ΑΝΔΡ. Σ. ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΥ
Καθηγητοῦ Μαθηματικῶν

ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

Τῶν μαθητῶν Α΄. καὶ Β΄. τάξεως τῶν Γυμνασίων
καὶ τῶν ἀντιστοίχων σχολείων.

Να κρατηθεί Αρ. ...

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ ΔΗΜΗΤΡΑΚΟΥ Α. Ε.

... ἀποφ.
... Παιδείας
... ρύσ. 1932

Επ. Πκπ.

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ Δ... Α. Ε.—ΑΘΗΝΑΙ
4—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—4
1932

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

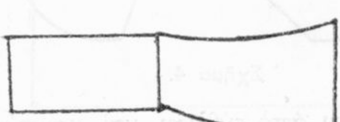
1. Τὰ πράγματα τὰ ὁποῖα βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν καὶ τὰ ὁποῖα κατέχουν ἓν μέρος τοῦ ἀπείρου χώρου ἐντὸς τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται ὅλα τὰ ἄστρα καὶ ἡ Γῆ καλοῦνται σώματα. Π.χ. σώματα εἶναι ἓν βιβλίον, ἕνας χάραξ, μία πέτρα, ἡ Σελήνη κ. ἄ.

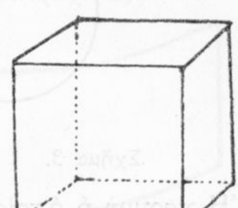
Εἰς ἕκαστον σῶμα διακρίνομεν, ἐκτὸς τῆς ὕλης ἀπὸ τὴν ὁποίαν ἀποτελεῖται, τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος. Ὅταν δὲ ἐξετάζωμεν τὰ σώματα ὡς πρὸς τὸ σχῆμα καὶ τὸ μέγεθος, τότε καλοῦμεν αὐτὰ γεωμετρικά. Καὶ τὸν κλάδον τῶν μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἐξέτασιν τοῦ σχήματος καὶ μεγέθους τῶν σωμάτων, Γεωμετρίαν.

2. Τὸ μέρος τοῦ χώρου τὸ ὁποῖον καταλαμβάνει ἓν σῶμα καλεῖται ὄγκος αὐτοῦ. Π.χ. ἡ ὀπὴ ἡ ὁποία θὰ γίνῃ εἰς ἕνα τοῖχον, ἂν βγάλωμεν μίαν πέτραν, εἶναι ὁ ὄγκος τῆς πέτρας.

Γραμμή

Ἂν παρατηρήσωμεν ἓν σῶμα ἀπὸ τὰς διαφόρους ὄψεις του, π.χ. ἓν βιβλίον, θὰ ἴδωμεν τὰ διάφορα ἄκρα αὐτοῦ. Ὅλα τὰ ἄκρα μαζὶ ἀποτελοῦν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ σώματος.





Ἐπιφάνεια Σχῆμα 1. Ὄγκος

Τὰ ἄκρα δὲ τῆς ἐπιφανείας ἢ ἑνὸς μέρους τῆς ἐπιφανείας ἀποτελοῦν τὴν γραμμὴν π.χ. τὸ ἄκρον μιᾶς σελίδος, τὸ ἄκρον ἑνὸς νομίσματος.

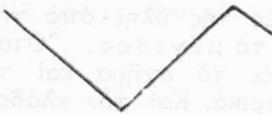
Καὶ τὸ ἄκρον μιᾶς γραμμῆς καλεῖται σ η μ ε ῖ ο ν. Τὸ σημεῖν δὲν ἔχει ἔκτασιν οὔτε δύναται νὰ χωρισθῆ εἰς μέρη π.χ. ἡ ἄκρα μιᾶς καρφίτσας, μιᾶς πέννας, μία τελεία.

Εἴδη γραμμῶν.

3. Ἡ ἁπλουστέρα ἀπὸ τὰς γραμμὰς εἶναι ἡ ε ὐ θ ε ῖ α γραμμή. Αὐτὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος διὰ νὰ ὑπάγη κανεὶς ἀπὸ ἕνα σημεῖον εἰς ἄλλο. Ἔχομεν τὴν εἰκόνα της ἂν τεντώσωμεν μίαν κλωστήν.

Ἡ εὐθεῖα παρίσταται μὲ A —————— B δύο γράμματα, τὰ ὁποῖα γράφονται εἰς τὰ ἄκρα της. Λέγομεν π.χ. ἡ εὐθεῖα AB.

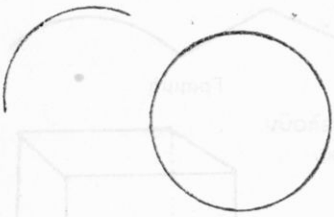
Ἡ τ ε θ λ α σ μ έ ν η γραμμὴ εἶναι μία γραμμή, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ τμήματα εὐθειῶν, ἀλλὰ δὲν εἶναι ὁλόκληρος εὐθεῖα (σχ. 2). Τὸ μέτρον τῶν κτιστῶν σχηματίζει τεθλασμένην γραμμήν.



Σχῆμα 2.

Ἡ κ α μ π ύ λ η γραμμὴ εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος, ὁσονδήποτε μικρόν, σχηματίζει εὐθεῖαν γραμμὴν (σχ. 3).

Μία στεφάνη, τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς μεταλλικοῦ νομίσματος, ἑνὸς πιάτου, εἶναι καμπύλαι γραμμαί.



Σχῆμα 3.

Σχῆμα 4.

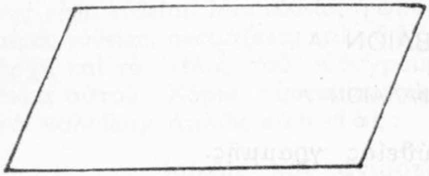
Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθεῖαν καὶ καμπύλην καλεῖται μ ι κ τ ή (σχ. 4).

Εἴδη ἐπιφανειῶν.

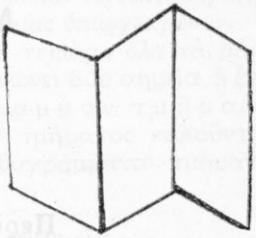
4. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακος, τοῦ καθρέπτου καὶ ἐν γένει πᾶσα ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει παντοῦ ἡ εὐ-

θεῖα γραμμή, λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐ π ί π ε δ ο ν (σχ. 5)

Ὅταν ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελῆται ἀπὸ τμήματα ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν χωρὶς νὰ εἶναι ὁλόκληρον ἐπίπεδον,



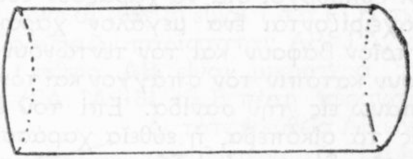
Σχῆμα 5.



Σχῆμα 6.

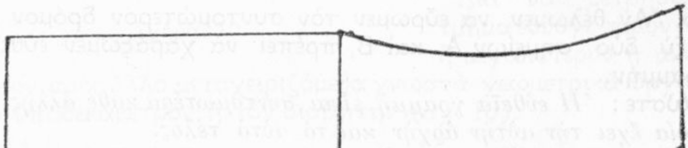
καλεῖται τ ε θ λ α σ μ έ ν η ἐπιφάνεια (σχ. 6). Ἡ ἐπιφάνεια τῆς ἕδρας, τοῦ θρανίου, εἶναι τεθλασμέναι ἐπιφάνειαι.

Ὅταν κανὲν μέρος, ὁσονδήποτε μικρόν, μιᾶς ἐπιφανείας δὲν ἀποτελῆ ἐπίπεδον, τότε ἡ ἐπιφάνεια εἶνε κ α μ π ύ λ η (σχ. 7). Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ μολυβίου, τῆς θερμάστρας, εἶναι καμπύλαι ἐπιφάνειαι.



Σχῆμα 7.

Τέλος ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ καμπύλην λέγεται μ ι κ τ ὴ ἐπιφάνεια (σχ. 8).



Σχῆμα 8.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποίαν γραμμὴν ἀκολουθοῦμεν διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο, τὸ συντομώτερον;
2. Δείξατε ἐντὸς τῆς αἰθούσης ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν.
3. Εἰς τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ εἴδη τῆς γραμμῆς.
4. Ἐντὸς τῆς αἰθούσης νὰ εὑρεθοῦν τὰ εἴδη τῶν ἐπιφανειῶν.

ΜΕΡΟΣ Ι.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

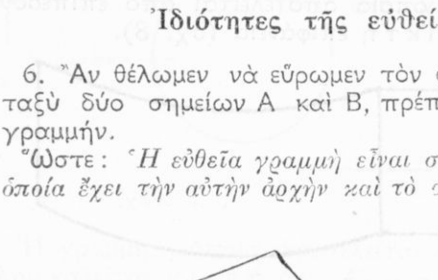
Περὶ εὐθείας γραμμῆς.

5. Χάραξις εὐθείας. Εἴδομεν ὅτι ἡ ἁπλουστέρα τῶν γραμμῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα. Διὰ νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος χρησιμοποιοῦμεν τὸν χάρακα. Οἱ ξυλουργοὶ διὰ νὰ χαράξουν εὐθείας ἐπάνω εἰς σανίδας μεταχειρίζονται ἕνα μεγάλον χάρακα ἢ ἕναν σπάγγον, τὸν ὁποῖον βάφουν καὶ τὸν τεντώνουν ἀπὸ τὰ δύο ἄκρα. Σηκώνουν κατόπιν τὸν σπάγγον καὶ τὸν ἀφίνουν νὰ πέσῃ μὲ ὁρμὴν ἐπάνω εἰς τὴν σανίδα. Ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, εἰς τοὺς κήπους, εἰς τὰ οἰκόπεδα, ἡ εὐθεῖα χαράσσεται δι᾽ ἑνὸς σχοινίου, τὸ ὁποῖον δένεται ἐπὶ δύο πασσάλων καὶ τεντώνεται. Κατὰ μῆκος τοῦ τεντωμένου σχοινίου χαράσσεται ἡ εὐθεῖα γραμμή.

Ἰδιότητες τῆς εὐθείας γραμμῆς.

6. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν συντομώτερον δρόμον μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β, πρέπει νὰ χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ὥστε: *Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι συντομωτέρα κάθε ἄλλης, ἡ ὁποία ἔχει τὴν αὐτὴν ἀρχὴν καὶ τὸ αὐτὸ τέλος.*



Σχῆμα 9.

Ἂν χαράξωμεν καὶ ἄλλην εὐθεῖαν, ἡ ὁποία νὰ συνδέῃ τὰ σημεῖα Α καὶ Β, παρατηροῦμεν ὅτι συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην.

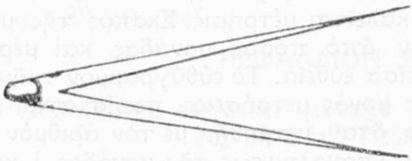
Τὸ αὐτὸ συμβαίνει ἂν χαράξωμεν ὅσας δήποτε εὐθείας. Δηλ.: *Ἀπὸ ἕνα σημεῖον εἰς ἄλλο μία μόνον εὐθεῖα φέρεται.* Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β καλεῖται καὶ ἀ π ό σ τ α σ ι ς τῶν δύο τούτων σημείων.

Ἠμποροῦμεν νὰ φαντασθῶμεν *μίαν εὐθεῖαν προεκτεινομένην ὅσον θέλομεν, εἰς τὸ ἄπειρον. Πάσης εὐθείας ὑπάρχει μέσον.*

Ἂν κόψωμεν τὴν εὐθεῖαν εἰς μικρότερα τεμάχια ὅλα τὰ μέρη της εἶναι εὐθεῖαι. Μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο σημεῖα ἢ ἕνα μέρος εὐθείας, ὀνομάζεται καὶ ε ὐ θ ύ γ ρ α μ μ ο ν τ μ ῆ μ α. Ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καλοῦνται ἄκρα αὐτοῦ. Χάριν συντομίας τὰ εὐθυγράμματα τμήματα τὰ καλοῦμεν ἁπλῶς ε ὐ θ ε ί α ς.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης εὐθειῶν.

7. Διὰ νὰ ἴδωμεν ἂν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι ἢ ἄνισοι, τοποθετοῦμεν τὴν ἀρχὴν Α Α————Β
τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἀρχὴν Γ τῆς ἄλλης, Γ————Δ
ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν. Καὶ ἂν τὸ τέλος Β τῆς πρώτης πέσῃ εἰς τὸ τέλος Δ τῆς ἄλλης, τότε αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴ σ α ι. Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος τῶν δύο εὐθειῶν παρίσταται: ΑΒ=ΓΔ. Ἂν τὸ Β πέσῃ πρὸ τοῦ Δ ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ΓΔ καὶ τότε γράφομεν: ΑΒ < ΓΔ. Ἂν δὲ τὸ Β πέσῃ πέραν τοῦ Δ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΓΔ καὶ σημειώνομεν: ΑΒ > ΓΔ. Εἰς τὰς δύο τελευταίας περιπτώσεις αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἄ ν ι σ ο ι.

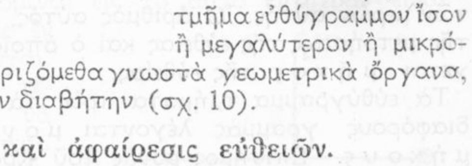


Σχῆμα 10.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τμῆμα εὐθύγραμμον ἴσον ἢ μεγαλύτερον ἢ μικρότερον πρὸς ἄλλο μεταχειριζόμεθα γνωστὰ γεωμετρικὰ ὄργανα, τὸ ὑποδεκάμετρον ἢ τὸν διαβήτην (σχ. 10).

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις εὐθειῶν.

8. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν π.χ. τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, λαμβάνομεν μὲ τὸν διαβήτην ἐπὶ μεγάλης εὐθείας ΘΗ τρία συνεχῆ τμήματα αβ, βδ, δζ, ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας (σχ. 11). Ἡ εὐθεῖα αζ, ἡ ὁποία



Σχῆμα 11.

ἔχει ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τῆς πρώτης καὶ τέλος τὸ τέλος τῆς τελευταίας εὐθείας, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δεδομένων εὐθειῶν. Δηλ.: *Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν αὗται ὅταν τεθοῦν κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἄλλης εὐθείας ὥστε τὸ τέλος τῆς πρώτης νὰ εἶναι ἀρχὴ τῆς δευτέρας* κ.ο.κ. Ἡ πρόσθεσις σημειώνεται:

$$ΑΒ+ΓΔ+ΕΖ=αβ+βδ+δζ=αζ.$$

9. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν δύο εὐθειῶν π.χ. τῆς αζ καὶ αδ, τοποθετοῦμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης οὕτως ὥστε ἡ ἀρχὴ τῆς μικροτέρας νὰ πέσῃ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς μεγαλυτέρας. Τὸ τμῆμα δζ, τὸ ὁποῖον περισσεύει ἀπὸ τοῦ τέλους τῆς μικροτέρας μέχρι τοῦ τέλους τῆς μεγαλυτέρας, εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀνίσων εὐθειῶν: Ὥστε: *Διαφορὰ δύο ἀνίσων εὐθειῶν εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία μένει, ὅταν ἀπὸ τὸ ἓν ἄκρον τῆς μεγαλυτέρας εὐθείας ἀποκοπῇ μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν.*
Ἡ ἀφαίρεσις σημειώνεται: αζ—αδ=δζ.

Μέτρησις εὐθειῶν.

10. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν συγκρίνομεν αὐτὴν πρὸς ἕνα ὡρισμένον εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον καλεῖται μονάς. Ἡ σύγκρισις αὐτὴ καλεῖται μέτρησις. Σκοπὸς τῆς μετρήσεως εἶναι νὰ εὕρωμεν ἀπὸ πόσας μονάδας καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς μετρήσεως παρίσταται μὲ τὸν ἀριθμὸν 1, ἡ δὲ εὐθεῖα, ὅταν μετρηθῇ, μὲ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος σχηματίζεται ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος 1 καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς. Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς εὐθείας καὶ ὁ ὁποῖος τὴν παριστάνει, λέγεται μῆκος τῆς εὐθείας.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα πρὸς τὰ ὁποῖα συγκρίνομεν τὰς διαφόρους γραμμὰς λέγονται μονάδες μετρήσεως μήκους. Ἐπίσημος μονὰς τοῦ Κράτους μας, καθὼς καὶ πολλῶν Εὐρωπαϊκῶν κρατῶν εἶναι τὸ μέτρον, τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ τὸ ἓν τεσσαρακοντάκις ἑκατομμυριοστὸν ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γῆς. Δευτερεύουσαι μονάδες μετρήσεως μήκους, αἱ ὁποῖαι παράγονται ἀπὸ τὸ μέτρον εἶναι:

τὸ μυριάμετρον	(μ. μ.)	τὸ	ὁποῖον	ἔχει	μῆκος	10000 μ.
τὸ χιλιόμετρον	(χ. μ.)	»	»	»	»	1000 μ.
τὸ ἑκατόμετρον	(ε. μ.)	»	»	»	»	100 μ.
τὸ δεκάμετρον	(δ. μ.)	»	»	»	»	10 μ.
[τὸ μέτρον	(μ.)	»	»	»	»	1 μ.]

τὸ δεκατόμετρον ἢ παλάμη (π.) τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 0,1 μ.
τὸ ἑκατοστόμετρον ἢ δάκτυλος (δ.) » » » 0,01 μ.
τὸ χιλιοστόμετρον ἢ γραμμὴ (γ.) » » » 0,001 μ.
Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέτρον ἔχει δέκα παλάμας. Κάθε παλάμη 10 δακτύλους, κάθε δάκτυλος 10 γραμμάς.

Σημείωσις. Ὅταν ἕνας ἀριθμὸς ἐκφράζῃ μῆκος, αἱ μονάδες ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως παρίστανται μὲ ἕνα ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ, π.χ. ὁ 3,075 μ. σημαίνει 3 μ. 0 π. 7 δ. 5 γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

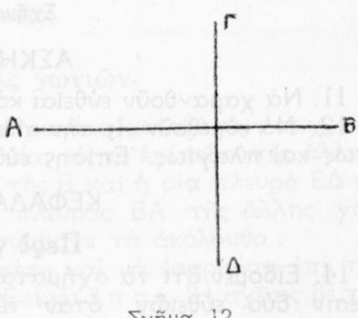
5. Πῶς χαράσσονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας;
6. Νὰ χαραχθοῦν ἐπὶ τοῦ τετραδίου τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι καὶ τρεῖς ἄνισοι.
7. Νὰ χαραχθοῦν δύο εὐθεῖαι καὶ νὰ μετρηθοῦν διὰ τοῦ ὑποδεκαμέτρου.
8. Νὰ χαραχθῇ ἐπὶ τοῦ τετραδίου μία εὐθεῖα ἴση πρὸς 0,03 καὶ κατόπιν ἄλλη ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον αὐτῆς.
9. Νὰ χαραχθοῦν κατὰ σειρὰν τρεῖς εὐθεῖαι 0,04 μ., 0,06 μ., 0,025 μ.
10. Νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν δύο εὐθειῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶνε 45 χιλιοστὰ τοῦ μέτρου, καὶ ἡ δευτέρα 28 χιλ. τοῦ μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Θέσεις δύο εὐθειῶν μεταξύ των, εὑρισκομένων εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

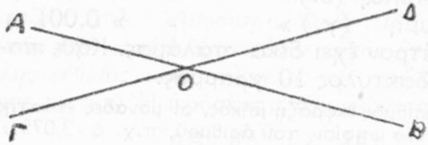
11. Δύο εὐθεῖαι εὑρισκόμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον ἢ νὰ μὴ τέμνωνται.

Ὅταν μία εὐθεῖα ΓΔ τέμνῃ ἄλλην ΑΒ χωρὶς νὰ κλίνῃ οὔτε πρὸς τὰ ἀριστερὰ οὔτε πρὸς τὰ δεξιὰ (σχ. 12), τότε ἡ πρώτη εὐθεῖα ΓΔ λέγεται κάθετος πρὸς τὴν δευτέραν ΑΒ. Ἀντιστρόφως καὶ ἡ ΑΒ εἶναι τότε κάθετος πρὸς τὴν ΓΔ. Λέγομεν ἐπίσης ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετοι ἡ μία ἐπὶ τὴν ἄλλην ἢ ὅτι τέμνονται καθέτως. Καθέτως τέμνονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον τοῦ σταυροῦ, εἰς τὸ ἄκρον τῆς σελίδος τοῦ βιβλίου κλπ.



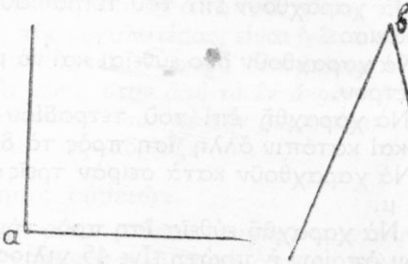
Σχῆμα 12.

12. Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται χωρὶς νὰ εἶναι κάθετοι, λέγονται π λ ά γ ι α ι. Π.χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ.13), αἱ ὁποῖαι προφανῶς δὲν τέμνονται καθέτως, εἶναι πλάγιαι. Πλαγίως τέμνονται αἱ εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ Χ κλπ.



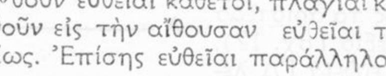
Σχῆμα 13.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὴν θέσιν τῶν εὐθειῶν, εἰς τὰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας αἱ δύο εὐθεῖαι τέμνονται, καλοῦνται γ ω ν ί α ι. Π.χ. γωνίαι εἶναι τὰ σχήματα α,β (σχ. 14).



Σχῆμα 14.

13. Ὅταν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (σχ.15), αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, προεκταθοῦν ἐπ' ἄπειρον χωρὶς νὰ συναντηθοῦν, λέγονται ε ὐ θ ε ῖ α ι π α ρ ά λ λ η λ ο ι. Παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι αἱ γραμμαὶ ἑνὸς τετραδίου, τῆς σελίδος ἑνὸς βιβλίου κλπ



Σχῆμα 15.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11. Νὰ χαραχθοῦν εὐθεῖαι κάθετοι, πλάγιαι καὶ παράλληλοι.

12. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὴν αἴθουσαν εὐθεῖαι τεμνόμεναι καθέτως καὶ πλαγίως. Ἐπίσης εὐθεῖαι παράλληλοι.

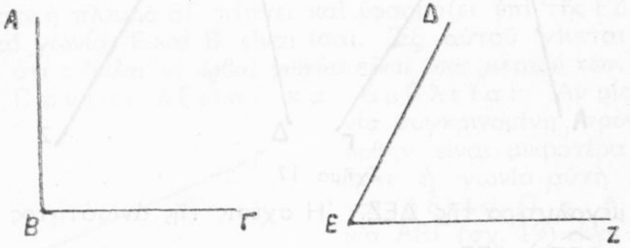
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

Περὶ γωνιῶν.

14. Εἴδομεν ὅτι τὰ σχήματα τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὴν θέσιν δύο εὐθειῶν ὅταν τέμνωνται, καλοῦνται γωνίαι. Ὥστε: *Γωνία εἶναι τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον χωρὶς νὰ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν*. Π. χ. τὰ σχήματα ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι γω-

νίαι (σχ. 16). Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν καλεῖται κορυφὴ τῆς γωνίας. Εἰς τὰς γωνίας ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰ σημεῖα Β, Ε εἶναι αἱ κορυφαί.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν γωνίαν καλοῦνται πλευραὶ αὐτῆς. Π.χ. εἰς τὴν γωνίαν ΑΒΓ πλευραὶ εἶναι αἱ



Σχῆμα 16.

ΑΒ καὶ ΒΓ. Τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας δὲν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν της ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα αὐτῶν.

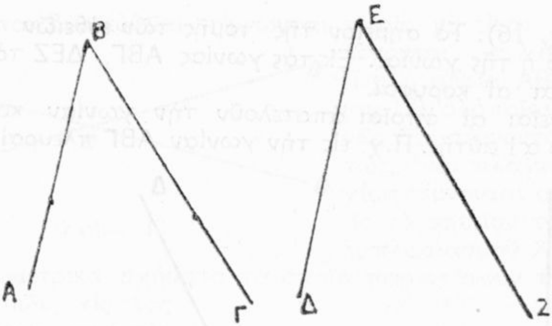
Διὰ νὰ σημειώσωμεν μίαν γωνίαν μεταχειριζόμεθα τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς της· π.χ. λέγομεν ἡ γωνία Β ἢ ἡ γωνία Ε. Ἐπίσης σημειώνομεν μίαν γωνίαν διὰ τριῶν γραμμάτων τῆς κορυφῆς καὶ τῶν πλευρῶν. Τοποθετοῦμεν δὲ τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων γραμμάτων. Π.χ. λέγομεν ἡ γωνία ΑΒΓ ἢ ἡ γωνία ΔΕΖ. Ἀντὶ ὅμως νὰ γράφωμεν γωνία ΑΒΓ, γράφομεν ἁπλῶς $\widehat{ΑΒΓ}$. Τὸ σύμβολον $\widehat{\ }$ τοποθετούμενον ἄνωθεν τῶν γραμμάτων χρησιμεύει εἰς τὸ νὰ δεικνύῃ ὅτι πρόκειται περὶ γωνίας.

Σύγκρισις γωνιῶν.

15. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο γωνίας μεταξύ των π.χ. τὰς Β καὶ Ε (σχ. 17), θέτομεν τὴν μίαν εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς ἄλλης, ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β καὶ ἡ μία πλευρὰ ΕΔ νὰ πέσῃ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ τῆς ἄλλης γωνίας. Τότε εἶναι δυνατὸν νὰ συμβοῦν τὰ ἀκόλουθα :

1) Ἡ ἄλλη πλευρὰ ΕΖ νὰ πέσῃ καὶ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὁπότε αἱ γωνίαι Β καὶ Ε εἶναι ἴσαι. Ἡ σχέσις δὲ τῆς ἰσότητος γράφεται: $\widehat{ΑΒΓ}=ΔΕΖ$.

2) Ἡ πλευρὰ ΕΓ εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ. Τότε αἱ γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ



Σχῆμα 17.

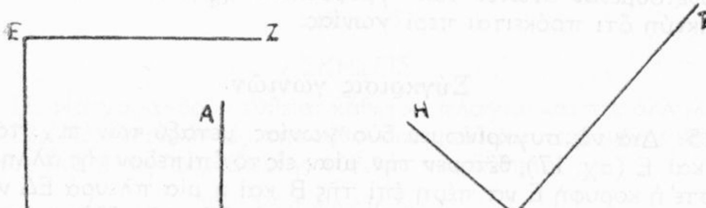
εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΔΕΖ. Ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος γράφεται: $\widehat{ΑΒΓ} > ΔΕΖ$.

3) Ἡ πλευρὰ ΕΖ εἶναι δυνατὸν νὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΓ. Τότε εἶναι πάλιν ἄνισοι ἀλλ' ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι μικροτέρα τῆς ΔΕΖ. Ἡ σχέσις δὲ αὕτη σημειώνεται: $\widehat{ΑΒΓ} < ΔΕΖ$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἰσότης ἢ ἀνισότης δύο γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ μήκους τῶν πλευρῶν των ἀλλ' ἐκ τοῦ ἀνοίγματος αὐτῶν.

Εἴδη γωνιῶν.

16. Ὀ ρ θ α ὶ γ ω ν ί α ι. Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν θέσιν δύο εὐθειῶν τεμνομένων καθέτως λέγεται

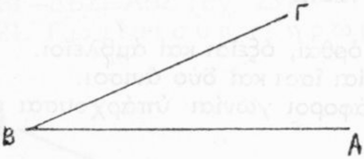


Σχῆμα 18.

ὀ ρ θ ὴ γ ω ν ί α. Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ λέγεται ὀ ρ θ ή. Ἐπίσης ἡ γωνία ΔΕΖ εἶναι ὀρθή. Καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς δύο γωνίας ΗΘΚ καὶ ΚΘΛ εἶναι ὀρθή (σχ. 18). Ὥστε: *Ὀρθὴ γωνία καλεῖται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ τέμνονται καθέτως.*

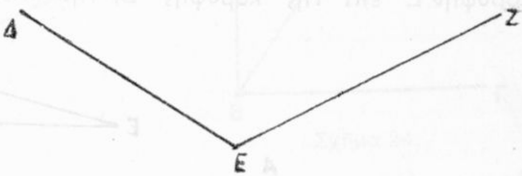
17. Ἰ δ ι ό τ η ς τ ῶ ν ὀ ρ θ ῶ ν γ ω ν ι ῶ ν. Ἂν συγκρίνωμεν ἀναμεταξύ των δύο ἢ περισσοτέρας ὀρθὰς γωνίας, δηλ. ἂν τοποθετήσωμεν τὴν κοφυφὴν Β εἰς τὴν κορυφὴν Ε (σχ.18) καὶ τὴν πλευρὰν ΒΑ εἰς τὴν πλευρὰν ΕΔ, παρατηροῦμεν ὅτι πάντοτε ἡ πλευρὰ ΒΓ πίπτει καὶ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΕΖ δηλ. ὅτι αἱ γωνίαι Ε καὶ Β εἶναι ἴσαι. Ἐξ αὐτοῦ γίνεται φανερὸν ὅτι: *Ὅλαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.*

18. Γ ω ν ί α ι ὀ ξ ε ῖ α ι κα ἀ μ β λ ε ῖ α ι· Ἂν μία γωνία συγκρινομένη πρὸς τὴν ὀρθὴν εἶναι μικροτέρα της, τότε ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται ὀ ξ ε ῖ α. Π. χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 19) εἶναι ὀξεῖα γωνία. Δηλ. ἡ ὀξεῖα γων α εἶναι ἕνα μέρος τῆς ὀρθῆς.



Σχῆμα 19.

Ἂν μία γωνία συγκρινομένη πρὸς τὴν ὀρθὴν εἶναι μεγαλυτέρα της, τότε ἡ γωνία λέγεται ἀ μ β λ ε ῖ α. Π.χ. ἡ γωνία ΑΕΖ (σχ. 20) εἶναι ἀμβλεῖα γωνία δηλ. ἡ ἀμβλεῖα γωνίαι περιέχει ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς καὶ μέρος αὐτῆς.

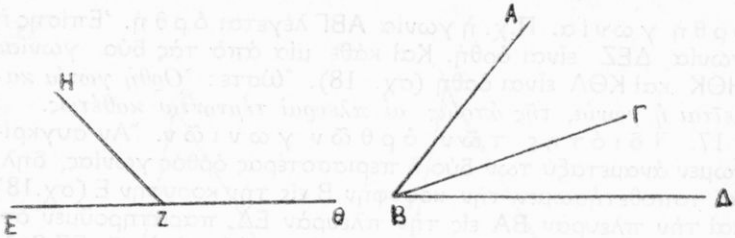


Σχῆμα 20.

Αἱ ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι γωνίαι εἶναι τὰ γεωμετρ κὰ σχήματα τὰ ὁποῖα παριστάνουν δύο εὐθείας τεμνομένας πλαγίως.

19. Γ ω ν ί α ι ἐ φ ε ξ ῆ ς. Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὴν κορυφὴν κοινήν, μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς λέγονται ἐ φ ε ξ ῆ ς γ ω ν ί α ι. Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ (σχ. 21) εἶναι ἐφεξῆς. Ἐπίσης αἱ γωνία ΕΖΗ, ΗΖΘ (σχ. 21) εἶναι ἐφεξῆς.

Σ π ο υ δ α ί α π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Πρέπει νὰ σημειωθῆ ὅτι τὰς διαφόρους γωνίας συγκρίνομεν πρὸς τὴν ὀρθήν, ἡ



Σχῆμα 21.

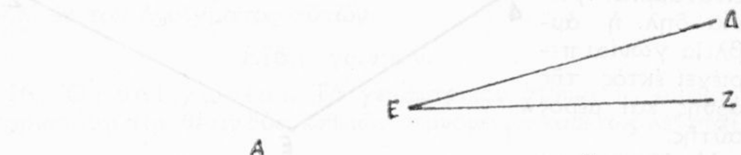
ὁποία χρησιμεύει ὡς μονὰς συγκρίσεως ἢ μετρήσεως διὰ τὰς γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

13. Νὰ χαραχθοῦν γωνίαι ὀρθαί, ὀξεῖαι καὶ ἀμβλεῖαι.
14. Νὰ χαραχθοῦν δύο γωνίαι ἴσαι καὶ δύο ἄνισοι.
15. Νὰ ἀναγνωρισθοῦν διάφοροι γωνίαι ὑπάρχουσαι εἰς τὴν αἴθουσαν.

Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις γωνιῶν·

20. Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο γωνίας Β καὶ Ε, θέτομεν τὴν κορυφὴν Ε ἐπὶ τῆς κορυφῆς Β, τὴν πλευρὰν ΕΔ ἐπὶ τῆς



Σχῆμα 22.

ΒΓ καὶ φροντίζομεν ὥστε ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ πέσῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας Β (σχ. 22), Τότε ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν. Ἡ πρόσθεσις παρίσταται ὡς ἑξῆς:

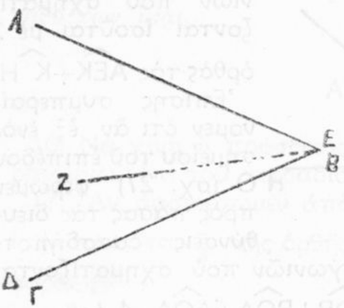
$\widehat{ΑΒΓ}+\widehat{ΔΕΖ}=ΑΒΖ.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὸ ἄθροισμα πολλῶν γωνιῶν. Δηλ. εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέτομεν τὴν τρίτην, εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν ὁμοίως τὴν τετάρτην γωνίαν κ.ο.κ.

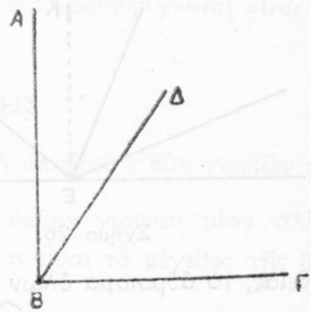
Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Ε ἀπὸ τὴν γωνίαν Β, θέτομεν τὴν κορυφὴν Ε ἐπὶ τῇ κορυφῆς Β, τὴν πλευρὰν ΕΔ ἐπὶ τῆς ΒΓ καὶ φροντίζομεν ὥστε ἡ πλευρὰ ΕΖ νὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας Β. Τότε ἡ γωνία ΑΒΖ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀνίσων γωνιῶν. Ἡ ἀφαίρεσις παρίσταται ὡς ἑξῆς:

$\widehat{ΑΒΓ}-\widehat{ΔΒΖ}=ΑΒΖ$ (σχ. 23).

21. Γωνίαι συμπληρωματικαί. Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθήν, τότε αἱ γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαί. Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ (σχ. 24) εἶναι συμπληρωματικαί, διότι:



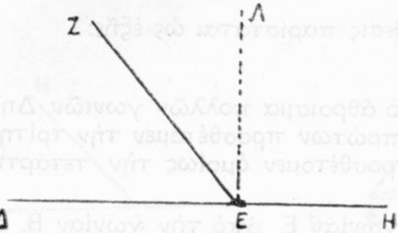
Σχῆμα 23.



Σχῆμα 24.

$\widehat{ΑΒΔ}+\widehat{ΓΒΔ}=ΑΒΓ=1$ ὀρθή.

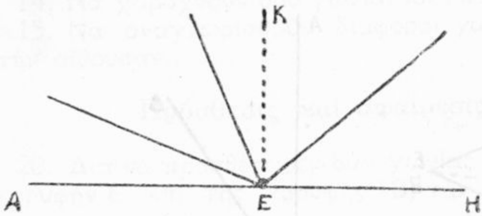
22. Γωνίαι παραπληρωματικαί. Ὅταν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθάς, τότε αἱ γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαί. Π.χ. αἱ γωνίαι ΔΕΖ καὶ ΖΕΗ (σχ. 25) εἶναι παραπληρωματικαί, διότι $\widehat{ΔΕΖ}+\widehat{ΖΕΗ}=$ ΔΕΛ+ΛΕΗ=2 ὀρθαί.



Σχῆμα 25.

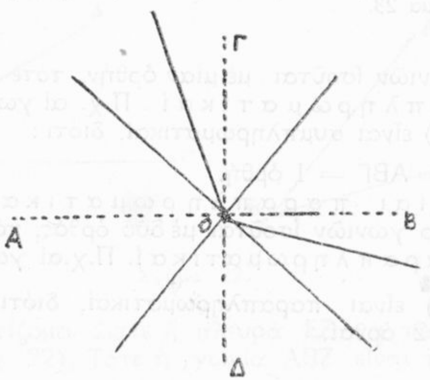
Παρατήρησις. Εἴδομεν ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τῆς προσθέσεως δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν εἶναι ἐπίσης γωνία. Ἐν τούτοις εἰς τὸ σχῆμα 25 τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΔΕΖ καὶ ΖΕΗ δὲν εἶναι γωνία διότι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΕΔ καὶ ΕΗ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν γραμμήν. Ἂν ὅμως φέρωμεν εἰς τὸ Ε τὴν κάθετον ΕΛ, γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθάς.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι ἂν ἐκ τοῦ Ε φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΗ (σχ. 26), τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθὰς τὰς $\widehat{AEK}+\widehat{K\ H}$.



Σχῆμα 26.

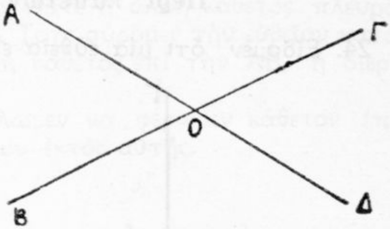
Ἐπίσης συμπεραίνομεν ὅτι ἂν ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου Ο (σχ. 27) φέρωμεν πρὸς πάσας τὰς διευθύνσεις ὁσασδήποτε εὐθείας, τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς, τὰς $\widehat{AO\Gamma}+\widehat{\Gamma OB}+\widehat{BO\Delta}+\widehat{\Delta OA}=4$ ὀρθ.



Σχῆμα 27.

23. Γωνίαι κατὰ κορυφήν. Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὴν κορυφὴν κοινὴν αἱ δὲ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης, τότε αἱ γωνίαι λέγονται κατὰ κορυφήν. Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ εἶναι κατὰ κορυφὴν (σχ. 28).

Ἐπίσης αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶναι κατὰ κορυφήν.



Σχῆμα 28.

Ἂν συγκρίνωμεν δύο κατὰ κορυφὴν γωνίας, π.χ. τὰς ΑΟΒ καὶ ΔΟΓ, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Ἐπίσης ἂν συγκρίνωμεν τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ παρατηροῦμεν πάλιν ὅτι εἶναι ἴσαι. *Ἄρα αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16. Νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις δύο γωνιῶν χαραγμένων ἐπὶ τοῦ τετραδίου.

17. Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν μίαν ἄλλην ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ μέγεθος τῆς διαφορᾶς;

18. Ἂν μία ἐκ τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ ἄλλη;

19. Ἂν μία τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον μέρος αὐτῆς εἶναι ἡ ἄλλη;

20. Ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς φέρομεν πέντε εὐθείας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθοῦν ἓξ ἴσαι γωνίαι. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία;

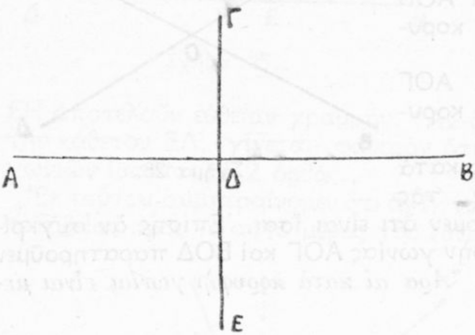
21. Ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου φέρομεν πέντε εὐθείας ὥστε νὰ σχηματισθοῦν 5 ἴσαι γωνίαι. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία;

22. Ἂν μία τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν εἶναι τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Περὶ καθέτων καὶ πλαγίων.

