dfrac{\gamma}{\alpha+\sqrt{\beta}}$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὴν **συζυγῆ παράστασιν** τῆς $\alpha+\sqrt{\beta}$, ἤτοι ἐπὶ τὴν $\alpha-\sqrt{\beta}$, (ἐνῷ ὑποτίθεται $\alpha-\sqrt{\beta}\neq 0$), εὑρίσκομεν

$$\frac{\gamma}{\alpha+\sqrt{\beta}}=\frac{\gamma(\alpha-\sqrt{\beta})}{(\alpha+\sqrt{\beta})(\alpha-\sqrt{\beta})}=\frac{\gamma(\alpha-\sqrt{\beta})}{\alpha^2-\beta}$$

Ἀσκήσεις

320. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

α') $\sqrt{54}+3\sqrt{24}-\sqrt{6}$, β') $\sqrt{45\alpha^3}+\sqrt{124\alpha^3}-\sqrt{320\alpha^3}$,

γ') $\sqrt{\dfrac{11^4\cdot 5}{7^2}}+\sqrt{\dfrac{12^2\cdot 5^3}{7^3\cdot 13^4}}\cdot 13^2-\sqrt{\dfrac{11^2\cdot 13^2}{7\cdot 5^2}}$.

321. Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις ὁ πρὸ τοῦ ριζικοῦ παράγων νὰ εἰσαχθῇ καταλλήλως ἐντὸς αὐτοῦ.

α') $x\sqrt{x-1}$, β') $3\sqrt{5}$, γ') $\alpha\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$, δ') $2\sqrt{\dfrac{6}{2}}$, ε') $7\sqrt{\dfrac{1}{49}}$.

322. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι ρίζαι εἰς ἰσοδυνάμους αὐτῶν ἐχούσας ἐλάχιστον κοινὸν δείκτην:

α') $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$, β') $\sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\alpha}$, $\sqrt[12]{\gamma}$. γ') $\sqrt[3]{\alpha}$, $\sqrt[6]{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$.

323. Νὰ γίνῃ ἁπλοποίησις τῶν ριζῶν.

α') $\sqrt[4]{64}$, β') $\sqrt[6]{48}$, γ') $\sqrt[3]{64}$, δ') $\sqrt[2\mu]{\alpha^\mu}$.

324. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

α') $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$ β') $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$, γ') $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[4]{30}$, δ') $\sqrt[4]{\alpha^2}\cdot\sqrt[5]{\alpha}$.

ε') $\sqrt{x\psi}:\sqrt{\dfrac{\psi}{x}}$, στ') $\sqrt[3]{2\alpha}\cdot\sqrt[4]{5\alpha\beta}\cdot\sqrt[3]{3\beta}$, ζ') $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{2}$.

325. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα:

α') $\sqrt{24}:\sqrt{2}$, β') $\sqrt[3]{7000}:\sqrt[3]{875}$, γ') $\sqrt[3]{x^4}:\sqrt[3]{x}$, δ') $\sqrt[3]{6\alpha^4}:\sqrt[3]{2\alpha}$.

326. Νὰ εὑρεθῇ τό: α') $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})^2$, β') $(2\sqrt{x}+8\sqrt[3]{x^2})\cdot\sqrt[3]{x}$

γ') $(\sqrt{\alpha}+\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[4]{\alpha})\cdot\sqrt[4]{\alpha}$.

327. Τὰ κάτωθι κλάσματα νὰ τραποῦν εἰς ἰσοδύναμα αὐτῶν μὲ ρητοὺς παρονομαστάς.

α') $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ β') $\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, γ') $\dfrac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}}$, δ') $\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$, ε') $\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

2. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥΣ

§ 148. Ἔστω ὅτι ἔχομεν τὸν $\alpha^{\frac{1}{2}}$, ὅπου τὸ α παριστάνει ἀριθμόν τινα θετικόν. Ὁρίζομεν ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{1}{2}}$ παριστάνει τὴν θετικὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ α, ἤτοι θέτομεν $\alpha^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\alpha}$, ὅτε $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$, ἄρα $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^2=\alpha$.

Κατὰ ταῦτα :

$$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2, \qquad 9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3.$$

Ἂν δοθῇ τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, ἐνῷ εἶναι $\nu > 0$ καὶ ἀκέραιος, ὁρίζομεν ὅτι $\alpha^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha}$, ὑποθέτοντες ὅμως $\alpha > 0$ ὅταν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ὅτε ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}=\alpha$, ἄρα $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha$.

Ἂν ἔχωμεν τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἐνῷ εἶναι μ καὶ ν ἀκέραιοι καὶ θετικοί, θέτομεν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, ὑποθέτοντες $\alpha > 0$ ἂν ν ἄρτιος, ὅτε ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu}=\alpha^{\mu}$, ἤτοι : $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha^{\mu}$.

Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\mu\cdot\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}\cdot\mu} \text{ ἢ } \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=(\alpha^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}=\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}, \text{ ἤτοι } \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu}.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης ἰσχύει ἄνευ περιορισμοῦ, ἐπειδὴ θεωροῦμεν ἐκ τῶν δύο ριζῶν ἑκάστης ἀρτίας τάξεως μόνον τὴν θετικήν.

Οὕτως ἔχομεν $100^{\frac{3}{2}}=\sqrt{100^{3}}=\sqrt{1\,000\,000}=1000.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁδηγούμενοι δίδομεν τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς δυνάμεως σχετικοῦ ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην θετικὸν κλάσμα.

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην κλάσμα ἔχον ὅρους ἀκεραίους καὶ θετικοὺς παριστάνει ἢ τὴν ρίζαν τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ ὑπόρριζον τὸν ἀριθμὸν μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἢ τὴν δύναμιν μὲ βάσιν τὴν ρίζαν τοῦ ἀριθμοῦ τὴν ἔχουσαν δείκτην τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ μὲ ἐκθέτην τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.

§ 149. Ἂν ὁ ἐκθέτης τῆς $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸν ἰσοδύναμόν του $\frac{\mu\rho}{\nu\rho}$ τοῦ ρ παριστάνοντος ἀριθμὸν ἀκέραιον καὶ θετικόν, εἶναι δὲ ἐπὶ πλέον καὶ ὁ α θετικός, θὰ ἔχωμεν

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}}, \text{ διότι εἶναι } \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \quad (\S\ 148)$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ } \alpha^{\frac{\mu\rho}{\nu\rho}}=\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} \quad (\S\ 148)$$

$$=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \quad (\S\ 142).$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ ὅμως δὲν ἀληθεύει ἂν $\alpha < 0$. Οὕτω π. χ. $(-2)^{\frac{1}{3}} \neq (-2)^{\frac{2}{6}}$, διότι $(-2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} < 0$, ἐνῷ $(-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4} > 0$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ ἄλλας ἰδιότητας τῶν ριζῶν, καθὼς καὶ νὰ τρέψωμεν ρίζας εἰς ἄλλας ἐχούσας τὸν αὐτὸν δείκτην, ὑποθέτοντες ὅμως τὴν βάσιν α θετικὴν πρὸς ἀποφυγὴν χονδροειδῶν σφαλμάτων.

§ 150. α') Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸ $\alpha^{-\frac{1}{2}}$. Δεχόμενοι τοῦτο ὡς δύναμιν τοῦ α καὶ ὑποθέτοντες ὅτι ἡ ἰδιότης τοῦ γινομένου τῶν δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἰσχύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί, ἔχομεν

$$\alpha^{+\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = \alpha^{+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \alpha^0 = 1.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}} = 1$ διὰ τοῦ $\alpha^{\frac{1}{2}}$, εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, ἤτοι $\alpha^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\alpha^{-\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha}}$ (ὅπου τὸ ν εἶναι θετικὸς καὶ ἀκέραιος ἀριθμός). Καὶ γενικῶς $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}}$ (ἂν τὰ μ καὶ ν εἶναι θετικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ 0). Ἤτοι:

Ἡ δύναμις ἀριθμοῦ ($\neq 0$) μὲ ἐκθέτην δοθὲν ἀρνητικὸν κλάσμα παριστάνει κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὴν μονάδα παρονομαστὴν δὲ τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀντίθετον τοῦ δοθέντος.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν

$$\alpha^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{\alpha^5}}, \qquad 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4^3}} = \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8}.$$

'Ασκήσεις

328. Τί σημαίνει α') $\alpha^{3\frac{1}{2}}$; β') $\alpha^{4\frac{1}{2}}$; γ') $\alpha^{-\frac{3}{8}}$; δ') $32^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{12}}$;

329. Εὕρετε τά : α') $\left(3-2^{-\frac{1}{3}}\right)\cdot\left(3+2^{-\frac{1}{3}}\right)$, β') $\left(\alpha+\beta^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(\alpha-\beta^{-\frac{1}{2}}\right)$,

γ') $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{-\frac{1}{2}}-3^{-\frac{1}{2}}\right)$, δ') $\left(2^{-\frac{1}{2}}+3^{-\frac{1}{2}}+1\right)^2$,

ε') $\alpha^{0,8}\cdot\alpha^{1,4}\cdot\alpha^{-0,2}$, στ') $x^{\frac{3}{4}}:x^{-\frac{2}{3}}$, ζ') $x^{-\frac{2}{3}}:x^{\frac{4}{5}}$, η') $\alpha^{\frac{1}{4,2}}:\alpha^{-0,8}$

θ') $\alpha^{-1,4}:\alpha^{1,2}$, ι') $8^{\frac{4}{5}}\cdot 4^{-\frac{1}{5}}$.

330. 'Ομοίως τά : α') $\left(\alpha^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$, β') $\left(\alpha^{\frac{2}{3}}\right)^{\left(-\frac{3}{4}\right)}$, γ') $\left(\alpha^{-\frac{5}{6}}\right)^{\left(-\frac{4}{5}\right)}\cdot\alpha^{-\frac{3}{4}}$

δ') $25^{3\frac{1}{2}}\cdot 16^{-3\frac{1}{4}}$, ε') $49^{-2\frac{1}{2}}\cdot 9^{-5\frac{1}{2}}$, στ') $49^{-3\frac{1}{2}}\cdot 5^{-4\frac{1}{3}}:256^{3\frac{1}{4}}\cdot 256^{-4\frac{1}{2}}$

ζ') $\dfrac{36^{-5\frac{1}{2}}+169^{-4\frac{1}{2}}}{8^{-5\frac{1}{3}}+27^{-4\frac{1}{3}}}$, η') $\dfrac{125^{-2\frac{1}{3}}+49^{6\frac{1}{2}}}{144^{-3\frac{1}{2}}-64^{2\frac{1}{2}}}$.

331. Νὰ τραποῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις εἰς ἰσοδυνάμους των μὲ ρητοὺς παρονομαστάς.

α') $\dfrac{x+\sqrt{\psi}}{x-\sqrt{\psi}}$, β') $\dfrac{\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}}{\alpha+\sqrt{\beta}}$, γ') $\dfrac{x\psi}{\sqrt{\psi^3}-\sqrt{x\psi^2}}$, δ') $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$

ε') $\dfrac{4\sqrt{5}-20}{\frac{2}{3}\sqrt{10}-5\sqrt{\frac{1}{2}}}$, στ') $\dfrac{5-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, ζ') $\dfrac{8\sqrt{12}-12\sqrt{6}}{4\sqrt{3}}$, η') $\dfrac{6}{1+\sqrt{2}}$

3. ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΡΙΖΗΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ

§ 151. Γνωρίζομεν ὅτι, διὰ νὰ ὑψωθῇ γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμίν τινα, ἀρκεῖ νὰ ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ ἐξαγόμενα. Κατὰ ταῦτα, ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον μονωνύμου τινὸς εὑρίσκεται, ἂν διπλασιάσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἕπεται ὅτι :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου τινὸς μονωνύμου ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τοὺς ἐκθέτας τῶν παραγόντων αὐτοῦ διὰ τοῦ 2.

Οὕτως ἔχομεν $\sqrt{25\alpha^4\beta^2\gamma^6}=25^{\frac{1}{2}}\cdot(\alpha^4)^{\frac{1}{2}}\cdot(\beta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\gamma^6)^{\frac{1}{2}}=5\alpha^2\beta\gamma^3$.

'Ομοίως $\sqrt{16\alpha^2\beta^4}=4\alpha\beta^2$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐξάγεται καὶ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλασματικοῦ μονωνύμου, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἑκάστου τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν $\sqrt{\dfrac{9\alpha^6\beta^2\gamma^4}{16\delta^2\varepsilon^4}}=\dfrac{3\alpha^3\beta\gamma^2}{4\delta\varepsilon^2}$

Ἐὰν παράγοντός τινος δὲν ἐξάγηται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀκριβῶς (δηλαδή, ἂν ὁ ἐκθέτης του δὲν διαιρῆται διὰ τοῦ 2), ἀφήνομεν ἐπ' αὐτοῦ σημειουμένην τὴν πρᾶξιν ἤ, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς παράγοντας, ὥστε νὰ ἐξάγηται ἡ ρίζα του τοὐλάχιστον ἑνός.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν $\sqrt{24\alpha^2\beta^3\gamma}=\sqrt{4\cdot 6\cdot\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\beta\cdot\gamma}=2\alpha\beta\sqrt{6\beta\gamma}$.

Ἀσκήσεις

332. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἑξῆς μονωνύμων :

α') $64\alpha^4\gamma^2\beta^8$, β') $\dfrac{4}{9}\alpha^2\beta^2\gamma$, γ) $\dfrac{\beta^3\gamma^3\delta^5}{4\alpha^4}$, δ') $\dfrac{32\alpha^2\beta^4\gamma^2}{45\delta^4\varepsilon^6}$,

ε') $\dfrac{125}{64}\alpha^3\beta^4\gamma$, στ') $\dfrac{9x^2\psi^4}{64\alpha^4\beta^2}$, ζ') $\dfrac{3\alpha^2\beta^3\gamma\eta^6}{16\varepsilon^3\delta^3\theta^8}$,

333. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἑξῆς μονωνύμων :

α') $8\alpha^9\beta^9\gamma^9$, β') $64\alpha^2\beta^3\gamma^9$, γ') $-\dfrac{8\alpha^3\beta^5\gamma^6}{125\delta^3\varepsilon}$, δ') $\dfrac{8\alpha^3\beta\gamma^6}{27\beta^4\varepsilon^4}$

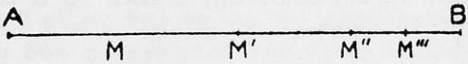
Β' ΠΕΡΙ ΟΡΙΩΝ

§ 152. Ὁρισμός. α') Μέγεθος ἢ ποσότης λέγεται μεταβλητὴ μέν, ἂν λαμβάνῃ διαφόρους τιμάς, **σταθερὰ** δέ, ἂν μένῃ ἀμετάβλητος, ἐνῷ ἄλλαι, μετὰ τῶν ὁποίων συνδέεται μεταβάλλονται. Π.χ. ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου τινὸς εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, ἐνῷ τὸ μῆκος τόξου κύκλου ἢ ἡ ἀξία ἑνὸς ἐμπορεύματος ἐξαρτᾶται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ἢ ἀπὸ τὴν τιμὴν μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.

β') Λέγομεν, ὅτι ποσότης τις μεταβλητὴ λαμβάνουσα ἄπειρον πλῆθος τιμῶν ἔχει ὅριον ἢ τείνει εἰς ποσότητά τινα σταθεράν, ἐὰν αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς ἀπό τινος καὶ ἐφ' ἑξῆς ἀπολύτως θεωρούμεναι, διαφέρουσιν ἑκάστη τῆς σταθερᾶς κατὰ ποσότητα, ὅσον θέλομεν μικράν.

Ἐὰν συμβαίνῃ τοῦτο, ἡ σταθερὰ αὕτη ποσότης λέγεται **ὅριον τῆς μεταβλητῆς.**

Παραδείγματα : 1ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἓν κινητὸν Μ, κινούμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ. 15) ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α διευθυνόμενον πρὸς τὸ Β καὶ διαγράφει εἰς $1^δ$ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ, φθάνει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Μ′ κείμενον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



Σχ. 15

Κινούμενον ὁμοίως φθάνει μετὰ $1^δ$ ἀκόμη εἰς τὸ Μ″ μέσον τῆς Μ′Β′, μετὰ $1^δ$ φθάνει εἰς τὸ μέσον Μ‴ τῆς Μ″Β καὶ προχωρεῖ ὁμοίως. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κινητόν, προχωροῦν οὕτω πρὸς τὸ Β, πλησιάζει αὐτὸ διηνεκῶς, ἀλλ᾽ οὐδέποτε φθάνει εἰς τὸ Β. Ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τὸ κινούμενον σημεῖον εἶναι ποσότης μεταβλητή, τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ αὐξάνεται διηνεκῶς καὶ πλησιάζει τὴν σταθερὰν ἀπόστασιν ΑΒ, ἔχει δηλαδὴ ὅριον τὴν ΑΒ. Τοὐναντίον ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὸ κινούμενον σημεῖον εἶναι ἐπίσης μεταβλητὴ ποσότης ἀλλ᾽ αἱ τιμαί της ἐλαττοῦνται κατὰ τὴν κίνησιν καὶ πλησιάζουν διηνεκῶς τὸ 0, ἤτοι ἔχει ὅριον τὸ 0.

2ον. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 0,3333......., ὁ ὁποῖος δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\ldots$

Ἡ τιμὴ ἑκάστου τῶν κλασμάτων τούτων μετὰ τὸ πρῶτον εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ προηγουμένου του. Ἑπομένως ὅταν θεωροῦμεν τὰ κλάσματα ταῦτα, δυνάμεθα προχωροῦντες ἀρκούντως νὰ εὕρωμεν ἓν κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ὅσον θέλομεν μικρόν. Ἤτοι αἱ τιμαὶ τῶν διαδοχικῶν τούτων κλασμάτων ἐλαττοῦνται καὶ ἔχουν ὅριον τὸ μηδὲν (θεωρούμενον ὡς ἓν ἄπειρον πλῆθος τιμῶν).

Τὸ ἄθροισμα κλασμάτων τινῶν ἐκ τούτων εἶναι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, μικρότερον τοῦ $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ καὶ ὅσον περισσοτέρους ὅρους προσθέτομεν τόσον πλησιάζομεν πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$.

Διὰ νὰ δείξωμεν, ὅτι ποσότης τις μεταβλητὴ x (λαμβάνουσα ἄπειρον πλῆθος τιμῶν) ἔχει ὅριον ποσότητά τινα σταθερὰν $α$ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν τιμῶν τῆς μεταβλητῆς καὶ τῆς σταθερᾶς ἀπό τινος αὐτῶν καὶ ἑξῆς :

α) Δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως μικροτέρα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ θετικοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ.

β′) Ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν δύναται νὰ γίνῃ (ἀπολύτως) ἴση μὲ τὸ μηδέν.

Συμβολίζομεν τὸ ὅτι ὅριον τῆς x εἶναι τὸ α ὡς ἑξῆς:

$$\text{ορ}x=\alpha \quad \text{ἢ} \quad x \longrightarrow \alpha.$$

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

§ 153. α′) Ἐὰν τὸ ὅριον μεταβλητῆς τινὸς x εἶναι τὸ 0, τὸ ορ(λ x), ὅπου λ εἶναι ποσότης σταθερὰ (λ≠0), εἶναι ἴσον μὲ 0.

Διότι ἀφοῦ αἱ τιμαὶ τοῦ x δύνανται νὰ γίνουν ἀπό τινος καὶ ἐφ' ἑξῆς, ἀπολύτως θεωρούμεναι, ὁσονδήποτε μικραὶ καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ λ θὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.

β′) Τὸ ὅριον τοῦ ἀθροίσματος πεπερασμένου ἀριθμοῦ μεταβλητῶν ποσοτήτων x, ψ, ω,... ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν προσθετέων.

Ἔστω, ὅτι τὰ ὅρια τῶν x, ψ, ω,... εἶναι ἀντιστοίχως, α, β, γ,... Τότε δεικνύεται, ὅτι τὸ ὅριον $(x+\psi+\omega+....) = \text{ορ}x+\text{ορ}\psi+\text{ορ}\omega+...$ $=\alpha+\beta+\gamma+...$, ἂν τὰ x, ψ, ω,... εἶναι πεπερασμένα τὸ πλῆθος.

γ′) Ἐὰν ὅριον μεταβλητῆς τινὸς x εἶναι α, τὸ ὅριον τοῦ λ x, ὅπου λ εἶναι σταθερά τις (≠0) εἶναι ἴσον μὲ λα.

Διότι ἀφοῦ $\text{ορ}x=\alpha$, θὰ εἶναι $\text{ορ}(x-\alpha)=0$, ἑπομένως τὸ $\text{ορ}\lambda(x-\alpha)$ $=0$, ἤτοι $\text{ορ}(\lambda x-\lambda\alpha)=0$, δηλαδὴ $\text{ορ}(\lambda x)=\lambda\alpha$.

δ′) Ἐὰν τὸ ὅριον μεταβλητῆς τινος x ἰσοῦται μὲ α, τὸ ὅριον τοῦ $\frac{x}{\lambda}$, ὅπου λ εἶναι ποσότης σταθερὰ (≠0), ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\lambda}$.

Διότι εἶναι $\frac{x}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\cdot x$, καὶ $\text{ορ}\,\frac{x}{\lambda}=\text{ορ}\frac{1}{\lambda}\cdot x=\frac{1}{\lambda}\cdot\alpha=\frac{\alpha}{\lambda}$.

ε′) Τὸ ὅριον γινομένου δύο ἢ περισσοτέρων (πεπερασμένων τὸ πλῆθος) μεταβλητῶν ποσοτήτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων των.

Ἔστω, ὅτι x καὶ ψ εἶναι μεταβληταὶ ποσότητες καὶ α, β τὰ ὅριά των ἀντιστοίχως. Θὰ εἶναι τότε $\text{ορ}(x\cdot\psi) = \text{ορ}x\cdot\text{ορ}\psi = \alpha\cdot\beta$.

Ἡ ἰδιότης ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

στ΄) Τὸ ὅριον τῆς $ν^{ης}$ δυνάμεως ποσότητος μεταβλητῆς ἰσοῦται μὲ τὴν $ν^{ην}$ δύναμιν τοῦ ὁρίου τῆς μεταβλητῆς.

Διότι, ἂν εἶναι ορx=α, θὰ ἔχωμεν $ορ(x^ν)=ορ(x.x...x)=ορx.ορx...$
$=(ορx)^ν=α.α...α=α^ν$, ἤτοι $ορ(x^ν)=(ορx)^ν=α^ν$.

ζ΄) Τὸ ὅριον τῆς $ν^{ης}$ ρίζης μεταβλητῆς τινος ποσότητος ἰσοῦται μὲ τὴν $ν^{ην}$ ρίζαν τοῦ ὁρίου τῆς μεταβλητῆς.

η΄) Ἐὰν δύο μεταβληταὶ ποσότητες λαμβάνουν ἴσας τιμὰς ἀντιστοίχως καὶ ἑκάστη ἔχῃ ὅριον, τὰ ὅριά των εἶναι ἴσα.

Ἔστω, ὅτι αἱ μεταβληταὶ x, ψ λαμβάνουν ἴσας τιμὰς ἀντιστοίχως καὶ ορx=α, ορψ=β, τότε εἶναι α=β, ἤτοι ορx=ορψ.

θ΄) Ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ μεταβλητῶν ποσοτήτων ἔχουν σταθερὸν λόγον, ἑκάστη δὲ τούτων ἔχῃ ὅριον ($\neq 0$), ὁ λόγος οὗτος ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὁρίων των.

Ἔστωσαν x, ψ δύο μεταβληταὶ ποσότητες καὶ $ορx=α(\neq 0)$ $ορψ=β(\neq 0)$. Ἂν εἶναι $\frac{x}{ψ}=ρ$ σταθερόν, τότε εἶναι $\frac{α}{β}=ρ$, ἤτοι:
$ρ=\frac{α}{β}=\frac{ορx}{ορψ}$.

Γ΄ ΠΕΡΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 154. Ἔστω, ὅτι ζητεῖται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 2. Αὕτη δὲν εἶναι ἀκέραιός τις ἀριθμός. Διότι, $1^2=1$ καὶ $2^2=4$. Ἀλλ᾽ οὔτε ὑπάρχει ἄλλος τις ἀριθμὸς ἐκ τῶν μέχρι τοῦδε γνωστῶν, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2. Διότι, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμὸς δεκαδικὸς κοινὸς ἢ περιοδικός, αὐτὸς δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ κλάσμα ἀνάγωγον, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ $\frac{λ}{μ}$. Τότε θὰ εἶναι $\frac{λ^2}{μ^2}=2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδή, ἀφοῦ τὸ $\frac{λ}{μ}$ εἶναι ἀνάγωγον, τὸ $\frac{λ^2}{μ^2}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ 2.

Τὰ αὐτὰ παρατηροῦμεν καὶ διὰ τὴν $\sqrt{5}$, τὴν $\sqrt{7}$ κ.τ.λ.

Ἀναζητοῦντες τὴν $\sqrt{2}$ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 1 1,1 1,2 1,3....1,7 1,8 1,9 2 καὶ σχηματίζομεν ἀκολούθως τὰ τετράγωνα τούτων 1 1,21 1,44 1,69 2,25... Παρατηροῦμεν, ὅτι οὐδὲν ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ τὸν 2 καὶ ὅτι ὁ 2 περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,96 καὶ 2,25 τετραγώνων τῶν 1,4 καὶ 1,5 δύο διαδοχικῶν τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν. Ἤτοι εἶναι $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$.

Σχηματίζομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 1,4 1,41 1,42 1,43.......... 1,49 1,5. Ἐπειδὴ ὁ 2 δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἐκ τούτων, περιέχεται μεταξὺ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἐκ τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Πράγματι, ἂν σχηματίσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$. Ἑπομένως ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ 1,41 καὶ 1,42. Ὁμοίως προχωροῦμεν καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 1,414 καὶ 1,415, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ διαφέρουν κατὰ ἓν χιλιοστόν. Ἂν προχωρήσωμεν ἀκόμη, εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι διαφέρουν κατα ἓν δέκατον χιλιοστοῦ, ἓν ἑκατοστὸν χιλιοστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐν γένει, λοιπόν, ἂν προχωρήσωμεν ὁμοίως, θὰ εὕρωμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, οἵτινες διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν καὶ ἑπομένως ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἂν ἐξακολουθήσωμεν ἀρκούντως). Ἄρα, ἕκαστος τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν κατὰ μείζονα λόγον θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν παριστάνοντα τὴν $\sqrt{2}$ κατὰ ποσότητα ὅσον καὶ ἂν θέλωμεν μικράν. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}=$ μὲ ὅριον ἑνὸς τῶν ὡς ἄνω εὑρισκομένων ἀριθμῶν, ἤτοι θεωροῦμεν ὡς $\sqrt{2}$ τὸν ἕνα ἐκ τῶν ὡς ἀνωτέρω εὑρισκομένων ἀριθμῶν· ἔχει δὲ αὐτὸς ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, διότι ἄλλως ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς θὰ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ μὲ κλάσμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

Τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, ὁ ὁποῖος παριστάνει τὴν $\sqrt{2}$ καλοῦμεν **ἀσύμμετρον.**

Τοιούτους ἀριθμοὺς εὑρίσκομεν καὶ εἰς τὴν Γεωμετρίαν κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν καλουμένων **ἀσυμμέτρων μεγεθῶν** πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως αὐτῶν.

Ἐν γένει καλοῦμεν ἀσυμμέτρους ἀριθμοὺς ἐκείνους, οἵτινες ἔχουν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μὴ περιοδικῶν. Καὶ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί, ἂν ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σῆμα + (ἢ οὐδὲν πρόσημον) ἢ τὸ –. **Συμμέτρους** δὲ καλοῦμεν τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστοὺς ἀριθμοὺς (ἀκεραίους ἢ κλασματικοὺς ἐν γένει).

Κατὰ ταῦτα ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος, ὁ 1,41421 κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς ἑκατοντάκις χιλιοστοῦ. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 2,14159.... καὶ 2,71828.... εἶναι ἀσύμμετροι (ἔχοντες ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Καθὼς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, δεχόμεθα συνήθως, ὅτι οἱ σύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ γίνουν ἀπὸ τὴν μονάδα ἢ καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῆς 0,1. 0,01. 0,001.... διὰ τῆς ἐπαναλήψεως αὐτῶν ὡς προσθετέων, πρὸς δέ, ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μὲ ἀριθμοὺς ἔχοντας μὲν ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων, τὰ ὁποῖα ὅμως ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ὁμοίως καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγομεν, ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς προσθετέων τῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος) δεκαδικῶν μονάδων 0,1. 0,01. 0,001 κ.τ.λ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα ὅτι :

Σύνολον πλήθους ἐκ τῶν αὐτῶν ἀπείρων δεκαδικῶν μονάδων, ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων δὲν εἶναι περισσότεραι τῶν ἐννέα, θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί, ὁσαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων γράφονται οὗτοι.

Καὶ μετὰ τὴν παραδοχὴν τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δεχόμεθα ὅτι διατηροῦνται οἱ ὁρισμοὶ τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν, ὡς καὶ ἐπὶ τῶν συμμέτρων, δεικνύεται δὲ ὅτι εἶναι δυνατὴ ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ πολλαπλασιασμὸς (καὶ ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν) καὶ ἡ διαίρεσις δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν $\alpha:\beta$ $(\beta \neq 0)$. Ἐπίσης δεικνύεται, ὅτι ἰσχύουν καὶ ἐπ' αὐτῶν αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες πράξεων.

Εἰς τὰς πράξεις τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν παραλείπομεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν ἀπό τινος καὶ ἑξῆς. Οὕτως ἔχομεν συμμέτρους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι εἶναι μόνον κατὰ προσέγγισιν ἴσοι μὲ τοὺς ἀσυμμέτρους. Ἐπὶ τῶν συμμέτρων δὲ τούτων ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις κατὰ τοὺς γνωστοὺς κανόνας.

Ἀριθμός τις θετικὸς σύμμετρος (γραμμένος ὡς δεκαδικὸς) λέγεται **μεγαλύτερος** ἄλλου τοιούτου, ὁ ὁποῖος λέγεται **μικρότερος** τοῦ πρώτου, ἂν περιέχῃ τὸ σύνολον τῶν μονάδων ἑκάστης δεκαδικῆς τάξεως τοῦ δευτέρου καὶ ἄλλας ἀκόμη, καθὼς ὁ 2,5349 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 2,53439856.

§ 155. Δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ ἀσύμμετροι λέγονται **ἴσοι,** ἂν πᾶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικός, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐκ τούτων, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Οὕτω οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 0,9999.... εἶναι ἴσοι. Διότι ἔστω ἀριθμός τις μικρότερος τῆς 1 π.χ. ὁ $\frac{147}{148}$. Αὐτὸς εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ $\frac{999}{1000}$, ἐπειδὴ ὁ μὲν $\frac{999}{1000}$ διαφέρει ἀπὸ τὴν 1 κατὰ $\frac{1}{1000}$. ὁ δὲ $\frac{147}{148}$ κατὰ $\frac{1}{148}$, ἤτοι περισσότερον. Ἑπομένως ὁ $\frac{147}{148}$, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ 0,999, εἶναι ἀκόμη μικρότερος καὶ τοῦ 0,9999. Ὁμοίως δεικνύεται καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου· ὁσαδήποτε δὲ ψηφία τοῦ 0,99999.... καὶ ἂν λάβωμεν, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, ἄρα εἶναι 1=ὅριον 0,9999.... καὶ θέτομεν 1=0,9999... καὶ 0,01=0,009999... κ.τ.λ.

Κατὰ ταῦτα δύο ἀριθμοὶ θετικοὶ σύμμετροι γραμμένοι ὡς δεκαδικοὶ θὰ εἶναι ἴσοι : 1ον. Ἂν πάντα τὰ δεκαδικὰ ψηφία των τῆς αὐτῆς τάξεως εἶναι τὰ αὐτὰ ἢ 2ον, ἄν τινὰ μὲν ψηφία των ἀπὸ τοῦ πρώτου καὶ ἐφ' ἑξῆς εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ αὐτὰ καὶ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τούτων τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ διαφέρει ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχόν του (τῆς αὐτῆς τάξεως) τοῦ ἄλλου κατὰ μονάδα, τὰ δὲ ἑπόμενα ψηφία τοῦ μὲν ἔχοντος τὸ μικρότερον ἐκ τῶν ἀνίσων ψηφίων εἶναι πάντα 9, τοῦ δὲ ἄλλου πάντα εἶναι 0 (τὰ ὁποῖα καὶ παραλείπονται). Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἄνισοι. Οὕτω π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 3,1539999, καὶ 3,154 θεωροῦνται, ὅτι εἶναι ἴσοι, καθὼς καὶ οἱ 0,54327 καὶ 0,54326999, ἐνῷ οἱ 3,1452.... καὶ 3,1478... εἶναι ἄνισοι καὶ 3,1478... $>$ 3,1452...

Παρατηρήσεις. α') Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν προηγουμένων δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἰσότητα καὶ ἀνισότητα καὶ μὲ ἀσυμμέτρους ἀριθμούς. Π.χ. ἐκ τῶν ἀσυμμέτρων 3,14153... καὶ 3,141298... ὁ α' εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β'.

β') Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\gamma+\sqrt{\delta}$, ὅπου α, γ, σύμμετροι οἱ δὲ β, δ θετικοὶ καὶ σύμμετροι ἀλλὰ μὴ τέλεια τετράγωνα εἶναι ἴσοι μόνον ὅταν $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

Πράγματι. Ἡ ἰσότης $\alpha+\sqrt{\beta}=\gamma+\sqrt{\delta}$ ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $(\alpha-\gamma)+\sqrt{\beta}=\sqrt{\delta}$. Ἑπομένως, διὰ νὰ ἀληθεύῃ πρέπει ὁπωσδήποτε νὰ εἶναι $((\alpha-\gamma)+\sqrt{\beta})^2=\delta$, δηλ. $(\alpha-\gamma)^2+\beta+2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta}=\delta$ ἢ $2(\alpha-\gamma)\sqrt{\beta}=\delta-\beta-(\alpha-\gamma)^2$. Ἂν ἦτο $\alpha\neq\gamma$, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ $\alpha-\gamma$ καὶ συμπεραίνομεν, ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ ἀληθεύη ἡ $\sqrt{\beta}=\frac{\delta-\beta-(\alpha-\gamma)^2}{\alpha-\gamma}$. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $\sqrt{\beta}$ ἴσος μὲ ἕνα σύμμετρον $\frac{\delta-\beta-(\alpha-\gamma)^2}{\alpha-\gamma}$, πρᾶγμα ἀδύνατον. Κατ' ἀνάγκην λοιπὸν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha=\gamma$. Καὶ τότε διὰ νὰ εἶναι ἴσοι οἱ $\alpha+\sqrt{\beta}$, $\gamma+\sqrt{\delta}$ πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\sqrt{\beta}=\sqrt{\delta}$ καὶ συνεπῶς $\beta=\delta$, ἀφοῦ β, δ θετικοί. Τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ προφανῶς.

Ἀσκήσεις

334. Δείξατε, ὅτι ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου ἡ τρίτη δύναμις ἰσοῦται μὲ 7 δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος οὔτε κλασματικὸς καὶ ὅτι ὑπάρχει ἀσύμμετρος. Εὕρετε τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ (κατὰ τὰ ἀνωτέρω) τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ τὰ τρία πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία.

335. Δείξατε κατ' ἀναλογίαν ὅτι, ἂν ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς δὲν ἔχῃ ὡς νιοστὴν ρίζαν (ν ἀκέραιος καὶ θετικὸς) ἀκέραιον δὲν ἔχει οὔτε κλασματικὸν ἀλλ' ἔχει ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

336. Δείξατε ὅτι εἶναι ορ 3,567999...=3,568

Ποῖος ἐκ τῶν 18,1557... καὶ 18,1452921... εἶναι μεγαλύτερος καὶ διατί ;

337. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν 3,14124... 0,68456... 1,72345... καὶ 12.53652 μὲ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

338. Εὕρετε τὸ $\sqrt{19}\pm\sqrt{.3}$ μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

339. Εὕρετε τὴν διαφορὰν 3,542754... –6,37245... μὲ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

340. Εὕρετε τὴν διαφορὰν $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ καὶ τὴν $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ μὲ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.

Δ'. ΠΕΡΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 156. Καθὼς εἴδομεν, οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ρίζαν ἀρτίας τάξεως. Ἂν θέλωμεν νὰ ἔχουν καὶ οἱ ἀρνητικοὶ τετραγωνικὴν ρίζαν, παραδεχόμεθα νέον εἶδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι νὰ γίνωνται ἀπὸ νέαν μονάδα, τῆς ὁποίας τὸ τετράγωνον ὁρίζομεν ἴσον μὲ –1 Τοὺς νέους τούτους ἀριθμοὺς θὰ καλοῦμεν **φανταστικούς,** τοὺς δὲ μέχρι τοῦδε γνωστοὺς πρὸς διάκρισιν θὰ καλοῦμεν **πραγματικούς.** Τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῆς ἀρνητικῆς μονάδος καλοῦμεν **φανταστικὴν μονάδα** καὶ τὴν παριστάνομεν μὲ τὸ σύμβολον* i, τὴν δὲ

* Ὁ συμβολισμὸς $i=\sqrt{-1}$ ἐχρησιμοποιήθη τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Γερμανοῦ μαθηματικοῦ F. Gauss ἀλλ' ὁ Euler (2777) εἰσήγαγεν ὁριστικῶς τὴν παράστασιν αὐτήν.

ἀντίθετόν της μὲ $-i$. Οὕτως ἂν ἔχωμεν $x^2=-1$, ὁρίζομεν τὸ $x^2=-1=i^2$ καὶ $x=\sqrt{-1}=i$, εἶναι δέ κατὰ σειρὰν $i^2=-1$, $i^3=i^2 \cdot i=-1.i=-i$. Ἐκ τῆς i ἢ μέρους αὐτῆς δεχόμεθα, ὅτι σχηματίζονται διὰ τῆς ἐπαναλήψεως ὡς προσθετέου οἱ φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Π. χ. ἔχομεν ὅτι $2i=i+i$, $3i=i+i+i$, $\frac{4}{9}i=\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i+\frac{1}{9}i$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεχόμεθα, ὅτι σχηματίζονται καὶ οἱ χαρακτηριζόμενοι ὡς ἀρνητικοὶ φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἐκ τῆς $-i$. ὅπως καὶ οἱ ἀρνητικοὶ πραγματικοὶ ἐκ τῆς -1, ἢ ἐκ τῆς $+1$, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὸ σῆμα της. Π.χ. εἶναι $-4i=(-i)+(-i)+(-i)+(-i)$

Οὕτω, κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας, φανταστικὰς μὲ ἀντίθετα πρόσημα. Π.χ. ὁ -25 ἔχει τετραγ. ρίζαν τοὺς $5i$ καὶ $-5i$ διότι $(5i)^2=25i^2=25.(-1)=-25$. Καὶ $(-5i)^2=(-5)^2 \cdot i^2=25.(-1)=-25$.

Ἐκ τῶν δύο τετραγ. ριζῶν ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἔχουσα πρόσημον + ὀνομάζεται **πρωτεύουσα** τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ συμβολίζεται μέ τὸ οἰκεῖον ριζικὸν χωρὶς πρόσημον ἀριστερά, ἂν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτω ὁ συμβολισμὸς $\sqrt{-2}$ σημαίνει: ἡ πρωτεύουσα τετραγ. ρίζα τοῦ -2 καὶ ἔχομεν $\sqrt{-2}=i\sqrt{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι αἱ τετραγ. ρίζαι τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ συνοδευόμεναι μὲ τὸ σύμβολον i.

§ 157. Καὶ διὰ τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν ἀριθμῶν δεχόμεθα, ὅτι ἰσχύουν, οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων· ἤτοι ὁ νόμος τῆς ἀλλαγῆς τῆς θέσεως τῶν προσθετέων ἢ τῶν παραγόντων, ὁ νόμος τῆς ἀντικαταστάσεως τινῶν ἐξ αὐτῶν μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἀντιστρόφως καὶ ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος.

Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα πραγματικοῦ καὶ φαντασικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται **μιγαδικὸς ἀριθμὸς** ἢ ἁπλῶς **μιγάς.**

Οὕτως οἱ $7+6i$, $3-5i$, $-9-7i$ εἶναι μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

§ 158. Ἡ γενικὴ μορφὴ τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι $\alpha+\beta i$ ἢ συμβολικῶς (α, β), ἤτοι ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι $(\alpha, \beta)=\alpha+\beta i$. Ἂν εἶναι α=0, τότε $(0,\beta)=\beta i$, ἤτοι φανταστικὸς ἀριθμός. Ἂν εἶναι β=0, τότε $(\alpha,0)=\alpha$, ἤτοι πραγματικὸς ἀριθμός. Ὁ $(0,0)=0$.

§ 259. Δύο μιγάδες, ἕκαστος τῶν ὁποίων λέγεται ἐνίοτε καὶ ἁπλῶς φανταστικός, λέγονται συζυγεῖς ἐὰν διαφέρουν κατὰ τὸ πρόσημον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Π.χ. οἱ $7+3i$ καὶ $7-3i$ λέγονται συζυγεῖς (μιγάδες), καθὼς καὶ οἱ $-5i$ καὶ $5i$, καὶ ἐν γένει οἱ (α,β) καὶ $(\alpha,-\beta)$ εἶναι συζυγεῖς φανταστικοὶ ἀριθμοί, ὅπου α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

1. ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 160. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν φανταστικῶν καὶ μιγάδων ἀριθμῶν γίνεται καθὼς καὶ τῶν πραγματικῶν καὶ δίδει ἄθροισμα πραγματικὸν ἢ φανταστικὸν ἢ μιγαδικὸν ἀριθμὸν ἢ μηδέν.

Π.χ. εἶναι : $8i+5i=13i$, $(0,\beta)+(0,\delta)=0+\beta i+0+\delta i=0+(\beta+\delta)i=(\beta+\delta)i$. Ὁμοίως $-17i-6i=-23i$, $5+3i+6-3i=11$, $18i-5i=13i$, ἐνῷ $15i-15i=0$, $(0,\beta)-(0,\beta)=\beta i-\beta i=0$.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς φανταστικῶν ἀριθμῶν δίδει γινόμενον πραγματικὸν ἀριθμόν, ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν φανταστικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον. Οὕτως ἔχομεν ὅτι :

$$(0,1)\cdot(0,1)=i\cdot i=i^2=-1, \qquad (-i)\cdot(-i)=(-i)^2=i^2=-1,$$
$$\text{ἢ } (0,-1)^2=(-i)\cdot(-i)=i^2=-1, \qquad (0,1)^3=i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i,$$
$$(0,1)^4=i^4=i^2\cdot i^2=(-1)\cdot(-1)=+1.$$

Γενικῶς εἶναι $(0,1)^{4\nu}=i^{4\nu}=(i^4)^\nu=1$, $i^{4\nu+1}=i^{4\nu}\cdot i=1\cdot i=i$,
$$(0,1)^{4\nu+2}=i^{4\nu+2}=i^{4\nu}i^2=1\cdot(-1)=-1,$$
$$(0,1)^{4\nu+3}=i^{4\nu+3}=i^{4\nu}i^3=1\cdot(-i)=-i.$$

Ἡ διαίρεσις καὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θεωρεῖται, ὡς συνήθως, ἀντίστροφος πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, εἶναι δὲ

$$(0,\alpha):(0,\beta)=\alpha i:\beta i=\frac{\alpha i}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta},$$
$$(\alpha,0):(0,\beta)=\alpha:\beta i=\frac{\alpha}{\beta i}=\frac{\alpha i}{\beta i i}=\frac{\alpha i}{\beta i^2}=-\frac{\alpha}{\beta}\,i.$$

§ 161. Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ μιγάδων ἀριθμῶν δίδει ἐξαγόμενα ἐν γένει μιγάδας ἀριθμούς. Οὕτως ἔχομεν ὅτι :

$$(\alpha,\beta)+(\gamma,\delta)=(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=\alpha+\gamma+(\beta+\delta)i=(\alpha+\gamma,\beta+\delta),$$

$$(\alpha,\beta)-(\gamma,\delta)=(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=\alpha-\gamma+(\beta-\delta)i=(\alpha-\gamma,\beta-\delta),$$

$$(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)=(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\beta\gamma i+\alpha\delta i+\beta\delta i^2=$$

$$=\alpha\gamma-\beta\delta+(\beta\gamma+\alpha\delta)i=(\alpha\gamma-\beta\delta,\beta\gamma+\alpha\delta).$$

$$(\alpha,\beta):(\gamma,\delta)=(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=$$

$$=\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}=\left(\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2},\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\right).$$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΙΓΑΔΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 162. Τὸ ἄθροισμα δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς πραγματικός.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα: $(\alpha,\beta)+(\alpha,-\beta)=(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=$
$\alpha+\beta i+\alpha-\beta i=2\alpha=(2\alpha,0)$.

§ 163. Ἐὰν ζητῆται τὸ γινόμενον τῶν συζυγῶν (α,β), $(\alpha,-\beta)$, ἤτοι τῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\alpha-\beta i$, ἔχομεν $(\alpha+\beta i)\cdot(\alpha-\beta i)=\alpha^2-(\beta i)^2=\alpha^2+\beta^2=$ $(\alpha^2+\beta^2,0)$. Ἤτοι:

Τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἑνὸς τούτων.

Καλοῦμεν μέτρον μιγάδος ἢ φανταστικοῦ ἀριθμοῦ, ἔστω τοῦ $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$, τὴν (θετικὴν) τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ γινομένου τοῦ δοθέντος καὶ τοῦ συζυγοῦς αὐτοῦ $(\alpha,-\beta)=\alpha-\beta i$. Κατὰ ταῦτα τὸ μέτρον τοῦ $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$ καὶ τοῦ $(\alpha,-\beta)=\alpha-\beta i$ εἶναι τὸ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, τοῦ $(0,\beta)=\beta i$ καὶ τοῦ $(0,-\beta)=-\beta i$ εἶναι τὸ $\sqrt{\beta^2}=\beta>0$. Π.χ. τὸ μέτρον $(4,-3)=4-3i$ εἶναι τὸ $\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$, τοῦ $(0,\pm3)=\pm3i=0\pm3i$ τὸ $\sqrt{3^2}=3$.

§ 164. Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$ καὶ $(\gamma,\delta)=$ $\gamma+\delta i$ εἶναι μεταξύ των ἴσοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης προκύπτει $(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i=0$
ἢ $(\alpha-\gamma)=-(\beta-\delta)i=(\delta-\beta)i$.

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον τὰ δύο ἴσα $\alpha-\gamma$ καὶ $(\delta-\beta)i$, εὑρίσκομεν $(\alpha-\gamma)^2=(\delta-\beta)^2\cdot i^2=(\delta-\beta)^2\cdot(-1)=-(\delta-\beta)^2$.

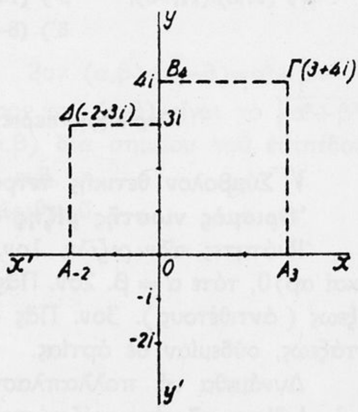
Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον, ὅταν εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$, ὁπότε καὶ τὰ δύο μέλη εἶναι ἴσα μὲ 0, ἐνῷ εἰς πᾶσαν ἄλλην περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν, ὅτι θετικός τις ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ ἀρνητικόν, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι:

Ἐὰν δύο μιγάδες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι μεταξύ των θὰ εἶναι χωριστὰ ἴσα τὰ πραγματικὰ καὶ τὰ φανταστικὰ μέρη αὐτῶν καὶ ὅτι μία ἰσότης μεταξὺ δύο μιγάδων ἀριθμῶν ἄγει εἰς δύο ἰσότητας μὲ πραγματικοὺς ἀριθμούς.

3. ΣΗΜΕΙΑ ΟΡΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΜΙΓΑΔΑΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

§ 165. Καθὼς οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἂν θέλωμεν, ὁρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν, οὕτω καὶ οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ μιγάδες ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ὁρίζουν σημεῖα καὶ παριστάνονται ὑπ' αὐτῶν ὡς ἑξῆς :

Λαμβάνομεν τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ ὁρίζομεν, ὅτι τὸ ἄκρον τμήματος τοῦ ἄξονος τῶν ψ μήκους μιᾶς μονάδος ἀρχομένου ἀπὸ τοῦ Ο καὶ πρὸς τὴν φορὰν Οψ παριστάνει τὴν φανταστικὴν μονάδα i. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 2i, 3i... βi...(β>0), ἂν λάβωμεν ἀπὸ τοῦ Ο τμῆμα ἴσον μὲ 2,3,... β.... μονάδας μήκους πρὸς τὴν φορὰν Οψ, τὰ ὁποῖα λέγομεν, ὅτι ὁρίζονται ὑπὸ τῶν φανταστικῶν τούτων ἀριθμῶν. Ἐὰν λάβωμεν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα πρὸς τὴν φορὰν Οψ', θὰ λέγωμεν, ὅτι αὐτὰ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν $-i$, $-2i$, $-3i$,..., $-\beta i$,.... καὶ παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους (σχ. 15α).



Σχ. 15α

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ μιγάδος τινὸς ἀριθμοῦ, π.χ. ὑπὸ τοῦ $(3,4)=3+4i$, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον A_3 ἐπὶ τῆς $x'x$ τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν 3, τὸ B_4 παριστάνον τὸν 4i ἐπὶ τῆς ψ'ψ καὶ ἀκολούθως σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον $OA_3\Gamma B_4$, τούτου δὲ ἡ τετάρτη κορυφὴ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον παριστάνει τὸν ἀριθμὸν $(3,4)=3+4i$. Καθὼς βλέπομεν, τὸ σημεῖον Γ ἔχει τετμημένην 3 καὶ τεταγμένην 4. Ἐν γένει, θὰ λέγωμεν, ὅτι ὁ μιγὰς ἀριθμὸς $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ σημείου ἢ ὅτι ὁρίζει τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην α καὶ τεταγμένην β ὡς πρὸς ἄξονας x'x καὶ ψ'ψ.

Σημείωσις. Καλοῦμεν **ὄρισμα** τοῦ μιγάδος π.χ. $(3,4)=3+4i$ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα Ox μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΓ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ τὸ σημεῖον τὸ παριστάνον τὸν ἀριθμὸν $(3,4)=3+4i$. Κατ' ἀνάλογον τρόπον τὸ ὄρισμα τοῦ $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$ εἶναι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ Ox μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΜ, ἄν τὸ Μ παριστάνῃ τὸν $(\alpha,\beta)=\alpha+\beta i$.

Ἀσκήσεις

341. Παραστήσατε μὲ σημεῖα τοὺς μιγάδας:
α') $2-0{,}74i$ β') $5+3i$ γ') $6-3i$ δ') $-0{,}75-0{,}62i$ ε') $(2,4)=2+4i$ στ') $(3,-4)$ ζ') $(2,-0{,}64)$ η') $(5,2)$ θ') $(6,-3)$.

342. Εὕρετε τὰ ἀθροίσματα, διαφοράς, γινόμενα, πηλίκα τῶν ἀνωτέρω ἀριθμῶν ἀνὰ δύο.

343. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων καὶ νὰ παρασταθοῦν αὐτὰ διὰ τῶν σημείων:
α') $(5,3)\cdot(7,3)$, β') $(2,2)^2$, γ') $(2,-7)\cdot(9,-2)$, δ') $(6,7)\cdot(6,-7)$.

344. Ὁμοίως τῶν κάτωθι:
α') $(11,8)\cdot(11,-8)$, β') $(14,15)\cdot(14,-15)$, γ') $(3+i\sqrt{2})\cdot(4-3i\sqrt{2})$.
δ') $(8-7i\sqrt{3}):(5+4i\sqrt{3})$.

Περίληψις περιεχομένων Κεφαλαίου V.

$\sqrt{\ }$ Σύμβολον θετικῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Ὁρισμὸς νιοστῆς ρίζης σχετικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἰδιότητες τῶν ριζῶν. 1ον. Ἄν $\alpha^\mu=\beta^\mu$, μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς καὶ $\alpha\beta>0$, τότε $\alpha=\beta$. 2ον. Πᾶς ἀριθμὸς $|\alpha|$ ἔχει δύο ρίζας ἀρτίας τάξεως (ἀντιθέτους). 3ον. Πᾶς ἀριθμὸς $-|\alpha|$ ἔχει μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως, οὐδεμίαν δὲ ἀρτίας.

Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ρίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τῆς ὑπορρίζου ποσότητος μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ὅταν ἡ ὑπόρριζος ποσότης εἶναι θετική. Ἐξαγωγὴ ρίζης ἄλλης ρίζης ποσότητός τινος θετικῆς. Τροπὴ ριζῶν μὲ διαφόρους δείκτας εἰς ἄλλας ἴσας μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην. Γινόμενον ἢ πηλίκον ριζῶν, ὅταν τὰ ὑπόρριζα εἶναι θετικά.

Ὁρισμὸς δυνάμεων μὲ κλασματικὸν ἐκθέτην.

Πότε λέγομεν $ορx=0$ ἢ $ορx=α(\neq 0)$,

Ἰδιότητες τῶν ὁρίων: ἂν $ορx=0$, τότε $ορ(λx)=0$, $λ=$ σταθερόν, ἂν $ορx=α$, τότε $ορ(λx)=λα$, $ορ(x+ψ+ω+...+φ)=ορx+ορψ+ορω+...+ορφ$, $ορ(x\cdot ψ)=ορx\cdot ορψ$, ὅριον $(x:ψ)=ορx:ορψ$, (ἂν $ορψ\neq 0$), $ορ(x^ν)=(ορx)^ν$, $(ορ\sqrt[ν]{x})=\sqrt[ν]{ορx}$.

Ὁρισμὸς ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ (παριστανομένου ὑπὸ μορφὴν δεκαδικοῦ μὲ ἄπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.)

Ὁρισμὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ.

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1.$$

Ὁρισμὸς μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. $α+βi=(α,β)$.

Ὁρισμὸς συζυγῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν $(α,β)$ καὶ $(α,-β)$.

Πράξεις μὲ μιγάδας ἀριθμούς:

1ον $(α,β)+(γ,δ)=(α+γ,β+δ)$ 2ον. $(α,β)-(γ,δ)=(α-γ,β-δ)$

3ον $(α,β)\cdot(γ,δ)=(αγ-βδ,βγ+αδ)$. 4ον $(α,β):(γ,δ)=$

$$\left(\frac{αγ+βδ}{γ^2+δ^2},\ \frac{βγ-αδ}{γ^2+δ^2}\right).$$

Ἰδιότητες μιγάδων ἀριθμῶν:

1ον ἂν $(α,β)=0$, τότε $α=0$, $β=0$. 2ον $(α,β)\cdot(α,-β)=α^2+β^2$.

Ὁρισμὸς μέτρου μιγάδος. Μέτρον τοῦ $(α,β)$ εἶναι τὸ $\sqrt{α^2+β^2}$. Γεωμετρικὴ παράστασις μιγάδος $(α,β)$ διὰ σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων $xOψ$ μὲ συντεταγμένας $α,β$.

Ὁρισμὸς ὁρίσματος μιγάδος ἀριθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Α΄. ΠΕΡΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ*

§ 166. Ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον τὸν x εἶναι ἡ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1), ὅπου τὰ α, β, γ παριστάνουν ἀριθμοὺς πραγματικοὺς ἢ παραστάσεις γνωστάς, καλοῦνται δὲ **συντελεσταί,** τὸ δὲ γ καὶ σταθερὸς ὅρος τῆς (1) ἢ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $\alpha\neq 0$, διότι ἂν $\alpha=0$, τότε ἡ (1) θὰ ἦτο α΄ βαθμοῦ.

Ἡ (1) λέγεται **πλήρης,** ἐὰν οἱ α,β,γ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς [συμβολίζομεν δέ τοῦτο οὕτως : $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0,)$]. Ἂν εἶναι $\beta=0$, ἡ (1) θὰ ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x^2+\gamma=0$, ἂν $\gamma=0$, γίνεται $\alpha x^2+\beta x=0$, ἂν δέ εἶναι $\beta,\gamma=0$, ἡ (1) θὰ εἶναι μορφῆς $\alpha x^2=0$.

Ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω τριῶν τελευταίων μορφῶν λέγεται ἐξίσωσις μὴ **πλήρης.**

Αἱ ρίζαι ἐξισώσεως λέγονται σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι, ἂν αὗται εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι ἢ ἀσύμμετροι. Αἱ ρίζαι ἐξισώσεως λέγονται πραγματικαὶ ἢ φανταστικαὶ (ἢ μιγαδικαί), ἂν εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ ἢ φανταστικοὶ (ἢ μιγάδες).

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 167. Ἐὰν ἐξισώσεως ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἐξίσωσις ἔχουσα τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς δοθείσης, ἂν ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς τῶν δύο μελῶν αὐτῆς.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A=B$ (1), ὅπου τὰ A καὶ B παριστάνουν τὰ δύο μέλη αὐτῆς. Ἐὰν ταύτης ὑψώσωμεν τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A^2=B^2$ (2).

---

* Τὰς ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀνέπτυξε τὸ πρῶτον ὁ Ἕλλην μαθηματικὸς Διόφαντος.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

Πράγματι πᾶσαι αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι ρίζαι καὶ τῆς (2). Διότι, ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τῶν ἀγνώστων τὰς ρίζας αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν, ὅτι ἡ οὕτω προκύπτουσα τιμὴ τοῦ A εἶναι ἴση μὲ τὴν ὁμοίως προκύπτουσαν τιμὴν τοῦ B. Ἄρα καὶ (ἡ τιμὴ τοῦ A)^2=(μὲ τὴν τοῦ B)^2. Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι ἡ (2) εἶναι προφανῶς ἰσοδύναμος μὲ τὴν $A^2-B^2=0$, ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτως: $(A-B)(A+B)=0$. Ἵνα αὕτη ἐπαληθεύηται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων $A-B$ ἢ $A+B$ νὰ εἶναι ἴσος μέ 0. Ἐὰν μὲν εἶναι $A-B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (1), ἂν δὲ εἶναι $A+B=0$, ἐπαληθεύεται ἡ $A=-B$. Ἄρα ἡ $A^2=B^2$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$.

2. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\gamma=0$

§ 168. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $5x^2-48=2x^2$ (1)

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν εὐκόλως τὴν ἰσοδύναμόν της $3x^2=48$, ἢ τὴν $x^2=16$. Αὕτη προκύπτει ἐκ τῆς $x=4$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον. Ἄρα ἡ $x^2=16$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $x=4$ καὶ τῆς $x=-4$. Δηλαδὴ αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι αἱ 4 καὶ -4.

Ἐν γένει πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\gamma=0$ (ἐνῷ εἶναι $\alpha\neq 0$) ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x^2=-\gamma$ ἢ τὴν $x^2=-\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἐπειδὴ αὕτη προκύπτει ἀπὸ τὴν $x=\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, ἂν τὰ μέλη της ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, αἱ ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς $\alpha x^2+\gamma=0$, εἶναι αἱ $x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Ἐὰν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$, αἱ ρίζαι θὰ εἶναι πραγματικαί, ἐνῷ ἂν $-\frac{\gamma}{\alpha}<0$, θὰ εἶναι φανταστικαὶ συζυγεῖς.

Δηλαδὴ ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2 τὰς ρίζας θὰ εἶναι

$\rho_1=\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$, $\rho_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$ εἰς τὴν α′ περίπτωσιν, εἰς δὲ τὴν β′

$$x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}=\pm\sqrt{(-1)\frac{\gamma}{\alpha}}=\pm\sqrt{i^2\frac{\gamma}{\alpha}},$$

$$\text{ἤτοι } \rho_1=i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}, \qquad \rho_2=-i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $5x^2+25=0$. Εἶναι $\alpha=5$, $\gamma=25$ καὶ

$$x=\pm\sqrt{-5} \text{ δηλ. } x=\pm i\sqrt{5}.$$

Παρατήρησις. Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2=0$, ὅπου $\alpha\neq 0$, προφανῶς ἔχει ρίζαν τὴν $x=0$

Ἀσκήσεις

345. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α΄) $4x^2-3=x^2+6$, β΄) $9x^2-0,2=3x^2+15$, γ΄) $\frac{9x}{4}+\frac{x-1}{x}=1$.

346. Ὁμοίως αἱ:

α΄) $\frac{x^2-\alpha^2}{5}-\frac{x^2-\beta^2}{2}=\frac{1}{3}$, β΄) $(x+7)(x-7)=32$, γ΄) $7(2x+5)(2x-5)=44$,

δ΄) $8\left(3x+\frac{1}{2}\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)=946$, ε΄) $x^2-12-2\sqrt{11}=0$.

347. Ὁμοίως αἱ:

α΄) $\left(\frac{2x}{3}\right)^2-\left(\frac{3x}{5}\right)^2=171$, β΄) $(7+x)(9-x)+(7-x)(9+x)=76$,

γ΄) $\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x^4}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

3. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x=0$

§ 169. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3x^2+5x=0$ (1)

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $x(3x+5)=0$. Τὸ γινόμενον $x(3x+5)$ γίνεται 0, ὅταν ὁ εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ 0. Δηλαδή, ὅταν εἶναι $x=0$ καὶ ὅταν $3x+5=0$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x=-\frac{5}{3}$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι 0 καὶ $-\frac{5}{3}$.

Ἐν γένει, ἔστω ἡ μὴ πλήρης ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x=0$ (ἐνῷ εἶναι $\alpha\neq 0$), Γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $x(\alpha x+\beta)=0$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει, ὅτι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶναι αἱ 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀσκήσεις

348. Νὰ λυθοῦν καὶ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἐξισώσεις: α΄) $6x^2-8x+7x^2=12x-8x$.

β′) $\frac{3}{4}x^2 = \frac{7x}{3} - \frac{x}{3}$ γ′) $\frac{x^2}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} = \frac{x^2+\alpha x}{\alpha\beta}$,

δ′) $\frac{x}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{x}{\alpha+\beta} = \frac{x^2-x}{\alpha-\beta}$, ε′) $\frac{(\alpha-x)^4-(x-\beta)^4}{(\alpha-x)^2-(x-\beta)^2} = \frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}$

349. Ὁμοίως αἱ: α′) $1,6x^2-0,8x+1,7x^2=1,2x-8x$, β′) $2,2x^2-7x=1,4x$

4. ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

§ 170. Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ (1) $(\alpha\neq 0)$, θεωροῦμεν τὴν ἰσοδύναμόν της $\alpha x^2+\beta x=-\gamma$.

Προσπαθοῦμεν τώρα νὰ καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τὸ πρῶτον μέλος ταύτης. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη της ἐπὶ 4α καὶ προσθέτομεν εἰς αὐτὰ τὸ β^2, ὅτε εὑρίσκομεν τὴν $4\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$, ἡ ὁποία γράφεται καὶ οὕτω: $(2\alpha x+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$.

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν (1), προκύπτει δὲ ἀπὸ τὴν $2\alpha x+\beta=\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον· ἄρα ἔχει τὰς ρίζας τῶν $2\alpha x+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$. Ἤτοι, ἂν καλέσωμεν ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς (1), θὰ ἔχωμεν

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐφαρμόζοντες τοὺς τύπους τούτους εὑρίσκομεν τὰς ρίζας οἱασδήποτε μορφῆς ἐξισώσεως τοῦ β′ βαθμοῦ.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3x^2-5x+2=0$.

Εἶναι τὸ $\alpha=3$, τὸ $\beta=-5$ καὶ τὸ $\gamma=2$. Ἑπομένως εὑρίσκομεν

$$\rho_1=\frac{5+\sqrt{25-24}}{6}, \quad \rho_2=\frac{5-\sqrt{25-24}}{6}.$$ Ἤτοι $\rho_1=1$ καὶ $\rho_2=\frac{2}{3}$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $4x^2+25=0$.

Ἔχομεν $\alpha=4$, $\beta=0$, $\gamma=25$. Ἑπομένως εὑρίσκομεν

$$\rho_1=\frac{\sqrt{-4\cdot4\cdot25}}{2\cdot4}, \quad \rho_2=\frac{-\sqrt{-4\cdot4\cdot25}}{2\cdot4} \quad \text{ἢ} \quad \rho_1=\frac{4\cdot5\cdot i}{2\cdot4}=\frac{5}{2}i, \quad \rho_2=-\frac{5}{2}i.$$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 350. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις:

α′) $3x^2-3x=8$, β′) $3x^2-\frac{2}{3}x=25$, γ′) $x^2-\frac{3}{4}x=3x+1$, δ′) $x^2-x-2=0$.

351. Ὁμοίως τάς: α′) $x^{-2}-12x^{-1}+27=0$, β′) $9x^{-2}-21x^{-1}+12=0$, γ′) $(x-1)(x-2)=0$, δ′) $x^2=\sqrt{3}(2x-\sqrt{3})$, ε′) $\sqrt{3}\,x^2+\sqrt{19}x+\sqrt{5}=0$, στ′) $(x-1)^2-(3x+8)^2=(2x+5)^2$, ζ′) $(6x-1)^2+(3x+4)^2-(5x-2)(5x+2)=53$,

η′) $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)-\left(\frac{1}{x-1}\right)^2=0$, θ′) $\frac{x(2x+8)}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2=320$,

ι′) $x+\frac{2}{x}=2(1+\sqrt{6})$.