24. Εἴδομεν ὅτι μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἄλλην, ἂν τέμνῃ αὐτήν χωρὶς νὰ κλίνῃ οὔτε πρὸς τὰ δεξιὰ οὔτε πρὸς τ' ἀριστερά.

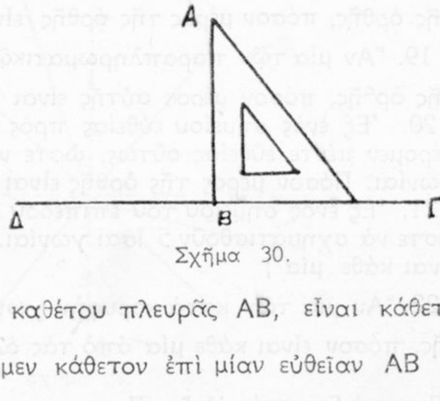


Σχῆμα 29.

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ εἴπωμεν ὅτι μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἄλλην, ὅταν σχηματίζῃ μὲ αὐτὴν γωνίας ἴσας. Π.χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ΓΔ, διότι αἱ γωνίαι ΑΔΓ καὶ ΓΔΒ, ΑΔΕ καὶ ΕΔΒ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Αἱ τέσσαρες αὗται γωνίαι εἶναι ὀρθαί.

Χάραξις καθέτων εὐθειῶν.

25. Διὰ νὰ χαράξωμεν καθέτους εὐθείας (ἢ νὰ γράψωμεν γωνίας ὀρθὰς) μεταχειριζόμεθα τὸν γνώμονα, ἓν τρίγωνον ξύλινον ἢ σιδηροῦν, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς δύο πλευράς του καθέτους. Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα τοῦτον ἐπὶ τῆς εὐθείας ΔΓ (σχ.30), εἰς τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ φέρωμεν καθέτους οὕτως ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρά του ΒΓ νὰ συμπέσῃ μὲ ἕνα τμῆμα τῆς εὐθείας ΔΓ. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία θὰ γραφῇ κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ΑΒ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔΓ.



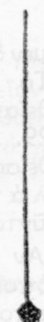
Σχῆμα 30.

Ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς Γ, τοποθετοῦμεν πάλιν τὸν γνώμονα ΔΓΕ (σχ. 33) ὥστε ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν, συνήθως ἡ μικροτέρα ΔΕ, νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ. Κινοῦμεν κατόπιν τὸν γνώμονα κατὰ μῆκος τῆς ΑΒ ὥστε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ νὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Γ. Τότε σύρομεν τὴν εὐθεῖαν κατὰ μῆκος τῆς ΔΓ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Γ.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα, ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ διὰ σημείου Κ κειμένου ἐκτὸς αὐτῆς.

Κατακόρυφος καὶ ὁριζοντία.

26. Ὅταν τὸ νῆμα τῆς στάθμης ἀφεθῇ ἐλεύθερον, λέγομεν ὅτι λαμβάνει τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου. *Κατακόρυφος λοιπὸν εἶναι ἡ διεύθυνσις τὴν ὁποίαν λαμβάνει τὸ νῆμα τῆς στάθμης, ὅταν ἀφεθῇ ἐλεύθερον.* (σχ. 31) Ὅλαι αἱ οἰκοδομαί, τοῖχοι, οἰκίαι κλπ., γίνονται κατὰ τὴν διεύθυνσιν τῆς κατακορύφου.



Σχῆμα 31.

27. Ἡ κάθετος εὐθεῖα πρὸς τὴν κατακόρυφον καλεῖται ὁ ρ ι ζ ο ν τ ί α. Τὴν ὁριζοντίαν εὑρίσκομεν διὰ πολλῶν ὀργάνων. Τὸ συνηθέστερον εἶναι ἡ ἀεροστάθμη, τὴν ὁποίαν μεταχειρίζονται οἱ ξυλουργοὶ καὶ οἱ ἄλλοι τεχνῖται.

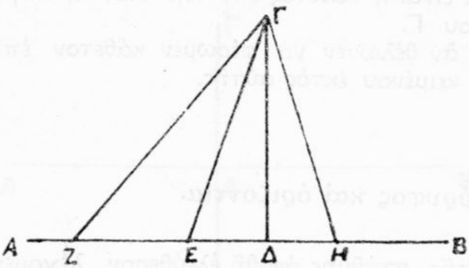
Ἡ ἀεροστάθμη (ἀλφάδι) ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα σωλῆνα ὑάλινον γεμᾶτον ἀπὸ χρωματισμένον ὑγρὸν μὲ μίαν μόνον φυσαλίδα (σχ.32). Ὁ σωλὴν ἔχει εἰς τὸ μέσον δύο γραμμάς. Ὅταν ἡ φυσαλὶς εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν γραμμῶν, τότε ἡ ἀεροστάθμη σημειώνει ἀκριβῶς ὁριζοντίαν διεύθυνσιν.

Ἀεροστάθμη

Σχῆμα 32.

Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων.

28. Ἂν φέρωμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐξ ἑνὸς σημείου Γ τὴν κάθετον ΓΔ καὶ κατόπιν φέρωμεν ὁμοίως καὶ ἄλλας καθέτους ἐκ τοῦ σημείου Γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 33), θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αὐταὶ αἱ κάθετοι συμπίπτουν πρὸς τὴν ΓΔ καὶ δὲν ὑπάρχει κατ' οὐσίαν παρὰ μόνον μία κάθετος ἡ ΓΔ, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Γ.



Σχῆμα 33.

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: *Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν μία μόνον κάθετος ἄγεται.*

Τὸ σημεῖον Δ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος ΓΔ συναντᾷ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ λέγεται π ο ὺ ς τῆς καθέτου.

29. Ἐκτὸς τῆς καθέτου ΓΔ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ ἄλλας εὐθείας ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ. Αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ καλοῦνται π λ ά γ ι α ι. Καὶ τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν ΑΒ καλοῦνται π ό δ ε ς τῶν πλαγίων.

Ἂν μετρήσωμεν τὴν κάθετον ΓΔ καὶ τυχοῦσαν πλαγίαν ΓΗ, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Γ, παρατηροῦμεν ὅτι πάντοτε συμβαίνει ἡ κάθετος νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας, δηλ: ΓΔ $<$ ΓΗ. Ὥστε: *Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας ἀγομένης ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου.*

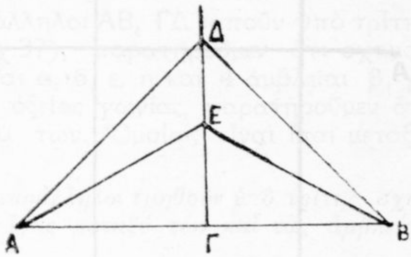
Ἐπειδὴ ἡ κάθετος εἶναι ἡ μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας ἀγομένης ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, διὰ τοῦτο αὕτη λέγεται καὶ ἀ π ό σ τ α σ ι ς τοῦ σημείου Γ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

30. Ἂν μετρήσωμεν δύο πλαγίας ΓΕ καὶ ΓΗ, τῶν ὁποίων οἱ πόδες Ε καὶ Η ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς καθέτου (ἂν δηλ. εἶναι ΔΕ=ΔΗ), παρατηροῦμεν ὅτι αἱ πλάγιαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι, δηλ. ΓΕ=ΓΗ. Ὥστε: *Ὅταν οἱ πόδες δύο πλαγίων, αἱ ὁποῖαι καταβιβάζονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῆς καθέτου, ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι εἶναι ἴσαι.*

31. Ἂν μετρήσωμεν δύο πλαγίας ΓΗ καὶ ΓΖ τῶν ὁποίων οἱ πόδες Η καὶ Ζ δὲν ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς κα-

θέτου (ἂν δηλ. εἶναι ΔΖ > ΔΗ), παρατηροῦμεν ὅτι αἱ πλάγιαι αὗται δὲν εἶναι ἴσαι, δηλ. ΓΖ > ΓΗ. Ὥστε: *Ὅταν οἱ πόδες δύο πλαγίων ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου δὲν ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἀπέχει περισσότερον.*

32. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 34). Λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ μέσον σημεῖον Γ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΓ=ΓΒ καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΔΓ εἰς τὸ μέσον. Ἂν ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς καθέτου αὐτῆς φέρωμεν πλαγίας εἰς τὰ ἄκρα Α καὶ Β, τὰς ΔΑ καὶ ΔΒ, ὡς γνωρίζομεν ἀπὸ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι



Σχῆμα 34.

μεταξύ των ἴσαι. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλάγιαι ΕΑ καὶ ΕΒ, αἱ ὁποῖαι φέρονται ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον, πρὸς τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὥστε: *Αἱ ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον μιᾶς εὐθείας, ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας, εἶναι ἴσαι μεταξύ των.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Νὰ χαραχθῇ μία κατακόρυφος πρὸς μίαν ὁριζοντίαν καὶ μία οἱαδήποτε κάθετος πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν.

24. Νὰ χαραχθῇ μία κάθετος πρὸς εὐθεῖαν ἐπὶ τετραδίου, δύο πλάγιαι ἴσαι καὶ δύο πλάγιαι ἄνισοι.

25. Εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εὑρίσκομεν τὸ μέσον Γ ὥστε ΑΓ=ΒΓ. Ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον εἰς ἐκεῖνο τὸ σημεῖον, πόσας πλαγίας ἴσας ἀνὰ δύο δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν;

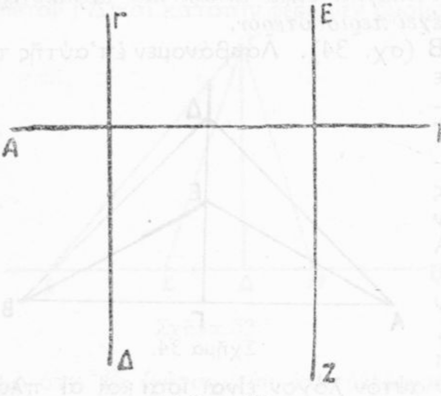
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'.

Περὶ παραλλήλων εὐθειῶν.

33. Εἴδομεν ὅτι ἂν δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, δὲν τέμνωνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν, λέγονται π α ρ ά λ λ η λ ο ι. Παράλληλοι εὐθεῖαι εἶναι αἱ γραμμαὶ τοῦ τετραδίου, τὰ δύο ἄκρα τῆς σελίδος τοῦ βιβλίου, αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τραπέζης κλπ.

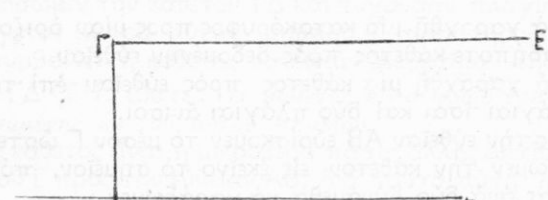
Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

34. Ἂν φέρωμεν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ τὰς καθέτους ΓΔ καὶ ΕΖ (σχ. 35), αὐταὶ μεταξύ των εἶναι παράλληλοι. Διότι, ἂν δὲν ἦσαν παράλληλοι, προεκτεινόμεναι θὰ ἐτέμνοντο εἰς ἓν σημεῖον. Τότε ὅμως ἐκ τοῦ σημείου αὐτοῦ θὰ εἴχομεν πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ δύο καθέτους. Αὐτό, καθὼς εἴδομεν, δὲν ἠμπορεῖ νὰ συμβῇ. Αἱ κάθετοι λοιπὸν ΓΔ καὶ ΕΖ δὲν συναντῶνται ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν· Ἑπομένως εἶναι παράλληλοι. Ὥστε: *Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.*



Σχῆμα 35.

35. Ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ (σχ.36) παράλληλον πρὸ αὐτήν, σύμφωνα μὲ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα, φέρομεν ἐκ τοῦ Γ κάθετον πρὸς τὴν



Σχῆμα 36.

ΑΒ, τὴν ΓΔ. Κατόπιν φέρομεν ἐπὶ τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἄλλην κάθετον, τὴν ΓΕ. Ἡ ΓΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, διότι καὶ αἱ δύο εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Ἂν θελήσωμεν νὰ φέρωμεν καὶ ἄλλην παράλληλον ἐκ τοῦ Γ πρὸ τὴν ΑΒ, παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ, διότι καὶ ἐλάχιστα νὰ μετακινήσωμεν τὴν ΓΕ ἐκ τῆς θέσεώς της, παύει νὰ εἶναι αὕτη παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

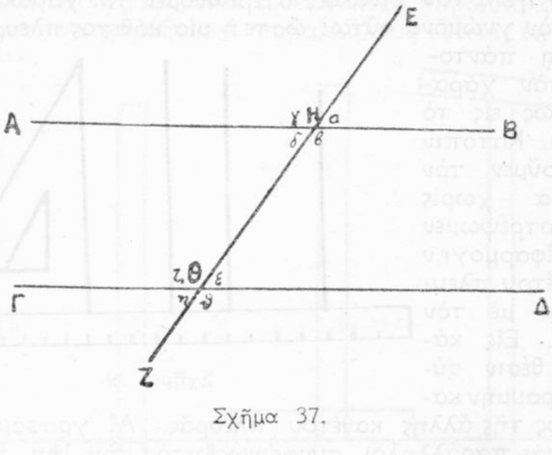
Ἄρα: *Ἐξ ἑνὸς σημείου ἐκτὸς εὐθείας μία μόνον παράλληλος ἄγεται πρὸς αὐτήν.*

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν πρῶτος διετύπωσεν ὁ ἀρχαῖος Ἕλλην μαθηματικὸς Εὐκλείδης καὶ διὰ τοῦτο τὴν ὠνόμασαν αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Εἶναι δὲ τὸ αἴτημα τοῦτο ἡ βάσις ἐπὶ τῆς ὁποίας στηρίζεται ὁλόκληρος ἡ κατόπιν γεωμετρία τὴν ὁποίαν μανθάνομεν.

36. Ἂν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ΑΒ, ΓΔ κοποῦν ὑπὸ τρίτης ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η, Θ (σχ.37), παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται 8 γωνίαι, 4 ὀξεῖαι α, δ, ε, η καὶ 4 ἀμβλεῖαι β, γ, ζ, θ. Ἂν μετρήσωμεν τὰς ὀξείας γωνίας, παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ 4 εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ὁμοίως εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ 4 ἀμβλεῖαι.

Ἄρα: *Ἂν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τμηθοῦν ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν τὰς ὀξείας γωνίας ἴσας μεταξύ των καὶ τὰς ἀμβλείας ἴσας μεταξύ των.*

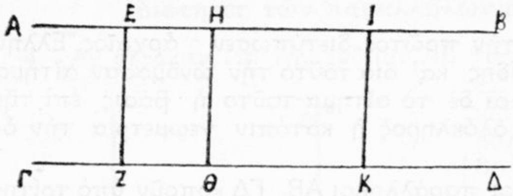
37. Ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι α+β εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν. Ἀλλὰ τὸ α=ε. Τότε καὶ



Σχῆμα 37.

β+ε=2 ὀρθαί. Ὥστε: *Μία ὀξεῖα καὶ μία ἀμβλεῖα γωνία ἀπὸ τὰς σχηματιζομένας ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν τεμνομένων ὑπὸ τρίτης ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς.* Εἶναι δηλ. παραπληρωματικαί.

38. Ἂν φέρωμεν τὰς παραλλήλους ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ τὰς κοινὰς καθέτους ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ (σχ. 38) καὶ μετρήσωμεν αὐτὰς διὰ τοῦ διαβήτου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὅλαι αἱ κάθετοι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.



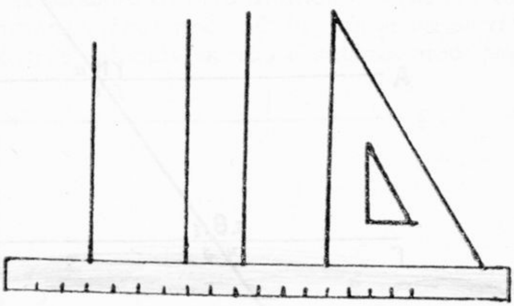
Σχῆμα 38.

Ἑκάστη τῶν καθέτων αὐτῶν καλεῖται καὶ ἀ π ό σ τ α σ ι ς τῶν δύο παραλλήλων.

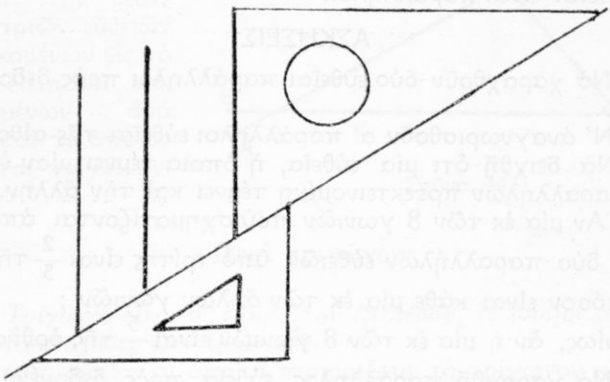
Ἄρα: *Ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι τὸ μεταξύ των τμῆμα τυχούσης κοινῆς καθέτου αὐτῶν.*

Χάραξις παραλλήλων εὐθειῶν.

39. Διὰ νὰ χαράξωμεν παραλλήλους εὐθείας ἐπὶ τοῦ τετραδίου ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος, στερεώνομεν τὸν χάρακα καὶ ἐπ' αὐτοῦ τὸν γνώμονα οὕτως, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρά του νὰ φαρμόζῃ πάντοτε εἰς τὸν χάρακα (ὅπως εἰς τὸ σχ. 39). Κατόπιν μετακινοῦμεν τὸν γνώμονα χωρὶς νὰ καταστρέψωμεν τὴν ἐφαρμογὴν τῆς καθέτου πλευρᾶς του μὲ τὸν χάρακα. Εἰς κάθε νέαν θέσιν σύρομεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς. Αἱ γραφόμεναι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, συμφώνως πρὸς τὴν 1ην ἰδιότητα. Ἐπίσης παράλληλοι εἶναι αἱ εὐθεῖαι αἱ γραφόμεναι εἰς ἑκάστην νέαν θέσιν τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ γνώμονος.


Σχῆμα 39.

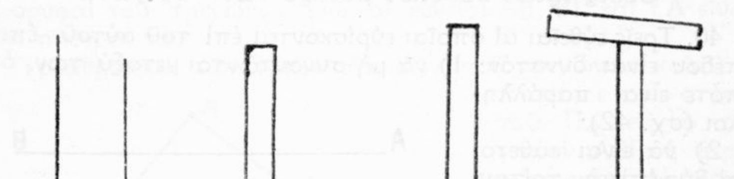
Ἠμποροῦμεν ἐπίσης νὰ χαράξωμεν παραλλήλους μὲ δύο γνώμονας. Στερεώνομεν τὸν ἕνα καὶ ἐφαρμόζομεν τὴν πλαγίαν πλευρὰν τοῦ ἄλλου εἰς τὴν πλαγίαν τοῦ ἀκινήτου ὅπως εἰς τὸ σχ. 40. Κατόπιν μετακινοῦμεν τὸν ἕνα γνώμονα, χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ ἐφαρμογὴ τῆς πλαγίας του πλευρᾶς μὲ τὴν πλαγίαν πλευρὰν τοῦ ἀκινήτου γνώμονος. Εἰς



Σχῆμα 40.

κάθε νέαν θέσιν σύρομεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς μιᾶς καθέτου πλευρᾶς. Αἱ γραφόμεναι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Ἂν θέλωμεν νὰ χαράξωμεν παραλλήλους εὐθείας ἐπὶ μιᾶς



Σχῆμα 41.

τραπέζης, ἐπὶ ἑνὸς σχεδίου εὑρισκομένου εἰς ἰχνογραφικὸν πίνακα μεταχειριζόμεθα ἓν ὄργανον σχήματος Τ, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο καλεῖται καὶ ταῦ. Ἐφαρμόζομεν τὴν μικροτέραν κάθετον τοῦ ταῦ εἰς τὸ ἄκρον τῆς τραπέζης (ὅπως εἰς τὸ σχ.41). Μετακινοῦμεν κατόπιν τὸ ὄργανον, χωρὶς νὰ καταστραφῇ ἡ ἐφαρμογὴ αὕτη. Αἱ γραφόμεναι εἰς ἑκάστην θέσιν εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

26. Νὰ χαραχθοῦν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν.

27. Ν' ἀναγνωρισθοῦν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι τῆς αἰθούσης.

28. Νὰ δειχθῇ ὅτι μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει μίαν ἐκ τῶν δύο παραλλήλων προεκτεινομένη τέμνει καὶ τὴν ἄλλην.

29. Ἂν μία ἐκ τῶν 8 γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ τὴν τομὴν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ὑπὸ τρίτης εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι κάθε μία ἐκ τῶν ἄλλων γωνιῶν ;

Ὁμοίως, ἂν ἡ μία ἐκ τῶν 8 γωνιῶν εἶναι $\frac{5}{4}$ τῆς ὀρθῆς.

30. Νὰ χαραχθῇ παράλληλος εὐθεῖα πρὸς δεδομένην καὶ ἀπέχουσα ἀπ' αὐτῆς 15 χιλιοστὰ τοῦ μ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ′

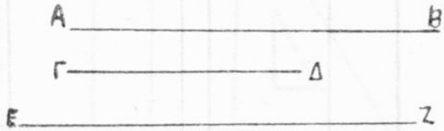
Θέσις τριῶν εὐθειῶν μεταξύ των. Τρίγωνα.

40. Τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι δυνατόν: 1) νὰ μὴ συναντῶνται μεταξύ των, ὁπότε εἶναι παράλληλοι (σχ. 42)·

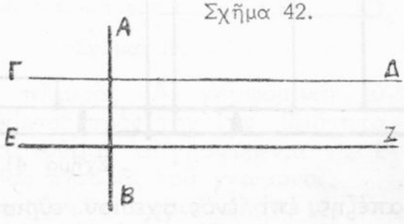
2) νὰ εἶναι κάθετοι αἱ δύο ἐπὶ τὴν τρίτην, ὁπότε, καθὼς γνωρίζομεν, αἱ δύο πρῶται εἶναι παράλληλοι μεταξύ των (σχ. 43)· ἢ ἡ τρίτη νὰ μὴ τέμνῃ καθέτως τὰς δύο πρώτας.

3) Νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο (σχ. 44).

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα, τὰ ὁποῖα παριστάνουν τὰς θέσεις τῶν τριῶν εὐθειῶν εἰς τὰς

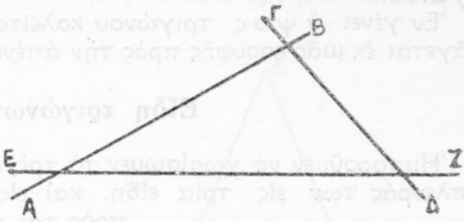


Σχῆμα 42.



Σχῆμα 43.

δύο πρώτας περιπτώσεις, τὰ ἔχομεν γνωρίσει. Μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον παριστάνει τὴν θέσιν τῶν τριῶν εὐθειῶν εὑρισκομένων εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ τεμνομένων ἀνὰ δύο καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται τρίγωνον.



Σχῆμα 44.

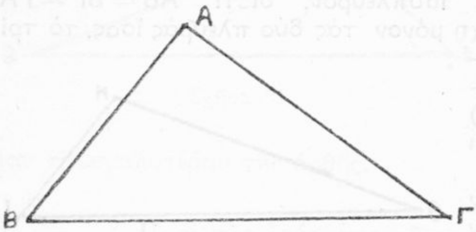
Περὶ τριγώνων.

41. *Τρίγωνον εἶναι ἓν τμῆμα τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν.*

Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι περιορίζουν τὸ τρίγωνον καλοῦνται π λ ε υ ρ α ὶ αὐτοῦ. Τὰ τρία σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται ἀνὰ δύο αἱ τρεῖς εὐθεῖαι καλοῦνται κ ο ρ υ φ α ὶ τοῦ τριγώνου.

Τὸ τρίγωνον ἐκφωνεῖται πάντοτε μὲ τὰ τρία γράμματα τῶν κορυφῶν του. Π.χ. τὸ τρίγωνον ποὺ παριστᾷ τὸ σχῆμα 45 ὀνομάζεται τρίγωνον ΑΒΓ. Τὰ σημεῖα Α, Β καὶ Γ εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου, ἐνῷ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ εἶναι αἱ πλευραί του.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καλεῖται π ε ρ ί μ ε τ ρ ο ς αὐτοῦ. Π.χ. εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ περίμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ.



Σχῆμα 45.

Γ ω ν ί α ι τοῦ τριγώνου εἶναι αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραί του τεμνόμεναι ἀνὰ δύο.

Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ἔχει τρεῖς γωνίας τὰς ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΑΓΒ, μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ.

Β ά σ ι ς ἑνὸς τριγώνου καλεῖται μία ἐκ τῶν τριῶν αὐτοῦ πλευρῶν. Ὡς βάσιν ἐκλέγομεν συνήθως τὴν καταλληλοτέραν πρὸς τοῦτο πλευράν. Ἂν λάβωμεν εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὴν ΑΓ ὡς βάσιν καὶ ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς Β φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ κάθετος αὕτη καλεῖται ὕψος τοῦ τριγώνου.

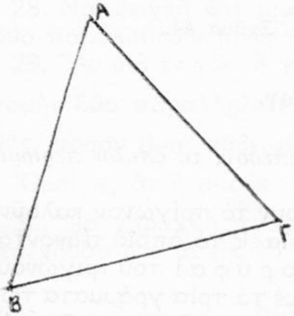
Ἐν γένει ὕψος τριγώνου καλεῖται ἡ κάθετος ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ μιᾶς κορυφῆς πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν.

Εἴδη τριγώνων.

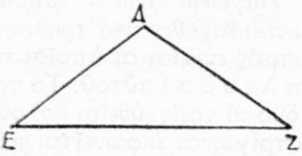
Ἠμποροῦμεν νὰ χωρίσωμεν τὰ τρίγωνα ἐν σχέσει πρὸς τὰς πλευράς των εἰς τρία εἴδη, καὶ εἰς τρία ἄλλα ἐν σχέσει πρὸς τὰς γωνίας των.

42. *Εἴδη τριγώνων ἐν σχέσει πρὸς τὰς πλευράς των.*

Ἰσόπλευρα, ἰσοσκελῆ καὶ σκαληνὰ τρίγωνα.



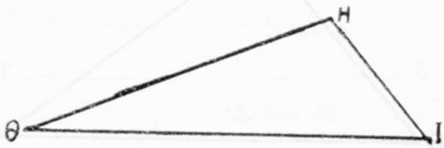
Σχῆμα 46.



Σχῆμα 47.

Ἂν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ τὰς τρεῖς πλευράς του ἴσας, τὸ τρίγωνον καλεῖται ἰσόπλευρον. Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 46) εἶναι ἰσόπλευρον, διότι ΑΒ = ΒΓ = ΓΑ.

Ἂν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ μόνον τὰς δύο πλευρὰς ἴσας, τὸ τρίγωνον καλεῖται ἰσοσκελές. Π.χ. τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 47) εἶναι ἰσοσκελὲς διότι ΔΕ=ΔΖ.



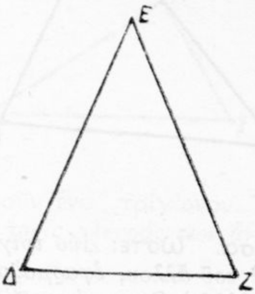
Σχῆμα 48.

Ἂν ἕνα τρίγωνον δὲν ἔχῃ καμμίαν πλευρὰν ἴσην πρὸς ἄλλην, τὸ τρίγωνον καλεῖται σκαληνόν. Π.χ. τὸ τρίγωνον ΗΘΙ (σχ. 48) εἶναι σκαληνὸν διότι καμμία ἀπὸ τὰς πλευράς του δὲν εἶναι ἴση πρὸς ἄλλην.

43. *Εἴδη τριγώνων ἐν σχέσει πρὸς τὰς γωνίας των.*

Ὀρθογώνια, ἰσοσκελῆ καὶ ἀμβλυγώνια τρίγωνα. Ἂν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν, τότε καλεῖται ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν. Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 49) εἶναι ὀρθογώνιον, διότι ἔχει τὴν γωνίαν Β ὀρθήν. Ἡ ἀπέναντι

Σχῆμα 49.

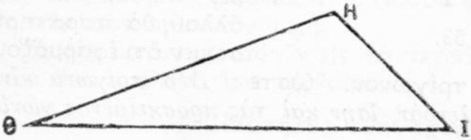


Σχῆμα 50.

ὀρθῆς γωνίας Β πλευρὰ ΑΓ καλεῖται ὑ π ο τ ε ί ν ο υ σ α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἂν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ τὰς τρεῖς γωνίας ὀξείας, καλεῖται ὀ ξ υ γ ώ ν ι ο ν. Π.χ. τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (σχ. 50), τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τρεῖς γωνίας μικροτέρας τῆς ὀρθῆς, εἶναι ὀξυγώνιον.

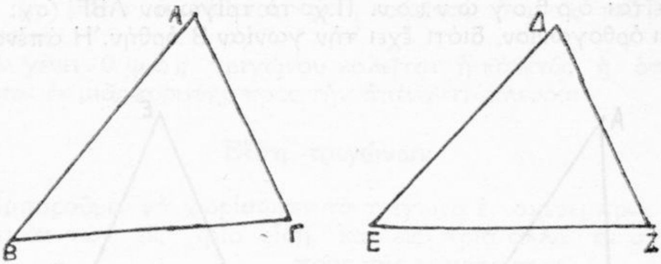
Τέλος, ἂν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν, λέγεται ἀ μ β λ υ γ ώ ν ι ο ν. Π.χ. τὸ τρίγωνον ΘΗΙ (σχ. 51) εἶναι ἀμβλυγώνιον, διότι ἔχει τὴν γωνίαν Η μεγαλυτέραν τῆς ὀρθῆς.



Σχῆμα 51.

Περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων.

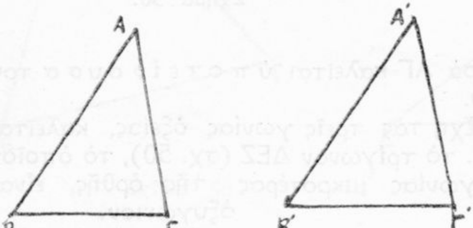
44. Κατασκευάζομεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ (σχ. 52), ὥστε αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ἄλλου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ ἑνὸς νὰ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας, τοῦ ἄλλου. Ἂν θέσωμεν τὸ ἓν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ ἴδωμεν ἀμέσως ὅτι θὰ ἐφαρμόσουν καὶ θὰ ἀποτελέσουν ἕνα τρίγωνον. Δηλ. τὰ τρίγωνα



Σχῆμα 52.

εἶναι ἴσα. Ὥστε: *Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ἄν, ὅταν θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἐφαρμόζουν.*

45. Ἀλλὰ δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα καὶ εἰς τὰς ἑπομένας περιπτώσεις:

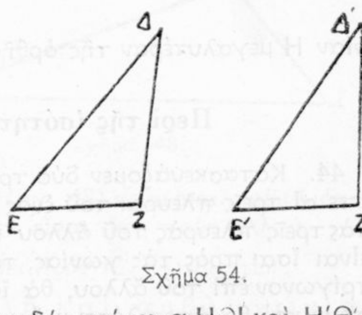


Σχῆμα 53.

Α′. Ἄν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ (σχ. 53), ὥστε νὰ ἔχουν ἴσας τὴν πλευρὰν ΒΓ=Β′Γ′ καὶ τὰς γωνίας Β=Β′, Γ=Γ′ καὶ ἂν θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν καὶ σχηματίζουν ἓν τρίγωνον. Ὥστε: *Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἂν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας.*

Β′. Ἄν κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα ΔΕΖ καὶ Δ′Ε′Ζ′ (σχ. 54) ὥστε νὰ ἔχουν ἴσας πλευρὰς ΔΕ=Δ′Ε′ καὶ ΔΖ=Δ′Ζ′ καὶ τὴν γωνίαν Δ=Δ′ καὶ ἂν θέσωμεν τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν καὶ σχηματίζουν ἕνα τρίγωνον.

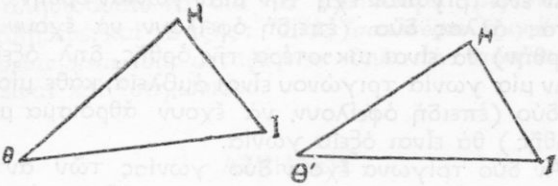
Ὥστε: *Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἂν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.*



Σχῆμα 54.

Γ′. Ἄν τέλος κατασκευάσωμεν δύο τρίγωνα ΗΘΙ καὶ Η′Θ′Ι′

(σχ. 55) ὥστε νὰ ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀντιστοίχως ἴσας καὶ θέσωμεν τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ παρατηρήσωμεν



Σχῆμα 55.

πάλιν ὅτι ἐφαρμόζουν καὶ ἀποτελοῦν ἕνα τρίγωνον. Ὥστε: *Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἂν ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Νὰ κατασκευασθοῦν ὅλα τὰ εἴδη τῶν τριγώνων εἰς τὸ τετράδιον καὶ ἀπὸ χαρτόνιον.

32. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 24 μ. Πόσον εἶναι κάθε πλευρά του.

33. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 19 μ. καὶ ἑκάστη τῶν ἴσων πλευρῶν ἀπὸ 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς βάσεως;

34. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 24 μ. καὶ τὸ μῆκος τῆς βάσεως 7 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος ἑκάστης ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν του;

35. Νὰ κατασκευασθοῦν εἰς τὸ τετράδιον καὶ ἀπὸ χαρτόνιον δύο σκαληνὰ ἴσα τρίγωνα.

Ἰδιότητες τῶν τριγώνων.

46. Διὰ πᾶν τρίγωνον. Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ.56). Ἂν κόψωμεν μὲ τὸ ψαλίδιον τὰς δύο γωνίας Α καὶ Β καὶ τὰς μεταφέρωμεν εἰς τὸ σχῆμα παραπλεύρως πρὸς τὴν γ, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ τριγώνου α,β,γ ἢ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς Α,Β,Γ ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας ἢ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2$ ὀρθαί. Ὥστε: *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθάς.*

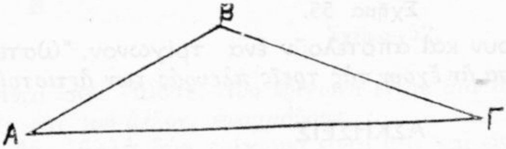
Σχῆμα 56.

Συμπεράσματα ἢ πορίσματα τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος εἶναι προφανῶς τὰ ἑξῆς :

1) Ἂν ἕνα τρίγωνον ἔχῃ τὴν μίαν γωνίαν ὀρθήν, κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο (ἐπειδὴ ὀφείλουν νὰ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν) θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, δηλ. ὀξεῖα γωνία.

2) Ἂν μία γωνία τριγώνου εἶναι ἀμβλεῖα, κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο (ἐπειδὴ ὀφείλουν νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῆς ὀρθῆς) θὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία.

3) Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας τῶν ἀντιστοίχως ἴσας τότε θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην γωνίαν αὐτῶν ἴσην.

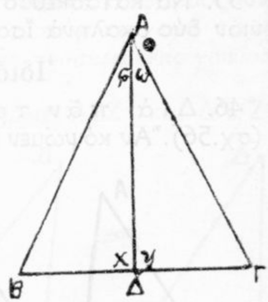


Σχῆμα 57.

47. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 57) ὅπως καὶ εἰς πᾶν τρίγωνον, αἱ δύο πλευραὶ ΑΒ+ΒΓ ἀποτελοῦν μίαν τεθλασμένην γραμμήν. Αὐτὴ ἐν σχέσει πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΓΑ (ἡ ὁποία εἶναι εὐθεῖα ἔχουσα τὰ αὐτὰ πέρατα μὲ τὴν τεθλασμένην) εἶναι μεγαλυτέρα ἤτοι ΓΑ < ΑΒ+ΒΓ.

Ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν μίαν πλευράν, τὴν μεγαλυτέραν ΑΓ, μίαν ἄλλην, τὴν ΑΒ, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς ΑΓ−ΑΒ δηλ. ΒΓ > ΑΓ−ΑΒ. Ἄρα: *Ἑκάστη πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

48. Διὰ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 58) μὲ βάσιν τὴν ΒΓ. Ἂν λάβωμεν τὴν γωνίαν Β καὶ τὴν θέσωμεν ἐπὶ τῆς Γ, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ἐφαρμόζουν δηλ. εἶναι ἴσαι : Β=Γ. Ἄρα: *Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.*



Σχῆμα 58.

49. Ἂν φέρωμεν τὸ ὕψος ΑΔ, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἴσα, διότι ἐφαρμόζουν. Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων συμπεραίνομεν ὅτι τὰ τμήματα : ΒΔ=ΔΓ, αἱ γωνίαι ω=φ καὶ χ=ψ=1 ὀρθή. Ἄρα : *Τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου χωρίζει τὴν βάσιν καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο ἴσα μέρη.*

50. Διὰ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα. Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον θεωρεῖται ἰσοσκελές, οἱανδήποτε πλευρὰν καὶ ἂν λάβωμεν ὡς βάσιν. Ἑπομένως αἱ ἰδιότητες τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ἀληθεύουσιν καὶ διὰ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα. Ἐκτὸς αὐτῶν ἀληθεύει καὶ τὸ ἑξῆς: *Ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των·* δηλ. τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. Ἂν ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων;

37. Ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι κάθε μία τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως;

38. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία ὀξεῖα γωνία;

39 Εἰς ἕνα τρίγωνον ἡ μία τῶν γωνιῶν εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, ἡ δὲ τρίτη εἶναι $\frac{2}{7}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι ἡ κάθε μία γωνία τοῦ τριγώνου;

40. Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{1}{9}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι κάθε μία;

41. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία τῶν γωνιῶν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου;

42. Ἡ μία τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 0,8 τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας;

43. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς συγχρόνως τριγώνου;

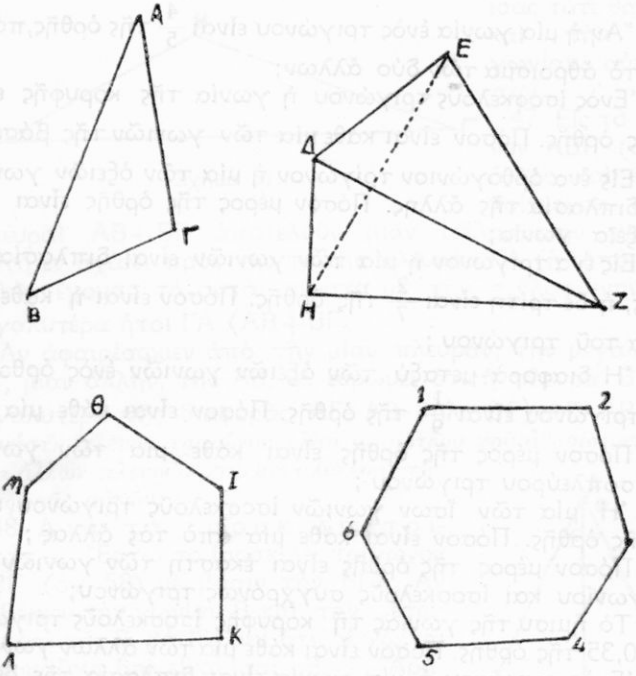
44. Τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τῆ κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 0,35 τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι κάθε μία τῶν ἄλλων γωνιῶν;

45. Ἑνὸς τριγώνου ἡ μία γωνία εἶναι διπλασία τῆς δευτέρας, ἡ ὁποία εἶναι διπλασία τῆς τρίτης. Πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς εἶναι ἑκάστη γωνία;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

Θέσις περισσοτέρων εὐθειῶν μεταξύ των. Πολύγωνα.

51. *Πολύγωνον εἶναι μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ εὐθείας γραμμάς.* Διὰ τοῦτο τὰ πολύγωνα καλοῦνται καὶ εὐθύγραμμα σχήματα. Πολύγωνα ἢ εὐθύγραμμα σχήματα εἶναι τὰ κατωτέρω.



Σχῆμα 59.

Αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι περιορίζουν τὰ πολύγωνα πανταχόθεν λέγονται πλευραὶ αὐτῶν. Αἱ γωνίαι αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένας πλευρὰς ἑνὸς πολυγώνου εἶναι αἱ γωνίαι αὐτοῦ. Καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν εἶναι αἱ κορυφαὶ τοῦ πολυγώνου.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου εἶναι πάντοτε ἴσος πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

Τὸ πολύγωνον ἀπαγγέλλεται μὲ τὰ γράμματα τῶν κορυφῶν του.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

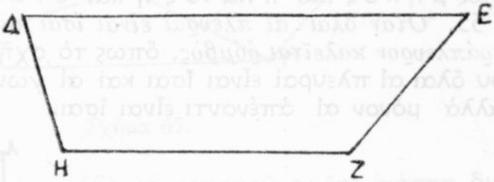
Διαγώνιος ἑνὸς πολυγώνου εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει δύο κορυφὰς αὐτοῦ μὴ διαδοχικάς. Π.χ. διαγώνιοι εἰς τὸ σχῆμα 59 εἶναι αἱ ΔΖ, ΕΗ.

Τὰ εὐθύγραμμα σχήματα ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν των λαμβάνουν καὶ ἰδιαίτερα ὀνόματα. Ὅταν τὸ σχῆμα ἔχῃ τρεῖς πλευράς, καλεῖται τρίγωνον, ὅταν ἔχῃ τέσσαρας τετράπλευρον καὶ ὅταν ἔχῃ περισσοτέρας καλεῖται πεντάγωνον, ἑξάγωνον, καὶ ἐν γένει πολύγωνον.

Περὶ τριγώνων ἐκάμαμε λόγον εἰς τὸ προηγούμενον κεφάλαιον. Μένει νὰ ἐξετάσωμεν τὰ τετράπλευρα καὶ ἐν γένει τὰ πολύγωνα.

Περὶ τετραπλεύρων. Εἴδη αὐτῶν.

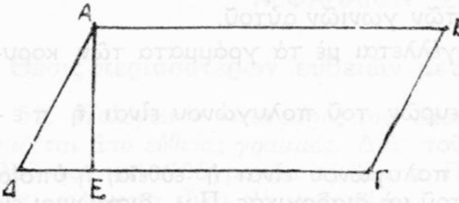
52. *Ὅταν αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον καλεῖται τραπέζιον.* Π.χ. τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ (σχ. 60), τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΔΕ κα ΗΖ εἶναι παράλληλοι, εἶναι τραπέζιον. Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ. Ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο βάσεων εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.



Σχῆμα 60.

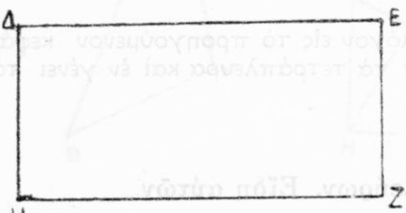
53. *Ὅταν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι, τότε τὸ τετράπλευρον καλεῖται πλάγιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς παραλληλόγραμμον.* Π.χ. τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ,

(σχ. 61), τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΓ, ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, εἶναι παραλληλόγραμμον. Β ά σ ι ς τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι μία τυχοῦσα πλευρά του, ὕ ψ ο ς δὲ ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν παράλληλόν της. Π.χ. ἂν ληφθῆ ὡς βάσις ἡ ΔΓ, τὸ ὕψος εἶναι ἡ ΑΕ. Τοῦ παραλληλογράμμου αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι Α κα Γ, Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι.



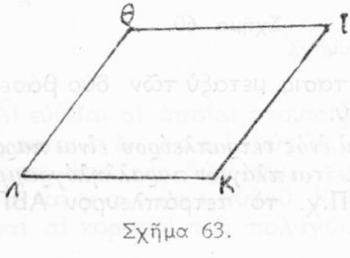
Σχῆμα 61.

54. *Ὅταν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ γωνίαι ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον καλεῖται ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἢ ἁπλῶς ὀρθογώνιον.* Π.χ. τὸ τετράπλευρον ΔΕΖΗ (σχ. 62), τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΔΕ καὶ ΗΖ, ΔΗ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι ὀρθαί, εἶναι ὀρθογώνιον. Β ά σ ι ς καὶ ὕ ψ ο ς τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τῆς τυχούσης γωνίας του. Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος καλοῦνται ἀντιστοίχως μ ῆ κ ο ς καὶ π λ ά τ ο ς ἢ καὶ δ ι α σ τ ά σ ε ι ς αὐτοῦ.



Σχῆμα 62.

55. *Ὅταν ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον καλεῖται ῥόμβος,* ὅπως τὸ σχῆμα ΘΙΚΛ, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι δὲν εἶναι ὀρθαί, ἀλλὰ μόνον αἱ ἀπέναντι εἶναι ἴσαι.



Σχῆμα 63.

Σχῆμα 64.

Βάσις τοῦ ρόμβου εἶναι τυχοῦσα πλευρά του καὶ ὕψος ἡ ἀπόστασις τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν παράλληλόν της.

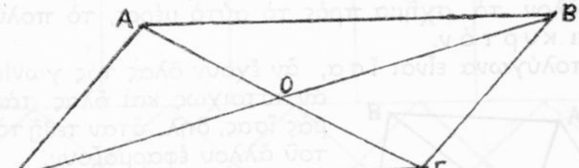
56. Τέλος, *ὅταν τὸ τετράπλευρον ἔχῃ ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς γωνίας ὀρθάς, καλεῖται τετράγωνον.* Βάσις τοῦ τετραγώνου καὶ ὕψος αὐτοῦ εἶναι δύο τυχοῦσαι προσκείμεναι πλευραί, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι (σχ. 64).

Τὸ πλάγιον παραλληλόγραμμον, τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ὁ ρόμβος καὶ τὸ τετράγωνον καλοῦνται γενικῶς παραλληλόγραμμα διότι ὅλα ἔχουν τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς (γραμμὰς) παραλλήλους.

Ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων.

57. Ἂν μετρήσωμεν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τῶν παραλληλογράμμων μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι. Καὶ ἂν θέσωμεν μίαν γωνίαν του ἐπὶ τῆς ἀπέναντί της, θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ αὐτήν. Ἄρα: *Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.*

58. Ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς ἕνα παραλ-



Σχῆμα 65.

ληλόγραμμον ΑΒΓΔ (σχ. 65), παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη διαγώνιος χωρίζει τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἐφαρμόζουν. Ἄρα: *Ἡ διαγώνιος παντὸς παραλληλογράμμου τέμνει τοῦτο εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.*

59. Ἂν μετρήσωμεν τὰ τμήματα ΑΟ καὶ ΟΓ παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι μεταξύ των ἴσα καθὼς καὶ τὰ ΟΒ=ΟΔ. Ἄρα: *Αἱ διαγώνιοι παντὸς παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται μεταξύ των. Ὅταν δὲ τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον, τότε αἱ διαγώνιοι εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

46. Νὰ κατασκευασθοῦν ὅλα τὰ τετράπλευρα εἰς τὸ τετράδιον καὶ ἀπὸ χαρτόνιον.

47. Ἡ μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι $\frac{4}{7}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἄλλας;

48. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 1,5 ὀρθ. Πόσον εἶναι κάθε μία γωνία αὐτοῦ;

49. Η περίμετρος τετραγώνου εἶναι 47,5 μ. Πόσον εἶναι κάθε μία πλευρά του;

50. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ὀρθογωνίου τεμνόμεναι σχηματίζουν γωνίας κατὰ κορυφήν. Ἂν ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι κάθε μία ἐκ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου;

Περὶ πολυγώνων· Ἰδιότητες αὐτῶν.

60. Εἴδομεν ὅτι πολύγωνον καλεῖται τὸ εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τεμνομένας ἀνὰ δύο. Ὅταν πᾶσα πλευρὰ πολυγώνου προεκτεινομένη ἀφήνει ὅλον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, τὸ πολύγωνον καλεῖται κ υ ρ τ ό ν.

Δύο πολύγωνα εἶναι ἴ σ α, ἂν ἔχουν ὅλας τὰς γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως καὶ ὅλας τὰς πλευρὰς ἴσας, δηλ. ὅταν τεθῇ τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν.

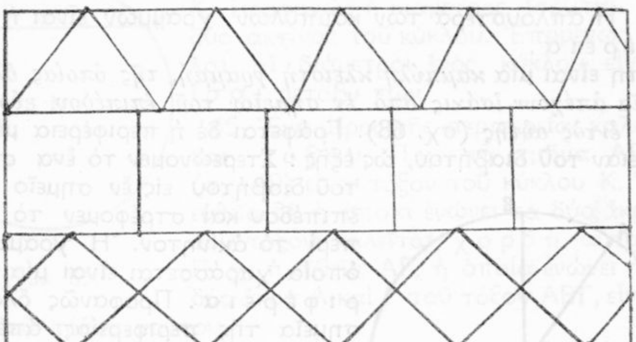
Σχῆμα 66.

61. Ἄ θ ρ ο ι σ μ α γ ω ν ι ῶ ν π ο λ υ γ ώ ν ο υ. Ἔστω τὸ κυρτὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ(σχ. 66). Ἂν λάβωμεν ἓν σημεῖον Ο ἐντὸς τοῦ πολυγώνου καὶ τὸ ἑνώσωμεν δι' εὐθειῶν μὲ ὅλας τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται πάντοτε τόσα τρίγωνα ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου. Ἐδῶ, ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου εἶναι 6, σχηματίζονται 6 τρίγωνα. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν 6 αὐτῶν τριγώνων εἶναι 2Χ6 ὀρθαί, ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἀλλὰ αἱ 12 ὀρθαὶ δὲν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ

πολυγώνου. Εἶναι ἐκτὸς αὐτῶν καὶ αἱ περὶ τὸ σημεῖον Ο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι, καθὼς γνωρίζομεν, ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 4 ὀρθάς. Τὰς 4 αὐτὰς ὀρθὰς γωνίας πρέπει ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰς 2X6, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα μόνον τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι 2X6—4=8 ὀρθαί. Ὁμοίως εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου. Ἄρα: *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου ἰσοῦται μὲ τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶναι ὁ διπλάσιος ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ πλὴν 4.*

62. Κανονικὰ πολύγωνα. Ἂν ἓν πολύγωνον ἔχῃ ὅλας του τὰς πλευρὰς ἴσας μεταξύ των καὶ ὅλας του τὰς γωνίας ἴσας λέγεται κανονικόν. Π.χ. τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὸν πολύγωνον μὲ 4 πλευράς. Ἐπίσης τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι κανονικὸν πολύγωνον μὲ 3 πλευράς.

Αἱ διάφοροι πλάκες διὰ τῶν ὁποίων στρώνονται δωμάτια



Σχῆμα 67.

ἢ αὐλαὶ ἔχουν σχῆμα κανονικῶν πολυγώνων. Δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν κανονικὰ τρίγωνα διὰ τὴν πλακόστρωσιν, τετράγωνα, ἑξάγωνα (σχ. 67) καὶ νὰ συνδυάσωμεν ἑξάγωνα μὲ τετράγωνα, χωρὶς εἰς τὰς γωνίας νὰ μένῃ κενόν. Διότι πάντοτε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν πολυγωνικῶν αὐτῶν πλακῶν, εἰς τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεώς των, ἰσοῦται μὲ 4 ὀρθάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

51. Μὲ πόσας ὀρθὰς ἰσοῦται τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, πενταγώνου, ὀκταγώνου ;

52. Πόσας πλευρὰς ἔχει ἕνα πολύγωνον, ἂν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἰσοῦται μὲ 8 ὀρθ, 14 ὀρθ, 20 ὀρθάς ;

53. Μὲ πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, δωδεκαγώνου ;

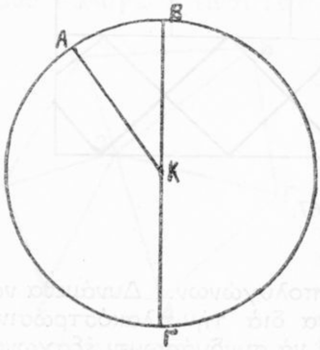
54. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 0,65 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος αὐτοῦ ; Καὶ ὅταν ἡ περίμετρος εἶναι 13,8 μ., πόσον εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η.

Περὶ κύκλου.

63. Ἡ ἁπλουστέρα τῶν καμπύλων γραμμῶν εἶναι ἡ περιφέρεια.

Αὔτη εἶναι μία *καμπύλη κλειστὴ γραμμή, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου εὑρισκόμενον ἐντὸς αὐτῆς* (σχ. 68). Γράφεται δὲ ἡ περιφέρεια μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, ὡς ἑξῆς : Στερεώνομεν τὸ ἕνα σκέλος τοῦ διαβήτου εἰς ἓν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου καὶ στρέφομεν τὸ ἄλλο περὶ τὸ ἀκίνητον. Ἡ γραμμὴ ἡ ὁποία χαράσσεται εἶναι μία περιφέρεια. Προφανῶς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, εἰς τὸ ὁποῖον ἐστηρίχθη τὸ ἕνα σκέλος τοῦ διαβήτου, διότι τὸ ἄνοιγμα αὐτὸ διετηρήθη τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τῆς γραφῆς τῆς περιφερείας. Ἡ περιφέρεια δύναται νὰ γραφῇ καὶ ἁπλούστερα μὲ τὴν βοήθειαν μιᾶς κλωστῆς. Στερεώνομεν τὸ ἕνα ἄκρον τῆς κλωστῆς εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Κ. Εἰς τὸ ἄλλο δένομεν ἕνα μολύβιον καὶ σύρομεν μὲ τεταμένην τὴν κλωστὴν καμπύλην γραμμήν, ἡ ὁποία εἶναι μία περιφέρεια. Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς γραφῆς τῆς περιφερείας λέγεται γραφὴ διὰ



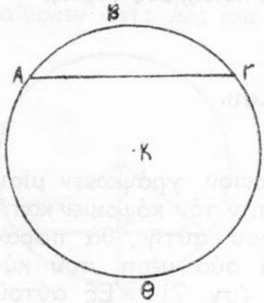
Σχῆμα 68.

συνεχοῦς κινήσεως καὶ γίνεται χρῆσις ὅταν πρόκειται νὰ γράψωμεν περιφερείας ἁλωνίων, αὐλῶν, κύκλων εἰς τὸ ἔδαφος.

64. *Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ τῆς περιφερείας καλεῖται κύκλος.* Π.χ. κύκλος εἶναι τὸ ἐπίπεδον σχῆμα 68.

Τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἀπέχουν ἰσάκις ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καλεῖται κέντρον τοῦ κύκλου ἢ τῆς περιφερείας. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς περιφερείας, δηλ. ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ τελειώνει εἰς τὴν περιφέρειαν, καλεῖται ἀκτίς. Π.χ. αἱ εὐθεῖαι ΚΑ καὶ ΚΒ εἶναι ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Κ.

Εἶνε φανερὸν ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ τὴν περιφέρειαν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τελειώνει εἰς τὴν περιφέρειαν, καλεῖται διάμετρος. Π.χ. ἡ εὐθεῖα ΒΓ εἶναι ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. Προφανῶς ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ δύο ἀκτῖνας τοῦ κύκλου. Ἑπομένως ὅλαι αἱ διάμετροι ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.



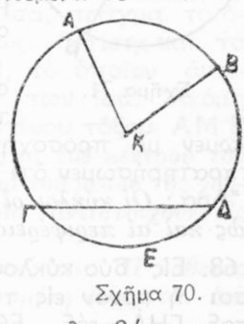
Σχῆμα 69.

65. Ἕνα μέρος τῆς περιφερείας καλεῖται τόξον. Π.χ. τὸ τμῆμα ΑΒΓ (σχ. 69) εἶναι τόξον τοῦ κύκλου Κ. Ἡ εὐθεῖα δὲ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο ἄκρα τοῦ τόξου καλεῖται χορδὴ αὐτοῦ. Π. χ. ἡ εὐθεῖα ΑΓ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο ἄκρα Α καὶ Γ τοῦ τόξου ΑΒΓ, εἶναι χορδὴ τοῦ τόξου τούτου.

Δύο τόξα ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσα, ὅταν τιθέμενα τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν.

Εἰς μίαν χορδὴν ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα. Π.χ. εἰς τὴν χορδὴν ΑΓ ἀντιστοιχοῦν τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΑΘΓ.

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο ἀκτίνων καὶ τοῦ τόξου αὐτῶν καλεῖται κυκλικὸς τομεύς. Π.χ. τὸ μέρος ΑΚΒ (σχ. 70), τὸ ὁποῖον περικλείεται μεταξὺ τῶν ἀκτίνων ΚΑ καί ΚΒ καὶ τοῦ τόξου των ΑΒ, εἶναι κυκλικὸς τομεύς.



Σχῆμα 70.

Τὸ μέρος δὲ τοῦ κύκλου τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς του καλεῖται κ υ κ λ ι κ ὸ ν τ μ ῆ μ α. Π.χ. τὸ μέρος ΓΔΕ (σχ. 70), τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τὸ τόξον ΓΕΑ καὶ τὴν χορδήν του ΓΔ, εἶναι ἕνα τμῆμα κύκλου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

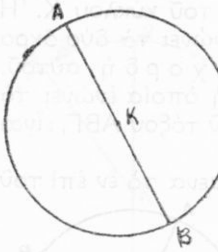
55. Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ ἀκτῖνα 0,025 μ., 3 δακτυλ., διὰ τοῦ διαβήτου καὶ μὲ ἀκτῖνα $\frac{1}{2}$ μ. μὲ τὴν κλωστήν.

56. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἀπὸ χαρτόνιον καὶ νὰ χαραχθοῦν ἐπ' αὐτοῦ ἀκτίς, διάμετρος, χορδή, κυκλικὲς τομεὺς καὶ κυκλικὸν τμῆμα.

57. Νὰ χωρισθῇ ἕνας κύκλος εἰς ἴσους κυκλικοὺς τομεῖς.

Ἰδιότητες τοῦ κύκλου.

66. Ἂν εἰς ἕνα κύκλον ἀπὸ χαρτόνιον γράψωμεν μίαν διάμετρον καὶ κατόπιν τὸν κόψωμεν κατὰ μῆκος τῆς διαμέτρου αὐτῆς, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ δύο μέρη τοῦ κύκλου ἐφαρμόζουν (σχ. 71) Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι : *Ἡ διάμετρος διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν καὶ τὸν κύκλον της εἰς δύο ἴσα μέρη* Τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας καλεῖται ἡμιπεριφέρεια καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου ἡμικύκλιον.

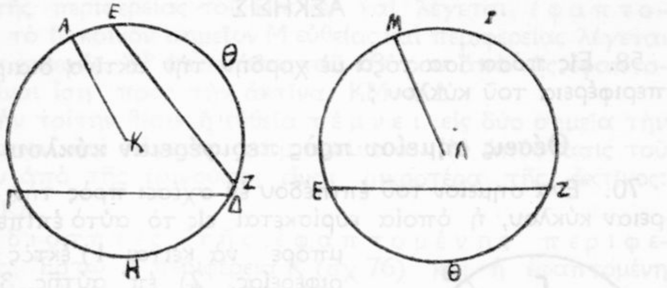


Σχῆμα 71.

67. Ἂν κατασκευάσωμεν δύο ἢ περισσοτέρους κύκλους (σχ. 72), μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα (ΚΑ=ΛΜ) καὶ ἀφοῦ τοὺς κόψωμεν μὲ προσοχὴν θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν καὶ ἀποτελοῦν ἕνα κύκλον.

Ἄρα : *Οἱ κύκλοι οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας εἶναι ἴσοι καθὼς καὶ αἱ περιφέρειαι αὐτῶν.*

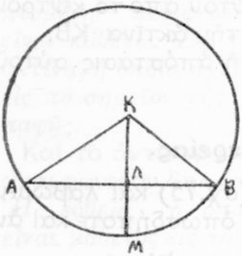
68. Εἰς δύο κύκλους Κ καὶ Λ (σχ. 72), οἱ ὁποῖοι εἶναι ἴσοι ἢ μόνον εἰς τὸν κύκλον Κ μετρῶμεν δύο ἴσα τόξα (τοξ. ΓΗΔ=τόξ. ΕΘΖ) καὶ φέρομεν τὰς χορδάς, κατόπιν



Σχῆμα 72.

ἀποκόπτομεν τὰ κυκλικὰ αὐτὰ τμήματα καὶ θέτομεν τὸ ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: *Εἰς ἴσα τόξα τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί.*



Σχῆμα 73

Ἐπίσης καὶ τὸ ἀντίστροφον, δηλ. ὅτι: *Εἰς ἴσας χορδὰς τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλων ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα.* Τὸ μικρότερον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μικρότερον καὶ τὸ μεγαλύτερον ἴσον πρὸς τὸ μεγαλύτερον τόξον.

69. Ἔστω ὁ κύκλος Κ καὶ ἡ χορδὴ ΑΒ. Ἂν φέρωμεν ἐκ τοῦ Κ τὴν κάθετον ΚΛ καὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ, τὸ τρίγωνον ΑΚΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς κάθετος τέμνει τὴν βάσιν του εἰς τὸ μέσον αὐτῆς (σχ.73.)

Ἄρα τὰ τμήματα ΑΛ καὶ ΛΒ εἶναι ἴσα, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον φαίνεται καὶ δι᾽ ἀμέσου μετρήσεως. Ἐπίσης καὶ τὰ τμήματα ΑΜ καὶ ΜΒ τοῦ τόξου ΑΜΒ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν ΑΒ, εἶναι μεταξύ των ἴσα. Ἀκόμη καὶ τὰ τμήματα ΑΜ′ καὶ Μ′Β τοῦ μεγαλυτέρου τόξου ΑΜ′Β εἶναι ἴσα μεταξύ των. Ἄρα: *Ἡ κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου πρὸς μίαν χορδὴν αὐτοῦ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς καὶ διχοτομεῖ τὰ δύο τόξα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδήν.*

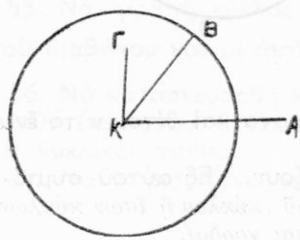
Συμπεραίνομεν ἀμέσως καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι: *Ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς κύκλου προεκτεινομένη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.*

ΑΣΚΗΣΙΣ

58. Εἰς πόσα ἴσα τόξα μὲ χορδὴν τὴν ἀκτῖνα διαιρεῖται ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ;

Θέσεις σημείου πρὸς περιφέρειαν κύκλου.

70. Ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἐν σχέσει πρὸς τὴν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, ἠμπορεῖ νὰ κεῖται 1) ἐκτὸς τῆς περιφερείας, 2) ἐπ' αὐτῆς, 3) ἐντὸς αὐτῆς (σχ.74).



Σχῆμα 74

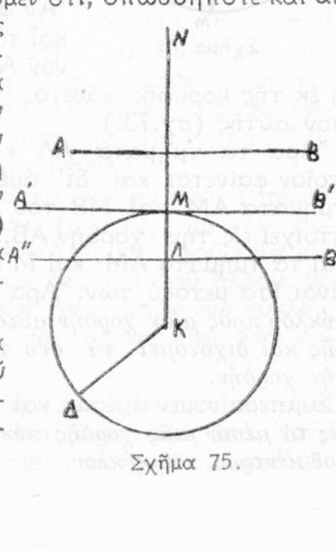
Ὅταν τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι προφανῶς μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος: ΚΑ $>$ ΚΒ.

Ὅταν κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας. ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΒ.

Ὅταν εὑρίσκεται ἐντὸς τῆς περιφερείας ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ΚΓ $<$ΚΒ.

Θέσεις εὐθείας καὶ περιφερείας.

71. Ἂν γράψωμεν μίαν περιφέρειαν Κ (σχ.75) καὶ λάβωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΒ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν τὴν τοποθετήσωμεν, αἱ θέσεις τῆς εὐθείας ἐν σχέσει πρὸς τὴν περιφέρειαν εἶναι τρεῖς: 1) Ἡ εὐθεῖα δὲν θὰ ἔχῃ κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (θέσις ΑΒ). 2) Ἡ εὐθεῖα θὰ ἔχῃ ἓν κοινὸν σημεῖον, τὸ Μ, μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (θέσις Α'Β') καὶ 3) Ἡ εὐθεῖα θὰ ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (Θέσις Α'' Β'').



Σχῆμα 75.

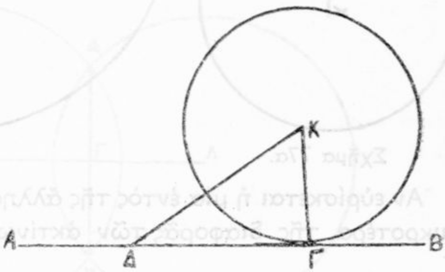
Εἰς τὴν πρώτην θέσιν ἡ εὐθεῖα εὑρίσκεται ὁλόκληρος ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπ' αὐτῆς εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος: ΚΝ $>$ ΚΔ.

Εἰς τὴν δευτέραν θέσιν ἡ εὐθεῖα ἐ φ ά π τ ε τ α ι εἰς ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ λέγεται ἐ φ α π τ ο μ έ ν η, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον Μ εὐθείας καὶ περιφερείας λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης εἶναι ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα: ΚΜ=ΚΔ.

Εἰς τὴν τρίτην θέσιν ἡ εὐθεῖα τ έ μ ν ε ι εἰς δύο σημεῖα τὴν περιφέρειαν καὶ λέγεται τ έ μ ν ο υ σ α. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς τεμνούσης εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος: ΚΛ < ΚΔ.

72. Ἰ δ ι ό τ η τ ε ς τ ῆ ς ἐ φ α π τ ο μ έ ν η ς π ε ρ ι φ ε ρ ε ί α ς. Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ (σχ. 76) καὶ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ εὐθεῖα ΑΒ.

Ἂν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΓ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον μὲ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ Γ τὴν κορυφὴν τοῦ γνώμονος ἀμέσως βεβαιούμεθα ὅτι ἡ γωνία ΚΓΑ εἶναι ὀρθή. Ἑπομένως: *Ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.*



Σχῆμα 76.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον εἶναι φανερόν, δηλ. ὅτι: *Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτῖνος εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον ἐκεῖνο.*

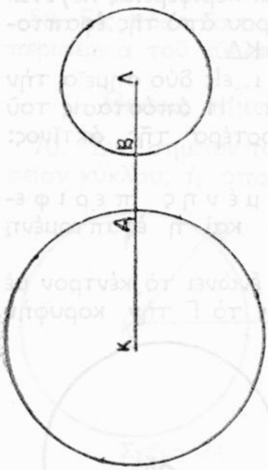
Φέρομεν ἐκτὸς τῆς καθέτου ΚΓ καὶ τὴν πλαγίαν ΚΔ ἢ καὶ ἄλλας τυχούσας πλαγίας. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ κάθετος εἶναι συντομωτέρα ὅλων αὐτῶν τῶν πλαγίων.

Ἑπομένως: *Ἐκ τῶν σημείων τῆς ἐφαπτομένης μικροτέραν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπέχει τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.*

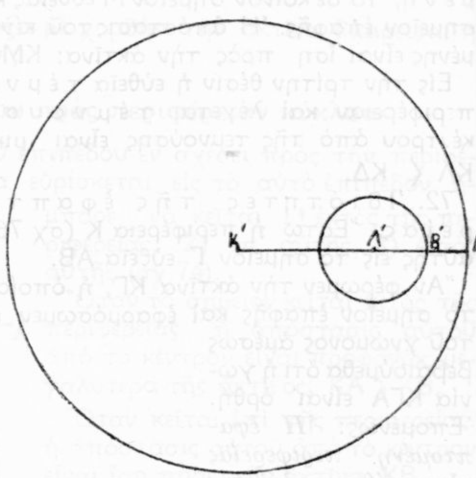
Θέσεις δύο περιφερειῶν μεταξύ των.

73. Εἶναι δυνατὸν δύο περιφέρειαι νὰ μὴ ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον μεταξύ των. Τότε ἡ μία θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης ὅπως αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (σχ. 77α) ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ὅπως αἱ περιφέρειαι Κ′ καὶ Λ′ (σχ.77β).

Ὅταν αἱ περιφέρειαι εὑρίσκωνται ἐκτὸς ἀλλήλων, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν, ἡ ὁποία καλεῖται διάκεντρος, εἶναι προφανῶς μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ἤτοι: ΚΛ $>$ ΚΑ $+$ ΒΛ.

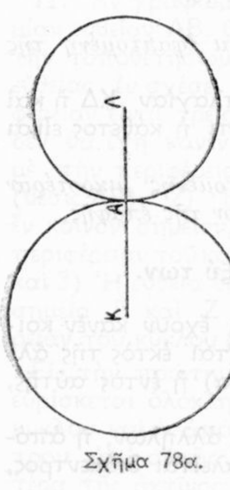


Σχῆμα 77α.

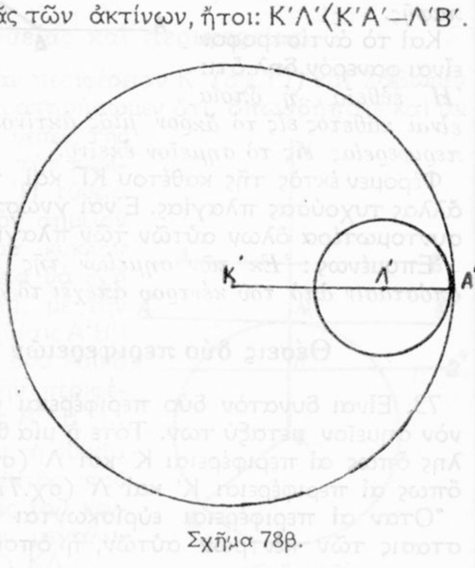


Σχῆμα 77β.

Ἂν εὑρίσκεται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, τότε ἡ διάκεντρος εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων, ἤτοι: Κ′Λ′ $<$ Κ′Α′ $-$ Λ′Β′.



Σχῆμα 78α.



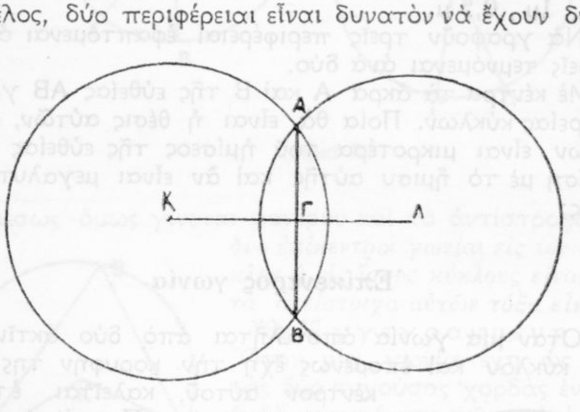
Σχῆμα 78β.

74. Εἶναι δυνατὸν ἐπίσης δύο περιφέρειαι νὰ ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον· τότε λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι ἐ φ ά π τ ο ν τ α ι μεταξύ των ἐξωτερικῶς, ὅπως αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (σχ.78α) ἢ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ὅπως αἱ περιφέρει Κ΄ καὶ Λ΄, (σχ 78β).

Ὅταν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς, ἡ διάκεντρος, καθὼς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων, ἤτοι: ΚΛ=ΚΑ+ΑΛ. Ἂν ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς, ἡ διάκεντρος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, ἤτοι: Κ΄Λ΄=Κ΄Α΄–Λ΄Α΄.

Τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν κεῖται πάντοτε ἐπὶ τῆς διακέντρου.

75. Τέλος, δύο περιφέρειαι εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουν δύο σημεῖα κοινὰ (περισσότερα δὲν ἠμποροῦν νὰ ἔχουν) ὁπότε αἱ δύο περιφέρειαι τ έ μ ν ο ν τ α ι, ὅπως αἱ περιφέρειαι Κ καὶ Λ (σχ. 79).



Σχῆμα 79.

Τότε ἡ διάκεντρος εἶναι μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ δύο κοινὰ σημεῖα, ἐπειδὴ εἶναι χορδὴ καὶ τοῦ κύκλου Κ καὶ τοῦ κύκλου Λ, καλεῖται κ ο ι ν ὴ χορδὴ τῶν δύο κύκλων. Ἄρα: Κοινὴ χορδὴ δύο κύκλων εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν.

Ἂν μετρήσωμεν τὰ τμήματα ΓΑ καὶ ΓΒ, παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ἴσα. Ἐπίσης, ἐὰν θέσωμεν καταλλήλως τὴν κορυφὴν τοῦ γνώμονος εἰς τὸ Γ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ διάκεντρος ΚΛ σχηματίζει γωνίας ὀρθὰς μὲ τὴν κοινὴν χορδὴν ΑΒ. Ἑπομένως εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἄρα: *Ἡ διάκεντρος δύο κύκλων τέμνει τὴν κοινὴν χορδήν των καθέτως καὶ εἰς τὸ μέσον.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

59. Η ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,75 μ. Ποῦ εὑρίσκονται τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον του 0,2 μ., 1μ., 0,75 μ., 0,749 μ.;

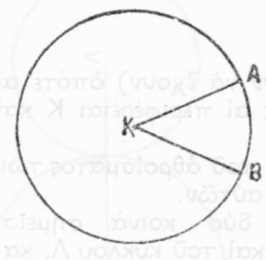
60. Ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κύκλου εἶναι 0,5 μ. Ποῦ κεῖται μία εὐθεῖα, ὅταν ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι 2 μ., 0,25 μ,, 1μ., 0,5 μ.

61. Νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι ἀνὰ δύο καὶ τρεῖς τεμνόμεναι ἀνὰ δύο.

62. Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς εὐθείας ΑΒ γράφομεν περιφερείας κύκλων. Ποία θὰ εἶναι ἡ θέσις αὐτῶν, ἂν ἡ ἀκτίς των εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας ΑΒ, ἂν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς καὶ ἂν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεος;

Ἐπίκεντρος γωνία.

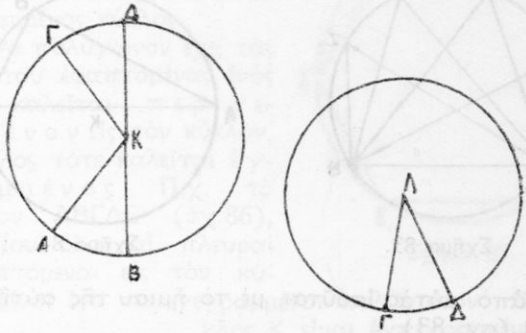
76. Ὅταν μία γωνία ἀποτελῆται ἀπὸ δύο ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ ἐπομένως ἔχῃ τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ, καλεῖται ἐ π ί κ ε ν τ ρ ο ς γ ω ν ί α. Π.χ. ἡ γωνία ΑΚΒ (σχ. 80) εἶναι μία γωνία ἐπίκεντρος, διότι ἔχει τὴν κορυφήν της Κ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς ἐπικέντρου γωνίας, καλεῖται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ν τ ό ξ ο ν αὐτῆς.



Σχῆμα 80.

77. Ἂν λάβωμεν δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ κύκλου Κ ἢ τῶν ἴσων κύκλων (οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα) Κ καὶ Λ (σχ. 81) καὶ ἂν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΚΒ καὶ ΛΓ, ΛΔ, σχηματίζονται τότε δύο κυκλικοὶ τομεῖς ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ. Ἂν τοὺς κόψωμεν καὶ θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἐφαρμόζουν. Τὸ Λ θὰ πέσῃ εἰς τὸ Κ, ὁπότε αἱ ἐπίκεντροι γω-

νίαι ΑΚΒ καὶ ΓΛΔ θὰ εἶναι ἴσαι. Ἄρα : *Ὅταν δύο τόξα εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἶναι ἴσα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.*



Σχῆμα 81.

Ἀμέσως ὅμως γίνεται φανερὸν καὶ τὸ ἀντίστροφον : *Ὅταν δύο ἐπίκεντροι γωνίαι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα εἶναι ἴσα.*

Σχῆμα 82.

78. Ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η γ ω ν ί α. Ὅταν μία γωνία ἔχῃ ὡς πλευρὰν της δύο τυχούσας χορδὰς ἑνὸς κύκλου ἡ δὲ κορυφή της κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τούτου, ἡ γωνία καλεῖται *ἐγγεγραμμένη γωνία* εἰς κύκλον. Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 82), ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰς τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΒΓ, τὴν δὲ κορυφήν της Β ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἶναι μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἰς τὸν κύκλον Κ.

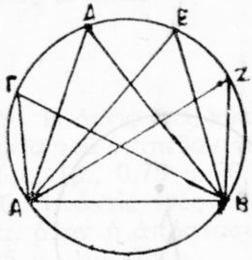
Ἂν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΑΚ καὶ ΓΚ, σχηματίζεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΓ, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον, εἰς τὸ ὁποῖον βαίνει καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη ΑΒΓ.

Ἂν συγκρίνωμεν τὰς δύο γωνίας, τὴν ἐπίκεντρον ΑΚΓ καὶ τὴν ἐγγεγραμμένην ΑΒΓ, θὰ ἴδωμεν ὅτι δύο γωνίαι ἴσαι πρὸς τὴν ἐγγεγραμμένην ἰσοῦνται πρὸς τὴν ἐπίκεντρον.

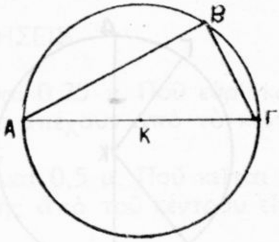
Ἄρα : *Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ αὐτὸ τόξον.*

Σ υ μ π ε ρ ά σ μ α τ α ἢ π ο ρ ί σ μ α τ α τῆς προτάσεως εἶναι

1) Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΑΓΒ, ΑΔΒ κλπ. αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΑΒ, εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι



Σχῆμα 83.



Σχῆμα 84.

κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου ΑΚΒ (σχ. 83).

2) Ἡ γωνία ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν ἰσοῦται μὲ μίαν ὀρθήν, ἐπειδὴ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΑΚΓ (σχ. 84). Ἀλλὰ ἡ ἐπίκεντρος ΑΚΓ εἶναι μία εὐθεῖα. Πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της δὲ σχηματίζονται γωνίαι ἴσαι πρὸς δύο ὀρθάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

63. Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἐπίκεντρος ἴση πρὸς 1 ὀρθ. Πόσον μέρος τῆς περιφερείας εἶναι τὸ ἀντίστοιχον τόξον;

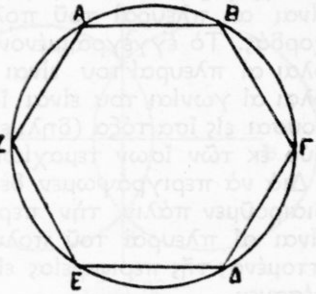
64. Ἂν μία ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἴση πρὸς 1 ὀρθήν, μὲ πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἡ ἐγγεγραμμένη, ἡ βαίνουσα εἰς τὸ αὐτὸ τόξον;

65. Ἂν μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{2}{7}$ τῆς ὀρθῆς, τί πρέπει νὰ κάμωμεν διὰ νὰ λάβωμεν τὴν διπλασίαν γωνίαν; καὶ τί διὰ τὴν τετραπλασίαν;

Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα πολύγωνα εἰς κύκλον.

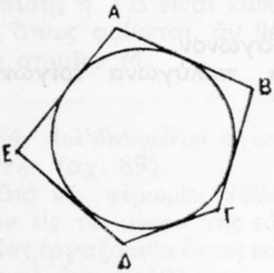
79. Ὅταν ἕνα πολύγωνον ἔχῃ τὰς πλευράς του ὡς χορδὰς ἑνὸς κύκλου τὰς δὲ κορυφάς του ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τὸ πολύγωνον καλεῖται ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο ν εἰς τὸν κύκλον, ὁ δὲ κύκλος τότε καλεῖται π ε ρ ι γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο ς. Π.χ. Τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 85), τοῦ ὁποίου αἱ πλευ-

ραὶ εἶναι ὅλαι χορδαὶ τοῦ κύκλου Κ ὅλαι δὲ αἱ κορυφαὶ του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἶναι ἕνα ἐγγεγραμμένον πολύγωνον. Ὁ δὲ κύκλος Κ εἶναι περιγεγραμμένος κύκλος.