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. 352. Λύσατε καὶ ἐπαληθεύσατε τὰς ἐξισώσεις: α′) $x^2+9\alpha x-10\alpha^2=0$, β) $x^2-2\alpha x-3\alpha^2=0$ γ′) $x^2=5\alpha(10\alpha+x)$ δ′) $x(\alpha+x)=\alpha^2\beta(\beta-1)$, ε′) $x^2-2(\alpha+8)x+32\alpha=0$, στ′) $x^2-2(\alpha+\beta)x+4\alpha\beta=0$

ζ′) $x+\frac{1}{x}=\alpha+\beta+1$, η′) $\frac{(2x-\beta)^2}{2x-\alpha+\beta}=\beta$, θ′) $\left(\frac{\alpha x}{\beta}\right)^2-\frac{1}{\gamma}\left(2\alpha x-\frac{\beta^2}{\gamma}\right)=0$,

ι′) $\frac{\alpha^2+\alpha x+x^2}{\alpha^2-\alpha x+x^2}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$, ια′) Δείξατε, ὅτι, ἵνα αἱ ἐξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0$ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν, πρέπει (καὶ ἀρκεῖ) νὰ ἔχωμεν: $(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)=(\gamma\alpha_1-\gamma_1\alpha)^2$. (Ἂν ρ_1 ἡ κοινὴ ρίζα, εὕρετε τὰ $\rho_1{}^2$, ρ_1, ἐκ τῶν $\alpha\rho^2{}_1+\beta\rho_1+\gamma=0$, $\alpha_1\rho_1{}^2+\beta_1\rho_1+\gamma_1=0$, καὶ ἂν εὑρεθῇ $\rho_1{}^2=\kappa$, $\rho_1=\lambda$, θέσατε $\lambda^2=\kappa$).

Ὁ μ ὰ ς τ ρ ί τ η. 353. α′) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 τῆς ἐξισώσεως β′ βαθμοῦ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, προσθέτομεν εἰς τὰ μέλη αὐτῆς τὸ τετράγωνον τοῦ πηλίκου τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x διὰ τοῦ διπλασίου τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2 κ.τ.λ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$4x^2-23x=-30.$$

β′) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ κατάλληλον ἀριθμόν, ὥστε ὁ συντελεστὴς τοῦ x^2 νὰ γίνῃ τέλειον τετράγωνον κ.τ.λ. Λύσατε οὕτω τὴν ἐξίσωσιν $-3x^2+5x=2$

§ 171. Ἐνίοτε λύομεν τὴν ἐξίσωσιν β′ βαθμοῦ δι' ἀμέσου ἀναλύσεως τοῦ τριωνύμου αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων, ἂν τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ εὐκόλως. Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^2+7x-60=0$. Τρέποντες τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς εἰς γινόμενον παραγόντων ἔχομεν τὴν $(x+12)(x-5)=0$. Ἀλλ' ἵνα τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου μέλους ἰσοῦται μὲ 0, ἀρκεῖ $x+12=0$ ἢ $x-5=0$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x=-12$, $x=5$.

Μὲ τὴν προηγουμένην πορείαν δυνάμεθα ἐνίοτε νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας καὶ ἐξισώσεων ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Π.χ. ἂν ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3-x^2-6x=0$, γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $x(x^2-x-6)=0$ ἢ $x(x-3)(x+2)=0$. Αὕτη δὲ ἔχει ρίζας τὰς $x=0$, $x=3$, $x=-2$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^3-8=0$. Ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $x^3-2^3=0$, ἢ τὴν $(x-2)(x^2+2x+4)=0$ καὶ θὰ ἔχωμεν τὰς ρίζας, ἂν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις $x-2=0$, $x^2+2x+4=0$. Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $x=2$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας $x=-1\pm i\sqrt{3}$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις διὰ τροπῆς τοῦ πρώτου μέλους ἑκάστης εἰς γινόμενον παραγόντων :

354. α′) $x^3-x^2-2x=0$, β′) $4x^3-4x^2-x+1=0$, γ′) $x^3+9x^2+27x+27=0$,

355. α′) $x^3+\alpha x^2+\alpha x+1=0$, β′) $x^3-\lambda x^2+2\lambda x-(\lambda+1)=0$ γ′) $x^3+8+3(x^2-4)=0$.

356. α′) $x^3+\alpha x^2+\alpha x+\alpha^2=0$ β′) $x^4+4x^3+4x^2+x=0$, γ′) $\alpha^4(\alpha+x)^4-\alpha^4x^4=0$.

357. α′) $x^5-x^4-x+1=0$, β′) $x^6-12x^4+48x^2-64=0$, γ′) $x^3+\alpha x\pm(\alpha+1)=0$.

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΛΥΟΜΕΝΑΙ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

§ 172. Ἐνίοτε ἐξισώσεις τινὲς β′ βαθμοῦ ἢ καὶ ἀνωτέρου ἀνάγονται εἰς τὴν λύσιν ἁπλουστέρων ἐξισώσεων β′ βαθμοῦ μὲ τὴν χρησιμοποίησιν βοηθητικῶν ἀγνώστων. Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις

$$(x^2-5x)^2-8(x^2-5x)-84=0.$$

Διὰ τὴν λύσιν αὐτῆς θέτομεν $x^2-5x=\omega$, ὅτε εὑρίσκομεν $\omega^2-8\omega-84=0$.

Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν $\omega=4\pm10$, ἤτοι $\omega_1=14$, $\omega_2=-6$.

Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς τοῦ ω εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-5x=\omega$ καὶ ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2-5x=14$, $x^2-5x=-6$. Ἐκ τῆς λύσεως ἑκάστης τούτων εὑρίσκομεν $x=7$ καὶ $x=-2$ ἐκ τῆς α′ καὶ $x=3$, $x=2$ ἐκ τῆς β′. Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $-2, 2, 3, 7$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

358. $(6x-1)^2-11(6x-1)+28=0$. 359. $2(x-7)^2+4(x-7)-2=0$.

360. $(x+1)^2+2\,\dfrac{(x^2-0,25)}{2x-1}+0,5=8,75$. 361. $(2x-\alpha)^2-\beta(2x-\alpha)-2\beta^2=0$.

362. $(3x-2\alpha+\beta)^2+2\beta(3x-2\alpha+\beta)=\alpha^2-\beta^2$. 363. $(x^2+3)^2-7(x^2+3)-60=0$.

364. $(x^2+7x)^2-6(x^2+7x)-16=0$, 365. $(x^2-7x)^2-13(x^2-7x+18)+270=0$.

366. $\left(2x+4-\dfrac{3}{x}\right)\left(2x-\dfrac{3}{x}+2\right)-35=0$. 367. $\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)^2-\dfrac{26}{5}\left(\dfrac{x-1}{2x+3}\right)+1=0$.

6. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

§ 173. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν, ὡς εἴδομεν.

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \qquad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν εἶναι τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ἐὰν τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐὰν εἶναι τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἐπειδὴ δὲ τὸ $\beta^2-4\alpha\gamma$ γράφεται καὶ οὕτω: $-(4\alpha\gamma-\beta^2)=i^2(4\alpha\gamma-\beta^2)$, ἕπεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ρίζαι εἶναι συζυγεῖς φανταστικαί, ἤτοι:

$$\rho_1=\frac{-\beta+i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}, \qquad \rho_2=\frac{-\beta-i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἑξῆς πίνακα:

1ον. Ἐὰν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι

2ον. Ἐὰν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

3ον. Ἐὰν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι μιγάδες (ἢ φανταστικαὶ) συζυγεῖς.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2-5x+6=0$.

Εἶναι $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=6$, $\beta^2-4\alpha\gamma=25-24=1$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x^2-12x+12=0$.

Εἶναι $\alpha=3$, $\beta=-12$, $\gamma=12$, $\beta^2-4\alpha\gamma=144-144=0$. Ἄρα αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.

Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $2x^2-3x+4=0$ εἶναι $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=4$, $\beta^2-4\alpha\gamma=9-32=-23$. Ἄρα αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι μιγάδες συζυγεῖς.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 368. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν:

α') $x^2-15x+16=0$ β') $x^2+4x+17=0$ γ') $x^2+9x-7=0$
δ') $x^2-3x-21=0$, ε') $x^2=1-7x$, στ') $2x+3=x^2$.

369. Δείξατε, ὅτι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι πραγματικαί, ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι πραγματικοί:

α') $\frac{\alpha^2}{x-\gamma}+\frac{\beta^2}{x-\delta}=1$, β') $\alpha^2x^2+\beta\gamma x-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$,

γ') $x^2=\pi\,(x+2\pi)$. δ') $\frac{\alpha}{x-\alpha}+\frac{\beta}{x-\beta}+\frac{\gamma}{x-\gamma}=0$.

370. Δείξατε, ὅτι, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ εἶναι πραγματικαί, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ καὶ διὰ τὴν $x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+2\beta(\alpha+\gamma)+3\alpha\gamma=0$.

371. Ἐὰν ἡ $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς, δείξατε, ὅτι καὶ ἡ ἐξίσωσις $\beta^2x^2-\alpha\gamma(x-1)^2+\alpha\gamma-1=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς.

372. Δείξατε, ὅτι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι ρηταί, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι ρητοί:

α') $x^2-5\alpha x+4\alpha^2=0$, β') $x(x+2\beta)-24\beta^2=0$, γ') $\alpha\beta\gamma x^2-(\alpha^2\beta^2+\gamma^2)x+\alpha\beta\gamma=0$.

373. Ὁμοίως τῶν: α') $(\alpha+\beta+\gamma)x^2-2(\alpha+\beta)x+(\alpha+\beta-\gamma)=0$.
β') $(4\alpha^2-9\gamma^2\delta^2)x^2+4\alpha(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)x+(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2=0$.

374. Δείξατε, ὅτι αἱ κάτωθι ἐξισώσεις ἔχουν συμμέτρους ρίζας, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ, κ εἶναι ἀριθμοὶ σύμμετροι:

α') $x^2=\alpha^2(2\alpha^2-x)$, β') $2x^2+(\gamma+4)x+2\gamma=0$, γ') $2\gamma x^2-c\beta(x-2\delta)=4\gamma\delta x$.
δ') $2x^2+(6\alpha-10\kappa)x-30\alpha\kappa=0$.

375. Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2+\pi x+\kappa=0$ ἔχει συμμέτρους ρίζας, ὅταν:

α') $\kappa=\left(\frac{\pi+\lambda}{2}\right)\left(\frac{\pi-\lambda}{2}\right)$. β') $\pi=\lambda+\frac{\kappa}{\lambda}$ μὲ λ, κ συμμέτρους.

376. Δείξατε, ὅτι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι φανταστικαὶ ἂν α,β,γ εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $\neq 0$ καὶ $\beta\neq\gamma$.

α') $\alpha^2\beta x^2-2\alpha\beta x+2\beta=0$, β') $x^2+2\alpha x+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$

γ') $x^2-2\sqrt{\alpha\beta}x+17\alpha\beta=0$, δ') $x^2\pm2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2=0$

377. Δείξατε. ὅτι ἡ ἐξίσωσις $(\alpha x+\beta)^2+(\alpha_1x+\beta_1)^2=0$ ἔχει ρίζας φανταστικὰς ἐὰν $\beta\alpha_1-\alpha\beta_1\neq0$.

378. Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ εἶναι φανταστικαὶ δείξατε ὅτι καὶ αἱ τῆς $\alpha x^2+2(\alpha+\beta)x+2\beta+\gamma+\alpha=0$ εἶναι ἐπίσης φανταστικαί.

379. Δείξατε, ὅτι, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $8\alpha^2x(2x-1)+\beta^2=0$ εἶναι φανταστικαί, αἱ τῆς $4\alpha^2x^2+\beta^2(4x+1)=0$ θὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. 380. Διὰ τίνας τιμὰς τοῦ μ αἱ κατωτέρω ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικὰς καὶ ἴσας;

α') $2\mu x^2+(5\mu+2)x+4\mu+1=0$, β') $0{,}5\mu x^2-(2\mu-1)x=3\mu-2$,
γ') $(\mu+1)x^2+3(\mu-1)x+\mu-1=0$, δ') $(2\mu-3)x^2+\mu x+\mu-1=0$.

7. ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΚΑΙ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

§ 174. Ἐκ τοῦ τύπου τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

ἔχομεν : $\rho_1 = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \rho_2 = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ (1)

Ἐὰν μὲν τὰς ἰσότητας αὐτὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\rho_1+\rho_2=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἐὰν δὲ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\rho_1\rho_2=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}$

Εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς συζυγεῖς ποσότητας $-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἤτοι τὸ ἄθροισμα ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν $-\beta$ καὶ $\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτὸ εἶναι $\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)=4\alpha\gamma$. Ἄρα ἔχομεν $\rho_1\rho_2=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$. Π.χ. τῆς ἐξισώσεως $3x^2-5x+6=0$ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{5}{3}$, τὸ δὲ γινόμενον $\frac{6}{3}=2$.

§ 175. Δοθέντος τοῦ ἀθροίσματος καὶ τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν αὐτοὺς διὰ τῆς λύσεως ἐξισώσεως β΄ βαθμοῦ.

Πράγματι, ἂν β εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ γ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\beta x+\gamma=0$ θὰ εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Διότι, ἂν x παριστάνῃ τὸν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ἄλλος θὰ εἶναι $\beta-x$. Οὕτω θὰ ἔχωμεν $x(\beta-x)=\gamma$ ἢ $x^2-\beta x+\gamma=0$. (1)

Ὁ εἷς τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1). Ὁ ἄλλος ἀριθμὸς θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἡ ἄλλη ρίζα τῆς (1), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν αὐτῆς εἶναι β, ὅσον καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν. Π.χ. ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν εἶναι -4 καὶ τὸ γινόμενον -45, οἱ ἀριθμοὶ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς $x^2+4x-45=0$, ἤτοι οἱ 5 καὶ -9.

§ 176. *Παρατήρησις.* Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἂν τὸ α τείνῃ εἰς τὸ 0, ἀλλὰ $\beta\neq 0$, ἡ ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $\beta x+\gamma=0$, τῆς ὁποίας ἡ ρίζα εἶναι $-\frac{\gamma}{\beta}$. Ἡ ἄλλη ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ τείνῃ εἰς τὸ $\pm\infty$. Πράγματ·

ἐπειδὴ τὸ $-\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει εἰς τὸ $(\pm)$ ἄπειρον, ἡ δὲ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως τείνει εἰς τὸ $-\frac{\gamma}{\beta}$, ἡ ἄλλη θὰ τείνῃ εἰς τὸ $\pm\infty$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 381. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν:

α') $2x^2-4x-3=0$ β') $3x^2+8x-12=0$, γ') $x^2-7x+10=0$.

382. Ὁμοίως τῶν: α') $x^2+2\alpha x=3\alpha^2$ β') $x^2-4\alpha x=-3\alpha^2$.

383. Εὕρετε τὴν ἄλλην ρίζαν τῶν ἐξισώσεων:

α') $x^2-5x+6=0$, ἂν ἡ μία εἶναι 2,

β') $x^2-\frac{10}{3}x+1=0$. ἂν ἡ μία εἶναι $\frac{1}{3}$,

γ') $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ ἂν ἡ μία εἶναι α.

Ὁμὰς δευτέρα. 384. α') Ἂν ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εὕρετε τὸ $\rho_1-\rho_2$ διὰ τῶν α, β, γ.

β') Νὰ εὑρεθῇ τὸ $\rho_1^2+\rho_2^2$ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ ἀκολούθως τὸ $\rho_1^3+\rho_2^3$ διὰ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως.

385. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον, τὴν διαφοράν, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων καὶ τῶν κύβων τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\pi x+\kappa=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

386. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται:

α') $x^2-9x+10=0$, β') $x^2+5x-7=0$, γ') $3x^2+7x-6=0$.

387. Προσδιορίσατε τὸ λ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+(\lambda-2)x-(\lambda+3)=0$ νὰ εἶναι μ.

388. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν β καὶ γ, ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχουν λόγον λ.

389. Εὕρετε σχέσιν τῶν α, β, γ, ἵνα, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι ἀνάλογοι τῶν μ καὶ ν.

390. Προσδιορίσατε τὰ β καὶ γ, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $x^2+\beta x+\gamma=0$, εἶναι 4, τῶν δὲ κύβων των 208.

391. Προσδιορίσατε τὸν ν, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\alpha-\beta)x^2+2(\alpha^2-\beta^2)x+\nu=0$ νὰ εἶναι ἴσαι ἢ νὰ ἔχουν γινόμενον 1.

392. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ γ, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3x^2-10x+\gamma=0$ νὰ εἶναι μιγαδικαί; Νὰ ἔχουν γινόμενον $-0{,}75$;

393. Προσδιορίσατε τὸ γ, ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-8x+\gamma=0$ νὰ πληροῦν τὰς ἑξῆς σχέσεις. α') $\rho_1=\rho_2$, β') $\rho_1=3\rho_2$, γ') $\rho_1\rho_2=\pm1$.

394. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς σχέσεις: α') $3\rho_1=4\rho_2+3$, β') $\rho_1^2+\rho_2^2=40$.

8. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΠΡΟΣΗΜΟΥ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

§ 177. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ποῖον εἶναι τὸ πρόσημον ἑκάστης τῶν ριζῶν αὐτῆς, ἄν εἶναι πραγματικαί, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ εἶναι $\rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}$, ἔπεται, ὅτι ἔχομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

Πρόσημα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.
ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma > 0$.

1ον. Ἂν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha} > 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ὁμόσημοι· θετικαὶ μὲν ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἀρνητικαὶ δέ, ἂν εἶναι τὸ $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

2ον. Ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι· ἀπολύτως μεγαλυτέρα ἡ θετικὴ μέν, ἂν εἶναι καὶ $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, ἡ ἀρνητικὴ δέ, ἂν τὸ $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

3ον. Ἂν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ἡ μία ρίζα εἶναι ἴση μὲ 0, ἡ δὲ ἄλλη μὲ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2+8x+12=0$.

Ἔχομεν $\beta^2-4\alpha\gamma=64-48=16=$ θετικός. Ἄρα αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικαί. Ἐπειδὴ δὲ $\rho_1\rho_2=12 > 0$ καὶ $\rho_1+\rho_2=-8 < 0$, θὰ εἶναι ἀρνητικαί.

Ἀσκήσεις

395. Εὕρετε τὸ σῆμα τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται :
α΄) $x^2-8x+12=0$, β΄) $6x^2-15x-50=0$, γ΄) $7x^2+14x-1=0$.

396. Ὁμοίως τῶν ἑξῆς :
α΄) $7x^2-5x-1=0$, β΄) $x^2-3x-4=0$, γ΄) $3x^2-4x-2=0$,
δ΄) $x^2-3x+2=0$, ε΄) $x^2+3x+1=0$, στ΄) $5x^2-15x-1=0$.

9. ΤΡΟΠΗ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΩΣ ΠΡΟΣ Χ

§ 178. Ἔστω ὅτι ζητεῖται νὰ τραπῇ τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$

εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἂν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ 0. αἱ ὁποῖαι λέγονται καὶ ρίζαι τοῦ δοθέντος τριωνύμου, θὰ εἶναι

$$\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad (1) \qquad \rho_1\rho_2=\frac{\gamma}{\alpha}. \quad (2)$$

Ὑποθέτοντες τὸ $\alpha\neq 0$ γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ μὲ τὸ ἴσον αὐτοῦ $-(\rho_1+\rho_2)$ ἐκ τῆς (1) καὶ τὸ $\frac{\gamma}{\alpha}$ μὲ τὸ $\rho_1\rho_2$ ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2]=\alpha(x^2-\rho_1x-\rho_2x+\rho_1\rho_2)=$$
$$=\alpha[(x-\rho_1)x-\rho_2(x-\rho_1)]=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

Ἤτοι τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

Διακρίνομεν τώρα τὰς ἑξῆς περιπτώσεις:

1ον. Ἂν αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$.

2ον. Ἂν εἶναι $\rho_1=\rho_2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2$.

3ον. Ἂν εἶναι $\rho_1=\lambda+\delta i$, $\rho_2=\lambda-\delta i$ (μιγάδες συζυγεῖς), θὰ ἔχωμεν $x-\rho_1=(x-\lambda)-\delta i$, $x-\rho_2=(x-\lambda)+\delta i$, καὶ

$$\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)=\alpha[(x-\lambda)-\delta i][(x-\lambda)+\delta i]=\alpha[(x-\lambda)^2+\delta^2].$$

Ἄρα : $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha[(x-\lambda)^2+\delta^2]$. Ἤτοι :

Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον μὲν τοῦ α ἐπὶ δύο πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, εἰς γινόμενον δὲ τοῦ α ἐπὶ ἓν τέλειον τετράγωνον ἢ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες (συζυγεῖς).

Π.χ. διὰ τὸ $2x^2-3x-2$, τοῦ ὁποίου αἱ ρίζαι εἶναι 2 καὶ $-0{,}5$, ἔχομεν $2x^2-3x-2=2(x-2)(x+0{,}5)$.

Διὰ τὸ $2x^2-12x+18$, τοῦ ὁποίου αἱ ρίζαι εἶναι ἴσαι μὲ 3, ἔχομεν $2x^2-12x+18=2(x-3)^2$.

10. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ Β′ ΒΑΘΜΟΥ ΕΚ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΑΥΤΟΥ

§ 179. Ὅταν δοθοῦν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 ἑνὸς τριωνύμου β′ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τοῦτο θὰ ἰσοῦται μὲ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)=x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2$

πολλαπλασιασμένον τὸ πολὺ ἐπὶ παράγοντά τινα σταθερόν. Ἤτοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ τριώνυμον τοῦτο (παραλειπομένου τοῦ σταθεροῦ παράγοντος) ἐκ τῶν ριζῶν αὐτοῦ.

Π.χ. τὸ τριώνυμον, τὸ ἔχον ρίζας τὰς 3 καὶ $\frac{1}{2}$, θὰ εἶναι ἴσον μὲ $(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-3)\left(\frac{2x-1}{2}\right)=\frac{2x^2-7x+3}{2}$, τὰ δὲ 3 καὶ $\frac{1}{2}$ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2x^2-7x+3=0$.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη 397. Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ τριώνυμα:
α΄) $x^2-9x+18$ β΄) x^2+4x+3, γ΄) $2x^2+3x-2$,
δ΄) $2x^2+12x+18$ ε΄) x^2-4x-5, στ΄) x^2-5x+6,

398. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα:
α΄) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, β΄) $\frac{x^2+4x+3}{x^2-4x-5}$, γ΄) $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 399. Εὕρετε ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους ἔχουσαν ρίζας:
α΄) 3 καὶ 0,5 β΄) $3\pm\sqrt{2}$, γ΄) $4\pm\sqrt{5}$, δ΄) $\pm i\sqrt{2}$
δ) $\alpha\pm\beta$, στ΄) $\alpha\pm\sqrt{\beta}$, ζ΄) $\alpha\pm i\sqrt{\beta}$, η΄) $\alpha\pm\sqrt{\alpha}$.

400. Σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας ρίζας τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:
α΄) $\frac{2x-5}{9x}-\frac{8}{x-15}=1$, β΄) $x^2=\sqrt{3}(2x-\sqrt{3})$,
γ΄) $x^2+\beta\left(\frac{x-\alpha}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}\right)=2\alpha\beta(x-\alpha\beta)$.

401. Σχηματίσατε τὴν ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσαν ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\sqrt{3}x^2+\sqrt{17}x+\sqrt{5}=0$.

402. Σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας ρίζας τοὺς κύβους τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων: α΄) $2x(x-\alpha)=\alpha^2$, β΄) $x^2+\alpha x=\alpha^2\beta(\beta+1)$.

403. Σχηματίσατε τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου της εἶναι 7, τοῦ πρωτοβαθμίου -14 καὶ ἡ μία τῶν ριζῶν -5.

404. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἢ τῆς $x^2+\pi\kappa+\kappa=0$, σχηματίσατε τὰς ἐξισώσεις τὰς ἐχούσας τὰς κάτωθι ρίζας:
α΄) x_1^2, x_2^2, β΄) $-x_1^2$, $-x_2^2$, γ΄) $x_1^2x_2$, $x_1x_2^2$, δ΄) x_1+2x_2, $2x_1+x_2$,
ε΄) x_1-2x_2, x_2-2x_1, στ΄) $x_1^2+x_2$, $x_1+x_2^2$, ζ΄) $\frac{x_1+x_2}{2x_2}$, $\frac{x_1+x_2}{2x_1}$,
η΄) $\alpha x_1^2+\beta x_1x_2+\gamma x_2^2$, $\gamma x_1^2-\beta x_1x_2+\alpha x_2^2$. θ΄) $\frac{x_1}{x_2^3}$, $\frac{x_2}{x_1^3}$.

405. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῶν παραστάσεων, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

α') $(\alpha x_1+\beta)^2+(\alpha x_2+\beta)^2$, β') $(\beta x_1^2+\gamma)(\beta x_2^2+\gamma)$,

γ') $(\gamma x_1+\beta)^{-2}+(\gamma x_2+\beta)^{-2}$

406. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $5x^2-12x+1=0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $x_1^3-x_1^2x_2+x_1x_2^2-x_2^3$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

407. Ἐὰν x_1, x_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x-35=0$, ὑπολογίσατε τὴν τιμὴν τῆς παραστάσεως $\frac{x_1+x_2}{x_1}-\frac{x_1+x_2}{x_2}$, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

11. ΠΡΟΣΗΜΑ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ΔΙΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x

§ 180. Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ὅτι τὸ x λαμβάνει πραγματικὰς τιμάς. Ἂν αἱ ρίζαι αὐτοῦ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω δὲ ὅτι εἶναι $\rho_1<\rho_2$), θὰ ἔχωμεν

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

α') Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μικρότεραι τοῦ ρ_1, ἑπομένως καὶ τοῦ ρ_2. Τότε τὰ $x-\rho_1$, $x-\rho_2$ εἶναι ἀρνητικά, τὸ δὲ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ (ὡς γινόμενον ἀρνητικῶν παραγόντων) εἶναι θετικόν, καὶ τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ α.

β') Ἔστω, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ρ_2, ἑπομένως καὶ τοῦ ρ_1. Τότε τὰ $x-\rho_1$ καὶ $x-\rho_2$ εἶναι θετικά, ἐπίσης καὶ τὸ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι θετικόν, τὸ δὲ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ α.

γ') Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ ρ_1, ἀλλὰ μικρότεραι τοῦ ρ_2, ἤτοι $\rho_1 < x < \rho_2$. Τότε τὸ μὲν $x-\rho_1$ εἶναι θετικόν, τὸ $x-\rho_2$ ἀρνητικόν, τὸ δὲ $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι ἀρνητικὸν (ὡς γινόμενον δύο ἑτεροσήμων παραγόντων), ἄρα τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἔχει πρόσημον ἀντίθετον τοῦ α.

δ') Ἂν αἱ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἴσαι ἢ μιγάδες ἀριθμοὶ ἐν γένει, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x πραγματικὴν καὶ διάφορον τῶν ριζῶν, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α. Διότι, ἂν μὲν εἶναι $\rho_1=\rho_2$ τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2$. Ἤτοι ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α διὰ κάθε $x\neq\rho_1$. Ἂν δὲ αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἑπομένως ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ὅταν τὸ x λάβῃ τιμὴν πραγματικὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ πρόσημον τοῦ α, ἐνῷ διὰ τιμὴν τοῦ x κειμένην, μεταξὺ τῶν ριζῶν ἔχει πρόσημον ἀντίθετον τοῦ α.

Ἀσκήσεις

408. Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x τὰ κάτωθι τριώνυμα θὰ ἔχουν τιμὰς θετικάς; ἀρνητικάς;
α΄) $2x^2-16x+24$, β΄) $-2x^2+16x-24$, γ΄) $2x^2-16x+32$, δ΄) $0,75x^2-6x+1$.
ε΄) x^2-7x-1, στ΄) x^2+x-1, ζ΄) $2x^2-6x-3$,

409. Ὁμοίως τὰ τριώνυμα:
α΄) $-2x^2-16x-32$, β΄) $2x^2-16x+40$, γ΄) $-2x^2+16x-40$, δ΄) $-x^2-3x+2$.

12. ΘΕΣΙΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΡΙΖΑΣ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ

§ 181. Δοθέντος τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ ἀριθμοῦ πραγματικοῦ ἔστω λ, ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν αὐτοῦ ὡς πρὸς καθεμίαν τῶν **(ὑποτιθεμένων πραγματικῶν)** ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τεθῇ $x=\lambda$ εἰς τὸ τριώνυμον, ἐὰν τὸ $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ ἔχῃ πρόσημον ἀντίθετον τοῦ προσήμου τοῦ α, τότε αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ὁ δὲ λ περιέχεται μεταξὺ τούτων.

Ἐὰν ὅμως τὸ $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ α, τότε ὁ λ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου, ἔστω ρ_1, ρ_2 (ἐνῷ ὑποτίθεται $\rho_1<\rho_2$). Μένει νὰ εὕρωμεν, ἂν ὁ λ εἶναι μικρότερος τῆς μικροτέρας ρίζης ρ_1. ἢ μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρ_2.

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ, ἂν εἶναι μικρότερος ἢ μεγαλύτερος ἀπὸ ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νὰ περιέχηται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Διότι ἂν εἶναι μικρότερος ἀπὸ τοιοῦτον ἀριθμόν, τότε, δεδομένου, ὅτι εἶναι ὁ λ ἐκτὸς τῶν ριζῶν, θὰ εἶναι προφανῶς πρὸ αὐτῶν. Ἐνῷ ἂν εἶναι μεγαλύτερος τοιούτου ἀριθμοῦ, θὰ εἶναι ὁ λ μετὰ τὰς ρίζας.

Ἀριθμὸς ὅμως περιεχόμενος μεταξὺ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 εἶναι ὁ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ δηλ. τὸ ἡμιάθροισμα αὐτῶν, διότι ἐκ τῆς $\rho_1<\rho_2$ προκύπτουν αἱ $2\rho_1<\rho_1+\rho_2$ καὶ $\rho_1+\rho_2<2\rho_2$, δηλ. $2\rho_1<\rho_1+\rho_2<2\rho_2$, ὁπότε $\rho_1<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}<\rho_2$.

Ἂν λοιπὸν εἶναι $\lambda < -\frac{\beta}{2\alpha}$, ὁ λ θὰ εἶναι πρὸ τῶν ριζῶν, καὶ ἂν $\lambda > -\frac{\beta}{2\alpha}$, ὁ λ θὰ εἶναι μετὰ τὰς ρίζας.

Ἐκ τούτων ὁρίζεται ἡ θέσις τοῦ λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω, ὅτι δίδεται τὸ τριώνυμον x^2+3x-2 καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν θέσιν τοῦ -1 π.χ. ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου, χωρὶς νὰ εὑρεθοῦν αὗται.

Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ σημεῖον τοῦ $(-1)^2+3(-1)-2$. Τοῦτο δίδει ἐξαγόμενον $1-3-2=-4$, δηλαδὴ ἑτερόσημον τοῦ συντελεστοῦ 1 τοῦ x^2 εἰς τὸ δοθὲν τριώνυμον. Ἄρα ὁ -2 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ δοθέντος τριωνύμου.

Ἔστω, ὅτι διὰ τὸ αὐτὸ τριώνυμον ζητοῦμεν τὴν θέσιν π.χ. τοῦ ἀριθμοῦ 1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας του, χωρὶς νὰ εὑρεθοῦν αὗται. Εἶναι $1^2+3\cdot1-2=2$, δηλαδὴ ὁμόσημον τοῦ συντελεστοῦ 1 τοῦ x^2. Ἔπειτα παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, διότι $\Delta = 9+8 > 0$. Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $-\frac{3}{2}$. Καὶ ἐπειδὴ $1 > -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$, ὁ 1 θὰ εἶναι μετὰ τὰς ρίζας, δηλ. μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης.

2ον. Ἔστω τὸ τριώνυμον $-3x^2+2x+1$ καὶ ὅτι ζητοῦμεν τὴν θέσιν τοῦ 0, ὡς πρὸς τὰς ρίζας του, χωρὶς νὰ εὑρεθοῦν αὗται.

Θέτομεν $x=0$ εἰς τὸ τριώνυμον καὶ εὑρίσκομεν $-3\cdot0^2+2\cdot0+1=1$, ἤτοι ἐξαγόμενον ἑτερόσημον τοῦ $\alpha=-3$ συντελεστοῦ τοῦ x^2 εἰς τὸ δοθὲν τριώνυμον. Ἄρα τὸ 0 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου. Διὰ τὸ αὐτὸ τριώνυμον, ἂν ζητοῦμεν τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ 2, ἔχομεν $-3\cdot2^2+3\cdot2+1=-12+6+1=-5$, ἤτοι ὁμόσημον τοῦ $\alpha=-3$. Ἔπειτα εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, διότι $\Delta=4+12>0$. Ἄρα τὸ 2 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου. Εἶναι $-\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{2}{2(-3)}=\frac{1}{3}$ καὶ $2 > \frac{1}{3}$, ἄρα τὸ 2 εἶναι μετὰ τὰς ρίζας, δηλ. μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρίζης τοῦ τριωνύμου.

Ἀσκήσεις

410. Τίς ἡ θέσις τῶν 1, 7, 5, -5, -1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων:
α') $x^2+3x-4=0$, β') $2x^2+7x-1=0$, γ') $x^2-4x+3=0$.

411. Εὕρετε τὴν θέσιν τοῦ ἀριθμοῦ α΄) $\frac{3}{4}$ β΄) -1, γ΄) $0{,}5$ δ΄) $-0{,}25$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἑκάστου τῶν τριωνύμων:

α΄) $2x^2-6x+1$, β΄) $-x^2+x-4$, γ΄) $7x^2-4x-1$,

δ΄) $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}-1$, ε΄) $3x^2+6x-4$, στ΄) $-x^2-7x-2$,

ζ΄) $\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}-1$, η΄) $4x^2-7x+1$, θ΄) $0{,}5x^2+0{,}6x-1$.

13. ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

§ 182. Ἐάν, ὅταν $x=\lambda_1$ καὶ $x=\lambda_2$ (ὅπου οἱ λ_1, λ_2 εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοὶ καὶ διάφοροι μεταξύ των), τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ λαμβάνῃ τιμὰς ἑτεροσήμους, τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ἐπειδή, ἂν αἱ ρίζαι ἦσαν ἴσαι ἢ μιγαδικαὶ τὸ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ οὐδέποτε θὰ ἤλλαζε πρόσημον, ὥστε νὰ ἐλάμβανε τιμὰς ἑτεροσήμους· πάντοτε θὰ ἦτο ὁμόσημον τοῦ α (§ 180 δ΄) Μεταξὺ δὲ τῶν λ_1 καὶ λ_2 περιέχεται μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Διότι, ἂν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἐπειδὴ διὰ $x=\lambda_1$, $x=\lambda_2$ αἱ τιμαὶ τοῦ τριωνύμου εἶναι ἑτερόσημοι ἐξ ὑποθέσεως, μία ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ὁμόσημος τοῦ α καὶ ἡ ἄλλη ἑτερόσημος τοῦ α.

Ἄρα, εἷς ἐκ τῶν λ_1, λ_2 θὰ εἶναι ἐντὸς τῶν ριζῶν καὶ ὁ ἄλλος ἐκτὸς αὐτῶν.

Οὕτως ἂν $\lambda_2 > \lambda_1$ καὶ $\rho_2 > \rho_1$ θὰ ἔχωμεν ἢ τὴν διάταξιν $\rho_1\ \lambda_1\ \rho_2\ \lambda_2$ ἢ τὴν $\lambda_1\ \rho_1\ \lambda_2\ \rho_2$ ἐκ τῶν ὁποίων φαίνεται, ὅτι μεταξὺ λ_1, λ_2 περιέχεται μία μόνον ρίζα, εἴτε ἡ ρ_2 εἴτε ἡ ρ_1.

Ἐπὶ τῆς ἰδιότητος αὐτῆς στηριζόμενοι ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς (πραγματικὰς) ρίζας ἐξισώσεως κατὰ προσέγγισιν (ἂν δὲν εὑρίσκωνται ἀκριβῶς).

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $8x^2-2x-3=0$.

Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x δύο ἀριθμοὺς (πραγματικούς), ὥστε τὰ ἐξαγόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν ἐκ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x εἰς τὸ $8x^2-2x-3$, νὰ εἶναι ἑτερόσημα. Ὅταν $x=0$, εὑρίσκομεν -3, ὅταν $x=1$, εὑρίσκομεν 3. Ἑπομένως μεταξὺ 0 καὶ 1 περιέχεται μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Λαμβάνομεν τώρα τὴν μέσην τιμὴν μεταξὺ τοῦ 0 καὶ 1, δηλαδὴ θέτομεν $x=0{,}5$, ὅτε εὑρίσκομεν $2-4=-2$· ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ρίζα περιέχεται μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ τοῦ 1. Ἡ μέση τιμὴ μεταξὺ τοῦ 0,5 καὶ 1 εἶναι 0,75 καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $x=0{,}75$ εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ x εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Ὅταν $x=-1$, ἔχομεν $8+2-3=7$. Ἄρα ἡ ἄλλη ρίζα περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ -1. (Προσεγγίσατε περισσότερον, ἢ εὕρετε αὐτήν). Τὸν τρόπον αὐτὸν τῆς εὑρέσεως πραγματικῶν ριζῶν κατὰ προσέγγισιν δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ὁμοίως καὶ εἰς ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ.

Ἀσκήσεις

412. Εὕρετε μὲ προσέγγισιν τὰς πραγματικὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξισώσεων διὰ τῆς μεθόδου τῆς προσεγγίσεως (ἐὰν δὲν εὑρίσκωνται ἀκριβῶς καὶ μὲ εὐκολίαν).
α′) $x^2-5x+3=0$, β′) $3x^2-6x+2=0$, γ′) $2x^2+3x-8=0$,
δ′) $x^3-3x^2+5x-1=0$, ε′) $2x^2+6x-5=0$, στ′) $x^3+x-1=0$,
ζ′) $x^4-3x^3+4x^2-3=0$, η′) $x^4-3x^2-x+1=0$.

14. ΛΥΣΙΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 183. Πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τὸν x, εἶναι ἐν γένει τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0$, ἢ $\alpha x^2+\beta x+\gamma < 0$ (ὅπου ὑποτίθεται ὅτι εἶναι $\alpha \neq 0$).

Ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σήματα πάντων τῶν ὅρων, ὅτε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται. Ὥστε πᾶσα ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0$, ὅπου τὸ α δύναται νὰ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα $\alpha x^2+\beta x+\gamma > 0$ (1) παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2 τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου τῆς (1) καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (ἔστω $\rho_1 < \rho_2$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)$. Ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ εἶναι θετικόν.

Ἂν εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τὸ ἀνωτέρω γινόμενον, ὡς γνωστόν, γίνεται θετικὸν διὰ $x < \rho_1$ καὶ $x > \rho_2$. Ἄρα αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα, εἶναι πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι τῆς μικροτέρας ρίζης ρ_1 καὶ οἱ μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ρ_2 τοῦ τριωνύμου.

Ἂν εἶναι $\alpha < 0$, τότε διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν ρ_1 καὶ ρ_2, τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$ ἔχει σημα ἀντίθετον τοῦ α, δηλαδὴ θετικόν. Ἑπομένως αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν (1) εἶναι πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ ρ_1 καὶ ρ_2.

Ἂν αἱ ρίζαι ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι ἴσαι καὶ εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τότε διὰ πᾶσαν τιμὴν διάφορον τῆς ρίζης τοῦ τριωνύμου τὸ γινόμενον $\alpha(x-\rho_1)^2$ εἶναι θετικόν. Δηλαδὴ τότε πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἐκτὸς τῆς ρ_1 ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα.

Ἂν ὅμως εἶναι τὸ $\alpha < 0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται διὰ καμμίαν τιμὴν πραγματικὴν τοῦ x. Διότι τότε εἶναι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-\rho_1)^2$ καὶ ἀφοῦ τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, τὸ $\alpha(x-\rho_1)^2$ εἶναι ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἐκτὸς τῆς ρ_1, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται.

Ἂν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν μὲν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ἂν εἶναι $\alpha > 0$, δι' οὐδεμίαν δέ, ἂν εἶναι $\alpha < 0$. Διότι τὸ τριώνυμον τῆς (1) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τὸ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἤτοι ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω π.χ., ὅτι ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^2-2x+8 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου x^2-2x+8 εἶναι μιγάδες καὶ εἶναι $\alpha=1 > 0$. Ἄρα ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $x^2-x-6 > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου x^2-x-6 εἶναι αἱ -2 καὶ 3 καὶ τὸ $\alpha=1>0$ Ἑπομένως αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ x αἱ ἐπαληθεύουσαι τὴν ἀνισότητα εἶναι αἱ $x > 3$ καὶ $x < -2$.

§ 184. Ἔστω, ὅτι ἔχομεν π.χ. τὴν ἀνισότητα.

$$x(x^2-3x+2)(2x^2+7x+3)(x^2+x+1) > 0$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ x^2+x+1 ἔχει ρίζας φανταστικάς, ἄρα ἔχει τιμὴν θετικὴν δι' οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἀνισότης εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἑπομένην,

$$x(x^2-3x+2)\ (2x^2+7x+3) > 0. \qquad (2)$$

Ὁ πρῶτος παράγων x μηδενίζεται ὅταν $x = 0$, ὁ δὲ δεύτερος x^2-3x+2, ὅταν $x=1$, $x=2$ καὶ ὁ τρίτος παράγων $2x^2+7x+3$, ὅταν $x = -\frac{1}{2}$, $x = -3$

Αἱ πέντε αὗται τιμαὶ τοποθετούμεναι κατὰ σειρὰν μεγέθους εἶναι

$$-3 < -\frac{1}{2} < 0 < 1 < 2.$$

α΄) Ὅταν $x < -3$, ὁ πρῶτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι ἀρνητικός, ὁ (x^2-3x+2) θα ἔχῃ τὸ σῆμα τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2, ὅταν $x < 1$, ἑπομένως καὶ ὅταν $x<-3<1$, τὸ x^2-3x+2 θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον θετικόν. Ὁμοίως, ὁ τρίτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) ὁ $2x^2+7x+3$, ὅταν $x<-3$, θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x^2, ἤτοι θετικόν. Ὅθεν τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων τῆς (2) εἶναι ἀρνητικόν.

β΄) Ὅταν εἶναι $-3 < x < -\frac{1}{2}$, ὁ πρῶτος παράγων εἶναι ἀρνητικὸς ὁ δεύτερος θετικὸς (διότι τὸ x ἔχει τιμὴν κειμένην ἐκτὸς τῶν ριζῶν του) καὶ ὁ τρίτος εἶναι ἀρνητικὸς (διότι ὁ x ἔχει τιμὴν κειμένην μεταξὺ τῶν ριζῶν του). Ἑπομένως τὸ γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων εἶναι θετικόν.

γ΄) Ὅταν εἶναι $-\frac{1}{2} < x < 0$, ὁ πρῶτος παράγων εἶναι ἀρνητικὸς οἱ ἄλλοι δύο θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀρνητικόν.

δ΄) Ὅταν $0 < x < 1$, ὁ πρῶτος παράγων εἶναι θετικός, ὁ δεύτερος θετικὸς καὶ ὁ τρίτος θετικός, ἄρα τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικόν.

ε΄) Ὅταν ληφθῇ $1 < x < 2$, ὁ πρῶτος καὶ τρίτος παράγων τῆς ἀνισότητος (2) εἶναι θετικοί, ὁ δεύτερος ἀρνητικός, ἄρα τό γινόμενον τῶν τριῶν παραγόντων εἶναι ἀρνητικόν.

στ΄) Τέλος ἂν ληφθῇ $x > 2$, οἱ τρεῖς παράγοντες τῆς (2) εἶναι θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον εἶναι θετικόν.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται, ὅταν $-3 < x < -\frac{1}{2}$ ἢ ὅταν $0 < x < 1$ ἢ ὅταν $x > 2$.

Ἐν γένει, ἂν ἔχωμεν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $A \cdot B \cdot \Gamma > 0$, ὅπου A, B, Γ, παριστάνουν πολυώνυμα ὡς πρὸς x πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ, εὑρίσκομεν πρῶτον διὰ τίνας τιμὰς τοῦ x ἕκαστον τῶν A, B, Γ, γίνεται θετικὸν καὶ διὰ τίνας γίνεται ἀρνητικόν. Τοῦτο εὑρίσκομεν βοηθούμενοι ἀπὸ τὰς ρίζας ἑκάστου τῶν A, B, Γ.

Ἀκολούθως ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x κρατοῦμεν ὡς λύσεις τῆς ἀνισότητος ἐκείνας, διὰ τὰς ὁποίας τὸ γινόμενον Α·Β·Γ γίνεται θετικόν.

§ 185. Ἂν ἔχωμεν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $\frac{A}{B} > 0$, ἀνάγομεν αὐτὴν εἰς τὴν ἰσοδύναμόν της ἀνισότητα τῆς μορφῆς $A \cdot B > 0$, ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἄνισα ἐπὶ B^2, ὅτε λαμβάνομεν $\frac{A \cdot B^2}{B} > 0$ ἢ $A \cdot B > 0$, τὴν ὁποίαν ἐξετάζομεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἐξετάσωμεν χωριστὰ πότε εἶναι $A > 0$ καὶ $A < 0$, καθὼς καὶ πότε εἶναι $B > 0$ καὶ $B < 0$ καὶ ἀκολούθως νὰ κρατήσωμεν ἐκείνας ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας τὸ $\frac{A}{B}$ εἶναι θετικόν.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $1+\frac{x-4}{x-3} > \frac{x-2}{x-1}$.

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $1+\frac{x-4}{x-3}-\frac{x-2}{x-1} > 0$ ἢ τὴν $\frac{(x-3)(x-1)+(x-4)(x-1)-(x-2)(x-3)}{(x-3)(x-1)} > 0$, καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων (εἰς τὸν ἀριθμητὴν) ἔχομεν τὴν $\frac{x^2-4x+1}{(x-3)(x-1)} > 0$.

Αἱ ρίζαι τοῦ x^2-4x+1 εἶναι $2 \pm \sqrt{3}$, αἱ δὲ τοῦ παρονομαστοῦ τῆς τελευταίας ἀνωτέρω ἀνισότητος αἱ 1 καὶ 3. Θέτοντες $x=1$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἀνισότητος εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον $-2 < 0$. Ἄρα τὸ 1 περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ ἀριθμητοῦ. Θέτομεν $x=3$ εἰς τὸν ἀριθμητὴν τῆς ἀνισότητος καὶ εὑρίσκομεν $9-12+1=-2 < 0$. Ἄρα ἡ ρίζα 3 τοῦ παρονομαστοῦ περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ ἀριθμητοῦ. Οὕτως ἔχομεν $2-\sqrt{3} < 1 < 3 < 2+\sqrt{3}$.

Παρατηροῦμεν τώρα, ὅτι, ὅταν εἶναι $x < 2-\sqrt{3}$, ἢ $x > 2+\sqrt{3}$ ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος εἶναι θετικοί, ἤτοι αὕτη ἐπαληθεύεται. Ἐπίσης ὅτι, ὅταν $1 < x < 3$ καὶ οἱ δύο ὅροι εἶναι ἀρνητικοί, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{x^2-4x+1}{(x-3(x-1)}$ εἶναι θετικὸν καὶ ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται. Ἐνῷ ὅταν $2-\sqrt{3} < x < 1$ ἢ $3 < x < 2+\sqrt{3}$, ἡ ἀνωτέρω ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται, διότι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἑτερόσημοι καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα γίνεται ἀρνητικόν.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 413. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἀνισότητες:

α') $x^2+3x-4>0$, β') $x^2+3x-6>0$, γ') $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{4}<-2$.

414. Εὕρετε τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς ἐπαληθευούσας τὰς δύο ἀνισότητας: α') $x^2-12x+32>0$ καὶ $x^2-13x+22<0$, β') $x^2-3x+2>0$ καὶ $4x^2+5x+1<0$

415. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

α') $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}>1$, β') $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-2}>0$, γ') $3+\frac{1}{3-x}>\frac{1}{5x+1}$.

Ὁμὰς δευτέρα. 416. Νὰ λυθοῦν αἱ κατωτέρω ἀνισότητες, ἂν εἶναι $\alpha<\beta<\gamma<\delta$: α') $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)>0$, β') $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)>0$.

417. Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

α') $4x^3-10x^2+18x<0$, β') $3x^3-5x^2+2x>0$, γ') $x^3-x^2+4x>0$.

418. Μεταξὺ τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ περιέχηται ὁ μ. ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\mu x^2+(\mu-1)x+2\mu=8$ ἔχῃ ρίζας πραγματικάς; μιγάδας;

419. Ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ ὁ λ, ἵνα ἡ $x^2+(2\lambda+1)x>-19$ ἐπαληθεύηται διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x;

15. ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ΔΙΑ ΠΑΣΑΣ ΤΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑΣ ΤΙΜΑΣ ΤΟΥ x

§ 186. Ἔστω π.χ. τὸ τριώνυμον $7x^2-5x+6$.

Ἂν παραστήσωμεν αὐτὸ μὲ ψ, θὰ ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν

$$\psi=7x^2-5x+6 \qquad (1)$$

Ἂν τὸ x ἀντικαταστήσωμεν μὲ μίαν τιμὴν πραγματικὴν π.χ. μὲ $x=3$, τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν τιμὴν $7\cdot3^2-5\cdot3+6$. (2)

Ἂν εἰς τὴν (1) θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x τὴν τιμὴν $3+\varepsilon$, ὅπου τὸ ε παριστάνει ποσότητά τινα πραγματικήν, θὰ ἔχωμεν ὡς τιμὴν τοῦ ψ τὴν $\psi=7(3+\varepsilon)^2-5(3+\varepsilon)+6=7(3^2+2.3\varepsilon+\varepsilon^2)-5.3-5\varepsilon+6=$

$$(7\cdot3^2-5\cdot3+6)+7\cdot2\cdot3\varepsilon+7\varepsilon^2-5\varepsilon. \qquad (3)$$

Ἐὰν ἀπὸ τὴν τιμὴν αὐτὴν (3) τοῦ ψ ἀφαιρέσωμεν τὴν προηγουμένην τιμὴν αὐτοῦ (2), εὑρίσκομεν διαφορὰν τὴν

$$7(3+\varepsilon)^2-5(3+\varepsilon)+6-7\cdot3^2+5\cdot3-6=7\cdot2\cdot3\cdot\varepsilon+7\varepsilon^2-5\varepsilon. \qquad (4)$$

Ἂν τώρα ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ε εἶναι ποσότης ὅσον θέλομεν μικρὰ ἀπολύτως, τότε καὶ ἡ ποσότης (4) γίνεται ὅσον θέλομεν μικρὰ (ἀπολύτως). Διότι ἕκαστος τῶν ὅρων της περιέχει τὸ ε, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐλαττώσωμεν, ὅσον θέλομεν (ἀπολύτως). Παρατηροῦμεν λοιπόν, ὅτι εἰς ἐλαχίστην (ἀπολύτως) μεταβολὴν τῆς τιμῆς 3 τοῦ x ἀντιστοιχεῖ ἐλαχίστη (ἀπολύτως) μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως (1). Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι:

Τὸ τριώνυμον (1) εἶναι συνεχὲς ὡς πρὸς x ἢ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x=3$.

Ἀλλ' οἱανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τοῦ x εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ τριώνυμον εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x διὰ πᾶσαν τοιαύτην τιμὴν τούτου.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι πᾶν τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ὁρίζομεν τὴν συνέχειαν οἱασδήποτε συναρτήσεως τοῦ x. Ἂν δὲ συνάρτησίς τις δὲν εἶναι συνεχὴς διά τινα τιμὴν τοῦ x, λέγεται **ἀσυνεχὴς** διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Ἐκ τούτων ἕπεται, ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπό τινος πραγματικῆς τιμῆς λ εἰς ἄλλην μ λαμβάνον συνεχῶς τὰς ἐνδιαμέσους τιμὰς τὰς κειμένας μεταξὺ τῶν λ καὶ μ, τὸ τριώνυμον θὰ μεταβάλλεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ εἰς τὴν τιμὴν $\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$ λαμβάνον τιμὰς ἐν συνεχείᾳ.

β') Ἐὰν μεταβλητή τις x λαμβάνῃ ἄπειρον πλῆθος πραγματικῶν τιμῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ὑπερβαίνουν πάντα ἀριθμὸν θετικὸν (ὁσονδήποτε μεγάλον), τότε λέγομεν ὅτι αὕτη **τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον** $(+\infty)$ καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ $\to\infty$. Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὐτῆς ἀπό τινος καὶ ἐφ' ἑξῆς εἶναι μικρότεραι παντὸς ἀριθμοῦ ἀρνητικοῦ (ὁσονδήποτε μικροῦ), λέγομεν, ὅτι ἡ x τείνει εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον $(-\infty)$ καὶ τὸ σημειώνομεν μὲ $x\to-\infty$.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅπου $\alpha\neq 0$. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πῶς μεταβάλλεται τοῦτο, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $+\infty$ λαμβάνον ἐν συνεχείᾳ πάσας τὰς ἐνδιαμέσους πραγματικὰς τιμάς. Γράφομεν τὸ τριώνυμον ὡς ἑξῆς:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta x}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right]$$
$$=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right].$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν μὲν εἶναι $\alpha>0$, τὸ τριώνυμον θὰ ἔχῃ τὸ πρόσημον τῆς ποσότητος, ἡ ὁποία εἶναι ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ἂν δὲ εἶναι $\alpha<0$, θὰ ἔχῃ ἀντίθετον πρόσημον αὐτῆς.

1ον. Ἔστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha > 0$. Ὅταν τὸ $x \to -\infty$, τὸ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ $\to +\infty$, ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ὡρισμένος ἀριθμὸς $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$, μένει διαφορά, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

Ὥστε, ὅταν $x \to -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $+\infty$.

Ἐὰν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ $-\infty$ λαμβάνον τιμὰς μικροτέρας τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι ἀρνητικόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ εἶναι θετκὸν καὶ ἐλαττοῦται συνεχῶς

Ὅταν τὸ x γίνῃ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ γίνεται 0, τὸ δὲ τριώνυμον γίνεται $-\alpha\cdot\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$. Ὅταν τὸ x αὐξάνεται ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ συνεχῶς τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$ ἡ ποσότης $x+\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετικὴ καὶ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τὸ 0 τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

Ἄρα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ τριωνύμου αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\alpha\cdot\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

2ον. Ἔστω, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha < 0$. Ὅταν τὸ $x \to -\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει εἰς τὸ $-\infty$, διότι τὸ μὲν $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ τείνει εἰς τὸ $+\infty$, ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right] \to -\infty$, ἐπειδὴ εἶναι $\alpha < 0$.

Ὅταν τὸ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ τριώνυμον γίνεται $-\alpha\cdot\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$.

Ὅταν τὸ $x \to +\infty$, τὸ τριώνυμον τείνει πάλιν εἰς τὸ $-\infty$, ἕνεκα τοῦ ὅτι εἶναι $\alpha < 0$. Ἤτοι:

Ὅταν τὸ $\alpha > 0$ καὶ τὸ x μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty \ldots -\frac{\beta}{2\alpha} \ldots +\infty$, τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$, μέχρι τοῦ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἔπειτα αὐξάνεται συνεχῶς μέχρι τοῦ $+\infty$, ὅταν δὲ εἶναι τὸ $\alpha < 0$, διὰ τὴν αὐτὴν συνεχῆ μεταβολὴν τοῦ x, τὸ τριώνυμον αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$, γίνεται $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ καὶ ἐλαττοῦται πάλιν συνεχῶς μέχρι $-\infty$.

γ') Ὅταν μία τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει μεταβλητὴ ποσότης, εἶναι μεγαλυτέρα πασῶν τῶν ἄλλων τιμῶν πλησίον αὐτῆς, τότε λέγομεν, ὅτι αὕτη εἶναι **μέγιστον** τῆς μεταβλητῆς.

Τοὐναντίον, ἐὰν μία τῶν τιμῶν μεταβλητῆς ποσότητος εἶναι μικροτέρα τῶν ἄλλων γειτονικῶν τιμῶν αὐτῆς, καλοῦμεν αὐτὴν ἐλάχιστον τῆς μεταβλητῆς

δ') Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι :

Ἐὰν εἶναι τὸ $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ἔχει ἐλάχιστον ὅταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, εἶναι δὲ ἡ ἐλαχίστη τιμή του ἡ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Ἐὰν εἶναι τὸ $\alpha<0$, τὸ τριώνυμον ἔχει μέγιστον, ὅταν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, εἶναι δὲ ἡ μεγίστη τιμή του ἡ $-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$.

Ἔστω π.χ. τὸ τριώνυμον $3x^2-6x+7$. Τὸ $\alpha=3>0$· ἄρα τὸ τριώνυμον ἔχει ἐλάχιστον, ὅταν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{6}{6}=1$.

Θέτοντες $x=1$ εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου εἶναι 4.

Ἀσκησις

420. Δι' ἕκαστον τῶν κάτωθι τριωνύμων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ τίνα τιμὴν τοῦ x συμβαίνει τοῦτο :

α') $-x^2+4x+3$, β') $19x^2-7x+3$, γ') $x^2-7x-13$,
δ') $15x^2+x-7$, ε') $-x^2+3x-6$, στ') $9{,}5x^2-0{,}25x-2$.

16. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

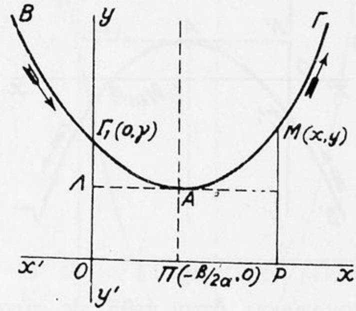
§ 187. Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (ὅπου εἶναι $\alpha \neq 0$) Διὰ νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν μεταβολὴν αὐτοῦ θέτομεν

$$\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma \tag{1}$$

καὶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, ὑποθέτοντες, ὅτι ἕκαστον ζεῦγος τῶν τιμῶν τοῦ **x** καὶ ψ παριστάνεται μὲ ἓν σημεῖον ἔχον τετμημένην τὴν τιμὴν τοῦ **x** καὶ τεταγμένην τὴν τιμὴν τοῦ ψ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους x'0x καὶ ψ'0ψ.

1ον. Ὅταν εἶναι τὸ $\alpha > 0$.

Γνωρίζομεν, ὅτι, ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ ψ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Διὰ τοῦτο λέγομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνεται μὲ μίαν καμπύλην γραμμήν, τῆς ὁποίας ἕκαστον σημεῖον ἔχει τετμημένην καὶ τεταγμένην ἀντιστοίχως τιμὰς τῶν **x** καὶ ψ τῆς ἐξισώσεως (1). Ἤτοι ἡ ἐν λόγῳ γραμμὴ θὰ ἔχῃ κλάδον συνεχῆ (ἄνευ διακοπῆς τινος), ὁ ὁποῖος θὰ ἀρχίζῃ ἀπὸ ἓν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν ψ0x′ καὶ εἶναι πολὺ μεμακρυσμένον (τετμημένην $x \longrightarrow -\infty$ καὶ τεταγμένην $\psi \longrightarrow +\infty$), κατερχόμενος δὲ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α (ἄνω ἢ κάτω τῆς 0x), ἔχον τετμημένην $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τεταγμένην δὲ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (σχ. 16).



Σχ. 16

Ὅταν τὸ **x** ἀπὸ τῆς τιμῆς $-\frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνεται συνεχῶς τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$, ἡ ἐξίσωσις (1) λέγομεν, ὅτι παριστάνει ἄλλον συνεχῆ κλάδον γραμμῆς, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὴν γωνίαν x0ψ, μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $+\infty$.

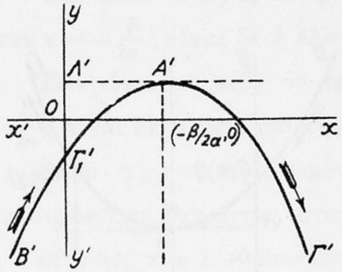
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1), ὅταν τὸ α εἶναι θετικόν, παριστάνει τὴν καμπύλην ΒΑΓ (σχ. 16).

2ον. Ὅταν τὸ $\alpha < 0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅταν τὸ **x** αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ ψ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

Ἑπομένως διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ ἐξίσωσις (1) παριστάνει ἕνα συνεχῆ κλάδον, ὁ ὁποῖος ἀρχίζει ἀπὸ ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον καὶ κείμενον εἰς τὴν γωνίαν x′0ψ′, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη καὶ τεταγμένη τείνουν εἰς τὸ $-\infty$, καταλήγει δὲ εἰς τὸ σημεῖον Α′ (ἄνω ἢ κάτω τῆς 0x), τοῦ ὁποίου ἡ μὲν τετμημένη ἰσοῦται μὲ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ δὲ τεταγμένη μὲ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (σχ. 17).

Ὅταν τὸ **x** αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ τριώνυμον, ἄρα καὶ τὸ ψ, ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέχρι τοῦ $-\infty$ καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς λέγομεν ὅτι παριστάνει συνεχῆ κλάδον (καμπύλης) γραμμῆς, ὁ ὁποῖος κατέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α' καὶ ἀπομακρύνεται πρὸς ἓν σημεῖον πολὺ μεμακρυσμένον κείμενον εἰς τὴν γωνίαν $x0\psi'$ μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τείνουσας εἰς τὸ $+\infty$ καὶ $-\infty$ (σχ. 17) ἀντιστοίχως.



Σχ. 17

Διὰ νὰ εὕρωμεν ποῦ ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν ψ, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἔχωμεν $x = 0$. Ἀλλ' ἂν θέσωμεν $x=0$, εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν $\psi=\gamma$. Ὥστε ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα $\psi O'\psi$ εἰς τὸ σημεῖον Γ. ἢ Γ'_1, ἔχον τεταγμένην ἴσην μὲ γ.

Ἂν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου, ὅταν τεθῇ εἰς αὐτὸ $x=\rho_1$, ἢ $x=\rho_2$, ἔχομεν $\psi=0$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα τὰ ἔχοντα τετμημένας ρ_1 καὶ ρ_2. Ἂν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι φανταστικοὶ ἢ μιγάδες ἀριθμοί, ἡ καμπύλη (πραγματικῶς) δὲν τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης θέτοντες $x=1,2,3,\ldots$ ὅτε εὑρίσκομεν $\psi=\alpha+\beta+\gamma$, $\psi=4\alpha+2\beta+\gamma$, $\psi=9\alpha+3\beta+\gamma,\ldots\ldots\ldots\ldots$ Οὕτως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα τῆς καμπύλης.

$$(1, \alpha+\beta+\gamma), \qquad (2, 4\alpha+2\beta+\gamma), \qquad (3, 9\alpha+3\beta+\gamma)\ldots.$$

Ἐπίσης θέτομεν $x = -1, \ -2, \ -3$ καὶ εὑρίσκομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης. Ἂν θέλωμεν, θέτομεν x ἴσον μὲ ἄλλας τιμὰς π.χ. $x=\pm 0{,}1, \ \pm 0{,}2,\ldots. \ x=\pm 2{,}1 \ \pm 2{,}2\ldots$ καὶ εὑρίσκομεν ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης.

§ 188. *Παρατήρησις.* Ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις (1), καλεῖται **παραβολή,** τῆς ὁποίας ἡ θέσις ἀλλάσσει μετὰ τοῦ προσήμου τοῦ α καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου.

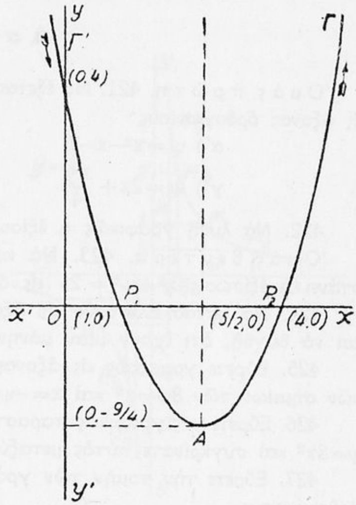
Ἐφαρμογή. Ἔστω τὸ τριώνυμον $\psi = x^2-5x+4$. Ἔχομεν

$$\psi=x^2-5x+4+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+4-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}.$$

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ μέχρι τοῦ $\frac{5}{2}$, τὸ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$

ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0, τὸ δὲ ψ ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ $-\frac{9}{4}$. Οὕτως ἡ καμπύλη ἔχει συνεχῆ κλάδον Γ'Α ἀρχόμενον ἀπὸ σημεῖον μὲ τετμημένην καὶ τεταγμένην τεινούσας εἰς τὸ $-\infty$ καὶ $+\infty$ καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ (σχ. 18).

Ὅταν τὸ x αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $\frac{5}{2}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, τὸ δὲ ψ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\frac{9}{4}$ μέχρι τοῦ $+\infty$. Ἡ καμπύλη λοιπὸν ἔχει καὶ δεύτερον συνεχῆ κλάδον ΑΓ, ὁ ὁποῖος ἀνέρχεται ἐκ τοῦ σημείου Α $\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ καὶ ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον μέχρι τοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας τεινούσας εἰς $+\infty$.



Σχ. 18

Ὅταν τὸ $x=0$, τὸ ψ εἶναι ἴσον μὲ 4. Ἄρα ἡ καμπύλη τέμνει τον ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον Γ' (0,4). Ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα (1,0) καὶ (4,0), ἐπειδὴ εἶναι $\rho_1=1$ καὶ $\rho_2=4$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν καὶ ἄλλα σημεῖα τῆς καμπύλης θέτομεν π.χ. $x=2$ καὶ εὑρίσκομεν $\psi=4-10+4=-2$, $x=-2$, ὅτε $\psi=4+10+4=18$, $x=3$, ὅτε $\psi=9-15+4=-2$, $x=-3$, ὅτε $\psi=9+15+4=28$.
Οὕτως ἔχομεν ὡς σημεῖα τῆς καμπύλης τά:

$$(2, -2) \quad (-2, 18), \quad (3, -2), \quad (-3, 28).$$

Παρατήρησις. Ἡ εὕρεσις τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παριστανομένη γραμμὴ τέμνει τὸν ἄξονὰ τῶν x, θὰ ὁρίσῃ τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ τὰς τετμημένας των. Ἀλλ' αὐταὶ θὰ εἶναι ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἐπειδὴ θὰ ἔχωμεν $\psi=0$.

Ἡ εὕρεσις τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς κατὰ τὸν τρόπον αὐτόν, δηλαδή, ὅταν κατασκευάσωμεν τὴν καμπύλην $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ καὶ εὕρωμεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων τομῆς τῆς καμπύλης μὲ τὸν ἄξονα τῶν x, λέγεται **γραφικὴ λύσις τῆς ἐξισώσεως** $\boldsymbol{\alpha x^2+\beta x+\gamma=0}$

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 421. Νὰ ἐξετασθῇ γραφικῶς ἡ μεταβολὴ τῶν συναρτήσεων εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους:

α') $\psi=x^2-x-3$, β') $\psi=3x^2-7x+3$,

γ') $\psi=2x+\frac{x^2}{4}$, δ') $\psi=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{5}x-1$.

422. Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $x^2-7x+11=0$ (Θέσατε $\psi=x^2-7x+11$)

Ὁμὰς δευτέρα. 423. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $x^2+\psi^2=25$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

424. Νὰ κατασκευασθοῦν εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους αἱ γραμμαὶ $\psi=x^2$, $x=\psi^2$ καὶ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἔχουν μίαν μόνην κοινὴν χορδήν.

425. Εὕρετε γραφικῶς εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τὰς συντεταγμένας τῶν κοινῶν σημείων τῶν $8\psi=x^2$ καὶ $x=-\psi^2$.

426. Εὕρετε τὰς γραφικὰς παραστάσεις εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους τῶν $\psi=x^2$ καὶ $\psi=8x^2$ καὶ συγκρίνατε αὐτὰς μεταξύ των.

427. Εὕρετε τὴν τομὴν τῶν γραμμῶν $x^2+\psi^2=100$ καὶ $x+\psi=5$ εἰς ἄξονας ὀρθογωνίους.

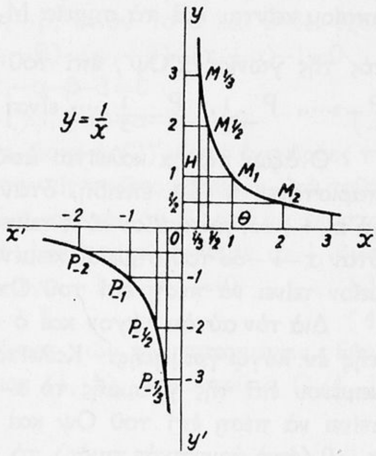
17. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\psi=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$

§ 189. Ἔστω πρῶτον ἡ $\psi=\frac{1}{x}$. (1)

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x=1, 2, 3, 4, ..$ καὶ εὑρίσκομεν $\psi=1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..$ Λαμβάνομεν ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$, $\psi'O\psi$ (σχ. 19) καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΟΘ, ΟΗ, ἐπὶ τῶν Ox καὶ Oψ παριστάνοντα τὸ $+1$ ἐπὶ ἑκάστου ἄξονος. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν συντεταγμένας $(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right), ...$, ἔστωσαν δὲ αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὰ M_1, M_2, M_3, M_4, ... (σχ. 19).

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς θετικὰς αὐξανομένας, τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς καὶ ἐλαττουμένας, ὅταν δὲ τὸ $x\to+\infty$, τὸ $\psi\to 0$. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας

($x \to +\infty$, $\psi \to 0$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox, ἀλλ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O. Θέτομεν τώρα εἰς τὴν (1) $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ καὶ εὑρίσκομεν $\psi = 2, 3, 4, \ldots$, ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν τὰ σημεῖα μὲ συντεταγμένας $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $\left(\frac{1}{4}, 4\right), \ldots$, ἔστωσαν δὲ αὐτὰ κατὰ σειρὰν τὰ $M_{\frac{1}{2}}$, $M_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{4}}, \ldots$,



Σχ. 19

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν τὸ x λαμβάνῃ τιμὰς θετικὰς ἐλαττουμένας, καὶ τὸ ψ λαμβάνει τιμὰς θετικάς, ἀλλ' αὐξανομένας, ὅταν δὲ $x \to 0$, τὸ $\psi \to +\infty$. Τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας ($x \to 0$, $\psi \to +\infty$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oψ, ἀλλ' εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ O. Θέτοντες εἰς τὴν (1) $x = \alpha > 0$ εὑρίσκομεν $\psi = \frac{1}{\alpha} > 0$. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν (1) λέγομεν, ὅτι παριστάνει μίαν γραμμὴν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1, M_2, M_3, M_4 \ldots M$ ($x \to +\infty$, $\psi \to 0$), καθὼς καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_{\frac{1}{2}}$, $M_{\frac{1}{3}}$, $M_{\frac{1}{4}}, \ldots$ M'($x \to 0$, $\psi \to +\infty$) καὶ ἔχει τὸ σχ. 19.

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = -1, -2, -3, \ldots$, $x \to -\infty$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\psi = -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$, $\psi \to 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμάς). Οὕτω ἔχομεν τὰ σημεῖα

$$P_{-1}(-1,-1),\ P_{-2}\left(-2,-\frac{1}{2}\right),\ P_{-3}\left(-3,-\frac{1}{3}\right), \ldots,\ P\,(x \to -\infty,\ \psi \to 0),$$

κεῖνται δὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1), ἐνῷ τὸ σημεῖον ($x \to -\infty$, $\psi \to 0$) τείνει νὰ εἶναι ἐπὶ τοῦ Ox'.

Θέτομεν εἰς τὴν (1) $x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$, $x \to 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμάς), ὅτε εὑρίσκομεν $\psi = -2, -3, -4, \ldots$, $\psi \to -\infty$. Τὰ σημεῖα $P_{-\frac{1}{2}}$, $P_{-\frac{1}{3}}$, $P_{-\frac{1}{4}}$,...., P ($x \longrightarrow 0$, $\psi \dashrightarrow -\infty$) κεῖνται ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1),

Οὕτω λοιπὸν λέγομεν, ὅτι ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν παριστάνει ἡ (1), ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, τὰ ὁποῖα καλοῦνται **κλάδοι τῆς γραμμῆς,** τὸ ἓν τῶν ὁποίων κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $xO\psi$, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται καὶ τὰ σημεῖα M_1, M_2..., $M_{\frac{1}{2}}$, $M_{\frac{1}{3}}$..., καὶ τὸ ἄλλο ἐντὸς τῆς γωνίας $x'O\psi'$, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται καὶ τὰ σημεῖα P_{-1} P_{-2}...., $P_{-\frac{1}{2}}$, $P_{-\frac{1}{3}}$,.... εἶναι δὲ διὰ $x=\alpha<0$ τὸ $\psi=\frac{1}{\alpha}<0$.

Ὁ ἄξων τῶν x καλεῖται **ἀσύμπωτος** τῆς γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παριστάνει, ἡ (1), ἐπειδή, ὅταν σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \longrightarrow +\infty$, τὸ σημεῖον αὐτὸ τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox, καθὼς ἐπίσης, ὅταν $x \longrightarrow -\infty$ τοῦ σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς, τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Ox'.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ὁ ἄξων τῶν ψ καλεῖται **ἀσύμπτωτος τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς.** Καλεῖται δὲ οὕτως ἐπειδή, ὅταν σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \longrightarrow 0$ (ἐκ θετικῶν τιμῶν), τὸ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Oψ καὶ ὅταν σημείου ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ $x \longrightarrow 0$ (ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμάς), τὸ σημεῖον τείνει νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Oψ'.

Κατὰ ταῦτα λέγομεν, ὅτι ἡ (1) παριστάνεται ἀπὸ δύο κλάδους, οἱ ὁποῖοι θεωροῦνται ὡς ἓν ὅλον, ὡς μία γραμμή, ἡ ὁποία καλεῖται **ὑπερβολή,** οἱ δὲ ἄξονες τῶν συντεταγμένων εἶναι ἀσύμπτωτοι αὐτῆς καὶ λέγονται **ἄξονες τῆς ὑπερβολῆς** αὐτῆς.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τὴν παράστασιν π. χ. τῆς $\psi=\frac{2}{x}$, τῆς $\psi=-\frac{2}{x}$ καὶ ἐν γένει τῆς $\psi=\frac{\beta}{x}$, ὅπου $\beta>0$ ἢ $\beta<0$, καλεῖται δὲ πᾶσα γραμμὴ παριστανομένη ὑπὸ τοιαύτης ἐξισώσεως **ὑπερβολή,** ἡ ὁποία ἔχει ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Ἀσκήσεις

428. Εὕρετε τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν συναρτήσεων :

α') $\psi=-\frac{1}{x}$, β') $\psi=\frac{2}{x}$, γ') $\psi=-\frac{2}{x}$

δ') $\psi=\frac{3}{x}$, ε') $\psi=-\frac{3}{x}$, στ') $x\psi=10$.

429. Ὁμοίως τῶν:

α') $x=\frac{1}{\psi}$, β') $x=-\frac{1}{\psi}$, γ') $x=\frac{2}{\psi}$, δ') $x=-\frac{5}{\psi}$, ε') $x\psi=-4$.

§ 190. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{x+1}{x-1}$ (1)

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς: $\psi(x-1)=(x+1)$ ἢ $x\psi-\psi-x-1=0$. Θέτομεν εἰς αὐτὴν $x=x_1+\alpha$, $\psi=\psi_1+\beta$, ὅπου τὸ α καὶ β δὲν ἔχουν ὁρισθῆ καὶ εὑρίσκομεν $(x_1+\alpha)\cdot(\psi_1+\beta)-(\psi_1+\beta)-(x_1+\alpha)-1=0$

ἢ $x_1\psi_1+\alpha\psi_1+\beta x_1+\alpha\beta-\psi_1-x_1-\alpha-\beta-1=0$

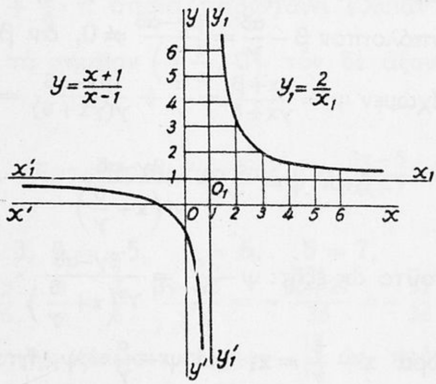
ἢ $x_1\psi_1+(\beta-1)x_1+(\alpha-1)\psi_1+\alpha\beta-\alpha-\beta-1=0$. (2)

Προσδιορίζομεν τώρα τὰ α, β οὕτως, ὥστε ἡ (2) νὰ μὴ ἔχῃ ὅρους περιέχοντας μόνον τὸν x_1, ψ_1 καὶ ἕκαστον εἰς πρῶτον βαθμόν. Διὰ τοῦτο θέτομεν τὸν συντελεστὴν $(\beta-1)$ τοῦ x_1 καὶ τὸν $(\alpha-1)$ τοῦ ψ_1, ἕκαστον ἴσον μὲ 0. Οὕτω θέτομεν $\alpha-1=0$, $\beta-1=0$ καὶ εὑρίσκομεν $\alpha=1$, $\beta=1$.

Τοιουτοτρόπως ἡ (2) γίνεται $x_1\psi_1+1-1-1-1=0$ (3)

ἢ $x_1\psi_1=2$ (4)

Ἔστωσαν $x'Ox$, $\psi'O\psi$ οἱ ἄξονες τῶν συντεταγμένων. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας (1, 1), ἔστω τοῦτο $O_1(1, 1)$



Σχ. 20

Διὰ τοῦ O_1 φέρομεν εὐθείας παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας ἔστω τὰς $x_1'O_1x_1$ (παράλληλον τοῦ ἄξονος $x'Ox$) καὶ $\psi_1'O\psi_1$ (παράλληλον τοῦ ἄξονος $\psi'O\psi$) (σχ. 20).

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐξίσωσις (4) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\psi_1 = \frac{2}{x_1} \qquad (5)$$

Ἐὰν λοιπὸν ληφθοῦν ὡς ἄξονες συντεταγμένων αἱ εὐθεῖαι $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$ καὶ ἀναφέρεται εἰς τοὺς ἄξονας αὐτοὺς ἡ (5), αὕτη παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους της, τοὺς ἄξονας αὐτοὺς $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, Ἀλλ' ἡ ἐν λόγῳ ὑπερβολὴ εἶναι ἡ ἰδία καὶ ἂν ἔχωμεν ἄξονας τοὺς $x'Ox$, $\psi'O\psi$

Ἑπομένως ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (1) παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς νέους ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$ Παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $x'_1O_1x_1$, ἔχει τεταγμένην ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $x'Ox$, $\psi'O\psi$ ἴσην μὲ 1, διὰ τοῦτο ὁ ἄξων $x'_1O_1x_1$ ἔχει ἐξίσωσιν $\psi = 1\cdot$ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $x'Ox$, $\psi'O\psi$ Ἐπίσης ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος $\psi'_1O_1\psi_1$ ἔχει τετμημένην $x=1$ ὡς πρὸς τὸ ἀρχικὸν σύστημα τῶν ἀξόνων.

§ 191. Ἔστω τώρα ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (1) ἀναφερομένη πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους $x'Ox$, $\psi'O\psi$.

Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(\alpha x+\beta):(\gamma x+\delta)$, θὰ εὕρωμεν πηλίκον $\frac{\alpha}{\gamma}$ καὶ ὑπόλοιπον $\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma} = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma} \neq 0$, ἂν $\beta\gamma-\alpha\delta \neq 0$

Οὕτω θὰ ἔχωμεν $\psi = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma x+\delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)}$

$$\text{ἤτοι } \psi = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)}.$$

Γράφομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς: $\psi - \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2\left(x+\frac{\delta}{\gamma}\right)}$.

Θέτομεν τώρα $x + \frac{\delta}{\gamma} = x_1$ καὶ $\psi - \frac{\alpha}{\gamma} = \psi_1$, ἤτοι

$$x = x_1 - \frac{\delta}{\gamma}, \qquad \psi = \psi_1 + \frac{\alpha}{\gamma}.$$

Οὕτως, ἀντὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἔχομεν τὴν $\psi_1 = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2 \cdot x_1}$ ἢ $x_1\psi_1 = \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}$ (2) ἢ $x_1\psi_1 = \upsilon_1$, ἂν τεθῇ $\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2} = \upsilon_1$.

Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας $\left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$, ἔστω τοῦτο $O_1\left(-\frac{\delta}{\gamma}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ καὶ δι' αὐτοῦ φέρομεν εὐθείας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων $x'Ox$, $\psi'O\psi$

Οὕτως ἡ $\psi_1 = \frac{\upsilon_1}{x_1}$ ἀναφερομένη πρὸς τοὺς νέους αὐτοὺς ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας αὐτούς. Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις (1) ἀναφερομένη πρὸς ἄξονας τοὺς ἀρχικοὺς $x'Ox$, $\psi'O\psi$ παριστάνει τὴν ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς νέους ἄξονας, ἤτοι τὰς εὐθείας μὲ ἐξισώσεις ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας $x = -\frac{\delta}{\gamma}$, $\psi = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Παρατηρητέον ὅτι, ἄν εἶναι $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$, τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi = \frac{\alpha}{\gamma}$, ἡ ὁποία παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον τοῦ ἄξονος τῶν x, τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $\left(0, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$.

Ἄν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\alpha, \beta, \delta \neq 0$, ἔχομεν $\psi = \frac{\alpha x + \beta}{\delta} = \frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}$, δηλαδὴ $\psi = \frac{\alpha}{\delta}x + \frac{\beta}{\delta}$, ἡ ὁποία παριστάνει εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $\left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0\right)$, τὸν δὲ ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $\left(0, \frac{\beta}{\delta}\right)$

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{3x-5}{6x+7}$ ὡς πρὸς ἄξονας ὀρθογωνίους.

Ἔχομεν $\alpha = 3$, $\beta = -5$, $\gamma = 6$, $\delta = 7$,

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{3}{6}, \quad \frac{\delta}{\gamma} = \frac{7}{6}, \quad \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma} = -\frac{30+21}{36} = -\frac{51}{36} = -\frac{17}{12}.$$

Ἄρα ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x_1\psi_1 = -\frac{17}{12}$ ὡς πρὸς νέους ἄξονας $x'_1O_1x_1$, $\psi'_1O_1\psi_1$, Ἡ ἀρχὴ τῶν νέων ἀξόνων ἔχει συντεταγμένας ὡς πρὸς τοὺς ἀρχικοὺς ἄξονας $\left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)$, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις παριστάνει ὑπερβολὴν μὲ ἀσυμπτώτους τοὺς ἄξονας, οἱ ὁποῖοι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον $O_1\left(-\frac{7}{6}, \frac{1}{2}\right)$ παράλληλοι πρὸς τοὺς ἀρχικούς.

Ἄσκησις

430. Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων:

α') $\psi=\frac{2x-1}{2x+1}$, β') $\psi=\frac{2x-3}{4x+1}$, γ') $x=\frac{2\psi-4}{3\psi+1}$

δ') $x=\frac{2}{\psi+4}$, ε') $x=\frac{-3\psi+4}{2\psi+1}$, στ') $x\psi+2x-3\psi+1=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Α΄. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Β΄ ΒΑΘΜΟΥ

1. ΔΙΤΕΤΡΑΓΩΝΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 192. Καλοῦμεν ἐξίσωσίν τινα μὲ ἕνα ἄγνωστον (ἔστω τὸν x) **διτετράγωνον**, ἐάν, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὅρων εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τὰς ἀναγωγάς, ἔχῃ τὴν μορφὴν $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, $(\alpha\neq 0)$ (1)

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4-25x^2+144=0$. Ἂν τὸ x^2 ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ ψ καὶ ἑπομένως τὸ x^4 μὲ τὸ ψ^2, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2-25\psi+144=0$.

Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $\psi=\frac{25\pm 7}{2}$, ἤτοι τὰς ρίζας αὐτῆς $\psi_1=16$ καὶ $\psi_2=9$.

Ἄρα εἶναι $x^2=16$ καὶ $x^2=9$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν ὡς ρίζας τῆς δοθείσης $x=\pm 4$ καὶ $x=\pm 3$.

Ἐν γένει πρὸς λύσιν τῆς ἐξισώσεως (1) ἀντικαθιστῶμεν εἰς αὐτὴν $x^2=\psi$, ὅτε θὰ εἶναι $x^4=\psi^2$, καὶ ἀντὶ τῆς (1) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0$. (2)

Ἐὰν λύσωμεν τὴν (2), θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ ψ καὶ ἔστωσαν αὗται αἱ ψ_1 καὶ ψ_2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας τῆς (1), δηλαδὴ τὰς τιμὰς τοῦ x, θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα $x^2=\psi$, ὅπου ψ τὰς τιμὰς αὐτοῦ ψ_1, ψ_2, ὅτε ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις $x^2=\psi_1$, καὶ $x^2=\psi_2$, ἐκ τῶν ὁποίων εὑρίσκομεν $x=\pm\sqrt{\psi_1}$ καὶ $x=\pm\sqrt{\psi_2}$. Ἤτοι αἱ τιμαὶ τοῦ x εἶναι

$$\sqrt{\psi_1},\quad -\sqrt{\psi_1},\quad \sqrt{\psi_2},\quad -\sqrt{\psi_2}.$$

Ἀλλ' αἱ τιμαὶ ψ_1 καὶ ψ_2 εἶναι, καθὼς γνωρίζομεν, αἱ

$$\psi_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\qquad \psi_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἑπομένως, ἂν παραστήσωμεν μὲ ρ_1, ρ_2, ρ_3 καὶ ρ_4 τὰς ρίζας τῆς (1), θὰ ἔχωμεν :

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \rho_2 = -\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}},$$

$$\rho_3 = \sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \rho_4 = -\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}.$$

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4-10x^2=-9$. Ἔχομεν $\alpha=1$, $\beta=-10$, $\gamma=9$.

Ἑπομένως $\rho_1=\sqrt{\frac{10+\sqrt{64}}{2}}=3$, $\rho_2=-3$, $\rho_3=1$, $\rho_4=-1$.

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4-3x^2+2=0$. Ἔχομεν $\alpha=1$, $\beta=-3$, $\gamma=3$.

Ἑπομένως εἶναι $\rho_1=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt{2}$, $\rho_2=-\sqrt{2}$, $\rho_3=1$, $\rho_4=-1$.

Ἀσκήσεις

431. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α′) $9x^4+1=10x^2$, β′) $x^4-26x^2=-25$, γ′) $10x^4-21=x^2$,
δ′) $(x^2-5)^2+(x^2-1)^2=40$, ε′) $x^2+9x^{-2}=6{,}25$, στ′) $9+x^{-4}-10x^{-2}=0$

ζ′) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{2}{x}}=\frac{x}{2}$, η′) $\frac{(x+2)(x-2)}{5}=\left(\frac{2}{x}\right)^2$

θ′) $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{5}-\frac{(x^2-1)(x^2-2)}{2}=3$.

432. α′) $\alpha x^4-(\alpha^2\beta^2+1)x^2+\alpha\beta^2=0$, β′) $\alpha^4+\beta^4+x^4=2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2x^2+\beta^2x^2)$.
γ′) $4(x^4+\gamma^6)-17\gamma^3x^2=0$, δ′) $\alpha^2(\alpha^2-2x^2)+\beta^2(\beta^2-2x^2)+x^4=0$.

433. α′) $\alpha^2\left[1\pm\left(\frac{\beta}{x}\right)^2\right]=\beta^2+x^2$, β′) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{1}{x^2}-2\beta\right)=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$,

γ′) $\left[59-2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right]\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2=225$, δ′) $x^4-2(\mu^2\nu^2+\rho^2)x^2+(\mu^2\nu^2-\rho^2)^2=0$.

ε′) $x^4-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta\gamma)x^2+(\alpha\beta\gamma)^3=0$.

μὲ τὸ 0 δίδει τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν

$$\alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀντίστροφος δ' βαθμοῦ καὶ γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς: (ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ $x\neq 0$)

$$6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0.$$

Θέτομεν $x+\frac{1}{x}=\psi$, ὅτε εὑρίσκομεν

$$6(\psi^2-2)-35\psi+62=0 \quad \text{ἢ} \quad 6\psi^2-35\psi+50=0.$$

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{10}{3}$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ καὶ $x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}$ ἢ τὰς $2x^2-5x+2=0$ καὶ $3x^2-10x+3=0$.

Αἱ ρίζαι τούτων εἶναι αἱ 2 καὶ $\frac{1}{2}$, 3 καὶ $\frac{1}{3}$. Ἄρα, ἀνὰ δύο οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἀντίστροφοι.

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

Γράφομεν αὐτὴν οὕτω: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$.

Θέτομεν $x+\frac{1}{x}=\psi$, ὅτε $x^2+\frac{1}{x^2}=\psi^2-2$, καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ἀνωτέρω εὑρίσκομεν $\psi^2-2+\psi+1=0$ ἢ $\psi^2+\psi-1=0$.

Αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Ἄρα, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$2x^2+(1-\sqrt{5})x+2=0,\quad 2x^2+(1+\sqrt{5})x+2=0.$$

Ἀσκήσεις

445. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $x^3+x^2+x+1=0$, β') $x^3+x^2-x-1=0$, γ') $x^3+3x^2+3x+1=0$,
δ') $x^3+3x^2-3x-1=0$, ε') $x^3+2x^2+2x+1=0$, στ') $x^3-3x^2-3x+1=0$,
ζ') $x^3-2x^2+2x-1=0$, η') $3x^3-7x^2-7x+3=0$, θ') $2x^4+5x^3-5x-2=0$,
ι') $5x^4+26x^3-26x-5=0$, ια') $x^4-4x^3+4x-1=0$,
ιβ') $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$, ιγ') $3x^4+x^3-24x^2+x+3=0$.

435. Εὕρετε τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας:
α') $\pm 3, \pm 1$, β') $\pm \alpha, \pm \sqrt{\alpha}$, γ') $\pm 0{,}5, \pm 4i$, δ') $\pm 3, \pm i$.

Ὁμὰς δευτέρα. 436. Εὕρετε τριώνυμα ἔχοντα ὡς ρίζας τάς:
α') $\pm i$ καὶ $\pm \frac{2}{3}$, β') $\pm 0{,}2$ καὶ $\pm 0{,}75$, γ') $\pm \alpha, \pm 2\alpha$, δ') $\pm(\alpha - i), \pm(\alpha + i)$,
ε') $\pm 0{,}75$ καὶ $\pm 2i$, στ') $\pm 2, \pm 3i$.

Ὁμὰς τρίτη. 437. Εὕρετε τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, ὅταν τὸ x εἶναι ἐκτὸς τῶν (πραγματικῶν) ριζῶν αὐτοῦ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ (ἂν εἶναι $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho_4$), δηλ. ἂν $x < \rho_1$ ἢ $x > \rho_4$ καὶ ὅταν τὸ x κεῖται μεταξὺ δύο ριζῶν, δηλ. ἂν εἶναι $\rho_1 < x < \rho_2$, $\rho_2 < x < \rho_3$ καὶ $\rho_3 < x < \rho_4$. (Διακρίνατε δύο περιπτώσεις, ὅταν εἶναι $\alpha > 0$ καὶ ὅταν $\alpha < 0$. Ἐξετάσατε τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ δύο ρίζαι π.χ. αἱ ρ_3, ρ_4 εἶναι συζυγεῖς φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαὶ καὶ ὅταν καὶ αἱ τέσσαρες ρίζαι εἶναι φανταστικαὶ ἢ μιγαδικαί, ὅτε δύο εἶναι συζυγεῖς καὶ ἄλλαι δύο πάλιν συζυγεῖς).

438. α') Διερευνήσατε ὡς πρὸς τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ λ τὴν ἐξίσωσιν $(\lambda-2)x^4 + 4(\lambda+3)x^2 + \lambda - 1 = 0$.

β') Ὁμοίως τὴν ἐξίσωσιν $x^4 - (3\lambda+4)x^2 + (\lambda+1)^2 = 0$.

439. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda^2 + 3 = 0$ ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ λ, διὰ νὰ διαφέρουν αἱ ρίζαι κατὰ 1;

3. ΤΡΟΠΗ ΔΙΠΛΩΝ ΤΙΝΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ ΕΙΣ ΑΠΛΑ

§ 194. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ διτετράγωνος ἐξίσωσις $x^4 - 6x^2 + 1 = 0$. Ἐπειδὴ εἶναι $\alpha = 1$, $\beta = -6$, $\gamma = 1$, ἔχομεν ὡς ρίζας

$$\pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-4}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{32}}{2}} \text{ καὶ } \pm\sqrt{\frac{6-\sqrt{32}}{2}}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κατελήξαμεν εἰς παραστάσεις μὲ διπλᾶ ριζικὰ τῆς μορφῆς $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

Ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν, πότε εἶναι δυνατὸν τὰς τοιαύτας παραστάσεις νὰ τρέψωμεν εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους αὐτῶν μὲ ἁπλᾶ ριζικά

Θὰ δείξωμεν ὅτι $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}$ (1)

ἂν εἶναι $A > 0$ καὶ τὸ $A^2 - B$ εἶναι (τέλειον τετράγωνον), ἔστω $= \Gamma^2$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\psi} + \sqrt{\omega}$ (2) ὅπου ψ, ω θετικοὶ σύμμετροι καὶ ὁ εἷς τοὐλάχιστον μὴ τέλειον τετράγωνον.

Τότε ἡ (2) ἰσοδυναμεῖ μὲ ἐκείνην, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν τετραγωνίζοντες τὰ μέλη της, δηλ. μὲ τὴν

$$A + \sqrt{B} = \psi + \omega + 2\sqrt{\psi\omega} \qquad (3)$$

Ἀλλ' ἡ (3), εἰς τὴν ὁποίαν οἱ A, $\psi+\omega$ εἶναι σύμμετροι ὁ δὲ B θετικὸς καὶ $\sqrt{B}$ ἀσύμμετρος, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀληθεύῃ παρὰ μόνον ἂν εἶναι :

$$\begin{matrix} A = \psi+\omega \\ B = 4\psi\omega \end{matrix} \quad (4) \quad (\text{§ 155 Παρ. β'})$$

Τότε θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ $\sqrt{B} = 2\sqrt{\psi\omega}$ καὶ ἐν συνεχείᾳ ἡ $A-\sqrt{B} = \psi+\omega-2\sqrt{\psi\omega} = (\sqrt{\psi}-\sqrt{\omega})^2$.

Συνεπῶς θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = |\sqrt{\psi}-\sqrt{\omega}|$$

Διὰ νὰ τραποῦν λοιπὸν αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ ὅπου $A > 0$, $B > 0$ εἰς ἰσοδυνάμους μὲ ἁπλᾶ ῥιζικά, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἀληθεύῃ τὸ σύστημα (4), τὸ ὁποῖον ἰσοδυναμεῖ πρὸς τό :

$$\begin{matrix} A = \psi+\omega \\ \dfrac{B}{4} = \psi\omega \end{matrix} \qquad (5)$$

μὲ ψ, ω θετικοὺς καὶ συμμέτρους

Λύσεις τοῦ συστήματος (5) εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - Ax + \frac{B}{4} = 0 \qquad (6)$$

Αἱ ῥίζαι αὐτῆς ὅμως εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι ὅταν $A^2-B > 0$

Θὰ εἶναι καὶ σύμμετροι, ὅταν A^2-B εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Τέλος ἐπειδὴ ἔχουν γινόμενον $\frac{B}{4}$ θετικόν, ἀφοῦ $B>0$, θὰ εἶναι καὶ θετικαί, ὅταν τὸ A, ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν, εἶναι θετικόν.

Ὥστε: αἱ παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ τρέπονται εἰς ἰσοδυνάμους μὲ ἁπλᾶ ριζικά, ὅταν $A > 0$ καὶ τὸ A^2-B, δηλαδὴ τὸ γινόμενον τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ συζυγές, εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τῆς (6) εἶναι αἱ $\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}$, $\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}$, ὅταν A^2-B εἶναι τέλειον τετράγωνον π.χ. ἴσον μὲ Γ^2, γράφονται $\frac{A+\Gamma}{2}$, $\frac{A-\Gamma}{2}$ καὶ ἔχομεν τοὺς τύπους μετατροπῆς :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}},$$

διότι αἱ ἀνωτέρω ῥίζαι ἀντιπροσωπεύουν τοὺς ψ καὶ ω καὶ εἶναι ἡ $\frac{A+\Gamma}{2}$ ἡ μεγαλυτέρα. Κατὰ ταῦτα, διὰ τὴν παράστασιν $\sqrt{6 \pm \sqrt{32}}$, ὅπου τὸ γινόμενον τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸ συζυγὲς εἶναι 36—32=4 καὶ συνεπῶς ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ ἴση μὲ 2 θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{6 \pm \sqrt{32}} = \sqrt{\frac{6+2}{2}} \pm \sqrt{\frac{6-2}{2}} = \sqrt{4} \pm \sqrt{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Ἔστω ἀκόμη ἡ παράστασις $\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

Εἶναι $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1$ καὶ $\sqrt{1} = 1$. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+1}{2}} + \sqrt{\frac{2-1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

Ἄσκησις

440. Τρέψατε τὰς κάτωθι παραστάσεις εἰς ἄλλας ἐχούσας ἁπλᾶ ῥιζικά :

α΄) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$, β΄) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$, γ΄) $\sqrt{8+4\sqrt{3}}$, δ΄) $\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}$.

ε΄) $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, στ΄) $\sqrt{\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}}$, ζ΄) $\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$,

η΄) $\sqrt{x+x\psi-2x\sqrt{\psi}}$, θ΄) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ Β΄ ΤΑΞΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΑΥΤΗΣ

§ 195. Ἔστω π.χ. ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις $5-\mathbf{x}=\sqrt{\mathbf{x}-5}$, ἡ ὁποία ἔχει εἰς τὸ ἓν μέλος της ῥιζικὸν β΄ τάξεως μὲ ὑπόρριζον παράστασιν ἔχουσαν τὸν ἄγνωστον x.

Ἂν ὑψώσωμεν τὰ δύο μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν $(5-\mathbf{x})^2=\mathbf{x}-5$, ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $(\mathbf{x}-5)^2-(\mathbf{x}-5)=0$ ἢ μὲ τὴν $(\mathbf{x}-5)(\mathbf{x}-5-1)=0$ ἢ τὴν $(\mathbf{x}-5)(\mathbf{x}-6)=0$. Αὐτη ἔχει τὰς ρίζας $x=5$ καὶ $x=6$. Ἐκ τούτων μόνον ἡ $x=5$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἐνῷ ἡ $x=6$ ἐπαληθεύει τὴν $5-x=-\sqrt{x-5}$.

Ἐξίσωσίς τις λέγεται **μὲ τετραγωνικὴν ρίζαν** ἢ **μὲ ριζικὸν δευτέρας τάξεως,** ἄν (μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν, τὴν μεταφορὰν τῶν ὅρων εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ τὰς ἀναγωγὰς) ἔχῃ τουλάχιστον ἓν ριζικὸν μὲ δείκτην 2 καὶ οὐδὲν μὲ δείκτην ἀνώτερον τοῦ 2, ὑπὸ τὸ ὁποῖον ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $4+\sqrt{x^2+5}=x-1$. (1)

Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτήν, ἐπιδιώκομεν νὰ ἀπαλλαγῶμεν ἀπὸ τὸ ριζικόν, δηλαδὴ νὰ εὕρωμεν ἄλλην ἐξίσωσιν χωρὶς ριζικόν. Πρὸς τοῦτο ἀπομονώνομεν τὸ ριζικόν, δηλαδὴ μετασχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ εἰς τὸ ἓν μέλος αὐτῆς μόνον τὸ ριζικόν. Οὕτως ἔχομεν

$$\sqrt{x^2+5}=x-1-4 \text{ ἢ } \sqrt{x^2+5}=x-5 \qquad (1')$$

Ὑψοῦντες τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν

$$x^2+5=(x-5)^2 \text{ ἢ } x^2+5=x^2-10x+25 \text{ ἢ } 10x=20 \qquad (2)$$

ἡ ὁποία ἔχει τὰς ρίζας τῆς (1) καὶ τῆς $-\sqrt{x^2+5}=(x-5)$ (3)

Λύοντες τὴν (2) εὑρίσκομεν $x=2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν $x=2$ εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν, ὅτι δὲν ἐπαληθεύεται, ἐνῷ ἐπαληθεύεται ἡ (3).

Ἔστω ἀκόμη ἡ ἐξίσωσις μὲ ριζικὰ β′ τάξεως

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7 \qquad (1)$$

Ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν (ἀφοῦ ἀπομονώσωμεν τὸ νέον ριζικὸν) (2) $\sqrt{(x+5)(2x+8)}=36-3x$.

Ὑψοῦντες πάλιν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$4(x+5)(2x+8)=(36-3x)^2$$

καὶ μετὰ τὰς πράξεις καὶ τὴν ἀναγωγὴν εὑρίσκομεν

$$x^2-288x+1136=0.$$

Αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι 4 καὶ 284 Θέτοντες διαδοχικῶς $x=4$ καὶ $x=284$ εἰς τὴν δοθεῖσαν (1) εὑρίσκομεν, ὅτι μόνον ἡ 4 τὴν ἐπαληθεύει, ἐνῷ ἡ 284 εἶναι ρίζα τῆς $2\sqrt{(x+5)(2x+8)}=-(36-3x)$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι :

Διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν μὲ ριζικὸν β′ τάξεως, ἀπομονώνομεν αὐτό, ὥστε ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον νὰ λαμβάνωμεν ἐξίσωσιν χωρὶς ριζικόν· ἀκολούθως

λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ δοκιμάζομεν, ἂν αἱ ρίζαι της εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης.

§ 196. Ἐν γένει ἐάν, διὰ νὰ εὕρωμεν ἀπὸ δοθεῖσαν ἄρρητον ἐξίσωσιν ἄλλην ρητήν, κάμνωμεν διαδοχικὰς ὑψώσεις εἰς τὸ τετράγωνον, τότε ἡ τελικῶς προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων, ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πρώτων μελῶν των (τοῦ δευτέρου ἑκάστης μέλους ὑποτιθεμένου 0).

Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} = 0 \qquad (1)$$

ὅπου τὰ Α,Β,Γ περιέχουν τοὺς ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξ αὐτῆς ἄλλην ρητὴν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς : Ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμόν της.

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} = -\sqrt{\Gamma}.$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρίσκομεν $A + B + 2\sqrt{AB} = \Gamma$, καὶ ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμόν της

$$2\sqrt{AB} = \Gamma - A - B.$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρίσκομεν τὴν

$$4AB = A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 2A\Gamma + 2AB - 2B\Gamma$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον ταύτης $A^2 + B^2 + \Gamma^2 - 2A\Gamma - 2AB - 2B\Gamma = 0$ (2)

Ἡ (2) ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἑξῆς τεσσάρων ἐξισώσεων

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} = 0, & \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{\Gamma} = 0 \\ \sqrt{A} - \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma} = 0, & \sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{\Gamma} = 0 \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Ἂν πολλαπλασιάσωμεν ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν (2). Πράγματι, ἔχομεν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας ἐκ τῶν (3) μὲ πολλαπλασιασμὸν τῶν μελῶν των $A - (\sqrt{B} + \sqrt{\Gamma})^2 = 0$

$$\text{ἢ } (A - B - \Gamma) - 2\sqrt{B\Gamma} = 0 \qquad (4)$$

Μὲ πολλαπλασιασμὸν τῶν μελῶν τῶν δύο τελευταίων ἐκ τῶν (3) εὑρίσκομεν $(A - B - \Gamma) + 2\sqrt{B\Gamma} = 0$ (5)

Ἂν δὲ πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς (4) καὶ (5), εὑρίσκομεν τὴν (2).

Παρατηρητέον ὅτι, ἂν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $A = B$ καὶ ὑψώσωμεν τὰ μέλη της π.χ. εἰς τὴν $\mu^{\text{ην}}$ δύναμιν, ὅτε λαμβάνομεν τὴν

$A^\mu = B^\mu$, αὕτη ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ μόνον, ὅταν τὸ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός, ἐνῷ ὅταν τὸ μ εἶναι ἄρτιος ἡ $A^\mu = B^\mu$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς $A=B$ καὶ τῆς $A=-B$ (ὑποτιθεμένου ὅτι χρησιμοποιοῦμεν μόνον πραγματικοὺς ἀριθμούς).

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ ἓν μέλος δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι 0, ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις μετὰ τὴν ὕψωσιν τῶν μελῶν τῆς δοθείσης εἰς δύναμιν οἱανδήποτε ἔχει τὰς ρίζας τῆς δοθείσης. Διότι διὰ νὰ εἶναι π.χ. ἡ δύναμις A^μ ἴση μὲ 0, πρέπει νὰ εἶναι $A=0$. Δηλαδὴ πᾶσα ρίζα τῆς $A^\mu = 0$, εἶναι ρίζα καὶ τῆς $A=0$, καὶ ἀντιστρόφως

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{x+15}+\sqrt{x}=15$.

Ὑψώνομεν τὰ μέλη της εἰς τὸ τετράγωνον καὶ εὑρίσκομεν τὴν

$$x+15+2\sqrt{x^2+15x}+x=225.$$

ἡ τὴν ἰσοδύναμον ταύτης $2\sqrt{x^2+15x}=210-2x$

$$\text{ἢ } \sqrt{x^2+15x}=105-x$$

Ὑψώνομεν τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τεράγωνον καὶ εὑρίσκομεν

$$x^2+15x=11025-210x+x^2$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμόν της $225x=11025$ καὶ $x=49$. Θέτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν $x=49$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἐπαληθεύεται.

§ 197. Γενικώτερον, ὅταν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἄρρητος, δυνάμεθα μὲ ὑψώσεις τῶν μελῶν της εἰς καταλλήλους δυνάμεις νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν, τῆς ὁποίας ἡ λύσις νὰ εἶναι εὔκολος, ἀλλ' αὕτη δὲν εἶναι πάντοτε ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[4]{x-3}+x+3=x+5$.

Ἀπομονώνομεν τὸ ριζικὸν καὶ εὑρίσκομεν $\sqrt[4]{x-3}=2$. Ὑψώνομεν εἰς τὴν 4ην δύναμιν καὶ εὑρίσκομεν $x-3=16$ καὶ $x=19$.

Πρέπει νὰ θέσωμεν $x=19$ εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ἂν εἶναι ρίζα αὐτῆς τὸ 19. Πράγματι παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $x=19$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἀσκήσεις

441. Νὰ λυθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἐξισώσεις:

α') $2\sqrt{x+8}=28$, β') $\sqrt[3]{3x+7}=3$, γ') $\sqrt[3]{4x-40}=10$.

δ') $\sqrt{x+9}=5\sqrt{x-3}$, ε') $\sqrt[3]{10x-4}=\sqrt[3]{7x+11}$.

442. Ομοίως αἱ ἑξῆς ἐξισώσεις·

α') $\sqrt{32+x}=16-\sqrt{x}$, β') $\sqrt{\frac{15}{4}+x}=\frac{3}{2}+x$, γ') $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=\sqrt{5}$,

δ') $\sqrt{x+20}-\sqrt{x-1}=3$, ε') $\sqrt{x+15}-7=7-x-13$,

στ') $\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$, ζ') $\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}=3$.

443. Νὰ λυθοῦν αἱ ἑπόμεναι ἐξισώσεις:

α') $\sqrt{\alpha+\sqrt{x}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{x}}=\sqrt{x}$, β') $\dfrac{\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}}{\sqrt{x-\alpha}-\sqrt{x-\beta}}=\dfrac{2x-\alpha-\beta}{2\alpha}$,

γ') $\sqrt{x^2+3x+10}-x=2$, δ') $6x-\sqrt{(3x+4)(12x-23)}=4$,

ε') $\sqrt{x+7}-\sqrt{x+5}=2$, στ') $\sqrt{29x+6}+\sqrt{29x-9}=15$,

ζ') $9x-2=5\sqrt{6x^2-7x-8}$, η') $\sqrt{8x+13-8\sqrt{x^2-11x+14}}=9$.

θ') $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}=4$, ι') $\sqrt{1-\sqrt{1-x}+\sqrt{x}}=1$.

ια') $\sqrt[3]{x-\alpha}+\sqrt[3]{x+\alpha}-1=\sqrt[3]{x^2-\alpha^2}$

444. Ὁμοίως αἱ κάτωθι:

α') $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+7}=\sqrt[3]{8x+19}$, β') $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+2}=0$,

γ') $(1-\alpha x)\sqrt{1+\beta x}=(1+\alpha x)\sqrt{1-\beta x}$, δ') $\sqrt{\alpha x}-1=-0{,}125+0{,}5\sqrt{\alpha x-0{,}5}$

5. ΠΕΡΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 198. α') Ἐξίσωσίς τις μὲ ἕνα ἄγνωστον (τῆς ὁποίας τὸ μὲν δεύτερον μέλος εἶναι μηδέν, τὸ δὲ πρῶτον εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου) λέγεται **ἀντίστροφος,** ἂν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων της, τῶν ἀπεχόντων ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι· ὅταν ὅμως τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀρτίου βαθμοῦ καὶ ἐπὶ πλέον ἔχῃ μεσαῖον ὅρον, οἱ ἐν λόγῳ συντελεσταὶ πρέπει νὰ εἶναι μόνον ἴσοι.

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$ καλεῖται ἀντίστροφος τοῦ τρίτου βαθμοῦ, καθὼς καὶ ἡ $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0$.

---

* Ἡ ἔννοια τῆς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως ὀφείλεται κυρίως εἰς τὸν A. De Moivre (1667-1754), Γάλλον μαθηματικὸν μετανάστην εἰς Λονδῖνον.

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ καὶ ἡ $\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0$ καλοῦνται ἀντίστροφοι τοῦ τετάρτου βαθμοῦ.

Παρατηρητέον ὅτι, ἄν εἰς ἐξίσωσιν ἀντίστροφον, π χ. εἰς τὴν $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$, τεθῇ $\frac{1}{x}$ ὅπου x καὶ ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς προκυπτούσης $\frac{\alpha}{x^4}+\frac{\beta}{x^3}+\frac{\gamma}{x^2}+\frac{\beta}{x}+\alpha=0$, προκύπτει ἡ ἀρχικῶς δοθεῖσα ἐξίσωσις

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἄν ἐξίσωσις ἀντίστροφος ἔχῃ ρίζαν ἀριθμόν τινα, $\neq\pm1$ θὰ ἔχῃ ρίζαν καὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Θὰ δείξωμεν κατωτέρω, ὅτι ἡ λύσις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τρίτου, τετάρτου καὶ πέμπτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

β') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$, παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν $x=-1$, ἐπαληθεύεται. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος ταύτης διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)$. Ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha$ διὰ τοῦ $x+1$, εὑρίσκομεν πηλίκον τὸ $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=(x+1)[\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha]=0.$$

Ἡ μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ποοφανῶς ἡ $x=-1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἄν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$.

γ') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0$, παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $x=1$. Ἄρα τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $x-1$ Ἂν κάμωμεν τὴν διαίρεσιν, εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=(x-1)[\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha]$.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ μὲν μία ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ $x=1$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι θὰ εὑρεθοῦν, ἄν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$.

δ') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0$

Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἑξῆς: $\alpha(x^4-1)+\beta x(x^2-1)=0$.
ἢ $\alpha(x^2-1)(x^2+1)+\beta x(x^2-1)=0$ ἢ $(x^2-1)[\alpha(x^2+1)+\beta x]=0$.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δύο μὲν ρίζαι ταύτης, ἄρα καὶ τῆς δοθείσης, θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2-1=0$, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(x^2+1)+\beta x=0$.

ε') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ (1)

Διαιροῦμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ τοῦ x^2 ὑποθέτοντες τὰς τιμὰς τοῦ $x\neq 0$ καὶ εὑρίσκομεν $\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=0$

$$\text{ἢ } \alpha\left(x+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0 \qquad (2)$$

Θέτομεν* $x+\frac{1}{x}=\psi$ ὅτε $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\psi^2$ ἢ $\chi^2+\frac{1}{x^2}+2=\psi^2$ καὶ $x^2+\frac{1}{x^2}=\psi^2-2$.

Ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) τὰς τιμὰς τῶν $x^2+\frac{1}{x^2}$ καὶ $x+\frac{1}{x}$, εὑρίσκομεν $\alpha(\psi^2-2)+\beta\psi+\gamma=0$, ἡ ὁποία εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ψ. Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, εὑρίσκομεν ἐν γένει δύο τιμὰς τοῦ ψ, τὰς ὁποίας ἂς παραστήσωμεν μὲ ψ_1 καὶ ψ_2.

Ἀντικαθιστῶμεν κάθε μίαν τῶν τιμῶν τοῦ ψ εἰς τὴν $x+\frac{1}{x}=\psi$ καὶ ἔχομεν $x+\frac{1}{x}=\psi_1$ καὶ $x+\frac{1}{x}=\psi_2$ ἢ $x^2-x\psi_1+1=0$, $x^2-x\psi_2+1=0$, ἤτοι δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x. Ἐὰν λύσωμεν αὐτάς, θὰ εὕρωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως (1).

στ') Ἔστω ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις πέμπτου βαθμοῦ

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0.$$

Αὕτη, ὅταν τεθῇ $x=-1$, ἐπαληθεύεται, ἄρα ἔχει τὴν ρίζαν $x=-1$ καὶ τὸ α' μέλος της διαιρεῖται διὰ τοῦ $x+1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν εὑρίσκομεν πηλίκον.

$$\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha$$

Τοῦτο τιθέμενον ἴσον μὲ 0, δίδει ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ λύσωμεν

ζ') Ἂν ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν.

$$\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0,$$

παρατηροῦμεν, ὅτι αὔτη ἔχει ρίζαν $x=1$, ἄρα το πρῶτον μέλος της διαιρεῖται διὰ $x-1$. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τιθέμενον ἴσον

---

* Ἡ ἀντικατάστασις $x+\frac{1}{x}=\psi$ ἐγένετο τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Γάλλου Lagrange.

** Τὸ ὄνομα ἀντίστροφος ἐξίσωσις ὀφείλεται εἰς τὸν Euler (1707 - 1781).

2. ΤΡΟΠΗ ΤΟΥ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

§ 193. Ἂν θέλωμεν νὰ τρέψωμεν τὸ τριώνυμον $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τεθῇ $x^2=\psi$, θὰ ἔχωμεν ἀντὶ τοῦ δοθέντος τὸ $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma$. Ἂν αἱ ρίζαι τούτου παρασταθοῦν μὲ ψ_1, ψ_2, θὰ εἶναι $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma = \alpha(\psi-\psi_1)(\psi-\psi_2)$· ἄρα, ἂν τεθῇ εἰς τοῦτο $\psi = x^2$, θὰ ἔχωμεν $\alpha(x^2-\psi_1)(x^2-\psi_2) = \alpha(x-\sqrt{\psi_1})(x+\sqrt{\psi_1})(x-\sqrt{\psi_2})(x+\sqrt{\psi_2})$.

Ἑπομένως, ἂν ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 παριστάνουν τὰς ρίζας τοῦ δοθέντος τριωνύμου (ἤτοι τεθῇ $\sqrt{\psi_1}=\rho_1$, $-\sqrt{\psi_1}=\rho_2$, $\sqrt{\psi_2}=\rho_3$, $-\sqrt{\psi_2}=\rho_4$), θὰ ἔχωμεν $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$, $(x-\rho_3)(x-\rho_4)$, ἤτοι τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τοῦ α ἐπὶ τέσσαρας πρωτοβαθμίους παράγοντας ὡς πρὸς x.

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὸ τριώνυμον x^4+x^2-12, ἐπειδὴ εἶναι $\alpha=1$, $\beta=1$ $\gamma=-12$, εὑρίσκομεν $\psi_1=3$ $\psi_2=-4$. Ἄρα $\rho_1=\sqrt{3}$, $\rho_2=-\sqrt{3}$, $\rho_3=2i$, $\rho_4=-2i$, ἤτοι κατὰ τάξιν μεγέθους αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου (αἱ πραγματικαὶ μόνον, διότι αἱ φανταστικαὶ δὲν διακρίνονται κατὰ μέγεθος) εἶναι $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $-2i$, $2i$ καὶ τὸ τριώνυμον εἶναι ἴσον μὲ

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i).$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ διτετράγωνον τριώνυμον, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας του. Ἂν αὗται εἶναι π.χ. ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, τὸ τριώνυμον θὰ εἶναι τὸ

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$$

πολλαπλασιασμένον ἐπὶ σταθερόν τινα παράγοντα

Π.χ. τὸ τριώνυμον μὲ ρίζας $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-i$, i θὰ εἶναι τὸ προκῦπτον ἐκ τοῦ $\alpha\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+i)(x-i)$ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, ὅπου τὸ α παριστάνει σταθερόν τινα παράγοντα.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 434. Νὰ τραποῦν τὰ ἑπόμενα τριώνυμα εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων.

α′) $4x^4-10x^2+4$, β′) $7x^4-35x^2+28$, γ′) $\alpha^2\beta^2\psi^4-(\alpha^4+\beta^4)\psi^2+\alpha^2\beta^2$
δ′) $\psi^4-4\alpha\beta\psi^2-(\alpha^2-\beta^2)^2$, ε′) $\lambda^4\psi^4+\lambda^2(\alpha^2-\beta^2)\psi^2-\alpha^2\beta^2$, στ′) $\psi^4-(\alpha+1)\alpha\psi^2+\alpha^3$

ιδ') $2x^4+x^3-17x^2+x+2=0$, ιε') $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$,

ιστ') $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$,

446. Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $\frac{(x^2+1)^2}{(x^2+x+1)(x+1)^2}=\frac{25}{18}$ β') $x^5=\frac{35x-6}{35-6x}$, γ') $x^4=\frac{11x-6}{6x-11}$,

δ') $\frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)(x^3+1)}=\frac{4}{15}$ ε') $\frac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x+1}=\frac{9}{5}$.

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΩΝΥΜΟΙ

§ 199. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $x^4-1=0$. Ἀντ' αὐτῆς ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον $x^4=1$. Παρατηροῦμεν ὅτι αὕτη ἔχει προφανῶς τὴν ρίζαν $x=1$, ἔχει δὲ καὶ τὴν $x=-1$, διότι $(-1)^4=1$.

Ἔστω ἡ $x^3+1=0$. Θεωροῦμεν τὴν ἰσοδύναμον της $x^3=-1$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ -1 εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως, ἐπειδὴ $(-1)^3=-1$. Ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἔχουσα δύο ὅρους εἰς τὸ α' μέλος της (τοῦ β' ὄντος 0) καλεῖται **διώνυμος ἐξίσωσις.**

Ἐξίσωσιν διώνυμον καλοῦμεν ἐν γένει μίαν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς ἕνα ἄγνωστον π.χ. τὸν x, ἂν ἔχῃ μόνον δύο ὅρους εἰς τὸ α' μέλος της (τοῦ β' ὑποτιθεμένου 0). Πᾶσα διώνυμος ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha x^{\kappa}+\beta x^{\lambda}=0$. (1), ὅπου κ, λ, εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι καὶ θετικοὶ (α, $\beta\neq0$) πραγματικοί. Ἐὰν εἶναι $\kappa>\lambda$ γράφομεν τὴν (1) ὡς ἑξῆς:

$$x^{\lambda}(\alpha x^{\kappa-\lambda}+\beta)=0$$

Αὕτη ἔχει τὴν ρίζαν $x=0$ καὶ τὰς ρίζας τῆς $\alpha x^{\kappa-\lambda}+\beta=0$. Θέτομεν πρὸς εὐκολίαν $\kappa-\lambda=\nu$, $-\frac{\beta}{\alpha}=\gamma$ καὶ οὕτως ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν $x^{\nu}=\gamma$. Διὰ τὴν λύσιν ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι:

α') Ἂν τὸ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τοὐλάχιστον δύο ρίζας (πραγματικάς), ἂν εἶναι $\gamma>0$.

Διότι, ὡς γνωστόν, ἂν π.χ. τεθῇ $\nu=2\lambda$, θὰ ἔχωμεν $x^{2\lambda}=\gamma$. Ἀλλ' αὐτὴ προκύπτει ἀπὸ τὴν $x^{\lambda}=\sqrt{\gamma}$, ἂν τὰ μέλη ταύτης ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον. Ἄρα ἔχει τὰς ρίζας τῆς $x^{\lambda}=\sqrt{\gamma}$ καὶ τῆς $x^{\lambda}=-\sqrt{\gamma}$.

Οὕτως αἱ ρίζαι τῆς $x^{\nu}=\gamma$ εἶναι αἱ $x=\sqrt[2\lambda]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\gamma}$, $x=-\sqrt[2\lambda]{\gamma}=-\sqrt[\nu]{\gamma}$, ἂν τὸ $\gamma>0$ καὶ τὸ $\nu=2\lambda$ (ἄρτιος).

Ἀλλ' ἂν εἶναι $\gamma<0$, ἡ ἐξίσωσις $x=\gamma$ δὲν ἔχει καμμίαν πραγματικὴν ρίζαν. Πράγματι παρατηροῦμεν ὅτι, ἐν ὅσῳ τὸ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, ἔχομεν $(-|x|)^{\nu}=|x|^{\nu}>0$.

β') Ἂν τὸ ν εἶναι ἀριθμὸς περιττὸς καὶ τὸ $\gamma>0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μόνον θετικὴν ρίζαν, ἐπειδὴ πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην περιττὸν ἀριθμὸν ἔχει τὸ σῆμα τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑπομένως μόνον θετικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς τὴν νιοστὴν περιττὴν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικόν, δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν πραγματικὴν ρίζαν τὴν $\sqrt[\nu]{\gamma}$ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν. Ἐὰν εἶναι τὸ $\gamma<0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει μόνον ἀρνητικὴν ρίζαν, διότι ἂν τεθῇ τὸ $-x_1$, ἀντὶ τοῦ x, θὰ ἔχωμεν $(-x_1)^\nu=\gamma$, ἢ $(x_1^\nu)=-\gamma$.

Οὕτως ἐπανήλθομεν εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, διότι εἶναι $-\gamma>0$, ἡ δὲ ἐξίσωσις $(x_1)^\nu=-\gamma$ ἔχει μίαν μόνον πραγματικὴν ρίζαν τὴν $\sqrt[\nu]{-\gamma}$, ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x=-\sqrt[\nu]{-\gamma}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^6-1=0$ ἔχει ρίζας (πραγματικὰς) τὰς $x=\pm1$, ἄρα τὸ x^6-1 διαιρεῖται διὰ τοῦ $(x+1)(x-1)=x^2-1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν x^6-1 διὰ τοῦ x^2-1, εὑρίσκομεν πηλίκον x^4+x^2+1. Ἄρα αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως $x^4+x^2+1=0$, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι φανταστικαί.

2ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^3+8=0$ ἔχει μίαν ρίζαν (πραγματικὴν) τὴν $x=\sqrt[3]{-8}=-2$. Ἄρα τὸ x^3+8 διαιρεῖται διὰ τοῦ $x+2$. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι x^2-2x+4. Ἄρα αἱ ἄλλαι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x+4=0$.

3ον. Ἡ ἐξίσωσις $x^4+16=0$, ἢ $x^4=-16$ δὲν ἔχει ρίζαν (πραγματικήν), ἐπειδὴ ἀρτία δύναμις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

Ἀσκήσεις

447. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $x^3\pm343=0$, β') $8x^3\pm125=0$, γ') $x^3\pm1331=0$

δ') $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}$, ε') $\dfrac{2-x^2}{2+x^2}=\dfrac{x^3-4x^2+9}{x^3+4x^2+9}$,

$$\text{στ')}\quad \frac{9x^3+7}{2}-\left[x^3-\frac{(x^3-2)}{7}\right]=36.$$

448. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α') $x^5-(x^3+8)(x^2+5)+4x^2(x+2)+32=0$, β') $\dfrac{3x^3+20}{16}=\dfrac{4x^3-3}{2x^3-4}+\dfrac{x^3}{4}$.

16

449. Ὁμοίως αἱ κάτωθι :

α') $\dfrac{1}{1-\alpha\gamma}+\dfrac{1}{1-\alpha-\gamma}=\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^3$, β') $(1-\alpha\gamma)^{-1}x^3+\dfrac{(1-\alpha-\gamma)^{-1}}{x^{-3}}=1$.

γ') $x^4\pm1=0$(γράψατε $x^4+2x^2+1-2x^2=0$), δ') $x^5\pm1024=0$, ε) $x^5\pm1=0$,
στ') $x^6\pm729=0$, ζ') $x^{2\nu+1}\pm1=0$, η'))$x^7\pm1=0$, θ') $x^{2\nu}\pm1=0$,
ι') $x^4\pm256=0$ (θέσατε $x=4\psi$), ια') $x^5\pm3125=0$, ιβ') $x^{10}\pm1=0$,
γ') $x^6\pm1=0$, ιδ') $x^4\pm14641=0$, ιε') $x^{12}\pm1=0$,

7. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΠΟΛΥΤΟΝ ΤΙΜΗΝ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

§ 200. α') Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $3|x|-5=0$, ὅπου $|x|$ παριστάνει τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀγνώστου x, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τὰς ἐπαληθευούσας τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν

Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχομεν τὴν ἰσοδύναμον αὐτῆς $3|x|=5$, καὶ $|x|=\dfrac{5}{3}$. Ἡ τιμὴ $x=\dfrac{5}{3}$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν, καθὼς καὶ ἡ $x=-\dfrac{5}{3}$, διότι $\left|-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{5}{3}$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἔχει ρίζας τὰς $\pm\dfrac{5}{3}$, ταύτας δὲ ἔχει καὶ ἡ $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)=0$. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)=0$ ἢ τὴν $x^2=\dfrac{25}{9}$.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha|x|+\beta=0$ $(\alpha,\ \beta\neq0)$ (1)

Ἂν α, β εἶναι ὁμόσημοι, ὅτε $\alpha\beta>0$, τότε τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι πάντοτε θετικὸν ἢ ἀρνητικόν, ἤτοι $\neq0$, ἑπομένως ἡ (1) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει ὡς πρὸς x.

Ἂν εἶναι $\alpha\beta<0$, θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς (1), $|x|=-\dfrac{\beta}{\alpha}>0$. Οὕτως ἡ (1), (ἐὰν $\alpha\beta<0$), ἔχει ρίζας τὰς $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\dfrac{\beta}{\alpha}$, ἄρα εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Παράδειγμα. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $-4|x|+12=0$.

Ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν $|x|=3$ καὶ αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2=3^2$.

β') Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\alpha|x|+\beta x+\gamma=0,\ (\alpha,\beta,\gamma\neq0) \qquad (2)$$

Ἂν θέλωμεν νὰ εἶναι $x>0$, ἐπειδὴ $|x|=x$, ἡ (2) γράφεται καὶ οὕτως: $\alpha x+\beta x+\gamma=0$ (2′), ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=\frac{-\gamma}{\alpha+\beta}$ (ἂν εἶναι $\alpha+\beta\neq0$). Ἡ τιμὴ αὐτὴ ἱκανοποιεῖ τὴν $x>0$, ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}>0$ ἢ $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}<0$, ἢ $\gamma(\alpha+\beta)<0$.

Ἂν θέλωμεν νὰ εἶναι $x<0$, τότε ἐπειδὴ $|x|=-x$, ἡ (2) γράφεται οὕτω: $-\alpha x+\beta x+\gamma=0$ (2″), ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}$, (ἂν $\beta-\alpha\neq0$). Αὐτὴ ἱκανοποιεῖ τὴν $x<0$ ἂν εἶναι $-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}<0$.

$$\text{ἢ } -\gamma(\beta-\alpha)<0, \text{ ἢ } \gamma(\beta-\alpha)>0$$

Ἄρα, ἂν $\alpha\neq-\beta$ καὶ $\gamma(\alpha+\beta)<0$, ἡ (2) ἔχει τὴν ρίζαν $x_1=-\frac{\gamma}{\alpha+\beta}>0$, ἂν δὲ εἶναι $\gamma(\beta-\alpha)>0$, τότε ἔχει τὴν $x_2=-\frac{\gamma}{\beta-\alpha}$, ἂν $\alpha\neq\beta$. Ἂν $\alpha=\beta$, τότε ἔχει ρίζαν τὴν $x=-\frac{\gamma}{2\alpha}$ ἂν $\alpha\gamma<0$.

Παρατήρησις. Διὰ $x=0$, ἡ (2) δὲν ἐπαληθεύεται, ἂν εἶναι $\gamma\neq0$. Ἂν $\gamma=0$, $\beta=1$ ἡ (2) γίνεται $\alpha|x|+x=0$ (3) καὶ $|x|=-\frac{x}{\alpha}$, ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι $|x|=x$, ὅταν εἶναι $x>0$ καὶ $|x|=-x$, ὅταν εἶναι $x<0$, ἕπεται ὅτι ἡ $|x|=-\frac{x}{\alpha}$ ἀνάγεται εἰς τὴν $x=-\frac{x}{\alpha}$ μὲν κατὰ τὴν α′ περίπτωσιν ($x>0$), εἰς τὴν $x=\frac{x}{\alpha}$ δὲ κατὰ τὴν β′ ($x<0$), ἔχουν δὲ αὗται μόνον ρίζαν $x=0$, ἂν εἶναι $\alpha^2\neq1$ Ἂν $\alpha=+1$, τότε ἡ $|x|=\frac{x}{\alpha}$ γίνεται $|x|=-x$ καὶ ἔχει ρίζαν πᾶσαν ἀρνητικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ τὴν $x=0$. Ἂν $\alpha=-1$, ἔχομεν $|x|=x$ καὶ αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ x καὶ διὰ $x=0$.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω, ἡ ἐξίσωσις $2|x|+3x-4=0$.

Ἔχομεν $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=-4$, $\gamma(\alpha+\beta)=-20<0$. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν ρίζαν $x=\frac{-\gamma}{\alpha+\beta}=\frac{4}{5}$.

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $-2|x|+x+1=0$.

Εἶναι $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $\gamma(\alpha+\beta)=1\cdot(-2+1)=-1<0$, ἄρα $x=\frac{-1}{1-2}=1$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως. Ἀλλ' εἶναι καὶ $\gamma(\beta-\alpha)=1(1+2)=3>0$ ἄρα $x=-\frac{1}{3}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

ΛΥΣΙΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $|x|^2+2\beta|x|+\gamma=0, \quad (\beta,\gamma\neq 0)$

§ 201. Διὰ τὴν λύσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως θέτομεν $|x|=\omega$ καὶ εὑρίσκομεν $\omega^2+2\beta\omega+\gamma=0$, $\omega=|x|=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\gamma}$. Ἵνα αὕτη καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχῃ λύσιν πραγματικήν, πρέπει, $\beta^2-\gamma>0$ ἐπὶ πλέον δέ, ἂν εἶναι $-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\gamma}>0$, ἔχομεν τέσσαρας ρίζας ἀνὰ δύο ἀντιθέτους. Διότι ἂν τεθῇ $-\beta+\sqrt{\beta^2-\gamma}=\kappa_1>0$ καὶ $-\beta-\sqrt{\beta^2-\gamma}=\kappa_2>0$, αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι αἱ $x_1=\kappa_1$, $x_2=-\kappa_1$, $x_3=\kappa_2$, $x_4=-\kappa_2$.

Ἂν $\beta^2-\gamma=0$ καὶ $-\beta>0$, ἔχομεν $|x|=-\beta$ καὶ αἱ $x_1=-\beta$, $x_2=\beta$ εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $|x|^2-8|x|+7=0$.