Σχῆμα 85.

Ὅταν ἕνα πολύγωνον ἔχῃ τὰς πλευράς του ἐφαπτομένας ἑνὸς κύκλου, καλεῖται π ε ρ ι γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο ν εἰς τὸν κύκλον, ὁ δὲ κύκλος τότε καλεῖται ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο ς. Π.χ. τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ.86), τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι εἰς τὸν κύκλον Κ, εἶναι ἕνα περιγεγραμμένον πολύγωνον. Ὁ δὲ κύκλος Κ εἶναι ἐγγεγραμμένος.

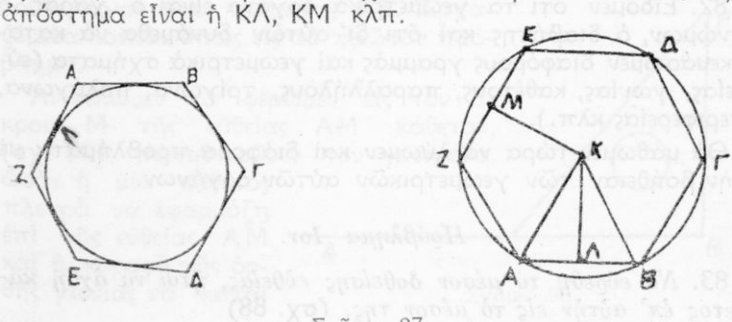


Σχῆμα 86.

80. Ὅταν τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν, εἶναι δυνατὸν πάντοτε νὰ ἐγγραφῇ ἢ νὰ περιγραφῇ εἰς κύκλον. Τὸ κέντρον Κ (σχ. 87) τοῦ κύκλου αὐτοῦ καλεῖται καὶ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἢ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Α κ τ ὶ ς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον Κ μὲ τὰς κορυφάς του, ὅπως π.χ. ἀκτὶς εἶναι ἡ ΚΑ, ἡ ΚΒ κλπ.

Ἀ π ό σ τ η μ α κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ κέντρου ἐπὶ τυχοῦσαν πλευράν του. Ὅπως π.χ. ἀπόστημα εἶναι ἡ ΚΛ, ΚΜ κλπ.



Σχῆμα 87.

81. Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν εἰς κύκλον ἕνα κανονικὸν πολύγωνον, χωρίζομεν τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου καὶ φέρομεν κατόπιν τὰς χορδάς. Τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον εἶναι κανονικόν, διότι ὅλαι αἱ πλευραί του εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων καὶ ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ἴσαι διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι βαίνουσαι εἰς ἴσα τόξα (δηλ. εἰς ὁλόκληρον τὴν περιφέρειαν πλὴν δύο ἐκ τῶν ἴσων τεμαχίων αὐτῆς).

Διὰ νὰ περιγράψωμεν δὲ κανονικὸν πολύγωνον εἰς κύκλον, διαιροῦμεν πάλιν τὴν περιφέρειαν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου καὶ κατόπιν φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τὴν διαιρέσαμεν.

Τὸ οὕτω γραφόμενον πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

66. Νὰ περιγραφῇ εἰς κύκλον τετράγωνον.
67. Νὰ περιγραφοῦν τὰ κανονικὰ πολύγωνα τρίγωνον καὶ ἑξάγωνον εἰς κύκλον.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Γεωμετρικὰ προβλήματα.

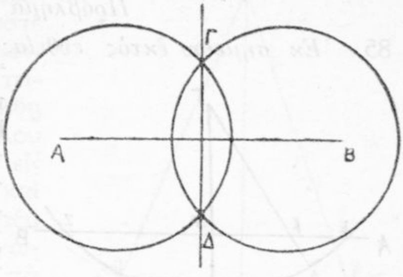
82. Εἴδομεν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ ὄργανα εἶναι ὁ χάραξ, ὁ γνώμων, ὁ διαβήτης καὶ ὅτι δι' αὐτῶν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν διαφόρους γραμμὰς καὶ γεωμετρικὰ σχήματα (εὐθείας, γωνίας, καθέτους, παραλλήλους, τρίγωνα, πολύγωνα, περιφερείας κλπ.).

Θὰ μάθωμεν τώρα νὰ λύωμεν καὶ διάφορα προβλήματα μὲ τὴν βοήθειαν τῶν γεωμετρικῶν αὐτῶν ὀργάνων.

Πρόβλημα 1ον.

83. *Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον δοθείσης εὐθείας, ἤτοι νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ μέσον της.* (σχ. 88)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ μέσον της, γράφομεν μὲ κέντρα τὰ ἄκρα τῆς ΑΒ περιφερείας κύκλων μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεος τῆς εὐθείας ΑΒ, Αἱ περιφέρειαι αὗται θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἡ εὐθεῖα ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι κοινὴ χορδή, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἡ ὁποία εἶναι διάκεντρος. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ κάθετος τέμνει τὴν βάσιν εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἄρα: ΑΜ=ΜΒ, ὅπως ἄλλωστε φαίνεται καὶ ἂν μετρήσωμεν τὰ δύο αὐτὰ τμήματα. Ἐπίσης ἡ ΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Μ, ὅπως φαίνεται, ἂν θέσωμεν καταλλήλως τὸν γνώμονα εἰς τὸ σημεῖον Μ.

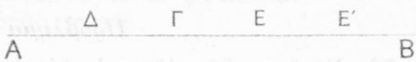


Σχῆμα 88.

Πρόβλημα 2ον.

84. *Διὰ δεδομένου σημείου εὐθείας τινὸς ν' ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτὴν* (σχ. 89).

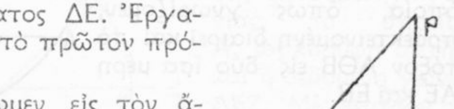
Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὸ 1ον πρόβλημα.



Σχῆμα 89.

Ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Γ, τότε μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν φέρομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΔΕ. Ἐργαζόμεθα λοιπὸν ὅπως εἰς τὸ πρῶτον πρόβλημα.

Ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν εἰς τὸν ἄκρον Μ τῆς εὐθείας ΑΜ κάθετον, (σχ. 90), τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρὰ νὰ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΜ καὶ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας νὰ κεῖται

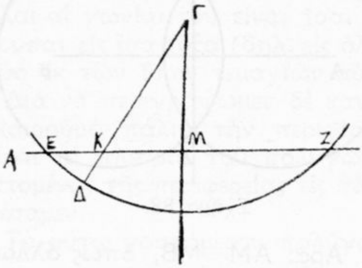


Σχῆμα 90.

εἰς τὸ Μ. Τότε ἂν χαράξωμεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου, γράφομεν τὴν ζητουμένην κάθετον.

Πρόβλημα 3ον.

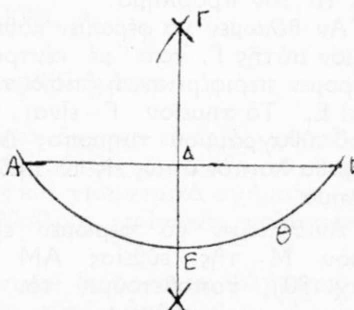
85. *Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας ν' ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν.* Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 91) καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς. Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ΓΔ γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Φέρομεν τότε τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ, ἡ ὁποία θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου Γ τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἡ ΕΖ εἶναι χορδή. Δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον ἐκ τοῦ Γ καὶ διὰ τοῦ γνώμονος ὡς ἑξῆς: Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα εἰς τὴν θέσιν Κ, ὥστε ἡ μία κάθετος πλευρά του νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ ἡ δὲ ἄλλη νὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Γ. Τότε ἂν χαράξωμεν γραμμὴν κατὰ μῆκος τῆς καθέτου ταύτης πλευρᾶς, γράφομεν τὴν ζητουμένην κάθετον ΓΜ.



Σχῆμα 91.

Πρόβλημα 4ον.

86. *Νὰ διαιρεθῇ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη:* Ἔστω τὸ τόξον ΑΘΒ (σχ. 92). Ἑνώνομεν τὰ ἄκρα του Α καὶ Β διὰ τῆς χορδῆς ΑΒ. Διαιροῦμεν τὴν χορδὴν εἰς δύο ἴσα μέρη διὰ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον ΓΔ, ἡ ὁποία, ὅπως γνωρίζομεν, προεκτεινομένη διαιρεῖ καὶ τὸ τόξον ΑΘΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΕ καὶ ΕΒ.



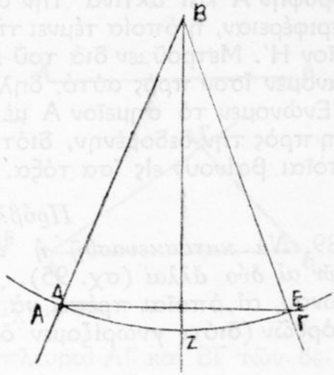
Σχῆμα 92.

Πρόβλημα 5ον.

87. *Νὰ διαιρεθῇ γωνία εἰς δύο ἴσα μέρη.* Ἔστω ἡ γωνία ΑΒΓ (σχ. 93). Μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ΒΔ φέρομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γω-

νίας εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Ε. Τοιουτοτρόπως ἡ δεδομένη γωνία ἔγινεν ἐπίκεντρος. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΕ καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, ὁπότε διχοτομεῖται καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΔΖΕ. Ἂν προεκτείνωμεν τὴν κάθετον, θὰ διέλθη διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου Β. Ἡ γωνία ΑΒΓ διηρέθη εἰς δύο ἴσας γωνίας, τὰς ΑΒΖ καὶ ΖΒΓ. Εἶναι δὲ ἴσαι μεταξύ των, διότι εἶναι ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς τὰ ἴσα μεταξύ των τόξα ΔΖ καὶ ΖΕ.

Ἡ εὐθεῖα ΖΒ καλεῖται δ ι χ ο τ ό μ ο ς τῆς γωνίας ΑΒΓ.



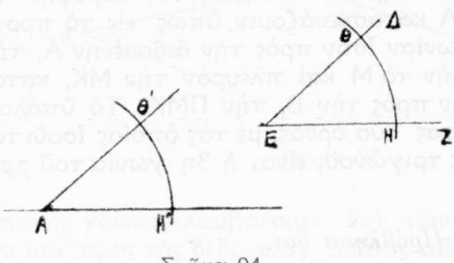
Σχῆμα 93.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

68. Νὰ διαιρεθῇ εὐθεῖα εἰς 4 ἴσα μέρη.
69. Νὰ διαιρεθῇ τόξον καὶ γωνία εἰς 4 ἴσα μέρη.
70. Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ὀκτάγωνον εἰς κύκλον.
71. Νὰ τριχοτομηθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία.

Πρόβλημα 6ον.

88. *Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς δεδομένην, ὅταν μᾶς δίδεται ἡ μία πλευρὰ καὶ ἡ κορυφή της.* Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ. 94) ὡς πλευρὰ τῆς ζητουμένης γωνίας, τὸ σημεῖον Α, ὡς κορυφὴ αὐτῆς, καὶ ἡ δεδομένη γωνία ΔΕΖ. Μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ΕΗ φέρομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς δεδομένης γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ. Τοιουτοτρόπως ἡ γωνία ΔΕΖ ἔγινεν ἐπίκεντρος, ἀντι-



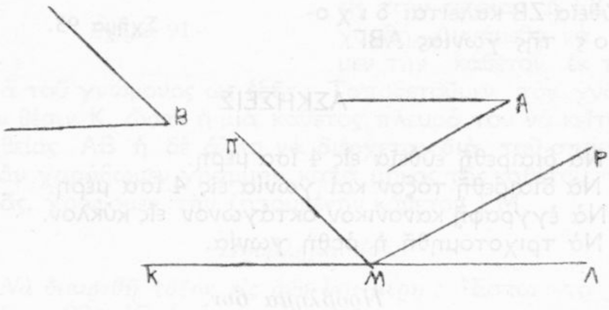
Σχῆμα 94.

στοιχοῦσα εἰς τὸ τόξον ΗΘ. Μὲ κέντρον τὴν δεδομένην κορυφὴν Α καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν (ἴσην πρὸς ΕΖ) γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δεδομένην πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον Η'. Μετροῦμεν διὰ τοῦ διαβήτου τὸ τόξον ΗΘ καὶ λαμβάνομεν ἴσον πρὸς αὐτό, δηλ. τὸ τόξον Η'Θ'.

Ἑνώνομεν τὸ σημεῖον Α μὲ τὸ Θ' καὶ ἡ γωνία Η'ΑΘ' εἶναι ἴση πρὸς τὴν δεδομένην, διότι εἶναι καὶ αἱ δύο ἐπίκεντροι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς ἴσα τόξα.

Πρόβλημα 7ον.

89. *Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τρίτη γωνία τριγώνου, ὅταν δοθοῦν αἱ δύο ἄλλαι* (σχ. 95). Ἔστωσαν αἱ δύο γωνίαι τριγώνου, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2 ὀρθῶν (διότι γνωρίζομεν ὅτι καὶ αἱ τρεῖς γωνίαι ἑνὸς τρι-



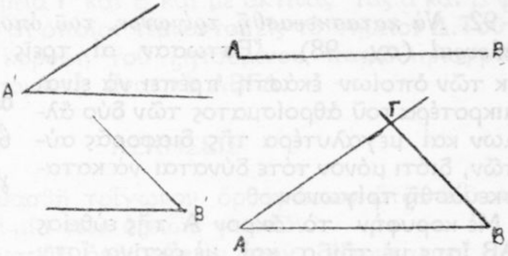
Σχῆμα 95.

γώνου ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρὸς 2 ὀρθάς). Λαμβάνομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΚΛ καὶ ἓν σημεῖον αὐτῆς Μ. Μὲ κορυφὴν τὸ Μ καὶ πλευρὰν τὴν ΜΛ κατασκευάζομεν, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δεδομένην Α, τὴν ΡΜΛ. Ἐπίσης μὲ κορυφὴν τὸ Μ καὶ πλευρὰν τὴν ΜΚ, κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Β, τὴν ΠΜΚ. Τὸ ὑπόλοιπον μέρος ΠΜΡ, ἀπὸ τὰς δύο ὀρθάς, μὲ τὰς ὁποίας ἰσοῦνται αἱ τρεῖς γωνίαι παντὸς τριγώνου, εἶναι ἡ 3η γωνία τοῦ τριγώνου.

Πρόβλημα 8ον.

90. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται ἡ μία πλευρὰ καὶ αἱ προσκείμεναι γωνίαι.*

Ἔστω ἡ πλευρὰ ΑΒ (σχ. 96) τοῦ ζητουμένου τριγώνου καὶ αἱ δύο γωνίαι αὐτοῦ Α′ καὶ Β′, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Α′. Κατόπιν μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν Β′.

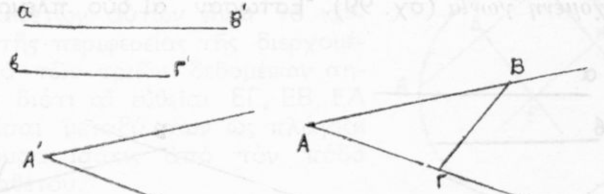


Σχῆμα 96.

Τὸ σημεῖον Γ, ὅπου τέμνονται αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ τῶν δεδομένων γωνιῶν εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἑπομένως εἶναι τὸ ΑΒΓ.

Πρόβλημα 9ον.

91. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ὑπ᾿ αὐτῶν περιεχομένη γωνία.* Ἔστωσαν αἱ δύο πλευραὶ αΒ′ καὶ βΓ′ καὶ ἡ γωνία Α′. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α τῆς



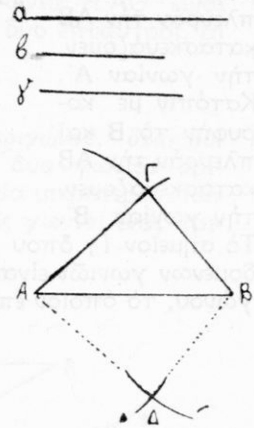
Σχῆμα 97.

δεδομένης γωνίας λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν της τμήματα ἴσα πρὸς τὰς δεδομένας εὐθείας αΒ′ καὶ βΓ′, τὰ ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἑνώνομεν τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἔχομεν τοιουτοτρόπως τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΑΒΓ.

Πρόβλημα 10ον.

92. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ* (σχ. 98). Ἔστωσαν αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, διότι μόνον τότε δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.

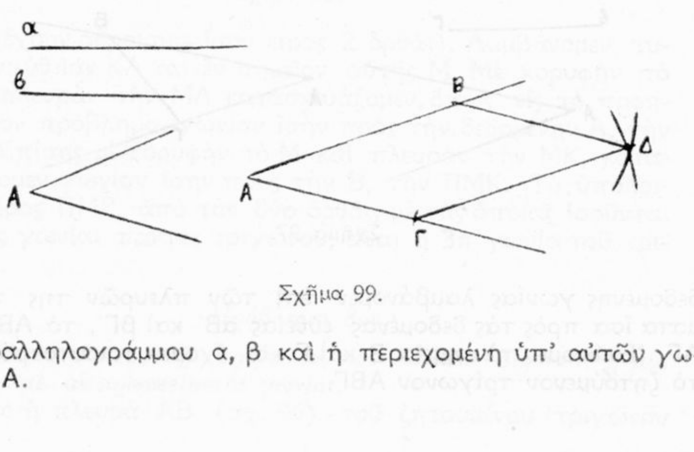
Μὲ κορυφὴν τὸ ἄκρον Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἴσης μὲ τὴν α, καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν β γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ἐπίσης μὲ κορυφὴν τὸ Β καὶ ἀκτῖνα γ φέρομεν ἄλλην περιφέρειαν κύκλου. Αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἂν ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα μὲ τὰ Α καὶ Β, θὰ ἔχωμεν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχῆμα 98.

Πρόβλημα 11ον.

93. *Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, ὅταν δίδωνται δύο πλευραί του καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία* (σχ. 99). Ἔστωσαν αἱ δύο πλευραὶ τοῦ



Σχῆμα 99.

παραλληλογράμμου α, β καὶ ἡ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία Α.

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς δεδομένης γωνίας Α λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσα πρὸς τὰς πλευρὰς α, β.

Μὲ κέντρα τὰ σημεῖα Γ καὶ Β καὶ μὲ ἀκτῖνας τὰς α και β φέρομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τοῦτο εἶναι ἡ τετάρτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἑπομένως εἶναι τὸ ΑΒΓΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ὀρθογώνιον ὅταν δίδεται, ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν.

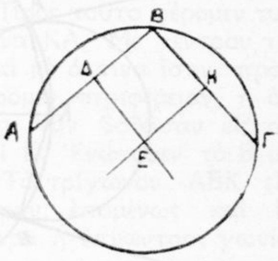
73. Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον ὅταν δίδωνται αἱ δύο κάθετοι πλευραί.

74. Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν δίδωνται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν καθέτων πλευρῶν.

75. Νὰ κατασκευασθῆ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ὅταν δίδωνται ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του.

Πρόβλημα 12ον.

94. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου διερχομένη διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας* (σχ. 100). Ἔστωσαν τὰ τρία σημεῖα Α,Β,Γ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ,ΒΓ καὶ τὰς καθέτους εἰς τὰ μέσα αὐτῶν ΔΕ καὶ ΗΕ. Τὸ σημεῖον Ε τῆς τομῆς τῶν καθέτων αὐτῶν εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς διερχομένης διὰ τῶν τριῶν δεδομένων σημείων, διότι αἱ εὐθεῖαι ΕΓ, ΕΒ, ΕΑ εἶναι ἴσαι μεταξύ των ὡς πλάγιαι ἀπέχουσαι ἰσάκις ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.



Σχῆμα 100.

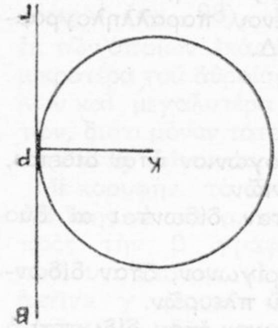
Τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ πρόβλημα :

Νὰ περιγραφῇ κύκλος εἰς τρίγωνον (π.χ. εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ).

Πρόβλημα 13ον.

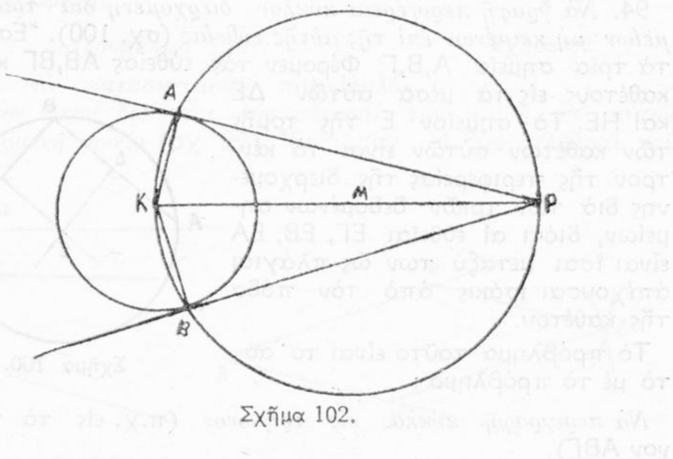
95. *Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δεδομένον κύκλον.*

1ον. Τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ δεδομένου κύκλου Κ (σχ.101). Τότε φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΡ καὶ εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς Ρ φέρομεν τὴν κάθετον ΒΡΓ. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.



Σχῆμα 101.

2ον. Ὅταν τὸ σημεῖον Ρ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Κ (σχ. 102). Τότε φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΡ. Μὲ κέντρον τὸ μέσον αὐτῆς Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΚ ἢ ΜΡ φέρομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ δεδομένου κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἑνώνομεν τὸ Ρ μὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΡΑ καὶ ΡΒ εἶναι ἐφαπτόμεναι, ἐκ τοῦ δεδομένου σημείου Ρ εἰς τὸν κύκλον Κ. Διότι ἑκάστη εἶναι κάθετος πρὸς τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΚΒ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΚΑΡ καὶ ΚΒΡ εἶναι ὀρθαὶ ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν μεγάλον κύκλον καὶ αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ ἡμιπεριφερείας.



Σχῆμα 102.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

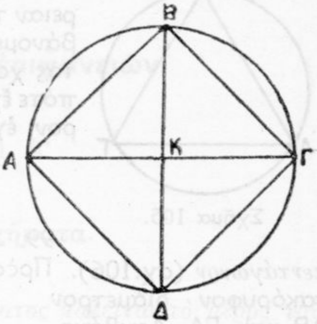
76. Νὰ περιγραφῆ κύκλος εἰς τρίγωνον.

77. Πόσας ἐφαπτομένας εἰς κύκλο , παραλλήλους πρὸς δεδομένην εὐθεῖαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Πρόβλημα 1ον.

96. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον τετράγωνον.* Ἔστω ὁ κύκλος Κ (σχ. 103). Φέρομεν δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των καὶ ἑνώνομεν τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Β, Γ, Δ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, διότι ἔχει τὰς τέσσαρας πλευράς του ἴσας ὡς χορδὰς τόξων ἴσων πρὸς τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας καὶ ὅλας τὰς γωνίας ὀρθὰς ὡς ἐγγεγραμμένας, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς ἡμιπεριφέρειαν.



Σχῆμα 103.

Πρόβλημα 2ον.

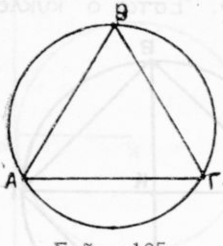
97. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν ἑξάγωνον* (σχ.104). Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 6 ἴσα τόξα καὶ νὰ φέρωμεν τὰς χορδάς των. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τυχοῦσαν ἀκτῖνα ΚΑ. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν ΚΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ κόψῃ τὴν δοθεῖσαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἑνώνομεν τὸ Β μὲ τὸ Α καὶ Κ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΚ εἶναι ἰσόπλευρον, ἑπομένως καὶ ἰσογώνιον. Ἄρα ἡ ἐπίκεντρος γωνία

Σχῆμα 104.

ΑΚΒ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς ἢ τὸ $\frac{1}{6}$ τῶν 4 ὀρθῶν. Καὶ τὸ τόξον ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΚΒ, εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰς 4 ὀρθὰς δηλ. τὴν περιφέρειαν. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι ἂν μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν, αὐτὴ θὰ διαιρεθῇ ἀκριβῶς εἰς 6 ἴσα τόξα. Ἂν φέρωμεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων, κατασκευάζομεν τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον.

Πρόβλημα 3ον.

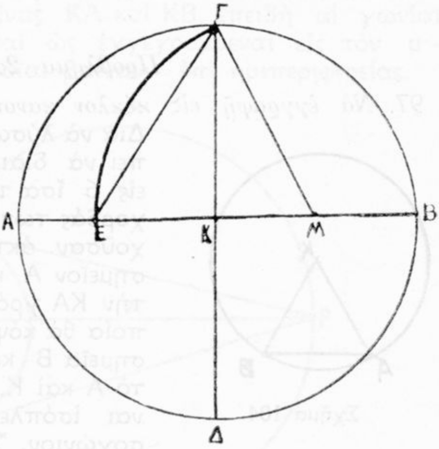
98. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν (ἰσόπλευρον) τρίγωνον* (σχ. 105) Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τοῦ προηγουμένου τρόπου τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου Κ εἰς 6 ἴσα μέρη. Λαμβάνομεν τὰ τόξα ἀνὰ δύο καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν νέων αὐτῶν τόξων, ὁπότε ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἰσόπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ.



Σχῆμα 105.

Πρόβλημα 4ον.

99. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν πεντάγωνον* (σχ.106). Πρὸς τοῦτο φέρομεν ὁριζοντίαν καὶ κατακόρυφον διάμετρον ΑΒ καὶ ΓΔ. Λαμβάνομεν τὸ μέσον Μ τῆς ἀκτῖνος ΚΒ. Μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΜΓ φέρομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία θὰ κόψῃ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Μὲ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς τὴν ΓΕ διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν ΑΒΓΔ, ἡ ὁποία θὰ διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα τόξα. Φέρομεν τὰς χορδὰς τῶν τόξων αὐτῶν καὶ ἔχομεν τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ἐγγεγραμμένον.



Σχῆμα 106.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

78. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν δωδεκάγωνον.
79. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν δεκάγωνον.

(Θὰ κάμωμεν τὴν αὐτὴν κατασκευὴν μὲ τὴν τοῦ πενταγώνου. Ἡ ΕΚ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρά).

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

Μέτρησις τῶν ἐπιφανειῶν

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Εὐθύγραμμα σχήματα.

100. *Ἐπιφάνεια τοῦ ἐπιπέδου σχήματος καλεῖται τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιορίζεται ἀπὸ τὴν περίμετρον τοῦ σχήματος.*

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, συγκρίνομεν αὐτὴν πρὸς ἕνα ὡρισμένον τμῆμα ἐπιφανείας, τὸ ὁποῖον καλεῖται μονὰς ἐπιφανείας. Διὰ τῆς μετρήσεως εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσας μονάδας καὶ μέρη τῆς μονάδος ἀποτελεῖται ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια.

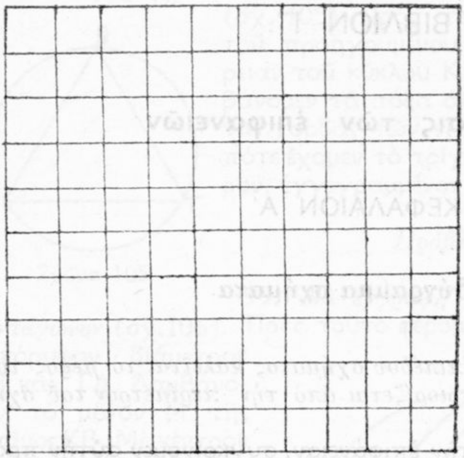
Ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς μετρήσεως τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὁποῖος τὴν παριστάνει, λέγεται ἐ μ β α δ ὸ ν τῆς ἐπιφανείας.

Μονὰς μετρήσεως τῆς ἐπιφανείας εἶναι τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον* (μ.^{2}) Τοῦτο εἶναι ἕνα τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς 1 μ.

Δευτερεύουσαι μονάδες μετρήσεως ἐπιφανείας εἶναι τὰ τετράγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς τὰ διάφορα πολλαπλάσια καὶ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μ. Ταῦτα εἶναι:

Τὸ τετρ.	μυριάμετρον	(μ.μ^2),	τετράγωνον	πλευρᾶς	1μ. μ.=	100000000 μ^2
» »	χιλιόμετρον	(χ.μ^2),	»	»	1χ. μ.=	1000000 μ^2
» »	ἑκατόμετρον	(ἑ. μ^2)	»	»	1ἑ. μ.=	10000 μ^2
» »	δεκάμετρον	(δ.μ^2),	»	»	1δ. μ.=	100 μ^2
» »	μέτρον	(μ^2),	»	»	1 μ.=	1 μ^2
ἡ »	παλάμη	(π^2),	»	»	0,1 μ.=	0, 01 μ^2
ὁ »	δάκτυλος	(δ^2),	»	»	0,01 μ.=	0,0001 μ^2
ἡ »	γραμμὴ	(γ^2),	»	»	0,001 μ.=	0,000001 μ^2

Ἂν σχεδιάσωμεν ἓν τετράγωνον μὲ πλευρὰς ἑνὸς μέτρου καὶ διαιρέσωμεν τὰς πλευράς του εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ ἑνώσωμεν τὰ σημεῖα τῆς τομῆς, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 107, θὰ σχηματισθοῦν 100 μικρὰ τετράγωνα πλευρᾶς 0,1 μ, ἢ 1 π. Βλέπομεν οὕτως ὅτι τὸ τ.μ. ἰσοῦται μὲ 100 τ.π. Ὁμοίως ἡ τ.π. ἰσοῦται μὲ 100 τ.δ. καὶ ο.κ. Ὥστε ἑκάστη μονὰς ἐπιφανείας εἶναι 100 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀμέσως κατωτέρας της.



Σχῆμα 107.

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἐπιφάνειαν, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ κατόπιν ἀνὰ δύο τὰ δεκαδικὰ ψηφία μὲ τὸ ὄνομα τῆς τάξεως τῶν μονάδων τὴν ὁποίαν παριστάνουν. Πχ. ὁ ἀριθμὸς 23,01913 τ.μ. διαβάζεται 23 τ.μ. 01 τ.π. 91 τ. δ. καὶ 30 τ. γ. Ἂν θέλωμεν νὰ γράψωμεν ἕνα ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ἐπιφάνειαν, γράφομεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον μέρος καὶ κατόπιν τὸ δεκαδικόν. Προσέχομεν ὅμως νὰ παραστήσωμεν τὰς μονάδας ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως μὲ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα ὅταν δὲν ὑπάρχουν τὰ ἀντικαθιστῶμεν μὲ μηδενικά. Πχ. ὁ ἀριθμὸς 45 τ.μ. 86 τ.δ. 5 τ.γ. γράφεται καὶ 45,008605 μ.

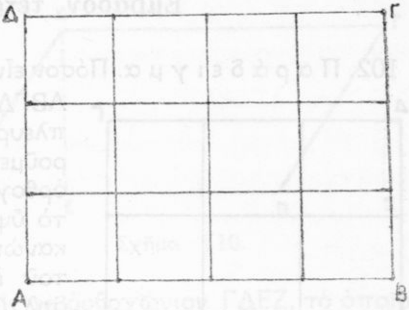
Παλαιοτέρα μονὰς μετρήσεως ἐπιφανείας εἶναι ὁ *τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς*, ἓν τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται μὲ 1 τεκτονικὸν πῆχυν ἢ $\frac{3}{4}$ μ. Ἑπομένως ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς ἰσοῦται μὲ $\frac{9}{16}$ μ.

Ἡ μονὰς αὐτὴ χρησιμεύει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν οἰκοπέδων.

Ἐπίσης τὸ σ τ ρ έ μ μ α , τὸ ὁποῖον εἶναι ἐπιφάνεια 1000 τ.μ. καὶ τὸ ὁποῖον χρησιμεύει διὰ τὴν μέτρησιν τῶν ἀγρῶν.

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

101. Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ. 108), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 4 μ. καὶ τὸ ὕψος ΒΓ εἶναι 3 μ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν του, πρέπει νὰ λάβωμεν τετ. μέτρα καὶ νὰ τὰ ἐφαρμόσωμεν εἰς τὸ ὀρθογώνιον ὥστε νὰ καλύψουν ὅλην τὴν ἐπιφάνειάν του. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι μᾶς χρειάζονται 12 μ². Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ ὀρθογωνίου τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν 4 μ. καὶ ὕψος 3μ. ἰσοῦται μὲ 4Χ3=12μ².



Σχῆμα 108.

Ἄρα: *Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εὑρίσκεται ἂν πολ/μεν τὴν βάσιν ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.* Ὁ κανὼν αὐτὸς ἰσχύει καὶ δι' οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

Ἂν π.χ. ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 3,75 μ. καὶ τὸ ὕψος του 1,25μ., τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 375 δ. ἐπὶ 125 δ.=46875 δ² ἢ 4, 6875 μ².

Ἂν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ γράμματος Ε, τὴν βάσιν διὰ τοῦ Β καὶ τὸ ὕψος διὰ τοῦ Υ, ἔχομεν τὸν τύπον Ε=Β. Υ, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς ὀρθογωνίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

80. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 12,9 μ. καὶ τὸ ὕψος 9,8 μ.

81. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 63, 65 μ², ἡ δὲ βάσις 9,5 μ.;

82. Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου ἀγροῦ εἶναι τὰ 5)4 τοῦ πλάτους του, τὸ ὁποῖον εἶναι 44 μ. Πόσον στοιχίζει ὁ ἀγρὸς ἂν τὸ τετραγ. μέτρον ἔχῃ 23,50 δρχ.;

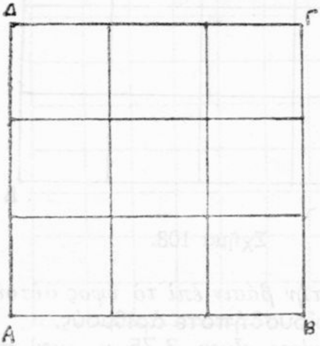
83. Ἡ ἡμιπερίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 21 μ., τὸ δὲ πλάτος αὐτοῦ εἶναι τὰ 3)4 τοῦ μήκους. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν;

84. Ἕνας κῆπος σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει ἐπιφάνειαν 3968 μ². Τὸ πλάτος του εἶναι 124μ. Πόσα δένδρα εἶναι δυνατὸν νὰ φυτευθοῦν εἰς τὴν περίμετρον τοῦ κήπου, ἂν κάθε δένδρον ἀπέχῃ τοῦ ἄλλου 2 μ.;

85. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 49 μ. Τὸ δὲ μῆκος αὐτοῦ εἶναι τὰ 3)4 τοῦ πλάτους. Πόσα τετραγωνικὰ εἶναι τὸ ἐμβαδόν;

Ἐμβαδὸν τετραγώνου.

102. Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου ΑΒΓΔ (σχ. 109), τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι 3 μ.; Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον μὲ βάσιν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος του, ἑπομένως ὁ αὐτὸς κανὼν ἰσχύει διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου δηλ. (Ε=Β. Υ). Ε=3.3=3^2=9 μ^2.



Σχῆμα 109.

Ἂν παραστήσωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου μὲ τὸ α, ἔχομεν τὸν τύπον Ε=α^2, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τετραγώνου.

Ἂν θέλωμεν ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου νὰ εὕρωμεν τὴν πλευράν του, ἀρκεῖ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνι ἡν ῥίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ, ἤτοι: $\alpha = \sqrt{E}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86. Ἡ πλευρὰ μιᾶς τετραγωνικῆς αὐλῆς εἶναι 12,5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

87. Ἡ περίμετρος ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 45 μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;

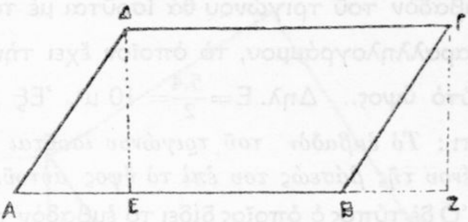
88. Τετραγωνικὸς ἀγρὸς ἔχει περίμετρον 3500 μ. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ἡ καλλιέργεια του, ἂν τὸ τετραγ. μέτρον στοιχίζῃ 9,5 δρχμ.;

89. Κῆπος τετραγωνικὸς ἔχει ἐμβαδὸν 2182,25 μ^2. Πόσον θὰ στοιχίσῃ ὁ τοῖχος μὲ τὸν ὁποῖον θὰ τὸν περιφράξωμεν, ἂν τὸ μέτρον αὐτοῦ στοιχίζῃ 18,50 δρχμ.;

90. Ἑνὸς τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 600 μ^2. Πόσα ἁπλᾶ μέτρα εἶναι ἡ πλευρά του; (κατὰ προσέγγισιν 1)100).

Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου.

103. Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (σχ.110), τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ὕψος ΔΕ εἶναι 3 μ.; Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν κόψωμεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΔ καὶ τὸ τοποθετήσωμεν οὕτως ὥστε ἡ ΔΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ, τότε θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΒΓΖ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον



Σχῆμα 110.

ΑΒΓΔ μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ παραλληλόγραμμον. Ἰσχύει ἑπομένως καὶ ἐδῶ ὁ κανὼν τοῦ ἐμβαδοῦ ὀρθογωνίου. Δηλ. Ε=5. 3=15μ². Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ὁ τύπος δὲ ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου εἶναι: Ε= Β.Υ.

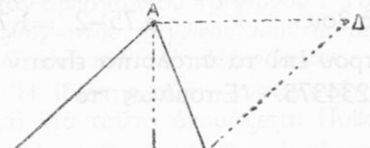
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

91. Ἡ βάσις ἑνὸς παραλληλογράμμου εἶναι 12,6 μ. Ἡ δὲ κάθετος ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν βάσιν καὶ τὴν ἀπέναντι παράλληλον 4,7 μ. Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδόν;

92. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς οἰκοπέδου σχήματος παραλληλογράμμου εἶναι 845 μ², ἡ δὲ μία πλευρά του 60μ. Πόσον εἶναι ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευράν;

93. Ἕνας ἀγρὸς σχήματος παραλληλογράμμου ἔχει ἐμβαδὸν 6 στρέμματα. Ἡ βάσις του εἶναι 350 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

Ἐμβαδὸν τριγώνου.



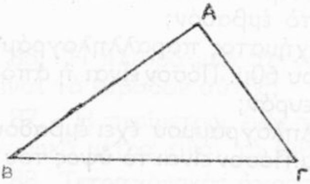
Σχῆμα 111.

104. Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 111) τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΒΓ=5 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΕ=4μ.; Παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ἐκ τοῦ σημείου Α φέρωμεν παράλλη-

λον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον εἶναι διπλάσιον τοῦ δεδομένου τριγώνου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.. Δηλ. $E=\frac{5.4}{2}=10$ μ². Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ὁ δὲ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι $E=\frac{B.Y.}{2}$

105. Ὅταν δὲν δίδεται τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου ἀλλὰ αἱ τρεῖς πλευραί του, τότε εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ ἥμισυ τῆς περιμέτρου ἀφαιροῦμεν διαδοχικῶς ἑκάστην τῶν πλευρῶν. Πολ/μεν κατόπιν τὴν ἡμιπερίμετρον ἐπὶ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον, τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸ δεύτερον καὶ τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸ τρίτον ὑπόλοιπον. Τοῦ τελικοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἡ ὁποία εἶναι καὶ τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.