Εὑρίσκομεν $|x|=4\pm\sqrt{4^2-7}=4\pm3$, ἤτοι $|x|=7$ καὶ $|x|=1$, ἄρα $x_1=-7$, $x_2=7$, $x_3=1$, $x_4=-1$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

2ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $|x|^2-10|x|-24=0$, $|x|=5\pm\sqrt{25+24}=5\pm7$, ἤτοι $|x|=12$, $|x|=-2$. Οὕτως ἔχομεν μόνον δύο ρίζας τὰς $x_1=12$, $x_2=-12$, διότι ἡ $|x|=-2$ εἶναι ἀδύνατος.

3ον. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $|x|^2+10|x|+24=0$, $|x|=-5\pm\sqrt{25-24}=-5\pm1$, ἄρα προκύπτει $|x|=-4$, $|x|=-6$ καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζαν. Τοῦτο διακρίνει τις ἀμέσως, διότι τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x (πραγματικήν).

Παρατήρησις. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὴν λύσιν συστημάτων ἐχόντων ἀπολύτους τιμὰς τῶν ἀγνώστων των.

Ἀσκήσεις

450. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

α′) $3|x|-7=0$ β′) $-6|x|+5=0$, γ′) $\frac{3}{4}|x|=-1$, δ′) $2|x|+7x-3=0$,

ε′) $x+|x|+4=0$, στ′) $|x|+x-4=0$,

451. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

α′) $|x|^2-5|x|-3=0$, β′) $|x|^2-5|x|+6=0$, γ′) $4|x|^2-5|x|-1=0$,

δ′) $|x|^2-\frac{3}{4}|x|-2=0$.

452. Ἐξετάσατε τὴν ἐξίσωσιν $\alpha|x|+x+\gamma=0$, $(\alpha,\gamma\neq0)$, παρατηροῦντες ὅτι εἶναι $\alpha|x|=-(\gamma+x)$, $\alpha^2x^2=(\gamma+x)^2$.

Β'. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 202. Καλοῦμεν σύστημα (ἐξισώσεων) δευτέρου βαθμοῦ τὸ ἀποτελούμενον ἀπὸ μίαν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ καὶ ἀπὸ οἱονδήποτε ἀριθμὸν ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους τῶν ἐξισώσεών του.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα β' βαθμοῦ $x-\psi=5$, $x\psi=-4$. Ἐκ τῆς α' τούτων ἔχομεν $\psi=x-5$, εἰσάγοντες δὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν β' λαμβάνομεν $x(x-5)=-4$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμόν της $x^2-5x+4=0$ Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $x=1$, $x=4$. Ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν $\psi=x-5$ καὶ εὑρίσκομεν $\psi=-4$, $\psi=-1$. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι $x=1$ καὶ 4, $\psi=-4$ καὶ -1 ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν σύστημα β' βαθμοῦ μὲ δύο ἐξισώσεις καὶ δύο ἀγνώστους, λύομεν ὡς πρὸς τὸν ἕνα ἄγνωστον τὴν ἐξίσωσιν τοῦ α' βαθμοῦ, ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον Μετὰ τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς καὶ τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Ἐν γένει, ἂν ἔχωμεν σύστημα β' βαθμοῦ μὲ ν ἐξισώσεις καὶ ν ἀγνώστους, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν καὶ εὐκολώτερον πρὸς λύσιν ὡς ἑξῆς: Λύομεν τὰς $(\nu-1)$ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι α' βαθμοῦ, ὡς πρὸς μόνον τοὺς $\nu-1$ ἀγνώστους αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς μόνον τῶν $\nu-1$ ἀγνώστων ἐκφραζομένας συναρτήσει τῆς ἀπομενούσης ἀγνώστου, ἔστω τῆς x. Ἀκολούθως εἰσάγομεν τὰς τιμὰς τῶν $\nu-1$ ἀγνώστων εἰς τὴν μοναδικὴν ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ τοῦ δοθέντος συστήματος. Οὕτω θὰ εὑρεθῇ ἰσοδύναμος ταύτης β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἡ ὁποία λυομένη δίδει τὰς τιμὰς τοῦ x. Ἀντικαθιστῶμεν τὰς οὕτως εὑρισκομένας τιμὰς τοῦ x εἰς τὰς ἐκφράσεις τῶν $\nu-1$ ἄλλων ἀγνώστων καὶ θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τούτων.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω τὸ σύστημα $x+\psi=\alpha$, $x\psi=\gamma$ (1)

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\psi=\alpha-x$ (2). Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν $x(\alpha-x)=\gamma$ ἢ $x^2-\alpha x-\gamma=0$ (3). Ἡ ἐξίσωσις (3) ἔχει ἐν γένει δύο ρίζας, ἔστω τὰς x_1, x_2. Θέτομεν ἀντὶ τοῦ x τὰς τιμάς του εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ εὑρίσκομεν ἐν γένει δύο τιμὰς διὰ τὸ ψ, ἤτοι τὰς $\psi=\alpha-x_1,=\psi_1$, $\psi=\alpha-x_2=\psi_2$. Οὕτως ἔχομεν δύο ζεύγη λύσεων τοῦ δοθέντος συστήματος, τὰ $x=x_1$, $\psi=\alpha-x_1=\psi_1$ καὶ $x=x_2$, $\psi=\alpha-x_2=\psi_2$.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι [ἕνεκα τῆς (3)] $x_1+x_2=\alpha$, ἕπεται, ὅτι $\alpha-x_1=x_2$, $\alpha-x_2=x_1$· ἄρα τὰ ζεύγη τῶν λύσεων τοῦ (1) εἶναι τὰ $x=x_1$, $\psi=x_2$ καὶ $x=x_2$, $\psi=x_1$.

2ον. Ἔστω τὸ σύστημα $x-\psi=\beta$, $x\psi=\gamma$ (1'). Εὑρίσκομεν $\psi=x-\beta$ καὶ εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν β' τῶν (1') εὑρίσκομεν

$$x^2-\beta x-\gamma=0. \qquad (2')$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ ἔχει ἐν γένει δύο ρίζας, ἔστω τὰς $x=x_1$, $x=x_2$. ἑπομένως ἔχομεν $x=x_1$, $\psi=x_1-\beta$ καὶ $x=x_2$ $\psi=x_2-\beta$.

Ἐπειδή, ἕνεκα τῆς (2'), εἶναι $x_1+x_2=\beta$, εὑρίσκομεν ὅτι τὰ ζεύγη τῶν λύσεων τοῦ (1') εἶναι τὰ $x=x_1$, $\psi=-x_2$ καὶ $x=x_2$, $\psi=-x_1$.

3ον. Ἔστω τὸ σύστημα $x^2+\psi^2-\rho^2=0$, $\alpha x+\beta\psi+\gamma=0$ (1). Ὑποθέτομεν $\beta\neq 0$ καὶ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς β' τοῦ (1) $\psi=-\dfrac{\gamma+\alpha x}{\beta}$ (2). Εἰσάγομεν τὴν τιμὴν αὐτὴν εἰς τὴν α' τῶν (1) καὶ εὑρίσκομεν

$$(\alpha^2+\beta^2)x^2+2\alpha\gamma x+\gamma^2-\beta^2\rho^2=0 \qquad (3)$$

Ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι πραγματικαί, πρέπει νὰ ἔχωμεν $\alpha^2\gamma^2-(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2-\beta^2\rho^2)\geqq 0$ ἢ $\gamma^2\leqq(\alpha^2+\beta^2)\rho^2$.

Ἐὰν πληροῦται ἡ συνθήκη αὕτη, θὰ εὕρωμεν δύο τιμὰς τοῦ x πραγματικάς, ἔστω τὰς x_1, x_2, καὶ ἀκολούθως δύο τιμὰς τοῦ ψ, ἤτοι θὰ ἔχωμεν τὰ ἑξῆς ζεύγη λύσεων τοῦ (1)

$$x=x_1,\ \psi=-\frac{\alpha x_1+\gamma}{\beta} \text{ καὶ } x=x_2,\ \psi=-\frac{\alpha x_2+\gamma}{\beta},$$

τὰ ὁποῖα περιορίζονται εἰς ἓν μόνον, ἂν εἶναι $\gamma^2=(\alpha^2+\beta^2)\rho^2$.

Ἂν αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι φανταστικαί, θὰ συμβαίνῃ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς τιμὰς τοῦ ψ

4ον. Ἔστω τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x^2+\psi^2+\omega^2=14 \\ x+\psi+\omega=6 \\ x-\psi+\omega=0. \end{array}\right. \qquad (1)$

Ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων εὐκόλως εὑρίσκομεν $2\psi=6$, ἄρα $\psi=3$, ὅτε ἐκ τῆς γ' τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν $\omega=3-x$. Εἰσάγοντες τὰς τιμὰς τῶν ψ καὶ ω εἰς τὴν πρώτην τῶν (1) εὑρίσκομεν

$$x^2+9+(3-x)^2 = 14 \quad ἤ \quad x^2-3x+2=0 \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $x=1$, $x=2$. Οὕτως εὑρίσκομεν ἀκολούθως $\omega=2$, $\omega=1$ καὶ ἔχομεν τὰς ἑξῆς τριάδας λύσεων τοῦ (1) $x=1$ $\psi=3$, $\omega=2$ καὶ $x=2$, $\psi=3$, $\omega=1$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

453. α′) $\begin{cases} 12x\psi+13\psi^2=25 \\ 4x-3\psi=1 \end{cases}$ β′) $\begin{cases} (x+\psi)(2x+3\psi)=180 \\ x-2\psi=3 \end{cases}$

γ′) $\begin{cases} x^2-x\psi+4\psi^2=1{,}5 \\ x-\psi=1{,}25 \end{cases}$ δ′) $\begin{cases} (2-x)(9+\psi)=91 \\ x+\psi=9 \end{cases}$

ε′) $\begin{cases} x^2+2(x\psi-24)+\psi^2=0 \\ x-\psi=1 \end{cases}$ στ′) $\begin{cases} x\psi-7(3x-\psi)+3=0 \\ 2x-\psi=0. \end{cases}$

ζ′) $\begin{cases} x(\psi+1)+4=0 \\ \psi(x+1)+9=0 \end{cases}$ η′) $\begin{cases} 5=19\cdot\dfrac{1-\psi-\psi^2}{1-x-x^2} \\ 2x-3\psi=2 \end{cases}$ θ′) $\begin{cases} \psi\cdot\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{9}{2} \\ \psi\cdot\dfrac{x-10}{x+10}+1=0 \end{cases}$

454. α′) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\psi}{\beta}\right)^2=2 \\ \alpha\psi+\beta x=0 \end{cases}$ β′) $\begin{cases} \alpha x^2+(\alpha+\beta)x\psi+\beta\psi^2=0. \\ \alpha x-\beta\psi=2\alpha\beta \end{cases}$

γ′) $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{\psi}{\beta}\right)^2=1 \\ \dfrac{x}{\beta}-\dfrac{\psi}{\alpha}=0 \end{cases}$ δ′) $\begin{cases} (2\alpha-\beta)x^2+(2\alpha+\beta)\psi^2=4\alpha^3 \\ x+\psi=2\alpha \end{cases}$

ε′) $\begin{cases} x^2+2\alpha\psi^2=\alpha^2+1 \\ x+\psi=\alpha \end{cases}$ στ′) $\begin{cases} 2x^2-3x\psi=15\alpha-10\alpha^2 \\ 3x+2\psi=12\alpha-13 \end{cases}$

455. α′) $\begin{cases} (x+\alpha)^2-(\psi-\beta)^2=4(\alpha^2-\beta^2) \\ x-\psi=\alpha+\beta \end{cases}$ β′) $\begin{cases} (x+\alpha)^2+(\psi+\beta)^2=4(\alpha^2+\beta^2) \\ x+\psi=\alpha+\beta \end{cases}$

456. α′) $\begin{cases} x^2-x\psi=2\alpha\beta+2\beta^2 \\ x\psi-\psi^2=2\beta(\alpha-\beta) \end{cases}$ β′) $\begin{cases} (\beta x^2+\alpha\psi^2)\ (\alpha^3+\beta^3)=\alpha\beta\gamma^2 \\ \alpha x+\beta\psi=\gamma \end{cases}$

γ′) $\begin{cases} \psi^2=\dfrac{\alpha}{2}\left(x-\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ (x+1)x+\psi^2=\dfrac{\alpha}{4}(5\alpha+4) \end{cases}$

Ἐπίσης τὰ κατωτέρω :

457. α) $\begin{cases} \psi^2+2\alpha\left(x^2-\dfrac{\alpha}{2}\right)=0 \\ x^2+2\alpha\psi^2=\alpha\left(\alpha+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$ β′) $\begin{cases} \psi^2=2\alpha(\lambda+1)\left(x+\dfrac{\alpha\lambda}{2}\right) \\ 2\alpha x=\left(\dfrac{\psi}{\lambda+1}\right)^2 \end{cases}$

γ') $\begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{x^2} + \dfrac{\psi^2}{2\beta^2\gamma^2 x} = 2 \\ \psi^2 = \beta^2\gamma^2 x \end{cases}$ δ') $\begin{cases} \psi - x = 2\beta \\ \dfrac{x^2}{\alpha-\beta} + \dfrac{\psi^2}{\alpha+\beta} = x+\psi \end{cases}$

458. α') $\begin{cases} \beta^2 x^2 - \alpha^2\psi^2 = \alpha^2\beta^2 \\ \left(\dfrac{\beta x}{\alpha}\right)^2 = 2\gamma\left(\psi + \dfrac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma}\right) \end{cases}$ β') $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^2 (\beta\gamma)^2 x + \psi^2 = 2\beta^2\gamma^2 x \\ \left(\dfrac{\psi}{\beta\gamma}\right)^2 = x \end{cases}$

459. α') $\begin{cases} \alpha\psi^2 - 2\beta^2\left(x + \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0 \\ \alpha\psi^2 + 2\beta^2\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right) = 0 \end{cases}$ β') $\begin{cases} \alpha(\psi^2-\beta^2) - 2\beta^2 x = 0. \\ 2\,\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{\psi}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$

γ') $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\alpha+\beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\psi}{\alpha-\beta}\right)^2 = x \\ \psi^2 = \left(\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2 x \end{cases}$

460. α') $\begin{cases} x^2+\psi^2 = 100 \\ x : \psi = 3 : 5 \end{cases}$ β') $\begin{cases} x^2-\psi^2 = 56 \\ x : \psi = 9 : 5 \end{cases}$

γ') $\begin{matrix} 24\psi(x-5\psi) = (x+2\psi)\,(5x-24\psi) \\ 5x^2 - 72\psi^2 = 32 \end{matrix}$

461. α') $\begin{cases} x^2+x\psi+\psi^2 = 79 \\ (x+\psi) : (x-\psi) = 5 : 2 \end{cases}$ β') $\begin{cases} x^2-x\psi+\psi^2 = 91 \\ (x+\psi) : (x-\psi) = 8 : 3 \end{cases}$

γ') $\begin{cases} (x+4)^2 = x\psi \\ \psi^2 = (\psi+9)(x+4) \end{cases}$ δ') $\begin{cases} (x^2+\psi^2)\,(x+\psi) = 1080 \\ (x^2+\psi^2)(x-\psi) = 540 \end{cases}$

ε') $\begin{cases} (x^2-\psi^2)(2x-3\psi) = 192 \\ (x^2-\psi^2)(3x+\psi) = 1344 \end{cases}$

§ 203. Ἡ λύσις συστημάτων β' ἢ καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ ἀνάγεται συνήθως εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων α' καὶ β' βαθμοῦ, ἀλλὰ δὲν ὑπάρχει ὡρισμένος κανὼν διὰ τὴν λύσιν. Ὡς ἐπὶ τὸ πλεῖστον ἐπιδιώκεται ἡ λύσις τῶν ἁπλουστέρων ἐκ τῶν ἐξισώσεων, ὡς πρὸς ἀριθμόν τινα ἀγνώστων συναρτήσει τῶν λοιπῶν. Τὰς οὕτω εὑρισκομένας τιμὰς ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς λοιπὰς ἐξισώσεις καὶ ἐπιδιώκομεν νὰ εὕρωμεν μίαν μόνον ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν, ὅτε διευκολύνεται καὶ ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν λοιπῶν ἀγνώστων.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$x^3+\psi^3+2x^2-\psi=9.$$
$$x+\psi=3$$

Ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\psi=3-x$. Εἰσάγοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $x^3+(3-x)^3+2x^2-3+x=9$ ἢ τὴν $11x^2-26x+15=0$. Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x_1=1$ $x_2=\frac{15}{11}$, ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν καὶ $\psi_1=2$, $\psi_2=\frac{18}{11}$.

Οὕτως ἔχομεν τὰ ἑξῆς ζεύγη: $x_1=1$, $\psi_1=2$, $x_2=\frac{15}{11}$, $\psi_2=\frac{18}{11}$.

2ον. Ἔστω τὸ σύστημα $x^2+\psi^2=\alpha^2$, $x\psi=\beta^2$.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν καὶ τὴν $2x\psi=2\beta^2$, ὅτε εὑρίσκομεν $(x+\psi)^2=\alpha^2+2\beta^2$. Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν τὰ μέλη τῆς $2x\psi=2\beta^2$ καὶ εὑρίσκομεν $(x-\psi)^2=$ $=\alpha^2-2\beta^2$, ἀκολούθως εὑρίσκομεν $x+\psi=\pm\sqrt{\alpha^2+2\beta^2}$, $x-\psi=\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta^2}$ καὶ ἀναγόμεθα εἰς τὰ συστήματα:

$$\left.\begin{array}{l} x+\psi=\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} \\ x-\psi=\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} \end{array}\right| \begin{array}{l} x+\psi=\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} \\ x-\psi=-\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} \end{array}\left| \begin{array}{l} x+\psi=-\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} \\ x-\psi=\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} \end{array}\right| \begin{array}{l} x+\psi=-\sqrt{\alpha^2+2\beta^2} \\ x-\psi=-\sqrt{\alpha^2-2\beta^2} \end{array}$$

εὐκόλως λυόμενα.

Ἐνίοτε εἰς σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους β' βαθμοῦ ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ἀγνώστων, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον. Τότε διὰ καταλλήλου ἀπαλοιφῆς τῶν ἰσοβαθμίων τούτων δυνάμεων τῶν ἀγνώστων, εὑρίσκομεν ἐξίσωσιν α' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους. Αὐτὴ μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ἀποτελοῦν σύστημα β' βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους τοῦ δοθέντος συστήματος. Οὕτως ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν ἁπλουστέρου συστήματος β' βαθμοῦ.

Παραδείγματα. 1ον. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2-5x\psi+4\psi^2-8x+7\psi=8 \\ 9x^2-15x\psi+12\psi^2+11x-3\psi=12. \end{array}\right.$$

Ἀπαλείφομεν τὸ x^2 μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ εὑρίσκομεν $35x-24\psi=-12$, ἡ ὁποία μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x,ψ, τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

2ον. Ἔστω τὸ σύστημα $\left\{\begin{array}{r} x^2+2x\psi-6\psi^2=208 \\ x\psi-2\psi^2=16. \end{array}\right.$

Διαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\frac{x^2+2x\psi-6\psi^2}{x\psi-2\psi^2}=\frac{208}{16} \text{ ἢ } \frac{\frac{x^2}{\psi^2}+2\frac{x}{\psi}-6}{\frac{x}{\psi}-2}=\frac{26}{2}=13.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι β' βαθμοῦ ὡς πρὸς $\frac{x}{\psi}$. Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν τιμὰς τοῦ $\frac{x}{\psi}$, ἄρα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ψ π.χ. συναρτήσει τοῦ x καὶ ἀκολούθως ἡ οὕτως εὑρισκομένη πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις ὡς πρὸς x, ψ μὲ μίαν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ, τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

3ον. Ἔστω τὸ σύστημα $x^3+\psi^3=9$, $x+\psi=3$. Ὑψοῦντες τὰ μέλη τῆς β' ἐξισώσεως εἰς τὴν τρίτην δύναμιν εὑρίσκομεν

$$x^3+3x^2\psi+3x\psi^2+\psi^3=27.$$

Ἕνεκα τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἡ ἀνωτέρω γίνεται $3x\psi(x+\psi)=27-9=18$ καὶ ἕνεκα τῆς δευτέρας τῶν δοθεισῶν αὕτη γίνεται $x\psi=2$. Αὐτὴ μὲ τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα β' βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ, τὸ ὁποῖον λύεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

Ἀσκήσεις

Ὁμὰς πρώτη. 462. Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

α') $\begin{cases} x^2-x\psi=14 \\ x\psi-\psi^2=10 \end{cases}$ β') $\begin{cases} x^2+\psi^2=73 \\ x\psi-\psi^2=15 \end{cases}$ γ') $\begin{cases} x^2+\psi^2=157 \\ x\psi=66 \end{cases}$

δ') $\begin{cases} x^2+x\psi=125 \\ x\psi=50 \end{cases}$ ε') $\begin{cases} x^2+\psi x=169 \\ x\psi=60 \end{cases}$ στ') $\begin{cases} x^2+\psi^2=\frac{25}{36} \\ 3x\psi=1 \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} x^2+x\psi+\psi=121 \\ x^2+x\psi+x=126 \end{cases}$ η') $\begin{cases} x^2+x\psi=187 \\ \psi^2+x\psi=102 \end{cases}$

463. Ὁμοίως τὰ κάτωθι :

α') $\begin{cases} x^2+9\psi^2=136 \\ x-3\psi=4 \end{cases}$ β') $\begin{cases} 4(x+\psi)^2-5(x+\psi)=50 \\ 5(x-\psi)^2+6(x-\psi)=11 \end{cases}$ γ') $\begin{cases} x^3-\psi^3=7 \\ x-\psi=1 \end{cases}$

δ') $\begin{cases} x^3-\psi^3=\alpha \\ x-\psi=\beta \end{cases}$ ε') $\begin{cases} x^4+\psi^4=17 \\ x+\psi=3 \end{cases}$ στ') $\begin{cases} x^4+\psi^4=\alpha \\ x+\psi=\beta \end{cases}$

ζ') $\begin{cases} x^4+\psi^4=\lambda \\ x-\psi=\mu \end{cases}$ η') $\begin{cases} x^5+\psi^5=\alpha \\ x+\psi=\beta \end{cases}$

Ὁμὰς δευτέρα. 464. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

α') $\begin{cases} x+\psi=21-\sqrt{x\psi} \\ x^2+\psi^2=257 \end{cases}$ β') $\begin{cases} 2(x^2+\psi^2)+7(x+\psi)^2=1049 \\ 3x^2\psi^2-\left(2+\frac{1}{2}\right)x\psi=275 \end{cases}$

$$\gamma')\ \begin{cases} x+\psi+\sqrt{x+\psi-2}=14 \\ \dfrac{x^2\psi^2}{2}-\dfrac{3x\psi}{-4}=175{,}5 \end{cases} \qquad \delta')\ \begin{cases} (x^2+\psi^2)\ (x-\psi)=41 \\ x\psi\ (x-\psi)=30 \end{cases}$$

465. Ὁμοίως τὰ ἑξῆς :

$$\alpha')\ \begin{cases} x^2+\psi^2=\sqrt{x^2\psi^2+273} \\ \dfrac{x}{\psi}+\dfrac{\psi}{x}=4+\dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad \beta')\ \begin{cases} x^2-\psi^2=21(x-\psi) \\ \dfrac{x-3}{\psi}=\dfrac{x\psi-26}{x\psi+2\psi} \end{cases}$$

$$\gamma')\ \begin{cases} \dfrac{2(x+\psi)-3}{5(x+\psi-4)}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{-3}{x+\psi} \\ x:\psi=40\psi:(x+3\psi) \end{cases}$$

466. Ἐπίσης τὰ κάτωθι :

$$\alpha')\ \begin{cases} x^3+\psi^3=973 \\ (x-\psi)^2-7(x+\psi)=90-x\psi \end{cases} \qquad \beta')\ \begin{cases} \sqrt{x}(\sqrt{x^3}+\sqrt{\psi^3})=273 \\ x\sqrt{x\psi}+\psi^2=364 \end{cases}$$

$$\gamma')\ \begin{cases} x\psi=72,\ x^2+\psi^2+\omega^2=289 \\ x+\psi+\omega=29 \end{cases}$$

467. Ἐπίσης τά :

$$\alpha')\ \begin{matrix} x^2-\psi\sqrt{x\psi}=585 \\ \psi^2-x\sqrt{x\psi}-234 \end{matrix} \qquad \beta')\ \begin{cases} x^2+\psi^2=40 \\ x\psi=\omega \\ x+\psi=8 \end{cases} \qquad \gamma')\ \begin{cases} x^2+\omega^2-x(\psi+\omega)=25 \\ \omega^2+\psi^2-\psi(x+\omega)=16 \\ x^2+\psi^2-\omega(x+\psi)=9 \end{cases}$$

1. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

§ 204. Καλοῦμεν προβλήματα ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ τὰ προβλήματα τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων ἢ συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ. Διὰ τὴν λύσιν τοιούτων προβλημάτων ἀκολουθοῦμεν πορείαν ὁμοίαν πρὸς ἐκείνην τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν καὶ διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῶν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ.

1ον. Τίνος ἀριθμοῦ τὸ ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ ηὐξημένον κατὰ 1 ἰσοῦται μὲ 86 ;

Λύσις. Ἔστω x ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον τοῦ **x** εἶναι τὸ x^2, τὸ μὲν τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι $3x^2$, τὸ δὲ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τὸ 2x. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $3x^2+2x+1=86$. Λύοντες ταύτην εὑρίσκομεν $x=5$ καὶ $x=-\dfrac{17}{3}$.

2ον. Διὰ τίνος ἀριθμοῦ πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὸν 96, ἵνα τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ κατὰ 4 τὸν διαιρέτην ;

Λύσις. Ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν $\frac{96}{x} - x = 4$ ἢ $x^2+4x-96=0$. Λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν $x=8$ καὶ $x=-12$

3ον. Τὸ γινόμενον τῶν ὅρων κλάσματος εἶναι 120. Οἱ ὅροι θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν ἀφῃροῦμεν 1 ἀπὸ τὸν παρονομαστὴν καὶ προσεθέτομεν 1 εἰς τὸν ἀριθμητήν. Ποῖοι εἶναι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος ;

Λύσις. Ἐὰν μὲ τὸ x παραστήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος ὁ παρονομαστής του θὰ εἶναι $\frac{120}{x}$ καὶ θὰ ἔχωμεν $x+1=\frac{120}{x}-1$ ἢ $x^2+x=120-x$ ἢ $x^2+2x-120=0$ καὶ ἐκ τῆς λύσεως εὑρίσκομεν $x=10$ καὶ $x=-12$. Ἑπομένως οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος θὰ εἶναι οἱ 10 καὶ 12 ἢ -12 καὶ -10.

4ον. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ 0,75 αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουν τὸν 16 διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ 0,8 τοῦ ζητουμένου πλὴν 15 ;

Λύσις. Ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον ἀριθμόν, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $0{,}75x+1=\frac{16}{0{,}8x-15}$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x=20$ καὶ $x=-\frac{31}{12}$.

5ον. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν νὰ εἶναι 8000.

Λύσις. Ἔστωσαν $2x-1$ καὶ $2x+1$ οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν $(2x+1)^2-(2x-1)^2=8000$ ἢ $8x=8\,000$ καὶ $x=1\,000$. Ἑπομένως οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι 2 001 καὶ 1999.

6ον. Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἀνάλογοι τῶν 3, 2, 5, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ 342 νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

Λύσις. Ἂν παραστήσωμεν μὲ x, ψ, ω, τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν $x^2+\psi^2+\omega^2=342$. Ἐπειδὴ δὲ οἱ x, ψ, καὶ ω εἶναι ἀνάλογοι τῶν 3, 2 καὶ 5 θὰ εἶναι $\frac{x}{3}=\frac{\psi}{2}=\frac{\omega}{5}$. Ἐκ τούτου ἔχομεν, ἂν παραστήσωμεν τοὺς ἴσους λόγους μὲ ρ, $x=3\cdot\rho$, $\psi=2\cdot\rho$, $\omega=5\cdot\rho$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $9\rho^2+4\rho^2+25\rho^2=342$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\rho=\pm3$· ἄρα οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ±9, ±6, ±15.

7ον. Ἐγευμάτισαν 15 ἄτομα· οἱ ἄνδρες ἐπλήρωσαν 360 δρχ. ἐν ὅλῳ καὶ αἱ γυναῖκες ὁμοίως 360 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες καὶ πόσα ἐξώδευσαν ὁ καθείς, ἐὰν κάθε γυνὴ ἐδαπάνησεν 20 δρχ. ὀλιγώτερον καθενὸς ἀνδρός ;

Λύσις. Ἔστω x ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν, ὅτε 15–x θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν γυναικῶν. Ἡ δαπάνη καθενὸς μὲν ἀνδρὸς θὰ εἶναι $\frac{360}{x}$, καθεμιᾶς δὲ γυναικὸς $\frac{360}{15-x}$ δραχ.

Πρέπει νὰ εἶναι $\frac{360}{15-x}=\frac{360}{x}-20$ καὶ x θετικὸς καὶ <15. Λύοντες εὑρίσκομεν $x^2-51x+2700=0$ καὶ $x=\frac{51\pm39}{2}=\begin{smallmatrix}\nearrow 45\\ \rightarrow 6\end{smallmatrix}$.

Ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἡ $x=45$ ἀποκλείεται, διότι δὲν εἶναι <15. Ὥστε εὑρίσκομεν 6 ἄνδρας καὶ $15-6=9$ γυναῖκας. Ἀκολούθως εὑρίσκομεν, ὅτι ἕκαστος ἀνὴρ ἐδαπάνησε $360:6=60$ δρχ., ἑκάστη δὲ γυνὴ ἐδαπάνησε $360:9=40$ δρχ.

8ον. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ ἔχουν διαφορὰν 17 μ.

Λύσις. Ἂν μὲ x καὶ ψ παραστήσωμεν τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ ἔχωμεν $x-\psi=17$, $x^2+\psi^2=25^2=625$.

Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τούτου εὑρίσκομεν $x=24$ καὶ $\psi=7$.

9ον. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ προσδιορισθῇ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ, ὥστε, ἂν ἀπὸ τούτου ἀχθῇ παράλληλος ΔΕ πρὸς τὴν ἀπέναντι τῆς κορυφῆς Α πλευράν, νὰ χωρίζεται τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

Λύσις Παριστάνομεν μὲ α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ μὲ x τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν (ΑΔ). Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῆς ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ὅμοια, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ τούτων θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν μηκῶν τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. Ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{x^2}{\alpha^2}$. Ἀλλ' ὁ λόγος αὐτὸς πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{2}$, κατὰ τὴν διατύπωσιν τοῦ προβλήματος· ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{1}{2}$ καὶ $x^2 = \frac{\alpha^2}{2}$, $x = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, ἐπειδὴ πρέπει $x > 0$.

Προβλήματα

468. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον νὰ εἶναι ἴσα.

469. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ 0,5 αὐξανόμενα κατὰ 5 δίδουν, τὸν 35,1 διῃρημένον διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ 0,3 τοῦ ζητουμένου μεῖον 2,5.

470. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι διαδοχικοὶ περιττοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των νὰ εἶναι 202.

471. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ἀκέραιοι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματός των.

472. Νὰ χωρισθῇ ὁ 27 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου καὶ τὸ πενταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου νὰ ἀποτελοῦν τὸν 1620.

473. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστασεις ὀρθογωνίου ἔχοντος διαγώνιον 17 μ. καὶ ἐμβαδὸν 120 μ^2.

474. Εἰς κύκλον διαμέτρου 25 μ. νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἔχουν λόγον 3 : 4.

475. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 14 καὶ τὸ γινόμενόν των 1632. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί ;

476. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐλαττούμενος κατὰ τὸ πενταπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης του γίνεται 500;

477. Ἠρωτήθη τις ποία εἶναι ἡ ἡλικία του καὶ ἀπεκρίθη : Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐτῶν τῆς ἡλικίας μου ἰσοῦται μὲ τὸ δεκαεξαπλάσιον τῆς ἡλικίας, τὴν ὁποίαν θὰ ἔχω μετὰ 12 ἔτη. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία του ;

478. Δύο κρουνοί, ρέοντες συγχρόνως, πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος δύναται νὰ τὴν πληρώσῃ, ἂν ὁ εἷς τούτων χρειάζεται μόνος 27 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου μόνου ;

479. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἰσοδυνάμου πρὸς τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 99 μ., καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι τὰ ἐννέα δέκατα ἕκτα τῆς ἄλλης.

480. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις (βάσις καὶ ὕψος) ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι 51 μ. καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων του πλευρῶν ὀκτὼ δέκατα πέμπτα.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΓΕΝΙΚΑ

1ον. *(Τῆς χρυσῆς Τομῆς)**. **Δοθεῖσαν εὐθεῖαν νὰ χωρίσωμεν εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.**

Λύσις. Ἂς παραστήσωμεν μὲ α τὸ μῆκος τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἂς θεωρήσωμεν ἀρχὴν αὐτῆς τὸ Α. Ἔστω Γ τὸ σημεῖον διαιρέσεως. Θέτομεν $ΑΓ=x$ ὁπότε $ΒΓ=α-x$, καὶ πρέπει νὰ ἔχωμεν $\frac{α}{x}=\frac{x}{α-x}$ ἤτοι $x^2+αx-α^2=0$. Ἐκ τῆς λύσεως ταύτης εὑρίσκομεν

$$x=\frac{-α\pm\sqrt{5α^2}}{2}=\frac{-α\pmα\sqrt{5}}{2}=\frac{α(\pm\sqrt{5}-1)}{2}.$$

Διερεύνησις. Αἱ δύο ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαὶ καὶ μὲ σήματα ἀντίθετα, ἐπειδὴ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $-α^2$. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $\sqrt{5}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν 2 καὶ 3. Ἑπομένως ἡ ρίζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ σῆμα $+$ τοῦ ριζικοῦ θὰ εἶναι θετικὴ καὶ μικροτέρα τοῦ α, ἄρα δίδει τὴν ζητουμένην λύσιν. Ἡ ἄλλη ρίζα ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική. Ὥστε ἔχομεν $x=\frac{α(\sqrt{5}-1)}{2}$. Τὸ σημεῖον Γ κεῖται πέραν τοῦ μέσου τῆς ΑΒ, ἀπὸ τοῦ Α, διότι τὸ x ἔχει τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $\frac{α}{2}$.

2ον. Σῶμα τι ἐρρίφθη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενὸν) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα α. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος υ ;

Λύσις. Καθὼς γνωρίζομεν (ἐκ τῆς Φυσικῆς), τὸ σῶμα κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ t τὸν ζητούμενον χρόνον, θὰ ἔχωμεν τοὺς ἑξῆς τύπους γνωστοὺς ἐκ τῆς Φυσικῆς :

$$υ=αt-\frac{1}{2}gt^2, \quad τ=α-gt \qquad (1)$$

* Ἡ ὀνομασία **χρυσῆ τομὴ** ἐπεκράτησεν, ἐπειδὴ ἡ τομὴ αὐτὴ θεωρεῖται **ὡς ἀρχὴ τοῦ ὡραίου** εἰς τὴν ζωγραφικήν, ἀρχιτεκτονικὴν καὶ τὴν πλαστικὴν τέχνην.

ὅπου τ παριστάνει τὴν ταχύτητα τοῦ κινητοῦ κατὰ τὴν στιγμὴν t καὶ g τὴν ἐπιτάχυνσιν ἴσην μὲ 9,81 μ. ἀνὰ δλ. (κατὰ προσέγγισιν).

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $gt^2-2\alpha t+2\upsilon=0$ (2) ἐκ τῆς λύσεως δὲ αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ t.

Διερεύνησις. Ἡ συνθήκη διὰ νὰ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (2) πραγματικαὶ εἶναι $\alpha^2-2g\upsilon \geqq 0$ ἢ $\upsilon \leqq \frac{\alpha^2}{2g}$ Ἐπομένως $\upsilon=\frac{\alpha^2}{2g}$ εἶναι τὸ μέγιστον ὕψος, εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ φθάσῃ κινητόν, ἂν ριφθῇ μὲ ταχύτητα ἀρχικὴν α. Ἐὰν εἶναι $\upsilon=\frac{\alpha^2}{2g}$, αἱ ρίζαι τῆς (2) εἶναι ἴσαι μὲ $\frac{\alpha}{g}$. Ἐπομένως τὸ κινητὸν χρειάζεται $\frac{\alpha}{g}$ χρόνον, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος. Εἰς τὸ ἀνώτατον αὐτὸ σημεῖον θὰ ἔχῃ τὸ κινητὸν ταχύτητα ἴσην μὲ 0.

Πράγματι, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (1) τὸ t μὲ τὸ $\frac{\alpha}{g}$ εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον 0, ἤτοι $\tau=\alpha-\frac{\alpha g}{g}=0$.

Ἐὰν εἶναι $\upsilon < \frac{\alpha^2}{2g}$, αἱ δύο ρίζαι τῆς πρώτης τῶν (1) εἶναι πραγματικαί, ἄνισοι καὶ θετικαί, ὁ δὲ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει αὐτάς, εἶναι ὁ $t=\frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-2g\upsilon}}{g}$. Αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ t ἁρμόζουν εἰς τὸ πρόβλημα. Διότι τὸ σῶμα διέρχεται δύο φορὰς δι' ἑκάστου σημείου κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστάνει τὸ ὕψος υ, μίαν ἀνερχόμενον καὶ μίαν κατερχόμενον.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ μέν μία τῶν τιμῶν τούτων τοῦ t εἶναι μεγαλυτέρα, ἡ δὲ ἄλλη μικροτέρα τοῦ $\frac{\alpha}{g}$ κατὰ $\frac{\sqrt{\alpha^2-2g\upsilon}}{g}$. Εἶναι εὔκολον νὰ ἴδωμεν, ὅτι αἱ ταχύτητες [δηλαδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ τ τῆς δευτέρας τῶν (1)] εἶναι ἀντίθετοι. Ἂν τεθῇ $\upsilon=0$, θὰ ἔχωμεν $t=0$, καὶ $t=\frac{2\alpha}{g}$. Τὸ $\frac{2\alpha}{g}$ παριστάνει τὸν χρόνον, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ κινητὸν ἐπαναπίπτει εἰς τὸ σημεῖον, ἐκ τοῦ ὁποίου ἀνεχώρησεν. Ὅθεν ὁ χρόνος, καθ' ὃν γίνεται ἡ ἀνάβασις, ἰσοῦται μὲ τὸν χρόνον, καθ' ὃν γίνεται ἡ κατάβασις τοῦ κινητοῦ.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάθος φρέατος, ἂν ἐπέρασαν t^{δ} ἀφ' ὅτου ἀφέθη νὰ πέσῃ λίθος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ, μέχρις ὅτου ἠκού-

σθῃ ὁ ἦχος ὁ παραχθεὶς ἐκ τῆς πτώσεως τοῦ λίθου εἰς τὸν πυθμένα τοῦ φρέατος (ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος παραβλέπεται)

Λύσις. Παριστάνομεν μὲ x τὸ βάθος τοῦ φρέατος καὶ μὲ τ τὴν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα. Ὁ χρόνος t ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: 1ον. Ἀπὸ τὸν χρόνον t_1, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ λίθος διὰ νὰ πέσῃ. 2ον. Ἀπὸ τὸν χρόνον t_2, τὸν ὁποῖον χρειάζεται ὁ ἦχος διὰ νὰ ἀνέλθῃ ἐκ τοῦ πυθμένος τοῦ φρέατος εἰς ἀπόστασιν x.

Ἔχομεν τὸν ἑξῆς τύπον (ἐκ τῆς Φυσικῆς) $x = \frac{1}{2} g t_1^2$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ διάστημα, ὅταν δίδεται ὁ χρόνος κατὰ τὴν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν, ὁποία εἶναι καὶ ἡ κίνησις κατὰ τὴν πτῶσιν τοῦ λίθου. Ἐκ ταύτης προκύπτει $t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}$ (1)

Ἐκ τοῦ $x = \tau t_2$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ διάστημα ἐκφραζόμενον μὲ τὴν ταχύτητα τ καὶ τὸν χρόνον t_2 κατὰ τὴν ὁμαλὴν κίνησιν τοῦ ἤχου, εὑρίσκομεν $t_2 = \frac{x}{\tau}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{\tau} = t, \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{\frac{2x}{g}} = t - \frac{x}{\tau} \qquad (2)$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὑψοῦντες εἰς τὸ τετράγωνον καὶ διατάσσοντες κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x

$$gx^2 - 2\tau(gt+\tau)x + g\tau^2 t^2 = 0 \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ t_1 εἶναι θετικὸν καὶ τὸ κατὰ τὴν (1) καὶ (2) ἴσον αὐτοῦ $t - \frac{x}{\tau}$ πρέπει νὰ εἶναι θετικόν, ἤτοι $t - \frac{x}{\tau} > 0$ ἢ $x < \tau t$ (4)

Ἵνα αἱ ρίζαι τῆς (3) εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, πρέπει νὰ εἶναι θετικὸν τὸ $\tau^2(gt+\tau)^2 - g^2\tau^2 t^2$ ἢ τὸ $\tau^3(\tau+2gt) > 0$, τὸ ὁποῖον πράγματι συμβαίνει Ἐξ ἄλλου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μὲν γινόμενον τῶν ριζῶν, εἶναι $\tau^2 t^2$, τὸ δὲ ἄθροισμα αὐτῶν $\frac{2\tau(gt+\tau)}{g}$, τὰ ὁποῖα εἶναι θετικά. Ἑπομένως αἱ ρίζαι εἶναι θετικαί. Ἀλλ' ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι, κατὰ τὴν (4), τὸ $x < \tau t$ καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\tau t \cdot \tau t$ εἶναι δὲ αὗται ἄνισοι, ἕπεται, ὅτι ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ τt καὶ ἡ ἄλλη μικροτέρα τούτου, ἡ ὁποία καὶ θὰ εἶναι δεκτὴ διὰ τὸ πρόβλημα, διὰ νὰ πληροῦται ἡ ἀνισότης (4). Ἐκ τῆς λύσεως τῆς (3) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμήν, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σῆμα — τοῦ ριζικοῦ. Ἤτοι ἔχομεν $x = \frac{\tau}{g}\left[gt + \tau - \sqrt{\tau(\tau+2gt)}\right]$.

Προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. (Γενικά). 481. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιοστὸν μέρος ἐπὶ τὸ νιοστὸν μέρος ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός; (Διερεύνησις).

482. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μιπλάσιον ἐπὶ τὸ νιπλάσιον ἑνὸς ἀριθμοῦ, εὑρίσκομεν τὸν ἀριθμὸν α. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός; (Διερεύνησις).

483. Κεφάλαιον α δρχ. δίδει τόκον τ δρχ., ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐτῶν τῆς διαρκείας τοῦ δανείου εἶναι κατὰ δ μεγαλύτερος τοῦ ἐπιτοκίου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τοῦ δανείου. (Διερεύνησις· μερικὴ περίπτωσις $\alpha = 5400$ $\delta = 2$, $\tau = 1296$).

484. Κεφάλαιον α δρχ. ἔφερε τόκον τ δρχ. καὶ θὰ ἔδιδε τὸν αὐτὸν τόκον, ἂν ἐτοκίζετο μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε ὀλιγώτερον, ἀλλ' ἐπὶ μ ἔτη περισσότερα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπιτόκιον. (Διερεύνησις· μερικὴ περίπτωσις $\alpha = 2100$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\tau = 420$).

485. Ἐκ δύο κεφαλαίων τὸ ἓν ἦτο κατὰ δ μικρότερον, ἀλλ' ἐτοκίσθη μὲ ἐπιτόκιον κατὰ ε μεγαλύτερον τοῦ ἄλλου καὶ ἔφερε τόκον ἐπὶ ν_1 ἔτη τ_1 δρχ. ἐνῶ τὸ ἄλλο εἰς ν_2 ἔτη ἔφερε τ_2 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια (Διερεύνησις. μερικὴ περίπτωσις $\delta = 6000$, $\varepsilon = 1$, $\nu_1 = 6$, $\nu_2 = 5$, $\tau_1 = 9000$, $\tau_2 = 7200$).

486. Ἠγοράσθη ὕφασμα ἀντὶ α δρχ. Ἐὰν ἕκαστον μέτρον τούτου ἐτιμᾶτο β δραχ. ὀλιγώτερον, θὰ ἠγοράζοντο γ μέτρα ἐπὶ πλέον. Πόσα μέτρα ἠγοράσθησαν καὶ πρὸς πόσας δρχ. τὸ μέτρον; (Διερεύνησις).

487. Δίδεται τρίγωνον μὲ πλευρὰς α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ μῆκος τοιοῦτον ὥστε, ἂν αἱ πλευραί του αὐξηθοῦν ἢ ἐλαττωθοῦν κατ' αὐτό, νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ ὀρθογωνίου τριγώνου.

488. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ (ἀπεράντου) εὐθείας ΑΒ σημεῖον, ὥστε νὰ φωτίζεται ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο φωτεινὰς ἑστίας κειμένας εἰς τὰ σημεῖα Σ, Σ' τῆς εὐθείας, ἂν ἡ ποσότης τοῦ φωτός, τὸ ὁποῖον δέχεται μία ἐπιφάνεια ἀπὸ φωτεινῆς ἑστίας, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τῆς ἑστίας (Διερεύνησις).

489. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς ἡμικύκλιον τραπέζιον ἔχον περίμετρον 2τ.

490. Δοθέντος τριγώνου ὀρθογωνίου ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ ΒΓ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε α') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ α^2· β') τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ λ^2· γ') τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του νὰ ἰσοῦται μὲ μ^2. (Διερεύνησις).

491. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου α') ἂν δοθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ἄθροισμα λ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, β') ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτήν, γ') ἡ περίμετρος 2τ καὶ τὸ ὕψος υ τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ὑποτείνουσαν.

Ὁμὰς δευτέρα. 492. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος ἐκ δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ 3, ἂν ἔχουν γινόμενον 54;

493. Ποῖος ἀκέραιος ἀριθμὸς εἶναι κατὰ 29 μικρότερος τοῦ τετραγώνου τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου αὐτοῦ;

494. Εὕρετε δύο ἀριθμοὺς ἔχοντας γινόμενον 2, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων αὐτῶν ἰσοῦται μὲ $1 \frac{5}{12}$.

495. Εὕρετε κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι κατὰ 4 μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐὰν αὐξηθῇ ὁ ἀριθμητὴς κατὰ 7 καὶ ἐλαττωθῇ ὁ παρονομαστὴς κατὰ 5, διαφέρει τοῦ προηγουμένου κατὰ $1 \frac{1}{15}$.

496. Ἐπλήρωσέ τις 1600 δρχ. διὰ καφέ, 1800 δρχ. διὰ τέϊον, ἔλαβε δὲ 40 χιλιογρ. καφὲ ἐπὶ πλέον τοῦ τεΐου. Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμον τοῦ καφέ, ἂν τοῦ τεΐου ἐκόστιζε 50 δρχ. ἐπὶ πλέον;

497. Εἰς ἐκδρομὴν αἱ γυναῖκες ἦσαν 3 ὀλιγώτεραι τῶν ἀνδρῶν. Ἂν οἱ μὲν ἄνδρες ἐπλήρωσαν ἐν ὅλῳ 1750 δρχ. αἱ δὲ γυναῖκες 800 δρχ., πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ αἱ γυναῖκες, ἐὰν καθεὶς τῶν ἀνδρῶν ἐπλήρωσε 50 δρχ. περισσότερον ἢ καθεμία γυνή;

498. Εἰς 27 ἄνδρας καὶ γυναῖκας ἐπληρώθησαν 2100 δρχ. διὰ τοὺς ἄνδρας καὶ 4200 δρχ. διὰ τὰς γυναῖκας. Πόσαι ἦσαν αἱ γυναῖκες, ἂν καθεμία ἐπληρώνετο 150 δρχ. ὀλιγώτερον τοῦ ἀνδρός;

499. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα μὲ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ εἶναι 272.

Ὁμὰς τρίτη. (Γεωμετρικά). 500. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος σημείων μεταξύ, τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ φέρωμεν 78 εὐθείας συνδεούσας αὐτὰ ἀνὰ δύο,

501. Ποῖον ἐπίπεδον κυρτὸν πολύγωνον ἔχει 104 διαγωνίους;

502. Ἐκ δύο ἐπιπέδων πολυγώνων τὸ α′ ἔχει 6 πλευρὰς ἐπὶ πλέον τοῦ β′ καὶ τρεῖς καὶ ἓν τρίτον φορὰς περισσοτέρας διαγωνίους· πόσας πλευρὰς ἔχει καθέν;

503. Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ 3 μ, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου θὰ εἶναι 2,25 φορὰς τοῦ ἄλλου. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ;

504. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ἐμβαδὸν 150 μ^2, ἂν ὁ λόγος τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 0,75;

505. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μὲν βάσις εἶναι κατὰ 19 μ. μεγαλυτέρα τοῦ ὕψους του, ἕκαστον δὲ τῶν σκελῶν του κατὰ 8 μ. μεγαλύτερον τοῦ ὕψους του. Πόση εἶναι ἡ βάσις καὶ πόσον τὸ ὕψος του;

506. Τίνες αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἔχοντος ἐμβαδὸν 192 μ^2, ἂν διαφέρουν κατὰ 4 μ.;

507. Ῥόμβου ἡ μὲν πλευρὰ ἔχει μῆκος 17 μ. αἱ δὲ διαγώνιοι ἔχουν διαφορὰν 14 μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ μικροτέρα διαγώνιός του;

508. Ποῖαι αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 12,5 μ, ἂν ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι 17 μ;

509. Εὕρετε τὰς πλευρὰς δύο τετραγώνων ἐχόντων ἄθροισμα ἐμβαδῶν 8621 μ^2, ἂν τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων αὐτῶν εἶναι 8540.

Ὁμὰς τετάρτη. (Συστημάτων). 510. Δύο κρουνοὶ ρέουν συγχρόνως καὶ πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 2,4 ὥρας. Ὁ β' μόνος χρειάζεται 2 ὥρας ἐπὶ πλέον τοῦ α'. Εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος τὴν πληροῖ μόνος;

511. Δύο ἐπιχειρηματίαι κατέθεσαν ὁμοῦ 20 000 δρχ. ὁ α' διὰ 2 μῆνας καὶ ὁ β' διὰ 8 μῆνας. Ὁ μὲν α' ἔλαβεν ἐν ὅλῳ 18 000 δρχ., ὁ δὲ 9 000. Πόσα ἐκέρδισεν ἕκαστος;

512. Δύο κεφάλαια ἔχοντα ἄθροισμα 30 000 δρχ. ἐτοκίσθησαν πρὸς 6%. Τὸ μὲν α' ἔμεινε 4 μῆνας ἐπὶ πλέον καὶ ἔδωκε τόκον 1 280 δρχ. τὸ δὲ β' 840 δρχ. Ποῖα τὰ κεφάλαια;

513. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀναλογίαν, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 62,5 καὶ ὁ μὲν α' ὑπερβαίνει τὸν β' κατὰ 4, ὁ δὲ γ' τὸν δ' κατὰ 3.

514. Εὕρετε διψήφιον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος διαιρούμενος μὲν διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων αὐτοῦ δίδει πέντε καὶ ἓν τρίτον, ἐλαττούμενος δὲ κατὰ 9 δίδει τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

515. Εὕρετε τριψήφιον ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ μὲν β' ψηφίον εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, ὁ δὲ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τούτου εἶναι ὡς 124 : 7. Δι' ἀντιστροφῆς τῆς σειρᾶς τῶν ψηφίων αὐτοῦ προκύπτει ἀριθμὸς ηὐξημένος κατὰ 594.

516. Εὕρετε τρεῖς ἀριθμούς, ἂν ὁ β' εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 21 τῶν δὲ τετραγώνων των 189.

517. Εἰς δεξαμενὴν τρέχει τὸ ὕδωρ βρύσεως ἐπὶ τρία πέμπτα τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ἄλλη βρύσις μόνη θὰ τὴν ἐπλήρωνε. Κλείεται ἡ α' βρύσις καὶ ἀνοίγεται ἡ β', μέχρις ὅτου πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. Ἐὰν καὶ αἱ δύο ἠνοίγοντο μαζὶ θὰ ἐπληροῦτο εἰς 6 ὥρας, θὰ ἔτρεχον δὲ ἐκ τῆς α' τὰ δύο τρίτα τοῦ ἐκ τῆς β', ἀφ' ὅτου ἐκλείσθη ἡ α'. Εἰς πόσον χρόνον καθεμία βρύσις πληροῖ τὴν δεξαμενήν;

Ὁμὰς πέμπτη. (Φυσικῆς). 518. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸν πυθμένα φρέατος βάθους 44,1 μ. ἀφιέμενος ἐκ τοῦ στομίου αὐτοῦ; (Παραβλέπεται ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος).

519. Πόσον χρόνον χρειάζεται λίθος ριπτόμενος ἄνω κατακορύφως (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ. καὶ καταπέσῃ;

520. Πόσην ἀρχικὴν ταχύτητα πρέπει νὰ δώσωμεν εἰς λίθον, ἂν ριφθῇ κατακορύφως ἄνω (εἰς τὸ κενόν), ἵνα ἀνέλθῃ εἰς ὕψος 122,5 μ;

521. Πότε θὰ φθάσῃ εἰς ὕψος 1 460 μ. σφαῖρα ριπτομένη κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω (εἰς τὸ κενὸν) καὶ ἀναχωροῦσα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα 185 μ;

522. Ποίαν πίεσιν ἐξασκεῖ σφαῖρα 41 χιλιογράμμων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἐὰν ἰσορροπῇ δύναμιν 9 χιλιογράμμων;

523. Ἐπὶ πόσα δευτερόλεπτα κυλίεται σφαῖρα ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου εἰς μῆκος 39,2 μ. καὶ ὕψος 10 μ. ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω;

Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VII.

Ὁρισμὸς διτετραγώνου ἐξισώσεως $\alpha x^4+\beta x^2+\gamma=0$, $(\alpha\neq 0)$. Ἀναγωγὴ αὐτῆς εἰς τὴν $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0$, $(x^2=\psi)$, ρίζαι της αἱ

$$\rho_1, \rho_2 = \pm\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad \rho_3, \rho_4 = \pm\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$\alpha x^4+\beta x^2+\gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)(x-\rho_4)$, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου.

Τὸ πρόσημον τοῦ τριωνύμου σπουδάζεται μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀνωτέρου γινομένου.

Τροπὴ διπλῶν ριζικῶν $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ εἰς ἁπλᾶ,

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}}, \text{ ἄν } \Gamma^2=A^2-B.$$

Ἐξισώσεις μὲ ριζικὰ β' καὶ ἀνωτέρας τάξεως. Ἀπομόνωσις τοῦ ριζικοῦ καὶ ἀπαλλαγὴ ἀπ' αὐτοῦ, ὅτε ἡ προκύπτουσα ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῆς δοθείσης καὶ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς.

Ἄν δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἐν γένει ἄρρητος, ὑψοῦμεν τὰ μέλη της εἰς καταλλήλους δυνάμεις, ἵνα προκύψῃ ἐξίσωσις ἀπηλλαγμένη ριζικῶν, ἀλλ' αὕτη δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος τῆς δοθείσης, καὶ πρέπει νὰ δοκιμάζωμεν, ἄν αἱ ρίζαι αὐτῆς ἐπαληθεύουν καὶ τὴν δοθεῖσαν.

Ὁρισμὸς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως. Αἱ γ' βαθμοῦ

$$\alpha x^3+\beta x^2-\beta x-\alpha=0, \qquad \alpha x^3+\beta x^2+\beta x+\alpha=0$$

ἔχουν ἡ α' τὴν ρίζαν $x=1$ καὶ ἡ β' τὴν $x=-1$, ἀνάγονται δέ εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ (μετὰ διαίρεσιν τῶν μελῶν τῶν ἐξισώσεων διὰ $x-1$, $x+1$ ἀντιστοίχως).

Διὰ τὴν λύσιν τῆς $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ τὴν θέτομεν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0$ καὶ $x+\frac{1}{x}=\psi$, ὅτε ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων β' βαθμοῦ.

Ἡ $\alpha x^4+\beta x^3-\beta x-\alpha=0$ ἔχει ρίζας τὰς $x=1$, $x=-1$ καὶ ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν β' βαθμοῦ μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ α' μέλους διὰ τοῦ x^2-1.

Ἡ $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3\pm\gamma x^2+\beta x\pm\alpha=0$ ἔχει τὴν ρίζαν $x=\pm 1$ καὶ ἀνάγεται εἰς ἀντίστροφον ἐξίσωσιν δ' βαθμοῦ.

Ὁρισμὸς διωνύμου ἐξισώσεως $\alpha x^\kappa+\beta x^\lambda=0$, ($\alpha,\beta\neq 0$, κ, λ ἀκέραιοι θετικοί).

Τίθεται ὑπὸ μορφὴν $x^\lambda(\alpha x^{\kappa-\lambda}+\beta)=0$, ($\kappa>\lambda$) καὶ ἔχει ρίζας $x=0$

καὶ τὰς τῆς $\alpha x^{\kappa-\lambda}+\beta=0$ ἢ τῆς $x^{\nu}=\gamma$, $\left(\gamma=-\dfrac{\beta}{\alpha},\ \kappa-\lambda=\nu\right)$. Διακρίνομεν περιπτώσεις α΄), ἄν $\nu=2\mu$, β΄) ἄν $\nu=2\mu+1$, ὅπου μ φυσικός.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x|+\beta=0$, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $x^2=\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$ ἄν $\alpha\beta<0$, ἐνῷ, ἄν $\alpha\beta>0$ δέν ἔχει ρίζαν.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x|+\beta x+\gamma=0$, $(\alpha,\ \beta,\ \gamma\neq0)$. Ἂν $\gamma(\beta-\alpha)>0$, ἢ $\gamma(\alpha+\beta)<0$, ἔχομεν μίαν λύσιν δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha|x|^2+\beta|x|+\gamma=0$, $(\alpha\neq0)$.

Ἡ $|x|^2+2\beta|x|+\gamma=0$ ἔχει 4 ρίζας ἀνὰ δύο ἀντιθέτους, ἄν $\beta^2-\gamma>0$ καὶ $(-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\gamma})>0$.

Ὁρισμὸς συστήματος ἐξισώσεων β΄ βαθμοῦ (ἄν ἔχῃ μόνον μίαν ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ καὶ τὰς ἄλλας α΄ βαθμοῦ).

Λύσις συστήματος ἐξισώσεων β΄ βαθμοῦ ἢ ἀνωτέρου (μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους).

Προβλήματα ἐξισώσεων καὶ συστημάτων β΄ βαθμοῦ (ἀριθμητικά, γενικὰ καὶ μὲ διερεύνησιν).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

Α΄ ΠΕΡΙ ΠΡΟΟΔΩΝ

1. ΠΡΟΟΔΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

§ 205. Ἀριθμητικὴ πρόοδος* καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι** αὐτῆς, ὁ δὲ προστιθέμενος ἀριθμὸς εἰς καθένα ὅρον διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, καλεῖται **διαφορὰ** ἢ **λόγος** τῆς προόδου.

Ἂν μὲν ἡ διαφορὰ τῆς προόδου εἶναι ἀριθμὸς θετικός, οἱ ὅροι βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται **αὔξουσα,** ἐὰν δὲ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ λέγεται **φθίνουσα.** Π.χ. ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμῶν, 1, 2, 3, 4,... 48 εἶναι πρόοδος ἀριθμητικὴ αὔξουσα μὲ διαφορὰν 1, καθὼς καὶ ἡ 1, 2, 5,... 53 μὲ διαφορὰν 2, ἡ δὲ 35, 30, 25,..., 0 εἶναι φθίνουσα μὲ διαφορὰν -5.

Ἐὰν μὲ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἀριθμητικῆς προόδου καὶ μὲ ω τὴν διαφορὰν αὐτῆς, ὁ δεύτερος, τρίτος,... ὅρος θὰ παριστάνεται μὲ $\alpha+\omega$, $\alpha+2\omega$, $\alpha+3\omega$ $\alpha+4\omega$,... (1) Ἄρα:

Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς, αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Οὕτως ὁ ὅρος τῆς προόδου (1) ὁ ἔχων π.χ. τὴν τριακοστὴν τάξιν ἰσοῦται μὲ $\alpha+29\omega$, ὁ τὴν ἑξηκοστὴν πέμπτην τάξιν μὲ $\alpha+64\omega$ κ.τ.λ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι:

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προ-

---

* Ἡ χρῆσις ἀριθμητικῶν προόδων χρονολογεῖται ἀπὸ 2000 - 1700 π.Χ. εἰς τὸ βιβλίον Ἀριθμητικῆς τοῦ Αἰγυπτίου Ahmes μὲ τὸ πρόβλημα νὰ χωρισθοῦν 100 ἄρτοι εἰς 5 πρόσωπα, ὥστε τὰ μερίδια νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

όδου, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν, οἱασδήποτε τάξεως ὅρον αὐτῆς, καὶ λέγομεν ὅτι τότε ἡ πρόοδος εἶναι ὡρισμένη.

Ἐὰν ν παριστάνῃ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς (1) καὶ τ τὸν ἔχοντα τὴν νιοστὴν τάξιν ὅρον αὐτῆς, οἱ προηγούμενοι τούτου θὰ εἶναι $\nu-1$ τὸ πλῆθος καὶ θὰ ἔχωμεν $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$ (2)

Ἂν ἡ (2) λυθῇ ὡς πρὸς ω, εὑρίσκομεν $\omega=\frac{\tau-\alpha}{\nu-1}$. Ἂν ἡ (2) λυθῇ ὡς πρὸς α, εὑρίσκομεν $\alpha=\tau-(\nu-1)\omega$, ἂν δὲ λυθῇ πρὸς ν, εὑρίσκομεν $\nu=1+\frac{\tau-\alpha}{\omega}=\frac{\omega+\tau-\alpha}{\omega}$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι τὸ ν ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός.

Παρατηρητέον, ὅτι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ὅρους α, β, γ, δ,... δίδεται ὑπὸ τῶν $\beta-\alpha$, $\gamma-\beta$, $\delta-\gamma$,...

Ἑπομένως, ἂν παραστήσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτὴν μὲ ω, θὰ ἔχωμεν $\omega=\beta-\alpha$, $\omega=\gamma-\beta$ καὶ προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $2\omega=\gamma-\alpha$, ἄρα $\omega=\frac{\gamma-\alpha}{2}$.

Παραδείγματα. 1ον. Ὁ ὅρος, ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τρίτην τάξιν εἰς ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον 3 καὶ διαφορὰν 5, ἰσοῦται μὲ $3+(13-1)5=3+12\cdot5=3+60=63$.

2ον. Ἔστω, ὅτι ζητεῖται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ ὅρος τῆς δεκάτης τάξεως εἶναι 31 καὶ τῆς εἰκοστῆς 61. Ἔχομεν, ὅτι ὁ δέκατος εἶναι $\alpha+9\omega=31$, ὁ εἰκοστὸς $\alpha+19\omega=61$, ἀφαιροῦντες δὲ ἐκ τῆς β' ἰσότητος τὴν α' εὑρίσκομεν

$$10\omega=61-31=30 \text{ ἢ } 10\omega=30 \text{ καὶ } \omega=3.$$

Ἑπομένως εἶναι $\alpha+9\cdot3=31$ καὶ $\alpha=4$. Ἄρα ἡ πρόοδος εἶναι 4, 7, 10, 13,......

Ι. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 206. Δοθέντων δύο ἀριθμῶν ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξύ των ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν α καὶ τ εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ ν τὸ πλῆθος τῶν παρεμβληθησομένων, τὸ πλῆθος, τῶν ὅρων τῆς σχηματισθησομένης προόδου θὰ εἶναι $\nu+2$, ὁ πρῶτος ὅρος α καὶ ὁ τελευταῖος τ. Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $τ=α+(ν+1)ω$, ἂν τὸ ω παριστάνῃ τὴν διαφορὰν τῆς προόδου. Ἑπομένως ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εὑρίσκομεν $ω=\frac{τ-α}{ν+1}$ Οὕτω σχηματίζεται ἡ πρόοδος ἐκ τοῦ α, τοῦ τελευταίου ὅρου τ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς αὐτῆς.

Ἂν π.χ. ζητῆται μεταξὺ τῶν 1 καὶ 4 νὰ παρεμβληθοῦν 16 ἀριθμοί, ὥστε μετ' αὐτῶν νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικήν, ἔχομεν $α=1$, $τ=4$, $ν=16$, $ω=\frac{4-1}{16+1}=\frac{3}{17}$ καὶ ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ $1, 1\frac{3}{17}, 1\frac{6}{17}, \ldots, 4$.

Ἀσκήσεις

524. Διὰ τὰς κάτωθι ἀριθμητικὰς προόδους εὕρετε ποῖαι εἶναι αὔξουσαι, ποῖαι φθίνουσαι καὶ διατί;
α') 3, 5, 7, 9... β') −15, −10, −5, 0, 5... γ') 0,5 1,5 2,5...
δ') 0,75 1 1,25 1,5... ε') 68, 64, 60... στ') −5, −5,3, −5,6, −5,9.

525. Εὕρετε τὸν δέκατον ὅρον τῆς α') 9, 13, 17... β') −3, −1, 1...
γ') τὸν ὄγδοον τῆς α, α+3β, α+6β....

526. Εὕρετε τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ ὅρον τῆς δεκάτης τάξεως 231 καὶ τῆς εἰκοστῆς 2681.

527. Εὕρετε τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, μὲ α' ὅρον α καὶ νιοστὸν τ. Μερικὴ περίπτωσις $α=0,2$, $τ=3,2$ καὶ $ν=6$.

528. Εὕρετε τὸν α' ἐκ 10 ὅρων προόδου μὲ διαφορὰν 0,75 καὶ τελευταῖον 6,25.

529. Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων προόδου μὲ α' ὅρον 3, τελευταῖον 9 καὶ διαφορὰν 2.

530. Εὕρετε τὸν ὅρον τῆς εἰκοστῆς τάξεως μὲ α' ὅρον 6,35 καὶ διαφορὰν −0,25.

531. Μεταξὺ τῶν 4 καὶ 25 νὰ παρεμβληθοῦν 6 ἀριθμοί, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος.

532. Μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 9 ἀριθμοί, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν πρόοδον ἀριθμητικήν.

533. Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης. Πόσα κτυπήματα κάνει τὸ ἡμερονύκτιον;

II. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 207. Διὰ νὰ εὕρωμεν τύπον δίδοντα τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου ἐχούσης ὡρισμένον ἀριθμὸν ὅρων, στηριζόμεθα (πρὸς εὐκολίαν) εἰς τὴν ἑξῆς ἰδιότητα:

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον, μὲ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων, τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

Πράγματι, ἔστω ἡ πρόοδος $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \kappa, \lambda, \tau$, (1) ἡ διαφορὰ αὐτῆς ω καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ν. Ἔχομεν ὅτι $\beta=\alpha+\omega$, $\gamma=\alpha+2\omega$. $\tau=\lambda+\omega$ καὶ $\tau=\kappa+2\omega$. Ἑπομένως $\lambda=\tau-\omega$ καὶ $\kappa=\tau-2\omega$. Προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς $\beta=\alpha+\omega$ καὶ $\lambda=\tau-\omega$, εὑρίσκομεν $\beta+\lambda=\alpha+\tau$, Ὁμοίως ἐκ τῶν $\gamma=\alpha+2\omega$ καὶ $\kappa=\tau-2\omega$ εὑρίσκομεν $\gamma+\kappa=\alpha+\tau$ κ.ο.κ., ἤτοι $\alpha+\tau=\beta+\lambda=\gamma+\kappa\ldots$

Ἂς παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς προόδου μὲ Σ, ἤτοι: $\Sigma=\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\kappa+\lambda+\tau$,

ὅτε εἶναι καὶ $\Sigma=\tau+\lambda+\kappa+\ldots+\gamma+\beta+\alpha$.

Προσθέτοντες αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)+(\beta+\lambda)+(\gamma+\kappa)\ldots+(\tau+\alpha)$$

$$2\Sigma=(\alpha+\tau)\nu. \text{ Ἑπομένως } \Sigma=\frac{(\alpha+\tau)\nu}{2} \quad (2), \text{ Ἤτοι:}$$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς τινος προόδου μὲ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων της ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦ πλήθους τῶν ὅρων αὐτῆς.

Ἐὰν εἰς τὴν (2) γράψωμεν ἀντὶ τοῦ τ τὸ ἴσον αὐτοῦ $\alpha+(\nu-1)\omega$, ὅπου ω παριστάνει τὴν διαφορὰν τῆς προόδου, εὑρίσκομεν*

$$\Sigma=\frac{[\alpha+\alpha+(\nu-1)\omega]\nu}{2}=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu, \text{ ἤτοι } \Sigma=\frac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2}\cdot\nu.$$

Π.χ. ἂν ζητῆται τὸ ἄθροισμα τῶν δέκα πρώτων ὅρων τῆς 2,5, 8,... ἔχομεν $\alpha=2$, $\omega=3$, $\nu=10$· καὶ $\Sigma=\frac{(2\cdot2+9\cdot3)\cdot10}{2}=\frac{31\cdot5}{1}=155$.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 3 ὅρους, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 33, τὸ δὲ γινόμενον 1287.

Ἂν μὲ x παραστήσωμεν τὸν β' ὅρον τῆς προόδου καὶ μὲ ω τὴν διαφοράν της, οἱ τρεῖς ὅροι θὰ εἶναι $x-\omega$, x, $x+\omega$, τὸ ἄθροισμα τούτων $x-\omega+x+x+\omega=3x=33$, ἄρα $x=11$· τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ὅρων $(x-\omega)x(x+\omega)=(x^2-\omega^2)x$.

Ἔχομεν λοιπὸν $x(x^2-\omega^2)=1287$. Θέτοντες $x=11$ εὑρίσκομεν

* Οἱ τύποι $\Sigma=\nu(\alpha+\tau):2$, $\tau=\alpha+(\nu-1)\omega$, $\Sigma=\alpha\nu+[\nu\omega(\nu-1)]:2$ ἀναφέρονται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον Synopsis parlamariorum τοῦ W. Jones.

$11(121-\omega^2)=1287, \quad 121-\omega^2=117, \quad \omega^2=121-177=4, \quad \omega^2=\pm\sqrt{4}$ $\omega=\pm 2$.

Ἄρα ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἶναι 9, 11, 13, ἢ 13, 11, 9. Γενικώτερον, ὅταν εἰς παρόμοια προβλήματα ἔχωμεν περιττὸν πλῆθος ὅρων καὶ χρησιμοποιοῦμεν τὸ ἄθροισμά των, παριστάνομεν τὸν μεσαῖον ὅρον μέ x π.χ., τὴν διαφορὰν μὲ ω, ἐνῷ ἂν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, παριστάνομεν τοὺς δύο μεσαίους διαδοχικοὺς ὅρους μὲ $x-\omega$ καὶ $x+\omega$, ἤτοι ἡ διαφορὰ παριστάνεται μὲ 2ω, ὅτε εὐκόλως εὑρίσκομεν τὴν παράστασιν καὶ ἄλλων ὅρων τῆς προόδου.

Παραδείγματα. 1ον. Ζητοῦνται πέντε διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, τῶν ὁποίων τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι α, τὸ δὲ γινόμενον γ. Παριστάνομεν κατὰ σειρὰν τὸν τρίτον ὅρον μὲ x, τὴν διαφορὰν μὲ ω, ὅτε ἔχομεν τοὺς ὅρους $x-2\omega$, $x-\omega$, x, $x+\omega$, $x+2\omega$. Ἑπομένως θὰ εἶναι ἀφ' ἑνὸς μὲν $x-2\omega+x-\omega+x+x+\omega+x+2\omega=\alpha$ ἢ $5x=\alpha$ $x=\frac{\alpha}{5}$, ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $(x-2\omega)(x-\omega)x(x+\omega)(x+2\omega)=\gamma$ ἢ $x(x^2-\omega^2)(x^2-4\omega^2)=\gamma$. Θέτομεν $x=\frac{\alpha}{5}$, ὅτε $\frac{\alpha}{5}\left(\frac{\alpha^2}{25}-\omega^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{25}-4\omega^2\right)=\gamma$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ εἶναι διτετράγωνος ὡς πρὸς ω καὶ λύοντες αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τοῦ ω καὶ ἀκολούθως ἔχομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς.

2ον. Ζητοῦνται τέσσαρες διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα α καὶ γινόμενον γ.

Παριστάνομεν τοὺς ὅρους μὲ $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, ὅτε θὰ ἔχωμεν $x-3\omega+x-\omega+x+\omega+x+3\omega=\alpha$ καὶ $x=\frac{\alpha}{4}$. Ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν $(x-3\omega)(x-\omega)(x+\omega)(x+3\omega)=\gamma$ ἢ $(x^2-\omega^2)(x^2-9\omega^2)=\gamma$. Θέτομεν $x=\frac{\alpha}{4}$ καὶ εὑρίσκομεν $\left(\frac{\alpha^2}{16}-\omega^2\right)\left(\frac{\alpha^2}{16}\right)-9\omega^2=\gamma$.

Αὕτη λυομένη δίδει τὰς τιμὰς τοῦ ω, ἀκολούθως δὲ εὑρίσκομεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς.

3ον. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων θετικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν, ἤτοι τὸ $1+2+3+4+,..+\nu$*. Ἂν

*Ἡ σχολὴ τῶν Πυθαγορείων (6η καὶ 5η ἑκατονταετηρὶς π.Χ.) ἐγνώριζε τοὺς τύπους $1+2+3+\ldots+\nu=\nu(\nu+1):2$, $2+4+6+\ldots+2\nu=\nu(\nu+1)$, $1+3+5+\ldots+2\nu-1=\nu^2$.

Σ_1 παριστάνῃ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, θὰ ἔχωμεν $\Sigma_1 = \frac{(1+\nu)\nu}{2}$.

4ον. Ἔστω, ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7,...., $(2\nu-1)$, ἤτοι τὸ $1+3+5+7+..+2\nu-1$. Ἡ διαφορὰ τῆς προόδου εἶναι 2, ὁ πρῶτος ὅρος 1 καὶ ὁ τελευταῖος $2\nu-1$. Ἄρα ἔχομεν $1+3+...+2\nu-1 = \frac{\nu(1+2\nu-1)}{2} = \nu^2$.

Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 534. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $1^2+2^2+3^2+\cdots+\nu^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1^3$. Θέτομεν διαδοχικῶς $\alpha=0$, $\alpha=1$, $\alpha=2$, $\alpha=3$,... $\alpha=\nu$ εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν καὶ προσθέτοντες τὰς προκυπτούσας ἰσότητας κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν μετὰ τὴν ἁπλοποίησιν.

$$(\nu+1)^3=3(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)+3(1+2+\cdots+\nu)+\nu+1.$$

Ἂν παραστήσωμεν μὲ Σ_2, τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, θέσωμεν δὲ $\Sigma_1=1+2+,\cdots+\nu$ εὑρίσκομεν $(\nu+1)^3=3\Sigma_2+3\Sigma_1+\nu+1$ ἢ $\Sigma_2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$.

535. Νὰ εὑρεθῇ τὸ $1^3+2^3+3^3+\cdots+\nu^3=\Sigma_3$. Λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα $(1+\alpha)^4 =\alpha^4+4\alpha^3+6\alpha^2+4\alpha+1$. Θέτομεν $\alpha=0$, $\alpha=1$, $\alpha=2$,...$\alpha=\nu$ καὶ προχωροῦμεν ὁμοίως, ὅπως καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Σ_2, ὑποθέτοντες γνωστὰς τὰς τιμὰς Σ_1, Σ_2).

536. Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα α΄) τῶν 25 πρώτων διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν; β΄) τῶν 30 πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν; γ΄) τῶν 40 πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν;

537. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ -1 μέχρι τοῦ $-\nu$.

538. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ α΄ ὅρον 12, τελευταῖον 144 καὶ ἄθροισμα αὐτῶν 1014;

539. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου ἐκ 14 ὅρων, ἂν ὁ α΄ εἶναι 8 καὶ τὸ ἄθροισμα 567.

540. Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ ἀριθμητικῆς προόδου μὲ 16 ὅρους, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι 63 καὶ τὸ ἄθροισμα 728;

541. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα 456, διαφορὰν -12 καὶ τελευταῖον ὅρον 15;

542. Πόσον ἀξίζει ἐμπόρευμα, ἂν πληρώνεται εἰς 12 δόσεις καὶ ἡ α΄ δόσις εἶναι 100 δραχμάς, ἡ β΄ 150 δρχ. ἡ γ΄ 200 δρχ. κ.ο.κ.;

543. Ἂν ὁ 2ος καὶ ὁ 7ος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου ἔχουν ἄθροισμα 92, ὁ δὲ 4ος καὶ 11ος 71, τίνες εἶναι οἱ τέσσαρες ὅροι;

544. Ποία εἶναι ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ 12 ὅρους, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων μέσων ὅρων εἶναι 74, τὸ δὲ γινόμενον τῶν ἄκρων 70;

545. Εὕρετε τοὺς πέντε ὅρους ἀριθμητικῆς προόδου ἔχοντας γινόμενον 12320 καὶ ἄθροισμα 40.

Ὁ μ ὰ ς δ ε υ τ έ ρ α. 546. Νὰ εὑρεθῇ ὁ νιοστὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου 1, $\frac{\nu-1}{\nu}$, $\frac{\nu-2}{\nu}$, $\frac{\nu-3}{\nu}$,..

547. Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμητικὴν πρόοδον, ἂν τὸ ἄθροισμά των εἶναι 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των εἶναι $1\frac{1}{24}$.

548. Δείξατε, ὅτι εἶναι $\Sigma_1^2=\Sigma_3$, ὅταν $\Sigma_1=1+2+\cdots+\nu$, $\Sigma_3=1^3+2^3+\cdots+\nu^3$.

549.. Εὕρετε τὸ $1^2+4^2+7^2+\cdots+(3\nu-2)^2$. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $(3\alpha-2)^2=9\alpha^2-12\alpha+4$ καὶ θέσατε $\alpha=1,2,\ldots\nu$).

550. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα

$(2\alpha-1)^2=4\alpha^2-4\alpha+1$ θέτοντες $\alpha=1,\ 2,\ldots,\nu$).

551. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+\nu(\nu+1)$. (Χρησιμοποιήσατε τὴν ἰσότητα $\alpha(\alpha+1)=\alpha^2+\alpha$ θέτοντες $\alpha=1,\ 2,\ldots\nu$).

552. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

2. ΠΡΟΟΔΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ

§ 208. Γεωμετρικὴ πρόοδος* καλεῖται διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Οἱ μὲν ἀποτελοῦντες τὴν πρόοδον ἀριθμοὶ λέγονται **ὅροι** αὐτῆς, ὁ δὲ ἀριθμός, ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολλαπλασιάζεται ὅρος τις, διὰ νὰ δώσῃ τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ, λέγεται **λόγος** τῆς προόδου.

Ἐὰν μὲν ὁ λόγος τῆς προόδου **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μεγαλύτερος τῆς 1, οἱ ὅροι **ἀπολύτως** θεωρούμενοι βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **αὔξουσα,** ἐὰν δὲ ὁ λόγος **ἀπολύτως** θεωρούμενος εἶναι μικρότερος τῆς 1, οἱ ὅροι ἀπολύτως θεωρούμενοι βαίνουν ἐλαττούμενοι (φθίνοντες) καὶ ἡ πρόοδος λέγεται (ἀπολύτως) **φθίνουσα.**

Κατὰ ταῦτα, ἡ διαδοχὴ τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 4, 8, 16...., 64 ἀποτελεῖ πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν μὲ λόγον 2.

Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ -5, -10, -20, -40, -80,.. ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον (ἀπολύτως) αὔξουσαν μὲ λόγον τὸν 2, ἐνῷ οἱ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ldots$ καὶ οἱ $-2,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{2}{27},\ldots$

---

* Αἱ γεωμετρικαὶ πρόοδοι ἐμφανίζονται τὸ πρῶτον εἰς τὸ βιβλίον Ἀριθμητικῆς τοῦ Αἰγυπτίου Ahmes, ὅπου ζητεῖται νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ « 7, 49, 343, 2401, 16 807 καὶ εὑρίσκεται ἄθροισμα 19 607 ».

ἀποτελοῦν (ἀπολύτως) φθινούσας γεωμετρικὰς προόδους μὲ ἀντιστοίχους λόγους τοὺς $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{3}$.

Ἂν μὲ α παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον γεωμετρικῆς τινος προόδου καὶ μὲ ω τὸν λόγον αὐτῆς, ὁ ὅρος ταύτης ὁ ἔχων τὴν β' τάξιν θὰ εἶναι αω, ὁ ἔχων τὴν γ' τάξιν θὰ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ $\alpha \cdot \omega \cdot \omega = \alpha\omega^2$ κ.ο.κ., ὥστε ἡ πρόοδος θὰ παριστάνεται οὕτως:

$$\alpha, \quad \alpha\omega^2, \quad \alpha\omega^3, \quad \alpha\omega^4, \ldots$$

Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι:

Ὅταν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ὁ λόγος τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τότε ἡ πρόοδος δύναται νὰ θεωρῆται ὡρισμένη.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι:

Ὁ τυχὼν ὅρος γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν α' ὅρον αὐτῆς ἐπὶ τὴν δύναμιν τοῦ λόγου, τὴν ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Ἐὰν μὲ τ παραστήσωμεν τὸν ὅρον τῆς νιοστῆς τάξεως γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης α' ὅρον α καὶ λόγον ω, θὰ ἔχωμεν $\tau = \alpha . \omega^{\nu-1}$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\alpha = \frac{\tau}{\omega^{\nu-1}}$, καὶ $\omega = \sqrt[\nu-1]{\frac{\tau}{\alpha}}$. Π.χ. ὁ ἔχων τὴν δεκάτην τάξιν ὅρος τῆς προόδου 2, 6, 18,... εἶναι 2.3^9, διότι εἶναι $\alpha=2$, $\omega=3$, $\nu=10$.

Ἂν οἱ διαδοχικοὶ ὅροι γεωμετρικῆς προόδου παρασταθοῦν μὲ α, β, γ, δ,..., λ, τ καὶ ὁ λόγος της μὲ ω, θὰ ἔχωμεν $\beta=\alpha\omega$, $\gamma=\beta\omega, \ldots$, ἄρα $\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \ldots = \frac{\tau}{\lambda}$ καὶ $\alpha = \frac{\beta}{\omega}$, $\beta = \frac{\gamma}{\omega} \ldots$, $\lambda = \frac{\tau}{\omega}$. Ἄρα $\beta = \alpha\omega$, $\beta = \frac{\gamma}{\omega}$ καὶ $\beta^2 = \alpha\gamma$.

§ 209. Τὸ γινόμενον δύο ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἰσάκις ἀπεχόντων ἐκ τῶν ἄκρων ὅρων, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων.

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ ὅρους κατὰ σειρὰν α, β, γ, δ,.. κ,λ,τ, καὶ λόγον τὸν ω.

Ἔχομεν $\begin{cases} \beta = \alpha\omega \\ \lambda = \frac{\tau}{\omega}. \end{cases}$ Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν $\beta\lambda = \alpha\tau$. Ἐπίσης ἔχομεν $\begin{cases} \gamma = \alpha\omega^2 \\ \kappa = \frac{\tau}{\omega^2} \end{cases}$ καὶ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τούτων κατὰ μέλη $\gamma\kappa = \alpha\tau$. Οὕτως ἔχομεν $\alpha\tau = \beta\lambda = \gamma\kappa$.....

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι ἀριθμὸς περιττός, τότε θὰ ὑπάρχῃ εἷς ὅρος ἀπέχων ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ὅρων, ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι μεσαῖος ὅρος τῆς προόδου (ὡς ἐκ τῆς θέσεώς του). Ἂν παρασταθῇ αὐτὸς μὲ μ, θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω.

$$\mu\mu = \beta\lambda = \alpha\tau \text{ ἢ } \mu^2 = \alpha\tau \text{ καὶ } \mu = \sqrt{\alpha\tau}.$$

I. ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 210. Δίδονται δύο ἀριθμοί, α, β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν ν ἄλλους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ω, τὸν λόγον τῆς προόδου, ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς θὰ εἶναι $\nu + 2$, ὁ τελευταῖος ὅρος $\beta = \alpha\omega^{\nu+1}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῆς εὑρίσκομεν:

$$\omega^{\nu+1} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \omega = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$$

(ἂν $\nu+1$ = ἄρτιος, πρέπει $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, διὰ νὰ ἔχωμεν ὅρους πραγματικοὺς ἀριθμούς.). Ἑπομένως ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι

$$\alpha,\ \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\ \alpha\sqrt[\nu+1]{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2},\ldots.$$

Π.χ. ἂν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν ἐννέα ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 1 καὶ 2, οἵτινες μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, ἔχομεν $\nu = 9$ καὶ $\omega = \sqrt[10]{2} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ἑπομένως ἡ πρόοδος εἶναι

$$1,\ 2^{\frac{1}{10}},\ 2^{\frac{2}{10}},\ 2^{\frac{3}{10}},\ldots.$$

Ἀσκήσεις

553. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι προόδων εἶναι αὔξουσαι, ποῖαι φθίνουσαι καὶ διατί; α') 5, 10, 20... β') 3, –6, 12,... γ') 7, –28, 112... δ') 135, 27, 5,4....

ε') $\frac{32}{81}, \frac{16}{27}, \frac{8}{9}, \ldots$ στ') $-4, \frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

554. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὅρος τῆς ἑβδόμης τάξεως τῆς γεωμετρικῆς προόδου 2, 6, 18...

555. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος γεωμετρικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον τὸν 9 καὶ πέμπτον τὸν 144.

556. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς προόδου, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος της εἶναι 2, ὁ τελευταῖος 512 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων 9.

557. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος ὅρος εἶναι 156,25, ὁ προτελευταῖος 62,5 καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων 6.

558. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 6, ὁ δεύτερος 12 καὶ ὁ τελευταῖος 3 072 ;

559. Εἶναι δυνατὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ α' ὅρον 23,75, λόγον –0,925 καὶ τελευταῖον –7,375 ;

560. Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης τετάρτης τάξεως ὅρον 13, ἕκτης 117 καὶ τελευταῖον 9 477.

561. Εὕρετε τὸν λόγον γεωμετρικῆς προόδου, ἐχούσης τρίτης τάξεως ὅρον τὸν 12 καὶ ὀγδόης τὸν 384.

II. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 211. Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος, $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \ldots, \alpha\omega^{\nu-1}$ ἐκ ν ὅρων. Ἐὰν ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων αὐτῆς καὶ παραστήσωμεν αὐτὸ μὲ Σ, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^{\nu-1} \qquad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ ω, ἀφαιρέσωμεν δὲ ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον $\Sigma\omega = \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \ldots + \alpha\omega^\nu$ τὴν (1) (κατὰ μέλη), προκύπτει $\Sigma\omega - \Sigma = \alpha\omega^\nu - \alpha$ ἢ $\Sigma\cdot(\omega-1) = \alpha\omega^\nu - \alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν διαιροῦντες τὰ ἴσα διὰ τοῦ $\omega-1$, (τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται $\neq 0$, δηλαδὴ $\omega \neq 1$) $\Sigma = \frac{\alpha\omega^\nu - \alpha}{\omega - 1}$ (2)

Ἂν εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην θέσωμεν τὸ τ ἀντὶ τοῦ $\alpha\omega^{\nu-1}$, τὸ ὁ-

---

* Ἡ Γενικὴ ἄθροισις ὅρων γεωμετρικῆς προόδου ὀφείλεται εἰς τοὺς Ἕλληνας κατ' ἐπέκτασιν τῆς ἀναλογίας $\alpha:x = x:\gamma$, ἐχρησιμοποιεῖτο δὲ τὸ πρῶτον ἡ $\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2 \ldots$ Γενικωτέρα μορφὴ ἀθροίσεως παρουσιάζεται τὸ πρῶτον εἰς τὸ ἔργον «Algorithmus de Integris» (1410) τυπωθὲν ἐν Παδούῃ (1483) καὶ ἐν Βενετίᾳ (1540) ὑπὸ τοῦ Ἰταλοῦ Prosdocimo de Beldomanti, ὁ ὁποῖος ἐχρησιμοποίησε τὸν τύπον $\alpha + \alpha\varphi + \alpha\varphi^2 + \ldots + \alpha\varphi^{\nu-1} = \alpha\varphi^{\nu-1} + (\alpha\varphi^{\nu-1} - \beta\alpha):(\varphi-1)$, ὄχι μὲ σύμβολα, ἀλλὰ μὲ παραδείγματα μόνον. Γενικὸν τύπον προσθέσεως ὅρων γεωμετρικῆς προόδου δίδει ὁ Γάλλος F. Viète (1540 - 1603, Παρίσιοι).

ποῖον παριστάνει τὸν τελευταῖον ὅρον τῆς (1), θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

$$\Sigma = \frac{\alpha\omega^{\nu-1}.\omega-\alpha}{\omega-1} = \frac{\tau\omega-\alpha}{\omega-1} \text{ καὶ } \frac{\alpha\omega^{\nu}-\alpha}{\omega-1} = \frac{\alpha}{1-\omega} - \frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega} \qquad (3)$$

Τό ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἔχομεν $\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}=\alpha(1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\nu-1})$. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ $1+\omega+\omega^2+\ldots+\omega^{\nu-1}$ εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\omega^{\nu}-1):(\omega-1)$, ἄρα:

$$\alpha+\alpha\omega+\alpha\omega^2+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}=\alpha\cdot\frac{\omega^{\nu}-1}{\omega-1}=\alpha\cdot\frac{1-\omega^{\nu}}{1-\omega}=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}.$$

III. ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΑΠΕΙΡΩΝ ΟΡΩΝ ΦΘΙΝΟΥΣΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΠΡΟΟΔΟΥ

§ 212. Ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ δοθεῖσα γεωμετρικὴ πρόοδος εἶναι φθίνουσα * μὲ ἄπειρον πλῆθος ὅρων, δηλαδὴ ὅτι ἔχομεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον (1′) $\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \ldots$ (ἐπ' ἄπειρον), ἐνῷ τὸ ω εἶναι ἀπολύτως < 1, τότε τὸ ω^{ν} θὰ εἶναι ἀριθμὸς πολὺ μικρός, ὅταν τὸ ν εἶναι πολὺ μεγάλος (θετικός). Ὅταν δὲ τὸ ν ὑπερβαίνῃ πάντα δοθέντα θετικὸν ἀριθμὸν καὶ τείνῃ εἰς τὸ ∞, τὸ ω^{ν} καθὼς καὶ τὸ $\alpha\omega^{\nu}$ γίνεται ἀπολύτως μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ καὶ λέγομεν, ὅτι **τείνει** εἰς τὸ 0.

Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς προόδου, τὸ $\Sigma=\frac{\alpha\omega^{\nu}-\alpha}{\omega-1}$ γράψωμεν οὕτω: $\Sigma=\frac{\alpha-\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}$ καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ $\nu\to\infty$, τότε λέγομεν, ὅτι προσθέτομεν τοὺς ἀπείρους ὅρους τῆς προόδου, ἐπειδὴ δὲ τὸ μὲν $\frac{\alpha}{1-\omega}$ εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος, τὸ δὲ $\alpha\omega^{\nu}\to 0$, θὰ ἔχωμεν ὡς ἄθροισμα τῆς (1′) τὸ $\frac{\alpha}{1-\omega}$, δηλαδὴ ἔχομεν:

$\alpha+\alpha\omega+\ldots+\alpha\omega^{\nu-1}=\frac{\alpha}{1-\omega}$, $\omega < 1$, $\nu\to\infty$. Ἤτοι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἰσοῦται μὲ κλάσμα, ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν

---

* Ἡ φθίνουσα γεωμετρικὴ πρόοδος $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$, ἐμφανίζεται τὸ πρῶτον ὑπὸ τοῦ Ἕλληνος μαθηματικοῦ Ἀρχιμήδους (287-212 π.Χ., Συρακοῦσαι).

πρῶτον ὅρον, παρονομαστὴν δὲ τὴν μονάδα ἠλαττωμένην κατὰ τὸν λόγον τῆς προόδου.

Κατὰ ταῦτα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots,$ εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι $\omega = \frac{1}{2}$ καὶ $\alpha = 1$, εἶναι $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς προόδου $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \ldots$ εἶναι $\frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$.

Ἀσκήσεις καὶ Προβλήματα

Ὁμὰς πρώτη. 562. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι:
α') $\alpha=25$, $\omega=-3$, $\nu=7$, β') $\alpha=7$, $\tau=5103$, $\nu=7$, γ') $\tau=0{,}0625$ $\omega=0{,}5$, $\nu=13$.

563. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ
α') $\alpha=4$, $\omega=4$, καὶ ἄθροισμα $\Sigma=5460$, β') $\alpha=4{,}6$ $\omega=108$, $\Sigma=54\,155{,}8$.
γ') $\alpha=5$, $\tau=1280$ $\Sigma=2\,555$.

564. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ἑκάστης τῶν ἑπομένων προόδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀπείρους ὅρους:
α') $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ β') $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \ldots$ γ') $2, -1\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \ldots$ δ') 0,86 86...

565. Εὕρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῶν γεωμετρικῶν προόδων, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν, ἂν μεταξὺ α') τῶν 13,7 καὶ 3507,2 παρεμβληθοῦν 7 γεωμ. μέσοι, β') τῶν 48,6 καὶ 0,2 παρεμβληθοῦν 4 γεωμ. μέσοι.

566. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, εἰς τὴν ὁποίαν $\tau=384$, $\omega=2$, $\nu=8$.

567. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα α') $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots$ (ἐπ' ἄπειρον).

(Παρατηρήσατε ὅτι εἶναι $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+$

$$+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}+\ldots \text{ (ἐπ' ἄπειρον).}$$

$$\text{β')}\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots \text{ (ἐπ' ἄπειρον).}$$

---

* Ὁ Stiffel (1544) εἰς τὸ ἔργον του «Arithmetica Integra» ἐθεώρησε τὸ ἄθροισμα ὅρων γεωμετρικῆς προόδου $1\frac{1}{2}+1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}$ καὶ προσέθεσε πεπερασμένον πλῆθος ὅρων.

Ὁμὰς δευτέρα. 568. Ἂν $\alpha > \beta > 0$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα

$$\alpha')\ \alpha^\nu + \beta\alpha^{\nu-1} + \beta^2\alpha^{\nu-2} + \dots \qquad \beta')\ \alpha + \beta + \frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \dots$$

569. Εἰς τετράγωνον (ἢ ἰσόπλευρον τρίγωνον) μὲ μῆκος τῆς πλευρᾶς του α, συνδέομεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ εὑρίσκομεν νέον τοιοῦτο. Τὸ αὐτὸ ἐπαναλαμβάνομεν εἰς τὸ νέον τοῦτο καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν καὶ τῶν περιμέτρων τῶν ἀπείρων τούτων τετραγώνων (ἢ τριγώνων).

570. Εἰς κύκλον μὲ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ρ ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο κύκλον, εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀπείρων τούτων κύκλων καὶ τετραγώνων.

571. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τετραπλεύρου, ἂν ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ ἡ τετάρτη εἶναι ἐννεαπλασία τῆς δευτέρας.

572. Νὰ μερισθῆ ὁ 221 εἰς τρία μέρη ἀποτελοῦντα γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ γ' ὅρος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν α' κατὰ 136.

573. Τὸ μὲν ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 248, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι 192. Τίνες οἱ τρεῖς ὅροι ;

574. Δείξατε, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μὲ ν ὅρους καὶ ἄκρους ὅρους α καὶ τ ἰσοῦται μὲ $\sqrt{(\alpha\tau)^\nu}$.

3. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

§ 213. Καλεῖται **ἁρμονικὴ** πρόοδος διαδοχὴ ἀριθμῶν, ἂν οἱ ἀντίστροφοι τούτων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Π.χ. ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 5, 7,... ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον.

Ὁμοίως οἱ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}, \dots$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν πρόοδον, ἐπειδὴ οἱ 1, 2, 3,.. ὁρίζουσιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι ἁρμονικῆς προόδου οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν εἶναι 0, διότι οἱ ἀντίστροφοί των οἱ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ θὰ εἶναι διαδοχικοὶ ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου δηλ. ἀριθμοὶ ὡρισμένοι, καὶ θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}$ ἢ $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ καὶ $\beta = \dfrac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}}$. Ὁ β καλεῖται **μέσος ἁρμονικὸς** τῶν α, β, γ, εἶναι δὲ καὶ $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\beta}$ ἢ $\beta\gamma + \alpha\beta = 2\alpha\gamma$, $\alpha\gamma - \beta\gamma = \alpha\beta - \alpha\gamma$, $(\alpha-\beta)\gamma = (\beta-\gamma)\alpha$ καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$

Ἂν δοθοῦν δύο ἀριθμοὶ π.χ. α, β καὶ ζητεῖται νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ αὐτῶν ν ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἁρμονικὴν πρόοδον, παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ θὰ εἶναι οἱ ἄκροι ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου μὲ $\nu+2$ ὅρους, καὶ οἱ ἐνδιάμεσοι αὐτῶν εἶναι οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ τῶν ζητουμένων. Εὑρίσκομεν τὸν λόγον, ἔστω ω, τῆς ἐν λόγῳ ἀριθμητικῆς προόδου, ὅτε $\omega=\dfrac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\nu+1}$, σχηματίζομεν τοὺς ὅρους τῆς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί. Π.χ. ὁ ἑπόμενος τοῦ ὅρου $\frac{1}{\alpha}$ τῆς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ὁ $\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right):(\nu+1)=\frac{1}{\alpha}+(\alpha-\beta):(\nu+1)\alpha\beta$, ὁ δὲ ἀντίστροφος τούτου ἀριθμὸς εἶναι ὁ μετὰ τὸ πρῶτον ὅρος τῆς ἁρμονικῆς προόδου.

Ἀσκήσεις

575. Εὕρετε τὴν ἁρμονικὴν πρόοδον μὲ 20 ὅρους, τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι α′) $1, \frac{1}{2}$. β′) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, γ′) $1, \frac{1}{3}$.

576. Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 0,25 καὶ 0,025 νὰ παρεμβληθοῦν 18 ἀριθμοί, ὥστε μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἁρμονικὴν πρόοδον.

Β′ ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 214. Καλοῦμεν **λογάριθμον** ἀριθμοῦ τινὸς Α ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10, τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ τὸν Α*. Ἤτοι ἂν εἶναι $10^\alpha=A$, τὸ α λέγεται λογάριθμος τοῦ Α ὡς

* Καλοῦμεν **νεπέριον** λογάριθμον ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμον αὐτοῦ ὡς πρὸς βάσιν τὸν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος παριστάνεται μὲ τὸ γράμμα e καὶ εἶναι $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1,2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$ (ἐπ' ἄπειρον) ἢ $e=2,718281828\dots$ Ὁ e δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως καὶ διὰ τοῦτο λέγεται καὶ **ὑπερβατικὸς** ἀριθμὸς (ὡς καὶ ὁ ἀριθμὸς $\pi=3,14159\dots$). Ἡ ἐφεύρεσις τῶν νεπερίων λογαρίθμων ὀφείλεται εἰς τὸν John Naper (1614), ὀλίγον δὲ βραδύτερον ὁ Briggs (1624) ἐδημοσίευσε πίνακας δεκαδικῶν λογαρίθμων ἀπὸ 1 μέχρι 20 000.

Μία ἐξίσωσις λέγεται **ἀλγεβρική**, ἂν τὸ πρῶτον μέλος της εἶναι ἀκέραιον ποπρὸς βάσιν 10 ἢ ἁπλῶς λογάριθμος τοῦ Α καὶ σημειώνεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς: $\alpha = \lambda o \gamma A$ ἢ $\lambda o \gamma A = \alpha$, ἀπαγγέλλεται δὲ ἡ ἰσότης αὕτη οὕτως:

Ὁ λογάριθμος τοῦ Α εἶναι ἴσος μὲ α.

Ἐπειδὴ εἶναι $10^0 = 1$ καὶ $10^1 = 10$, ἔπεται ὅτι:

Λογάριθμος τοῦ μὲν 1 εἶναι τὸ 0, τοῦ δὲ 10 ἡ 1.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι:

Δοθέντος ἀριθμοῦ θετικοῦ ὑπάρχει εἷς μόνος λογάριθμος αὐτοῦ.

1ον. Ἔστω ἀριθμὸς $A > 0$. Λαμβάνομεν ἕνα ἀκέραιον καὶ θετικὸν ἀριθμὸν ν καὶ σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς $0, \frac{1}{\nu}, \frac{2}{\nu}, \frac{3}{\nu}, \ldots$ καὶ τὰς δυνάμεις $10^0, 10^{\frac{1}{\nu}}, 10^{\frac{2}{\nu}}, 10^{\frac{3}{\nu}}, \ldots$, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πρόοδον γεωμετρικὴν αὔξουσαν, ἐπειδὴ εἶναι $10^{\frac{1}{\nu}} > 1$ (διότι ἂν ἦτο $10^{\frac{1}{\nu}} \leq 1$ ὑψοῦντες τὰ ἄνισα αὐτὰ εἰς τὴν ν δύναμιν, θὰ εἴχομεν $10 \leq 1$). Οἱ ὅροι τῆς προόδου ταύτης βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ τοῦ α' καὶ ἑξῆς, καὶ ἂν μὲν τύχῃ εἷς ἐξ αὐτῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν Α, ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ταύτης εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ Α, ἂν δὲ δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, θὰ περιέχεται ὁ Α μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου, ἔστω τῶν $10^{\frac{\mu}{\nu}}$ καὶ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}}$, ἤτοι θὰ εἶναι $10^{\frac{\mu}{\nu}} < A < 10^{\frac{\mu+1}{\nu}}$.

Οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α, διαφέρουν κατὰ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}} - 10^{\frac{\mu}{\nu}} = 10^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot 10^{\frac{1}{\nu}} - 10^{\frac{\mu}{\nu}} = 10^{\frac{\mu}{\nu}}\left(10^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)$.

Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἂν λάβωμεν καταλλήλως τὸ ν. Διότι τὸ $10^{\frac{1}{\nu}} - 1$ δύναται νὰ γίνῃ ἀπολύτως μικρότερον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ ν ὑπερβαίνῃ κατάλληλον ἀριθμόν. Τοῦτο συμβαίνει, διότι τὸ $10^{\frac{1}{\nu}}$ διηνεκῶς ἐλαττοῦται, ὅταν αὐξάνεται τὸ ν, πλησιάζει δὲ τὸ $10^{\frac{1}{\nu}}$ πρὸς τὴν 1.

λυώνυμον ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους αὐτῆς, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος της εἶναι μηδέν. Ἡ ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως πραγματικὴ ἢ μιγαδικὴ λέγεται **ἀλγεβρικὸς ἀριθμός.**

Οἱ ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ εἶναι ρητοὶ ἢ ἀσύμμετροι, ἀλλὰ δὲν ἕπεται ὅτι κάθε ἀσύμμετρος εἶναι ἀλγεβρικὸς ἀριθμός. Παράδειγμα οἱ ἀνωτέρω ἀριθμοὶ e καὶ π.

ὅταν τὸ ν τείνει εἰς τὸ ∞. Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ δύο ἀριθμοί, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ Α, διαφέρουν ἀπολύτως κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικρὰν (ὅταν λάβωμεν τὸ ν ἀρκούντως μέγα), κατὰ μείζονα λόγον ὁ Α θὰ διαφέρῃ ἀπολύτως ἀπὸ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικράν. Ἤτοι εἶναι ὁ Α ὅριον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λάβωμεν (κατὰ προσέγγισιν) τὸν Α ἴσον μὲ ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν τούτων (ὅταν τὸ ν ληφθῇ ἀρκούντως μέγα), ἤτοι νὰ θέσωμεν $A = 10^{\frac{\mu}{\nu}}$, ὅτε εἶναι $\lambda o\gamma A = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $10^{\frac{\mu+1}{\nu}} = A$, ὅτε $\lambda o\gamma A = \frac{\mu+1}{\nu}$. Οἱ δύο οὗτοι λογάριθμοι τοῦ Α διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$, τὸ ὁποῖον τείνει εἰς τὸ 0, ὅταν τὸ ν τείνῃ εἰς ∞.

2ον. Ἔστω ὅτι εἶναι $0 < A < 1$. Παρατηροῦμεν ὅτι θὰ εἶναι $\frac{1}{A} > 1$. Ἑπομένως ὁ $\frac{1}{A}$ θὰ ἔχῃ λογάριθμον, ἔστω τὸν $\frac{\kappa}{\lambda}$, δηλαδὴ θὰ εἶναι $\frac{1}{A} = 10^{\frac{\kappa}{\lambda}}$. Ἀντιστρέφοντες τὰ ἴσα, θὰ ἔχωμεν $A = \frac{1}{10^{\frac{\kappa}{\lambda}}} = 10^{-\frac{\kappa}{\lambda}}$, ἑπομένως $\lambda o\gamma A = -\frac{\kappa}{\lambda}$. Λέγομεν τώρα, ὅτι εἷς μόνος λογάριθμος τοῦ Α ὑπάρχει. Διότι, ἐὰν εἴχομεν π.χ. $\nu = \lambda o\gamma A$ καὶ $\rho = \lambda o\gamma A$, θὰ ἦτο $10^\nu = A$, $10^\rho = A$ καὶ $10^\nu = 10^\rho$, ἄρα καὶ $10^{\nu-\rho} = 1$, ἑπομένως $\nu - \rho = 0$ ἢ $\nu = \rho$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

Πᾶς ἀριθμὸς $A > 0$ ἔχει ἕνα μόνον λογάριθμον, θετικὸν μὲν ἂν $A > 1$. ἀρνητικὸν δὲ ἂν $A < 1$.

Παρατηρήσεις. **Ἀρνητικὸς ἀριθμός τις δὲν ἔχει (πραγματικὸν) λογάριθμον,** ἐπειδὴ δι' οὐδεμίαν (πραγματικὴν) τιμὴν τοῦ **x** ἡ δύναμις 10^x δίδει ἐξαγόμενον ἀρνητικόν, διότι τὸ $10^x =$ θετ. ἀριθμός, τὸ $10^{-x} = \frac{1}{10^{x}} =$ θετικὸς ἀριθμός.

2α. Ἀριθμός τις σύμμετρος α δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς λογάριθμος τοῦ 10^α, εἶναι δὲ οὗτος ὁ μόνος, ὅστις ἔχει λογάριθμον τὸν α.

3η. Πᾶσα δύναμις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτην ἀριθμὸν σύμμετρον ἔχει λογάριθμον τὸν σύμμετρον τοῦτον ἐκθέτην, πᾶς δὲ ἄλλος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἀσύμμετρον ἀριθμόν.

Διότι, ἂν εἶχε λογάριθμον σύμμετρον ἀριθμόν, θὰ ἦτο οὗτος ἴσος μὲ δύναμιν τοῦ 10 ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν σύμμετρον τοῦτον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν γενομένην ὑπόθεσιν.

Οἱ ἀριθμοὶ $10^0, 10^1, 10^2, 10^3 \ldots, 10^\nu$, ὅπου ν ἀκέραιος, ἔχουν ἀντιστοίχως λογαρίθμους 0, 1, 2, 3,..., ν.

Οἱ ἀριθμοὶ $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots, 10^{-\nu}$ ἢ οἱ ἴσοι των ἀντιστοίχως 0,1 0,01 0,001 ... 0,00... 01 ἔχουν ἀντιστοίχως λογαρίθμους −1, −2, −3,..., −ν.

1. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 215. α΄) Ὁ λογάριθμος γινομένου ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

Ἔστω, ὅτι εἶναι λογΑ=α, λογΒ=β, λογΓ=γ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι λογ(Α·Β·Γ)=α+β+γ=λογΑ+λογΒ+λογΓ.

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν

$$10^\alpha = A, \quad 10^\beta = B, \quad 10^\gamma = \Gamma$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ ἴσα ταῦτα μέλη εὑρίσκομεν

$$10^\alpha \cdot 10^\beta \cdot 10^\gamma = A \cdot B \cdot \Gamma \text{ ἢ } 10^{\alpha+\beta+\gamma} = A \cdot B \cdot \Gamma.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει, ὅτι:

λογ(Α·Β·Γ) = α+β+γ=λογΑ+λογΒ+λογΓ.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον δεικνύεται ἡ ἰδιότης καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας.

Συνήθως, ὅταν δοθῇ ἀκέραιος ἀριθμός, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων (ἢ μὴ) παραγόντων καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἐφαρμόζομεν τὸν ἀνωτέρω κανόνα περὶ λογαρίθμου γινομένου.

Π.χ. ἔχομεν λογ420=λογ(3·5·7·4)=λογ3+λογ5+λογ7+λογ4.

β΄) Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

Ἔστω, ὅτι εἶναι λογΑ =α, λογΒ=β. Θὰ δείξωμεν ὅτι λογ $\frac{A}{B}$ = λογΑ−λογΒ. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν $10^\alpha = A$, $10^\beta = B$, διαιροῦντες δὲ τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{10^\alpha}{10^\beta} = \frac{A}{B}$ ἢ $10^{\alpha-\beta} = \frac{A}{B}$. Ἀλλ' ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει ὅτι:

$$\text{λογ}\,\frac{A}{B} = \alpha - \beta = \text{λογ}A - \text{λογ}B.$$

Οὕτως ἔχομεν π.χ. λογ$5\frac{2}{3}$ = λογ $\frac{17}{3}$ = λογ17–λογ3

γ') **Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε δυνάμεως ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως αὐτῆς.**

Ἔστω, ὅτι εἶναι λογΑ=α καὶ ὅτι ἔχομεν τὴν δύναμιν Α μὲ ἐκθέτην μ οἱονδήποτε. Θὰ δείξωμεν ὅτι λογA^{μ} = μ.λογΑ.

Διότι, ἐπειδὴ εἶναι λογΑ=α, θὰ ἔχωμεν 10^{α} = Α καὶ ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὴν μ δύναμιν εὑρίσκομεν $(10^{\alpha})^{\mu} = A^{\mu}$ ἢ $10^{\mu\cdot\alpha} = A^{\mu}$. Ἀλλὰ ἡ ἰσότης αὕτη ὁρίζει, ὅτι λογA^{μ} = μ·α=μλογ·Α

Κατὰ ταῦτα ἔχομεν λογ$A^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{\nu}$λογΑ ἢ λογ$\sqrt[\nu]{A} = \frac{\text{λογ}A}{\nu}$, ἤτοι:

δ') **Ὁ λογάριθμος ρίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου, διῃρημένον διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.**

ε') Ἐὰν εἶναι Α, Β δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ Α > Β, θὰ εἶναι καὶ λογΑ > λογΒ, ἐὰν ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος. Διότι ἀφοῦ εἶναι Α > Β, θὰ ἔχωμεν διαιροῦντες τὰ ἄνισα μὲ Β, $\frac{A}{B} > 1$. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ $\frac{A}{B}$ εἶναι > 1 ἔχει λογάριθμον θετικόν, ἤτοι ἔχομεν λογ$\frac{A}{B} > 0$, ἢ λογ Α–λογΒ > 0, ἄρα λογΑ > λογΒ.

Ἄσκησις

577. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ἰσοτήτων:

α') λογ15=λογ3+λογ5, β') λογ55=λογ5+λογ11.

γ') λογ$2\frac{1}{3}$=λογ7–λογ3, δ') λογ49=2λογ7,

ε') λογ$\sqrt{20}$ = (λογ20):2, στ') λογ$\sqrt{647^3}$ = 3(λογ647):2.

ζ') 6λογ32=λογ32^6, η') λογ5+λογ7+λογ4=λογ140.

2. ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟΥ ΤΟΥ ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΥ

§ 216. Καλοῦμεν **χαρακτηριστικὸν** λογαρίθμου τινός, τὸν μικρότερον ἐκ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ λογάριθμος αὐτός.

Ἔστω ἀριθμός τις, περιεχόμενος μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 10 π.χ. ὁ 7. Ἐπειδὴ 1 < 7 < 10, ἔχομεν λογ1 < λογ7 < λογ10 ἢ 0 < λογ7 < 1. Ἡ-τοι ὁ λογάριθμος ἀριθμοῦ περιεχομένου μεταξὺ 1 καὶ 10 ἔχει χαρακτηριστικὸν 0.

Ἂν ἀριθμός τις περιέχεται μεταξὺ τῶν 10 καὶ 100, π.χ. ὁ 47, ἐπειδὴ $10 < 47 < 100$, θὰ ἔχωμεν $λογ10 < λογ47 < λογ100$ ἢ $1 < λογ\,47 < 2$. Ἤτοι πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον μὲ χαρακτηριστικὸν 1 κ.ο.κ. Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος α΄) μεταξὺ 1 καὶ 10 ἔχει ἀκέραιον μέρος μονοψήφιον, β΄) μεταξὺ 10 καὶ 100 ἔχει ἀκέραιον μέρος διψήφιον κ.ο.κ., ἕπεται ὅτι :

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ $A > 1$ ἔχει τόσας ἀκεραίας μονάδας, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου του μέρους ἠλαττωμένον κατὰ 1.

Π.χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ 235 εἶναι 2, τοῦ 12,4 εἶναι 1, τοῦ 3 835,24 εἶναι 3 κ.τ.λ.

Ἔστω τώρα ἀριθμός τις περιεχόμενος μεταξὺ τῶν 0,1 καὶ 1, π.χ ὁ 0,34. Ἐπειδὴ εἶναι $0{,}1 < 0{,}34 < 1$, ἔχομεν $λογ0{,}1 < λογ0{,}34 < λογ1$ ἢ $-1 < λογ\,0{,}34 < 0$. Ἤτοι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -1 καὶ 0 καὶ ἔχει συνεπῶς χαρακτηριστικὸν -1,

Ἂν ἀριθμός περιέχεται μεταξὺ τῶν 0,01 καὶ 0,1 π.χ. ὁ 0,047, ἐπειδὴ εἶναι $0{,}01 < 0{,}047 < 0{,}1$ θὰ ἔχωμεν $λογ0{,}01 < λογ0{,}047 < λογ0{,}1$ ἢ $-2 < λογ0{,}047 < -1$, ἤτοι ὁ λογάριθμος παντὸς τοιούτου ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων -2 καὶ -1 καὶ ἔχει χαρακτηριστικὸν τὸν -2.

Ἐπειδὴ ὅμως πᾶς ἀριθμὸς περιεχόμενος α΄) μεταξὺ 0,1 καὶ 1, ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικός θὰ ἔχῃ ἕνα μηδενικὸν εἰς τὴν ἀρχήν, β΄) μεταξὺ 0,01 καὶ 0,1, ὅταν γραφῇ ὡς δεκαδικός, θὰ ἔχῃ δύο μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους κ.ο.κ. ἕπεται ὅτι :

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου (θετικοῦ) ἀριθμοῦ $A < 1$ γραμμένου ὡς δεκαδικοῦ, ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσα καὶ τὰ μηδενικὰ ποὺ ἔχει εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

Π.χ. τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογ0,3 εἶναι -1, τοῦ λογ0,0147 ὁ -2, τοῦ λογ0,0076 ὁ -3 κ.τ.λ.

Ἀντιστρόφως, ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι :

Ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ A

εἶναι θετικὸν ἢ 0, ὁ ἀριθμὸς Α θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἂν αὐξηθοῦν κατὰ 1.

Ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α εἶναι ἀρνητικόν, ὁ Α γραφόμενος ὡς δεκαδικὸς θὰ ἔχῃ τόσα μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους, ὅσαι καὶ αἱ ἀρνητικαὶ μονάδες τοῦ χαρακτηριστικοῦ του.

Οὕτως, ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ εἶναι 3, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει τέσσαρα ψηφία· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸ εἶναι 0, τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ ἔχει ἓν ψηφίον· ἂν τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι -2, ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς μὲ 2 μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχὴν μαζὺ μὲ τὸ μηδενικὸν τοῦ ἀκεραίου μέρους.

§ 217. Ἔστω, ὅτι εἶναι $10^{\alpha}=A$. Ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ταῦτα ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10, ἔστω τὴν 10^3, θὰ ἔχωμεν $10^{\alpha}\cdot 10^3 = A\cdot 10^3$ ἢ $10^{\alpha+3}=A\cdot 10^3$, καὶ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν ὅτι $\text{λογ}(A\cdot 10^3)=\alpha+3$. Ἀλλ' ἔχομεν $\alpha=\text{λογ}A$. Ἑπομένως εἶναι

$$\text{λογ}(A\cdot 10^3)=\alpha+3=\text{λογ}A+3.$$

Ὁμοίως, ἂν διαιρέσωμεν π.χ. διὰ τοῦ 10^3 τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $10^{\alpha}=A$, εὑρίσκομεν ὅτι $\text{λογ}(A:10^3)=\text{λογ}A-3$. Ἤτοι:

Ἐὰν ἀριθμός τις πολλαπλασιασθῇ (ἢ διαιρεθῇ) ἐπὶ τὸν 10, 100, 1000,... ὁ λογάριθμος αὐτοῦ αὐξάνεται (ἢ ἐλαττοῦται) κατὰ 1, 2, 3, . . . δηλ. κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ μεταβάλλεται.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι:

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ αὐτὰ ψηφία καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, διαφέρουν δὲ μόνον ὡς πρὸς τὴν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, οἱ λογάριθμοι αὐτῶν διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ χαρακτηριστικὰ αὐτῶν.

Π.χ. ὁ λογάριθμος	τοῦ	5	εἶναι	0,69897
	τοῦ	50	εἶναι	1,69897
	τοῦ	500	εἶναι	2,69897
ὁ λογάριθμος	τοῦ	0,5	εἶναι	$-1+0{,}69897$
	τοῦ	0,05	εἶναι	$-2+0{,}69897$ κ.λ.π.

Ἀσκήσεις

578. Νὰ εὑρεθῇ τὸ χαρακτηριστικόν: α΄) λογ35. β΄) λογ4 513.
γ΄) λογ9,5, δ΄) λογ0,80, λογ0,0003, λογ800, λογ8 000,
ε΄) λογ0,00132, λογ132, λογ1320, στ΄) λογ397,451, λογ 3 974,51, λογ39,
ζ΄) λογ $\frac{13}{3}$, η΄) λογ $\frac{1}{50}$, θ΄) λογ62 $\frac{2}{3}$, ι΄) λογ2 $\frac{1}{7}$, λογ0,5, λογ40.

579. Πόσα ἀκέραια ψηφία ἔχει ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 3, 5, 7, 1, 0, 12 ;

580. Ποία εἶναι ἡ τάξις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολὴν τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν –1, –2, –3, –5,–9;

581. Ὁ λογάριθμος τοῦ 80 εἶναι 1,90309. Ποῖοι ἄλλοι ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν ψηφίον τῶν λογαρίθμων των ;

582. Ποῖον γνώρισμα ἔχει ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι ὁ 0,70586 ὁ 1,70586. ὁ –1+0,70586, ὁ –2+0,70586, ὁ –3+0,70586 καὶ διατί ;

3. ΤΡΟΠΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΔΕΚΑΔΙΚΟΥ ΕΙΣ ΕΝ ΜΕΡΕΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΝ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 218. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ χαρακτηριστικοῦ τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος προκύπτει, ὅτι ὁ λογάριθμος ὑπερβαίνει τὸ χαρακτηριστικόν του, ἀλλ' ἡ διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 1. Ἡ διαφορὰ αὐτὴ ἐκφράζεται συνήθως μὲ δεκαδικὸν ἀριθμὸν (κατὰ προσέγγισιν) καὶ λέγεται **δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου,** εἶναι δὲ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ τῶν μικροτέρων τῆς 1 (θετικῶν) ἀριθμῶν ὁ λογάριθμος εἶναι ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον ἴσον του μὲ ἀρνητικὸν μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος.

Ἔστω π.χ. ὁ (ὅλως) ἀρνητικὸς λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος
ὁ –2,54327 ἤτοι ὁ –2–0,54327.

Ἐὰν εἰς αὐτὸν προσθέσωμεν τὸν –1 καὶ τὸν +1, εὑρίσκομεν,

$$-2-1+1-0{,}54327=-3+1-0{,}54327=-3+\begin{array}{r}1{,}00000\\ 0{,}54327\\ \hline\end{array}$$

$$-3+0{,}45673$$

τὸν ὁποῖον γράφομεν $\overline{3}$,45673· δηλαδὴ γράφομεν τὸ – ὑπεράνω τοῦ ἀκεραίου μέρους, ἵνα δηλώσωμεν, ὅτι τοῦτο μόνον εἶναι ἀρνητικόν. Ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν φαίνεται, ὅτι χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος –3, διότι ὁ λογάριθμος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων –3 καὶ –2, καὶ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, τὸ ἀναγραφόμενον δεκαδικὸν μέρος, διότι τοῦτο εἶναι ἡ διαφορὰ ποὺ προκύπτει, ἂν ἀπὸ τὸν λογάριθμον –3+0,45673 ἀφαιρεθῇ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ –3.

Παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ τρέψωμεν λογάριθμον ἀρνητικὸν εἰς ἐν μέρει ἀρνητικόν, αὐξάνομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀκεραίου κατὰ 1 καὶ γράφομεν τὸ – ὑπεράνω τοῦ ἐξαγομένου, δεξιὰ δὲ τούτου γράφομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία τὰς διαφορὰς τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος, τοῦ μὲν τελευταίου (σημαντικοῦ) ἀπὸ τὸ 10 τῶν δὲ ἄλλων ἀπὸ τὸ 9.

Παρατήρησις. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων γίνονται, καθὼς καὶ αἱ ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, μὲ παραλλαγάς τινας ὅταν οἱ λογάριθμοι ἔχουν ἀρνητικὸν χαρακτηριστικόν, καὶ αἱ ὁποῖαι φαίνονται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

Πρόσθεσις. Ἔστω ὅτι ζητεῖται π.χ. τὸ $2,57834+\overline{1},67943$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς προσθέτομεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ $2=3$ καὶ $-1=2$ Οὕτως εὑρίσκομεν ἄθροισμα 2,25777.

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα

$$\overline{2},85643+2,24482+\overline{3},42105+1,24207$$

Γράφομεν τοὺς προσθετέους ὡς κατωτέρω πρὸς εὐκολίαν καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ ψηφία ὡς συνήθως

$$\begin{array}{r} \overline{2},85643 \\ 2,24482 \\ \overline{3},42105 \\ \overline{1},24207 \\ \hline \overline{3},76437 \end{array}$$

Ὅταν φθάσωμεν εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀκεραίων λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ $-1=0$ καὶ -3 ἴσον -3 καὶ 2 ἴσον -1 καὶ -2 ἴσον -3. οὕτω δὲ εὑρίσκομεν ἄθροισμα $\overline{3},76437$.

Ἀφαίρεσις. Ἔστω, ὅτι ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\overline{5},67893-\overline{8},75928$. Τοὺς μὲν δεκαδικοὺς ἀφαιροῦμεν ὡς συνήθως, ὅταν δὲ φθάσωμεν εἰς τοὺς ἀκεραίους λέγομεν: 1 τὸ κρατούμενον καὶ -8 ἴσον -7, διὰ τὴν ἀφαίρεσιν γίνεται $+7$ καὶ σὺν -5 ἴσον 2. Ἑπομένως ἡ διαφορὰ εἶναι 2,91965.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ ἀκέραιον. Ἔστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸ $\overline{5},62893\cdot 3$ Ἔχομεν $\overline{5},62893\cdot 3=-5\cdot 3+0,62893\cdot 3=-15+1,88679=\overline{14},88679$.

Διαίρεσις δι' ἀκεραίου. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ πηλίκον π.χ. τοῦ $\overline{5},62891:3$. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι $5,62891:3=(-5+0,62891):3$ $=(-5-1+1+0,62891):3=(-6+1,62891):3=-2+0,54297=$

$=2,54297$. Ἐπειδὴ ὁ ἀρνητικὸς ἀκέραιος τοῦ διαιρετέου δὲν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ διαιρέτου, ἀφαιροῦμεν ἀπ' αὐτὸν καὶ προσθέτομεν περαιτέρω τὰς ἀπαιτουμένας μονάδας, ἵνα καταστῇ διαιρετός, καὶ ἀκολούθως ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν.

Ὁμοίως διὰ τὴν διαίρεσιν π.χ. $\overline{4},67837:9$ ἔχομεν $\overline{4},67837:9=$
$=(-4+0,67837):9=(-4-5+5+0,67837):9=$
$=(-9+5,67837):9=-1+0,63093$ ἢ $\overline{1},63093$.

Ἀσκήσεις

583. Νὰ προστεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $2,34987$, $\overline{6},97852$, $9,82057$.
584. Νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ $\overline{3},98090$ ἀπὸ $\overline{8},30457$, ὁ $\overline{9},93726$ ἀπὸ τὸν $\overline{3},86565$
585. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ $\overline{9},30942$ ἐπὶ 3, 7, 42.
586. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα μὲ 5 δεκαδικὰ ψηφία τοῦ $\overline{9},93642$ διὰ 8, 9, 12.

4. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

§ 219. Καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ **προσέγγισιν μονάδος** ἢ κατὰ **προσέγγισιν 0,1** ἢ **0,01** ἢ **0,001...** τὸν μικρότερον τῶν ἐκθετῶν δύο δυνάμεων τοῦ 10, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ὁ ἀριθμός, καὶ οἵτινες (ἐκθέται) διαφέρουν κατὰ 1 ἢ 0,1 ἢ 0,01 ἢ 0,001... Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν $10^{\rho} < A < 10^{\rho+1}$ ἐνῷ τὸ ρ εἶναι ἀκέραιος, τὸ ρ λέγεται λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν μονάδος· ἤτοι τὸ ρ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α.

Ἂν ἔχωμεν $10^{\frac{\lambda}{10}} < A < 10^{\frac{\lambda+1}{10}}$, τὸ $\frac{\lambda}{10}$ λέγεται λογάριθμος τοῦ Α κατὰ προσέγγισιν 0,1 κ.ο.κ.

Ἔστω, ὅτι ζητεῖται ὁ λογΑ κατὰ προσέγγισιν 0,1 Ἂν παραστήσωμεν τὸν ζητούμενον λογάριθμον μὲ $\frac{x}{10}$, θὰ ἔχωμεν

$$10^{\frac{x}{10}} < A < 10^{\frac{x+1}{10}}$$

Ὑψοῦμεν τὰ ἄνισα εἰς τὴν δεκάτην δύναμιν καὶ εὑρίσκομεν

$$10^{x} < A^{10} < 10^{x+1}$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ x εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{10}

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἂν ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἢ 0,001... Ἑπομένως:

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἢ 0,01. . . , ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν ἀριθμὸν εἰς τὴν 10ην ἢ εἰς τὴν 100ὴν. . .δύναμιν, τοῦ ἐξαγομένου διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ καὶ τοῦτο νὰ διαιρέσωμεν διὰ 10 ἢ 100 . . .

Κατὰ ταῦτα δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ. Π.χ. ἂν δοθῇ ἀριθμός τις Α καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν δύο δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου του, ὑψώνομεν τὸν Α εἰς τὴν 100ὴν δύναμιν καὶ εὑρίσκομεν τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ A^{100}, δηλαδὴ τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ψηφίων τοῦ A^{100} ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα, καὶ αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸν θὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς σύνολον ἑκατοστῶν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου.

5. ΠΕΡΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

§ 220. Ἐνῷ, ὡς εἴδομεν, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ ὁσαδήποτε δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἐν τούτοις ἡ μέθοδος αὐτὴ εἶναι λίαν μακρὰ καὶ ἐπίπονος. Διὰ τοῦτο ὑπάρχουν πίνακες, οἱ ὁποῖοι λέγονται **λογαριθμικοὶ πίνακες,** περιέχοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ ἑξῆς μέχρι τινός. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου δοθέντος ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εὐκόλως, οἱ πίνακες περιέχουν ἑκάστου λογαρίθμου τὸ δεκαδικὸν μέρος μὲ ἀρκετὰ δεκαδικὰ ψηφία.

Συνήθως μεταχειριζόμεθα πίνακας μὲ πέντε δεκαδικὰ ψηφία, ἡ δὲ διάταξις αὐτῶν φαίνεται ἐκ τοῦ ἑπομένου πίνακος (ληφθέντος ἐκ τῆς γαλλικῆς ἐκδόσεως τοῦ J. Dupuis).

Τὸ μὲν σύνολον τῶν δεκάδων τῶν ἀριθμῶν εἶναι γραμμένον εἰς τὴν πρώτην στήλην, εἰς τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ὑπάρχει τὸ γράμμα Ν (Nombres), τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτῶν εἰς τὴν ὁριζοντίαν σειρὰν μετὰ τὸ Ν. Ὁ λογάριθμος ἑκάστου ἀριθμοῦ εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς γραμμῆς τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ συνόλου τῶν δεκάδων τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐπειδὴ πολλοὶ ἐφεξῆς ἀριθμοὶ ἔχουν τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῶν λογαρίθμων αὐτῶν κοινά, γράφονται ταῦτα ἅπαξ μόνον καὶ νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα τὰ αὐτά, μέχρις ὅτου ἀλλαχθοῦν.

Ὁ ἀστερίσκος, ὁ ὁποῖος ἐνιαχοῦ ἀπαντᾷ εἰς τοὺς πίνακας, σημαίνει, ὅτι τὰ παραλειπόμενα δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ ἀμέσως ἑπόμενα. Κατὰ ταῦτα ἔχομεν, ὅτι : λογ500= 2,69897, λογ5000=3,69897, λογ 5017=3,70044, λογ 6053=3,70441, λογ5129=3,71003.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	923	940	949	958	966	975
1	984	292	*001	010	*018	027	*036	*044	053	062
2	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
3	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
4	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
5	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
6	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
7	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
8	586	595	603	612	621	629	638	646	655	636
9	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
1	842	851	859	768	876	885	893	902	910	919
2	927	935	944	952	961	969	978	986	955	*003

Τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας μεταχειριζόμεθα κατὰ τὰς ἑξῆς δύο περιπτώσεις :

1ον. Ὅταν δοθέντος ἀριθμοῦ τινος θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν λογάριθμον αὐτοῦ.

2ον. Ὅταν δοθέντος λογαρίθμου τινὸς θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς αὐτὸν ἀριθμόν.

1η περίπτωσις. α΄) Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφία, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας καὶ εὑρίσκομεν αὐτὸ ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω.

β΄) Ἔστω, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ζητεῖται ὁ λογάριθμος, ἔχει δύο ψηφία περισσότερα τῶν τεσσάρων, π.χ. ὁ 507356.

Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητουμένου λογαρίθμου εἶναι 5, χωρίζοντες δὲ τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία δι᾽ ὑποδιαστολῆς, ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 5073,56. Ἐπειδή, ὡς εἶναι γνωστόν, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ τοῦ δοθέντος εἶναι τὸ αὐτό, ἕπεται, ὅτι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 5073,56. Ἀλλ' αὐτὸς περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν 5073 καὶ 5074. Ἄρα ὁ λογάριθμος τοῦ 5073,56 θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5073 καὶ 5074. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν, ὅτι λογ 5073=3,70526 καὶ λογ 5074=3,70535.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο τούτων λογαρίθμων εἶναι 9 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ. Τώρα δεχόμεθα ὅτι :

Αἱ μεταβολαὶ τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς μεταβολὰς τῶν ἀριθμῶν (κατὰ προσέγγισιν, ὅταν αἱ μεταβολαὶ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότεραι τῆς μονάδος) καὶ ἀντιστρόφως.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ 5073 αὐξηθῇ κατὰ 1 καὶ γίνῃ 5074, ὁ λογάριθμος αὐξάνεται κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 0,56 διὰ νὰ γίνῃ 5073,56, ὁ λογάριθμος αὐτοῦ θὰ αὐξηθῇ κατὰ 9Χ0,56=5,04 ἢ κατὰ 5 περίπου ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ.