Σχῆμα 112.

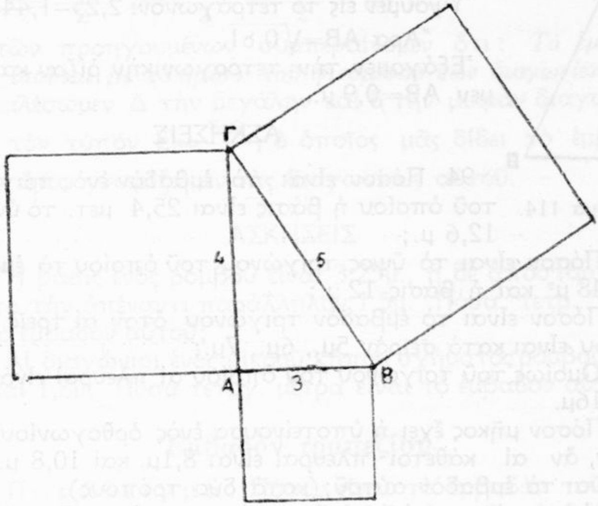
Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου πλευραὶ εἶναι ΑΒ=3 μ., ΒΓ=2,5μ. καὶ ΓΑ=2μ.; Ἡ ἡμιπερίμετρος $\frac{3+2.5+2}{2}=3{,}75$μ.

τὸ 1ον ὑπόλοιπον: 3,75–3 =0,75
τὸ 2ον » : 3,75–2,5=1,25
τὸ 3ον » : 3,75–2 =1,75

Τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου ἐπὶ τὰ ὑπόλοιπα εἶναι: 3,75. 0,75. 1,25. 1,75=6, 15234375. Ἑπομένως τὸ $E=\sqrt{6{,}15234375}=2{,}48$ μ².

106. ***Πυθαγόρειος ἰδιότης.*** Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον

ΑΒΓ (σχ. 113), τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ=5μ., ἡ κάθετος ΑΓ=4 μ.καὶ ἡ ΑΒ=3μ. Ἂν κατασκευάσωμεν τετράγωνον εἰς τὴν ὑποτείνουσαν καὶ εἰς τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ τριγώ-

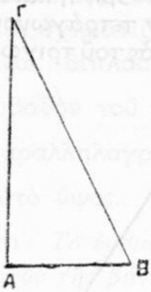


Σχῆμα 113.

νου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι 25μ², τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς μιᾶς ἐκ τῶν καθέτων εἶναι 16μ² καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης 9μ². Ἂν προσθέσωμεν τὰ τετράγωνα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν 16+9, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν 25 τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης. Δηλ. $4^2+3^2=5^2$ ἢ γενικῶς $ΑΒ^2+ΑΓ^2=ΒΓ^2$. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν τὴν σπουδαιοτάτην ἰδιότητα ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον : *Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του.*

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀνεκαλύφθη πρῶτον ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου καὶ διὰ τοῦτο ὀνομάζεται Πυθαγόρειος ἰδιότης.

Δι' αὐτῆς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου ὅταν μᾶς δίδωνται αἱ δύο ἄλλαι πλευραί. Πχ. πόσον εἶναι ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ ὀρθογωνίου τρι-


Σχῆμα 114.

γώνου ΑΒΓ (σχ. 114) ἂν ἡ ΒΓ=1,5 μ. καὶ ἡ ΑΓ=1,2 μ.; Συμφώνως μὲ τὴν Πυθαγόρειον ἰδιότητα ἔχομεν ὅτι $ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2$ ἢ $1,5^2 - 1,2^2 = ΑΒ^2$.

Ὑψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον: $2,25 - 1,44 = ΑΒ^2$.

Ἄρα $ΑΒ = \sqrt{0,81}$.

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν καὶ ἔχομεν ΑΒ=0,9 μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

94. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 25,4 μετ. τὸ ὕψος δὲ 12,6 μ.;

95. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τριγώνου τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 48 $μ^2$ καὶ ἡ βάσις 12 μ.;

96. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ὅταν αἱ τρεῖς πλευραί του εἶναι κατὰ σειρὰν 5μ., 6μ., 7μ.;

97. Ὁμοίως τοῦ τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 10μ. 12 μ. 16μ.

98. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 8,1μ. καὶ 10,8 μ.; Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ; (κατὰ δύο τρόπους).

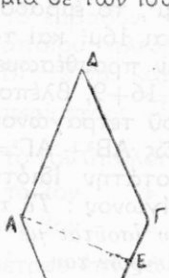
99. Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 6,75 μ. καὶ ἡ μία τῶν καθέτων 5,05 μ. Πόσον εἶναι ἡ ἄλλη καὶ πόσον τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου;

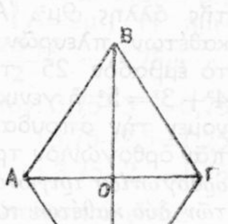
100. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 4,8μ. ἡ μία δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν 3μ.;

Ἐμβαδὸν ῥόμβου.

107. 1ος τρόπος. Ὁ ῥόμβος εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμον (σχ. 115). Ἐπομένως τὸ ἐμβαδόν του ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΒΓ ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΕ. Ἔστω ΒΓ=6μ. καὶ ΑΕ=4μ. Τότε $Ε = 4.6 = 24$ $μ^2$.

2ος τρόπος. Ἠμποροῦμεν νὰ θεωρήσωμεν ὅτι ὁ ῥόμβος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τρίγωνα ἴσα (σχ. 116). Ἂν φέρωμεν τὴν


Σχῆμα 115.


Σχῆμα 116.

διαγώνιον ΑΓ, σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἴσα. Εὑρίσκομεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς καὶ διπλασιάζομεν.

Ἔστω ΑΓ = 6μ., ΟΒ=8μ. ἢ ΒΔ=16μ.

Τότε $E = \frac{\beta.\upsilon}{2} \cdot 2 = \frac{6.8.2.}{2} = \frac{6.16}{2} = 48$ μ².

Ἐκ τῶν προηγουμένων συμπεραίνομεν ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.*

Ἂν καλέσωμεν Δ τὴν μεγάλην καὶ δ τὴν μικρὰν διαγώνιον, ἔχομεν τὸν τύπον $E = \frac{\delta.\Delta}{2}$, ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τὸ ἐμβαδὸν ῥόμβου ὅταν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ.

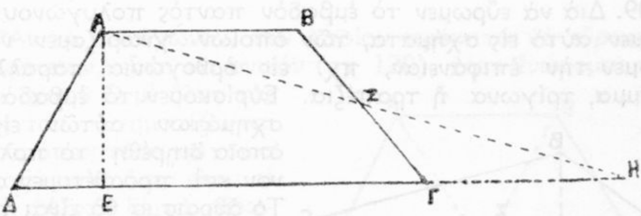
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

101. Ἡ βάσις ἑνὸς ῥόμβου εἶναι 3,25μ., ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τὴν ἀπέναντι παράλληλον 1,5μ. Πόσα τετρ. μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

102. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς μικροῦ κήπου σχήματος ῥόμβου εἶναι 2,4μ. καὶ 1,8μ. Πόσα τετργ. μέτρα εἶναι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ;

Ἐμβαδὸν τραπεζίου.

108. Παράδειγμα. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ εἶναι 8μ. ἡ βάσις ΒΓ 10 μ. καὶ τὸ ὕψος ΑΕ 6 μ.;



Σχῆμα 117.

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἑνώσωμεν τὸ μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΒΓ μὲ τὴν κορυφὴν Α, κατόπιν δὲ ἀποκόψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΖ καὶ τὸ τοποθετήσωμεν εἰς τὴν θέσιν ΖΗΓ, τὸ τραπέζιον μετασχηματίζεται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΗ, τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν. Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι ΔΓ+ΓΗ=10+8 καὶ τὸ ὕψος ΑΕ=6, ἔχομεν

$E = \frac{(10+8).6}{2} = 54$ μ².

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.*

Ἂν παραστήσωμεν τὴν μεγάλην βάσιν τοῦ τραπεζίου διὰ Β καὶ τὴν μικρὰν διὰ β ἔχομεν τὸν τύπον: $Ε=\frac{(Β+β).Υ}{2}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

103. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου τοῦ ὁποίου αἱ δύο βάσεις εἶναι 12,5 μ. καὶ 8,3 μ. καὶ τὸ ὕψος 4,5 μετρ.;

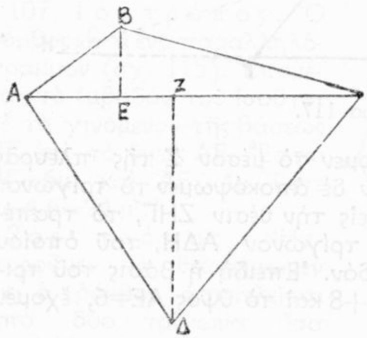
104. Πόσον ἀξίζει ἀγρὸς σχήματος τραπεζίου ὅταν αἱ δύο παράλληλοι πλευραί του εἶναι 180 μ. καὶ 50,6μ. ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 30 μ. καὶ τὸ 1μ² ἀξίζει 26,5 δραχμαί;

105. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τραπεζίου ὅταν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 837 τετραγ. μέτρ.καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων 108 μέτρα;

106. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 257,25 μ² καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ 10,5 μέτρα. Πόσον εἶναι κάθε μία τῶν βάσεων, ἂν ἡ μικρὰ εἶναι τὰ 3)4 τῆς μεγάλης;

Ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου.

109. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς σχήματα, τῶν ὁποίων γνωρίζομεν νὰ μετρῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν, πχ. εἰς ὀρθογώνια, παραλληλόγραμμα, τρίγωνα ἢ τραπέζια. Εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν σχημάτων αὐτῶν εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη τὸ πολύγωνον καὶ προσθέτομεν αὐτά. Τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.



Σχῆμα 118.

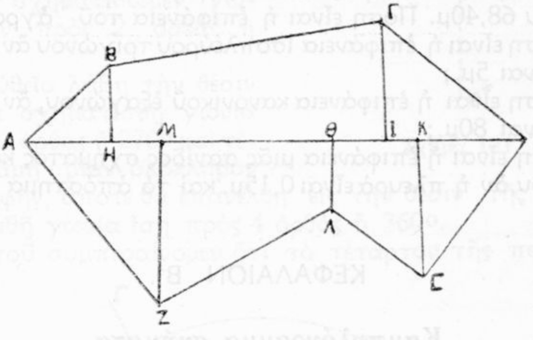
Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζοειδοῦς ΑΒΓΔ (σχ. 118). Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν διαγώνιον καὶ τὴν μετροῦμεν ΑΓ=5μ. Τοιουτοτρόπως τὸ τραπεζοειδὲς ἐχωρίσθη εἰς δύο τρίγωνα. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδόν τους, πρέπει νὰ φέρωμεν τὰ ὕψη των: ΒΕ=2μ. καὶ ΔΕ=3,5μ. Τότε ἔχομεν :

ἐπιφάνεια τριγώνου ΑΒΓ$=\frac{5.2}{2}=5$ μ²

ἐπιφάνεια τριγώνου ΑΔΓ$=\frac{5.3,5}{2}=8,75$ μ²

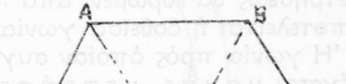
ἐπιφάνεια ΑΒΓΔ $=13,75$ μ²

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος ΑΒΓΔΕΛΖ (σχ. 119).



Σχῆμα 119.

110. Ἂν τὸ πολύγωνον, τοῦ ὁποίου πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν, εἶναι κανονικόν (σχ 120), τότε ἑνώνομεν τὸ κέντρον αὐτοῦ Ο μὲ ὅλας τὰς κορυφάς του. Σχηματίζονται τοιουτοτρόπως τόσα τρίγωνα ἴσα μεταξύ των, ὅσαι εἶναι αἱ πλευραί. Ἀρκεῖ δὲ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μόνον ἐκ τῶν τριγώνων (ἂν πολ)μεν τὴν πλευρὰν τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ) καὶ τοῦτο νὰ πολ)σωμεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν τριγώνων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Ἤ, ταχύτερον νὰ πολ)μεν τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὸ



Σχῆμα 120.

ἥμισυ τοῦ ἀποστήματος αὐτοῦ. Πχ. ἂν ἡ πλευρὰ ΑΒ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 6μ. καὶ τὸ ἀπόστημα ΟΚ εἶναι 5,2μ. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶναι : $E=6.6.\frac{5,2}{2}=93,6\mu^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107. Ἀγοράζει κάποιος ἕναν ἀγρόν, ὁ ὁποῖος ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου. Ἡ διαγώνιος ἡ ὁποία τὸν χωρίζει εἰς δύο τρίγωνα εἶναι 108,70μ. Τὸ ὕψος τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 91,50μ. καὶ τοῦ ἄλλου 68,40μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἀγροῦ;

108. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἰσοπλεύρου τριγώνου ἂν ἡ πλευρά του εἶναι 5μ.;

109. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἂν ἡ πλευρά του εἶναι 80μ.;

110. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σανίδος σχήματος κανονικοῦ ὀκταγώνου, ἂν ἡ πλευρὰ εἶναι 0,15μ. καὶ τὸ ἀπόστημα 0,181μ.;

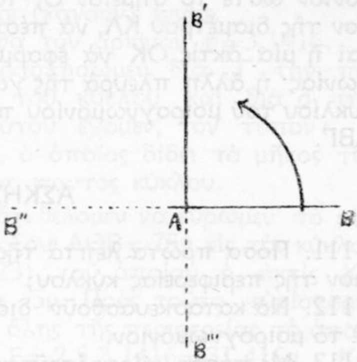
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Καμπυλόγραμμα σχήματα.

111. Μέτρησις γωνιῶν καὶ τόξων κύκλου. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, συγκρίνομεν αὐτὴν πρὸς μίαν ὡρισμένην γωνίαν, ἡ ὁποία καλεῖται μονάς. Διὰ τῆς μετρήσεως θὰ εὕρωμεν ἀπὸ πόσας μονάδας καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται ἡ δοθεῖσα γωνία.

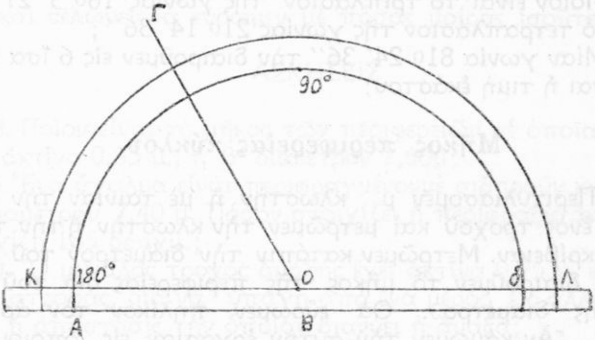
Ἡ γωνία πρὸς ὁποίαν συγκρίνομεν τὰς διαφόρους γωνίας λέγεται μονὰς μετρήσεως γωνιῶν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ὅταν εἶναι ἐπίκεντρος, ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνει ἕπεται ὅτι ἡ μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως τῶν ἀντιστοίχων τόξων. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ μοῖρα ἡ ὁποία εἶναι τὸ ἓν ἀπὸ τὰ ἐνενῆντα ἴσα τεμάχια, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ὥστε ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 90 ἴσα μέρη καὶ τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι ἡ μοῖρα (1^o). Ἡ μοῖρα ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτ.(60')καὶ κάθε 1' εἰς 60 δεύτερα λ. τῆς μοίρας (60'') Πχ. ἂν μία γωνία εἶναι $27^o\ 35'\ 42''$ σημαίνει ὅτι εἶναι 27 μοιρῶν, 35 π. λεπτῶν, 42 δ. λεπτῶν τῆς μοίρας. Διὰ μεγα-

λυτέρας γωνίας χρησιμεύει ὡς μονὰς καὶ ἡ ὀρθὴ γωνία. "Αν στερεώσωμεν τὸ ἄκρον Α τῆς ὁριζοντίας εὐθείας ΑΒ καὶ στρέψωμεν τὴν εὐθεῖαν μέχρις ὅτου λάβῃ κατακόρυφον θέσιν, θὰ σχηματίσωμεν γωνίαν ἴσην πρὸς 1 ὀρθὴν ἢ 90ο.
"Αν ἐξακολουθήσωμεν τὴν περιστροφὴν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μέχρι τῆς θέσεως ΑΒ΄, τότε θὰ σχηματίσωμεν γωνίαν ἴσην πρὸς 2 ὀρθὰς ἢ 180ο.
"Αν ἡ εὐθεῖα λάβῃ τὴν θέσιν ΑΒ΄΄, θὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση πρὸς 3 ὀρθὰς ἢ 270ο καὶ τέλος ἂν κάμῃ μίαν ὁλόκληρον περιστροφήν, ὁπότε θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ΑΒ, θὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση πρὸς 4 ὀρθὰς ἢ 360ο.



Σχῆμα 121.

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας



Σχῆμα 122.

ἢ τὸ τ ε τ α ρ τ η μ ό ρ ι ο ν εἶναι τόξον 90ο. Ἡ ἡμιπεριφέρεια εἶναι τόξον 180ο καὶ ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου ἰσοῦται μὲ τόξον 360ο.

Μ ο ι ρ ο γ ν ω μ ό ν ι ο ν. Εἶναι ὄργανον διὰ τοῦ ὁποίου μετρῶμεν τὰς μοίρας τῶν διαφόρων γωνιῶν (σχ.122). Τοῦτο εἶναι ἡμικύκλιον κατασκευασμένον ἐκ λευκοσιδήρου ἢ ἄλλης οὐσίας. Ἡ ἡμιπεριφέρεια αὐτοῦ εἶναι διῃρημένη εἰς 180ο. Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν ΑΒΓ, τοποθετοῦμεν τὸ μοιρογνωμόνιον ὥστε τὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ μέσον τῆς διαμέτρου ΚΛ, νὰ πέσῃ εἰς τὴν κορυφὴν Β τῆς γωνίας καὶ ἡ μία ἀκτὶς ΟΚ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τῆς γωνίας· ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας θὰ δεικνύῃ ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου τοῦ μοιρογνωμονίου πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

111. Πόσα πρῶτα λεπτὰ τῆς μοίρας ἔχει τὸ ἕνα τεταρτημόριον τῆς περιφερείας κύκλου; Πόσα ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια;

112. Νὰ κατασκευασθοῦν διάφοροι γωνίαι καὶ νὰ μετρηθοῦν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον.

113. Μὲ πόσας μοίρας ἰσοῦται τὸ 1)4 τῆς ὀρθῆς γωνίας; Τὰ 3)4 τῆς ὀρθῆς; τὰ 5)6 τῆς ὀρθῆς;

114. Μὲ πόσον μέρος τῆς ὀρθῆς γωνίας ἰσοῦται γωνία 45ο, 60ο, 120ο;

115. Πόσας μοίρας ἔχουν τὸ 1)10 τῆς περιφερείας, τὸ 1)6 τῆς περιφερείας, τὸ 1)12 τῆς περιφερείας;

116. Ποῖον εἶναι τὸ τριπλάσιον τῆς γωνίας 16ο 3′ 27″ καὶ ποῖον τὸ τετραπλάσιον τῆς γωνίας 21ο 14′ 36″ ;

117. Μίαν γωνία 81ο 24′ 36″ τὴν διαιροῦμεν εἰς 6 ἴσα μέρη. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου;

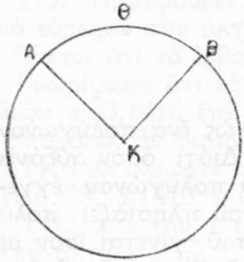
Μῆκος περιφερείας κύκλου.

112. Περιτυλίσσομεν μὲ κλωστὴν ἢ μὲ ταινίαν τὴν περιφέρειαν ἑνὸς τροχοῦ καὶ μετρῶμεν τὴν κλωστὴν ἢ τὴν ταινίαν μὲ ἀκρίβειαν. Μετρῶμεν κατόπιν τὴν διάμετρον τοῦ τροχοῦ καὶ διαιροῦμεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ μήκους τῆς διαμέτρου. Θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν ἀριθμὸν 3,14159... Ἂν κάμωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν εἰς ὁποιουσδήποτε κύκλους, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι πάντοτε εὑρίσκομεν πηλῖκον τῆς περιφερείας διὰ τῆς διαμέτρου τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 3,14159... Ἑπομένως σκεπτόμεθα ὅτι: *Ἂν πολ/μεν τὴν διάμετρον ἑνὸς κύκλου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3,14159... εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ.* Ἐπίσης ὅτι: *Ἂν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3,14159..., εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.* Ὁ ἀριθμὸς 3,14159... παρίσταται διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π καὶ ἀνεκαλύφθη ὑπὸ τοῦ σοφοῦ μαθηματικοῦ τῆς ἀρχαιότητος Ἀρχιμήδους.

Τρόπος διὰ νὰ ἐνθυμούμεθα τὰ 5 πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία του εἶναι ὁ ἑξῆς:

Ἕνα τέσσαρα (καὶ) ἕνα πέντε (κάνουν) ἐννέα.

Συνήθως ὅμως μεταχειριζόμεθα τὸν ἀριθμὸν $\pi = 3{,}1416$.



Σχῆμα 123.

Ἂν παραστήσωμεν διὰ Γ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου καὶ διὰ ρ τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ ἔχομεν, τὸν τύπον: $\Gamma = 2\rho.\pi.$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ μῆκος τῆς περιφερείας παντὸς κύκλου.

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΘΒ=75ο εἰς τὸν κύκλον Κ (σχ. 123), τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ΚΒ ἔχει μῆκος 5μ. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ μῆκος ὅλης τῆς περιφερείας τὸ ὁποῖον εἶναι $E = 2.5.3{,}1416 = 31{,}416$μ. Κα λέγομεν:

Αἱ 360ο (ὅλη ἡ περιφέρεια) ἔχουν μῆκος 31,416μ.

» 75ο » » Χ;

$$X = \frac{3{,}1416.\ 75}{360} = 6{,}545 \text{ μ.}$$

Παρομοίως ἐργαζόμεθα ἂν τὸ τόξον μᾶς ἔχῃ δοθῇ εἰς μέτρα καὶ θέλωμεν νὰ εὕρωμεν μὲ πόσας μοίρας ἰσοῦται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

118. Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῶν περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν: ἡ α′ ἀκτῖνα 0,85 μ., ἡ β′ διάμετρον 1,60μ;

119. Ἕνα ἄγαλμα εἶναι περιφραγμένον μὲ σιδηροῦν κιγκλίδωμα διαμέτρου 7,40 μ. Πόσον στοιχίζει ἡ περίφραξις ἂν τὸ 1 μ. στοιχίζῃ 185 δραχμ.;

120. Ὁ μεγάλος τροχὸς ἁμάξης ἔχει ἀκτῖνα 0,75 μ. καὶ κάνει 1846 στροφάς, διὰ νὰ ὑπάγῃ ἀπὸ ἕνα μέρος εἰς ἄλλο. Πόση εἶναι ἡ ἀπόστασις τὴν ὁποίαν διανύει ἡ ἅμαξα;

121. Ὁ μεγάλος τροχὸς ἁμάξης ἔχει διάμετρον 1,54 μ. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ ἂν διατρέξῃ 20 χιλιόμ.;

122. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει μῆκος 5,40 μ.

123. Θέλει κάποιος νὰ χαράξῃ εἰς μίαν αὐλὴν ἁλώνιον τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ εἶναι 16 μ. Πόσον μῆκος πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ σχοινίον τὸ ὁποῖον θὰ μεταχειρισθῇ ὡς ἀκτῖνα;

124. Τὸ μῆκος ἑνὸς μεσημβρινοῦ τῆς γῆς εἶναι 40000 χιλιόμ. Πόσον εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς;

125. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 63ο 45′ ἂν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 5 μ.;

126. Δύο πόλεις εὑρίσκονται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 34ο 25′. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις εἰς μέτρα;

Ἐμβαδὸν κύκλου.

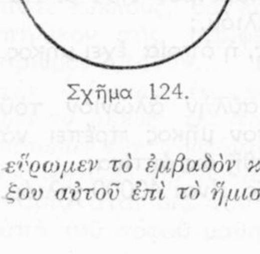
113. Ἕνας κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνα πολύγωνον κανονικὸν μὲ μέγιστον ἀριθμὸν πλευρῶν. Διότι ὅσον αὐξάνει τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν, ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἡ περίμετρος αὐτοῦ πλησιάζει πολὺ πρὸς περιφέρειαν καὶ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ γίνεται ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εὑρίσκεται ὅπως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, πολ/μεν τὴν περιφέρειαν ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ.

Ἤτοι: $Ε = 2ρ\,π.\,\frac{ρ}{2}$. Ἂν κάμωμεν ἁπλοποίησιν εὑρίσκομεν $Ε = πρ^2$.

Ὁ τύπος αὐτὸς δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κύκλου ἐκ τῆς ἀκτῖνος του. Λέγει δὲ ὅτι: *Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.*

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 5μ, $Ε = 3{,}1416.\,5^2 = 3{,}1416.25 = 78{,}\,54$ μ².

114. Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΚΒ (σχ. 124), τόξου ΑΘΒ=78°, ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου ΑΚ εἶναι 5μ., εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ ἀκολούθως τὸ μῆκος τοῦ τόξου ΑΘΒ= 6,545 μ. Θεωροῦμεν τώρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΑΚΒ ὡς ἐμβαδὸν τριγώνου μὲ βάσιν τὸ τόξον ΑΘΒ καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα ΑΚ, ὁπότε ἔχομεν $Ε = 6{,}545.\frac{5}{2} = 16{,}\,625$μ².



Σχῆμα 124.

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως, πολ)μεν τὸ μῆκος τοῦ τόξου αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου.*

Ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ἔχομεν τὸν τύπον $E=\frac{\tau . \rho}{2}$, ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν παντὸς κυκλικοῦ τομέως.

115. Ἠμποροῦμεν ὅταν μᾶς δίδεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα του ὡς ἑξῆς :

Ἔστω ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι $E=16{,}635$ μ^2.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκεται ἂν πολ)μεν τὸν ἀριθμὸν $\pi=3{,}1416$ ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου. Ἑπομένως ἂν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου διὰ τοῦ 3,1416 θὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος. Καὶ πράγματι $19{,}6358,\ 3{,}1416=6{,}25=\rho^2$.

Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 6, 25 καὶ ἔχομεν τὴν ἀκτῖνα $\rho=2{,}5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

127. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τῶν κύκλων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἕνας ἔχει ἀκτῖνα 0,37 μ., καὶ ὁ ἄλλος διάμετρον $1\frac{2}{5}$μ.

128. Ἐπίσης τὸ ἐμβαδὸν τῶν κύκλων τῶν ὁποίων ἡ περιφέρεια εἶναι 13,546 μ. καὶ 6,82 μ.

129. Πόσον στοιχίζει ἕνας πράσινος τάπης διὰ τὴν ἐπίστρωσιν στρογγύλης τραπέζης ἀκτῖνος 1,25 μ., τοῦ ὁποίου τὸ τετραγ. μέτρον ἔχει 75 δρχ.;

130. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια πλακὸς κυκλικῆς ἡ ὁποία καλύπτει τὸ στόμιον ἑνὸς πηγαδίου, ἂν ἡ περιφέρεια τοῦ στομίου εἶναι 5,652 μ.;

131. Ἕνας ἐργάτης ἐχρωμάτισε καὶ τὰς δύο ὄψεις ἑνὸς κυκλικοῦ δίσκου τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 1,50 μ. Ἂν ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς τετρ. μέτρου εἶναι 25 δρχμ. πόσα θὰ λάβῃ ὁ ἐργάτης;

132. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως 60ο ὅταν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 2,5μ.

133. Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως 87ο 30′ ἂν ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 1,25 μ.;

134. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἕνας κυκλικὸς τομεύς, ὅταν ἔχῃ ἐπιφάνειαν 25 μ.^{2} εἰς κύκλον ἀκτῖνος 5 μ.;

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

135. Δύο οἰκόπεδα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον 440 μ. Τὸ ἕνα ἔχει σχῆμα τετραγώνου καὶ τὸ ἄλλο ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι τὰ 4)7 τῆς βάσεως. Ποῖον ἐκ τῶν δύο ἔχει περισσότερον ἐμβαδὸν καὶ πόσον;

136. Μία αὐλὴ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους 8μ. καὶ πλάτους 6 μ.,πρόκειται νὰ στρωθῇ μὲ τετραγωνικὰς πλάκας πλευρᾶς 0,2 μ. Πόσαι πλάκες θὰ χρειασθοῦν;

137. Ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει βάσιν 2,58 μ. καὶ τὸ μῆκος ἑκάστης τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι 2,25 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

138.Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 6,56 μ.;

139.Ἕνας ἀγρὸς σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχει ἐπιφάνειαν 5122,5 μ.² Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης. ἂν ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 68,3μ.;

140.Ἑνὸς τετραγωνικοῦ ἀγροῦ ἡ ἐπιφάνεια εἶναι 456,6242μ². Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου αὐτοῦ;

141. Μία λίμνη περιλαμβάνεται ἐντὸς τριγωνικοῦ σχήματος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ μετρηθῇ, ἀλλὰ αἱ πλευραί του εἶναι 39,2 μ., 42,8μ. 18,8μ.Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης ἂν ἰσοῦται πρὸς τὰ 4)5 τῆς ἐπιφανείας τοῦ τριγώνου ποὺ τὴν περικλείει;

142. Ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ἔχει τὰς βάσεις του ἴσας πρὸς 14 μ. καὶ 8 μ. Μίαν δὲ τῶν ἴσων πλευρῶν του ἴσην πρὸς 5 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδόν του;

143. Ἑνὸς μαρμαρίνου στομίου φρέατος ἡ ἐσωτερικὴ περιφέρεια ἔχει μῆκος 4,7124 μ., ἡ δὲ ἐξωτερικὴ 5,34072 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του;

144.Ἐκ τριῶν ἀγρῶν τετραγωνικοῦ, ὀρθογωνίου καὶ κυκλικοῦ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον, ἴσην πρὸς 528μ., ποῖος ἔχει μεγαλύτερον ἐμβαδόν, ὅταν τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι τὸ 1)3 τοῦ μήκους αὐτοῦ;

145. Μία στεφάνη πλάτους 0,25 μ. ἔχει διάμετρον ἐσωτερικῆς ἐπιφανείας ἴσην πρὸς 2.04 μ. Πόσα εἶναι τὰ μήκη τῶν δύο περιφερειῶν καὶ πόσον τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης;

146. Αἱ ὕαλοι τῶν παραθύρων μιᾶς ἐκκλησίας ἔχουν σχῆμα κύκλου καὶ ἐφάπτονται μεταξύ των. Ἡ ἀκτὶς αὐτῶν εἶναι 0,035μ. Πόσαι ὕαλοι ὑπάρχουν εἰς ἕνα παράθυρον πλάτους 2,10 καὶ ὕψους 3,01 μ.;

147.Ἕνα τετράγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος 0,5μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου μέρους τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύκλου;

148. Ἂν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφῇ ἑξάγωνον, πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐκτὸς τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἑξαγώνου μέρος τοῦ κύκλου;

149. Ἕνα τόξον κύκλου 28,50μ. γράφεται μὲ ἀκτῖνα 6,12 μ. Πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον;

150. Τὸ μῆκος ἑνὸς τόξου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 0,75 μ. εἶναι 0,2618 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος περικλείεται ὑπὸ τοῦ τόξου τούτου;

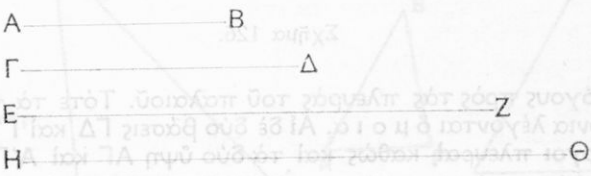
151. Τὸ Κολοσσαῖον τῆς Ρώμης ἔχει 535 μ. περιφέρειαν. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνειά του; Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 90ο. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τοῦ κύκλου τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν τομέα τῶν 90ο.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

115. Π ε ρ ὶ ἀ ν α λ ό γ ω ν ε ὐ θ ε ι ῶ ν. Ἂς λάβωμεν δύο εὐθείας ΑΒ=5μ. ΓΔ=8μ. καὶ ἄλλας δύο, αἱ ὁποῖαι γίνονται ἀπὸ τὰς πρώτας, ἂν τὰς διπλασιάσωμεν, δηλ. ΕΖ=2.5μ. καὶ



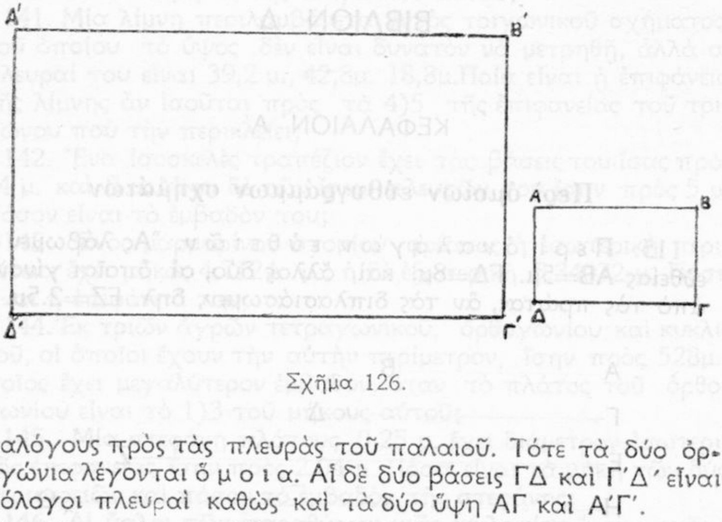
Σχῆμα 125.

ΗΘ=2.8μ. Αἱ δύο τελευταῖαι εὐθεῖαι λέγονται ἀ ν ά λ ο γ ο ι πρὸς τὰς πρώτας. Ἐπίσης καὶ αἱ δύο πρῶται εὐθεῖαι εἶναι ἀ ν ά λ ο γ ο ι πρὸς τὰς δύο τελευταίας, διότι προκύπτουν ἀπ' αὐτάς, ἂν τὰς διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2. Ὥστε: *Δύο (ἢ καὶ περισσότεραι) εὐθεῖαι λέγονται ἀντιστοίχως ἀνάλογοι πρὸς ἄλλας ἰσαρίθμους πρὸς αὐτάς, ἂν τὰ μήκη των γίνωνται ἐκ τῶν μηκῶν τῶν ἄλλων διὰ τοῦ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Ἡ εὐθεῖα ΕΖ=2.5μ., τῆς ὁποίας τὸ μῆκος προκύπτει ἐκ τοῦ μήκους τῆς εὐθείας ΑΒ=5 διὰ τοῦ πολ)σμοῦ ἐπὶ 2 λέγεται ὁ μ ό λ ο γ ο ς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ. Καὶ ἀντιστρόφως ἡ ΑΒ εἶναι ὁμόλογος πρὸς τὴν ΕΖ.

116. Π ε ρ ὶ ὁ μ ο ί ω ν π ο λ υ γ ώ ν ω ν. Ἄς λάβωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραφον ΑΒΓΔ (σχ. 126), εἰς τὸ ὁποῖον ἔστω ὅτι τὸ ὕψος ΓΒ=2μ. καὶ ἡ βάσις ΓΔ=3μ.

Ἄς κατασκευάσωμεν καὶ ἓν ἄλλο ὀρθογώνιον Α΄Β΄Γ΄Δ΄, τοῦ-ὁποίου τὸ ὕψος καὶ ἡ βάσις νὰ προκύπτουν ἐκ τοῦ προηγουμένου ὀρθογωνίου διὰ τοῦ πολ)σμοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3. Τὸ νέον ὀρθογώνιον ἔχει προφανῶς τὰς γωνίας ἴσας πρὸς τὰς γωνίας τοῦ παλαιοῦ (ὡς ὀρθάς) καὶ τὰς πλευράς του



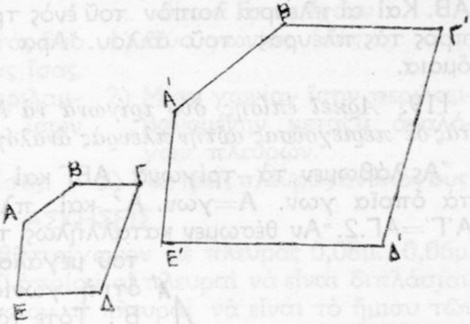
Σχῆμα 126.

ἀναλόγους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παλαιοῦ. Τότε τὰ δύο ὀρθογώνια λέγονται ὅ μ ο ι α. Αἱ δὲ δύο βάσεις ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄ εἶναι ὁμόλογοι πλευραὶ καθὼς καὶ τὰ δύο ὕψη ΑΓ καὶ Α΄Γ΄.

Καὶ δύο τυχόντα πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ.127) μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, ἂν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, δηλ. Α=Α΄, Β=Β΄, Γ=Γ΄, Δ=Δ΄, Ε=Ε΄ καὶ τὰς πλευράς των ἀναλόγους, δηλ. $ΑΒ=Α'Β'.\frac{1}{2}$, $ΒΓ=Β'Γ'.\frac{1}{2}$, $ΓΔ=Γ'Δ'.\frac{1}{2}$, $ΔΕ=Δ'Ε'.\frac{1}{2}$, $ΕΑ=Ε'Α'.\frac{1}{2}$, εἶναι ὅμοια.

Ὥστε: *Δύο πολύγωνα μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν καλοῦνται ὅμοια ἂν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς ἀναλόγους.*

Αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τῶν πολυγώνων, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα καταλήγουν εἰς τὰς κορυφὰς τῶν ἀντιστοίχως ἴσων γωνιῶν, καλοῦνται ὁμόλογοι πλευραί.

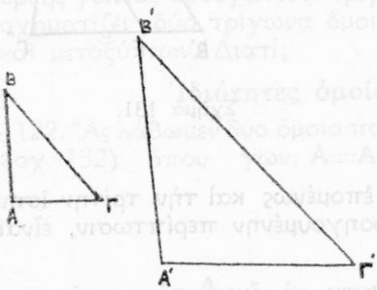


Σχῆμα 127.

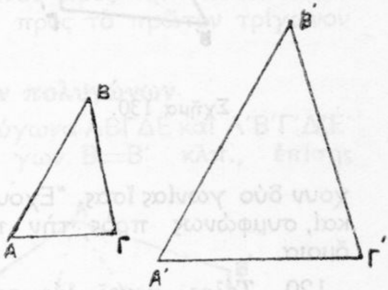
Ὁμοιότης τριγώνων.

117. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμόν, δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ (σχ.128) εἶναι ὅμοια, ἂν ἔχουν τὰς τρεῖς των γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους. Ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀναγκαῖον, διὰ νὰ εἶναι ὅμοια δύο τρίγωνα, νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς των γωνίας ἴσας καὶ τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἀναλόγους.

118. *Ἀρκεῖ δύο τρίγωνα νὰ ἔχουν μόνον τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας,*



Σχῆμα 128.

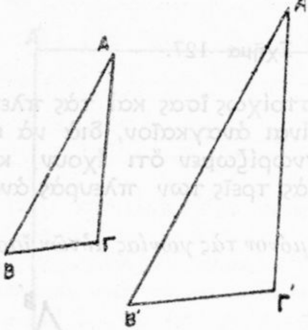


Σχῆμα 129.