Ὥστε πρέπει εἰς τὸν λογάριθμον 3,70526 νὰ προσθέσωμεν 5 ἑκατοστὰ τοῦ χιλιοστοῦ, ἵνα ἔχωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ 5073,56 Ἐκτελοῦντες τὴν πρόσθεσιν εὑρίσκομεν, ὅτι λογ 5073,56=70531. Ἄρα ὁ λογ 507356=5,70531.

Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι 5,07356, τὸ μὲν χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου αὐτοῦ θὰ εἶναι 0, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τούτου θὰ εἶναι τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 507356. Ἐπομένως θὰ ἔχωμεν λογ 5,07356=0,70531.

2α περίπτωσις. α') Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἔχει ψηφίον τῶν μονάδων, τὸ εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ δεκαδικὸν μέρος, καὶ σύνολον δεκάδων τὸν ἀριθμόν, τὸν εὑρισκόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν (ἀριστερὰ) τῆς γραμμῆς, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ δεκαδικὸν μέρος.

Π.χ. ἂν ὁ δοθεὶς λογάριθμος εἶναι 3,70140, τὸ δεκαδικὸν μέρος 0,70140 εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 5028. Ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι 3, ὁ ἀντίστοιχος, ἀριθμὸς ἔχει τέσσαρα ἀκέραια ψηφία· ἄρα εἶναι ἀκριβῶς ὁ 5028.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον π.χ. 1,70552 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,5076. Εἰς τὸν λογάριθμον 0,70995 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 5,128.

β') Ἔστω, ὅτι δίδεται π.χ. ὁ λογάριθμος 2,70169 καὶ ζητεῖται ὁ ἀντιστοιχῶν εἰς αὐτὸν ἀριθμός. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ δοθέντος λογαρίθμου ἀναζητούμενον εἰς τοὺς πίνακας εὑρίσκεται μεταξὺ τοῦ 0,70165 καὶ τοῦ 0,70174, εἰς τοὺς ὁποίους ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ 5 031 καὶ 5 032· καὶ οἱ μὲν λογάριθμοι τούτων διαφέρουν κατὰ 9 μονάδας, τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, οἱ δὲ ἀριθμοὶ κατὰ 1.

Τώρα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἂν ὁ λογάριθμος τοῦ 5 031, ὁ ὁποῖος εἶναι 3,70165, αὐξηθῇ κατὰ 9 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνεται κατὰ 1. Ἂν ὁ λογάριθμος αὐξηθῇ κατὰ 4 μονάδας τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως καὶ γίνῃ 3,70169, ὁ ἀριθμὸς θὰ αὐξηθῇ κατὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος, ἤτοι κατὰ 0,44... Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ δεκαδικὸν μέρος εἶναι 0,70169, θὰ εἶναι ὁ 5031,44... ἐπειδὴ τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δοθέντος λογαρίθμου εἶναι 2, ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς ἔχει τρία ἀκέραια ψηφία. Ἄρα εἶναι ὁ 503, 144.

Ἀσκήσεις

587. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν:
0,003817, 1,141, 0,0845, 107,3 1 203, 13,07, 0,0004124.

588. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

α') 95,348, β') 6,8372, γ') 0,98629, δ') 968 $\frac{3}{8}$ ε') 0,0364598, στ') 6,3347. ζ') 326,537 η') 5278,37. θ') 15389,45.

589. Νὰ εὑρεθῇ ὁ x ἐκ τοῦ δεδομένου κατωτέρω λογαρίθμου αὐτοῦ:

α') λογx = 0,63147. β') λογx = 1,72127. γ') λογx = 0,68708.
δ') λογx = $\overline{3}$,92836. ε') λογx = $\overline{4}$,38221. στ') λογx = 3,70032.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 221. Μὲ τὴν χρῆσιν τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀριθμῶν εἰς τὴν πρόσθεσιν ἄλλων ἀριθμῶν, τὴν διαίρεσιν ἀριθμῶν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δύναμιν εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν ρίζης εἰς διαίρεσιν.

Πράγματι, ἂν ζητοῦμεν π.χ. τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ προσθέτομεν τούτους. Τὸ ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον θὰ εὕρωμεν, θὰ εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν. Εὑρίσκομεν ἀκολούθως ἐκ τοῦ εὑρεθέντος λογαρίθμου τὸν ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοῦτον ἀριθμόν. Οὗτος θὰ παριστάνῃ προφανῶς τὸ ζητούμενον γινόμενον.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $-908,4\times0,05392\times2,117$.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ γινομένου μὲ x καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\text{λογ}x=\text{λογ}908,4+\text{λογ}0,05392+\text{λογ}2,117.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν, ὅτι :

λογ. $908,4=2,95828$, $\quad$ λογ$0,05392=\bar{2},73175$, $\quad$ λογ$2,117=0,32572$

Μὲ πρόσθεσιν τούτων προκύπτει, ὅτι λογ$x=2,01575$.

Ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τοῦ λογαρίθμου τούτου εἶναι ὁ 103,693, ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι ἀρνητικόν, θὰ εἶναι τοῦτο $-103,693$.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ x, ἐὰν εἶναι $x=\dfrac{7,56\times4667\times567}{899,1\times0,00337\times23435}$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, ἔχομεν

$$\begin{aligned}\text{λογ}x=&\text{λογ}7,56+\text{λογ}4667+\text{λογ}567\\&-\text{λογ}899,1-\text{λογ}0,00337-\text{λογ}23435\end{aligned}$$

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν :

λογ7,56	$=0,87852$	λογ899,1	$=2,95381$
λογ4667	$=3,66904$	λογ0,00337	$=\bar{3},52763$
λογ567	$=2,75358$	λογ23435	$=4,36986$

Μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀνωτέρω εὑρίσκομεν

$$\text{λογ}7,56+\text{λογ}4667+\text{λογ}567=7,30114$$
$$\text{λογ}899,1+\text{λογ}0,00337+\text{λογ}23435=4,85130$$

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν προκύπτει λογ$x=2,44984$ καὶ εὑρίσκοντες τὸν ἀντίστοιχον τούτου ἀριθμὸν ἔχομεν $x=281,73$.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 0,000043461.

Ἐὰν θέσωμεν $x=\sqrt{0,000043461}$ καὶ λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν $λογx = \frac{1}{2} λογ0{,}000043461$ ἢ $λογx = \frac{1}{2} \cdot \overline{5}{,}63810$ ἢ $λογx = \overline{3}{,}81905$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται $x = 0{,}0065925$.

4ον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ x ἐκ τῆς ἰσότητος $81^x = 10$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$λογ\ 81^x = λογ10, \text{ ἢ } x.λογ81 = λογ10 = 1.$$

Ἄρα $x = \frac{1}{λογ81}$ ἢ $x = \frac{1}{1{,}90849} = \frac{100000}{190849} = 0{,}52397$. Ἤτοι $x = 0{,}52397$.

Ἀσκήσεις

590. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τῶν λογαρίθμων: α') $0{,}4326^3$, β') $\sqrt[3]{12}$, γ') $\sqrt[5]{0{,}07776}$, δ') $\sqrt[5]{13}$, ε') $-875{,}6348 \times 62{,}82407$, στ') $\sqrt{25 X 3696 : 0{,}0893462}$.

591. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος ἔχει μῆκος 2,51075 δακτύλους.

592. Νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ μεταξὺ τῶν 12 καὶ 23437500, ὥστε νὰ ἀποτελεσθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος.

593. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διάρκεια τῆς πτώσεως σώματος πίπτοντος εἰς τὸ κενὸν ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος ἀπὸ ὕψους 4 810 μ. (τῆς κορυφῆς τοῦ Λευκοῦ ὄρους).

7. ΑΛΛΑΓΗ ΤΗΣ ΒΑΣΕΩΣ ΤΩΝ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ

§ 222. Ἂν ἔχωμεν $α^x = A$, τὸ x καλεῖται λογάριθμος τοῦ A, ὡς πρὸς βάσιν α καὶ σημειώνεται συμβολικῶς $λογ_α A = x$.

Ἔστω, ὅτι ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον τοῦ A, ὡς πρὸς ἄλλην βάσιν, ἔστω β.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους, ὡς πρὸς β τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος $α^x = A$ εὑρίσκομεν $λογ_β(α^x) = λογ_β A$ ἢ $x λογ_β α = λογ_β A$. θέτοντες ἀντὶ τοῦ x τὸ ἴσον του $λογ_α A$, εὑρίσκομεν $λογ_α A \cdot λογ_β α = λογ_β A$. Ἤτοι:

Ὅταν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν α π.χ. καὶ θέλωμεν τὸν λογάριθμόν του, ὡς πρὸς βάσιν β, πολλαπλασιάζομεν τὸν γνωστὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν α) ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως α, ὡς πρὸς τὴν βάσιν β.

Κατὰ ταῦτα, ἂν ἔχωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν, ὡς πρὸς βάσιν 10, εὑρίσκομεν τοὺς νεπερίους λογαρίθμους αὐτῶν (ὡς πρὸς βάσιν τὸν e), ἂν τοὺς γνωστοὺς λογαρίθμους των πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ $λογ_e$ 10 καὶ ἀντιστρόφως, ἐκ τοῦ νεπερίου λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εὑρίσκεται ὁ λογάριθμος αὐτοῦ, ὡς πρὸς βάσιν 10 μὲ πολλαπλασιασμὸν τοῦ νεπερίου ἐπὶ $λογ_{10}e$.

Παρατηρητέον, ὅτι εἶναι $λογ_β α . λογ_α β = 1$. Διότι ὡς ἀνωτέρω εἶναι $λογ_β A = λογ_α A \cdot λογ_β α$ καὶ ὁμοίως $λογ_α A = λογ_β A \cdot λογ_α β$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$λογ_β A \cdot λογ_α A = λογ_β A \cdot λογ_α A \cdot λογ_β α \cdot λογ_α β$ ἢ $1 = λογ_β α \cdot λογ_α β$

Ἑπομένως εἶναι καὶ $λογ_β α = \frac{1}{λογ_α β}$.

Κατὰ ταῦτα, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον (ὡς πρὸς βάσιν 10) τοῦ ἀριθμοῦ e=2,718281828..., δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀπὸ τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς πρὸς βάσιν 10 τὸν νεπέριον λογάριθμόν του μὲ πολλαπλασιασμὸν τοῦ λογαρίθμου του ἐπὶ τὸν $\frac{1}{λογ_{10}e}$, ὁ ὁποῖος ἰσοῦται μὲ 0,434294481..

Σημείωσις. Καλοῦμεν **συλλογάριθμον** ἀριθμοῦ τινος τὸν λογάριθμον τοῦ ἀντιστρόφου του ἀριθμοῦ.

Οὕτως εἶναι $συλλογα = λογ\frac{1}{α} = -λογα$. Ἦτοι ὁ συλλογάριθμος ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίθετον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ.

Γ΄ ΠΕΡΙ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

§ 223. Καλοῦμεν **ἐκθετικὴν ἐξίσωσιν** τὴν ἐξίσωσιν, εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἄγνωστος ὑπάρχει εἰς τὸν ἐκθέτην δυνάμεως, ἐχούσης βάσιν ἀριθμόν τινα ἢ παράστασιν γνωστὴν $\neq 0$.

Π.χ. ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις εἶναι αἱ $5^{x^2-2x+2}=1$, $α^{2x+3}=α^2$.

Τὰς μέχρι τοῦδε γνωστὰς ἐξισώσεις καλοῦμεν **ἀλγεβρικὰς** πρὸς διάκρισιν αὐτῶν ἀπὸ τῶν ἐκθετικῶν.

Λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι τὴν ἐπαληθεύουν.

Ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἀνάγεται ἐνίοτε εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῆς. Τοῦτο γίνεται κυρίως, ὅταν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῆς δοθείσης μὲ ἓν μέλος της τὴν 1, τὸ δὲ ἄλλο δύναμιν ἀριθμοῦ τινος ἢ παραστάσεως γνωστῆς $\neq 0$, τῆς ὁποίας ὁ ἐκθέτης περιέχει ἄγνωστον τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἔστω πρὸς λύσιν π.χ. ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $3^{3x}=\frac{1}{27}$.

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ 27 εὑρίσκομεν $3^{3x}\cdot 27=1$ ἢ $3^{3x}\cdot 3^3=1$ ἢ $3^{3x+3}=1$ ἢ $3^{3x+3}=3^0$ (ἐπειδὴ $3^0=1$)

Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ἐπειδὴ ἴσαι δυνάμεις ἴσων βάσεων $\neq 0$ θὰ ἔχουν καὶ ἐκθέτας ἴσους) $3x+3=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $x=-1$.

Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-3}+3^{x-4}$

Ἀπ' αὐτὴν εὐκόλως εὑρίσκομεν $\frac{2^{x-1}-2^{x-3}}{3^{x-3}+3^{x-4}}=\frac{2^x 2^{-1}-2^x\cdot 2^{-3}}{3^x\cdot 3^{-3}+3^x\cdot 3^{-4}}=1$

$$\text{ἢ}\quad \frac{2^x\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)}{3^x\cdot\left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}\right)}=\frac{\frac{3}{8}\cdot 2^x}{\frac{4}{81}\cdot 3^x}=\frac{3\cdot 81\cdot 2^x}{4\cdot 8\cdot 3^x}=\frac{3^5\cdot 2^x}{2^5\cdot 3^x}=\frac{2^x\cdot 2^{-5}}{3^x\cdot 3^{-5}}=\frac{2^{x-5}}{3^{x-5}}=1$$

ἢ $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-5}=1=\left(\frac{2}{3}\right)^0$ ἐξ ἧς ἔχομεν $x-5=0$ καὶ $x=5$

Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^{(\beta-x)x}=\alpha^x$, ἐνῷ ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι τὸ $\alpha\neq$ τοῦ 0 καὶ τῆς 1. Διὰ νὰ εἶναι τότε αἱ δύο δυνάμεις τοῦ α ἴσαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι οἱ ἐκθέται αὐτῶν ἴσοι.

Ἐξισοῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν δυνάμεων τοῦ α ἔχομεν

$$(\beta-x)x=x \quad \text{ἢ} \quad x^2+x-\beta x=0.$$

ἐκ τῆς λύσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν $x=0$ καὶ $\beta-1$.

§ 224. Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται καὶ σύστημα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους, καθὼς καὶ ἡ λύσις αὐτοῦ.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases}\alpha^x\cdot\alpha^\psi=\alpha^3\\ \frac{\alpha^x}{\alpha^\psi}=\frac{1}{\alpha^2}\end{cases}$ ὅπου $\alpha\neq 0$ καὶ $\alpha\neq 1$

Γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφὴν

$\begin{cases}\alpha^{x+\psi}=\alpha^3\\ \alpha^{x-\psi}=\alpha^{-2}\end{cases}$ Τοῦτο ἀληθεύει ὅταν $\begin{cases}x+\psi=3\\ x-\psi=-2.\end{cases}$

ἐκ τῆς λύσεως, τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\psi=\frac{5}{2}$ καὶ $x=\frac{1}{2}$.

Ἐνίοτε ἡ λύσις ἐκθετικῆς ἐξισώσεως ἢ συστήματος τοιούτων ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $2^{x^2-9x-24}=4096$.

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων ἔχομεν

$$(x^2-9x-24)\cdot λογ2=λογ4096.$$

Διαιροῦντες τὰ ἴσα ταῦτα διὰ λογ2 εὑρίσκομεν

$$x^2-9x-24=\frac{λογ4096}{λογ2}=\frac{3,61236}{0,30103}=12.$$

Ἤτοι $x^2-9x-24=12$, ἐξ ἧς $x=12$ καὶ $x=-3$.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα $\begin{cases} 3^x\cdot 4^ψ=3981312 \\ 2^ψ\cdot 5^x=\ 400000 \end{cases}$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα πρὸς τὸ δοθὲν $\begin{cases} x\cdot λογ3+ψ\cdot λογ4=λογ3981312 \\ ψ\cdot λογ2+x\cdot λογ5=λογ400000 \end{cases}$

Θέτοντες $λογ4=λαγ2^2=2λογ2$ καὶ πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 2, εὑρίσκομεν

$$x\cdot λογ3+2ψ\cdot λογ2=λογ3981312$$
$$2ψ\cdot λογ2+2x\cdot λογ5=2λογ400000$$

Ἐὰν τὴν πρώτην τούτων ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν δευτέραν, εὑρίσκομεν $x(2λογ5-λογ3)=2λογ400000-λογ3981312$, ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $x=\frac{2λογ400000-λογ3981312}{2λογ5-λογ3}=\frac{2λογ(2^2\cdot 10^5)-λογ(2^{14}\cdot 3^5)}{2λογ5-λογ3}=$
$$=\frac{10-10λογ2-5λογ3}{2λογ\frac{10}{2}-λογ3}=\frac{10-10λογ2-5λογ3}{2-2λογ2-λογ3}=5$$

Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν

$$2^ψ=\frac{400000}{5^5}=\frac{4\cdot 10^5}{5^5}=\frac{2^2\cdot 2^5\cdot 5^5}{5^5}=2^7.$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $ψ=7$.

§ 225. Καλοῦμεν **λογαριθμικὴν** ἐξίσωσιν τὴν ἔχουσαν λογαρίθμους τῶν ἀγνώστων αὐτῆς. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ σύστημα λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα τῶν λογαριθμικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} 2\text{λογ}\psi - \text{λογ}x = 0{,}12494 \\ \text{λογ}3 + 2\text{λογ}x + \text{λογ}\psi = 1{,}73239. \end{cases}$$

Τὴν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων τούτων γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς: $2\text{λογ}x+\text{λογ}\psi=1{,}73239-\text{λογ}3=1{,}73239-0{,}47712=1{,}25527$.

Μεταξὺ ταύτης καὶ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν ἀπαλείφομεν τὸ λογx καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $5\text{λογ}\psi=1{,}50515$ καὶ μετὰ τὴν διαίρεσιν τῶν ἴσων διὰ 5 εὑρίσκομεν $\text{λογ}\psi=0{,}30103$, ἐξ ἧς καὶ $\psi=2$. Ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ $x=3$.

Ἀσκήσεις

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

594. α′) $\alpha^{x+\mu}=\alpha^{2\mu}$, β′) $\alpha^{3x+2}=\alpha^{x+4}$, γ′) $\gamma^{2-5x}=\gamma^{x+3}$.
δ′) $\beta^{(2x+1)(3x+4)}=\beta^{(3x+1)(2x+5)}$, ε′) $(\alpha^{\mu})^{(x+3)}=\alpha^{x+2}$.

595. α′) $\alpha^{2x+3}\cdot\alpha^{3x+4}=\alpha^{4x+5}$, β′) $2^{2x}=32$, γ′) $(-2)^x=16$.
δ′) $5^{2x}+7\cdot5^x=450$, ε′) $\sqrt[x]{\alpha}=\alpha^x$, στ′) $2^{x+3}+4^{x+1}=320$.

596. α′) $2^x+4^x=272$, β′) $\text{λογ}x=\text{λογ}24-\text{λογ}3$, γ′) $2^{x+1}+4^x=80$.
δ′) $5\cdot\text{λογ}x=\text{λογ}288+3\text{λογ}\cdot\dfrac{x}{2}$, ε′) $\text{λογ}x=\text{λογ}192+\text{λογ}\dfrac{3}{4}$.

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

597. α′) $\begin{cases}\alpha^{2x}\cdot\alpha^{3\psi}=\alpha^8\\ \dfrac{\alpha^{2x}}{\alpha^{3\psi}}=\dfrac{1}{\alpha^6},\end{cases}$ β′) $\begin{cases}5^{3x}\cdot5^{4\psi}=5^{18}\\ \dfrac{5^{2x}}{5^{7\psi}}=5^{-17}\end{cases}$ γ′) $\begin{cases}x+\psi=95\\ \text{λογ}(x-\psi)=3\end{cases}$

598. α′) $\begin{cases}x^2+\psi^2=425\\ \text{λογ}x+\text{λογ}\psi=2,\end{cases}$ β′) $\begin{cases}5x^2-3\psi^2=11\,300\\ \text{λογ}x+\text{λογ}\psi=3.\end{cases}$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

599. α′) $3^x=177147$, β′) $3^{\frac{x}{2}}=768$, γ′) $3^{\sqrt{x}}=243$.

600. α′) $24^{3x-2}=10\,000$, β′) $5^{x^2-3x}=625$, γ′) $x^{x^2-7x+12}=1$,

601. α′) $6^{x^4-18x^2+86}=7\,776$, β′) $(\alpha\cdot\alpha^3\cdot\alpha^5\cdot\alpha^7)\alpha^{2x-1}=\nu$.

602. α′) $\begin{cases}x^4+\psi^4=641\\ \text{λογ}(x\psi)^2=2,\end{cases}$ β′) $\begin{cases}\text{λογ}\dfrac{x}{\psi}=0{,}5,\\ \text{λογ}x\psi=1{,}5\end{cases}$ γ′) $\begin{matrix}\text{λογ}x\psi=3\\ 5x^2-3\psi^2=11\,300.\end{matrix}$

603. α′) $\begin{cases}\text{λογ}\sqrt{x}-\text{λογ}\sqrt{5}=0{,}5\\ 3\text{λογ}x+2\text{λογ}\psi=1{,}50515\end{cases}$ β′) $\begin{cases}\text{λογ}\dfrac{x}{5}=\text{λογ}10\\ \text{λογ}x^3+\text{λογ}\psi^2=\text{λογ}32.\end{cases}$

Δ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΥ

§ 226. Προβλήματα **ἀνατοκισμοῦ ἢ συνθέτου τόκου** λέγονται ἐκεῖνα, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος καθεμιᾶς χρονικῆς μονάδος καὶ ἀποτελεῖ μετ' αὐτοῦ τὸ κεφάλαιον τῆς ἑπομένης χρονικῆς μονάδος.

Ὁ τόκος (καὶ τὰ προβλήματα τόκου), τὸν ὁποῖον ἐξετάζει ἡ Ἀριθμητική, καλεῖται ἁπλοῦς, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοῦ συνθέτου.

1ον. Δανείζει τις ποσὸν α δραχμῶν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα (εἰς ἓν ἔτος ἢ μίαν ἑξαμηνίαν, τριμηνίαν κ.τ.λ.) τ δραχμάς· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας ;

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου παρατηροῦμεν, ὅτι, ἀφοῦ ἡ 1 δρχ. εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα δίδει τόκον τ δραχμάς, αἱ α δραχμαὶ εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα θὰ δώσουν τόκον $\alpha.\tau$ δραχμάς.

Ἑπομένως τὸ κεφάλαιον α δραχμῶν καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος θὰ εἶναι $\alpha+\alpha\tau=\alpha(1+\tau)$δρχ.

Ἤτοι τὸ κεφάλαιον α πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν παράγοντα $(1+\tau)$, ἵνα δώσῃ τὸ ζητούμενον ποσὸν εἰς τὸ τέλος τῆς πρώτης χρονικῆς μονάδος.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ κεφάλαιον $\alpha(1+\tau)$ εἰς τὸ τέλος μιᾶς ἀκόμη χρονικῆς μονάδος θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ $\alpha(1+\tau)\cdot(1+\tau)$ ἢ $\alpha(1+\tau)^2$.

Ὥστε τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ τοῦ τόκου αὐτοῦ εἰς τὸ τέλος τῆς δευτέρας χρονικῆς μονάδος $\alpha(1+\tau)^2$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος ν χρονικῶν μονάδων τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἂν τὸ ποσὸν τοῦτο παραστήσωμεν μὲ Σ, θὰ ἔχωμεν $\Sigma=\alpha(1+\tau)^\nu$.

Ἐκ ταύτης δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἓν ἐκ τῶν Σ, α, ν, τ, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν λογαρίθμων (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν), ὅταν γνωρίζωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν.

Ἂν κατὰ τὸν ἀνατοκισμὸν ὡς χρονικὴ μονὰς ληφθῇ τὸ ἔτος, ἡ δὲ διάρκεια τοῦ δανείου εἶναι ν ἔτη καὶ η ἡμέραι, παρατηροῦμεν, ὅτι μετὰ ν ἔτη τὸ κεφάλαιον α δρχ. θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Τοῦτο τοκιζόμενον μὲ ἁπλοῦν τόκον πρὸς $100\tau\%$ (ὥστε τόκος τῆς 1 δρχ. εἰς 1 ἔτος νὰ εἶναι τ δρχ) ἐπὶ η ἡμέρας δίδει τόκον

$$\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}\cdot 100\tau\cdot\eta}{36000}=\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}\,\tau\cdot\eta}{360}.$$

Οὕτω τὸ τελικὸν ποσὸν ἐκ τοῦ ἀνατοκισμοῦ θὰ εἶναι

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}+\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}\,\tau\eta}{360}=\alpha(1+\tau)^{\nu}\cdot\left[1+\frac{\eta\tau}{360}\right]$$

Σημείωσις. Ἀντὶ τοῦ τύπου τούτου χρησιμοποιοῦμεν (συνήθως) τὸν τύπον $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu+\frac{\eta}{360}}$. Τοῦτο δικαιολογεῖται ἐκ τῶν ἑξῆς: Ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται ὄχι κατ' ἔτος ἀλλὰ καθ' ἡμέραν, τότε ὁ χρόνος ἀνατοκισμοῦ εἶναι ν ἔτη καὶ η ἡμέραι$=(360\cdot\nu+\eta)$ ἡμέραι, τοῦ ἔτους λογιζομένου 360 ἡμέρας. Ὁ τόκος καθ' ἡμέραν ἔστω, ὅτι εἶναι ψ, τότε ὁ τόκος καὶ τὸ κεφάλαιον μιᾶς μονάδος μετὰ 360 ἡμέρας θὰ γίνῃ $(1+\psi)^{360}$, ἀλλὰ τοῦτο$=$μὲ $1+\tau$, ἀφοῦ ἡ μία μονὰς δίδει τόκον τ εἰς ἓν ἔτος.

Ἄρα ἔχομεν $(1+\psi)^{360}=(1+\tau)$, $(1+\psi)=(1+\tau)^{\frac{1}{360}}$ Τὸ κεφάλαιον α δρχ. ἀνατοκιζόμενον καθ' ἡμέραν ἐπὶ $(360\nu+\eta)$ ἡμέρας μὲ τόκον ψ μιᾶς δρχ. εἰς μίαν ἡμέραν γίνεται $\alpha(1+\psi)^{360\nu+\eta}$ καὶ θέτοντες ἀντὶ τοῦ $(1+\psi)$ τὸ ἴσον του $(1+\tau)^{\frac{1}{360}}$ εὑρίσκομεν $\alpha(1+\tau)^{\frac{360\nu+\eta}{360}}=\alpha(1+\tau)^{\nu+\frac{\eta}{360}}$, $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu+\frac{\eta}{360}}$

Ἐφαρμογαί. **1η. Δανείζει τις 150000 δρχ. μὲ ἀνατοκισμὸν πρὸς 4 % κατ' ἔτος· πόσας δραχ. θὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ μετὰ 6 ἔτη;**

Ζητεῖται τὸ Σ καὶ ἔχομεν $\alpha=150000$, $\nu=6$, $\tau=0{,}04$. Ἑπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἔχομεν $\Sigma=150\,000.1{,}04^{6}$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων μελῶν ἔχομεν

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 150\,000+6\lambda o\gamma 1{,}04.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν

$\lambda o\gamma 150\,000=5{,}17609$, $6\lambda o\gamma 1{,}04=6\cdot 0{,}1703=0{,}10218$, ἐξ ὧν προκύπτει διὰ προσθέσεως $\lambda o\gamma\Sigma=5{,}27827$ καὶ ἐκ τούτου $\Sigma=189\,787$.

Ἤτοι ὁ τοκίσας τὰς 150 000 δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 4% θὰ λάβῃ μετὰ 6 ἔτη ἐν ὅλῳ 189 787 δρχ.

2α. Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ τοκίσῃ τις μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος πρὸς 6%, ἵνα μετὰ 15 ἔτη λάβῃ ἐν ὅλῳ 500000 δρχ.;

Ἔχομεν $\Sigma=500\,000$, $\tau=0{,}06$, $1+\tau=1{,}06$ $\nu=15$ καὶ ζητεῖται τὸ α.

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $500\,000=\alpha.1{,}06^{15}$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων εὑρίσκομεν

$$λογ500\,000=λογα+15.λογ1{,}06.$$

ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν $λογα=λογ500\,000-15λογ1{,}06$. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν $λογ500\,000=5{,}69897$ καὶ $15λογ1{,}06=15\cdot 0{,}2631 =0{,}37965$ καὶ ἐξ αὐτῶν δι' ἀφαιρέσεως $λογα=5{,}31932$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται, ὅτι $α=208604{,}8$ δρχ.

3η. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 86200 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος γίνονται μετὰ 5 ἔτη 104870 δραχμαί ;

Ἔχομεν $α=86\,200$, $ν=5$, $Σ=104\,870$ καὶ ζητεῖται τὸ $τ$.

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν: $104870=86\,200(1+τ)^5$. Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων τούτων εὑρίσκομεν $λογ104\,870=λογ86\,200+5λογ(1+τ)$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται, ὅτι $5λογ(1+τ)=λογ104\,870-λογ86\,200$. Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

$$λογ104\,870=5{,}02065, \qquad λογ86\,200=4{,}93551,$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἔχομεν $λογ104\,870-λογ86\,200=0{,}08514$ καὶ $λογ(1+τ)=0{,}08514:5=0{,}01703$· ἤτοι $(1+τ)=1{,}04$ καὶ $τ=0{,}04$. Αὐτὸς εἶναι ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος, ἄρα ὁ ἐτήσιος τόκος εἶναι 0,04 τοῦ κεφαλαίου. Τοῦτο σημαίνει, ὅτι τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%.

4η. Μετὰ πόσον χρόνον 208600 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 6% γίνονται 503750 δρχ ;

Ἔχομεν $α=208\,600$, $τ=0{,}06$, $Σ=503750$ καὶ ζητεῖται τὸ $ν$. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν $503750=208600.1{,}06^ν$.

Ἐὰν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν $λογ503750=λογ208600+ν.\ λογ1{,}06$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει

$$ν=\frac{λογ503750-λογ208600}{λογ\ 1{,}06}.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν $λογ503\,750=5{,}70222$, $λογ208\,600=4{,}31931$ $λογ1{,}06=0{,}02531$. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων εἶναι 0,38291.

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $ν=\frac{0{,}38291}{0{,}02531}=15$ ἔτη καὶ κάτι ἐπὶ πλέον <1.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἀπαιτούμενον μέρος τοῦ 16ου ἔτους, παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ τέλος τοῦ 15ου ἔτους αἱ 208 600 δρχ. γίνονται $208\,600\cdot 1{,}06^{15}=500\,000$ δρχ., ἑπομένως αἱ 503 750 δρχ. $-500\,000$ δρχ.

$=3\,750$ δρχ, εἶναι τόκος ἁπλοῦς τῶν 500 000 δρχ. πρὸς 6% εἰς τὸν ζητούμενον χρόνον. Λύομεν λοιπὸν τὸ πρόβλημα τοῦτο τοῦ ἁπλοῦ τόκου καὶ εὑρίσκομεν 45 ἡμ. τοῦ ἔτους λογιζομένου μὲ 360 ἡμ.

Παρατήρησις. Ἂν ποσὸν α ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος μὲ τόκον τ τῆς μονάδος κατ' ἔτος, θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη $\alpha(1+\tau)^\nu$ καὶ τοῦτο μετὰ η ἡμέρας ἀκόμη φέρει ἁπλοῦν τόκον $\frac{\alpha(1+\tau)^\nu \cdot 100\eta\tau}{100\cdot 360}$. Ἄρα γίνεται ἐν ὅλῳ μετὰ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας $\Sigma = \alpha\,(1+\tau)^\nu \left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἐξ οὗ

$$\lambda o\gamma \Sigma = \lambda o\gamma \alpha + \nu \lambda o\gamma (1+\tau) + \lambda o\gamma \left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right),$$

ἐπειδὴ δὲ εἶναι $1+\frac{\eta\tau}{360} < 1+\tau$, ἔχομεν $\lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right) < \lambda o\gamma\,(1+\tau)$. Ἄρα ἡ διαίρεσις $(\lambda o\gamma\Sigma - \lambda o\gamma\alpha) : \lambda o\gamma(1+\tau)$ δίδει πηλίκον ν καὶ ὑπόλοιπον $\upsilon = \lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)$.

Πράγματι ἔχομεν τότε $\lambda o\gamma\Sigma - \lambda o\gamma\alpha = \nu\lambda o\gamma(1+\tau)+\upsilon$ ἢ $\lambda o\gamma\Sigma - \lambda o\gamma\alpha = \nu\cdot\lambda o\gamma(1+\tau) + \lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἤτοι τὴν ἀνωτέρω σχέσιν

$$\lambda o\gamma\Sigma = \lambda o\gamma\alpha + \nu\cdot\lambda o\gamma(1+\tau) + \lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right).$$

Ἐκ τῆς $\upsilon = \lambda o\gamma\left(1+\frac{\eta\tau}{360}\right)$, ἐπειδὴ ἐκ τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται τὸ υ (κατὰ προσέγγισιν), εὐκόλως προσδιορίζεται τὸ η.

Σημείωσις. Ἐνίοτε ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν ἢ τριμηνίαν, ἐνῷ τὸ ἐπιτόκιον ὁρίζεται κατ' ἔτος. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς ὁ τόκος τῆς μονάδος τοῦ κεφαλαίου καθ' ἑξαμηνίαν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

Ἂν τ_1 εἶναι ὁ τόκος τῆς 1 μονάδος κεφαλαίου καθ' ἑξαμηνίαν καὶ τ ὁ τόκος αὐτῆς κατ' ἔτος, παρατηροῦμεν, ὅτι μία μονὰς κεφαλαίου μετὰ δύο χρονικὰς μονάδας, δηλαδὴ μετὰ δύο ἑξαμηνίας, θὰ γίνῃ ἀνατοκιζομένη $(1+\tau_1)^2$ καὶ τοῦτο ἰσοῦται μὲ $1+\tau$, διότι ἡ μία μονὰς μετὰ ἓν ἔτος δίδει τόκον τ καὶ γίνεται μὲ τὸν τόκον $1+\tau$, ἄρα ἔχομεν $(1+\tau_1)^2 = 1+\tau$ καὶ $\tau_1 = \sqrt{1+\tau}-1$.

Ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν, ἐπειδὴ τὸ ἔτος ἔχει 4 τριμηνίας, ἂν τ_2 παριστάνῃ τὸν τόκον τῆς μιᾶς μονάδος κεφαλαίου κατὰ τριμηνίαν, θὰ ἔχωμεν σκεπτόμενοι ὡς ἀνωτέρω $(1+\tau_2)^4 = 1+\tau$ καὶ $\tau_2 = \sqrt[4]{1+\tau}-1$.

Προβλήματα

604. Πόσας δραχμάς θά λάβη τις, ἐάν ἀνατοκίση κατ' ἔτος 5 600 δρχ. ἐπί 10 ἔτη πρός 5%;

605. Πατήρ τις κατέθεσεν εἰς Τράπεζαν 7500 δρχ. κατά τήν γέννησιν τοῦ υἱοῦ αὐτοῦ μέ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος πρός 4,5%. Πόσα θά λάβη ὁ υἱός του εἰς τό τέλος τοῦ 20οῦ ἔτους τῆς ἡλικίας αὐτοῦ;

606. Πόσην αὔξησιν παθαίνει κεφάλαιον 1 000 000 δρχ. εἰς 8 ἔτη καί 8 μῆνας ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρός 4%;

607. Ποῖον κεφάλαιον γίνεται μετά τῶν τόκων αὐτοῦ ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρός 3,5% εἰς 20 ἔτη 3 730 850 δρχ.;

608. Τίς ἡ παροῦσα ἀξία κεφαλαίου 45 896 000 δρχ. πληρωτέου μετά 15 ἔτη καί 210 ἡμ. μέ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος πρός 8%;

609. Πόσον ποσόν πρέπει νά τοκίσωμεν μέ ἀνατοκισμόν καθ' ἑξαμηνίαν πρός 4%, ἵνα μετά 18 ἔτη γίνη 20 000 000 δρχ.;

610. Πρός πόσον τοῖς ἑκατόν ἐτοκίσθη μέ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος κεφάλαιον 625 000 δρχ. ἐπί 15 ἔτη καί ἔγινεν 1 166 900 δρχ.;

611. Πρός πόσον τοῖς ἑκατόν λογαριάζεται ὁ τόκος, ἐάν 10 000 δρχ. εἰς 22 ἔτη γίνωνται 224 770 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι;

612. Πρός ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ ἕν κεφάλαιον κατ' ἔτος διά νά τετραπλασιασθῇ μετά 31 ἔτη;

613. Εἰς πόσον χρόνον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος κεφάλαιον 3 580 000 δρχ. πρός 4,5% γίνεται 56 000 000 δρχ.;

614. Πότε κατετέθησαν 630 000 δρχ. εἰς Τράπεζάν τινα μέ ἀνατοκισμόν πρός 4%, ἐάν τήν 1ην 'Απριλίου 1956 εἶχον γίνει 969 800 δρχ;

615. 'Επί πόσον χρόνον πρέπει ν' ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος ποσόν τι πρός 3,5% διά νά διπλασιασθῇ ἤ τριπλασιασθῇ ἤ τετραπλασιασθῇ;

616. 'Ο πληθυσμός ἑνός Κράτους αὐξάνεται κατ' ἔτος κατά τό ὀγδοηκοστόν τοῦ προηγουμένου ἔτους. Μετά πόσα ἔτη θά διπλασιασθῇ ἤ θά τριπλασιασθῇ ὁ πληθυσμός αὐτοῦ;

617. Μία πόλις ἔχει 8 000 κατοίκους καί ὁ πληθυσμός αὐτῆς ἐλαττοῦται ἐτησίως κατά 160 κατοίκους. 'Εάν ἡ ἐλάττωσις ἐξακολουθήση κατά τήν αὐτήν ἀναλογίαν, μετά πόσα ἔτη θά ἔχη 5 000 κατοίκους;

Ε'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΙΣΩΝ ΚΑΤΑΘΕΣΕΩΝ

§ 227. 1ον. Καταθέτει τις εἰς τήν Τράπεζαν μέ ἀνατοκισμόν κατ' ἔτος 4,5% ποσόν 205.000 δρχ. εἰς τήν ἀρχήν ἑκάστου ἔτους. Πόσα θά λάβη μετά 15 ἔτη;

'Η πρώτη κατάθεσις τῶν 205 000 δραχμῶν θά μείνη 15 ἔτη ἀνατοκιζομένη πρός 4,5%. 'Επομένως θά γίνη $205\,000 \cdot 1{,}045^{15}$.

'Η εἰς τήν ἀρχήν τοῦ δευτέρου ἔτους γινομένη κατάθεσις θά μείνῃ μόνον 14 ἔτη εἰς τὸν τόκον· ἄρα θὰ γίνῃ $205\,000 \cdot 1{,}045^{14}$

Ὁμοίως ἡ εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου ἔτους κατάθεσις θὰ γίνῃ $205\,000 \cdot 1{,}045^{13}$ κ.ο.κ., ἡ τελευταία θὰ μείνῃ μόνον ἓν ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $205\,000 \cdot 1{,}045$.

Ὥστε τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν 15 ἐτῶν θὰ εἶναι $205\,000 \cdot 1{,}045^{15} + 205\,000 \cdot 1{,}045^{14} + \ldots + 205\,000 \cdot 1{,}045$ ἢ $205\,000 \cdot 1{,}045 + 205\,000 \cdot 1{,}045^2 + 205\,000 \cdot 1{,}045^3 + \ldots + 205\,000 \cdot 1{,}045^{15}$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 1,045.

Ἐφαρμόζοντες λοιπὸν τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ποσόν, ἔστω Σ, τὸ ὁποῖον θὰ λάβῃ, εἶναι $\Sigma = \dfrac{205000 \cdot 1{,}045^{15} \cdot 1{,}045 - 205000 \cdot 1{,}045}{1{,}045 - 1 = 0{,}045}$

$$\text{ἢ} \qquad \Sigma = 205\,000 \cdot 1{,}045 \cdot \frac{1{,}045^{15} - 1}{0{,}045}$$

Μὲ τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ $1{,}045^{15}$. Πρὸς τοῦτο ἔχομεν, ἐὰν θέσωμεν $x = 1{,}045^{15}$, $\lambda o\gamma x = 15 \lambda o\gamma 1{,}045 = 0{,}28680$, ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται, ὅτι $x = 1{,}93552$. Ὥστε θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma = 205\,000 \cdot 1{,}045 \frac{0{,}93552}{0{,}045} \text{ ἢ } \Sigma = 205\,000 \frac{1{,}045 \cdot 935{,}52}{45}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma \Sigma = \lambda o\gamma 205\,000 + \lambda o\gamma 1{,}045 + \lambda o\gamma 935{,}52 - \lambda o\gamma 45.$$

Ἐκ τῶν πινάκων ἔχομεν:

$$\begin{array}{ll} \lambda o\gamma 205\,000 & = 5{,}31175 \\ \lambda o\gamma\ 1{,}045 & = 0{,}01912 \\ \lambda o\gamma\ 935{,}52 & = 2{,}97105 \\ \hline \text{ἄθροισμα} & = 8{,}30192 \\ \lambda o\gamma 45 & = 1{,}65321 \\ \hline \end{array}$$

καὶ ἀφαιροῦντες εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma \Sigma = 6{,}64871$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει $\Sigma = 4\,453\,600$, ἤτοι μετὰ 15 ἔτη θὰ λάβῃ 4 453 600 δρχ.

Ἐν γένει, ἐὰν καταθέσῃ τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς εἴς τινα Τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα, ζητεῖται δὲ πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας, παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$, ἡ δευτέρα $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$ κ.ο.κ. ἡ τελευταία $\alpha(1+\tau)$, ὥστε εἰς τὸ τέλος τῶν ν χρονικῶν μονάδων θὰ λάβῃ $\alpha(1+\tau) + \alpha(1+\tau)^2 + \ldots + \alpha(1+\tau)^\nu$. Ἂν παραστήσωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτὸ διὰ τοῦ Σ, θὰ ἔχωμεν $\Sigma = \alpha(1+\tau)\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων ἢ τὸ α, ἐὰν δοθῇ τὸ Σ, τὸ τ καὶ τὸ ν.

2ον. Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος α δραχμὰς μὲ ἀνατοκισμὸν καὶ μὲ τόκον τ τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα· πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ μετὰ ν χρονικὰς μονάδας ;

Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ ἐπὶ ν—1 χρονικὰς μονάδας. Ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ ἐπὶ ν—2 χρονικὰς μονάδας, ἄρα θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἡ τελευταία θὰ εἶναι μόνον α. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma=\alpha+\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu-1}.$$

ἢ $\Sigma=\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}-\alpha}{\tau}=\alpha\frac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προσδιορίζεται τὸ Σ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅταν δοθῇ ἡ τιμὴ τῶν α, τ, ν. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ τύπου εὑρίσκομεν εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ α, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ Σ, τ, ν.

ΣΤ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΧΡΕΩΛΥΣΙΑΣ

§ 228. Χρεωλυσία λέγεται ἡ ἐντὸς ὡρισμένου χρόνου ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται **χρεωλύσιον** καὶ χρησιμεύει μέρος μὲν αὐτοῦ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τοῦ χρέους, τὸ δὲ ἄλλο μέρος διὰ τὴν βαθμιαίαν ἀπόσβεσιν τοῦ χρέους.

Τὸ χρέος ἐξοφλεῖται, ὅταν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων αὐτῶν ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ τὴν τελικὴν ἀξίαν τοῦ ἀνατοκιζομένου ἀρχικοῦ κεφαλαίου.

1ον. Ἐδανείσθη τις 1850000 δραχμὰς πρὸς 4,5% μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος, μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ διὰ 12 ἴσων χρεωλυσίων, τὰ ὁποῖα θὰ πληρώνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους· πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον ;

Τὸ ἀρχικὸν ποσὸν τῶν 1 850 000 δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη $1\,850\,000\cdot 1{,}045^{12}$. Ἐὰν διὰ τοῦ **x** παραστήσωμεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον, ἡ πρώτη δόσις ἐκ x δραχμῶν θὰ γίνῃ $x \cdot 1{,}045^{11}$ μετὰ 11 ἔτη, κατὰ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται, ὅτι ἔμεινεν εἰς τὸν τόκον. Ἡ δευτέρα δόσις θὰ γίνῃ $x \cdot 1{,}045^{10}$, ἡ τρίτη $x \cdot 1{,}045^{9}$ κ.ο.κ., ἡ δὲ τελευταία θὰ μείνῃ x. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν, τὰ ὁποῖα θὰ πληρωθοῦν μετὰ τῶν τόκων αὐτῶν, θὰ εἶναι

$$x + x \cdot 1{,}045 + x \cdot 1{,}045^2 + \ldots + x \cdot 1{,}045^{11} \text{ ἢ } x \cdot \frac{1{,}045^{12} - 1}{0{,}045}.$$

Ἀλλὰ τὸ ποσὸν αὐτὸ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀφειλόμενον συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν:

$$x \cdot \frac{1{,}045^{12} - 1}{0{,}045} = 1\,850\,000 \cdot 1{,}045^{12}.$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ x διὰ τῶν λογαρίθμων.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν δύναμιν $1{,}045^{12}$ θέτοντες αὐτὴν ἴσην π.χ. μὲ τὸ ψ, ὅτε εἶναι $\psi = 1{,}045^{12}$ καὶ $\text{λογ}\psi = 12\text{λογ}1{,}045 = 0{,}22944$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὅτι $\psi = 1{,}696$.

Λύοντες τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ $1{,}045^{12}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτοῦ 1,696 εὑρίσκομεν ὅτι:
$x = \dfrac{1\,850\,000 \times 0{,}045 \times 1696}{696}$, ἐκ τοῦ ὁποίου διὰ λογαριθμήσεως λαμβάνομεν $\text{λογ}x = \text{λογ}1850\,000 + \text{λογ}0{,}045 + \text{λογ}1696 - \text{λογ}696$.

Ἐκ τῶν πινάκων εὑρίσκομεν

	λογ 1 850 000	=6,26717
	λογ 0,045	$=\bar{2},65321$
	λογ 1 696	=3,22943
	ἄθροισμα	=8,14981
	λογ 696	=2,84261
Ἑπομένως	λογ x	=5,30720.

ἐκ τοῦ ὁποίου ἕπεται, ὅτι $x = 202\,861{,}9$ δραχμαί.

Ἐν γένει, ἐὰν μὲ α παραστήσωμεν τὸ δανειζόμενον ποσὸν μὲ ἀνατοκισμὸν καθ' ὡρισμένην χρονικὴν μονάδα, μὲ τ τὸν τόκον τῆς 1 δραχμῆς εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα καὶ μὲ ν τὸ πλῆθος τῶν χρονικῶν μονάδων, τὸ μὲν κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἀξία τῶν δόσεων ἐκ x δραχ. ἑκάστη θὰ εἶναι μετὰ ν χρονικὰς μονάδας

$$x(1+\tau) + x(1+\tau)^2 + \ldots + x(1+\tau)^{\nu-1} \text{ ἢ } x\,\frac{(1+\tau)^\nu - 1}{\tau}.$$

Ἑπομένως θὰ ἔχωμεν $x\,\dfrac{(1+\tau)^{\nu}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}$ (1)

ἐκ τῆς ὁποίας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

Ἐνίοτε ἡ πρώτη καταβολὴ τοῦ χρεωλυσίου γίνεται ἔτη τινὰ μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου π.χ. μετὰ κ ἔτη. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν $x\,\dfrac{(1+\tau)^{\nu-\kappa+1}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}$.

Διότι ἡ πρώτη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ μείνῃ ἐπὶ ν—κ ἔτη ἐπὶ ἀνατοκισμῷ καὶ θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{\nu-\kappa}$, ἡ ἑπομένη χρεωλυτικὴ δόσις θὰ γίνῃ $x(1+\tau)^{\nu-\kappa-1}$ κ.τ.λ. Οὕτω θὰ ἔχωμεν:

$$x+x(1+\tau)+\ldots+x(1+\tau)^{\nu-\kappa-1}+x(1+\tau)^{\nu-\kappa}=\frac{x(1+\tau)^{\nu-\kappa+1}-x}{\tau},$$

τὸ ὁποῖον θὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἤτοι ἔχομεν τὴν ἑξῆς σχέσιν:

$$x\,\frac{(1+\tau)^{\nu-\kappa+1}-1}{\tau}=\alpha(1+\tau)^{\nu}.$$

2ον. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ τις, ἐὰν θέλῃ νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος αὐτοῦ εἰς 6 ἔτη δι' ἐτησίου χρεωλυσίου 800000 δραχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4%;

Ἔχομεν x=800 000, ν=6, τ=0,04, ζητεῖται δὲ τὸ α. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) τὰς τιμὰς τῶν x, ν, τ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν $800000.\dfrac{1{,}04^{6}-1}{0{,}04}=\alpha\cdot 1{,}04^{6}$. Λύοντες αὐτὴν ὡς πρὸς α εὑρίσκομεν

$$\alpha=\frac{800000\,(1{,}04^{6}-1)}{0{,}04\cdot 1{,}04^{6}}.$$

Ὑπολογίζομεν ἐν πρώτοις τὴν δύναμιν $1{,}04^{6}$ καὶ ἀκολούθως εὑρίσκομεν διὰ τῶν λογαρίθμων α=4 193 636,3 δραχμάς.

3ον. Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 2 000 000 δραχμῶν μὲ χρεωλύσιον 130 000 δραχμῶν ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3%;

Ἔχομεν α=2 000 000, x=130.000, τ=0,03. Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν (1) εὑρίσκομεν:

$$130\,000\cdot\frac{1{,}03^{\nu}-1}{0{,}03}=2\,000\,000\cdot 1{,}03^{\nu}$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν: $130\,000\cdot 1{,}03^{\nu}-130\,000=0{,}03\cdot 2\,000\,000\cdot 1{,}03^{\nu}$

$$\text{ἢ } 1{,}03^{\nu}\cdot(130\,000-0{,}03\cdot 2\,000\,000)=130\,000$$

$$\text{καὶ } 1{,}03^{\nu}=\frac{130\,000}{70\,000}=\frac{13}{7}.$$

Λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων μελῶν ἔχομεν: $\nu \cdot \log 1{,}03 = \log 13 - \log 7$ ἢ $0{,}01284\nu = 1{,}11394 - 0{,}84510 = 0{,}26884$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $\nu = 20{,}937$ ἔτη. Ἤτοι ἡ ἐξόφλησις θὰ γίνῃ μετὰ 21 ἔτη, ἀλλ' ἡ τελευταία δόσις θὰ εἶναι κατά τι μικροτέρα τῶν ἄλλων. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν εἰκοστὴν πρώτην δόσιν, εὑρίσκομεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον τῶν 2 000 000 δρχ. εἰς 21 ἔτη, δηλαδὴ τὸ $2\,000\,000 \cdot 1{,}03^{21}$ δρχ., τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 3 720 590 δρχ., ἀκολούθως εὑρίσκομεν ὅτι αἱ δόσεις ἐκ 130 000 δρχ. ἑκάστη εἰς τὸ τέλος τοῦ 21ου ἔτους γίνονται $130\,000 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1}{0{,}03} \cdot 1{,}03 = 3\,597\,945$ δρχ. Ἡ διαφορὰ $3\,720\,590 - 3\,597\,945$ δρχ. $= 122\,645$ δρχ. παριστάνει τὴν τελευταίαν δόσιν.

Προβλήματα

618. Ἔμπορός τις καταθέτει εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 350 000 δρχ. ἐκ τῶν κερδῶν αὐτοῦ εἰς τὴν τράπεζαν μὲ ἀνατοκισμὸν κατ' ἔτος 4%. Πόσα θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ εἰκοστοῦ ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

619. Καταθέτει τις κατ' ἔτος μὲ σύνθετον τόκον 10000 δρχ. πρὸς 5%. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ λάβῃ 130000 δρχ. ;

620. Ἡ διατροφὴ καὶ τὰ ἔξοδα τῶν σπουδῶν τέκνου κατεγράφοντο ὑπὸ τοῦ πατρός του εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἀνήρχοντο δὲ κατὰ μέσον ὅρον 20 000 δρχ. ἐτησίως. Πόσα θὰ ἐγίνοντο αὐτὰ μετὰ 3 ἔτη, ἐὰν ἀνετοκίζοντο κατ' ἔτος πρὸς 3,5%;

621. Πατήρ τις ἀποκτήσας κόρην θέλει νὰ καταθέτῃ κατ' ἔτος ποσόν τι ὡρισμένον δι' αὐτήν, ἵνα αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 5% γίνουν μετὰ 21 ἔτη 250 000 δρχ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτησία κατάθεσις ;

622. Πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, διὰ τοῦ ὁποίου ἐξοφλεῖται χρέος 100 000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4%, ἂν πληρώνεται δι' ἐτησίων δόσεων ;

623. Χρέος ἐξοφλεῖται δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον, ἐὰν καθεμία δόσις εἶναι 318 000 δρχ. καὶ τὸ ἐπιτόκιον 4,5%;

624. Ἔμπορός τις ἐδανείσθη 45 000 000 δρχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος 5%. Ἐὰν πληρώνῃ ἐτήσιον χρεωλύσιον 3 000 000 δρχ., μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφληθῇ τὸ χρέος αὐτοῦ ;

625. Ἡ ἐξόφλησις χρέους πρέπει νὰ γίνῃ εἰς 20 ἔτη χρεωλυτικῶς. Καθεμία δόσις (ἐτησία) θὰ εἶναι 46 130 δρχ. θὰ ἀρχίσῃ δὲ ἡ πληρωμὴ μετὰ τὸ 5ον ἔτος ἀπὸ τοῦ δανείου. Πόσον εἶναι τὸ ἀρχικῶς δανεισθὲν ποσόν, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4,5% ;

626. Κράτος ἐδανείσθη ποσόν τι πρὸς 3,75%. Ἡ χρεωλυτικὴ ἐξόφλησίς του ἄρχεται 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου καὶ θὰ πληρώνεται 158 800 000 δρχ. ἐτησίως ἐπὶ 10 ἔτη. Πόσον ἦτο τὸ δανεισθὲν ποσόν ;

627. Χρέος ἐξ 1,5 ἑκατομμυρίου δρχ. πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ διὰ 15 ἴσων ἐτησίων δανείων ἀρχομένων 5 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ἂν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 3,75% ;

628. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἐξοφλήσῃ τις χρεωλυτικῶς δάνειον 20000000 δρχ. διὰ 16 ἐτησίων δόσεων ἐξ 1780300 δρχ. ἑκάστην ;

('Αντικαθιστῶντες εἰς τὴν εὑρεθεῖσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau(1+\tau)^{16}} = \frac{20\,000\,000}{1\,780\,300}, \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ περιέχει τὸν ἄγνωστον τ εἰς τὸν 17ον βαθμόν. Διὰ τοῦτο ἡ λύσις αὐτῆς δὲν εἶναι γνωστὴ καὶ καταφεύγομεν εἰς προσεγγίσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι μεγαλύτερον, ὅσον τὸ τ εἶναι μικρότερον. 'Εὰν ἀντικατασταθῇ τὸ τ μὲ μικρότερον ἀριθμὸν τῆς ζητουμένης τιμῆς του, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ $\frac{20\,000\,000}{1\,780\,300}$.

Θέτοντες π.χ. $\tau=0{,}04$ εὑρίσκομεν

$$\frac{1}{0{,}04}\left(1-\frac{1}{1{,}04^{16}}\right) = \left(1-\frac{1}{1{,}04^{16}}\right).25 = 11{,}6523$$

ἐνῷ ἐκ τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) εὑρίσκομεν 11,234. Θέτομεν λοιπὸν τώρα $\tau=0{,}045$ ἔπειτα $\tau=0{,}0475$ κ.ο.κ. προχωροῦντες προσεγγίζομεν περισσότερον πρὸς τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ τ).

629. Κατέθεσέ τις ἐπὶ 5 συνεχῆ ἔτη πρὸς 4% εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους ποσόν τι καὶ εἰσέπραξεν ἓξ ἔτη μετὰ τὴν καταβολὴν τῆς τελευταίας καταθέσεως 20 000 000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ κατάθεσις ;

630. Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 1 250 000 δρχ. ἐπὶ 7 ἔτη πρὸς 6%. Τί ποσὸν θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ δωδεκάτου ἔτους ἀπὸ τῆς πρώτης καταθέσεως ;

631. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ὀκτὼ ἐτήσιαι καταθέσεις ἐξ 1 000 000 δρχ. ἑκάστη ἀποτελοῦν ποσὸν 102000000 δραχμῶν ;

632. Πόσαι καταθέσεις ἐξ 1 000 000 δρχ., αἱ ὁποῖαι γίνονται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, ἀπαιτοῦνται, ἵνα ἀποτελεσθῇ ποσὸν 2 457 839 000 δρχ. τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος $5\ \frac{1}{2}$% ;

633. Δικαιοῦται τις νὰ εἰσπράξῃ μετὰ 5 ἔτη ποσὸν 10 000 000 δρχ. 'Αντὶ τούτου ἐπιθυμεῖ νὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου τῶν 5 ἐτῶν τὸ αὐτὸ πάντοτε ποσόν. Ποῖον εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἰσπράττῃ τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5% ;

634. 'Οφείλει τις 15 000 000 δρχ. πληρωτέας τὴν 1ην 'Ιουλίου 1949. Νὰ ἀντικατασταθῇ ἡ ὑποχρέωσις αὐτὴ μὲ τρεῖς ἄλλας πρὸς ἴσας ἀλλήλας πληρωτέας τὴν 1ην 'Ιουλίου 1950, 1951, καὶ 1952 (ἐπιτόκιον 6%).

635. Μὲ πόσας ἑξαμηνιαίας χρεωλυτικὰς δόσεις θὰ ἐξοφληθῇ δάνειον 20 000 000 δρχ. ἐὰν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται πρὸς 3% καθ' ἑξαμηνίαν, τὸ δὲ χρεωλύσιον εἶναι 1 000 000 δρχ. ;

636. Συνῆψε τις δάνειον χρεωλυτικὸν 25 000 000 δρχ. πρὸς 7% ἐξοφλητέον

ἐντὸς 8 ἐτῶν. Τρεῖς μῆνας μετὰ τὴν κατάθεσιν τῆς πέμπτης χρεωλυτικῆς δόσεως θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τοῦτο ἐξ ὁλοκλήρου. Πόσα πρέπει νὰ καταβάλῃ ;

637. Ἐδανείσθη τις τὸν Ἀπρίλιον 1942 ποσὸν 20 008 000 δρχ. ἐξοφλητέον ἐντὸς 20 ἐτῶν πρὸς 6%. Καταβάλλων κανονικῶς τὰ μέχρι τοῦ 1950 χρεωλύσια ἐπιθυμεῖ τὴν 1ην Ὀκτωβρίου 1950 νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του τελείως. Τὶ ποσὸν θὰ χρειασθῇ;

638. Διὰ πόσων χρεωλυτικῶν δόσεων ἐξοφλεῖται δάνειον 100 000 000 δρχ., ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 7%, διατίθεται δὲ ἐτησίως χρεωλύσιον 10 000 000 δρχ. ;

639. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον δάνειον 250 000 000 δρχ. ἐξοφλεῖται ἐντὸς 15 ἐτῶν δι' ἐτησίων χρεωλυσίων 24 553 000 δραχμῶν ;

640. Ἑταιρεία τις δύναται νὰ διαθέτῃ ἐκ τῶν κερδῶν αὐτῆς 10 000 000. Ποῖον κεφάλαιον δύναται νὰ δανεισθῇ διαθέτουσα ἐπὶ εἰκοσαετίαν τὸ ἄνω ποσὸν διὰ χρεωλύσιον τοῦ δανείου τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5% ;

641. Εἰσπράττει τις ἐπὶ μίαν πενταετίαν καὶ εἰς τὸ μέσον ἑκάστου ἔτους 210 000 δραχμῶν αὐξανομένου τοῦ ποσοῦ τούτου ἀπὸ ἔτους εἰς ἔτος κατὰ 7,5% (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Κατὰ τὴν ἑπομένην πενταετίαν εἰσπράττει ὁμοίως τὸ προηγούμενον ποσὸν 210 000 δρχ. ηὐξημένον κατὰ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ἐνῷ ἀπὸ πενταετίας εἰς πενταετίαν ἐξακολουθεῖ ἡ αὔξησις τοῦ ποσοῦ κατὰ τὸ τρίτον τοῦ ἀρχικοῦ καὶ κατὰ 7,5% ἐτησίως (ἄνευ ἀνατοκισμοῦ). Πόσον θὰ εἰσπράξῃ εἰς τὸ τέλος τῆς 1ης, 2ας, 3ης, 4ης πενταετίας, ἂν ἀνετοκίζετο κατ' ἔτος πρὸς 5% ;

Περίληψις περιεχομένων κεφαλαίου VIII.

Ὁρισμὸς ἀριθμητικῆς προόδου (αὔξουσα, φθίνουσα πρόοδος, ἂν ἡ διαφορὰ ἢ ὁ λόγος αὐτῆς $\omega > 0$ ἢ < 0). Ὁ νιοστὸς ὅρος $\tau = \alpha + (\nu - 1)\omega$ (α=πρῶτος, ω ἡ διαφορά). Ἡ πρόοδος ὁρίζεται, ἂν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορά.

Ὁρισμὸς παρεμβολῆς ν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μεταξὺ ἀριθμῶν α, β. Ἔχομεν $\omega_1 = (\beta - \alpha) : (\nu + 1)$, ἂν ω_1 εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς προόδου. Ἰδιότης τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ κ.τ.λ., εἶναι $\alpha + \tau = \beta + \lambda = \gamma + \kappa \ldots$.

Ἄθροισμα Σ τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου $\Sigma = (\alpha + \tau) \cdot \nu : 2$ ἢ $\Sigma = [2\alpha + (\nu - 1)\omega]\nu : 2$.

Ὁρισμὸς γεωμετρικῆς προόδου (ἀπολύτως αὔξουσα ἢ φθίνουσα, ἂν ὁ λόγος ω εἶναι $|\omega| > 1$ ἢ < 1).

Ὁ νιοστὸς ὅρος $\tau = \alpha\omega^{\nu-1}$, α ὁ πρῶτος ὅρος, ω ὁ λόγος.

Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \kappa, \lambda, \tau$ εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος μὲ λόγον ω, εἶναι $\beta^2 = \alpha\gamma$, $\beta\lambda = \gamma\kappa = \alpha\tau$.

Παρεμβολὴ ν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α, β. Ἡ σχηματιζομένη πρόοδος θὰ ἔχῃ λόγον $\omega_1 = \sqrt[\nu+1]{\beta : \alpha}$.

Ἄθροισμα ν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου α, β, γ,... λ, κ, τ, τὸ $\Sigma=(\alpha\omega^{\nu}-\alpha):(\omega-1)=(\tau\omega-\alpha):(\omega-1)=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha\omega^{\nu}}{1-\omega}$. Ἄθροισμα Σ τῶν ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου (μὲ ἄπειρον πλῆθος ὅρων) $\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega}$.

Ὁρισμὸς ἁρμονικῆς προόδου (ἂν οἱ ἀντίστροφοι τῶν ὅρων της ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον).

Ὁρισμὸς λογαρίθμου ἀριθμοῦ ὡς πρὸς βάσιν 10 ἢ τὸν ἀριθμὸν e $\left(e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\right)$. Ὁ e εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ὑπερβατικὸς (καθὼς καὶ ὁ $\pi=3,141\ldots$)

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων. Πᾶς ἀριθμὸς $A>0$ ἔχει λογάριθμον θετικὸν μέν, ἂν $A>1$, ἀρνητικὸν δέ, ἂν $A<1$ (ἀρνητικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει λογάριθμον πραγματικόν).

$\lambda o\gamma(A\cdot B)=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma B$, $\lambda o\gamma(A:B)=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma B$, $\lambda o\gamma(A^{\nu})=\nu\lambda o\gamma A$.

Χαρακτηριστικὸν λογαρίθμου. Τροπὴ ἀρνητικοῦ εἰς ἐν μέρει ἀρνητικόν.

Αἱ 4 πράξεις μὲ ἀριθμοὺς ἐν μέρει ἀρνητικούς. Λογαριθμικοὶ πίνακες, χρῆσις αὐτῶν. Ἐφαρμογαὶ τῶν λογαρίθμων. Ἀλλαγὴ τῆς βάσεως συστήματος λογαρίθμων.

Ὁρισμὸς ἐκθετικῶν ἐξισώσεων (αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀγνώστους εἰς τοὺς ἐκθέτας δυνάμεων). Λύσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων.

Συστήματα ἐκθετικῶν ἐξισώσεων καὶ λύσεις αὐτῶν.

Ὁρισμὸς λογαριθμικῆς ἐξισώσεως Λύσεις λογαριθμικῶν ἐξισώσεων.

Ὁρισμὸς τοῦ ἀνατοκισμοῦ. Ἀξία Σ κεφαλαίου α ἀνατοκιζομένου ἐπὶ ν ἔτη $\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}$, τ=τόκος μιᾶς μονάδος εἰς μίαν χρονικὴν μονάδα. Εὕρεσις α΄) τοῦ Σ, β΄) τοῦ α, γ΄) τοῦ ν (περίπτωσις καθ' ἣν τὸ ν δὲν εἶναι ἀκέραιος, ὅτε ἐφαρμόζεται ὁ τύπος

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)^{\nu}\cdot(1+\eta\tau:360).$$

Περίπτωσις ἀνατοκισμοῦ καθ' ἑξαμηνίαν $\tau_1=\sqrt{1+\tau}-1$, περίπτωσις ἀνατοκισμοῦ κατὰ τριμηνίαν $\tau_2=\sqrt[4]{1+\tau}-1$.

Ὁρισμὸς προβλημάτων ἴσων καταθέσεων. Τελικὴ ἀξία Σ ἴσων καταθέσεων α μετὰ ν ἔτη $\Sigma=(1+\tau)\alpha[(1+\tau)^{\nu}-1]:\tau$ (ἂν ἡ ἑκάστοτε κατάθεσις γίνεται εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς χρονικῆς μονάδος) ἢ $\Sigma = \alpha[(1+\tau)^{\nu} - 1] : \tau$ (ἂν ἡ κατάθεσις γίνεται εἰς τὸ τέλος τῆς χρονικῆς μονάδος).

Ὁρισμὸς χρεωλυσίας. Τύπος εὑρέσεως τοῦ χρεωλυσίου x εἶναι:
$$x[(1+\tau)^{\nu}-1] : \tau = \alpha(1+\tau)^{\nu}$$
ἢ γενικώτερον $x[(1+\tau)^{\nu-\kappa-1}-1] : \tau = \alpha(1+\tau)^{\nu}$, ἂν ἡ πρώτη καταβολὴ χρεωλυσίου γίνεται κ ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου α ποσοῦ διὰ ν ἔτη (ν) κ) μὲ τ τόκον μιᾶς μονάδος εἰς τὴν μονάδα τοῦ χρόνου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

Α΄. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΠΟΛΥΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ (ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ) ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 229. Ὡς γνωστόν, ἂν εἶναι $\alpha > 0$, ἢ $\alpha=0$ ἔχομεν $|\alpha|=\alpha$, ἐνῷ ἂν $\alpha < 0$, $|\alpha|=-\alpha$. Π.χ. $|15|=15$, $|-6|=6$, $|0|=0$.

Διὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς (πραγματικῶν) ἀριθμῶν ἔχομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας :

1η. Ἔστω π.χ. ὁ -12. Ἔχομεν $|-12|=12=|12|$. Ἐπίσης $|-7|=7=|7|$. Γενικῶς, ἂν α εἶναι σχετικὸς ἀριθμός, ἔχομεν $|-\alpha|=|\alpha|$.

2αν. Ἔστω π.χ. ὁ 15. Ἔχομεν $|15|=15$, ἐνῷ $-|15|=-15$. Ἀλλ᾽ εἶναι $-15 < 15=|15|$, ἄρα $-|15| < |15|$, ἐνῷ $|0|=0=-|0|$. Ἐν γένει ἔχομεν λοιπὸν $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$.

3η. Ἔστω π.χ. ἡ $|3| < |6|$. Παρατηροῦμεν ὅτι $-|6|=-6$, $-|6|=-6 < 3 < |6|=6$. Ὁμοίως $|-5|=|5|=5$ καὶ $-|-5|=-|5|=-5 < |5|=5$, ἤτοι $-|-5|=-5 < 5$. Ἐν γένει, ἂν εἶναι $|\alpha| \leq |\beta|$, θὰ ἔχωμεν $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$ Διότι ἐκ τῆς $|\alpha| \leq |\beta|$ εὑρίσκομεν (πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ -1), $-|\alpha| \geq -|\beta|$., ἤτοι $-|\beta| \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ (κατὰ τὴν 2αν ἰδιότητα) καὶ $-|\beta| \leq -|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha| \leq |\beta|$ (ἐξ ὑποθέσεως), ἤτοι $-|\beta| \leq \alpha \leq |\beta|$. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ἰσχύῃ αὕτη, θὰ ἔχωμεν $|\alpha| \leq |\beta|$.

Π.χ. εἶναι $-|-8| < -3 < |-8|$ ἢ $-8 < -3 < 8$ καὶ $|-3| < |-8|$ ἢ $3 < 8$.

1. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

α΄) Ἔστω, ὅτι ζητεῖται ἡ $|5+8|$. Ἔχομεν $|5+8|=|13|=13=5+8=|5|+|8|$. Ἔστω ἡ $|-15-6|$. Ἔχομεν $|-15-6|=|-21|=|21|=21=15+6=|-15|+|-6|$. Ἔστω ἡ $|-20+8|$. Ἔχομεν $|-20+8|=|-12|=|12|=12 < 20+8=|-20|+|8|$, ἤτοι $|-20+8| < |-20|+|8|$.

Ἂν α, β εἶναι ὁμόσημοι, ἔχομεν $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\alpha+\beta$, προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν α, β κ.τ.λ., ἤτοι ·

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\alpha+\beta$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α καὶ β, ἂν εἶναι ὁμόσημοι.

Ἂν α, β εἶναι ἑτερόσημοι, ἔχομεν $|\alpha+\beta| < |\alpha|+|\beta|$. Διότι, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\alpha+\beta$, θὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν μεγαλυτέραν ἐκ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α, β τὴν μικροτέραν αὐτῶν κ.τ.λ. ὥστε:

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων, ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἤτοι γενικῶς ἔχομεν:

Ἂν οἱ α, β εἶναι πραγματικοί, ἔχομεν $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$, τὴν μὲν ἰσότητα δι' ὁμοσήμους (ἢ 0), τὴν δὲ ἀνισότητα δι' ἑτεροσήμους προσθετέους.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leqq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|.$$

Τὴν αὐτὴν ἰδιότητα δεικνύομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἔχομεν $\quad -|\alpha| \leqq \alpha \leqq |\alpha|$.

Ἐπίσης ἔχομεν $-|\beta| \leqq \beta \leqq |\beta|$. Μὲ τὴν πρόσθεσιν τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $-|\alpha|-|\beta| \leqq \alpha+\beta \leqq |\alpha|+|\beta|$

ἢ $\quad -(|\alpha|+|\beta|) \leqq \alpha+\beta \leqq |\alpha|+|\beta|$, ἑπομένως εἶναι καὶ

$|\alpha+\beta| \leqq ||\alpha|+|\beta|| = |\alpha|+|\beta|$, δηλαδὴ $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$.

β') **Θὰ δείξωμεν ὅτι:** $|\alpha\pm\beta| \geqq ||\alpha|-|\beta||$. Ἔχομεν:

$|\alpha| = |\alpha+\beta+(-\beta)| = |(\alpha+\beta)+(-\beta)| \leqq |\alpha+\beta|+|-\beta| = |\alpha+\beta|+|\beta|$,

ἤτοι $|\alpha| \leqq |\alpha+\beta|+|\beta|$, ἑπομένως $|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha+\beta|$.

Ὁμοίως ἔχομεν $|\beta| = |\beta+\alpha+(-\alpha)| \leqq |\alpha+\beta|+|-\alpha| = |\alpha+\beta|+|\alpha|$ καὶ $|\beta|-|\alpha| \leqq |\alpha+\beta|$, ἄρα $-(|\alpha|-|\beta|) \leqq |\alpha+\beta|$.

Ἐν γένει λοιπὸν ἔχομεν $|\alpha+\beta| \geqq ||\alpha|-|\beta||$. Ἐπίσης ἔχομεν $|\alpha-\beta| = |\alpha+(-\beta)| \geqq ||\alpha|-|-\beta|| = ||\alpha|-|\beta||$ (ἕνεκα τῆς προηγουμένης σχέσεως), ἤτοι $|\alpha-\beta| \geqq ||\alpha|-|\beta||$. Ὥστε γενικῶς ἔχομεν

$$|\alpha\pm\beta| \geqq ||\alpha|-|\beta||.$$

γ') **Ἂν εἶναι $|x-\psi| < \alpha$, $|\psi-\omega| < \alpha$ θὰ δείξωμεν ὅτι $|x-\omega| < 2\alpha$.**

Διότι μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν δοθεισῶν ἀνισοτήτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $|x-\psi|+|\psi-\omega| < 2\alpha$. Ἀλλ' εἶναι $|x-\omega| = |(x-\psi)+(\psi-\omega)| \leqq |x-\psi|+|\psi-\omega| < 2\alpha$, ἤτοι $|x-\omega| < 2\alpha$.

Ὅταν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἰδιότητα αὐτήν, λέγομεν συνήθως, ὅτι ἀπαλείφομεν τὸν ψ ἐκ τῶν x, ψ, ω μεταξὺ τῶν δοθεισῶν ἀνισοτήτων.

2. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἔχομεν $|8 \cdot 7|=|56|=8 \cdot 7=|8|\cdot|7|$. Ἐπίσης $|-5 \cdot 9|=|-45|=45=5\cdot 9=|-5|\cdot|9|$.

Ἐν γένει $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, διότι οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α, β (ὁμόσημοι ἢ ἑτερόσημοι), διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον των, θὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α, β κ.τ.λ., ἤτοι :

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

3. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ἔστω $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha| : |\beta|$, $(\beta \neq 0)$.

Διότι, ἂν τεθῇ $\frac{\alpha}{\beta} = \omega$, ἔχομεν $\alpha = \beta\cdot\omega$, $|\alpha| = |\beta \cdot \omega| = |\beta| \cdot |\omega|$

Ἑπομένως $|\omega| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$, ἤτοι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = |\alpha| : |\beta|$.

4. ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΤΙΜΗ ΔΥΝΑΜΕΩΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν $|\alpha^{|\nu|}|$, ὅπου ν ἀκέραιος $(|\nu| > 0)$.

Ἔχομεν $\alpha^{|\nu|}=\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha$, $\quad |\alpha^{|\nu|}|=|\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha|=|\alpha||\alpha|\ldots|\alpha|=|\alpha|^{|\nu|}$.

Ἂν ἔχωμεν $|\alpha^{-|\nu|}|$, θὰ εἶναι $|\alpha^{-|\nu|}|=|\alpha|^{-|\nu|}$. Διότι εἶναι $\alpha^{-|\nu|} = \frac{1}{\alpha^{|\nu|}}$,

$|\alpha^{-|\nu|}| = \left|\frac{1}{\alpha^{|\nu|}}\right| = \frac{1}{|\alpha|^{|\nu|}} = |\alpha|^{-|\nu|}$ ἤτοι $|\alpha^{-|\nu|}| = |\alpha|^{-|\nu|}$

Β΄. ΠΕΡΙ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

§ 230. α΄) Τυχαῖοι ἀριθμοὶ π.χ. οἱ 3, –5, –6, 12, 7, $\frac{1}{3}$, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ἀριθμὸν τῆς φυσικῆς σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4..., λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν **μίαν ἀκολουθίαν** ἀριθμῶν. Συνήθως ἕκαστος τῶν διδομένων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ δευτέρου καὶ ἑξῆς γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του κατά τινα ὡρισμένον τρόπον π.χ. οἱ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

Διὰ τοῦτο ἀκολουθία ἀριθμῶν καλεῖται τὸ σύνολον ἀριθμῶν ἀντιστοιχούντων εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, . . ., ἕκαστος τῶν ὁποίων (ἀπὸ τοῦ β΄ καὶ ἑξῆς) γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του κατά τινα ὡρισμένον τρόπον.

Οἱ ἀποτελοῦντες τὴν ἀκολουθίαν ἀριθμοὶ λέγονται καὶ ὅροι τῆς ἀκολουθίας.

β΄) Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν λέγεται **πεπερασμένου πλήθους** ἢ **πεπερασμένη** μέν, ἂν ἀποτελῆται ἀπὸ πεπερασμένον πλῆθος ὅρων, **ἀπέραντος** δέ, ἂν εἰς πάντα ἀκέραιον (θετικὸν ἀριθμὸν) ἀντιστοιχῇ εἷς τοιοῦτος τῆς ἀκολουθίας, ὅτε αὕτη ἔχει ἄπειρον πλῆθος ὅρων.

Παριστάνομεν συμβολικῶς τὴν ἀκολουθίαν μὲ $(x_1,\ x_2,\ x_3\ldots,)$ ἢ μὲ (x_ν) καὶ λέγομεν: ἡ ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν ἢ τῶν **ὅρων** x_ν, ὅπου ὑπατίθεται ὅτι τὸ $\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots$ Π.χ. ἡ ἀκολουθία τῶν ὅρων

$(x_\nu)=\left(\frac{1}{\nu}\right)$ εἶναι (ὅταν $\nu=1,\ 2,\ 3,\ldots$) ἡ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ldots,\ \frac{1}{\rho},\ldots$ (1)

Ἡ ἀκολουθία τῶν ὅρων $(x_\nu)=(2^\nu)$ εἶναι ἡ $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ldots,2^\rho,\ldots$ (2)

Ἐὰν ἔχωμεν $(x_\nu)=\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$\frac{1+1}{1},\ \frac{2+1}{2},\ \frac{3+1}{3},\ldots \text{ ἢ } \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ldots,\ \frac{\rho+1}{\rho},\ldots \qquad (3)$$

Ἐὰν ἔχωμεν $(x_\nu)=\left(\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$\frac{(-1)^{1-1}}{1},\ \frac{(-1)^{2-1}}{2},\ \frac{(-1)^{3-1}}{3},\ \frac{(-1)^{4-1}}{4},\ \frac{(-1)^{5-1}}{5},\ldots, \text{ ἤτοι οἱ}$$

$$1,-\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ldots \qquad (4)$$

Ἐὰν εἶναι $(x_\nu)=(-\nu)$, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι

$$-1,\ -2,\ -3,\ -4,\ldots \qquad (5)$$

Ἡ ἀκολουθία τῶν ὅρων $(x_\nu)=\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ \left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \left(1+\frac{1}{4}\right)^4,\ldots\ldots$$

ἤτοι ἐκ τῶν $\quad 2,\ \frac{9}{4},\ \frac{64}{27},\ \frac{625}{256},\ldots$ (6)

γ΄) Ἀκολουθία τις λέγεται **περιωρισμένη,** ἂν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστου τῶν ὅρων της εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση ἀριθμοῦ τινος $(A>0)$, ἤτοι ἂν εἶναι $|x_\nu| \leqq A$ ἢ $-A \leqq x_\nu \leqq A$, ὅτε ὁ A καλεῖται **φραγμὸς** ἢ **φράγμα** τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἀριθμός τις A_1, τοιοῦτος, ὥστε νὰ ἔχωμεν $A_1 \leqq x_\nu$, ὁ A_1 καλεῖται **ἀριστερὸς** ἢ **πρὸς τὰ κάτω φραγμὸς** τῆς ἀκολουθίας (x_ν), ἐνῷ ἂν ὑπάρχῃ ἀριθμός τις A_2, τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $x_\nu \leqq A_2$, ὁ A_2 καλεῖται **δεξιὸς** ἢ **πρὸς τὰ ἄνω φραγμὸς** τῆς ἀκολουθίας.

Π.χ. διὰ τὴν (1) ἔχομεν $\frac{1}{\nu} < 1$, ἤτοι ἡ 1 εἶναι φραγμὸς αὐτῆς πρὸς τὰ ἄνω· φραγμὸς ταύτης εἶναι καὶ πᾶς ἀριθμὸς $\kappa > 1$. Διὰ τὴν (2) ἔχομεν $2 \leqq 2^\nu$ καὶ εἶναι αὕτη περιωρισμένη πρὸς τὰ ἀριστερά. Διὰ τὴν (4) ἔχομεν $\left|\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right| = \left|\frac{\pm 1}{\nu}\right| \leqq 1$ καὶ εἶναι αὕτη περιωρισμένη πρὸς τὰ δεξιά. Διὰ τὴν (5) ἔχομεν $-\nu \leqq -1$, τὸ δὲ -1 εἶναι φραγμὸς ταύτης πρὸς τὰ ἄνω.

δ') Ἀκολουθία τις (x_ν) λέγεται **μονοτόνως αὔξουσα** ἢ **φθίνουσα**, ἐὰν διὰ πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς ἔχωμεν $x_\nu \leqq x_{\nu+1}$ ἢ $x_\nu \geqq x_{\nu+1}$ ἀντιστοίχως. Οὕτως ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν ἡ μὲν (2) εἶναι μονοτόνως αὔξουσα, διότι εἶναι π.χ. $2 < 2^2$, ἢ $2^2 < 2^2 \cdot 2$ ἢ $2^\nu < 2^{\nu+1}$, ἡ δὲ (1) εἶναι μονοτόνως φθίνουσα, ἐπειδὴ εἶναι $\frac{1}{\nu} > \frac{1}{\nu+1}$.

Παρατήρησις. 1η. Ἀκολουθία τις (x_ν), διὰ τὴν ὁποίαν ἡ διαφορὰ $(x_{\nu+1} - x_\nu)$ εἶναι σταθερὰ $\lambda \neq 0$, εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος, αὔξουσα μέν, ἂν $\lambda > 0$, φθίνουσα δέ, ἂν εἶναι $\lambda < 0$. Π.χ. ἡ $5+3$, $5+3\cdot 2, \ldots, (5+3\cdot\nu), \ldots$ ἔχει $\lambda = x_{\nu+1} - x_\nu = 5+3(\nu+1)-(5+3\nu) = 3$.

2α. Ἀκολουθία τις ἀριθμῶν θετικῶν (x_ν), διὰ τὴν ὁποίαν ἔχομεν πηλίκον $\frac{x_{\nu+1}}{x_\nu}$ σταθερὸν $= \omega \neq 1$, εἶναι γεωμετρικὴ **πρόοδος, αὔξουσα** μέν, ἂν $|\omega| > 1$, **φθίνουσα** δέ, ἂν $|\omega| < 1$. Π.χ. ἡ $\frac{6}{2}, \frac{6}{4}, \ldots$ εἶναι γεωμ. πρόοδος φθίνουσα ἔχουσα $\omega = \frac{6}{2^{\nu+1}} : \frac{6}{2^\nu} = \frac{1}{2}$.

2. ΠΟΤΕ ΜΙΑ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΕΙΝΕΙ ΠΡΟΣ ΤΟ ΜΗΔΕΝ

§ 231. α') Ἔστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία $\left(\frac{1}{10^\nu}\right) = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$

Ἐὰν δοθέντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, π.χ. 0,0000001 δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅρον τῆς ἀκολουθίας, ὥστε ἕκαστος τῶν ἑπομένων του (ἀπείρων εἰς πλῆθος) νὰ εἶναι ἀπολύτως μικρότερος οἱουδήποτε δοθέντος ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 0,0000001 = ε, τότε λέγομεν ὅτι ἡ $\left(\frac{1}{10^\nu}\right)$ τείνει εἰς τὸ 0 καὶ συμβολίζομεν τοῦτο οὕτως $\left(\frac{1}{10^\nu}\right) \longrightarrow 0$ ἢ ορ$\left(\frac{1}{10^\nu}\right) = 0$. Πράγματι ἕκαστος τῶν ὅρων μετὰ τὸν 0,0000001, οἱ 0,00000001, 0, 000 000 001,... εἶναι μικρότερος τοῦ ε καὶ οὕτως ἔχομεν ὅτι

$$\left(\frac{1}{10^\nu}\right) \longrightarrow 0 \text{ ἢ ορ}\left(\frac{1}{10^\nu}\right) = 0.$$

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\right) = 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ (διὰ $\nu = 1, 2, 3, \ldots$) τείνει εἰς τὸ μηδέν, διότι ἂν π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{900}$, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστου τῶν ὅρων $\frac{1}{901}, -\frac{1}{902}, \ldots$ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{900}$.

Ἐν γένει λέγομεν, ὅτι **ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν (x_ν) $\longrightarrow$ 0 ἢ ἔχει ὅριον τὸ 0.** ἂν δοθέντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$, (ὁσονδήποτε μικροῦ) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον $\eta > 0$ καὶ ἀκέραιον τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_{\eta_\varepsilon}| < \varepsilon$, $|x_{\eta_\varepsilon+1}| < \varepsilon$, $|x_{\eta_\varepsilon+2}| < \varepsilon$, ἤτοι $|x_\nu| < \varepsilon$ διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ $\nu \geqq \eta_\varepsilon$.

β') Ἔστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία $(x_\nu) = \frac{(-1)^2}{(\nu+1)^2}$, ἤτοι ἡ $\frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \ldots$

Ἂν δοθῇ $\varepsilon > 0$ καὶ θέλωμεν νὰ εἶναι $|x_\nu| < \varepsilon$, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ν, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_\nu| = \frac{1}{(\nu+1)^2} < \varepsilon$ ἢ $(\nu+1)^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, $\nu + 1 > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ καὶ $\nu > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$.

Ὥστε διὰ τιμὰς ἀκεραίας τοῦ $\nu > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1$ θὰ ἔχωμεν $|x_\nu| < \varepsilon$ καὶ ἑπομένως ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία τείνει εἰς τὸ 0 ἢ ἔχει ὅριον τὸ 0.

γ') Λέγομεν ὅτι **ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν x_ν τείνει ἢ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον** καὶ σημειώνομεν τοῦτο μὲ $(x_\nu) \longrightarrow \infty$ ἢ ορ$(x_\nu) = \infty$, ἂν δοθέντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ $M > 0$ (ὁσονδήποτε μεγάλου) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλον ἀκέραιον $H_M > 0$ τοιοῦτον, ὥστε διὰ $\nu > H_M$ νὰ ἔχωμεν $x_\nu > M$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία 1, 2, 3, 4,... τείνει εἰς τὸ ∞. Διότι ἂν π.χ. $M = 315\,687$, ἔχομεν $H = 315688$ καὶ διὰ $\nu > 315688$ εἶναι οἱ 315688, 315689... > 315687· ἤτοι ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \longrightarrow \infty$ ἢ ορ$(x_\nu) = \infty$

Λέγομεν ὅτι **ἀκολουθία τις ἀριθμῶν (x_ν) τείνει ἢ ὅτι ἔχει ὅριον ἀριθμὸν ὡρισμένον A**, ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_\nu - A) \longrightarrow 0$.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) = \frac{\nu+1}{\nu}$ (διὰ $\nu = 1, 2, 3, \ldots$) τείνει εἰς τὴν 1. Διότι ἡ ἀκολουθία $\left(\frac{\nu+1}{\nu} - 1\right) \longrightarrow 0$. Πράγματι ἔχομεν $\left(\frac{\nu+1}{\nu} - 1\right) = \frac{1}{\nu}$ καὶ ἡ $\left(\frac{1}{\nu}\right) \longrightarrow 0$, ἄρα $\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right) \longrightarrow 1$.

Ἡ ἀκολουθία $5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, \ldots 5\frac{1}{2^\nu}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ 5. Διότι ἡ ἀκολουθία $5\frac{1}{2} - 5, 5\frac{1}{4} - 5, \ldots, 5\frac{1}{2^\nu} - 5, \ldots$, ἤτοι ἡ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^\nu}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ 0.

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία $-11, -11\frac{1}{2}, -11\frac{2}{3}, -11\frac{3}{4}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ -12. Διότι ἡ $-11-(-12)$, $-11\frac{1}{2}-(-12)$, $-11\frac{2}{3} - (-12)$, ἤτοι ἡ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ἔχει ὅριον τὸ 0.

3. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

α') Ἐὰν ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία ἀριθμῶν $(x_\nu) \longrightarrow 0$, τότε ἡ $|x_\nu| \longrightarrow 0$· καὶ ἀντιστρόφως. Τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ, καθ' ὃν ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \longrightarrow 0$.

β') Ἐὰν ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \longrightarrow 0$ τότε ἡ $\left(\frac{1}{x_\nu}\right) \longrightarrow \infty$.

Ἔστω ἀριθμὸς $M > 0$ (ὁσονδήποτε μεγάλος). Λέγομεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμὸς $\eta_M > 0$ θετικὸς ἀκέραιος, ὥστε διὰ $\eta_M > 0$ νὰ εἶναι $\left|\frac{1}{x_\nu}\right| > M$. Πράγματι, ἀφοῦ $(x_\nu) \longrightarrow 0$. ὑπάρχει ἀριθμὸς $\eta_M > 0$, ὥστε ἂν $\nu > \eta_M$, νὰ ἔχωμεν $|x_\nu| < \frac{1}{M}$, ἄρα εἶναι καὶ $M \cdot |x_\nu| < 1$, ἢ $M < \frac{1}{|x_\nu|}$.

Δηλαδὴ διὰ $\nu > \eta_M$ ἔχομεν $\left|\frac{1}{x^\nu}\right| > M$. Οὕτως, ἡ μὲν ἀκολουθία $\left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots \frac{1}{\nu^2}, \dots\right) \to 0$, ἡ δὲ $(1, 4, 9, 16, \dots \nu^2, \dots) \to \infty$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ὅτι, ἂν $\text{ορ}(x_\nu) = \infty$, ἡ $\left(\frac{1}{x_\nu}\right) \to 0$.

Ἐὰν $(x_\nu) \to 0$, καὶ $(\lambda x_\nu) \to 0$, ἂν λ σταθερὰ ποσότης. Διότι, ἀφοῦ $|x_\nu| < \varepsilon$ διὰ $\nu > \eta$, θὰ εἶναι $|\lambda x_\nu| = |\lambda| \cdot |x_\nu| < |\lambda| \cdot \varepsilon$, τὸ δὲ $|\lambda| \cdot \varepsilon$ δύναται νὰ γίνῃ ὁσονδήποτε μικρόν, ὅταν γίνεται τὸ ε ὅσον θέλομεν μικρόν, ἤτοι $(\lambda x_\nu) \to 0$.

γ') Ἐὰν αἱ ἀκολουθίαι $(x_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu) = 0$, $(x'_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}(x'_\nu) = 0$, θὰ εἶναι :

1ον. $(x_\nu + x'_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu + x'_\nu) = 0$.

2ον. $(x_\nu - x'_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu - x'_\nu) = 0$.

3ον. $(x_\nu \cdot x'_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu \cdot x'_\nu) = 0$.

1ον. Διότι, ἂν θέσωμεν $x_\nu + x'_\nu = \psi_\nu$, θὰ ἔχωμεν προφανως $|\psi_\nu| = |x_\nu + x'_\nu| \leqq |x_\nu| + |x'_\nu|$. Ἐὰν δοθῇ ἀριθμὸς $\varepsilon > 0$, θὰ εἶναι καὶ $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, δυνάμεθα δὲ νὰ εὕρωμεν ἀνὰ ἕνα ἀριθμὸν $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, ὥστε νὰ ἔχωμεν $|x_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$ διὰ $\nu > \eta_1$ καὶ $|x'_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}$ διὰ $\nu > \eta_2$, ἀφοῦ $(x_\nu) \to 0$ καὶ $(x'_\nu) \to 0$. Ἂν παρασταθῇ μὲ η ὁ μεγαλύτερος τῶν η_1, η_2, θὰ ἔχωμεν διὰ $\nu > \eta$ τὸ $|\psi_\nu| \leqq |x_\nu| + |x'_\nu| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ἤτοι $|\psi_\nu| \to 0$, δηλαδὴ $(x_\nu + x'_\nu) \to 0$.

2ον. Ἐπειδὴ εἶναι $|x_\nu - x'_\nu| = |x_\nu + (-x'_\nu)| \leqq |x_\nu| + |-x'_\nu| = |x_\nu| + |x'_\nu|$, ἤτοι $|x_\nu - x'_\nu| \leqq |x_\nu| + |x'_\nu| < \varepsilon$, ἕπεται ὅτι καὶ $(x_\nu - x'_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}\ (x_\nu - x'_\nu) = 0$.

3ον. Προφανῶς ἔχομεν $|x_\nu \cdot x'_\nu| = |x_\nu| \cdot |x'_\nu|$, καὶ ἂν $\varepsilon > 0$ εἶναι καὶ $\sqrt{\varepsilon} > 0$. Ἂν λοιπὸν δοθέντος τοῦ $\varepsilon > 0$ εὑρεθοῦν οἱ $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$ τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι $|x_\nu| < \sqrt{\varepsilon}$ διὰ $\nu > \eta_1$, καὶ $|x'_\nu| < \sqrt{\varepsilon}$ διὰ $\nu > \eta_2$, τὸ δὲ η παριστάνῃ τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν η_1, η_2, θὰ ἔχωμεν διὰ $\nu > \eta$ τὸ $|x_\nu| < \sqrt{\varepsilon}$ καὶ $|x'_\nu| < \sqrt{\varepsilon}$. Ἄρα καὶ $|x_\nu| \cdot |x'_\nu| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$.

Ἑπομένως εἶναι $|x_\nu| \cdot |x'_\nu| < \varepsilon$, ἤτοι ἔχομεν $(x_\nu \cdot x'_\nu) \to 0$ ἢ $\text{ορ}\ (x_\nu \cdot x'_\nu) = 0$.

Π.χ. ἂν ἔχωμεν τὰς ἀκολουθίας $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\nu}, \ldots$ καὶ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2},$ $\frac{1}{2^3}, \ldots \frac{1}{2^\nu}, \ldots$ ἑκάστη τῶν ὁποίων τείνει εἰς τὸ 0, τότε ἡ $\left(1 \pm \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2^3}\right), \ldots \left(\frac{1}{\nu} \pm \frac{1}{2^\nu}\right), \ldots$ καθὼς καὶ ἡ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2 \cdot 2^2}, \frac{1}{3 \cdot 2^3}, \ldots$ $\frac{1}{\nu \cdot 2^\nu}, \ldots$ τείνουν εἰς τὸ 0.

Ἀσκήσεις

642. Νὰ εὑρεθῇ εἰς κατώτερος φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας $1, 3, 9, 27, \ldots 3^\nu, \ldots$ Ὑπάρχει πεπερασμένος ἀριθμός, ὅστις νὰ εἶναι ἀνώτερος φραγμὸς τῆς ἀκολουθίας ταύτης καὶ διατί ;

643. Αἱ ἀκολουθίαι, αἱ ὁποῖαι τείνουν εἰς τὸ $+\infty$, ἔχουν ἀνωτέρους φραγμούς ; Διατί ; Ἡ ἀκολουθία $-1, +1, -1, +1, \ldots, (-1)^\nu, \ldots$ τείνει πρὸς ἀριθμόν τινα ;

644. Νὰ εὑρεθῇ :

α) Ὁ 10ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας $5, 100, 1125, \ldots, \nu^2.5^\nu, \ldots$

β΄) Ὁ 5ος » » » $\frac{3}{2}, \frac{9}{\sqrt{2}-1}, \frac{27}{\sqrt{3}+1}, \ldots, \frac{3^\nu}{\sqrt{\nu}-(-1)^\nu}, \ldots$

γ΄) Ὁ 7ος » » » $2, 1, \frac{3}{5}, \ldots, \frac{\nu+3}{\nu^2+1}, \ldots$

645. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{\nu^2}, \ldots$ Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς η, ὥστε ἂν $\nu > \eta$, νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\nu^2} < 0{,}35$. Ἐπίσης νὰ ἔχωμεν $\frac{1}{\nu^2} < 0{,}00001$.

646. Δείξατε ὅτι, ἄν $(x_\nu) \longrightarrow \alpha$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu) = \alpha$, $(\lambda x_\nu) \longrightarrow \lambda\alpha$ ἢ $\text{ορ}(\lambda x_\nu) = \lambda\alpha$, ἄν λ σταθερὰ ποσότης. Δείξατε ὅτι, ἄν $(x_\nu) \longrightarrow \alpha$ ἢ $\text{ορ}\,(x_\nu) = \alpha$, $(x'_\nu) \longrightarrow \beta$ ἢ $(\text{ορ}x'_\nu) = \beta$.

1ον) Τότε $(x_\nu + x'_\nu) \longrightarrow \alpha+\beta$ ἢ $\text{ορ}\,(x_\nu + x'_\nu) = \text{ορ}x_\nu + \text{ορ}x'_\nu$.

2ον.) Εἶναι $(x_\nu \cdot x'_\nu) \longrightarrow \alpha\cdot\beta$ ἢ $\text{ορ}\,(x_\nu \cdot x'_\nu) = \alpha\cdot\beta = \text{ορ}x_\nu \cdot \text{ορ}x'_\nu$.

3ον) $\left(\frac{x_\nu}{x'_\nu}\right) \longrightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\text{ορ}\left(\frac{x_\nu}{x'_\nu}\right) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ορ}x_\nu}{\text{ορ}x'_\nu}$ ἄν $(\beta \neq 0)$.

647. Δίδεται ἡ ἀκολουθία $6\frac{1}{2}, 6\frac{2}{3}, \ldots, 6 + \frac{\nu}{\nu+1}, \ldots$ Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς $\eta > 0$ ὥστε, ἂν $\nu \geqq \eta$, νὰ εἶναι $\left|6 + \frac{\nu}{\nu+1} - 7\right| < 0{,}0025$.

648. Γενικώτερον εὕρετε τὸν η, ὥστε νὰ εἶναι $\left|6 + \frac{\nu}{\nu+1} - 7\right| < \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$ ὁσονδήποτε μικρός. Τί συμπεραίνετε περὶ τῆς μεταβλητῆς, ἡ ὁποία λαμβάνει τὰς τιμὰς τῆς ἀκολουθίας ταύτης ;

649. Δίδονται αἱ ἀκολουθίαι $x_\nu = 5 + \frac{1}{\nu}$ καὶ $\psi_\mu = 6 - \frac{1}{\mu^2}$. Δείξατε ὅτι αὗται τείνουν εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 6, ὅταν $\nu \longrightarrow \infty$ καὶ $\mu \longrightarrow \infty$.

4. ΠΕΡΙ ΟΡΙΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΠΟΣΟΤΗΤΟΣ

§ 232. *Ὁρισμοί.* α') Ἐὰν μεταβλητὴ ποσότης, ἔστω x, λαμβάνῃ διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν (x_ν), λέγομεν, ὅτι ὅριον τῆς x εἶναι τὸ 0, ἄν $(x_\nu) \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu) = 0$, σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ $x \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}x = 0$. Π.χ., ἄν ἡ x λαμβάνῃ τὰς τιμὰς $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$, ἐπειδὴ εἶναι $\left(\frac{1}{\nu}\right) \longrightarrow 0$, λέγομεν, ὅτι $x \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}x = 0$.

β') Λέγομεν, ὅτι ὅριον μεταβλητῆς x εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος α, ἐὰν ἡ x λαμβάνῃ διαδοχικῶς ὡς τιμὰς τοὺς ὅρους μιᾶς ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν (x_ν) καὶ ἡ $(x_\nu - \alpha) \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}(x_\nu - \alpha) = 0$. Σημειώνομεν δὲ τοῦτο μὲ $(x - \alpha) \longrightarrow 0$ ἢ $x \longrightarrow \alpha$ ἢ $\text{ορ}x = \alpha$.

Ἄν $x \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}x = 0$, τότε καὶ $\kappa x \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}(\kappa x) = 0$, ὅπου τὸ κ εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος (σταθερός). Διότι ὅταν ἡ $(x_\nu) \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}x = 0$ καὶ ἡ $(\kappa x_\nu) \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}(\kappa x) = 0$.

Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι, ἄν $x \longrightarrow \alpha$ ἢ $\text{ορ}x = \alpha$, τὸ $\kappa x \longrightarrow \kappa\alpha$ ἢ $\text{ορ}(\kappa x) = \kappa\alpha$, ὅπου κ παριστάνει ὡρισμένον τινὰ (σταθερὸν) ἀριθμόν. Διότι ὅταν $x \longrightarrow \alpha$, τὸ $(x - \alpha) \longrightarrow 0$ καὶ $\kappa(x - \alpha) \longrightarrow 0$ ἢ $(\kappa x - \kappa\alpha) \longrightarrow 0$, ἄρα $\kappa x \longrightarrow \kappa\alpha$ ἢ $\text{ορ}(\kappa x) = \kappa\alpha$.

γ') Λέγομεν, ὅτι ὅριον μεταβλητῆς x εἶναι τὸ ἄπειρον (∞), ἄν ἡ x λαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς τιμὰς τῶν ὅρων ἀπεράντου ἀκολουθίας ἀριθμῶν, ἡ ὁποία τείνει εἰς τὸ ἄπειρον, τὸ σημειώνομεν δὲ μὲ $x \longrightarrow \infty$ ἢ $\text{ορ}x = \infty$· εἶναι προφανὲς ὅτι, ἄν $x \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}x = 0$, θὰ ἔχωμεν τὸ $\frac{1}{x} \longrightarrow \infty$ ἢ $\text{ορ}\frac{1}{x} = \infty$, καὶ ἀντιστρόφως, ἄν $\frac{1}{x} \longrightarrow \infty$ ἢ $\text{ορ}\frac{1}{x} = \infty$, θὰ ἔχωμεν καὶ $x \longrightarrow 0$ ἢ $\text{ορ}x = 0$.

5. ΠΕΡΙ ΟΡΙΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ, ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ, ΠΗΛΙΚΟΥ, ΔΥΝΑΜΕΩΣ, ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΟΣΟΤΗΤΩΝ

§ 233. α') Ἐὰν $x \longrightarrow \alpha$ ἢ $\text{ορ}x = \alpha$, $\psi \longrightarrow \beta$ ἢ $\text{ορ}\psi = \beta$, τότε $(x + \psi) \longrightarrow (\alpha + \beta)$ ἢ $\text{ορ}(x + \psi) = \text{ορ}x + \text{ορ}\psi$

Διότι ἄν x_ν καὶ ψ_ν εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ, ἐπειδὴ αἱ $(x_\nu - \alpha) \longrightarrow 0$ καὶ $(\psi_\nu - \beta) \longrightarrow 0$, καὶ ἡ $(x_\nu + \psi_\nu - \alpha - \beta) \longrightarrow 0$, ἤτοι ἔχομεν $(x + \psi - \alpha - \beta) \longrightarrow 0$, ἄρα $(x + \psi) \longrightarrow (\alpha + \beta)$ ἢ $\text{ορ}(x + \psi) = \text{ορ}\psi + \text{ορ}x$. Ἡ ἰδιότης αὕτη ἰσχύει δι' ὁσασδήποτε μεταβλητὰς x, ψ, ω,... ἐχούσας ὅρια, ἀλλ' ὅταν τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι πεπερασμένον. Διότι ἂν ἔχωμεν π.χ. τὸ ἄθροισμα μὲ ἄπειρον πλῆθος προσθετέων $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\ldots$, ὅπου $x \longrightarrow \infty$ ἢ ορ$x = \infty$, τὸ $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ ἢ ορ $\frac{1}{x} = 0$. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τὸ πλῆθος προσθετέων θὰ ἔτεινε πρὸς τὸ 0, ἂν ἴσχυεν ἡ ἰδιότης, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τοῦτο (τοῦ x αὐξανομένου διηνεκῶς) δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τοῦ $\frac{x}{x} = 1$.

β') Ἂν $x \longrightarrow 0$ ἢ ορ$x = 0$, $\psi \longrightarrow 0$ ἢ ορ$\psi = 0$, θὰ ἔχωμεν καὶ $(x\psi) \longrightarrow 0$ ἢ ορ$(x\psi)$ = ορ$x \cdot$ ορψ. Διότι, ἀφοῦ $x \longrightarrow 0, \psi \longrightarrow 0$, ἐὰν (x_ν) καὶ (ψ_ν) εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τοῦ x καὶ ψ, θὰ τείνῃ ἑκάστη τούτων εἰς τὸ 0, ἄρα καὶ $(x_\nu \psi_\nu) \longrightarrow 0$, ἤτοι $x\psi \longrightarrow 0$ ἢ ορ $(x\psi)$ = ορ$x \cdot$ ορψ.

Ἂν ἔχωμεν $x \longrightarrow \alpha$, $\psi \longrightarrow \beta$, ὅπου α, β εἶναι σταθεραὶ ποσότητες, θὰ εἶναι $(x\psi) \longrightarrow \alpha\beta$ ἢ ορ $(x\psi)$ = ορ$x \cdot$ορ$\psi = \alpha \cdot \beta$. Διότι, ἀφοῦ $x \longrightarrow \alpha$ καὶ $\psi \longrightarrow \beta$, ἂν (x_ν) καὶ (ψ_ν) εἶναι αἱ ἀκολουθίαι τῶν τιμῶν τῶν x, ψ, θὰ εἶναι $(x_\nu - \alpha) \longrightarrow 0$ καὶ $(\psi_\nu - \beta) \longrightarrow 0$. Ἄρα καὶ ἡ ἀκολουθία $[(x_\nu - \alpha)(\psi_\nu - \beta)] \longrightarrow 0$ ἢ $[(x_\nu \psi_\nu) - (\alpha\psi_\nu) - (\beta x_\nu) + \alpha\beta] \longrightarrow 0$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος ἔχομεν

$$\text{ορ}(x_\nu \psi_\nu) + \text{ορ}[-(\alpha\psi_\nu)] + \text{ορ}[-(\beta x_\nu)] + \alpha\beta = 0.$$

Ἐπειδὴ δὲ ορ $(\beta x_\nu) = \beta\alpha$ καὶ ορ $(\alpha\psi_\nu) = \alpha\beta$, ἕπεται ὅτι:

$$\text{ορ}(x_\nu \psi_\nu) = \alpha\beta + \alpha\beta - \alpha\beta = \alpha\beta \text{ ἢ ορ } (x_\nu \psi_\nu) = \alpha\beta = \text{ορ}x \cdot \text{ορ}\psi.$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη περὶ τοῦ γινομένου μεταβλητῶν ποσοτήτων ἰσχύει καὶ διὰ περισσοτέρους παράγοντας, ἀλλὰ πεπερασμένους τὸ πλῆθος.

γ') Τὸ ὅριον τοῦ πηλίκου δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων ἐχουσῶν ὅρια, ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ ὁρίου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ ὁρίου τοῦ διαιρέτου (ὅταν τὸ ὅριον τούτου εἶναι $\neq 0$).

Ἔστω ὅτι ορ$x = \alpha$, ορ$\psi = \beta$ $(\neq 0)$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ορ $\frac{x}{\psi} = \frac{\text{ορ}x}{\text{ορ}\psi} = \frac{\alpha}{\beta}$. Διότι ἂν x_ν, ψ_ν εἶναι ἀκολουθίαι τῶν x, ψ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι ορ$(x_\nu) = \alpha$, ορ$(\psi_\nu) = \beta$ καὶ ορ$(\psi_\nu - \beta) = 0$, ἄρα $|\psi_\nu - \beta| < \varepsilon = \frac{1}{2}|\beta|$.

Ἀλλὰ ἔχομεν $|\psi_\nu| = |\beta + (\psi_\nu - \beta)| \geq |\beta| - |\psi_\nu - \beta|$ καὶ

$|\psi_\nu| > |\beta| - \frac{1}{2}|\beta| = \frac{1}{2}|\beta|$, ἤτοι $|\psi_\nu| > \frac{1}{2}|\beta|$ καὶ $\left|\frac{1}{\psi_\nu}\right| < \frac{2}{|\beta|}$. Οὕτως, ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{|\beta|}$ εἶναι (δεξιὸς) φραγμὸς τῆς **ἀκολουθίας** $\frac{1}{\psi_\nu}$.

Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν

$$\frac{x_\nu}{\psi_\nu} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta x_\nu - \alpha\psi_\nu}{\beta\psi_\nu} = \frac{\beta(x_\nu - \alpha) - \alpha\cdot(\psi_\nu - \beta)}{\beta\psi_\nu}$$

καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ (ἀριθμητὴς) $\beta(x_\nu - \alpha) - \alpha(\psi_\nu - \beta)$ εἶναι ἀκολουθία τείνουσα εἰς τὸ μηδέν, διότι $\text{ορ}[\beta(x_\nu - \alpha) - \alpha(\psi_\nu - \beta)] = \beta\,\text{ορ}(x_\nu - \alpha) - \alpha\,\text{ορ}(\psi_\nu - \beta) = 0$, ἕκαστος δὲ ὅρος της πολλαπλασιάζεται ἀντιστοίχως ἐπὶ $\frac{1}{\beta\cdot\psi_\nu} = \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\psi_\nu}\cdot$ τὸ ὁποῖον εἶναι **μικρότερον** ὡρισμένου ἀριθμοῦ, τοῦ $\frac{1}{\beta}\,\frac{2}{|\beta|}$. Ἄρα εἶναι $\text{ορ}\left(\frac{x_\nu}{\psi_\nu} - \frac{\alpha}{\beta}\right) = 0$ καὶ $\text{ορ}\,\frac{x_\nu}{\psi_\nu} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{ορ}x^\nu}{\text{ορ}\psi^\nu}$ ἢ $\text{ορ}\,\frac{x}{\psi} = \frac{\text{ορ}x}{\text{ορ}\psi}$.

Εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι ἂν $x \to \alpha$ ἢ $\text{ορ}x = \alpha$, τότε $(x^\mu) \to \alpha^\mu$ ἢ $\text{ορ}(x^\mu) = \alpha^\mu = (\text{ορ}x)^\mu$.

Ἔστω α΄) ὁ μ ἀκέραιος καὶ θετικός. Ἔχομεν $x^\mu = x\cdot x\cdots x$. Ἄρα $\text{ορ}(x^\mu) = \text{ορ}(x\cdot x\cdots x) = \text{ορ}x\cdot\text{ορ}x\cdots\text{ορ}x = (\text{ορ}x)^\mu = \alpha^\mu$.

β΄) Ἂν ὁ μ εἶναι ἀρνητικός, ἔστω $\mu = -|\nu|$, ἔχομεν $x^{-|\nu|} = \frac{1}{x^{|\nu|}}$ καὶ $\text{ορ}(x^{-|\nu|}) = \text{ορ}\left(\frac{1}{x^{|\nu|}}\right) = \frac{1}{\text{ορ}(x^{|\nu|})} = \frac{1}{(\text{ορ}x)^{|\nu|}} = (\text{ορ}x)^{-|\nu|} = (\text{ορ}x)^\mu = \alpha^\mu$.

γ΄) Ἂν τὸ μ εἶναι κλασματικὸς ἀριθμός, π.χ. $\mu = \frac{\kappa}{\lambda}$, θέτομεν $\psi = x^{\frac{\kappa}{\lambda}}$, ὅτε (ὑψοῦντες τὰ ἴσα εἰς τὴν λ δύναμιν) εὑρίσκομεν $\psi^\lambda = x^\kappa$ καὶ $\text{ορ}(\psi^\lambda) = \text{ορ}(x^\kappa)$ ἢ $(\text{ορ}\psi)^\lambda = (\text{ορ}x)^\kappa$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν $\text{ορ}\psi = (\text{ορ}x)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ ἤτοι $\text{ορ}\left(x^{\frac{\kappa}{\lambda}}\right) = (\text{ορ}x)^{\frac{\kappa}{\lambda}} = (\text{ορ}x)^\mu$. Κατὰ ταῦτα $\text{ορ}\sqrt{x} = \sqrt{\text{ορ}x}$. Ἂν λοιπὸν εἶναι $\text{ορ}x = \alpha$, τότε $\text{ορ}\sqrt{x} = \sqrt{\text{ορ}x} = \sqrt{\alpha}$.

6. ΠΩΣ ΔΙΑΚΡΙΝΟΜΕΝ ΑΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΠΟΣΟΤΗΣ ΕΧΗ ΟΡΙΟΝ

§ 234. Ἐὰν αἱ ἄπειροι εἰς τὸ πλῆθος τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος βαίνουν αὐξανόμεναι, μένουν δὲ (ἀπό τινος καὶ ἑξῆς) μικρότεραι δοθέντος ἀριθμοῦ, ἡ μεταβλητὴ ἔχει ὅριον ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ, ἤτοι, ἂν $x^\nu < A$, ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \to \alpha \leq A$.

Ἔστω ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x βαίνουν αὐξανόμεναι, ἀλλὰ μένουν μικρότεραι ἀριθμοῦ τινος Α.

Ἂν ὁ Α περιλαμβάνεται, π.χ. μεταξὺ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 5 καὶ 6, αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς δύνανται νὰ ὑπερβαίνουν τινὰς ἐκ τῶν 0, 1, 2, 3, 4, 5, ἀλλὰ θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ 6, ἐπειδὴ αὗται μένουν μικρότεραι τοῦ $A < 6$.

Ἂς ὑποθέσωμεν λοιπόν, ὅτι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς, εἶναι ὁ 5. Σχηματίζομεν τοὺς ἀριθμοὺς 5. 5,1. 5,2. 5,3. 5,4. 5,5. 5,6. 5,7. 5,8. 5,9. 6.

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ 5, θὰ ὑπερβαίνουν ἀπό τινος καὶ ἑξῆς ἀριθμοὺς τινας ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἔστω καὶ τὸν 5,7, ἀλλὰ ὅτι θὰ εἶναι μικρότεραι π.χ. τοῦ 5,8.

Σχηματίζομεν τώρα τοὺς ἀριθμοὺς 5,7. 5,71. 5,72. 5,73. 5,74. 5,75. 5,76. 5,77. 5,78. 5.79. 5,8.

Παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ εἶναι ἀπό τινος καὶ ἑξῆς μεγαλύτεραι τοῦ 5,7, θὰ ὑπερβαίνουν αὗται ἀπό τινος καὶ ἑξῆς τινὰς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τελευταίων ἀριθμῶν, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸ 5,8 (ὡς εἴδομεν).

Ἔστω ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς ἐκ τῶν ἀνωτέρω τελευταίων, τὸν ὁποῖον ὑπερβαίνουν αἱ ἐν λόγῳ τιμαὶ ὁ 5,73, καὶ ὅτι αὗται θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ 5,74.

Ἐξακολουθοῦμεν καθ' ὅμοιον τρόπον καὶ θὰ ἔχωμεν π.χ. ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ὑπερβαίνουν τὸν ἀριθμὸν 5,738426, ἀλλὰ δὲν φθάνουν τὸν 5,738427, ὅστις διαφέρει τοῦ 5,738426 κατὰ ἓν ἑκατομμυριοστόν. Ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὁμοίως ὅσον θέλομεν, θὰ εὕρωμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς περιέχονται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν δεκαδικὴν μονάδα τῆς τελευταίας δεκαδικῆς τάξεως, τὴν ὁποίαν περιέχουν οἱ ἐν λόγῳ ἀριθμοί.

Ἂν τὸ μικρότερον τῶν ἀριθμῶν τούτων παραστήσωμεν μὲ α, αἱ τιμαὶ τοῦ x (ἀπό τινος καὶ ἑξῆς) διαφέρουν ἀπολύτως ἀπὸ τὸν α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικράν, ἐὰν ἐξακολουθήσωμεν ὅσον θέλομεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν περισσοτέρων δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ α. Ἑπομένως εἶναι ὅριον τοῦ $x=\alpha$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ Α ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ Α.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο θὰ συμβαίνῃ, ἐὰν αἱ τιμαὶ τοῦ x ἀπό τινος καὶ ἑξῆς διαφέρουν ἀπολύτως τοῦ Α κατὰ ποσότητα ὅσον θέλομεν μικράν, ὥστε θὰ ἔχωμεν ἐν γένει, ὅτι ὅριον τοῦ $x \leqq A$.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἂν ἀντὶ τῶν ἀκεραίων 5 καὶ 6 ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων π.χ. τῶν ρ καὶ ρ+1 (ἐνῷ ὁ ρ δύναται νὰ εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἢ 0).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι, ἐὰν αἱ ἄπειροι εἰς πλῆθος τιμαὶ μεταβλητῆς ποσότητος βαίνουν ἐλαττούμεναι, ἀλλὰ μένουν (ἀπό τινος καὶ ἑξῆς) μεγαλύτεραι δοθέντος ἀριθμοῦ Β, ἤτοι ἂν $x_\nu \geqq \beta$, τότε ἡ ἀκολουθία $(x_\nu) \to \beta \geqq B$.

Διότι, ἂν π.χ. αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμεναι καὶ εἶναι πάντοτε μεγαλύτεραι τοῦ Β (ἀπό τινος καὶ ἑξῆς), τότε αἱ τιμαὶ τοῦ $-x$ θὰ βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ θὰ μένουν μικρότεραι τοῦ $-B$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν $\text{ορ}(-x) \leqq -B$ καὶ $\text{ορ}x \geqq B$.

Ἀσκήσεις

650. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ἑξῆς μεταβλητῶν ποσοτήτων:

α') $1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}$, ἂν $x \to 1$. β') $1+\frac{7}{x^2}$, ἂν $x \to 2$,

γ') $3x^3+6x^2$, ἂν $x \to 0$. δ') $\frac{x^2+1}{x+3}$, ἂν $x \to -2$.

651. Ὁμοίως τῶν ἑξῆς:

α') $\frac{(x-\kappa)^2-2\kappa x^3}{x(x+\kappa)}$ ἂν $x \to 0$. β') $\frac{5}{3x^2+5x}$, ἂν $x \to \infty$.

γ') $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ἂν $x \to \infty$. δ') $-\alpha^2 x^5+\beta x+\gamma$, ἂν $x \to \infty$.

ε') $\frac{2x^3+3x^2}{x^3}$, ἂν $x \to 0$. στ') $\frac{5x^2-5x}{x}$ ἂν $x \to \infty$.

652. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τοῦ $\frac{1}{x-5}$, ἂν $x \to 5$ μὲ τιμὰς α') $x < 5$, β') $x > 5$

653. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον τῆς μεταβλητῆς $3x^2-5$, ἂν $x \to 3$, τῆς $\frac{2}{\psi^2}+4\psi$, ἂν $\psi \to 2$ καὶ τῆς $2\omega^2-4\omega-5$, ἂν $\omega \to 0$. Ἐκ τῶν εὑρεθέντων ὁρίων νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον $\left(3x^2-5+\frac{2}{\psi^2}+4\psi+2\omega^2-4\omega-5\right)$.

654. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὅριον $\left(\frac{2}{x}-\frac{5}{\psi^2}+4\omega^2\right)$, ἂν $x \to \infty$, $\psi \to 2$ καὶ $\omega \to 3$

655. Ποῖον τὸ ὅριον τῆς παραστάσεως $\frac{3x^2-5\omega^2+4\psi}{2x^2-5}$, ἂν $x \to -5$, $\omega \to 0$ καὶ $\psi \to -3$.

656. Ἂν $x \to 3$, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ

α′) $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \frac{(x-3)(x-2)}{x-3}$, β′) $\frac{x^3+x-1}{x^2-4x+3}$,

7. ΠΕΡΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 235. *Ὁρισμοί.* Ἂν α καὶ β παριστάνουν δύο πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (ὑποτιθεμένου τοῦ $\alpha < \beta$), καλοῦμεν κλειστὸν διάστημα ἀπὸ α ἕως β, τὸ σύνολον τῶν (πραγματικῶν) ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν α καὶ β, εἰς τοὺς ὁποίους περιλαμβάνονται καὶ οἱ α, β καὶ σημειώνομεν μὲ α…β ἢ (α, β). Ὅταν μεταβλητή τις x λαμβάνῃ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ διαστήματος τούτου, σημειώνομεν τοῦτο ὡς ἑξῆς: $\alpha \leq x \leq \beta$.

Ἂν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς x τὰς ἀνηκούσας εἰς ἓν διάστημα παριστάνωμεν μὲ σημεῖα μιᾶς εὐθείας (τῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ ἄξονος τῶν x), τὸ κλειστὸν διάστημα $\alpha \leq x \leq \beta$ παριστάνεται ὑπὸ τοῦ τμήματος ΑΒ, ὅπου τὸ Α παριστάνει τὸν α, τὸ Β τὸν β, ἀνήκουν δὲ εἰς τὸ ΑΒ καὶ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

Καλοῦμεν **περιοχὴν τῆς τιμῆς x_1** τοῦ σημείου $M_1(x_1)$ (ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν τιμὴν $x=x_1$) μὲ μῆκος 2ε, τὸ διάστημα $x_1-\varepsilon < x_1 < x_1+\varepsilon$.

Συνάρτησίς τις $\psi=\varphi(x)$ λέγεται ὡρισμένη μὲν α′) διά τινα τιμὴν τοῦ x, π.χ. τὴν $x=2$, ἂν ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως εἶναι ὡρισμένη διὰ $x=2$, δηλαδὴ ἂν εἶναι ὡρισμένη ἡ τιμὴ $\varphi(2)$, β′) εἰς τὴν περιοχὴν δέ τινα τοῦ x, ἂν εἶναι ὡρισμένη δι᾽ ἑκάστην τιμὴν τῆς περιοχῆς ταύτης.

Ἔστω συνάρτησίς τις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x, ἡ $\psi=\varphi(x)$ ὡρισμένη εἴς τινα περιοχὴν τῆς τιμῆς $x=x_0$ Ἂν $x_0+(x_\nu)$ παριστάνῃ ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τῆς περιοχῆς τοῦ x_0 διαφόρων τοῦ x_0 καὶ ἡ $[x_0+(x_\nu)] \to x_0$, αἱ δὲ τιμαὶ $\varphi[x_0+(x_\nu)]$ τείνουν εἰς ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ὅριον, π.χ. τὸ λ, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ ἀκολουθία (x_ν), τότε λέγομεν ὅτι $\varphi(x) \to \lambda$ ἢ $\text{ορ}\varphi(x)=\lambda$ ὅταν $x \to x_0$ ἢ $\text{ορ}x=x_0$.

Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\psi = x^2$. Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $x=3$, ἔχομεν $\varphi(3)=3^2$.

Ἂν θέσωμεν $x=3+(\varepsilon_\nu)$, ὅπου (ε_ν) παριστάνει μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τείνουσαν εἰς τὸ 0, ἤτοι $\text{ορ}(\varepsilon_\nu)=0$, θὰ ἔχωμεν $\varphi[3+(\varepsilon_\nu)] = [3+(\varepsilon_\nu)]^2$.

Ὅταν τὸ $(\varepsilon_\nu) \longrightarrow 0$ ἢ ορ$(\varepsilon_\nu)=0$, τότε τὸ $[3+(\varepsilon_\nu)] \longrightarrow 3$, ἤτοι ορ$[3+(\varepsilon_\nu)]=3$, τὸ $[3+(\varepsilon_\nu)]^2 \longrightarrow 3^2$, ἤτοι ορ$[3+(\varepsilon_\nu)]^2=3^2$. Ἑπομένως ἔχομεν, ὅτι τὸ $\varphi[3+(\varepsilon_\nu)]=[3+(\varepsilon_\nu)]^2$ τείνει εἰς τὸ 3^2, δηλαδὴ

$$\text{ορ}\varphi[3+(\varepsilon_\nu)]=\varphi(3)=3^2.$$

Ἐπειδὴ συμβαίνει τοῦτο διὰ τὴν συνάρτησιν $\varphi(x)=x^2$ καὶ διὰ τὴν τιμὴν $x=3$, λέγομεν ὅτι $\varphi(x)=x^2$ εἶναι **συνεχής**, ὅταν $x=3$. Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ἡ $\varphi(x)=x^2$ εἶναι συνεχὴς καὶ δι' οἱανδήποτε ἄλλην τιμὴν τοῦ x.

Ἐν γένει **συνεχὴς** λέγεται συνάρτησις τις $\psi=\varphi(x)$ διά τινα τιμὴν τῆς $x=x_0$, ἂν εἶναι ὡρισμένη εἰς περιοχὴν τῆς x_0 καὶ ἂν δι' ἑκάστην ἀκολουθίαν (x_ν) τείνουσαν πρὸς τὴν τιμὴν x_0, ὅταν $\nu \longrightarrow \infty$, ἡ ἀντίστοιχος ἀκολουθία τῶν τιμῶν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x_\nu)$ τείνει πρὸς τὴν τιμὴν $\varphi(x_0)$ Τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Λέγομεν ὅτι ἡ $\psi=\varphi(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=x_0$, ἂν δοθέντος οἱουδήποτε ἀριθμοῦ $\varepsilon > 0$ (ὁσονδήποτε μικροῦ) ἔχωμεν ὅτι:

$$\text{ορ}\,[\varphi(x_0+\varepsilon)-\varphi(x_0)] = 0 \text{ ὅταν ορ}\varepsilon = 0, \text{ ἢ } \begin{cases} \text{ορ}\varphi(x_0+\varepsilon) = \varphi(x_0) \\ \text{ορ}\varepsilon=0. \end{cases}$$

Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτησις $\psi=3x^2$. Θέλομεν νὰ ἴδωμεν, ἂν αὕτη εἶναι συνεχὴς διὰ $x=1$. Ἔχομεν $\varphi(1)=3\cdot1^2$. Θέτομεν $x=1+\varepsilon$, ὅτε $\varphi(1+\varepsilon)=3(1+\varepsilon)^2$ καὶ $\varphi(1+\varepsilon)-\varphi(1)=3(1+\varepsilon)^2-3\cdot1^2=3(1^2+2\cdot\varepsilon+\varepsilon^2)-3\cdot1^2=3\cdot2\cdot\varepsilon+3\cdot\varepsilon^2$.

Ὅταν $\varepsilon \longrightarrow 0$ ἢ ορε$=0$, τότε τὸ $\varphi(1+\varepsilon)-\varphi(1)$ δηλαδὴ τὸ ἴσον αὐτοῦ $3\cdot2\varepsilon+3\cdot\varepsilon^2$ ἔχει ὅριον τὸ 0 (κατὰ τὸν κανόνα περὶ ὁρίου ἀθροίσματος), ἤτοι ορ$[\varphi(1+\varepsilon)-\varphi(1)]=0$ ἢ ορ $\varphi(1+\varepsilon)=\varphi(1)$, ὅταν ορε$=0$.

Ἑπομένως ἡ $\varphi(x)=3x^2$ εἶναι συνεχὴς διὰ $x=1$.

Ἀσυνεχὴς λέγεται συνάρτησίς τις $\psi=\varphi(x)$ διὰ $x=x_0$ ὅταν, καὶ ἂν εἶναι ὡρισμένη εἰς περιοχὴν τῆς τιμῆς x_0, δὲν εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν ταύτην.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι:

1ον. Ὅταν ἡ $\varphi(x)$ ἔχῃ σταθερὰν τιμήν, π.χ. 5, εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

2ον. Ἂν δύο συναρτήσεις $\varphi_1(x)$ καὶ $\varphi_2(x)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ μίαν τιμὴ τοῦ x, εἶναι συνεχὴς καὶ ἡ $\varphi_1(x)\pm\varphi_2(x)$ διὰ τὴν αὐτὴν τιμήν, καθὼς καὶ ἡ $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x)$ καὶ ἡ $\varphi_1(x):\varphi_2(x)$, ὅταν ἡ $\varphi_2(x)$ εἶναι διάφορος τοῦ 0 διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x.

Συνάρτησις τῆς μορφῆς $\psi=x$, x^2, x^3,... εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

Πᾶσα συνάρτησις τῆς μορφῆς αx^μ, ὅπου τὸ α εἶναι σταθερὰ ποσότης, τὸ δὲ μ ἀκέραιος καὶ θετικός, εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Πᾶσα δὲ συνάρτησις ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς αx^μ εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Π.χ. ἡ $3x^2-5x+6$.

Πᾶσα ρητὴ συνάρτησις, ἤτοι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, διὰ τὴν ὁποίαν ὁ παρονομαστὴς εἶναι διάφορος τοῦ 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

Α΄. ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ *

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 236. Ἔστω τυχοῦσα συνάρτησις τοῦ x ἡ $\psi=\sigma(x)$ συνεχὴς εἰς τὸ ὡρισμένον διάστημα (α, β) καὶ ἥτις διά τινα τιμὴν τοῦ x, τὴν x_0, περιεχομένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ λαμβάνει τὴν ὡρισμένην τιμὴν ψ_0 τοῦ ψ, ἤτοι εἶναι $\psi_0=\sigma(x_0)$. Ἐὰν εἰς τὴν τιμὴν x_0 δώσωμεν αὔξησίν τινα ε, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ψ θὰ λάβῃ αὔξησίν τινα η, ἤτοι θὰ εἶναι $\psi_0+\eta=\sigma(x_0+\varepsilon)$ καὶ ἑπομένως: $\eta=\sigma(x_0+\varepsilon)-\sigma(x_0)$.

Ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ὑπετέθη συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α, β) ἕπεται, ὅτι δι᾽ ορ $\varepsilon=0$ θὰ εἶναι καὶ ορ$\eta=0$.

Ἐὰν ὁ λόγος $\frac{\eta}{\varepsilon}=\frac{\sigma(x_0+\varepsilon)-\sigma(x_0)}{\varepsilon}$ ἔχῃ ὅριον ὡρισμένον, ὅταν ἡ μὲν τιμὴ $x=x_0$ μένῃ σταθερά, ἡ δὲ αὔξησις ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται **παράγωγος** τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(x)$ διὰ $x=x_0$ καὶ σημειοῦται οὕτω: ψ΄ ἢ σ΄(x). Ἤτοι:

Παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως $\psi=\sigma(x)$ διά τινα τιμὴν τοῦ x καλεῖται τὸ ὅριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὅταν ἡ αὔξησις αὐτῆς τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ἔχῃ παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, τότε σημειοῦμεν αὐτὴν οὕτω: ψ΄ ἢ σ΄(x).

§ 237. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς παραγώγου συναρτήσεως μιᾶς μεταβλητῆς x, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν παράγωγον αὐτῆς, δίδομεν πρῶτον εἰς τὸ x μίαν αὔξησιν, τὴν ὁποίαν καὶ παριστῶμεν διὰ τοῦ

---

*Τὰ ἀπὸ τῆς § 236 καὶ ἑξῆς ἐλήφθησαν ἐκ τοῦ ὑπὸ τοῦ κ. Λεων. Ἀδαμοπούλου ὑποβληθέντος βιβλίου τῆς Ἀλγέβρας.

συμβόλου Δx καὶ ὑπολογίζομεν τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς συναρτήσεως, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ $\Delta\psi$ καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, ὅταν ορ$\Delta x=0$. Διὰ νὰ ἔχωμεν παράγωγον πρέπει δι' ορ$\Delta x = 0$ νὰ εἶναι καὶ ορ$\Delta\psi = 0$· διότι ἐὰν ορ$\Delta\psi = \alpha \neq 0$, τότε ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \infty$ Ἤτοι :

Ἵνα μία συνάρτησις ἔχῃ παράγωγον, πρέπει νὰ εἶναι συνεχής, χωρὶς ὅμως καὶ ὁ ὅρος αὐτὸς νὰ εἶναι ἐπαρκής.

Διότι ἐκ τοῦ ορ$\Delta x=0$ καὶ ορ$\Delta\psi=0$ δὲν ἕπεται, ὅτι ἀναγκαίως ὑπάρχει καὶ τὸ ορ $\frac{\Delta\psi}{\Lambda x}$.