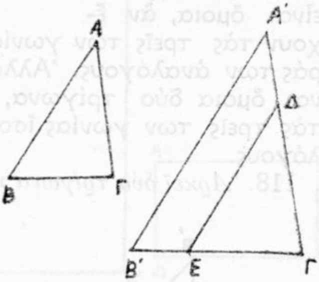
ὁπότε εἶναι ὅμοια. Ἂς λάβωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 129) καὶ μίαν εὐθεῖαν Β′Γ′ ἴσην πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς ΒΓ. Ἐπ᾽ αὐτῆς ἂς κατασκευάσωμεν τρίγωνον Α′Β′Γ′ μὲ τὰς γωνίας Β′=Β καὶ Γ′=Γ. Τότε καὶ ἡ τρίτη γωνία Α′ θὰ εἶναι ἴση πρὸς τὴν Α. Τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν ἴσας καὶ θὰ εἶναι ὅμοια. Διότι ἡ πλευρὰ Β′Γ′ εἶναι διπλασία τῆς ΒΓ ἐκ κατασκευῆς. Ἐπίσης ἡ πλευρὰ Α′Γ′ εἶναι διπλασία τῆς ΑΓ, ὅπως δυνάμεθα νὰ ἐξακριβώσωμεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, καθὼς καὶ ἡ Α΄Β΄ διπλασία τῆς ΑΒ. Καὶ αἱ πλευραὶ λοιπὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Ἄρα τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

119. *Ἀρκεῖ ἐπίσης δύο τρίγωνα νὰ ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην τὰς δὲ περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, διὰ νὰ εἶναι ὅμοια.*

Ἂς λάβωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 130) εἰς τὰ ὁποῖα γων. Α=γων. Α΄ καὶ πλευραὶ Α΄Β΄=ΑΒ.2 καὶ Α΄Γ΄=ΑΓ.2. Ἂν θέσωμεν καταλλήλως τὸ μικρὸν τρίγωνον ἐπὶ τοῦ μεγάλου, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἡ γωνία Β ἐφαρμόζει εἰς τὴν Β΄. Τότε τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας. Ἔχουν ἑπομένως καὶ τὴν τρίτην ἴσην καί, συμφώνως πρὸς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἶναι ὅμοια.



Σχῆμα 130.



Σχῆμα 131.

120. *Τέλος, ἀρκεῖ δύο τρίγωνα νὰ ἔχουν τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἀναλόγους ἀντιστοίχως διὰ νὰ εἶναι ὅμοια.*

Ἂς λάβωμεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 131) ὅπου Α΄Β΄=ΑΒ.2, Α΄Γ΄=ΑΓ.2 καὶ Β΄Γ΄=ΒΓ.2. Ἂν θέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τοῦ Α΄Β΄Γ΄, ὥστε αἱ γωνίαι Α,Β,Γ νὰ πέσουν διαδοχικῶς ἐπὶ τῶν Α΄,Β΄,Γ΄, θὰ ἴδωμεν ὅτι αἱ γωνίαι θὰ ἐφαρμόσουν. Ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶναι πάλιν ὅμοια.

121. Ὁ κατωτέρω πίναξ δεικνύει τὴν σχέσιν ἡ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ὁμοιότητος δύο τριγώνων.

Δύο τρίγωνα εἶναι:

ἴσα ὅταν ἔχουν	ὅμοια ὅταν ἔχουν
1) Μίαν πλευρὰν καὶ τὰς δύο προσκειμένας γωνίας ἴσας.	1) Δύο γωνίας ἴσας.
2) Μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ ἴσων πλευρῶν.	2) Μίαν γωνίαν ἴσην περιλαμβανομένην μεταξὺ ἀναλόγων πλευρῶν.
3) Τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας.	3) Τὰς τρεῖς πλευρὰς ἀναλόγους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

152. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον μὲ πλευρὰς 0,08μ., 0,06μ. καὶ 0,04μ. καὶ ἄλλο τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι διπλάσιαι. Ἐπίσης τρίτον τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου. Τί θὰ εἶναι τὰ τρία αὐτὰ τρίγωνα;

153. Τί εἶναι μεταξύ των δύο τυχόντα ἰσογώνια τρίγωνα καὶ διατί;

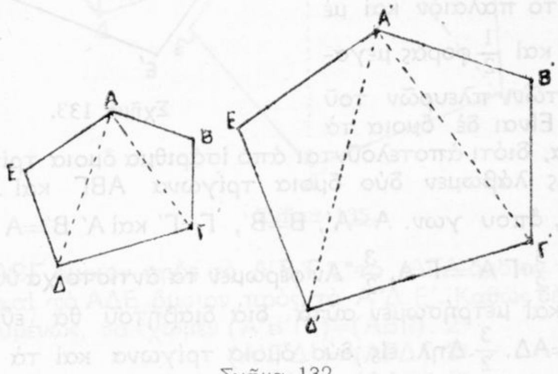
154. Ἐπίσης δύο τυχόντα ἰσόπλευρα τρίγωνα;

155. Δύο τρίγωνα ὀρθογώνια εἶναι ὅμοια ἂν ἔχουν 1) μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην 2) τὰς δύο καθέτους πλευρὰς ἀναλόγους. Διατί;

156. Τὸ ὕψος τὸ ὁποῖον καταβιβάζεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν σχηματίζει δύο τρίγωνα ὅμοια πρὸς τὸ πρῶτον τρίγωνον καὶ μεταξύ των. Διατί;

Ἰδιότητες ὁμοίων πολυγώνων.

122. Ἂς λάβωμεν δύο ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ. 132) ὅπου γων. Α=Α΄, γων. Β=Β΄ κλπ., ἐπίσης



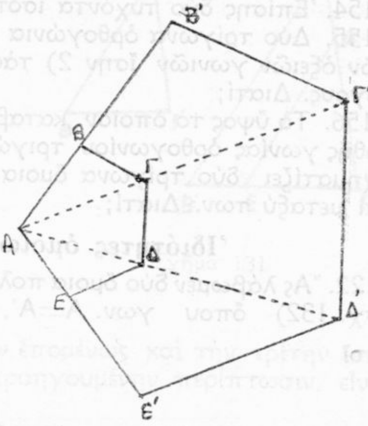
Σχῆμα 132.

Α΄Β΄=ΑΒ.2, Β΄Γ΄=ΒΓ.2 κλπ. Ἂν φέρωμεν ἀπὸ μίαν κορυφὴν Α καὶ Α΄ τὰς διαγωνίους τῶν πολυγώνων, θὰ διαιρεθοῦν ταῦτα εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα. Ἂν μετρήσωμεν τὰς διαγωνίους τοῦ μεγάλου πολυγώνου, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι διπλασία τῆς ἀντιστοίχου διαγωνίου τοῦ μικροῦ πολυγώνου, Α΄Γ΄=ΑΓ.2, Α΄Δ΄=ΑΔ.2, δηλ. αἱ διαγώνιοι τῶν δύο πολυγώνων εἶναι ἀντιστοίχως ἀνάλογοι. Ἑπομένως τὸ τρίγωνον ΑΕΔ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ Α΄Ε΄Δ΄.

Ἐπίσης τὸ ΑΓΔ πρὸς τὸ Α΄Γ΄Δ΄ καθὼς καὶ τὸ ΑΒΓ ὅμοιον, πρὸς τὸ Α΄Β΄Γ΄. Ὥστε: *Δύο πολύγωνα, ὅταν εἶναι ὅμοια, δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς τρίγωνα ἰσάριθμα καὶ ὅμοια διὰ τῶν διαγωνίων των.*

123. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης μᾶς βοηθεῖ εἰς τὸ νὰ κατασκευάζωμεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δεδομένον, π.χ. πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ (σχ.133) καὶ μὲ πλευράς, ἔστω 2 καὶ $\frac{1}{2}$ φορὰς μεγαλυτέρας ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ δεδομένου.

Διότι φέρομεν τὰς διαγωνίους ἐκ τῆς κορυφῆς Α καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν προεκτάσεων αὐτῶν καὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΕ μήκη ἴσα πρὸς τὰ 2 $\frac{1}{2}$ ἑκάστης ἀρχικῆς πλευρᾶς ἢ διαγωνίου. Ἑνώνομεν τὰ τελικὰ σημεῖα Β΄,Γ΄,Δ΄,Ε΄ καὶ ἔχομεν τὸ πολύγωνον Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ὅ μ ο ι ο ν πρὸς τὸ παλαιὸν καὶ μὲ πλευρὰς 2 καὶ $\frac{1}{2}$ φορὰς μεγαλυτέρας τῶν πλευρῶν τοῦ παλαιοῦ. Εἶναι δὲ ὅμοια τὰ πολύγωνα, διότι ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἰσάριθμα ὅμοια τρίγωνα.

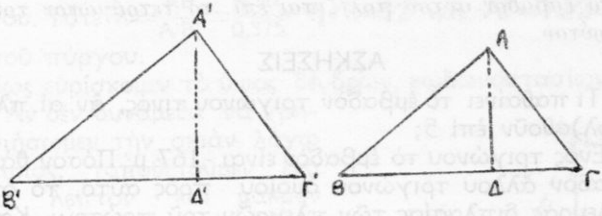


Σχῆμα 133.

124. Ἂς λάβωμεν δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 134), ὅπου γων. Α=Α΄, Β=Β΄, Γ=Γ΄ καὶ Α΄ Β΄=Α Β. $\frac{3}{2}$ Β΄Γ΄=ΒΓ $\frac{3}{2}$, Γ΄Α΄=Γ Α. $\frac{3}{2}$. Ἂν φέρωμεν τὰ ἀντίστοιχα ὕψη ΑΔ καὶ Α΄Δ΄ καὶ μετρήσωμεν αὐτὰ διὰ διαβήτου θὰ εὕρωμεν ὅτι Α΄Δ΄=ΑΔ. $\frac{3}{2}$. Δηλ. εἰς δύο ὅμοια τρίγωνα καὶ τὰ ἀντί-

στοιχα ὕψη εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτῶν. Ἂν ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο αὐτῶν τριγώνων, θὰ ἔχωμεν:

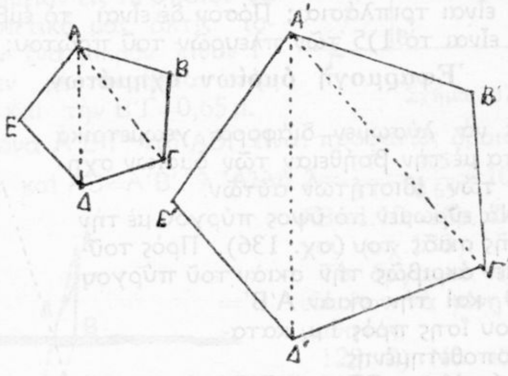
$$(ΑΒΓ)=\frac{ΒΓ.ΑΔ}{2} \text{ καὶ } (Α'Β'Γ')=\frac{Β'Γ'.Α'Δ'}{2}=\frac{ΒΓ.3.ΑΔ.3}{2\quad 2}=\frac{ΒΓ.ΑΔ}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$



Σχῆμα 134.

Ὥστε: *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ', τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰ* $\frac{3}{2}$ *τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι* $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ *φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγ. ΑΒΓ.*

125. Ἂς λάβωμεν ἐπίσης δύο πολύγωνα ὅμοια ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (σχ.135), ὅπου Α'Β'=ΑΒ.2, Β'Γ'=ΒΓ.2 κλπ. Ἂν φέρωμεν τὰς διαγωνίους ἐκ τοῦ Α καὶ Α', θὰ ἔχωμεν τὸ τρί-



Σχῆμα 135.

γωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ Α'Β'Γ', τὸ ΑΓΔ ὅμοιον πρὸς τὸ Α'Γ'Δ' καὶ τὸ ΑΔΕ ὅμοιον πρὸς τὸ Α'Δ'Ε'. Καθὼς δὲ εἴδομεν προηγουμένως, θὰ ἔχωμεν (Α'Β'Γ')=(ΑΒΓ). 2^2

(Α'Γ'Δ')=(ΑΓΔ). 2^2

(Α'Δ'Ε')=(ΑΔΕ). 2^2

Ἂν προσθέσωμεν κατὰ μέλη, ἔχομεν: Ἐμβ. πολ. (Α'Β'Γ'Δ'Ε')=Ἐμβ.πολ.(ΑΒΓΔΕ). 2^2

Δηλ. παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 2, ἐπὶ τὸν ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσθησαν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ διὰ νὰ δώσουν τὰς πλευρὰς τοῦ ὁμοίου πρὸς αὐτὸ πολυγώνου Α'Β'Γ'Δ'Ε'. Ὥστε: *Ἂν αἱ πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου πολ/σθοῦν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολ/ζεται ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

157. Τί παθαίνει τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου τινός, ἂν αἱ πλευραί του πολ)σθοῦν ἐπὶ 5;

158. Ἑνὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 167 μ². Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτό, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς διπλασίας τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου; Καὶ πόσον, ἂν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας πρὸς τὸ 1)3 τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου;

159. Ἑνὸς τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶναι 9 μ., 12 μ. καὶ 18 μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτὸ καὶ ἔχοντος ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ 1)9 τοῦ πρώτου;

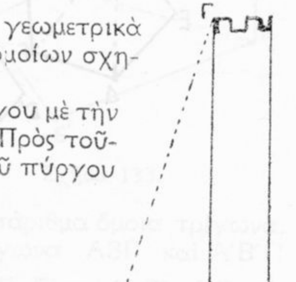
160. Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγ. εἶναι 5μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ ἄλλου τετραγώνου ἔχοντος ἐμβαδὸν διπλάσιον τοῦ πρώτου;

161. Ἕνα πολύγωνον ἔχει ἐμβαδὸν 6,25μ². Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἄλλου πολυγώνου ὁμοίου πρὸς αὐτὸ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τριπλάσιαι; Πόσον δὲ εἶναι τὸ ἐμβαδόν, ἂν αἱ πλευραὶ εἶναι τὸ 1)5 τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου;

Ἐφαρμογὴ ὁμοίων σχημάτων.

Δυνάμεθα νὰ λύσωμεν διάφορα γεωμετρικὰ προβλήματα μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁμοίων σχημάτων καὶ τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν.

126. 1) Νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος πύργου μὲ τὴν βοήθειαν τῆς σκιᾶς του (σχ. 136). Πρὸς τοῦτο μετροῦμεν ἀκριβῶς τὴν σκιὰν τοῦ πύργου (ΑΒ)=4,50 καὶ τὴν σκιὰν Α'Β'= 0,375 ῥάβδου ἴσης πρὸς 1 μ. κατακορύφως τοποθετημένης.



Σχῆμα 136.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΒΓ καὶ Β'Γ' εἶναι ἀκτῖνες τοῦ ἡλίου, εἶναι παράλληλοι μεταξύ των. Διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι Β καὶ Β' εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια. Ὡς ἐκ τούτου τὸ ὕψος καὶ ἡ σκιὰ τοῦ πύργου εἶναι ἀνάλογα ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ὕψος καὶ τὴν σκιὰν τῆς ῥάβδου. Δηλ. ΑΒ=Α΄Β΄. λ καὶ ΑΓ=Α΄Γ΄.λ, ὅπου λ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐπὶ τὸν ὁποῖον πολ/νται αἱ πλευραὶ τοῦ μικροῦ τριγώνου διὰ νὰ προκύψουν αἱ ἀνάλογοι πρὸς αὐτὰς πλευραὶ τοῦ μεγάλου τριγώνου. Τότε $λ=\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{4,50}{0,375}$· ἢ λ=12 καὶ ΑΓ=1.12=12 μ. ὕψος τοῦ πύργου.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τὸ ὕψος δένδρων, κωδωνοστασίων κλπ.

127. Ἂν δὲν δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν σκιὰν λόγῳ κακοκαιρίας, τοποθετοῦμεν ἕνα σωλῆνα λεπτὸν καὶ μακρὸν τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ κινῆται κατακορύφως ἐπὶ τῆς ῥάβδου Α΄Β΄=1 μ. (σχ.137). Σκοπεύομεν τὴν κορυφὴν τοῦ πύργου καὶ στερεώνομεν εἰς αὐτὴν τὴν θέσιν τὸν σωλῆνα.

Σχῆμα 137.

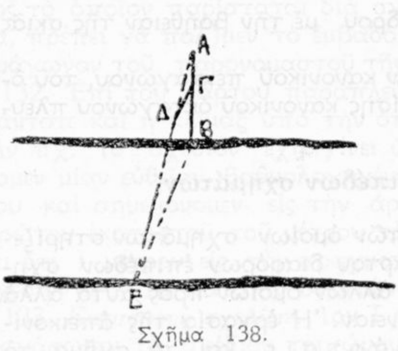
Σκοπεύομεν κατόπιν ἐκ τοῦ ἄλλου ἄκρου τοῦ σωλῆνος πρὸς τὴν γῆν.

Εἰς τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον θὰ πέσῃ ἡ ὀπτική μας ἀκτὶς τοποθετοῦμεν ἕνα μικρὸν λίθον Γ.

Μετροῦμεν μὲ ἀκρίβειαν τὴν ΒΓ=6,5 μ. καὶ τὴν Β΄Γ=0,65 μ.

Τὰ τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ εἶναι προφανῶς ὅμοια. Τότε ἡ ΒΓ=Β΄Γ. λ καὶ ΑΒ=Α΄Β΄. λ. Ἀλλὰ $λ=\frac{ΒΓ}{Β'Γ}=\frac{6,5}{0,65}=10$ ὁπότε ἡ ΑΒ=1.10=10μ. ὕψος πύργου (σχ.138).

Τὸ ὄργανον εἶναι πολὺ εὔκολον νὰ γίνῃ ἀπὸ τοὺς μαθητάς.



Σχῆμα 138.

128. 2) Νὰ εὕρωμεν τὸ πλάτος ποταμοῦ χωρὶς νὰ τὸν διαβῶμεν (σχ. 138).

Πρὸς τοῦτο τοποθετοῦμεν εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς ὄχθης τοῦ ποταμοῦ τὴν ῥάβδον ΑΒ=1 μ. κατακορύφως. Ἐπ᾽ αὐτῆς κινεῖται πρὸς τὰ ἄνω καὶ πρὸς τὰ κάτω, πάντοτε ὁριζοντίως κείμενον, τεμάχιον σανίδος ΓΔ=0,5 μ., τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν ὀπὴν εἰς τὸ Δ. Σκοπεύομεν ἀπὸ τὸ Α΄ ὥστε ἡ ὀπτική μας ἀκτὶς διερχομένη διὰ τῆς ὀπῆς Δ νὰ πίπτῃ εἰς τὸ σημεῖον Ε ἀκριβῶς.

Στερεώνομεν εἰς τὸ Γ τὴν σανίδα ΓΔ καὶ μετρῶμεν τὴν ἀπόστασιν ΑΓ=0,1μ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΑΒΕ προφανῶς εἶναι ὅμοια. Τότε ΒΑ=ΓΑ.λ καὶ ΒΕ=ΓΔ.λ.

Ἀλλὰ $\lambda=\frac{BA}{\Gamma A}=\frac{1}{0,1}=10$. Ὁπότε ΒΕ= 0,5.10 = 5 μ., πλάτος τοῦ ποταμοῦ.

129. 3) Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν δεξαμενῆς σχήματος κανονικοῦ πολυγώνου, τῆς ὁποίας δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἀπόστημα. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ἰσοῦται πρὸς 1 μ. Τότε, ἐπειδὴ τὰ δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια πολ)μεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου πολυγώνου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς τοῦ δεδομένου, δηλ. τῆς δεξαμενῆς, καὶ εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν.

Ἡ ἐπιφάνεια	τετραγώνου ἔχοντος	πλευρὰν	1μ.	εἶναι $1\mu^2$.
» »	ἰσοπλευρ. τριγών.	» »	1μ.	» $0,4330\mu^2$
» »	κανονικοῦ πενταγ.	» »	1μ.	» $2,3774\mu^2$
» » »	ἑξαγώνου	» »	1μ.	» $2,5980\mu^2$
» » »	ὀκταγών.	» »	1μ.	» $4,8284\mu^2$

Ἂν λοιπὸν ἡ δεξαμενὴ ἔχῃ σχῆμα κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 7μ., θὰ ἔχωμεν $E=2,5980.7^2=123,302\mu^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

162. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος δένδρου μὲ τὴν βοήθειαν τῆς σκιᾶς καὶ τοῦ ὀργάνου.

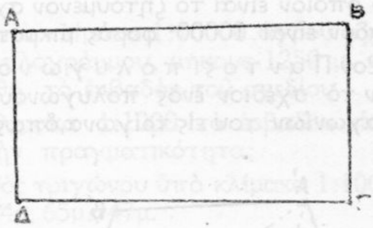
163. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κανονικοῦ πενταγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 5μ. Ἐπίσης κανονικοῦ ὀκταγώνου πλευρᾶς 2,5μ.

Ἀπεικόνισις ἐπιπέδων σχημάτων.

130. Ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν ὁμοίων σχημάτων στηρίζεται καὶ ἡ ἀπεικόνισις ἐπὶ χάρτου διαφόρων ἐπιπέδων σχημάτων μεγάλης ἐκτάσεως δι' ἄλλων ὁμοίων πρὸς αὐτὰ ἀλλὰ πολὺ μικροτέρων κατ' ἐπιφάνειαν. Ἡ ἐργασία τῆς ἀπεικονίσεως καλεῖται σχεδιαγράφησις καὶ τὸ σχῆμα τὸ

ὁποῖον γράφεται, σχεδιάγραμμα ἢ σχέδιον τοῦ μεγάλου σχήματος.

131. Ἡ παράστασις τῶν σχημάτων ὑπὸ ἄλλων μικροτέρων διαστάσεων καλεῖται παράστασις ὑπὸ κλίμακα. Ἂν π χ. μίαν πλευράν ἑνὸς σχήματος μήκους 1000 μ. τὴν παραστήσωμεν εἰς τὸν χάρτην μὲ 1μ. λέγομεν ὅτι παρεστήσαμεν τῆν πλευρὰν ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$. Ἂν τὴν παραστήσωμεν μὲ 0,1μ., ἡ κλῖμαξ εἶναι 1:10000. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν μία εὐθεῖα ἔχῃ παρασταθῆ εἰς τὸ σχεδιάγραμμα μὲ μῆκος π χ. 0,056 ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100000}$. εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ εὐθεῖα ἔχει μῆκος 0,056.100000=5600 μ.



Σχῆμα 139.

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σχήματος ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου του καὶ τὴν κλίμακα. Π.χ. ἡ βάσις ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ (σχ.139) ἔχει μῆκος 0,02 μ. ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$ καὶ τὸ ὕψος ΑΓ=0,01μ. ὑπὸ τὴν αὐτὴν κλίμακα. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου εἶνε 0,02.0,01 0,02 μ. Ἀλλὰ εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ βάσις ἔχει μῆκος 0,02.1000, τὸ δὲ ὕψος 0,01.1000. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχήματος εἶναι: Ε = 0,02. 1000. 0,01. 1000= 0,02.0,01.1000^2=0,0002 1000.000=200 μ^2.

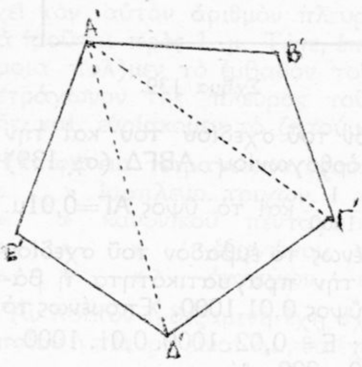
Ὥστε: Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ πραγματικὸν ἐμβαδὸν σχήματος τὸ ὁποῖον παρίσταται διὰ σχεδιαγράμματος ὑπὸ κλίμακα, πρέπει νὰ πολ)μεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος.

132. Ἐπὶ τοῦ χάρτου παραπλεύρως τοῦ σχεδίου γράφεται πάντοτε καὶ ἡ κλῖμαξ ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἔχει γίνει τὸ σχέδιον. Ἂν πχ. τὸ σχέδιον ἔχῃ γίνει ὑπὸ κλίμακα 1:100, γράφομεν μίαν εὐθεῖαν βαθμολογημένην εἰς τὴν ἄκραν τοῦ χάρτου καὶ σημειώνομεν εἰς τὴν ἀρχὴν 0. Εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἑκατοστοῦ τοῦ μέτρου τὸν ἀριθμὸν 1. Τοῦτο σημαίνει ὅτι 1 μέτρον εἰς τὴν πραγματικότητα παρίσταται εἰς τὸ σχέδιον μὲ 0,01μ. Κατόπιν σημειώνομεν 2, κ.ο.κ.

133. *Κατασκευὴ σχεδίων*. 1ον Τριγώνου. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον τριγώνου τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν

τὰς πλευράς, εὑρίσκομεν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κλίμακος τὴν ὁποίαν θὰ χρησιμοποιήσωμεν εὐθύγραμμα τμήματα ἴσα πρὸς τὰ ὑπὸ τῆς κλίμακος ὁριζόμενα ὑποπολλαπλάσια. Μὲ αὐτὰ ὡς πλευρὰς κατασκευάζομεν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ σχέδιον τοῦ μεγάλου τριγώνου. Ἂν πχ. αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 1200μ. 1850μ. 2000μ. καὶ κλῖμαξ $\frac{1}{10000}$, θὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον μὲ πλευρὰς 0,12μ. 0,185μ. καὶ 0,2μ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον σχέδιον καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 10000^2 φορὰς μικρότερον τοῦ πραγματικοῦ.

2ον Π α ν τ ὸ ς π ο λ υ γ ώ ν ο υ. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον ἑνὸς πολυγώνου, διαιροῦμεν τοῦτο διὰ τῶν διαγωνίων του εἰς τρίγωνα, ὅπως εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (σχ. 140). Μετρῶμεν κατόπιν ὅλας τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου καὶ τὰς διαγωνίους, τὰς ὁποίας ἐφέραμεν ἐπὶ τῆς κορυφῆς. Εὑρίσκομεν ἐπὶ τῇ βάσει τῆς κλίμακος τὰ ὑποπολλαπλάσια τῶν πλευρῶν καὶ τῶν διαγωνίων καὶ κατασκευάζομεν πρῶτον τὸ σχέδιον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς. Ἔπειτα κατὰ συνέχειαν κατασκευάζομεν τὸ σχέδιον τοῦ τριγώνου ΑΓΔ, τοῦ ὁποίου πάλιν γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς. Καὶ τέλος τὸ σχέδιον τοῦ τριγώνου ΑΔΕ ὁμοίως. Τὰ τρία αὐτὰ σχέδια μαζὺ ἀποτελοῦν τὸ σχέδιον τοῦ δεδομένου πολυγώνου.



Σχῆμα 140.

3ον. Σ χ έ δ ι ο ν κ ύ κ λ ο υ. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ σχέδιον ἑνὸς κύκλου, γράφομεν κύκλον ἐπὶ τοῦ χάρτου μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ ὑποπολλαπλάσιον τῆς πραγματικῆς ἀκτῖνος, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ὑπὸ τῆς κλίμακος. Ἂν πχ. ἡ ἀκτὶς ἑνὸς κυκλικοῦ ἁλωνίου εἶναι 15μ. καὶ ἡ κλῖμαξ εἶναι 1:1000, τότε πρέπει νὰ γράψωμεν κύκλον μὲ ἀκτῖνα 0,015μ. διὰ νὰ ἔχωμεν τὸ σχέδιον τοῦ ἁλωνίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

164. Πόσον μῆκος θὰ ἔχουν εὐθεῖαι 850μ., 275μ., ἂν παρασταθοῦν ἐπὶ χάρτου ὑπὸ κλίμακα 1:1000;

165. Πόσον μῆκος ἔχουν εἰς τὴν πραγματικότητα εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι ὑπὸ κλίμακα 1:10000 ἔχουν μῆκος ἴσον πρὸς 0,075 μ., 0,05 μ. καὶ 0,1005 μ.;

166. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:10000 ἀγροῦ σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, μήκους 1250 μ. καὶ πλάτους 850μ. καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχεδίου.

167. Ἑνὸς σχεδίου ὑπὸ κλίμακα 1:1000 τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 0,0456 $μ^2$. Πόσον εἶναι εἰς τὴν πραγματικότητα;

168. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ἑνὸς τριγώνου ὑπὸ κλίμακα 1:1000, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι 84μ, 65μ., 47μ.

169. Τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:1000 ἑνὸς τριγώνου ἔχει ἐμβαδὸν 0,000468 $μ^2$. Πόσον εἶναι τὸ πραγματικὸν ὕψος του, ἂν ἡ βάσις του εἶναι 52μ.;

170. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:10000 ἑνὸς ὀρθογωνίου ἀγροῦ, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 648000$μ^2$, ὅταν ἡ βάσις του παρίσταται μὲ μῆκος ἴσον πρὸς 0,36μ.

171. Πόσον ἐμβαδὸν θὰ ἔχῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:1000 ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 4560 $μ^2$.

172. Τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχει πλευράς: ΑΒ=475μ, ΓΒ=560μ. ΓΔ=650μ., ΔΑ=390μ. καὶ διαγώνιον ΑΓ=865μ. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιόν του ὑπὸ κλίμακα 1:10000.

173. Ἕνας κῆπος ἔχει σχῆμα τραπεζίου ΑΒΓΔ. Εἶναι δὲ ἡ ΑΒ=45μ., ἡ ΒΔ=23μ., ἡ ΓΔ=38μ., ἡ ΔΑ=32μ. καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ=56μ. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον τοῦ κήπου ὑπὸ κλίμακα 1:1000.

174. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλμακα 1:1000 κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 15μ.

175. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:100 κύκλου ἀκτῖνος 4μ, καὶ ἄλλου ἀκτῖνος 3μ.

176. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:1000 κυκλικοῦ ἀλωνίου ἀκτῖνος 12μ. καὶ ἄλλου 10μ.

177. Νὰ γίνῃ τὸ σχέδιον ὑπὸ κλίμακα 1:100 τομέως 75° κύκλου ἀκτῖνος 2μ. καὶ ἄλλου 45° κύκλου ἀκτῖνος 3μ.

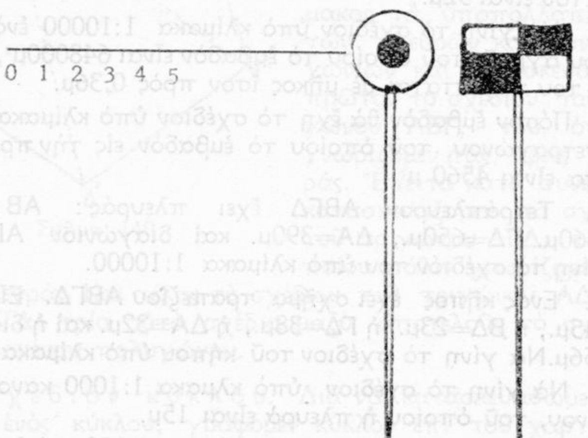
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

Στοιχειώδεις γνώσεις χωρομετρίας.

134. Ἡ χωρομετρία ἔχει σκοπὸν τὴν μέτρησιν μικρῶν τεμαχίων τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς (γηπέδων, ἀγρῶν κλπ.) καὶ τὴν ἀπεικόνισιν αὐτῶν ἐπὶ τοῦ χάρτου δι' ὁμοίων σχημάτων, τῶν σχεδίων.

Ἡ ἀπεικόνισις ἑνὸς εὐθυγράμμου τεμαχίου γῆς γίνεται σύμφωνα πρὸς ὅσα προηγουμένως εἴπομεν. Διὰ τὴν μέτρησιν ὅμως ἑνὸς γηπέδου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους, χρειάζεται νὰ γίνῃ μέτρησις εὐθειῶν γραμμῶν ἐπὶ τῆς γῆς καὶ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν αὗται. Ἐπίσης πρέπει νὰ λυθοῦν καὶ διάφορα γεωμετρικὰ προβλήματα παρουσιαζόμενα ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

135. *Χάραξις εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.* Διὰ νὰ χαράξωμεν μίαν

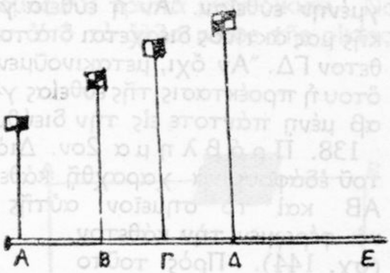


Σχῆμα 141.

εὐθεῖαν ΑΕ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους μεταχειριζόμεθα τὰ ἀκόντια (σχ. 141). Τὰ ἀκόντια εἶναι ξύλιναι ῥάβδοι ὕψους $1\frac{1}{2}$ – 2μ., αἱ ὁποῖαι εἰς τὸ κάτω μέρος ἔχουν σιδηρᾶν αἰχμὴν διὰ νὰ εἰσέρχωνται εὐκόλως εἰς τὸ ἔδαφος. Εἰς τὸ ἄνω δὲ μέρος εἶναι χρωματισμένα μὲ κόκκινο καὶ ἄσπρο χρῶμα διὰ νὰ φαίνωνται ζωηρά.

Στερεώνομεν λοιπὸν κατακορύφως ἓν τοιοῦτον ἀκόντιον εἰς τὸ σημεῖον Α. Κατόπιν ὁ βοηθός μας προχωρεῖ ἀρκετὰ καὶ τοποθετεῖ δεύτερον ἀκόντιον εἰς τὸ Β. Ἂν τὸ ἄνω μέρος τοῦ δευτέρου ἀκοντίου κρύπτεται ὑπὸ τοῦ πρώτου καθὼς σκοπεύομεν, τὸ ἀκόντιον, εἶναι εἰς τὴν εὐθεῖαν. Ἄλλως διὰ τῆς χειρὸς ὁδηγοῦμεν τὸν βοηθὸν νὰ τοποθετήσῃ δεξιώτερα ἢ ἀριστερώτερα τὸ ἀκόντιον μέχρις ὅτου τὸ ἄνω μέρος αὐτοῦ κρυφθῇ ὑπὸ τοῦ πρώτου ἀκοντίου. Καθ' ὅμοιον τρόπον τοποθετοῦμεν εἰς ἀπόστασιν 30—40 μέτρων ὅλα τὰ ἀκόντια διὰ τὴν χάραξιν τῆς εὐθείας ΑΕ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.

136. *Μέτρησις τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους.* Ἀφοῦ γίνῃ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον ἡ χάραξις τῆς εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, χρειάζεται νὰ γίνῃ ἡ μέτρησις αὐτῆς. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα τὴν μ ε τ ρ ο τ α ι ν ί α ν. Αὐτὴ εἶναι μία ταινία ἀπὸ σκληρὸν ὕφασμα ἢ καὶ ἀπὸ λεπτὸν μέταλλον πλάτους 0,015 μ. καὶ μήκους 20—25μ. Περιτυλίσσεται δὲ περὶ ἄξονα ἐντὸς θήκης ἀπὸ δέρμα. Ὅταν θέλωμεν νὰ μετρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν ΑΕ (σχ. 142) χαραγμένην ἐπὶ τοῦ ἐδάφους, στερεώνομεν εἰς τὸ Α τὸ ἕνα ἄκρον τῆς μετροταινίας ἐνῷ ὁ βοηθὸς μὲ τὴν μετροταινίαν προχωρεῖ κατὰ μῆκος τῆς χαραγμένης εὐθείας. Ὅταν τελειώσῃ ἡ ταινία, τὴν τεντώνει καλὰ καὶ τοποθετεῖ ἓν καρφίον εἰς τὸ τέλος της. Κατόπιν προχωροῦμεν συγχρόνως μετὰ τοῦ βοηθοῦ, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὸ καρφίον.

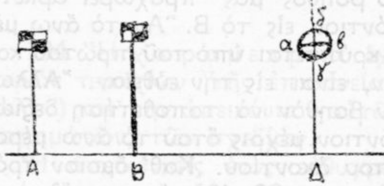


Σχῆμα 142.

Στερεώνομεν τότε τὴν ἀρχὴν τῆς ταινίας εἰς τὸ καρφίον, ἐνῷ ὁ βοηθὸς τοποθετεῖ δεύτερον καρφίον. Καθ' ὅμοιον τρόπον προχωροῦντες μετρῶμεν ὅλην τὴν εὐθεῖαν ΑΕ. Ἂν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ταινία ἔχει μῆκος 25μ. καὶ ὅτι τὴν ἐπανελάβαμεν 5 «φοράς, ἀκόμη δὲ ὅτι εὑρήκαμεν εἰς τὸ τέλος 12,5 μ., ἡ εὐθεῖα ΑΕ ἔχει μῆκος 25.5+12,5=125+12,5=137,5μ.

Χωρομετρικὰ προβλήματα.

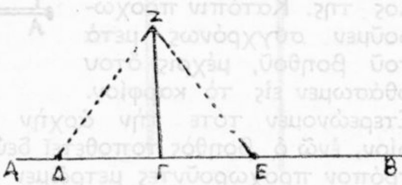
137. Π ρ ό β λ η μ α 1ον. Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς εὐθείας ἐπὶ ἐδάφους νὰ χαραχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Γ ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 143).



Σχῆμα 143.

Διὰ νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ἐκ τοῦ σημείου, μεταχειριζόμεθα ἐκτὸς τῶν συνήθων ἀκοντίων, τὰ ὁποῖα τοποθετοῦμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας πλησίον τοῦ Γ, καὶ ἓν ἀκόντιον διαφορετικόν. Τὸ ἀκόντιον τοῦτο εἰς τὸ ἄνω μέρος ἔχει ὁριζοντίαν πλάκα ξυλίνην, ἐπὶ τῆς ὁποίας εἶναι χαραγμέναι ζωηρῶς δύο κάθετοι εὐθεῖαι αβ καὶ γδ εἰς σχῆμα σταυροῦ. Εἰς τὰ ἄκρα α,β,γ,δ τῶν εὐθειῶν ὑπάρχουν τέσσαρες βελόναι, ὥστε ἡ σκόπευσις νὰ γίνεται εὐκόλως. Τοποθετοῦμεν τὸ ὄργανον αὐτὸ (τὸ ὁποῖον εἶναι ἁπλουστέρα κατασκευὴ ἑνὸς χωρομετρικοῦ ὀργάνου ποὺ ὀνομάζεται ὀρθόγωνον) εἰς τὸ σημεῖον Δ, ὥστε ἡ εὐθεῖα αβ τῆς πλακὸς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν χαραγμένην εὐθεῖαν. Ἂν ἡ εὐθεῖα γδ προεκτεινομένη διὰ τῆς ὀπτικῆς μας ἀκτῖνος διέρχεται διὰ τοῦ Γ, ἔχομεν τὴν ζητουμένην κάθετον ΓΔ. Ἂν ὄχι, μετακινοῦμεν καταλλήλως τὸ ὄργανον, ἕως ὅτου ἡ προέκτασις τῆς εὐθείας γδ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, ἐνῷ ἡ εὐθεῖα αβ μένῃ πάντοτε εἰς τὴν διεύθυνσιν τῆς χαραγμένης εὐθείας.

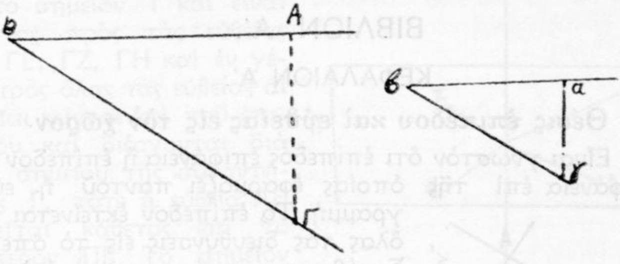
138. Π ρ ό β λ η μ α 2ον. Διὰ σημείου κειμένου ἐπὶ εὐθείας τοῦ ἐδάφους νὰ χαραχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν. Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον αὐτῆς Γ, εἰς τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν κάθετον (σχ. 144). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Γ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τὸ Γ. Στρεφώνομεν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε τὰ ἄκρα ἑνὸς σχοινίου, τὸ ὁποῖον τεντώνομεν καλὰ ἐκ τοῦ μέσου αὐτοῦ Ζ ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Ἡ εὐθεῖα ΓΖ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος.



Σχῆμα 144.

139. Π ρ ό β λ η μ α 3ον. Νὰ μετρηθῇ μία γωνία σχηματι-

ζομένη ὑπὸ δύο εὐθειῶν ἐπὶ τοῦ ἐδάφους. Πρὸς τοῦτο μετρῶμεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ χαράσσομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ, τὴν ὁποίαν μετρῶμεν ἐπίσης (σχ. 145). Κατόπιν



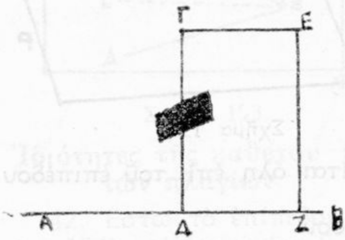
Σχῆμα 145.

κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ χάρτου τὸ τρίγωνον αβγ ὑπὸ κλίμακα, ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ. Ἑπομένως ἡ γωνία β τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὴν ζητουμένην γωνίαν Β.

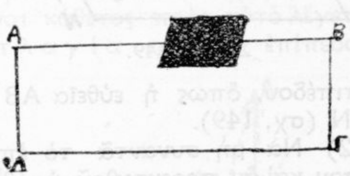
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

178. Νὰ γίνουν διάφοροι χωρομετρήσεις ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

179. Ἕνας εὐθύγραμμος δρόμος ΑΒ τρυπᾷ μίαν οἰκίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνέχεια τοῦ δρόμου ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς οἰκίας.



Σχῆμα 146.



Σχῆμα 147.

180. Μεταξὺ ἑνὸς εὐθυγράμμου δρόμου ΑΒ καὶ ἑνὸς σημείου Γ ὑπάρχει οἰκία. Νὰ ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ.146).

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

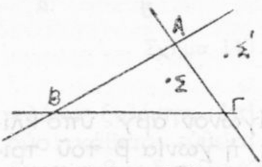
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Θέσις ἐπιπέδου καὶ εὐθείας εἰς τὸν χῶρον.

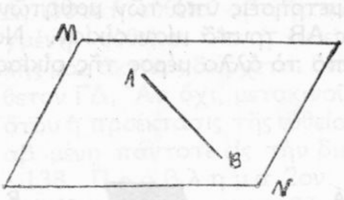
140. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδον εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει παντοῦ ἡ εὐθεῖα γραμμή. Τὸ ἐπίπεδον ἐκτείνεται πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις εἰς τὸ ἄπειρον. Συνήθως παριστάνεται ὑπὸ ἑνὸς τμήματός του, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα παραλληλογράμμου.



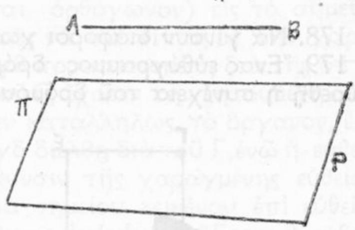
Σχῆμα 148.

Ἕνα σημεῖον τοῦ χώρου ἠμπορεῖ νὰ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ (σχ.148).

Μία εὐθεῖα εἶναι δυνατόν : 1) Νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ ἑνὸς



Σχῆμα 149.



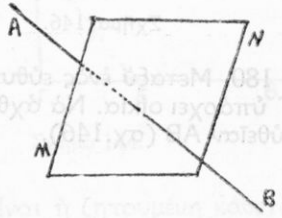
Σχῆμα 150.

ἐπιπέδου, ὅπως ἡ εὐθεῖα AB κεῖται ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου MN (σχ. 149).

2) Νὰ μὴ συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον, ὅπως ἡ εὐθεῖα AB, ἡ ὁποία ὅσον καὶ ἂν προεκταθῇ δὲν συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ (σχ.150).

Ἡ εὐθεῖα τότε λέγεται παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

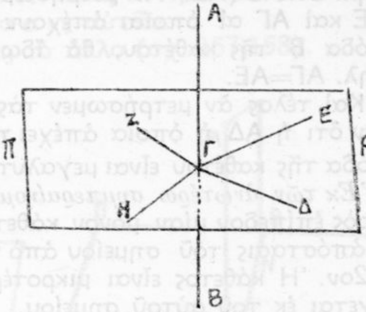
3) Νὰ τρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον ὅπως ἡ εὐθεῖα AB τρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον MN εἰς τὸ σημεῖον Γ (σχ.151).



Σχῆμα 151.

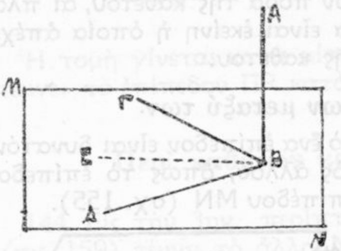
Περὶ καθέτων καὶ πλαγίων εὐθειῶν πρὸς ἐπίπεδον·

141. Εἰς τὴν τρίτην περίπτωσιν ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΒ (σχ.152) συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ εἶναι κάθετος πρὸς τὰς εὐθείας ΓΔ, ΓΕ, ΓΖ, ΓΗ καὶ ἐν γένει πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως Γ, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΒ καλεῖται κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ. Τὸ σημεῖον Γ λέγεται πούς τῆς καθέτου. Ὥστε: *Μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, ὅταν εἶναι κάθετος πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς συναντήσεως.*



Σχῆμα 152.

Εἶναι ὅμως ἀρκετὸν ἡ εὐθεῖα νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο μόνον εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου ΒΓ καὶ ΑΓ (σχ. 153), ὁπότε γίνεται φανερὸν ὅτι θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ πᾶσαν ἄλλην ἑπομένως καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

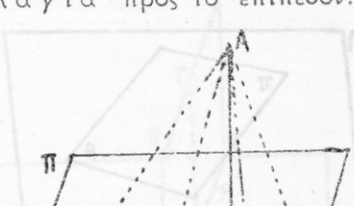


Σχῆμα 153.

Κάθε ἄλλη ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τρυπᾷ τὸ ἐπίπεδον χωρὶς νὰ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὸ λέγεται π λ α γ ί α πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

Ἰδιότητες τῆς καθέτου καὶ τῶν πλαγίων·

142. Ἔστω τὸ ἐπίπεδον ΠΡ (σχ.154) καὶ ἓν σημεῖον Γ τοῦ χώρου μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἂν ἐκ τοῦ Γ φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ προσπαθήσωμεν νὰ φέρωμεν καὶ ἄλλας, θὰ ἴδωμεν ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι συμπίπτουν μὲ τὴν ΑΒ. Ἡ κάθετος δὲ ΑΒ λέγεται καὶ ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡ.



Σχῆμα 154.

Ἂν μετρήσωμεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ μίαν πλαγίαν, ἔστω τὴν ΑΖ θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ *κάθετος εἶναι μικροτέρα τῆς πλαγίας*, δηλ. ὅτι ΑΒ < ΑΖ. Ἂν μετρήσωμεν κατόπιν τὰς δύο πλαγίας ΑΕ καὶ ΑΓ αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπόστασιν ΒΓ=ΒΕ ἀπὸ τὸν πόδα Β τῆς καθέτου, θὰ ἴδωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, δηλ. ΑΓ=ΑΕ.

Καὶ τέλος ἂν μετρήσωμεν τὰς πλαγίας ΑΔ καὶ ΑΓ, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ ΑΔ ἡ ὁποία ἀπέχει περισσότερον τῆς ΑΓ ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς, δηλ. ΑΔ > ΑΓ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι : 1ον. Ἐξ ἑνὸς σημείου πρὸς ἐπίπεδον μίαν μόνον κάθετον φέρομεν, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

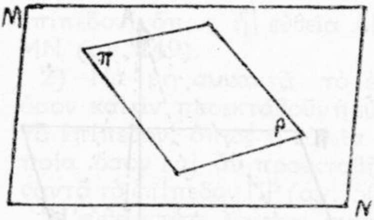
2ον. Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

3ον. Αἱ πλάγιαι αἱ ὁποῖαι τρυποῦν τὸ ἐπίπεδον εἰς σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

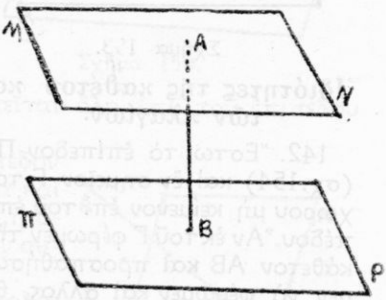
4ον. Ἂν δύο πλάγιαι τρυποῦν τὸ ἐπίπεδον εἰς σημεῖα τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀνίσως ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγιαι εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη ἡ ὁποία ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Θέσις δύο ἐπιπέδων μεταξύ των.

143. Μεταξὺ δύο ἐπιπέδων τὸ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι δυνατόν: 1) Νὰ κεῖται ὁλόκληρον ἐπὶ ἑνὸς ἄλλου, ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κεῖται ὁλόκληρον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (σχ. 155).



Σχῆμα 155.

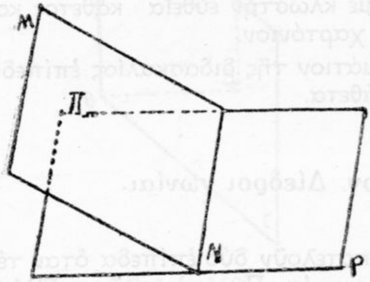


Σχῆμα 156.

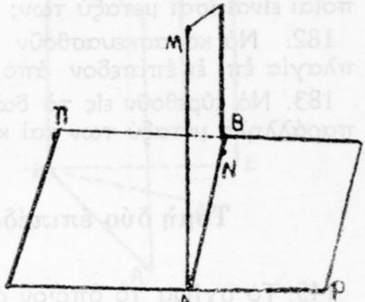
2) Νὰ μὴ συναντᾷ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν καὶ τὰ δύο, ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΜΝ δὲν συναντᾶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ (σχ.156). Τότε τὰ δύο ἐπίπεδα λέγονται π α ρ ά λ λ η λ α .

Ἂν φέρωμεν δὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἰς τὸ σημεῖον Α, αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ εἰς τὸ σημεῖον Β. Ἡ κοινὴ αὕτη κάθετος τῶν δύο ἐπιπέδων καλεῖται ἀπόστασις αὐτῶν.

3) Τὸ ἓν ἐπίπεδον νὰ τέμνῃ τὸ ἄλλο (σχ. 157,158).



Σχῆμα 157.



Σχῆμα 158.

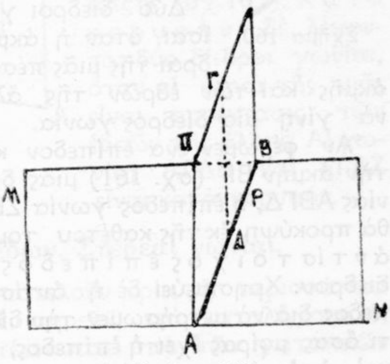
Ἡ τομὴ γίνεται κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ.

Περὶ καθέτων καὶ πλαγίων ἐπιπέδων.

144. Εἰς τὴν 3ην περίπτωσιν ὅταν τὸ ἕνα ἐπίπεδον ΠΡ (σχ. 159) τέμνῃ τὸ ἄλλο ΜΝ καὶ περιέχῃ μίαν εὐθεῖαν ὅπως τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, τότε τὸ ἐπίπεδον ΠΡ λέγεται κάθετον πρὸς τὸ ΜΝ.

Ὥστε: *Ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον πρὸς ἄλλο, ὅταν περιέχῃ μίαν εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.*

Ὅταν ἕνα ἐπίπεδον τέμνῃ ἕνα ἄλλο χωρὶς νὰ εἶναι κάθετον πρὸς αὐτό, τότε λέγεται πλάγιον ἐπίπεδον.



Σχῆμα 159.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

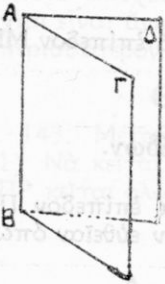
181. Τί σχηματίζουν οἱ πόδες τῶν πλαγίων εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των;

182. Νὰ κατασκευασθοῦν μὲ κλωστὴν εὐθεῖα κάθετος καὶ πλαγία ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον ἀπὸ χαρτόνιον.

183. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ δωμάτιον τῆς διδασκαλίας ἐπίπεδα παράλληλα μεταξύ των καὶ κάθετα.

Τομὴ δύο ἐπιπέδων. Δίεδροι γωνίαι.

145. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν δύο ἐπίπεδα ὅταν τέμνωνται λέγεται δ ί ε δ ρ ο ς γωνία. Πχ. τὸ σχῆμα ΓΒΑΔ (σχ. 160) εἶναι μία δίεδρος γωνία. Τὰ ἐπίπεδα ΓΒΑ καὶ ΔΒΑ, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὴν δίεδρον γωνίαν, λέγονται ἕ δ ρ α ι. Ἡ δὲ εὐθεῖα ΑΒ, κατὰ τὴν ὁποίαν τὰ ἐπίπεδα τέμνονται, καλεῖται ἀ κ μ ὴ τῆς διέδρου γωνίας.



Σχῆμα 160.

Σημειώνομεν μίαν δίεδρον γωνίαν μὲ 4 γράμματα, ὅπως εἰς τὸ σχῆμα 160.

Κατὰ τὴν ἀπαγγελίαν τὰ γράμματα τῆς ἀκμῆς διαβάζονται μεταξὺ τῶν ἄλλων δύο.

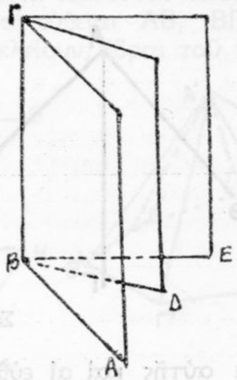
Δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὅταν ἡ ἀκμὴ καὶ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς πέσουν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς καὶ τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ γίνῃ μία δίεδρος γωνία.

Ἂν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΒΓ (σχ. 161) μιᾶς διέδρου γωνίας ΑΒΓΔ, ἡ ἐπίπεδος γωνία ΖΕΗ ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς καθέτου τομῆς λέγεται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ς ἐ π ί π ε δ ο ς γωνία τῆς διέδρου. Χρησιμεύει δὲ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διὰ νὰ μετρήσωμεν τὴν δίεδρον. Διότι ὅσας μοίρας ἔχει ἡ ἐπίπεδος, τόσας ἔχει καὶ ἡ ἀντίστοιχος δίεδρος γωνία.

Σχῆμα 161.

146. Εἴδη διέδρων γωνιῶν. Ἂν τὰ ἐπίπεδα τέμνωνται καθέτως, τότε ἡ δίεδρος γωνία λέγεται ὀρθὴ δίεδρος γωνία, ὅπως εἶναι ἡ ΓΒΑΔ (σχ. 162).

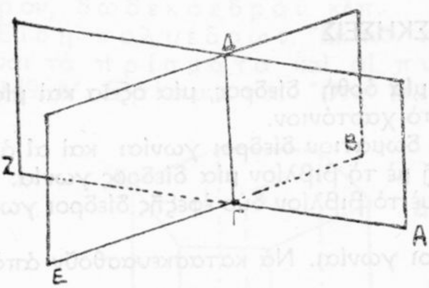
Σχῆμα 162.



Σχῆμα 163.

Ἂν ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος μιᾶς διέδρου εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς, τότε ἡ δίεδρος λέγεται ἀμβλεῖα.

Ἐφεξῆς λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἂν ἔχουν τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινήν, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ τῆς κοινῆς ἕδρας. Αἱ γωνίαι ΑΓΔΒ καὶ ΒΓΔΖ εἶναι ἐφεξῆς (σχ.163). Κατὰ κορυφὴν δὲ λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ὅταν αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προέκτασις τῶν ἑδρῶν τῆς ἄλλης. Αἱ γωνίαι ΑΓΔΒ καὶ ΕΓΔΖ εἶναι κατὰ κορυφήν.



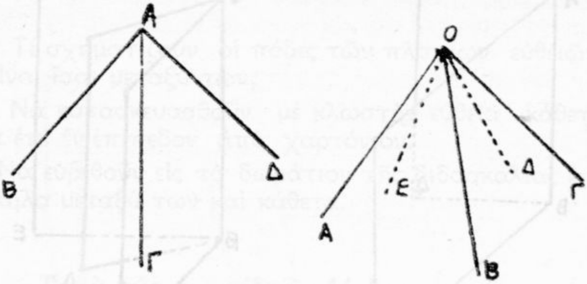
Σχῆμα 164.

Τομὴ πολλῶν ἐπιπέδων. Στερεαὶ γωνίαι.

147. Τὸ σχῆμα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα ὅταν τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον καὶ καταλήγουν εἰς δύο εὐθείας, εἰς τὰς ὁποίας τέμνονται ὑπὸ τῶν γειτονικῶν ἐπιπέδων, λέγεται στερεὰ γωνία.

Στερεαὶ γωνίαι εἶναι αἱ ΑΒΓΔ, Ο–ΑΒΓΔΕ (σχ. 165). Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς λέγεται κ ο ρ υ φ ή.

Τὰ ἐπίπεδα ποὺ ἀποτελοῦν τὴν στερεὰν γωνίαν λέγονται



Σχῆμα 165.

ἕ δ ρ α ι αὐτῆς καὶ αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι εἶναι τομαὶ τῶν ἑδρῶν, ἀ κ μ αί.

Ὅταν μία στερεὰ γωνία ἀποτελῆται ἀπὸ τρεῖς ἕδρας, λέγεται τ ρ ί ε δ ρ ο ς, ὅταν ἀπὸ τέσσαρας, τ ε τ ρ ά ε δ ρ ο ς καὶ ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ περισσοτέρας, λέγεται π ο λ ύ ε δ ρ ο ς.

Δύο στερεαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὅταν αἱ ἀκμαὶ καὶ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς πέσουν καὶ ἐφαρμόσουν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν καὶ ἑδρῶν τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ γίνῃ μία στερεὰ γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

184. Νὰ κατασκευασθῇ μία ὀρθὴ δίεδρος, μία ὀξεῖα καὶ μία ἀμβλεῖα δίεδρος γωνία ἀπὸ χαρτόνιον.

185. Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ δωμάτιον δίεδροι γωνίαι καὶ αἱ ἀκμαί των. Νὰ σχηματισθῇ μὲ τὸ βιβλίον μία δίεδρος γωνία.

186. Νὰ σχηματισθοῦν μὲ τὸ βιβλίον δύο ἐφεξῆς δίεδροι γωνίαι.

187. Νὰ εὑρεθοῦν τρίεδροι γωνίαι. Νὰ κατασκευασθοῦν ἀπὸ χαρτόνιον στερεαὶ γωνίαι.

188. Νὰ μετρηθῇ μία δίεδρος γωνία.

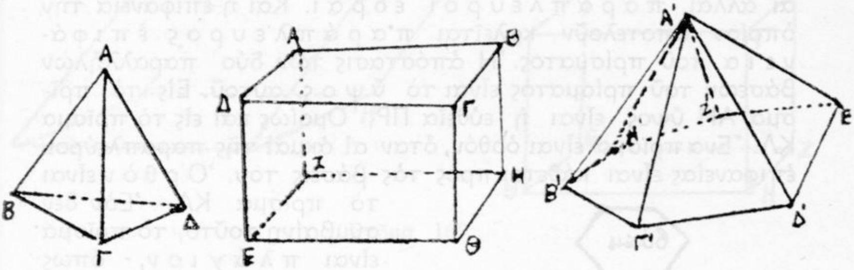
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Περὶ πολυέδρων. Εἴδη αὐτῶν.

148. Ἕνα στερεὸν σῶμα τὸ ὁποῖον περιορίζεται πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων λέγεται π ο λ ύ ε δ ρ ο ν.

Τὰ στερεὰ σώματα ΑΒΓΔ, ΑΒΓΔΕΖΗΘ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄Ζ΄ εἶναι πολύεδρα (σχ. 166).

Τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ, εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται τὰ ἐπίπεδα λέγονται κορυφαὶ τοῦ πολυέδρου, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ κλπ. ἀκμαὶ καὶ τὰ ἐπίπεδα ποὺ τὸ περικλείουν, ἕδραι τοῦ πολυέ-



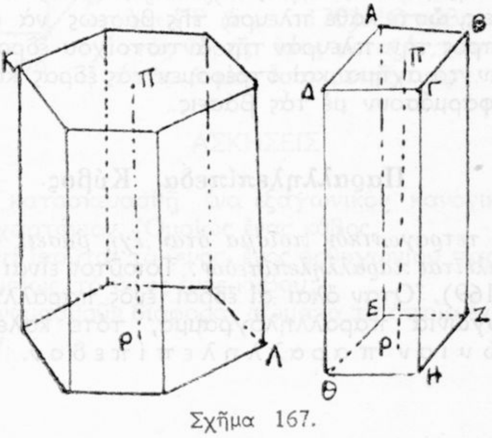
Σχῆμα 166.

δρου. Ὅταν αἱ ἕδραι ἑνὸς πολυέδρου εἶναι κανονικαὶ καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ ἴσαι, τὸ πολύεδρον λέγεται κανονικόν. Εἰς τὰς πολυέδρους κανονικὰς πυραμίδας ἡ γωνία τῆς κορυφῆς δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας στερεὰς γωνίας.

Ἂν ἕνα πολύεδρον ἔχῃ τέσσαρας ἕδρας, λέγεται τ ε τ ρ ά ε δ ρ ο ν. Ἂν πέντε, π ε ν τ ά ε δ ρ ο ν. Ἂν ἔχῃ ἕξ, ὀκτώ, δώδεκα κλπ. ἕδρας τότε λέγεται ἑ ξ ά ε δ ρ ο ν, ὀ κ τ ά ε δ ρ ο ν, δ ω δ ε κ ά ε δ ρ ο ν κλπ.

Ε ἴ δ η π ο λ υ έ δ ρ ω ν. Ἐκ τῶν πολυέδρων σπουδαιότερα εἶναι τὰ π ρ ί σ μ α τ α καὶ αἱ π υ ρ α μ ί δ ε ς.

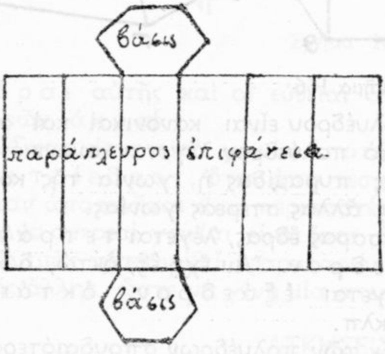
149 Α΄. Π ρ ί σ μ α τ α. *Ὅταν ἕνα πολύεδρον ἔχῃ δύο ἕδρας*



Σχῆμα 167.

πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα καὶ τὰς ἄλλας ἕδρας παραλληλόγραμμα, τότε καλεῖται πρῖσμα.

Πρίσματα εἶναι τὰ σχήματα ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ ΚΛ (σχ. 167). Αἱ δύο ἕδραι ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, καλοῦνται β ά σ ε ι ς τοῦ πρίσματος. Ὅλαι δὲ αἱ ἄλλαι, π α ρ ά π λ ε υ ρ ο ι ἕ δ ρ α ι. Καὶ ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν καλεῖται π α ρ ά π λ ε υ ρ ο ς ἐ π ι φ ά ν ε ι α τοῦ πρίσματος. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων βάσεων τοῦ πρίσματος εἶναι τὸ ὕ ψ ο ς αὐτοῦ. Εἰς τὸ πρῖσμα ΑΗ ὕψος εἶναι ἡ εὐθεῖα ΠΡ. Ὁμοίως καὶ εἰς τὸ πρῖσμα ΚΛ. Ἕνα πρῖσμα εἶναι ὀρθόν, ὅταν αἱ ἀκμαὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις του. Ὀ ρ θ ὸ ν εἶναι τὸ πρῖσμα ΚΛ. Ἐὰν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, τὸ πρῖσμα εἶναι π λ ά γ ι ο ν, ὅπως εἶναι τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ.



Σχῆμα 168.

Ἂν ἕνα πρῖσμα ἔχῃ τὰς βάσεις του τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κλπ., καλεῖται τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικὸν κλπ.

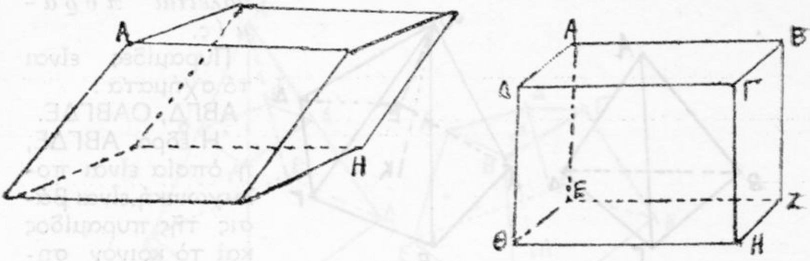
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα κανονικὸν πρῖσμα, πχ. ἑξαγωνικόν, σχεδιάζομεν ἐπὶ χαρτονίου τὰς 6 ἕδρας του (σχ. 168). Κατόπιν πλησίον τῆς μεσαίας ἕδρας σχεδιάζομεν τὰς δύο ἑξαγωνικὰς βάσεις, ὥστε κάθε πλευρὰ τῆς βάσεως νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς ἀντιστοίχου ἕδρας.

Κόπτομεν τὸ σχῆμα καὶ στρέφομεν τὰς ἕδρας καταλλήλως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν μὲ τὰς βάσεις.

Παραλληλεπίπεδα. Κύβος.

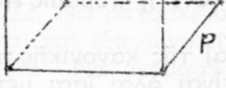
150. *Τὸ τετραγωνικὸν πρῖσμα ὅταν ἔχῃ βάσεις παραλληλόγραμμα καλεῖται παραλληλεπίπεδον*. Τοιοῦτον εἶναι τὸ πρῖσμα ΑΗ (σχ. 169). Ὅταν ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, τότε καλεῖται τοῦτο ὀ ρ θ ο γ ώ ν ι ο ν π α ρ α λ λ η λ ε π ί π ε δ ο ν.

Τοιοῦτον εἶναι τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 169). Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ ΕΘ, ΕΑ καὶ ΕΖ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καλοῦνται καὶ διαστάσεις αὐτοῦ.



Σχῆμα 169.

Ἐξ αὐτῶν ἡ μία καλεῖται μῆκος, ἡ ἄλλη πλάτος καὶ ἡ τρίτη ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, σχεδιάζομεν ἐπὶ χαρτονίου τὰς 4 ἕδρας, ἀνὰ δύο ἴσας μεταξύ των. Κατόπιν ἑκατέρωθεν μιᾶς ἐξ αὐτῶν σχεδιάζομεν τὰς βάσεις, ὥστε κάθε πλευρὰ τῶν βάσεων νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴση πρὸς τὴν πλευρὰν τῆς ἀντιστοίχου ἕδρας. Κόπτομεν τὸ σχῆμα καὶ στρέφομεν τὰς ἕδρας καταλλήλως ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν μὲ τὰς βάσεις.



Σχῆμα 170.

151. *Ὅταν ὅλαι αἱ ἕδραι ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι τετράγωνα, τότε τοῦτο καλεῖται κύβος.* Κύβος εἶναι τὸ σχῆμα ΠΡ (σχ. 170). Ὁ κύβος ἔχει ὅλας τὰς ἕδρας ἴσας μεταξύ των καὶ ὅλας τὰς ἀκμὰς ἴσας μεταξύ των.

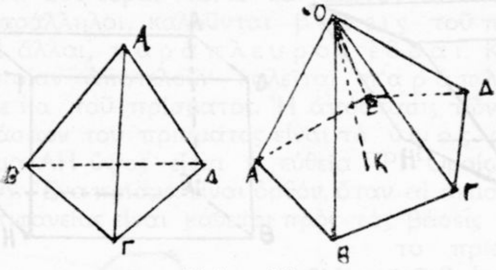
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

189. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ἑξαγωνικὸν κανονικὸν πολύεδρον ἀπὸ χαρτόνιον. Ὁμοίως ἕνας κύβος.

190. Μὲ τί ἰσοῦται τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου; Ὁμοίως τὸ ὕψος ἑνὸς κύβου;

191. Νὰ ὀνομασθοῦν διάφορα σώματα τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα πρισμάτων.

152. Β΄. Π υ ρ α μ ί δ ε ς. *Ὅταν ἕνα πολύεδρον ἔχῃ μίαν ἕδραν πολύγωνον καὶ τὰς ἄλλας τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου τούτου καὶ κορυφὴν κοινήν, τότε καλεῖται π υ ρ α μ ί ς.*



Σχῆμα 171.

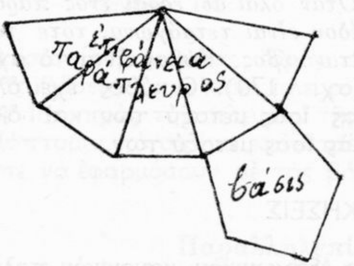
Πυραμίδες εἶναι τὰ σχήματα : ΑΒΓΔ, ΟΑΒΓΔΕ. Ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕ, ἡ ὁποία εἶναι πολυγωνική, εἶναι βάσις τῆς πυραμίδος καὶ τὸ κοινὸν σημειον Ο τῆς τομῆς τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν, ἡ κορυφὴ αὐτῆς.

Αἱ τριγωνικαὶ ἕδραι καλοῦνται παράπλευροι ἕ δ ρ α ι καὶ ἡ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦν π α ρ ά π λ ε υ ρ ο ς ἐ π ι φ ά ν ε ι α τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς Ο κάθετος ΟΚ ἐπὶ τὴν βάσιν εἶναι τὸ ὕ ψ ο ς τῆς πυραμίδος.

Ὅταν ἡ βάσις μιᾶς πυραμίδος εἶναι τρίγωνον, τετράπλευρον, πεντάπλευρον κλπ., ἡ πυραμὶς λέγεται τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνικὴ κλπ.

Ὅταν ἡ βάσις εἶναι πολύγωνον κανονικὸν καὶ τὸ ὕψος διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς βάσεως, τότε ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική.

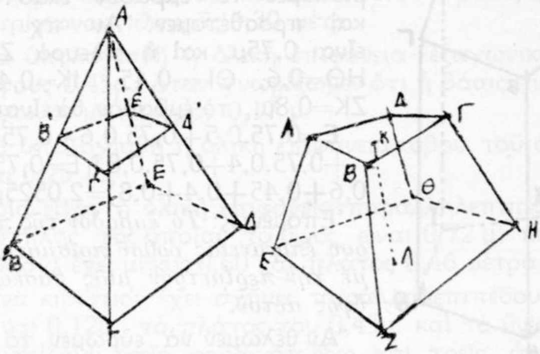


Σχῆμα 172.

Αἱ ἀκμαὶ τῆς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των. Διὰ τοῦτο αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξύ των.

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κανονικὴν πυραμίδα, πχ. πενταγωνικήν, σχεδιάζομεν ἐπὶ χαρτονίου 5 τρίγωνα μὲ κοινὴν κορυφὴν (σχ.172). Κατόπιν προσκολλῶμεν εἰς τὸ μεσαῖον τρίγωνον ἕνα πεντάγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι ἀκριβῶς ἴσαι πρὸς τὰς βάσεις τῶν ἀντιστοιχούντων τριγώνων. Κόπτομεν κατόπιν τὸ σχῆμα καὶ στρέφομεν τὰ τρίγωνα, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν μὲ τὴν βάσιν.

153. Ἂν κόψωμεν μίαν πυραμίδα δι' ἑνὸς ἐπιπέδου Β'Γ'Δ'Ε' παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, θὰ παραχθῇ ἕνα στερεὸν τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων βά-



Σχῆμα 173.

σεων καὶ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι τώρα τραπέζια. Τὸ στερεὸν τοῦτο καλεῖται κ ό λ ο υ ρ ο ς π υ ρ α μ ί ς. Τοιαύτη εἶναι ἡ ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 173).

Ὕ ψ ο ς αὐτῆς εἶναι ἡ ἀπόστασις ΚΛ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

192. Νὰ κατασκευασθοῦν ἀπὸ χαρτόνιον πυραμίδες τριγωνικαὶ καὶ ἑξαγωνικαί.

193. Νὰ ὀνομασθοῦν διάφορα σώματα τὰ ὁποῖα ἔχουν σχῆμα πυραμίδος.

194. Νὰ κατασκευασθῇ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ἀπὸ χαρτόνιον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

Εὕρεσις τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας καὶ τοῦ ὄγκου τῶν πρισμάτων καὶ τῶν πυραμίδων.

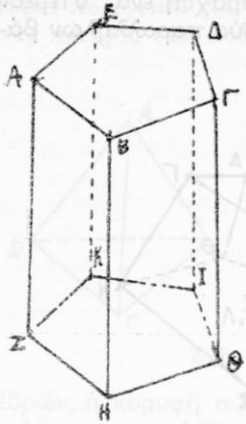
Α'. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας.

154. Ἐ π ι φ ά ν ε ι α ὀ ρ θ ο ῦ π ρ ί σ μ α τ ο ς. Ἐπειδὴ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ΑΘ (σχ. 174)

ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας καὶ προσθέτομεν. Ἂν πχ. τὸ ὕψος εἶναι 0,75μ. καὶ ἡ πλευρὰ ΖΗ=0,5μ., ΗΘ=0,6, ΘΙ=0,45., ΙΚ=0,4 μ. καὶ ΖΚ=0,8μ., τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι

Ε=0.75.0,5+0,75.0,6+0,75.0,45+ +0,75.0,4+0,75.0,8 ἢ Ε=0,75.(0,5+ 0,6+0,45+0,4+0,8)=2,0525μ².

Ἑπομένως: *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον μιᾶς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*



Σχῆμα 174.

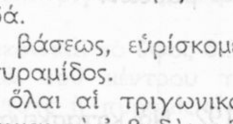
Ἂν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος, πρέπει εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας νὰ προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο βάσεων.

155. Ἐπιφάνεια πυραμίδος. Εἶναι φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πυραμίδος, πρέπει νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τριγώνου χωριστὰ καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ ἐμβαδά.

Ἂν προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

Ἂν ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, ἐπειδὴ ὅλαι αἱ τριγωνικαὶ ἕδραι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας καὶ νὰ τὸ πολ)μεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτόν, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας.

156. Ἐπιφάνεια κολούρου πυραμίδος. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος εὑρίσκομεν, ἂν ὑπολογίσωμεν τὰς ἐπιφανείας τῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα εἶναι αἱ παράπλευροι ἕδραι. Ἂν προσθέσωμεν καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο πολυγώνων, εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος (σχ. 175).



Σχῆμα 175.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

195. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια πρίσματος, τοῦ ὁμοίου τὸ ὕψος εἶναι 0,50μ. καὶ τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 0,30 μέτρ.

196. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια ἑξαγωνικοῦ πρίσματος ὕψους 0,45μ., ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ βάσις εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον μὲ πλευρὰν 0,17 μ.

197. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι 0,25 μ..

198. Ποία εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια παραλληλεπιπέδου μαρμαρίνης στήλης τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 0,72 μ. καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις, ἔχει μῆκος 0,60 καὶ πλάτος 0,46 μέτρα ;

199. Ἕνα κιβώτιον ἔχει σχῆμα παραλληλεπιπέδου· τὸ μῆκος του εἶναι 0,12μ., τὸ πλάτος του 0,45μ. καὶ τὸ ὕψος 0,56μ. Τὸ χρωματίζουν τρεῖς φορὰς ἀπ'ἔξω καὶ τρεῖς ἀπὸ μέσα. Πόσον θὰ στοιχίσῃ τὸ χρωμάτισμα, ἂν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον δι'ἑκάστην φορὰν στοιχίζῃ 15,50 δραχμ.;

200. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,65μ., ὅταν τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν εἶναι 1,30μ.;

201. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι 0,25 μ. καὶ τὸ ὕψος τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν 0,45μ.

202. Τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος μὲ βάσιν τετράγωνον εἶναι 0,4μ. Ἡ πλευρὰ τῆς τετραγωνικῆς βάσεως 0,6 μέτρ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

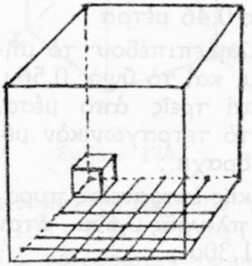
203. Μία τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ἔχει ὡς βάσεις τρίγωνα μὲ πλευρὰς 0,2μ., 0,3μ. καὶ 0,4μ., τῆς μικρᾶς βάσεως καὶ 0,4μ., 0,6μ. καὶ 0,8μ. τῆς μεγάλης. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της, ἂν τὸ ὕψος ἑκάστου τραπεζίου εἶναι 0,5 μέτρα.;

157. Μονάδες ὄγκου. Ὅπως γνωρίζομεν, *ὄγκος ἑνὸς σώματος εἶναι τὸ μέρος τοῦ χώρου τὸ ὁποῖον τοῦτο καταλαμβάνει.* Τοιουτοτρόπως λέγομεν ὅτι ὁ ὄγκος μιᾶς οἰκίας εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκον ἑνὸς γραφείου, διότι ἡ οἰκία καταλαμβάνει περισσότερον χῶρον ἀπὸ τὸ γραφεῖον. Μονὰς μετρήσεως τοῦ ὄγκου εἶναι τὸ κυβικὸν μέτρον. Τοῦτο εἶναι ἕνας κύβος ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν ἴσην πρὸς 1 μ.

Δευτερεύουσαι μονάδες ὄγκου εἶναι κύβοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πλευρὰς τὰ διάφορα πολλαπλάσια καὶ ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου.

Τὸ	κυβ.	χιλιόμετρ.	($χμ^3$)	κύβος πλευρᾶς	1	χιλιομ.	=	1000000000 $μ^3$
»	»	ἑκατόμετρ.	($εμ^3$)	» »	1	ἑκατομ.	=	1000000 $μ^3$
»	»	δεκάμετρ.	($δμ^3$)	» »	1	δεκαμ.	=	1000 $μ^3$
»	»	μέτρον	($μ^3$)	» »	1	μέτρου	=	1 $μ^3$
ἡ	»	παλάμη	($π^3$)	» »	0,1	μ.	=	0,001 $μ^3$
ὁ	»	δάκτυλ.	($δ^3$)	» »	0,01	μ.	=	0,000001 $μ^3$
ἡ	»	γραμμὴ	($γ^3$)	» »	0,001	μ.	=	0,000000001 $μ^3$

Ἂς λάβωμεν ἕνα κύβον μὲ πλευρὰν 1μ. (ὑπὸ κλίμακα), ἂς χωρίσωμεν τὴν βάσιν εἰς 100 τετράγωνα πλευρᾶς 1π. καὶ ἂς σκεπάσωμεν τὴν βάσιν μὲ 100 κύβους πλευρᾶς 1π. Μὲ 10 ὅμοια στρώματα ὁ κύβος θὰ γεμίσῃ. Ἄρα τὸ κυβικὸν μέτρον ἰσοῦται μὲ 100 κυβικὰς παλάμας, ἡ κυβικὴ παλάμη μὲ 100 κυβικοὺς δακτύλους καὶ ο.κ. Ὥστε ἑκάστη μονὰς ὄγκου εἶναι 1000 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἀμέσως κατωτέρας της.



Σχῆμα 176.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως παρίστανται μὲ τμῆμα ἐκ τριῶν ψηφίων. Διὰ νὰ διαβάσωμεν ἢ νὰ γράψωμεν ἕναν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει ὄγκον, μεταχειριζόμεθα τοὺς κανόνας μὲ τοὺς ὁποίους γίνεται ἡ ἀνάγνωσις καὶ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν ποὺ παριστάνουν ἐπιφάνειαν. Προσέχομεν ὅμως νὰ λαμβάνωμεν ἀνὰ τρία τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ, πχ. ὁ ἀριθμὸς 13,6072153 $μ^3$ διαβάζεται καὶ 13 $μ^3$, 607 $π^3$, 215 $δ^3$ καὶ 300 $γ^3$.

Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 6$μ^3$, 35 $π^3$, 9 $δ^3$, 535 $γ^3$ γράφεται 6,035009535$μ^3$.