Παραδείγματα : 1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = x$. Τότε $\Delta\psi = x+\Delta x - x = \Delta x$, ἑπομένως $\psi' =$ ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} =$ ορ $\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Ὥστε :

Ἡ παράγωγος τοῦ x εἶναι ἡ μονάς.

2ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=5x^2$. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὔξησιν Δx, θὰ ἔχωμεν

$$\Delta\psi=5(x+\Delta x)^2-5x^2=5x^2+10x\Delta x+5(\Delta x)^2-5x^2=10x\Delta x+5(\Delta x)^2$$

καὶ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{10x.\Delta x+5(\Delta x)^2}{\Delta x} = 10x+5\Delta x$.

Ὅταν δὲ ορ$\Delta x=0$, τότε ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = 10x$ ἢ $\psi' = 10x$.

Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha x^5$ εἶναι $\psi'=5\alpha x^4$ καὶ γενικῶς τῆς $\psi=\alpha x^\mu$ (μ θετικὸς καὶ ἀκέραιος) ἡ παράγωγος εἶναι $\psi' = \alpha\cdot\mu.x^{\mu-1}$.

3ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sqrt{x}$. Θὰ εἶναι $\psi+\Delta\psi=\sqrt{x+\Delta x}$,

καὶ $\Delta\psi=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$ καὶ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$ ἢ (§ 85)

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{[\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}]\,[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})} \quad \text{ἢ}$$

$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x[\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}]} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$ καὶ ἑπομένως διὰ ορ$\Delta x=0$,

θὰ εἶναι ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Ὥστε: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

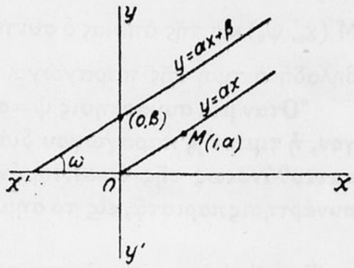
4ον. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι σταθερά. Τότε ἡ αὔξησις

$\Delta\psi$ εἶναι μηδέν, συνεπῶς $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=0$ καὶ ἑπομένως ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\psi'=0$. Ἤτοι:

Ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν.

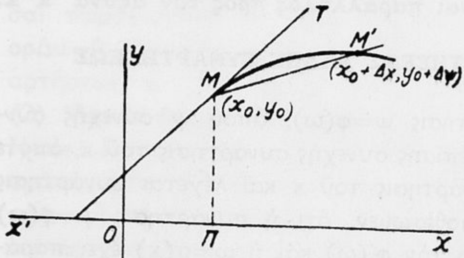
2. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

§ 238. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha x+\beta$. Γνωρίζομεν, ὅτι αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν ἄξονα τῶν ψ εἰς τὸ σημεῖον $(0,\beta)$ καὶ παράλληλον πρὸς τὴν διὰ τῆς ἀρχῆς διερχομένην εὐθεῖαν $\psi=\alpha x$, ἥτις ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ σημείου $O(0,0)$ καὶ τοῦ σημείου $M\ (1,\alpha)$ (σχ. 21). Ἐὰν κληθῇ ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος Ox, θὰ ἔχωμεν $\text{εφ}\omega=\alpha$. Τὸ α λέγεται καὶ **συντελεστὴς κατευθύνσεως** τῆς εὐθείας $\psi=\alpha x+\beta$.



Σχ. 21.

Ἔστω ἤδη τυχοῦσα συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον διὰ τὴν τιμὴν $x=x_0$. Ἔστω δὲ MM′ καμπύλη εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ (σχ.22). Εἰς τὴν τιμὴν $x=x_0$, τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ ψ_0, τῆς συναρτήσεως, ὁπότε τὸ σημεῖον $M\,(x_0,\psi_0)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν μίαν αὔξησιν Δx, ἡ συνάρτησις θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν $\Delta\psi$ καὶ τὸ σημεῖον $M'\ (x_0+\Delta x,\psi_0+\Delta\psi)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης.



Σχ. 22.

Ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων M καὶ M′ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\psi=\alpha x+\beta$ ἐπαληθευομένη ὑπὸ τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων M καὶ M′, ὥστε θὰ ἔχωμεν $\psi_0+\Delta\psi=\alpha(x_0+\Delta x)+\beta$ καὶ $\psi_0=\alpha x_0+\beta$· ἀφαιροῦντες δὲ τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη ἔχομεν $\Delta\psi = \alpha\,\Delta x$ ἢ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \alpha$, ἤτοι ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ΜΜ′ εἶναι ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$. Ἀλλὰ ὅταν ορ$\Delta x = 0$, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχής, θὰ εἶναι καὶ ορ$\Delta\psi = 0$. Καὶ ἐπειδὴ ὑπετέθη, ὅτι ἔχει παράγωγον, θὰ εἶναι ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \psi'$, τὸ δὲ σημεῖον Μ′ τείνει νὰ συμπέσῃ μετὰ τοῦ Μ, ὁπότε ἡ χορδὴ ΜΜ′ θὰ ἔχῃ ὡς ὁρικὴν θέσιν τὴν ἐφαπτομένην ΜΤ τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον Μ (x_0, ψ_0) καὶ τῆς ὁποίας ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως εἶναι τὸ ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$, δηλαδὴ ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως διὰ $x = x_0$. Ἄρα:

Ὅταν μία συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$ διὰ τιμὴν $x = x_0$ ἔχῃ παράγωγον, ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου διὰ $x = x_0$ ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν ἡ συνάρτησις παριστᾷ, εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς, τὸ ἔχον τετμημένην x_0.

Ἐπειδὴ ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως μιᾶς εὐθείας ἰσοῦται καὶ μὲ τὴν εφω, ἔνθα ω ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μετὰ τοῦ ἄξονος $x'x$, ἕπεται ὅτι:

Ἐὰν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως διά τινα τιμὴν τοῦ $x = x_0$ εἶναι μηδέν· ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον, τὸ ἔχον τετμημένην x_0, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$.

3. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΑΛΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

§ 239. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(\omega)$, ὅπου ψ συνεχὴς συνάρτησις τῆς ω καὶ $\omega = \sigma(x)$ ἐπίσης συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x, ὁπότε καὶ ψ θὰ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x καὶ λέγεται συνάρτησις συναρτήσεως. Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(\omega)$ ἔχει παράγωγον ὡς πρὸς ω τὴν $\varphi'(\omega)$ καὶ ἡ $\omega = \sigma(x)$ ἔχει παράγωγον ὡς πρὸς x τὴν $\sigma'(x)$, εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον τοῦ ψ ὡς πρὸς x ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν εἰς τὸ x δοθῇ ἡ αὔξησις Δx, τότε ἡ $\psi'(x)$ θὰ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x}$, ὅταν ορ$\Delta x = 0$.

Ἀλλὰ πρὸς τὴν αὔξησιν Δx ἀντιστοιχεῖ αὔξησις Δω τῆς ω, ἤτοι εἶναι $\Delta\omega = \sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)$ καὶ ἑπομένως

$$\frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x}=\frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x}\cdot\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta\omega}=$$

$$=\frac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega}\cdot\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x},$$

ἀλλὰ ὅταν ορ$\Delta x=0$ εἶναι καὶ ορ$\Delta\omega=0$ καὶ ορ$\Delta\psi=0$, καθότι αἱ συναρτήσεις ψ, ω ὑπετέθησαν συνεχεῖς καὶ ὅτι ἔχουσι παράγωγον.

Ἀλλὰ εἶναι ορ $\dfrac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta\omega}=\varphi'(\omega)$, ορ $\dfrac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x}=$ $\sigma'(x)=\omega'_x$ καὶ ορ $\dfrac{\varphi(\omega+\Delta\omega)-\varphi(\omega)}{\Delta x}=\psi'(x)$· ὅθεν $\psi'(x)=\varphi'(\omega)\cdot\omega'_x$.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $\psi=(3x^2-5)^6$. Θέτοντες $3x^2-5=\omega$ θὰ ἔχωμεν $\psi=\omega^6$, ἤτοι συνάρτησιν συναρτήσεως ὁπότε $\psi'=6\omega^5.\omega'_x$ ἢ $\psi'=6(3x^2-5)^5.6x$ ἢ $\psi'=36x(3x^2-5)^5$.

4. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 240. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\varphi+\omega+\upsilon$ (1) ἔνθα φ, ω, υ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσαι ἀντιστοίχως παραγώγους τὰς φ′, ω′, υ′, καὶ τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν παράγωγον ψ′. Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x λάβῃ ἀπό τινος τιμῆς αὐτῆς μίαν αὔξησιν Δx, αἱ συναρτήσεις φ, ω, υ θὰ λάβωσιν ἀντιστοίχως αὐξήσεις Δφ, Δω, Δυ. Ἐπειδὴ αἱ συναρτήσεις φ, ω, υ ὑπετέθησαν συνεχεῖς ἔχουσαι παράγωγον, θὰ εἶναι δι' ορ$\Delta x=0$ καὶ ορ$\Delta\varphi=0$, ορ$\Delta\omega=0$, ορ$\Delta\upsilon=0$. Ἐὰν ἤδη καλέσωμεν Δψ τὴν ἀντίστοιχον αὔξησιν τῆς συναρτήσεως ψ, θὰ ἔχωμεν $\psi+\Delta\psi=(\varphi+\Delta\varphi)+(\omega+\Delta\omega)+(\upsilon+\Delta\upsilon)$ (2). Ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἀπὸ τὴν (2), θὰ ἔχωμεν $\Delta\psi=\Delta\varphi+\Delta\omega+\Delta\upsilon$ (3). Ἐκ ταύτης ἔπεται, ὅτι ορ$\Delta\psi=$ορ$\Delta\varphi+$ορ$\Delta\omega+$ορ$\Delta\upsilon$ (4). Καὶ ἐπειδὴ δι' ορ$\Delta x=0$ εἶναι καὶ ορ$\Delta\varphi=0$, ορ$\Delta\omega=0$, ορ$\Delta\upsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ ορ$\Delta\psi=0$ ἤτοι ἡ συνάρτησις $\psi=\varphi+\omega+\upsilon$ εἶναι καὶ αὐτὴ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x. Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (4) διὰ Δx ἔχομεν $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta x}=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}+\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ καὶ δι' ορ$\Delta x=0$ εἶναι:

$$\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\text{ορ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\text{ορ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\text{ορ}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\ \text{ἢ}\ \psi'=\varphi'+\omega'+\upsilon'.$$ Ὥστε:

Ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν συναρτήσεων τοῦ x, ἐχουσῶν παραγώγους, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν συναρτήσεων.

5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 241. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\omega\cdot\varphi$, ἔνθα ω καὶ φ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσαι παράγωγον. Ἐργαζόμεναι ὡς προηγουμένως ἔχομεν $\psi+\Delta\varphi=(\varphi+\Delta\varphi)(\omega+\Delta\omega)$ καὶ $\psi=\varphi\omega$, συνεπῶς

$$\Delta\psi=\omega\Delta\varphi+\varphi\Delta\omega+\Delta\varphi\Delta\omega, \qquad (1)$$

διαιροῦντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) διὰ Δx ἔχομεν:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\omega\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\varphi\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\cdot\Delta\omega \quad \text{καὶ ἑπομένως}$$

$$\text{ορ}\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\omega\cdot\text{ορ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}+\varphi\cdot\text{ορ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}+\text{ορ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\cdot\text{ορ}\Delta\omega. \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ορ$\Delta x=0$, ἐξ ὑποθέσεως θὰ εἶναι ορ$\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'$, ορ$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta x}=\omega'$ καὶ ορ$\Delta\omega=0$ καὶ ἡ (2) γίνεται $\psi'=\omega\varphi'+\omega'\varphi$. Ἐὰν εἶναι $\psi=\omega.\varphi.\upsilon$ καὶ θεωρήσωμεν τὸ $\omega\cdot\varphi$ ὡς ἕνα παράγοντα, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ προηγούμενον $\psi=(\omega\varphi)\upsilon'+\upsilon(\omega\varphi)'$ ἢ $\psi'=\omega\varphi\upsilon'+\omega\upsilon\varphi'+\upsilon\varphi\omega'$. Ὥστε:

Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου πολλῶν συναρτήσεων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς x, ἐχουσῶν παραγώγους, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῆς παραγώγου ἑκάστης τούτων ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν ἄλλων συναρτήσεων.

6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΣΤΑΘΕΡΑΣ ΕΠΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΝ ΤΟΥ Χ

§ 242. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\omega$ (α σταθερά). Θὰ ἔχωμεν $\psi'=\alpha\omega'+\omega\alpha'$, ἀλλὰ $\alpha'=0$ ἄρα $\psi'=\alpha\omega'$. Ἤτοι:

Ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου σταθερᾶς ἐπὶ συνάρτησιν τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς σταθερᾶς ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως.

Ἔστω $\psi=\omega^{\nu}$, ἔνθα ω συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x καὶ ν ἀκέραιος καὶ θετικός. Ἐπειδὴ $\psi=\omega.\omega.\omega\ldots\omega$, θὰ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα $\psi'=\omega'\cdot\omega^{\nu-1}+\omega'\cdot\omega^{\nu-1}+\ldots+\omega'\cdot\omega^{\nu-1}$ (ν προσθετέοι) ἢ $\psi'=\nu\omega^{\nu-1}.\omega'$. Ἤτοι:

Ἡ παράγωγος δυνάμεως μιᾶς συναρτήσεως τοῦ x ἰσοῦται μὲ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὴν κατὰ μονάδα μικροτέραν δύναμιν τῆς συναρτήσεως τοῦ x καὶ ἐπὶ τὴν παράγωγον τῆς βάσεως.

Ἐὰν ἡ βάσις εἶναι ὁ x, τότε ἡ σχέσις ἁπλοποιεῖται· ἤτοι ἐὰν $\psi = x^{\mu}$, τότε $\psi' = \mu x^{\mu-1}$, ἐπειδὴ $x' = 1$.

Παραδείγματα : 1ον. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=5x^3$· ἡ παράγωγος εἶναι $\psi' = 5\cdot(x^3)'=5\cdot3x^2=15x^2$.

2ον. Ἔστω $\psi = (5x^2+2)^3$· ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi'= 3(5x^2+2)^2\cdot(5x^2+2)'=3(5x^2+2)^2 10x=30x(5x^2+2)^2$$

3ον. Ἔστω $\psi = (3x^3-2x^2+3x-6)^3$ ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi'= 3(3x^3-2x^2+3x-6)^2\cdot(9x^2-4x+3).$$

4ον. Ἔστω $\psi = (3x^2+2)(5x+1)$· ἡ παράγωγος εἶναι

$$\psi'= (3x^2+2)(5x+1)'+(5x+1)(3x^2+2)' \text{ ἢ}$$
$$\psi'= (3x^2+2)5+(5x+1)6x \text{ ἢ}$$
$$\psi'= 15x^2+10+30x^2+6x \text{ ἢ } \psi'=45x^2+6x+10.$$

7. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΠΗΛΙΚΟΥ ΔΥΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ Χ

§ 243. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{\omega}{\varphi}$, ἔνθα ω καὶ φ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x ἔχουσαι παραγώγους τὰς ω′ καὶ φ′. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὔξησιν Δx αἱ συναρτήσεις ω, φ, ψ λαμβάνουν ἀντιστοίχως αὐξήσεις Δω, Δφ, Δψ, εἶναι δὲ $\psi+\Delta\psi= \frac{\omega+\Delta\omega.}{\varphi+\Delta\varphi}$. Ἐκ ταύτης καὶ τῆς $\psi=\frac{\omega}{\varphi}$ προκύπτει $\Delta\psi = \frac{\omega+\Delta\omega}{\varphi+\Delta\varphi} - \frac{\omega}{\varphi}$ ἢ $\Delta\psi=\frac{\varphi\Delta\omega-\omega\Delta\varphi}{(\varphi+\Delta\varphi)\varphi}$, ὅθεν $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\varphi\frac{\Delta\omega}{\Delta x}-\omega\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{(\varphi+\Delta\varphi)\varphi}$, ἐὰν δὲ ορ $\Delta x=0$, θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ορ $\frac{\Delta\omega}{\Delta x}=\omega'$, ορ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=\varphi'$, καὶ ορ$(\varphi+\Delta\varphi)=\varphi+$ορ$\Delta\varphi=\varphi$, ὁπότε

θὰ εἶναι ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\varphi\cdot\text{ορ}\frac{\Delta\omega}{\Delta x}-\omega\cdot\text{ορ}\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}}{\text{ορ}(\varphi+\Delta\varphi)\cdot\varphi}$ ἢ $\psi'=\frac{\varphi\omega'-\omega\varphi'}{\varphi^2}$. Ἤτοι :

Ἡ παράγωγος πηλίκου δύο συνεχῶν συναρτήσεων τοῦ x, ἐχουσῶν παραγώγους, εἶναι κλάσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ ἀριθμητοῦ, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἀριθμητοῦ ἐπὶ τὴν παράγωγον τοῦ παρονομαστοῦ, παρονομαστὴν δὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{x^2-5x+3}{5x-1}$. Θὰ εἶναι $\psi' = \frac{(5x-1)\ (x^2-5x+3)'-(x^2-5x+3)\ (5x-1)'}{(5x-1)^2}$ ἢ

$$\psi' = \frac{(5x-1)(2x-5)-(x^2-5x+3)\cdot 5}{(5x-1)^2} = \frac{5x^2-2x-10}{(5x-1)^2}.$$

8. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΤΟΥ Χ

§ 244. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sqrt{\omega}$, ἔνθα ω συνάρτησίς τις τοῦ x, ἔχουσα παράγωγον τὴν ω'. Ἐὰν εἰς τὸ x δώσωμεν τὴν αὔξησιν Δx, αἱ συναρτήσεις ψ καὶ ω λαμβάνουσιν ἀντιστοίχως αὐξήσεις Δψ καὶ Δω, αἱ ὁποῖαι τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν ἡ Δx τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\psi+\Delta\psi = \sqrt{\omega+\Delta\omega}$ καὶ $\psi = \sqrt{\omega}$ προκύπτει ὅτι $\Delta\psi = \sqrt{\omega+\Delta\omega} - \sqrt{\omega}$ ἢ

$$\Delta\psi = \frac{[\sqrt{\omega+\Delta\omega}-\sqrt{\omega}]\,[\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}]}{\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}} = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}}.\ \text{ὅθεν}$$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}} \text{ καὶ ορ } \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\text{ορ } \frac{\Delta\omega}{\Delta x}}{\text{ορ}[\sqrt{\omega+\Delta\omega}+\sqrt{\omega}]} \text{ ἢ } \psi' = \frac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}.$$

Σημείωσις. Τοῦτο ἰσχύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὴν συνάρτησιν ω.

Ἄρα :

Ἡ παράγωγος τετραγωνικῆς ρίζης συναρτήσεως τινος τοῦ x, ἐχούσης παράγωγον, ἰσοῦται μὲ τὴν παράγωγον τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης.

Π.χ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς $\psi = \sqrt{x^2-4x+1}$. Θὰ εἶναι

$$\psi' = \frac{(x^2-4x+1)'}{2\sqrt{x^2-4x+1}} = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+1}}.$$

Ἄσκησις

657. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων :

α') $\psi = (x^3-2x+5)+(3x^2-8x-1)$. β') $\psi = (5x^3+2x^2-3x+1)-(2x^2-4x+6)$,
γ') $\psi = (\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(\alpha x^2-\beta x)+(\alpha x^2+\gamma)+(\alpha^2-\beta\gamma)$,
δ') $\psi = (x-3)(x+4)$, ε') $\psi = (x^2+3)(2x^2-3x+1)$, στ') $\psi = (2x-1)\ (3x+1)(4x-2)$,
ζ') $\psi = x^3\,(2x^2-5)(3x^3-1)$, η') $\psi = \frac{x}{x^2-1}$, θ') $\psi = \frac{x}{x+1}$, ι') $\psi = \frac{3x-3}{4x-6}$,
ια') $\psi = \frac{x(x-3)}{(3x-1)^2}$, ιβ') $\psi = \sqrt{x^2-3x-5}$, ιγ') $\psi = 3x-4\sqrt{x}$, ιδ') $\psi = 2x^2-3+3\sqrt{x^2-2x}$.

9. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

§ 245. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=2x^5$· ἡ παράγωγος της εἶναι $\psi'=10x^4$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ παράγωγος αὕτη εἶναι νέα συνάρτησις τοῦ x ἔχουσα καὶ αὐτὴ παράγωγον, ἥτις λέγεται **δευτέρα παράγωγος** τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ'', ἤτοι $\psi''=(10x^4)'=40x^3$. Ἀλλὰ καὶ ἡ παράγωγος αὕτη ἔχει παράγωγον, ἥτις καλεῖται **τρίτη παράγωγος** τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ''' κ.ο.κ. Καὶ γενικῶς, ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\varphi(x)$ ἔχῃ παράγωγον ψ' διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x ἔν τινι διαστήματι (α, β), εἶναι δὲ ἡ παράγωγος αὕτη συνάρτησις τοῦ x, εἶναι δυνατὸν καὶ αὕτη νὰ ἔχῃ παράγωγον καλουμένην δευτέραν παράγωγον τῆς δοθείσης καὶ σημειοῦται ψ''. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην, τετάρτην κ.ο.κ. παράγωγον τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως.

Ἄσκησις

658. Να εὑρεθοῦν ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος τῶν κάτωθι συναρτήσεων : α') $\psi=5x^3-3x^2+2x-6$, β') $\psi=5x^4-7x^3+3x-6$, γ') $\psi=(2x-3)^3$,

δ') $\psi=\sqrt{1-x}$, ε') $\psi=\dfrac{x^2+3}{x+2}$, στ') $\psi=\sqrt{3x^2+5}$.

10. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 246. Αἱ συναρτήσεις $\psi=\eta\mu x$, $\psi=\sigma\upsilon\nu x$, $\psi=\varepsilon\varphi x$, $\psi=\sigma\varphi x$, $\psi=\tau\varepsilon\mu x$, $\psi=\sigma\tau\varepsilon\mu x$ καλοῦνται **κυκλικαὶ συναρτήσεις**. Ἡ μεταβλητὴ x εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν εἰς ἀκτίνια μέτρον τοῦ τόξου.

Συνέχεια κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἐκ τῆς τριγωνομετρίας γνωρίζομεν ὅτι **τὸ ημ x τείνει πρὸς τὸ μηδέν, ὅταν τὸ τόξον x τείνῃ εἰς τὸ μηδέν.**

1. Συνέχεια συναρτήσεως τοῦ ἡμιτόνου. Ἐὰν εἰς αὔξησιν ε τοῦ x ἀντιστοιχῇ αὔξησις η τοῦ ημx, θὰ εἶναι

$$\eta=\eta\mu(x+\varepsilon)-\eta\mu x=2\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\left|\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|\leq 1$ καὶ ἡμ $\frac{\varepsilon}{2}$ τείνει εἰς τὸ μηδεν μετὰ τοῦ ε, ἕπεται ὅτι δι' $\text{ορ}\varepsilon=0$, θὰ εἶναι καὶ $\text{ορ}\eta=0$· ἄρα ἡ συνάρτησις $\psi=\eta\mu x$ εἶναι συνεχής.

II. Συνέχεια συναρτήσεως τοῦ συνημιτόνου. Ἐὰν εἰς αὔξησιν ε τοῦ x ἀντιστοιχῇ αὔξησις η τοῦ συνx, θὰ εἶναι

$$\eta = \sigma\upsilon\nu(x+\varepsilon) - \sigma\upsilon\nu x = -2\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}\,\eta\mu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

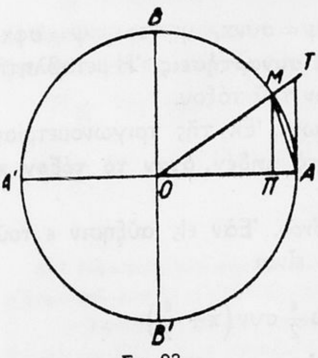
Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\left|\eta\mu\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right| \leq 1$ καὶ $\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}$ τείνει μετὰ τοῦ ε εἰς τὸ μηδέν, ἕπεται ὅτι δι' ορε=0, θὰ εἶναι καὶ ορη=0· ἄρα ἡ συνάρτησις ψ = συνx εἶναι συνεχής.

III. Συνέχεια τῶν ἄλλων κυκλικῶν συναρτήσεων. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ ἤτοι ἡ εφx εἶναι πηλίκον δύο συνεχῶν συναρτήσεων, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x ἐκτὸς ἐκείνων, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς ἄλλας συναρτήσεις.

$$\sigma\varphi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x},\quad \tau\varepsilon\mu x = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x},\quad \sigma\tau\varepsilon\mu x = \frac{1}{\eta\mu x}.$$

I. ΟΡΙΟΝ ΤΟΥ $\frac{x}{\eta\mu x}$ ΟΤΑΝ ΟΡΧ = 0.

§ 247. 1ον. Ἔστω, ὅτι τὸ τόξον $(\widehat{AM}) = x$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐκ τιμῶν θετικῶν. Εἶναι ημx= $(\overline{\Pi M})$ καὶ εφx= $(\overline{AT})$.



Σχ. 23

Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται ἐμ. τριγ. (ΟΑΜ) $<$ ἐμ. κυκ. τομ (ΟΑΜ) $<$ ἐμ. τριγ. (ΟΑΤ) ἢ $\frac{1}{2}$ (ΟΑ) ημx $< \frac{1}{2}$ (ΟΑ)x $< \frac{1}{2}$ (ΟΑ) εφx ἢ ημx $<$ x $<$ εφx, καὶ ἐπειδὴ ημx $>$ 0, ἕπεται ὅτι $1 < \frac{x}{\eta\mu x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$. Ἀλλ' ὅταν ορx= 0, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις συνx εἶναι συνεχὴς καὶ συν0 = 1, θὰ εἶναι ορσυνx = 1. Ἑπομένως καὶ ὁ λόγος $\frac{x}{\eta\mu x}$, ὅστις περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τεινόντων πρὸς τὴν μονάδα, θὰ ἔχῃ ὅριον τὴν μονάδα, ἤτοι ορ $\frac{x}{\eta\mu x} = 1$, ὅταν ορx = 0.

2ον. Ἔστω ὅτι τὸ τόξον $(\widehat{AM})=x$ τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν. Τότε, ἐὰν γράψωμεν $x=-x'$, θὰ εἶναι $x'>0$, ὁπότε θὰ εἶναι $\frac{x}{\eta\mu x}=\frac{-x'}{\eta\mu(-x')}=\frac{-x'}{-\eta\mu x'}=\frac{x'}{\eta\mu x'}$, ὅταν δὲ τὸ x τείνῃ εἰς τὸ μηδὲν ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν, τὸ x' τείνει εἰς τὸ μηδὲν ἐκ θετικῶν τιμῶν, ὁπότε $\text{ορ}\,\frac{x'}{\eta\mu x'}=1$ καὶ συνεπῶς $\text{ορ}\,\frac{x}{\eta\mu x}=1$. Ὥστε:

$$\textbf{ορ}\,\frac{x}{\eta\mu x}=1,\ \textbf{ὅταν ορ}x=0.$$

II. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΗΜΙΤΟΝΟΥ

§ 248. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\eta\mu x$, θὰ εἶναι:

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\eta\mu(x+\Delta x)-\eta\mu x}{\Delta x}$$

ἢ
$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{2\eta\mu\frac{\Delta x}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

ἐὰν δὲ ορ $\Delta x=0$, θὰ εἶναι $\text{ορ}\,\frac{\Delta x}{2}=0$, ἄρα $\text{ορ}\,\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$ καὶ

$\text{ορσυν}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu x$· ὥστε $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$. Ἤτοι:

Ἡ παράγωγος τοῦ ημx εἶναι συνx διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

III. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

§ 249. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma\upsilon\nu x$, θα εἶναι

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+\Delta x)-\sigma\upsilon\nu x}{\Delta x}.$$

ἢ
$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\frac{-2\eta\mu\frac{\Delta x}{2}\,\eta\mu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=-\frac{\eta\mu\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\,\eta\mu\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

ἐκ ταύτης δὲ προκύπτει εὐκόλως, ὅτι $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$. Ἤτοι:

Ἡ παράγωγος τοῦ συνx εἶναι —ημx διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

IV. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

§ 250. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varepsilon\varphi x$. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, ἕπεται, ὅτι $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu x)' - \eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ ἢ $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, ἄρα $(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$. Ἤτοι :

Ἡ παράγωγος τῆς εφx εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ συν²x.

V. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ σφx, τεμx, στεμx.

§ 251. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $(\tau\varepsilon\mu x)' = \frac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $(\sigma\tau\varepsilon\mu x)' = -\frac{\sigma\varphi x}{\eta\mu x}$.

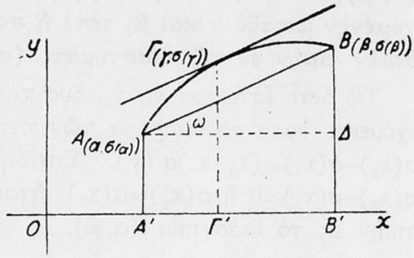
Ἄσκησις

659. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων:
α΄) $\psi = \alpha\eta\mu x$, β΄) $\psi = \eta\mu 2x$, γ΄) $\psi = \sigma\upsilon\nu 7x$, δ΄) $\psi = \varepsilon\varphi 3x$, ε΄) $\psi = \sigma\varphi 4x$,
στ΄) $\psi = \tau\varepsilon\mu^2 x$, ζ΄) $\psi = \sigma\tau\varepsilon\mu^2 x$, η΄) $\psi = \eta\mu^2 x$, θ΄) $\psi = \sigma\upsilon\nu^2 x$, ι΄) $\psi = x^2\eta\mu 3x$
ια΄) $\psi = x^2\sigma\upsilon\nu^2 x$, ιβ΄) $\psi = x^2\varepsilon\varphi 3x$, ιγ΄) $\psi = \sqrt{\eta\mu x}$, ιδ΄) $\psi = \sqrt{\sigma\upsilon\nu x}$,
ιε΄) $\psi = \sigma\upsilon\nu\sqrt{x^2+1}$.

Β΄ ΧΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΑΥΞΗΣΕΩΝ

§ 252. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(x)$, ὡρισμένη, συνεχὴς καὶ ἔχουσα παράγωγον διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας εἰς τὸ διάστημα (α,β). Ὡς γνωστὸν ἡ συνάρτησις αὕτη $\psi = \sigma(x)$ παρίσταται ὑπὸ καμπύλης. Ἐὰν ἐπὶ ταύτης θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα Α(α, σ(α)) καὶ Β (β, σ(β)) καὶ φέρωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ τὴν ΑΔ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Ox (σχ. 24), τότε θὰ εἶναι προφανῶς ΑΔ=β—α καὶ ΔΒ=σ(β)—σ(α). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ εὑρίσκομεν, ὅτι $\frac{\Delta B}{A\Delta} = \frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha} = \varepsilon\varphi\omega =$ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς χορδῆς ΑΒ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ τῆς καμπύλης $\psi = \sigma(x)$ ὑπάρχει ἕνα τοὐλάχιστον σημεῖον Γ ἔχον τετμημένην γ περιεχομένην μεταξὺ α καὶ β καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλ' ἡ ἐφαπτομένη αὕτη ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως τὴν τιμὴν τῆς παραγώγου $\sigma'(x)$ διὰ $x = \gamma$, ἤτοι $\sigma'(\gamma)$, ἐπειδὴ δὲ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha} = \sigma'(\gamma)$ ἢ $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\sigma'(\gamma)$. Ὥστε :

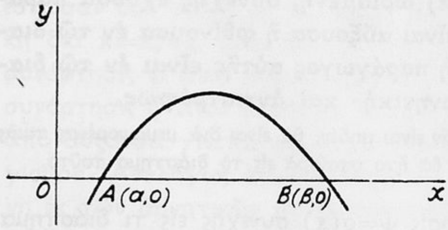


Σχ. 24

Ὅταν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι (α, β) ἔχουσα παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι (α, β), ὑπάρχει εἷς τουλάχιστον ἀριθμὸς γ μεταξὺ α καὶ β περιεχόμενος τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\sigma'(\gamma)$.

2. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ROLLE

§ 253. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ὡρισμένη, συνεχὴς καὶ ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α,β) καὶ ἔστω ὅτι ἡ καμπύλη ἡ παριστωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα Α(α,ο) καὶ Β(β,ο). Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ ὑπάρχῃ μία τοὐλάχιστον τιμὴ τοῦ x μεταξὺ α καὶ β τοιαύτη, ὥστε $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha) = (\beta-\alpha)\cdot\sigma'(\gamma)$



Σχ. 25

ἀλλὰ ἐπειδὴ $\sigma(\beta) = 0$, $\sigma(\alpha) = 0$ καὶ $\beta-\alpha\neq 0$, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι $\sigma'(\gamma) = 0$. Ἤτοι :

Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἔν τινι διαστήματι (α, β) μηδενίζεται διὰ x=α καὶ x=β, ὑπάρχει μία τοὐλάχιστον τιμὴ γ τοῦ x μεταξὺ α καὶ β, διὰ τὴν ὁποίαν ἡ παράγωγος μηδενίζεται.

§ 254. *Θεώρημα.* **Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἔν τινι διαστήματι (α, β), καὶ ἥτις παράγωγος μηδενίζεται διὰ πᾶσαν τιμὴν περιεχομένην μεταξὺ α καὶ β, τότε ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι (α, β).**

Τῷ ὄντι, ἔστωσαν x_1, x_2, δύο τιμαὶ τοῦ x μεταξὺ α καὶ β περιεχόμεναι· κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ εἶναι $\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=(x_2-x_1)\sigma'(\gamma)$. Ἐπειδὴ ὅμως $\sigma'(\gamma)=0$, ἕπεται ὅτι $\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=0$ ἢ $\sigma(x_2)=\sigma(x_1)$, ἤτοι ἡ συνάρτησις ἔχει τὴν αὐτὴν τιμὴν εἰς τὸ διάστημα (α, β).

§ 255. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ὡρισμένη, συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α,β). Ἔστωσαν δὲ δύο τιμαὶ τοῦ x αἱ x_2 καὶ x_1, ἔνθα $x_2 > x_1$, μεταξὺ α καὶ β περιεχόμεναι. Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων θὰ εἶναι:

$$\sigma(x_2)-\sigma(x_1)=(x_2-x_1)\sigma'(\gamma).$$

Ἐπειδὴ δὲ $x_2-x_1>0$, ἕπεται, ὅτι $\sigma(x_2)-\sigma(x_1)$ καὶ $\sigma'(\gamma)$ θὰ εἶναι ὁμόσημα, ἤτοι, ἐὰν μὲν $\sigma(x_2)-\sigma(x_1) > 0$ ἢ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα, τότε καὶ $\sigma'(\gamma) > 0$, ἐὰν δὲ $\sigma(x_2)-\sigma(x_1) < 0$ ἢ τὸ αὐτό, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, τότε καὶ $\sigma'(\gamma) < 0$. Ὥστε:

Μία συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ ὡρισμένη, συνεχὴς ἔχουσα παράγωγον ἔν τινι διαστήματι, εἶναι αὔξουσα ἢ φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ θετικὴ ἢ ἀρνητική· καὶ ἀντιστρόφως.

Σημείωσις. Ἡ παράγωγος ἐὰν εἶναι μηδέν, θὰ εἶναι διὰ μεμωνομένας τιμὰς τοῦ x, διότι ἄλλως ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο σταθερὰ εἰς τὸ διάστημα τοῦτο.

§ 256. Ἔστω, ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ συνεχὴς εἴς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον ψ', ἥτις εἶναι ἐπίσης συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x.

1ον. Ἔστω, ὅτι ἡ συνάρτησις μέχρι τῆς τιμῆς τοῦ $x=x_0$ εἶναι αὔξουσα, ὁπότε καὶ ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι θετική, ἀπὸ δὲ τῆς τιμῆς x_0 καὶ ἐκεῖθεν ἡ συνάρτησις γίνεται φθίνουσα. Τότε ἡ παράγωγός της καθίσταται ἀπὸ θετικὴ ἀρνητική· καὶ ἐπειδὴ ἡ παράγωγος ὑπετέθη συνεχὴς συνάρτησις, ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ γίνῃ ἀπὸ θετικὴ ἀρνητική, θὰ διέλθη διὰ τῆς τιμῆς 0, ἤτοι σ′ $(x_0) = 0$, ὅτε ἡ συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ γίνεται μεγίστη.

2ον. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτησις μέχρι τῆς τιμῆς $x = x_0$ εἶναι φθίνουσα, ὁπότε ἡ παράγωγός της θὰ εἶναι ἀρνητική, ἀπὸ δὲ τῆς τιμῆς x_0 καὶ ἐκεῖθεν ἡ συνάρτησις γίνεται αὔξουσα. Τότε ἡ παράγωγός της ἀπὸ ἀρνητικὴ καθίσταται θετική· ἑπομένως, ὡς καὶ προηγουμένως ἐλέχθη, θὰ εἶναι σ′ $(x_2) = 0$, ὅτε ἡ συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ γίνεται ἐλαχίστη. Ἤτοι:

Ὅταν μία συνάρτησις σ(x) συνεχὴς εἴς τι διάστημα (α, β) ἔχουσα παράγωγον διέρχεται διά τινα τιμὴν τοῦ x τὴν x_0 δι' ἑνὸς μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, ἡ παράγωγος αὐτῆς μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, δηλαδὴ σ′$(x_0)=0$, ἂν συμβαίνῃ νὰ εἶναι καὶ συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν.

Καὶ ἀντιστρόφως:

Ἐὰν ἡ παράγωγος συνεχοῦς τινος συναρτήσεως σ(x) εἴς τι διάστημα (α, β) μηδενίζεται διά τινα τιμὴν τοῦ x τὴν x_0, ἡ συνάρτησις αὕτη διὰ τὴν τιμὴν x_0 διέρχεται διὰ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου, καθ' ὅσον ἡ παράγωγος μηδενίζεται ἐκ θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν τιμῶν.

Τῷ ὄντι, ἔστω ὅτι ἡ παράγωγος ψ′ μηδενίζεται διὰ τὴν τιμὴν $x = x_0$ μεταβαίνουσα ἐκ τῶν θετικῶν τιμῶν εἰς τὰς ἀρνητικὰς καὶ ἔστωσαν δύο τιμαὶ τῆς ψ′, ἤτοι ἡ θετικὴ διὰ $x = x_0 - ε$ καὶ ἡ ἀρνητικὴ διὰ $x = x_0 + ε$, ἔνθα ορε=0. Ἐπειδὴ σ′$(x_0 - ε) > 0$, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι αὔξουσα, ἐπειδὴ δὲ σ′ $(x_0 + ε) < 0$, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ εἶναι φθίνουσα. Ἐφ' ὅσον δὲ ἡ ψ ὑπετέθη συνεχὴς καὶ ἀπὸ αὔξουσα γίνεται φθίνουσα, ἕπεται ὅτι αὕτη ἔχει διὰ $x = x_0$ μέγιστον. Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται ὅτι, ὅταν ἡ παράγωγος μεταβαίνῃ ἐκ τῶν ἀρνητικῶν εἰς τὰς θετικὰς τιμάς, ἡ συνάρτησις διέρχεται δι' ἐλαχίστου διὰ τὴν τιμὴν τοῦ $x = x_0$.

§ 257. Ἔστω 1ον) ὅτι ἡ συνάρτησις ψ=σ(x) ὡρισμένη, συνεχὴς εἴς τι διάστημα (α, β), ἔχουσα παράγωγον ψ′, ἔχει μέγιστον διὰ τὴν τιμὴν $x = x_1$ ἡ δὲ παράγωγος ψ′ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν, τότε θὰ εἶναι σ′$(x_1) = 0$ μεταβαίνουσα ἐκ τῶν θετικῶν τιμῶν εἰς τὰς ἀρνητικάς, ἄρα ἡ ψ′ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις καὶ ἑπομένως ἡ παράγωγός της ψ′′, ἥτις εἶναι ἡ δευτέρα παράγωγος τῆς δοθείσης, εἶναι ἀρνητική.

Ἔστω 2ον) ὅτι ἡ συνάρτησις διά τινα τιμὴν $x=x_2$ ἔχει ἐλάχιστον ἡ δὲ παράγωγος αὐτῆς εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν αὐτήν, τότε θὰ εἶναι $\sigma'(x_2)=0$, μεταβαίνουσα ἐκ τῶν ἀρνητικῶν εἰς τὰς θετικὰς ἄρα, ἡ ψ' εἶναι συνάρτησις αὔξουσα καὶ ἐπομένως ἡ παράγωγός της ψ'' εἶναι θετική. Ὥστε:

Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ συνεχὴς εἴς τι διάστημα (α,β) ἔχουσα παράγωγον ψ', ἔχῃ διὰ $x=x_1$ μέγιστον, τότε ἡ δευτέρα αὐτῆς παράγωγος ψ'' εἶναι ἀρνητικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x, ἐὰν δὲ ἡ ψ ἔχῃ διὰ $x=x_2$ ἐλάχιστον, τότε ἡ δευτέρα παράγωγος ψ'' εἶναι θετικὴ διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x.

Τὸ ἀντίστροφον ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\psi=x^2-8x+5$. Τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ταύτης λαμβάνει χώραν διὰ τὴν τιμὴν τοῦ x, διὰ τὴν ὁποίαν μηδενίζεται ἡ πρώτη παράγωγος $\psi'=2x-8$, ἤτοι διὰ $x=4$, ἐπειδὴ διὰ κάθε τιμὴν τοῦ x ἡ ψ' εἶναι συνεχής. Ἄρα ἡ συνάρτησις $\psi=x^2-8x+5$ διὰ $x=4$ ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτέρα παράγωγος $\psi''=2$ εἶναι πάντοτε θετική, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις διὰ $x=4$ ἔχει ἐλάχιστον $\psi=-11$.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως $\psi=\frac{x^3}{3}-9x+12$. Ἡ $\psi'=x^2-9$, τῆς ὁποίας ρίζαι εἶναι $x_1=3, x_2=-3$, ἔχει $\psi''=2x$, ἥτις διὰ $x=3$ εἶναι $\psi''=6>0$ διὰ καὶ $x=-3$ εἶναι $\psi''=-6<0$· ἄρα ἡ συνάρτησις διὰ $x=3$ ἔχει ἐλάχιστον ὅπερ ἰσοῦται μὲ -6 καὶ διὰ $x=-3$ ἔχει μέγιστον, ὅπερ ἰσοῦται μὲ 30.

§ 258. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, ἔνθα $\sigma(x)$ καὶ $\varphi(x)$ συνεχεῖς συναρτήσεις τοῦ x καὶ ἔστω ὅτι διὰ $x=\alpha$ ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$, ἤτοι $\frac{\sigma(\alpha)}{\varphi(\alpha)}=\frac{0}{0}$. Ἐπειδὴ $\sigma(\alpha)=0$ καὶ $\varphi(\alpha)=0$, ἡ ψ γράφεται $\psi=\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}$ ἢ $\dfrac{\frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha}}{\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}}$ Καὶ ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι $\text{ορ}(x-\alpha)=0$, τότε τὸ κλάσμα $\frac{\sigma(x)-\sigma(\alpha)}{x-\alpha}$, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς αὐξήσεως τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς αὐξήσεως τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἔχει ὅριον τὴν παράγωγον διὰ $x = \alpha$, ἤτοι τὴν $\sigma'(\alpha)$, τὸ δὲ κλάσμα $\frac{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}{x-\alpha}$ ἔχει ὅριον $\varphi'(\alpha)$. Ἄρα ἐὰν ορ$x = \alpha$ καὶ $\varphi'(\alpha) \neq 0$, ἔχομεν

ορψ = ορ. $\frac{\sigma(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$. Ὥστε :

Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\psi = \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$, τὸ ὁποῖον διὰ $x = \alpha$ λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$, εἶναι ὁ λόγος $\frac{\sigma'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ τῶν παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν ταύτην, ὅταν $\varphi'(\alpha) \neq 0$. (Κανὼν τοῦ Hospital).

Σημείωσις. Ἐὰν καὶ ὁ λόγος τῶν παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν $x=\alpha$ λαμβάνῃ τὴν ἀόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$, τότε λαμβάνομεν τὸν λόγον τῶν δευτέρων παραγώγων διὰ τὴν τιμὴν $x=\alpha$ κ.ο.κ.

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος $\psi = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+14}$ διὰ $x=2$. Τὸ κλάσμα τοῦτο διὰ $x=2$ λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἄρα ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος τούτου ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν παραγώγων τῶν ὅρων του διὰ $x=2$, ὁπότε ἔχομεν $\psi = \frac{2x-5}{2x-9}$, θέτοντες δὲ $x = 2$ εὑρίσκομεν $\psi = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5}$.

3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΠΟΥΔΗΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

§ 259. Πρὸς σπουδὴν τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως, 1ον καθορίζομεν τὰ διαστήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχής· 2ον εὑρίσκομεν τὴν παράγωγον, τῆς ὁποίας καθορίζομεν τὸ σημεῖον· 3ον εὑρίσκομεν τὰ μέγιστα καὶ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως· 4ον εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ $x = \pm\infty$ καὶ $x=0$ καὶ ἐὰν εἶναι δυνατὸν καθορίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ x, αἵτινες μηδενίζουν τὴν συνάρτησιν· 5ον σχηματίζομεν συνοπτικὸν πίνακα ὅλων τῶν ἀνωτέρω· 6ον κατασκευάζομεν τὴν καμπύλην τὴν παριστῶσαν τὴν συνάρτησιν.

Ἐφαρμογαί : α') Συνάρτησις $\psi=\alpha x+\beta$. 1ον. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. 2ον. Ἡ παράγωγος ψ' εἶναι ἴση πρὸς α ἤτοι $\psi'=\alpha$, ἑπομένως διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

1η περίπτωσις : α ⟩ 0. Ὁ πίναξ τῶν μεταβολῶν τῆς ψ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
ψ′		+		+	
ψ	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

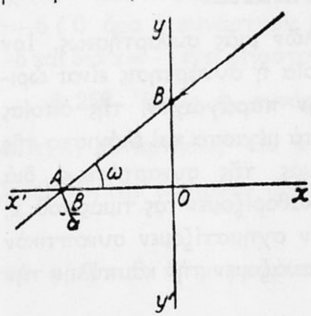
Ἡ γραμμὴ τῶν μεταβολῶν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ σχηματίζουσα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν ω ὀξεῖαν, διότι

$$\psi' = \varepsilon\varphi\omega = \alpha > 0 \text{ (σχ. 26).}$$

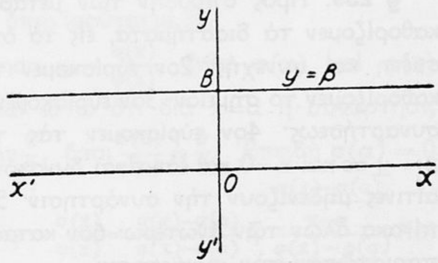
2α περίπτωσις : α ⟨ 0. Ὁ πίναξ τῶν μταβολῶν τῆς ψ εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{\alpha}$		$+\infty$
ψ′		−		−	
ψ	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Ἡ γραμμὴ ἡ παριστῶσα τὰς μεταβολὰς εἶναι εὐθεῖα σχηματίζουσα μετὰ τοῦ θετικοῦ ἄξονος τῶν x γωνίαν ω ἀμβλεῖαν, διότι $\psi' = \varepsilon\varphi\omega = \alpha < 0$.



Σχ. 26



Σχ. 27

3η περίπτωσις : α=0. Ἡ συνάρτησις εἶναι σταθερὰ καὶ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x (σχ. 27).

β′) Ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha x^2+\beta x+\gamma$. 1ον. Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x.

2ον. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι $\psi=2\alpha x+\beta$, ἥτις, ἐὰν τὸ $\alpha>0$, εἶναι ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ θετικὴ εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$ ἐὰν δὲ τὸ $\alpha<0$, εἶναι θετικὴ εἰς τὸ διάστημα $\left(-\infty,-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$ καὶ ἀρνητικὴ εἰς τὸ διάστημα $\left(-\frac{\beta}{2\alpha},+\infty\right)$.

3ον. Αἱ ρίζαι τῆς πρώτης παραγώγου $\psi=2\alpha x+\beta$ εἶναι $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἄρα διὰ τὴν τιμὴν $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἡ δὲ δευτέρα παράγωγος $\psi''=2\alpha$ εἶναι θετικὴ δι᾽ $\alpha>0$, ἀρνητικὴ δὲ δι᾽ $\alpha<0$· ἑπομένως ἡ συνάρτησις, ὅταν $\alpha>0$, ἔχει διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἐλάχιστον $\psi=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ ὅταν $\alpha<0$, ἔχει διὰ $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέγιστον $\psi=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$.

4ον. Διὰ $x=\pm\infty$, ἐὰν $\alpha>0$, $\psi=+\infty$, ἐὰν δὲ $\alpha<0$, $\psi=-\infty$.

Πίναξ τῶν μεταβολῶν

$\alpha>0$

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
ψ'		$-$	0	$+$	
ψ''			$+$		
ψ	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἐλάχιστον	$\nearrow$	$+\infty$

$\alpha<0$

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
ψ'		$+$	0	$-$	
ψ''			$-$		
ψ	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ μέγιστον	$\searrow$	$-\infty$

Παράδειγμα. Νὰ σπουδασθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\psi=x^2-6x+8$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ἡ παράγωγος $\psi'=2x-6$ διὰ $x<3$ εἶναι $\psi'<0$, διὰ $x>3$ εἶναι $\psi'>0$. Διὰ $x=3$ εἶναι $\psi'=0$, ἐπειδὴ δὲ $\psi''=2>0$, ἕπεται ὅτι διὰ $x=3$ ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον $\psi=\frac{32-36}{4}=-1$.

Διὰ $x=\pm\infty$ ἐπειδὴ $\alpha>0$, $\psi=+\infty$.

Διὰ $x=0$, $\psi=8$, διὰ $x=2$ καὶ $x=4$, $\psi=0$.

Ἀσκήσεις

660. Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

α') $\psi=x+3$, β') $\psi=-3x+1$. γ') $\psi=x^3+3$, δ') $\psi=x^2-5x+6$, ε') $\psi=x^3-8$, στ') $\psi=x(x-1)^2$, ζ') $\psi=x^2+3x+2$, η') $\psi=x^3-5x-4$.

661. Νὰ εὑρεθοῦν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων:

α') $\psi=x^2-3x+2$. β') $\psi=3x^3+2x^2$. γ') $\psi=x^3-36x$.

662. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῶν κάτωθι κλασμάτων:

α') $\psi=\frac{x^3-3x^2+4x-2}{x^3+7x^3-5x-3}$ διὰ $x=1$, β') $\psi=\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$ διὰ $x=3$,

γ') $\psi=\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ διὰ $x=2$. δ') $\psi=\frac{x^3-3x^2+4}{3x^3-18x^2+36x-24}$ διὰ $x=2$.

4. ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

§ 260. Ἔστω τυχοῦσα συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x, ἡ ψ. Ἐὰν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ x λάβῃ ἐλαχίστην αὔξησιν Δx, ἡ συνάρτησις λαμβάνει ὁμοίως ἀντίστοιχον αὔξησιν $\Delta\psi$. Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ορ$\Delta x=0$ εἶναι καὶ ορ$\Delta\psi=0$ καὶ ορ $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}=\psi'$, συνεπῶς καὶ ορ $\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta x}-\psi'\right)=0$.

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}-\psi'=\varepsilon$ (1), ἐὰν ορε$=0$. Λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς $\Delta\psi$ καὶ ἔχομεν $\Delta\psi=\psi'\Delta x+\varepsilon.\ \Delta x$. Ἤτοι:

Ἡ αὔξησις συνεχοῦς συναρτήσεως τοῦ x ἐχούσης παράγωγον ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς ἐλαχίστην αὔξησιν Δx τοῦ x, ἀποτελεῖται ἀφ' ἑνὸς ἀπὸ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου ἐπὶ Δx καὶ ἀφ' ἑτέρου ἀπὸ τὸ γινόμενον τοῦ Δx ἐπὶ ἀριθμὸν ε, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν αὔξησιν Δx καὶ ἔχει ὅριον μηδέν, ὅταν ορΔx=0.

Τὸ γινόμενον ψ'Δx καλεῖται διαφορικὸν τῆς συναρτήσεως ψ καὶ σημειοῦται dψ=ψ'Δx. (1)

'Εὰν $\psi = x$ εἶναι $\psi' = 1$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) προκύπτει $dx = \Delta x$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται $d\psi = \psi' dx$. (2)

'Εκ τῆς (2) παρατηροῦμεν· 1ον ὅτι, ἵνα μία συνάρτησις ἔχῃ διαφορικόν, πρέπει νὰ ἔχῃ παράγωγον καὶ 2ον ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ διαφορικοῦ μιᾶς συναρτήσεως πολλαπλασιάζομεν τὴν παράγωγον αὐτῆς ἐπὶ dx. Οὕτως ἐὰν $\psi = 2x^3$, θὰ εἶναι $d\psi = 6x^2 dx$.

Ἄσκησις

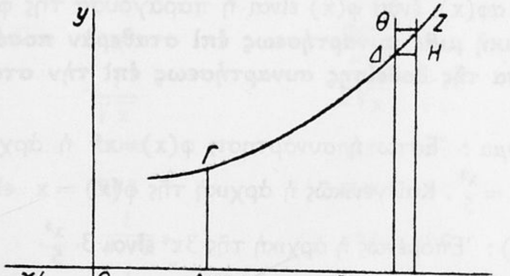
663. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διαφορικὸν τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

α') $\psi = 3x$, β') $\psi = 7x^3$, γ') $\psi = 3x^2 - 5x + 6$,

δ') $\psi = \dfrac{3x}{x+1}$, ε') $\psi = \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$, στ') $\psi = \sqrt{3x^2}$, ζ') $\psi = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

5. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΝ ΕΜΒΑΔΟΥ

§ 261. Ἔστω $\psi = \sigma(x)$ συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x καὶ ΜΝ ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ. Ἄς λάβωμεν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x τὸ σταθερὸν σημεῖον Α (α,0) καὶ τὸ μεταβλητὸν Β(x,0), καὶ τῶν ὁποίων φέρομεν τὰς τεταγμένας ΑΓ καὶ ΒΔ τῶν σημείων Γ καὶ Δ τῆς καμπύλης οὕτω δὲ ὁρίζεται τὸ χωρίον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου ἔστω Ε τὸ ἐμβαδὸν (σχ. 28).



Σχ. 28

Εἶναι προφανές, ὅτι μετατιθεμένου τοῦ μεταβλητοῦ σημείου Β, ἤτοι μεταβαλλομένου τοῦ x, μεταβάλλεται καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε, ἐπομένως τὸ Ε εἶναι συνάρτησις τοῦ x. 'Επίσης εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐφ'ὅσον ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ εἶναι συνεχὴς δι' αὔξησιν τοῦ x κατὰ $\Delta x=$ (ΒΕ), ἡ αὔξησις ΔΕ τοῦ ἐμβαδοῦ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ χωρίου ΒΔΖΕ καὶ ὅτι δι' ορ$\Delta x=0$ θὰ εἶναι καὶ ορ$\Delta E=0$, ἤτοι τὸ Ε εἶναι καὶ αὐτό, συνεχὴς συνάρτησις τοῦ x. Ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, εἶναι (ΒΔΗΕ) $<$ (ΒΔΖΕ) $<$ (ΒΘΖΕ) ἢ ἐὰν τεθῇ (ΔΘ) $=\Delta\psi$, θὰ εἶναι $\psi\cdot\Delta x < \Delta E < (\psi+\Delta\psi)\cdot\Delta x$· διαιροῦντες δὲ διὰ Δx ἔχομεν:

Ἐὰν μὲν $\Delta x > 0$, $\psi > \frac{\Delta E}{\Delta x} < \psi + \Delta\psi$, ἐὰν δὲ $\Delta x < 0$, $\psi > \frac{\Delta E}{\Delta x} > \psi + \Delta\psi$,

Ἐπειδὴ δέ, ὅταν ορ$\Delta x=0$, εἶναι καὶ ορ$\Delta\psi=0$, ἕπεται ὅτι ορ $\frac{\Delta E}{\Delta x}=\psi$.

Ἀλλὰ ορ $\frac{\Delta E}{\Delta x}=E'$, ἄρα $E'=\psi$, ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $E'dx=\psi dx$.

6. ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΑΥΤΩΝ

§ 262. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=5x^2-7x$ ἔχουσα παράγωγον $\psi'=10x-7$. Ἡ συνάρτησις $\psi=5x^2-7x$ λέγεται **ἀρχικὴ** συνάρτησις ἢ καὶ **παράγουσα** τῆς $\psi'=10x-7$. Ἤτοι:

Ἀρχικὴ συνάρτησις δοθείσης συναρτήσεως φ(x) λέγεται μία ἄλλη συνάρτησις, ἐὰν ὑπάρχῃ, ἥτις, ἔχει ὡς παράγωγον τὴν δοθεῖσαν.

§ 263. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\alpha\varphi(x)$, ἔνθα α σταθερά. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι $(\alpha\varphi(x)]'=\alpha\varphi'(x)$, ἤτοι ἡ ἀρχικὴ τῆς συναρτήσεως $\alpha\varphi'(x)$ εἶναι $\alpha\varphi(x)$, ἔνθα $\varphi(x)$ εἶναι ἡ παράγουσα τῆς $\varphi'(x)$. Ὥστε

Ἡ ἀρχικὴ μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ σταθερὰν ποσότητα εἶναι ἡ παράγουσα τῆς δοθείσης συναρτήσεως ἐπὶ τὴν σταθερὰν ποσότητα.

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ συνάρτησις $\varphi(x)=x^4$· ἡ ἀρχικὴ αὐτῆς: εἶναι ἡ $f(x)=\frac{x^5}{5}$. Καὶ γενικῶς ἡ ἀρχικὴ τῆς $\varphi(x)=x$ εἶναι $f(x)=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}(\mu\neq-1)$: Ἑπομένως ἡ ἀρχικὴ τῆς $3x^4$ εἶναι $3\cdot\frac{x^5}{5}$.

§ 264. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\varphi(x)+\sigma(x)+f(x)$ ἔχουσα ὡς παράγωγον τὴν $\psi'=\varphi'(x)+\sigma'(x)+f'(x)$· συνεπῶς ἡ ἀρχικὴ τῆς $\psi'=\varphi'(x)+\sigma'(x)+f'(x)$ εἶναι ἡ $\psi=\varphi(x)+\sigma(x)+f(x)$. Ἀλλὰ αἱ $\varphi(x)$, $\sigma(x)$, $f(x)$ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ἀρχικαὶ τῶν $\varphi'(x)$, $\sigma'(x)$, $f'(x)$. Ὅθεν:

Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων συναρτήσεων ἐχουσῶν ἀρχικάς, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.

Παράδειγμα : Ἐπειδὴ αἱ ἀρχικαὶ τῶν $3x^2$, $6x$, 5 εἶναι ἀντιστοίχως αἱ x^3, $3x^2$, $5x$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀρχικὴ τῆς $\psi=3x^2-6x+5$ εἶναι ἡ x^3-3x^2+5x.

§ 265. Ἔστω μία συνάρτησις τοῦ x ἡ $\varphi(x)$ ὡρισμένη ἔν τινι διαστήματι καὶ ἔχουσα ὡς ἀρχικὴν τὴν συνάρτησιν $f(x)$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως πρέπει $f'(x)=\varphi(x)$· ἀλλὰ καὶ $(f(x)+c)'=\varphi(x)$, ἔνθα α σταθερά. Ἄρα ἡ $\varphi(x)$ θὰ ἔχῃ ὡς ἀρχικὰς καὶ τὰς συναρτήσεις $f(x)+c$, ἔνθα c εἶναι οἱοσδήποτε σταθερὸς ἀριθμός.

7. ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΩΡΙΣΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 266. Εἰς τὸ περὶ παραγώγων κεφάλαιον εἴχομεν εὕρει τὰς παραγώγους ὡρισμένων συναρτήσεων· τῇ βοηθείᾳ αὐτῶν εὐκόλως εὑρίσκομεν τὰς ἀρχικὰς ὡρισμένων τοιούτων, αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

Συναρτήσεις	Ἀρχικαί
x^μ	$\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$
αx^μ	$\dfrac{\alpha x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x+c$
$\eta\mu x$	$-\sigma\upsilon\nu x+c$
$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\varepsilon\varphi x+c$
$-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$	$\sigma\varphi x+c$

§ 267. Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις ἢ παράγουσα μιᾶς συναρτήσεως $\sigma(x)$ καλεῖται καὶ ὁλοκλήρωμα τοῦ διαφορικοῦ $\sigma(x)dx$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ συμβόλου $\int \sigma(x)dx$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\int \sigma'(x)dx = \sigma(x) + c$ καὶ $d\int \sigma'(x)dx = \sigma'(x)dx$
Ἤτοι:

Ἡ ὁλοκλήρωσις καὶ ἡ διαφόρισις εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι.

Ἐκ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι ἐξ ἑκάστου κανόνος διαφορίσεως προκύπτει ἀντίστοιχος κανὼν ὁλοκληρώσεως καὶ ἀντιστρόφως· μόνον, ὅτι κατὰ τὴν ὁλοκλήρωσιν πρέπει νὰ προσθέσωμεν ποσότητα c ἀνεξάρτητον τῆς ἑκάστοτε μεταβλητῆς.

Ἀσκήσεις

664. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ὁλοκληρώματα:

α') $\int 3xdx$, β') $\int 9x^2dx$, γ') $\int x^{-4}dx$, δ') $\int x^{-5}dx$,

ε') $\int -\frac{1}{x^3}dx$, στ') $\int \frac{7}{x^5}dx$, ζ') $\int (3x^3+2x^2-5x+6)dx$, η') $\int (6x^3-7x^2-3x)dx$,

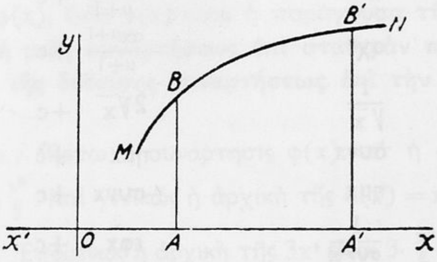
θ') $\int (x+2)^2dx$, ι') $\int (x-1)^3dx$, ια') $\int$ ιβ') $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)dx$. $\int \sigma\upsilon\nu 2xdx$.

γ') $\int \eta\mu 2xdx$, ιδ') $\int \sigma\upsilon\nu 3xdx$, ιε') $\int \eta\mu 3xdx$.

8. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΣ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 268. Ἔστω μία συνεχὴς συνάρτησις $\psi=\sigma(x)$ καὶ ΜΝ ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν αὕτη παριστᾷ.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι $\int \sigma(x)dx = f(x)+c$. Ἔστωσαν δὲ $(\overline{OA}) = \alpha$



Σχ. 29

καὶ $(\overline{OA'})=x$. Ἄν κληθῇ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου ΑΒΒ'Α' (σχ.29) θὰ εἶναι $dE=\sigma(x)dx$, συνεπῶς

$$E = \int \sigma(x)dx = f(x)+c \quad (1)$$

οἱουδήποτε ὄντος τοῦ x. Ἐπειδὴ δὲ διὰ $x=\alpha$ θὰ εἶναι $E=0$, ἡ ἰσότης

(1) γίνεται $0=f(\alpha)+c$, ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ὅτι $c=-f(\alpha)$, ὁπότε $E=f(x)-f(\alpha)$. Αὕτη διὰ $x=(OA')=\beta$ δίδει $(ABB'A')=f(\beta)-f(\alpha)$. Ἡ διαφορὰ $f(\beta)-f(\alpha)$ παρίσταται συμβολικῶς

$$\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx,$$

ἐὰν $f'(x)=\sigma(x)$ καὶ καλεῖται **ὡρισμένον ὁλοκλήρωμα.**

Τὰ α καὶ β καλοῦνται **ὅρια** τοῦ ὁλοκληρώματος, τὸ μὲν α κατώτερον, τὸ δὲ β ἀνώτερον, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ $\int \sigma(x)dx$, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ἀόριστον ὁλοκλήρωμα.** Ὥστε:

Ἐὰν δοθῇ καμπύλη παριστωμένη ὑπὸ τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(x)$, ὁρισθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῆς δύο σημεῖα Β καὶ Β' ἔχοντα ἀντιστοίχως τετμημένας α καὶ β, τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου (ΑΒΒ'Α') θὰ εἶναι :

$$E=\int_{\alpha}^{\beta}\sigma(x)dx=f(\beta)-f(\alpha), \text{ ἐὰν } f'(x)=\sigma(x).$$

Ἀσκήσεις

665. Δίδεται ἡ συνάρτησις $\psi=x^2-5x+6$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου χωρίου, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τοῦ ἄξονος τῶν x καὶ τοῦ τόξου τῆς καμπύλης τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν τομῶν τῆς x'x καὶ τῆς καμπύλης ταύτης.

666. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν συνάρτησιν x^2-6x+5.

667. Ἐὰν Β εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ συνάρτησις $\psi=x^2+2x-3$ τέμνει τὸν ἄξονα ψ'ψ, καὶ Α' καὶ Α αἱ τομαὶ μὲ τὸν ἄξονα x'x, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Α'ΟΒ καὶ ΟΒΑ.

668. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἡμιτονοειδοῦς $\psi=$ ημx ἀπὸ 0 ἕως π.

669. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς συνημιτονοειδοῦς $\psi=$ συνx ἀπὸ θ ἕως $\frac{\pi}{2}$.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ X

ΕΞΩΦΥΛΛΟΝ ΤΑΣΟΥ ΧΑΤΖΗ

024000025284

ΕΚΔΟΣΙΣ ΙΑ', 1969 (IX) - ΑΝΤ. 55.000 - ΣΥΜΒΑΣΙΣ : 1945/5-8-69

ΕΚΤΥΠΩΣΙΣ - ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ : Μ. ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ Α. Ε.