158. Μ ο ν ά δ ε ς β ά ρ ο υ ς. *Βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι ἡ ἐνέργεια τῆς βαρύτητος, δηλ. τῆς ἕλξεως τῆς Γῆς ἐπ' αὐτοῦ.* Διὰ νὰ ζυγίσωμεν ἓν σῶμα, μεταχειριζόμεθα διάφορα σταθμὰ καὶ τὴν πλάστιγγα. Μονὰς μετρήσεως τοῦ βάρους εἶναι τὸ γραμμάριον. Γραμμάριον εἶναι τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°, τὸ ὁποῖον χωρεῖ εἰς ἕνα κυβικὸν δάκτυλον. Χίλια τοιαῦτα γραμμάρια ἀποτελοῦν ἕνα χιλιόγραμμον ἢ κιλόν. Δευτερεύουσαι μονάδες εἶναι :

ὁ τόννος	= βάρ. ὕδατ. 4° ποὺ χωρεῖ εἰς	$1\mu^3 = 1000$ χιλιόγ.
τὸ χιλγρ.(κιλὸ)	= » » » » » »	$1\pi^3 = 1000$ γραμ.
τὸ γραμμάριον	= » » » » »	$1\delta^3 = 1$ »
τὸ δεκατόγραμ.	= » » » »	$0,1$ » $= 0,1$ »
τὸ ἑκατοστόγρ.	= » » » »	$0,01$ » $= 0,01$
τὸ χιλιοστόγρ.	= » » » » »	$0,001$ » $= 0,001$ »

159. **Εἰδικὸν βάρος τῶν σωμάτων.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ἕνα δοχεῖον τὸ ὁποῖον ἔχει ὄγκον ἕνα κυβ. δάκτυλον χωρεῖ ὕδωρ ἀπεσταγμένον θερμοκρασίας 4°, τὸ ὁποῖον ἔχει βάρος 1 γραμμάριον. Ἕνα δοχεῖον $45\pi^3$ χωρεῖ ὅμοιον ὕδωρ βάρους 45 γραμμαρίων. Μία δεξαμενὴ $4\mu^3$ χωρει ὅμοιον ὕδωρ βάρους 4 τόνων. Δηλ. : Ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος ἐκφράζεται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μὲ τὸν ὁποῖον ἐκφράζεται καὶ τὸ βάρος του. Ὥστε, ἂν διαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν τοῦ βάρους τοιούτου ὕδατος διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὄγκου αὐτοῦ, εὑρίσκομεν πηλίκον 1.

Ἂν γεμίσωμεν $1\delta^3$ ὑδράργυρον καὶ τὸν ζυγίσωμεν, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ζυγίζει 13,6 γραμμ. Ἄρα ὁ ὑδράργυρος εἶναι βαρύτερος 13,6 φορὰς ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ 4°. Ἂν διαιρέσωμεν τὸ βάρος τοῦ ὑδραργύρου διὰ τοῦ ὄγκου του, δηλ. διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°, εὑρίσκομεν πηλίκον 13,6.

Γενικῶς : *Ἂν διαιρέσωμεν τὸ βάρος ἑνὸς σώματος διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου ὕδατος ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4°, εὑρίσκομεν πηλίκον, τὸ ὁποῖον καλεῖται* ***εἰδικὸν βάρος*** *τοῦ σώματος.* Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸ βάρος τοῦ ὕδατος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸν ὄγκον του καὶ ἑπομένως τὸν ὄγκον τοῦ σώματος, διὰ τοῦτο: *Εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ βάρος αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ὄγκου του.* Ἂν καλέσωμεν Β τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸ βάρος τοῦ σώματος, Ο τὸν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος παριστάνει τὸν ὄγκον αὐτοῦ καὶ Ε τὸ εἰδικὸν βάρος του, ἔχομεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα τὴν ἰσότητα: $Ε = \frac{Β}{Ο}$. Ἂν πολ)μεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ἐπὶ Ο, ἔχομεν: $Β = Ο.\ Ε.$

Δηλαδή: *Τὸ βάρος ἑνὸς σώματος ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον του ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.*

Ἂν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἰσότητος διὰ Ε, εὑρίσκομεν ὅτι: $Ο = \frac{Β}{Ε}$.

Δηλαδή: *Ὁ ὄγκος ἑνος σώματος ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ βάρους τοῦ σώματοςδιὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους αὐτοῦ.*

Διὰ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων συνδέεται τὸ βάρος ἑνὸς σώματος μὲ τὸν ὄγκον αὐτοῦ καὶ γίνεται δυνατὴ ἡ εὕρεσις τοῦ ἑνὸς ἐκ τοῦ ἄλλου, ὅταν εἶναι γνωστὸν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος.

Ἡ φυσικὴ διδάσκει διαφόρους μεθόδους διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ εἰδικοῦ βάρους τῶν σωμάτων. Ὁ κατωτέρω δὲ πίναξ δίδει τὰ εἰδικὰ βάρη διαφόρων σωμάτων.

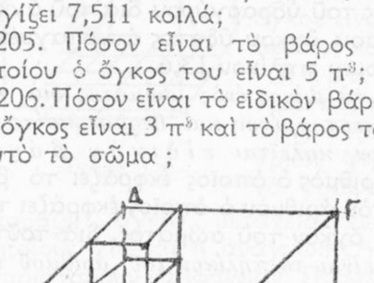
Σώματα	Ε	Σώματα	Ε
Μόλυβδος	11,353	Μάρμαρον	2,832
Σίδηρος	7,788	Θεῖον	2,07
Χαλκὸς	8,788	Ἀδάμας	2,516
Ἄργυρος	10,474	Ὕδωρ	1
Χρυσὸς	19,258	Γάλα	1,03
Πάγος	0,92	Ἔλαιον	0,915
Ὕαλος	2,488	Ἀὴρ ἀτμοσφαιρ.	0,0013
		Ὑδράργυρος	13,596

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

204. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς τεμαχίου μαρμάρου, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 7,511 κοιλά;

205. Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς τεμαχίου χαλκοῦ, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος του εἶναι 5 π^3;

206. Πόσον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 3 π^3 καὶ τὸ βάρος του 40,788 γραμ.; Ποῖον εἶναι αὐτὸ τὸ σῶμα;



Σχῆμα 177.

Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

160. Ἂς λάβωμεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΗ (σχ. 177), τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι: μῆκος ΕΖ=4μ., πλάτος ΕΘ=5μ. καὶ ὕψος ΕΑ=6μ. Ἂν χωρίσωμεν τὸ μῆκος εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ τὸ πλάτος εἰς 5 καὶ φέρωμεν παραλλήλους εὐθείας, ἡ βάσις χωρίζεται εἰς 4.5 μ^2. Ἂν τώρα τοποθετήσωμεν ἐπὶ ἑκάστου τετραγ. μέτρου ἓν κυβ. μέτρον, ἡ βάσις θὰ στρωθῇ ἀπὸ 4.5 μ^3. Καὶ ἂν ἐπαναλάβωμεν τὸ αὐτὸ 6 φοράς,

θὰ γεμίσωμεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ 4.5.6=90μ^3. Ἑπομένως: *Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν αὐτοῦ διαστάσεων.*

Ἂν αἱ διαστάσεις εἶναι α, β, γ, ἔχομεν Ο=α.β.γ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον α, β εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, διὰ τοῦτο: *Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

161. Ὄγκος κύβου. Ἂν φαντασθῶμεν ὅτι αἱ 3 διαστάσεις γίνονται ἴσαι πρὸς α, τότε τὸ παραλληλεπίπεδον γίνεται κύβος καὶ ὁ τύπος τοῦ ὄγκου του εἶναι Ο=α.α.α=α^3. Δηλ. *Ὁ ὄγκος κύβου ἰσοῦται μὲ τὸν κύβον τῆς πλευρᾶς του.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

207. Αἱ διαστάσεις ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι: μῆκος 1,75μ., πλάτος 0,95μ. καὶ ὕψος 0,32 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του;

208. Ἕνα τοῦβλον ἔχει μῆκος 0,25 μ. πλάτος 0,12 μ. καὶ πάχος 0,06 μ. Πόσα τοῦβλα χρειάζονται διὰ νὰ κτισθῇ τοῖχος μήκους 6,20 μ., πλάτους 2,50 μ. καὶ πάχους 0,37 μ.;

209. Ἕνα τεμάχιον μαρμάρου σχήματος παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 1,25 μ., πλάτος 0,45 μ. καὶ πάχος 0,20 μ. Πόσον ζυγίζει;

210. Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἀέρος μιᾶς αἰθούσης, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 5μ. τὸ πλάτος 4 μ. καὶ τὸ ὕψος 3,5μ.;

211. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ πάχος ἄμμου, μὲ τὴν ὁποίαν θὰ ἐπιστρώσωμεν αὐλὴν μήκους 8,5 μ. καὶ πλάτους 4,5 μ., ἂν χρησιμοποιήσωμεν 30,6 κυβ. μέτρ. ἄμμου;

212. Ἕνας λίθος ἔχει σχῆμα κύβου πλευρᾶς 1,80 μ. Πόσον ἀξίζει, ἂν τὸ κυβ. μέτρον ἔχῃ 82 δρχμ.;

213. Πόσον ἔλαιον χωρεῖ ἕνα κυβικὸν δοχεῖον πλευρᾶς 0,72μ.;

214. Μία στήλη ἔχει γίνει ἀπὸ 6 μαρμαρίνους κύβους πλευρᾶς 0,65 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τῆς στήλης καὶ τὸ βάρος αὐτῆς;

215. Μία αἴθουσα ἔχει σχῆμα κύβου πλευρᾶς 4,5 μ. Πόσους μαθητὰς χωρεῖ ἡ αἴθουσα, ἂν εἰς ἕκαστον μαθητὴν ἀναλογῇ χῶρος 4 κ.μ.; Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τῆς αἰθούσης καὶ πόσον ὀξυγόνον, ἂν ὁ ἀὴρ περιέχῃ 21ο)ο ὀξυγόνον;

Ὄγκος παντὸς πρίσματος.

162. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον ἑνὸς τυχόντος πρίσματος κατασκευασμένου ἀπὸ φύλλον σιδήρου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πολυγωνικὴν βάσιν Β=0,06μ² καὶ τὸ ὕψος Υ=0, 025μ.

Κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἀπὸ φύλλον σιδήρου μὲ βάσιν 0,06μ² καὶ ὕψος 0,025. Γεμίζομεν καὶ τὰ δύο πρίσματα μὲ ὕδωρ. Θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ὑπάρχει καὶ εἰς τὰ δύο ἀκριβῶς ἡ αὐτὴ ποσότης ὕδατος. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Ὥστε: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον παντὸς πρίσματος, πολ)μεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

216. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος πρίσματος τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 0,45μ, ἡ δὲ βάσις κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 0,18μ.;

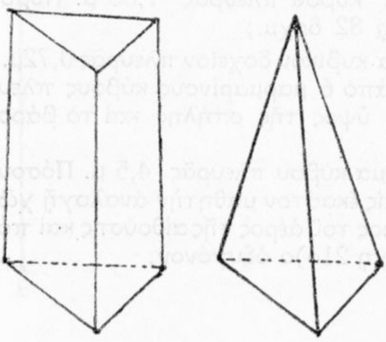
217. Ἕνα πρῖσμα ἔχει ὄγκον 0,856 μ³. Ἡ βάσις του εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς 0,32μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος;

218. Ἕνα δοχεῖον ἔχει σχῆμα τριγωνικοῦ πρίσματος. Τὸ ὕψος του εἶναι 1,5μ. Ἡ βάσις του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 0,5 μ. Πόσον οἶνον χωρεῖ;

219. Ἕνα πρῖσμα ὑάλινον ἔχει βάσιν ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὁποίου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 0,015μ. καὶ 0,008 μ. Τὸ ὕψος του εἶναι 0,2μ. Πόσον εἶναι τὸ βάρος του;

220. Ἕνα πρῖσμα μαρμάρινον μὲ βάσιν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἔχει βάρος 144 κιλὰ καὶ 687 γραμ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του, ἂν ἡ πλευρὰ τῆς ἑξαγωνικῆς βάσεως εἶναι 0,2μ.;

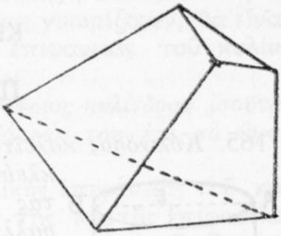
Ὄγκος πυραμίδος.



Σχῆμα 178.

163. Κατασκευάζομεν ἀπὸ φύλλον σιδήρου ἕνα τριγωνικὸν πρῖσμα καὶ μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα (σχ.178), ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ πρῖσμα. Ἂν γεμίσωμεν μὲ ὕδωρ τὸ πρῖσμα καὶ τὸ ἀδειάσωμεν εἰς τὴν πυραμίδα, θὰ ἴδωμεν ὅτι ἡ πυραμὶς γεμίζει τρεῖς ἀκριβῶς φορὰς μὲ τὸ ὕδωρ τοῦ πρίσματος. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ πυραμὶς ἔχει ὄγκον

ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὄγκου τοῦ πρίσματος. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ διὰ πᾶσαν πυραμίδα. Ὥστε: *Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς, ἤτοι:* $O = \frac{1}{3}$ B.Y.



Σχῆμα 179.

164. *Ὄγκος κολούρου πυραμίδος.* Ἂν καλέσωμεν B τὴν μεγάλην καὶ β τὴν μικρὰν βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος, Y δὲ τὸ ὕψος αὐτῆς, ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι: $O = \frac{1}{3} \cdot Y . (B + \beta + \sqrt{B\beta})$. Τὴν εὕρεσιν τοῦ τύπου τούτου διδάσκει ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

221. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,65 μ. καὶ τὸ ὕψος εἶναι 1,30 μ.

222. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος τριγωνικῆς τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 0,90 μ. καὶ ἡ βάσις ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 0,25μ. καὶ ἡ μία κάθετος πλευρὰ 0,15μ.

223. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος πυραμίδος ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 66 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου, ὅταν τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου εἶναι 55 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου;

224. Ποία εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος, ὅταν ὁ ὄγκος της εἶναι 0,236 $μ^3$ καὶ τὸ ὕψος αὐτῆς 0,3μ.;

225. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος πυραμίδος τῆς ὁποίας ὄγκος εἶναι 1,56 $μ.^3$, ὅταν ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον μήκους 40 ἑκατοστῶν καὶ πλάτους 33 ἑκατοστοστῶν τοῦ μέτρου;

226. Μία τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς ἔχει βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα. Αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ μικροῦ τριγώνου εἶναι 0,4 μ. καὶ 0,8 μ. Αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ μεγάλου εἶναι 0,8 μ. καὶ 1,6 μέτρα. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 0,3μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

227. Μία κόλουρος πυραμὶς ἔχει βάσεις τετράγωνα. Τῆς μικρᾶς βάσεως ἡ πλευρὰ εἶναι 0,2 μ. καὶ τῆς μεγάλης 0,3μ. Τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 0,5μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

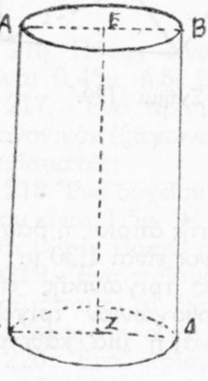
ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

Περὶ τῶν ἐκ περιστροφῆς στερεῶν σωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

Περὶ κυλίνδρου.

165. *Κύλινδρος καλεῖται τὸ στερεὸν σῶμα τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ καμπύλης ἐπιφανείας καὶ ἔχει τὰς δύο βάσεις του κύκλους ἴσους καὶ παραλλήλους.*



Σχῆμα 180.

Κύλινδρος εἶναι τὸ στερεὸν ΑΒΓΔ, (σχ. 180) οἱ σωλῆνες τῆς θερμάστρας, οἱ ὑδροσωλῆνες κλπ.

Ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων, εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου λέγεται καὶ *κυρτὴ ἐπιφάνεια*. Ἕνας κύλινδρος ΑΒΓΔ δύναται νὰ παραχθῇ ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον ΕΒΔΖ τὸ ὁποῖον σ τ ρ έ φ ε τ α ι μίαν ὁλόκληρον στροφὴν περὶ μίαν ἀκίνητον πλευράν του τὴν ΕΖ.

Ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου. Ἂν περιτυλίξωμεν τὸν ἀνωτέρω κύλινδρον μὲ χαρτίον καὶ ἀναπτύξωμεν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἔχωμεν τὸ σχῆμα ΑΑ'ΒΒ', δηλ. ἕνα ὀρθο-

Σχῆμα 181.

γώνιον (σχ.181). Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΒΒ′ ἐπὶ τὸ ὕψος ΑΒ.

Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ βάσις ΒΒ′ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς κυκλικῆς βάσεως. Ἂν ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι α, τὸ μῆκος της, ὅπως γνωρίζομεν, θὰ εἶναι Γ=2απ. Τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου Ε=2α.π.υ.

Ὥστε : *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων. Δηλ: Ε=2α.π+ +2π.$α^2$.

166. Ὄγκος τοῦ κυλίνδρου. Ἂς λάβωμεν δύο δοχεῖα, τὸ ἕνα κυλινδρικὸν καὶ τὸ ἄλλο πρῖσμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἂν τὰ γεμίσωμεν ὕδωρ, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι καὶ τὰ δύο χωροῦν ἀκριβῶς τὴν αὐτὴν ποσότητα ὕδατος.

Ἄρα καὶ τὰ δύο δοχεῖα ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εὑρίσκεται ὅπως ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, δηλ. ἂν πολ)μεν τὴν βάσιν αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος. Ἀλλὰ ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδόν, ὅπως γνωρίζομεν, εἶναι π.$α^2$. Ἂν δὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι υ, τότε ὁ ὄγκος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου Ο=π.$α^2$.υ.

Ὥστε : *Ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

228. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν:
1) ἀκτῖνα 0,23 μ.καὶ ὕψος 1,50 μ.
2) διάμετρ. τῆς βάσ. 1,80μ. καὶ ὕψος 0,79μ.
3) περιφέρ. τῆς βάσ. 4,4μ. καὶ ὕψος 3,25μ.

229. Πρόκειται νὰ χρωματισθῇ κυλινδρικὸς στῦλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον βάσεως 0,90 μ. καὶ ὕψος 3,5μ. Πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ χρωμάτισμα, ἂν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον στοιχίζῃ 22 δρχμ.;

230. Μία δεξαμενὴ κυκλικὴ ἔχει ἀκτῖνα βάσεως 2,5μ. καὶ βάθος 0,65 μ. Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ;

231. Ὁ Λευκὸς πύργος τῆς Θεσσαλονίκης ἔχει περιφέρειαν 26 μ. καὶ ὕψος 30 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

232. Πόσον εἶναι τὸ βάρος σιδηρᾶς κυλινδρικῆς στήλης, τῆς ὁποίας ἡ περιφέρεια εἶναι 0,60 μ. καὶ τὸ ὕψος 2 μέτρα;

233. Πόσον εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς μολυβδίνου σωλῆνος μήκους 3,20μ., ὅταν ἡ ἐξωτερικὴ διάμετρος τοῦ σωλῆνος εἶναι 9 ἑκατοστὰ καὶ τὸ πάχος αὐτοῦ 2 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου;

234. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, ὅταν:

1) ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι 2,48$μ^3$ καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 0,06μ.
2) ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι 62,75$μ^3$ καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως 0,24μ.

235. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 3927 $μ^3$ καὶ τὸ ὕψος 5 μέτρα;

236. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κυλίνδρου εἶναι 0,7854$μ^2$ καὶ τὸ ὕψος του 0,5μ. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου;

Περὶ κώνου καὶ κολούρου κώνου.

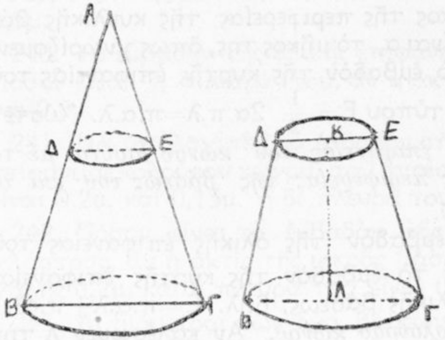
167. *Κῶνος λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν βάσιν κύκλον καὶ περιορίζεται ὑπὸ καμπύλης ἐπιφανείας ἀποληγούσης εἰς ἓν σημεῖον.* Κῶνος εἶναι τὸ σχῆμα ΑΒΓ(σχ.181). Τὸ σημεῖον Α, εἰς τὸ ὁποῖον περατοῦται ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια, λέγεται κορυφὴ τοῦ κώνου. Ἡ εὐθεῖα ΑΚ, δηλ. ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς ἀπὸ τῆς κυκλικῆς βάσεως, εἶναι τὸ ὕ ψ ο ς τοῦ κώνου.

Σχῆμα 181.

Ἡ καμπύλη ἐπιφάνεια τοῦ κώνου λέγεται καὶ κ υ ρ τ ὴ ἐ π ι φ ά ν ε ι α.

Ἕνας κῶνος ΑΒΓ δύναται νὰ παραχθῇ ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΚΓ, τὸ ὁποῖον σ τ ρ έ φ ε τ α ι μίαν ὁλόκληρον στροφὴν περὶ μίαν κάθετον πλευράν του, τὴν ΑΚ. Ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται πλευρὰ τοῦ κώνου ἢ γενέτειρα αὐτοῦ.

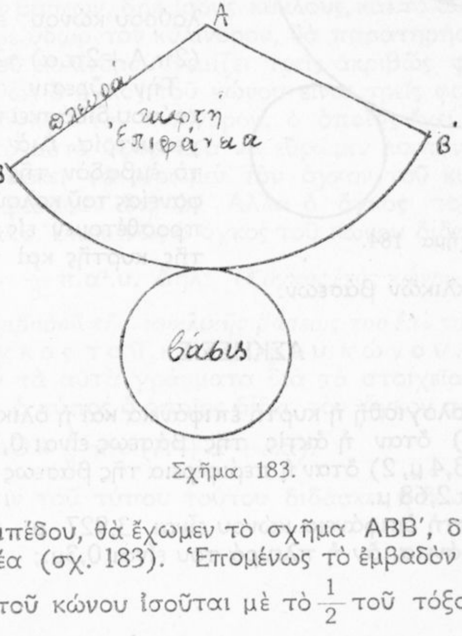
Ἂν κόψωμεν ἕνα κῶνον ΑΒΓ (σχ.182) δι' ἑνὸς ἐπιπέδου ΔΕ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, θὰ παραχθῇ ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων κυκλικῶν βάσεων καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας. Τὸ στερεὸν αὐτὸ καλεῖται *κόλουρος κῶνος*, ὅπως ὁ ΔΕΒΓ..



Σχῆμα 182.

Ὕ ψ ο ς αὐτοῦ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΚΛ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων. Πλευρὰ εἶναι τὸ τμῆμα τῆς πλευρᾶς τὸ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων κύκλων.

168 *Ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.* Ἂν περιτυλίξωμεν τὸν κῶνον ΑΒΓ μὲ χαρτίον καὶ ἀναπτύξωμεν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ

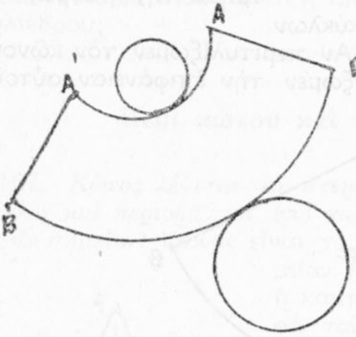


Σχῆμα 183.

ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, θὰ ἔχωμεν τὸ σχῆμα ΑΒΒ', δηλ. ἕνα κυκλικὸν τομέα (σχ. 183). Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ τόξου ΒΒ' τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἐπὶ) τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου ΑΒ. Ἀλλὰ ἡ ΑΒ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν λ. Τὸ τόξον ΒΒ' εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς κυκλικῆς βάσεως. Ἂν ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι α, τὸ μῆκος της, ὅπως γνωρίζομεν, θὰ εἶναι Γ=2α.π. Τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $Ε=\frac{1}{2}$ 2α.π.λ=π.α.λ. Ὥστε: *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυκλικῆς βάσεως, δηλ. Ε=π.α.λ+π.α^2.

169. *Ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου.* Ἂν καλέσωμεν λ τὴν πλευράν, Α τὴν ἀκτῖνα τῆς μεγάλης βάσεως καὶ α τὴν ἀκτῖνα τῆς μικρᾶς βάσεως τοῦ κολούρου κώνου, ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶναι $Ε=\frac{λ}{2}$ (2π.Α+2π.α)=λ.π.(Α+α).



Σχῆμα 184.

Τὴν εὕρεσιν τοῦ τύπου τούτου διδάσκει ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, προσθέτομεν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο κυκλικῶν βάσεων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

237. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου 1) ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,36μ. καὶ ἡ πλευρά του 3,4 μ, 2) ὅταν ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 1,82μ. καὶ ἡ πλευρὰ 2,68 μ.

238. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια κώνου εἶναι 3,927 μ^2. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια, ἂν ἡ πλευρά του εἶναι 0,3μ.;

239. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου, ὅταν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι 0,70686μ² καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ 1,5μ.

240. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κώνου εἶναι 3,927 μ.² Πόσον εἶναι ἡ πλευρά του, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 0,5μ.;

241. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς καὶ τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 0,2μ. καὶ 0,15μ. ἡ δὲ πλευρά του 0,5μ.

242. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας μιᾶς γλάστρας, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς μικρᾶς βάσεως εἶναι 0,12 μ., τῆς μεγάλης 0,2μ. καὶ ἡ πλευρά της εἶναι 0,25 μ.

243. Αἱ διάμετροι τῶν δύο βάσεων κολούρου κώνου εἶναι 0,5μ. καὶ 0,8μ., ἡ πλευρά του εἶναι 0,5μ. Πόσον εἶναι ἡ κυρτὴ καὶ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

170. Ὄγκος τοῦ κώνου. Ἂς λάβωμεν δύο δοχεῖα, τὸ ἕνα κῶνον καὶ τὸ ἄλλο κύλινδρον, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν τῶν βάσεων, δηλ. ἴσους κύκλους, καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἂν γεμίσωμεν μὲ ὕδωρ τὸν κύλινδρον, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι μὲ τὸ ὕδωρ τοῦ κυλίνδρου γεμίζει τρεῖς ἀκριβῶς φορὰς ὁ κῶνος. Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶναι τρεῖς φορὰς ὀλιγώτερος τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου καὶ νὰ τὸν διαιρέσωμεν διὰ 3. Ἀλλὰ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι $Ο = π.α^2.υ.$ Ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $Ο := \frac{1}{3} π.α^2.υ.$ Δηλ: *Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ τρίτον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυκλικῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

171. Ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου. Ἂν μεταχειρισθῶμεν τὰ αὐτὰ γράμματα διὰ τὰ στοιχεῖα τοῦ κολούρου κώνου, ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου εἶναι: $Ο = \frac{1}{3} π.υ.(Α^2 + α^2 + Αα).$

Τὴν εὕρεσιν τοῦ τύπου τούτου διδάσκει ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

244. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου,
1) ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,2μ. καὶ τὸ ὕψος 0,55 μ.
2) ὅταν ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 0,63831μ. καὶ τὸ ὕψος 0,25μ.

245. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,3μ. καὶ ἡ πλευρά του 0,5μ.; Πόσον εἶναι τὸ βάρος του ἂν εἶναι ἀπὸ μόλυβδον;

246. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι 0,35343μ³. Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,15 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του;

247. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι 1,41372μ³. Τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 1,5μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως;

248. Ὁ ἀρχηγὸς μιᾶς ὁμάδος προσκόπων θέλει νὰ στήσῃ μίαν κωνικὴν σκηνὴν ἐσωτερικοῦ ὄγκου 20μ³, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ ὕψος 2μ. Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως;

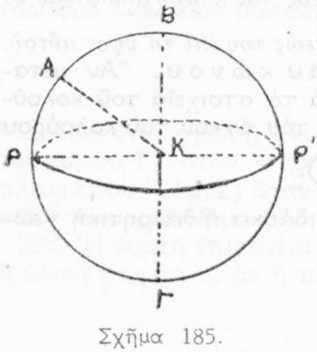
249. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 0,5μ. καὶ 1,2μ. τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 1,5 μέτρα.

250. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς καλαθίου σχήματος κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ βάθος εἶναι 0,4μ. καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών του 0,15μ. καὶ 0,2μ.

251. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος ἑνὸς κάδου σχήματος κολούρου κώνου τοῦ ὁποίου αἱ διάμετροι τῶν βάσεων εἶναι 0,5μ. καὶ 0,8μ. καὶ τὸ τὸ ὕψος εἶναι 1μ.;

Περὶ σφαίρας.

172. *Σφαῖρα λέγεται τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον περικλείεται ὑπὸ καμπύλης ἐπιφανείας τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ ἓν σημεῖον ἐντὸς τῆς σφαίρας.* Σφαῖρα εἶναι τὸ σχῆμα Κ. Τὸ σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας λέγεται κ έ ν τ ρ ο ν αὐτῆς. Ἡ ἀπόστασις ΚΑ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας καὶ ἑνὸς σημείου Α τῆς ἐπιφανείας της, λέγεται ἀ κ τ ὶ ς τῆς σφαίρας. Ἀκτῖνες εἶναι ἐπίσης καὶ αἱ ΚΡ, ΚΡ΄. Προφανῶς δὲ ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι



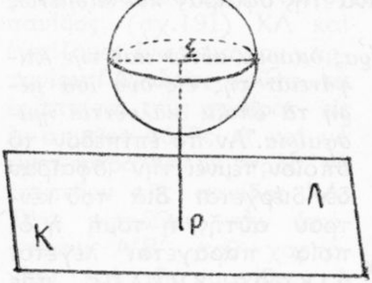
Σχῆμα 185.

μεταξύ των. Ἡ εὐθεῖα ΡΡ΄, ἡ ὁποία ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ρ τῆς ἐπιφανείας, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ τελειώνει εἰς τὸ σημεῖον Ρ΄ τῆς ἐπιφανείας, λέγεται διάμετρος. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ διάμετρος ἰσοῦται μὲ δύο ἀκτῖνας.

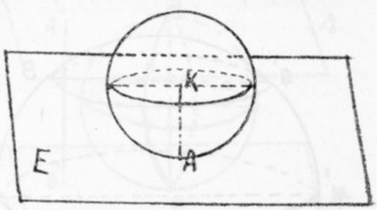
Καὶ ἑπομένως ὅλαι αἱ διάμετροι τῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Μία σφαῖρα Κ δύναται νὰ παραχθῇ ὑπὸ ἑνὸς ἡμικυκλίου ΡΒΡ΄, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΡΡ΄, ὁλόκληρον στροφήν.

173. Θέσις σφαίρας εἰς ἐπίπεδον. Ἕνα ἐπίπεδον ΚΛ ἠμπορεῖ: 1) Νὰ μὴ ἐγγίζῃ καθόλου τὴν σφαῖραν Σ, ὁπότε δὲν θὰ ἔχῃ κανὲν κοινὸν σημεῖον μὲ αὐτὴν



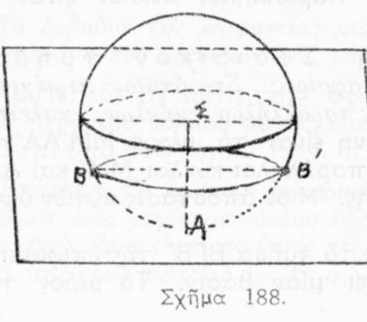
Σχῆμα 186.



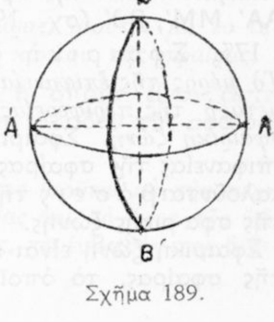
Σχῆμα 187.

(σχ.186). Τότε ἡ ἀπόστασις ΣΡ τοῦ κέτρου Σ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος.

2) Νὰ ἔχῃ ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν, ὁπότε τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας (σχ. 187). Τὸ ἐπίπεδον Ε εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α.



Σχῆμα 188.



Σχῆμα 189.

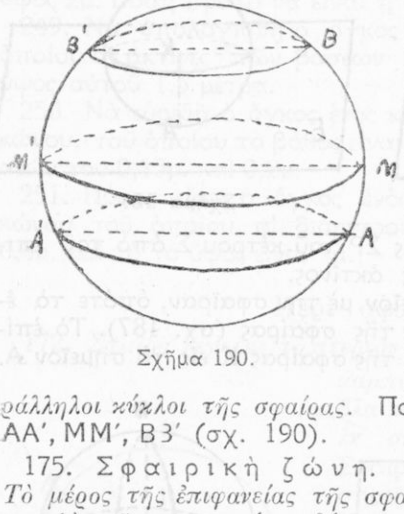
Τότε ἡ ἀπόστασις ΚΑ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας·
Καὶ 3) Ἠμπορεῖ τὸ ἐπίπεδον νὰ τέμνῃ τὴν σφαῖραν, ὅπως τὸ ἐπίπεδον ΜΝ τέμνει τὴν σφαῖραν Σ. (σχ. 188) Τότε ἡ ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας ΣΑ.

174. Διάφοροι κύκλοι τῆς σφαίρας. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας Σ καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εἶναι ὁ κύκλος Β′Β′. Ὥστε: *Πᾶσα τομὴ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδου εἶναι κύκλος.*

Ἂν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, τότε ἡ τομὴ ἡ ὁποία παράγεται λέγεται μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας. Μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας Σ εἶναι ὁ Α Α′, ὁ ΒΒ′ (σχ.189).

Ὅλοι οἱ μέγιστοι κύκλου τῆς σφαίρας ἔχουν κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας *καὶ ἑπομένως εἶναι ἴσοι μεταξύ των.*

Πᾶς μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας διαιρεῖ αὐτὴν καὶ τὴν ἐπιφάνειάν της εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ ὁποῖα καλοῦνται ἡμισφαίρια. Ἂν τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῆς, ἡ τομὴ ἡ ὁποία παράγεται λέγεται μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας. Οἱ κύκλοι ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ εἶναι μικροὶ κύκλοι τῆς σφαίρας Σ (σχ. 190).



Σχῆμα 190.

Οἱ κύκλοι οἱ ὁποῖοι παράγονται ἀπὸ τὴν τομὴν τῆς σφαίρας ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων λέγονται *παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας.* Παράλληλοι κύκλοι εἶναι οἱ ΑΑ′, ΜΜ′, Β3′ (σχ. 190).

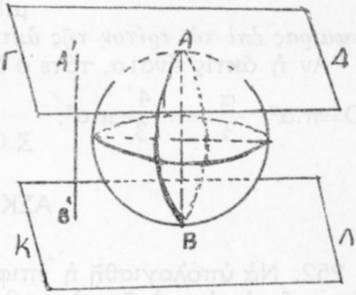
175. Σφαιρικὴ ζώνη. Σφαιρικὸν τμῆμα. *Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς περιφερείας δύο παραλλήλων κύκλων, καλεῖται σφαιρικὴ ζώνη.* Σφαιρικὴ ζώνη εἶναι τὸ μέρος ΜΜ′ΑΑ′τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Σ.Οἱ παράλληλοι κύκλοι ΜΜ′ καὶ ΑΑ′ καλοῦνται βάσεις τῆς ζώνης. Ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν ὕψος τῆς σφαιρικῆς ζώνης.

Σφαιρικὴ ζώνη εἶναι ἐπίσης τὸ τμῆμα ΒΓΒ′ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν βάσιν. Τὸ μέρος τῆς σ φ α ί ρ α ς τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων κύκλων της, δηλ. τὸ μέρος τῆς σφαίρας τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν σφαιρικὴν ζώνην, λέγεται σ φ α ι ρ ι κ ὸ ν τ μ ῆ μ α. Σφαιρικὸν τμῆμα εἶναι τὸ μέρος ΜΜ΄ΑΑ΄ τῆς σφαίρας Σ.

Οἱ παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας εἶναι πάλιν αἱ βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν, τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

Ἂν ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἔχῃ μίαν βάσιν, τότε ἔχομεν σφαιρικὸν τμῆμα μὲ μίαν βάσιν, ὅπως εἶναι τὸ τμῆμα ΒΓΒ΄.

176. *Εὕρεσις τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.* Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀκτῖνα μιᾶς σφαίρας, τοποθετοῦμεν αὐτὴν ἐπὶ μιᾶς ἐπιπέδου σανίδος (σχ.191) ΚΛ καὶ ἐγγίζομεν ἕνα τεμάχιον χαρτονίου ΓΔ, ὥστε τοῦτο νὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς ἓν σημεῖον αὐτῆς Α καὶ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῆς σανίδος ΚΛ. Τότε μετρῶμεν τὴν ἀπόστασιν Α΄Β΄ τοῦ χαρτονίου καὶ τῆς σανίδος, ἡ ὁποία προφανῶς ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἂν διαιρέσωμεν διὰ 2, εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.



Σχῆμα 191.

177. Ἐ π ι φ ά ν ε ι α σ φ α ί ρ α ς κ α ὶ σ φ α ι ρ ι κ ῆ ς ζ ώ ν η ς.

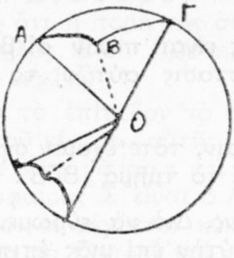
Ἡ θεωρητικὴ γεωμετρία διδάσκει ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.

Ὥστε, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι ἀκτὶς τοῦ μεγίστου κύκλου αὐτῆς, εἶναι α, τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $E=4.\ \pi.\alpha^2$.

Ἐπίσης: *Τὸ ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης ἰσοῦται μὲ τὴν περιφέρειαν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.* Δηλ. ἂν υ εἶναι τὸ ὕψος τῆς ζώνης, τὸ ἐμβαδόν της δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $E=2\pi.\alpha.\upsilon$.

178. Ὄγκος τῆς σφαίρας. Ἂς ἑνώσωμεν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας Ο (σχ. 192) μὲ τρία σημεῖα Α,Β,Γ τῆς ἐπιφανείας της, τὰ ὁποῖα κεῖνται πλησίον ἀλλήλων. Ὁ ὄγκος ΟΑΒΓ ἐλάχιστα θὰ διαφέρῃ τοῦ ὄγκου πυραμίδος καὶ θὰ ἰσοῦται ἐπομένως μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους, δηλαδὴ τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας.



Σχῆμα 192.

Ἂν ἀναλύσωμεν τὴν σφαῖραν εἰς ἀπείρους μικρὰς πυραμίδας, γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν βάσεων τῶν πυραμίδων, δηλ. *μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*

Ἂν ἡ ἀκτὶς εἶναι α, τότε ὁ ὄγκος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$O = \pi.\alpha^2.\frac{\alpha}{3} = \frac{4}{3}\pi.\alpha^3.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

252. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος σφαίρας 1) ὅταν ἡ ἀκτὶς αὐτῆς εἶναι 0,3μ. 2) ὅταν ἡ διάμετρος αὐτῆς εἶναι 0,4μ.

253. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 0,25 μ., ὅταν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶναι 0,35μ.

254. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς γῆς, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 6365 χιλιόμετρα περίπου.

255. Πόσην ἐπιφάνειαν καὶ πόσον βάρος ἔχει μία σφαῖρα ἀπὸ χαλκόν, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 0,05 μ.;

256. Πόσον ὕφασμα χρειαζόμεθα, ἵνα κατασκευάσωμεν σφαῖραν ἀεροστάτου μὲ ἀκτῖνα 5 μέτρ.;

257. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι 2,82744μ². Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος της;

258. Μία ὑαλίνη σφαίρα ἔχει διάμετρον 0,04 μέτρ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια καὶ τὸ βάρος της;

259. Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εἶναι 4,1888μ³. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

260. Μία σφαῖρα εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς κύβον πλευρᾶς 0,5μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐκτὸς τῆς σφαίρας μέρους τοῦ κύβου;

261. Μία σφαῖρα εὑρίσκεται ἐντὸς κυλίνδρου καὶ ἐφάπτεται ἄνω, κάτω καὶ εἰς τὰ πλάγια αὐτοῦ: Πόσος εἶναι ὁ ἐκτὸς τῆς σφαίρας ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ἂν τὸ ὕψος αὐτοῦ εἶναι 0,3μ.;

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